

Interpretation von Oberflächenwellen in der Flachseismik

Diplomarbeit von
Thomas Forbriger

Sommer 1996

Hauptberichter: Prof. Dr. E. Wielandt
Mitberichter: Prof. Dr. H.-R. Trebin



typische Handbewegung eines Geophysikers

Inhaltsverzeichnis

1	Theoretische Grundlagen	12
1.1	Die lineare, elastische Wellengleichung	12
1.1.1	Kinematik	12
1.1.2	Dynamik	13
1.1.3	Materialeigenschaften	14
1.1.4	Die Wellengleichung	16
1.2	Vorbemerkungen zur Lösung der Wellengleichung	16
1.3	Lösung der homogenen Wellengleichung	17
1.3.1	Die elastischen Potentiale	17
1.3.2	Lösung der homogenen Wellengleichung und der Begriff der Slowness	18
1.3.3	Die homogenen Wellengleichungen in Zylinderkoordinaten	18
1.4	Die vertikale Einzelkraftpunktquelle	20
1.4.1	Methode der Greenschen Funktion	20
1.4.2	Potentiale der Punktkraft	21
1.4.3	Verschiebungen in Kugelkoordinaten	22
1.4.4	Elastische Potentiale in Zylinderkoordinaten	23
1.4.5	Verschiebungen in Zylinderkoordinaten	24
1.4.6	Diskussion der Verschiebungsterme	24
1.5	Der Schlag auf den Halbraum	26
1.5.1	Potentiale, Verschiebungen und Spannungen	26
1.5.2	homogene Randbedingungen und Oberflächenwellen	27
1.5.3	inhomogene Randbedingungen — der Schlag	28
1.5.4	Äquivalenz zur Lösung der inhomogenen Wellengleichung	29
1.5.5	Numerische Berechnung	33
1.6	Eigenschwingungen und Oberflächenwellen	34
1.6.1	Eine geeignete Zerlegung von \vec{u}	34
1.6.2	Eigenschwingungen eines geschichteten Mediums	35
1.6.3	Oberflächenwellen	36
1.6.4	Verbindung zu den vorangegangenen Kapiteln	36
1.6.5	Dispersion	37
2	Numerische Methoden	39
2.1	Modelle aus Laufzeitkurven	39
2.1.1	Das Brechungsgesetz für seismische Wellen	39
2.1.2	Reflektierte Wellen	41
2.1.3	Refraktierte Wellen	41
2.2	Dispersionsanalyse	43
2.2.1	Das Verfahren	43
2.2.2	Grenzen der Auflösung	43
2.2.3	Ein Beispiel	45
2.3	Die Reflektivitätsmethode	46
2.3.1	Funktionsweise	46
2.3.2	Oberflächenwellen	48

2.3.3	Einführung einer Dämpfung	48
2.3.4	Einzelkraftterme	50
2.3.5	Zur Berechnung von Seismogrammen eingesetzte Programme	50
2.3.6	Vergleiche	51
2.3.7	Stärken und Schwächen der Methode	59
2.4	Berechnung von Moden des geschichteten Halbraumes	60
2.4.1	Das Prinzip	60
2.4.2	Ein Beispiel	61
3	Meßtechnik	63
3.1	Aufbau	63
3.2	Die Signalquellen	64
3.2.1	Umgang mit dem Fallgewicht	64
3.2.2	Umgang mit dem Vorschlaghammer	65
3.2.3	Abschätzung der anregenden Kraft	65
3.3	Die Geophone	66
3.4	Der Datenrekorder	68
4	Experimente, Auswertung der Daten und Diskussion	71
4.1	Modellseismik	72
4.1.1	Experimente	72
4.1.2	Phasengeschwindigkeiten und Laufzeitkurven	72
4.1.3	Dispersionsanalyse	75
4.1.4	Modellierung	77
4.2	Frauenkopf, Stuttgart	78
4.2.1	Experimente	78
4.2.2	Auswertung der Laufzeitkurven	78
4.2.3	Dispersionsanalyse	81
4.3	Grabenstetten	81
4.3.1	Experimente	81
4.3.2	Auswertung der Seismogramme	84
4.4	Riedheim im Hegau	85
4.4.1	Experimente	85
4.4.2	Laufzeitkurven	85
4.4.3	Rammsondierung	85
4.4.4	Geoelektrik	88
4.4.5	Oberflächenwellen	89
4.5	Wolfschlugen auf den Fildern	89
4.5.1	Experimente	89
4.5.2	Einleitende Gedanken zur Auswertung	92
4.5.3	Laufzeitkurven	92
4.5.4	Dispersionsanalyse	92
4.5.5	Kurvenverlauf und Amplituden	101
4.5.6	Die Horizontalkomponenten	107
4.5.7	Das Quellsignal	111
4.5.8	Modellierung	111
4.6	Fazit — noch eine Wegweisung	119
4.6.1	Numerische Inversion	119
4.6.2	Ergänzende Untersuchungen	121
4.6.3	Meßtechnik	121

A	mathematischer Anhang	123
A.1	In der Arbeit verwendete Symbole	123
A.2	zur Physik	124
A.2.1	Lagrange- und Euler-Koordinaten	124
A.2.2	Verzerrungsmaß und Verzerrungstensor	125
A.2.3	Transporttheoreme	125
A.2.4	Symmetrie des Spannungstensors	126
A.2.5	ebene Wellen	127
A.3	zur Mathematik	127
A.3.1	Besselsche Differentialgleichung und Zylinderfunktionen	127
A.3.2	Fouriertransformation	130
A.3.3	Integraltransformation mit Besselfunktion	130
A.3.4	Definitionen von δ -Funktionen	130
A.3.5	Integralsätze	131
A.3.6	Das Kronecker-Symbol	132
A.3.7	Der total antisymmetrische Epsilon-Tensor	132
A.3.8	Produkte von Differentialoperatoren	132
A.3.9	Definition von Zylinderkoordinaten	132
B	weitere Anhänge	134
B.1	Im Rahmen der Diplomarbeit eingesetzte Programme	134
B.1.1	Programme zur Datenanalyse	134
B.1.2	Programme zur Berechnung synthetischer Daten	134
B.1.3	Plotprogramme	135
B.1.4	Werkzeuge	135
B.1.5	Bibliotheken	135
B.2	Begriffserklärungen und andere Erläuterungen	135
B.2.1	Begriffe	135
B.2.2	weitere Erläuterungen	136
B.3	Literaturverzeichnis	137

Verzeichnis der Abbildungen

1	Seismogrammprofil über eine geologische Störung	9
1.1	Die vertikale Einzelkraft und ihre Verschiebungen in Kugelkoordinaten und Zylinderkoordinaten	22
1.2	Vollraumverschiebung der $\delta(t)$ -Einzelkraft in Kugelkoordinaten (qualitativ)	24
1.3	Vollraumverschiebung der $\delta(t)$ -Einzelkraft in Zylinderkoordinaten (qualitativ)	26
1.4	Kurven für die Bodenverschiebung aus der Originalarbeit von Lamb [lam 04]	30
1.5	Potentiale für die Reflexion an der freien Oberfläche	30
2.1	synthetische Seismogramme als Beispiel für die Auswertung von Laufzeitkurven	40
2.2	reflektierter Strahl in einem geschichteten Medium	40
2.3	kritisch refraktierter Strahl in einem geschichteten Medium	42
2.4	Dispersionsanalyse eines Profils aus der Modellseismik (Slowness-Darstellung)	44
2.5	Dispersionsanalyse eines Profils aus der Modellseismik	45
2.6	Zur Reflexion und Transmission an einer Schichtgrenze	46
2.7	Schichtmatrizen der Reflektivitätsmethode	48
2.8	Vergleich „Einzelkraft im Vollraum“	51
2.9	Vergleich „Schlag auf den Halbraum“	53
2.10	Vergleich „Schlag auf den Halbraum“	54
2.11	Vergleich „realistische Erde“	57
2.12	Vergleich „realistische Erde“	58
2.13	Dispersionsanalyse synthetischer Seismogramme „Schicht über Halbraum“	62
2.14	Vorzeichenmuster der Rayleighdeterminante „Schicht über Halbraum“	62
3.1	Die beiden Signalquellen	64
3.2	Konstruktion und Einsatz der Geophone	68
3.3	Der Datenrekorder BISON 9024	69
4.1	Laufzeitkurven für die Modellseismik-Profile	73
4.2	Dispersionsanalyse Modellseismik Profil 1	74
4.3	Dispersionsanalyse Modellseismik Profil 2	75
4.4	Seismogramme eines angepaßten Modells (reale Daten sind gestrichelt dargestellt)	76
4.5	Ausschnitt aus dem Anpassungsvergleich und Seismogramme für das ganze Profil 2 (reale Daten sind gestrichelt dargestellt)	77
4.6	Frauenkopf, Stuttgart (Ausschnitt aus der Topographischen Karte 1:25.000 Blatt 7221; Wiedergabe nicht maßstäblich)	79
4.7	Auswertung von Laufzeitkurven der refraktionsseismischen Messungen am Frauenkopf	79
4.8	Laufzeitkurven für den Gegenschuß am Frauenkopf	80
4.9	Dispersionsanalyse der Seismogramme vom Frauenkopf	80
4.10	Basaltgang bei Grabenstetten (Skizze von E. Wielandt und Ausschnitt aus der Topographischen Karte 1:50.000 Blatt L7522; Wiedergabe nicht maßstäblich)	82
4.11	Seismogramm-Montage des Profils bei Grabenstetten	82
4.12	Laufzeitkurven für drei verschiedene Gegenschüsse und einen Hinschuß in Grabenstetten	83
4.13	Interpretationsvorschlag für die Laufzeitkurven am Basaltgang Grabenstetten	83

4.14 Riedheim im Hegau (Ausschnitt aus der Topographischen Karte 1:50.000 Blatt L8318; Wiedergabe nicht maßstäblich)	86
4.15 Laufzeitkurve der Daten aus Riedheim	86
4.16 Seismogramm-Montagen der Messungen in Riedheim	87
4.17 Dispersionsanalyse des langen Profils bei Riedheim	88
4.18 Waldstück Horb bei Wolfschlügen auf den Fildern (Ausschnitt aus der Topographischen Karte 1:25.000 Blatt 7321; Wiedergabe nicht maßstäblich)	90
4.19 Die beiden unter der Quelle vergrabenen Geophone und ein Ausschnitt aus der Geologischen Karte von Stuttgart und Umgebung 1:50.000 von 1959 (Wiedergabe nicht maßstäblich)	91
4.20 Seismogramm-Montagen der Voruntersuchungen bei Wolfschlügen	93
4.21 Laufzeitkurve für die Seismogramme aus Wolfschlügen	94
4.22 Seismogramm-Montage für alle Hinschüsse (gestapelt) mit dem Fallgewicht auf dem langen Profil in Wolfschlügen	94
4.23 Dispersionsanalyse für die Seismogramme aus Abbildung 4.22	95
4.24 Dispersionsanalyse des kürzesten Profils bei Wolfschlügen	95
4.25 Dispersionsmuster für ein aus Laufzeitkurven bestimmtes Modell	97
4.26 Ausschnitt aus Abbildung 4.25	97
4.27 Modenäste eines fiktiven Modells	99
4.28 Ausschnitt aus Abbildung 4.27	99
4.29 Dispersionsstruktur aus Vertikalkomponenten synthetischer Seismogramme	100
4.30 Dispersionsstruktur aus Radialkomponenten synthetischer Seismogramme	100
4.31 Vergleich von Hammer und Fallgewicht für einen Schußpunkt neben dem Weg	102
4.32 Vergleich von Hammer und Fallgewicht für einen Schußpunkt auf dem Weg	102
4.33 Vergleich zwischen Schuß neben dem Weg und Schuß auf dem Weg	103
4.34 Bodenverschiebung in 15m Distanz; Schüsse neben dem Weg	104
4.35 Bodenverschiebung in 15m Distanz; Schüsse auf dem Weg	105
4.36 Partikelgeschwindigkeit in 15m Distanz; Schüsse neben dem Weg	105
4.37 Partikelgeschwindigkeit in 15m Distanz; Schüsse auf dem Weg	106
4.38 Ersteinsätze ab 50m des langen Profils; Schuß mit dem Fallgewicht auf dem Weg	106
4.39 Radial- und Vertikalkomponente in kleinen Distanzen	107
4.40 Radial- und Vertikalkomponente in größeren Distanzen	108
4.41 Radial- und Transversalkomponente	108
4.42 Verschiebungssignal der Quellgeophone	109
4.43 Geschwindigkeitssignal der Quellgeophone	110
4.44 Veränderung des Verschiebungssignales der Quellgeophone über eine Schuß-Serie	110
4.45 Verlauf der seismischen Parameter des Modells <i>nebenweg</i>	113
4.46 Seismogramme für des Modell <i>nebenweg</i>	113
4.47 Verlauf der seismischen Parameter des Modells <i>nwstep</i>	114
4.48 Seismogramme für des Modell <i>nwstep</i>	115
4.49 Dispersionsanalyse der Seismogramme des Modells <i>nebenweg</i>	115
4.50 Theoretische Dispersionskurven für das Modell <i>nebenweg</i>	116
4.51 Verlauf der seismischen Parameter des Modells <i>wegmodell</i>	117
4.52 Seismogramme für des Modell <i>wegmodell</i>	118
A.1 Besselfunktionen 1. Gattung 0. und 1. Ordnung	128
A.2 Besselfunktion 1. Gattung 0. Ordnung und ihre Fernfeldnäherung	128
A.3 Besselfunktion 1. Gattung 1. Ordnung und ihre Fernfeldnäherung	129
A.4 Die Definition der Zylinderkoordinaten bezüglich der freien Oberfläche des Halbraumes . .	133

Verzeichnis der Tafeln

1.1	Verschiebungsfunktion für den Schlag auf den Halbraum in Lambs Notation	31
2.1	Geschwindigkeitsmodell der synthetischen Daten als Beispiel für die Auswertung von Laufzeitkurven	39
2.2	Die Reflektivitätsmethode für eine vertikale, harmonische Einzelkraft	49
2.3	Parameter zu den Vergleichsrechnungen „Kraft im Vollraum“	52
2.4	Parameter zu den Vergleichsrechnungen „Schlag auf den Halbraum“	55
2.5	Parameter zu den Vergleichsrechnungen „realistische Erde“	56
2.6	Parameter zu den Moden-Berechnungen für eine Schicht über einem Halbraum	61
3.1	Spezifikationen der Geophone	67
3.2	Berechnung der Partikelgeschwindigkeit	69
4.1	seismische Parameter ausgewählter Materialien	71
4.2	Parameter der Berechnung der synthetischen Seismogramme für das Profil 2 der Modellseismik	76
4.3	Ein fiktives Modell zur Diskussion von Modenästen	98
4.4	Parameter des Modells <i>nebenweg</i>	112
4.5	Parameter des Modells <i>nwstep</i>	114
4.6	Parameter des Modells <i>wegmodell</i>	117

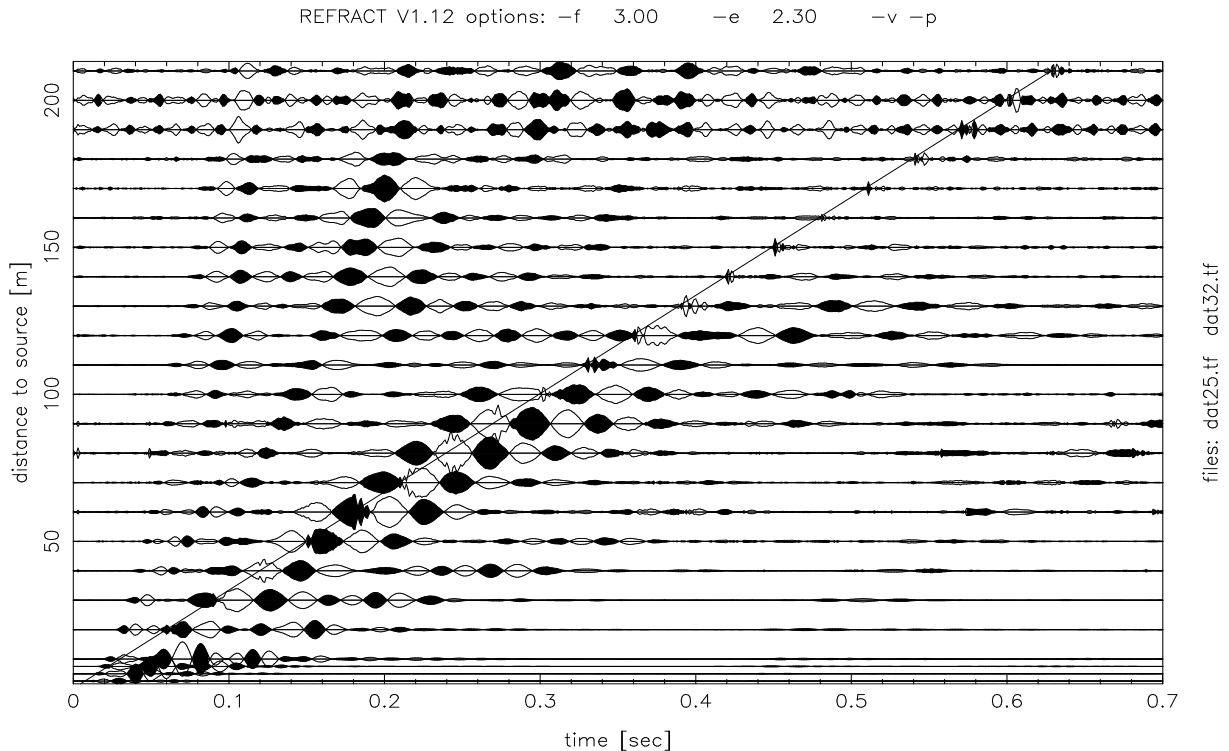


Abbildung 1: Seismogrammprofil über eine geologische Störung

„One man’s noise is the other man’s signal.“
[Graham Stuart, 1995]

Einige Worte vorab — Eine Wegweisung

Die Sondierung und Kartierung oberflächennaher Bereiche des Erdreichs mit den Methoden der Angewandten Geophysik hat in den vergangenen Jahren zunehmend an Bedeutung gewonnen. Immer häufiger werden geophysikalische Methoden eingesetzt, um Altlasten oder unterirdische Altbauten aufzuspüren, deren genaue Lage unbekannt ist und deren Existenz die Grundwasserqualität oder den Erfolg von Bauvorhaben in Frage stellt.

Je nach Aufgabenstellung bieten sich verschiedene Verfahren der Angewandten Geophysik an. Ein Entscheidungskriterium für die Auswahl einer Methode ist immer die physikalische Größe, die gemessen wird. So setzen zum Beispiel magnetische Verfahren das Vorhandensein magnetischer oder magnetisierbarer Körper in den aufzuspürenden Objekten voraus. Seismische Verfahren (bei der Untersuchung oberflächennaher Bereiche als „Flachseismik“ bezeichnet — siehe auch Abschnitt B.2.1 auf Seite 135) verlangen einen Kontrast der elastischen Moduln zwischen gesuchtem Objekt und Umgebung, was gerade im Falle von Altlasten gegeben ist. Außerdem zeichnen sie sich durch ein hohes räumliches Auflösungsvermögen aus.

Die klassischen Methoden „Refraktionsseismik“ und „Reflexionsseismik“ sind jedoch eher als Sondierungsmethoden (Ermittlung einer Tiefenschichtung) statt als Kartierungsmethoden (Auffinden von lokalen Anomalien) konzipiert. Erschwerend kommt hinzu, daß eine Deponiealtlast meistens eine Anomalie niedriger seismischer Geschwindigkeiten darstellt. Hier versagt die Refraktionsseismik prinzipiell. Doch auch in anderen Fällen können Einsätze der refraktierten Wellen aufgrund ihrer sehr kleinen Amplituden leicht in der gewöhnlichen Bodenunruhe untergehen.

Die oberflächennahe Lage der gesuchten Störungen läßt jedoch den Einsatz neuer Methoden zu. Für die Seismik kann das die Untersuchung von Oberflächenwellen sein. Wellen, die sich horizontal entlang der Oberfläche des Erdreichs ausbreiten, müßten an den gesuchten Störungen gebrochen, gestreut oder reflektiert werden. Eine flächenhafte Auslage von Geophonen müßte es ermöglichen, die Ausbreitungsrich-

tung der Wellen zu untersuchen und somit das gesuchte Objekt zu lokalisieren. Oberflächenwellen wurden bisher kaum genutzt, da ihre Ausbreitung nicht mit der Strahlentheorie erklärbar ist. Es handelt sich vielmehr um dispergierte Wellenzüge, die zur Interpretation einer Modellierung (siehe auch Abschnitt B.2.1 auf Seite 135 zum Begriff „Modellierung“) bedürfen. Sie wurden daher meistens als Störsignale betrachtet. Da die Oberflächenwellen mit beträchtlichen Amplituden auftreten und die ohnehin schwachen Reflexionssignale völlig unkenntlich machen, wird in der Regel viel Aufwand betrieben, um diese zu unterdrücken (ein Beispiel bietet die Arbeit von Knust [knu 95]). Eine Auswertung der Oberflächenwellen würde sich deren starke Amplituden und das damit verbundene gute Signal/Stör-Verhältnis zunutze machen. Im Gegensatz zu den longitudinalen Raumwellen, die in der Refraktionsseismik ausgewertet werden, werden die Oberflächenwellen auch besonders durch den Schermodul des Mediums beeinflusst.

Erfahrungen mit der Untersuchung von Oberflächenwellen wurden in den letzten Jahren im Zusammenhang mit verschiedenen Arbeiten der globalen Seismologie am Institut für Geophysik der Universität Stuttgart gesammelt. Die Verhältnisse in der globalen Seismologie sind jedoch nicht direkt auf die Flachseismik übertragbar. Einige wesentliche Unterschiede seien hier aufgezählt:

- Die Flachseismik hat viel stärkere Kontraste in den seismischen Parametern Phasengeschwindigkeit und Dichte und stärkere Dämpfung im Ausbreitungsmedium zu berücksichtigen als die globale Seismologie.
- Der Flachseismik fehlt in der Regel ein Startmodell des untersuchten Mediums. Das erschwert die Modellierung kolossal.
- Der globalen Seismologie fehlt meistens eine genaue Kenntnis des Quellvorgangs, der die seismischen Wellen angeregt hat. Die Möglichkeit selbst seismische Signale anzuregen, kann in der Flachseismik gezielt eingesetzt werden (zum Beispiel bei der Stapelung von Seismogrammen), auch wenn die genaue Form des Quellimpulses nicht bekannt ist.
- Die Messungen der Flachseismik erfolgen in unmittelbarer Nähe zur Quelle. Dies ist allein aufgrund der starken Wellendämpfung notwendig. Abgesehen davon erfordern Methoden wie die Refraktionsseismik Messungen in kleinen Distanzen zur Quelle. Damit versagen Näherungen mit ebenen Wellen und es muß ebenso das Nahfeldverhalten der Wellenausbreitung berücksichtigt werden.
- In Seismogrammen von global registrierten Beben treten ab einer geeigneten Epizentralentfernung die einzelnen Wellentypen aufgrund ihrer unterschiedlichen Ausbreitungsgeschwindigkeiten zeitlich getrennt auf. In den Seismogrammen der Flachseismik beobachtet man einen komplexen Wellenzug, dessen einzelne Wellentypen nicht sinnvoll trennbar sind.

Abbildung 1 zeigt die Seismogramm-Montage einer Messung aus der Gegend von Mulfingen/Jagst (Hohenlohe-Kreis). Sie wurde von W. Biermann [bie 94] im Rahmen seiner Diplomarbeit durchgeführt. Er kartierte in dieser Gegend eine geologische Störungszone unter Verwendung von Gleichstrom-Geoelektrik. Ergänzend nahm er einige seismische Profile quer zu den vermuteten Störungen auf. Auf der Abszisse ist die Zeit des Signalverlaufs aufgetragen. Den Zeitnullpunkt bestimmt der Zeitpunkt des Quellimpulses. Auf der Ordinate sind die Epizentralentfernungen aufgetragen an denen Geophone das seismische Signal aufgezeichnet haben. Der Kurvenverlauf gibt die Partikelgeschwindigkeit¹ wieder. Alle Spuren sind entfernungsabhängig skaliert², so daß die Wellendämpfung durch den Vergrößerungsfaktor ausgeglichen wird. Die gerade Linie markiert die Ausbreitung des Luftschalls. Im Bereich der Epizentraldistanz 110m ist eine deutliche Veränderung im Erscheinungsbild der amplitudenstarken Oberflächenwellen zu erkennen. Laut Biermanns Kartierung war in diesem Bereich die geologische Störung angesiedelt.

Dies weist bereits darauf hin, daß sich auch in den Messungen mit klassischen Profil-Auslagen eine laterale Strukturänderung abzeichnen kann. Solche Messungen von Oberflächenwellen wurden bereits von Schneider [schn 93] behandelt. Er beschritt den Weg einer Dispersionsanalyse und anschließender Dekonvolution der Seismogramme nach der Dispersion der Fundamentalmode. Versuche das Wellenfeld zu modellieren scheiterten an numerischen Schwierigkeiten, die sich beim Einsatz einer Finite-Differenzen-Methode mit festem Gitterabstand durch den großen Variationsbereich der elastischen Parameter ergeben³.

¹zum Begriff „Partikelgeschwindigkeit“ siehe auch Abschnitt B.2.1 auf Seite 135

²zur Skalierung der Seismogramm-Montagen in der vorliegenden Arbeit siehe auch Abschnitt B.2.2 auf Seite 136

³nach einem mündlichen Tagungsbericht von E. Wielandt

Die Tiefe einer Störung wird in der Praxis immer noch empirisch aus der Wellenlänge der gestreuten Oberflächenwellen abgeschätzt.

In Abbildung 2.4 auf Seite 44 ist ein Profil einer modellseismischen Messung von F. Ruff [ruf 93] abgebildet; auch dort sind distanzabhängige Veränderungen im Signalbild der Oberflächenwellen zu erkennen. Da sich im untersuchten Medium definitiv keine lateralen Inhomogenitäten befanden, muß es sich um gewöhnliche Interferenzeffekte handeln.

In der vorliegenden Arbeit wird angestrebt, die Seismogramme aus der Flachseismik durch eine Modellierung zu interpretieren. Zu lösen ist dabei nicht nur die Berechnung synthetischer Seismogramme, sondern auch die Frage, welche direkt aus den Daten ableitbaren Informationen stichhaltig zu einem Startmodell für die Modellierung führen können. Die synthetischen Seismogramme hängen nicht nur nichtlinear von den Parametern des vorgegebenen Ausbreitungsmediums ab, sondern auch von Hilfsparametern der numerischen Methoden und von der Anregungsfunktion.

Kapitel 1

Theoretische Grundlagen

1.1 Die lineare, elastische Wellengleichung

Die formale Beschreibung physikalischer Grundzusammenhänge in voller Allgemeinheit ist meist wenig geeignet, konkrete Aussagen über ein System abzuleiten. Eine entscheidende Aufgabe des Physikers besteht darin, die wesentlichen Einflußgrößen auf ein physikalisches System von den unwesentlichen zu trennen und dadurch zu einer konkreten Formulierung zu gelangen, die einen Vergleich mit Experimenten zuläßt. Auf dem Weg von den elementaren Formulierungen der Kontinuumstheorie zur linearen, elastischen Wellengleichung (1.3) werden bereits eine ganze Anzahl von Voraussetzungen für die Gültigkeit der Theorie angenommen.

Um die lineare, elastische Wellengleichung als Grundlage der weiteren Untersuchungen dieser Arbeit auf eine solide Basis zu stellen und um zu verdeutlichen, wie konfliktreich die verlangten Voraussetzungen bei der Anwendung der Theorie sein können, soll hier ein kurzer Überblick über die Herleitung der Wellengleichung in kartesischen Koordinaten gegeben werden. Außerdem soll dieser Abschnitt die Verbindung herstellen zwischen der Theoretischen Seismologie und der Kontinuumsmechanik, wie sie im Studium der Physik gelehrt wird und welche meistens die Elastodynamik mit der linearen, elastischen Wellengleichung abschließt.

1.1.1 Kinematik

Zur Beschreibung der Konfiguration eines kontinuierlichen Mediums werden zwei Koordinatensysteme definiert:

$\vec{\xi}$ Die Lagrange-Koordinaten (materielle Koordinaten) bezeichnen mit jedem Punkt genau ein Materie-Element.

$\vec{x}(\vec{\xi}, t)$ Die Euler-Koordinaten (räumliche Koordinaten) bezeichnen den Raumpunkt, an dem sich das durch $\vec{\xi}$ markierte Materie-Element zur Zeit t befindet.

In der Regel geht man von einer Bezugsanordnung $\vec{x}(\vec{\xi}, t = t_{ref}) = \vec{\xi}$ aus. Damit beschreibt der Vektor $\vec{u} = \vec{x} - \vec{\xi}$ die Verschiebung eines Materie-Elements aus seiner ursprünglichen Lage zur Zeit t_{ref} . Die Jacobi-Matrix, welche zwischen den beiden Koordinatensystemen vermittelt, wird mit F_{ij} bezeichnet (mit $dx_i = F_{ij}(\vec{\xi})d\xi_j$). Unstetigkeiten in der Abbildung von Lagrange-Koordinaten auf Euler-Koordinaten sollen ausgeschlossen werden. Damit muß die Jacobi-Matrix als Tensorgradient darstellbar sein (vergleiche Abschnitt A.2.1 auf Seite 124): $F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}$. Das ist gleichbedeutend mit $\oint d\vec{u} = 0$. Damit wird das Quellgebiet eines Erdbebens, das durch einen Scherbruch zu beschreiben ist, von der Behandlung ausgeschlossen¹:

Annahme 1 (Geometrisches Grundgesetz) *Das betrachtete Gebiet sei einfach zusammenhängend. Das Medium darf also keine Versetzungen oder Lücken aufweisen.*

¹Später werden Erdbebenquellen über ein Double-Couple als äquivalente Volumenkraftquelle wieder in die Theorie eingeführt.

Die physikalischen Spannungen im Medium hängen von der Verzerrung ab. Wie in Abschnitt A.2.2 auf Seite 125 beschrieben, gewinnt man über die Definition eines Verzerrungsmaßes zwei Darstellungen für einen Verzerrungstensor²:

$$\varepsilon_{ij}^G = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \xi_i} \right) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial \xi_i} \frac{\partial u_k}{\partial \xi_j} \quad \text{oder} \quad \varepsilon_{ij}^{EAH} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}$$

Für verschwindend kleine Verschiebungsgradienten wird der quadratische Term vernachlässigbar und man erhält ein linearisiertes Verzerrungsmaß. Damit entfällt formal auch die Unterscheidung, nach welchen Koordinaten die Gradienten gebildet werden. Bei den durchgeführten Experimenten³ wurden in Quellnähe Verschiebungen in der Größenordnung von Zehntel Millimetern gemessen. Bei einer Wellenlänge von einigen Metern sind damit die quadratischen Terme im Verzerrungsmaß etwa um den Faktor 10^{-4} kleiner als die linearen. Trotzdem sollte nicht vergessen werden, daß aufbauend auf diese Theorie endliche Verzerrungen berechnet werden.

Vereinfachung 1 (linearisiertes Verzerrungsmaß) Die Verschiebungsgradienten werden als verschwindend klein angenommen.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Häufig wird auch ein anderer Weg beschritten. Ausgehend von einem Verschiebungsfeld $\vec{u}(\vec{x}) = \vec{x}(\vec{\xi}) - \vec{\xi}$ entwickelt man dieses zunächst um einen Punkt \vec{x}_0 :

$$\vec{u}(\vec{x}) = \vec{u}(\vec{x}_0) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} \Big|_{\vec{x}=\vec{x}_0} (x_i - x_{0i}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{\vec{x}=\vec{x}_0} (x_i - x_{0i})(x_j - x_{0j}) + \dots$$

Der erste Entwicklungsterm beschreibt eine gleichmäßige Translation, die durch geeignete Wahl der Referenzkoordinaten gleich 0 gesetzt werden kann. Mit dem Argument der kleinen Verschiebungsgradienten werden die Terme der Ordnungen zwei und höher vernachlässigt. Was bleibt, ist der Term 1. Ordnung:

$$u_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} x_j \quad \text{und daraus} \quad D_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

D_{ij} ist der sogenannte „Distorsionstensor“. Mit der Begründung, daß im linearen Fall der antisymmetrische Anteil von D_{ij} reine Drehungen beschreibt und nur durch den symmetrischen Anteil Verzerrungen beschrieben werden, die auch mit Spannungen im Medium verknüpft sind, wird dann der symmetrische Anteil als Verzerrungstensor gewählt. So gelangt man zur gleichen Definition von ε_{ij} wie oben.

1.1.2 Dynamik

Die physikalischen Grundgesetze werden über Bilanzgleichungen für die Erhaltungsgrößen Masse, Impuls und Drehimpuls in die Theorie eingebracht. Aus der Massebilanz folgt unter Berücksichtigung der Transporttheoreme die Kontinuitätsgleichung, welche bedeutet, daß eine Masseänderung in einem Volumenelement nur durch Abwandern oder Zuwandern von Materie durch die Oberfläche des Volumenelementes möglich ist (vergleiche Abschnitt A.2.3 auf Seite 125)⁴:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho \, dV = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \vec{v}) = 0$$

Die Bilanzgleichung $\frac{d}{dt} \vec{I} = \vec{F}$ für den Impuls \vec{I} eines Materieelementes wird wie folgt geschrieben:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{v} \, dV = \int_V \vec{f}_V \, dV + \int_{\partial V} \vec{f}_A \, dS \quad \text{mit} \quad \vec{v}(\vec{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \vec{x}(\vec{\xi}, t) = \frac{d}{dt} \vec{u}(\vec{x}, t)$$

²G steht für „Greenscher Verzerrungstensor“; EAH steht für „Euler, Almansi, Hamel“

³Siehe dazu Abschnitt 4.5.5 auf Seite 104.

⁴Alle Größen und Differentialoperatoren beziehen sich im folgenden auf Euler-Koordinaten

Die einwirkenden Kräfte \vec{F} werden dabei in die Volumenkraftdichte \vec{f}_V von Fernfeldkräften (z.B. Gravitationskraft) und die Flächenkraftdichte \vec{f}_A von direkt an der Oberfläche des Volumenelements V wirkenden Kräften (z.B. Spannungen von Teilchen zu Teilchen) zerlegt. Wird von einer Entwicklung von f_A nach Kraftmomenten nur der Term erster Ordnung berücksichtigt, so gelangt man zu einem linearen Zusammenhang zwischen den Spannungskräften und den Oberflächenelementen auf die sie wirken: $df_i = \sigma_{ij} dn_j$. Dabei bezeichnet dn_j das Differential des Flächennormalenvektors. Polare Eigenschaften des Mediums (wie etwa mit Spins verknüpfte magnetische Momente — cosseratsche Medien) werden dadurch von der Beschreibung ausgeschlossen. Wird der Zusammenhang in Eulerschen Koordinaten hergestellt, so bezeichnet man σ_{ij} als „Greenschen Spannungstensor“.

Annahme 2 (Hypothese der Nahewirkung) *Die Spannungskräfte sollen eine verschwindend kleine Reichweite haben und daher linear von der Größe des Flächenelements abhängen, auf das sie wirken.*

Mit dieser weiteren Annahme läßt sich das Oberflächenintegral über die Spannungen mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes (A.39) in ein Volumenintegral umwandeln. Für die Gleichheit der Integrale, die ja für ein beliebiges Volumen gelten muß, ist die Gleichheit der Integranden zu verlangen. Wie für die Massebilanz gelangt man von einer integralen zu einer lokalen Beschreibung:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{v}(\vec{x}, t) dV &= \int_V \left(\vec{f}_V(\vec{x}, t) + \text{Div} \underline{\underline{\sigma}}(\vec{x}, t) \right) dV \\ \rho \frac{d}{dt} \vec{v}(\vec{x}, t) &= \text{Div} \underline{\underline{\sigma}}(\vec{x}, t) + \vec{f}_V(\vec{x}, t) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Der Trägheitsterm auf der linken Seite läßt sich bis hier mit den Transporttheoremen (A.7) exakt ableiten. Die totale Ableitung enthält allerdings noch einen nichtlinearen Konvektionsterm:

$$\frac{d}{dt} \vec{v}(\vec{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \vec{v} + (\vec{v} \text{ grad}) \vec{v}$$

Der Konvektionsterm wird im folgenden vernachlässigt und für die totale Ableitung von \vec{v} die zweifache partielle Ableitung von \vec{u} geschrieben:

$$\frac{d}{dt} \vec{v}(\vec{x}, t) \approx \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{u}(\vec{x}, t)$$

Vereinfachung 2 (linearisierter Trägheitsterm) *Das Produkt der Geschwindigkeit mit ihrer räumlichen Ableitung soll gegen die lokale Beschleunigung verschwindend sein.*

Bei den bereits oben zitierten Experimenten⁵ lagen die Partikelgeschwindigkeiten in Quellnähe in der Größenordnung von $0.1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Bei einer Wellenlänge in der Größenordnung von wenigen Metern und einer dominierenden Frequenz von ca. 30Hz ist die lokale Beschleunigung etwa um den Faktor 300 größer als der Konvektionsterm.

Als dritte Bilanzgleichung führt die Forderung der Drehimpulserhaltung, wie in Abschnitt A.2.4 auf Seite 126 beschrieben, zu dem Schluß, daß der Spannungstensor symmetrisch sein muß:

$$\frac{d}{dt} \int_V \vec{x} \times \rho \vec{v} dV = \int_V \vec{x} \times \vec{f}_V dV + \int_{\partial V} \vec{x} \times \vec{f}_A dS = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

Somit sind Spannungstensor und Verzerrungstensor symmetrisch:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \text{und} \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$$

1.1.3 Materialeigenschaften

Zur Ableitung der Bewegungsgleichung müssen Spannungstensor und Verzerrungstensor über ein Materialgesetz verknüpft werden. Die allgemeinste Form eines Materialgesetzes beschreibt eine beliebige

⁵Siehe dazu Abschnitt 4.5.5 auf Seite 104.

Abhängigkeit der Spannungen von den Verzerrungen, ihren zeitlichen Ableitungen, den Raumkoordinaten, der Zeit und anderen physikalischen Größen:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{x}}, t, \underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}, \underline{\underline{\varepsilon}}^2, \dots)$$

Der abzuleitenden Wellengleichung liegt das Materialgesetz eines rein linear elastischen Materials in folgender Form zugrunde:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

Materialgesetze, die Reibung einschließen würden, also ein ein visko-elastisches Medium beschreiben könnten, sollten dagegen eine der folgenden Formen haben:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} + D_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} \quad \text{oder} \quad \sigma_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t C_{ijkl}(t-t') \varepsilon_{kl}(t') dt' \quad (1.2)$$

Bei der Betrachtung experimentell ermittelter Daten wird schnell klar, daß außer der geometrischen Dämpfung der elastischen Wellen durch den Ausbreitungsvorgang auch eine viskose Dämpfung eine erhebliche Rolle spielen muß. Realistische Materialgesetze sind damit immer frequenzabhängig, wobei Absorption und Dispersion über die Kausalitätsbedingung miteinander verknüpft sind. Die Kausalität verlangt zum Beispiel, daß die Antwortfunktion $C_{ijkl}(\tau)$ des rechten Ausdrucks in (1.2) für alle $\tau < 0$ verschwindet, da Verzerrungen der Zukunft keine Auswirkungen auf Spannungen der Gegenwart haben dürfen. Für den Fall, daß dies gesichert ist, darf bis $t' \rightarrow +\infty$ integriert werden.

Der gesuchten Wellengleichung liegt jedoch ein ideal elastisches Materialgesetz zugrunde.

Annahme 3 (Hooksches Gesetz) *Das Materialgesetz wird durch einen linearen, instantanen und lokalen Zusammenhang zwischen Verzerrung und Spannung beschrieben.*

Die Matrix der elastischen Koeffizienten C_{ijkl} enthält in ihrer allgemeinsten Form 81 Konstanten. Die Symmetrie von σ_{ij} und ε_{ij} führt zu dem Schluß, daß diese Tensoren nur jeweils sechs unabhängige Elemente enthalten können. Unter Einführung der sogenannten „Voigt-Notation“ wird das Materialgesetz wie folgt geschrieben:

$$\sigma_L = C_{LM} \varepsilon_M \quad \text{mit} \quad L, M = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

Damit enthält C_{LM} noch höchstens 36 Konstanten. Aus dem Hookschen Gesetz ergibt sich bereits ein Zusammenhang zwischen den Differentialen von elastischer Energie und Verzerrung:

$$dW = \sigma_L d\varepsilon_L = C_{LM} \varepsilon_M d\varepsilon_L$$

Die elastische Energie ist eine Zustandsfunktion, soll also nicht von der Prozeßführung abhängen. Dies entspricht den Überlegungen, die zum Schluß geführt haben, daß die Jacobi-Matrix als Gradient darstellbar sein muß (vergleiche Abschnitt A.2.1 auf Seite 124):

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_L} = \sigma_L = C_{LM} \varepsilon_M \quad \text{und daraus} \quad \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_L \partial \varepsilon_M} = C_{LM}$$

Da die Reihenfolge der Ableitungen bei der Berechnung von C_{LM} aus der Energie keinen Einfluß haben darf, gilt:

$$C_{LM} = C_{ML}$$

Damit ist die Matrix C auch symmetrisch und enthält noch maximal 21 unabhängige Konstanten. Die Anzahl der Freiheitsgrade läßt sich weiter minimieren, wenn die notwendigen Symmetrien des Materialgesetzes unter Drehungen des Koordinatensystems betrachtet werden. Dies wird von Sommerfeld [som 78a] und auch von Feynman [fey 64] für den Kristallfall diskutiert. Für den Fall eines isotropen Mediums bleiben lediglich zwei unabhängige elastische Materialgrößen übrig. Diese werden hier mit den Laméschen Konstanten λ und μ bezeichnet. Damit erhält das Materialgesetz die folgende bekannte Form:

$$\sigma_{ij} = 2 \mu \varepsilon_{ij} + \lambda \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{kk} \delta_{ij}$$

1.1.4 Die Wellengleichung

Wird das abgeleitete Materialgesetz in (1.1) (mit linearisiertem Trägheitsterm) eingesetzt, so ergibt sich die lineare, isotrop-elastische Wellengleichung:

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{u}(\vec{x}, t) - (\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u}(\vec{x}, t) + \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u}(\vec{x}, t) = \vec{f}_V \quad (1.3)$$

In dieser Formulierung wurden die Laméschen Konstanten, die ja eigentlich Bestandteil des Spannungstensors sind, vor die Differentialoperatoren gezogen. Dies entspricht folgender Annahme:

Annahme 4 (Konstanz der elastischen Parameter) *Die elastischen Parameter, welche die Materialeigenschaften beschreiben, sollen in jedem Punkt von gleicher Größe und konstant sein.*

Mit der hier entwickelten Theorie werden aber auch inhomogene Medien behandelt. Dies wird realisiert, indem man fordert, daß die Änderung der elastischen Parameter so klein ist, daß sie in der lokalen Umgebung um den betrachteten Punkt quasi konstant sind, so daß die zusätzlichen Terme mit räumlichen Ableitungen der Parameter zu vernachlässigt werden können. Dann setzt man das inhomogene Medium aus homogenen Elementen zusammen und löst mehrere gekoppelte Randwertprobleme.

Für das Verständnis dieser Gleichung und der folgenden Betrachtungen ist es vielleicht ganz lehrreich die Bedeutung der Laméschen Konstanten in der Form zu untersuchen, wie sie in der elastischen Wellengleichung auftreten:

$\lambda + 2\mu$ ist das elastische Kompressions-Modul M eines Körpers, der in einen oben offenen Zylinder eingespannt ist, so daß bei Beanspruchung in Richtung der Zylinderachse keine Querdehnung auftreten kann.

μ ist das sogenannte Schubmodul G , welches den Scherwinkel mit den Scherspannungen auf einen Körper verknüpft. (englisch: rigidity)

$\lambda + \frac{2}{3}\mu$ ist das Volumenkompressionsmodul K , welches die Volumenänderung mit einem allseitig gleich wirkenden Druck verknüpft. (englisch: bulk modulus)

Alle diese Moduln müssen aus Stabilitätsgründen größer oder gleich 0 sein.

1.2 Vorbemerkungen zur Lösung der Wellengleichung

In den folgenden Abschnitten soll die Vorgehensweise bei der Lösung der Wellengleichung exemplarisch für konkrete Fälle dargestellt werden. Diese sollen sowohl zum Verständnis der theoretischen Grundlagen der vorliegenden Arbeit beitragen, wie auch analytische Vergleichslösungen zu den später vorgestellten numerischen Verfahren bieten.

Bei den durchgeführten Feldexperimenten wurden als Signalquelle ein Fallgewicht und ein Vorschlaghammer benutzt. Diese lassen sich in guter Näherung durch eine vertikale Einzelkraftpunktquelle der Form $\vec{f}_V(\vec{x}, t) = F_0 \hat{f}(t) \delta(\vec{x} - \vec{x}_0)$ darstellen. Zunächst wurden Fälle ebener horizontaler Schichtung untersucht, wie sie einer ungestörten geologischen Lagerung entsprechen. Insgesamt handelt es sich um eine zylindersymmetrische Situation. Dies legt die Verwendung von Zylinderkoordinaten nahe.

Es wird wie folgt vorgegangen werden:

1. Zunächst soll die Verschiebung durch ihre Potentiale dargestellt werden. Die daraus hervorgehenden Wellengleichungen werden in Zylinderkoordinaten angegeben und ihre allgemeine homogene Lösung beschrieben.
2. Die inhomogene Wellengleichung soll ohne Randbedingungen gelöst werden. Dies entspricht einer Kraft im Vollraum. Die Lösung dieser Aufgabe liefert eine erste analytische Vergleichslösung und die nötigen Quellterme für die später zu formulierende Reflektivitätsmethode.

3. Das klassische „Lambsche Problem“, der Schlag auf die Oberfläche des homogenen Halbraumes, ist der erste wesentliche Schritt zu realistischen Verhältnissen. Es wird die homogene Wellengleichung mit Randbedingungen für eine freie Oberfläche gelöst und eine Punktkraft über die Randbedingung eingeführt.
4. Im Anschluß daran wird die Äquivalenz zur Lösung der inhomogenen Wellengleichung mit homogenen Randbedingungen (wie es der Reflektivitätsmethode entspricht) am konkreten Beispiel vorgeführt.
5. Es soll gezeigt werden, wie die Lösung der homogenen Wellengleichung mit homogenen Randbedingungen zu Eigenschwingungen des Systems führt, die den Oberflächenwellen entsprechen.

1.3 Lösung der homogenen Wellengleichung

Als Vorbereitung für die weiteren Abhandlungen sollen in diesem Abschnitt die Begriffe „elastische Potentiale“ und „Langsamkeit“ eingeführt werden. Abschließend wird eine Darstellung der allgemeinen Lösung der homogenen Wellengleichung ohne Randbedingungen in Zylinderkoordinaten hergeleitet.

1.3.1 Die elastischen Potentiale

Jedes beliebige Vektorfeld $\vec{a}(\vec{x}) = \vec{a}_D(\vec{x}) + \vec{a}_R(\vec{x})$ kann in einen divergenzfreien Anteil \vec{a}_D mit $\text{div}\vec{a}_D(\vec{x}) = 0$ und einen rotationsfreien Anteil \vec{a}_R mit $\text{rot}\vec{a}_R(\vec{x}) = \vec{0}$ zerlegt werden. So auch der Volumenkraft-Vektor und der Verschiebungs-Vektor in der Wellengleichung (1.3):

$$\begin{aligned} \vec{u}(\vec{x}, t) &= \vec{u}_D(\vec{x}, t) + \vec{u}_R(\vec{x}, t) \quad ; \quad \vec{f}_V(\vec{x}, t) = \vec{f}_D(\vec{x}, t) + \vec{f}_R(\vec{x}, t) \\ \text{div}\vec{u}_D &= 0; \quad \text{rot}\vec{u}_R = \vec{0} \quad ; \quad \text{div}\vec{f}_D = 0; \quad \text{rot}\vec{f}_R = \vec{0} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Die Differentialgleichungen (1.4) werden gelöst durch:

$$\vec{u}_R(\vec{x}, t) = \text{grad}\phi(\vec{x}, t); \quad \vec{u}_D(\vec{x}, t) = \text{rot}\vec{\Psi}(\vec{x}, t); \quad \vec{f}_R(\vec{x}, t) = \text{grad}L(\vec{x}, t); \quad \vec{f}_D(\vec{x}, t) = \text{rot}\vec{M}(\vec{x}, t) \quad (1.5)$$

$\phi(\vec{x}, t)$ und $\vec{\Psi}(\vec{x}, t)$ werden elastische Potentiale genannt. Den Umstand, daß $\vec{\Psi}'(\vec{x}, t) = \vec{\Psi}(\vec{x}, t) + \text{grad}V(\vec{x}, t)$ wegen (A.45) ebenso Lösung von (1.4) ist (wobei $V(\vec{x}, t)$ ein beliebiges skalares Feld sein kann), bezeichnet man als „Eichfreiheit“.

(1.5) in (1.3) eingesetzt ergibt unter Zuhilfenahme von (A.46) und (A.44) folgendes System gekoppelter Differentialgleichungen⁶:

$$\begin{aligned} \text{grad} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \Delta \right) \phi(\vec{x}, t) - \frac{1}{\rho} L(\vec{x}, t) \right] + \\ \text{rot} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\mu}{\rho} \Delta \right) \vec{\Psi}(\vec{x}, t) - \frac{1}{\rho} \vec{M}(\vec{x}, t) \right] = \vec{0} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Dabei kommt die Vernachlässigung der konvektiven Ableitung von \vec{u} zum Tragen. Ohne diese Vereinfachung wäre es nicht so leicht möglich, die zeitliche und räumliche Differentiation zu vertauschen.

Die Differentialgleichungen (1.6) werden auf jeden Fall gelöst, wenn die beiden folgenden Wellengleichungen der Potentiale gelöst werden:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \alpha^2 \Delta \right) \phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{\rho} L(\vec{x}, t) \quad \text{mit} \quad \alpha = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (1.7)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \beta^2 \Delta \right) \vec{\Psi}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\rho} \vec{M}(\vec{x}, t) \quad \text{mit} \quad \beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (1.8)$$

Die Größen α und β treten hier als Wellengeschwindigkeiten in Erscheinung. α ist die Wellengeschwindigkeit für den rotationsfreien Kompressionswellen-Anteil in \vec{u} , also den longitudinal polarisierten Anteil.

⁶ Δ ist der dreidimensionale Laplace-Operator.

β ist die Wellengeschwindigkeit des transversal polarisierten Wellenanteils und demnach mit dem Schermodul μ verknüpft. Aufgrund der Stabilitätsbedingung und der damit verbundenen Forderung, daß die elastischen Moduln größer 0 sein müssen, folgt: $\alpha \geq \beta$

Die Longitudinalwellen werden in der Seismologie auch als P-Wellen bezeichnet. „P“ steht in Analogie zu ihrem Erscheinungsbild in Seismogrammen für „primary waves“ oder auch für „pressure-waves“. Die Transversalwellen werden entsprechend als S-Wellen bezeichnet. Dabei steht „S“ für „secondary waves“ oder „shear-waves“. Die Wellengeschwindigkeiten werden dementsprechend auch häufig als v_p und v_s bezeichnet.

1.3.2 Lösung der homogenen Wellengleichung und der Begriff der Slowness

Ohne äußere Volumenkraft⁷ erhalten wir aus (1.7) und (1.8) homogene Wellengleichungen:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \alpha^2 \Delta\right) \phi(\vec{x}, t) = 0 \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \beta^2 \Delta\right) \vec{\Psi}(\vec{x}, t) = 0 \quad (1.9)$$

Wie in Abschnitt A.2.5 auf Seite 127 skizziert, werden diese allgemein durch ebene Wellen gelöst:

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}, t) &= a_1 \phi(t - \vec{s}_\alpha \vec{x}) + a_2 \phi(t + \vec{s}_\alpha \vec{x}) & |\vec{s}_\alpha| &= \frac{1}{\alpha} \\ \vec{\Psi}(\vec{x}, t) &= b_1 \vec{\Psi}(t - \vec{s}_\beta \vec{x}) + b_2 \vec{\Psi}(t + \vec{s}_\beta \vec{x}) & |\vec{s}_\beta| &= \frac{1}{\beta} \end{aligned}$$

Der erste Anteil der Welle entspricht jeweils einer in \vec{s} -Richtung laufenden Welle, also einer sich vom Ursprung entfernenden, auslaufenden Welle. Der zweite Anteil entspricht einer in den Ursprung des Koordinatensystems einlaufenden Welle.

Die Vektoren \vec{s}_α und \vec{s}_β sind die sogenannten „Slowness-Vektoren“ der Wellen. Sie haben den Betrag der reziproken Wellengeschwindigkeit (daher spricht man von einer „Langsamkeit“⁸) und zeigen in Ausbreitungsrichtung der Welle. Für harmonische Wellen der Kreisfrequenz ω berechnet sich der (aus Elektrodynamik und Quantenmechanik bekannte) Wellenzahlvektor \vec{k} wie folgt aus der Slowness \vec{s} :

$$\vec{k} = \omega \vec{s} \quad |\vec{s}_\alpha| = \sqrt{\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}} \quad |\vec{s}_\beta| = \sqrt{\frac{\rho}{\mu}} \quad (1.10)$$

Der Betrag der Slowness ist ebenso wie die Wellengeschwindigkeit eine Materialeigenschaft. Die Komponenten der Slowness sind wie die des Wellenzahlvektors bestimmend für das Verhalten einer Welle an einer Grenzfläche. Auch die Tangentialkomponente der Slowness muß beim Durchgang durch eine Grenzschicht oder bei der Reflexion konstant bleiben und bestimmt somit das Brechungsgesetz. Ihre Größe bestimmt den Bereich in dem freie Oberflächenwellen in einem geschichteten Medium auftreten können. Im Gegensatz zur Wellenzahl ist sie jedoch unabhängig vom zeitlichen Signalverlauf und daher insbesondere frequenzunabhängig. In den folgenden Ausführungen wird die Slowness immer wieder als wesentliche Größe in Erscheinung treten.

1.3.3 Die homogenen Wellengleichungen in Zylinderkoordinaten

Wie in Abschnitt 1.2 auf Seite 16 erläutert, bietet es sich an die der Arbeit zugrundeliegende Problemstellung in Zylinderkoordinaten (wie in Abschnitt A.3.9 auf Seite 132 definiert) zu behandeln. Aus diesem Grund soll hier zunächst der Satz homogener Differentialgleichungen (1.9) in Zylinderkoordinaten gelöst werden. Wie später anhand der Ausdrücke für die Randbedingungen an Grenzflächen senkrecht zur z -Achse noch deutlicher werden wird, empfiehlt es sich, das Vektor-Potential $\vec{\Psi}(r, \varphi, z, t)$ in einen vertikal polarisierten und einen horizontal polarisierten Anteil zu zerlegen:

$$\vec{\Psi}(r, \varphi, z, t) = \text{rot}(\hat{e}_z \psi(r, \varphi, z, t)) + \hat{e}_z \chi(r, \varphi, z, t) \quad (1.11)$$

⁷Die Gravitationskraft wirkt als permanente äußere Kraft. Gilbert [gil 67] hat jedoch gezeigt, daß ihr Einfluß im Vergleich zur Wirkung der elastischen Kräfte auf die Wellenausbreitung für realistische Verhältnisse des Erdbodens vernachlässigbar ist. Ihre Wirkung wird daher hier auf eine „Vorspannung“ der elastischen Moduln und der Dichte beschränkt und sie tritt nicht mehr explizit in Erscheinung.

⁸Der Begriff „wave-slowness“ wurde laut Lamb [lam 04] erstmals von W.R. Hamilton in die Optik eingeführt.

Analog zu den bereits angestellten Überlegungen zerfällt die Differentialgleichung für $\vec{\Psi}(r, \varphi, z, t)$ in zwei Differentialgleichungen. Für das gesamte Problem ergibt sich folgender Satz von Wellengleichungen:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \alpha^2 \Delta \right) \phi(r, \varphi, z, t) &= 0 \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \beta^2 \Delta \right) \psi(r, \varphi, z, t) &= 0 \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \beta^2 \Delta \right) \chi(r, \varphi, z, t) &= 0 \end{aligned} \quad (1.12)$$

Neben den bereits oben diskutierten P-Wellen unterscheidet man die S-Wellen nun noch nach SV-Wellen $\psi(r, \varphi, z, t)$ und SH-Wellen $\chi(r, \varphi, z, t)$. Die Begriffsunterscheidung wird bei einer Betrachtung ebener Wellen verständlich. Für diese trägt $\psi(x, t)$ rein zur vertikalen Polarisation in der Verschiebung bei, während $\chi(x, t)$ ein rein transversal horizontal polarisiertes Verschiebungsfeld erzeugt. Dies ist für Zylinderwellen nicht der Fall, wie eine Betrachtung der Terme für die Verschiebung (siehe (A.54)) zeigt. Erst bei Betrachtung einer rein vertikalen, zylindersymmetrischen Kraftanregung entfällt das Potential $\chi(r, \varphi, z, t)$ und alle Ableitungen nach φ verschwinden. Dann gilt die Trennung nach der Polarisation auch für Zylinderwellen. Chandra [cha 68] beschreibt, daß die Trennung in ψ und χ allgemein eine Entkopplung der Differentialgleichung bezüglich der Randbedingungen für Verschiebung und Spannung an horizontalen Grenzen bewirkt. Die Wellengleichung für $\chi(r, \varphi, z, t)$ läßt sich dann unabhängig von den anderen beiden behandeln.

Aufgrund der beschriebenen Entkopplung wird zwischen dem sogenannten „P-SV-Fall“ und dem „SH-Fall“ unterschieden. Für das P-SV-Problem werden die Lösungen für das Potential ϕ (P-Wellen) und das Potential ψ (SV-Wellen) gesucht. Völlig getrennt davon läßt sich die Lösung χ (SH-Wellen) des SH-Problems finden. Diese begriffliche Unterscheidung wird im folgenden immer wieder benutzt werden.

Legt man generell Wert auf eine Trennung der Verschiebungspolarisationen, wie es etwa zur allgemeinen Untersuchung von Rayleigh- und Love-Moden sinnvoll ist, so bietet sich statt des Potentialansatzes eine Zerlegung nach Verschiebungspolarisationen an, wie sie von Besserer [bes 96] durchgeführt wird. Die in der vorliegenden Arbeit vorgenommene Zerlegung ist eher für Raumwellen angepaßt und trennt zwischen den beiden Ausbreitungsgeschwindigkeiten.

Die Lösung der Wellengleichungen (1.12) soll exemplarisch für $\phi(r, \varphi, z, t)$ skizziert werden:

Der Lösungsweg wird über folgenden Separationsansatz beschritten:

$$\phi(r, \varphi, z, t) = R(r) P(\varphi) Z(z) T(t)$$

Für eine harmonische Zeitabhängigkeit erhält man die Helmholtzsche Differentialgleichung. In Zylinderkoordinaten hat diese folgende Form:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) R(r) P(\varphi) Z(z) = 0 \quad (1.13)$$

$$T(t) = e^{i\omega t}; \quad k = \frac{\omega}{\alpha} = \omega s_\alpha$$

Die Separation führt auf folgende Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR(r)}{dr} + \left(\omega^2 (s_\alpha^2 - a^2) - \frac{m^2}{r^2} \right) R(r) = 0 \quad (1.14)$$

$$\frac{d^2 Z(z)}{dz^2} + \omega^2 a^2 Z(z) = 0 \quad (1.15)$$

$$\frac{d^2 P(\varphi)}{d\varphi^2} + m^2 P(\varphi) = 0 \quad (1.16)$$

Für $x = r \omega \sqrt{s_\alpha^2 - a^2}$ geht (1.14) in die Besselsche Differentialgleichung (A.13) über:

$$\frac{d^2 R(x)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR(x)}{dx} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2} \right) R(x) = 0 \quad (1.17)$$

Die Differentialgleichungen (1.17), (1.15) und (1.16) werden durch folgende Funktionen gelöst:

$$\begin{aligned} R(x) &= J_m(x) \\ Z(z) &= e^{\pm i\omega a z} \\ P(\varphi) &= e^{im\varphi} \end{aligned}$$

Damit $P(\varphi)$ eine eindeutige Funktion ist ($\phi(\varphi + 2\pi) = \phi(\varphi)$), muß m eine ganze Zahl sein. Damit läßt sich eine allgemeine Lösung von (1.12) angeben:

$$\begin{aligned} \phi(r, \varphi, z, t) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} A_m^{\pm}(u, \omega) J_m(u\omega r) e^{\pm i\omega a z} e^{im\varphi} e^{i\omega t} du d\omega \\ \psi(r, \varphi, z, t) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} B_m^{\pm}(u, \omega) J_m(u\omega r) e^{\pm i\omega b z} e^{im\varphi} e^{i\omega t} du d\omega \\ \chi(r, \varphi, z, t) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} C_m^{\pm}(u, \omega) J_m(u\omega r) e^{\pm i\omega b z} e^{im\varphi} e^{i\omega t} du d\omega \end{aligned} \quad (1.18)$$

Ohne Randbedingungen für das Problem sind die Koeffizienten $A_m^{\pm}(u, \omega)$, $B_m^{\pm}(u, \omega)$ und $C_m^{\pm}(u, \omega)$ hier noch frei wählbar. Jedoch sind die Slownesskomponenten a , b und u durch folgende Bedingungen miteinander verknüpft:

$$\begin{aligned} a^2 + u^2 &= s_{\alpha}^2 = \frac{1}{\alpha^2} \\ b^2 + u^2 &= s_{\beta}^2 = \frac{1}{\beta^2} \end{aligned}$$

Damit erweist sich u als horizontale Slowness-Komponente, a als vertikale Slowness für P-Wellen und b als vertikale Komponente der S-Wellen-Slowness. Während hier vereinbart werden soll, daß u grundsätzlich als positiv reell angenommen werden soll, können $a = \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} - u^2}$ und $b = \sqrt{\frac{1}{\beta^2} - u^2}$ entweder positiv reell oder positiv rein imaginär sein. Daraus ergeben sich folgende Wellentypen:

$Z(z)$	a (b) positiv reell	a (b) positiv imaginär
$e^{-i\omega a z}$ ($e^{-i\omega b z}$)	Welle läuft abwärts	Wellenamplitude nimmt mit der Tiefe exponentiell zu
$e^{+i\omega a z}$ ($e^{+i\omega b z}$)	Welle läuft aufwärts	Wellenamplitude nimmt mit der Tiefe exponentiell ab

1.4 Die vertikale Einzelkraftpunktquelle

In diesem Abschnitt soll das inhomogene Problem (aber noch ohne Randbedingungen) gelöst werden. Als Inhomogenität wird eine vertikale Einzelkraftpunktquelle gewählt, wie sie der Anregung in den durchgeführten Experimenten entspricht. Daraus erhält man Ausdrücke für die durch eine Kraftanregung im Vollraum ausgelöste Verschiebung. Die Herleitung der Lösung für eine Einzelkraftpunktquelle ist von Friederich [fri 95a] ausführlich dargestellt worden. Sie soll hier nur in ihren Grundzügen skizziert werden. Die Entwicklung der Lösung für eine beliebig orientierte Kraft nach der allgemeinen Lösung der homogenen Wellengleichungen ist bei Müller [mül 69] beschrieben.

1.4.1 Methode der Greenschen Funktion

Die Wellengleichungen (1.7) und (1.8) lassen sich formal als inhomogene Differentialgleichungen zum linearen Operator $\hat{L}_{\vec{x}, t}$ schreiben:

$$\underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta \right)}_{\hat{L}_{\vec{x}, t}} V(\vec{x}, t) = Q(\vec{x}, t) \quad (1.19)$$

Für lineare Differentialgleichungen (wie hier der Fall) führt die „Methode der Greenschen Funktion“ zur Lösung des inhomogenen Problems⁹:

$$V(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_V G(\vec{x} - \vec{x}', t - t') Q(\vec{x}', t') d^3 \vec{x}' dt' \quad \text{wenn} \quad \hat{L}_{\vec{x}, t} G(\vec{x}, t) = \delta(\vec{x}, t) \quad (1.20)$$

Die Kausalitätsbedingung verlangt, daß nur solche Anteile des Quellsignals $Q(\vec{x}, t)$ einen Beitrag zur Lösung $V(\vec{x}, t)$ leisten, die vor dem Beobachtungszeitpunkt stattgefunden haben. Dies ist gleichbedeutend mit $G(\vec{x}, t) = 0$ für alle $t < 0$. Unter dieser Voraussetzung erhält man für den Wellenoperator folgende von der Quelle auslaufende (retardierte) Welle als Greensche Funktion:

$$G_{\text{ret}}(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi c^2} \frac{\delta(t - \frac{|\vec{x}|}{c})}{|\vec{x}|} \quad (1.21)$$

1.4.2 Potentiale der Punktkraft

Um die inhomogenen Wellengleichungen (1.7) und (1.8) für die Potentiale zu lösen, wird eine Formulierung für die Potentiale L und \vec{M} einer Punktkraft benötigt. Falls es ein Vektorfeld $\vec{W}(\vec{x}, t)$ gibt, für das gilt

$$\begin{aligned} \Delta \vec{W}(\vec{x}, t) &= \text{grad div } \vec{W}(\vec{x}, t) - \text{rot rot } \vec{W}(\vec{x}, t) \\ &= \vec{f}_V(\vec{x}, t) \end{aligned} \quad (1.22)$$

so ist die Zerlegung der Kraft $\vec{f}_V(\vec{x}, t)$ in Potentiale auf jeden Fall möglich:

$$\begin{aligned} \vec{f}_V(\vec{x}, t) &= \text{grad } L(\vec{x}, t) + \text{rot } \vec{M}(\vec{x}, t) \\ L(\vec{x}, t) &= \text{div } \vec{W}(\vec{x}, t) \\ \vec{M}(\vec{x}, t) &= -\text{rot } \vec{W}(\vec{x}, t) \end{aligned}$$

Die Gleichung (1.22) ist die dreidimensionale Poissongleichung und hat die allgemeine Lösung:

$$\vec{W}(\vec{x}, t) = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{f}_V(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3 \vec{x}' \quad (1.23)$$

Der Quellterm von (1.19) zur Darstellung von (1.7) wird für eine Punktkraft $\vec{f}_V(\vec{x}, t) = F_0 \hat{f} \delta(\vec{x} - \vec{x}_0) q(t)$ an der Stelle \vec{x}_0 zu:

$$Q(\vec{x}, t) = \frac{L(\vec{x}, t)}{\rho} = \frac{\text{div } \vec{W}(\vec{x}, t)}{\rho} = -\frac{F_0}{4\pi\rho} \hat{f} \text{grad} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} q(t) \quad (1.24)$$

Setzt man (1.24) in die Bestimmungsgleichung (1.20) für die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zusammen mit der Greenschen Funktion (1.21) für die Wellengleichung ein, so erhält man folgende Ausdrücke für die elastischen Potentiale:

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}, t) &= -\frac{F_0}{16\pi^2 \rho \alpha^2} \int_V \frac{q(t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{\alpha})}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \hat{f} \text{grad} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} d^3 \vec{x}' \\ \vec{\Psi}(\vec{x}, t) &= -\frac{F_0}{16\pi^2 \rho \beta^2} \int_V \frac{q(t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{\beta})}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \hat{f} \times \text{grad} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} d^3 \vec{x}' \end{aligned} \quad (1.25)$$

Die Potentiale der Punktkraft hängen also im wesentlichen vom Abstand zum Beobachter ab. Die Ausdrücke (1.25) lassen sich daher noch wesentlich vereinfachen, wenn man sie in Kugelkoordinaten ausdrückt. Das Koordinatensystem wird so gewählt, daß die Kraft im Ursprung sitzt und ihre Richtung

⁹ $\delta(\vec{x}, t)$ ist die Diracsche Delta-Funktion, wie in Abschnitt A.3.4 auf Seite 130 beschrieben.

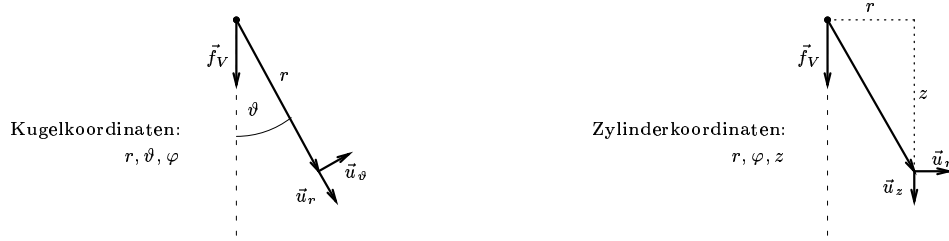


Abbildung 1.1: Die vertikale Einzelkraft und ihre Verschiebungen in Kugelkoordinaten und Zylinderkoordinaten

mit der Achse zusammenfällt, von welcher der Winkel ϑ zum Ortsvektor abgetragen wird. Die Ausdrücke haben dann keine Abhängigkeit vom Azimutwinkel φ . Friederich [fri 95a] gibt an:

$$\begin{aligned}\phi(r, \vartheta, t) &= \frac{F_0 \cos \vartheta}{2\pi \rho r^3} \int_0^{r/\alpha} \tau q(t - \tau) d\tau \\ \vec{\Psi}(r, \vartheta, t) &= \hat{e}_\varphi \frac{F_0 \sin \vartheta}{2\pi \rho r^3} \int_0^{r/\beta} \tau q(t - \tau) d\tau\end{aligned}\quad (1.26)$$

1.4.3 Verschiebungen in Kugelkoordinaten

Die Bestimmungsgleichung für das Verschiebungsfeld $\vec{u} = \text{grad } \phi + \text{rot } \psi$ hat in Kugelkoordinaten bei Zylindersymmetrie folgende Form:

$$\begin{aligned}u_r &= \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta \Psi_\varphi) \\ u_\varphi &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \Psi_\varphi) \\ u_\varphi &= 0 \\ \vec{u}(r, \vartheta, \varphi, t) &= \text{grad} \phi(r, \vartheta, t) + \text{rot}(\hat{e}_\varphi \Psi(r, \vartheta, t)) \\ x_1 &= r \sin \vartheta \cos \varphi; \quad 0 \leq \vartheta < \pi \\ x_2 &= r \sin \vartheta \sin \varphi; \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \\ x_3 &= r \cos \vartheta; \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\end{aligned}\quad (1.27)$$

Das führt zu folgenden, von Friederich [fri 95a] angegebenen Ausdrücken für das Verschiebungsfeld einer Einzelkraftpunktquelle¹⁰:

$$\begin{aligned}u_r(r, \vartheta, t) &= \frac{F_0 \cos \vartheta}{4\pi \rho r} \left[\frac{1}{\alpha^2} q\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) + \frac{2}{r^2} \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau q(t - \tau) d\tau \right] \\ u_\vartheta(r, \vartheta, t) &= \frac{F_0 \sin \vartheta}{4\pi \rho r} \left[-\frac{1}{\beta^2} q\left(t - \frac{r}{\beta}\right) + \frac{1}{r^2} \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau q(t - \tau) d\tau \right] \\ u_\varphi(r, \vartheta, t) &= 0\end{aligned}\quad (1.28)$$

¹⁰Zur Lage der Kraft und zur Richtung der Verschiebungskomponenten siehe Abbildung 1.1

1.4.4 Elastische Potentiale in Zylinderkoordinaten

Für die nun folgenden Betrachtungen werden die Formulierungen der elastischen Felder in Zylinderkoordinaten benötigt. Der dorthin führende Weg soll hier kurz skizziert werden. Die Ausführungen werden für eine Punktkraft in Richtung der positiven z -Achse gemacht. Ihr Angriffspunkt liege im Koordinatenursprung und ihre Zeitabhängigkeit sei harmonisch:

$$\vec{f}_V(r, \varphi, z, t) = F_0 \hat{e}_z \delta(r, z) e^{i\omega t}$$

Zunächst werden die Gleichungen (1.28) wie folgt in Zylinderkoordinaten ausgedrückt wie bei Müller [mül 69] und Ungerer [ung 90] dargestellt:

$$\begin{aligned} u_r(r, \varphi, z, t) &= \frac{F_0}{4\pi\rho\omega^2} \left[-\frac{\partial^2 P_\alpha}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^2 P_\beta}{\partial r \partial z} \right] \\ u_z(r, \varphi, z, t) &= \frac{F_0}{4\pi\rho\omega^2} \left[-\frac{\partial^2 P_\alpha}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 P_\beta}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{\beta^2} P_\beta \right] \\ u_\varphi(r, \varphi, z, t) &= 0 \\ P_\alpha(r, \varphi, z, t) &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} e^{i\omega(t - \frac{\sqrt{r^2 + z^2}}{\alpha})} \\ P_\beta(r, \varphi, z, t) &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} e^{i\omega(t - \frac{\sqrt{r^2 + z^2}}{\beta})} \end{aligned}$$

Mittels der sogenannten Sommerfeldintegrale¹¹ lassen sich die Ausdrücke P_α und P_β weiter umformen¹²:

$$\begin{aligned} P_\alpha(r, \varphi, z, t) &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} e^{i\omega(t - \frac{\sqrt{r^2 + z^2}}{\alpha})} = e^{i\omega t} \int_0^{+\infty} \frac{u\omega}{ia} e^{-ia\omega|z|} J_0(u\omega r) du \\ P_\beta(r, \varphi, z, t) &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} e^{i\omega(t - \frac{\sqrt{r^2 + z^2}}{\beta})} = e^{i\omega t} \int_0^{+\infty} \frac{u\omega}{ib} e^{-ib\omega|z|} J_0(u\omega r) du \\ a &= \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} - u^2} \quad a > 0 \quad \text{bzw.} \quad a/i > 0 \\ b &= \sqrt{\frac{1}{\beta^2} - u^2} \quad b > 0 \quad \text{bzw.} \quad b/i > 0 \end{aligned}$$

Diese Ausdrücke erinnern an die allgemeine Darstellung der Lösung für die elastischen Potentiale in (1.18). In der Tat lassen sich daraus per Koeffizientenvergleich unter Verwendung der Bestimmungsgleichung für das Verschiebungsfeld (A.54) die elastischen Potentiale für eine harmonische, vertikale Einzelkraftpunktquelle in dieser Form angeben:

$$\begin{aligned} \phi(r, \varphi, z, t) &= \frac{F_0}{4\pi\rho} e^{i\omega t} \int_0^{+\infty} \text{sign}(z) u J_0(u\omega r) e^{-i\omega a|z|} du \\ \psi(r, \varphi, z, t) &= \frac{F_0}{4\pi\rho} e^{i\omega t} \int_0^{+\infty} \frac{u}{i\omega b} J_0(u\omega r) e^{-i\omega b|z|} du \\ \chi(r, \varphi, z, t) &= 0 \\ \text{sign}(x) &= \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{1.29}$$

¹¹Diese werden in [som 78b] §31.14 angegeben.

¹²Eine Explosionspunktquelle (isotrope Quelle) erzeugt ein reines Kompressionspotential. Das Scherpotential ist $\vec{\Psi} = \vec{0}$. In Kugelkoordinaten hat das Kompressionspotential einer Explosionsquelle mit harmonischer Zeitabhängigkeit die Form $\phi(r, t) = \frac{1}{r} e^{i\omega(t-r/\alpha)}$. Die Größen P_α und P_β lassen sich daher mit den Potentialen einer Explosionsquelle vergleichen.

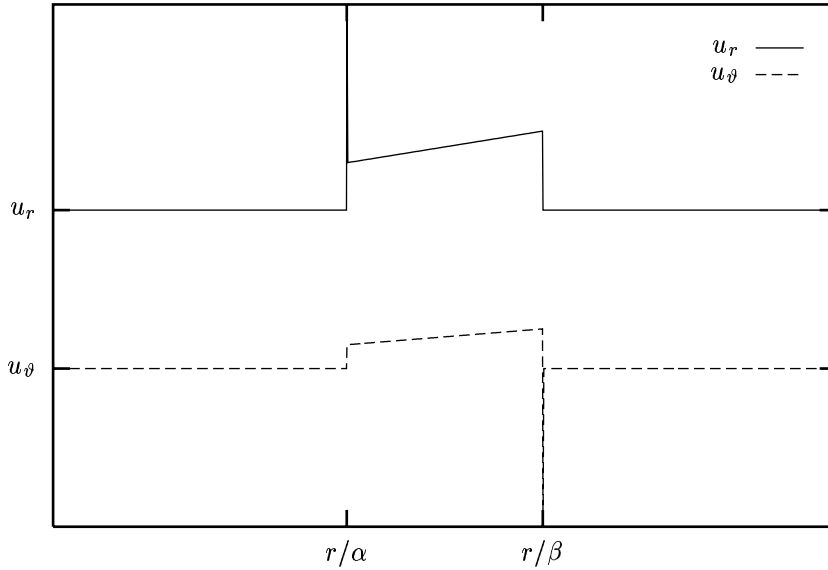


Abbildung 1.2: Vollraumverschiebung der $\delta(t)$ -Einzelkraft in Kugelkoordinaten (qualitativ)

Aus (1.29) ergeben sich mit (A.54) folgende Verschiebungen:

$$\begin{aligned}
 u_r(r, \varphi, z, t) &= \frac{F_0}{4\pi\rho} e^{i\omega t} \omega \int_0^{+\infty} \text{sign}(z) u^2 \left(e^{-i\omega b|z|} - e^{-i\omega a|z|} \right) J_1(u\omega r) du \\
 u_\varphi(r, \varphi, z, t) &= 0 \\
 u_z(r, \varphi, z, t) &= -\frac{F_0}{4\pi\rho} e^{i\omega t} i\omega \int_0^{+\infty} u \left(a e^{-i\omega a|z|} + \frac{u^2}{b} e^{-i\omega b|z|} \right) J_0(u\omega r) du \quad (1.30)
 \end{aligned}$$

1.4.5 Verschiebungen in Zylinderkoordinaten

Für Vergleiche mit numerisch berechneten Werten für die Verschiebungen einer Einzelkraftpunktquelle im Vollraum bietet es sich an, die Gleichungen (1.28) direkt nach Zylinderkoordinaten zu transformieren:

$$\begin{aligned}
 u_r(r, \varphi, z, t) &= \frac{F_0}{4\pi\rho} \frac{zr}{R^3} \left[\frac{1}{\alpha^2} q(t - R/\alpha) - \frac{1}{\beta^2} q(t - R/\beta) + \frac{3}{R^2} \int_{R/\alpha}^{R/\beta} \tau q(t - \tau) d\tau \right] \\
 u_\varphi(r, \varphi, z, t) &= 0 \\
 u_z(r, \varphi, z, t) &= \frac{F_0}{4\pi\rho} \frac{1}{R^3} \left[\frac{z^2}{\alpha^2} q(t - R/\alpha) + \frac{r^2}{\beta^2} q(t - R/\beta) + \frac{2z^2 - r^2}{R^2} \int_{R/\alpha}^{R/\beta} \tau q(t - \tau) d\tau \right] \quad (1.31) \\
 R &= \sqrt{r^2 + z^2}
 \end{aligned}$$

1.4.6 Diskussion der Verschiebungsterme

In diesem Abschnitt sollen die Ausdrücke für die Verschiebungen einer Einzelkraftpunktquelle (1.28) und (1.31) näher betrachtet werden.

In Kugelkoordinaten

Die Gleichungen (1.28) beschreiben die Verschiebungskomponenten in Kugelkoordinaten. Für einen $\delta(t)$ -Zeitverlauf des Quellsignals läßt sich der Ausdruck direkt integrieren. Der Verlauf der beiden von 0 verschiedenen Komponenten ist in Abbildung 1.2 qualitativ dargestellt.

Die Cosinus- und Sinus-Faktoren drücken die Abstrahlcharakteristik der Quelle aus. In der horizontalen Ebene des Angriffspunktes der Kraft und in Kraftrichtung hat die Verschiebung die Richtung der Kraft.

Die Komponenten setzen sich jeweils aus zwei Termen zusammen. Beide Terme sind gemeinsam mit dem Faktor $1/r$ gewichtet. Den Faktor bezeichnet man als „Geometrische Dämpfung“. Damit unabhängig vom Abstand zur Quelle immer dieselbe Energie durch eine Kugelschale um den Angriffspunkt abgestrahlt wird, muß die Verschiebungsamplitude mit diesem Faktor abnehmen. Der zweite Term nimmt insgesamt mit $1/r^2$ ab und wird daher als „Nahfeldterm“ bezeichnet.

In Zylinderkoordinaten

Die Gleichungen (1.31) beschreiben die Verschiebung in Zylinderkoordinaten. Wie aus der Darstellung für die $\delta(t)$ -Anregung in Abbildung 1.3 zu erkennen ist, handelt es sich einfach um eine Linearkombination der oben vorgestellten Komponenten in Kugelkoordinaten.

Die Abstrahlcharakteristik ist hier etwas versteckt. Jedoch erkennt man unschwer, daß für $z = 0$ oder $r = 0$ wieder keine Horizontalkomponente der Verschiebung abgestrahlt wird. Auch die R -Abhängigkeit der einzelnen Terme ist direkt mit den Ausdrücken in Kugelkoordinaten vergleichbar.

Wichtig für den Vergleich mit numerischen Ergebnissen ist, daß auf dem Doppelkegel $2z^2 = r^2$ für die z -Komponente kein Nahfeldterm existiert.

Nahfeld und Fernfeld

Wie bereits angedeutet, ist in den Ausdrücken für die Verschiebung aufgrund unterschiedlicher Distanz-Abhängigkeit der Amplitude zwischen „Nahfeldtermen“ und „Fernfeldtermen“ zu unterscheiden. In den Ausdrücken für die Potentiale in Kugelkoordinaten (1.26) und Zylinderkoordinaten (1.29) ist von dieser Unterscheidung noch nichts zu erkennen. Die Nahfeldterme entstehen erst durch die Differentiation nach den Koordinaten bei der Umrechnung in die Verschiebungen.

Der Zeitverlauf der Fernfeldterme der Einzelkraftpunktquelle gleicht dem Kraftverlauf. Die Amplituden eines bandbegrenzten Impulses können direkt aus den Formeln abgelesen werden.

Der Zeitverlauf der Nahfeldterme gleicht dem Integral des Kraftverlaufs. Für eine $\delta(t)$ -Anregung erhält man Rampen, deren Fortsetzungen durch den Ursprung verlaufen müssen.

Aus (1.31) geht eindeutig hervor, daß die vertikale Einzelkraftquelle auch in der Darstellung in Zylinderkoordinaten Nahfeldterme erzeugt. In (1.30) sind diese jedoch nicht erkennbar. Der scheinbare Widerspruch löst sich bei näherer Betrachtung der Entwicklung nach den homogenen Lösungen auf. Die darin enthaltenen Besselfunktionen enthalten implizit ein Nahfeldverhalten (siehe Abbildung A.1 auf Seite 128 und folgende).

Ungerer [ung 90] führt dies an einem noch drastischeren Beispiel vor. Ausgehend vom Kompressionspotential einer Explosionsquelle

$$\phi(r, \varphi, z, t) = \frac{1}{R} e^{i\omega(t - \frac{R}{\alpha})} \quad R^2 = r^2 + z^2 \quad (1.32)$$

berechnet er auf zwei Wegen die Radialverschiebung:

$$u_r(r, \varphi, z, t) = -\frac{1}{R} \left(\frac{1}{R} + \frac{i\omega}{\alpha} \right) e^{i\omega t} \int_0^{+\infty} \frac{u\omega}{ia} J_0(u\omega r) e^{-i\omega a|z|} du \quad (1.33)$$

$$u_r(r, \varphi, z, t) = -e^{i\omega t} \int_0^{+\infty} \frac{u^2\omega^2}{ia} J_1(u\omega r) e^{-i\omega a|z|} du \quad (1.34)$$

Die Darstellung (1.33) wurde gewonnen, indem zunächst aus (1.32) die Verschiebung berechnet und diese dann nach den Sommerfeldintegralen dargestellt wurde. (1.34) ergibt sich jedoch, wenn man (1.32)

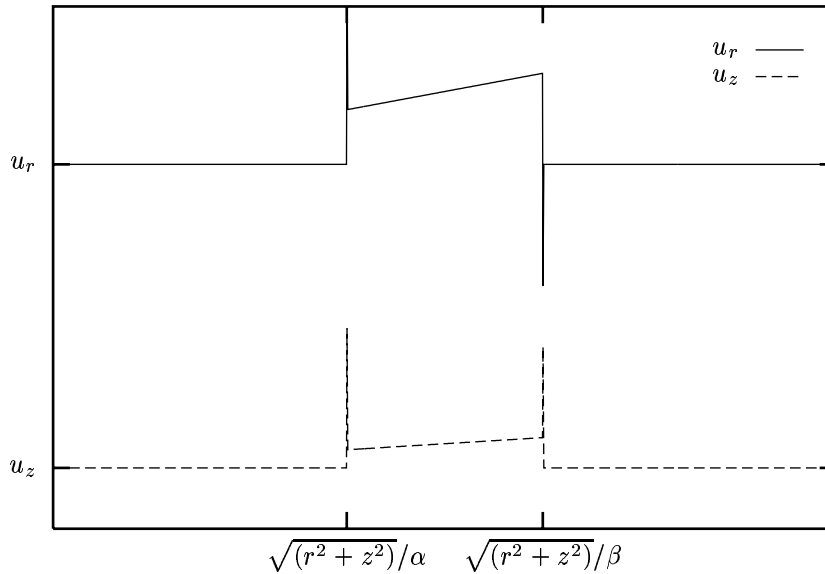


Abbildung 1.3: Vollraumverschiebung der $\delta(t)$ -Einzelkraft in Zylinderkoordinaten (qualitativ)

mit Hilfe der Sommerfeldintegrale nach Zylinderfunktionen entwickelt und aus diesem Ausdruck die Verschiebung berechnet.

Die Begriffe „Nahfeld“ und „Fernfeld“ werden in diesem Sinne je nach Darstellung unterschiedlich benutzt, beziehen sich aber meist auf die explizite r -Abhängigkeit. Das wirkliche Nahfeldverhalten der Verschiebungen ist jedoch erst in den Seismogrammen erkennbar.

1.5 Der Schlag auf den Halbraum

Die Verhältnisse werden wesentlich komplexer, wenn Randbedingungen für das Medium erfüllt werden müssen. Inhomogene Medien werden in dieser Arbeit durch das Zusammenfügen mehrerer homogener Teile dargestellt. Der einfachste Fall ist der zweier homogener Halbräume, die gemeinsam den ganzen Raum ausfüllen und an einer ebenen unendlich ausgedehnten Fläche miteinander fest verbunden sind. Es ist aus geometrischen Gründen zu verlangen, daß in beiden Halbräumen an der Grenzfläche dieselben Verschiebungen auftreten, sonst müßte das Medium zerreißen. Außerdem müssen aus physikalischen Gründen (Newton III actio=reactio) die Spannungen von beiden Seiten an der Grenzfläche gleich groß sein. Diese Randbedingungen verknüpfen die beiden homogenen Teile.

Für den Fall eines Halbraumes ($z > 0$) mit freier Oberfläche (der Halbraum ($z < 0$) sei nicht mit Materie gefüllt) werden die Randbedingungen noch einfacher. Hier gibt es nur noch Randbedingungen für die Spannungen. Die Spannungskräfte auf die Oberfläche müssen verschwinden, da der leere Halbraum keine elastische Kraft ausüben kann.

Lamb veröffentlichte 1904 [lam 04] eine analytische Lösung für den Fall eines Schlages auf die Oberfläche eines homogenen Halbraumes. Diese soll hier kurz in der bereits eingeführten Notation (die im Gegensatz zu Lambs Darstellung zwischen den unabhängigen Größen „Frequenz“ und „Langsamkeit“ trennt) skizziert werden. Zum einen handelt es sich neben dem Vollraum um die einzige analytisch gelöste Aufgabe, damit dient die Lösung wieder der Überprüfung numerischer Ergebnisse. Zum anderen kann dieser Fall mit etwas Abstraktion als einfachste Situation der Flachseismik betrachtet werden.

1.5.1 Potentiale, Verschiebungen und Spannungen

Wie schon beschrieben, treten nur Randbedingungen für die Komponenten σ_{zz} , σ_{zr} und $\sigma_{z\varphi}$ des symmetrischen Spannungstensors auf. Diese drei Komponenten müssen an der Oberfläche verschwinden, um die ganze Oberfläche spannungsfrei zu machen.

Betrachtet werden soll der Fall einer vertikalen Punktkraft, die im Ursprung des Koordinatensystems angreift. Die freie Oberfläche soll mit der Ebene $z = 0$ zusammenfallen. Das Problem ist zylindersymmetrisch. Daher wird kein SH-Potential $\chi(r, \varphi, z, t)$ angeregt und es verschwinden alle Ableitungen nach φ . Da die Wellen an der Oberfläche angeregt werden, treten nur abwärts laufende oder exponentiell mit der Tiefe abklingende Wellen auf.

Unter diesen Voraussetzungen lassen sich die elastischen Potentiale im elastischen Halbraum für eine harmonische Anregung nach (1.18) wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned}\phi(r, z, \omega, t) &= e^{i\omega t} \int_0^{+\infty} A(u, \omega) J_0(u\omega r) e^{-i\omega a z} du \\ \psi(r, z, \omega, t) &= e^{i\omega t} \int_0^{+\infty} B(u, \omega) J_0(u\omega r) e^{-i\omega b z} du \\ \chi(r, z, \omega, t) &= 0 \\ a^2 + u^2 &= \frac{1}{\alpha^2} \quad b^2 + u^2 = \frac{1}{\beta^2}\end{aligned}\tag{1.35}$$

Um die Bedingung für die Ausbreitung in z -Richtung einzuhalten, muß in dieser Darstellung für a und b verlangt werden, daß sie entweder positiv reell oder negativ imaginär sind.

Die Verschiebungen für diesen Fall haben nach (A.54) folgende Form:

$$\begin{aligned}u_r(r, z, \omega, t) &= \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} \\ &= \omega e^{i\omega t} \int_0^{+\infty} u (-A(\omega, u) e^{-i\omega a z} + i\omega b B(\omega, u) e^{-i\omega b z}) J_1(u\omega r) du \\ u_\varphi(r, z, \omega, t) &= 0 \\ u_z(r, z, \omega, t) &= \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \\ &= \omega e^{i\omega t} \int_0^{+\infty} (-iaA(\omega, u) e^{-i\omega a z} + u^2 \omega B(\omega, u) e^{-i\omega b z}) J_0(u\omega r) du\end{aligned}\tag{1.36}$$

Ebenso lassen sich die Spannungen nach (A.53) und (A.52) angeben:

$$\begin{aligned}\sigma_{zr}(r, z, \omega, t) &= \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) \\ &= \mu \omega^2 e^{i\omega t} \int_0^{+\infty} \{ (u^2 - b^2) A(\omega, u) e^{-i\omega a z} - 2i\omega u^2 b B(\omega, u) e^{-i\omega b z} \} J_0(u\omega r) du \\ \sigma_{z\varphi}(r, z, \omega, t) &= 0 \\ \sigma_{zz}(r, z, \omega, t) &= \frac{\lambda}{r} \left(u_r + r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ &= \mu \omega^2 e^{i\omega t} \int_0^{+\infty} u \{ 2iaA(\omega, u) e^{-i\omega a z} - \\ &\quad (u^2 - b^2) \omega B(\omega, u) e^{-i\omega b z} \} J_1(u\omega r) du\end{aligned}\tag{1.37}$$

1.5.2 homogene Randbedingungen und Oberflächenwellen

Für eine freie Oberfläche bei $z = 0$ müssen folgende Randbedingungen erfüllt werden:

$$\sigma_{zr}(r, z, \omega, t)|_{z=0} = 0; \quad \sigma_{z\varphi}(r, z, \omega, t)|_{z=0} = 0; \quad \sigma_{zz}(r, z, \omega, t)|_{z=0} = 0\tag{1.38}$$

Die zweite ist im Falle der vertikalen Kraft immer erfüllt.

Die Randbedingungen (1.38) müssen für beliebige t , r und ω erfüllt werden. Daher müssen die Vorfaktoren der Besselfunktionen verschwinden. Damit läßt sich (1.38) wie folgt schreiben:

$$\underline{\underline{M}} \vec{a} = \vec{0} \quad (1.39)$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} A(\omega, u) \\ B(\omega, u) \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} (u^2 - b^2) & -2i\omega u^2 b \\ 2ia & -(u^2 - b^2)\omega \end{pmatrix} \quad (1.40)$$

Das lineare Gleichungssystem (1.39) hat nichttriviale Lösungen für $\det(\underline{\underline{M}}) = 0$.

$$\det(\underline{\underline{M}}) = -\omega \underbrace{\{(u^2 - b^2)^2 + 4u^2 ab\}}_{=D(u)} \quad (1.41)$$

Offenbar ist zur Erfüllung der Randbedingungen das Verschwinden des von ω unabhängigen Ausdrucks $D(u)$ ausreichend. Die Werte von u , für welche $D(u) = 0$ ist, entsprechen Eigenschwingungen des Systems. Verschwindet der Ausdruck für Werte von a und b , die rein imaginär und negativ sind (mit der Tiefe abklingende Wellen), so erhält man freie Oberflächenwellen. Diese P-SV-Wellen werden auch als „Rayleigh-Wellen“¹³ bezeichnet. Ihre Ausbreitungsgeschwindigkeit an der Oberfläche ist, wie erläutert, frequenzunabhängig. Man erhält einen nicht dispergierten Oberflächenwellenzug. Dessen Amplitude folgt der Besselfunktion, die mit $1/\sqrt{r}$ abklingt (siehe Abbildungen A.2 und A.3 auf den Seiten 128 und 129). Dieser Faktor entspricht dem Energieerhaltungssatz für die Ausbreitung in der Ebene (vergleiche Abschnitt 1.4.6 auf Seite 25).

1.5.3 inhomogene Randbedingungen — der Schlag

Lamb führt die Anregung durch eine äußere Kraft nicht durch eine Inhomogenität (Quellterm) in den Wellengleichungen ein, sondern durch eine geeignete inhomogene Randbedingung an der Oberfläche. Dies ist völlig äquivalent zur Behandlung der inhomogenen Wellengleichung mit homogenen Randbedingungen. Er schreibt die Randbedingungen wie folgt:

$$\sigma_{zz}(r, z, \omega, t)|_{z=0} = \sigma_{zz}^q(r, \omega, t); \quad \sigma_{zr}(r, z, \omega, t)|_{z=0} = 0 \quad (1.42)$$

Eine beliebige radialsymmetrische Quellfunktion läßt sich wie in (A.27) nach Besselfunktionen entwickeln. Für eine harmonische Anregung nimmt diese folgende Gestalt an:

$$\sigma_{zz}^q(r, \omega, t) = \omega^2 e^{i\omega t} \int_0^{+\infty} \tilde{F}(\omega, u) u J_0(u\omega r) du \quad (1.43)$$

Damit erhält man für die Randbedingungen folgende Schreibweise:

$$\underline{\underline{M}} \vec{a} = \vec{q} \quad (1.44)$$

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} \frac{\tilde{F}(\omega, u)}{\mu} u \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\underline{\underline{M}}$ und \vec{a} wie in (1.40)

Durch Inversion der Matrix $\underline{\underline{M}}$ läßt sich das Ergebnis für die Amplituden \vec{a} direkt angeben:

$$\vec{a} = \underline{\underline{M}}^{-1} \vec{q}$$

$$\underline{\underline{M}}^{-1} = \frac{1}{\det(\underline{\underline{M}})} \begin{pmatrix} M_{22} & -M_{12} \\ -M_{21} & M_{11} \end{pmatrix} \quad (1.45)$$

¹³Die Bezeichnung „Rayleigh-Wellen“ geht auf den Artikel „On waves propagated along the surface of an elastic solid“ (1885, Proc. Lond. Math. Soc., 17, 4–11) von Lord J.W.S. Rayleigh zurück.

Der Ausdruck (A.37) kann, wie im Anhang erläutert, als punktförmige Quelle auf einer Fläche betrachtet werden. Für den Schlag von oben auf die Oberfläche des Halbraumes ist ein negatives Vorzeichen zu wählen, da die Spannung bezüglich der Flächennormalen definiert ist, die hier nach oben (negative z -Richtung) zeigt:

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\omega, u) &= -\frac{1}{2\pi} F_0 \\ \Rightarrow A(\omega, u) &= -\frac{F_0}{2\pi\mu} \frac{u(u^2 - b^2)}{D(u)} \\ B(\omega, u) &= -\frac{F_0}{2\pi\mu} \frac{2iau}{\omega D(u)} \end{aligned} \quad (1.46)$$

Damit lassen sich die Verschiebungen an der Oberfläche $z = 0$ angeben:

$$\begin{aligned} u_r(r, z = 0, \omega, t) &= \frac{F_0}{2\pi\mu} \omega e^{i\omega t} \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{D(u)} (u^2 - b^2 + 2ab) J_1(u\omega r) du \\ u_\varphi(r, z = 0, \omega, t) &= 0 \\ u_z(r, z = 0, \omega, t) &= -\frac{F_0}{2\pi\mu} \omega e^{i\omega t} \frac{1}{\beta^2} \int_0^{+\infty} \frac{uia}{D(u)} J_0(u\omega r) du \end{aligned} \quad (1.47)$$

Die imaginäre Einheit im Ausdruck für u_z darf nicht verwundern. Zum einen ist die Kraftanregung mit $e^{i\omega t}$ komplex und muß erst durch geeignete Linearkombination reell gemacht werden. Zum anderen wird der Ausdruck ia für imaginäre a reell, beziehungsweise werden Terme in u_r auch komplex.

Unschwer lassen sich in den Verschiebungen die freien Oberflächenwellen erkennen. Für die Langsamkeit der Rayleigh-Wellen wird die Determinante $D(u) = 0$. Da diese im Nenner steht, werden die Verschiebungen unendlich groß. Für die Anregung von Eigenschwingungen mit einer unendlich andauernden, harmonischen Kraft ist dies nicht verwunderlich.

Die Gleichungen (1.47) entsprechen der von Lamb in seiner Notation angegebenen Lösung in der Gleichung (141) seiner Abhandlung. Lamb hat diesen Ausdruck für eine beliebige Zeitabhängigkeit der Anregung in den Zeitbereich transformiert. Doch auch die dort auftretenden Ausdrücke lassen sich nicht allgemein integrieren und sind auch für $\delta(t)$ -Anregungen schwierig auszuwerten. Da die Gleichungen (1.47) mit modernen Rechnern bereits ohne weiteres numerisch auswertbar sind, soll das Ergebnis in dieser Form belassen werden.

In Tafel 1.1 auf Seite 31 sind die analytischen Ausdrücke für die Verschiebung wiedergegeben, zu denen Lamb in seiner Arbeit gelangte. Die Ausdrücke waren analytisch nicht weiter zu vereinfachen. Trotzdem ist es Lamb recht gut gelungen den Verlauf der Verschiebung qualitativ zu skizzieren. Lambs Skizze ist in Abbildung 1.4 wiedergegeben. In Abbildung 2.9 auf Seite 53 und den darauf folgenden Abbildungen sind die Ergebnisse der numerischen Berechnung wiedergegeben.

1.5.4 Äquivalenz zur Lösung der inhomogenen Wellengleichung

Da der Angriffspunkt der Kraft mit der Ebene der Randbedingungen zusammenfiel, konnte die Anregung auf simple Weise über die Randbedingung eingebracht werden. Für eine beliebige Position der Kraft kann dies realisiert werden, indem eine zweite Ebene mit Randbedingungen belegt wird. Dort wird dann gefordert, daß die Differenz der Spannungen oberhalb der Grenzfläche und unterhalb der Grenzfläche bis auf einen Punkt verschwindet, wobei die Verschiebungen in dieser Ebene bliebig sind. Dabei kann das Medium oberhalb der Fläche in seinen elastischen Eigenschaften identisch mit dem Medium unterhalb sein.

Eine allgemeinere Betrachtung führt jedoch zur Lösung der inhomogenen Wellengleichung mit homogenen Randbedingungen. Betrachtet man eine Quelle innerhalb des Halbraumes (wie in Abbildung 1.5), so wird diese ein Wellenfeld ϕ^u, ψ^u nach oben und ein Wellenfeld ϕ^d, ψ^d nach unten abstrahlen. Das nach oben abgestrahlte Wellenfeld wird an der freien Oberfläche reflektiert und wird sich als Wellenfeld ϕ^r, ψ^r nach unten ausbreiten. Der im Halbraum unterhalb der Quelle befindliche Empfänger beobachtet ein

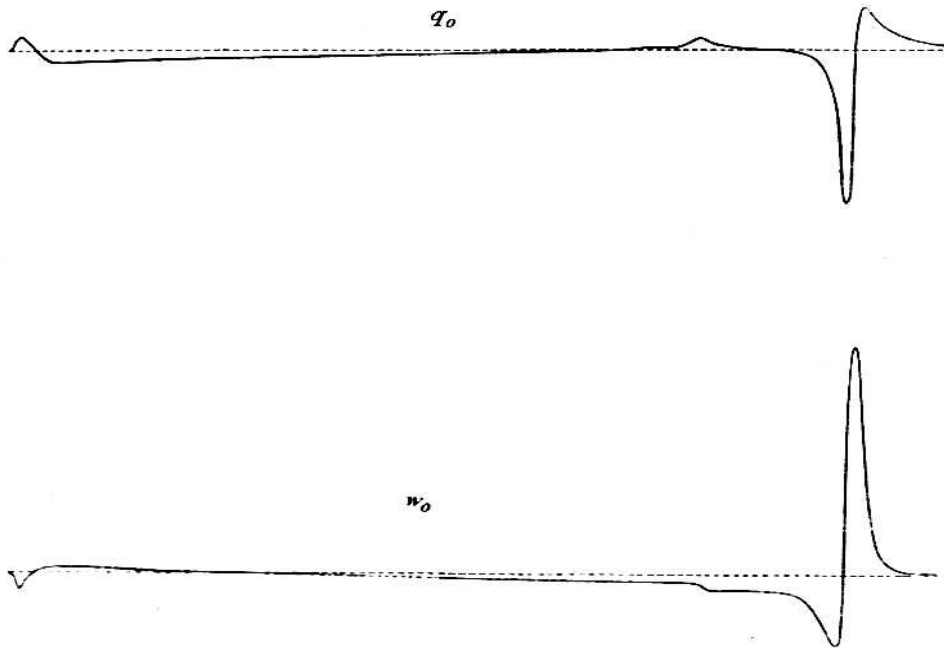


Abbildung 1.4: Kurven für die Bodenverschiebung aus der Originalarbeit von Lamb [lam 04]. q_0 ist die Horizontalkomponente der Verschiebung. Positive Ausschläge entsprechen einer Verschiebung von der Quelle fort. Die Kurve für w_0 beschreibt die Vertikalkomponente der Verschiebung. Positive Ausschläge bedeuten eine Bewegung nach unten in den Halbraum hinein. Die numerisch berechneten Verschiebungen für den Schlag auf den Halbraum sind in Abbildung 2.9 auf Seite 53 und Abbildung 2.10 auf Seite 54 dargestellt.

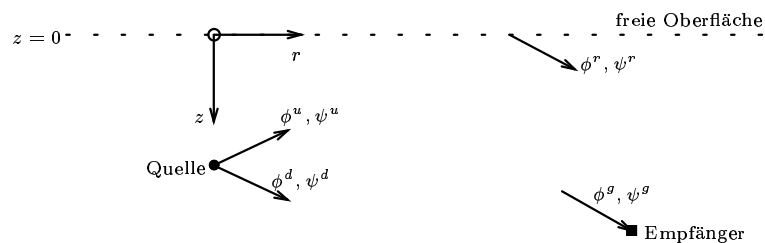


Abbildung 1.5: Potentiale für die Reflexion an der freien Oberfläche

$$q_0 = \frac{H}{\pi\mu} \frac{\partial}{\partial\varpi} \int_0^{+\infty} R(t - c\varpi \cosh u) du - \frac{2}{\pi^2 b\mu} \int_a^b U(\theta) \frac{\partial}{\partial\varpi} \int_0^{+\infty} R(t - \theta\varpi \cosh u) du d\theta$$

$$w_0 = \frac{1}{\pi^2 b\mu} \mathcal{P} \int_a^\infty \theta V(\theta) \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{+\infty} R(t - \theta\varpi \cosh u) du d\theta$$

q_0	Radialkomponente der Verschiebung an der Oberfläche
w_0	Vertikalkomponente der Verschiebung an der Oberfläche
ϖ	Radialkoordinate
μ	Schermodul
t	Zeit
$R(t)$	Quellfunktion
H	Amplitudenfaktor der Rayleigh-Wellen (abhängig von den elastischen Parametern des Mediums)
$U(\theta), V(\theta)$	Greensche Funktionen des zweidimensionalen Problems ($V(\theta)$ besitzt eine Singularität bei $\theta = c$, daher ist das Hauptwertintegral zu berechnen)
θ	Horizontalkomponente der Langsamkeit
c	Rayleigh-Wellen-Slowness
a	Betrag der Kompressionswellen-Langsamkeit im Halbraum
b	Betrag der Scherwellen-Langsamkeit im Halbraum
u	einheitenlose Integrationsvariable

Tafel 1.1: Verschiebungsfunktion für den Schlag auf den Halbraum in Lambs Notation

Gesamtwellenfeld $\phi^g = \phi^d + \phi^r$, $\psi^g = \psi^d + \psi^r$. Rückt man Quelle und Empfänger an die Oberfläche, so führt das zu denselben Lösungen, die Lamb veröffentlicht hat.

Dies ist für die Konsistenz der Theorie natürlich absolut notwendig. Bei Betrachtung der Bewegungsgleichung in der Form (1.1) auf Seite 14 wird deutlich, daß die Äquivalenz beider Wege darauf beruht, daß ein Quellterm statt über \vec{f}_V auch über einen zusätzlichen Term in $\text{Div}\underline{\underline{\sigma}}$ in die Wellengleichung eingebracht werden kann.

Für ein lineares Problem ist es zwar formal verständlich, daß beliebige Lösungen superponiert werden können. Trotzdem mag es erstaunen, daß Quelle und Grenzschichten offenbar nichts voneinander „wissen“ müssen. Daher soll hier die Äquivalenz der Lambschen Vorgehensweise zum Weg, der von der Reflektivitätsmethode beschritten wird, kurz skizziert werden.

Zunächst soll anhand von (1.18) und (1.29) eine Darstellung der verschiedenen Wellenfelder eingeführt werden, wobei der Index x in den Gleichungen für die Potentiale für einen beliebigen Index u , d , r oder g stehen soll:

$$\phi^x(r, z, \omega, t) = \int_0^{+\infty} \check{A}^x(\omega, t, u, z) J_0(u\omega r) du$$

$$\psi^x(r, z, \omega, t) = \int_0^{+\infty} \check{B}^x(\omega, t, u, z) J_0(u\omega r) du$$

$$\check{A}^u = A^u e^{i\omega a(z-z_q)}; \quad A^u = -u F$$

$$\begin{aligned}
\check{B}^u &= B^u e^{i\omega b(z-z_q)}; & B^u &= \frac{u}{i\omega b} F \\
\check{A}^d &= A^d e^{-i\omega a(z-z_q)}; & A^d &= u F \\
\check{B}^d &= B^d e^{-i\omega b(z-z_q)}; & B^d &= \frac{u}{i\omega b} F \\
F &= \frac{F_0}{4\pi\rho} e^{i\omega t} \\
\check{A}^r &= A^r e^{-i\omega a z} \\
\check{B}^r &= B^r e^{-i\omega b z} \\
\check{A}^g &= \check{A}^d + \check{A}^r \\
\check{B}^g &= \check{B}^d + \check{B}^r
\end{aligned}$$

Die Größe z_q bezeichnet die z -Koordinate der Quelle. Das Zeichen $\check{}$ dient zur Unterscheidung zwischen den z -abhängigen und nicht z -abhängigen Amplituden der Potentiale.

Für die Spannungen oberhalb der Quelle ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\sigma_{zr}^u(r, z, \omega, t) &= \int_0^{+\infty} \omega^2 \mu u \left\{ -2ia\check{A}^u - (u^2 - b^2) \omega \check{B}^u \right\} J_1(u\omega r) du \\
\sigma_{zz}^u(r, z, \omega, t) &= \int_0^{+\infty} \omega^2 \mu \left\{ (u^2 - b^2) \check{A}^u + 2i\omega u^2 b \check{B}^u \right\} J_0(u\omega r) du \\
\sigma_{zr}^r(r, z, \omega, t) &= \int_0^{+\infty} \omega^2 \mu u \left\{ 2ia\check{A}^r - (u^2 - b^2) \omega \check{B}^r \right\} J_1(u\omega r) du \\
\sigma_{zz}^r(r, z, \omega, t) &= \int_0^{+\infty} \omega^2 \mu \left\{ (u^2 - b^2) \check{A}^r - 2i\omega u^2 b \check{B}^r \right\} J_0(u\omega r) du \\
\sigma_{zr}(r, z, \omega, t) &= \sigma_{zr}^u(r, z, \omega, t) + \sigma_{zr}^r(r, z, \omega, t) \\
\sigma_{z\varphi}(r, z, \omega, t) &= 0 \\
\sigma_{zz}(r, z, \omega, t) &= \sigma_{zz}^u(r, z, \omega, t) + \sigma_{zz}^r(r, z, \omega, t)
\end{aligned}$$

Die Randbedingung für die freie Oberfläche fordert:

$$\sigma_{zr}(r, z=0, \omega, t) = 0; \quad \sigma_{z\varphi}(r, z=0, \omega, t) = 0; \quad \sigma_{zz}(r, z=0, \omega, t) = 0 \quad (1.48)$$

Dies muß wiederum für alle t , ω und r erfüllt sein. Für $\sigma_{z\varphi}$ ist die Bedingung immer erfüllt. Verlegt man nun die Quelle an die Oberfläche ($z_q \rightarrow 0$), so lassen sich die anderen beiden Randbedingungen wie folgt ausdrücken:

$$\begin{aligned}
(u^2 - b^2) (A^u + A^r) + 2i\omega u^2 b (B^u - B^r) &= 0 \\
-2ia (A^u - A^r) - \omega (u^2 - b^2) (B^u + B^r) &= 0
\end{aligned}$$

Ähnlich der Gleichung (1.44) kann dies mit der Matrix (1.40) geschrieben werden:

$$\underline{\underline{M}} \vec{a}^r = \vec{a}^u \quad (1.49)$$

$$\vec{a}^r = \begin{pmatrix} A^r \\ B^r \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}^u = \begin{pmatrix} -M_{11} A^u + M_{12} B^u \\ M_{21} A^u - M_{22} B^u \end{pmatrix} \quad (1.50)$$

Daraus läßt sich das Feld am Empfänger bestimmen. Wird auch der Empfänger an die Oberfläche gesetzt, so erhält man für die Amplituden des Gesamtfeldes am Empfänger:

$$\vec{a}^g = \vec{a}^d + \underline{\underline{M}}^{-1} \vec{a}^u$$

$$\begin{aligned}
\vec{a}^g &= \begin{pmatrix} A^g \\ B^g \end{pmatrix} \\
\vec{a}^d &= \begin{pmatrix} A^d \\ B^d \end{pmatrix} \\
A^g &= \underbrace{A^d}_{=-A^u} + A^u + \frac{2M_{22}}{\det(\underline{M})} (M_{12}B^u - M_{11}A^u) \\
B^g &= \underbrace{B^d}_{=B^u} - B^u - \frac{2M_{21}}{\det(\underline{M})} (M_{12}B^u - M_{11}A^u) \\
(M_{12}B^u - M_{11}A^u) &= -u(u^2 + b^2)F = -u \frac{F}{\beta^2} = -u \frac{\rho}{\mu} F \\
&= -u \frac{F_0}{4\pi\mu} e^{i\omega t} \\
M_{22} &= -\omega (u^2 - b^2) \\
M_{21} &= 2ia \\
\det(\underline{M}) &= -\omega D(u)
\end{aligned}$$

Damit gelangt man zu exakt derselben Lösung wie in (1.46):

$$\begin{aligned}
\check{A}^g(u, z=0, \omega, t) &= A^g = -\frac{u^2 - b^2}{D(u)} u \frac{F_0}{2\pi\mu} e^{i\omega t} \\
\check{B}^g(u, z=0, \omega, t) &= B^g = -\frac{2ia}{\omega D(u)} u \frac{F_0}{2\pi\mu} e^{i\omega t}
\end{aligned} \tag{1.51}$$

1.5.5 Numerische Berechnung

Die Ausdrücke für die Verschiebungen (1.47) wurden im Rahmen der Diplomarbeit numerisch ausgewertet. Die Integrale über die horizontale Langsamkeit u wurden mit der Trapezregel berechnet. Die Konvergenz des Integranden wurde nicht näher untersucht. Brauchbare Ergebnisse wurden jedoch für obere Integrationsgrenzen erzielt, die etwas größer als die Rayleigh-Slowness waren. Abschneideeffekte äußern sich im Seismogramm durch Störphasen, die mit der Slowness der Integrationsgrenze vorwärts und rückwärts laufen. Um diese gering zu halten, wird der Integrand mit einer Fensterfunktion belegt, die ihn zur Abschneideslowness hin langsam auf 0 senkt. Außerdem ist die Schrittweite klein genug zu wählen, sonst werden die Pole durch die Trapezregel zu stark gewichtet. Doch auch bei kleiner Schrittweite wirken sich die reellen Nullstellen von $D(u)$ vernichtend auf die numerischen Ergebnisse aus. Es wird daher zu einem üblichen Trick gegriffen¹⁴: Die seismischen Geschwindigkeiten werden als komplexe Zahlen vorgegeben, deren Realteile die seismische Geschwindigkeit des Mediums sind. Das erzwingt in jedem Falle eine Dämpfung der Wellen. Man kann dies als verminderte Güte des Mediums betrachten. Daher rührt die Bezeichnung „Q-Faktor“ für die den Imaginärteil bestimmenden Größen. Die für die Numerik wesentliche Auswirkung dieses Kniffs liegt in der Verlagerung der Polstellen in die komplexe u -Ebene. Die Integration über die reelle Achse wird so an den Polen vorbeigeführt.

Die Verschiebung wurde für eine harmonische Anregung hergeleitet:

$$\begin{aligned}
\vec{f}_V(\omega, t) &= \hat{e}_z \delta(\vec{x}) F_0 e^{i\omega t} \\
\vec{u}(\omega, t) &= \vec{u}(\omega) e^{i\omega t}
\end{aligned}$$

Da hier ein lineares Problem behandelt wird, können ohne weiteres beliebige Anregungen und Lösungen superponiert werden:

$$\vec{f}_V(t) = \hat{e}_z \delta(\vec{x}) F_0 \underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{i\omega_k t}}_{=q(t)}$$

¹⁴Die Einführung einer Dämpfung wird in Abschnitt 2.3.3 auf Seite 48 noch ausführlicher beschrieben.

$$\vec{u}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \tilde{u}(\omega_k) e^{i\omega_k t}$$

Bei der numerischen Berechnung liegen alle Zeitserien diskret abgetastet vor: $q_k = q(k\Delta t)$. Damit läßt sich über die diskrete Fouriertransformation leicht eine Lösung für beliebige Quellfunktionen erzeugen:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} q_l e^{-i2\pi lk/N} \\ \vec{f}_{Vl} &= \hat{e}_z \delta(\vec{x}) F_0 \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{i2\pi lk/N} \\ \vec{u}(l \Delta t) &= \sum_{k=0}^{N-1} c_k \tilde{u}\left(\frac{2\pi k}{N \Delta t}\right) e^{i2\pi lk/N} \end{aligned} \quad (1.52)$$

Dabei ist N die Anzahl der Abtastwerte und Δt das Abtastintervall in [s].

Zuletzt gilt es die Einheiten zu überprüfen. Werden die Geschwindigkeiten in $\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$, die Langsamkeiten in $\left[\frac{\text{s}}{\text{m}}\right]$, die Kraft in $\left[\frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}\right]$, das Schermodul $\mu = \rho\beta^2$ in $\left[\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right] \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]^2$ und die Frequenzen in $\left[\frac{1}{\text{s}}\right]$ gegeben, so erhält man nach den Gleichungen (1.47) für die Verschiebungen:

$$u \left[\frac{\frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}}{\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} \frac{1}{\text{s}} \left(\frac{\text{s}}{\text{m}}\right)^2 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^4 \left(\frac{\text{s}}{\text{m}}\right)^2 \frac{\text{s}}{\text{m}} \right] = u [10^{-3} \text{ m}]$$

1.6 Eigenschwingungen und Oberflächenwellen

1.6.1 Eine geeignete Zerlegung von \vec{u}

Zur Behandlung von Oberflächenwellen löst man die Bewegungsgleichung (1.3) direkt durch einen Separationsansatz für die Verschiebung \vec{u} . Im Falle eines geschichteten Mediums (Schichtgrenzen in Ebenen senkrecht zur z -Achse) separiert man in geeigneter Weise in eine rein z -abhängige und eine rein horizontal abhängige Funktion. Besserer [bes 96] hat gezeigt, daß folgender Ansatz ohne spezielle Wahl des horizontalen Koordinatensystems geeignet ist:

$$\vec{u}(x_1, x_2, x_3, t) = \left(g(x_3) \Phi(x_1, x_2) \hat{e}_3 + \frac{f(x_3)}{ik} \text{grad } \Phi(x_1, x_2) + h(x_3) (\hat{e}_3 \times \text{grad } \Phi(x_1, x_2)) \right) e^{i\omega t}$$

Die Funktion Φ hängt explizit nur von den Horizontalkoordinaten (hier stellvertretend x_1 und x_2) ab.

Diese Separation führt auf folgendes System von Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \Delta \Phi + k^2 \Phi &= 0 \\ \mu f'' + ik(\lambda + \mu) g' + (\rho\omega^2 - (\lambda + 2\mu)k^2) f &= 0 \\ (\lambda + 2\mu) g'' + ik(\lambda + \mu) f' + (\rho\omega^2 - \mu k^2) g &= 0 \\ \mu h'' + (\rho\omega^2 - \mu k^2) h &= 0 \end{aligned}$$

Eine einfach gestrichene Funktion ist dabei die erste Ableitung nach x_3 , die zweifach gestrichenen Funktionen sind zweite Ableitungen nach x_3 .

An der Grenze zwischen zwei Medien müssen die Stetigkeit der Verschiebungen und die Stetigkeit der Spannungen bezüglich der Grenzfläche als Randbedingungen verlangt werden. Werden die Funktionen in den beiden Medien zur Unterscheidung mit den Indizes A und B versehen, so schreiben sich die Randbedingungen wie folgt¹⁵:

$$\begin{array}{ll} \text{für die Spannungen:} & \text{für die Verschiebungen:} \\ ikg_A + f'_A = ikg_B + f'_B & f_A = f_B \\ ik\lambda f_A + (\lambda + 2\mu) g'_A = ik\lambda f_B + (\lambda + 2\mu) g'_B & g_A = g_B \\ h'_A = h'_B & h_A = h_B \\ \Phi_A = \Phi_B & \end{array} \quad (1.53)$$

¹⁵Die Funktionswerte sind jeweils für die Tiefe der Schichtgrenze zu nehmen.

Das Problem zerfällt also bezüglich der Differentialgleichungen und der Randbedingungen in drei Teile.

Als Lösungen für die Horizontal-Funktion Φ ergeben sich in kartesischen Koordinaten ebene Wellen und in Zylinderkoordinaten Besselfunktionen. k ist in beiden Fällen Eigenwert in der Helmholtz-Gleichung und damit die horizontale der Wellenzahl.

Das Problem für h führt auf die Lösungen für Love-Wellen. In der Terminologie für ebene Wellen handelt es sich um horizontal und senkrecht zur horizontalen Ausbreitungsrichtung polarisierte Wellen.

Das Problem für f und g führt zu Rayleigh-Wellen. Diese sind in einer vertikalen Ebene entlang der Ausbreitungsrichtung polarisiert.

Besserer [bes 92] gibt folgende Lösungen für die vertikalen Differentialgleichungen an:

$$\begin{aligned} f(z) &= -ikp A_1 e^{pz} + ikp A_2 e^{-pz} - k^2 A_3 e^{qz} - k^2 A_4 e^{-qz} \\ g(z) &= k^2 A_1 e^{pz} + k^2 A_2 e^{-pz} - ikq A_3 e^{qz} + ikq A_4 e^{-qz} \\ h(z) &= B_1 e^{qz} + B_2 e^{-qz} \\ p^2 &= k^2 - \frac{\omega^2}{\alpha^2}; \quad q^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{\beta^2} \end{aligned} \quad (1.54)$$

p und q dürfen positiv reell oder positiv imaginär sein. Dabei darf p/i als vertikale Wellenzahl von Kompressionswellen, q/i als vertikale Wellenzahl von Scherwellen verstanden werden. α und β sind die bereits eingeführten seismischen Geschwindigkeiten.

1.6.2 Eigenschwingungen eines geschichteten Mediums

Die Koeffizienten A_1, A_2, A_3, A_4 und B_1, B_2 werden aus den Randbedingungen bestimmt. Dies soll nun allgemein für ein Modell mit N Schichten zwischen einer freien Oberfläche und einem in positiver z -Richtung unendlich ausgedehnten Halbraum betrachtet werden.

An der freien Oberfläche erhält man nur Randbedingungen für die Spannungen, da die Verschiebungen beliebig sein können (so ist die freie Oberfläche definiert). An jeder Schichtgrenze erhält man Anschlußbedingungen für die Spannungen und die Verschiebungen. Damit erhält man $2N + 1$ Gleichungen für Love-Wellen und $4N + 2$ Gleichungen für Rayleigh-Wellen.

Dem ist die Zahl der unbekannt Parameter gegenüber zu stellen. Für die Lösungen im Halbraum werden die Terme als unphysikalisch ausgeschlossen, die exponentiell mit der Tiefe zunehmen ($A_1 = A_3 = B_1 = 0$). Damit erhält man für Love-Wellen $2N + 1$ unbekannte Koeffizienten und für Rayleigh-Wellen $4N + 2$. Die Lösungen (1.54) in die Randbedingungen (1.53) eingesetzt ergeben homogene, lineare Gleichungssysteme:

$$\underline{\underline{M}}_R \vec{A} = \vec{0} \quad \underline{\underline{M}}_L \vec{B} = \vec{0}$$

Der Vektor \vec{A} enthält alle $4N + 2$ Koeffizienten der Rayleigh-Wellen, der Vektor \vec{B} alle $2N + 1$ Koeffizienten des Love-Wellen-Systems.

Die angegebenen Gleichungssysteme haben nichttriviale Lösungen, wenn die Determinanten ihrer Matrizen verschwinden. Die Determinanten der Matrizen hängen jedoch von ω und k ab. Auf diese Weise werden Paare für Frequenz und horizontale Wellenzahl bestimmt, bei denen das geschichtete Medium Eigenschwingungen besitzt:

$$\det \left(\underline{\underline{M}}_R(\omega, k) \right) = 0; \quad \det \left(\underline{\underline{M}}_L(\omega, k) \right) = 0$$

Für den Fall einer einzelnen Schicht über dem Halbraum wurde die Rayleigh-Determinante $\det(\underline{\underline{M}}_R)$ von S. Müller [mül 57] explizit angegeben und berechnet. Bereits für diesen einfachen Fall werden die Ausdrücke ungeheuer komplex und unhandlich. Die Behandlung von Fällen mit mehr Schichten bleibt daher der Numerik vorbehalten.

Betrachtet man den einfachen Fall eines Halbraumes ohne überlagerte Schicht, so ergibt die Randbedingung an der freien Oberfläche für das Love-Problem: $B_1 = B_2$. Damit sind die Koeffizienten noch nicht bestimmt. Verlangt man $B_2 = 0$, um die exponentiell wachsende Lösung zu vermeiden, so können in diesem Sinne keine Eigenschwingungen auftreten. Für das Rayleigh-Problem erhält man jedoch eine

Bedingung für das Verschwinden der Rayleigh-Determinante, die in diesem Fall jedoch nur noch von k/ω abhängt. Für einen bestimmten festen Wert von $k/\omega = u_R$ sind Eigenschwingungen möglich. Das bedeutet, daß die Eigenschwingungen alle mit ein und derselben horizontalen Phasengeschwindigkeit auftreten. Ein Vergleich mit $D(u)$ in Abschnitt 1.5.2 auf Seite 27 zeigt dort das gleiche Verhalten.

Für komplexere Medien mit mehr Schichten gibt es mehrere Dispersionskurven, die eine Kombination von Werten für ω und k bestimmen, bei denen Eigenschwingungen auftreten. Diese Dispersionskurven bezeichnet man als „Modenäste“¹⁶, die definitionsgemäß mit zunehmender Frequenz durchnummeriert werden. Die Mode kleinster Frequenz wird für jedes k als „Fundamentalmode“ bezeichnet. Der Umstand, daß sich kontinuierliche Dispersionskurven ergeben, hängt ursächlich mit der fehlenden Randbedingung in horizontaler Richtung zusammen. Ein begrenztes Medium (zum Beispiel eine kugelförmige Erde) besitzt nur noch diskrete Paare von ω und k , für die Eigenschwingungen möglich sind. In diesem Fall bekommt die Verbindung der Eigenschwingungen zu Modenästen einen etwas willkürlichen Charakter. Ein Beispiel für die Willkür, die darin liegt, Modenäste einander zuzuordnen, wird in Abschnitt 4.5.4 auf Seite 98 diskutiert.

1.6.3 Oberflächenwellen

Oberflächenwellen sind ihrer Definition nach Wellen, die auf den oberflächennahen Bereich beschränkt sind, das heißt, sie sollen spätestens im Halbraum exponentiell mit der Tiefe abklingen. Dies ist für Eigenschwingungen der Fall, für die $k\omega > 1/\beta_H$ gilt, wenn β_H die Scherwellenschwindigkeit des Halbraumes ist. Läßt man von den Dispersionskurven der Eigenschwingungen nur den Teil zu, für den die Bedingung erfüllt ist, so gibt es zu jeder Oberflächenwellen-Mode (außer der Fundamentalmode) ein kleinste Frequenz, bei der sie noch in Erscheinung treten kann.

Natürlich gibt es auch Eigenschwingungen für ω - k -Paare, für welche die Verschiebung in zwei Medien in vertikaler Richtung abklingt. Für diesen Bereich können Wellen auftreten, die auf die Umgebung der Grenzschicht zwischen den Medien beschränkt bleiben. Stoneley [sto 56] hat diese Grenzschichtwellen beschrieben. In diesem Sinne können auch die Oberflächenwellen als spezieller Typ einer Grenzschichtwelle verstanden werden.

Mit der Bedingung exponentiell mit der Tiefe abklingender Verschiebungen bekommt der Halbraum einen realistischen Charakter. Klingen die Wellen bereits in einer begrenzten Schicht exponentiell ab, so bleiben die unter ihr liegenden Schichten, je nach ihrer Dicke und der Eindringtiefe der Welle, wirkungslos im Vergleich zum Hintergrundrauschen. Man kann diese Schicht dann bereits als unendlich ausgedehnten Halbraum auffassen.

Für den Bereich $k\omega < 1/\alpha_H$ oszillieren die vertikalen Eigenfunktionen im Halbraum. Dies kann man als die Ausbreitung von Raumwellen verstehen. In diesem Sinne entstehen auch die Oberflächenwellen in den oberen Teilen des Schichtpaketes als Überlagerung von Raumwellen. In einem Zwischenbereich $1/\beta_H < k\omega < 1/\alpha_H$ oszilliert der Eigenfunktionsterm zu A_4 , während der Term zu A_2 exponentiell abklingt. In diesen Bereich fallen die sogenannten „Leaking Modes“, die zwar bezüglich der Oberflächenwelle verlustbehaftet sind, aber trotzdem als Eigenschwingungen noch mit großen Amplituden im Seismogramm auftreten können.

1.6.4 Verbindung zu den vorangegangenen Kapiteln

Hier soll nun ein Vergleich hergestellt werden zwischen der erläuterten Theorie der Oberflächenwellen und der zuvor durchgeführten Behandlung des seismischen Problems anhand der Raumwellenpotentiale. Wie bereits in Abschnitt 1.3.3 auf Seite 18 beschrieben, zerfällt das mit den Raumwellenpotentialen formulierte Problem bezüglich der Randbedingungen ebenso in das Lovesche und das Rayleighsche Problem. Wird die allgemeine Lösung der homogenen Wellengleichungen in die Randbedingungen eingesetzt, so erhält man wiederum ein lineares Gleichungssystem (vergleiche Gleichung (1.39)). Auch dort muß die Determinante der Matrix verschwinden, damit nichttriviale Lösungen möglich sind. Daraus erhält man (bis auf einen Faktor) die Rayleighsche und die Lovesche Determinante, die von k und ω abhängen und deren Nullstellen die freien Eigenschwingungen bestimmen. Bei der Lösung des inhomogenen Problems (also mit einer seismischen Quelle) treten die Determinanten im Nenner der Bestimmungsgleichung für die Entwicklungskoeffizienten auf, wie bereits in (1.46) dargestellt wurde. Dies hat zur Folge, daß die

¹⁶Siehe dazu auch die Abbildungen in Abschnitt 2.4 auf Seite 60.

Eigenschwingungen des Systems in Seismogrammen mit sehr großen Amplituden in Erscheinung treten. Man kann es auch als Eigenschaft einer Eigenschwingung verstehen, daß sie ohne Anregung bestehen kann und durch eine zeitharmonische Quelle zu unbegrenzt anwachsenden Amplituden angeregt wird.

1.6.5 Dispersion

In der Theorie der Raumwellen in einem homogenen Medium tritt keine Dispersion in Erscheinung. Es treten nur die beiden konstanten Phasengeschwindigkeiten für Kompressionswellen (α) und Scherwellen (β) auf. Deren Beträge und die der zugehörigen Langsamkeiten sind frequenzunabhängig. Für das Auftreten von Oberflächenwellen gibt es jedoch, wie oben dargestellt, eine klare Beziehung zwischen den der horizontalen Wellenzahl k beziehungsweise der horizontalen Langsamkeit u und der Frequenz der Wellen:

$$k = k(\omega) \quad ; \quad u = u(\omega)$$

Die Langsamkeit und die Phasengeschwindigkeit der Oberflächenwellen sind also frequenzabhängig. Diese Erscheinung bezeichnet man als Dispersion. Am auffälligsten äußert diese sich darin, daß breitbandige Impulse nicht ihre Form erhaltend propagieren, sondern mit zunehmender Quelledistanz auseinanderlaufen. Dies führt zu langgestreckten Oberflächenwellenzügen in den Seismogrammen.

Phasengeschwindigkeit

Sei $Q(x, t)$ eine beliebige ebene Welle:

$$Q(x, t) = Q(x - ct)$$

Einen festen Punkt der Kurve (eine Phase) kann man für konstante Werte des Arguments von Q verfolgen. Daraus ergibt sich die Phasengeschwindigkeit v_{ph} der Welle:

$$\begin{aligned} x - ct &= \text{const} \Rightarrow x = \text{const} + ct \\ v_{ph} &= \dot{x} = c \end{aligned}$$

Für eine harmonische Welle gilt:

$$\begin{aligned} Q(x, t) &= A e^{i(kx - \omega t)} \\ v_{ph} &= \frac{\omega}{k} \end{aligned}$$

Gruppengeschwindigkeit

Bei schmalbandigen Signalen tritt auch im Zusammenhang mit Dispersion der Effekt auf, daß an ihrer Form identifizierbare Signalgruppen mit einheitlicher Geschwindigkeit propagieren, die jedoch nicht der Phasengeschwindigkeit entspricht. Sie behalten dabei ihre Form weitgehend bei. Die Geschwindigkeit mit der diese Wellengruppen propagieren bezeichnet man als Gruppengeschwindigkeit.

Betrachtet werden soll ein aus einem schmalbandigen Bereich harmonischer Wellen aufgebautes Wellenpaket Q :

$$Q(x, t) = A \int_{-\infty}^{+\infty} c(k) e^{i(kx - \omega t)} dk$$

Die Dispersionsbeziehung läßt sich in eine Reihe entwickeln:

$$\omega(k) = \omega(k_0) + (k - k_0) \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} + \frac{1}{2} (k - k_0)^2 \left. \frac{d^2\omega}{dk^2} \right|_{k_0} + \dots$$

Das Signal sei schmalbandig, das heißt, die $c(k)$ seien nur in einem kleinen Bereich um k_0 von 0 verschieden. Berücksichtigt man für ω nur Terme bis zur ersten Ordnung, so erhält das Wellenpaket

folgende Form:

$$\begin{aligned}
 Q(x, t) &= A \int_{-\infty}^{+\infty} c(k) e^{i \left(kx - \omega(k_0)t - k \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} t + k_0 \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} t \right)} dk \\
 &= A \underbrace{e^{i \left(k_0 \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} - \omega(k_0) \right) t}}_{\substack{\text{reiner Phasenfaktor; } \\ \text{Betrag} = 1; \text{ nicht} \\ \text{ortsabhängig}}} \int_{-\infty}^{+\infty} c(k) \underbrace{e^{i \left(x - \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} t \right) k}}_{\substack{\text{Zeit- \& Orts-} \\ \text{abhängigkeit} \\ \text{des Signals}}} dk
 \end{aligned}$$

Eine Definition der Gruppengeschwindigkeit v_{gr} erhält man aus dem Argument der Exponentialfunktion unter dem Integral. Für konstante Werte dieses Arguments verfolgt man einen Punkt konstanter Amplitude innerhalb der Wellengruppe.

$$\begin{aligned}
 x - \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} t &\stackrel{!}{=} \text{const} \\
 v_{gr} &= \dot{x} = \frac{d\omega}{dk}
 \end{aligned}$$

Damit lassen sich folgende Zusammenhänge zwischen Gruppen- und Phasengeschwindigkeit ableiten und zwischen den entsprechenden Langsamkeitswerten:

$$\begin{aligned}
 v_{gr} &= v_{ph} + k \frac{dv_{ph}}{dk} \\
 s_{gr} &= s_{ph} + \omega \frac{ds_{ph}}{d\omega}
 \end{aligned} \tag{1.55}$$

Da die Gruppengeschwindigkeit quasi das Fortschreiten der Hüllkurve des Signals beschreibt, ist sie die wesentliche Größe zur Beschreibung der Energieausbreitung in einem dispergierenden Medium.

Kapitel 2

Numerische Methoden

2.1 Modelle aus Laufzeitkurven

Die ersten Einsätze in einem Seismogramm werden in der Regel von nicht dispergierten, hochfrequenten Raumwellen gebildet. Der Ausbreitung dieser Wellen kann man, wie auch in der Optik, eine Strahlenvorstellung zugrunde legen. In einem Medium aus homogenen Schichten geht man davon aus, daß sich die Wellen innerhalb der Schichten geradlinig auf Strahlen ausbreiten, welche an den Schichtgrenzen gebrochen oder reflektiert werden.

Bei der Lösung der elastischen Wellengleichung sind die Randbedingungen an der Grenzschicht für Reflexion und Brechung verantwortlich. Aus den Darstellungen des ersten Kapitels ist deutlich geworden, daß an einer Grenzschicht mehrere Wellentypen miteinander koppeln. Hier sollen jedoch nur Wellen eines Typs betrachtet werden. Entlang eines Strahls soll eine P-Welle eine P-Welle bleiben, dasselbe gilt für S-Wellen. Um eine Vorstellung für das gesamte Seismogramm zu erhalten, müssen alle Konversionen von S nach P und zurück und alle Mehrfachreflexionen mitberücksichtigt werden. Für das Verständnis der Ersteinsätze in den Seismogrammen ist dies jedoch nicht notwendig.

In Abbildung 2.1 ist eine Montage synthetischer Seismogramme eines fiktiven Modells (siehe Tafel 2.1) mit den zugehörigen Laufzeitkurven der P-Wellen abgebildet. Die geraden Laufzeitkurven stammen von der direkten Welle und den refraktierten Wellen. Die reflektierten Wellen liegen auf hyperbelähnlichen Kurven. Das Modell wurde so präpariert, daß die reflektierten Wellen möglichst gut zu erkennen sind. In realen Daten ist es jedoch ohne aufwendige Signalverarbeitungsmethoden praktisch unmöglich die reflektierten Wellen auszuwerten, da sie in den Zeitbereich der Oberflächenwellen fallen.

2.1.1 Das Brechungsgesetz für seismische Wellen

Das Brechungsgesetz für die Strahlen läßt sich unmittelbar aus (1.53) ableiten. Die Randbedingungen an einer Schichtgrenze verlangen, daß die horizontale Wellenfunktion in beiden Schichten identisch ist und damit auch die Horizontalkomponenten der Langsamkeiten gleich sind. Ist γ der Winkel des Strahls zum Lot und c die Phasengeschwindigkeit der Welle, so ergibt sich die Horizontalkomponente der Langsamkeit

Geschwindigkeitsmodell:

z_i m	α [$\frac{\text{km}}{\text{s}}$]	β [$\frac{\text{km}}{\text{s}}$]
0	1.0	0.577
20	1.5	0.866
60	3.2	2.100

Tafel 2.1: Geschwindigkeitsmodell der synthetischen Daten als Beispiel für die Auswertung von Laufzeitkurven

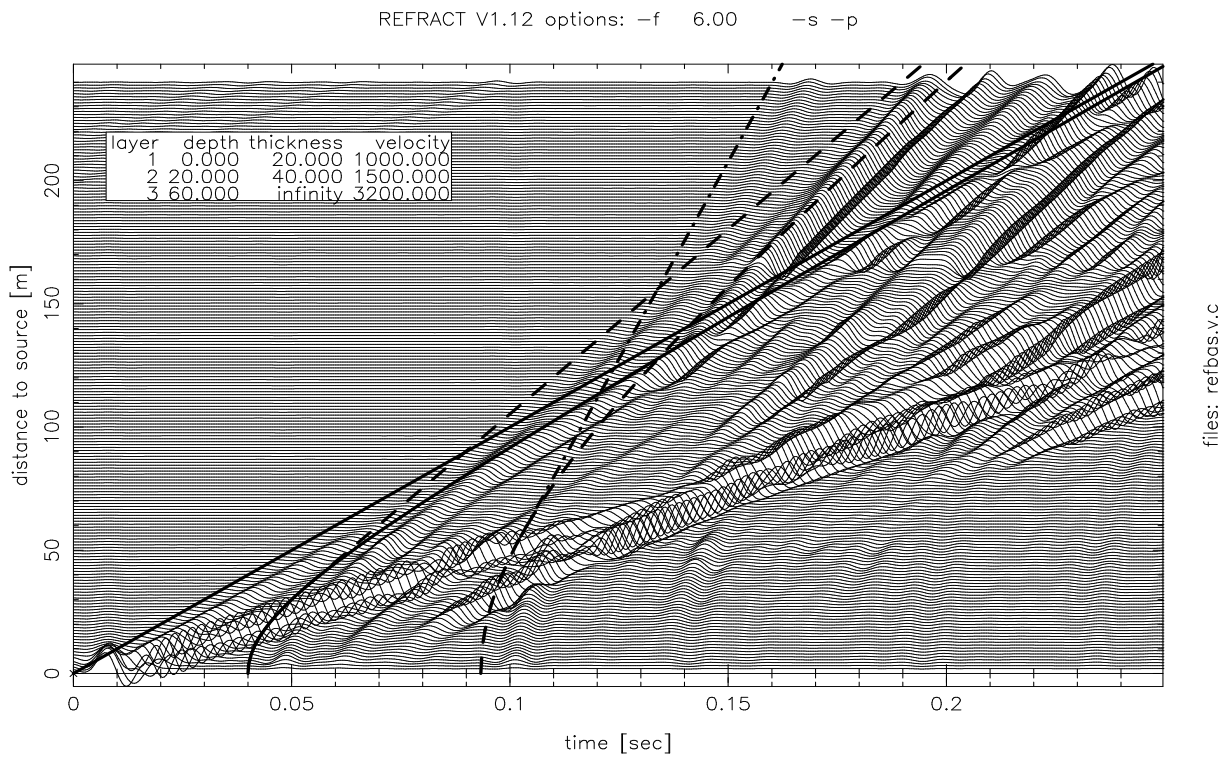


Abbildung 2.1: synthetische Seismogramme als Beispiel für die Auswertung von Laufzeitkurven

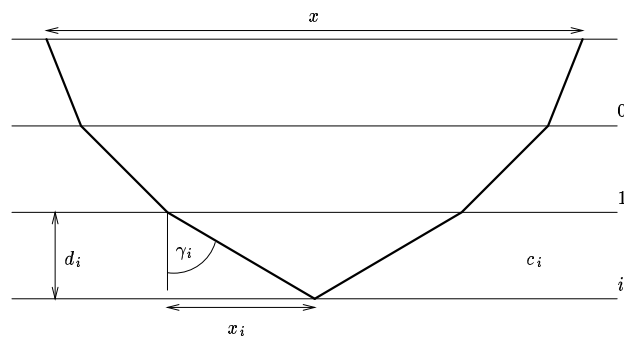


Abbildung 2.2: reflektierter Strahl in einem geschichteten Medium

wie folgt:

$$u = \frac{\sin \gamma}{c} = \text{const}$$

Die Horizontalkomponente u bleibt über den ganzen Strahl konstant und wird daher auch als „Strahlparameter“ bezeichnet. Diese Bezeichnungweise ist jedoch nur in dem Bereich zulässig, in dem das Strahlenkonzept gültig ist. Im Sinne der Strahlenausbreitung kann die horizontale Langsamkeit nie größer werden als $1/c$, die Länge des Langsamkeitsvektors. Bisher wurden jedoch auch wesentlich größere Werte für u betrachtet. Bei der Entwicklung nach Lösungen der homogenen Wellengleichung wurde sogar bis $u \rightarrow \infty$ integriert. Der Betrag des Langsamkeitsvektors bleibt dort nur erhalten, weil die vertikale Langsamkeit imaginär wird und die Wellen in vertikaler Richtung abklingen. In diesem Bereich sind die Grenzen des Strahlenkonzepts weit überschritten.

Aus der Einsicht, daß die Horizontalkomponente auf einem Strahl über alle Schichtgrenzen hinweg konstant bleiben muß, folgt unmittelbar die Forderung, daß bei einer Reflexion Einfallswinkel und Ausfallswinkel gleich groß sein müssen. Für die Brechung eines Strahles verhalten sich Lotwinkel und Schichtgeschwindigkeiten nach dem Snelliusschen Brechungsgesetz wie folgt:

$$\frac{\sin \gamma_1}{c_1} = \frac{\sin \gamma_2}{c_2}$$

2.1.2 Reflektierte Wellen

Abbildung 2.2 zeigt einen Strahl, der durch ein geschichtetes Medium hindurchgeht und an der untersten Schichtgrenze reflektiert wird. Die Schichten werden von der Oberfläche an gezählt, beginnend mit dem Index 0. Das Medium in der Darstellung besitzt mit der Tiefe zunehmende Schichtgeschwindigkeiten. Daher wird der Strahl in jeder Schicht vom Lot weggebrochen. Dies entspricht dem Regelfall eines realistischen Mediums.

Die Laufzeitkurve für eine am Boden der Schicht n reflektierte Welle läßt sich berechnen, indem man zu einem beliebigen Strahlparameter u die Auslagendistanz x des auftauchenden Strahles und die Gesamtlaufzeit T der dazugehörigen Welle berechnet:

$$x = 2 \sum_{i=0}^N x_i = 2 \sum_{i=0}^N d_i \sqrt{\frac{1}{\frac{c_i^2}{u^2} - 1}}$$

$$T = 2 \sum_{i=0}^N T_i = 2 \sum_{i=0}^N \frac{d_i}{c_i} \sqrt{\frac{1}{1 - c_i^2 u^2}}$$

Für große Strahlparameter (flach eintauchende Wellen) geht die Laufzeitkurve asymptotisch in eine Gerade über, die der Ausbreitungsgeschwindigkeit c_N entspricht.

2.1.3 Refraktierte Wellen

Für den Fall $u = 1/c_N$ wird der Strahl beim Eintritt in die Schicht N parallel zur Schichtgrenze gebrochen. Dabei entsteht eine Kopfwelle in der Schicht N , die an jedem Punkt der Grenzfläche einen refraktierten Strahl unter dem kritischen Brechungswinkel $\gamma_{N-1} = \arcsin(c_{N-1}/c_N)$ nach oben abstrahlt. Dieses in Abbildung 2.3 dargestellte Phänomen ist mit der Strahlenvorstellung nicht mehr erklärbar und erfordert eine Wellenbetrachtung unter Berücksichtigung des Huygensschen Prinzips.

Die in einer Schicht kritisch refraktierte Welle ist erst ab einer bestimmten Auslagendistanz beobachtbar, nämlich erst nach Erreichen des kritischen Strahlparameters $u = 1/c_N$. Folgende Größen lassen sich für eine an der Decke der Schicht N refraktierten Welle angeben:

$$u = \frac{1}{c_N}$$

$$T = \frac{x}{c_N} + 2 \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{d_i}{c_i} \sqrt{1 - \frac{c_i^2}{c_N^2}} \right)$$

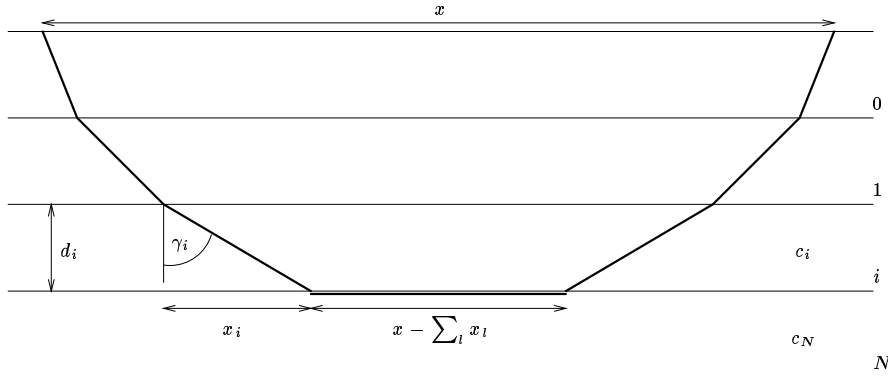


Abbildung 2.3: kritisch refraktierter Strahl in einem geschichteten Medium

$$T_0 = 2 \sum_{i=0}^{N-1} T_i = 2 \sum_{i=0}^{N-1} \frac{d_i}{c_i} \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{c_i^2}{c_N^2}}}$$

$$x_0 = 2 \sum_{i=0}^{N-1} x_i = 2 \sum_{i=0}^{N-1} \frac{d_i}{\sqrt{\frac{c_N^2}{c_i^2} - 1}}$$

Dabei ist T die Gesamtlaufzeit zur Auslagendistanz x . x_0 ist die Auslagendistanz bei der die refraktierte Welle erstmals beobachtet werden kann. Sie geht dort tangential aus der Laufzeitkurve der am Boden der Schicht $N - 1$ reflektierten Welle hervor. T_0 ist die Laufzeit zur Auslage x_0 .

Aus der Formel für die Laufzeitkurve wird deutlich, daß die Ersteinsätze im Seismogramm¹ auf einem Polygonzug liegen, dessen zugeordnete Scheingeschwindigkeit der Wellen entlang der Oberfläche abschnittsweise immer größer wird. Schichten, deren seismische Geschwindigkeiten geringer sind als die der darüber liegenden (sogenannte „low-velocity-layers“), können nicht gesehen werden, da von ihnen keine refraktierten Wellen abgestrahlt werden. Jeder gerade Abschnitt des Polygonzuges entspricht der seismischen Geschwindigkeit der nächsten schnelleren Schicht. Unter Annahme mit der Tiefe monoton zunehmender Schichtgeschwindigkeiten lassen sich so die Dicken der einzelnen Schichten aus dem Polygonzug mit folgender Rekursion bestimmen:

$$d_0 = \frac{1}{2} \left(T - \frac{x}{c_1} \right) \frac{c_0}{\sqrt{1 - \frac{c_1^2}{c_0^2}}}$$

$$d_N = \frac{1}{2} \left[T - \frac{x}{c_{N+1}} - 2 \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{d_i}{c_i} \sqrt{1 - \frac{c_i^2}{c_{N+1}^2}} \right) \right] \frac{c_N}{\sqrt{1 - \frac{c_{N+1}^2}{c_N^2}}}$$

Die Laufzeitwerte x und T müssen dem Stück des Polygonzuges entnommen werden, welches der Schicht $N + 1$ zugeordnet wird und die Geschwindigkeit c_{N+1} abbildet. Die Geschwindigkeit c_0 entspricht der Geschwindigkeit der direkten Welle (nicht Oberflächenwelle), die an der Decke der Schicht 0 entlangläuft. Die Werte x und T für den Rekursionsstart müssen dem zweiten Element des Polygonzuges (Index 1) entnommen werden. In der Praxis ist es am günstigsten, einfach die Knickpunkte des Polygonzuges aus der Seismogramm-Montage abzulesen und entlang dieser die Rekursion durchzuführen.

¹Sie werden durch die refraktierten Wellen gebildet, da diese im schnelleren Medium die langsamer propagierenden reflektierten Wellen „überholen“.

2.2 Dispersionsanalyse

Zur Untersuchung der in Seismogrammen enthaltenen Oberflächenwellen wurde nach einer Vorlage von E. Wielandt das Programm `disan.f` erstellt. Dieses führt eine Dispersionsanalyse nach der Vorstellung von ebenen Wellen durch.

2.2.1 Das Verfahren

Die Analyse der seismischen Verschiebung $\vec{u}(r, t)$ geht von einer Darstellung der gemessenen Wellenzüge nach harmonischen, ebenen Wellen aus:

$$\vec{u}(r, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \vec{A}(\omega, u) e^{i\omega(t-ur)} du d\omega$$

Dabei wird vorausgesetzt, daß alle beobachteten Signale von der Quelle ($r = 0$) fort laufen ($u > 0$).

Ein Seismogramm zu einer bestimmten Langsamkeit u erhält man, indem alle N seismischen Spuren entsprechend ihrer Auslagendistanz und der untersuchten Slowness verschoben und gestapelt werden. Signale die mit einer anderen Slowness propagieren mitteln sich dann heraus. In der Spur bleibt einzig das Signal mit der Slowness u erhalten:

$$\begin{aligned} \vec{u}(u, t) &= \sum_{j=1}^N \vec{u}(r_j, t + ur_j) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \vec{A}(\omega, u) e^{i\omega t} \underbrace{\sum_{j=0}^N e^{i\omega r_j (u-u')}}_{\approx \begin{cases} N & \text{für } u = u' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}} du' d\omega \\ &\approx \int_{-\infty}^{+\infty} N \vec{A}(\omega, u) e^{i\omega t} d\omega \end{aligned} \quad (2.1)$$

Die Analyse nach Frequenzen erfolgt über eine gewöhnliche diskrete Fouriertransformation. Auf diese Weise werden die Entwicklungskoeffizienten für ebene Wellen zugänglich gemacht, die dem gemessenen Wellenfeld entsprechen würden.

Das Stapel-Verfahren wurde gewählt, da die Meßwerte in der Auslagendistanz r , im Gegensatz zur Zeit t , in der Regel nicht äquidistant abgetastet werden.

2.2.2 Grenzen der Auflösung

Für den Fall äquidistanter Abtastung in r und u geht der mit der geschweiften Klammer gefaßte Ausdruck in (2.1) in die Form für eine diskrete Fouriertransformation über. In diesem Fall kann zu jedem ω ein kleinstes auflösbares Δu und ein maximal eindeutig darstellbares u_{\max} angegeben werden. Dies läßt sich aus den bekannten Werten für eine Transformation nach der Wellenzahl k ableiten. Es läßt sich aber auch direkt ein Eindruck vom Verhalten des Ausdrucks gewinnen.

Betrachtet man die Werte der einzelnen Summanden, so wandern diese mit wachsendem r_j über den Einheitskreis in der komplexen Ebene. Wird der Kreis geschlossen oder mehrmals durchlaufen, so heben sich die einzelnen Summanden auf, die Summe ist annähernd 0. Der Bereich in dem keine eindeutige Auslöschung der Summanden erfolgt, ist

$$\Delta u = \frac{2\pi}{\omega r_{\max}} = \frac{1}{\nu r_{\max}}$$

und ist als Unschärfe von u zu beobachten.

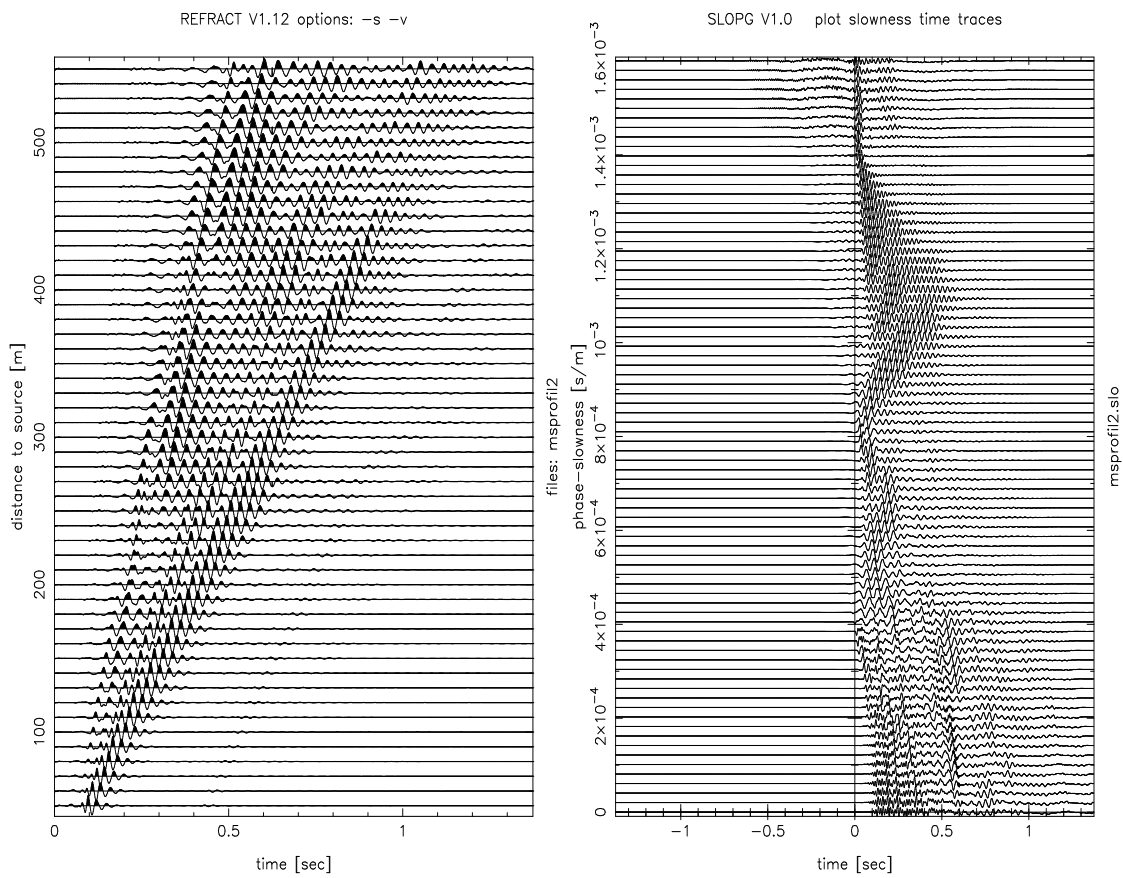


Abbildung 2.4: Dispersionsanalyse eines Profils aus der Modellseismik (Slowness-Darstellung)

Für

$$u - u' = \frac{2\pi}{\omega \Delta r}$$

ist ein Wert erreicht, bei dem alle Summanden den gleichen Wert haben (wie für $u = u'$) und sich somit wieder verstärken. Dies ist der gewöhnliche Aliasingeffekt. Ab diesem Wert von $u - u'$ kann ein Faktor

$$e^{2\pi i \frac{r_j}{\Delta r}} = 1 \quad \forall r_j$$

abgespalten werden. Damit läßt sich die Aliasing-Grenze angeben:

$$u_{\max} = \frac{2\pi}{\omega \Delta r} = \frac{1}{\nu \Delta r}$$

2.2.3 Ein Beispiel

In Abbildung 2.4 auf Seite 44 ist eine Seismogramm-Montage und eine daraus gewonnene Darstellung von „Slowness-Seismogrammen“ dargestellt. Die Daten stammen aus Modellseismik-Experimenten von F. Ruff [ruf 93]. Die Auslagendistanzen und Abtastintervalle wurden für diese Untersuchungen auf Dimensionen der Flachseismik skaliert. Die Zeit-Nulllinie der Langsamkeitsdarstellung entspricht dem Zeitpunkt, zu dem die Signale auftreten müßten, wenn sie sich exakt mit der Phasengeschwindigkeit $1/u$ ausbreiten würden. Das Eintreffen der Signale wird jedoch durch die Gruppengeschwindigkeit bestimmt. In einem geschichteten Medium konzentrieren sich die Oberflächenwellen mit zunehmender Frequenz auf die oberen

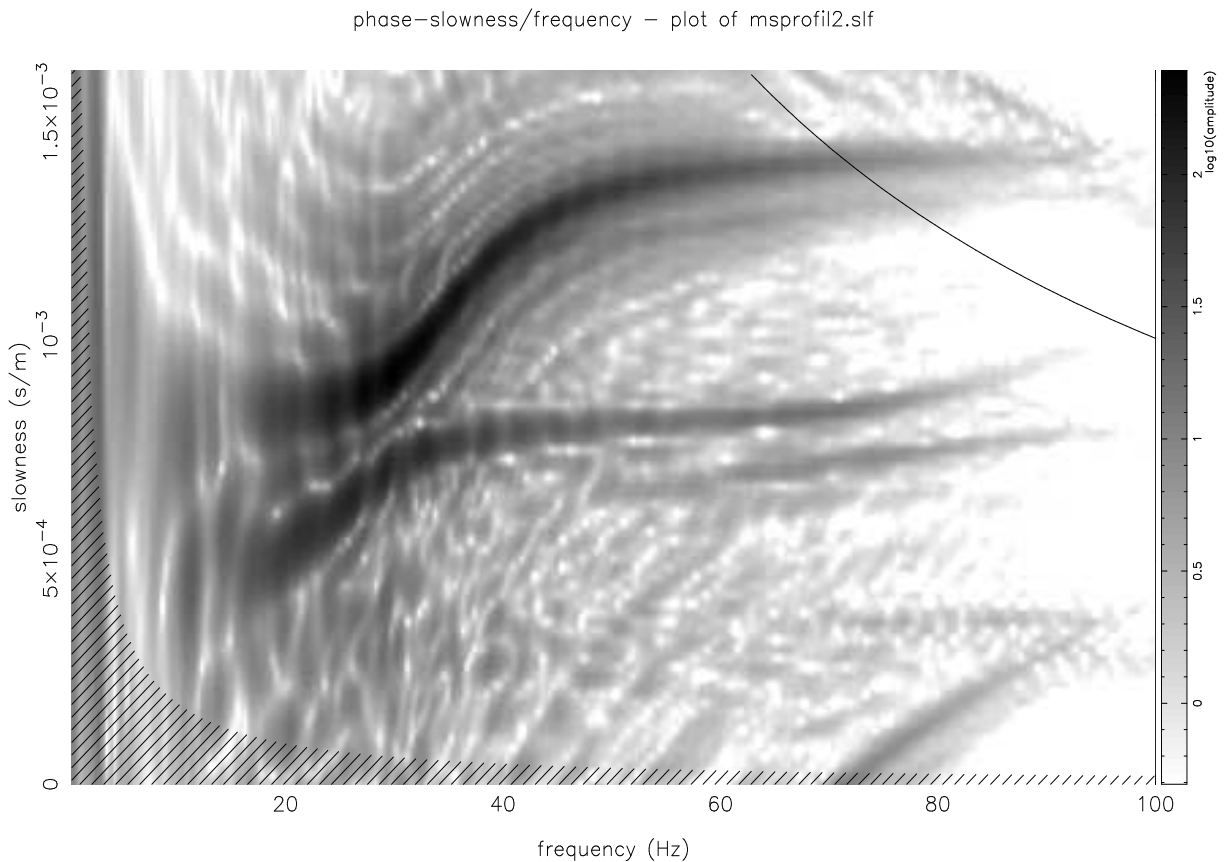


Abbildung 2.5: Dispersionsanalyse eines Profils aus der Modellseismik

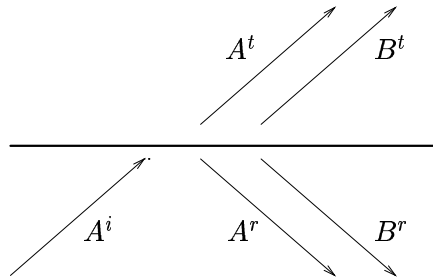


Abbildung 2.6: Zur Reflexion und Transmission an einer Schichtgrenze

(langsamen) Schichten; die Eindringtiefe nimmt mit der Wellenlänge ab. Damit nimmt die Phasengeschwindigkeit mit der Frequenz ab und nach Gleichung (1.55) ist die Gruppengeschwindigkeit immer kleiner oder gleich der Phasengeschwindigkeit. In der Slowness-Darstellung Abbildung 2.4 zeigen sich daher nichtdispertierte Signale kurz hinter der Nullmarke, dispartierte Signale erstrecken sich über einen großen Bereich hinter der Nullmarke und sind dementsprechend eher monochromatisch. Damit ist hier bereits die volle Information über das Dispersionsverhalten zu erkennen. In Bereichen großer Slowness treffen die Wellen zu früh ein. Dies ist genau die Art und Weise, in welcher sich Aliasing äußert.

In Abbildung 2.5 ist die endgültige Dispersionsanalyse dargestellt. Große Signalamplituden sind durch Schwärzung (logarithmische Skala) dargestellt. Deutlich sind die Dispersionskurven, auf denen Oberflächenwellen angeregt wurden, als dunkle Schatten zu erkennen. Der schraffierte Bereich gibt die prinzipiell mögliche Auflösung Δu an, während die durchgezogene Hyperbel die Aliasing-Grenze markiert. Am unteren Rand ist das Alias-Signal der Fundamentalmode zu erkennen.

2.3 Die Reflektivitätsmethode

In der Diplomarbeit wurden synthetische Seismogramme berechnet, um reale Daten zu modellieren. Dazu wurde die sogenannte „Reflektivitätsmethode“ eingesetzt. Es handelt sich dabei um ein sehr effizientes Verfahren, um unter starken Vereinfachungen für den Aufbau des Mediums in kurzer Zeit zu Seismogrammen zu gelangen, welche die volle Information über das Modellmedium enthalten. Wichtigste Voraussetzung für den Einsatz der Reflektivitätsmethode ist die Annahme eines Mediums, welches aus ebenen, horizontal gelagerten und in sich homogenen Schichten aufgebaut ist. Für die geologischen Situationen, wie man sie im Raum Stuttgart für die Flachseismik antrifft, sind dies brauchbare Näherungen.

Die Reflektivitätsmethode ist in allen Details in den Arbeiten von Müller [mül 85] und Ungerer [ung 90] dargestellt. In den folgenden Abschnitten soll daher nur ein grober Überblick über die Funktionsweise der Methode gegeben werden. Außerdem werden die Erweiterungen dargestellt, die speziell für die Behandlung von vertikalen Einzelkraftquellen in das Programm von Ungerer eingebaut wurden.

2.3.1 Funktionsweise

Die Reflektivitätsmethode macht davon Gebrauch, daß die Entwicklungskoeffizienten der Raumwellenpotentiale, wie sie in (1.18) angegeben sind, als Amplituden sich gerichtet ausbreitender Wellen verstanden werden können. Die in der homogenen Schicht durch eine Kraft angeregten Wellen lassen sich berechnen, wie in Abschnitt 1.4 auf Seite 20 beschrieben wurde. Diese propagieren an die Schichtgrenze, werden dort reflektiert beziehungsweise passieren sie und werden gebrochen. Für die Randbedingungen im P-SV-Fall werden vier Gleichungen an der Schichtgrenze gegeben. Damit lassen sich die Amplituden von vier ausfallenden Wellen bestimmen. Die Amplitude einer einfallenden Welle zu bestimmen ist, von der Quelle ausgehend, physikalisch nicht sinnvoll.

In Abbildung 2.6 ist der Fall einer von unten auf die Schichtgrenze fallenden Kompressionswelle skizziert. Die Amplitude A^i der einfallenden Welle ist gegeben. Die Randbedingungen können erfüllt werden, indem die Amplituden einer reflektierten P-Welle A^r , einer reflektierten S-Welle B^r , sowie der transmittierten P-Welle A^t und S-Welle B^t geeignet gewählt werden. Analog zu den Überlegungen in

Abschnitt 1.5.4 auf Seite 29, die zur Gleichung (1.49) führten, können so Reflexions- und Transmissionskoeffizienten abgeleitet werden, welche die Amplituden einfallender und ausfallender Wellen verknüpfen. Dies läßt sich in einer Matrixschreibweise formulieren:

$$\begin{pmatrix} A^t \\ B^t \end{pmatrix} = \underline{\underline{T}} \begin{pmatrix} A^i \\ B^i \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} A^r \\ B^r \end{pmatrix} = \underline{\underline{R}} \begin{pmatrix} A^i \\ B^i \end{pmatrix}$$

Auch die Ausbreitung der Wellen innerhalb einer homogenen Schicht läßt sich durch eine Multiplikation der Wellenamplituden mit einer Phasenmatrix beschreiben. Diese Formulierungen führen über einen Rekursionsalgorithmus auf Matrizen, welche die Wirkung eines ganzen Schichtstapels auf die Amplituden beschreibt. Die Bedeutung der in der Reflektivitätsmethode verwendeten Reflektivitäts- und Transmissivitätsmatrizen sind in Abbildung 2.7 skizziert. Sie enthalten alle Konversionen und auch alle Mehrfachreflexionen innerhalb der Schichtstapel.

- $\underline{\underline{R}}^+$ beschreibt die Wirkung des oberen Schichtstapels auf von unten aus der Quellschicht m einfallende Wellen. Das Ergebnis der Multiplikation sind Amplituden von Wellen, die in der Schicht m abwärts laufen.
- $\underline{\underline{R}}^-$ berechnet die Wellen, welche in der Quellschicht nach oben laufen, nachdem die von der Quelle abwärts gerichteten Wellen auf das untere Schichtpaket und den Halbraum eingefallen sind.
- $\underline{\underline{T}}^+$ beschreibt die Wellen, die von der Quellschicht ausgehend aufwärts laufend die Oberfläche des geschichteten Mediums erreichen.

Bezugstiefe für alle drei Matrizen ist z_m , die Decke der Quellschicht.

Auch in der Quellschicht treten Mehrfachreflexionen an oberem und unterem Schichtstapel auf. Dies führt im Matrixalgorithmus auf eine unendliche Reihe von Mehrfachprodukten aus $\underline{\underline{R}}^+$ und $\underline{\underline{R}}^-$. Diese Reihe läßt sich geschlossen durch eine inverse Matrix ausdrücken.

Anhand dieser Ausführungen kann die Berechnung der Amplituden A_0^+ und B_0^+ an der Oberfläche, wie sie in Tafel 2.2 auf Seite 49 angegeben ist, sehr anschaulich gelesen werden. Der Ausdruck

$$\left[\begin{pmatrix} A_m^+ \\ B_m^+ \end{pmatrix} + \underline{\underline{R}}^- \begin{pmatrix} A_m^- \\ B_m^- \end{pmatrix} \right]$$

beschreibt die in der Quellschicht m aufwärtslaufenden Wellen, die direkt von der Quelle ausgehen und jene, welche als Folge der von der Quelle abwärtslaufenden Wellen durch Reflexion am unteren Schichtstapel entstehen. Die nach Berücksichtigung aller Mehrfachreflexionen in der Schicht m aufwärtslaufenden Wellen werden durch Multiplikation mit

$$[\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{R}}^- \underline{\underline{R}}^+]^{-1}$$

berechnet. Schließlich werden sie mit $\underline{\underline{T}}^+$ an die Oberfläche des Mediums propagiert.

Betrachtet man die Entwicklung der elastischen Potentiale nach Lösungen der homogenen Wellengleichung, wie sie in Tafel 2.2 auf Seite 49 durchgeführt wurde, so fällt auf, daß die Entwicklungskoeffizienten anders definiert sind als in (1.18) aus Abschnitt 1.3.3 auf Seite 18. Mit dieser Definition der Entwicklungskoeffizienten bekommen die Randbedingungen auf den Schichtgrenzen formal die gleiche Form für Zylinderkoordinaten wie auch für ebene Wellen in kartesischen Koordinaten. Dies führt wieder auf die Überlegungen aus Abschnitt 1.6.1 auf Seite 34, die gezeigt haben, daß das vertikale Problem grundsätzlich unabhängig von der konkreten Darstellung des horizontalen ist.

Die Berechnung der Entwicklungskoeffizienten erfolgt im Sinne der Theorie exakt. Erst die Auswertung der Langsamkeitsintegrale erfordert eine numerische Näherungsmethode. In der Reflektivitätsmethode wird die Trapezregel angewandt. Sie benutzt eine einheitliche Schrittweite, was das gesamte Verfahren sehr effektiv macht, da für einen Langsamkeitswert die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten an den Schichtgrenzen für alle Frequenzen gleich sind und daher nur einmal berechnet werden müssen.

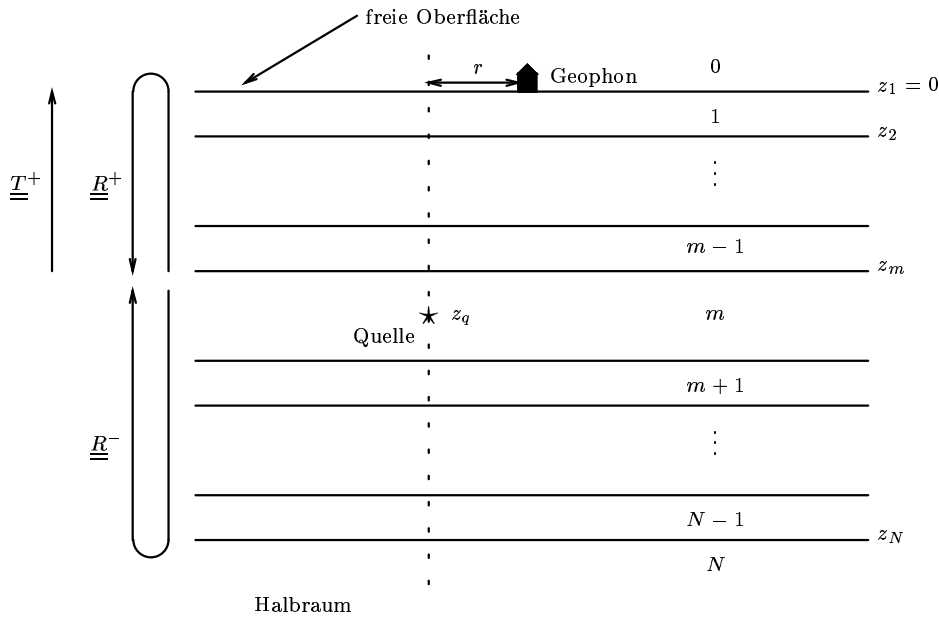


Abbildung 2.7: Schichtmatrizen der Reflektivitätsmethode

2.3.2 Oberflächenwellen

Bei der Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten an der Oberfläche wird die Inverse der Matrix

$$[\underline{1} - \underline{R}^- \underline{R}^+] \quad (2.2)$$

berechnet. Diese existiert nur, wenn die Determinante der Matrix ungleich 0 ist. Für den Fall einer verschwindenden Determinante beschreibt die inverse Matrix in vertikaler Richtung stehende Wellen, die allein durch Reflexion an den beiden Schichtpaketen entstehen. Diese entsprechen Eigenschwingungen des Mediums und äußern sich damit als starke Oberflächenwellen. In der Tat entspricht die Determinante von (2.2) bis auf einen Faktor der Rayleigh-Determinante. Kennet [ken 85] benutzt diese Matrixdarstellung zur Untersuchung von Oberflächenwellen und zum Vergleich von multiplen Reflexionen unterschiedlicher Ordnung. Chen [che 93] hat ein Verfahren zur Berechnung von Oberflächenwellen und Eigenfunktionen vorgestellt, welches auf dieser Darstellung beruht.

2.3.3 Einführung einer Dämpfung

Die analytischen Ausdrücke, welche der Reflektivitätsmethode zugrunde liegen, wurden für ein dämpfungsfreies Medium hergeleitet. Eine Dämpfung hätte, wie in Abschnitt 1.1.3 auf Seite 14 diskutiert wurde, bereits im Materialgesetz berücksichtigt werden müssen. Aus zwei Gründen ist es wichtig, nun nachträglich doch noch eine Dämpfung einzuführen:

1. Es läßt sich nicht leugnen, daß ein realistisches Medium die Wellenausbreitung einer Dämpfung unterwirft. Gerade zur Erklärung von Daten aus der Flachseismik ist eine Berücksichtigung der Dämpfung notwendig.
2. Die Nullstellen der Determinante von (2.2) erzeugen Pole auf den reellen u - und ω -Achsen, auf denen die Langsamkeitsintegrale auszuwerten sind. Über Singularitäten kann numerisch nicht sinnvoll integriert werden. Eine Dämpfung rückt die Pole in die komplexe Ebene und macht die Integration weitgehend unproblematisch.

In der Reflektivitätsmethode wird daher eine Dämpfung über Gütefaktoren für die seismischen Geschwindigkeiten eingeführt, wie bei Müller [mül 85] beschrieben:

$$\alpha = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \left(1 + \frac{i}{2Q_\alpha}\right) \quad \beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \left(1 + \frac{i}{2Q_\beta}\right)$$

$$u_r(r, \omega, t) = -\omega e^{i\omega t} \int_0^{+\infty} (u A_0^+ + b_0 B_0^+) J_1(u\omega r) du$$

$$u_z(r, \omega, t) = i\omega e^{i\omega t} \int_0^{+\infty} (a_0 A_0^+ - u B_0^+) J_0(u\omega r) du$$

$$\begin{pmatrix} A_0^+ \\ B_0^+ \end{pmatrix} = \underline{T}^+ [\underline{1} - \underline{R}^- \underline{R}^+]^{-1} \left[\begin{pmatrix} A_m^+ \\ B_m^+ \end{pmatrix} + \underline{R}^- \begin{pmatrix} A_m^- \\ B_m^- \end{pmatrix} \right]$$

$$A_m^+ = -u e_a^{-1} F \quad A_m^- = u e_a F$$

$$B_m^+ = \frac{u^2}{b_m} e_b^{-1} F \quad B_m^- = \frac{u^2}{b_m} e_b F$$

$$e_a = e^{i\omega a_m (z_q - z_m)} \quad e_b = e^{i\omega b_m (z_q - z_m)}$$

$$a_m^2 = \frac{1}{\alpha_m^2} - u^2 \quad b_m^2 = \frac{1}{\beta_m^2} - u^2$$

$$F = \frac{F_0}{4\pi\rho_m}$$

$$\phi_j^\pm(r, z, \omega, t) = e^{i\omega t} \int_0^{+\infty} A_j^\pm(u, \omega) J_0(u\omega r) e^{\pm i\omega a(z-z_j)} du$$

$$\psi_j^\pm(r, z, \omega, t) = e^{i\omega t} \int_0^{+\infty} \frac{1}{iu\omega} B_j^\pm(u, \omega) J_0(u\omega r) e^{\pm i\omega b(z-z_j)} du$$

Tafel 2.2: Die Reflektivitätsmethode für eine vertikale, harmonische Einzelkraft

Q_α ist der Gütefaktor der P-Wellen, Q_β ist der Gütefaktor der S-Wellen. Die komplexen Wellengeschwindigkeiten ergeben in Ausbreitungsrichtung gedämpfte Wellen. In dieser Definition geben die Q -Werte in etwa an, nach wieviel Wellenlängen die ebenen Raumwellen auf das $1/\sqrt{e}$ -fache ihrer ursprünglichen Amplitude abgeklungen sind.

Die in Abschnitt 1.1.3 auf Seite 14 genannten, visko-elastischen Materialgesetze enthalten frequenzabhängige Materialeigenschaften. Diese müssen so beschaffen sein, daß sie die Kausalität des Mediums gewährleisten. In der allgemeinsten Formulierung wäre es dem Material möglich, auf eine Anregung, die erst in der Zukunft erfolgt, zu reagieren. Die Kausalitätsbedingung führt auf Kramers-Kronig-Relationen, die das Absorptionsverhalten des Materials mit dem Dispersionsverhalten koppeln. Die hier für die Reflektivitätsmethode eingeführte, frequenzunabhängige Dämpfung erfüllt die Kausalitätsbedingung nicht. Ungerer [ung 90] hat gezeigt, daß sich dies für sehr kleine Werte von Q (< 20) und große Epizentralentfernungen in einer Verbreiterung des Signals äußert. In den zur Modellierung experimenteller Daten aufgestellten Modellen sind die sehr kleinen Qualitätsfaktoren auf wenige Schichten im oberen Bereich der Modelle beschränkt. Man kann davon ausgehen, daß die verfälschten Signale im kritischen Entfernungsbereich aufgrund der starken Dämpfung bereits wesentlich kleiner sind als die schwächer gedämpften und damit kaum verzerrten Signale.

2.3.4 Einzelkraftterme

In Tafel 2.2 sind die Terme angegeben, wie sie in das Programm von Ungerer [ung 90] implementiert wurden, um Seismogramme für eine vertikale Einzelkraftquelle zu berechnen. Es handelt sich um die in Abschnitt 1.4 auf Seite 20 abgeleiteten Entwicklungskoeffizienten. Die Größe der Kraft wird mit F_0 angegeben. Die Kraft soll in positive z -Richtung weisen. Der untere Index der Entwicklungskoeffizienten, Dichte, vertikalen Langsamkeiten, Schichtgeschwindigkeiten und Potentiale kennzeichnet die zugehörige Schicht, wie in Abbildung 2.7 angegeben. Die Quellschicht wird mit m gekennzeichnet. Entsprechend der von Ungerer gewählten Notation werden zur Oberfläche propagierende Wellen mit $+$ indiziert. Größen, die mit $-$ indiziert sind, betreffen Wellen, die auf den Halbraum zu propagieren. Die Verschiebungen gelten für die freie Oberfläche. Die Reflektivitäts- und Transmissivitäts-Matrizen $\underline{\underline{R}}^+$, $\underline{\underline{R}}^-$ und $\underline{\underline{T}}^+$ sind identisch mit den von Ungerer berechneten Größen.

2.3.5 Zur Berechnung von Seismogrammen eingesetzte Programme

`refsyn.f`

Dieses Programm berechnet synthetische Seismogramme mit der Reflektivitätsmethode und basiert auf `psexplquik.f` von G. Müller. Das Programm folgt den Ausführungen in Müllers Tutorial [mül 85].

`psexplquik.f` besitzt folgende Merkmale:

- Es können mehrere vertikale Einzelkraftquellen oder Explosionsquellen berechnet werden.
- Aufgrund der Quelltypen werden nur P-SV-Fernfeld-Terme berechnet.
- Die Reflektivitäten enthalten explizit eine freie Oberfläche.
- Die Langsamkeitsintegrale werden mit der Fernfeldnäherung der Besselschen Funktion berechnet. Diese lassen sich mit weniger Rechenoperationen berechnen und bereits in den analytischen Ausdrücken weiter vereinfachen.
- Ein kugelsymmetrisches Erdmodell kann optional mit einer Flache-Erde-Transformation in ein ebenes Modell umgerechnet werden, das dieselben Laufzeiten produziert.
- Das Programm rechnet mit komplexen Frequenzen (quasi Laplace-Transformation) zur Vermeidung von Zeit-Aliasing und zur Umgehung von Polen auf der reellen Frequenzachse.
- Ein dämpfendes Medium wird mit Gütefaktoren für die seismischen Geschwindigkeiten beschrieben.
- Das Programm hält die Reflektivitätskoeffizienten für alle Langsamkeiten und Frequenzen im Speicher und ist daher in seiner Integrationsschrittweite begrenzt.

Die im Rahmen der vorliegenden Arbeit erstellte Variante `refsyn.f` enthält zusätzlich Routinen zum Schreiben weiterer Dateiformate und zum Einlesen einer Quellfunktion.

`refseistf.f`

Dieses auf dem Programm `refseis.f` von J. Ungerer [ung 90] aufbauende Programm berechnet ebenfalls synthetische Seismogramme mit der Reflektivitätsmethode.

`refseis.f` besitzt folgende Merkmale:

- Es wird eine Momententensor-Quelle benutzt. Es kann nur ein Quell-Tensor angegeben werden.
- Es werden die vollen Nah- und Fernfeld P-SV- und SH-Terme berechnet.
- Die Langsamkeitsintegrale werden mit der Besselschen Funktion ausgewertet.
- Ein dämpfendes Medium wird mit Gütefaktoren für die seismischen Geschwindigkeiten beschrieben.

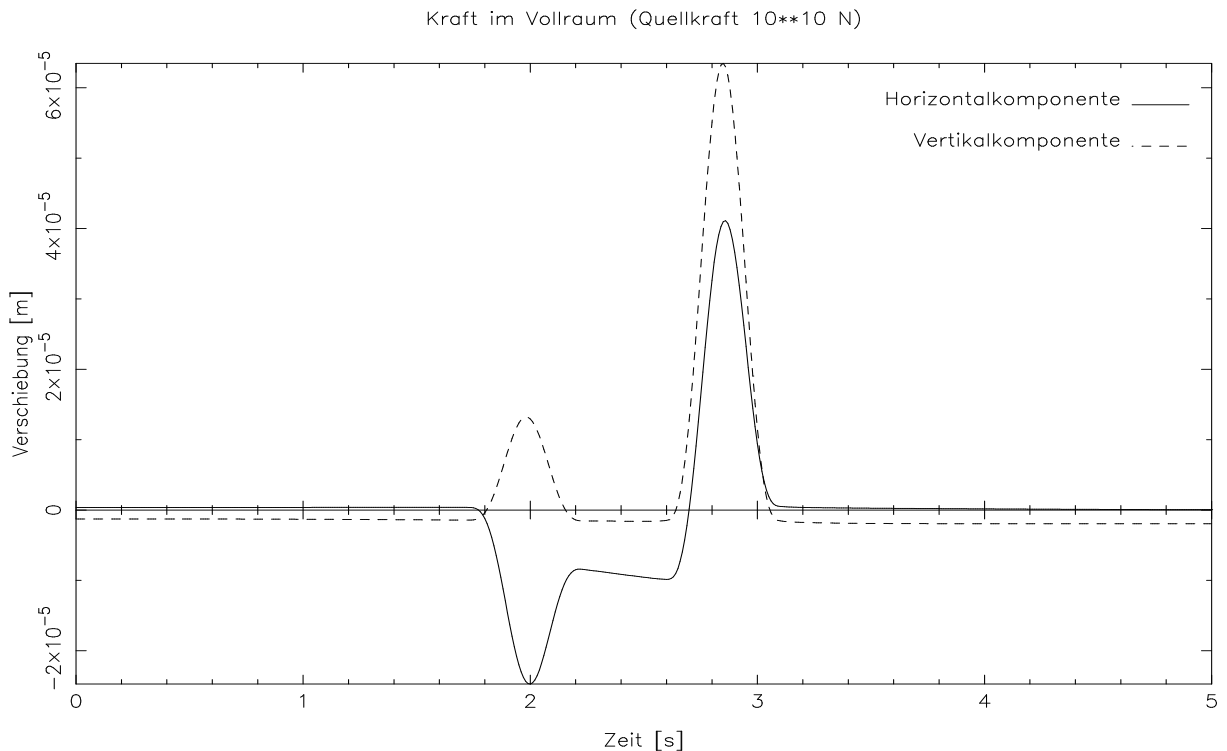


Abbildung 2.8: Vergleich „Einzelkraft im Vollraum“

- Das Medium wird durch zwei Halbräume begrenzt. Zur Beschreibung einer freien Oberfläche werden für den oberen Halbraum die Parameter für Luft und eine extrem kleine Scherwellengeschwindigkeit angegeben.
- Das Programm wertet die Ausdrücke sofort in der Slownessintegration aus und kann daher praktisch beliebig viele Langsamkeitsschritte durchführen. Es werden die Ergebnisse für alle Frequenzen und Empfänger im Speicher gehalten.

Die im Rahmen der vorliegenden Arbeit erstellte Variante `refseistf.f` enthält zusätzlich die Quellterme für eine vertikale Einzelkraftquelle. Das Programm kann eine Quellfunktion einlesen und unterstützt weitere Dateiformate.

`lamb.f`

Berechnet die Langsamkeitsintegrale des Schlags auf den Halbraum, wie in Abschnitt 1.5.5 auf Seite 33 beschrieben.

2.3.6 Vergleiche

Bezüglich der Unterscheidung zwischen Nah- und Fernfeld verhalten sich `refsyn.f` und `refseistf.f` mit der für diese Arbeit relevanten vertikalen Einzelkraftquelle völlig identisch, da keine Nahfeldterme angeregt werden. `refseistf.f` berechnet zusätzlich SH-Terme und Nahfeld-Terme, die alle gleich 0 sind, was etwas ineffektiv ist. Der wesentliche Unterschied zwischen den beiden Programmen besteht in der Verwendung der Besselfunktionen beziehungsweise ihrer Fernfeldnäherungen. Außerdem ist die Struktur der Reflektivitätsmethode in `refseistf.f` klarer erhalten geblieben, da keine Spezialitäten wie die freie Oberfläche oder multiple Quellen implementiert wurden. Dies erlaubt die gezielte Auswertung von Zwischenergebnissen. Daher wurde `refseis.f` um die Einzelkraftterme erweitert und verschiedenen Tests unterzogen. Drei dieser Tests sollen hier kurz vorgestellt werden, da sie von allgemeinerem Interesse sind.

Modellparameter des Vollraumes:							
α [$\frac{\text{m}}{\text{s}}$]	β [$\frac{\text{m}}{\text{s}}$]	ρ [$\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$]	Q_α	Q_β			
3000	2000	1.8	1000	500			
numerische Parameter:							
f_{\min} [Hz]	f_{wil} [Hz]	f_{wir} [Hz]	f_{\max} [Hz]	u_{\min} [$\frac{\text{s}}{\text{m}}$]	u_{wil} [$\frac{\text{s}}{\text{m}}$]	u_{wir} [$\frac{\text{s}}{\text{m}}$]	u_{\max} [$\frac{\text{s}}{\text{m}}$]
0.	0.	60.	70.	0.	0.	$0.55 \cdot 10^{-3}$	$1.2 \cdot 10^{-3}$

Quellkraft: $F_0 = 10^{10} \text{N}$

Quellfunktion: $q(t) = \sin^3(t\pi/0.5\text{s})$

Empfängerkoordinaten: 3km oberhalb und 4.2426km seitlich der Quelle

Anzahl der Slowness-Stützstellen: 2000

Tafel 2.3: Parameter zu den Vergleichsrechnungen „Kraft im Vollraum“

Die Lösung für den Vollraum

Das Programm von J. Ungerer erlaubt die Berechnung von Wellen im Vollraum, während G. Müllers Programm explizit eine freie Oberfläche enthält. Abbildung 2.8 zeigt die Seismogramme für eine bandbegrenzte Impulskraft im Vollraum, die mit `refseistf.f` berechnet wurden. In Abbildung 1.3 auf Seite 26 sind schematische Seismogramme für die theoretische Lösung dargestellt. Die Kraft zeigt nach unten (also in positive z -Richtung). Positive Ausschläge der Vertikalkomponente zeigen nach unten. Positive Ausschläge der Horizontalkomponente bedeuten eine Bewegung vom Epizentrum fort. In Tafel 2.3 sind die Parameter der Berechnung angegeben. Die Bereiche für u und ω , in denen die Koeffizienten zu berechnen sind, werden mit vier Werten festgelegt, da die Ränder dieser Bereiche mit einem Cosinus-Taper belegt werden. Die Amplituden der Impulse lassen einen Vergleich mit den Termen der Gleichungen (1.31) auf Seite 24 zu. Die Position des Empfängers wurde so gewählt, daß der Nahfeldterm der Vertikalkomponente verschwindet.

Der Schlag auf den Halbraum

Ziel dieser Rechnung war es, das modifizierte Programm von J. Ungerer mit dem Programm von G. Müller abzugleichen und Vergleiche mit dritten Lösungen anzustellen. Die berechneten Seismogramme sind in Abbildung 2.9 und Abbildung 2.10 dargestellt und weisen alle Merkmale auf, die bereits von Lamb [lam 04] skizziert wurden (Abbildung 1.4 auf Seite 30). Positive Ausschläge der Vertikalkomponente weisen in den Halbraum hinein. Die positiven Ausschläge der Horizontalkomponente weisen von der Quelle fort. Die Parameter der durchgeführten Berechnung sind in Tafel 2.4 angegeben. In den Seismogrammen können drei Wellenzüge unterschieden werden. Bei ca. 150s trifft die Kompressionswelle ein. Die Scherwelle ist bei 230s zu beobachten. In der Vertikalkomponente zeichnet sie sich nur als leichte Stufe in der Flanke der Rayleigh-Welle ab, welche bei 250s folgt.

Erst in der Vergrößerung in Abbildung 2.10 sind die Unterschiede zwischen den einzelnen Seismogrammen erkennbar. Die Stufe, welche den S-Wellen-Einsatz in der Vertikalkomponente markiert, ist in der Vergrößerung nicht mehr im dargestellten Amplitudenbereich enthalten. Die P-Welle der Vertikalkomponente wird allerdings erst in Abbildung 2.10 sichtbar, da es sich um einen Nahfeldbeitrag handelt. Die wesentlichen Unterschiede sind auf die Verwendung der Fernfeldnäherung der Besselschen Funktionen in `refsyn.f` zurückzuführen. Wie in Abbildung A.2 und Abbildung A.3 auf Seite 129 zu erkennen ist, haben die Fernfeldnäherungen der Besselschen Funktionen eine Singularität beim Argument 0. Das Argument der Funktionen in den Langsamkeitsintegralen besteht aus einem Produkt aus Langsamkeit, Frequenz und Epizentraldistanz. Dies hat folgende Konsequenzen für `refsyn.f`:

- Es können keine Seismogramme direkt über der Quelle berechnet werden (Epizentraldistanz = 0m).

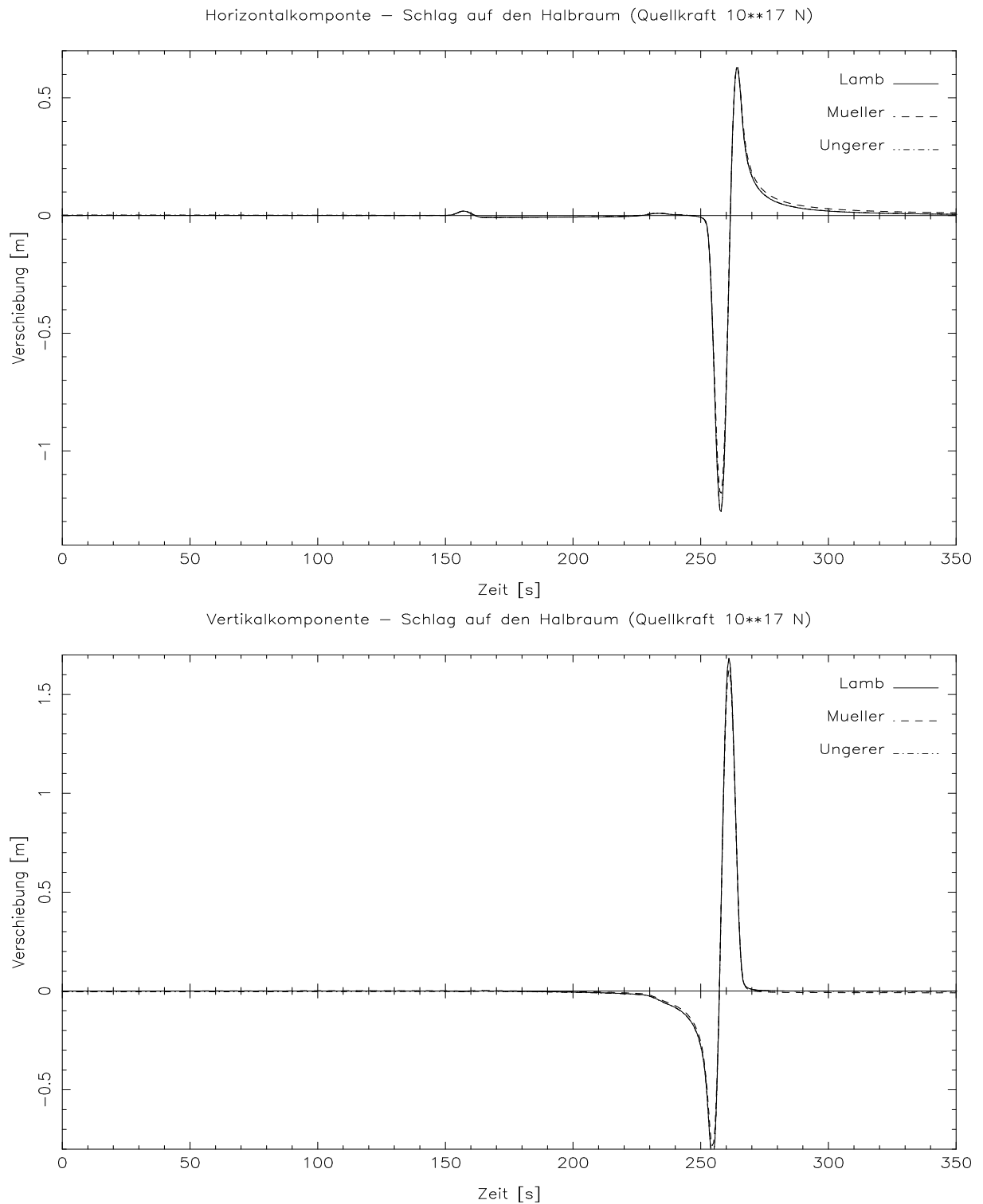


Abbildung 2.9: Vergleich „Schlag auf den Halbraum“. Positive Ausschläge der Horizontalkomponente bedeuten eine Bewegung von der Quelle fort. Positive Ausschläge der Vertikalkomponente bedeuten eine Begeugung in den Halbraum hinein (nach unten). In Abbildung 1.4 auf Seite 30 ist Lambs Skizze dazu dargestellt.

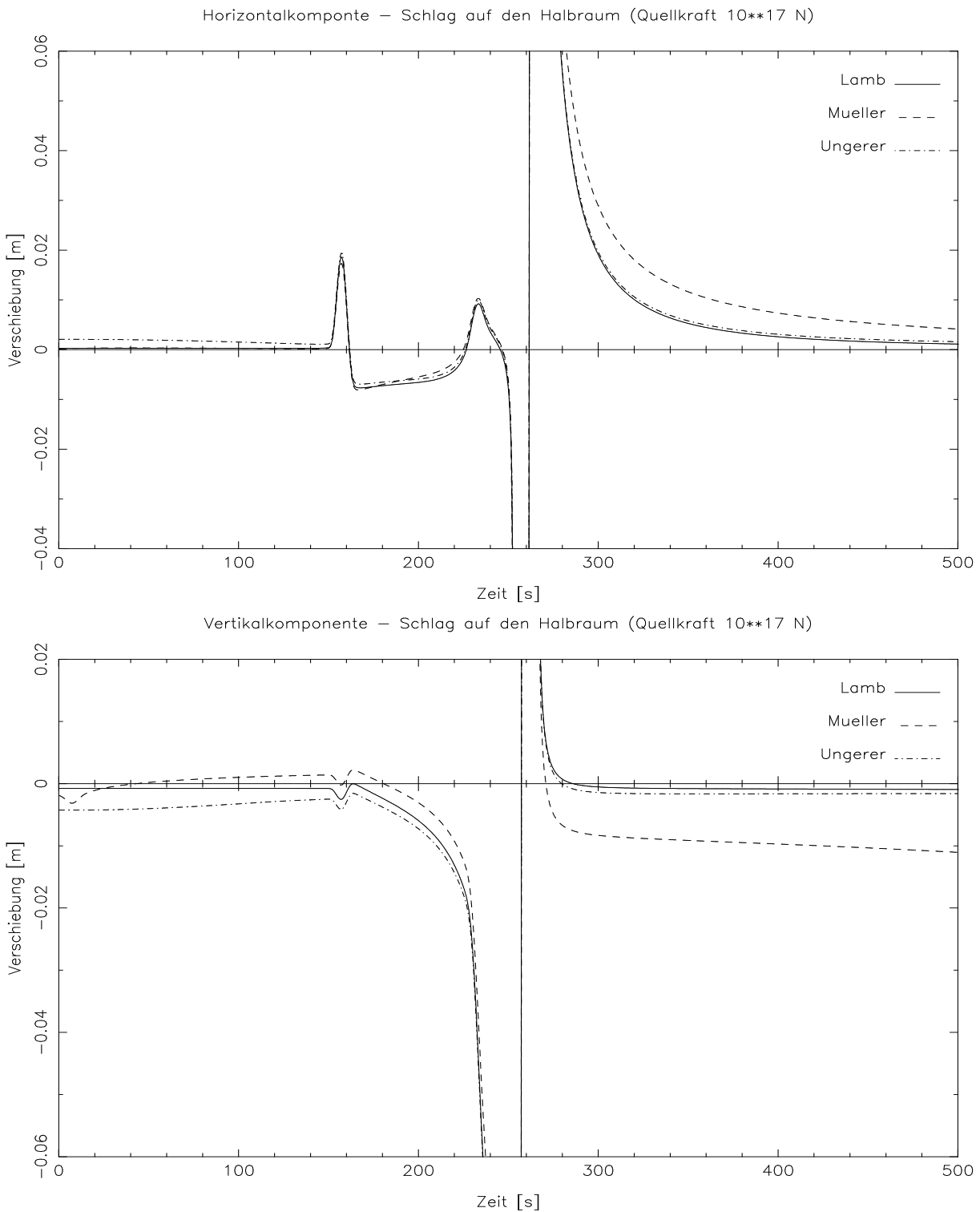


Abbildung 2.10: Vergleich „Schlag auf den Halbraum“. Positive Ausschläge der Horizontalkomponente bedeuten eine Bewegung von der Quelle fort. Positive Ausschläge der Vertikalkomponente bedeuten eine Begeugung in den Halbraum hinein (nach unten). In Abbildung 1.4 auf Seite 30 ist Lambs Skizze dazu dargestellt.

Modellparameter des Halbraumes:

α [$\frac{\text{m}}{\text{s}}$]	β [$\frac{\text{m}}{\text{s}}$]	ρ [$\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$]	Q_α	Q_β
6000	4000	2.7	500	500

Modellparameter des oberen Halbraumes für `refseistf.f`:

α [$\frac{\text{m}}{\text{s}}$]	β [$\frac{\text{m}}{\text{s}}$]	ρ [$\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$]	Q_α	Q_β
331.8	0.1	0.0013	1000	500

numerische Parameter für `refsyn.f`:

f_{\min} [Hz]	f_{wil} [Hz]	f_{wir} [Hz]	f_{\max} [Hz]	u_{\min} [$\frac{\text{s}}{\text{m}}$]	u_{wil} [$\frac{\text{s}}{\text{m}}$]	u_{wir} [$\frac{\text{s}}{\text{m}}$]	u_{\max} [$\frac{\text{s}}{\text{m}}$]
0.	0.	0.85	0.95	10^{-14}	10^{-13}	10^{-3}	$1.3 \cdot 10^{-3}$

numerische Parameter für `refseistf.f` und `lamb.f`:

f_{\min} [Hz]	f_{wil} [Hz]	f_{wir} [Hz]	f_{\max} [Hz]	u_{\min} [$\frac{\text{s}}{\text{m}}$]	u_{wil} [$\frac{\text{s}}{\text{m}}$]	u_{wir} [$\frac{\text{s}}{\text{m}}$]	u_{\max} [$\frac{\text{s}}{\text{m}}$]
0.	0.	0.85	0.95	0.	0.	10^{-3}	$1.3 \cdot 10^{-3}$

Quellkraft: $F_0 = 10^{17} \text{N}$ Quellfunktion: $q(t) = \sin^3(t\pi/15\text{s})$

Epizentraldistanz der Empfänger: 900km

Anzahl der Slowness-Stützstellen für `refsyn.f` und `refseistf.f`: 5000Anzahl der Slowness-Stützstellen für `lamb.f`: 10000

Tafel 2.4: Parameter zu den Vergleichsrechnungen „Schlag auf den Halbraum“

- Die Fourier-Koeffizienten für kleine Frequenzen werden ungenau. Dies äußert sich in einem Offset oder auch Trend im Seismogramm. So zu beobachten in Abbildung 2.10.
- Die Integrale können nicht ab $u = 0$ ausgewertet werden. Dies führt zu einer Abschneidephase mit großer Geschwindigkeit, die sich bei kleinen Zeiten in den Seismogrammen äußert. Der in Abbildung 2.10 beobachtbare Effekt bei 10s ist eventuell darauf zurückzuführen.

Seismogramme für eine realistische Erde

Weitere Vergleiche wurden zwischen den Reflektivitätsprogrammen und der Methode von J. Dalkolmo [dal 93, fri 95b] zur Berechnung synthetischer Seismogramme für eine realistische, kugelsymmetrische Erde durchgeführt. Die Parameter, die den Rechnungen zugrunde lagen, sind in Tafel 2.5 auf Seite 56 wiedergegeben. Zu berücksichtigen ist, daß das Programm von J. Dalkolmo das Erdmodell durch einen Spline glättet. Außerdem werden diesem Programm die Gütefaktoren für die elastischen Moduln statt für die seismischen Geschwindigkeiten vorgegeben. Diese unterscheiden sich für P-Wellen einerseits und das Volumenkompressionsmodul andererseits etwa um eine Zehnerpotenz. Für die Vergleichsrechnungen wurden diese Größen nicht angepaßt.

An dieser Stelle sei zudem auf einen tückischen Unterschied zur Berechnung synthetischer Seismogramme für die globale Seismologie hingewiesen. Die Vorfaktoren zur harmonischen Funktion $e^{i\omega t}$ in den Verschiebungen entsprechen den Fourierkoeffizienten für den Fall einer Impuls-Anregung. Dies entspricht der Situation in der Flachseismik. Erdbebenquellen laufen jedoch als sogenannter „stress-drop“ ab, also als Schrittfunktion für die Spannung. Ohne Berücksichtigung einer bandbegrenzten Quellfunktion entsprechen daher die Faktoren in den Verschiebungsausdrücken den Fourierkoeffizienten einer Partikelgeschwindigkeit. Es ist daher in den Originalversionen der Programme üblich, die hergeleiteten Ausdrücke

Parameter des Erdmodells:
(die Werte für $z_i < 0\text{km}$ gelten für `refseistf.f`)

z_i [km]	α [$\frac{\text{km}}{\text{s}}$]	β [$\frac{\text{km}}{\text{s}}$]	ρ [$\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$]	Q_α	Q_β
< 0	0.3318	0.0001	0.0013	1000	500
0	6.0100	3.5000	2.7000	1400	600
6	6.0100	3.5000	2.7000	1400	600
8	6.0100	3.5000	2.7000	1400	600
30	8.0946	4.4886	3.3384	1446	600
60	8.0830	4.4734	3.3758	1447	600
80	8.0661	4.4630	3.3728	195	200
115	8.0445	4.4500	3.3690	195	200
150	8.0227	4.4373	3.3652	195	200
185	8.0007	4.4250	3.3614	195	200
220	8.6023	4.6596	3.4492	363	143
265	8.6888	4.6912	3.4761	366	143
310	8.7754	4.7227	3.5029	368	143
355	8.8619	4.7541	3.5299	371	143
400	9.2620	5.0055	3.7553	365	143
450	9.5179	5.1514	3.8183	364	143
500	9.7739	5.2972	3.8813	363	143
550	10.0299	5.4430	3.9443	362	143
600	10.1849	5.5296	3.9799	362	143
635	10.2120	5.5431	3.9840	362	143

numerische Parameter für `refsyn.f`:

f_{\min} [Hz]	f_{wil} [Hz]	f_{wir} [Hz]	f_{\max} [Hz]	u_{\min} [$\frac{\text{s}}{\text{m}}$]	u_{wil} [$\frac{\text{s}}{\text{m}}$]	u_{wir} [$\frac{\text{s}}{\text{m}}$]	u_{\max} [$\frac{\text{s}}{\text{m}}$]
0.	0.	0.18	0.20	10^{-18}	10^{-13}	$0.4 \cdot 10^{-3}$	$.3333 \cdot 10^{-3}$

numerische Parameter für `refseistf.f`:

f_{\min} [Hz]	f_{wil} [Hz]	f_{wir} [Hz]	f_{\max} [Hz]	u_{\min} [$\frac{\text{s}}{\text{m}}$]	u_{wil} [$\frac{\text{s}}{\text{m}}$]	u_{wir} [$\frac{\text{s}}{\text{m}}$]	u_{\max} [$\frac{\text{s}}{\text{m}}$]
0.	0.	0.18	0.20	0	0	$0.4 \cdot 10^{-3}$	$.3333 \cdot 10^{-3}$

Quellkraft: $F_0 = 10^{17}\text{N}$

Quelltiefe: $z_q = 70\text{km}$

Quellfunktion: $q(t) = \sin^3(t\pi/15\text{s})$

Anzahl der Slowness-Stützstellen für `refsyn.f` und `refseistf.f`: 2000

Tafel 2.5: Parameter zu den Vergleichsrechnungen „realistische Erde“

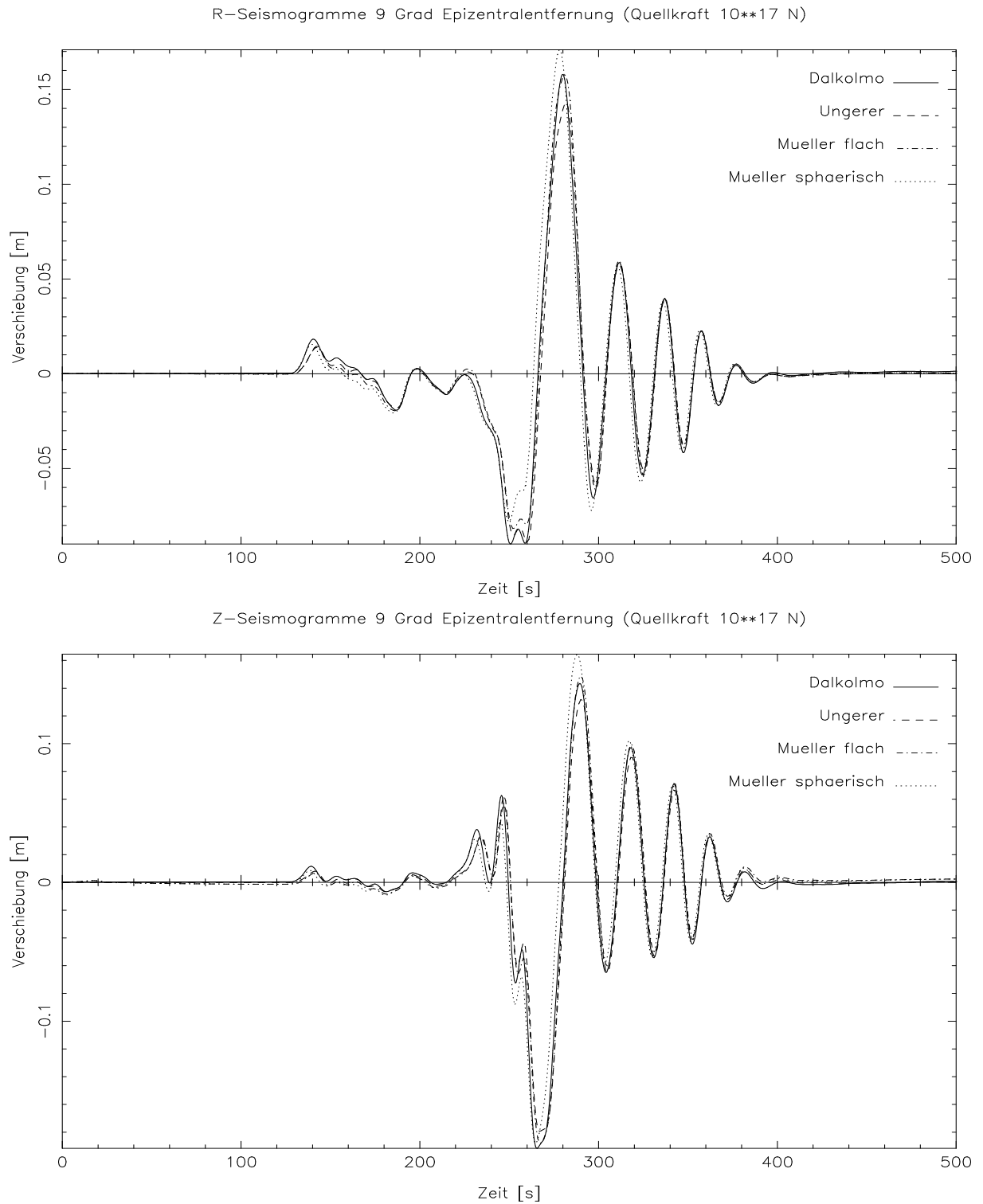


Abbildung 2.11: Vergleich „realistische Erde“

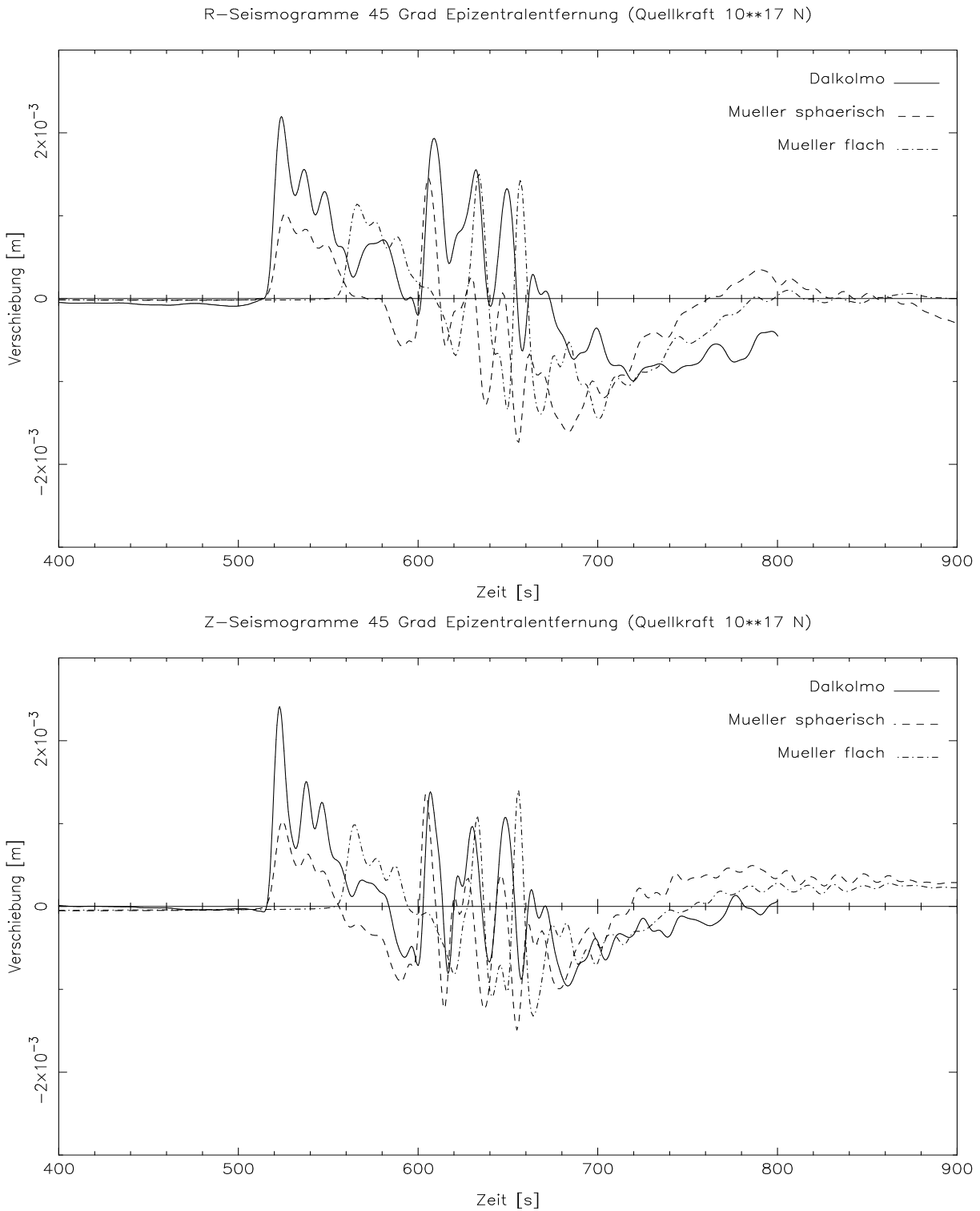


Abbildung 2.12: Vergleich „realistische Erde“

mit dem Spektrum eines bandbegrenzten Impulses zu multiplizieren und das Ergebnis als Partikelgeschwindigkeit aufzufassen, oder bereits bei der Berechnung der Koeffizienten durch $i\omega$ zu dividieren, um zur „Verschiebung“ zu gelangen. Dies entspricht nicht der Bezeichnungsweise wie sie hier benutzt wird.

In Abbildung 2.11 sind die Seismogramme in 9° Epizentraldistanz (etwa 1000km) abgebildet. Die anregende Kraft befindet sich in 70km Tiefe und zeigt zum Erdmittelpunkt. Ein positiver Ausschlag der Vertikalkomponente bedeutet hier eine Aufwölbung der Erdoberfläche (Bewegung vom Erdmittelpunkt fort). Ein positiver Ausschlag der Radialkomponente weist vom Epizentrum fort. Dargestellt sind Seismogramme der Programme der drei angegebenen Autoren. Zusätzlich wurde ein Seismogramm mit der Flache-Erde-Transformation gerechnet. Dieses ist mit „Müller sphärisch“ beschriftet.

Die Abbildung 2.12 zeigt Seismogramme in 45° Epizentraldistanz. Die Ergebnisse von `refseistf.f` (Ungerer) entsprechen den Ergebnissen von `refsyn.f` (Müller) ohne Flache-Erde-Transformation und sind aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht wiedergegeben. Der dargestellte Seismogrammteil zeigt die P-Wellen-Einsätze. Die Bereiche der S- und Rayleigh-Wellen wurden von J. Dalkolmo nicht berechnet, da der dafür notwendig zu berechnende Koeffizientenbereich in dieser Distanz zu wesentlich längeren Rechenzeiten geführt hätte und die Intention der Vergleiche zunächst nicht darin lag, seine Methode gegen die Reflektivitätsmethode abzugleichen. Deutlich erkennbar ist, daß die Flache-Erde-Transformation die Laufzeiten gut anpaßt. Inwieweit die Amplitudendifferenzen über die unterschiedliche Interpretation der Modellparameter durch die Programme zu erklären sind, oder ob hier prinzipielle Grenzen der Reflektivitätsmethode erreicht werden, ist noch zu klären.

Abschließende Bewertung der Vergleiche

Nach diversen Tests kann festgestellt werden, daß die Benutzung der Fernfeldnäherung der Besselschen Funktionen keinen gravierenden Einfluß auf die synthetisch berechneten Seismogramme hat, wenngleich `refseistf.f` tendenziell besser abschneidet. Die oben zitierten Schwächen aufgrund der Singularitäten der Näherungen lassen sich weitgehend minimieren, so daß beide Reflektivitätsprogramme praktisch identische Ergebnisse liefern. In den Bereichen, in denen die Programme instabil sind, gilt dies für beide gleichzeitig. Dies sind vor allem Bereiche kleiner Epizentraldistanzen. Die Testrechnungen haben gezeigt, daß hier Abhilfe durch Vergrößerung des Integrationsbereiches und Verkleinerung der Langsamkeits-Schrittweite geschaffen werden kann. Um dies systematisch zu klären, müßte die Konvergenz und das oszillatorische Verhalten des gesamten Integranden untersucht werden. Ungerer [ung 90] hat zum Konvergenzverhalten der Integranden, welches wesentlich von den Entwicklungskoeffizienten vor den Besselschen Funktionen abhängt, einige Testrechnungen durchgeführt.

2.3.7 Stärken und Schwächen der Methode

Die Stärken und Schwächen der Reflektivitätsmethode gehen Hand in Hand. Ihr wesentlicher Vorteil liegt in der Behandlung homogener Schichten. Das beschränkt den Rechenaufwand auf die Berechnung der Koeffizienten an den Schichtgrenzen. Bei grobem Aufbau des Modells aus wenigen Schichten ergibt sich so eine erstaunlich kurze Rechenzeit. Diese erlaubt auch einen sinnvollen Einsatz der Methode in Inversionsverfahren. Gleichzeitig muß jedoch eingestanden werden, daß die Einteilung des inhomogenen Mediums in homogene Schichten rein willkürlich ist. Zwar lassen sich viele geologische Situationen durch eine einheitlich horizontale Schichtung beschreiben, die seismischen Parameter verändern sich jedoch über große Bereiche kontinuierlich. Zonen großer Gradienten versucht man dann als „Schichtgrenzen“ zu fassen. Inwieweit daraus ermittelte Schichtdicken überhaupt interpretierbar sind, ist im Einzelfall zu diskutieren.

Die Berechnung der Reflexions- und Transmissionskoeffizienten ist der aufwendigste Teil des Verfahrens. Diese sind jedoch nur von der horizontalen Wellenzahl u abhängig und müssen für alle ω und r nur einmal berechnet werden. Auch dies macht die Methode schnell und effektiv. Gleichzeitig zwingt dies jedoch zur Verwendung der Trapezregel als Auswerteverfahren für die Langsamkeitsintegrale. Ein intelligenteres Integrationsverfahren, welches sich selbst dem oszillatorischen Verhalten und der Konvergenz der Integranden anpaßt, würde den zuvor genannten Vorteil zunichte machen. Die Koeffizienten müßten an wesentlich mehr Stützstellen berechnet werden, denn die Integranden verhalten sich je nach r und besonders ω sehr unterschiedlich.

Die einfachste Methode, die kritische Integration zu umgehen, dürfte eine direkte Interpretation der Entwicklungskoeffizienten der Besselschen Funktionen sein, wie dies zum Beispiel von Knust [knu 95] durchgeführt wurde. Eine Fourier-Bessel-Transformation realer Daten würde auch hiermit die Anwendung

von numerischen Inversionsverfahren erlauben. Bei der Vorwärtsrechnung würde man sich zudem die Auswertung der Besselschen Funktionen und die Integration sparen.

2.4 Berechnung von Moden des geschichteten Halbraumes

2.4.1 Das Prinzip

Zur Bestimmung der Eigenschwingungen eines geschichteten Halbraumes wird die Rayleigh-Determinante aus Abschnitt 1.6.2 auf Seite 35 ausgewertet und werden ihre Nullstellen gesucht. Die Ordnung der Determinante nimmt mit jeder Schichtgrenze im Medium um vier zu. Dies wurde bereits in Abschnitt 1.6.2 auf Seite 35 diskutiert. Für die numerische Berechnung wendet man daher rekursive Matrixalgorithmen an, wie sie schon für die Reflektivitätsmethode vorgestellt wurden.

In der Literatur sind zahlreiche konkrete Methoden zur Lösung des Problems bekannt. In der vorliegenden Arbeit wurde ein Programm eingesetzt, das auf einem Algorithmus von Schwab und Knopoff [schw 72] basiert. Einen guten Überblick über zahlreiche Verfahren und die Darstellung der Methoden in einer einheitlichen Notation bietet ein Artikel von Buchen und Ben-Hador [buc 96].

Die Methoden lassen sich grob in zwei Gruppen einteilen. Die erste behandelt direkt die physikalischen Verschiebungen und Spannungen. Durch einen Matrix-Algorithmus werden diese durch das Medium hindurchpropagiert. Sind die Verschiebungen und Spannungen in einer Schicht an der Schichtgrenze bekannt, so lassen sie sich trivial in die andere Schicht übertragen, da die Randbedingungen gerade ihre Stetigkeit fordern. Innerhalb der homogenen Schicht läßt sich eine Matrix angeben, welche die Werte durch die Schicht hindurch propagiert, so daß man die Verschiebungen und Spannungen an der gegenüberliegenden Schichtgrenze erhält und wiederum weiterreichen kann. Auf diese Weise werden der Halbraum mit der Abstrahlbedingung (es dürfen keine Wellen in den Halbraum abgestrahlt werden) und die Randbedingungen für die freie Oberfläche miteinander verknüpft. Es resultiert eine Matrix deren Determinante die Rayleigh-Determinante ist. Durch Ausnutzung verschiedener Symmetrien läßt sich das Verfahren sehr effektiv gestalten. Numerische Probleme treten jedoch durch die vertikalen Eigenfunktionen auf, die in der resultierenden Matrix enthalten sind. Innerhalb der homogenen Schichten handelt es sich um Exponentialfunktionen, welche für einige u - ω -Paare reelle Argumente haben, die zu exponentiell anwachsenden Termen führen. Dies führt einerseits zu numerischem overflow, andererseits wird die Methode für große Frequenzen instabil, da bei der Berechnung der Determinante kleine Differenzen großer Werte berechnet werden. Werte, die analytisch identisch sind, ergeben aufgrund begrenzter Rechengenauigkeit endliche Differenzen. Ein Großteil der Weiterentwicklungen dieser Methode hat darauf abgezielt, diese Schwierigkeiten in den Griff zu bekommen. Dazu ist auch die Arbeit von Schwab und Knopoff [schw 72] zu zählen.

Eine weitere Gruppe von Verfahren basiert auf einer Darstellung, wie sie für die Reflektivitätsmethode gewählt wurde. Hierzu können die Arbeiten von Kennet [ken 85] und Chen [che 93] gezählt werden. In diesen Algorithmen werden nicht die physikalischen Verschiebungen und Spannungen, sondern die Wellenamplituden durch das Medium propagiert. Die Eigenfunktionen für die Wellen sind simple Exponentialfunktionen, so daß sich die Amplituden sehr einfach durch eine Schicht weiterreichen lassen. An der Schichtgrenze müssen jedoch aufwendige Ausdrücke für die Transmissions- und Reflexionskoeffizienten berechnet werden. Diese werden durch eine Rekursion zu den Reflektivitätsmatrizen zusammengefaßt. Dies macht die Methode insgesamt wesentlich ineffektiver als das auf Thomson [tho 50] und Haskell [has 53] zurückgehende Verfahren, welches die physikalischen Spannungen und Verschiebungen verarbeitet, wie Vergleiche von Buchen und Ben-Hador [buc 96] gezeigt haben. Schließlich erhält man die in (2.2) angegebene Matrix, deren Determinante wiederum die Rayleigh-Determinante ist. Bemerkenswert ist jedoch, wie Buchen und Ben-Hador zeigen, daß diese Methode nur abklingende Exponentialfunktionen enthält und daher das Problem der numerischen Instabilität nicht auftreten kann. Dieser Umstand läßt sich möglicherweise damit erklären, daß die Reflektivitätsmethode direkt einen Wellenausbreitungsvorgang verfolgt und alle multiplen Reflexionen durch eine Rekursion berücksichtigt. Dabei können exponentiell anwachsende Wellenamplituden von vornherein als unphysikalisch ausgeschlossen werden (diese würden einer einfallenden Welle als Reflektierte einer anderen einfallenden Welle entsprechen). Das erste zitierte Verfahren berechnet jedoch rein abstrakte Eigenfunktionen, deren physikalische Realität erst nach Auswertung der Randbedingungen an der freien Oberfläche und im Halbraum zu beurteilen ist. Die exponentiell anwachsenden Terme dürfen hier nicht einfach ausgeschlossen werden.

Parameter des Modells:					
	α [$\frac{\text{km}}{\text{s}}$]	β [$\frac{\text{km}}{\text{s}}$]	ρ [$\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$]	Q_α	Q_β
Schicht (Dicke: 10m)	1.529	0.767	0.870	110	125
Halbraum	2.742	1.413	1.238	230	240

numerische Parameter:							
f_{\min} [Hz]	f_{wil} [Hz]	f_{wir} [Hz]	f_{\max} [Hz]	u_{\min} [$\frac{\text{s}}{\text{m}}$]	u_{wil} [$\frac{\text{s}}{\text{m}}$]	u_{wir} [$\frac{\text{s}}{\text{m}}$]	u_{\max} [$\frac{\text{s}}{\text{m}}$]
0.	0.	120.	140.	10^{-7}	10^{-6}	$1.43 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-2}$

dominierende Quellfrequenz: 36.4Hz
Empfänger und Quelle befinden sich an der Oberfläche
Empfängerkoordinaten: 200 Empfänger in jeweils 2.75m Abstand bis 550m Auslage
Anzahl der Slowness-Stützstellen: 2000

Tafel 2.6: Parameter zu den Moden-Berechnungen für eine Schicht über einem Halbraum

Alle der genannten Algorithmen berücksichtigen jedoch in keiner Weise eine etwaige Wellendämpfung. Ein dämpfendes Medium muß sich zwangsläufig in einer Veränderung der vertikalen Eigenfunktionen äußern und damit auch im Dispersionsverhalten des Mediums, insbesondere im Abklingverhalten der einzelnen Moden.

2.4.2 Ein Beispiel

Als Beispiel für das in der vorliegenden Arbeit eingesetzte Verfahren ist in Abbildung 2.14 ein Dispersionsmuster für das Modell einer Schicht über einem Halbraum dargestellt. In Abbildung 2.13 ist das Ergebnis einer Dispersionsanalyse von Seismogrammen dargestellt, welche mit dem Reflektivitätsprogramm `refsyn.f` berechnet wurden. Die Parameter für beide Rechnungen sind in Tafel 2.6 angegeben. Bei den symmetrischen Mustern um die geschwärzten Bereiche in Abbildung 2.13 handelt es sich um Fenstereffekte, die besonders stark in Erscheinung treten da die Amplitudenskala logarithmisch ist und die synthetischen Daten kein Noise enthalten.

In Abbildung 2.14 ist das Vorzeichen der Rayleigh-Determinante wiedergegeben. Mit einem Schwab-Knopoff-Algorithmus wurde diese berechnet und positive und negative Werte als schwarze bzw. weiße Flächen dargestellt. An den Grenzen zwischen Schwarz und Weiß hat die Determinante folglich einen Nulldurchgang. Auf diesen Kurven können Eigenschwingungen existieren. Der grau gehaltene Teil für kleine Langsamkeiten ist der Bereich, in dem die Abstrahlbedingung nicht mehr erfüllt ist und die Eigenschwingungen nicht mehr als Oberflächenwellen bezeichnet werden.

Ein Vergleich mit Abbildung 2.13 zeigt, daß die starken Oberflächenwellen in der Tat auf den Dispersionskurven der Eigenschwingungen wiederzufinden sind. Überraschend mag sein, daß auch im Bereich in dem die Abstrahlbedingung nicht erfüllt ist, Oberflächenwellen mit beträchtlicher Amplitude existieren. Hierbei handelt es sich um die bereits in Abschnitt 1.6.3 auf Seite 36 genannten „leaking modes“.

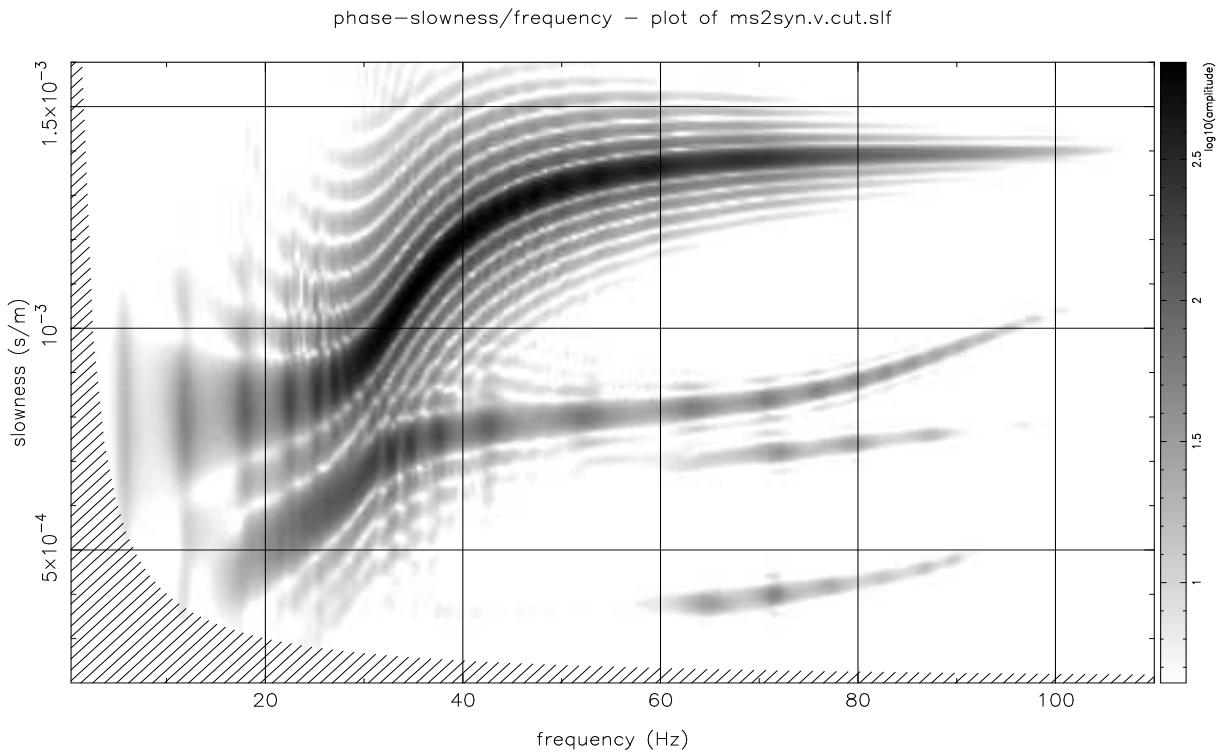


Abbildung 2.13: Dispersionsanalyse synthetischer Seismogramme „Schicht über Halbraum“

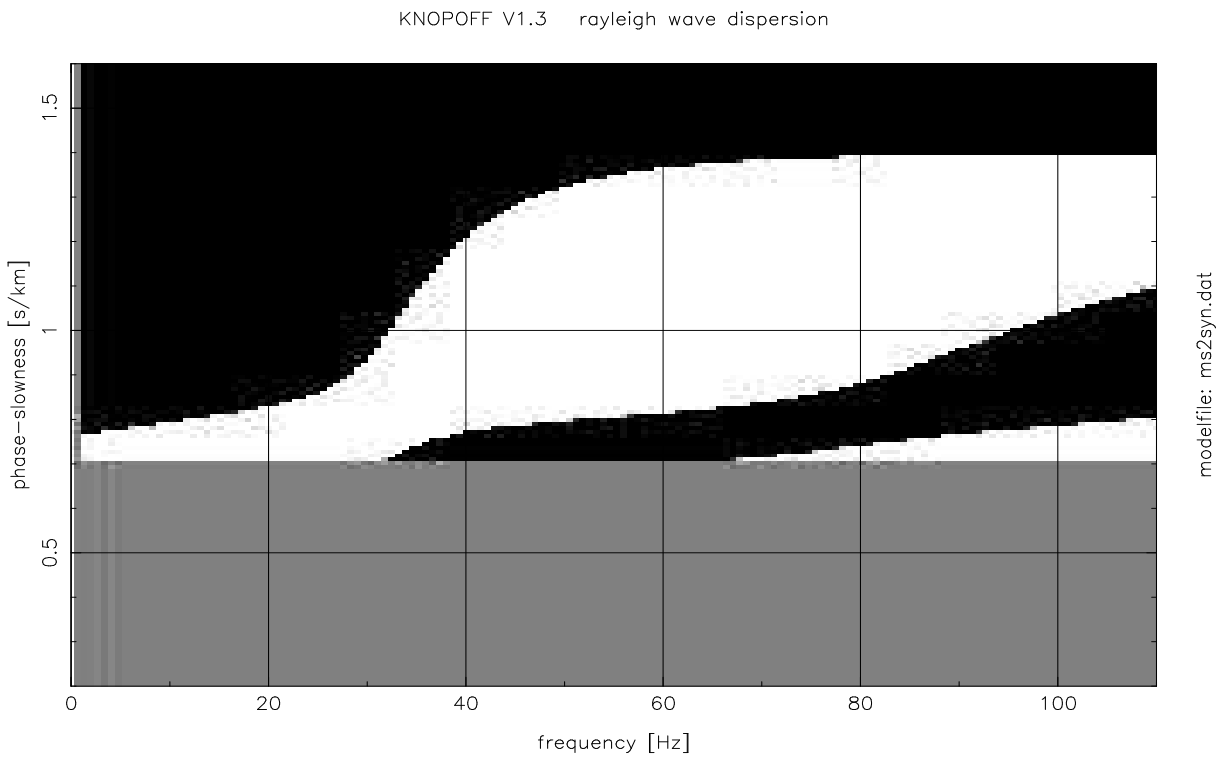


Abbildung 2.14: Vorzeichenmuster der Rayleighdeterminante „Schicht über Halbraum“

Kapitel 3

Meßtechnik

3.1 Aufbau

Zunächst sollen hier einige prinzipielle Erläuterungen zur Durchführung der später vorgestellten Experimente gegeben werden. Zum Aufbau einer Feldmessung gehören drei Gruppen von Instrumenten. Mit einer Signalquelle werden Wellen im Erdreich angeregt. Über mehrere an das Erdreich angekoppelte Geophone wird die Bodenbewegung gemessen. Diese Signale werden mit einer Registrierapparatur zur späteren Auswertung aufgezeichnet.

Für die Messungen standen folgende Instrumente zur Verfügung:

- zwei Impulsquellen:
 - eine Stahlkugel (ca. 50kg) als Fallgewicht; dazu ein Stativ (ca. 3m hoch) mit Flaschenzug
 - ein Vorschlaghammer (ca. 8kg)
- diverse passive Geophone:
 - 15 Stück 4.5Hz vertikal long-travel
 - 26 Stück 10Hz vertikal
 - 4 Stück 10Hz vertikal long-travel
 - 2 Stück 30Hz vertikal
 - 6 Stück 10Hz horizontal
- eine BISON 9024 Apparatur als Datenrekorder

Die Feldexperimente wurden nach der Refraktionsseismik-Methode wie folgt durchgeführt: Das zu untersuchende Profil wurde an der Erdoberfläche mit Geophonen belegt. Für die Ortsangabe innerhalb des Profils wird zwischen „Profilmeter“ und „Epizentraldistanzen“ unterschieden. Mit Profilmeter wird eine bestimmte Position im Gelände festgelegt an der sich ein Geophon befand, an der ein Schuß¹ durchgeführt wurde oder eine Inhomogenität kartiert wurde. Die Epizentraldistanz bezieht sich immer als Entfernungsangabe auf den jeweiligen Schußpunkt. Seismogramm-Montagen werden nach der Epizentraldistanz aufgetragen. Der Ort der einzelnen Geophone innerhalb der Auslage muß dann erst aus dem Profilmeter des Schußpunktes und der Schußrichtung berechnet werden.

Üblicherweise kamen bei den Messungen 24 Geophone gleichzeitig zum Einsatz. Schüsse wurden an beiden Enden der Auslage (Hin- und Rückschuß) durchgeführt sowie an verschiedenen Punkten innerhalb des Profils. Dies hat den Zweck, eventuell geneigte Refraktoren und ihren Verlauf entlang des Profils zu identifizieren. Für die Schüsse, mit denen eine ganze Auslage überdeckt wurde, kam das Fallgewicht zum Einsatz. Für die Zwischenschüsse wurde der Hammer aufgrund seiner größeren Mobilität bevorzugt. Mit dem Fallgewicht erzeugte Zeitserien wurden in der Regel einzeln abgespeichert, während bei Anregung mit dem Hammer bereits im Gelände grundsätzlich eine Stapelung mehrerer Zeitserien erfolgte, um das Signal-Stör-Verhältnis zu verbessern.

¹zum Begriff „Schuß“ siehe auch die Erläuterungen in Abschnitt B.2.1 auf Seite 135



Abbildung 3.1: Die beiden Signalquellen

Die Refraktionsseismik-Anordnung zielt darauf ab, starke vertikale Gradienten in den seismischen Parametern als Refraktoren zu identifizieren. Solche Gradienten treten in der Regel ab einigen Metern Tiefe auf. Die Schichten nahe der Oberfläche zeichnen sich durch einen milderen, aber räumlich ausgedehnteren Gradienten aus. Wie in Abbildung 2.1 auf Seite 39 erläutert, können Informationen über tieferliegende Medien bestenfalls in einer Qualität gewonnen werden, die so gut ist, wie die Ermittlung der oberflächennahen Struktur. Die Teile der Laufzeitkurve, die den Geschwindigkeiten von Strukturen geringer Tiefe entsprechen, liegen bei sehr kleinen Epizentralentfernungen. Daher ist es zur Auswertung von Laufzeitkurven unerlässlich, das seismische Profil möglichst nahe an der Quelle auszulegen, beginnend mit zunächst kleinen und später größer werdenden Geophonabständen. Auch bei der Analyse von Oberflächenwellen hat sich diese Auslagengeometrie als vorteilhaft erwiesen. Die Dispersionsstruktur oberflächennaher Bereiche bildet sich besonders in Quellnähe ab, was sicher mit dem Absorptionsverhalten des Mediums zusammenhängt.

Mit den vorhandenen Kabeln waren maximale Auslagen von 240m Länge bei 10m Geophonabstand möglich. In quellnahen Bereichen wurde nach Möglichkeit mit Geophonabständen von 50cm oder wenig mehr gearbeitet.

3.2 Die Signalquellen

Als Signalquellen standen bei den Versuchen eine Stahlkugel als Fallgewicht und ein Vorschlaghammer als beschleunigtes Fallgewicht zur Verfügung (siehe Abbildung 3.1).

3.2.1 Umgang mit dem Fallgewicht

Das Fallgewicht hat eine Masse von etwa 50kg und wird zum Beschießen größerer Auslagen eingesetzt. Gehalten durch Nebenschlußmagnete kann es an einem Stativ per Flaschenzug auf eine Höhe von etwa 2.5m gehoben werden. Durch Einbringen des magnetischen Nebenschlusses wird die Kugel ausgelöst und stürzt im freien Fall zu Boden. Zur besseren Ankopplung an den Boden wird sie auf eine Aluminiumplatte

von etwa 20–35cm Durchmesser und 3–4.5cm Stärke aufgesetzt. Kugel und Platte sind elektrisch mit der Triggereinrichtung des Datenrekorders verbunden. So wird beim Aufprall durch den Kontakt von Kugel und Platte ein Stromkreis geschlossen, der die Aufzeichnung anwirft. Die seismische Quelle und die Aufzeichnungseinheit sind durch einen Optokoppler galvanisch getrennt, da sonst durch die Einwirkung der Kugel auf den Boden elektrische Störsignale induziert werden.

Ohne unterlegte Platte sinkt die Kugel beim Aufprall tief in den weichen Boden ein. Aber auch mit Platte ist ein Einsinken beobachtbar. Dies bedeutet, daß die Wellenausbreitung nahe der Quelle nicht mehr rein elastisch beschrieben werden kann. Ein beträchtlicher Teil der übertragenen Energie wird bei der plastischen Deformation dissipiert. Dies haben auch frühere Untersuchungen² mit dem Fallgewicht gezeigt. So nimmt die in den seismischen Wellen beobachtbare Energie nicht linear mit der Fallhöhe der Kugel zu. Der Energieübertrag an die seismischen Wellen wird mit der Fallhöhe zunehmend ineffektiver. Der von der Kugel mitgeführte Impuls muß dagegen vollständig in die seismische Bewegung übergehen.

3.2.2 Umgang mit dem Vorschlaghammer

Der Hammer wird aufgrund seiner großen Beweglichkeit zum „Abklopfen“ des Profils eingesetzt. Er bietet sich an, um mit wenig Aufwand an möglichst vielen Schußpunkten seismische Wellen anzuregen. Dies wird durch eine geringere Reichweite, schlechtere Reproduzierbarkeit und schlechteres Signal-Stör-Verhältnis erkauft. Durch Stapelung mehrerer Aufzeichnungen können diese Nachteile etwas entschärft werden. Die Triggerung der Aufzeichnung erfolgt wahlweise entweder genauso wie bei Verwendung des Fallgewichts oder durch einen Festkörper-Beschleunigungsaufnehmer der am Stil des Hammers angebracht ist und beim Aufprall einen Spannungsimpuls abgibt. Auch für den Vorschlaghammer wird zur besseren Ankopplung an den Boden eine Aluminiumplatte eingesetzt.

3.2.3 Abschätzung der anregenden Kraft

Hier soll der Versuch unternommen werden, die anregende Kraftfunktion für ein Fallgewicht quantitativ zu bestimmen. Für den Vorschlaghammer als beschleunigtes Fallgewicht ist dies nur schwer möglich, da der Impuls des Hammers stark von der praktischen Ausführung des Schlags abhängt.

Für die Kugel müßte eine sinnvolle Abschätzung möglich sein. Beim Fallen nimmt sie einen definierten Impuls auf, den sie als Kraftstoß auf das Erdreich überträgt. Der Zeitverlauf des Kraftstoßes muß in der Bodenbewegung der quellnahen Spuren abgebildet sein.

Für den Fallvorgang lassen sich folgende Größen angeben:

Fallhöhe:	h	$h \approx 2.5\text{m}$
Schwerebeschleunigung:	g	$g \approx 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
Masse des Fallgewichts:	m	$m \approx 50\text{kg}$
Fallzeit:	$T = \sqrt{\frac{2h}{g}}$	$T \approx 0.7\text{s}$
maximale Geschwindigkeit:	$v = \sqrt{2hg} = gT$	$v \approx 7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
übertragener Impuls:	$p = mv$	$p \approx 350\text{Ns}$
aufgenommene Energie:	$E_{\text{kin}} = mgh$	$E_{\text{kin}} \approx 1250\text{J}$

Während des freien Falls (0.7s) der Kugel, ist das Erdreich um die Gewichtskraft (bei 50kg Masse sind das etwa 500N) entlastet. Beim Aufprall wirkt für einer sehr kurze Zeit eine große Kraft auf das Erdreich, welche weiter unten auf etwa 66000N abgeschätzt wird. Danach wirkt wieder die Gewichtskraft der Kugel.

Der freie Fall und der Aufprall der Kugel bewirken also jeweils einen Kraftstoß. Es wird jeweils ein Impuls von etwa 350Ns übertragen, jedoch mit entgegengesetztem Vorzeichen, so daß die Impulsbilanz ausgeglichen ist. Der Betrag des Kraftschritts zu Beginn des freien Falls, ist allerdings etwa 100-fach kleiner als die Kraft beim Aufprall der Kugel und muß daher nicht berücksichtigt werden. Die von diesem negativen Kraftstoß erzeugten Wellen würden außerdem etwa 700ms vor den gewünschten seismischen Signalen einsetzen und ließen sich damit von diesen trennen.

In guter Näherung wird das System aus Kugel und Erdreich nach dem Aufprall der Kugel als gedämpfter harmonischer Oszillator zu betrachten sein. Diese Annahme wird durch die Messungen gestützt, welche

²mündliche Mitteilung von R. Schick, Institut für Geophysik der Universität Stuttgart

eine gedämpfte harmonische Schwingung in Quellnähe mit einer für die Quellmasse spezifischen Frequenz zeigen. Es darf jedoch nicht vergessen werden, daß das Fallgewicht in der Regel nicht im Kontakt mit dem Boden bleibt, sondern von der Aufschlagplatte abprallt und zurück in die Luft geschleudert wird, um nach einigen Millisekunden erneut einen Impuls an das Erdreich zu übertragen. Als Anfangsbedingung der Schwingungsfunktion ist die Geschwindigkeit der Kugel zu nehmen:

$$\begin{aligned} \text{Geschwindigkeit:} \quad v(t) &= \sqrt{2hg} e^{-\gamma\omega_0 t} \cos(\omega_0 \sqrt{1-\gamma^2} t) \\ \text{Kraft auf das Medium (ohne Dämpfung):} \quad F(t) &= -\dot{p}(t) = -m\dot{v}(t) = m\omega_0 \sqrt{2hg} \sin(\omega_0 t) \\ \text{Auslenkung der Erdoberfläche (ohne Dämpfung):} \quad s(t) &= \frac{\sqrt{2hg}}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Die maximale Kraft und der Bremsweg lassen sich bei vernachlässigter Dämpfung für eine dominierende Quellfrequenz von $\omega_0 \approx 30\text{Hz} \cdot 2\pi$ leicht abschätzen:

$$\begin{aligned} F_0 &\approx m\omega_0 \sqrt{2hg} \approx 6.6 \cdot 10^4 \text{N} \\ s_0 &\approx \frac{\sqrt{2hg}}{\omega_0} \approx 3.8 \text{cm} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Soll der zeitliche Verlauf der Quellkraft aus Seismogrammen bestimmt werden, so ist eine Betrachtung der Gleichungen (1.31) auf Seite 24 hilfreich. Im Vollraum ist der Kraftverlauf proportional zur Fernfeldverschiebung. Um den Kraftverlauf aus dem Nahfeld zu bestimmen, wäre eine Differentialgleichung zu lösen.

3.3 Die Geophone

Bei den Geophonen handelt es sich um passive Pendelsysteme. Einen Permanentmagneten umfassend ist eine Spule an einer Membranfeder frei pendelnd aufgehängt. Bodenbewegungen nehmen das Geophongehäuse und den Magneten mit. Aufgrund ihrer Trägheit folgt die Spule für Frequenzen, die oberhalb der Eigenfrequenz des Pendels liegen, der Bewegung nicht. Die Relativbewegung von Magnet und Spule induziert eine Spannung.

Die Differentialgleichung des Geophons hat folgende Form:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2h\omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x &= \ddot{u} \\ \omega_0 &= \sqrt{\frac{k}{m}} \end{aligned}$$

Dabei ist x die Auslenkung der Spule aus ihrer Ruhelage in bezug auf das Geophongehäuse, m die Masse der Spule, k die Federkonstante der Pendelfeder, ω_0 die Eigenfrequenz des Pendels und u die Bodenverschiebung in bezug auf ein festes Koordinatensystem, der das Geophon folgt.

Die in der Spule induzierte Spannung ist proportional zur Relativgeschwindigkeit zwischen Spule und Magnet. Für Frequenzen, die größer als die Eigenfrequenz des Pendels sind, ist das Ausgangssignal proportional zur Partikelgeschwindigkeit des Untergrundes, für kleinere Frequenzen ist es proportional zur Ableitung der Beschleunigung. Der Proportionalitätsfaktor zwischen Partikelgeschwindigkeit und Ausgangsspannung wird als „Generatorkonstante“ bezeichnet.

Zusätzlich ist der Frequenzgang des Pendelsystems zu berücksichtigen, der durch die Eigenperiode und die Dämpfung bestimmt ist. Eine Dämpfung wird durch einen parallel zur Spule geschalteten Shuntwiderstand erreicht. Günstigerweise wird damit eine Dämpfung $h = 1/\sqrt{2} \approx 0.707$ des Systems eingestellt. Die Übertragungsfunktion des Geophons entspricht dann der eines zweipoligen Butterworth-Filters und ist in einem möglichst großen Bereich konstant. Wird eine kritische Dämpfung ($h = 1$) gewählt, so arbeitet das Pendel im aperiodischen Bereich und zeigt kein Überschwingen als Reaktion auf eine Schritt-Anregung. Bei den Messungen wurde (soweit dies nicht ausdrücklich anders vermerkt ist) kein Dämpfungsabgleich der Geophone vorgenommen. Der Shuntwiderstand ist dann mit $10\text{k}\Omega$ gleich dem Eingangswiderstand der BISON 9024.

In Tafel 3.1 sind die technischen Spezifikationen der zur Verfügung stehenden Geophone aufgeführt. Außerdem ist dort die Berechnungsweise des Shuntwiderstandes und der Dämpfung angegeben.

Parameter		10Hz	10Hz LT	30Hz	4.5Hz LT	Einheit
Typ		SM-4	SM6-B	SM-11	SM6-B	
Generatorkonstante	G	$28.8 \pm 5\%$	$28.8 \pm 5\%$	$31 \pm 5\%$	$28.8 \pm 5\%$	$V/\frac{m}{s}$
Dämpfung ohne Shunt	h_{offen}	0.25	0.250	$0.55 \pm 5\%$	0.560	
Dämpfungskonstante	C	6000	6000	8310	6000	$\frac{\Omega}{s}$
Spulenwiderstand	R_C	$375 \pm 5\%$	$375 \pm 5\%$	$360 \pm 5\%$	$375 \pm 5\%$	Ω
Eigenfrequenz	ν_0	$10.0 \pm 5\%$	$10.0 \pm 5\%$	30	$4.5 \pm 5\%$	Hz
Dämpfung an $10k\Omega$	h_{normal}	0.308	0.308	0.577	0.689	
Dämpfung bei Kurzschluß	h_{kurz}	1.85	1.85	1.32	4.12	
Shunt für $h = 0.707$	R_s	938	938	1400	8700	Ω

Die in der Arbeit benutzten Geophone sind Geräte des Herstellers „SENSOR Nederland bv“. Die Kennung „LT“ in der ersten Zeile der Tabelle bezeichnet sogenannte „longtravel“ Geophone mit langem Pendelweg. Eine Bewegung nach unten bewirkt ein positives Signal an der roten Klemme der Vertikalgeophone. Eine Bewegung in Richtung des roten Gehäuseendes bewirkt ein positives Signal an der roten Klemme der Horizontalgeophone.

Der Shuntwiderstand für eine beliebige Dämpfung berechnet sich wie folgt:

$$R_s = \frac{C}{(h - h_{\text{offen}}) \nu_0} - R_C \quad (3.3)$$

Die Dämpfung für einen beliebigen Shuntwiderstand berechnet sich wie folgt:

$$h = h_{\text{offen}} + \frac{C}{(R_C + R_s) \nu_0} \quad (3.4)$$

Tafel 3.1: Spezifikationen der Geophone

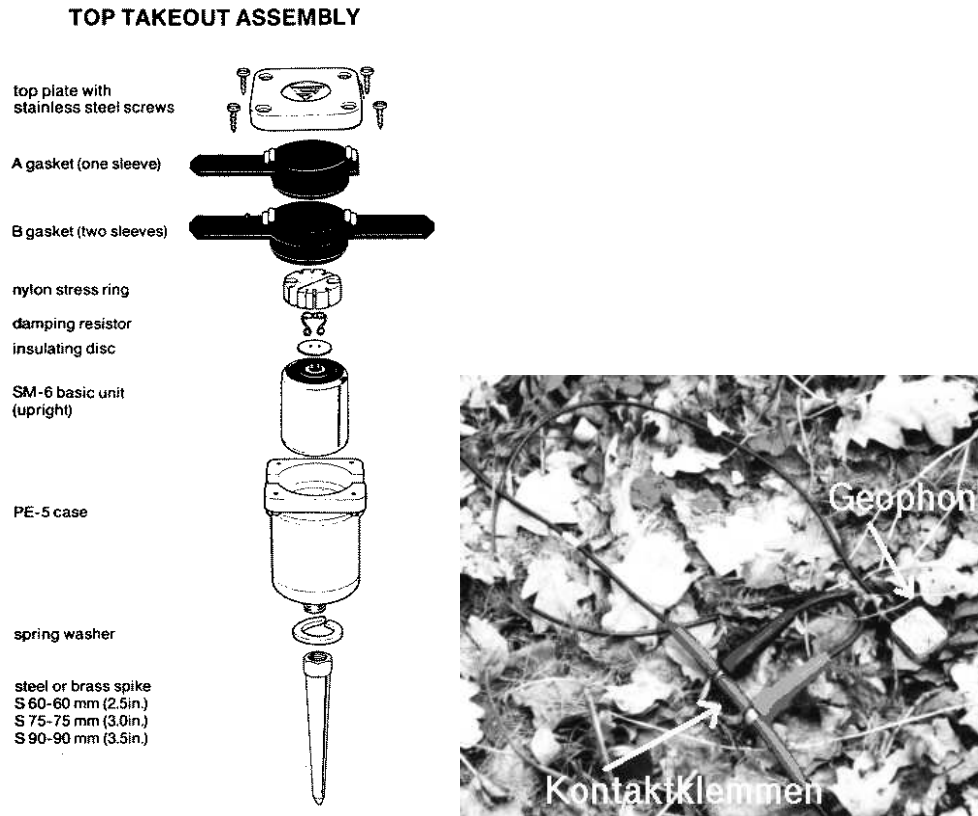


Abbildung 3.2: Konstruktion und Einsatz der Geophone

Das Geophon ist nur für die Verschiebungskomponente empfindlich, in deren Richtung das Pendel schwingen kann. Daher wird zwischen vertikalen und horizontalen Geophonen unterschieden. Vertikale Geophone enthalten eine vorgespannte Pendelfeder, um die Schwerebeschleunigung auszugleichen, welche auf die Spule wirkt. Aus diesem Grund sind beide Geophontypen nicht einfach austauschbar. Abbildung 3.2 zeigt ein Vertikalgeophon in einer Explosionszeichnung und fertig im Gelände installiert. Das Instrument besitzt eine Stahlspitze, mit der es fest im Erdreich verankert wird. Wie gut und sicher der mechanische Kontakt zum umgebenden Medium hergestellt wird und welche Eigenschaften dieses Medium lokal besitzt, wirkt sich erheblich auf die Qualität der Messungen aus. Da sich auf die Horizontalgeophone die bei einer Kippung in Pendelrichtung auftretende Komponente der Schwerebeschleunigung deutlich auswirkt, sind diese Geräte beim Einsatz zu nivellieren.

3.4 Der Datenrekorder

Für die Feldversuche stand eine BISON 9024 Refraktionsseismik-Apparatur [bis 95] zur Verfügung. Es handelt sich dabei um ein digitales Aufzeichnungsgerät, das für die Refraktionsseismik entwickelt wurde. Die wichtigsten Eigenschaften des Gerätes sollen hier kurz aufgezählt werden:

- Aufzeichnung von bis zu 24 Spuren parallel
- Samplingintervalle von $50\mu\text{s}$ bis 4s
- maximale Bandbreite $4\text{--}2000\text{Hz}$
- A/D-Wandler mit 16bit pro Kanal
- durch den Einsatz von zwei Vorverstärkern unterschiedlicher Verstärkung und die Aufzeichnung des Signales mit der jeweils günstigeren Verstärkung wird eine Dynamik von 21bit pro Kanal erreicht

Aus den von der Bison 9024 Apparatur aufgezeichneten Werten kann wie folgt die Partikelgeschwindigkeit berechnet werden:

$$v = \frac{x}{N_S F_{KG}} \frac{A}{G} \quad (3.5)$$

v : Partikelgeschwindigkeit in $[\frac{m}{s}]$

x : Meßwert in [counts]

N_S : Anzahl der mit der Bison durchgeführten Stapelungen

A : Aufzeichnungskonstante der Bison $A = 4.768 \cdot 10^{-6} \frac{V}{\text{counts}}$

F_{KG} : Bei der Aufzeichnung für den Datenkanal gewählter K-Gain-Faktor

G : Generatorkonstante für das benutzte Geophon in $[\frac{V}{\frac{m}{s}}]$

Tafel 3.2: Berechnung der Partikelgeschwindigkeit



Abbildung 3.3: Der Datenrekorder BISON 9024

- vier für jeden Kanal wählbare Vorverstärkungen (1, 10, 100, 1000) werden vom Gerät nach einem Probeschuß bestimmt
- Stapelspeicher mit 32bit Dynamik
- $10\text{k}\Omega$ Eingangsimpedanz
- Triggerung durch Kurzschluß oder Spannungsflanke
- 200MB Festplatte als Massenspeicher für die Meßdaten

Tafel 3.2 ist zu entnehmen, wie die aufgezeichneten Meßwerte in die Partikelgeschwindigkeit umgerechnet werden können. In Abbildung 3.3 ist die Apparatur beim Einsatz im Gelände abgebildet.

Kapitel 4

Experimente, Auswertung der Daten und Diskussion

Der Beschreibung und Auswertung der verschiedenen Experimente soll hier eine kurze Schilderung von aus der Literatur bekannten Eigenschaften der untersuchten Medien vorangestellt werden. In Tafel 4.1 ist eine Auswahl seismischer Parameter wiedergegeben, wie sie in der Literatur gefunden werden können.

Material	v_p [$\frac{m}{s}$]	v_s [$\frac{m}{s}$]	ρ [$\frac{g}{cm^3}$]	Quelle
Luft	330	0	0.0013	[sad 80]
Wasser	1430–1590	≈ 0	≈ 1	[sad 80]
Paraffin	2000	740–770	0.9	[ruf 93]
Plexiglas	2620	1340	1.2	[ruf 93]
Löß			2.64	[rei 31]
Löß	375–400			[mar 30]
Lehm			2.58	[rei 31]
Schotter, Kies, Sand, Löß trocken	600–800			[rei 31]
Schotter, Kies, Sand, Löß durchfeuchtet	1200			[rei 31]
Quartärlehm und Löß	450–800		1.5–1.8	[schn 93]
Ton	1100–2500		1.5–2.5	[sad 80]
Ton		120–700		[rei 43]
Sandstein	2100–4500		2.15–2.70	[sad 80]
Sandstein verwittert	1000–	250–500		[rei 43]
Sandstein unverwittert	1700–1950	650–1100		[rei 43]
Sandstein	2100–3200		2.23–2.35	[rei 31]
verw. Deckschicht	100–500		1.2–1.8	[gur 70]
Verwitterungsschicht	300–900		1.3–2	[gur 70]
Humusdecke			1.22–1.68	[rei 31]
trockene Lockersedimente	≈ 400	≈ 230		OS8 ¹
gesättigte Lockersedimente	≈ 1700	≈ 230		OS8 ¹

H. Reich [rei 31] unterscheidet zwischen der Dichte der Materialien und deren „natürlichem Raumgewicht“ unter Berücksichtigung des Porenraumes und dessen Füllung. Diese Unterscheidung wurde in dieser Tabelle nicht verfolgt, da sie von den anderen Autoren nicht vorgenommen wird.

¹Vortrag von K. Deubel (Leipzig) auf der DGG-Jahrestagung 1996

Tafel 4.1: seismische Parameter ausgewählter Materialien

Während sich die Eigenschaften von Medien wie Luft, Wasser und Plexiglas recht gut und allgemein bestimmen lassen, zeigt bereits Paraffin ein stark temperaturabhängiges Verhalten, wie F. Ruff [ruf 93] berichtet. Die Eigenschaften geologischer Materialien sind in noch stärkerem Maße von Umgebungseinflüssen abhängig. Die angegebenen Werte müssen als Mittelwerte für ganze Stoffklassen verstanden werden. Die Materialien können innerhalb der Stoffklasse sehr unterschiedlich zusammengesetzt sein. Außerdem liegen sie meistens nicht als kompakte Volumina vor, sondern sind mit Rissen und groben Fremdeinschlüssen durchsetzt. Für nahezu alle ihre Eigenschaften spielt die Wassersättigung eine erhebliche Rolle, diese ist jedoch witterungsabhängig. Ein und dasselbe Material kann je nach Wassergehalt extrem unterschiedliche Kompressionswellengeschwindigkeiten v_p aufweisen, während die Scherwellengeschwindigkeit v_s kaum variiert.

Außerdem ist zu berücksichtigen, daß geologische Karten Information über den Entstehungszeitraum einer Struktur geben und nicht in erster Linie über die stoffliche Zusammensetzung. Der stoffliche Aufbau einer geologischen Struktur ist teilweise in den Erläuterungen zu den geologischen Karten beschrieben. Letztendlich gibt dies aber noch keinen sicheren Anhalt für die tatsächlichen Materialeigenschaften am Ort und zur Zeit des durchgeführten Experiments.

All dies ist bei der Interpretation von Messungen und Tabellenwerten zu berücksichtigen. Jedoch sind die Werte aus der Literatur insbesondere als Anhaltspunkte für die Modellierung unerlässlich.

4.1 Modellseismik

4.1.1 Experimente

Für die ersten Untersuchungen und Tests der Auswertemethoden wurde ein Datensatz von F. Ruff [ruf 93] herangezogen, den dieser in seiner Diplomarbeit bei modellseismischen Experimenten gewonnen hatte. Es handelt sich dabei um Messungen an einem Plexiglasblock, auf den eine Paraffinschicht aufgebracht wurde. Dieses Modell stellt eine Schicht über einem Halbraum dar. Die Wellen wurden durch ein Piezokristall angeregt. Als Sensoren wurden ebenfalls Piezokristalle eingesetzt. Die einzelnen Spuren der Messungen wurden, laut Ruffs Ausführungen, nacheinander aufgezeichnet. Dabei blieb eine Piezokeramik ortsfest, während die andere entlang des Profils versetzt wurde. Die Seismogramme eines Profils stammen damit von unterschiedlichen Schüssen.

Zur Verfügung standen zwei Profile, denen folgender Aufbau zugrunde lag:

Profil 1: Eine Auslage von 5cm bis 45cm in Schritten von 1cm über eine 12mm starke Paraffinschicht auf Plexiglas.

Profil 2: Eine Auslage von 5cm bis 55cm in Schritten von 1cm über eine 10mm starke Paraffinschicht auf Plexiglas.

Für die in der vorliegenden Arbeit durchgeführten Analysen wurden die Datensätze auf Feldseismik-Dimensionen skaliert. Das heißt, Zeit- und Ortsmaßstab wurden mit 10^3 multipliziert. Millimeter werden so zu Metern und Mikrosekunden zu Millisekunden. Dies verändert nicht die resultierenden seismischen Geschwindigkeiten. Um die absoluten Amplituden nach der Skalierung korrekt zu interpretieren, müßten auch die Dichten der Medien mitskaliert werden. Auf eine Amplitudeninterpretation wurde bei diesen Datensätzen jedoch verzichtet, da auch die anregende Kraft nicht bekannt war.

4.1.2 Phasengeschwindigkeiten und Laufzeitkurven

Die von F. Ruff [ruf 93] aufgezeichneten Profile beginnen (in den Dimensionen der Flachseismik) bei einer Epizentraldistanz von 50m. In dieser Entfernung ist die direkte Welle im Paraffin bereits in den Hintergrund getreten, so daß ein Picken¹ der Ersteinsätze nicht mehr zu einer interpretierbaren Laufzeitkurve führt. Es lassen sich jedoch verschiedene Phasengeschwindigkeiten aus den Seismogrammen ablesen und

¹Siehe auch die Erläuterungen zum Begriff „picken“ in Abschnitt B.2.1 auf Seite 135.

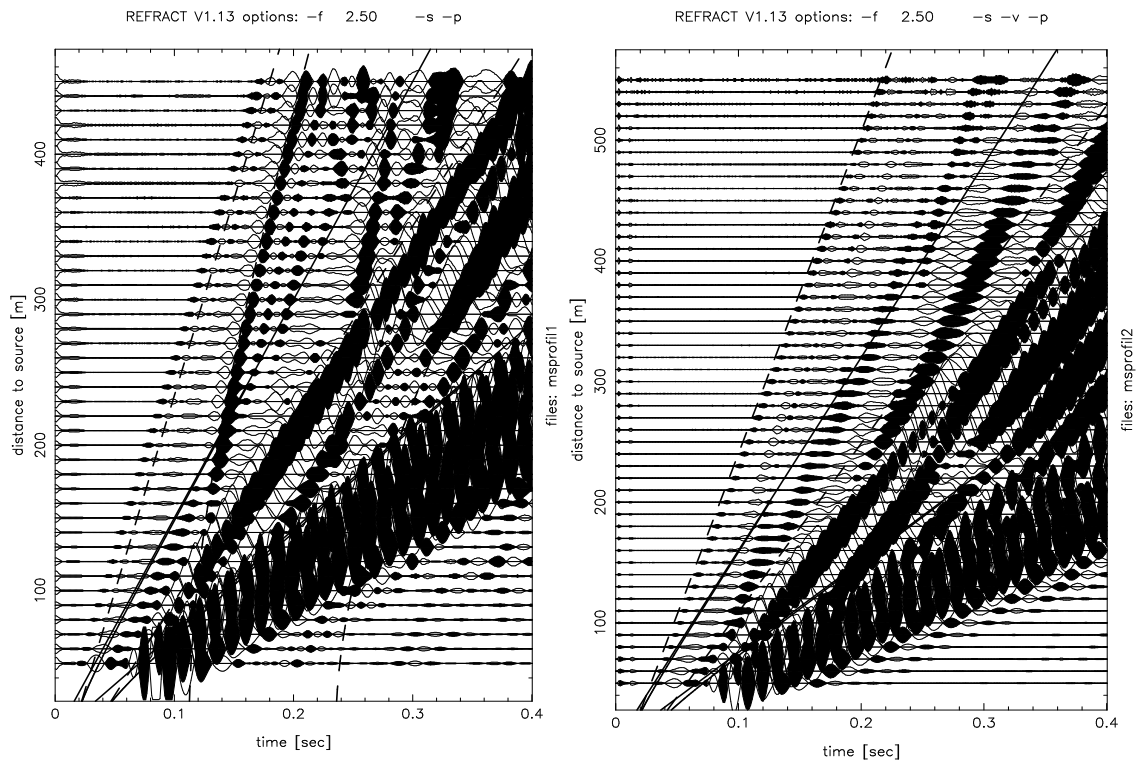


Abbildung 4.1: Laufzeitkurven für die Modellseismik-Profile. Die linke Montage zeigt Seismogramme des Profil 1, die rechte zeigt Profil 2. Die durchgezogenen Linien geben die Laufzeitkurven der direkten Welle im Paraffin und der am Boden des Paraffins reflektierten an. Die Laufzeitkurven der refraktierten Wellen aus dem Plexiglas sind gestrichelt gezeichnet. In der linken Montage sind auch die am Boden des Plexiglas reflektierten Wellen gestrichelt markiert. Die Laufzeitkurve der P-Welle ist weitgehend durch die Seismogramme verdeckt. Sie beginnt etwa bei 50m und 120ms und erreicht den oberen Rand bei 210ms. Die flacheren Kurven geben jeweils die refraktierten S-Wellen wieder.

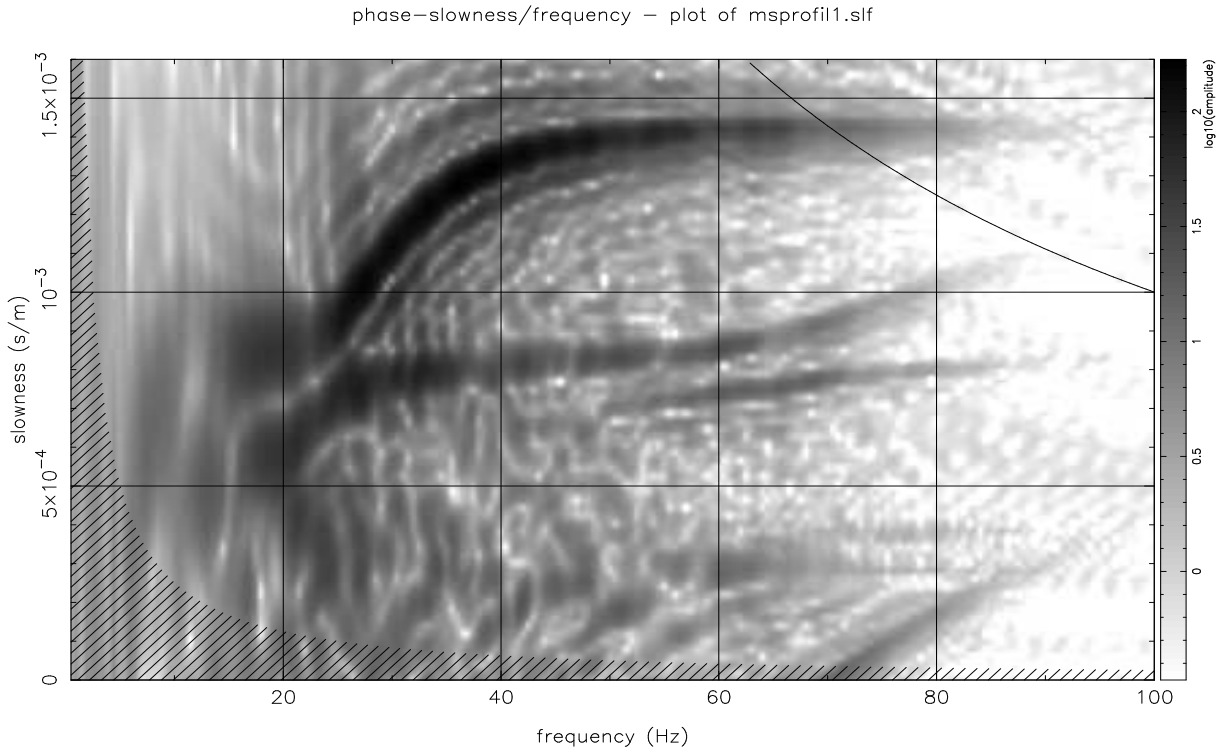


Abbildung 4.2: Dispersionsanalyse Modellseismik Profil 1

den Materialien zuordnen:

	Profil 1		Profil 2	
	v_p [$\frac{m}{s}$]	v_s [$\frac{m}{s}$]	v_p [$\frac{m}{s}$]	v_s [$\frac{m}{s}$]
Paraffin	1500	710	1600	755
Plexiglas	2700	1290	2670	1400

Nimmt man die von F. Ruff angegebenen Schichtdicken hinzu, so lassen sich erwartete Laufzeitkurven für die reflektierten und refraktierten P- und S-Wellen berechnen. Diese sind in Abbildung 4.1 in die Seismogramm-Montagen eingezeichnet. Für das Profil 2 beträgt die Dicke des Paraffins 10mm; das sind 10m in den Dimensionen der Flachseismik. Das Ergebnis des Vergleichs ist in diesem Fall voll befriedigend.

Der Vergleich fällt für die Seismogramme des Profil 1 mit einer Paraffin-Schicht der Stärke 12m (in Dimensionen der Flachseismik) ungünstiger aus. Hier liegt die erwartete Laufzeitkurve für die refraktierte Welle aus dem Plexiglas deutlich hinter der tatsächlichen. Versuche haben gezeigt, daß sich die tatsächliche Kurve für eine Schichtdicke des Paraffins von 0mm ergibt. Dies weist darauf hin, daß offenbar nicht die Angabe über die Schichtdicke falsch ist, sondern der Datenrekorder systematisch um $14\mu s$ zu spät getriggert wurde. Dafür spricht auch, daß das elektrisch eingestreuete Quellsignal in den Seismogrammen des Profil 1 nur zur Hälfte enthalten ist.

Als zweiter deutlicher P-Wellen-Einsatz ist in der Montage die am Boden des Plexiglas-Blocks reflektierte Welle zu erkennen. Für eine Mächtigkeit von 130m (dies entspricht etwa den Ausmaßen des Experimentierblocks mit 13cm Stärke) wurden hierzu Laufzeitkurven in Abbildung 4.1 eingezeichnet. Erstaunlich ist die Richtung des Erstausschlags der vom Boden reflektierten Welle. Sie ist entgegengesetzt zu der der refraktierten Wellen. Diese wird mit einer Bewegung nach oben erwartet, was für die reflektierte Welle eine Bewegung nach unten bedeutet. Ein Erstausschlag nach unten würde für eine Kompressionswelle eine Reflexion am offenen Ende bedeuten. Dies könnte auf eine schlechte Ankopplung des Plexiglas-Blocks an das unterfütterte Dämm-Material hinweisen. Die Laufzeitkurve der reflektierten S-Welle ist auch eingetragen. Diese Welle muß jedoch in den Oberflächenwellen untergehen.

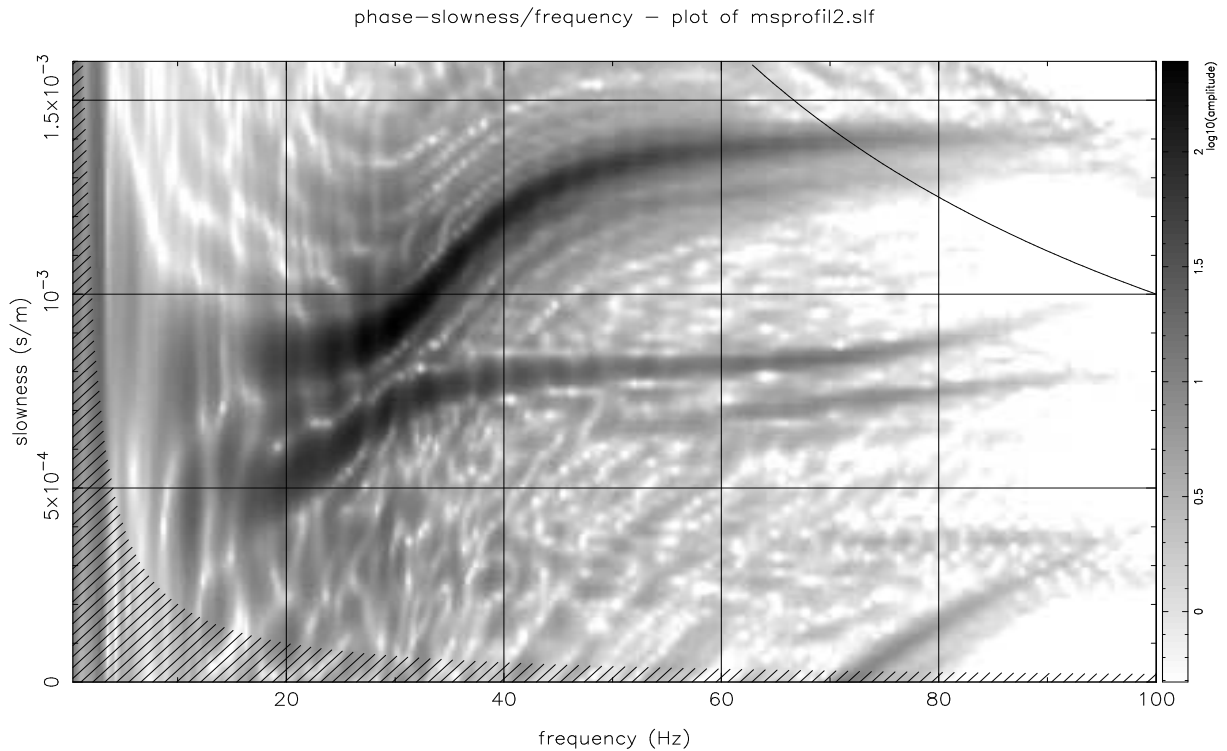


Abbildung 4.3: Dispersionsanalyse Modellseismik Profil 2

4.1.3 Dispersionsanalyse

In Abbildung 4.2 ist die Dispersionsanalyse für die Seismogramme des Profil 1 abgebildet. Die Analyse für Profil 2 ist in Abbildung 4.3 dargestellt. In beiden Diagrammen sind drei Modenäste der Oberflächenwellen erkennbar, wobei die Fundamentalmode bei etwa 70Hz als Alias ein zweites Mal bei kleinen Langsamkeiten auftritt. Es sind jeweils die für den Fall „Schicht über Halbraum“ typischen zwei Langsamkeits-Asymptoten zu erkennen, die zwar nicht identisch mit den S-Wellen-Langsamkeiten sind, aber nur knapp darüber liegen. Die S-Wellen-Langsamkeit von Paraffin beträgt ungefähr $1.3 \cdot 10^{-3} \frac{\text{s}}{\text{m}}$, die von Plexiglas etwa $0.72 \cdot 10^{-3} \frac{\text{s}}{\text{m}}$. Die Abschnitte der ersten höheren Mode, die bei Frequenzen unter 30Hz die S-Wellen-Langsamkeit von Plexiglas unterschreiten, müssen zu den „leaking modes“ gezählt werden.

Im Dispersionsmuster für Profil 2 könnte bei Frequenzen oberhalb 70Hz und einer Langsamkeit von $0.37 \cdot 10^{-3} \frac{\text{s}}{\text{m}}$ die refraktierte P-Welle aus dem Plexiglas erkennbar sein. Für das Profil 1 ist das Muster wesentlich undeutlicher. Möglicherweise ist dort auch noch die reflektierte P-Welle vom Plexiglas-Boden mit kleineren Schein-Langsamkeiten erkennbar.

Während die Schichtdicke des Paraffins für die Daten des Profil 1 nicht aus den Laufzeitkurven bestimmt werden konnte, zeigt sich in den Dispersionskurven, daß die Schichtdicke für Profil 1 größer gewesen sein muß, als für Profil 2. Anschaulich läßt sich die Situation wie folgt beschreiben: Bei großen Frequenzen ist die Eindringtiefe der Oberflächenwellen relativ gering. Ihre Ausbreitungsgeschwindigkeit wird daher vom Paraffin bestimmt. Erst wenn die Wellen zu einem gewissen Teil in das Plexiglas eindringen, wird die Ausbreitungsgeschwindigkeit größer, bis die Wellenausbreitung schließlich fast ausschließlich vom Plexiglas bestimmt wird. Je mächtiger die Paraffinschicht ist, um so größer können die Wellenlängen und um so kleiner die Frequenzen werden, bis dieser Übergang stattfindet. In den Seismogrammen von Profil 1 findet der Übergang bei kleineren Frequenzen statt als bei Profil 2. Dies weist auf eine Schichtdicke hin, die größer als die 10m von Profil 2 ist. R Ruff gibt 12mm an, was in den hier benutzten Dimensionen 12m entspricht.

Parameter des Modells:							
	α [$\frac{\text{km}}{\text{s}}$]	β [$\frac{\text{km}}{\text{s}}$]	ρ [$\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$]	Q_α	Q_β		
Schicht (Dicke: 9.9628m)	1.752	0.753	0.900	100	50		
Halbraum	2.483	1.374	1.200	200	200		

numerische Parameter:							
f_{\min} [Hz]	f_{wil} [Hz]	f_{wir} [Hz]	f_{\max} [Hz]	u_{\min} [$\frac{\text{s}}{\text{m}}$]	u_{wil} [$\frac{\text{s}}{\text{m}}$]	u_{wir} [$\frac{\text{s}}{\text{m}}$]	u_{\max} [$\frac{\text{s}}{\text{m}}$]
0.	10.	120.	140.	10^{-7}	10^{-6}	$2 \cdot 10^{-3}$	$2.5 \cdot 10^{-3}$

Quellfunktion: $q(t) = \sin^3(t\pi/0.0274\text{s})$ $0\text{s} \leq t \leq 0.0274\text{s}$
Anzahl Slowness-Stützstellen: 800

Tafel 4.2: Parameter der Berechnung der synthetischen Seismogramme für das Profil 2 der Modellseismik

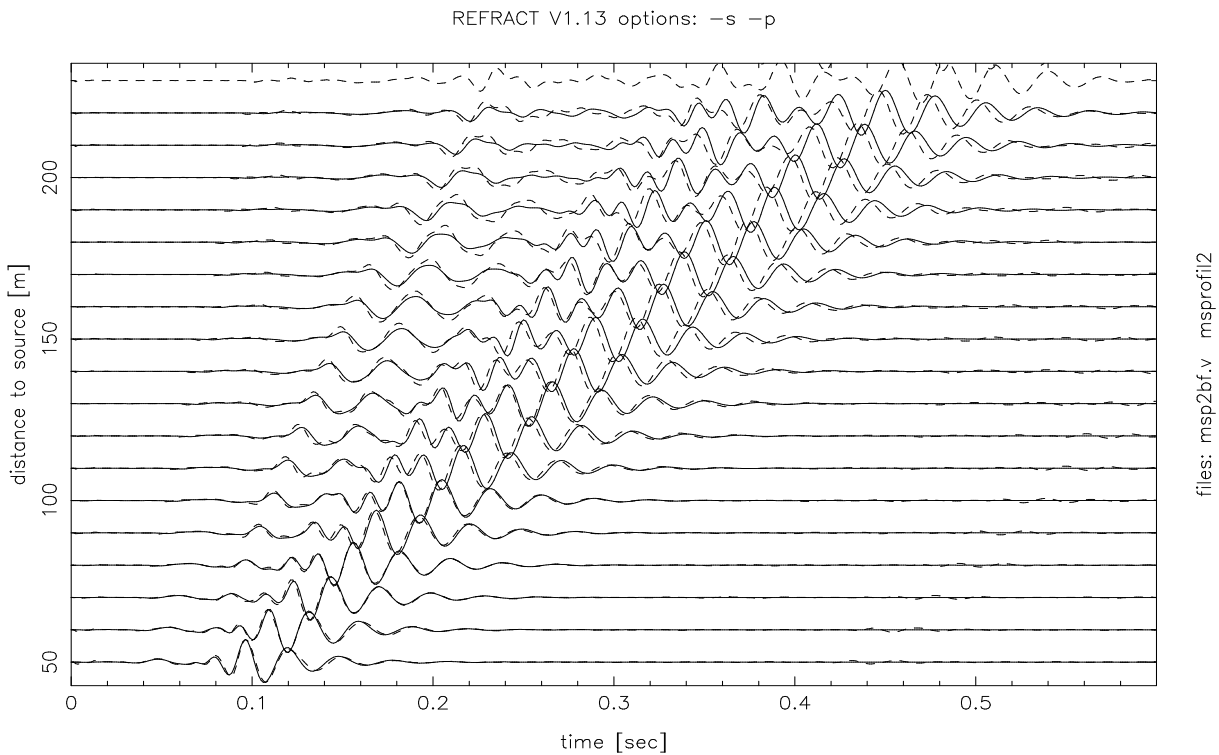


Abbildung 4.4: Seismogramme eines angepassten Modells (reale Daten sind gestrichelt dargestellt)

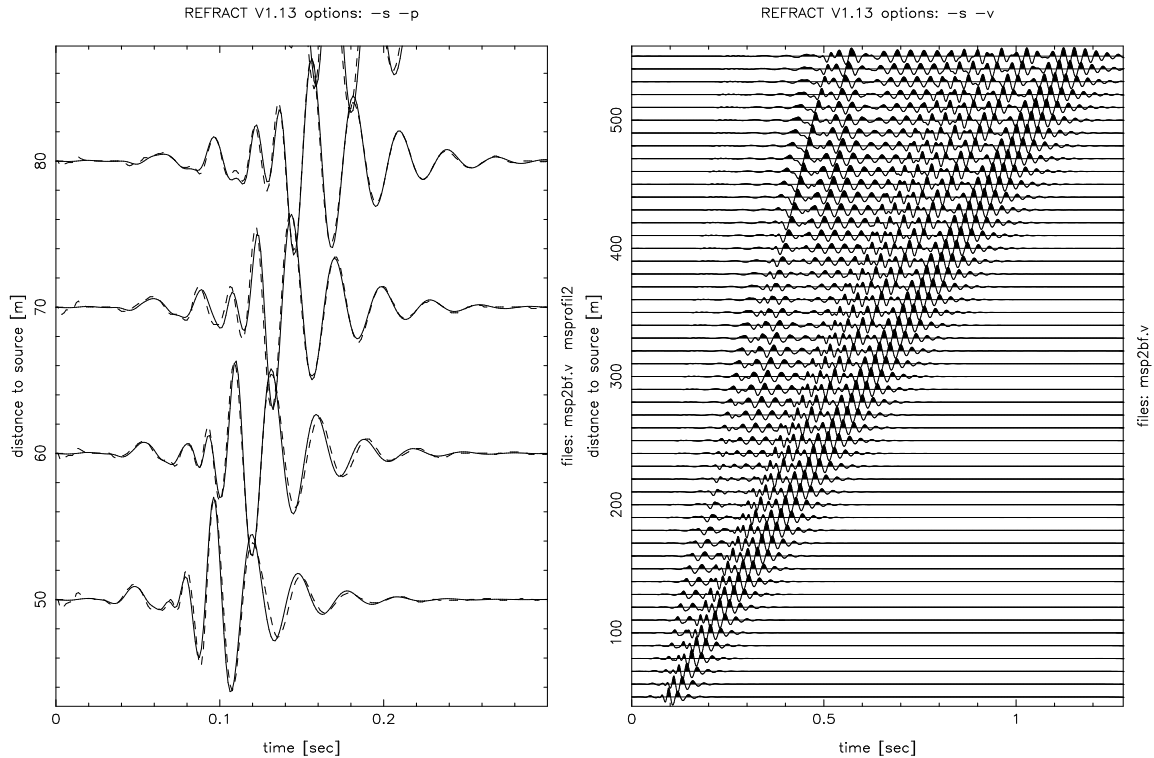


Abbildung 4.5: Ausschnitt aus dem Anpassungsvergleich und Seismogramme für das ganze Profil 2 (reale Daten sind gestrichelt dargestellt)

4.1.4 Modellierung

Als Vorstudie zu den Untersuchungen von Daten aus der Flachseismik wurden die Modellseismik-Seismogramme mit der Reflektivitätsmethode modelliert. Nach den oben beschriebenen Analysen stand ein ausgezeichnetes Startmodell für die Berechnung synthetischer Seismogramme zur Verfügung. Die Schichtgeschwindigkeiten wurden durch Ablesen der Phasengeschwindigkeiten in der Seismogramm-Montage ermittelt. Die Schichtdicke und die Dichten der Materialien wurden nach den Angaben von F. Ruff (siehe auch Tafel 4.1 auf Seite 71) gewählt. Für die Qualitätsfaktoren wurden Schätzwerte zwischen 50 und 200 angesetzt. Die dominierende Frequenz in der Quellfunktion wurde aus den Spektren der Seismogramme abgeschätzt. Die Quellfunktion ist die von Ungerer [ung 90] in seinem Programm `refseis.f` eingesetzte und auf Brüstle und Müller [brü 83] zurückgehende Funktion (siehe Tafel 4.2). Sie wurde hier gewählt, da sie einen Impuls darstellt, der zweimal stetig differenzierbar von 0 einsetzt und nach 0 abklingt und somit wenig Obertöne beinhaltet. Das Vorzeichen der Quelle entspricht einem Schlag von oben auf die Oberfläche des Paraffins.

Die Parameter des Startmodells wurden nach und nach verändert, um die Anpassung an die gemessenen Seismogramme zu verbessern. In Tafel 4.2 sind die Parameter angegeben, die der Berechnung der synthetischen Seismogramme zugrunde liegen, die in Abbildung 4.4 mit den realen Daten verglichen werden. Die realen Daten sind gestrichelt dargestellt, während die durchgezogene Linie die synthetischen Seismogramme wiedergibt. Positive Ausschläge der Seismogramme bedeuten eine Bewegung nach unten in den Halbraum hinein. Ein Ausschnitt der quellenahen Spuren ist nochmals in Abbildung 4.5 gezeigt.

Es wurden zunächst die quellenächsten drei Spuren durch Veränderung der Schichtgeschwindigkeiten und der Quellfunktion möglichst gut angepaßt. Die Anpassung wurde dann auf die weiter entfernten Spuren ausgedehnt unter Veränderung der Schichtdicke, der Schichtgeschwindigkeiten und der Qualitätsfaktoren.

Die dabei gemachten Erfahrungen zeigen, daß der Kurvenverlauf wesentlich durch das Modell bestimmt wird. Die genaue Form der Quellfunktion löst nur noch kleine Unstimmigkeiten. Die Qualitätsfaktoren sind für das Dämpfungsverhalten bestimmend, können jedoch in einem Bereich von $\pm 10\%$ variiert

werden, ohne das Signal gravierend zu beeinflussen. Am sensibelsten reagieren die Seismogramme auf die Parameter Schichtdicke und Schichtgeschwindigkeiten. In die Theorie der Reflektivitätsmethode geht die Dichte der Materialien bei der Berechnung der Reflexions- und Transmissions-Koeffizienten an den Schichtgrenzen ein. Es ist zu erwarten, daß diese Parameter am ehesten einen Einfluß auf die relativen Amplituden der in den Seismogrammen enthaltenen Teilwellen haben. Dies wurde jedoch nicht systematisch untersucht. Unter fortgesetzter Veränderung dieser Parameter könnte die Anpassung sicherlich noch weiter verbessert werden. Aufgrund der großen Zahl von Vergleichswerten in den realen Daten, müßte es sogar möglich sein, die Quellfunktion und die Übertragungsfunktion der Aufnehmer zu ermitteln. Vollkommen identische Seismogramme zu erzeugen ist sicher nicht sinnvoll, da in den realen Daten Reflexionen von den Rändern des Plexiglas-Blockes enthalten sind (die prinzipiell nicht mitmodelliert werden) wie die Daten von Profil 1 deutlich gezeigt haben. Dies ist bei einer Modellierung immer zu berücksichtigen.

In Abbildung 4.5 ist außerdem eine vollständige Seismogramm-Montage für die synthetisch berechneten Seismogramme dargestellt. Hier sind, ebenso wie in Abbildung 2.4 auf Seite 44, wo die realen Daten in voller Profillänge wiedergegeben sind, regelmäßige Interferenzlücken im Oberflächenwellenzug zu erkennen. Diese sind damit offensichtlich allein durch die Geometrie „Schicht über Halbraum“ als Schwebungen zu erklären und haben nichts mit lateralen Inhomogenitäten oder Reflexionen vom Rand zu tun.

Auf eine weitere Anpassung für Profil 2 und eine Modellierung der vermutlich qualitativ schlechteren Daten² für Profil 1 wurde verzichtet, da es sich hierbei nur um Vorstudien zur Flachseismik handeln sollte.

4.2 Frauenkopf, Stuttgart

4.2.1 Experimente

Im Rahmen des Praktikums zur Vorlesung „Angewandte Geophysik“ wurden Messungen auf dem Stuttgarter Frauenkopf durchgeführt. Die oberste Kuppe des Frauenkopf wird durch Lias α mit wenigen Metern Mächtigkeit gebildet. Darunter folgt eine etwa 2–3m mächtige Rätsandsteinschicht, die durch den Hang angeschnitten wird. Darauf folgen etwa 20m Knollenmergel, die wiederum von Stubensandstein beträchtlicher Mächtigkeit abgelöst werden³. Die Messungen wurden im Lias durchgeführt. Das Gelände war zum Profilende hin leicht abwärts geneigt, welches bis in den Beginn des Rät reichte. Somit keilt die Liasschicht im Profil aus. Ziel der Messung war es, den Stubensandstein als Refraktor unter dem Knollenmergel zu identifizieren.

Die Profilmeter wurden vom Frauenkopf-Gipfelpunkt aus abgetragen. Von dort ausgehend wurden ein kurzes Profil mit 100m Auslage und ein langes Profil mit 240m Auslage gemessen. Auf den Profilen wurden 10Hz-vertikal-Geophone ausgelegt. Für das lange Profil wurden mit dem Fallgewicht Schuß, Gegenschuß und Mittenschuß durchgeführt. Das kurze Profil lag vollständig im Lias α und wurde nur mit dem Vorschlaghammer mit einem Hinschuß belegt.

4.2.2 Auswertung der Laufzeitkurven

In Abbildung 4.7 ist die Laufzeitkurve für die am Frauenkopf in positive Profilrichtung aufgezeichneten Seismogramme abgebildet. In die Grafik ist das daraus berechnete Geschwindigkeitsmodell eingeblenet. Das letzte Element des Polygonzuges mit einer Scheingeschwindigkeit von etwa $2.3 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ setzt sich ungestört bis zum Ende des Profils bei 240m fort. Möglicherweise handelt es sich dabei tatsächlich um die refraktierte Welle von der Oberkante des Stubensandsteins. In 9m Tiefe zeichnet sich offenbar der Durchfeuchtungshorizont im Knollenmergel ab. Die weiter oberhalb erkennbaren Strukturen lassen sich nicht sinnvoll der geologischen Situation zuordnen. Sie sind vielmehr typisch für Verwitterungszonen und aufgelagerte Lockersedimente.

Angesichts der auskeilenden Schichten und der Topographie des Geländes mag es verwunderlich sein, daß die Laufzeitkurven von Hin- und Rückschuß erstaunlich symmetrisch ausfallen. In Abbildung 4.8

²Neben den bereits oben genannten Hinweisen, wurde auch von E. Wielandt berichtet, daß während der Messungen zu den Daten von Profil 1 möglicherweise ein guter Kontakt zwischen Paraffin und Plexiglas nicht hergestellt werden konnte.

³Die Informationen über die Geologie des Frauenkopfes wurden der Geologischen Karte von Baden-Württemberg 1:25.000 Blatt 7221 (1960) entnommen

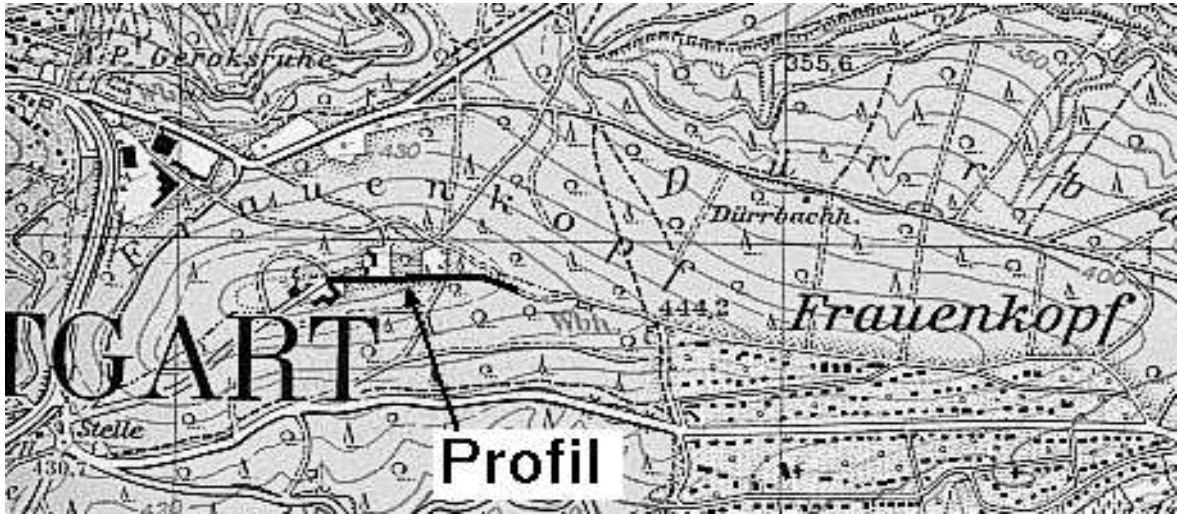


Abbildung 4.6: Frauenkopf, Stuttgart (Ausschnitt aus der Topographischen Karte 1:25.000 Blatt 7221; Wiedergabe nicht maßstäblich)

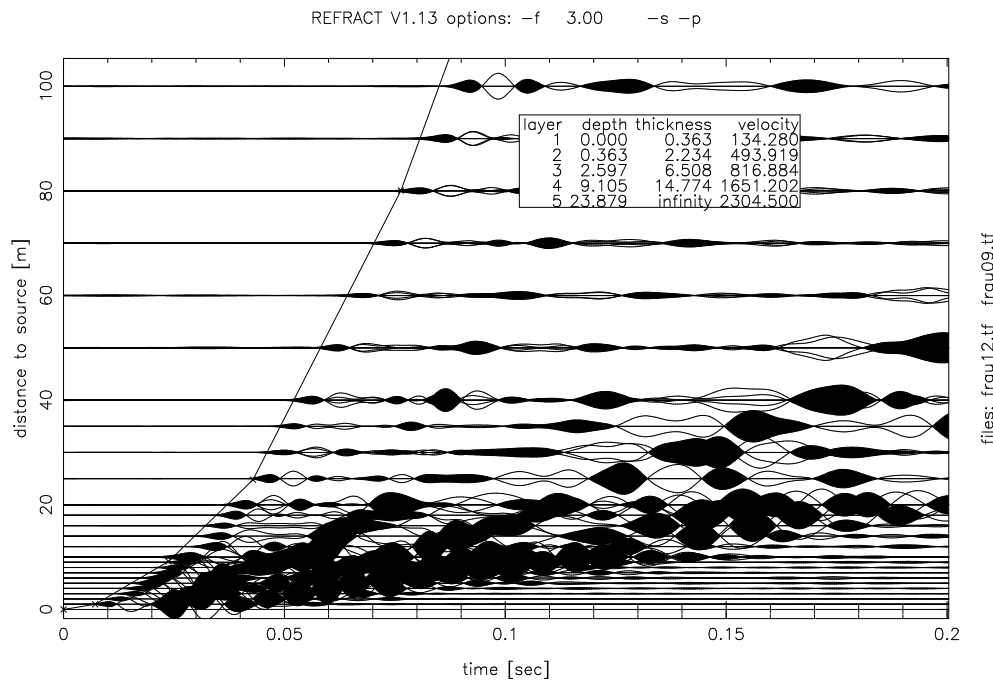


Abbildung 4.7: Auswertung von Laufzeitkurven der refraktionsseismischen Messungen am Frauenkopf. Die geschwärzten Ausschläge entsprechen einer Bewegung nach oben.

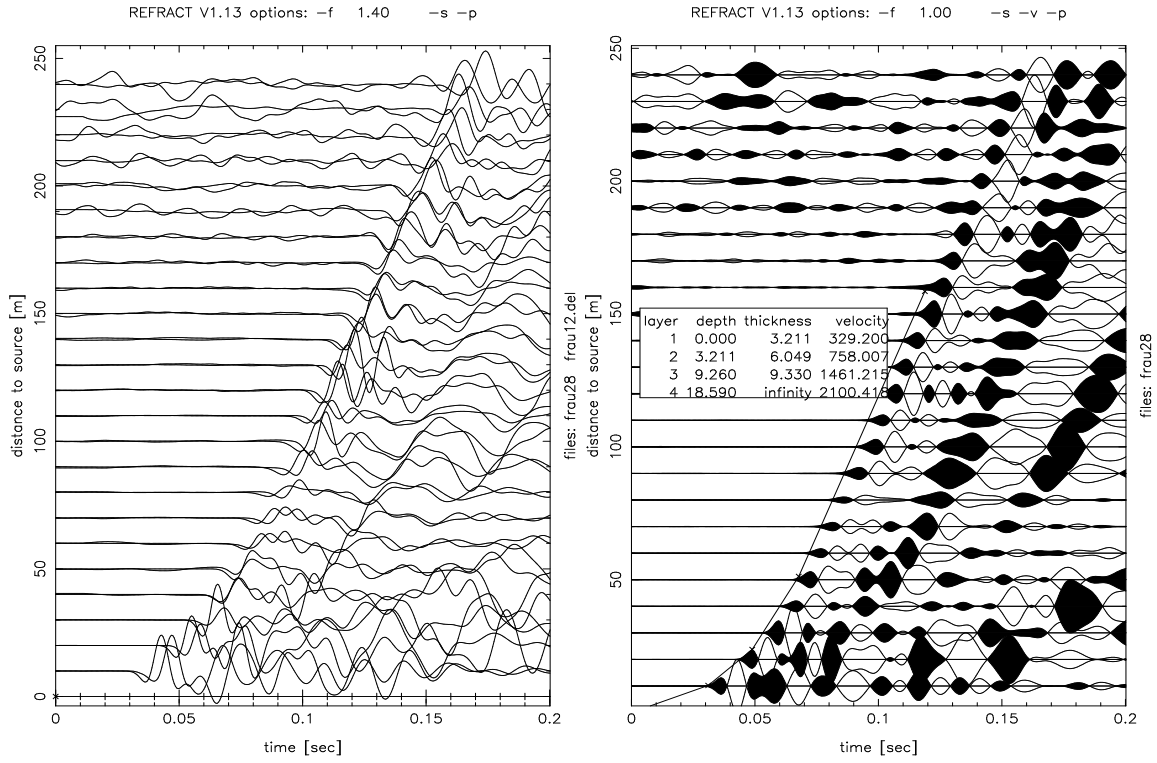


Abbildung 4.8: Laufzeitkurven für den Gegenschuß am Frauenkopf. Die negativen Ausschläge (linkes Bild) und geschwärzten Ausschläge (rechtes Bild) entsprechen einer Bewegung nach oben.

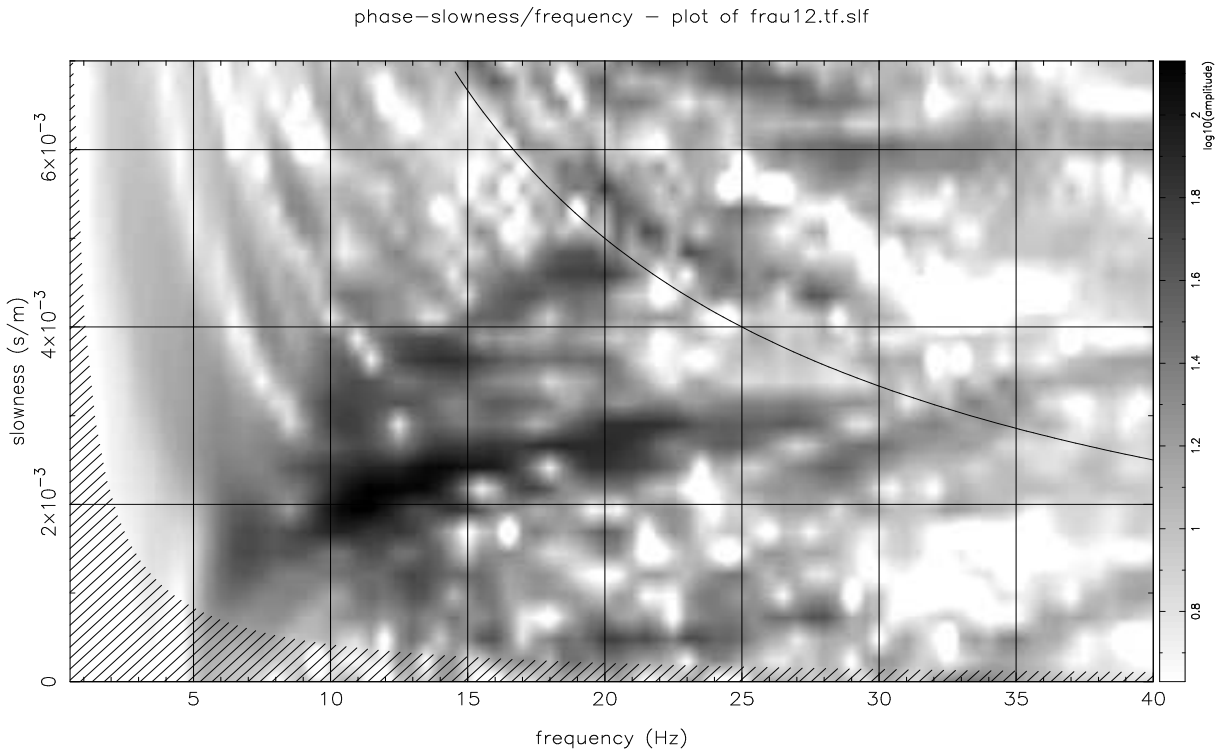


Abbildung 4.9: Dispersionsanalyse der Seismogramme vom Frauenkopf

sind in der linken Bildhälfte die Seismogramm-Montagen von Hin- (frau12.del) und Rückschuß (frau28) übereinander gezeichnet. Der Datensatz frau12 wurde zu diesem Zweck um 11ms verzögert. Bei einer Geschwindigkeit von $100 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ entspräche das einem Laufweg von 1.1m. Ob dies eine Wirkung des weichen Untergrundes am Schußpunkt des Profils 28 ist, oder auf einer fehlerhaften Triggerung beruht, die für alle Rückschüsse systematisch auftritt, ist nachträglich nicht mehr feststellbar. Die Laufzeitdifferenzen sind für beide Schüsse nahezu gleich. Dasselbe Verhalten zeigt auch der Mittenschuß. Auch die Interpretation der Laufzeitkurve (rechts in Abbildung 4.8) zeigt eine ähnliche Strukturierung.

Die Auswertung der Seismogramm-Montagen zeigt, daß reale Laufzeitkurven natürlich keine Polygonzüge sind, sondern mehr oder weniger geschwungene Kurven mit zunehmenden und abnehmenden Steigungen. Eine Einteilung in die Abschnitte eines Polygonzuges und damit in eine horizontale Schichtung ist vollkommen der Willkür des Interpretierenden unterworfen. Wie sicher eine Struktur als solche zu identifizieren ist, erweist sich meistens erst, wenn sie sich bei unterschiedlicher Wahl der Knickpunkte des Polygonzuges in ähnlicher Weise wieder ergibt. Günstigerweise verucht man bei der Auswertung mit möglichst wenig Knickpunkten auszukommen, indem diese bei Bedarf auch zwischen die Nulllinien der seismischen Spuren gesetzt werden. In diesem Sinne sind für das Gelände am Frauenkopf nur die Horizonte von etwa 10m und 20m Tiefe gesichert.

4.2.3 Dispersionsanalyse

Ergänzend wurden Dispersionsanalysen der Daten vom Frauenkopf durchgeführt. Das Dispersionsmuster der Seismogramme des Schusses in positive Richtung des langen Profils ist in Abbildung 4.9 stellvertretend wiedergegeben. Auffallend ist, daß die Dispersionsstruktur auf sehr niedrige Frequenzen (unterhalb 25Hz) beschränkt bleibt. Die verschwommene Kontur könnte darauf hinweisen, daß sich keine einheitlichen Oberflächenwellen über das ganze Profil ausbilden konnten. Bei Langsamkeiten um $0.5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{s}}{\text{m}}$ ist zwischen 20Hz und 25Hz ein erstaunlich kräftiger Streifen erkennbar, der von der refraktierten Welle aus dem Stubensandstein hervorgerufen worden sein könnte.

Der Frauenkopf wurde nicht mehr weiter als Meßgelände genutzt, da zum einen die geologische Struktur zu unklar und zu kompliziert (auskeilende Schichten) erschien, um als einfaches Gelände zu gelten. Die gemessenen Dispersionskurven haben für Übungszwecke nicht überzeugt. Zum anderen ist in Abbildung 4.8 auf den letzten sechs Spuren des Rückschusses erheblicher Noise enthalten. Diese Spuren lagen am nächsten am Frauenkopf-Sendeturm und enthalten die geringsten Signalamplituden. Der Frauenkopfturm mit seinen technischen Einrichtungen ist sicher eine Störquelle und macht den Meßplatz zusätzlich unattraktiv.

4.3 Grabenstetten

4.3.1 Experimente

Bei Grabenstetten befindet sich ein teilweise aufgeschlossener Basaltgang des Uracher Vulkangebietes. Mit magnetischen Kartierungsverfahren wurde der Gang in den vergangenen Jahren im Rahmen des Praktikums zur Vorlesung „Angewandte Geophysik“ eingehend untersucht und kartiert (siehe Abbildung 4.10; der Aufschluß befindet sich an der Straße nach Bad Urach). Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde der Basaltgang als Beispiel einer bekannten und abgegrenzten lateralen Störung herangezogen. Bei den Messungen in Grabenstetten ging es darum, einen Eindruck davon zu bekommen, wie sich die Inhomogenität seismisch abbildet. Dabei war von vornherein nicht klar, ob der Gang überhaupt einen nennenswerten seismischen Kontrast zum Kalkstein des umgebenden Weißjura δ bildet. Basalt und Jurakalke sind durch eine Verwitterungs- und Bodenschicht vollständig abgedeckt. Zum Zeitpunkt der Messung war der Erdboden mit einer etwa 10cm mächtigen Schneeschicht bedeckt und die oberste Schicht des Erdreichs gefroren.

Das ausgelegte Profil hatte eine Länge von 115m und wurde mit 24 10Hz-vertikal-Geophonen bestückt. Gemessen wurden Hin- und Rückschuß mit dem Vorschlaghammer. An beiden Profilen wurden mehrere Schüsse im Abstand von jeweils 10m durchgeführt, um ortsfeste Erscheinungen von Effekten trennen zu können, die in bestimmten Epizentralentfernungen auftreten. Die Profilmeter wurden vom westlichen Profilen abgetragen. Mit Kernspinmagnetometern wurde der Basaltgang zwischen 50m und 62m auf dem Profil lokalisiert.

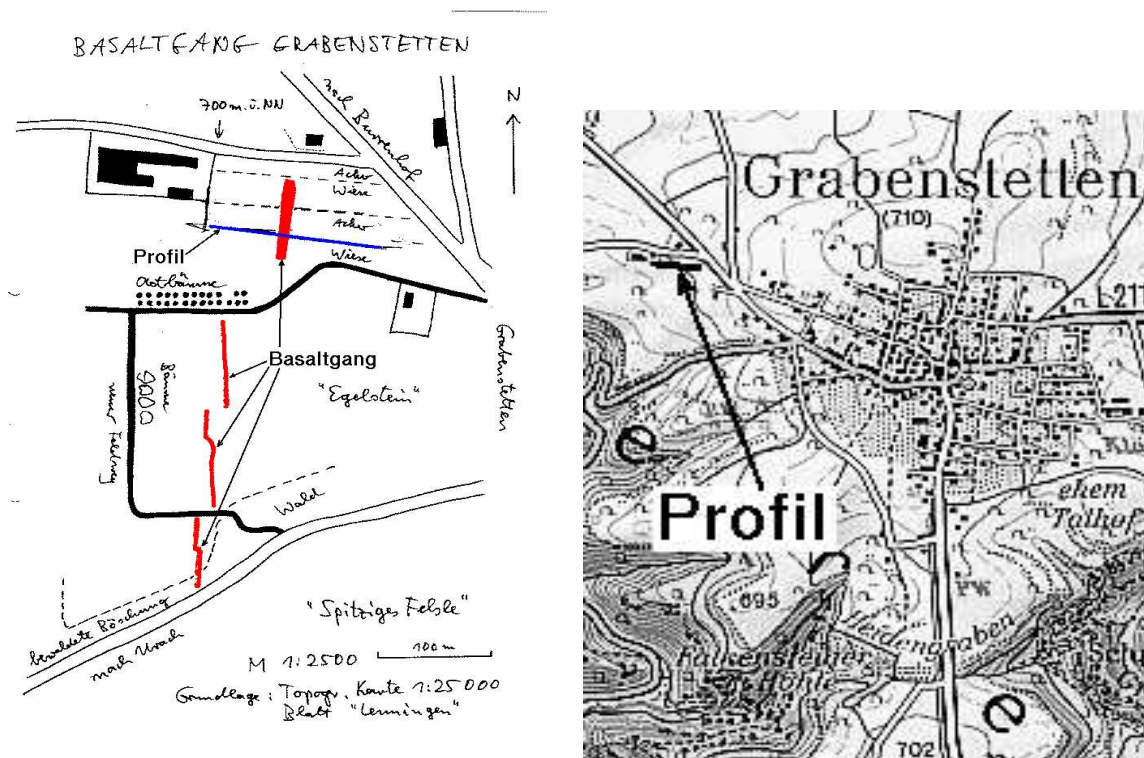


Abbildung 4.10: Basaltgang bei Grabenstetten (Skizze von E. Wielandt und Ausschnitt aus der Topographischen Karte 1:50.000 Blatt L7522; Wiedergabe nicht maßstäblich)

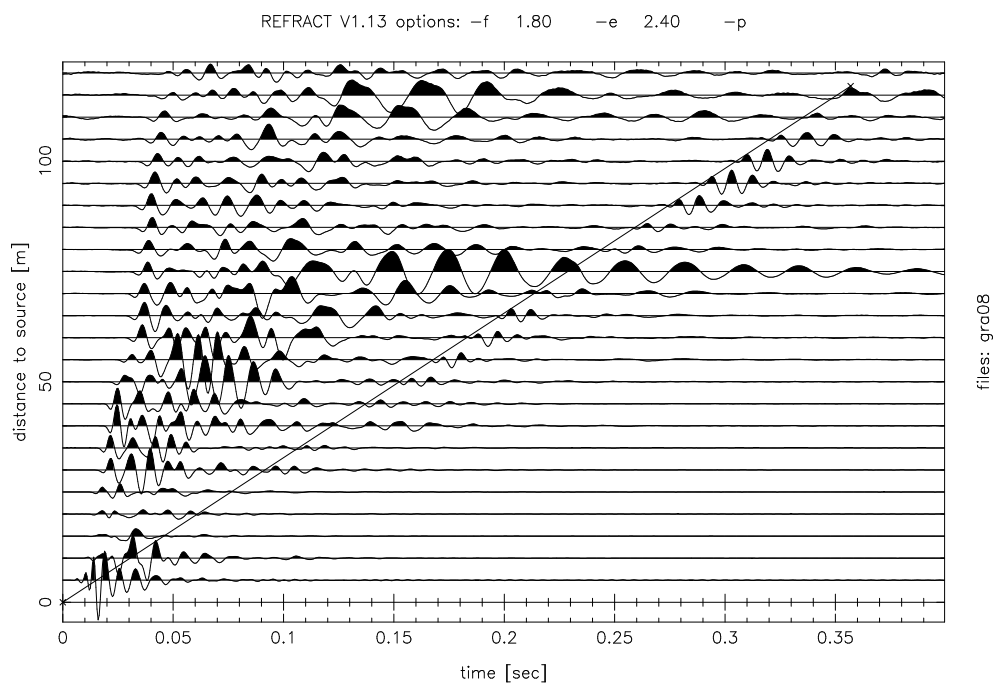


Abbildung 4.11: Seismogramm-Montage des Profils bei Grabenstetten. Die durchgezogene Linie markiert die Laufzeitkurve des Luftschalls.

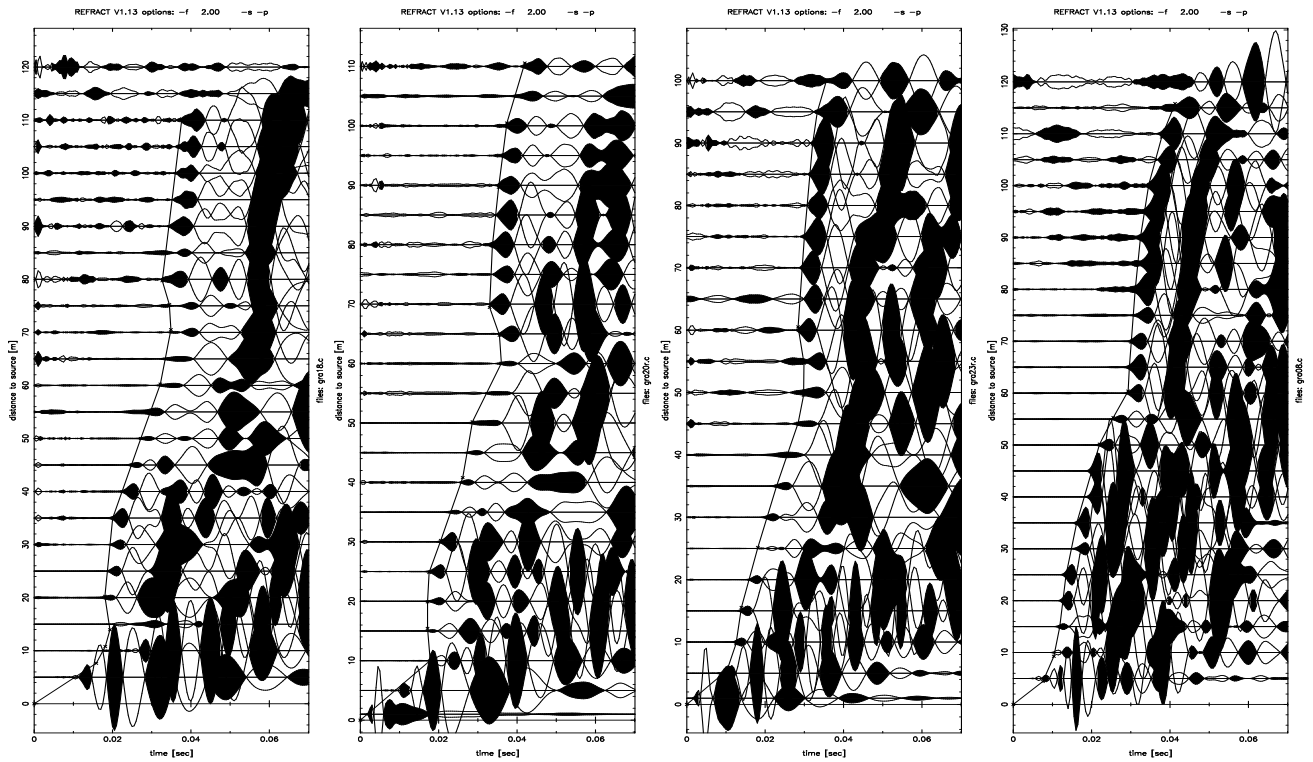


Abbildung 4.12: Laufzeitkurven für drei verschiedene Gegenschüsse und einen Hinschuß in Grabenstetten. Erläuterungen werden im Text gegeben.

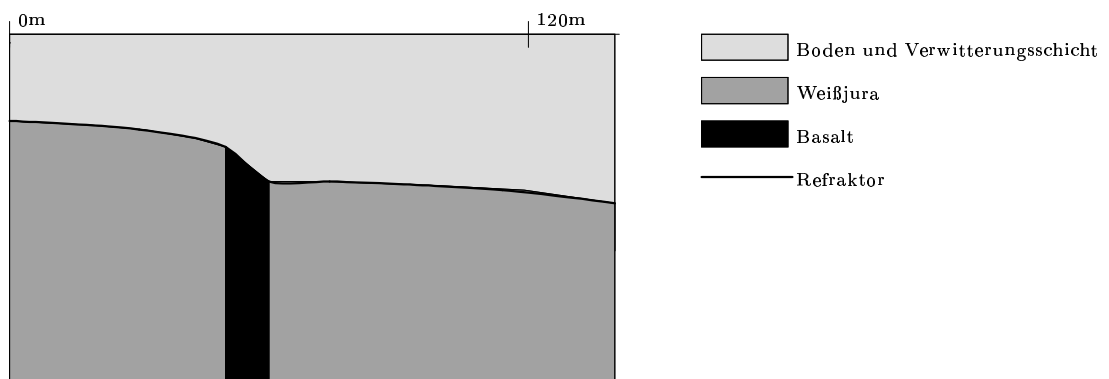


Abbildung 4.13: Interpretationsvorschlag für die Laufzeitkurven am Basaltgang Grabenstetten

4.3.2 Auswertung der Seismogramme

In Abbildung 4.11 ist eine Seismogramm-Montage der Messungen quer zum Basaltgang von Grabenstetten dargestellt. Wiedergegeben ist ein Hinschuß bei Profilmeter 0. Negative Ausschläge der Seismogramme entsprechen einer Bewegung nach oben. Die Profilmeter werden vom westlichen Profilende her abgetragen. Der Basaltgang wurde mit magnetischen Methoden zwischen Profilmeter 50 und Profilmeter 62 lokalisiert. In der Abbildung ist die Laufzeitkurve des Luftschalls eingetragen, der sich auf einigen Spuren deutlich abbildet.

Auffallend ist das sehr ungleichmäßige Signalbild sowohl in der Wellenform, als auch in der Laufzeitkurve. Die Seismogramme sind gemeinsam und entfernungsabhängig skaliert, so daß die Amplituden verglichen werden können. Herausstechende Merkmale sind die großen Amplituden bei Profilmeter 50, die langperiodische Schwingung großer Amplitude bei 75m und am Profilende und der Wechsel zu kleineren Scheingeschwindigkeiten der Ersteinsätze zwischen Profilmeter 30 und 60. Auch bei den Gegenschüssen wurden einzelne Geophone beobachtet, die von der Umgebung stark abweichende Signale registrierten. Dort traten zum Teil nur sehr schwach gedämpfte Schwingungen großer Amplitude an den quellnahen Geophonen auf, die innerhalb der Registrierzeit nicht abgeklungen sind.

In allen Fällen konnte dies nicht auf systematische Fehler bei der Durchführung der Messung oder die spezielle Wahl des Schußpunktes zurückgeführt werden. Speziell das Geophon bei Profilmeter 75 wurde um einige Zentimeter quer zum Profil versetzt und zeigte dann noch dasselbe Verhalten. Inwieweit diese Erscheinungen auf Inhomogenitäten des Untergrundes zurückzuführen sind oder ob es sich um einen Effekt des Frostbereiches handelt, konnte nicht geklärt werden. Jedenfalls ist zu erwarten, daß auch der Weißjura, welcher den Basaltgang umgibt, stark zerklüftet ist, wie dies für die Karstlandschaft der Schwäbischen Alb typisch ist. Dies kann das ungleichmäßige Signalbild erklären.

In Abbildung 4.12 sind die Laufzeitkurven von vier Profilen dargestellt. Die geschwärzten Ausschläge entsprechen einer Bewegung nach oben. Von links nach rechts handelt es sich um folgende Schußpunkte:

1. Rückschuß bei Profilmeter 125: Der Basaltgang befindet in Epizentraldistanz 63–75m.
2. Rückschuß bei Profilmeter 115: Der Basaltgang befindet in Epizentraldistanz 53–65m.
3. Rückschuß bei Profilmeter 105: Der Basaltgang befindet in Epizentraldistanz 43–55m.
4. Hinschuß bei Profilmeter 0: Der Basaltgang befindet in Epizentraldistanz 50–63m.

Besonders auffallend sind die negativen Scheingeschwindigkeiten bei den Gegenschüssen in den Epizentralentfernungen, in denen der Basaltgang erwartet wird. Aber auch die abnehmende Scheingeschwindigkeit in der Laufzeitkurve des Hinschusses ist nicht durch eine homogene, ebene Schichtung erklärbar. In Abbildung 4.13 ist ein qualitativer Interpretationsversuch stark überhöht skizziert. Es wird dabei angenommen, daß die Grenze zwischen der Verwitterungs- und Bodenschicht und dem darunter liegenden Weißjura und Basalt eine Topographie besitzt, die im Bereich des Basaltganges eine Stufe aufweist. Die Stufe kann mit unterschiedlicher Erosionswirkung an Basalt und Weißjura erklärt werden. Eine solche Grenze würde als Refraktor qualitativ zu den beobachteten Laufzeitkurven führen. Ein in Schußrichtung ansteigender Refraktor führt ab einer gewissen Grenze zu negativen Scheingeschwindigkeiten, da die Laufzeit in der langsamen Deckschicht aufgrund der abnehmenden Mächtigkeit schneller sinkt, als die Gesamtlaufzeit im Refraktor steigt. Auch in der anderen Schußrichtung wirkt sich die Neigung aus, hier allerdings verzögernd, was zu abnehmenden Scheingeschwindigkeiten führt. Die beobachteten Laufzeitanomalien sind ortsfest und befinden sich alle im Bereich des Basaltganges.

Auf eine Interpretation der Oberflächenwellen bezüglich des Basaltganges wurde von vornherein verzichtet, da es aussichtslos erscheint, mit der bisher nur schwach entwickelten Methodik die extrem ungleichmäßige Wellenausbreitung zu modellieren. Es erscheint jedoch wünschenswert, bei Gelegenheit ein weiteres Profil oder mehrere Profile seitlich des Basaltganges ohne erwartete Inhomogenität zu untersuchen und mit den bisherigen Messungen zu vergleichen.

4.4 Riedheim im Hegau

4.4.1 Experimente

Im Rahmen der Vorerkundungen für das Praktikum des Studiengangs „Geophysik“ der Universität Karlsruhe wurden verschiedene Messungen im Hegau durchgeführt. Hier soll lediglich ein Messgelände vorgestellt werden, da dort der Aufbau auf die Untersuchung von Oberflächenwellen angelegt wurde und ein Vergleich zu einer Bohrung hergestellt werden konnte.

Die Messung wurde auf einem Feld bei Riedheim durchgeführt (siehe Abbildung 4.14). Die Deckschichten in diesem Bereich sind tonig und entstammen der Grundmoräne des würmeiszeitlichen Gletschers. Darunter liegt vulkanischer Tuff, der von Juranagelfluhmergel abgelöst wird⁴. Ziel der Messung war es, den Juranagelfluhmergel als Refraktor zu finden. Es kamen grundsätzlich 10Hz-vertikal-Geophone zum Einsatz. Mit 23 Geophonen wurde ein Profil von 220 Metern Länge auf einem Acker entlang eines Feldweges ausgelegt. Vom Weg zum Acker stieg eine Böschung unterschiedlicher Höhe (0m–1m) an. Das Profil verlief in etwa 1.5m Abstand parallel zur Böschung. Es wurden entlang des ganzen Profils im Abstand von jeweils 50m Schüsse mit dem Vorschlaghammer durchgeführt. Für jeden Schußpunkt wurden in der Regel 10 Seismogramme gestapelt. Alle Schußpunkte (bis auf die Profilenden) lagen auf dem Feldweg, also 2m neben und etwas unterhalb des Profils. Das gleiche Profil wurde nochmals in 22m Abstand zum Weg ausgelegt und mit Schüssen am östlichen Profilende und in 50m Distanz vom östlichen Profilende belegt. Ein drittes Profil wurde etwa in der Mitte der langen Profile ausgelegt. Dieses wurde speziell für eine Refraktionsseismik-Auswertung mit kurzen Geophondistanzen angelegt (in Quellnähe 1m bei einer Profillänge von 24m mit 12 Geophonen). Die Messungen für das letzte Profil wurden mit einer Refraktionsseismik-Apparatur (Firma Geometrics) der Universität Karlsruhe durchgeführt.

Ergänzend zu den seismischen Messungen haben Mitarbeiter der Universität Karlsruhe Messungen mit Gleichstromgeoelektrik durchgeführt. Außerdem wurde auf dem Meßgelände in Riedheim eine Rammsondierung vorgenommen und dabei Bodenproben für Labormessungen gewonnen.

4.4.2 Laufzeitkurven

In Abbildung 4.15 ist die Laufzeitkurve einer Messung auf dem Feld bei Riedheim und das dazugehörige Kompressionswellen-Geschwindigkeitsmodell dargestellt. Alle refraktionsseismischen Messungen lassen einen Refraktor in 4m Tiefe erwarten. In diesem Tiefenbereich verändert sich die Kompressionswellen-Geschwindigkeit von etwa $700 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ auf etwa $2000 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Auf den langen Profilen bildet sich eine schnelle Schicht mit $v_p \approx 2500 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ in etwa 25m Tiefe ab. Möglicherweise handelt es sich dabei um den Juranagelfluhmergel. Die Phasengeschwindigkeiten sind durch Hin- und Rückschuß abgesichert.

4.4.3 Rammsondierung

Eine Bohrung mit einer Rammsonde sollte Aufschluß über die Natur des Refraktors in 4m Tiefe bringen. Gebohrt wurde bis in einen Tiefenbereich von 6m. Über den ganzen Abschnitt der Sondierung wurde nur Ton zutage gefördert, der sich in Farbe und Konsistenz praktisch nicht veränderte. Labormessungen an den entnommenen Proben bestätigten jedoch den seismisch beobachteten Geschwindigkeits-Gradienten:

Entnahmetiefe [m]	0.5	0.8	2.0	4.0
Laborwert v_p [$\frac{\text{m}}{\text{s}}$]	870	940	1650	1650

Vermutlich handelt es sich bei dem gefundenen Horizont um den Beginn der Durchfeuchtungszone (siehe Tafel 4.1 auf Seite 71). Der Kontrast zwischen dem Geschiebemergel der Grundmoräne und dem Tuff ist möglicherweise zu schwach, um sich seismisch abzubilden.

⁴Die Informationen über die Geologie entstammen der Geologischen Karte 1:50.000 Blatt Konstanz.

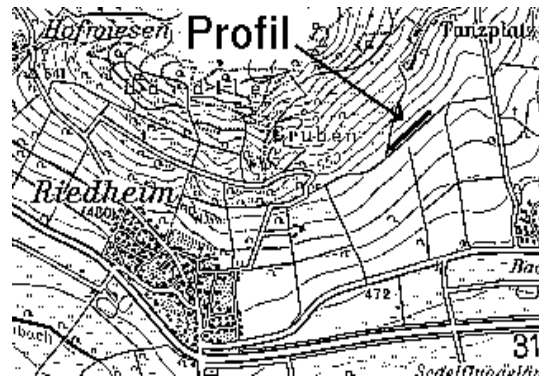


Abbildung 4.14: Riedheim im Hegau (Ausschnitt aus der Topographischen Karte 1:50.000 Blatt L8318; Wiedergabe nicht maßstäblich)

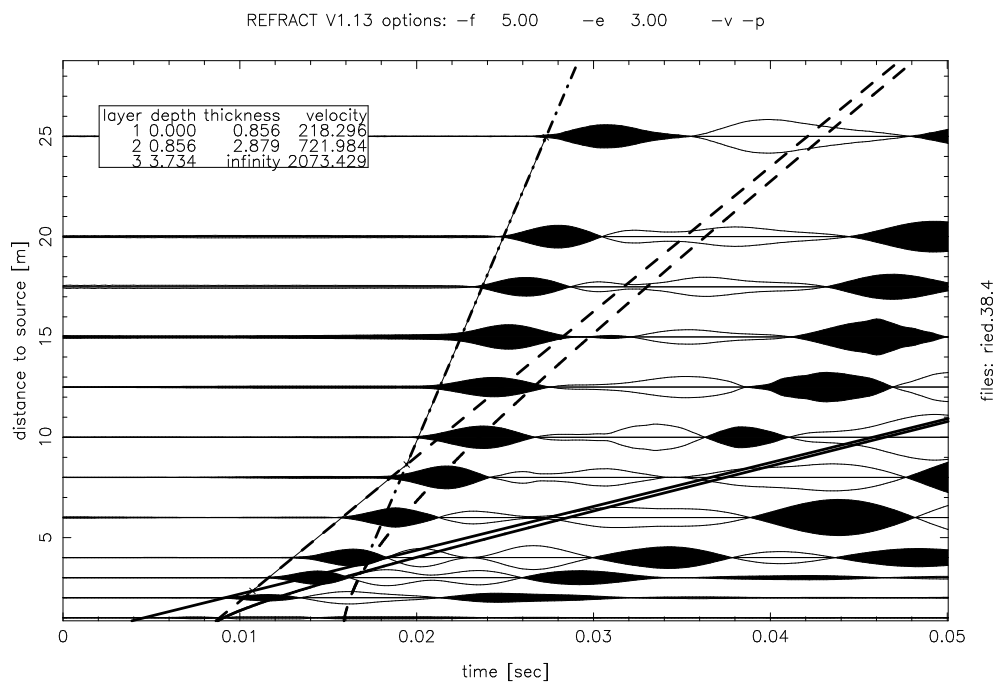


Abbildung 4.15: Laufzeitkurve der Daten aus Riedheim. Die geschwärzten Ausschläge entsprechen einer Bewegung nach oben.

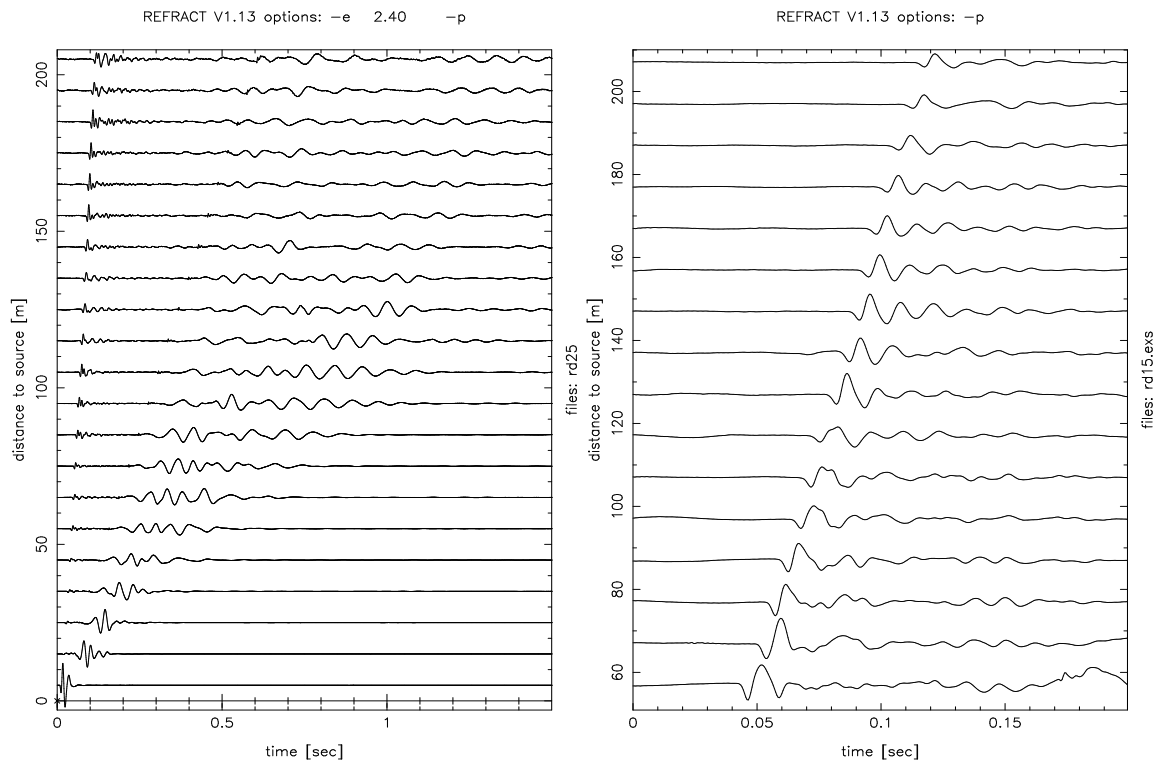


Abbildung 4.16: Seismogramm-Montagen der Messungen in Riedheim.

Linke Montage: Seismogramme des langen Profils in etwa 20m Abstand vom Weg. Schußpunkt ist das östliche Profilende. Die Seismogramme sind gemeinsam, entfernungsabhängig (Faktor $r^{2.4}$) skaliert.

Rechte Montage: Seismogramme des langen Profils direkt neben dem Weg. Schußpunkt ist das östliche Profilende. Die Seismogramme sind gemeinsam, entfernungsunabhängig skaliert.

Positive Ausschläge in den Seismogrammen bedeuten eine Bewegung nach unten.

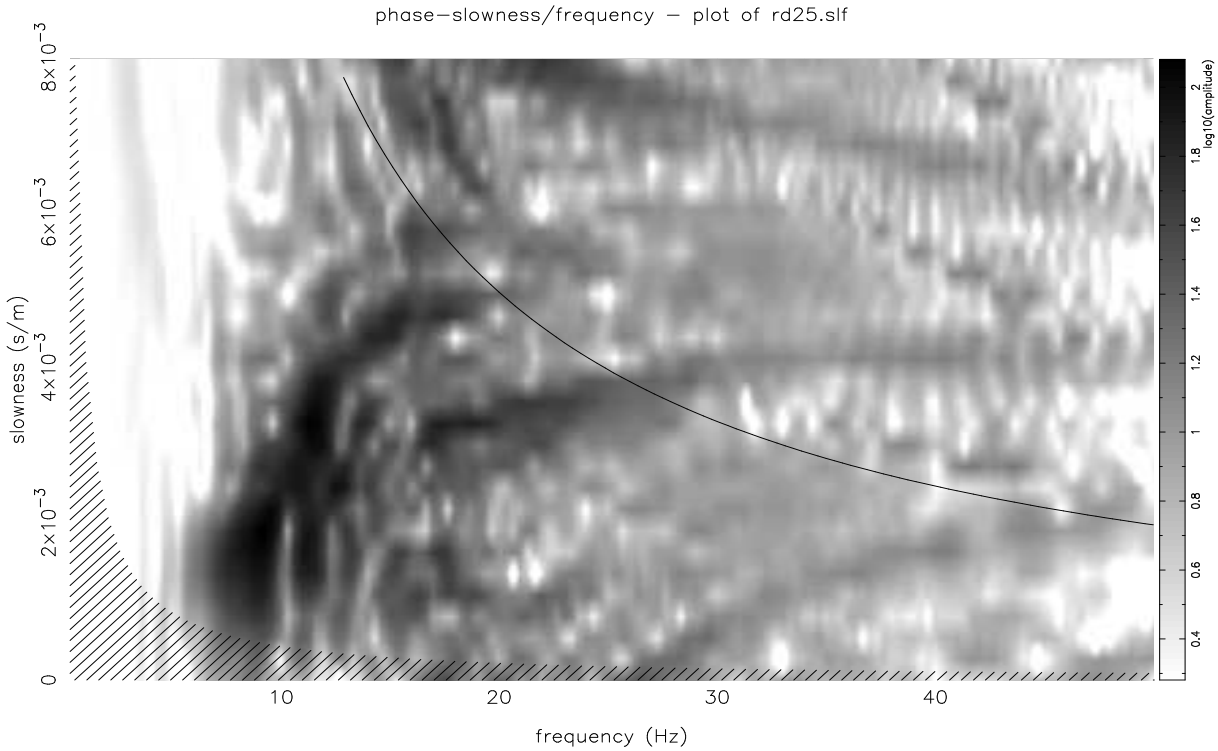


Abbildung 4.17: Dispersionsanalyse des langen Profils bei Riedheim

4.4.4 Geoelektrik

Von Sven Huesges wurden die Auswertungs-Ergebnisse der durchgeführten Geoelektrik-Messungen zur Verfügung gestellt. Folgende Modelle homogener Schichten (Oberkante z_i) befriedigen die Daten der Messungen (ϱ bezeichnet den spezifischen Widerstand des Mediums im Gegensatz zur Massendichte ρ):

Für die Messungen der Voruntersuchungen Ende Februar 1996:

z_i [m]	0.	0.21	0.52	2.3	8.7	31.6
ϱ [Ω m]	45	33	42	29	20	7

Für die Messungen beim Feldpraktikum Ende Mai 1996:

z_i [m]	0.	0.27	2.1	32.
ϱ [Ω m]	30	36	19	8

Es liegt nahe, eine Verbindung zwischen den seismisch ermittelten Modellen und den Messungen der Geoelektrik zu suchen. Die Geoelektrik reagiert jedoch auf Veränderungen der Leitfähigkeit des Mediums, also auf Durchlässigkeit, Wassersättigung und Ionengehalt. Die Refraktionsseismik ist empfindlich für Kontraste in der Kompressibilität des Materials.

Es ist denkbar, daß auch der Übergang zu kleineren spezifischen Widerständen ab 2m Tiefe abwärts mit dem Beginn der Durchfeuchtungszone erklärbar ist.

Für die sehr kleinen Halbraumwerte der Geoelektrik ergibt sich folgender Interpretationsvorschlag: Der Juranagelfluhmergel kann als Wasserstauer die Wassersättigung im Bereich seiner Oberkante erhöhen und im Porenraum des durchlässigeren Tuffs eine Zone erhöhter Leitfähigkeit hervorrufen. Werden Ionen aus dem Mergel eingeschwemmt, so ergibt sich ein sehr geringer spezifischer Widerstand für den Halbraum der Modelle.

4.4.5 Oberflächenwellen

Abbildung 4.16 zeigt in der linken Hälfte eine entfernungsabhängig skalierte Seismogramm-Montage, die auch die Oberflächenwellen enthält. Abbildung 4.17 zeigt die zugehörige Dispersionsanalyse. Die Oberflächenwellen bleiben auch hier auf sehr niedrige Frequenzen beschränkt.

Bereits für die Seismogramme links in Abbildung 4.16 wird deutlich, daß die Oberflächenwellen wesentlich stärker gedämpft sind als die Raumwellen. Dies widerspricht den Erwartungen für eine rein geometrische Dämpfung und ist nur über einen kleinen Gütefaktor für die S-Wellen-Ausbreitung zu erklären. Eine Betrachtung der Raumwellen in diesem Fall ergibt, daß diese exakt gemäß der geometrischen Dämpfung, proportional zum Abstand, in der Amplitude abnehmen. Das mag für Messungen an realen geologischen Objekten verwundern. Noch Erstaunlicheres zeigt eine Betrachtung der Seismogramme im rechten Teil von Abbildung 4.16. Hier ist ein Ausschnitt der Montage für das Profil neben dem Weg gezeigt. Zu sehen sind nur die Ersteinsätze ab einer Distanz, in der die Nahfeldanteile abgeklungen sind. Die Amplitude der Einsätze bleibt über mehr als 100m nahezu konstant. Erwartet man eine gleichförmige Wellenabstrahlung in alle Richtungen, so würde das eine Zunahme der gesamten seismischen Energie auf Kugelflächen um die Quelle mit zunehmendem Abstand bedeuten, was physikalisch nicht möglich ist. Dieser Effekt ist nur durch Fokussierungseigenschaften der an der Böschung komplizierteren Topographie zu erklären.

Eine weitere Untersuchung der Oberflächenwellen an diesem Standort blieb aus, da zum fraglichen Zeitpunkt bereits wesentlich ergiebiger Messungen aus Wolfschlügen vorlagen. Eine spätere Anwendung der Erfahrungen auf das Gebiet von Riedheim erscheint jedoch wünschenswert, da es sich um eine noch recht einfache Struktur handeln dürfte.

4.5 Wolfschlügen auf den Fildern

4.5.1 Experimente

Zur Gewinnung eines Basisdatensatzes für die Untersuchung von Oberflächenwellen in realen geologischen Strukturen wurde eine Gelände ausgewählt, in dem eine einfache horizontale Gliederung der geologischen Schichten und ein ausgeprägter seismischer Kontrast zu erwarten waren. Die Wahl fiel auf einen Weg im Waldgebiet Horb⁵ zwischen Wolfschlügen und Neuhausen auf den Fildern (siehe Abbildung 4.18). Für dieses Gebiet lagen Erfahrungen aus früheren refraktionsseismischen Messungen vor, die einen Refraktor an der Grenze Löß/Lias erwarten ließen.

Nahezu die gesamte Filderebene ist mit einer mehrere Meter mächtigen Löß- und Lößlehm-Ablagerung bedeckt. Darunter stößt man auf Lias α . Im Bereich Wolfschlügen handelt es sich um die Pylonoten- und Angulatenschichten des Lias. Diese Schichten sind stofflich sehr vielfältig aufgebaut. Sie enthalten jedoch auch Sandsteinbänke, die sich in den seismischen Messungen abbilden sollten. Das Meßgebiet befindet sich im Bereich der Harthäuser Erhebung. Diese beeinflusst jedoch die sonst ebene Schichtlagerung kaum, so daß davon ausgegangen werden kann, daß keine topographischen Effekte bei den Messungen zu berücksichtigen sind. In Abbildung 4.19 ist eine Ausschnitt aus der Geologischen Karte wiedergegeben. Darin ist zu erkennen, daß jenseits der Harthäuser Erhebung, Richtung Neuhausen die Lößbedeckung teilweise unterbrochen ist und der Schwarze Jura zutage tritt.

Auf dem angegebenen Gebiet wurden mehrere Experimente durchgeführt. Alle Profile wurden entlang eines Waldweges ausgelegt. Die Profilmeter wurden vom westlichen Ende aus gemessen. Die Auslage der Geophone erfolgte grundsätzlich direkt neben dem Weg. Die Schüsse wurden teilweise auf dem Weg teilweise auf dem Waldboden neben dem Weg aufgesetzt.

Refraktionsseismik

Es wurden drei Refraktionsseismik-Profile ausgelegt.

1. Profil mit 22 Geophonen auf 55m Länge wurde mit dem auf dem Waldboden aufgesetzten Vorschlaghammer beschossen

⁵aufgrund einer Empfehlung von G. Schneider, Institut für Geophysik der Universität Stuttgart

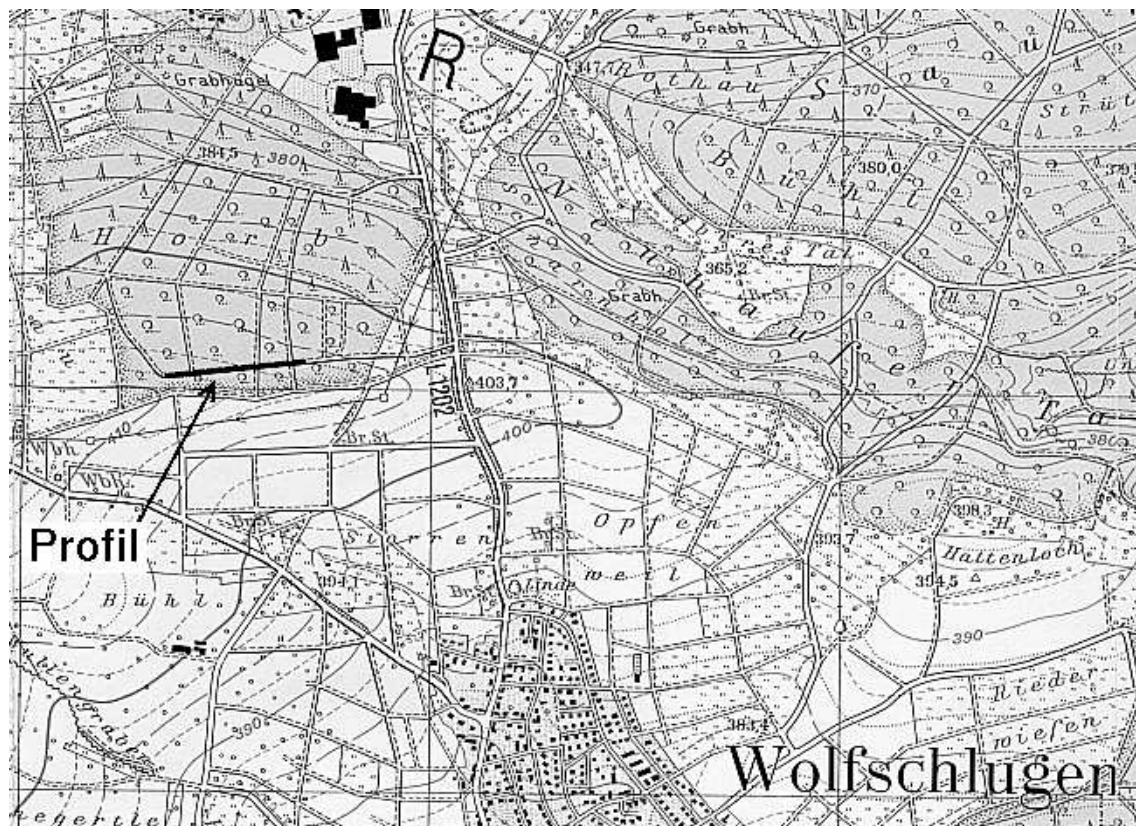


Abbildung 4.18: Waldstück Horb bei Wolfschlügen auf den Fildern (Ausschnitt aus der Topographischen Karte 1:25.000 Blatt 7321; Wiedergabe nicht maßstäblich)

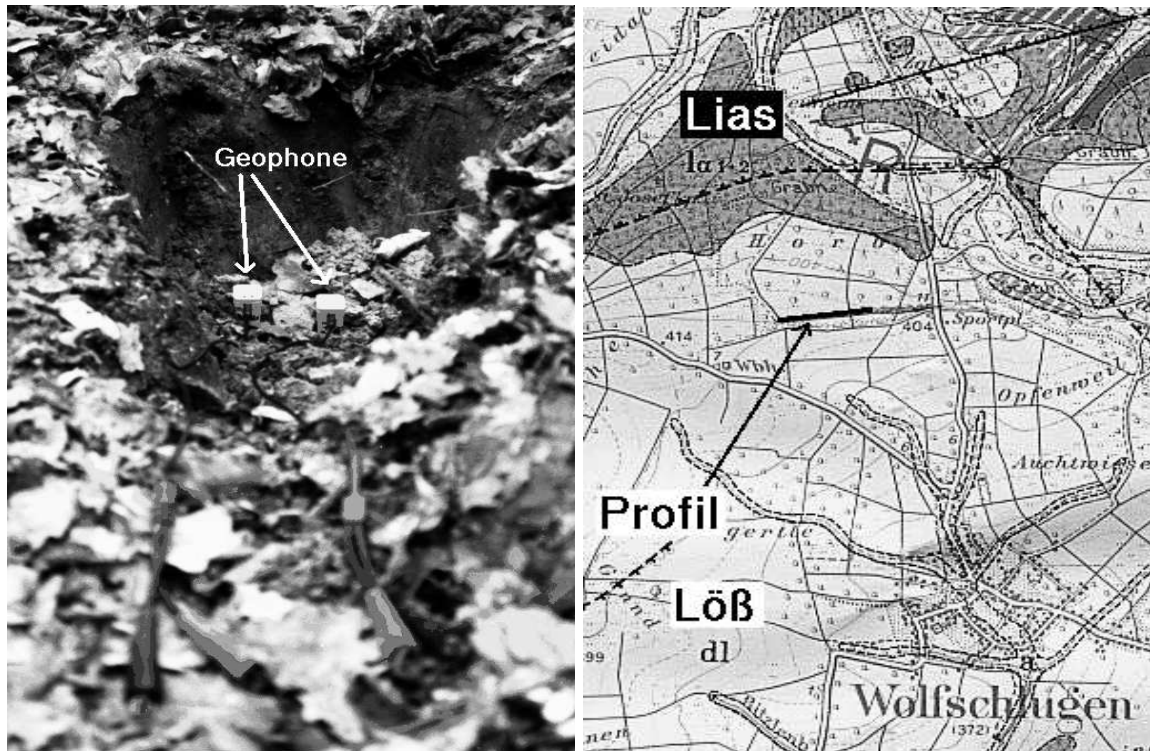


Abbildung 4.19: Die beiden unter der Quelle vergrabenen Geophone und ein Ausschnitt aus der Geologischen Karte von Stuttgart und Umgebung 1:50.000 von 1959 (Wiedergabe nicht maßstäblich)

2. Profil mit 22 Geophonen auf 110m Länge wurde mit dem auf dem Waldboden aufgesetzten Fallgewicht und dem auf dem Weg aufgesetzten Hammer beschossen
3. Profil mit 24 Geophonen und 115m Länge wurde mit dem auf dem Weg aufgesetzten Fallgewicht beschossen

Es kamen grundsätzlich 10Hz-vertikal-Geophone zum Einsatz.

Oberflächenwellenseismik

Es wurde ein Profil mit 24 10Hz-vertikal-Geophonen auf einer Länge von 230m ausgelegt. Mit dem Fallgewicht wurden Schuß und Gegenschuß durchgeführt. Mit dem Vorschlaghammer wurde das gesamte Profil in Distanzen von 50m beschossen, um eine eventuelle Topographie des Refraktors verfolgen zu können. Von diesen Schüssen wurden jeweils 10 Seismogramme gestapelt. Alle Schüsse wurden auf dem Weg aufgesetzt. Jeder Schuß wurde zweimal ausgeführt. Die beiden Teilschüsse wurden um jeweils 5m versetzt platziert, so daß bei einem realen Geophonabstand von 10m eine Quasiüberdeckung mit 5m Geophondistanz erzielt wurde.

Horizontalkomponenten

Die eingesetzten Quellen sollten in einem ideal waagrecht gelagerten Medium homogener Schichten keine SH-Wellen anregen. Um dies zu überprüfen, wurde ein Profil von 110m Länge gleichzeitig mit 12 10Hz-vertikal-Geophonen und 6 10Hz-horizontal-Geophonen bestückt. Gemessen wurden in vier Schritten der Profilabschnitt bis 60m und der Profilabschnitt ab 60m jeweils mit radialer und transversaler Ausrichtung der Horizontalgeophone. Beschossen wurde das Profil jeweils mit dem auf dem Weg aufgesetzten Fallgewicht.

Quellsignal

Mit dem Ziel einer genaueren Untersuchung der Anregung durch die eingesetzten Quellen wurden bei den Messungen für die ersten beiden Refraktionsseismik-Profile zwei Geophone etwa 20cm unter der Quelle im Waldboden vergraben. Vor dem Verschütten der Quellgeophone wurde das in Abbildung 4.19 wiedergegebene Foto aufgenommen. Zum Einsatz kamen ein 30Hz-vertikal-Geophon und ein 10Hz-vertikal-long-travel-Geophon. Um eine Übersteuerung des Datenrekorders zu verhindern, wurden beide Geophone mit einem Shuntwiderstand⁶ von etwa 0.85Ω versehen.

4.5.2 Einleitende Gedanken zur Auswertung

Die geologische Situation des Meßgebietes bei Wolfschlugen erschien einfach genug, um für den ersten Versuch einer Modellierung geeignet zu sein. Eine Berechnung synthetischer Seismogramme erfordert eine gewisse Grundkenntnis über das Ausbreitungsmedium. Daher wurden die Seismogramme auch mit konventionellen Methoden eingehend untersucht, mit dem Ziel, ein Startmodell für eine Inversion der Seismogramme zu erhalten.

Der Verlauf der seismischen Parameter ist sicherlich eine kontinuierliche Funktion der Tiefe. Bei der Erstellung eines Modells mit homogenen Schichten wird die kontinuierliche Funktion diskretisiert. Das heißt, ein Wert ist als Mittelwert für einen ganzen Tiefenbereich repräsentativ. Der Einsatz der Reflektivitätsmethode legt es nahe, die Grenzen der homogenen Schichten möglichst in den Bereich großer Gradienten zu legen und die Abschnitte dazwischen nur durch einen Wert oder wenige Werte zu beschreiben, da die Rechnung dann besonders rasch abläuft. Da hiermit auf eine feste Schrittweite der Diskretisierung (Dicke der Schichten) verzichtet wird, gibt es prinzipiell immer mehrere äquivalente Modelle, die mit verschiedenen dicken Schichten den kontinuierlichen Parameterverlauf nachbilden und dieselben Laufzeitkurven erklären.

4.5.3 Laufzeitkurven

Den direktesten Zugang zur Struktur des untersuchten Mediums bietet eine Analyse der Laufzeitkurven. Für das Gebiet bei Wolfschlugen wurden Daten aus den Voruntersuchungen analysiert, da diese mit entsprechend kleinen Geophon-Distanzen in der Nähe der Quelle aufgezeichnet wurden.

In Abbildung 4.21 ist die Analyse der P-Wellen-Laufzeiten für das kürzeste Profil dargestellt. Geschwärtzte Ausschläge bedeuten wieder eine Bewegung nach oben. Der Schußpunkt der Daten lag am westlichen Profilende neben dem Weg im Bereich des Waldbodens. Auch für längere Profile zeichnet sich kein weiterer Refraktor ab. Als Refraktor in etwa 9m Tiefe kann der Lias α angenommen werden. In 4m Tiefe bildet sich möglicherweise der Durchfeuchtungshorizont im Löß ab. Die oberen Schichten können der Verwitterungszone zugerechnet werden. Ihre Dicke ist nahezu beliebig wählbar. Lediglich die Gesamtlaufzeit muß einen festen Wert haben. Typisch ist dagegen eine P-Wellen-Geschwindigkeit von etwa $600\frac{m}{s}$ ab 1.5m Tiefe.

Verfolgt man die Resultate, welche verschiedene Zwischenschüsse mit dem Hammer und die Rückschüsse mit der Kugel auf den 240m langen Profilen erbrachten, so zeichnet sich eine leichte Neigung des tiefen Refraktors ab. Am anderen Profilende wird er dann in etwa 13m Tiefe aufgefunden, während die Horizonte in 1.5m und 4m stabil bleiben.

4.5.4 Dispersionsanalyse

Während die Analyse der P-Wellen-Laufzeitkurven zu einem Modell für die Kompressionswellengeschwindigkeit führt, kann die Analyse der Oberflächenwellen zu einem Geschwindigkeitsmodell für die Schwerwellen beitragen.

Abbildung 4.22 zeigt eine Seismogramm-Montage für das lange Profil. Geschossen wurde mit dem Fallgewicht am westlichen Ende des Weges. Es wurden mehrere Schüsse nachträglich gestapelt. Negative Ausschläge der Seismogramme bedeuten eine Bewegung nach oben. In Abbildung 4.23 ist die dazugehörige Dispersionsanalyse abgebildet. Die Dispersionsstruktur ist klarer und ausgeprägter als in den anderen

⁶Der Shuntwiderstand wurde provisorisch aus Lötendraht hergestellt. Der wirksame Widerstandswert konnte nicht exakt ermittelt werden.

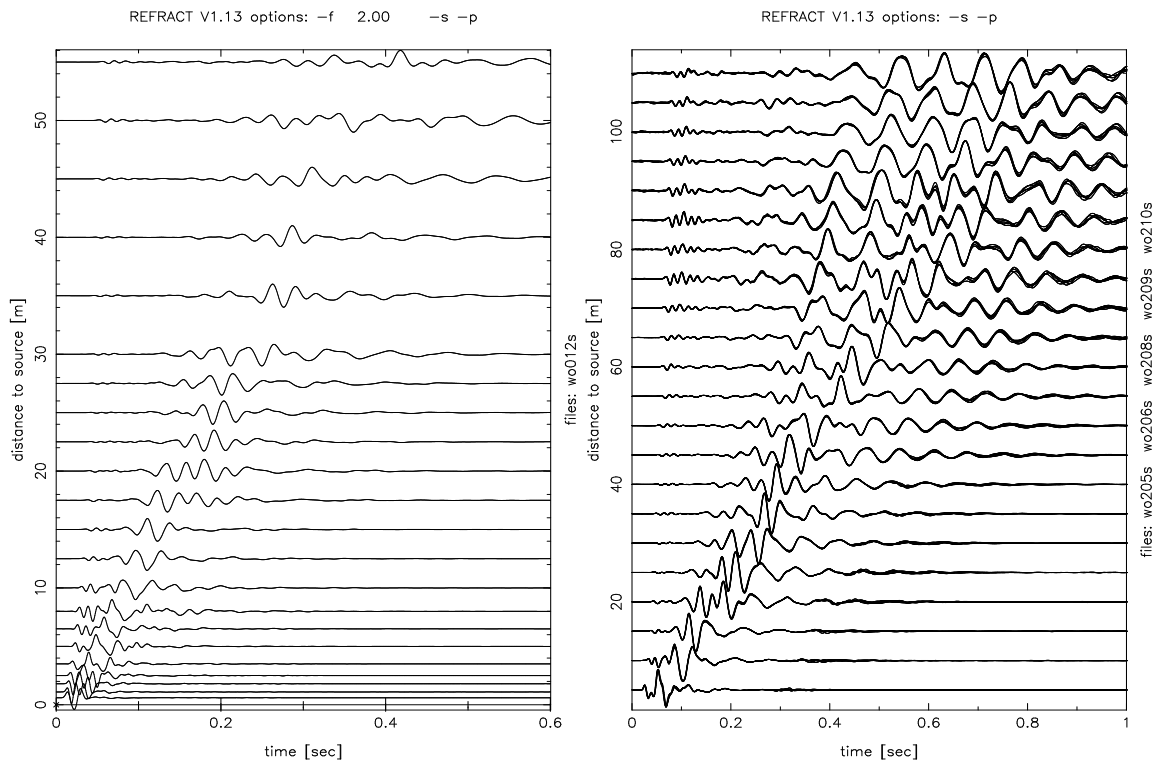


Abbildung 4.20: Seismogramm-Montagen der Voruntersuchungen bei Wolfschlugen.

Linke Montage: Seismogramme des kurzen, nur mit dem Hammer beschossenen Profils.

Rechte Montage: Mehrere übereinandergezeichnete Seismogramm-Montagen für die mit dem Fallgewicht beschossenen Profile.

Positive Ausschläge in den Seismogrammen bedeuten hier eine Bewegung nach oben. Beide Schüsse wurden am westlichen Profilende auf dem Waldboden aufgesetzt. Unter dem Schußpunkt waren jeweils zwei Geophone vergraben.

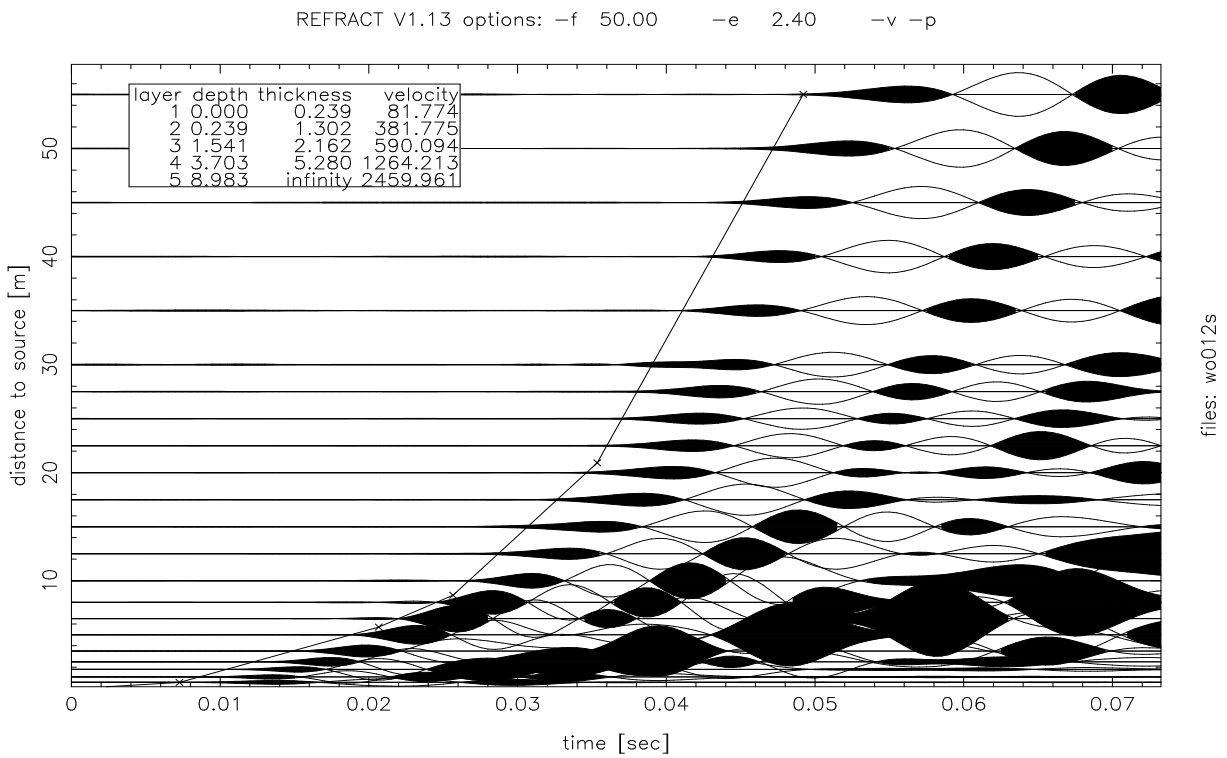


Abbildung 4.21: Laufzeitkurve für die Seismogramme aus Wolfschlugen

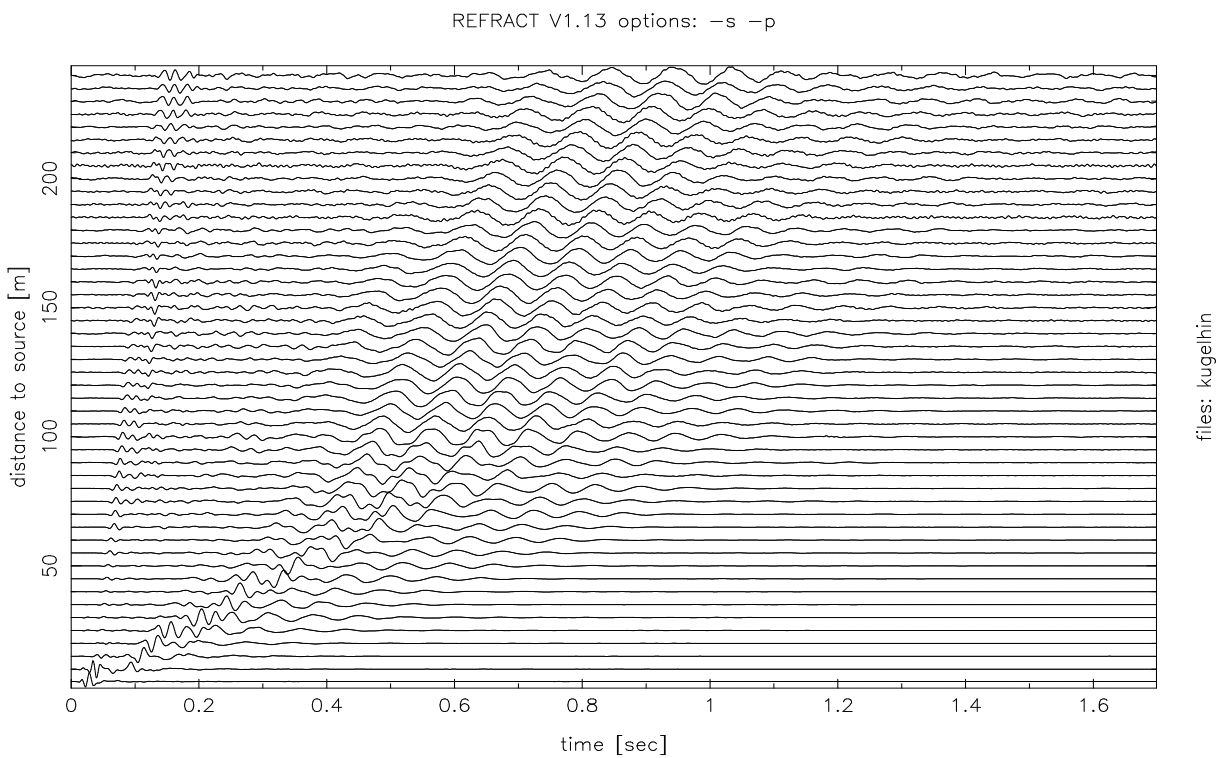


Abbildung 4.22: Seismogramm-Montage für alle Hinschüsse (gestapelt) mit dem Fallgewicht auf dem langen Profil in Wolfschlugen

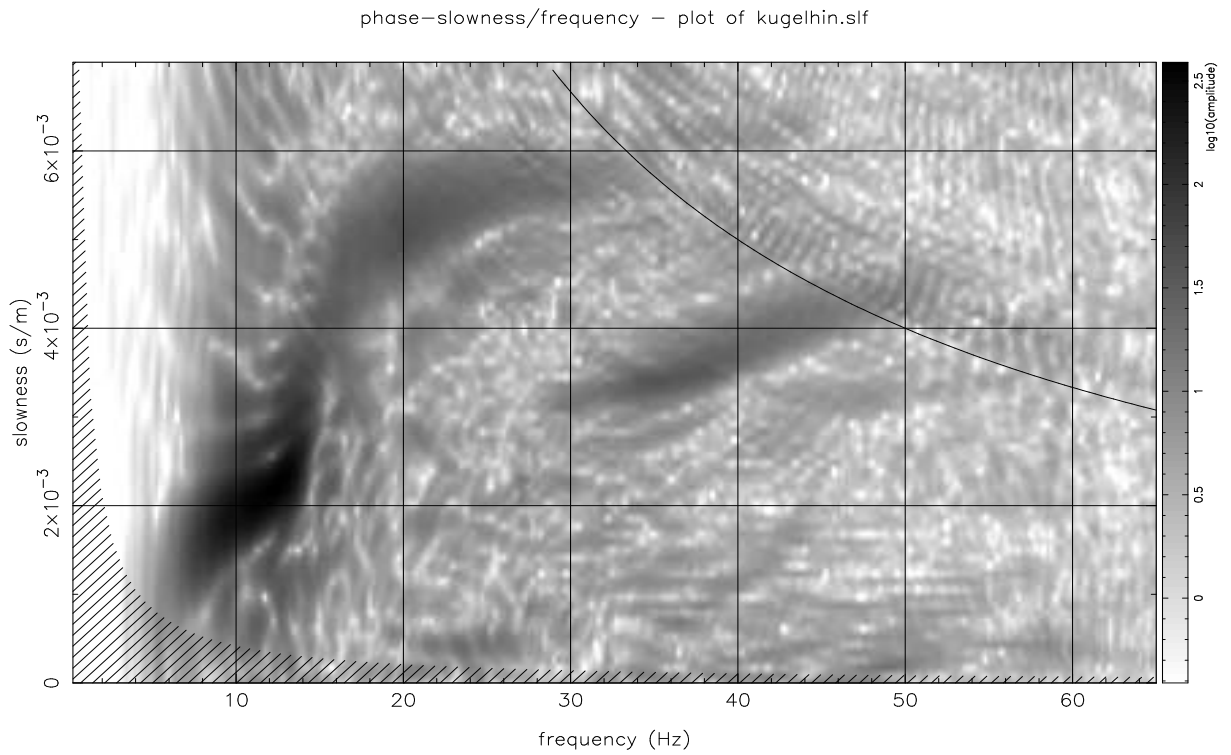


Abbildung 4.23: Dispersionsanalyse für die Seismogramme aus Abbildung 4.22

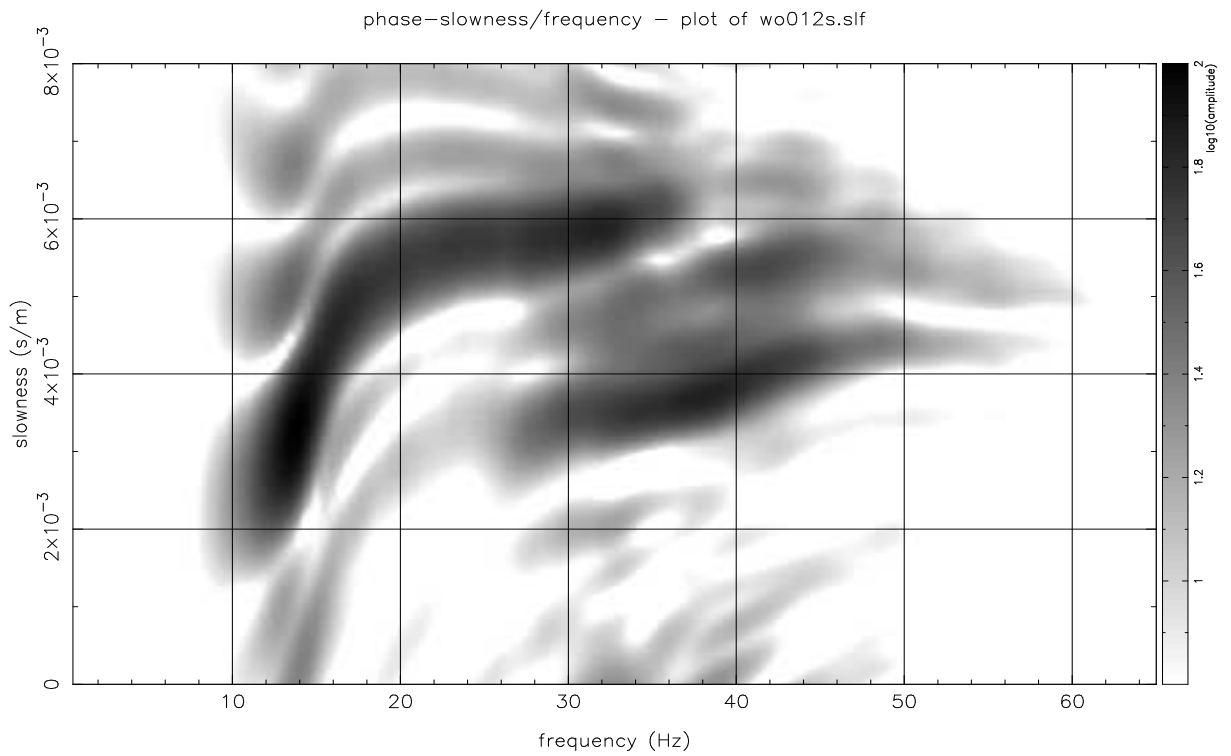


Abbildung 4.24: Dispersionsanalyse des kürzesten Profils bei Wolfschlugen

bisher untersuchten Datensätzen. Sie reicht außerdem zu höheren Frequenzen. Und das Auftreten einer höheren Mode bedeutet einen erheblichen Zugewinn an Information, die von den Oberflächenwellen getragen wird.

Bereits bei der Betrachtung der Seismogramm-Montage in Abbildung 4.22 fällt auf, daß sich das Erscheinungsbild des Oberflächenwellenzuges ab einer Epizentraldistanz von etwa 100m praktisch nicht mehr ändert. Werden Teile der Montage einer Dispersionsanalyse unterzogen, so zieht sich die Dispersionsstruktur für die Seismogramme ab 100m auf einen einzigen Punkt bei etwa 12Hz und $3 \cdot 10^{-3} \frac{s}{m}$ zusammen, wo auch schon das Maximum für den Gesamtdatensatz lag. Die übrige Dispersionsstruktur wird nur von den quellnahen Spuren getragen. Offenbar werden die hauptsächlich aus Scherwellen bestehenden Oberflächenwellen im untersuchten Gebiet sehr stark gedämpft; stärker als die Kompressionswellen. Das bestätigt auch der Vergleich mit den Amplituden der Ersteinsätze in Abbildung 4.22.

Die Dämpfung der Raumwellen ist abhängig von der Anzahl der durchlaufenen Wellenlängen. Anteile mit kurzer Wellenlänge werden über dieselbe Distanz stärker gedämpft als langwellige Anteile. Dieser Betrachtung folgt auch das Konzept der Qualitätsfaktoren. Auch für die Oberflächenwellen folgt daraus zwangsläufig, daß die höherfrequenten Anteile, die kurzen Wellenlängen entsprechen, mit zunehmender Epizentraldistanz rascher abklingen, als die tieffrequenten und damit langwelligen Anteile.

In Abbildung 4.20 sind Seismogramme der Voruntersuchungen abgebildet. Nach der Analyse der zur Verfügung stehenden Datensätze erwies sich die Dispersion im kürzesten Profil „wo012s“ am ergiebigsten. Das aus diesen Seismogrammen erstellte Dispersionsmuster ist in Abbildung 4.24 wiedergegeben.

Interpretation der Dispersionsmuster

Ein Modell, das für das Gelände bei Wolfschlugen erstellt wird, muß natürlich neben den Laufzeitkurven auch die beobachtete Oberflächenwellen-Dispersion erklären. Mit dem Schwab-Knopoff-Algorithmus steht ein Verfahren zur Verfügung, mit dem die theoretische Lage der Dispersionsäste berechnet werden kann.

Folgendes Modell wurde zunächst durch Anpassung der erwarteten Laufzeitkurven (P-Wellen) und Phasengeschwindigkeiten (S-Wellen) an die verschiedenen Datensätze erstellt (die Dichten wurden geschätzt):

z_i [m]	α [$\frac{km}{s}$]	β [$\frac{km}{s}$]	ρ [$\frac{g}{cm^3}$]
0.	0.126	0.030	0.8
0.35	0.388	0.165	1.0
1.59	0.656	0.223	1.2
3.89	1.140	0.250	1.2
8.70	2.250	0.600	2.0

In Abbildung 4.25 ist das theoretische Dispersionsmuster dieses Modells dargestellt. Auffallend sind die extrem großen Langsamkeiten bis $35 \cdot 10^{-3} \frac{s}{m}$. Diese sind durch die sehr kleinen Scherwellengeschwindigkeiten an der Oberfläche hervorgerufen, welche notwendig sind, um die Laufzeitkurve entsprechend der Einsatzzeiten der refraktierten Wellen hinreichend zu verzögern. In der idealisierten Theorie beschreibt dieser Bereich auch eine voll elastische Schicht, in welcher sich Oberflächenwellen großer Frequenz ausbreiten können. Die Schwab-Knopoff-Methode berücksichtigt weder eine Dämpfung noch die Amplitude, mit der eine Eigenschwingung durch eine Quelle angeregt wird. Es ist jedoch leicht einzusehen, daß der oberste halbe Meter Waldboden kaum zur Oberflächenwellen-Ausbreitung über eine nennenswerte Distanz beitragen kann.

Der relevante Teil des Musters liegt also bei kleineren Langsamkeiten. Ein entsprechender Ausschnitt ist in Abbildung 4.26 zu sehen. In der Tat zeichnet sich hier bereits eine höhere Mode im Bereich von 40Hz und $4 \cdot 10^{-3} \frac{s}{m}$ in ähnlicher Weise ab, wie in Abbildung 4.24 für die realen Daten. Die in den realen Daten enthaltene Fundamentalmode ist jedoch aus zwei Stücken zusammengesetzt zu denken. Eine Dispersionsanalyse synthetischer Seismogramme, die für das oben zitierte, aus Laufzeitkurven erstellte Modell gerechnet wurde, untermauert diese Überlegung. Die Fundamentalmode dieser Seismogramme trägt kaum noch Energie oberhalb von $5 \cdot 10^{-3} \frac{s}{m}$. Im Bereich darunter können Fundamentalmode und erste höhere Mode, die nahe beieinander liegen, bei schlechter Auflösung leicht ineinander verschwimmen.

In den realen Daten ist bei 42Hz und $5.5 \cdot 10^{-3} \frac{s}{m}$ ein weiteres Maximum zu erkennen, daß sich beim Vergleich verschiedener Datensätze als durchaus signifikant erweist. Soll nun ein Modell so angepaßt

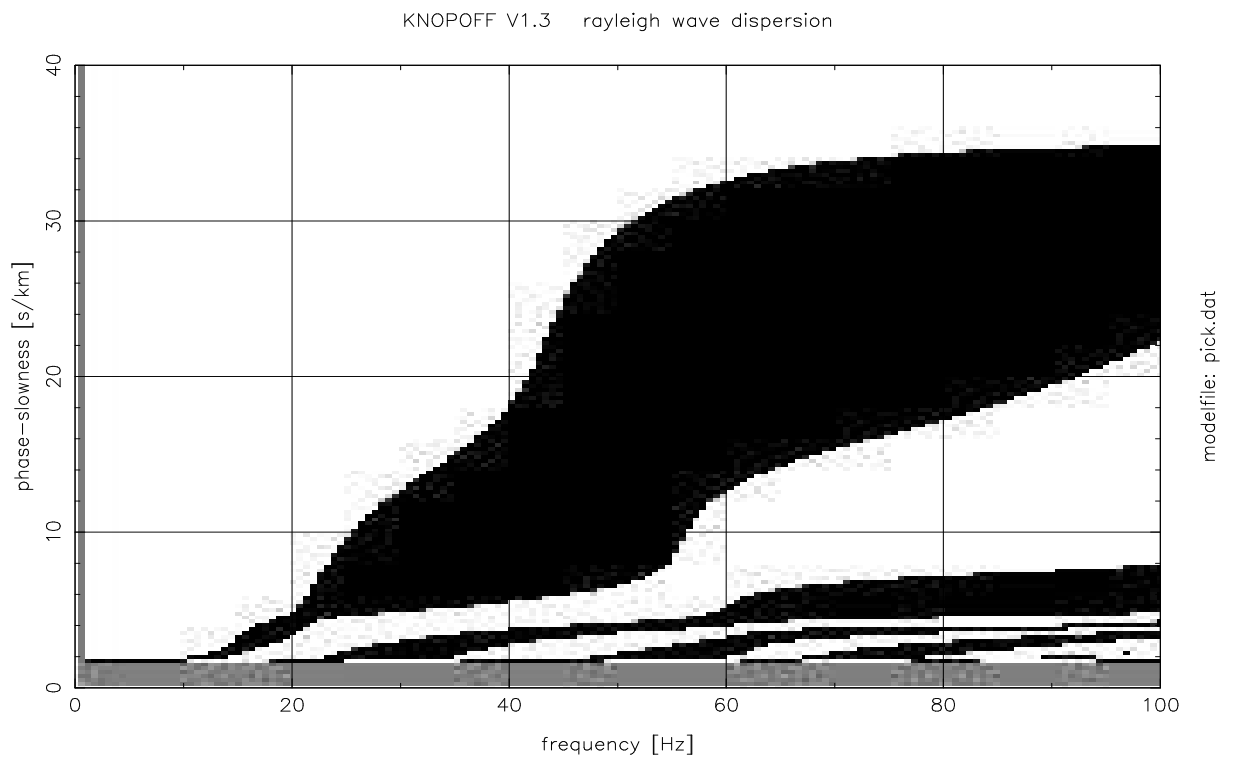


Abbildung 4.25: Dispersionsmuster für ein aus Laufzeitkurven bestimmtes Modell

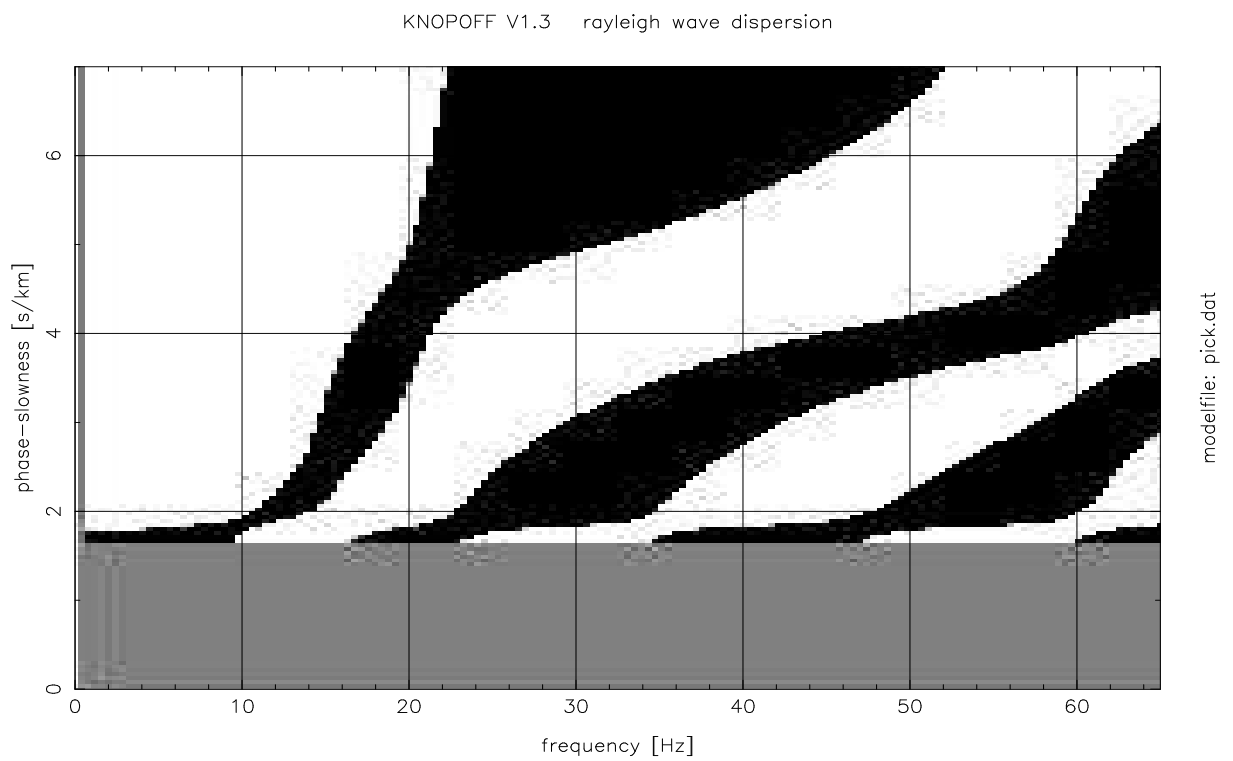


Abbildung 4.26: Ausschnitt aus Abbildung 4.25

Parameter des Modells:							
z_i [m]	α [$\frac{\text{km}}{\text{s}}$]	β [$\frac{\text{km}}{\text{s}}$]	ρ [$\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$]	Q_α	Q_β		
0.	1.1	0.7	1.8	700.	400.		
16.	1.9	1.0	2.	700.	400.		
20.	2.8	1.6	2.2	700.	400.		
29.	3.7	3.0	2.3	700.	400.		

numerische Parameter für <code>refsyn.f</code> :							
f_{\min} [Hz]	f_{wil} [Hz]	f_{wir} [Hz]	f_{\max} [Hz]	u_{\min} [$\frac{\text{s}}{\text{m}}$]	u_{wil} [$\frac{\text{s}}{\text{m}}$]	u_{wir} [$\frac{\text{s}}{\text{m}}$]	u_{\max} [$\frac{\text{s}}{\text{m}}$]
0.	0.	120.	150.	10^{-27}	10^{-23}	$2 \cdot 10^{-3}$	$2.222 \cdot 10^{-3}$

Dauer des Quellimpulses: 20ms
 Berechnetes Profil: 100 Seismogramme von 10m bis 600m
 Anzahl der Slowness-Stützstellen: 2000

Tafel 4.3: Ein fiktives Modell zur Diskussion von Modenästen

werden, daß es nicht nur die Laufzeitkurven, sondern auch die Dispersionsstruktur erklärt, so ist es entscheidend, zu klären, ob dieses Absprensel zu einem eigenen Modenast gehört, oder lediglich eine unterbrochene Fortsetzung der Fundamentalmode darstellt.

Die Willkür der Modenzählung

Die Versuche, eine Verbesserung des Modells durch eine Anpassung der theoretisch berechneten Modenäste an die Meßdaten zu erreichen, werden durch folgende Betrachtung eines fiktiven Modells generell in Frage gestellt:

In Tafel 4.3 sind die Parameter eines fiktiven Modells angegeben, anhand dessen die Bedeutung von Modenästen in realen Daten diskutiert werden soll. Die Parameter wurden so gewählt, daß geeignete Kontraste entstehen und die Wellen auch im hochfrequenten Bereich nur schwach gedämpft werden, um die voll ausgeprägten Moden in den Seismogrammen analysieren zu können. Die Größen der seismischen Parameter entsprechen etwa den Erwartungen für reale Verhältnisse. Die Deckschicht wurde sehr mächtig gewählt, um den Übergang der Fundamentalmode zu großen Langsamkeiten in Richtung kleiner Frequenzen zu verschieben. Dies hat rein optische Gründe und ist für die prinzipiellen Überlegungen bedeutungslos.

Abbildung 4.27 zeigt die theoretisch erwarteten Modenäste. Besonders auffällig ist die Stelle bei 55Hz und $0.85 \cdot 10^{-3} \frac{\text{s}}{\text{m}}$. Hier berühren sich die Modenäste fast, wie in Abbildung 4.28 zu sehen ist. Aus der ersten Darstellung geht dies noch nicht klar hervor. Man könnte meinen, daß sich die Äste schneiden oder die Rayleigh-Determinante einen Sattelpunkt hat. Per Definition können sich Modenäste nicht schneiden, da sie grundsätzlich mit aufsteigender Frequenz gezählt werden. Die Willkür, die in dieser Definition liegt, wird bei der Betrachtung der Eigenschwingungen eines abgeschlossenen Körpers wie der Erde deutlich. In solchen Körpern treten Eigenschwingungen nur für diskrete k - ω -Paare auf. Gemäß der Abzählung nach steigenden Frequenzen werden diese zu Modenästen zusammengefaßt.

Wie willkürlich die Einteilung in zusammenhängende Modenäste auch im Fall eines seitlich unbegrenzten Mediums ist, zeigt eine Betrachtung der in Seismogrammen enthaltenen Oberflächenwellendispersion. Für das Modell in Tafel 4.3 wurden mit dem Reflektivitätsprogramm `refsyn.f` synthetische Seismogramme für einen Schlag auf die Oberfläche des Mediums berechnet. Abbildung 4.29 zeigt die in der Vertikalkomponente der Oberflächenbewegung enthaltene Dispersion. Es fällt auf, daß nur noch ein Teil der theoretisch erwarteten Modenäste zu sehen ist. Am kritischen Punkt wechselt die Linie großer Wellenamplituden von einem Modenast zum anderen. In diesem Sinne „kreuzt“ hier eine Modenast einen anderen.

Die Schwab-Knopoff-Muster geben nur Auskunft über die prinzipielle Existenz von Eigenschwingun-

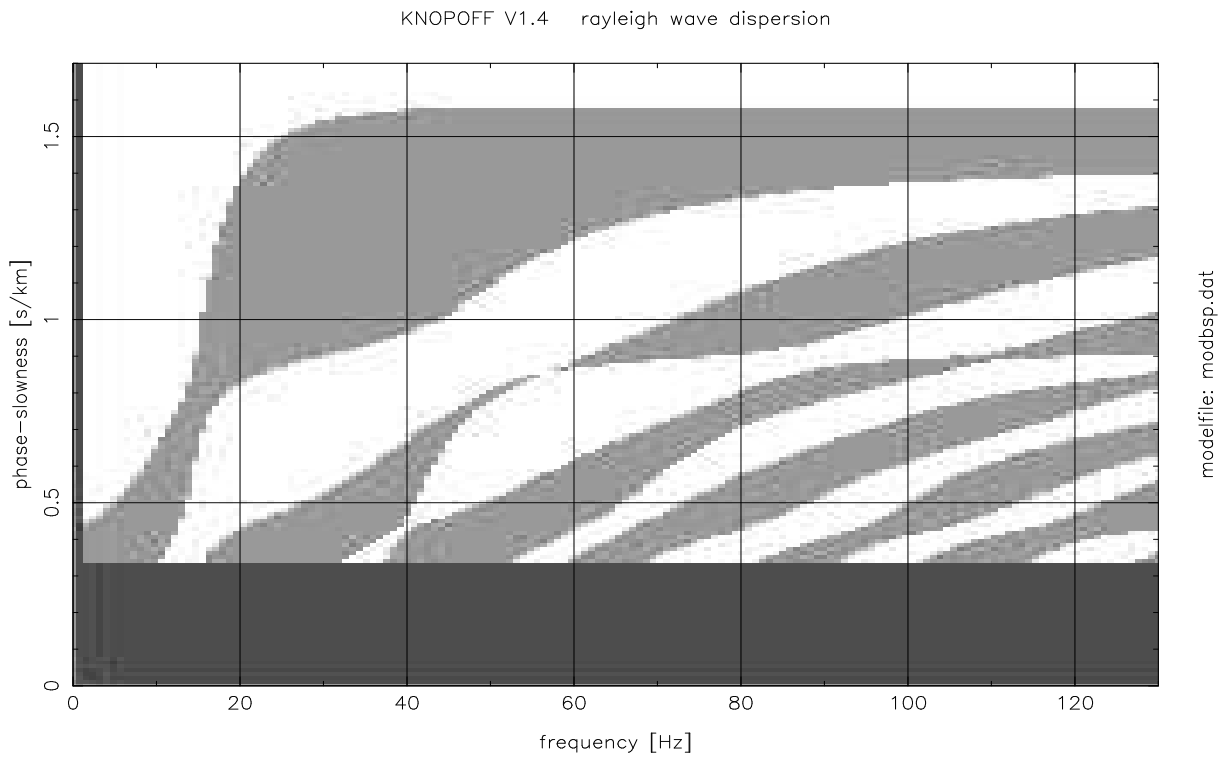


Abbildung 4.27: Modenäste eines fiktiven Modells

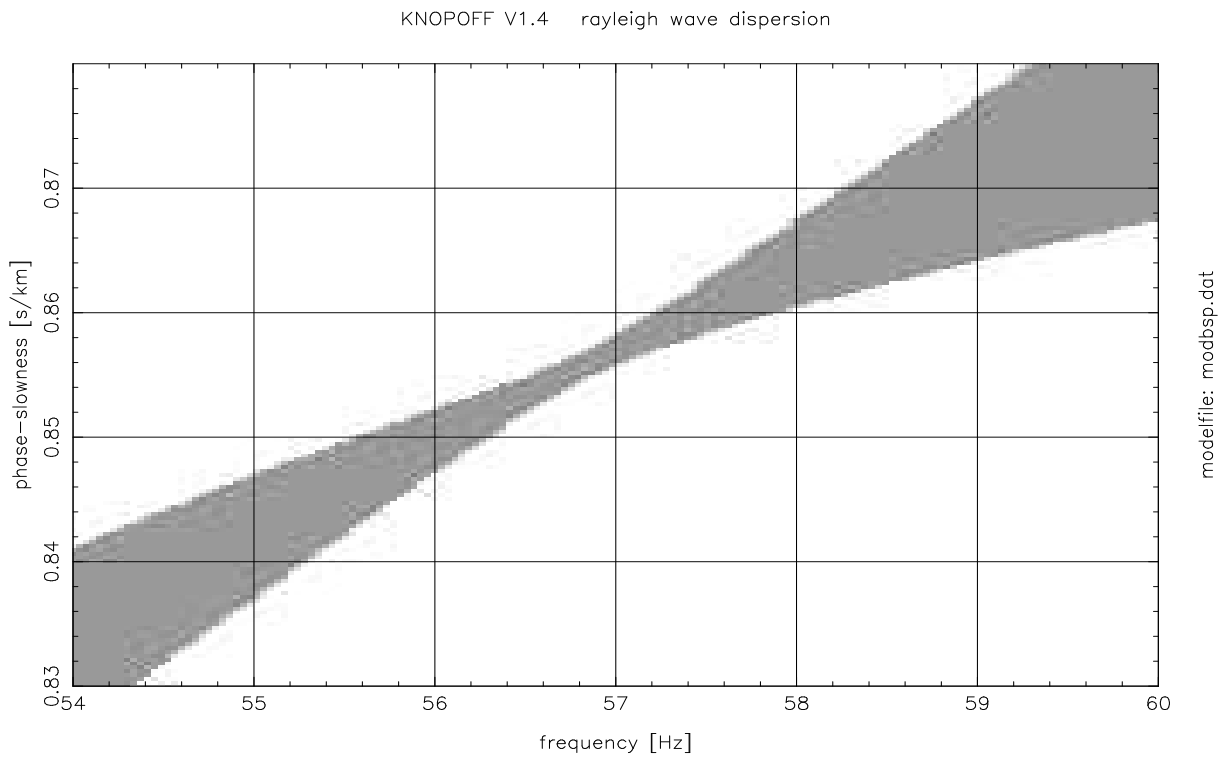


Abbildung 4.28: Ausschnitt aus Abbildung 4.27

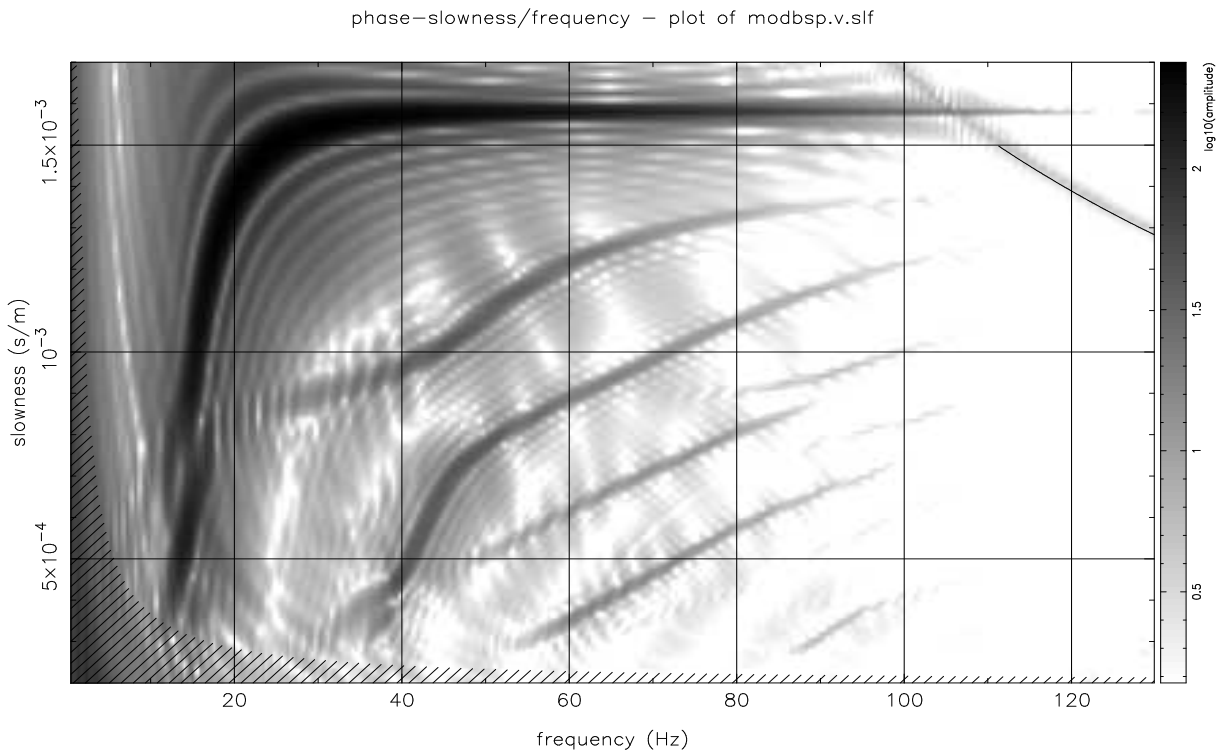


Abbildung 4.29: Dispersionsstruktur aus Vertikalkomponenten synthetischer Seismogramme

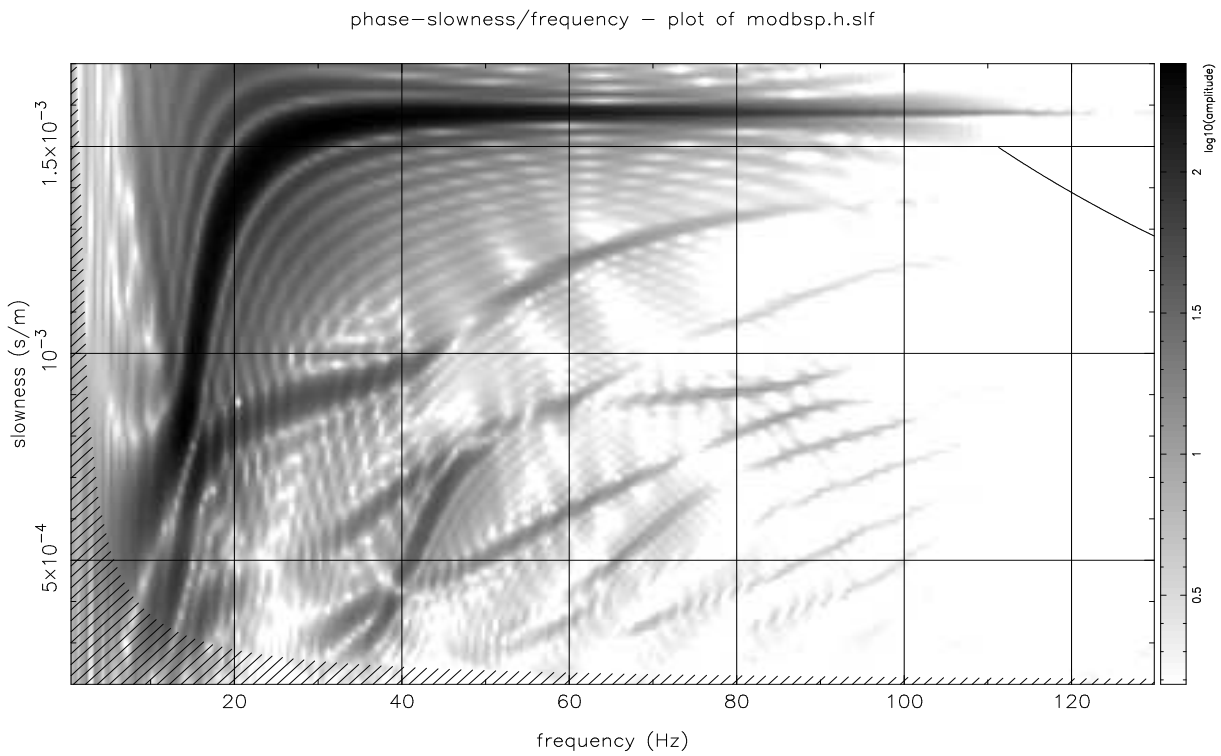


Abbildung 4.30: Dispersionsstruktur aus Radialkomponenten synthetischer Seismogramme

gen. Über den Verlauf der vertikalen Eigenfunktionen sagen sie nichts aus. Es ist nun denkbar, daß die Eigenfunktion für die z -Komponente der Verschiebung auch in Bereichen, in denen Eigenschwingungen existieren, sehr klein wird, so daß diese nicht in Seismogrammen zu beobachten sind oder auch nicht durch eine vertikale Kraft angeregt werden. Eine Betrachtung der Analyse der Radialkomponente in Abbildung 4.30 stützt diese Vermutung. Hier sind alle im kritischen Punkt zusammenlaufenden Äste enthalten. Ebenso sind weitere, in Abbildung 4.29 nicht vorhandene Äste, zu sehen. In der ersten höheren Mode scheinen sich die beiden Komponenten geradezu abzuwechseln. Die Abbildung kann auch als Beispiel dafür betrachtet werden, daß in den Analysen eine Kombination aus Fundamentalmode und höherer Mode als Grundmode interpretiert wird.

Diese Betrachtungen zeigen, daß eine Interpretation der in Seismogrammen enthaltenen Dispersion nicht zur Festlegung eines Modells dienen kann. Dort wo Energie in den Seismogrammen beobachtet wird, muß zwar auch ein Modenast des Modells liegen, das Umgekehrte kann jedoch keinesfalls behauptet werden. Vor diesem Hintergrund erscheint es lohnend, parallel zu den Schwab-Knopoff-Mustern auch Eigenfunktionen zu berechnen.

4.5.5 Kurvenverlauf und Amplituden

In diesem Abschnitt sollen die verschiedenen Datensätze quantitativ verglichen werden, um weitere Anhaltspunkte für eine spätere Modellierung zu erhalten. Es wurden dafür fünf repräsentative Datensätze ausgewählt:

hwo012: Ein kurzes Profil aus den Voruntersuchungen. Das Profil wurde neben dem Weg mit dem Hammer beschossen. Für dieses Profil stehen Daten der vergrabenen Quellgeophone zur Verfügung.

kwo205: Ein 120m langes Profil aus den Voruntersuchungen. Das Profil wurde neben dem Weg mit dem Fallgewicht beschossen. Für dieses Profil stehen Daten der vergrabenen Quellgeophone zur Verfügung. Es handelt sich um den ersten Schuß einer Serie von fünf Schüssen.

kwo210: Die Situation ist identisch mit kwo205. Jedoch handelt es sich hier um den letzten Schuß der Serie.

hammer0h: Eine aus zwei Schüssen zusammengesetzte Messung für des 240m lange Profil. Es wurde mit dem Hammer ein Schuß auf dem Weg aufgesetzt.

kugelh: Ein 240m langes Profil. Dieser Datensatz wurde durch arithmetische Mittelung aller mit dem Fallgewicht auf dem Weg aufgesetzten Schüsse erzeugt.

Alle Schüsse wurden am westlichen Profilende aufgesetzt. Die Datensätze wurden in ihrer Grundform so aufbereitet, daß ihre Amplituden der tatsächlichen Bodenbewegung in $\frac{m}{s}$ entsprechen. Ein positiver Ausschlag in den Seismogrammen bedeutet immer eine Bewegung nach oben. Für alle Datensätze wurden mit einem rekursiven Hochpaß-Entzerrfilter Seismogramme erzeugt, die dem Ausgangssignal eines Geophones mit 10Hz Eigenfrequenz und einer Dämpfung von $h = 0.707$ entsprechen (bei der Messung waren die Geophone unterdämpft). Außerdem wurden restituierte Daten für 4Hz Eigenfrequenz und $h = 0.707$ berechnet. 4Hz ist auch die Hochpaß-Frequenz des Datenrekorders. Beide Seismogramme wurden mit der Trapezregel integriert, um ein Signal zu erhalten, welches der tatsächlichen Bodenverschiebung entspricht. Versuche, eine weitergehende Restitution durchzuführen, haben gezeigt, daß das Signal der integrierten Spuren ab etwa 2Hz Eigenfrequenz sehr instabil wird und in diesem Frequenzbereich offenbar das langperiodische Rauschen bereits das seismische Signal zu überdecken beginnt.

Die Restitution bis 4Hz bewirkt im Vergleich zur Entzerrung bei 10Hz kaum eine Amplitudenänderung. Im wesentlichen sind von diesem Verarbeitungsschritt die Phasen der Signale betroffen und damit die Signalform. Hinzu kommt, daß die 4Hz-Signale größere tieffrequente Noise-Amplituden enthalten. Das äußert sich in einigen Verschiebungs-Seismogrammen in einer leichten Neigung zu langperiodischen Trends. Da auch das einem 4Hz-Geophon äquivalente Signal in Quellnähe noch nicht als die tatsächliche Bodenbewegung gelten kann, sondern nur als hochgepaßter Ausschnitt, wird auf einen Vergleich zwischen 10Hz-äquivalenten und 4Hz-äquivalenten Signalen verzichtet. Es werden nur Seismogramme besprochen, die der Antwort eines 4Hz-Geophons entsprechen.

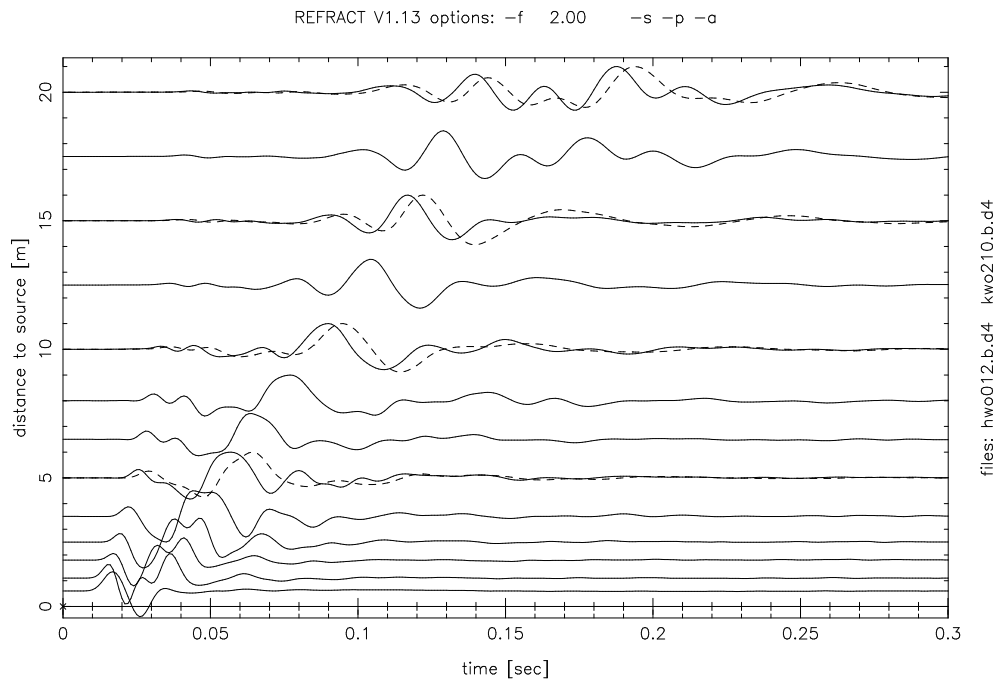


Abbildung 4.31: Vergleich von Hammer und Fallgewicht für einen Schußpunkt neben dem Weg. Die mit dem Fallgewicht angeregten Seismogramme sind gestrichelt dargestellt. Die Seismogramme entsprechen der bis 4Hz restituierten Bodenverschiebung. Alle Spuren sind einzeln skaliert.

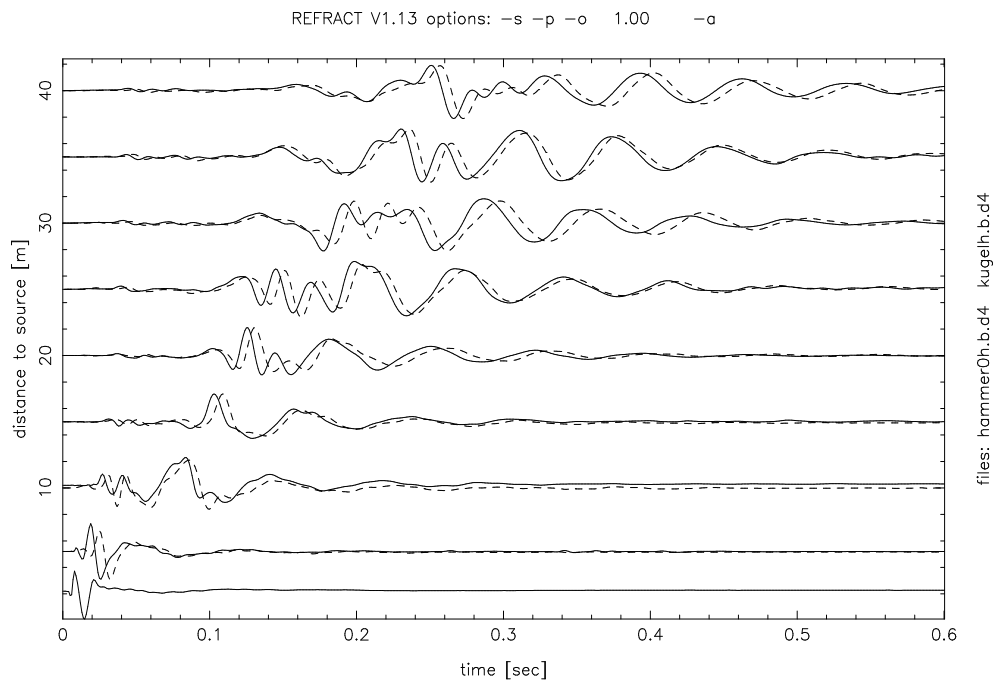


Abbildung 4.32: Vergleich von Hammer und Fallgewicht für einen Schußpunkt auf dem Weg. Die mit dem Fallgewicht angeregten Seismogramme sind gestrichelt dargestellt. Die Seismogramme entsprechen der bis 4Hz restituierten Bodenverschiebung. Alle Spuren sind einzeln skaliert.

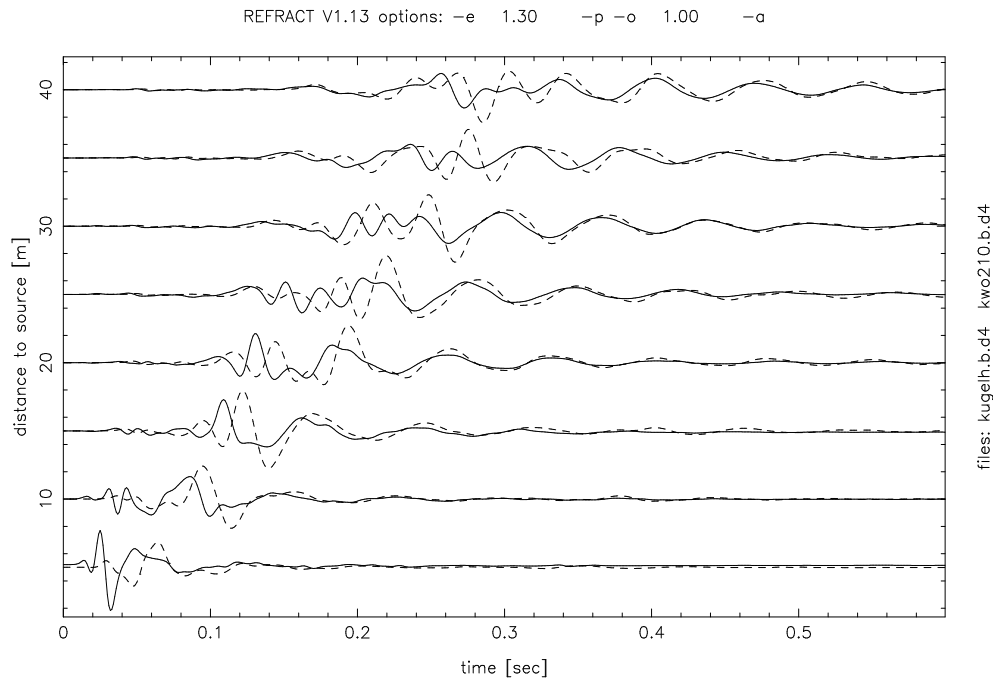


Abbildung 4.33: Vergleich zwischen Schuß neben dem Weg und Schuß auf dem Weg. Das auf neben Weg beschossene Profil ist gestrichelt dargestellt. Die Seismogramme entsprechen der bis 4Hz restituierten Bodenverschiebung. Beide Profile wurden mit dem Fallgewicht beschossen. Die Spuren sind gemeinsam und entfernungsabhängig mit einem Faktor $r^{1.3}$ skaliert.

Kurvenverlauf

Die Geophone wurden bei allen Messungen direkt neben dem Weg im Waldboden ausgelegt. Bezüglich der Anregung der seismischen Wellen ergeben sich jedoch unterschiedliche Situationen. Zum einen wurden zwei verschiedene Quellen benutzt, zum anderen wurden die Schüsse auf unterschiedlichem Untergrund aufgesetzt. Diese Situationen sollen hier verglichen werden.

In Abbildung 4.31 sind Seismogramme für die neben dem Weg aufgesetzten Schüsse mit Hammer und Fallgewicht dargestellt. Abbildung 4.32 zeigt den gleichen Vergleich für Schüsse auf dem Weg. Die mit beiden Quellen angeregten Wellen ähneln sich sehr. Auffallend ist eine kleine Phasenverschiebung von 5–10ms. Bei den Messungen in Wolfschlugen wurde in beiden Fällen der Kontakt mit einer Bodenplatte als Triggermechanismus eingesetzt. Die Verzögerung läßt sich also nicht auf einen unterschiedlichen Abriß zurückführen. Bei genauer Betrachtung der P-Einsätze der refraktierten Welle, zeigt sich, daß beide Seismogramme gleichzeitig aus der Null-Linie hervorgehen, das Seismogramm des Fallgewichts jedoch den ersten Nulldurchgang etwas später hat. Offenbar dauert der Impuls der Kugel etwas länger. Die in Abschnitt 3.2.3 auf Seite 65 hergeleitete Kraftfunktion hat für größere Massen eine kleinere Frequenz. Dies könnte die Phasenverschiebung erklären.

Die Abbildung 4.33 zeigt einen Vergleich zwischen zwei Schüssen (einmal auf dem Weg, einmal neben dem Weg) mit dem Fallgewicht. Auffallend sind die enormen Unterschiede zwischen beiden Seismogrammen, die erst für Entfernungen ab 40m allmählich ausgeglichen werden. Es handelt sich dabei offenbar um die Wirkung des Waldweges. In den quellenahen Spuren aller Schüsse auf dem Weg ist eine direkte P-Welle zu erkennen, die mit etwa $2000 \frac{m}{s}$ den Ersteinsatz bildet, jedoch nach 20m soweit abgeklungen ist, daß die normale Laufzeitkurve abgelesen werden kann. Die auf dem Weg angeregten Seismogramme sind bis in eine Distanz von etwa 50m durchweg hochfrequenter als jene neben dem Weg angeregten. Die Bodenverschiebung ist auf der quellenächsten Spur für eine Anregung neben dem Weg über einen Frequenzbereich von 10–40Hz angeregt. Wird auf dem Weg geschossen, so erstreckt sich der nennenswerte Amplitudenanteil von 10Hz bis etwa 80Hz. Der Waldweg ist ein mit Schotter fundamentierter Holzwirtschaftsweg, der möglicherweise relativ weit in den Untergrund gründet (ein frostsicher gegründeter Weg

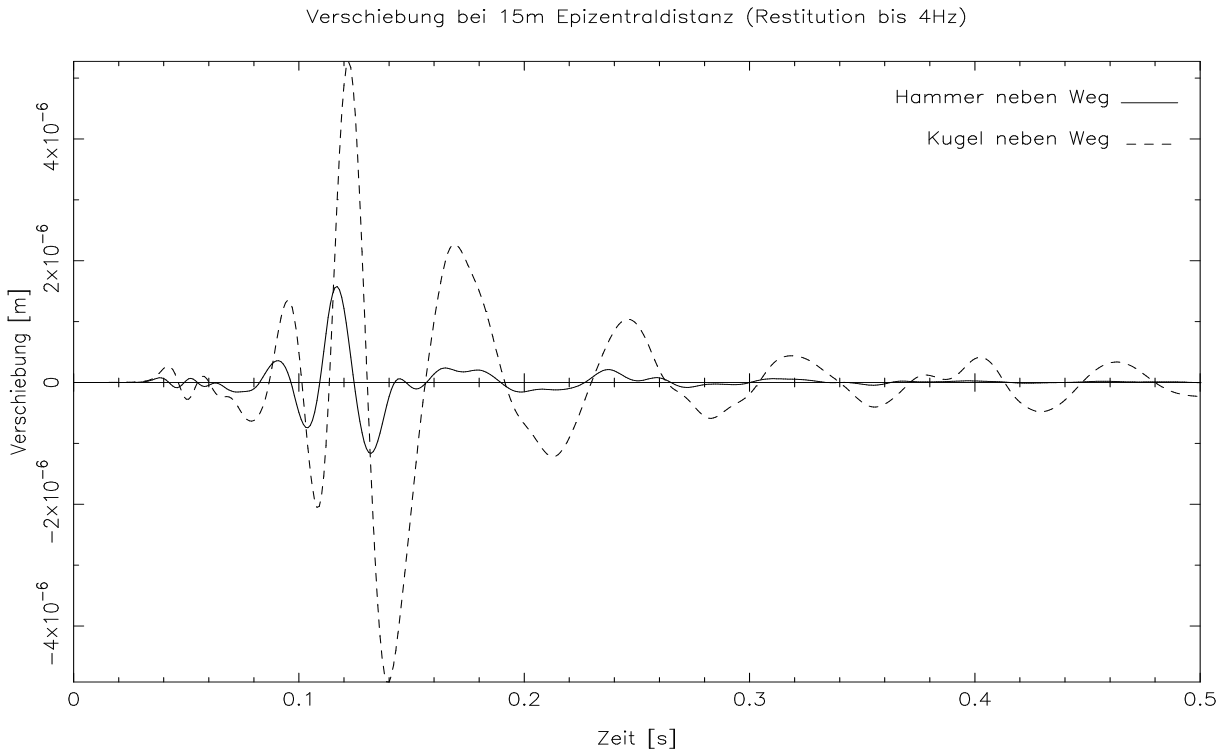


Abbildung 4.34: Bodenverschiebung in 15m Distanz; Schüsse neben dem Weg

reicht in 1–1.2m Tiefe). Inwieweit er auch eine Wirkung auf die direkt neben ihm beschossenen Profile hat, kann mit den vorhandenen Daten höchstens durch eine Modellierung beurteilt werden.

Absolute Amplituden

In den Abbildungen 4.34, 4.35, 4.36 und 4.37 sind Seismogramme für die Bodenbewegung in 15m Epizentraldistanz dargestellt. Es sind Seismogramme für alle verschiedenen Anregungsarten und für die Verschiebung wie auch die Partikelgeschwindigkeit abgebildet. Die Verschiebungen liegen in der Größenordnung von $1\text{--}4 \cdot 10^{-6}\text{m}$, die Partikelgeschwindigkeiten erreichen Werte von $0.01\text{--}0.1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Die Maximalamplituden liegen in dieser Epizentralentfernung noch in den Oberflächenwellen und sind für Wellen, die mit dem Fallgewicht angeregt wurden, um den Faktor 3–5 größer, als für Anregung mit dem Hammer.

Der quellnahe Bereich wurde bei den Voruntersuchungen am dichtesten abgetastet. Hier sollen nun die maximalen Verschiebungs- und Geschwindigkeits-Absolutamplituden der seismischen Wellen angegeben werden, die mit dem Hammer neben dem Weg angeregt wurden⁷:

Epizentraldistanz [m]	0.6	1.1	1.8	2.5	5.0	10.0	15.0
Partikelgeschwindigkeit [$10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$]	20.4	7.71	4.17	2.70	0.71	0.31	0.29
Verschiebung [10^{-6}m]	70	18	14	7.8	3.5	1.8	1.6

Relative Amplituden

Da die Seismogramme in Abbildung 4.33 gemeinsam, entfernungsabhängig skaliert sind, lassen sie einen Vergleich ihrer Amplituden zu. Sowohl die Profile, welche neben dem Weg beschossen wurden, wie auch die auf dem Weg beschossenen, weisen das gleiche Abklingverhalten auf.

⁷Die Werte wurden aus Seismogrammen abgelesen, die bis 4Hz restituiert wurden.

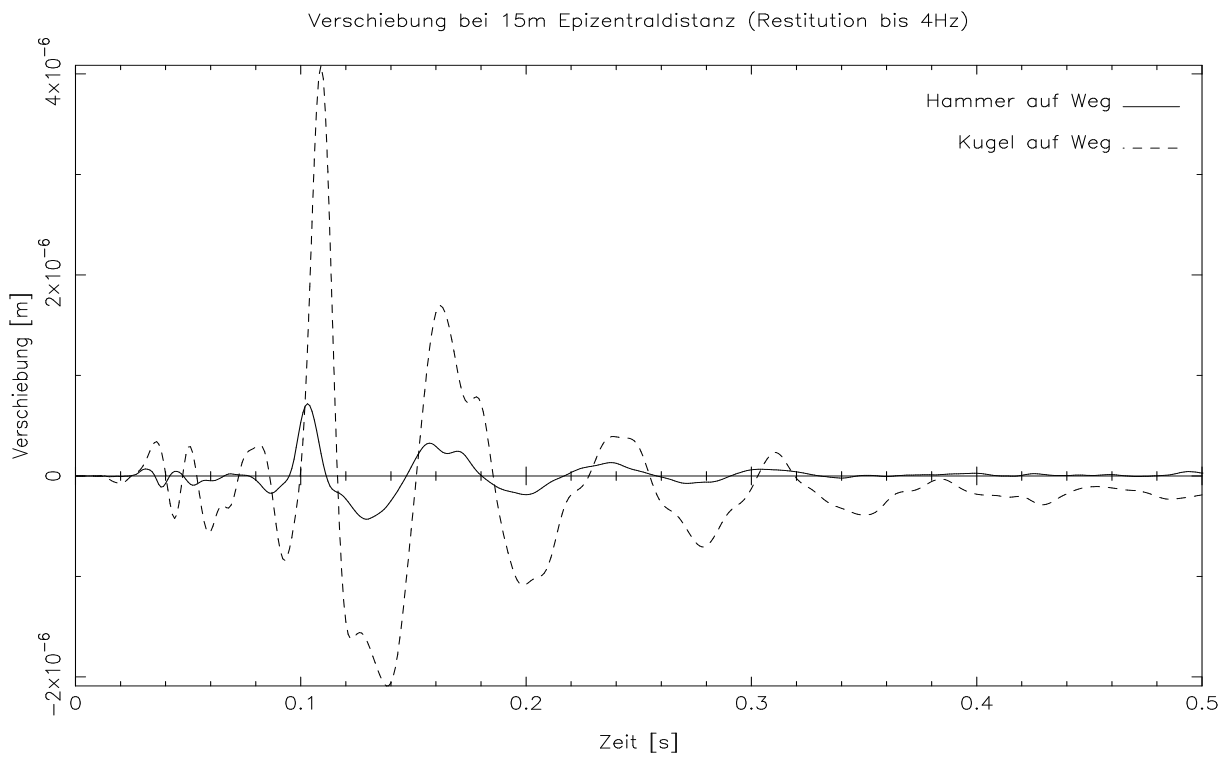


Abbildung 4.35: Bodenverschiebung in 15m Distanz; Schüsse auf dem Weg

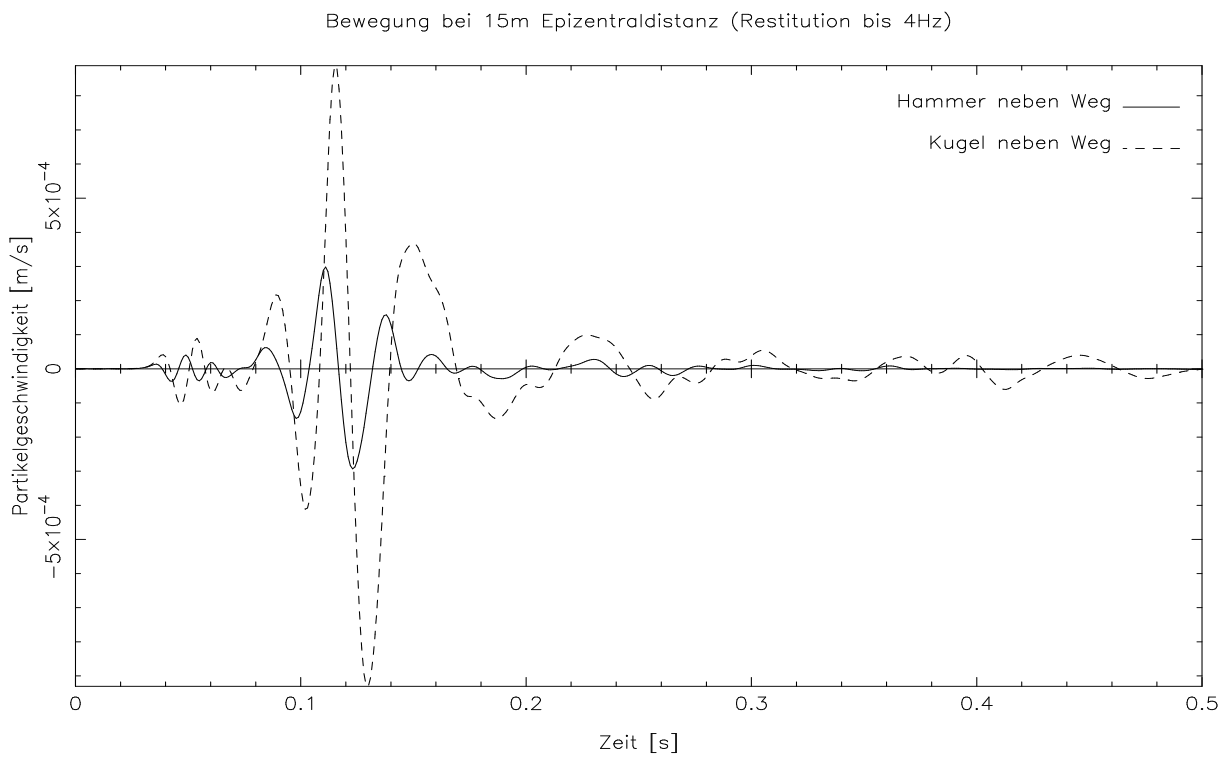


Abbildung 4.36: Partikelgeschwindigkeit in 15m Distanz; Schüsse neben dem Weg

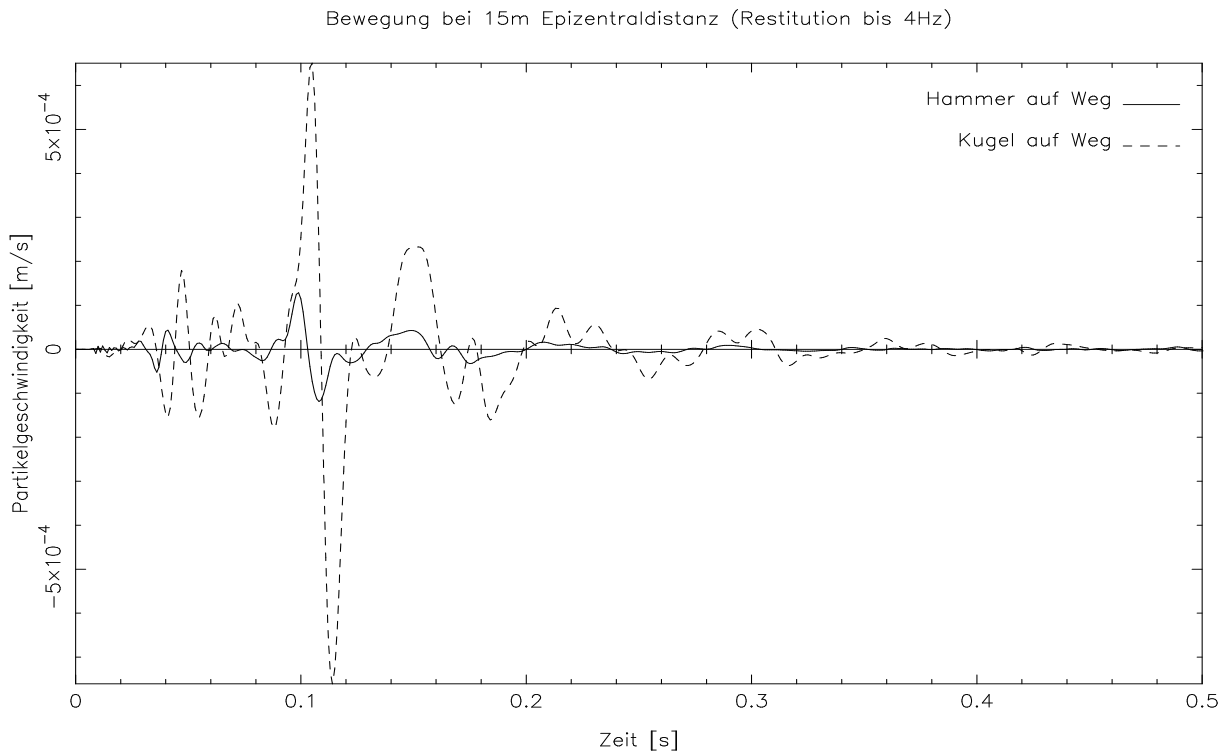


Abbildung 4.37: Partikelgeschwindigkeit in 15m Distanz; Schüsse auf dem Weg

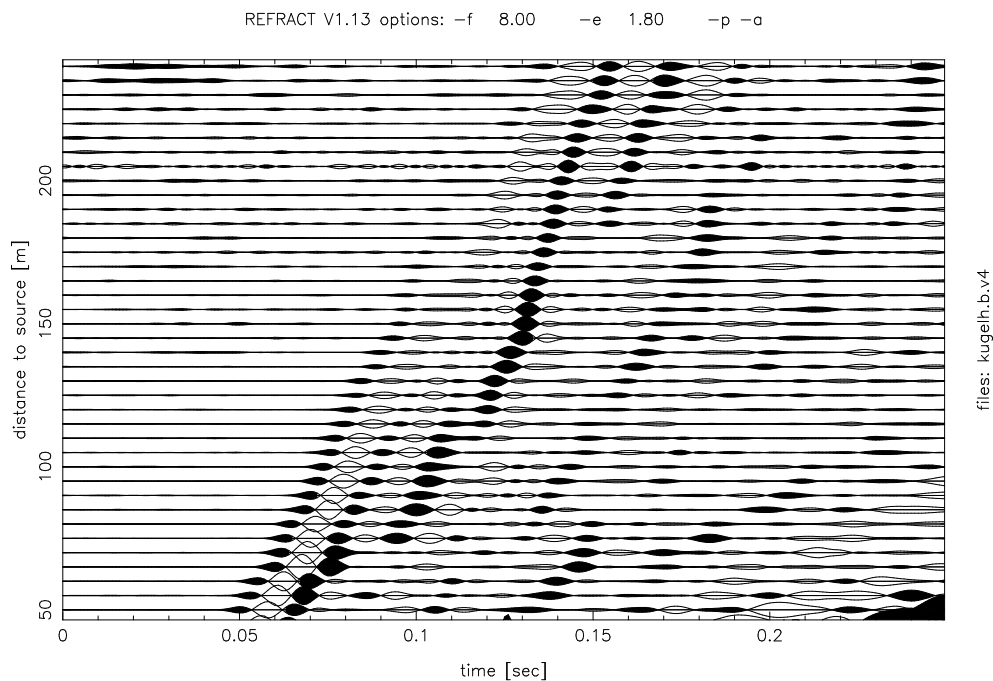


Abbildung 4.38: Ersteinsätze ab 50m des langen Profils; Schuß mit dem Fallgewicht auf dem Weg. Bodenbewegungen nach oben sind durch Schwärzung markiert. Dargestellt ist das auf 4Hz restituierte Geschwindigkeitssignal. Die Spuren sind entfernungsabhängig skaliert.

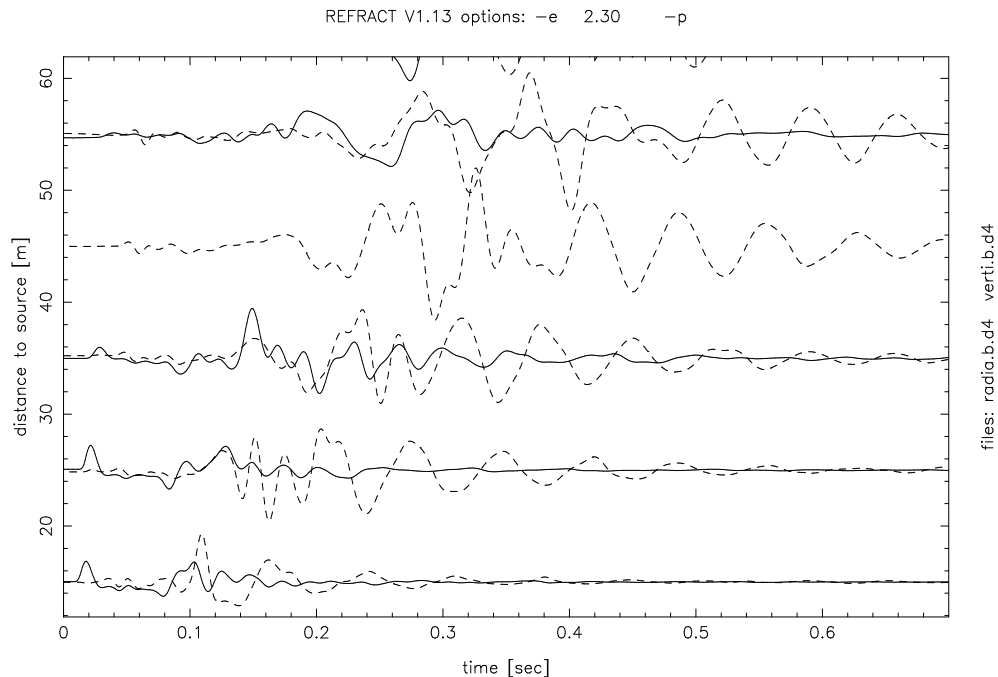


Abbildung 4.39: Radial- und Vertikalkomponente in kleinen Distanzen. Die Vertikalkomponente ist gestrichelt dargestellt. Die Seismogramme entsprechen der bis 4Hz restituierten Bodenverschiebung. Die Spuren sind gemeinsam und entfernungsabhängig mit dem Faktor $r^{2.3}$ skaliert.

Im abgebildeten Distanzbereich klingen die Amplituden der refraktierten Wellen gemäß einem Nahfeldverhalten sehr rasch ab. Die Oberflächenwellenzüge sind mit dem Faktor $r^{-1.3}$ deutlich stärker gedämpft als die Theorie es für ideale Elastizität erwarten lassen würde; sie dominieren aber die Seismogramme. Für Epizentralentfernungen ab 50m aufwärts klingen die Amplituden der Ersteinsätze nur noch mit $r^{-1.5}$ ab, während die Oberflächenwellen mit $r^{-2.3}$ gedämpft sind. Das Verhältnis kehrt sich soweit um, daß in 250m Distanz die Amplitude der Partikelgeschwindigkeit des Ersteinsatzes die Amplitude der Oberflächenwelle erreicht. Dies ist in Abbildung 4.22 auf Seite 94 zu erkennen.

In Abbildung 4.38 ist ein Ausschnitt aus der Seismogramm-Montage für die bis 4Hz restituierten Geschwindigkeitssignale das langen Profils dargestellt. Dieses Profil wurde auf dem Weg mit dem Fallgewicht beschossen. In dieser Darstellung fällt auf, daß die Ersteinsätze ab einer Distanz von etwa 150m sehr schwach werden und dafür ein zweiter, etwas später auftretender Wellenzug an Bedeutung gewinnt, dessen Vorzeichen einer Dekompression entspricht. Ob dies als Stufe oder Riß im Refraktor zu deuten ist, der am östlichen Profildende systematisch etwa 4m tiefer sondiert wird, konnte nicht geklärt werden.

4.5.6 Die Horizontalkomponenten

Die aufgezeichneten Horizontalkomponenten wurden in gleicher Weise bearbeitet und restituiert, wie dies für die Vertikalkomponenten beschrieben wurde. Ein positiver Ausschlag der Radialkomponente in den abgebildeten Seismogrammen bedeutet eine Bodenbewegung von der Quelle fort. Die dargestellten Seismogramme wurden auf dem Weg mit dem Fallgewicht beschossen.

Die bei den Messungen zum Einsatz gekommenen vertikalen Kraftquellen sollten, der Theorie für eine horizontal geschichtetes Medium folgend, keine SH-Wellen anregen, welche von der horizontalen Transversalkomponente aufgezeichnet würden. In Abbildung 4.41 sind die Seismogramme der Transversal- und der Radialkomponenten miteinander verglichen. Bereits in 15m Epizentraldistanz ist eine nennenswerte seismische Bewegung in der Transversalkomponente enthalten. Bei 65m haben die Transversalamplituden die Radialamplituden erreicht. Auch die im Weg laufende Welle ist in der Transversalkomponente deutlich enthalten. Die Transversalwellen sind durch Strukturen entstanden, die von einer gleichmäßigen horizontalen Schichtung abweichen. Offenbar ist die durch die Theorie gemachte Vereinfachung hier nur

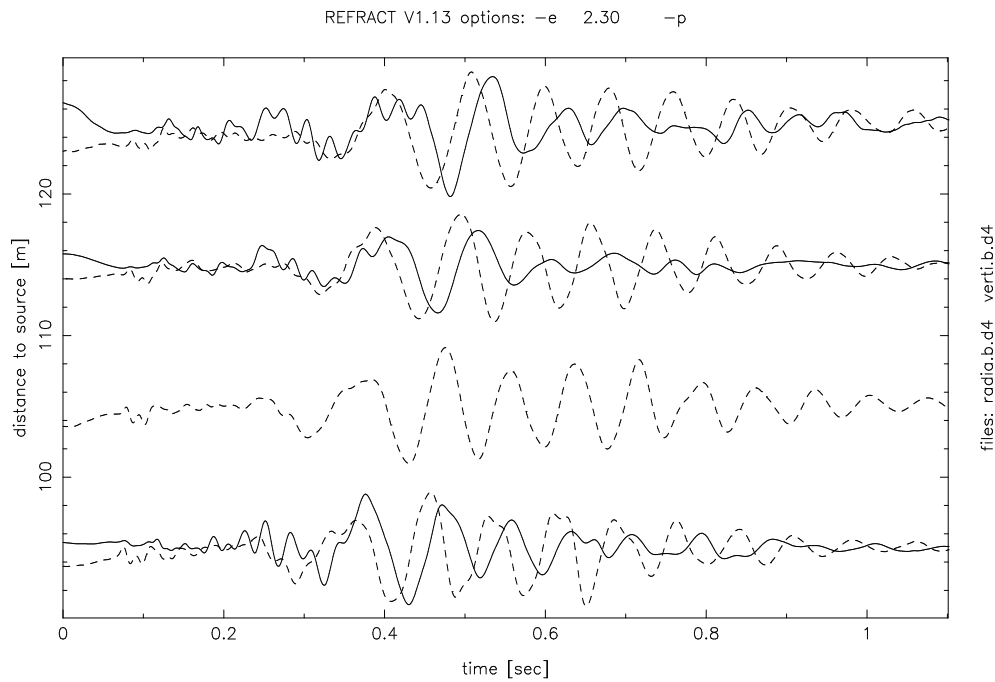


Abbildung 4.40: Radial- und Vertikalkomponente in größeren Distanzen. Die Vertikalkomponente ist gestrichelt dargestellt. Die Seismogramme entsprechen der bis 4Hz restituierten Bodenverschiebung. Die Spuren sind gemeinsam und entfernungsabhängig mit dem Faktor $r^{2.3}$ skaliert.

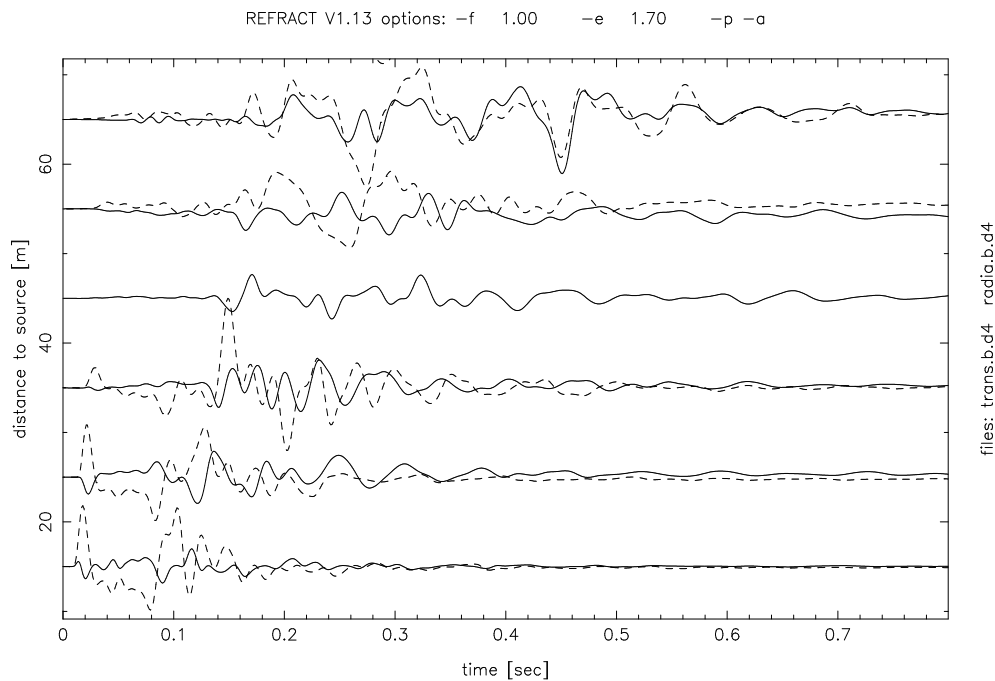


Abbildung 4.41: Radial- und Transversalkomponente. Die Radialkomponente ist gestrichelt dargestellt. Die Seismogramme entsprechen der bis 4Hz restituierten Bodenverschiebung. Die Spuren sind gemeinsam und entfernungsabhängig mit dem Faktor $r^{1.7}$ skaliert.

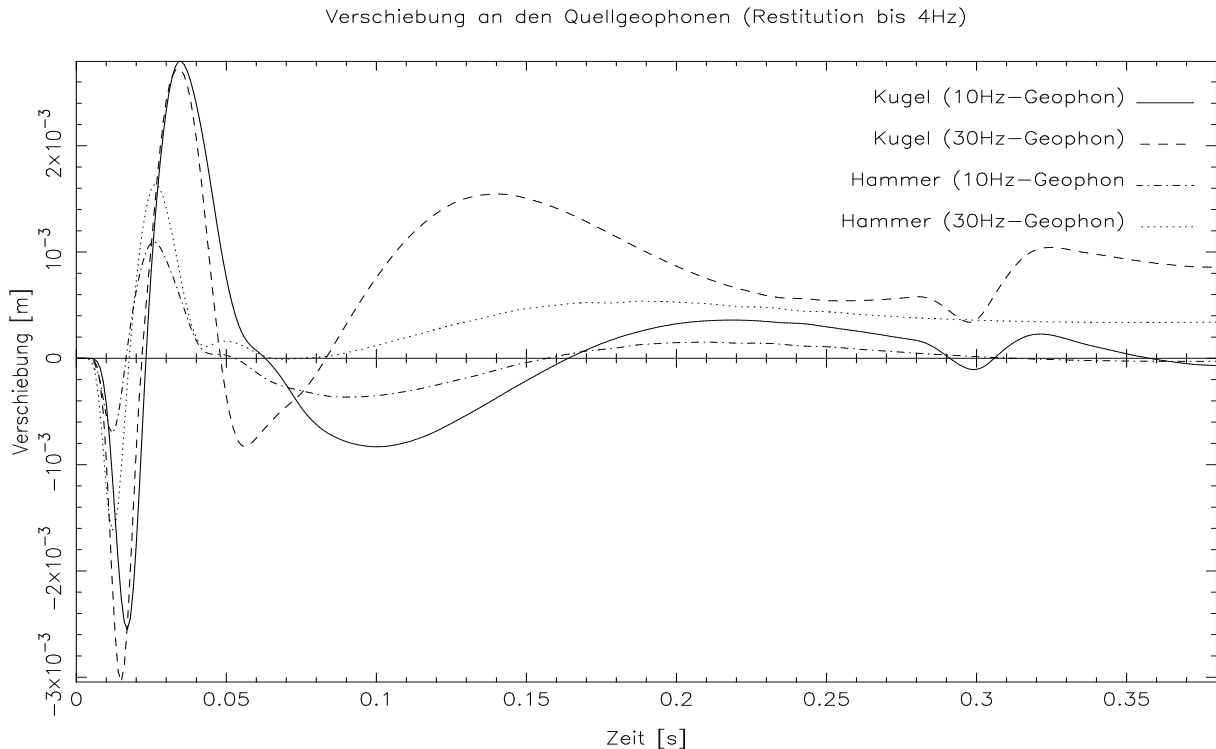


Abbildung 4.42: Verschiebungssignal der Quellgeophone

in beschränktem Maße anwendbar.

Die Abbildung 4.39 vergleicht Vertikal- und Radialkomponenten. Die Montage zeigt, daß die im Weg laufende Kompressionswelle in der Radialkomponente wesentlich stärker enthalten ist, als in der vertikalen. Die Scherwellen treten dafür zunächst stärker in der Vertikalkomponente in Erscheinung. In Abbildung 4.40 wird der Vergleich bei größeren Distanzen fortgesetzt. Hier zeigt sich der Charakter der Oberflächenwellen in fast lehrbuchartiger Weise. Die Vertikalkomponente hat etwa 1.5-fach größere Amplituden als die Horizontalkomponente und die Seismogramme liegen um 90° in der Phase zueinander verschoben. Die Partikelbewegung entspricht also einer Ellipse mit vertikaler großer Halbachse. Für die Rayleigh-Fundamentalmode würde eine retrograde Bewegung erwartet. Die gemessenen Seismogramme spiegeln jedoch eine prograde⁸ Bewegung wieder. Eine Gegenkontrolle der Seismogramm-Polarität anhand der Ersteinsätze⁹ zeigt ein korrektes Bild. Die Ersteinsätze zeigen in der Vertikalkomponente nach oben und in der Radialkomponente von der Quelle fort. Möglicherweise ist das Signal, welches bereits von dem in Abschnitt 4.5.4 auf Seite 92 diskutierten „singulären“ Punkt in der u - ω -Ebene bestimmt wird, nicht der Fundamentalmode, sondern einer höheren Mode zuzuordnen. Dies knüpft an die bereits geführte Diskussion an. Auch hierzu wäre es hilfreich, die vertikalen Eigenfunktionen für die Verschiebung zu untersuchen. Dies war im Rahmen der Diplomarbeit nicht mehr möglich. Jedoch lassen sich in der Literatur Beispiele finden. Lysmer und Drake [lys 72] zeigen Eigenfunktionen, bei denen sich das Vorzeichenverhältnis der Verschiebungskomponenten an der Oberfläche bereits für die erste höhere Mode umkehrt. Auch bei Stange [sta 92] läßt sich ein ähnliches Beispiel finden. Gleichzeitig wird an anderen Beispielen klar, daß das gesuchte Verhalten eindeutig von der konkreten Struktur des jeweils untersuchten Mediums abhängt und nicht in jedem Fall für höhere Moden eine Vorzeichenumkehr auftritt.

⁸Das bedeutet, daß sich das Teilchen im obersten Punkt der Ellipse von der Quelle fort bewegt.

⁹Dies geschieht günstigerweise an Spuren, die proportional der Geschwindigkeit sind. In den Verschiebungsseismogrammen lassen sich die Ersteinsätze im langperiodischen Noise schwer lokalisieren.

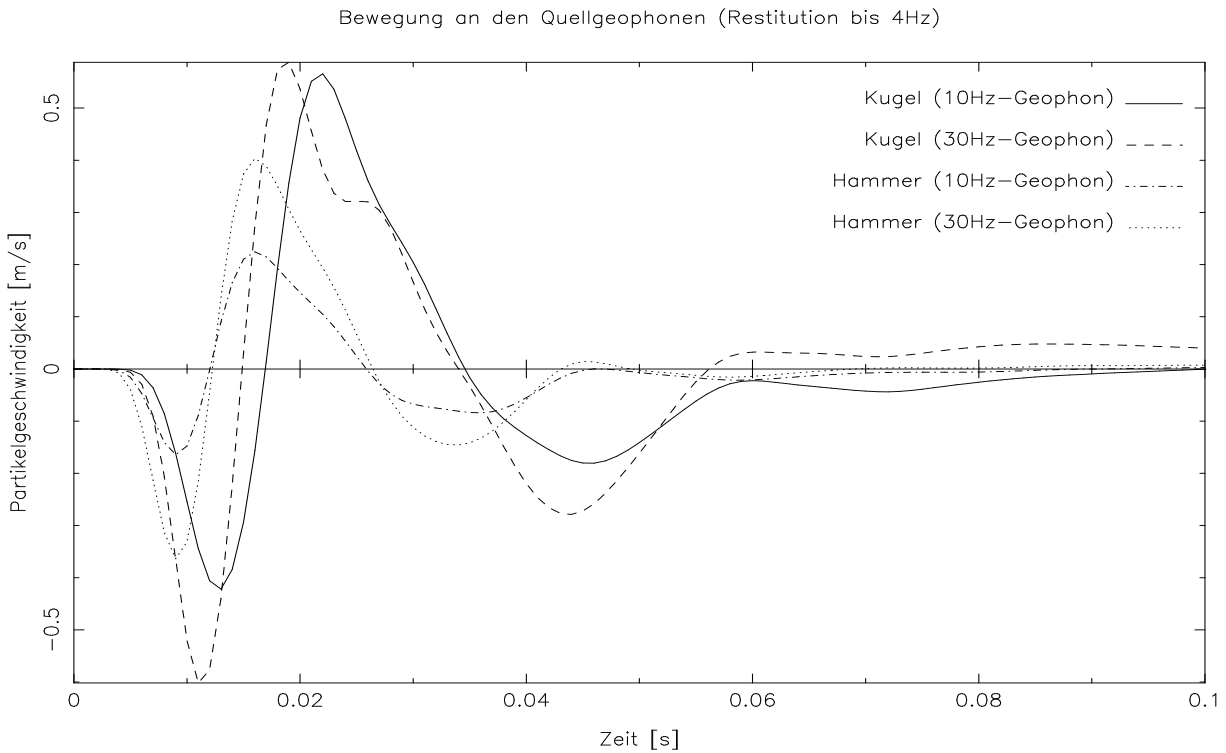


Abbildung 4.43: Geschwindigkeitssignal der Quellgeophone

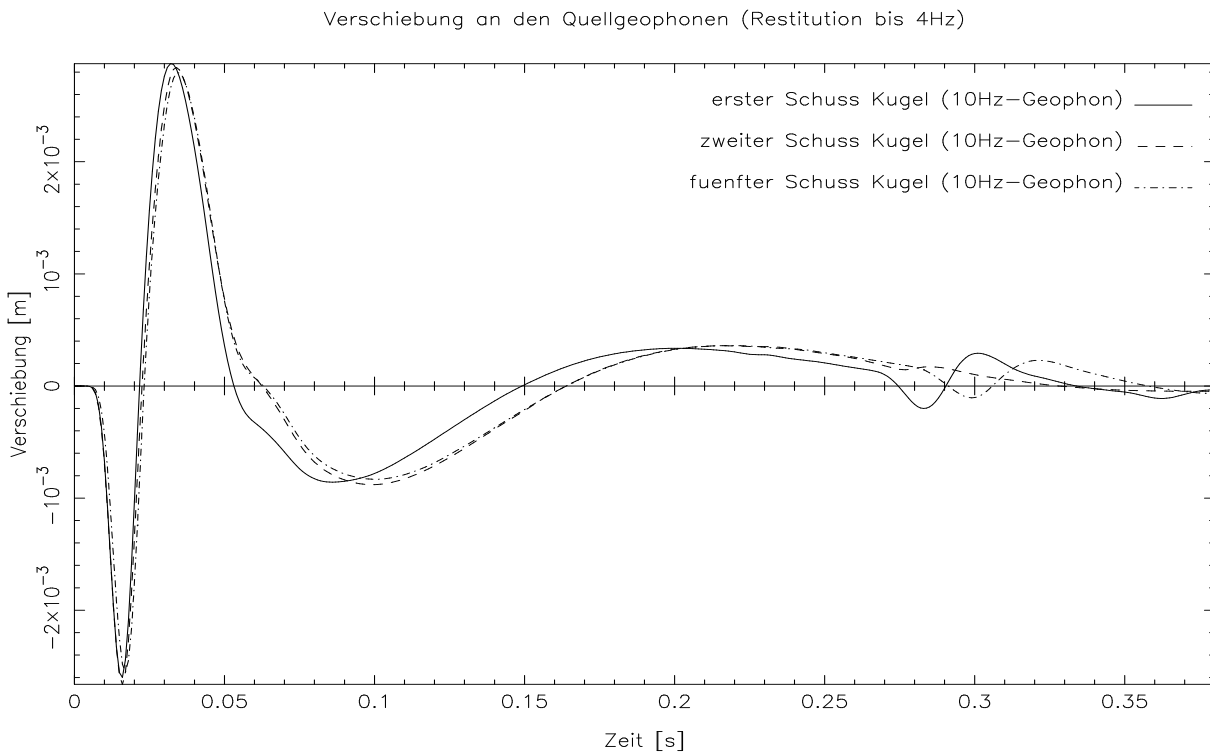


Abbildung 4.44: Veränderung des Verschiebungssignales der Quellgeophone über eine Schuß-Serie

4.5.7 Das Quellsignal

Bei den Voruntersuchungen wurden, wie oben beschrieben, zwei Geophone unter der Quelle vergraben. Die Meßsignale dieser Geophone wurden ebenfalls in der beschriebenen Weise bearbeitet und restituiert. Hier ist zusätzlich zu beachten, daß die Geophone durch einen sehr kleinen Shuntwiderstand überdämpft wurden, um ein Übersteuern zu verhindern. Bezüglich des Innenwiderstandes kann der Shuntwiderstand als Kurzschluß betrachtet werden, so daß die Geophon-Dämpfung für den Kurzschlußfall anzusetzen ist. Die Amplituden wurden durch diesen Spannungsteiler aus Innenwiderstand des Geophons und Shuntwiderstand etwa um den Faktor 440 verkleinert. In den Seismogrammen bedeutet ein positiver Ausschlag eine Bewegung nach oben.

In Abbildung 4.43 ist die Partikelgeschwindigkeit, in Abbildung 4.42 die Verschiebung dargestellt, die mit den Quellgeophonen bei verschiedenen Schüssen aufgezeichnet wurden. In der Verschiebung werden 3mm, in der Geschwindigkeit $0.6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ Maximalamplitude in etwa 20cm Tiefe unter der Quelle und in einem Frequenzband oberhalb 4Hz erreicht. Eine Verschiebung von 3mm entspricht etwa einem Zehntel des Bremsweges, der in Abschnitt 3.2.3 auf Seite 65 abgeschätzt wurde. Selbst das 10Hz „long-travel“-Geophon geht jedoch bei 2mm Auslenkung an den Anschlag. Es ist also kaum damit zu rechnen, daß die Kurven ein genaues Bild der tatsächlichen Bodenbewegung wiedergeben.

Der zeitliche Verlauf der Kurven ist sowohl zwischen den Geophonen, wie auch zwischen den Quellen qualitativ ähnlich und entspricht der erwarteten gedämpften Schwingung. Auf den mit dem Fallgewicht angeregten Seismogrammen ist der zweite Aufprall der Kugel bei etwa 300ms zu erkennen, nachdem diese von der Grundplatte abgeprallt ist. Die Restitution des Signals, welches mit dem 30Hz-Geophon aufgezeichnet wurde, stößt möglicherweise bereits an prinzipielle Grenzen. Möglicherweise ging dieses Geophon auch zu einem anderen Zeitpunkt an den Anschlag. Zudem lagen beide Geophone nicht zentral unter dem Schußpunkt. In der Praxis ist es nicht möglich die Schüsse so anzubringen, daß sie durch Aufschlagplatte und Deckschicht identisch auf die Geophone wirken.

Auch im Quellsignal bestätigt sich, daß mit dem Hammer höherfrequente seismische Bewegungen angeregt werden als mit dem Fallgewicht. Eine Spektralanalyse ergibt für die seismischen Geschwindigkeiten klare Maxima:

Fallgewicht:	28 Hz
Hammer:	35 Hz

Durch das Vergraben der Geophone wurde das Erdreich am Schußpunkt aufgelockert. Durch die Schüsse, insbesondere mit dem Fallgewicht, wurde es später wieder verdichtet. Es ist also davon auszugehen, daß dieser Vorgang zu Veränderungen in den Seismogrammen der einzelnen Schüsse führte, die auf unterschiedlich kompaktes Material aufgesetzt wurden. Abbildung 4.44 zeigt einen Vergleich von Seismogrammen der Quellgeophone. Gezeigt sind drei von fünf Schüssen. Bereits der zweite Schuß erzeugt ein Seismogramm, daß dem letzten nahezu identisch ist. Ähnliches kann bei einem Vergleich der Seismogramme des ganzen Profils beobachtet werden. Abbildung 4.20 auf Seite 93 zeigt einen Vergleich der Seismogramm-Montagen für alle fünf Schüsse. Der Verdichtungs Vorgang muß damit bei einer Modellierung nicht berücksichtigt werden.

4.5.8 Modellierung

Auf der Grundlage der durchgeführten Analysen wurde eine Modellierung der Seismogramme in Angriff genommen. Als anzupassende Meßdaten wurden die zwei Datensätze *hwo012* und *kugelh* ausgewählt, von denen jeweils die 10Hz-Geschwindigkeitsspuren modelliert wurden. Der Datensatz *hwo012* wurde gewählt, da hier die quellnächsten Spuren vorlagen. Anhand von *kugelh* sollte untersucht werden, inwieweit auch der Einfluß des Waldweges nachgebildet werden kann.

Die Anpassung wurde rein manuell vorgenommen und stieß aufgrund der großen Anzahl seismischer Parameter an ihre Grenzen. Der Modellierung wurde ein Startmodell zugrunde gelegt, das allein aus Laufzeitkurven bestimmt wurde. Es wurden auch Versuche mit einem Modell untersucht, dessen theoretisches Dispersionsverhalten den Meßdaten (zusätzlich zu den Laufzeitkurven) angepaßt wurde. Dieses Modell führte aber nicht zu geeigneten Seismogrammen. Da dem gesuchten Dispersionsverhalten die Annahme zugrunde lag, daß die gefundenen Modenäste der Fundamentalmode und der ersten höheren Mode entsprechen und da diese Annahme, wie besprochen wurde, nicht zu untermauern war, wurden weitere

Parameter des Modells:							
z_i [m]	α [$\frac{\text{km}}{\text{s}}$]	β [$\frac{\text{km}}{\text{s}}$]	ρ [$\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$]	Q_α	Q_β		
0.	0.1697	0.0525	0.8	10	10		
0.1167	0.2570	0.0975	0.8	10	10		
0.2333	0.3443	0.1425	0.8	10	10		
0.35	0.441	0.1788	1.2	60	40		
0.97	0.547	0.2062	1.2	60	40		
1.59	0.656	0.223	1.8	300	80		
3.89	1.14	0.65	2.0	300	80		
8.7	2.25	1.27	2.0	300	80		

numerische Parameter:							
f_{\min} [Hz]	f_{wil} [Hz]	f_{wir} [Hz]	f_{\max} [Hz]	u_{\min} [$\frac{\text{s}}{\text{m}}$]	u_{wil} [$\frac{\text{s}}{\text{m}}$]	u_{wir} [$\frac{\text{s}}{\text{m}}$]	u_{\max} [$\frac{\text{s}}{\text{m}}$]
0.	10.	120.	140.	10^{-27}	$0.435 \cdot 10^{-3}$	$37 \cdot 10^{-3}$	$40 \cdot 10^{-3}$

Quellfunktion: $q(t) = \sin^3((t - 0.005s)\pi/0.02s)$ $0.005s \leq t \leq 0.025s$
 Amplitude der Quellkraft: $7 \cdot 10^3\text{N}$
 Anzahl Slowness-Stützstellen: 2000

Tafel 4.4: Parameter des Modells *nebenweg*

Versuche mit diesem Modell eingestellt.

Schuß neben dem Weg

Die Abbildung 4.46 zeigt Seismogramme, die mit dem in Tafel 4.4 beschriebenen Modell berechnet wurden. Sie werden mit den Daten des mit dem Hammer neben dem Weg beschossenen Profils verglichen. Auffallend in den realen Daten ist die Veränderung der Wellenform von 0.6m zu 1.1m Epizentralentfernung. In größerer Distanz propagiert die Welle ebenso gleichmäßig wie die synthetischen Daten. Dieses Verhalten nachzubilden ist bisher nicht gelungen, auch nicht durch Einsatz des Programmes `refseistf.f`, welches keine Fernfeldnäherung der Besselfunktionen benutzt. Offenbar handelt es sich um einen lokalen Effekt in den Meßdaten. Die Anpassung wurde daher beginnend bei der zweiten Spur in Angriff genommen.

Wie aus Tafel 4.4 zu entnehmen ist, setzt der Quellimpuls, der den synthetischen Daten zugrunde liegt, erst bei 5ms ein. Dies muß nichts mit dem tatsächlichen Zeitpunkt der Anregung bei den Experimenten zu tun haben. Versuche mit anderen Quellfunktionen (insbesondere den gemessenen Kurven — siehe Abbildung 4.43 und 4.42) haben gezeigt, daß diese wenig Einfluß auf die Kurvenform der Seismogramme haben, wohl aber auf die Phasenlage. Für die Grobanpassung wurde ein bekannter bandbegrenzter Impuls bevorzugt, der kaum zu Abschneideeffekten durch die Frequenzfenster führt.

Die Einführung eines Gradienten

In Tafel 4.5 sind die Parameter des aus Laufzeitkurven bestimmten Modells *nwstep*, wie es bereits oben angegeben wurde, aufgeführt. Der Parameterverlauf ist in Abbildung 4.47 graphisch dargestellt. Ein Vergleich mit Abbildung 4.45 zeigt, daß den Seismogrammen aus Abbildung 4.46 eine Modell (*nebenweg*) zugrunde liegt, das die Deckschicht durch einen Gradienten der seismischen Geschwindigkeiten beschreibt. Dies wird der Realität wahrscheinlich eher gerecht. Abbildung 4.48 stellt den Seismogrammen des Modells *nebenweg* die Seismogramme des Modells *nwstep* gegenüber, die keinen Gradienten, sondern scharf abgegrenzte Schichten im oberflächennahen Bereich aufweisen. Die Einführung sanfterer Übergänge zwischen den seismischen Parametern hat offensichtlich erheblichen Einfluß auf die Kurvenform der Seismogramme. Es ist in der Tat so, daß kleine Veränderungen am Modell des Ausbreitungsmediums sich wesentlich stärker auf die Seismogramme auswirken, als die Wahl der Quellfunktion.

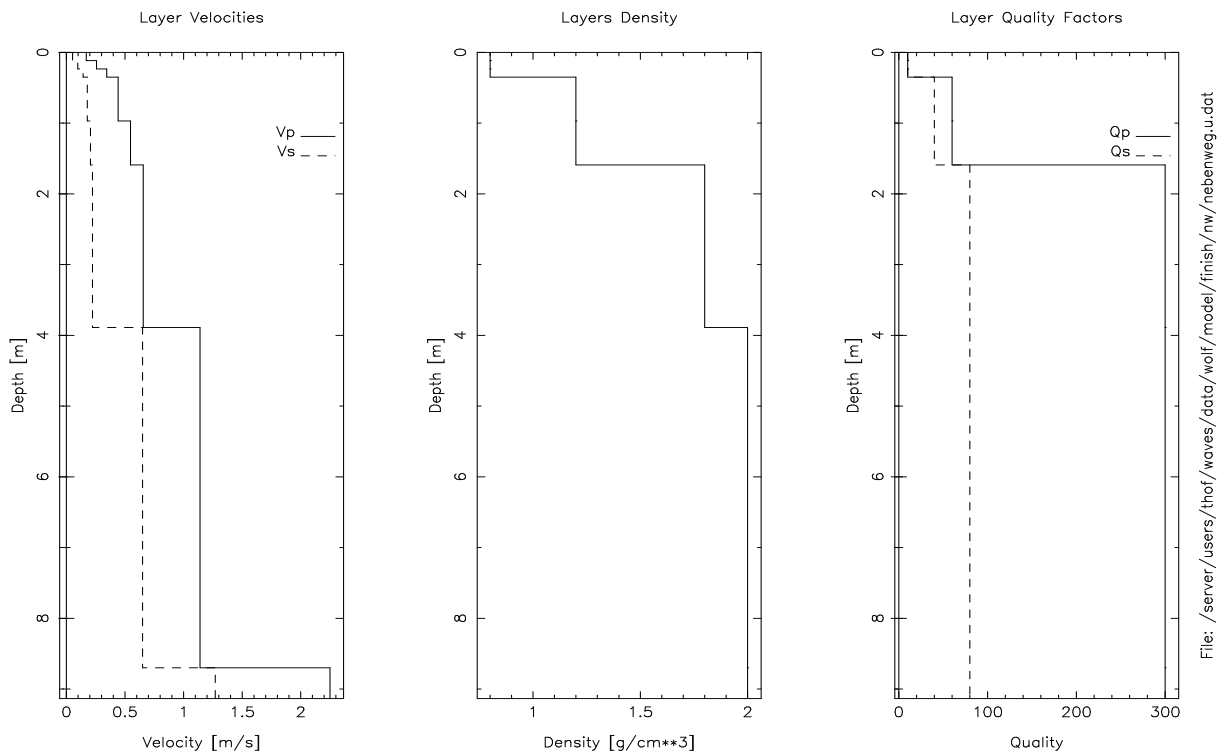


Abbildung 4.45: Verlauf der seismischen Parameter des Modells *nebenweg*

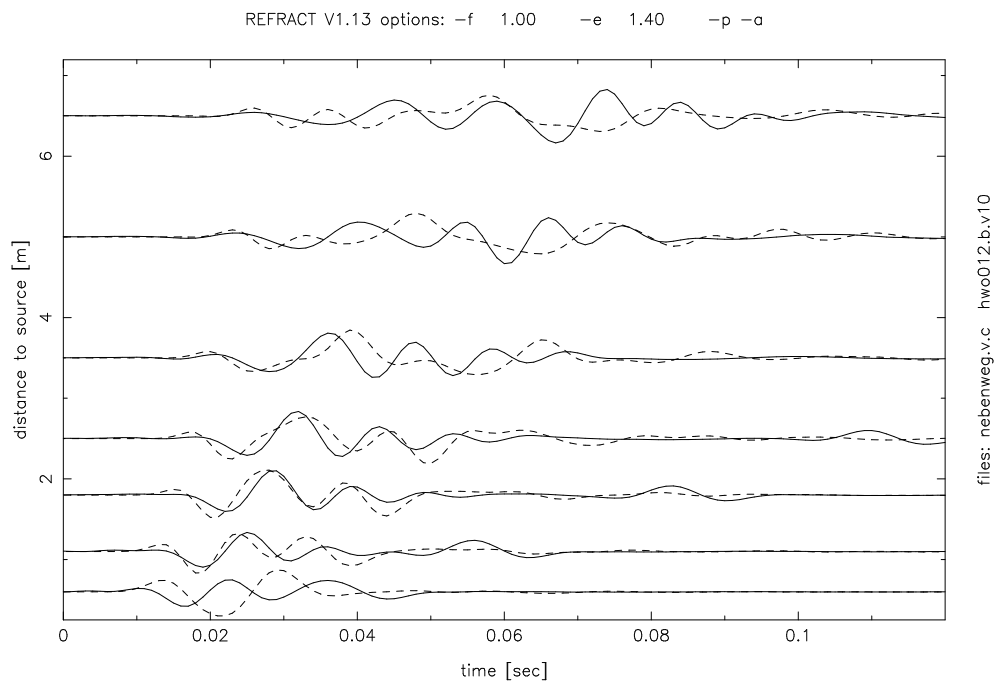


Abbildung 4.46: Seismogramme für des Modell *nebenweg* . Die gestrichelten Kurven sind die Seismogramme der realen 10Hz-Geschwindigkeits-Daten des Datensatzes *hwo012*. Die Spuren sind gemeinsam und entfernungsabhängig mit dem Faktor $r^{1.4}$ skaliert.

Parameter des Modells:

z_i [m]	α [$\frac{\text{km}}{\text{s}}$]	β [$\frac{\text{km}}{\text{s}}$]	ρ [$\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$]	Q_α	Q_β
0.	0.126	0.030	0.8	10	10
0.035	0.388	0.165	1.2	10	10
1.59	0.656	0.223	1.8	300	80
3.89	1.140	0.650	2.0	300	80
8.70	2.250	1.270	2.0	300	80

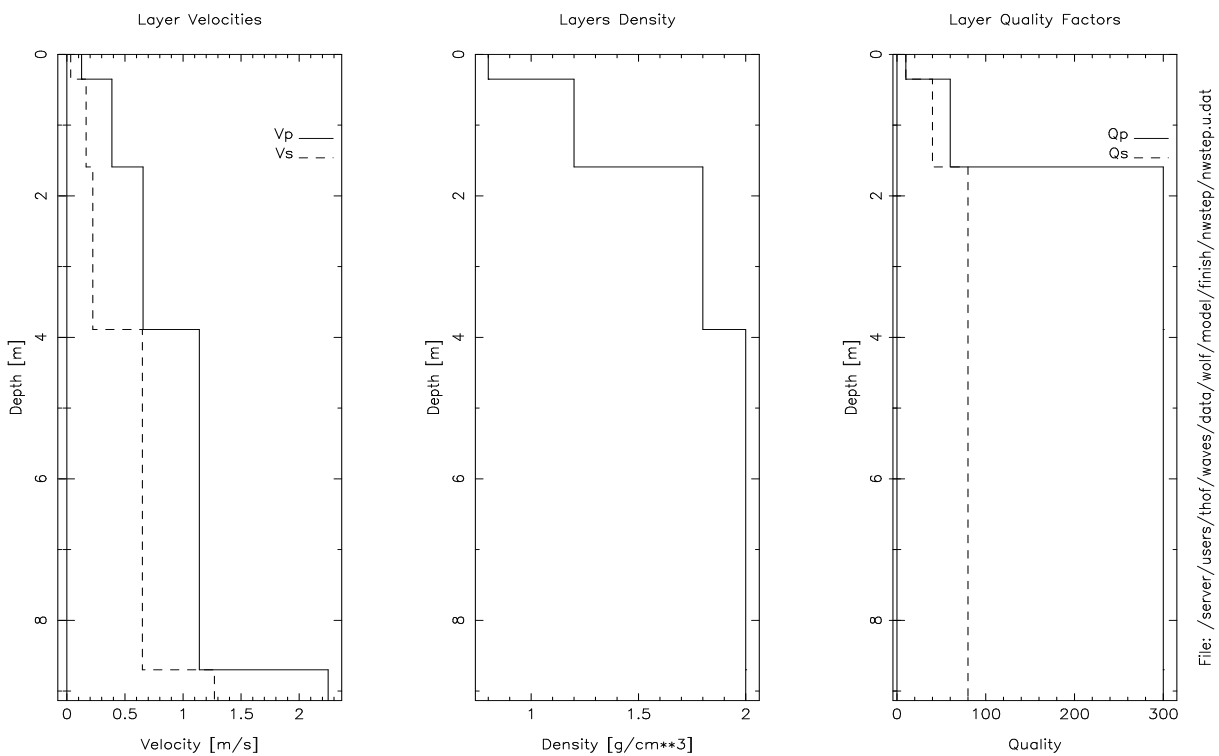
numerische Parameter:

f_{\min} [Hz]	f_{wil} [Hz]	f_{wir} [Hz]	f_{\max} [Hz]	u_{\min} [$\frac{\text{s}}{\text{m}}$]	u_{wil} [$\frac{\text{s}}{\text{m}}$]	u_{wir} [$\frac{\text{s}}{\text{m}}$]	u_{\max} [$\frac{\text{s}}{\text{m}}$]
0.	10.	120.	140.	10^{-27}	$0.435 \cdot 10^{-3}$	$37 \cdot 10^{-3}$	$40 \cdot 10^{-3}$

Quellfunktion: $q(t) = \sin^3((t - 0.005s)\pi/0.02s)$ $0.005s \leq t \leq 0.025s$

Amplitude der Quellkraft: $7 \cdot 10^3 \text{N}$

Anzahl Slowness-Stützstellen: 2000

Tafel 4.5: Parameter des Modells *nwstep*Abbildung 4.47: Verlauf der seismischen Parameter des Modells *nwstep*

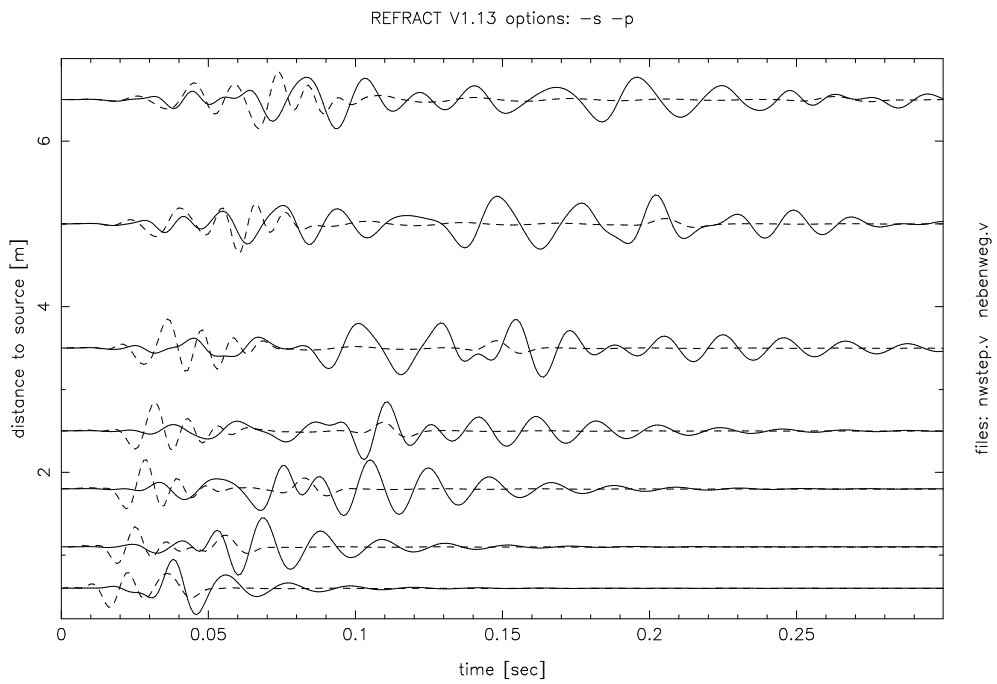


Abbildung 4.48: Seismogramme für das Modell *nwstep*. Die gestrichelten Kurven sind die Seismogramme für das Modell *nebenweg*. Die Spuren sind einzeln skaliert.

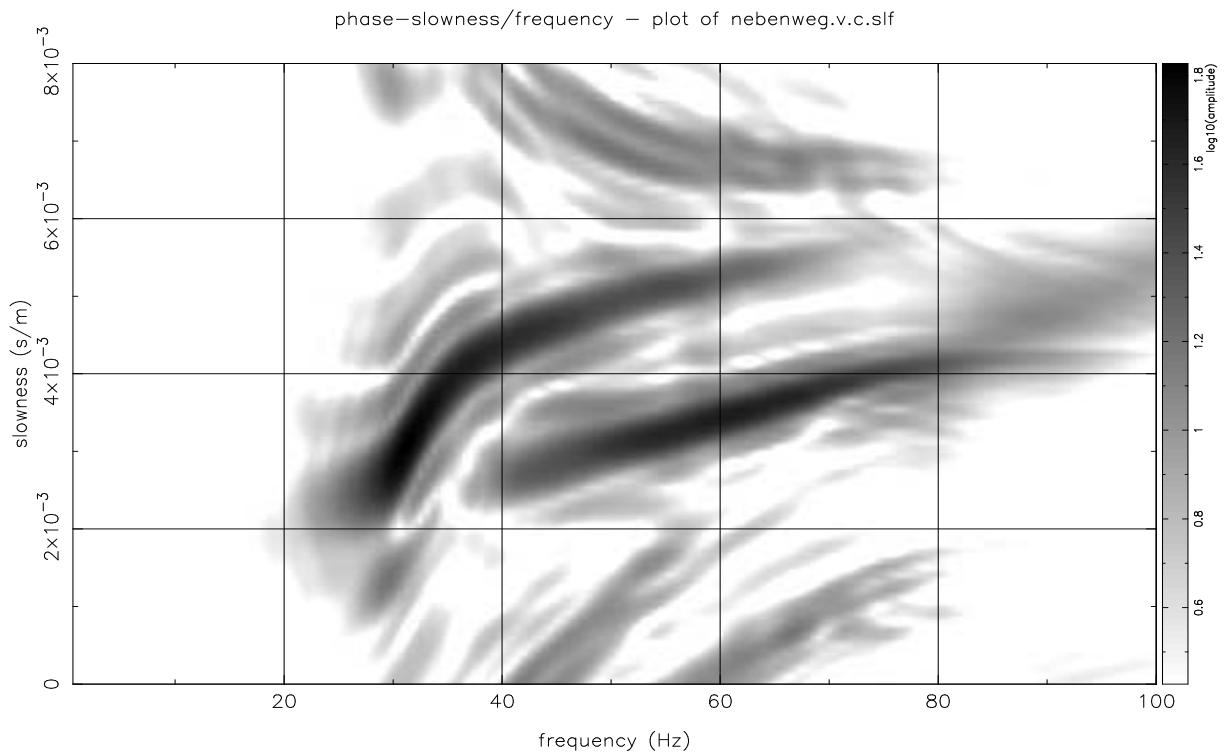


Abbildung 4.49: Dispersionsanalyse der Seismogramme des Modells *nebenweg*

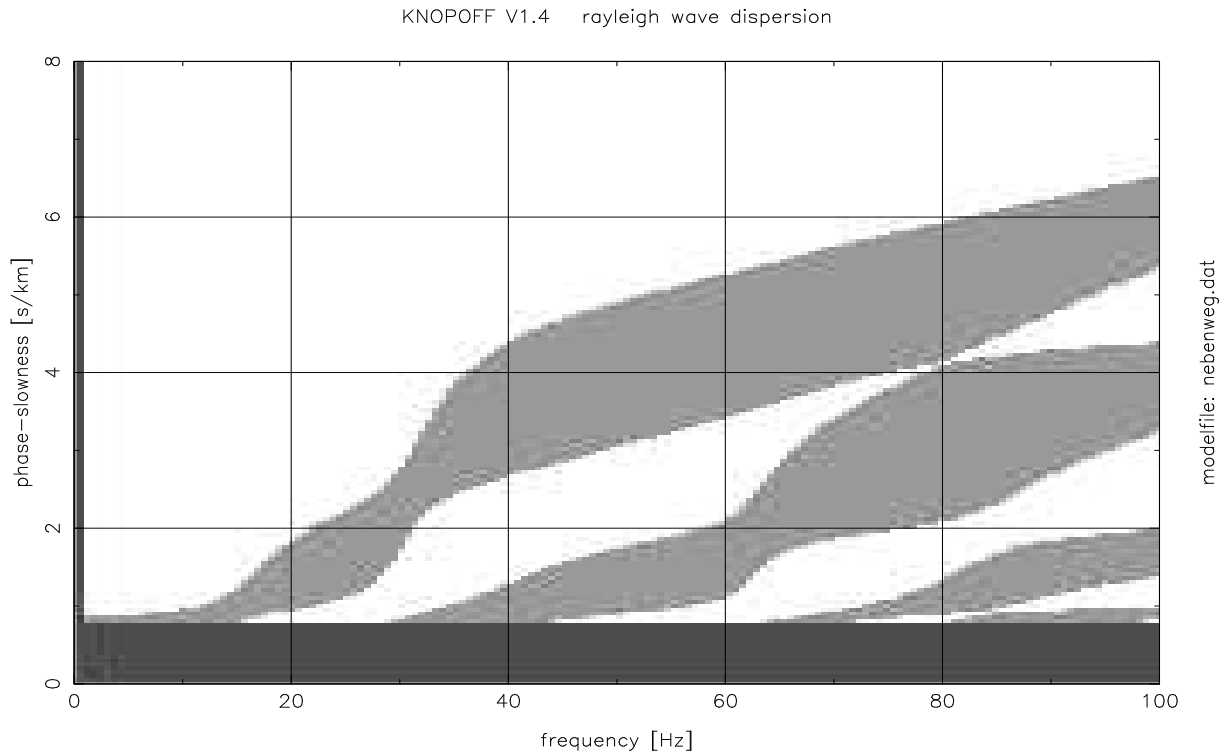


Abbildung 4.50: Theoretische Dispersionskurven für das Modell *nebenweg*

Dispersionskurven synthetischer Daten

Abbildung 4.50 zeigt ein Schwab-Knopoff-Muster für das Modell *nebenweg*. Die Dispersionsanalyse der synthetisch berechneten Seismogramme ist in Abbildung 4.49 wiedergegeben. Die Schatten oberhalb $6 \cdot 10^{-3} \frac{\text{s}}{\text{m}}$ und unterhalb $2 \cdot 10^{-3} \frac{\text{s}}{\text{m}}$ sind Alias-Signale. Die Abbildung zeigt, daß tatsächlich der gesuchte Teil der Modenäste in den Vertikalkomponenten enthalten ist. Die Dispersionsanalyse der realen Daten, dargestellt in Abbildung 4.24, zeigt ein ähnlich geformtes Muster. Die Werte der Phasenlangsamkeiten und Frequenzen stimmen jedoch nicht überein. Sie wären in einem nächsten Schritt anzupassen.

Es wurden ebenfalls Versuche durchgeführt, mit dem Schwab-Knopoff-Algorithmus zunächst die Dispersionskurven anzupassen und dann erst die Seismogramme. Dies führte jedoch nicht zu befriedigenden Fortschritten.

Schuß auf dem Weg

In Tafel 4.6 sind die Parameter des Modells *wegmodell* angegeben, in welches der Waldweg eingebaut wurde. In Abbildung 4.51 sind die Parameter des Modells graphisch dargestellt. Es wurde versucht, die Eigenschaften des seitlich begrenzten Waldweges durch Materialeigenschaften einer unendlich ausgedehnten Deckschicht darzustellen. Dies ist problematisch und führt auch an numerische Grenzen.

Es ist allgemein so, daß Zonen großer Geschwindigkeiten für kleinere horizontale Langsamkeiten bereits einen exponentiellen Verlauf der vertikalen Eigenfunktionen bewirken, während diese in anderen Schichten noch oszillieren. Dies führt durch die schnelle Schicht an der Oberfläche zu numerischen Instabilitäten bei der Berechnung von Seismogrammen für das Modell *wegmodell*, welche die Wahl der Parameter etwas einschränken. In solchen Fällen kann manchmal durch die Aufteilung schneller Schichten in zwei oder mehr dünnere Schichten abgeholfen werden.

Die Seismogramme in Abbildung 4.52 können noch nicht als gelungene Modellierung bezeichnet werden. Das Modell *wegmodell* ist jedoch ein brauchbarer Ansatz für eine Modellierung der durch den Waldweg geprägten Wellenzüge. Dies ist erstaunlich, da das Modell kaum als realistisch, eher als „pathologisch“ zu bezeichnen ist. Ein begrenztes Objekt wie der Waldweg wird auch mit extremen Werten

Parameter des Modells:

z_i [m]	α [$\frac{\text{km}}{\text{s}}$]	β [$\frac{\text{km}}{\text{s}}$]	ρ [$\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$]	Q_α	Q_β
0.0	2.2	0.48	1.2	100	40
0.8	0.405	0.1737	1.2	60	40
1.195	0.535	0.1912	1.2	60	40
1.590	0.656	0.223	1.8	300	80
3.890	1.14	0.23	2.0	300	80
8.700	2.25	0.54	2.0	300	80

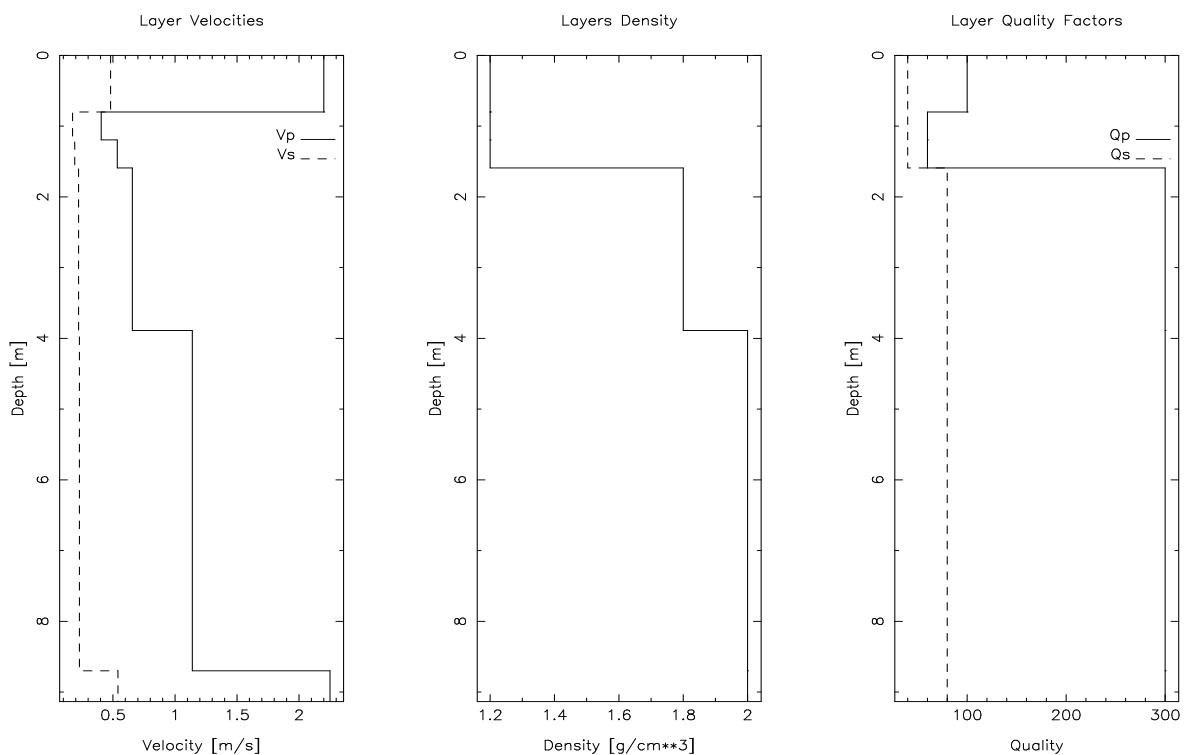
numerische Parameter:

f_{\min} [Hz]	f_{wil} [Hz]	f_{wir} [Hz]	f_{\max} [Hz]	u_{\min} [$\frac{\text{s}}{\text{m}}$]	u_{wil} [$\frac{\text{s}}{\text{m}}$]	u_{wir} [$\frac{\text{s}}{\text{m}}$]	u_{\max} [$\frac{\text{s}}{\text{m}}$]
0.	10.	120.	140.	10^{-27}	$0.435 \cdot 10^{-3}$	$6.67 \cdot 10^{-3}$	$7.14 \cdot 10^{-3}$

Quellfunktion: $q(t) = \sin^3((t - 0.006s)\pi/0.01s)$ $0.006s \leq t \leq 0.016s$

Amplitude der Quellkraft: $7 \cdot 10^4 \text{N}$

Anzahl Slowness-Stützstellen: 2000

Tafel 4.6: Parameter des Modells *wegmodell*Abbildung 4.51: Verlauf der seismischen Parameter des Modells *wegmodell*

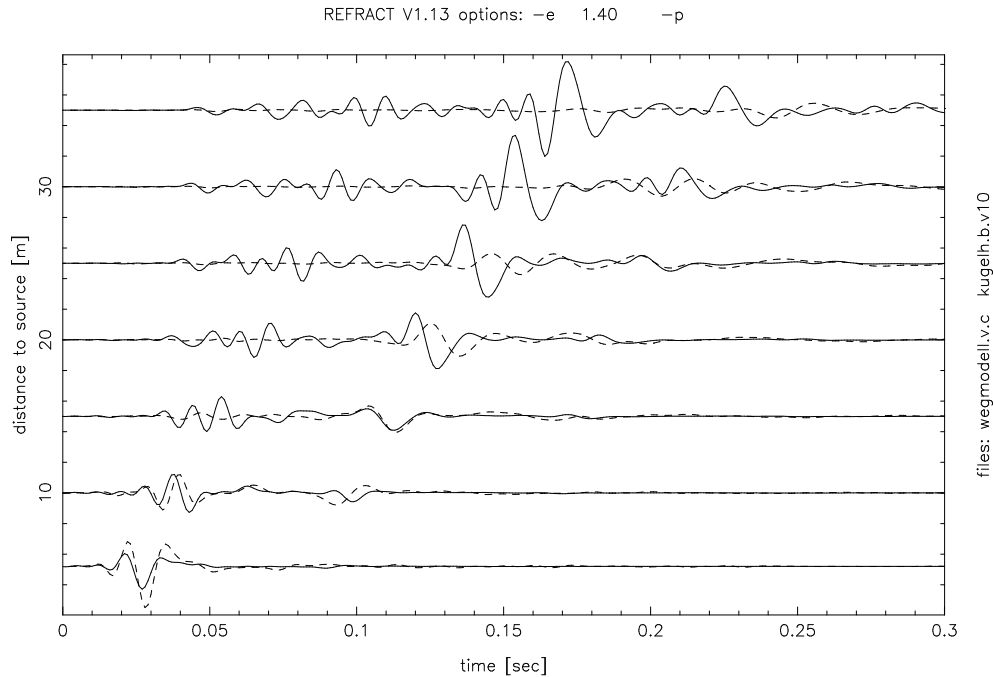


Abbildung 4.52: Seismogramme für des Modell *wegmodell*. Die gestrichelten Kurven sind die Seismogramme der realen 10Hz-Geschwindigkeits-Daten des Datensatzes *kuglh*. Die Spuren sind gemeinsam und entfernungsabhängig mit dem Faktor $r^{1.4}$ skaliert.

für die Q-Faktoren kaum im Sinne unendlich ausgedehnter, homogener Schichten modellierbar sein. Eine Modellierung sollte sich immer auf Daten stützen, die von solchen lokalen Erscheinungen (sofern nicht gerade diese lokalisiert werden sollen) unbeeinflusst sind.

Bestimmung von Amplituden

In Abschnitt 3.2.3 auf Seite 65 wurde ein Versuch unternommen, die Kraft zu bestimmen, welche bei Anregung mit dem Fallgewicht auf den Untergrund einwirkt. Die Abschätzung erbrachte einen Wert von 66000N. Die Seismogramme in Abbildung 4.52 wurden für eine Kraftamplitude von 70000N berechnet und zeigen Partikelgeschwindigkeiten in der Größenordnung der realen Daten. Für die Anregung mit dem Hammer führt eine 10fach kleinere Kraft von 7000N in Abbildung 4.46 zu vernünftigen Amplituden.

Eine endgültige Bestimmung des wahren Quellimpulses ist wohl erst möglich, wenn eine Modellierung im Rahmen der Meßfehler und der durch die Theorie gemachten Vereinfachungen optimal gelungen ist. Neben dem Betrag der Quellkraft hat auch die Dämpfung durch die Q-Werte einen Einfluß auf die Seismogramm-Amplituden. Dies sollte insbesondere bei der Bewertung der Amplituden in Abbildung 4.52 berücksichtigt werden.

Die Größe der Vollraumverschiebung wird, wie aus Gleichung (1.28) auf Seite 22 hervorgeht, auch durch die Massendichte im Medium bestimmt, welches die Quelle umgibt. Im geschichteten Medium mit einer Anregung an der freien Oberfläche ist die Wirkung der Dichte auf die Amplitude jedoch wesentlich geringer als im Vollraum. Wird beispielsweise die Massendichte der obersten Schichten im Modell *nebenweg* bis in eine Tiefe von 1.59m auf einen Wert von $1.6 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ vergrößert, so verringern sich die Seismogramm-Amplituden um den Faktor 0.71. Ein gravierender Einfluß auf die Kurvenform ist speziell bei diesem Eingriff noch nicht zu beobachten.

Numerische Parameter

Abschließend seien noch ein paar Worte zur Wahl der numerischen Hilfsparameter angefügt. Kritisch sind besonders die Einstellungen für die Langsamkeits-Integration. Das Frequenzfenster ist unproblematisch, solange eine bandbegrenzte Quellfunktion benutzt wird. Die Anzahl der Langsamkeits-Stützstellen

wurde in den besprochenen Beispielen auf 2000 festgelegt. Vermutlich würden auch weniger Stützwerte ausreichen. Die Integrations-Schrittweite kleiner zu wählen wird erst bei Medien mit größeren Q -Werten notwendig, wenn die Pole der Integranden näher an die reelle Achse rücken, so wie das für die Beispiele zum Lambschen Halbraum in Abschnitt 2.3.6 auf Seite 52 der Fall ist.

Deutlicher wirkt sich das Taper aus, mit dem die Ränder des Integrationsbereiches belegt werden. Das Taper führt immer zu Abschneidephasen in den Seismogrammen, die stärker werden, wenn das Taper scharf ist und in der Nähe der Pole liegt. In Abbildung 4.46 ist eine langsame Abschneidephase zu erkennen. In der Regel treten in den synthetischen Seismogrammen bereits vor dem Eintreffen des seismischen Signals Schwingungen auf, die sich (aufgrund der impliziten Periodizität des Signals durch die diskrete Fourier-Transformation) vom Seismogramm-Ende her fortsetzt. Dieses Einschwingverhalten ist auf den quellnahen Spuren besonders gravierend. Es läßt sich vermindern, indem auch für den Start der Slowness-Integration ein Taper festgelegt wird, was jedoch wieder zu einer Abschneidephase am Beginn der Seismogramme führen kann. Dies ist insofern erstaunlich, als die Langsamkeitsintegration in der exakten Theorie bei 0 beginnt. Man würde erwarten, nur am oberen Ende des Integrationsbereichs ein Taper anlegen zu müssen, da numerisch nicht bis unendlich integriert werden kann. Das oben beschriebene Verhalten zeigt auch das Programm `refseistf.f` welches die Besselfunktionen und nicht ihre Fernfeldnäherungen benutzt. Ob eine feinere Abtastung des Bereichs kleiner Langsamkeiten zur gleichen Verbesserung für die Seismogramme führen würde, wurde nicht untersucht.

4.6 Fazit — noch eine Wegweisung

Das Ziel, die Seismogramme der Messungen bei Wolfschlügen synthetisch zu modellieren und auf diese Weise die seismische Schichtung des Meßgebietes zu klären, konnte in der zur Verfügung stehenden Zeit nicht erreicht werden. Es wurden jedoch umfangreiche Untersuchungen an verschiedenen Messungen vorgenommen, die zu konkreten Vorschlägen für die Fortsetzung der Arbeit führen.

Unter den relativ unkritischen Bedingungen der Modellseismik konnte gezeigt werden, daß eine Modellierung von Seismogrammen mit relativ geringem Aufwand möglich ist. Ein Startmodell konnte in diesem Fall durch die klaren Laufzeitkurven, die ausgeprägten Dispersionskurven und die experimentellen Vorinformationen leicht gefunden werden. Die Modellierung einer realistischen geologischen Situation ist mit mehr Komplikationen verbunden. Zunächst haben Strukturelemente einen Einfluß auf die Seismogramme, die mit horizontalen, homogenen Schichten prinzipiell nicht modelliert werden können. Doch auch bei einer reinen Tiefenabhängigkeit der seismischen Parameter ist ein Stapel homogener Schichten nur eine grobe Näherung. Die Analyse der Seismogramme hat gezeigt, daß Vergleiche mit Laufzeitkurven und Dispersionsstrukturen nur bedingt zu einem geeigneten Modell führen können. Über die Qualität eines Modells entscheiden die modellierten Seismogramme. Die konkrete Form des Quellimpulses spielt dabei eine untergeordnete Rolle.

4.6.1 Numerische Inversion

Die Ergebnisse der ersten Versuche für die Daten aus Wolfschlügen lassen eine Modellierung von Seismogrammen in der Flachseismik erfolgversprechend erscheinen. Die Anzahl der einstellbaren Parameter ist jedoch so groß, daß eine Verbesserung der Anpassung durch manuelle Eingriffe ab einem bestimmten Grad nur noch schwer erreichbar ist. Daraus entsteht der Wunsch nach dem Einsatz eines numerischen Inversionsalgorithmus¹⁰. Erste Versuche mit einem least-squares-Verfahren deuten auf erhebliche Schwierigkeiten durch die Nichtlinearität des Vorwärtsproblems hin. Bezüglich verschiedener Modellparameter verhält sich die Inversion sehr instabil und gerät leicht in ein Nebenminimum der Fehlerfunktion.

Für Problemstellungen, bei denen der Zusammenhang zwischen Modellparametern und Meßdaten linear ist, läßt sich die Inversionsaufgabe exakt formulieren und numerisch lösen. Im Falle der Seismogramm-Synthese ist diese Voraussetzung nicht erfüllt. Es wird daher in dem Sinne linearisiert, daß man eine Änderung der Meßdaten erwartet, die in einer kleinen Umgebung um ein Startmodell linear von den Modellparametern abhängen. Das endgültige Modell muß mit einem iterativen Verfahren aufgesucht werden.

W. Friederich berichtet¹¹ von guten Erfahrungen mit dem Einsatz der von Parker [par 94] favori-

¹⁰Zum Begriff der „Inversion“ siehe auch die Erläuterungen in Abschnitt B.2.1 auf Seite 135.

¹¹Vorlesung „Inversion geophysikalischer Daten“ am Institut für Geophysik der Universität Stuttgart im Sommersemester 1996

sierten Occam-Methode. Dispersionskurven für die Fundamentalmode in globalen Seismogrammen ließen sich damit von einem Null-Startmodell ausgehend auffinden. Nolet und Dorman [nol 96] beschreiben die Inversion von Seismogrammen, die durch den Ozeanboden bestimmt werden, der ähnlich extreme Parameterwerte (kleine S-Wellen-Geschwindigkeiten, starke Dämpfung, große Kontraste) aufweist, wie sie in der Flachseismik anzutreffen sind.

Da die Inversion des diskretisierten Wellenfeldes mit endlichem Störabstand uneindeutig ist, können die Seismogramme auch mit beliebig unsinnigen Modellen modelliert werden. Außerdem ist es nicht selbstverständlich, daß der rekursive Inversionsalgorithmus das Modell findet, daß im Rahmen der Theorie die optimale Anpassung an die gemessenen Seismogramme bringt. Ein Verfahren zur numerischen Dateninversion muß also sehr sorgfältig formuliert werden, um Erfolgsaussichten zu haben. Insbesondere muß darüber nachgedacht werden, ob Zusatzinformationen wie die Laufzeitkurven oder eine Dispersionsanalyse oder die Hüllkurven der Seismogramme in die Inversion einbezogen werden können, um sie zu stabilisieren. Auf die einzelnen Aspekte einer numerischen Inversion soll daher noch näher eingegangen werden.

Modellierung

Die Reflektivitätsmethode stellt ein sehr effektives Verfahren zur Modellierung von Seismogrammen für ein Medium mit rein vertikal veränderlichen Parametern dar. Bei der Auswertung der Langsamkeitsintegrale stößt sie jedoch an ihre Grenzen.

Knust [knu 95] hat in seiner Arbeit zu einer direkten Untersuchung des Integranden gegriffen. Geeigneter wäre es wahrscheinlich, die in der Reflektivitätsmethode berechneten Entwicklungskoeffizienten zum Vergleich mit den Daten heranzuziehen. Die Berechnung der Koeffizienten verläuft im Sinne der Theorie exakt. Durch eine diskret durchzuführende Besseltransformation (die jedoch nicht exakt sein kann), ließen sich die durch die Daten repräsentierten Koeffizienten berechnen. Hierbei müßte das Aliasing berücksichtigt werden, um keine Phantome anzupassen. Jedoch ergibt sich bereits aus der konkreten Meßanordnung die begrenzte Auflösung, mit der die Koeffizienten aus den Daten ermittelt werden können. Dies führt zu einer bedeutend geringeren Anzahl von unabhängigen Koeffizienten, die mit der Reflektivitätsmethode für einen Vergleich zu berechnen sind. Für die Berechnung der Langsamkeitsintegrale in der Reflektivitätsmethode werden dagegen in der Regel 500 bis 2000 (in seltenen Fällen mehr) Slowness-Stützwerte benötigt. Eine so große Zahl von Wellenzahlen kann mit einem Datensatz von maximal 50 seismischen Spuren nicht aufgelöst werden. Die Anzahl der zu berechnenden Langsamkeits-Stützstellen würde sich nach den angestellten Überlegungen um den Faktor 10–50 reduzieren lassen. In diesem Falle würden nicht mehr Seismogramme angepaßt, sondern die komplexen Amplituden der Besselfunktionen. Dies könnte gezielt für einen bestimmten Ausschnitt der ω - u -Ebene erfolgen, in dem signifikante Daten ermittelt werden. Eine parallele Anpassung von Laufzeitkurven würde auch eine geeignete Gewichtung der Information aus den P-Wellen sicherstellen.

Parametrisierung

Für eine numerische Inversion muß das zu optimierende Modell in geeigneter Weise parametrisiert werden. In der Regel werden die tiefenabhängigen seismischen Parameterfunktionen nach einem Satz geeigneter Basisfunktionen entwickelt und deren Amplituden als Inversions-Parameter eingesetzt. Zur Berechnung des Vorwärtsproblems werden die so definierten Tiefenfunktionen der seismischen Parameter diskretisiert.

Die Effizienz der Reflektivitätsmethode beruht auf einer sehr groben Diskretisierung des Modells, die sich an den Zonen großer Gradienten orientiert. Eine äquidistante Diskretisierung erscheint nicht sinnvoll, sie sollte sich vielmehr an der Größe des Gradienten des Parameterverlaufs orientieren.

Die Schrittweite der Diskretisierung, im Sprachgebrauch der Reflektivitätsmethode die „Schichtdicke“, als Inversionsparameter zu benutzen, ist nicht günstig. Es ist nicht sinnvoll die Abtastpunkte und die dort ermittelten Werte einer Funktion gleichzeitig anzupassen, da beide nicht unabhängig voneinander sind.

Es erscheint auch nicht sinnvoll, das Modell mit Schrittfunktionen (wie es einer Schichtenvorstellung entspräche) als Basisfunktionen zu parametrisieren. Günstigerweise sollte ein Satz von Basisfunktionen gewählt werden, durch den mit möglichst wenig Koeffizienten ein kontinuierlicher Verlauf der seismischen Parameter beschrieben werden kann. Vor jeder Vorwärtsrechnung müssen die Tiefenfunktionen der Parameter diskretisiert, also in Schichten eingeteilt werden. Dies sollte mit variabler Schrittweite geschehen,

so daß Zonen kleiner Gradienten nur grob abgetastet werden, um die Reflektivitätsmethode nicht unnötig zu belasten.

Es muß sichergestellt werden, daß die Inversion nicht auf negative seismische Parameter führt. Dies kann bei nichtlinearen Problemen leicht geschehen, wenn die tatsächlichen Parameter sehr kleine Werte annehmen. Es erscheint daher sinnvoll, nach einem Satz von Basisfunktionen zu suchen, der prinzipiell keine Konstruktion von negativen Werten zuläßt.

Fehlermaß

Die realen Meßdaten enthalten Effekte, die innerhalb der Annahmen der Theorie (hier zum Beispiel die horizontale Schichtung des Mediums) nicht prinzipiell modelliert werden können. Außerdem sind die Meßdaten von Rauschen unterschiedlichster Ursache überlagert, welches nicht modelliert werden soll. Es ist daher nicht sinnvoll die gemessenen Seismogramme möglichst gut synthetisch nachzubilden, sondern nur so gut, wie es unter Berücksichtigung der aufgetretenen Störeinflüsse sinnvoll ist. Der Inversionsalgorithmus soll also das gegebene Fehlermaß, welches reale Daten und synthetische Daten vergleicht, nicht absolut, sondern nur bis zu einem vorgegeben Misfit minimieren.

Genau dies können aber prinzipiell viele unterschiedliche Modelle (und auch beliebig unsinnige) leisten. Daher gehen günstigerweise auch Eigenschaften des Modells (wie etwa die Glattheit) selber in das Fehlermaß ein, um die Inversion noch Möglichkeit eindeutig zu machen und als Ergebnis ein sinnvolles Modell zu garantieren. W. Friederich empfiehlt, als Bewertung für das Modell nicht den Vergleich mit einem Vorgabemodell heranzuziehen, sondern unabhängige Eigenschaften des Modells zu bewerten. Dies kann der Betrag der Modellparameter oder die Größe des Gradienten des Parameterverlaufs oder Vergleiche zwischen dem Verlauf der seismischen Geschwindigkeiten und der Dichten sein oder anderes. Es erscheint von vornherein nicht sinnvoll, besonders kleine Differenzen zum homogenen Hintergrund oder besonders glatte Modelle zu bevorzugen. Diese Fragestellung wird man im konkreten Fall durch Versuche mit verschiedenen Bewertungskriterien weiter untersuchen müssen.

4.6.2 Ergänzende Untersuchungen

Neben der Messung von Horizontalkomponenten zur Ermittlung der wahren Partikelbewegung wäre auch eine theoretische Untersuchung der vertikalen Eigenfunktionen der vorgeschlagenen Interpretationsmodelle wünschenswert. Die Eigenfunktionen können nicht nur einen Aufschluß darüber vermitteln, welche Teile der Modenäste sich prinzipiell an der Erdoberfläche in welcher Komponente abbilden. Sie könnten in Streuexperimenten auch Rückschlüsse darauf zulassen, in welcher Tiefe die gestreuten Wellen für Strukturänderungen empfindlich sind. Man könnte sich dazu vorstellen, die Amplitude der Eigenfunktionen in einer frei wählbaren Tiefe (auch an der Oberfläche) durch eine Farbkodierung in die Schwab-Knopff-Muster einzutragen und somit deren Aussagekraft bei der Interpretation weiter zu erhöhen.

Ein Programm zur Berechnung von Eigenfunktionen steht bereits zu Verfügung. Es beruht auf der von Chen [che 93] dargestellten Methode. Es wurde uns von A. Braun vom Institut für Geophysik an der Universität Frankfurt zur Verfügung gestellt, dem dafür an dieser Stelle herzlich gedankt werden soll. Das Programm konnte innerhalb des zur Verfügung stehenden Zeitrahmens jedoch nicht mehr in eingesetzt werden.

4.6.3 Meßtechnik

Anhand der gemachten Erfahrungen können einige konkrete Empfehlungen für die Durchführung von Feldmessungen gegeben werden:

- Es ist in jedem Fall unerlässlich die Geophon-Auslage möglichst quellnah mit kleinen Abständen zu beginnen. Sowohl die Interpretation von Laufzeitkurven, als auch die Analyse stark gedämpfter Oberflächenwellen-Moden wird so erst sinnvoll ermöglicht. Als vernünftiger Ansatz erscheint es, die Inversion der Seismogramme mit quellnahen Spuren zu beginnen, da die Kurvenform dort noch recht einfach ist. „Quellnah“ kann in diesem Zusammenhang zwei Meter oder weniger bedeuten.
- Andererseits ergeben nur lange Profile (bis 200m und mehr) eine gute Auflösung in den Dispersionsanalysen. Ab der Distanz, in der die interessierenden Wellenanteile durch Dämpfung abgeklungen sind, macht es jedoch keinen Sinn, die Profile weiter zu verlängern.

- Eine wirkliche Beurteilung der Partikelbewegung ist nur durch zusätzliche Messung von Horizontalkomponenten möglich. Diese sollten sinnvoller Weise in einer Distanz durchgeführt werden, in welcher der relevante Wellenzug das Signal dominiert.
- Lokale Eigenheiten des Meßgeländes sind in jedem Fall zu berücksichtigen. Dazu gehören in den besprochenen Beispielen Wege und Geländestufen. Es sollten sowohl mehrere verschiedene Schußpunkte als auch Profile gewählt werden, um eine spätere Beurteilung ungewöhnlich erscheinender Effekte zuzulassen.

Diese Forderungen stehen alle im Widerstreit zum Wunsch, den Meßaufwand möglichst begrenzt zu halten. Im Falle einer wirtschaftlichen Anwendung seismischer Messungen bildet der Feldeinsatz den größten Kostenfaktor. Hier gilt es mit mehr Erfahrung den besten Kompromiß zu finden. Als Beispiel können die Messungen bei Wolfschlugen dienen. Sie erforderten zwei volle Meßtage mit insgesamt fünf Manntagen Arbeitskraft. Doch auch für dieses Gelände ergeben sich aus der Datenanalyse noch einige Meßlücken.

Anhang A

mathematischer Anhang

A.1 In der Arbeit verwendete Symbole

Einsteinsche Summenkonvention:

Bei allen mathematischen Ausdrücken in dieser Arbeit wird davon ausgegangen (soweit nicht ausdrücklich anders angegeben), daß über gleichnamige Indizes in Produkten summiert wird.

α	die Kompressionswellengeschwindigkeit (definiert in Abschnitt 1.3.1)
β	die Scherwellengeschwindigkeit (definiert in Abschnitt 1.3.1)
$\chi(\vec{x}, t)$	das SH-Potential der Verschiebung (definiert in Abschnitt 1.3.3)
δ_{ij}	das Kroneckersymbol (definiert in Abschnitt A.3.6)
$\delta(x, x')$	die gewöhnliche Diracsche δ -Funktion (definiert in Abschnitt A.3.4)
$\bar{\delta}(r)$	als Flächendichte definierte Delta-Funktion (definiert in Abschnitt A.3.4)
$\underline{\underline{\epsilon}}(\vec{x}, t)$	der linearisierte Verzerrungstensor (definiert in Abschnitt 1.1.1)
ϵ_{ijk}	der total antisymmetrische Epsilon-Tensor (definiert in Abschnitt A.3.7)
$\vec{\xi}$	bezeichnet einen materiellen Punkt — Lagrange Koordinaten (definiert in Abschnitt 1.1.1)
λ, μ	die Laméschen Konstanten (definiert in Abschnitt 1.1.3)
ν	die Frequenz [Hz]
ω	die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi\nu$ [1/s]
$\phi(\vec{x}, t)$	das Kompressionspotential der Verschiebung (definiert in Abschnitt 1.3.1)
$\vec{\Psi}(\vec{x}, t)$	das Scherpotential der Verschiebung (definiert in Abschnitt 1.3.1)
$\psi(\vec{x}, t)$	das SV-Potential der Verschiebung (definiert in Abschnitt 1.3.3)
$\rho(\vec{x}, t)$	die Massendichte am Ort \vec{x} zur Zeit t
$\underline{\underline{\sigma}}(\vec{x}, t)$	der Greensche Spannungstensor (definiert in Abschnitt 1.1.2)
$\underline{\underline{1}}$	der Einheitstensor
a	die Vertikalkomponente der Kompressionswellen-Langsamkeit (definiert in Abschnitt 1.3.3)
$\underline{\underline{A}}$	die tensorielle Größe A oder eine Matrix A
A_{ij}	bezeichnet die Komponente ij des Tensors (bzw. der Matrix) $\underline{\underline{A}}$ in orthogonalen Koordinaten
b	die Vertikalkomponente der Scherwellen-Langsamkeit (definiert in Abschnitt 1.3.3)
c	Phasengeschwindigkeit einer Welle
\hat{e}_i	der Basisvektor zur Komponente i in orthogonalen Koordinaten
\hat{f}	ein Einheitsvektor beliebiger Richtung (definiert in Abschnitt 1.2)
$\tilde{f}(k)$	eine Funktion, die durch eine Integraltransformation aus der Funktion $f(x)$ mit dem zu k konjugierten Argument x hervorgeht
f_A	eine Flächenkraftdichte der Einheit $\frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}}$ (definiert in Abschnitt 1.1.2)
f_V	eine Volumenkraftdichte der Einheit $\frac{\text{Kraft}}{\text{Volumen}}$ (definiert in Abschnitt 1.1.2)
F_0	die Amplitude einer Querkraft (definiert in Abschnitt 1.2)

i	die imaginäre Einheit $i = \sqrt{-1}$
J_0	die Besselfunktion erster Gattung nullter Ordnung (definiert in Abschnitt A.3.1)
J_1	die Besselfunktion erster Gattung erster Ordnung (definiert in Abschnitt A.3.1)
J_n	die Besselfunktion erster Gattung n-ter Ordnung (definiert in Abschnitt A.3.1)
\vec{k}	der Wellenzahlvektor (definiert in Abschnitt 1.3.2)
k	die Horizontalkomponente des Wellenzahlvektors \vec{k} ($k = \omega u$)
$L(\vec{x}, t)$	das skalare Potential einer Querkraft (definiert in Abschnitt 1.3.1)
$\hat{L}_{\vec{x}, t}$	ein linearer Differentialoperator, der auf die Parameter \vec{x} und t wirkt (definiert in Abschnitt 1.4.1)
$\vec{M}(\vec{x}, t)$	das Vektor-Potential einer Querkraft (definiert in Abschnitt 1.3.1)
$q(t)$	die Zeitabhängigkeit einer Quelle (definiert in Abschnitt 1.2)
\vec{s}_α	der Langsamkeitsvektor von Kompressionswellen (definiert in Abschnitt 1.3.2)
\vec{s}_β	der Langsamkeitsvektor von Scherwellen (definiert in Abschnitt 1.3.2)
u	die Horizontalkomponente der Langsamkeit (definiert in Abschnitt 1.3.3)
$\vec{u}(\vec{x}, t)$	das Verschiebungsfeld $\vec{u} = \vec{x} - \vec{\xi}$ (definiert in Abschnitt 1.1.1)
$\vec{v}(\vec{x}, t)$	die Geschwindigkeit eines Materie-Elements (Partikelgeschwindigkeit) am Ort \vec{x} zur Zeit t (definiert in Abschnitt A.2.3)
v_p	die Phasengeschwindigkeit von Kompressionswellen ($v_p = \alpha$)
v_s	die Phasengeschwindigkeit von Scherwellen ($v_s = \beta$)
V	bezeichnet als Index an einem Integral ein Volumen über das integriert wird
∂V	bezeichnet als Index an einem Integral die Integration über die Oberfläche des Volumens V
$\vec{x}(\vec{\xi}, t)$	bezeichnet einen Raumpunkt — Euler Koordinaten (definiert in Abschnitt 1.1.1)
\vec{y}	eine vektorielle Größe y .
y_i	bezeichnet die Komponente i des Vektors \vec{y} in rechtwinkligen Koordinaten
y_z	die in z-Richtung weisende Komponente von \vec{y} in Zylinderkoordinaten
y_r	die senkrecht zur z-Richtung vom Ursprung fort weisende Radial-Komponente von \vec{y} in Zylinderkoordinaten
y_φ	die φ -Komponente von \vec{y} in Zylinderkoordinaten
$\dot{y}(t)$	die partielle Ableitung von $y(t)$ nach t ($\dot{y}(t) = \frac{\partial y}{\partial t}$)
$\ddot{y}(t)$	die zweite partielle Ableitung von $y(t)$ nach t ($\ddot{y}(t) = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$)

A.2 zur Physik

A.2.1 Lagrange- und Euler-Koordinaten

Aus dem Raum der materiellen Koordinaten $\vec{\xi}^1$ wird ein beliebiger Startpunkt $\vec{\xi}_0$ gewählt. Diesem Punkt in Lagrange-Koordinaten entspricht ein Punkt $\vec{x}(\vec{\xi}_0)$ in Euler-Koordinaten. Wandert man von hier ausgehend durch den Raum der materiellen Koordinaten, so entspricht jedem Punkt $\vec{\xi}$ der Wanderung ein Punkt $\vec{x}(\vec{\xi})$ in den räumlichen Koordinaten:

$$x_i(\vec{\xi}) = x_i(\vec{\xi}_0) + \int_{\vec{\xi}_0}^{\vec{\xi}} F_{ij} d\xi_j'$$

Damit diese Abbildung für beliebige Wege eindeutig bleibt, muß für F_{ij} das geometrische Grundgesetz verlangt werden:

$$\oint F_{ij} d\xi_j = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial \xi_l} F_{ij} = \frac{\partial}{\partial \xi_j} F_{il} \quad \Leftrightarrow \quad F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}$$

¹Zur Definition der Koordinatensysteme siehe Abschnitt 1.1.1 auf Seite 12.

A.2.2 Verzerrungsmaß und Verzerrungstensor

Als Grundlage der Betrachtung wird folgendes Verzerrungsmaß definiert:

$$(d\vec{x})^2 - (d\vec{\xi})^2$$

Der Greensche Verzerrungstensor

Folgende Beziehungen bestehen zwischen den Differentialen der Koordinaten und der Verschiebungen:

$$dx_i = F_{ij} d\xi_j; \quad \vec{u} = \vec{x} - \vec{\xi}; \quad du_i = (F_{ij} - \delta_{ij}) d\xi_j; \quad \delta F_{ij} = F_{ij} - \delta_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j}$$

Das Verzerrungsmaß wird umgeformt:

$$dx_i dx_i - d\xi_i d\xi_i = F_{ij} d\xi_j F_{ik} d\xi_k - \delta_{ij} d\xi_j \delta_{ik} d\xi_k = d\xi_j d\xi_k \underbrace{(F_{ij} F_{ik} - \delta_{ij} \delta_{ik})}_{=2 \varepsilon_{jk}^G}$$

Damit wird der Greensche Verzerrungstensor definiert:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{jk}^G &= \frac{1}{2} ((\delta F_{ij} + \delta_{ij})(\delta F_{ik} + \delta_{ik}) - \delta_{ij} \delta_{ik}) \\ &= \frac{1}{2} (\delta F_{jk} + \delta F_{kj}) + \frac{1}{2} \delta F_{ij} \delta F_{ik} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Der Verzerrungstensor nach Euler, Almansi und Hamel

Folgende Beziehungen bestehen zwischen den Differentialen der Koordinaten und der Verschiebungen:

$$d\xi_i = G_{ij} dx_j; \quad \vec{u} = \vec{x} - \vec{\xi}; \quad du_i = (\delta_{ij} - G_{ij}) dx_j; \quad \delta G_{ij} = \delta_{ij} - G_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

Das Verzerrungsmaß wird umgeformt:

$$dx_i dx_i - d\xi_i d\xi_i = \delta_{ij} dx_j \delta_{ik} dx_k - G_{ij} dx_j G_{ik} dx_k = dx_j dx_k \underbrace{(\delta_{ij} \delta_{ik} - G_{ij} G_{ik})}_{=2 \varepsilon_{jk}^{EAH}}$$

Damit wird der Verzerrungstensor nach Euler, Almansi und Hamel definiert:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{jk}^{EAH} &= \frac{1}{2} (\delta_{ij} \delta_{ik} - (\delta_{ij} - \delta G_{ij})(\delta_{ik} - \delta G_{ik})) \\ &= \frac{1}{2} (\delta G_{jk} + \delta G_{kj}) - \frac{1}{2} \delta G_{ij} \delta G_{ik} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

A.2.3 Transporttheoreme

Sei $\vec{a} = \vec{a}(\vec{x}, t)$ mit $\vec{x} = \vec{x}(\vec{\xi}, t)$. Die materiellen (Lagrange-) Koordianten werden mit $\vec{\xi}$, die räumlichen (Euler-) Koordianten werden mit \vec{x} bezeichnet. Für die Ableitung von \vec{a} nach der Zeit folgt daraus:

$$\underbrace{\frac{\partial a_i}{\partial t} \Big|_{\vec{\xi}}}_{\text{substantielle Ableitung}} = \frac{da_i}{dt} = \underbrace{\frac{\partial a_i}{\partial t} \Big|_{\vec{x}}}_{\text{lokale Ableitung}} + \underbrace{\frac{\partial a_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial t}}_{\text{konvektive Ableitung}} = \frac{\partial a_i}{\partial t} \Big|_{\vec{\xi}} + v_k \frac{\partial a_i}{\partial x_k} \quad \text{mit} \quad v_k = \frac{\partial x_k}{\partial t}$$

Unter Berücksichtigung der Bezeichnungen

$$d\vec{x} = \underline{\underline{F}} d\vec{\xi}; \quad \Delta = \det \underline{\underline{F}}; \quad \frac{d\Delta}{dt} = \Delta \text{div} \vec{v}; \quad V : \text{Volumen bezüglich } \vec{x}; \quad V_0 : \text{Volumen bezüglich } \vec{\xi}$$

läßt sich das Reynoldssche Transporttheorem wie folgt ableiten:

Sei $\psi_i = \int_V \phi_i d^3 \vec{x}$, dann gilt für dessen Ableitung nach der Zeit:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_i(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \phi_i(t) d^3 \vec{x} = \frac{d}{dt} \int_{V_0} \phi_i(t) \Delta d^3 \vec{\xi} = \int_{V_0} \frac{d}{dt} (\phi_i(t) \Delta) d^3 \vec{\xi} \\ &= \int_{V_0} \left(\frac{d\phi_i(t)}{dt} + \phi_i(t) \operatorname{div} \vec{v} \right) \Delta d^3 \vec{\xi} \\ &= \int_{V(t)} \left(\frac{d\phi_i(t)}{dt} + \phi_i(t) \operatorname{div} \vec{v} \right) d^3 \vec{x} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$= \int_{V(t)} \left(\frac{\partial \phi_i(t)}{\partial t} + \underbrace{(\vec{v}(t) \operatorname{grad}) \phi_i(t) + \phi_i(t) \operatorname{div} \vec{v}}_{\operatorname{div}(\phi_i(t) \vec{v}(t))} \right) d^3 \vec{x} \quad (\text{A.4})$$

Wendet man dies auf die Massendichte $\rho(\vec{x}, t)$ an, so ergibt sich die Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{dm}{dt} = \int_V \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} \right) d^3 \vec{x} \stackrel{!}{=} 0$$

Da dies für beliebige Volumina gelten muß, ergibt sich:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (\text{A.6})$$

Für beliebige massenbezogene Größen erhält man:

$$\begin{aligned} \psi_i &= \int_V \rho \phi_i d^3 \vec{x} \\ \frac{d\psi_i}{dt} &\stackrel{(\text{A.3})}{=} \int_V \left(\frac{d\rho}{dt} \phi_i + \rho \frac{d\phi_i}{dt} + \rho \phi_i \operatorname{div} \vec{v} \right) d^3 \vec{x} \\ &\stackrel{(\text{A.5})}{=} \int_V \rho \frac{d\phi_i}{dt} d^3 \vec{x} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

A.2.4 Symmetrie des Spannungstensors

Von Aki und Richards [aki 80] wird die Symmetrie des Spannungstensors wie folgt hergeleitet:

Die differentielle Form der Impulsbilanz in Indeschreibweise:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} - f_i - \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} = 0 \quad (\text{A.8})$$

Die integrale Form der Drehimpulsbilanz²:

$$\begin{aligned} \int_V \rho \varepsilon_{ijk} x_j \frac{dv_k}{dt} dV &= \int_V \varepsilon_{ijk} x_j f_k dV + \int_{\partial V} \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl} n_l dS \\ \text{Integralsatz von Gauß} \Rightarrow \int_V \varepsilon_{ijk} x_j \left(\rho \frac{dv_k}{dt} - f_k \right) dV &= \int_V \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_l} (x_j \sigma_{kl}) dV \\ \stackrel{(\text{A.8})}{\Rightarrow} \int_V \varepsilon_{ijk} x_j \frac{\partial}{\partial x_l} \sigma_{kl} dV &= \int_V \varepsilon_{ijk} \left(x_j \frac{\partial}{\partial x_l} \sigma_{kl} + \sigma_{kl} \frac{\partial x_j}{\partial x_l} \right) dV \\ \text{mit } \frac{\partial x_j}{\partial x_l} = \delta_{jl} \Rightarrow \int_V \varepsilon_{ijk} \sigma_{kj} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

² ε_{ijk} ist der total antisymmetrische ε -Tensor und nicht der Verzerrungstensor; n_l ist der Flächennormalenvektor zu dS

Da (A.9) für beliebige Volumina erfüllt sein muß, verschwindet der Integrand. Dieser beschreibt aber gerade den antisymmetrischen Anteil A_{ij} von σ_{ij} :

$$\sigma_{ij} = S_{ij} + A_{ij} \quad \text{mit} \quad S_{ij} = \frac{1}{2}(\sigma_{ij} + \sigma_{ji}) \quad \text{und} \quad A_{ij} = \frac{1}{2}(\sigma_{ij} - \sigma_{ji})$$

Aus den Eigenschaften des total antisymmetrischen Tensors bezüglich Indexvertauschung folgt:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} S_{jk} &= \frac{1}{2}(\varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} + \varepsilon_{ijk} \sigma_{kj}) = \frac{1}{2}(\varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} - \varepsilon_{ikj} \sigma_{kj}) = 0 \\ \varepsilon_{ijk} A_{jk} &= \frac{1}{2}(\varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} - \varepsilon_{ijk} \sigma_{kj}) = \frac{1}{2}(\varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} + \varepsilon_{ikj} \sigma_{kj}) = \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Es kann außerdem gezeigt werden, daß (A.10) exakt den antisymmetrischen Anteil A_{ij} von σ_{ij} beschreibt:

$$2 \omega_i = \varepsilon_{ijk} A_{jk} \quad \text{mit} \quad (A_{jk}) = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Zusammen mit (A.9) folgt daraus, daß der antisymmetrische Anteil von σ_{ij} verschwinden muß.

A.2.5 ebene Wellen

Es soll allgemein folgende Differentialgleichung betrachtet werden, die für $a = t$ und $b = x$ in die eindimensionale Wellengleichung mit der Phasengeschwindigkeit c übergeht:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial a^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial b^2} \right) f(a, b) = 0 \quad (\text{A.11})$$

Folgende Koordinatentransformation wird nun durchgeführt:

$$\begin{aligned} \alpha &= a + \frac{b}{c} \quad ; \quad \beta = a - \frac{b}{c} \\ a &= \frac{\alpha + \beta}{2} \quad ; \quad b = c \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} &= \frac{\partial a}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial b}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial b} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial a} - c \frac{\partial}{\partial b} \right) \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial \beta} = \frac{\partial a}{\partial \beta} \frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial b}{\partial \beta} \frac{\partial}{\partial b} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial a} + c \frac{\partial}{\partial b} \right) \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial a^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial b^2} \right) f(a, b) &= 4 \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial \beta} f(\alpha, \beta) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Gleichung (A.12) wird offensichtlich von $f(\alpha, \beta) = \lambda_1 f_1(\alpha) + \lambda_2 f_2(\beta)$ gelöst. Damit hat (A.11) folgende allgemeine Lösung:

$$f(a, b) = \lambda_1 f_1\left(a + \frac{b}{c}\right) + \lambda_2 f_2\left(a - \frac{b}{c}\right)$$

A.3 zur Mathematik

A.3.1 Besselsche Differentialgleichung und Zylinderfunktionen

Die Besselsche Differentialgleichung ist gegeben durch:

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2) y = 0 \quad (\text{A.13})$$

Die Differentialgleichung wird durch die Besselfunktion $J_n(x)$ (Zylinderfunktion) erster Gattung n -ter Ordnung gelöst³:

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(n+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m} \quad (\text{A.14})$$

³ $\Gamma(x)$ bezeichnet die „Gammafunktion“

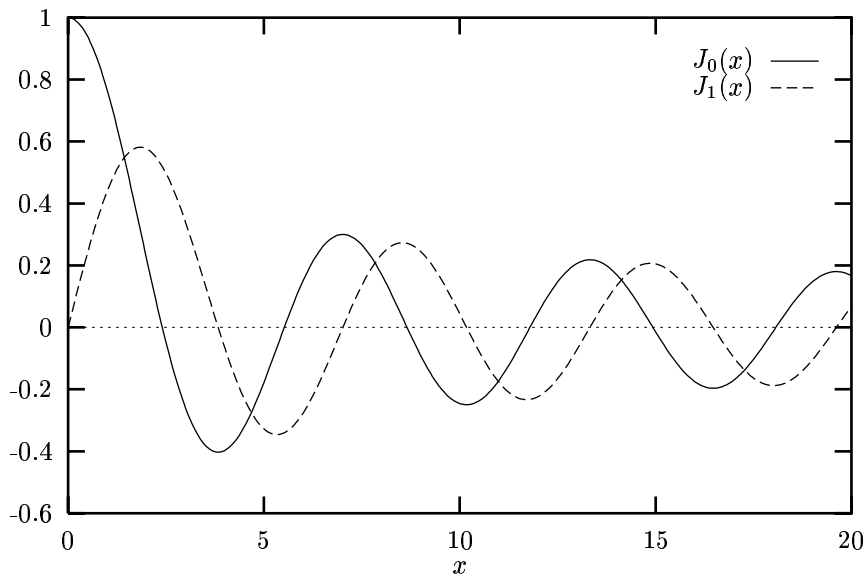


Abbildung A.1: Besselfunktionen 1. Gattung 0. und 1. Ordnung

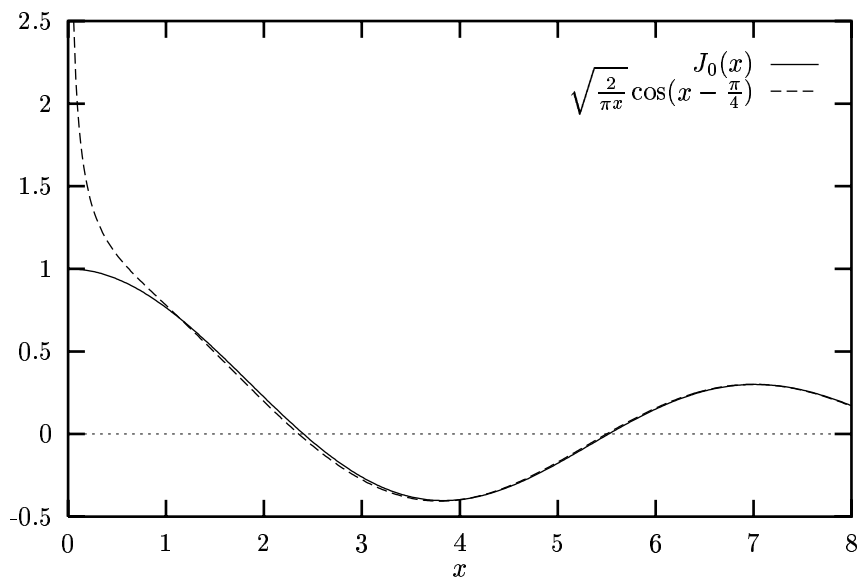


Abbildung A.2: Besselfunktion 1. Gattung 0. Ordnung und ihre Fernfeldnäherung

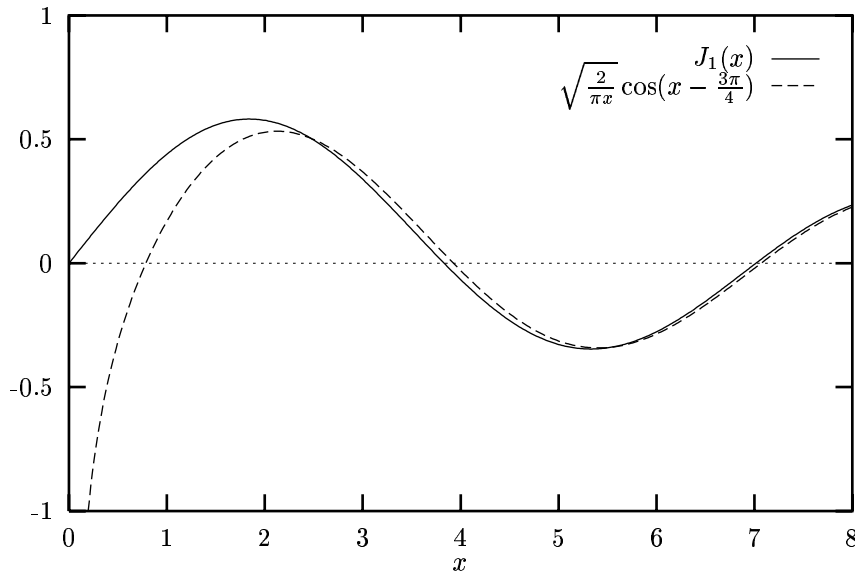


Abbildung A.3: Besselfunktion 1. Gattung 1. Ordnung und ihre Fernfeldnäherung

Für ganzzahlige n ergibt sich folgender Ausdruck:

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! (n+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m} \quad (\text{A.15})$$

Für große Argumente wird von Bronštejn [bro 89] folgende asymptotische Formel für die Besselfunktion angegeben:

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\cos\left(x - \frac{\pi(2n+1)}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x}\right) \right] \quad (\text{A.16})$$

$O(1/x)$ ist eine infinitesimale Größe derselben Ordnung wie $1/x$, das heißt $x O(1/x)$ bleibt beschränkt für $x \rightarrow \infty$.

Funktionalgleichungen der Besselfunktionen

Weitere, von Pelikan [pel 90] angegebene, wichtige Eigenschaften der Besselfunktionen sind:

$$n J_n(x) = \frac{x}{2} (J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)) \quad (\text{A.17})$$

$$\frac{dJ_n(x)}{dx} = \frac{1}{2} (J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)) \quad (\text{A.18})$$

$$\frac{dJ_n(x)}{dx} = -\frac{n}{x} (J_n(x) + J_{n-1}(x)) \quad (\text{A.19})$$

$$\frac{dJ_n(x)}{dx} = \frac{n}{x} (J_n(x) - J_{n+1}(x)) \quad (\text{A.20})$$

$$\frac{d}{dx} (x^n J_n(x)) = x^n J_{n-1}(x) \quad (\text{A.21})$$

$$\int x^n J_{n-1}(x) dx = x^n J_n(x) \quad (\text{A.22})$$

A.3.2 Fouriertransformation

Folgende Identität gilt für Funktionen $f(t)$, welche den Dirichletschen Bedingungen (stückweise Stetigkeit und Existenz der Grenzwerte) genügen und absolut integrierbar sind:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t') e^{-i\omega t'} dt' d\omega \quad (\text{A.23})$$

Daraus lassen sich die beiden folgenden symmetrischen Transformationsgleichungen für $f(t)$ und ihre Fouriertransformierte $\tilde{f}(\omega)$ ableiten:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (\text{A.24})$$

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (\text{A.25})$$

A.3.3 Integraltransformation mit Besselfunktion

Analog zu (A.23) läßt sich unter geeigneten Voraussetzungen für $f(r)$ eine Identität mit Besselfunktionen formulieren. Sommerfeld [som 78b] (§21.8) gibt an:

$$f(r) = \int_0^{+\infty} J_n(kr) k \int_0^{+\infty} f(r') J_n(kr') r' dr' dk \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (\text{A.26})$$

Daraus lassen sich die beiden folgenden symmetrischen Transformationsgleichungen für $f(r)$ und ihre Besseltransformierte $\tilde{f}(k)$ ableiten:

$$f(r) = \int_0^{+\infty} \tilde{f}(k) J_n(kr) k dk \quad (\text{A.27})$$

$$\tilde{f}(k) = \int_0^{+\infty} f(r) J_n(kr) r dr \quad (\text{A.28})$$

A.3.4 Definitionen von δ -Funktionen

Die klassische Diracsche Delta-Funktion ist durch folgende Eigenschaften definiert:

$$\delta(t, t') = \begin{cases} 0 & \text{für } t \neq t' \\ \infty & \text{für } t = t' \end{cases} \quad (\text{A.29})$$

$$\int_{t-\epsilon}^{t+\epsilon} \delta(t, t') dt' = 1 \quad (\text{A.30})$$

$$\int_{t-\epsilon}^{t+\epsilon} \delta(t, t') f(t') dt' = f(t) \quad (\text{A.31})$$

Mehrdimensionale Delta-Funktionen werden wie folgt definiert:

$$\delta(\vec{x}, \vec{x}', t, t') = \delta(x_1, x'_1) \delta(x_2, x'_2) \delta(x_3, x'_3) \delta(t, t') \quad (\text{A.32})$$

Aus ihrer Fouriertransformierten ergibt sich zugleich eine Darstellung dieser Funktion:

$$\delta(t) = \delta(t, 0) \quad (\text{A.33})$$

$$\tilde{\delta}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t'} \delta(t') dt' = 1 \quad (\text{A.34})$$

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} d\omega \quad (\text{A.35})$$

Die Darstellung (A.35) ist, wie die δ Funktion überhaupt, nur innerhalb eines Integranden sinnvoll.

Eine Delta-Funktion als Punktquelle in Zylinderkoordinaten

Zur Darstellung von Punktquellen in Zylinderkoordinaten ist eine in Polarkoordinaten definierte Delta-Funktion hilfreich. Es sei:

$$\bar{\delta}(r) = \begin{cases} 0 & \text{für } r > 0 \\ \infty & \text{für } r = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \bar{\delta}(r) f(r) r dr d\varphi = f(0) \quad (\text{A.36})$$

Insbesondere soll also das Flächenintegral von $\bar{\delta}(r)$ auf 1 normiert sein:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \bar{\delta}(r) r dr d\varphi = 1$$

Die Integration über φ in (A.36) läßt sich sofort ausführen. Damit erhält man folgende Identität:

$$\int_0^{+\infty} \bar{\delta}(r) f(r) r dr = \frac{1}{2\pi} f(0)$$

Damit läßt sich über (A.28) die Besseltransformierte $\tilde{\tilde{\delta}}(k)$ der Funktion $\bar{\delta}(r)$ berechnen:

$$\tilde{\tilde{\delta}}(k) = \int_0^{+\infty} \bar{\delta}(r) J_0(kr) r dr = \frac{1}{2\pi} J_0(0) = \frac{1}{2\pi}$$

So gewinnt man mit (A.27) eine Darstellung der gesuchten Funktion:

$$\bar{\delta}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} J_0(kr) k dk \quad (\text{A.37})$$

Der Ausdruck (A.37) wird in Abschnitt 1.5.3 auf Seite 28 für einen Koeffizientenvergleich benötigt, um eine δ artige Unstetigkeit der Spannung als Beschreibung einer seismischen Quelle darzustellen.

A.3.5 Integralsätze

Der Gaußsche Integralsatz beschreibt den Übergang von einem Integral über ein Volumen auf ein Integral über die Oberfläche des Volumens für den Fall, daß das Volumen durch eine stückweise stetige Fläche begrenzt ist und das Integrandenfeld in seiner ersten Ableitung stetig ist.

$$\int_V \operatorname{div} \vec{\psi}(\vec{x}) d^3 \vec{x} = \int_{\partial V} \vec{\psi}(\vec{x}) d^2 \vec{f} \quad (\text{A.38})$$

$$\int_V \operatorname{grad} \phi(\vec{x}) d^3 \vec{x} = \int_{\partial V} \phi(\vec{x}) d^2 \vec{f} \quad (\text{A.39})$$

A.3.6 Das Kronecker-Symbol

Das Kronecker-Symbol δ_{ij} ist wie folgt definiert:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \\ 0, & \text{falls } i \neq j \end{cases} \quad (\text{A.40})$$

A.3.7 Der total antisymmetrische Epsilon-Tensor

Der total antisymmetrische ε -Tensor ist wie folgt definiert:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0, & \text{falls zwei oder drei Indizes gleich sind} \\ 1, & \text{falls } ijk \text{ eine gerade Permutation von } 123 \text{ ist} \\ -1, & \text{falls } ijk \text{ eine ungerade Permutation von } 123 \text{ ist} \end{cases} \quad (\text{A.41})$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{iij} = \varepsilon_{iji} = \varepsilon_{jii} = \varepsilon_{iii} &= 0 \\ \varepsilon_{123} = \varepsilon_{312} = \varepsilon_{231} &= 1 \\ \varepsilon_{132} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} &= -1 \\ \varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij} &= -\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{kji} = -\varepsilon_{ikj} \end{aligned}$$

Produkte von ε -Tensoren:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmn} &= \det \begin{pmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{pmatrix} \\ \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmk} &= \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{jl} \delta_{im} \\ \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ljk} &= 2 \delta_{il} \\ \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk} &= 6 \end{aligned}$$

Eine wesentliche Anwendung des ε -Tensors besteht in der Formulierung des Vektorprodukts:

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k \quad (\text{A.42})$$

A.3.8 Produkte von Differentialoperatoren

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \Delta \varphi \quad (\text{A.43})$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a} = 0 \quad (\text{A.44})$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = \vec{0} \quad (\text{A.45})$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{a} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{a} - \Delta \vec{a} \quad (\text{A.46})$$

A.3.9 Definition von Zylinderkoordinaten

Die Transformation von kartesischen Koordinaten auf Zylinderkoordinaten wird wie folgt definiert (siehe auch Abbildung A.4 auf Seite 133):

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \varphi & r &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ x_2 &= r \sin \varphi & \varphi &= \tan^{-1} \frac{x_1}{x_2} \\ x_3 &= z & z &= x_3 \end{aligned}$$

Die Komponenten eines Vektors $\vec{u}(\vec{r})$ rechnen sich wie folgt um:

$$\begin{aligned} u_r(r, \varphi, z) &= u_1 \cos \varphi + u_2 \sin \varphi & u_1(x_1, x_2, x_3) &= u_r \cos \varphi - u_\varphi \sin \varphi \\ u_\varphi(r, \varphi, z) &= -u_1 \sin \varphi + u_2 \cos \varphi & u_2(x_1, x_2, x_3) &= u_r \sin \varphi + u_\varphi \cos \varphi \\ u_z(r, \varphi, z) &= u_3 & u_3(x_1, x_2, x_3) &= u_z \end{aligned}$$

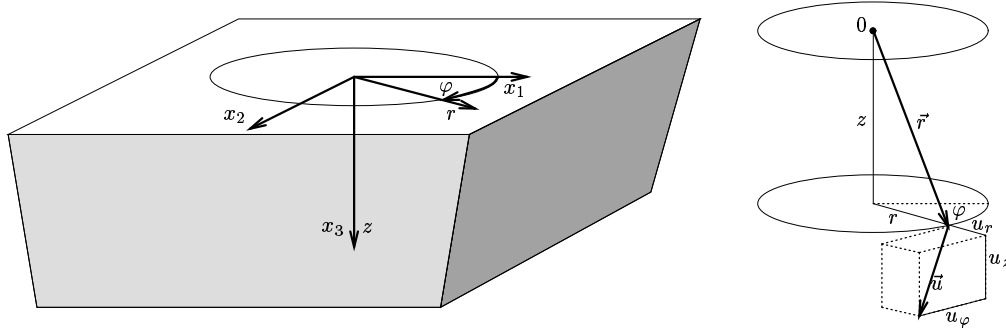


Abbildung A.4: Die Definition der Zylinderkoordinaten bezüglich der freien Oberfläche des Halbraumes

einige wichtige Ausdrücke in Zylinderkoordinaten

$$\text{grad} a = \hat{e}_r \left[\frac{\partial a}{\partial r} \right] + \hat{e}_\varphi \left[\frac{1}{r} \frac{\partial a}{\partial \varphi} \right] + \hat{e}_z \left[\frac{\partial a}{\partial z} \right] \quad (\text{A.47})$$

$$\text{div} \vec{a} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r a_r) + \frac{\partial a_\varphi}{r \partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \quad (\text{A.48})$$

$$\text{rot} \vec{a} = \hat{e}_r \left[\frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z} \right] + \hat{e}_\varphi \left[\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \right] + \hat{e}_z \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r a_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} \right] \quad (\text{A.49})$$

$$\Delta a = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial a}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 a}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} \quad (\text{A.50})$$

$$\Delta \vec{a} = \hat{e}_r \left[\Delta a_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{a_r}{r^2} \right] + \hat{e}_\varphi \left[\Delta a_\varphi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{a_\varphi}{r^2} \right] + \hat{e}_z [\Delta a_z] \quad (\text{A.51})$$

Für die elastischen Größen ergibt sich:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \\ & \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \right) \\ & & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (\text{A.52})$$

$$\sigma_{ij} = 2 \mu \varepsilon_{ij} + \lambda \delta_{ij} \sum_k \varepsilon_{kk} \quad (\text{A.53})$$

$$\begin{aligned} \vec{u}(r, \varphi, z, t) &= \text{grad} \phi(r, \varphi, z, t) + \text{rot} \text{rot}(\hat{e}_z \psi(r, \varphi, z, t)) + \text{rot}(\hat{e}_z \chi(r, \varphi, z, t)) \\ u_r(r, \varphi, z, t) &= \frac{\partial}{\partial r} \phi(r, \varphi, z, t) + \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \psi(r, \varphi, z, t) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \chi(r, \varphi, z, t) \\ u_\varphi(r, \varphi, z, t) &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial z} \phi(r, \varphi, z, t) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial z} \psi(r, \varphi, z, t) - \frac{\partial}{\partial r} \chi(r, \varphi, z, t) \\ u_z(r, \varphi, z, t) &= \frac{\partial}{\partial z} \phi(r, \varphi, z, t) - \frac{\partial^2}{\partial r^2} \psi(r, \varphi, z, t) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \psi(r, \varphi, z, t) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \psi(r, \varphi, z, t) \quad (\text{A.54}) \end{aligned}$$

Anhang B

weitere Anhänge

B.1 Im Rahmen der Diplomarbeit eingesetzte Programme

Für die Bearbeitung der Diplomarbeit wurden diverse Programme in Fortran erstellt. Dies war erforderlich, um das notwendige Handwerkszeug zur Behandlung von Datensätzen mit vielen zusammengehörigen seismischen Spuren, wie sie in der Flachseismik anfallen, zur Verfügung zu stellen. Außerdem wurden verschiedene Programme anderer Autoren umgearbeitet und den Bedürfnissen der Arbeit angepaßt. Die Programme wurden auf einer Sparc 10 Workstation der Firma Sun unter SUN OS 4.1.3 in Fortran 77 entwickelt. Die neu entwickelten Komponenten halten sich weitgehend an den Sprachstandard und sind ebenso über `f2c`¹ und `gcc`² compilierbar. Für die Erzeugung von Grafiken und die interaktive Bearbeitung von Seismogramm-Montagen wurde die Fortran Grafik-Bibliothek `PGPLOT`³ eingesetzt. Einige Diagramme der schriftlichen Arbeit wurden mit der `tgpgsh`-Shell⁴ von W. Friederich erzeugt. Eine Auswahl dieser Programme wird hier kurz beschrieben:

B.1.1 Programme zur Datenanalyse

- `refract.f` zeichnet Seismogramm-Montagen in beliebigen Vergrößerungen, Ausschnitten und Skalierungen; ermöglicht interaktive Auswertung von Laufzeitkurven refraktierter Wellen; plottet Laufzeitkurven gegebener Modelle in eine Seismogramm-Montage (siehe Abschnitt 2.1 auf Seite 39)
- `seif.f` Filterroutinen zur digitalen Signalverarbeitung im Zeitbereich von E. Wielandt (angepaßt auf Feldseismik Datei-Format)
- `spek.f` berechnet Spektren und Summenspektren und stellt diese dar
- `disan.f` berechnet Dispersionsanalysen für ebene Wellen (basiert auf dem Programm `PROFIL4` von E. Wielandt) (siehe Abschnitt 2.2 auf Seite 43)
- `disyn.f` berechnet Seismogramme aus den komplexen Koeffizienten einer Dispersionsanalyse (basiert auf dem Programm `PROFIL4` von E. Wielandt)
- `dissel.f` interaktives Selektieren eines Ausschnitts aus der Koeffizientenfläche einer Dispersionsanalyse zur Vorbereitung eines Datensatzes für `disyn.f`

B.1.2 Programme zur Berechnung synthetischer Daten

- `refsyn.f` Reflectivity-Programm basierend auf dem Programm `psexplquik.f` von G. Müller (siehe Abschnitt 2.3.5 auf Seite 50)

¹Copyright 1990 - 1994 by AT&T Bell Laboratories and Bellcore.

²GNU GENERAL PUBLIC LICENSE Version 2, June 1991

³`PGPLOT` Fortran Graphics Subroutine Library; Version 5.0.2; Copyright (c) 1983-1995 by the California Institute of Technology.; All rights reserved.; Dr. T. J. Pearson; 105-24 California Institute of Technology, Pasadena, California 91125, USA; tjp@astro.caltech.edu

⁴Copyright 1996 by Wolfgang Friederich, Institut für Geophysik der Universität Stuttgart, `tkpgsh` ist eine erweiterte TCL/TK-Shell zur seismologischen Datenverarbeitung

- `refseistf.f` Reflectivity-Programm basierend auf dem Programm `refseis.f` von J. Ungerer (siehe Abschnitt 2.3.5 auf Seite 50)
- `lamb.f` berechnet Seismogramme für den Schlag auf den Halbraum (siehe Abschnitt 2.3.5 auf Seite 50 und Abschnitt 1.5.5 auf Seite 33)
- `knopoff.f` berechnet das Vorzeichenmuster der Rayleigh-Determinante nach einem Schwab-Knopoff Algorithmus und stellt dieses grafisch dar (basiert auf dem Programm `knopa.f`)

B.1.3 Plotprogramme

- `seipg.f` plottet Seismogramm-Montagen
- `dispg.f` plottet Dispersionsanalysen
- `slogp.f` plottet Slowness-Spuren

B.1.4 Werkzeuge

- `bison2tf.f` konvertiert eine Binär-Datei der Feldseismikapparatur BISON 9024 in ein mit Fortran lesbares Dateiformat
- `extr.f` extrahiert gezielt Spuren aus einem Datenfile
- `merge.f` mischt zwei Datenfiles
- `stack.f` stapelt Seismogramme gleicher Auslagendistanz
- `makesrc.f` erzeugt Quellfunktion zur Berechnung synthetischer Daten
- `mu2un.f` konvertiert Parameter-Datei im `refsyn`-Format in `refseistf`-Format

B.1.5 Bibliotheken

- `tfio.f` Ein-/Ausgabe-Routinen für Datensätze mit mehreren zusammenhängenden Seismogrammen im Fortran Binärformat und im SFF-Format (das Stuttgart-File-Format - GSE kompatibel)
- `bison.f` wertet Binärdateien der BISON 9024 aus

B.2 Begriffserklärungen und andere Erläuterungen

B.2.1 Begriffe

Flachseismik: Der Einsatz seismischer Methoden zur Untersuchung oberflächennaher Bereiche (bis in Tiefen von einigen zehn Metern) wird allgemein als Flachseismik bezeichnet. Die dabei auftretenden Fragestellungen und Probleme unterscheiden sich aufgrund der Materialeigenschaften (geringe seismische Geschwindigkeiten, starke Dämpfung, Inhomogenitäten) in diesen Tiefen deutlich von der anderen Aufgabenstellungen der Angewandten Seismik, wie etwa die Erdölprospektion oder Refraktionsseismik zur Untersuchung der Erdkruste.

Inversion: Die geophysikalischen Experimente, die für die vorliegende Arbeit durchgeführt wurden, sollen dazu dienen, die Struktur des Untergrundes der Meßgebiete zu untersuchen. Diese Struktur wird durch die Materialeigenschaften Dichte, elastische Moduln und Gütefaktoren beschrieben. Gemessen wird jedoch die Bodenbewegung an bestimmten Orten aufgrund einer Impulsanregung. Die Bestimmung der Materialeigenschaften aus der Meßgröße (Bodenbewegung) wird als Inversion bezeichnet. Dies ist im Falle der Seismik (im Gegensatz zu anderen Meßverfahren) nicht durch direkte Berechnung möglich. In der vorliegenden Arbeit wird dies durch Modellierung von Seismogrammen erreicht. Dabei werden ausgehend von plausiblen Annahmen über Quelle und Medium synthetische Seismogramme berechnet. Die Parameter, welche der Berechnung zugrunde liegen werden solange gezielt verändert, bis die berechneten Seismogramme den tatsächlich gemessenen entsprechen. Diese Form der Dateninversion ist prinzipiell uneindeutig.

Modellierung: Um die volle Information, die in den Seismogrammen enthalten ist, für eine Interpretation zu nutzen, wird versucht, die Seismogramme synthetisch nachzubilden. Dies wird als Modellierung bezeichnet. In der vorliegenden Arbeit werden diese synthetischen Seismogramme mit der Reflektivitätsmethode berechnet. Dabei gehen folgende Parameter in die Berechnung ein:

1. prinzipielle Annahmen über das Ausbreitungsmedium (hier: rein elastisches Materialgesetz und rein tiefenabhängige Strukturierung)
2. Amplitude und Zeitverlauf der anregenden Kraft
3. Struktur des Mediums (hier: tiefenabhängige Schichtung der Phasengeschwindigkeiten von Raumwellen, der Massendichte und der Gütefaktoren)
4. verschiedene numerische Parameter, die den Rechengang beeinflussen

Partikelgeschwindigkeit: Der Begriff Partikelgeschwindigkeit bezeichnet die Geschwindigkeit der Materie-Elemente. Sie ist die zeitliche Ableitung der Verschiebung \vec{u} .

picken: Die Bodenbewegung, welche durch einen Stoß angeregt wird, breitet sich als nichtdispertierte Wellenfront im rein elastischen Medium aus. Die Front der refraktierten Kompressionswellen trifft als erste an den Geophonen ein. Sie erzeugt dabei einen zeitlich klar abgegrenzten Beginn der seismischen Schwingung des Geophones. Das Ablesen der Ankunftszeit der Wellenfront an einem bestimmten Geophon bezeichnet man als picken.

Schuß: Bei den Experimenten zur vorliegenden Arbeit wurde mit Impulsquellen gearbeitet. Das Anregen seismischer Wellen mit einer solchen Quelle wird als Schuß bezeichnet. Der Begriff wird beim Einsatz von Explosionsquellen verständlicher. Dies steht im Gegensatz zu Vibroseis-Quellen, bei denen der Quellvorgang als „Sweep“ bezeichnet wird.

B.2.2 weitere Erläuterungen

Skalierung der Seismogramm-Montagen: Die in dieser Arbeit abgebildeten Seismogramm-Montagen wurden mit dem Programm `refract.f` erstellt. Zur Darstellung der Seismogramm-Kurven wurden deren Amplituden nach unterschiedlichen Gesichtspunkten skaliert. Dabei können zwei Darstellungsart unterschieden werden. Die Wahl der Skalierungsweise geht aus einigen Optionen in der Titelzeile der jeweiligen Abbildung hervor.

1. Sollten Laufzeitkurven oder Phasengeschwindigkeiten ausgewertet oder Seismogramme mit stark unterschiedlichen Maximalamplituden dargestellt werden, so wurden die einzelnen Spuren unabhängig voneinander skaliert (Option -s). Dabei wurde der Maximalausschlag jeder Spur an den kleinsten Spurbestand der gesamten Montage angepaßt. Ohne weitere Angaben wurde das 0.7-fache des kleinsten Spurbestandes gewählt. Mit der Option -f konnte ein anderer Faktor gewählt werden.
2. Sollten die Amplituden der Seismogramme untereinander vergleichbar sein, wurden alle Spuren mit demselben Faktor skaliert. Dies entspricht der Standarddarstellung ohne weitere Optionen. Der Faktor wurde dabei durch die Spur mit der größten Amplitude bestimmt. Diese wurde auf das 0.7-fache (ohne einen anderen mit -f gewählten Faktor) des kleinsten Spurbestandes skaliert. Um trotzdem eine gleichmäßige Amplitudenauflösung über die gesamte Montage zu erreichen, war es meistens nötig, die Seismogramme zusätzlich mit einem distanzabhängigen Faktor (Option -e) zu vergrößern. Dazu wurden alle Seismogramme vor der Skalierung mit dem Faktor r^e multipliziert. r gibt dabei die jeweilige Epizentraldistanz an und e ist der durch die Option -e gegebene Exponent.

B.3 Literaturverzeichnis

- [aki 80] Aki, K., Richards, P.G., 1980. Quantitative Seismology - Theory and Methods, W.H. Freeman.
- [ben 81] Ben-Menahem, A., Singh, S., 1981. Seismic Waves and Sources, Springer-Verlag.
- [bes 92] Besserer, H., 1992. Über die Vollständigkeit der Oberflächenwellen-Moden des homogenen Wellenleiters, Diplomarbeit, Institut für Geophysik der Universität Stuttgart.
- [bes 96] Besserer, H., 1996. Die Vollständigkeit seismischer Oberflächenwellen, Dissertation, Institut für Geophysik der Universität Stuttgart.
- [bie 94] Biermann, W., 1994. Geoelektrische und geologische Untersuchungen an einer Störungzone bei Muldingen/Jagst (Hohenlohe), Diplomarbeit, Institut für Geophysik der Universität Stuttgart.
- [bis 95] Bison Instruments, Inc., 1995. Digital Instantaneous Floating Point (DIFP) Seismograph, Bison Series 9000 Instruction Manual.
- [bro 89] Bronštejn, I. N., Semendjajew, K. A., 1989. Taschenbuch der Mathematik, Verlag Harri Deutsch.
- [brü 83] Brüstle, W., Müller, G., 1983. Moment and duration of shallow earthquakes from Love-wave modelling for regional distances, *Phys. Earth Planet. Int.*, **32**, 312–324.
- [buc 96] Buchen, P., Ben-Hador, R., 1996. Free-mode surface-wave computations, *Geophys. J. Int.*, **124**, 869–887.
- [but 91] Buttkus, B., 1991. Spektralanalyse und Filtertheorie in der angewandten Geophysik, Springer.
- [cha 68] Chandra, U., 1968. Theory of Head Waves for focal Mechanism Studies, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **58**, 993–1019.
- [che 93] Chen, Xiaofei, 1993. A systematic and efficient method of computing normal modes for multilayered half-space, *Geophys. J. Int.*, **155**, 391–409.
- [dal 93] Dalkolmo, J., 1993. Synthetische Seismogramme für eine sphärisch symmetrische, nichtrotierende Erde durch direkte Berechnung der Greenschen Funktion, Diplomarbeit, Institut für Geophysik der Universität Stuttgart.
- [fey 64] Feynman, R.P., 1964. The Feynman Lectures on Physics, Vol. II, Addison-Wesley Publishing Company.
- [fri 95a] Friederich, W., 1995. Skript zur Vorlesung über Höhere Geophysik — Theoretische Seismologie, Universität Stuttgart / ETH Zürich.
- [fri 95b] Friederich, W., Dalkolmo, J., 1995. Complete synthetic seismograms for a spherically symmetric earth by a numerical computation of the Green's function in the frequency domain, *Geophys. J. Int.*, **122**, 537–550.
- [gil 67] Gilbert, F., 1967. gravitationally perturbed elastic waves, *Bull. Seismol. Soc. Amer.*, **57**, 783–794.
- [gur 70] Gurwitsch, I.I., 1970. Seismische Erkundung, Ferdinand Enke Verlag.
- [has 53] Haskell, N., 1953. The dispersion of surface waves on multilayered media, *Bull. Seismol. Soc. Amer.*, **43**, 17–34.
- [ken 85] Kennett, B., 1985. Seismic wave propagation in stratified media, Cambridge University Press.

- [knu 95] Knust, H., 1995. Modellrechnungen und Betrachtungen zum Einfluß oberflächennaher Schichten auf das abgestrahlte Wellenfeld in der Schußseismik, Dissertation, Institut für Geophysik der Universität Hamburg.
- [krö 70] Kröner, E., 1970. Skript zur Vorlesung über Mechanik, Teil II, Kontinuumsmechanik, Universität Stuttgart.
- [lam 04] Lamb, H., 1904. On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid, Phil. Trans. R. Astr. Soc., **203**, 1–42.
- [lys 72] Lysmer, J., Drake, L.A., 1972. A Finite Element Method for Seismology, in 'Methods in Computational Physics', vol 11, ed. Bolt, B. A., Academic Press, New York, NY, 181–216.
- [mar 30] Martin, H., 1930. Bodenseismik, Apparate und Methoden, in W. Wien, F. Harms, Handbuch der Experimentalphysik, Akad. Verlagsg. mbH Leipzig, Band 25 Teil 3, 251–305.
- [mül 69] Müller, G., 1969. Theoretical seismograms for some types of point-sources in layered media, Part III: single force and dipole sources of arbitrary orientation, Zeitschr. f. Geoph., **35**, 347–372.
- [mül 85] Müller, G., 1985. The reflectivity method: a tutorial, J. Geophys., **58**, 153–174.
- [mül 57] Müller, S., 1957. Die Ausbreitung elastischer Stoßimpulse in oberflächennahen Schichten des Erdbodens, Diplomarbeit, Geophysikalisches Institut der Universität Stuttgart.
- [nol 96] Nolet, G., Dorman, L.M., 1996. Waveform analysis of Scholte modes in ocean sediment layers, Geophys. J. Int., **125**, 385–396.
- [par 94] Parker, R.L., 1994. Geophysical Inverse Theory, Princeton University Press.
- [pel 90] Pelikan, H., 1990. Einige mathematische Hilfsmittel der Theoretischen Physik, Universität Stuttgart.
- [rei 30] Reich, H., 1930. Geologische Grundlagen der angewandten Geophysik, in W. Wien, F. Harms, Handbuch der Experimentalphysik, Band 25 Teil 3, 3–48, Akad. Verlagsg. mbH Leipzig.
- [rei 31] Reich, H., 1931. Eigenschaften der Gesteine, in B. Gutenberg, Handbuch der Geophysik, Band VI, 1–83, Gebr. Borntraeger.
- [rei 43] Reich, H., v. Zwerger, R., 1943. Taschenbuch der angewandten Geophysik, Akademische Verlagsgesellschaft Leipzig.
- [ruf 93] Ruff, F., 1993. Modellseismische Untersuchungen zur Ausbreitung von seismischen Oberflächenwellen in dreidimensionalen heterogenen Strukturen, Diplomarbeit, Institut für Geophysik der Universität Stuttgart.
- [sad 80] Sadi, H.N., 1980. Seismic Exploration, Birkhäuser Verlag.
- [schn 93] Schneider, C., 1993. Erkundung des Untergrundes von Deponien und Altlasten mit Rayleigh-Oberflächenwellen, Berichte des Instituts für Geophysik der Ruhr-Universität Bochum - Reihe A Nr. 36.
- [schw 72] Schwab., F., Knopoff, L., 1972. Fast Surface Wave and Free Mode Computations, in 'Methods in Computational Physics', vol 11, ed. Bolt, B. A., Academic Press, New York, NY, 87–180.
- [som 78a] Sommerfeld, A., 1978. Vorlesungen über Theoretische Physik, Band II, Mechanik der deformierbaren Medien, Verlag Harri Deutsch.
- [som 78b] Sommerfeld, A., 1978. Vorlesungen über Theoretische Physik, Band VI, Partielle Differentialgleichungen der Physik, Verlag Harri Deutsch.

- [sta 92] Stange, S., 1992. Die Ausbreitung von Oberflächenwellen in Erdmodellen mit ebenen und zylindrischen vertikalen Struktur­grenzen, Dissertation, Institut für Geophysik der Universität Stuttgart.
- [sto 56] Stoneley, R., 1956. Lectures - Surface Waves in an Elastic Media, National Bureau of Standards, Washington 25, D.C..
- [tho 50] Thomson, W.T., 1950. Transmission of elastic waves through a stratified solid medium, J. appl. Phys., **21**, 89–93.
- [ung 90] Ungerer, J., 1990. Berechnung von Nahfeldseismogrammen mit der Reflektivitätsmethode, Diplomarbeit, Institut für Geophysik der Universität Stuttgart.

Einige Worte zum Schluß

Es mag etwas unbefriedigend erscheinen, daß es im Rahmen der Diplomarbeit nicht gelungen ist, durch die Modellierung von Seismogrammen der Flachseismik eine endgültige Strukturaufklärung zu erreichen. Das Erreichen eines solchen Zieles innerhalb eines festgelegten Zeitraumes von einem Jahr darf man wohl auch nicht von vornherein erwarten. Ich denke jedoch, daß die durchgeführten, umfangreichen Untersuchungen einige wesentliche Einblicke in die Natur der Wellenausbreitung in der Flachseismik und ihre numerische Modellierung ermöglicht haben. Vielleicht kann die vorliegende Arbeit so ein Grundstein für weitere Arbeiten zu diesem Thema sein.

Da in Stuttgart kein Studiengang „Geophysik“ angeboten wird, war es schon seit Beginn des Physikstudiums mein erklärtes Ziel, dieses mit einer geophysikalischen Diplomarbeit abzuschließen. Die Aufgabenstellung der Arbeit hat exakt meinem Wunsch entsprochen, in der Geophysik praktische Meßaufgaben und Experimente im Gelände mit Arbeiten an der physikalischen Theorie und deren numerischer Anwendung zu verbinden. Für die Auswahl dieser Aufgabenstellung und die Betreuung der Arbeit möchte ich daher Herrn Professor Wielandt ganz herzlich danken. Bei der Bearbeitung des Themas hat er mir sehr viel Freiheit gelassen, stand mir aber auch jederzeit mit Rat und Tat zur Seite. Er war an allen Feldmessungen „handgreiflich“ beteiligt.

Allen Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern (auch den ehemaligen) des Instituts gilt mein Dank für die gute und fröhliche Zusammenarbeit; ganz besonders jenen, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Jörg Dalkolmo hat bei den Messungen in Wolfschlugen tatkräftig mitgeholfen und hat sich durch meine Wünsche nach Vergleichsrechnungen immer wieder von seiner Arbeit abhalten lassen.

Helge Besserer war ein begeisterter Diskussionsteilnehmer, wenn es um die Grenzen der linearen, elastischen Wellentheorie ging. Bei zahlreichen Fragen zur Theorie hatte er ein offenes Ohr für mich. Er hat sein kritisches Auge auf den Entwurf von Abschnitt 1.1 geworfen und einige Korrekturvorschläge eingebracht.

Wolfgang Friederich hat mir einige wesentliche Impulse für meine Arbeit gegeben und meine Kollegen und mich im Sommersemester in die Inversionstheorie eingeführt. Er wurde nicht müde, mir zu versichern, daß die Erde eine Kugel und kein geschichteter Halbraum ist.

Herr Professor Schneider hat mir zu einem ergiebigen Meßgelände verholfen. Außerdem danke ich ihm für seine Erläuterungen zu geologischen Fragen, die für mich zum Verständnis der einzelnen Meßgebiete beigetragen haben.

Herrn Professor Schick möchte ich für die Förderung meines geophysikalischen Interesses danken, die er mir seit meiner ersten Exkursion vor zehn Jahren immer wieder angedeihen ließ. Er ermöglichte mir in den vergangenen Jahren zweimal die Teilnahme an interessanten und lehrreichen Meßfahrten zum Vulkan Stromboli.

Den Mitarbeitern des Instituts für Geophysik der Universität Karlsruhe (namentlich Rudi Widmer und Herrn Zürn) möchte ich für die Einladung zu den Voruntersuchungen und zum Praktikum ihres Instituts danken. Sven Huesges danke ich für die Rammsondierung, die Überlassung der Labordaten der Bohrkerne und der Ergebnisse der Gleichstrom-Sondierung.

Herrn Professor Trebin vom Institut für Theoretische und Angewandte Physik der Universität Stuttgart danke ich für die Übernahme des Mitberichts.

Meine Ehefrau Ruth hat alle Zeiten der Begeisterung und der Ernüchterung mit mir geteilt. Sie hat die Fotos von unserer Meßtätigkeit gemacht und viele Seiten dieser Arbeit Korrektur gelesen. Ruth und meine Tochter Ida, die vor einem Jahr geboren wurde, haben in den letzten Monaten viel auf mich und meine Hilfe verzichtet, um mich bei meiner Arbeit zu unterstützen. Ich hoffe, daß unser Lebensrhythmus nun wieder ins Lot kommt.

Meine Eltern haben mich während des Studiums immer wieder ermutigt und mich mit allen ihren Kräften unterstützt. Speziell mein Vater hat diese Arbeit aufmerksam Korrektur gelesen. Ohne ihn wäre aus manchem Seismogramm ein Seimogramm geworden.

Hier sollen nicht die Namen von Wolfgang Tanzer und Walter Stritt vergessen werden. Sie waren meine Leistungskurs-Lehrer für Mathematik und Physik. Mit ihnen habe ich vor genau zehn Jahren meine erste geophysikalische Exkursion zu einem aktiven Vulkan unternommen, die mein Interesse an diesem Studium geweckt hat.

Albert Pfeiderer hat mir Mut zur Theoretischen Physik gemacht und mit meinen Freunden aus der Fachschaft Physik verbindet mich das Kopfschütteln über manche Unbeweglichkeiten deutscher Universitäten. Mit ihnen gemeinsam habe ich mein Diplom-Studium der Physik absolviert, welches ich mit dieser Arbeit abschließe.

Ihnen allen gilt mein Dank!