

---

Jonathan Balzer

# Regularisierung des Deflektometrieproblems

Grundlagen und Anwendung

Schriftenreihe Automatische Sichtprüfung und Bildverarbeitung | Band 1



---

universitätsverlag karlsruhe



Jonathan Balzer

## **Regularisierung des Deflektometrieproblems**

Grundlagen und Anwendung

Schriftenreihe Automatische Sichtprüfung und Bildverarbeitung  
Band 1

Herausgeber: Prof. Dr.-Ing. Jürgen Beyerer

Lehrstuhl für Interaktive Echtzeitsysteme  
Universität Karlsruhe (TH)

Fraunhofer-Institut für Informations- und Datenverarbeitung  
IITB Karlsruhe

# **Regularisierung des Deflektometrieproblems – Grundlagen und Anwendung**

von  
Jonathan Balzer



---

universitätsverlag karlsruhe

Dissertation, Universität Karlsruhe (TH)  
Fakultät für Informatik, 2008  
Tag der mündlichen Prüfung: 14. Februar 2008

## Impressum

Universitätsverlag Karlsruhe  
c/o Universitätsbibliothek  
Straße am Forum 2  
D-76131 Karlsruhe  
www.uvka.de



Dieses Werk ist unter folgender Creative Commons-Lizenz  
lizenziiert: <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/de/>

Universitätsverlag Karlsruhe 2008  
Print on Demand

ISSN: 1866-5934  
ISBN: 978-3-86644-230-6







# Regularisierung des Deflektometrieproblems – Grundlagen und Anwendung

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Naturwissenschaften

von der Fakultät für Informatik  
der Universität Fridericiana zu Karlsruhe (TH)

genehmigte

Dissertation

von  
Jonathan Balzer

aus Düsseldorf

Tag der mündlichen Prüfung: 14. Februar 2008

Erster Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Jürgen Beyerer

Zweiter Gutachter: Prof. Dr. rer. nat. Hartmut Prautzsch



*Meinem Vater gewidmet.*



## Vorwort

Die vorliegende Dissertation entstand im Rahmen meiner freien Mitarbeit am Lehrstuhl für Interaktive Echtzeitsysteme der Universität Karlsruhe unter der Leitung von Herrn Prof. Dr.-Ing. Jürgen Beyerer. Ihm möchte ich für seine weitsichtige Betreuung und Förderung danken. Herrn Prof. Dr. rer. nat. Hartmut Prautzsch danke ich für die Übernahme des Koreferats und wertvolle Hinweise, die sich nicht nur auf mathematische Detailfragen beschränkten.

Dem Kreis der Kollegen danke ich für die freundschaftliche Atmosphäre und viele befruchtende Diskussionen. Vor allem Herrn Dipl.-Ing. Stefan Werling bin ich verpflichtet. Er hat das Thema im Bezug auf die praktische Umsetzung mit großer Sorgfalt vorangetrieben und die experimentelle Validierung der erzielten Ergebnisse erst möglich gemacht.

Nicht zuletzt schulde ich den durch mich betreuten Studenten Dank, die einen wichtigen Beitrag zum Gelingen der Arbeit geleistet haben.

Karlsruhe im April 2008

Jonathan Balzer



---

## Kurzfassung

Spiegelnde Reflexion technischer Oberflächen – in der klassischen Sichtprüfung oft als zu unterdrückende Störung empfunden – bildet die Grundlage der deflektometrischen Messverfahren. Bei diesen wird das Vorwissen über die untersuchten Objekte in Form des Reflexionsgesetzes ausgenutzt: Ein bildgebender Sensor beobachtet über die Spiegelfläche eine Sequenz definierter Muster. Die Detektion von Anomalien in deren Formmodulation lässt zunächst nur qualitative Aussagen zu. Von der Zuordnung eines Punkts auf dem Mustergenerator und der entsprechenden Beobachtungsrichtung versucht man auf die quantitative Gestalt der Spiegelfläche zu schließen. Die Lösung des Rekonstruktionsproblems gestaltet sich ungleich schwieriger: Tatsächlich handelt es sich dabei mathematisch gesehen um ein schlecht gestelltes Problem.

Es werden zunächst einige theoretische Untersuchungen der oben beschriebenen Abbildung zwischen Kamerabild und Reflexerzeuger angestellt, die bei der Konstruktion eines deflektometrischen Messaufbaus von Bedeutung sind. Die hier entwickelte Beschreibung des Rekonstruktionsproblems als System quasilinear partieller Differentialgleichungen erster Ordnung ermöglicht neue Einblicke in die Struktur des zugrunde liegenden Lösungsraums. Insbesondere wird die in zahlreichen Veröffentlichungen vertretene Meinung widerlegt, durch Berücksichtigung des inneren Zusammenhangs der untersuchten Oberflächenpunkte könne bereits eine Regularisierung erreicht werden.

Der Hauptteil der Arbeit präsentiert zwei neuartige Verfahren, die jeweils unter Einbeziehung von Zusatzinformation eine eindeutige Rekonstruktion ermöglichen. Das erste der beiden stützt sich auf das bei vielen praxisrelevanten Bauteilen auftretende diffuse Reflexionsverhalten. Eine Menge von Schnittpunkten charakteristischer Flächenkurven liefert einen Punkt, der in der wahren Oberfläche enthalten sein muss. Von diesem Anfangswert aus ist Charakteristikenexpansion prinzipiell möglich. Experimentell bestätigt sich jedoch, dass diese Vorgehensweise zur Akkumulation stochastischer Fehler in Integrationsrichtung führt und nur in kleinen Umgebungen anwendbar ist.

Die anschließende numerische Rekonstruktion fußt stattdessen auf Level-Set-Methoden der Formoptimierung. Der vorgeschlagene Variationsansatz basiert auf der Minimierung eines Oberflächenfunctionals, das die Abweichung einer Fläche von den im Lösungsraum der deflektometrischen Grundgleichung enthaltenen Flächen beschreibt. Dessen Formgradient ist die homöomorphe Transformation der iterierten Fläche, die den stärksten Abfall des Funktionalwerts zur Folge hat. Sie wird durch das Skalarfeld der Ausbreitungsgeschwindigkeit in Normalenrichtung beschrieben. Das Prinzip des Gradientenabstiegs zur Bestimmung eines (zumindest lokalen) Minimums wird anhand einer Level-Set-Evolution

realisiert. Ein angekoppelter Regularisierungsterm erzwingt im Sinne einer nichtlinearen Tikhonov-Stabilisierung, dass alle Iterierten die zuvor ermittelten Punkte enthalten. Das Verfahren ist globaler Natur, so dass – im Gegensatz zur Charakteristikenexpansion – stochastische Messfehler auf das gesamte Berechnungsvolumen verteilt werden.

Schließlich wird ein allgemeines Modell des spekularen optischen Flusses hergeleitet, der entsteht, wenn die gesuchte Fläche relativ zum Messaufbau bewegt wird. Nun wird die Formoptimierung durch eine Nebenbedingung regularisiert: Gesucht ist dabei genau die Fläche, die konform mit den deflektometrischen Daten und dem zusätzlich aufgenommenen optischen Fluss ist.

Beide Verfahren werden in Simulation und Experiment validiert. Man erhält nicht nur jeweils die wahre Oberfläche auf eindeutige Weise. Die Ergebnisse der Rekonstruktion belegen außerdem zufriedenstellende Messgenauigkeiten.



---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Variable Bildgewinnung und -verarbeitung . . . . .	1
1.2	Gestalt durch Reflexion . . . . .	3
1.2.1	Einführung . . . . .	3
1.2.2	Technische Umsetzung . . . . .	5
1.3	Übersicht . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>7</b>
2.1	Reguläre Flächen . . . . .	7
2.2	Quasilineare Differentialgleichungen erster Ordnung . . . . .	10
2.3	Variationsaufgaben auf impliziten dynamischen Flächen . . . . .	13
2.3.1	Implizit definierte Flächen . . . . .	13
2.3.2	Gradienten-Abstieg . . . . .	16
2.4	Inverse Probleme . . . . .	21
2.5	Strahlensysteme . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Das deflektometrische Problem</b>	<b>25</b>
3.1	Vier Formulierungen des Reflexionsgesetzes . . . . .	25
3.2	Die induzierte Abbildung . . . . .	27
3.2.1	Pole . . . . .	30
3.2.2	Asymptotik . . . . .	32
3.2.3	Stetigkeit . . . . .	33
3.2.4	Singularitäten . . . . .	37
3.3	Das inverse Problem . . . . .	39
3.3.1	Punktweise Inversion . . . . .	39
3.3.2	PDE-Systeme 1. Ordnung . . . . .	40
3.3.3	Existenz und Eindeutigkeit der Lösung . . . . .	41

3.3.4	Formulierung als Normalenanpassungsproblem . . . . .	44
3.3.5	Poisson-Gleichung . . . . .	48
3.3.6	Krümmungsanpassungsproblem . . . . .	51
3.3.7	Fazit . . . . .	54
<b>4</b>	<b>Regularisierung durch Shading-Daten</b>	<b>57</b>
4.1	Einführung . . . . .	57
4.1.1	Reflektanzabbildung und Shape-from-Shading . . . . .	57
4.1.2	Deflektanzabbildung . . . . .	60
4.2	Stand der Forschung . . . . .	64
4.2.1	Stereo-Methoden . . . . .	65
4.2.2	Lokale Ansätze . . . . .	67
4.2.3	Variationsformulierungen . . . . .	68
4.2.4	Verwandte Verfahren . . . . .	68
4.2.5	Schwache Lösung . . . . .	69
4.3	Lösungsverfahren . . . . .	71
4.3.1	Schätzung von Oberflächenpunkten . . . . .	71
4.3.2	Iterative Rekonstruktion . . . . .	73
4.4	Rekonstruktionsergebnisse . . . . .	75
4.4.1	Metrische Kalibrierung . . . . .	75
4.4.2	Simulationen . . . . .	80
4.4.3	Experimentelle Evaluation . . . . .	83
<b>5</b>	<b>Regularisierung durch optischen Fluss</b>	<b>93</b>
5.1	Einführung . . . . .	93
5.2	Spekularer optischer Fluss . . . . .	94
5.2.1	Herleitung der Modellgleichungen . . . . .	94
5.2.2	Flussregularität . . . . .	100
5.3	Rekonstruktionsverfahren . . . . .	100

---

5.3.1	Der Vektorraum der erlaubten Abstiegsrichtungen . . . . .	101
5.3.2	Minimierungs-Algorithmus . . . . .	102
5.3.3	Simulationsergebnisse . . . . .	103
5.3.4	Experimentelle Ergebnisse . . . . .	107
<b>6</b>	<b>Abschlussbemerkungen</b>	<b>113</b>
6.1	Zusammenfassung . . . . .	113
6.2	Ausblick . . . . .	115
<b>A</b>	<b>Ergänzende mathematische Erläuterungen</b>	<b>117</b>
A.1	Legendre-Transformation . . . . .	117
	<b>Literatur</b>	<b>119</b>



## Symbol- und Abkürzungsverzeichnis

$\mathbf{a}$	deflektometrisches Tangentialfeld, S. 26
$\mathbf{b}$	deflektometrisches Tangentialfeld, S. 26
$\beta$	Albedo, S. 59
Bild $\mathbf{A}$	Bildraum der linearen Abbildung $\mathbf{A}$
BRDF	bidirektionale Reflektanzverteilungsfunktion, S. 57
$C$	Sichtstrahlenquelle, optisches Zentrum, S. 23
$\bar{C}$	Gegenpunkt von $C$ bezüglich Planspiegel, S. 23
$d$	Abstand eines Reflexionspunkts vom optischen Zentrum, S. 59
$D$	Disparität zwischen Normalenfeldern, S. 66
$\delta$	Dirac'sche Delta-Distribution
$\delta_{ij}$	Kronecker-Symbol
$\det \mathbf{A}$	Determinante von $\mathbf{A}$
$\dim U$	Dimension des Vektorraums $U$
$\operatorname{div}$	Divergenz-Operator
$\operatorname{div}_S$	Oberflächendivergenz
$e_{\mathbf{l}}(\mathbf{x})$	Funktion zur impliziten Darstellung eines Ellipsoids mit Brennpunkten in $C$ und $\mathbf{l}$ , S. 44
$E$	Bestrahlungsstärke, S. 59
$F$	Operator zwischen Funktionenräumen
$\mathcal{F}(\mathcal{K})$	Brennfläche der Kongruenz $\mathcal{K}$ , S. 24
$\gamma$	Gauß-Krümmung, S. 7
$\gamma_E$	Isophote, S. 72
$\gamma_d$	Isodistanzkurve, S. 72
$g_r$	Strahl der Reflexionskongruenz, S. 25
$h_3$	lokale Karte von $\mathbb{R}P^2$ oder auch $S$ (Zentralprojektion), S. 9
$\mathcal{H}$	Hamilton-Funktion, S. 15
$H$	Flächenfunktional, Abweichung vom spekularen Flussfeld, S. 101
$\mathbf{H}$	Householder-Matrix, S. 25
$i$	imaginäre Einheit

$\iota$	Neumann-Randwerte, S. 20
$\mathbf{J}_f$	Jacobi-Matrix der Abbildung $f$ , S. 7
$J$	Flächenfunktional, Abweichung vom deflektometrischen Normalenfeld, S. 46
$\nabla J$	Formgradient von $J$ , S. 17
$\mathbf{K}$	Weingarten-Matrix, S. 7
$\mathbf{K}_l$	Weingarten-Matrix des durch $e_l(\mathbf{x})$ definierten Ellipsoids, S. 95
$\tilde{K}_u$	Menge der kritischen Neigung zur Blickrichtung $\mathbf{u}$ , S. 31
$\kappa$	mittlere Krümmung, S. 7
$\kappa_n$	Normalschnittkrümmung, S. 7
Kern $\mathbf{A}$	Nullraum der linearen Abbildung $\mathbf{A}$
$\mathbf{l}$	Punkt auf dem Mustergenerator, S. 25
$\tilde{\mathbf{l}}$	$\mathbf{l}$ in lokalen Schirmkoordinaten, S. 75
$L$	Modell des Mustergenerators, S. 25
$L_b$	Strahldichteverteilung der Beleuchtungseinrichtung, S. 57
$L_r$	Strahldichteverteilung der reflektierten Streukeule, S. 59
$\mathcal{L}$	Deflektanzabbildung, S. 62
$\hat{\mathbf{n}}$	Einheitsnormalenvektor einer regulären Fläche, S. 7
$\hat{\mathbf{n}}_\psi$	deflektometrisches Normalenfeld, S. 44
$\hat{\mathbf{n}}_P$	Normale des ebenen Kalibrierspiegels, S. 75
$\mathcal{N}(S)$	Normalenkongruenz mit Leitfläche $S$ , S. 23
$N$	Gauß-Abbildung, S. 7
$N_{\hat{\mathbf{r}}}$	Spekularitäten unter der Beleuchtungsrichtung $\hat{\mathbf{r}}$ , S. 58
$\nabla f$	Gradient der Funktion $f$
$\nabla_S f$	Oberflächengradient der Funktion $f$ , S. 19
$\hat{\mathbf{o}}$	äußerer Einheitsnormalenvektor an ein Gebiet $\Omega$ , S. 20
OF	optischer Fluss, S. 94
$\mathbf{p} = (p, q)^\top$	Neigungsparameter, S. 10
$P$	ebener Spiegel, S. 75

---

PDE	partielle Differentialgleichung
$\mathbf{P}_x$	Projektionsmatrix, S. 7
$\varphi$	Level-Set-Funktion, S. 13
$\varphi_d$	Signed Distance Function, S. 13
$\Phi$	euklidische Bewegung, S. 47
$\pi$	Projektion auf die Einheitssphäre, S. 7
$\psi$	Kartenabbildung zu $\Psi$ , S. 28
$\psi_d$	gemessene (verallgemeinerte) Deflektanz, S. 62
$\Psi$	induzierte Abbildung zwischen $S$ und $L$ , S. 28
$\mathbf{r}$	Vektor in Richtung eines Reflexstrahls, S. 26
$\mathbf{R}$	Rotationsmatrix
$\mathfrak{R}$	Menge der regulären Flächen, S. 7
$\mathfrak{R}_{\hat{\mathbf{n}}_\psi}$	Menge der regulären Flächen, die das deflektometrische Normalenfeld erfüllen, S. 101
$\mathcal{R}$	Reflexionsstrahlenkongruenz, S. 25
$\mathcal{R}$	Reflektanzabbildung, S. 59
RANSAC	Random Sample Consensus, S. 76
$\Re z$	Realteil von $z \in \mathbb{C}$
Rang $\mathbf{A}$	Dimension des Bildraums der linearen Abbildung $\mathbf{A}$
$\rho$	bidirektionale Reflektanzverteilungsfunktion, S. 57
$\varrho$	Winkel zwischen $\mathbf{l}$ und $\mathbf{s}$ , S. 26
rot	Rotations-Operator
$\mathbb{R}P^2$	projektive Ebene, S. 9
$\mathbf{s}$	Reflexionspunkt, S. 25
$\dot{\mathbf{s}}$	Tangente an Trajektorie eines Reflexionspunkts, S. 95
$\dot{\mathbf{s}}_n$	Komponente von $\dot{\mathbf{s}}$ orthogonal zu $S$ , S. 95
$\dot{\mathbf{s}}_t$	Komponente von $\dot{\mathbf{s}}$ im tangential zu $S$ , S. 95
$S$	reguläre Fläche, S. 7
SFS	Shape-from-Shading, S. 60
$S_g$	Menge der Schnittpunkte eines Sichtstrahls $g$ mit der Fläche $S$ , S. 35
$\bar{S}$	Gegenpunktsfläche von $S$ , S. 23
$S^n$	Einheitssphäre im $\mathbb{R}^{n+1}$ , S. 7
$\mathcal{S}$	Sichtstrahlenkongruenz, S. 27

$\sigma(\mathbf{A})$	Spektrum der Matrix $\mathbf{A}$
$\varsigma$	Verhältnis von $\ \mathbf{l}\ $ und $\ \mathbf{s}\ $ , S. 26
$\text{sign}(x)$	Signum-Funktion
$SO(3)$	spezielle orthogonale Gruppe
Spur $\mathbf{A}$	Spur der Matrix $\mathbf{A}$
$\text{supp } f$	Träger der Funktion $f$
$\mathbf{t}_P$	Punkt auf dem Kalibrierspiegel, S. 75
$\mathfrak{T}_{\hat{\mathbf{n}}_\psi}$	Vektorraum der mit dem Normalenfeld konformen Normalengeschwindigkeiten, S. 102
$\mathbf{u} = (u, v)^\top$	Blickrichtung/Pixellage, S. 10
$\dot{\mathbf{u}}$	optisches Flussfeld, S. 94
$\dot{\mathbf{u}}_m$	gemessenes optisches Flussfeld, S. 101
$U_\varepsilon(\mathbf{x})$	$\varepsilon$ -Umgebung um $\mathbf{x}$
$U_s$	Schnittpunkte von $\gamma_E$ und $\gamma_d$ , S. 72
$v$	Ausbreitungsgeschwindigkeit in Richtung der Flächennormalen, S. 14
$\mathbf{v}$	infinitesimale Verschiebung ursächlich für optischen Fluss, S. 94
$\Omega$	Definitionsbereich, Gebiet im $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$
$\Omega_E$	Definitionsbereich in der Bildebene, Träger des Grauwertsignals, S. 10
$\xi$	Azimuth der Beleuchtungsrichtung, S. 62



# 1 Einleitung

## 1.1 Variable Bildgewinnung und -verarbeitung

Das wohl am weitesten verbreitete bildgebende System ist das menschliche Auge. Die Signale, die in den Sinneszellen der Netzhaut entstehen, sind das Ergebnis einer optischen Abbildung. In der Technik vollziehen bildgebende Sensoren ähnliche Prozesse. Immense technologische Fortschritte haben mittlerweile zu deren Überlegenheit geführt, wenn man ihren Funktionsumfang den physiologischen Möglichkeiten unseres Sehsinns gegenüberstellt. Mühelos detektiert eine Infrarotkamera in Spektralbereichen, die für den Menschen unsichtbar sind. Moderne Rechner erlauben die Speicherung und Verarbeitung großer Datenmengen. Hohe Informationsdichten erschließen bildgebenden Sensoren die folgenden Anwendungsfelder:

- Robotik
- Fernerkundung
- medizinische Diagnostik
- Qualitätsprüfung in der industriellen Produktion

Wir wollen uns hier auf die industrielle Anwendung konzentrieren und stellen die automatische Sichtprüfung in den Mittelpunkt. Inspektion ist nicht nur ein zerstörungssonderndem sogar ein kontaktfreies Prüfverfahren. Automatisiert kann ein hoher Durchsatz erreicht werden bei ebenso guten Erkennungsraten. Im Gegensatz zu einem menschlichen Prüfer ermüden Rechner und Kamera nicht. Weiteres Sinken der Hardwarekosten offenbart vorhandenes Sparpotential. So verspricht die Bildverarbeitung hohe ökonomische Wachstumsraten. Es wird geschätzt, dass weniger als 20% zukünftiger Anwendungsgebiete erschlossen sind.

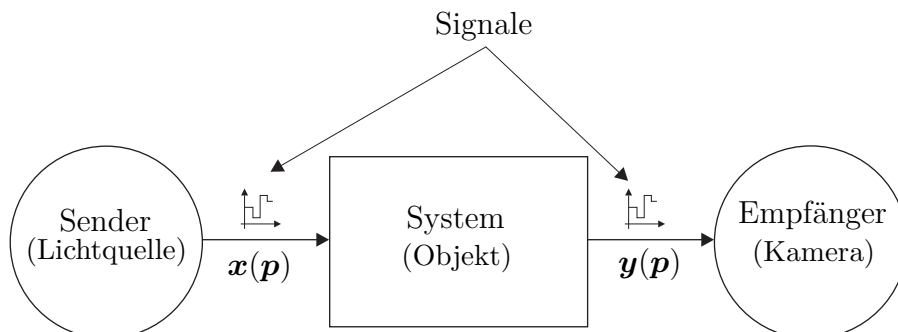
Dementsprechend ist die klassische Bildverarbeitung ein seit Jahrzehnten intensiv bearbeitetes Feld. Sie beschäftigt sich mit den bei der Bildaufnahme gewonnenen Daten und ihrer Interpretation. Ihre Anfänge wurzeln in den fünfziger Jahren, als man Möglichkeiten prüfte, militärisch genutzte Luftaufnahmen zu verbessern. Lange nahm man Rohdaten als gegeben hin und versuchte, Schwächen durch die nachgeschaltete Algorithmik zu kompensieren. Durch sorgsame Einstellung der Beleuchtungs- und Kameraparameter trägt die moderne Bildverarbeitung der Tatsache Rechnung, dass Informationen, die durch suboptimale Bedingungen bei der Aufnahme verloren gehen, am Ende der Prozesskette nur schwer

Kamera	Beleuchtung
Belichtungszeit	Strahlstärkeverteilung
Blendenzahl	Spektrum
Polfilterstellung	Polarisationszustand
Fokuseinstellung	Geometrie der Beleuchtung
Spektrale Empfindlichkeit	
Kameralage und -orientierung	

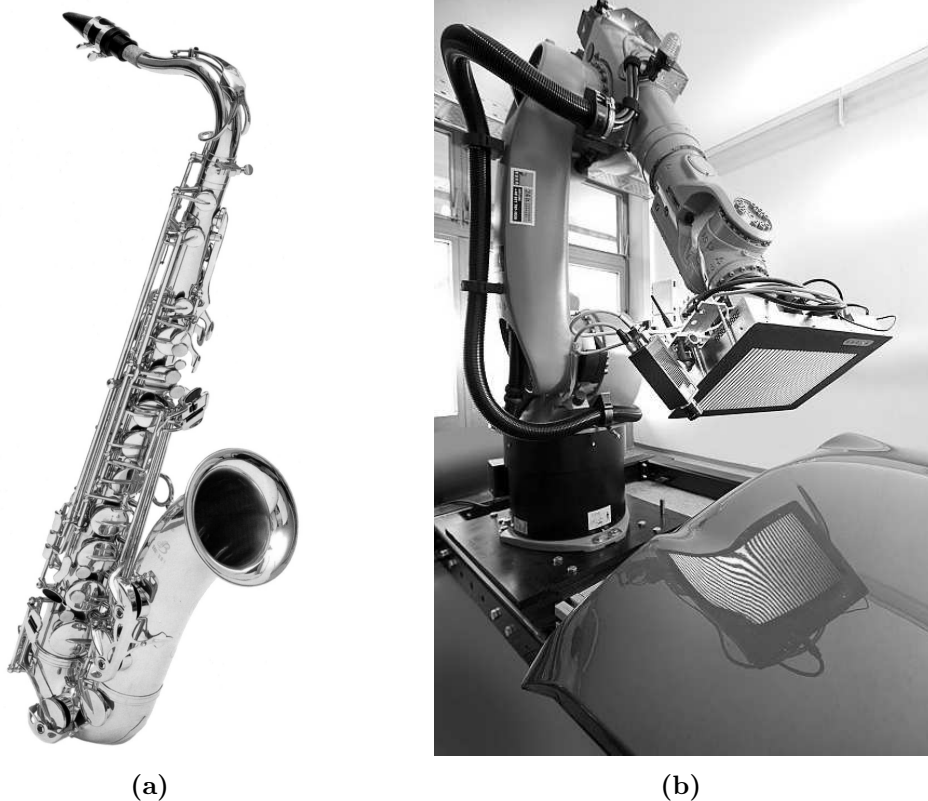
**Tabelle 1.1:** Variierbare Szenenparameter

oder gar nicht wiederzugewinnen sind. Zusätzliche Impulse gab eine physikalische Betrachtungsweise des Abbildungsprozesses. Licht ist eine transversale elektromagnetische Welle. Diese wird neben ihrer Amplitude durch Phasenlage, Frequenz und Polarisationszustand charakterisiert. Ein ganzer Forschungsbereich beschäftigt sich mit der Instrumentalisierung der aufgeführten radiometrischen Eigenschaften.

Der Mensch – bei der Bildgewinnung technischen Systemen zwar deutlich unterlegen – nimmt die Bildauswertung mit seinen enormen kognitiven Fähigkeiten fast intuitiv vor. Er vollzieht den Schritt vom bloßen Wahrnehmen zu einer Ebene des Erkennens, Urteilens und Schlussfolgerns. Die Vorgänge, die dabei im Gehirn ablaufen, sind bis heute nur in Ansätzen verstanden. Biologische Bildauswertungsprozesse in allen ihren Eigenschaften zu imitieren, ist bis jetzt fern des Möglichen und vermutlich gar nicht sinnvoll. Die Rückkopplung hingegen, die vollzogen wird, wenn der Mensch den zu inspizierenden Gegenstand im inzidenten Lichtfeld dreht und wendet, findet eine technische Entsprechung in der „Active Vision“. Der Beobachter sammelt unter Variation der Aufnahmekonstellation so lange Daten, bis er die Szene im gewünschtem Maß zu interpretieren weiß. Die aktuelle Forschung zum Thema Bildverarbeitung hat sich zum Ziel gesetzt, diese Verhaltensweise nutzbringend auf die technische Bildaufnahme und -verarbeitungskette zu übertragen [7].



**Abbildung 1.1:** Schematischer Sichtprüfungsaufbau.



**Abbildung 1.2:** (a) Beispiel für spiegelnde Oberflächen aus der Unterhaltungsindustrie. (b) Lackiertes Karosseriebauteil und roboterbasierter deflektometrischer Versuchsaufbau.

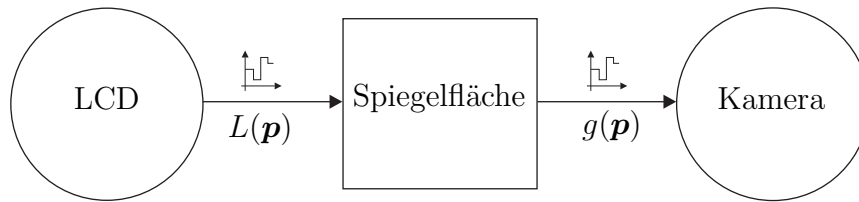
Das Signal entsteht nun durch Aufnahme von Bildserien. Kamera- und Beleuchtungsparameter werden dabei systematisch variiert. Eine Auswahl möglicher Freiheitsgrade zeigt Tabelle 1.1. Diese Vorgehensweise erweitert die klassische systemtheoretische Sicht der Bildentstehung (siehe Abbildung 1.1).

## 1.2 Gestalt durch Reflexion

### 1.2.1 Einführung

Viele Methoden der klassischen Sichtprüfung (insbesondere triangulationsbasierte wie zum Beispiel Stereo Vision oder Streifenprojektsverfahren) versagen bei der Untersuchung *spekularer*, das heißt spiegelnder, Objekte, da die Auswertung virtueller Merkmale, nämlich Reflexionen der umgebenden Szene, vollkommen falsche Ergebnisse liefern muss. Im Grenzfall ist die Spiegelfläche für den Betrachter quasi unsichtbar.

Wie prüft nun der Mensch im Hinblick auf das vorher Gesagte solche „problematischen“



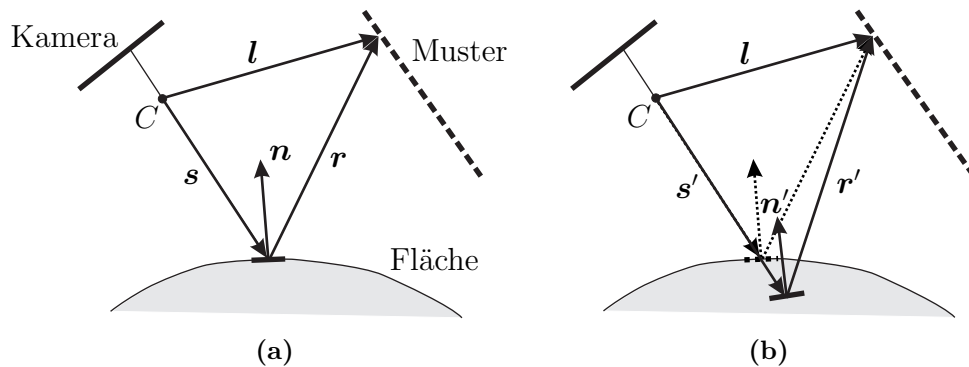
**Abbildung 1.3:** Deflektometrie im Sinne der variablen Bildgewinnung und -verarbeitung: Die Spiegelfläche ordnet einer eingangsseitigen Strahldichteverteilung  $L$  das Grauwertbild  $g$  zu. Der Vektor  $\mathbf{p}$  enthält die Zeit sowie beeinflussbare geometrische beziehungsweise radiometrische Szenenparameter.

Objekte auf Deformationen? Statt auf die Oberfläche selbst zu fokussieren, beobachtet er die Umgebung, die sich in ihr spiegelt. Seine Vorgehensweise wird durch ein Inspektionsverfahren nachempfunden, das in der Messtechnik meist als *Deflektometrie*, in der englischsprachigen Literatur zum Thema Maschinensehen als *Shape-from-Specularities* bezeichnet wird und seit den Arbeiten von Beyerer und Perard [6] viel wissenschaftliches Interesse hervorgerufen hat.

Tatsächlich handelt es sich dabei um ein Paradebeispiel variabler Bildverarbeitung (siehe auch die signaltheoretische Interpretation in Abbildung 1.3). Die Beleuchtungsparameter sind im industriellen Umfeld genau einstell- und kontrollierbar. So detektiert die Kamera über die spiegelnde Oberfläche wohldefinierte Muster, die auf eine speziell geformte Leinwand projiziert werden. Auch durch einen handelsüblichen LCD-Monitor kann die Beleuchtung realisiert werden. Jedes Pixel des Mustererzeugers identifiziert sich im Kamerabild durch eine zeitkodierte Sequenz von Grauwerten. Nach sorgsamer Kalibrierung liefert die Messung für jeden Oberflächenpunkt  $\mathbf{s}$  den Vektor  $\mathbf{l}$  der Konstellation, die in Abbildung 1.4 (a) dargestellt ist. Gesucht ist nun auf Basis der gefundenen Korrespondenzen die Oberfläche, die zur aufgenommenen Bildserie geführt hat.

Die Eigenschaften dieses Verfahrens, nämlich hohe Robustheit und dass die Messempfindlichkeit strahlengeometrisch betrachtet<sup>1.1</sup> allein durch die Auflösung des Kamerasensors begrenzt wird, machen es für industrielle Anwendungen hochinteressant. Aber auch ein schwerwiegender Nachteil erscheint in der Bilanz: Für eine isolierte Punktlichtquelle existieren unendlich viele Oberflächenstücke, die die Beobachtung ausgelöst haben könnten. Die reflektierten Sichtstrahlen  $\mathbf{r}$  beziehungsweise  $\mathbf{r}'$  unterliegen keinen geometrischen Einschränkungen. Bewegt man sich nun von  $\mathbf{s}$  nach  $\mathbf{s}'$ , lässt sich die Normale  $\mathbf{n}$  immer so einstellen, dass die Reflexionsbedingungen erfüllt sind (siehe Abbildung 1.4 (b)).

<sup>1.1</sup>Wellenoptische Effekte werden beispielsweise in [39] diskutiert.



**Abbildung 1.4:** Mehrdeutigkeiten bei der deflektometrischen Oberflächenrekonstruktion.

### 1.2.2 Technische Umsetzung

Abgesehen von den Mehrdeutigkeiten, die den algorithmischen Teil der Rekonstruktion erschweren, stellt die Deflektometrie eine große technische Herausforderung dar. Von einem physikalischen Standpunkt wirkt die spiegelnde Oberfläche wie eine Optik im Strahlengang zwischen Kamera und Mustergenerator. In der Praxis wird man mit den Singularitäten des integrierten Abbildungssystems konfrontiert werden. Dazu werden wir im Kapitel 3 einige theoretische Überlegungen anstellen. Hinzu kommt, dass die Tiefenschärfe unter realen Bedingungen beschränkt ist, so dass man eine befriedigende Antwort auf die Frage finden muss, ob auf Oberfläche oder Muster scharf zu stellen ist. Viele technische Aspekte werden in der Dissertation von Kammel behandelt [35]. Insbesondere nehmen wir in dieser Arbeit die Aufgabe der Korrespondenzbestimmung als gelöst hin und legen eine strahlengeometrische Sichtweise zugrunde.

## 1.3 Übersicht

Die vorliegende Arbeit gliedert sich thematisch in drei Hauptteile. Nachdem im folgenden Abschnitt einige theoretische Hilfsmittel bereitgestellt worden sind, geht es im Kapitel 3 um grundlegende Aspekte des Deflektometrieproblems. Mathematisch wird es anhand einer durch Strahlen induzierten Abbildung zwischen Flächen behandelt. Es werden unter anderem Überlegungen zu deren Wohldefiniertheit, Stetigkeit, Singularitäten und zur theoretisch erreichbaren Messempfindlichkeit angestellt. Die abgeleiteten Ergebnisse haben direkte Auswirkung auf die praktische Umsetzung eines deflektometrischen Verfahrens.

Die folgenden Abschnitte sind zwei neuartigen Verfahren zur Regularisierung des inver-

sen deflektometrischen Problems gewidmet. Das erste der beiden setzt voraus, dass der Prüfling zumindest teilweise diffus reflektiert, was bei vielen technischen Anwendungen durchaus gegeben ist (zum Beispiel bei lackierten Karosserieteilen). Die Grundidee, zwei Verfahren zur Prüfung spiegelnder und diffuser Objekt zu kombinieren, entspringt der Feststellung, dass Shape-from-Shading<sup>1,2</sup> und das Deflektometrieproblem in gewisser Weise äquivalent zueinander sind. Diese Idee entwickeln wir im notwendigen formalen Rahmen. Ein Vergleich repräsentativer Methoden aus beiden Forschungsfeldern unterstreicht diese strukturelle Verwandtschaft. Daher erscheint der obligatorische Überblick über den Stand der Forschung erst im Hauptteil der Arbeit. Das abgeleitete Rekonstruktionsverfahren ist in Form einer iterativen Optimierung auf Basis von dynamischen, implizit definierten Oberflächen implementiert. Simulative und experimentelle Ergebnisse zeigen die Praktikabilität des Ansatzes.

In Kapitel 5 wird das den meisten deflektometrischen Verfahren zugrunde liegende statische Modell um Aspekte der Szenendynamik erweitert. Es wird zunächst eine sehr allgemeine Beschreibung des optischen Flusses auf spiegelnden Oberflächen hergeleitet. Hier wirkt sich die Tatsache, dass der Betrachter nicht die Fläche sondern die reflektierte Szene sieht, noch schwerwiegender aus. Auf Basis des Modells stellen wir ein zweites Regularisierungsverfahren vor, das auch auf vollspiegelnde Oberflächen anwendbar ist.

---

<sup>1,2</sup>Formbestimmung durch Messung von Helligkeitsverteilungen/Schatten, quasi Invertierung des Bildaufnahmeprozesses (siehe zum Beispiel [28])

## 2 Grundlagen

Mit  $\times$  bezeichnen wir das Vektorprodukt, mit  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das kanonische Skalarprodukt, das den euklidischen Standardraum  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}_{>0}$ , mit der Norm  $\|\cdot\|$  versieht. Vektoren  $\mathbf{x}$  werden im Folgenden durchgängig fett und kursiv, Matrizen in Großbuchstaben und fett gedruckt. Zum Beispiel ist  $\mathbf{I}$  die Einheitsmatrix, und  $\mathbf{J}_f$  steht für die Jacobi-Matrix der Abbildung  $f$ . Einheitsvektoren sind zusätzlich mit einem Dach versehen; es ist also stets  $\|\hat{\mathbf{x}}\| = 1$ . Normalisierung wird erreicht durch die Projektion  $\pi : \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \rightarrow S^{n-1}$  auf die Einheitskugel  $S^{n-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}\}$ , das heißt  $\pi(\mathbf{x}) := \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$ . Das totale Differential von  $\pi$  ist durch  $\mathbf{J}_\pi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \mathbf{P}_\mathbf{x}$  gegeben mit

$$\mathbf{P}_\mathbf{x} := \mathbf{I} - \hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}^\top \quad (2.1)$$

idempotent und symmetrisch. Für das Vektorraumergänis der Vektoren  $\{\mathbf{x}_i\}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , soll die Notation  $[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$  verwendet werden.

### 2.1 Reguläre Flächen

Gegenstand deflektometrischer Untersuchungen sind spiegelnde Freiformflächen. Reguläre Flächen haben sich als adäquates Modell für die meisten in der Praxis auftretenden Prüflinge erwiesen. Sie lassen sich durch eine Familie lokaler, elastischer Transformationen in den  $\mathbb{R}^2$  „verbiegen“; diese Transformationen nennt man

**Definition 2.1** ( $C^k$ -Diffeomorphismus). Die Abbildung  $f$  heißt genau dann ein  $C^k$ -Diffeomorphismus, wenn  $f$  bijektiv ist und sowohl  $f$  als auch die inverse Abbildung vom Typ  $C^k$  ist.

Damit geben wir nun die folgende

**Definition 2.2** (Reguläre  $C^k$ -Fläche). Sei  $S \subset \mathbb{R}^3$ . Existiert für jeden Punkt  $\mathbf{s} \in S$  eine offene Umgebung  $U \subset S$  und ein  $C^k$ -Diffeomorphismus  $h_\mathbf{s} : U \rightarrow \tilde{U} \subset \mathbb{R}^2$  mit  $k \geq 1$ , so nennt man  $S$  eine reguläre  $C^k$ -Fläche.

Das Tupel  $(U, h_\mathbf{s})$  heißt lokale *Karte*. Umgekehrt nennt man  $(\tilde{U}, h_\mathbf{s}^{-1})$  mit  $h_\mathbf{s}^{-1} : \tilde{U} \rightarrow U$  lokale *Parametrisierung*. Wir fassen alle regulären Flächen in der Menge  $\mathfrak{R}$  zusammen. Mit  $T_\mathbf{s}S$  bezeichnen wir den *Tangententialraum* (oder *Tangentialebene*) im Punkt  $\mathbf{s}$ . Die *Gauß-Abbildung*  $N : S \rightarrow S^2$  ordnet jedem Oberflächenpunkt seine Einheitsnormale  $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{s})$  zu. Insbesondere ist sie wegen der Forderung nach  $C^1$ -Regularität stetig für alle  $S \in \mathfrak{R}$ . Flächen mit Knicken schließen wir per Definition von  $\mathfrak{R}$  also aus, des Weiteren auch

nicht orientierbare<sup>2.1</sup> wie zum Beispiel das Möbiusband. Das auf die Tangentialebene beschränkte Differential  $dN_{\mathbf{s}} : T_{\mathbf{s}}S \rightarrow T_{\hat{\mathbf{n}}}S^2$  der Gauß-Abbildung im Punkt  $\mathbf{s}$  wird durch die *Weingarten-Matrix*  $\mathbf{J}_{\hat{\mathbf{n}}}|_{T_{\mathbf{s}}S} = \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{n}}}\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{n}}} =: \mathbf{W}$  beschrieben. Sie ist selbstadjungiert und positiv definit. Das bedeutet, dass mit Hilfe von  $\mathbf{W}$  auf  $T_{\mathbf{s}}S$  eine symmetrische, positiv definite Bilinearform  $\langle \mathbf{W}\mathbf{s}, \mathbf{t} \rangle_I$  definiert werden kann. Das innere Produkt  $\langle \cdot, \cdot \rangle_I$  wird durch Einschränkung von  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  auf  $T_{\mathbf{s}}S$  erhalten und heißt *erste Fundamentalform* von  $S$  in  $\mathbf{s}$ . Die Bilinearform nennt man dementsprechend *zweite Fundamentalform*, in Zeichen  $II : T_{\mathbf{s}}S \times T_{\mathbf{s}}S \rightarrow \mathbb{R}$ . Die induzierte quadratische Form  $\langle \mathbf{W}\mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle_I$  misst die *Normalschnittkrümmung*<sup>2.2</sup>  $\kappa_n$  in Richtung  $\mathbf{t}$ . Die Betrachtung basisunabhängiger Eigenschaften von  $\mathbf{W}$  führt auf die formale Definition von *mittlerer Krümmung*  $\kappa = \frac{1}{2} \text{Spur } \mathbf{W}$  und *Gauß-Krümmung*  $\gamma = \det \mathbf{W}$ . Weitere Details sind dem Standardwerk von do Carmo [15] und [42] zu entnehmen.

Man sagt nun, eine Abbildung  $f$  zwischen regulären Flächen habe eine Eigenschaft bei  $\mathbf{s} \in S$  bezüglich der Karten  $(U, h_{\mathbf{s}})$  um  $\mathbf{s}$  und  $(V, k_{f(\mathbf{s})})$  um  $f(\mathbf{s})$ , wenn die Abbildung  $k \circ f \circ h^{-1}$  sie bei  $h(\mathbf{s})$  hat; das gilt unter anderem für Differenzierbarkeitseigenschaften:

**Satz 2.3** ( $C^k$ -Differenzierbarkeit). *Eine stetige Abbildung  $f : R \rightarrow S$  zwischen regulären Flächen ist  $C^k$ -differenzierbar, wenn  $k \circ f \circ h^{-1}$  bezüglich zweier beliebiger Karten  $(U, h_{\mathbf{s}})$  und  $(V, k_{f(\mathbf{s})})$   $k$ -mal stetig differenzierbar ist.*

*Beweis.* Die Behauptung folgt sofort aus der Definition 2.2. Siehe dazu auch [42].

□

Diese Aussage ist unabhängig von der Wahl der Parametrisierung. Ähnliches gilt auch für die Singularitäten einer solchen Zuordnung:

**Definition 2.4** (Regulärer Punkt). Sei  $f : R \rightarrow S$  eine Abbildung zwischen regulären Flächen und  $\text{Rang}_{\mathbf{s}} f$  der Rang der Jacobi-Matrix von  $f$  im Punkt  $\mathbf{s}$ , so bezeichnet man  $\mathbf{s} \in S$  als regulären Punkt von  $f$  genau dann, wenn  $\text{Rang}_{\mathbf{s}} f = 2$ . Ein nicht regulärer Punkt  $\mathbf{s}$  heißt singulär. Die Bildpunkte  $f(\mathbf{s})$  nennt man entsprechend reguläre (singuläre) Werte.

Die vorgestellten Konzepte werden im Rahmen der Differentialgeometrie auf Strukturen beliebiger, endlicher Dimension  $n$  angewandt, die dann diffeomorph zum  $\mathbb{R}^n$  sind. Man nennt sie für  $n = 1$  *Kurven* und ganz allgemein  *$n$ -Mannigfaltigkeiten*.

<sup>2.1</sup>Orientierbarkeit im differentialgeometrischen Sinne bedeutet, alle Kartenwechselfunktionen besitzen positive Funktionaldeterminante, siehe [15].

<sup>2.2</sup>Die Normalschnittkrümmung ist gleich der Krümmung der Kurve durch den Punkt  $\mathbf{s}$ , die man als Schnitt der Fläche mit dem affinen Unterraum  $\mathbf{s} + [\mathbf{n}, \mathbf{t}]$  erhält.



**Beispiel 2.5 Graph einer Funktion**

Es sei  $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^2$  offen und  $f : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C^k$ -Funktion,  $k \geq 1$ . Dann ist der *Graph* von  $f$

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \tilde{U}, z = f(x, y)\} \quad (2.2)$$

eine reguläre Fläche. Eine entsprechende Karte  $h$  erhält man durch Projektion von  $S$  auf die  $xy$ -Ebene. Mit der Gauß-Abbildung  $N : S \rightarrow S^2$  und  $\mathbf{x} \in \tilde{U}$  berechnet sich  $\hat{\mathbf{n}}$  durch

$$N \circ h^{-1}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2 + 1}} \begin{pmatrix} -\partial_x f \\ -\partial_y f \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

□

**Beispiel 2.6 Projektive Ebene**

Da wir im Folgenden von ihr Gebrauch machen werden, wollen wir hier als Beispiel für eine reguläre Fläche (oder auch differenzierbare 2-Mannigfaltigkeit) die reelle, projektive Ebene  $\mathbb{R}P^2$  einführen. Sie besteht aus den eindimensionalen Untervektorräumen des  $\mathbb{R}^3$ , geometrisch gesehen also aus allen Geraden durch den Ursprung. Vom algebraischen Standpunkt aus handelt es sich um den Quotientenraum<sup>2,3</sup>  $(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) / \sim$  unter der Äquivalenzrelation

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \lambda \mathbf{y} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3.$$

Die Äquivalenzklasse von  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_3)^\top$  bezeichnen wir mit  $[\mathbf{x}] = [x_1 : x_2 : x_3]$ . Falls  $x_3 \neq 0$ , gilt für  $[\mathbf{x}] \in \mathbb{R}P^2$

$$[\mathbf{x}] = \left[ \frac{x_1}{x_3} : \frac{x_2}{x_3} : 1 \right].$$

Dann ist  $V_3 := \{[\mathbf{x}] \in \mathbb{R}P^2 : x_3 \neq 0\}$  die Menge aller Geraden, die nicht in der Ebene  $x_3 = 0$  liegen. Zu  $V_3$  wählen wir die Karte  $h_3 : V_3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$h_3([\mathbf{x}]) := \left( \frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3} \right)^\top. \quad (2.4)$$

Alternativ erhält man  $\mathbb{R}P^2$  nun als Bild der Projektion  $\theta : S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ ,

$$\theta(\hat{\mathbf{x}}) = [\hat{\mathbf{x}}],$$

was der Partitionierung  $\mathbb{R}P^2 \cong S^2 / \diamond$  mit  $\hat{\mathbf{x}} \diamond \hat{\mathbf{y}} \Leftrightarrow \hat{\mathbf{x}} = -\hat{\mathbf{y}}$  entspricht.

Vielen der folgenden Betrachtungen liegt das übliche Lochkameramodell zugrunde: Die Menge der Pixel  $\mathbf{u} = (u, v)^\top$ , für die eine deflektometrische Beobachtung vorliegt, seien

<sup>2,3</sup>Der Quotientenraum eines Vektorraums  $X$  unter der Äquivalenzrelation  $\sim$  besteht aus den Äquivalenzklassen von Punkten in  $X$ .

in der Menge  $\Omega_E := \tilde{U} \subset \mathbb{R}^2$  zusammengefasst. Für ein  $[\mathbf{x}] \in \mathbb{R}P^2$ ,  $\mathbf{x} = (x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3$ , erhält man dann

$$u = \frac{x}{z}, \quad v = \frac{y}{z}, \quad (2.5)$$

mittels  $h_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \Omega_E$ . Das entspricht genau einer Zentralprojektion.

Im Zusammenhang mit deflektometrischer Rekonstruktion spielt die Orientierung der Fläche<sup>2.4</sup> keine Rolle, das heißt, auf das Einheitsnormalenvektorfeld  $\hat{\mathbf{n}} = N(S)$  lässt sich ebenso gut auch die Projektion  $\theta$  anwenden. Das orthogonale Komplement<sup>2.5</sup>  $[\mathbf{n}]$  zu  $T_s S$  in einem Punkt  $\mathbf{s}$  kann man direkt mit einem Element in  $\mathbb{R}P^2$  identifizieren. Diese Situation wird im folgenden Diagramm veranschaulicht:

$$\begin{array}{ccc} & & S^2 \\ & \nearrow \Theta & \downarrow \theta \\ T_s S^\perp & \xrightarrow{\theta \circ \Theta} & \mathbb{R}P^2 \end{array}$$

Dabei bezeichne  $\Theta$  die Abbildung, die  $T_s S^\perp$  folgendermaßen auf  $S^2$  einschränkt:

$$\Theta(\mathbf{n}) = \text{sign}(n_3) \frac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|},$$

wobei  $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_3)^\top$ . Für  $\mathbb{R}P^2$  verwendet man dann die Karte  $h_3 : V_3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , so dass

$$h_3([\hat{\mathbf{n}}]) = h_3([\mathbf{n}]) = \left( \frac{n_1}{n_3}, \frac{n_2}{n_3} \right)^\top =: \mathbf{p} = (p, q)^\top. \quad (2.6)$$

Der zweidimensionale euklidische Standardraum wird in der Bildverarbeitungsliteratur in diesem Zusammenhang auch als  $pq$ -Raum bezeichnet, siehe zum Beispiel [29].

□

## 2.2 Quasilineare Differentialgleichungen erster Ordnung

Partielle Differentialgleichungen (PDEs) erster Ordnung der Form

$$\chi(x, y, f) \partial_x f + \eta(x, y, f) \partial_y f = \zeta(x, y, f) \quad (2.7)$$

mit den stetigen Koeffizientenfunktionen  $\chi$ ,  $\eta$  und  $\zeta$  heißen *quasilinear* in der unbekanntenen Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$  zweier Variablen  $x$  und  $y$ . Wir wollen hier nur einen sehr kurzen

<sup>2.4</sup>Eine Fläche lässt zwei Orientierungen zu, je nachdem, ob zwei linear unabhängige Tangentenvektoren vom Normalenvektor zu einer rechts- oder linkshändigen Basis ergänzt werden, also das Normalenfeld nach „oben“ oder „unten“ zeigt.

<sup>2.5</sup>Man nennt  $U^\perp$ , so dass  $X = U \oplus U^\perp$  und  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}^\perp \rangle = 0$  für alle  $\mathbf{u} \in U$ ,  $\mathbf{u}^\perp \in U^\perp$ , orthogonales Komplement oder Annihilator des Untervektorraums  $U$ .

Überblick über die Lösungstheorie geben. Eine umfassende Darstellung findet sich zum Beispiel in [19]. Schreibt man (2.7) folgendermaßen um

$$\left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} \chi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}}_{\mathbf{t}}, \underbrace{\begin{pmatrix} -\nabla f \\ 1 \end{pmatrix}}_n \right\rangle = 0, \quad (2.8)$$

ist im Hinblick auf Gleichung (2.2) einzusehen, dass  $\mathbf{t}(\mathbf{x}) = (\chi(\mathbf{x}), \eta(\mathbf{x}), \zeta(\mathbf{x}))^\top$  eine der *Lösungsflächen* aus  $S_t := \{(\tilde{\mathbf{x}}, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \tilde{\mathbf{x}} \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, z = f(x, y), f \text{ erfüllt (2.7)}\}$  tangential berührt. Es heißt  $\mathbf{t}(\mathbf{x})$  *charakteristische Richtung*. Eine reguläre Kurve  $\mathbf{x}(t) \subset \mathbb{R}^3$ ,  $t \in \tilde{U}$ , mit der Eigenschaft, dass jede ihrer Tangenten charakteristische Richtung hat, heißt *Charakteristik* der PDE (2.7). Die Projektion von  $\mathbf{t}(\mathbf{x}(t))$  in den Definitionsbereich  $\Omega$  ergibt die Tangente  $\mathbf{t}_g$  an die *charakteristische Grundkurve*  $\tilde{\mathbf{x}}(t) \subset \Omega$  (siehe Abbildung 2.1). Sie sei Lösung von

$$\frac{dx}{dt} = \chi(t), \quad \frac{dy}{dt} = \eta(t). \quad (2.9)$$

Wie verändert sich nun die Höhenkoordinate  $z = f(x, y)$ , wenn man sich von einem Punkt  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$  über der Grundkurve  $\tilde{\mathbf{x}}(t)$  bewegt? Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \partial_x f \frac{dx}{dt} + \partial_y f \frac{dy}{dt} \\ &\stackrel{(2.9)}{=} \chi(x, y, f) \partial_x f + \eta(x, y, f) \partial_y f \\ &\stackrel{(2.7)}{=} \zeta(x(t), y(t), f(t)). \end{aligned} \quad (2.10)$$

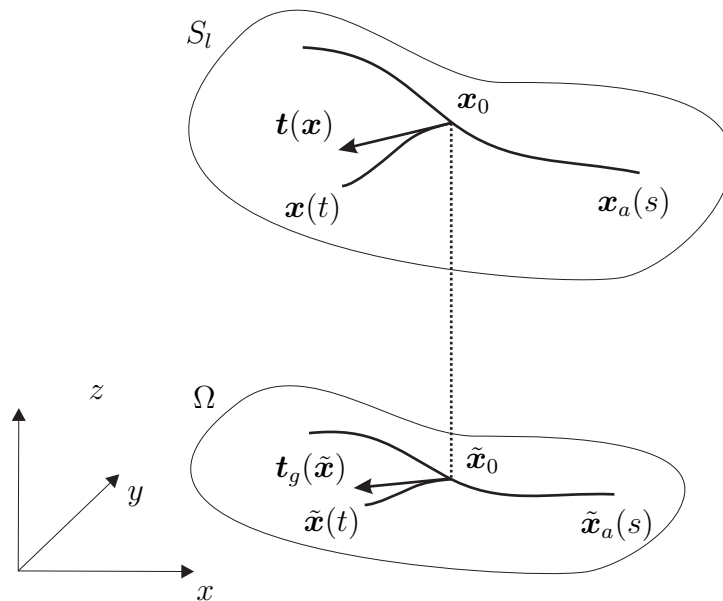
Gleichungen (2.9) und (2.10) bilden zusammen ein System dreier gewöhnlicher Differentialgleichungen, das so genannte *charakteristische DGL-System*. Eine allgemeine Lösung von (2.7) entsteht schließlich durch Vereinigung einer Menge von Charakteristiken.

Die spezielle Lösung erfordert die Vorgabe von Rand- oder Anfangswerten. Neben (2.7) seien nun also eine doppeltpunktfreie Kurve  $\tilde{\mathbf{x}}_a : \tilde{V} \mapsto \mathbb{R}^2$  in  $\Omega$  und eine skalarwertige Funktion  $f_a : \tilde{V} \mapsto \mathbb{R}$  gegeben. Gesucht ist in einer Umgebung der *Anfangswertkurve*  $\mathbf{x}_a(s) := (\tilde{\mathbf{x}}_a(s), f_a(s))^\top$  eine Lösungsfläche, für die  $f(\tilde{\mathbf{x}}_a(s)) = f_a(s)$  erfüllt ist, die also die Raumkurve  $\mathbf{x}_a(s)$  enthält. Eine quasilineare PDE zusammen mit einer Anfangswertkurve bezeichnet man als *Cauchyproblem*, dessen Lösbarkeit allein von den Eigenschaften des Vektorfelds  $\mathbf{t} \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$  abhängt:

**Satz 2.7.** *Ist  $\mathbf{t}$  stetig differenzierbar, so ist das Cauchyproblem für (2.7) in denjenigen Punkten  $(\tilde{\mathbf{x}}_a(s), f_a(s))^\top$  lokal eindeutig lösbar, in denen*

$$\Delta(s) := \det \left( \mathbf{t}_g(\tilde{\mathbf{x}}_a(s)), \frac{d\tilde{\mathbf{x}}_a}{ds} \right) \neq 0 \quad (2.11)$$

*gilt.*



**Abbildung 2.1:** Zur Lösung quasilinearer partieller Differentialgleichungen mit Hilfe der Charakteristikenmethode.

*Beweis.* Siehe zum Beispiel [17].

□

Die geforderte Differenzierbarkeit von  $\mathbf{t}$  sichert die lokale Lösbarkeit von (2.9) und (2.10) nach Picard-Lindelöf<sup>2.6</sup>. Die Voraussetzung (2.11) besagt nichts anderes, als dass die Tangentenvektoren der Projektion der Anfangswertkurve in die Basisebene linear unabhängig von  $\mathbf{t}_g$  (*nicht-charakteristisch*) sind.

### Beispiel 2.8 Rotationsflächen

Betrachte die Gleichung

$$y\partial_x f - x\partial_y f = 0$$

mit den Cauchyschen Anfangsdaten  $(s, 0, f_a(s))^\top \in \mathbb{R}^3$ ,  $s \geq 0$ ,  $f_a : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ . Wegen (2.10) ist offensichtlich  $\frac{df}{dt} = \zeta(x, y, f) = 0$ . Die Grundkurven ergeben sich aus den verbleibenden zwei Beziehungen des charakteristischen Gleichungssystems  $\frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}$ , wobei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Durch den Ansatz  $\tilde{\mathbf{x}}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{e}_i$ ,  $i = 1, 2$ , führt man es auf das Eigenwertproblem  $\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} = \lambda\tilde{\mathbf{x}}$  zurück. Man erhält das Fundamentalsystem  $[e^{it}\mathbf{e}_1, e^{-it}\mathbf{e}_2]$ ,  $i^2 = -1$ , mit den

<sup>2.6</sup>Der Satz von Picard-Lindelöf sichert Existenz und Eindeutigkeit gewöhnlicher Differentialgleichungen für Lipschitz-stetige Richtungsfelder.

Eigenvektoren  $\mathbf{e}_1 = (1, i)^\top$  und  $\mathbf{e}_2 = (1, -i)^\top$  von  $\mathbf{A}$ . Lösungen sind also von der Form  $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \sum_i c_i \Re(e^{\lambda_i t} \mathbf{e}_i)$ . Wir wandern von jedem Fußpunkt der Anfangswertkurve in Richtung der Höhenlinien von  $f$ , es ist also  $\tilde{\mathbf{x}}(0) = (s, 0)^\top$  für ein  $s$ , und mit Hilfe der Anfangsbedingung erhält man die Schar von Grundkurven

$$\tilde{\mathbf{x}}_s(t) = s \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix},$$

wobei  $t$  auf  $[0, 2\pi)$  eingeschränkt sei. Die Höhenlinien sind offensichtlich Kreise um den Ursprung vom Radius  $s$ . Somit muss die gesuchte Fläche Rotationssymmetrie aufweisen. Beispielsweise folgt mit  $f_a(x) = x^2$ , dass es sich um ein Paraboloid  $f(\tilde{\mathbf{x}}) = x^2 + y^2$  handelt. Die Lösung existiert für alle  $s \neq 0$ , da, wie man leicht nachrechnet,

$$\Delta(s) = \det \begin{pmatrix} 0 & s \\ -s & 2s \end{pmatrix} = s \neq 0.$$

□

## 2.3 Variationsaufgaben auf impliziten dynamischen Flächen

### 2.3.1 Implizit definierte Flächen

Sei  $S$  eine reguläre  $C^k$ -Fläche, dann existiert für  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  eine Funktion  $\varphi \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ , so dass  $S \cap \Omega$  die Darstellung

$$S := \{\mathbf{x} \in \Omega \mid \varphi(\mathbf{x}) = 0\}$$

zulässt. Bemerke, dass die Wahl von  $\varphi$  nicht eindeutig ist, denn offensichtlich definiert  $c\varphi$ ,  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , dieselbe Fläche. Eindeutigkeit lässt sich zum Beispiel durch die Forderung  $\|\nabla\varphi\| = 1$  herstellen. Eine Funktion  $\varphi_d$ , die diese Bedingung erfüllt, wird als *Signed Distance Function* (SDF) bezeichnet und ist in der Level-Set-Theorie von großer Bedeutung. Sie misst für jeden Punkt  $\mathbf{x} \in \Omega$  den vorzeichenbehafteten Abstand zur Fläche und ist genau dann wohldefiniert, wenn  $S \subset \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  echte Teilmenge von  $\Omega$  ist und eine kompakte Fläche im differentialgeometrischen Sinne. Dann grenzt nämlich  $S$  die Mengen  $S^+ := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(\mathbf{x}) > 0\}$  und  $S^- := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(\mathbf{x}) < 0\}$  ab, wie in zweidimensionaler Vereinfachung in Abbildung 2.2 gezeigt.

Aufgrund der Forderung nach Regularität ist die Gauß-Abbildung auf ganz  $S$  definiert. Das bedeutet gerade  $\nabla\varphi \neq \mathbf{0}$ , so dass für die in Richtung  $S^+$  orientierte Einheitsnormale gilt

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\nabla\varphi}{\|\nabla\varphi\|}. \quad (2.12)$$

Die Gram-Matrix  $\mathbf{K}$  der zweiten Fundamentalform  $II$  ist gerade das Produkt der Gram-Matrix der ersten Fundamentalform  $I$  und der mit negativem Vorzeichen versehenen

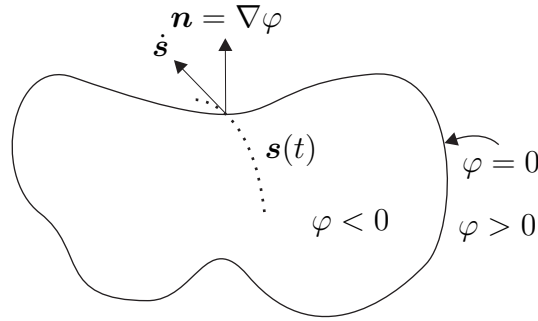


Abbildung 2.2: Nullstellenmenge von  $\varphi$ .

Weingarten-Matrix (siehe Abschnitt 2.1). Sie errechnet sich bezüglich der kanonischen Basis in  $\mathbb{R}^3$  also durch

$$\mathbf{K} = -\frac{1}{\|\nabla\varphi\|} \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{n}}} \nabla^2 \varphi \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{n}}} \quad (2.13)$$

mit der Hesse-Matrix  $\nabla^2 \varphi$  von  $\varphi$  und  $\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{n}}}$  wie in (2.1). Durch die Fortsetzung der zweiten Fundamentalform auf  $\mathbb{R}^3$  hat man sich von der Parametrisierungsabhängigkeit der Tangentialraumbasis befreit. Es ist aber deswegen auch  $\text{Rang } \mathbf{K} \leq 2$ , da  $\mathbf{K}$  ja in Richtung  $\mathbf{n}$  den Eigenwert 0 besitzt. Die Weingarten-Matrix unterscheidet sich von  $\mathbf{K}$  nur noch durch ihr Vorzeichen, die mittlere Krümmung ist also  $\kappa = \text{Spur } \mathbf{W} = -\text{Spur } \mathbf{K}$ .

Nun verändere sich  $S$  über ein Zeitintervall  $[0, T] \subseteq \mathbb{R}$ . Wir sprechen von einer *regulären Oberflächenevolution* oder *-bewegung*, wenn  $S(t)$  regulär ist und ein  $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ ,  $\nabla\varphi \neq \mathbf{0}$ , für alle  $t \in [0, T]$  existiert, so dass die Evolution der Darstellung  $S(t) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(\mathbf{x}, t) = 0, t \in [0, T]\}$  genügt. Dabei ist  $\varphi$  stetig differenzierbar bezüglich  $t$  und  $C^k$ -differenzierbar bezüglich  $\mathbf{x}$ . Wie auch für den statischen Fall kann man im Allgemeinen unendlich viele solche  $\varphi$  angeben.

Markieren wir nun ein  $\mathbf{s} \in S$  und beobachten sein Zeitverhalten  $\mathbf{s}(t)$  (siehe Abbildung 2.2). Da  $\mathbf{s}(t) \in S(t)$  für alle  $t \in [0, T]$ , gilt  $\varphi(\mathbf{s}(t), t) = 0$ . Totale Differentiation nach  $t$  führt auf  $\partial_t \varphi + \langle \nabla\varphi, \dot{\mathbf{s}} \rangle = 0$  mit der Abkürzung  $\dot{\mathbf{s}} = \partial_t \mathbf{s}$ . Setzt man  $v = \langle \hat{\mathbf{n}}, \dot{\mathbf{s}} \rangle = \left\langle \frac{\nabla\varphi}{\|\nabla\varphi\|}, \dot{\mathbf{s}} \right\rangle$  folgt die berühmte *Level-Set-Gleichung*

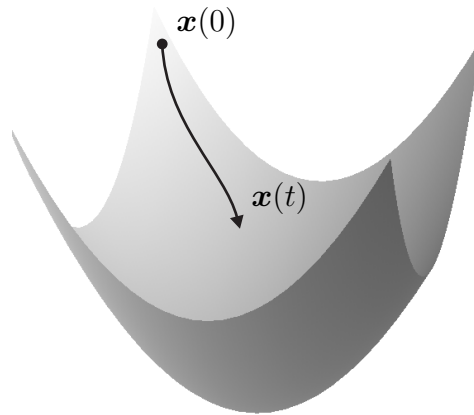
$$\partial_t \varphi + v \|\nabla\varphi\| = 0. \quad (2.14)$$

Umgekehrt lässt sich das Zeitverhalten eines Punkts durch  $\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{v}(\mathbf{s}, t)$  beziehungsweise  $\langle \hat{\mathbf{n}}, \dot{\mathbf{s}} \rangle = v(\mathbf{s}, t)$  vorgeben, und die resultierende Bewegung ist Lösung von (2.14).

### Beispiel 2.9 Starre Bewegung

Es beschreibt

$$S(t) = \{\mathbf{x} = (x, y)^\top \mid \varphi(\mathbf{x}, t) = (x - t)^2 + y^2 - 1\} \quad (2.15)$$



**Abbildung 2.3:** Prinzip des Gradientenabstiegs auf der von  $f$  beschriebenen Untermannigfaltigkeit.

eine starre Bewegung des Einheitskreises  $S(0) = S^1 \subset \mathbb{R}^2$  in Richtung der  $x$ -Achse mit Geschwindigkeit 1. Es gilt  $\partial_t \varphi = -2(x - t)$  und  $\partial_x \varphi = 2(x - t)$ . Durch Einsetzen zeigt man, dass  $\varphi$  aus (2.15) eine Lösung des Anfangs-Randwert-Problems

$$\partial_t \varphi + \langle \mathbf{v}, \nabla \varphi \rangle = \partial_t \varphi + \partial_x \varphi = 0$$

mit Transportvektorfeld  $\mathbf{v} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = (1, 0) = \text{const.}$ , und Anfangswert  $\varphi(\mathbf{x}, 0) = x^2 + y^2 - 1$  ist.

□

Im Folgenden wird zwar von regulären Evolutionen ausgegangen. Schlussendlich sei aber bemerkt, dass es sich bei (2.14) um eine Gleichung vom *Hamilton-Jacobi-Typ*<sup>2.7</sup> handelt. Diese lässt auch eine Klasse von schwachen, möglicherweise unstetigen Lösungen zu, die beispielsweise die Behandlung von Schocks bei strömungsmechanischen Berechnungen ermöglicht [59]. Um der Glattheitsanforderung gerecht zu werden, koppelt man den Term  $\varepsilon \Delta \varphi$  an. Als Gewichtungsfaktor wirkt die künstliche „Viskosität“  $\varepsilon$ . Zunächst berechnet man die klassische Lösung  $\varphi_\varepsilon(\mathbf{x}, t)$  der elliptischen Gleichung

$$\partial_t \varphi + \langle \nabla \varphi, \dot{\mathbf{s}} \rangle + \varepsilon \Delta \varphi = 0.$$

Für  $\varepsilon \rightarrow 0$  wird dann gerade die sogenannte *Viskositätslösung* erhalten. Diese liefert das numerische Lösungsverfahren direkt, wenn die Diskretisierung von (2.14) geschickt durchgeführt wurde. Der gesamte Kalkül wird eingehend in [5] behandelt.

<sup>2.7</sup>Sie ist für eine gesuchte Funktion  $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  von der Form  $\partial_{x_1} f + \mathcal{H}(\mathbf{x}, f, \partial_{x_2} f, \dots, \partial_{x_n} f)$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$ .  $\mathcal{H}$  nennt man dabei die *Hamilton-Funktion*, siehe [17].

### 2.3.2 Gradienten-Abstieg

Gesucht ist das Minimum einer skalarwertigen Funktion  $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ . Ein verbreiteter Ansatz ist die Anwendung der Methode des steilsten Abstiegs: Von einem Startpunkt  $\mathbf{x}_0$  bewegt man sich wie in Abbildung 2.3 zu sehen auf dem Funktionsgraphen iterativ in Richtung der größten negativen Steigung. Diese Vorgehensweise ist äquivalent zur Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = -\nabla f(\mathbf{x}(t)), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0.$$

Wenn der Grenzwert  $\mathbf{x}^* = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t)$  existiert, ist  $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ , und in  $\mathbf{x}^*$  ist die notwendige Bedingung für das Vorliegen eines Minimums erfüllt.

Auf ähnliche Weise untersuchen wir nun in  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  das Optimierungsproblem  $J(S) \stackrel{!}{\rightarrow} \min$ , wobei das *Formfunktional* beziehungsweise *Flächenfunktional*  $J : \Omega \supseteq S \mapsto \mathbb{R}$  gegeben ist durch

$$J(S) = \int_S f(\mathbf{x}, \mathbf{n}) d\sigma$$

mit dem Oberflächenelement  $d\sigma$  und der problemspezifischen Gewichtsfunktion  $f : S \times S^2 \mapsto \mathbb{R}$ , die von Oberflächenpunkten und ihren Normalen abhängig sein kann. Die Menge der regulären Flächen  $\mathfrak{R}$  ist sicherlich kein metrischer Raum (höchstens ein topologischer) und weist zu wenig Struktur zur Berechnung der klassischen (Fréchet)-Ableitung auf. Stattdessen leitet man nach „Störungsvektorfeldern“  $\mathbf{v} : \Omega \mapsto \mathbb{R}^3$  ab, die in einem Banachraum zusammengefasst werden können. Die *Euler'sche Semi-Ableitung*<sup>2.8</sup>  $dJ(S_0, \mathbf{v})$  nach einer durch  $\mathbf{v}$  induzierten Formänderung  $S(t)$  in einem „Punkt“  $S_0$  berechnet sich formal wie folgt: Zum Beispiel verwendet man die bereits eingeführte SDF  $\varphi_d$  zur Darstellung von  $S_0 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi_d(\mathbf{x}) = 0, \|\nabla \varphi_d\| = 1\}$ . Die Evolution  $S(t)$  ist durch Angabe des Geschwindigkeitsfelds  $\mathbf{v}$  eindeutig festgelegt (siehe Abbildung 2.4), das heißt

$$S(t) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi_d(\mathbf{x}, 0) = S_0, \partial_t \varphi_d + \langle \mathbf{v}, \nabla \varphi_d \rangle = 0\},$$

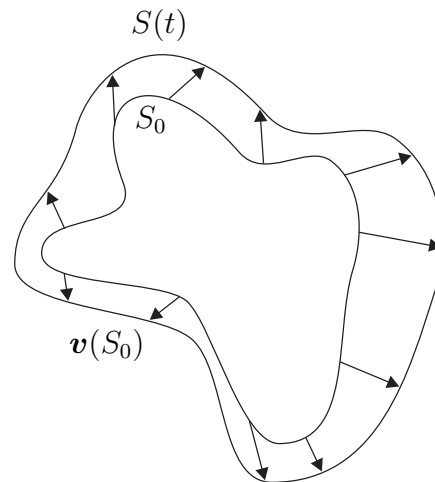
so dass schließlich

$$dJ(S_0, \mathbf{v}) := \lim_{t \searrow 0} \frac{J(S(t)) - J(S_0)}{t}. \quad (2.16)$$

Man kann (2.16) als Ableitung in *Richtung*  $\mathbf{v}|_{S_0}$  auffassen. Der folgende Satz liefert wichtige Erkenntnisse über die Struktur der *Flächenfunktionalableitung*:

<sup>2.8</sup>Die Ableitung heißt eulersch, da sie – im Gegensatz zum partikelbezogenen Lagrange'schen Paradigma – bezüglich eines ortsfesten Koordinatensystems berechnet wird [20]. Da nur ein rechtsseitiger Grenzwert gebildet wird, handelt es sich um eine Semi-Ableitung.





**Abbildung 2.4:** Oberflächenentwicklung zur Beschreibung der Flächenfunktionalableitung.

**Satz 2.10** (Hadamard-Zolésio). *Unter gewissen Stetigkeitsvoraussetzungen existiert ein  $\nabla J \in C^\infty$  mit  $\text{supp } \nabla J \subseteq S$ , so dass*

$$dJ(S, \mathbf{v}) = \langle \nabla J, \mathbf{v} \Big|_S \cdot \hat{\mathbf{n}} \rangle. \quad (2.17)$$

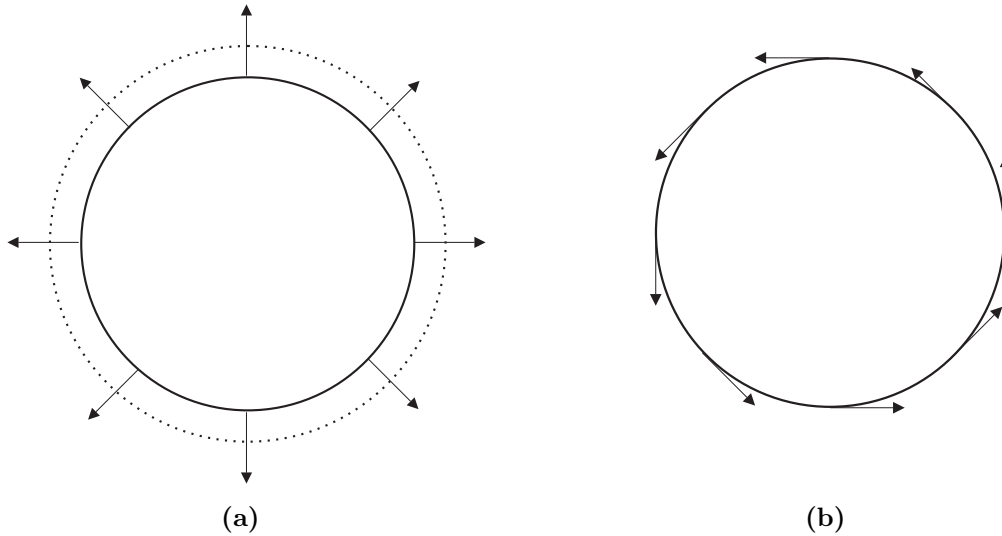
Die Funktion  $\nabla J$  bezeichnet man als Formgradient.

*Beweis.* Siehe [20].

□

Wir verwenden hier für das euklidische Skalarprodukt die Notation  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ ,  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ . Der Satz birgt drei fundamentale Aussagen: Erstens sichert er die Existenz einer Abbildung  $\nabla J$ , die die gesuchte Ableitung in Form eines abstrakten Skalarprodukts zweier auf  $S$  definierter (siehe nächste Beobachtung), skalarwertiger Funktionen beschreibt. Zweitens ist deren Träger eine Teilmenge von  $S$ , was insbesondere für Formfunktionale, die zusätzlich auf der offenen Menge  $S^-$  definiert sind, von Interesse sein dürfte. Die Argumentation ist ähnlich der zum Beweis der großen Integralsätze benötigten: Zum Zwecke der Bilanzierung reicht es, das Geschehen auf den Rändern des Gebiets zu untersuchen. Die Projektion in Form des euklidischen Skalarprodukts  $\mathbf{v} \Big|_S \cdot \hat{\mathbf{n}}$  zeigt schließlich, dass die Angabe einer skalarwertigen Geschwindigkeitsfunktion  $v \in C^\infty(S)$  hinreichend ist zur Spezifikation der Ableitungsrichtung:  $dJ(S, \mathbf{v}) = \langle \nabla J, v \rangle$  für  $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{n}}$ . Tangentiale Geschwindigkeitskomponenten bewirken allenfalls eine Umparametrisierung, beeinflussen aber weder Oberflächenform noch Funktionalwert (siehe Abbildung 2.5). Man nennt den Gradientenabstieg *Hadamard-Fluss*, wenn als abstraktes Skalarprodukt das des Hilbert-Raums  $L^2(S)$ <sup>2.9</sup> angesetzt wird [13], das heißt  $\langle v, w \rangle_{L^2} = \int_S v w d\sigma$ ,  $v, w \in C^\infty(S)$ .

<sup>2.9</sup>Alle über  $S$  im Lebesgueschen Sinne quadratintegrierbaren Funktionen liegen im Hilbert-Raum  $L^2(S)$ .



**Abbildung 2.5:** (a) Normale Transportvektorfelder tragen im Gegensatz zu (b) tangentialen zur Verformung bei.

Die etwas abstrakt anmutenden Darstellung der Formableitung erweist sich als vorteilhaft: Bewegt man sich im Rahmen eines Gradientenabstiegs innerhalb der Menge der regulären Flächen  $\mathfrak{R}$  in „Richtung“  $v_d = -\nabla J$ , dann ist

$$dJ(S(t), v_d \hat{\mathbf{n}}) = -\langle \nabla J, \nabla J \rangle = -\|\nabla J\|^2 < 0.$$

Der Funktionalwert  $J$  fällt monoton. Zeigt man zusätzlich die Existenz einer unteren Schranke für den Funktionalwert, folgt offensichtlich die Konvergenz – zumindest gegen ein lokales Minimum. Man beachte aber, dass im Grenzwert nicht zwangsläufig ein globales Minimum vorliegen muss. Diese Tatsache begegnet uns bei der Untersuchung des deflektometrischen Rekonstruktionsproblems wieder (siehe Kapitel 3). Die Level-Set-Gleichung, die sich schon bei der Herleitung des Formgradienten als nützlich erwiesen hat, lässt sich auch direkt zur Implementierung des Abstiegsverfahrens einsetzen. Wie bei der Definition der Flächenfunktionalableitung geben wir die gewünschte Normalengeschwindigkeit  $v_d$  vor; eine Anfangsfläche  $S_0 = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid \varphi_0(\mathbf{x}) = 0\}$  advektiere man nämlich auf die Weise, dass für alle  $t$

$$\partial_t \varphi + v_d(\varphi, t) \|\nabla \varphi\| = 0,$$

wobei  $\varphi(\mathbf{x}, 0) = \varphi_0$ . In einem „stationären Punkt“ dieser regulären Evolution  $S^* = \lim_{t \rightarrow \infty} S(t)$  ist ja  $\partial_t \varphi = 0$ . Aus Level-Set-Gleichung und Regularitätsannahme ( $\|\nabla \varphi\| \neq$

---

Funktionen, die sich nur auf Nullmengen unterscheiden, werden dabei in einer Äquivalenzklasse zusammengefasst. Ein solcher Raum ist mit einem Skalarprodukt ausgestattet und bezüglich der von diesem induzierten Metrik ein Banach-Raum, also vollständig. Insbesondere erhält man ihn durch Abschließung von  $C^\infty(S)$ , das heißt,  $L^2(S) = \overline{C^\infty(S)}$ , beziehungsweise  $C^\infty(S)$  liegt dicht in  $L^2(S)$ .

0) folgt sofort, dass dann auch  $v_d = -\nabla J = 0 \Leftrightarrow \nabla J = 0$  und mit  $S^*$  ein kritischer Punkt von  $J$  erreicht wurde.

Wie berechnet man nun den Gradienten  $\nabla J$ ? Im Hinblick auf Satz 2.10 reicht es,  $dJ(S, v)$  statt  $dJ(S, \mathbf{v})$  zu betrachten. Notwendig für das Vorliegen eines Minimums von  $J$  ist die Existenz eines kritischen Punkts  $S^*$ , in dem bei normaler Variation  $dJ(S^*, v) := \frac{d}{dt}J(S^* + tv\hat{\mathbf{n}}) = 0$  für alle Testfunktionen  $v \in C^\infty(S^*)$ . Die formale Differentiation bezüglich  $t$  zeigt, dass dies äquivalent ist zu

$$dJ(S^*, v) = \int_{S^*} \operatorname{div}_S(\nabla_{S^2} f + f\hat{\mathbf{n}})v d\sigma = \langle \nabla J, v \rangle_{L^2(S^*)} = 0. \quad (2.18)$$

Es bezeichnet dabei  $\nabla_S f$  den *Oberflächengradienten* beziehungsweise  $\operatorname{div}_S$  die *Oberflächendivergenz* einer regulären Fläche  $S$ . Mit dem Gradienten  $\nabla \tilde{f}$  einer stetigen Fortsetzung  $\tilde{f}$  von  $f$  auf einer Umgebung von  $S$  gilt  $\nabla_S f = \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{n}}}\nabla \tilde{f}$ . Es ist ferner  $\operatorname{div}_S \mathbf{v} = \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}}|_S - \langle \mathbf{J}_{\tilde{\mathbf{v}}}\hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{n}} \rangle$  für eine Fortsetzung  $\tilde{\mathbf{v}}$  des Vektorfelds  $\mathbf{v} : S \mapsto \mathbb{R}^3$ . Man kann zeigen, dass  $\nabla_S f$  und  $\operatorname{div}_S \mathbf{v}$  von den gewählten Fortsetzungen  $\tilde{f}$  beziehungsweise  $\tilde{\mathbf{v}}$  unabhängig sind [20]. Da (2.18) für alle  $v \in C^\infty(S^*)$  erfüllt sein muss und  $C^\infty(S^*)$  dicht in  $L^2(S^*)$  liegt, folgt die aus der Variationsrechnung bekannte *Euler-Lagrange-Gleichung*

$$\operatorname{div}_S(\nabla_{S^2} f + f\hat{\mathbf{n}}) = 0 = \nabla J \quad (2.19)$$

und, da deren Lösung zu einem (lokalen) Extremum des Funktionals führt, auch der gesuchte Formgradient  $\nabla J$ . Zum selben Schluss kommt man mit Hilfe des Strukturtheorems 2.10 durch Vergleich der Identitäten (2.18) und (2.17).

Zwei Beobachtungen sollen später eine wichtige Rolle spielen: Erstens ist der Divergenzoperator auf  $S$  linear, so dass  $\operatorname{div}_S(\nabla_{S^2} f + f\hat{\mathbf{n}}) = \operatorname{div}_S \nabla_{S^2} f + \operatorname{div}_S f\hat{\mathbf{n}}$ . Der zweite Term ist nach der Produktregel gleich  $\operatorname{div}_S f\hat{\mathbf{n}} = \langle \nabla_S f, \hat{\mathbf{n}} \rangle + f \operatorname{div}_S \hat{\mathbf{n}} = f \operatorname{div}_S \hat{\mathbf{n}}$ . Die Oberflächendivergenz des Einheitsnormalenvektorfelds ist gleich der mittleren Krümmung, das heißt für den Formgradienten schließlich  $\nabla J = \operatorname{div}_S \nabla_{S^2} f + \kappa f$ . Zweitens liegt  $\nabla_{S^2} f$  im Tangentialbündel von  $S$  (per Konstruktion der Gauß-Abbildung). In der Definition der Oberflächendivergenz  $\operatorname{div}_S \nabla_{S^2} f = \operatorname{div} \nabla_{S^2} f|_S - \langle \mathbf{J}_{\nabla_{S^2} f}\hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{n}} \rangle$  verschwindet der letzte Term, da  $\mathbf{J}_{\nabla_{S^2} f}\hat{\mathbf{n}} \in T_s S \Leftrightarrow \langle \mathbf{J}_{\nabla_{S^2} f}\hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{n}} \rangle = 0$ . Man kann nun ebenso gut

$$\operatorname{div}_S \nabla_{S^2} f = \operatorname{div} \nabla_{S^2} f \quad (2.20)$$

setzen.

### Beispiel 2.11 Minimalflächenfunktional

Die Euler'sche Semi-Ableitung des *Minimalflächenfunktionals*

$$J(S) = \int_S d\sigma,$$

ist, da  $f = 1 \Rightarrow \operatorname{div}_S \nabla_{S^2} f = 0$  und  $\operatorname{div}_S f \hat{\mathbf{n}} = \operatorname{div} \hat{\mathbf{n}} = \kappa$ ,

$$dJ(S, v) = \int_S \kappa v d\sigma.$$

Inbesondere ist  $g = \kappa$ . Bekanntlich verschwindet bei Minimalflächen die mittlere Krümmung [42]. Folgerichtig entspricht der energieminimierende Gradientenabstieg

$$\partial_t \varphi - \kappa \|\nabla \varphi\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_t \varphi = \kappa \|\nabla \varphi\|$$

Er wird als *mittlerer Krümmungsfluss* bezeichnet. □

Abschließend sollen die *natürlichen Randbedingungen* oder auch *Neumann-Randbedingungen*<sup>2.10</sup> von (2.19) hergeleitet werden. Diese Randbedingungen sind dann von großer Bedeutung, wenn in der Praxis numerisch auf einer Teilmenge  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  gerechnet wird, in der sich die gesuchte Fläche nicht vollständig als Rand einer offenen Menge  $S^-$  darstellen lässt, das heißt  $S^- \not\subseteq \Omega$ . Das ist insbesondere im vorliegenden Fall gegeben, in dem durch eine feste Sichtstrahlenquelle aufgrund von Verdeckungen nur ein Teilbereich der gesuchten Fläche  $S$  deflektometrisch untersucht werden kann. Das folgende Ergebnis ist eine Erweiterung des von Solem et al. in [60] geführten Beweises der Identität (2.18) und erscheint im Grundlagenteil, um den im Kapitel 4 entwickelten Gedankengang nicht durch technische Nebenrechnungen zu verschleiern.

**Lemma 2.12.** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  ein Gebiet mit hinreichend glattem Rand  $\partial\Omega$  und äußerem Einheitsnormalenvektorfeld  $\hat{\mathbf{o}}$ . Die natürlichen Randbedingungen der Euler-Lagrange-Gleichung des Oberflächenfunktionals*

$$J(S) = \int_S f(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{n}}) d\sigma$$

sind dann

$$\langle \nabla_{S^2} f + f \hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{o}} \rangle := 0 \tag{2.21}$$

auf  $S \cap \partial\Omega$ .

*Beweis.* Mit Hilfe normaler Variation folgt wie bei der Herleitung von (2.18) für einen stationären Punkt  $S^*$  von  $J$

$$\int_{S^* \cap \Omega} \operatorname{div}_S (\nabla_{S^2} f + f \hat{\mathbf{n}}) v d\sigma = 0.$$

---

<sup>2.10</sup>Die Neumann-Randbedingung einer PDE (zum Beispiel der Laplace-Gleichung  $\Delta u = 0$ ) spezifiziert die Ableitung der gesuchten Funktion  $u$  in Richtung der äußeren Normalen  $\hat{\mathbf{o}}$  des Gebiets  $\Omega$ , das heißt, sie fordert, dass  $\langle \nabla u, \hat{\mathbf{o}} \rangle =: \iota, \iota : \partial\Omega \mapsto \mathbb{R}$ .

Anwendung der Green'schen Formel und des Integralsatzes von Gauß für Untermannigfaltigkeiten liefert

$$\int_{S^* \cap \Omega} \operatorname{div}_S(\nabla_{S^2} f + f \hat{\mathbf{n}}) v d\sigma = \int_{S^* \cap \partial\Omega} \langle \nabla_{S^2} f + f \hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{o}} \rangle v d\sigma = 0.$$

Da  $v \in C^\infty(S^*)$  beliebig war, folgt die Neumannsche Randbedingung (2.21).

□

## 2.4 Inverse Probleme

Die Kernaufgabe der Messtechnik lautet, Eigenschaften eines Prüfobjekts durch Messung ihres physikalischen Einflusses auf die aufgenommenen Größen zu bestimmen. Es ist von einer Wirkung (dem Messsignal) auf seine Ursache zu schließen. Zweckmäßig konstituiert ein – möglicherweise nichtlinearer – Operator  $F$ , der eine Abbildung zwischen (Teilmengen von) Funktionenräumen  $X$  und  $Y$  vermittelt, das Modell des physikalischen Prozesses. Solche inversen Probleme sind meist schlecht gestellt, das heißt, der inverse Operator  $F^{-1}$  ist

- nicht wohldefiniert und/oder
- nicht injektiv und/oder
- nicht stetig.

Entweder existiert also die Lösung gar nicht erst, oder selbst falls sie existiert, ist sie nicht eindeutig. Ist  $F$  nicht stetig invertierbar, können kleine – in der Praxis sicherlich auftretende – Störungen  $\delta$  der Messdaten  $y$  zu  $y^\delta \in Y$  große Diskrepanzen der Lösungen  $x = F^{-1}(y^\delta)$  vom wahren Wert  $\bar{x}$  hervorrufen: Aus  $\|y - y^\delta\| \leq \delta$ ,  $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ , kann man nicht mehr  $\|x - \bar{x}\| \leq \epsilon$ ,  $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ , folgern.

Eine Stabilisierung wird klassischerweise durch *Tikhonov-Regularisierung* erreicht: Man sucht für gegebenes  $y^\delta$  nach einer Ursache  $\bar{x}$ , so dass

$$\bar{x} = \arg \min_{x \in X} \left( \|F(x) - y^\delta\|_Y^2 + \alpha \|x - x_0\|_X^2 \right),$$

mit passend gewähltem  $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ , wobei Kandidaten in der Nähe eines a priori bestimmten Schätzwerts  $x_0 \in X$  bevorzugt werden. Für allgemeines  $x_0 \neq \mathbf{0}$  bezeichnet man das Ergebnis als  $x_0$ -Minimum-Norm-Lösung. Der Fall  $x_0 = \mathbf{0}$  beleuchtet den Grund dieser

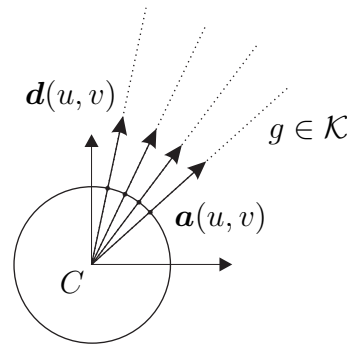


Abbildung 2.6: Strahlenkongruenz.

Namensgebung. Alternativ schränkt man den Urbildraum  $X$  von  $F$  durch eine Nebenbedingung auf eine Untermenge  $\tilde{X} \subset X$  ein und erhält die Lösung

$$\bar{x} = \arg \min_{x \in \tilde{X}} (\|F(x) - y^\delta\|_Y^2),$$

$$\tilde{X} := \{x \in X \mid G(x) = 0\}.$$

Bemerke,  $\tilde{X}$  besitzt unter schwachen Voraussetzungen an die Funktion  $G$  sogar Mannigfaltigkeitsstruktur. Im Hinblick auf die vorausgehenden Abschnitte handelt es sich für  $X = \mathbb{R}^3$  zum Beispiel um eine reguläre Fläche. Das entscheidende Fazit muss jedenfalls lauten: „Zusatzinformation wirkt regularisierend!“ [54].

Wie sich später herausstellen wird, ist das inverse deflektometrische Rekonstruktionsproblem schlecht gestellt. Beide Ansätze sollen verfolgt werden, damit eine eindeutige Lösung gewonnen werden kann (siehe Kapitel 4 beziehungsweise 5). Eine vertiefte Diskussion inverser Probleme findet der Leser zum Beispiel in [54].

## 2.5 Strahlensysteme

Eine Komponente des deflektometrischen Modells ist eine adäquate Beschreibung des Lichtwegs. Wie bereits angemerkt, nehmen wir hier eine strahlengeometrische Sichtweise an. Ein System von Strahlen bezeichnet man auch als *Kongruenz*:

**Definition 2.13** (Kongruenz). Eine zwei-parametrische Familie  $\mathcal{K}$  von Geraden im euklidischen Standardraum nennt man Kongruenz. Eine Gerade  $g \in \mathcal{K}$  besitzt die Darstellung

$$g := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x} = \mathbf{a}(u, v) + \lambda \hat{\mathbf{d}}(u, v), \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Es vereinigt  $\mathbf{a}(u, v) : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$  die Menge der Aufpunkte in der Leitfläche, und  $\hat{\mathbf{d}}(u, v) : \mathbb{R}^2 \mapsto S^2$  heißt sphärisches Bild von  $\mathcal{K}$ .

Vergleiche auch Abbildung 2.6. Offensichtlich ist für alle skalarwertigen Funktionen  $\nu$

$$\tilde{\mathbf{a}}(u, v) = \mathbf{a}(u, v) + \nu(u, v)\hat{\mathbf{d}}(u, v) \quad (2.22)$$

eine weitere Leitfläche von  $\mathcal{K}$ . Eine reguläre Fläche  $S$  und die Menge ihrer Oberflächennormalen definieren eine so genannte *Normalenkongruenz*  $\mathcal{N}(S)$ .

### Beispiel 2.14 Lochkamera

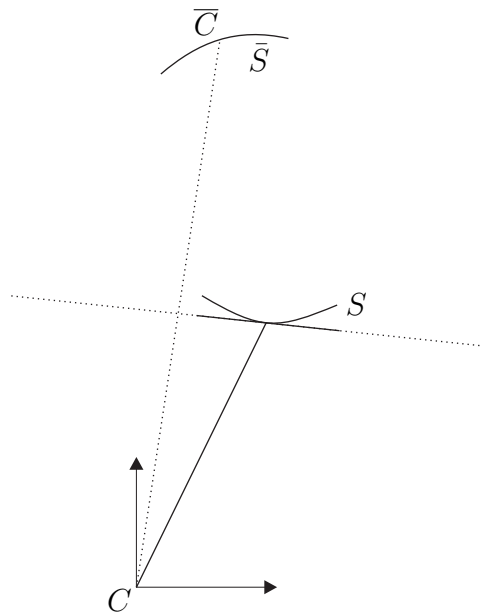
Das Sichtstrahlenbündel einer Lochkamera mit optischem Zentrum  $C$  ist äquivalent zur Normalenkongruenz der Einheitssphäre  $S^2$  um  $C$  (siehe Abbildung 2.6). Bemerke, da wegen (2.22) speziell  $\mathbf{0}$  eine Leitfläche von  $\mathcal{N}(S^2)$  ist, ergibt sich  $\mathbb{R}P^2 \cong \mathcal{N}(S^2)$ . □

### Beispiel 2.15 Telezentrik

Für eine telezentrische Optik entspricht  $\mathbf{a}(u, v)$  einer affinen Ebene, und  $\hat{\mathbf{d}} = \text{const.}$  definiert die Hauptrichtung. □

Für die Formulierung des Reflexionsgesetzes verwenden wir später den Begriff der *Gegenpunktsfläche*:

**Definition 2.16** (Gegenpunktsfläche). Sei  $C$  eine Strahlenquelle und  $S$  eine reguläre Fläche. Die Menge der Gegenpunkte von  $C$  bezüglich aller Tangentialebenen von  $S$  bezeichnet man als Gegenpunktsfläche  $\bar{S}$ .



**Abbildung 2.7:** Die Sekundärkaustik  $\bar{S}$  entsteht durch Spiegelung von  $C$  entlang jeder Tangentialebene von  $S$ .

Mit Gegenpunkt ist in diesem Zusammenhang das Bild  $\overline{C}$  von  $C$  unter der Spiegelung an einer Ebene gemeint (siehe Abbildung 2.7).

Der Begriff des *Brennpunkts*, üblicherweise im Zusammenhang mit den Eigenschaften eines optischen Abbildungsgeräts aufgeführt, bezeichnet auf höherem Abstraktionsniveau die intrinsische Eigenschaft eines Strahlensystems:

**Definition 2.17** (Brennpunkt).  $\mathbf{x}(u, v, \lambda)$  heißt Brennpunkt der Geraden  $g(u, v) \in \mathcal{K}$ , wenn

$$\det(\partial_u \mathbf{x}, \partial_v \mathbf{x}, \partial_\lambda \mathbf{x}) = 0. \quad (2.23)$$

Die Menge der Brennpunkte einer Kongruenz ist ihre Brennfläche  $\mathcal{F}(\mathcal{K})$ . Diese ist von Bedeutung, wenn man die Frage nach Rekonstruierbarkeit einzelner Oberflächenpunkte stellt (siehe Kapitel 5). Eine exzellente Einführung in die weitere strahlengeometrische Behandlung optischer Phänomene geben Pottmann und Wallner in [51].



### 3 Das deflektometrische Problem

#### 3.1 Vier Formulierungen des Reflexionsgesetzes

Das Vorwissen über spiegelnde Oberflächen, das vom deflektometrischen Messprinzip nutzbar gemacht wird, beinhaltet, dass strahlengeometrisch gesehen in jedem Punkt das *Reflexionsgesetz* erfüllt ist. Dieses wird uns in unterschiedlichen Gewändern begegnen. Je nach Kontext erweist sich die eine oder andere Version als besonders vorteilhaft.

1. In der Sprache der Kongruenzen lautet es:

**Satz 3.1** (Malus und Dupin). *Wird eine Normalenkongruenz  $\mathcal{N}$  an einer regulären Fläche  $S$  gespiegelt, dann ist die Menge der Reflexstrahlen  $\mathcal{R}$  ebenfalls eine Normalenkongruenz.*

*Beweis.* Siehe zum Beispiel [51]. Vergleiche auch Abbildung 3.1 (a). □

Die Leitfläche, die von  $\mathcal{R}$  dann orthogonal durchstoßen wird, nennt man *Sekundärkaustik*. Entspringen die Strahlen von  $\mathcal{N}$  einem einzigen festen Projektionszentrum  $C$ , fallen Sekundärkaustik und Gegenpunktsfläche zusammen. Das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Verfahren zur metrischen Kalibrierung beruht auf der obigen Formulierung (siehe Abschnitt 4.4.1).

2. Zum Zwecke analytischer Untersuchungen vereinigt man alternativ alle Lichtpunkte in einer regulären Fläche  $L$  bekannter Geometrie, dem Modell des Mustergenerators. Eine Strahlverfolgung ausgehend vom optischen Zentrum, das ohne Beschränkung der Allgemeinheit im Koordinatenursprung liege, liefert das Folgende: Sei  $g_r \in \mathcal{R}$  ein Strahl der Reflexionskongruenz durch den so genannten *Reflexionspunkt*  $\mathbf{s}$  (siehe Abbildung 3.1 (b)). Dann gilt mit der *Householder-Spiegelung*<sup>3.1</sup>  $\mathbf{H} = \mathbf{I} - 2\hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}}^\top$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$

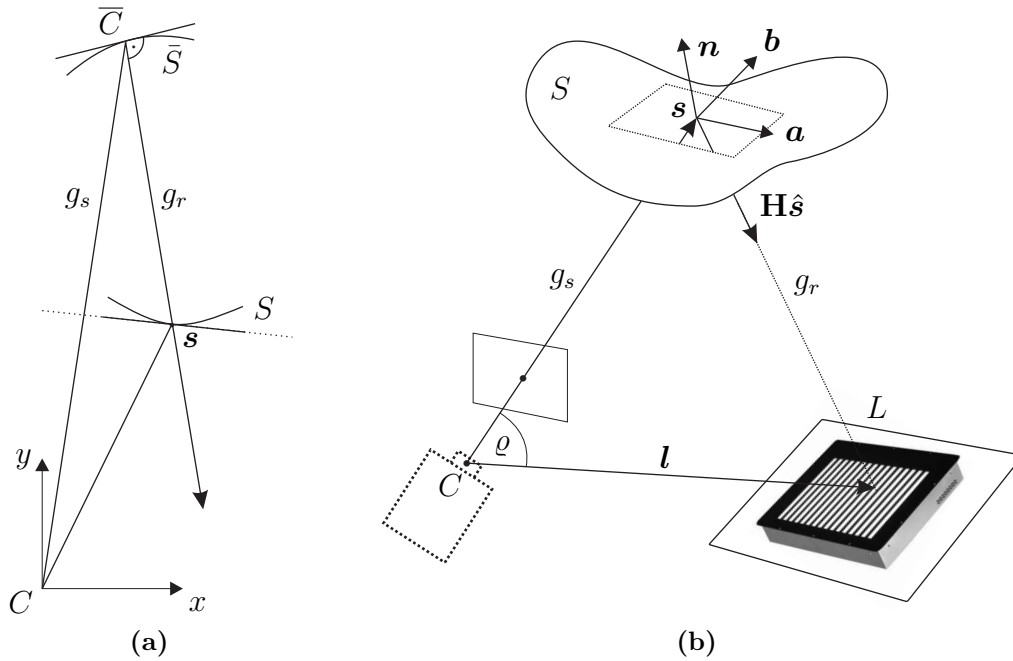
$$g_r = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x}(\lambda) = \mathbf{s} + \lambda \mathbf{H} \hat{\mathbf{s}} \right\}. \quad (3.1)$$

Der Schnitt  $\mathbf{l} := g_r \cap L$  liefert ein ausgezeichnetes  $\tilde{\lambda} = \|\mathbf{l} - \mathbf{s}\|$ , so dass

$$\begin{aligned} \mathbf{l} &= \mathbf{s} + \tilde{\lambda} \mathbf{H} \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|} \\ &= \mathbf{s} + \frac{\|\mathbf{l} - \mathbf{s}\|}{\|\mathbf{s}\|} \mathbf{H} \mathbf{s} \\ &= (\mathbf{I} + c \mathbf{H}) \mathbf{s} \end{aligned} \quad (3.2)$$

---

<sup>3.1</sup>Diese beschreibt die Spiegelung eines Punktes an einem zweidimensionalen Untervektorraum  $U \subset \mathbb{R}^3$  längs  $U^\perp$ .



**Abbildung 3.1:** (a) Sicht- und Reflexionsstrahlenkongruenz. (b) Geometrie der Reflexion.

für  $\mathbf{l} \in L$  und

$$c(\mathbf{l}, \mathbf{s}) = c(\varrho, \varsigma) = \frac{\|\mathbf{l} - \mathbf{s}\|}{\|\mathbf{s}\|} = \sqrt{\varsigma^2 - 2\varsigma \cos \varrho + 1}. \quad (3.3)$$

Dabei ist  $\varrho : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mapsto (0, \pi)$  der von  $\mathbf{l}$  und  $\mathbf{s}$  eingeschlossene Winkel und  $\varsigma : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mapsto \frac{\|\mathbf{l}\|}{\|\mathbf{s}\|} \in [0, \infty)$  das Verhältnis ihrer Normen, wie man durch Nachrechnen mit Hilfe des Cosinussatzes verifiziert. Wir haben eine Abbildung zwischen  $S$  und  $L$  hergeleitet, ohne bis jetzt Annahmen über innere Geometrie und Einbettung von  $L$  in den Raum zu treffen. Im nächsten Abschnitt soll das nachgeholt werden, so dass man die so genannte *induzierte Abbildung* erhält.

3. Seien umgekehrt schließlich ein  $\mathbf{s} \in S$  mit Flächennormale  $\mathbf{n}$  (es ist also nicht notwendigerweise  $\mathbf{n} \in S^2$ ) und die Lage der Lichtquelle  $\mathbf{l}$  gegeben, dann lauten die zwei skalaren *Reflexionsbedingungen*

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{n} \rangle = 0, \quad (3.4a)$$

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{n} \rangle = 0, \quad (3.4b)$$

wobei

$$\mathbf{a} = \hat{\mathbf{s}} + \hat{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{l} \times \mathbf{s}$$

und  $\mathbf{r} = \mathbf{l} - \mathbf{s}$ . Die zweite Bedingung (*Unterraumbedingung*) verlangt, dass die Reflexion in einem zweidimensionalen Unterraum  $[\mathbf{b}]^\perp = [\mathbf{l}, \mathbf{s}]$  stattfindet. Gleichung (3.4a) bezeichnet man auch als *Bisektionsbedingung*: In  $[\mathbf{b}]^\perp$  halbiert die Normale den Winkel zwischen ein- und ausfallendem Strahl. Es gilt eben „Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel“. Diese Variante des Reflexionsgesetzes ist der Schlüssel zum Existenz- und Eindeutigkeitsbeweis aus Abschnitt 3.3.3.

4. Durch Konjugation von  $\hat{\mathbf{s}} + \hat{\mathbf{r}}$  lässt sich  $\mathbf{n}$  in Abhängigkeit von  $\mathbf{s}$  und  $\mathbf{l}$  auch direkt angeben:

$$\mathbf{n} = \hat{\mathbf{s}} - \hat{\mathbf{r}}. \quad (3.5)$$

Spätestens nach Normalisierung aber wird diese Darstellung von  $\mathbf{n}$  aufgrund der zweifach im Nenner auftretenden Normterme kompliziert und analytisch nur noch schwer handhabbar. Numerisch ist diese Formulierung aber von großer Bedeutung, wie bei der Lösung des in Abschnitt 3.3.4 beschriebenen Normalenanpassungsproblems.

Wir machen folgende wichtige Feststellung:

**Lemma 3.2.** *Die Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  wie oben definiert sind linear unabhängig. Es gilt sogar  $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ .*

*Beweis.* Es gilt für alle  $\mathbf{l}$  und  $\mathbf{s}$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle &= \left\langle \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|} + \frac{\mathbf{l} - \mathbf{s}}{\|\mathbf{l} - \mathbf{s}\|}, \mathbf{l} \times \mathbf{s} \right\rangle \\ &= \left( \frac{1}{\|\mathbf{s}\|} - \frac{1}{\|\mathbf{l} - \mathbf{s}\|} \right) \langle \mathbf{s}, \mathbf{l} \times \mathbf{s} \rangle + \frac{1}{\|\mathbf{l} - \mathbf{s}\|} \langle \mathbf{l}, \mathbf{l} \times \mathbf{s} \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Damit ist die Orthogonalität von  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  bewiesen, aus der sofort die lineare Unabhängigkeit folgt.

□

## 3.2 Die induzierte Abbildung

Wie in der Variante 2 des Reflexionsgesetzes verfolgen Chen et al. [16] Lichtstrahlen von einer festen Punktlichtquelle zum variablen optischen Zentrum  $C$  einer bewegten Lochkamera. Die von den Autoren vorgestellte *Pfadfunktion* bildet die Kameralage  $C$  auf den Punkt  $\mathbf{s} \in S$  ab, der bezüglich  $C$  und  $\mathbf{l}$  einen *spekularen Pfad* vermittelt. In dieser Arbeit

hat sich die dazu äquivalente Betrachtung des umgekehrten Lichtwegs häufig als zweckmäßig erwiesen. Spiegelt man ein System von Sichtstrahlen – eine Sichtstrahlenkongruenz  $\mathcal{S}$  – an einer Fläche, wird jedem Reflexionspunkt der Schnitt seines Reflexstrahls mit der umgebenden Szene und insbesondere  $L$  zugeordnet.

Die Eigenschaften dieser Zuordnung lassen sich lokal in offenen Teilmengen von  $S$  und  $L$  studieren. Globale Aussagen über die deflektometrische Kopplung der beteiligten Flächen zu treffen, scheint dagegen schwierig, da dabei auch topologische Aspekte berücksichtigt werden müssen.

Folgende Fragestellungen sollen behandelt werden:

1. Stetigkeit und Differenzierbarkeit,
2. Injektivität.

Aus 1. kann man notwendige Bedingungen für die eindeutige Rekonstruierbarkeit der gesuchten Fläche ableiten. Die Injektivität ist bei deflektometrischer Oberflächenprüfung durch *inverse Anregung* von Bedeutung: Dabei handelt es sich beispielsweise um Linienmuster, deren Geometrie bezüglich eines Gutteils so berechnet wird, dass sie bei Anzeige auf dem Mustergenerator eine unverzerrte Beobachtung hervorrufen [66]. Die Berechnung kann offline erfolgen, so dass die Online-Prüfung mit minimalem Zeitaufwand zu bewerkstelligen ist. Im messtechnischen Sinne eines Differenzenverfahrens muss nur noch nach Abweichungen vom erwarteten Kamerabild gesucht werden.

Wir fassen also nun gesuchte Oberfläche und Schirm als Flächen  $S$  beziehungsweise  $L$  im Sinne der Definition 2.2 auf. Parametrisiert man die Oberfläche zum Beispiel über die Bildebene einer Lochkamera, entspricht die Karte  $h : S \supseteq U \mapsto \tilde{U}$ ,  $(u, v) = h(\mathbf{s})$ , die Zentralprojektion  $h_3$  aus (2.5), und  $k : L \supseteq V \mapsto \tilde{V}$ ,  $(l_1, l_2) = k(\mathbf{l})$  verkörpert das Vorwissen über die Geometrie des Mustergenerators. Der Schnitt der Reflexionskongruenz  $\mathcal{R}$  mit  $L$  induziert eine Abbildung  $\Psi$  zwischen regulären Flächen:

$$\begin{array}{ccc}
 S \supseteq U & \xrightarrow{\Psi} & V \subseteq L \\
 \downarrow h & & \downarrow k \\
 \mathbb{R}^2 \supseteq \tilde{U} & \xrightarrow{\psi = k \circ \Psi \circ h^{-1}} & \tilde{V} \subseteq \mathbb{R}^2
 \end{array} \tag{3.6}$$

Dabei bezeichne  $\psi = k \circ \Psi \circ h^{-1}$  die *Kartenabbildung*. Spezifizieren wir die Geometrie des Mustergenerators durch  $L := \{(x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$  (im Folgenden oft durch  $L : z = 0$  abgekürzt), können wir nun den Ausdruck  $\mathbf{l} = \Psi(\mathbf{s})$  mit Leben erfüllen:

**Lemma 3.3** (Vorwärtsproblem). *Seien  $S$  beliebig und  $L : z = 0$  reguläre Flächen. Reflexion der Normalenkongruenz  $\mathcal{N}(S^2)$  an  $S$  induziert eine Abbildung  $\Psi : S \mapsto L$ . Für  $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)^\top \in S$ ,  $s_3 > 0$ , und  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)^\top \in T_{\mathbf{s}}S^\perp$ ,  $n_3 > 0$ , gilt dann*

$$\mathbf{l} = \Psi(\mathbf{s}) = -2\mu(\nu\mathbf{n} - \mathbf{s}), \quad (3.7)$$

wobei

$$\nu = \frac{s_3}{n_3} \quad \text{und} \quad \mu = \frac{1}{1 - \frac{\langle \nu\mathbf{n} - \mathbf{s}, \mathbf{n} \rangle}{\langle \mathbf{s}, \mathbf{n} \rangle}}. \quad (3.8)$$

*Beweis.* Für einen Punkt  $\mathbf{x}_r$  auf dem Reflexionsstrahl  $g_r$  durch  $\mathbf{s}$  gilt mit  $\mathbf{H} = \mathbf{I} - 2\hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}}^\top$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_r(\lambda) &= \mathbf{s} + \lambda\mathbf{r} \\ &= \mathbf{s} + \lambda\mathbf{H}\mathbf{s} \\ &= \mathbf{s} + \lambda \left( \mathbf{s} + \frac{2}{\|\mathbf{n}\|^2} \langle \mathbf{s}, \mathbf{n} \rangle \mathbf{n} \right). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Aus dieser Beziehung muss noch der Parameter  $\lambda$  eliminiert werden. Sei  $\mathbf{x}_r(\lambda) \in L$  für  $\lambda = \tilde{\lambda}$  und  $\mathbf{l} := \mathbf{x}_r(\tilde{\lambda})$ . Es gilt

$$x_3 = s_3 + \tilde{\lambda} \left( s_3 + \frac{2}{\|\mathbf{n}\|^2} \langle \mathbf{s}, \mathbf{n} \rangle n_3 \right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\lambda} = -\frac{s_3}{s_3 + \frac{2}{\|\mathbf{n}\|^2} \langle \mathbf{s}, \mathbf{n} \rangle n_3}.$$

Einsetzen von  $\lambda = \tilde{\lambda}$  in (3.9) liefert

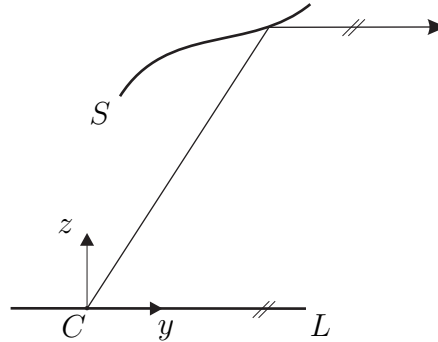
$$\mathbf{l} = \Psi(\mathbf{s}) = \left( \mathbf{I} - \frac{s_3}{s_3 + \frac{2}{\|\mathbf{n}\|^2} \langle \mathbf{s}, \mathbf{n} \rangle n_3} \mathbf{H} \right) \mathbf{s},$$

und nach einigen mühsamen Umformungen folgt schließlich die Behauptung. □

Die Abbildung  $\psi = k \circ \Psi \circ h^{-1}$  zwischen den Parameterbereichen von  $S$  und  $L$  hängt natürlich von der Wahl der Karten  $h$  und  $k$  ab:

**Korollar 3.4.** *Es gelten die Voraussetzungen von Lemma 3.3. Die Oberfläche lasse sich mit Hilfe der in Kapitel 2.1 eingeführten Abbildung  $h_3$  parametrisieren, so dass  $\mathbf{u} := h_3(\mathbf{s})$  für alle  $\mathbf{s} \in U \cap S$ . Des Weiteren sei  $k : (x, y, z)^\top \mapsto (x, y)^\top$  eine Karte von  $L$ , so dass  $\tilde{\mathbf{l}} := k(\mathbf{l})$ . Dann gilt für  $\psi : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$*

$$\tilde{\mathbf{l}} = \psi(\mathbf{u}) = -2s_3\mu(\mathbf{p} - \mathbf{u}). \quad (3.10)$$



**Abbildung 3.2:** Geometrische Veranschaulichung eines Pols der induzierten Abbildung.

Die Gleichung bestätigt die Tatsache, die sich schon in der Unterraumbedingung (3.4b) widerspiegelt, dass die „Richtung“  $\pi(\tilde{\mathbf{l}}) \in S^1$  des beobachteten Schirmpunkts unabhängig von  $s_3$  ist. Sie wird von der normalisierten Differenz  $\mathbf{p} - \mathbf{u}$  von Oberflächenneigung und Blickrichtung bestimmt. Wir werden das im Abschnitt 4.1.2 präzisieren und geben zunächst den kurzen

*Beweis.* Die Behauptung folgt dann aus (3.7) durch Einsetzen von  $\mathbf{u} = h_3(\mathbf{s})$  und  $\mathbf{p} = h_3 \circ N \circ h_3^{-1}(\mathbf{u})$ , Ausklammern von  $s_3(\mathbf{u})$  und mit der Linearität der Projektion  $k$ .

□

### 3.2.1 Pole

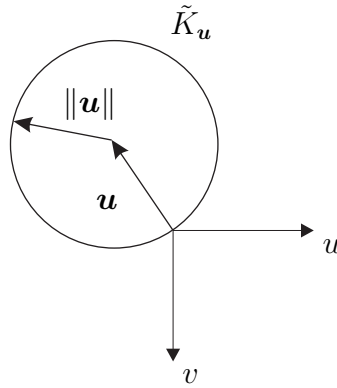
Ein Punkt  $\mathbf{s} \in S$  heiße *Pol* von  $\Psi$  beziehungsweise  $\psi$ , wenn in ihm der Sichtstrahl parallel zur Ebene  $L$  reflektiert wird (siehe Abbildung 3.2). Dann gilt  $\Psi(\mathbf{s}) = \infty$ . Wir nehmen sinnvollerweise an, dass sich die Oberfläche in endlicher Entfernung vom Projektionszentrum befindet ( $s_3 < \infty$ ) und dass  $[\mathbf{s}]$  und  $[\mathbf{n}]$  keine Fernpunkte von  $\mathbb{R}P^2$  sind, das heißt  $\|\mathbf{u}\|, \|\mathbf{p}\| < \infty$ . Dann ist auch  $-2s_3(\mathbf{p} - \mathbf{u})$  aus (3.10) beschränkt, und das asymptotische Verhalten von  $\psi$  wird allein durch den Faktor  $\mu = \frac{1}{1-q}$  mit

$$q = \frac{\langle \nu \mathbf{n} - \mathbf{s}, \mathbf{n} \rangle}{\langle \mathbf{s}, \mathbf{n} \rangle}$$

bestimmt. Wegen (3.10) ist  $\lim_{q \rightarrow 1} \|\mathbf{l}\| \rightarrow \infty$ , also untersuchen wir die Beziehung

$$\begin{aligned} q(\mathbf{s}, \mathbf{n}) = 1 &\Leftrightarrow \langle \nu \mathbf{n} - \mathbf{s}, \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{s}, \mathbf{n} \rangle \\ &\Leftrightarrow \langle \nu \mathbf{n} - 2\mathbf{s}, \mathbf{n} \rangle = 0. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Bemerkenswerterweise kann man sich mit Hilfe einer Division durch  $s_3$ ,  $s_3 > 0$ , von der Entfernungsabhängigkeit der Singularitäten befreien (siehe oben). Außerdem teilt



**Abbildung 3.3:** Geometrische Bedeutung von  $\tilde{K}_u$ .

man (3.11) durch  $n_3 > 0$  und erhält mit der Definition von  $\nu$  und nach Einsetzen von  $\mathbf{p}$  und  $\mathbf{u}$

$$\begin{aligned} 0 &= \|\mathbf{p}\|^2 - 2\langle \mathbf{p}, \mathbf{u} \rangle \\ &= \|\mathbf{p}\|^2 - 2\langle \mathbf{p}, \mathbf{u} \rangle + \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 \\ &= \|\mathbf{p} - \mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2. \end{aligned}$$

Ob ein Punkt  $\mathbf{s}$  noch zu einer Beobachtung auf dem Schirm führen kann, hängt einzig von seiner Oberflächenneigung  $\mathbf{p}$  und der Richtung  $\mathbf{u}$  ab, unter der er gesehen wird. Die folgende Definition charakterisiert kritische Paarungen aus  $\mathbf{p}$  und  $\mathbf{u}$ :

**Definition 3.5.** Für einen Oberflächenpunkt  $\mathbf{s} \in S$  mit Normalenrichtung  $\mathbf{n} \in T_s S^\perp$  seien  $\mathbf{u} = h_3([\mathbf{s}])$  beziehungsweise  $\mathbf{p} = h_3([\mathbf{n}])$ . Es heißt  $K_u = h_3^{-1}(\tilde{K}_u) \subset \mathbb{R}P^2$  mit

$$\tilde{K}_u := \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\mathbf{p} - \mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2\}$$

Menge der kritischen Neigungen zur Blickrichtung  $\mathbf{u}$ .

Offensichtlich ist  $K_u$  eine Kurve in der projektiven Ebene, und  $K_u$  wird im Parameterbereich durch einen Kreis  $\tilde{K}_u$  mit Mittelpunkt  $\mathbf{u}$  und Radius  $\|\mathbf{u}\|$  beschrieben (siehe Abbildung 3.3). Der Rand von  $\tilde{K}_u$  muss natürlich den Koordinatenursprung enthalten. Denn eine waagerechte Ebene, das heißt  $\mathbf{p} = \mathbf{0} = \text{const.}$ , enthält abgesehen von ihren Fernpunkten keine Pole. Das Innere dieser Kreisscheibe bezeichnen wir mit  $\tilde{K}_u^- := \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\mathbf{p} - \mathbf{u}\|^2 < \|\mathbf{u}\|^2\}$  und analog  $K_u^- = h_3^{-1}(\tilde{K}_u^-)$ . Die Vektoren  $\mathbf{u} \in \Omega_E$  finden ihre Entsprechung in den Bildpunkten, wenn man ein Lochkammermodell zugrunde legt (siehe Abschnitt 2.1). Mit dem bekannten Wertebereich von  $\mathbf{u}$  fordert man nun von den auftretenden Oberflächenneigungen  $\mathbf{p} \in \tilde{K}_u$  für alle  $\mathbf{u} \in \Omega_E$ . Es sei allerdings angemerkt, dass der Mustergenerator  $L$  in der Praxis endliche Abmessungen besitzt, was eine strengere Abschätzung bei der Definition von  $\tilde{K}_u$  erforderlich macht.

### 3.2.2 Asymptotik

Die Eignung eines messtechnischen Verfahrens hängt von der Empfindlichkeit des Sensors bezüglich der Messgrößen ab. Die im nächsten Lemma angegebenen Empfindlichkeiten bezüglich Neigung und Entfernung behalten ihre Gültigkeiten über den Spezialfall  $L : z = 0$  hinaus.

**Lemma 3.6.** *Für einen Oberflächenpunkt  $\mathbf{s} \in S$  mit Normalen  $\mathbf{n} \in T_{\mathbf{s}}S^\perp$  seien  $\mathbf{u} = h_3([\mathbf{s}])$  und  $\mathbf{p} = h_3([\mathbf{n}])$ . Für  $\mathbf{p} \in \tilde{K}_{\mathbf{u}}^-$  ist dann*

$$\|\tilde{\mathbf{l}}\| \in \Omega(s_3 \cdot \|\mathbf{p}\|^2).$$

Das Landau-Symbol<sup>3.2</sup>  $\Omega(\cdot)$  beschreibt hier die Mindestwachstumsrate von  $\|\tilde{\mathbf{l}}\|$  (durch das Argument vom Gebiet  $\Omega$  zu unterscheiden). Das bedeutet,  $\|\tilde{\mathbf{l}}\|$  wächst für einen festen Oberflächenpunkt  $\mathbf{s}$  mindestens linear mit der Entfernung in  $z$ -Richtung beziehungsweise quadratisch mit der Oberflächenneigung  $\|\mathbf{p}\|$ . Natürlich ist auch  $\|\Delta\tilde{\mathbf{l}}\| \in \Omega(\Delta s_3 \cdot \|\Delta\mathbf{p}\|^2)$ , und folglich skaliert so auch die Auflösbarkeit von Entfernungs- beziehungsweise Neigungsänderungen auf dem Mustergenerator.

*Beweis von Lemma 3.6.* Zuerst schätzt man  $\|\tilde{\mathbf{l}}\|$  mit Hilfe der unteren Dreiecksungleichung ab, das heißt

$$\|\tilde{\mathbf{l}}\| \stackrel{(3.10)}{=} 2s_3\mu\|\mathbf{p} - \mathbf{u}\| = 2s_3\frac{1}{1-q}\|\mathbf{p} - \mathbf{u}\| \geq 2s_3\frac{1}{1-q}(\|\mathbf{p}\| - \|\mathbf{u}\|).$$

Aus  $\mathbf{p} \in \tilde{K}_{\mathbf{u}}^- \Rightarrow |q| < 1$ , also lässt sich  $\mu$  in eine geometrische Reihe entwickeln, für die gilt

$$\mu = \frac{1}{1-q} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k > 1 + q,$$

so dass

$$\|\tilde{\mathbf{l}}\| > 2s_3(1+q)(\|\mathbf{p}\| - \|\mathbf{u}\|).$$

Einsetzen von  $q = \frac{\|\mathbf{p}\|^2 - \langle \mathbf{p}, \mathbf{u} \rangle}{1 + \langle \mathbf{p}, \mathbf{u} \rangle}$  liefert

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{l}}\| &\geq 2s_3 \frac{1 + \|\mathbf{p}\|^2}{1 + |\langle \mathbf{p}, \mathbf{u} \rangle|} (\|\mathbf{p}\| - \|\mathbf{u}\|) \\ &\stackrel{\text{CS}}{\geq} 2s_3 \frac{1 + \|\mathbf{p}\|^2}{1 + \|\mathbf{p}\|\|\mathbf{u}\|} (\|\mathbf{p}\| - \|\mathbf{u}\|), \end{aligned}$$

wobei im letzten Rechenschritt die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung angewandt wurde. □

---

<sup>3.2</sup>Es gilt die Äquivalenz  $f \in \Omega(g) \Leftrightarrow 0 < \liminf_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq \infty$ .



### 3.2.3 Stetigkeit

Die punktweise Betrachtung der induzierten Abbildung  $\Psi$  weiten wir nun auf offene Umgebungen in  $S$  aus. Wir stützen uns dabei auf die Graphendarstellung (2.2), was uns der folgende Satz erlaubt, der besagt, dass jede reguläre Fläche lokal als Graph einer Funktion darstellbar ist:

**Satz 3.7.** *Es sei  $S$  eine reguläre  $C^k$ -Fläche. Dann gibt es zu jedem Punkt  $\mathbf{s} \in S$  eine offene Menge  $U \subset \mathbb{R}^3$ , so dass  $S \cap U$  der Graph einer  $C^k$ -Funktion ist.*

*Beweis.* Siehe zum Beispiel [42].

□

Die Aussage des Satzes ist fundamental für alles Folgende. Zunächst einmal wird das differentialgeometrische Modell der zu prüfenden Oberfläche gerechtfertigt. Anhand einer Funktion  $f$ , die sich ja lokal immer angeben lässt, können wir intrinsische Eigenschaften von  $S$  beziehungsweise  $\Psi$  nachweisen, die aber von der Wahl dieser Parametrisierung unabhängig sind. Das gilt zum Beispiel für die Stetigkeit der induzierten Abbildung:

**Satz 3.8.** *Es gelten die Voraussetzungen von Lemma 3.3. In einer beschränkten offenen Menge  $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^2$  sei  $f \in C^2(\tilde{U})$  nichtnegativ und beschränkt die Parameterisierung (2.2) einer Spiegelfläche beschränkter Normalschnittkrümmung. Dann existiert ein  $C_s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ , so dass die Kartenabbildung  $\psi$  Lipschitz-stetig ist auf  $\Omega := \{\mathbf{x} \in \tilde{U} \mid \|\nabla f\| < C_s\} \subset \tilde{U}$ .*

Die Forderung nach Nichtnegativität von  $f$  ist nur eine technische Einschränkung, die hier wegen der Voraussetzung  $s_3 > 0$  aus Lemma 3.3 gestellt werden muss.

*Beweis von Satz 3.8.* Betrachte zunächst die Funktion  $2\mu$  aus (3.7) mit  $\mu = \frac{1}{1-q}$ . Wir wählen  $C_s$  so, dass die Äquivalenz  $\|\nabla f\| = \|h_3([\mathbf{n}])\| = \|\mathbf{p}\| \leq C_s \Leftrightarrow \mathbf{p} \in \tilde{K}_u^-$  für alle  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  gilt, die man durch Zentralprojektion von  $(\mathbf{x}^\top, f)^\top$  erhält, so dass auch  $q < 1$  (\*)

auf  $\Omega^{3,3}$ . Für  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$  zeigen wir zunächst

$$\begin{aligned} |2\mu(\mathbf{x}) - 2\mu(\mathbf{y})| &= 2 \left| \frac{1}{1 - q(\mathbf{x})} - \frac{1}{1 - q(\mathbf{y})} \right| \\ &= 2 \left| \frac{q(\mathbf{x}) - q(\mathbf{y})}{[1 - q(\mathbf{x})][1 - q(\mathbf{y})]} \right| \\ &\stackrel{(*)}{\leq} 2 \frac{2}{\left[1 - \max_{\mathbf{x} \in \Omega} q(\mathbf{x})\right]^2} \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \\ &\leq \frac{4}{\left[1 - \max_{\mathbf{x} \in \Omega} q(\mathbf{x})\right]^2} \frac{1}{\text{diam } \Omega} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \end{aligned}$$

wobei  $\text{diam } \Omega := \sup_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ . Aus der Beschränktheit von  $q$  und  $\tilde{U}$  folgt dann sofort die Lipschitz-Stetigkeit der Funktion  $2\mu$ .

In einem zweiten Schritt zeigt man die Lipschitz-Stetigkeit von  $f\nabla f + \mathbf{x}$ . Mit Hilfe der Koordinatentransformation

$$h(\mathbf{x}) := \frac{1}{2}(\|\mathbf{x}\|^2 + f^2) = \frac{1}{2}\|\mathbf{s}\|^2 \quad (3.12)$$

wird die Identität  $f\nabla f + \mathbf{x} = \nabla h$  erhalten. Die Funktion  $h$  kann als Abstandspotential aufgefasst werden. Im Einzelnen setzt man zunächst  $g := \frac{1}{2}f^2 \Leftrightarrow f = \sqrt{2g}$ , so dass  $\nabla f = \partial_g f \nabla g = \frac{1}{\sqrt{2g}} \nabla g$ . Da ja  $f > 0$ , ist diese Zuordnung bijektiv. Substituiere des Weiteren noch  $g$  durch  $h := \frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|^2 + g \Leftrightarrow g = h - \frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|^2$ . Die Hesse-Matrix

$$\nabla^2 h = \mathbf{I} + \nabla f \nabla f^\top + f \nabla^2 f$$

von  $h$  repräsentiert eine beschränkte lineare Abbildung. Denn: Die ersten zwei Summanden sind beschränkt, da  $f$  nach Voraussetzung beschränkt war und  $\|\nabla f\| < C_s$  in  $\Omega$ . Auf  $\nabla^2 f$  wende man unter Ausnutzung der Normäquivalenz im Endlichdimensionalen die Spektralnorm<sup>3,4</sup> an. Da  $\nabla^2 f$  symmetrisch ist, gilt  $\|\nabla^2 f\|_2 = \max_{\lambda \in \sigma(\nabla^2 f)} \lambda$ . Das ist aber gerade die größte auftretende Normalschnittkrümmung  $\kappa_n$ ; die war ebenfalls nach Voraussetzung beschränkt. Unter Verwendung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung<sup>3,5</sup> zeigt man, dass stetig differenzierbare Funktionen mit beschränktem Differential Lipschitz-stetig sind, so auch  $h$ .

Somit ist  $\Psi$  als Produkt Lipschitz-stetiger Funktionen wieder Lipschitz-stetig. Eine dem Beweis von Satz 2.3 entlehene Argumentation zeigt, dass das auch für die Kartenabbildung  $\psi$  gilt, und damit ist der Satz bewiesen.  $\square$

<sup>3,3</sup>Da  $f \in C^2(\tilde{U})$ , besitzt  $\Omega$  mindestens einen Häufungspunkt!

<sup>3,4</sup> $\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\rho}$  mit Spektralradius  $\rho = \max_{\lambda \in \sigma(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})} \lambda$

<sup>3,5</sup>Dieser besagt im skalarwertigen Fall, dass für eine Sekante an eine stetige Funktion im Intervall der beiden Stützpunkte immer eine Tangente gleicher Steigung existiert. Die Verallgemeinerung auf den dreidimensionalen Fall ist offensichtlich.

Was bedeutet dieses Ergebnis für die messtechnische Fragestellung? Wenn wir bei der Rekonstruktion nur die Funktionenklasse zulassen, dann ist in der Folge von Satz 3.8 auch von der Lipschitz-Stetigkeit der gemessenen Kartenabbildung  $\psi$  auszugehen. Später wird gezeigt, dass unter diesen Voraussetzungen das inverse Problem eindeutig gelöst werden kann. Alle in der Klasse befindlichen Oberflächen können prinzipiell durch ein deflektometrisches Verfahren zurückgewonnen werden, und so schließt sich der Kreis.

*Bemerkung:* Unter der Voraussetzung, dass keine Pole auftreten, kann man die stetige Differenzierbarkeit von  $\psi$  zeigen. Das könnte ungefähr so aussehen: Eine  $C^k$ -Karte,  $k \geq 2$ , von  $S$  erhält man auch durch Zentralprojektion  $h_3 : S \mapsto \tilde{U}$ . Die Formulierung des Reflexionsgesetzes verwendet die Oberflächennormale, so dass die Zuordnung eines Elements der Bildebene zu einer Geraden der Reflexionskongruenz  $C^{k-1}$  ist. Beim Schnitt des Reflexstrahls mit  $L$  wird die Differenzierbarkeitsordnung nicht erniedrigt (es war vorausgesetzt, dass der Schnitt tatsächlich existiert), so dass auch  $\psi \in C^{k-1}(\tilde{U})$  gilt. Das folgt im Wesentlichen auch schon aus dem Satz von Rademacher, der besagt, dass Lipschitz-stetige Funktionen fast überall differenzierbar sind.

Notwendig für die Wohldefiniertheit von  $\Psi$  ist die Tatsache, dass die Fläche in der betrachteten Umgebung eines Reflexionspunktes von den Elementen der Sichtstrahlenkongruenz nur einmal geschnitten wird<sup>3.6</sup>. Die folgende formale Definition ist nicht auf spiegelnde Oberflächen beschränkt, sie lässt sich in der Bildverarbeitung allgemein anwenden:

**Definition 3.10** (Okklusion). Sei  $S_g := g \cap S$ . Ein Tupel  $(g, S_g) \subset \mathcal{N}(S^2) \times S$  nennt man eine Okklusion genau dann, wenn  $|S_g| \geq 2$ . Die Menge  $\mathcal{N}(S^2) \times S$  heißt okklusionsfrei, wenn  $|S_g| < 2$  für alle  $g \in \mathcal{N}(S^2)$ .

Diese Situation ist in Abbildung 3.4 vergegenwärtigt. Auch der Fall, in dem ein Sichtstrahl die Spiegelfläche überhaupt nicht schneidet, ist eingeschlossen. Es gilt nun das

**Lemma 3.11.** *Es gelten die Voraussetzungen von Satz 3.8. Sei  $C_s$  so gewählt, dass die Kartenabbildung Lipschitz-stetig ist und  $\Omega$  wegzusammenhängend<sup>3.7</sup>, dann ist die Menge  $\mathcal{N}(S^2) \times S$  für alle  $\mathbf{x} \in \Omega$  okklusionsfrei.*

*Beweis.* Es folgt ein Beweis durch Widerspruch: Laut Voraussetzung ist der Gradient durch  $C_s$  derart beschränkt, dass  $f$  Lipschitz-stetig ist, was wiederum impliziert, dass

<sup>3.6</sup>Mehrfachreflexionen schließen wir hier aus. Ihre theoretische Behandlung ist äußerst schwierig, da diese sich nicht mehr nur auf offene Teilmengen von  $S$  beschränkt. Stattdessen sind globale Eigenschaften (Topologie, Variation, etc.) zu berücksichtigen.

<sup>3.7</sup>Ein topologischer Raum  $X$  ist wegzusammenhängend, falls es für jedes Paar von Punkten  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$  einen Weg  $\mathbf{c}$  von  $\mathbf{x}$  nach  $\mathbf{y}$  gibt, das heißt eine stetige Abbildung  $\mathbf{c} : [0, 1] \mapsto X$  mit  $\mathbf{c}(0) = \mathbf{x}$  und  $\mathbf{c}(1) = \mathbf{y}$ .

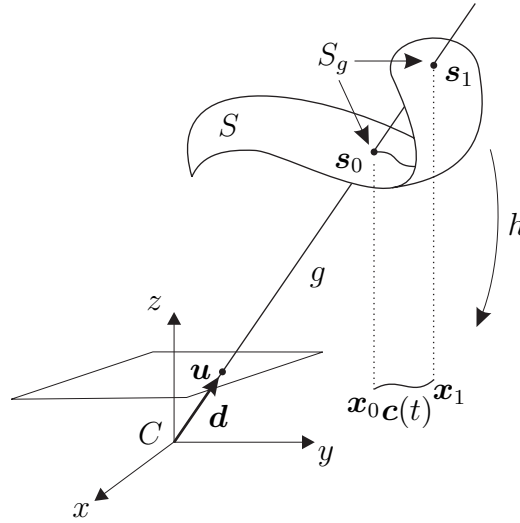


Abbildung 3.4: Formale Definition einer Verdeckung.

$-\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{p}(\mathbf{x}) \in K_u^-$  für alle  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Wir nehmen nun an, dass eine Verdeckung  $(g, S_g)$  vorliegt. Durch  $\mathbf{s}_i \trianglelefteq \mathbf{s}_j \Leftrightarrow \|\mathbf{s}_i\| \leq \|\mathbf{s}_j\|$ ,  $i, j \in \mathbb{N}_0$ , ist eine Totalordnung auf  $S_g$  definiert. Setze nun  $\mathbf{x}_0 = h(\mathbf{s}_0)$  und  $\mathbf{x}_1 = h(\mathbf{s}_1)$ , siehe dazu auch Abbildung 3.4.

Da  $\Omega$  wegzusammenhängend ist, existiert im Parameterbereich ein Weg zwischen  $\mathbf{x}_0$  und  $\mathbf{x}_1$  (wie man leicht zeigt, auch zwischen  $\mathbf{s}_0$  und  $\mathbf{s}_1$  in  $S$ ), das heißt eine stetige Abbildung  $\mathbf{c} : [0, 1] \mapsto \Omega$  mit  $\mathbf{c}(0) = \mathbf{x}_0$  und  $\mathbf{c}(1) = \mathbf{x}_1$ . Definiere nun die Funktion  $l : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$l(t) := \left\langle \mathbf{n}(\mathbf{c}(t)), \begin{pmatrix} \mathbf{c}(t) \\ f(\mathbf{c}(t)) \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Geometrisch argumentiert man, dass  $\text{sign } l(0) \neq \text{sign } l(1)$ : In einem der beiden Schnittpunkte zeigen Blickrichtung und Normale in dieselbe Richtung in dem Sinne, dass der eingeschlossene Winkel kleiner als  $\frac{\pi}{2}$  ist. Im anderen ist es umgekehrt. Mit Hilfe des Zwischenwertsatzes<sup>3,8</sup> folgert man nun die Existenz eines  $\tilde{t}$  mit  $l(\tilde{t}) = 0$ , was impliziert, dass der Sichtstrahl durch  $(\mathbf{c}(\tilde{t}), f(\mathbf{c}(\tilde{t})))^\top$  die Fläche dort tangential berührt.

Da  $\mathbb{R}P^2 \cong \mathcal{N}(S^2)$ , greifen wir auf die Karte  $h_3$  zurück. Es ist dann  $\hat{\mathbf{d}}(\mathbf{u})$ ,  $\mathbf{d}(\mathbf{u}) = (\mathbf{u}, 1)^\top$ , das sphärische Bilds von  $\mathcal{N}(S^2)$ . In  $\mathbf{c}(\tilde{t}) \in \Omega$  ist  $l(\tilde{t}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{n} \perp \hat{\mathbf{d}} \Leftrightarrow \langle \mathbf{n}, \hat{\mathbf{d}} \rangle = \langle \mathbf{n}, \mathbf{d} \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \mathbf{p}, \mathbf{u} \rangle = -1$  (\*), wenn man die Normale als  $\mathbf{n} = (\mathbf{p}, 1)^\top$  schreibt. Es gilt

$$\|\mathbf{p} - \mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{p}\|^2 - 2\langle \mathbf{p}, \mathbf{u} \rangle + \|\mathbf{u}\|^2 \stackrel{(*)}{=} \|\mathbf{p}\|^2 + 2 + \|\mathbf{u}\|^2 > \|\mathbf{u}\|^2.$$

Das bedeutet, dass  $\mathbf{p} \notin K_u^-$ , was ein Widerspruch ist, denn laut Voraussetzung war ja  $C_s$  so gewählt, dass  $\mathbf{p} \in \tilde{K}_u^-$  für alle  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$ .  $\square$

<sup>3,8</sup>Der Zwischenwertsatz sagt aus, dass eine reelle Funktion  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ , die auf einem abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$  stetig ist, jeden Wert zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  annimmt. Insbesondere gibt es in  $[a, b]$  mindestens eine Nullstelle, wenn  $f$  in  $a$  und  $b$  verschiedene Vorzeichen besitzt.

Die Forderung nach Lipschitz-Stetigkeit ist also – keineswegs offensichtlich – tatsächlich stärker als die nach Verdeckungsfreiheit. Schränkt man die Menge der erlaubten Oberflächen so ein, dass die Voraussetzungen aus Satz 3.8 erfüllt sind, ist tatsächlich nicht mit Okklusionen zu rechnen.

Ist ferner  $\mathcal{N}(S^2) \times S$  okklusionsfrei, so definiert die Sichtstrahlenkongruenz eine Parametrisierung von  $S$  für alle  $g \in \mathcal{N}(S^2)$ , für die  $|g(\mathbf{u}) \cap S| = 1$ . So erhält man nämlich eine bijektive Zuordnung  $\mathbf{u} \leftrightarrow S$ , bei der es sich sogar um einen Diffeomorphismus handelt. Damit ist eine weitere Parametrisierung von  $S$  gegeben. Für Lipschitz-stetiges  $\Psi$  ist es also möglich, die Oberfläche zumindest in lokalen Umgebungen über der Bildebene zu parametrisieren. Das hat besonders praktische Konsequenzen, die bei der Entwicklung des im nächsten Kapitel beschriebenen Rekonstruktionsverfahrens eine Rolle spielen.

### 3.2.4 Singularitäten

Zuletzt sollen die Punkte in  $S$  untersucht werden, in denen die Abbildung  $\Psi$  singulär wird. In diesen wird das Differential  $d\Psi$  in Form der Jacobi-Matrix definitionsgemäß rangdefizient (siehe Definition 2.4). Unter den Voraussetzungen von Satz 3.8 kann man sie mit Hilfe des Begriffs der Brennfläche aus der Einführung über Strahlenkongruenzen 2.5 wie folgt charakterisieren:

**Lemma 3.12.** *Die Menge der singulären Werte von  $\Psi$  ist  $L \cap \mathcal{F}(\mathcal{R})$ .*

Wichtig: Punkte der Brennfläche der Reflexionskongruenz können auch außerhalb von  $L$  liegen.

*Beweis von Lemma 3.12.* Seien  $g_r \in \mathcal{R}$  und  $U := [\partial_u \mathbf{r}, \partial_v \mathbf{r}, \partial_\lambda \mathbf{r}]$ . Wegen der Darstellung  $g_r : \mathbf{r}(\lambda) = \mathbf{s}(\mathbf{u}) + \lambda \hat{\mathbf{d}}(\mathbf{u})$ , wobei  $\mathbf{s} \in S$  und  $\hat{\mathbf{d}} \in S^2$ , ist sicherlich  $\partial_\lambda \mathbf{r} = \hat{\mathbf{d}} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \dim U \geq 1$ . Damit  $\Psi$  wohldefiniert ist, gilt ferner  $\partial_\lambda \mathbf{r} \notin T_l L$ .  $\Psi(\mathbf{s}(\mathbf{u})) = \mathbf{l}(\mathbf{u})$  erhält man ja durch  $g_r \cap L$ . Entsprechend ist Bild  $\mathbf{J}_\Psi = [\partial_u \mathbf{l}, \partial_v \mathbf{l}] = U \cap T_l L$ .

Sei nun  $\mathbf{l}$  singulärer Wert von  $\Psi$ , das heißt  $\text{Rang } \mathbf{J}_\Psi \leq 1 \Leftrightarrow \dim(U \cap T_l L) \leq 1$ . Aus der Dimensionsformel für Untervektorräume folgt gleichzeitig  $\dim(U \cap T_l L) = \dim U + \dim T_l L - \dim(U + T_l L) = \dim U + 2 - 3 \leq 1$ , da ja  $\hat{\mathbf{d}} \notin T_l L$  und für  $L$  Regularität gefordert wurde. Addition von 1 auf beiden Seiten der Ungleichung ergibt  $\dim U \leq 2 \Leftrightarrow \det(\partial_u \mathbf{r}, \partial_v \mathbf{r}, \partial_\lambda \mathbf{r}) = 0$ .

□

In den regulären Punkten ist folglich auch die gemessene Zuordnung zwischen Schirm- und Kamerapixeln invertierbar:  $\mathcal{F}(\mathcal{R}) \cap L = \emptyset \Leftrightarrow \Psi$  bijektiv in  $\Psi^{-1}(L \cap U_\varepsilon(\mathbf{l})) \Leftrightarrow \psi$  bijektiv

in  $\psi^{-1}(U_\varepsilon(\tilde{\mathbf{l}}))$ ,  $\tilde{\mathbf{l}} = k(\mathbf{l})$ . Mit der Bijektivität von  $\psi$  ist zumindest die lokale Existenz eines inversen Musters gesichert. Die geometrische Bedeutung einer Singularität illustriert das folgende

### Beispiel 3.13 Ellipsoid

Ein Ellipsoid, dessen Brennpunkte im optischen Zentrum der Kamera und  $\mathbf{l} \in L$  liegen, besteht einzig aus singulären Punkten. Die Jacobi-Matrix  $\mathbf{J}_\psi$  von  $\mathbf{l}$  existiert, doch gilt sicherlich

$$\mathbf{J}_\psi = \begin{pmatrix} \frac{\partial l_1}{\partial u} & \frac{\partial l_1}{\partial v} \\ \frac{\partial l_2}{\partial u} & \frac{\partial l_2}{\partial v} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.13)$$

und damit  $\det \mathbf{J}_\psi = 0 \Rightarrow \text{Rang}_s \Psi \leq 2$  für alle  $\mathbf{s} \in S$ . Der Punkt  $\mathbf{l}$  erscheint dem Betrachter unter (theoretisch) unendlicher Vergrößerung.

□

Das Beispiel motiviert folgendes Lemma, das besagt, dass sogar der Umkehrschluss erlaubt ist:

**Lemma 3.14.** *Ist  $\mathbf{s} \in S$  ein singulärer Punkt von  $\Psi$ , dann existiert eine Richtung  $\dot{\mathbf{s}} \in T_{\mathbf{s}}S$ , in der die Normalschnittkrümmung  $\kappa_n$  von  $S$  gleich der des Ellipsoids mit Brennpunkten  $\mathbf{0}$  und  $\Psi(\mathbf{s})$ , das  $\mathbf{s}$  enthält, ist.*

*Beweis.* Sei  $\mathbf{s}(t)$  eine nach Bogenlänge parametrisierte Flächenkurve, die durch  $\mathbf{s}$  verläuft (siehe Abbildung 3.5). Mit einem Punkt kennzeichnen wir abkürzend alle Ableitungen

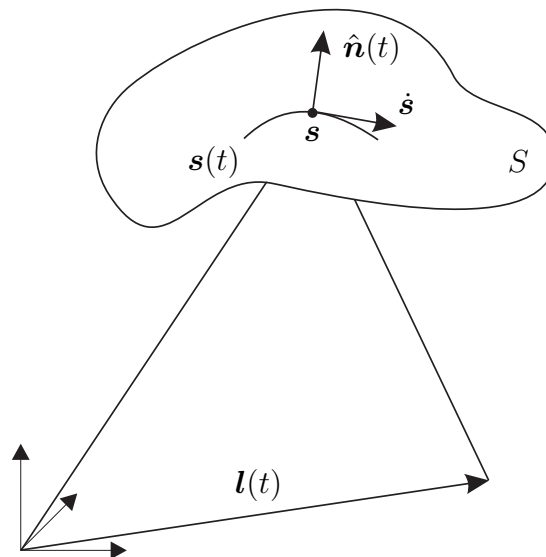


Abbildung 3.5: Zum Beweis von Lemma 3.14.

nach  $t$  in  $\mathbf{s} := \mathbf{s}(0)$ . Offensichtlich gilt  $\dot{\mathbf{s}} \in T_{\mathbf{s}}S$  (\*) und  $\dot{\mathbf{s}} = \kappa_n \hat{\mathbf{n}}(0)$ . So waren Tangentialraum und die Normalschnittkrümmung gerade definiert. Wir differenzieren (3.2) bezüglich  $t$  und erhalten mit  $c := c(0)$  und  $\hat{\mathbf{n}} := \hat{\mathbf{n}}(0)$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\mathbf{l}}{dt} \right|_{t=0} &= \left. \frac{d}{dt} (\mathbf{s}(t) + c(t)\mathbf{H}(t)\mathbf{s}(t)) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} (\mathbf{s}(t) + c(t)\mathbf{s}(t) - 2c(t)(\hat{\mathbf{n}}(t)\hat{\mathbf{n}}(t)^\top)\mathbf{s}(t)) \right|_{t=0} \\ &= \dot{\mathbf{s}} + \dot{c}\mathbf{s} + c\dot{\mathbf{s}} - 2\dot{c}(\hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}}^\top)\mathbf{s} - 2c\underbrace{(\dot{\hat{\mathbf{n}}}\hat{\mathbf{n}}^\top + \hat{\mathbf{n}}\dot{\hat{\mathbf{n}}}^\top)}_{\stackrel{(*)}{=}0}\mathbf{s} + (\hat{\mathbf{n}}\dot{\hat{\mathbf{n}}}^\top)\mathbf{s}. \end{aligned}$$

Eine der Frenet'schen Formeln für ebene Raumkurven lautet  $\dot{\hat{\mathbf{n}}} = -\kappa_n \dot{\mathbf{s}}$  (siehe [42]), so dass

$$\left. \frac{d\mathbf{l}}{dt} \right|_{t=0} = (1+c)\dot{\mathbf{s}} + \dot{c}\mathbf{H}\mathbf{s} + 2c\kappa_n(\hat{\mathbf{n}}\dot{\mathbf{s}}^\top + \dot{\hat{\mathbf{n}}}\mathbf{s}^\top)\mathbf{s}. \quad (3.14)$$

Die Funktion  $c(t)$  ist einzig durch die Geometrie des Mustergenerators bestimmt, insbesondere ist sie unabhängig von  $\kappa_n$ . Hält man in (3.14) die Oberflächeneigenschaften bis zur ersten Ordnung fest, ist die Zuordnung von  $\kappa_n$  zur Richtungsableitung auf der linken Seite affin, also injektiv: Ein Ellipsoid hat Beispiel 3.13 zufolge gerade die Eigenschaft, dass alle Richtungsableitungen verschwinden. Ist wie in einem singulären Punkt von  $\Psi$  umgekehrt  $\left. \frac{d\mathbf{l}}{dt} \right|_{t=0} = \mathbf{0}$  für beliebiges  $\dot{\mathbf{s}} \in T_{\mathbf{s}}S$ , entspricht  $\kappa_n$  der Normalschnittkrümmung des in der Voraussetzung des Satzes konstruierten Ellipsoids. Damit ist alles gezeigt.  $\square$

### 3.3 Das inverse Problem

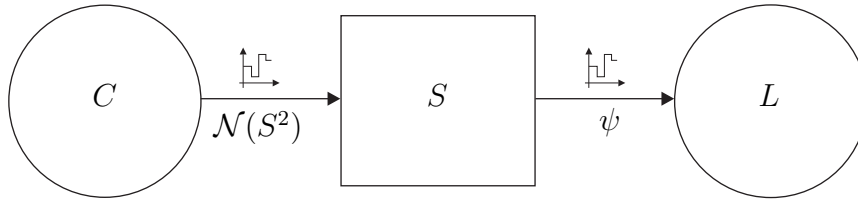
Aus der deflektometrischen Messung geht  $\psi$  hervor, wie in Abbildung 3.6 anhand eines Signalmodells angedeutet wird. Gesucht ist nun die Funktion  $h^{-1}$ , die jedem Parameterpaar den entsprechenden Oberflächenpunkt zuordnet, also

$$h^{-1} = \Psi^{-1} \circ k^{-1} \circ \psi, \quad (3.15)$$

wobei die Hauptschwierigkeit darin liegt, dass  $\Psi$  von den Eigenschaften der Oberfläche und der Sichtstrahlenkongruenz abhängt. Das Problem ist stark nichtlinear und schlecht gestellt im Sinne der eindeutigen Invertierbarkeit (siehe Abschnitt 2.4).

#### 3.3.1 Punktweise Inversion

Gleichung (3.15) modifizieren wir leicht, und mit  $\mathbf{s} = h^{-1}(\mathbf{u}) = h^{-1}(u, v)$  erhalten wir  $\psi(\mathbf{u}) = k \circ \Psi(\mathbf{s})$  beziehungsweise genauer  $\psi(\mathbf{u}) = k \circ \Psi(\mathbf{s}, \mathbf{n})$ . Wieder modelliert  $k$  die



**Abbildung 3.6:** Signalmodell: Das einfallende Sichtstrahlensystem wird von der Oberfläche moduliert. Die Umkehrung der systemtheoretischen Betrachtung aus Kapitel 1 stellt keine Einschränkung dar.

Geometrie des kalibrierten Mustergenerators. Außerdem ist (unabhängig von der Wahl der Karte  $h$ )  $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\partial_u h, \partial_v h)$  eine Funktion der Ableitungen von  $h$  nach den beiden Parametern. Es folgt schließlich

$$\psi(\mathbf{u}) = k \circ \Psi(h^{-1}(\mathbf{u}), \mathbf{n}(\partial_u h, \partial_v h)). \quad (3.16)$$

Festhalten des Parameterpaars  $\mathbf{u} = (u, v) \in \tilde{U}$  kommt einer punktweisen Betrachtung des Rekonstruktionsproblems gleich. Gesucht sind  $h^{-1}$ , und weil ohne eine offene Umgebung von  $h(\mathbf{s})$  keine Differentiation mehr möglich ist, auch  $\partial_u h$  und  $\partial_v h$ . Gleichzeitig ist der Bildbereich der Messung  $\psi$  zweidimensional, wir haben es ja mit der Kartenabbildung zwischen zwei regulären Flächen zu tun. Aus algebraischer Sicht kann die Lösung des Systems (3.16) aus zwei Gleichungen aufgrund seiner Rangdefizienz nicht eindeutig lösbar sein.

### 3.3.2 PDE-Systeme 1. Ordnung

Eine natürlichere Darstellung des Rekonstruktionsproblems (und vieler anderer messtechnischer Probleme) ergibt sich mittels der Theorie partieller Differentialgleichungen. Trotzdem findet diese Formulierung in der verfügbaren Literatur bis jetzt wenig Beachtung. Erwähnenswerte Ausnahmen sind Hicks und Perline [26] sowie Kickingereeder und Donner [36]. Durch Verwenden der Parametrisierung (2.2) in (3.7), das heißt  $\mathbf{s} = (x, y, f)^\top$ ,  $\mathbf{n} = (-\partial_x f, -\partial_y f, 1)^\top$  beziehungsweise  $\mathbf{l} = (l_1, l_2)^\top$ , ergibt sich ein nichtlineares Differentialgleichungssystem 1. Ordnung in der unbekanntenen Funktion  $f$ :

$$l_1 = \frac{2(f\partial_x f + x)(x\partial_x f + y\partial_y f - f)}{f[(\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2] + 2(x\partial_x f + y\partial_y f) - f}, \quad (3.17a)$$

$$l_2 = \frac{2(f\partial_y f + y)(x\partial_x f + y\partial_y f - f)}{f[(\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2] + 2(x\partial_x f + y\partial_y f) - f}. \quad (3.17b)$$

Dazu ein paar analytische Feststellungen: Lösung der Differentialgleichung  $f\partial_y f + y = 0$  ist die Menge der Zylinder  $f_{k_1}(x, y) = \sqrt{k_1^2 - y^2}$  mit Radius  $k_1 \in \mathbb{R}$ . Denn anschaulich



wird nur für diese aus dem Ursprung auf die  $x$ -Achse zurückgespiegelt, so dass  $l_2 = 0$  gilt. Analog erfüllt  $\sqrt{k_1^2 - x^2}$  die Gleichung  $x\partial_x f + x = 0$ .

Betrachte außerdem die Schar der Paraboloiden mit Brennpunkt im Koordinatenursprung  $f_{k_2}(x, y) = \pm\sqrt{2k_2x - y^2 + k_2^2}$  wobei  $k_2 \in \mathbb{R}$ . Diese erfüllt die Differentialgleichung  $f[(\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2] + 2(x\partial_x f + y\partial_y f) - f = 0$ . Man prüfe nach durch Einsetzen. Jeder Punkt des Parabolspiegels reflektiert aus dem Ursprung in einen Strahl parallel zur  $xy$ -Ebene. Ein solcher Parabolspiegel besteht nur aus Polen im Sinne der Definition aus 3.2.1.

Alle weiteren Nullstellen des Zählers auf der rechten Seite beider Beziehungen erfüllen  $x\partial_x f + y\partial_y f - f = 0$ . Die Lösungsmenge dieser Differentialgleichung besteht aus Ebenen der Form  $E_{k_3, k_4} : k_3x + k_4y - z = 0$ . Alle relevanten Sichtstrahlen liegen vollständig in  $E_{k_3, k_4}$  und werden von der durch die Householder-Matrix  $\mathbf{H}$  beschriebenen Spiegelung invariant gelassen. Hier wird eine Schwäche der Differentialgleichungsformulierung (3.17) deutlich: Diese basiert nämlich auf der Konstruktion aus Lemma 3.3, bei der sich der Schnitt solcher Strahlen mit  $L$  durch ein  $\lambda < 0$  formal immer noch angeben lässt, dieser aber keine strahlenoptische Entsprechung findet mit der Konsequenz, dass die Inversion von  $\Psi$  auf der Basis von (3.17) auch physikalisch unsinnige Lösungen wie die Ebenen  $E_{k_3, k_4}$  liefern muss.

Setzt man die Parametrisierung (2.2) unter der Annahme  $L : z = 0$  stattdessen in die beiden Reflexionsbedingungen (3.4) ein, erhält man ein weiteres System zweier partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung. Diesmal ist eine der beiden Gleichungen quasi-, die andere sogar semilinear:

$$(x - cx - l_1)\partial_x f + (y - cy - l_2)\partial_y f = f - cf, \quad (3.18a)$$

$$l_2\partial_x f - l_1\partial_y f = \frac{1}{f}(l_1y - l_2x), \quad (3.18b)$$

wobei die Abkürzung  $c(x, y, f)$  bereits in der 2. Variante des Reflexionsgesetzes definiert wurde.

### 3.3.3 Existenz und Eindeutigkeit der Lösung

Die Frage nach Existenz und Eindeutigkeit ist im Fall von PDE-Systemen eine delicate Angelegenheit, wie die folgenden Überlegungen verdeutlichen sollen. Die Überbestimmung könnte dazu verleiten, Eindeutigkeit zu erzwingen, indem man die beiden (unbeschränkten) Lösungsmannigfaltigkeiten  $\mathcal{L}_1 := \{f \in C^1(\Omega) \mid f \text{ löst (3.18a)}\}$  und  $\mathcal{L}_2 := \{f \in C^1(\Omega) \mid f \text{ löst (3.18b)}\}$  zum Schnitt bringt. Wir konstruieren leicht ein Gegenbeispiel. Sei  $f = \text{const}$ , das heißt  $\nabla f = \mathbf{0}$ . Aus (3.17) erhält man für den Musterfall

sofort  $l_1(x, y) = 2x$ ,  $l_2(x, y) = 2y$ , woraus auch  $c(x, y, f) = 1$  folgt. Das PDE-System (3.18) schreibt sich unter der Annahme  $f(x, y) > 0$  für alle  $(x, y)^\top \in \Omega$  dann wie folgt:

$$\begin{aligned} x\partial_x f + y\partial_y f &= 0, \\ y\partial_x f - x\partial_y f &= 0. \end{aligned}$$

Verwende nun Polarkoordinaten  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ . Den Nabla-Operator transformiert man mit Hilfe der Jacobi-Matrix  $\mathbf{J}_T$  von  $T : (r, \varphi) \mapsto (x, y)$ , das heißt

$$\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\frac{1}{r} \sin \varphi \\ \sin \varphi & \frac{1}{r} \cos \varphi \end{pmatrix}}_{\mathbf{J}_T} \begin{pmatrix} \partial_r \\ \partial_\varphi \end{pmatrix},$$

und es folgt, da mit  $f > 0$  auch  $r > 0$  und durch  $r$  dividiert werden kann,

$$\partial_r f = 0, \quad \partial_\varphi f = 0.$$

Die Lösungsmengen  $\mathcal{L}_1 = \{f \in C^1(\Omega) \mid f = f(\varphi)\}$  und  $\mathcal{L}_2 = \{f \in C^1(\Omega) \mid f = f(r)\}$  sind sofort ablesbar. Offensichtlich ist  $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \{f \in C^1(\Omega) \mid f = \text{const}\}$  und damit  $|\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2| = \infty$ . Zum selben Schluss kommt man, wenn man das Problem punktweise betrachtet. Dann haben wir für festes  $\mathbf{x} \in \Omega$  die Gleichung  $\mathbf{A}\nabla f = \mathbf{0}$ , wobei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix}.$$

Sei nun  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \Leftrightarrow r > 0$ , dann ist  $\det \mathbf{A} = -\|\mathbf{x}\|^2 < 0$ , das heißt  $\text{Rang } \mathbf{A} = 2 \Rightarrow \dim \text{Kern } \mathbf{A} = 0$ . Aus  $\mathbf{A}\nabla f = \mathbf{0}$  folgt also zwangsläufig  $\nabla f = \mathbf{0}$ .

Wir betrachten nun das Cauchy-Problem zu (3.18), siehe dazu auch die Einführung in Abschnitt 2.2: Unter entsprechenden Voraussetzungen reicht eine Anfangswertkurve hin, um die richtige Lösung aus einer der beiden Gleichungen durch Charakteristikenexpansion zu gewinnen. Dennoch geht dabei Information verloren. Die spezielle Struktur des Systems (3.18) erlaubt hier eine Abschwächung der Voraussetzungen an die Anfangswerte. Statt einer Anfangswertkurve wird nur noch ein Anfangspunkt benötigt. Das sieht man folgendermaßen ein: Wir hatten (3.18) durch Einsetzen der Parametrisierung (2.2) in die Reflexionsbedingungen erhalten. Der in Abschnitt 2.2 erläuterte Ansatz zur Lösung einer quasilinearen PDE gründet sich auf die Umwandlung derselben in eine Orthonormalitätsbedingung wie die beiden Reflexionsbedingungen. Umgekehrt lassen sich diese also auch direkt so auffassen, dass  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  Tangentenvektorfelder an Kurven in  $S$  (Charakteristiken) sind. Integriert man also von einem Anfangspunkt  $\mathbf{s}_0$  in Richtung  $\mathbf{a}$ , erhält man eine Flächenkurve, deren Punkte wiederum als Anfangswerte für die Expansion in Richtung  $\mathbf{b}$  dienen. Notwendige Voraussetzung für die Lösbarkeit ist die lineare Unabhängigkeit der

charakteristischen Richtungen, also der Projektionen von  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  in den Parameterbereich  $\tilde{U}$ . Diese ist hier immer gewährleistet, denn  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  sind laut Lemma 3.2 sogar orthogonal. Eine Formalisierung liefert der folgende

**Satz 3.15.** *Sei  $\mathbf{0} \neq \mathbf{s}_0 = h^{-1}(\mathbf{u}_0)$ ,  $\mathbf{u}_0 \in \tilde{U}$ , gegeben und  $\psi : \tilde{U} \mapsto \tilde{V}$  Lipschitz-stetig, dann ist (3.18) lokal eindeutig lösbar.*

*Beweis.* Satz 3.7 erlaubt die Darstellung von  $S \cap U_\varepsilon(\mathbf{s}_0)$ ,  $\varepsilon > 0$ , als Graph einer Funktion  $f$ . Das Deflektometrieproblem schreibt sich also in Form von (3.18). Das charakteristische Differentialgleichungssystem zu (3.18a) lautet

$$\frac{d\mathbf{s}_a}{dt} = \mathbf{a}(\mathbf{s}_a), \quad \mathbf{s}_a(0) = \mathbf{s}_0 \quad (3.19)$$

mit dem Vektorfeld  $\mathbf{a} : U_\varepsilon(\mathbf{s}_0) \mapsto \mathbb{R}^3$ ,

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} + \frac{\mathbf{l}(\mathbf{x}) - \mathbf{x}}{\|\mathbf{l}(\mathbf{x}) - \mathbf{x}\|}.$$

Wenn  $\mathbf{l}(\mathbf{x})$  Lipschitz-stetig in  $\mathbf{x} \in U_\varepsilon(\mathbf{s}_0)$  ist, dann auch  $\mathbf{a}$  (Summation, Translation um  $\mathbf{l}$  und Verkettung mit Normalisierung  $\pi$  sind Lipschitz-stetige Operatoren). Es bleibt also die Lipschitz-Stetigkeit von  $\mathbf{l}(\mathbf{x})$  zu zeigen: Erstens ist  $h$  ein Diffeomorphismus von  $U$  nach  $\tilde{U}$ , da  $S$  ja regulär war. Insbesondere ist  $h$  also Lipschitz-stetig, denn die Jacobi-Matrix in  $\mathbf{s}_0$  beschreibt eine stetige lineare also beschränkte Abbildung. Die Kartenabbildung  $\psi$  war Lipschitz-stetig laut Voraussetzung, also auch  $\mathbf{l} = \psi \circ h$ . Mit dem Satz von Picard-Lindelöf folgt schließlich, dass (3.19) lokal eindeutig lösbar ist in  $U_\varepsilon(\mathbf{s}_0)$ .

Lemma 3.2 besagt nun, dass  $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$  für alle  $\mathbf{x} \in U_\varepsilon(\mathbf{s}_0)$ . Um die Wohldefiniertheit der Funktion  $f$  zu gewährleisten, ist sicherlich  $\mathbf{n} \notin \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ . Die Grundkurve der Lösung von (3.19) kann deswegen nicht charakteristisch für (3.18b) sein. Das Kreuzprodukt  $\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \mathbf{l} \times \mathbf{x}$  ist Lipschitz-stetig. Genau wie oben argumentiert man, dass genau eine lokale Lösung von (3.18b) zur Anfangswertkurve  $\mathbf{s}_a : \mathbb{R} \mapsto S$  existiert.

□

Die Konstruktion aus Satz 3.15 führt zu folgender fundamentaler Einsicht:

**Korollar 3.16.** *Die Lösungsmannigfaltigkeit des deflektometrischen Rekonstruktionsproblems ist eindimensional.*

*Beweis.* Parametrisiere die Lösung des Rekonstruktionsproblems zum Beispiel durch die Entfernung des Anfangspunkts vom optischen Zentrum:  $\mathbf{s}_0 = d\hat{\mathbf{s}}$ . Dann wird dem  $d \in \mathbb{R}$

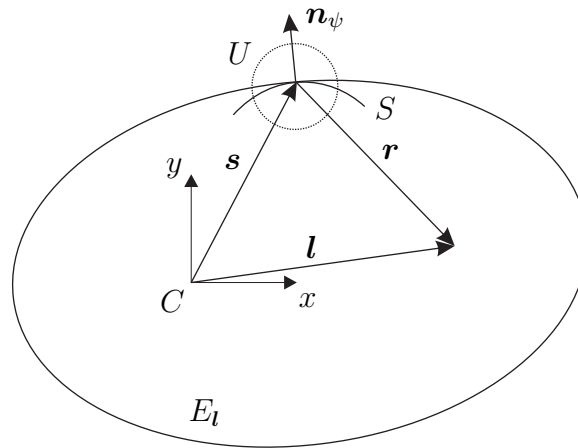


Abbildung 3.7: Konstruktion des Normalenfelds.

durch Integration von  $\mathbf{s}_0$  aus ein  $f \in C^1$  zugeordnet. Die Lösungen liegen also auf einer (eindimensionalen) „Kurve“ im  $C^1$ .

□

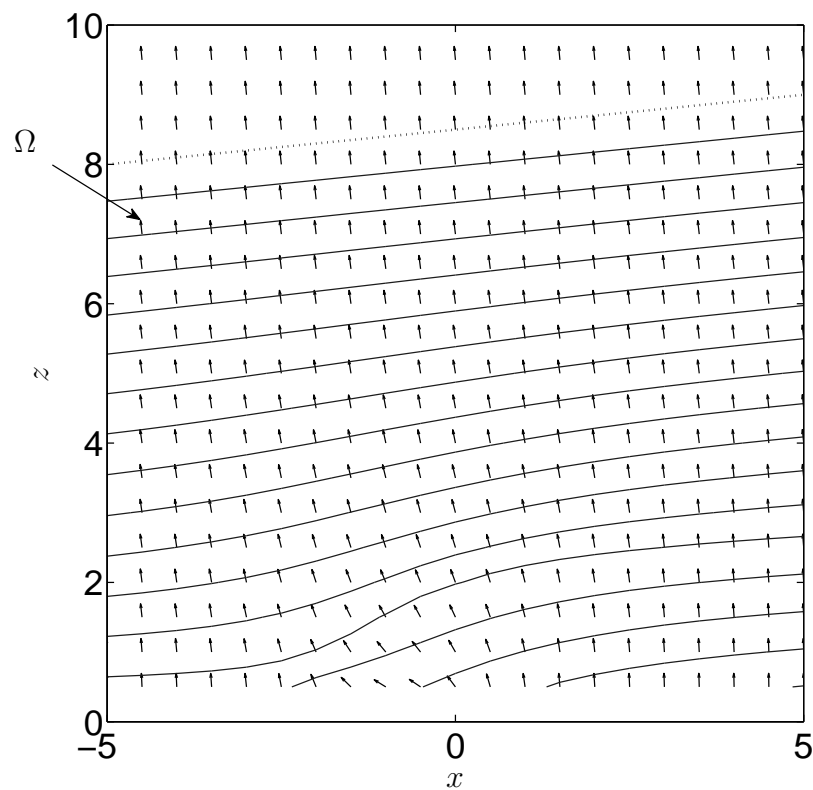
*Bemerkung:* Es bleibt zu zeigen, dass es sich bei dieser Abbildung um einen Diffeomorphismus im Sinne der Fréchet-Ableitung handelt. Dann ist die Kurve sogar regulär. Deren Tangentialraum werden wir im Kapitel 5 angeben. Für den Spezialfall  $L : z = 0$  enthält Satz 3.8 alle Forderungen, die man an  $f$  stellen muss, so dass  $\psi$  Lipschitz-stetig ist. Ferner hängt die *Eindeutigkeit der Lösung* offensichtlich direkt von der *Eindeutigkeit eines Anfangswerts* ab!<sup>3.9</sup>

### 3.3.4 Formulierung als Normalenanpassungsproblem

Sei im Gegensatz zu  $\Omega$  aus Satz 3.8 von jetzt an  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  und  $U \subseteq \Omega$ . Für eine beliebige Parametrisierung  $h^{-1} : \tilde{U} \mapsto S \cap U$ , lässt sich zu gegebener Messung  $\mathbf{l} = \psi(\mathbf{u})$ ,  $\mathbf{u} \in \tilde{U}$ , eine *Oberflächenhypothese*  $\mathbf{s} = h^{-1}(\mathbf{u})$  aufstellen. Welche Normale hätte die gesuchte Fläche  $S$ , wenn tatsächlich  $\mathbf{s} \in S$ ? Die Frage lässt sich auf unterschiedliche Art und Weise beantworten: Die zwei Tangentenvektorfelder  $\mathbf{a} : U \mapsto \mathbb{R}^3$  und  $\mathbf{b} : U \mapsto \mathbb{R}^3$  verknüpft man zum Beispiel über das Vektorprodukt zu  $\mathbf{n}_\psi := \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ .

Eine weitere Möglichkeit ist die folgende: Bezeichne wieder mit  $C$  die Sichtstrahlenquelle. Dann ist für das Ellipsoid  $E_l$  mit Brennpunkten in  $C$  und  $l$  die Länge des Lichtwegs

<sup>3.9</sup>Es sei schließlich noch auf folgende Beobachtung hingewiesen, die allerdings nur von theoretischer Bedeutung ist: Lemma 3.2 impliziert, dass die Charakteristiken von (3.18a) und (3.18b) Kurven sind, die sich in jedem Punkt der Lösungsfläche orthogonal schneiden. Ein solches Flächenkurvensystem definiert um den Berührungspunkt von  $S$  und von einer entsprechenden Kugel  $B_R(0)$ ,  $R > 0$ , so genannte geodätische Polarkoordinaten [42].



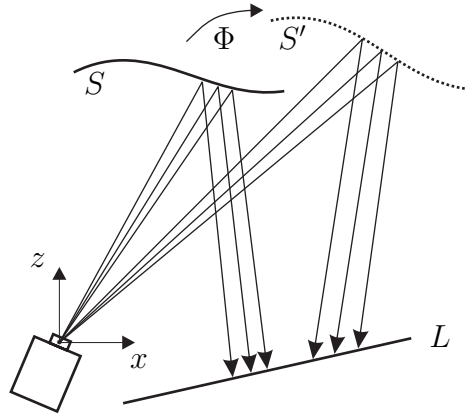
**Abbildung 3.8:** Schnittansicht des deflektometrischen Normalenfelds und Integralkurven des zugeordneten konservativen Gradientenfelds am Beispiel des Planspiegels  $f(x, y) = \frac{17}{2} + \frac{1}{10}x$  (gepunktet).

$e_l(\mathbf{x}) := (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{l} - \mathbf{x}\|) = e_l(\mathbf{s}) = \text{const.}$  für alle  $\mathbf{x} \in E_l \cap U$ . Die lokale, implizite Darstellung von  $E_l := \{\mathbf{x} \in U \mid e_l(\mathbf{x}) = e_l(\mathbf{s})\}$  liefert sofort die Normale  $\mathbf{n}_\psi = \nabla e_l$ , die (3.4a) und (3.4b) in  $\mathbf{s}$  erfüllt,  $e_l$  ist ja eine Level-Set-Funktion (siehe Abschnitt 2.3.1 und Abbildung 3.7).

*Bemerkung:* Ist  $S \cap U$  die Nullstellenmenge einer differenzierbaren Funktion  $\varphi$ , führt die vierte Variante des Reflexionsgesetzes aus Abschnitt 3.1 auf die Differentialgleichung

$$\nabla \varphi = \mathbf{n}_\psi. \quad (3.20)$$

Wir haben folgende Integrabilitätsbedingung: Die Lösung  $\varphi$  ist Potentialfeld von  $\mathbf{n}_\psi$  genau dann, wenn  $\text{rot } \mathbf{n}_\psi = \mathbf{0}$ . Ist diese Bedingung nicht erfüllt, schafft ein integrierender Faktor  $\lambda : U \mapsto \mathbb{R}$  Abhilfe, der – geometrisch interpretiert – für eine Normierung von  $\mathbf{n}_\psi$  sorgt. Die Formulierung des Reflexionsgesetzes ist aber unabhängig von der Länge von  $\mathbf{n}_\psi$ . Wir können also auch auf  $\lambda(\mathbf{x})$  verzichten und betrachten solche  $\mathbf{n}_\psi : \Omega \mapsto \mathbb{R}^3$ , für die im Allgemeinen  $\text{rot } \mathbf{n}_\psi \neq \mathbf{0}$ . Ein solches „Feld“ definiert immer noch eine Menge von



**Abbildung 3.9:** Prinzip des monokularen deflektometrischen Stereos: Zwei Messungen werden für unterschiedliche geometrische Konstellationen aufgenommen.

Tangentialebenen, die man *Distribution* nennt (nicht zu verwechseln mit einer verallgemeinerten Funktion). Der Satz von Frobenius besagt, dass eine Distribution genau dann integrabel ist, wenn für das Feld  $\mathbf{n}_\psi$

$$\langle \text{rot } \mathbf{n}_\psi, \mathbf{n}_\psi \rangle = 0 \quad (3.21)$$

für alle  $\mathbf{x} \in \Omega$ .

In jedem Fall lässt sich die Rekonstruktionsaufgabe als Optimierungsproblem formulieren: Gesucht ist die Fläche  $S \in \mathfrak{R}$ , für die das Funktional  $J : \mathfrak{R} \mapsto \mathbb{R}$ ,

$$J(S) = \int_S \frac{1}{2} \|\hat{\mathbf{n}} - \hat{\mathbf{n}}_\psi\|^2 d\sigma, \quad (3.22)$$

ein globales Minimum annimmt. Es lautet in Operatorschreibweise

$$J(S) = \frac{1}{2} \|F(S) - \hat{\mathbf{n}}_\psi\|_{L^2(S)}^2,$$

wobei hier  $F = N$  (vgl. die Abschnitte 2.1 und 2.4). Selbst wenn (3.21) gilt, bleibt dennoch die Mehrdeutigkeitsproblematik: Wie aus Abbildung 3.8 hervorgeht, existieren unendlich viele Flächen, die das Normalenfeld *erfüllen*, womit gemeint ist, dass bei gegebenem  $\psi$  für alle  $\mathbf{s} \in S$  das Bild der Gauß-Abbildung  $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{s})$  gleich  $\hat{\mathbf{n}}_\psi(\mathbf{s})$  ist.

Der meist verwendete Regularisierungsansatz basiert auf der Auswertung zweier oder mehrerer geometrischer Messkonstellationen. Anschaulich lassen sich alle derartigen Methoden auf eine Korrelation zweier Normalenfelder zurückführen [11, 39, 49]. Dort wo die Diskrepanz zwischen beiden am geringsten ist, muss die gesuchte Oberfläche verlaufen.

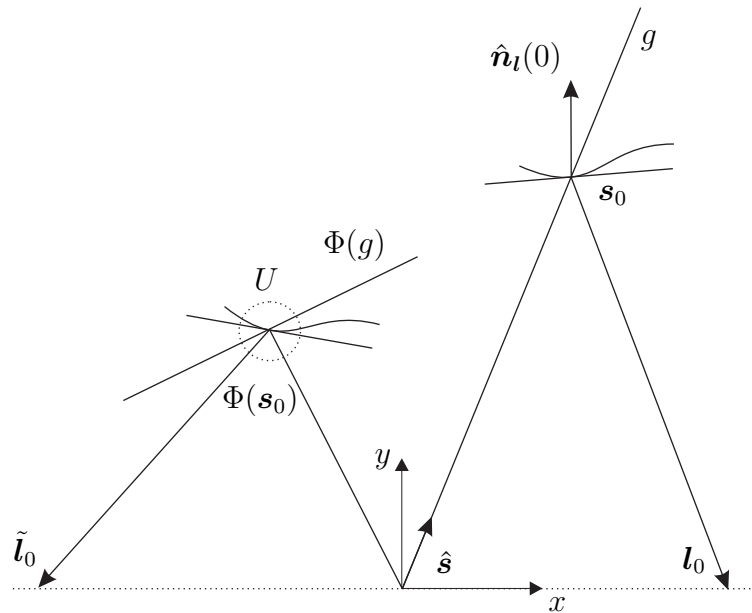


Abbildung 3.10: Bewegung einer Oberflächenhypothese.

Im Fall, dass die Oberfläche relativ zu einer festen Anordnung aus Kamera und Muster-generator nach der Vorschrift  $\Phi$  euklidisch bewegt wird (siehe Abbildung 3.9), führt dies nicht immer zum Erfolg. So kann eine falsche Anfangswertschätzung auf Basis der Stereomethode einen globalen systematischen Fehler für das Gesamtergebnis bedeuten. Um an die Diskussion im vorherigen Abschnitt anzuknüpfen: Die Eindeutigkeit der Lösung ist direkt an die Eindeutigkeit des Anfangswerts gekoppelt [65].

Wir zeigen, wie man durch Lösen einer gewöhnlichen Differentialgleichung ein Oberflächenstück konstruieren kann, für das sich Ausschnitte der nach Verschiebung um  $\Phi$  zu korrelierenden Normalenfelder zur Deckung kommen, so dass dort die Disparität konstant ist [2]. Man betrachte dazu einen Punkt  $\mathbf{s}_0 \in S$ . Der liegt auf einem Sichtstrahl  $g \in \mathcal{S}$ ,  $g : \mathbf{s}(\lambda) = \mathbf{s}_0 + \lambda \hat{\mathbf{s}}$ . Die entsprechende Messung sei  $\mathbf{l}_0$ . Wir setzen für die Einschränkung des ersten Normalenfelds auf  $g$  im Folgenden  $\hat{\mathbf{n}}_l := \hat{\mathbf{n}}_\psi|_g : \mathbb{R} \mapsto S^2$ . Diese Menge von Oberflächenhypothesen wird nun der Bewegung unterzogen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man  $\Phi$  darstellen als  $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{R}\mathbf{x} + \mathbf{t}$ ,  $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{R} \in SO(3)$ , und es schreibt sich  $\Phi(g) : \tilde{\mathbf{s}}(\lambda) = \mathbf{R}(\mathbf{s}_0 + \lambda \hat{\mathbf{s}}) + \mathbf{t}$ . Im Allgemeinen ist  $\mathbf{R}\mathbf{s}_0 + \mathbf{t}$  ungleich  $\mathbf{0}$ , das heißt, das Bild von  $g$  unter  $\Phi$  ist nur noch ein affiner Unterraum. Gleichzeitig ist der echte Punkt  $\mathbf{s}_0$  nach  $\Phi(\mathbf{s}_0)$  gewandert und hat die Messung  $\tilde{\mathbf{l}}_0$  erzeugt. Es folgt, dass die Einschränkung  $\hat{\mathbf{n}}_\psi|_{\Phi(g)}$  nun zusätzlich von der Messung  $\tilde{\mathbf{l}}$  in einer Umgebung von  $\tilde{\mathbf{l}}_0$  abhängt. Diesen Freiheitsgrad kann man zur Konstruktion einer Fläche nutzen, deren deflektometrische Normalenfelder auf  $g$  und  $\Phi(g)$  lokal zur Deckung kommen.

Wir wollen ja erreichen, dass sich die Normalenfelder in  $\Phi(g) \cap U$  decken mit einer offenen Umgebung  $U \subset \mathbb{R}^3$  von  $\Phi(\mathbf{s}_0)$ . Das bedeutet nichts anderes als  $\langle \hat{\mathbf{n}}_\psi|_{\Phi(g)}, \mathbf{R}\hat{\mathbf{n}}_l \rangle = 1$  beziehungsweise

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \underbrace{\langle \hat{\mathbf{n}}_\psi|_{\Phi(g)}, \mathbf{R}\hat{\mathbf{n}}_l \rangle}_{P(\tilde{\mathbf{l}}, \lambda)} = 0.$$

Das ist ein implizites Anfangswertproblem in  $\tilde{\mathbf{l}}$ :

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} P(\tilde{\mathbf{l}}, \lambda) = 0, \quad \tilde{\mathbf{l}}(0) = \tilde{\mathbf{l}}_0. \quad (3.23)$$

Setze zum Beispiel für den zweidimensionalen Fall  $S := \{(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\}$  beziehungsweise  $\Phi(S) = \{(\tilde{x}, y)^\top \in \mathbb{R}^2 \mid y = \tilde{f}(\tilde{x})\}$  (im Dreidimensionalen rechnet man in eine Richtung des Tangentialraums) das Wissen über den Mustergenerator ein, so dass  $\tilde{\mathbf{l}} = (\tilde{l}(\lambda), 0)^\top$ . Das System (3.18) reduziert sich zu einer gewöhnlichen DGL  $F(\tilde{x}, \tilde{f}, \tilde{f}', \tilde{l}) = 0$ . Aus dieser erhält man mit der Lösung von (3.23) nach Koordinatentransformation  $\lambda \mapsto \frac{\tilde{x}}{\langle \mathbf{e}_{\tilde{x}}, \hat{\mathbf{s}} \rangle}$  eine korrespondierende Fläche. Unter Berücksichtigung der Nebenbedingung  $\tilde{f}''(0) := f''(0)$  gilt sogar  $S = \Phi(S)$  in der Umgebung  $U$ , da ja die Krümmung eine Invariante der Bewegung ist.

Das bedeutet zusammengefasst, dass in Abhängigkeit der Aufnahmekonstellationen die Disparitätsanalyse zur Bestimmung eines Eindeutigkeit herstellenden Anfangswerts ein falsches Ergebnis liefern kann. Damit sind im Hinblick auf das oben Gesagte auch beliebig große Abweichungen der gesamten Rekonstruktion von der wahren Spiegelfläche möglich.

### 3.3.5 Poisson-Gleichung

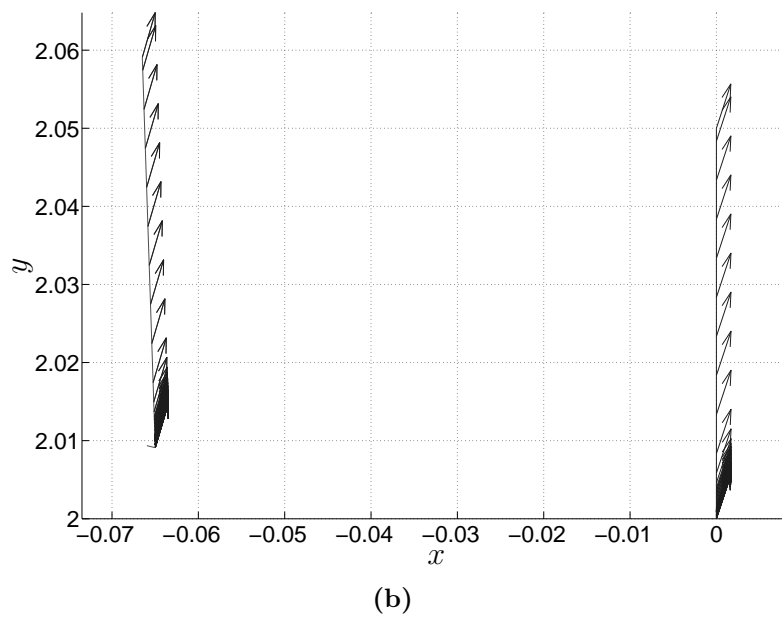
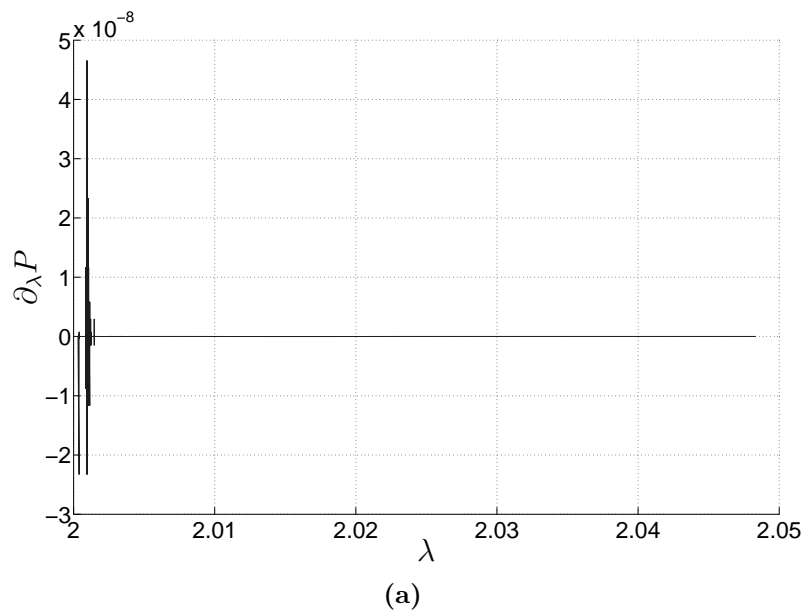
Der oben erwähnte direkte Ansatz (3.20) ist verlockend, doch wird eine stetig differenzierbare Lösung schon aufgrund Verletzung von (3.21) in den seltensten Fällen existieren. Mit Hilfe des Funktionals

$$J(\varphi) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \|\nabla \varphi - \hat{\mathbf{n}}_\psi\|^2 d\mathbf{x} \quad (3.24)$$

finden wir aber nach der nächstbesten, schwachen Lösung. Bemerke, dass es sich anders als bei (3.22) *nicht* um ein Flächenfunktional handelt. Mit dem Optimierungsproblem  $\arg \min_{\varphi} J(\varphi)$  ist natürlicherweise eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung verknüpft. Die folgende Formalisierung geht in ihrer Grundform auf den Autor von [26] zurück:

**Lemma 3.19.** *Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  offen mit stückweise stetig parametrisiertem Rand  $\partial\Omega$  und äußerem Einheitsnormalenfeld  $\hat{\mathbf{o}}$ . Ist  $\varphi$  ein stationärer Punkt von (3.24), dann gilt die*





**Abbildung 3.11:** (a) Beispiel: Numerische Lösung von Gleichung (3.23). Die Oszillationen werden durch den impliziten (!) Gleichungslöser verursacht, der zu Beginn einen geeigneten Startwert für  $\partial_\lambda \tilde{l}$  finden muss. (b) Zwei durch  $\Phi$  auseinander hervorgegangene Ausschnitte aus dem Normalenfeld, deren Korrelation nicht die Auflösung der Mehrdeutigkeit bewirken kann. Die Bewegung  $\Phi$  enthielt im vorliegenden Beispiel Rotations- und Translationsanteile.

Poisson-Gleichung

$$\Delta\varphi = \operatorname{div} \hat{\mathbf{n}}_\psi \quad (3.25)$$

mit  $\langle \nabla\varphi, \hat{\mathbf{o}} \rangle = \iota$ , wobei  $\iota : \partial\Omega \mapsto \mathbb{R}$ ,

$$\iota = \langle \hat{\mathbf{n}}_\psi, \hat{\mathbf{o}} \rangle. \quad (3.26)$$

*Beweis.* Sei  $\varphi^t := \varphi + tv$  eine Variation von  $\varphi$ . Mit  $\nabla\varphi^t = \nabla\varphi + t\nabla v$  folgert man

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} J(\varphi^t) &= \int_{\Omega} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \frac{1}{2} \|\nabla\varphi - \hat{\mathbf{n}}_\psi + t\nabla v\|^2 d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} \langle \nabla\varphi - \hat{\mathbf{n}}_\psi + t\nabla v, \nabla v \rangle|_{t=0} d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} \langle \nabla\varphi - \hat{\mathbf{n}}_\psi, \nabla v \rangle d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Green'schen Formel<sup>3.10</sup> sieht man, dass

$$\int_{\Omega} \langle \nabla\varphi - \hat{\mathbf{n}}_\psi, \nabla v \rangle d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \operatorname{div}((\nabla\varphi - \hat{\mathbf{n}}_\psi)v) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\nabla\varphi - \hat{\mathbf{n}}_\psi)v d\mathbf{x}.$$

Den ersten Term führen wir mit Hilfe des Gauß'schen Satzes auf ein Randintegral zurück, so dass schließlich

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} J(\varphi^t) = \int_{\partial\Omega} \langle \nabla\varphi - \hat{\mathbf{n}}_\psi, \hat{\mathbf{o}} \rangle v d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\nabla\varphi - \hat{\mathbf{n}}_\psi)v d\mathbf{x} = 0,$$

was die notwendige Bedingung für einen stationären Punkt des untersuchten Funktionals darstellt. Sie muss für alle Variationen gelten, auch für solche  $v \in C_0^\infty(\Omega)$  mit kompaktem Träger in  $\Omega$ , für die der erste Term verschwindet. Es folgt aus dem Hauptsatz der Variationsrechnung, dass  $\operatorname{div}(\nabla\varphi - \hat{\mathbf{n}}_\psi) = \Delta\varphi - \operatorname{div} \hat{\mathbf{n}}_\psi = 0$ , und daraus die behauptete Poisson-Gleichung. Für beliebige  $v \in C^\infty(\Omega)$  muss dann auf  $\partial\Omega$  auch  $\nabla\varphi = \hat{\mathbf{n}}_\psi$  sein. Das sind die so genannten natürlichen Randbedingungen. □

Auch diese Problemformulierung besitzt ohne *essentielle Randbedingungen* oder auch *Dirichlet-Randbedingungen*<sup>3.11</sup> keine eindeutige Lösung. Das ist folgendermaßen einzusehen: Seien  $\varphi$  ein stationärer Punkt von (3.24) und  $C_p \in \mathbb{R}$  eine beliebige Konstante. In  $\Omega$

<sup>3.10</sup>Verallgemeinerung der partiellen Integration, mit Hilfe der Produktregel zeigt man, dass für eine skalarwertige Funktion  $f$  und ein Vektorfeld  $\mathbf{v}$  gilt:  $\int_{\Omega} \operatorname{div}(f\mathbf{v}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \langle \nabla f, \mathbf{v} \rangle d\mathbf{x} + \int_{\Omega} f \operatorname{div} \mathbf{v} d\mathbf{x}$ .

<sup>3.11</sup>Die Dirichlet-Randbedingung einer PDE (zum Beispiel der Laplace-Gleichung  $\Delta u = 0$ ) spezifiziert die Werte der gesuchten Funktion  $u$  auf dem Rand  $\partial\Omega$  des Gebiets, das heißt, sie fordert, dass  $u|_{\partial\Omega} := v$ ,  $v : \partial\Omega \mapsto \mathbb{R}$ .

gilt dann  $\Delta(\varphi - C_p) = \Delta\varphi - \Delta C_p = \Delta\varphi = \operatorname{div} \hat{\mathbf{n}}_\psi$  und – weil die Randbedingungen dieser Formulierung vom Neumann-Typ sind –  $\langle \nabla(\varphi - C_p), \hat{\mathbf{o}} \rangle = \langle \nabla\varphi - \nabla C_p, \hat{\mathbf{o}} \rangle = \langle \nabla\varphi, \hat{\mathbf{o}} \rangle = \iota$ . Zwei Lösungen unterscheiden sich also um eine additive Konstante, und jede der Niveaumengen

$$S_{C_p}(\varphi) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(\mathbf{x}) - C_p = 0 \Leftrightarrow \varphi(\mathbf{x}) = C_p\}$$

erfüllt das Normalenfeld  $\hat{\mathbf{n}}_\psi$ . Dieses Resultat ist nicht überraschend: Zwar ist die implizite Darstellung einer Fläche unabhängig von der Fortsetzung der Funktion  $\varphi$  vom Level Set 0 nach ganz  $\Omega$ . Hier wurde von (3.24) aber gefordert, der Gradient dieser Fortsetzung solle auf ganz  $\Omega$  mit dem deflektometrischen Normalenfeld übereinstimmen. Direkt verifiziert man nun die Struktur-Analyse aus Korollar 3.16: Die Lösungsmannigfaltigkeit des deflektometrischen Problems ist gleich der Familie  $S_{C_p}$  mit Parameter  $C_p$ .

### 3.3.6 Krümmungsanpassungsproblem

Geht man aber davon aus, dass das Normalenfeld die Integrabilitätsbedingung (3.21) erfüllt, erreicht das Funktional (3.24) tatsächlich den Wert null. Es ist dann  $\nabla\varphi = \hat{\mathbf{n}}_\psi$ , und Anwenden des Nabla-Operators auf beiden Seiten resultiert natürlich in

$$\Delta\varphi = \operatorname{div} \hat{\mathbf{n}}_\psi.$$

Insbesondere muss auf der von  $\varphi$  definierten Fläche  $\|\nabla\varphi\| = 1$  sein. Der Term auf der linken Seite ist dann gleich der mittleren Krümmung  $\Delta\varphi = \kappa$ . Eine Lösung des Deflektometrieproblems muss sich in seiner Krümmung mit der Divergenz des aus der Messung abgeleiteten Normalenfelds decken:

$$\kappa(\mathbf{x}) = \operatorname{div} \hat{\mathbf{n}}_\psi(\mathbf{x}). \quad (3.27)$$

Wenn auch nicht in dieser Klarheit wiedergegeben, fußen neben den in [35, 38, 60] beschriebenen auch die lokalen Ansätze aus [56, 57] auf dieser Formulierung. Diese wollen wir im Folgenden noch etwas genauer untersuchen.

Laut der 4. Version des Reflexionsgesetzes (siehe Abschnitt 3.1) kann man das Normalenfeld  $\hat{\mathbf{n}}_\psi : \Omega \mapsto S^2$  auch so schreiben:

$$\hat{\mathbf{n}}_\psi(\mathbf{x}) = \widehat{\mathbf{x} - \hat{\mathbf{r}}(\mathbf{x})}.$$

Dabei bezeichnet  $\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{l}(\mathbf{x})$  die Soll-Richtung des Reflexstrahls für einen Punkt  $\mathbf{x} \in \Omega$  mit gegebener Messung  $\mathbf{l}(\mathbf{x})$ . Für ein Vektorfeld  $\mathbf{v}$  gilt allgemein  $\operatorname{div} \pi(\mathbf{v}) = \frac{\operatorname{div} \mathbf{v} - 1}{\|\mathbf{v}\|}$ .

Mit  $\operatorname{div} \mathbf{x} = \partial_x x + \partial_y y + \partial_z z = 3$  (\*) folgt

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \hat{\mathbf{n}}_\psi(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\|\hat{\mathbf{x}} + \widehat{\mathbf{x} - \mathbf{l}}\|} \left[ \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} (\operatorname{div} \mathbf{x} - 1) + \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{l}\|} (\operatorname{div} \mathbf{x} - \operatorname{div} \mathbf{l} - 1) - 1 \right] \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{\|\hat{\mathbf{x}} + \widehat{\mathbf{x} - \mathbf{l}}\|} \left[ \frac{2}{\|\mathbf{x}\|} + \frac{2 - \operatorname{div} \mathbf{l}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{l}\|} - 1 \right]. \end{aligned}$$

Mit Hilfe eines geeigneten  $C_M \in \mathbb{R}_{>0}$  kann nach oben abgeschätzt werden:

$$\operatorname{div} \hat{\mathbf{n}}_\psi(\mathbf{x}) \leq C_M (4 - \operatorname{div} \mathbf{l}(\mathbf{x})) \frac{1}{\|\mathbf{x}\|}. \quad (3.28)$$

Wir betrachten nun den Term  $\operatorname{div} \mathbf{l}(\mathbf{x})$  noch genauer. Da  $\mathbf{l}(\mathbf{x})$  nur von den zwei Parametern  $\mathbf{u} = (u, v)^\top$  der Sichtstrahlenkongruenz, aber nicht von der Entfernung  $d(\mathbf{u})$  des Punkts  $\mathbf{x}$  vom optischen Zentrum abhängt, führt man zunächst die Koordinatentransformation  $(x, y, z) \mapsto (u, v, d)$  durch. So hat man sich von einer abhängigen Variable befreit. Mit der Kettenregel und (2.5) sind

$$\partial_x \mathbf{l} = \frac{1}{z} \partial_u \mathbf{l}, \quad \partial_y \mathbf{l} = \frac{1}{z} \partial_v \mathbf{l} \quad \text{und} \quad \partial_z \mathbf{l} = -\frac{x}{z^2} \partial_u \mathbf{l} - \frac{y}{z^2} \partial_v \mathbf{l}.$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{l}(\mathbf{x}) &= \partial_x l_1 + \partial_y l_2 + \partial_z l_3 \\ &= \frac{1}{z(\mathbf{u})} (\partial_u l_1 + \partial_v l_2 - u \partial_u l_3 - v \partial_v l_3) \\ &= \frac{1}{z(\mathbf{u})} \left( \operatorname{div} \begin{pmatrix} l_1(\mathbf{u}) \\ l_2(\mathbf{u}) \end{pmatrix} - \langle \mathbf{u}, \nabla l_3(\mathbf{u}) \rangle \right). \end{aligned}$$

Ist der geklammerte Term beschränkt, folgt speziell  $\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} \operatorname{div} \mathbf{l}(\mathbf{x}) = 0$ . Also ist wegen (3.27) und (3.28) auch

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} \kappa = \lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} \operatorname{div} \hat{\mathbf{n}}_\psi(\mathbf{x}) = 0. \quad (3.29)$$

Insbesondere folgt aus dem Gesagten, dass die Krümmung durch deflektometrische Verfahren nur unter approximierenden Annahmen *unabhängig von der Entfernung* gemessen werden kann. Nimmt man aber an, die gesuchte Fläche sei nicht unendlich aber hinreichend weit von Kamera und Mustergenerator entfernt, kann man die Formänderung zwischen zwei Lösungskandidaten und damit den systematischen Fehler beschränken. Ein Maß für die Formänderung ist zum Beispiel

$$|\partial_z \kappa| = |\partial_z \operatorname{div} \hat{\mathbf{n}}_\psi|.$$

Daraus lässt sich nun ein  $C_z$  berechnen, so dass für alle  $z > C_z \Rightarrow |\partial_z \kappa| < C_\kappa$ .

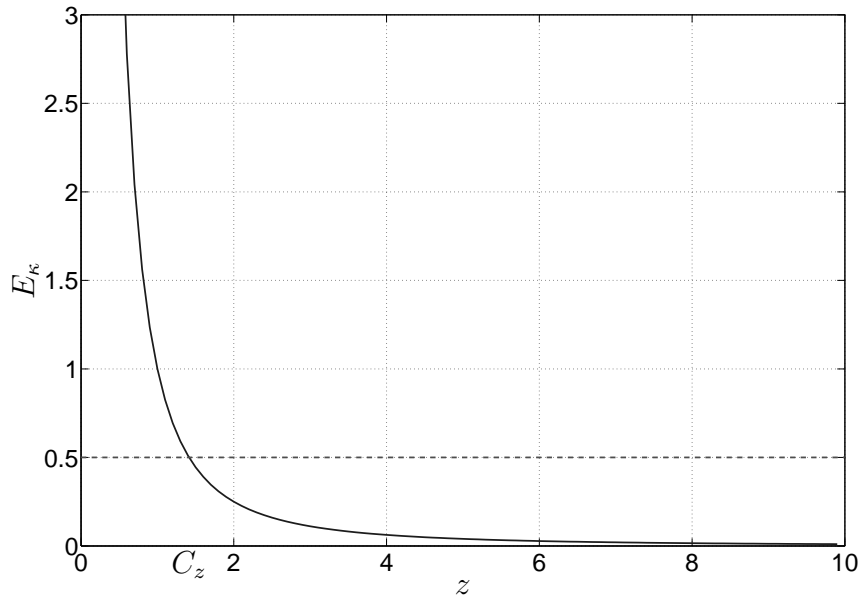


Abbildung 3.12: Maximaler Approximationsfehler des Beispiels 3.20.

### Beispiel 3.20 Sphärischer Spiegel

Sei  $\mathbf{l}(\mathbf{u}) := \mathbf{0}$ . Anschaulich besteht der Lösungsraum aus allen Kugeln um den Ursprung, denn wie bereits in Abschnitt 3.3.2 bemerkt, lösen alle  $f_R : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$  mit  $f_R(\tilde{\mathbf{x}}) = \sqrt{R^2 - \|\tilde{\mathbf{x}}\|^2}$  das System (3.17). Die mittlere Krümmung einer Lösungsfläche im Punkt  $\mathbf{x} = (\tilde{\mathbf{x}}^\top, z)^\top$  beträgt

$$\kappa(\mathbf{x}) = \frac{1}{R(\tilde{\mathbf{x}}, z)} = \frac{1}{\sqrt{z^2 + \|\tilde{\mathbf{x}}\|^2}}.$$

Im Übrigen bestätigt sich hier die Beobachtung (3.29). Für festes  $\mathbf{x}$  ist dann

$$|\partial_z \kappa| = \frac{z}{\sqrt{(z^2 + \|\tilde{\mathbf{x}}\|^2)^3}},$$

also  $O(|\partial_z \kappa|) = z^{-2}$ . Nimmt man nun an, dass sich die gesuchte Fläche mindestens  $C_z > 0$  vom optischen Zentrum der Kamera befindet, kann man den Rekonstruktionsfehler wegen der Monotonie von  $|\partial_z \kappa|$  wie folgt abschätzen:

$$E_\kappa \leq \frac{C_z}{\sqrt{(C_z^2 + \|\tilde{\mathbf{x}}\|^2)^3}} \leq \frac{1}{C_z^2}.$$

□

Es sei aber angemerkt, dass zwar das Supremum des systematischen Fehlers mit der Entfernung abnimmt. Zur gleichen Zeit sinkt aber auch die auf der Oberfläche von der Sichtstrahlenkongruenz induzierte Abtastdichte mit allen bekannten Konsequenzen, die sich aus Samplingtheoremen für nichtäquidistante Gitter ergeben (siehe zum Beispiel [1]).

	Literatur	Vorteile	Nachteile
<b>Punktweise</b>		Illustration der Mehrdeutigkeit	Zusammenhang der Reflexionspunkte bleibt unberücksichtigt.
<b>PDE</b>	[26, 36]	Existenz und Eindeutigkeit	numerische Integration
<b>Normalen- anpassung</b>	[11, 22, 23, 26, 39, 49, 60, 63]	Illustration der Mehrdeutigkeit, Korrelation möglich	Integrabilität, Rechenaufwand
<b>Krümmungs- anpassung</b>	[35, 38, 56, 57]	lokal-parametrische Modelle	Differentiation des Normalenfelds

**Tabelle 3.1:** Varianten der Formulierung des inversen deflektometrischen Problems im Vergleich.

### 3.3.7 Fazit

Wie aus den letzten Abschnitten hervorgeht, existiert mittlerweile eine Fülle von Beschreibungen des inversen deflektometrischen Problems, die sich wie in Tabelle 3.1 in vier Kategorien einteilen lassen.

Die punktweise Betrachtung illustriert anhand eines unterbestimmten nichtlinearen Gleichungssystems besonders anschaulich die Mehrdeutigkeit bei der Umkehrung der induzierten Abbildung, vernachlässigt aber den inneren Zusammenhang der Punkte in einer Fläche. Vorwissen in Form einer zugelassenen Funktionenklasse einzubringen ist daher nicht möglich.

Um dieses Defizit zu beheben, geht man zu einer kontinuierlichen Beschreibung in Form partieller Differentialgleichungen über. Nun ist die Mehrdeutigkeit durch das Fehlen von Rand- beziehungsweise Anfangswerten bedingt. Da meist fehleranfällige Integration zu ihrer Lösung notwendig wird (siehe Kapitel 4.4), eignen sie sich vornehmlich, um theoretische Fragestellungen zu behandeln – wie die nach der Struktur des Lösungsraums. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird ein quasilineares PDE-System 1. Ordnung vorgeschlagen, anhand dessen die Frage nach Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Deflektometrieproblems geklärt werden kann.

Leicht einzusehen ist die Popularität des Normalenfeldansatzes: Zwar ist Integrabilität nicht so einfach zu verifizieren wie bei tangentialen Vektorfeldern, doch ist die Mehrdeutigkeit für den kontinuierlichen Fall auch hier leicht einzusehen. Ein deflektometrisches Normalenfeld stellt ferner ein Merkmal dar, das anstatt der fehlenden Textur zur Disparitätsanalyse im Rahmen eines triangulierenden Verfahrens dienen kann. Auch die in den Kapiteln 4 und 5 entwickelten Verfahren setzen auf eine regularisierte Variante der

Normalenanpassung.

Die Krümmung charakterisiert auf natürliche Weise die Oberflächenform vollständig und kann mit Hilfe eines lokal-parametrischen Modells eindeutig an eine mit der Messung konforme Sollgeometrie angepasst werden. Die Diskussion im letzten Abschnitt hat gezeigt, warum sich das Krümmungsanpassungsproblem besonders zur Regularisierung durch Approximation eignet. Allerdings geht es aus dem Normalenanpassungsproblem infolge einer Differentiation hervor, welche die analytische Behandlung verkompliziert und numerisch zu einer Rauschverstärkung führen kann.





## 4 Regularisierung durch Shading-Daten

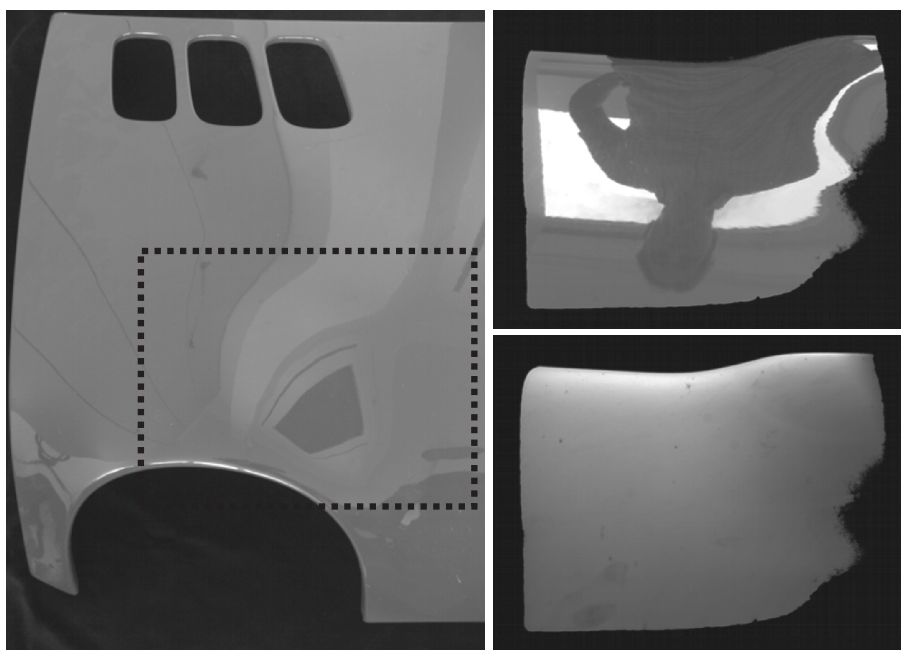
### 4.1 Einführung

#### 4.1.1 Reflektanzabbildung und Shape-from-Shading

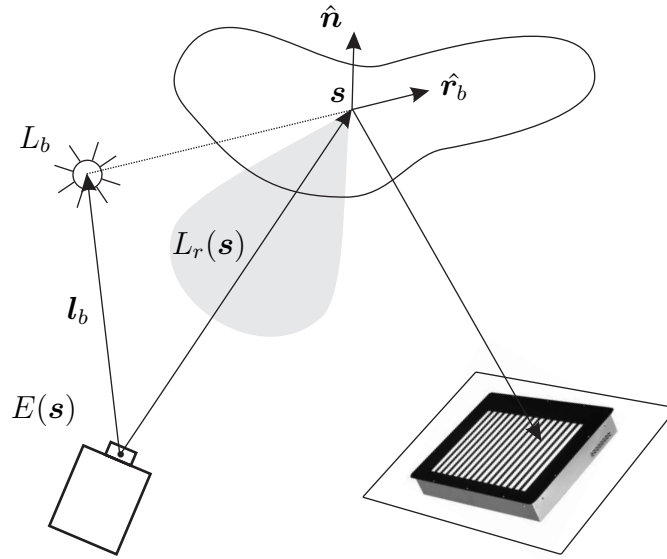
Die meisten Objekte – selbst diejenigen, die ein menschlicher Beobachter als vollspiegelnd empfindet – weisen auch diffuse Reflexionsanteile auf. Das gilt insbesondere für wichtige Industriegüter wie lackierte Karosserieteile oder Sanitär- beziehungsweise Haushaltswaren aus Keramik, siehe zum Beispiel Abbildung 4.1. Radiometrisch kann man solche Oberflächen durch das Modell des Lambert’schen Strahlers beschreiben: Sei  $\mathbf{l}_b$  wie in Abbildung 4.2 der Ort einer Punktlichtquelle bezüglich des Kamerakoordinatensystems. Im Sinne verallgemeinerter Funktionen gilt für die beleuchtungsseitige Strahldichtevertelung  $L_b(\mathbf{x}) = L_0\delta(\mathbf{x} - \mathbf{l}_b)$  mit  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ ,  $L_0 \in \mathbb{R}$  und der mehrdimensionalen Dirac-Distribution  $\delta$ . Wir verwenden die einfache BRDF<sup>4.1</sup>

$$\rho(\mathbf{s}, \mathbf{r}) = \lambda \frac{1}{\pi} + (1 - \lambda)\delta(\hat{\mathbf{n}} - \widehat{\mathbf{s} + \mathbf{r}}), \quad (4.1)$$

<sup>4.1</sup>bidirektionale Reflektanzverteilungsfunktion



**Abbildung 4.1:** Die Motorhaube eines Kleinwagens enthält diffuse sowie spekulare Reflexionsanteile.



**Abbildung 4.2:** Regt man das diffuse Reflexionsverhalten einer teilspiegelnden Oberfläche durch eine Punktlichtquelle an, lässt sich mit Hilfe eines Shape-from-Shading-Ansatzes die benötigte Zusatzinformation gewinnen, die zur Regularisierung des inversen Deflektometrieproblems benötigt wird. In grau ist die Strahldichteverteilung des Reflexes  $L_r(\mathbf{s})$  angedeutet.

die vom Reflexionspunkt  $\mathbf{s}$  mit Oberflächennormalen  $\mathbf{n}$  und der Einstrahlrichtung  $\mathbf{r}^{4.2}$  abhängt. Wir schließen die Grenzfälle rein spiegelnder beziehungsweise diffuser Reflexion durch die Wahl von  $\lambda \in (0, 1)$  aus und bemerken, dass  $\mathbf{r}_b = \mathbf{s} - \mathbf{l}_b$  eine Funktion von  $\mathbf{s}$  ist. Durch Auswertung eines Faltungsintegrals können die eingestrahlenen radiometrischen Quantitäten mit der Strahldichteverteilung  $L_r(\mathbf{s})$  der vom Reflexionspunkt ausgehenden Streukeule in Beziehung gesetzt werden:

$$L_r(\mathbf{s}) = L_0 \langle \hat{\mathbf{r}}_b, \hat{\mathbf{n}} \rangle \left\{ \lambda \frac{1}{\pi} + (1 - \lambda) \delta(\hat{\mathbf{n}} - \widehat{\mathbf{s} + \hat{\mathbf{r}}_b}) \right\}.$$

Bei der Faltung ist der Halbraum aus physikalischen Gesichtspunkten ein sinnvoller Bereich für die Integration über alle möglichen Einstrahlrichtungen, so dass stets  $\langle \hat{\mathbf{r}}_b, \hat{\mathbf{n}} \rangle > 0$ . Die letzte Formel deutet darauf hin, dass bei der Messung des diffusen Verhaltens einer durch (4.1) modellierten Oberfläche alle Punkte auszuschließen sind, für die das Reflexionsgesetz 3.1 erfüllt ist. Das formalisieren wir in der folgenden

**Definition 4.1.**  $N_{\hat{\mathbf{r}}}(\mathbf{s}) := \{ \mathbf{s} \in S \mid \hat{\mathbf{n}} = \widehat{\mathbf{s} + \hat{\mathbf{r}}} \}$  heißt Menge der Spekularitäten unter allen  $\mathbf{s} \in S$  bezüglich der Beleuchtungsrichtung  $\hat{\mathbf{r}}$ .

<sup>4.2</sup> Anders als die in den vorhergehenden Abschnitten verwendete Einstrahlrichtung zeige  $\mathbf{r}$ , wie aus Abbildung 4.2 hervorgeht, in Richtung der Oberflächennormalen!

Für alle  $\mathbf{s} \notin N_{\hat{\mathbf{r}}_b}$  ist dann  $\delta(\hat{\mathbf{n}} - \widehat{\mathbf{s} + \hat{\mathbf{r}}_b}) = 0$ , und mit  $\hat{\mathbf{r}}_b(\mathbf{s}) = \widehat{\mathbf{s} - \mathbf{l}_b}$  folgt

$$L_r(\mathbf{s}) = \frac{\lambda L_0}{\pi} \langle \widehat{\mathbf{s} - \mathbf{l}_b}, \hat{\mathbf{n}} \rangle. \quad (4.2)$$

Die Strahldichtevertelung wird durch Integration über den von einer dünnen Linse (Durchmesser  $D$ ) eingenommenen Raumwinkel in die Bestrahlungsstärke  $E$  eines Elements  $\mathbf{u} = (u, v)^\top$  der Bildebene  $\Omega_E$  überführt. Jähne [32] gibt diese unter Ausnutzung der radiometrischen Invarianz mit

$$\begin{aligned} E(\mathbf{u}) &= \frac{\pi}{4} \frac{D^2}{(1 + \|\mathbf{u}\|)^2} L_r(\mathbf{s}) \\ &\stackrel{(4.2)}{=} \underbrace{\frac{\lambda}{4} \frac{D^2}{(1 + \|\mathbf{u}\|)^2} L_0 \langle \widehat{\mathbf{s}(\mathbf{u}) - \mathbf{l}_b}, \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{u}) \rangle}_{=: \beta(\mathbf{u})} \end{aligned} \quad (4.3)$$

an. Den Zusammenhang zwischen Oberflächengeometrie und Grauwertbild spiegelt die fundamentale *Gleichung der Bestrahlungsstärke*

$$E(\mathbf{u}) = \mathcal{R}(\mathbf{u}, \mathbf{s}(\mathbf{u}), \mathbf{n}(\mathbf{u})) \quad (4.4)$$

wider, wobei  $\mathcal{R}$  als *Reflektanzabbildung* bezeichnet wird und hier wegen (4.3) von der Form

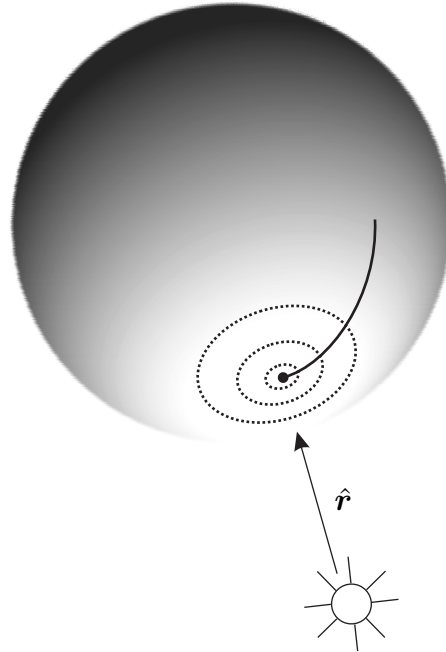
$$\mathcal{R}(\mathbf{u}, \mathbf{s}(\mathbf{u}), \mathbf{n}(\mathbf{u})) := \beta(\mathbf{u}) \langle \hat{\mathbf{r}}_b(\mathbf{u}), \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{u}) \rangle \quad (4.5)$$

ist. Vergleiche das auftretende Skalarprodukt mit denen aus den beiden Reflexionsbedingungen (3.4a) und (3.4b). Dies ist ein erster Hinweis auf die Verwandtschaft von Shape-from-Shading und Deflektometrie.

Auf der Suche nach klassischen, stetig differenzierbaren Lösungen des inversen Problems, aus  $E$  auf  $S$  zu schließen, stößt man auf dessen Schlechtgestellttheit: Eine kontinuierliche Formulierung erfordert auch hier zunächst die Wahl einer Parametrisierung, vergleiche Abschnitt 3.3.2. Wir stellen die unbekannte Fläche als Graph der Funktion  $d : \Omega_E \mapsto \mathbb{R}_{>0}$  dar, die jedem Punkt den Abstand vom optischen Zentrum zuordnet. Nach Einführung eines integrierenden Faktors ist die Reflektanzabbildung von der Gestalt  $\mathcal{R}(\mathbf{u}, \mathbf{s}(\mathbf{u}), \mathbf{n}(\mathbf{u})) := F(a(\mathbf{u}, d)\partial_u d + b(\mathbf{u}, d)\partial_v d)$ . Für stetiges und monotonies  $F$  existiert die Umkehrabbildung, so dass durch

$$a(\mathbf{u}, d)\partial_u d + b(\mathbf{u}, d)\partial_v d = F^{-1}(E(\mathbf{u})) \quad (4.6)$$

eine quasilineare PDE erster Ordnung definiert ist [27]. Auch hier ist bei gegebener Anfangswertkurve die Charakteristiken-Methode anwendbar. Um einen Startwert  $\mathbf{s}_0$  für die Integration zu erhalten, nutzt Horn das Vorwissen über *Singularitäten* von (4.6). Singuläre Punkte korrespondieren mit Stellen maximaler Intensität im Grauwertbild, in denen die Charakteristiken von (4.6) sternförmig zusammenlaufen (siehe Abbildung 4.3).



**Abbildung 4.3:** In einem singulären Punkt sind Beleuchtungsrichtung  $\hat{\mathbf{r}}$  und Oberflächennormale  $\hat{\mathbf{n}}$  gleichorientiert. Orthogonal zu den Charakteristiken, die der Singularität entspringen, verlaufen die Kurven konstanten Grauwerts in der Bildebene (hier gestrichelt angedeutet).

Für Lambert'sche Oberflächen treten sie genau dann auf, wenn von einer Punktlichtquelle parallel zur Oberflächennormalen beleuchtet wird, dann ist nämlich  $\langle \hat{\mathbf{r}}_b(\mathbf{s}_0), \hat{\mathbf{n}} \rangle = \cos \angle(\hat{\mathbf{r}}_b(\mathbf{s}_0), \hat{\mathbf{n}}) = 1$ . Daraus kann der Gradient algebraisch berechnet werden: Aus der letzten Identität folgt  $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{r}}_b(\mathbf{s}_0)$ , woraus mit  $\mathbf{r}_b(\mathbf{s}_0) = \mathbf{s}_0 - \mathbf{l}_b$  auf  $d_0 = \|\mathbf{s}_0\|$  geschlossen werden kann. Schließlich seien Horns Sammlung von Aufsätzen [29] und der Übersichtsartikel von Zhang et al. [68] dem Leser als grundlegende Quellen zum Thema *Shape-from-Shading* (SFS) empfohlen.

#### 4.1.2 Deflektanzabbildung

Wenn die Oberfläche hinreichend weit von Kamera und Strahler entfernt ist, gilt näherungsweise  $\hat{\mathbf{r}}_b \approx \text{const.}$ , und wir setzen  $\hat{\mathbf{r}}_b := \hat{\mathbf{r}}_0$ . Unter dieser Annahme beeinflusst die Entfernung eines Punktes  $\mathbf{s}$  vom optischen Zentrum nicht mehr die Bestrahlungsstärke seiner Projektion  $\mathbf{u} = h_3(\mathbf{s})$  in die Bildebene  $\Omega_E$ . Mit  $\mathcal{R} : \Omega_E \times S^2 \mapsto \mathbb{R}$  lautet Gleichung (4.4) nun

$$E(\mathbf{u}) = \mathcal{R}(\mathbf{u}, \mathbf{n}(\mathbf{u})). \quad (4.7)$$

Da dem Grauwert  $E$  zwei unbekannte Orientierungsparameter  $p$  und  $q$  entgegenstehen, ist die punktweise Lösung dieser Gleichung unterbestimmt. Das Rangdefizit der punktweisen Betrachtung des inversen deflektometrischen Problems (siehe Abschnitt 3.3.1) beträgt ebenfalls 1: Zu den beiden gesuchten Neigungsparametern gesellt sich die Entfernung des beobachteten Reflexionspunkts. Demgegenüber stehen aber auch zwei Reflexionsbedingungen. Durch eine Differenzenbildung in dem Sinne, dass eine der beiden Gleichungen unter Wahrung des Rangdefizits vernachlässigt wird, scheint die Konstruktion einer Ähnlichkeit vermittelnden Abbildung zwischen beiden Problemstellungen greifbar und damit der Transfer von Ähnlichkeitsinvarianten Rekonstruktionsverfahren.

Schon das Oberflächenmodell (4.1) deutet die Dualität der inversen Probleme in Deflektometrie und SFS an. Insbesondere führt – wie im Kapitel 3 für die spiegelnden Reflexionsanteile gezeigt – das Skalarprodukt in (4.4) auch auf eine quasilineare Differentialgleichung erster Ordnung. Kann man die beiden Rekonstruktionsaufgaben durch Relaxation der Bedingungen miteinander vergleichbar machen? In anderen Worten: Gibt es ein sinnvolles Analogon zur Reflektanzabbildung in der Deflektometrie? Die Unterraumbedingung gibt diesbezüglich einen ersten Hinweis: Wegen der Bilinearität des Vektorprodukts behält

$$\langle \mathbf{s} \times \mathbf{l}, \mathbf{n} \rangle = 0 \quad (4.8)$$

nach Multiplikation mit beliebigem  $\lambda \in \mathbb{R}$  Gültigkeit. Das ist einleuchtend, der zweidimensionale Unterraum, in dem die Reflexion stattfindet, ist ja durch das Erzeugnis von  $\mathbf{s}$  und  $\mathbf{l}$  eindeutig bestimmt. Es gilt sicherlich  $[\mathbf{s}, \mathbf{l}] = [\lambda \mathbf{s}, \mathbf{l}]$ . Um konkret rechnen zu können, legen wir ferner die Geometrie des Mustergenerators fest. Dieser liege wie in Kapitel 3 in der  $xy$ -Ebene. Einsetzen von  $\mathbf{l} = (l_1, l_2, 0)^\top \in L$ ,  $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)^\top \in S$  und  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)^\top \in T_s S$  führt auf

$$\begin{aligned} \left\langle \left( \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{array} \right) \times \left( \begin{array}{c} l_1 \\ l_2 \\ 0 \end{array} \right) \right\rangle &\Leftrightarrow \left\langle \left( \begin{array}{c} -s_3 l_2 \\ s_3 l_1 \\ s_1 l_2 - s_2 l_1 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{array} \right) \right\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow (s_3 n_2 - s_2 n_3) l_1 = (s_3 n_1 - s_1 n_3) l_2 \quad \Leftrightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{s_3 n_1 - s_1 n_3}{s_3 n_2 - s_2 n_3}. \end{aligned}$$

Es ist die Skalierungsinvarianz von (4.8), die den Übergang zu projektiven Koordinaten infolge einer Division durch  $s_3$  beziehungsweise  $n_3$  möglich macht: Mit (2.5) und (2.6) folgt schließlich

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{p - u}{q - v}.$$

Die messtechnisch erfassbaren Größen konnten auf eine Seite der Gleichung gebracht werden. Bei diesem Quotienten, den wir *Deflektanz* nennen wollen, handelt es sich geometrisch

gesehen um den Kehrwert des Tangens des Azimutwinkels  $\xi$  der Darstellung von  $\mathbf{l}$  in Kugelkoordinaten:

$$\psi_d(\mathbf{u}) := \frac{1}{\tan \xi}.$$

Die rechte Seite hängt wie gewünscht nicht von der Entfernung ab. Insgesamt haben wir folgenden Satz bewiesen:

**Satz 4.2** (Gleichung der Beleuchtungsrichtung). *Sei  $L : z = 0$ . Dann hängt die Deflektanz  $\psi_d(\mathbf{u})$  für alle  $\mathbf{u} \in \Omega_E$  nur von Blickrichtung und Oberflächennormale ab, das heißt*

$$\psi_d(\mathbf{u}) = \mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{n}(\mathbf{u})). \quad (4.9)$$

Wir bezeichnen  $\mathcal{L} : \Omega_E \times S^2 \mapsto \mathbb{R}$ ,

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{n}(\mathbf{u})) = \frac{p - u}{q - v}, \quad (4.10)$$

als *Deflektanzabbildung*. Die Formalisierung dieser Analogie zwischen Shape-from-Shading und dem Deflektometrieproblem geht auf den Beitrag [3] von Balzer et al. zurück.

Bei der Definition von Deflektanz beziehungsweise Deflektanzabbildung wurde angenommen, dass der Mustergenerator  $L$  sich in der  $xy$ -Ebene befindet. Wie muss man  $\psi_d$  für beliebige Schirmgeometrien  $L \subset \mathbb{R}^3$  fortsetzen, damit Gleichung (4.9) ihre Gültigkeit behält? Einen Reflexstrahl, der  $L$  im Punkt  $\mathbf{l} = (l_1, l_2, l_3)$ ,  $l_3 \neq 0$ , getroffen hat, schneidet die  $xy$ -Ebene im Punkt

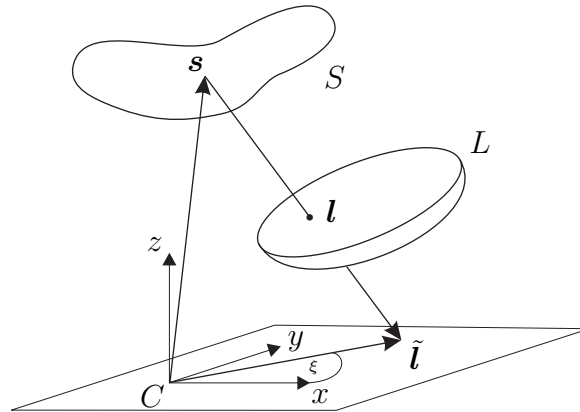
$$\tilde{\mathbf{l}} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{l_3} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

siehe Abbildung 4.4. Es ist also  $\tilde{\psi}_d(\mathbf{l}) := \psi_d(\tilde{\mathbf{l}})$  die gesuchte Fortsetzung. Im Folgenden beziehen wir uns immer auf Messungen der verallgemeinerten Deflektanz  $\tilde{\psi}_d$ , wollen diese also nicht mehr durch Kennzeichnung von  $\psi_d$  unterscheiden:  $\psi_d := \tilde{\psi}_d$ .

Schließlich präsentieren wir noch einige theoretische Ergebnisse, die mit Hilfe des formalen Konstrukts der Deflektanz leichter zu beweisen sind: Im Falle der Ebene sind  $p$  und  $q$  konstant, das heißt,  $\mathcal{L}$  hängt nur noch von  $\mathbf{u}$  ab. Das impliziert die folgende

**Proposition 4.3.** *Sei  $E_1$  eine Ebene des  $\mathbb{R}^3$  mit Normalenvektor  $\mathbf{n}$ ,  $g_s \in \mathcal{S}$  ein fester Sichtstrahl und  $\tau_t(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{t}$  der Translationsoperator. Dann sind die zwei Reflexe  $\mathbf{l}_1(\mathbf{s})$  an  $E_1$  und  $\mathbf{l}_2(\mathbf{s})$  an  $E_2 = \tau E_1$  linear abhängig.*

*Beweis.* Die Oberflächennormale ist eine Invariante von  $\tau_t$ . Folglich gilt, da  $\mathbf{s}$  fest,  $U_1 = [\mathbf{s}, \mathbf{n}] = U_2 =: U$ . Aus der zweiten Reflexionsbedingung  $\langle \mathbf{l} \times \mathbf{s}, \mathbf{n} \rangle = 0$  folgt sofort,



**Abbildung 4.4:** Definition der verallgemeinerten Deflektanz.

dass  $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2 \in U$ . Nach Konstruktion erhält man die Reflexe durch Schnitt mit der Ebene  $L : z = 0$ . Dies ist, wenn  $U \nparallel L$ , ein eindimensionaler Unterraum. Da sowohl  $\mathbf{l}_1$  als auch  $\mathbf{l}_2$  im eindimensionalen Unterraum  $U \cap L$  liegen, sind sie linear abhängig.

□

Sind für eine feste Ebene mindestens zwei Korrespondenzen bekannt, kann durch Vergleich der Deflektanzen eine algebraische Lösung des Rekonstruktionsproblems gewonnen werden:

**Proposition 4.4.** *Seien  $E$  eine Ebene des  $\mathbb{R}^3$  mit Normalenvektor  $\mathbf{n}$  und  $g_s^i \in \mathcal{S}, i = 1, 2$  zwei Sichtstrahlen. Sind die  $\mathbf{l}_i$  linear unabhängig, dann ist das Deflektometrieproblem eindeutig lösbar.*

*Beweis.* Für die Ebene ist  $\mathbf{p} = (p, q)^\top = \text{const}$ . Wähle zwei Sichtstrahlen und die assoziierten Pixel  $(u_1, v_1)$  beziehungsweise  $(u_2, v_2)$ . Einsetzen in (4.9) und Umstellen liefert ein lineares Gleichungssystem in  $p$  und  $q$ :

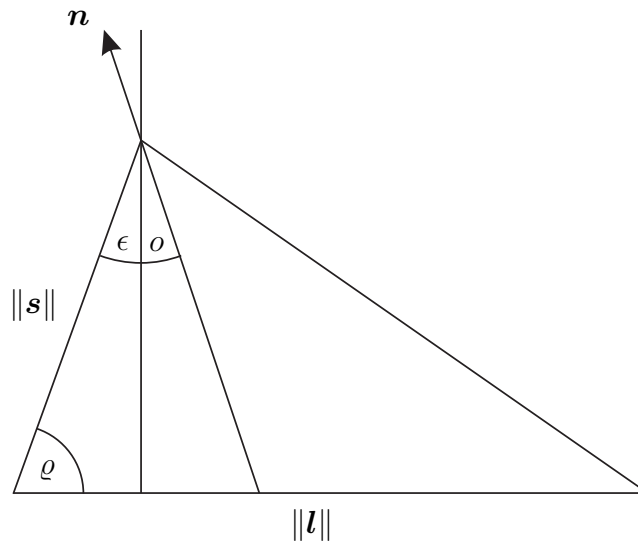
$$\underbrace{\begin{pmatrix} \tan \xi_1 & 1 \\ \tan \xi_2 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + \tan \xi_1 u_1 \\ v_2 + \tan \xi_2 u_2 \end{pmatrix}.$$

Da die  $\mathbf{l}_i$  nach Voraussetzung linear unabhängig sind, gilt  $\xi_1 \neq \xi_2$ , also ist

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \tan \xi_1 & 1 \\ \tan \xi_2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

und das Gleichungssystem ist eindeutig lösbar.

□



**Abbildung 4.5:** Berechnung der Entfernung bei bekannter Oberflächenneigung.

Nun ist für festen Sichtstrahl auch die Entfernung des zugeordneten Reflexionspunkts eindeutig festgelegt: Eine Betrachtung des Strahlenverlaufs im Raum  $[\hat{s}, \hat{l}]$  ergibt unter Verwendung des Sinussatzes

$$\|\mathbf{s}\| = \frac{\sin(\pi - \varrho - 2(\epsilon + o))}{\sin 2(\epsilon + o)} \|\mathbf{l}\|,$$

siehe Abbildung 4.5. Der Winkel  $o$  errechnet sich aus der eben bestimmten Orientierung durch  $o = \arctan \|\mathbf{p}\|$ . Des Weiteren sind  $\epsilon = \frac{\pi}{2} - \varrho$  und  $\varrho = \arccos \langle \hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{l}} \rangle$ . Unter Einsatz verschiedener Additionstheoreme formt man weiter um:

$$\|\mathbf{s}\| = \frac{\sin(\varrho - 2o)}{\sin(2\varrho - 2o)} \|\mathbf{l}\|.$$

## 4.2 Stand der Forschung

Die im vorherigen Abschnitt formalisierte Ähnlichkeit des inversen Deflektometrie- und Shape-from-Shading-Problems wirft eine interessante Frage auf: Ist es möglich, ähnlichkeitsinvariante Methoden – seien es nun Methoden der Modellierung, Regularisierung oder Numerik – zu transferieren oder gar zu kombinieren? Bis jetzt hat niemand diese Frage bewusst behandelt. Klassifiziert man aber alle in beiden Feldern bekannten Verfahren zum Beispiel wie in Tabelle 4.1, wird deutlich, dass sich vollkommen unabhängig von einander analoge Ideen entwickelt haben. Gegenüberstellend beleuchten wir im Folgenden den Stand der Forschung auf beiden Gebieten. Die Übersicht ist nach Art der regularisierenden Zusatzinformation geordnet.



	Deflektometrie	SFS
<b>Stereo</b>	Bonfort & Sturm (2003) Knauer et al. (2004) Petz & Tutsch (2004) Kickingereder & Donner (2004)	Woodham (1978)
<b>Lokal</b>	Savarese et al. (2005) Rozenfeld et al. (2007)	Pentland (1984)
<b>Minimierung</b>	Solem et al. (2004) Hicks (2005)	Ikeuchi & Horn (1981)

**Tabelle 4.1:** SFS- und deflektometrische Regularisierungsansätze in der Literatur.

### 4.2.1 Stereo-Methoden

Naheliegender ist die Auflösung der Mehrdeutigkeit durch Verwendung einer Serie mindestens zweier Aufnahmen. Dabei wird man allerdings mit einer Schwierigkeit konfrontiert, die an das Korrespondenzproblem bei diffusen texturierten Objekten erinnert. Sei  $\Phi$  eine euklidische Bewegung im dreidimensionalen Standardraum. Dann sind im Allgemeinen weder die Karte  $(U, h)$  unter der Transformation

$$h(S) \neq h(\Phi S)$$

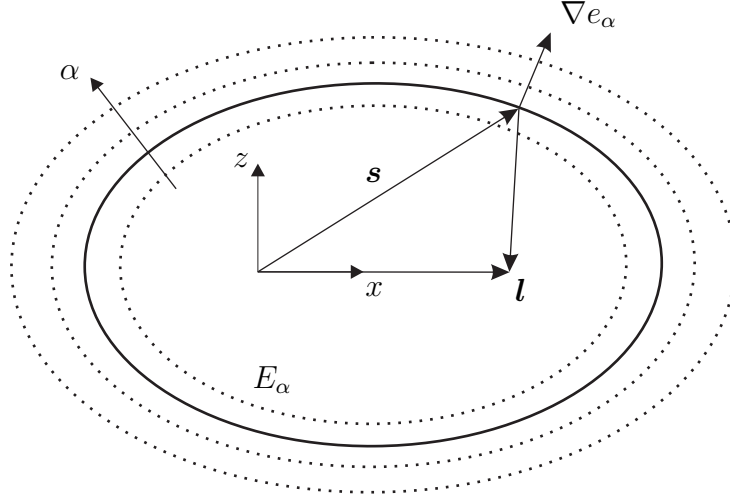
invariant noch die deflektometrischen Modellgleichungen: Zwar ist mit  $\Phi$  bekannt, wohin ein fester Oberflächenpunkt gewandert ist, das gilt aber nicht für die Richtung, in der er beobachtet wird. Eine Korrelationsanalyse behebt das Problem nicht, da ja die Umwelt und nicht der Spiegel selbst abgebildet wird. Stattdessen abstrahiert man und vergleicht Lösungen zweier Differentialgleichungen beziehungsweise deren Richtungsfelder miteinander.

Kickingereders und Donners [36] Herleitung von totalen Differentialgleichungen  $\nabla f = F_i[x, y, f(x, y)]$  für jede Kamera  $i = 1, 2$  basiert auf einer impliziten Oberflächendarstellung: Für festes  $\mathbf{l} = (l_1, l_2, 0)^\top$  liegt der gesuchte Reflexionspunkt  $\mathbf{s} = (x, y, f)^\top$  auf einer Ellipse  $E_\alpha$  aus der Schar

$$e_\alpha = 2\alpha\sqrt{x^2 + y^2 + f^2} - \alpha^2 + \|\mathbf{l}\|^2 - 2f(l_1x + l_2y) = 0$$

mit freiem Parameter  $\alpha$  und Normalenvektor  $\nabla e_\alpha$  (siehe Abbildung 4.6 und Abschnitt 2.3.1). Es gilt wegen des Satzes über die Ableitung implizit definierter Funktion ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$\partial_x f = -\frac{\partial_x e_\alpha}{\partial_f e_\alpha}, \quad \partial_y f = -\frac{\partial_y e_\alpha}{\partial_f e_\alpha}.$$



**Abbildung 4.6:** Jede Ellipse der Schar  $E_\alpha$  spiegelt alle Sichtstrahlen in den Punkt  $\mathbf{l}$ .

Den Parameter  $\alpha$  gewinnt man aus der ursprünglichen Ellipsengleichung, und es folgt schließlich

$$F_i = \frac{1}{f} \left[ \frac{1}{(c_i + 1)} \mathbf{l}_i - \mathbf{x} \right],$$

wobei wieder  $c_i = \frac{\|\mathbf{l}_i - \mathbf{s}\|}{\|\mathbf{s}\|}$ . Um die  $m$  Koeffizienten  $\gamma_j$  der in einer Basis aus B-Splines entwickelten Funktion  $f$  zu bestimmen, minimieren sie dann  $\Gamma_1 + \Gamma_2$ , wobei

$$\Gamma_i = \sum_{(x,y) \in \Omega} \left\| \sum_{j=1}^m \gamma_j \nabla f_j - F_i \left( x, y, \sum_{j=1}^m \gamma_j f_j \right) \right\|^2$$

für  $i = 1, 2$ .

Ähnlich ist die Grundidee des Verfahrens, das in [10] von Bonfort and Sturm beschrieben wird. Sie zerlegen den Sichtbereich zweier Kameras  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  in quaderförmige Volumenelemente (*Voxels*) mit Ecken  $\mathbf{x}_{mnk}$ ,  $m, n, k \in \mathbb{N}_0$ , und führen eine Korrelation von Normalenvektorfeldern durch. Während der Initialisierung wird für jeden Sichtstrahl die Menge der möglichen Normalen  $\hat{\mathbf{n}}_i(\mathbf{x}_{mnk})$ ,  $i = 1, 2$ , gespeichert. Alle außer diejenigen mit minimaler Disparität

$$D(\mathbf{x}_{mnk}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \left[ \arccos \left( \left\langle \hat{\mathbf{n}}_i, \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \hat{\mathbf{n}}_j \right\rangle \right) \right]^2 \quad (4.11)$$

werden im darauf folgenden Schritt verworfen. Durch die Auswertung aller Voxel in  $\Omega$  überwindet die Methode das Korrespondenzproblem. Die Arbeiten [39, 50] stellen eine direkte Adaption dar, präsentieren allerdings wesentliche technische Fortschritte im Hinblick auf die industrielle Anwendung.

Dazu analog werden beim photometrischen Stereo  $n - 1$  weitere Bilder unter variierenden Beleuchtungsbedingungen  $\hat{\mathbf{r}}_i$  aufgenommen. Wir haben dann

$$E_i(\mathbf{u}) = \mathcal{R}_{\hat{\mathbf{r}}_i}(\mathbf{u}, \mathbf{n}(\mathbf{u})), \quad i = 1, \dots, n.$$

Das weitere Vorgehen ist nun klar: Zwei Bilder reichen für eine eindeutige Rekonstruktion. Eine dritte Messung kann zur Kompensation der Verschiebungsvarianz von  $\beta(\mathbf{u})$  herangezogen werden oder als lokales Gütemaß dienen, siehe zum Beispiel [67].

### 4.2.2 Lokale Ansätze

Savarese et al. verfolgen einen lokalen Ansatz [57]: Sie beobachten die infinitesimalen Eigenschaften eines über den Spiegel abgebildeten und möglicherweise verzerrten Linienmusters. So können – bis zur dritten Ordnung – die Koeffizienten  $a, b, c, d, e, f, g$  und  $h$  einer Taylor-Entwicklung der lokalen Monge-Form

$$\tilde{z}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{1}{2!}(a\tilde{x}^2 + 2c\tilde{x}\tilde{y} + b\tilde{y}^2) + \frac{1}{3!}(e\tilde{x}^3 + 3f\tilde{x}^2\tilde{y} + 3g\tilde{x}\tilde{y}^2 + h\tilde{y}^3) + O(\tilde{x}^4, \tilde{y}^4)$$

in der Umgebung eines Punkts  $\mathbf{s} \in S$  im kartesischen Koordinatensystem  $(\mathbf{s}; \hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}, \hat{\mathbf{n}})$  bestimmt werden, wobei  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  wie in Abschnitt 3.1 definiert sind. Die Vernachlässigung von Oberflächeneigenschaften höherer Ordnung reduziert die Rekonstruktionsaufgabe auf ein Parameterschätzproblem endlicher Dimension, welches im Allgemeinen eine eindeutige Lösung besitzt. Man kann hier von *Regularisierung durch Approximation* oder *Lokalität* sprechen, vergleiche dazu auch die Überlegungen aus Abschnitt 3.3.6.

Rozenfeld et al. zeigen in [56] darüber hinaus, dass für einen festen Reflexionspunkt die Tangentenvektoren an Kurven auf Mustergenerator und Bildebene durch eine eindimensionale Homographie<sup>4.3</sup> in Beziehung gesetzt werden können. Diese bündelt alles Wissen über die lokalen Oberflächeneigenschaften (bis zu einer endlichen Ordnung).

Pentland [48] löst die Mehrdeutigkeit des Shape-from-Shading-Problems auf, indem er die Oberfläche lokal durch Sphären  $S_i^2$  vom Radius  $R_i$  approximiert. Für diese ist die mittlere Krümmung  $\kappa_i = \frac{1}{R_i}$ . Sei nun

$$S = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} U_\varepsilon(\mathbf{s}_i) \cap S_i^2$$

für offene Umgebungen  $U_\varepsilon(\mathbf{s}_i)$ ,  $\varepsilon > 0$ , der Oberflächenpunkte  $\mathbf{s}_i \in S$  und eine Indexmenge  $\mathcal{I}$ . Unter der Annahme, dass  $\kappa_i$ , das Albedo  $\beta$  aus (4.5) und die Beleuchtungsrichtung  $\hat{\mathbf{r}}_0$  für festes  $i$  konstant bleiben, liefert partielle Ableitung nach den Bildkoordinaten  $u$  und

<sup>4.3</sup>lineare projektive Abbildung

$v$  das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} E &= \beta \langle \hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{r}}_0 \rangle, & \partial_u E &= \beta \langle \partial_u \hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{r}}_0 \rangle, & \partial_v E &= \beta \langle \partial_v \hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{r}}_0 \rangle, \\ \partial_u^2 E &= \beta \langle \partial_u^2 \hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{r}}_0 \rangle, & \partial_v^2 E &= \beta \langle \partial_v^2 \hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{r}}_0 \rangle, & \partial_{uv}^2 E &= \beta \langle \partial_{uv}^2 \hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{r}}_0 \rangle. \end{aligned}$$

Der Differentiationsschritt schafft nur aufgrund der endlichen Dimension des lokalen Flächenmodells die gewünschte Zusatzinformation, so dass das Gleichungssystem nach den sechs Unbekannten  $p$ ,  $q$ ,  $R$ ,  $\beta$  sowie Azimuth und Elevation von  $\hat{\mathbf{r}}_0$  auflösbar ist.

### 4.2.3 Variationsformulierungen

Eine variationelle Formulierung des Deflektometrieproblems wird von Solem et al. untersucht [60]. Ihre Überlegungen beschränken sich bei der Minimierung von (3.22) allerdings auf eine abzählbare Menge von Glanzlichtern. Diffus reflektierende Oberflächenbereiche werden mit Hilfe eines Structure-from-Motion-Verfahrens rekonstruiert. In Übereinstimmung mit den Ergebnissen des Abschnitts 3.3.3 reichen die so erhaltenen Punkte aus, um das Problem so zu restringieren, dass die Normalenanpassung durch Gradientenabstieg gegen die gesuchte Oberfläche konvergiert.

Analog schlagen Ikeuchi und Horn in [31] den folgenden Variationsansatz vor: Gesucht wird nach dem Normalenvektorfeld  $\mathbf{n}(\mathbf{u})$ , das den Grauwertfehler

$$\int_{\Omega_E} \frac{1}{2} |E(\mathbf{u}) - \mathcal{R}(\mathbf{u}, \mathbf{n}(\mathbf{u}))|^2 d\mathbf{u} \quad (4.12)$$

minimiert. Bemerke, dass dieses Funktional direkt auf den Messdaten und nicht etwa einer iterierten Fläche beziehungsweise dem Normalenfeld selbst definiert ist. Die Menge seiner kritischen Punkte ist im Allgemeinen unbeschränkt. Um Eindeutigkeit zu erzwingen, wird über einen Lagrange'schen Multiplikator – wie im deflektometrischen Fall – eine Nebenbedingung angekoppelt. Die erste Variation von (4.12) führt auf die assoziierten Euler-Lagrange-Gleichungen. Der abschließende Diskretisierungsschritt motiviert ein Iterationsschema, das zusammen mit den entsprechenden natürlichen Randbedingungen gegen die richtige Lösung konvergiert, vorausgesetzt, der Regularisierungsterm wurde mit Bedacht gewählt.

### 4.2.4 Verwandte Verfahren

Dem deflektometrischen Problem ähnlich ist die Spezifikation katadioptrischer Spiegel, was abschließend kurz erwähnt werden soll. Ziel des Design-Prozesses ist, eine gewünschte Ver- beziehungsweise Entzerrung durch Vorgabe von  $\psi$  herzustellen. Meist verhindern

Zwangsbedingungen die Existenz der Lösung, da auch nicht-konservative Normalenvektorfelder  $\hat{\mathbf{n}}_\psi$  auftreten können (vgl. Abschnitt 3.3.4). So führt Hicks [26] eine Hodge-Zerlegung des Hilbert-Raums aller stetigen Vektorfelder in einen Unterraum der Gradienten  $C_g(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$  und dessen Komplement durch, das die nicht-konservativen Vektorfelder enthält. Dann sucht der Autor nach einer Fläche im Sinne der besten Approximation, nämlich gerade diejenige, die die *Projektion* des Lösungskandidaten  $\hat{\mathbf{n}}_\psi$  auf  $C_g(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$  erfüllt.

#### 4.2.5 Schwache Lösung

Stellt man Shape-from-Shading in den Kontext der Theorie optimaler Steuerungen, lässt sich durch Anwendung des Viskositätslösungskalküls trotz Fehlen von Randbedingungen eine eindeutige Lösung gewinnen: Prados et al. [52] schreiben die physikalische Zwangsbedingung (4.4) beziehungsweise (4.6), die mit der Reflektanzfunktion gekoppelt ist, in der Form

$$\mathcal{H}(\nabla d, E) = 0, \quad (4.13)$$

wobei  $\mathcal{H}$  die Hamilton-Funktion bezeichnet (siehe die Anmerkungen über partielle Differentialgleichungen erster Ordnung im Abschnitt 2.3.1). Hierbei handelt es sich um eine klassische *Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung*, die *ohne Kenntnis von Rand- oder Anfangsdaten* die Bestimmung der so genannten diskontinuierlichen Viskositätslösung zulässt [5]. Diese hängt direkt von der Legendre-Transformierten<sup>4.4</sup>

$$\mathcal{H}^*(\nabla g, E) = \sup_{\nabla f \in \mathbb{R}^2} \{ \langle \nabla f, \nabla g \rangle - \mathcal{H}(\nabla f, E) \} \quad (4.14)$$

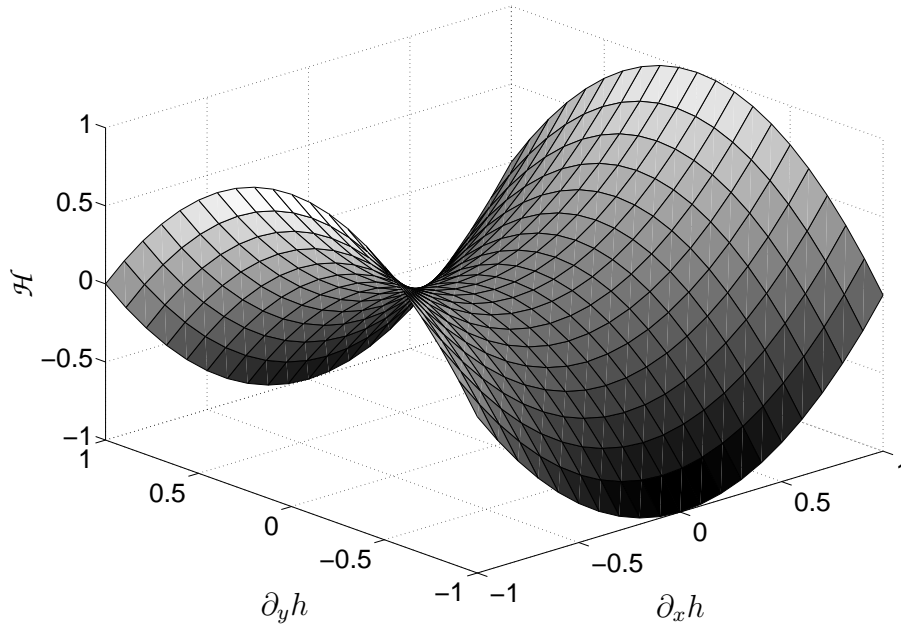
der Hamiltonfunktion ab, für deren Existenz aber die Konvexität von  $\mathcal{H}$  sicherzustellen ist.

Der Vergleich von Deflektanz- und Reflektanzabbildung legt eine ähnliche Vorgehensweise nahe, um das Fehlen eines Anfangswerts zu kompensieren. Wir skizzieren im Folgenden, warum dieser Ansatz im Fall des deflektometrischen Problems zum Scheitern verurteilt ist. Zunächst unterziehen wir die der zweiten Reflexionsbedingung entspringende PDE

$$l_2 \partial_x f - l_1 \partial_y f = \frac{1}{f} (l_1 y - l_2 x) \Leftrightarrow \left\langle \begin{pmatrix} l_2 \\ -l_1 \end{pmatrix}, f \nabla f + \mathbf{x} \right\rangle = 0$$

der Koordinatentransformation (3.12): Einsetzen und Division durch  $l_2$  liefert  $\partial_x h - \psi_d \partial_y h = 0$  mit der verallgemeinerten Deflektanzfunktion  $\psi_d = \tan \xi$ ,  $\xi = \arg \mathbf{l}$ . Es folgt

<sup>4.4</sup>Die Legendre-Transformation gehört zu den Berührungstransformationen. Details finden sich zum Beispiel im Anhang A.1 sowie in [17].



**Abbildung 4.7:** Hamiltonfunktion der Deflektanz.

nach Äquivalenzumformung

$$\tan \xi = \frac{\partial_y h}{\partial_x h}.$$

Durch Anwenden des Arcustangens und des Cosinus erhält man, da  $\cos(\arctan x) = (1 + x^2)^{-\frac{1}{2}}$ ,

$$\bar{\psi}_d(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{\partial_y h}{\partial_x h}\right)^2}},$$

wobei nun  $\bar{\psi}_d(\mathbf{x}) = \cos(\arctan \xi)$  eine entsprechend transformierte Messung bezeichnet. Nach einigen Umformungen folgt

$$\bar{\psi}_d \sqrt{\|\nabla h\|^2} - \sqrt{(\partial_x h)^2} = 0.$$

Multiplikation mit  $\bar{\psi}_d \sqrt{\|\nabla h\|^2} + \sqrt{(\partial_x h)^2}$  ergibt schließlich

$$\mathcal{H}(\nabla h, \bar{\psi}_d) := (\bar{\psi}_d^2 - 1)(\partial_x h)^2 + (\partial_y h)^2 = 0.$$

Vergleiche dieses Ergebnis mit (4.13). Da nach Konstruktion  $\bar{\psi}_d^2 = (\cos \xi)^2 < 1$ , ist der Koeffizient von  $\partial_x h$  sicherlich kleiner als null.  $\mathcal{H}$  weist hyperbolische Sattelstruktur auf (siehe Abbildung 4.7). Die Legendre-Transformation versagt aber bei nicht-konvexen Funktionen. Die strukturelle Verwandtschaft der Probleme lässt sich so nicht ausnutzen.

## 4.3 Lösungsverfahren

### 4.3.1 Schätzung von Oberflächenpunkten

Statt infolge (4.14) vollständig auf *Randwerte* zu verzichten, versuchen wir, durch Hinzunahme der Shading-Information bei teilspiegelnden Oberflächen mit Hilfe eines *Anfangswerts* einen eindeutigen Kandidaten aus der Lösungsmannigfaltigkeit herauszufiltern, welche ja – wie im Kapitel 3 gezeigt – eindimensional ist. Das bedeutet, dass Kenntnis eines einzigen Punktes  $\mathbf{s} \in S$  Eindeutigkeit der Lösung herstellt. Einen solchen wollen wir wie in [4] näher ausgeführt durch Betrachtung der spekularen und diffusen Eigenschaften der Oberfläche bestimmen.

Es ist interessant, dass durch die Einführung von  $\mathcal{L}$  zwar  $\|\mathbf{s}\|$  aus (3.4b) eliminiert wurde, sich aus (3.18b) aber infolge einer Koordinatentransformation trotzdem Entfernungsinformation gewinnen lässt:

**Lemma 4.5** (Isodistanz-Gleichung). *Sei  $d : \Omega_E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  die Abbildung, die jedem Bildelement  $\mathbf{u} = (u, v)$  die Entfernung  $d$  des betrachteten Oberflächenpunkts zuordnet. Dann gilt*

$$\langle \mathbf{c}, \nabla d \rangle = 0, \quad (4.15)$$

wobei  $\mathbf{c} = \mathbf{D}\mathbf{l}$  und

$$\mathbf{D} := \begin{pmatrix} -uv & (u^2 + 1) & -v \\ -(v^2 + 1) & uv & u \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}.$$

*Beweis.* Sei  $\mathbf{s}_b(t)$  eine Charakteristik der Gleichung (3.18b) (siehe dazu auch den Beweis des Satzes 3.15). Das Vektorfeld  $\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \mathbf{l} \times \mathbf{x}$  ist aufgrund der Eigenschaften des Vektorprodukts in jedem Punkt  $\mathbf{x} \in \Omega$  orthogonal zu  $\mathbf{x}$ , und somit lässt sich folgern

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{b}, \mathbf{s}_b \rangle = 0 &\Rightarrow \langle \dot{\mathbf{s}}_b, \mathbf{s}_b \rangle = 0 \Rightarrow 2\langle \dot{\mathbf{s}}_b, \mathbf{s}_b \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle \dot{\mathbf{s}}_b, \mathbf{s}_b \rangle + \langle \dot{\mathbf{s}}_b, \mathbf{s}_b \rangle = 0 \Rightarrow \partial_t \langle \mathbf{s}_b, \mathbf{s}_b \rangle = 0 \Rightarrow \partial_t \|\mathbf{s}_b\|^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Die Projektion von

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_2 - vl_3 \\ -l_1 + ul_3 \\ vl_1 - ul_2 \end{pmatrix}$$

in die Bildebene ergibt das Tangentenfeld an die charakteristische Grundkurve von  $\mathbf{s}_b(t)$ :

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} l_2 - vl_3 \\ -l_1 + ul_3 \end{pmatrix} - (vl_1 - ul_2) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{D}\mathbf{l}.$$

Längs der Grundkurve ist die Entfernung  $d = \|\mathbf{s}_b\|$  wegen (4.16) konstant, was schließlich die Behauptung  $\langle \mathbf{c}, \nabla d \rangle = 0$  impliziert.

□

Die quasilineare PDE (4.15) beschreibt die Ableitung von  $d$  in Richtung  $\mathbf{c}$  in Form des Skalarprodukts  $\partial_{\mathbf{c}}d = \langle \mathbf{c}, \nabla d \rangle$ . Die Charakteristiken decken sich mit den Höhenlinien der Funktion  $d(\mathbf{u})$ . Sie sind genau die Raumkurven bestehend aus Punkten konstanter Entfernung vom optischen Zentrum  $C$  oder Äquipotentiallinien im Sinne von (3.12). Ihre Existenz wird anschaulich, wenn man sich den Schnitt der Sphäre  $S_d^2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{x}\| = d\}$  eines geeigneten Radius  $d$  mit einem ausreichend großen Stück von  $S$  vorstellt. Die Projektion der Charakteristiken in die Bildebene ergibt dann die charakteristischen Grundkurven. Für einen Anfangswert  $\mathbf{u}_0$  berechnet man eine solche Kurve durch

$$\gamma_d := \left\{ \mathbf{u} \mid \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \int_0^\tau \mathbf{c}(\mathbf{u}(t)) dt \right\}. \quad (4.17)$$

Wenn man  $d \in C^1(\Omega_E)$  fordert, ist gleichzeitig die Stetigkeit der Isophoten

$$\gamma_E := \{ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 \mid E = \text{const} \} \quad (4.18)$$

in  $\Omega_E \setminus N_{\hat{\mathbf{r}}_0}$  gesichert. Die Grundidee ist nun, den Schnitt  $U_s = \gamma_E \cap \gamma_d$  zwischen einer beliebigen Isophote und Isodistanz-Kurve zu betrachten, so dass  $|S_s| \geq 2$ ,  $S_s := h^{-1}(U_s) \setminus N_{\hat{\mathbf{r}}_0}$ . Bei der Auswahl des entsprechenden Grauwerts beziehungsweise Startpunkts unterliegt man, außer dass alle Spekularitäten auszuschließen sind, keinen Einschränkungen, so dass eine solche Menge  $U_s$  durch Ausprobieren zu bestimmen sein wird. Für einen festen Reflexauslöser lässt sich die Abhängigkeit  $\mathbf{n}(d)$  mit Hilfe von (3.5) für jede Sichtstrahlrichtung  $\hat{\mathbf{s}}$  analytisch angeben, so dass Satz 3.1 erfüllt bleibt, wenn man sich vom optischen Zentrum entfernt:

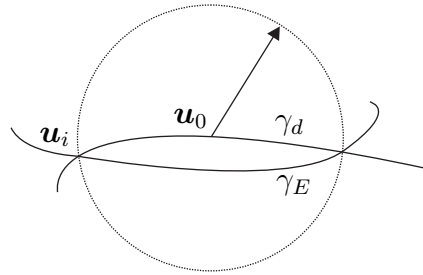
$$\mathbf{n}(d) = \hat{\mathbf{s}} - \hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{s}} - \frac{\mathbf{l}(\hat{\mathbf{s}}) - d\hat{\mathbf{s}}}{\|\mathbf{l}(\hat{\mathbf{s}}) - d\hat{\mathbf{s}}\|}. \quad (4.19)$$

Außerdem hat jedes  $\mathbf{s} \in S_s$  den selben Abstandswert  $d$ . Wähle nun zwei Elemente  $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \in S_s$  mit Normalen  $\mathbf{n}_1$  und  $\mathbf{n}_2$ . Wenn man das vorgestellte BRDF-Modell ansetzt (die Oberfläche wird also zusätzlich zur Dekodierung aus paralleler Richtung  $\mathbf{r}_0$  bestrahlt und vom Sensor erfasst) und annimmt, dass  $\beta(\mathbf{u}) = \beta = \text{const.}$ , gilt wegen der Konstanz des Grauwerts  $E$  auf  $S_s$

$$\beta \langle \hat{\mathbf{n}}_1, \hat{\mathbf{r}}_0 \rangle = E \quad \wedge \quad \beta \langle \hat{\mathbf{n}}_2, \hat{\mathbf{r}}_0 \rangle = E \quad \Leftrightarrow \quad \langle \hat{\mathbf{n}}_1 - \hat{\mathbf{n}}_2, \hat{\mathbf{r}}_0 \rangle = 0. \quad (4.20)$$

Einsetzen von (4.19) zeigt, dass es sich bei der letzten Identität um eine skalare Gleichung in  $d$  handelt, aus der man durch Auflösen die gesuchte Entfernung erhält. Ein wichtiger Vorteil dieser Vorgehensweise ist, dass die Auswertung von (4.20) nicht vom absoluten Grauwert abhängt. Die in vielen SFS-Anwendungen kritische Schätzung des Albedos  $\beta$  kann hier übergangen werden.





**Abbildung 4.8:** Von  $\mathbf{u}_0$  wird die Kurve  $\gamma_d$  durch Integration so gewonnen, dass die Schnittmenge mit  $\gamma_E$  mindestens zwei Punkte enthält. Der Startpunkt  $\mathbf{u}_0$  ist zur Vermeidung von Fehlerakkumulation so zu wählen, dass die dafür nötigen Integrationswege möglichst kurz sind.

Die Berechnung der Isodistanz-Kurven stützt sich auf numerische Integration. Dabei akkumulieren sich Mess- und Rundungsfehler. Bei der Auswertung des Integrals (4.17) wächst der Abstand zur wahren charakteristischen Grundkurve mit dem Parameter  $t$ . Zur Minimierung des so genannten *Random-Walk-Effekts*<sup>4,5</sup> wählen wir  $\mathbf{u}_0$  so, dass  $\text{dist}(\mathbf{u}_0, U_s) \rightarrow \min$  (siehe Abbildung 4.8). Hierbei ist  $\text{dist}$  ein geeignetes Distanzmaß.

### 4.3.2 Iterative Rekonstruktion

Die Rekonstruktion erfolgt durch Minimierung von (3.22) mit Hilfe eines Gradientenabstiegsverfahrens für implizite dynamische Flächen (siehe Abschnitt 2.3.2). Wir fügen hier zusätzlich einen regularisierenden Term im Sinne von Tikhonov an, der erzwingt, dass alle Iterierten die mit der oben beschriebenen Methode ermittelten Punkte  $\mathbf{s}_i \in S_s$  enthalten:

$$\begin{aligned} H(S) &= J(S) + \alpha J_r(S) \\ &= \frac{1}{2} \|N(S) - \hat{\mathbf{n}}_\psi\|_{L^2(S)}^2 + \alpha \frac{1}{2} \left\| \left[ \sum_{i \in \mathcal{I}} \delta(\mathbf{s} - \mathbf{s}_i) \right] |\varphi| \right\|_{L^2(S)}^2. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Dabei sind  $\delta$  die Delta-Distribution auf  $S$  und  $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$  der Regularisierungsparameter. Durch Minimierung dieser modifizierten Version des Funktional (3.22) wird eine Art  $\mathbf{s}_i$ -Minimum-Norm-Lösung (siehe Abschnitt 2.4) den anderen Kandidaten der Lösungsmenge vorgezogen. In anderen Worten: Die sich entwickelnde Fläche haftet an allen  $\mathbf{s}_i \in S_s$ . Wir berechnen zunächst den Formgradienten  $\nabla H$  von (4.21), dieser bestimmt ja in jedem Iterationsschritt die Abstiegsrichtung. Mit dem Oberflächengradienten der Kostenfunktio-

<sup>4,5</sup>Random-Walk-Effekt bezeichnet die Kumulation lokaler stochastischer Abweichungen entlang eines Integrationswegs mit der Konsequenz einer wachsenden Varianz entlang desselben.

on  $f(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{n}}) := \frac{1}{2} \|\hat{\mathbf{n}} - \hat{\mathbf{n}}_\psi\|^2$  auf  $S^2$  ist

$$\begin{aligned} \nabla_{S^2} f + f \hat{\mathbf{n}} &\stackrel{(2.1)}{=} \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{n}}} \hat{\mathbf{n}}_\psi + (1 - \langle \hat{\mathbf{n}}_\psi, \hat{\mathbf{n}} \rangle) \hat{\mathbf{n}} \\ &= -\hat{\mathbf{n}}_\psi + \langle \hat{\mathbf{n}}_\psi, \hat{\mathbf{n}} \rangle \hat{\mathbf{n}} + (1 - \langle \hat{\mathbf{n}}_\psi, \hat{\mathbf{n}} \rangle) \hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{n}} - \hat{\mathbf{n}}_\psi. \end{aligned}$$

Mit (2.19) ergibt sich  $\nabla J = \operatorname{div}_S(\hat{\mathbf{n}} - \hat{\mathbf{n}}_\psi)$ , was wegen (2.20) und  $\operatorname{div}_S \hat{\mathbf{n}} = \kappa$  äquivalent zu  $\nabla J = \kappa - \operatorname{div} \hat{\mathbf{n}}_\psi$  ist. Der Formgradient von  $J_r$  wird von Solem et al. wie folgt angegeben:

$$\nabla J_r = \left[ \sum_{i \in \mathcal{I}} \delta(\mathbf{s} - \mathbf{s}_i) \right] \frac{\varphi}{\|\nabla \varphi\|}.$$

Die Berechnung ist komplex und kann in [60] nachgelesen werden. Es soll nun in Richtung  $-\nabla H$  abgestiegen werden, die zu lösende Level-Set-Gleichung lautet also

$$\partial_t \varphi - \nabla H \|\nabla \varphi\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_t \varphi = (\kappa - \operatorname{div} \hat{\mathbf{n}}_\psi) \|\nabla \varphi\| + \alpha \left[ \sum_{i \in \mathcal{I}} \delta(\mathbf{s} - \mathbf{s}_i) \right] \varphi. \quad (4.22)$$

Es sei angemerkt, dass im Falle der Konvergenz  $\partial_t \varphi = 0$  und  $\mathbf{s}_i \in S_* = \lim_{t \rightarrow \infty} S(t)$  für alle  $i \in \mathcal{I}$ . Da für eine reguläre Evolution  $\|\nabla \varphi\| \neq 0$  gilt, muss  $\kappa = \operatorname{div} \hat{\mathbf{n}}_\psi$  erfüllt sein. Das ist genau die Lösung des Krümmungsanpassungsproblems, das in Abschnitt 3.3.6 behandelt wurde.

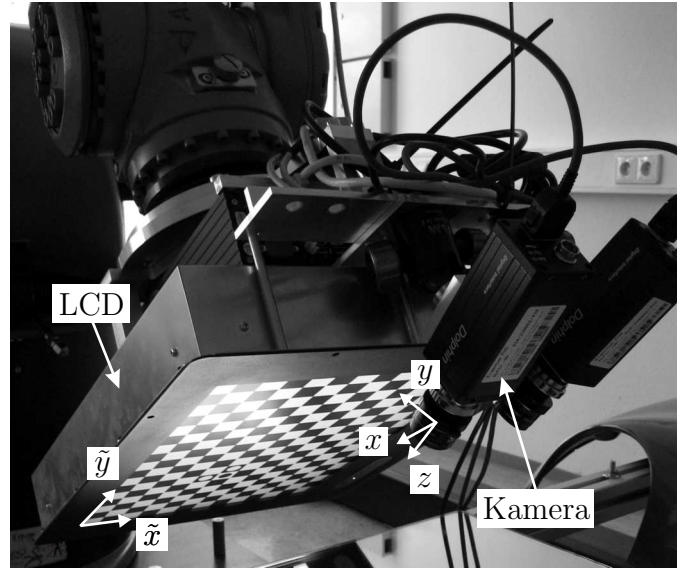
Bei (4.22) handelt es sich um ein Anfangs-Randwert-Problem. Die natürlichen Randbedingungen sind Kapitel 2.3.2 und dem oben Gesagtem zufolge  $\iota = \langle \hat{\mathbf{n}}_\psi, \hat{\mathbf{o}} \rangle$ . Auch wenn dabei wiederholte Reinitialisierung unabdingbar ist, rechnet man numerisch mit einer Signed Distance Function  $\varphi_d$  [47]. Da  $\nabla \varphi_d = \hat{\mathbf{n}}$ , gilt  $\langle \nabla \varphi_d, \hat{\mathbf{o}} \rangle = \iota$ , was sich mit den natürlichen Randbedingungen der Poisson-Gleichung (3.26) deckt. Zeigen die äußeren Normalen  $\hat{\mathbf{o}}$  von  $\Omega$  jeweils in Richtung der Koordinatenachsen  $\mathbf{e}_{x_i} = \pm(\delta_{1i}, \dots, \delta_{ni})^\top$ , setzt man also auf den entsprechenden Seitenflächen  $\partial_{x_i} \varphi_d = \pm \langle \hat{\mathbf{n}}_\psi, \mathbf{e}_{x_i} \rangle$ . Bemerke, dass für den Fortgang der Evolution nur das Level Set zum aktuellen Zeitpunkt  $t$  eine Rolle spielt und damit die Randwerte von  $\partial\Omega \cap S(t)$  auf  $\partial\Omega$  beliebig fortgesetzt werden können.

Außerdem wird eine Anfangsfläche  $S_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(\mathbf{x}, 0) = 0\}$  benötigt, die die  $\mathbf{s}_i$  interpoliert und gleichzeitig die gesuchte Fläche möglichst gut approximiert. Es sei  $S_0$  eine Ebene. Um ihr eine sinnvolle Normale zuzuweisen, machen wir wieder von der Deflektanz Gebrauch, die ja unabhängig von den Entfernungen  $\|\mathbf{s}_i\|$  ist: Angenommen, es werde eine ebene Spiegelfläche mit Normalenrichtung  $\mathbf{p} = (p, q)^\top$  betrachtet, dann erfüllt eine Auswahl von  $m$  Punkten  $\mathbf{u}_i = (u_i, v_i)^\top$ ,  $1 \leq i \leq m$ , und deren Deflektanzen  $\psi_d^i$  jeweils die Gleichung

$$p + \psi_d^i q = \psi_d^i v^i + u^i.$$

Das folgt durch Äquivalenzumformung der Identität (4.9). Wir erhalten die Lösung dieses überbestimmten linearen Gleichungssystems in  $p$  und  $q$  durch

$$\mathbf{p} = \mathbf{D}^* \mathbf{b}, \quad (4.23)$$



**Abbildung 4.9:** Roboterbasierter deflektometrischer Versuchsaufbau.

wobei  $\mathbf{D}^*$  die Pseudoinverse von

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & \psi_d^1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \psi_d^m \end{pmatrix} \text{ ist und } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \psi_d^1 v_1 + u_1 \\ \vdots \\ \psi_d^m v_m + u_m \end{pmatrix}.$$

Meist handelt es sich bei der gesuchten Oberfläche nicht um einen Planspiegel. *Einen* Normalenvektor, der für jeden Spiegelpunkt den Anteil (3.4b) des Reflexionsgesetzes einhält, gibt es deshalb im Allgemeinen nicht. Näherungsweise verwendet man stattdessen  $\mathbf{p} = \arg \min_{\mathbf{p}} \left( \frac{1}{2} \|\mathbf{D}\mathbf{p} - \mathbf{b}\|^2 \right)$ . Wir starten die Iteration also mit der Ebene durch ein  $\mathbf{s}_0 \in S_s$  mit Normalenvektor  $(\mathbf{p}^\top, 1)^\top$ .

## 4.4 Rekonstruktionsergebnisse

### 4.4.1 Metrische Kalibrierung

Für die Kamerakalibrierung wurde auf die in [12] und [61] dokumentierten Toolboxen zurückgegriffen. Die Kalibrierung des deflektometrischen Aufbaus leisten zwei neuartige Verfahren, die nun kurz vorgestellt werden sollen. Gesucht sind dabei  $\mathbf{R} \in SO(3)$  und  $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^3$ , so dass sich die im lokalen Schirmkoordinatensystem (hier mit einer Tilde  $\tilde{\cdot}$  gekennzeichnet) gegebenen Messungen durch

$$\mathbf{l} = \mathbf{R}\tilde{\mathbf{l}} + \mathbf{t}$$

in das Bezugssystem im optischen Zentrum der Kamera überführen lassen (siehe Abbildung 4.9). In beiden Fällen wird dabei grob so vorgegangen:

1. Bestimmung der intrinsischen Kameraparameter durch Kalibrierung,
2. Messung der Zuordnung von Schirm- und Kamerapixeln für einen ebenen Spiegel (Kalibriernormal),
3. Schätzung von Lage und Orientierung des Kalibriernormals,
4. Optimierung der Konsistenz von über das Kalibriernormal verfolgten Sichtstrahlen und Messung bezüglich  $\mathbf{R}$  und  $\mathbf{t}$  (Bündelausgleich).

Unter den Aufnahmen des Rechteckmusters für die intrinsische Kamerakalibrierung ist auch eine, bei der dieses auf der Oberfläche eines ebenen Oberflächenspiegels  $P$  befestigt ist. So kann das lokale Koordinatensystem  $(\mathbf{t}_P; \mathbf{e}_x^P, \mathbf{e}_y^P, \mathbf{e}_z^P)$  beziehungsweise die Hesse-Normalform  $\langle \hat{\mathbf{n}}_P, \mathbf{x} \rangle = \langle \hat{\mathbf{n}}_P, \mathbf{t}_P \rangle$  des Kalibriernormals  $P$  bezüglich des Koordinatensystems im optischen Zentrum bestimmt werden (siehe Abbildung 4.11 (a)).

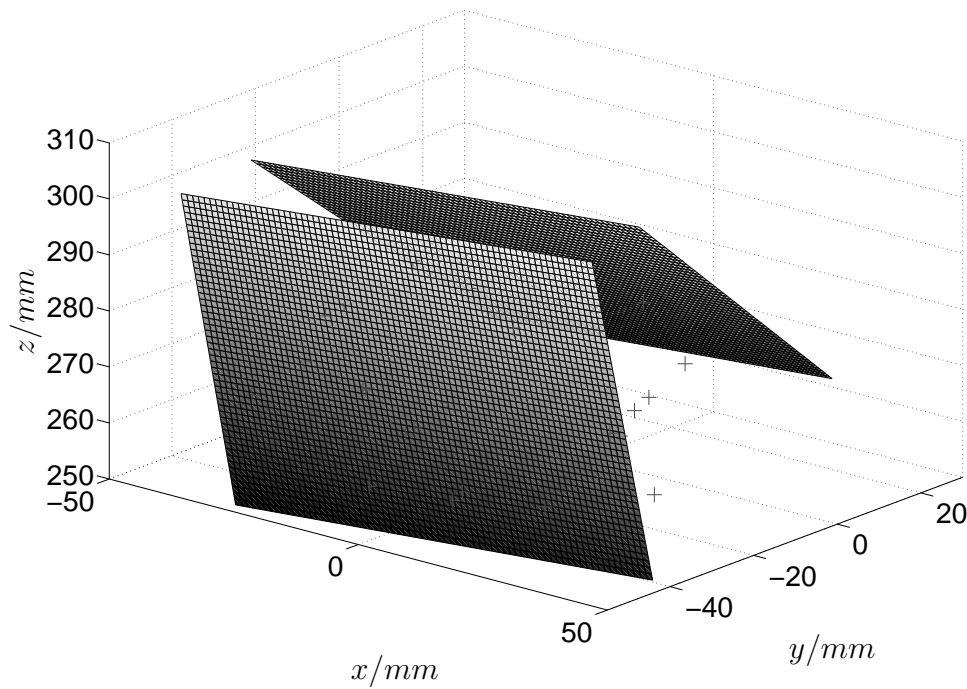
Sei nun  $\sigma_k, k \in \{1, \dots, n\}$ , eine Triangulierung von  $L$ ; das ist eine Familie homöomorpher Abbildungen des Standard-Simplexes  $\Delta := \{(x_1, x_2, x_3)^\top \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1 \text{ und } 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, 3\}$  auf  $L$ . Für ein unbekanntes  $\lambda_{i,k}$  gilt  $\mathbf{l}_{i,k} := \sigma_k^i(\Delta) = \mathbf{s}_{i,k} + \lambda_{i,k} \mathbf{H} \mathbf{s}_{i,k}$  mit der Householder-Matrix des Planspiegels  $\mathbf{H} = \mathbf{I} - 2\hat{\mathbf{n}}_P \hat{\mathbf{n}}_P^\top$  und zugehörigem Reflexionspunkt  $\mathbf{s}_{i,k}$ , siehe dazu auch den Beweis von Lemma 3.3. Durch Dekodierung wird zunächst die Zuordnung von Bild- zu Schirmelementen  $\mathbf{u}_{i,k} \leftrightarrow \tilde{\mathbf{l}}_{i,k}$  ermittelt. Bestimme im nächsten Schritt mit Hilfe eines nichtlinearen Optimierungsverfahrens die  $\lambda_{i,k} \in \mathbb{R}_{>0}$ , so dass

$$\sum_k \sum_{\substack{i,j \in \{1,2,3\} \\ i \neq j}} \frac{1}{2} \left( \|\tilde{\mathbf{l}}_{i,k} - \tilde{\mathbf{l}}_{j,k}\| - \|\mathbf{l}_{i,k} - \mathbf{l}_{j,k}\| \right)^2 \stackrel{!}{\rightarrow} \min .$$

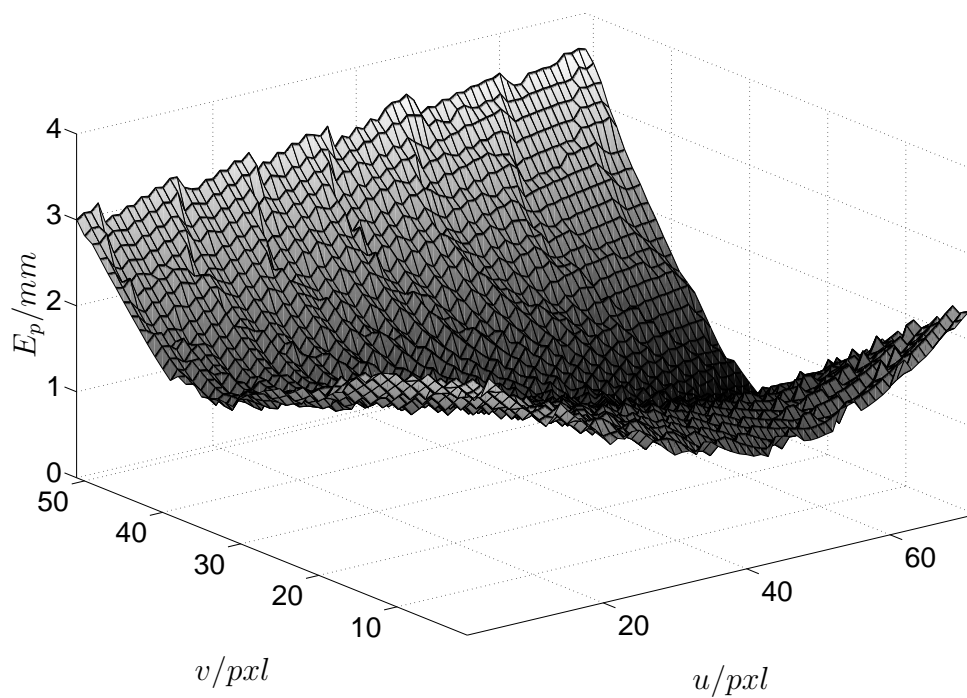
Die gesuchten Größen  $\mathbf{R}$  und  $\mathbf{t}$  werden wegen der Differenzenbildung hier nicht benötigt. Mit den  $\lambda_{i,k}$  erhält man eine Menge von Punkten  $\mathbf{l}_{i,k}$ , aus denen man mit Hilfe eines robusten Schätzers (zum Beispiel eines RANSAC-Estimators) die Hesse-Normalform von  $L$  berechnet (siehe Abbildung 4.10 (a)).

Als numerisch günstig für den Bündelausgleich hat sich die exponentielle Darstellung von  $\mathbf{R}$  erwiesen. Es ist mit der schiefsymmetrischen Matrix

$$\mathbf{\Omega} := \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

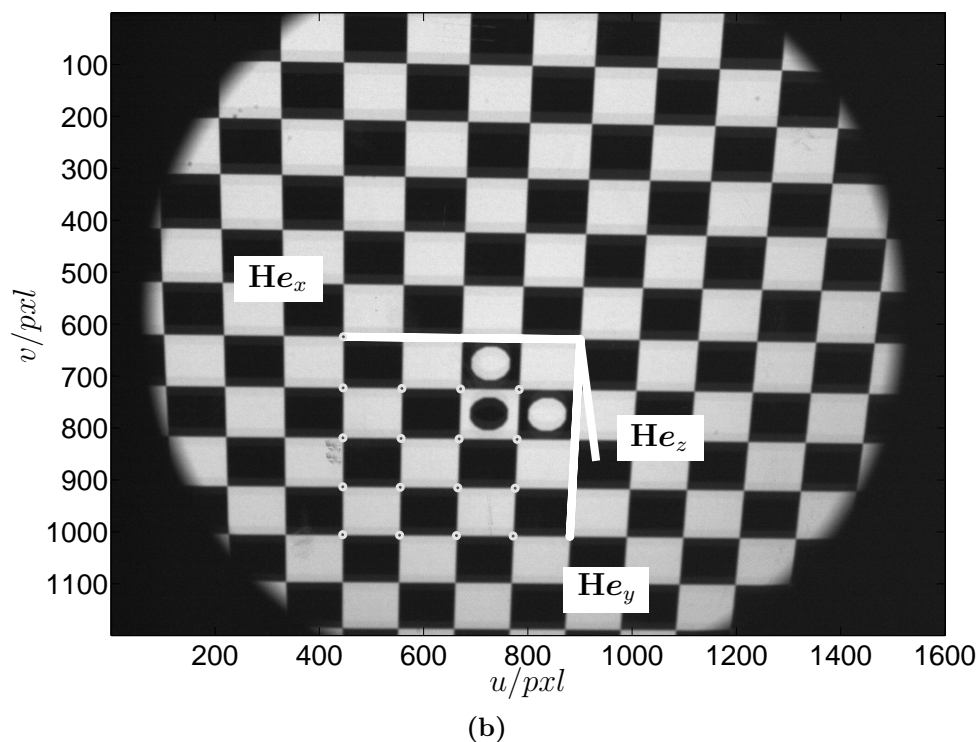
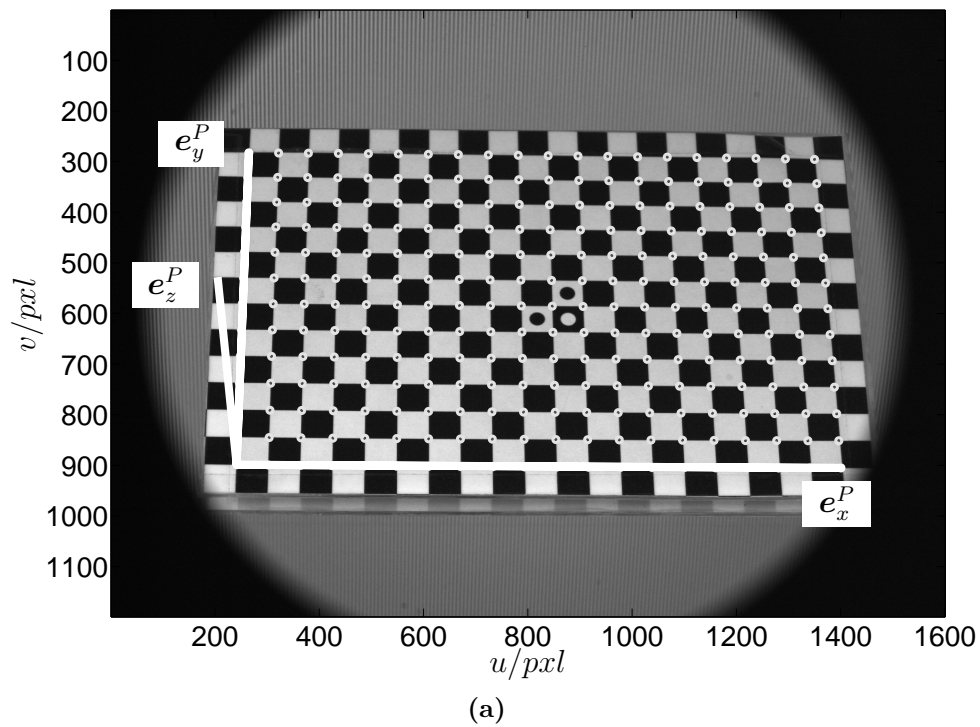


(a)

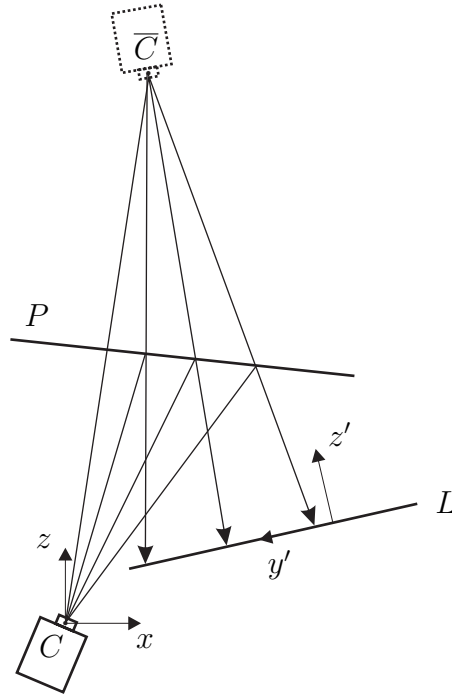


(b)

**Abbildung 4.10:** (a) Bestimmung der LCD-Parameter, Punktwolke und Ergebnis der RANSAC-Schätzung. (b) Residuum  $E_p$  der Lösung von (4.25).



**Abbildung 4.11:** (a) Bestimmung der Lage des Kalibriernormals im Raum. (b) Betrachtung des auf dem LCD angezeigten Kalibrieramusters über den Planspiegel.



**Abbildung 4.12:** Der Gegenpunkt  $\bar{C}$  des optischen Zentrums definiert eine virtuelle Kamera.

und  $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \mathbb{R}$  dann  $\mathbf{R} = e^{\boldsymbol{\Omega}}$ . Jedes  $g \in \mathcal{S}$  lässt sich über die Bildebene  $\Omega_E$  parametrisieren, so dass

$$g : \mathbf{x}(\nu) = (1 + \nu) \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

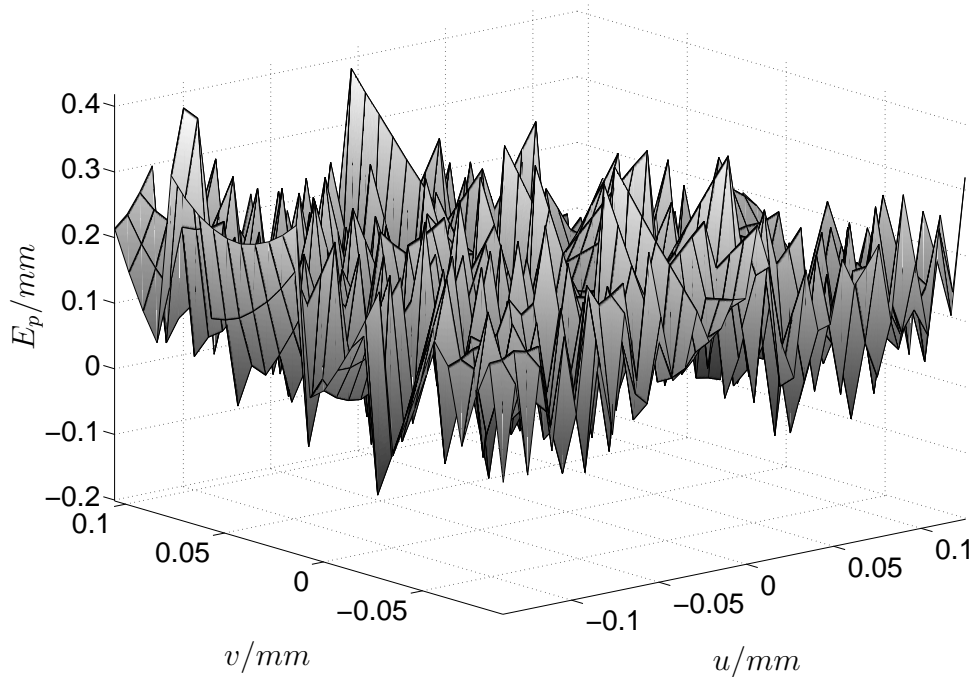
Mit Lage und Orientierung des Kalibrierspiegels  $P$  ist auch die Reflexionskongruenz  $\mathcal{R}$  bekannt. Durch den Schnitt  $\mathcal{R} \cap L$  erhält man die Zuordnung  $\psi : \Omega \rightarrow L$ ,  $\mathbf{l} = \psi(\mathbf{u})$ . Nichtlineare Least-Squares-Regression führt schließlich auf denjenigen Parametervektor  $(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \mathbf{t}^\top)$ , für den

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} \frac{1}{2} \|\mathbf{R}\tilde{\mathbf{l}}(\mathbf{u}_i) + \mathbf{t} - \mathbf{l}(\mathbf{u}_i)\|^2 \xrightarrow{!} \min. \quad (4.25)$$

Das Residuum ist in Abbildung 4.10 (b) über den Kamerakoordinaten  $u$  und  $v$  aufgetragen. In den Randbereichen beläuft sich der Fehler auf bis zu 3 mm.

Folgende Beobachtung liegt der Entwicklung eines alternativen Verfahrens zugrunde: Für den ebenen Spiegel  $P$  kollabiert die Sekundärkaustik  $\bar{P}$  zu einem Punkt (siehe Abbildung 4.12). Diesen erhält man durch Spiegelung des optischen Zentrums  $C$  an  $P$ . Mit dem Koordinatenvektor  $\mathbf{x}_{\bar{C}}$  von  $\bar{C}$  gilt

$$\mathbf{x}_{\bar{C}} = 2\langle \mathbf{t}_P, \hat{\mathbf{n}}_P \rangle \hat{\mathbf{n}}_P,$$



**Abbildung 4.13:** Rückprojektionsfehler  $E_p$  nach LCD-Kamera-Kalibrierung.

wobei  $\mathbf{t}_P \in P$ ,  $\mathbf{n}_P \perp P$ . Offensichtlich schneiden sich alle Strahlen der Reflexionskongruenz in  $\bar{C}$ . Auf diese Weise wird eine virtuelle Kamera definiert, deren extrinsische Parameter  $(\mathbf{R}', \mathbf{t}')$  daraufhin – mit Hilfe eines in die Kamerakalibrierungstoolbox integrierten Standardverfahrens – bezüglich des kartesischen Koordinatensystems  $(\mathbf{x}_{\bar{C}}; \mathbf{H}\mathbf{e}_x, \mathbf{H}\mathbf{e}_y, \mathbf{H}\mathbf{e}_z)$  geschätzt werden (siehe Abbildung 4.11 (b)). Die Spiegelung wird schließlich durch folgende Rücktransformation kompensiert:

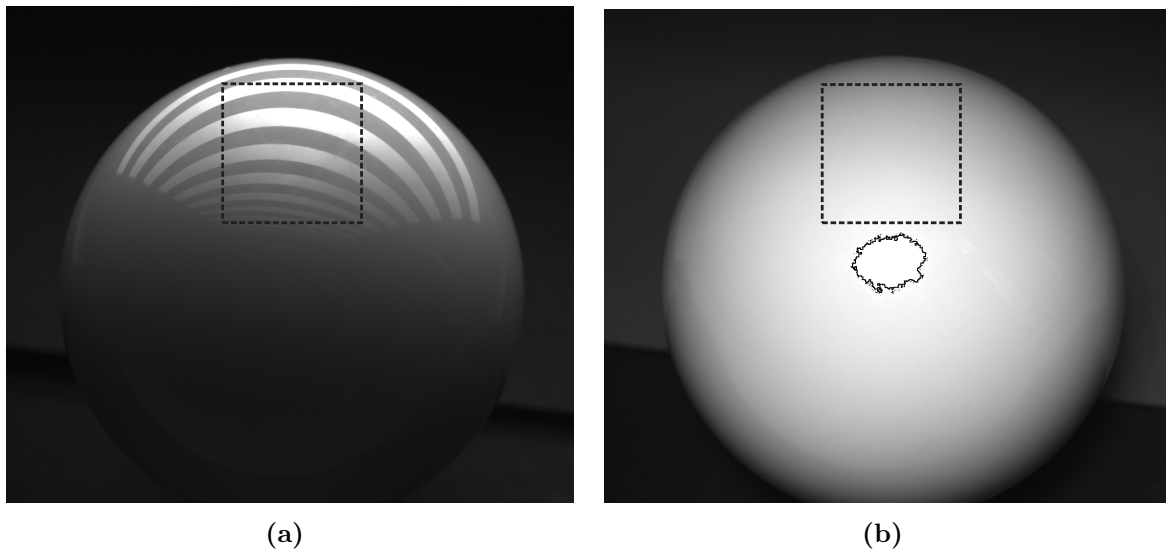
$$\mathbf{R} = \mathbf{H}\mathbf{R}', \quad \mathbf{t} = \mathbf{x}_{\bar{C}} + \mathbf{H}\mathbf{t}'.$$

Bemerke,  $\mathbf{H}$  ist involutorisch, so dass  $\mathbf{H}^{-1} = \mathbf{H}$ . Der Rückprojektionsfehler konnte durch diese Vorgehensweise im Mittel deutlich gesenkt werden, wie ein Vergleich der Abbildungen 4.13 und 4.10 (b) bestätigt. Der mittlere Rückprojektionsfehler betrug  $\bar{E}_p = 128,8 \mu m$ , was ungefähr der Hälfte der Pixelbreite von  $T_L = 0.297 \mu m$  auf dem LCD entspricht:  $\bar{E}_p \approx \frac{1}{2}T_L$ . Es kann  $\bar{E}_p$  als mittlerer Quantisierungsfehler aufgefasst werden.

#### 4.4.2 Simulationen

Ein Messverfahren muss anhand eines Prüflings bekannter Geometrie validiert werden: Für die vorliegende Arbeit wurde eine Billardkugel verwendet, die nach Maßstäben internationaler Turniere gefertigt ist (siehe Abbildung 4.14). Da die Anforderungen an



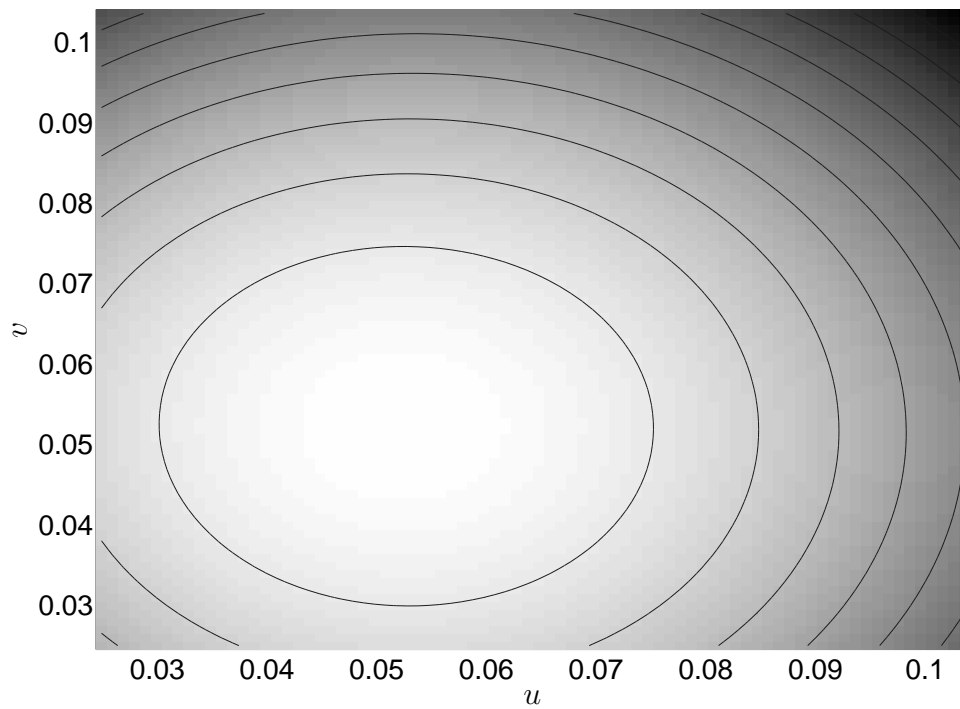


**Abbildung 4.14:** (a) Testobjekt: Turnierbillardkugel, Normdurchmesser  $61,5 \text{ mm}$ . Für den gekennzeichneten Bereich liegt eine vollständige Dekodierung vor. (b) Anregung des diffusen Reflexionsvermögens. Gekennzeichnet sind die spekularen Anteile im Zentrum, die bei der Auswertung zu meiden sind.

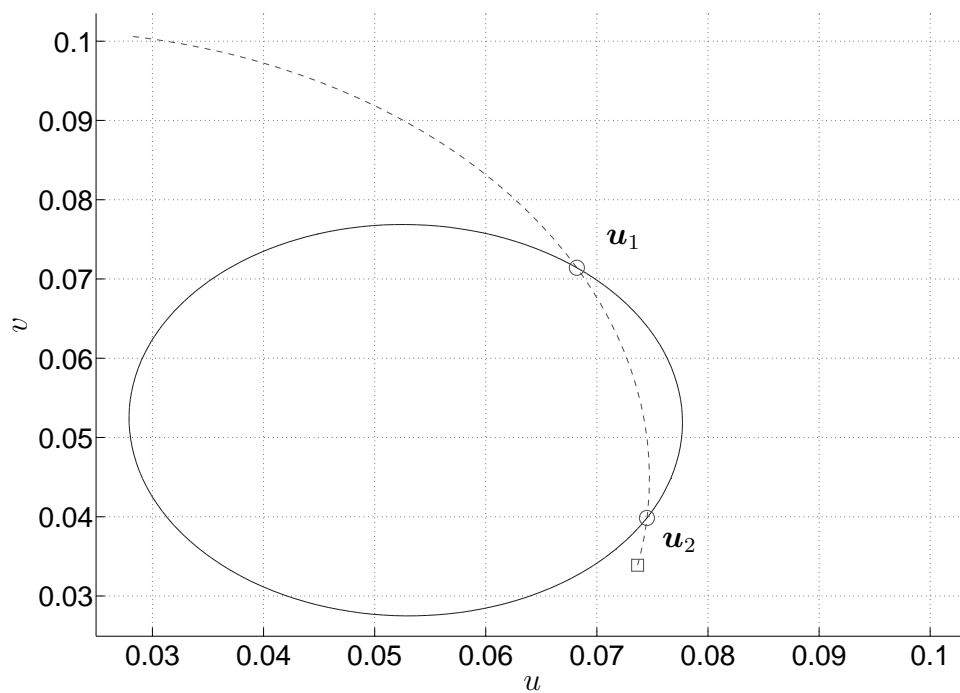
die Bahngenauigkeit hoch sind, ist von geringen Toleranzen im Durchmesser auszugehen. Außerdem zeigt sie aufgrund ihrer Lackierung in gleichem Maße spiegelndes wie diffuses Reflexionsverhalten. Der Durchmesser beträgt  $61,5 \text{ mm}$ , die mittlere Krümmung  $0,0325 \text{ mm}^{-1} \approx 0,0325 \text{ mm}^{-1}$  errechnet sich durch Bildung des Kehrwerts. Ein ebener Spiegel, für den durch extrinsische Kalibrierung eine entsprechende *Ground Truth* erzeugt werden kann, diene darüber hinaus zur Bewertung deflektometrischer Verfahren für vollspiegelnde Oberflächen.

Um den Einfluss stochastischer Fehlerquellen auszuschließen, wurden alle Verfahrensschritte zunächst in einer MATLAB-Simulation getestet. Die gesuchte Oberfläche war dabei ein Kugelflächenstück mit den bereits oben angeführten innergeometrischen Eigenschaften. Ein Raytracing lieferte die deflektometrischen Daten. Das Grauwertbild 4.15 (a) wurde gemäß der Vorschrift (4.5) gerendert.

Ein Runge-Kutte-Integrator mit moderater Schrittweite lieferte die in Abbildung 4.15 (b) dargestellte Isodistanz-Kurve und damit zwei Elemente der Menge  $U_s$ . Da kein künstliches Rauschen addiert wurde, sind auch keine Random-Walk-Effekte feststellbar. Gleiches gilt auch für die anschließende Rekonstruktion durch Charakteristikenexpansion, die in Abbildung 4.16 (a) zu sehen ist. Deutlich zu erkennen ist, dass – wie theoretisch vorhergesagt – die Anfangswertkurve auf allen anderen Charakteristiken senkrecht steht. Das



(a)



(b)

**Abbildung 4.15:** (a) Kurven konstanten Grauwerts bei Aufnahme des diffusen Reflexionsverhaltens. (b) Zusätzlich ist eine Isodistanz-Kurve gestrichelt, der Startpunkt der Integration ( $\square$ ) und die Menge  $U_s$  ( $\circ$ ) eingezeichnet.

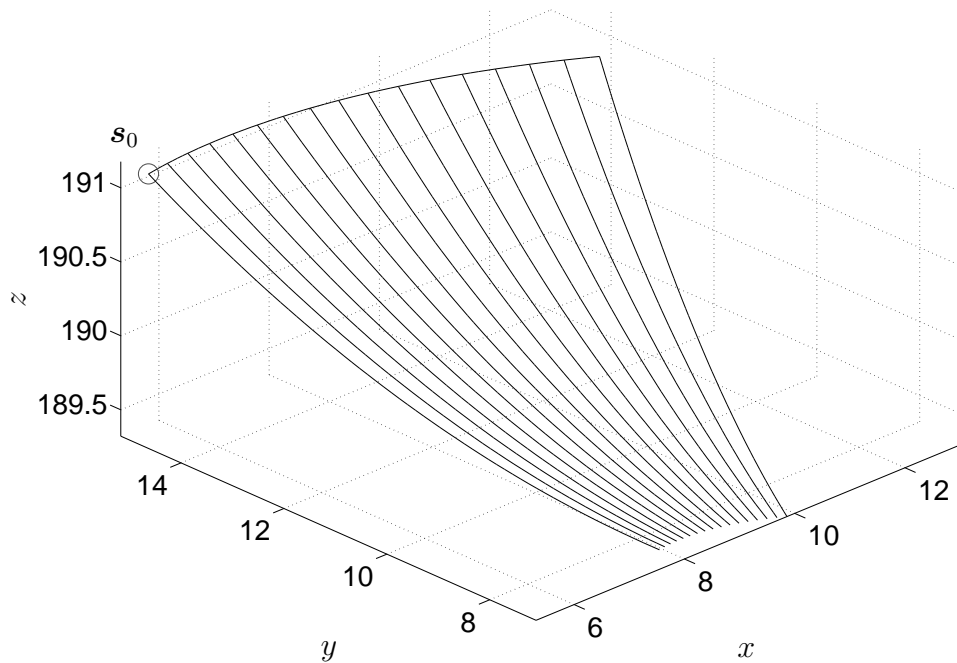
muss nicht unbedingt für die Grundkurven gelten, die im Kamerabild verlaufen (siehe Abbildung 4.16 (b)). Zumindest ist aber offensichtlich deren lineare Unabhängigkeit gesichert.

Nur die Oberflächenform, nicht aber deren Einbettung in den umgebenden Raum ist von Interesse (auch wenn diese vom Rekonstruktionsverfahren bestimmt wird). Die Qualität des Ergebnisses misst die mittlere Krümmung, die im Fall der Kugel erstens konstant ist und zweites invariant unter euklidischen Transformationen. Für das Ergebnis nach Charakteristikenexpansion ist die mittlere Krümmung in Abbildung 4.17 (a) dargestellt. Darüber hinaus ist die gesuchte Fläche in der Simulation ja genau bekannt: Die Diskrepanz in der  $z$ -Koordinate der Graphendarstellung der Fläche konstituiert sich nur noch aus dem Diskretisierungsrauschen (siehe Abbildung 4.17 (b)).

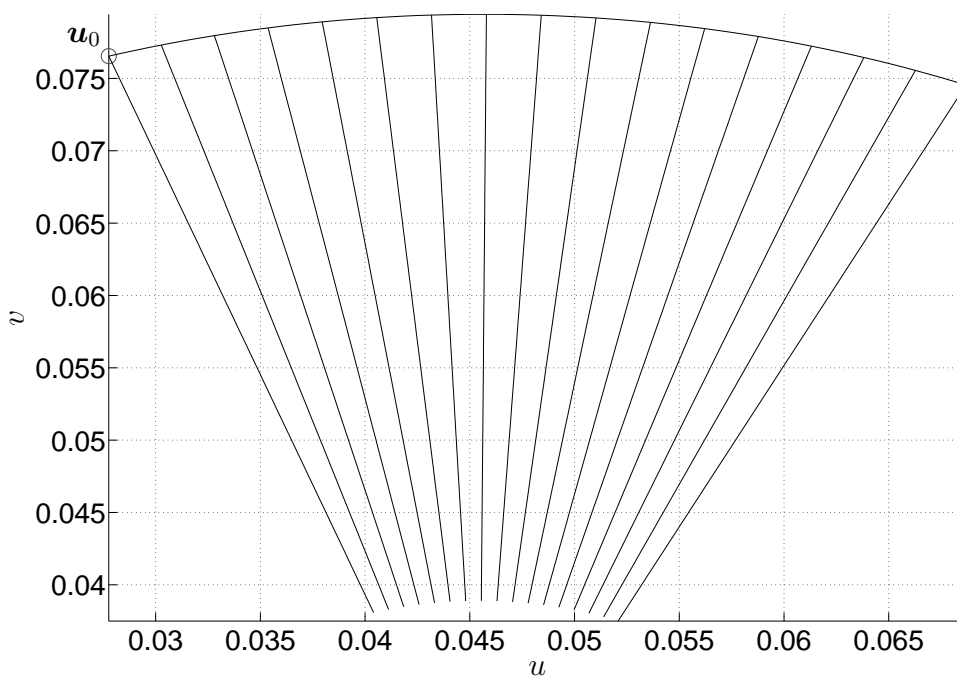
#### 4.4.3 Experimentelle Evaluation

Erste Referenz bei der Auswertung realer Daten war das klassische binokulare Verfahren nach Bonfort und Sturm [10], das Daten aus zwei festen Kameras auswertet. Die Messung wurde hier mit dem kompakten Sensorkopf aus Abbildung 4.9 nach dem monokularen Stereo-Prinzip durchgeführt [65]. Die Robotersteuerung gewährleistete hochgenaue Einstellung einer Translation von  $30\text{ mm}$  in  $y$ -Richtung des initialen Kamerakoordinatensystems. Der Implementierung wurde das Disparitätsmaß (4.11) zu Grunde gelegt. Das Ergebnis der punktweisen Rekonstruktion eines ebenen Spiegels ist in Abbildung 4.18 dargestellt. Die in [10] angegebene maximale Abweichung von  $100\text{ }\mu\text{m}$  konnte während der Untersuchungen nicht bestätigt werden, obwohl anders als in der Originalarbeit, die sich auf das Residuum bei der Schätzung der Ebenenparameter stützt, eine Ground Truth zur Verfügung stand.

Hier zeigen sich Schwächen des Stereo-Ansatzes: Zum einen operieren Algorithmen dieser Art punktweise; am Ende der Rekonstruktion steht eine Punktwolke, die durch ein interpolierendes oder approximierendes Ausgleichsverfahren weiterverarbeitet werden muss. Eine Zwangsbedingung, dass das Endresultat im der Messung zugeordneten natürlichen Lösungsraum liegen muss, wird nicht auferlegt. Das widerspricht den theoretischen Ergebnissen des Kapitels 3. Erschwerend kommt hinzu, dass mit steigender Krümmung des betrachteten Objekts der Messbereich auf dessen Oberfläche überproportional sinkt. In der Praxis kann durch Vergrößerung des Mustergenerators eine gewisse Kompensation erreicht werden [35]. Diese Maßnahme ist im vorliegenden Fall durch die zulässige Traglast des Roboters begrenzt. Das bedeutet eine Beschränkung der Basisbreiten, was eine Verschlechterung der Abstandsempfindlichkeit zur Folge hat. Der Disparitätsverlauf über der  $z$ -Koordinaten ebnet aus (siehe Abbildung 4.19). Bei konstantem Signal-zu-Rausch-

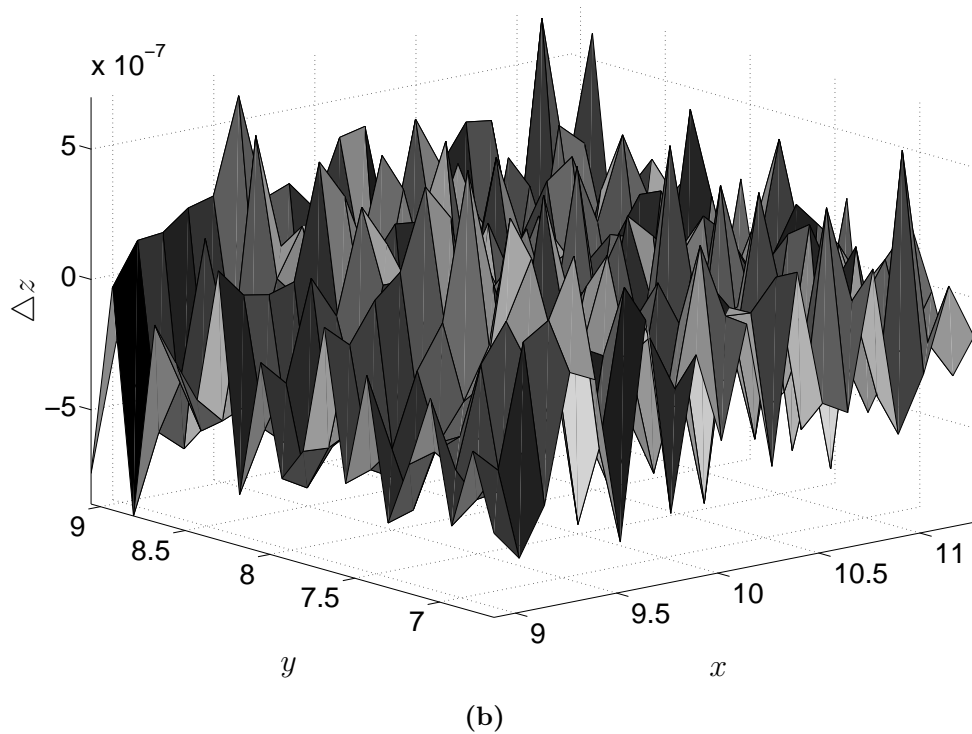
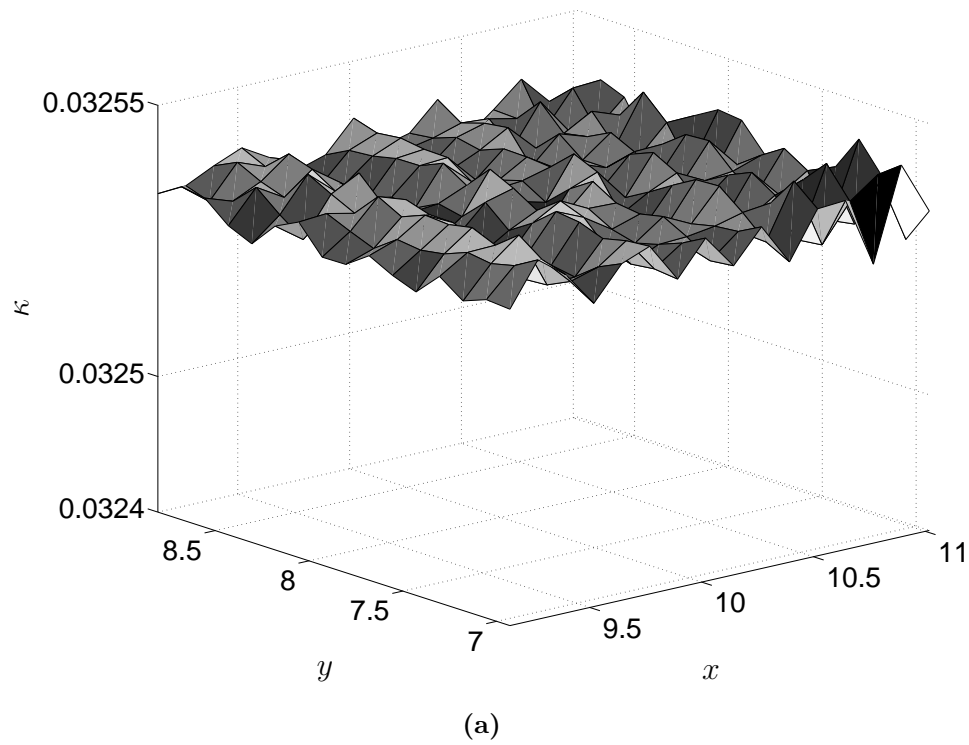


(a)

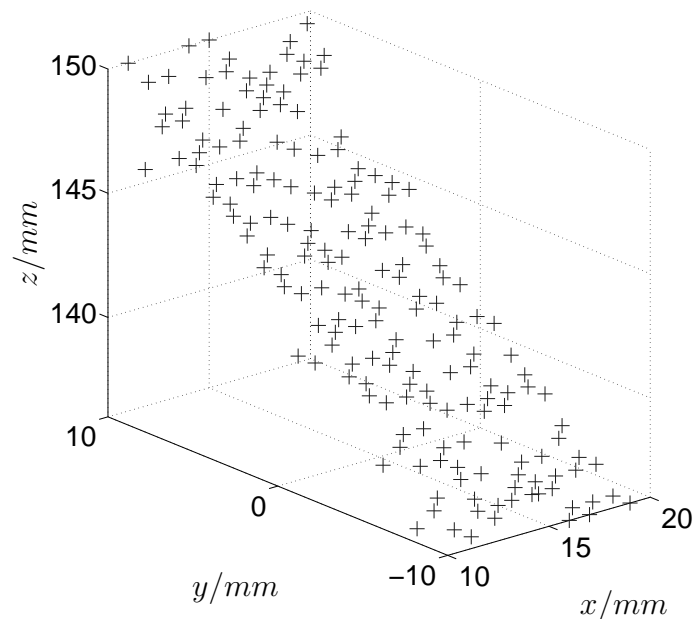


(b)

**Abbildung 4.16:** (a) Rekonstruktion durch Charakteristikenexpansion vom ermittelten Startwert  $s_0 \in S_s$  ( $\circ$ ). (b) Die charakteristischen Grundkurven erhält man durch Projektion der Charakteristiken in die Bildebene.



**Abbildung 4.17:** Rekonstruktion durch Charakteristikenexpansion: (a) Mittlere Krümmung  $\kappa$  der Rekonstruktion. (b) Rekonstruktionsfehler  $\Delta z = z - z_r$ .

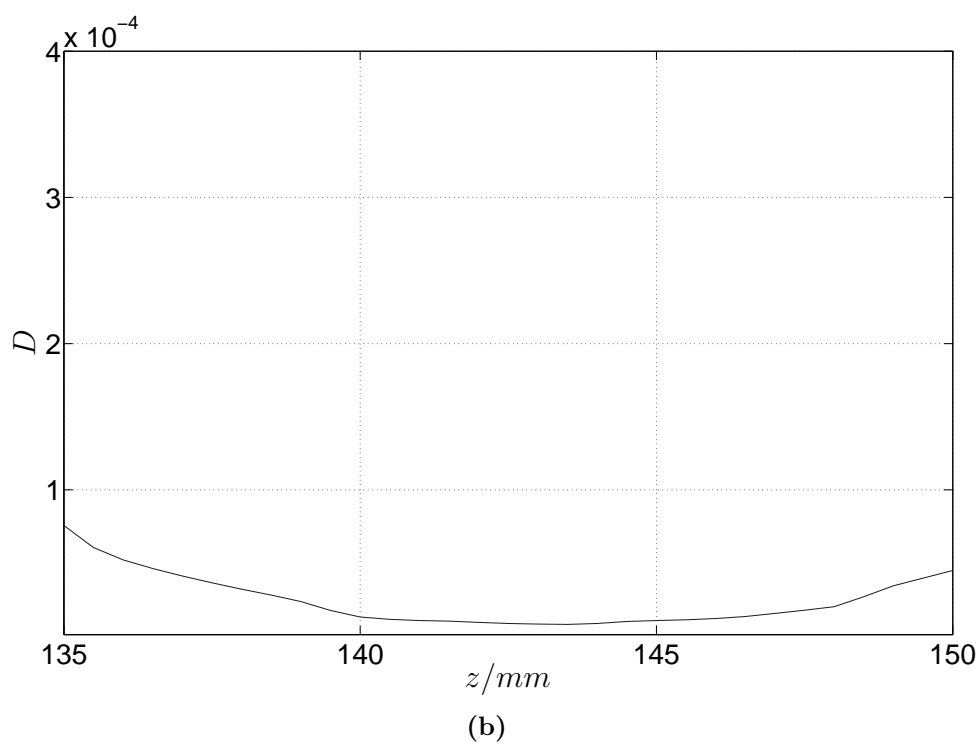
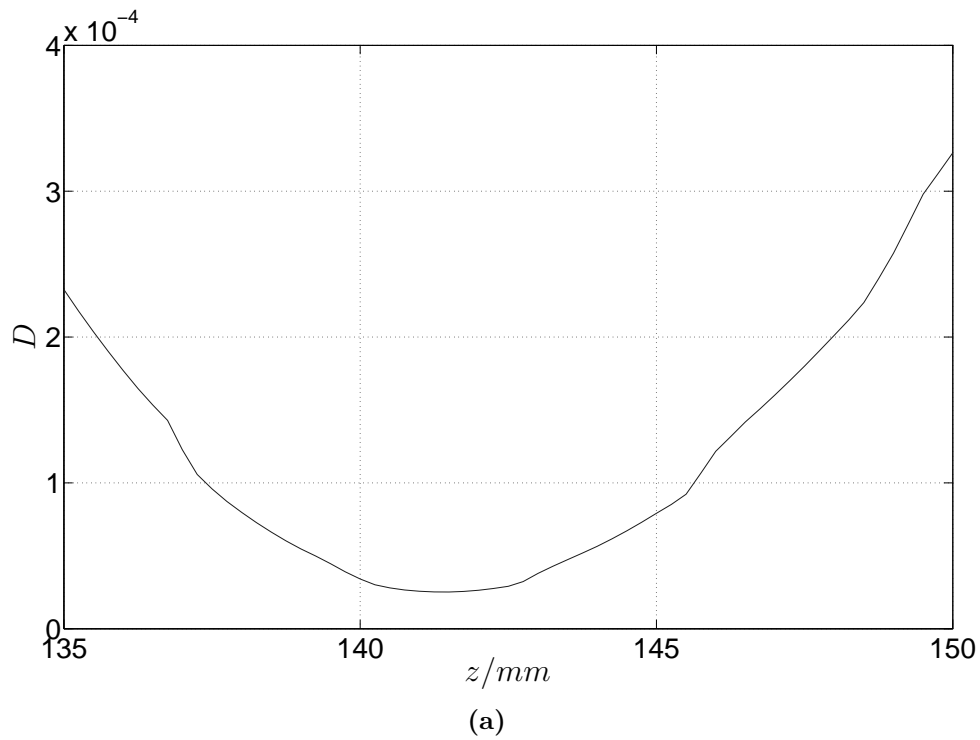


**Abbildung 4.18:** Punktweise Rekonstruktion durch Korrelation zweier Normalenfelder.

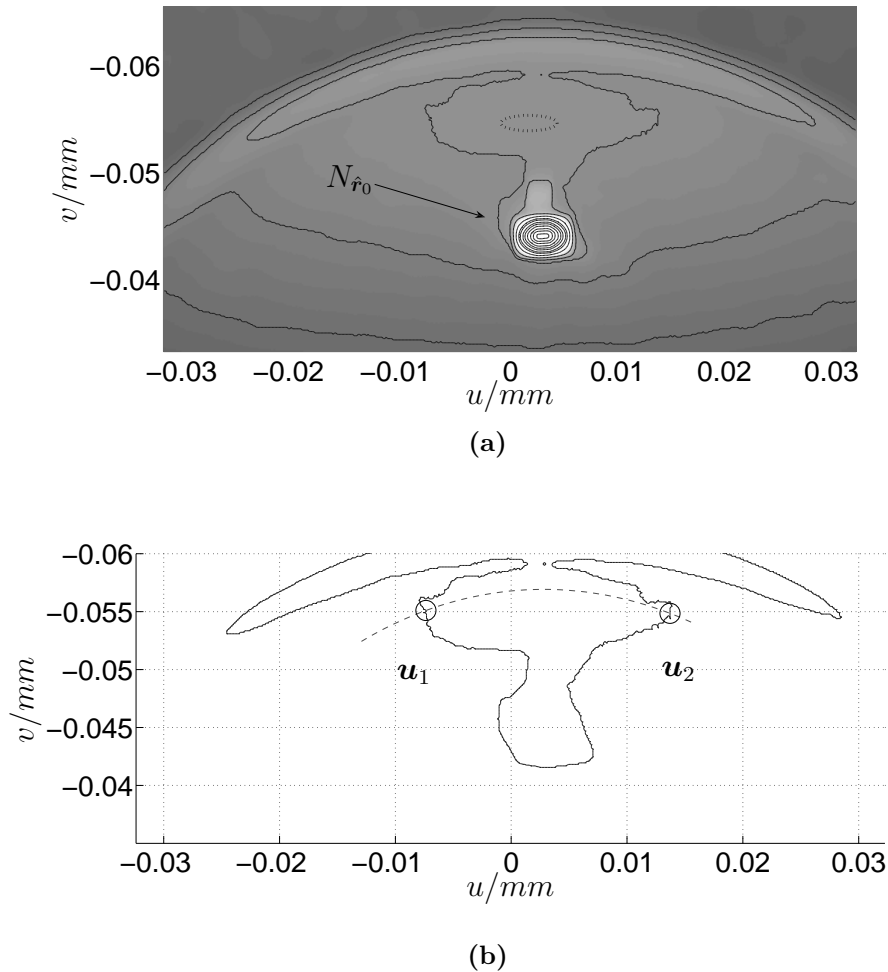
Abstand wird die Streuung der ermittelten Lage des Minimums zunehmen.

Eine handelsübliche Halogenlampe erzeugte an der Billardkugel diffuse Reflexion. Sie war so weit vom Testobjekt entfernt, dass von quasiparalleler Bestrahlung ausgegangen werden kann. Die Beleuchtungsrichtung wurde in Bezug auf das Roboterbasiskoordinatensystem grob geschätzt. Mit Hilfe der Vorwärtskinematik inklusive einer Hand-Auge-Kalibrierung kann diese in das Koordinatensystem, das sich im optischen Zentrum des Kamerasensors befindet, umgerechnet werden, in dem das Rekonstruktionsergebnis später dargestellt werden soll. Im Grauwertbild 4.20 (a) zu erkennen ist der Bereich, in dem sich der Strahler spiegelt, ebenso der singuläre Punkt im Sinne des Shape-from-Shading, wo Beleuchtungsrichtung und Oberflächennormale zusammenfallen. Die Isophoten verlaufen um diesen konzentrisch. Offensichtlich kann er nicht in der Menge  $N_{\hat{r}_0}$  liegen, sonst befände sich die Lichtquelle ja im optischen Zentrum. Der Schwerpunkt der Kugel befand sich hier in der Bildmitte, so dass die Linien konstanter Entfernung den Schnittpunkt des Hauptstrahls mit der Kugeloberfläche beziehungsweise deren Projektionen den Hauptpunkt umrunden (siehe Abbildung 4.20 (b)). Die numerische Lösung  $d = 149,53 \text{ mm}$  der stark nichtlinearen Gleichung (4.20) leistete das in MATLAB integrierte Gauß-Newton-Verfahren vom Startwert  $200 \text{ mm}$  in 5 Iterationen.

Für den Planspiegel, der quasi vollspiegelnd ist, versagt diese Vorgehensweise zur Regularisierung zwar, im nächsten Abschnitt wird jedoch eine Methode vorgestellt, die die



**Abbildung 4.19:** Disparitätskurven für eine Stereo-Basis von (a) 30 mm bei Untersuchung des Planspiegels beziehungsweise (b) 5 mm bei Erhöhung der Krümmung (Rekonstruktion der Billardkugel).

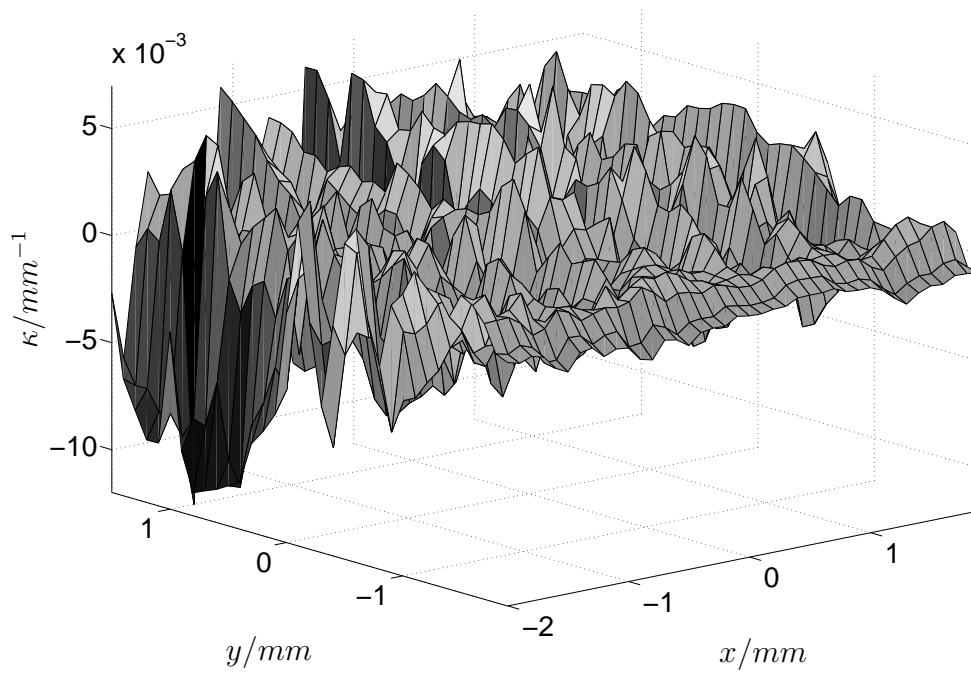


**Abbildung 4.20:** (a) Gekennzeichnet ist der Bereich spiegelnder Reflexion. Die singulären Punkte im SFS-Sinne liegen innerhalb der gestrichelten Ellipse (vergleiche auch Abbildung 4.3). (b) Bestimmung der Menge  $U_s$ . Die Schnittpunkte sind mit  $\bigcirc$  gekennzeichnet.

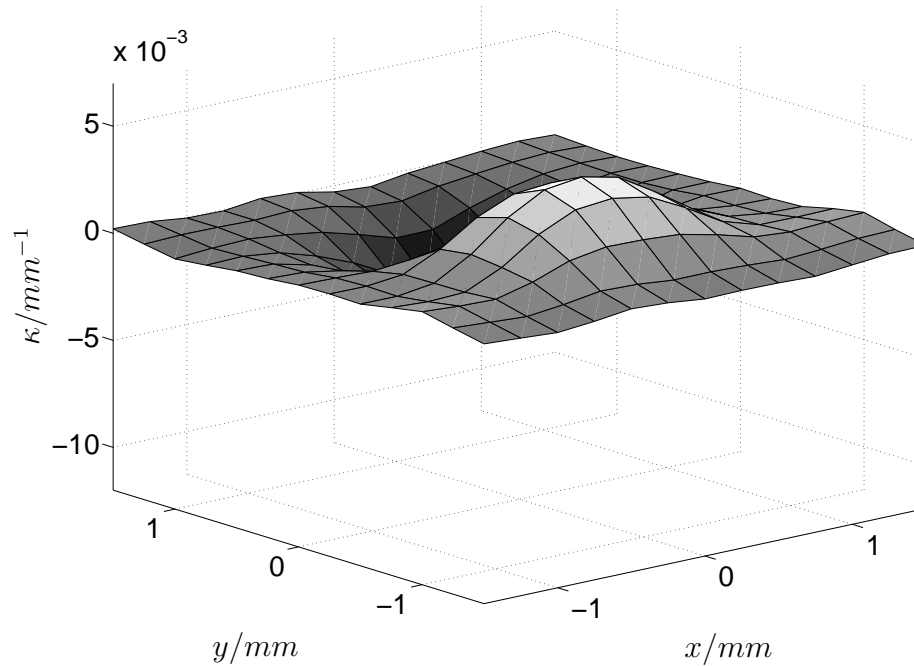
Mehrdeutigkeit bei der Rekonstruktion vollspiegelnder Flächen aufzulösen vermag. Wie bei der Systemkalibrierung gewinnt man die Hesse-Normalform durch Anbringen eines Rechteckmusters und extrinsischer Kalibrierung als Ground Truth. Es stehen also Anfangswerte in ausreichender Anzahl zur Verfügung. Das Ergebnis der Integration entlang der charakteristischen Richtungen ist in Abbildung 4.21 dargestellt. Jetzt ist die Akkumulation stochastischer Störungen unübersehbar: Je größer die Entfernung vom Startpunkt, desto weiter entfernt sich die mittlere Krümmung vom wahren Wert  $0 \text{ mm}^{-1}$ .

Der Variationsansatz ist globaler Natur und wurde im Kontext der Level-Set-basierten Formoptimierung formuliert. Zur Lösung der zentralen Gleichung (4.22) wurde auf die





(a)



(b)

**Abbildung 4.21:** Rekonstruktion eines bekannten ebenen Spiegels: (a) Fehlerakkumulation bei der Charakteristikenexpansion. (b) Bei der Level-Set-Rekonstruktion werden Fehler auf das Gesamtergebnis verteilt.

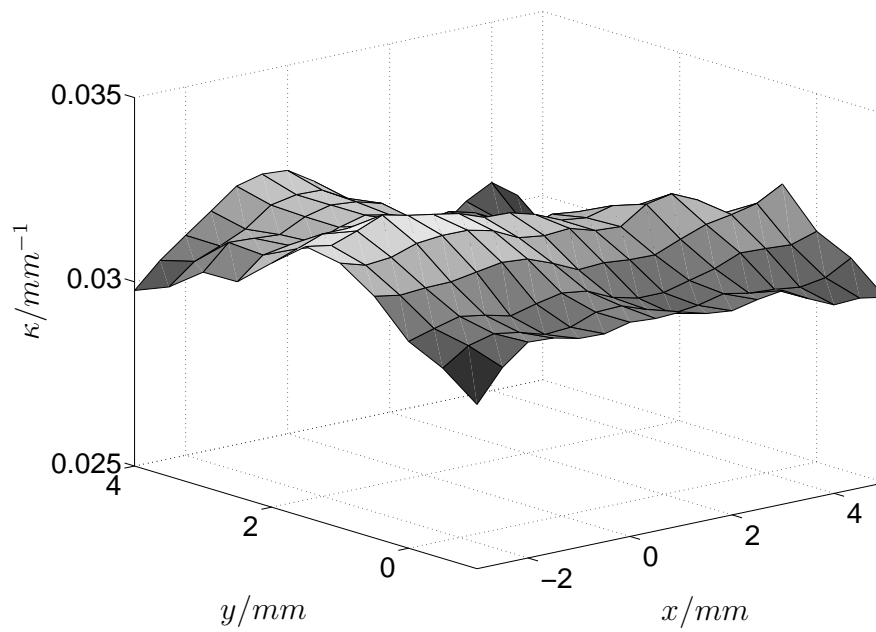
MATLAB-Toolbox von Mitchell zurückgegriffen [44]. Insbesondere ermöglicht diese eine entropiekonforme Diskretisierung der vorliegenden Hamilton-Jacobi-Gleichung und eine zeitliche Vorwärtsintegration, wobei die Schrittweitensteuerung für die Einhaltung der CFL-Bedingung<sup>4,6</sup> sorgt. Der maximale Rekonstruktionsfehler ist für den ebenen Spiegel mit ca.  $0,003 \text{ mm}^{-1}$  deutlich niedriger als bei der Charakteristikenexpansion (siehe Abbildung 4.21 (b)). Er wird durch Ungenauigkeiten im Anfangswert bedingt.

Der für die Billardkugel infolge des Gradientenabstiegs erhaltene Krümmungsverlauf liegt in der Nähe des wahren Werts, wie Abbildung 4.22 (a) verdeutlicht. Die Berechnung von  $\kappa$  erfordert aber die zweifache Anwendung eines Differentialoperators. Dass dieser das Rauschen, das dem Ergebnis natürlich überlagert ist, verstärkt, ist erkennbar. Die folgende Vorgehensweise umgeht nicht nur die Ortsableitung, sie macht die Qualität der Rekonstruktion auch plastischer: Mit Hilfe eines nichtlinearen Least-Squares-Schätzers wurde eine Kugel des bekannten Radius an die Lösungsfläche angepasst. Anschaulich legt man eine virtuelle sphärische Lehre mit dem Soll-Durchmesser von  $61,5 \text{ mm}$  möglichst genau an das rekonstruierte Flächenstück. Das Residuum ist in Abbildung 4.22 (b) zu sehen und bewegt sich im Bereich weniger Mikrometer.

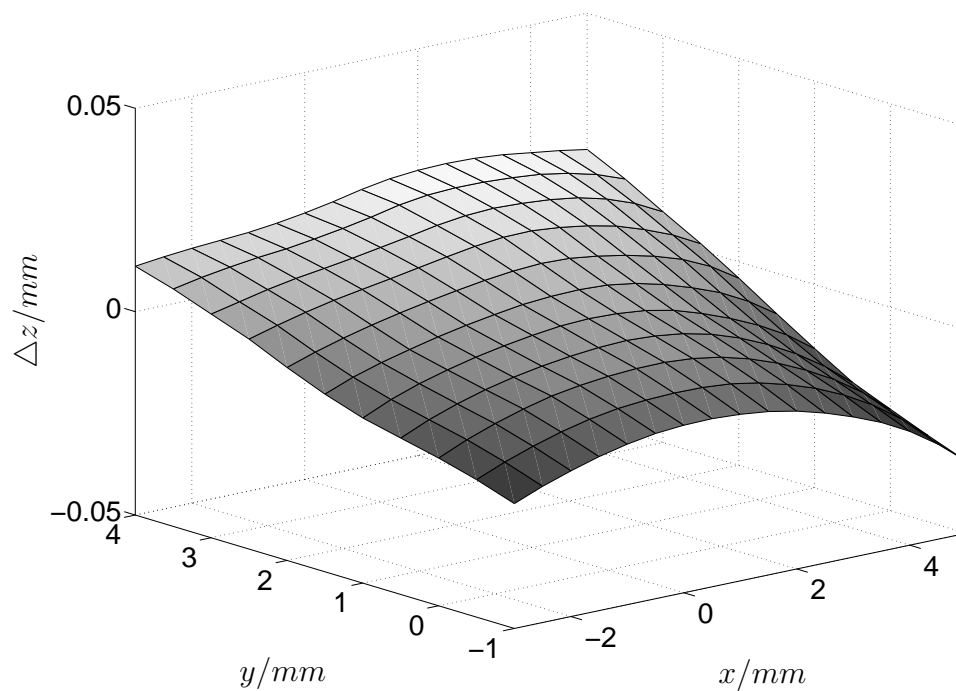
Abbildung 4.23 (a) zeigt schließlich eine durch die Stereomethode gewonnene Punktwolke. Die zulässige Basisbreite betrug wegen der auftretenden Konvexität  $5 \text{ mm}$  und lag deutlich unter dem für den ebenen Spiegel. Vergleiche dazu auch den Disparitätsverlauf aus Abbildung 4.19 (b). Im Gegensatz zum globalen Ansatz, bei dem eine stetige Funktion aus der Lösungsmannigfaltigkeit ausgesucht wird, wird bei der punkweisen Betrachtung der funktionale Zusammenhang außer Acht gelassen und muss durch einen zusätzlichen Approximationsschritt wieder hergestellt werden, siehe Abbildung 4.23 (b).

---

<sup>4,6</sup>Courant–Friedrichs–Lewy-Bedingung: Gibt das für die Konvergenz der Level-Set-Iteration notwendige Verhältnis zwischen Orts- und Zeitschrittweite an, siehe dazu auch [47].

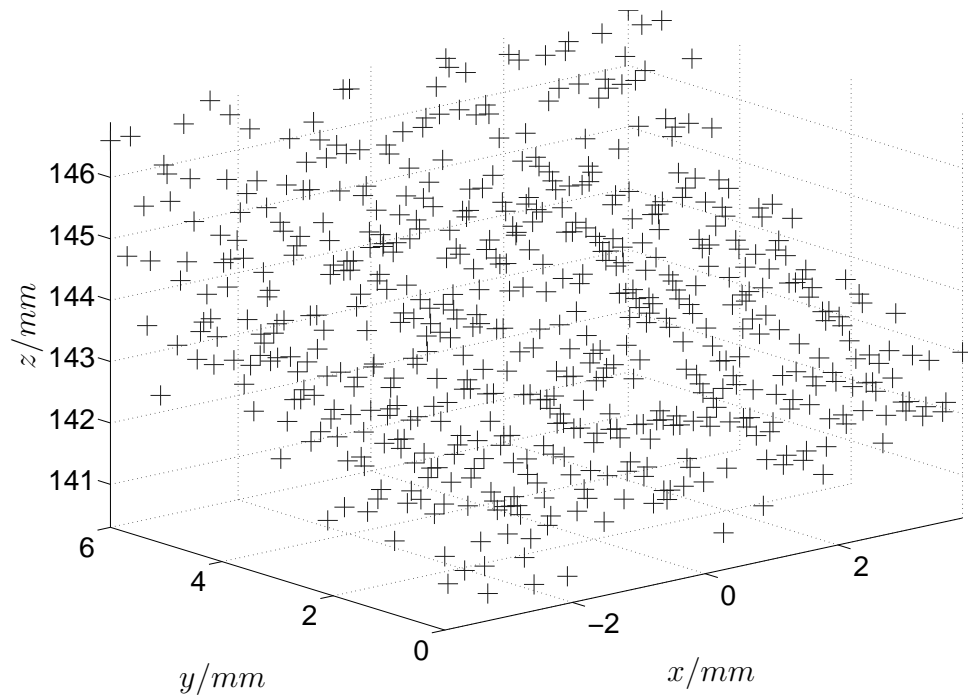


(a)

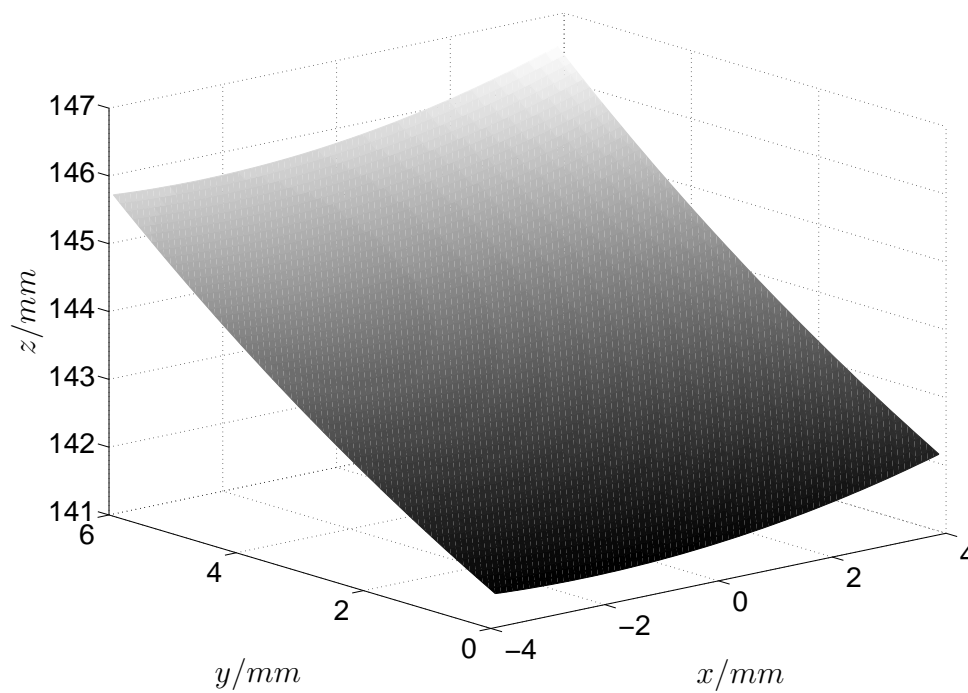


(b)

**Abbildung 4.22:** Bewertung der Rekonstruktion anhand der (a) mittleren Krümmung beziehungsweise (b) des Residuums der Mittelpunktsschätzung.



(a)



(b)

**Abbildung 4.23:** (a) Punktweise Rekonstruktion durch monokulares Stereo. (b) An das Ergebnis der Stereorekonstruktion angepasstes Kugelflächenstück.

## 5 Regularisierung durch optischen Fluss

### 5.1 Einführung

Wird das Deflektometrieproblem durch Hinzunahme von Daten einer zweiten Kamera regularisiert, ist wie beim Vorliegen einer diffusen Oberfläche zunächst das Korrespondenzproblem zu lösen. Das gilt auch für den monokularen Ansatz, bei dem das Prüfobjekt aus unterschiedlichen Perspektiven aufgenommen wird. Die affine euklidische Bewegung der Oberfläche zwischen beiden Abbildungskonfigurationen sei in der Praxis nun sehr klein. Das bedeutet, dass von der Kamera für beide Messkonstellationen näherungsweise die selben Oberflächenpunkte beobachtet werden. Gleichzeitig führt die krümmungsabhängige Modulation der Sichtstrahlenkongruenz durch die spiegelnde Oberfläche zu einer signifikanten Variation der gemessenen Zuordnung. Diese Variation bezeichnen wir als *spekularen optischen Fluss*. Seine messtechnische Erfassung erfordert keine zeitaufwändige Dekodierungsphase. Er kann durch Tracking der Bildpunkte eines auf dem Schirm angezeigten statischen Musters bestimmt werden. Die Abbildung eines festen Merkmals wird in Abhängigkeit von der Zeit über verschiedene entlang der Fläche wandernde Punkte hergestellt. Die Projektion der Tangenten an diese *Reflexionspunktbahnen* in die Bildebene entsprechen genau dem spekularen Fluss.

Roth und Black bemerken in [55], dass sich mit Hilfe des spekularen Flusses die Mehrdeutigkeit bei der deflektometrischen Rekonstruktion auflösen lässt. Sie untersuchen den Fall, in dem alle Reflexstrahlen parallel sind. Das entspricht der Annahme, dass sich die beobachteten Muster in ausreichend weiter Entfernung von der gesuchten Oberfläche befinden. Diese substantielle Vereinfachung des Problems ist vor allem für die Anwendung des spekularen optischen Flusses in der Deflektometrie ziemlich unrealistisch. Selbst bei infinitesimalen Bewegungen des Messaufbaus ist die Existenz entsprechender Reflexionspunktbahnen nicht gesichert. Approximativ greifen die Autoren auf eine in [16] hergeleitete Taylor-Entwicklung der induzierten Abbildung  $\Psi$  zurück. Wir wählen im Folgenden direkt den differentiellen Ansatz und leiten eine nach der Reflexionspunktbewegung geschlossen und analytisch lösbare Grundgleichung her. Es wird sich herausstellen, dass die Oberflächenkrümmung bei der Modellierung eine entscheidende Rolle spielt. Die resultierenden Gleichungen gelten für beliebige ein- beziehungsweise ausgehende Strahlensysteme.

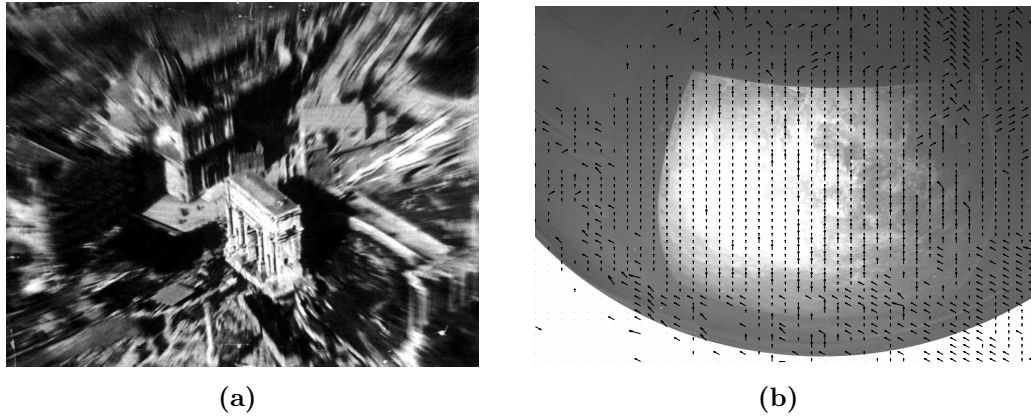


Abbildung 5.1: (a) Diffuser (Quelle: [45]) und (b) spekularer optischer Fluss.

## 5.2 Spekularer optischer Fluss

### 5.2.1 Herleitung der Modellgleichungen

Als optischen Fluss (OF) bezeichnet man die scheinbare Verschiebungsgeschwindigkeit beziehungsweise -richtung  $\dot{\mathbf{u}}$  von Grauwertstrukturen im Bildbereich [30]. Wir interessieren uns in diesem Kontext für OF-Felder infolge von euklidischen Bewegungen der zu prüfenden Oberfläche. Es sei für ein  $\mathbf{s} \in S$  also  $\Phi(\mathbf{s}, t) = e^{\Omega(t)}\mathbf{s} + t\boldsymbol{\tau}$ . Die zeitvariante Rotationsmatrix  $\mathbf{R} \in SO(3)$  ist dabei in exponentieller Form  $\mathbf{R}(t) = e^{\Omega(t)}$  gegeben mit  $\Omega$  wie in (4.24) schief-symmetrisch. Es sei  $\boldsymbol{\tau}$  ferner ein fester Translationsvektor. Ableitung bezüglich des Zeitparameters ergibt dann

$$\mathbf{v}(\mathbf{s}) := \dot{\Phi}(\mathbf{s}, 0) = \dot{\Omega}(0)\mathbf{s} + \boldsymbol{\tau} \quad (5.1)$$

für alle  $\mathbf{s} \in S$ . Reflektiert  $S$  diffus, sind  $\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{v}(\mathbf{s})$  und das Flussfeld gegeben durch

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{s}) = \frac{1}{z} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -u \\ 0 & 1 & -v \end{pmatrix} \mathbf{v}(\mathbf{s}), \quad (5.2)$$

siehe Abbildung 5.2(a). Denn: Sei  $\mathbf{s}(t)$  die von  $\Phi$  induzierte Trajektorie eines Oberflächenpunkts. Wegen (2.5) gilt die Zerlegung

$$\mathbf{s}(t) = z(t) \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{u}(t) \\ 1 \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{d}(t)}.$$

Zeitableitung der Gleichung liefert  $\dot{\mathbf{s}} = \dot{z}\mathbf{s}_d + z\dot{\mathbf{d}} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{d}} = \frac{1}{z}(\dot{\mathbf{s}} - \dot{z}\mathbf{d}) = \frac{1}{z}(\mathbf{v} - \dot{z}\mathbf{d})$ , was nach Weglassen der dritten Zeile genau (5.2) entspricht.

Für *spiegelnde* Oberflächen ist der Abbildungsprozess wesentlich komplizierter. Die erzwungene Objekttrajektorie wird von einer „Ausgleichsbewegung“ des Punktes  $\mathbf{s}$  „innerhalb“ von  $S$  überlagert, die dafür sorgt, dass eine Lichtquelle  $\mathbf{l}$  immer noch ins optische Zentrum der Kamera spiegelt. Anders ausgedrückt: Ein Merkmal soll nach der Verschiebung auch weiterhin sichtbar sein, nur hat sich der Lichtweg infinitesimal verändert und damit auch das aufgenommene Bild, siehe Abbildung 5.2(b). Die Rückprojektion  $\dot{\mathbf{s}}$  von  $\dot{\mathbf{u}}$  ist nicht mehr zwangsläufig gleich dem Tangentenvektor  $\mathbf{v}$  an die erzwungene Bahnkurve.

Der folgende zentrale Satz setzt nun das differentielle dynamische Verhalten einer spiegelnden Oberfläche mit den Tangenten an ihre Reflexionspunktbahnen in Beziehung. Die Formulierung ist allgemeiner als für den Anwendungsfall benötigt. Die Bewegung spezifizieren wir nämlich unter Zuhilfenahme der Level-Set-Gleichung durch eine skalare Ausbreitungsgeschwindigkeit in Normalenrichtung. Das hergeleitete Modell ist also auch auf den allgemeinsten Fall zeitlich veränderlicher Flächen inklusive „elastischer“ Verformungen und topologischer Änderungen anwendbar.

**Satz 5.1.** *Die implizite Darstellung der Oberflächenevolution  $S(t)$  genüge der Level-Set-Gleichung (2.14) mit Normalengeschwindigkeit  $v : S \rightarrow \mathbb{R}$ . Ferner sei  $\mathbf{s} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine Reflexionspunktbahn, das heißt,  $\mathbf{l}$  werde längs  $\mathbf{s}(t)$  für alle  $t \in [0, T]$  ins optische Zentrum  $C$  gespiegelt. Dann gilt in  $\mathbf{s} = \mathbf{s}(0)$  für  $\dot{\mathbf{s}} = \frac{d}{dt}\mathbf{s}|_{t=0}$  das lineare Gleichungssystem*

$$(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{n}}} + \mathbf{K}_{\mathbf{l}} - \mathbf{K})\dot{\mathbf{s}} = (\mathbf{I} + \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{n}}_\psi})(v\hat{\mathbf{n}}) + \nabla_S v \quad (5.3)$$

mit  $\mathbf{K}_{\mathbf{l}} = -\frac{1}{\|\nabla e_{\mathbf{l}}\|}\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{n}}}\nabla^2 e_{\mathbf{l}}\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{n}}}$ .

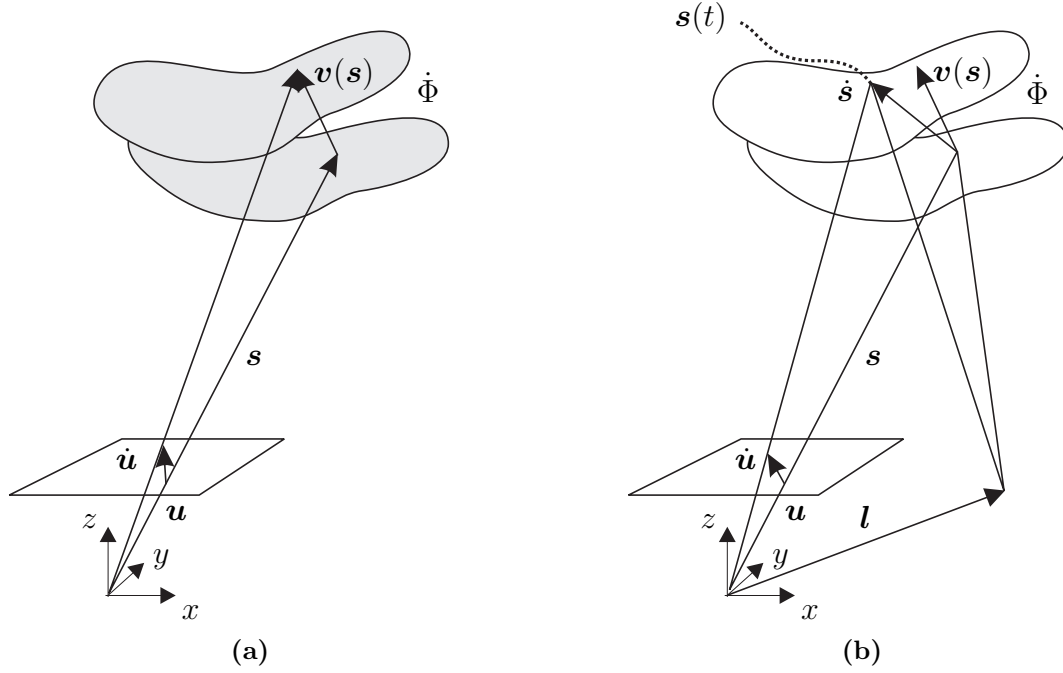
Zur Erinnerung: Die Niveaumengen von  $e_{\mathbf{l}}(\mathbf{x})$  entsprechen einer Schar von Ellipsen  $E_{\mathbf{l}}$  mit Brennpunkten  $C$  und  $\mathbf{l}$  (siehe Abschnitt 3.3.4),  $\mathbf{P}_{\mathbf{x}}$  wurde in (2.1) definiert,  $\mathbf{K}$  und  $\mathbf{K}_{\mathbf{l}}$  sind die Gram-Matrizen der zweiten Fundamentalform von  $S$  beziehungsweise  $E_{\mathbf{l}}$  in  $\mathbf{s}$ , siehe (2.13).

*Beweis von Satz 5.1.* Die Punkte der Kurve  $\mathbf{s}(t)$  erfüllen für alle  $t \in [0, T]$  zwei Bedingungen:

- (i)  $\mathbf{s}(t) \in S(t)$ ,
- (ii)  $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{s}(t), t) = \hat{\mathbf{n}}_\psi(\mathbf{s}(t))$ .

Zerlege  $\dot{\mathbf{s}}$  orthogonal, so dass  $\dot{\mathbf{s}} = \dot{\mathbf{s}}_t + \dot{\mathbf{s}}_n$  mit  $\dot{\mathbf{s}}_t \in T_{\mathbf{s}}S$  und  $\dot{\mathbf{s}}_n \in T_{\mathbf{s}}S^\perp$ . Aus (i) folgt, geometrisch anschaulich (siehe Abbildung 5.3), dass

$$(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{n}}})\dot{\mathbf{s}} = \dot{\mathbf{s}}_n = \langle \dot{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{n}} \rangle = v\hat{\mathbf{n}}. \quad (5.4)$$



**Abbildung 5.2:** (a) Optischer Fluss auf diffusen Oberflächen. (b) Optischer Fluss auf spiegelnden Oberflächen. Es bezeichnet  $\mathbf{s}(t)$  die Reflexionspunktbahn bei festgehaltenem Merkmal  $\mathbf{l}$ .

Die Normalkomponente von  $\dot{\mathbf{s}}$  war ja durch  $v$  schon gegeben. Rechnerisch macht man sich das folgendermaßen klar: Wegen (i) ist für alle  $\mathbf{s}(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , die Level-Set-Gleichung  $\langle \nabla \varphi, \partial_t \mathbf{s} \rangle + \partial_t \varphi = 0$  erfüllt, aus der man  $v = \|\dot{\mathbf{s}}_n\| = \langle \dot{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{n}} \rangle = -\frac{\partial_t \varphi}{\|\nabla \varphi\|}$  beziehungsweise

$$\partial_t \varphi = -v \|\nabla \varphi\| \quad (5.5)$$

in  $\mathbf{s}$  erhält. Es gilt aber auch

$$\partial_t \varphi + \langle \nabla \varphi, \dot{\mathbf{s}} \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial_t \varphi}{\|\nabla \varphi\|} + \left\langle \frac{\nabla \varphi}{\|\nabla \varphi\|}, \dot{\mathbf{s}} \right\rangle = \frac{\partial_t \varphi}{\|\nabla \varphi\|} + \dot{\mathbf{s}}_n = 0 \quad \stackrel{(5.5)}{\Leftrightarrow} \quad \dot{\mathbf{s}}_n = v.$$

Hinzu kommt eine Ausgleichsbewegung im Tangentialraum, so dass das Reflexionsgesetz erfüllt bleibt: Die Identität (ii) differenzieren wir nach dem Zeitparameter, so dass

$$\left. \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{s}(t), t) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{n}}_\psi(\mathbf{s}(t)) \right|_{t=0}. \quad (5.6)$$

Die totale Ableitung der linken Seite ist

$$\left. \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{s}(t), t) \right|_{t=0} = \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{n}}} \dot{\mathbf{s}} + \partial_t \hat{\mathbf{n}},$$

wobei  $\mathbf{J}_{\hat{\mathbf{n}}}$  die Jacobi-Matrix des auf  $\Omega$  fortgesetzten Vektorfelds  $\hat{\mathbf{n}}$  bezeichnet. Zur Veranschaulichung sei angemerkt: Die so genannte *Materialableitung* auf der linken Seite kommt



der Lagrange'schen Betrachtung in einem partikelbehafteten Koordinatensystem gleich. Zu ihrer Berechnung muss die Euler'sche *Formableitung*  $\partial_t \hat{\mathbf{n}}$  bezüglich eines ortsfesten Koordinatensystems durch den Konvektionsterm  $\mathbf{J}_{\hat{\mathbf{n}}}\dot{\mathbf{s}}$  korrigiert werden [20]. Anwendung der Kettenregel und Vertauschen von Orts- und Zeitableitung liefert

$$\begin{aligned}\partial_t \hat{\mathbf{n}} &= \mathbf{J}_{\pi} \partial_t (\nabla \varphi) \\ &= \mathbf{J}_{\pi} \nabla (\partial_t \varphi).\end{aligned}$$

Nun kommt wieder Bedingung (i) ins Spiel: Einsetzen von (5.5) in die letzte Zeile obiger Gleichung ergibt

$$\partial_t \hat{\mathbf{n}} = -\mathbf{J}_{\pi} \nabla (v \|\nabla \varphi\|).$$

Mit der Produktregel  $\nabla (v \|\nabla \varphi\|) = v \nabla \|\nabla \varphi\| + \|\nabla \varphi\| \nabla v$  und  $\nabla \|\mathbf{x}\| = \hat{\mathbf{x}}$  folgt

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_{\pi} \nabla (v \|\nabla \varphi\|) &= \frac{1}{\|\nabla \varphi\|} \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{n}}} \left( v \nabla^2 \varphi \frac{\nabla \varphi}{\|\nabla \varphi\|} + \|\nabla \varphi\| \nabla v \right) \\ &= \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{n}}} (v \hat{\mathbf{n}}) + \nabla_S v.\end{aligned}$$

Schließlich setzen wir

$$\left. \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{s}(t)) \right|_{t=0} = -\mathbf{K} \dot{\mathbf{s}} - \nabla_S v.$$

Dabei wurde verwendet, dass  $\dot{\mathbf{s}}_t = \dot{\mathbf{s}} - v \hat{\mathbf{n}}$ ,  $\dot{\mathbf{s}}_t = \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{n}}} \dot{\mathbf{s}}_t = \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{n}}} \dot{\mathbf{s}}$  und  $\mathbf{K} = -\mathbf{J}_{\hat{\mathbf{n}}} \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{n}}}$ .

Das Vektorfeld  $\hat{\mathbf{n}}_{\psi}$  muss nicht erst auf  $\Omega$  fortgesetzt werden. Es ist außerdem zeitinvariant. Die rechte Seite von (5.6) ist gleich ihrer Richtungsableitung bezüglich  $\dot{\mathbf{s}}$ :

$$\left. \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{n}}_{\psi}(\mathbf{s}(t)) \right|_{t=0} = \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{n}}_{\psi}} \dot{\mathbf{s}} = \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{n}}_{\psi}} (\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{n}}} \dot{\mathbf{s}} + v \hat{\mathbf{n}}) = -\mathbf{K}_l \dot{\mathbf{s}} + \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{n}}_{\psi}} (v \hat{\mathbf{n}}).$$

Zusammenfassend erhalten wir schließlich

$$(\mathbf{K}_l - \mathbf{K}) \dot{\mathbf{s}} = \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{n}}_{\psi}} (v \hat{\mathbf{n}}) + \nabla_S v, \quad (5.7)$$

und Summation von (5.4) und (5.7) beweist die Behauptung. □

Eine bemerkenswerte Konsequenz des obigen Satzes ist, dass das Vektorfeld der Reflexionspunktbewegungen nur von Oberflächeneigenschaften bis zur zweiten Ordnung beeinflusst wird.

Bei der Messung des optischen Flusses beschränkt man sich in der Praxis auf Starrkörperbewegungen wie (5.1), so dass  $v = \langle \mathbf{v}, \hat{\mathbf{n}} \rangle$ . Diese lässt sich insbesondere wie im Beispiel 2.9 durch eine Lösung der Level-Set-Gleichung darstellen. Es gilt das

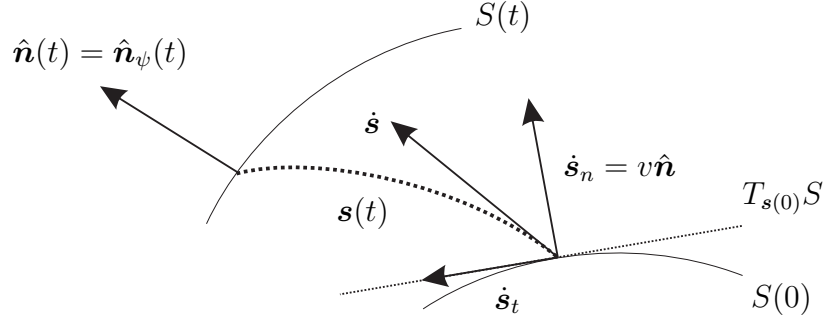


Abbildung 5.3: Zum Beweis von Satz 5.1.

**Korollar 5.2.** *Unter den Voraussetzungen des letzten Satzes und mit hinreichend differenzierbarem  $\mathbf{v}$  gegeben durch (5.1) erfüllt  $\dot{\mathbf{s}}$  die Gleichung*

$$(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{n}}} + \mathbf{K}_l - \mathbf{K})(\dot{\mathbf{s}} - \mathbf{v}) = \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{n}}_\psi} \mathbf{v} + \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{n}}} \mathbf{J}_v^\top \hat{\mathbf{n}}.$$

*Beweis.* Da  $v\hat{\mathbf{n}} = \langle \mathbf{v}, \hat{\mathbf{n}} \rangle \hat{\mathbf{n}} = (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{n}}})\mathbf{v}$ , stellen wir zunächst fest, dass

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{n}}_\psi}(v\hat{\mathbf{n}}) &= \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{n}}_\psi}(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{n}}})\mathbf{v} \\ &= \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{n}}_\psi} \mathbf{v} + \mathbf{K}_l \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Für den verbleibenden Term der rechten Seite von (5.3) ergibt sich mit Produktregel und der Symmetrie von  $\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{n}}}$  und  $\mathbf{K}$

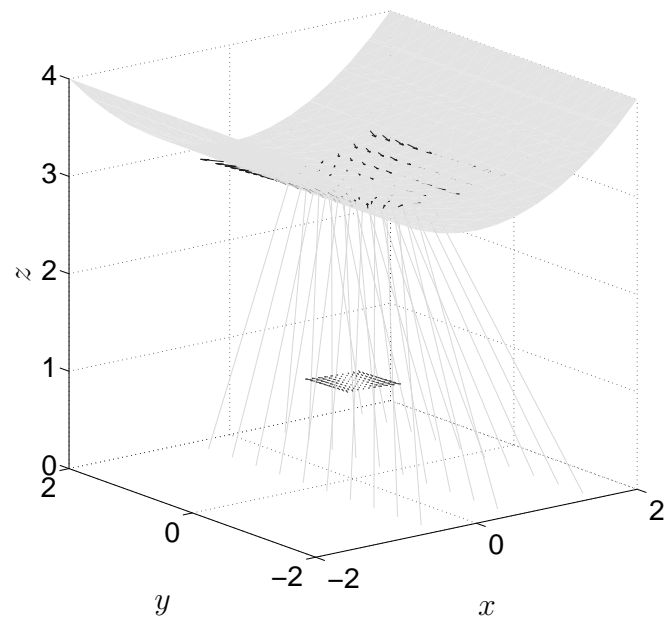
$$\begin{aligned} \nabla_S \langle \mathbf{v}, \hat{\mathbf{n}} \rangle &= \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{n}}}(\mathbf{J}_v^\top \hat{\mathbf{n}} + \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{n}}}^\top \mathbf{v}) \\ &= \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{n}}} \mathbf{J}_v^\top \hat{\mathbf{n}} + (\mathbf{J}_{\hat{\mathbf{n}}} \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{n}}})^\top \mathbf{v} \\ &= \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{n}}} \mathbf{J}_v^\top \hat{\mathbf{n}} - \mathbf{K}^\top \mathbf{v} \\ &= \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{n}}} \mathbf{J}_v^\top \hat{\mathbf{n}} - \mathbf{K} \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Einsetzen von  $\mathbf{v}$  in (5.3) liefert also insgesamt

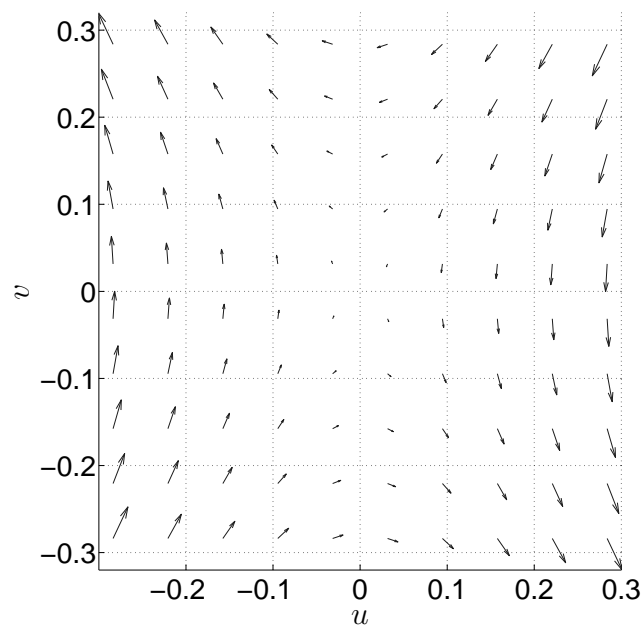
$$(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{n}}} + \mathbf{K}_l - \mathbf{K})\dot{\mathbf{s}} = (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{n}}})\mathbf{v} + \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{n}}_\psi} \mathbf{v} + \mathbf{K}_l \mathbf{v} + \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{n}}} \mathbf{J}_v^\top \hat{\mathbf{n}} - \mathbf{K} \mathbf{v},$$

und Umstellen schließt den Beweis ab. □

Das OF-Vektorfeld ist in der Bildebene definiert (siehe Abbildung 5.4). So muss schließlich die Menge der Reflexionspunktbewegungen  $\dot{\mathbf{s}}$  durch die Projektion (5.2) noch in einen Grauwertfluss  $\dot{\mathbf{u}}$  umgerechnet werden.

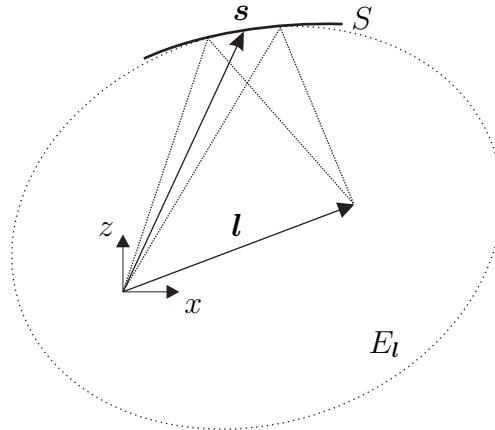


(a)



(b)

**Abbildung 5.4:** (a) Exemplarisches Vektorfeld von Reflexionsbahntangenten  $\dot{\mathbf{s}} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  für die Sichtstrahlenkongruenz  $\mathcal{S} = \mathcal{N}(S^2)$ . Die Projektion in die Bildebene  $\Omega_E$  ist angedeutet. (b) Optischer Fluss  $\dot{\mathbf{u}} : \Omega_E \ni (u, v) \rightarrow \mathbb{R}^2$  in der Bildebene.



**Abbildung 5.5:** Flussregularitäten in den Brennpunkten der Reflexionskongruenz.

### 5.2.2 Flussregularität

Wir fragen nun nach der Anwendbarkeit der Modellgleichungen und leiten im Folgenden notwendige und hinreichende Bedingungen für deren Invertierbarkeit her.

**Lemma 5.3.** *Für ein  $s \in S$  ist Gleichung (5.3) eindeutig lösbar genau dann, wenn  $s$  ein regulärer Punkt von  $\Psi$  ist.*

*Beweis.* Setze zunächst  $\mathbf{M} = \mathbf{I} - \mathbf{P}_{\hat{n}} + \mathbf{K}_l - \mathbf{K}$ . Die zugeordnete lineare Abbildung operiert auf den orthogonalen Komplementäräumen  $T_s S$  und  $[\mathbf{n}]$ . Betrachte die entsprechende Zerlegung des Bildraums in  $\text{Bild } \mathbf{M} = \text{Bild}(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\hat{n}}) \oplus \text{Bild}(\mathbf{K}_l - \mathbf{K})$ . Offensichtlich gilt  $\text{Rang}(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\hat{n}}) = 1$ , so dass  $\det \mathbf{M} \neq 0 \Leftrightarrow \text{Rang}(\mathbf{K}_l - \mathbf{K}) = 2$ .

„ $\Leftarrow$ “: Sei nun  $s$  ein regulärer Punkt von  $\Psi$ . Die Umkehrung der Implikation aus Lemma 3.14 zeigt, dass in  $T_s S = T_s E_l$  kein  $\mathbf{x}$  existieren kann mit  $\mathbf{K}_l \mathbf{x} = \mathbf{K} \mathbf{x} \Rightarrow \text{Kern}(\mathbf{K}_l - \mathbf{K}) = T_s S^\perp$ , was  $\text{Rang}(\mathbf{K}_l - \mathbf{K}) = 2$  impliziert.

„ $\Rightarrow$ “:  $\text{Rang}(\mathbf{K}_l - \mathbf{K}) = 2 \Rightarrow \dim \text{Kern}(\mathbf{K}_l - \mathbf{K}) = 1 \Rightarrow \exists \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \in T_s S$ , so dass  $(\mathbf{K}_l - \mathbf{K})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Die Normalschnittkrümmungen decken sich in keiner tangentialen Richtung  $\mathbf{x}$ . Wie oben folgt mit Hilfe von Lemma 3.14, dass  $s$  ein regulärer Punkt von  $\Psi$  sein muss.

□

## 5.3 Rekonstruktionsverfahren

Anders als in Abschnitt 4.3.2 beziehungsweise in [36] und [60] soll zum Zwecke der Regularisierung kein Summenfunktional wie (4.21) minimiert werden. Die Menge  $\mathfrak{R}_{\hat{n}_\psi} \subset \mathfrak{R}$  enthalte alle das Normalenfeld erfüllende reguläre Flächen, das heißt  $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{n}}_\psi|_S$  für alle

$\mathbf{s} \in S \in \mathfrak{R}_{\hat{n}_\psi}$ . Mit Hilfe eines Funktionals  $H : \mathfrak{R}_{\hat{n}_\psi} \rightarrow \mathbb{R}$  zur Bewertung von Zusatzinformation können wir nun das restringierte Optimierungsproblem

$$S = \arg \min_{S \in \mathfrak{R}_{\hat{n}_\psi}} H(S)$$

lösen (siehe Abschnitt 2.4). Im Falle des spekularen optischen Flusses ist  $H$  von der Form

$$H(S) = \int_S \frac{1}{2} \|\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}_m\|^2 d\sigma, \quad (5.8)$$

wobei  $\dot{\mathbf{u}}$  den theoretischen Fluss für eine Oberflächenhypothese  $S$  meint und  $\dot{\mathbf{u}}_m$  eine zugeordnete Messung. Diese Herangehensweise ist in vielerlei Hinsicht vorteilhaft:  $\mathfrak{R}_{\hat{n}_\psi}$  ist von niedrigerer Dimension als  $\mathfrak{R}$ . Tatsächlich handelt es sich bei  $\mathfrak{R}_{\hat{n}_\psi}$  – wie bereits oben erwähnt – um den Lösungsraum der deflektometrischen PDE, und es ist  $\dim \mathfrak{R}_{\hat{n}_\psi} = 1$ . Ferner wird ein Minimum des Summenfunktionals nur in seltenen Fällen das Normalenfeld erfüllen. Es ist also sinnvoll, die Suche auf  $\mathfrak{R}_{\hat{n}_\psi}$  einzuschränken, besonders deswegen, weil von hoher Neigungsempfindlichkeit des deflektometrischen Verfahrens auszugehen ist (siehe Abschnitt 3.2.2). Für die Konstruktion von  $H$  kann dann auch angenommen werden, dass  $S \in \mathfrak{R}_{\hat{n}_\psi}$ . Vor allem erweist sich das bei Einbeziehung des optischen Flusses als nützlich, in dem bei der Modellierung ja vorausgesetzt wurde, dass das Reflexionsgesetz für jede Sichtstrahl-Merkmal-Kombination eingehalten ist.

### 5.3.1 Der Vektorraum der erlaubten Abstiegsrichtungen

Bei der Minimierung von  $H$  nach Gleichung (5.8) ist man hauptsächlich mit zwei Schwierigkeiten konfrontiert:

1. Das Normalenfeld muss von der advectierten Fläche überall und zu jedem Zeitpunkt eingehalten werden. Das bedeutet,  $\mathfrak{R}_{\hat{n}_\psi}$  darf während eines Iterationsschritts nicht verlassen werden.
2. Das Funktional  $H$  enthält wegen der Krümmungsabhängigkeit des optischen Flusses Ortsableitungen von  $\varphi$  bis zur zweiten Ordnung (siehe Satz 5.1). Die analytische Darstellung des Formgradienten wird somit Ableitungen bis zur vierten Ordnung enthalten, die Herleitung der Euler-Lagrange-Gleichung eines Funktionals der Form (5.8) verwendet ja den Laplace-Operator der Kostenfunktion (hier:  $\frac{1}{2} \|\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}_m\|^2$ ). Das steigert die Komplexität einer Implementierung des Verfahrens deutlich.

Betrachten wir nun zunächst den ersten Punkt: Will man ein Abstiegsverfahren einsetzen, muss der Gradient auf einen – noch zu bestimmenden – Raum  $\mathfrak{T}_{\hat{n}_\psi}$  der erlaubten Abstiegsrichtungen projiziert werden. Angenommen dieser ist von niedriger Dimension, reicht es aber, in ihm eine Basis zu finden und für jeden Basisvektor die Richtungsableitung von  $H$  numerisch zu approximieren, womit auch schon die zweite Schwierigkeit beseitigt wäre.

**Lemma 5.4.** *Sei  $S(t)$  eine advektierte reguläre Fläche, für die  $\hat{n} = \hat{n}_\psi$  für alle  $t \in [0, T]$ ,  $\mathbf{s} \in S(t)$ . Dann löst für beliebige  $t_0 \in [0, T]$  und  $\mathbf{s}_0 \in S(t_0)$  jede zugelassene Normalengeschwindigkeit  $v_d \in C^1(S)$  die Gleichung*

$$\nabla_S v_d + \mathbf{J}_{\hat{n}_\psi} \hat{n} v_d = 0. \quad (5.9)$$

Dies ist ein System zweier linearer PDEs erster Ordnung in der erlaubten Abstiegsrichtung  $v_d$ . Es bezeichne  $\tilde{\mathfrak{T}}_{\hat{n}_\psi}$  dessen Lösungsmenge. Offensichtlich handelt es sich bei  $\tilde{\mathfrak{T}}_{\hat{n}_\psi}$  um einen Vektorraum, wovon man sich durch Einsetzen einer Linearkombination  $\sum_i \lambda_i v_d^i$  von Lösungen  $v_d^i$  überzeugt.

*Beweis von Lemma 5.4.* Wir verwenden die Bezeichnungen aus dem Beweis des Satzes 5.1 und kehren dessen Argumentationsrichtung um: Statt nach dem Tangentenvektor an die Reflexionspunktkurve zu fragen, ist dieser hier durch  $\dot{\mathbf{s}} = v_d \hat{n}$  bereits gegeben. Gleichung (5.3) vereinfacht sich, da  $\dot{\mathbf{s}}_t = \mathbf{0}$ , zu

$$(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\hat{n}}) \dot{\mathbf{s}} = v_d \hat{n} = (\mathbf{I} + \mathbf{J}_{\hat{n}_\psi})(v_d \hat{n}) + \nabla_S v_d,$$

und Umstellen liefert sofort das gewünschte Ergebnis. □

Streng genommen folgt aus Lemma 5.4 nur die Inklusion  $\mathfrak{T}_{\hat{n}_\psi} \subseteq \tilde{\mathfrak{T}}_{\hat{n}_\psi}$ . Wiederum reicht aber die Lipschitz-Stetigkeit von  $\hat{n}_\psi$  hin, um zu beweisen, dass das Fundamentalsystem nicht noch weitere Basisvektoren enthält, das heißt,  $\mathfrak{T}_{\hat{n}_\psi} = \tilde{\mathfrak{T}}_{\hat{n}_\psi}$ , wenn  $\mathfrak{T}_{\hat{n}_\psi} \neq \emptyset$ . Es handelt sich bei  $\tilde{\mathfrak{T}}_{\hat{n}_\psi}$  also tatsächlich um den gesuchten Tangentialraum, und man kann nun  $v_d$  als Projektion von  $\nabla H$  auf diesen ansehen. Hier bestätigt sich ein weiteres Mal die Beobachtung des Korollars 3.16, denn wie die (nichtlineare!) Lösungsmannigfaltigkeit des deflektometrischen Problems  $\mathfrak{R}_{\hat{n}_\psi}$  muss auch der durch die Vorschrift (5.9) gegebene Tangentialraum die Dimension 1 besitzen:  $\dim \mathfrak{R}_{\hat{n}_\psi} = \dim \mathfrak{T}_{\hat{n}_\psi} = 1$ .

### 5.3.2 Minimierungs-Algorithmus

Es folgt eine Skizze des gesamten Gradientenabstiegsverfahrens zur Minimierung des durch das deflektometrische Normalenfeld restringierten Funktionals  $H$  zur Beschreibung des spekularen Flusses:

1. Wähle einen Startwert  $S(0)$  zum Beispiel mit Hilfe von (4.23).
2. Advektiere  $S$  ähnlich wie in (4.22) bis  $J(S(t)) < \varepsilon_n$ .
3. Solange  $H(S(t)) \geq \varepsilon_o$ , iteriere:
  - (a) Finde für  $S(t)$  eine (finite) Orthonormalbasis  $\{\mathbf{a}_1\}$  des Vektorraums  $\mathfrak{T}_{\hat{n}_\psi}$ .
  - (b) Zu  $\mathbf{a}_1$  approximiere numerisch die Richtungsableitung  $\langle \nabla H(S(t)), \mathbf{a}_1 \rangle$ . Die Projektion des Gradienten  $H$  auf  $\mathfrak{T}_{\hat{n}_\psi}$  ist dann  $\tilde{v}_d = \langle \nabla H(S(t)), \mathbf{a}_1 \rangle \mathbf{a}_1$ .
  - (c) Berechne für  $t \rightarrow t + \Delta t$  entsprechend der Normalengeschwindigkeit  $\tilde{v}_d$  die Transition  $S(t) \rightarrow S(t + \Delta t)$ .
  - (d) Abhängig vom eingesetzten numerischen Verfahren kann sich  $J$  während des Zeitdiskretisierungsschritts wieder erhöhen. Den Schritt 2 wiederholen wir also immer dann, wenn der Normalenfehler einen vorher festgelegten Schwellwert übersteigt.

Algorithmus 5.1 zeigt eine entsprechende Formulierung in Pseudocode.

---

**Algorithm 5.1** Minimierungs-Algorithmus
 

---

```

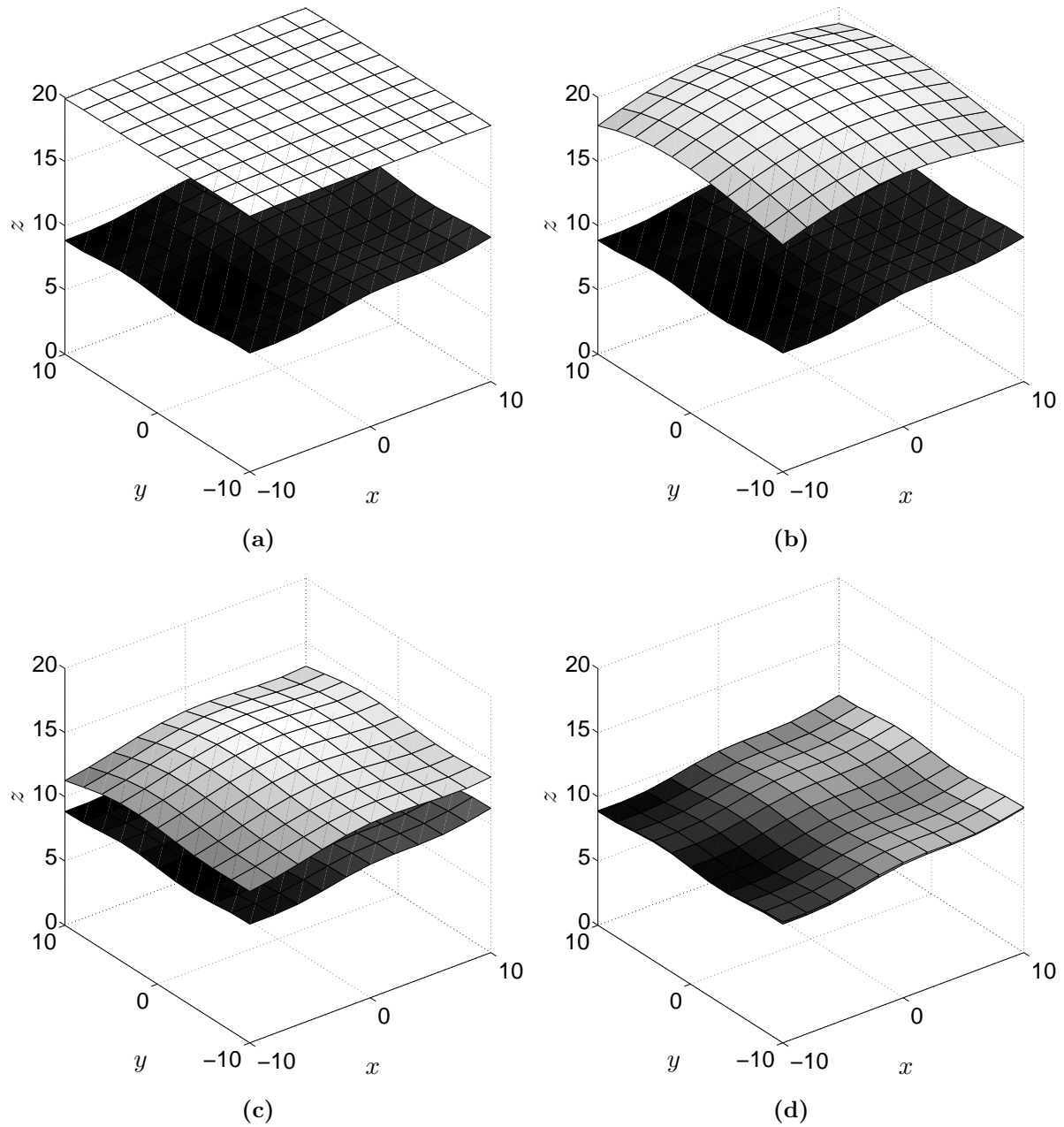
1: Wähle einen Startwert  $S(0) = S_0$  zum Beispiel mit Hilfe von (4.23).
2: procedure NORMALENANPASSUNG( $S_0$ )
3:   repeat
4:      $S(t) \rightarrow S(t + \Delta t)$ :  $\mathbf{s}(t) \rightarrow \mathbf{s}(t) - \nabla J \Delta t \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{s}(t))$ ;
5:   until  $J(S(t)) < \varepsilon_n$ 
6: end procedure
7: procedure GRADIENTENPROJEKTION( $S_0$ )
8:   while  $H(S(t)) \geq \varepsilon_o$  do
9:     ONB  $\{\mathbf{a}_1\}$  von  $\mathfrak{T}_{\hat{n}_\psi}$ ;
10:     $\tilde{v}_d = \langle dH(S(t)), \mathbf{a}_1 \rangle \mathbf{a}_1$ ;
11:     $S(t) \rightarrow S(t + \Delta t)$ :  $\mathbf{s}(t) \rightarrow \mathbf{s}(t) + \tilde{v}_d \Delta t \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{s}(t))$ ;
12:    if  $J(S(t)) \geq \varepsilon_n$  then
13:      NORMALENANPASSUNG( $S(t + \Delta t)$ );
14:    end if
15:  end while
16: end procedure

```

---

### 5.3.3 Simulationsergebnisse

Es sei  $\Omega = I_x \times I_y \times I_z$  mit den Intervallen  $I_x = [x_1, x_2] \subset \mathbb{R}$ ,  $I_y = [y_1, y_2] \subset \mathbb{R}$  und  $[z_1, z_2] \subset \mathbb{R}_{>0}$ . Die Fläche wird wie oben durch den Graphen der zeitvarianten Funktion



**Abbildung 5.6:** (a) Start der Normalenanpassung mit  $S(0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid z = 20\}$ . Zusätzlich ist die gesuchte Oberfläche eingezeichnet. (b) Beginn der Gradientenprojektion bei Iteration 236. (c) Minimierung von  $H$ , wobei  $J = 0$ . (d) Konvergenz gegen die wahre Oberfläche.



$f : I_x \times I_y \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  beschrieben, so dass  $S(t) = \{(\mathbf{x}^\top, f(\mathbf{x}, t))^\top \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x} \in I_x \times I_y\}$ . Wichtige innergeometrische Oberflächeneigenschaften sind neben (2.3)

$$\mathbf{J}_{\hat{\mathbf{n}}} = \mathbf{J}_\pi \mathbf{J}_n = \frac{1}{\|\mathbf{n}\|} \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{n}}} \mathbf{J}_n, \quad \operatorname{div} \hat{\mathbf{n}} = \operatorname{Spur} \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{n}}}.$$

Betrachte nun eine Kurve  $\mathbf{s}(t) = (\mathbf{x}^\top(t), f(\mathbf{x}(t)))^\top$  mit  $\mathbf{s}(t) \in S(t)$  und  $f$  wie oben. Durch  $v = \langle \dot{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{n}} \rangle$  erhält man für jedes  $\mathbf{s}$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\|\nabla f\|^2 + 1}} \left\langle \left( \begin{array}{c} \dot{\mathbf{x}} \\ \langle \nabla f, \dot{\mathbf{x}} \rangle + \dot{f} \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} -\nabla f \\ 1 \end{array} \right) \right\rangle.$$

Unter Ausnutzung der Bilinearität des Skalarprodukts ergibt sich daraus durch Äquivalenzumformung

$$v = \frac{\dot{f}}{\sqrt{\|\nabla f\|^2 + 1}}.$$

Wird umgekehrt die Normalengeschwindigkeit  $v$  vorgegeben, ist der Fortgang der Evolution allein durch  $\dot{f} = v \sqrt{\|\nabla f\|^2 + 1} = v(\mathbf{x}) \|\mathbf{n}(\mathbf{x})\|$  definiert. Es sei auf die direkte Analogie zur Level-Set-Gleichung (2.14) hingewiesen. Die vorliegende Formel verkörpert quasi deren explizites Gegenstück und wurde der Implementierung des Rekonstruktionsalgorithmus 5.1 zugrunde gelegt. Durch den Wegfall einer Dimension verkürzt sich die Rechenzeit erheblich. Es muss aber auf einige der in 2.3.1 diskutierten Vorteile der Level-Set-Methodik verzichtet werden.

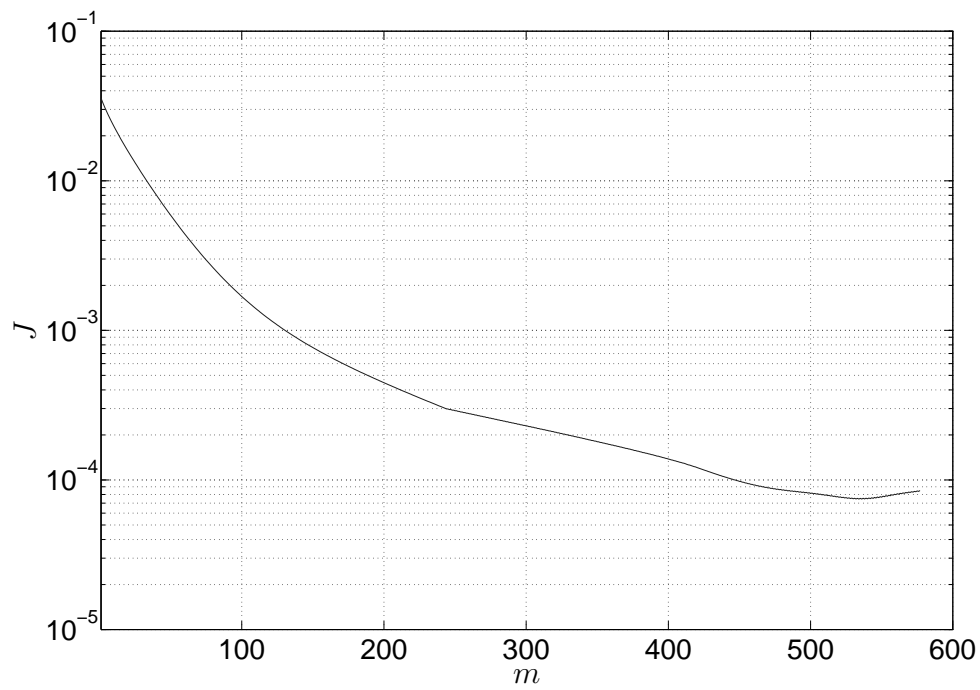
Auch hier schneidet die Oberfläche  $\partial\Omega$ , so dass die natürlichen Randbedingungen aus Lemma 2.12 anzuwenden sind: Auf den Seitenflächen gelte also  $\langle \hat{\mathbf{n}} - \hat{\mathbf{n}}_\psi, \hat{\boldsymbol{\sigma}} \rangle = 0$ . Wir verwenden die Notation  $\mathbf{e}_x = (1, 0, 0)^\top$  beziehungsweise  $\mathbf{e}_y = (0, 1, 0)^\top$  für die Einheitsvektoren in Richtung der ersten beiden Koordinatenachsen und setzen für die von  $\Omega$  nach außen zeigende Normale  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$  vorzeichenrichtig  $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \pm \mathbf{e}_x$  beziehungsweise  $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \pm \mathbf{e}_y$ . Auf  $\partial_2^x \Omega := \{(x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3 \mid x = x_2\}$  gilt dann beispielsweise

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{\|\nabla f\|^2 + 1}} \begin{pmatrix} -\nabla f \\ 1 \end{pmatrix} - \hat{\mathbf{n}}_\psi, \mathbf{e}_x \right\rangle = 0.$$

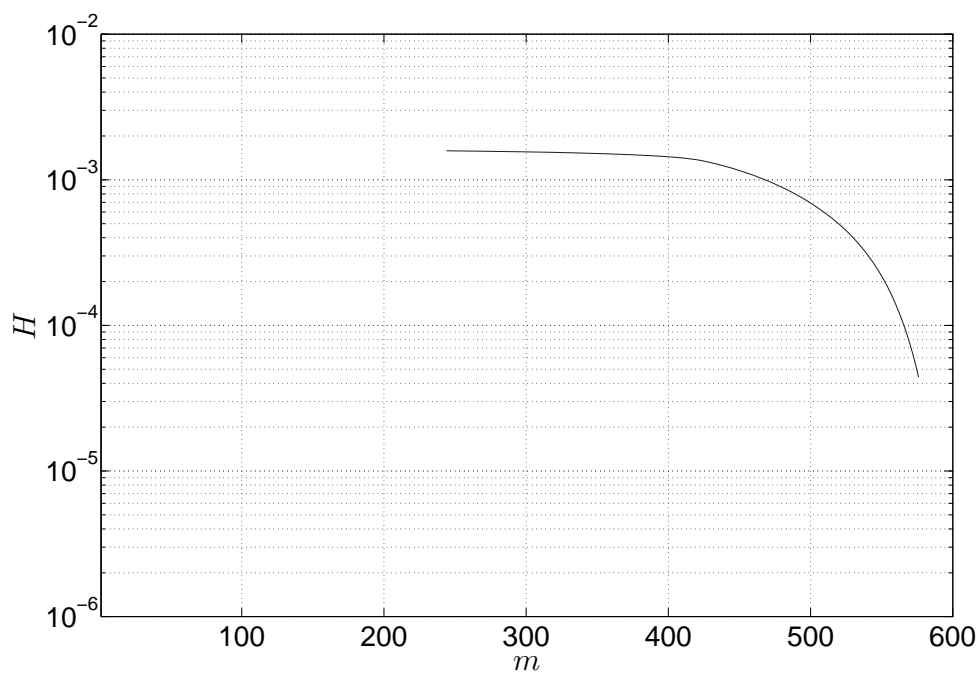
Diese nichtlineare quadratische Gleichung in  $\partial_x f$  besitzt als Lösung

$$\partial_x f = \frac{\langle \hat{\mathbf{n}}_\psi, \mathbf{e}_x \rangle}{\sqrt{1 - \langle \hat{\mathbf{n}}_\psi, \mathbf{e}_x \rangle^2}} \sqrt{(\partial_y f)^2 + 1}$$

die natürliche Randbedingung auf  $\partial_2^x \Omega$ . Analog folgen diese für alle weiteren Seitenflächen. Bemerke, dass die Lösung von der Ableitung in die jeweils orthogonale Koordinatenrichtung abhängt. Auf den in  $z$ -Richtung weisenden Kanten von  $\Omega$  führt das zu Mehrdeutigkeiten. Hier ist die äußere Normale nicht wohldefiniert. Eine willkürliche Festlegung von  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ ,



(a)



(b)

**Abbildung 5.7:** Entwicklung des (a) Normalen- und (b) OF-Fehlers  $J$  beziehungsweise  $H$ .

beispielsweise in Richtung der Diagonalen zwischen gegenüberliegenden Eckpunkten, ist in den meisten Fällen ausreichend. Leistungsfähigere Techniken, die dieser Problematik begegnen, werden in [37] vorgestellt.

Zur numerischen Lösung von (5.9) wurde ein einfaches Finite-Differenzen-Verfahren eingesetzt. Die Erzeugung simulierter Daten basierte auf der Interpolation der diskretisierten Kartenabbildung  $\psi$  durch kubische B-Splines. Ausreichend für die Berechnung des optischen Flussfelds waren lineare Interpolationsmethoden, zumal sich dabei die Exklusion singulärer Punkte stark vereinfachte. Weitere Details zur numerischen Umsetzung finden sich in [40, 41].

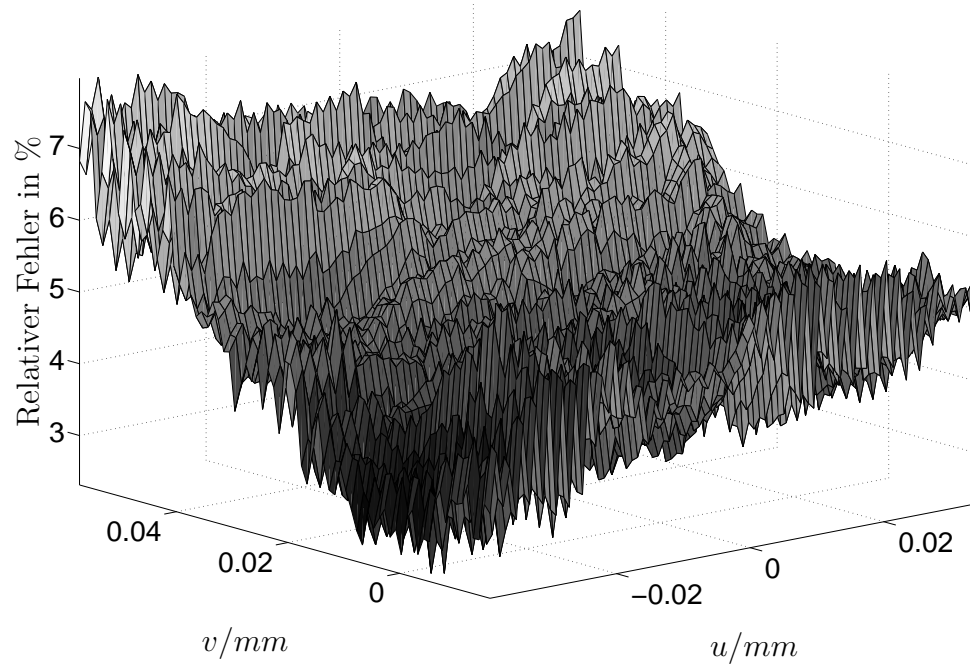
Aufgenommen wurden bei der Rekonstruktion die Werte der Funktionale  $H$  und  $J$ . Abbildung 5.6 zeigt eine Auswahl von vier Iterierten aus verschiedenen Phasen des Verfahrens. Die entsprechenden Fehlerentwicklungen sind Abbildung 5.7 zu entnehmen. Deutlich wird das trotz der einfachen Diskretisierung gute Konvergenzverhalten.

#### 5.3.4 Experimentelle Ergebnisse

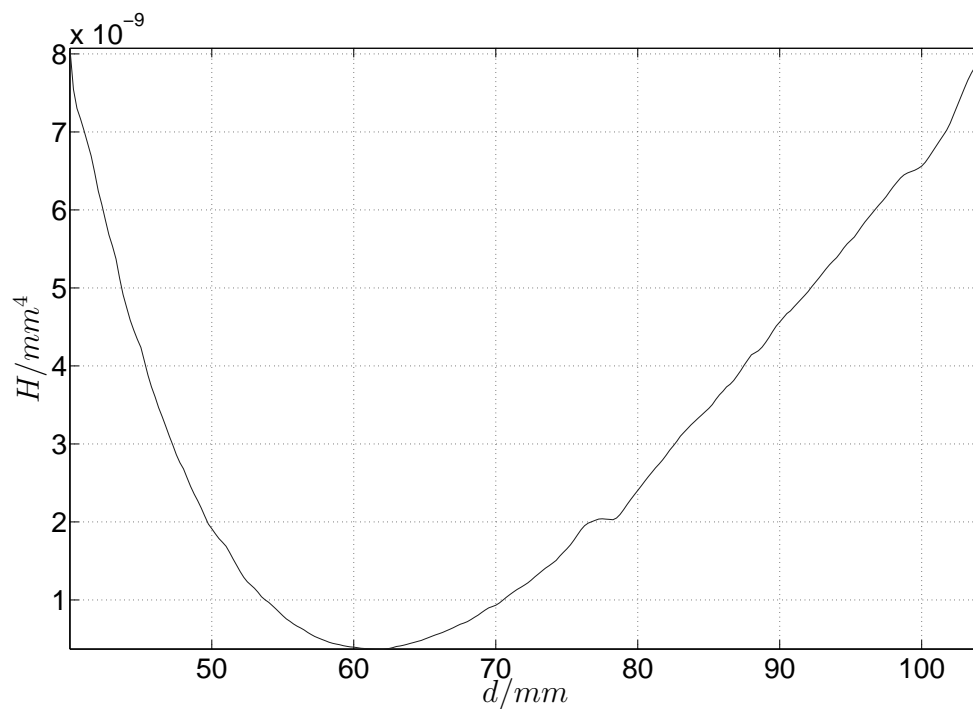
Die Datenaufnahme erfolgte wieder mit Hilfe des bereits vorgestellten robotergestützten Messaufbaus. Sie machte neben den in Abschnitt 4.4.1 erläuterten Kalibrierungsschritten die Bestimmung der Transformation zwischen den lokalen Koordinatensystemen in Kamera und Roboterbasis erforderlich. Die so genannte Hand-Auge-Kalibrierung wurde mit Hilfe der von Wengert et al. zur Verfügung gestellten Bibliothek [64] bewerkstelligt.

Die regularisierende Wirkung des spekularen Flusses soll nun am einfachen Beispiel des ebenen Spiegels demonstriert werden. Für diesen kann Ground Truth durch Anbringen eines diffus reflektierenden Targets und anschließende extrinsische Kamerakalibrierung gewonnen werden. Erneut macht sich die Variabilität der Szenenparameter positiv bemerkbar: Die Wahl des für die Beobachtung des optischen Flusses angezeigten Musters muss sich an den Eigenschaften des eingesetzten Schätzers orientieren. Hier kam eine Implementierung des Lucas-Kanade-Algorithmus zum Einsatz [21]. Da dieses Verfahren lokaler Natur ist, kann die Dichte des Flussfeldes innerhalb homogener Regionen stark abnehmen. Obwohl sich das in unserem Anwendungsfall nicht negativ auswirkt (unter idealen Bedingungen reicht ein Flussvektor zur Identifizierung der korrekten Lösung), lässt sich der Effekt durch Verwendung eines stochastischen Musters erheblich reduzieren.

Dementsprechend bewegt sich Abweichung zwischen gemessenem und von Satz 5.1 vorhergesagtem Fluss gemäß Abbildung 5.8(a) innerhalb der zu erwartenden Toleranzen des Schätzers. Wir machen außerdem folgende Beobachtung: Im Fehlergraphen spiegelt sich deutlich das Pixel-Raster des LCDs wider. Ursächlich ist die Diskrepanz der örtlichen

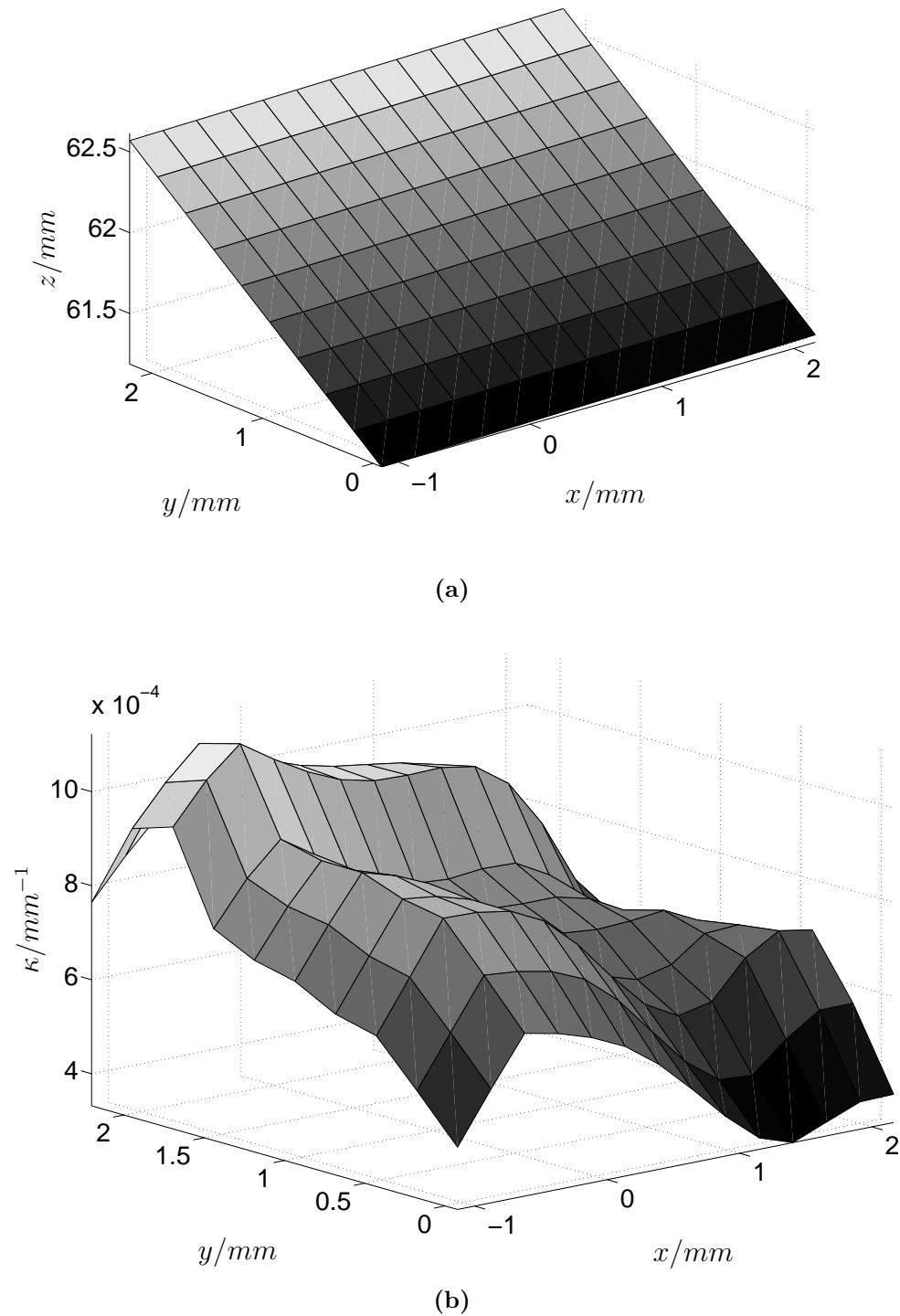


(a)



(b)

**Abbildung 5.8:** (a) Relativer Fehler  $\frac{\|\dot{u}-\dot{u}_m\|}{\|\dot{u}\|}$  zwischen gemessenem und prädiziertem spekularem Fluss. (b) OF-Fehler beim Durchwandern von  $\mathfrak{R}_{\hat{n}_\psi}$ . Das Minimum markiert die Lage der wahren Fläche.

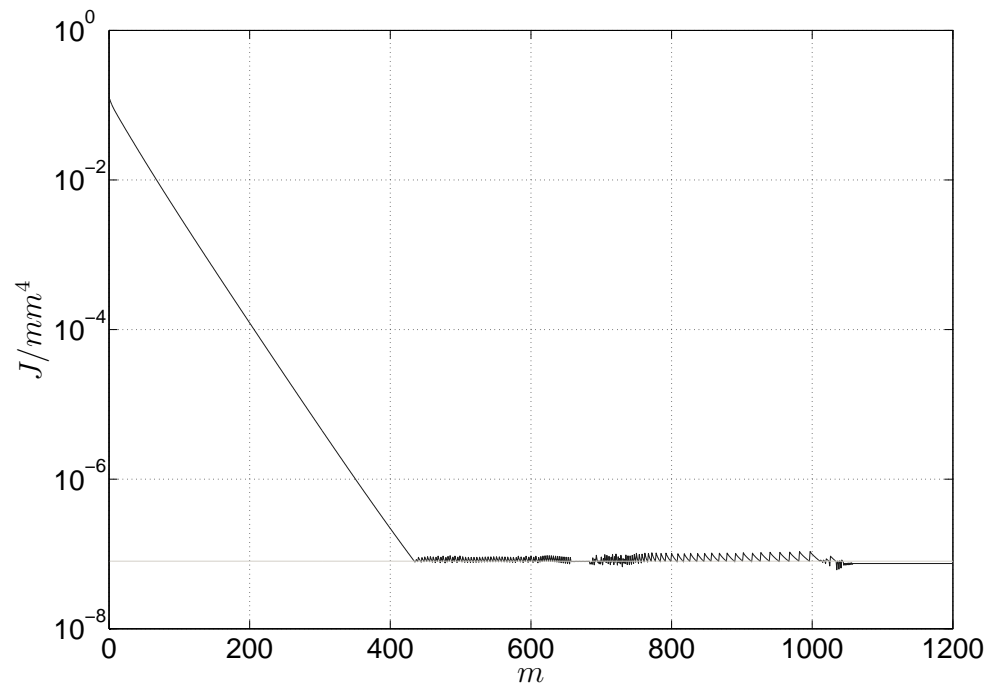


**Abbildung 5.9:** (a) Rekonstruktion mit Hilfe von Algorithmus 5.1. (b) Bewertung des in (a) dargestellten Ergebnisses anhand der mittleren Krümmung.

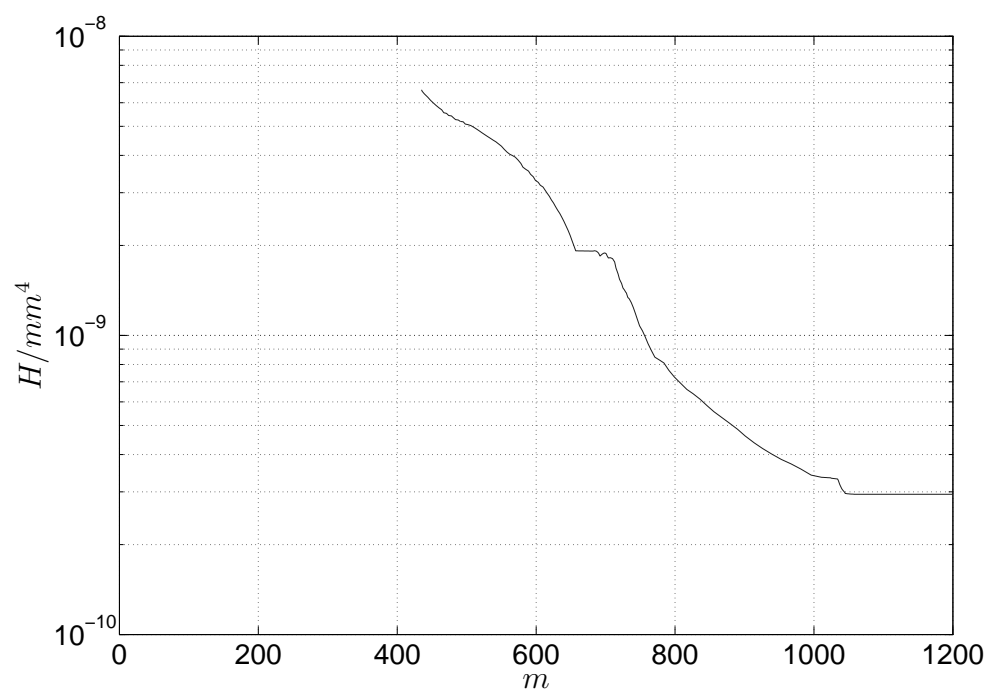
Abtastfrequenzen auf Kamerachip und Mustergenerator. Sie wird durch die Spiegelfläche als optisches Element im Strahlengang nur verstärkt. Eine Messung der induzierten Abbildung wird also im Allgemeinen stückweise konstante Anteile enthalten. Das Auftreten der damit verbundenen Sprungunstetigkeiten (Quantisierungsartefakte) macht eine Bandbegrenzung zu Anfang des Rekonstruktionsprozesses erforderlich, vor allem wenn bei der Berechnung der Flusshypothesen vorausgesetzt wird, dass  $\mathfrak{R}_{\hat{n}_\psi}$  die Lösungsmenge möglichst gut approximiert.

Trägt man wie in Abbildung 5.8(b) zunächst  $H$  über  $\mathfrak{R}_{\hat{n}_\psi}$  (parametrisiert durch die Entfernung  $d$  vom optischen Zentrum entlang des Hauptstrahls) auf, so rechtfertigt sich empirisch, dass optische Flussdaten für die Regularisierung des Rekonstruktionsproblems hinreichen können. Immerhin steht ein analytischer Beweis dafür noch aus.

Das Endergebnis der Rekonstruktion ist in Abbildung 5.9(a) dargestellt. Der Krümmungsfehler (Abbildung 5.9(b)) liegt sogar noch eine Größenordnung unter dem beim Level-Set-Verfahren auftretenden. Die moderaten Unstetigkeiten in den Ecken, in denen die äußere Normale an  $\Omega$  nicht wohldefiniert ist, sind – wie bereits angemerkt – auf die Diskretisierung der natürlichen Randbedingungen zurückzuführen. Der Normalenfehler strebt exponentiell gegen den Schwellwert  $\varepsilon_n$ , der infolge von eingeschobenen Normalenanpassungen während der gesamten Projektionsphase gehalten werden kann, siehe Abbildung 5.10. Ein Vergleich mit der Ground Truth ergibt für den relativen mittleren Neigungs- und Entfernungsfehler 1,81 % beziehungsweise 6,23 %. Diese Zahlen bestätigen das in Lemma 3.6 angegebene Empfindlichkeitsverhältnis sowie die Unsicherheiten bei der Schätzung des optischen Flusses (vergleiche Abbildung 5.8(a)).



(a)



(b)

**Abbildung 5.10:** Entwicklung des (a) Normalen- und (b) OF-Fehlers  $J$  beziehungsweise  $H$ . Der Schwellwert  $\varepsilon_n$  für den Beginn der Gradientenprojektion ist in (a) mit einer waagerechten Linie markiert.





---

## 6 Abschlussbemerkungen

### 6.1 Zusammenfassung

Die meisten in der Einleitung vorgestellten klassischen deflektometrischen Modelle basieren auf den beiden punktweisen Reflexionsbedingungen und vernachlässigen damit deren globalen funktionalen Zusammenhang. In der Literatur findet sich eine einzige kontinuierliche Betrachtungsweise in Form der Euler-Gleichung des zugeordneten Normalenanpassungsproblems. Mit dem hier vorgestellten System quasilinearer partieller Differentialgleichungen wird dem Leser eine native Formulierung an die Hand gegeben, die die Struktur des Problems – nämlich des Lösungsraums und der damit verbundenen Mehrdeutigkeit – auf frappierende Weise offen legt. Damit werden Aussagen widerlegt wie die: Durch den Übergang von einer punktweisen zur kontinuierlichen Betrachtung könne die Mehrdeutigkeit unter Stetigkeitsannahmen aufgelöst werden. Auch von der separaten Messbarkeit der Steigung oder Krümmung kann nicht mehr die Rede sein. Beide Eigenschaften sind über die Messdaten an die Entfernung des betrachteten Oberflächenpunkts gekoppelt. Anhand der Gleichungen konnte darüber hinaus die Existenz einer Lösung sowie bei Vorliegen eines Anfangswert deren Eindeutigkeit bewiesen werden.

Eine weitere, neuartige Beschreibung des Problems nutzt Elemente der Strahlengeometrie: Die an der Spiegelfläche reflektierte Sichtstrahlenkongruenz induziert eine Abbildung zwischen eben dieser und dem Mustergenerator. Unter Vorgabe gewisser Designparameter lassen sich die Eigenschaften dieser Zuordnung studieren. Beschränkung von Variation und Krümmung der betrachteten Flächen sichern deren Stetigkeit und damit die Existenz einer glatten Lösung. Ferner charakterisieren die Singularitäten in sehr allgemeiner Weise die Punkte, an denen Verfahren wie das im letzten Abschnitt präsentierte versagen können.

Das Kapitel 4 beginnt mit der wichtigen Feststellung der Strukturähnlichkeit zwischen der Deflektometrie und Shape-from-Shading, beides schlecht gestellte, inverse Probleme der optischen Messtechnik. Eine Art Selbstregularisierung für Flächen durchzuführen, die sowohl ein Mindestmaß an spiegelnder und Lambert'scher Reflexion aufweisen, liegt nahe: Die Charakteristiken einer der Differentialgleichungen bestehen nach Anwendung einer speziellen Transformation aus Punkten konstanten Abstands vom optischen Zentrum. Schneidet man eine solche mit einer geschickt gewählten Kurve konstanter Radianz, ist die Berechnung der Schnittpunkte möglich, deren Kenntnis im Folgenden für eine Regularisierung sorgen sollen. Nachteilig wirkt sich zunächst nur aus, dass die Beleuchtungsrichtung bekannt sein muss, deren Schätzung mit gängigen Shape-from-Shading-Verfahren fehlerbehaftet sein kann. Stattdessen lässt sich aber auch der Mustergenerator selbst als

Lichtquelle einsetzen. Das reduziert zum einen den Hardware-Aufwand, zweitens ermöglicht es dank der vorgestellten Kamera-Schirm-Kalibrierung die hochgenaue Bestimmung der Beleuchtungsrichtung.

Untersucht wurde daraufhin zunächst die Rekonstruktion von einem der ermittelten Oberflächenpunkte durch Charakteristikenexpansion. Experimentell bestätigte sich die bekannte Tatsache, dass sich während des Integrationsvorgangs Messfehler akkumulieren. Die Qualität der Lösung nimmt proportional mit der Entfernung vom Startpunkt ab. Zur Vermeidung dieser Random-Walk-Effekte wird von einigen Autoren der Frankot-Chellappa-Algorithmus eingesetzt. Dieser operiert allerdings im Frequenzbereich und ist somit nur für periodische Flächenstücke geeignet. Der hier vorgeschlagene Ansatz ist ebenso von globaler Natur. Die gesuchte Lösung ist nun Minimum eines Formfunktionals, das durch homöomorphe Transformation im Sinne des Gradientenabstiegs von einer Anfangsfläche erreicht werden kann. Numerisch wurde die Iteration durch eine Level-Set-Evolution realisiert. Bei dieser tritt weder Fehlerintegration auf, noch wird Periodizität der behandelten Flächenstücke vorausgesetzt. Die unterlagerte Differentialgleichung lässt außerdem auch nicht-differenzierbare, so genannte Entropie- oder Viskositätslösungen zu, somit kann quasikontinuierlich ein breites Spektrum anwendungsrelevanter Geometrien behandelt werden. Die Level-Set-Gleichung verkörpert eine Euler'sche Betrachtung dynamischer Flächen: Da auf einem festen Gitter gerechnet werden kann, sind Topologieänderungen besonders einfach darzustellen, was für die deflektometrische Rekonstruktion allerdings eine untergeordnete Rolle spielen dürfte.

Mit einem Beitrag zur Modellierung spiegelnder Oberflächen beginnt das Kapitel 5. Auch hier erweist sich die Theorie impliziter dynamischer Flächen als nützlich: Eine Level-Set-Gleichung – im Gegensatz zum oben beschriebenen Rekonstruktionsprozess – definiert in sehr allgemeiner Form die Oberflächenbewegung, aus der die Veränderung der aufgenommenen Daten hergeleitet werden kann. Wenn auch in der industriellen Praxis nur Starrkörperbewegungen relevant sind, lässt das Modell auch elastische Verzerrungen und topologische Änderungen zu. Diese könnten beispielsweise für den medizinisch-chirurgischen Einsatz des Verfahrens von Bedeutung sein (Reflexionen an mit Flüssigkeitsfilmen überzogenen Organen). Mit dem gemessenen spekularen Fluss hat man erneut die Zusatzinformation an der Hand, die benötigt wird, um aus der Mannigfaltigkeit von Lösungskandidaten den richtigen auszuwählen. Numerisch wird ein weiterer neuer Weg beschritten. Die Level-Set-Evolution wird anders als oben nicht im Sinne einer Tikhonov-Regularisierung stabilisiert. Stattdessen wird nun die Fläche gesucht, für die die Abweichung zwischen gemessenem und prädiiziertem spekularem Fluss ein Minimum annimmt. Die ursprüngliche deflektometrische Messung geht dabei in eine Nebenbedingung ein. Dieser Ansatz ist sehr flexibel, da durch Austausch des Funktionals jeder beliebigen Art regularisierender

Zusatzdaten Rechnung getragen werden kann.

Wiederum werden in Simulation und Experiment die theoretischen Ergebnisse bestätigt und bewertende Aussagen über das abgeleitete Messverfahren getroffen. Die Genauigkeiten sind zufriedenstellend, allerdings widerspricht diese Herangehensweise der natürlichen Struktur des Lösungsraums, da alle Punkte in die Regularisierung einbezogen werden. Der Hardwareaufwand ist vergleichbar mit dem eines Stereoverfahrens. Die Auswertung muss zusätzlich um einen Optischen-Fluss-Schätzer erweitert werden.

## 6.2 Ausblick

In dieser Arbeit wurden grundlegende Beiträge zur Forschung über deflektometrische Methoden geleistet, und zwar in den Bereichen

- Modellierung,
- Regularisierung,
- Numerik.

Einige theoretische Fragen bleiben unbeantwortet: Die Wirkung der Spiegelfläche als optisches Abbildungsgerät lässt sich erst studieren, wenn man von einer Strahlen- zu einer Bündelbeschreibung des Lichtwegs übergeht. Die damit verbundenen Effekte beschränken – neben den ebenfalls nur selten behandelten wellenoptischen Phänomenen – die Abtastdichten auf LCD und Kamerachip und somit die erzielbare Messgenauigkeit. Ferner ist es nicht offensichtlich, ob eine Form von Zusatzinformation regularisierend wirken kann, wie das Gegenbeispiel aus Abschnitt 3.3.4 vor Augen führt. Für die hier präsentierten Ansätze konnte bisher nur empirisch überprüft werden, ob die eindeutige Lösung des Rekonstruktionsproblems auf der Basis von Shading- beziehungsweise Flussdaten gefunden werden kann. Ein analytischer Beweis dafür steht noch aus.

Weitere Maßnahmen müssen die entscheidende ingenieurwissenschaftliche Frage berühren, wie ein rekonstruierendes Verfahren zur Anwendungsreife gebracht werden kann (die qualitative Prüfung befindet sich bereits im industriellen Einsatz): Zur Weiterentwicklung der vorgestellten Verfahren für den praktischen Einsatz müssen in erster Linie die Rekonstruktionszeiten verkürzt werden. Man unterscheide streng zwischen Rechen- und Konvergenzgeschwindigkeit: Die Hinzunahme einer dritten Dimension zur impliziten Darstellung dynamischer Flächen bietet zwar einige Vorteile (Viskositätslösungen, Euler'sche Betrachtung, Topologieänderungen), doch sind sämtliche Operationen pro Iterationsschritt in der

Dimension von polynomialer Komplexität. Es existieren jedoch leistungsfähigere Verfahren: Die Narrow-Band-Level-Sets sind immer nur in einem „Schlauch“ um die aktuelle Fläche definiert, so dass quasi zweidimensional gerechnet wird. Alternativ kann die Fast-Marching-Methode eingesetzt werden, die eingehend in [59] erläutert wird.

Die Konvergenzentwicklung ist unabhängig von der Leistungsfähigkeit des eingesetzten Rechners. Sie stellt eine intrinsische Eigenschaft des numerischen Verfahrens dar. Ohne die Konjugiertheit der Gradienten zu erzwingen, sind Abstiegsverfahren in diesem Zusammenhang suboptimal, wie zum Beispiel Burger in [14] zeigt. Neben den Krylovraumverfahren hat sich das klassische Newton-Verfahren als besonders günstig hervorgetan, es erfordert aber bekanntlich die Berechnung von (Form-)Ableitungen zweiter Ordnung. Dieses Problem umgeht die Gauß-Newton-Iteration schlicht durch Vernachlässigung der auftretenden Hesse-Matrix. Das kann unerwünschte Effekte in Bezug auf das globale Konvergenzverhalten zur Folge haben. Zur Lösung implizit definierter Formoptimierungsprobleme ist daher für die Zukunft die Implementierung einer konditionierten Version, zum Beispiel als Levenberg-Marquardt-Algorithmus, erstrebenswert.

Wie schon im Kapitel 4 angeklungen ist, liegen die mit einer Messkonstellation erfassbaren Flächenausschnitte – vor allem bei starker Krümmung – im Bereich weniger Quadratzentimeter. Daraus ergibt sich im Hinblick auf den robotergestützten Sensor die Frage nach dem zeitoptimalen Prüfablauf. Liegt dann ein quantitatives Messergebnis vor, fehlen bis jetzt speziell auf die Wahrnehmung spiegelnder Oberflächen abgestimmte Toleranzen, um Gut- von Schlechtteilen zu separieren.

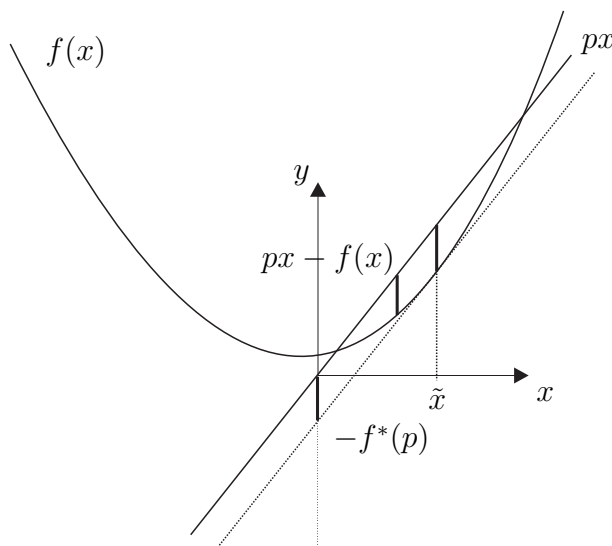
## A Ergänzende mathematische Erläuterungen

### A.1 Legendre-Transformation

Wir wiederholen das zugrunde liegende Konzept am einfachen Beispiel der skalarwertigen Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  einer Veränderlichen  $x \in I \subseteq \mathbb{R}$ . Die Verallgemeinerung auf den multivariaten Fall ist offensichtlich. Es sei  $f$  streng konvex auf  $I$ , das heißt  $\frac{df^2}{dx^2} > 0$ . Wir schreiben zunächst  $p = p(x)$  für die Steigung  $\frac{df}{dx}$  von  $f$  an der Stelle  $x$ . Es bezeichnet

$$f^*(p) := \max_{x \in I} \{px - f(x)\}$$

die *Legendre-Transformierte* von  $f$ . Wegen der Konvexität von  $f$  wird dieses Maximum für festes  $p$  genau dort angenommen, wo die in  $y$ -Richtung um  $-f^*(p)$  verschobene Gerade  $px$  den Funktionsgraphen tangential berührt. Man spricht deswegen von einer Berührungstransformation (beispielsweise im Gegensatz zu Integraltransformationen wie die nach Fourier oder Laplace). Intuitiv ordnet die Legendre-Transformation also jedem Punkt von Graph  $f$  den Schnittpunkt seiner Tangente mit der Ordinate zu (siehe Abbildung A.1). Offensichtlich ist die Transformation umkehrbar, da  $f$  streng konvex. Denn wegen  $\frac{df^2}{dx^2} = \frac{dp}{dx} > 0$  ist die Steigungsfunktion  $p(x)$  streng monoton wachsend, also  $p$  bijektiv auf  $I$ .



**Abbildung A.1:** Die Legendre-Transformation ordnet jedem Punkt des Graphen einer stetig differenzierbaren konvexen Funktion den Schnittpunkt seiner Tangente mit der Ordinate zu. Hier bezeichnet  $\tilde{x} = \arg \max_{x \in I} \{px - f(x)\}$  für festes  $p$ .



## Literatur

- [1] ALDROUBIE, A. ; GRÖCHENIG, K.: Nonuniform Sampling and Reconstruction in Shift-Invariant Spaces. In: *SIAM Review* 43 (2001), Nr. 4, S. 585–620
- [2] BALZER, J. ; DIBBELT, J. ; BEYERER, J.: Über die Eindeutigkeit der stereoregularisierten deflektometrischen Oberflächenrekonstruktion. In: *Tagungsband Bildverarbeitung in der Mess- und Automatisierungstechnik, Regensburg, 2007*
- [3] BALZER, J. ; WERLING, S. ; BEYERER, J.: Regularization of the deflectometry problem using shading data. In: *Proceedings of the SPIE Optics East, 2006*
- [4] BALZER, J. ; WERLING, S. ; BEYERER, J.: Deflektometrische Rekonstruktion teilspiegelnder Freiformflächen. In: *tm - Technisches Messen* 74 (2007), Nr. 11
- [5] BARDI, M. ; CAPUZZO-DOLCETTA, I.: *Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman Equations*. Birkhäuser, 1997
- [6] BEYERER, J. ; PÉRARD, D.: Automatische Inspektion spiegelnder Oberflächen anhand von Rasterreflexion. In: *tm - Technisches Messen* 64 (1997), Nr. 10, S. 394–400
- [7] BEYERER, J. ; PUENTE LEÓN, F.: Bildoptimierung durch kontrolliertes Aktives Sehen und Bildfusion. In: *at - Automatisierungstechnik* 53 (2005), S. 493–502
- [8] BLAKE, A. ; BÜLTHOFF, H.: Shape from Specularities: Computation and Psychophysics. In: *Philosophical Transactions: Biological Sciences* 331 (1991), Nr. 1260, S. 237–252
- [9] BLAKE, A. ; BRELSTAFF, G.: Geometry from Specularities. In: *Proceedings of the International Conference on Computer Vision, 1988*
- [10] BONFORT, T. ; STURM, P.: Voxel Carving for Specular Surfaces. In: *Proc. ICCV, 2003*, S. 591 – 596
- [11] BONFORT, T. ; STURM, P. ; GARGALLO, P.: General Specular Surface Triangulation. In: *Proceedings of the Asian Conference on Computer Vision* 2 (2006), S. 872–881
- [12] BOUGUET, J.: Camera Calibration Toolbox for Matlab / Microprocessor Research Labs and Intel Corp. 2003. – Forschungsbericht
- [13] BURGER, M.: A framework for the construction of level set methods for shape optimization and reconstruction. In: *Interfaces and Free Boundaries* 5 (2003), S. 301–329

- 
- [14] BURGER, M. ; OSHER, S.: A Survey on Level Set Methods for Inverse Problems and Optimal Design. In: *European Journal of Applied Mathematics* 16 (2005), S. 264–301
- [15] CARMO, M. do: *Differential geometry of curves and surfaces*. Prentice-Hall, 1976
- [16] CHEN, M. ; ARVO, J.: Theory and Application of Specular Path Perturbation. In: *ACM Transactions on Graphics* 19 (2000), Nr. 1, S. 246–278
- [17] COURANT, R. ; HILBERT, D.: *Methods of Mathematical Physics*. Wiley Classics, 1989
- [18] DE YOUNG, G.: Exploring Reflection: Designing Light Reflectors for Uniform Illumination. In: *SIAM Review* 42 (2000), Nr. 4, S. 727–735
- [19] DEBNATH, L.: *Nonlinear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*. Birkhäuser, 1997
- [20] DELFOUR, M. ; ZOLESIO, J.-P.: *Shapes and Geometries*. SIAM, 2001
- [21] DOLLAR, P.: Piotr's Image & Video Toolbox for Matlab / Computer Vision Laboratory, U. C. San Diego. 2003. – Forschungsbericht
- [22] GOESELE, M. ; TARINI, M. ; LENSCH, H. ; SEIDEL, H.: Shape from Distortion: 3d Range Scanning of Mirroring Objects. In: *Proceedings of the International Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*, 2002
- [23] HALSTEAD, M. ; BARSKY, B. ; KLEIN, S. ; MANDELL, R.: Reconstructing Curved Surfaces From Specular Reflection Patterns Using Spline Surface Fitting of Normals. In: *Proceedings of the International Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*. New York : ACM Press, 1996, S. 335 – 342
- [24] HASHEMIA, L. ; AZIZIA, A. ; REZAEIANA, M.: The reflectance modeling in shape from shading. In: *Proceeding of XXth ISPRS Congress*, 2004
- [25] HEALY, G. ; BINFORD, T.: Local Shape from Specularity. In: *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* 42 (1988), S. 62–86
- [26] HICKS, R.: Designing a mirror to realize a given projection. In: *Journal of the Optical Society of America A* 22 (2005), Nr. 2, S. 323–330
- [27] HORN, B.: *Shape from Shading: A Method for Obtaining the Shape of a Smooth Opaque Object from One View*, MIT, Department of Electrical Engineering, Diss., 1970



- [28] HORN, B.: Height and Gradient from Shading. In: *International Journal of Computer Vision* 5 (1999), Nr. 1, S. 37–75
- [29] HORN, B. (Hrsg.) ; BROOKS, M. (Hrsg.): *Shape from Shading*. The MIT Press, 1989
- [30] HORN, B. ; SCHUNCK, B.: Determining Optical Flow - a Retrospective. In: *Artificial Intelligence* 59 (1993), S. 81–87
- [31] IKEUCHI, K. ; HORN, B.: Numerical Shape from Shading and Occluding Boundaries. In: *Artificial Intelligence* 17 (1981), S. 141–184
- [32] JÄHNE, B.: *Digitale Bildverarbeitung*. Springer, 1997
- [33] JIN, H. ; YEZZI, A. ; SOATTO, S.: Variational multiframe stereo in the presence of specular reflections. In: *Proceedings of the International Symposium on 3D Data Processing, Transmission, and Visualization*, 2002
- [34] KAMINSKI, J. ; LOWITZSCH, S. ; KNAUER, M. ; HÄUSLER, G.: Full-Field Shape Measurement of Specular Surfaces. In: OSTEN, W. (Hrsg.): *The 5th International Workshop on Automatic Processing of Fringe Patterns*. Springer, 2005, S. 372–379
- [35] KAMMEL, S.: *Deflektometrische Untersuchung spiegelnd reflektierender Freiformflächen*. Universitätsverlag Karlsruhe, Universität Karlsruhe, Dissertation, 2004
- [36] KICKINGEREDER, R. ; DONNER, K.: Stereo Vision on Specular Surfaces. In: *Proceedings of IASTED Conference on Visualization, Imaging, and Image Processing*, 2004, S. 335–339
- [37] KNABNER, P. ; ANGERMANN, L.: *Numerik partieller Differentialgleichungen*. Springer, 2000
- [38] KNAUER, M. ; BOTHE, T. ; LOWITZSCH, S. ; JÜPTNER, W. ; HÄUSLER, G.: Höhe, Neigung oder Krümmung? In: *DGaO-Proceedings*, 2006
- [39] KNAUER, M. ; KAMINSKI, J. ; HÄUSLER, G.: Phase Measuring Deflectometry: a new approach to measure specular free-form surfaces. In: OSTEN, W. (Hrsg.) ; TAKE-DA, M. (Hrsg.): *Optical Metrology in Production Engineering* Bd. 5457. Strasbourg, France : Proc. SPIE, 2004, S. 366–376
- [40] LELLMANN, J.: *Mathematische Modellierung und Analyse des Deflektometrieproblems: Rekonstruktion reflektierender Freiformflächen anhand des optischen Flusses auf der Grundlage von Level Sets*, Universität Karlsruhe, Diplomarbeit, 2006

- [41] LELLMANN, J. ; BALZER, J. ; RIEDER, A. ; BEYERER, J.: Shape from Specular Reflection and Optical Flow. In: *International Journal of Computer Vision* (2008). <http://dx.doi.org/10.1007/s11263-007-0123-3>. – DOI 10.1007/s11263-007-0123-3
- [42] LEUZINGER, E.: *Skript zur Vorlesung Differentialgeometrie*. 2005
- [43] LOWITZSCH, S. ; KAMINSKI, J. ; KNAUER, M. ; HÄUSLER, G.: Vision and Modeling of Specular Surfaces. In: GREINER, G. (Hrsg.) ; HORNEGGER, J. (Hrsg.) ; NIEMANN, H. (Hrsg.) ; STAMMINGER, M. (Hrsg.): *Vision, Modeling, and Visualization 2005 - Proceedings*. Akademische Verlagsgesellschaft Aka GmbH, Berlin, 2005, S. 479–486
- [44] MITCHELL, I.: A Toolbox of Level Set Methods / UBC Department of Computer Science. 2004. – Forschungsbericht
- [45] NAGEL, H.: *Skript zur Vorlesung Bildfolgenauswertung*. 2003
- [46] OREN, M. ; NAYAR, S.: A Theory of Specular Surface Geometry. In: *International Journal of Computer Vision* 24 (1996), S. 105–124
- [47] OSHER, S. ; FEDKIW, R.: *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*. Springer, 2002
- [48] PENTLAND, A.: Local Shading Analysis. In: *Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 6 (1984), S. 170–187
- [49] PETZ, M.: *Rasterreflexions-Photogrammetrie - Ein neues Verfahren zur geometrischen Messung spiegelnder Oberflächen*. Shaker Verlag, Aachen, Technische Universität Braunschweig, Dissertation, 2006
- [50] PETZ, M. ; TUTSCH, R.: Rasterreflexions-Photogrammetrie zur Messung spiegelnder Oberflächen. In: *tm - Technisches Messen* 71 (2004), S. 389–397
- [51] POTTMANN, H. ; WALLNER, J.: *Computational Line Geometry*. Springer, 2001
- [52] PRADOS, E. ; CAMILLI, F. ; FAUGERAS, O.: A viscosity solution method for Shape-from-Shading without image boundary data. In: *Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 40 (2007), Nr. 2, S. 393–412
- [53] RAHMANN, S. ; CANTERAKIS, N.: Reconstruction of Specular Surfaces using Polarization Imaging. In: *Proceedings of the International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 2001

- [54] RIEDER, A.: *Keine Probleme mit inversen Problemen*. Vieweg, 2000
- [55] ROTH, S. ; BLACK, M.: Specular Flow and the Recovery of Surface Structure. In: *Proceedings of IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition 2* (2006), S. 1869–1876
- [56] ROZENFELD, S. ; SHIMSHONI, I. ; LINDENBAUM, M.: Dense mirroring surface recovery from 1D homographies and sparse correspondences. In: *Proceedings of IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 2007
- [57] SAVARESE, S. ; CHEN, M. ; PERONA, P.: Local Shape from Mirror Reflections. In: *International Journal of Computer Vision* 64 (2005), Nr. 1, S. 31–67
- [58] SESSNER, R. ; HÄUSLER, G.: Richtungscodierte Deflektometrie (RCD). In: *DGaO-Proceedings*, Onlinezeitschrift der Deutschen Gesellschaft für angewandte Optik, 2004
- [59] SETHIAN, J.: *Level Set Methods and Fast Marching Methods*. Cambridge University Press, 1999
- [60] SOLEM, J. ; ANAES, H. ; HEYDEN, A.: A Variational Analysis of Shape from Specularities using Sparse Data. In: *2nd International Symposium on 3D Data Processing, Visualization, and Transmission*, 2004
- [61] STROBL, K. ; HIRZINGER, G.: Optimal Hand-Eye Calibration. In: *International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 2006
- [62] SWAMINATHAN, R. ; KANG, S. ; SZELISKI, R. ; CRIMINISI, A. ; NAYAR., S.: On the Motion and Appearance of Specularities in Image Sequences. In: *Proceedings of the European Conference on Computer Vision* Bd. 1, 2002, S. 508–523
- [63] SWAMINATHAN, R. ; NAYAR, S. ; GROSSBERG, M.: Framework for Designing Catadioptric Projection and Imaging Systems. In: *Proceedings of the IEEE International Workshop on Projector-Camera Systems*, 2003
- [64] *Kapitel Fully Automatic Endoscope Calibration for Intraoperative Use*. In: WENGERT, C. ; REEFF, M. ; CATTIN, P. ; SZÉKELY, G.: *Bildverarbeitung für die Medizin*. Springer, 2006, S. 419–423
- [65] WERLING, S. ; BALZER, J. ; BEYERER, J.: Initial Value Estimation for Robust Deflectometric Reconstruction. In: *Proceedings of 8th International Conference on Optical 3-D Measurement Techniques* Bd. 2, 2007

- 
- [66] WERLING, S. ; BEYERER, J.: Automatische Inspektion spiegelnder Oberflächen mittels inverser Muster. In: *tm - Technisches Messen* 74 (2007), Nr. 4
- [67] WOODHAM, R.: Gradient and Curvature from Photometric Stereo Including Local Confidence Estimation. In: *Journal of the Optical Society of America* 11 (1994), S. 3050–3068
- [68] ZHANG, R. ; TSAI, P. ; CRYER, J. ; SHAH, M.: Shape from Shading - A Survey. In: *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 21 (1999), S. 609–706
- [69] ZHENG, J. ; MURRATA, A.: Acquiring a Complete 3D Model from Specular Motion under the Illumination of Circular-Shaped Light Sources. In: *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 22 (2000), Nr. 8, S. 913–920
- [70] ZISSERMANN, A. ; GIBLIN, P. ; BLAKE, A.: The information available to a moving observer from specularities. In: *Image and Vision Computing* 7 (1989), S. 38–42



Spiegelnde Reflexion technischer Oberflächen – in der klassischen Sichtprüfung oft als zu unterdrückende Störung empfunden – bildet die Grundlage der deflektometrischen Messverfahren. Bei diesen wird das Vorwissen über die untersuchten Objekte in Form des Reflexionsgesetzes ausgenutzt: Ein bildgebender Sensor beobachtet über die Spiegelfläche eine Sequenz definierter Muster. Von der Zuordnung eines Punkts auf dem Mustergenerator und der entsprechenden Beobachtungsrichtung versucht man auf die quantitative Gestalt der Spiegelfläche zu schließen. Es handelt sich mathematisch gesehen um ein schlecht gestelltes Problem.

In dieser Arbeit werden zunächst theoretische Untersuchungen der Abbildung zwischen Kamerabild und Reflexerzeuger angestellt, die bei der Konstruktion eines deflektometrischen Messaufbaus von Bedeutung sind. Der Hauptteil präsentiert zwei neuartige Verfahren, die jeweils unter Einbeziehung von Zusatzinformation eine eindeutige Rekonstruktion ermöglichen. Das erste der beiden stützt sich auf das bei vielen praxisrelevanten Bauteilen auftretende diffuse Reflexionsverhalten. Schließlich wird ein allgemeines Modell des spekularen optischen Flusses hergeleitet, der entsteht, wenn die gesuchte Fläche relativ zum Messaufbau bewegt wird. Dieser kann ebenfalls zur Regularisierung herangezogen werden.