

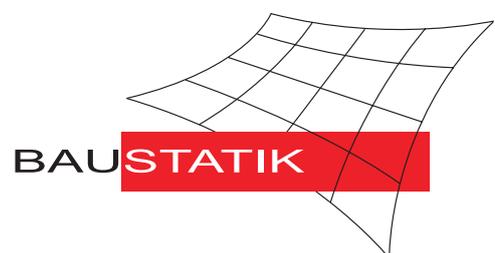


Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825

Institut für Baustatik

Magnetostruktive und piezoelektrische Materialien - Konstitutive Modellierung und Finite-Element-Formulierung

Konrad Linnemann



Magnetostriktive und piezoelektrische Materialien – Konstitutive Modellierung und Finite-Element-Formulierung

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

DOKTOR-INGENIEURS

von der Fakultät für

Bauingenieur-, Geo- und Umweltwissenschaften
der Universität Fridericiana zu Karlsruhe (TH)

genehmigte

DISSERTATION

von

Dipl.-Ing. Konrad Linnemann

aus Gießen

Tag der mündlichen Prüfung: 5. Dezember 2007

Hauptreferent: PD Dr.-Ing. habil. S. Klinkel

Korreferenten: Prof. Dr.-Ing. habil. W. Wagner

PD Dr.-Ing. habil. M. Kamlah

Karlsruhe 2008

Herausgeber:

Prof. Dr.–Ing. habil. W. Wagner

Organisation und Verwaltung:

Institut für Baustatik
Universität Karlsruhe (TH)
Postfach 6980
76128 Karlsruhe

Telefon: (0721) 608–2280
Telefax: (0721) 608–6015
E–mail: baustatik@bs.uni-karlsruhe.de

© 2008 Konrad Linnemann
Institut für Baustatik
Universität Karlsruhe (TH)
Kaiserstraße 12
76131 Karlsruhe

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten.
Ohne Genehmigung des Autors ist es nicht gestattet, dieses Heft ganz oder teilweise auf fotomechanischem Wege (Fotokopie, Mikrokopie) zu vervielfältigen oder in elektronischen Medien zu speichern.

ISBN 978–3–935322–13–3

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Baustatik der Universität Karlsruhe, an dem ich zunächst im Rahmen des Graduiertenkollegs 786 „Mischfelder und Nichtlineare Wechselwirkungen“ und später als wissenschaftlicher Mitarbeiter beschäftigt war.

Mein erster Dank gilt dem Hauptreferenten Herrn PD Dr.-Ing. habil. S. Klinkel für seine hervorragende wissenschaftliche Betreuung. Durch die intensive und stets angenehme Zusammenarbeit mit vielen fruchtbaren Diskussionen und zahlreichen Anregungen erhielt diese Arbeit größtmögliche Unterstützung.

Beim Institutsleiter Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. W. Wagner möchte ich mich ganz besonderes für seine in jeder Beziehung überaus großzügige Förderung, die zahlreichen Hilfestellungen und Hinweise sowie die Übernahme des ersten Korreferats bedanken. Die ausgesprochen offene und freundliche Atmosphäre am Institut gab mir die Möglichkeit, frei und ungehindert arbeiten zu können. Weiterhin trug die sehr gute technische Ausstattung des Instituts zum Gelingen dieser Arbeit bei.

Mein weiterer Dank gilt Herrn PD Dr.-Ing. habil. M. Kamlah für die Übernahme des zweiten Korreferats, sein Interesse an der Arbeit und seine bereitwillige Unterstützung.

Allen meinen Kollegen und Mitarbeitern am Institut möchte ich meinen Dank aussprechen. Die konstruktive Zusammenarbeit und das kollegiale Arbeitsklima haben meine Arbeit sehr gefördert.

Schließlich danke ich meinen Eltern und meinem Bruder Otto für die vielfältige Unterstützung während der Entstehung dieser Arbeit. Dank gilt auch Manuela und Michael Wenzel für die orthographische Durchsicht des Manuskripts.

Karlsruhe, im März 2008

Konrad Linnemann

Kurzfassung

Diese Arbeit befasst sich mit den theoretischen und numerischen Aspekten magnetostriktiver und piezoelektrischer Materialien. Es wird ein makroskopisches konstitutives Modell vorgestellt, welches das nichtlineare Verhalten dieser Materialien berücksichtigt und seine typischen Hysteresekurven abbilden kann. Die Finite-Element-Approximation erfolgt mit Hilfe eines gemischten 8-Knoten-Volumenelementes. Die geometrisch nichtlineare Elementformulierung basiert auf einem gemischten Mehrfeld-Variationsprinzip.

Magnetostriktive Legierungen und ferroelektrische Keramiken gehören zu der Gruppe der multifunktionalen Materialien, die in letzter Zeit vermehrt Anwendung in der Aktorik und der Sensorik finden. Sie zeichnen sich durch eine inhärente Kopplung zwischen Deformation und magnetischem bzw. elektrischem Feld aus. Aufgrund der Ähnlichkeiten der gekoppelten Differentialgleichungen wird für beide Phänomene eine einheitliche Formulierung hergeleitet.

Das vorgestellte dreidimensionale Materialmodell ist thermodynamisch motiviert. Grundlage der Formulierung bildet die Definition einer spezifischen freien Energiefunktion und eines Schaltkriteriums. Es wird weiterhin eine additive Aufspaltung der Verzerrungen und der magnetischen bzw. elektrischen Feldstärke in einen reversiblen und einen irreversiblen Anteil vorgenommen. Die irreversiblen Größen werden, analog zur Plastizitätstheorie, als interne Zustandsvariablen verwendet. Durch die Einführung einer Eins-zu-eins-Relation zwischen den beiden internen Variablen ist die Volumenerhaltung der irreversiblen Verzerrungen gewährleistet. Ein neuer Aspekt des Modells ist dabei die additive Aufspaltung der Feldstärke. Das vorgestellte Materialmodell ist in der Lage die ferromagnetische bzw. ferroelektrische Hysteresekurve sowie die zugehörigen Schmetterlingshysteresen abzubilden. Es wird zudem ein erweiterter Ansatz für ferrimagnetisches Verhalten präsentiert, das bei den betrachteten magnetostriktiven Materialien ebenfalls auftritt.

Für die Finite-Element-Modellierung wird ein nichtlineares 8-Knoten-Hexaeder-Element vorgeschlagen. Bei diesen Elementen treten durch die Verwendung von linearen Ansatzfunktionen bei biegedominierten Verformungen numerische Fehler auf, die auf inkompatible Approximationsräume zurückzuführen sind. Zur Verbesserung des numerischen Verhaltens werden im Rahmen dieser Arbeit unterschiedliche Verfahren untersucht und miteinander verglichen. Ein Schwerpunkt ist dabei die Erweiterung der Enhanced-Assumed-Strain-Methode auf das gekoppelte Feldproblem. Darüber hinaus wird eine gemischte Elementformulierung vorgestellt. Das gemischte Element basiert auf einem verallgemeinerten Mehrfeldfunktional. Hier werden die maßgebenden Feldgleichungen implizit über einen direkten Variationsansatz berücksichtigt.

Abstract

This thesis deals with the theoretical and computational aspects of magnetostrictive and piezoelectric materials. To consider the nonlinear behavior of these materials a constitutive model is presented. The model accounts for typical hysteresis effects. For the finite element approximation a mixed 8-node brick element is suggested. The geometrically nonlinear element formulation is based on a mixed multifield variational principle.

Magnetostrictive alloys and ferroelectric ceramics belong to multifunctional materials. In recent years these materials have become widely-used in actuator and sensor applications. They are characterized by an inherent coupling between deformation and magnetic or electric field. Due to the similarities of the coupled differential equations a uniform approach is applied for both phenomena.

The presented three-dimensional material model is thermodynamically motivated. It is based on the definition of a specific free energy function and a switching criterion. Furthermore, an additive split of strain and the magnetic or electric field strength into a reversible and an irreversible part is suggested. The irreversible quantities serve as internal variables, which is analog to plasticity theory. A one-to-one-relation between the two internal variables provides conservation of volume for the irreversible strains. A novel aspect of this thesis is the additive split of the field strength. The presented material model can approximate the ferromagnetic or ferroelectric hysteresis curve and the related butterfly hysteresis curves. Furthermore, an extended approach for ferrimagnetic behavior which occurs in magnetostrictive materials is presented.

For the finite element model an 8-node hexahedral element is proposed. This type of element shows numerical errors in bending dominated situations. These errors result from incompatible approximation spaces caused by the usage of linear interpolation functions. To improve the numerical behavior different methods are analyzed and compared within this thesis. Here the main focus is the expansion of the enhanced-assumed-strain method to the coupled field problem and a mixed element formulation. The mixed element is based on a generalized multi field formulation. The field equations are considered implicitly by a direct variational approach.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Stand der Forschung und Ziele der Arbeit	1
1.2	Gliederung der Arbeit	10
2	Einführung in die betrachteten Feldgrößen	12
2.1	Mechanische Felder	12
2.1.1	Verschiebungen und Verzerrungen	12
2.1.2	Kräfte und Spannungen	15
2.2	Feldgrößen der Elektrostatik	16
2.2.1	Das elektrische Feld	16
2.2.2	Die elektrische Flussdichte	18
2.3	Feldgrößen der Magnetostatik	20
2.3.1	Die magnetische Feldstärke	20
2.3.2	Die magnetische Flussdichte	22
2.3.3	Potentialfunktionen in der Magnetostatik	23
3	Magnetomechanische Koppelphänomene	24
3.1	Magnetismus in Festkörpern	24
3.1.1	Das magnetische Moment und die Magnetisierung	24
3.1.2	Arten des Magnetismus	26
3.1.3	Magnetische Anisotropie	29
3.2	Piezomagnetische und magnetostriktive Kopplung	30
3.3	Magnetostriktion	30
3.3.1	Magnetostriktive Materialien	31
3.3.2	Ursachen der Magnetostriktion	32
3.3.3	Domänen	35
3.3.4	Magnetostriktive Materialien im magnetischen Feld	38

4	Elektromechanische Koppelphänomene	42
4.1	Polarisation	42
4.2	Unterscheidung der Dielektrika	43
4.3	Elektrostriktion und Piezoelektrizität	46
4.4	Ferroelektrische Keramiken	47
4.4.1	Betrachtungen an der Einheitszelle	47
4.4.2	Domänenstruktur	49
4.4.3	Makroskopisches Verhalten	50
5	Gekoppelte Feldtheorie	54
5.1	Magnetomechanische Probleme	54
5.1.1	Erhaltung der Energie	58
5.1.2	2. Hauptsatz der Thermodynamik	59
5.2	Elektromechanische Probleme	61
5.3	Zusammenfassung	64
6	Konstitutives Modell	66
6.1	Lineares Stoffgesetz	66
6.2	Nichtlineares Stoffgesetz	68
6.2.1	Additive Aufteilung der Gradientenfelder	69
6.2.2	Thermodynamische Einbettung	71
6.2.3	Integrationsalgorithmus	73
6.2.4	Verfestigungsfunktion	76
6.2.5	Algorithmisch konsistente Tangente	77
6.3	Erweitertes Modell zur Erfassung ferrimagnetischer Hysteresen	78
6.4	Konstitutives Modell für ferroelektrische Keramiken	81
7	Elementformulierungen	84
7.1	Randwertproblem	84
7.2	Schwache Form des Gleichgewichts	85
7.3	Elementformulierung	87
7.4	Enhanced-Assumed-Strain-Formulierung	92

7.5	Verbesserte Interpolation der magnetischen Feldstärke	96
7.6	Gemischte Elementformulierung	99
7.7	Elementformulierung piezoelektrischer Materialien	103
7.8	Elemente mit einem lokal formulierten Stoffgesetz	104
8	Numerische Beispiele	107
8.1	Elementtests	108
8.1.1	Patchtest	108
8.1.2	Kragarm unter Biegebeanspruchung	111
8.1.3	Eigenwertuntersuchung	116
8.2	Nichtlineares Materialverhalten	118
8.3	Mechanisch verstärkter magnetostriktiver Aktor	126
8.4	Magnetostriktiver Dünnschichtaktor	131
8.5	Piezoelektrischer Hohlzylinder	135
8.6	Piezoelektrischer Teleskopaktor	143
9	Zusammenfassung und Ausblick	149
A	Partielle Ableitungen für die konstitutiven Gleichungen	153
	Literaturverzeichnis	155

1 Einleitung

1.1 Stand der Forschung und Ziele der Arbeit

Magnetostruktive und ferroelektrische Materialien gehören zur Gruppe der multifunktionalen Materialien. Der Erforschung und Entwicklung dieser Materialien galt in den letzten Jahren ein besonderes Interesse. Sie erlauben eine Anpassung ihrer Eigenschaften an die Einsatzbedingungen. So ist es beispielsweise möglich die Form oder die Steifigkeit der Materialien adaptiv an die Belastung anzupassen. Dies wird durch den Einsatz von Aktoren und Sensoren erreicht, die sich in ein Bauteil integrieren lassen und Einfluss auf seine Eigenschaften ausüben. Man spricht daher auch von adaptiven Strukturen bzw. aktiven Funktionsmaterialien (engl. *smart materials*).

Drei wichtige Vertreter aus der Gruppe der aktiven Funktionsmaterialien sind ferroelektrische Keramiken, magnetostruktive Werkstoffe und Formgedächtnislegierungen. Ihnen ist eine inhärente Kopplung zwischen verschiedenen physikalischen Effekten gemein. Im Fall von Formgedächtnislegierungen kann die Kristallstruktur durch Wärme verändert und dadurch eine Formänderung hervorgerufen werden. Bei ferroelektrischen Keramiken besteht die Kopplung zwischen elektrischem Feld und Deformation. Bei magnetostruktiven Materialien erzeugt ein angelegtes magnetisches Feld eine Deformation des Werkstücks. Daneben erlangen in letzter Zeit Mischformen der oben genannten Effekte, wie z. B. magnetoelektrische Materialien (engl. *multiferroics*) und ferromagnetische Formgedächtnislegierungen immer größere Bedeutung, siehe NAN [87], FIEBIG [44] und MARIONI ET AL. [81].

Die vorliegende Arbeit wird sich ausschließlich mit magnetostruktiven Materialien und ferroelektrischen Keramiken befassen. Bei beiden Phänomenen handelt es sich um wechselseitige Koppeleffekte, d. h. auch eine mechanische Belastung kann eine Änderung der magnetischen bzw. elektrischen Feldgrößen bewirken. Darin besteht ein grundsätzlicher Unterschied zur Wärmeausdehnung von Werkstoffen, da hier nur eine einseitige Kopplung vorliegt. Die Magnetostruktion wurde 1842 von JOULE [58] erstmals beobachtet. Sie tritt in geringem Ausmaß in allen ferromagnetischen Materialien auf. Anwendungen in der Aktorik wurden aber erst durch Legierungen aus Eisen und Metallen der seltenen Erden – wie Terbi-um, Dysprosium oder Samarium – ermöglicht. Eine der wichtigsten Vertreter ist $\text{Tb}_{0,3}\text{Dy}_{0,7}\text{Fe}_{1,95}$, das seit etwa 1980 unter der Bezeichnung Terfenol-D erhältlich ist. Der piezoelektrische Effekt wurde erstmals von den Brüdern Curie 1880 beschrieben, siehe [30]. Die im Rahmen dieser Arbeit betrachteten ferroelektrischen Keramiken sind seit den 50er und 60er Jahren erhältlich. Wichtige Vertreter sind

Barium-Titanat und Blei-Zirkonat-Titanat (PZT).

Für aktive Funktionsmaterialien gibt es zahlreiche Anwendungen im Maschinenbau, in der Medizintechnik und in der Luft- und Raumfahrt, siehe z. B. TANI ET AL. [121], NIEZRECKI ET AL. [89] und CHOPRA ET AL. [26]. Durch angepasste Herstellungsverfahren können sie auch als mikro-elektro-mechanische Systeme (MEMS) in der Mikrosystemtechnik eingesetzt werden, siehe z. B. SENTURIA [108], BODY ET AL. [14] und QUANDT [96]. Aber auch im Bauwesen gibt es inzwischen Verwendungsmöglichkeiten für multifunktionale Materialien. Hier werden sie vor allem zur Kontrolle von Bauwerksschwingungen eingesetzt, siehe SONG ET AL. [115, 116] und AUPÉRIN [5].

Aufgrund der Umkehrbarkeit des magnetostriktiven und des piezoelektrischen Effektes können diese Materialien in der Sensorik und der Aktorik eingesetzt werden. In Abbildung 1.1 sind zwei magnetostriktive Aktoren dargestellt. In a) ist ein typischer Weggeber (engl. *transducer*) zu sehen. Der Stift, der oben aus dem Gehäuse ragt, kann bewegt werden. Im Schnittbild erkennt man den zentral angeordneten Terfenol-D-Stab und die felderzeugende Spule. In 1.1b) ist ein

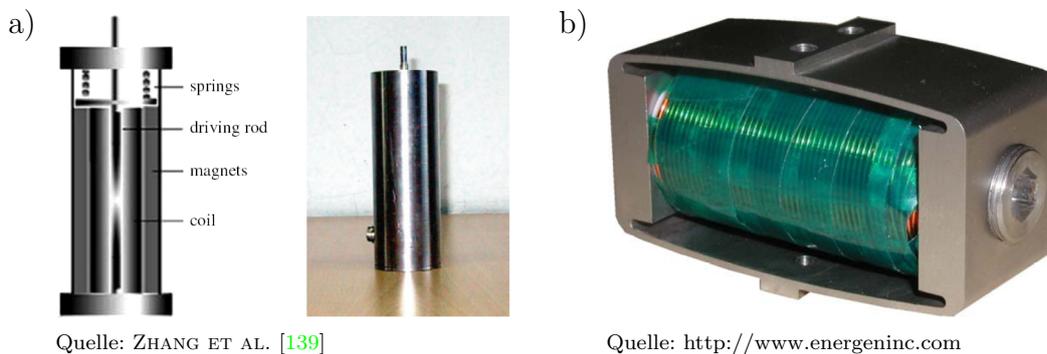
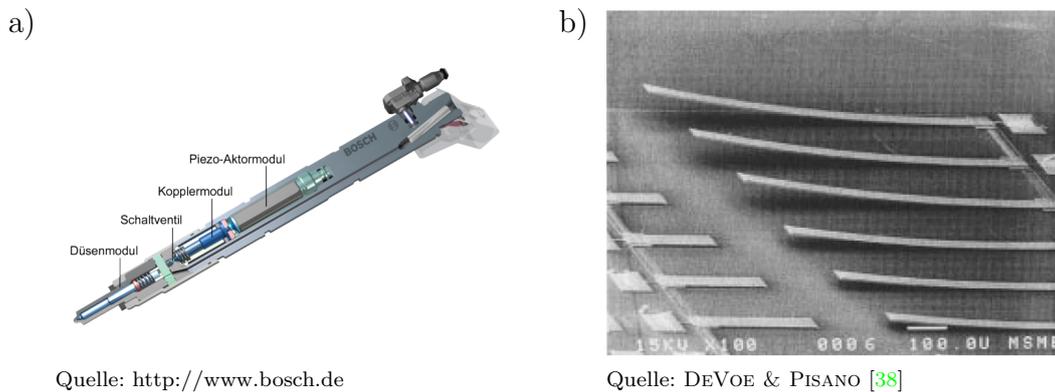


Abb. 1.1: Beispiele für magnetostriktive Aktoren

mechanisch verstärkter Aktor abgebildet. Das magnetostriktive Element befindet sich innerhalb der Spule. Die Gehäuseform ist hier so gewählt, dass sich der Arbeitsbereich des Aktors erhöht. Abbildung 1.2 zeigt zwei piezoelektrische Bauteile. In a) ist ein Einspritz-Injektor der Firma Bosch dargestellt. Diese Technik erlaubt eine exakte Steuerung des Einspritzvorgangs und wurde 2005 mit dem deutschen Zukunftspreis ausgezeichnet. In Abbildung 1.2b) ist ein piezoelektrischer Beschleunigungssensor in MEMS-Bauweise zu sehen. Eine Beschleunigung bewirkt eine Durchbiegung der Kragarme. Diese sind mit einem piezoelektrischen Material beschichtet, an deren Oberfläche bei Durchbiegung eine elektrische Spannung messbar wird.



Quelle: <http://www.bosch.de>

Quelle: DEVOE & PISANO [38]

Abb. 1.2: Beispiele für Aktoren und Sensoren aus ferroelektrischen Keramiken

Finite-Element-Modellierung

Zur Optimierung der Eigenschaften solcher Aktoren oder Sensoren ist es hilfreich, das Verhalten der Bauteile durch ein numerisches Modell vorherzusagen zu können. Eine numerische Modellierung ist erforderlich, da die beschreibenden Differentialgleichungen in der Regel nicht analytisch lösbar sind. Hier müssen neben den Differentialgleichungen der Mechanik auch die Feldgleichungen der Elektrodynamik, also die Maxwell'schen Gleichungen, erfüllt werden. Im Falle der Magnetostriktion sind dies die Feldgleichungen der Magnetostatik. Die Erfassung der magnetostriktiven Eigenschaften des Materials erfolgt über einen Koppelanteil, der die mechanischen und magnetischen Feldgrößen in Beziehung setzt. Für die Abbildung des piezoelektrischen Effektes müssen die Feldgleichungen der Elektrostatik berücksichtigt werden. Hier wird ein Anteil zur Kopplung der mechanischen und elektrischen Feldgrößen eingeführt. Man erhält für beide Effekte Differentialgleichungssysteme, die Gemeinsamkeiten aufweisen. Dies liegt zum einen an der Verwandtschaft der magnetostatischen und elektrostatischen Feldgleichungen und zum anderen am ähnlichen Verhalten magnetostriktiver und piezoelektrischer Materialien. Es liegt daher nahe, die Äquivalenz der beiden Koppelphänomene auszunutzen und durch eine gemeinsame Formulierung zu beschreiben.

Zur Lösung der gekoppelten Feldgleichungen hat sich die Methode der finiten Elemente (FEM) als probates Mittel erwiesen. Aufgrund der unterschiedlichen Bauformen der betrachteten multifunktionalen Strukturen bietet sich ein dreidimensionales Volumenelement als universeller Zugang an. Für piezoelektrische Materialien sind in den letzten Jahren zahlreiche Elementformulierungen veröffentlicht worden, darunter auch Schalen- und Balkenelemente. Eine gute Übersicht ist in BENJEDDOU [10] zu finden. Piezoelektrische Volumenelemente werden in [127, 47, 25, 126, 65, 64] vorgestellt. KIM ET AL. [64] konzentrieren sich zudem auf die Entwicklung von Übergangselementen zwischen Struktur- und Kontinuums-

elementen. In TZOU & TSENG [127] und TZOU ET AL. [126] werden 8-Knoten-Hexaederelemente für dünne Strukturen vorgestellt, in denen eine hybride Approximation mit zusätzlichen internen Verschiebungsvariablen Anwendung findet. HA ET AL. [47] präsentiert eine Formulierung für geschichtete piezoelektrische Sensor-Aktor-Verbundwerkstoffe.

Zur Anwendung der Finite-Element-Methode auf magnetostruktive Probleme sind weit weniger Veröffentlichungen zu finden. Einige Formulierungen werden in [8, 9, 61, 11, 6, 92] diskutiert. Die Elemente von BENBOUZID ET AL. [8, 9] und KANNAN & DASGUPTA [61] verwenden dabei das magnetische Skalarpotential. Die Arbeiten AZOUM ET AL. [6] und PÉREZ-APARICIO & SOSA [92] basieren auf der Verwendung des magnetischen Vektorpotentials. Bei der Modellierung von PÉREZ-APARICIO & SOSA [92] werden zusätzlich elektromagnetische Koppelphänomene erfasst.

In Finite-Element-Formulierungen mit Ansatzfunktionen niedriger Ordnung können bei der Abbildung von Biegezuständen Unverträglichkeiten in den verwendeten Interpolationen auftreten. Durch solche inkompatible Approximationsräume können die Ergebnisse stark verfälscht werden. Diese Problematik ist bei mechanischen Problemen seit langem als *Locking* bekannt. Zur Verbesserung des Elementverhaltens wurden zahlreiche Arbeiten veröffentlicht. Ein bekanntes Verfahren ist die *Enhanced-Assumed-Strain*-Methode (EAS), welche erstmals von SIMO & RIFAI [112] vorgeschlagen wurde. Sie basiert auf einem Hu-Washizu-Funktional, in dem neben den Verschiebungen auch angenommene Verzerrungen und Spannungen eingehen. Durch Voraussetzung von Orthogonalität zwischen den beiden angenommenen Feldern können die angenommenen Spannungen eliminiert werden. In PILTNER & TAYLOR [93, 94] wird eine alternative Formulierung vorgeschlagen, die eine Spannungsapproximation mit einbindet und als gemischte EAS-Methode bezeichnet wird. Bei der Betrachtung von magnetostruktiven oder piezoelektrischen Problemen treten weitere numerische Fehler auf, die auf inkompatiblen Approximationen der verschiedenen Feldgrößen beruhen. So resultiert z. B. aus einer Biegebeanspruchung eine linear verteilte magnetische Feldstärke, die mit einem klassischen 8-Knoten-Hexaeder-Element nicht wiedergegeben werden kann. Gemischte Elemente für piezoelektrische Materialien werden in [37, 119, 71] diskutiert, wobei in SZE & YAO [119] und KLINKEL & WAGNER [71] Volumenschaalenformulierungen vorgestellt werden. Ein allgemeiner Zugang zu Variationsprinzipien für piezoelektrische Probleme ist in SZE & PAN [118] zu finden.

Ein Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung eines effizienten Volumenelementes für magnetostruktiv und piezoelektrisch gekoppelte Probleme. Dem soll eine geometrisch nichtlineare Beschreibung zu Grunde liegen, um die Simulation von Stabilitätsversagen und Beuleffekten zu erlauben. Zur Beschreibung der magnetischen

bzw. elektrischen Feldstärke wird das Skalarpotential als Knotenfreiheitsgrad verwendet. Für die Verschiebungen werden drei Freiheitsgrade pro Knoten eingeführt. Zur Vermeidung inkompatibler Approximationsräume werden unterschiedliche Verfahren vorgestellt und miteinander verglichen. Dazu gehören die EAS-Methode, die Verwendung unterschiedlicher Ansatzordnungen für Potential und Verschiebungen und Elemente, die auf einer gemischten Variationsformulierung beruhen. Die wesentlichen Merkmale der Finite-Element-Modellierung lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- Es wird ein 8-Knoten Hexaeder-Element für magnetostruktiv und piezoelektrisch gekoppelte Probleme präsentiert. Die Verschiebungen und das Skalarpotential dienen als Knotenfreiheitsgrade.
- Zur Verbesserung des Elementverhaltens bei biegedominierten Problemen werden unterschiedliche Verfahren angewendet:
 - EAS-Ansätze für Verschiebungen und eine quadratische Interpolation des Skalarpotentials.
 - EAS-Ansätze für Verschiebungen und Skalarpotential.
 - Eine gemischte Formulierung, die auf einer 6-Feld-Variationsformulierung basiert. Dafür werden unabhängige Verzerrungen, Spannungen sowie eine unabhängige Feldstärke und Flussdichte eingeführt, die auf Elementebene kondensiert werden.
- Die vorgestellten Elementformulierungen sind vollständig geometrisch nicht-linear formuliert. Dies erlaubt die Untersuchung von Stabilitätsproblemen.

Konstitutive Modellierung

Bei der Modellierung des Materialverhaltens werden Annahmen getroffen, die die Beziehungen der maßgebenden Feldgrößen untereinander charakterisieren. Für klassische Materialien wird im konstitutiven Modell oder Stoffgesetz der Zusammenhang zwischen Spannungen und Verzerrungen formuliert. Bei magnetostruktiven Materialien müssen zudem noch die magnetische Feldstärke und die magnetische Flussdichte im konstitutiven Modell berücksichtigt werden. In ein konstitutives Modell für ferroelektrische Keramiken gehen stattdessen die elektrische Feldstärke und die dielektrischen Verschiebungen mit ein. In beiden Fällen kann für kleine Veränderungen der Feldgrößen auf lineare Gesetzmäßigkeiten zurückgegriffen werden. Für größere Veränderungen zeigt sich jedoch ein stark nichtlineares Verhalten. Es treten desweiteren irreversible Änderungen der Feldgrößen auf, die

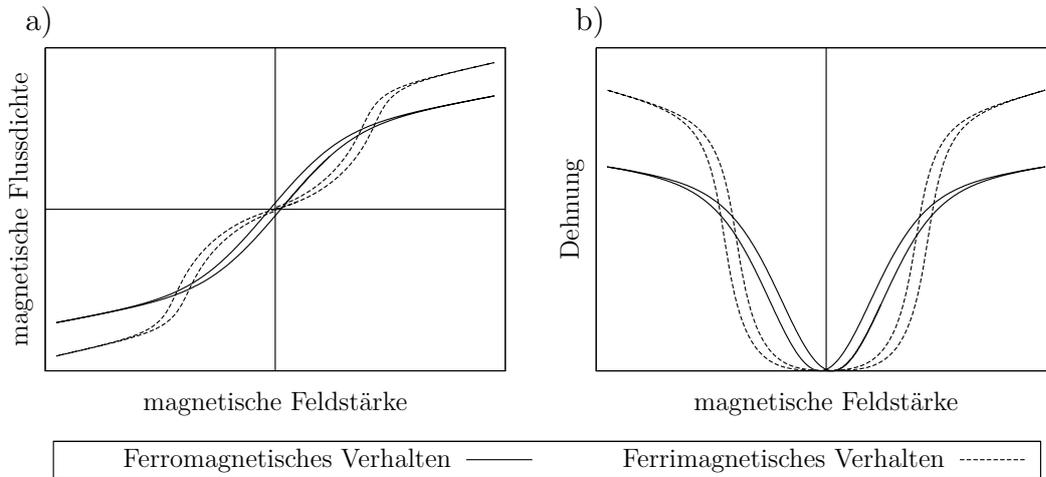


Abb. 1.3: Typisches nichtlineares Verhalten magnetostruktiver Materialien: a) Ferromagnetische Hysterese, b) Schmetterlingshysterese

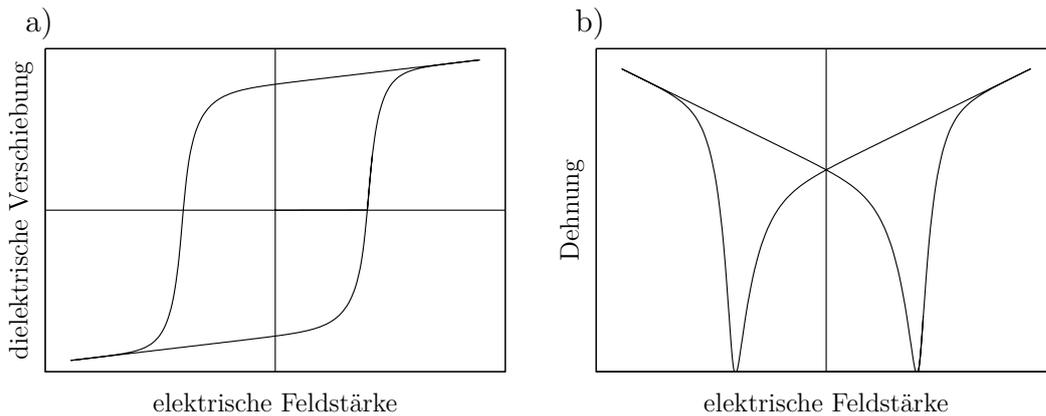


Abb. 1.4: Typisches nichtlineares Verhalten ferroelektrischer Keramiken: a) Ferroelektrische Hysterese, b) Schmetterlingshysterese

nach Wegfall der Erregung erhalten bleiben. Dies führt bei zyklischer Belastung zu Hystereseschleifen. In Abbildung 1.3 sind die typischen Hystereseschleifen magnetostruktiver Materialien dargestellt. Die äquivalenten Kurven ferroelektrischer Keramiken sind in Abbildung 1.4 angegeben.

Die Ähnlichkeit der beiden Abbildungen ist erkennbar und motiviert wiederum eine einheitliche Beschreibung der beiden Phänomene. Das nichtlineare Verhalten erklärt sich aus der Kristallstruktur der Materialien. Im Falle der Magnetostraktion bedingt diese bevorzugte Richtungen der Elementarmagnete der Atome. Durch ein äußeres magnetisches Feld können die Elementarmagnete in eine andere Richtung umgeklappt werden. Die Umklappprozesse treten an subkristallinen Grenzen auf, den so genannten Domänenwänden. Diese verschieben sich bei ei-

ner Änderung der Magnetisierung innerhalb der Kristallstruktur. Dieser Vorgang wird auch als Wandverschiebung bezeichnet. Bei ferroelektrischen Keramiken fallen die positiven und negativen Ladungsschwerpunkte der kristallinen Einheitszelle nicht zusammen. Daraus resultiert eine spontane Polarisierung. Die Richtung der spontanen Polarisierung kann durch ein angelegtes elektrisches Feld beeinflusst werden. Auch hier kommt es dadurch zu Umklappprozessen, die ähnlich wie bei der Magnetostraktion durch Wandverschiebungen gekennzeichnet sind. Allgemein kann bei der Erfassung des Materialverhaltens zwischen mikroskopisch motivierten Modellen und phänomenologischen Modellen unterschieden werden.

Mikroskopisch motivierte Modelle versuchen die Ursache des betrachteten Prozesses möglichst exakt abzubilden. Für piezoelektrische Materialien werden meist Energiekriterien eingeführt, die den Umklappprozess in der kristallinen Einheitszelle wiedergeben. Das makroskopische Verhalten ergibt sich durch eine Mittelung über alle Einheitszellen, wobei unter Umständen auch Interaktionen zwischen den Einheitszellen berücksichtigt werden. Dieser Ansatz ist in den Arbeiten von CHEN & LYNCH [22], HWANG ET AL. [51, 50] und HUBER & FLECK [48] zu finden. Modelle für magnetostruktive Materialien basieren häufig auf dem Modell von Jiles und Atherton, siehe [57, 55]. Hier werden die Wandverschiebungsprozesse modelliert. Es werden Energiekriterien formuliert, die die Verschiebung und Verkrümmung der Domänenwände beschreiben. Dabei wird der Einfluss von Fehlstellen in der Kristallstruktur auf die Wandverschiebungen berücksichtigt. Das Jiles-Atherton-Modell wurde zunächst nur für den Magnetisierungsprozess formuliert. Erweiterungen zur Erfassung magnetostruktiver Materialien werden in [101, 56, 20, 35, 34, 33] vorgestellt. JILES [56] befasst sich in erster Linie mit dem Einfluss mechanischer Spannungen auf das magnetoelastische Verhalten. In CALKINS ET AL. [20] und DAPINO ET AL. [35, 34] wird auf die Besonderheiten bei der Modellierung magnetostruktiver Umwandler eingegangen. DAPINO ET AL. [33] erläutert die Anwendbarkeit des Jiles-Atherton-Modells auf magnetostruktive Sensoren. Mikroskopisch motivierte Materialmodelle liefern im Allgemeinen eine sehr gute Vorhersage. Allerdings ist auch der numerische Aufwand dieser Modelle sehr hoch, da aus der mikroskopischen Betrachtungsweise sehr viele interne Variablen resultieren.

Phänomenologische konstitutive Modelle basieren auf einer makroskopischen Beschreibung des Materialverhaltens. Diese Modelle benötigen nur wenige interne Variablen und sind dadurch wesentlich effizienter. Ein sehr verbreitetes Modell ist hier das Preisach-Modell, siehe PREISACH [95] und MAYERGOYZ [83]. Dieses Modell wurde ursprünglich zur Beschreibung der Magnetisierung ferromagnetischer Materialien entwickelt. Durch Anpassung der Parameter können sehr unterschiedliche Hystereseformen wiedergegeben werden. Ein modifiziertes Preisach-

Modell für magnetostruktive Materialien wird in ADLY ET AL. [1] und TAN & BASAS [120] vorgestellt. Formulierungen für piezoelektrische Keramiken sind in HWANG ET AL. [51], PASCO & BERRY [91], YU ET AL. [137, 138] und BUTZ ET AL. [18] zu finden. Dem Preisach-Modell unterliegt ein rein phänomenologischer Ansatz. Es ist nicht thermodynamisch konsistent.

Thermodynamisch motivierte Modelle sind im Einvernehmen mit den Hauptsätzen der Thermodynamik formuliert. Das grundlegende Materialverhalten wird durch die Wahl einer spezifischen freien Energiefunktion bestimmt. Als unabhängige Variablen werden für piezoelektrische Materialien meist die Verzerrungen, die Polarisierung und die Temperatur verwendet. Für magnetostruktive Materialien geht statt der Polarisierung die Magnetisierung ein. Hier wird häufig eine freie Energiefunktion höherer Ordnung gewählt, siehe CARMAN [21], WAN [132], ZHENG & LIU [141], ZHENG & SUN [140]. Alternativ wird die spezifische freie Energie abschnittsweise definiert, siehe WAN [132] und SMITH [114].

Zur Erfassung des Hystereseverhaltens werden die unabhängigen Variablen additiv in einen reversiblen und einen irreversiblen Anteil aufgespalten. Dies ist neben den Verzerrungen meist die Magnetisierung bzw. die Polarisierung. Die irreversiblen Größen repräsentieren als interne Variablen den Magnetisierungs- bzw. den Polarisationszustand. Die Entwicklung der internen Variablen wird durch die Einführung eines Schaltkriteriums bestimmt. Auf dieser Grundlage wird in FANG ET AL. [43] ein Modell für magnetostruktive Materialien vorgeschlagen. Häufiger werden thermodynamisch motivierte Modelle allerdings für ferroelektrische Keramiken verwendet. In den Modellen von KAMLAH [60] und ELHADROUZ [40] werden mehrere Schaltkriterien verwendet, welche Beginn und Ende des irreversiblen Verhaltens festlegen. Die multiaxialen Modelle von LANDIS [74] und MCMEEKING [84] kommen mit einem Schaltkriterium aus. Die Begrenzung der Domänenprozesse bei Sättigung wird durch die Einführung von Verfestigungsfunktionen realisiert. Eine koordinateninvariante Formulierung wird in SCHRÖDER UND GROSS [105] bzw. SCHRÖDER UND ROMANOWSKI [106] vorgeschlagen. Um zu gewährleisten, dass Umklappprozesse auch Verzerrungen verursachen, wird in vielen Modellen eine Eins-zu-eins-Relation zwischen den irreversiblen Verzerrungen und der irreversiblen Polarisierung angenommen, siehe [60, 105, 40]. KLINKEL [68, 67] führt stattdessen eine spezielle Verfestigungsfunktion ein, die das Wachstum der irreversiblen Verzerrungen steuert.

In dieser Arbeit wird ein konstitutives Modell eingeführt, das auf einer additiven Aufspaltung der magnetischen bzw. elektrischen Feldstärke beruht. Die irreversible Feldstärke dient neben den irreversiblen Verzerrungen als interne Variable. Durch diesen neuen Ansatz wird die Implementierung des Stoffgesetzes in eine Finite-Element-Formulierung vereinfacht. Die Feldstärke wird hier über ein

Skalarpotential beschrieben, das in der Finite-Element-Approximation als unabhängige Variable verwendet wird. Ein Wechsel der Variablen ist somit nicht mehr notwendig. Für die irreversiblen Verzerrungen wird eine Eins-zu-eins Relation definiert. Die wesentlichen Gesichtspunkte und neuen Aspekte des vorgestellten konstitutiven Modells können wie folgt zusammengefasst werden:

- Es wird ein dreidimensionales, thermodynamisch konsistentes Materialmodell vorgestellt. Es ist in der Lage, das nichtlineare Verhalten von magnetostriktiven Materialien und piezoelektrischen Keramiken abzubilden. Grundlage der Formulierung bildet die Definition einer spezifischen freien Energiefunktion und eines Schaltkriteriums. Auf eine freie Energiefunktion höherer Ordnung wird verzichtet. Es wird stattdessen ein Polynom zweiter Ordnung verwendet. Das Schaltkriterium dient der Kontrolle der Umklappprozesse. Es verschiebt sich im Sinne eines kinematischen Verfestigungsprozesses der Plastizitätstheorie.
- Es wird eine additive Aufspaltung der Verzerrungen und der magnetischen bzw. elektrischen Feldstärke vorgenommen. Um Volumenerhaltung während der Umklappprozesse zu gewährleisten, werden die irreversiblen Verzerrungen über eine Eins-zu-eins Relation aus der Feldstärke bestimmt. Die spezielle Wahl der internen Variablen hat Vorteile bei der Finite-Element-Modellierung, da auf einen Wechsel der Variablen verzichtet werden kann. Das Wachstum der verbleibenden irreversiblen Größe wird durch eine Verfestigungsfunktion bestimmt. Die spezielle Wahl der Verfestigungsfunktion erlaubt es, das Wachstum der internen Variable zu begrenzen und Sättigung zu erzwingen.
- Das Modell ist in der Lage, die ferroelektrische Hysterese und die Schmetterlingshysterese ferroelektrischer Keramiken zu reproduzieren. Weiterhin können die typischen Hysteresekurven magnetostriktiver Materialien abgebildet werden. Es wird hier eine Erweiterung zur Simulation ferrimagnetischen Verhaltens vorgeschlagen, das in Abbildung 1.3 gestrichelt dargestellt ist. Diese Erweiterung basiert auf der Transformation der unabhängigen Feldgrößen in eine lokale Darstellung.
- Das Stoffgesetz wird in die vorgestellten Finite-Element-Formulierungen implementiert. Die Bestimmung der internen Variable erfolgt durch eine inkrementelle Zeitintegration der Evolutionsgleichung nach dem impliziten Euler-Rückwärts-Verfahren. Die algorithmisch konsistente Tangente kann geschlossen angegeben werden. Dadurch ist quadratische Konvergenz innerhalb des iterativen Lösungsprozesses der Finite-Element-Approximation gewährleistet.

1.2 Gliederung der Arbeit

In **Kapitel 2** werden die mechanischen und anschließend die elektrodynamischen Feldgrößen eingeführt. Die Beschreibung der Elektrodynamik beschränkt sich auf stationäre Vorgänge. Die zeitliche Änderung der betrachteten Felder kann damit vernachlässigt werden. Dadurch wird eine elektromagnetische Kopplung vermieden und eine getrennte Betrachtung von elektrischen und magnetischen Feldgrößen ermöglicht.

In **Kapitel 3** wird auf die verschiedenen magnetomechanischen Koppelphänomene eingegangen. Da die untersuchten Phänomene auf der Wechselwirkung von magnetischen Feldern mit Materie beruhen, werden zunächst die Begriffe der Magnetisierung und des magnetischen Momentes eingeführt. Es wird eine Einteilung verschiedener Materialien nach ihren magnetischen Eigenschaften durchgeführt, wobei die physikalischen Hintergründe erklärt werden. Die verschiedenen magnetostriktiven Effekte werden erläutert und Materialien, bei denen dieser Effekt auftritt, vorgestellt. Zum Verständnis der Ursachen der Magnetostruktion werden Betrachtungen herangezogen, die von der mikroskopischen bis zur makroskopischen Ebene reichen. Es wird auf die materiell nichtlinearen Effekte eingegangen.

Kapitel 4 widmet sich den elektromechanischen Koppelphänomenen. Hierbei stehen der piezoelektrische und der inverse piezoelektrische Effekt im Vordergrund. Der Aufbau dieses Kapitels ist am dritten Kapitel orientiert. Dadurch sollen die Ähnlichkeiten zwischen piezoelektrischer und magnetostriktiver Kopplung verdeutlicht werden. Die Polarisation wird als die beschreibende Feldgröße für den elektrischen Zustand des Materials eingeführt.

In **Kapitel 5** werden die Bilanzgleichungen für die eingeführten Koppelphänomene betrachtet. Zunächst werden die für die magnetomechanische Feldtheorie maßgebenden Feldgleichungen erläutert. Der zweite Abschnitt befasst sich mit den entsprechenden Gleichungen der elektromechanischen Kopplung, wobei im Wesentlichen die Unterschiede zur magnetomechanischen Kopplung dargelegt werden.

In **Kapitel 6** werden die konstitutiven Gleichungen vorgestellt. Aufbauend auf einem linearen Materialgesetz wird ein nichtlineares konstitutives Modell formuliert, das die Hystereseerscheinungen in den betrachteten Materialien wiedergeben kann. Die Materialgleichungen werden zunächst für magnetostriktive Koppelphänomene formuliert. Eine Übertragung auf piezoelektrische Prozesse ist anschließend angegeben.

Kapitel 7 gilt der numerischen Lösung der Differentialgleichungen für die vorgestellten gekoppelten Probleme. Hierzu wird die Methode der finiten Elemente

herangezogen. Es werden Elementformulierungen für magnetostruktive bzw. piezoelektrische Probleme behandelt. Die unterschiedlichen Elemente werden hinsichtlich ihrer numerischen Eigenschaften analysiert. Hier werden Probleme betrachtet, die aus inkompatiblen Approximationsräumen entstehen. Die Elemente werden zunächst für die magnetostruktive Kopplung entwickelt. Abschließend wird auf die Unterschiede bei der Formulierung piezoelektrischer Elemente eingegangen.

Kapitel 8 befasst sich mit der Validierung der gewählten Finite-Element-Modellierung anhand von numerischen Beispielen. Es werden einige Elementtests durchgeführt, um die Fähigkeiten und Grenzen der vorgestellten Elementformulierungen aufzuzeigen. Daraufhin wird das im Element implementierte nichtlineare konstitutive Modell betrachtet. Es werden exemplarisch ein Terfenol-D-Material und eine PZT-Keramik modelliert. Die resultierenden Hysteresekurven werden mit experimentellen Ergebnissen verglichen. Abschließend werden einige komplexe magnetostruktive und piezoelektrische Bauteile simuliert und die Ergebnisse diskutiert.

In **Kapitel 9** werden die wesentlichen Ergebnisse dieser Arbeit zusammengefasst. Ausblickend wird auf Fragestellungen eingegangen, die in weiteren Forschungsvorhaben untersucht werden könnten.

2 Einführung in die betrachteten Feldgrößen

Bei der magnetostriktiven sowie der piezoelektrischen Kopplung überschneiden sich die physikalischen Themenbereiche der Mechanik und der Elektrodynamik. Zum Verständnis der gekoppelten Probleme ist daher eine Erläuterung beider Sachverhalte notwendig. In diesem Kapitel werden zunächst die mechanischen und anschließend die elektrodynamischen Feldgrößen eingeführt. Die Beschreibung der Elektrodynamik wird sich auf stationäre Vorgänge beschränken. Die zeitliche Änderung der betrachteten Felder kann damit vernachlässigt werden. Dadurch wird eine elektromagnetische Kopplung vermieden und eine getrennte Betrachtung von elektrischen und magnetischen Feldgrößen ermöglicht. Man spricht hier auch von Elektrostatik bzw. Magnetostatik. Für die benötigten theoretischen Grundlagen sei auf Lehrbücher der Physik und Elektrotechnik verwiesen, siehe z. B. JACKSON [53] und RAITH [99].

2.1 Mechanische Felder

Die für die gekoppelte Feldtheorie benötigten mechanischen Feldgrößen wie Verzerrungen und Spannungen werden entsprechend der Kontinuumsmechanik eingeführt. In der Kontinuumsmechanik wird die Struktur eines Körpers als Punktkontinuum, also als eine zusammenhängende Menge materieller Punkte idealisiert. Hierbei werden nicht kontinuierlich verteilte Eigenschaften wie Kristallstruktur, molekularer bzw. atomarer Aufbau vernachlässigt. Allerdings können diese Charakteristika indirekt bei der Wahl des kontinuumsmechanischen Modells mit eingehen. Für die weiteren Ausführungen soll ein Boltzmann-Kontinuum verwendet werden, d. h. jeder materielle Punkt hat als kinematische Variablen nur die Verschiebungen in die drei Raumrichtungen. Ausführliche Einführungen in die Kontinuumsmechanik sind in TRUESDELL AND NOLL [125], BARTHOLD [117] und GURTIN [46] zu finden.

2.1.1 Verschiebungen und Verzerrungen

In der Kontinuumsmechanik wird in der Kinematik die Bewegung und die Deformation von Körpern beschrieben. Dazu müssen die materiellen Punkte eines Kontinuums zu jedem Zeitpunkt eindeutig identifizierbar sein. Die Konfiguration \mathcal{B} eines Körpers bezeichnet die stetige, bijektive Abbildung aller materiellen Punkte eines Körpers im euklidischen Vektorraum \mathbb{E}^3 zu einem Zeitpunkt t . Die Abbildung zum Zeitpunkt $t = t_0$ wird als Referenzkonfiguration \mathcal{B}_0 definiert, die

den undeformierten Zustand kennzeichnet. Eine auf die Referenzkonfiguration bezogene Beschreibung wird auch als materielle Betrachtungsweise bezeichnet. Der Zustand $t > 0$ wird durch die Momentankonfiguration \mathcal{B}_t charakterisiert. Geht die Formulierung von der Momentankonfiguration aus, wird auch von räumlicher Betrachtungsweise gesprochen. Der Rand der Konfiguration, also die Oberfläche des Körpers, wird mit $\partial\mathcal{B}_t$ bzw. $\partial\mathcal{B}_0$ bezeichnet. Ein materieller Punkt \mathbf{P} wird in der Referenzkonfiguration durch den Ortsvektor \mathbf{X} beschrieben, während für die räumliche Beschreibung \mathbf{x} verwendet wird. Durch die gewählte bijektive Abbildung der materiellen Punkte kann die Bewegung eines materiellen Punktes beim Übergang von der Referenzkonfiguration in die Momentankonfiguration als funktioneller Zusammenhang Φ aufgefasst werden, wie in Abbildung 2.1 dargestellt.

Es gilt

$$\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{X}, t). \quad (2.1)$$

Durch die inverse Funktion

$$\mathbf{X} = \Phi^{-1}(\mathbf{x}, t) \quad (2.2)$$

kann die umgekehrte Bewegung aus der Momentankonfiguration in die Referenz-

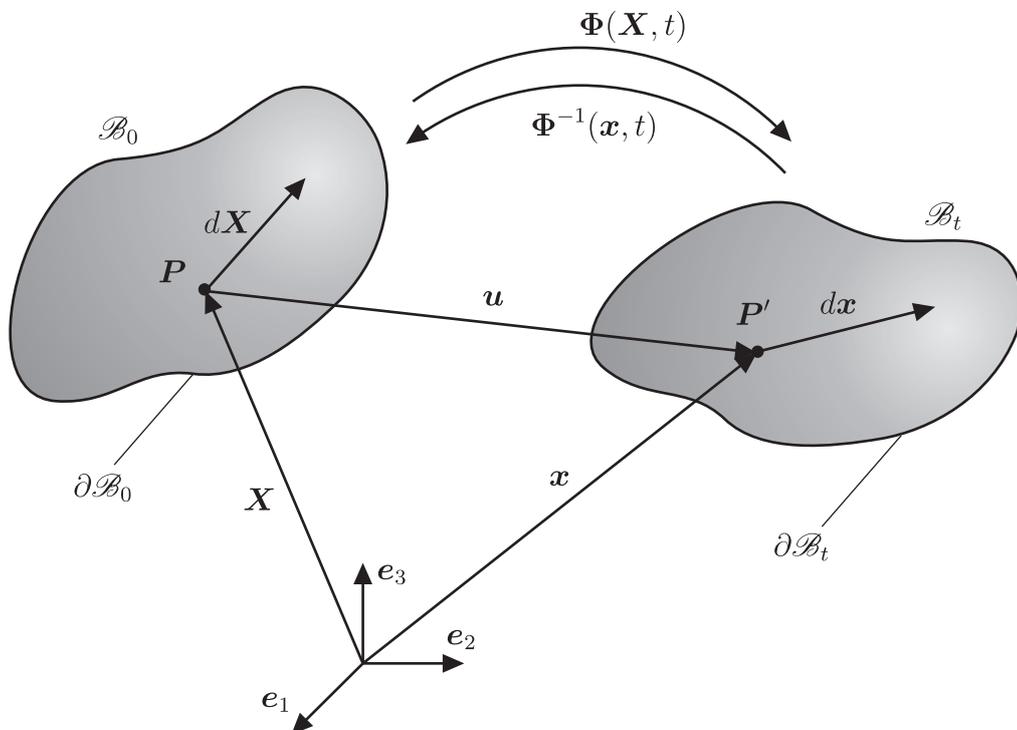


Abb. 2.1: Zusammenhang zwischen Referenz- und Momentankonfiguration

konfiguration wiedergegeben werden. Die Verschiebung des Punktes \mathbf{P} ist

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}. \quad (2.3)$$

Neben der Bewegung soll ein Maß zur Beschreibung der Deformation eingeführt werden. Hierzu wird zunächst der materielle Deformationsgradient

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{x} \otimes \nabla_{\mathbf{X}} \quad (2.4)$$

definiert. Der Deformationsgradient ist die Abbildung eines infinitesimalen Linienelementes von der Referenzkonfiguration in die Momentankonfiguration

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X}. \quad (2.5)$$

Da auch die inverse Abbildung \mathbf{F}^{-1} gelten muss und um eine Durchdringung der materiellen Punkte auszuschließen, gilt für die Jacobische Funktionaldeterminante

$$J = \det \mathbf{F} > 0. \quad (2.6)$$

Jede Deformation kann in eine Starrkörpertranslation, eine Starrkörperrotation und die eigentliche Deformation aufgespalten werden. Damit folgt für den materiellen Deformationsgradienten

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}. \quad (2.7)$$

\mathbf{R} bezeichnet den orthogonale Drehtensor, \mathbf{U} den materiellen Rechts-Strecktensor und \mathbf{V} den räumlichen Link-Strecktensor. Die beiden Strecktensoren \mathbf{U} und \mathbf{V} sind symmetrisch. Weiterhin lassen sich der materielle Rechts-Cauchy-Green-Tensor \mathbf{C} und der räumliche Links-Cauchy-Green-Tensor \mathbf{b} mit

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{U} = \mathbf{U}^2 \quad (2.8)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T = \mathbf{V} \mathbf{R} \mathbf{R}^T \mathbf{V}^T = \mathbf{V}^2 \quad (2.9)$$

eingeführen. Damit kann dann der Greensche Verzerrungstensor

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{1}) = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}) \quad (2.10)$$

definiert werden. Der Tensor $\mathbf{1}$ kennzeichnet die Identität zweiter Stufe. Der Greensche Verzerrungstensor ist auf die Referenzkonfiguration bezogen und zeichnet sich durch Symmetrie und Richtungsunabhängigkeit aus. Zudem verschwindet er sowohl für Starrkörperrotationen als auch für Starrkörpertranslationen und eignet sich zur Beschreibung großer Deformationen. Daneben lässt sich der Almansische-Verzerrungstensor

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2} (\mathbf{1} - \mathbf{b}^{-1}) = \frac{1}{2} (\mathbf{1} - \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1}), \quad (2.11)$$

als ein auf die Momentankonfiguration bezogenes Verzerrungsmaß definieren.

2.1.2 Kräfte und Spannungen

Nachdem der letzte Abschnitt die rein geometrische Beschreibung von Bewegung und Deformation zum Gegenstand hatte, werden im Folgenden die Ursachen für die Veränderungen in der Kinematik begrifflich gefasst. Dabei wird die Kraft als grundlegende Interaktionsgröße zwischen mechanischen Körpern eingeführt. Da sich der Einfluss einer Kraft durch ihre Wirkung zeigt, wird sie als vektorielle Größe am deformierten Körper, also in der Momentankonfiguration \mathcal{B}_t , definiert. Kräfte können je nach Form der Einwirkung in Volumenkräfte und Oberflächenkräfte aufgeteilt werden. Volumenkräfte wirken auf die einzelnen Partikel des Körpers \mathcal{B} und können z. B. Gravitationskräfte oder Einflüsse elektromagnetischer Wechselwirkungen sein. Oberflächenkräfte werden in der Regel durch den Kontakt zweier Körper verursacht und wirken auf eine begrenzte Oberfläche $\partial\mathcal{B}_t$.

Die auf den Körper einwirkenden Kräfte verursachen eine Deformation. Es entstehen auch im Inneren des Körpers Kräfte, die den Beanspruchungszustand charakterisieren. Ein gedachter Schnitt macht die inneren Kräfte zugänglich, wie in Abbildung 2.2 dargestellt. Der lokale Beanspruchungszustand im Punkt \mathbf{x} an der

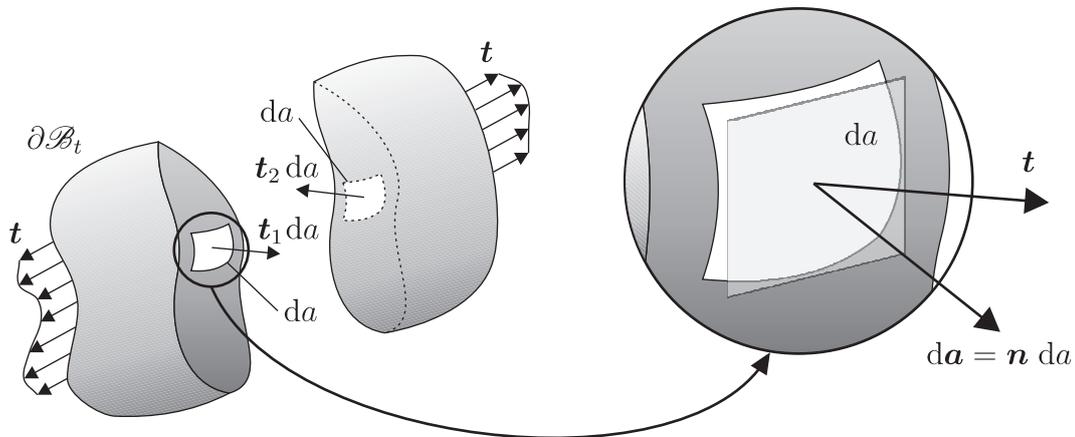


Abb. 2.2: Definition der mechanischen Spannungen

Schnittfläche $da = \mathbf{n} da$ wird durch den Traktionsvektor \mathbf{t} wiedergegeben, der nach Cauchy linear von der Normalen der gewählten Schnittfläche \mathbf{n} abhängt. Damit lässt sich der Cauchysche Spannungstensor \mathbf{T} über die lineare Abbildung

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t) = \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n} \quad (2.12)$$

definieren, die von der Schnittfläche unabhängig ist. Der Cauchysche Spannungstensor ist, wie später gezeigt wird, symmetrisch und wie \mathbf{t} auf die Momentankonfiguration bezogen. Die resultierende Oberflächenkraft \mathbf{f}^s kann als integrale

Größe über ein vektorielles Flächenelement $d\mathbf{a}$ angegeben werden

$$\mathbf{f}^s = \int_{\partial\mathcal{B}_t} \mathbf{t} da = \int_{\partial\mathcal{B}_t} \mathbf{T} d\mathbf{a}. \quad (2.13)$$

Da der deformierte Zustand in der Regel unbekannt ist, versucht man Spannungsgrößen zu finden, die auf die Referenzkonfiguration bezogen sind. Dazu wird zunächst das Flächenelement $d\mathbf{a}$ aus (2.13) mit der Nanson-Gleichung in die Referenzkonfiguration transformiert und man erhält den 1. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor (1. P. K.)

$$\mathbf{f}^s = \int_{\partial\mathcal{B}_t} \mathbf{T} d\mathbf{a} = \int_{\partial\mathcal{B}_0} \det(\mathbf{F}) \mathbf{T} \mathbf{F}^{-T} d\mathbf{A} = \int_{\partial\mathcal{B}_0} \mathbf{P} d\mathbf{A}. \quad (2.14)$$

Zudem folgt der materielle Traktionsvektor

$$\mathbf{t}_0(\mathbf{X}, \mathbf{N}, t) = \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) \mathbf{N}. \quad (2.15)$$

Der 1. P. K. Spannungstensor ist im Allgemeinen nicht symmetrisch. Man beachte auch, dass der Kraftvektor \mathbf{f}^s weiterhin auf die Momentankonfiguration bezogen ist. Transformiert man auch \mathbf{f}^s mit \mathbf{F}^{-1} in die Referenzkonfiguration, so ergibt sich der 2. Piola-Kirchhoff Spannungen (2. P. K.)

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P} = \det(\mathbf{F}) \mathbf{F}^{-1} \mathbf{T} \mathbf{F}^{-T}. \quad (2.16)$$

Der 2. P. K. ist ein symmetrischer Spannungstensor, der vollständig materiell formuliert ist.

2.2 Feldgrößen der Elektrostatik

Im folgenden Abschnitt werden die elektrischen Feldgrößen definiert. Hierzu gehört die elektrische Feldstärke und die elektrische Flussdichte. Weiterhin wird das elektrische Skalarpotential als formale Hilfsgröße eingeführt. Im Hinblick auf die gekoppelte Feldtheorie in Kapitel 5 sei angemerkt, dass sich die elektrische Feldwirkung stets am deformierten Körper äußert. Es muss daher auch hier zwischen räumlicher und materieller Betrachtungsweise unterschieden werden. Diese Unterscheidung ist in der ungekoppelten Elektrostatik, wie sie z. B. bei JACKSON [53] angegeben ist, nicht zu finden.

2.2.1 Das elektrische Feld

Grundlage der elektrischen und auch der magnetischen Feldtheorie ist die elektrische Ladung q . Ein Körper kann entweder eine positive oder eine negative Ladung

aufweisen. Nach dem Coulombschen Gesetz übt eine ruhende Ladung eine Kraft auf eine zweite Ladung aus, die längs der Verbindungslinie der beiden Ladungen wirkt. Diese Kraft heißt Coulombkraft. Das elektrische Feld kennzeichnet ein Gebiet, in dem auf eine Probeladung q eine Kraft \mathbf{f} ausgeübt wird. Die elektrische Feldstärke an einem Ort \mathbf{x} in der Momentankonfiguration ist durch den Quotienten

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x})}{q} \quad (2.17)$$

definiert. In Abbildung 2.3 ist das elektrische Feld zweier gegensätzlich geladenen Kugeln dargestellt. Zwischen den beiden Kugeln befindet sich eine positive Probeladung. Das elektrische Feld ist durch gerichtete Feldlinien symbolisiert. In

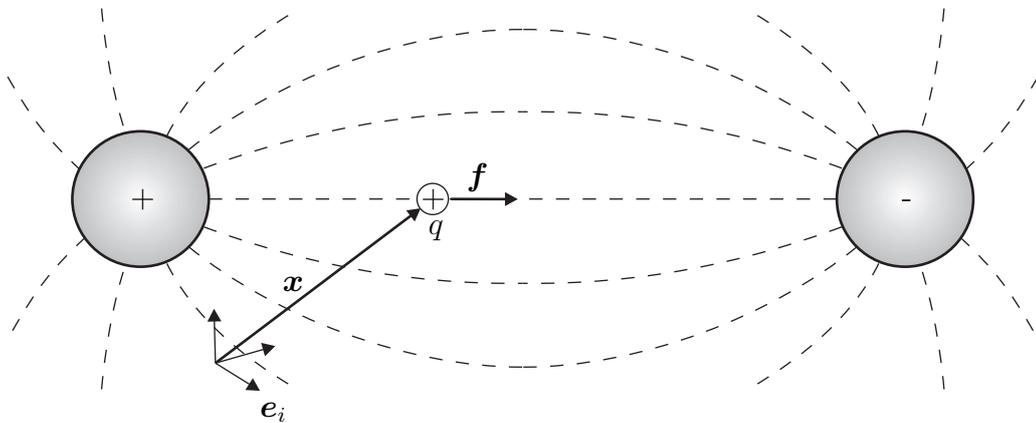


Abb. 2.3: Elektrisches Feld zweier Punktladungen

jedem Punkt zeigt der Feldvektor $\vec{\mathbf{E}}$ tangential zur elektrischen Feldlinie. Die elektrischen Feldlinien gehen immer von Quellen, also positiven Ladungen, aus und enden an Senken, sprich negativen Ladungen. Folglich können keine geschlossenen Feldlinien auftreten, d. h. das elektrische Feld ist wirbelfrei und genügt der mathematischen Bedingung

$$\nabla_x \times \vec{\mathbf{E}} = \mathbf{0}. \quad (2.18)$$

Zur Veranschaulichung des elektrischen Feldes ist in Abbildung 2.4 der Verlauf der Feldlinien eines Plattenkondensators dargestellt. Innerhalb des Kondensators liegt hier ein homogenes Feld vor. Diese Anordnung wird meist zur Ansteuerung von piezoelektrischen Bauteilen verwendet.

Als wirbelfreies Feld kann $\vec{\mathbf{E}}$ durch ein übergeordnetes Skalarpotential ϕ_E beschrieben werden. Es gilt

$$\vec{\mathbf{E}} = -\nabla_x \phi_E. \quad (2.19)$$

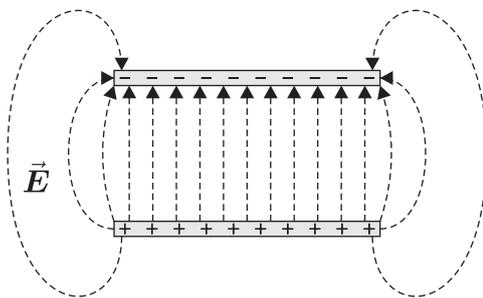


Abb. 2.4: Elektrisches Feld eines Plattenkondensators

Die Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten \mathbf{x}_1 und \mathbf{x}_2 ergibt sich zu

$$\Delta\phi_E(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} \vec{E} \cdot d\mathbf{x} \quad (2.20)$$

und wird auch als elektrische Spannung U bezeichnet. Die elektrische Spannung ist der Arbeit zugeordnet, die benötigt wird um eine Ladung q von \mathbf{x}_1 nach \mathbf{x}_2 zu bewegen. Das elektrische Skalarpotential ϕ_E ist durch die Gleichung (2.19) nicht eindeutig bestimmt. Durch Einführen eines Bezugswertes $\phi_E(\infty) := 0$ im Unendlichen ist das elektrische Skalarpotential

$$\phi_E(\mathbf{x}) = \int_{\infty}^{\mathbf{x}} \vec{E} \cdot d\mathbf{x} \quad (2.21)$$

als eindeutige Funktion zur Beschreibung des elektrischen Feldes definiert. Der Bezugswert $\phi(\infty)$ wird in der Elektrostatik als Erde bezeichnet. Unter Berücksichtigung von (2.5) kann Gleichung (2.21) auf die Referenzkonfiguration bezogen werden

$$\phi_E(\mathbf{x}) = \int_{\infty}^{\mathbf{x}} \vec{E} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\infty}^{\mathbf{X}} \vec{E} \cdot \mathbf{F} d\mathbf{X} = \phi_E(\mathbf{X}). \quad (2.22)$$

Man erhält die materielle elektrische Feldstärke

$$\vec{E}_0 = \vec{E} \mathbf{F}. \quad (2.23)$$

Da auch die materielle elektrische Feldstärke wirbelfrei sein muss, folgt

$$\nabla_X \times \vec{E}_0 = \mathbf{0}. \quad (2.24)$$

Mit dem Skalarpotential ϕ_E als formale Hilfsgröße zur Beschreibung des elektrischen Feldes, wird die Wirbelfreiheit von \vec{E} aufgrund von $\nabla \times \nabla\phi_E \equiv 0$ apriori erfüllt.

2.2.2 Die elektrische Flussdichte

Im vorherigen Abschnitt wurde mit Hilfe der elektrischen Feldstärke eine Feldgröße eingeführt, die durch ihren Bezug zur elektrischen Spannung als ursächliche

Feldgröße aufgefasst werden kann. Es hat sich allerdings als sinnvoll erwiesen, eine zweite Größe einzuführen, die direkt mit der elektrischen Ladung q verknüpft ist. Diese Größe wird als dielektrische Verschiebung oder auch elektrische Flussdichte mit dem Buchstaben \vec{D} bezeichnet. Zur Veranschaulichung wird das Verhalten zweier aufeinander gedrückter Metallplatten in einem elektrischen Feld betrachtet, siehe Abbildung 2.5.

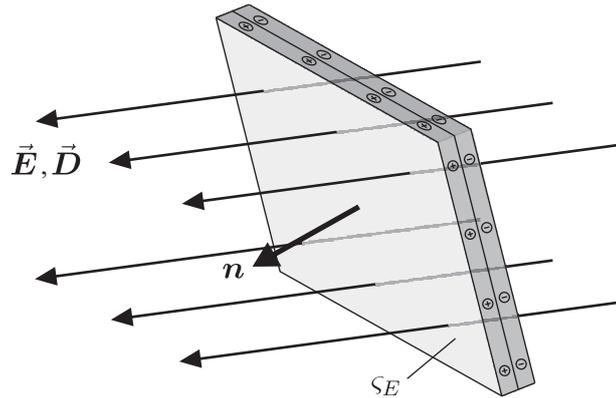


Abb. 2.5: Influenzversuch im elektrischen Feld

Die Orientierung der Metallplatten soll durch den Normalenvektor \mathbf{n} beschrieben werden. Das elektrische Feld bewirkt eine Verschiebung der Ladungsträger im Metall. Die linke Platte lädt sich positiv, die rechte negativ auf. Dieser Vorgang wird Influenz genannt. Die Ladung auf der Oberfläche wird durch die Oberflächenladungsdichte

$$\varsigma_E = \frac{dq}{da} \quad (2.25)$$

beschrieben. Die Stärke der Oberflächenladungsdichte hängt vom Normalenvektor \mathbf{n} ab. Weist \mathbf{n} beispielsweise senkrecht zu \vec{E} , so ist $\varsigma_E = 0$. Die elektrische Flussdichte \vec{D} lässt sich implizit über das Skalarprodukt

$$\vec{D} \cdot \mathbf{n} = \varsigma_E \quad (2.26)$$

definieren. Als wirkungsbezogene Größe ist \vec{D} in der Momentankonfiguration definiert. Mit Hilfe der Nanson Gleichung kann die materielle elektrische Flussdichte \vec{D}_0 formuliert werden

$$dq = \vec{D} \cdot \mathbf{n} da = \vec{D} \cdot d\mathbf{a} = \underbrace{\det \mathbf{F} \vec{D} \mathbf{F}^{-T}}_{\vec{D}_0} dA. \quad (2.27)$$

Damit folgt für die Oberflächenladungsdichte bezüglich der Referenzkonfiguration

$$\vec{D}_0 \cdot \mathbf{N} = \varsigma_{E0}. \quad (2.28)$$

2.3 Feldgrößen der Magnetostatik

Im folgenden Abschnitt werden die magnetischen Feldgrößen eingeführt. Der Magnetismus bezeichnet eine physikalische Kraftwirkung, die auf bewegte elektrische Ladungsträger wirkt und von ihnen erzeugt wird. Ein Gebiet, in dem eine magnetische Kraftwirkung beobachtet werden kann, wird magnetisches Feld genannt. Bewegte elektrische Ladungen können als freie elektrische Ströme in einem elektrischen Leiter oder als gebundene Kreisströme in den Elementarmagneten von magnetisierter Materie vorliegen. Damit lässt sich das magnetische Verhalten eines Permanentmagneten und einer Leiterspule auf die gleiche Ursache zurückführen. Ähnlich wie in Abschnitt 2.2 muss auch bei der Einführung der magnetischen Feldgrößen zwischen räumlicher und materieller Betrachtungsweise unterschieden werden. Da auch die magnetische Wirkung am deformierten Körper zu beobachten ist, werden magnetische Feldgrößen in der Momentankonfiguration definiert.

2.3.1 Die magnetische Feldstärke

Die Richtung und Stärke des magnetischen Feldes wird durch das Vektorfeld der magnetischen Feldstärke \vec{H} beschrieben. Es wird zunächst ein gerader Leiter betrachtet, durch den sich Ladungsträger bewegen. Der elektrische Strom \vec{I} im Leiter wird durch

$$\vec{I} = \int_A \vec{J} \cdot d\mathbf{A} \quad \text{mit} \quad \vec{J} = nq\mathbf{v} \quad (2.29)$$

definiert. Der Vektor \vec{J} bezeichnet die Stromdichte, die von n Ladungsträgern q mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} erzeugt wird. Größe und Richtung des durch \vec{J} erzeugten magnetischen Feldes folgt aus der Maxwell-Gleichung

$$\nabla_x \times \vec{H} = \vec{J}. \quad (2.30)$$

Das magnetische Feld, das um den geraden Leiter entsteht, ist in Abbildung 2.6 dargestellt. Der Betrag von \vec{H} verhält sich antiproportional zum Radius. Analog zur Elektrostatik werden magnetische Feldlinien eingeführt, die immer tangential zum Vektor \vec{H} verlaufen. Um den geraden Leiter bilden sie sich in konzentrischen Kreisen aus. Die Feldlinien des magnetischen Feldes sind immer geschlossen. Man spricht daher von einem Wirbelfeld. Es gibt somit keine Quellen bzw. Senken, von denen die Feldlinien ausgehen und somit keine magnetischen Elementarpole. Hier liegt ein fundamentaler Unterschied zur Elektrostatik, bei der die elektrischen Feldlinien immer von den elektrischen Polen ausgehen. Die magnetische Feldstärke lässt sich nach LAX & NELSON [76] in die Referenzkonfiguration überführen. Man erhält

$$\vec{H}_0 = \vec{H} \cdot \mathbf{F}. \quad (2.31)$$

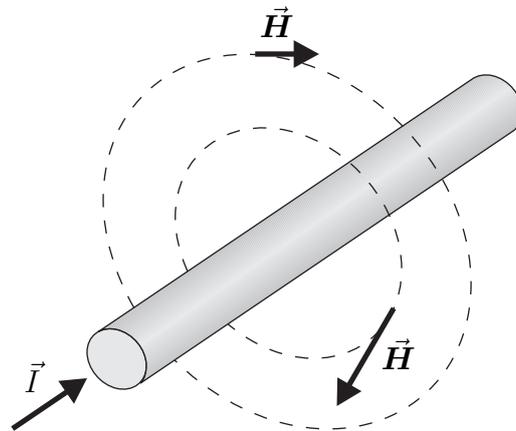


Abb. 2.6: Magnetisches Feld eines geraden, stromdurchflossenen Leiters

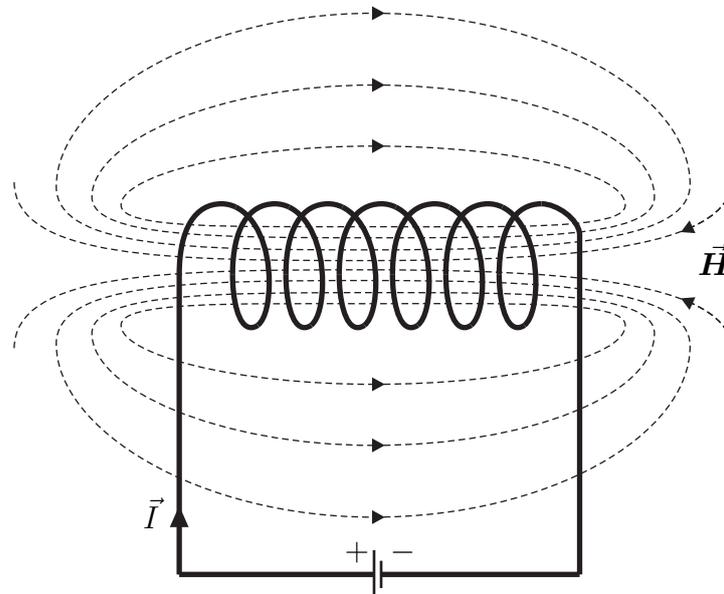


Abb. 2.7: Magnetisches Feld einer stromdurchflossenen Spule

Als weiteres Beispiel zur Veranschaulichung des magnetischen Feldes bietet sich eine gewickelte Spule an, die von einem Strom \vec{I} durchflossen wird, siehe Abbildung 2.7. Hier überlagern sich die Wirbelfelder der einzelnen Wicklungen zu einem nahezu homogenen magnetischen Feld im Inneren der Spule. Außerhalb der Spule dagegen laufen die Feldlinien so weit auseinander, dass der Betrag des magnetischen Feldes nahezu Null wird.

Die magnetische Feldstärke \vec{H} soll im Folgenden als eine der Ursache des magnetischen Feldes zugeordnete Größe gedeutet werden. Sie kann direkt aus der Leiteranordnung und dem elektrischen Strom bestimmt werden.

2.3.2 Die magnetische Flussdichte

Um die Wirkung des magnetischen Feldes zu beschreiben, wird eine weitere Feldgröße eingeführt, die als magnetische Flussdichte oder magnetische Induktion \vec{B} bezeichnet wird. Zur Motivation wird ein gerade Leiter in einem magnetischen Feld betrachtet, siehe Abbildung 2.8. Auf den bewegten Ladungsträger q wirkt in diesem Fall eine Kraft \mathbf{f} , die so genannte Lorentzkraft. Die Richtung

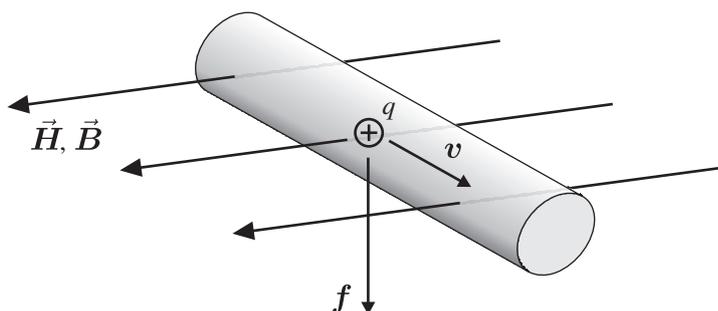


Abb. 2.8: Lorentzkraft auf eine bewegte Ladung im magnetischen Feld

der Kraft weist stets senkrecht zu der von der magnetischen Feldrichtung und der Bewegungsrichtung aufgespannten Ebene. Mit Hilfe der Lorentzkraft wird die magnetische Flussdichte \vec{B} implizit über die Beziehung

$$\mathbf{f} = q\dot{\mathbf{x}} \times \vec{B} \quad (2.32)$$

definiert. Damit kann \vec{B} als eine der Feldwirkung zugeordneten Größe aufgefasst werden. Analog zur magnetischen Feldstärke ist auch die magnetische Flussdichte quellenfrei. Integriert über eine geschlossene Oberfläche $\partial\mathcal{B}_t$ muss daher der eintretende magnetische Fluss mit dem austretenden Fluss im Gleichgewicht stehen. Diese Bedingung ist in der dritten Maxwellgleichung formuliert

$$\int_{\partial\mathcal{B}_t} \vec{B} \cdot d\mathbf{a} = 0. \quad (2.33)$$

Durch Transformation des Oberflächenintegrals in die Referenzkonfiguration folgt die materielle magnetische Flussdichte

$$\vec{B}_0 = \det(\mathbf{F}) \vec{B} \mathbf{F}^{-T}. \quad (2.34)$$

In der vorliegenden Arbeit werden ausschließlich die magnetischen Felder innerhalb von Materie betrachtet. Dafür ist es analog zur Elektrostatik sinnvoll, eine magnetische Flächenladungsdichte ζ_M einzuführen. Diese Größe ist zwar physikalisch nicht motiviert, erlaubt es aber, die Randbedingungen an der Oberfläche des

Körpers \mathcal{B}_t korrekt zu beschreiben, da dort eine scheinbare Unstetigkeitsstelle der magnetischen Flussdichte vorliegt, siehe auch JACKSON [53]. Daraus resultieren die modifizierten Maxwellgleichungen

$$\int_{\mathcal{B}_t} \vec{\mathbf{B}} \cdot d\mathbf{a} = \varsigma_M \quad \text{und} \quad (2.35)$$

$$\int_{\mathcal{B}_t} \vec{\mathbf{B}}_0 \cdot d\mathbf{A} = \varsigma_{M0} \quad (2.36)$$

für Momentan- und Referenzkonfiguration.

2.3.3 Potentialfunktionen in der Magnetostatik

Wie in der Elektrostatik kann auch in der Magnetostatik eine Potentialfunktion als übergeordnete Hilfsgröße herangezogen werden. Auch hierbei wird die Beschaffenheit des Feldes berücksichtigt. Das Vektorpotential $\vec{\mathbf{A}}$ wird implizit über

$$\vec{\mathbf{B}} = \nabla_x \times \vec{\mathbf{A}} \quad (2.37)$$

so definiert, dass die Quellenfreiheit von $\vec{\mathbf{B}}$ aufgrund von $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{\mathbf{A}}) \equiv 0$ immer erfüllt ist. Desweiteren kann auch in der Magnetostatik ein Skalarpotential

$$\phi_M(x) = - \int_{\infty}^x \vec{\mathbf{H}} \, dx \quad \text{bzw.} \quad \vec{\mathbf{H}} = -\nabla_x \phi_M \quad (2.38)$$

analog zum elektrischen Skalarpotential (2.21) und (2.19) eingeführt werden, wobei wiederum eine Erde mit $\phi_M(\infty) = 0$ definiert wird. Allerdings lassen sich mit ϕ_M keine geschlossenen Feldlinien abbilden. Das magnetische Skalarpotential eignet sich somit nicht zur vollständigen Darstellung von $\vec{\mathbf{H}}$. Dafür können die erforderlichen Randbedingungen sehr viel einfacher bestimmt werden. Bei magnetomechanischen Problemen ist man in der Regel nur an den Bereichen von $\vec{\mathbf{H}}$ interessiert, die das magnetostriktive Material enthalten, sodass die Einschränkung von ϕ_M nicht relevant ist. Es wird daher im Folgenden das magnetische Skalarpotential als beschreibende Hilfsgröße verwendet. Durch eine Umformung analog zu 2.22 kann das magnetische Skalarpotential auch auf das materielle magnetische Feld bezogen werden

$$\vec{\mathbf{H}}_0 = -\nabla_X \phi_M. \quad (2.39)$$

3 Magnetomechanische Koppelphänomene

Die magnetomechanische Kopplung bezeichnet eine gegenseitige Beeinflussung von mechanischen und magnetischen Feldern. Die Kopplung soll dabei auf Materialebene vorliegen. Im Folgenden wird auf die verschiedenen magnetomechanischen Koppelphänomene eingegangen. Eine ausführlichere Darstellung ist in den Büchern von TRÉMOLET DE LACHEISSERIE [124] und ENGDAHL [41] sowie auch von MAUGIN [82] zu finden.

Da die untersuchten Phänomene auf der Wechselwirkung von magnetischen Feldern mit Materie beruhen, werden zunächst die Begriffe Magnetisierung und magnetisches Moment vorgestellt. Es wird eine Einteilung verschiedener Materialien nach ihren magnetischen Eigenschaften durchgeführt, wobei die physikalischen Hintergründe des magnetischen Verhaltens erläutert werden. Zur Einführung der magnetomechanischen Effekte wird eine begriffliche Differenzierung von Magnetostriktion und Piezomagnetismus vorgenommen. Die unterschiedlichen Phänomene der Magnetostriktion werden näher betrachtet. Die wichtigsten magnetostriktiven Materialien werden kurz vorgestellt und die grundlegenden Mechanismen der Magnetostriktion auf mikroskopischer Ebene erläutert. Abschließend werden die makroskopischen Eigenschaften diskutiert. Sie bilden die Grundlage für die Entwicklung der konstitutiven Modellierung.

3.1 Magnetismus in Festkörpern

3.1.1 Das magnetische Moment und die Magnetisierung

Eine magnetische Wirkung wird durch bewegte Ladungen, also elektrische Ströme erzeugt, und beeinflusst gleichzeitig auch diese. Will man den Einfluss von Materie auf magnetische Felder begreifen, so ist es unerlässlich sich mit dem elementaren Aufbau der Materie zu beschäftigen. Hierbei wird vorrangig auf das Bohrsche Atommodell zurückgegriffen, da es erlaubt, die für diese Arbeit wesentlichen Prinzipien anschaulich zu erläutern. Für einen umfassenderen Einblick in die Festkörperphysik sei auf die Bücher von WEISSMANTEL [133] und RAITH [98] verwiesen. Eine ausführliche Abhandlung zum Magnetismus in Materie ist in den Werken von BOZORTH [15] und KNELLER [72] zu finden.

Ein Atom ist aus positiv geladenen Protonen, negativ geladen Elektronen und ungeladen Neutronen aufgebaut. Die Protonen und Neutronen bilden den Atomkern. Die Elektronen bewegen sich auf elliptischen Bahnen um der Atomkern, die durch das Gleichgewicht zwischen der Coulombschen Kraft und der Zentrifugalkraft bestimmt sind. Sie bilden die Elektronenhülle. Diese Bewegung kann als

Kreisstrom \vec{I} aufgefasst werden. Befindet sich ein Atom in einem magnetischen Feld, werden die Elektronenbahnen durch die Lorenzkraft beeinflusst. Für ein Wasserstoffatom mit nur einem Elektron in der Elektronenhülle ergibt sich ein mechanisches Moment von

$$\mathbf{M} = \vec{I} \mathbf{A} \times \vec{\mathbf{B}}, \quad (3.1)$$

das die Kreisbahn des Elektrons parallel zur magnetischen Flussdichte $\vec{\mathbf{B}}$ auszurichten versucht. Dabei zeigt der Flächenvektor \mathbf{A} der Kreisbahn in Richtung der Flächennormalen. Die Größe $\vec{\mathbf{m}}_L = \vec{I} \mathbf{A}$ wird als magnetisches Moment bezeichnet.

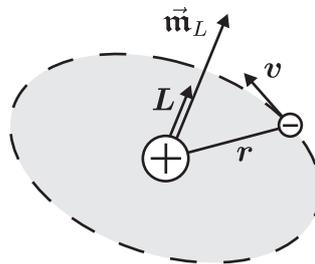


Abb. 3.1: Magnetisches Moment eines Elektrons

Im Falle eines Elektrons mit der Ladung $-e$ lässt sich $\vec{\mathbf{m}}_L$ auch mit Hilfe des Bahndrehimpulses \mathbf{L} ausdrücken. Es gilt

$$\vec{\mathbf{m}}_L = \vec{I} \mathbf{A} = \frac{-e}{2m_e} \mathbf{L} \quad \text{mit} \quad \mathbf{L} = m_e \mathbf{v} \times \mathbf{r}. \quad (3.2)$$

Hier gibt m_e die Masse des Elektrons, \mathbf{v} seine Geschwindigkeit und \mathbf{r} den Bahnradius an, wie in Abbildung 3.1 veranschaulicht. Nach der Quantentheorie kann \mathbf{L} nur diskrete Werte annehmen und entspricht stets ganzzahligen Vielfachen von $\hbar = h/2\pi$, wobei h die Plancksche Konstante bezeichnet. In der Literatur findet sich das von der Bahnbewegung des Elektrons herrührende magnetische Moment meist in folgender Form

$$\vec{\mathbf{m}}_L = -\frac{e\hbar}{2m_e} \frac{\mathbf{L}}{\hbar} = -\vec{\mathbf{m}}_{Bohr} \frac{\mathbf{L}}{\hbar}. \quad (3.3)$$

Die Größe $\vec{\mathbf{m}}_{Bohr}$ ist das Bohrsche Magneton. Diese Konstante gibt das magnetische Moment der Elektronenbahn mit dem niedrigsten Energieniveau wieder. Aufgrund der engen Kopplung zwischen \mathbf{L} und $\vec{\mathbf{m}}_L$ spricht man auch vom gyromagnetischen Effekt. Neben $\vec{\mathbf{m}}_L$ besitzt ein Elektron noch ein magnetisches Moment, das durch den Spindrehimpuls \mathbf{S} bestimmt wird

$$\vec{\mathbf{m}}_S = -2 \vec{\mathbf{m}}_{Bohr} \frac{\mathbf{S}}{\hbar}. \quad (3.4)$$

Der Elektronenspin ist eine quantenmechanische Eigenschaft, das als Eigendrehimpuls des Elektrons veranschaulicht wird. Im Gegensatz zu klassischen mechanischen Systemen, bei denen sich Bahnrotation und Eigenrotation unabhängig voneinander einstellen können, sind in der Quantenmechanik die Richtungen \mathbf{L} und \mathbf{S} gegeneinander beschränkt. Dieses Phänomen wird Spin-Bahn-Kopplung genannt und hat, wie sich später zeigen wird, einen wichtigen Einfluss auf die magnetomechanische Kopplung.

Der mikroskopische Zustand der magnetischen Momente im Material lässt sich in der Realität kaum erfassen. Daher wird die Magnetisierung $\vec{\mathbf{M}}$ als Dichtefunktion definiert, die auf das Volumen V bezogen wird. Es gilt

$$\vec{\mathbf{M}} = \frac{d\vec{\mathbf{m}}}{dV}. \quad (3.5)$$

Der Vektor $\vec{\mathbf{m}} = \vec{\mathbf{m}}_L + \vec{\mathbf{m}}_S$ bezeichnet das vollständige magnetische Moment des Atoms. Die Magnetisierung ist eine magnetische Feldgröße und hat die Einheit A/m. Sie beschreibt die Interaktion zwischen einem angelegten magnetischen Feld $\vec{\mathbf{H}}$ und den magnetischen Momenten im Material. Analog zu den magnetischen Feldgrößen wird auch die Magnetisierung am deformierten Kontinuum eingeführt. Die auf die Referenzkonfiguration bezogene Größe erhält man durch die Multiplikation mit dem Deformationsgradienten

$$\vec{\mathbf{M}}_0 = \vec{\mathbf{M}}\mathbf{F}. \quad (3.6)$$

Die vorhergehenden Überlegungen beziehen sich, wie zuvor erwähnt, auf ein Atom mit nur einem Elektron. In der Regel sind die Elektronenhüllen aus mehreren miteinander interagierenden Elektronen aufgebaut. Dementsprechend ist auch die Erfassung des Drehimpulses \mathbf{L} schwieriger. Diese Aspekte genau zu erfassen ist für diese Arbeit nicht erforderlich. Die relevanten Ergebnisse werden jedoch anhand der unterschiedlichen Arten von Magnetismus beschrieben.

3.1.2 Arten des Magnetismus

Für das Verständnis der verschiedenen magnetischen Eigenschaften der Stoffe spielt neben dem atomaren Aufbau auch die kristalline Struktur der Materialien eine wichtige Rolle. Es werden fünf Arten von magnetischen Verhalten unterschieden:

- Diamagnetismus
- Paramagnetismus

- Ferromagnetismus
- Antiferromagnetismus
- Ferrimagnetismus

Im Folgenden werden die Eigenschaften der verschiedenen Stoffgruppen und deren magnetischen Eigenschaften kurz erläutert. Hierbei wird der Schwerpunkt auf den ferromagnetischen, antiferromagnetischen und ferrimagnetischen Materialien liegen. Diese Materialien weisen die stärkste magnetomechanische Kopplung auf.

Diamagnetische Materialien

Von Diamagnetismus spricht man, wenn ein Körper beim Einbringen in ein Magnetfeld die Tendenz zeigt, aus dem Magnetfeld herauszuwandern. Der Diamagnetismus ist nur zu beobachten, wenn sich die magnetischen Momente der Spins und die Bahnmomente der Elektronen innerhalb des Atoms vollständig kompensieren. Beim Einbringen in ein magnetisches Feld \vec{H} werden die Bahnmomente in Richtung von \vec{H} abgeschwächt und diejenigen entgegengesetzt zu \vec{H} verstärkt. Die Magnetisierung \vec{M} weist also entgegen der Feldrichtung \vec{H} . Dieser Effekt ist sehr gering und wird häufig vom Paramagnetismus überdeckt.

Zu den diamagnetischen Materialien gehören z. B. Kupfer, Silber, Gold, Wasser und auch viele organische Verbindungen.

Paramagnetische Materialien

In paramagnetischen Stoffen gibt es unkompenzierte magnetische Momente, die vom Bahnmoment oder vom Spin ausgehen können. Liegt kein äußeres Magnetfeld an, so zeigen die magnetischen Momente in zufällige Raumrichtungen und die Magnetisierung \vec{M} ist gleich null, siehe auch Abbildung 3.2a). Bei Anwesenheit eines äußeren magnetischen Feldes \vec{H} richten sich die magnetischen Momente zu einem gewissen Grad in Feldrichtung aus. Die thermische Bewegung im Material wirkt dieser Ausrichtung entgegen. Die Magnetisierung \vec{M} ist somit parallel zu \vec{H} und erhöht den magnetischen Fluss \vec{B} .

Es gibt viele paramagnetische Stoffe, dazu gehören u. a. Aluminium, Calcium, Magnesium und Platin.

Ferromagnetische Materialien

Ferromagnetische Stoffe weisen sehr starke magnetische Wechselwirkungen auf. Durch Einbringen eines Ferromagnetikums in ein magnetisches Feld kann \vec{B} um

mehrere Größenordnungen gesteigert werden. Insbesondere kann das Ferromagnetikum eine permanente Magnetisierung aufweisen, d. h. die magnetische Wirkung bleibt auch nach Entfernen von \vec{H} erhalten. Ähnlich wie in paramagnetischen Materialien gibt es auch in Ferromagnetika unkompensierte magnetische Momente. Mit dem Einstein-DeHaas Versuch [39] konnte gezeigt werden, dass diese von den Elektronenspins ausgehen. Weiterhin weiß man inzwischen, dass es sich dabei um Spins von Elektronen auf teilweise gefüllten, inneren Elektronenschalen handelt. Der fundamentale Unterschied zum Paramagnetismus besteht in einer starken Wechselwirkung, die zwischen den Elektronen dieser Elektronenschalen und den Elektronen von benachbarten Atomen wirkt. Dieser quantenmechanische Effekt wird als Austauschwechselwirkung oder Austauschintegral bezeichnet. Besitzen die Atome im Kristallgitter einen bestimmten Abstand zueinander, so sorgt die Austauschwechselwirkung für eine Parallelausrichtung der unkompensierten Spins, also der magnetischen Momente im Kristallgitter, siehe Abbildung 3.2b). Dieser Vorgang wird auch als spontane Magnetisierung bezeichnet. Die Wärmebewegung der Atome wirkt der Austauschwechselwirkung entgegen. Mit wachsender Temperatur nimmt das ferromagnetische Verhalten ab, und ab einer kritischen Temperatur, der Curie-Temperatur T_c , verschwindet es vollständig. Das Material zeigt jetzt paramagnetisches Verhalten.

Ferromagnetische Eigenschaften beobachtet man in den Übergangsmetallen Eisen, Kobalt und Nickel, sowie einigen Elementen der seltenen Erden. Weitere ferromagnetische Materialien können aus Legierungen dieser Elemente gewonnen werden.

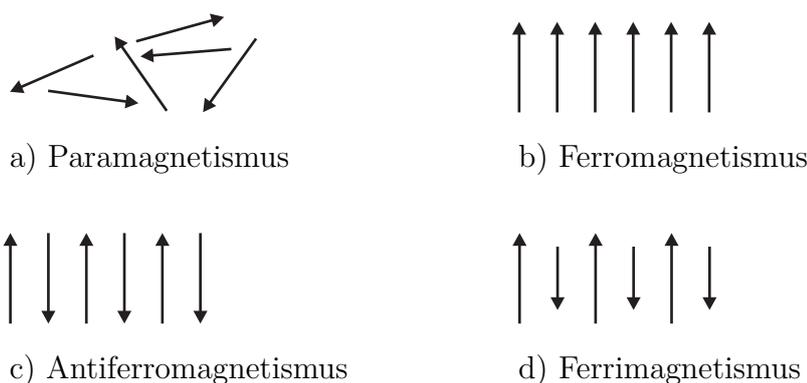


Abb. 3.2: Ausrichtung der magnetischen Momente für unterschiedliche magnetische Zustände

Antiferromagnetische Materialien

Der Antiferromagnetismus wurde von Néel 1932 [88] erstmals beschrieben. Es handelt sich um ein ähnliches Phänomen wie beim Ferromagnetismus. Allerdings werden die magnetischen Momente der einzelnen Atome hier durch die Austauschwechselwirkung antiparallel ausgerichtet, siehe Abbildung 3.2c). Das Kristallgitter ist aus zwei ineinander geschachtelten Untergittern mit einer entgegengesetzten Magnetisierung gleichen Betrages aufgebaut. Die Magnetisierungen der beiden Untergitter heben sich gegenseitig vollständig auf, und nach außen tritt keine Magnetisierung in Erscheinung.

Antiferromagnetisches Verhalten findet sich in Salzen verschiedener Metalle wie z. B. in Fe_2O_3 und Manganoxid.

Ferrimagnetische Materialien

Das Kristallgitter ferrimagnetischen Materialien ist ähnlich wie bei den Antiferromagnetika aus zwei ineinander geschachtelten Untergittern mit entgegengesetzter Magnetisierung aufgebaut. Allerdings ist die Kompensierung in diesem Fall nicht vollständig, so dass eine spontane Magnetisierung verbleibt, siehe Abbildung 3.2d). Ein Ferrimagnetikum zeigt äußerlich ähnliches Verhalten wie ein Ferromagnetikum. Auf die Unterschiede wird in Abschnitt 3.3.4 eingegangen.

Zu den ferrimagnetischen Materialien zählen die Ferrite aber auch einige Materialien mit starker Magnetostriktion wie z. B. Terfenol-D.

3.1.3 Magnetische Anisotropie

Betrachtet man einen ferro- oder ferrimagnetischen Einkristall, so stellt man fest, dass die Magnetisierungsarbeit

$$W_M = \int_0^{\vec{M}_S} \vec{H} \cdot d\vec{M} \quad (3.7)$$

bis zur Sättigung \vec{M}_S von der kristallographischen Richtung abhängt. Richtungen, denen eine niedrige Magnetisierungsarbeit zugeordnet ist, werden als leichte Richtungen bezeichnet. Muss eine hohe Magnetisierungsarbeit aufgewendet werden, so spricht man von einer schweren Richtung. Dieser Effekt wird magnetische Anisotropie genannt. Das magnetische Moment einer Einheitszelle im Kristallgitter weist im ungestörten Zustand stets in eine Kristallrichtung mit niedriger freier Energie, also in eine leichten Richtung. Je nach Kristallstruktur gibt es in einem Material ein bis vier leichte Richtungen.

3.2 Piezomagnetische und magnetostriktive Kopplung

Bei den magnetomechanischen Kopplungseffekten wird zwischen Piezomagnetismus und Magnetostriktion unterschieden. Der magnetostriktive Effekt meint eine Deformation, die durch Anlegen eines magnetischen Feldes erzeugt wird. Die Deformation ist dabei unabhängig vom Vorzeichen des magnetischen Feldes. Der Piezomagnetismus bezeichnet dagegen die Erzeugung eines magnetischen Feldes aufgrund einer aufgetragenen Deformation. Piezomagnetismus tritt in nicht-zentrosymmetrischen Kristallen auf, wie bei VOIGT [129] beschrieben wird. Allerdings ist dieser Effekt sehr selten, da bestimmte kristallographische und magnetische Symmetriebedingungen vorhanden sein müssen. Der Piezomagnetismus ist nicht zu verwechseln mit den inversen Effekten der Magnetostriktion, also z. B. dem Villari-Effekt. Bei diesem Phänomen werden die magnetischen Größen zwar auch durch eine Deformation beeinflusst, die Erzeugung eines magnetischen Feldes durch mechanische Einwirkungen ist allerdings nicht möglich. Häufig findet man in Literatur, wie z. B. in ENGDAHL [41], den Begriff des piezomagnetischen Koppelmoduls. Dieser bezieht sich allerdings auf ein der Piezoelektrizität entlehntes lineares Materialgesetz der Magnetostriktion.

Der Piezomagnetismus wird in dieser Arbeit nicht weiter betrachtet.

3.3 Magnetostriktion

Die Magnetostriktion umfasst eine ganze Reihe unterschiedlicher Erscheinungen, die im Folgenden kurz erläutert werden. Die erste Beobachtung geht auf JOULE [58] aus dem Jahr 1842 zurück. Er beobachtete eine Längenänderung Δl einer Eisenprobe in einem magnetischen Feld. Ist die Längenänderung in Feldrichtung positiv, so spricht man von positiver Magnetostriktion. Entsprechend wird eine negative Dehnung als negative Magnetostriktion bezeichnet. Dieser Effekt ist volumenerhaltend und wurde nach seinem Entdecker benannt.

Wenig später wurde die reziproke Erscheinung, also die Veränderung der Magnetisierung durch eine Deformation, als Villari-Effekt definiert [128].

Desweiteren gibt es auch in manchen Materialien eine volumetrische Ausdehnung durch ein magnetisches Feld. Diese Volumenmagnetostriktion ist in der Regel sehr klein, so dass er nur wenige technische Anwendungen findet, u. a. ist er bei Entwicklung von Invar-Legierung von Bedeutung. Das inverse Phänomen wird in der Literatur als Nagaoka-Honda-Effekt bezeichnet.

Der Wiedemann-Effekt [134] ist ein Sonderfall der Joule-Magnetostriktion. Hierbei wird durch eine bestimmte Anordnung des magnetischen Feldes eine spiralförmige Magnetisierung in einem Stab erzeugt. In der so magnetisierten Probe

Direkter Effekt	Inverser Effekt
Joule Magnetostriktion	Villari-Effekt
Volumenmagnetostriktion	Nagaoka-Honda-Effekt
Wiedemann-Effekt	Mateucci-Effekt
ΔE -Effekt	

Tab. 3.1: Magnetostriktive Effekte

kann durch ein längsgerichtetes magnetisches Feld eine Torsion erzeugt werden. Die reziproke Erscheinung hierzu heißt Mateucci-Effekt.

Desweiteren wird der Elastizitätsmodul des Materials durch seine Magnetisierung verändert. Dieses Phänomen wird in der Literatur als ΔE -Effekt angegeben und hängt eng mit dem Villari-Effekt zusammen. In Tabelle 3.1 sind die unterschiedlichen Effekte noch einmal kurz zusammengefasst.

In den folgenden Ausführungen wird der Schwerpunkt auf der Joule-Magnetostriktion und den sich von ihr ableitenden Erscheinungen liegen. Die Volumenmagnetostriktion wird nicht weiter betrachtet.

3.3.1 Magnetostriktive Materialien

Die Joule Magnetostriktion tritt in allen ferro- und ferrimagnetischen Stoffen auf. Obwohl der Effekt bei den ferromagnetischen Übergangsmetallen Eisen, Nickel und Kobalt mit erreichbaren Dehnungen $\Delta l/l_0$ von ca. 10^{-6} sehr gering ist, gab es bereits in den 1920er und -30er Jahren erste Anwendungen in der Sensorik und als Oszillatoren für Sonarsysteme. Um 1960 entdeckte man, dass die Elemente der seltenen Erden Terbium und Dysprosium unter starker Abkühlung eine sehr hohe Magnetostriktion mit Dehnungen bis 6×10^{-3} aufweisen. Legierungen dieser Stoffe mit Eisen ergaben Werkstoffe, die eine ähnlich hohe Magnetostriktion auch unter Raumtemperatur ermöglichten, siehe KOON [73] und CLARK [28]. Allerdings besitzen diese Materialien eine sehr ausgeprägte magnetische Anisotropie. Das bedeutet, dass man sehr starke magnetische Felder bis zu 2 MA/m benötigt, um die Sättigungsmagnetisierung zu erreichen. Diese Probleme konnten durch eine partielle Ersetzung von Terbium durch Dysprosium bei TbFe_2 weitgehend behoben werden. Zu den wichtigsten Materialien dieser Gruppe gehört $\text{Tb}_{0.3}\text{Dy}_{0.7}\text{Fe}_{1.95}$, das seit den 1980er unter dem Produktnamen Terfenol-D kommerziell erhältlich ist. Die Eigenschaften von Terfenol-D werden in SAVAGE [103], CLARK [29] und TETER [123] diskutiert. Der Name Terfenol-D leitet sich aus den verwendeten chemischen Elementen und der Abkürzung des Naval Ordnance La-

Material	$\lambda_{\parallel} = \Delta l/l_0 [10^{-6}]$	$T_c [^{\circ}\text{C}]$	$E [\text{GPa}]$	$\rho [\text{g}/\text{cm}^3]$
Fe	-14	770	285	7.88
Ni	-50	358	210	8.9
Co	-93	1120	210	8.9
Tb	3000 (-196°C)	-48	55.7	8.33
Dy	6000 (-196°C)	-184	61.4	8.56
TbFe ₂	1753	424		9.06
Terfenol-D	1620	380	25-35	9.25
SmFe ₂	-1560	403		8.53
Samfenol-D	-1125			
CoFe ₂ O ₄ (Einkristall)	600-900	520	141.6	
CoFe ₂ O ₄ (polykristallin)	230	520		
Metglass 2605SC	60	370	25-200	7.32

Tab. 3.2: Magnetostruktive Materialien und ihre Eigenschaften

boratory ab. Samarium-Eisen-Verbindungen ergaben Legierungen mit einer sehr hohen negativen Magnetostruktion, siehe ROSEN ET AL. [100]. Die starke magnetische Anisotropie, konnte ähnlich wie bei TbFe₂ durch eine Dotierung mit Dysprosium erheblich verringert werden. Dieses Material ist unter dem Namen Samfenol-D erhältlich. Auf die Eigenschaften Samfenol-D wird in XIE ET AL. [136] eingegangen. Als preiswerte Alternative zu den teuren Legierungen aus seltenen Erden werden Cobalt-Ferrite (CoFe₂O₄) verwendet. Zur Verbesserung der magnetostruktiven Eigenschaften können die Eisen-Atome teilweise durch Mangan ersetzt werden, siehe BHAME & JOY [12]. Als weitere Materialgruppe sind die amorphen Metalle (Metglass) zu nennen. Bei ihnen ist die Energieumwandlung zwischen mechanischer und magnetischer Energie bei geringen magnetostruktiven Dehnungen besonders stark. Metglass-Legierungen werden daher vorrangig für Sensoraufgaben eingesetzt (siehe auch SAVAGE [104]). In Tabelle 3.2 sind die wichtigsten magnetostruktiven Stoffe und ihre Materialeigenschaften zusammengefasst, siehe auch DAPINO [31] und TRÉMOLET DE LACHEISSERIE [124].

3.3.2 Ursachen der Magnetostruktion

Ursache der Joule-Magnetostruktion sind anisotrope Änderungen der Abstände im Kristallgitter infolge einer Magnetisierung. Die Magnetisierung beruht auf der

Ausrichtung der magnetischen Momente, also der Elektronenspins im Atom. Eine Ausrichtung der Spins geht aufgrund der Spin-Bahn-Kopplung mit einer Veränderung der Atomhülle einher. Die negativ geladene Atomhülle bewirkt eine Coulombsche Anziehung auf die positiv geladenen Nachbarionen im Kristallgitter. Die Stärke dieser elektrostatischen Anziehung ist aufgrund der komplexen Form der Elektronenhülle nicht in alle Richtungen gleich. Sie weist eine geringfügige Anisotropie auf, d. h. einige Nachbarionen werden stärker angezogen als andere. Diese Anisotropie ist in Abbildung 3.3 durch die ellipsoide Form der Elektronenhülle symbolisiert. Wird das magnetische Moment durch ein externes magnetisches Feld gedreht, so verändert sich auch die Coulombsche Kraftwirkung auf die benachbarten Ionen. Dadurch ändern sich die Abstände im Kristallgitter und es kommt zu einer Deformation. Zur Veranschaulichung des Deformationsverhaltens ist in

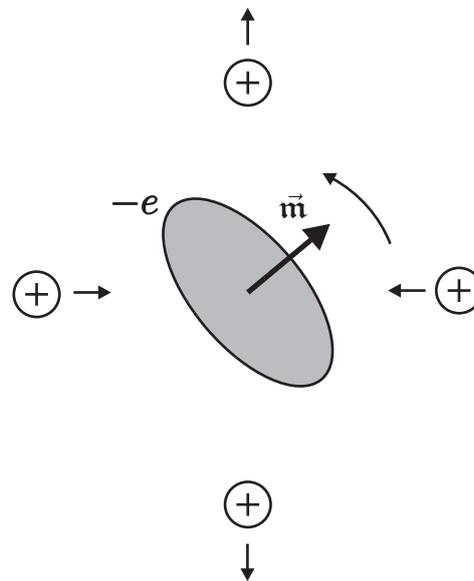


Abb. 3.3: Veranschaulichung einer Ladungsdichtenrotation im magnetischen Feld

Abbildung 3.4 ein idealisiertes Metallgitter mit vier Ionen dargestellt. In den Teilbildern a)-c) wird ein Material mit positiver Magnetostraktion betrachtet. Hier weist das magnetische Moment \vec{m} senkrecht zur Ebene der größten Coulombschen Anziehung. Die Teilbilder d)-f) gelten für ein Material mit negativer Magnetostraktion. In diesem Fall ist \vec{m} parallel zur größten Anziehung. Im Anfangszustand a) und d) sei die Temperatur höher als die Curie-Temperatur. Das Material ist im paramagnetischen Zustand, und die magnetischen Momente sind ungeordnet. Nach Abkühlen unter die Curie-Temperatur richten sich die magnetischen Momente durch die Austauschwechselwirkung parallel aus, siehe Abbildung 3.4b) und e). Gleichzeitig bewirkt die spontane Magnetisierung eine Formänderung.

Wird ein externes magnetisches Feld angelegt, so klappen die magnetischen Momente in Feldrichtung um, siehe Abbildung 3.4c) bzw. f). Durch die veränderten Coulombschen Kräfte zwischen den Ionen beobachtet man eine Deformation des Kristallgitters. Die gemessenen Dehnungen werden in der Literatur häufig mit λ bezeichnet. Hierbei steht λ_{\parallel} für die Dehnung parallel zum aufgebrauchten \vec{H} -Feld und λ_{\perp} gibt die Dehnung senkrecht zu \vec{H} an. Da das Umklappen der magnetischen Momente eine volumenerhaltende Deformation hervorruft gilt

$$\lambda_{\perp} = -\frac{1}{2}\lambda_{\parallel}. \quad (3.8)$$

Für ein Material mit positiver Magnetostriktion ist λ_{\parallel} größer Null. Bei negativer Magnetostriktion gilt $\lambda_{\parallel} < 0$.

Das zur Joule-Magnetostriktion reziproke Koppelphänomen heißt Villari-Effekt. Dieser bezeichnet eine Änderung der Magnetisierung eines Körpers durch eine mechanische Einwirkung. Wird ein Körper mit einer mechanischen Spannung beansprucht, so verändern sich durch die Deformation auch die Ionenabstände im Kristallgitter. Dadurch kann eine andere magnetische Ausrichtung energetisch günstig sein und eine Rotation der magnetischen Momente induziert werden. Zur Veranschaulichung des Koppelphänomens ist in Abbildung 3.5 ein fiktiver Stab aus vier Kristalliten dargestellt. Das Material in Teilbild a) hat eine positive Magnetostriktion und ist in Längsrichtung magnetisiert. Durch Aufbringen einer Druckspannung klappen die magnetischen Momente aus der Stabrichtung heraus, siehe Abbildung 3.5b). Hierbei wird, anders als bei einem angelegten magnetischen Feld, keine Richtung der magnetischen Momente vorgegeben. Die magnetischen Momente klappen beliebig aus der Stabachse heraus und das Material wird demagnetisiert.

In Abbildung 3.5c) ist ein vollständig magnetisierter Stab aus einem Material mit negativer Magnetostriktion dargestellt. In diesem Fall können die magnetischen Momente durch Aufbringen einer Zugspannung umgeklappt werden, siehe Teilbild d). Auch hier wird keine neue Richtung der magnetischen Momente vorgegeben, und es kommt wiederum zu einer Demagnetisierung des Materials. Der Villari-Effekt ist demzufolge ein Koppelphänomen, bei dem die Magnetisierung des Materials durch eine mechanische Einwirkung reduziert wird. Dies kann mit der mechanischen Depolarisation piezoelektrischer Keramiken verglichen werden, siehe Abschnitt 4.4.3 und [59].

Wird an den Stab aus Abbildung 3.5 zusätzlich noch ein magnetisches Feld \vec{H} in Längsrichtung angelegt, so wirkt dieses der Rotation der magnetischen Momente entgegen. Damit verändert sich die Steifigkeit des Materials. Diese Steuerung des Elastizitätsmoduls durch ein magnetischen Feld wird in der Literatur als ΔE -Effekt bezeichnet.

3.3.3 Domänen

Bisher wurden die grundlegenden Erscheinungen der magnetostriktiven Koppelphänomene auf subatomarer Ebene und an der kristallinen Einheitszelle diskutiert. Das makroskopische Verhalten ist allerdings von Substrukturen bestimmt, die sich innerhalb der Kristalle ausbilden und als Domänen bezeichnet werden.

In Abschnitt 3.1.2 wurde erläutert, dass die magnetischen Momente eines ferro- oder ferrimagnetischen Materials aufgrund der Austauschwechselwirkung im Kristallgitter stets dazu tendieren, sich parallel auszurichten. Untersucht man einen Einkristall nach spontaner Magnetisierung, so zeigt dieser nach außen keine mess-

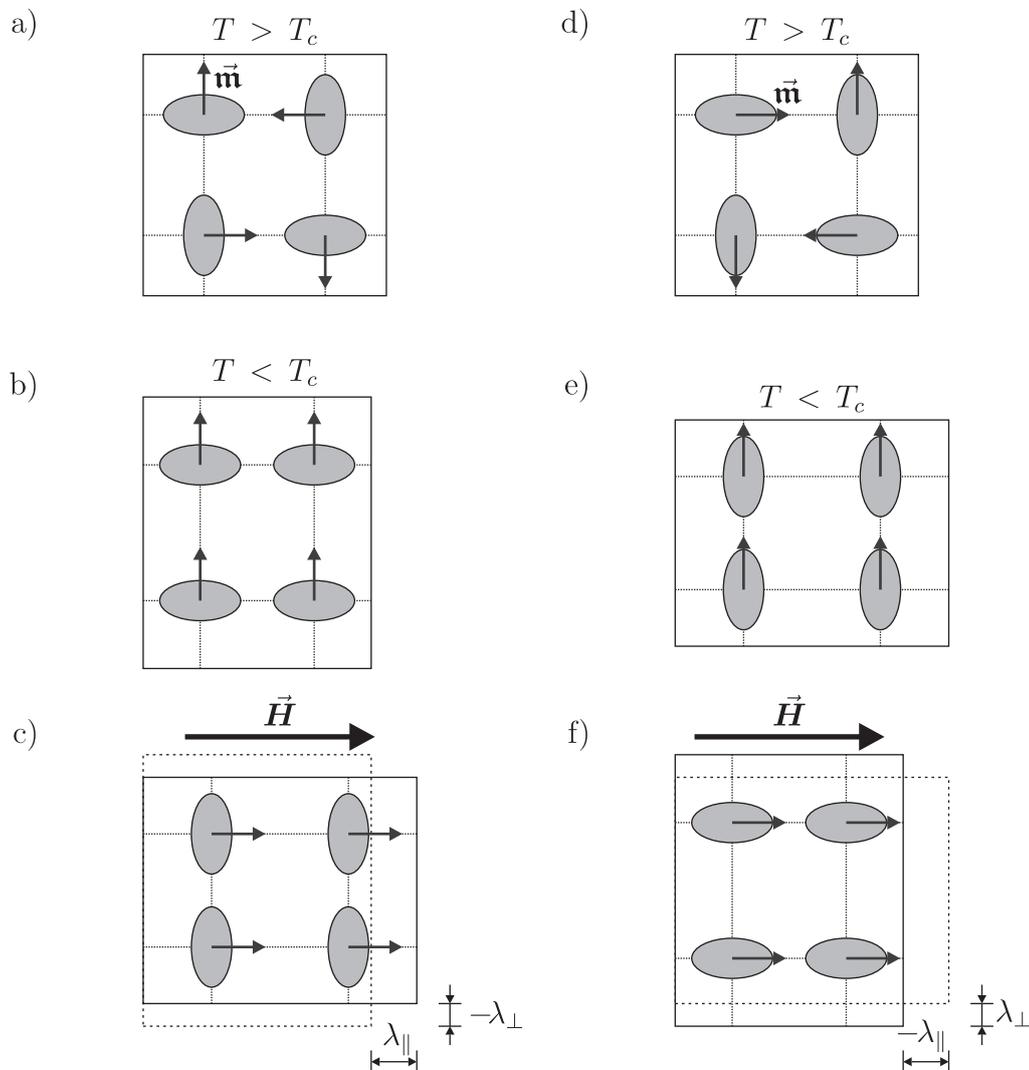


Abb. 3.4: Illustration des magnetostriktiven Verformungsverhaltens: Links positive Magnetostraktion, rechts negative Magnetostraktion

bare Magnetisierung. Es zeigt sich, dass er in eine Vielzahl mikroskopisch kleiner Volumenbereiche unterteilt ist. Diese Bereiche heißen Domänen oder Weiß'sche Bezirke. Innerhalb einer Domäne weisen die magnetischen Momente in die gleiche Richtung, wobei dies im ungestörten Zustand immer eine leichte Richtung ist. Die Ursache für die Ausbildung der Domänen liegt in der Minimierung der inneren Energie. Zwei gleichsinnig liegende magnetische Momente besitzen eine höhere Energie als zwei gegensinnig liegende. Ein Effekt, der anhand zweier Mangetnadeln leicht nachvollzogen werden kann, siehe Abbildung 3.6 und KIRENSKI [66]. Die magnetischen Momente der einzelnen Domänen versuchen sich daher immer so auszubilden, dass die Gesamtmagnetisierung verschwindet. Die Grenzen zwischen den einzelnen Domänen werden Blochwände oder auch Domänenwände genannt.

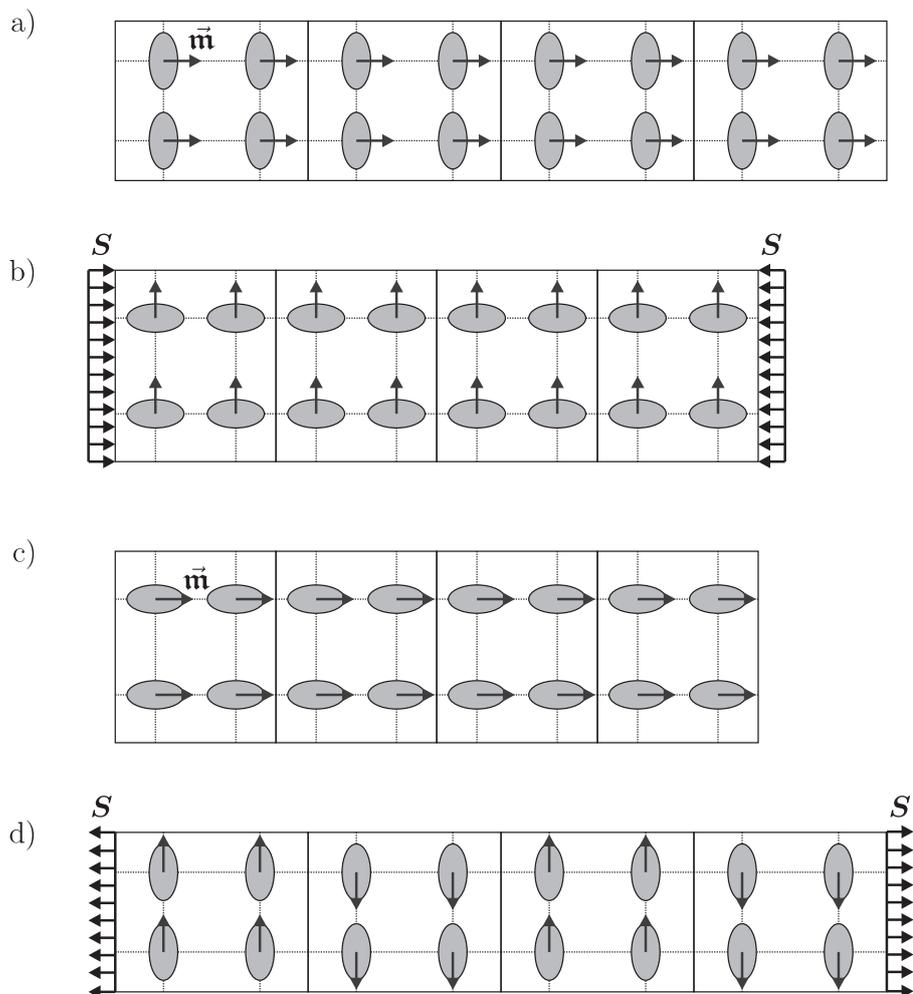


Abb. 3.5: Veranschaulichung des Villari-Effektes: a) und b) positive Magnetostriktion, c) und d) negative Magnetostriktion

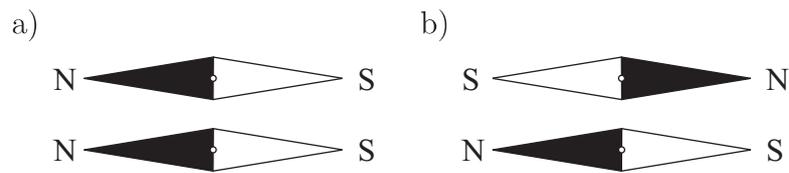


Abb. 3.6: Betrachtungen der freien Energie zweier Magnetnadeln: a) energetisch ungünstiger Zustand, b) energetisch günstiger Zustand

Für technische Anwendungen verwendet man in der Regel Materialien, die eine polykristalline Struktur aufweisen. Eine solche Struktur ist in Abbildung 3.7 veranschaulicht. Das Material besteht aus mehreren Körnern oder Kristalliten. Jedes Korn ist durch eine einheitliche Kristallstruktur gekennzeichnet. Jedes einzelne Korn ist aus mehreren Domänen aufgebaut.

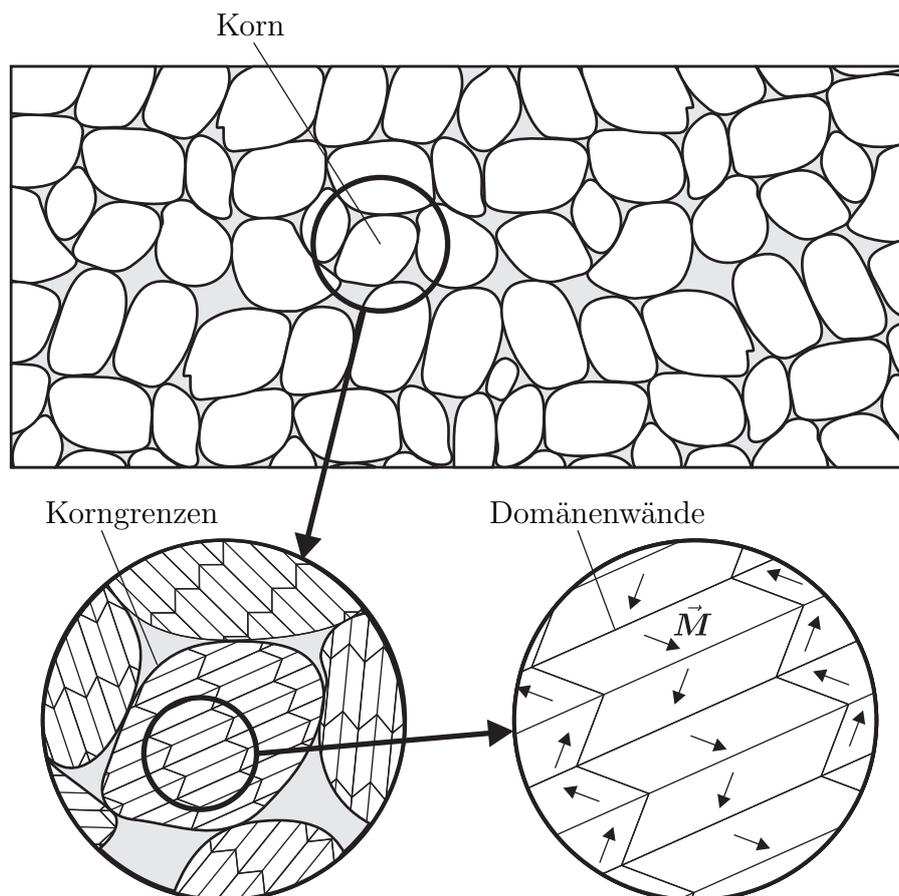


Abb. 3.7: Skizze der Domänenstruktur eines polykristallinen Materials

3.3.4 Magnetostruktive Materialien im magnetischen Feld

Es wird zunächst das makroskopische Verhalten eines magnetostruktiven Materials innerhalb eines sich verändernden magnetischen Feldes diskutiert. Hierbei wird exemplarisch ein Material mit positiver Magnetostruktion betrachtet. Im Anfangszustand ist die Magnetisierung gleich Null, d. h. die spontanen Magnetisierungen der einzelnen Domänen heben sich gegenseitig auf, siehe Abbildung 3.8a).

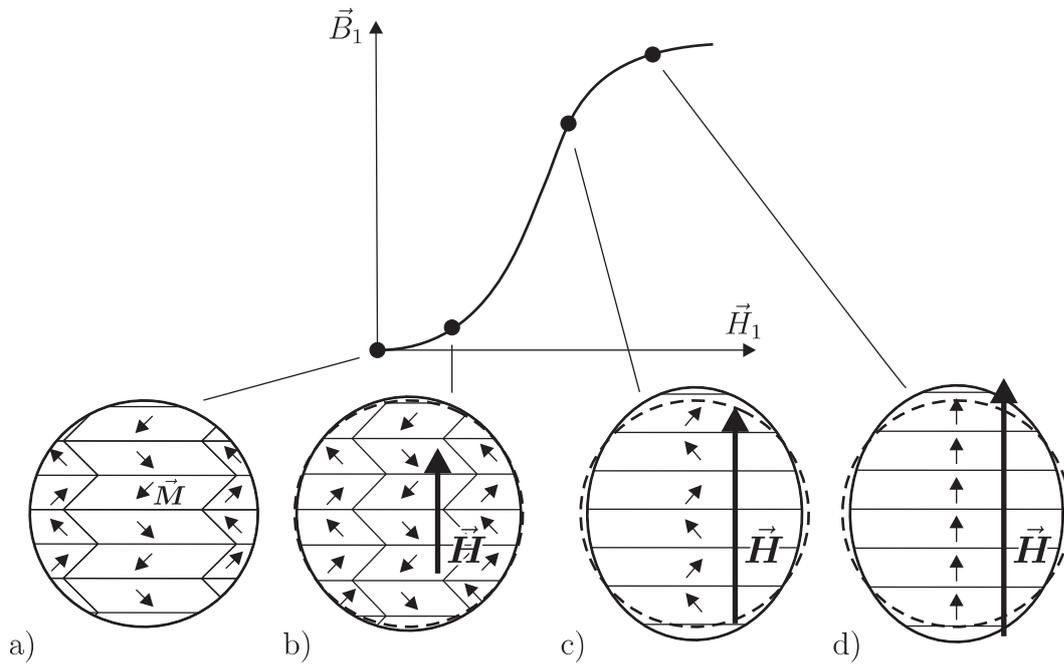


Abb. 3.8: Wandverschiebungen innerhalb der Domäne: a) $\vec{H} = 0$, $\vec{B} = 0$, b) reversible Wandverschiebungen, c) irreversible Wandverschiebungen, d) Drehungen der Magnetisierungsrichtung

Unter dem Einfluss eines externen magnetischen Feldes \vec{H} beginnen sich Domänenwände zu verschieben. Diese Verschiebung erfolgt durch ein Umklappen der magnetischen Momente an den Domänenwänden. Die umgeklappten magnetischen Momente zeigen in Richtung der benachbarten Domäne, also wieder in eine leichte Richtung. Dadurch vergrößern sich einige Domänen auf Kosten der übrigen. Es zeigt sich, dass die Domänen mit einer Magnetisierungsrichtung mit kleinem Winkel zu \vec{H} wachsen. Entsprechend werden Domänen, bei denen \vec{M} einen großen Winkel zu \vec{H} besitzt, kleiner. Die Wandverschiebungen sind für geringe Änderungen von \vec{H} reversibel, da sich die Wände zunächst frei verschieben können. Aufgrund der Veränderungen der Domänengrößen heben sich die Magne-

tisierungen der einzelnen Domänen nicht mehr vollständig auf. Man beobachtet eine resultierende Magnetisierung, die mit einem magnetischen Fluss \vec{B} und einer magnetostriktiven Dehnung \mathbf{E} einhergeht, siehe auch Abbildung 3.8b). Die Verschiebungsprozesse werden an den Fehlstellen im Kristallgitter behindert, über die die Domänenwände bei kleinen Feldstärken nicht hinübergleiten. Daher sind auch die Veränderungen von \vec{B} und \mathbf{E} zunächst gering. Dies ändert sich bei größeren magnetischen Feldstärken. Die Domänenwände beginnen über die Fehlstellen zu springen. Die magnetische Flussdichte \vec{B} sowie die magnetostriktive Dehnung \mathbf{E} , steigen stark an, siehe Abbildung 3.8c). Diese Änderungen sind irreversibel und erfolgen diskontinuierlich in sehr kleinen Sprüngen, den so genannten Barkhausen-Sprüngen. Diese werden durch das Springen der Wände über die Gitterfehlstellen hervorgerufen. Die Wandverschiebungen erfolgen so lange, bis die Domänen mit einer dem äußeren Feld entgegengesetzten Magnetisierung verschwunden sind. Bei einer weiteren Erhöhung der magnetischen Feldstärke beginnen sich die magnetischen Momente in den Domänen zu drehen. Dieser Prozess erfordert sehr hohe Feldstärken, da die magnetischen Momente der Einheitszellen aus den leichten Richtungen in Richtung \vec{H} gedreht werden müssen, siehe Abbildung 3.8d). Dieser Rotationsvorgang ist reversibel und endet wenn die Magnetisierung aller Domänen parallel zu \vec{H} sind. Der vorliegende Zustand wird als technische Sättigung bezeichnet. Bei weiterer Erhöhung von \vec{H} kann jetzt noch eine geringe Steigerung von \vec{B} erreicht werden. Sie ist durch antiparallel ausgerichtete magnetische Momente innerhalb der Domäne begründet, die sich bei großen Feldstärken von \vec{H} beginnen auszurichten. Aufgrund seines geringen Einflusses spielt dieser Prozess in technischen Anwendungen kaum eine Rolle.

Verringert man das angelegte magnetische Feld wieder, so drehen sich die Magnetisierungen der einzelnen Domänen wieder zurück in ihre ursprünglichen Richtungen, bis sie bei $\vec{H}_1 = 0$ schließlich wieder in ihre ursprüngliche Richtung zeigen und eine Remanenz-Flussdichte \vec{B}_{rem} verbleibt. Um die Magnetisierung wieder auf Null zu bringen, wird ein Gegenfeld \vec{H}_c , das so genannte Koerzitivfeld benötigt. Durch das Anlegen eines Gegenfeldes beginnt sich die Domänenstruktur im Kristallit wieder zu verändern. Die Domänen, die sich während des Magnetisierungsvorgangs vergrößert haben, beginnen zu schrumpfen, während andere, mit einem kleinen Winkel zwischen \vec{M} und \vec{H} neu entstehen und wachsen. Bei $\vec{H}_1 = -\vec{H}_c$ gleichen sich die Magnetisierungen der Domänen wieder vollständig aus und \vec{B}_1 wird Null. Eine weitere Magnetisierung in Gegenrichtung bewirkt schließlich die Umkehr des Vorgangs und erzeugt die ferromagnetische Hystereseschleife, wie sie in Abbildung 3.9a) zu sehen ist.

Betrachtet man die Verzerrungen während des Magnetisierungsvorgangs, so zeigen sich auch hier Hystereseerscheinungen. Da die magnetostriktiven Verzerrun-

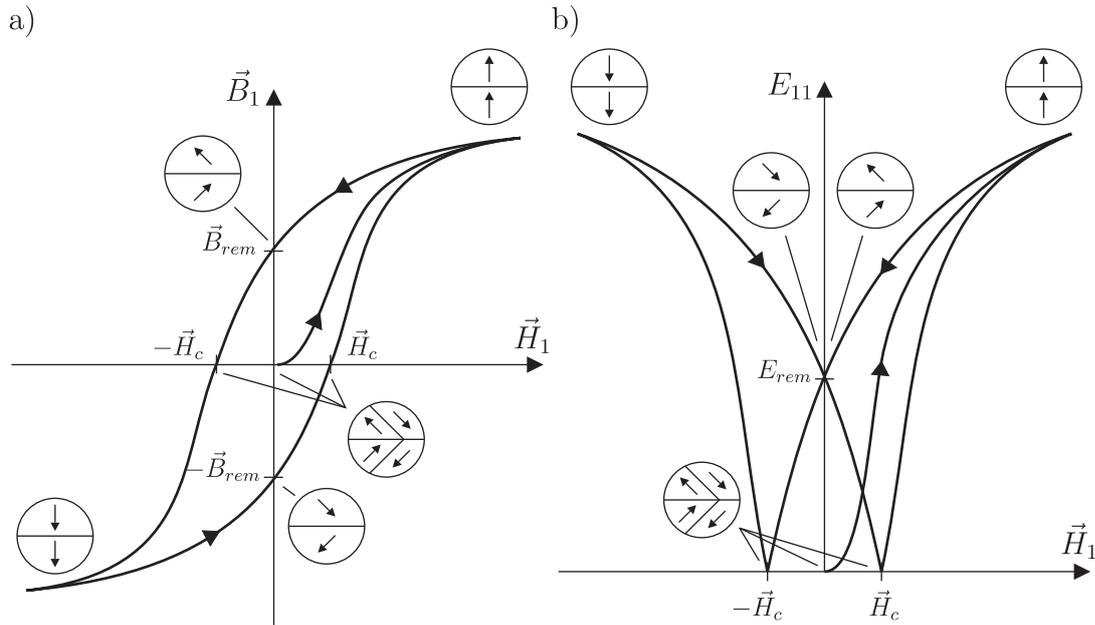


Abb. 3.9: Hystereseerscheinungen in magnetostruktiven Materialien: a) Ferromagnetische Hysterese, b) Schmetterlingshysterese

gen unabhängig vom Vorzeichen des magnetischen Feldes sind, bilden sich die zugehörigen Hysteresekurven stets in eine Koordinatenrichtung aus. Das Vorzeichen hängt vom Material (positive oder negative Magnetostruktion) und der betrachteten Verzerrungskomponente ab. Aufgrund ihrer Form werden die Kurven als Schmetterlingshysterese bezeichnet. In Abbildung 3.9b) ist die Schmetterlingshysterese eines Materials mit positiver Magnetostruktion für die Verzerrungskomponente in Feldrichtung E_{11} dargestellt. Ähnlich wie bei der ferromagnetischen Hysterese verbleibt auch hier beim Nulldurchgang des magnetischen Feldes ein remanenter Wert, in diesem Fall die Verzerrung E_{rem} .

Die Hystereseerscheinungen magnetostruktiver Materialien werden durch mechanische Spannungen beeinflusst. Belastet man das Material beispielsweise mit einer Druckspannung parallel zur magnetischen Feldrichtung, so lässt sich eine Vergrößerung der Dehnungen in der Schmetterlingshysterese erzielen. Die Domänen werden durch den Villari-Effekt bevorzugt senkrecht zur Spannungsrichtung gedreht. Dadurch können während der Magnetisierung mehr Domänen in Richtung von \vec{H} ausgerichtet werden. Diesen Effekt macht man sich bei magnetostruktiven Aktoren zunutze, um den Arbeitsbereich zu vergrößern. Bei einigen ferrimagnetischen Materialien wie z. B. Terfenol-D kann durch eine mechanische Vorspannung eine qualitative Veränderung des Hystereseverhaltens hervorgerufen werden. Terfenol-D zeigt ohne oder unter einer geringen Druckspannung ferromagnetisches

Verhalten, wie es in Abbildung 3.9 dargestellt ist. Wird das Material einer hohen Spannung ausgesetzt, so kommen die ferrimagnetischen Eigenschaften in den Hysteresekurven zum Tragen. Ein Ferrimagnetikum ist aus zwei ineinander verschränkten Untergittern mit jeweils entgegengesetzter Magnetisierung aufgebaut. Beim Anlegen eines magnetischen Feldes wird der ferrimagnetische Zustand in den ferromagnetischen Zustand überführt, in dem sich ein Untergitter in Richtung des anderen umklappt. Dieser Wechsel ist reversibel und kann so unmerklich geschehen, dass sich das Material wie ein Ferromagnetikum verhält. Durch Anlegen einer mechanischen Vorspannung wird der Übergang in den ferromagnetischen Zustand erschwert. In diesem Fall muss also zunächst eine gewisse magnetische Feldstärke aufgewendet werden, um den Übergang von ferrimagnetischem in ferromagnetisches Verhalten zu ermöglichen. Wird \vec{H} weiter erhöht stellt sich wieder eine Hysteresekurve ein. In Abbildung 3.10 sind die Hysteresekurven einer Terfenol-D Probe unter zwei verschiedenen Vorspannungen dargestellt. Bei einer Spannung von 6.5 MPa zeigt das Material noch ferromagnetisches Verhalten. Wird die Probe mit 41.3 MPa belastet, so muss erst eine gewisse Feldstärke aufgewendet werden, um das Material in den ferromagnetischen Zustand zu überführen. Bei weiterer Belastung erhält man für jeden Quadranten eine vollständige Hysteresekurve.

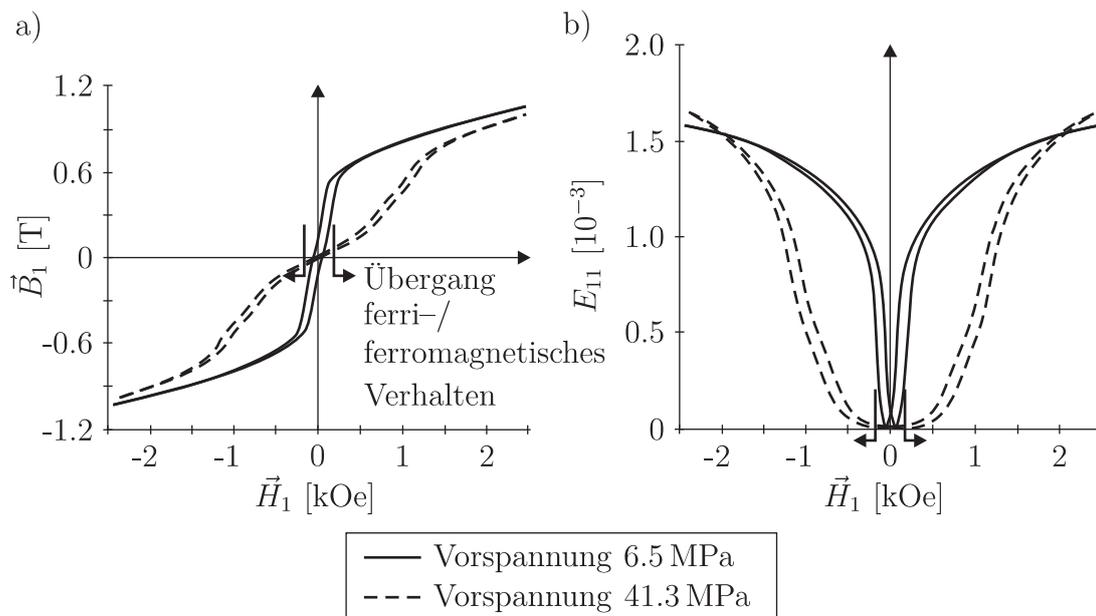


Abb. 3.10: Hystereseerscheinungen einer Terfenol-D Probe unter mechanischer Vorspannung: a) Ferro- bzw. ferrimagnetische Hysterese, b) Schmetterlingshysterese

4 Elektromechanische Koppelphänomene

In diesem Kapitel werden die grundlegenden Phänomene der elektromechanischen Kopplung eingeführt. Es wird eine kompakte Darstellung angegeben mit Schwerpunkt auf Piezoelektrizität und deren Ursachen. Gleichzeitig sollen Ähnlichkeiten mit der magnetostriktiven Kopplung aufgezeigt werden. Eine detailliertere Betrachtung der elektromechanischen Kopplung ist in den Büchern von IKEDA [52], CADY [19] und SMITH [113] zu finden. Ähnlich wie in Kapitel 3 werden hier nur inhärente Kopplungen auf Materialebene betrachtet. Die untersuchten Phänomene sind Elektrostriktion und Piezoelektrizität. Beide Effekte kommen nur in nichtleitenden Materialien, so genannten Dielektrika vor, in denen keine freien Ladungsträger auftreten. Eine wesentliche Eigenschaft, die den Zustand gebundener Ladungsträger im Material beschreibt, ist die Polarisation. Sie ist die beschreibende Feldgröße für den elektrischen Zustand im Dielektrikum. Anschließend wird eine Einteilung der verschiedenen Materialien nach ihren dielektrischen Eigenschaften vorgenommen. Zur Einführung in die elektromechanischen Koppelphänomene wird auf die Merkmale von Elektrostriktion und Piezoelektrizität eingegangen. Zum Verständnis der für diese Arbeit relevanten nichtlinearen Phänomene der piezoelektrischen Kopplung werden, analog zum vorherigen Kapitel, Betrachtungen auf der Mikro- und Makroebene herangezogen.

4.1 Polarisation

Die dielektrische Polarisation \vec{P} ist eine elektrische Feldgröße. Sie beschreibt die Interaktion zwischen einem angelegten elektrischen Feld \vec{E} und den Dipolen im Dielektrikum. Ein Dipol besteht aus zwei gleichen Ladungen entgegengesetzter Polarität q^+ und q^- mit dem Abstand \mathbf{r} . Je nach Ausprägung der Dipole wird zwischen Elektronen-, Ionen- und Orientierungspolarisation unterschieden. Bei der Elektronenpolarisation entstehen Dipole, wenn unpolare Atome durch ein elektrisches Feld so deformiert werden, dass die Ladungsschwerpunkte nicht mehr zusammenfallen. In heteropolaren Festkörpern kommt es zu einer Ionenpolarisation, wenn durch \vec{E} der Schwerpunkt der positiven Ionen gegen den Schwerpunkt der negativen Ionen verschoben wird. Die Orientierungspolarisation findet man in Materialien mit permanenten Dipolen, die sich im elektrischen Feld ausrichten. Permanente Dipole resultieren aus polaren Molekülen oder Asymmetrien in der Kristallstruktur. Solche Materialien werden als Paraelektrika bezeichnet.

In Abbildung 4.1 sind zwei Punktladungen q^+ und q^- mit den Ortsvektoren \mathbf{X}^+ und \mathbf{X}^- in einem homogenen elektrischen Feld \vec{E} dargestellt. Die Ladungen seien im Abstand $\mathbf{r} = \mathbf{X}^+ - \mathbf{X}^-$ starr miteinander verbunden. Der Dipol erfährt im

elektrischen Feld unter Zuhilfenahme von Gleichung (2.17) ein Moment

$$\mathbf{M} = \mathbf{X}^+ \times \mathbf{f} + \mathbf{X}^- \times \mathbf{f} = q\mathbf{r} \times \vec{\mathbf{E}}. \quad (4.1)$$

Der Vektor $\vec{\mathbf{p}} = q\mathbf{r}$ wird als elektrisches Dipolmoment bezeichnet. In einem inhomogenen elektrischen Feld wirkt zusätzlich eine resultierende Kraft auf den Dipol, die als ponderomotorische Kraft bezeichnet wird, siehe auch Abschnitt 5.2. Der mikroskopische Zustand der einzelnen Dipole im Material lässt sich in der Realität kaum erfassen. Daher wird die Polarisation als Dichtefunktion der Dipolmomente pro Volumenelement eingeführt

$$\vec{\mathbf{P}} = \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dV}. \quad (4.2)$$

Durch Transformation in die Referenzkonfiguration ergibt sich

$$\vec{\mathbf{P}}_0 = \det \mathbf{F} \vec{\mathbf{P}} \mathbf{F}^{-T}. \quad (4.3)$$

Die Polarisation in der Elektrostatik ist das kontinuumstheoretische Analogon zur Magnetisierung in der Magnetostatik, vergleiche auch Gleichung 3.5.

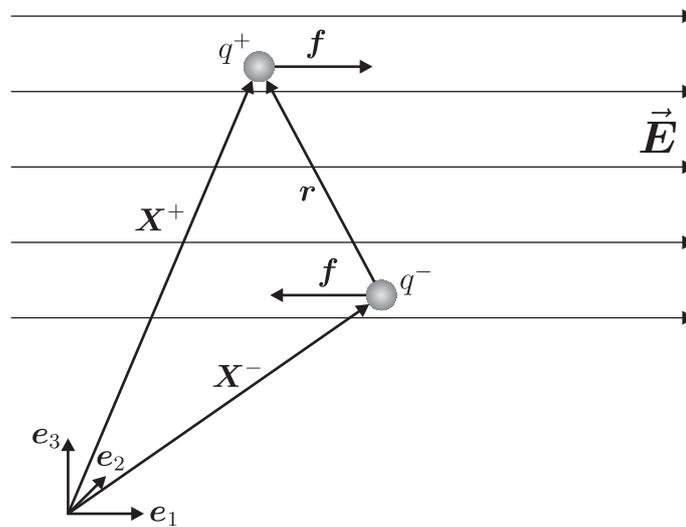


Abb. 4.1: Dipol und Dipolmoment im homogenen elektrischen Feld

4.2 Unterscheidung der Dielektrika

Ähnlich wie in der Magnetostatik lassen sich auch die Dielektrika aufgrund ihrer Eigenschaften in unterschiedliche Stoffgruppen einteilen. Die verschiedenen

Materialgruppen und deren elektrische Eigenschaften werden im Folgenden kurz erläutert. Des Weiteren soll die Differenzierung der einzelnen dielektrischen Stoffgruppen auch die phänomenologische Ähnlichkeit zwischen Elektrostatik und Magnetostatik verdeutlichen.

Unpolare dielektrische Stoffe

Mit dem Begriff der dielektrischen Materialien werden in der Regel alle nichtleitenden Materialien zusammengefasst. Unpolare Dielektrika sind Stoffe, die ausschließlich aus unpolaren Molekülen aufgebaut sind. In solchen Materialien gibt es keine permanenten Dipolmomente. Eine Polarisierung kann nur durch Elektronenpolarisation erfolgen. Die Wechselwirkung mit dem elektrischen Feld ist sehr gering.

Unpolare dielektrische Stoffe sind Edelgase und symmetrische Moleküle wie H_2 , O_2 , usw.

Paraelektrika

Paraelektrische Stoffe sind aus Molekülen aufgebaut, die auch ohne elektrisches Feld ein permanentes Dipolmoment besitzen, wie z. B. Wasser und Glyzerin. Die Ausrichtung der Dipole ist infolge der Temperaturbewegung vollständig ungeordnet, sodass die Gesamtpolarisation Null wird. Durch Anlegen eines elektrischen Feldes können die Dipolmomente in Feldrichtung ausgerichtet werden, wobei die Temperaturbewegung immer dem Polarisationsvorgang entgegen wirkt. Desweiteren werden einige kristalline Stoffe, die kein permanentes Dipolmoment aufweisen, den Paraelektrika zugeordnet. Bei diesen Materialien sind die Ionen im Kristallgitter so angeordnet, dass die positiven und negativen Ladungsschwerpunkte zusammenfallen.

Kristalline Stoffe mit paraelektrischem Verhalten sind z. B. KCl und $NaCl$.

Ferroelektrika

Ferroelektrische Materialien bestehen aus Ionenkristallen. Innerhalb der Kristallstruktur sind die Ionen so angeordnet, dass positive und negative Ladungsschwerpunkte nicht zusammenfallen. Die entstehenden Dipolmomente werden als spontane Polarisierung bezeichnet. Kennzeichnend für die Ferroelektrika ist, dass die Richtung der spontanen Polarisierung durch elektrische Felder oder mechanische Einwirkungen veränderbar ist.

Um die Kristallenergie zu minimieren, ist die Polarisationsrichtung innerhalb einer Substruktur des Kristalls, den Domänen, homogen. Die einzelnen Domänen sind dagegen so orientiert, dass die Gesamtenergie der Kristallstruktur minimiert wird. Im unpolarisierten Zustand bedeutet dies, dass sich die spontane Polarisation der Domänen gegenseitig aufhebt. Die Domänenstruktur und das Verhalten beim Anlegen eines elektrischen Feldes entspricht phänomenologisch demjenigen der ferromagnetischen Materialien. Zudem können die ferroelektrischen Eigenschaften auch nur unterhalb der materialspezifischen Curie-Temperatur T_c beobachtet werden. Oberhalb von T_c verändert sich die Kristallstruktur so, dass die Ladungsschwerpunkte zusammenfallen. Man spricht in diesem Fall vom paraelektrischen Zustand.

Die in dieser Arbeit betrachteten Materialien der piezoelektrischen Keramiken wie Barium-Titanat (BaTiO_2) und Blei-Zirkonat-Titanat (PZT) sind den Ferroelektrika zuzuordnen.

Pyroelektrika

Die Orientierung der spontanen Polarisation pyroelektrischer Stoffe ist im Gegensatz zu den Ferroelektrika unveränderlich. Im einfachsten Fall gibt es nur eine polare Achse, in der die Ladungsschwerpunkte der Einheitszellen verschoben sind. Die Polarisationsladungen treten an der Oberfläche nicht in Erscheinung, da sie durch transferierte Ladungen ausgeglichen werden. Pyroelektrische Materialien zeigen eine anisotrope thermische Ausdehnung, die eine Veränderung des Abstandes der Ladungsschwerpunkte im Kristallgitter bewirkt. Dies kann durch eine elektrische Aufladung der Kristalloberfläche beobachtet werden und wird als pyroelektrischer Effekt bezeichnet. Einige Materialien aus dieser Gruppe, wie z. B. Turmalin, können als Temperatursensoren verwendet werden.

Antiferroelektrika und Ferrielektrika

Antiferroelektrika und Ferrielektrika weisen wie die Ferroelektrika eine Domänenstruktur auf. Im Falle der Antiferroelektrika bestehen die Domänen jedoch aus zwei ineinander geschachtelten Untergittern mit antiparalleler spontaner Polarisation. Die spontane Polarisation der Domäne verschwindet dann. Der antiferroelektrische Zustand kann durch elektrische Felder in den ferroelektrischen Zustand überführt werden.

Auch ferrielektrische Materialien sind aus zwei antiparallelen Untergittern aufgebaut. Allerdings gleichen sich in diesem Fall die Polarisierungen der beiden Untergitter nicht vollständig aus, sodass eine resultierende spontane Polarisation ver-

bleibt. Die phänomenologischen Ähnlichkeiten zwischen Antiferroelektrika bzw. Ferrielektrika und Antiferromagnetika bzw. Ferrimagnetika sind offensichtlich.

4.3 Elektrostriktion und Piezoelektrizität

Elektrostriktion und Piezoelektrizität beschreiben Koppelphänomene zwischen elektrischen Feldern und mechanischen Deformationen.

Die Elektrostriktion tritt bei paraelektrischen, kristallinen Stoffen auf. Die Ladungsschwerpunkte der Ionen im Kristallgitter fallen hier zusammen. Durch Anlegen eines elektrischen Feldes werden die Ionen durch die Coulombschen Kräfte auseinandergezogen. Die Probe verlängert sich in Richtung des elektrischen Feldes, wobei gleichzeitig eine laterale Kontraktion beobachtet wird. Die elektrostriktive Deformation ist stets reversibel. Zudem gibt es keinen inversen Effekt, denn durch eine mechanische Deformation kann keine Trennung der Ladungsschwerpunkte hervorgerufen werden.

Der piezoelektrische Effekt tritt bei ferro-, ferri- sowie pyroelektrischen Materialien auf, da die Ladungsschwerpunkte im Kristallgitter in diesen Materialien nicht zusammenfallen und eine spontane Polarisierung entsteht. Von den 32 Kristallklassen erlauben nach VOIGT [130] 20 das Auftreten von Piezoelektrizität. Der Name leitet sich vom altgriechischen „piezo“ für drücken ab. Der direkte piezoelektrische Effekt beschreibt eine Änderung des Polarisationszustandes im Kristallgitter, die sich durch eine elektrische Spannung an der Oberfläche äußert. Das bekannteste piezoelektrische Material ist vermutlich Quarz, das den Zündfunken in Feuerzeugen erzeugt. Der direkte piezoelektrische Effekt wurde zum ersten Mal von den Brüdern Curie 1880 beschrieben [30]. Ein Jahr später konnte der von LIPPMANN [77] vorhergesagte inverse piezoelektrische Effekt nachgewiesen werden.

Die begriffliche Verwandtschaft zwischen Elektrostriktion und Magnetostraktion, bzw. Piezoelektrizität und Piezomagnetismus weist auf eine Affinität zwischen den beiden Phänomenen der Elektrostatik und der Magnetostatik hin. Diese Beziehung ist in erster Linie darin begründet, dass es sich bei den Piezo-Effekten um Koppelphänomene erster Ordnung handelt, während die Striktions-Effekte als Kopplungen zweiter Ordnung aufgefasst werden. Allerdings gibt es auch eine Reihe von Gemeinsamkeiten zwischen Piezoelektrizität und Magnetostraktion. So sind beide Phänomene durch eine materielle Orientierung in Form einer spontanen Polarisierung bzw. einer spontanen Magnetisierung geprägt. Beide Materialgruppen weisen, wie später gezeigt wird, eine Domänenstruktur auf und zeigen ein irreversibles Verhalten. Im Folgenden wird das piezoelektrische Verhalten von ferroelektrischen Keramiken näher untersucht.

4.4 Ferroelektrische Keramiken

Die ersten Untersuchungen der piezoelektrischen Eigenschaften ferroelektrischer Keramiken wurden von CHERRY UND ADLER [24] an Bariumtitanat (BaTiO_3) vorgenommen. Daran anschließend folgte die Entwicklung der Blei-Zirkonat-Titanat Keramiken (PbZrTiO_3), kurz PZT. Diese zeichnen sich durch eine starke piezoelektrische Kopplung und eine hohe Curie-Temperatur aus. Es ergaben sich umfangreiche Anwendungsmöglichkeiten in den Bereichen der Aktorik und Sensorik. Für eine detaillierte Betrachtung der materiellen Eigenschaften von BaTiO_3 und PZT sei auf JAFFE [54] verwiesen. Das grundlegende Verhalten dieser Werkstoffe wird zunächst an der kristallinen Einheitszelle beschrieben.

4.4.1 Betrachtungen an der Einheitszelle

Barium-Titanat und PZT Keramiken zeigen wie alle ferroelektrischen Materialien oberhalb der Curie-Temperatur paraelektrisches Verhalten. In diesem Fall besitzt die Einheitszelle eine kubische Struktur wie in Abbildung 4.2a) dargestellt. Alle Seiten der Einheitszelle haben die gleiche Länge a , die Ladungsschwerpunkte der positiven und negativen Ionen fallen zusammen. Wird die Keramik unter die Curie-Temperatur abgekühlt, so wandert das zentrale Metallion aus dem Mittelpunkt in Richtung einer der sechs Flächenmittelpunkte. Es findet eine

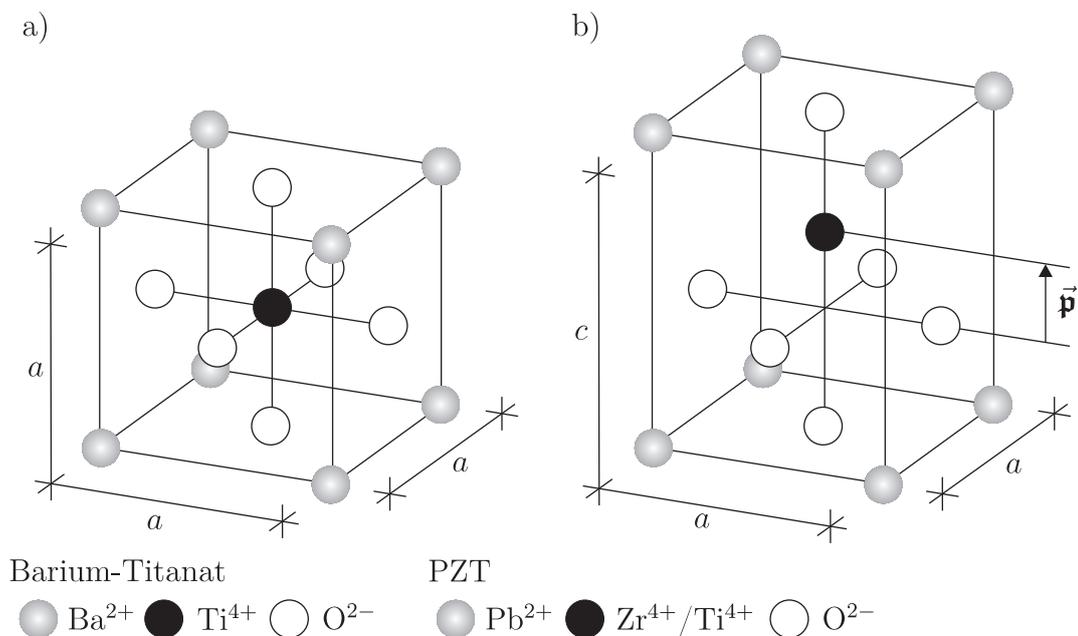


Abb. 4.2: Einheitszelle einer Barium-Titanat Keramik: a) Oberhalb der Curie-Temperatur, b) Unterhalb der Curie-Temperatur

Phasenumwandlung statt, bei der die kubische Kristallstruktur in eine nicht-zentrosymmetrische Struktur übergeht. Diese kann eine tetragonale, rhomboedrische oder orthorhombische Konfiguration haben. Durch die Verschiebung des Zentralions fallen die positiven und negativen Ladungsschwerpunkte nicht mehr zusammen und es entsteht ein permanentes Dipolmoment bzw. eine spontane Polarisation \vec{p} . Zudem wird das Kristallgitter durch den Phasenübergang verzerrt. Die Änderung der Länge c parallel zu \vec{p} beträgt etwa 1%. In Abbildung 4.2b) ist exemplarisch eine tetragonale Einheitszelle dargestellt. Da die Einheitszelle sechs Möglichkeiten hat, das zentrale Metallion zu verschieben, kann sich die spontane Polarisation in diese sechs Raumrichtungen ausbilden.

Nach Abkühlen unter die Curie-Temperatur zeigt die Keramik ferroelektrisches Verhalten. Die Richtung und Größe der spontanen Polarisation der Einheitszelle kann durch elektrische und mechanische Einwirkungen verändert werden. In

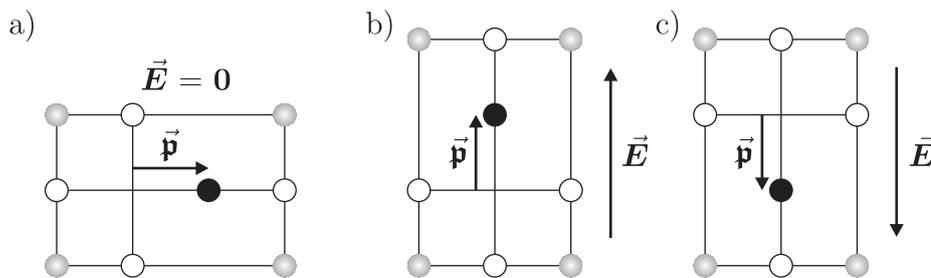


Abb. 4.3: Umklappen einer ferroelektrischen Einheitszelle durch ein elektrisches Feld

Abbildung 4.3 wird an die Einheitszelle einer piezoelektrischen Keramik ein elektrisches Feld senkrecht zur Polarisationsrichtung angelegt. Dabei werden die positiven Ionen in Feldrichtung gezogen, während sich die negativen Ionen gegen die Feldrichtung bewegen. Durch ein ausreichend starkes Feld, dem so genannten Koerzitivfeld E_c , klappt das zentrale Metallion innerhalb der Einheitszelle in die Richtung des elektrischen Feldes um, siehe Abbildung 4.3b). Der Polarisationsvektor \vec{p} zeigt dann in Richtung von \vec{E} . Die Gestalt der Einheitszelle passt sich der veränderten Ionenkonfiguration an. Die beobachtete Verzerrung ist dem inversen piezoelektrischen Effekt zuzuordnen. Dieser Zustand bleibt auch nach Abschalten des elektrischen Feldes erhalten und ist somit irreversibel. Wird \vec{E} gegensätzlich zu \vec{p} aufgebracht, sind auch 180° Umklappprozesse möglich, siehe Abbildung 4.3c). Die Gestalt der Einheitszelle bleibt in diesem Fall erhalten.

In Abbildung 4.4 wird die Einheitszelle durch eine mechanische Druckspannung belastet. Bis zum Erreichen einer kritischen Spannung S_c verhält sich die deformierte Struktur elastisch. Oberhalb von S_c verändert sich die Position des zentralen Metallions im Kristall, und die Polarisationsrichtung klappt in eine

Richtung senkrecht zur angelegten Druckspannung um. Die neue Ionenkonfiguration verändert die Gestalt der Einheitszelle und man beobachtet eine irreversible Deformation. Die Richtung der spontanen Polarisation ist dabei nicht vorgegeben. Die Zustände aus Abbildung 4.4b) und c) stellen sich mit gleicher Wahrscheinlichkeit ein. Ein Umklappen der Einheitszelle kann auch durch eine Zugspannung verursacht werden. Die Richtung der spontanen Polarisation stellt sich entsprechend Abbildung 4.4d) oder Abbildung 4.4e) ein. Durch mechanische Einwirkungen erzeugte Umklappprozesse zeichnen sich somit immer durch eine Rotation der spontanen Polarisation um 90° aus.

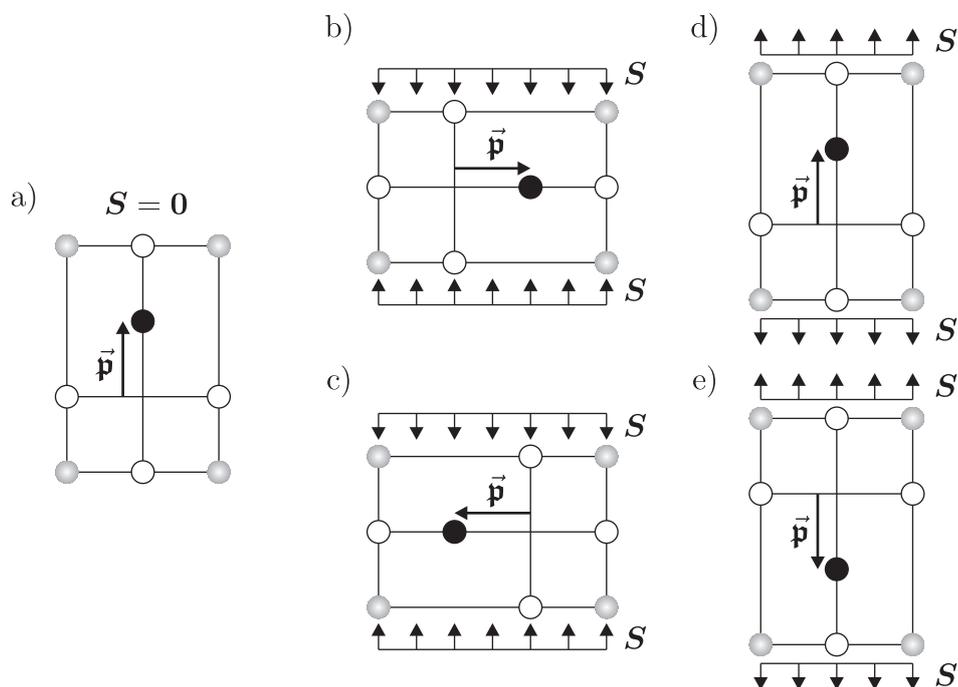


Abb. 4.4: Umklappen einer ferroelektrischen Einheitszelle durch mechanische Spannungen

4.4.2 Domänenstruktur

Ferroelektrische Keramiken sind in der Regel polykristalline Materialien, die aus einzelnen Körnern aufgebaut sind. Diese haben wie die ferromagnetischen Materialien eine Domänenstruktur. Ursache für ihre Entstehung wiederum die Minimierung der inneren Energie. Die Polarisationsvektoren der einzelnen Domänen sind gleichgerichtet, während sich die Domänen des Kristallits so ausbilden, dass die Gesamtpolarisation verschwindet. Die Struktur der ferroelektrischen Keramiken

entspricht somit nahezu Abbildung 3.7, nur dass statt der Magnetisierung \vec{M} die Polarisation \vec{P} auftritt. Die Domänenwände können durch mechanische oder elektrische Einwirkungen verschoben werden. In diesem Fall kommt es zu einem Umklappen der Einheitszellen entlang der Domänenwände entsprechend der im vorherigen Kapitel erläuterten Prinzipien. Die Größe der einzelnen Domänen verändern sich und man beobachtet eine Veränderung der Gesamtpolarisation und der Gestalt der Probe.

4.4.3 Makroskopisches Verhalten

Bei der Betrachtung des makroskopischen Verhaltens werden die nichtlineare Zusammenhänge zwischen Polarisation, elektrischem Feld, Spannungen und Dehnungen diskutiert. Die resultierenden, typischen Hysteresekurven sollen schematisch in kompakter Form erläutert werden. Ausführlichere Darstellungen zum materiell nichtlinearen Verhalten sind in KAMLAH [60] und SMITH [113] zu finden, für experimentelle Ergebnisse sei auf HWANG [51] und LYNCH [79] verwiesen.

Zunächst wird eine ferroelektrische Keramik innerhalb eines sich verändernden elektrischen Feldes betrachtet. In Abbildung 4.5 ist die ferroelektrische Hysterese einer ferroelektrischen Keramik dargestellt. Der Domänenzustand ist in den charakteristischen Punkten angegeben. Im Anfangszustand $\vec{E}_1 = 0$ sind die Polarisationsrichtungen der einzelnen Domänen ungeordnet. Durch Anlegen eines elektrischen Feldes beginnt sich das Material in Richtung von \vec{E} zu polarisieren.

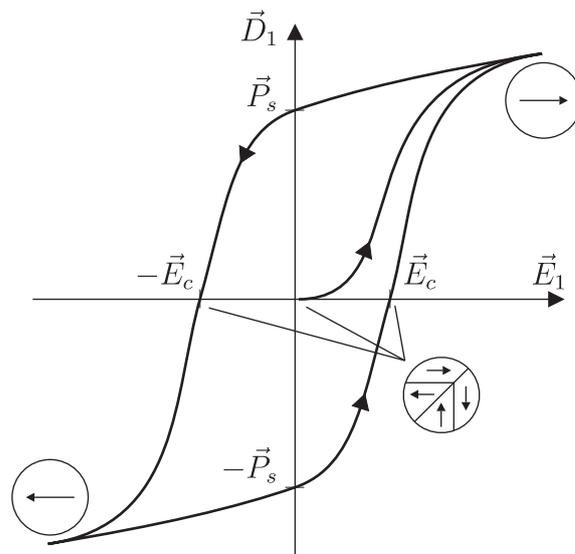


Abb. 4.5: Dielektrische Hysteresekurve mit schematischer Darstellung der Domänenzustände

Dabei kommt es zu irreversiblen Verschiebungen der Domänenwände. Domänen mit einer Polarisation in Richtung des elektrischen Feldes vergrößern sich auf Kosten anderer Domänen deren Polarisation gegen \vec{E} weist. Dieser Prozess endet, wenn nur noch eine Domäne parallel zum elektrischen Feld verbleibt. Das Material ist jetzt vollständig polarisiert. Beim Entlasten bleibt der Domänenzustand erhalten und für $\vec{E}_1 = 0$ verbleibt die Sättigungspolarisation \vec{P}_s . Durch Anlegen eines entgegengesetzten elektrisches Feldes beginnen sich die Domänenwände wieder zu verschieben. Die Probe wird depolarisiert. Für $\vec{E}_1 = -\vec{E}_c$ ist die Probe vollständig depolarisiert, wobei \vec{E}_c als Koerzitivfeldstärke bezeichnet wird. Durch eine weitere Steigerung von \vec{E} wird das Material durch weitere Wandverschiebungen in Gegenrichtung polarisiert. Die vollständige Polarisierung ist wieder durch eine verbleibende Domäne bestimmt. Wird der Betrag des elektrischen Feldes wieder verringert, ergibt sich schließlich die vollständige Hysteresekurve. An dieser Stelle sei noch auf einen Unterschied zwischen ferroelektrischen Keramiken und Ferromagnetika hingewiesen. Bei den ferromagnetischen Materialien ist es möglich, dass sich Magnetisierungsrichtungen der einzelnen Domänen bei einem hinreichend starken magnetischen Feld aus ihren leichten Richtungen herausdrehen, siehe auch Abschnitt 3.3.4. Dies ist bei ferroelektrischen Keramiken kaum möglich, d. h. die Domänenprozesse sind mit der Beendigung der Wandverschiebungen abgeschlossen.

Die durch das elektrische Feld hervorgerufenen Änderungen des Polarisationszustandes bewirken auch eine Deformation der Probe. In Abbildung 4.6 ist die Dehnung E_{11} über dem elektrischen Feld aufgetragen. Die angegebenen Domänenzustände entsprechen denjenigen aus Abbildung 4.5. Während der Polarisierung steigt die Dehnung stark an. Diese Änderungen sind irreversibel. Sind alle Domänen ausgerichtet so ist nur noch ein geringer reversibler Anstieg von E_{11} zu beobachten. Nach Absenkung von \vec{E} verbleibt eine Sättigungsdehnung E_s . Bei Anlegen eines negativen elektrischen Feldes wird das Material zunächst depolarisiert bis für $\vec{E}_1 = \vec{E}_c$ ein dehnungsloser Zustand erreicht ist. Wird das Material in negativer Richtung polarisiert, so ergibt sich der gleiche Deformationszustand wie aus dem äquivalenten positiven Polarisationszustand. Die sich ergebende Hysterese wird wie bei der Magnetostriktion als Schmetterlingshysterese bezeichnet.

Der Domänenzustand lässt sich, wie in Abschnitt 4.4.1 erläutert, auch durch mechanische Einwirkungen verändern. In Abbildung 4.7 ist der Verlauf der Spannungen über den Dehnungen aufgetragen. Die Keramik wird zunächst mit einer Zugspannung belastet. Mit Überschreiten der materialspezifischen Koerzitivspannung S_c sind irreversible Dehnungen zu beobachten, die durch Umklappprozesse hervorgerufen werden. Wenn sich alle Domänen parallel oder antiparallel zur

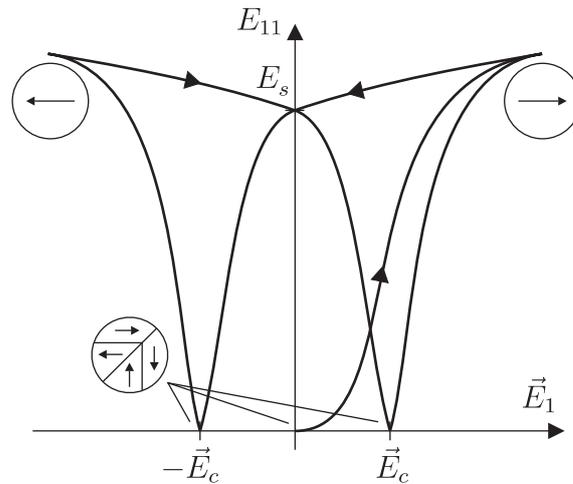


Abb. 4.6: Schmetterlingshysterese einer ferroelektrischen Keramik mit schematischer Darstellung der Domänenzustände

aufgebrachten Spannung ausgerichtet haben, ist wieder elastisches Verhalten zu beobachten. Nach Entlastung verbleibt eine Sättigungsdehnung E_s^t . Durch eine aufgebrachte Druckspannung orientieren sich die Polarisationen der Domänen senkrecht zur Spannungsrichtung. Auf abermaliges Entlasten folgt die bleibende Dehnung E_s^c . Der sich ergebende Kurvenverlauf wird als ferroelastische Hysterese bezeichnet. Die remanente Dehnung unter Zug E_s^t ist bis zu zweimal größer als diejenige unter Druckbeanspruchung E_s^c . Dieser Unterschied lässt sich, stark vereinfacht, mit Hilfe der Domänenzustände erklären. Im ungeordneten Anfangszustand sind alle Domänen gemäß den drei Raumrichtungen gleich verteilt. Durch eine Zugspannung können die Domänen, die senkrecht zur Spannung zeigen, in die Spannungsrichtung umklappen. Das sind maximal $2/3$ aller Domänen. Dagegen bewirkt eine Druckspannung ein Umklappen aus der Spannungsrichtung in eine Richtung senkrecht zu \mathbf{S} . Hier können somit maximal $1/3$ aller Domänen umklappen. Folglich ist die Menge der umklappbaren Domänen bei einer Druckspannung nur halb so groß wie diejenige, die bei einer Zugspannung zu Verfügung steht.

Ein weiterer in der Literatur angegebener Effekt ist die mechanische Depolarisation. Hier wird eine gepolte ferroelektrische Keramik einer Druckbelastung in Polarisationsrichtung ausgesetzt. Nach Überschreiten der Koerzitivspannung S_c kommt es zu Umklappprozessen in den Domänen. Das Material wird depolarisiert. Dieser Effekt soll im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter erörtert werden. Eine ausführliche Abhandlung der mechanischen Depolarisation ist in den Arbeiten von SCHÄUFELE [107] und KAMLAH [59] zu finden.

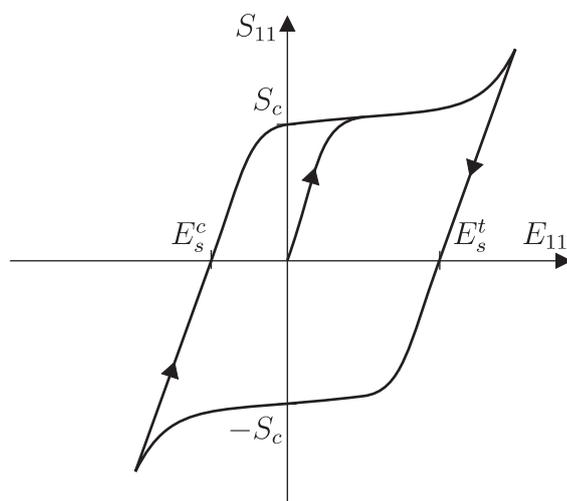


Abb. 4.7: Ferroelastische Hysterese einer ferroelektrischen Keramik

5 Gekoppelte Feldtheorie

Dieses Kapitel gilt den Bilanzgleichungen der eingeführten Koppelphänomene. Durch die Einschränkung auf nahezu stationäre elektromagnetische Vorgänge können die elektrischen und magnetischen Feldgrößen entkoppelt voneinander beschrieben werden. Im ersten Abschnitt werden die für die magnetomechanische Feldtheorie maßgebenden Feldgleichungen erläutert. Der zweite Abschnitt befasst sich mit den entsprechenden Gleichungen der elektromechanischen Kopplung. Hier werden die wesentlichen Unterschiede zur magnetomechanischen Kopplung dargelegt.

Die Bilanzgleichungen haben axiomatischen Charakter und bilden die Grundlage für die verwendete Kontinuumstheorie. Sie sollen im Folgenden möglichst anschaulich und in kompakter Form eingeführt werden. Eine ausführlichere Darstellung der Mechanik elektromagnetischer Kontinua kann den Werken von MAUGIN [82] und ERINGEN [42] entnommen werden.

5.1 Magnetomechanische Probleme

Die Beschreibung magnetomechanisch gekoppelter Probleme wird sich auf Materialien beziehen, die magnetisierbar und elektrisch leitend sind. Wird weiterhin die zeitliche Änderung der magnetischen Feldgrößen als vernachlässigbar angesehen, so kann die Anwesenheit elektrischer Felder ausgeschlossen werden.

Durch ein magnetisches Feld entsteht über die Lorenzkraft eine Wechselwirkung mit den gebundenen Strömen im Material. Die resultierenden mechanischen Kräfte müssen in den Bilanzaussagen berücksichtigt werden. Es ergeben sich Volumenkraft

$$\vec{f}^m = (\vec{B} \otimes \nabla_x) \vec{M}, \quad (5.1)$$

die in der Literatur auch als ponderomotorische Kräfte bezeichnet werden. Nach Gleichung (3.1) wirken auch Volumenmomente auf das Kontinuum

$$\vec{m}^m = \vec{M} \times \vec{B}. \quad (5.2)$$

Erhaltung der Masse

Die Massenerhaltung verlangt, dass die Masse m des materiellen Körpers während des Deformationsprozesses unveränderlich ist. So wird eine Zufuhr oder ein Entweichen von Masse über die Oberfläche oder aus dem Inneren heraus ausgeschlossen. Da die Masse als kontinuierlich verteilte Größe angenommen wird,

wird die Massendichte zu $\rho = dm/dv$ definiert. Die Massenerhaltung kann damit durch

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_t} \rho \, dv = 0 \quad (5.3)$$

ausgedrückt werden. Durch eine Transformation in die Referenzkonfiguration und durch Anwendung der Kettenregel kommt man zur Kontinuitätsbedingung

$$\dot{\rho} + \rho \nabla \cdot \dot{\mathbf{x}} = 0, \quad (5.4)$$

die auch als *2. lokale Form der Massenerhaltung* nach Euler und d'Alembert bezeichnet wird.

Erhaltung des Impulses

Der Impuls oder auch Bewegungsgröße \mathbf{I} eines materiellen Körpers wird als Produkt aus Masse und Geschwindigkeit definiert. In der Momentankonfiguration ergibt sich \mathbf{I} zu

$$\mathbf{I} = \int_{\mathcal{B}_t} \rho \dot{\mathbf{x}} \, dv. \quad (5.5)$$

Nach dem Impulserhaltungssatz steht die Änderung der Bewegungsgröße mit den auf den Körper einwirkenden Oberflächen- und Volumenkräften im Gleichgewicht. Das dynamische Kräftegleichgewicht kann durch

$$\dot{\mathbf{I}} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_t} \rho \dot{\mathbf{x}} \, dv = \int_{\mathcal{B}_t} \rho \mathbf{b} + \vec{\mathbf{f}}^m \, dv + \int_{\partial \mathcal{B}_t} \mathbf{t} \, da \quad (5.6)$$

ausgedrückt werden. Im Vergleich zur rein mechanischen Beschreibung wird die massenbezogene Beschleunigung \mathbf{b} durch einen ponderomotorischen Anteil $\vec{\mathbf{f}}^m$ ergänzt. Der Vektor \mathbf{t} gibt die auf die Oberfläche wirkenden Spannungen an. Durch Anwendung der Kontinuitätsbedingung (5.4), des Cauchy Theorems (2.12) und des Gaußschen Integralsatzes kann (5.6) in die lokale Gleichgewichtsaussage

$$\mathbf{T} \nabla_x + \rho(\mathbf{b} - \ddot{\mathbf{x}}) + \vec{\mathbf{f}}^m = \mathbf{0} \quad \text{in } \mathcal{B}_t \quad (5.7)$$

mit der Randbedingung

$$\mathbf{T} \mathbf{n} = \mathbf{t} \quad \text{auf } \partial \mathcal{B}_t \quad (5.8)$$

überführt werden. Diese wird auch als *1. Cauchysche Bewegungsgleichung* bezeichnet. Durch Transformation lassen sich die Gleichungen (5.7) und (5.8) auf die Referenzkonfiguration beziehen

$$\mathbf{F} \mathbf{S} \nabla_X + \rho_0(\mathbf{b}_0 - \ddot{\mathbf{x}}) + \vec{\mathbf{f}}_0^m = \mathbf{0} \quad \text{in } \mathcal{B}_0 \quad (5.9)$$

$$\mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{N} = \mathbf{t}_0 \quad \text{auf } \partial \mathcal{B}_0. \quad (5.10)$$

Der Vektor \vec{f}_0^m gibt die ponderomotorische Volumenkraft in der Referenzkonfiguration an. Für sie gilt

$$\vec{f}_0^m = (\vec{B}_0 \otimes \nabla_X) \vec{M}_0. \quad (5.11)$$

Erhaltung des Drehimpulses

Der Drehimpuls \mathbf{L} eines Körpers bezüglich eines raumfesten Punktes \mathbf{x}_0 ist in der Momentankonfiguration durch

$$\mathbf{L} = \int_{\mathcal{B}_t} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \rho \dot{\mathbf{x}} \, dv \quad (5.12)$$

bestimmt. Der Erhaltungssatz des Drehimpulses definiert \mathbf{L} als Erhaltungsgröße und verlangt, dass die zeitliche Änderung des Drehimpulses mit den einwirkenden Momenten im Gleichgewicht steht. Es gilt

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{L}} &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_t} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \rho \dot{\mathbf{x}} \, dv = \int_{\mathcal{B}_t} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times (\rho \mathbf{b} + \vec{f}^m) + \vec{m}^m \, dv \\ &\quad + \int_{\partial \mathcal{B}_t} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{t} \, da. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Durch Anwendung des Cauchy-Theorems (2.12), des Gaußschen Integralsatzes für Kreuzprodukte (siehe z. B. DEBOER [36]) und der 1. Cauchyschen Bewegungsgleichung lässt sich (5.13) in die lokale Aussage

$$\mathbf{1} \times \mathbf{T} + \vec{m}^m = \mathbf{0} \quad \text{in } \mathcal{B}_t \quad (5.14)$$

umformen. Durch Transformation in die Referenzkonfiguration wird aus (5.14)

$$\mathbf{1} \times \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T + \vec{m}_0^m = \mathbf{0} \quad \text{in } \mathcal{B}_0. \quad (5.15)$$

Der Vektor \vec{m}_0^m gibt die ponderomotorischen Volumenmomente bezogen auf die Referenzkonfiguration an. Es gilt

$$\vec{m}_0^m = \vec{M}_0 \times \vec{B}_0. \quad (5.16)$$

Im Vergleich zur rein mechanischen Formulierung tauchen in (5.14) zusätzlich ponderomotorische Volumenmomente auf. Daraus folgt, dass der Spannungstensor \mathbf{T} um magnetostriktive Anteile erweitert wird und dadurch nicht mehr symmetrisch ist. Der schiefsymmetrische Anteil wird durch

$$\mathbf{T} - \mathbf{T}^T = \vec{M} \otimes \vec{B} - \vec{B} \otimes \vec{M} \quad (5.17)$$

beschrieben. Zur Beurteilung der Asymmetrie des Spannungstensors \mathbf{T} soll eine Abschätzung mit Hilfe der Maximumnorm $\|\vec{\mathbf{M}} \otimes \vec{\mathbf{B}} - \vec{\mathbf{B}} \otimes \vec{\mathbf{M}}\|_\infty \leq \|\vec{\mathbf{M}}\| \|\vec{\mathbf{B}}\|$ nach KAMLAH [60] erfolgen. Für die Sättigung einer Terfenol-D Probe ergeben sich daraus von Werte $\|\vec{\mathbf{M}}\| \|\vec{\mathbf{B}}\| \approx 0.9 \text{ MPa}$. Diese Werte sind im Vergleich zu den in technischen Anwendungen anzutreffenden Spannungen gering. Aus diesem Grund wird der Einfluss der ponderomotorischen Kräfte und Momente im Weiteren vernachlässigt. Für den symmetrischen Spannungstensor gilt folglich

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T. \quad (5.18)$$

Damit kann auch auf die Symmetrie des 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensors geschlossen werden

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^T. \quad (5.19)$$

Quellenfreiheit des magnetischen Feldes

Das Gesetz zur Quellenfreiheit des magnetischen Feldes wird in den Maxwell-Gleichungen zur elektromagnetischen Feldtheorie formuliert. Es wird postuliert, dass der über die Oberfläche $\partial\mathcal{B}_t$ in den Körper eintretende magnetische Fluss gleich dem austretenden magnetischen Fluss sein muss. In integraler Form lässt sich

$$\int_{\partial\mathcal{B}_t} \vec{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{n} \, da = 0 \quad (5.20)$$

schreiben. Der Vektor \mathbf{n} gibt die Richtung der Oberflächennormalen in der Momentankonfiguration an. Durch Anwendung des Gaußschen Integralsatzes lässt sich (5.20) in die lokale Aussage

$$\vec{\mathbf{B}} \cdot \nabla_x = 0 \quad \text{in } \mathcal{B}_t \quad (5.21)$$

mit der Randbedingung

$$\vec{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{n} = \varsigma_M \quad \text{auf } \partial\mathcal{B}_t \quad (5.22)$$

umformen. Analog zu den mechanischen Bilanzgleichungen, kann auch das Postulat zur Quellenfreiheit des magnetischen Feldes in die Referenzkonfiguration transformiert werden. Man erhält

$$\int_{\partial\mathcal{B}_0} \vec{\mathbf{B}}_0 \mathbf{N} \, dA = 0 \quad \text{bzw.} \quad (5.23)$$

$$\vec{\mathbf{B}}_0 \cdot \nabla_X = 0 \quad \text{in } \mathcal{B}_0 \text{ mit} \quad (5.24)$$

$$\vec{\mathbf{B}}_0 \cdot \mathbf{N} = \varsigma_{M0} \quad \text{auf } \partial\mathcal{B}_0. \quad (5.25)$$

Die Skalare ς_M und ς_{M0} bezeichnen hier die magnetischen Oberflächenladungsdichten, die in Abschnitt 2.3.2 als ideelle Größen eingeführt wurden.

Durchflutungsgesetz

Das Durchflutungsgesetz oder Ampèresche Gesetz ist die zweite Bilanzgleichung der Magnetostatik, die in den Maxwell'schen Gleichungen enthalten ist. Es wird gefordert, dass das Wegintegral längs einer geschlossenen Kontur ∂S_t gleich dem umschlossenen elektrischen Strom ist

$$\oint_{\partial S_t} \vec{H} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\partial \mathcal{B}_t} \vec{J} \cdot d\mathbf{a}. \quad (5.26)$$

Aus (5.26) kann durch einige Umformungen die differentielle Formulierung des Ampèreschen Gesetzes mit

$$\nabla_x \times \vec{H} = \vec{J} \quad \text{in } \mathcal{B}_t \quad (5.27)$$

gewonnen werden. Gleichung (5.27) wird in der Literatur auch als Wirbeldichte des magnetischen Feldes bezeichnet. Durch Transformation von (5.26) und (5.27) ergeben sich die materiellen Darstellungen

$$\oint_{\partial S_0} \vec{H}_0 \cdot d\mathbf{X} = \int_{\partial \mathcal{B}_0} \vec{J}_0 \cdot d\mathbf{A} \quad \text{und} \quad (5.28)$$

$$\nabla_X \times \vec{H}_0 = \vec{J}_0 \quad \text{in } \mathcal{B}_0. \quad (5.29)$$

5.1.1 Erhaltung der Energie

Die Energie eines Körpers sei eine Erhaltungsgröße. Sie setzt sich zusammen aus der kinetischen Energie $\int_{\mathcal{B}_t} \rho \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} dv$ und der inneren Energie $\int_{\mathcal{B}_t} \rho e dv$, die mechanische, thermische, chemische und elektromagnetische Anteile aufweisen kann. Als spezifische Größe ist die innere Energie e auf die Massendichte ρ bezogen. Im 1. Hauptsatz der Thermodynamik wird postuliert, dass die zeitliche Änderung der Energie eines Körpers mit der Leistung äußerer Einwirkungen und der von außen zugeführten Wärmemenge im Gleichgewicht steht. Es gilt folglich

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_t} \rho \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} + e \right) dv = \int_{\mathcal{B}_t} \dot{\mathbf{x}} \cdot \rho \mathbf{b} + \rho r + \rho z dv + \int_{\partial \mathcal{B}_t} \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{t} - \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} da. \quad (5.30)$$

Die Wärmemenge kann über die Oberfläche $-\int_{\partial \mathcal{B}_t} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} da$ zugeführt werden oder von einer inneren Wärmeproduktion $\int_{\mathcal{B}_t} \rho z dv$ herrühren. Die spezifische Energiezufuhr durch magnetische Felder ist

$$r = \vec{H} \cdot \left(\frac{\vec{B}}{\rho} \right). \quad (5.31)$$

Durch einige Umformungen lässt sich (5.30) auf die Referenzkonfiguration beziehen. Man erhält

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} + e_0 \right) dV &= \int_{\mathcal{B}_0} \dot{\mathbf{x}} \cdot \rho_0 \mathbf{b}_0 + \rho_0 r_0 + \rho_0 z_0 dV \\ &+ \int_{\partial \mathcal{B}_0} \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{t}_0 - \mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{N} dA. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Die materiellen Größen sind durch den Index 0 gekennzeichnet. Es gilt außerdem $\mathbf{r}_0 = \vec{\mathbf{H}}_0 \cdot \left(\frac{\vec{\mathbf{B}}_0}{\rho_0} \right)$.

Mit Hilfe des Cauchy-Theorems, des Gaußsche Integralsatzes und durch Einsetzen der Cauchyschen Bewegungsgleichung (5.7) folgt die lokale Form der Energieerhaltung

$$\rho e - \rho r - \rho z - \mathbf{T} : (\dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}) + \mathbf{q} \cdot \nabla_x = 0 \quad \text{in } \mathcal{B}_t. \quad (5.33)$$

Entsprechend kann aus (5.32) die lokale Form der Energieerhaltung in der Referenzkonfiguration hergeleitet werden

$$\rho_0 e_0 - \rho_0 r_0 - \rho_0 z_0 - \mathbf{S} : (\mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}}) + \mathbf{q}_0 \cdot \nabla_X = 0 \quad \text{in } \mathcal{B}_0. \quad (5.34)$$

Die Skalarprodukte $\mathbf{T} : (\dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1})$ und $\mathbf{S} : (\mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}})$ werden als die innere Spannungsleistung bezeichnet. Sie beschreiben die physikalische Leistung der mechanischen Spannungen im Körper. Da die Spannungstensoren \mathbf{T} bzw. \mathbf{S} symmetrisch sind, gehen nur die symmetrischen Anteile der Verzerrungsgeschwindigkeiten in das Skalarprodukt ein. Es gilt daher

$$\mathbf{T} : (\dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}) = \mathbf{T} : \dot{\mathbf{d}} \quad \text{und} \quad \mathbf{S} : (\mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}}) = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} \quad (5.35)$$

mit $\dot{\mathbf{d}} = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} + \mathbf{F}^{-T} \dot{\mathbf{F}}^T)$ und $\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}} + \dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{F})$. Der Tensor $\dot{\mathbf{d}}$ wird auch räumliche Deformationsgeschwindigkeit genannt.

5.1.2 2. Hauptsatz der Thermodynamik

Im 2. Hauptsatz der Thermodynamik wird physikalischen Prozessen eine natürliche Prozessrichtung vorgegeben. Als beschreibende Größe wird die Entropie η als die auf die Temperatur θ bezogene Wärme eingeführt. Damit lässt sich die Entropiegleichung

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_t} \rho \eta dv \geq \int_{\mathcal{B}_t} \rho \frac{z}{\theta} dv - \int_{\partial \mathcal{B}_t} \frac{\mathbf{q}}{\theta} \cdot \mathbf{n} da \quad (5.36)$$

formulieren. Hier wird verlangt, dass die zeitliche Änderung der Entropie stets größer oder gleich der Entropieproduktion im Körper zuzüglich der Entropiezufuhr über die Oberfläche ist. Die Ungleichung (5.36) wird auch Clausius-Duhem-Ungleichung genannt. Für reversible Prozesse wird keine Prozessrichtung vorgegeben und in (5.36) gilt das Gleichheitszeichen. Im Falle eines irreversiblen Vorgangs wird Energie dissipiert. Eine Umkehrung des Prozesses ist damit nicht möglich. In (5.36) gilt das Relationszeichen ($>$). Durch Transformation in die Referenzkonfiguration lässt sich die Clausius-Duhem-Ungleichung auch in materieller Form formulieren

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \eta_0 \, dV \geq \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \frac{z_0}{\theta} \, dV - \int_{\partial \mathcal{B}_0} \frac{\mathbf{q}_0}{\theta} \cdot \mathbf{N} \, dA. \quad (5.37)$$

Mit Anwendung des Gaußschen Integralsatzes und unter Berücksichtigung der Massenerhaltung können aus (5.36) und (5.37) die lokalen Formen

$$\rho \dot{\eta} \theta - \rho z + \mathbf{q} \cdot \nabla_x - \frac{\mathbf{q}}{\theta} \cdot (\nabla_x \theta) \geq 0 \quad \text{in } \mathcal{B}_t \text{ und} \quad (5.38)$$

$$\rho_0 \dot{\eta}_0 \theta - \rho_0 z_0 + \mathbf{q}_0 \cdot \nabla_X - \frac{\mathbf{q}_0}{\theta} \cdot (\nabla_X \theta) \geq 0 \quad \text{in } \mathcal{B}_0 \quad (5.39)$$

gefunden werden. Setzt man schließlich die lokalen Formen der Energieerhaltung (5.33) bzw. (5.34) ein, erhält man

$$-\rho(\dot{e} - \theta \dot{\eta}) + \rho r + \mathbf{T} : \dot{\mathbf{d}} - \frac{1}{\theta} (\nabla_x \theta) \cdot \mathbf{q} \geq 0 \quad \text{in } \mathcal{B}_t \text{ und} \quad (5.40)$$

$$-\rho_0(\dot{e}_0 - \theta \dot{\eta}_0) + \rho_0 r_0 + \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} - \frac{1}{\theta} (\nabla_X \theta) \cdot \mathbf{q}_0 \geq 0 \quad \text{in } \mathcal{B}_0. \quad (5.41)$$

Durch Einführung der freien Energiefunktionen

$$\psi := e - \theta \eta - \vec{\mathbf{H}} \cdot \left(\frac{\vec{\mathbf{B}}}{\rho} \right) \quad \text{und} \quad \psi_0 := e_0 - \theta \eta_0 - \vec{\mathbf{H}}_0 \cdot \left(\frac{\vec{\mathbf{B}}_0}{\rho_0} \right) \quad (5.42)$$

als thermodynamische Potentiale kann in (5.40) bzw. (5.41) eine Legendre-Transformation durchgeführt werden. Beschränkt man sich weiterhin auf adiabatische Prozesse, d. h. $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 = \mathbf{0}$ und nimmt an, dass die Temperatur konstant bleibt $\dot{\theta} = 0$ (isotherme Bedingungen), erhält man die vereinfachten Clausius-Duhem-Ungleichungen

$$\mathbf{T} : \dot{\mathbf{d}} - \vec{\mathbf{B}} \cdot \dot{\vec{\mathbf{H}}} - \rho \dot{\psi} \geq 0 \quad \text{in } \mathcal{B}_t \text{ und} \quad (5.43)$$

$$\mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} - \vec{\mathbf{B}}_0 \cdot \dot{\vec{\mathbf{H}}}_0 - \rho_0 \dot{\psi}_0 \geq 0 \quad \text{in } \mathcal{B}_0. \quad (5.44)$$

Für reversible Prozesse gilt in (5.44) das Gleichheitszeichen. Wird weiterhin die freie Energie $\rho_0 \psi_0(\mathbf{E}, \vec{\mathbf{H}}_0)$ als Funktion der Verzerrungen \mathbf{E} und der magnetischen

Feldstärke \vec{H}_0 angenommen, so gilt in der Referenzkonfiguration

$$\left(\mathbf{S} - \frac{\partial \rho_0 \psi_0}{\partial \mathbf{E}} \right) : \dot{\mathbf{E}} - \left(\vec{B}_0 + \frac{\partial \rho_0 \psi_0}{\partial \vec{H}_0} \right) \cdot \dot{\vec{H}}_0 = 0. \quad (5.45)$$

Damit lassen sich die Spannungen und die magnetische Flussdichte über die partiellen Ableitungen der freien Energiefunktion definieren. Es gilt

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \rho_0 \psi_0}{\partial \mathbf{E}} \quad \text{und} \quad \vec{B}_0 = - \frac{\partial \rho_0 \psi_0}{\partial \vec{H}_0}. \quad (5.46)$$

Je nach Definition der freien Energiefunktion können auch andere unabhängige Zustandsvariablen gewählt werden, die allerdings im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter betrachtet werden. Für eine ausführliche Erörterung der verschiedenen freien Energiefunktionen sei auf IKEDA [52] verwiesen.

Bei irreversiblen Vorgängen ist (5.44) weiterhin als Ungleichung gültig. Die dissipierte Energie wird durch zusätzliche interne Variablen beschrieben, die hier allgemein durch tensorwertige Größen \mathbf{Y}_I und vektorielle Größen \mathbf{y}_I gegeben sind. Damit erhält man aus (5.44)

$$\left(\mathbf{S} - \frac{\partial \rho_0 \psi_0}{\partial \mathbf{E}} \right) : \dot{\mathbf{E}} - \left(\vec{B}_0 + \frac{\partial \rho_0 \psi_0}{\partial \vec{H}_0} \right) : \dot{\vec{H}} - \sum_I \frac{\partial \rho_0 \psi_0}{\partial \mathbf{Y}_I} : \dot{\mathbf{Y}}_I - \sum_I \frac{\partial \rho_0 \psi_0}{\partial \mathbf{y}_I} \cdot \dot{\mathbf{y}}_I \geq 0. \quad (5.47)$$

Durch Einsetzen von (5.46) folgt schließlich die reduzierte Dissipationsungleichung

$$\mathcal{D} = - \sum_I \frac{\partial \rho_0 \psi_0}{\partial \mathbf{Y}_I} : \dot{\mathbf{Y}}_I - \sum_I \frac{\partial \rho_0 \psi_0}{\partial \mathbf{y}_I} \cdot \dot{\mathbf{y}}_I \geq 0. \quad (5.48)$$

Diese Ungleichung ist die Grundlage für die Entwicklung des im nächsten Kapitel eingeführten konstitutiven Modells.

5.2 Elektromechanische Probleme

Für die Beschreibung elektromechanisch gekoppelter Probleme werden nichtleitende, polarisierbare Materialien vorausgesetzt. Die zeitliche Änderung des elektrischen Feldes wird weiterhin als so gering angenommen, dass Induktionsvorgänge vernachlässigt werden können. Damit können auch die Einflüsse durch magnetische Felder ausgeschlossen werden. Die Erhaltungssätze der elektromechanischen Kopplung können demzufolge analog zu Abschnitt 5.1 formuliert werden. Die Einwirkungen elektrischer Felder auf das dielektrische Kontinuum werden entsprechend (5.1) und (5.2) durch ponderomotorische Volumenkräfte

$$\vec{f}^e = \rho \vec{E} + (\vec{E} \otimes \nabla_x) \vec{P} \quad (5.49)$$

und Volumenmomente

$$\vec{m}^e = \vec{P} \times \vec{E} \quad (5.50)$$

beschrieben. In (5.49) ist zusätzlich ein Anteil für die Coulombsche Kraft $\rho\vec{E}$ auf die Ladungsträger im Material enthalten. Die Erhaltung der Masse gilt genau wie in Abschnitt 5.1 angegeben. In den Bilanzgleichungen der Impulserhaltung (5.6) bis (5.9) wird der ponderomotorische Anteil \vec{f}^m durch \vec{f}^e ersetzt.

Die Bilanz des Drehimpulses wird äquivalent zu Abschnitt 5.1 formuliert, wobei wiederum die ponderomotorischen Anteile angepasst werden müssen. Folglich ergibt sich auch hier eine Asymmetrie des Spannungstensors. Mit Hinblick auf KAMLAH [60] werden die ponderomotorischen Einflüsse allerdings vernachlässigt und die Spannungstensoren \mathbf{T} und \mathbf{S} als symmetrisch angesehen. In den Gleichungen zur Energieerhaltung nach Abschnitt 5.1.1 wird die Rate der dielektrischen Energiezufuhr

$$r = \vec{E} \cdot \left(\frac{\vec{D}}{\rho} \right) \quad (5.51)$$

berücksichtigt. Sie ersetzt den entsprechenden Term der Magnetostatik, siehe auch Gleichung (5.31).

Der 2. Hauptsatz der Thermodynamik wird analog zu den Gleichungen (5.36) bis (5.40) formuliert. Bei der Wahl der freien Energiefunktionen wird die dielektrische Energiezufuhr

$$\psi := e - \theta\eta - \vec{E} \cdot \left(\frac{\vec{D}}{\rho} \right) \quad \text{und} \quad \psi_0 := e_0 - \theta\eta_0 - \vec{E}_0 \cdot \left(\frac{\vec{D}_0}{\rho_0} \right) \quad (5.52)$$

beachtet. Man erhält unter Annahme von isothermen, adiabatischen Prozessen die vereinfachten Clausius-Duhem Ungleichungen

$$\mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} - \vec{D}_0 \cdot \dot{\vec{E}}_0 - \rho_0 \dot{\psi}_0 \geq 0 \quad \text{in } \mathcal{B}_0 \quad (5.53)$$

in materieller Darstellung. Unter der Annahme, dass $\rho_0\psi_0$ eine Funktion der Größen \mathbf{E} und \vec{E}_0 ist, ergeben sich die konjugierten Variablen der Spannungen \mathbf{S} und der elektrischen Flussdichte \vec{D}_0 zu

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \rho_0 \psi_0}{\partial \mathbf{E}} \quad \text{und} \quad \vec{D}_0 = - \frac{\partial \rho_0 \psi_0}{\partial \vec{E}_0}. \quad (5.54)$$

Die Modellierung irreversibler Prozesse erfolgt analog zu den Gleichungen (5.47) und (5.48) durch Einführen zusätzlicher interner Variablen.

In Abschnitt 5.1 sind für die Formulierung der magnetostatischen Bilanzansagen zwei der vier Maxwellgleichungen herangezogen worden. Die beiden verbleibenden Gleichungen charakterisieren das elektrische Feld.

Erhaltung der Ladung

Die Erhaltung der Ladung setzt voraus, dass die Ladung eines Körpers gleich dem elektrischen Fluss durch die Oberfläche ist. Bezogen auf die Momentankonfiguration erhält man

$$\int_{\mathcal{B}_t} \varrho \, dv = \int_{\partial\mathcal{B}_t} \vec{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{n} \, da. \quad (5.55)$$

Durch Anwendung des Gaußschen Integralsatzes kann die lokale Aussage der Quellenstärke des elektrischen Feldes

$$\vec{\mathbf{D}} \cdot \nabla_x = \varrho \quad \text{in } \mathcal{B}_t. \quad (5.56)$$

mit der Randbedingung

$$\vec{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{n} = \varsigma_E \quad \text{auf } \partial\mathcal{B}_t \quad (5.57)$$

gewonnen werden. Durch Transformation in die Referenzkonfiguration lassen sich die Gleichungen (5.55) und (5.56) auch in materieller Form angeben. Man erhält

$$\int_{\mathcal{B}_0} \varrho_0 \, dV = \int_{\partial\mathcal{B}_0} \vec{\mathbf{D}}_0 \cdot \mathbf{N} \, dA \quad \text{und} \quad (5.58)$$

$$\vec{\mathbf{D}}_0 \cdot \nabla_X = \varrho_0 \quad \text{in } \mathcal{B}_0 \text{ mit} \quad (5.59)$$

$$\vec{\mathbf{D}}_0 \cdot \mathbf{N} = \varsigma_{E0} \quad \text{auf } \partial\mathcal{B}_0. \quad (5.60)$$

Wirbelfreiheit des elektrischen Feldes

Da das elektrische Feld nach Abschnitt 2.2 wirbelfrei ist, muss das Wegintegral längs einer geschlossenen Kontur verschwinden. Es folgt daher

$$\oint_{\partial S_t} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\mathbf{x} = 0. \quad (5.61)$$

Eine lokale Bedingung kann mit Hilfe des Satzes von Stokes formuliert werden

$$\nabla_x \times \vec{\mathbf{E}} = 0 \quad \text{in } \mathcal{B}_t. \quad (5.62)$$

Entsprechend erhält man durch Transformation die materiellen Darstellungen

$$\oint_{\partial S_0} \vec{\mathbf{E}}_0 \cdot d\mathbf{X} = 0 \quad \text{und} \quad (5.63)$$

$$\nabla_X \times \vec{\mathbf{E}}_0 = 0 \quad \text{in } \mathcal{B}_0. \quad (5.64)$$

5.3 Zusammenfassung

Die in diesem Kapitel eingeführten Gleichungen bilden die Grundlage für die weiteren Kapitel. Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden die maßgebenden Gleichungen noch einmal in [Tafel 5.1](#) zusammengefasst. Um die Übereinstimmungen und die Unterschiede der magnetomechanischen und der elektromechanischen Kopplung hervorzuheben sind die Feldgleichungen beider Phänomene gegenübergestellt. Da die nachfolgenden Betrachtungen ausschließlich in der materiellen Darstellung formuliert werden, wird der Index 0 zur Vereinfachung der Notation in den magnetischen und elektrischen Feldgrößen sowie in der freien Energiefunktion $\rho_0\psi_0$ in den folgenden Kapiteln weggelassen.

Magnetomechanische Kopplung	Elektromechanische Kopplung
Geometrische Feldgleichungen	
$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1})$	
$\vec{\mathbf{H}} = -\nabla_X \phi_M$	$\vec{\mathbf{E}} = -\nabla_X \phi_E$
Cauchysche Bewegungsgleichung	
$\mathbf{F} \mathbf{S} \nabla_X + \rho_0 (\mathbf{b}_0 - \ddot{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$	
Maxwellsche Gleichungen	
$\nabla_X \times \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{J}}$	$\nabla_X \times \vec{\mathbf{E}} = \mathbf{0}$
$\vec{\mathbf{B}} \cdot \nabla_X = 0$	$\vec{\mathbf{D}} \cdot \nabla_X = \varrho_0$
Randbedingungen	
$\mathbf{F} \mathbf{S} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{t}_0$ auf $\partial_t \mathcal{B}_0$	
$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$ auf $\partial_u \mathcal{B}_0$	
$\vec{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{N} = \varsigma_{M0}$ auf $\partial_\varsigma \mathcal{B}_0$	$\vec{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{N} = \varsigma_{E0}$ auf $\partial_\varsigma \mathcal{B}_0$
$\phi_M = \bar{\phi}_M$ auf $\partial_\phi \mathcal{B}_0$	$\phi_E = \bar{\phi}_E$ auf $\partial_\phi \mathcal{B}_0$
Konjugierte Größen	
$\mathbf{S} = \frac{\partial \rho \psi}{\partial \mathbf{E}}$	
$\vec{\mathbf{B}} = -\frac{\partial \rho \psi}{\partial \vec{\mathbf{H}}}$	$\vec{\mathbf{D}} = -\frac{\partial \rho \psi}{\partial \vec{\mathbf{E}}}$
Reduzierte Dissipationsungleichung	
$\mathcal{D} = -\sum_I \frac{\partial \rho \psi}{\partial \mathbf{Y}_I} : \dot{\mathbf{Y}}_I - \sum_I \frac{\partial \rho \psi}{\partial \mathbf{y}_I} \cdot \dot{\mathbf{y}}_I \geq 0$	

Tafel 5.1: Gegenüberstellung der maßgebenden Gleichungen magnetomechanischer und elektromechanischer Probleme

6 Konstitutives Modell

Nachdem bisher nur die stofffreien Bilanzgleichungen diskutiert wurden, wird sich dieses Kapitel der konstitutiven Modellierung, also dem Materialgesetz widmen. Es wird ein Materialgesetz eingeführt, welches in der Lage ist, die Koppelphänomene der Magnetostriktion und der Piezoelektrizität abzubilden. Dazu wird eine grundlegende Verknüpfung zwischen den Gradientenfeldern und den konjugierten Feldgrößen formuliert. Sie basiert auf dem Ergebnis des 1. und 2. Hauptsatzes der Thermodynamik (5.46) bzw. (5.54) und wird durch die Wahl der freien Energiefunktion $\rho\psi$ bestimmt. Die Gradientenfelder sind die Verzerrungen und die elektrische bzw. magnetische Feldstärke. Sie dienen als unabhängige Variablen von $\rho\psi$. Die zugehörigen arbeitskonformen Felder heißen konjugierte Größen und beinhalten die mechanischen Spannungen und die Flussdichtevektoren.

Im Folgenden wird zunächst ein lineares Materialgesetz für reversible Vorgänge eingeführt. Darauf aufbauend wird im zweiten Abschnitt ein nichtlineares konstitutives Modell vorgestellt, das die Hysteresereerscheinungen in den betrachteten Materialien wiedergeben kann. Die vorgestellten Materialgleichungen werden exemplarisch für magnetostriktive Koppelphänomene formuliert. Eine Übertragung auf piezoelektrische Prozesse ist in Abschnitt 6.4 angegeben.

6.1 Lineares Stoffgesetz

Für die Formulierung eines linearen Materialgesetzes wird die freie Energiefunktion durch eine Taylor-Reihe approximiert, die nach den quadratischen Anteilen abgebrochen wird. Es wird weiterhin angenommen, dass der Ausgangszustand unbelastet ist. Damit verschwinden die konstanten und linearen Terme. Es gilt

$$\rho\psi = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \frac{\partial^2 \rho\psi}{\partial \mathbf{E} \partial \mathbf{E}} : \mathbf{E} + \mathbf{E} : \frac{\partial^2 \rho\psi}{\partial \mathbf{E} \partial \vec{\mathbf{H}}} \cdot \vec{\mathbf{H}} + \frac{1}{2} \vec{\mathbf{H}} \cdot \frac{\partial^2 \rho\psi}{\partial \vec{\mathbf{H}} \partial \vec{\mathbf{H}}} \vec{\mathbf{H}}. \quad (6.1)$$

Der erste Ausdruck steht für die gespeicherte mechanische Energie, der zweite Term gibt den magnetomechanischen Anteil an, und der letzte Summand bezeichnet die gespeicherte magnetische Energie. Weiterhin werden die zweifach differenzierten Ausdrücke in Gleichung (6.1) als konstant angenommen. Sie ergeben die Materialtensoren

$$\mathbb{C} := \frac{\partial^2 \rho\psi}{\partial \mathbf{E} \partial \mathbf{E}} \quad (6.2)$$

$$\mathbf{e} := \frac{\partial^2 \rho\psi}{\partial \mathbf{E} \partial \vec{\mathbf{H}}} \quad (6.3)$$

$$\boldsymbol{\mu} := - \frac{\partial^2 \rho\psi}{\partial \vec{\mathbf{H}} \partial \vec{\mathbf{H}}}, \quad (6.4)$$

wobei \mathbf{C} den vierstufigen Elastizitätstensor, \mathbf{e} den dreistufigen piezomagnetischen Koppelmodul und $\boldsymbol{\mu}$ den zweistufigen Permeabilitätstensor bezeichnet. Die linearen konstitutiven Gleichungen ergeben sich damit nach (5.46) zu

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \rho \psi}{\partial \mathbf{E}} = \mathbf{C} : \mathbf{E} - \mathbf{e} \cdot \vec{\mathbf{H}} \quad (6.5)$$

$$-\vec{\mathbf{B}} = \frac{\partial \rho \psi}{\partial \vec{\mathbf{H}}} = -\mathbf{e}^T : \mathbf{E} - \boldsymbol{\mu} \vec{\mathbf{H}}. \quad (6.6)$$

Die Gleichung (6.5) kann als ein St. Venant-Kirchhoff Materialgesetz aufgefasst werden, das durch einen Koppelterm $\mathbf{e} \cdot \vec{\mathbf{H}}$ ergänzt wurde. Die Bestimmungsgleichung für die magnetische Flussdichte (6.6) ist ein erweitertes magnetostatisches Stoffgesetz. Hier wird der Koppelterm $\mathbf{e}^T : \mathbf{E}$ angehängt.

Bei Verwendung einer Vektornotation für Verzerrungstensor und Spannungstensor mit $\mathbf{E} = [E_{11}, E_{22}, E_{33}, 2E_{12}, 2E_{13}, 2E_{23}]^T$ und $\mathbf{S} = [S_{11}, S_{22}, S_{33}, S_{12}, S_{13}, S_{23}]^T$ können die Tensoren \mathbf{C} und \mathbf{e} in Matrizenform dargestellt werden. Die mechanischen Eigenschaften sind von der Richtung der Magnetisierung abhängig. Senkrecht zur Magnetisierungsrichtung verhält sich das Material isotrop. Es wird daher transversal isotropes Materialverhalten angenommen – ein Spezialfall des orthotropen Materials. Die ausgezeichnete Richtung ist die Magnetisierungsrichtung. Bei einer Magnetisierung in 3-Richtung ergibt sich der Elastizitätstensor aus

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_3} & -\frac{\nu_{13}}{E_3} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} \end{bmatrix}, \quad (6.7)$$

siehe hierzu auch ALTENBACH ET AL. [3]. Die Materialeigenschaften werden durch die fünf unabhängigen Materialkonstanten E_1 , E_3 , ν_{12} , ν_{13} und G_{13} charakterisiert. Die Parameter E_1 und E_3 stehen für Elastizitätsmoduln, ν_{12} und ν_{13} bezeichnen die Querkontraktionszahlen und G_{13} gibt den Schubmodul in der 13-Ebene an. Der Schubmodul in der 12-Ebene bestimmt sich aus $G_{12} = \frac{E_1}{2(1+\nu_{12})}$. Die Belegung der Koppelmatrix \mathbf{e} hängt wiederum von der Magnetisierungsrichtung des Materials ab. Für ein in 3-Richtung magnetisiertes Material erhält man

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{e}_{13} \\ 0 & 0 & \mathbf{e}_{23} \\ 0 & 0 & \mathbf{e}_{33} \\ \mathbf{e}_{51} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{e}_{62} & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.8)$$

Hierbei gilt $e_{23} = e_{13}$ und $e_{26} = e_{15}$. Der Permeabilitätstensor $\boldsymbol{\mu}$ ist nur auf der Diagonale besetzt

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{bmatrix}. \quad (6.9)$$

Ist das Material in 3-Richtung magnetisiert, so gilt in der Regel $\mu_1 = \mu_2$.

Das vorgestellte lineare Stoffgesetz gilt nur für moderate Belastungen. Es wurde ursprünglich von Voigt in analoger Form für piezoelektrische Materialien formuliert, findet aber inzwischen auch Anwendung für magnetostruktive Probleme, siehe CLAEYSSEN [27], ENGBAHL [41] und GHOSH [45]. Die Einträge des Permeabilitätstensors $\boldsymbol{\mu}$ können durch die Steigungen der Tangenten an die entsprechende ferromagnetische Hysteresekurve veranschaulicht werden, wie in Abbildung 6.1a) dargestellt. Eine ähnliche Interpretation ist auch für den Koppeltensor \boldsymbol{e} möglich, siehe Abbildung 6.1b). Als Arbeitspunkt der Linearisierung wird meist der voll magnetisierte Zustand mit $\vec{B}_3 = \vec{B}_{rem}$ bzw. $E_3 = E_{rem}$ gewählt.

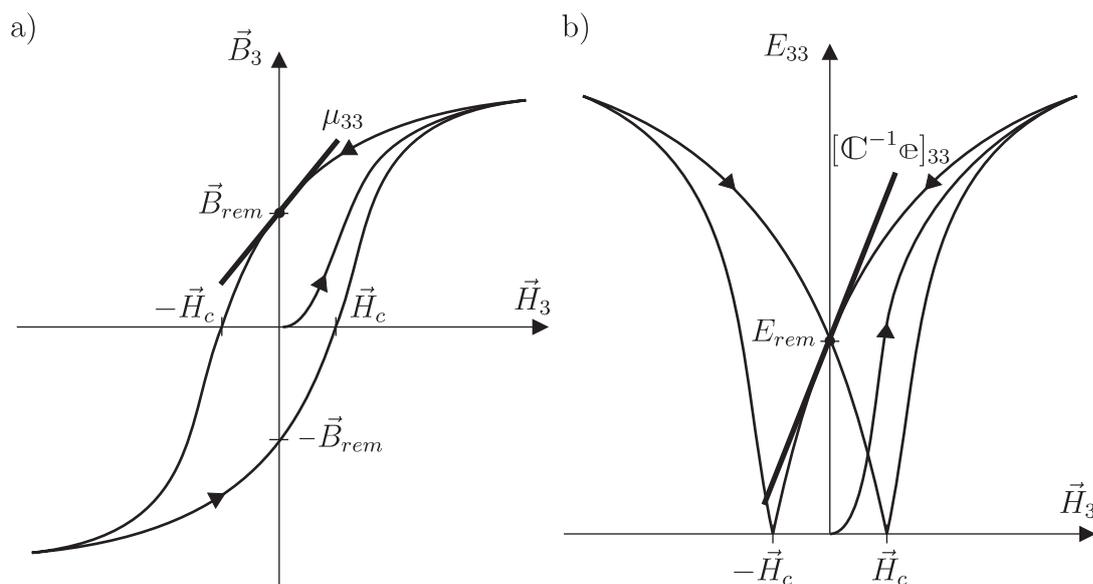


Abb. 6.1: Veranschaulichung der linearen Materialkonstanten

6.2 Nichtlineares Stoffgesetz

Zur Berücksichtigung der nichtlinearen Materialeigenschaften werden unterschiedliche Ansätze verfolgt. In vielen thermodynamisch motivierten Materialmodellen wird eine freie Energiefunktion höherer Ordnung gewählt. So verwenden z. B.

CARMAN [21], WAN [132] und ZHENG [141] anstatt Gleichung (6.1) eine erweiterte Taylorfunktion mit Anteilen 3. Ordnung. Bei anderen Stoffgesetzen wird die freie Energiefunktion abschnittsweise definiert, siehe z. B. WAN [132] und SMITH [114]. Desweiteren finden sich Modelle, bei denen eine additive Aufteilung der unabhängigen Variablen vorgenommen wird, siehe FANG [43]. Es werden zusätzliche interne Variablen eingeführt, die die Veränderung der Domänenzustände repräsentieren. Die Entwicklung der internen Variablen wird durch die Einführung eines Schaltkriteriums bestimmt. Dieser Ansatz wird häufig auch zur Modellierung von ferroelektrischen Keramiken herangezogen. In den Modellen von KAMLAH [60] und ELHADROUZ [40] werden mehrere Schaltkriterien verwendet, welche Beginn und Ende der Umklappprozesse festlegen. Die multiaxialen Modelle von LANDIS [74] und [84] kommen mit einem Schaltkriterium aus. Die Begrenzung der Domänenprozesse wird durch das Einführen von Verfestigungsfunktionen realisiert. Eine koordinateninvariante Formulierung wird von SCHRÖDER UND GROSS [105] bzw. SCHRÖDER UND ROMANOWSKI [106] vorgestellt. Für das einachsiale Modell wird eine Eins-zu-eins-Beziehung zwischen den irreversiblen Verzerrungen und der Polarisierung angenommen, die als interne Variablen verwendet werden.

Das im Rahmen dieser Arbeit vorgestellte konstitutive Modell ist in der Lage, die für magnetostriktive und piezoelektrische Materialien typischen Hysteresekurven abzubilden. Das Modell basiert auf einer additiven Aufspaltung der magnetischen Feldstärke und des Verzerrungstensors in einen reversiblen und einen irreversiblen Anteil. Die irreversiblen Größen dienen als interne Zustandsvariablen und werden über eine Eins-zu-eins-Beziehung miteinander verknüpft. Damit verbleibt die irreversible magnetische Feldstärke als einzige interne Variable. Unter Berücksichtigung der reduzierten Dissipationsungleichung (5.48) und eines Schaltkriteriums kann eine Evolutionsgleichung für sie ermittelt werden. Die Evolutionsgleichung wird mit Euler-Rückwärts-Verfahren integriert. Weiterhin wird eine algorithmisch konsistente Tangente für die Finite-Element-Formulierung entwickelt. Zur Erfassung des ferrimagnetischen Hystereseverhaltens wird in Abschnitt 6.3 eine Erweiterung des Stoffgesetzes vorgenommen. Da sich das vorgestellte Materialmodell auch zur Modellierung von piezoelektrischen Keramiken eignet, ist in Abschnitt 6.4 eine analoge elektromechanische Formulierung angegeben.

6.2.1 Additive Aufteilung der Gradientenfelder

Konstitutive Modelle zur Beschreibung der ferromagnetischen- und der Schmetterlingshysterese verwenden in der Regel die Magnetisierung als interne Variable. Im vorgeschlagenen Stoffgesetz wird stattdessen eine additive Aufspaltung der ma-

Dieser Zusammenhang soll durch die Einführung einer Eins-zu-eins-Beziehung

$$\mathbf{E}^i = \frac{E_s}{(\vec{H}_s^i)^2} \vec{H}^i \cdot \vec{H}^i \mathbf{I} \quad (6.12)$$

erfüllt werden, siehe auch KAMLAH [59]. Hierbei bezeichnet der Parameter E_s die Sättigungsdehnung des Materials. Der zweistufige Projektionstensor

$$\mathbf{I} = \frac{3}{2} \left(\mathbf{e}_M \otimes \mathbf{e}_M - \frac{1}{3} \mathbf{1} \right) \quad (6.13)$$

gewährleistet die Volumenerhaltung der magnetostriktiven Verzerrungen. Der Vektor

$$\mathbf{e}_M = \frac{\vec{H}^i}{\|\vec{H}^i\|} \quad (6.14)$$

gibt die Richtung der Magnetisierung an, die konstant angenommen wird.

6.2.2 Thermodynamische Einbettung

Für die thermodynamische Einbettung wird auf eine freie Energie als Potentialfunktion in folgender Form zurückgegriffen

$$\begin{aligned} \rho\psi = & \frac{1}{2} (\mathbf{E} - \mathbf{E}^i) : \mathbb{C} : (\mathbf{E} - \mathbf{E}^i) + \frac{\vec{H}^i \cdot \mathbf{e}_M}{\vec{H}_s^i} (\mathbf{E} - \mathbf{E}^i) : \mathbf{e} \cdot \vec{H} \\ & - \frac{1}{2} (\vec{H} - \vec{H}^i) \cdot \boldsymbol{\mu} (\vec{H} - \vec{H}^i) + \rho\bar{\psi}(\vec{H}^i). \end{aligned} \quad (6.15)$$

Die ersten drei Summanden weisen eine ähnliche Struktur wie Gleichung (6.1) auf und beinhalten die energetisch reversiblen Anteile der Verzerrungen $\mathbf{E} - \mathbf{E}^i$ und des magnetischen Feldes $\vec{H} - \vec{H}^i$. Allerdings wird in der magnetomechanisch gespeicherten Energie nur \vec{H} berücksichtigt. Dadurch ist gewährleistet, dass die Schmetterlingshysterese für $\vec{H} = \mathbf{0}$ den Wert E_{rem} durchläuft. Weiterhin wird der piezomagnetische Modul mit Faktor $(\vec{H}^i \cdot \mathbf{e}_M)/\vec{H}_s^i$ skaliert, da die magnetostruktive Kopplung vom Magnetisierungszustand des Materials abhängt. Der Term $\rho\bar{\psi}(\vec{H}^i)$ bezeichnet die Energie, die in der internen Variable gespeichert ist. Sie hängt nur von der irreversiblen magnetischen Feldstärke \vec{H}^i ab und kann als eine Art Verfestigungsfunktion aufgefasst werden.

Nach Gleichung (5.46) ergeben sich die mechanischen Spannungen und die magnetische Flussdichte zu

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \rho\psi}{\partial \mathbf{E}} = \mathbb{C} : (\mathbf{E} - \mathbf{E}^i) + \frac{\vec{H}^i \cdot \mathbf{e}_M}{\vec{H}_s^i} \mathbf{e} \cdot \vec{H} \quad (6.16)$$

$$-\vec{\mathbf{B}} = \frac{\partial \rho\psi}{\partial \vec{H}} = \frac{\vec{H}^i \cdot \mathbf{e}_M}{\vec{H}_s^i} \mathbf{e}^T : (\mathbf{E} - \mathbf{E}^i) - \boldsymbol{\mu} (\vec{H} - \vec{H}^i). \quad (6.17)$$

Die Dissipation nach (5.48) wird damit nur durch die Zuwächse von \mathbf{E}^i und $\vec{\mathbf{H}}^i$ bestimmt. Es gilt folglich

$$\mathcal{D} = -\frac{\partial \rho \psi}{\partial \mathbf{E}^i} : \dot{\mathbf{E}}^i - \frac{\partial \rho \psi}{\partial \vec{\mathbf{H}}^i} \cdot \dot{\vec{\mathbf{H}}}^i \geq 0. \quad (6.18)$$

Durch Einsetzen der zeitlichen Ableitung von Gleichung (6.12) kann \mathbf{E}^i eliminiert werden

$$\mathcal{D} = -\left(2 \frac{E_s}{(\vec{H}_s^i)^2} \frac{\partial \rho \psi}{\partial \mathbf{E}^i} : \mathbf{I} \vec{\mathbf{H}}^i + \frac{\partial \rho \psi}{\partial \vec{\mathbf{H}}^i}\right) \cdot \dot{\vec{\mathbf{H}}}^i = \Xi \cdot \dot{\vec{\mathbf{H}}}^i \geq 0. \quad (6.19)$$

Der Vektor Ξ bezeichnet die arbeitskonforme konjugierte Feldgröße zur internen Variable $\vec{\mathbf{H}}^i$, die sich mit Hilfe der partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \rho \psi}{\partial \mathbf{E}^i} = \mathbf{S} \quad (6.20)$$

$$\frac{\partial \rho \psi}{\partial \vec{\mathbf{H}}^i} = \frac{1}{\vec{H}_s^i} (\mathbf{E} - \mathbf{E}^i) : \mathbf{e} \cdot \vec{\mathbf{H}} \mathbf{e}_M - \mu (\vec{\mathbf{H}} - \vec{\mathbf{H}}^i) - \frac{\partial \rho \bar{\psi}}{\partial \vec{\mathbf{H}}^i} \quad (6.21)$$

bestimmen lässt.

Neben der freien Energiefunktion wird ein Schaltkriterium definiert. Das Schaltkriterium Φ kennzeichnet den Beginn von irreversiblen Domänenprozessen. Für $\Phi < 0$ treten nur reversible Verschiebungen der Domänenwände auf, während für $\Phi = 0$ irreversible Wandverschiebungen angenommen werden. Zur Verbesserung der numerischen Stabilität wird ein quadratisches Schaltkriterium in der Form

$$\Phi = \frac{\Xi \cdot \Xi}{\vec{M}_c^2} - 1 \leq 0, \quad (6.22)$$

gewählt. Der Parameter \vec{M}_c gibt als Koerzitivwert den Beginn des nichtlinearen Verhaltens an. Das Postulat zur Maximierung der Dissipation kann als Optimierungsproblem mit Nebenbedingung formuliert werden, siehe auch SIMO & HUGHES [111]. Dieses wird durch das Lagrange-Funktional

$$\mathcal{L} = -\mathcal{D}(\Xi) + \lambda \Phi(\Xi) \quad (6.23)$$

beschrieben. Die Nebenbedingung ist die Einhaltung der Schaltkriteriums $\Phi(\Xi)$. Das Schaltkriterium wird dabei durch den Lagrange Multiplikator λ berücksichtigt. Die Lösung des Optimierungsproblems findet sich im stationären Punkt des Funktionals. Es gelten die Bestimmungsgleichungen

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Xi} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \Phi(\Xi) = 0. \quad (6.24)$$

Die notwendigen Voraussetzungen für die Existenz eines lokalen Minimums des Lagrange-Funktional (6.23) wird in den Kuhn-Tucker-Bedingungen

$$\lambda \geq 0, \quad \Phi \leq 0, \quad \lambda \Phi = 0 \quad (6.25)$$

formuliert, siehe auch LUENBERGER [78]. Die Kuhn-Tucker-Bedingungen können als Belastungs- und Entlastungsbedingungen anschaulich interpretiert werden. Für $\Phi = 0$ gilt

$$\begin{aligned} \dot{\Phi} < 0 \quad \text{und} \quad \lambda = 0 &\rightarrow \text{reversible Domänenprozesse während Entlastung} \\ \dot{\Phi} = 0 \quad \text{und} \quad \lambda > 0 &\rightarrow \text{irreversible Wandverschiebungen durch Belastung} \\ \dot{\Phi} = 0 \quad \text{und} \quad \lambda = 0 &\rightarrow \text{neutrale Umlagerungen der Domänenstruktur.} \end{aligned}$$

Aus (6.24)₁ kann schließlich eine Evolutionsgleichung für \vec{H}^i im Fall von irreversiblen Domänenprozessen ($\Phi = 0$) gewonnen werden

$$\dot{\vec{H}}^i = 2 \lambda \frac{\Xi}{\vec{M}_c^2}. \quad (6.26)$$

Da sich das irreversible magnetische Feld immer in Richtung von \mathbf{e}_M einstellt, kann die interne Variable auf eine skalarwertige Größe $\alpha = (\vec{H}^i \cdot \mathbf{e}_M) / \vec{H}_s^i$ reduziert werden. Zudem kann \mathbf{e}_M in der konjugierten Größe Ξ isoliert werden, so dass auch an dieser Stelle eine skalarwertige Variable $\bar{\Xi}$ mit $\Xi = \bar{\Xi} \mathbf{e}_M$ verwendet werden kann, siehe auch (A1.1). Damit ergeben sich die bestimmenden Gleichungen des Optimierungsproblems zu

$$\dot{\alpha} = 2 \lambda \frac{\bar{\Xi}}{\vec{M}_c^2} \quad (6.27)$$

$$\Phi = \frac{\bar{\Xi}^2}{\vec{M}_c^2} - 1 = 0. \quad (6.28)$$

6.2.3 Integrationsalgorithmus

Die Bestimmung der internen Variable \vec{H}^i erfolgt durch eine inkrementelle Zeitintegration von (6.27) nach dem impliziten Euler-Rückwärts-Verfahren, da dieses unbedingt stabil ist. Die Zeit t wird in Zeitschritten diskretisiert. Es wird vorausgesetzt, dass der Zustand t_n vollständig bekannt ist. Wird ein Zuwachs der Verzerrungen $\Delta \mathbf{E}$ oder der magnetischen Feldstärke $\Delta \vec{H}$ aufgebracht, so müssen die Zustandsgrößen für den Zeitschritt t_{n+1} ermittelt werden. Dazu wird die Evolutionsgleichung (6.27) im Zeitintervall $[t_n, t_{n+1}]$ integriert und man erhält die

diskrete Form

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + 2 \gamma \frac{\bar{\bar{\Xi}}_{n+1}}{\bar{M}_c^2} \quad (6.29)$$

mit $\gamma = \lambda(t_{n+1} - t_n)$. Für den irreversiblen Prozess muss nach Gleichung (6.28) $\Phi_{n+1} = 0$ gelten. Das Schaltkriterium und Gleichung (6.29) ist als Funktion von \mathbf{T}_{n+1} auch von $\bar{\mathbf{H}}_{n+1}^i$ abhängig. Da $\bar{\mathbf{H}}_{n+1}^i$ unbekannt ist, wird für den ersten Iterationsschritt ein Versuchswert angenommen, siehe auch Tafel 6.1. Wird das Schaltkriterium mit dem Versuchswert erfüllt, so wird dieser für $\bar{\mathbf{H}}_{n+1}^i$ übernommen. Ist das nicht der Fall, so werden iterative Korrekturschritte mit Hilfe eines radialen Projektionsverfahrens durchgeführt, so dass der korrigierte Wert $\bar{\mathbf{H}}_{n+1}^i$ wieder auf der Schaltfläche liegt. Die Residuen für das Projektionsverfahren seien wie folgt definiert

$$\begin{aligned} R_a &= \alpha_{n+1} - \alpha_n - 2 \gamma \frac{\bar{\bar{\Xi}}_{n+1}}{\bar{M}_c^2} = 0 \\ R_b &= \frac{\bar{\bar{\Xi}}_{n+1}^2}{\bar{M}_c^2} - 1 = 0. \end{aligned} \quad (6.30)$$

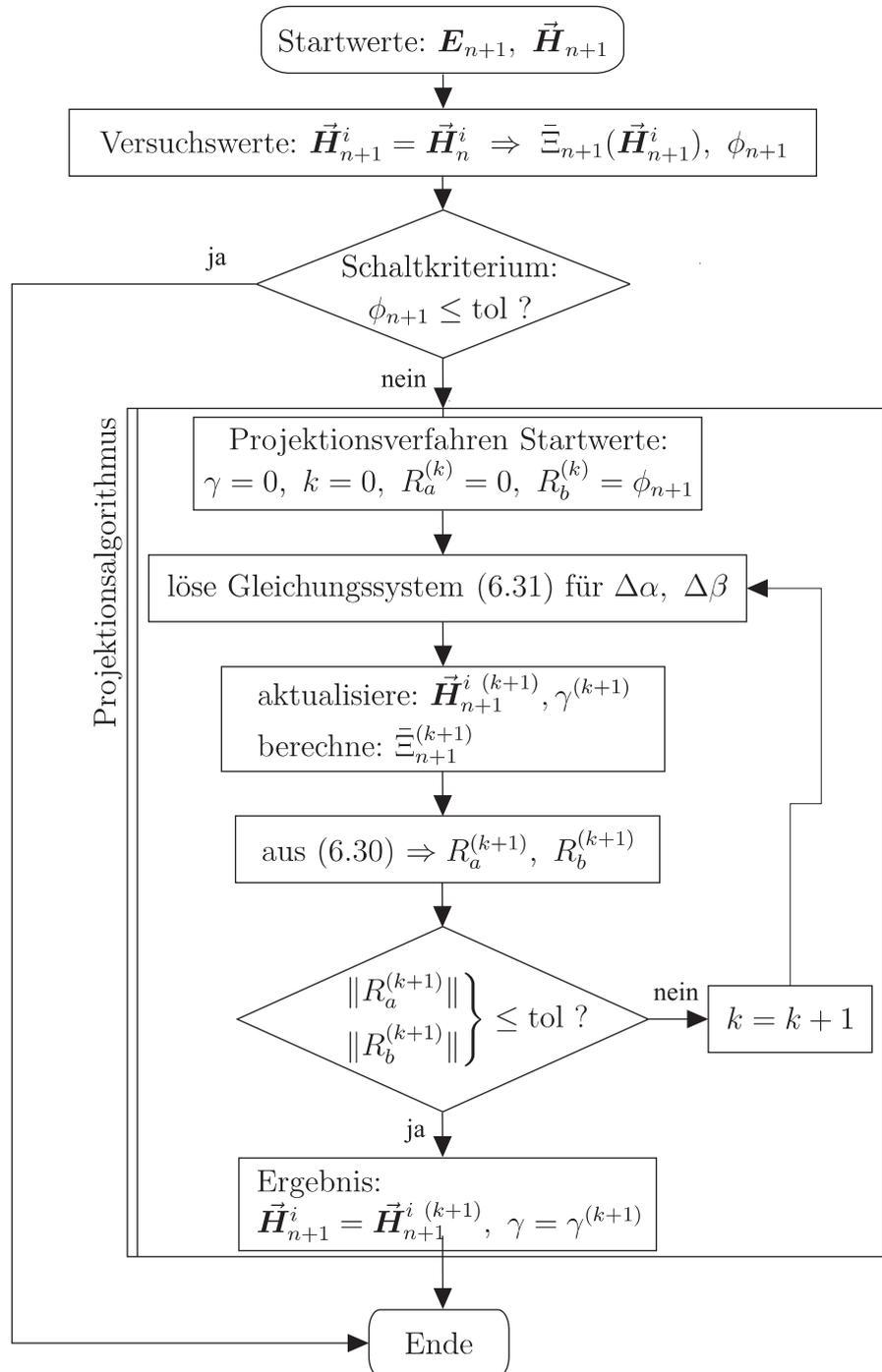
Die Iterationsvorschrift ergibt sich durch partielles Ableiten

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_a^{(k)}}{\partial \alpha_{n+1}} \Delta \alpha + \frac{\partial R_a^{(k)}}{\partial \gamma} \Delta \gamma &= -R_a^{(k)} \\ \frac{\partial R_b^{(k)}}{\partial \alpha_{n+1}} \Delta \alpha + \frac{\partial R_b^{(k)}}{\partial \gamma} \Delta \gamma &= -R_b^{(k)}. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Der Index (k) bezeichnet den Iterationsschritt. Die partiellen Ableitungen aus (6.31) sind im Anhang unter (A1.4) bis (A1.7) angegeben. Durch Lösen des Gleichungssystem (6.31) erhält man die Inkremente $\Delta \alpha$ und $\Delta \gamma$. Mit der Fortschreibungsvorschrift

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1}^{(k+1)} &= \alpha_{n+1}^{(k)} + \Delta \alpha \\ \gamma^{(k+1)} &= \gamma^{(k)} + \Delta \gamma \end{aligned} \quad (6.32)$$

werden dann die Eingangsgrößen für den nächsten Iterationsschritt berechnet.



Tafel 6.1: Lokales Iterationsschema für das nichtlineare Stoffgesetz

6.2.4 Verfestigungsfunktion

Die Verfestigungsfunktion $\rho\bar{\psi}$ repräsentiert die in der irreversiblen Variable gespeicherte Energie und bestimmt dadurch die Form der ferromagnetischen und der Schmetterlingshysterese. Sie wird in folgender Form gewählt

$$\rho\bar{\psi} := \frac{1}{2} k \alpha^2 + a \vec{H}_s^i \operatorname{arctanh} \left(\frac{\alpha}{b} \right) \alpha + \frac{1}{2} a b \vec{H}_s^i \ln \left(1 - \frac{\alpha^2}{b^2} \right). \quad (6.33)$$

Die Materialparameter k , a und b werden eingeführt und bestimmen das Verfestigungsverhalten. Für die erste und zweite partielle Ableitung folgt

$$\frac{\partial \rho\bar{\psi}}{\partial \vec{H}^i} = \left[k \vec{H}_s^i \alpha + a \operatorname{arctanh} \left(\frac{\alpha}{b} \right) \right] \mathbf{e}_M \quad (6.34)$$

$$\frac{\partial^2 \rho\bar{\psi}}{\partial \vec{H}^i \partial \vec{H}^i} = \left[k \vec{H}_s^i + \frac{a}{1 - \frac{\alpha^2}{b^2}} \right] \mathbf{I}. \quad (6.35)$$

Die Wahl der Verfestigungsfunktion wird anhand der ersten Ableitung begründet, da diese direkt in Ξ und damit in das Schaltkriterium (6.22) eingeht. Der erste Summand von (6.34) steht für eine lineare Verfestigung. Der zweite Anteil wächst durch die $\operatorname{arctanh}$ -Funktion im Bereich von α/b stark an und begrenzt damit das Wachstum von α . Dadurch kann eine Sättigung der Hysteresekurven erreicht werden, ohne dass ein zweites Schaltkriterium eingeführt werden muss.

Für die programmiertechnische Umsetzung ergeben sich durch die Verwendung der $\operatorname{arctanh}$ -Funktion Probleme, da der Rechner nur eine begrenzte Anzahl von Nachkommastellen mitnimmt (bei doppelter Genauigkeit in der Regel 14 Stellen). Der größte berechenbare Wert ist damit $\operatorname{arctanh}(x = 0.999\,999\,999\,999\,999)$. Bei größeren Werten von x kommt es zu einem Fließkommatafehler, da $\operatorname{arctanh}(1.0)$ nicht definiert ist. Allerdings kann die numerische Genauigkeit durch die Aufspaltung von x in zwei Variablen $x = x_i + x_z$ erheblich verbessert werden. Dabei gelte $x_i = \pm 1$. Durch Einsetzen in die Definition der Arctanh-Funktion $\operatorname{arctanh}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ folgt damit

$$\operatorname{arctanh}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x_z}{2 - x_z} \right) & \text{für } x_i = -1 \\ \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2 + x_z}{x_z} \right) & \text{für } x_i = +1. \end{cases} \quad (6.36)$$

Durch diese modifizierte Formulierung nähert sich die Variable x_z dem Wert 0, wenn x gegen ± 1 strebt. Dabei kann durch den Exponentialanteil der Fließkommatazahl eine wesentlich höhere Genauigkeit erzielt werden, die dann bei doppelter Präzision in der Größenordnung $\pm 1 \cdot 10^{-308}$ liegt.

6.2.5 Algorithmisch konsistente Tangente

Die numerische Lösung der Differentialgleichungen aus Tafel 5.1 erfordert bei nichtlinearen Materialmodellen ein iteratives Verfahren. Um quadratische Konvergenz zu erhalten wird das Newton-Raphson-Verfahren angewendet. Hierzu werden konsistente Linearisierungen der Spannungen und der magnetischen Flussdichte zum Zeitschritt t_{n+1} benötigt. Die Tangentenmoduli für das nichtlineare Materialmodell sind dabei durch

$$\tilde{\mathbf{C}}_{n+1} = \frac{\partial \mathbf{S}_{n+1}}{\partial \mathbf{E}_{n+1}} \quad (6.37)$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_{n+1} = -\frac{\partial \mathbf{S}_{n+1}}{\partial \vec{\mathbf{H}}_{n+1}} \quad (6.38)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{n+1} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}_{n+1}}{\partial \vec{\mathbf{H}}_{n+1}} \quad (6.39)$$

gegeben. Diese können mittels einer numerischen Differenzierung ermittelt werden, wie es z. B. im Modell von KLINKEL [68,67] zu finden ist. Dies hat allerdings einen erheblichen numerischen Aufwand zur Folge. Eine effizientere Formulierung ist möglich, wenn die Tangentenmoduli in geschlossener Form angegeben werden können. Für die Herleitung werden die Spannungen und die magnetische Flussdichte im Zeitschritt t_{n+1} ausgewertet, siehe auch WRIGGERS [135]. Man erhält nach (6.16) und (6.17)

$$\mathbf{S}_{n+1} = \mathbf{C} : \mathbf{E}_{n+1} + \alpha_{n+1} \mathbf{e} \cdot \vec{\mathbf{H}}_{n+1} - \mathbf{C} : \mathbf{I} E_s \alpha_{n+1}^2 \quad (6.40)$$

$$-\vec{\mathbf{B}}_{n+1} = \alpha_{n+1} \mathbf{e}^T : \mathbf{E}_{n+1} - \boldsymbol{\mu} \vec{\mathbf{H}}_{n+1} - \mathbf{e}^T : \mathbf{I} E_s \alpha_{n+1}^3 + \boldsymbol{\mu} \mathbf{e}_M \vec{H}_s^i \alpha_{n+1}. \quad (6.41)$$

Zur Bestimmung der Tangentenmoduli müssen die Terme, die von der internen Variable α_{n+1} abhängen, eliminiert werden. Dazu werden zunächst die totalen Differentiale von \mathbf{S}_{n+1} und $\vec{\mathbf{B}}_{n+1}$ notiert

$$d\mathbf{S}_{n+1} = \left. \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} : d\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \vec{\mathbf{H}}} d\vec{\mathbf{H}} + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \alpha} d\alpha \right|_{n+1} \quad (6.42)$$

$$d\vec{\mathbf{B}}_{n+1} = \left. \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial \mathbf{E}} : d\mathbf{E} + \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial \vec{\mathbf{H}}} d\vec{\mathbf{H}} + \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial \alpha} d\alpha \right|_{n+1}. \quad (6.43)$$

Die totale Ableitung von Φ_{n+1} muss für irreversibles Verhalten verschwinden

$$d\Phi_{n+1} = \frac{\partial \Phi_{n+1}}{\partial \bar{\Xi}_{n+1}} d\bar{\Xi}_{n+1} = \underbrace{\frac{2\bar{\Xi}_{n+1}}{M_c^2}}_{\neq 0} d\bar{\Xi}_{n+1} = 0. \quad (6.44)$$

Da der Multiplikant ungleich Null sein muss folgt

$$d\bar{\Xi}_{n+1} = \left[\frac{\partial \bar{\Xi}}{\partial \mathbf{E}} : d\mathbf{E} + \frac{\partial \bar{\Xi}}{\partial \vec{\mathbf{H}}} \cdot d\vec{\mathbf{H}} + \frac{\partial \bar{\Xi}}{\partial \alpha} d\alpha \right]_{n+1} = 0. \quad (6.45)$$

So kann aus Gleichung (6.45) eine Bestimmungsgleichung für $d\alpha_{n+1}$ gewonnen werden

$$d\alpha_{n+1} = \left[- \left[\frac{\partial \bar{\Xi}}{\partial \mathbf{E}} : d\mathbf{E} + \frac{\partial \bar{\Xi}}{\partial \vec{\mathbf{H}}} \cdot d\vec{\mathbf{H}} \right] \cdot \frac{1}{\frac{\partial \bar{\Xi}}{\partial \alpha}} \right]_{n+1}. \quad (6.46)$$

Wird die Gleichung (6.46) schließlich in (6.42) bzw. (6.43) eingesetzt, erhält man

$$d\mathbf{S}_{n+1} = \left[\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} - \frac{1}{\frac{\partial \bar{\Xi}}{\partial \alpha}} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \alpha} \otimes \frac{\partial \bar{\Xi}}{\partial \mathbf{E}} \right] : d\mathbf{E} + \left[\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \vec{\mathbf{H}}} - \frac{1}{\frac{\partial \bar{\Xi}}{\partial \alpha}} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \alpha} \otimes \frac{\partial \bar{\Xi}}{\partial \vec{\mathbf{H}}} \right] \cdot d\vec{\mathbf{H}} \quad (6.47)$$

$$d\vec{\mathbf{B}}_{n+1} = \left[\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial \mathbf{E}} - \frac{1}{\frac{\partial \bar{\Xi}}{\partial \alpha}} \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial \alpha} \otimes \frac{\partial \bar{\Xi}}{\partial \mathbf{E}} \right] : d\mathbf{E} + \left[\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial \vec{\mathbf{H}}} - \frac{1}{\frac{\partial \bar{\Xi}}{\partial \alpha}} \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial \alpha} \otimes \frac{\partial \bar{\Xi}}{\partial \vec{\mathbf{H}}} \right] \cdot d\vec{\mathbf{H}}. \quad (6.48)$$

Daraus folgen die Tangentenmoduli für das nichtlineare Materialmodell

$$\tilde{\mathbf{C}}_{n+1} = \mathbf{C} - \frac{1}{\frac{\partial \bar{\Xi}}{\partial \alpha}} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \alpha} \otimes \frac{\partial \bar{\Xi}}{\partial \mathbf{E}} \quad (6.49)$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_{n+1} = \alpha_{n+1} \mathbf{e} - \frac{1}{\frac{\partial \bar{\Xi}}{\partial \alpha}} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \alpha} \otimes \frac{\partial \bar{\Xi}}{\partial \vec{\mathbf{H}}} \quad (6.50)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{n+1} = \boldsymbol{\mu} - \frac{1}{\frac{\partial \bar{\Xi}}{\partial \alpha}} \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial \alpha} \otimes \frac{\partial \bar{\Xi}}{\partial \vec{\mathbf{H}}}. \quad (6.51)$$

Die benötigten partiellen Ableitungen sind im Anhang A unter (A1.8) bis (A1.11) angegeben.

6.3 Erweitertes Modell zur Erfassung ferrimagnetischer Hysteresen

Im folgenden Abschnitt wird das vorgestellte Materialgesetz so modifiziert, dass das Verhalten ferrimagnetischer Materialien abgebildet werden kann. In Abschnitt 3.3.4 wurde erläutert, dass diese Materialien aufgrund ihres Domänenaufbaus ein anderes Hystereseverhalten zeigen, siehe auch Abbildung 3.10. Die Abwandlung des Stoffgesetzes wird an zwei Stellen erfolgen:

- Einführung einer lokalen Beschreibung für das konstitutive Modell
- Modifizierung des Schaltkriteriums Φ

Einführung einer lokalen Beschreibung

Es soll angenommen werden, dass es sich bei der ferrimagnetischen Hysterese-kurve um zwei unabhängige ferromagnetische Hysteresen im ersten und dritten Quadranten handelt. Es wird deshalb eine Art lokale Beschreibung für das konstitutive Modell eingeführt. In Abbildung 6.3 ist dazu eine vereinfachte ferrimagnetische Hysterese-kurve dargestellt. Zur Abbildung der Teilhysteresen in den

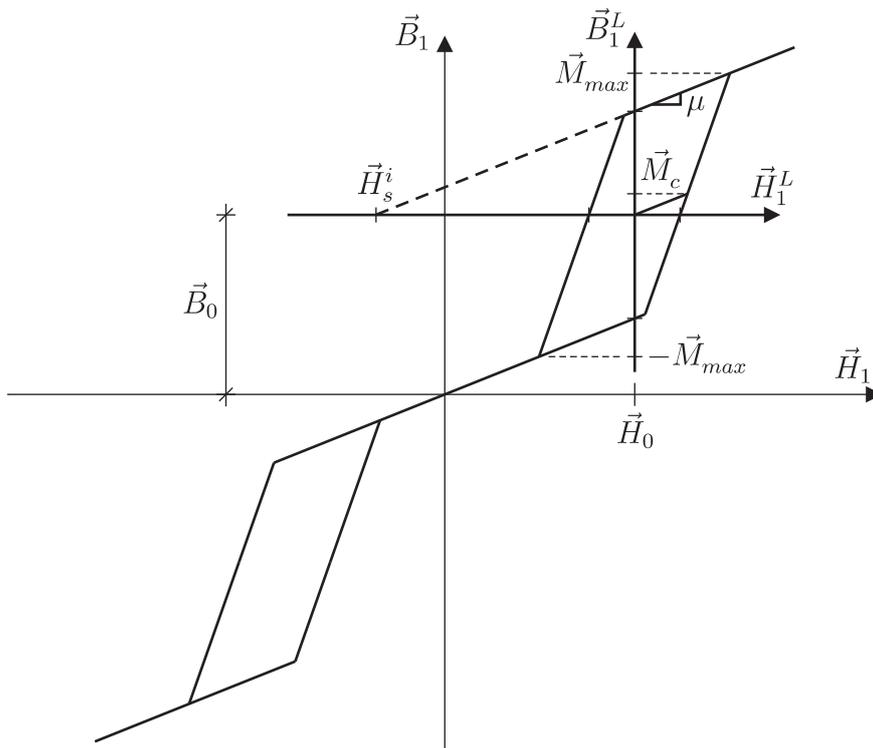


Abb. 6.3: Vereinfachte ferrimagnetische Hysterese mit Einführung einer lokalen Beschreibung

einzelnen Quadranten wird ein lokales Koordinatensystem eingeführt. Es sei so definiert, dass sein Ursprung im Mittelpunkt der rechten Hystereseschleife liegt. Die Feldgrößen in der lokalen Beschreibung werden durch den Index L gekennzeichnet. Es gilt

$$\vec{H}^L = \vec{H} - \vec{H}_0 g \mathbf{e}_M \quad (6.52)$$

$$\vec{H}^{Li} = \vec{H}^i + \vec{H}_s^i g \mathbf{e}_M. \quad (6.53)$$

Der Parameter \vec{H}_0 wird neu eingeführt und gibt den Versatz zwischen \vec{H} und \vec{H}^L an. Die skalarwertige Variable $g = \text{sign}(\vec{H} \cdot \mathbf{e}_M)$ steuert das Vorzeichen des Versatzes \vec{H}_0 und hängt vom externen magnetischen Feld \vec{H} ab. Auf diese Weise

können die Hysteresekurven im ersten und dritten Quadranten beschrieben werden. Der Versatz der Ordinatenachse \vec{B}_0 muss nicht spezifiziert werden, da die magnetische Flussdichte aus den konstitutiven Gleichungen gewonnen wird. Es sei an dieser Stelle noch einmal angemerkt, dass die lokalen Feldgrößen \mathbf{H}^L und $\vec{\mathbf{H}}^{Li}$ nur in das Materialgesetz eingehen. Die Feldgleichungen aus Tafel 5.1 bleiben unverändert. Weiterhin werden keine lokalen Verzerrungsgrößen eingeführt. Hier gelte weiterhin \mathbf{E} und \mathbf{E}^i , d. h. in der Eins-zu-eins-Beziehung (6.12) gehen weiterhin die globalen Größen $\vec{\mathbf{H}}$ und $\vec{\mathbf{H}}^i$ ein. Basierend auf den lokalen Größen wird die freie Energiefunktion

$$\begin{aligned} \rho\psi^L = & \frac{1}{2}(\mathbf{E} - \mathbf{E}^i) : \mathbb{C} : (\mathbf{E} - \mathbf{E}^i) + \frac{\vec{\mathbf{H}}^i \cdot \mathbf{e}_M}{\vec{H}_s^i} (\mathbf{E} - \mathbf{E}^i) : \mathbf{e} \cdot \vec{\mathbf{H}}^L \\ & - \frac{1}{2}(\vec{\mathbf{H}}^L - \vec{\mathbf{H}}^{Li}) \cdot \boldsymbol{\mu} (\vec{\mathbf{H}}^L - \vec{\mathbf{H}}^{Li}) + \rho\bar{\psi}(\vec{\mathbf{H}}^{Li}). \end{aligned} \quad (6.54)$$

definiert. Die reduzierte Dissipationsungleichung kann damit entsprechend (6.19) formuliert werden. Es folgt

$$\mathcal{D} = \Xi^L \cdot \vec{\mathbf{H}}^{Li} \geq 0 \quad (6.55)$$

mit

$$\Xi^L = - \left(2 \frac{E_s}{(\vec{H}_s^i)^2} \frac{\partial \rho\psi^L}{\partial \mathbf{E}^i} : \mathbf{I} (\vec{\mathbf{H}}^{Li} - \vec{H}_s^i g \mathbf{e}_M) + \frac{\partial \rho\psi^L}{\partial \vec{\mathbf{H}}^{Li}} \right). \quad (6.56)$$

Modifiziertes Schaltkriterium

Neben der Einführung der lokalen Beschreibung wird auch das Schaltkriterium modifiziert. Um einen kontinuierlichen Übergang beim Nulldurchgang von $\vec{\mathbf{H}}$ zu gewährleisten, soll in diesem Bereich reversibles Verhalten angenommen werden. Dies könnte durch das Einführen eines zweiten Schaltkriteriums erreicht werden, siehe hierzu auch KAMLAH [59]. Stattdessen wird (6.22) so abgewandelt, dass das Wachstum der Magnetisierung begrenzt ist. Dazu wird zunächst die Größe $\vec{\mathbf{M}}^L = \boldsymbol{\mu}(\vec{\mathbf{H}}^L - \vec{\mathbf{H}}^{Li})$ definiert, die dem ungekoppelten Magnetisierungszustand zugeordnet ist. Damit kann das modifizierte Schaltkriterium formuliert werden

$$\Phi^L = \text{sign}(\vec{M}_{max} - \|\vec{\mathbf{M}}^L\|) \frac{\Xi^L \cdot \Xi^L}{(\vec{M}_c)^2} - 1 \leq 0. \quad (6.57)$$

Wird der Betrag von $\vec{\mathbf{M}}^L$ größer als \vec{M}_{max} , so hat die Signum-Funktion ein negatives Vorzeichen und Φ^L wird kleiner als Null. Die Größe \vec{M}_{max} hängt von den Parametern der Verfestigungsfunktion (6.33) ab. Es gilt $\vec{M}_{max} = \vec{M}_c +$

$k\vec{H}_s^i + a/\operatorname{arctanh}(1/b)$. Damit ist gewährleistet, dass für $\vec{H}_1^L = -\vec{H}_0$ der Wert $\vec{B}_1^L = -\vec{B}_0$, also $\vec{B}_1 = 0$ erreicht wird. Aus (6.55) kann durch ein Lagrange-Funktional mit (6.57) als Nebenbedingung eine Evolutionsgleichung für \vec{H}^{Li} hergeleitet werden

$$\dot{\vec{H}}^{Li} = 2 \lambda \operatorname{sign}(\vec{M}_{max} - \|\vec{M}^L\|) \frac{\vec{\Xi}^L}{\vec{M}_c}. \quad (6.58)$$

Die Integration von (6.58) erfolgt mit dem impliziten Euler-Rückwärts-Verfahren analog zu Abschnitt 6.2.3. Hierbei ist zu beachten, dass die Eingangswerte \vec{H} und \vec{H}^i zunächst in die lokale Darstellung überführt werden müssen, siehe auch Tafel 6.2. Ist das modifizierte Schaltkriterium für einen Versuchswert erfüllt, so wird dieser für \vec{H}_{n+1}^{Li} übernommen, und es ist kein Korrekturschritt erforderlich. Ist Φ^L nicht erfüllt, so wird der Projektionsalgorithmus aus Tafel 6.1 mit \vec{H}^L und \vec{H}^{Li} angewendet. Es sei angemerkt, dass im Projektionsverfahren das unmodifizierte Schaltkriterium (6.22) verwendet wird. Dies ist möglich, da durch $\Phi^L > 0$ irreversibles Verhalten vorliegt, das auch während der Iteration erhalten bleiben soll. Dementsprechend kann auch die algorithmisch konsistente Tangente aus Abschnitt 6.2.5 unverändert verwendet werden.

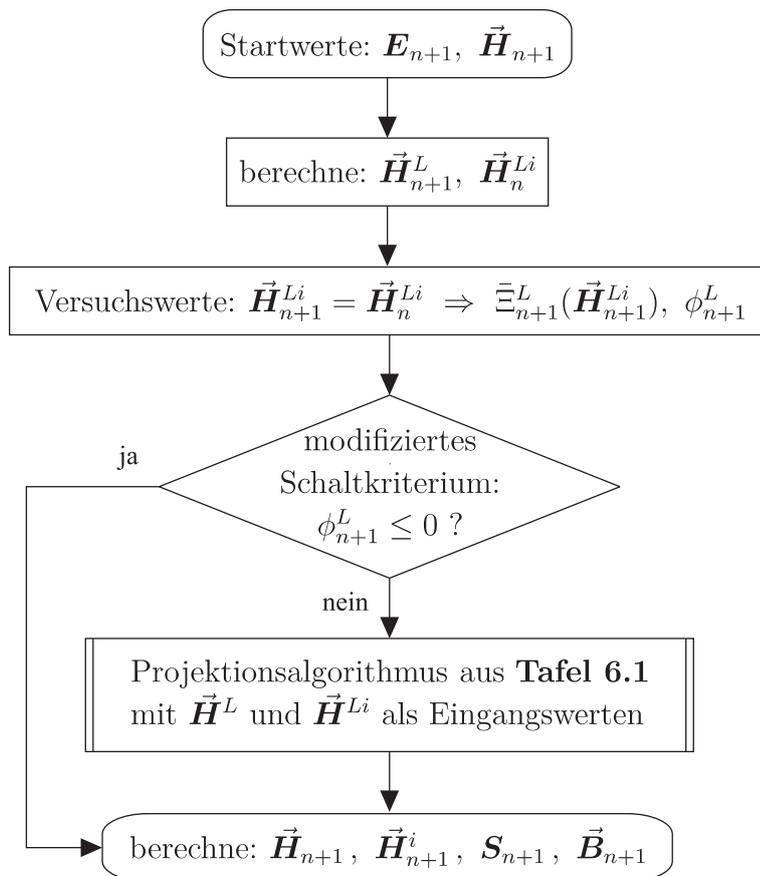
6.4 Konstitutives Modell für ferroelektrische Keramiken

Für die konstitutive Modellierung ferroelektrischer Keramiken wird der gleiche Ansatz verwendet, der auch für die magnetostriktiven Materialien angewandt wurde. Aufgrund der nahezu kongruenten Formulierung wird auf eine Herleitung verzichtet. Es werden nur die maßgebenden Gleichungen angegeben. Das lineare Stoffgesetz wird durch

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \rho \psi}{\partial \mathbf{E}} = \mathbf{C} : \mathbf{E} - \mathbf{e} \cdot \vec{\mathbf{E}} \quad (6.59)$$

$$-\vec{\mathbf{D}} = \frac{\partial \rho \psi}{\partial \vec{\mathbf{E}}} = -\mathbf{e}^T : \mathbf{E} - \epsilon \vec{\mathbf{E}}. \quad (6.60)$$

mit dem Permittivitätstensor ϵ und dem piezoelektrischen Koppeltensor \mathbf{e} beschrieben. Die nichtlineare Modellierung erfolgt auf Grundlage des unmodifizierten Modells, da dieses für die Erfassung der Hysteresekurven ferroelektrischer Keramiken ausreichend ist. Darüber hinaus wird auf eine Abbildung der ferroelastischen Hysterese sowie der mechanischen Depolarisation verzichtet. Die maßgebenden Gleichungen sind in Tafel 6.3 zu finden. Die Integration erfolgt entsprechend Abschnitt 6.2.3. Im Übrigen wird die Verfestigungsfunktion aus Abschnitt 6.2.4 verwendet.



Tafel 6.2: Lokales Iterationsschema für das modifizierte Stoffgesetz

Additive Aufspaltung analog zu (6.10):

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}^r + \vec{\mathbf{E}}^i \quad (6.61)$$

Freie Energiefunktion, siehe auch (6.15):

$$\begin{aligned} \rho\psi &= \frac{1}{2}(\mathbf{E} - \mathbf{E}^i) : \mathbb{C} : (\mathbf{E} - \mathbf{E}^i) + \frac{\vec{\mathbf{E}}^i \cdot \mathbf{e}_P}{\vec{E}_s^i} (\mathbf{E} - \mathbf{E}^i) : \mathbf{e} \cdot \vec{\mathbf{E}} \\ &\quad - \frac{1}{2}(\vec{\mathbf{E}} - \vec{\mathbf{E}}^i) \cdot \boldsymbol{\epsilon} (\vec{\mathbf{E}} - \vec{\mathbf{E}}^i) + \rho\bar{\psi}(\vec{\mathbf{E}}^i). \end{aligned} \quad (6.62)$$

Mechanische Spannungen und dielektrische Verschiebungen, siehe (6.16) und (6.17) mit dem Sättigungswert \vec{E}_s^i , der Polarisationsrichtung $\mathbf{e}_P = \vec{\mathbf{E}}^i / \|\vec{\mathbf{E}}^i\|$ und $\mathbf{E}^i = E_s / \vec{E}_s^i \vec{\mathbf{E}}^i \cdot \vec{\mathbf{E}}^i \mathbf{I}$:

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \rho\psi}{\partial \mathbf{E}} = \mathbb{C} : (\mathbf{E} - \mathbf{E}^i) + \frac{\vec{\mathbf{E}}^i \cdot \mathbf{e}_P}{\vec{E}_s^i} \mathbf{e} \cdot \vec{\mathbf{E}} \quad (6.63)$$

$$-\vec{\mathbf{D}} = \frac{\partial \rho\psi}{\partial \vec{\mathbf{E}}} = \frac{\vec{\mathbf{E}}^i \cdot \mathbf{e}_P}{\vec{E}_s^i} \mathbf{e}^T : (\mathbf{E} - \mathbf{E}^i) - \boldsymbol{\epsilon} (\vec{\mathbf{E}} - \vec{\mathbf{E}}^i). \quad (6.64)$$

Reduzierte Dissipation, siehe (6.19):

$$\mathcal{D} = - \left(2 \frac{E_s}{(\vec{E}_s^i)^2} \frac{\partial \rho\psi}{\partial \mathbf{E}^i} : \mathbf{I} \vec{\mathbf{E}}^i + \frac{\partial \rho\psi}{\partial \vec{\mathbf{E}}^i} \right) \cdot \dot{\vec{\mathbf{E}}}^i = \boldsymbol{\Xi} \cdot \dot{\vec{\mathbf{E}}}^i \geq 0. \quad (6.65)$$

Schaltkriterium analog (6.22) mit der Koerzitivpolarisation \vec{P}_c :

$$\Phi = \frac{\boldsymbol{\Xi} \cdot \boldsymbol{\Xi}}{\vec{P}_c^2} - 1 \leq 0, \quad (6.66)$$

Evolutionsgleichung analog zu (6.26):

$$\dot{\vec{\mathbf{E}}}^i = 2 \lambda \frac{\boldsymbol{\Xi}}{\vec{P}_c^2} \quad (6.67)$$

Verfestigungsfunktion mit $\alpha = \frac{\vec{\mathbf{E}}^i \cdot \mathbf{e}_P}{\vec{E}_s^i}$:

$$\rho\bar{\psi} := \frac{1}{2} k \alpha^2 + a \vec{E}_s^i \operatorname{arctanh} \left(\frac{\alpha}{b} \right) \alpha + \frac{1}{2} a b \vec{E}_s^i \ln \left(1 - \frac{\alpha^2}{b^2} \right), \quad (6.68)$$

Tafel 6.3: Nichtlineare konstitutive Modellierung ferroelektrischer Keramiken

7 Elementformulierungen

Das folgende Kapitel befasst sich mit der numerischen Lösung der Differentialgleichungen für die vorgestellten gekoppelten Probleme. Hierzu wird die Methode der finiten Elemente herangezogen. Die allgemeinen Grundlagen der Finite-Element-Methode sind in Lehrbüchern zu finden, siehe hierzu BATHE [7] und ZIENKIEWICZ & TALYOR [142]. Hier werden daher vorrangig Elementformulierungen für magnetostruktive bzw. piezoelektrische Probleme behandelt. Es werden unterschiedliche Formulierungen von Volumenelementen vorgestellt, und ihre numerischen Eigenschaften werden diskutiert. Dabei wird auf die Probleme eingegangen, die durch inkompatible Approximationsräume entstehen. Die Finite-Element-Methode basiert auf einer schwachen Form des Gleichgewichts, das zunächst mittels eines direkten Variationsprinzips formuliert wird. Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden die Betrachtungen exemplarisch für die magnetostruktive Kopplung angestellt. In Abschnitt 7.7 wird abschließend auf die Unterschiede bei der Formulierung piezoelektrischer Elemente eingegangen.

7.1 Randwertproblem

Die eingeführten Probleme werden durch ein System aus gekoppelten partiellen Differentialgleichungen beschrieben, die in Kapitel 2 und 5 erläutert wurden. Zur Lösung muss das sich ergebende Randwertproblem erfüllt werden, das für statische Probleme durch den folgenden Satz von Gleichungen bestimmt ist:

Geometrische Feldgleichungen

$$\mathbf{E} - \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}) = \mathbf{0} \quad \text{in } \mathcal{B}_0 \quad (7.1)$$

$$\vec{\mathbf{H}} + \nabla_X \phi_M = \mathbf{0} \quad \text{in } \mathcal{B}_0 \quad (7.2)$$

Bilanzgleichungen

$$\mathbf{F} \mathbf{S} \nabla_X + \rho_0 \mathbf{b}_0 = \mathbf{0} \quad \text{in } \mathcal{B}_0 \quad (7.3)$$

$$\vec{\mathbf{B}} \cdot \nabla_X = 0 \quad \text{in } \mathcal{B}_0 \quad (7.4)$$

Konstitutive Gleichungen

$$\mathbf{S} - \frac{\partial \rho \psi}{\partial \mathbf{E}} = \mathbf{0} \quad \text{in } \mathcal{B}_0 \quad (7.5)$$

$$\vec{\mathbf{B}} + \frac{\partial \rho \psi}{\partial \vec{\mathbf{H}}} = \mathbf{0} \quad \text{in } \mathcal{B}_0 \quad (7.6)$$

Die geometrischen Feldgleichungen gehen auf die Definition der Greenschen Verzerrungen (2.10) und der Einführung des magnetischen Skalarpotentials (2.39) zurück. Die Bilanzgleichungen sind durch die Cauchysche Bewegungsgleichung (5.9) und durch die Maxwellgleichung zur Quellenfreiheit des magnetischen Feldes gegeben. Die Form der konstitutiven Gleichungen wurde in Kapitel 6 diskutiert. Weiterhin sind Randbedingungen zu erfüllen. Es wird hier zwischen zwei Arten von Randbedingungen unterschieden. Ränder, auf denen eine Verschiebung $\bar{\mathbf{u}}$ oder ein magnetisches Potential $\bar{\phi}$ vorgegeben wird, werden als Dirichlet-Randbedingungen bezeichnet. Wird auf dem Rand dagegen eine Traktion \mathbf{t}_0 vorgegeben, so spricht man von einer Neumann-Randbedingung. Für die magnetische Flussdichte wird die Belastung mittels der in Abschnitt 2.3.2 eingeführten magnetischen Flächenladungsdichte vorgeschrieben. Es gilt daher $\vec{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{N} = \varsigma_{M0}$. Zusammengefasst erhält man damit die Randbedingungen

$$\mathbf{FS} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{t}_0 \quad \text{auf } \partial_t \mathcal{B}_0 \quad (7.7)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{auf } \partial_u \mathcal{B}_0 \quad (7.8)$$

$$\vec{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{N} = \varsigma_{M0} \quad \text{auf } \partial_\varsigma \mathcal{B}_0 \quad (7.9)$$

$$\phi_M = \bar{\phi}_M \quad \text{auf } \partial_\phi \mathcal{B}_0. \quad (7.10)$$

Auf den Rändern kann entweder eine Dirichlet-Randbedingungen oder eine Neumann-Randbedingung vorgegeben werden. Es folgt daher

$$\partial \mathcal{B}_0 = \partial_t \mathcal{B}_0 \cup \partial_u \mathcal{B}_0 \quad \text{und} \quad \emptyset = \partial_t \mathcal{B}_0 \cap \partial_u \mathcal{B}_0, \quad \text{sowie} \quad (7.11)$$

$$\partial \mathcal{B}_0 = \partial_\varsigma \mathcal{B}_0 \cup \partial_\phi \mathcal{B}_0 \quad \text{und} \quad \emptyset = \partial_\varsigma \mathcal{B}_0 \cap \partial_\phi \mathcal{B}_0. \quad (7.12)$$

7.2 Schwache Form des Gleichgewichts

Die schwache Form des Gleichgewichts ist eine äquivalente Formulierung der Bilanzgleichungen (7.3) und (7.4). In den Bilanzgleichungen wird gefordert, dass die Spannungen und die magnetische Flussdichte differenzierbar sind. Durch die Verwendung der schwachen Form kann diese starke Forderung an die Funktionen \mathbf{S} und $\vec{\mathbf{B}}$ abgemildert werden. Für die Formulierung wird das Prinzip der virtuellen Arbeit herangezogen. Das hat den Vorteil, dass es allgemein anwendbar ist und keine weiteren Annahmen, wie z. B. die Existenz einer übergeordneten Potentialfunktion, benötigt werden. Für die Herleitung werden die Gleichungen (7.3) und (7.4) mit den Testfunktionen $\delta \mathbf{u}$ und $\delta \phi$ multipliziert und über das

Gebiet integriert

$$\int_{\mathcal{B}_0} (\mathbf{F}\mathbf{S} \nabla_{\mathbf{X}} + \rho_0 \mathbf{b}_0) \cdot \delta \mathbf{u} \, dV = 0 \quad (7.13)$$

$$\int_{\mathcal{B}_0} (\vec{\mathbf{B}} \cdot \nabla_{\mathbf{X}}) \cdot \delta \phi \, dV = 0. \quad (7.14)$$

Die Testfunktionen $\delta \mathbf{u}$ und $\delta \phi$ werden auch als Wichtungsfunktionen bezeichnet. Sie können als eine gedachte, also virtuelle Verschiebung bzw. Veränderung des Skalarpotentials interpretiert werden. Durch partielle Integration, Anwendung des Divergenztheorems und die Ausnutzung der Symmetrie von \mathbf{S} erhält man

$$\int_{\partial \mathcal{B}_0} \delta \mathbf{u} \cdot (\mathbf{F}\mathbf{S})\mathbf{N} \, dA - \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} \, dV + \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \mathbf{b}_0 \cdot \delta \mathbf{u} \, dV = 0 \quad (7.15)$$

$$\int_{\partial \mathcal{B}_0} \delta \phi \vec{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{N} \, dA + \int_{\mathcal{B}_0} \vec{\mathbf{B}} \cdot \delta \vec{\mathbf{H}} \, dV = 0. \quad (7.16)$$

Die Größe $\delta \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \delta \mathbf{F} + \delta \mathbf{F}^T \mathbf{F})$ mit $\delta \mathbf{F} = \delta \mathbf{u} \otimes \nabla_{\mathbf{X}}$ gibt die Verzerrungen des virtuellen Verschiebungszustandes $\delta \mathbf{u}$ an, während $\delta \vec{\mathbf{H}} = -\nabla_{\mathbf{X}} \delta \phi$ dem durch $\delta \phi$ hervorgerufenen magnetischen Feld entspricht. Die Testfunktionen werden so gewählt, dass sie auf den Rändern verschwinden. Um die Lösbarkeit von (7.15) und (7.16) zu gewährleisten, müssen die Ableitungen der Lösungsfunktionen \mathbf{u} und ϕ_M sowie der Testfunktionen $\delta \mathbf{u}$ und $\delta \phi$ quadratisch integrierbar sein, siehe auch HUGHES [49] und ODEN & REDDY [90]. Diese Forderung wird durch eine Beschränkung auf den Sobolew-Funktionsraum $H^1(\mathcal{B}_0)$ befriedigt. Die Funktionsräume für die unbekanntenen Felder ergeben sich damit zu

$$\mathcal{U} = \{\mathbf{u} \in H^1(\mathcal{B}_0), \mathbf{u}|_{\partial_u \mathcal{B}_0} = \bar{\mathbf{u}}\} \quad (7.17)$$

$$\mathcal{V} = \{\phi_M \in H^1(\mathcal{B}_0), \phi_M|_{\partial_\phi \mathcal{B}_0} = \bar{\phi}_M\} \quad (7.18)$$

$$\delta \mathcal{U} = \{\delta \mathbf{u} \in H^1(\mathcal{B}_0), \delta \mathbf{u}|_{\partial_u \mathcal{B}_0} = \mathbf{0}\} \quad (7.19)$$

$$\delta \mathcal{V} = \{\delta \phi \in H^1(\mathcal{B}_0), \delta \phi|_{\partial_\phi \mathcal{B}_0} = 0\}. \quad (7.20)$$

Durch Einsetzen der konstitutiven Gleichungen (7.5) und (7.6) sowie unter Einbeziehung der Randbedingungen (7.7) und (7.9) ergibt sich aus (7.15) und (7.16) die schwache Form des Gleichgewichts

$$\begin{aligned} \delta \pi = & \int_{\mathcal{B}_0} \frac{\partial \rho \psi}{\partial \mathbf{E}} : \delta \mathbf{E} + \frac{\partial \rho \psi}{\partial \vec{\mathbf{H}}} \cdot \delta \vec{\mathbf{H}} - \rho_0 \mathbf{b}_0 \cdot \delta \mathbf{u} \, dV \\ & - \int_{\partial_t \mathcal{B}_0} \mathbf{t}_0 \cdot \delta \mathbf{u} \, dA - \int_{\partial_\zeta \mathcal{B}_0} \varsigma_{M0} \cdot \delta \phi \, dA = 0. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Für die schwache Form wird die Lösung für \mathbf{u} und ϕ_M gesucht. In (7.21) wird angenommen, dass die geometrischen Feldgleichungen und die konstitutiven Gleichungen explizit erfüllt sind. Im weiteren Verlauf dieses Kapitels werden andere Formulierungen vorgestellt, die diese Annahme nicht erfordern.

7.3 Elementformulierung

Der Grundgedanke bei der Methode der finiten Elemente ist die Diskretisierung des Gebiets \mathcal{B}_0 in endlich viele Teilgebiete \mathcal{B}_e mit $\mathcal{B}_0 = \bigcup_{e=1}^{nelm} \mathcal{B}_e$. Dabei gibt $nelm$ die Anzahl der verwendeten finiten Elemente an. Die Geometrie und die unbekanntes Feldgrößen werden mit Hilfe so genannter Ansatzfunktionen approximiert. Hierzu werden Lagrangepolynome verwendet, die in die Elementknoten projiziert werden. Je nach Ordnung der Polynome wird eine unterschiedliche Anzahl von Elementknoten nel benötigt. Für ein lineares Volumenelement mit $nel = 8$ lauten die trilinearen Ansatzfunktionen

$$N_I = \frac{1}{8}(1 + \xi_I \xi)(1 + \eta_I \eta)(1 + \zeta_I \zeta). \quad (7.22)$$

Die Ansatzfunktionen sind in den natürlichen Koordinaten $\xi, \eta, \zeta \in [-1; 1]$ definiert. Die Werte ξ_I, η_I, ζ_I geben die Koordinaten der Elementknoten an, siehe auch Abbildung 7.1a).

$$\begin{aligned} \xi_I &\in \{-1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, -1\} \\ \eta_I &\in \{-1, -1, -1, 1, -1, -1, 1, 1\} \\ \zeta_I &\in \{-1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, 1\}. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Für ein 27-Knoten Volumenelement werden quadratische Ansatzfunktionen verwendet. Es gilt

$$\begin{aligned} N_I &= \frac{\xi_I \xi \eta_I \eta \zeta_I \zeta}{8} (1 + \xi_I \xi)(1 + \eta_I \eta)(1 + \zeta_I \zeta) \quad , \quad I = 1 \dots 8 \\ N_I &= \frac{\eta_I \eta \zeta_I \zeta}{4} (1 - \xi^2)(1 + \eta_I \eta)(1 + \zeta_I \zeta) \\ &\quad + \frac{\xi_I \xi \zeta_I \zeta}{4} (1 + \xi_I \xi)(1 - \eta^2)(1 + \zeta_I \zeta) \\ &\quad + \frac{\xi_I \xi \eta_I \eta}{4} (1 + \xi_I \xi)(1 + \eta_I \eta)(1 - \zeta^2) \\ &\quad + \frac{\xi_I \xi}{2} (1 + \xi_I \xi)(1 - \eta^2)(1 - \zeta^2) \\ &\quad + \frac{\eta_I \eta}{2} (1 - \xi^2)(1 + \eta_I \eta)(1 - \zeta^2) \\ &\quad + \frac{\zeta_I \zeta}{2} (1 - \xi^2)(1 - \eta^2)(1 + \zeta_I \zeta) \quad , \quad I = 9 \dots 26 \\ N_I &= (1 - \xi^2)(1 - \eta^2)(1 - \zeta^2) \quad , \quad I = 27. \end{aligned} \quad (7.24)$$

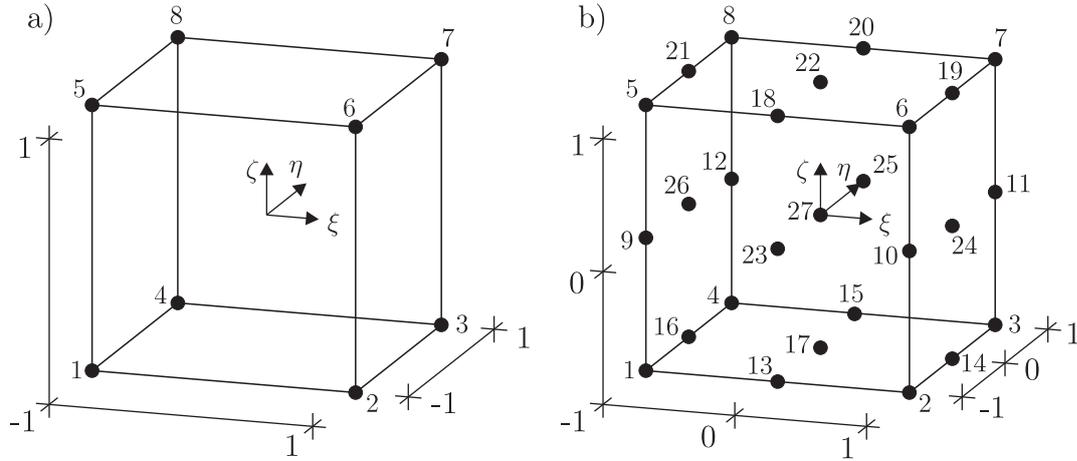


Abb. 7.1: Nummerierung der Elementknoten a) 8-Knoten Hexaeder-Element b) 27-Knoten Hexaeder-Element

Die Koordinaten der Elementknoten sind entsprechend Abbildung 7.1b) definiert

$$\begin{aligned}
 \xi_I &\in \{-1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, \\
 &\quad 0, 1, 0, -1, 0, 0, 1, 0, -1, 0, 0, 1, 0, -1, 0\} \\
 \eta_I &\in \{-1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, \\
 &\quad -1, 0, 1, 0, 0, -1, 0, 1, 0, 0, -1, 0, 1, 0, 0\} \\
 \zeta_I &\in \{-1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, \\
 &\quad -1, -1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0\}.
 \end{aligned} \tag{7.25}$$

Mit der Wahl der Ansatzfunktionen kann die Geometrie auf Elementebene approximiert werden

$$\mathbf{X}_e^h = \mathbf{N}\mathbf{Y}_e. \tag{7.26}$$

Die Matrix $\mathbf{N} = [\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \dots, \mathbf{N}_{nel}]$ mit $\mathbf{N}_I = \text{diag}[N_I, N_I, N_I]$ enthält dabei die gewählten Ansatzfunktionen, während in \mathbf{Y}_e die Knotenkoordinaten des Elementes gespeichert sind. Durch den Index h wird auf den Näherungscharakter der Lösung hingewiesen, während e für die Beschreibung auf Elementebene steht. Die Approximation der unbekannt Feldgrößen \mathbf{u}^h und ϕ^h sowie der Testfunktionen $\delta\mathbf{u}^h$ und $\delta\phi^h$ erfolgt über

$$\mathbf{u}_e^h = \mathbf{N} \mathbf{v}_e, \quad \phi_e^h = \mathbf{N}_\phi \varphi_e \quad \text{und} \tag{7.27}$$

$$\delta\mathbf{u}_e^h = \mathbf{N} \delta\mathbf{v}_e, \quad \delta\phi_e^h = \mathbf{N}_\phi \delta\varphi_e. \tag{7.28}$$

Die Vektoren $\mathbf{v}_e = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{nel}]^T$ und $\varphi_e = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{nel_\phi}]^T$ bzw. $\delta\mathbf{v}_e = [\delta\mathbf{v}_1, \delta\mathbf{v}_2, \dots, \delta\mathbf{v}_{nel}]^T$ und $\delta\varphi_e = [\delta\varphi_1, \delta\varphi_2, \dots, \delta\varphi_{nel_\phi}]^T$ bezeichnen die unbekannt bzw. virtuellen Knotenwerte des Elementes. Hierbei steht

\mathbf{v}_I für die drei Verschiebungen pro Knoten, und φ_I gibt den Wert des Potentials im Knoten an. Analoges gilt für $\delta\mathbf{v}_I$ und $\delta\varphi_I$. Die Ansatzfunktionen für ϕ_e^h werden durch $\mathbf{N}_\phi = [N_1, N_2, \dots, N_{nel_\phi}]$ charakterisiert. Durch die Unterscheidung von nel und nel_ϕ lässt die oben genannte Formulierung unterschiedliche Ansätze für Verschiebungen und magnetisches Skalarpotential zu. Im Sinne eines isoparametrischen Konzepts werden für \mathbf{X}_e^h und \mathbf{u}_e^h die gleichen Ansatzfunktionen verwendet. Der Greensche Verzerrungstensor wird in einem Vektor $\mathbf{E}_e^h = [E_{11}, E_{22}, E_{33}, 2E_{12}, 2E_{13}, 2E_{23}]_e^h{}^T$ angeordnet. Die gleiche Anordnung wird auch für die virtuelle Größe \mathbf{E}_e^h verwendet. Damit kann $\delta\mathbf{E}_e^h$ und $\delta\vec{\mathbf{H}}_e^h$ durch

$$\delta\mathbf{E}_e^h = \mathbf{B} \delta\mathbf{v}_e \quad \text{und} \quad \delta\vec{\mathbf{H}}_e^h = \mathbf{B}_\phi \delta\varphi_e \quad (7.29)$$

approximiert werden. Die Matrizen $\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_{nel}]$ und $\mathbf{B}_\phi = [\mathbf{B}_{\phi 1}, \mathbf{B}_{\phi 2}, \dots, \mathbf{B}_{\phi_{nel}}]$ bestehen aus den Ableitungen der entsprechenden Ansatzfunktionen mit

$$\mathbf{B}_I = \begin{bmatrix} N_{I,X_1} & 0 & 0 \\ 0 & N_{I,X_2} & 0 \\ 0 & 0 & N_{I,X_3} \\ N_{I,X_2} & N_{I,X_1} & 0 \\ N_{I,X_3} & 0 & N_{I,X_1} \\ 0 & N_{I,X_3} & N_{I,X_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{,X_1}^T N_{I,X_1} \\ \mathbf{u}_{,X_2}^T N_{I,X_2} \\ \mathbf{u}_{,X_3}^T N_{I,X_3} \\ \mathbf{u}_{,X_1}^T N_{I,X_2} + \mathbf{u}_{,X_2}^T N_{I,X_1} \\ \mathbf{u}_{,X_1}^T N_{I,X_3} + \mathbf{u}_{,X_3}^T N_{I,X_1} \\ \mathbf{u}_{,X_2}^T N_{I,X_3} + \mathbf{u}_{,X_3}^T N_{I,X_2} \end{bmatrix} \quad (7.30)$$

und

$$\mathbf{B}_{\phi I} = [N_{I,X_1}, N_{I,X_2}, N_{I,X_2}]^T. \quad (7.31)$$

Im ersten Summand von (7.30) sind die linearen Verzerrungsanteile von \mathbf{E} enthalten, während der zweite Summand die nichtlinearen Anteile beschreibt, die vom Verschiebungszustand \mathbf{u} abhängen. Die Ableitungen der Ansatzfunktionen hinsichtlich \mathbf{X} werden mit Hilfe der Abbildung

$$\nabla_X N_I = \mathbf{J}_e^{-1} \nabla_\xi N_I \quad (7.32)$$

berechnet. Hierbei kennzeichnet \mathbf{J}_e die Jacobi-Matrix

$$\mathbf{J}_e = \nabla_\xi \otimes (\mathbf{N}\mathbf{Y}_e) \quad \text{mit} \quad \nabla_\xi = \left[\frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial \eta}, \frac{\partial}{\partial \zeta} \right]^T. \quad (7.33)$$

Die Interpolationen (7.27) und (7.29) werden auch für die variierten Größen verwendet. Damit lässt sich die schwache Form (7.21) auf Elementebene mit dem Residualvektor \mathbf{R}_e approximieren

$$\delta\pi_e^h = \begin{bmatrix} \delta\mathbf{v}_e \\ \delta\varphi_e \end{bmatrix}^T \underbrace{\left[\int_{\mathcal{B}_e} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \frac{\partial \rho \psi}{\partial \mathbf{E}} \\ \mathbf{B}_\phi^T \frac{\partial \rho \psi}{\partial \vec{\mathbf{H}}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{N}^T \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} dV - \int_{\partial \mathcal{B}_e} \begin{bmatrix} \mathbf{N}^T \mathbf{t} \\ \mathbf{N}_\phi^T \zeta_{SM0} \end{bmatrix} dA \right]}_{\mathbf{R}_e^h}. \quad (7.34)$$

Nach dem Zusammenbau erhält man die globale schwache Form

$$\delta\pi^h = \bigcup_{e=1}^{nelm} \delta\pi_e^h \quad (7.35)$$

und das globale Residuum $\mathbf{R}^h = \bigcup_{e=1}^{nelm} \mathbf{R}_e^h$. Desweiteren können auch die unbekanntenen Knotenwerte zu $\delta\mathbf{v} = \bigcup_{e=1}^{nelm} \delta\mathbf{v}_e$ und $\delta\boldsymbol{\varphi} = \bigcup_{e=1}^{nelm} \delta\boldsymbol{\varphi}_e$ zusammengefasst werden.

Aufgrund des verwendeten Verzerrungsmaßes und des in Kapitel 6 formulierten nichtlinearen Stoffgesetzes kann (7.35) nur iterativ gelöst werden. Hierfür wird das Newton-Raphson-Verfahren verwendet. Die approximierte schwache Form wird durch eine Taylor-Reihe ersetzt, die nach dem linearen Glied abgebrochen wird

$$\mathbf{R}_{n+1}^{h(K)} + \left[\frac{\partial \mathbf{R}^{h(K)}}{\partial \mathbf{v}_{n+1}}, \frac{\partial \mathbf{R}^{h(K)}}{\partial \boldsymbol{\varphi}_{n+1}} \right] \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{v}_{n+1} \\ \Delta \boldsymbol{\varphi}_{n+1} \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (7.36)$$

Die inkrementellen Größen $\Delta \mathbf{v}$ und $\Delta \boldsymbol{\varphi}$ werden wie die virtuellen Größen $\delta \mathbf{v}$ und $\delta \boldsymbol{\varphi}$ approximiert. Folglich gilt auf Elementebene

$$\Delta \mathbf{E}_e = \mathbf{B} \Delta \mathbf{v}_e \quad \text{und} \quad \Delta \vec{\mathbf{H}}_e = \mathbf{B}_\phi \Delta \boldsymbol{\varphi}_e. \quad (7.37)$$

Um quadratische Konvergenz zu erhalten, muss die tangentielle Steifigkeit in jedem Iterationsschritt (K) ausgewertet werden. Auf Elementebene gilt

$$\mathbf{K}_{eT} := \left[\frac{\partial \mathbf{R}_e^{h(K)}}{\partial \mathbf{v}_{n+1}}, \frac{\partial \mathbf{R}_e^{h(K)}}{\partial \boldsymbol{\varphi}_{n+1}} \right] = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_e^{uu} & \mathbf{K}_e^{u\phi} \\ (\mathbf{K}_e^{u\phi})^T & \mathbf{K}_e^{\phi\phi} \end{bmatrix}_{n+1}^{(K)} \quad (7.38)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_e^{uu} &= \int_{\mathcal{B}_e} \mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{B} \, dV + \mathbf{G} & \mathbf{K}_e^{u\phi} &= \int_{\mathcal{B}_e} \mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{e}} \mathbf{B}_\phi \, dV \\ \mathbf{K}_e^{\phi\phi} &= \int_{\mathcal{B}_e} \mathbf{B}_\phi^T \tilde{\boldsymbol{\mu}} \mathbf{B}_\phi \, dV. \end{aligned} \quad (7.39)$$

Die Tangentenmoduli $\tilde{\mathbf{C}}$, $\tilde{\mathbf{e}}$ und $\tilde{\boldsymbol{\mu}}$ werden zum Zeitpunkt $n+1$ ausgewertet und aus den Gleichungen (6.49) bis (6.51) ermittelt. Weiterhin bezeichnet \mathbf{G} die geometrische Steifigkeit, die aus der nichtlinearen Beziehung zwischen Verschiebungen und Verzerrungen resultiert

$$\mathbf{G} = \int_{\mathcal{B}_e} \frac{\partial \mathbf{B}^T}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{S} \, dV = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & \dots & \mathbf{G}_{1nel} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{G}_{nel1} & \dots & \mathbf{G}_{nelnel} \end{bmatrix} \quad (7.40)$$

mit

$$\mathbf{G}_{IK} = \text{diag}[G_{IK}, G_{IK}, G_{IK}] \quad \text{und} \quad G_{IK} = \int_{\mathcal{B}_e} N_{I,M} S_{MN} N_{K,N} \, dV. \quad (7.41)$$

Die Größen $\tilde{\mathbb{C}}$, $\tilde{\mathbf{e}}$ und $\tilde{\boldsymbol{\mu}}$ entsprechen denjenigen aus Abschnitt 6.2.5.

Die vorliegende Elementformulierung zeigt bei Verwendung von trilinearen Interpolationspolynomen, also $nel = 8$, erhebliche Schwächen bei der Abbildung von Biegezuständen. Es kommt zu Versteifungs- oder Lockingeffekten, die aus einer Überschätzung der Steifigkeit der Struktur resultieren. Es werden unterschiedliche Arten von Versteifungseffekten unterschieden, wobei bei trilinearen Volumenelementen in der Regel das so genannte Schublocking dominiert. Hierbei entstehen bei Biegezuständen durch inkompatible Approximationen parasitäre Schubverzerrungen, die die Ergebnisse der Elementformulierung nahezu unbrauchbar machen. Versteifungseffekte sind bei mechanischen Problemen seit langem bekannt. Im englischen Sprachraum hat sich in diesem Zusammenhang der Begriff „Locking“ etabliert, siehe z. B. HUGHES [49]. Bei magnetostriktiven oder piezoelektrischen Materialien werden die Verzerrungen mit dem magnetischen bzw. elektrischen Feld gekoppelt. Daher können hier weitere Fehler auftreten, die auf inkompatiblen Approximationsräumen der verschiedenen Feldgrößen beruhen. Dies soll anhand eines Beispiels erläutert werden. In Abbildung 7.2 ist ein magnetostriktives Volumenelement dargestellt. Die Biegebeanspruchung wird durch ein Moment \mathbf{M} erzeugt. Unter Vernachlässigung der Querkontraktion ($\nu = 0$) reduzieren sich die linearen konstitutiven Gleichungen (6.5) auf

$$S_{11} = \mathbb{C}_{11}E_{11} - e_{13}\vec{H}_3. \quad (7.42)$$

Durch das aufgebrauchte Moment sind die Spannungen S_{11} linear über die Höhe X_3 verteilt. Um Kompatibilität in (7.42) zu gewährleisten, müssen auch die Ver-

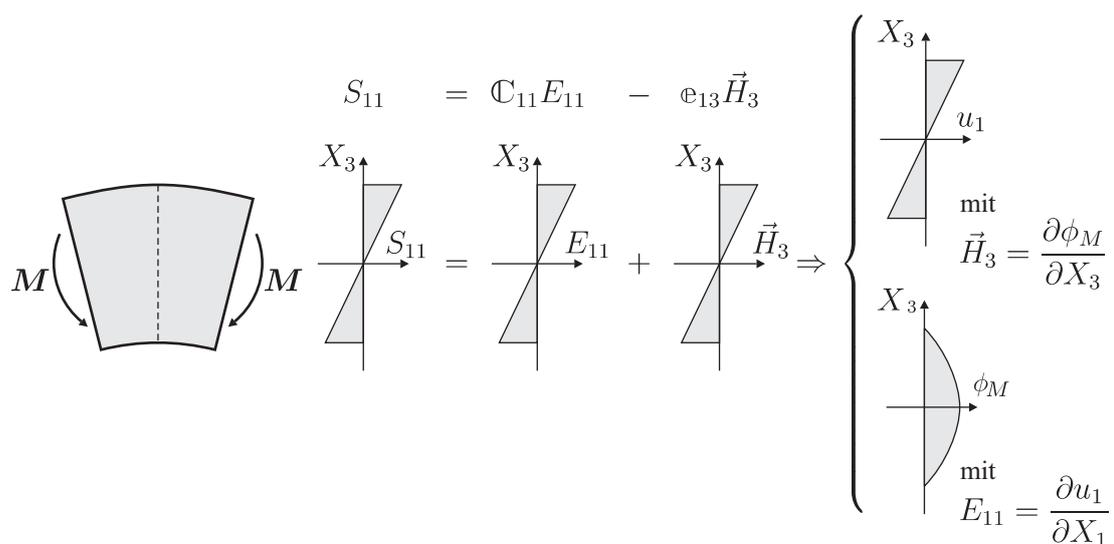


Abb. 7.2: Magnetostriktives Volumenelement unter Biegebeanspruchung

zerrungsanteile E_{11} und das magnetische Feld \vec{H}_3 linear in X_3 -Richtung verlaufen. Über die implizite Definition der Verzerrungen und des magnetischen Feldes kann weiterhin auf den Verlauf der Verschiebungen und des magnetischen Skalarpotentials geschlossen werden. Damit ergibt sich u_1 als lineare Funktion über X_3 , während sich ϕ_M als Parabel einstellt. Die trilinearen Ansatzfunktionen können das quadratische Skalarpotential nicht abbilden. Es kann stattdessen nur ein konstantes \vec{H}_3 in X_3 -Richtung interpoliert werden. Die Approximation von \vec{H}_3 ist damit inkompatibel zur Approximation von E_{11} . Als Resultat wird ϕ_M Null und die Verschiebungen u_1 werden überschätzt.

Zur Reduzierung von Lockingeffekten können im vorliegenden Beispiel quadratische Funktionen zur Interpolation des Skalarpotentials verwendet werden. Das Grundproblem der inkompatiblen Approximationen bleibt allerdings prinzipiell bestehen und kann bei anderen Belastungszuständen erneut auftreten. Eine andere Möglichkeit, den mechanischen Versteifungseffekten zu begegnen, ist die *Enhanced-Assumed-Strain*-Methode (EAS). Im Folgenden wird die bestehende Elementformulierung durch einen EAS-Ansatz erweitert, während für die Approximation des Potentials auf eine quadratische Interpolation in alle Richtungen zurückgegriffen wird.

7.4 Enhanced-Assumed-Strain-Formulierung

Die EAS-Methode wurde erstmals von SIMO & RIFAI [112] vorgestellt. Eine Erweiterung auf geometrisch nichtlineare Probleme ist in SIMO & ARMERO [109] und in SIMO ET AL. [110] zu finden. Der Grundgedanke ist eine Erweiterung des Greenschen Verzerrungstensors durch einen zusätzlichen Anteil $\check{\mathbf{E}}$. Dieser Anteil dient einer Verbesserung der unzureichenden Verzerrungsinterpolation. Die modifizierten Verzerrungen ergeben sich zu

$$\check{\mathbf{E}} = \mathbf{E} + \tilde{\mathbf{E}}. \quad (7.43)$$

$\check{\mathbf{E}}$ geht in die konstitutiven Gleichungen (7.5) und (7.6) ein. Weiterhin soll (7.5) nicht mehr explizit erfüllt werden, sondern implizit durch die Variationsgleichung

$$\int_{\mathcal{B}_0} \left(\mathbf{S} - \frac{\partial \rho \psi}{\partial \check{\mathbf{E}}} \right) : \delta \check{\mathbf{E}} \, dV = 0 \quad (7.44)$$

berücksichtigt werden. Für die Wichtungsfunktion $\delta \check{\mathbf{E}}$ wird ein additiver Zusammenhang entsprechend (7.43) angenommen

$$\delta \check{\mathbf{E}} = \delta \mathbf{E} + \delta \tilde{\mathbf{E}}. \quad (7.45)$$

Die erweiterten Verzerrungen $\tilde{\mathbf{E}}$ und die zugehörige Testfunktion $\delta\tilde{\mathbf{E}}$ seien quadratintegrierbar, d. h. $\tilde{\mathbf{E}}, \delta\tilde{\mathbf{E}} \in L^2[\mathcal{B}_0]$ und werden zunächst völlig unabhängig angenommen. Zur Minimierung von $\tilde{\mathbf{E}}$ wird eine weitere Variationsgleichung mit einer zugehörigen Wichtungsfunktion $\delta\mathbf{S}$ eingeführt

$$\int_{\mathcal{B}_0} (\mathbf{E} - \tilde{\mathbf{E}}) : \delta\mathbf{S} \, dV = 0. \quad (7.46)$$

Der Gleichung (7.46) kann eine zugehörige Feldgleichung $\tilde{\mathbf{E}} = 0$ zugeordnet werden, die allerdings nur für das kontinuumsmechanische Problem erfüllt wird. Bei der Finite-Element-Interpolation ergeben sich hier Werte aus inkompatiblen Approximationsräumen. Wird (7.45) in (7.44) eingesetzt und mit Variationsgleichungen (7.15), (7.16) und (7.46) zusammengefasst, so erhält man die modifizierte schwache Form

$$\begin{aligned} \delta\pi = & \int_{\mathcal{B}_0} \frac{\partial\rho\psi}{\partial\tilde{\mathbf{E}}} : \delta\mathbf{E} + \frac{\partial\rho\psi}{\partial\tilde{\mathbf{E}}} : \delta\tilde{\mathbf{E}} + \frac{\partial\rho\psi}{\partial\tilde{\mathbf{H}}} \cdot \delta\tilde{\mathbf{H}} - \mathbf{S} : \delta\tilde{\mathbf{E}} - \delta\mathbf{S} : \tilde{\mathbf{E}} \, dV \\ & - \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \mathbf{b}_0 \cdot \delta\mathbf{u} \, dV - \int_{\partial_t \mathcal{B}_0} \mathbf{t}_0 \cdot \delta\mathbf{u} \, dA - \int_{\partial_\zeta \mathcal{B}_0} \varsigma_{M0} \delta\phi \, dA = 0, \end{aligned} \quad (7.47)$$

die als Grundlage für die EAS-Elementformulierung dient. Die Approximation von Geometrie, Verschiebungen, Skalarpotential und den zugehörigen Wichtungsfunktionen wird analog zur Elementformulierung des vorherigen Abschnitts durchgeführt. Die Interpolation von $\tilde{\mathbf{E}}$ wird so gewählt, dass zwischen den erweiterten Verzerrungen und dem Spannungstensor stets Orthogonalität gilt. Dadurch verschwinden in (7.47) die Anteile $\mathbf{S} : \delta\tilde{\mathbf{E}}$ und $\delta\mathbf{S} : \tilde{\mathbf{E}}$. Um Orthogonalität auch bei verzierter Elementgeometrie gewährleisten zu können, muss die Interpolation auf den Elementmittelpunkt ($\xi, \eta, \zeta = 0$) bezogen werden. Es gelte

$$\tilde{\mathbf{E}} = \frac{\det \mathbf{J}_0}{\det \mathbf{J}} (\mathbf{T}_S^0)^{-T} \mathbf{M}_E \boldsymbol{\alpha}_E \quad \text{und} \quad \delta\tilde{\mathbf{E}} = \frac{\det \mathbf{J}_0}{\det \mathbf{J}} (\mathbf{T}_S^0)^{-T} \mathbf{M}_E \delta\boldsymbol{\alpha}_E. \quad (7.48)$$

Die Matrix \mathbf{M} enthält die Interpolationen für die internen Freiheitsgrade $\boldsymbol{\alpha}_E$. Die mit dem Index 0 gekennzeichneten Größen beziehen sich auf den Elementmittelpunkt. Für die Transformation in die Elementknoten wird die Transformationsmatrix

$$\mathbf{T}_S^0 = \begin{bmatrix} J_{110}^2 & J_{210}^2 & J_{310}^2 & 2J_{110}J_{210} & 2J_{110}J_{310} & 2J_{210}J_{310} \\ J_{120}^2 & J_{220}^2 & J_{320}^2 & 2J_{120}J_{220} & 2J_{120}J_{320} & 2J_{220}J_{320} \\ J_{130}^2 & J_{230}^2 & J_{330}^2 & 2J_{130}J_{230} & 2J_{130}J_{330} & 2J_{230}J_{330} \\ J_{110}J_{120} & J_{210}J_{220} & J_{310}J_{320} & J_{110}J_{220} + J_{210}J_{120} & J_{110}J_{320} + J_{310}J_{120} & J_{210}J_{320} + J_{310}J_{220} \\ J_{110}J_{130} & J_{210}J_{230} & J_{310}J_{330} & J_{110}J_{230} + J_{210}J_{130} & J_{110}J_{330} + J_{310}J_{130} & J_{210}J_{330} + J_{310}J_{230} \\ J_{120}J_{130} & J_{220}J_{230} & J_{320}J_{330} & J_{120}J_{130} + J_{220}J_{230} & J_{120}J_{230} + J_{220}J_{130} & J_{220}J_{330} + J_{320}J_{230} \end{bmatrix} \quad (7.49)$$

gebildet. Hierbei geben die Größen J_{ik_0} die Einträge der Jacobimatrix \mathbf{J}_0 an, siehe auch (7.33). Aus der Orthogonalität von \mathbf{S} und $\tilde{\mathbf{E}}$ kann weiterhin eine Bedingung für die Wahl der Interpolationsmatrix \mathbf{M}_E gewonnen werden. Unter der Voraussetzung, dass die Orthogonalität auch bei konstanten Spannungszuständen gelten muss, kann \mathbf{S} aus $\int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{S} : \delta \tilde{\mathbf{E}} \, dV = 0$ herausgezogen werden und man erhält

$$\int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{M}_E(\xi, \eta, \zeta) \, dV = 0. \quad (7.50)$$

Es können unterschiedliche Ansätze für \mathbf{M}_E gewählt werden. Durch eine Interpolationsmatrix \mathbf{M}_E^{30} mit 30 internen Parametern werden sämtliche Verzerrungskomponenten verbessert, siehe auch KLINKEL & WAGNER [70] und ANDELFIN-GER & RAMM [4].

$$\mathbf{M}_E^{30} = \begin{bmatrix} \xi & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & \xi\eta & \xi\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & | \\ 0 & \eta & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & \xi\eta & \eta\zeta & 0 & 0 & | \\ 0 & 0 & \zeta & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi\zeta & \eta\zeta & | \\ 0 & 0 & 0 & | & \xi & \eta & 0 & 0 & 0 & 0 & | & \xi\eta & \eta\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & \xi & \zeta & 0 & 0 & | & 0 & 0 & \xi\eta & \eta\zeta & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & \zeta & | & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi\eta & \xi\zeta & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | \\ & & & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & | & \xi\eta\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | \\ & & & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & | & 0 & \xi\eta\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | \\ & & & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & \xi\eta\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | \\ & & & & & & & & & & & \xi\eta & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & \xi\eta\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & | \\ & & & & & & & & & & & 0 & \xi\zeta & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi\eta\zeta & 0 & 0 & | \\ & & & & & & & & & & & 0 & 0 & \eta\zeta & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi\eta\zeta & | \end{bmatrix} \quad (7.51)$$

Zur Verkürzung der Notation wird im Folgenden

$$\tilde{\mathbf{M}}_E = \frac{\det \mathbf{J}_0}{\det \mathbf{J}} (\mathbf{T}_E^0)^{-T} \mathbf{M}_E^{30} \quad (7.52)$$

verwendet. Für die Approximation der modifizierten schwachen Form auf Elementebene gilt die Gleichung

$$\delta \pi_e^h = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{v}_e \\ \delta \boldsymbol{\varphi}_e \\ \delta \boldsymbol{\alpha}_E \end{bmatrix}^T \underbrace{\left[\int_{\mathcal{B}_e} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \frac{\partial \rho \psi}{\partial \tilde{\mathbf{E}}} \\ \mathbf{B}_\phi^T \frac{\partial \rho \psi}{\partial \tilde{\mathbf{H}}} \\ \tilde{\mathbf{M}}_E^T \frac{\partial \rho \psi}{\partial \tilde{\mathbf{E}}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{N}^T \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} dV - \int_{\partial \mathcal{B}_e} \begin{bmatrix} \mathbf{N}^T \mathbf{t} \\ \mathbf{N}_\phi^T \zeta_{M0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} dA \right]}_{R_e^h}. \quad (7.53)$$

Für die iterative Lösung wird die tangentielle Steifigkeitsmatrix entsprechend (7.38) definiert. Es folgt

$$\mathbf{K}_{eT} := \left[\frac{\partial \mathbf{R}_e^{h(K)}}{\partial \mathbf{v}_{n+1}}, \frac{\partial \mathbf{R}_e^{h(K)}}{\partial \boldsymbol{\varphi}_{n+1}}, \frac{\partial \mathbf{R}_e^{h(K)}}{\partial \boldsymbol{\alpha}_{n+1}} \right] = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_e^{uu} & \mathbf{K}_e^{u\phi} & \mathbf{K}_e^{u\alpha} \\ (\mathbf{K}_e^{u\phi})^T & \mathbf{K}_e^{\phi\phi} & \mathbf{K}_e^{\phi\alpha} \\ (\mathbf{K}_e^{u\alpha})^T & (\mathbf{K}_e^{\phi\alpha})^T & \mathbf{K}_e^{\alpha\alpha} \end{bmatrix}_{n+1}^{(K)} \quad (7.54)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_e^{u\alpha} &= \int_{\mathcal{B}_e} \mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{M}}_E \, dV & \mathbf{K}_e^{\phi\alpha} &= \int_{\mathcal{B}_e} \mathbf{B}_\phi^T \tilde{\mathbf{e}} \tilde{\mathbf{M}}_E \, dV \\ \mathbf{K}_e^{\alpha\alpha} &= \int_{\mathcal{B}_e} \tilde{\mathbf{M}}_E^T \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{M}}_E \, dV. \end{aligned} \quad (7.55)$$

Da an die internen Parameter $\boldsymbol{\alpha}_E$ keine Anforderungen bezüglich der Kontinuität über die Elementgrenzen gestellt werden, können sie auf Elementebene kondensiert werden. Man erhält die kondensierte tangentielle Steifigkeit

$$\tilde{\mathbf{K}}_{eT} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_e^{uu} - \mathbf{K}_e^{u\alpha} (\mathbf{K}_e^{\alpha\alpha})^{-1} (\mathbf{K}_e^{u\alpha})^T & \mathbf{K}_e^{u\phi} - \mathbf{K}_e^{u\alpha} (\mathbf{K}_e^{\alpha\alpha})^{-1} (\mathbf{K}_e^{\phi\alpha})^T \\ \mathbf{K}_e^{\phi u} - \mathbf{K}_e^{\phi\alpha} (\mathbf{K}_e^{\alpha\alpha})^{-1} (\mathbf{K}_e^{u\alpha})^T & \mathbf{K}_e^{\phi\phi} - \mathbf{K}_e^{\phi\alpha} (\mathbf{K}_e^{\alpha\alpha})^{-1} (\mathbf{K}_e^{\phi\alpha})^T \end{bmatrix}_{n+1}^{(K)} \quad (7.56)$$

und das reduzierte Residuum

$$\tilde{\mathbf{R}}_e^h = \int_{\mathcal{B}_e} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \frac{\partial \rho \psi}{\partial \tilde{\mathbf{E}}} + \mathbf{K}_e^{u\alpha} (\mathbf{K}_e^{\alpha\alpha})^{-1} \tilde{\mathbf{M}}_E^T \frac{\partial \rho \psi}{\partial \tilde{\mathbf{E}}} \\ \mathbf{B}_\phi^T \frac{\partial \rho \psi}{\partial \tilde{\mathbf{H}}} + \mathbf{K}_e^{u\alpha} (\mathbf{K}_e^{\alpha\alpha})^{-1} \tilde{\mathbf{M}}_E^T \frac{\partial \rho \psi}{\partial \tilde{\mathbf{E}}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{N}^T \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \, dV - \int_{\partial \mathcal{B}_e} \begin{bmatrix} \mathbf{N}^T \mathbf{t} \\ \mathbf{N}_\phi^T \zeta_{M0} \end{bmatrix} \, dA. \quad (7.57)$$

Nach dem Zusammenbau kann die globale schwache Form $\delta \pi^h$ approximiert werden. Es sei angemerkt, dass die internen Parameter $\boldsymbol{\alpha}_E$ auf globaler Ebene nicht auftreten. Allerdings wird $\boldsymbol{\alpha}_E$ für die Berechnung der Verzerrungen und damit auch für die Spannungsrückrechnung benötigt. Es erfolgt daher nach jedem Lastschritt n eine Aktualisierung von $\boldsymbol{\alpha}_E$ nach der Vorschrift

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_{En+1} &= \boldsymbol{\alpha}_{En} + \Delta \boldsymbol{\alpha}_{En+1} \quad \text{mit} \\ \Delta \boldsymbol{\alpha}_{En+1} &= -(\mathbf{K}_e^{\alpha\alpha})^{-1} \mathbf{K}_e^{\alpha u} \Delta \mathbf{v}_{n+1} - (\mathbf{K}_e^{\alpha\alpha})^{-1} \mathbf{K}_e^{\alpha \phi} \Delta \boldsymbol{\varphi}_{n+1} \\ &\quad + (\mathbf{K}_e^{\alpha\alpha})^{-1} \tilde{\mathbf{M}}_E^T \frac{\partial \rho \psi}{\partial \tilde{\mathbf{E}}}. \end{aligned} \quad (7.58)$$

Das EAS-Element besitzt die gleiche Anzahl von Freiheitsgraden, wie das Standardelement aus Abschnitt 7.3. Es bietet jedoch wesentliche Vorteile bei der Abbildung von Biegezuständen. Für die Interpolation des Skalarpotentials müssen jedoch weiterhin quadratische Polynome mit 27 Freiheitsgraden verwendet werden, um Lockingeffekte zu vermeiden. Im folgenden Abschnitt wird daher eine modifizierte Enhanced-Assumed-Strain-Formulierung vorgestellt, bei der auch das magnetische Feld durch die Einführung weiterer interner Freiheitsgrade besser approximiert wird.

7.5 Verbesserte Interpolation der magnetischen Feldstärke

Da der Verbesserung der Approximationen von $\vec{\mathbf{H}}$ die gleiche Idee zugrunde liegt, wie für die schon vorgestellte EAS-Methode, wird die Formulierung in kompakter Form erfolgen. Analog zur EAS-Methode wird die Approximation des magnetischen Feldes $\vec{\mathbf{H}}$ durch eine modifizierte magnetische Feldstärke $\check{\vec{\mathbf{H}}}$ erweitert

$$\check{\vec{\mathbf{H}}} = \vec{\mathbf{H}} + \tilde{\vec{\mathbf{H}}}. \quad (7.59)$$

Die verbesserte magnetische Feldstärke $\check{\vec{\mathbf{H}}}$ geht in die konstitutive Gleichung (7.6) ein, die durch die Variationsgleichung

$$\int_{\mathcal{B}_0} \left(\vec{\mathbf{B}} + \frac{\partial \rho \psi}{\partial \check{\vec{\mathbf{H}}}} \right) : \delta \check{\vec{\mathbf{H}}} \, dV = 0 \quad (7.60)$$

implizit berücksichtigt wird. Die Wahl des erweiterten magnetischen Feldes erfolgt durch die Feldgleichung $\vec{\mathbf{H}} = \mathbf{0}$, die als integrale Bedingung über

$$\int_{\mathcal{B}_0} (\vec{\mathbf{H}} - \check{\vec{\mathbf{H}}}) : \delta \vec{\mathbf{B}} \, dV = 0 \quad (7.61)$$

in die Formulierung eingeht. Weiterhin wird ein additiver Zusammenhang für die Wichtungsfunktionen festgelegt

$$\delta \check{\vec{\mathbf{H}}} = \delta \vec{\mathbf{H}} + \delta \tilde{\vec{\mathbf{H}}}. \quad (7.62)$$

Für die zusätzlichen Funktionen gelte wieder $\tilde{\vec{\mathbf{H}}}$, $\delta \tilde{\vec{\mathbf{H}}} \in L^2(\mathcal{B}_0)$. Damit sind die maßgebenden Gleichungen festgelegt, und die modifizierte schwache Form kann entsprechend dem vorherigen Abschnitt angegeben werden

$$\begin{aligned} \delta \pi = & \int_{\mathcal{B}_0} \frac{\partial \rho \psi}{\partial \check{\vec{\mathbf{E}}}} : \delta \check{\vec{\mathbf{E}}} + \frac{\partial \rho \psi}{\partial \check{\vec{\mathbf{E}}}} : \delta \tilde{\vec{\mathbf{E}}} + \frac{\partial \rho \psi}{\partial \check{\vec{\mathbf{H}}}} \cdot \delta \tilde{\vec{\mathbf{H}}} \\ & - \mathbf{S} : \delta \tilde{\vec{\mathbf{E}}} - \delta \mathbf{S} : \tilde{\vec{\mathbf{E}}} \, dV - \vec{\mathbf{B}} \cdot \delta \tilde{\vec{\mathbf{H}}} - \delta \vec{\mathbf{B}} \cdot \tilde{\vec{\mathbf{H}}} \, dV \\ & - \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \mathbf{b}_0 \cdot \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{\partial_t \mathcal{B}_0} \mathbf{t}_0 \cdot \delta \mathbf{u} \, dA - \int_{\partial_s \mathcal{B}_0} \varsigma_{M0} \delta \phi \, dA = 0. \end{aligned} \quad (7.63)$$

Bei der Approximation von (7.63) wird die gleiche Ansatzordnung für mechanische und magnetische Anteile verwendet, d. h. $nel_\phi = nel = 8$. Dadurch lässt sich die Notation vereinfachen. Die unbekanntenen Felder $\delta \mathbf{u}^h$ und $\delta \phi^h$ werden bei der Approximation zu

$$\delta \mathbf{d}_e^h = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}_e^h \\ \delta \phi_e^h \end{bmatrix} \mathcal{N} \delta \mathbf{w}_e \quad (7.64)$$

zusammengefasst. Die unbekanntenen Knotenwerte werden im Vektor $\delta\mathbf{w}_e = [\delta\mathbf{w}_1, \delta\mathbf{w}_2, \dots, \delta\mathbf{w}_8]^T$ mit $\delta\mathbf{w}_I = [\delta\mathbf{v}_I^T, \delta\varphi_I]^T$ angeordnet. Die Interpolationen werden durch die Matrix $\mathcal{N} = [\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \dots, \mathcal{N}_8]$ mit $\mathcal{N}_I = \text{diag}(N_I, N_I, N_I, N_I)$ charakterisiert. Weiterhin werden auch die Gradientenfelder und die zugeordneten konjugierten Größen in Vektoren angeordnet

$$\boldsymbol{\epsilon}_e^h = [E_{11}, E_{22}, E_{33}, 2E_{12}, 2E_{13}, 2E_{23}, \vec{H}_1, \vec{H}_2, \vec{H}_3]_e^{hT} \quad (7.65)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_e^h = [S_{11}, S_{22}, S_{33}, S_{12}, S_{13}, S_{23}, -\vec{B}_1, -\vec{B}_2, -\vec{B}_3]_e^{hT}. \quad (7.66)$$

Analog werden auch die Größen $\tilde{\mathbf{E}}$ und $\tilde{\mathbf{H}}$ zu $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}$ bzw. $\check{\mathbf{E}}$ und $\check{\mathbf{H}}$ zu $\check{\boldsymbol{\epsilon}}$ zusammengefasst. Die Interpolation der virtuellen und der modifizierten Gradientenfelder erfolgt durch

$$\delta\boldsymbol{\epsilon}_e^h = \mathcal{B} \delta\mathbf{w}_e \quad \text{mit} \quad \mathcal{B} = [\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_8] \quad \text{und} \quad \mathcal{B}_I = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{\phi I} \end{bmatrix}, \quad (7.67)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{M}}_E & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{M}}_H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_E \\ \boldsymbol{\alpha}_H \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{M}} \boldsymbol{\alpha}, \quad (7.68)$$

$$\delta\tilde{\boldsymbol{\epsilon}} = \tilde{\mathbf{M}} \delta\boldsymbol{\alpha}. \quad (7.69)$$

Die modifizierten Verzerrungen des EAS-Ansatzes werden durch $\tilde{\mathbf{M}}_E$ und $\boldsymbol{\alpha}_E$ wiedergegeben, während sich $\tilde{\mathbf{M}}_H$ und $\boldsymbol{\alpha}_H$ auf die modifizierte magnetische Feldstärke beziehen. Die Interpolationen für die internen Parameter $\boldsymbol{\alpha}_H$ werden ebenfalls auf den Elementmittelpunkt bezogen. Für die Interpolationsmatrix $\tilde{\mathbf{M}}_H$ sind unterschiedliche Ansätze möglich. Eine vollständige Erfassung aller Feldzustände kann durch die Wahl von 12 internen Parametern erreicht werden. Man erhält

$$\tilde{\mathbf{M}}_H = \frac{\det \mathbf{J}_0}{\det \mathbf{J}} \mathbf{J}_0^{-1} \begin{bmatrix} \xi & 0 & 0 & | & \xi\eta & \xi\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & | & \xi\eta\zeta & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 & | & 0 & 0 & \eta\xi & \eta\zeta & 0 & 0 & | & 0 & \xi\eta\zeta & 0 \\ 0 & 0 & \zeta & | & 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta\xi & \zeta\eta & | & 0 & 0 & \xi\eta\zeta \end{bmatrix}. \quad (7.70)$$

Damit kann Gleichung (7.63) auf Elementebene approximiert werden

$$\delta\pi_e^h = \begin{bmatrix} \delta\mathbf{w}_e \\ \delta\boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix}^T \underbrace{\left[\int_{\mathcal{B}_e} \begin{bmatrix} \mathcal{B}^T \frac{\partial \rho \psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \\ \tilde{\mathbf{M}}^T \frac{\partial \rho \psi}{\partial \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathcal{N}^T \tilde{\mathbf{b}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} dV - \int_{\partial \mathcal{B}_e} \begin{bmatrix} \mathcal{N}^T \tilde{\mathbf{t}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} dA \right]}_{R_e^h}. \quad (7.71)$$

Hier gilt $\tilde{\mathbf{b}} = [\mathbf{b}^T, 0]^T$ und $\tilde{\mathbf{t}} = [\mathbf{t}^T, \varsigma_M]^T$. Die tangentielle Steifigkeit wird wiederum auf Elementebene angegeben

$$\mathbf{K}_{eT} := \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{R}_e^{h(K)}}{\partial \mathbf{w}_{n+1}}, & \frac{\partial \mathbf{R}_e^{h(K)}}{\partial \boldsymbol{\alpha}_{n+1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_e^{dd} & \mathbf{K}_e^{d\alpha} \\ (\mathbf{K}_e^{d\alpha})^T & \mathbf{K}_e^{\alpha\alpha} \end{bmatrix}_{n+1}^{(K)} \quad (7.72)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_e^{dd} &= \int_{\mathcal{B}_e} \mathbf{B}^T \tilde{\mathbb{D}} \mathbf{B} \, dV + \mathcal{G} & \mathbf{K}_e^{d\alpha} &= \int_{\mathcal{B}_e} \mathbf{B}^T \tilde{\mathbb{D}} \tilde{\mathbf{M}} \, dV \\ \mathbf{K}_e^{\alpha\alpha} &= \int_{\mathcal{B}_e} \tilde{\mathbf{M}}^T \tilde{\mathbb{D}} \tilde{\mathbf{M}} \, dV. \end{aligned} \quad (7.73)$$

Dabei sind in der Matrix $\tilde{\mathbb{D}}$ die Tangentenmoduli aus den Gleichungen (6.49) bis (6.51) zusammengefasst

$$\tilde{\mathbb{D}}_{n+1} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}}_{n+1} & \tilde{\mathbf{e}}_{n+1} \\ \tilde{\mathbf{e}}_{n+1}^T & \tilde{\boldsymbol{\mu}}_{n+1} \end{bmatrix}. \quad (7.74)$$

Weiterhin beeinflusst die veränderte Notation die geometrische Steifigkeit. Es gilt jetzt

$$\mathcal{G} = \begin{bmatrix} \mathcal{G}_{11} & \dots & \mathcal{G}_{18} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{G}_{81} & \dots & \mathcal{G}_{88} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathcal{G}_{IJ} = \text{diag} [G_{IJ}, G_{IJ}, G_{IJ}, 0]. \quad (7.75)$$

Die internen Freiheitsgrade $\boldsymbol{\alpha}$ werden wie bei der EAS-Methode auf Elementebene kondensiert. Man erhält die reduzierten Größen

$$\tilde{\mathbf{K}}_{eT} = [\mathbf{K}_e^{dd} - \mathbf{K}_e^{d\alpha} (\mathbf{K}_e^{\alpha\alpha})^{-1} (\mathbf{K}_e^{d\alpha})^T]_{n+1}^{(K)} \quad (7.76)$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_e^h = \int_{\mathcal{B}_e} \mathbf{B}^T \frac{\partial \rho \psi}{\partial \check{\boldsymbol{\epsilon}}} + \mathbf{K}_e^{d\alpha} (\mathbf{K}_e^{\alpha\alpha})^{-1} \tilde{\mathbf{M}}^T \frac{\partial \rho \psi}{\partial \check{\boldsymbol{\epsilon}}} - \mathcal{N}^T \tilde{\mathbf{b}} \, dV - \int_{\partial \mathcal{B}_e} \mathcal{N}^T \tilde{\mathbf{t}} \, dA. \quad (7.77)$$

Die Aktualisierungsvorschrift zur Berechnung der internen Variable lautet

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1} = \boldsymbol{\alpha}_n + \Delta \boldsymbol{\alpha}_{n+1} \quad \text{mit} \quad (7.78)$$

$$\Delta \boldsymbol{\alpha}_{n+1} = -(\mathbf{K}_e^{\alpha\alpha})^{-1} \mathbf{K}_e^{ad} \Delta \mathbf{w}_{n+1} + (\mathbf{K}_e^{\alpha\alpha})^{-1} \tilde{\mathbf{M}}^T \frac{\partial \rho \psi}{\partial \check{\boldsymbol{\epsilon}}}. \quad (7.79)$$

Damit ist die Formulierung abgeschlossen. Es steht nun ein trilineares Element zur Verfügung, das durch zusätzliche interne Freiheitsgrade in der Lage ist, Biegezustände und lineare Verläufe des magnetischen Feldes korrekt zu approximieren. Das Element ist bei regulären Netzen lockingfrei. Bei stark verzerrten Netzen treten allerdings noch Versteifungseffekte auf, wie sich im nächsten Kapitel zeigen wird. Zum Abschluss dieses Kapitels wird noch eine alternative, gemischte Elementformulierung vorgestellt. Bei diesen Elementen ist im Rahmen geometrisch und materiell nichtlinearer Berechnungen bei großen Deformationen eine bessere Konvergenz innerhalb des iterativen Lösungsalgorithmusses festzustellen, siehe auch WAGNER & GRUTTMANN [131] und KLINKEL ET AL. [69].

7.6 Gemischte Elementformulierung

Bei der gemischten Formulierung werden Verschiebungen, magnetisches Skalarpotential, Verzerrungen, magnetische Feldstärke, Spannungen und magnetische Flussdichte getrennt approximiert. Es ergibt sich eine Mehrfeldformulierung mit 6 Feldern. Ähnlich wie bei EAS-Ansätzen wird eine lokale Kondensation auf Elementebene durchgeführt, so dass Verschiebungen und Skalarpotential als unbekannte Feldgrößen verbleiben. Zur Verbesserung des Verhaltens bei biegedominierten Problemen werden verbesserte Ansätze für Verzerrungen und magnetische Feldstärke verwendet. Die Formulierung basiert auf den Ansätzen von PILTNER & TAYLOR [93,94] und KASPER & TAYLOR [62,63], die rein mechanische Formulierungen vorstellen. Die Konstruktion der Interpolationsansätze für die zusätzlichen Feldgrößen wird eingehend in [94] diskutiert. Allgemeine Variationsprinzipien für piezoelektrische Probleme werden in SZE & PAN [118] vorgestellt. Eine piezoelektrische Volumenschale wird in KLINKEL & WAGNER [71] präsentiert.

Für die Herleitung des Mehrfeldfunktionals sollen die Feldgleichungen (7.1) bis (7.6) durch eine schwache Formulierung erfüllt werden. Zur Übersicht sind die maßgebenden Gleichungen noch einmal angegeben:

$$\int_{\mathcal{B}_0} [\bar{\mathbf{E}} - \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1})] : \delta \hat{\mathbf{S}} \, dV = 0 \quad (7.80)$$

$$\int_{\mathcal{B}_0} [\bar{\mathbf{H}} + \nabla_X \phi_M] \cdot \delta \hat{\mathbf{B}} \, dV = 0 \quad (7.81)$$

$$\int_{\mathcal{B}_0} (\mathbf{F} \mathbf{S} \nabla_X + \rho_0 \mathbf{b}_0) \cdot \delta \mathbf{u} \, dV = 0 \quad (7.82)$$

$$\int_{\mathcal{B}_0} (\bar{\mathbf{B}} \cdot \nabla_X) \cdot \delta \phi \, dV = 0 \quad (7.83)$$

$$\int_{\mathcal{B}_0} (\mathbf{S} - \frac{\partial \rho \psi}{\partial \bar{\mathbf{E}}}) : \delta \bar{\mathbf{E}} \, dV = 0 \quad (7.84)$$

$$\int_{\mathcal{B}_0} (\bar{\mathbf{B}} + \frac{\partial \rho \psi}{\partial \bar{\mathbf{H}}}) \cdot \delta \bar{\mathbf{H}} \, dV = 0. \quad (7.85)$$

Als zusätzliche Wichtungsfunktionen werden $\delta \hat{\mathbf{S}}$, $\delta \hat{\mathbf{B}}$, $\delta \bar{\mathbf{E}}$ und $\delta \bar{\mathbf{H}}$ eingeführt. Die Größen $\hat{\mathbf{S}}$ und $\hat{\mathbf{B}}$ bezeichnen unabhängige Spannungsgrößen, die sich zunächst einmal frei einstellen können.

Zusätzlich werden unabhängigen Verzerrungen $\hat{\mathbf{E}}$ und eine unabhängige magnetische Feldstärke $\hat{\mathbf{H}}$ verwendet. Diese werden analog zu zu (7.43) bzw. (7.59) durch

einen verbesserten Anteil erweitert. Man erhält die zusammengesetzten Größen

$$\bar{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{E}} + \tilde{\mathbf{E}} \quad (7.86)$$

$$\bar{\mathbf{H}} = \hat{\mathbf{H}} + \tilde{\mathbf{H}}, \quad (7.87)$$

die in das Stoffgesetz eingehen, siehe auch (7.84) und (7.85). Für die neu eingeführten Funktionen gelte entsprechend den vorherigen Abschnitten $\hat{\mathbf{E}}, \hat{\mathbf{H}}, \hat{\mathbf{S}}, \hat{\mathbf{B}} \in L^2(\mathcal{B}_0)$, sowie $\delta\hat{\mathbf{E}}, \delta\hat{\mathbf{H}}, \delta\hat{\mathbf{S}}, \delta\hat{\mathbf{B}} \in L^2(\mathcal{B}_0)$. Da die Wichtungsfunktionen voneinander unabhängig sind, können die Gleichungen (7.80) und (7.85) in einer schwachen Formulierung zusammengefasst werden. Mit der Argumentation aus Abschnitt 7.3 und der verkürzten Schreibweise aus 7.5 erhält man

$$\begin{aligned} \delta\pi(\mathbf{u}, \phi, \hat{\mathbf{S}}, \hat{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{E}}, \bar{\mathbf{H}}) &= \int_{\mathcal{B}_0} \delta\bar{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot \left(\frac{\partial \rho \psi}{\partial \bar{\boldsymbol{\epsilon}}} - \hat{\boldsymbol{\sigma}} \right) + \delta\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot (\boldsymbol{\epsilon} - \bar{\boldsymbol{\epsilon}}) + \delta\boldsymbol{\epsilon} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} \, dV \\ &\quad - \int_{\mathcal{B}_0} \delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{b} \, dV - \int_{\partial_t \mathcal{B}_0} \delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{t} \, dA - \int_{\partial_\zeta \mathcal{B}_0} \varsigma_{M0} \cdot \delta\phi \, dA = 0. \end{aligned} \quad (7.88)$$

Für die Finite-Element-Approximation von (7.88) werden zunächst die angenommenen Verzerrungen und das angenommene magnetische Feld $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_e^h$ und die zugeordneten Wichtungsfunktionen $\delta\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_e^h$ betrachtet. Dazu werden wiederum interne Größen $\boldsymbol{\alpha}$ und $\delta\boldsymbol{\alpha}$ auf Elementebene eingeführt

$$\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_e^h = \bar{\mathbf{M}}_\alpha \boldsymbol{\alpha} \quad (7.89)$$

$$\delta\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_e^h = \bar{\mathbf{M}}_\alpha \delta\boldsymbol{\alpha}. \quad (7.90)$$

Die Interpolationen werden in der Matrix $\bar{\mathbf{M}}_\alpha$ angeordnet

$$\bar{\mathbf{M}}_\alpha = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_E^0 & \mathbf{T}_E^0 \widehat{\mathbf{M}}_E & \frac{\det \mathbf{J}_0}{\det \mathbf{J}} (\mathbf{T}_S^0)^{-T} \widehat{\mathbf{M}}_E & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & (\mathbf{J}^0)^T & (\mathbf{J}^0)^T \widehat{\mathbf{M}}_{\bar{\mathbf{H}}} & \frac{\det \mathbf{J}_0}{\det \mathbf{J}} (\mathbf{J}^0)^{-1} \widehat{\mathbf{M}}_{\bar{\mathbf{H}}} \end{bmatrix}. \quad (7.91)$$

Durch die Elemente in der 1., 2., 4. und 5. Spalte sind den unabhängigen Größen $\hat{\mathbf{E}}$ und $\hat{\mathbf{H}}$ zugeordnet, wobei die 1. und 2. Spalte für die Abbildung eines konstanten Spannungszustands stehen. Die Einträge in der 3. und 6. Spalte entsprechen den Ansätzen für $\tilde{\mathbf{E}}$ und $\tilde{\mathbf{H}}$ aus Abschnitt 7.4 und 7.5. Für die Interpolationsmatrizen

gilt

$$\widehat{\mathbf{M}}_E = \begin{bmatrix} \eta & \zeta & \eta\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi & \zeta & \xi\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & \eta & \xi\eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi \end{bmatrix} \quad (7.92)$$

$$\widehat{\widehat{\mathbf{M}}}_E = \begin{bmatrix} \xi & \xi\eta & \xi\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi\eta & \eta & \eta\zeta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi\zeta & \eta\zeta & \zeta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.93)$$

$$\widehat{\mathbf{M}}_{\bar{H}} = \begin{bmatrix} \eta & \zeta & \eta\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi & \zeta & \xi\zeta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & \eta & \xi\eta \end{bmatrix} \quad (7.94)$$

$$\widehat{\widehat{\mathbf{M}}}_{\bar{H}} = \begin{bmatrix} \xi & \xi\eta & \xi\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi\eta & \eta & \eta\zeta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi\zeta & \eta\zeta & \zeta \end{bmatrix} \quad (7.95)$$

Die Interpolationen der erweiterten Verzerrungen $\widehat{\widehat{\mathbf{M}}}_E$ werden so gewählt, dass $\widehat{\mathbf{M}}_E$ und $\widehat{\widehat{\mathbf{M}}}_E$ zusammen vollständige bilineare Polynome ergeben, siehe auch [62]. Der gleiche Grundsatz gilt auch für $\widehat{\mathbf{M}}_{\bar{H}}$ und $\widehat{\widehat{\mathbf{M}}}_{\bar{H}}$. Die angenommenen Feldgrößen werden auf den Elementmittelpunkt bezogen. Die Transformationen erfolgen mit Abbildungen \mathbf{T}_S^0 und \mathbf{T}_E^0 mit $\mathbf{T}_E^0(\mathbf{T}_S^0)^{-T} = \mathbf{1}_{6 \times 6}$ sowie \mathbf{J}^0 . Es gilt

$$\mathbf{T}_E^0 = \begin{bmatrix} J_{110}^2 & J_{210}^2 & J_{310}^2 & J_{110}J_{210} & J_{110}J_{310} & J_{210}J_{310} \\ J_{120}^2 & J_{220}^2 & J_{320}^2 & J_{120}J_{220} & J_{120}J_{320} & J_{220}J_{320} \\ J_{130}^2 & J_{230}^2 & J_{330}^2 & J_{130}J_{230} & J_{130}J_{330} & J_{230}J_{330} \\ 2J_{110}J_{120} & 2J_{210}J_{220} & 2J_{310}J_{320} & J_{110}J_{220} + J_{210}J_{120} & J_{110}J_{320} + J_{310}J_{120} & J_{210}J_{320} + J_{310}J_{220} \\ 2J_{110}J_{130} & 2J_{210}J_{230} & 2J_{310}J_{330} & J_{110}J_{230} + J_{210}J_{130} & J_{110}J_{330} + J_{310}J_{130} & J_{210}J_{330} + J_{310}J_{230} \\ 2J_{120}J_{130} & 2J_{220}J_{230} & 2J_{320}J_{330} & J_{120}J_{130} + J_{220}J_{230} & J_{120}J_{230} + J_{220}J_{130} & J_{220}J_{330} + J_{320}J_{230} \end{bmatrix}. \quad (7.96)$$

Damit ist die Approximation der angenommenen Gradientenfelder $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$ vollständig. Aus der gewählten Interpolation folgen 48 interne Freiheitsgrade, die in $\boldsymbol{\alpha}$ enthalten sind. Für die Approximation der angenommenen Spannungen und der angenommenen magnetischen Flussdichte gelte

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_e^h = \hat{\mathbf{M}}_\beta \boldsymbol{\beta} \quad (7.97)$$

$$\delta \hat{\boldsymbol{\sigma}}_e^h = \hat{\mathbf{M}}_\beta \delta \boldsymbol{\beta} \quad (7.98)$$

mit

$$\hat{\mathbf{M}}_\beta = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_S^0 & \mathbf{T}_S^0 \widehat{\mathbf{M}}_S & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & (\mathbf{J}^0)^T & (\mathbf{J}^0)^T \widehat{\mathbf{M}}_{\bar{B}} \end{bmatrix}. \quad (7.99)$$

Die Interpolationsmatrizen $\widehat{\mathbf{M}}_S$ und $\widehat{\mathbf{M}}_{\bar{B}}$ werden identisch zu $\widehat{\mathbf{M}}_E$ und $\widehat{\mathbf{M}}_{\bar{H}}$ festgelegt. Der Vektor $\boldsymbol{\beta}$ enthält die 30 zugeordneten internen Freiheitsgrade. Damit sind alle Annahmen für die Approximation von (7.88) getroffen. Auf Elementebene lässt sich dann schreiben

$$\delta\pi_e^h = \begin{bmatrix} \delta\mathbf{w}_e \\ \delta\alpha \\ \delta\boldsymbol{\beta} \end{bmatrix}^T \underbrace{\left[\int_{\mathcal{B}_e} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{B}}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}} \\ \bar{\mathbf{M}}_\alpha^T \left(\frac{\partial \rho \psi}{\partial \bar{\boldsymbol{\epsilon}}} - \hat{\boldsymbol{\sigma}} \right) \\ \hat{\mathbf{M}}_\beta^T (\boldsymbol{\epsilon} - \bar{\boldsymbol{\epsilon}}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathcal{N}^T \tilde{\mathbf{b}} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} dV - \int_{\partial \mathcal{B}_e} \begin{bmatrix} \mathcal{N}^T \tilde{\mathbf{t}} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} dA \right]}_{\mathbf{R}_e^h}. \quad (7.100)$$

Für die iterative Lösung wird eine tangentielle Steifigkeitsmatrix entsprechend (7.38) definiert

$$\mathbf{K}_{eT} := \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{R}_e^h(K)}{\partial \mathbf{w}_{n+1}}, & \frac{\partial \mathbf{R}_e^h(K)}{\partial \alpha_{n+1}}, & \frac{\partial \mathbf{R}_e^h(K)}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_e^{dd} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_e^{d\beta} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_e^{\alpha\alpha} & \mathbf{K}_e^{\alpha\beta} \\ (\mathbf{K}_e^{d\beta})^T & (\mathbf{K}_e^{\alpha\beta})^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}_{n+1}^{(K)}. \quad (7.101)$$

Die Einträge der tangentialen Steifigkeit ergeben sich zu

$$\mathbf{K}_e^{dd} = \int_{\mathcal{B}_e} \boldsymbol{\mathcal{G}} dV \quad (7.102)$$

$$\mathbf{K}_e^{\alpha\alpha} = \int_{\mathcal{B}_e} \bar{\mathbf{M}}_\alpha^T \bar{\mathbf{D}} \bar{\mathbf{M}}_\alpha dV \quad (7.103)$$

$$\mathbf{K}_e^{d\beta} = \int_{\mathcal{B}_e} \boldsymbol{\mathcal{B}}^T \hat{\mathbf{M}}_\beta dV \quad (7.104)$$

$$\mathbf{K}_e^{\alpha\beta} = - \int_{\mathcal{B}_e} \bar{\mathbf{M}}_\alpha^T \hat{\mathbf{M}}_\beta dV. \quad (7.105)$$

Nach der Elimination der internen Freiheitsgrade $\boldsymbol{\alpha}$ und $\boldsymbol{\beta}$ auf Elementebene

erhält man die kondensierte Steifigkeitsmatrix und das kondensierte Residuum

$$\tilde{\mathbf{K}}_{eT} = \mathbf{K}_e^{dd} + \mathbf{K}_e^{d\beta} [(\mathbf{K}_e^{\alpha\beta})^T (\mathbf{K}_e^{\alpha\alpha})^{-1} \mathbf{K}_e^{\alpha\beta}]^{-1} (\mathbf{K}_e^{d\beta})^T \quad (7.106)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{R}}_e^h &= \int_{\mathcal{B}_e} \mathbf{B}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}} \, dV - \mathbf{K}_e^{d\beta} [(\mathbf{K}_e^{\alpha\beta})^T (\mathbf{K}_e^{\alpha\alpha})^{-1} \mathbf{K}_e^{\alpha\beta}]^{-1} \\ &\quad [(\mathbf{K}_e^{\alpha\beta})^T (\mathbf{K}_e^{\alpha\alpha})^{-1} \int_{\mathcal{B}_0} \bar{\mathbf{M}}_\alpha^T \left(\frac{\partial \rho \psi}{\partial \bar{\boldsymbol{\epsilon}}} - \hat{\boldsymbol{\sigma}} \right) \, dV + \int_{\mathcal{B}_0} \hat{\mathbf{M}}_\beta^T (\boldsymbol{\epsilon} - \bar{\boldsymbol{\epsilon}}) \, dV] \\ &\quad - \int_{\partial \mathcal{B}_0} \mathcal{N}^T \tilde{\mathbf{t}} \, dA. \end{aligned} \quad (7.107)$$

Nach jedem Iterationsschritt werden die internen Freiheitsgrade durch

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1} = \boldsymbol{\alpha}_n + \Delta \boldsymbol{\alpha}_{n+1} \quad (7.108)$$

$$\boldsymbol{\beta}_{n+1} = \boldsymbol{\beta}_n + \Delta \boldsymbol{\beta}_{n+1} \quad (7.109)$$

aktualisiert. Die Inkremente zum Lastschritt $n + 1$ lauten

$$\Delta \boldsymbol{\alpha}_{n+1} = (\mathbf{K}_e^{\alpha\alpha})^{-1} [\mathbf{K}_e^{\alpha\beta} \Delta \boldsymbol{\beta} - \int_{\mathcal{B}_0} \bar{\mathbf{M}}_\alpha^T \left(\frac{\partial \rho \psi}{\partial \bar{\boldsymbol{\epsilon}}} - \hat{\boldsymbol{\sigma}} \right) \, dV] \quad \text{und} \quad (7.110)$$

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{\beta}_{n+1} &= [(\mathbf{K}_e^{d\beta})^T (\mathbf{K}_e^{\alpha\alpha})^{-1} \mathbf{K}_e^{d\beta}]^{-1} [(\mathbf{K}_e^{d\beta})^T \Delta \mathbf{w}_e + (\mathbf{K}_e^{\alpha\beta})^T (\mathbf{K}_e^{\alpha\alpha})^{-1} \\ &\quad \int_{\mathcal{B}_0} \bar{\mathbf{M}}_\alpha^T \left(\frac{\partial \rho \psi}{\partial \bar{\boldsymbol{\epsilon}}} - \hat{\boldsymbol{\sigma}} \right) \, dV + \int_{\mathcal{B}_0} \hat{\mathbf{M}}_\beta^T (\boldsymbol{\epsilon} - \bar{\boldsymbol{\epsilon}}) \, dV]. \end{aligned} \quad (7.111)$$

7.7 Elementformulierung piezoelektrischer Materialien

Für die Finite-Element-Formulierung piezoelektrischer Materialien wird in dieser Arbeit der gleiche Ansatz wie für die Elemente mit magnetostruktiver Kopplung verwendet. Statt der magnetischen Feldstärke $\vec{\mathbf{H}}$ wird die elektrische Feldstärke $\vec{\mathbf{E}}$ benutzt, die durch das elektrische Skalarpotential ϕ_E beschrieben wird. Desweiteren ersetzt die elektrische Flussdichte $\vec{\mathbf{D}}$ die magnetische Flussdichte $\vec{\mathbf{B}}$. Durch die starke Redundanz der Problemstellungen wird im Folgenden ausschließlich auf die Unterschiede in der Modellierung eingegangen. Bei der Formulierung des Randwertproblems werden die magnetostatischen Feldgleichungen (7.2), (7.4) und (7.6) durch die entsprechenden elektrostatischen Gleichungen ersetzt

$$\vec{\mathbf{E}} + \nabla_X \phi_E = \mathbf{0} \quad \text{in } \mathcal{B}_0 \quad (7.112)$$

$$\vec{\mathbf{D}} \cdot \nabla_X - \varrho_0 = 0 \quad \text{in } \mathcal{B}_0 \quad (7.113)$$

$$\vec{\mathbf{D}} + \frac{\partial \rho \psi}{\partial \vec{\mathbf{E}}} = \mathbf{0} \quad \text{in } \mathcal{B}_0. \quad (7.114)$$

In der Bilanzgleichung (7.113) wird die elektrische Ladungsdichte berücksichtigt. Die einzuhaltenden Randbedingungen können wiederum in Neumann- und Dirichlet-Bedingungen unterteilt werden

$$\vec{D} \cdot \mathbf{N} = \bar{\varsigma}_0 \quad \text{auf } \partial_\zeta \mathcal{B}_0 \quad (7.115)$$

$$\phi_E = \bar{\phi}_E \quad \text{auf } \partial_\phi \mathcal{B}_0. \quad (7.116)$$

Da auf den Rändern entweder eine Dirichlet-Randbedingung oder eine Neumann-Randbedingung vorgegeben werden kann, muss wiederum gelten

$$\partial \mathcal{B}_0 = \partial_\zeta \mathcal{B}_0 \cup \partial_\phi \mathcal{B}_0 \quad \text{und} \quad \emptyset = \partial_\zeta \mathcal{B}_0 \cap \partial_\phi \mathcal{B}_0. \quad (7.117)$$

Damit ist das Randwertproblem definiert. Die Formulierung der schwachen Form erfolgt mit der gleichen Argumentation wie in Abschnitt 7.2. Man erhält

$$\begin{aligned} \delta\pi = \int_{\mathcal{B}_0} \frac{\partial \rho \psi}{\partial \mathbf{E}} : \delta \mathbf{E} + \frac{\partial \rho \psi}{\partial \vec{E}} \cdot \delta \vec{E} - \rho_0 \mathbf{b}_0 \cdot \delta \mathbf{u} - \varrho_0 \delta \phi \, dV \\ - \int_{\partial_t \mathcal{B}_0} \mathbf{t}_0 \cdot \delta \mathbf{u} \, dA - \int_{\partial_\zeta \mathcal{B}_0} \varsigma_0 \delta \phi \, dA = 0. \end{aligned} \quad (7.118)$$

Die schwache Form ist im Wesentlichen äquivalent zu (7.21). Der Hauptunterschied besteht im zusätzlichen Term zur Berücksichtigung der freien elektrischen Volumenladungen. Diese müssen bei der Finite-Element-Approximation berücksichtigt werden. Werden die unbekanntes Feldgrößen \mathbf{u} und ϕ_E durch trilineare Polynome interpoliert, so kommt es wie bei den Elementen mit magnetomechanischer Kopplung zu Locking-Effekten bei Biegezuständen. Zur Vermeidung dieser Effekte können die gleichen Ansätze verwendet wie zuvor bei den magnetostruktiven Elementen. Es können Elemente mit EAS-Ansätzen, einer verbesserte Approximation des elektrischen Feldes und gemischten Ansätzen entwickelt werden. Da die Formulierung starke Ähnlichkeiten mit denjenigen aus Abschnitt 7.4 bis 7.6 aufweist, wird auf die Abfassung hier verzichtet.

7.8 Elemente mit einem lokal formulierten Stoffgesetz

Bei zylindrischen Strukturen, wie sie in Abschnitt 8.5 und 8.6 vorgestellt werden, werden die anisotropischen Materialeigenschaften häufig auf die radiale Richtung bezogen. Zur Simulation solcher Bauteile ist es notwendig, die konstitutiven Gleichungen auf ein lokales Koordinatensystem zu beziehen, siehe auch Abbildung 7.3. Die lokalen Koordinaten mit den Basisvektoren \mathbf{t}_1 , \mathbf{t}_2 und \mathbf{t}_3 orientieren sich an der Elementgeometrie. Zunächst werden zwei kovariante Basisvektoren im Elementmittelpunkt bestimmt

$$\mathbf{G}_1^0 = \mathbf{N}_{,\xi}^0 \mathbf{Y}_e \quad \text{und} \quad \mathbf{G}_2^0 = \mathbf{N}_{,\eta}^0 \mathbf{Y}_e. \quad (7.119)$$

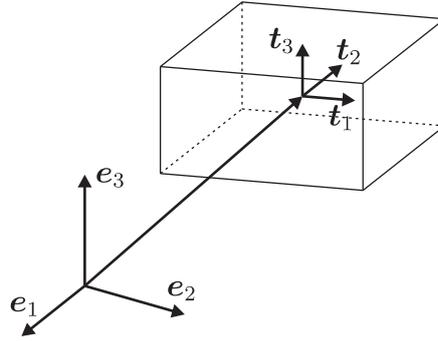


Abb. 7.3: Einführung eines lokalen Koordinatensystems bezogen auf die Elementgeometrie

Es wird folglich nur eine Transformationsvorschrift pro Element verwendet. Die daraus resultierenden Ungenauigkeiten können allerdings bei hinreichend feiner Diskretisierung vernachlässigt werden. Darauf aufbauend wird ein rechtwinkliges Dreibein konstruiert. Die normierten Basisvektoren ergeben sich aus

$$\mathbf{t}_1 = \frac{\mathbf{G}_1^0}{\|\mathbf{G}_1^0\|}, \quad \mathbf{t}_3 = \frac{\mathbf{G}_1^0 \times \mathbf{G}_2^0}{\|\mathbf{G}_1^0 \times \mathbf{G}_2^0\|}, \quad \mathbf{t}_2 = \mathbf{t}_3 \times \mathbf{t}_1. \quad (7.120)$$

Mit den Koeffizienten $a_{ik} = \mathbf{t}_i \cdot \mathbf{e}_k$ kann dann die Transformationsmatrix analog zu (7.96) formuliert werden

$$\mathbf{T}_E^{et} = \begin{bmatrix} a_{11}^2 & a_{21}^2 & a_{31}^2 & a_{11}a_{21} & a_{11}a_{31} & a_{21}a_{31} \\ a_{12}^2 & a_{22}^2 & a_{32}^2 & a_{12}a_{22} & a_{12}a_{32} & a_{22}a_{32} \\ a_{13}^2 & a_{23}^2 & a_{33}^2 & a_{13}a_{23} & a_{13}a_{33} & a_{23}a_{33} \\ 2a_{11}a_{12} & 2a_{21}a_{22} & 2a_{31}a_{32} & a_{11}a_{22}+a_{21}a_{12} & a_{11}a_{32}+a_{31}a_{12} & a_{21}a_{32}+a_{31}a_{22} \\ 2a_{11}a_{13} & 2a_{21}a_{23} & 2a_{31}a_{33} & a_{11}a_{23}+a_{21}a_{13} & a_{11}a_{33}+a_{31}a_{13} & a_{21}a_{33}+a_{31}a_{23} \\ 2a_{12}a_{13} & 2a_{22}a_{23} & 2a_{32}a_{33} & a_{12}a_{13}+a_{22}a_{23} & a_{12}a_{23}+a_{22}a_{13} & a_{22}a_{33}+a_{32}a_{23} \end{bmatrix}. \quad (7.121)$$

Die Transformation der magnetischen Feldstärke erfolgt mit

$$\mathbf{T}_{\vec{H}}^{et} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}. \quad (7.122)$$

Damit können dann die Komponenten der Verzerrungen, der magnetischen Feldstärke und der virtuellen Feldgrößen in das lokale Koordinatensystem überführt werden

$$\mathbf{E}^t = \mathbf{T}_E^{et} \mathbf{E} \quad \delta \mathbf{E}^t = \mathbf{T}_E^{et} \delta \mathbf{E} \quad (7.123)$$

$$\vec{H}^t = \mathbf{T}_{\vec{H}}^{et} \vec{H} \quad \delta \vec{H}^t = \mathbf{T}_{\vec{H}}^{et} \delta \vec{H}. \quad (7.124)$$

Entsprechend ergibt sich bei der Finite-Element-Approximation eine Transformation der Matrizen

$$\mathbf{B}^t = \mathbf{T}_E^{et} \mathbf{B} \quad \text{und} \quad (7.125)$$

$$\mathbf{B}_\phi^t = \mathbf{T}_{\tilde{H}}^{et} \mathbf{B}_\phi. \quad (7.126)$$

Diese werden dann auch für den Aufbau der tangentialen Elementsteifigkeit verwendet. Die einzelnen Anteile erhält man entsprechend (7.39)

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_e^{uu} &= \int_{\mathcal{B}_e} \mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{B} \, dV + \mathbf{G} = \int_{\mathcal{B}_e} (\mathbf{B}^t)^T \tilde{\mathbf{C}}^t \mathbf{B}^t \, dV + \mathbf{G}^t \\ \mathbf{K}_e^{u\phi} &= \int_{\mathcal{B}_e} \mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{e}} \mathbf{B}_\phi \, dV = \int_{\mathcal{B}_e} (\mathbf{B}^t)^T \tilde{\mathbf{e}}^t \mathbf{B}_\phi^t \, dV \\ \mathbf{K}_e^{\phi\phi} &= \int_{\mathcal{B}_e} \mathbf{B}_\phi^T \tilde{\boldsymbol{\mu}} \mathbf{B}_\phi \, dV = \int_{\mathcal{B}_e} (\mathbf{B}_\phi^t)^T \tilde{\boldsymbol{\mu}}^t \mathbf{B}_\phi^t \, dV. \end{aligned} \quad (7.127)$$

Die algorithmisch konsistenten Tangentenmoduli $\tilde{\mathbf{C}}^t$, $\tilde{\mathbf{e}}^t$ und $\tilde{\boldsymbol{\mu}}^t$ sind hier auf die lokalen Koordinatenachsen \mathbf{t}_i bezogen. Die ausgezeichnete 3-Richtung des Materials stimmt folglich mit der lokalen Richtung \mathbf{t}_3 überein und kann je nach Elementorientierung in eine beliebige Richtung zeigen.

8 Numerische Beispiele

Im folgenden Kapitel wird das Verhalten der vorgestellten Finite-Element-Formulierungen unter Berücksichtigung des nichtlinearen Materialmodells anhand von numerischen Beispielen erläutert. Es werden Beispiele magnetostriktiver und piezoelektrischer Kopplung diskutiert. Die Elementformulierungen und das Materialmodell wurden in eine Version des Finite-Element-Programms FEAP [122] implementiert. Im ersten Abschnitt werden einige Elementtests durchgeführt, um die Fähigkeiten und Grenzen der vorgestellten Elementformulierungen aufzuzeigen. Hierbei wird ein Patchtest und ein Kragarm unter Biegebeanspruchung untersucht. Daraufhin wird das im Element implementierte nichtlineare konstitutive Modell betrachtet. Es werden exemplarisch ein Terfenol-D-Material und eine PZT-Keramik modelliert. Die resultierenden Hysteresekurven werden mit experimentellen Ergebnissen verglichen. Der darauf folgende Abschnitt behandelt einen mechanisch verstärkten magnetostriktiven Aktor, wobei der Einfluss der Geometrie auf die Eigenschaften des Aktors untersucht wird. Als zweites magnetostriktives Bauteil wird ein Dünnschichtaktor simuliert, an dem der Vorteil einer geometrisch nichtlinearen Formulierung erläutert wird. Anschließend wird das Polarisationsverhalten eines piezoelektrischen Hohlzylinders betrachtet. Zum Abschluss wird ein im Spritzgussverfahren hergestellter Teleskopaktor diskutiert. Für die im letzten Kapitel eingeführten Elementformulierungen wird im Folgenden eine einheitliche Bezeichnung verwendet. Zur Charakterisierung sind in Tabelle 8 einige Abkürzungen angegeben, die miteinander kombiniert werden können. So steht z. B. H1P2E30 für ein Element mit trilinearen Ansätzen für Geometrie und Verschiebung, quadratischen Ansatzfunktionen für das Skalarpotential und 30 EAS-Ansätzen zur Verbesserung der Verzerrungen.

Trilineare Ansatzfunktionen für Geometrie und Verschiebungen	H1
Trilineare Ansatzfunktionen für Skalarpotential	P1
Quadratische Ansatzfunktionen für Skalarpotential	P2
EAS-Ansätze für alle Verzerrungskomponenten gemäß Abschnitt 7.4	E30
Verbesserte Ansätze für alle Komponenten der magnetischen / elektrischen Feldstärke, siehe Abschnitt 7.5	EG12
Gemischte Elementformulierung gemäß Abschnitt 7.6	MIX

Tab. 8.1: Abkürzungen zur Differenzierung der Elementformulierungen

8.1 Elementtests

In den folgenden Unterabschnitten werden einige grundsätzliche Beispiele diskutiert, um die Leistungsfähigkeit der vorgestellten Elementformulierungen zu charakterisieren. Es wird gezeigt, dass die vorgestellten Elementformulierungen den Patchtest bestehen. Zur Untersuchung von Ungenauigkeiten durch inkompatible Approximationsräume, wird ein Kragarm unter Biegebeanspruchung betrachtet. Ein weiterer Aspekt des Beispiels ist der Einfluss verzerrter Elementgeometrien. In einer Eigenwertuntersuchung wird die Empfindlichkeit der vorgestellten Elemente gegenüber Nullenergiemoden untersucht.

8.1.1 Patchtest

Der Patchtest ist ein weit verbreiteter Test für Finite-Element-Formulierungen. Die Bezeichnung Patchtest, also Fleckentest, bezieht sich auf die verwendeten Finite-Element-Netze. Es wird die Fähigkeit des Elements überprüft, konstante Spannungs- und Verzerrungszustände bei verzerrter Netzgeometrie abzubilden. Isoparametrische Verschiebungselementen wie z. B. die Elemente H1P1, H1P2 oder H2P2 erfüllen aufgrund ihrer Formulierung immer den Patchtest, siehe auch ZIENKIEWICZ & TAYLOR [142]. Für Elemente mit gemischten Ansätzen oder EAS-Elemente ist dies allerdings nicht unbedingt gewährleistet. Für die betrachteten gekoppelten Probleme müssen zusätzlich auch konstante magnetische bzw. elektrische Feldzustände untersucht werden. Ist das Element in der Lage, diese Belastungszustände korrekt zu approximieren, so ist eine Konvergenz der Lösung bei zunehmender Netzverfeinerung gewährleistet, und der Patchtest wird als erfüllt angesehen. Für Volumenelemente wird von MACNEAL & HARDER [80] ein System mit 7 Elementen vorgeschlagen, wie es in Abbildung 8.1 dargestellt ist. Der Würfel hat eine normierte Kantenlänge von 1. Die Koordinaten der inneren Knoten sind angegeben. Durch ein Mindestmaß an Verschiebungs- bzw. Potentialrandbedingungen werden die Starrkörperrotationen behindert und das Skalarpotential normiert. Es wird ein isotropes Material mit linearem Verhalten nach Tabelle 8.2 verwendet. Als Belastungszustände werden exemplarisch konstante

$$\begin{aligned}
 E_1 = E_3 &= 50 \text{ GN/m}^2, \quad G_{12} = G_{13} = 20 \text{ GN/m}^2, \quad \nu_{12} = \nu_{13} = 0.25 \\
 e_{33} &= 40.0 \text{ Vs/Am}^2, \quad e_{13} = e_{23} = -20.0 \text{ Vs/Am}^2 \\
 e_{15} &= 15.0 \text{ Vs/Am}^2 \\
 \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 &= 2 \cdot 10^{-8} \text{ Vs/Am}
 \end{aligned}$$

Tab. 8.2: Verwendete Materialparameter für den Patchtest

Normalspannungen in 1-Richtung, konstante Schubspannungen in der 13-Ebene und ein konstantes magnetisches Feld in 3-Richtung betrachtet.

Für den ersten Fall wird die Belastung von $S_{11} = 10^7 \text{ N/m}^2$ durch die Kräfte $F_1 = 2.5 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$ in Knoten 2, 3, 6 und 7 aufgebracht. Als Auflagerbedingungen wird die Verschiebung u_1 für $X_1 = 0$ gehalten. Für die Knoten 1 und 4 gilt außerdem $u_3 = 0$. An Knoten 1 wird die Verschiebung in X_2 -Richtung gehalten und das Potential zu Null gesetzt. Durch die zwängungsfreie Lagerung müssen alle Spannungskomponenten außer S_{11} verschwinden, und auch die magnetische Flussdichte wird Null. Der sich einstellende Verzerrungszustand kann aus der umgeformten konstitutiven Beziehung

$$\epsilon = \mathbb{D}^{-1} \sigma \quad (8.1)$$

bestimmt werden. Hierbei wird die verkürzte Schreibweise aus Abschnitt 7.5 verwendet. Aus dem Verzerrungszustand können dann die Knotenverschiebungen ermittelt werden. Diese analytische Lösung wird in Tabelle 8.3 mit den Ergebnissen der Elementformulierungen verglichen. Es zeigt sich, dass die Ergebnisse aller Elementformulierungen mit der analytischen Lösung übereinstimmen.

Als weiter Spannungszustand wird eine konstante Schubspannung $S_{13} = 10^7 \text{ N/m}^2$ betrachtet. Dazu werden in den Knoten 2 und 3 die Kräfte $F_1 = -2.5 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$ und $F_3 = 2.5 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$ aufgebracht, die Knoten 6 und 7 werden mit $F_1 = 2.5 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$ und $F_3 = 2.5 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$ belastet, und in den Knoten 5 und 8 wirke $F_3 = -2.5 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$. Die Auflagerbedingungen bleiben gegenüber dem vorherigen Lastfall unverändert, und auch der sich ergebende Verzerrungszustand kann wie zuvor ermittelt werden. Die Ergebnisse sind in Tabelle 8.4 angegeben. Man

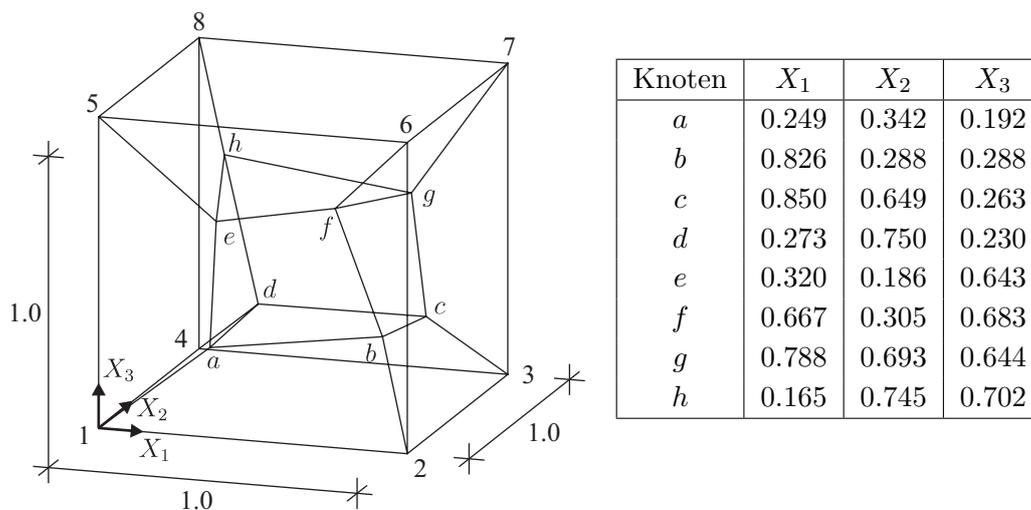


Abb. 8.1: Systemgeometrie für Patchtest gemäß [80]

erkennt, dass die Elemente den gegebenen Belastungszustand korrekt wiedergeben.

Als dritter Belastungsfall wird ein konstantes magnetisches Feld $\vec{H}_3 = 10^5$ A/m angelegt. Dazu wird das Potential in den Knoten 1, 2, 3, 4 Null gesetzt und in den Knoten 5, 6, 7, 8 ein Potential von $\phi = 10^5$ A vorgegeben. Die Verschiebungsrandbedingungen bleiben unverändert, da wieder eine zwängungsfreie Lagerung beabsichtigt ist. Der aus der Belastung resultierende Verzerrungszustand kann aus

$$\begin{bmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} + \mathbf{e}^T \boldsymbol{\mu}^{-1} \mathbf{e} & -\mathbf{e} \boldsymbol{\mu}^{-1} \\ -\boldsymbol{\mu}^{-1} \mathbf{e} & \boldsymbol{\mu}^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{S} \\ \vec{H} \end{bmatrix} \quad (8.2)$$

ermittelt werden. Aufgrund der magnetostriktiven Kopplung ergibt sich eine Verlängerung in 3-Richtung, die mit einer Querkontraktion in 1- und 2-Richtung einhergeht. Die Ergebnisse der Elemente sind in Tabelle 8.5 zusammengefasst. Auch in diesem Fall zeigen alle angegebenen Elemente für den gegebenen Feldzustand korrekte Resultate. Folglich werden die signifikanten Lastzustände korrekt abgebildet, und der Patchtest kann als erfüllt angesehen werden.

	Analytisch	H1P2E30	H1P1E30G12	H1P1MIX
$u_1(X_1 = 1)$ [m]	$1.687 \cdot 10^{-4}$	$1.687 \cdot 10^{-4}$	$1.687 \cdot 10^{-4}$	$1.687 \cdot 10^{-4}$
$u_2(X_2 = 1)$ [m]	$-8.125 \cdot 10^{-5}$	$-8.125 \cdot 10^{-5}$	$-8.125 \cdot 10^{-5}$	$-8.125 \cdot 10^{-5}$
$u_3(X_3 = 1)$ [m]	$1.250 \cdot 10^{-5}$	$1.250 \cdot 10^{-5}$	$1.250 \cdot 10^{-5}$	$1.250 \cdot 10^{-5}$
$\phi(X_3 = 1)$ [A]	$6.250 \cdot 10^4$	$6.250 \cdot 10^4$	$6.250 \cdot 10^4$	$6.250 \cdot 10^4$
S_{11}	$1.0 \cdot 10^7$	$1.0 \cdot 10^7$	$1.0 \cdot 10^7$	$1.0 \cdot 10^7$
\vec{B}_1 [A/m]	0	0	0	0
\vec{B}_2 [A/m]	0	0	0	0
\vec{B}_3 [A/m]	0	0	0	0

Tab. 8.3: Ergebnisse des Patchtests für eine konstante Zugspannung S_{11}

	Analytisch	H1P2E30	H1P1E30G12	H1P1MIX
$u_3(X_1 = 1)$ [m]	$3.200 \cdot 10^{-4}$	$3.200 \cdot 10^{-4}$	$3.200 \cdot 10^{-4}$	$3.200 \cdot 10^{-4}$
$\phi(X_1 = 1)$ [m]	$-2.400 \cdot 10^5$	$-2.400 \cdot 10^5$	$-2.400 \cdot 10^5$	$-2.400 \cdot 10^5$
S_{13}	$1.0 \cdot 10^7$	$1.0 \cdot 10^7$	$1.0 \cdot 10^7$	$1.0 \cdot 10^7$
\vec{B}_1 [A/m]	0	0	0	0
\vec{B}_2 [A/m]	0	0	0	0
\vec{B}_3 [A/m]	0	0	0	0

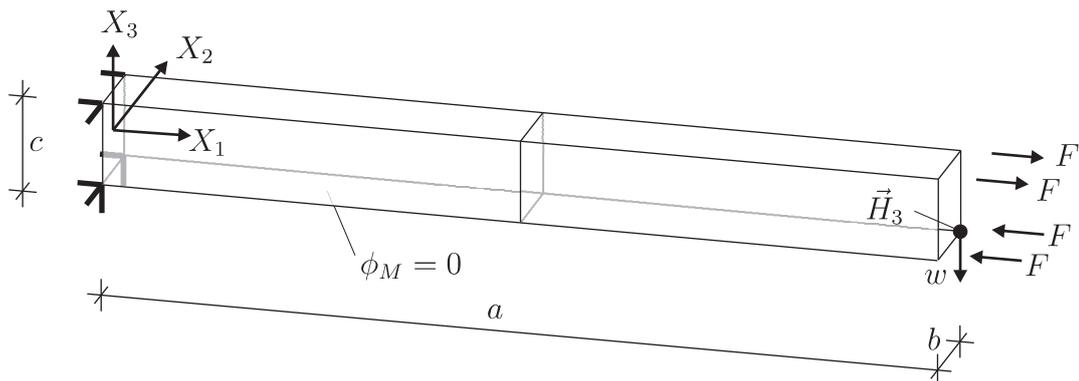
Tab. 8.4: Ergebnisse des Patchtests für eine konstante Scherspannung S_{13}

	Analytisch	H1P2E30	H1P1E30G12	H1P1MIX
$u_1(X_1 = 1)$ [m]	$-0.5 \cdot 10^{-4}$	$-0.5 \cdot 10^{-4}$	$-0.5 \cdot 10^{-4}$	$-0.5 \cdot 10^{-5}$
$u_2(X_2 = 1)$ [m]	$-0.5 \cdot 10^{-4}$	$-0.5 \cdot 10^{-4}$	$-0.5 \cdot 10^{-4}$	$-0.5 \cdot 10^{-5}$
$u_3(X_3 = 1)$ [m]	$1.0 \cdot 10^{-4}$	$1.0 \cdot 10^{-4}$	$1.0 \cdot 10^{-4}$	$1.0 \cdot 10^{-4}$
\vec{B}_1 [A/m]	0	0	0	0
\vec{B}_2 [A/m]	0	0	0	0
\vec{B}_3 [A/m]	0.08	0.08	0.08	0.08

Tab. 8.5: Ergebnisse des Patchtests für ein vorgegebenes Skalarpotential

8.1.2 Kragarm unter Biegebeanspruchung

Um das Approximationsverhalten der Elementformulierungen unter Biegebeanspruchung zu untersuchen, wird ein Kragarm, der durch ein Endmoment belastet ist, betrachtet. Das System und die Finite-Element-Vernetzung sind in Abbildung 8.2 dargestellt. Es wird wieder ein isotropes Material mit linearem Verhalten an-



Abmessungen: $a = 0.2$ m, $b = c = 0.02$ m

Abb. 8.2: Systemgeometrie und Finite-Element-Netz

$E_1 = E_3 = 50 \text{ GN/m}^2$, $G_{12} = G_{13} = 25 \text{ GN/m}^2$, $\nu_{12} = \nu_{13} = 0.0$
$e_{33} = e_{23} = 0.0$, $e_{13} = -20.0 \text{ Vs/Am}^2$, $e_{15} = 0.0$
$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 2 \cdot 10^{-8} \text{ Vs/Am}$

Tab. 8.6: Verwendete Materialparameter für den Kragarm unter Biegebeanspruchung

genommen. Die Querkontraktion soll zur Vereinfachung vernachlässigt werden. Die gewählten Parameter sind in Tabelle 8.6 angegeben.

Das Kräftepaar mit $F = 10 \text{ kN}$ am Ende des Kragarmes erzeugt eine linear über die Höhe verteilte Normalspannung $S_{11} = 2FcX_3/I$ mit $I = bc^3/12$. Durch die

zwängungsfreie Lagerung müssen alle anderen Spannungskomponenten und die Flussdichte verschwinden. Damit kann der Verzerrungszustand wieder aus (8.1) ermittelt werden. Man erhält, wie auf Seite 91 erläutert, einen linearen Verlauf in X_3 -Richtung der Verzerrungen E_{11} und des magnetischen Feldes \vec{H}_3 . Folglich ergibt sich für das Skalarpotential eine quadratische Verteilung über die Höhe des Kragarms. Die Durchbiegung der Kragarmspitze kann man mit der Balkentheorie bestimmen. Es gilt $w = \frac{1}{2}a^2 E_{11}/X_3 = 8.571 \cdot 10^{-3}$ m. In Tabelle 8.7 wird die analytische Lösung mit den Ergebnissen der unterschiedliche Elementformulierungen verglichen. Dabei ist jeweils die Durchbiegung der Kragarmspitze w und die ma-

	Analytisch	H1P1E30	H1P1E30	H1P1E30
Elemente in X_3		1	2	4
w [m]	$8.571 \cdot 10^{-3}$	$12.000 \cdot 10^{-3}$	$9.231 \cdot 10^{-3}$	$8.728 \cdot 10^{-3}$
\vec{H}_3 [A/m]	$-4.286 \cdot 10^6$	$-1.155 \cdot 10^6$	$-2.308 \cdot 10^6$	$-3.277 \cdot 10^6$

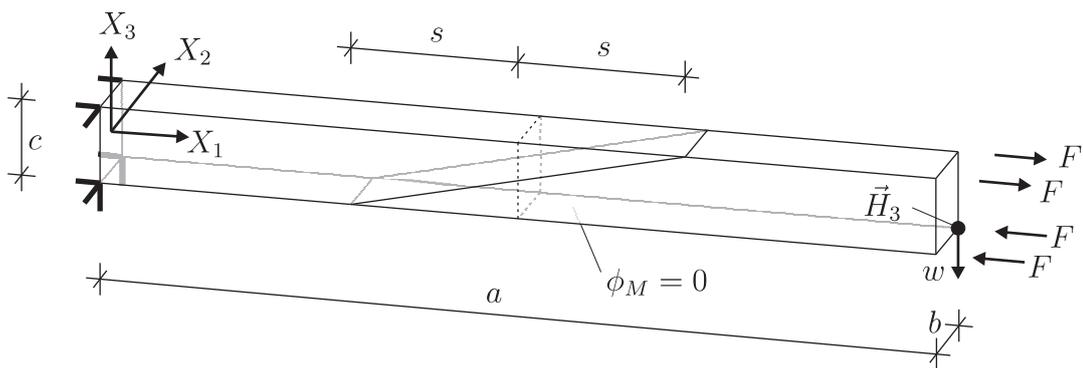
	H1P2E30	H1P1E30G12	H1P1MIX
Elemente in X_3	1	1	1
w [m]	$8.571 \cdot 10^{-3}$	$8.571 \cdot 10^{-3}$	$8.571 \cdot 10^{-3}$
\vec{H}_3 [A/m]	$-4.286 \cdot 10^6$	$-4.286 \cdot 10^6$	$-4.286 \cdot 10^6$

Tab. 8.7: Ergebnisse des Kragarms unter Biegebeanspruchung für die unterschiedlichen Elementformulierungen

gnetische Feldstärke \vec{H}_3 in dem in Abbildung 8.2 durch „•“ gekennzeichneten Knoten angegeben. Das Element H1P1E30 ohne Verbesserung der magnetischen Anteile ist durch die linearen Ansatzfunktionen für ϕ_M nicht in der Lage, den quadratischen Verlauf des Skalarpotentials abzubilden. Das magnetische Feld \vec{H}_3 verschwindet, und die Durchbiegung der Kragarmspitze wird überschätzt. Auch eine Verfeinerung der Vernetzung in X_3 -Richtung mit zwei Elementen führt nicht zu zufriedenstellenden Ergebnissen. Bei Verwendung von vier Elementen über der Höhe wird die Durchbiegung brauchbar angenähert, bei \vec{H}_3 gibt es jedoch immer noch erhebliche Abweichungen. In Element H1P2E30 werden zur Approximation von ϕ_M quadratische Ansatzfunktionen verwendet. Dadurch kann das Skalarpotential korrekt abgebildet werden, und man erhält schon mit einem Element in X_3 -Richtung die exakte Lösung. Allerdings werden bei der Verwendung von quadratischen Ansatzfunktionen 27 statt 8 Freiheitsgrade pro Element für ϕ_M benötigt. In den Elementen H1P1E30G12 und H1P1MIX wird die magnetische Feldstärke durch interne Freiheitsgrade interpoliert, die auf Elementebene kondensiert werden. Dadurch kann zwar der tatsächliche Verlauf von ϕ_M nicht

korrekt abgebildet werden, aber man erhält korrekte Ergebnisse für \vec{H}_3 und damit auch für die Durchbiegung. Im Vergleich zum Element H1P2E30 sind die Elemente H1P1E30G12 und H1P1MIX effizienter, da sie weniger Freiheitsgrade pro Element besitzen und bei einem Element über den Querschnitt die gleiche Genauigkeit liefern wie das Element H1P2E30. Man erhält daher weniger globale Freiheitsgrade. Desweiteren ist die numerische Integration bei quadratischen Ansatzfunktionen aufwendiger, da mehr Gaußpunkte benötigt werden. Es sei angemerkt, dass die Verwendung von internen Freiheitsgraden einen zusätzlichen numerischen Aufwand beim Aufstellen der Elementsteifigkeitsmatrizen zur Folge hat. Dieser ist allerdings gegenüber dem Effizienzgewinn, der aus der Einsparung von globalen Freiheitsgraden resultiert, zu vernachlässigen.

Als weiterer Aspekt soll an diesem Beispiel das Verhalten der Elementformulierungen bei irregulären Netzen diskutiert werden. In Abbildung 8.3 ist die Geometrie der Elemente durch die schräg verlaufende Trennfläche verzerrt. Die Länge s gibt die Stärke der Verzerrung an. Abmessungen und Materialparameter blei-



Abmessungen: $a = 0.2 \text{ m}$, $b = c = 0.02 \text{ m}$

Abb. 8.3: Systemgeometrie mit irregulärem Finite-Element-Netz, Netzverzerrung in der Belastungsebene

ben unverändert. Es wird untersucht, wie sich die Ergebnisse für Durchbiegung w und magnetische Feldstärke \vec{H}_3 durch die Störung s verändern. Die Werte von w und \vec{H}_3 werden in dem durch „•“ gekennzeichneten Knoten ausgewertet. Die Ergebnisse sind in Abbildung 8.4 angegeben. Man erkennt, dass die Werte w und \vec{H}_3 für alle Elementformulierungen schon bei kleiner Störung stark abfallen. Das H1P1E30G12-Element erreicht für $s = 0.02 \text{ m}$ nur noch eine Durchbiegung, die weniger als 10% der tatsächlichen Verschiebung entspricht. Die magnetische Feldstärke wechselt sogar das Vorzeichen. Die Elemente H1P2E30 und H1P1MIX zeigen bessere Ergebnisse. Allerdings fällt auch hier w und \vec{H}_3 auf ca. 30% des Sollwertes ab. Zum Vergleich sind auch die Resultate des Elementes H2P2 mit

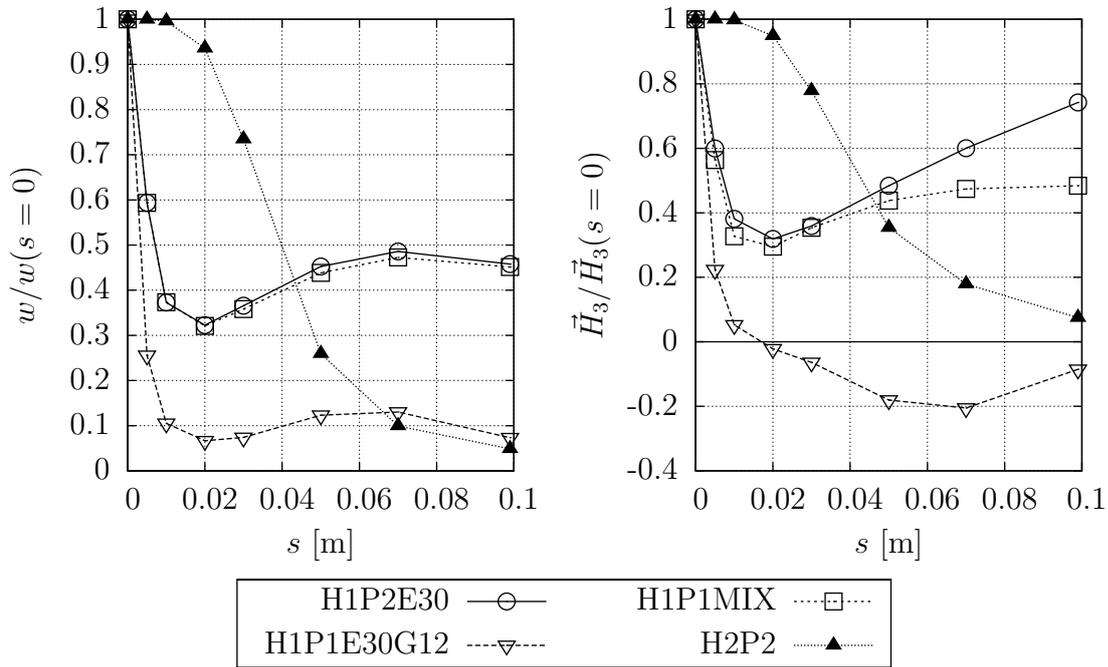


Abb. 8.4: Normierte Durchbiegungen und magnetische Feldstärken in Abhängigkeit von s . Netzverzerrung in der Belastungsebene

triquadratischen Ansätzen für Verschiebungen und Potential angegeben. Dieses zeigt bei geringem $s < 0.05$ bessere Ergebnisse. Für größere Netzverzerrungen $s > 0.05$ ist allerdings auch hier ein starker Abfall von w und \vec{H}_3 zu beobachten.

Als weiteres verzerrtes Netz wird die Geometrie so verändert, das die Trennfläche um 90° gedreht erscheint, siehe Abbildung 8.5. Die Werte für w und \vec{H}_3 werden

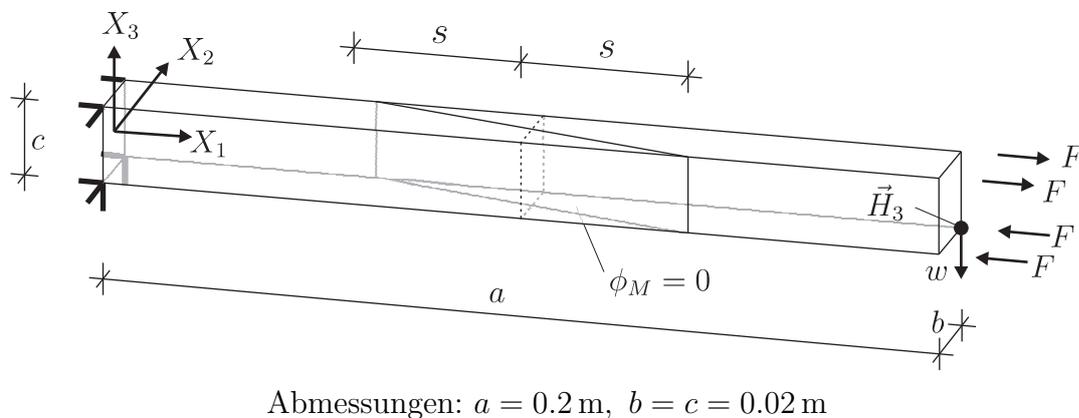


Abb. 8.5: Systemgeometrie mit irregulärem Finite-Element-Netz, Netzverzerrung senkrecht zur Belastungsebene

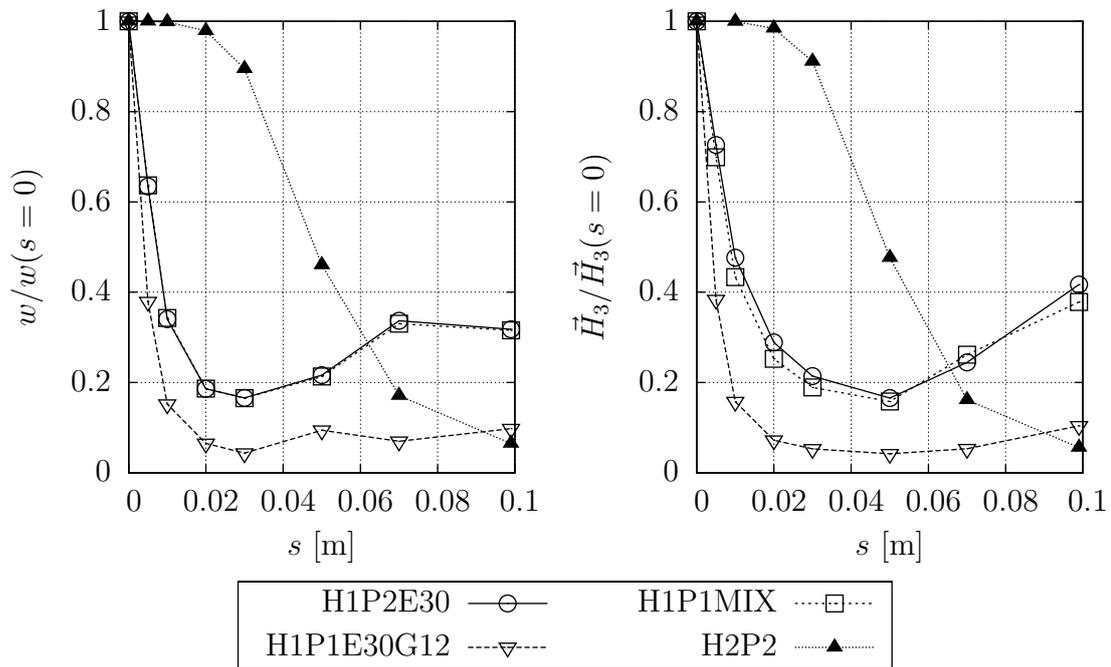


Abb. 8.6: Normierte Durchbiegungen und magnetische Feldstärken in Abhängigkeit von s . Netzverzerrung senkrecht zur Belastungsebene

wieder in dem durch „●“ markierten Knoten untersucht. Die Ergebnisse sind in Abbildung 8.6 über der Störung s aufgetragen. Auch in diesem Fall zeigt sich schon bei geringer Netzverzerrung eine starke Abnahme von Durchbiegung und magnetischer Feldstärke, wobei hier das Element H1P1E30G12 die größten Abweichungen aufweist. Das quadratische Element H2P2 zeigt auch für diese Geometrie eine geringe Empfindlichkeit gegenüber schwach irregulären Netzen. Bei stärkeren Netzverzerrungen s ist jedoch wiederum eine erhebliche Verringerung der Werte von w und \vec{H}_3 festzustellen.

Die Empfindlichkeit gegenüber Netzverzerrungen ist bei trilinearen Volumenelementen mit EAS- und gemischten Ansätzen bekannt. Allerdings ist diese Verhalten bei rein mechanischen Elementen weniger ausgeprägt, siehe auch [4, 70, 93]. Mit zunehmender Verfeinerung der Vernetzung nach der h-Methode verschwindet allerdings die Fehleinschätzung der Formulierungen, da sich der Verzerrungszustand dem konstanten Zustand nähert, der nach Beispiel 8.1.1 korrekt abgebildet werden kann. Dessen ungeachtet ist diese Problematik bei der Verwendung der Elemente zu beachten.

8.1.3 Eigenwertuntersuchung

Bei gemischten Formulierungen können Nullenergiemoden aufgrund von schlechter Wahl der Approximationen für die zusätzlichen internen Freiheitsgrade auftreten. Für die Wahl der Approximation ist die Ladyzhenskaya-Babouska-Brezzi-Bedingung (LBB-Bedingung) maßgebend, siehe z. B. BREZZI & FORTIN [17]. Alternativ kann auch eine Eigenwertuntersuchung angestellt werden. Diese wird an einem Element mit reguläre Diskretisierung und der Kantenlänge 2 durchgeführt. Dabei wird ein idealisiertes Material mit $E_1 = E_2 = E_3 = 1.0$, $\nu_{12} = \nu_{13} = 0.25$, $e_{33} = e_{15} = 1.0$, $e_{13} = 0.5$ und $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1.0$ verwendet. Die Randbedingungen sind so gewählt, dass die 6 Starrkörperbewegungen des Elementes behindert sind. Zudem wird eine Festhalterung zur Erdung des Skalarpotentials eingeführt. Damit verbleiben $32 - 6 - 1 = 25$ Eigenwerte. Die Ergebnisse für die Elemente H1P1MIX und H1P1E30G12 sind in Tabelle 8.8 angegeben. Bei beiden

Nr.	Eigenwert		Nr.	Eigenwert	
	H1P1MIX	H1P1E30G12		H1P1MIX	H1P1E30G12
1	0.1276E-01	0.9474E-02	14	0.6420E+00	0.6444E+00
2	0.3938E-01	0.2049E-01	15	0.7123E+00	0.7659E+00
3	0.6859E-01	0.4827E-01	16	0.8657E+00	-0.9836E+00
4	-0.1288E+00	0.1008E+00	17	-0.9009E+00	0.1014E+01
5	0.1323E+00	0.1309E+00	18	-0.1026E+01	-0.1174E+01
6	0.1841E+00	0.1469E+00	19	0.1134E+01	0.1276E+01
7	0.2238E+00	-0.1938E+00	20	0.1281E+01	0.1386E+01
8	0.2907E+00	0.1989E+00	21	-0.1360E+01	-0.1554E+01
9	0.3858E+00	0.2299E+00	22	0.1410E+01	-0.1623E+01
10	0.4187E+00	0.2590E+00	23	-0.1604E+01	-0.1656E+01
11	0.5523E+00	0.3306E+00	24	-0.1660E+01	0.1669E+01
12	0.5797E+00	0.4876E+00	25	0.1679E+01	-0.1698E+01
13	-0.6002E+00	0.5660E+00			

Tab. 8.8: Ergebnisse der Eigenwertuntersuchung für die Elemente H1P1MIX und H1P1E30G12

Elementformulierungen sind jeweils 7 Eigenwerte negativ. Dies resultiert aus der konstitutiven Gleichung (6.6). Hier ist die Permeabilität mit einem negativen Vorzeichen behaftet. Dieses sorgt für negative Einträge auf der Hauptdiagonale der tangentialen Steifigkeit. Da ein Freiheitsgrad des Skalarpotentials gehalten ist, verbleiben 7 negative Eigenwerte für das 8-Knoten-Element. Weiterhin gibt es in Tabelle 8.8 keinen Eigenwert der verschwindet. Es treten somit keine Nullenergiemoden auf. Eine Untersuchung auf Volumenlocking mit einer Querkontraktion

nahe 0.5 wurde hier nicht vorgenommen, da diese Problematik bei den betrachteten magnetostriktiven und piezoelektrischen Materialien aufgrund der niedrigen Querkontraktion nicht maßgebend ist.

8.2 Nichtlineares Materialverhalten

An diesem Beispiel wird die Tauglichkeit des vorgestellten nichtlinearen Materialmodells untersucht. Dazu wird zunächst ein Terfenol-D Würfel mit 2 cm Kantenlänge betrachtet. Es wird eine zwängungsfreie Lagerung verwendet, wie in Abbildung 8.7 dargestellt.

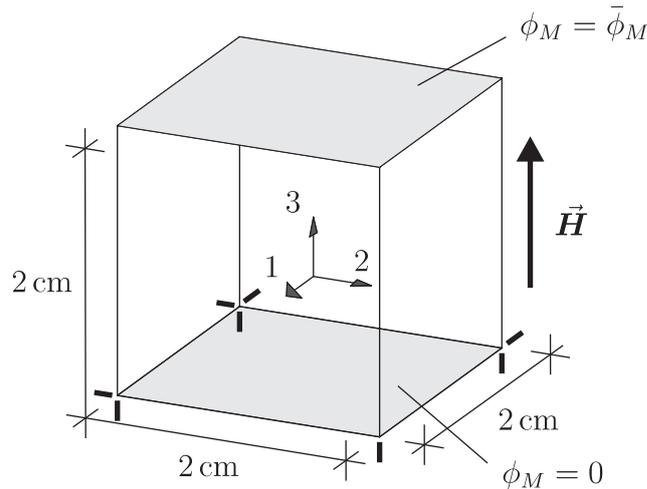


Abb. 8.7: Terfenol-D-Würfel im homogenen magnetischen Feld

Magneto-elastische Parameter:	$E_1 = E_3 = 29 \text{ GN/m}^2$ $\nu_{12} = \nu_{13} = 0.25, G_{12} = G_{13} = 11.6 \text{ GN/m}^2$ $e_{33} = 40.9 \text{ Vs/Am}^2$ $e_{13} = e_{23} = -43.95 \text{ Vs/Am}^2$ $e_{15} = 28.3 \text{ Vs/Am}^2$ $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 2.8025 \cdot 10^{-6} \text{ Vs/Am}$
Schaltkriterium:	$\vec{M}_c = 8.2 \cdot 10^{-3} \text{ T}$
Verfestigungsfunktion:	$E_s^i = 1.08 \cdot 10^{-3}, \vec{H}_s^i = 185 \text{ kA/m}$ $k = 1.03 \mu_3$ $a = 0.15/\text{arctanh}(1/b) \text{ T}, b = 1.04$

Tab. 8.9: Verwendete Materialparameter für Terfenol-D

Das magnetische Skalarpotential wird an der Unterseite Null gesetzt und oben durch $\bar{\phi}_M$ vorgegeben. Dadurch kann ein homogenes magnetisches Feld in 3-Richtung erzeugt werden. Das Potential wird als Funktion der Zeit quasistatisch

in Form einer Dreiecksfunktion aufgebracht, so dass die Feldstärke zwischen $\vec{H}_3 = -100 \text{ kA/m}$ und $\vec{H}_3 = 100 \text{ kA/m}$ alterniert. Die verwendeten Materialparameter sind in Tabelle 8.9 angegeben und basieren auf den Arbeiten von DAPINO [32] und MOFFETT ET AL. [86]. Nicht dokumentierte Kennwerte sind sinnvoll ergänzt worden. Als Ergebnis sind in Abbildung 8.8 die magnetische Flussdichte \vec{B}_3 über der magnetischen Feldstärke \vec{H}_3 und die Verzerrungskomponente E_{33} über \vec{H}_3 aufgetragen. Zum Vergleich ist jeweils eine experimentelle Kurve für Terfenol-D angegeben, die aus ENGDAHL [41] entnommen wurde.

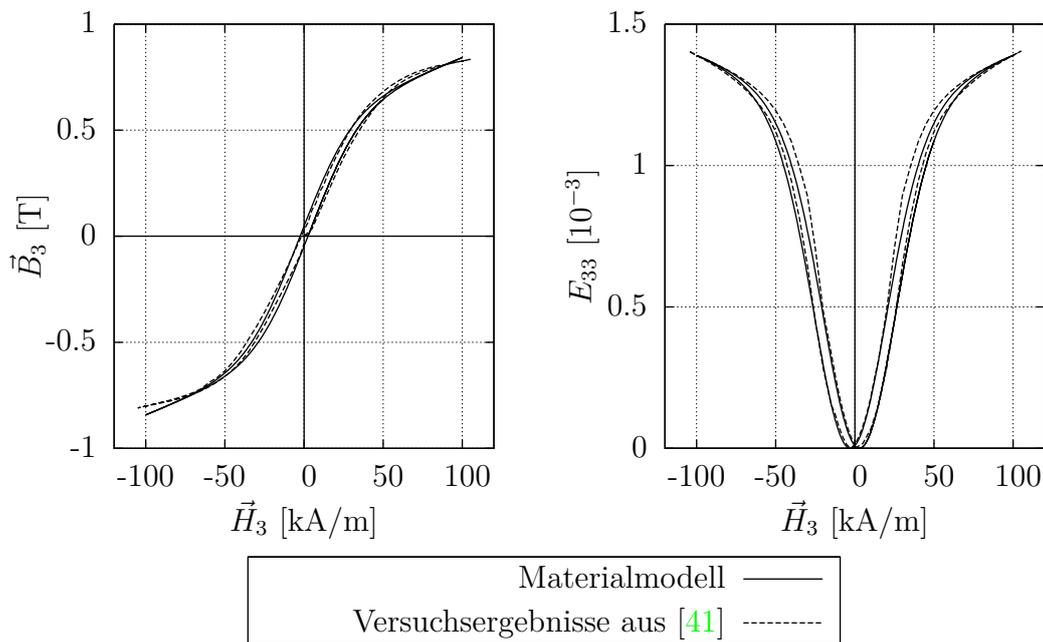


Abb. 8.8: Ferromagnetische Hysterese und Schmetterlingshysterese von Terfenol-D

Da Terfenol-D ein äußerst weichmagnetisches Verhalten aufweist, ist der lineare Bereich bis zum Erreichen des Koerzitivwertes \vec{M}_c sehr klein. Bei Überschreiten von \vec{M}_c erfolgt ein starkes Ansteigen der magnetischen Flussdichte und der Verzerrungen. Ab einer Feldstärke von ca. $\vec{H}_3 = 50 \text{ kA/m}$ bewirkt der arctanh-Ausdruck in der Verfestigungsfunktion (6.34) eine Verminderung des Wachstums von \vec{B}_3 und E_{33} . Für magnetische Feldstärken größer als 80 kA/m ist der Einfluss der arctanh-Funktion so stark, dass die irreversible Größe α nicht weiter steigt und Sättigung eintritt. Bei Entlastung zeigen sich für $\vec{H}_3 = 0$ nur sehr geringe remanente Werte für Flussdichte und Verzerrungen, die auch auf die weichmagnetischen Eigenschaften des Materials zurückzuführen sind. Vergleicht man die Ergebnisse des Materialmodells mit den Versuchsergebnissen, so zeigen sich hier gute Übereinstimmungen. Das Modell ist somit in der Lage, die typischen Hysteresekurven von Terfenol-D abzubilden.

Ferner soll an diesem Beispiel auch das Konvergenzverhalten des Materialmodells und der Finite-Element-Rechnung bewertet werden. Dazu wird ein relativ großer Lastschritt von $\vec{H}_3 = 5 \text{ kA/m}$ auf $\vec{H}_3 = 11 \text{ kA/m}$ am Beginn des nichtlinearen Verhaltens untersucht, der in Abbildung 8.9 durch Punkte gekennzeichnet ist.

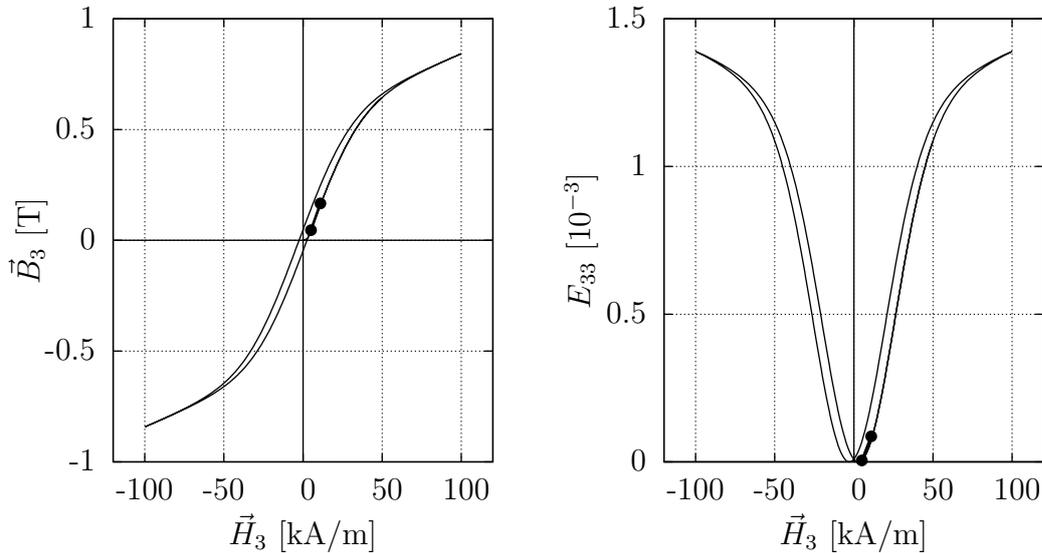


Abb. 8.9: Gewählter Lastschritt zur Betrachtung der Konvergenz des iterativen Lösungsprozesses

Zur Beurteilung des Konvergenzverhaltens werden die Residuen der Iterationsschritte herangezogen. In Tabelle 8.10 sind die Residuen für die globale Gleichgewichtsiteration R angegeben. Außerdem ist in der 3. und 4. Spalte eine typische lokale Iteration zur Bestimmung der internen Variable notiert. Es zeigt sich, dass sowohl für die lokalen als auch die globalen Residuen quadratisches Konvergenzverhalten vorliegt.

In Abschnitt 6.3 wurde ein erweitertes Modell zur Abbildung ferrimagnetischen Verhaltens vorgestellt. Der Grundgedanke des Modell basiert auf einer lokalen

Iteration	Globales Residuum R	Lokales Residuum R_a	Lokales Residuum R_b
1	$9.904572E + 01$	$-7.196267E - 02$	$1.052652E + 00$
2	$1.732041E + 02$	$-3.088828E - 02$	$9.670525E - 02$
3	$7.862738E + 00$	$-1.770798E - 03$	$1.616275E - 03$
4	$2.152431E - 02$	$-1.583016E - 06$	$4.965618E - 07$
5	$1.636638E - 07$	$-4.076455E - 13$	$4.820135E - 14$

Tab. 8.10: Konvergenzverhalten der lokalen und globalen Iteration

$$\begin{aligned} E_s^i &= 0.35 \cdot 10^{-3}, \quad \vec{H}_s^i = 125 \text{ kA/m} \\ k &= 1.1 \mu_3 \\ a &= 0.1/\operatorname{arctanh}(1/b) \text{ T}, \quad b = 1.05 \end{aligned}$$

Tab. 8.11: Modifizierte Parameter der Verfestigungsfunktion für ferrimagnetisches Hystereseverhalten

Beschreibung der Hysteresekurven, wobei die horizontale Verschiebung aus dem Ursprung durch den Materialparameter \vec{H}_0 beschrieben wird. Da sich ferrimagnetische Hysteresekurven in Form und Größe unterscheiden, müssen auch die Parameter der Verfestigungsfunktion angepasst werden, siehe Tabelle 8.11. In

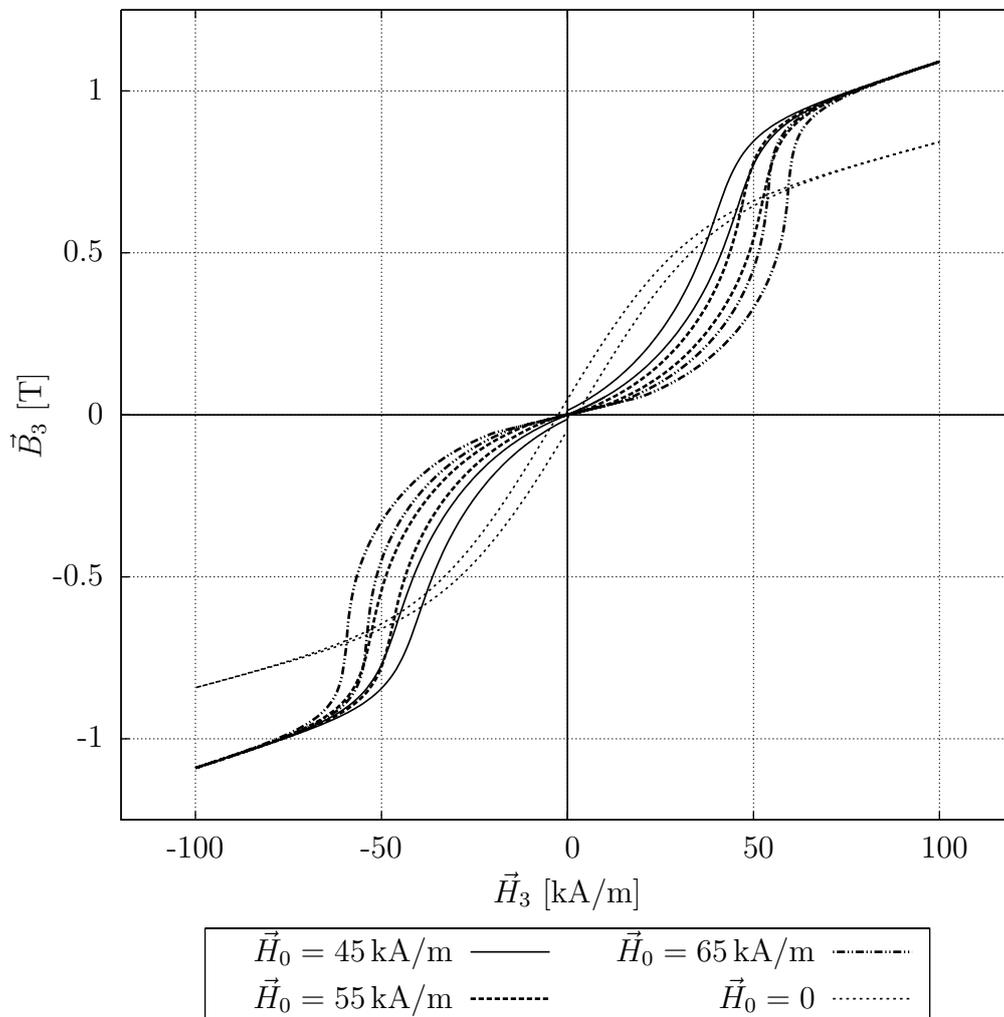


Abb. 8.10: Ferrimagnetische Hysteresen für unterschiedliche Werte \vec{H}_0

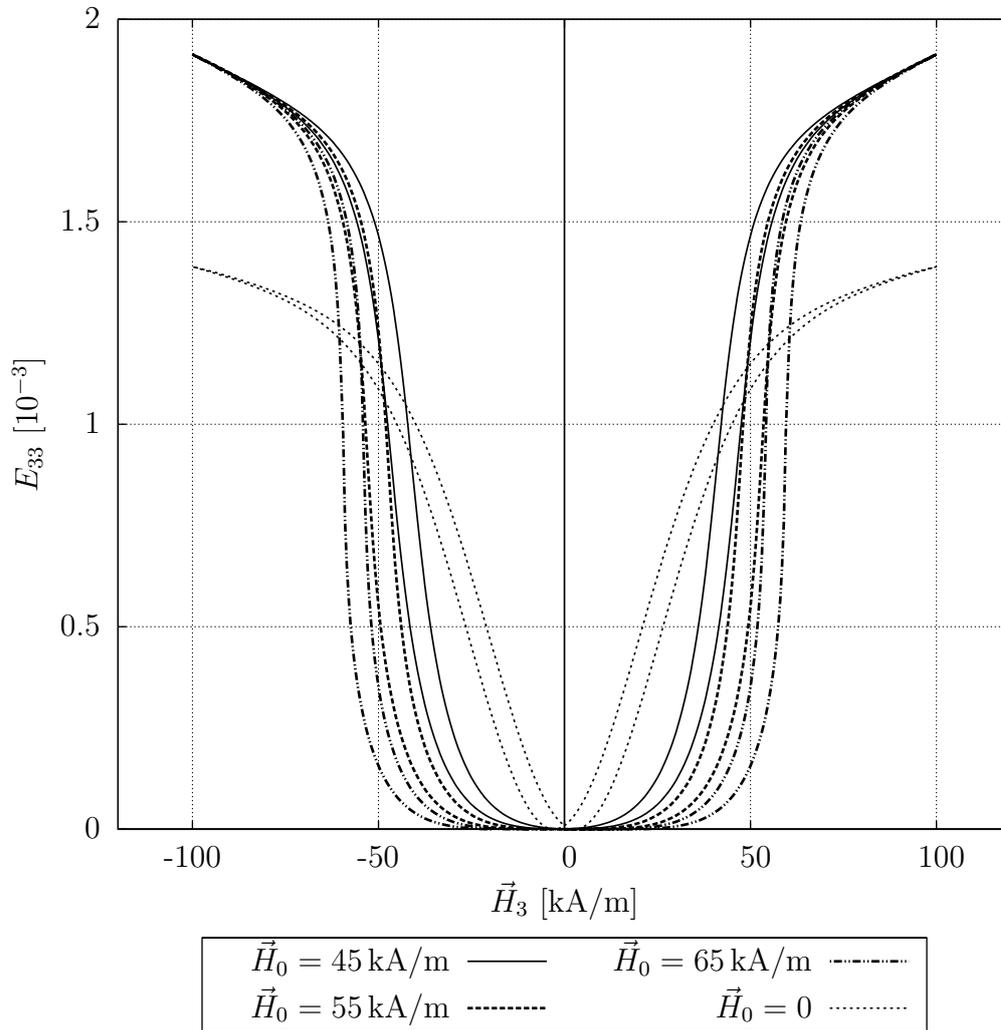


Abb. 8.11: Ferrimagnetische Schmetterlingshysterese für unterschiedliche Werte \vec{H}_0

Abbildung 8.10 und 8.11 sind die Ergebnisse für verschiedene Werte von \vec{H}_0 angegeben. Je nach Betrag von \vec{H}_0 wird die Hysterese unterschiedlich stark aus dem Ursprung heraus verschoben. Zum Vergleich ist das Ergebnis des unveränderten Modells aus Abbildung 8.8 unterlegt. Es sei an dieser Stelle noch einmal angemerkt, dass das Modell den Einfluss der mechanischen Vorspannung nicht berücksichtigt. Daher sind an dieser Stelle keine experimentellen Vergleichsdaten angegeben.

Piezoelektrisches Material

Das vorgestellte konstitutive Modell kann gemäß Abschnitt 6.4 auch zur Modellierung ferroelektrischer Keramiken herangezogen werden. Dazu wird in Ent-

sprechung zu dem Versuch von HWANG ET AL. [51] ein Blei-Lanthan-Zirkonat-Titanat (PLZT) Würfel von 10 mm Kantenlänge betrachtet. Die Auflagerbedingungen werden analog zu Abbildung 8.7 angenommen. Als Belastung wird an der Oberseite des Würfels ein elektrisches Skalarpotential von ± 800 V in Form einer Dreiecksfunktion vorgegeben. Die verwendeten Materialparameter sind aus [51] entnommen und in Tabelle 8.12 angegeben. In Abbildung 8.12 ist die resultie-

Piezoelektrische Parameter:	$E_1 = E_3 = 68 \text{ GN/m}^2$ $\nu_{12} = \nu_{13} = 0.35, G_{13} = 25.19 \text{ GN/m}^2$ $e_{33} = 50.116 \text{ C/m}^2$ $e_{13} = e_{23} = -14.96 \text{ C/m}^2$ $e_{15} = 38.148 \text{ C/m}^2$ $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = 1.125 \text{ C/kN m}^2$
Schaltkriterium:	$\vec{P}_c = 0.405 \cdot 10^{-3} \text{ C/m}^2$
Verfestigungsfunktion:	$E_s^i = 1.44 \cdot 10^{-3} \vec{E}_s^i = 0.215 \text{ kV/m}$ $k = 0.9998 \epsilon_3$ $a = 0.0005/\text{arctanh}(1/b) \text{ C/m}^2, b = 1.04$

Tab. 8.12: Verwendete Materialparameter für PLZT

rende ferroelektrische Hysteresekurve mit der zugehörigen Schmetterlingshysteresekurve dargestellt. Zum Vergleich sind die Versuchsergebnisse aus [51] unterlegt. Es zeigen sich gute Übereinstimmungen. PLZT hat im Gegensatz zu Terfenol-D einen sehr hohen Koerzitivwert und auch die remanenten Werte der dielektrischen Verschiebung und der Verzerrungen sind wesentlich stärker ausgeprägt. Diese Eigenschaften des Materials können bei der Modellierung durch die Parameter von Verfestigungsfunktion und Schaltkriterium berücksichtigt werden.

Als weiterer Gesichtspunkt wird die Volumenerhaltung der Deformation betrachtet, die sich aus der piezoelektrischen Kopplung ergibt. In Abbildung 8.13a) sind neben den Dehnungen in 3-Richtung auch die orthogonalen Komponenten in 1- und 2-Richtung aufgetragen. Zur Überprüfung der Volumenerhaltung ist die 1. Invariante $\text{diag}(\mathbf{E})$ angegeben. Man erkennt, dass diese zwar klein ist, aber nicht vollständig verschwindet. Das bedeutet, dass kein rein volumetrischer Verzerrungszustand vorliegt, obwohl in Gleichung 6.12 durch den Projektionstensor \mathbf{I} eine volumetrische irreversible Verzerrung erzwungen wird. Man muss allerdings bedenken, dass die Umklappprozesse mit einer reversiblen piezoelektrischen Deformation einhergehen, die nicht unbedingt volumenerhaltend sein muss. Diese wird durch den Koppeltensor \mathfrak{e} bestimmt. In Abbildung 8.13b) sind zum Vergleich die Ergebnisse einer Rechnung mit modifizierten Materialparametern dar-

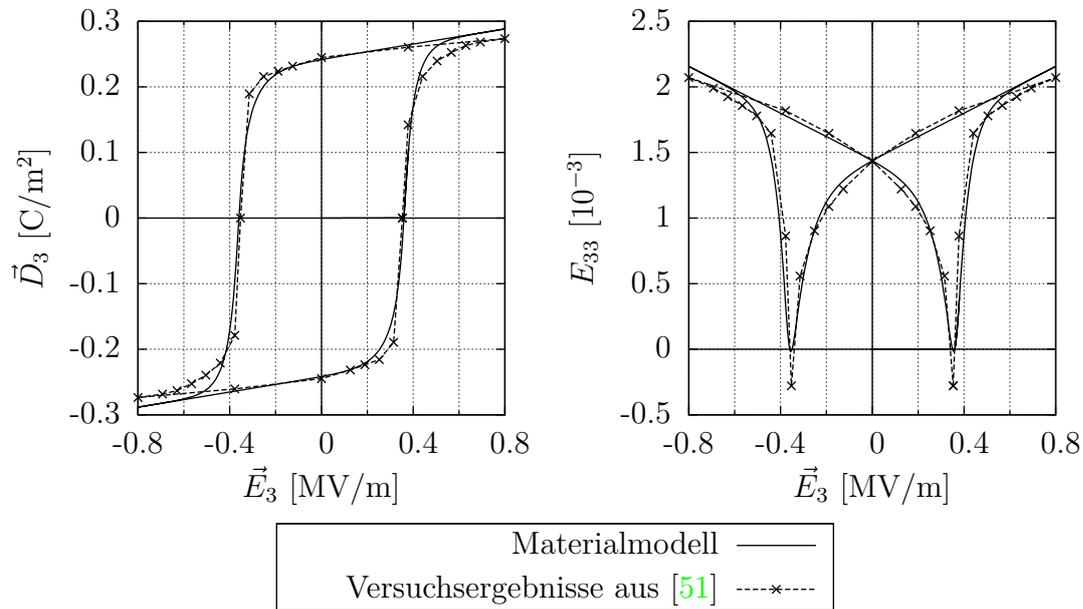


Abb. 8.12: Ferroelektrische und Schmetterlingshysterese

gestellt. Es sei in diesem Fall $e_{13} = -0.5 \cdot e_{33}$. Die 1. Invariante verschwindet, da jetzt auch die Verzerrungen, die sich aus der reversiblen Kopplung ergeben, volumenerhaltend sind. Es sei angemerkt, dass die Querkontraktion hier keine Rolle spielt, da der Deformationszustand spannungsfrei ist.

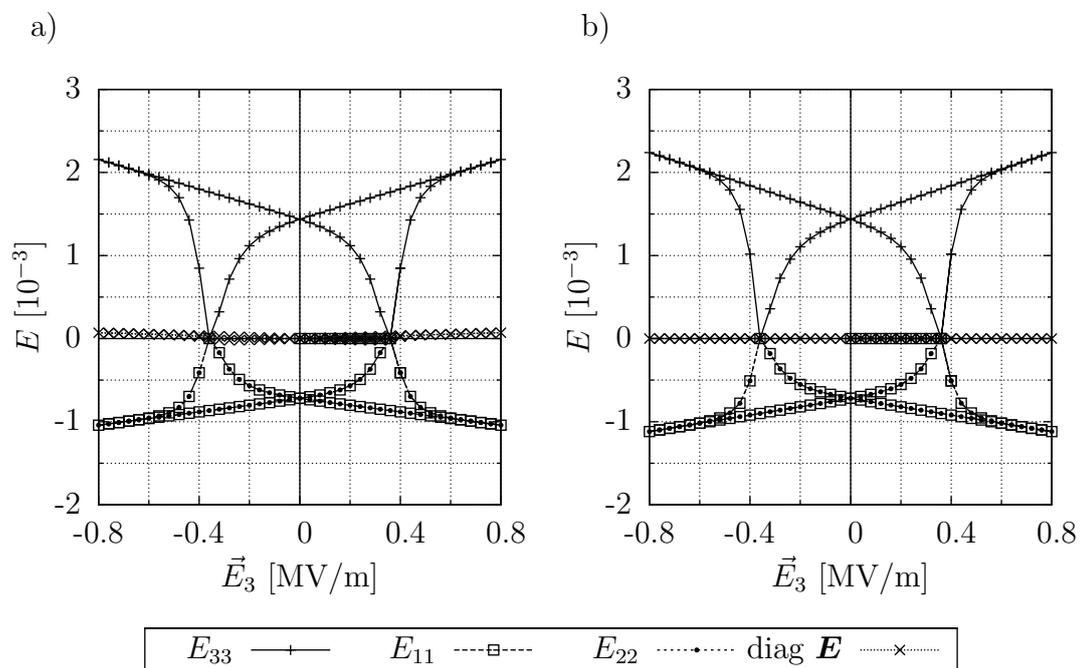


Abb. 8.13: Volumenerhaltung der piezoelektrischen Schmetterlingshysterese: a) Materialparameter aus Tabelle 8.12, b) $e_{13} = -0.5 \cdot e_{33}$

8.3 Mechanisch verstärkter magnetostriktiver Aktor

Bei den mechanisch verstärkten Aktoren (engl. amplified actuators) ist das aktive Material so in einer Umfassung angeordnet, dass die erreichbaren Verschiebungen gesteigert werden können. Dieser Aufbau wird im Aktorendesign häufig verwendet, wobei sowohl piezoelektrische als auch magnetostriktive Materialien benutzt werden. In Abbildung 8.14 ist beispielhaft ein magnetostriktiver Aktor der Firma



Quelle: <http://www.energeninc.com>

Abb. 8.14: Mechanisch verstärkter magnetostriktiver Aktor der Firma Energen

Energen dargestellt. Das magnetostriktive Element ist von der felderzeugenden Spule umschlossen und verändert durch das angelegte Magnetfeld seine Länge. Zum besseren Verständnis ist die Funktionsweise in Abbildung 8.15 noch einmal veranschaulicht. Der gestrichelte Umriss stellt den unverformten Ausgangszustand dar. Bei Anlegen eines magnetischen Feldes bewegen sich die verstärkten Anschlussstücke oben und unten am Gehäuse nach außen. Man erkennt, dass die Verschiebung w größer ist als die Kontraktion des magnetostriktiven Stabes. Im

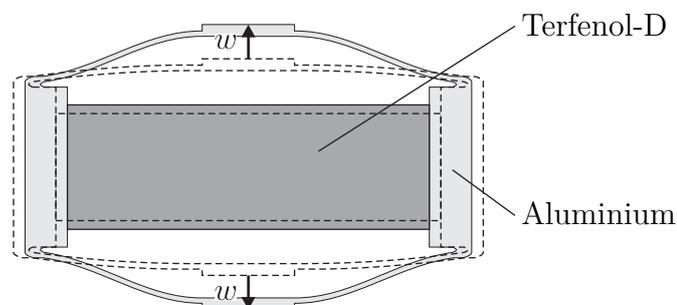


Abb. 8.15: Darstellung der Funktionsweise des verstärkten Aktors

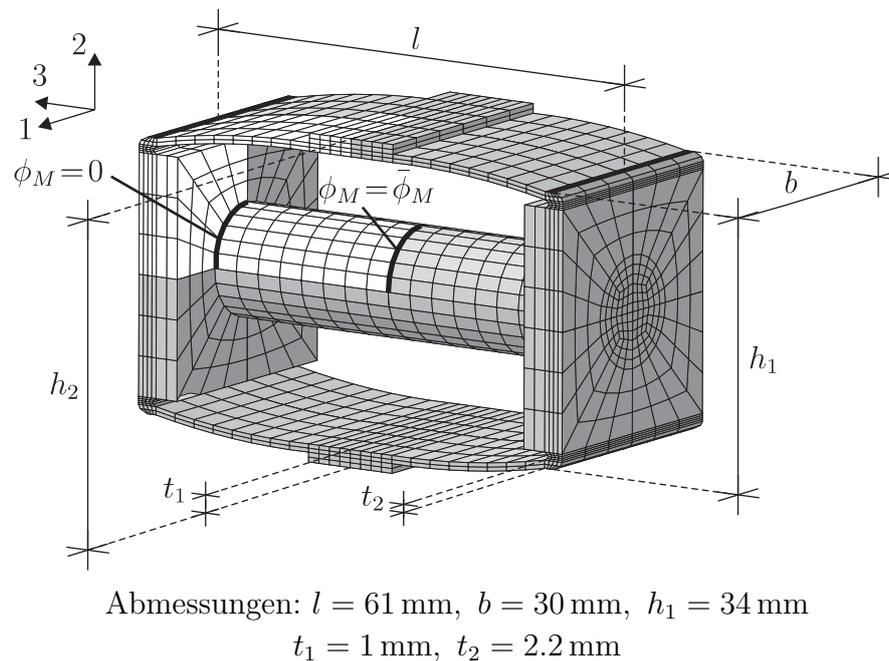


Abb. 8.16: Finite-Element-Vernetzung und Abmessungen des vorgeschlagenen Aktors

Folgendes wird ein eigenes Design diskutiert. Als aktives Material wird Terfenol-D verwendet. Die Einflüsse der Gehäuseform auf die erreichbaren Amplituden von Weg und Kraft werden in einer Parameterstudie untersucht. Die gewählten Abmessungen und das verwendete Finite-Element-Netz ist aus Abbildung 8.16 zu entnehmen. Für die Berechnung wird unter Ausnutzung der Symmetrie nur ein Achtel der Struktur mit 654 H1P1MIX-Elementen diskretisiert. Dieser Bereich ist in Abbildung 8.16 weiß gekennzeichnet. An den Symmetrierändern werden die Verschiebungen senkrecht zur Symmetrieebene festgehalten. Das Skalarpotential wird an den Enden des Terfenol-D-Stabes vorgegeben, siehe auch Abbildung 8.16. Dadurch wird ein homogenes magnetisches Feld in 3-Richtung im Stab erzeugt. Die maximale Feldstärke beträgt 100 kA/m . Die gewählte Diskretisierung kann als auskonvergiert angesehen werden. Eine weitere Verfeinerung hat keinen Einfluss auf die Ergebnisse. Weiterhin sei angemerkt, dass die felderzeugende Spule durch die Verwendung des Skalarpotentials nicht diskretisiert wird. Der Terfenol-D-Stab habe eine Länge von 50 mm und einen Durchmesser von 14 mm . Für Terfenol-D wird nichtlineares Materialverhalten entsprechend Tabelle 8.9 angenommen. Das Gehäuse sei aus Aluminium mit $E = 75000\text{ N/mm}^2$ und $\nu = 0.33$. Die deformierte Struktur bei $\vec{E}_3 = 100\text{ kA/m}$ ist in Abbildung 8.17 mit 30-facher Überhöhung angegeben. Die Verschiebungsantwort in 2-Richtung u_2 ist durch unterschiedliche Grauabstufungen gekennzeichnet. Für die Parameterstudie werden zunächst die maximal erreichbaren Verschiebungen am Anschlussstück w untersucht, siehe

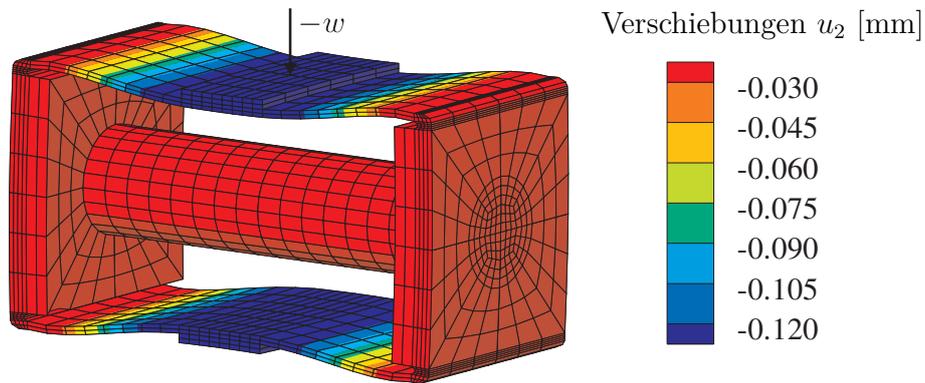


Abb. 8.17: Deformierte Struktur für $\vec{H}_3 = 100 \text{ kA/m}$ und $h_2 = 41 \text{ mm}$ mit 30 facher Überhöhung

auch Abbildung 8.17. Hierbei wird die Höhe h_2 variiert. Die magnetische Feldstärke wird von 0 auf auf 100 kA/m gesteigert und anschließend wieder auf 0 reduziert. Die Ergebnisse sind in Abbildung 8.18 graphisch dargestellt. Durch das nichtlineare Materialmodell zeigen sich Hystereseeffekte für die Verschiebungen w , die sich besonders auf den Bereich von 10 bis 70 kA/m auswirken. Je nach nach Größe von h_2 stellt sich eine unterschiedlich starke Maximalverformung ein. Man erkennt, dass die Verschiebungen mit zunehmender Höhe steigen, bis schließlich für $h_2 = 41 \text{ mm}$ ein Maximum erreicht ist, ab dem die Werte für w wieder abnehmen. Für einen Aktor mit möglichst großer Verschiebungsantwort ist folglich $h_2 = 41 \text{ mm}$ zu wählen.

Als weiterer Aspekt wird der Einfluss von h_2 auf die maximalen Kräfte, die mit dem Aktor erzeugt werden können, untersucht. Diese werden im Bereich eines Arbeitspunktes von $\vec{H}_3 = 50 \text{ kA/m}$ betrachtet. Durch ein magnetisches Feld von 100 kA/m wird das Material zunächst vollständig magnetisiert. Anschließend wird die Belastung wieder bis zum Arbeitspunkt reduziert. Bei dieser Feldstärke wird das Anschlussstück fixiert. Die magnetische Feldstärke wird dann als Lastzyklus von $\pm 25 \text{ kA/m}$ um den Arbeitspunkt moduliert. Die Reaktionskraft F_2 des Anschlussstückes in 2-Richtung wird ermittelt und über der magnetischen Feldstärke aufgetragen. Die Ergebnisse sind in Abbildung 8.19 angegeben. Auch in diesem Fall zeigen sich durch das nichtlineare Materialmodell Hystereseeffekte, die bei der Ansteuerung des Aktors zu berücksichtigen sind. Zudem ist ein Einfluss der Höhe h_2 auf die Kraft F_2 zu erkennen. Mit zunehmender Höhe h_2 steigt die Kraft F_2 an, wobei ab $h_2 = 46 \text{ mm}$ nur noch eine geringe Steigerung von F_2 zu erreichen ist.

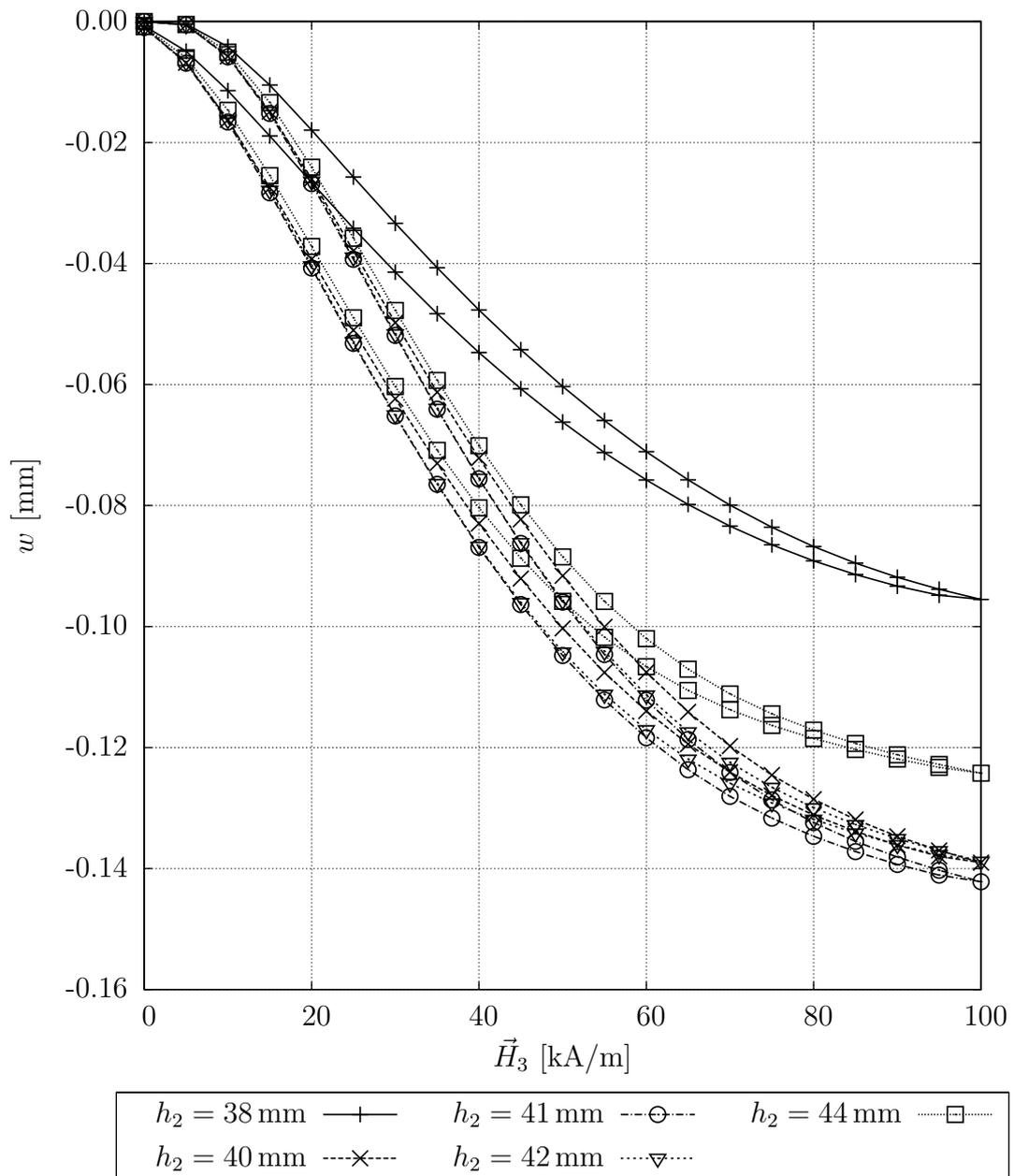


Abb. 8.18: Verschiebungen w für unterschiedliche Werte von h_2

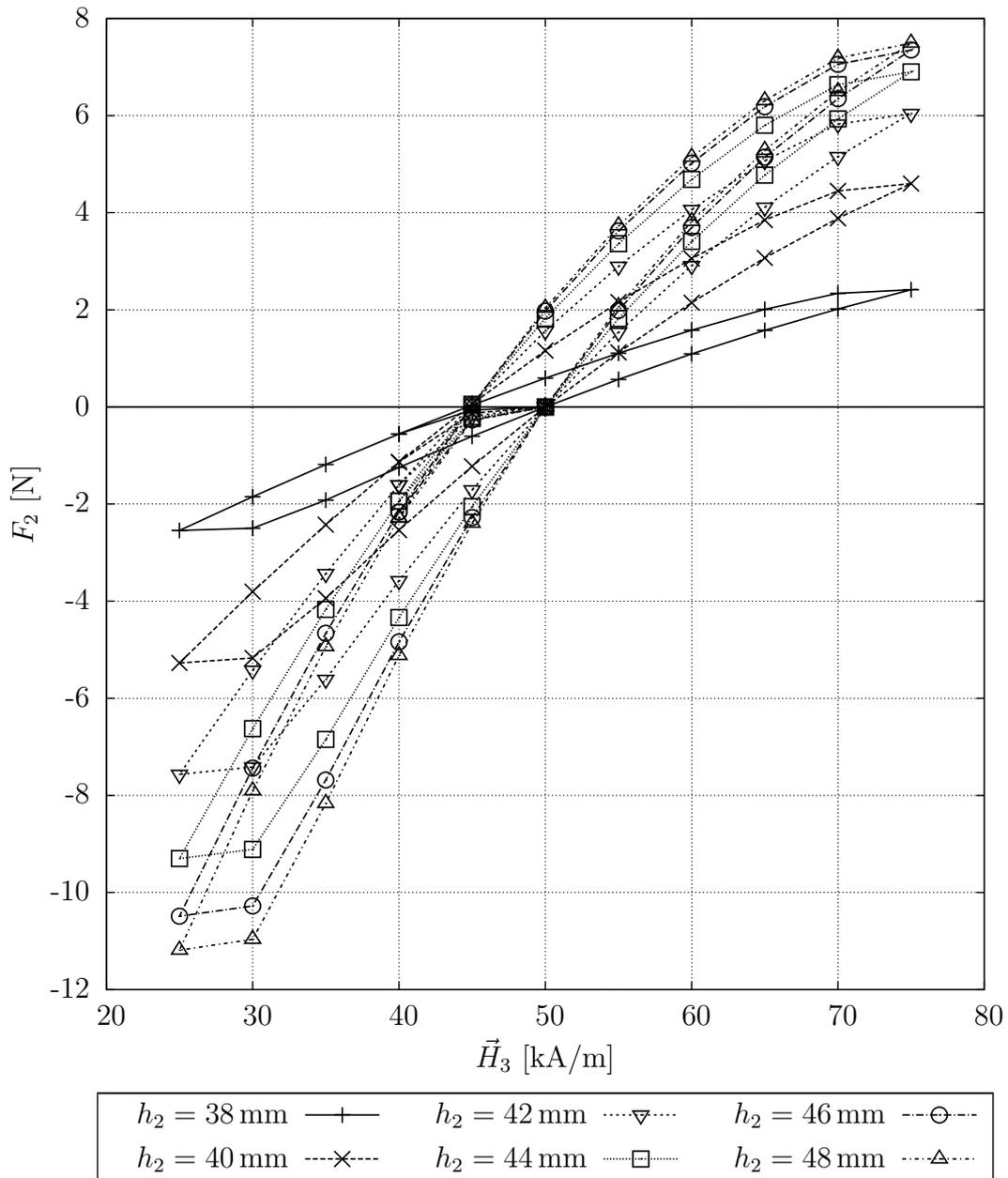


Abb. 8.19: Erreichbare Kräfte am Anschluss für unterschiedliche Werte von h_2

8.4 Magnetostruktiver Dünnschichtaktor

In diesem Beispiel wird ein magnetostruktiver Dünnschichtaktor betrachtet. An dieser Struktur soll der Einfluss geometrisch nichtlinearen Verhaltens untersucht werden. Der verwendete Aktor wurde von QUANDT & SEEMANN [97] vorgestellt. Als mögliches Anwendungsgebiet wurde ein Mikroventil vorgeschlagen, das in Abbildung 8.20 dargestellt ist. Durch Anlegen eines externen magnetischen Feldes

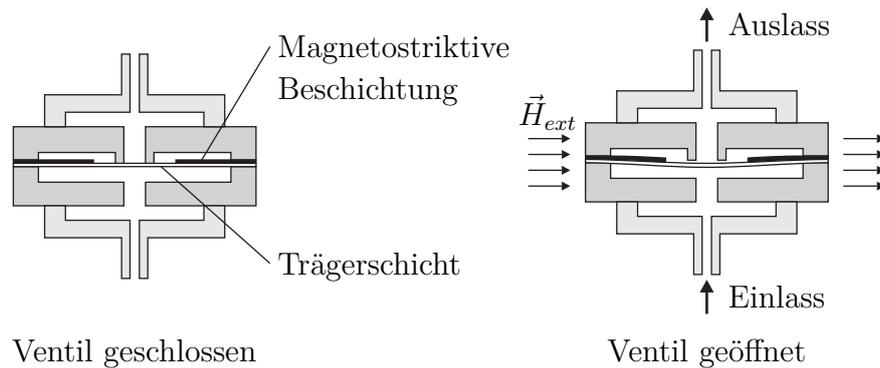
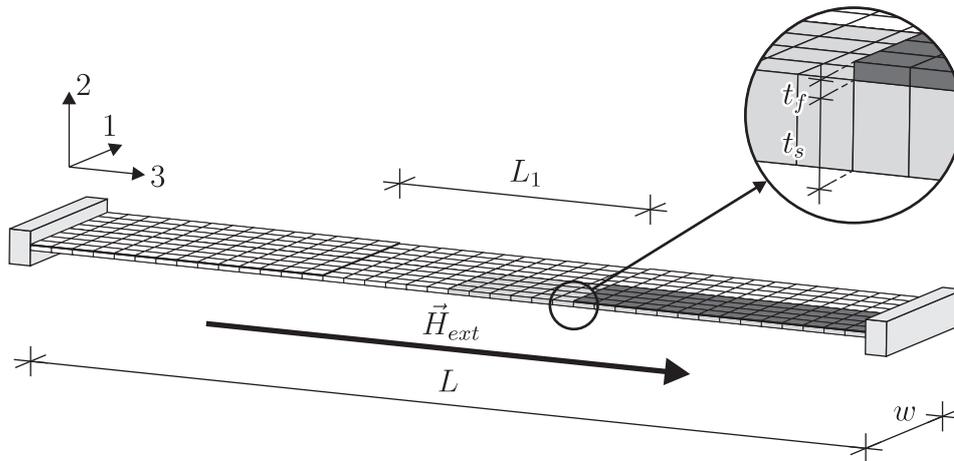


Abb. 8.20: Anwendung des magnetostruktiven Dünnschichtaktors als Mikroventil

dehnt sich die magnetostruktive Beschichtung aus und bewirkt eine Durchbiegung der Trägerschicht. Das Ventil ist geöffnet. Der Vorteil dieses Aufbaus ist die kontaktlose Ansteuerung durch eine felderzeugende Spule, die das gesamte Ventil umgibt. Bei einem piezoelektrischen Bauteil würden die Kontakte zur Aufbringung des elektrischen Feldes vom Fluid umströmt werden. Dies könnte zu Korrosion oder Kurzschlüssen führen.

Die Finite-Element-Modellierung mit Vermaßung ist in Abbildung 8.21 angegeben. Unter Ausnutzung der Symmetrie wird nur das grau gezeichnete Viertel des Systems mit 80 Elemente diskretisiert. Durch die hohe Genauigkeit des verwendeten H1P1MIX-Elementes bei rechtwinkliger Vernetzung ist ein Element in Dickenrichtung ausreichend. Das maximale Seitenverhältnis der Elemente beträgt 1:25. Der Aktor ist an beiden Enden eingespannt. Als weiterer Aspekt wird an diesem Beispiel der Einfluss der Länge L_1 auf die erreichbaren Durchbiegungen untersucht. Die Länge L_1 charakterisiert den unbeschichteten Bereich in der Mitte des Aktors. Als Belastung wird ein homogenes magnetisches Feld \vec{H}_{ext} in 3-Richtung angesetzt. Dazu wird das Potential am linken Rand Null gesetzt und am rechten Rand durch $\bar{\phi}_M$ vorgegeben. Die Feldstärke wird von Null auf $\vec{H}_{ext} = 0.064 \text{ A}/\mu\text{m}$ gesteigert und anschließend wieder auf Null abgesenkt.

Die Materialparameter für die magnetostruktive Schicht aus TbDyFe werden entsprechend Tabelle 8.9 gewählt. Für die Trägerschicht aus Silizium wird $E =$



Abmessungen: $L = 10 \text{ mm}$, $w = 2 \text{ mm}$, $t_s = 54 \text{ }\mu\text{m}$, $t_f = 11 \text{ }\mu\text{m}$

Abb. 8.21: Finite-Element-Diskretisierung des magnetostruktiven Dünnschichtaktors

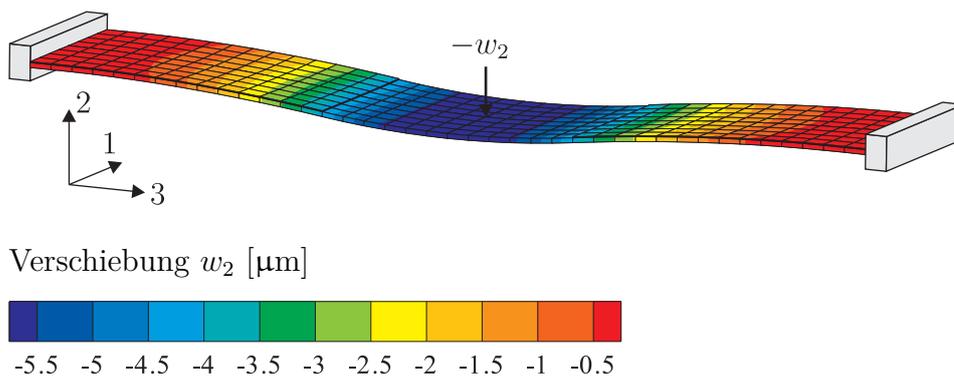


Abb. 8.22: Verformte Struktur für $\vec{H}_{ext} = 0.64 \text{ A}/\mu\text{m}$ und $L_1 = 3 \text{ mm}$ in 50-facher Überhöhung

162 GPa und $\nu = 0.23$ angenommen. Zur Veranschaulichung des Verformungsverhaltens ist die verformte Struktur für $\vec{H}_{ext} = 0.64 \text{ A}/\mu\text{m}$ und $L_1 = 3 \text{ mm}$ in Abbildung 8.22 50-fach überhöht dargestellt.

Die Durchbiegung des Aktors resultiert aus einer Ausdehnung der magnetostruktiven Schicht aus TbDyFe. Gleichzeitig induziert die Ausdehnung der TeDyFe-Schicht auch eine Verlängerung der Trägerschicht. Es liegt ein Knickproblem vor, das dem 4. Eulerfall entspricht. Um den Einfluss dieses nichtlinearen Effektes zu untersuchen werden die Ergebnisse aus einer geometrisch linearen und einer geometrisch nichtlinearen Berechnung miteinander verglichen. In Abbildung 8.23 sind die Lastverschiebungskurven für $L_1 = 2 \text{ mm}$ und $L_1 = 5 \text{ mm}$ zu sehen. Man erkennt, dass die Verschiebungen der nichtlinearen Rechnungen größer sind als die der linearen. Damit ist von einem Ausknicken der Trägerschicht auszugehen.

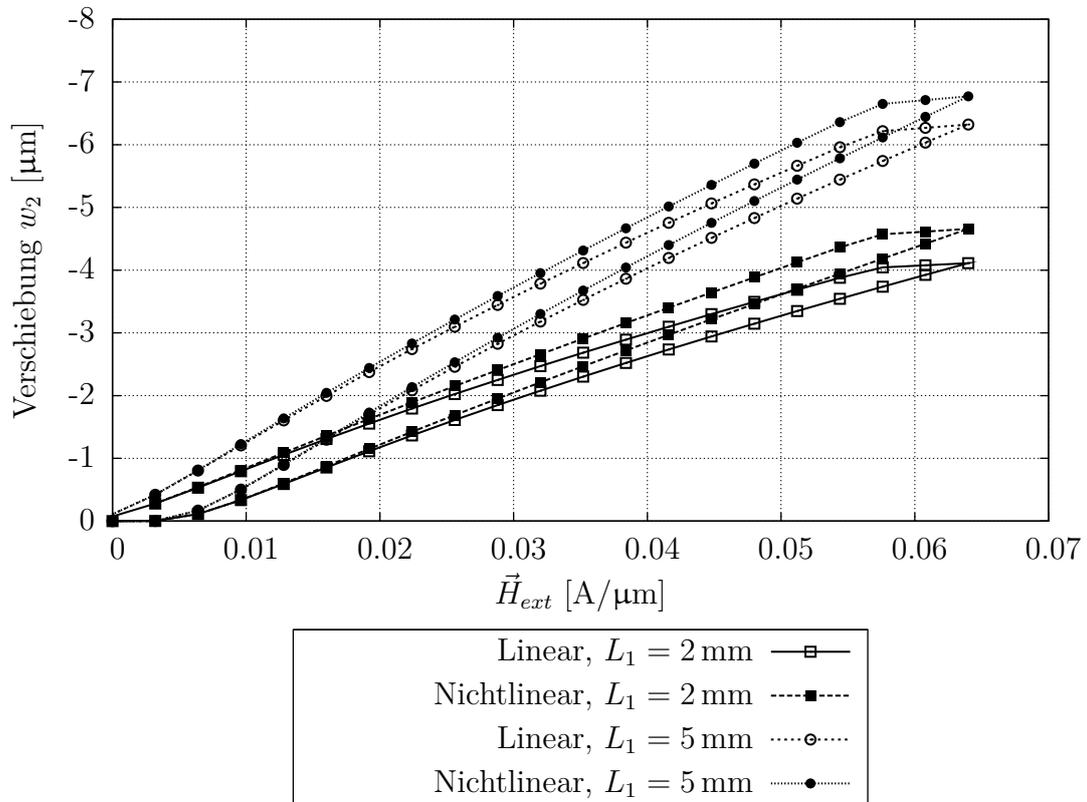


Abb. 8.23: Lastverschiebungskurve für $L_1 = 2$ mm und $L_1 = 5$ mm. Ergebnisse aus geometrisch linearer und nichtlinearer Rechnung

Das Hystereseverhalten verändert sich dadurch allerdings nicht. Der Einfluss der durch den Stabilitätsfall hervorgerufenen Verschiebungen hängt von der Länge L_1 ab. In [Abbildung 8.24](#) sind die maximalen Durchbiegungen w_2 über L_1 aufgetragen. Wie man erwarten würde, nimmt der Unterschied zwischen linearer und nichtlinearer Rechnung mit zunehmender Länge L_1 ab. Zudem ist ein optimale Beschichtungslänge $L_1 = 5$ mm ablesbar, bei der die maximale Durchbiegung w_2 auftritt.

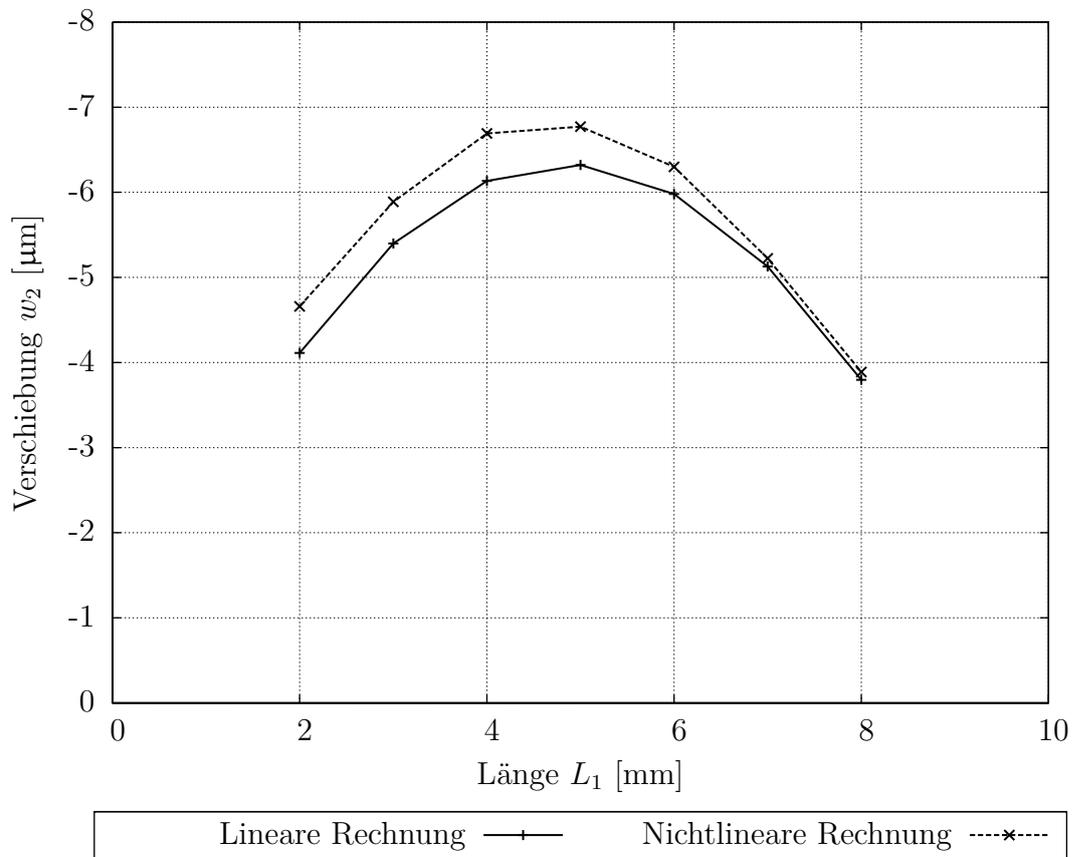


Abb. 8.24: Einfluss der Länge L_1 auf die erreichbaren Durchbiegungen w_2

8.5 Piezoelektrischer Hohlzylinder

Es wird ein Hohlzylinder aus einem Weich-PZT Material analysiert. Bei der Polarisierung solcher Zylinder ist eine Verwölbung der Ränder nach innen zu beobachten, die im Folgenden untersucht wird. Die Ergebnisse werden mit Berechnungen von LASKEWITZ ET AL. [75] verglichen. Dort ist eine ausführliche Abhandlung dieses Effektes zu finden. Weiterhin sind die Geometrie und die Belastung aus [75] entnommen. Das gewählte System mit Vermaßung ist in Abbildung 8.25 darge-

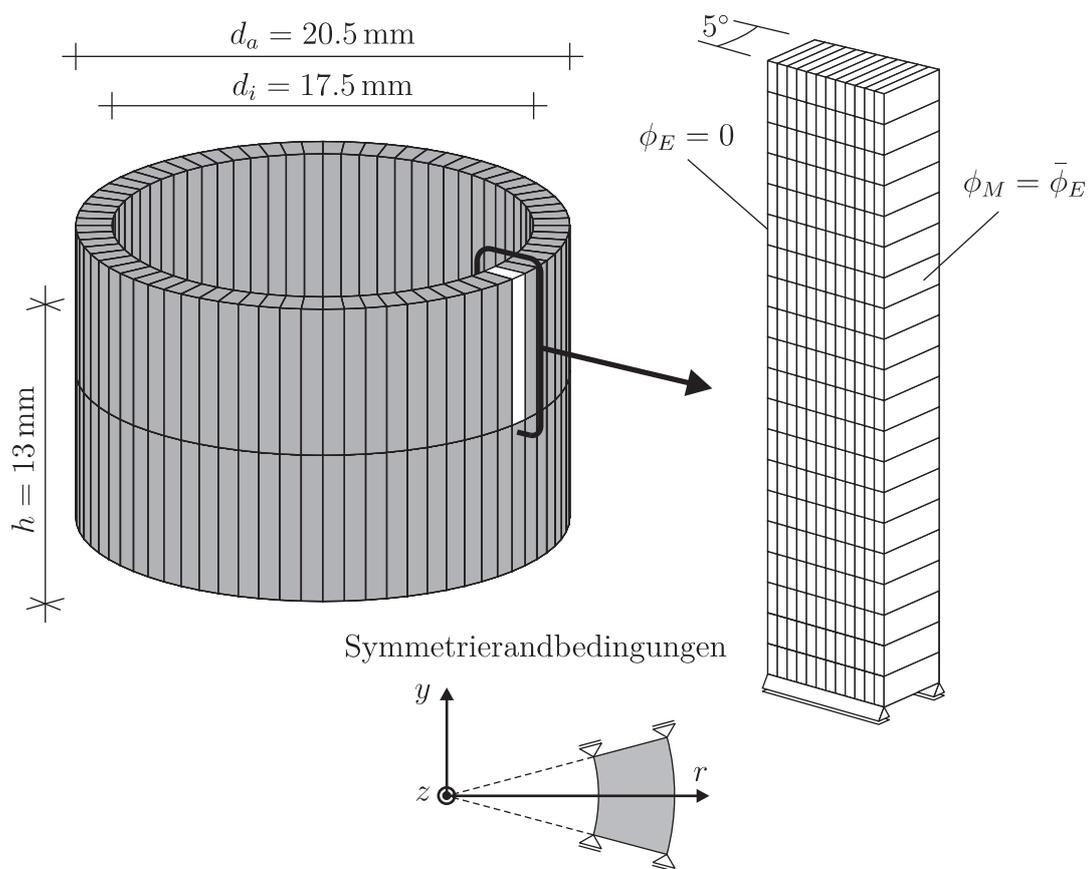


Abb. 8.25: Piezoelektrischer Hohlzylinder mit Vermaßung und gewählter Finite-Element-Diskretisierung

stellt. Unter Ausnutzung der Rotationssymmetrie wird in der Finite-Element-Diskretisierung nur ein Element in Umfangsrichtung verwendet, das einem Ausschnitt von 5° entspricht. Für die Vernetzung in der radialen Richtung r werden 12-Elemente gewählt, die Höhe $h/2$ wird in 20 Elemente segmentiert. Zur Einhaltung der Symmetriestandbedingungen werden die Verschiebungsfreiheitsgrade in y -Richtung der in Abbildung 8.25 abgewandten Oberfläche um 5° um die z -Achse gedreht.

Die Materialparameter sind aus [75] entnommen und in Tabelle 8.5 angegeben. Die mechanischen Eigenschaften des Materials werden isotrop angenommen. Die lokale 3-Richtung und die Polarisationsrichtung \mathbf{e}_P des Materials entspricht der radialen Richtung r . Zur Überprüfung des nichtlinearen Materialverhaltens ist in

Piezoelektrische Parameter:	$E_1 = E_3 = 0.06 \text{ MN/mm}^2,$ $\nu_{12} = \nu_{13} = 0.396, G_{13} = 0.02149 \text{ MN/mm}^2$ $e_{33} = 21.796 \cdot 10^{-6} \text{ C/mm}^2$ $e_{13} = -6.571 \cdot 10^{-6} \text{ C/mm}^2$ $e_{15} = 12.464 \cdot 10^{-6} \text{ C/mm}^2$ $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1.27796 \cdot 10^{-9} \text{ C/MN mm}^2$ $\epsilon_3 = 0.74409 \cdot 10^{-9} \text{ C/MN mm}^2$
Schaltkriterium:	$\vec{P}_c = 7.4409 \cdot 10^{-9} \text{ C/mm}^2$
Verfestigungsfunktion:	$E_s^i = 1.2 \cdot 10^{-3} \vec{E}_s^i = 38.9736 \text{ MN/C}$ $k = 1.00001 \epsilon_3$ $a = 0.2 \cdot 10^{-8} \text{ C/mm}^2, b = 1.0$

Tab. 8.13: Verwendete Materialparameter zur Modellierung des piezoelektrischen Hohlzylinders

Abbildung 8.26 die ferroelektrische Hysterese in einem spannungsfrei gelagerten Einheitswürfel unter einem homogenen elektrischen Feld dargestellt. Die Ergebnisse aus [75] sind unterlegt. Im Modell von [75] werden Schaltkriterien für Beginn und Ende des Polarisationsvorgangs eingeführt. Weiterhin wird die Polarisation im Sinne einer linearen kinematischen Verfestigung angenommen. Die Hysterese-kurve zeigt daher einen abrupten Übergang bei Erreichen der Sättigung und bei Beginn der Depolarisation. Beim vorgestellten Materialmodell wird die Sättigung über die Verfestigungsfunktion bestimmt und man erhält hier einen weicheren Übergang, der auch dem realen Verhalten des Materials näherkommt.

In Abbildung 8.27 ist der verformte Hohlzylinder dargestellt. Die Deformation ist 30-fach überhöht gezeichnet. In Teilbild a) ist die Struktur mit dem maximalen Potential $\bar{\phi}_E = 4.5 \text{ kV}$ belastet. Man erkennt, dass sich die Struktur in radialer Richtung nach innen zusammenzieht. Das Einschnüren des Zylinders ist allerdings nicht gleichmäßig. Die Verschiebungen am oberen Kranz sind größer als unten an der Symmetrieebene. Man spricht auch von einem Einstülpen des Zylinderrandes. Das Verformungsbild bleibt auch nach Entlastung erhalten, siehe Abbildung 8.27b).

Um die Ursachen dieses besonderen Verformungsverhaltens zu verstehen, wird zunächst die Verteilung der elektrischen Feldgrößen betrachtet. In Abbildung 8.28

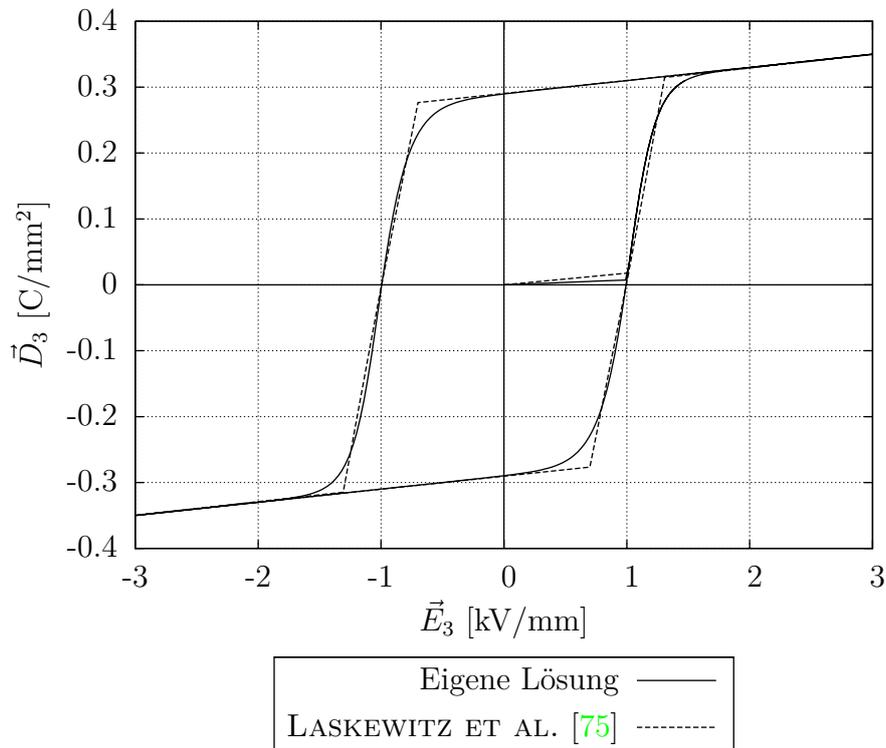


Abb. 8.26: Ferroelektrische Hysteresekurve aus den verwendeten Materialparametern im Vergleich zu der Hysteresekurve aus [75]

ist der Verlauf des elektrischen Potentials und der elektrischen Feldstärke über die Wandstärke dargestellt. Das Potential verläuft nicht linear. Dies deckt sich mit Ergebnissen der analytischen Lösung aus [75]. Man erhält für das ungekoppelte, rotationssymmetrische Problem aus der Laplace-Gleichung $\nabla^2 \phi_E = 0$ einen logarithmischen Verlauf von ϕ_E . Damit folgt für die elektrische Feldstärke eine nicht konstante Verteilung über r , wie man auch Abbildung 8.28 b) entnehmen kann. Die inhomogene Verteilung von \vec{E} hat Einfluss auf das Deformationsverhalten des Zylinders. So bewirkt die stärkere Feldstärke an der Innenfläche dort auch größere piezoelektrische Verzerrungen. Außen sind die Verzerrungen geringer. Da durch den piezoelektrischen Effekt auch Verzerrungskomponenten orthogonal zur Feldrichtung auftreten, ergibt sich eine Kontraktion in Umfangsrichtung und in z -Richtung. Auch diese ist innen größer als außen. Die Innenfläche verkürzt sich damit stärker als die Außenfläche, und der obere Rand des Zylinders wölbt sich nach innen. Weiterhin erkennt man in Abbildung 8.28a), dass nach der Entlastung noch ein Potential von ca. 400 V im Querschnitt verbleibt. Folglich liegt auch noch ein elektrisches Feld in radialer Richtung vor, siehe Abbildung 8.28b). Dieses entsteht aus irreversiblen Polarisationsprozessen und ist vergleichbar mit

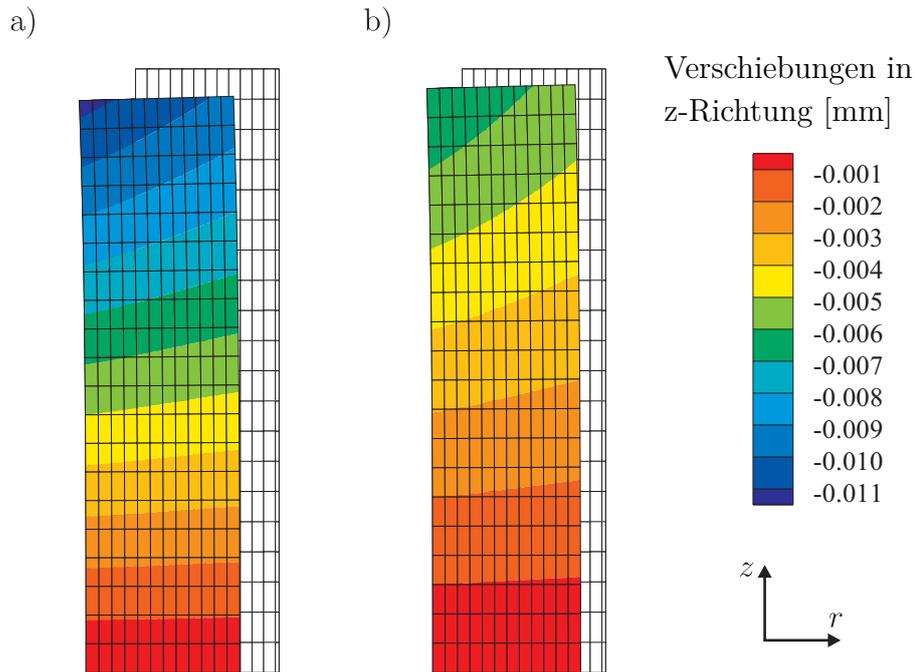


Abb. 8.27: Verformte Struktur in 30-facher Überhöhung im Vergleich zum Ausgangszustand: a) bei maximaler Belastung $\bar{\phi}_E = 4.5 \text{ kV}$, b) nach Entlastung $\bar{\phi}_E = 0$

den Eigenspannungen nach plastischer Verformung.

Irreversible Änderungen der Polarisation sind auch die Ursache für das nach der Entlastung verbleibende Verformungsbild in Abbildung 8.27b). Die Verteilung des Polarisationszustandes über die Wandstärke ist in Abbildung 8.29 normiert dargestellt. Die Ergebnisse aus [75] sind unterlegt. In Teilbild a) erkennt man, dass das Material für $\bar{\phi}_E = 4.5 \text{ kV}$ über den gesamten Querschnitt vollständig polarisiert ist. Teilbild b) zeigt die Verteilung von α nach Entlastung. Die Polarisation nimmt im äußeren Randbereich ab. Die Ergebnisse aus [75] zeigen ein ähnliches Bild. Allerdings ist dort der Abfall abrupt. Der Unterschied ist vermutlich in der kontinuierlich einsetzenden Depolarisation bei dem vorgestellten Materialmodell begründet, siehe Abbildung 8.26. Die inhomogene Verteilung der elektrischen Feldstärke bedingt ein anderes Durchlaufen der Hysteresekurven. In Abbildung 8.30 sind exemplarisch die ferroelektrischen Hysteresen an vier Stellen im Querschnitt (I) bis (IV) dargestellt. Der durch „●“ gekennzeichnete Bereich entspricht dem tatsächlich durchlaufenen Bereich beim gefahrenen Belastungszyklus. Die Punkte (I) bis (IV) sind in Abbildung 8.29 markiert. Man erkennt, dass sich der durchlaufene Bereich von (I) nach (IV) immer mehr nach links verschiebt. Ab Punkt (III) ist die elektrische Feldstärke nach Entlastung negativ. Bei (IV) nähert sich die Kurve dem Bereich starker irreversibler Depolarisation. Ein ähn-

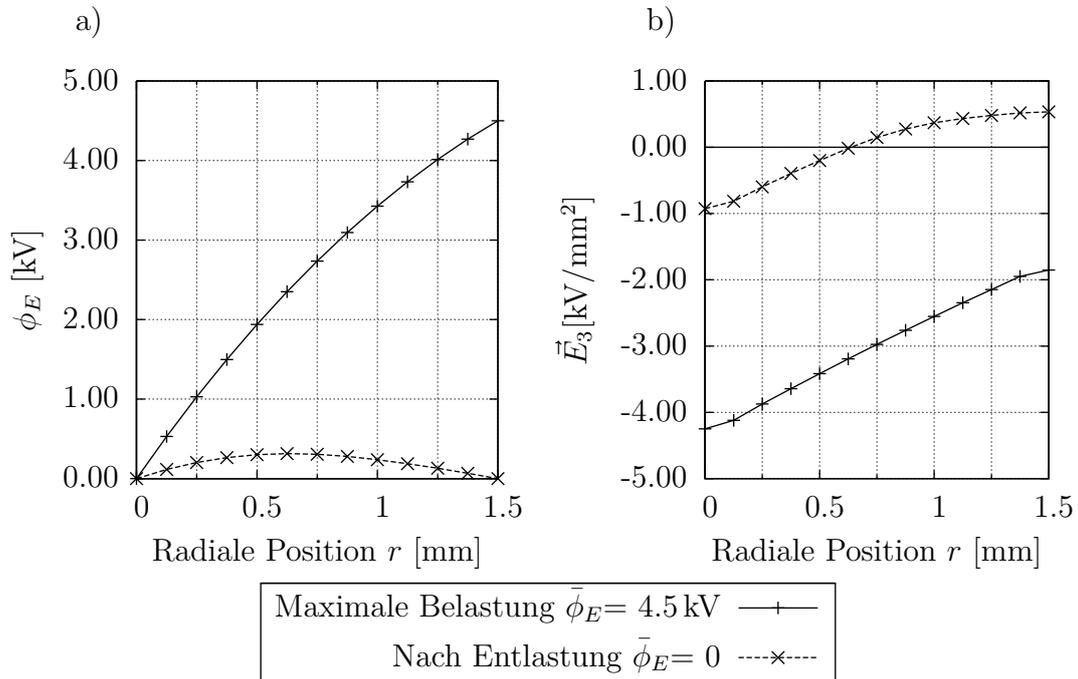
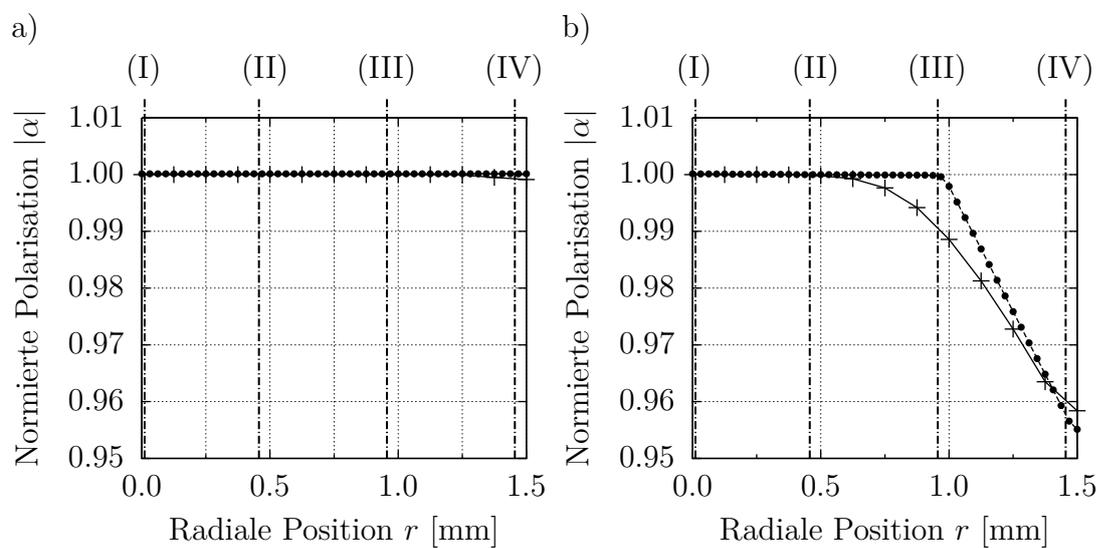


Abb. 8.28: a) Verlauf des elektrischen Potential über die Wandstärke t , b) Verteilung der elektrischen Feldstärke über t

liches Bild zeigt sich, wenn man die Schmetterlingshysteresen in Abbildung 8.31 betrachtet. Auch hier ist die beginnende Depolarisation in den äußeren Bereichen des Querschnitt zu erkennen. Weiterhin sieht man, dass die 33-Komponenten der bleibenden Verzerrungen außen deutlich geringer sind als innen. Die radiale Ausdehnung geht mit einer transversalen Kontraktion einher. Diese führt zu der in Abbildung 8.27 erkennbaren Verwölbung des Zylinderkranzes.



Eigene Lösung +
 LASKEWITZ ET AL. [75] •

Abb. 8.29: Normierte Polarisation über r : a) maximale Feldstärke $\bar{\phi}_E = 4.5 \text{ kV}$, b) nach Entlastung $\bar{\phi} = 0$

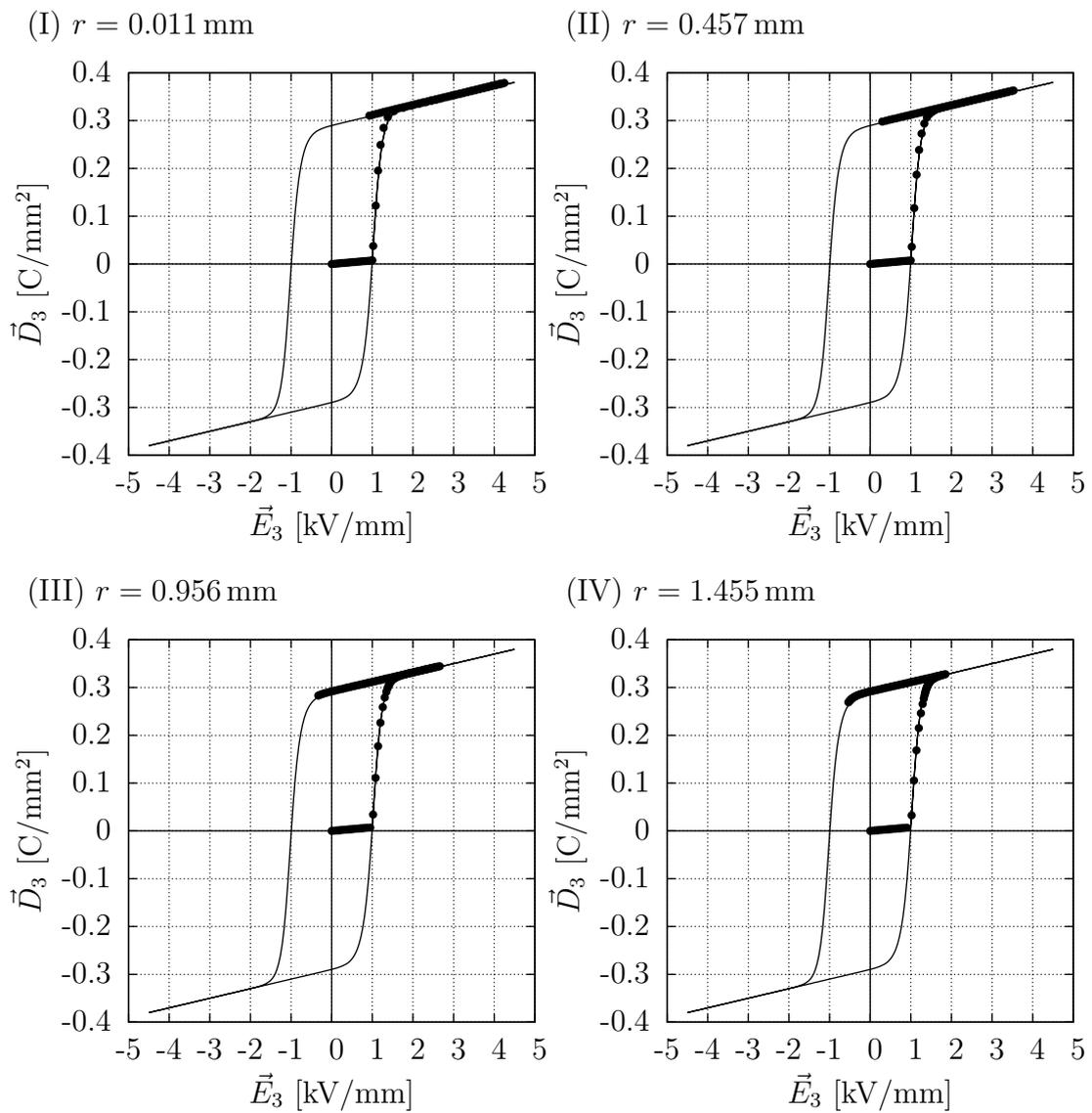


Abb. 8.30: Ferroelektrische Hysteresekurve in den Querschnittsstellen (I)-(IV)

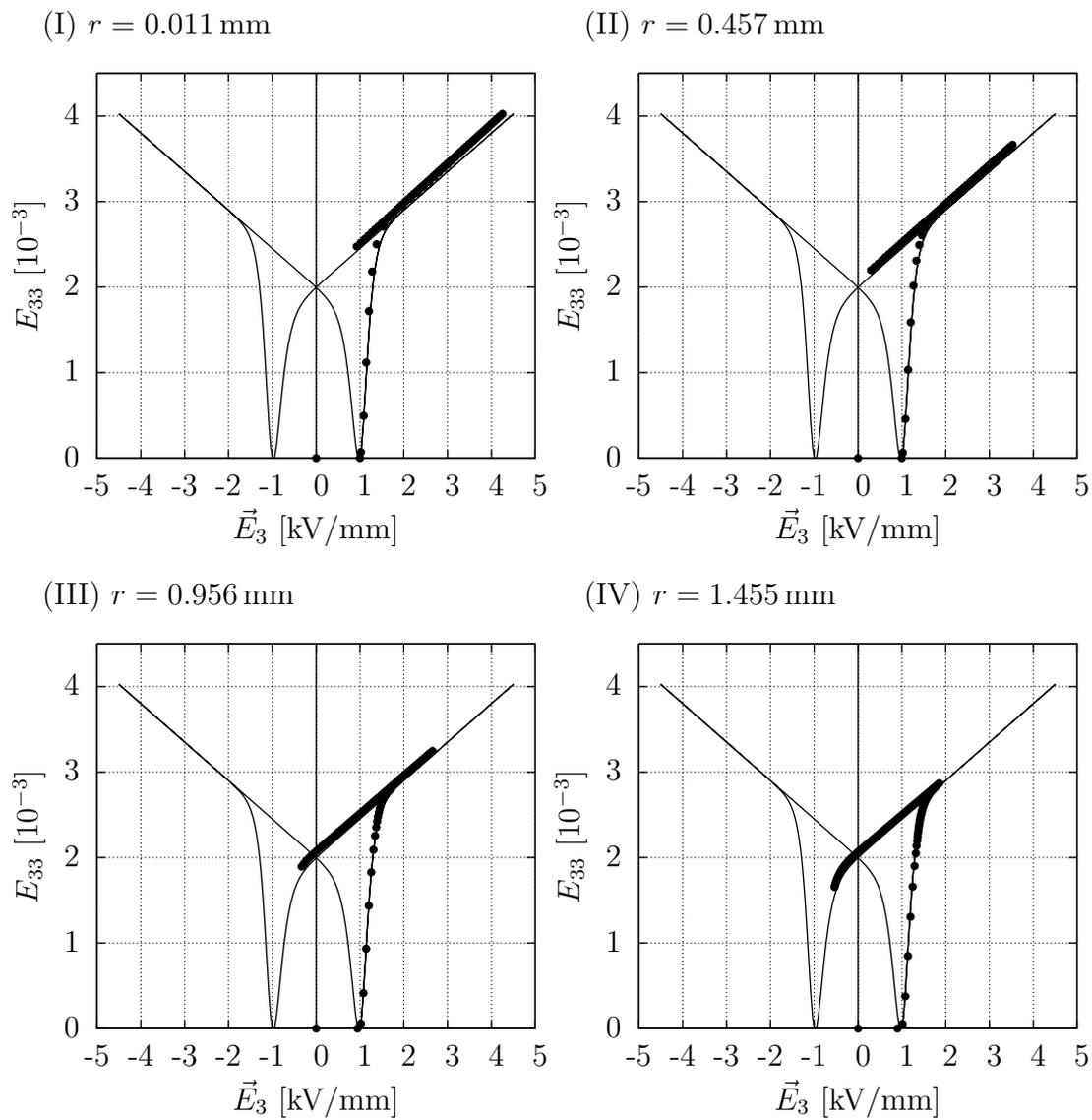


Abb. 8.31: Schmetterlingshysteresekurve in den Querschnittsstellen (I)-(IV)

8.6 Piezoelektrischer Teleskopaktor

Es wird ein piezoelektrischer Teleskopaktor betrachtet. Teleskopaktoren bestehen aus mehreren innereinandergesteckten piezoelektrischen Zylindern, die an ihren Enden miteinander verbunden sind, wie es in Abbildung 8.32 dargestellt ist. Die Zylinder werden durch ein angelegtes elektrisches Feld so angeregt, dass sie sich in axialer Richtung jeweils abwechselnd ausdehnen bzw. zusammenziehen. Dadurch summieren sich die Verformungen der einzelnen Zylinder, siehe auch Abbildung 8.34b). Man erhält einen kompakten Aktor, der Verschiebungen erreicht, die um

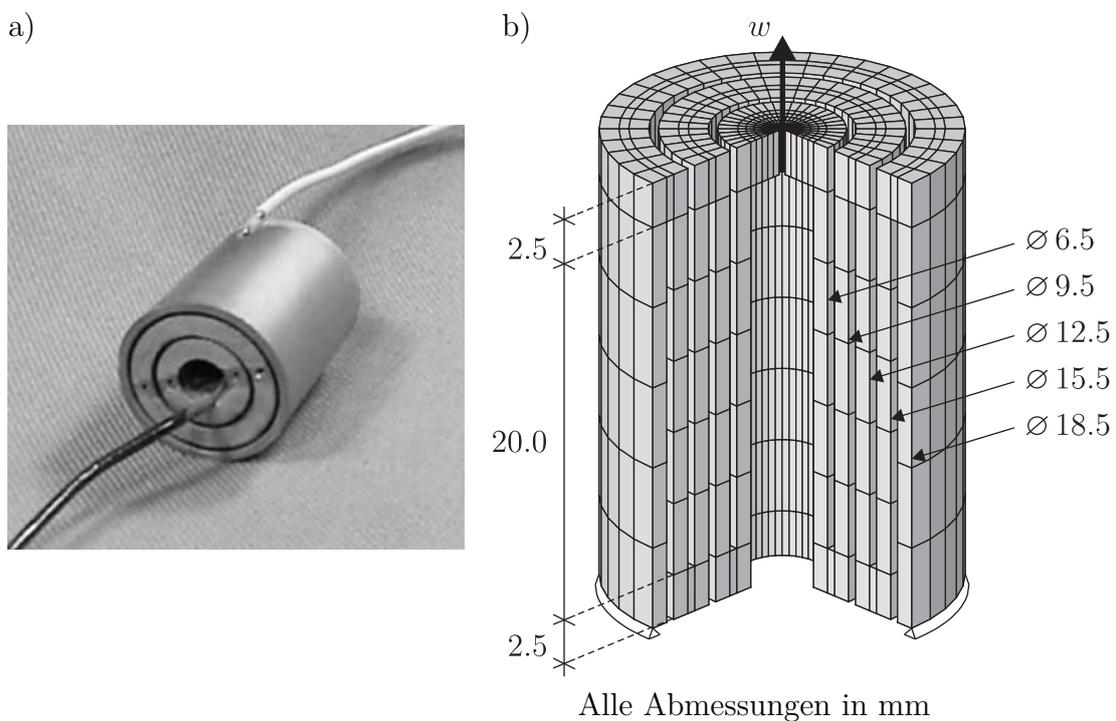


Abb. 8.32: a) Im Spritzgussverfahren hergestellter Teleskopaktor entnommen aus [2], b) Verwendete Finite-Element-Diskretisierung

1-20 fach höher liegen als die von Stapelaktoren bei nur gering reduzierter Kraft, siehe BREI ET AL. [16]. Für die Herstellung gibt es unterschiedliche Verfahren. Beim konventionellen Verfahren werden die piezoelektrischen Zylinder separat gefertigt, polarisiert und anschließend durch Aluminiumscheiben miteinander verbunden. In ALEXANDER ET AL. [2] werden andere Produktionsverfahren durch Spritzguss und Polymerisation vorgestellt, die eine kostengünstige Produktion ermöglichen sollen.

Im Folgenden wird ein im Spritzgussverfahren hergestellter Teleskopaktor untersucht, der aus fünf Zylindern besteht. Dabei wird auf das materiell nichtlinea-

re Verhalten eingegangen. Die Geometrie und die Finite-Element-Vernetzung ist in Abbildung 8.32b) angegeben. Die Außendurchmesser der einzelnen Zylinder seien 6.5 mm, 9.5 mm, 12.5 mm, 15.5 mm, 18.5 mm. Die Wandstärke t der einzelnen Zylinderelemente betrage 1 mm. Der Innendurchmesser der zentralen Scheibe beträgt 0.55 mm. Hier wird die Verschiebung w ausgewertet. Die verwendete Finite-Element-Diskretisierung kann als auskonvergiert angesehen werden. Zur Reduzierung des numerischen Aufwands wird die Symmetrie der Struktur ausgenutzt und nur ein Viertel des Systems mit 430 Elementen diskretisiert. Dabei werden Verschiebungen an den Symmetriegrenzen in Umfangsrichtung gehalten. Die Lagerung in vertikale Richtung ist aus Abbildung 8.32b) zu entnehmen. Das elektrische Feld wird mit Hilfe einer Nickel-Elektrode aufgebaut, die auf der Oberfläche der Aktors aufgebracht wird. Bei der numerischen Modellierung wird daher das elektrische Skalarpotential an den Oberflächen der einzelnen Zylinder vorgegeben. Die Materialkonstanten für die PZT-Keramik MSI-53HD werden soweit angegeben aus [2] entnommen. Die privilegierte 3-Richtung des Materials entspricht der radialen Richtung des Systems. Nicht dokumentierte Parameter sind angesichts der Verwandtschaft des Materials mit anderen PZT-Keramiken sinnvoll ergänzt worden. Alle benötigten Konstanten sind in Tabelle 8.14 zu finden.

Piezoelektrische Parameter:	$E_1 = 60606 \text{ N/mm}^2$, $E_3 = 48310 \text{ N/mm}^2$ $\nu_{12} = 0.290$, $\nu_{13} = 0.408$, $G_{13} = 22990 \text{ N/mm}^2$ $e_{33} = 10.63 \cdot 10^{-6} \text{ C/mm}^2$ $e_{13} = -29.88 \cdot 10^{-6} \text{ C/mm}^2$ $e_{15} = 27.26 \cdot 10^{-6} \text{ C/mm}^2$ $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = 1.0693 \cdot 10^{-14} \text{ C/N mm}^2$
Schaltkriterium:	$\vec{P}_c = 0.7693 \cdot 10^{-8} \text{ C/mm}^2$
Verfestigungsfunktion:	$E_s^i = 1.2 \cdot 10^{-3}$, $\vec{E}_s^i = 17.63507 \text{ V/mm}$ $k = 1.006 \epsilon_3$ $a = 0.0099 \cdot 10^{-6} / \text{arctanh}(1/b) \text{ C/mm}^2$ $b = 1.0005$

Tab. 8.14: Verwendete Materialparameter für MSI-53HD

Im Unterschied zum konventionell hergestellten Teleskopaktor, bei dem polarisierte Piezozylinder miteinander verklebt werden, kann der im Spritzgussverfahren hergestellte Aktor erst nach der Herstellung polarisiert werden. Die Polarisierung in radialer Richtung erfolgt vor dem Aufbringen der Nickel-Elektroden, da sich

das elektrische Feld zur Polarisation von demjenigen für den Aktorbetrieb unterscheidet. Die einzelnen Zylinder werden nacheinander durch von oben bzw. unten eingesteckte Elektroden polarisiert. Die Feldstärke beträgt 1200 V/mm . In Abbildung 8.33 wird der Polarisationszustand mit Hilfe der skalaren Variable α dargestellt. Die Polarisationsrichtung e_P wird in den Elementen jeweils in radialer Richtung angenommen. Man erkennt ein sehr homogenes und nahezu vollständig

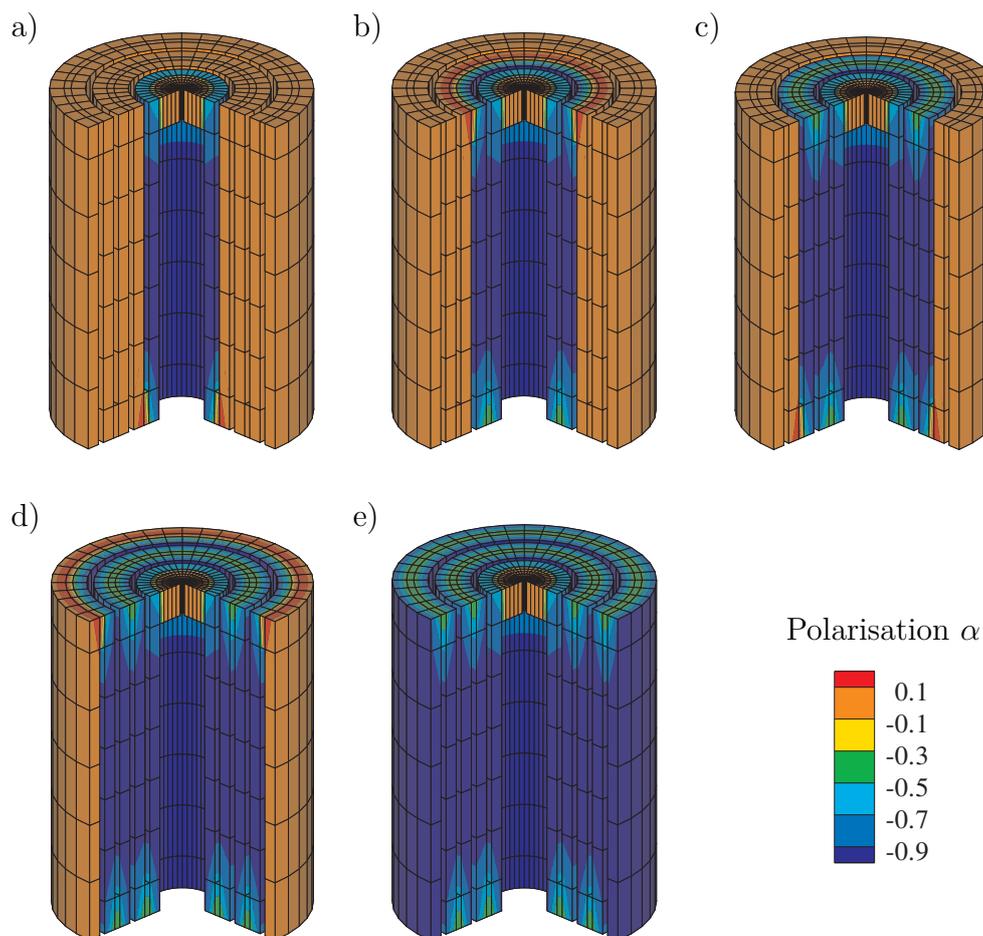


Abb. 8.33: Sukzessive Polarisation des Teleskopaktors

polarisiertes Material. Das negative Vorzeichen von α resultiert aus dem konstitutiven Modell, siehe auch Abbildung 6.2. Durch das stufenweise Vorgehen ergeben sich für die Fälle a)-d) in den Zylinder-Deckeln Bereiche mit $\alpha > 0$, also nach innen gerichteter Polarisation. Diese in Abbildung 8.33 rot gekennzeichneten Bereiche werden allerdings im jeweils folgenden Polarisationsschritt wieder umpolarisiert, so dass sie im Teilbild e) vollständig verschwunden sind. Im Bereich der Zylinder-Deckel ist dann nur noch eine etwas geringere Polarisation als

im restlichen Aktor zu beobachten. Zudem werden die Zylinderenden bei der Polarisierung dazu tendieren, sich nach innen zu verwölben, wie es in Beispiel 8.5 erläutert wurde. Dieser Effekt wird durch die Zylinderdeckel allerdings behindert und spielt für die Gesamtverformung eine untergeordnete Rolle.

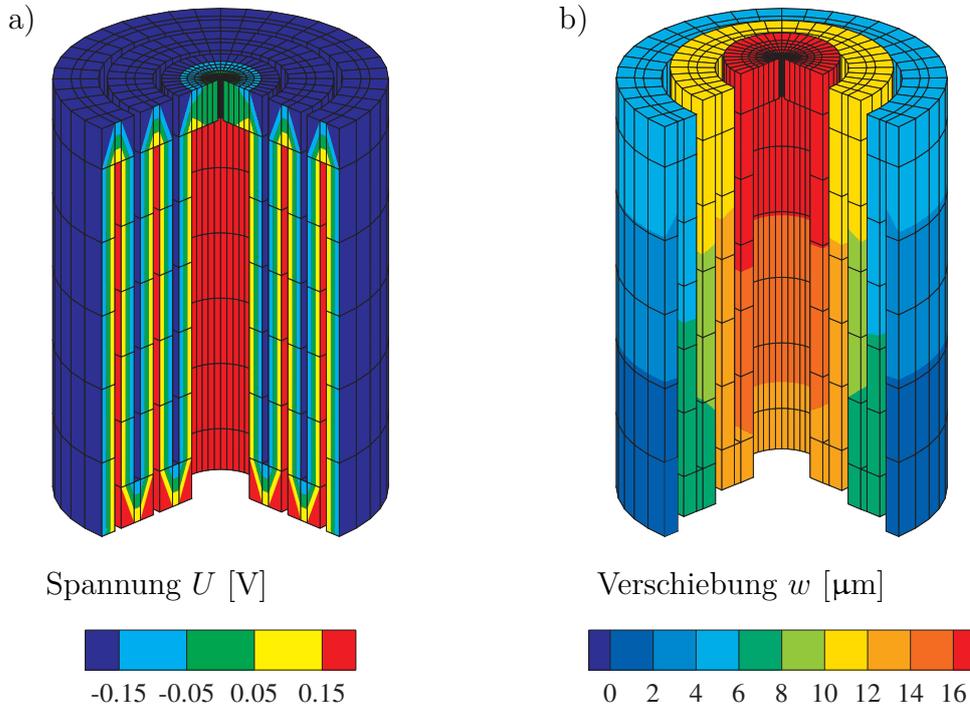


Abb. 8.34: Belasteter Aktor mit $\vec{E} = 300 \text{ V/mm}$: a) Belastungsbild b) Verformter Teleskopaktor in 100-fach überhöhter Darstellung

Für den Aktorbetrieb wird die elektrische Erregung über die Nickel-Elektroden aufgebracht. Das Belastungsbild für die maximale Feldstärke von 300 V/mm ist in Abbildung 8.34 a) dargestellt. Die sich dabei einstellende Verformung ist in Abbildung 8.34 b) in 100-facher Überhöhung illustriert. Durch das angelegte Feld werden die Zylinder 1, 3 und 5 (von innen nach außen) in Richtung ihrer Polarisierung belastet und verlängern sich. Bei den Zylindern 2 und 4 wirkt das elektrische Feld entgegen der Polarisationsrichtung und die Zylinder verkürzen sich.

Für einen quasistationären Lastzyklus kann die Verschiebung w über dem elektrischen Feld aufgetragen und mit den Messergebnissen aus [2] verglichen werden, siehe Abbildung 8.35. Der quasistationäre Lastzyklus von \vec{E} sei $0, 300 \text{ V/mm}, -300 \text{ V/mm}, 0$. Die gemessenen Verschiebungen zeigen durch das nichtlineare Verhalten des Materials Hystereseeffekte. Neben den gemessenen Verschiebungen ist in Abbildung 8.35 zusätzlich noch das Ergebnis eines einfachen linearen Modells angegeben, das in [2] beschrieben wird. Es sei an dieser Stelle angemerkt,

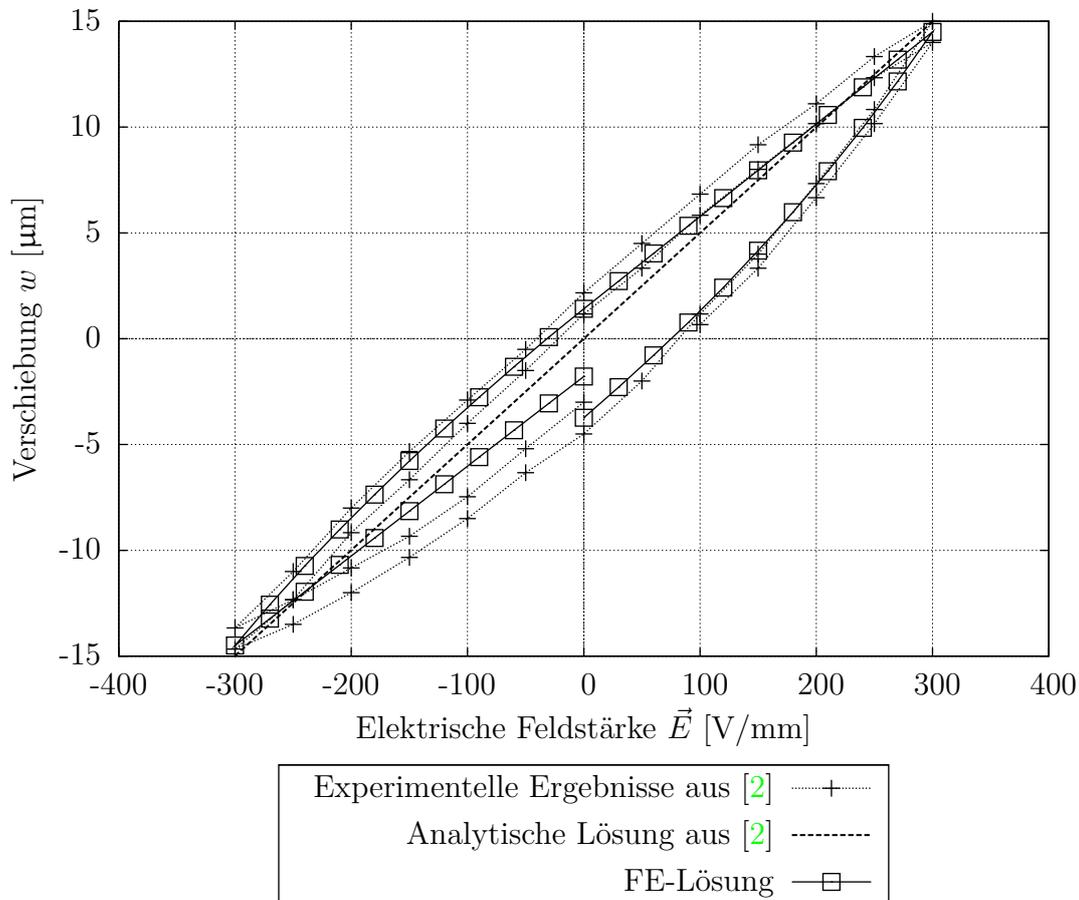


Abb. 8.35: Hystereseerscheinungen im Teleskopaktor aufgrund von Depolarisationseffekten

dass die präsentierten Ergebnisse um $9.545 \mu\text{m}$ verschoben wurden. Dies ist notwendig, da aus dem Polarisationsprozess eine Deformation resultiert, die in den Messergebnissen und dem linearen Modell nicht berücksichtigt ist. Der Vergleich zwischen den Resultaten der Finite-Element-Lösung und gemessenen Verschiebungen zeigt gute Übereinstimmungen. Die Hystereseerscheinungen können als Depolarisationseffekte in den Zylindern interpretiert werden, die aus der entgegengesetzten Richtung des angelegten elektrischen Feldes und der Polarisation entstehen. In Abbildung 8.36 ist der Polarisationszustand des Aktors für die Feldstärke $\vec{E} = 300 \text{ V/mm}$ und $\vec{E} = -300 \text{ V/mm}$ abgebildet. Im Fall a) zeigt sich, dass die Polarisation in den Zylindern 2 und 4 auf unter 95% gesunken ist. Im Fall b) ist dann auch die Polarisation in den Zylindern 1, 3 und 5 auf den gleichen Wert gefallen. Allerdings sind diese Depolarisationseffekte nach einem Lastzyklus beendet. Die sich wiederholenden Hystereseschleifen, wie sie in den Ergebnissen aus [2] auftreten, können damit nicht erklärt werden. Hier kommt es vermutlich zu

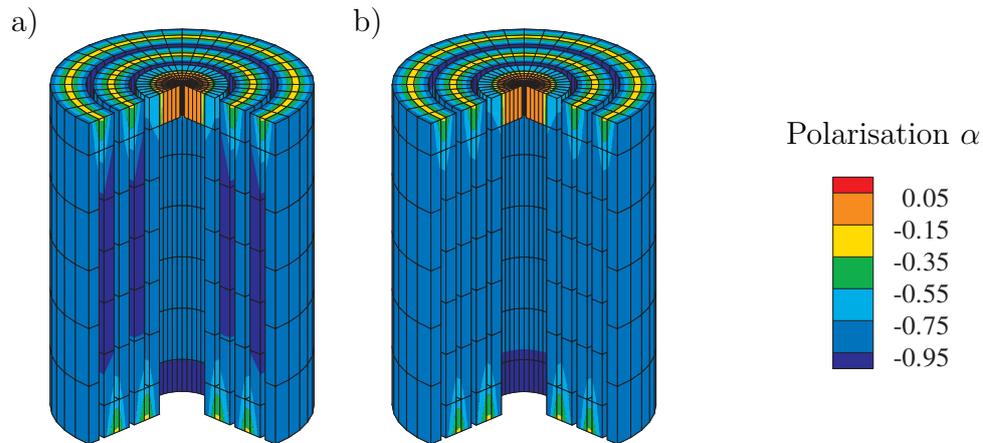


Abb. 8.36: Depolarisationseffekte im Teleskopkondensator a) $\vec{E} = 300 \text{ V/mm}$ b) $\vec{E} = -300 \text{ V/mm}$

Subhysteresen (engl. minor hysteresis loops). Diese können mit dem vorgestellten konstitutiven Modell allerdings nicht abgebildet werden. Eine ausführlichere Abhandlung dieses Phänomens und die Modellierung mit Hilfe des Preisach-Modells ist bei MEYER ET AL. [85] und PASCO & BERRY [91] zu finden.

9 Zusammenfassung und Ausblick

Gegenstand dieser Arbeit ist die Finite-Element-Modellierung magnetostriktiver und piezoelektrischer Bauteile. Dabei liegt das Interesse an einer effizienten und vollständig nichtlinearen Formulierung. Unter dieser Zielsetzung lässt sich die Arbeit in drei Hauptteile gliedern: Die Entwicklung eines konstitutiven Modells, die Formulierung einer gekoppelten Finite-Element-Modellierung und die Verifizierung der vorgestellten Lösung an Beispielen.

Für die Entwicklung der konstitutiven Modellierung werden zunächst in den Kapiteln 2-5 die benötigten Grundlagen eingeführt. Dabei sind die Kapitel 3 und 4 von besonderer Bedeutung, da hier die magnetostriktiven und piezoelektrischen Koppelphänomene beschrieben werden und das materiell nichtlineare Verhalten erklärt wird. Das in Kapitel 6 vorgestellte dreidimensionale Materialmodell ist thermodynamisch motiviert. Grundlage der Formulierung bildet die Definition einer spezifischen freien Energiefunktion und eines Schaltkriteriums. Es wird weiterhin eine additive Aufspaltung der Verzerrungen und der magnetischen bzw. elektrischen Feldstärke vorgenommen. Diese Größen werden, analog zur Plastizitätstheorie, als interne Variablen verwendet. Durch die Einführung einer Eins-zu-eins-Relation zwischen den beiden internen Variablen ist die Volumenerhaltung der irreversiblen Verzerrungen gewährleistet. Ein neuer Aspekt des Modells ist die additive Aufspaltung der Feldstärke. Das vorgestellte Materialmodell ist in der Lage, die ferromagnetische bzw. die ferroelektrische Hysteresekurve sowie die zugehörigen Schmetterlingshysteresen abzubilden. Es wird zudem eine Erweiterung für ferrimagnetisches Verhalten präsentiert, das bei magnetostriktiven Materialien häufig auftritt.

Kapitel 7 befasst sich mit der Entwicklung der Finite-Element-Modellierung. Es wird ein 8-Knoten Hexaeder-Element vorgeschlagen. Als Knotenfreiheitsgrade werden drei Verschiebungskomponenten sowie das magnetische bzw. elektrische Skalarpotential verwendet. Durch die Verwendung von linearen Ansatzfunktionen treten bei biegedominierten Verformungen Versteifungseffekte auf. Bei gekoppelten Problemen ergeben sich weitere numerische Probleme, die auch auf inkompatible Approximationsräume zurückzuführen sind. Zur Verbesserung des numerischen Verhaltens werden im Rahmen dieser Arbeit unterschiedliche Verfahren untersucht und miteinander verglichen. Hierbei liegt der Schwerpunkt auf der Verwendung der *Enhanced-Assumed-Strain*-Methode sowie einer gemischten Formulierung, die auf einem erweiterten Hu-Washizu-Funktional basiert.

In Kapitel 8 werden einige numerische Beispiele diskutiert, die die Leistungsfähigkeit der vorgestellten Finite-Element-Formulierungen unter Berücksichtigung des nichtlinearen Materialmodells zeigen. Es werden Beispiele magnetostrikti-

ver Kopplung und piezoelektrischer Kopplung betrachtet. Die Ergebnisse werden soweit möglich mit den Resultaten aus Experimenten, analytischen Lösungen oder anderen numerischen Modellen verglichen. Die Elementformulierungen und das Materialmodell wurden in eine Version des Finite-Element-Programms FEAP [122] implementiert.

Weitere Forschungsvorhaben könnten die Erweiterung des konstitutiven Modells oder eine Verbesserung der Elementformulierung anstreben. Für das Materialmodell könnten die folgenden Aspekte von Bedeutung sein:

- Durch eine multiaxiale Formulierung kann eine Drehung der Magnetisierungs- bzw. Polarisationsrichtung zugelassen werden.
- Wünschenswert wäre zudem die Einbeziehung des Einflusses mechanischer Spannungen auf das nichtlineare Materialverhalten. Für piezoelektrische Materialien sind hier Ansätze zur Erfassung der mechanischen Depolarisation und der ferroelastischen Hysterese zu treffen. Für magnetostriktive Materialien ist die Abhängigkeit des ferrielektrischen Verhaltens von der mechanischen Spannung zu erfassen.
- Ein weiterer interessanter Aspekt ist die Modellierung von Subhysteresen. Dadurch könnte das Materialverhalten bei kleinen Belastungsamplituden besser abgebildet werden, siehe auch Abschnitt 8.6. Ein möglicher Ansatz wäre hier eine Erweiterung des Bodner-Parton-Modells auf gekoppelte Probleme. Bei diesem viskoplastischen Modell wird auf die Formulierung eines Schaltkriterium verzichtet und durchgehend inelastisches Verhalten vorausgesetzt, das durch die spezielle Wahl der Evolutionsgleichung bestimmt wird, siehe BODNER & PARTOM [13] und SANSOUR & WAGNER [102]. Dieser Grundgedanke ließe sich u. U. bei der Modellierung von Subhysteresen aufgreifen.

Zukünftige Arbeiten zur Formulierung gekoppelter finiter Elemente könnten sich mit folgenden Thematiken auseinandersetzen:

- Zur Verbesserung des Element-Verhaltens bei irregulären Netzen und biegedominierten Problemen, könnte u. U. die Feld-Extrapolationstechnik zur Anwendung kommen, siehe z. B. CHEN & WU [23]. Das Verfahren beruht auf der Annahme eines Parallelepipeds, auf das die angenommenen Verzerrungen bezogen werden.
- Durch die Verwendung des Vektorpotentials zur Beschreibung des magnetischen Feldes wäre die Modellierung geschlossener Feldlinien möglich.

- Vorstellbar wäre auch eine Einbeziehung der elektromagnetischen Kopplung, wie man sie z. B. in PÉREZ-APARICIO & SOSA [92] findet. Dadurch könnten quasistationäre Änderungen der elektrodynamischen Feldgrößen genauer beschrieben werden.

A Partielle Ableitungen für die konstitutiven Gleichungen

Skalare konjugierte Größe

$$\begin{aligned} \bar{\Xi} = & -\mathbf{I} : \left[\mathbf{C} : \mathbf{I} 2 \alpha^3 E_s - \mathbf{e} \cdot \vec{\mathbf{H}} 3 \alpha^2 - \mathbf{C} : \mathbf{E} 2 \alpha \right] \frac{E_s}{\vec{H}_s^i} \\ & - \vec{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{e}^T : \left[\mathbf{E} - \mathbf{I} E_s \alpha^2 \right] \frac{1}{\vec{H}_s^i} - \mathbf{e}_M \cdot \boldsymbol{\mu} (\vec{\mathbf{H}} - \mathbf{e}_M \vec{H}_s^i \alpha) \\ & - \frac{\partial \rho \psi}{\partial \vec{\mathbf{H}}^i} \cdot \mathbf{e}_M \vec{H}_s^i \end{aligned} \quad (\text{A1.1})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\Xi}}{\partial \alpha} = & -2 \frac{E_s}{\vec{H}_s^i} \mathbf{I} : \left[\mathbf{C} : \mathbf{I} 3 \alpha^2 \mathbf{E}_s - \mathbf{e} \cdot \vec{\mathbf{H}} 3 \alpha - \mathbf{C} : \mathbf{E} \right] \\ & + \mathbf{e}_M \cdot \boldsymbol{\mu} \mathbf{e}_M \vec{H}_s^i - \frac{\partial \rho \psi}{\partial \vec{\mathbf{H}}^i} \cdot \mathbf{e}_M \vec{H}_s^i \end{aligned} \quad (\text{A1.2})$$

$$(\text{A1.3})$$

Integrationsalgorithmus

$$\frac{\partial R_a^{(k)}}{\partial \alpha_{n+1}} = 1 - \gamma \frac{2}{\vec{M}_c^2} \frac{\partial \bar{\Xi}_{n+1}}{\partial \alpha_{n+1}} \quad (\text{A1.4})$$

$$\frac{\partial R_a^{(k)}}{\partial \gamma} = -\gamma \frac{2 \bar{\Xi}_{n+1}}{\vec{M}_c^2} \quad (\text{A1.5})$$

$$\frac{\partial R_b^{(k)}}{\partial \alpha_{n+1}} = \gamma \frac{2 \bar{\Xi}}{\vec{M}_c^2} \frac{\partial \bar{\Xi}_{n+1}}{\partial \alpha_{n+1}} \quad (\text{A1.6})$$

$$\frac{\partial R_b^{(k)}}{\partial \gamma} = 0 \quad (\text{A1.7})$$

Ableitungen für die algorithmisch konsistente Tangente

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \alpha} = -\mathbf{C} : \mathbf{I} 2 E_s \alpha + \mathbf{e} \cdot \vec{\mathbf{H}} \quad (\text{A1.8})$$

$$\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial \alpha} = \mathbf{e}^T : \mathbf{E} - \mathbf{e}^T : \mathbf{I} 3 E_s \alpha^2 + \boldsymbol{\mu} \mathbf{e}_M \vec{H}_s^i \quad (\text{A1.9})$$

$$\frac{\partial \bar{\Xi}}{\partial \mathbf{E}} = \mathbf{C} : \mathbf{I} 2 \frac{E_s}{\vec{H}_s^i} \alpha - \mathbf{e} \cdot \vec{\mathbf{H}} \frac{1}{\vec{H}_s^i} \quad (\text{A1.10})$$

$$\frac{\partial \bar{\Xi}}{\partial \vec{\mathbf{H}}^i} = -\mathbf{e}^T : \left[\mathbf{E} - 3 \mathbf{E}^i \right] \frac{1}{\vec{H}_s^i} - \boldsymbol{\mu} \mathbf{e}_M \quad (\text{A1.11})$$

Literatur

- [1] ADLY, A. A., MAYERGOYZ, I. D. & BERGQVIST, A.: *Preisach modeling of magnetostrictive hysteresis*. Journal of Applied Physics 69(8) (1991), S. 5777–5779.
- [2] ALEXANDER, P. W., BREI, D., MIAO, W., HALLORAN, J. W., GENTILMAN, R. L., SCHMIDT, G. E., MCGUIRE, P. T. & HOLLENBECK, J. R.: *Fabrication and experimental characterization of d_{31} telescopic piezoelectric actuators*. Journal of Materials Science 36(17) (2001), S. 4231–4237.
- [3] ALTENBACH, H., ALTENBACH, J. & KISSING, W.: *Mechanics of composite structural elements*. Springer, 2004.
- [4] ANDELFINGER, U. & RAMM, E.: *EAS-Elements for 2-Dimensional, 3-Dimensional, Plate and Shell Structures and their Equivalence to HR-Elements*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 36(8) (1993), S. 1311–1337.
- [5] AUPÉRIN, M., DUMOULIN, C., MAGONETTE, G. E., MARAZZI, F., FÖRSTERLING, H., BONEFELD, R., HOOPER, A. & JENNER, A. G.: *Active control in civil engineering: From conception to full scale applications*. Journal of Structural Control 8(2) (2001), S. 123–178.
- [6] AZOUM, K., BESBES, M. & BOUILLAULT, F.: *3D FEM of magnetostriction phenomena using coupled constitutive laws*. International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics 19(1-4) (2004), S. 367–371.
- [7] BATHE, K. J.: *Finite-Elemente-Methoden*. Springer, 2. Auflage, 2002.
- [8] BENBOUZID, M. E. H., REYNE, G. & MEUNIER, G.: *Nonlinear finite element modelling of giant magnetostriction*. Magnetics, IEEE Transactions on 29(6) (1993), S. 2467–2469.
- [9] BENBOUZID, M. E. H., REYNE, G., MEUNIER, G., KVARNSJO, L. & ENGD AHL, G.: *Dynamic modelling of giant magnetostriction in Terfenol-D rods by the finite element method*. Magnetics, IEEE Transactions on 31(3) (1995), S. 1821–1824.
- [10] BENJEDDOU, A.: *Advances in piezoelectric finite element modeling of adaptive structural elements: a survey*. Computers & Structures 76(1-3) (2000), S. 347–363.
- [11] BESBES, M., REN, Z. & RAZEK, A.: *A generalized finite element model of magnetostriction phenomena*. Magnetics, IEEE Transactions on 37(5) (2001), S. 3324–3328.
- [12] BHAME, S. D. & JOY, P. A.: *Tuning of the magnetostrictive properties of $\text{Co-Fe}_2\text{O}_4$ by Mn substitution for Co*. Journal of Applied Physics 100(11) (2006), S. 113911.

-
- [13] BODNER, S. R. & PARTOM, Y.: *Constitutive equations for elastic-viscoplastic strain-hardening materials*. Journal of Applied Mechanics - Transactions of the ASME 42(2) (1975), S. 385–389.
- [14] BODY, C., REYNE, G., MEUNIER, G., QUANDT, E. & SEEMANN, K.: *Application of magnetostrictive thin films for microdevices*. Magnetics, IEEE Transactions on 33(2) (1997), S. 2163–2166.
- [15] BOZORTH, R. M.: *Ferromagnetism*. Van Nostrand, 8. Auflage, 1964.
- [16] BREI, D., BERNER, N. T. & ALEXANDER, P. W.: *Modeling and study of the quasi-static behavior of piezoceramic telescopic actuation architectures*. Journal of Intelligent Material Systems and Structures 12(5) (2001), S. 303–313.
- [17] BREZZI, F. & FORTIN, M.: *Mixed and hybrid finite element methods*. Springer, 1991.
- [18] BUTZ, A., KLINKEL, S. & WAGNER, W.: *A nonlinear piezoelectric 3d-beam finite element formulation*. In: BATHE, K.-J., (HRSG.), *Proceedings Third MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics*, Massachusetts Institute of Technology, S. 291–296, Cambridge, 2005.
- [19] CADY, W. G.: *Piezoelectricity*. Dover, 2. Auflage, 1964.
- [20] CALKINS, F. T., SMITH, R. C. & FLATAU, A. B.: *Energy-based hysteresis model for magnetostrictive transducers*. Magnetics, IEEE Transactions on 36(2) (2000), S. 429–439.
- [21] CARMAN, G. P. & MITROVIC, M.: *Nonlinear Constitutive Relations for Magnetostrictive Materials with Applications to 1-D Problems*. Journal of Intelligent Material Systems and Structures 6(5) (1995), S. 673–683.
- [22] CHEN, W. & LYNCH, C. S.: *Multiaxial Constitutive Behavior of Ferroelectric Materials*. Journal of Engineering Materials and Technology 123(2) (2001), S. 169–175.
- [23] CHEN, Y. I. & WU, G. Y.: *A mixed 8-node hexahedral element based on the Hu-Washizu principle and the field extrapolation technique*. Structural Engineering and Mechanics 17(1) (2004), S. 113–140.
- [24] CHERRY, W. L. & ADLER, R.: *Piezoelectric Effect in Polycrystalline Barium Titanate*. Phys. Rev. 72(10) (1947), S. 981–982.
- [25] CHIN, L. C., VARADAN, V. V. & VARADAN, V. K.: *Hybrid Finite-Element Formulation for Periodic Piezoelectric Arrays Subjected to Fluid Loading*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 37(17) (1994), S. 2987–3003.

- [26] CHOPRA, I.: *Review of state of art of smart structures and integrated systems*. AIAA Journal 40(11) (2002), S. 2145–2187.
- [27] CLAEYSSSEN, F., BOSSUT, R. & BOUCHER, D.: *Modelling an Characterization of the Magnetostrictive Coupling*. In: *Proceedings of International Workshop Power Transducers for Sonics and Ultrasonics, Toulon (France), June 1990*, S. 132–151, 1991.
- [28] CLARK, A. E. & BELSON, H. S.: *Giant Room-Temperature Magnetostrictions in $TbFe_2$ and $DyFe_2$* . Phys. Rev. B 5(9) (1972), S. 3642–3644.
- [29] CLARK, A. E., SAVAGE, H. & SPANO, M.: *Effect of stress on the magnetostriction and magnetization of single crystal $Tb_{.27}Dy_{.73}Fe_2$* . Magnetics, IEEE Transactions on 20(5) (1984), S. 1443–1445.
- [30] CURIE, J. & CURIE, P.: *Développement par compression de l'électricité polaire dans les cristaux à faces inclinées*. Bulletin de la Socite Mineralogique de France 3 (1880), S. 90–93.
- [31] DAPINO, M. J.: *On magnetostrictive materials and their use in adaptive structures*. Structural Engineering and Mechanics 17(3-4) (2004), S. 303–329.
- [32] DAPINO, M. J., FLATAU, A. B. & CALKINS, F. T.: *Statistical analysis of terfenol-D material properties*. Journal of Intelligent Material Systems and Structures 17(7) (2006), S. 587–599.
- [33] DAPINO, M. J., SMITH, R. C., CALKINS, F. T. & FLATAU, A. B.: *A coupled magnetomechanical model for magnetostrictive transducers and its application to Villari-effect sensors*. Journal of Intelligent Material Systems and Structures 13(11) (2002), S. 737–747.
- [34] DAPINO, M. J., SMITH, R. C., FAIDLEY, L. E. & FLATAU, A. B.: *A coupled structural-magnetic strain and stress model for magnetostrictive transducers*. Journal of Intelligent Material Systems and Structures 11(2) (2000), S. 135–152.
- [35] DAPINO, M. J., SMITH, R. C. & FLATAU, A. B.: *Structural magnetic strain model for magnetostrictive transducers*. Magnetics, IEEE Transactions on 36(3) (2000), S. 545–556.
- [36] DE BOER, R.: *Vektor- und Tensorrechnung für Ingenieure*. Springer, 1982.
- [37] DE MIRANDA, S. & UBERTINI, F.: *Consistency Analysis of Electroelastic Finite Element Models*. In: *Proc., 2nd European Conference on Computational Mechanics*, 2001.
- [38] DEVOE, D. L. & PISANO, A. P.: *Surface micromachined piezoelectric accelerometers (PiXLs)*. Journal of Microelectromechanical Systems 10(2) (2001), S. 180–186.

- [39] EINSTEIN, A. & DE HAAS, W. J.: *Experimental proof of Ampères molecular currents*. Verhandlungen der deutschen physikalischen Gesellschaft 17 (1915), S. 152–170.
- [40] ELHADROUZ, M., ZINEB, T. B. & PATOOR, E.: *Constitutive Law for Ferroelastic and Ferroelectric Piezoceramics*. Journal of Intelligent Material Systems and Structures 16(3) (2005), S. 221–236.
- [41] ENGBAHL, G.: *Handbook of Giant Magnetostrictive Materials*. Academic Press, San Diego, 2000.
- [42] ERINGEN, A. C. & MAUGIN, G. A.: *Electrodynamics of continua*. Springer, 1990.
- [43] FANG, D. N., FENG, X. & HWANG, K. C.: *Study of magnetomechanical non-linear deformation of ferromagnetic materials: theory and experiment*. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part C-Journal of Mechanical Engineering Science 218(12) (2004), S. 1405–1410.
- [44] FIEBIG, M.: *Revival of the magnetoelectric effect*. Journal of Physics D - Applied Physics 38(8) (2005), S. R123–R152.
- [45] GHOSH, D. P. & GOPALAKRISHNAN, S.: *Coupled analysis of composite laminate with embedded magnetostrictive patches*. Smart Materials and Structures 14(6) (2005), S. 1462–1473.
- [46] GURTIN, M. E.: *An introduction to continuum mechanics*. Acad. Press, 11. Auflage, 2005.
- [47] HA, S. K., KEILERS, C. & CHANG, F. K.: *Finite-Element Analysis Of Composite Structures Containing Distributed Piezoceramic Sensors And Actuators*. AIAA Journal 30(3) (1992), S. 772–780.
- [48] HUBER, J. E. & FLECK, N. A.: *Multi-axial electrical switching of a ferroelectric: theory versus experiment*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 49(4) (2001), S. 785–811.
- [49] HUGHES, T. J. R.: *The Finite Element Method*. Prentice Hall, 1987.
- [50] HWANG, S. C., HUBER, J. E., McMEEKING, R. M. & FLECK, N. A.: *The simulation of switching in polycrystalline ferroelectric ceramics*. Journal of Applied Physics 84(3) (1998), S. 1530–1540.
- [51] HWANG, S. C., LYNCH, C. S. & McMEEKING, R. M.: *Ferroelectric/Ferroelastic Interactions and a Polarization Switching Model*. Acta Metallurgica et Materialia 43(5) (1995), S. 2073–2084.
- [52] IKEDA, T.: *Fundamentals of Piezoelectricity*. Oxford University Press, 1990.

-
- [53] JACKSON, J. D.: *Klassische Elektrodynamik*. De Gruyter, 4. Auflage, 2006.
- [54] JAFFE, B., COOK, W. R. & JAFFE, H.: *Piezoelectric ceramics*. Acad. Pr., 1971.
- [55] JILES, D. C.: *Introduction to magnetism and magnetic materials*. Chapman and Hall, 1991.
- [56] JILES, D. C.: *Theory of the Magnetomechanical Effect*. Journal of Physics D - Applied Physics 28(8) (1995), S. 1537–1546.
- [57] JILES, D. C. & ATHERTON, D. L.: *Theory of Ferromagnetic Hysteresis*. Journal of Magnetism and Magnetic Materials 61(1-2) (1986), S. 48–60.
- [58] JOULE, J. P.: *On a new class of magnetic forces*. Sturgeon's Annals of Electricity 8 (1842), S. 219.
- [59] KAMLAH, M.: *Zur Modellierung von nichtlinearen elektromechanischen Koppelphänomenen in Piezokeramiken*. Inst. für Mechanik, Universität Gesamthochschule Kassel, 2000.
- [60] KAMLAH, M.: *Ferroelectric and ferroelastic piezoceramics modeling of electromechanical hysteresis phenomena*. Continuum Mechanics and Thermodynamics 13(4) (2001), S. 219–268.
- [61] KANNAN, K. S. & DASGUPTA, A.: *A nonlinear Galerkin finite-element theory for modeling magnetostrictive smart structures*. Smart Materials and Structures 6(3) (1997), S. 341–350.
- [62] KASPER, E. P. & TAYLOR, R. L.: *A mixed-enhanced strain method Part I: Geometrically linear problems*. Computers & Structures 75(3) (2000), S. 237–250.
- [63] KASPER, E. P. & TAYLOR, R. L.: *A mixed-enhanced strain method Part II: Geometrically nonlinear problems*. Computers & Structures 75(3) (2000), S. 251–260.
- [64] KIM, J., VARADAN, V. V. & VARADAN, V. K.: *Finite element modelling of structures including piezoelectric active devices*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 40(5) (1997), S. 817–832.
- [65] KIM, J., VARADAN, V. V., VARADAN, V. K. & BAO, X. Q.: *Finite-element modeling of a smart cantilever plate and comparison with experiments*. Smart Materials and Structures 5(2) (1996), S. 165–170.
- [66] KIRENSKI, L. W.: *Magnetismus*. Verlag Chemie, 1969.
- [67] KLINKEL, S.: *A phenomenological constitutive model for ferroelastic and ferroelectric hysteresis effects in ferroelectric ceramics*. International Journal of Solids and Structures 43(22-23) (2006), S. 7197–7222.

- [68] KLINKEL, S.: *A thermodynamic consistent 1D model for ferroelastic and ferroelectric hysteresis effects in piezoceramics*. Communications in Numerical Methods in Engineering 22(7) (2006), S. 727–739.
- [69] KLINKEL, S., GRUTTMANN, F. & WAGNER, W.: *A robust non-linear solid shell element based on a mixed variational formulation*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 195(1-3) (2006), S. 179–201.
- [70] KLINKEL, S. & WAGNER, W.: *A geometrical non-linear brick element based on the EAS-method*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 40(24) (1997), S. 4529–4545.
- [71] KLINKEL, S. & WAGNER, W.: *A geometrically non-linear piezoelectric solid shell element based on a mixed multi-field variational formulation*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 65(3) (2006), S. 349–382.
- [72] KNELLER, E., SEEGER, A. & KRONMÜLLER, H.: *Ferromagnetismus*. Springer, 1962.
- [73] KOON, N. C., SCHIMDLER, A. I. & CARTER, F. L.: *Giant magnetostriction in cubic rare earth-iron compounds of the type RFe_2* . Physics Letters A 37 (1971), S. 413–414.
- [74] LANDIS, C. M.: *Fully coupled, multi-axial, symmetric constitutive laws for polycrystalline ferroelectric ceramics*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 50(1) (2002), S. 127–152.
- [75] LASKEWITZ, B., KAMLAH, M. & CHEN, C.: *Investigations of the nonlinear behavior of piezoceramic hollow cylinders*. Journal of Intelligent Material Systems and Structures 17(6) (2006), S. 521–532.
- [76] LAX, M. & NELSON, D. F.: *Maxwell equations in material form*. Phys. Rev. B 13(4) (1976), S. 1777–1784.
- [77] LIPPMANN, G.: *Sur le principe de la conservation de l'électricité*. Journal de Physique 10 (1881), S. 381–394.
- [78] LUENBERGER, D. G.: *Linear and nonlinear programming*. Kluwer Acad. Publ., 2. Auflage, 2003.
- [79] LYNCH, C. S.: *The effect of uniaxial stress on the electro-mechanical response of 8/65/35 PLZT*. Acta Materialia 44 (1996), S. 4137–4148.
- [80] MACNEAL, R. H. & HARDER, R. L.: *A proposed standard set of problems to test finite element accuracy*. Finite Elements in Analysis and Design 1 (1985), S. 3–20.

-
- [81] MARIONI, M. A., O'HANDLEY, R. C., ALLEN, S. M., HALL, S. R., PAUL, D. I., RICHARD, M. L., FEUCHTWANGER, J., PETERSON, B. W., CHAMBERS, J. M. & TECHAPIESANCHAROENKIJ, R.: *The ferromagnetic shape-memory effect in Ni-Mn-Ga*. Journal of Magnetism and Magnetic Materials 290 (2005), S. 35–41.
- [82] MAUGIN, G. A.: *Continuum mechanics of electromagnetic solids*. North-Holland, 1988.
- [83] MAYERGOYZ, I. D.: *Mathematical models of hysteresis and their applications*. Elsevier, 1. ed.. Auflage, 2003.
- [84] McMEEKING, R. M. & LANDIS, C. M.: *A phenomenological multi-axial constitutive law for switching in polycrystalline ferroelectric ceramics*. International Journal of Engineering Science 40(14) (2002), S. 1553–1577.
- [85] MEYER, V., SALLESE, J. M., FAZAN, P., BARD, D. & PECHEUX, F.: *Modeling the polarization in ferroelectric materials: a novel analytical approach*. Solid-State Electronics 47(9) (2003), S. 1479–1486.
- [86] MOFFETT, M. B., CLARK, A. E., WUNFOGLE, M., LINBERG, J., TETER, J. P. & MCLAUGHLIN, E. A.: *Characterization of Terfenol-D for Magnetostrictive Transducers*. Journal of the Acoustical Society of America 89(3) (1991), S. 1448–1455.
- [87] NAN, C. W.: *Magnetolectric Effect in Composites of Piezoelectric and Piezomagnetic Phases*. Physical Review B 50(9) (1994), S. 6082–6088.
- [88] NÉEL, L.: *Influence of Fluctuations of Molecular Field on Magnetic Properties of Bodies*. Ann. Physique 17 (1932), S. 5–105.
- [89] NIEZRECKI, C., BREI, D., BALAKRISHNAN, S. & MOSKALIK, A.: *Piezoelectric Actuation: State of the Art*. The Shock and Vibration Digest 33 (2001), S. 269–280.
- [90] ODEN, J. T. & REDDY, J. N.: *An introduction to the mathematical theory of finite elements*. Wiley, 1976.
- [91] PASCO, Y. & BERRY, A.: *A hybrid analytical/numerical model of piezoelectric stack actuators using a macroscopic nonlinear theory of ferroelectricity and a Preisach model of hysteresis*. Journal of Intelligent Material Systems and Structures 15(5) (2004), S. 375–386.
- [92] PÉREZ-APARICIO, J. L. & SOSA, H.: *A continuum three-dimensional, fully coupled, dynamic, non-linear finite element formulation for magnetostrictive materials*. Smart Materials and Structures 13(3) (2004), S. 493–502.

- [93] PILTNER, R. & TAYLOR, R. L.: *A Quadrilateral Mixed Finite-Element with 2 Enhanced Strain Modes*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 38(11) (1995), S. 1783–1808.
- [94] PILTNER, R. & TAYLOR, R. L.: *A systematic construction of B-BAR functions for linear and non-linear mixed-enhanced finite elements for plane elasticity problems*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 44(5) (1999), S. 615–639.
- [95] PREISACH, F.: *Über die magnetische Nachwirkung*. Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei 94(5) (1935), S. 277–302.
- [96] QUANDT, E.: *Smart Materials für Dünnschichtaktoren*. Fakultät für Maschinenbau der Universität Karlsruhe (TH), 2000.
- [97] QUANDT, E. & SEEMANN, K.: *Fabrication and simulation of magnetostrictive thin-film actuators*. Sensors and Actuators A-Physical 50(1-2) (1995), S. 105–109.
- [98] RAITH, W.: *Bergmann Schäfer, Lehrbuch der Experimentalphysik, Band 6, Festkörper*. de Gruyter, 8. Auflage, 1992.
- [99] RAITH, W.: *Bergmann Schäfer, Lehrbuch der Experimentalphysik, Band 2, Elektromagnetismus*. de Gruyter, 8. Auflage, 1999.
- [100] ROSEN, M., KLIMKER, H., ATZMONY, U. & DARIEL, M. P.: *Magnetoelasticity in SmFe₂*. Physical Review B 9(1) (1974), S. 254–258.
- [101] SABLİK, M. J. & JILES, D. C.: *Coupled magnetoelastic theory of magnetic and magnetostrictive hysteresis*. Magnetism, IEEE Transactions on 29(4) (1993), S. 2113–2123.
- [102] SANSOUR, C. & WAGNER, W.: *Viscoplasticity based on additive decomposition of logarithmic strain and unified constitutive equations Theoretical and computational considerations with reference to shell applications*. Computers & Structures 81(15) (2003), S. 1583–1594.
- [103] SAVAGE, H., CLARK, A. & POWERS, J.: *Magnetomechanical coupling and ΔE effect in highly magnetostrictive rare earth - Fe₂ compounds*. Magnetism, IEEE Transactions on 11(5) (1975), S. 1355–1357.
- [104] SAVAGE, H. T. & SPANO, M. L.: *Theory and application of highly magnetoelastic Metglas 2605SC (invited)*. Journal of Applied Physics 53(11) (1982), S. 8092–8097.
- [105] SCHRÖDER, J. & GROSS, D.: *Invariant formulation of the electromechanical enthalpy function of transversely isotropic piezoelectric materials*. Archive of Applied Mechanics 73(8) (2004), S. 533–552.

- [106] SCHRÖDER, J. & ROMANOWSKI, H.: *A thermodynamically consistent mesoscopic model for transversely isotropic ferroelectric ceramics in a coordinate-invariant setting*. Archive of Applied Mechanics 74(11-12) (2005), S. 863–877.
- [107] SCHÄUFELE, A.: *Ferroelastische Eigenschaften von Blei-Zirkonat-Titanat-Keramiken*. VDI-Verl., 1996.
- [108] SENTURIA, S. D.: *Microsystem design*. Kluwer, 2001.
- [109] SIMO, J. C. & ARMERO, F.: *Geometrically Nonlinear Enhanced Strain Mixed Methods and the Method Of Incompatible Modes*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 33(7) (1992), S. 1413–1449.
- [110] SIMO, J. C., ARMERO, F. & TAYLOR, R. L.: *Improved Versions of Assumed Enhanced Strain Tri-Linear Elements for 3d-Finite Deformation Problems*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 110(3-4) (1993), S. 359–386.
- [111] SIMO, J. C. & HUGHES, T. J. R.: *Computational inelasticity*. Springer, 1998.
- [112] SIMO, J. C. & RIFAI, M. S.: *A Class of Mixed Assumed Strain Methods and the Method of Incompatible Modes*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 29(8) (1990), S. 1595–1638.
- [113] SMITH, R. C.: *Smart material systems*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005.
- [114] SMITH, R. C., DAPINO, M. J. & SEELECKE, S.: *Free energy model for hysteresis in magnetostrictive transducers*. Journal of Applied Physics 93(1) (2003), S. 458–466.
- [115] SONG, G., MA, N. & LI, H. N.: *Applications of shape memory alloys in civil structures*. Engineering Structures 28(9) (2006), S. 1266–1274.
- [116] SONG, G., SETHI, V. & LI, H. N.: *Vibration control of civil structures using piezoceramic smart materials: A review*. Engineering Structures 28(11) (2006), S. 1513–1524.
- [117] STEIN, E. & BARTHOLD, F. J.: *Elastizitätstheorie*. In: MEHLHORN, G., (HRSG.), *Der Ingenieurbau*, Grundwissen, S. 165–428, Berlin, 1997 Ernst & Sohn.
- [118] SZE, K. Y. & PAN, Y. S.: *Hybrid finite element models for piezoelectric materials*. Journal of Sound and Vibration 226(3) (1999), S. 519–547.
- [119] SZE, K. Y. & YAO, L. Q.: *A hybrid stress ANS solid-shell element and its generalization for smart structure modelling. Part I: solid-shell element formulation*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 48(4) (2000), S. 545–564.

- [120] TAN, X. & BARAS, J. S.: *Modeling and control of hysteresis in magnetostrictive actuators*. *Automatica* 40(9) (2004), S. 1469–1480.
- [121] TANI, J., T., TOSHIYUKI & J., QIU: *Intelligent material systems: Application of functional materials*. *Applied Mechanics Reviews* 51 (1998), S. 505–521.
- [122] TAYLOR, R. L.: *FEAP Manual*. <http://www.ce.berkeley.edu/~rlt/feap/>, 2003.
- [123] TETER, J. P., CLARK, A. E. & MCMASTERS, O. D.: *Anisotropic Magnetostriction in $Tb_{0.27}Dy_{0.73}Fe_{1.95}$* . *Journal of Applied Physics* 61(8) (1987), S. 3787–3789.
- [124] TRÉMOLET DE LACHEISSERIE, E.: *Magnetostriction - Theory and Applications of Magnetoelasticity*. CRC Press, Boca Raton, 1993.
- [125] TRUESDELL, C. & NOLL, W.: *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*. Springer-Verlag, Berlin, 2. Auflage, 1992.
- [126] TZOU, H. S., C. I., TSENG & H., BAHRAMI: *A Thin Piezoelectric Hexahedron Finite Element Applied to Design Smart Continua*. *Finite Elements in Analysis and Design* 16 (1994), S. 27–42.
- [127] TZOU, H. S. & TSENG, C. I.: *Distributed Piezoelectric Sensor Actuator Design for Dynamic Measurement/Control of Distributed Parameter-Systems: A Piezoelectric Finite-Element Approach*. *Journal of Sound and Vibration* 138(1) (1990), S. 17–34.
- [128] VILLARI, E.: *Über die Änderungen des magnetischen Moments, welche der Zug und das Hindurchleiten eines galvanischen Stroms in einem Stabe von Stahl oder Eisen hervorbringen*. *Annalen der Physik (Leipzig)* 126 (1865), S. 87–122.
- [129] VOIGT, W.: *Über Pyro- und Piezomagnetismus der Kristalle*. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse* 1901 (1901), S. 1–19.
- [130] VOIGT, W.: *Lehrbuch der Kristallphysik*. Johnson, 1. Auflage, 1910.
- [131] WAGNER, W. & GRUTTMANN, F.: *A robust non-linear mixed hybrid quadrilateral shell element*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 64(5) (2005), S. 635–666.
- [132] WAN, Y. P., FANG, D. N. & HWANG, K. C.: *Non-linear constitutive relations for magnetostrictive materials*. *International Journal of Non-Linear Mechanics* 38(7) (2003), S. 1053–1065.
- [133] WEISSMANTEL, C. & HAMANN, C.: *Grundlagen der Festkörperphysik*. Barth, 4., bearb. Aufl., Auflage, 1995.
- [134] WIEDEMANN, G.: *Magnetische Untersuchungen*. *Annalen der Physik (Leipzig)* 117 (1862), S. 193–217.

- [135] WRIGGERS, P.: *Nichtlineare Finite-Element-Methoden*. Springer, 2001.
- [136] XIE, J. W., FORT, D. & ABELL, J. S.: *The preparation, microstructures and magnetostrictive properties of Samfenol-D*. Journal of Alloys and Compounds 366(1-2) (2004), S. 241–247.
- [137] YU, Y. H., NAGANATHAN, N. & DUKKIPATI, R.: *Preisach modeling of hysteresis for piezoceramic actuator system*. Mechanism and Machine Theory 37(1) (2002), S. 49–59.
- [138] YU, Y. H., XIAO, Z. C., NAGANATHAN, N. G. & DUKKIPATI, R. V.: *Dynamic Preisach modelling of hysteresis for the piezoceramic actuator system*. Mechanism and Machine Theory 37(1) (2002), S. 75–89.
- [139] ZHANG, T. L., JIANG, C. B., ZHANG, H. & XU, H. B.: *Giant magnetostrictive actuators for active vibration control*. Smart Materials and Structures 13(3) (2004), S. 473–477.
- [140] ZHENG, X. J. & SUN, L.: *A one-dimension coupled hysteresis model for giant magnetostrictive materials*. Journal of Magnetism and Magnetic Materials 309(2) (2007), S. 263–271.
- [141] ZHENG, X. J. & LIU, X. E.: *A nonlinear constitutive model for Terfenol-D rods*. Journal of Applied Physics 97(5) (2005), S. 053901.
- [142] ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L. & ZHU, J. Z.: *Finite element method*. Band 1-3, Butterworth-Heinemann, 6. Auflage, 2006.

Berichte des Instituts für Baustatik, Universität Fridericiana Karlsruhe (TH)

Verzeichnis der bisher erschienenen Berichte:

- 51/1: Beitrag zur Ermittlung der zeitabhängigen Eigenspannungen in Verbundträgern, Dissertation, Hansjürgen Sonntag, 1951.
- 54/2: Beiträge zur Ermittlung der zeitabhängigen Spannungen in Verbundträgern, Dissertation, Eugen Müller, 1954.
- 54/3: Zur Statik räumlich gekrümmter Träger, Dissertation, Heinrich Bechert, 1954.
- 55/4: Bemessungsverfahren für Verbundträger, Dissertation, Günter Utescher, 1955.
- 57/5: Einflußfelder für die Hauptträgerschnittkräfte zweistegiger Plattenbalkensysteme, Dissertation, Otto Köller, 1957.
- 60/6: Beitrag zur numerischen Berechnung der Schnittkräfte von rechteckigen und schiefen randversteiften Platten, Dissertation, Klaus Stiglat, 1960.
- 61/7: Allgemeines und einheitliches Berechnungsverfahren für Verbundkonstruktionen aus Stahl und Beton, Dissertation, Herbert Wippel, 1961.
- 62/8: Beitrag zur Bemessung vorgespannter stählerner Fachwerkträger mit besonderer Berücksichtigung der Tragsicherheit, Dissertation, Wolfgang Heidecker, 1962.
- 63/9: Beitrag zur Berechnung der Schnittkräfte und Durchbiegungen von umfanggelagerten Rechteckplatten mit veränderlichem Querschnitt in einer Spannrichtung, Dissertation, Ernst Buchholz, 1963.
- 63/10: Der winkelrecht zu seiner Ebene belastete, kreisförmig gekrümmte Träger mit starrer Torsionseinspannung an den Auflagerpunkten, Dissertation, Hans Wittfoht, 1963.
- 63/11: Ein Verfahren zur Berechnung biegsamer rechteckiger Gründungsplatten mit elektronischen Rechengерäten, Dissertation, Artur Deninger, 1963.
- 64/12: Anwendung des Momentenausgleichsverfahrens für durchlaufende schiefwinklige Platten, Dissertation, Jahiclul Alum, 1964.

- 67/13: Beitrag zur Berechnung des Tragvermögens von Rahmentragwerken aus Stahl nach der Plastizitätstheorie II. Ordnung, Dissertation, Mieng-Siong Wang, 1967.
- 67/14: Zusammenwirken von biegesteifem Skelett und aussteifenden Wandscheiben in Hochhauskonstruktionen, Dissertation, Rolf Zickendraht, 1967.
- 68/15: Experimentelle Untersuchung von beliebig gelagerten Plattentragwerken mit Hilfe von elektrischen Analogieschaltungen, Dissertation, Werner Sitzler, 1968.
- 0/75 : Berechnung einfeldriger und durchlaufender Kastenträger unter Berücksichtigung der Querschnittsdeformation, Dissertation, J. Hanisch, 1975.
- 1/76 : Das Tragverhalten längsversteifter, vorverformter Rechteckplatten unter Axialbelastung nach der nichtlinearen Beultheorie (unter Berücksichtigung der orthotropen Struktur sowie einer elastischen Lagerung am Längsrand), Habilitationsschrift, Helmut Rubin, 1976.
- 2/78 : Traglastuntersuchungen ebener Rahmen aus Stahl unter Berücksichtigung teilplastischer Zonen, Dissertation, Ülgen Korkut, 1978.
- 3/79 : Traglastermittlung von räumlich belasteten Durchlaufträgern mit offenem, dünnwandigem Querschnitt bei beliebigem Werkstoffgesetz, Dissertation, Wolfgang Heil, 1979.
- 4/79 : Schnittgrößen im Verschneidungsbereich eines kreiszylindrischen Druckbehälters mit einem Stutzen beliebiger Länge, Dissertation, Kurt Schumer, 1979.
- 5/81 : Traglastberechnung räumlicher Rahmen aus Stahl- oder Leichtmetallprofilen mit dünnwandigen offenen Querschnitten, Dissertation, Theodor Ackermann, 1981.
- 6/83 : Berechnung orthotroper Rechteckplatten nach der nichtlinearen Elastizitätstheorie für beliebige Randbedingungen, Dissertation, Karl Morgen, 1983.
- 7/86 : Traglastermittlung räumlicher Stabtragwerke aus Stahl und Leichtmetall unter Berücksichtigung der Schubweichheit, Dissertation, Dietmar H. Mayer, 1986.
- 8/89 : Bemessung von Raumbachwerken bezüglich ihrer Grenztragfähigkeit mit Hilfe der mathematischen Optimierung, Dissertation, Richard Harich, 1989.
- 9/89 : Quasi-Newton Verfahren und Kurvenverfolgungsalgorithmen für die Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme in der Strukturmechanik, Forschungsbericht, Karl Schweizerhof, 1989.

- 10/90 : Finite Element Konzepte für schubelastische Schalen mit endlichen Drehungen, Dissertation, Heinrich Gebhardt, 1990.
- 11/91 : Theorie II. Ordnung des eben gekrümmten Stabes bei nicht richtungstreuen Kräften, Dissertation, Peter Brković, 1991.
- 12/91 : Nichtlineare Finite Element Berechnungen von Schalentragwerken mit geschichtetem anisotropen Querschnitt, Dissertation, Rudolf Klarmann, 1991.
- 13/94 : Adaptive Finite Element Konzepte zur Analyse von Schalentragwerken, Dissertation, Markus Baumann, 1994.
- 1 (1995) : Optimierung von Stockwerkrahmen aus Stahl mit biegesteifen und biegeweichen Rahmenknoten, Dissertation, Petra Höß, 1994, ISBN: 978-3-935322-00-3.
- 2 (1996) : Theorie und Numerik dünnwandiger Faserverbundstrukturen, Forschungsbericht, Friedrich Gruttmann, 1996, ISBN: 978-3-935322-01-1.
- 3 (1997) : Stabilität von Stahlzylindern mit unilateralen Randbedingungen bei statischen und dynamischen Beanspruchungen, Forschungsbericht, Klaus Knebel, 1997, ISBN: 978-3-935322-02-7.
- 4 (1998) : Eine einheitliche Finite-Element-Formulierung für Stab- und Schalentragwerke mit endlichen Rotationen, Dissertation, Roland Sauer, 1998, ISBN: 978-3-935322-03-4.
- 5 (1999) : Finite-Element-Modellierung von Starrkörper- und Übergangsbedingungen in der Statik, Dissertation, Joachim Kugler, 1999, ISBN: 978-3-935322-04-1.
- 6 (2000) : Delaminationsanalysen von Faserverbundstrukturen mit der Methode der finiten Elemente, Dissertation, Wolfgang Sprenger, 2000, ISBN: 978-3-935322-05-8.
- 7 (2000) : Theorie und Numerik eines Volumen-Schalen-Elementes bei finiten elastischen und plastischen Verzerrungen, Dissertation, Sven Klinkel, 2000, ISBN: 978-3-935322-06-5.
- 8 (2001) : Theorie und Numerik für den Entwurf von vorgespannten Membrantragwerken, Dissertation, René Ziegler, 2001, ISBN: 978-3-935322-07-2.
- 9 (2005) : Ein inelastisches 3D-Versagensmodell für Beton und seine Finite-Element-Implementierung, Dissertation, Jan Schütt, 2005, ISBN: 978-3-935322-08-9.
- 10 (2006) : Formfindung der Fließliniengeometrie für polygonale Platten im Traglastzustand, Dissertation, Jochen Wüst, 2006, ISBN: 978-3-935322-09-6.

- 11 (2006) : Nichtlineare Formulierung piezoelektrischer 3D-Stabstrukturen - Theorie und Finite-Element-Modellierung, Dissertation, Alexander Butz, 2006, ISBN: 978-3-935322-10-2.
- 12 (2007) : Nichtlineare Modellierung ferroelektrischer Keramiken und piezoelektrischer Strukturen – Analyse und Finite-Element-Formulierung, Habilitationsschrift, Sven Klinkel, 2007, ISBN: 978-3-935322-11-9.
- 13 (2007) : Ein geometrisch und materiell nichtlineares Cosserat-Modell – Theorie, Numerik und Anwendungsmöglichkeiten, Dissertation, Ingo Münch, 2007, ISBN: 978-3-935322-12-6.

Lebenslauf

Name: Konrad Gerhard Linnemann
Geburtsdatum: 21.07.1977 in Gießen

1983-1996 Schulausbildung
Gymnasium, Liebigschule Gießen
Abitur

1996-1997 Zivildienst, Universitätsklinikum Gießen

1997-2003 Studium des Bauingenieurwesens
Universität Karlsruhe (TH)
Vertiefungsrichtung: Konstruktiver Ingenieurbau

2000-2002 Wissenschaftliche Hilfskraft am Institut für Mechanik,
Universität Karlsruhe (TH)

2003 Diplom

2003 Wissenschaftliche Hilfskraft am Institut für Baustatik,
Universität Karlsruhe (TH)

2003-2005 Promotions-Stipendiat im Graduiertenkolleg 786
„Mischfelder und Nichtlineare Wechselwirkungen“
am Institut für Baustatik, Universität Karlsruhe (TH)

2005-2008 Wissenschaftlicher Mitarbeiter
am Institut für Baustatik, Universität Karlsruhe (TH)