

Adaptive Finite-Elemente-Algorithmen in der Strukturdynamik

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

DOKTOR-INGENIEURS

von der Fakultät für

Bauingenieur-, Geo- und Umweltwissenschaften
der Universität Fridericiana zu Karlsruhe (TH)

genehmigte

DISSERTATION

von

Dipl.-Ing. Stephan Kizio
aus Koblenz

Tag der mündlichen Prüfung : 04.02.2008
Hauptreferent : Prof. Dr.-Ing. K. Schweizerhof
Korreferent : Prof. Dr. rer. nat. E. Rank

Karlsruhe 2008

Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit adaptiven Finite-Elemente-Methoden bei der Berechnung von Problemen der Strukturmechanik. Der klassische Ansatz zur numerischen Lösung der kontinuierlichen Bewegungsgleichung ist die Semidiskretisierung, welche sich in die räumliche und die zeitliche Diskretisierung der Bewegungsgleichung unterteilt. Die räumliche Diskretisierung der kontinuierlichen Bewegungsgleichung erfolgt im Rahmen dieser Arbeit mit Volumen-Schalenelementen mit bilinearen Ansätzen in der Schalenebene. Für die Zeitintegration der semidiskreten Bewegungsgleichung wird das Newmark-Verfahren bzw. ein äquivalentes kontinuierliches Petrov-Galerkinverfahren verwendet.

Der gesamte Diskretisierungsfehler lässt sich dann in den räumlichen Diskretisierungsfehler und den Zeitintegrationsfehler aufspalten. Für die Schätzung des räumlichen Diskretisierungsfehlers in einem Zielfunktional der Lösung werden zunächst Fehlerdarstellungen auf Basis von Dualitätsargumenten bereitgestellt. Diese werden im Rahmen der Fehlerschätzung in geeigneter Form numerisch ausgewertet. Auf der Basis der Fehlerschätzung erfolgt eine Anpassung der räumlichen Diskretisierung. Hierfür werden zwei Adaptionsstrategien vorgestellt. Numerische Beispiele belegen die Effizienz der behandelten ortsadaptiven Verfahren.

Die Schätzung des globalen Zeitintegrationsfehlers für lineare Probleme kann aufgrund der Äquivalenz des Newmark-Verfahrens mit einem Petrov-Galerkinverfahren auf der gleichen Basis wie die Schätzung des räumlichen Diskretisierungsfehlers erfolgen. Auch hier können Fehlerdarstellungen mit Hilfe der adjungierten oder dualen Lösung der Bewegungsgleichung angegeben werden. Für die Schätzung des Zeitintegrationsfehlers werden dann zwei Möglichkeiten zur numerischen Auswertung der Fehlerdarstellung angegeben.

Ein weiterer Aspekt der Arbeit ist die Schätzung des Fehlers in linearen Zielfunktionalen einzelner Eigenformen. Die Fehlerschätzung basiert hierbei ebenfalls auf einer Fehlerdarstellung mit Hilfe eines dualen Problems. Die Netzadaption auf der Basis des Fehlerschätzers führt zu einer wesentlichen Steigerung der Genauigkeit der Lösung in der Zielgröße.

Abstract

This thesis deals with adaptive finite element procedures in structural dynamics. For the spatial discretization of the continuous equation of motion 3D-shell-elements are used which allow for a continuum-like modeling of shell structures. Time integration is performed applying the well-known Newmark-scheme or the equivalent Petrov-Galerkin-scheme.

The total discretization error can be split into the spatial discretization error resulting from the discretization of the spatial domain and the time integration error of the applied time integration scheme. In the following both errors are treated separately. The estimation of the spatial discretization error in an arbitrary quantity of interest is based on suitable error representation formulas which are derived using duality arguments. For the error representation the residual of the numerical solution is weighted with the solution of the so-called dual problem which can be interpreted as the influence function of the quantity of interest. The dual problem characterizes the spatial and temporal influence of the element-residuals on the error in the goal-quantity. A simple error indicator for local quantities is presented which takes into account the physical nature of the considered structural vibrations. Both, linear and geometrically nonlinear problems are investigated. Two different mesh adaptation schemes based on the error estimator are presented. The performance of the proposed algorithms is demonstrated by means of numerical examples.

As an alternative for linear problems a duality based approach for the estimation of the error in quantities of interest of single eigenfunctions of the dynamic eigenvalue problem is considered. The error estimation serves as basis for a mesh adaptation scheme. The efficiency of the adaptive scheme is tested on several numerical examples.

The last section of this thesis deals with duality-based error estimation for continuous Galerkin schemes in time. Due to the equivalence of the standard Newmark-scheme and a corresponding continuous Galerkin-scheme the duality-based presented error estimators can also be applied to the Newmark-scheme. Finally, two different alternatives for the computation of the error quantity are presented.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik der Universität Karlsruhe.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. - Ing. K. Schweizerhof für die Anregung zu dieser Arbeit und seine wohlwollende und engagierte Förderung während meiner Zeit in Karlsruhe.

Bei Herrn Prof. Dr. rer. nat. E. Rank bedanke ich mich für die Übernahme des Korreferats und die zügige Durchsicht der Arbeit.

Darüber hinaus danke ich allen Kollegen des Instituts für Mechanik für ihre Unterstützung in fachlichen und fachfremden Angelegenheiten sowie für das angenehme und kollegiale Arbeitsklima.

Mein ganz besonderer Dank gilt meiner Frau Sandra für den Rückhalt und ihre Geduld, die sie mir während der Erstellung dieser Arbeit entgegengebracht hat.

Karlsruhe, Februar 2008

Stephan Kizio

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Kontinuumsmechanik und Diskretisierungsmethoden	5
1.1 Kontinuumsmechanische Grundlagen	5
1.1.1 Kinematik und Verzerrung	6
1.1.2 Bilanzgleichungen der Kontinuumsmechanik	8
1.1.3 Spannungsmaße und Stoffgesetz	10
1.1.4 Grundgleichungen der linearen Elastodynamik	11
1.2 Räumlich schwache Form des Gleichgewichts	12
1.3 Räumliche Diskretisierung mit finiten Elementen	15
1.3.1 Diskretisierung mit Volumen-Schalenelementen	16
1.3.2 Modifikationen zur Beseitigung von Versteifungseffekten	19
1.3.3 Nomenklatur der verwendeten Elemente	28
1.4 Zeitliche Diskretisierung	28
1.4.1 Das Newmarkverfahren	29
1.4.2 Das Newmarkverfahren für lineare Probleme als Petrov-Galerkin- Verfahren	30
1.5 Der Diskretisierungsfehler	32
2 Der räumliche Diskretisierungsfehler	35
2.1 Allgemeines	35
2.2 Differentialgleichung des räumlichen Diskretisierungsfehlers	37
2.3 Das duale Problem	42
2.4 Fehlermaße in beliebigen Zielgrößen	48
2.4.1 Fehler in Punktgrößen zum Zeitpunkt t_n	50

2.4.2	Mittlerer Fehler in Punktgrößen im Zeitintervall $[t_a, t_b]$	52
2.4.3	Fehler in lokalen Verschiebungsgrößen	54
2.4.4	Zusammenfassung	56
2.5	Zielorientierte Fehlerschätzung und Reziprozitätstheoreme der Elastodynamik	57
3	Geometrisch lineare Probleme	63
3.1	Anforderungen an die Fehlerschätzung	63
3.2	Klassifizierung des Lösungsverhaltens der Bewegungsgleichung	64
3.3	Modale Synthese des räumlichen Diskretisierungsfehlers	66
3.4	Fehlerschätzung in globalen Normen	67
3.4.1	Schätzung des Fehlers in der Verzerrungsenergienorm	67
3.4.2	Fehlerschätzer in der L_2 -Norm der Geschwindigkeiten	69
3.5	Allgemeines zur Fehlerschätzung für Punktgrößen	70
3.6	Fehleridentitäten für Elemente mit angenommenen Verzerrungsverläufen	71
3.7	Fehlerschätzung mit vollständiger Lösung des Rückwärtsproblems . . .	76
3.7.1	Numerische Beispiele	80
3.7.2	Bewertung der Fehlerschätzung	84
3.8	Fehlerschätzung ohne zeitliche Kopplung des primalen und dualen Problems	85
3.8.1	Verifikation des Fehlerschätzers an einem numerischen Beispiel .	88
3.8.2	Weitere Ansätze zur Minimierung des Aufwands	93
3.9	Adaption des Raunggitters	95
3.9.1	Datentransfer bei Netzveränderungen während der Berechnung .	100
3.9.2	Steuerung der Netzveränderung	103
3.9.3	Numerische Beispiele	106
3.10	Netzadaption auf Basis des Fehlers in Zielfunktionalen von Eigenformen	116
4	Geometrisch nichtlineare Probleme	139
4.1	Zur Fehlerschätzung mit vollständiger Lösung des dualen Problems . .	139
4.2	Fehlerschätzung ohne zeitliche Kopplung von primalem und dualem Problem	141
4.2.1	Reine Verschiebungsformulierung	141

4.2.2	7-Parameter-Schalenformulierung	144
4.2.3	Zum numerischen Aufwand für die Fehlerschätzung	145
4.3	Netzadaption	145
4.4	Numerisches Beispiel	147
5	Schätzung des Zeitintegrationsfehlers für lineare Probleme	153
5.1	Definitionen	153
5.2	A-priori Fehlerabschätzungen	154
5.3	Darstellung des Zeitintegrationsfehlers mit der DWR-Methode	156
5.4	Schätzung des globalen Zeitintegrationsfehlers	159
5.4.1	Numerische Integration des dualen Problems	159
5.4.2	Darstellung des globalen Zeitintegrationsfehlers in modalen Ko- ordinaten	161
5.4.3	Numerisches Beispiel	164
5.5	Abschließende Bemerkungen zur Relevanz des Zeitintegrationsfehlers .	169
	Zusammenfassung	171
	Literaturverzeichnis	172
A	Mathematische Grundlagen	183
A.1	Rechenregeln für Tensoren	183
A.1.1	Tensoralgebra	183
A.1.2	Tensoranalysis	186
A.2	Laplace-Transformation	187
A.2.1	Ableitungssätze	188
A.2.2	Faltungssatz	188
A.3	Linearisierung von Funktionalen	188

Einleitung

Im Bereich der Strukturmechanik stellt die Methode der finiten Elemente (FEM) heute das am häufigsten verwendete numerische Simulationswerkzeug dar. Nicht zuletzt die rasante Entwicklung der Computertechnologie ermöglicht die Berechnung immer komplexerer Problemstellungen mit immer größeren numerischen Modellen. Die verlässliche Beurteilung der Genauigkeit der numerischen Lösung und damit einhergehend die Frage nach der notwendigen Feinheit der Diskretisierung spielt dabei eine wesentliche Rolle.

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der numerischen Berechnung von Problemen der Strukturmechanik unter Verwendung der Methode der finiten Elemente. Kernpunkt ist dabei die Fehlerkontrolle und Steigerung der Effizienz der Lösungsprozedur mit Hilfe adaptiver Methoden.

Der gesamte Modellierungsprozess innerhalb der numerischen Simulation von Problemen der Strukturmechanik und die damit einhergehenden Fehler sind in Bild 1 dargestellt. Ausgehend von dem gegebenen physikalischen Problem erfolgt zunächst die Wahl eines geeigneten mechanischen Modells, zum Beispiel durch die Auswahl einer dem Problem angepassten Kinematik. Durch die Wahl des Modells wird in den Lösungsprozess der sogenannte Modellfehler eingebracht.

Das mechanische Modell ist im vorliegenden Fall die kontinuierliche Bewegungsgleichung in Form einer partiellen Differentialgleichung.

Der typische Ansatz zur Lösung dieser Bewegungsgleichung ist die Semidiskretisierung, auch vertikale Linienmethode genannt, welche sich in die räumliche und die zeitliche Diskretisierung der Bewegungsgleichung unterteilt.

Der erste Schritt ist die räumliche Diskretisierung der Bewegungsgleichung mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode. Hierdurch wird die partielle Differentialgleichung in ein System gekoppelter gewöhnlicher Differentialgleichungen, der semidiskreten Bewegungsgleichung, überführt. Die räumliche Diskretisierung verursacht einerseits den räumlichen Diskretisierungsfehler in Folge der näherungsweise räumlichen Approximation der Zustandsgrößen und andererseits den Geometriefehler in Folge der näherungsweise Approximation des Berechnungsgebietes bei nicht polygonal berandeten Gebieten oder gekrümmten Oberflächen. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit erfolgt die räumliche Diskretisierung mit sogenannten Volumen-Schalenelementen mit bilinearen Verschiebungsansätzen, wie sie zum Beispiel in HAUPTMANN [49] und HARNAU [45] behandelt werden. Die Verwendung von Elementen mit niedriger Ansatzordnung im

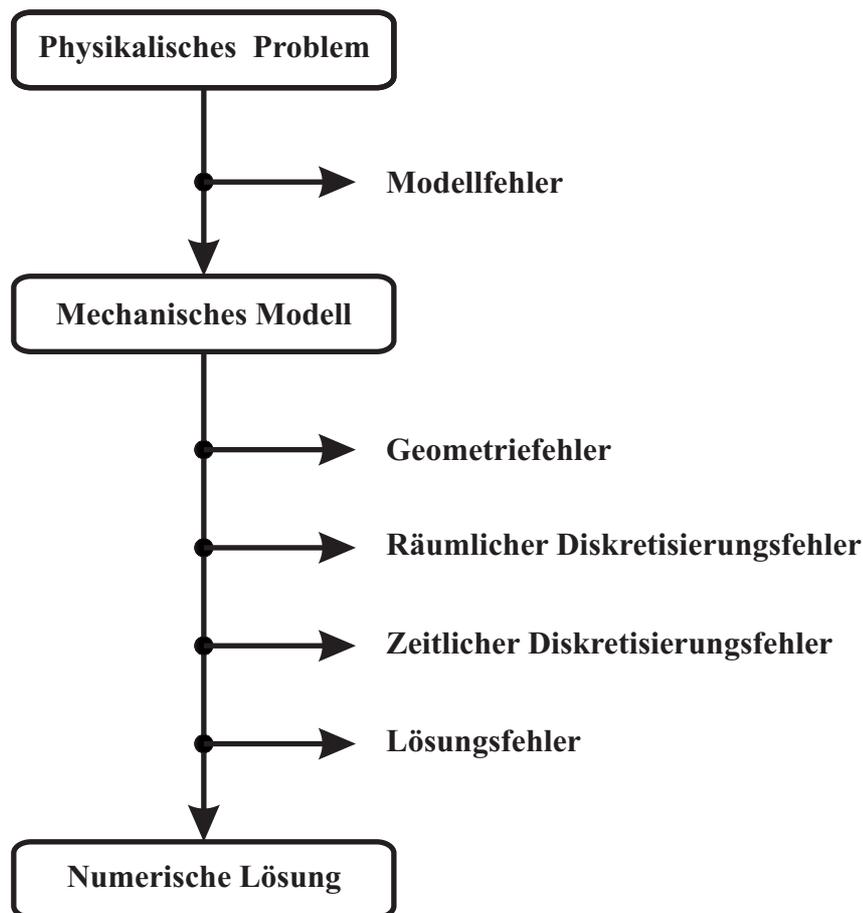


Bild 1: Fehler innerhalb der numerischen Simulation

Rahmen adaptiver Verfahren hat Vorteile bei der Implementierung von Fehlerschätzern und erleichtert die Adaption des Raumnetzes. Als Nachteil ist sicherlich die verglichen mit Elementen höherer Ordnung starke Distorsionsempfindlichkeit zu nennen.

Der nächste Diskretisierungsschritt ist die Lösung der semidiskreten Bewegungsgleichung mit Hilfe eines geeigneten Zeitintegrationsverfahrens. Hier wird das Newmarkverfahren, bzw. äquivalente kontinuierliche Galerkinverfahren verwendet. Durch die Zeitintegration wird der zeitliche Diskretisierungsfehler in die numerische Lösung eingebracht.

Eine weitere Fehlerquelle sind die numerischen Fehler bei der Lösung der durch die Diskretisierung entstehenden linearen Gleichungssysteme. Dieser Fehler kann in aller Regel vernachlässigt werden, d.h. im Folgenden wird davon ausgegangen, dass die Gleichungssysteme ausreichend gut konditioniert sind.

Die wesentlichen Fehler in der Lösung sind somit der Modellfehler sowie der Diskretisierungsfehler, bestehend aus räumlichem und zeitlichem Diskretisierungsfehler. Praktisch ist die im Bild 1 dargestellte strenge Abgrenzung zwischen Modellfehler und räumli-

chem Diskretisierungsfehler schwierig, da die Übergänge zwischen der Modellwahl und der räumlichen Diskretisierung fließend sind. So kann beispielsweise bei Schalenproblemen die Wahl einer Approximationsordnung in die Dickenrichtung der Schale sowohl als Wahl eines Schalenmodells als auch die Wahl einer Diskretisierungsordnung in Dickenrichtung beispielsweise im Rahmen der Diskretisierung mit Hilfe der p -Methode angesehen werden. Entsprechend kann auch die adaptive Anpassung der Interpolationsordnung als Modelladaption oder als Adaption der räumlichen Diskretisierung aufgefasst werden. Für die Schätzung des Modellfehlers führt deshalb beispielsweise RÜTER [102] noch zwischen dem physikalischen Problem und dem verwendeten mechanischen Modell noch als Referenz das für die Problemstellung am besten geeignete Modell, das sogenannte „State-of-the-Art“-Modell ein, welches in aller Regel ein Kontinuumsmodell ist. Der Modellfehler wird dadurch nochmals unterteilt in den nicht zu kontrollierenden „State-of-the-Art“-Fehler und den eigentlichen Modellfehler, der dann jedoch ein Referenzfehler bezüglich des sehr feinen Referenzmodells darstellt. Ein ähnliches Vorgehen findet sich auch in den Arbeiten von ODEN ET AL. [78, 79]. Da für viele Problemstellungen zum Beispiel die Randschichten oder singulären Punkte der Lösung a-priori bestimmt werden können, und darüber hinaus auch die Grenzen der verwendeten mechanischen Modelle bekannt sind, kann in aller Regel auch die Wahl eines geeigneten Modells ohne Adaption des Modells a-priori erfolgen.

Die vorliegende Arbeit befasst sich deshalb ausschließlich mit den Diskretisierungsfehlern in Folge der räumlichen und zeitlichen Diskretisierungen. Kernpunkt eines adaptiven Algorithmus ist der Fehlerschätzer. Hierbei wird das Ziel verfolgt, den Fehler in einem beliebigen Funktional der Lösung zu schätzen und anschließend mit Hilfe geeigneter Adaptionstechniken zu kontrollieren. Das generelle Konzept der Fehlerschätzung in beliebigen Zielfunktionalen geht auf Arbeiten von JOHNSON ET AL. [59] und RANACHER & BECKER [13] zurück und wird als *Dual-Weighted-Residual*-Konzept (DWR) bezeichnet, was zum Ausdruck bringt, dass zur Fehlerschätzung das Residuum der numerischen Lösung mit der Lösung eines dualen Hilfsproblems gewichtet wird. Die DWR-Methode ist ein heuristisches Konzept zur Fehlerschätzung, d.h. strenge mathematische Beweise lassen sich für die Methode – zumindest bisher – nicht angeben [8]. Die Effizienz der Methode zeigt sich aber in den Ergebnissen der damit behandelten numerischen Beispiele. Unter diesem Gesichtspunkt scheinen auch die Vereinfachungen des Konzeptes im Rahmen dieser Arbeit gerechtfertigt.

Der zweite Kernpunkt eines adaptiven Verfahrens ist die Anpassung der Diskretisierung. In der Regel bildet der räumliche Diskretisierungsfehler den dominanten Anteil des gesamten Diskretisierungsfehlers, weshalb sich große Teile der Arbeit mit dem räumlichen Diskretisierungsfehler befassen. Neben der Herleitung geeigneter Fehlerdarstellungen für den räumlichen Diskretisierungsfehler und darauf aufbauender Fehlerindikatoren ist deshalb die praktische Einbindung der Fehlerschätzung in ortsadaptive Verfahren eine zentrale Fragestellung dieser Arbeit. Bisher scheitert die praktische Anwendung der Fehlerschätzung in Zielgrößen und darauf aufbauender Adaptionsverfahren am enormen numerischen Aufwand und Speicherbedarf für die Fehlerschätzung, welche oft den Aufwand für eine Neuberechnung des Problems mit einer feineren Diskretisierung übersteigen. Im Verlauf der Arbeit werden deshalb Vorschläge zur Vereinfachung

chung und Aufwandsreduktion der Fehlerschätzung erarbeitet. Die damit zwangsläufig einhergehenden Einschränkungen, etwa in den zu behandelnden Problemklassen, werden ebenfalls diskutiert. Die räumliche Adaption beschränkt sich in der vorliegenden Arbeit auf die Verfeinerung der räumlichen Diskretisierung auf der Basis der Fehlerschätzung. Dabei erfolgt eine hierarchische Netzverfeinerung mit Übergangselementen.

Im Einzelnen gliedert sich die Arbeit in die folgenden Teilabschnitte:

- In **Kapitel 1** werden die kontinuumsmechanischen Grundlagen sowie die im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Diskretisierungsmethoden bereitgestellt. Für die räumliche Diskretisierung der Bewegungsgleichung werden bilineare Volumenschalen-Elemente verwendet. Die für die Vermeidung von Versteifungseffekten notwendigen Modifikationen der Elementformulierungen werden kurz dargestellt. Die Integration der räumlich diskretisierten Bewegungsgleichungen erfolgt im Rahmen dieser Arbeit ausschließlich mit dem Newmarkverfahren bzw. des äquivalenten kontinuierlichen Galerkinverfahrens.
- **Kapitel 2** befasst sich mit dem räumlichen Diskretisierungsfehler welcher durch die räumliche Semidiskretisierung der Bewegungsgleichung mit finiten Elementen in die Lösung eingebracht wird. Kernpunkt ist die Darstellung des räumlichen Diskretisierungsfehlers in einer beliebigen Zielgröße mit Hilfe der *Dual-Weighted-Residual*-Methode nach BECKER & RANNACHER [13]. Es werden Fehleridentitäten für den Fehler in der Zielgröße für geometrisch lineare und nichtlineare Probleme angegeben.
- In **Kapitel 3** werden aufbauend auf den Fehlerdarstellungen des 2. Kapitels Fehlerschätzer für geometrisch lineare Probleme behandelt. Neben den klassischen Ansätzen, welche die vollständige numerische Auswertung der Fehleridentitäten vorsehen, wird ein stark vereinfachtes Konzept zur Fehlerschätzung vorgestellt. Der vorgeschlagene Fehlerindikator dient anschließend als Basis für die zielorientierte Adaption der räumlichen Diskretisierung. Den Abschluss des Kapitels bildet die Fehlerschätzung und Netzadaption für Zielgrößen der Schwingungsformen.
- Aufbauend auf den Erkenntnissen aus Kapitel 3 werden im **Kapitel 4** Fehlerschätzer und Netzadaptionsstrategien für geometrisch nichtlineare Problemstellungen behandelt.
- **Kapitel 5** behandelt die Schätzung des Fehlers in Folge der Integration der semidiskreten Gleichungen mit Hilfe des Newmarkverfahrens. Auch hier erfolgt die Schätzung des Fehlers in einer beliebigen Zielgröße. Hierbei wird die Äquivalenz des Standard-Newmarkverfahrens mit einem kontinuierlichen Petrov-Galerkinverfahren in der Zeit für die Fehlerdarstellung ausgenutzt.

Kapitel 1

Kontinuumsmechanik und Diskretisierungsmethoden

Im vorliegenden Kapitel werden die Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik im Rahmen einer geometrisch nichtlinearen Theorie dargestellt. Die schwachen Formen der sich ergebenden partiellen Differentialgleichungen werden mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode in semidiskrete Gleichungssysteme überführt. Für die räumliche Diskretisierung werden im Rahmen dieser Arbeit Volumen-Schalenelemente mit bilinearen Verschiebungsansätzen verwendet. Die für Elemente niedriger Ansatzordnung notwendigen Modifikationen zur Vermeidung von Versteifungseffekten werden kurz dargelegt.

Die Integration der semidiskreten Bewegungsgleichung erfolgt mit dem Newmarkverfahren, bzw. äquivalenten kontinuierlichen Galerkinverfahren.

Den Abschluß des Kapitels bildet die Definition des Diskretisierungsfehlers und die Aufspaltung des gesamten Fehlers in die Anteile der einzelnen Diskretisierungsstufen.

1.1 Kontinuumsmechanische Grundlagen

In diesem Abschnitt werden die Grundlagen der Kontinuumsmechanik zur Beschreibung nichtlinearer Deformationsprozesse angegeben. Die Darstellung beschränkt sich dabei auf die wesentlichen Grundlagen, die im weiteren Verlauf der Arbeit benötigt werden. Für eine weitergehende Betrachtung wird an dieser Stelle auf das Fachschrifttum verwiesen. Exemplarisch seien hier die Bücher von HAUPT [48], PARISCH [84], MARSDEN UND HUGHES [69], ANTMAN [3] und ALTENBACH & ALTENBACH [2] genannt.

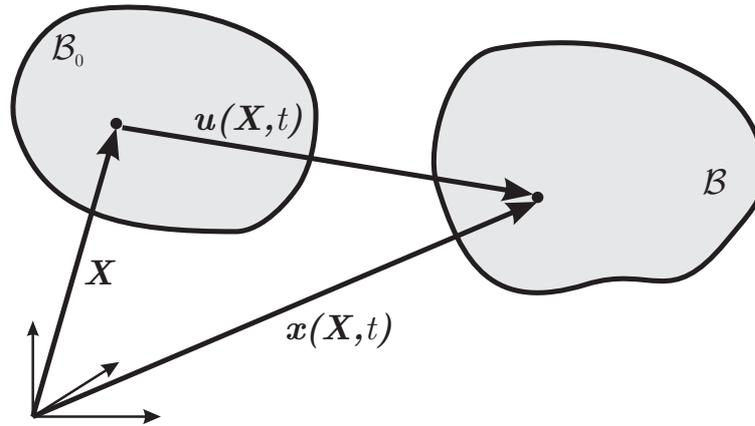


Bild 1.1: Kinematik des Kontinuums

1.1.1 Kinematik und Verzerrung

Die Referenzkonfiguration eines Körpers $\mathcal{B}_0 \subset \mathbb{R}^3$ wird in einer ortsfesten kartesischen Basis beschrieben. Hierbei wird jedem materiellen Punkt des Körpers seine Lage $\mathbf{X} \in \mathcal{B}_0$ in der Referenzkonfiguration zugewiesen. Die Bewegung jedes materiellen Punktes ist dann durch die umkehrbar eindeutige, nichtlineare Abbildung $\varphi : \mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B}$ definiert, die jeden Referenzpunkt \mathbf{X} auf den aktuellen Punkt $\mathbf{x} \in \mathcal{B}$ in der Momentankonfiguration abbildet:

$$\mathbf{x}(\mathbf{X}, t) = \varphi(\mathbf{X}, t) = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}, t). \quad (1.1)$$

Hierin ist $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$ der Verschiebungsvektor.

Da in dieser Abbildungsvorschrift die unabhängigen Variablen die materiellen Koordinaten sind, wird diese Beschreibung auch als materielle bzw. Lagrangesche Darstellung der Bewegung bezeichnet. Entsprechend wird die inverse Abbildung

$$\mathbf{X} = \varphi^{-1}(\mathbf{x}, t) \quad (1.2)$$

als räumliche oder Eulersche Beschreibung bezeichnet.

Der materielle Deformationsgradient

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \text{Grad} \varphi(\mathbf{X}, t) \quad (1.3)$$

bildet ein Linienelement $d\mathbf{X}$ der Referenzkonfiguration gemäß

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X} \quad (1.4)$$

auf ein Linienelement $d\mathbf{x}$ der Momentankonfiguration ab. \mathbf{F} ist ein Zweifeldtensor zweiter Stufe mit einer im allgemeinen unsymmetrischen Koordinatenmatrix. Notwendige und hinreichende Bedingung für die Umkehrbarkeit der Abbildung ist

$$\det(\mathbf{F}) > 0. \quad (1.5)$$

Die Betrachtung der Längendifferenz $d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}$ der Linienelemente $d\mathbf{x}$ und $d\mathbf{X}$ führt auf den Green-Lagrange Verzerrungstensor

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}) \quad (1.6)$$

Differentialgeometrie

Bisher wurde kein spezielles Koordinatensystem verwendet. Für die Formulierung der Finite-Elemente-Methode bietet sich jedoch die Darstellung der Zustandsgrößen in konvektiven Koordinaten an, da die Verschiebungen auf Elementebene Funktionen konvektiver Koordinaten sind. Neben den kartesischen Koordinaten, welche von den ortho-normierten Basisvektoren $\mathbf{e}^i = \mathbf{e}_i$ aufgespannt werden, werden noch die krummlinigen, konvektiven Koordinatenlinien ξ_i eingeführt, welche fest mit dem Körper verbunden sind. Dies führt auf eine Parameterdarstellung $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\xi^i)$ bzw. $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi^i)$.

Für die Differentiale der Ortsvektoren in der Referenz- bzw. Momentankonfiguration gilt

$$\begin{aligned} d\mathbf{X} &= \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi^i} d\xi^i = \mathbf{G}_i d\xi^i \\ d\mathbf{x} &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^i} d\xi^i = \mathbf{g}_i d\xi^i \end{aligned} \quad (1.7)$$

mit den kovarianten Basisvektoren \mathbf{G}_i und \mathbf{g}_i . Die kovarianten Basisvektoren stellen somit die Tangentenvektoren an die Koordinatenlinien in der entsprechenden Konfiguration dar. Da zwischen den ko- und kontravarianten konvektiven Basisvektoren die Beziehung

$$\mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}^j = \delta_i^j \quad (1.8)$$

gilt, lassen sich die kontravarianten Basisvektoren mit Hilfe der kontravarianten Metrikkoeffizienten

$$G_{ij} = \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j \quad (1.9)$$

und der kontravarianten Metrik

$$[G^{ij}] = [G_{ij}]^{-1} \quad (1.10)$$

aus der Beziehung

$$\mathbf{G}^i = G^{ij} \mathbf{G}_j \quad (1.11)$$

berechnen. Basierend auf den konvektiven Basisvektoren ergeben sich die folgenden Darstellungen für den Deformationsgradienten:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^i, \quad \mathbf{F}^T = \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{g}_i \\ \mathbf{F}^{-1} &= \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{g}^i, \quad \mathbf{F}^{-T} = \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{G}_i \end{aligned}$$

Zweckmäßig für die Umsetzung in einem Finite-Elemente-Programm ist die Darstellung des Green-Lagrange Verzerrungstensors in der kontravarianten konvektiven Basis:

$$\mathbf{E} = E_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j = \frac{1}{2}(g_{ij} - G_{ij}) \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \quad (1.12)$$

1.1.2 Bilanzgleichungen der Kontinuumsmechanik

Massenbilanz

Die Masse m eines Körpers ist das Volumenintegral über die Massendichte ρ . Massenerhalt bedeutet nun, dass die Masse unabhängig von der Konfiguration und vom Betrachter sein muss:

$$m = \int_{\mathcal{B}} \rho \, dv = \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \, dV \quad (1.13)$$

Zusammen mit der Transformationsvorschrift für Volumenelemente

$$dv = \det \mathbf{F} \, dV \quad (1.14)$$

ergibt sich der Zusammenhang der Dichten in der Momentan- und in der Ausgangskonfiguration

$$\rho_0 = \det \mathbf{F} \, \rho. \quad (1.15)$$

Impulsbilanz

Die Impulsbilanz besagt, dass die Summe aller am Kontinuum angreifenden Kräfte gleich der zeitlichen Änderung des Impulses sein muss. Der Impuls ist dabei definiert als

$$\mathbf{i} = \int_{\mathcal{B}} \rho \dot{\mathbf{x}} \, dv. \quad (1.16)$$

Die eingepägten Kräfte setzen sich zusammen aus den Oberflächenkräften und den Volumenkräften

$$\mathbf{f} = \int_{\mathcal{B}} \rho \mathbf{b} \, dv + \int_{\partial \mathcal{B}} \mathbf{t} \, da. \quad (1.17)$$

Hierbei bezeichnet \mathbf{b} die eingepägten Volumenkräfte und \mathbf{t} den auf die Flächeneinheit da in der Momentankonfiguration bezogenen Spannungsvektor, der über das Cauchy-Theorem $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$ mit dem Cauchy-Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ und dem Normalenvektor \mathbf{n} verknüpft ist. Die Impulsbilanz lautet

$$\int_{\mathcal{B}} \rho \mathbf{b} \, dv + \int_{\partial \mathcal{B}} \mathbf{t} \, da = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} \rho \dot{\mathbf{x}} \, dv. \quad (1.18)$$

Da die Dichte ρ eine Funktion der Zeit ist, wird Gleichung (1.18) zunächst in die Ausgangskonfiguration transformiert. Nach der Ermittlung der Zeitableitung und der Rücktransformation auf die Momentankonfiguration ergibt sich unter Verwendung des Gaußschen Integralsatzes die Impulsbilanz in der Momentankonfiguration

$$\int_{\mathcal{B}} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} - \rho \ddot{\mathbf{u}} \, dv = 0. \quad (1.19)$$

Da (1.19) für jedes beliebige Volumen erfüllt sein muß, folgt hieraus die lokale Form der Impulsbilanz

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} - \rho \ddot{\mathbf{u}} = 0 \quad \text{auf } \mathcal{B}. \quad (1.20)$$

Gleichung (1.20) wird auch als 1. Cauchysches Bewegungsgesetz bezeichnet und beschreibt das Gleichgewicht in der Momentankonfiguration.

Die Impulsbilanz läßt sich analog dazu auch in der Referenzkonfiguration formulieren. Dies führt auf die Gleichgewichtsbedingung

$$\operatorname{Div} \mathbf{P} + \rho_0 \mathbf{b} - \rho_0 \ddot{\mathbf{u}} = 0 \quad \text{auf } \mathcal{B}_0 \quad (1.21)$$

mit dem unsymmetrischen 1. Piola-Kirchhoff Spannungstensor

$$\mathbf{P} = \det \mathbf{F} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}. \quad (1.22)$$

Drallbilanz

Die Drallbilanz besagt, dass die Zeitableitung des auf den raumfesten Punkt \mathbf{X}_0 bezogenen Dralls

$$\mathbf{L} = \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{x} - \mathbf{X}_0) \times \rho \dot{\mathbf{x}} \, dv \quad (1.23)$$

dem aus den eingepprägten Kräften resultierenden Moment

$$\mathbf{m} = \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{x} - \mathbf{X}_0) \times \rho \mathbf{b} \, dv + \int_{\partial \mathcal{B}} (\mathbf{x} - \mathbf{X}_0) \times \mathbf{t} \, da \quad (1.24)$$

entspricht, d.h.

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{m}. \quad (1.25)$$

Aus der Drallbilanz folgt die Symmetrie des Cauchy Spannungstensors

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \quad (1.26)$$

sowie die Symmetrie des Tensorproduktes $\mathbf{F} \mathbf{P}^T = \mathbf{F}^T \mathbf{P}$.

1.1.3 Spannungsmaße und Stoffgesetz

Im Abschnitt 1.1.2 wurde bereits der Cauchy Spannungstensor und der unsymmetrische 1. Piola-Kirchhoff Spannungstensor eingeführt. Das zum Green-Lagrange Verzerrungstensor energetisch konjugierte Spannungsmaß ist der 2. Piola-Kirchhoff Spannungstensor, der sich mit Hilfe der Transformation

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P} = \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \quad (1.27)$$

aus dem 1. Piola-Kirchhoff Spannungstensor \mathbf{P} beziehungsweise aus dem Cauchy Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ bestimmen läßt. Im Gegensatz zu \mathbf{P} ist \mathbf{S} symmetrisch.

Das Stoffgesetz stellt den konstitutiven Zusammenhang zwischen den Verzerrungen und den Spannungen her. Für ein Cauchy-elastisches Material ist der Spannungszustand allein vom momentanen Deformationszustand abhängig, d.h.

$$\mathbf{S} = f(\mathbf{E}). \quad (1.28)$$

Ist darüber hinaus auch die Wegunabhängigkeit der durch die Spannungen verrichteten Arbeit gegeben, so lässt sich der Zusammenhang zwischen den Spannungen und den Verzerrungen mit

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}} \quad (1.29)$$

aus der Formänderungsenergiefunktion $W(\mathbf{E})$ ableiten. Ein elastisches Material, für das eine Formänderungsenergiefunktion angegeben werden kann, heißt hyperelastisches bzw. Green-elastisches Material. Durch nochmaliges Ableiten von (1.29) erhält man den vierstufigen Materialtensor

$$\mathbb{C} = \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{E} \partial \mathbf{E}}. \quad (1.30)$$

Im linear-elastischen Fall sind die Komponenten von \mathbb{C} konstant. Im Fall der nichtlinearen Elastizität bzw. der Elastoplastizität entspricht \mathbb{C} einem tangentialen Stofftensor, der innerhalb der nichtlinearen Lösungsprozedur für jeden Iterationsschritt neu aufgestellt werden muss [28, 45].

Für das im Rahmen dieser Arbeit ausschließlich verwendete isotrope, linear-elastische St.-Venant-Kirchhoff-Material ist

$$W(\mathbf{E}) = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbb{C} : \mathbf{E} \quad (1.31)$$

mit dem vierstufigen Materialtensor

$$\mathbb{C} = \lambda \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \mathbb{I}. \quad (1.32)$$

Hierin sind $\mathbf{1}$ und \mathbb{I} die Identitätstensoren zweiter bzw. vierter Stufe.

Die beiden Lamé-Konstanten λ und μ sind über

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.33)$$

mit dem Elastizitätsmodul E und der Querkontraktionszahl ν verknüpft. Der zweite Piola-Kirchhoff Spannungstensor berechnet sich dann mit:

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} = \mathbb{C} : \mathbf{E} \quad (1.34)$$

1.1.4 Grundgleichungen der linearen Elastodynamik

Ein Teil dieser Arbeit befasst sich mit adaptiven Methoden für materiell und geometrisch lineare Probleme der Dynamik. Deshalb werden nachfolgend kurz die Grundgleichungen der linearen Elastodynamik als Sonderfall bereitgestellt.

Die Grundgleichungen der linearen Elastodynamik folgen direkt aus der Linearisierung der Kinematik in Form des Green-Lagrange-Verzerrungstensors \mathbf{E} im Ursprung, d.h. an der Stelle $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{X}$. Allgemeinen lautet die Linearisierung des Green-Lagrange-Verzerrungstensors an der Stelle $\bar{\boldsymbol{\varphi}}$:

$$L[\mathbf{E}]_{\boldsymbol{\varphi}=\bar{\boldsymbol{\varphi}}} = \mathbf{E}(\bar{\boldsymbol{\varphi}}) + \Delta \mathbf{E}(\bar{\boldsymbol{\varphi}}) \quad (1.35)$$

mit der Richtungsableitung $\Delta \mathbf{E}(\bar{\boldsymbol{\varphi}})$:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{E}(\bar{\boldsymbol{\varphi}}) &= \frac{d}{d\epsilon} \left[\frac{1}{2} \mathbf{F}^T(\bar{\boldsymbol{\varphi}} + \epsilon \mathbf{u}) \mathbf{F}(\bar{\boldsymbol{\varphi}} + \epsilon \mathbf{u}) - \mathbf{1} \right]_{\epsilon=0} \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T(\bar{\boldsymbol{\varphi}}) \text{Grad} \mathbf{u} + \text{Grad}^T \mathbf{u} \mathbf{F}(\bar{\boldsymbol{\varphi}})) \end{aligned} \quad (1.36)$$

Die Auswertung von Gleichung (1.35) in der unverformten Ausgangskonfiguration $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{X}$ liefert dann unter Berücksichtigung von (1.36) den klassischen linearen Verzerrungstensor:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = L[\mathbf{E}]_{\boldsymbol{\varphi}=\mathbf{X}} = \frac{1}{2} (\text{Grad} \mathbf{u} + \text{Grad}^T \mathbf{u}) \quad (1.37)$$

Aus der Auswertung im unverformten Ausgangszustand folgt direkt die Übereinstimmung zwischen der materiellen und der räumlichen Form der Impulsbilanz. Folglich muss im geometrisch linearen Fall auch nicht mehr zwischen den Lagrangekoordinaten \boldsymbol{x} und den materiellen Koordinaten \mathbf{X} unterschieden werden. Es ergibt sich somit die Impulsbilanz in der Form:

$$\text{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho_0 \mathbf{b} - \rho_0 \ddot{\mathbf{u}} = 0 \quad \text{auf } \mathcal{B}_0. \quad (1.38)$$

Weiterhin wird die Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes in der Form

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1.39)$$

vorausgesetzt.

1.2 Räumlich schwache Form des Gleichgewichts

Die in Kapitel 1.1 angegebenen Gleichungen lassen sich zusammen mit den Randbedingungen in der sogenannten starken Form des Anfangsrandwertproblems zusammenfassend wie folgt angeben:

$$\begin{array}{llll}
 \text{Gleichgewicht:} & \text{Div} \mathbf{P} + \rho_0 \mathbf{b} - \rho_0 \ddot{\mathbf{u}} = 0 & \text{auf } \mathcal{B}_0 & 0 \leq t \leq T \\
 \text{Dirichlet-Randbedingungen:} & \mathbf{u} = \mathbf{u}_D & \text{auf } \partial \mathcal{B}_D & 0 \leq t \leq T \\
 \text{Neumann-Randbedingungen:} & \mathbf{P} \mathbf{N} = \mathbf{t}_0 & \text{auf } \partial \mathcal{B}_N & 0 \leq t \leq T \\
 \text{Anfangsbedingungen:} & \dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}_0 \text{ und } \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 & \text{auf } \mathcal{B}_0 & t = 0 \\
 \text{Kinematik:} & \mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) & \text{auf } \mathcal{B}_0 & 0 \leq t \leq T \\
 \text{Stoffgesetz:} & \mathbf{S} = \mathbb{C} : \mathbf{E} & \text{auf } \mathcal{B}_0 & 0 \leq t \leq T
 \end{array}$$

Die analytische Lösung dieser Feldgleichungen ist nur für sehr einfache Randwertprobleme bekannt. Allgemeine Problemstellungen erfordern den Übergang zu numerischen Näherungsverfahren wie der hier beschriebenen räumlichen Diskretisierung mit der Methode der finiten Elemente (FEM).

Im Folgenden wird ein grober Abriss der Grundlagen der räumlichen Diskretisierung mit der Finite-Elemente-Methode (FEM) dargestellt. Für weitergehende Darstellungen wird an dieser Stelle auf das sehr umfangreiche Fachschrifttum, wie z. B. BATHE [10], BELYTSCHKO, LIU & MORAN [15], BRAESS [17], CRISFIELD [24, 25], HUGHES [57], SZABO & BABUSKA [113], WRIGGERS [116] und ZIENKIEWICZ & TAYLOR [120], verwiesen.

Anstelle der punktwisen Gültigkeit der Differentialgleichung (1.21) liegt der Finite-Elemente-Methode eine unter gewissen Zusatzbedingungen äquivalente Variationsgleichung zugrunde. Die dabei auftretenden, durch Integrale definierten Funktionale ermöglichen zudem eine Abschwächung der Glattheitsanforderungen an die Lösung $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$. Aus diesem Grund werden diese Integraldarstellungen auch als schwache Form des Gleichgewichts bezeichnet.

Eine universelle Methode zur Überführung der starken Form des Gleichgewichts in die schwache Form ist das Galerkinverfahren. Hierfür wird zunächst der Raum V der Ansatzfunktionen definiert, in welchem die Lösung $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ gesucht wird:

$$V = \{\mathbf{u}(\mathbf{X}) \in [H^1(\mathcal{B}_0)]^3 : \mathbf{u}(\partial \mathcal{B}_D) = \mathbf{u}_D\} \quad (1.40)$$

Durch die Wahl von V sind offensichtlich die Glattheitsanforderungen an die Lösung $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$ gegenüber (1.21) herabgesetzt.

Ausgehend vom 1. Cauchyschen Bewegungsgesetz (1.21) in der Ausgangskonfiguration ergibt sich die schwache Form des Gleichgewichts für einen beliebigen aber festen Zeitpunkt $0 \leq t \leq T$ durch Multiplikation mit einer vektorwertigen Testfunktion $\mathbf{w}(\mathbf{X}) \in W$ und anschließender Integration über das Gebiet \mathcal{B}_0 . Die Wichtungsfunktionen müssen an den Dirichlet-Rändern homogene Randbedingungen erfüllen:

$$W = \{\mathbf{w}(\mathbf{X}) \in [H^1(\mathcal{B}_0)]^3 : \mathbf{w}(\partial \mathcal{B}_D) = \mathbf{0}\} \quad (1.41)$$

Da die Dirichlet-Ränder den Raum der zulässigen Testfunktionen beschränken, werden sie auch als wesentliche Randbedingungen und die Neumann-Randbedingungen als natürliche Randbedingungen bezeichnet.

Für homogene Dirichlet-Randbedingungen, d.h. für den Fall $\mathbf{u}_D = \mathbf{0}$ gilt $W = V$. Ansatz- und Testraum stimmen also überein. Probleme mit inhomogenen Dirichlet-Randbedingungen lassen sich über eine Zerlegung der Lösung in einen homogenen Anteil $\mathbf{u}_{hom} \in W$ und einen inhomogenen Anteil \mathbf{u}_{in} auf äquivalente homogene Probleme zurückführen. Für den Rest dieser Arbeit werden deshalb ohne Einschränkung der Allgemeinheit ausschließlich Probleme mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen betrachtet.

Die Multiplikation der Bewegungsgleichung (1.21) mit einer beliebigen Testfunktion $\mathbf{w}(\mathbf{X}) \in W$ und Integration über das gesamte Gebiet führt auf die Integralform:

$$\int_{\mathcal{B}_0} (\text{Div} \mathbf{P} + \rho_0(\mathbf{b} - \ddot{\mathbf{u}})) \cdot \mathbf{w} \, dV = 0 \quad 0 \leq t \leq T \quad (1.42)$$

Die partielle Integration des ersten Terms liefert dann

$$\int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{P} : \text{Grad} \mathbf{w} \, dV = \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0(\mathbf{b} - \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{w} \, dV + \int_{\partial \mathcal{B}_N} \mathbf{t} \cdot \mathbf{w} \, dA \quad 0 \leq t \leq T. \quad (1.43)$$

Mit $\mathbf{P} = \mathbf{F}\mathbf{S}$ läßt sich diese Gleichung umformen zu

$$\int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E}(\mathbf{w}) \, dV + \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{w} \, dV = \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \mathbf{b} \cdot \mathbf{w} \, dV + \int_{\partial \mathcal{B}_N} \mathbf{t} \cdot \mathbf{w} \, dA \quad 0 \leq t \leq T. \quad (1.44)$$

Hierin ist $\delta \mathbf{E}(\mathbf{w}) = \mathbf{F}^T(\mathbf{u}) \text{Grad} \mathbf{w}$ die Variation des Green-Lagrange Verzerrungstensors und kann als Gateaux-Ableitung von \mathbf{E} an der Stelle \mathbf{u} aufgefaßt werden [40, 46]. $\delta \mathbf{E}(\mathbf{w})$ ist somit linear in \mathbf{w} .

Das Galerkinverfahren ist eng mit bekannten Variationsprinzipien der Mechanik verknüpft. Dies wird deutlich, wenn man der Testfunktion $\mathbf{w}(\mathbf{X})$ eine physikalische Größe zuordnet. Wird die Testfunktion $\mathbf{w}(\mathbf{X})$ als virtuelle, also gedachte, Verschiebung interpretiert, so geht Gleichung (1.44) in das bekannte *Prinzip der virtuellen Verschiebungen* bzw. das *Prinzip der virtuellen Arbeit* über. Alternativ kann in der Dynamik die Testfunktion $\mathbf{w}(\mathbf{X})$ auch als *virtuelle Geschwindigkeit* aufgefasst werden. Gleichung (1.44) entspricht dann dem *Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten*. Die Unterscheidung zwischen diesen beiden Fällen ist von wesentlicher Bedeutung bei der Herleitung von Reziprozitätstheoremen in der Dynamik.

Für die Behandlung des räumlichen Diskretisierungsfehlers und die Herleitung geeigneter Fehlerschätzer ist eine abstraktere kompakte Darstellung der räumlich schwachen Formulierung (1.43) bzw. (1.44) hilfreich, wie sie insbesondere in den mathematischen Abhandlungen der Methode der finiten Elemente verwendet wird, z. B. in BABUSKA

& STROUBOULIS [4], BRAESS [17], GROSSMANN & ROOS [41] oder SZABO & BABUSKA [113]. In der kompakten Schreibweise lässt sich Gleichung (1.44) darstellen als

$$\rho_0(\ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{w})_{\mathcal{B}_0} + a(\mathbf{u}; \mathbf{w}) = \mathcal{F}_u(\mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{w} \in W \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.45)$$

mit dem L_2 -Produkt $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{B}_0} : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$

$$(\ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{w})_{\mathcal{B}_0} = \int_{\mathcal{B}_0} \ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{w} \, dV, \quad (1.46)$$

der semilinearen Form $a(\cdot; \cdot) : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$

$$a(\mathbf{u}; \mathbf{w}) = \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{P} : \text{Grad} \mathbf{w} \, dV = \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E}(\mathbf{w}) \, dV \quad (1.47)$$

und dem Belastungsfunktional $\mathcal{F}_u(\cdot) : W \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}_u(\mathbf{w}) = \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \mathbf{b} \cdot \mathbf{w} \, dV + \int_{\partial \mathcal{B}_N} \mathbf{t} \cdot \mathbf{w} \, dA. \quad (1.48)$$

Die Notation ist hier so gewählt, dass die semilineare Form $a(\cdot; \cdot)$ linear in den Größen hinter dem Semikolon ist.

Die Gleichungen (1.43) – (1.45) stellen die räumliche Variationsformulierung der 1. Cauchy Bewegungsgleichung für den dämpfungsfreien Fall dar. Die Dämpfungseffekte realer Strukturen sind vielfältig und oft nur schwer quantifizierbar. Aus diesem Grund werden die Dämpfungseigenschaften in der Regel zusammengefasst und durch die Annahme einer geschwindigkeitsproportionalen (viskosen) Dämpfung beschrieben. Im Rahmen dieser Arbeit wird die Dämpfung mit Hilfe der sogenannten Rayleighdämpfung erfasst, die sich aus einem massen- und steifigkeitsproportionalen Anteil zusammensetzt. Zusätzlich soll hier angenommen werden, dass die Dämpfungseigenschaften konstant, d.h. unabhängig von den Verschiebungen sind. Dieser Ansatz findet sich beispielsweise auch bei WRIGGERS [116]

Dies führt auf die folgende Variationsformulierung für die Bewegungsgleichung mit konstanter Rayleighdämpfung:

$$\rho_0(\ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{w})_{\mathcal{B}_0} + c_m \rho_0(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{w})_{\mathcal{B}_0} + c_k a_T(\mathbf{0}; \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{w}) + a(\mathbf{u}; \mathbf{w}) = \mathcal{F}_u(\mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{w} \in W \quad 0 \leq t \leq T \quad (1.49)$$

mit den Rayleighkoeffizienten c_m und c_k und der Richtungsableitung im Ursprung

$$a_T(\mathbf{0}; \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{w}) = \frac{d}{d\epsilon} a(\mathbf{0} + \epsilon \dot{\mathbf{u}}; \mathbf{w})|_{\epsilon=0}, \quad (1.50)$$

welche die tangentielle Steifigkeit im unverformten Ausgangszustand beschreibt. Zur Wahl der beiden Dämpfungsparameter c_m und c_k wird z. B. auf CLOUGH & PENZIEN [23] oder MAGNUS & POPP [68] verwiesen.

1.3 Räumliche Diskretisierung mit finiten Elementen

Die im vorangegangenen Abschnitt dargestellte räumliche Variationsformulierung bildet die Grundlage der nachfolgend beschriebenen Diskretisierungsmethoden. Hier wird die sogenannte Semidiskretisierung behandelt, bei der zunächst die Diskretisierung der Raumdimension mit finiten Elementen erfolgt und anschließend die zeitliche Diskretisierung. Diese Methode ist auch unter dem Namen vertikale Linienmethode bzw. „method of lines“ bekannt.

Zunächst wird das Gebiet \mathcal{B}_0 in n_{el} einfache nicht überlappende Teilgebiete, den finiten Elementen unterteilt:

$$\mathcal{B}_0 \approx \mathcal{B}_{0,h} = \bigcup_{j=1}^{n_{el}} \mathcal{B}_{0,h}^j \quad \text{mit} \quad \mathcal{B}_{0,h}^j \cap \mathcal{B}_{0,h}^i = \emptyset \text{ für } i \neq j \quad (1.51)$$

Im allgemeinen Fall, z.B. bei krummlinigen Rändern, wird ein Fehler bei der Geometrieapproximation eingeführt. Dieser Fehler wird im Rahmen dieser Arbeit vernachlässigt, d.h. es wird angenommen, dass $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}_{0,h}$ ist.

Bei der Berechnung mittels der Methode der finiten Elemente werden nun diskrete Ansatzfunktionen für die zu approximierenden Feldgrößen und die Testfunktionen eingeführt, d.h. es erfolgt eine Einschränkung auf endlich dimensionale Ansatz- und Testräume $\mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h \in W^h \subset W$.

In der diskreten Form der Variationsformulierung wird für jeden Zeitpunkt t eine Funktion $\mathbf{u}_h \in W^h$ gesucht, für die gilt:

$$\rho_0(\ddot{\mathbf{u}}_h, \mathbf{w}_h)_{\mathcal{B}_0} + c_m \rho_0(\dot{\mathbf{u}}_h, \mathbf{w}_h)_{\mathcal{B}_0} + c_k a_T(\mathbf{0}; \dot{\mathbf{u}}_h, \mathbf{w}_h) + a(\mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h) = \mathcal{F}_u(\mathbf{w}_h) \quad (1.52)$$

$$\forall \mathbf{w}_h \in W^h \quad 0 \leq t \leq T$$

Die Diskretisierung erfolgt hier mit Hilfe des isoparametrischen Konzepts, d.h. für die Interpolation der Orte im Inneren eines finiten Elementes werden dieselben Ansatzfunktionen wie für die Interpolation der Verschiebungen innerhalb des Elementes verwendet:

$$\mathbf{X}_h^e = \sum_{i=1}^{I_e} N_i(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{X}_i \quad \text{und} \quad \mathbf{u}_h^e = \sum_{i=1}^{I_e} N_i(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{d}_i \quad (1.53)$$

Hierin sind \mathbf{X}_i die Ortsvektoren der Elementknoten in der Referenzkonfiguration und \mathbf{d}_i die entsprechenden Verschiebungsvektoren. Derselbe Ansatz wird auch für die räumliche Wichtungsfunktion w_h im Element eingeführt:

$$\mathbf{w}_h^e = \sum_{i=1}^{I_e} N_i(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{w}_i \quad (1.54)$$

Nach Einsetzen der Gleichungen (1.53) und (1.54) in (1.52) ergibt sich nach der Assemblierung aller Elemente zusammen mit dem Fundamentallemma der Variationsrechnung die folgende Matrixdarstellung

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{R}(\mathbf{d}, t) = \mathbf{F}(t) \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.55)$$

mit der konstanten Dämpfungsmatrix

$$\mathbf{C} = c_m \mathbf{M} + c_k \mathbf{K}_{T,0}. \quad (1.56)$$

$\mathbf{K}_{T,0}$ ist hierin die tangentielle Steifigkeitsmatrix im unverformten Zustand:

$$\mathbf{K}_{T,0} = \left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{d}} \right|_{\mathbf{u}=\mathbf{0}} \quad (1.57)$$

1.3.1 Diskretisierung mit Volumen-Schalenelementen

Für die numerischen Beispiele im Rahmen dieser Arbeit werden Volumen-Schalenelemente nach dem sogenannten Solid-Shell-Konzept mit bilinearen Ansatzfunktionen in der Schalenebene und linearen Verschiebungsansätzen in Dickenrichtung verwendet, siehe HAUPTMANN ET AL. [49, 50] und HARNAU [45]. Die Vorteile einer dreidimensionalen Schalenformulierung liegen unter anderem darin, dass allgemeine Materialgesetze ohne Kondensation zur Erfüllung der kinematischen Annahmen der Schalenformulierung implementiert werden können. Des Weiteren eignen sich Volumen-Schalenelemente hervorragend zur Simulation von Laminaten, da sie einerseits in einfacher Weise übereinander geschichtet werden können und andererseits die Berechnung der transversalen Normalspannungen ermöglichen, die für die Beurteilung von Delaminationen notwendig ist. Die Möglichkeit, im Rahmen einer Modelladaptivität Volumen-Schalenelemente ohne spezielle Übergangselemente mit Kontinuumelementen zu koppeln, dokumentiert zusätzlich die hohe Flexibilität dieser Schalenformulierung.

Das Solid-Shell-Konzept wird hier nur insoweit erläutert, wie es zum Verständnis der nachfolgenden Ausführungen notwendig ist. Für weitergehende Ausführungen wird auf das sehr umfangreiche Schrifttum, wie z. B. die Arbeiten von HAUPTMANN [49], HAUPTMANN & SCHWEIZERHOF [50] und HARNAU [45] verwiesen.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird jeweils nur ein Element in Dickenrichtung betrachtet, folglich beschränken sich auch die ortsadaptiven Verfahren in den folgenden Kapiteln auf eine Netzverfeinerung in der Schalenebene. Aus diesem Grund erfolgt die Beschreibung der Geometrie und der Kinematik der Volumenschale zweckmäßiger Weise mit Bezug auf die Schalenmittelfläche.

Dem Solid-Shell-Konzept liegt die Annahme des Geradebleibens der Normalen zur Tangentialebene der Schalenmittelfläche bei der Verformung zugrunde. Der Ortsvektor eines beliebigen Punktes der Schale in der Referenzkonfiguration lässt sich mit Hilfe des entsprechenden Ortsvektors $\mathbf{X}_M(\xi, \eta)$ der Schalenmittelfläche und des sogenannten

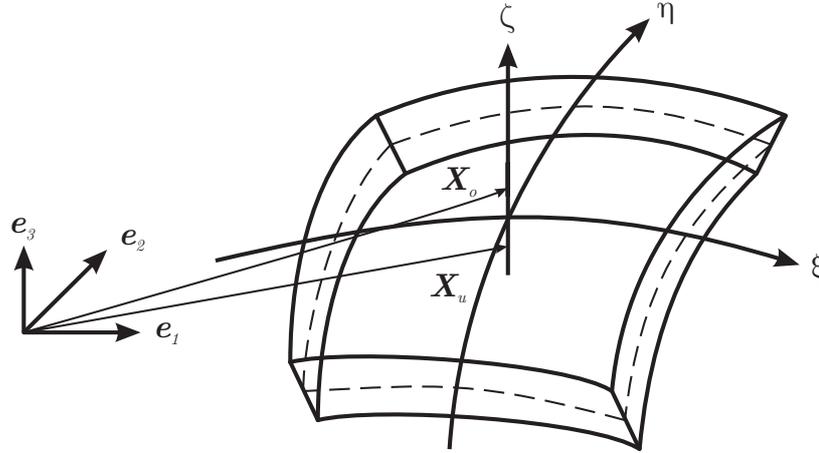


Bild 1.2: Geometrie der Volumenschale

Schalendirektors $\mathbf{D}(\xi, \eta)$ in der Referenzkonfiguration angeben:

$$\mathbf{X}(\xi, \eta, \zeta) = \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{X}_o(\xi, \eta) + \mathbf{X}_u(\xi, \eta))}_{\mathbf{X}_M(\xi, \eta)} + \underbrace{\frac{1}{2}\zeta(\mathbf{X}_o(\xi, \eta) - \mathbf{X}_u(\xi, \eta))}_{\frac{1}{2}\zeta\mathbf{D}(\xi, \eta)} \quad (1.58)$$

Analog gilt für die Momentankonfiguration mit dem Schalendirektor $\mathbf{d}(\xi, \eta)$

$$\mathbf{x}(\xi, \eta, \zeta) = \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{x}_o(\xi, \eta) + \mathbf{x}_u(\xi, \eta))}_{\mathbf{x}_M(\xi, \eta)} + \underbrace{\frac{1}{2}\zeta(\mathbf{x}_o(\xi, \eta) - \mathbf{x}_u(\xi, \eta))}_{\frac{1}{2}\zeta\mathbf{d}(\xi, \eta)}. \quad (1.59)$$

Die Verschiebungen ergeben sich somit aus der linearen Interpolation der Verschiebungen der Schalenober- und -unterseite:

$$\mathbf{u}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2}(1 + \zeta)\mathbf{u}_o(\xi, \eta) + \frac{1}{2}(1 - \zeta)\mathbf{u}_u(\xi, \eta) \quad (1.60)$$

Die Schalendirektoren $\mathbf{D}(\xi, \eta)$ und $\mathbf{d}(\xi, \eta)$ stehen in jedem Punkt der Schalenebene senkrecht auf der unverformten bzw. verformten Schalenfläche. Aus den Gleichungen (1.58) und (1.59) folgt weiterhin, dass die Schalendirektoren jeweils kollinear zu den kovarianten Basisvektoren $\mathbf{G}_3 = \partial\mathbf{X}/\partial\zeta$ bzw. $\mathbf{g}_3 = \partial\mathbf{x}/\partial\zeta$ sind.

Es sei angemerkt, dass bisher nur Annahmen bezüglich des Verschiebungsverlaufs in Schalendickenrichtung gemacht wurden, d.h. es wurden Modellannahmen für das gewählte Schalenmodell gemacht. Diese Annahmen sind zunächst einmal unabhängig von einer räumlichen Diskretisierung in der Schalenebene.

Die Diskretisierung in der Schalenebene erfolgt nun mit dem isoparametrischen Konzept unter Verwendung der bilinearen Lagrangepolynome:

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_i\xi)(1 + \eta_i\eta) \quad i = 1, \dots, 4 \quad (1.61)$$

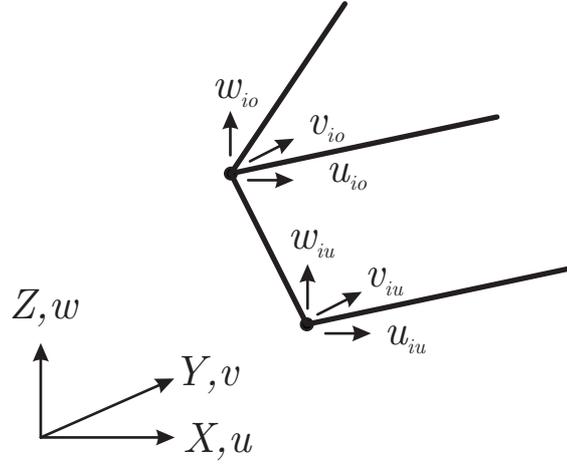


Bild 1.3: Knotenverschiebungsfreiheitsgrade bei Volumen-Schalenelementen

Für die Geometrieinterpolation in der unverformten Referenzkonfiguration ergibt sich in jedem Element der Ansatz

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(\xi, \eta, \zeta)_{el} &= \sum_{i=1}^4 \left(\frac{1}{2} N_i(\xi, \eta) ((1 + \zeta) \mathbf{X}_{io} + (1 - \zeta) \mathbf{X}_{iu}) \right) \\ &= \sum_{i=1}^4 \left(\frac{1}{2} N_i(\xi, \eta) \Theta(\zeta) \mathbf{X}_i \right), \end{aligned} \quad (1.62)$$

mit dem Vektor der Knotenkoordinaten der Ober- und Unterseite:

$$\mathbf{X}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{io} \\ \mathbf{X}_{iu} \end{bmatrix} \quad (1.63)$$

und der Matrix $\Theta(\zeta)$ der Dickeninterpolation

$$\Theta(\zeta) = \begin{bmatrix} (1 + \zeta) & 0 & 0 & (1 - \zeta) & 0 & 0 \\ 0 & (1 + \zeta) & 0 & 0 & (1 - \zeta) & 0 \\ 0 & 0 & (1 + \zeta) & 0 & 0 & (1 - \zeta) \end{bmatrix}. \quad (1.64)$$

Die entsprechende Verschiebungsinterpolation lautet dann:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\xi, \eta, \zeta)_{el} &= \sum_{i=1}^4 \left(\frac{1}{2} N_i(\xi, \eta) ((1 + \zeta) \mathbf{d}_{io} + (1 - \zeta) \mathbf{d}_{iu}) \right) \\ &= \sum_{i=1}^4 \left(\frac{1}{2} N_i(\xi, \eta) \Theta(\zeta) \mathbf{d}_i \right) \end{aligned} \quad (1.65)$$

Der Vektor \mathbf{d}_i enthält die Knotenverschiebungen des Elementes auf der Schalenober- und -unterseite in den globalen kartesischen Koordinaten

$$\mathbf{d}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{io} \\ \mathbf{d}_{iu} \end{bmatrix} = [u_{io} \ v_{io} \ w_{io} \ u_{iu} \ v_{iu} \ w_{iu}]^T. \quad (1.66)$$

1.3.2 Modifikationen zur Beseitigung von Versteifungseffekten

Verschiebungsformulierte finite Elemente mit niedriger Ansatzordnung weisen in der Regel ein zu steifes Verformungsverhalten (*Locking*) auf. Ein Versteifungsphänomen ist generell durch die Abhängigkeit der Lösung von einem kritischen Parameter gekennzeichnet, vgl. KOSCHNICK [62]. Dabei wird je nach Art des kritischen Parameters zwischen geometrischen und materiellen Versteifungseffekten unterschieden.

Zur Beseitigung bzw. Verminderung der Versteifungen sind verschiedene Modifikationen der Elementformulierungen notwendig. Als variationelle Grundlage dieser Modifikationen dient in der Regel das Hu-Washizu-Prinzip, welches im Folgenden kurz erläutert werden soll.

Das Hu-Washizu-Prinzip

Das Hu-Washizu-Prinzip beruht auf einem Dreifeld-Funktional in dem die Verschiebungen \mathbf{u} , die Verzerrungen \mathbf{E} und die Spannungen \mathbf{S} als unabhängige Felder auftreten. Die Anwendung des Hu-Washizu-Prinzips in der Dynamik findet sich u.a. in den Arbeiten von KUHLE [64], KUHLE & RAMM [65] und MIEHE & SCHRÖDER [72], jeweils mit dem Ziel, finite Elemente mit erweiterten Verzerrungen mit energieerhaltenden Zeitintegrationsalgorithmen einzusetzen.

Für einen beliebigen aber festen Zeitpunkt t lautet das Hu-Washizu-Prinzip:

$$\begin{aligned} \Pi_{HW}(\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{S}) = & \int_{\mathcal{B}_0} W(\mathbf{E}) + \mathbf{S} : (\mathbf{E}(\mathbf{u}) - \mathbf{E}) dV - \\ & \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{b} - \ddot{\mathbf{u}}) \rho_0 dV - \int_{\partial\mathcal{B}_N} \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} dA \rightarrow \text{stat.} \quad 0 \leq t \leq T \end{aligned} \quad (1.67)$$

Hierin bezeichnet $\mathbf{E}(\mathbf{u})$ den mit dem Verschiebungsfeld \mathbf{u} kompatiblen Green-Lagrange-Verzerrungstensor gemäß Gleichung (1.6). Die Trägheitskräfte werden wie eine eingeprägte Volumenkraft behandelt und mit dem Term $\rho_0 \mathbf{u} \ddot{\mathbf{u}}$ berücksichtigt.

Die zugehörige erste Variation lautet:

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{HW}(\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{S}) = & \int_{\mathcal{B}_0} \left(\frac{\partial W(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} - \mathbf{S} \right) : \delta \mathbf{E} dV + \\ & \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E}(\mathbf{u}) - \rho_0 (\mathbf{b} - \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \delta \mathbf{u} dV - \int_{\partial\mathcal{B}_N} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} dA + \\ & \int_{\mathcal{B}_0} \delta \mathbf{S} : (\mathbf{E}(\mathbf{u}) - \mathbf{E}) dV = 0 \quad 0 \leq t \leq T \end{aligned} \quad (1.68)$$

und liefert als Eulergleichungen die Gleichgewichtsbedingungen (1.21), die kinematischen Beziehungen (1.6) und das Stoffgesetz (1.29).

Die Enhanced-Assumed-Strain-Formulierung (EAS)

Eine Modifikation von Elementen mit niedriger Ansatzordnung ist die Methode der erweiterten Verzerrungen, welche im englischen Sprachgebrauch als *Enhanced-Assumed-Strain-Formulierung* (EAS) bezeichnet wird. Die Methode geht auf Arbeiten von SIMO ET AL. [108, 106] zurück.

Grundlage der EAS-Methode ist eine Reparametrisierung des Hu-Washizu-Funktionalis in der Form, dass das Residuum in der kinematischen Beziehung als zusätzliche erweiterte Verzerrungen interpretiert und anstelle der Verzerrungen \mathbf{E} in das Funktional eingeführt wird:

$$\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{E} - \mathbf{E}(\mathbf{u}) \quad (1.69)$$

Daraus ergibt sich folgende Form des Hu-Washizu-Funktionalis:

$$\begin{aligned} \Pi_{HW}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{E}}, \mathbf{S}) = & \int_{\mathcal{B}_0} W(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{E}}) - \mathbf{S} : \tilde{\mathbf{E}} dV + \\ & \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{b} - \ddot{\mathbf{u}}) \rho_0 dV - \int_{\partial \mathcal{B}_N} \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} dA \rightarrow \text{stat.} \quad 0 \leq t \leq T \end{aligned} \quad (1.70)$$

mit der zugehörigen ersten Variation

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{HW}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{E}}, \mathbf{S}) = & \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{S}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{E}}) : \delta \mathbf{E}(\mathbf{u}) - \rho_0 (\mathbf{b} - \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \delta \mathbf{u} dV - \int_{\partial \mathcal{B}_N} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} dA - \\ & \int_{\mathcal{B}_0} \delta \mathbf{S} : \tilde{\mathbf{E}} dV + \\ & \int_{\mathcal{B}_0} (\mathbf{S}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{E}}) - \mathbf{S}) : \delta \tilde{\mathbf{E}} dV = 0. \quad 0 \leq t \leq T \end{aligned} \quad (1.71)$$

Hieraus folgt als Eulergleichung neben dem Gleichgewicht und dem Stoffgesetz die Bedingung

$$\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{0}. \quad (1.72)$$

In der starken Form verschwinden somit die erweiterten Verzerrungen, was gleichbedeutend mit der exakten Erfüllung der kinematischen Beziehung (1.6) ist.

Zur Reduktion der Anzahl der unabhängigen Felder wird im Rahmen der EAS-Methode die L_2 -Orthogonalität der Spannungen \mathbf{S} und der erweiterten Verzerrungen $\tilde{\mathbf{E}}$ gefordert, d.h.

$$\int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{S} : \tilde{\mathbf{E}} dV = 0. \quad (1.73)$$

Hieraus resultiert eine Rückführung des Dreifeldfunktionals $\Pi_{HW}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{E}}, \mathbf{S})$ auf das modifizierte Zweifeldfunktional $\Pi_{HW}^{mod}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{E}})$:

$$\begin{aligned} \Pi_{HW}^{mod}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{E}}) &= \int_{\mathcal{B}_0} W(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{E}}) dV - \\ &\int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{b} - \ddot{\mathbf{u}}) \rho_0 dV - \int_{\partial \mathcal{B}_N} \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} dA \rightarrow \text{stat.} \quad 0 \leq t \leq T \end{aligned} \quad (1.74)$$

Die erste Variation

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{HW}^{mod}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{E}}) &= \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{S}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{E}}) : \delta \mathbf{E}(\mathbf{u}) - \rho_0 (\mathbf{b} - \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \delta \mathbf{u} dV - \int_{\partial \mathcal{B}_N} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} dA + \\ &\int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{S}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{E}}) : \delta \tilde{\mathbf{E}} dV = 0 \quad 0 \leq t \leq T \end{aligned} \quad (1.75)$$

liefert als Eulergleichungen des modifizierten Variationsprinzips die Gleichgewichtsbedingung und $\mathbf{S}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{E}}) = \mathbf{0}$. Hieraus folgt direkt, dass die Einführung der Orthogonalitätsbedingung (1.73) nur im Fall einer räumlichen Diskretisierung sinnvoll ist. Im kontinuierlichen Fall ist $\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{0}$ zu fordern. Damit ist (1.73) automatisch erfüllt und die erste Variation des modifizierten Funktionals (1.70) geht in die bereits in Abschnitt 1.2 behandelte schwache Form des Gleichgewichts ohne Erweiterungen über.

Die diskretisierte Form der EAS-Methode lautet in der verkürzten Schreibweise:

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}_h, \tilde{\mathbf{E}}_h; \mathbf{w}_h) + \rho_0 (\ddot{\mathbf{u}}_h, \mathbf{w}_h)_{\mathcal{B}_0} &= \mathcal{F}_u(\mathbf{w}_h) \quad \forall \mathbf{w}_h \in W^h \\ (\mathbf{S}(\mathbf{u}_h), \boldsymbol{\gamma}_h)_{\mathcal{B}_0} + (\mathbf{S}(\tilde{\mathbf{E}}_h), \boldsymbol{\gamma}_h)_{\mathcal{B}_0} &= 0 \quad \forall \boldsymbol{\gamma}_h \in \Gamma^h \end{aligned} \quad (1.76)$$

mit

$$a(\mathbf{u}_h, \tilde{\mathbf{E}}_h; \mathbf{w}_h) = \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{S}(\mathbf{u}_h, \tilde{\mathbf{E}}_h) : \mathbf{F}^T(\mathbf{u}_h) \cdot \text{Grad} \mathbf{w} dV. \quad (1.77)$$

Γ^h ist hier der Raum aller zulässigen erweiterten Verzerrungen, welche die diskrete Orthogonalitätsbedingung (Konsistenzbedingung)

$$(\mathbf{S}_h, \boldsymbol{\gamma}_h)_{\mathcal{B}_0} = 0 \quad \forall \boldsymbol{\gamma}_h \in \Gamma^h \quad (1.78)$$

für elementweise konstante Spannungen \mathbf{S}_h erfüllen [18].

Die zweite Zeile in Gleichung (1.76) wird in der Regel dazu verwendet, die erweiterten Verzerrungen auf Elementebene zu kondensieren, so dass durch die EAS-Formulierung keine zusätzlichen Freiheitsgrade im Gesamtsystem entstehen. Die EAS-Methode erhöht somit lediglich die notwendigen Rechenoperationen auf Elementebene. Bei isotroper Netzverfeinerung sind für den Grenzübergang verschwindender Elementgrößen ($h \rightarrow 0$) die verschiebungskompatiblen Verzerrungen im Element konstant und aus der zweiten Zeile von (1.76) folgt dann zusammen mit der Orthogonalitätsbedingung (1.78), dass die erweiterten Verzerrungen – wie für die exakte Lösung gefordert – verschwinden.

Die EAS-Methode zur Vermeidung des Poisson-Dickenlockings bei linearem Verschiebungsansatz

Im vorliegenden Fall wird die EAS-Methode ausschließlich verwendet, um den bei Volumen-Schalenelementen auftretenden Defekt des Poisson-Dickenlockings zu beheben. Volumen-Schalenelemente mit linearem Verschiebungsansatz in Dickenrichtung weisen bei einer Querdehnzahl $\nu \neq 0$ einen Versteifungseffekt auf, welcher sich aus der Kopplung der Normaldehnungen in der Schalenebene und den transversalen Normaldehnungen über die Querdehnung ergibt. Da der für die Abbildung von Biegezuständen notwendige lineare Verlauf der Normaldehnungen in Dickenrichtung mit der linearen Verschiebungsinterpolation nicht abbildbar ist, kommt es zu einer Versteifung bei der reinen Verschiebungsformulierung, sofern wie hier nur ein Element in Schalendickenrichtung verwendet wird. Da der kritische Parameter hierbei die Querdehnzahl ist, stellt das Poisson-Dickenlocking einen materiellen Versteifungseffekt dar.

Zur Vermeidung des Poisson-Dickenlockings wird eine lineare Erweiterung der transversalen Normalverzerrungen mit Hilfe der Methode der erweiterten Verzerrungen eingeführt. In den Arbeiten von HAUPTMANN [49] und HARNAU [45] wird diese Erweiterung im Rahmen der räumlichen Diskretisierung mit Volumen-Schalenelementen unter dem Gesichtspunkt der Verbesserung der Elementformulierung behandelt.

Wie bereits erwähnt, wird im Rahmen dieser Arbeit jeweils nur ein Element in Schalendickenrichtung verwendet, d.h. es erfolgt keine Netzverfeinerung in Dickenrichtung. In diesem Fall ist die EAS-Erweiterung also auch für $h \rightarrow 0$ notwendig, wobei h hier die charakteristische Elementgröße in der Schalenebene ist. In Schalendickenrichtung liegt weiterhin ein diskretisiertes Modell vor. Für die hier behandelten Fragestellungen erscheint deshalb die Interpretation der Erweiterung von $E_{\zeta\zeta}$ mit Hilfe der EAS-Methode als Wahl einer Schalenkinematik und damit eines mechanischen Modells sinnvoll. Die Fehlerschätzer, die in weiteren Kapiteln dieser Arbeit entwickelt werden, zielen demnach nur auf den Fehler infolge der räumlichen Diskretisierung in der Schalenebene ab. Der Fehler, welcher sich aus der (semi-)diskreten Approximation in Schalendickenrichtung ergibt, kann somit nicht erfasst werden und ist, da er auch in der in Schalenebene kontinuierlichen exakten Lösung enthalten ist, als Modellfehler zu interpretieren. Diese Herangehensweise findet sich unter anderem auch in den Arbeiten von BISCHOFF [16]

und KOSCHNICK [62]. Das sich ergebende Schalenmodell wird dort als 7-Parameter-Modell bezeichnet, da zu den sechs verschiebungskompatiblen Verzerrungskoodinaten E_{ij} noch eine zusätzliche transversale Verzerrungskomponente eingeführt wird:

$$\mathbf{E} = \underbrace{\frac{1}{2}(g_{ij} - G_{ij})\mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j}_{\mathbf{E}(\mathbf{u})} + \underbrace{\zeta\beta(\xi, \eta)\mathbf{G}^3 \otimes \mathbf{G}^3}_{\tilde{\mathbf{E}}(\beta)} \quad (1.79)$$

Dieser Ansatz für die erweiterten Verzerrungen erfüllt die Orthogonalitätsbedingung (1.73) für konstante transversale Spannungen $S_h^{\zeta\zeta}$.

Aus der Interpretation der EAS-Methode zur Vermeidung des Dickenlockings als Schalenmodell folgt, dass sich hierfür auch eine starke Form des Gleichgewichts entwickeln lassen muss, die unabhängig von einer Diskretisierung in der Schalenebene ist. Dies wird im Folgenden in Anlehnung an BISCHOFF [16] kurz dargelegt. Dem Modell liegt die Annahme linearer Verschiebungen in Schalendickenrichtung zugrunde. Aus der ersten Zeile von Gleichung (1.75) folgt zusammen mit der Kinematik (1.79) die Gleichgewichtsbedingung

$$\text{Div}(\mathbf{F}(\mathbf{u})\mathbf{S}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{E}})) + \rho_0\mathbf{b} - \rho_0\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad \text{auf } \mathcal{B}_0, \quad (1.80)$$

welche der allgemeinen Gleichgewichtsbedingung (1.21) in der Referenzkonfiguration unter Beachtung der Kinematik (1.79) entspricht.

Interessanter ist die Interpretation der zweiten Zeile von (1.76). Für die Variation der erweiterten Verzerrungen gilt unter Berücksichtigung von (1.79):

$$\delta\tilde{\mathbf{E}} = \zeta \cdot \delta\beta(\xi, \eta)\mathbf{G}^3 \otimes \mathbf{G}^3 \quad (1.81)$$

Hiermit lässt sich die zweite Zeile von (1.76) umwandeln in

$$\int_A \frac{h(\xi, \eta)}{2} \int_{-1}^1 \left(S^{\zeta\zeta}(\mathbf{u}) + S^{\zeta\zeta}(\tilde{\mathbf{E}}) \right) \cdot \zeta d\zeta \cdot \delta\beta(\xi, \eta) dA = 0, \quad (1.82)$$

woraus die starke Form

$$m^{\zeta\zeta}(\xi, \eta) = \frac{h(\xi, \eta)}{2} \int_{-1}^1 \left(S^{\zeta\zeta}(\mathbf{u}) + S^{\zeta\zeta}(\tilde{\mathbf{E}}) \right) \cdot \zeta d\zeta = 0 \quad (1.83)$$

folgt. $h(\xi, \eta)$ bezeichnet hier die Schalendicke in Abhängigkeit von den Schalenmittelkoordinaten ξ und η .

BISCHOFF [16] und KOSCHNICK [62] bezeichnen die Größe $m^{\zeta\zeta}(\xi, \eta)$ als Quermoment, da die Berechnungsvorschrift (1.83) für $m^{\zeta\zeta}(\xi, \eta)$ im Wesentlichen denen der bekannten Biegemomente $m^{\xi\xi}$ und m^m entspricht. Im Gegensatz zu $m^{\xi\xi}$ und m^m repräsentiert die Größe $m^{\zeta\zeta}(\xi, \eta)$ jedoch keine physikalisch motivierte Schnittgröße. Die Gleichungen

(1.80) und (1.83) bilden somit die starke Form des Gleichgewichts des 7-Parameter-Modells mit der erweiterten Kinematik (1.79). Gleichung (1.83) kann dabei als zusätzliche Gleichgewichtsbedingung zur Bestimmung des Verzerrungsparameters β verstanden werden. Wichtig ist die Feststellung, dass diese starke Form unabhängig von einer räumlichen Diskretisierung in der Schalenebene ist.

Das in der Schalenebene kontinuierliche Variationsproblem für das 7-Parameter-Modell lässt sich somit kompakt darstellen als:

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \beta; \mathbf{w}) + \rho_0(\ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{w})_{\mathcal{B}_0} &= \mathcal{F}_u(\mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{w} \in W \\ b(\mathbf{u}, \gamma) + c(\beta, \gamma) &= 0 \quad \forall \gamma \in \Gamma \quad 0 \leq t \leq T \end{aligned} \quad (1.84)$$

Mit

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \beta; \mathbf{w}) &= \int_{\mathcal{B}_0} (\mathbf{E}(\mathbf{u}) + \tilde{\mathbf{E}}(\beta)) : \mathbb{C} : (\mathbf{F}^T(\mathbf{u}) \text{Grad} \mathbf{w})^{sym} dV \\ b(\mathbf{u}; \gamma) &= \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{E}(\mathbf{u}) : \mathbb{C} : \tilde{\mathbf{E}}(\gamma) dV = \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{E}(\mathbf{u}) : \mathbb{C} : (\zeta \cdot \gamma(\xi, \eta) \mathbf{G}^3 \otimes \mathbf{G}^3) dV \\ c(\beta, \gamma) &= \int_{\mathcal{B}_0} \tilde{\mathbf{E}}(\beta) : \mathbb{C} : \tilde{\mathbf{E}}(\gamma) dV = \int_{\mathcal{B}_0} \zeta^2 \beta(\xi, \eta) \cdot C^{3333} \cdot \gamma(\xi, \eta) dV. \end{aligned} \quad (1.85)$$

In Gleichung (1.84) ist W der Raum, der in Dickenrichtung linearen Testfunktionen und Γ der Raum aller in Schalenebene kontinuierlichen erweiterten Verzerrungen. Auch hier wird nun wieder die konstante Rayleigh-Dämpfung eingeführt. Hierfür sind die Linearisierungen von $a(\cdot; \cdot, \cdot)$ und $b(\cdot, \cdot)$ im unverformten Ausgangszustand notwendig. Hierfür wird $a(\cdot; \cdot, \cdot)$ zunächst zerlegt in:

$$a(\mathbf{u}, \beta; \mathbf{w}) = a(\mathbf{u}; \mathbf{w}) + b_T(\mathbf{u}; \mathbf{w}, \beta) \quad (1.86)$$

Hierin ist $a(\mathbf{u}; \mathbf{w})$ die bereits in Gleichung (1.45) eingeführte Semilinearform ohne erweiterte Verzerrungen und $b_T(\mathbf{u}; \mathbf{w}, \beta)$ ist die Richtungsableitung von $b(\cdot; \cdot)$ in Richtung der Testfunktion \mathbf{w} :

$$b_T(\mathbf{0}; \mathbf{w}, \beta) = Db(\mathbf{0}; \beta) \cdot \mathbf{w} \quad (1.87)$$

Für die Linearisierung der modifizierten Form $a(\cdot; \cdot, \cdot)$ im Ursprung ergibt sich damit:

$$a_T(\mathbf{0}, 0; \mathbf{u}, \mathbf{w}) = a_T(\mathbf{0}; \mathbf{u}, \mathbf{w}) + b_T(\mathbf{0}; \mathbf{w}, \beta) \quad (1.88)$$

Hieraus folgt nun das gemischte Variationsproblem mit Rayleigh-Dämpfung:

$$\begin{aligned} \rho_0(\ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{w}) + c_m \rho_0(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{w})_{\mathcal{B}_0} + c_k (a_T(\mathbf{0}; \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{w}) + b_T(\mathbf{0}; \mathbf{w}, \dot{\beta})) \\ + a(\mathbf{u}, \beta; \mathbf{w}) &= \mathcal{F}_u(\mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{w} \in W \\ b(\mathbf{u}, \gamma) + c(\beta, \gamma) &= 0 \quad \forall \gamma \in \Gamma \quad 0 \leq t \leq T \end{aligned} \quad (1.89)$$

Das von HAUPTMANN [49] vorgestellte bilineare Volumen-Schalenelement mit linearer Erweiterung der transversalen Normaldehnungen mit Hilfe der EAS-Methode ergibt sich nun direkt aus der Diskretisierung der 7-Parameter-Formulierung in der Schalebene. Neben der trilinearen Verschiebungsinterpolation (1.65) wird noch folgende bilineare Interpolation der erweiterten Verzerrungen im Element eingeführt:

$$\beta_h(\xi, \eta) = [1 \ \xi \ \eta \ \xi\eta] \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} \quad (1.90)$$

Da die erweiterten Verzerrungen nicht direkt mit einer primären Verschiebungsgröße gekoppelt sind, wird für den Verlauf der erweiterten Verzerrungen keine Kontinuität über die Elementgrenzen hinweg gefordert.

Das diskrete Variationsproblem lautet in kompakter Schreibweise:

$$\begin{aligned} \rho_0(\ddot{\mathbf{u}}_h, \mathbf{w}_h)_{\mathcal{B}_0} + c_m \rho_0(\dot{\mathbf{u}}_h, \mathbf{w}_h)_{\mathcal{B}_0} + c_k(a_T(\mathbf{0}; \dot{\mathbf{u}}_h, \mathbf{w}_h) + b_T(\mathbf{0}; \mathbf{w}_h, \dot{\beta}_h)) \\ + a(\mathbf{u}_h, \beta_h; \mathbf{w}_h) = \mathcal{F}_u(\mathbf{w}_h) \quad \forall \mathbf{w}_h \in W^h \\ b(\mathbf{u}_h, \gamma_h) + c(\beta_h, \gamma_h) = 0 \quad \forall \gamma_h \in \Gamma^h \quad 0 \leq t \leq T \end{aligned} \quad (1.91)$$

Die Methode der angenommenen Verzerrungen (ANS)

Die Methode der angenommenen Verzerrungen (ANS) wurde von DVORKIN & BATHE [31] zur Vermeidung der Querschubversteifung bei Schalenelementen mit bilinearen Ansatzfunktionen entwickelt. Im Gegensatz zur Methode der erweiterten Verzerrungen stellt die ANS-Methode eine Reduktion des Verzerrungsfeldes dar und kann ausschließlich zur Vermeidung geometrischer Versteifungsphänomene herangezogen werden.

Bei der ANS-Methode erfolgt die Auswertung der verschiebungskompatiblen Verzerrungen nur an einzelnen Stützstellen im Element. Der Verzerrungsverlauf im Element wird dann über diese Stützstellen interpoliert. Hieraus ergibt sich im Element eine Modifikation des Verschiebungs-Verzerrungszusammenhangs.

Als variationelle Grundlage dient wiederum das Hu-Washizu-Funktional. Die Verzerrungen werden nicht erweitert, sondern in einen erwünschten und einen versteifenden Anteil aufgespalten:

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}) = \mathbf{E}^{ANS} + \mathbf{E}^S \quad (1.92)$$

Mit dieser Aufspaltung ergibt sich für das Hu-Washizu-Funktional:

$$\begin{aligned} \Pi_{HW}(\mathbf{u}, \mathbf{E}^{ANS}, \mathbf{S}) = \int_{\mathcal{B}_0} W(\mathbf{E}^{ANS}) + \mathbf{S} : \underbrace{(\mathbf{E}(\mathbf{u}) - \mathbf{E}^{ANS})}_{\mathbf{E}^S} dV - \\ \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{b} - \ddot{\mathbf{u}}) \rho_0 dV - \int_{\partial \mathcal{B}_N} \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} dA \rightarrow \text{stat.} \quad 0 \leq t \leq T \end{aligned} \quad (1.93)$$

Um die Spannungen und die versteifenden Verzerrungsanteile aus der Formulierung zu eliminieren, wird die Orthogonalität zwischen den Spannungen und der Differenz aus angenommenen und verschiebungskompatiblen Verzerrungen gefordert:

$$\int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{S} : (\mathbf{E}(\mathbf{u}) - \mathbf{E}^{ANS}) dV = 0 \quad (1.94)$$

Folglich ist die variationelle Konsistenz der ANS-Methode nur dann gegeben, wenn die Spannungen auch tatsächlich die Orthogonalitätsbedingung (1.94) erfüllen. Die Bestimmung zulässiger orthogonaler Spannungsfelder ist in SIMO & HUGHES [107] beschrieben. Bei den meisten Elementformulierungen wird der Aufwand für die Orthogonalisierung jedoch vermieden, und die Spannungen werden direkt aus den angenommenen Verzerrungen bestimmt, siehe z.B. [51, 62]:

$$\mathbf{S} = \mathbb{C} : \mathbf{E}^{ANS} \quad (1.95)$$

Die ANS-Methode zur Vermeidung der Querschubversteifung

Bei den hier verwendeten Volumen-Schalenelementen wird die Methode der angenommenen Verzerrungen zur Vermeidung der Querschubversteifung verwendet. Die Querschubversteifung tritt auf, weil bei Schalenelementen mit niedriger Ansatzordnung reine Biegezustände nicht ohne die Aktivierung von Querschubverzerrungen abbildbar sind. Da die Querschubsteifigkeit insbesondere bei dünnen Schalen gegenüber der Biegesteifigkeit dominiert, ist der kritische Parameter für diese Art der Versteifung die Schalendicke. Bei der Querschubversteifung handelt es sich folglich um einen geometrischen Versteifungseffekt.

Zur Vermeidung der Querschubversteifung mit der Methode der angenommenen Verzerrungen werden die Querschubverzerrungen $E_{\eta\zeta}$ zwischen den Stützstellen ($\xi = -1, \eta = 0$) und ($\xi = 1, \eta = 0$) in ξ -Richtung linear interpoliert. Dabei wird $E_{\eta\zeta}$ in η -Richtung als konstant angenommen. Analog erfolgt die Auswertung der kompatiblen Querschubverzerrungen $E_{\xi\zeta}$ an den Stellen ($\xi = 0, \eta = -1$) und ($\xi = 0, \eta = 1$) und es erfolgt die lineare Interpolation in η -Richtung unter der Annahme konstanter Querschubverzerrungen $E_{\eta\zeta}$ in ξ -Richtung. Für die bilineare Volumenschale ergibt sich somit folgender Verlauf der angenommenen Querschubverzerrungen im Element:

$$E_{\eta\zeta}^{ANS}(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi)E_{\eta\zeta}(\xi = -1, \eta = 0) + \frac{1}{2}(1 + \xi)E_{\eta\zeta}(\xi = 1, \eta = 0) \quad (1.96)$$

$$E_{\xi\zeta}^{ANS}(\eta) = \frac{1}{2}(1 - \eta)E_{\eta\zeta}(\xi = 0, \eta = -1) + \frac{1}{2}(1 + \eta)E_{\eta\zeta}(\xi = 0, \eta = 1) \quad (1.97)$$

Die ANS-Methode stellt damit einen auf Elementebene modifizierten Verschiebungs-Verzerrungszusammenhang dar. Folglich ist die Kinematik von der räumlichen Vernetzung in der Schalenebene abhängig, d.h. anstelle des diskreten Variationsproblems

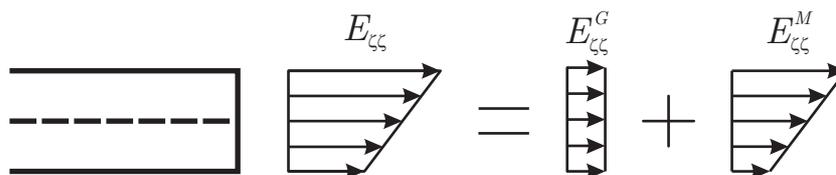


Bild 1.4: Aufspaltung der Normalverzerrung $E_{\zeta\zeta}$ in einen geometrischen Anteil $E_{\zeta\zeta}^G$ und einen materiellen Anteil $E_{\zeta\zeta}^M$, siehe auch HAUPTMANN [49]

(1.52) mit der Kinematik (1.6) wird folgendes von der Netzweite h abhängiges Variationsproblem gelöst:

$$\rho_0(\dot{\mathbf{u}}_h, \mathbf{w}_h)_{\mathcal{B}_0} + c_m \rho_0(\dot{\mathbf{u}}_h, \mathbf{w}_h)_{\mathcal{B}_0} + c_k a_{h,T}(\mathbf{0}; \dot{\mathbf{u}}_h, \mathbf{w}_h) + a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h) = \mathcal{F}_u(\mathbf{w}_h) \quad (1.98)$$

$$\forall \mathbf{w}_h \in W^h \quad 0 \leq t \leq T$$

Diese Netzabhängigkeit der Kinematik muss bei der Schätzung des räumlichen Diskretisierungsfehlers berücksichtigt werden.

Modifikation des Stoffgesetzes zur Vermeidung des Dickenlockings

Eine alternative Möglichkeit zur Vermeidung des Poisson-Dickenlockings, welche nicht auf dem Hu-Washizu-Funktional basiert, besteht in der Reduktion des Materialgesetzes in der Form, dass die transversalen Normalspannungen, die aus dem Querdehnungseffekt entstehen, verschwinden. HAUPTMANN [49] spaltet hierfür die transversale Normalverzerrung und -spannung in sogenannte geometrische Anteile und materielle Anteile auf, siehe Bild 1.4:

$$E_{\zeta\zeta} = E_{\zeta\zeta}^G + E_{\zeta\zeta}^M, \quad S^{\zeta\zeta} = S_G^{\zeta\zeta} + S_M^{\zeta\zeta}, \quad (1.99)$$

Der geometrische Anteil entspricht dabei der konstanten Verzerrung, welche sich aus der linearen Verschiebungsinterpolation ergibt, wohingegen der materielle Teil den Anteil infolge der Querdehnung darstellt.

Die materielle Normalverzerrung wird nun über die Modifikation des Stoffgesetzes so gewählt, dass der Einfluss der Membran- und Biegeverzerrungen ausgeglichen wird und die materielle Normalspannung $S_M^{\zeta\zeta}$ verschwindet.

Die Kondensation des Materialgesetzes schränkt jedoch die Anwendbarkeit der hier vorgestellten Schalenformulierung für beliebige Materialformulierungen ein. Für das hier verwendete St.-Venant-Kirchhoff Material ergibt diese Formulierung nur die Einschränkung, dass die transversalen Normalspannungen nur näherungsweise bestimmt werden können.

1.3.3 Nomenklatur der verwendeten Elemente

Für die numerischen Beispiele im Rahmen dieser Arbeit werden zwei Elementformulierungen verwendet. Da in beiden Formulierungen die Querschubversteifung mit Hil-

fe der Methode der angenommenen Verzerrungen gemäß den Gleichungen (1.96) und (1.97) verhindert wird, unterscheiden sie sich nur durch die Modifikation zur Behebung des Poisson-Dickenlockings. Das Element ANS3DEAS beinhaltet den Ansatz der erweiterten Verzerrungen und entspricht damit der bilinearen Diskretisierung der 7-Parameter-Formulierung gemäß Gleichung (1.90). Das Element ANS6z beruht auf der Modifikation des Materialgesetzes gemäß Abschnitt 1.3.2

Die Nomenklatur der Elemente ist in Anlehnung an die Bezeichnungen in HAUPTMANN [49] gewählt und in Tabelle 1.1 zusammengefasst.

Name	Modifikation in Dickenrichtung	Modifikation der Querschubverzerrungen
ANS3DEAS	EAS gem. (1.90)	ANS gem. (1.96) und (1.97)
ANS6z	mod. Stoffgesetz gem. Abschn. 1.3.2	ANS gem. (1.96) und (1.97)

Tabelle 1.1: Nomenklatur der verwendeten bilinearen Volumen-Schalenelemente

1.4 Zeitliche Diskretisierung

Die räumliche Diskretisierung der 1. Cauchy-Bewegungsgleichung mit den im vorangegangenen Abschnitt dargestellten Methoden führt allgemein auf ein System gekoppelter Differentialgleichungen der Form:

$$M\ddot{\mathbf{d}} + C\dot{\mathbf{d}} + \mathbf{R}(\mathbf{d}) = \mathbf{F}(t) \quad 0 \leq t \leq T \quad (1.100)$$

Für die numerische Integration von nichtlinearen gewöhnlichen Differentialgleichungen bzw. Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen sind im Fachschrifttum viele Verfahren angegeben, siehe z. B. WOOD [115] oder ZIENKIEWICZ & TAYLOR [120]. Die nachfolgenden Ausführungen beschränken sich auf

- a) das Newmarkverfahren [75] als klassisches Finite-Differenzen-Verfahren in der Zeit und
- b) ein dem Newmarkverfahren äquivalentes kontinuierliches Petrov-Galerkinverfahren.

Bei allen numerischen Zeitintegrationsverfahren wird der zeitlich kontinuierliche Verlauf der in (1.100) enthaltenen Zustandsgrößen in zeitlicher Richtung in die Zeitpunkte

$$t_0 := 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n := T$$

diskretisiert. Die Differenz aus zwei aufeinanderfolgenden Zeitpunkten wird als Zeitschrittweite Δt_n bezeichnet.

1.4.1 Das Newmarkverfahren

Beim Newmarkverfahren wird die Erfüllung der semidiskreten Bewegungsgleichung zum Zeitpunkt t_{n+1} gefordert

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}_{n+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}}_{n+1} + \mathbf{R}(\mathbf{d}_{n+1}) = \mathbf{F}_{n+1}. \quad (1.101)$$

Für den Knotenverschiebungsvektor und den Knotengeschwindigkeitsvektor zum Zeitpunkt $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ wird folgender Ansatz gemacht:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{n+1} &= \mathbf{d}_n + \Delta t \dot{\mathbf{d}}_n + \Delta t^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{d}}_n + \beta \ddot{\mathbf{d}}_{n+1} \right] \\ \dot{\mathbf{d}}_{n+1} &= \dot{\mathbf{d}}_n + \Delta t \left[(1 - \gamma) \ddot{\mathbf{d}}_n + \gamma \ddot{\mathbf{d}}_{n+1} \right] \end{aligned} \quad (1.102)$$

Die Parameter β und γ steuern die Genauigkeitsordnung und die numerische Stabilität des Verfahrens. Bei der Anwendung auf lineare Probleme ist das Newmarkverfahren für $\gamma = 0,5$ und $\beta \geq 0,25$ unbedingt stabil und von quadratischer Genauigkeitsordnung. Für lineare Anwendungen wird deshalb häufig die Parameterkombination $\gamma = 2\beta = 0,5$ verwendet.

Die Newmarkansätze (1.102) lassen sich nun so umformen, dass die Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{d}}_{n+1}$ und die Beschleunigungen $\ddot{\mathbf{d}}_{n+1}$ zum Ende des Zeitschrittes in Abhängigkeit von den Größen zu Beginn des Zeitschrittes und den Verschiebungen \mathbf{d}_{n+1} dargestellt werden können:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{d}}_{n+1} &= \alpha_1(\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n) - \alpha_2 \dot{\mathbf{d}}_n - \alpha_3 \ddot{\mathbf{d}}_n = \alpha_1 \Delta \mathbf{d}_{n+1} - \alpha_2 \dot{\mathbf{d}}_n - \alpha_3 \ddot{\mathbf{d}}_n \\ \dot{\mathbf{d}}_{n+1} &= \alpha_4(\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n) + \alpha_5 \dot{\mathbf{d}}_n + \alpha_6 \ddot{\mathbf{d}}_n = \alpha_4 \Delta \mathbf{d}_{n+1} + \alpha_5 \dot{\mathbf{d}}_n + \alpha_6 \ddot{\mathbf{d}}_n \end{aligned} \quad (1.103)$$

mit den vom Zeitschritt abhängigen Konstanten

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{\beta(\Delta t_n)^2} & \alpha_2 &= \frac{1}{\beta \Delta t_n} & \alpha_3 &= \frac{1-2\beta}{2\beta} \\ \alpha_4 &= \frac{\gamma}{\beta \Delta t_n} & \alpha_5 &= \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right) & \alpha_6 &= \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right) \Delta t_n, \end{aligned} \quad (1.104)$$

und der Änderung des Knotenverschiebungsvektors

$$\Delta \mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n \quad (1.105)$$

im Zeitschritt n .

Einsetzen dieser Beziehungen in die Bewegungsgleichung (1.100) liefert ein nichtlineares algebraisches Gleichungssystem für die unbekanntten Verschiebungen am Ende des Zeitschrittes

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(\mathbf{d}_{n+1}) &= \mathbf{M} \left[\alpha_1(\Delta \mathbf{d}_{n+1} - \alpha_2 \dot{\mathbf{d}}_n - \alpha_3 \ddot{\mathbf{d}}_n) \right] \\ &+ \mathbf{C} \left[\alpha_4 \Delta \mathbf{d}_{n+1} + \alpha_5 \dot{\mathbf{d}}_n + \alpha_6 \ddot{\mathbf{d}}_n \right] \\ &+ \mathbf{R}(\mathbf{d}_{n+1}) - \mathbf{F}_{n+1} = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (1.106)$$

welches mit einem iterativen Lösungsverfahren, wie z. B. dem Newton-Raphson-Verfahren, gelöst wird. Hierfür wird (1.106) in eine Taylorreihe entwickelt:

$$\mathbf{G}(\mathbf{d}_{n+1}^i + \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{i+1}) = \mathbf{G}(\mathbf{d}_{n+1}^i) + D\mathbf{G}(\mathbf{d}_{n+1}^i) \cdot \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{i+1} + \mathbf{r}(\mathbf{d}_{n+1}^i) \quad (1.107)$$

Die Vernachlässigung des Restgliedes $\mathbf{r}(\mathbf{d}_{n+1}^i)$ der Taylorreihe (1.107) führt zusammen mit der diskreten Gleichgewichtsbedingung (1.106) auf den Iterationsalgorithmus

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{eff}^i \cdot \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{i+1} &= -\mathbf{G}(\mathbf{d}_{n+1}^i) \\ \mathbf{d}_{n+1}^{i+1} &= \mathbf{d}_{n+1}^i + \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{i+1}, \end{aligned} \quad (1.108)$$

mit der Tangentenmatrix

$$\mathbf{K}_{eff}^i = \alpha_1 \mathbf{M} + \alpha_4 \mathbf{C} + \left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{d}_{n+1}} \right|_{\mathbf{d}_{n+1}^i}. \quad (1.109)$$

Als Anfangswert für den Verschiebungsvektor wird der konvergierte Wert aus dem letzten Zeitschritt gewählt, d.h. $\mathbf{d}_{n+1}^0 = \mathbf{d}_n$. Der Iterationsalgorithmus (1.108) wird in jedem Zeitschritt so lange wiederholt, bis das Konvergenzkriterium

$$|\mathbf{K}_{eff}^i \cdot \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{i+1}| \leq \epsilon |\mathbf{K}_{eff}^0 \cdot \Delta \mathbf{d}_{n+1}^1| \quad (1.110)$$

erfüllt ist.

Für lineare Problemstellungen ist (1.106) linear in \mathbf{d}_{n+1} und kann somit ohne Iteration direkt gelöst werden.

1.4.2 Das Newmarkverfahren für lineare Probleme als Petrov-Galerkin-Verfahren

Das Newmarkverfahren stellt in der im vorangegangenen Abschnitt dargestellten Formulierung ein typisches Finite-Differenzen-Verfahren dar. Für einige Finite-Differenzen-Verfahren zur Zeitintegration können im Falle linearer Differentialgleichungssysteme äquivalente Galerkinverfahren in der Zeit angegeben werden [115]. Der Vorteil der Galerkinverfahren in der Zeit für die Fehlerkontrolle liegt darin begründet, dass die Methoden, welche zur Fehlerschätzung im Rahmen der räumlichen Finite-Elemente-Methode verwendet werden, auch auf die Fehlerschätzung der zeitlichen Diskretisierung übertragen werden können.

Hier wird ein in den Verschiebungen und Geschwindigkeiten kontinuierliches Galerkinverfahren in der Zeit dargestellt, welches dem Newmarkverfahren mit der Parameterkombination $\gamma = 2\beta = 0,5$ äquivalent ist.

Die Äquivalenz der beiden Formulierungen lässt sich am einfachsten über die Gleichheit der Amplifikationsmatrizen sowie der Lastvektoren der entsprechenden Verfahren darstellen. Hierfür wird zunächst das klassische Newmarkverfahren als Einschrittverfahren

in der Zustandsform

$$\mathbf{Y}_{n+1} = \mathbf{A}_{FD}\mathbf{Y}_n + \mathbf{F}_{FD} \quad \text{mit} \quad \mathbf{Y}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_n \\ \dot{\mathbf{d}}_n \end{bmatrix} \quad (1.111)$$

dargestellt.

Hierin ist \mathbf{A}_{FD} die Amplifikationsmatrix, die im lastfreien Fall $\mathbf{F}_{FD} = \mathbf{0}$ den Zustandsvektor \mathbf{Y}_n auf den Zustandsvektor \mathbf{Y}_{n+1} abbildet. Der Index FD deutet an, dass es sich hier um die Darstellung des Newmarkverfahrens als Finite-Differenzen-Verfahren handelt.

Zunächst wird ein quadratischer Verschiebungsansatz im Zeitintervall $I_n := [t_n, t_{n+1}]$ eingeführt:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(\tau) &= \mathbf{d}_n + \tau \dot{\mathbf{d}}_n + \frac{\tau^2}{2} \ddot{\mathbf{d}}_m \\ \dot{\mathbf{d}}(\tau) &= \dot{\mathbf{d}}_n + \tau \ddot{\mathbf{d}}_m, \end{aligned} \quad (1.112)$$

mit $\tau = t - t_n$ und der konstanten Beschleunigung

$$\ddot{\mathbf{d}}_m = \frac{1}{\Delta t_n} (\dot{\mathbf{d}}_{n+1} - \dot{\mathbf{d}}_n). \quad (1.113)$$

Nun wird das Petrov–Galerkinverfahren zur Formulierung der schwachen Form im Zeitintervall genutzt:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{w}_t \cdot \left(\mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}}_m + \mathbf{C} \dot{\mathbf{d}} + \mathbf{K} \mathbf{d} - \mathbf{F}(\tau) \right) dt = 0, \quad (1.114)$$

mit der noch nicht spezifizierten Wichtungsfunktion \mathbf{w}_t . Der Index FE deutet hier an, dass es sich hier um eine Finite-Elemente-Formulierung in der Zeit handelt. Das aus Gleichung (1.114) abgeleitete Zeitintegrationsverfahren lässt sich ebenfalls in eine Form gemäß Gleichung (1.111) bringen:

$$\mathbf{Y}_{n+1} = \mathbf{A}_{FE}\mathbf{Y}_n + \mathbf{F}_{FE} \quad (1.115)$$

Die Wichtungsfunktion \mathbf{w}_t lässt sich nun aus der Forderung, dass die Amplifikationsmatrizen der beiden Verfahren gleich sind, bestimmen:

$$\mathbf{w}_t = \mathbf{w}(\mathbf{x}) \left(\frac{1}{5} - \frac{\tau}{\Delta t_n} + \frac{\tau^2}{\Delta t_n^2} \right), \quad (1.116)$$

siehe auch NEUMANN [73]. Für eine lineare Interpolation der äußeren Last im Zeitintervall sind auch die Lastterme in den Gleichungen (1.111) und (1.115) identisch. Das Newmarkverfahren mit den Parametern $\gamma = 2\beta = \frac{1}{2}$ entspricht also für lineare Differentialgleichungssysteme einem kontinuierlichem Petrov–Galerkinverfahren in der Zeit.

Es ist anzumerken, dass hier nur die Gleichheit der Amplifikationsmatrizen für die Verschiebungen und die Geschwindigkeiten betrachtet wurde. Die Beschleunigungen tauchen in den Darstellungen der Verfahren in den Gleichungen (1.111) und (1.115) nicht auf. Tatsächlich unterscheiden sich die beiden Verfahren allerdings in der Approximation der Beschleunigungen. Während bei der Finite-Differenzenformulierung diskrete Beschleunigungswerte an den Intervallgrenzen betrachtet werden, wird in der Galerkinformulierung von einer konstanten Beschleunigung im Zeitintervall ausgegangen. Die Beschleunigungen weisen also an den Intervallgrenzen Sprünge auf. Dieser Unterschied ist bei der Auswertung des Residuums für die Fehlerschätzung im Abschnitt 5.3 zu berücksichtigen, wenn der dort vorgestellte, auf der Galerkinformulierung basierende Fehlerschätzer auf das Standardnewmarkverfahren angewendet werden soll.

1.5 Der Diskretisierungsfehler

Jede der in diesem Abschnitt beschriebenen Diskretisierungsstufen führt zu einem Fehler bei der numerischen Lösung des kontinuierlichen Problems.

Bezeichnet man mit $\mathbf{u}_h(\mathbf{x}, t)$ die exakte Lösung der semidiskreten Bewegungsgleichung und mit $\mathbf{u}_{h,k}(\mathbf{x}, t)$ die mit dem Zeitintegrationsverfahren ermittelte numerische Lösung, so lässt sich der gesamte Diskretisierungsfehler

$$\mathbf{e}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}_{h,k}(\mathbf{x}, t) \quad (1.117)$$

aufgrund des zweistufigen Diskretisierungsprozesses formal in die Fehleranteile $\mathbf{e}_s(\mathbf{x}, t)$ infolge der räumlichen Diskretisierung und $\mathbf{e}_t(\mathbf{x}, t)$ infolge der zeitlichen Diskretisierung aufspalten:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}_{h,k}(\mathbf{x}, t) \\ &= \underbrace{(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}_h(\mathbf{x}, t))}_{\mathbf{e}_s(\mathbf{x}, t)} + \underbrace{(\mathbf{u}_h(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}_{h,k}(\mathbf{x}, t))}_{\mathbf{e}_t(\mathbf{x}, t)} \\ &= \mathbf{e}_s(\mathbf{x}, t) + \mathbf{e}_t(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (1.118)$$

Für lineare Probleme gilt nach ODEN & REDDY [77] für jede beliebige Norm

$$\|\mathbf{e}\| = \|\mathbf{e}_s + \mathbf{e}_t\| \leq \|\mathbf{e}_s\| + \|\mathbf{e}_t\|, \quad (1.119)$$

d.h. für die Abschätzung des gesamten Diskretisierungsfehlers in einer Norm kann eine getrennte Betrachtung des räumlichen und des zeitlichen Diskretisierungsfehlers vorgenommen werden.

Die in den klassischen Ansätzen zur Fehlerschätzung am häufigsten verwendete Norm ist die Gesamtenergienorm, siehe z. B. ZENG [119, 118], RICCIUS [98] oder YUE & ROBBINS [117]:

$$\|\mathbf{e}\|_E = \left(\int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \dot{\mathbf{e}} \cdot \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{E}(\mathbf{e}) : \mathbb{C} : \mathbf{E}(\mathbf{e}) dV \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.120)$$

Die Gesamtenergienorm lässt sich in einen Anteil der kinetischen Energie und einen Anteil der Verzerrungsenergie aufspalten:

$$\|\mathbf{e}\|_E^2 = \rho_0^2 \|\dot{\mathbf{e}}\|_{L_2}^2 + \|\mathbf{e}\|_a^2 \quad (1.121)$$

mit der L_2 -Norm des Fehlers der Geschwindigkeiten

$$\|\dot{\mathbf{e}}\|_{L_2} = \left(\int_{\mathcal{B}_0} \dot{\mathbf{e}} \cdot \dot{\mathbf{e}} dV \right)^{\frac{1}{2}} = (\dot{\mathbf{e}}, \dot{\mathbf{e}})_{\mathcal{B}_0}^{\frac{1}{2}} \quad (1.122)$$

und der Verzerrungsenergienorm des Fehlers in den Verschiebungen

$$\|\mathbf{e}\|_a = \left(\int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{E}(\mathbf{e}) : \mathbb{C} : \mathbf{E}(\mathbf{e}) dV \right)^{\frac{1}{2}} = a(\mathbf{e}, \mathbf{e})^{\frac{1}{2}}. \quad (1.123)$$

In den Arbeiten von RICCIUS [98] und Zeng [118, 119] finden sich Fehlerschätzer und darauf basierende adaptive Methoden, welche auf der hier angegebenen Darstellung des gesamten Diskretisierungsfehlers in der Gesamtenergienorm beruhen. Dabei werden der räumliche Diskretisierungsfehler und der Zeitintegrationsfehler getrennt voneinander betrachtet und mit adaptiven Methoden kontrolliert.

Im Rahmen dieser Arbeit wird die Fehlerschätzung ebenfalls getrennt für die räumliche und für die zeitliche Diskretisierung durchgeführt. Im Gegensatz zu den klassischen Ansätzen der Fehlerschätzung in geeigneten Normen der gesamten Lösung soll hier jedoch die Fehlerschätzung in beliebigen Zielfunktionalen der Lösung, wie z.B. lokalen Verschiebungen, erfolgen. Im nachfolgenden Kapitel werden aus diesem Grund zunächst geeignete Fehlerdarstellungen des räumlichen Diskretisierungsfehlers in einem beliebigen Zielfunktional der Lösung diskutiert, welche dann in den weiteren Kapiteln dieser Arbeit als Basis für die Fehlerschätzung dienen.

Kapitel 2

Der räumliche Diskretisierungsfehler

Gegenstand der nachfolgenden Betrachtungen ist der räumliche Diskretisierungsfehler $e_S = \mathbf{u} - \mathbf{u}_h$, der sich aus der räumlichen Semidiskretisierung des 1. Cauchy-Bewegungsgesetzes mit finiten Elementen ergibt. Ziel ist hier die Darstellung des räumlichen Diskretisierungsfehlers in einer beliebigen Zielgröße. Dies bedingt die Einführung eines Hilfsproblems, welches als duales bzw. adjungiertes Problem bezeichnet wird. Mit Hilfe des dualen Problems lassen sich Identitäten für den Fehler in Zielfunktionalen angeben, welche dann in nachfolgenden Kapiteln als Basis für die Fehlerschätzung und die Anpassung des Raumnetzes dienen sollen. Es erfolgt dabei eine möglichst allgemeingültige Darstellung des generellen Konzeptes der zielorientierten Fehlerdarstellungen für geometrisch nichtlineare Probleme.

Zum Abschluß des Kapitels wird für geometrisch lineare Problemstellungen der Zusammenhang zwischen der Fehlerdarstellung in einem Zielfunktional und dem bekannten elastodynamischen Reziprozitätstheorem nach GRAFFI dargestellt.

2.1 Allgemeines

Das grundlegende Konzept der Fehlerschätzung in beliebigen Zielfunktionalen geht auf die Arbeiten von JOHNSON ET AL. [32, 44, 59] und RANNACHER ET AL. [13, 14, 94, 95, 8] zurück. RANNACHER ET AL. bezeichnen das generelle Konzept als 'Dual-Weighted-Residual'-Konzept, was zum Ausdruck bringt, dass die Fehlerschätzung auf der Wichtung des Residuums mit der dualen Lösung basiert.

Für statische Problemstellungen entspricht die Fehlerschätzung für beliebige Zielgrößen der Auswertung des Satzes von Betti (Reziprozitätstheorem) und das duale Problem stellt die aus der Statik bekannte Einflussfunktion für die betrachtete Zielgröße dar.

Dieser Zusammenhang wurde erstmals von CIRAK & RAMM in [21] für die Elastostatik dargestellt und in [20, 22] auf Probleme der Elastoplastizität erweitert. Weitere Beiträge zur Fehlerschätzung von Punktgrößen finden sich u.a. in den Arbeiten von ODEN ET AL. [78, 89, 90]. Auf dem Dualitätsprinzip basierende Fehlerschätzer für die nichtlineare Elastizität finden sich u.a. in den Beiträgen von LARSSON ET AL. [67] und RÜTER ET AL. [102, 104]. RÜTER interpretiert die zielorientierte Fehlerschätzung im nichtlinearen statischen Fall als Erweiterung bzw. nichtlineare Verallgemeinerung des Satzes von Betti.

BANGERTH ET AL. [5, 6, 7] verwenden das Dualitätsprinzip zur Fehlerschätzung bei der Diskretisierung der Wellengleichung. Darauf Bezug nehmend leitet MAUTE [70] einen Fehlerschätzer zur Schätzung des gesamten Diskretisierungsfehlers in der linearen Strukturmechanik her. Dabei wird eine Fehlerdarstellung für den gesamten Diskretisierungsfehler infolge der räumlichen Diskretisierung mit finiten Elementen und zeitlicher Diskretisierung mit diskontinuierlichen Galerkinverfahren verwendet. Um hieraus geeignete Grundlagen für die Adaption des Raumnetzes und der Zeitschrittweite zu erhalten, wird die Fehlerdarstellung anschließend in von der Raumdiskretisierung abhängige und zeitschrittabhängige Anteile aufgespalten.

In allen hier erwähnten Beiträgen wird jeweils zunächst eine geeignete Darstellung des zu untersuchenden Diskretisierungsfehlers eingeführt, die anschließend mit geeigneten Verfahren numerisch ausgewertet wird. Dieses Vorgehen wird auch in der vorliegenden Arbeit verfolgt. Im Nachfolgenden wird in Anlehnung an das Vorgehen von NEUMANN [73] und FUENTES ET AL. [35] bei der Herleitung der Fehlerdarstellung davon ausgegangen, dass nur eine räumliche Diskretisierung der Bewegungsgleichung durchgeführt wird. Die sich ergebenden Fehlergleichungen setzen dann voraus, dass die auftretenden Zeitintegrale exakt berechnet werden. Es erfolgt somit eine formale Entkopplung des räumlichen und des zeitlichen Diskretisierungsfehlers. Dieses Vorgehen hat den Vorteil, dass die Darstellung des räumlichen Diskretisierungsfehlers zunächst vollständig unabhängig von der gewählten zeitlichen Diskretisierung ist. Es besteht damit z.B. auch die Möglichkeit, den räumlichen Diskretisierungsfehler im Frequenzbereich bzw. in modalen Koordinaten zu schätzen.

Der Einfluss des gewählten Zeitintegrationsalgorithmus und damit auch des Zeitintegrationsfehlers muss beim hier gewählten Vorgehen erst bei der numerischen Auswertung der Fehlerdarstellung berücksichtigt werden, d.h. die Zeitintegration hat durchaus einen Einfluss auf die Güte der Fehlerschätzung, jedoch keinen Einfluss auf den räumlichen Diskretisierungsfehler, was sich auch direkt aus der Zerlegung des gesamten Diskretisierungsfehlers in Gleichung (1.118) ergibt. Eine Veränderung der räumlichen Diskretisierung kann jedoch Einfluss auf die zu wählende Zeitschrittweite haben, so dass bei der Netzadaption zu einem Zeitpunkt auf Grundlage der Schätzung des räumlichen Diskretisierungsfehlers eine Anpassung der Zeitschrittweite im Zeitintegrationsverfahren notwendig werden kann. Dies spielt insbesondere bei der Verwendung eines expliziten Zeitintegrationsverfahrens eine Rolle, wenn sich infolge einer Netzverfeinerung der kritische Zeitschritt verändert. Des Weiteren darf das Zeitintegrationsverfahren nicht die wesentlichen Eigenschaften der (raum-)diskreten Lösung verfälschen. Im vorliegenden

Fall wird dies durch die Verwendung eines stabilen Zeitintegrationsalgorithmus mit einer sinnvollen Zeitschrittweite gewährleistet.

Da hier auch der geometrisch nichtlineare Fall betrachtet werden soll, sind geeignete Linearisierungen der nichtlinearen Terme in den Fehlergleichungen vorzunehmen. Hier wird zunächst in Anlehnung an RUNESSON ET AL. [53, 67] und RANNACHER & BECKER [13] eine exakte Linearisierung mit Hilfe des Hauptsatzes der Integralrechnung eingeführt. Hieraus folgt eine lineare Variationsformulierung der Differentialgleichung des räumlichen Diskretisierungsfehlers, für die auf formale Weise ein duales bzw. adjungiertes Problem eingeführt werden kann, welches für die exakte Darstellung des räumlichen Diskretisierungsfehlers in einer beliebigen Zielgröße benötigt wird. Da das duale Problem bei dieser Vorgehensweise von der unbekannt exakten Lösung abhängt, erfolgt hier die Linearisierung mit Hilfe der Tangente an die bekannte numerische Lösung.

Das duale Problem filtert die gesuchte Fehlergröße aus der Variationsformulierung der Differentialgleichung des Diskretisierungsfehlers und kann somit als Einflussfunktion in Raum und Zeit interpretiert werden. Entsprechend lässt sich die zielorientierte Fehlerschätzung im Fall der linearen Elastodynamik auf bekannte Reziprozitätstheoreme z.B. nach GRAFFI [39] zurückführen. Auf diesen Zusammenhang wird am Ende des Kapitels genauer eingegangen.

2.2 Differentialgleichung des räumlichen Diskretisierungsfehlers

Im Folgenden werden zunächst die schwachen Formen der Differentialgleichung des räumlichen Diskretisierungsfehlers $e_S \in W$, mit

$$e_S = \mathbf{u} - \mathbf{u}_h,$$

für rein verschiebungsformulierte Elemente sowie die 7-Parameter-Schalenformulierung angegeben. Die Ausführungen beschränken sich dabei auf Formulierungen ohne angenommene Verzerrungen. Die notwendigen Modifikationen für Elementformulierungen mit angenommenen Verzerrungsverläufen erfolgen dann in den nachfolgenden Kapiteln bei der Herleitung der entsprechenden Fehlerschätzer.

Differentialgleichung für die reine Verschiebungsformulierung

Ausgangspunkt für die Herleitung der Differentialgleichung des räumlichen Diskretisierungsfehlers der reinen Verschiebungsformulierung ist die kontinuierliche räumliche Variationsformulierung der Bewegungsgleichung (1.49)

$$\begin{aligned} \rho_0(\ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{w})_{\mathcal{B}_0} + c_m \rho_0(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{w})_{\mathcal{B}_0} + c_k a_T(\mathbf{0}; \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{w}) + a(\mathbf{u}; \mathbf{w}) &= \mathcal{F}_u(\mathbf{w}) \\ \forall \mathbf{w} \in W \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned}$$

und die entsprechende räumlich diskretisierte Form (1.52)

$$\begin{aligned} \rho_0(\ddot{\mathbf{u}}_h, \mathbf{w}_h)_{\mathcal{B}_0} + c_m \rho_0(\dot{\mathbf{u}}_h, \mathbf{w}_h)_{\mathcal{B}_0} + c_k a_T(\mathbf{0}; \dot{\mathbf{u}}_h, \mathbf{w}_h) + a(\mathbf{u}_h; \mathbf{w}_h) &= \mathcal{F}_u(\mathbf{w}_h) \\ \forall \mathbf{w}_h \in W^h \subset W \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

Die Differenz der kontinuierlichen und der diskreten Variationsgleichung führt auf die schwache Form des Residuums zu einem beliebigen, jedoch festen Zeitpunkt:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_u(\mathbf{w}) &= \mathcal{F}_u(\mathbf{w}) - \rho_0(\ddot{\mathbf{u}}_h, \mathbf{w})_{\mathcal{B}_0} - c_m \rho_0(\dot{\mathbf{u}}_h, \mathbf{w})_{\mathcal{B}_0} - c_k a_T(\mathbf{0}; \dot{\mathbf{u}}_h, \mathbf{w}) - a(\mathbf{u}_h; \mathbf{w}) \\ &= \rho_0(\ddot{\mathbf{e}}_S, \mathbf{w})_{\mathcal{B}_0} + c_m \rho_0(\dot{\mathbf{e}}_S, \mathbf{w})_{\mathcal{B}_0} + c_k a_T(\mathbf{0}; \dot{\mathbf{e}}_S, \mathbf{w}) + a(\mathbf{u}; \mathbf{w}) - a(\mathbf{u}_h; \mathbf{w}) \\ \forall \mathbf{w} \in W \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Wegen $W^h \subset W$ erfüllt die exakte Lösung $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ auch das diskrete Problem (1.52). Dies führt auf die bekannte Galerkinorthogonalität des Residuums bezüglich des diskreten Ansatzraums W^h

$$\mathcal{R}_u(\mathbf{w}_h) = 0 \quad \mathbf{w}_h \in W^h \subset W \quad 0 \leq t \leq T, \tag{2.2}$$

aus welcher sich die Optimalität der diskreten Lösung bezüglich des gewählten Ansatzraums ergibt. Für den Steifigkeitsanteil des Residuums wird nun eine exakte Linearisierung mit Hilfe des Taylorschen Satzes vorgenommen. Die Bezeichnungen sind dabei im Wesentlichen den Arbeiten von LARSSON ET AL. [67] und RÜTER [102] entnommen.

Mit $\boldsymbol{\xi}(s) = \mathbf{u}_h + s\mathbf{e}_S$, $s \in [0, 1]$ und unter Zuhilfenahme des Hauptsatzes der Integralrechnung lässt sich die Differenz $a(\mathbf{u}; \mathbf{w}) - a(\mathbf{u}_h; \mathbf{w})$ darstellen als:

$$a(\mathbf{u}; \mathbf{w}) - a(\mathbf{u}_h; \mathbf{w}) = \int_{s=0}^1 a'(\boldsymbol{\xi}(s); \mathbf{e}_S, \mathbf{w}) ds \tag{2.3}$$

mit der Richtungsableitung von $a(\cdot; \cdot)$

$$a'(\boldsymbol{\xi}(s); \mathbf{e}_S, \mathbf{w}) = \frac{d}{ds} a(\boldsymbol{\xi}(s); \mathbf{w}) = Da(\boldsymbol{\xi}(s); \mathbf{w}) \cdot \mathbf{e}_S. \tag{2.4}$$

Die Differenz wird also ersetzt durch das Integral über sämtliche Tangenten in Richtung des räumlichen Diskretisierungsfehlers von der diskreten Lösung bis zur exakten Lösung.

Hiermit lässt sich nun eine Bilinearform $a_S(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h; \cdot, \cdot)$ in Abhängigkeit von \mathbf{u} und \mathbf{u}_h konstruieren:

$$a_S(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h; \mathbf{e}_S, \mathbf{w}) = \int_0^1 a'(\boldsymbol{\xi}(s); \mathbf{e}_S, \mathbf{w}) ds \tag{2.5}$$

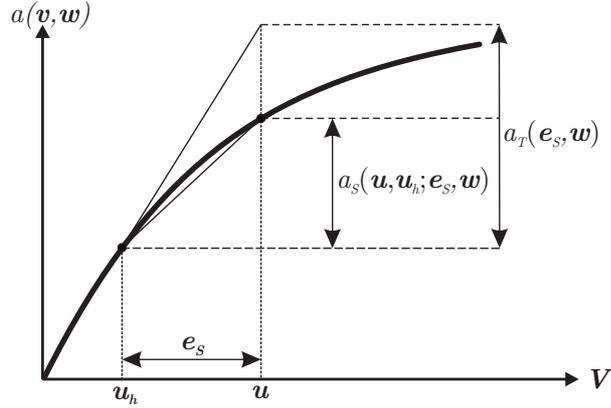


Bild 2.1: Grafische Interpretation der Sekanten- und Tangentenform

Aufgrund der grafischen Interpretation dieser Bilinearform in Bild 2.1 als Sekante von der numerischen Lösung \mathbf{u}_h zur exakten Lösung \mathbf{u} wird die so konstruierte Bilinearform auch als Sekantenform bezeichnet [67, 102].

Die Bilinearform $a_S(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h; \mathbf{e}_S, \mathbf{w})$ lautet ausführlich

$$a_S(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h; \mathbf{e}_S, \mathbf{w}) = \int_0^1 \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{S}(\boldsymbol{\xi}(s)) : (\text{Grad}^T \mathbf{e}_S \text{Grad} \mathbf{w})^{sym} + \quad (2.6)$$

$$(\mathbf{F}^T(\boldsymbol{\xi}(s)) \text{Grad} \mathbf{w})^{sym} : \mathbb{C} : (\mathbf{F}^T(\boldsymbol{\xi}(s)) \text{Grad} \mathbf{e}_S)^{sym} dV ds,$$

woraus ersichtlich ist, dass $a_S(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h; \cdot, \cdot)$ linear in den beiden letzten Argumenten ist.

Mit Hilfe der Sekantenform a_S steht nun eine lineare Variationsformulierung der Differentialgleichung des räumlichen Diskretisierungsfehlers zur Verfügung:

$$\mathcal{R}_u(\mathbf{w}) = \rho_0(\ddot{\mathbf{e}}_S, \mathbf{w})_{\mathcal{B}_0} + c_m \rho_0(\dot{\mathbf{e}}_S, \mathbf{w})_{\mathcal{B}_0} + c_k a_T(\mathbf{0}; \dot{\mathbf{e}}_S, \mathbf{w}) + a_S(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h; \mathbf{e}_S, \mathbf{w}) \quad (2.7)$$

$$\forall \mathbf{w} \in W \quad 0 \leq t \leq T$$

Gleichung (2.7) stellt die lineare schwache Form der Differentialgleichung des räumlichen Diskretisierungsfehlers dar. Aufgrund der Linearität ist Gleichung (2.7) eine geeignete Basis zur Darstellung des Fehlers mit Hilfe von Dualitätsargumenten. Da die Sekantenform $a_S(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h; \cdot, \cdot)$ jedoch die unbekannte exakte Lösung \mathbf{u} enthält, kann sie numerisch nicht bestimmt werden. Die übliche Näherung ist die Tangentenform an die bekannte räumlich diskrete Lösung

$$a_T(\mathbf{u}_h; \cdot, \cdot) = a'(\mathbf{u}_h; \cdot, \cdot) = a_S(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h; \cdot, \cdot), \quad (2.8)$$

mit

$$\begin{aligned}
 a_T(\mathbf{u}_h; \mathbf{e}_S, \mathbf{w}) &= \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{S}(\mathbf{u}_h) : (\text{Grad}^T \mathbf{e}_S \cdot \text{Grad} \mathbf{w})^{sym} dV + \\
 &\quad \int_{\mathcal{B}_0} (\mathbf{F}^T(\mathbf{u}_h) \cdot \text{Grad} \mathbf{w})^{sym} : \mathbb{C} : (\mathbf{F}^T(\mathbf{u}_h) \cdot \text{Grad} \mathbf{e}_S)^{sym} dV
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Die Tangentenform entspricht dabei gerade der Linearisierung in der bekannten Lösung \mathbf{u}_h , welche innerhalb der iterativen Lösungsprozedur benötigt wird. Die näherungsweise linearisierte Darstellung der Differentialgleichung des räumlichen Diskretisierungsfehlers mit Hilfe der Tangentenform an die Lösung \mathbf{u}_h lautet damit:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}_u(\mathbf{w}) \approx \rho_0(\ddot{\mathbf{e}}_S, \mathbf{w})_{\mathcal{B}_0} + c_m \rho_0(\dot{\mathbf{e}}_S, \mathbf{w})_{\mathcal{B}_0} + c_k a_T(\mathbf{0}; \dot{\mathbf{e}}_S, \mathbf{w}) + a_T(\mathbf{u}_h; \mathbf{e}_S, \mathbf{w}) \\
 \forall \mathbf{w} \in W \quad 0 \leq t \leq T
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

STEIN ET AL. [111] weisen darauf hin, dass die Verwendung der Tangente an Stelle der Sekante für die Fehlerschätzung nur für den Fall ausreichend kleiner räumlicher Diskretisierungsfehler sinnvoll ist, da dann die Differenz $|a_S(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h; \mathbf{e}_S, \mathbf{w}) - a_T(\mathbf{u}_h; \mathbf{e}_S, \mathbf{w})|$ hinreichend klein ist. Um das zu zeigen wird $a(\mathbf{u}; \mathbf{w})$ in eine Taylorreihe um die diskrete Lösung \mathbf{u}_h entwickelt:

$$a(\mathbf{u}; \mathbf{w}) = a(\mathbf{u}_h; \mathbf{w}) + a_T(\mathbf{u}_h; \mathbf{e}_S, \mathbf{w}) + O(\|\mathbf{e}_S\|) \tag{2.11}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}
 |a_S(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h; \mathbf{e}_S, \mathbf{w}) - a_T(\mathbf{u}_h; \mathbf{e}_S, \mathbf{w})| &= |a(\mathbf{u}; \mathbf{w}) - a(\mathbf{u}_h; \mathbf{w}) - a_T(\mathbf{u}_h; \mathbf{e}_S, \mathbf{w})| \\
 &= O(\|\mathbf{e}_S\|),
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

d.h. die Differenz zwischen der Sekanten- und der Tangentenform ist von der Größenordnung des Diskretisierungsfehlers, was die Aussage von STEIN ET AL. [111] bestätigt. Die Aussage lässt sich aber auch so interpretieren, dass Fehlerschätzer, die auf der Tangentenform basieren im Falle einer ausreichenden Netzverfeinerung asymptotisch korrekt sind. Im Folgenden wird deshalb zur Fehlerdarstellung die Tangentenform verwendet.

Für die lineare Elastodynamik lautet die schwache Form des räumlichen Diskretisierungsfehlers \mathbf{e}_S :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}_u(\mathbf{w}) = \rho_0(\ddot{\mathbf{e}}_S, \mathbf{w})_{\mathcal{B}_0} + c_m \rho_0(\dot{\mathbf{e}}_S, \mathbf{w})_{\mathcal{B}_0} + c_k a(\dot{\mathbf{e}}_S, \mathbf{w}) + a(\mathbf{e}_S, \mathbf{w}) \\
 \forall \mathbf{w} \in W \quad 0 \leq t \leq T
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Man erkennt, dass Gleichung (2.13) die gleiche Struktur hat wie die schwache Form der Bewegungsgleichung. Der räumliche Diskretisierungsfehler kann damit als Lösung der Bewegungsgleichung mit dem Residuum als Belastungsfunktion interpretiert werden. Diese Feststellung ist von zentraler Bedeutung bei der Herleitung von Fehleridentitäten auf der Basis von Reziprozitätstheoremen der Elastodynamik, siehe Abschnitt 2.5 dieser Arbeit.

Differentialgleichung des Fehlers für die 7-Parameter-Formulierung

Für das gemischte Variationsproblem des 7-Parameter-Schalenmodells (1.84)

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \beta; \mathbf{w}) + \rho_0(\ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{w})_{\mathcal{B}_0} &= \mathcal{F}_u(\mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{w} \in W \\ b(\mathbf{u}, \gamma) + c(\beta, \gamma) &= 0 \quad \forall \gamma \in \Gamma \quad 0 \leq t \leq T \end{aligned}$$

und die entsprechende räumliche Diskretisierung (1.91)

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}_h, \beta_h; \mathbf{w}_h) + \rho_0(\ddot{\mathbf{u}}_h, \mathbf{w}_h)_{\mathcal{B}_0} &= \mathcal{F}_u(\mathbf{w}_h) \quad \forall \mathbf{w}_h \in W^h \\ b(\mathbf{u}_h; \gamma_h) + c(\beta_h, \gamma_h) &= 0 \quad \forall \gamma_h \in \Gamma^h \quad 0 \leq t \leq T \end{aligned}$$

ergibt sich das Residuum zu:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_u(\mathbf{w}) &= a(\mathbf{u}, \beta; \mathbf{w}) - a(\mathbf{u}_h, \beta_h; \mathbf{w}) + \rho_0(\ddot{\mathbf{e}}_S, \mathbf{w})_{\mathcal{B}_0} \quad \forall \mathbf{w}_h \in W^h \\ \mathcal{R}_\beta(\gamma) &= b(\mathbf{u}; \gamma) - b(\mathbf{u}_h; \gamma) + c(e_\beta, \gamma) \quad \forall \gamma \in \Gamma \quad 0 \leq t \leq T \end{aligned} \quad (2.14)$$

Hierin bezeichnet e_β den Fehler in den erweiterten Verzerrungen:

$$e_\beta = \beta - \beta_h \quad (2.15)$$

Für das gemischte Variationsproblem lautet die Galerkinorthogonalität damit:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_u(\mathbf{w}_h) &= 0 \quad \forall \mathbf{w}_h \in W^h \\ \mathcal{R}_\beta(\gamma) &= 0 \quad \forall \gamma_h \in \Gamma^h \end{aligned} \quad (2.16)$$

Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurde hier beim gemischten Variationsproblem die Rayleighdämpfung nicht berücksichtigt. Auch hier lässt sich das Residuum in analoger Weise zu (2.7) mit Hilfe von Sekantenformen linearisieren. Unter Verwendung der Sekantenform

$$b_S(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h; \mathbf{w}, \gamma) = \int_{s=0}^1 \frac{d}{d\epsilon} b(\boldsymbol{\xi}(s) + \epsilon \mathbf{w}; \gamma)|_{\epsilon=0} ds \quad (2.17)$$

$$= \int_{s=0}^1 \int_{\mathcal{B}_0} (\mathbf{F}^T(\boldsymbol{\xi}(s)) \cdot \text{Grad} \mathbf{w})^{sym} : \mathbb{C} : \tilde{\mathbf{E}}(\gamma) dV ds \quad (2.18)$$

mit $\boldsymbol{\xi}(s) = \mathbf{u}_h + s \mathbf{e}_S$ lässt sich die Differenz $a(\mathbf{u}, \beta; \mathbf{w}) - a(\mathbf{u}_h, \beta_h; \mathbf{w})$ darstellen als

$$a(\mathbf{u}, \beta; \mathbf{w}) - a(\mathbf{u}_h, \beta_h; \mathbf{w}) = a_S(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h; \mathbf{e}_S, \mathbf{w}) + b_S(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h; \mathbf{w}, e_\beta), \quad (2.19)$$

mit der bereits in Gleichung (2.6) definierten Sekantenform $a_S(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h; \cdot, \cdot)$. Für die schwache Form des Residuums folgt dann:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_u(\mathbf{w}) &= a_S(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h; \mathbf{e}_S, \mathbf{w}) + b_S(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h; \mathbf{w}, e_\beta) + \rho_0(\ddot{\mathbf{e}}_S, \mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{w} \in W \\ \mathcal{R}_\beta(\gamma) &= b_S(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h; \mathbf{e}_S, \gamma) + c(e_\beta, \gamma) \quad \forall \gamma \in \Gamma \quad 0 \leq t \leq T\end{aligned}\quad (2.20)$$

Da auch diese Darstellung die unbekannte exakte Lösung (\mathbf{u}, β) beinhaltet, wird nun wiederum auf die entsprechenden Tangentenformen in der numerischen Lösung (\mathbf{u}_h, β_h) übergegangen. Unter Verwendung der Tangentenform

$$b_T(\mathbf{u}_h; \mathbf{w}, \gamma) = b_S(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h; \mathbf{w}, \gamma) = \int_{\mathcal{B}_0} (\mathbf{F}^T(\mathbf{u}_h) \cdot \text{Grad} \mathbf{w})^{sym} : \mathbb{C} : \tilde{\mathbf{E}}(\gamma) dV. \quad (2.21)$$

ergibt sich die folgende linearisierte Form des Residuums:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_u(\mathbf{w}) &= a_T(\mathbf{u}_h; \mathbf{e}_S, \mathbf{w}) + b_T(\mathbf{u}_h; \mathbf{w}, e_\beta) + \rho_0(\ddot{\mathbf{e}}_S, \mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{w} \in W \\ \mathcal{R}_\beta(\gamma) &= b_T(\mathbf{u}_h; \mathbf{e}_S, \gamma) + c(e_\beta, \gamma) \quad \forall \gamma \in \Gamma \quad 0 \leq t \leq T\end{aligned}\quad (2.22)$$

Gleichung (2.22) entspricht der linearisierten schwachen Form der Differentialgleichungen der räumlichen Diskretisierungsfehler (\mathbf{e}_S, e_β) .

Im Grenzfall linearer Problemstellungen gilt:

$$a(\mathbf{e}_S, \mathbf{w}) = a_T(\mathbf{0}; \mathbf{e}_S, \mathbf{w}) \quad \text{und} \quad b(e_S, \gamma) = b_T(\mathbf{0}; \mathbf{e}_S, \gamma) \quad (2.23)$$

Die nachfolgenden Fehlerdarstellungen lassen sich folglich in einfacher Weise an lineare Probleme anpassen.

2.3 Das duale Problem

Für die Darstellung des räumlichen Diskretisierungsfehlers in einer beliebigen Zielgröße wird das sogenannte duale bzw. adjungierte Problem für die reine Verschiebungsformulierung sowie die gemischte 7-Parameter-Formulierung eingeführt. Hierbei ergeben sich jeweils zwei Möglichkeiten, wie das zur Fehlerdifferentialgleichung duale Problem aus einer zeitlichen Variationsformulierung der schwachen Form der Differentialgleichung des Fehlers abgeleitet werden kann. Die Herleitung kann einerseits auf der Basis des Prinzips der virtuellen Verschiebungen oder andererseits auf der Basis des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten erfolgen. Bei der Verwendung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen wird die Verschiebung des dualen Problems als Testfunktion für die Differentialgleichung des räumlichen Diskretisierungsfehlers eingeführt, wohingegen bei der Herleitung des dualen Problems auf der Basis des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten die Geschwindigkeiten des dualen Problems als Testfunktion verwendet werden.

Reine Verschiebungsformulierung - Wichtung mit den Verschiebungen des dualen Problems

Ausgangspunkt für die Ableitung des dualen Problems für die reine Verschiebungsformulierung ist die zeitliche Variationsformulierung der räumlich schwachen Form der Differentialgleichung des Fehlers (2.7). Als Testfunktion wird die exakte Lösung $\mathbf{z} = \mathbf{z}(\mathbf{x}, t) \in W$ des noch zu definierenden dualen Problems eingeführt:

$$\int_0^{t_n} \rho_0(\ddot{\mathbf{e}}_S, \mathbf{z})_{\mathcal{B}_0} + c_m \rho_0(\dot{\mathbf{e}}_S, \mathbf{z})_{\mathcal{B}_0} + c_k a_T(\mathbf{0}; \dot{\mathbf{e}}_S, \mathbf{z}) + a_T(\mathbf{u}_h; \mathbf{e}, \mathbf{z}) dt = \int_0^{t_n} \mathcal{R}_u(\mathbf{z}) dt \quad (2.24)$$

Zur Vertauschung von Test- und Ansatzfunktionen wird Gleichung (2.24) zweimal partiell bezüglich der Zeit integriert:

$$\begin{aligned} \int_0^{t_n} \mathcal{R}_u(\mathbf{z}) dt &= [\rho_0(\dot{\mathbf{e}}_S, \mathbf{z})_{\mathcal{B}_0} - \rho_0(\mathbf{e}_S, \dot{\mathbf{z}})_{\mathcal{B}_0} + c_m \rho_0(\mathbf{e}_S, \mathbf{z})_{\mathcal{B}_0} + c_k a_T(\mathbf{0}; \mathbf{e}_S, \mathbf{z})]_0^{t_n} \quad (2.25) \\ &+ \int_0^{t_n} \underbrace{\rho_0(\ddot{\mathbf{z}}, \mathbf{e}_S)_{\mathcal{B}_0} - c_m \rho_0(\dot{\mathbf{z}}, \mathbf{e}_S)_{\mathcal{B}_0} - c_k a_T^*(\mathbf{0}; \dot{\mathbf{z}}, \mathbf{e}_S) + a_T^*(\mathbf{u}_h; \mathbf{z}, \mathbf{e}_S)}_{\mathcal{F}_z(\mathbf{e}_S)} dt \end{aligned}$$

Hierin ist $a_T^*(\mathbf{u}_h; \mathbf{z}, \mathbf{e}_S)$ die zu $a_T(\mathbf{u}_h; \mathbf{e}_S, \mathbf{z})$ adjungierte Bilinearform für gegebenes \mathbf{u}_h , wobei gilt:

$$a_T^*(\mathbf{u}_h; \mathbf{z}, \mathbf{e}_S) = a_T(\mathbf{u}_h; \mathbf{e}_S, \mathbf{z}) \quad (2.26)$$

Für die im Rahmen dieser Arbeit behandelten Cauchy-elastischen Materialien gilt zusätzlich die Symmetrie

$$a_T^*(\mathbf{u}_h; \mathbf{z}, \mathbf{e}_S) = a_T(\mathbf{u}_h; \mathbf{z}, \mathbf{e}_S), \quad (2.27)$$

d.h. der durch a_T definierte Differentialoperator ist selbstadjungiert, siehe LARSSON ET AL. [67].

Das Zeitintegral auf der rechten Seite von Gleichung (2.25) definiert die räumlich schwache Formulierung des dualen Problems, welches hier mit dem Fehler \mathbf{e}_S des primalen Problems getestet wird. Das duale Problem stellt ein Rückwärtsproblem in der Zeit dar, da in Gleichung (2.25) „Anfangsbedingungen“ für \mathbf{z} und $\dot{\mathbf{z}}$ zum Zeitpunkt t_n anzugeben sind.

Wegen $\mathbf{e}_S \in W$ lässt sich das duale Problem auch in allgemeiner Form mit einer beliebigen räumlichen Testfunktion $\mathbf{w} \in W$ angeben:

$$\begin{aligned} \rho_0(\ddot{\mathbf{z}}, \mathbf{w})_{\mathcal{B}_0} - c_m \rho_0(\dot{\mathbf{z}}, \mathbf{w})_{\mathcal{B}_0} - c_k a_T^*(\mathbf{0}; \dot{\mathbf{z}}, \mathbf{w}) + a_T^*(\mathbf{u}_h; \mathbf{z}, \mathbf{w}) &= \mathcal{F}_z(\mathbf{w}) \quad (2.28) \\ \forall \mathbf{w} \in W \quad 0 \leq t \leq t_n \end{aligned}$$

Die Anfangsbedingungen sowie die Belastung des dualen Problems $\mathcal{F}_z(\mathbf{w})$ legen die gewählte Zielfehlergröße fest und werden im folgenden Abschnitt weiter spezifiziert.

Mit der Hilfe der Transformation

$$t^* = t_n - t \rightsquigarrow \frac{d}{dt} = -\frac{d}{dt^*} \quad (2.29)$$

lässt sich das duale Problem analog zum primalen Problem darstellen

$$\begin{aligned} \rho_0(\mathbf{z}'', \mathbf{w})_{\mathcal{B}_0} + c_m \rho_0(\mathbf{z}', \mathbf{w})_{\mathcal{B}_0} + c_k a_T^*(\mathbf{0}; \mathbf{z}', \mathbf{w}) + a_T^*(\mathbf{u}_h; \mathbf{z}, \mathbf{w}) = \mathcal{F}_z(\mathbf{w}) \\ \forall \mathbf{w} \in W \quad 0 \leq t^* \leq t_n, \end{aligned} \quad (2.30)$$

mit $(\cdot)' = \frac{d(\cdot)}{dt^*}$.

Die Gleichungen (2.25) und (2.28) ergeben die Integralidentität:

$$\begin{aligned} & [\rho_0(\dot{\mathbf{e}}_S, \mathbf{z})_{\mathcal{B}_0} - \rho_0(\mathbf{e}_S, \dot{\mathbf{z}})_{\mathcal{B}_0} + c_m \rho_0(\mathbf{e}_S, \mathbf{z})_{\mathcal{B}_0} + c_k a_T(\mathbf{0}; \mathbf{e}_S, \mathbf{z})]_0 + \int_0^{t_n} \mathcal{R}_u(\mathbf{z}) dt \quad (2.31) \\ & = [\rho_0(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{e}}_S)_{\mathcal{B}_0} - \rho_0(\dot{\mathbf{z}}, \mathbf{e}_S)_{\mathcal{B}_0} + c_m \rho_0(\mathbf{z}, \mathbf{e}_S)_{\mathcal{B}_0} + c_k a_T^*(\mathbf{0}; \mathbf{z}, \mathbf{e}_S)]^{t_n} + \int_0^{t_n} \mathcal{F}_z(\mathbf{e}_S) dt \end{aligned}$$

Reine Verschiebungsformulierung – Wichtung mit den Geschwindigkeiten des dualen Problems

Einen weiteren Zugang zur Herleitung des dualen Problems bietet die Wichtung der Fehlergleichung mit der Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{z}}(\mathbf{x}, t) \in W$ des dualen Problems:

$$\int_0^{t_n} \rho_0(\ddot{\mathbf{e}}_S, \dot{\mathbf{z}})_{\mathcal{B}_0} + c_m \rho_0(\dot{\mathbf{e}}_S, \dot{\mathbf{z}})_{\mathcal{B}_0} + c_k a_T(\mathbf{0}; \dot{\mathbf{e}}_S, \dot{\mathbf{z}}) + a_T(\mathbf{u}_h; \mathbf{e}, \dot{\mathbf{z}}) dt = \int_0^{t_n} \mathcal{R}_u(\dot{\mathbf{z}}) dt \quad (2.32)$$

Da hier zur Vertauschung von Ansatz- und Testfunktion nur einmal bezüglich der Zeit integriert werden muss, ergeben sich andere Anfangsbedingungen für das duale Problem:

$$\begin{aligned} \int_0^{t_n} \mathcal{R}_u(\dot{\mathbf{z}}) dt &= [\rho_0(\dot{\mathbf{e}}_S, \dot{\mathbf{z}})_{\mathcal{B}_0} + a_T^*(\mathbf{u}_h; \mathbf{z}, \mathbf{e}_S)]_0^{t_n} \\ &- \int_0^{t_n} (\rho_0(\ddot{\mathbf{z}}, \dot{\mathbf{e}}_S)_{\mathcal{B}_0} - c_m \rho_0(\dot{\mathbf{z}}, \dot{\mathbf{e}}_S)_{\mathcal{B}_0} - c_k a_T^*(\mathbf{0}; \dot{\mathbf{z}}, \dot{\mathbf{e}}_S) + a_T^*(\mathbf{u}_h; \mathbf{z}, \dot{\mathbf{e}}_S)) dt \end{aligned} \quad (2.33)$$

Hieraus lässt sich zusammen mit Gleichung (2.28) die zu (2.31) äquivalente Identität angeben:

$$\begin{aligned}
 & [\rho_0(\dot{\mathbf{e}}_S, \dot{\mathbf{z}})_{\mathcal{B}_0} + a_T(\mathbf{u}_h; \mathbf{e}_S, \mathbf{z})]_0 + \int_0^{t_n} \mathcal{R}_u(\dot{\mathbf{z}}) dt & (2.34) \\
 & = [\rho_0(\dot{\mathbf{z}}, \dot{\mathbf{e}}_S)_{\mathcal{B}_0} + a_T^*(\mathbf{u}_h; \mathbf{z}, \mathbf{e}_S)]^{t_n} - \int_0^{t_n} \mathcal{F}_z(\dot{\mathbf{e}}_S) dt
 \end{aligned}$$

Die Gleichungen (2.31) und (2.34) sind vollständig gleichwertig und unterscheiden sich im Wesentlichen durch ihre zeitlichen Randterme zu den Zeitpunkten $t = 0$ und $t = t_n$.

7-Parameter-Formulierung – Wichtung mit den Verschiebungen des dualen Problems

In ähnlicher Weise wie für die reine Verschiebungsformulierung lässt sich das duale Problem für das gemischte Variationsproblem (1.84) bestimmen. Hierfür wird die duale Lösung $(\mathbf{z}(\mathbf{x}, t), \beta_z(\mathbf{x}, t))$ als Wichtungsfunktion für die linearisierte schwache Form des Residuums eingeführt. Im Sinne der Übersichtlichkeit wird nachfolgend wiederum auf die Dämpfungsterme bei der Herleitung des dualen Problems verzichtet:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{t_n} \mathcal{R}_u(\mathbf{z}) + \mathcal{R}_\beta(\beta_z) dt = & (2.35) \\
 & \int_0^{t_n} a_T(\mathbf{u}_h; \mathbf{e}_S, \mathbf{z}) + b_T(\mathbf{u}_h; \mathbf{z}, e_\beta) + \rho_0(\ddot{\mathbf{e}}_S, \mathbf{z})_{\mathcal{B}_0} + b_T(\mathbf{u}_h; \mathbf{e}_S, \beta_z) + c(e_\beta, \beta_z) dt
 \end{aligned}$$

Zweimalige partielle Integration in der Zeit liefert:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{t_n} \mathcal{R}_u(\mathbf{z}) + \mathcal{R}_\beta(\beta_z) dt = [\rho_0(\dot{\mathbf{e}}_S, \mathbf{z})_{\mathcal{B}_0} - \rho_0(\mathbf{e}_S, \dot{\mathbf{z}})_{\mathcal{B}_0}]_0^{t_n} + & (2.36) \\
 & \int_0^{t_n} a_T^*(\mathbf{u}_h; \mathbf{z}, \mathbf{e}_S) + b_T(\mathbf{u}_h; \mathbf{z}, e_\beta) + \rho_0(\ddot{\mathbf{z}}, \mathbf{e}_S)_{\mathcal{B}_0} + b_T(\mathbf{u}_h; \mathbf{e}_S, \beta_z) + c^*(e_\beta, \beta_z) dt
 \end{aligned}$$

Das Zeitintegral auf der rechten Seite definiert hier das mit den Diskretisierungsfehlern (\mathbf{e}_S, e_β) gewichtete duale Problem. Die räumliche Variationsformulierung des dualen Problems für das gemischte Problem lautet damit allgemein:

$$\begin{aligned}
 \rho_0(\ddot{\mathbf{z}}, \mathbf{w})_{\mathcal{B}_0} + a_T^*(\mathbf{u}_h; \mathbf{z}, \mathbf{w}) + b_T(\mathbf{u}_h; \mathbf{w}, \beta_z) & = \mathcal{F}_z(\mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{w} \in W & (2.37) \\
 b_T(\mathbf{u}_h; \mathbf{z}, \gamma) + c^*(\beta_z, \gamma) & = 0 \quad \forall \gamma \in \Gamma \quad 0 \leq t \leq t_n
 \end{aligned}$$

mit der symmetrischen adjungierten Form

$$c^*(\beta, \gamma) = c(\gamma, \beta) = c(\beta, \gamma) \quad (2.38)$$

Entsprechend ergibt sich die zu (2.31) äquivalente erste Identität für das gemischte Variationsproblem zu

$$\begin{aligned} & [\rho_0(\dot{\mathbf{e}}_S, \mathbf{z})_{\mathcal{B}_0} - \rho_0(\mathbf{e}_S, \dot{\mathbf{z}})_{\mathcal{B}_0}]_0 + \int_0^{t_n} \mathcal{R}_u(\mathbf{z}) + \mathcal{R}_\beta(\beta_z) dt \\ &= [\rho_0(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{e}}_S)_{\mathcal{B}_0} - \rho_0(\dot{\mathbf{z}}, \mathbf{e}_S)_{\mathcal{B}_0}]^{t_n} + \int_0^{t_n} \mathcal{F}_z(\mathbf{e}_S) dt. \end{aligned} \quad (2.39)$$

7-Parameter-Formulierung – Wichtung mit den Geschwindigkeiten des dualen Problems

Bei der Wichtung der schwachen Form des räumlichen Diskretisierungsfehlers mit den Geschwindigkeiten $(\dot{\mathbf{z}}, \dot{\beta}_z)$ des dualen Problems ergibt sich analog zu Gleichung (2.34) eine zweite Fehleridentität für die 7-Parameter-Formulierung:

$$\begin{aligned} & [\rho_0(\dot{\mathbf{e}}_S, \dot{\mathbf{z}})_{\mathcal{B}_0} + a_T(\mathbf{u}_h, \beta_h; \mathbf{e}_S, \mathbf{z}) + b_T(\mathbf{u}_h; \mathbf{z}, e_\beta) + b_T(\mathbf{u}_h; \mathbf{e}_S, \beta_z) + c(e_\beta, \beta_z)]_0 \\ &+ \int_0^{t_n} \mathcal{R}_u(\dot{\mathbf{z}}) + \mathcal{R}_\beta(\dot{\beta}_z) dt \\ &= [\rho_0(\dot{\mathbf{e}}_S, \dot{\mathbf{z}})_{\mathcal{B}_0} + a_T(\mathbf{u}_h, \beta_h; \mathbf{e}_S, \mathbf{z}) + b_T(\mathbf{u}_h; \mathbf{z}, e_\beta) + b_T(\mathbf{u}_h; \mathbf{e}_S, \beta_z) + c(e_\beta, \beta_z)]^{t_n} \\ &- \int_0^{t_n} \mathcal{F}_z(\dot{\mathbf{e}}_S) dt \end{aligned} \quad (2.40)$$

Die Randterme in Gleichung (2.40) werden nun zur Vereinfachung noch zu der modifizierten Tangentenform

$$\begin{aligned} \bar{a}_T(\mathbf{u}_h, \beta_h; \mathbf{e}_S, e_\beta, \mathbf{z}, \beta_z) &= a_T(\mathbf{u}_h; \mathbf{e}_S, \mathbf{z}) + b_T(\mathbf{u}_h; \mathbf{z}, e_\beta) + b_T(\mathbf{u}_h; \mathbf{e}_S, \beta_z) + c(e_\beta, \beta_z) \\ &= \int_{\mathcal{B}_0} (\mathbf{E}(\mathbf{u}_h) + \tilde{\mathbf{E}}(\beta_h)) : \mathbb{C} : (\text{Grad}^T \mathbf{e}_S \cdot \text{Grad} \mathbf{z})^{sym} dV \\ &+ \int_{\mathcal{B}_0} (\mathbf{F}^T(\mathbf{u}_h) \cdot \text{Grad} \mathbf{e}_S + \tilde{\mathbf{E}}(e_\beta))^{sym} : \mathbb{C} : (\mathbf{F}^T(\mathbf{u}_h) \cdot \text{Grad} \mathbf{z} + \tilde{\mathbf{E}}(\beta_z))^{sym} dV \end{aligned} \quad (2.41)$$

zusammengefasst. Definiert man nun noch die hierzu adjungierte Tangentenform

$$\bar{a}_T^*(\mathbf{u}_h, \beta_h; \mathbf{z}, \beta_z, \mathbf{e}_S, e_\beta) = \bar{a}_T(\mathbf{u}_h, \beta_h; \mathbf{e}_S, e_\beta, \mathbf{z}, \beta_z), \quad (2.42)$$

dann lässt sich Gleichung (2.40) in die zur 2. Identität (2.34) äquivalente Form

$$\begin{aligned}
[\rho_0(\dot{\mathbf{e}}_S, \dot{\mathbf{z}})_{\mathcal{B}_0} + \bar{a}_T(\mathbf{u}_h, \beta_h; \mathbf{e}_S, e_\beta, \mathbf{z}, \beta_z)]_0 + \int_0^{t_n} \mathcal{R}_u(\dot{\mathbf{z}}) + \mathcal{R}_\beta(\dot{\beta}_z) dt &= \\
[\rho_0(\dot{\mathbf{e}}_S, \dot{\mathbf{z}})_{\mathcal{B}_0} + \bar{a}_T^*(\mathbf{u}_h, \beta_h; \mathbf{z}, \beta_z, \mathbf{e}_S, e_\beta)]^{t_n} - \int_0^{t_n} \mathcal{F}_z(\dot{\mathbf{e}}_S) dt &
\end{aligned} \tag{2.43}$$

bringen.

Die Fehlerdarstellungen (2.39) und (2.43) für das gemischte Variationsproblem der 7-Parameter-Schale lassen sich somit auch direkt aus den entsprechenden Identitäten (2.31) und (2.34) der reinen Verschiebungsformulierung ableiten, wenn dort die Tangentenformen durch die modifizierten Formen (2.41) und (2.42) ersetzt und das um $\mathcal{R}_\beta(\beta_z)$ erweiterte Residuum

$$\bar{\mathcal{R}}_u(\mathbf{z}) = \mathcal{R}_u(\mathbf{z}) + \mathcal{R}_\beta(\beta_z) \tag{2.44}$$

verwendet wird. Die nachfolgenden Ausführungen beschränken sich deshalb aus Gründen der Übersichtlichkeit zumeist auf die Standardformulierung.

Die Identitäten (2.31), (2.34), (2.39), und (2.43) wurden hier so angegeben, dass auf beiden Seiten der Gleichungen jeweils Ansatz- und Testfunktion vertauscht sind. Entsprechend wird im Nachfolgenden die Seite der Gleichung mit der Lösungsvariablen \mathbf{z} zur Spezifizierung des dualen Problems herangezogen, wohingegen die Seite mit der Lösungsfunktion \mathbf{e}_S dann für die Fehlerdarstellung bzw. Fehlerschätzung verwendet wird.

Die Gleichungen (2.31), (2.34), (2.39) und (2.43) dienen als Grundlage für die Darstellung des räumlichen Diskretisierungsfehlers in einem Zielfunktional, welche dann im Rahmen einer Fehlerschätzung numerisch ausgewertet werden kann. Bei der numerischen Auswertung ist zu beachten, dass die auf dem Netz des primalen Problems berechnete diskrete duale Lösung \mathbf{z}_h aufgrund der Galerkinorthogonalität (2.2) nicht als Testfunktion geeignet ist. Soll das duale Problem dennoch auf der räumlichen Diskretisierung des primalen Problems berechnet werden, was im Sinne einer algorithmischen Effizienz sinnvoll ist, kann das kontinuierliche duale Problem durch den räumlichen Diskretisierungsfehler des dualen Problems $\mathbf{e}_z = \mathbf{z} - \mathbf{z}_h$ ersetzt werden. Dies entspricht der Subtraktion der Galerkinorthogonalität $\mathcal{R}_u(\mathbf{z}_h) = 0$ des primalen Problems in Gleichung (2.24) bzw. von $\mathcal{R}_u(\dot{\mathbf{z}}_h) = 0$ in Gleichung (2.32):

$$\int_0^{t_n} \mathcal{R}_u(\mathbf{z}) dt = \int_0^{t_n} \mathcal{R}_u(\underbrace{\mathbf{z} - \mathbf{z}_h}_{\mathbf{e}_z}) dt \quad \text{bzw.} \quad \int_0^{t_n} \mathcal{R}_u(\dot{\mathbf{z}}) dt = \int_0^{t_n} \mathcal{R}_u(\underbrace{\dot{\mathbf{z}} - \dot{\mathbf{z}}_h}_{\dot{\mathbf{e}}_z}) dt \tag{2.45}$$

2.4 Fehlermaße in beliebigen Zielgrößen

Mit den in den vorangegangenen Abschnitten bereitgestellten Hilfsmitteln ergeben sich verschiedene Möglichkeiten, den räumlichen Diskretisierungsfehler in einer beliebigen Zielgröße darzustellen. Hierfür wird zunächst eine Zielgröße $Q(\mathbf{u})$ definiert, in welcher der Fehler kontrolliert werden soll. $Q(\mathbf{u})$ kann dabei ein beliebiges lineares oder nicht-lineares Zielfunktional sein.

Für die Definition des Fehlermaßes stehen dann zwei Möglichkeiten zur Verfügung. Es kann einerseits die Differenz der Zielgrößen des kontinuierlichen und des diskreten Problems

$$E(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h) = Q(\mathbf{u}) - Q(\mathbf{u}_h), \quad (\text{„Fehler in der Größe“}) \quad (2.46)$$

oder die Zielgröße des räumlichen Diskretisierungsfehlers \mathbf{e}_S

$$E(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h) = Q(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) = Q(\mathbf{e}_S) \quad (\text{„Größe des Fehlers“}) \quad (2.47)$$

betrachtet werden.

Eine Unterscheidung der beiden Fälle ist nur für den Fall nichtlinearer Fehlermaße, wie z.B. lokaler Spannungsgrößen bei nichtlinearem Materialgesetz, notwendig. Dann ist für die Fehlerdarstellung auch eine geeignete Linearisierung der Fehlergröße vorzunehmen. Hierfür können ebenfalls die Sekanten und Tangentenformen verwendet werden [13, 14].

Im Nachfolgenden wird der Zusammenhang zwischen dem Fehlermaß gemäß Gleichung (2.46) bzw. (2.47) und den im vorangegangenen Abschnitt dargestellten Fehleridentitäten hergestellt. Da sich die Identitäten für das gemischte Variationsproblem nur geringfügig von denen für die reine Verschiebungsmethode unterscheiden, wird im Folgenden auf die Darstellung für das gemischte Problem verzichtet.

Bei der Wichtung des Residuums des primalen Problems mit der Verschiebung des dualen Problems führt die rechte Seite von (2.25) zusammen mit der Definition eines Fehlermaßes gemäß den Gleichungen (2.46) und (2.47) auf folgende Bedingung:

$$\begin{aligned} E(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h) &= [\rho_0(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{e}}_S)_{\mathcal{B}_0} - \rho_0(\dot{\mathbf{z}}, \mathbf{e}_S)_{\mathcal{B}_0} + c_m \rho_0(\mathbf{z}, \mathbf{e}_S)_{\mathcal{B}_0} + c_k a_T^*(\mathbf{0}; \mathbf{z}, \mathbf{e}_S)]^{t_n} \\ &+ \int_0^{t_n} \mathcal{F}_z(\mathbf{e}_S) dt \end{aligned} \quad (2.48)$$

Mit Gleichung (2.48) lassen sich die Anfangsbedingungen des dualen Problems bzw. deren Belastungsfunktion entsprechend der gesuchten Fehlergröße definieren.

Die linke Seite der Identität (2.31) führt dann bei der Verwendung des mit (2.48) spezifizierten dualen Problems auf die Fehlerdarstellung:

$$\begin{aligned} E(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h) &= [\rho_0(\dot{\mathbf{e}}_S, \mathbf{z})_{\mathcal{B}_0} - \rho_0(\mathbf{e}_S, \dot{\mathbf{z}})_{\mathcal{B}_0} + c_m \rho_0(\mathbf{e}_S, \mathbf{z})_{\mathcal{B}_0} + c_k a_T(\mathbf{0}; \mathbf{e}_S, \mathbf{z})]_0 \\ &+ \int_0^{t_n} \mathcal{R}_u(\mathbf{z}) dt \end{aligned} \quad (2.49)$$

Bei Problemen mit exakt erfüllten Anfangsbedingungen, d.h. $\mathbf{e}_S(t=0) = \mathbf{0}$ und $\dot{\mathbf{e}}_S(t=0) = \mathbf{0}$, ergibt sich die Fehlergröße somit alleine aus dem Zeitintegral des mit der dualen Lösung gewichteten Residuums.

Bei der Verwendung der Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{z}}$ des dualen Problems als Testfunktion lässt sich aus der linken Seite der zweiten Identität (2.34) analog zu Gleichung (2.48) die folgende Bestimmungsgleichung für das duale Problem ableiten:

$$E(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h) = [\rho_0(\dot{\mathbf{z}}, \dot{\mathbf{e}}_S)_{\mathcal{B}_0} + a_T^*(\mathbf{u}_h; \mathbf{z}, \mathbf{e}_S)]^{t_n} - \int_0^{t_n} \mathcal{F}_z(\dot{\mathbf{e}}_S) dt \quad (2.50)$$

Die rechte Seite von Gleichung (2.34) liefert dann wiederum zusammen mit dem dualen Problem gemäß Gleichung (2.50) die Fehlerdarstellung:

$$E(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h) = [\rho_0(\dot{\mathbf{e}}_S, \dot{\mathbf{z}})_{\mathcal{B}_0} + a_T(\mathbf{u}_h; \mathbf{e}_S, \mathbf{z})]_0 + \int_0^{t_n} \mathcal{R}_u(\dot{\mathbf{z}}) dt \quad (2.51)$$

In den Gleichungen (2.49) und (2.51) beschreibt das duale Problem offensichtlich den Transport des räumlichen Diskretisierungsfehlers über die Zeit. Formal unterscheidet sich das duale Problem (2.28) nur durch die negativen Vorzeichen der Dämpfungsterme vom primalen Problem. Hieraus folgt, dass das duale Problem im Falle eines gedämpften primalen Problems mit der Zeit t aufklingt. Bei der Interpretation des dualen Problems als Einflussfunktion im Raum und in der Zeit wird deutlich, dass bei gedämpften Problemen der Einflussbereich in der Zeit beschränkt ist. Folglich wird auch der Fehler in der Zeit nur über einen beschränkten Zeitraum transportiert, was den positiven Einfluss der Dämpfung auf die Fehlerfortpflanzung in der Zeit dokumentiert.

Mit den Gleichungen (2.48) – (2.51) steht nun ein allgemeines Konzept zur Verfügung, mit dem sich der Fehler in einem bestimmten Zielfunktional darstellen lässt. Dabei ergeben sich teilweise mehrere zunächst gleichwertige Möglichkeiten, das duale Problem für eine bestimmte Zielfehlergröße zu bestimmen, von denen dann die jeweils für die numerische Umsetzung günstigste Formulierung ausgewählt werden kann. Die notwendige Spezifizierung des dualen Problems hängt natürlich zunächst einmal davon ab, ob die Verschiebung \mathbf{z} oder die Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{z}}$ als Wichtungsfunktion für das Residuum verwendet wird, also ob die Fehlerdarstellung (2.49) oder (2.51) verwendet werden soll. Dann wird die Zielfehlergröße in den Gleichungen (2.48) bzw. (2.50) entweder durch die Belastung oder die Anfangsbedingungen des dualen Problems festgelegt. Daraus ergeben sich wiederum zwei generelle Möglichkeiten zur weiteren Spezifizierung des dualen Problems:

- a) **Homogenes duales Problem ($\mathcal{F}_z(\mathbf{w}) = 0$) mit inhomogenen Anfangsbedingungen ($\mathbf{z}(t_n) \neq \mathbf{0}$ und $\dot{\mathbf{z}}(t_n) \neq \mathbf{0}$).** Diese Möglichkeit wird gewählt, wenn der Fehler zu einem bestimmten Zeitpunkt t_n bestimmt werden soll. Die notwendigen Anfangsbedingungen für das duale Problem lassen sich dann in den

Gleichungen (2.49) und (2.51) direkt aus den Randtermen zum Zeitpunkt t_n ableiten.

- b) **Inhomogenes duales Problem ($\mathcal{F}_z(\mathbf{w}) \neq 0$) mit homogenen Anfangsbedingungen ($\mathbf{z}(t_n) = \mathbf{0}$ und $\dot{\mathbf{z}}(t_n) = \mathbf{0}$).** Diese Möglichkeit ist beispielsweise dann sinnvoll, wenn der mittlere Fehler über ein beschränktes Zeitintervall bestimmt werden soll. Das gesuchte Fehlermaß wird dann über das Zeitintegral der Belastung des dualen Problems festgelegt und ist nicht an den festen Zeitpunkt t_n gebunden. Desweiteren kann so eine eventuell notwendige Regularisierung des dualen Problems, z.B. zur Vermeidung von Singularitäten, eingeführt werden.

In den nachfolgenden Abschnitten werden exemplarisch für einige bestimmte Zielfunktionale die verschiedenen Möglichkeiten zur Definition des dualen Problems dargelegt. Das hier vorgestellte generelle Konzept ist dann in analoger Weise auf beliebige andere Zielfunktionale erweiterbar.

2.4.1 Fehler in Punktgrößen zum Zeitpunkt t_n

Nachfolgend werden Darstellungen des Diskretisierungsfehlers in Punktgrößen wie Verschiebungen $\mathbf{u}(\mathbf{x}_i, t_n)$ und Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_i, t_n)$ an einem Punkt \mathbf{x}_i zum Zeitpunkt t_n behandelt.

Verschiebungen

Es soll die Verschiebung in Richtung j in einem Punkt \mathbf{x}_i zum Zeitpunkt t_n kontrolliert werden. Aufgrund der Filtereigenschaften der Dirac-Distribution lässt sich die Zielgröße wie folgt definieren:

$$Q(\mathbf{u}) = \int_0^{t_n} \int_{\mathcal{B}_0} (\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\delta}_j(\mathbf{x}_i)) dV \cdot \delta_t(t_n) dt = \int_0^{t_n} (\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \boldsymbol{\delta}_j(\mathbf{x}_i))_{\mathcal{B}_0} \cdot \delta_t(t_n) dt \quad (2.52)$$

Darin ist $\boldsymbol{\delta}_j(\mathbf{x}_i)$ die Dirac-Distribution an der Stelle \mathbf{x}_i in Richtung j und $\delta_t(t_n)$ die zeitliche Dirac-Distribution für die Zeit t_n .

Das Fehlermaß gemäß (2.46) ergibt sich dann zu:

$$\begin{aligned} E(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h) &= \int_0^{t_n} \underbrace{(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}_h(\mathbf{x}, t))}_{\mathbf{e}_S} \cdot \boldsymbol{\delta}_j(\mathbf{x}_i)_{\mathcal{B}_0} \cdot \delta_t(t_n) dt \\ &= \int_0^{t_n} (\mathbf{e}_S(t_n), \boldsymbol{\delta}_j(\mathbf{x}_i))_{\mathcal{B}_0} \cdot \delta_t(t_n) dt = (\mathbf{e}_S(t_n), \boldsymbol{\delta}_j(\mathbf{x}_i))_{\mathcal{B}_0} \end{aligned} \quad (2.53)$$

Zunächst wird das duale Problem bei Verwendung der **Verschiebung \mathbf{z} als Wichtungsfunktion** behandelt. Für homogene Anfangsbedingungen des dualen Problems folgt für die Belastungsfunktion $\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)$ des dualen Problems aus (2.48):

$$\int_0^{t_n} \mathcal{F}_z(\mathbf{e}_S) dt = \int_0^{t_n} (\mathbf{D}(\mathbf{x}, t), \mathbf{e}_S)_{\mathcal{B}_0} dt = \int_0^{t_n} (\boldsymbol{\delta}_j(\mathbf{x}_i) \cdot \delta_t(t_n), \mathbf{e}_S)_{\mathcal{B}_0} dt \quad (2.54)$$

$$\leadsto \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\delta}_j(\mathbf{x}_i) \cdot \delta_t(t_n)$$

Die Belastung des dualen Problems besteht damit aus einem Dirac-Impuls an der Stelle \mathbf{x}_i zum Zeitpunkt t_n . Das duale Problem besitzt somit eine Singularität im Raum und in der Zeit, was dazu führt, dass bei der numerischen Auswertung der Fehlergleichung (2.49) mit finiten Elementen eine Regularisierung der Belastung notwendig ist. Dabei ist die zeitliche Singularität zum Zeitpunkt t_n insofern unkritisch, als es sich um einen Sprung in den Geschwindigkeiten handelt, der wie eine Anfangsbedingung für $\dot{\mathbf{z}}(t_n)$ behandelt werden kann. Der Sprung in der Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{z}}$ zum Zeitpunkt t_n lässt sich direkt aus der schwachen Form der Impulsbilanz zum Zeitpunkt t_n ableiten:

$$\rho_0(\dot{\mathbf{z}}(t_n^+), \mathbf{w})_{\mathcal{B}_0} - \rho_0(\dot{\mathbf{z}}(t_n^-), \mathbf{w})_{\mathcal{B}_0} = (\boldsymbol{\delta}_j(\mathbf{x}_i), \mathbf{w})_{\mathcal{B}_0} \quad \text{mit } \dot{\mathbf{z}}(t_n^+) = \mathbf{0} \quad (2.55)$$

Bei der Definition eines homogenen dualen Problems ergibt für $\mathbf{z}(t_n) = \mathbf{0}$ die entsprechende Anfangsgeschwindigkeit für das duale Problem auch direkt aus den Randtermen zum Zeitpunkt t_n in Gleichung (2.48):

$$-\rho_0(\dot{\mathbf{z}}, \mathbf{e}_S)_{\mathcal{B}_0} |^{t_n} = (\boldsymbol{\delta}_j(\mathbf{x}_i), \mathbf{e}_S)_{\mathcal{B}_0} \quad (2.56)$$

Bei Verwendung der **Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{z}}$ des dualen Problems** als Testfunktion lautet die notwendige Anfangsbedingung für die Verschiebungen $\mathbf{z}(t_n)$ bei $\dot{\mathbf{z}}(t_n) = \mathbf{0}$ gemäß Gleichung (2.50):

$$a_T^*(\mathbf{z}(t_n), \mathbf{e}_S(t_n)) = (\boldsymbol{\delta}_j(\mathbf{x}_i), \mathbf{e}_S)_{\mathcal{B}_0}, \quad (2.57)$$

was einem linearen statischen Problem in der bekannten diskreten Lösung $\mathbf{u}_h(t_n)$, bzw. einer konstanten Einzellast im Punkt \mathbf{x}_i für $t \geq t_n$ entspricht. In diesem Fall ist die Anfangsverschiebung \mathbf{z}_n gerade die Greensche Funktion, die in der linearen Elastizitätstheorie als Einflussfunktion für Punktverschiebungen verwendet wird, siehe z.B. HARTMANN [46].

Geschwindigkeiten

Nachfolgend werden die dualen Probleme zur Kontrolle der Geschwindigkeit in Richtung j in einem Punkt \mathbf{x}_i zum Zeitpunkt t_n betrachtet.

Für die Darstellung des Fehlers in Geschwindigkeiten wird die **Wichtung mit der Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{z}}$** des dualen Problems verwendet.

Die Zielgröße lässt sich analog zu der Punktverschiebung in Gleichung (2.52) definieren:

$$Q(\mathbf{u}) = \int_0^{t_n} \int_{\mathcal{B}_0} (\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\delta}_j(\mathbf{x}_i) dV) \cdot \delta_t(t_n) dt = \int_0^{t_n} (\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t), \boldsymbol{\delta}_j(\mathbf{x}_i))_{\mathcal{B}_0} \cdot \delta_t(t_n) dt \quad (2.58)$$

Und das Fehlermaß lautet analog zu (2.53):

$$\begin{aligned} E(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h) &= \int_0^{t_n} \underbrace{(\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) - \dot{\mathbf{u}}_h(\mathbf{x}, t))}_{\dot{\mathbf{e}}_S} \cdot \boldsymbol{\delta}_j(\mathbf{x}_i)_{\mathcal{B}_0} \cdot \delta_t(t_n) dt \\ &= \int_0^{t_n} (\dot{\mathbf{e}}_S, \boldsymbol{\delta}_j(\mathbf{x}_i))_{\mathcal{B}_0} \cdot \delta_t(t_n) dt = (\dot{\mathbf{e}}_S(t_n), \boldsymbol{\delta}_j(\mathbf{x}_i))_{\mathcal{B}_0} \end{aligned} \quad (2.59)$$

Für die Belastung des dualen Problems folgt bei der Verwendung homogener Anfangsbedingungen aus Gleichung (2.50) ebenfalls ein Dirac-Impuls zum Zeitpunkt t_n an der Stelle \mathbf{x}_i , jedoch in entgegengesetzter Richtung zur gesuchten Geschwindigkeit:

$$\begin{aligned} - \int_0^{t_n} \mathcal{F}_z(\dot{\mathbf{e}}_S) dt &= - \int_0^{t_n} (\mathbf{D}(\mathbf{x}, t), \dot{\mathbf{e}}_S)_{\mathcal{B}_0} dt = \int_0^{t_n} (\boldsymbol{\delta}_j(\mathbf{x}_i) \cdot \delta_t(t_n), \dot{\mathbf{e}}_S)_{\mathcal{B}_0} dt \\ &\rightsquigarrow \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = -\boldsymbol{\delta}_j(\mathbf{x}_i) \cdot \delta_t(t_n). \end{aligned} \quad (2.60)$$

Dieser Dirac-Impuls kann wiederum analog zu Gleichung (2.55) mit Hilfe der Impulsbilanz in eine äquivalente Anfangsbedingung für die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t_n umgerechnet werden:

$$\rho_0(\dot{\mathbf{z}}(t_n^+), \mathbf{w}(t_n))_{\mathcal{B}_0} - \rho_0(\dot{\mathbf{z}}(t_n^-), \mathbf{w}(t_n))_{\mathcal{B}_0} = -(\boldsymbol{\delta}_j(\mathbf{x}_i), \mathbf{w})_{\mathcal{B}_0} \quad \text{mit } \dot{\mathbf{z}}(t_n^+) = \mathbf{0} \quad (2.61)$$

Die entsprechende Anfangsgeschwindigkeit $\dot{\mathbf{z}}(t_n)$ für das homogene duale Problem folgt auch direkt aus den Anfangstermen in Gleichung (2.50), wenn dort die Anfangsverschiebung $\mathbf{z}(t_n) = \mathbf{0}$ gewählt wird:

$$\rho_0(\dot{\mathbf{z}}, \dot{\mathbf{e}}_S)_{\mathcal{B}_0} |^{t_n} = (\boldsymbol{\delta}_j(\mathbf{x}_i), \dot{\mathbf{e}}_S)_{\mathcal{B}_0} \quad (2.62)$$

2.4.2 Mittlerer Fehler in Punktgrößen im Zeitintervall $[t_a, t_b]$

Wird das inhomogene duale Problem mit homogenen Anfangsbedingungen als Testfunktion verwendet, kann auch der mittlere Fehler in Punktgrößen über ein Zeitintervall $[t_a, t_b]$ dargestellt werden.

Hier soll die mittlere Verschiebung in Richtung j in einem Punkt \mathbf{x}_i im Intervall $[t_a, t_b]$ kontrolliert werden. Dann lautet die Zielgröße:

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{u}) &= \frac{1}{t_b - t_a} \int_0^{t_n} \int_{\mathcal{B}_0} (\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\delta}_j(\mathbf{x}_i)) dV \cdot \Delta_t(t_a, t_b) dt \\ &= \frac{1}{t_b - t_a} \int_0^{t_n} (\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\delta}_j(\mathbf{x}_i))_{\mathcal{B}_0} \cdot \Delta_t(t_a, t_b) dt \end{aligned} \quad (2.63)$$

und das entsprechende Fehlermaß

$$\begin{aligned} E(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h) &= \frac{1}{t_b - t_a} \int_0^{t_n} \underbrace{(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}_h(\mathbf{x}, t))}_{\mathbf{e}_S} \cdot \boldsymbol{\delta}_j(\mathbf{x}_i)_{\mathcal{B}_0} \cdot \Delta_t(t_a, t_b) dt \\ &= \frac{1}{t_b - t_a} \int_0^{t_n} (\mathbf{e}_S, \boldsymbol{\delta}_j(\mathbf{x}_i))_{\mathcal{B}_0} \cdot \Delta_t(t_a, t_b) dt \end{aligned} \quad (2.64)$$

mit

$$\Delta_t(t_a, t_b) = \begin{cases} 1 & t \in [t_a, t_b] \\ 0 & t \notin [t_a, t_b]. \end{cases} \quad (2.65)$$

Bei der **Wichtung mit der Verschiebung \mathbf{z}** folgt aus Gleichung (2.48) für die Belastungsfunktion des dualen Problems eine im Zeitintervall $[t_a, t_b]$ konstante Einzellast im Punkt \mathbf{x}_i :

$$\begin{aligned} \int_0^{t_n} \mathcal{F}_z(\mathbf{e}_S) dt &= \int_0^{t_n} (\mathbf{D}(\mathbf{x}, t), \mathbf{e}_S)_{\mathcal{B}_0} dt = \int_0^{t_n} (\boldsymbol{\delta}_j(\mathbf{x}_i) \cdot \Delta_t(t_a, t_b), \mathbf{e}_S)_{\mathcal{B}_0} dt \\ &\rightsquigarrow \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{t_b - t_a} \boldsymbol{\delta}_j(\mathbf{x}_i) \cdot \Delta(t_a, t_b) \end{aligned} \quad (2.66)$$

Analog zum vorangegangenen Abschnitt führt bei der Verwendung der **Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{z}}$ des dualen Problems als Testfunktion** die Belastung

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{t_b - t_a} \boldsymbol{\delta}_j(\mathbf{x}_i) \cdot \Delta(t_a, t_b) \quad (2.67)$$

bei homogenen Anfangsbedingungen $\mathbf{z}(t_n) = \dot{\mathbf{z}}(t_n) = \mathbf{0}$ auf den mittleren Fehler in der Geschwindigkeit $\dot{e}_S^j(\mathbf{x}_i)$ im Zeitintervall $[t_a, t_b]$.

Der Vorteil der Betrachtung des Fehlers in beschränkten Zeitintervallen liegt in der einfacheren numerischen Umsetzung in Finite-Elemente-Programmen. Desweiteren kann die hier dargestellte zeitliche Verteilung der dualen Last als eine Regularisierung des Dirac-Impulses aus dem vorangegangenen Abschnitt angesehen werden, die zu einer höheren Glattheit der dualen Lösung in der Zeit führt.

2.4.3 Fehler in lokalen Verschiebungsgrößen

Analog zur Schätzung des mittleren Fehlers in bestimmten Zeitintervallen soll im Folgenden der mittlere Fehler in Teilgebieten untersucht werden. Dabei kann unter einem Teilgebiet ein Teilvolumen des Berechnungsgebietes, eine Teilfläche der Oberfläche oder auch eine Linie, beispielsweise entlang einer Kante eines Bauteils, verstanden werden.

Nachfolgend soll der mittlere Fehler der Verschiebungen in einem Teilgebiet \mathcal{B}_u in der Richtung j kontrolliert werden. Die Zielgröße zum Zeitpunkt t_n lässt sich dann darstellen als

$$Q(\mathbf{u}) = \frac{1}{|\mathcal{B}_u|} \int_0^{t_n} \int_{\mathcal{B}_0} (\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\lambda}_j^{\mathcal{B}_u}(\mathbf{x})) dV \cdot \delta_t(t_n) dt = \frac{1}{|\mathcal{B}_u|} \int_0^{t_n} (\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}_j^{\mathcal{B}_u})_{\mathcal{B}_0} \cdot \delta_t(t_n) dt \quad (2.68)$$

Hierin ist $\boldsymbol{\lambda}_j^{\mathcal{B}_u}(\mathbf{x})$ ein Wichtungsvektor, welcher die zu kontrollierenden Verschiebungen aus dem gesamten Verschiebungsfeld heraus filtert.

Dabei gilt:

$$|\boldsymbol{\lambda}_j^{\mathcal{B}_u}(\mathbf{x})| = \begin{cases} 1 & \forall \mathbf{x} \in \mathcal{B}_u \\ 0 & \forall \mathbf{x} \notin \mathcal{B}_u \end{cases} \quad (2.69)$$

$|\mathcal{B}_u|$ ist die charakteristische Größe (Volumen, Fläche, Länge) des entsprechende Teilgebietes.

Aus dem Fehlermaß

$$\begin{aligned} E(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h) &= \frac{1}{|\mathcal{B}_u|} \int_0^{t_n} \underbrace{(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}_h(\mathbf{x}, t))}_{\mathbf{e}_S} \cdot \boldsymbol{\lambda}_j^{\mathcal{B}_u}(\mathbf{x})_{\mathcal{B}_0} \cdot \delta_t(t_n) dt \\ &= \frac{1}{|\mathcal{B}_u|} \int_0^{t_n} (\mathbf{e}_S, \boldsymbol{\lambda}_j^{\mathcal{B}_u}(\mathbf{x}))_{\mathcal{B}_0} \cdot \delta_t(t_n) dt \end{aligned} \quad (2.70)$$

folgt bei der **Wichtung mit der Verschiebung \mathbf{z}** und homogenen Anfangsbedingungen $\mathbf{z}(t_n) = \dot{\mathbf{z}}(t_n) = \mathbf{0}$ direkt die Belastung des dualen Problems

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{|\mathcal{B}_u|} \boldsymbol{\lambda}_j^{\mathcal{B}_u}(\mathbf{x}) \cdot \delta_t(t_n). \quad (2.71)$$

Entsprechend den Ausführungen in Abschnitt 2.4.2 kann hier auch zusätzlich der mittlere Fehler im Zeitintervall betrachtet werden, indem die Dirac-Distribution $\delta_t(t_n)$ durch $\frac{1}{t_b - t_a} \Delta_t(t_a, t_b)$ ersetzt wird. Dann ergibt sich für die duale Last eine konstante verteilte Last im Intervall $[t_a, t_b]$.

Die **Wichtung mit der Geschwindigkeit** \dot{z} ergibt für ein homogenes duales Problem mit der Anfangsgeschwindigkeit $\dot{z}(t_n)$ aus Gleichung (2.50) die Anfangsbedingung

$$a_T^*(\mathbf{u}_h; \mathbf{z}, \mathbf{e}_S)|^{t_n} = \frac{1}{|\mathcal{B}_u|} (\boldsymbol{\lambda}_j^{\mathcal{B}_u}, \mathbf{e}_S)_{\mathcal{B}_0}. \quad (2.72)$$

2.4.4 Zusammenfassung

Zur besseren Übersicht sind nachfolgend die notwendigen räumlichen und zeitlichen Verteilungen der Belastung des dualen Problems tabellarisch zusammengefasst.

Zielgröße	räumliche Verteilung der dualen Last	zeitliche Verteilung der dualen Last
Verschiebung im Punkt \mathbf{x}_i in Richtung j zum Zeitpunkt t_n	Einzellast $\delta_j(\mathbf{x}_i)$	Dirac-Impuls $\delta_t(t_n)$
mittlere Verschiebung im Punkt \mathbf{x}_i in Richtung j im Zeitintervall $[t_a, t_b]$	Einzellast $\delta_j(\mathbf{x}_i)$	konstante Last in $[t_a, t_b]$ $\frac{1}{t_b-t_a}\Delta_t(t_a, t_b)$
mittlere Verschiebung im Gebiet \mathcal{B}_u in Richtung j zum Zeitpunkt t_n	verteilte Last $\frac{1}{ \mathcal{B}_u }\lambda_j^{\mathcal{B}_u}$	Dirac-Impuls $\delta_t(t_n)$
mittlere Verschiebung im Gebiet \mathcal{B}_u in Richtung j im Zeitintervall $[t_a, t_b]$	verteilte Last $\frac{1}{ \mathcal{B}_u }\lambda_j^{\mathcal{B}_u}$	konstante Last in $[t_a, t_b]$ $\frac{1}{t_b-t_a}\Delta_t(t_a, t_b)$

Tabelle 2.1: Räumliche und zeitliche Verteilung der Belastung des dualen Problems bei Verwendung der Fehleridentität (2.31) – Wichtung mit \mathbf{z}

Zielgröße	räumliche Verteilung der dualen Last	zeitliche Verteilung der dualen Last
Verschiebung im Punkt \mathbf{x}_i in Richtung j zum Zeitpunkt t_n	Einzellast $\delta_j(\mathbf{x}_i)$	konstante Last für $t \geq t_n$
Geschwindigkeit im Punkt \mathbf{x}_i in Richtung j zum Zeitpunkt t_n	Einzellast $\delta_j(\mathbf{x}_i)$	Dirac-Impuls $\delta_t(t_n)$
mittlere Geschwindigkeit im Punkt \mathbf{x}_i in Richtung j im Zeitintervall $[t_a, t_b]$	Einzellast $\delta_j(\mathbf{x}_i)$	konstante Last in $[t_a, t_b]$ $\frac{1}{t_b-t_a}\Delta_t(t_a, t_b)$
mittlere Geschwindigkeit im Gebiet \mathcal{B}_u in Richtung j zum Zeitpunkt t_n	verteilte Last $\frac{1}{ \mathcal{B}_u }\lambda_j^{\mathcal{B}_u}$	Dirac-Impuls $\delta_t(t_n)$
mittlere Geschwindigkeit im Gebiet \mathcal{B}_u in Richtung j im Zeitintervall $[t_a, t_b]$	verteilte Last $\frac{1}{ \mathcal{B}_u }\lambda_j^{\mathcal{B}_u}$	konstante Last in $[t_a, t_b]$ $\frac{1}{t_b-t_a}\Delta_t(t_a, t_b)$

Tabelle 2.2: Räumliche und zeitliche Verteilung der Belastung des dualen Problems bei Verwendung der Fehleridentität (2.34) – Wichtung mit $\dot{\mathbf{z}}$

2.5 Zusammenhang zwischen der Fehlerschätzung und bekannten Reziprozitätstheoremen der Elastodynamik

Im Falle der linearen Elastodynamik lassen sich die Fehleridentitäten (2.31) und (2.34) auch direkt aus bekannten Reziprozitätstheoremen der Elastodynamik ableiten. Diese Zusammenhänge sollen zum Abschluss dieses Kapitels kurz dargelegt werden.

Reziprozitätstheoreme finden vielfältige Anwendungen in der Mechanik, u.a. bei der Herleitung von Randintegralgleichungen in der Methode der Randelemente, siehe z.B. HARTMANN [47] und GAUL & FIEDLER [36], oder für Untersuchungen der Parametersensitivität, siehe KLEIBER ET AL. [61]. Einen Überblick über Reziprozitätstheoreme in der Elastodynamik und deren Anwendungen finden sich in u.a. ACHENBACH [1].

Das Analogon zum Satz von Betti in der Dynamik linear-elastischer Körper ist das Reziprozitätstheorem im Zeitbereich nach GRAFFI [39]. Es dient nachfolgend als Grundlage für die Herleitung der ersten Fehleridentität (2.31). Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird hier nur der dämpfungsfreie Fall behandelt. Zur Herleitung des Reziprozitätstheorems im Zeitbereich werden die Verschiebungen $\mathbf{u}_1(\mathbf{x}, t)$ eines linear-elastischen Körpers mit gegebenen geometrischen Randbedingungen unter Wirkung der Volumenkraft $\rho_0 \mathbf{b}_1(\mathbf{x}, t)dV$ und der Oberflächenkräfte $\mathbf{t}_1(t)dA$ und die entsprechenden Verschiebungen $\mathbf{u}_2(\mathbf{x}, t)$ desselben Körpers mit denselben geometrischen Randbedingungen unter Wirkung der Kräfte $\rho_0 \mathbf{b}_2(\mathbf{x}, t)dV$ und $\mathbf{t}_2(t)dA$ betrachtet:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_1 + \rho_0 \mathbf{b}_1 = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}_1 \quad (2.73)$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_2 + \rho_0 \mathbf{b}_2 = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}_2 \quad (2.74)$$

Die Laplace-Transformation, siehe Anhang A.2, der beiden Bewegungsgleichungen liefert:

$$\operatorname{div} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_1 + \rho_0 \bar{\mathbf{b}}_1 = \rho_0 s^2 \bar{\mathbf{u}}_1 - \rho_0 [s \mathbf{u}_1(\mathbf{x}, 0) - \dot{\mathbf{u}}_1(\mathbf{x}, 0)] \quad (2.75)$$

$$\operatorname{div} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_2 + \rho_0 \bar{\mathbf{b}}_2 = \rho_0 s^2 \bar{\mathbf{u}}_2 - \rho_0 [s \mathbf{u}_2(\mathbf{x}, 0) - \dot{\mathbf{u}}_2(\mathbf{x}, 0)] \quad (2.76)$$

Nun wird Gleichung (2.75) mit der Laplace-Transformierten $\bar{\mathbf{u}}_2$ und Gleichung (2.76) mit der Laplace-Transformierten $\bar{\mathbf{u}}_1$ multipliziert. Die Differenz der beiden Gleichungen und anschließende Integration über das gesamte Gebiet liefern den folgenden Zusammenhang zwischen den Laplace-Transformierten der beiden Zustände:

$$\begin{aligned} & \int_{\partial \mathcal{B}} \bar{\mathbf{t}}_1 \cdot \bar{\mathbf{u}}_2 dA + \int_{\mathcal{B}_0} [\rho_0 \bar{\mathbf{b}}_1 \cdot \bar{\mathbf{u}}_2 - \rho_0 [s \mathbf{u}_1(\mathbf{x}, 0) - \dot{\mathbf{u}}_1(\mathbf{x}, 0)] \cdot \bar{\mathbf{u}}_2] dV \\ &= \int_{\partial \mathcal{B}} \bar{\mathbf{t}}_2 \cdot \bar{\mathbf{u}}_1 dA + \int_{\mathcal{B}_0} [\rho_0 \bar{\mathbf{b}}_2 \cdot \bar{\mathbf{u}}_1 - \rho_0 [s \mathbf{u}_2(\mathbf{x}, 0) - \dot{\mathbf{u}}_2(\mathbf{x}, 0)] \cdot \bar{\mathbf{u}}_1] dV \end{aligned} \quad (2.77)$$

Die Anwendung des Faltungstheorems auf Gleichung (2.77) führt schließlich auf folgendes Reziprozitätstheorem der beiden Zustände $\mathbf{u}_1(\mathbf{x}, t)$ und $\mathbf{u}_2(\mathbf{x}, t)$ im Zeitbereich bezüglich des Faltungsproduktes, welches auch als Graffi-Theorem bezeichnet wird, siehe z.B. ACHENBACH [1]:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\partial\mathcal{B}_0} \mathbf{t}_1(\mathbf{x}, t_n) * \mathbf{u}_2(\mathbf{x}, t_n) dA + \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \mathbf{b}_1(\mathbf{x}, t_n) * \mathbf{u}_2(\mathbf{x}, t_n) dV \\
 & + \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \mathbf{u}_1(\mathbf{x}, 0) \dot{\mathbf{u}}_2(\mathbf{x}, t_n) dV + \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \dot{\mathbf{u}}_1(\mathbf{x}, 0) \mathbf{u}_2(\mathbf{x}, t_n) dV \\
 = & \int_{\partial\mathcal{B}_0} \mathbf{t}_2(\mathbf{x}, t_n) * \mathbf{u}_1(\mathbf{x}, t_n) dA + \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \mathbf{b}_2(\mathbf{x}, t_n) * \mathbf{u}_1(\mathbf{x}, t_n) dV \\
 & + \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \mathbf{u}_2(\mathbf{x}, 0) \dot{\mathbf{u}}_1(\mathbf{x}, t_n) dV + \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \dot{\mathbf{u}}_2(\mathbf{x}, 0) \mathbf{u}_1(\mathbf{x}, t_n) dV \quad \forall t_n > 0
 \end{aligned} \tag{2.78}$$

Hierin ist das Faltungsprodukt zweier Funktionen in der Zeit wie folgt definiert:

$$\mathbf{a}(t_n) * \mathbf{b}(t_n) = \int_0^{t_n} \mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{b}(t_n - t) dt \tag{2.79}$$

Für homogene Anfangsbedingungen hat das in Gleichung (2.78) definierte Reziprozitätstheorem für die Dynamik die gleiche Struktur wie das Reziprozitätstheorem in der Elastostatik und kann entsprechend direkt aus dem Satz von Betti abgeleitet werden, wenn dort sämtliche Produkte durch die entsprechenden Faltungsprodukte ersetzt werden.

Interessant für die hier behandelten Fragestellung ist die Feststellung, dass das Reziprozitätstheorem (2.78) ausschließlich zwei zulässige elastodynamische Zustände in Relation zueinander setzt und damit vollständig unabhängig von einer eventuell durchgeführten Diskretisierung formuliert wurde. Der wesentliche Schritt zur Überführung des Graffi-Theorems (2.78) in die erste Fehleridentität (2.31) ist die bereits in Abschnitt 2.2 gemachte Aussage, dass der räumliche Diskretisierungsfehler die Lösung der Bewegungsgleichung mit dem Residuum als Belastungsfunktion ist. Für den räumlichen Diskretisierungsfehler kann somit das Reziprozitätstheorem angewendet werden.

Interpretiert man also den räumlichen Diskretisierungsfehler $\mathbf{e}_S(\mathbf{x}, t)$ als die Verschiebung infolge des Residuums $\mathbf{R}(\mathbf{x}, t)$ und definiert zusätzlich das duale Problem $\tilde{\mathbf{z}}(\mathbf{x}, t)$

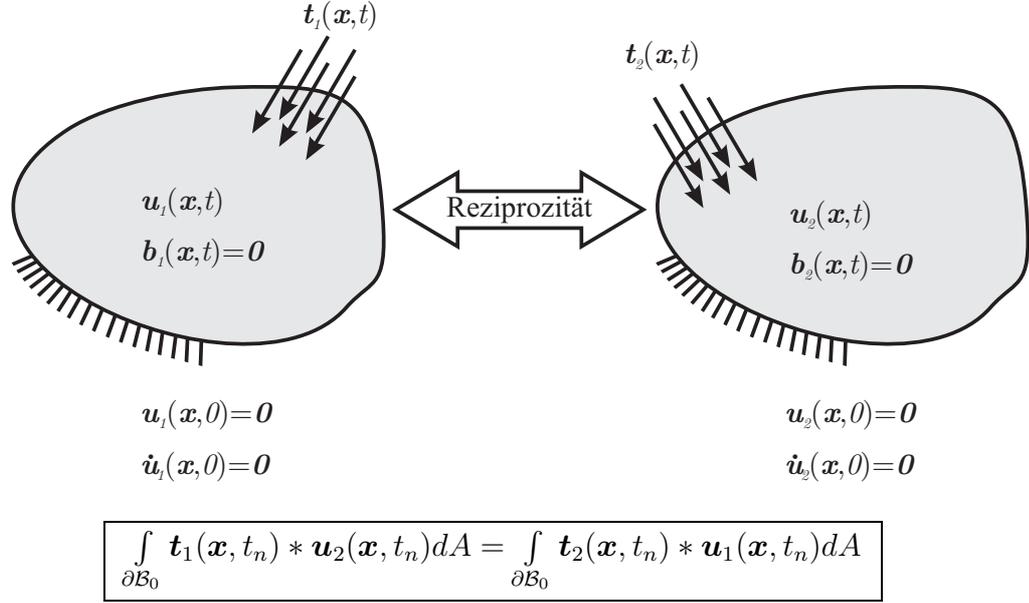


Bild 2.2: Reziprozität zweier elastodynamischer Zustände nach GRAFFI für den Zeitpunkt t_n bezüglich des Faltungsproduktes, hier vereinfacht dargestellt für homogene Anfangsbedingungen und ohne Volumenlasten

unter der Last $\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{x}, t)$, dann folgt aus Gleichung (2.78):

$$\begin{aligned} & \int_{B_0} \mathbf{R}(\mathbf{x}, t_n) * \tilde{\mathbf{z}}(\mathbf{x}, t_n) dV + \int_{B_0} \rho_0 \mathbf{e}_S(\mathbf{x}, 0) \dot{\tilde{\mathbf{z}}}(\mathbf{x}, t_n) + \rho_0 \dot{\mathbf{e}}_S(\mathbf{x}, 0) \tilde{\mathbf{z}}(\mathbf{x}, t_n) dV \quad (2.80) \\ &= \int_{B_0} \tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{x}, t) * \mathbf{e}_s(\mathbf{x}, t_n) dV + \int_{B_0} \rho_0 \tilde{\mathbf{z}}(\mathbf{x}, 0) \dot{\mathbf{e}}_S(\mathbf{x}, t_n) + \rho_0 \dot{\tilde{\mathbf{z}}}(\mathbf{x}, 0) \mathbf{e}_S(\mathbf{x}, t_n) dV \\ & \quad \forall t_n > 0 \end{aligned}$$

Für $\mathbf{e}_S(0) = \dot{\mathbf{e}}_S(0) = \mathbf{0}$ und $\tilde{\mathbf{z}}(0) = \dot{\tilde{\mathbf{z}}}(0) = \mathbf{0}$ reduziert sich (2.80) auf

$$\int_{B_0} \mathbf{R}(\mathbf{x}, t_n) * \tilde{\mathbf{z}}(\mathbf{x}, t_n) dV = \int_{B_0} \tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{x}, t) * \mathbf{e}_s(\mathbf{x}, t_n) dV, \quad (2.81)$$

d.h. die Faltung des Residuums des primalen Problems mit den Verschiebungen des dualen Problems ist gleich der Faltung des räumlichen Diskretisierungsfehlers mit der Belastung des dualen Problems.

Um den Zusammenhang zwischen der Fehlerdarstellung und dem hier gegebenen Reziprozitätstheorem endgültig darzulegen, muss weiterhin berücksichtigt werden, dass in den Gleichungen (2.78) und (2.80) die Anfangsbedingungen für jeweils beide Zustände zum Zeitpunkt $t = 0$ gegeben sind. Führt man für das duale Problem \mathbf{z} die Zeitachse $\tau = t_n - t$ ein und definiert die Anfangsbedingungen für \mathbf{z} zum Zeitpunkt $\tau = 0$, dann

ergibt sich aus Gleichung (2.80) mit der verkürzten Schreibweise direkt die Identität (2.31), wenn dort der lineare, ungedämpfte Fall betrachtet wird:

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_n} \mathcal{R}_u(\mathbf{z}) dt + [\rho_0(\dot{\mathbf{e}}_S, \mathbf{z})_{\mathcal{B}_0} - \rho_0(\mathbf{e}_S, \dot{\mathbf{z}})_{\mathcal{B}_0}]_0 \\ &= \int_0^{t_n} \mathcal{F}_z(\mathbf{e}_S) dt + [\rho_0(\dot{\mathbf{z}}, \mathbf{e}_S)_{\mathcal{B}_0} - \rho_0(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{e}}_S)_{\mathcal{B}_0}]^{t_n} \end{aligned} \quad (2.82)$$

Bei der Bestimmung der Vorzeichen der Geschwindigkeiten des dualen Problems muss hierbei die Änderung der Richtung der Zeitachse berücksichtigt werden. Die Interpretation des dualen Problems als „Rückwärtsproblem“ in der Zeit ergibt sich automatisch aus der Definition der Faltung in Gleichung (2.79).

Auch die zweite Fehleridentität (2.34) lässt sich für den Fall der linearen Elastodynamik auf ein klassisches Reziprozitätstheorem zurückführen, welches insbesondere in der Akustik Anwendung findet und im englischen Sprachgebrauch als „power-reciprocity“ bezeichnet wird, da das Reziprozitätstheorem mit Hilfe von Leistungsausdrücken formuliert wird. Die Herleitung des Reziprozitätstheorems entspricht im Wesentlichen der des Theorems (2.78). Ausgangspunkt der Herleitung sind wiederum die zwei Bewegungsgleichungen der beiden betrachteten Zustände, jedoch werden hier zur Darstellung der Trägheitsterme die Geschwindigkeiten anstelle der Verschiebungen verwendet. Die Bewegungsgleichungen lauten damit:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_1 + \rho_0 \mathbf{b}_1 = \rho_0 \dot{\mathbf{v}}_1 \quad (2.83)$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_2 + \rho_0 \mathbf{b}_2 = \rho_0 \dot{\mathbf{v}}_2 \quad (2.84)$$

Die entsprechenden Laplace-Transformationen der Bewegungsgleichungen führen dann auf:

$$\operatorname{div} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_1 + \rho_0 \bar{\mathbf{b}}_1 = \rho_0 s \bar{\mathbf{v}}_1 - \rho_0 \mathbf{v}_1(\mathbf{x}, 0) \quad (2.85)$$

$$\operatorname{div} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_2 + \rho_0 \bar{\mathbf{b}}_2 = \rho_0 s \bar{\mathbf{v}}_2 - \rho_0 \mathbf{v}_2(\mathbf{x}, 0) \quad (2.86)$$

Nun wird Gleichung (2.85) mit der Laplace-Transformierten $\bar{\mathbf{v}}_2$ und Gleichung (2.86) mit der Laplace-Transformierten $\bar{\mathbf{v}}_1$ multipliziert. Die Differenz der beiden Gleichungen und anschließende Integration über das gesamte Gebiet liefern das folgende Reziprozitätstheorem für die Laplace-Transformierten:

$$\begin{aligned} & \int_{\partial \mathcal{B}} \bar{\mathbf{t}}_1 \cdot \bar{\mathbf{v}}_2 dA + \int_{\mathcal{B}_0} \rho \bar{\mathbf{b}}_1 \cdot \bar{\mathbf{v}}_2 dV + \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \mathbf{v}_1(\mathbf{x}, 0) \cdot \bar{\mathbf{v}}_2 + \boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{x}, 0) : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_2 dV \\ &= \int_{\partial \mathcal{B}} \bar{\mathbf{t}}_2 \cdot \bar{\mathbf{v}}_1 dA + \int_{\mathcal{B}_0} \rho \bar{\mathbf{b}}_2 \cdot \bar{\mathbf{v}}_1 dV + \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \mathbf{v}_2(\mathbf{x}, 0) \cdot \bar{\mathbf{v}}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2(\mathbf{x}, 0) : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 dV \end{aligned} \quad (2.87)$$

Die Anwendung des Faltungstheorem auf Gleichung (2.87) und die inverse Laplace-Transformation führen schließlich auf das folgende Reziprozitätstheorem der beiden Zustände im Zeitbereich:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{t}_1 * \mathbf{v}_2 dA + \int_{\mathcal{B}_0} \rho \mathbf{b}_1 * \mathbf{v}_2 dV & (2.88) \\
 + \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \mathbf{v}_1(\mathbf{x}, 0) \cdot \mathbf{v}_2(\mathbf{x}, t_n) dV & + \int_{\mathcal{B}_0} \boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{x}, 0) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t_n) dV \\
 & = \int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{t}_2 * \mathbf{v}_1 dA + \int_{\mathcal{B}_0} \rho \mathbf{b}_2 * \mathbf{v}_1 dV \\
 + \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \mathbf{v}_2(\mathbf{x}, 0) \cdot \mathbf{v}_1(\mathbf{x}, t_n) dV & + \int_{\mathcal{B}_0} \boldsymbol{\sigma}_2(\mathbf{x}, 0) : \boldsymbol{\varepsilon}_1(\mathbf{x}, t_n) dV \\
 & \forall t_n > 0
 \end{aligned}$$

Die Anwendung von (2.88) auf den räumlichen Diskretisierungsfehler $\mathbf{e}_S(\mathbf{x}, t)$ und die duale Lösung $\mathbf{z}(\mathbf{x}, t)$ führt nun analog zum oben angegebenen Vorgehen auf die zweite Fehleridentität (2.34).

Die zielorientierte Fehlerschätzung in der linearen Elastodynamik lässt sich also auch direkt aus bekannten Reziprozitätstheoremen im Zeitbereich, wie dem Reziprozitätstheorem (2.78) nach GRAFFI oder dem Leistungsreziprozitätstheorem (2.88) ableiten. Die in den vorangegangenen Abschnitten hergeleiteten Darstellungen des Fehlers für nichtlineare Probleme in einer beliebigen Größe können folglich als eine Erweiterung dieser bekannten Reziprozitätstheoreme angesehen werden.

Kapitel 3

Fehlerschätzung und Netzadaption für geometrisch lineare Probleme

In diesem Kapitel steht die Schätzung des räumlichen Diskretisierungsfehlers für geometrisch lineare Problemstellungen im Mittelpunkt. Nach der allgemeinen Definition von praktischen Anforderungen an die Fehlerschätzung erfolgt eine Klassifizierung verschiedener Lösungstypen für Probleme der Strukturdynamik. Anschließend wird der räumliche Diskretisierungsfehler in modalen Koordinaten dargestellt.

Für die Fehlerschätzung innerhalb der semidiskreten Methode werden neben bekannten globalen Fehlerschätzern zielorientierte Fehlerschätzer basierend auf den Fehleridentitäten des vorangegangenen Kapitels erörtert. Ein besonderes Augenmerk gilt dabei dem numerischen Aufwand, der für die Fehlerschätzung notwendig ist. Zur Beurteilung der verschiedenen Strategien zur Fehlerschätzung wird dabei auf die Modalzerlegung des Diskretisierungsfehlers zurückgegriffen.

Im Anschluß werden ortsadaptive Verfahren für die semidiskrete Finite-Elemente-Methode auf Basis der entwickelten Fehlerschätzer behandelt.

Den Abschluss des Kapitels bilden die zielorientierte Fehlerschätzung und die Netzadaption in Zielfunktionalen von Eigenformen als Alternative zur Generierung von adaptierten Berechnungsnetzen.

3.1 Anforderungen an die Fehlerschätzung

Die nachfolgenden Ausführungen beschränken sich auf den materiell und geometrisch linearen Fall. Für die im vorangegangenen Kapitel dargestellten Fehlerdarstellungen bedeutet dies, dass die linearisierte Form dem exakten Fall entspricht. Folglich sind auch die Fehlerdarstellungen, im Gegensatz zum nichtlinearen Fall, exakt.

Die in diesem Kapitel behandelten Fehlerschätzer basieren auf den Fehleridentitäten des 2. Kapitels. Dabei werden verschiedene Vereinfachungen bzw. Annahmen eingeführt, die direkten Einfluss auf die Genauigkeit der Fehlerschätzung und auf den zu betreibenden numerischen Aufwand haben.

Zur Bewertung der vorgestellten Fehlerschätzer im Hinblick auf die Güte der Fehlerschätzung und deren Eignung als Basis eines ortsadaptiven Verfahrens lassen sich zunächst die folgenden allgemeinen Anforderungen an die Fehlerschätzung formulieren:

- a) Die Fehlerschätzung muss numerisch effizient sein. Insbesondere muss sie numerisch günstiger sein als die Berechnung einer Referenzlösung auf einer feineren Diskretisierung.
- b) Der verwendete Fehlerschätzer muss eine ausreichend gute Schätzung der gesuchten Fehlergröße ermöglichen.
- c) Der Fehlerschätzer muss eine verlässliche Schätzung der Verteilung des Fehlers ermöglichen, da diese für eine effiziente Netzanpassung notwendig ist.
- d) Der Fehlerschätzer muss eine geeignete Basis für die Netzadaption sein, d.h. dass der Fehlerschätzer und das darauf basierende ortsadaptive Verfahren aufeinander abgestimmt sein müssen.

Im Wesentlichen lässt sich feststellen, dass die Anforderungen a) und b) in der praktischen Anwendung oft gerade konträr zueinander sind. Die Entwicklung eines sinnvollen Fehlerschätzers und eines Netzadaptionsverfahrens sollte deshalb als Ziel ein ausgewogenes Verhältnis zwischen dem Aufwand und der damit gewonnenen Information bzw. Ergebnisverbesserung anstreben.

3.2 Klassifizierung des Lösungsverhaltens der Bewegungsgleichung

Sämtliche bisher angestellten Betrachtungen sind allgemeingültig und zielen folglich auf alle möglichen Lösungstypen der Bewegungsgleichung ab. Die Lösungen der Bewegungsgleichung können jedoch z.B. in Abhängigkeit von den Randbedingungen oder der Belastung einen sehr unterschiedlichen Lösungscharakter aufweisen. Hier ist im Wesentlichen zwischen Wellenausbreitungsproblemen und Schwingungsproblemen zu unterscheiden. Für die Anwendung von Fehlerschätzern und ortsadaptiven Verfahren erscheint es sinnvoll, die unterschiedlichen Eigenschaften der Lösungen zu berücksichtigen. Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass eine eindeutige Einordnung einer Lösung $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ zu einem der beiden Bewegungstypen nicht immer möglich ist. Im Folgenden soll nur eine grobe Charakterisierung der beiden Lösungstypen erfolgen und grundlegende Unterschiede des Lösungsverhaltens aufgezeigt werden. Für die ausführliche Darstellung und Diskussion klassischer Lösungsansätze für die Bewegungsgleichung wird an dieser Stelle auf das umfangreiche Fachschrifttum, z.B. GRAFF [38], verwiesen.

Unter einer Schwingung versteht man im strengen Sinne eine periodische Bewegung eines Systems um eine ortsfeste Ruhelage. Die klassischen Lösungsansätze für Schwingungsprobleme beruhen deshalb i.d.R. auf der sogenannten Modenüberlagerung. Hierbei wird für die Lösung der Bewegungsgleichung eine Trennung der Veränderlichen in der Form

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x}) \cdot f_i(t) \quad (3.1)$$

durchgeführt. Hierin ist $\bar{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x})$ die i -te Eigenform des kontinuierlichen ungedämpften Eigenschwingungsproblems

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\bar{\mathbf{u}}) + \rho \omega^2 \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (3.2)$$

und $f_i(t)$ deren zeitliche Antwort im vorliegenden Problem. Für eine spezielle Eigenform i unterliegt jeder Punkt \mathbf{x} demselben Zeitgesetz $f_i(t)$. Bei typischen Schwingungsproblemen ist insbesondere für die Abbildung des Langzeitverhaltens nur eine stark begrenzte Anzahl von Eigenformen notwendig. Eine Schwingung hat folglich einen räumlich globalen Charakter und die zeitliche Änderung des Bewegungszustandes ist von untergeordneter Bedeutung. Schwingungsprobleme in der Mechanik beschränken sich in aller Regel auf den unteren Frequenzbereich. Typische technische Problemstellungen, bei denen Schwingungen eine große Rolle spielen, sind unter anderem:

- periodische Anregungen von Strukturen z.B. durch Maschinen oder
- Schwingungen von Bauwerken in Folge von Wind- oder Verkehrslasten.

Die Wellenausbreitung hingegen bezeichnet die räumliche Ausbreitung eines Schwingungszustandes über das Gebiet. Im Gegensatz zur Schwingung wird hier also Energie über das Gebiet transportiert und die zeitliche Änderung des Bewegungszustandes ist ein wesentliches Merkmal dieses Lösungstyps. Auch hier kann eine Lösung mit dem globalen Ansatz (3.1) gefunden werden, jedoch sind im Gegensatz zu Schwingungsproblemen sehr viele Eigenformen notwendig, um die Lösung des Wellenausbreitungsproblems abzubilden. Dies liegt im Wesentlichen am stark lokalen Charakter des Wellenausbreitungsproblems, bei dem i.d.R. große Teile des Berechnungsgebiet unverformt sind und die Lösung auf einen kleinen Teil beschränkt bleibt. Für Probleme mit Dämpfung bleibt dieser lokale Charakter der Wellenfront jedoch bei Langzeitberechnungen nicht erhalten, da die höherfrequenten Lösungsanteile stärker gedämpft werden, als die niederfrequenten Anteile. Die Wellenausbreitung ist deshalb ein typische Phänomen der Kurzzeitdynamik. Technische Probleme, bei denen die Wellenausbreitung von Bedeutung ist, sind z.B.:

- Stoßkontakte, z.B. bei Fahrzeuganprall auf Strukturen oder
- schlagartige Änderungen der Randbedingungen beim Abbruchsprengen.

Die weiteren Betrachtungen im Rahmen dieser Arbeit zielen im Wesentlichen auf die effiziente Lösung von Schwingungsproblemen ab.

3.3 Modale Synthese des räumlichen Diskretisierungsfehlers

Bei der Untersuchung von Schwingungsproblemen werden Lösungen der Bewegungsgleichung in Form von stehenden Wellen gesucht, d.h. die modale Zerlegung der exakten Lösung gemäß Gleichung (3.1) ist ein geeigneter Lösungsansatz.

Für die Lösung des räumlich diskretisierten Problems ergibt sich die entsprechende Darstellung

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{n_{dof}} \bar{\mathbf{u}}_i^h(\mathbf{x}) \cdot f_i^h(t) \quad (3.3)$$

aus der Überlagerung der n_{dof} diskreten Eigenformen $\bar{\mathbf{u}}_i^h(\mathbf{x})$ und deren zeitlichen Antworten $f_i^h(t)$. Der räumliche Diskretisierungsfehler folgt dann aus der Differenz der Gleichungen (3.1) und (3.3).

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_S(\mathbf{x}, t) &= \sum_{i=1}^{n_{dof}} \underbrace{(\bar{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x}) - \bar{\mathbf{u}}_i^h(\mathbf{x}))}_{\mathbf{E}_i(\mathbf{x})} \cdot f_i^h(t) + \bar{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x}) \cdot \underbrace{(f_i(t) - f_i^h(t))}_{e_{\varphi,i}} \\ &+ \sum_{i=n_{dof}+1}^{\infty} \bar{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x}) \cdot f_i(t) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Der räumliche Diskretisierungsfehler lässt sich somit in den Fehler infolge der räumlichen Approximation der Eigenformen,

$$\sum_{i=1}^{n_{dof}} (\bar{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x}) - \bar{\mathbf{u}}_i^h(\mathbf{x})) \cdot f_i^h(t) = \sum_{i=1}^{n_{dof}} \mathbf{E}_i(\mathbf{x}) \cdot f_i^h(t),$$

den Phasenfehler infolge der falschen Approximation der Eigenfrequenzen der im numerischen Modell enthaltenen Eigenformen

$$\sum_{i=1}^{n_{dof}} (\bar{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x}) \cdot (f_i(t) - f_i^h(t))) = \sum_{i=1}^{n_{dof}} (\bar{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x}) \cdot e_{\varphi,i})$$

sowie den Abschneidefehler

$$\sum_{i=n_{dof}+1}^{\infty} (\bar{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x}) \cdot f_i(t))$$

der höheren Eigenformen aufspalten. Der Abschneidefehler der höheren Eigenformen kann bei einer sinnvollen, dem Problem angepassten räumlichen Diskretisierung in der Regel vernachlässigt werden. Der Phasenfehler hingegen hängt maßgeblich von der Berechnungsdauer ab, und kann bei Langzeitsimulationen auch bei einer guten Approximation der maßgeblichen Eigenfrequenzen die Größenordnung der exakten Lösung annehmen. Aus Gleichung (3.4) geht darüber hinaus hervor, dass die zeitlichen Verläufe der Fehler in den Eigenformen den Verläufen der diskreten Lösung entsprechen.

3.4 Fehlerschätzung in globalen Normen

Die klassischen Ansätze zur Schätzung des räumlichen Diskretisierungsfehlers greifen auf globale Normen der Lösung, wie die L_2 -Norm und die Energienorm zurück. RICCIUS [98] und ZENG & WIBERG [118, 119] spalten hierfür den Fehler zum Zeitpunkt t_n in den Fehler in der kinetischen Energie und in der Verzerrungsenergie auf. Der Fehler in der Gesamtenergienorm lautet dann:

$$\|\mathbf{e}_S\|_E = (\|\mathbf{e}_S\|_a^2 + \rho_0 \|\dot{\mathbf{e}}_S\|_{L_2}^2)^{1/2}, \quad (3.5)$$

mit der Verzerrungsenergienorm

$$\|\mathbf{e}_S\|_a = \sqrt{a(\mathbf{e}_S, \mathbf{e}_S)} \quad (3.6)$$

und der L_2 -Norm des Fehlers in den Geschwindigkeiten

$$\|\mathbf{e}_S\|_{L_2} = \sqrt{(\mathbf{e}_S, \mathbf{e}_S)}. \quad (3.7)$$

Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass die nachfolgenden Fehlerschätzer lediglich den Zustand zum Zeitpunkt t_n betrachten. Der Phasenfehler infolge der räumlichen Diskretisierung wird folglich nicht erfasst.

Da einige der nachfolgend behandelten Zielgrößen-orientierten Fehlerschätzer auf Fehlerschätzer in globalen Normen zurückgreifen, sollen diese klassischen Fehlerschätzer hier kurz erläutert werden.

3.4.1 Schätzung des Fehlers in der Verzerrungsenergienorm

Für die Schätzung der Verzerrungsenergienorm des Fehlers wird im Nachfolgenden der Fehlerschätzer nach ZIENKIEWICZ & ZHU [122, 123, 124] verwendet, welcher auf dem sogenannten *Superconvergent-Patch-Recovery*-Konzept (SPR) beruht. Bei linear elastischem Materialverhalten lässt sich die Energienorm des räumlichen Diskretisierungsfehlers über die Differenz der exakten Spannungen $\boldsymbol{\sigma}$ und der diskreten Spannungen $\boldsymbol{\sigma}_h$ angeben:

$$\|\mathbf{e}_S\|_a = \int_{\mathcal{B}_0} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h) : \mathbb{C}^{-1} : (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h) dV \quad (3.8)$$

Im Gegensatz zum exakten Spannungsverlauf sind die diskreten Spannungen aufgrund der C_0 -Stetigkeit der Verschiebungsinterpolation in der Regel über die Elementgrenzen hinweg unstetig. Der Grundgedanke des Zienkiewicz-Zhu-Fehlerschätzers beruht darauf, die exakten Spannungen durch einen C_0 -stetigen Spannungsverlauf $\boldsymbol{\sigma}^*$ zu approximieren:

$$\|\mathbf{e}_S\|_a \approx \int_{\mathcal{B}_0} (\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}_h) : \mathbb{C}^{-1} : (\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}_h) dV \quad (3.9)$$

Der geglättete Spannungsverlauf wird nun mit Hilfe der *Superconvergent-Patch-Recovery*-Methode ermittelt. Hierbei wird für jeden Knoten des FE-Netzes ein Knoten-Patch betrachtet. Die Stützstellen des Patches sind die superkonvergenten Spannungspunkte der an den Knoten anschließenden Elemente. Für bilineare Verschiebungselemente sind dies die Mittelpunkte der Elemente, siehe BARLOW [9]. Für den Spannungsverlauf im Patch wird ein linearer Verlauf angenommen:

$$\sigma_i^* = \mathbf{P}(x, y)\mathbf{a}_i \quad i = 1, \dots, m \quad \text{mit} \quad \mathbf{P}(x, y) = (1, x, y) \quad (3.10)$$

Die Bestimmung der Koeffizienten \mathbf{a}_i erfolgt mit dem Quadratmittelproblem

$$\sum_{k=1}^n (\sigma_i^h(\mathbf{x}_k, y_k) - \mathbf{P}(x_k, y_k)\mathbf{a}_i)^2 \rightarrow \text{stat.} \quad (3.11)$$

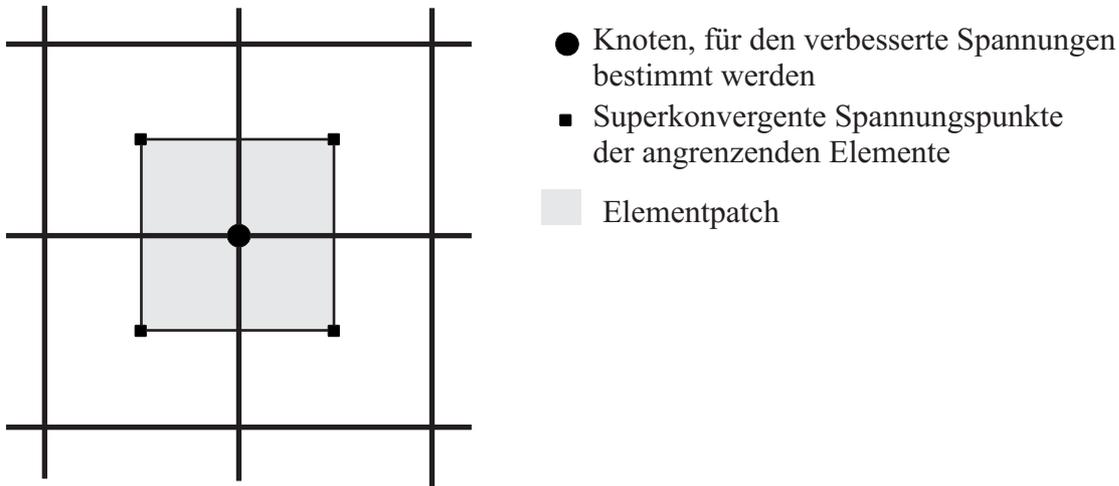


Bild 3.1: Definition des Knotenpatches für den Superconvergent-Patch-Recovery

Hierin ist n die Anzahl der superkonvergenten Spannungspunkte im Patch. Mit den Koeffizienten \mathbf{a}_i ist der verbesserte Spannungsverlauf im Patch und damit die verbesserten Spannungen an dem jeweiligen Knoten definiert.

Nach der Bestimmung der verbesserten Knotenspannungen ergibt sich nun der C_0 -stetige Spannungsverlauf aus der Interpolation der Knotenspannungen mit Hilfe der bilinearen Ansatzfunktionen des Verschiebungsverlaufs. Für die Ermittlung der geglätteten Knotenspannungen an Knoten mit weniger als drei angrenzenden Elementen, wie z.B. Kanten- und Eckknoten, sei an dieser Stelle auf die Ausführungen in BAUMANN [12] und RICCIUS [98] verwiesen.

Bei der Verwendung von Elementen mit angenommenen bzw. erweiterten Verzerrungsverläufen lässt sich die höhere Konvergenzordnung der Spannungen im Elementmittelpunkt nicht nachweisen. Die Konstruktion des Zienkiewicz-Zhu-Fehlerschätzers zur Schätzung der netzabhängigen Energienorm $\|\mathbf{e}_S\|_{a,h} = \sqrt{a_h(\mathbf{e}_S, \mathbf{e}_S)}$ wird dennoch in

analoger Weise auf diese Elemente übertragen. Für die 7-Parameter-Formulierung der Schale ergibt sich dann der folgende Fehlerschätzer:

$$\|e_S\|_{\bar{a}} \approx \int_{\mathcal{B}_0} (\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h, \beta_h)) : \mathbb{C}^{-1} : (\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h, \beta_h)) dV \quad (3.12)$$

Die geglätteten Spannungen werden hierbei unter Hinzuziehen der Verzerrungserweiterung bestimmt. Numerische Untersuchungen z.B. von BAUMANN [12] zeigen, dass dieses Vorgehen auch für diese gemischten Elementformulierungen zu effizienten und robusten Fehlerschätzern führt.

3.4.2 Fehlerschätzer in der L_2 -Norm der Geschwindigkeiten

Für die Schätzung der L_2 -Norm des Fehlers in den Geschwindigkeiten wird der Fehlerschätzer nach RICCIUS [98, 99] verwendet. Dieser basiert auf der Generierung eines verschlechterten Geschwindigkeitsfeldes. Der Grundgedanke der Fehlerschätzung mit verschlechterten Feldern ergibt sich aus der Tatsache, dass die Verschiebungen und Geschwindigkeiten in der Regel an den Knoten des FE-Netzes am genauesten sind. Dies wurde z.B. von DOUGLAS, DUPONT & WHEELER [29] für spezielle ebene Netze nachgewiesen. Folglich gibt es im Berechnungsgebiet keine Punkte, an denen die Geschwindigkeiten besser approximiert werden. Dementsprechend kann die Generierung eines verbesserten Geschwindigkeitsfeldes nur über höherordrige Approximationen, wie z.B. in WIBERG & LI [114], erfolgen. Um den Aufwand zur Generierung eines verbesserten Geschwindigkeitsfeldes zu umgehen, schlägt RICCIUS die Generierung eines verschlechterten Geschwindigkeitsfeldes vor, welches als Geschwindigkeitsverteilung auf einer gröberen räumlichen Diskretisierung interpretiert werden kann. Für bilineare Elemente ergeben sich die verschlechterten Geschwindigkeiten an den Knoten aus der Mittelung der Geschwindigkeiten in den Elementmittelpunkten der n_k an den Knoten anschließenden Elemente:

$$\dot{\mathbf{d}}_k^\# = \frac{1}{n_k} \cdot \sum_{j=1}^{n_k} \dot{\mathbf{d}}_{m,j} \quad (3.13)$$

Das verschlechterte Geschwindigkeitsfeld in einem Element ergibt sich dann aus der Interpolation mit den Ansatzfunktionen:

$$\dot{\mathbf{u}}_{el}^\# = \mathbf{N} \cdot \dot{\mathbf{d}}^\# \quad (3.14)$$

Die L_2 -Norm des Fehlers in den Geschwindigkeiten lässt sich dann mit

$$\|\dot{e}_S\|_{L_2}^2 \approx c^2 \|\dot{\mathbf{u}}^\# - \dot{\mathbf{u}}_h\|_{L_2}^2 = \int_{\mathcal{B}_0} (\dot{\mathbf{u}}^\# - \dot{\mathbf{u}}_h)^2 dV \quad \text{mit } c = 0.365 \quad (3.15)$$

abschätzen. Bild 3.4.2 zeigt das prinzipielle Vorgehen zur Bestimmung der verschlechterten Geschwindigkeiten an Hand des eindimensionalen Falles.

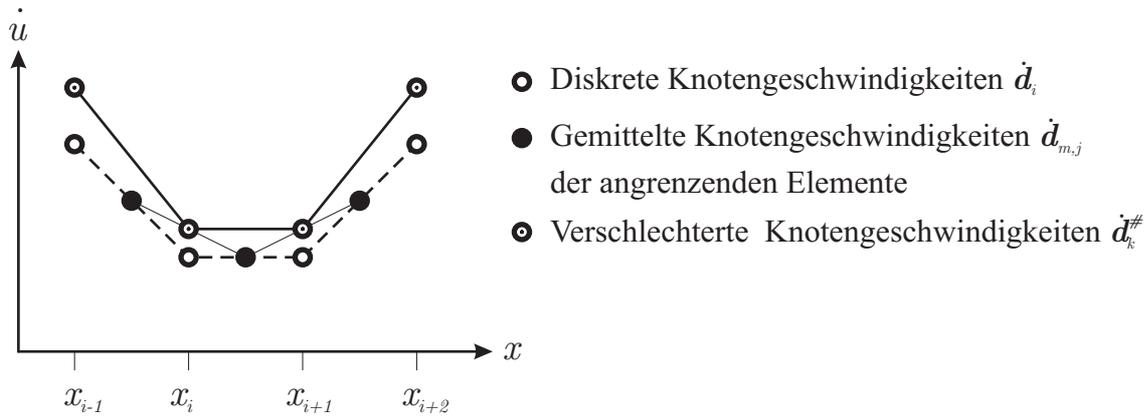


Bild 3.2: Eindimensionale Prinzipdarstellung zur Bestimmung verschlechterter Geschwindigkeiten zur Schätzung der L_2 -Norm des Fehlers in den Geschwindigkeiten

Der Faktor $c = 0.365$ ergibt sich aus der Tatsache, dass $\dot{\mathbf{u}}^\#$ das Geschwindigkeitsfeld auf einer groben räumlichen Diskretisierung darstellt und wurde von RICCIUS [98] anhand von verschiedenen vorgegebenen analytischen Funktionen bestimmt.

NEUMANN [73] gibt den hier vorgestellten Fehlerschätzer auch zur Bestimmung der L_2 -Norm des Fehlers in den Verschiebungen im Rahmen der Fehlerschätzung für Eigenformen an.

3.5 Allgemeines zur Fehlerschätzung für Punktgrößen

Bei der Schätzung des Fehlers in Punktgrößen, wie Punktverschiebungen bzw. Punktgeschwindigkeiten, ist die exakte Lösung des dualen Problems die Lösung der Bewegungsgleichung unter Punktlasten bzw. Einzelimpulslasten. Dies führt auf Singularitäten in der Lösung, da die Lösung des Problems nicht im Energieraum des Kontinuums enthalten ist, siehe z.B. HARTMANN [46].

Bei der Bestimmung des dualen Problems mit Hilfe der Methode der finiten Elemente folgt hieraus, dass die Verzerrungsenergienorm der dualen Lösung bei der Netzverfeinerung unbeschränkt ansteigt. Zur Vermeidung dieses Problems sind deshalb geeignete Regularisierungen der Belastungen des dualen Problems vorzunehmen. Hierfür werden in der Literatur im Wesentlichen zwei Strategien verwendet:

- Glätten bzw. Verschmieren der Verschiebung im Bereich des Quellpunktes mit Hilfe einer abklingenden Exponentialfunktion, siehe z.B. PRUDHOMME & ODEN [90]. Hierdurch wird der Raum der möglichen Verschiebungen und damit das Zielfunktional beschränkt. Diese Technik ist im englischen Sprachgebrauch als *mollification* (Besänftigung) bekannt, vgl. ODEN & REDDY [77].

- Regularisierung der Dirac-Distribution durch eine geeignete verteilte Belastung im dualen Problem. Dieser Ansatz wird u.a. von RICCIUS [98] im Rahmen von ortsadaptiven Verfahren zur Vermeidung von Singularitäten durch Einzellasten verwendet. Für die Fehlerschätzung von Punktgrößen mit dualen Problemen findet sich dieser Ansatz z.B. in den Arbeiten von CIRAK [20] und STEEB [110]. STEEB ersetzt hierfür die Dirac-Distribution durch eine (bi-)quadratische Interpolationsfunktion auf einem Elementpatch, dessen Mittelpunkt der Quellpunkt ist.

Für die numerischen Beispiele im Rahmen dieser Arbeit erfolgt die Regularisierung der Dirac-Distribution im dualen Problem und auch der Einzellasten im primalen Problem durch Verteilung der Belastung. Hierfür wird der Ansatz von RICCIUS [98] verwendet. Die Einzellast wird durch eine lokal verteilte Flächenlast ersetzt. Hierfür wird zunächst ein kugelförmiges Gebiet definiert, in dessen Mittelpunkt die Einzellast wirkt. Als Radius dieser Kugel wird sinnvoller Weise die Dicke der Schale festgelegt. Dann werden alle Elemente ermittelt, welche mindestens einen Knoten innerhalb der Kugel besitzen. Die Einzellast wird anschließend durch eine konstante Flächenlast $\bar{\mathbf{p}}$ auf alle diese Elemente ersetzt. Für die Fehlerschätzung bedeutet dies, dass an Stelle der gesuchten Punktgröße der mittlere Fehler in dem kugelförmigen Bereich um den entsprechenden Punkt ermittelt wird. Es muss dabei natürlich beachtet werden, dass das hier beschriebene Vorgehen nur für ausreichend feine Diskretisierungen eine gute Schätzung des Fehlers in der Punktgröße liefern kann.

3.6 Fehleridentitäten für Elemente mit angenommenen Verzerrungsverläufen

Im Abschnitt 1.3.2 wurde bereits darauf hingewiesen, dass die Methode der angenommenen Verzerrungen eine vom Raumnetz abhängige Reduktion des kompatiblen Verzerrungsfeldes darstellt:

$$\mathbf{E}^{ANS} = \mathbf{R}_h(\mathbf{E}(\mathbf{u})) \quad (3.16)$$

Die Bestimmung der numerischen Lösung $\mathbf{u}_h(\mathbf{x}, t)$ weicht somit vom eigentlichen Galerkinverfahren ab. Diese netzabhängige Veränderung des Variationsproblems wird im mathematischen Schrifttum als „variational crime“ bezeichnet, siehe u.a. STRANG & FIX [112], BRENNER & SCOTT [19] und PITKÄRANTA [86, 87]. Die Fehleridentitäten müssen dann entsprechend modifiziert werden, siehe z.B. GILES & SÜLI [37].

Der Einfluss dieser netzabhängigen Modifikation auf die Fehleridentitäten aus Kapitel 2 soll hier am Beispiel des ungedämpften Falles erläutert werden.

Für die exakte Lösung gilt

$$\rho_0(\ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{w})_{B_0} + a(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \mathcal{F}_u(\mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{w} \in W \quad (3.17)$$

und die diskrete Lösung bestimmt sich aus

$$\rho_0(\ddot{\mathbf{u}}_h, \mathbf{w}_h)_{\mathcal{B}_0} + a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h) = \mathcal{F}_u(\mathbf{w}_h) \quad \forall \mathbf{w}_h \in W^h. \quad (3.18)$$

Da beim diskreten Problem eine netzabhängige Bilinearform $a_h(\cdot, \cdot)$ verwendet wird, erfüllt hier die exakte Lösung im Gegensatz zum klassischen Galerkinverfahren nicht das diskrete Variationsproblem:

$$\rho_0(\ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{w}_h)_{\mathcal{B}_0} + a_h(\mathbf{u}, \mathbf{w}_h) \neq \mathcal{F}_u(\mathbf{w}_h) \quad \forall \mathbf{w}_h \in W^h, \quad (3.19)$$

d.h. die exakte Lösung und das diskrete Problem sind nicht konsistent. Die Herleitung der schwachen Form der Differentialgleichung des räumlichen Diskretisierungsfehlers, welche die Grundlage der Fehleridentitäten in Kapitel 2 darstellt, muss folglich gegenüber dem Vorgehen für reine Verschiebungselemente modifiziert werden. Die schwache Form der Differentialgleichung des räumlichen Diskretisierungsfehlers kann dabei entweder mit Hilfe des unmodifizierten Variationsproblems oder mit Hilfe der modifizierten Bilinearform $a_h(\cdot, \cdot)$ dargestellt werden.

Daraus ergeben sich wiederum verschiedene Modifikationen der Fehleridentitäten. Welche der Fehlerdarstellungen letztlich verwendet wird, hängt dann wiederum von der Art des daraus abgeleiteten Fehlerschätzers ab. Nachfolgend werden beide Möglichkeiten behandelt.

Darstellung mit Hilfe des unmodifizierten Variationsproblems

Ausgangspunkt für die Herleitung der räumlich schwachen Form des Diskretisierungsfehlers ist wiederum die gewichtete Form des Residuums, welche sich wie folgt modifizieren lässt:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_u(\mathbf{w}) &= \rho_0(\ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{w})_{\mathcal{B}_0} + a(\mathbf{u}, \mathbf{w}) - \rho_0(\ddot{\mathbf{u}}_h, \mathbf{w})_{\mathcal{B}_0} - a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{w}) \\ &= \rho_0(\ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{w})_{\mathcal{B}_0} - \rho_0(\ddot{\mathbf{u}}_h, \mathbf{w})_{\mathcal{B}_0} + a(\mathbf{u}, \mathbf{w}) - a(\mathbf{u}_h, \mathbf{w}) \\ &\quad + \underbrace{a(\mathbf{u}_h, \mathbf{w}) - a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{w})}_{-\mathcal{R}_k(\mathbf{w})} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Hierin bezeichnet $\mathcal{R}_k(\mathbf{w})$ den Anteil des Residuums, welcher sich aus dem Übergang von der Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ zu $a_h(\cdot, \cdot)$ ergibt. Die variationelle Form der Differentialgleichung des räumlichen Diskretisierungsfehlers für Elemente mit angenommenen Verzerrungen lautet damit:

$$\rho_0(\ddot{\mathbf{e}}_S, \mathbf{w})_{\mathcal{B}_0} + a(\mathbf{e}_S, \mathbf{w}) = \mathcal{R}_u(\mathbf{w}) + \mathcal{R}_k(\mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{w} \in W \quad (3.21)$$

Die rechte Seite der Differentialgleichung ist folglich noch um den Konsistenzanteil $\mathcal{R}_k(\mathbf{w})$ erweitert. Aus $\mathcal{R}_k(\mathbf{w}_h) \neq 0$ folgt, dass im Gegensatz zu einem Galerkinverfahren der räumliche Diskretisierungsfehler nicht mehr orthogonal zum diskreten Ansatzraum ist, d.h.

$$\rho_0(\ddot{\mathbf{e}}_S, \mathbf{w}_h)_{\mathcal{B}_0} + a(\mathbf{e}_S, \mathbf{w}_h) \neq 0 \quad \forall \mathbf{w}_h \in W^h. \quad (3.22)$$

Für Elemente mit angenommenen Verzerrungen ist also die Galerkinorthogonalität, welche als Grundlage für viele Fehlerschätzer dient, verletzt.

Der gesamte räumliche Diskretisierungsfehler lässt sich nun noch in den Approximationsfehler \mathbf{e}_a und den Konsistenzfehler $\mathbf{e}_k \in W^h$ zerlegen. Für die Fehlerschätzung in der Statik bei Verwendung von Schalenelementen mit angenommenen Verzerrungen wurde eine ähnliche Zerlegung z.B. von PITKÄRANTA [86] durchgeführt.

Zunächst wird die diskrete Lösung $\mathbf{u}_h(\mathbf{x}, t)$ in der Form

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x}, t) = \tilde{\mathbf{u}}_h(\mathbf{x}, t) - \mathbf{e}_k(\mathbf{x}, t) \quad (3.23)$$

mit der diskreten Lösung $\tilde{\mathbf{u}}_h$ des unmodifizierten Variationsproblem

$$\rho_0(\ddot{\tilde{\mathbf{u}}}_h, \mathbf{w}_h)_{\mathcal{B}_0} + a(\tilde{\mathbf{u}}_h, \mathbf{w}_h) = \mathcal{F}_u(\mathbf{w}_h) \quad \forall \mathbf{w}_h \in W^h \quad (3.24)$$

dargestellt.

Für den gesamten räumlichen Diskretisierungsfehlers folgt daraus die Zerlegung:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_S &= \mathbf{u} - \mathbf{u}_h \\ &= \underbrace{\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h}_{\mathbf{e}_a} + \underbrace{\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h}_{\mathbf{e}_k} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Da bei der Bestimmung der diskreten Lösung $\tilde{\mathbf{u}}_h$ keine Modifikation der Verschiebungs-Verzerrungs-Beziehung verwendet wird, folgt aus den Gleichungen (3.17) und (3.24) dass der Approximationsfehler \mathbf{e}_a die folgende Orthogonalitätsbedingung erfüllt:

$$\rho_0(\ddot{\mathbf{e}}_a, \mathbf{w}_h)_{\mathcal{B}_0} + a(\mathbf{e}_a, \mathbf{w}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{w}_h \in W^h \quad (3.26)$$

Das Einsetzen der Zerlegung (3.23) in die gewichtete Form des Residuums (3.20) liefert nun:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_u(\mathbf{w}) &= \rho_0(\ddot{\mathbf{e}}_a, \mathbf{w})_{\mathcal{B}_0} + a(\mathbf{e}_a, \mathbf{w}) \\ &\quad + \rho_0(\ddot{\mathbf{e}}_k, \mathbf{w})_{\mathcal{B}_0} + a(\mathbf{e}_k, \mathbf{w}) - \mathcal{R}_k(\mathbf{w}) \end{aligned} \quad (3.27)$$

Die Bedingung $\mathcal{R}_u(\mathbf{w}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{w}_h \in W^h$ führt zusammen mit der Orthogonalitätsbedingung (3.26) auf die Bestimmungsgleichung für den Konsistenzfehler:

$$\rho_0(\ddot{\mathbf{e}}_k, \mathbf{w}_h)_{\mathcal{B}_0} + a(\mathbf{e}_k, \mathbf{w}_h) = a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h) - a(\mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h) = \mathcal{R}_k(\mathbf{w}_h) \quad \forall \mathbf{w}_h \in W^h \quad (3.28)$$

Die Herleitung der entsprechenden Fehleridentitäten aus Kapitel 2 kann nun analog zum dortigen Vorgehen erfolgen. Das Residuum ist lediglich um den Konsistenzanteil $\mathcal{R}_k(\mathbf{z})$ zu ergänzen.

Mit dem dualen Problem

$$\rho_0(\ddot{\mathbf{z}}, \mathbf{w})_{\mathcal{B}_0} + a(\mathbf{z}, \mathbf{w}) = \mathcal{F}_z(\mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{w} \in W \quad (3.29)$$

ergibt sich für den dämpfungsfreien Fall dann die zu (2.31) äquivalente 1. Fehleridentität

$$\begin{aligned}
 E(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h) &= [\rho_0(\dot{\mathbf{e}}_S, \mathbf{z})_{\mathcal{B}_0} - \rho_0(\mathbf{e}_S, \dot{\mathbf{z}})_{\mathcal{B}_0}]_0 + \int_0^{t_n} \mathcal{R}_u(\mathbf{z}) + \mathcal{R}_k(\mathbf{z}) dt \\
 &= [\rho_0(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{e}}_S)_{\mathcal{B}_0} - \rho_0(\dot{\mathbf{z}}, \mathbf{e}_S)_{\mathcal{B}_0}]^{t_n} + \int_0^{t_n} \mathcal{F}_z(\mathbf{e}_S) dt,
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

welche als Basis für die Fehlerschätzung mit Hilfe der vollständigen numerischen Lösung des dualen Problems in Abschnitt 3.7 dient. Die hier gemachten Modifikationen der 1. Fehleridentität lassen sich in analoger Weise auf die 2. Fehleridentität (2.34) übertragen.

Die Bedeutung der Zerlegung des räumlichen Diskretisierungsfehlers in Approximations- und Konsistenzfehler erschließt sich nun bei Betrachtung der modifizierten Fehleridentität (3.30). Aus der Orthogonalitätsbedingung (3.26) und Gleichung (3.28) folgt, dass bei der Verwendung der diskreten dualen Lösung $\mathbf{z}_h \in W^h$ nur der Anteil des Konsistenzfehlers an der Zielfehlergröße geschätzt werden kann. Für die Schätzung des Approximationsfehlers ist \mathbf{z}_h als Testfunktion jedoch ungeeignet.

Darstellung mit Hilfe des modifizierten Variationsproblems

Alternativ zu Gleichung (3.20) lässt sich die schwache Form des Residuums auch wie folgt modifizieren:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}_u(\mathbf{w}) &= \rho_0(\ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{w})_{\mathcal{B}_0} + a(\mathbf{u}, \mathbf{w}) - \rho_0(\ddot{\mathbf{u}}_h, \mathbf{w})_{\mathcal{B}_0} - a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{w}) \\
 &= \rho_0(\ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{w})_{\mathcal{B}_0} - \rho_0(\ddot{\mathbf{u}}_h, \mathbf{w})_{\mathcal{B}_0} + a_h(\mathbf{u}, \mathbf{w}) - a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{w}) \\
 &\quad + \underbrace{a(\mathbf{u}, \mathbf{w}) - a_h(\mathbf{u}, \mathbf{w})}_{-\mathcal{R}_k(\mathbf{w})}
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

Im Gegensatz zu Gleichung (3.20) steckt hier im Konsistenzterm $\mathcal{R}_k(\mathbf{w})$ die unbekannte Lösung \mathbf{u} . Die variationelle Form der Differentialgleichung des räumlichen Diskretisierungsfehlers lässt sich dann mit Hilfe des modifizierten Variationsproblems wie folgt ausdrücken:

$$\rho_0(\ddot{\mathbf{e}}_S, \mathbf{w})_{\mathcal{B}_0} + a_h(\mathbf{e}_S, \mathbf{w}) = \mathcal{R}_u(\mathbf{w}) + \mathcal{R}_k(\mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{w} \in W \tag{3.32}$$

Für die Aufspaltung des gesamten räumlichen Diskretisierungsfehlers in Konsistenz- und Approximationsfehler, wird jetzt dem Gleichgewichtsresiduum $\mathcal{R}_u(\mathbf{w})$ der Approximationsfehler gemäß

$$\rho_0(\ddot{\mathbf{e}}_a, \mathbf{w})_{\mathcal{B}_0} + a_h(\mathbf{e}_a, \mathbf{w}) = \mathcal{R}_u(\mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{w} \in W \tag{3.33}$$

und dem Konsistenzresiduum $\mathcal{R}_k(\mathbf{w})$ der Konsistenzfehler gemäß

$$\rho_0(\ddot{\mathbf{e}}_k, \mathbf{w})_{\mathcal{B}_0} + a_h(\mathbf{e}_k, \mathbf{w}) = \mathcal{R}_k(\mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{w} \in W \quad (3.34)$$

zugeordnet. Dies entspricht der Zerlegung des räumlichen Diskretisierungsfehlers in

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_S &= \mathbf{u} - \mathbf{u}_h \\ &= \underbrace{\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}}_{\mathbf{e}_k} + \underbrace{\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h}_{\mathbf{e}_a} \\ &= \mathbf{e}_k + \mathbf{e}_a \end{aligned} \quad (3.35)$$

mit der exakten Lösung $\tilde{\mathbf{u}}$ des modifizierten Variationsproblems

$$\rho_0(\ddot{\tilde{\mathbf{u}}}, \mathbf{w})_{\mathcal{B}_0} + a_h(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{w}) = \mathcal{F}_u(\mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{w} \in W. \quad (3.36)$$

Wegen $\mathcal{R}_u(\mathbf{w}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{w}_h \in W^h$ folgt aus Gleichung (3.33) folgende Orthogonalitätsbedingung für den Approximationsfehler:

$$\rho_0(\ddot{\mathbf{e}}_a, \mathbf{w}_h)_{\mathcal{B}_0} + a_h(\mathbf{e}_a, \mathbf{w}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{w}_h \in W^h \quad (3.37)$$

Bei der Herleitung der Fehleridentitäten auf der Basis von Gleichung (3.32) ergibt sich nun das folgende netzabhängige duale Problem:

$$\rho_0(\mathbf{z}, \mathbf{w})_{\mathcal{B}_0} + a_h(\mathbf{z}, \mathbf{w}) = \mathcal{F}_z(\mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{w} \in W \quad (3.38)$$

Für die Bestimmung der exakten Lösung des dualen Problems ist also die gleiche Modifikation wie bei der Bestimmung der diskreten primalen Lösung \mathbf{u}_h zu verwenden.

Mit dem dualen Problem gemäß Gleichung (3.38) ergibt sich die zu (2.34) analoge 2. Fehleridentität:

$$\begin{aligned} E(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h) &= [\rho_0(\dot{\mathbf{e}}_S, \dot{\mathbf{z}})_{\mathcal{B}_0} + a_h(\mathbf{e}_S, \mathbf{z})]_0 + \int_0^{t_n} \mathcal{R}_u(\dot{\mathbf{z}}) + \mathcal{R}_k(\dot{\mathbf{z}}) dt \\ &= [\rho_0(\dot{\mathbf{z}}, \dot{\mathbf{e}}_S)_{\mathcal{B}_0} + a_h(\mathbf{z}, \mathbf{e}_S)]^{t_n} - \int_0^{t_n} \mathcal{F}_Z(\dot{\mathbf{e}}_S) dt \end{aligned} \quad (3.39)$$

Da das Konsistenzresiduum hier die exakte Lösung \mathbf{u} beinhaltet, ist die Fehlerdarstellung (3.39) als Basis für die Fehlerschätzung mit Hilfe der numerischen Auswertung des gewichteten Residuums ungeeignet. Sie dient jedoch als Grundlage für die Fehlerschätzung mit Hilfe der netzabhängigen Energienorm in Abschnitt 3.8 dieser Arbeit. Auch hier gilt aufgrund der Orthogonalitätsbedingung (3.37), dass die numerische Lösung \mathbf{z}_h nicht als Wichtungsfunktion zur Schätzung des Approximationsfehlers geeignet ist.

Zusammenfassung

Wesentlich bei den Fehleridentitäten für Elemente mit angenommenen Verzerrungen ist die Tatsache, dass sich als Folge der netzabhängigen Modifikation ein zusätzlicher Konsistenzanteil am gesamten räumlichen Diskretisierungsfehler ergibt. Über den Einfluss des Konsistenzfehlers auf den Gesamtfehler in einem Zielfunktional gibt es im Schrifttum keine gesicherten Aussagen. Bisher wurde der Konsistenzfehler nur in globalen Normen, wie der netzabhängigen Energienorm $\|\mathbf{e}_k\|_{a,h} = \sqrt{a_h(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_k)}$ geschätzt. Untersuchungen von PITKÄRANTA [86, 87] zeigen jedoch, dass die Energienorm des Konsistenzfehlers die gleiche Größenordnung wie die Energienorm des Approximationsfehlers haben kann. Numerische Untersuchungen von DIEZ, MORATA & HUERTA [26] für die zielorientierte Fehlerschätzung in der linearen Statik ergeben ebenfalls, dass die Konsistenzanteile bei der Fehlerschätzung einen dominanten Anteil des Fehlers darstellen, für welchen sich nur schwer geeignete Abschätzungen bestimmen lassen.

3.7 Fehlerschätzung mit vollständiger Lösung des Rückwärtsproblems

Der naheliegende Ansatz zur Fehlerschätzung in einer beliebigen Zielgröße liegt in der direkten numerischen Auswertung einer der in Kapitel 2 vorgestellten Fehleridentitäten. Hierfür wird die vollständige duale Lösung im gesamten Berechnungszeitraum benötigt.

Ausgangspunkt der nachfolgenden Betrachtungen ist die modifizierte 1. Fehleridentität (3.30), welche auf der Wichtung des Residuums mit der Verschiebungsfunktion $\mathbf{z}(\mathbf{x}, t)$ des dualen Problems beruht. Weiterhin erfolgt eine Einschränkung auf Probleme mit homogenen Anfangsbedingungen, d.h. $\mathbf{e}_S(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}$ und $\dot{\mathbf{e}}_S(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}$. Für Probleme mit allgemeinen Anfangsbedingungen sind noch zusätzliche Schätzungen der Diskretisierungsfehler zum Zeitpunkt $t = 0$ notwendig.

Prinzipiell kann zur Fehlerschätzung auch die 2. Identität, welche die Geschwindigkeiten des dualen Problems als Wichtungsfunktion verwendet, herangezogen werden. Da das duale Problem mit einem Zeitintegrationsverfahren bestimmt wird, ist dabei jedoch zu beachten, dass für die Verschiebungen in der Regel eine höherordrige Approximation in der Zeit verwendet wird. Die Verwendung der Geschwindigkeiten des dualen Problems zur Fehlerschätzung beinhaltet folglich ein „Aufrauhern“ der dualen Lösung in der Zeit, was unter Umständen Einfluss auf die Güte der Fehlerschätzung haben kann.

Zur Minimierung des Berechnungsaufwandes werden hier wegen $c_M \ll 1$ und $c_K \ll 1$ die Dämpfungsterme bei der Bestimmung des gewichteten Residuums vernachlässigt. Die Bestimmung des dualen Problems erfolgt weiterhin mit dem Dämpfungseinfluss, so dass der zeitliche Transport des Fehlers nicht verfälscht wird.

Zusammen mit den Ausführungen aus Abschnitt 3.6 ergibt sich dann für Schalenele-

mente mit angenommenen Verzerrungen folgende Fehlerdarstellung:

$$\begin{aligned} E(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h) &= \int_0^{t_n} \mathcal{F}_u(\mathbf{z}) - \rho_0(\ddot{\mathbf{u}}_h, \mathbf{z})_{\mathcal{B}_0} - a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{z}) + a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{z}) - a(\mathbf{u}_h, \mathbf{z}) dt \quad (3.40) \\ &= \int_0^{t_n} \mathcal{F}_u(\mathbf{z}) - \rho_0(\ddot{\mathbf{u}}_h, \mathbf{z})_{\mathcal{B}_0} - a(\mathbf{u}_h, \mathbf{z}) dt \end{aligned}$$

Im Sinne der numerischen Effizienz wäre die Lösung des dualen Problems auf dem Netz der primalen Lösung wünschenswert. Aufgrund der Orthogonalitätsbedingung (3.26) ist \mathbf{z}_h jedoch als Wichtungsfunktion zur Schätzung des Approximationsfehlers nicht zulässig, es wird also eine bessere Approximation des dualen Problems notwendig. Hierfür werden im Schrifttum verschiedene Strategien verfolgt, siehe z.B. ODEN ET AL. [80]:

- a) Berechnung des dualen Problems auf dem Netz des primalen Problems, jedoch mit einer höheren Interpolationsordnung. Beispielsweise verwenden BANGERTH & RANNACHER [8] für die Fehlerschätzung bei der Diskretisierung der Wellengleichung für das primale Problem eine bilineare und für das duale Problem eine biquadratische Interpolationsordnung.
- b) Berechnung des dualen Problems mit der gleichen Interpolationsordnung auf einem hierarchisch verfeinerten Netz, mit einer Netzweite $H < h$.
- c) Berechnung der dualen Lösung auf einem für das duale Problem angepassten Netz. Diese Möglichkeit trägt der Tatsache Rechnung, dass das duale Problem als Einflussfunktion oft einen sehr lokalisierten Charakter hat. Die größte Schwierigkeit bei diesem Vorgehen ist die Auswertung von Arbeitsausdrücken auf verschiedenen, nicht notwendigerweise hierarchischen Netzen. Beispielsweise geben RÜTER ET AL. [103] ein allgemeines Vorgehen zur Fehlerschätzung bei der Verwendung von vollständig unterschiedlichen Netzen für das duale und primale Problem an. Dort werden ebene Probleme mit dreiknotigen finiten Elementen betrachtet, was Vorteile bei der Implementierung der dann notwendigen Suchalgorithmen mit sich bringt. Für die hier betrachteten Schalenelemente mit angenommenen Verzerrungsverläufen sind bei diesem Vorgehen zusätzliche Schwierigkeiten infolge des Konsistenzfehlers zu erwarten, da dieser nur über den Übergang zu einer höherordrigen oder feineren Diskretisierung abgeschätzt werden kann.
- d) Berechnung des dualen Problems mit dem Netz des primalen Problems und anschließende Interpolation höherer Ordnung oder Glättung der diskreten Lösung. Dieser Ansatz wird z.B. von DIEZ & CALDERON [27] für die Fehlerschätzung für transiente parabolische Probleme verwendet.
- e) Berechnung des dualen Problems mit dem Netz des primalen Problems und anschließende räumliche Erweiterung auf Elementpatches. Dieser Ansatz wurde

LARSSON ET AL. [67] für statische Probleme der nichtlinearen Elastizitätstheorie verwendet. Für Probleme der Strukturodynamik wurde der Ansatz bisher nicht verfolgt.

Alle hier beschriebenen Verfahren haben den Nachteil, dass der Aufwand für die Bestimmung des dualen Problems mindestens dem Aufwand für die Berechnung des primalen Problems entspricht.

Die nachfolgenden Ausführungen beschränken sich auf den Fall b). Hierfür wird ein Referenznetz mit der Netzweite $H < h$ eingeführt, auf welchem die duale Lösung $\mathbf{z}_H \in W^H$ bestimmt wird:

$$\begin{aligned} \rho_0(\ddot{\mathbf{z}}_H, \mathbf{w}_H)_{\mathcal{B}_0} - c_m \rho_0(\dot{\mathbf{z}}_H, \mathbf{w}_H)_{\mathcal{B}_0} - c_k a_H(\dot{\mathbf{z}}_H, \mathbf{w}_H) + a_H(\mathbf{z}_H, \mathbf{w}_H) = \mathcal{F}_z(\mathbf{w}_H) \quad (3.41) \\ \forall \mathbf{w}_H \in W^H \quad 0 \leq t \leq t_n, \end{aligned}$$

mit den Belastungen bzw. Anfangsbedingungen gemäß Kapitel 2.

Die Fehlerdarstellung (3.40) geht dann näherungsweise in

$$E(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h) \approx \int_0^{t_n} \mathcal{F}_u(\mathbf{z}_H) - \rho_0(\ddot{\mathbf{u}}_h, \mathbf{z}_H)_{\mathcal{B}_0} - a_H(\mathbf{u}_h, \mathbf{z}_H) dt \quad (3.42)$$

über. Für die Bestimmung der Dehnungen sind hierbei die Verzerrungsmodifikationen des Referenznetzes zu verwenden, d.h. sämtliche Arbeitsterme werden auf dem Referenznetz ausgewertet.

Die Güte der Schätzung hängt nun im Wesentlichen von der Netzdichte des Referenznetzes ab. Um den numerischen Aufwand so gering wie möglich zu halten, wird hier für die Netzweite des Referenznetzes $H = \frac{h}{2}$ gewählt, d.h. es erfolgt eine uniforme hierarchische Verfeinerung des Berechnungsnetzes. Bei gekrümmten Schalenstrukturen werden die zusätzlich generierten Knoten des Referenznetzes auf die analytisch vorgegebene exakte Geometrie projiziert. Die Fehlerschätzung beinhaltet dann auch Fehlergrößen, welche sich aus der Approximation der Geometrie ergeben. Durch die verhältnismäßig grobe Approximation der dualen Lösung kann hier keine allzu gute Fehlerschätzung erwartet werden. Des Weiteren hat der Fehlerschätzer keine Schrankeneigenschaft, d.h. der Fehler lässt sich mit dem hier beschriebenen vereinfachten Vorgehen nicht sicher eingrenzen.

Der Fehlerschätzer (3.42) lässt sich nun in die Anteile der einzelnen Elemente des Berechnungsnetzes aufspalten:

$$E(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h) \approx \int_0^{t_n} \left(\sum_{i=1}^{n_{el}} (\mathbf{p}_H, \mathbf{z}_H)_{\mathcal{B}_i} - (\ddot{\mathbf{u}}_h, \mathbf{z}_H)_{\mathcal{B}_i} - a_H(\mathbf{u}_h, \mathbf{z}_H)_{\mathcal{B}_i} \right) dt \quad (3.43)$$

Hierin bezeichnet \mathbf{p}_H die Interpolation der äußeren Lasten im Referenznetz. Die zeitliche Auswertung der Integrale erfolgt nun näherungsweise mit der numerischen Ein-

punktintegration,

$$E(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h) \approx \sum_{j=1}^n \Delta t_j \cdot \left(\sum_{i=1}^{n_{el}} (\mathbf{p}_H, \mathbf{z}_H)_{\mathcal{B}_i} - (\dot{\mathbf{u}}_h, \mathbf{z}_H)_{\mathcal{B}_i} - a_H(\mathbf{u}_h, \mathbf{z}_H)_{\mathcal{B}_i} \right) \quad (3.44)$$

d.h. es erfolgt in jedem Zeitintervall die Auswertung des mit der dualen Lösung gewichteten Residuums in Intervallmitte. Im Rahmen dieser Arbeit wird zur Zeitintegration das Newmarkverfahren verwendet, bei welchem die strenge Erfüllung der semidiskreten Bewegungsgleichung nur an den diskreten Zeitschrittgrenzen t_j erfüllt ist. Für die numerische Schätzung des Fehlers gemäß Gleichung (3.44) werden entsprechend die Mittelwerte zweier aufeinanderfolgender Zeitpunkte t_j als Werte in Zeitintervallmitte herangezogen.

Es sei angemerkt, dass für jeden Zeitpunkt, für den der Fehler in der Zielgröße geschätzt werden soll, die vollständige zeitliche Kopplung des dualen und primalen Problems gemäß Gleichung (3.44) erforderlich, d.h. der Aufwand für die Fehlerschätzung steigt mit der Berechnungsdauer sehr stark an. Für die hier behandelten linearen Probleme kann zur Aufwandsreduzierung die Tatsache herangezogen werden, dass das duale und das primale Problem entkoppelt sind. Das duale Problem kann folglich vollständig unabhängig von der primalen Lösung bestimmt und abgespeichert werden. Für den Fall, dass nur die Zielfehlergröße zum Ende des gesamten Berechnungszeitraum von Interesse ist, bietet es sich an, das duale Problem zuerst zu lösen und anschließend beim Vorwärtsintegrieren der primalen Lösung jeweils direkt den Anteil des Fehlers im aktuellen Zeitschritt zu berechnen. Für nichtlineare Probleme hingegen müsste für jeden Zeitpunkt der Fehlerschätzung das duale Problem neu berechnet werden, da duales und primales Problem über die Tangentenbilinearform $a_T(\mathbf{u}_h; \cdot, \cdot)$ miteinander gekoppelt sind.

Mit dem hier beschriebenen Vorgehen wird der gesamte räumliche Diskretisierungsfehler geschätzt, der sich im Zeitintervall $t \in [0, t_n]$ aufgrund der räumlichen Diskretisierung ergibt. In einem ortsadaptiven Verfahren wäre entsprechend die räumliche Diskretisierung im Intervall $[0, t_n]$ anzupassen. Dies kann beispielsweise durch eine Netzadaptation zum Zeitpunkt $t = 0$ erfolgen. Das ortsadaptive Verfahren zielt dann auf eine in der Zeit konstante räumliche Diskretisierung ab, welche für den Fehler zum Zeitpunkt t_n optimal ist. Dies hat jedoch den Nachteil, dass ein Großteil der Information, welche der Fehlerschätzer liefert, nicht verwendet wird.

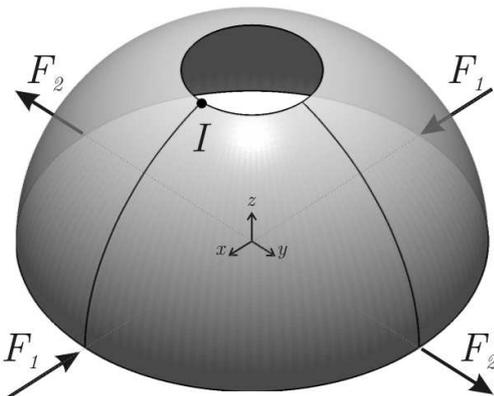
Alternativ hierzu generieren BANGERTH & RANNACHER [6, 7] auf Basis des Fehlerschätzers im Berechnungsintervall $[0, t_n]$ eine Folge von adaptierten Netzen, mit der sich der Fehler zum Zeitpunkt t_n minimieren lässt. Hierfür wird im Rahmen der Rothe-Methode, bei der zunächst die zeitliche und anschließend die räumliche Diskretisierung erfolgt, für jeden diskreten Zeitpunkt eine variable räumliche Diskretisierung eingeführt. Dadurch entsteht allerdings zusätzlich die Notwendigkeit, Daten zwischen unterschiedlichen Netzen zu transferieren und verschiedene Netztopologien vorzuhalten. Des Weiteren sind für die Generierung dieser optimalen Netzfolge mehrere komplette Berechnungsläufe notwendig. Das bedeutet, dass für die Minimierung des Fehlers in einer Zielgröße zu *einem speziellen Zeitpunkt* das vollständige Problem bis zu diesem

Zeitpunkt mehrfach gelöst wird.

Das ortadaptive Verfahren ist in beiden Fällen aufgrund der Konstruktion des Fehlerschätzers immer an den entsprechenden Endzeitpunkt t_n gebunden. Folglich kann auch nur der Fehler zu diesem bestimmten Zeitpunkt kontrolliert und beeinflusst werden. Um sicherzustellen, dass zu keinem Zeitpunkt innerhalb der Berechnungsdauer der Zielfehler eine gewisse Toleranzgrenze übersteigt, muss dann auch für jeden dieser Zeitpunkte der Fehlerschätzer ausgewertet werden und eine Netzadaption erfolgen.

3.7.1 Numerische Beispiele

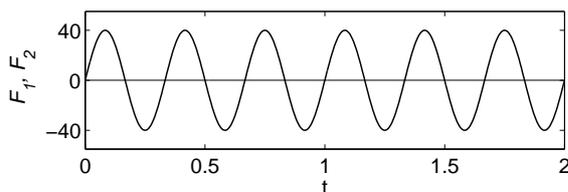
Der Fehlerschätzer (3.44) wird nun anhand eines numerischen Beispiels getestet. Hierfür wird die in Bild 3.3 dargestellte Halbkugel mit Loch betrachtet. Die Halbkugel wird durch zwei Kräftepaare belastet. Auf der Unterseite ($z = 0$) sind Symmetrierandbedingungen eingeführt. Die betrachtete Zielgröße ist die vertikale Verschiebung $u_{z,I}$ im Punkt I .



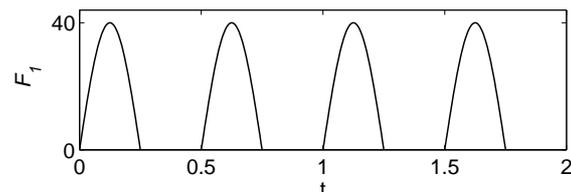
Radius:	R	=	10
Dicke der Schale:	t	=	0.04
Radius des Loches:	r	=	3
Elastizitätsmodul:	E	=	$6,8 \cdot 10^7$
Querdehnzahl:	ν	=	0,3
Dichte:	ρ	=	5
Rayleighdämpfung:	c_m	=	0,0003
	c_k	=	0,0001

Bild 3.3: Beispiel Halbkugel mit Loch: Geometrie und Materialparameter

Die Berechnungsdauer beträgt $T = 2$, die Zeitintegration erfolgt mit dem Newmarkverfahren mit einer konstanten Zeitschrittweite $\Delta t = 0.005$. Es werden die Newmarkparameter $\gamma = 2\beta = 0.5$ verwendet. Es werden die beiden in Bild 3.4 dargestellten Lastfälle untersucht.



Lastfall a)



Lastfall b)

Bild 3.4: Beispiel Halbkugel mit Loch: Lastfälle a) und b)

Der Lastfall a) ist ein harmonischer Zeitverlauf für beide Kräfte F_1 und F_2 , im Lastfall b) ist $F_2 = 0$ und für die Kraft F_1 wird der in Bild 3.4b) angegebene Verlauf verwendet.

Aufgrund der Symmetrie wird nur ein Viertel der Halbkugel mit Solid-Shell-Elementen *ANS6z* diskretisiert. Es werden jeweils zwei uniforme Raumnetze verwendet. Netz 1 besteht aus 256 Elementen mit $n_{eq1} = 1632$ Freiheitsgraden, Netz 2 aus 1024 Elementen mit $n_{eq2} = 6336$ Freiheitsgraden. Die Referenzlösungen wurden auf einem uniformen Netz mit 16348 Elementen und $n_{eqref} = 99072$ Freiheitsgraden ermittelt.

In den Bildern 3.5 und 3.6 sind die vertikalen Verschiebungen des Punktes I für die drei unterschiedlichen Diskretisierungen für die beiden Belastungsfunktionen gegenübergestellt. Man erkennt, dass die mit der Zeit anwachsende Phasenverschiebung zwischen exakter und numerischer Lösung den dominanten Anteil am Diskretisierungsfehler darstellt, wohingegen die Amplituden der Verschiebung mit beiden Raumnetzen einigermaßen gut approximiert werden können.

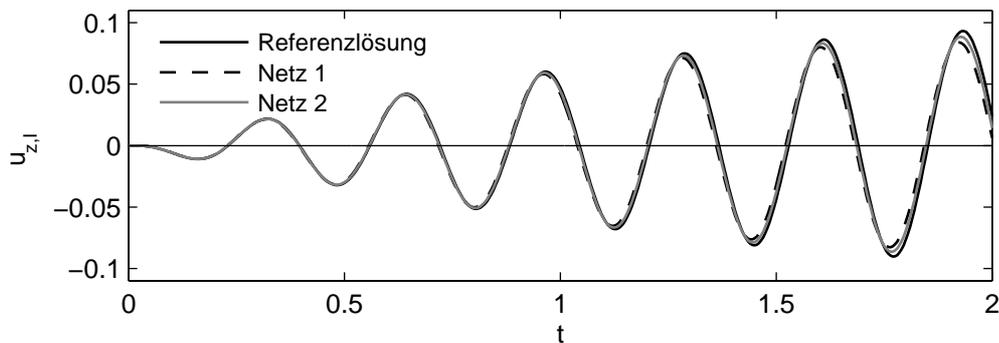


Bild 3.5: Beispiel Halbkugel mit Loch: Vertikale Verschiebungen des Punktes I auf den unterschiedlichen Diskretisierungen für den Lastfall a)

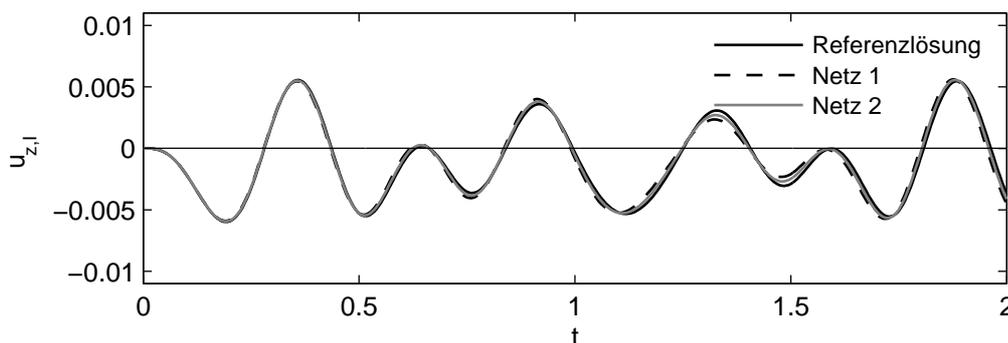


Bild 3.6: Beispiel Halbkugel mit Loch: Vertikale Verschiebungen des Punktes I auf den unterschiedlichen Diskretisierungen für den Lastfall b)

Die Bilder 3.7 und 3.8 zeigen die Gegenüberstellung der Verläufe von geschätztem und Referenzfehler für den Lastfall a) für die beiden Raumnetze 1 und 2. In den Bildern 3.9 und 3.10 sind die entsprechenden Ergebnisse für den Lastfall b) angegeben.

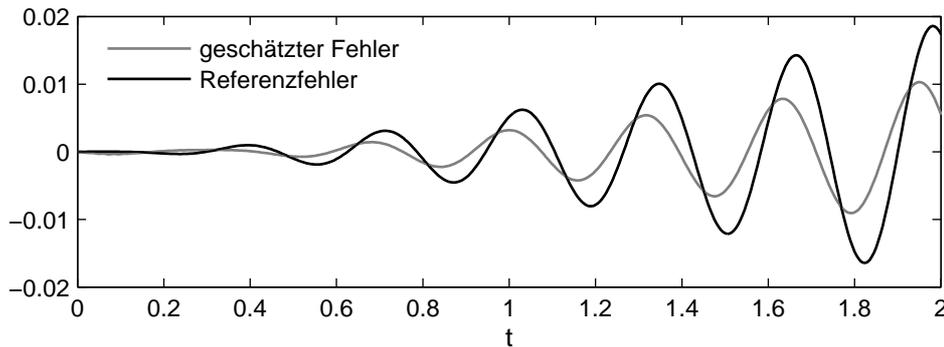


Bild 3.7: Geschätzter und Referenzfehler der vertikalen Verschiebung in Punkt I für Netz 1 (1632 FHG) – Lastfall a)

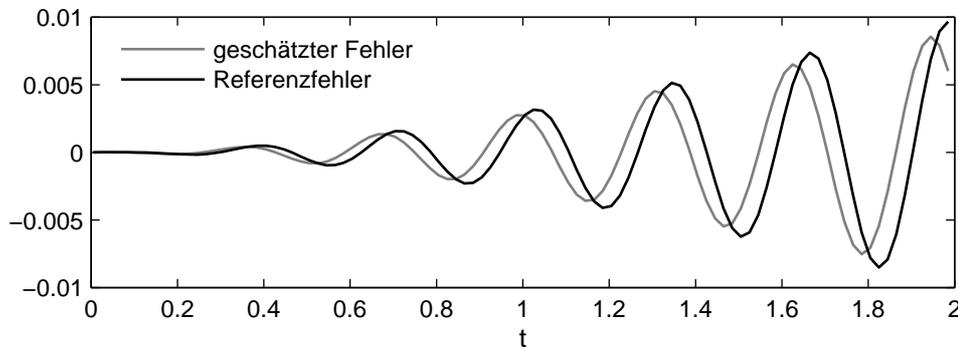


Bild 3.8: Geschätzter und Referenzfehler der vertikalen Verschiebung in Punkt I für Netz 2 (6336 FHG) – Lastfall a)

In beiden Fällen ist die Fehlerschätzung für beide Netzdichten verhältnismäßig gut. Insbesondere lässt sich der Verlauf des Fehlers über die Zeit mit dem Fehlerschätzer gut abbilden, wobei bei der gröberen Diskretisierung erwartungsgemäß jeweils deutlichere Phasenverschiebungen zwischen den geschätzten und den exakten Fehlern zu erkennen sind. Auch ist für die grobe Diskretisierung die Unterschätzung des Fehlers wesentlich größer als für das feinere Netz. Dies ist auf die näherungsweise Bestimmung der dualen Lösung zurückzuführen. Durch die numerische Bestimmung einer diskreten dualen Lösung wird in der Einflussfunktion ebenfalls ein Phasenfehler eingeführt. Folglich wird die zeitliche Wichtung des Residuums mit der dualen Lösung verfälscht. Dies führt auch dazu, dass die Fehlerschätzung für die späteren Zeitpunkte tendenziell immer schlechter wird. Numerische Vergleichsberechnungen haben ergeben, dass dieser Effekt noch verstärkt wird, wenn das duale Problem auf dem Netz des primalen Problems berechnet wird und anschließend eine räumliche Erweiterung der Lösung durchgeführt wird. Die bessere Approximation der Eigenfrequenzen und der dadurch geringere Phasenfehler im dualen Problem ist folglich eine wesentliche Voraussetzung für die gute Fehlerschätzung.

Weiterhin lässt sich feststellen, dass die Fehlerschätzung mit zunehmender Netzdichte besser wird, was ebenfalls auf die bessere räumliche und zeitliche Approximation

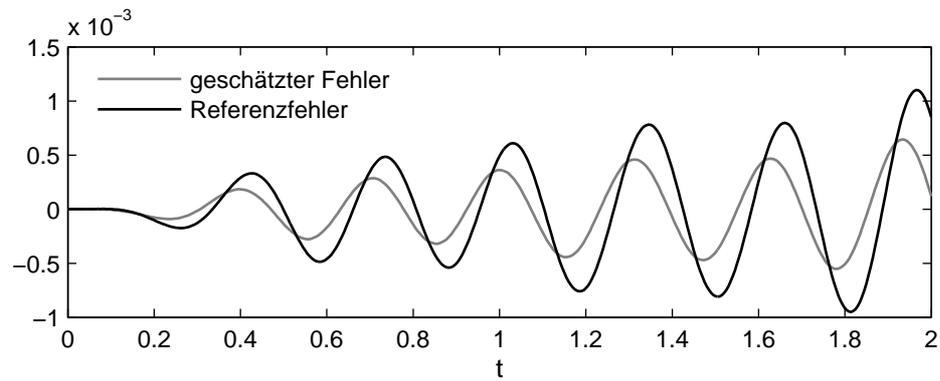


Bild 3.9: Geschätzter und Referenzfehler der vertikalen Verschiebung in Punkt I für Netz 1 (1632 FHG) – Lastfall b)

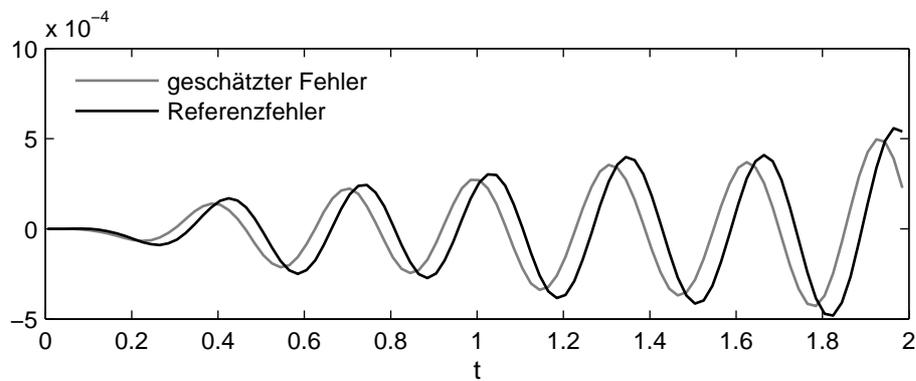


Bild 3.10: Geschätzter und Referenzfehler der vertikalen Verschiebung in Punkt I für Netz 2 (6336 FHG) – Lastfall b)

der dualen Lösung zurückzuführen ist. Der Einfluss des Zeitintegrationsverfahrens auf die Fehlerschätzung kann bei der hier gewählten kleinen Schrittweite vernachlässigt werden.

3.7.2 Bewertung der Fehlerschätzung

Die numerischen Beispiele zeigen, dass die zielorientierte Fehlerschätzung mit Hilfe des vollständigen dualen Problems zu einer recht guten Schätzung des Fehlers in der Zielgröße führt. Insbesondere berücksichtigt der Fehlerschätzer vollständig den Transport des Fehlers über die Zeit. Da für die Fehlerschätzung nur geringe vereinfachende Annahmen, wie etwa die Vernachlässigung der Dämpfungsterme bei der Bestimmung des Residuums, gemacht werden ist der Fehlerschätzer ohne Einschränkung auf verschiedene Problemklassen, wie Wellenausbreitungs- und Schwingungsprobleme, anwendbar.

Dem stehen jedoch auch große Nachteile gegenüber. So muss einerseits sowohl die vollständige primale als auch die vollständige duale Lösung über den gesamten Berechnungszeitraum vorgehalten werden, was zu einem großen Speicherbedarf auch bei moderaten Problemen führt. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn das duale Problem auf einer feineren Diskretisierung gelöst wird. Des Weiteren müssen für die Fehlerschätzung die Netztopologien von zwei unterschiedlichen Netzen vorgehalten werden, was den Speicherbedarf weiter erhöht. Darüber hinaus muss für die hier verwendeten Elemente mit angenommenen Verzerrungsverläufen der Einfluss des Konsistenzfehlers über die Auswertung der Arbeitsausdrücke auf einem Referenznetz berücksichtigt werden, was den Aufwand für die zielorientierte Fehlerschätzung im Vergleich zu reinen Verschiebungselementen zusätzlich erheblich erhöht. Ein weiterer Nachteil besteht darin, dass für jeden Zeitpunkt t_n , für den der Fehler geschätzt werden soll, die vollständige zeitliche Kopplung von dualem und primalem Problem notwendig wird, was den Aufwand zur Bestimmung des primalen Problems bei weitem übersteigt. Die Fehlerschätzung verletzt damit eindeutig die Forderung, numerisch effizienter zu sein, als die Lösung des primalen Problems auf einer feineren Diskretisierung und erscheint aus diesem Grund für die Anwendung bei Problemstellungen praktischer Größenordnung ungeeignet. Die numerischen Beispiele dienen folglich eher der Verifikation der Fehleridentitäten, als der tatsächlichen Fehlerschätzung. Die sinnvolle Einbindung des hier behandelten Fehlerschätzers in ein ortsadaptives Verfahren scheint ebenfalls fragwürdig, da der Fehler jeweils nur für den Endzeitpunkt der Berechnung bestimmt werden kann. Im Fachschrifttum wurde die zielorientierte Fehlerschätzung mit Hilfe des vollständigen Rückwärtsproblems im Rahmen der hier behandelten semidiskreten Methode in der Strukturdynamik deshalb bisher nicht zur Netzadaption verwendet. Die Ausführungen beschränken sich bisher auf die Fehlerschätzung zu gewissen Zeitpunkten. Der unverhältnismäßig große Aufwand der Fehlerschätzung dokumentiert sich auch darin, dass die numerischen Beispiele im Schrifttum eher kleine numerische Modelle mit einer Größenordnung von ca. 1000 Freiheitsgraden umfassen, siehe z.B. MAUTE [70] bzw. FUENTES, LITTLEFIELD, ODEN & PRUDHOMME [35].

In den nachfolgenden Abschnitten soll deshalb untersucht werden, inwieweit der Aufwand für die Fehlerschätzung durch geeignete Vereinfachungen auf ein für praktische Anwendungen sinnvolles Maß reduziert werden kann, und wie die Fehlerschätzung dann in ortsadaptive Verfahren eingebunden werden kann. Dabei wird das Ziel verfolgt, wesentliche Informationen des dualen Problems für die Fehlerschätzung bzw. die Netzadaption zu verwenden, ohne die vollständigen Fehleridentitäten numerisch auszuwerten.

3.8 Fehlerschätzung ohne zeitliche Kopplung des primalen und dualen Problems

Die numerischen Beispiele des vorangegangenen Abschnitts sowie die modale Synthese des räumlichen Diskretisierungsfehlers in Gleichung (3.4) zeigen, dass für die hier behandelten Schwingungsprobleme der Phasenfehler einen dominanten Anteil am gesamten räumlichen Diskretisierungsfehler ausmacht. Aus der modalen Zerlegung geht weiterhin hervor, dass der Phasenfehler mit zunehmender Berechnungsdauer auch bei augenscheinlich ausreichender räumlicher Netzdichte verhältnismäßig groß werden kann. Dies wird durch die Beispiele im vorangegangenen Abschnitt ebenfalls bestätigt. Die Dominanz des Phasenfehlers am Gesamtfehler wird auch daran deutlich, dass die maximalen Diskretisierungsfehler in den Beispielen meistens an den Zeitpunkten auftreten, an denen die Zielgröße gerade ihre Nulldurchgänge hat. Für praktische Probleme scheint jedoch eher die Fragestellung relevant, ob das gewählte Netz für eine gute Approximation der Extremwerte der Zielgröße geeignet ist. Des Weiteren hat die Fehlerschätzung im vorangegangenen Abschnitt ergeben, dass der Phasenfehler bei der numerischen Bestimmung des dualen Problems dazu führt, dass die Fehlerschätzung für spätere Zeitpunkte tendenziell schlechter wird. Dies sind jedoch genau die Zeitpunkte, für die die Fehlerschätzung am aufwendigsten ist.

Es stellt sich im Sinne der praktischen Anwendung der zielorientierten Fehlerschätzung also zwangsläufig die Frage, inwieweit es sinnvoll ist, den Phasenfehler mit Hilfe eines aufwendigen adaptiven Verfahrens zu kontrollieren.

Nachfolgend soll deshalb bei der Fehlerschätzung auf die Schätzung des Phasenfehlers verzichtet werden. Folglich wird dann auch das Ziel, den gesamten räumlichen Diskretisierungsfehler zu kontrollieren, aufgegeben. Unter Vernachlässigung des Phasenfehlers reduziert sich die modale Darstellung (3.4) des räumlichen Diskretisierungsfehlers auf:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_S(\mathbf{x}, t) &\approx \sum_{i=1}^{n_{dof}} \underbrace{(\bar{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x}) - \bar{\mathbf{u}}_i^h(\mathbf{x})) \cdot f_i^h(t)}_{\mathbf{E}_i(\mathbf{x})} + \underbrace{\sum_{i=n_{dof}+1}^{\infty} \bar{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x}) \cdot f_i(t)}_{\text{Abschneidefehler}} \\ &= \sum_{i=1}^{n_{dof}} \mathbf{E}_i(\mathbf{x}) \cdot f_i^h(t) + \text{Abschneidefehler} \end{aligned} \quad (3.45)$$

Unter Vernachlässigung des Abschneidefehlers folgt hieraus direkt, dass für die Schätzung des Fehlers zu einem Zeitpunkt t_n nur Informationen des Zustandes zu diesem Zeitpunkt notwendig sind. Gleichung (3.45) liegt folglich die Annahme zugrunde, dass die exakte Lösung $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_n)$ durch eine reine räumliche Erweiterung der numerischen Lösung $\mathbf{u}_h(\mathbf{x}, t_n)$ dargestellt werden kann. Die exakte Lösung wird folglich formal durch eine räumlich erweiterte Referenzlösung ersetzt:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_n) \approx \sum_{i=1}^{n_{dof}} (\bar{\mathbf{u}}_i^h(\mathbf{x}) + \mathbf{E}_i(\mathbf{x})) \cdot f_i^h(t_n) \quad (3.46)$$

Für die Fehlerschätzung wird die Wichtung des Residuums mit den Geschwindigkeiten des dualen Problems nach Gleichung (3.39) mit einem homogenen dualen Problem verwendet. Dies hat u.a. den Vorteil, dass die zeitlichen Randterme keine Dämpfungsterme enthalten und sich die Fehlerschätzung dadurch vereinfacht.

Für ein homogenes duales Problem lautet die modifizierte Fehleridentität (3.39):

$$\begin{aligned} E(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h) &= [\rho_0(\dot{\mathbf{e}}_S, \dot{\mathbf{z}})_{\mathcal{B}_0} + a_h(\mathbf{e}_S, \mathbf{z})]_0 + \int_0^{t_n} \mathcal{R}_u(\dot{\mathbf{z}}) + \mathcal{R}_k(\mathbf{z}) dt \\ &= [\rho_0(\dot{\mathbf{z}}, \dot{\mathbf{e}}_S)_{\mathcal{B}_0} + a_h(\mathbf{z}, \mathbf{e}_S)]^{t_n} \end{aligned} \quad (3.47)$$

An dieser Stelle sei noch einmal daran erinnert, dass für die Herleitung des dualen Problems und der Fehleridentitäten in Kapitel 2 dieser Arbeit die Differentialgleichung des räumlichen Diskretisierungsfehlers partiell in der Zeit integriert wurde. Die sich ergebenden zeitlichen Randterme zum Zeitpunkt t_n wurden bisher nur zur Bestimmung der korrekten Anfangsbedingungen des dualen Problems verwendet. Die Auswertung des mit der dualen Lösung gewichteten Residuums war dann notwendig, da über den Zeitverlauf des räumlichen Diskretisierungsfehlers keine Information vorlag. Statt dessen wurde deshalb die rechte Seite der Differentialgleichung des Fehlers – das Residuum – zur Fehlerschätzung verwendet. Sobald jedoch, wie hier, eine Annahme bezüglich des Zeitverlaufs des Fehlers gemacht wird, ist die Auswertung des Zeitintegrals hinfällig. Die Fehlerschätzung kann dann direkt auf der Basis der Zustandsgrößen zum Zeitpunkt t_n erfolgen. Für die Fehlerschätzung wird also nur noch die rechte Seite von (3.47) benötigt:

$$E(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h) = Q(\mathbf{u}) - Q(\mathbf{u}_h) = [\rho_0(\dot{\mathbf{z}}, \dot{\mathbf{e}}_S)_{\mathcal{B}_0} + a_h(\mathbf{z}, \mathbf{e}_S)]^{t_n} \quad (3.48)$$

Hieraus folgt auch direkt, dass einerseits nicht mehr die primale Lösung über den gesamten Berechnungszeitraum vorgehalten werden muss und andererseits für das duale Problem nur noch die Anfangsbedingungen bestimmt werden müssen. Das hier gewählte Vorgehen führt folglich zu einem signifikant geringerem numerischem Aufwand gegenüber der Fehlerschätzung mit dem vollständigen Rückwärtsproblem.

Zur weiteren Reduktion des Aufwands soll die duale Lösung auf dem Raumnetz der primalen Lösung bestimmt werden. Dafür wird die Einflussfunktion $\mathbf{z}(\mathbf{x}, t_n)$ in die diskrete Lösung $\mathbf{z}_h(\mathbf{x}, t_n) \in W^h$ und den Diskretisierungsfehler $\mathbf{e}_z(\mathbf{x}, t_n) = \mathbf{z}(\mathbf{x}, t_n) - \mathbf{z}_h(\mathbf{x}, t_n)$ zerlegt. Hiermit lässt sich Gleichung (3.48) in die folgenden Anteile aufspalten:

$$E(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h) = [\rho_0(\dot{\mathbf{e}}_z, \dot{\mathbf{e}}_S)_{\mathcal{B}_0} + a_h(\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_S) + \underbrace{\rho_0(\dot{\mathbf{z}}_h, \dot{\mathbf{e}}_S)_{\mathcal{B}_0} + a_h(\mathbf{z}_h, \mathbf{e}_S)}_{\text{diskr. Teil des Konsistenzfehlers}}]^{t_n} \quad (3.49)$$

Bei Berücksichtigung der Ausführungen in Abschnitt 3.6 erkennt man, dass der mit der diskreten Lösung \mathbf{z}_h gewichtete Teil des räumlichen Diskretisierungsfehlers dabei gerade der diskrete Anteil $\mathbf{e}_{k,h} \in W^h$ des Konsistenzfehlers ist.

Um den Fehler in der Zielgröße mit Hilfe von globalen Normen abzuschätzen, wird auf den Betrag der Zielfehlergröße übergegangen. Dies ergibt die Abschätzung:

$$\begin{aligned} |E(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h)| &= |\rho_0(\dot{\mathbf{e}}_z, \dot{\mathbf{e}}_S)_{\mathcal{B}_0} + a_h(\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_S) + \rho_0(\dot{\mathbf{z}}_h, \dot{\mathbf{e}}_S)_{\mathcal{B}_0} + a_h(\mathbf{z}_h, \mathbf{e}_S)|^{tn} \\ &\leq [|\rho_0(\dot{\mathbf{e}}_z, \dot{\mathbf{e}}_S)_{\mathcal{B}_0}| + |a_h(\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_S)| + |\rho_0(\dot{\mathbf{z}}_h, \dot{\mathbf{e}}_S)_{\mathcal{B}_0}| + |a_h(\mathbf{z}_h, \mathbf{e}_S)|]^{tn} \end{aligned} \quad (3.50)$$

Um nun für die Fehlerschätzung die Standardschätzer anwenden zu können, kann auf die einzelnen Anteile in (3.50) die Cauchy-Schwarz-Ungleichung angewendet werden. Dies führt auf:

$$\begin{aligned} |E(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h)| &\leq \rho_0 \|\dot{\mathbf{e}}_S\|_{L_2} \cdot \|\dot{\mathbf{e}}_z\|_{L_2} + \|\mathbf{e}_S\|_{a,h} \cdot \|\mathbf{e}_z\|_{a,h} \\ &\quad + \rho_0 \|\dot{\mathbf{e}}_S\|_{L_2} \cdot \|\dot{\mathbf{z}}_h\|_{L_2} + \|\mathbf{e}_S\|_{a,h} \cdot \|\mathbf{z}_h\|_{a,h} \end{aligned} \quad (3.51)$$

Hierbei ergibt sich jedoch eine starke Unschärfe bei der Abschätzung des Konsistenzanteils. Numerische Untersuchungen von DIEZ, MORATA & HUERTA [26] zeigen, dass \mathbf{z}_h und \mathbf{e}_S in der Regel nahezu orthogonal sind. Die Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung in Gleichung (3.51) führt dann zu einer extremen Überschätzung der Konsistenzanteile des Fehlers. Die Adaption des Raunggitters erfolgt in [26] deshalb nur auf der Basis der Schätzung des Approximationsfehlers. Bei der Reduzierung des Approximationsfehlers mit Hilfe adaptiver Verfahren zeigte sich, dass dabei auch der Konsistenzfehler reduziert werden konnte.

Bei der Fehlerschätzung wird aus diesem Grund nachfolgend der diskrete Anteil des Konsistenzfehlers vernachlässigt. Dies führt auf den Fehlerindikator

$$|E(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h)| \approx \rho_0 \|\dot{\mathbf{e}}_S\|_{L_2} \cdot \|\dot{\mathbf{e}}_z\|_{L_2} + \|\mathbf{e}_S\|_{a,h} \cdot \|\mathbf{e}_z\|_{a,h}, \quad (3.52)$$

der dann noch in die Fehleranteile der einzelnen Elemente aufgespalten werden kann:

$$|E(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h)| \approx \sum_{i=1}^{n_{el}} \rho_0 \|\dot{\mathbf{e}}_S\|_{L_2,i} \cdot \|\dot{\mathbf{e}}_z\|_{L_2,i} + \|\mathbf{e}_S\|_{a,i} \cdot \|\mathbf{e}_z\|_{a,i} = \sum_{i=1}^{n_{el}} e_i \quad (3.53)$$

Mit dem Fehlerindikator (3.53) liegt somit neben einer Abschätzung des Diskretisierungsfehlers ohne Phasenfehler auch die Fehlerverteilung im gesamten Berechnungsgebiet in Form der Fehlerindikatoren der einzelnen Elemente vor. Auf der Basis der Fehlerverteilung kann dann innerhalb eines ortsadaptiven Verfahrens die Netzadaption gesteuert werden.

Die räumlichen Diskretisierungsfehler des primalen und des dualen Problems werden wiederum mit den Standardfehlerschätzern aus Abschnitt 3.4 abgeschätzt. Aufgrund der Vernachlässigung eines Teils des Konsistenzfehlers ist bei der Verwendung des Fehlerschätzers (3.52) tendenziell mit einer Unterschätzung des tatsächlichen Fehlers zu rechnen, welche in vielen Fällen zumindest teilweise durch die Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung in (3.51) ausgeglichen wird.

Es sei angemerkt, dass als Folge der Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung in Gleichung (3.52) eventuell vorhandene Orthogonalitäten zwischen dem primalen und

dualen Problem nicht mehr erfasst werden können, d.h. der Fall $a(\mathbf{e}_S, \mathbf{e}_z) = 0$ führt nicht zwangsläufig zu $\|\mathbf{e}_S\|_{a,h} \cdot \|\mathbf{e}_z\|_{a,h} = 0$. Dies hat z.B. zur Folge, dass mit dem Fehlerschätzer (3.52) auch dann eine Fehlergröße geschätzt wird, wenn die entsprechende Zielgröße im primalen Problem immer gleich Null ist. Dies ist beispielsweise der Fall, wenn für die Schwingung einer Schale in der Schalenebene der Fehler in einer Verschiebung senkrecht zur Schale geschätzt werden soll.

Wird in Gleichung (3.52) für das duale Problem das primale Problem zum Zeitpunkt t_n eingesetzt, so ergibt sich der Fehler in der Gesamtenergienorm nach Gleichung (3.5). Der klassische Ansatz zur Schätzung des räumlichen Diskretisierungsfehlers in der Gesamtenergienorm ist somit als Sonderfall in der hier behandelten Fehlerschätzung in Zielfunktionalen enthalten. Folglich wurde auch bei allen adaptiven Methoden, welche auf der Minimierung des Fehlers in globalen Normen basieren immer der Phasenfehler infolge der räumlichen Diskretisierung vernachlässigt.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass mit dem hier vorgestellten, stark vereinfachten Fehlerschätzer ein Wechsel in der Zielstellung einhergeht. Anstelle der strengen Kontrolle des absoluten Fehlers in einer Zielgröße zu bestimmten Zeitpunkten wird hier die Fragestellung verfolgt, wie gut die vorhandene räumliche Diskretisierung geeignet ist, den aktuellen Bewegungszustand mit Hinblick auf die Zielgröße abzubilden. Wie weit dieser diskrete Zustand vom exakten Zustand zur gleichen Zeit entfernt ist, wird nicht berücksichtigt. Da die Fehlerschätzung auf die Schätzung des zeitlichen Transportes des Fehlers verzichtet, ist der Fehlerschätzer für Wellenausbreitungsprobleme weniger gut geeignet, da dort die wesentliche Charakteristik der Bewegung im räumlichen *und* zeitlichen Transport der Welle besteht. Das Vernachlässigen des zeitlichen Transports des Fehlers bedeutet bei Wellenausbreitungsproblemen im Gegensatz zu Schwingungen das Vernachlässigen einer auch für praktische Fragestellungen wesentlichen Information.

3.8.1 Verifikation des Fehlerschätzers an einem numerischen Beispiel

Nachfolgend wird der hier vorgestellte vereinfachte Fehlerschätzer anhand eines einfachen numerischen Beispiels überprüft. Als Beispiel wird das Ausschwingen der in Bild 3.11 dargestellten Kragplatte betrachtet. Als Anfangsauslenkung wird die statische Verformung infolge einer vertikalen Einzellast im Punkt A gewählt. Es sollen die Fehler in den Vertikalverschiebungen in den Punkten A und B geschätzt werden.

Da mit dem Fehlerschätzer der Phasenfehler nicht erfasst werden kann, ist die numerische Bestimmung einer Referenzlösung auf einem feineren Netz für die Überprüfung des Fehlerschätzers nicht geeignet. Deshalb wird hier eine Referenzlösung mit Hilfe einer Modalzerlegung generiert. Hierbei wird die Referenzlösung mit Hilfe der Eigenfrequenzen des jeweiligen Berechnungsnetzes bestimmt, d.h.

$$\mathbf{u}_{ref}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{ndf} \bar{\mathbf{u}}_{ref}(\mathbf{x}) \cdot f^i(t).$$

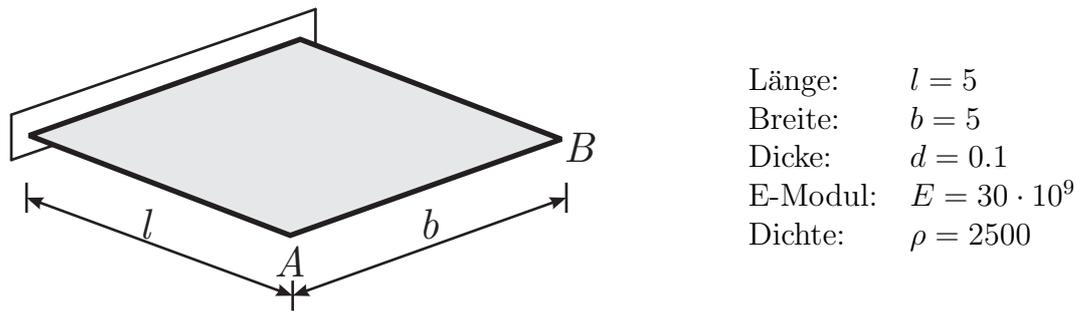


Bild 3.11: Beispiel: Ausschwingen einer Kragplatte. Anfangsauslenkung: Statische Auslenkung infolge einer vertikalen Einzellast im Punkt A .

Der Referenzfehler

$$e_{S,ref}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_{ref}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}_h(\mathbf{x}, t)$$

beinhaltet damit keinen Phasenfehler und keinen Abschneidefehler infolge der Vernachlässigung höherer Eigenformen. Damit die numerische Lösung $\mathbf{u}_h(\mathbf{x}, t)$ frei von einem Zeitintegrationsfehler ist, wird diese ebenfalls mit Hilfe der exakten Integration der Bewegungsgleichung in modalen Koordinaten bestimmt. Die Fehlerschätzung erfolgt jeweils auf zwei uniformen Netzen. Es wird das Volumen-Schalenelement *ANS3DEAS* basierend auf der 7-Parameterformulierung verwendet. Bild 3.12 zeigt die räumlichen Diskretisierungen der beiden Netze, auf denen die Fehlerschätzung erfolgt sowie das Referenznetz zur Bestimmung der Referenzlösung.

Für die Bewertung der Güte der Fehlerschätzung wird der Effektivitätsindex

$$\eta = \frac{\text{geschätzter Fehler}}{\text{exakter Fehler}} \quad (3.54)$$

verwendet. Ideal ist ein Effektivitätsindex der Größenordnung 1.

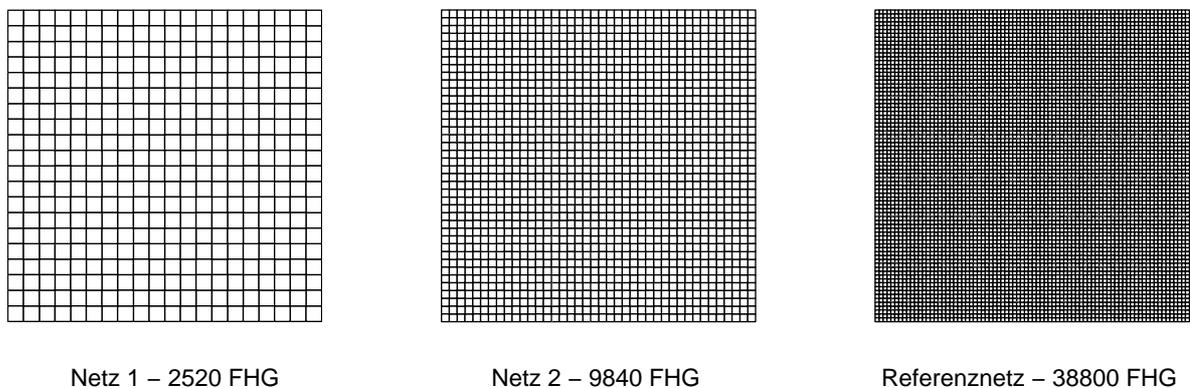


Bild 3.12: Raumnetze für die Fehlerschätzung und Referenznetz für die Bestimmung des Referenzfehlers

Die Bilder 3.13 und 3.14 zeigen die Gegenüberstellung des geschätzten Fehlers und des Referenzfehlers für die vertikale Verschiebung im Punkt A sowie den jeweiligen Effektivitätsindex η für die beiden unterschiedlichen Raumnetze. In den Bildern 3.15 und 3.16 sind die entsprechenden Ergebnisse für die Vertikalverschiebung im Knoten B dargestellt.

Für beide räumliche Diskretisierungen liefert der Fehlerschätzer tendenziell eine Unterschätzung des tatsächlichen Diskretisierungsfehlers. Dies ist zum Teil auf die Vernachlässigung der Konsistenzterme in der Fehlerdarstellung zurückzuführen. Für die feinere Raumdiskretisierung wird die Fehlerschätzung in beiden Fällen besser und der Effektivitätsindex hat zu den Zeitpunkten der maximalen Fehler in etwa die Größenordnung 1.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass der hier vorgeschlagene extrem vereinfachte Fehlerschätzer gemessen am zu betreibenden numerischen Aufwand eine gute Fehlerschätzung ermöglicht und dementsprechend als eine vielversprechende Basis für ein ortsadaptives Verfahren angesehen werden kann.

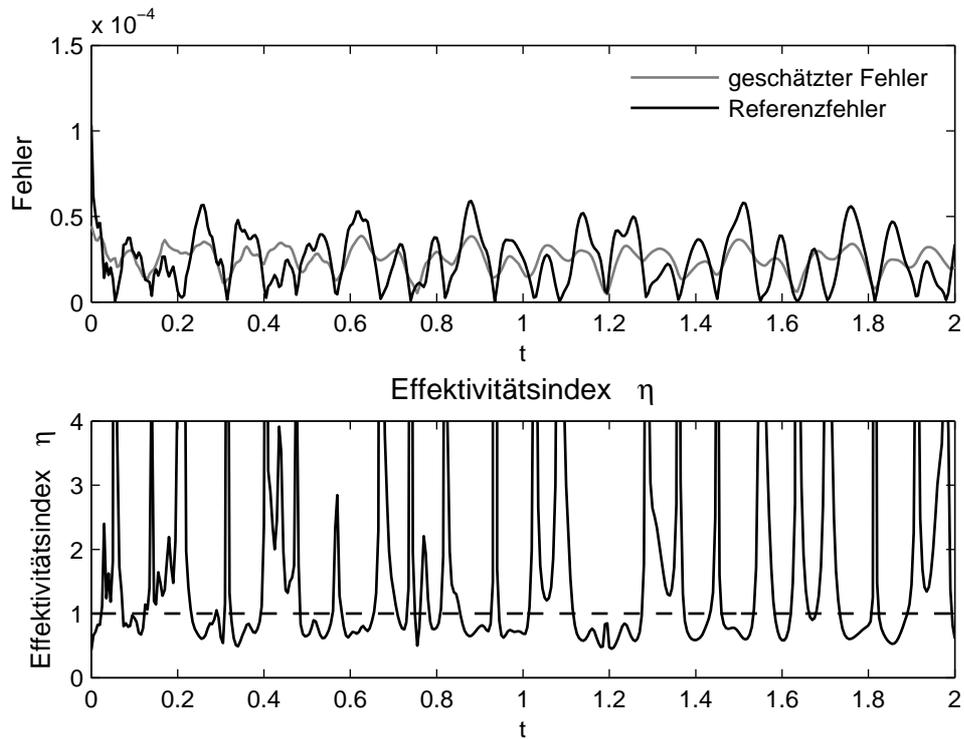


Bild 3.13: Geschätzter Fehler, Referenzfehler und Effektivitätsindex für die vertikale Verschiebung des Punktes A – Netz 1 – 2520 FHG

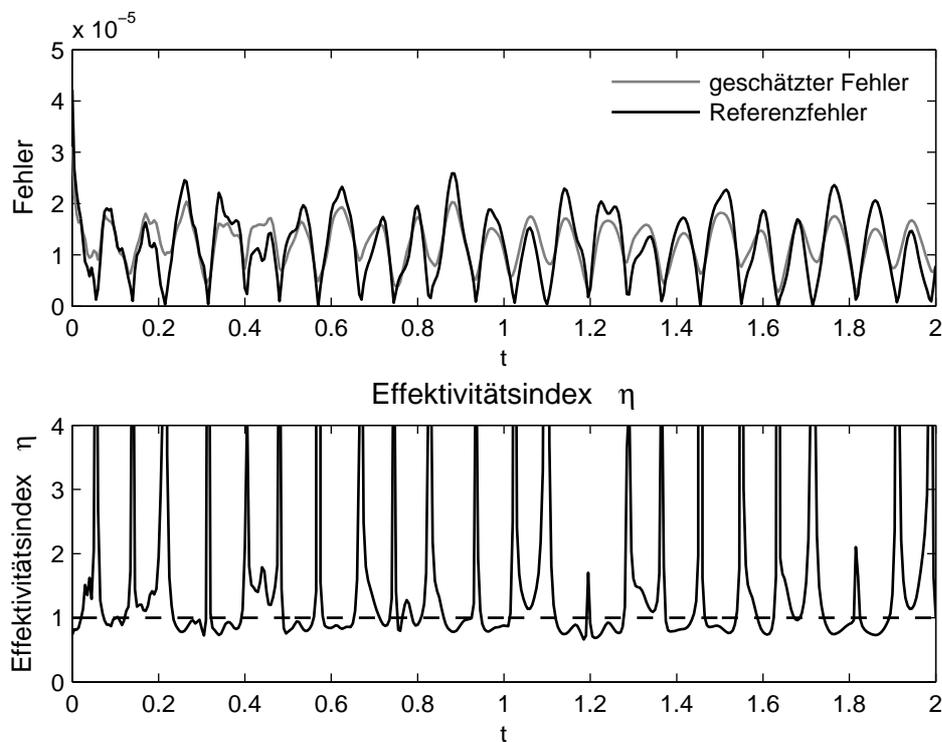


Bild 3.14: Geschätzter Fehler, Referenzfehler und Effektivitätsindex für die vertikale Verschiebung des Punktes A – Netz 2 – 9840FHG

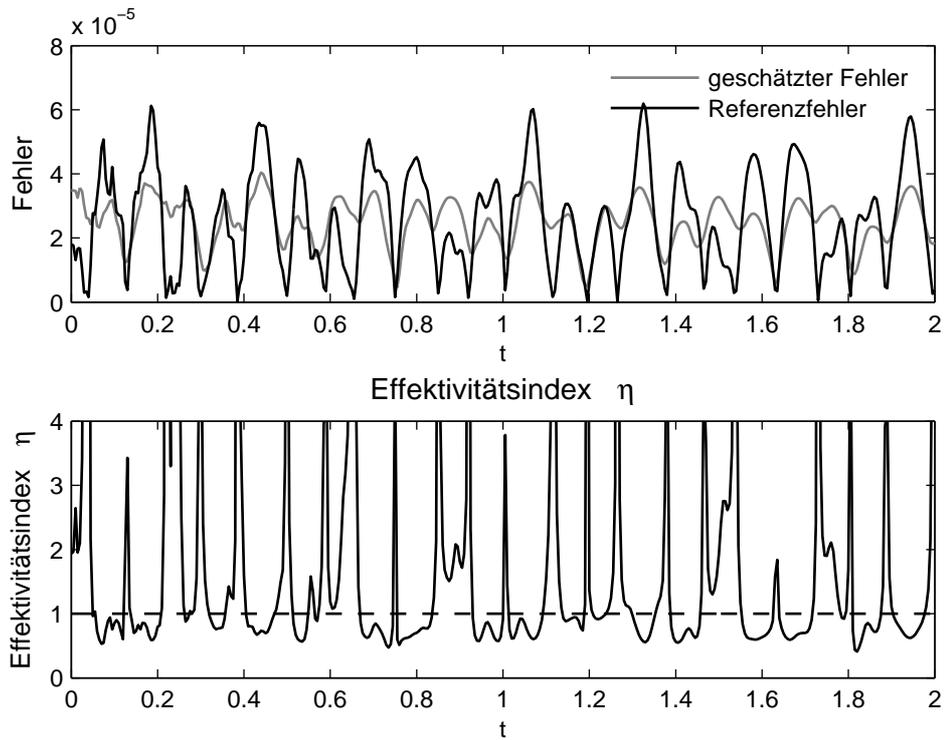


Bild 3.15: Geschätzter Fehler, Referenzfehler und Effektivitätsindex für die vertikale Verschiebung des Punktes B – Netz 1 – 2520 FHG

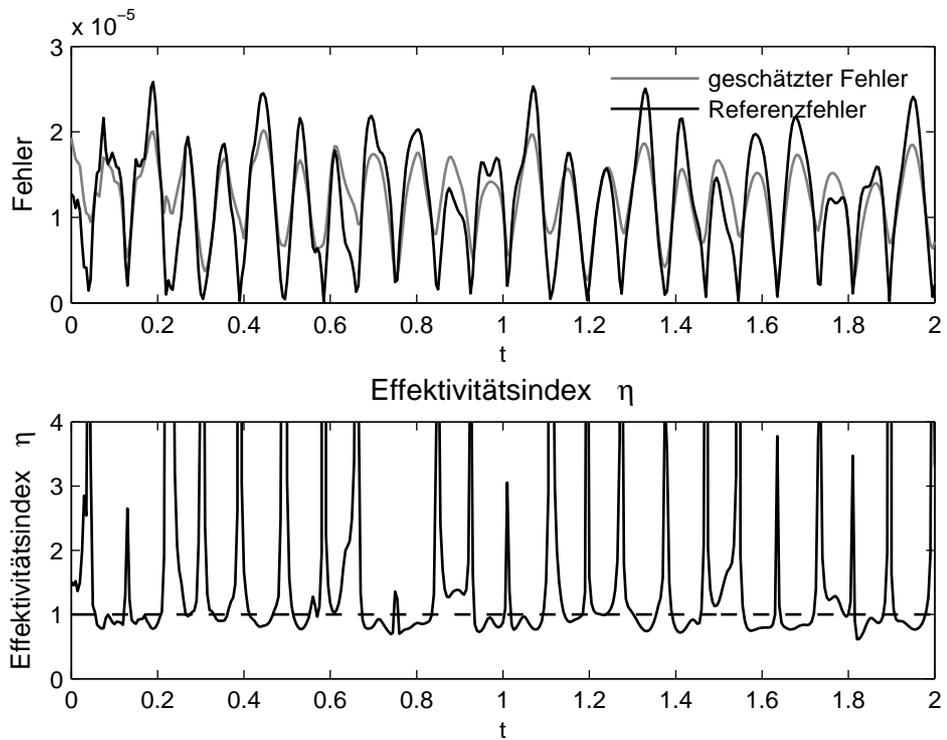


Bild 3.16: Geschätzter Fehler, Referenzfehler und Effektivitätsindex für die vertikale Verschiebung des Punktes B – Netz 2 – 9840 FHG

3.8.2 Weitere Ansätze zur Minimierung des Aufwands

Da die Anwendung der zielorientierten Fehlerschätzung mit Hilfe des vollständigen dualen Problems auf praktische Aufgabenstellungen bisher am numerischen Aufwand scheitert, war der wichtigste Aspekt für die Vereinfachungen der Fehlerschätzung im vorangegangenen Abschnitt die erhebliche Reduktion des Aufwands. Im Schrifttum finden sich weitere Vorschläge zur Aufwandsminimierung, die nachfolgend kurz diskutiert werden.

Ein Ansatz zur Minimierung des numerischen Aufwands für die Fehlerschätzung findet sich in NEUMANN [73]. Hier wird die Wichtung mit dem räumlichen Diskretisierungsfehler \mathbf{e}_z des dualen Problems verwendet. NEUMANN schlägt vor, das Rückwärtsproblem nur für den jeweils letzten Zeitschritt zu lösen. Ziel der Herleitung ist ein Fehlerschätzer für den mittleren räumlichen Diskretisierungsfehler im letzten Zeitschritt infolge der gewählten räumlichen Diskretisierung im gesamten Berechnungsintervall $[0, t_n]$. Der Fehlerschätzer beruht auf der ersten Fehleridentität (2.31), bei der die Wichtung mit der Lösung \mathbf{z} des dualen Problems verwendet wird. Zur Schätzung des mittleren Fehlers in einer Punktverschiebung wird eine im letzten Zeitschritt konstante Einzellast gemäß Gleichung (2.66) aufgebracht:

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{t_n - t_{n-1}} \boldsymbol{\delta}_j(\mathbf{x}_i) \cdot \Delta(t_{n-1}, t_n)$$

Zur Reduzierung des numerischen Aufwands und des Speicherbedarfs wird die Fehleridentität nur im jeweils letzten Zeitschritt gelöst und zur Berücksichtigung des Fehlertransports über die Zeit die Annahme getroffen, dass jeder vorangegangene Zeitschritt den gleichen Anteil am Fehler hat. Bei Vernachlässigung der Dämpfungsterme und der Beschränkung auf Probleme mit homogenen Anfangsbedingungen ergibt sich dann folgender Fehlerindikator:

$$|E(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h)| = \frac{t_n}{t_n - t_{n-1}} \int_{t_{n-1}}^{t_n} (\rho_0 \cdot \|\dot{\mathbf{e}}_S\|_{L_2} \cdot \|\dot{\mathbf{e}}_z\|_{L_2} + \|\mathbf{e}_S\|_a \cdot \|\mathbf{e}_z\|_a) dt \quad (3.55)$$

Für die Schätzung der einzelnen Fehleranteile in Gleichung (3.55) werden dann wiederum die Standardfehlerschätzer aus den Abschnitten 3.4.1 und 3.4.2 verwendet. Die Auswertung des Zeitintegrals in (3.55) erfolgt mit Hilfe einer 1-Punkt Gauß-Legendre Integration, d.h. die Gleichung muss nur in der Mitte des Zeitschrittes ausgewertet werden.

Es ist ersichtlich, dass bei der Anwendung des Fehlerschätzers bei Langzeitsimulationen der geschätzte Fehler unbeschränkt ansteigt. Der Betrag des geschätzten Fehlers – und damit auch die notwendige Netzdichte zur Einhaltung einer vorgegebenen Fehler-toleranz – hängt also maßgeblich von der Berechnungsdauer ab. Dies ist jedoch gerade bei gedämpften Problemen nicht der Fall, da hier der Transport des Fehlers über die Zeit nur in einem beschränkten Zeitraum stattfindet.

Eine ähnliche pragmatische Vorgehensweise mit beschränkter zeitlicher Kopplung des dualen und primalen Problems findet sich auch in MAUTE [70]. In beiden Fällen werden jedoch keine Voraussetzungen für die gemachten Vereinfachungen angegeben. Die reduzierte Lösung des dualen Problems wird jeweils nur mit der Minimierung des Aufwands begründet.

Problematisch bei der Anwendung des Fehlerschätzers ist die Tatsache, dass hier anhand einer zeitlich lokalen Fehlerverteilung, das duale Problem wird nur im letzten Zeitschritt gelöst, auf den zeitlich globalen Fehler zum Zeitpunkt t_n geschlossen werden soll. Dies ist nur dann sinnvoll, wenn eine quasi-stationäre Bewegung vorliegt, sich die grundlegende 'Bewegungsform' also nicht mit der Zeit ändert. Die zeitliche Änderung der dominanten Bewegungsform z.B. infolge transienter Lasten kann somit mit dem dargestellten Fehlerindikator nicht erfasst werden.

Trotzdem erzielt NEUMANN mit dem Fehlerindikator gute Ergebnisse bei der Netzadaption bei Problemen mit veränderlichen Lasten. Dies lässt sich damit begründen, dass NEUMANN den Fehlerindikator, welcher eigentlich den Fehler zum Zeitpunkt t_n infolge der räumlichen Diskretisierung im Intervall $[0, t_n]$ abschätzt, im ortsadaptiven Verfahren als Basis für die Netzverfeinerung zum Zeitpunkt t_n verwendet. Da darüber hinaus ausschließlich eine Verfeinerung des Raumnetzes erfolgt, werden alle im Verlauf der Berechnung auftretenden Bewegungszustände ausreichend erfasst und das resultierende endgültige Netz besitzt eine für alle Zeitpunkte ausreichende Netzfeinheit.

Die Schwächen des von NEUMANN vorgeschlagenen Fehlerschätzers und des darauf aufbauenden ortsadaptiven Verfahrens liegen also einerseits darin, dass für die Herleitung des Fehlerschätzers zu viele Annahmen getroffen werden, die bei allgemeinen Problemstellungen nicht gegeben sind, und andererseits werden im ortsadaptiven Verfahren zeitlich globale Fehlerschätzung und zeitlich lokale Netzveränderung miteinander gekoppelt.

Aufgrund der eindeutigeren theoretischen Grundlage sind somit die im vorangegangenen Abschnitt präsentierten Fehlerschätzer ohne zeitliche Kopplung des dualen und primalen Problems vorzuziehen.

Eine weitere Möglichkeit zur Aufwandsreduzierung bei der Fehlerschätzung könnte bei gedämpften Problemen darin bestehen, das Abklingen des dualen Problems zu berücksichtigen. Die zeitliche Kopplung könnte dann z.B. nur so weit erfolgen, bis die Gesamtenergie des dualen Problems auf ein bestimmtes vorher festzulegendes Maß abgeklungen ist. Dieser Ansatz setzt jedoch eine relativ starke Dämpfung voraus. Für moderat gedämpfte Probleme ist bei dieser Möglichkeit mit keiner wesentlichen Reduzierung des numerischen Aufwands zu rechnen, da dann die Zeit, über die der Fehler transportiert wird, weiterhin verhältnismäßig groß ist.

Weitere Möglichkeiten der Aufwandsreduktion, welche bisher nicht verfolgt wurden, bestehen u.a. darin das duale Problem mit einem größeren Zeitschritt zu berechnen als das primale, oder in der Kopplung des Fehlerschätzers mit Modellreduktionsverfahren.

3.9 Adaption des Raumgitters

Die Fehlerschätzung des vorangegangenen Abschnittes soll nun als Basis für die adaptive Anpassung der räumlichen Diskretisierung dienen. Man unterscheidet bei der adaptiven Ortsdiskretisierung prinzipiell zwischen den folgenden Varianten:

- *h-Adaptivität*: Die Netzdichte, ausgedrückt durch die charakteristische Elementgröße h , wird auf der Basis der Fehlerschätzung angepasst. Die Elementformulierung und der Polynomgrad p der Ansatzordnung werden dabei beibehalten. Die *h-Methode* bietet Vorteile im Bereich von Singularitäten und bei Randschichten der Lösung.
- *p-Adaptivität*: Bei konstanter Netzdichte wird der Polynomgrad p der Ansatzordnung an die Fehlerverteilung angepasst. Die *p-Methode* setzt eine hohe Regularität der Lösung voraus, liefert dann aber eine gegenüber der *h-Adaptivität* höhere Konvergenzordnung, siehe [113]. Details zur effektiven Implementierung und Anwendung der *p-Methode* können den Arbeiten von RANK, DÜSTER ET AL. [30, 93] entnommen werden.
- *hp-Adaptivität*: Hier erfolgt eine Kombination aus der Anpassung des Polynomgrades p und der Elementgröße h . Hierbei wird das Ziel verfolgt, die Vorteile der *h-Adaption* und der *p-Adaption* zu kombinieren. Es wird also in den Bereichen mit glatter Lösung eine *p-Adaption* durchgeführt, wohingegen in Bereichen von Singularitäten und Randschichten eine *h-Adaption* erfolgt. Für detaillierte Ausführungen zur *hp-Methode* sei an dieser Stelle auf die Arbeiten von DEMKOWICZ ET AL. [91, 109] verwiesen.
- *s-Adaptivität*: Hier erfolgt eine lokale Verfeinerung eines während der Berechnung konstanten Grundnetzes in Form der Superposition eines feineren Netzes. Für grundlegende Ausführungen zur Anwendung der *s-Adaption* auf Probleme der Elastodynamik wird an dieser Stelle auf YUE & ROBBINS [117] und die dortigen Referenzen verwiesen. Im Wesentlichen kann die *s-Adaption* als ein Sonderfall der *h-Adaption* angesehen werden.

Die nachfolgenden Ausführungen beschränken sich auf die *h-Adaptivität*. Diese lässt sich wiederum mit Hinblick auf die Art der Netzanpassung unterteilen in:

- *Neuvernetzung*: Hierbei wird auf Basis der räumlichen Verteilung des Diskretisierungsfehlers eine Netzdichtefunktion aufgestellt, anhand derer dann das gesamte Gebiet neu vernetzt wird. Ein Vorteil dieser Methode ist die gleichförmige Änderung der Elementgrößen beim Übergang von fein zu grob diskretisierten Bereichen des Berechnungsgebietes, d.h. es gibt nur einen moderaten Unterschied der Elementgrößen benachbarter Elemente. Nachteilig ist jedoch, dass der Aufwand bei der Neuvernetzung bei jeder Netzmodifikation verhältnismäßig groß ist.

- *Hierarchische Netzmodifikation:* Ausgehend von einem Grundnetz entstehen alle adaptierten Netze durch Unterteilung der Elemente dieses Ausgangsnetzes. Das Ausgangsnetz ist dann in allen folgenden Diskretisierungen enthalten und stellt damit die größte zulässige Raumdiskretisierung innerhalb der gesamten Berechnung dar. Die hierarchische Netzmodifikation zeichnet sich insbesondere durch den geringen Rechenaufwand bei der Netzadaption aus, da hier große Teile des Netzes unverändert bleiben.

Im vorliegenden Fall wird die hierarchische Netzmodifikation verwendet, wobei die Netzveränderung auf die Netzverfeinerung beschränkt wird. Eine Vergrößerung des Netzes findet nicht statt, da dies mit Hinblick auf den eventuell notwendigen Datentransfer zwischen verschiedenen Netzen bei den hier verwendeten Elementen mit angenommenen Verzerrungsverläufen zu Problemen führen kann, siehe Abschnitt 3.9.1 dieser Arbeit. Das grundsätzliche Vorgehen bei der hierarchischen Netzverfeinerung ist im Bild 3.17 dargestellt. Zunächst werden die zu verfeinernden Elemente in vier kleinere Elemente unterteilt. Hierdurch entstehen an den Elementkanten der benachbarten unverfeinerten Elemente 'hängende' Knoten auf den Elementkanten. Um nun die Kompatibilität des Raumnetzes sicherzustellen, werden die Elemente mit 'hängenden' Knoten in sogenannte Übergangselemente unterteilt. Das genaue Vorgehen bei der hierarchischen Netzverfeinerung mit Übergangselementen, insbesondere die wiederholte Netzverfeinerung, kann den Arbeiten von BAUMANN [12] und RICCIUS [98] entnommen werden. Bei Schalen werden alle bei der Netzverfeinerung generierten Knoten auf die analytisch vorgegebene exakte Geometrie projiziert.

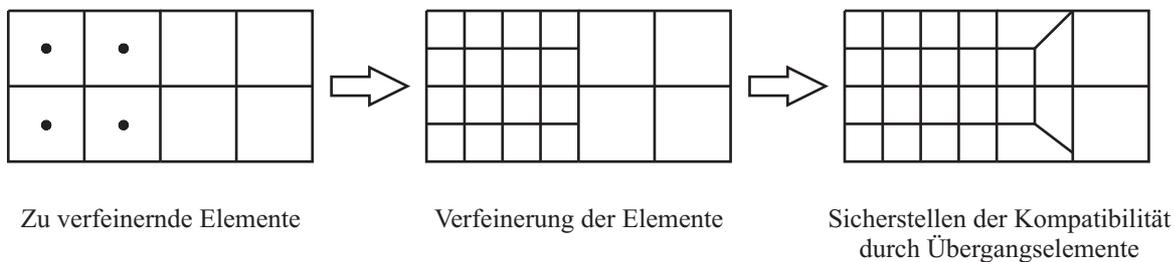


Bild 3.17: Hierarchische kompatible Netzverfeinerung

Die hierarchische Netzverfeinerung mit Übergangselementen führt in den Übergangsbereichen zwischen feiner und grober Diskretisierung zu ungünstigen Elementformen. Insbesondere entstehen bei der hierarchischen Netzverfeinerung gekrümmter Schalen bei dem hier beschriebenen Verfahren verwölbte Übergangselemente und Elementkanten, welche im Gegensatz zu einer uniformen Verfeinerung, z.B. bei Zylinderschalen, nicht mehr parallel zur Erzeugenden der Schale sind. Es ist bekannt, dass dies bei Schalenproblemen bei denen der Biegeanteil die gesamte Verzerrungsenergie dominiert, bei der Verwendung von bilinearen Schalenelementen zu einer verschlechterten Konvergenz der Lösung in der Energienorm führt, siehe z.B. PITKÄRANTA ET AL. [52, 88] oder BATHÉ ET AL. [11]. Der Einfluss der adaptiven hierarchischen Netzverfeinerung mit den hier verwendeten Übergangselementen bei biegedominanten Problemen in der Elasto-

statik wurde z.B. von KIZIO, SCHWEIZERHOF, DÜSTER & RANK in [60] dargelegt. Dort wurde auch festgestellt, dass bei Deformationszuständen mit dominantem Membrananteil an der gesamten Verzerrungsenergie und gemischten Deformationszuständen mit biegedominanten Randschichteffekten die *h-Adaption* mit Übergangselementen gegenüber der uniformen Netzverfeinerung des gesamten Netzes eine beschleunigte Konvergenz liefert. Der vollständig biegedominante Deformationszustand ist also in diesem Zusammenhang als ein Extremfall anzusehen, bei dem die Netzadaption eventuell zu unerwünschten Nebeneffekten führt.

Im Rahmen eines ortsadaptiven Verfahrens können nun verschiedene Zielstellungen verfolgt werden. So kann einerseits angestrebt werden, für jeden Zeitpunkt der Berechnung die für diesen Zeitpunkt optimale Raumdiskretisierung zu bestimmen. Dies führt auf die im Bild 3.18 dargestellte Strategie. Hier wird in jedem Zeitschritt der Fehler hinsichtlich einer vorher festgelegten Toleranz überprüft. Übersteigt der Fehler diese Grenze zu einem Zeitpunkt t_n , so erfolgt eine Verfeinerung des Netzes, der Zustand wird auf dieses neue Netz übertragen und die Berechnung wird auf dem neuen Netz fortgesetzt.

Im Rahmen der Fehlerschätzung mit dualen Problemen wird diese erste Adaptionstrategie erst in Verbindung mit dem Fehlerschätzer ohne Schätzung des Phasenfehlers sinnvoll, da durch die Netzverfeinerung zu einem bestimmten Zeitpunkt t_n nur eine Verbesserung des dort vorliegenden Zustandes mit Hinblick auf die Zielgröße erzielt werden kann. Die Adaptionstrategie 1 setzt damit quasi voraus, dass der Transport des Fehlers über die Zeit nicht berücksichtigt wird, bzw. nur eine untergeordnete Rolle spielt.

Als Alternative zur zeitlich lokalen Netzveränderung in Strategie 1 kann auch das Ziel verfolgt werden, eine konstante Raumdiskretisierung zu ermitteln, für die zu keinem Zeitpunkt der Berechnung der Fehler die festgelegte Toleranz übersteigt. Dies führt auf die im Bild 3.19 dargestellte zweite Strategie. Hier erfolgt die Netzanpassung nicht während der Zeitintegration, sondern am Ende zum Zeitpunkt T . Für die Netzadaption wird bei dieser Strategie im Laufe der Berechnung für jedes Element jeweils der maximale Fehler bestimmt und abgespeichert. Die Netzverfeinerung zum Zeitpunkt T erfolgt dann auf der Basis dieser über den Berechnungszeitraum gesammelten Information.

Für die Bestimmung des endgültigen Berechnungsnetzes sind bei dieser Strategie eventuell mehrere vollständige Berechnungsläufe notwendig. Für die hier verwendete hierarchische Netzadaption, bei der ein Element maximal in 4 kleinere Elemente unterteilt wird, kann diese Strategie somit sehr rechenintensiv werden, insbesondere dann, wenn das Startnetz sehr grob gewählt wird. Diese zweite Strategie erscheint deshalb besonders dann angebracht, wenn ein Neuvernetzungsalgorithmus zur Verfügung steht.

Der klare Vorteil gegenüber der Strategie 1 liegt darin, dass keine Notwendigkeit besteht, Daten zwischen verschiedenen Netzen zu transferieren.

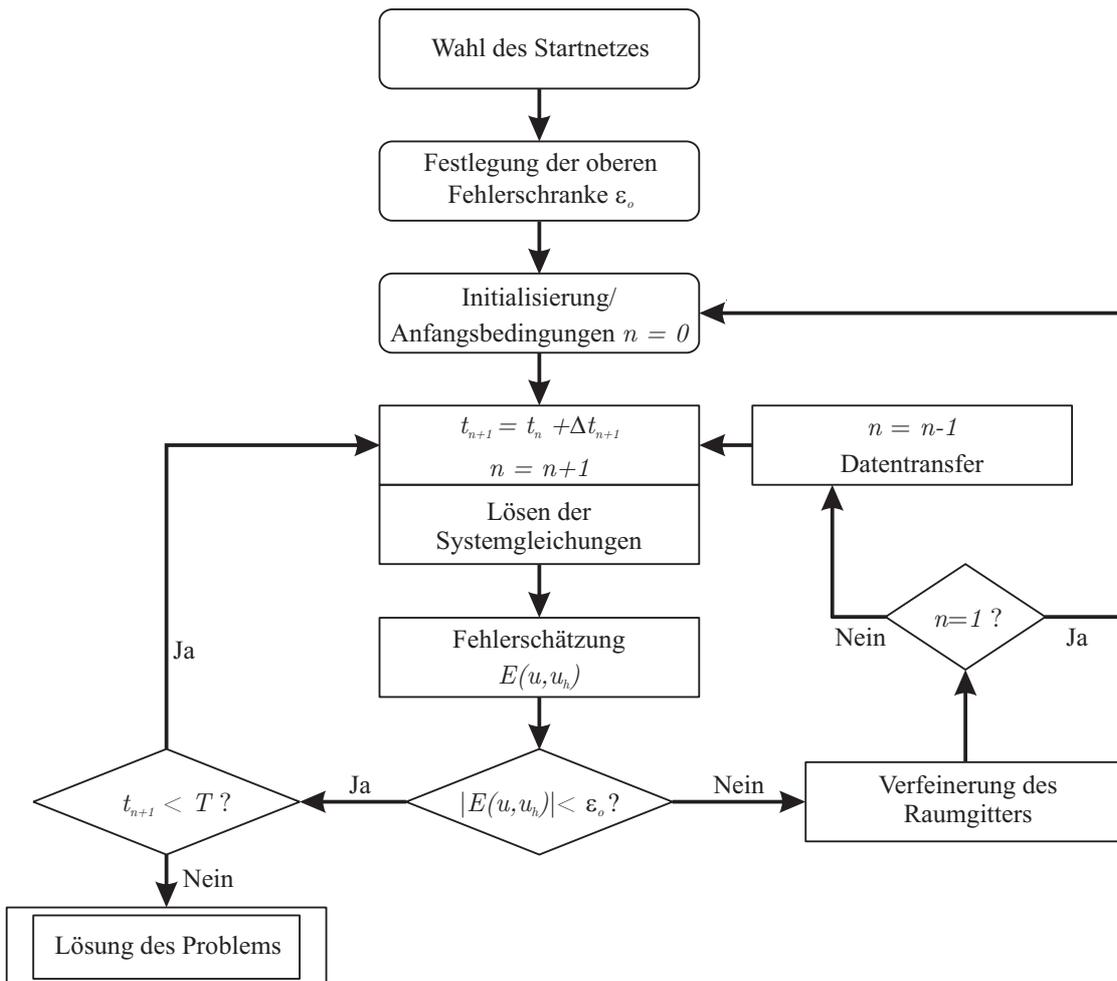


Bild 3.18: Strategie 1: Ortsadaptives Verfahren mit Verfeinerung während der Berechnung und Transfer der Zustandsvariablen

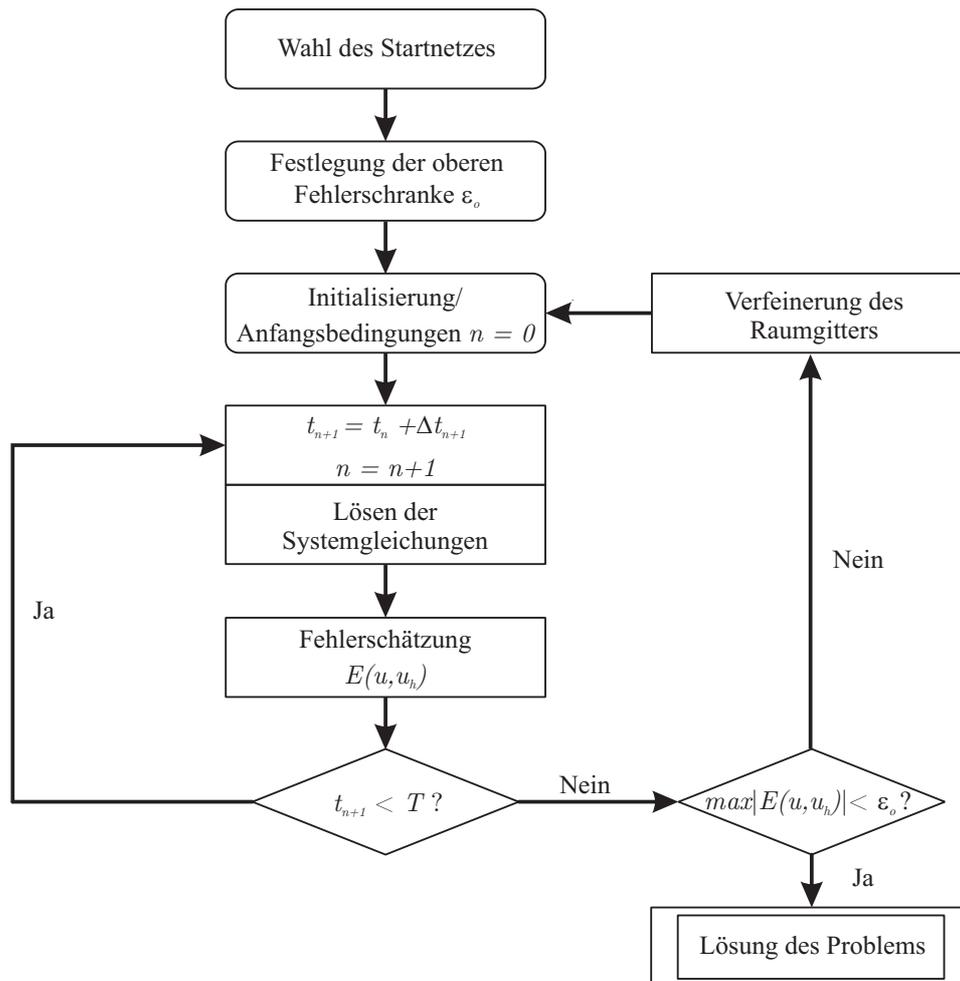


Bild 3.19: Strategie 2: Ortsadaptives Verfahren mit Verfeinerung am Ende der Berechnung ohne Transfer der Zustandsvariablen

3.9.1 Datentransfer bei Netzveränderungen während der Berechnung

Die Netzveränderung innerhalb einer ortsadaptiven transienten Berechnung nach der Strategie 1 in Bild 3.18 bedingt den Transfer des Zustandes des alten Netzes auf das neue adaptierte Raumnetz. Problematisch ist hierbei, dass durch den Datentransfer ein Fehler in die Lösung eingebracht wird, der bisher nicht in geeigneter Weise kontrolliert werden kann. Für die hier behandelten Adaptionsverfahren mit lokalen Zielgrößen ist insbesondere der lokal durch den Datentransfer eingebrachte Fehler von Bedeutung. Numerische Untersuchungen von HAN [42] bei Netzadaptionen bei elasto-plastischen Schalenproblemen zeigen, dass sich der Fehler durch den Datentransfer hauptsächlich in großen lokalen Fehlern äußert. Für die hier behandelten Problemstellungen erscheint deshalb der Datentransfer besonders kritisch. Wie stark der Einfluss des Datentransfers auf lokale Zielgrößen ist, wird im Rahmen der numerischen Beispiele am Ende des Kapitels untersucht.

Weiterhin ist anzumerken, dass jede Netzveränderung innerhalb einer transienten Berechnung einer Änderung der Basis, in der die Zustandsgrößen dargestellt werden, entspricht. Ein zu häufiger Wechsel der Basis bei transienten Berechnungen kann dabei schon zu großen Fehlern führen. Dies wurde z.B. von IDELSOHN & CARDONA [58] im Rahmen der Modellreduktion mit Eigenvektoren festgestellt. KRYSL, LALL & MARSDEN [63] weisen im Zusammenhang mit der Modellreduktion darauf hin, dass ein Wechsel der Basis innerhalb einer transienten Berechnung einer Zwangsbedingung in der Zeit entspricht, welche großen Einfluss auf das Berechnungsergebnis haben kann. Dies ist ein Aspekt, der bisher innerhalb adaptiver Finite-Elemente-Verfahren keine Beachtung fand und prinzipiell für eine konstante räumliche Diskretisierung spricht.

Ein weiterer Problemkreis beim Datentransfer zwischen den Netzen ist der, dass die an den Transferalgorithmus zu stellenden Anforderungen vielfältig und teilweise konträr zueinander sind. So können unter anderem die folgenden Eigenschaften bei der Konstruktion eines Transferalgorithmus von Bedeutung sein, siehe z.B. RASHID [97]:

- *Glattheit der transferierten Lösung:* Die transferierte Lösung muss genauso glatt sein, wie eine vollständig auf dem neuen Netz ermittelte Lösung.
- *Erfüllung der Erhaltungssätze:* Die transferierte Lösung muss die Erhaltungssätze, wie Energieerhaltung und Impulsbilanz, erfüllen.
- *Lokalität der Datenübertragung:* Lokale Eigenschaften der Lösung auf dem alten Netz müssen bei der Datenübertragung auf das neue Netz erhalten bleiben. Diese Forderung ist dabei teilweise konträr zur Forderung der Glattheit der transferierten Lösung, da mit der Glättung von Daten in der Regel auch eine Verteilung der Daten über das Gebiet einhergeht.
- *Selbstkonsistenz:* Die Datenübertragung auf das neue Netz mit anschließendem Rücktransfer auf das alte Netz muss – zumindest annähernd – wieder den ur-

sprünglichen Zustand ergeben. Insbesondere muss im Falle identischer Netze der Transferoperator die Identitätsmatrix ergeben.

Die Wichtung der einzelnen Anforderungen ist dann in der Regel von der Art des zugrunde liegenden physikalischen Problems abhängig. So spielt beispielsweise die Lokalität der Datenübertragung bei Problemen der Plastizität eine große Rolle, siehe PERIC ET AL. [82, 85].

Für die Probleme der Strukturodynamik ist beim Datentransfer zwischen Wellenausbreitungsproblemen und Schwingungsproblemen zu unterscheiden. Bei der Simulation der Ausbreitung von Wellen ist insbesondere die Erhaltung lokaler Eigenschaften bei der Datenübertragung von Bedeutung. Numerische Untersuchungen von RICCIUS [98] zeigen, dass bei der Simulation von Wellenausbreitungen die Wahl des Transferalgorithmus maßgeblichen Einfluss auf die weiteren Netzveränderungen innerhalb des adaptiven Verfahrens und damit auf das Ergebnis der gesamten Berechnung haben kann. Problematisch bei Wellenausbreitungsproblemen ist die Tatsache, dass im Sinne der numerischen Effizienz jeweils nur im Bereich der Wellenfront eine ausreichend feine Diskretisierung erforderlich ist, wohingegen in den Bereichen, die die Welle bereits durchlaufen hat, eine Vergrößerung des Netzes wünschenswert ist. Numerische Untersuchungen haben jedoch ergeben, dass insbesondere die Netzvergrößerung hinsichtlich des Datentransfers zu Problemen, z.B. bezüglich der Energieerhaltung, führen kann. Durch das Entfernen von Knoten wird in diesem lokalen Bereich auch ein Teil der Energie aus dem System entfernt. Wird nun, wie bei RICCIUS [98] die globale Energieerhaltung durch nachträgliche globale Skalierung der Daten auf dem neuen Netz erzwungen, so findet im Endeffekt eine Verteilung dieser Energie über das gesamte Gebiet statt. Hierdurch kann durch den Datentransfer der lokale Charakter der Welle verfälscht werden. Wird hingegen auf die globale Erhaltung der Gesamtenergie verzichtet, so entspricht der Datentransfer einer künstlichen, unphysikalischen Dämpfung, die ebenfalls das Berechnungsergebnis verfälscht. Die lokale Netzverfeinerung ohne gleichzeitige Vergrößerung hingegen ist in diesem Sinne weniger kritisch. Die hier gemachten Aussagen und die Ergebnisse von RICCIUS [98] führen zu der Empfehlung, dass für die Simulation der Wellenausbreitung mit Hilfe der Methode der finiten Elemente eine gleichmäßige möglichst feine Raumdiskretisierung verwendet werden sollte. Aufgrund der hier gemachten Ausführungen wird im Rahmen dieser Arbeit auf eine Netzvergrößerung verzichtet und nur eine hierarchische Netzverfeinerung durchgeführt.

Die heutzutage allgemein verwendeten Verfahren beim Datentransfer zwischen unterschiedlichen Netzen basieren i.d.R. auf der von ORTIZ & QUIGLEY [83] angegebenen Vorgehensweise. ORTIZ & QUIGLEY fordern die sogenannte variationelle Konsistenz des Transfers mit dem zugrunde liegenden Variationsproblem. Dabei wird vorausgesetzt, dass der schwachen Formulierung des Problems ein Variationsfunktional zugrunde liegt. Für Problemstellungen in der Dynamik wird in RADOVITZKY & ORTIZ [92] ein Transferoperator für die nichtlineare Dynamik unter Verwendung des Newmarkverfahrens angegeben. Es wird angenommen, dass die Zustandsgrößen zum Zeitpunkt t_n auf dem alten Netz gegeben sind und am Ende des Zeitschrittes zum Zeitpunkt t_{n+1} ein Gleichgewichtszustand auf der neuen Raumdiskretisierung gesucht ist. Hierfür werden

die Newmarkansätze (1.102) mit Hilfe des Transferoperators \mathbf{T} wie folgt modifiziert:

$$\begin{aligned}\mathbf{d}_{n+1} &= \mathbf{T}\mathbf{d}_n + \Delta t\mathbf{T}\dot{\mathbf{d}}_n + \Delta t^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \beta\right)\mathbf{T}\ddot{\mathbf{d}}_n + \beta\ddot{\mathbf{d}}_{n+1} \right] \\ \dot{\mathbf{d}}_{n+1} &= \mathbf{T}\dot{\mathbf{d}}_n + \Delta t \left[(1 - \gamma)\mathbf{T}\ddot{\mathbf{d}}_n + \gamma\ddot{\mathbf{d}}_{n+1} \right]\end{aligned}\tag{3.56}$$

Der Transferoperator \mathbf{T} lautet dann nach RADOVITZKY & ORTIZ [92] allgemein:

$$\mathbf{T} = \mathbf{M}_{n+1}^{-1} \cdot \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \mathbf{N}_{n+1}^T \cdot \mathbf{N}_n dV\tag{3.57}$$

Hierin bezeichnet \mathbf{N}_{n+1} die Interpolationsfunktionen auf dem neuen und \mathbf{N}_n die Verschiebungsansätze auf dem alten Netz. \mathbf{M}_{n+1} ist die Massenmatrix der neuen Diskretisierung. Für die hier verwendete hierarchische Netzverfeinerung gilt, dass die Ansatzfunktionen der alten Raumdiskretisierung in den neuen Verschiebungsansätzen enthalten sind. Die Ansatzfunktionen \mathbf{N}_n lassen sich folglich mit Hilfe der Ansätze \mathbf{N}_{n+1} wie folgt ausdrücken:

$$\mathbf{N}_n = \mathbf{N}_{n+1} \cdot \mathbf{C}\tag{3.58}$$

Die Matrix \mathbf{C} enthält die Zwangsbedingungen, welche die Ansätze \mathbf{N}_{n+1} auf die Ansätze \mathbf{N}_n reduzieren. Das Einsetzen dieser Beziehung in die allgemeine Definition des Transferoperators (3.57) liefert dann den folgenden einfachen Zusammenhang:

$$\mathbf{T} = \mathbf{M}_{n+1}^{-1} \cdot \underbrace{\int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \mathbf{N}_{n+1}^T \cdot \mathbf{N}_{n+1} dV}_{\mathbf{M}_{n+1}} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{C}\tag{3.59}$$

Der Transferoperator reduziert sich also im Falle der hierarchischen Verfeinerung auf die rein geometrische Interpolation der alten Zustandsgrößen auf dem neuen Netz. Ergänzend sollte noch angemerkt werden, dass die hier gemachten Ausführungen streng genommen nur gültig sind, wenn sich in Folge der Netzverfeinerung nicht die Geometrie des Berechnungsgebietes ändert. Bei gekrümmten Strukturen und gekrümmten Rändern gelten die Voraussetzungen demnach nicht. Es wird aber angenommen, dass sich die Geometrie bei der Netzverfeinerung nur moderat ändert und der Transfer deshalb auch auf diese Fälle übertragen werden kann.

Zusammenfassend setzt sich der Datentransfer damit aus den folgenden Schritten zusammen: Überschreitet der geschätzte Fehler zu einem Zeitpunkt t_{n+1} die vorgegebene Toleranz, so erfolgt zunächst

- eine lineare Interpolation der Knotendaten des alten Netzes zum Zeitpunkt t_n auf das neue Netz und anschließend die
- Berechnung der Zustandsgrößen zum Ende des Zeitschrittes mit Hilfe des Newmarkverfahrens.

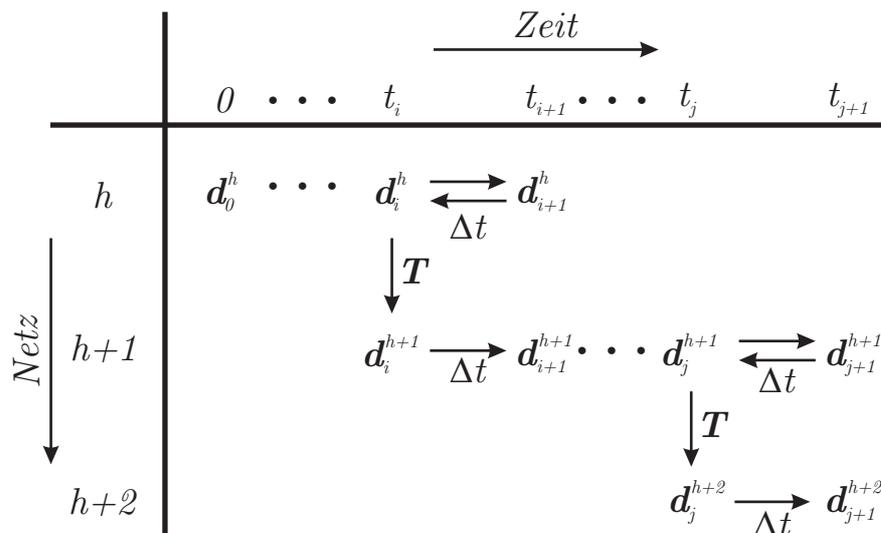


Bild 3.20: Schema des Transfers der Knotenverschiebungen innerhalb der semidisreten Methode mit Netzverfeinerungen zu den Zeitpunkten t_{i+1} und t_{j+1}

Zum Zeitpunkt t_{n+1} liegt mit dieser Vorgehensweise wieder ein zulässiger Gleichgewichtszustand vor. Der neu ermittelte Zustand erfüllt somit die Impulsbilanz zum Zeitpunkt t_{n+1} und stellt eine ausreichend glatte Lösung auf dem neuen Netz dar. Aufgrund der hierarchischen Netzverfeinerung ist der hier beschriebene Transfer sehr lokal, ein Verteilen der Größen über das Gebiet findet folglich nicht statt. Bei mehreren Netzverfeinerungen innerhalb der Berechnungsdauer ergibt sich somit das im Bild 3.20 dargestellte Schema für die Datenübertragung.

3.9.2 Steuerung der Netzveränderung

Die lokale Anpassung der räumlichen Diskretisierung erfolgt auf der Basis der Elementfehlerindikatoren e_i gemäß Gleichung (3.53). Es wird dann noch ein Kriterium zur Auswahl der Elemente benötigt, welche bei der Netzverfeinerung verfeinert werden sollen.

Für die Netzadaption auf der Basis des räumlichen Diskretisierungsfehlers in der Energienorm ist die Optimalität des Netzes gegeben, wenn alle Elemente den gleichen Anteil am räumlichen Diskretisierungsfehler haben, siehe z.B. BABUSKA ET AL. [4, 113]. Da der Fehlerindikator (3.53) auf der Auswertung des Produkts der Energienormen von primalem und dualem Problem beruht, übertragen DIEZ & CALDERÓN in [27] dieses Optimalitätskriterium auch auf die zielorientierte Fehlerschätzung. Ebenso werden alle a-priori Fehlerabschätzungen der Standardfehlerschätzung in der Energienorm auf die zielorientierte Fehlerschätzung angewendet. Der Argumentation von DIEZ & CALDERÓN folgend basiert die hier verwendete Verfeinerungssteuerung vollständig auf den von RICCIUS [98] für die Netzverfeinerung auf Basis der Energienorm verwendeten Verfahren.

RICCIUS [98] unterscheidet drei Verfahren zur Verfeinerungssteuerung:

- Maximalfehlersteuerung
- Prozentualsteuerung
- Kombinationssteuerung

Diese werden nachfolgend kurz erläutert.

Maximalfehlersteuerung

Bei der Maximalfehlersteuerung erfolgt die Verfeinerung der Elemente, für die gilt:

$$e_i > c \cdot e_{max} \quad \text{mit} \quad e_{max} = \max_{j=1 \dots n_{el}} (e_j) \quad (3.60)$$

Für die sinnvolle Wahl des Verfeinerungsparameters c werden die Konvergenzeigenschaften der Methode der finiten Elemente herangezogen. RICCIUS gibt für den Parameter c folgenden optimalen Wert an:

$$c \approx \frac{1}{2^{p+1}} \quad (3.61)$$

Hierin bezeichnet p die Ansatzordnung der verwendeten Elemente. Für die hier verwendeten bilinearen Volumen-Schalenelemente ($p = 1$) ergibt sich damit $c = \frac{1}{4}$. Der große Vorteil der Maximalfehlersteuerung beruht auf der Tatsache, dass die Ermittlung der zu verfeinernden Elemente sehr einfach durchzuführen ist.

Die Herleitung des optimalen Wertes für den Parameter c beruht auf der Annahme, dass die Lösung keine Singularitäten aufweist. Bei Problemstellungen mit Singularitäten führt die Maximalfehlersteuerung nach (3.60) nur zur Verfeinerung von sehr wenigen Elementen im Bereich der Singularität. Das ortsadaptive Verfahren wird dadurch sehr ineffizient.

Prozentualsteuerung

Bei der Prozentualsteuerung wird ein vorgegebener Anteil $p \leq 100\%$ der Elemente verfeinert. Dabei muss jedes zu verfeinernde Element einen größeren Fehlerindikator aufweisen als alle Elemente, die nicht verfeinert werden. Dieses Verfahren erfordert bei der direkten Umsetzung die Sortierung der Elemente nach der Größe ihrer Fehlerindikatoren. Als Alternative gibt RICCIUS ein Verfahren an, bei denen die Elementfehlerindikatoren in Größenklassen eingeteilt werden. Anschließend wird ermittelt, welche Größenklassen zusammengenommen ungefähr die erforderliche Anzahl zu verfeinernder Elemente enthält. Es erfolgt dann eine Verfeinerung aller Elemente der entsprechenden Größenklassen. Die Vorgabe, $p \leq 100\%$ Elemente zu verfeinern, wird mit diesem

Verfahren dann nur näherungsweise erfüllt. Vorteilhaft ist jedoch, dass sich der Aufwand für die Ermittlung der zu verfeinernden Elemente gegenüber der Anwendung von Sortieralgorithmen verringern lässt. Auf der Basis von Konvergenzbetrachtungen gibt Riccius als optimalen Parameter für die Prozentualsteuerung $p = 33\%$ an.

Schwächen zeigt die Prozentualsteuerung, wenn ein fast optimales Netz mit einer annähernden Gleichverteilung des Fehlers vorliegt. Hier müsste eigentlich eine uniforme Netzverfeinerung stattfinden, um wiederum eine optimale Fehlerverteilung auf dem neuen Netz zu erhalten. Bei Verwendung der Prozentualsteuerung erfolgt in diesem Fall aber trotzdem nur die Verfeinerung von $p < 100\%$ der Elemente. Das verfeinerte Netz ist dann im Sinne der zu erwartenden Fehlerverteilung nicht mehr optimal.

Kombinationssteuerung

Die alleinige Anwendung der Maximalfehlersteuerung oder der Prozentualsteuerung führt in gewissen Fällen zu einem ungünstigen Netzverfeinerungsverfahren. Um die Nachteile der Maximalfehlersteuerung bei Singularitäten in der Lösung bzw. der Prozentualsteuerung bei optimalen Netzen zu umgehen, schlägt RICCIUS als dritte Alternative die Kombination der beiden Verfahren vor. Hierbei wird das Verfahren verwendet, welches zur größten Anzahl an zu verfeinernden Elementen führt.

Es sei angemerkt, dass sich mit Hilfe der Verfeinerungsparameter c und p die Effizienz des ortsadaptiven Verfahrens massiv beeinflussen lässt. Für die numerischen Beispiele im Rahmen dieser Arbeit wird einheitlich die Kombinationssteuerung mit den Parametern $c = \frac{1}{4}$ und $p = 33\%$ verwendet.

3.9.3 Numerische Beispiele

Die hier vorgestellten Netzadaptionsstrategien werden wiederum an der bereits in Abschnitt 3.7.1 untersuchten Halbkugel mit Loch getestet, welche mit zwei Kräftepaaren belastet wird, siehe Bild 3.21. Auf der Unterseite der Halbkugel werden Symmetriestandbedingungen aufgebracht. Es werden die zwei in Bild 3.22 dargestellten Lastfälle untersucht. Die Berechnungsdauer beträgt $T = 2$, die Zeitintegration erfolgt mit dem Newmarkverfahren mit den Parametern $\gamma = 2\beta = 0,5$ mit einer konstanten Zeitschrittweite $\Delta t = 0,005$. Aufgrund der Symmetrie wird wiederum nur das in Bild 3.21 gekennzeichnete Viertel der Halbkugel mit Volumen-Schalenelementen *ANS3DEAS* auf Basis der 7-Parameter-Formulierung diskretisiert. Die Referenzlösung wird auf einem uniformen Netz mit 16348 Elementen und $n_{eq,ref} = 99072$ Freiheitsgraden ermittelt.

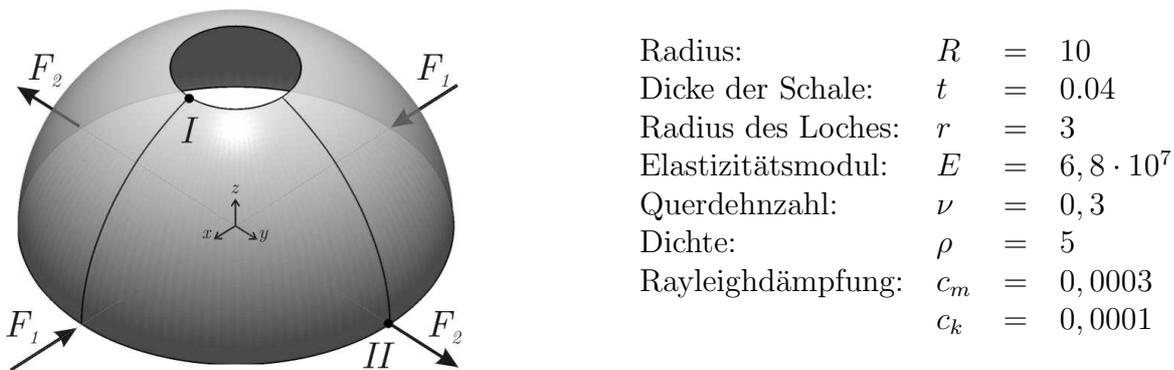


Bild 3.21: Beispiel Halbkugel mit Loch: Geometrie und Materialparameter

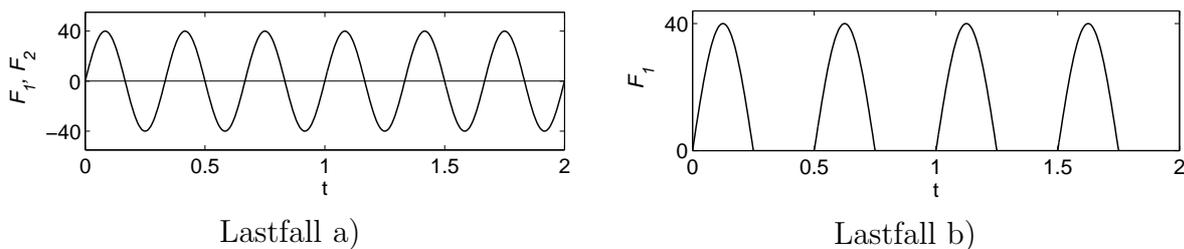


Bild 3.22: Beispiel Halbkugel mit Loch: Lastfälle a) und b)

Als Zielgrößen werden die vertikale Punktverschiebung $u_{z,I}$ des Punktes *I* im Lastfall a) und die horizontale Punktverschiebung $u_{y,II}$ des Punktes *II* im Lastfall b) betrachtet.

Die mit Hilfe der Adaptionstrategien 1 und 2 generierten Lösungen werden mit den Lösungen auf uniformen Netzen verglichen. Hiermit soll überprüft werden, ob die vorgeschlagenen ortsadaptiven Verfahren zu effizienteren Raumdiskretisierungen mit Hinblick auf die betrachtete Zielgröße führen. Da die der Ortsadaption zugrunde liegende Fehlerschätzung die Phasenfehler infolge der räumlichen Diskretisierung nicht erfasst, werden zum Vergleich der Lösungen jeweils die maximalen Amplituden der Zielgröße herangezogen, auch wenn diese nicht zu exakt den gleichen Zeitpunkten auftreten.

Aufgrund der tendenziellen Unterschätzung des tatsächlichen Fehlers in der Zielgröße durch die Vernachlässigung der Konsistenzanteile ist zu erwarten, dass der tatsächliche Fehler in der Zielgröße die vorgeschriebene Fehlertoleranz übersteigt. Die im Verfahren angegebenen Fehlertoleranzen können somit nur als Richtwerte für die Größenordnung der zu erwartenden Fehler in der Zielgröße angesehen werden.

Halbkugel mit Loch – Lastfall a) – Strategie 1

Zunächst wird die Adaptionstrategie 1 aus Bild 3.18 für die Netzadaption im Lastfall a) verwendet. Zielgröße ist die vertikale Verschiebung des Punktes I , der obere Grenzwert für den absoluten Fehler in der Verschiebung ist $\varepsilon_o = 4 \cdot 10^{-4}$. Als Startnetz wird ein uniformes Netz mit 64 Volumen-Schalenelementen mit und 432 Freiheitsgraden verwendet. In Bild 3.23 ist der Verlauf der Referenzlösung dargestellt. Darüber hinaus sind die lokalen relativen Maxima der Referenzlösung für den nachfolgenden Vergleich der unterschiedlichen Lösungen hervorgehoben.

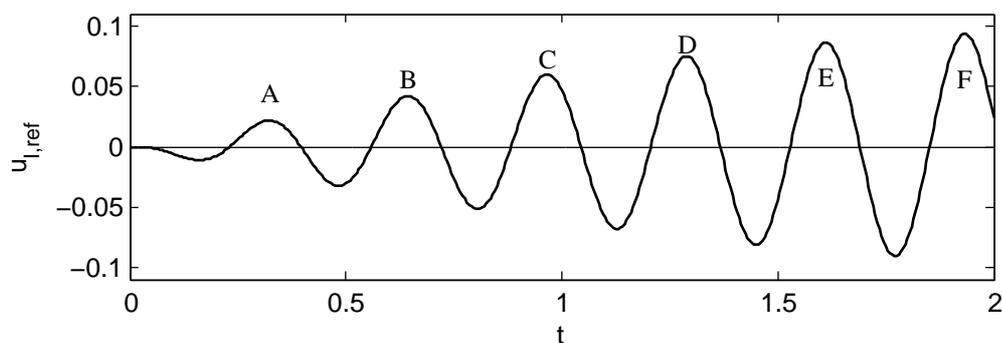


Bild 3.23: Beispiel Halbkugel mit Loch: Referenzlösung der vertikalen Verschiebung $u_{z,I}$ des Punktes I

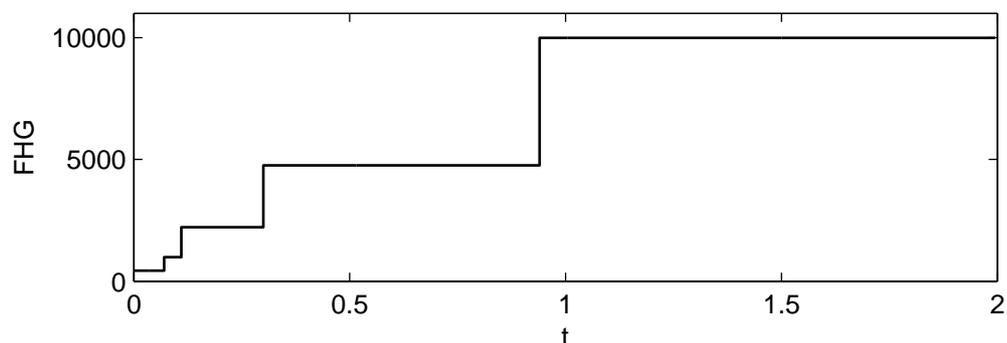


Bild 3.24: Beispiel Halbkugel mit Loch: Anzahl der Gleichungen über die Zeit bei Adaption des Netzes mit Strategie 1 – Lastfall a)

Bild 3.24 zeigt die Entwicklung der Anzahl der Freiheitsgrade über die Berechnungsdauer bei Anwendung der Adaptionstrategie 1. Für den hier betrachteten Einschwingvorgang der Schale für den harmonischen Lastfall a) steigt die Zielgröße kontinuierlich mit

der Zeit an. Entsprechend baut sich auch der maximale Fehler kontinuierlich mit der Zeit auf, was dazu führt, dass die Raumdiskretisierungen über relativ lange Zeiträume konstant bleiben. Die Netzverfeinerungen erfolgen also nicht zu dicht aufeinander. Unter diesem Gesichtspunkt stellt der Lastfall a) ein für die Adaptionstrategie 1 sehr gut gestelltes Problem dar. Ein negativer Einfluss der Netzadaption auf die lokale Zielgröße lässt sich im vorliegenden Fall somit nicht feststellen.

Die zugehörigen adaptierten Netze sind in Bild 3.25 dargestellt. Man erkennt deutliche Verfeinerungen der Netze im Bereich der Angriffspunkte der äußeren Lasten, sowie im Bereich der gesuchten Zielgröße im Punkt I . Diese starke Verfeinerung am oberen freien Rand ist im Wesentlichen auf den dort auftretenden Randschichteffekt zurückzuführen und deshalb relativ unabhängig von der gewählten Zielgröße. Folglich führt eine Netzadaption auf Basis globaler Fehlerschätzer ebenfalls zu einer starken Verfeinerung in diesem Bereich, der Effekt der Fehlerschätzung in der lokalen Verschiebungsgröße $u_{z,I}$ lässt sich folglich nur bedingt an den adaptierten Netzen erkennen.

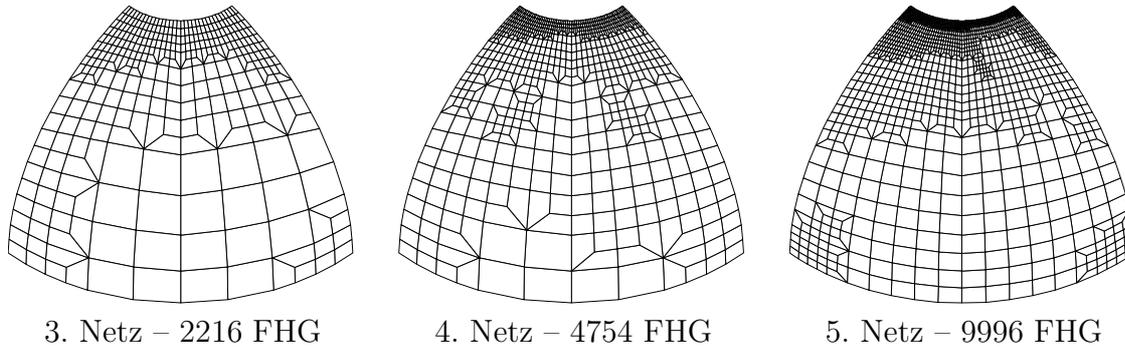


Bild 3.25: Beispiel Halbkugel mit Loch: Netzsequenz bei Adaption mit Strategie 1 – Lastfall a) – Zielgröße: Vertikale Verschiebung des Punktes I

In der Tabelle 3.1 sind die Fehler in der Zielgröße bei Anwendung des ortsadaptiven Verfahrens den Fehlern auf uniformen Netzen mit 6636 bzw. 24960 Freiheitsgraden gegenübergestellt. Es zeigt sich, dass sich mit den adaptiv generierten Netzen mit maximal 9996 Freiheitsgraden eine ähnlich genaue Lösung wie auf dem uniformen Netz mit 24960 Freiheitsgraden erzielen lässt. Das adaptive Verfahren führt in diesem Fall also bei gleichbleibender Genauigkeitsordnung zu einer signifikanten Einsparung an Freiheitsgraden. Die Ergebnisse zeigen allerdings auch, dass die tatsächliche auftretenden Fehler über der im Verfahren festgelegten Toleranz $\varepsilon_o = 4 \cdot 10^{-4}$ liegen.

Tabelle 3.2 zeigt zusätzlich noch den Vergleich der Lösung auf dem uniformen Netz mit 24960 Freiheitsgraden und der Lösung, die bei Verwendung des letzten adaptiv generierten Netzes mit 9996 Freiheitsgraden für die gesamte Berechnungsdauer erzielt wird. Hier ergibt sich für das adaptierte Netz eine nochmals wesentlich genauere Lösung in der Zielgröße.

	$u_{I,ref}$	unif. Netz 6336 FHG		unif. Netz 24960 FHG		Adaption		FHG
		e_I	e_{rel}	e_I	e_{rel}	e_I	e_{rel}	
<i>A</i>	0,02174	$1,31 \cdot 10^{-4}$	0,6%	$5,4 \cdot 10^{-5}$	0,24%	$4,5 \cdot 10^{-5}$	0,2%	2216
<i>B</i>	0,04209	$4,52 \cdot 10^{-4}$	1,1%	$1,75 \cdot 10^{-4}$	0,4%	$2,9 \cdot 10^{-4}$	0,7%	4754
<i>C</i>	0,0601	$9,6 \cdot 10^{-4}$	1,6%	$3,5 \cdot 10^{-4}$	0,6%	$5,6 \cdot 10^{-4}$	0,9%	9996
<i>D</i>	0,075	$1,78 \cdot 10^{-3}$	2,4%	$6,7 \cdot 10^{-4}$	0,9%	$9,6 \cdot 10^{-4}$	1,3%	9996
<i>E</i>	0,086	$3,11 \cdot 10^{-3}$	3,6%	$1,13 \cdot 10^{-3}$	1,3%	$1,3 \cdot 10^{-3}$	1,6%	9996
<i>F</i>	0,093	$4,7 \cdot 10^{-3}$	5,0%	$1,63 \cdot 10^{-3}$	1,7%	$1,7 \cdot 10^{-3}$	1,8%	9996

Tabelle 3.1: Beispiel Halbkugel mit Loch: Vergleich des Fehlers in den Verschiebungen des Punktes *I* für uniforme Netze mit den Fehlern bei Netzadaption mit Strategie 1 – Lastfall a)

	$u_{I,ref}$	unif. Netz – 24960 FHG		adapt. Netz – 9996 FHG	
		e_I	e_{rel}	e_I	e_{rel}
<i>A</i>	0,02174	$5,4 \cdot 10^{-5}$	0,24%	$-6,3 \cdot 10^{-5}$	0,3%
<i>B</i>	0,04209	$1,75 \cdot 10^{-4}$	0,4%	$-1,0 \cdot 10^{-4}$	0,3%
<i>C</i>	0,0601	$3,5 \cdot 10^{-4}$	0,6%	$-1,2 \cdot 10^{-4}$	0,2%
<i>D</i>	0,075	$6,7 \cdot 10^{-4}$	0,9%	$-7,8 \cdot 10^{-5}$	0,1%
<i>E</i>	0,086	$1,13 \cdot 10^{-3}$	1,3%	$-2,1 \cdot 10^{-5}$	0,02%
<i>F</i>	0,093	$1,63 \cdot 10^{-3}$	1,7%	$1,1 \cdot 10^{-4}$	0,1%

Tabelle 3.2: Beispiel Halbkugel mit Loch: Vergleich des Fehlers in den Verschiebungen des Punktes *I* für das feinere uniforme Netz mit den Fehlern bei Verwendung des letzten adaptierten Netze für die gesamte Berechnung

	$u_{I,ref}$	3. Netz – 2032 FHG		4. Netz – 4466 FHG		5. Netz – 9280 FHG	
		e_I	e_{rel}	e_I	e_{rel}	e_I	e_{rel}
<i>A</i>	0,02174	$2,01 \cdot 10^{-4}$	0,9%	$1,4 \cdot 10^{-4}$	0,7%	$4,2 \cdot 10^{-5}$	0,2%
<i>B</i>	0,04209	$8,1 \cdot 10^{-4}$	1,9%	$4,3 \cdot 10^{-4}$	1,0%	$5,4 \cdot 10^{-5}$	0,1%
<i>C</i>	0,0601	$2,1 \cdot 10^{-3}$	3,5%	$8,1 \cdot 10^{-4}$	1,4%	$4,3 \cdot 10^{-5}$	0,1%
<i>D</i>	0,075	$4,3 \cdot 10^{-3}$	5,8%	$1,4 \cdot 10^{-3}$	1,9%	$6,4 \cdot 10^{-5}$	0,1%
<i>E</i>	0,086	$7,7 \cdot 10^{-3}$	8,9%	$2,4 \cdot 10^{-3}$	2,8%	$1,7 \cdot 10^{-4}$	0,2%
<i>F</i>	0,093	$1,2 \cdot 10^{-2}$	12,8%	$3,4 \cdot 10^{-3}$	3,7%	$3,6 \cdot 10^{-4}$	0,4%

Tabelle 3.3: Beispiel Halbkugel mit Loch: Vergleich der Fehler bei Adaption mit Strategie 2 – Lastfall a)

Halbkugel mit Loch – Lastfall a) – Strategie 2

Nun erfolgt die Anwendung der zweiten Adaptionstrategie nach Bild 3.19 für den Lastfall a) wiederum mit der Zielgröße $u_{z,I}$. Es wird die gleiche Ausgangsdiskretisierung und die gleiche Fehlertoleranz $\varepsilon_o = 4 \cdot 10^{-4}$ wie bei der Strategie 1 verwendet. Nach 5 vollständigen Berechnungsläufen endet das Verfahren mit einem Raumnetz mit 9280 Freiheitsgraden. Im Bild 3.26 sind die drei letzten Raumdiskretisierungen des Verfahrens abgebildet. Im Gegensatz zur Verfeinerung mit der Strategie 1 erfolgt hier die Netzverdichtung ausschließlich am oberen freien Rand, eine Verdichtung im Bereich der Lastangriffspunkte der äußeren Lasten F_1 und F_2 findet nicht statt.

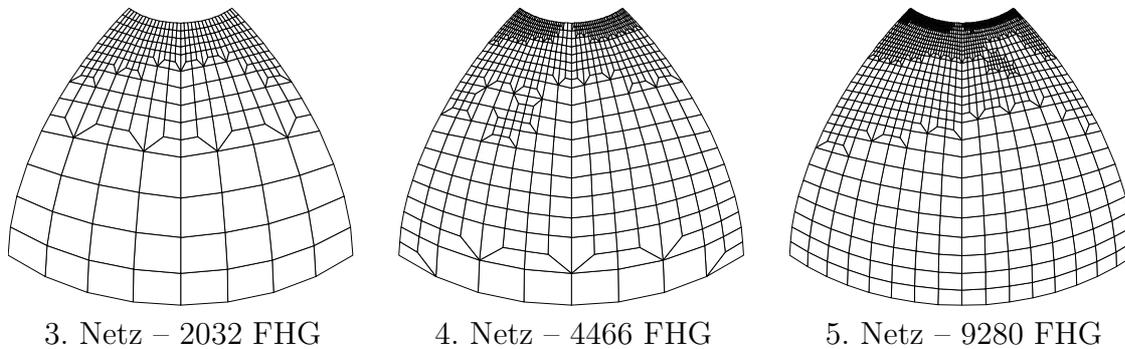


Bild 3.26: Beispiel Halbkugel mit Loch: Netzsequenz bei Adaption mit Strategie 2 – Lastfall a)

Tabelle 3.3 zeigt die Gegenüberstellung der Fehlergrößen auf den in Bild 3.26 dargestellten Netzen. Im Gegensatz zur Strategie 1 wird hier für das letzte Netz mit 9280 Freiheitsgraden die im Verfahren vorgegebene Fehlertoleranz $\varepsilon_o = 4 \cdot 10^{-4}$ tatsächlich eingehalten. Ein Vergleich mit den Werten in Tabelle 3.1 zeigt darüber hinaus, dass die mit dem adaptierten Netz generierten Zielgrößen genauer sind, als die Werte des verhältnismäßig feinen uniformen Netzes mit 24960 Freiheitsgraden. Auch hier zeigt sich somit eine deutliche Steigerung der Effizienz durch die Anwendung eines ortsadaptiven Verfahrens.

Halbkugel mit Loch – Lastfall b) – Strategie 1

Nachfolgend wird die Adaptionstrategie 1 für die Netzadaption im Lastfall b) verwendet. Die Zielgröße ist die horizontale Verschiebung des Punktes *II* in *y*-Richtung. Als obere Schranke für den Fehler in der Zielgröße wird $\varepsilon_o = 3 \cdot 10^{-6}$ festgelegt. Es wird wiederum ein verhältnismäßig grobes Startnetz mit 432 Freiheitsgraden verwendet. Bild 3.27 zeigt den Verschiebungsverlauf $u_{y,II}$ des Punktes *II* auf dem Referenznetz mit 99072 Freiheitsgraden, sowie die Bezeichnung der Extremwerte, an denen die Lösungen miteinander verglichen werden. Im Gegensatz zu Lastfall a) nimmt hier die Zielgröße

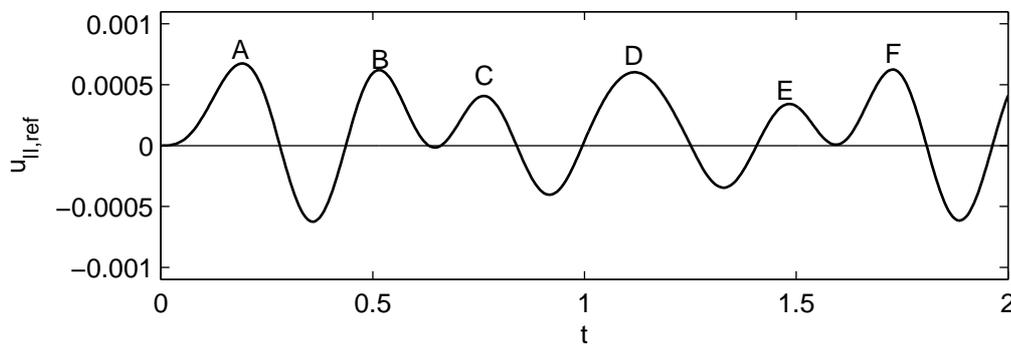


Bild 3.27: Beispiel Halbkugel mit Loch: Referenzlösung der Verschiebung des Punktes *II*

schon sehr früh im Zeitintervall ihren maximalen Wert an. Folglich wächst auch der Fehler in der Zielgröße schon sehr früh sehr stark an. Dies führt bei dem hier verwendeten groben Startnetz zu kurz aufeinanderfolgenden Netzverfeinerungen zu Beginn der Berechnung, siehe Bild 3.28. Diese führen hier zu leichten Oszillationen in der lokalen Zielgröße, welche jedoch relativ schnell heraus gedämpft werden. Der Lastfall b) stellt somit im Gegensatz zum Lastfall a) ein für die Adaptionstrategie 1 für das hier verwendete grobe Startnetz ein ungünstigeres Problem dar. Hierin zeigt sich auch deutlich die Schwäche der Strategie 1, wenn die gewählte Ausgangsdiskretisierung wie im vorliegenden Fall verhältnismäßig grob gewählt wird, bzw. wenn der maximale Fehler in der Zielgröße schon sehr früh im Berechnungszeitraum erreicht wird.

Bild 3.29 zeigt die drei letzten adaptierten Netze. Die feinste Raumdiskretisierung mit 16782 Freiheitsgraden wird hier schon sehr früh im Berechnungszeitraum erreicht. Aufgrund des Randschichteffektes am oberen freien Rand der Schale erfolgt dort wiederum eine Verdichtung des Netzes. Des Weiteren zeigt sich eine deutliche Netzverfeinerung in der Umgebung des Punktes *II*, also im Bereich der Zielgröße.

Tabelle 3.4 zeigt den Vergleich zwischen den Fehlern in der Zielgröße auf zwei uniformen Netzen und den adaptierten Netzen. Man erkennt, dass insbesondere die Streuung im Fehler in der Zielgröße für das adaptive Verfahren wesentlich geringer ist als bei dem feineren uniformen Netz. Dies zeigt sich insbesondere an dem Maximalwert an der Stelle *E*.

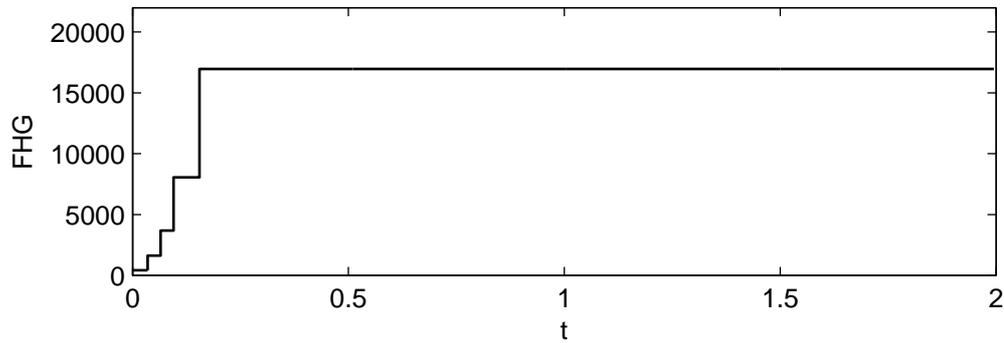


Bild 3.28: Beispiel Halbkugel mit Loch: Anzahl der Gleichungen über die Zeit bei Adaption des Netzes mit Strategie 1 – Lastfall b) – Zielgröße: horizontale Verschiebung des Punktes *II*

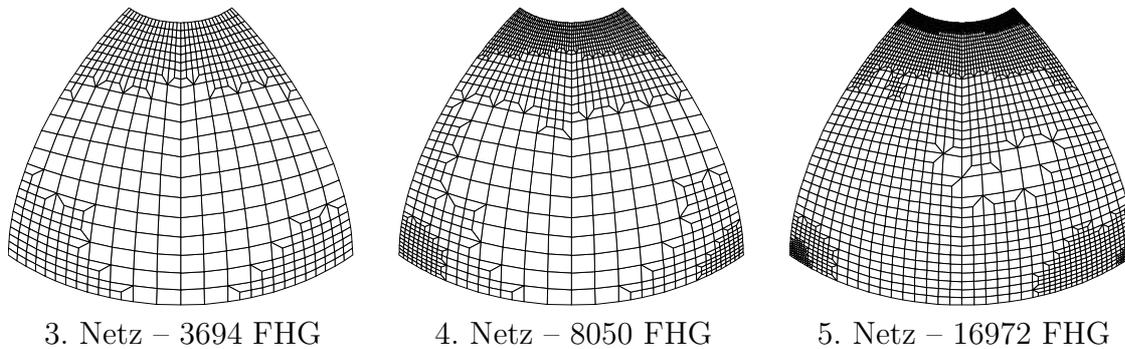


Bild 3.29: Beispiel Halbkugel mit Loch: Netzsequenz bei Adaption mit Strategie 1 – Lastfall b) – Zielgröße: Horizontalverschiebung des Punktes *II*

	$u_{II,ref}$	unif. Netz 6336 FHG		unif. Netz 24960 FHG		Adaption		FHG
		e_{II}	e_{rel}	e_{II}	e_{rel}	e_{II}	e_{rel}	
<i>A</i>	$6,76 \cdot 10^{-4}$	$1,9 \cdot 10^{-6}$	0,3%	$1,7 \cdot 10^{-6}$	0,3%	$-5,4 \cdot 10^{-6}$	0,8%	16972
<i>B</i>	$6,21 \cdot 10^{-4}$	$-4,2 \cdot 10^{-6}$	0,7%	$2,4 \cdot 10^{-6}$	0,4%	$-1,3 \cdot 10^{-6}$	0,2%	16972
<i>C</i>	$4,08 \cdot 10^{-4}$	$-3,1 \cdot 10^{-5}$	7,6%	$-8,8 \cdot 10^{-6}$	2,1%	$-1,5 \cdot 10^{-6}$	0,4%	16972
<i>D</i>	$6,03 \cdot 10^{-4}$	$-1,2 \cdot 10^{-5}$	2,0%	$2,4 \cdot 10^{-6}$	0,4%	$-1,3 \cdot 10^{-6}$	0,2%	16972
<i>E</i>	$3,42 \cdot 10^{-4}$	$3,0 \cdot 10^{-5}$	8,9%	$1,4 \cdot 10^{-5}$	4,2%	$-5,7 \cdot 10^{-7}$	0,2%	16972
<i>F</i>	$6,25 \cdot 10^{-4}$	$-3,4 \cdot 10^{-5}$	5,3%	$-5,3 \cdot 10^{-6}$	0,9%	$-1,7 \cdot 10^{-6}$	0,3%	16972

Tabelle 3.4: Beispiel Halbkugel mit Loch: Vergleich des Fehlers in den Verschiebungen des Punktes *II* für die uniformen Netze 1 und 2 mit den Fehlern bei Adaption mit Strategie 1 – Lastfall b)

Auch hier ist der resultierende Fehler bei Anwendung der adaptiven Netzverfeinerung in der Größenordnung der im Verfahren vorgegebenen Obergrenze $\varepsilon_o = 3 \cdot 10^{-6}$.

Verwendet man nun die letzte Raumdiskretisierung für die gesamte Berechnungsdau-

	$u_{II,ref}$	unif. Netz – 24960 FHG		adapt. Netz – 16972 FHG	
		e_{II}	e_{rel}	e_{II}	e_{rel}
<i>A</i>	$6,76 \cdot 10^{-4}$	$1,7 \cdot 10^{-6}$	0,3%	$-5,2 \cdot 10^{-6}$	0,8%
<i>B</i>	$6,21 \cdot 10^{-4}$	$2,4 \cdot 10^{-6}$	0,4%	$-4,6 \cdot 10^{-6}$	0,7%
<i>C</i>	$4,08 \cdot 10^{-4}$	$8,8 \cdot 10^{-6}$	2,1%	$8,2 \cdot 10^{-6}$	2,0%
<i>D</i>	$6,03 \cdot 10^{-4}$	$2,4 \cdot 10^{-6}$	0,4%	$-4,4 \cdot 10^{-6}$	0,8%
<i>E</i>	$3,42 \cdot 10^{-4}$	$1,4 \cdot 10^{-5}$	4,2%	$-4,2 \cdot 10^{-6}$	0,7%
<i>F</i>	$6,25 \cdot 10^{-4}$	$5,3 \cdot 10^{-6}$	0,9%	$-8,3 \cdot 10^{-6}$	1,3%

Tabelle 3.5: Beispiel Halbkugel mit Loch: Vergleich des Fehlers in den Verschiebungen des Punktes *II* für das feiner uniforme Netz mit den Fehlern bei Verwendung des letzten adaptierten Netzes für die gesamte Berechnung

er, so erhält man die in Tabelle 3.5 dargestellten Fehlergrößen. Erstaunlicherweise sind dabei die Ergebnisse sogar etwas schlechter als bei der adaptiven Berechnung mit veränderlichen Netzen, was auf den Phasenfehler zurückzuführen ist. Durch die Netzadaption ändern sich auch die Phasenfehler der im Modell enthaltenen Eigenformen. Folglich liegt auch bei den hier betrachteten Maxima der numerischen Lösung eine andere Kombination der Eigenformen vor, als bei der Berechnung mit veränderlichen Netzen. Dies führt im vorliegenden Fall zu geringfügig schlechteren Ergebnissen. Da die Fehlerschätzung und damit auch die darauf basierende Netzadaption den Phasenfehler nicht berücksichtigt, lassen sich solche negativen Effekte mit den hier vorgeschlagenen Algorithmen nicht kontrollieren.

Halbkugel mit Loch – Lastfall b) – Strategie 2

Die Anwendung der zweiten Adaptionstrategie ohne Datentransfer für den Lastfall b) und die Zielgröße $u_{y,II}$ führt auf die im Bild 3.30 dargestellte Netzsequenz. Unter Verwendung des Startnetzes mit 432 Freiheitsgraden endet das Verfahren nach 5 vollständigen Berechnungsdurchläufen. Das gewählte Startnetz ist hier so grob, dass im ersten Verfeinerungsschritt das gesamte Netz uniform verfeinert wird. Um den Aufwand bei der 2. Strategie zu verringern, sollte folglich ein feineres Startnetz gewählt werden.

Die Tabelle 3.6 zeigt wiederum die Fehler in den lokalen Maxima der Verschiebung $u_{y,II}$ für die drei in Bild 3.30 dargestellten Netze. Auch hier zeigt sich, dass sich durch die Netzadaption der Fehler auf die Größenordnung der Fehlertoleranz ε_o beschränken lässt. Darüber hinaus führt die Netzadaption zu einer geringeren Streuung des Fehlers in der Zielgröße als das uniforme Netz mit 24960 Freiheitsgraden.

Für das vorliegende Problem führt die Adaption am Ende des Berechnungszeitraums ohne Datentransfer zu einem gegenüber der Adaptionstrategie 1 effizienteren Netz. Dies liegt daran, dass hier die Verformungszustände aller Zeitpunkte bei der Netzadaption berücksichtigt werden, wohingegen die Netze, die mit Hilfe der Strategie 1 generiert wurden, nur die Informationen der Zustandsgrößen zum Zeitpunkt der jeweiligen

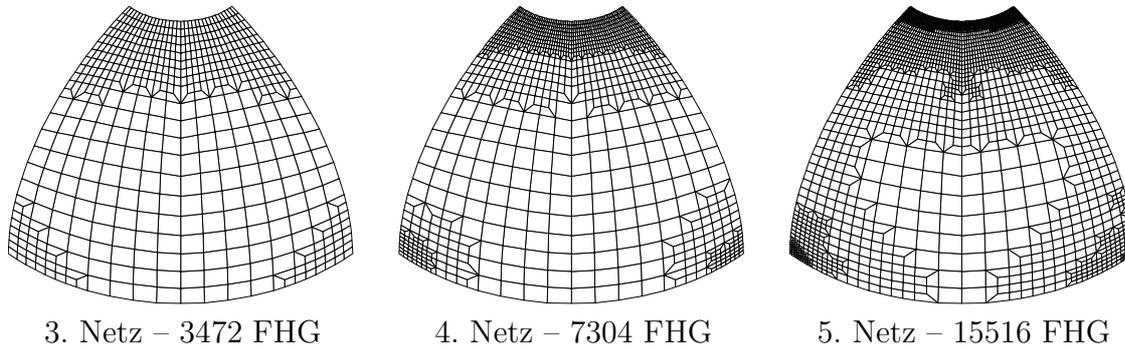


Bild 3.30: Beispiel Halbkugel mit Loch: Netzsequenz bei Adaption mit Strategie 2 – Lastfall b) – Zielgröße: Horizontalverschiebung des Punktes *II*

	$u_{II,ref}$	3. Netz – 3472 FHG		4. Netz – 7304 FHG		5. Netz – 15516 FHG	
		$e_{y,II}$	e_{rel}	$e_{y,II}$	e_{rel}	$e_{y,II}$	e_{rel}
<i>A</i>	$6,76 \cdot 10^{-4}$	$8,5 \cdot 10^{-7}$	0,1%	$-2,1 \cdot 10^{-6}$	0,3%	$-5,3 \cdot 10^{-6}$	0,8%
<i>B</i>	$6,21 \cdot 10^{-4}$	$3,9 \cdot 10^{-6}$	0,6%	$-4,2 \cdot 10^{-7}$	0,1%	$-4,8 \cdot 10^{-6}$	0,8%
<i>C</i>	$4,08 \cdot 10^{-4}$	$-3,4 \cdot 10^{-5}$	8,3%	$-2,1 \cdot 10^{-5}$	5,2%	$-3,9 \cdot 10^{-6}$	1,0%
<i>D</i>	$6,03 \cdot 10^{-4}$	$2,9 \cdot 10^{-6}$	0,5%	$-4,3 \cdot 10^{-7}$	0,1%	$-4,4 \cdot 10^{-6}$	0,7%
<i>E</i>	$3,42 \cdot 10^{-4}$	$4,8 \cdot 10^{-5}$	14,2%	$2,6 \cdot 10^{-5}$	7,6%	$-1,4 \cdot 10^{-6}$	0,4%
<i>F</i>	$6,25 \cdot 10^{-4}$	$2,0 \cdot 10^{-5}$	3,3%	$-1,5 \cdot 10^{-5}$	2,5%	$-5,6 \cdot 10^{-6}$	0,9%

Tabelle 3.6: Beispiel Halbkugel mit Loch: Vergleich der Fehler in der Horizontalverschiebung des Punktes *II* bei Adaption mit Strategie 2 – Lastfall b)

Netzadaption beinhalten. Da im vorliegenden Fall die Netzverfeinerungen bei der Strategie 1 alle kurz nacheinander zu Beginn des Berechnungszeitraums erfolgen, werden hier folglich nur die Bewegungszustände vor dem Erreichen des ersten Maximums bei der Netzadaption berücksichtigt. Darüber hinaus ist die zweite Strategie durch den Verzicht auf den Datentransfer zwischen verschiedenen Netzen im vorliegenden Problem robuster als Strategie 1.

Bewertung der numerischen Beispiele

Die numerischen Beispiele zeigen, dass die mit Hilfe der vorgestellten Netzadaptionsstrategien generierten Netze gegenüber uniform verfeinerten Netzen hinsichtlich Genauigkeit und Größe des numerischen Modells wesentlich effizientere Diskretisierungen darstellen. Ein großer Vorteil der Lösung mit Hilfe der adaptierten Netze ist insbesondere die signifikant kleinere Streuung der Zielfehlergröße im Vergleich zu uniformen Netzen, auch wenn eventuell zu gewissen Zeitpunkten die feinen uniformen Netze genauere Lösungen in der Zielgröße liefern. Darüber hinaus steigt bei uniformen Netzverfeinerungen die Anzahl der Freiheitsgrade sehr schnell an. Für die gezielte Reduktion des Fehlers in lokalen Zielgrößen ist die gängige Praxis, verschieden feine uniforme Diskretisierungen zu betrachten, folglich nur bedingt geeignet. Hier stellen die vorgeschlagenen

Adaptionsstrategien sinnvolle und effiziente Alternativen dar.

Des Weiteren zeigen die numerischen Beispiele, dass der hier vorgeschlagene Fehlerindikator ohne zeitliche Kopplung von primalem und dualem Problem eine gute Basis für die Netzadaptionsstrategien darstellt. Beide auf dem Fehlerindikator aufbauenden Adaptionsstrategien sind geeignet, die Größenordnung des Fehlers auf ein vorher festgelegtes Maß zu beschränken. Die strenge Fehlerkontrolle ist auf Grund der Vereinfachungen bei der Herleitung des Fehlerindikators nicht möglich. Für die Einbindung der Netzadaptation für beliebige Zielgrößen in praktische Aufgabenstellungen sind die Vereinfachungen jedoch notwendig und sinnvoll, da die Fehlerschätzung auf Basis der vollständigen dualen Lösung hier zu einem für praktische Aufgabenstellungen übermäßigen Aufwand führt.

Im Vergleich der beiden Adaptionsstrategien untereinander ist festzuhalten, dass die zweite Strategie, bei welcher die Netze während der Berechnung konstant bleiben, robuster ist als die Strategie 1, da kein Transfer der Daten zwischen den Netzen notwendig ist. Des Weiteren berücksichtigt die Netzadaptation alle Zeitpunkte der Berechnung was zu effizienteren Diskretisierungen führen kann. Für kompliziertere Belastungsfälle mit großen Änderungen in der Belastung und den Bewegungsformen ist die zweite Adaptionsstrategie deshalb der ersten Strategie vorzuziehen, auch wenn mit ihr ein höherer Berechnungsaufwand einhergeht.

3.10 Netzadaption auf Basis des Fehlers in Zielfunktionalen von Eigenformen

Die numerischen Beispiele des vorangegangenen Abschnittes haben gezeigt, dass Adaptionstrategien, welche auf Netzveränderungen während der Berechnung verzichten, aufgrund ihrer Robustheit den Methoden mit Datentransfer vorzuziehen sind. Die Generierung adaptierter Netze, welche für die gesamte Berechnungsdauer geeignet sind, ist somit ein erstrebenswertes Ziel eines adaptiven Algorithmus. Der Nachteil der zweiten Strategie im vorangegangenen Abschnitt lag darin begründet, dass für die Netzadaption mehrere vollständige Berechnungsläufe notwendig sind, was den Berechnungsaufwand bei grober Ausgangsdiskretisierung in die Höhe treibt. Im Sinne der Effizienz sind deshalb Verfahren interessant, mit welchen sich adaptierte Berechnungsnetze a-priori bestimmen lassen. Eine denkbare Möglichkeit ist hier die Netzadaption auf der Basis des Fehlers in linearen Zielfunktionalen in den Eigenformen. Hierfür wird zunächst die exakte Antwort $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ in die Anteile der Eigenformen $\bar{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x})$ zerlegt:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x}) \cdot f_i(t) \quad (3.62)$$

Die folgenden Ausführungen beschränken sich auf lineare Zielfunktionale zu festen Zeitpunkten t_j , d.h. es wird angenommen, dass auch für das Zielfunktional eine Trennung der Veränderlichen möglich ist:

$$Q(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) = \sum_{i=1}^{\infty} Q(\bar{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x})) \cdot f_i(t) \quad (3.63)$$

Die erste Aufgabe besteht nun darin, die Eigenformen herauszufiltern, welche maßgebenden Anteil an der Zielgröße haben und im betrachteten Problem signifikant angeregt werden. Für viele praktische Anwendungen auf Schwingungsprobleme kann hier eine Beschränkung auf die unteren Eigenformen erfolgen. Für die sinnvolle Netzadaption ist dann neben der Auswahl maßgebender Eigenformen wesentlich, ob die (nur ortsabhängige) Zielgröße $Q(\bar{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x}))$ in der approximierten Eigenform ausreichend gut abgebildet wird.

Da insbesondere die unteren Eigenformen eher das globale Verhalten der Struktur widerspiegeln, ist bei der Netzadaption auf der Basis globaler Fehlerschätzer für die Eigenformen, wie sie z.B. von NYSTEDT [76], LARSON [66], ODEN & PRUDHOMME [81], NEUMANN [73] oder NEUMANN & SCHWEIZERHOF [74] verwendet werden, keine effiziente räumliche Diskretisierung für lokale Zielgrößen zu erwarten. Deshalb wird im Folgenden analog zum Vorgehen bei der semidiskreten Finite-Elemente-Methode als Alternative zur Fehlerschätzung in globalen Größen das Konzept der Fehlerschätzung in beliebigen linearen Zielfunktionalen, wie z.B. lokalen Verschiebungsgrößen, verwendet. Dieses geht im Wesentlichen auf Arbeiten von HEUVELINE & RANNACHER [54] zurück. Für die Fehlerschätzung wird wieder das *Dual-Weighted-Residual*-Konzept von RANNACHER & BECKER [13] angewendet. Das generelle Vorgehen gleicht dabei dem

bereits bekannten Verfahren im Rahmen der räumlichen Fehlerschätzung bei der semidiskreten Finite-Elemente-Methode. Mit Hilfe eines dualen Problems wird zunächst eine geeignete Darstellung des Diskretisierungsfehlers in einer Zielgröße abgeleitet. Auf der Basis dieser Fehlerdarstellung wird ein Fehlerindikator entwickelt, der auf den bereits bekannten *Zienkiewicz-Zhu*-Fehlerschätzer zurückgreift. Der Fehlerindikator dient dann als Basis für die zielorientierte Adaption der Raumdiskretisierung.

Starke Form des Eigenwertproblems

Das Eigenwertproblem ergibt sich aus dem homogenen Sonderfall

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) - \rho_0\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} \quad (3.64)$$

der Cauchyschen Bewegungsgleichung unter der Annahme homogener Anfangs- und Randbedingungen. Mit dem Separationsansatz

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \cdot e^{i\omega t} \quad (3.65)$$

lässt sich die Zeitabhängigkeit abspalten und es ergibt sich das Eigenwertproblem

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}(\bar{\mathbf{u}}) + \rho_0\lambda\bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (3.66)$$

mit den reellen Eigenwerten $\lambda = \omega^2$. Die Kenntnis der Eigenkreisfrequenzen $\omega = 2\pi f$ spielt in der Strukturmechanik eine wesentliche Rolle zur Beurteilung des Schwingungsverhaltens und des Abstimmungsverhältnisses bei gegebener Anregung der Struktur.

Für die Umsetzung mit der Methode der finiten Elemente wird zusätzlich noch die variationelle Form des Eigenwertproblems benötigt.

Variationelle Form des Eigenwertproblems

Für die variationelle Form des Eigenwertproblems wird (3.66) mit einer Testfunktion $\mathbf{w}(\mathbf{x})$ multipliziert. Nach partieller Integration des Steifigkeitsterms erhält man die variationelle Form des Eigenwertproblems. Die variationelle Form der Eigenwertaufgabe besteht dann aus dem Auffinden von Eigenpaaren $\mathbf{U} = \{\bar{\mathbf{u}}, \lambda\} \in \mathcal{V} = W \times \mathbb{R}$, für die gilt:

$$a(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{w}) = \lambda\rho_0(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{w})_{\mathcal{B}_0} \quad \forall \mathbf{w} \in W \quad (3.67)$$

$$\rho_0(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}})_{\mathcal{B}_0} = 1 \quad (3.68)$$

Die Normierung (3.68) der modalen Massen ist notwendig, um jedem Eigenwert λ eine – bis auf das Vorzeichen – eindeutig bestimmte Eigenform zuzuordnen. Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden das Eigenwertproblem (3.67) und die Normierung (3.68) nun noch mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatorenmethode zusammengefasst. Hierfür

wird analog zum Lösungspaar $\mathbf{U} = \{\bar{\mathbf{u}}, \lambda\} \in \mathcal{V}$ das Testpaar $\mathbf{W} = \{\mathbf{w}, \pi\} \in \mathcal{V}$ und das Funktional $A(\mathbf{U}; \mathbf{W})$, definiert auf $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$, eingeführt:

$$A(\mathbf{U}; \mathbf{W}) = \lambda \rho_0(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{w})_{\mathcal{B}_0} - a(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{w}) + \pi[\rho_0(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}})_{\mathcal{B}_0} - 1] \quad (3.69)$$

Die Notation ist hier so, dass das Funktional $A(\cdot; \cdot)$ linear in den Größen nach dem Semikolon ist. Das Eigenwertproblem (3.67) einschließlich der Normierung (3.68) lautet damit: Finde die Lösungspaare $\mathbf{U} \in \mathcal{V}$ für die gilt:

$$A(\mathbf{U}; \mathbf{W}) = 0 \quad \forall \mathbf{W} \in \mathcal{V} \quad (3.70)$$

Bei der Diskretisierung mit finiten Elementen ergibt sich nun das entsprechende diskrete Problem:

$$A(\mathbf{U}_h; \mathbf{W}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{W}_h \in \mathcal{V}^h = W^h \times \mathbb{R} \quad (3.71)$$

Die diskreten Lösungspaare $\mathbf{U}_h = \{\bar{\mathbf{u}}_h, \lambda_h\} \in \mathcal{V}^h$ erfüllen dabei auch einzeln die beiden Gleichungen

$$a(\bar{\mathbf{u}}_h, \mathbf{w}_h) = \lambda_h \rho_0(\bar{\mathbf{u}}_h, \mathbf{w}_h)_{\mathcal{B}_0} \quad \forall \mathbf{w}_h \in W^h \quad (3.72)$$

$$\rho_0(\bar{\mathbf{u}}_h, \bar{\mathbf{u}}_h)_{\mathcal{B}_0} = 1, \quad (3.73)$$

d.h. auch die diskreten Eigenformen werden so normiert, dass die modalen Massen gerade den Wert 1 annehmen. Mit dem Verschiebungsansatz $\bar{\mathbf{u}}_h = \mathbf{N} \cdot \mathbf{d}_u$ ergibt sich für das Eigenwertproblem die Matrixschreibweise:

$$\begin{aligned} (\mathbf{K} - \lambda_h \mathbf{M}) \mathbf{d}_u &= \mathbf{0} \\ \text{mit } |\mathbf{d}_u^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{d}_u| &= 1 \end{aligned} \quad (3.74)$$

Das gewichtete Residuum der numerischen Lösung des Eigenwertproblems lässt sich wie folgt darstellen:

$$\mathcal{R}_u(\mathbf{W}) = A(\mathbf{U}; \mathbf{W}) - A(\mathbf{U}_h; \mathbf{W}) = -A(\mathbf{U}_h; \mathbf{W}) \quad (3.75)$$

Bei der Verwendung von Elementen mit angenommenen Verzerrungen müsste in Gleichung (3.72) eigentlich wiederum eine netzabhängige Bilinearform $a_h(\cdot, \cdot)$ verwendet werden. Da der hier dargestellte Fehlerindikator den durch die Modifikation verursachten Konsistenzfehler vernachlässigt, wird aus Gründen der Übersichtlichkeit gleich bei der Herleitung des Fehlerschätzers die Netzabhängigkeit nicht berücksichtigt. Es wird also angenommen, dass die Galerkinorthogonalität

$$\mathcal{R}_u(\mathbf{W}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{W}_h \in \mathcal{V}^h \quad (3.76)$$

erfüllt ist.

Ziel der nachfolgenden Darstellungen ist nun die Schätzung des Fehlers in einem Zielfunktional $Q(\mathbf{U})$ einer Eigenform. Die nachfolgenden Ausführungen beschränken sich auf den Fall einfacher Eigenwerte, die Behandlung mehrfacher Eigenwerte bedarf gesonderter Betrachtung, siehe z.B. HEUVELINE & RANNACHER [54].

Das duale Problem für Eigenwertaufgaben

Die Bestimmung des Zielfunktional $Q(\mathbf{U})$ einer speziellen Eigenform lässt sich allgemein mit Hilfe des folgenden Minimierungsproblems darstellen:

$$Q(\mathbf{U}) = \inf_{\mathbf{V} \in M} (Q(\mathbf{V})) \quad \text{mit} \quad M = \{\mathbf{V} \in \mathcal{V}; A(\mathbf{V}; \mathbf{W}) = 0 \quad \forall \mathbf{W} \in \mathcal{V}\} \quad (3.77)$$

Das Minimum $\mathbf{U} \in \mathcal{V}$ von (3.77) entspricht dann einem Sattelpunkt $(\mathbf{U}, \mathbf{Z}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ des Lagrangefunktional

$$\mathcal{L}((\mathbf{U}, \mathbf{Z})) = Q(\mathbf{U}) - A(\mathbf{U}; \mathbf{Z}), \quad (3.78)$$

mit $\mathbf{Z} = \{\mathbf{z}, \mu\} \in \mathcal{V}$. \mathbf{Z} bezeichnet hier wiederum die Lösung des noch zu bestimmenden dualen Problems. Für den Sattelpunkt $(\mathbf{U}, \mathbf{Z}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ muss die erste Ableitung des Lagrangefunktional verschwinden:

$$\mathcal{L}'((\mathbf{U}, \mathbf{Z}); (\mathbf{V}, \mathbf{W})) = 0 \quad \forall (\mathbf{V}, \mathbf{W}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V} \quad (3.79)$$

Die Ableitung \mathcal{L}' des Lagrangefunktional ist dabei definiert als:

$$\mathcal{L}'((\mathbf{U}, \mathbf{Z}); (\mathbf{V}, \mathbf{W})) = \lim_{\Theta \rightarrow 0} \left(\frac{\mathcal{L}((\mathbf{U}, \mathbf{Z}) + \Theta(\mathbf{V}, \mathbf{W})) - \mathcal{L}((\mathbf{U}, \mathbf{Z}))}{\Theta} \right) \quad (3.80)$$

Im vorliegenden Fall ergibt sich die Ableitung \mathcal{L}' zu:

$$\mathcal{L}'((\mathbf{U}, \mathbf{Z}); (\mathbf{V}, \mathbf{W})) = Q'(\mathbf{U}; \mathbf{V}) - A'(\mathbf{U}; \mathbf{V}, \mathbf{Z}) - A(\mathbf{U}; \mathbf{W}) \quad (3.81)$$

mit den Ableitungen:

$$Q'(\mathbf{U}; \mathbf{V}) = \lim_{\Theta \rightarrow 0} \left(\frac{Q(\mathbf{U} + \Theta \mathbf{V}) - Q(\mathbf{U})}{\Theta} \right) \quad (3.82)$$

$$A'(\mathbf{U}; \mathbf{V}, \mathbf{Z}) = \lim_{\Theta \rightarrow 0} \left(\frac{A(\mathbf{U} + \Theta \mathbf{V}; \mathbf{Z}) - A(\mathbf{U}; \mathbf{Z})}{\Theta} \right). \quad (3.83)$$

Da die Bedingung (3.79) für beliebige Testfunktionen erfüllt sein muss, lässt sie sich mit Hilfe der Testfunktionen $(\mathbf{0}, \mathbf{W})$ und $(\mathbf{V}, \mathbf{0})$ in zwei Bestimmungsgleichungen für den Sattelpunkt (\mathbf{U}, \mathbf{Z}) entkoppeln. Zusammen mit Gleichung (3.81) ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} A(\mathbf{U}; \mathbf{W}) &= 0 & \forall \mathbf{W} \in \mathcal{V} \\ A'(\mathbf{U}; \mathbf{V}, \mathbf{Z}) &= Q'(\mathbf{U}; \mathbf{V}) & \forall \mathbf{V} \in \mathcal{V} \end{aligned} \quad (3.84)$$

Die erste Zeile in (3.84) entspricht gerade dem primalen Eigenwertproblem (3.70), die zweite Zeile ist das duale Problem. Die entsprechende diskrete Form des dualen Problem lautet

$$A'(\mathbf{U}_h; \mathbf{V}_h, \mathbf{Z}_h) = Q'(\mathbf{U}_h; \mathbf{V}_h) \quad \forall \mathbf{V}_h \in \mathcal{V}^h \quad (3.85)$$

und es ergibt sich das Residuum der numerischen dualen Lösung $\mathbf{Z}_h = \{z_h, \mu_h\}$

$$\mathcal{R}_z(\mathbf{V}) = Q'(\mathbf{U}_h; \mathbf{V}) - A(\mathbf{U}_h; \mathbf{W}, \mathbf{Z}_h), \quad (3.86)$$

mit der entsprechenden Galerkinorthogonalität

$$\mathcal{R}_z(\mathbf{V}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{V}_h \in \mathcal{V}^h. \quad (3.87)$$

Mit der Testfunktion $\mathbf{V} = \{\mathbf{v}, \nu\} \in \mathcal{V}$ lautet das kontinuierliche duale Problem ausgeschrieben:

$$-a(\mathbf{v}, \mathbf{z}) + \nu \rho_0(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{z})_{\mathcal{B}_0} + \lambda \rho_0(\mathbf{v}, \mathbf{z})_{\mathcal{B}_0} + 2\mu \rho_0(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v})_{\mathcal{B}_0} = Q'(\mathbf{U}; \mathbf{V}) \quad (3.88)$$

In Abhängigkeit von der gewählten Zielgröße muss das duale Problem nun weiter spezifiziert werden. Dies erfolgt nachfolgend einmal für den Eigenwert als Zielgröße sowie für lineare Zielfunktionale, wie z.B. Punktgrößen einer Eigenform.

Duales Problem für den Eigenwert

Soll der Fehler in der Approximation des Eigenwerts λ geschätzt werden, so ergibt sich für die Zielgröße und ihre erste Ableitung:

$$Q(\mathbf{U}) = \lambda \rightsquigarrow Q'(\mathbf{U}; \mathbf{V}) = \nu \quad (3.89)$$

Einsetzen dieser Beziehung in (3.88) liefert

$$-a(\mathbf{v}, \mathbf{z}) + \nu \rho_0(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{z})_{\mathcal{B}_0} + \lambda \rho_0(\mathbf{v}, \mathbf{z})_{\mathcal{B}_0} + 2\mu \rho_0(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v})_{\mathcal{B}_0} = \nu \quad \forall \mathbf{V} \in \mathcal{V}, \quad (3.90)$$

was sich in die zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} -a(\mathbf{v}, \mathbf{z}) + \lambda \rho_0(\mathbf{v}, \mathbf{z})_{\mathcal{B}_0} + 2\mu \rho_0(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v})_{\mathcal{B}_0} &= 0 \quad \forall \mathbf{v} \in W \\ \nu \rho_0(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{z})_{\mathcal{B}_0} &= \nu \quad \forall \nu \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (3.91)$$

aufspalten lässt. Man erkennt sofort, dass $\mathbf{Z} = \{\bar{\mathbf{u}}, 0\}$ eine Lösung von (3.91) ist, da die Gleichungen (3.91) dann in das Eigenwertproblem (3.67) und die Normierung der Eigenform (3.68) übergehen. Für die Schätzung des Fehlers des Eigenwerts entspricht damit die duale Lösung \mathbf{z} der betrachteten Eigenform \mathbf{u} mit dem „dualen Eigenwert“ 0. Das duale Problem muss folglich für die Fehlerschätzung nicht noch einmal separat berechnet werden.

Alternativ zur Formulierung der Zielgröße $Q(\mathbf{U})$ in (3.89) verwenden HEUVELINE & RANNACHER [54, 55] für die Definition des Zielfunktional:

$$Q(\mathbf{U}) = \lambda \rho_0(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}})_{\mathcal{B}_0} \rightsquigarrow Q'(\mathbf{U}; \mathbf{V}) = \nu \rho_0(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}})_{\mathcal{B}_0} + 2\lambda \rho_0(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v})_{\mathcal{B}_0} \quad (3.92)$$

Dies hätte im vorliegenden Fall jedoch den Nachteil, dass das Zielfunktional nicht linear in \mathbf{U} ist und die Fehlerschätzung für den Eigenwert folglich separat betrachtet werden müsste. Mit der hier gewählten Definition (3.89), welche auch von ODEN ET AL. [81] verwendet wird, ergibt sich der Fehlerschätzer für den Eigenwert direkt aus der generellen Fehlerdarstellung für lineare Zielfunktionale.

Duales Problem für allgemeine lineare Funktionale

Im Folgenden wird angenommen, dass $Q(\mathbf{U})$ ein beliebiges lineares Funktional der betrachteten Eigenform darstellt. Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass die Schätzung des Fehlers z.B. in einer Punktgröße einer Eigenform erst durch die Normierungen (3.68) und (3.73) der exakten und diskreten Eigenformen sinnvoll wird, da sämtliche Vektoren $\mathbf{v}_i \in \text{span}\{\mathbf{u}\}$ Lösung des Eigenwertproblems ohne Normierung sind. Ohne die Normierung ist somit der Betrag der Zielgröße nicht eindeutig definiert.

Das duale Problem (3.88) wird aufgespalten in

$$-a(\mathbf{v}, \mathbf{z}) + \lambda \rho_0(\mathbf{v}, \mathbf{z})_{\mathcal{B}_0} = Q'(\mathbf{U}; \mathbf{V}) - 2\mu \rho_0(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v})_{\mathcal{B}_0} \quad (3.93)$$

und die Orthogonalitätsbedingung:

$$\rho_0(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{z})_{\mathcal{B}_0} = 0. \quad (3.94)$$

Die duale Lösung muss folglich orthogonal zur betrachteten Eigenform sein, was bei der numerischen Bestimmung des dualen Problems über eine Nebenbedingung bei der Gleichungslösung sichergestellt werden muss. Es werden somit für das duale Problem keine Lösungsanteile in Richtung des betrachteten Eigenvektors zugelassen.

Darüber hinaus hat das duale Problem (3.93) nur dann eine eindeutige Lösung, wenn die rechte Seite für die Testfunktion $\mathbf{V} = \mathbf{U}$ verschwindet (Fredholmsche Alternative). Unter der Bedingung, dass $Q(\mathbf{U})$ linear in \mathbf{U} ist gilt:

$$Q'(\mathbf{U}; \mathbf{V}) = Q(\mathbf{V}) \quad (3.95)$$

Dann lässt sich mit der Testfunktion $\mathbf{V} = \mathbf{U}$ aus der rechten Seite von Gleichung (3.93) μ bestimmen:

$$Q(\mathbf{U}) - 2\mu \underbrace{\rho_0(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}})}_1 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \mu = \frac{1}{2}Q(\mathbf{U}) \quad (3.96)$$

Damit lautet das kontinuierliche duale Problem für die Schätzung des Fehlers in einer linearen Zielgröße schließlich

$$\begin{aligned} -a(\mathbf{v}, \mathbf{z}) + \lambda \rho_0(\mathbf{v}, \mathbf{z}) &= Q(\mathbf{V}) - Q(\mathbf{U}) \rho_0(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{V} \in \mathcal{V} \\ \rho_0(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{z}) &= 0 \end{aligned} \quad (3.97)$$

und das entsprechende diskrete Problem

$$\begin{aligned} -a(\mathbf{v}_h, \mathbf{z}_h) + \lambda_h \rho_0(\mathbf{v}_h, \mathbf{z}_h) &= Q(\mathbf{V}_h) - Q(\mathbf{U}_h) \rho_0(\bar{\mathbf{u}}_h, \mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{V}_h \in \mathcal{V}^h \\ \rho_0(\bar{\mathbf{u}}_h, \mathbf{z}_h) &= 0. \end{aligned} \quad (3.98)$$

Für lokale Verschiebungsgrößen soll das Vorgehen zur Bestimmung der numerischen Lösung $\mathbf{z}_h = \mathbf{N} \cdot \mathbf{d}_z$ nachfolgend weiter konkretisiert werden. Zunächst wird der Wichtungsvektor \mathbf{P} mit $|\mathbf{P}| = 1$ eingeführt, welcher die gesuchten Verschiebungen aus dem

gesamten Verschiebungsfeld herausfiltert, d.h. $Q(\mathbf{U}_h) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{d}_u$. Die erste Zeile von (3.98) lautet dann in Matrixschreibweise:

$$(\mathbf{K} - \lambda_h \mathbf{M}) \cdot \mathbf{d}_z = (\mathbf{P} \cdot \mathbf{d}_u) \mathbf{M} \cdot \mathbf{d}_u - \mathbf{P} \quad (3.99)$$

Man erkennt sofort, dass wegen $\mathbf{d}_u \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{d}_u = 1$ die rechte Seite von (3.99) bei skalarer Multiplikation mit dem Verschiebungsvektor \mathbf{d}_u , wie gefordert, zu Null wird.

Für die Orthogonalitätsbedingung in der zweiten Zeile von (3.99) ergibt sich die Matrixform

$$\mathbf{d}_u \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{d}_z = 0. \quad (3.100)$$

Die Orthogonalitätsbedingung lässt sich nun zum Beispiel mit Hilfe eines Lagrange-schen Multiplikators κ als Nebenbedingung in das zu lösende Gleichungssystem einbauen. Es ergibt sich dann folgendes Gleichungssystem zur Bestimmung von \mathbf{d}_z :

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{K} - \lambda_h \mathbf{M}) & (\mathbf{d}_u^T \cdot \mathbf{M})^T \\ (\mathbf{d}_u^T \cdot \mathbf{M}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_z \\ \kappa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{P} \cdot \mathbf{d}_u) \mathbf{M} \cdot \mathbf{d}_u \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.101)$$

Entwicklung einer Fehlerdarstellung für lineare Zielfunktionale

Nachfolgend wird die Darstellung des Fehlers in der Zielgröße mit Hilfe des dualen Problems entwickelt. Hierfür wird der Fehler in der primalen Gleichung

$$\mathbf{E}_u = \mathbf{U} - \mathbf{U}_h = \{\bar{\mathbf{u}}, \lambda\} - \{\bar{\mathbf{u}}_h, \lambda_h\} = \{e_u, e_\lambda\} \quad (3.102)$$

sowie der Fehler des dualen Problems

$$\mathbf{E}_z = \mathbf{Z} - \mathbf{Z}_h = \{z, \mu\} - \{z_h, \mu_h\} = \{e_z, e_\mu\} \quad (3.103)$$

eingeführt.

Die Zielgröße $Q(\mathbf{U})$ lässt sich mit Hilfe des Lagrangefunktionals \mathcal{L} und der dualen Lösung \mathbf{Z} wie folgt darstellen:

$$Q(\mathbf{U}) = \mathcal{L}((\mathbf{U}, \mathbf{Z})) - A(\mathbf{U}; \mathbf{Z}) = \mathcal{L}((\mathbf{U}, \mathbf{Z})) \quad (3.104)$$

Für die diskrete Lösung \mathbf{U}_h gilt entsprechend:

$$Q(\mathbf{U}_h) = \mathcal{L}((\mathbf{U}_h, \mathbf{Z}_h)) - A(\mathbf{U}_h; \mathbf{Z}_h) = \mathcal{L}((\mathbf{U}_h, \mathbf{Z}_h)) \quad (3.105)$$

Für den Fehler in der Zielgröße folgt hieraus:

$$E(\mathbf{U}, \mathbf{U}_h) = Q(\mathbf{U}) - Q(\mathbf{U}_h) = \mathcal{L}((\mathbf{U}, \mathbf{Z})) - \mathcal{L}((\mathbf{U}_h, \mathbf{Z}_h)) \quad (3.106)$$

Gleichung (3.106) wird nun mit Hilfe des Taylorschen Satzes umformuliert, siehe z.B. BANGERTH & RANNACHER [8] oder ODEN & PRUDHOMME [79]. Mit Hilfe der im

Anhang A.3 dieser Arbeit angegebenen Entwicklung ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 Q(\mathbf{U}) - Q(\mathbf{U}_h) &= \frac{1}{2} \mathcal{L}'((\mathbf{U}_h, \mathbf{Z}_h); (\mathbf{E}_u, \mathbf{E}_z)) + \frac{1}{2} \mathcal{L}'((\mathbf{U}, \mathbf{Z}); (\mathbf{E}_u, \mathbf{E}_z)) \quad (3.107) \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{s=0}^1 \mathcal{L}'''((\mathbf{U}_h, \mathbf{Z}_h) + s(\mathbf{E}_u, \mathbf{E}_z); (\mathbf{E}_u, \mathbf{E}_z), (\mathbf{E}_u, \mathbf{E}_z), (\mathbf{E}_u, \mathbf{E}_z)) \cdot s(s-1) ds
 \end{aligned}$$

Da (\mathbf{U}, \mathbf{Z}) der gesuchte Sattelpunkt ist, gilt $\mathcal{L}'((\mathbf{U}, \mathbf{Z}); (\mathbf{E}_u, \mathbf{E}_z)) = 0$. Da darüber hinaus $\mathcal{L}'((\mathbf{U}, \mathbf{Z}))$ linear in \mathbf{Z} ist, enthält die 3. Ableitung von \mathcal{L}' nur die drei Terme:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}'''((\mathbf{U}_h, \mathbf{Z}_h) + s(\mathbf{E}_u, \mathbf{E}_z); (\mathbf{E}_u, \mathbf{E}_z), (\mathbf{E}_u, \mathbf{E}_z), (\mathbf{E}_u, \mathbf{E}_z)) &= \quad (3.108) \\
 Q'''(\mathbf{U}_h + s\mathbf{E}_u; \mathbf{E}_u, \mathbf{E}_u, \mathbf{E}_u) - 3A''(\mathbf{U}_h + s\mathbf{E}_u; \mathbf{E}_u, \mathbf{E}_u, \mathbf{E}_z) \\
 - A'''(\mathbf{U}_h + s\mathbf{E}_u; \mathbf{E}_u, \mathbf{E}_u, \mathbf{E}_u, \mathbf{Z}_h + s\mathbf{E}_z)
 \end{aligned}$$

Aufgrund der hier gewählten Beschränkung auf lineare Zielfunktionale gilt weiterhin:

$$Q'''(\mathbf{U}_h + s\mathbf{E}_u; \mathbf{E}_u, \mathbf{E}_u, \mathbf{E}_u) = 0 \quad (3.109)$$

Des Weiteren folgt durch einfaches Ableiten von A :

$$A'''(\mathbf{U}_h + s\mathbf{E}_u; \mathbf{E}_u, \mathbf{E}_u, \mathbf{E}_u, \mathbf{Z}_h + s\mathbf{E}_z) = 0 \quad (3.110)$$

sowie

$$\begin{aligned}
 A''(\mathbf{U}_h + s\mathbf{E}_u; \mathbf{E}_u, \mathbf{E}_u, \mathbf{E}_z) &= 2 \overbrace{(\lambda - \lambda_h)}^{e_\lambda} \rho_0(\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_z) \quad (3.111) \\
 &+ 2 \overbrace{(\mu - \mu_h)}^{e_\mu} \rho_0(\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_u).
 \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich als Zwischenergebnis für den Fehler in der Zielgröße:

$$\begin{aligned}
 Q(\mathbf{U}) - Q(\mathbf{U}_h) &= \frac{1}{2} \mathcal{L}'((\mathbf{U}_h, \mathbf{Z}_h); (\mathbf{E}_u, \mathbf{E}_z)) \quad (3.112) \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{s=0}^1 (-6e_\lambda \rho_0(\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_z) - 3e_\mu \rho_0(\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_u)) \cdot s \cdot (s-1) ds \\
 &= \frac{1}{2} (Q'(\mathbf{U}; \mathbf{E}_u) - A(\mathbf{U}_h; \mathbf{E}_z) - A'(\mathbf{U}; \mathbf{E}_u, \mathbf{Z}_h)) \\
 &+ \underbrace{\frac{1}{2} e_\lambda \rho_0(\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_z) + \frac{1}{4} e_\mu \rho_0(\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_u)}_{R_h}
 \end{aligned}$$

Gleichung (3.112) lässt sich nun noch mit Hilfe der Residuen des primalen (3.75) und des dualen Problems (3.86) darstellen:

$$Q(\mathbf{U}) - Q(\mathbf{U}_h) = \frac{1}{2} \mathcal{R}_u(\mathbf{E}_z) + \frac{1}{2} \mathcal{R}_z(\mathbf{E}_u) + R_h \quad (3.113)$$

Zur weiteren Vereinfachung der Fehlerdarstellung wird nun noch ein Zusammenhang zwischen den mit den Fehlern gewichteten Residuen $\mathcal{R}_u(\mathbf{E}_z)$ und $\mathcal{R}_z(\mathbf{E}_u)$ hergestellt. Hierfür werden zunächst in Anlehnung an ODEN & PRUDHOMME [79] die gewichteten Residuen $\mathcal{R}_u(\mathbf{W})$ und $\mathcal{R}_z(\mathbf{W})$ mit Hilfe von Taylorformeln umgeformt. Das Residuum des primalen Problems (3.75) lässt sich wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_u(\mathbf{W}) &= -A(\mathbf{U}_h; \mathbf{W}) = A(\mathbf{U}; \mathbf{W}) - A(\mathbf{U}_h; \mathbf{W}) = \\ &= A'(\mathbf{U}_h; \mathbf{E}_u, \mathbf{W}) + \int_{s=0}^1 A''(\mathbf{U}_h + s\mathbf{E}_u; \mathbf{E}_u, \mathbf{E}_u, \mathbf{W}) \cdot (1-s) ds\end{aligned}\quad (3.114)$$

Und für das Residuum des dualen Problems folgt:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_z(\mathbf{W}) &= Q'(\mathbf{U}_h; \mathbf{W}) - A'(\mathbf{U}_h; \mathbf{W}, \mathbf{Z}_h) \\ &= -[Q'(\mathbf{U}; \mathbf{W}) - Q'(\mathbf{U}_h; \mathbf{W})] + Q'(\mathbf{U}; \mathbf{W}) - A'(\mathbf{U}_h; \mathbf{W}, \mathbf{Z}_h) \\ &= -[Q'(\mathbf{U}; \mathbf{W}) - Q'(\mathbf{U}_h; \mathbf{W})] + A'(\mathbf{U}; \mathbf{W}, \mathbf{Z}) - A'(\mathbf{U}_h; \mathbf{W}, \mathbf{Z}_h) \\ &= -[Q'(\mathbf{U}; \mathbf{W}) - Q'(\mathbf{U}_h; \mathbf{W})] + A'(\mathbf{U}; \mathbf{W}, \mathbf{Z}) - A'(\mathbf{U}_h; \mathbf{W}, \mathbf{Z}) \\ &\quad + A'(\mathbf{U}_h; \mathbf{W}, \mathbf{E}_z) \\ &= -\int_{s=0}^1 Q''(\mathbf{U}_h + s\mathbf{E}_u; \mathbf{E}_u, \mathbf{W}) ds + \int_{s=0}^1 A''(\mathbf{U}_h + s\mathbf{E}_u; \mathbf{E}_u, \mathbf{W}, \mathbf{Z}) ds \\ &\quad + A'(\mathbf{U}_h; \mathbf{W}, \mathbf{E}_z)\end{aligned}\quad (3.115)$$

Hieraus lässt sich nun mit einigen Zwischenschritten folgender Zusammenhang herstellen:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_z(\mathbf{E}_s) &= \mathcal{R}_u(\mathbf{E}_z) - \int_{s=0}^1 Q''(\mathbf{U}_h + s\mathbf{E}_u; \mathbf{E}_u, \mathbf{E}_u) ds \\ &\quad + \int_{s=0}^1 A''(\mathbf{U}_h + s\mathbf{E}_u; \mathbf{E}_u, \mathbf{E}_u, \mathbf{Z}_h + s\mathbf{E}_z) ds\end{aligned}\quad (3.116)$$

Der Fehler in der Zielgröße kann somit ausschließlich mit Hilfe des Residuums des primalen Problems ausgedrückt werden. Hierfür wird der Zusammenhang (3.116) in Gleichung (3.112) eingesetzt. Unter Berücksichtigung der Tatsache, dass die höheren Ableitungen des linearen Zielfunktional Q verschwinden, folgt nach kurzer Zwischenrechnung die endgültige Darstellung des Fehlers in einer linearen Zielgröße:

$$E(\mathbf{U}, \mathbf{U}_h) = \mathcal{R}_u(\mathbf{E}_z) + \underbrace{e_\lambda(\mathbf{e}_u, \mathbf{z})_{\mathcal{B}_0} + \frac{1}{2}\mu\rho(\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_u)_{\mathcal{B}_0}}_{\Delta_A} \quad (3.117)$$

Im Term Δ_A sind hier die Anteile zusammengefasst, welche aus den Ableitungen von $A(\cdot; \cdot)$ resultieren.

Fehlerindikator

Da Δ_A nur Terme enthält, welche quadratisch im Diskretisierungsfehler \mathbf{E}_u sind, wird Δ_A für die Fehlerschätzung nachfolgend vernachlässigt. Der Fehler in der Zielgröße lässt sich dann näherungsweise mit Hilfe des mit dem Fehler des dualen Problems gewichteten Residuums darstellen:

$$E(\mathbf{U}, \mathbf{U}_h) \approx \mathcal{R}_u(\mathbf{E}_z) = a(\bar{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_z) - \lambda_h \rho_0(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{e}_z)_{\mathcal{B}_0} \quad (3.118)$$

Von Gleichung (3.118) wird nun noch die erste Zeile von Gleichung (3.67) mit der Wichtungsfunktion \mathbf{e}_z subtrahiert. Dies liefert:

$$E(\mathbf{U}, \mathbf{U}_h) \approx \lambda_h \rho_0(\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_z)_{\mathcal{B}_0} + e_\lambda \rho_0(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{e}_z)_{\mathcal{B}_0} - a(\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_z) \quad (3.119)$$

Da hier die Entwicklung eines möglichst einfachen Fehlerindikators zur zielgerichteten Adaption des Netzes und weniger die genaue Kontrolle der Zielfehlergröße verfolgt werden soll, werden nun in (3.119) zusätzlich noch die Terme $\lambda_h \rho_0(\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_z)$ und $e_\lambda \rho_0(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{e}_z)$ vernachlässigt, d.h.:

$$E(\mathbf{U}, \mathbf{U}_h) \approx -a(\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_z) \quad (3.120)$$

Da für praktische Aufgabenstellungen in der Regel der Elastizitätsmodul sehr viel größer als die Dichte ρ_0 ist, erscheint diese Annahme insbesondere für die unteren Eigenwerte angebracht.

Da das Vorzeichen der Eigenform und damit der Zielgröße durch das Eigenwertproblem nicht eindeutig festgelegt ist, kann nur der Betrag des Fehlers in der Zielgröße geschätzt werden. Der Übergang auf den Betrag der Zielfehlergröße und die Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung auf (3.120) liefert dann den Fehlerindikator:

$$|E(\mathbf{U}, \mathbf{U}_h)| \approx a(\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_u)^{\frac{1}{2}} \cdot a(\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_z)^{\frac{1}{2}} = \|\mathbf{e}_u\|_a \cdot \|\mathbf{e}_z\|_a \quad (3.121)$$

Die einzelnen Fehleranteile werden hier wiederum mit dem glättungsbasierten Fehlerschätzer nach ZIENKIEWICZ & ZHU [123, 124] abgeschätzt, vgl. Gleichung (3.9). Für die hier verwendeten Volumen-Schalenelemente mit angenommenen bzw. erweiterten Verzerrungen erfolgt die Schätzung der Fehler in den netzabhängigen Energienormen $\|\cdot\|_{a,h}$.

Für die Schätzung des Fehlers des Eigenwerts λ folgt aus Gleichung (3.121) mit dem dualen Problem (3.91) der Fehlerschätzer:

$$|\lambda - \lambda_h| \approx \|\mathbf{e}_u\|_a^2 \quad (3.122)$$

Dies entspricht dem Fehlerschätzer, welcher bereits von NEUMANN [73] vorgeschlagen wurde. Dieser klassische Ansatz der Fehlerschätzung ist also wiederum im generellen Konzept der zielorientierten Fehlerschätzung mit dualen Problemen enthalten, was

den universellen Charakter der *DWR-Methode* unterstreicht. In [73] finden sich auch verschiedene numerische Beispiele für die Fehlerschätzung und Netzadaption für das Eigenwertproblem, so dass hier im Folgenden auf die Schätzung des Eigenwertfehlers verzichtet werden kann. Die nachfolgenden Ausführungen beschränken sich somit ausschließlich auf die Fehlerschätzung in lokalen Verschiebungsgrößen der betrachteten Eigenform.

Netzadaption

Auf der Grundlage des Fehlerindikators (3.121) kann eine adaptive Netzverfeinerung zur zielgerichteten Minimierung des Fehlers $|E(\mathbf{U}, \mathbf{U}_h)|$ durchgeführt werden. Analog zur semidiskreten Methode ist das Ziel der Netzverfeinerung die Gleichverteilung der Fehleranteile der einzelnen Elemente. Es erfolgt eine hierarchische Netzverfeinerung mit der in Abschnitt 3.9.2 beschriebenen Steuerung der Netzveränderung basierend auf der Kombinationssteuerung.

Das Schema des Netzadaptionsverfahrens ist in Bild 3.31 dargestellt.

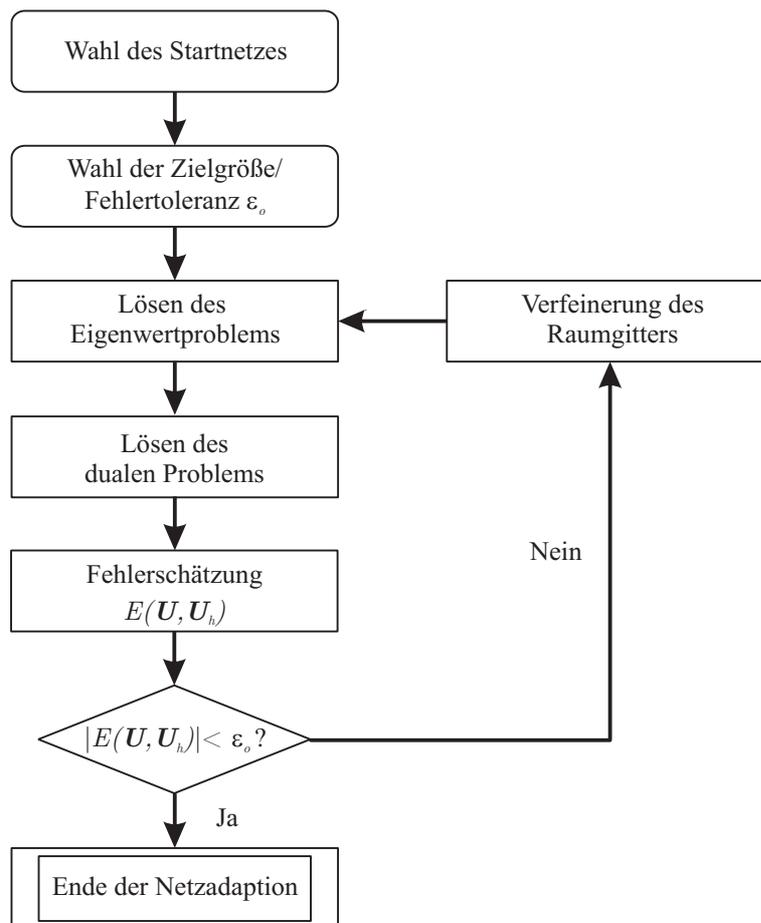


Bild 3.31: Schema der Netzadaption für lineare Zielfunktionale in einer Eigenform

Numerische Beispiele

Nachfolgend wird die Fehlerschätzung in Zielgrößen sowie die Netzadaption auf der Basis des Fehlerschätzers (3.121) anhand von zwei numerischen Beispielen untersucht. Zur Beurteilung des adaptiven Algorithmus werden die Ergebnisse, welche mit Hilfe des adaptiven Algorithmus ermittelt werden, mit den Ergebnissen auf gleichförmig verfeinerten Netzen verglichen. Die Beispiele beschränken sich dabei auf den Fehler in Punktverschiebungen der jeweils betrachteten Eigenform.

Beispiel 1 – L-förmige Kragplatte

Als erstes Beispiel wird die im Bild 3.32 dargestellte L-förmige Kragplatte betrachtet. Am oberen Rand ist die Platte fest eingespannt. Als Zielgrößen werden die Verschiebungen in Richtung der z -Achse an den im Bild 3.32 gekennzeichneten Punkten A und B gewählt. Für die Verschiebung im Punkt A werden die ersten beiden Eigenformen und für die Verschiebung im Punkt B die erste Eigenform betrachtet.

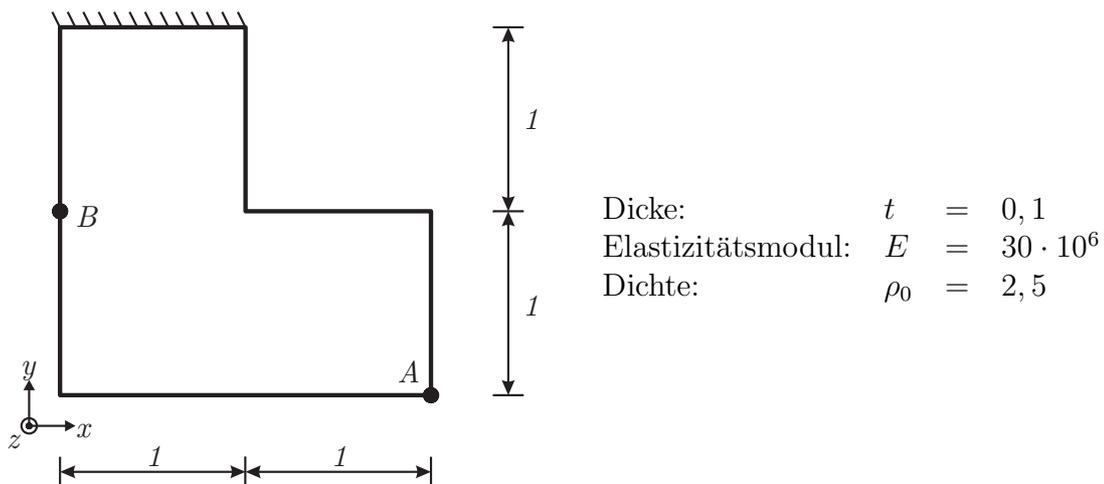


Bild 3.32: Beispiel L-Gebiet: Abmessungen und Materialparameter

Für die räumliche Diskretisierung wird das Volumen-Schalenelement *ANS3DEAS* basierend auf der 7-Parameterformulierung verwendet. Als Startnetz wird sowohl für die adaptive als auch die gleichförmige Netzverfeinerung ein Netz bestehend aus 12 Elementen mit insgesamt 108 Freiheitsgraden verwendet. Das letzte Netz der gleichförmigen Netzverfeinerung besitzt 74880 Freiheitsgrade. Die Referenzlösungen werden jeweils durch Extrapolation der Zielgrößen bei der gleichförmigen Verfeinerung ermittelt. Hierfür wird die Δ^2 -Methode nach Aitken verwendet, vgl. [73].

Bild 3.33 zeigt den Vergleich der relativen Fehler in der Vertikalverschiebung $u_{z,A}$ der ersten Eigenform im Punkt A für die uniforme Netzverfeinerung und die zielorientierte Netzadaption. Es zeigt sich eine deutlich verbesserte Konvergenz bei Anwendung der adaptiven Methode.

Im Bild 3.34 sind die letzten vier Netze der adaptiven Verfeinerung dargestellt. Man erkennt einerseits deutlich die starke Verfeinerung an der einspringenden Ecke, welche aus den Singularitäten der primalen und dualen Lösungen an dieser Stelle resultiert, und andererseits die Verfeinerung entlang des unteren freien Randes im Bereich des Punktes A .

Bei der Netzadaption der zweiten Eigenform mit der Zielgröße $u_{z,A}$ ergeben sich tendenziell sehr ähnliche räumliche Diskretisierungen, siehe Bild 3.36. Der entsprechende Vergleich in der Konvergenz des relativen Fehlers in der Zielgröße findet sich im Bild 3.35. Auch hier lässt sich eine deutliche Steigerung der Effizienz bei Verwendung des adaptiven Verfahrens feststellen.

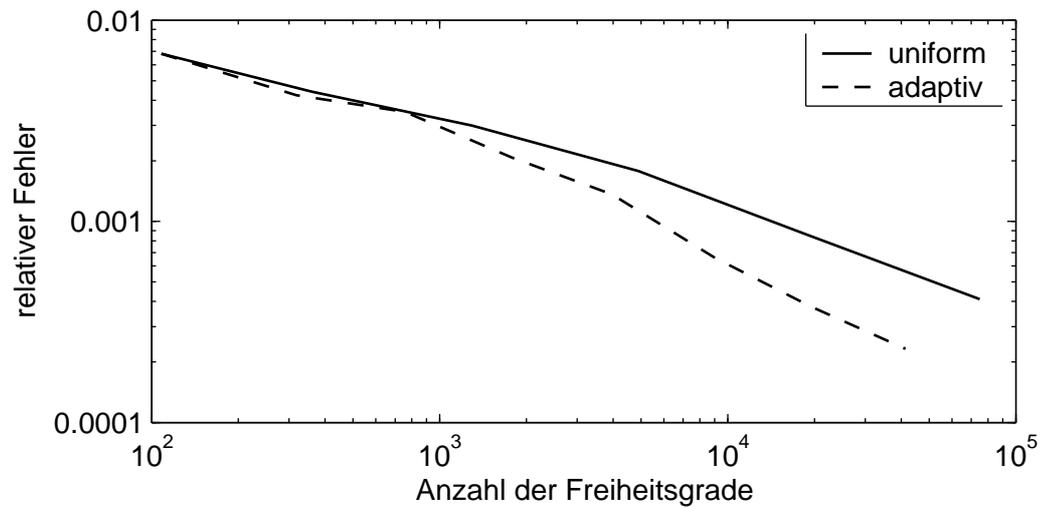
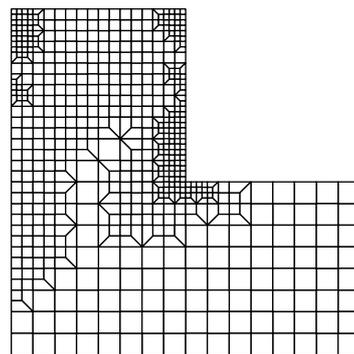
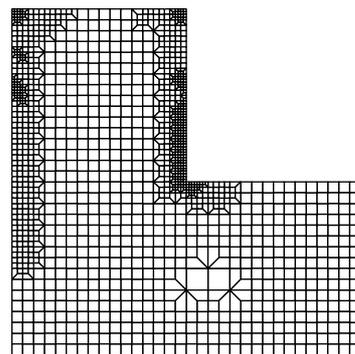


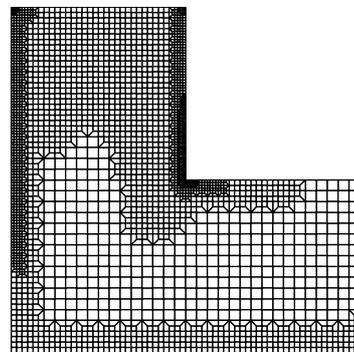
Bild 3.33: Beispiel L-Gebiet: Konvergenz des relativen Fehlers in der vertikalen Verschiebung des Punktes A in der ersten Eigenform für uniforme und adaptive Netzverfeinerung



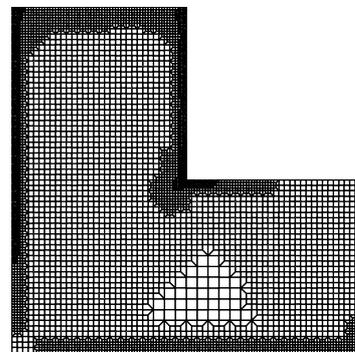
3960 Freiheitsgrade



9042 Freiheitsgrade



19476 Freiheitsgrade



41418 Freiheitsgrade

Bild 3.34: Beispiel L-Gebiet: Netzsequenz bei adaptiver Verfeinerung der 1. Eigenform mit der Zielgröße $u_{z,A}$

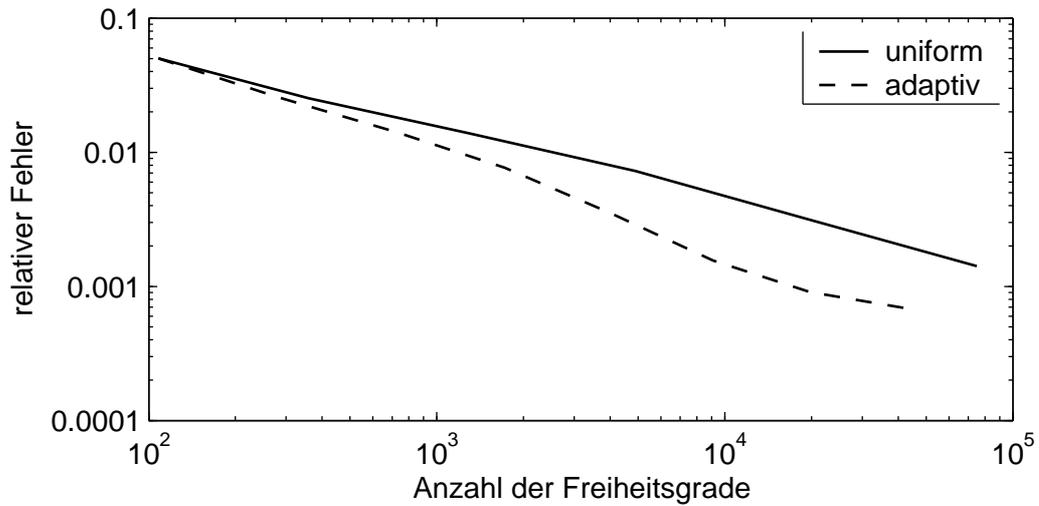
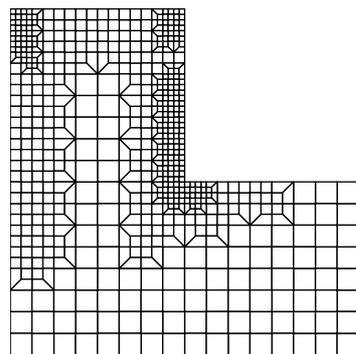
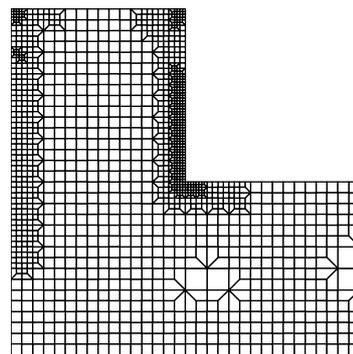


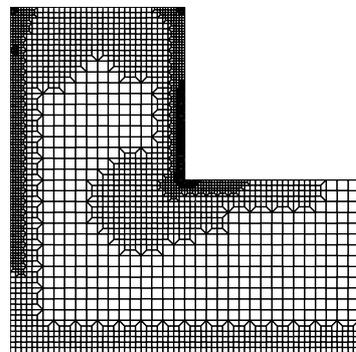
Bild 3.35: Beispiel L-Gebiet: Konvergenz des relativen Fehlers in der vertikalen Verschiebung des Punktes A in der zweiten Eigenform für uniforme und adaptive Netzverfeinerung



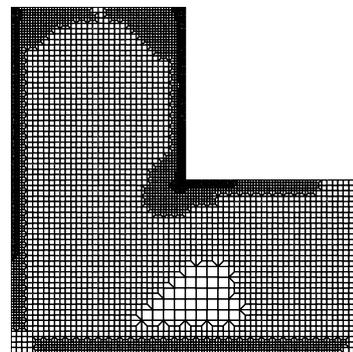
4032 Freiheitsgrade



9114 Freiheitsgrade



19746 Freiheitsgrade



42954 Freiheitsgrade

Bild 3.36: Beispiel L-Gebiet: Netzsequenz bei adaptiver Verfeinerung der 2. Eigenform mit der Zielgröße $u_{z,A}$

Um den Einfluss der gewählten Zielgröße auf die Netzadaption aufzuzeigen, wird abschließend noch der Fehler in der vertikalen Verschiebung $u_{z,B}$ im Punkt B in der ersten Eigenform als Zielgröße verwendet. Bild 3.38 zeigt wiederum die Gegenüberstellung der relativen Fehler in der Verschiebung für uniforme und adaptive Netzverfeinerung. Auch in diesem Beispiel zeigt sich eine weitaus höhere Effizienz im Falle der adaptiven Netzverfeinerung. Das letzte Netz der adaptiven Verfeinerung besitzt 44094 Freiheitsgrade bei einem relativen Fehler von 0,09%, wohingegen für die feinste uniforme Verfeinerung mit 74880 Freiheitsgraden der relative Fehler mit 0.17% fast doppelt so groß ist.

Bild 3.38 zeigt die letzten vier Netze bei Anwendung des adaptiven Netzverfeinerungsverfahrens. Im Gegensatz zur Adaption für die vertikale Verschiebung im Punkt A ergibt sich hier eine sehr starke Verfeinerung im Bereich des Punktes B , wohingegen weite Bereiche am „rechten“ freien Ende des L-Gebietes nur unwesentlich verfeinert werden. Die Netzverfeinerung konzentriert sich im Wesentlichen auf den „oberen“ Bereich der Platte.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass für das recht einfache ebene Beispiel der L-förmigen Kragplatte die Netzadaption auf Basis des zielorientierten Fehlerindikators zu einer wesentlichen Steigerung der Effizienz bei der Abbildung lokaler Größen der unteren Eigenformen führt.

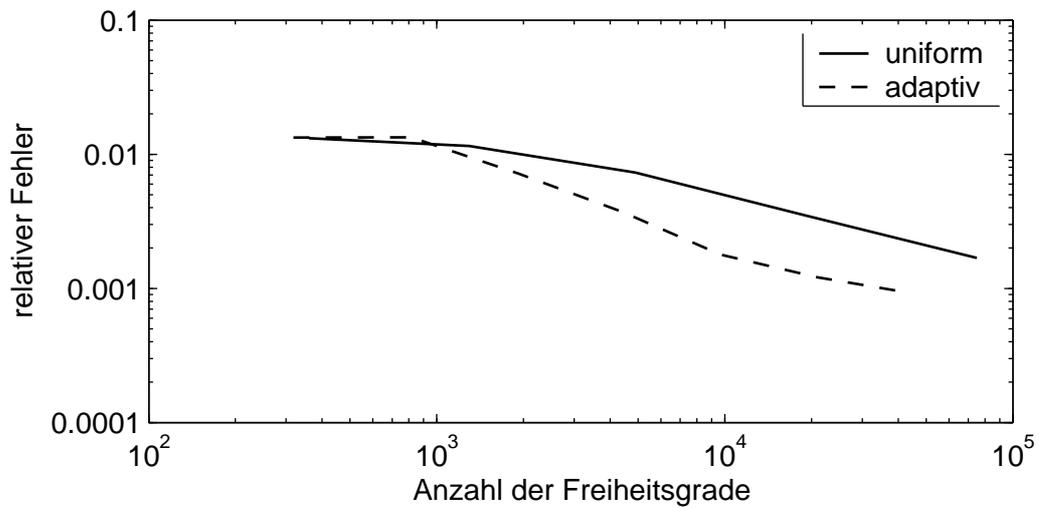


Bild 3.37: Beispiel L-Gebiet: Konvergenz des relativen Fehlers in der vertikalen Verschiebung des Punktes B in der ersten Eigenform für uniforme und adaptive Netzverfeinerung

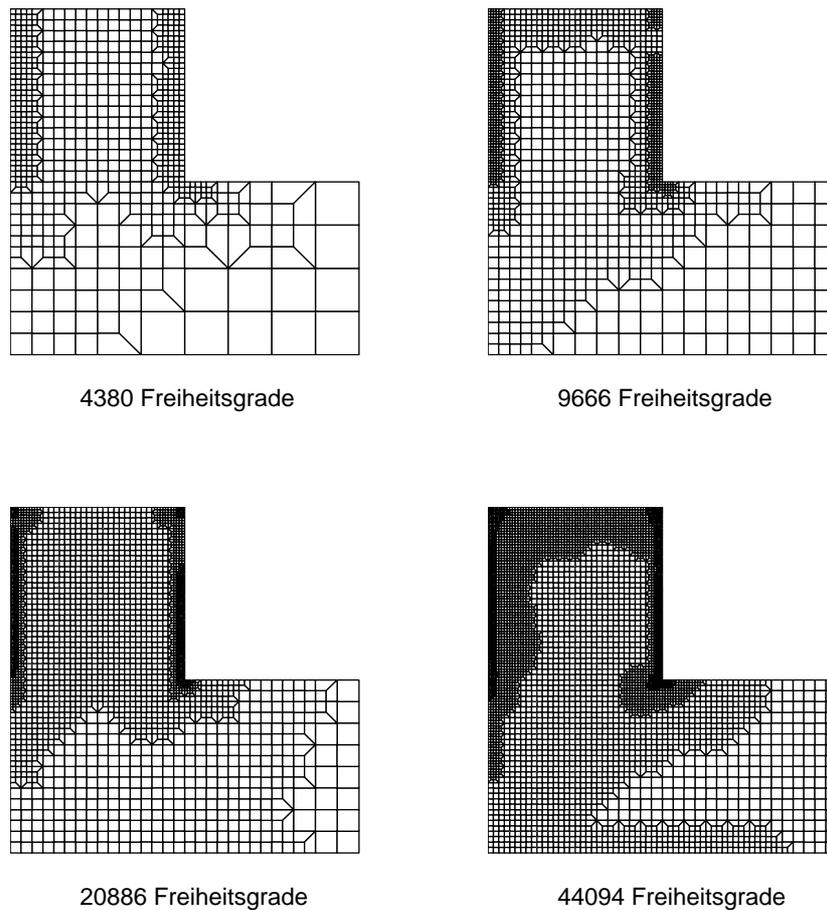


Bild 3.38: Beispiel L-Gebiet: Netzsequenz bei adaptiver Verfeinerung der 1. Eigenform mit der Zielgröße $u_{z,B}$

Beispiel 2 – Kugelförmige Schale

In einem weiteren Beispiel soll nun untersucht werden, ob sich die guten Ergebnisse des ebenen Problems auch auf gekrümmte Schalenstrukturen übertragen lassen. Hierfür wird wiederum die bereits verwendete Halbkugel mit Loch betrachtet. Die Abmessungen und Materialparameter können Bild 3.3 entnommen werden. Es wird hier nur ein Viertel der Schale mit Symmetrierandbedingungen betrachtet, d.h. es erfolgt eine Beschränkung auf die symmetrischen Eigenformen. Als Zielgröße wird die horizontale Verschiebung des Punktes II für die unteren beiden Eigenformen betrachtet.

Für die Diskretisierung wird das Volumen-Schalenelement *ANS3DEAS* verwendet. Die Werte für die Referenzlösungen ergeben sich aus der Extrapolation der Werte der uniformen Verfeinerung. Das feinste uniforme Raumnetz besitzt 99072 Freiheitsgrade.

Bild 3.39 zeigt die Entwicklung des relativen Fehlers in $u_{y,II}$ der ersten Eigenform für uniforme und adaptive Netzverfeinerung und Bild 3.40 die zugehörige adaptive Netzsequenz. Hier zeichnet sich, wie erwartet, eine starke Verfeinerung am oberen freien Rand und im Bereich der Zielgröße ab. Die mit Hilfe der Adaption der Eigenformen generierten Netze gleichen dabei relativ stark den Netzen, welche im Rahmen der semidiskreten Methode berechnet wurden. Der wesentliche Unterschied ist, dass bei den adaptierten Netzen innerhalb der Semidiskretisierung auch die dort vorhandene äußere Belastung Einfluss auf die Netzadaption hat.

Im Gegensatz zum ebenen Problem der L-förmigen Platte kann hier jedoch keine Effizienzsteigerung mit Hilfe des adaptiven Algorithmus erzielt werden. Die adaptive Netzverfeinerung liefert sogar schlechtere Ergebnisse als die uniforme Verfeinerung. Das gleiche Verhalten zeigt sich auch bei der Adaption der zweiten Eigenform mit der Zielgröße $u_{y,II}$, siehe Bild 3.41 und Bild 3.42.

Die Verschlechterung der Ergebnisse für die adaptive Verfeinerung ergibt sich aus der bekannten Empfindlichkeit bilinearer Schalenelemente bei der Abbildung biegedominanter Verformungszustände gekrümmter Strukturen. Es ist bekannt, dass die Abbildung von Biegedeformationszuständen von Schalenstrukturen mit bilinearen Schalenelementen bei der Verwendung unregelmäßiger Netze in der Statik zu einer schlechten Konvergenz der numerischen Lösung führt, siehe PITKÄRANTA ET AL. [88], BATHE ET AL. [11] und KIZIO ET AL. [60]. Bei der Simulation der Kugelschale unter transienter Belastung im vorangegangenen Abschnitt sind diese Effekte offensichtlich nicht aufgetreten, was darauf schließen lässt, dass die in diesem Beispiel tatsächlich auftretenden Deformationszustände nicht biegedominant, sondern gemischte Zustände darstellen. Da die unteren Eigenformen in der Regel biegedominant sind, wird durch die Auswahl der unteren Eigenformen für die Netzadaption dieser pathologische Effekt der bilinearen Verschiebungsapproximation direkt herausgefiltert.

Die verschlechterte Konvergenz im vorliegenden Fall ist somit nicht auf einen Mangel des Fehlerindikators zurückzuführen, sondern stellt ein generelles Problem des Netzverfeinerungsverfahrens mit Übergangselementen dar.

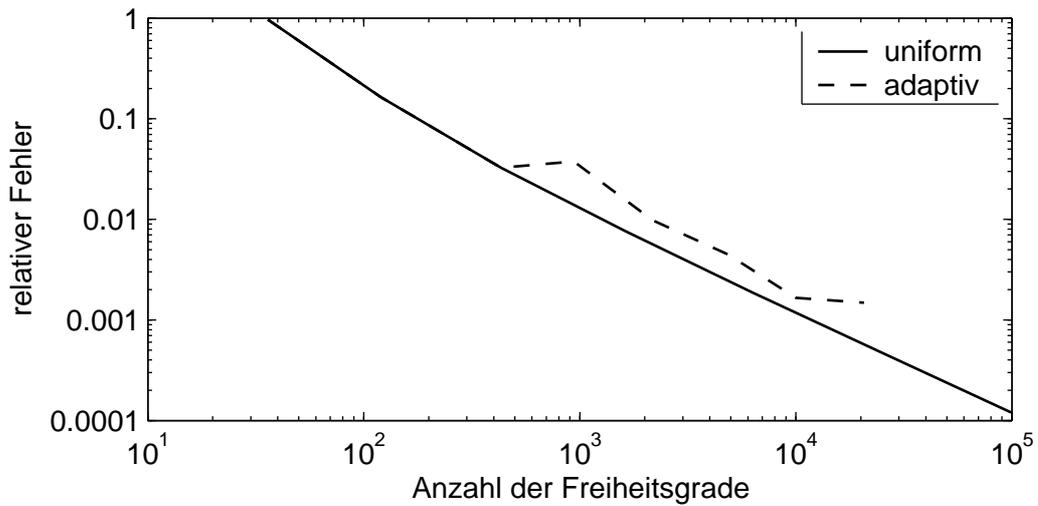


Bild 3.39: Beispiel Halbkugel mit Loch: Konvergenz des relativen Fehlers in der horizontalen Verschiebung $u_{y,II}$ des Punktes II in der ersten Eigenform für uniforme und adaptive Netzverfeinerung

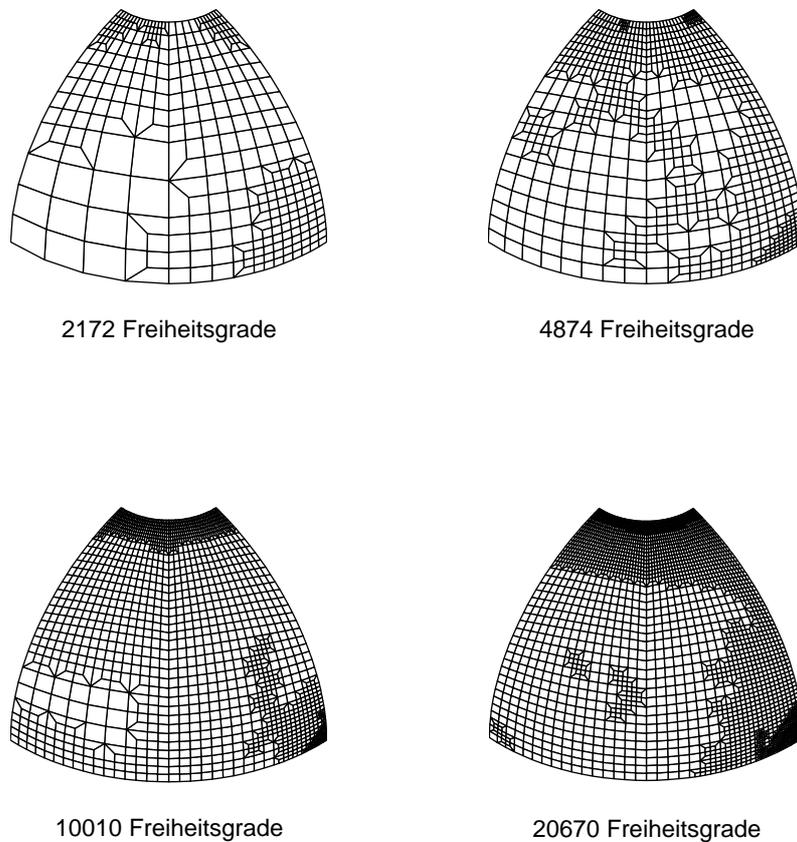


Bild 3.40: Beispiel Halbkugel mit Loch: Netzsequenz bei adaptiver Verfeinerung der ersten Eigenform mit der Zielgröße $u_{y,II}$

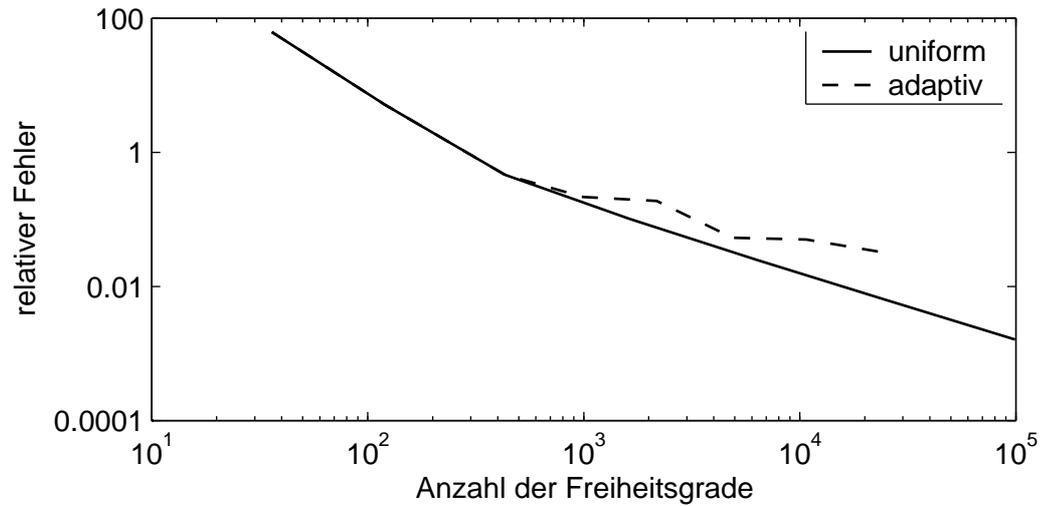
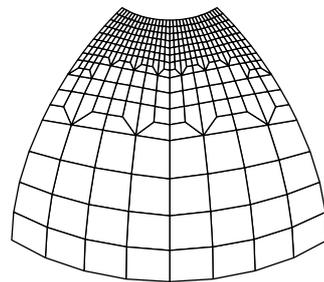
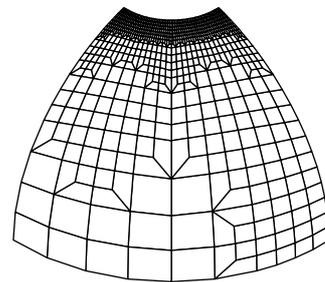


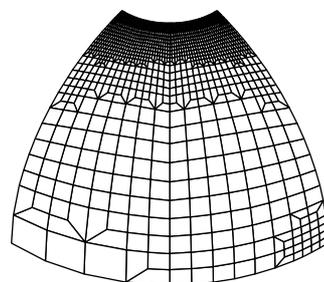
Bild 3.41: Beispiel Halbkugel mit Loch: Konvergenz des relativen Fehlers in der horizontalen Verschiebung $u_{y,II}$ des Punktes II in der zweiten Eigenform für uniforme und adaptive Netzverfeinerung



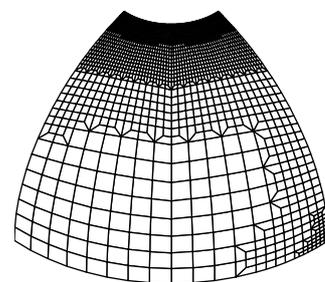
2176 Freiheitsgrade



4884 Freiheitsgrade



10728 Freiheitsgrade



23660 Freiheitsgrade

Bild 3.42: Beispiel Halbkugel mit Loch: Netzsequenz bei adaptiver Verfeinerung der zweiten Eigenform mit der Zielgröße $u_{y,II}$

Zusammenfassung und Bewertung

Das Beispiel der L-förmigen Kragplatte hat gezeigt, dass sich mit Hilfe des Fehlerindicators (3.121) und der darauf basierenden Netzadaption eine erhebliche Steigerung der Effizienz in der Abbildung lokaler Größen einer Eigenform erzielen lassen. Für die Anwendung der Netzadaption für die Generierung von Berechnungsnetzen für transiente Berechnungen ergeben sich allerdings einige Schwierigkeiten. So setzt sich die Lösung für eine transiente Berechnung in der Regel aus mehreren Eigenformen zusammen. Mit dem hier beschriebenen Verfahren lassen sich jedoch nur Netzadaptionen für einzelne einfache Eigenwerte durchführen, so dass die Netze allenfalls nacheinander für verschiedene Eigenformen adaptiert werden können. Darüber hinaus ist im Gegensatz zum dem Vorgehen im vorangegangenen Abschnitt keine Kontrolle der Größenordnung des Diskretisierungsfehlers möglich.

Des Weiteren berücksichtigt die Eigenformadaption nicht die räumliche Verteilung der äußeren Belastung. Die numerischen Beispiele im Rahmen der semidiskreten Methode haben gezeigt, dass auch Netzadaptionen im Bereich von Lasteinleitungsstellen notwendig sind.

Eine zentrale Rolle für die sinnvolle Anwendung der Eigenformadaption spielt die Auswahl der maßgebenden Eigenformen. Dieser Aspekt wurde in den bisherigen Ausführungen nicht behandelt und stellt auch weiterhin ein offenes Problem dar. Für die sinnvolle Auswahl der zu adaptierenden Eigenformen ist einerseits maßgebend, welche Eigenformen in der Lösung enthalten sind und andererseits, welche dieser Eigenformen maßgebenden Anteil an der Zielgröße haben. Für die Bestimmung der maßgebenden Eigenformen sind somit ausführliche Voruntersuchungen notwendig, welche für praktische Aufgabenstellungen meist nicht gerechtfertigt sind.

Eine weitere Einschränkung der praktischen Anwendbarkeit liegt in der Beschränkung auf einfache Eigenwerte und die zugehörigen Eigenformen. Dies impliziert auch, dass der betrachtete Eigenwert ausreichend weit von den benachbarten Eigenwerten entfernt ist. In Beispielrechnungen zeigte sich, dass insbesondere die Adaption für Zielfunktionale höherer Eigenformen problematisch ist, da die höheren Eigenwerte in der Regel verhältnismäßig dicht beieinander liegen. Dies führt zu numerischen Problemen bei der Bestimmung des dualen Problems in Gleichung (3.101), da dann die Orthogonalitätsbedingung für die (numerische) Eindeutigkeit der dualen Lösung nicht mehr ausreichend ist.

Anhand des Beispiels der Halbkugel mit Loch hat sich darüber hinaus gezeigt, dass die Netzadaption für die unteren, in der Regel biegedominanten Eigenformen zu einer verschlechterten Konvergenz der Zielgröße in der betrachteten Eigenform führen kann, wenn gekrümmte Schalenstrukturen mit Elementen mit bilinearer Verschiebungsinterpolation diskretisiert werden.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass die Generierung von Berechnungsnetzen für Schwingungsprobleme auf der Basis der zielorientierten Fehlerschätzung für das dynamische Eigenwertproblem, auch mit Hinblick auf den nicht unerheblichen Aufwand

für die wiederholte Lösung des Eigenwertproblems, tendenziell eher nicht geeignet sind.

Kapitel 4

Fehlerschätzung und Netzadaption für geometrisch nichtlineare Probleme

Im vorliegenden Kapitel werden Fehlerschätzer zur Schätzung des räumlichen Diskretisierungsfehlers für geometrisch nichtlineare Problemstellungen der Strukturmechanik und darauf basierende ortsadaptive Verfahren behandelt. Für die Fehlerschätzung wird aufbauend auf den Erkenntnissen des vorangegangenen Kapitels ein Fehlerschätzer verwendet, welcher auf die vollständige Lösung des dualen Problems verzichtet. Dieser dient dann wiederum als Basis für die beiden bereits im vorangegangenen Kapitel behandelten adaptiven Verfahren zur zielgerichteten Adaption der Raumdiskretisierung.

Um Wiederholungen zu vermeiden, werden nur die wesentlichen Unterschiede zwischen den Verfahren für den linearen und den nichtlinearen Fall behandelt. Ein wesentlicher Unterschied ergibt sich für den Datentransfer zwischen verschiedenen Netzen. Im Gegensatz zum linearen Fall müssen hier z.B. bei Verwendung der 7-Parameter-Formulierung auch die erweiterten Verzerrungsparameter als innere Variablen auf das neue Netz übertragen werden.

4.1 Zur Fehlerschätzung mit vollständiger Lösung des dualen Problems

Bereits im vorangegangenen Kapitel dieser Arbeit wurde als erste Strategie zur Schätzung des räumlichen Diskretisierungsfehlers in einem Zielfunktional die vollständige numerische Auswertung einer Fehlerdarstellung behandelt. Es hat sich dabei gezeigt, dass der Aufwand für die Fehlerschätzung bei diesem Vorgehen den für die Lösung des primalen Problems auf einer feineren Diskretisierung übersteigt. Die Anwendung die-

ses Vorgehens auf Schwingungsprobleme erschien darüber hinaus auch deshalb nicht gerechtfertigt, da der Großteil des Aufwands betrieben wurde, um den Phasenfehler in Folge der räumlichen Diskretisierung bei der Fehlerschätzung mit zu berücksichtigen. Diese Erkenntnisse führten direkt auf die Entwicklung eines Fehlerschätzers ohne Berücksichtigung des Phasenfehlers.

Die Argumentation, welche letztlich zum Verwerfen des vollständigen Fehlerschätzers führte, lässt sich auch auf den geometrisch nichtlinearen Fall übertragen. Im Vergleich zum linearen Fall ergeben sich weitere Aspekte, welche gegen die vollständige Lösung des dualen Problems sprechen:

- Im nichtlinearen Fall sind primales und duales Problem nicht entkoppelt. Das (lineare) duale Problem ist über die Tangentenformen mit dem primalen Problem gekoppelt und kann folglich nicht mehr separat berechnet werden. Stattdessen müssen bei der Bestimmung des dualen Problems in jedem Zeitschritt die Tangentensteifigkeiten der primalen Lösung bestimmt werden. Neben dem unverändert hohen Speicheraufwand muss folglich nun für jeden Endzeitpunkt t_n das duale Problem vollständig neu bestimmt werden. Entsprechend steigt der numerische Aufwand gegenüber dem linearen Fall um ein Vielfaches an, siehe auch FUENTES ET AL. [35].
- Aufgrund des netzabhängigen modifizierten Verschiebungs-Verzerrungszusammenhangs im Rahmen der hier verwendeten Methode der angenommenen Verzerrungen (ANS) müssen die Arbeitsausdrücke auf einer feineren Raumdiskretisierung ausgewertet werden, um den Konsistenzanteil am räumlichen Diskretisierungsfehler mit zu erfassen. Dies ergibt hier einen zusätzlichen Aufwand da für die Bestimmung der Tangentenmatrizen in jedem Zeitschritt die numerische Lösung \mathbf{u}_h vom Berechnungsnetz (Netzweite h) auf das Referenznetz (Netzweite H) transferiert werden muss. Für die 7-Parameterschale müssen zusätzlich auch noch die internen erweiterten Verzerrungsvariablen übertragen werden. Neben dem zusätzlichen Aufwand ergeben sich hieraus auch zusätzliche Fehler in Folge der Datenübertragung, welche nicht kontrolliert werden können.
- Durch die Linearisierung der Fehlerdarstellung ergibt sich ein zusätzlicher Fehler, welcher durch die zeitliche Integration des mit dem dualen Problem gewichteten Residuums über die Zeit aufsummiert wird.
- Je nach Wahl der Zielgröße und der Fehlerdarstellung müssen auch die Anfangsbedingungen des dualen Problems linearisiert werden. Das duale Problem wird dann folglich nur mit näherungsweise korrekten Anfangsbedingungen berechnet.

Eine Anwendung eines Fehlerschätzers, welcher auf dem vollständigen Rückwärtsproblem beruht, findet sich im Beitrag von FUENTES, LITTLEFIELD, ODEN & PRUDHOMME [35]. Dort werden Elastomerstrukturen unter Schockbelastung untersucht. Im Gegensatz zu den hier betrachteten Schwingungsproblemen ist in diesem Fall der Transport der Zustandsgrößen und damit des Fehlers über die Zeit ein wesentliches Charakteristikum des zugrunde liegenden physikalischen Problems. Aus diesem Grund kann

dort nicht auf die zeitliche Kopplung von primalem und dualem Problem verzichtet werden. In dem Beitrag von FUENTES ET AL. wird jedoch nur der Fehler zu einem speziellen Zeitpunkt geschätzt. Eine Netzadaption auf Basis des Fehlerschätzers findet nicht statt, d.h. die Netzverfeinerung bei den numerische Beispielen erfolgt uniform. Dies bedeutet aber auch, dass wesentliche Informationen des Fehlerschätzers, wie etwa die räumliche und zeitliche Verteilung des Fehlers, nicht für eine Verbesserung der Diskretisierung verwendet werden.

Da in der vorliegenden Arbeit hauptsächlich Schwingungsprobleme behandelt werden, bei denen der zeitliche Transport eine untergeordnete Rolle spielt, wird im Folgenden wiederum ausschließlich ein Fehlerschätzer verwendet, welcher auf die zeitliche Kopplung von primalem und dualem Problem verzichtet.

4.2 Fehlerschätzung ohne zeitliche Kopplung von primalem und dualem Problem

Für die Fehlerschätzung ohne vollständige Lösung des dualen Problems werden die Annahmen und Einschränkungen aus dem linearen Fall übernommen. Die Fehlerschätzung basiert wie im Linearen auf der formalen Trennung des gesamten räumlichen Diskretisierungsfehlers in einen rein räumlichen Anteil und in einen zeitlichen Anteil, welcher analog zu den linearen Problemen als Phasenfehler bezeichnet wird. Bei der Fehlerschätzung wird dann wieder nur der räumliche Anteil berücksichtigt, d.h. die aktuellen Zustandsgrößen werden akzeptiert und der Fehlerschätzer beurteilt nur die Eignung der gegebenen räumlichen Diskretisierung mit Hinblick auf die Zielgröße. Der Transport des Fehlers über die Zeit bleibt unberücksichtigt, was die sinnvolle Anwendung des Fehlerindicators auf Schwingungsprobleme beschränkt.

Nachfolgend werden nun Fehlerschätzer für die im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Volumen-Schalenelemente vorgestellt, welche auf der Glättung diskreter Größen des primalen und dualen Problems beruhen.

4.2.1 Reine Verschiebungsformulierung

Die Fehlerschätzer ohne vollständige Lösung des Rückwärtsproblems beruhen auf der Auswertung der zeitlichen Randterme zum aktuellen Zeitpunkt t_n . Ein möglicher Ausgangspunkt für die Herleitung eines Fehlerindicators für die reine Verschiebungsformulierung ist somit die folgende linearisierte Fehlerdarstellung

$$E(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h) = [\rho_0(\mathbf{e}_S, \mathbf{e}_Z) + a_T(\mathbf{u}; \mathbf{e}_S, \mathbf{e}_Z)]^{t_n}, \quad (4.1)$$

welche auf der Linearisierung des Residuums des primalen Problems mit Hilfe der Tangentenbilinearform $a_T(\mathbf{u}_h; \cdot, \cdot)$ beruht.

Der Fehler in Zielfunktionalen der Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{u}}$ lässt sich analog zum Vorgehen im linearen Fall mit Hilfe des Fehlerschätzers nach RICCIUS [98] abschätzen. Da die

Geschwindigkeiten die Zeitableitungen der Verschiebungen sind, scheint für praktische Fragestellungen die Schätzung des Fehlers in Zielfunktionalen der Verschiebungen von höherer Bedeutung. Es wird deshalb nachfolgend nur noch der Fall der Fehlerschätzung in Funktionalen der Verschiebungen betrachtet, d.h. es wird ausschließlich der Fall $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{0}$ und damit $\dot{\mathbf{e}}_Z = \mathbf{0}$ betrachtet. Die Fehlerdarstellung (4.1) reduziert sich damit auf

$$E(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h) = [a_T(\mathbf{u}; \mathbf{e}_S, \mathbf{e}_Z)]^{t_n}. \quad (4.2)$$

Der naheliegendste Ansatz zur Fehlerschätzung besteht nun darin, analog zum Vorgehen bei den linearen Problemstellungen die Fehler des primalen und des dualen Problems getrennt voneinander in einer geeigneten Norm abzuschätzen. Im vorliegenden Fall ist dies die Tangentennorm

$$\|\mathbf{v}\|_{a,T} = \sqrt{a_T(\mathbf{u}; \mathbf{v}, \mathbf{v})}. \quad (4.3)$$

Die Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung auf Gleichung (4.2) führt dann auf den Fehlerindikator

$$|E(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h)| = \|\mathbf{e}_S\|_{a,T} \cdot \|\mathbf{e}_Z\|_{a,T} \quad (4.4)$$

für den Betrag der Zielgröße. Für die Abschätzung der Fehler in der Tangentennorm müssen dann geeignete Standardfehlerschätzer verwendet werden. Die Anwendung der Fehlerschätzung mit Hilfe der Tangentennorm auf nichtlineare statische Problemstellungen findet sich z.B. in dem Beitrag von HUERTA, RODRIGUEZ-FERRAN & DIEZ [56]. Hier wird der Fehler über die Projektion des diskreten Zustandes \mathbf{u}_h auf ein feineres Referenznetz abgeschätzt.

RÜTER [102] weist jedoch im Rahmen der Fehlerschätzung für nichtlineare Berechnungen mit hyperelastischem Material darauf hin, dass nicht für alle Fälle sichergestellt werden kann, dass $a_T(\mathbf{u}; \mathbf{v}, \mathbf{v}) > 0$ ist. Dies bedeutet, dass in diesen Fällen die Größe $a_T(\mathbf{u}; \cdot, \cdot)$ eine wesentliche Anforderung an eine Norm, die positive Definitheit, nicht erfüllt. Es wird deshalb empfohlen, bei der zielorientierten Fehlerschätzung auf die Verwendung der Tangentennorm möglichst zu verzichten.

Im Rahmen dieser Arbeit wird nachfolgend ebenfalls auf die Verwendung der Tangentennorm zur Fehlerschätzung verzichtet. Der Hauptgrund hierfür ist die Tatsache, dass sich der nachfolgende Fehlerindikator wesentlich effizienter in bestehende FEM-Algorithmien einbauen lässt. Ziel ist hier die Herleitung eines Fehlerschätzers, welcher auf geglätteten Größen des primalen und dualen Problems beruht.

Hierfür sei an dieser Stelle zunächst noch einmal daran erinnert, dass bei der Herleitung der Fehlerdarstellungen in Kapitel 2 dieser Arbeit für nichtlineare Problemstellungen die Tangentenbilinearform $a_T(\mathbf{u}; \cdot, \cdot)$ als numerisch berechenbare Approximation der Sekantenform $a_S(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h; \cdot, \cdot)$ eingeführt wurde. Für die numerische Bestimmung der dualen Lösung zum Zeitpunkt t_n wird die Tangentenform auch weiterhin benötigt. Für die Fehlerschätzung mit Hilfe geglätteter Felder erscheint jedoch der Übergang zu

einer Fehlerdarstellung auf Basis der Sekantenform sinnvoller. Für die nachfolgenden Ausführungen wird deshalb zweckmäßigerweise die Fehlerdarstellung

$$E(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h) = a_S(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h; \mathbf{e}_S, \mathbf{e}_Z)|^{t_n} = [a(\mathbf{u}; \mathbf{e}_Z) - a(\mathbf{u}_h; \mathbf{e}_Z)]^{t_n} \quad (4.5)$$

verwendet. Ausführlich lautet die Fehlerdarstellung (4.5):

$$\begin{aligned} E(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h) &= \left[\int_{\tilde{\mathcal{B}}_0} \mathbf{P}(\mathbf{u}) : \text{Grad}_{\mathbf{e}_Z} dV - \int_{\tilde{\mathcal{B}}_0} \mathbf{P}(\mathbf{u}_h) : \text{Grad}_{\mathbf{e}_Z} dV \right]^{t_n} \\ &= \left[\int_{\tilde{\mathcal{B}}_0} (\mathbf{P}(\mathbf{u}) - \mathbf{P}(\mathbf{u}_h)) : (\text{Grad}_{\mathbf{z}} - \text{Grad}_{\mathbf{z}_h}) dV \right]^{t_n} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Da in FEM-Programmen in der Regel der 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor verwendet wird, wird Gleichung (4.6) noch weiter umgeformt zu:

$$\begin{aligned} E(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h) &\approx \left[\int_{\tilde{\mathcal{B}}_0} (\mathbf{S}(\mathbf{u}) - \mathbf{S}(\mathbf{u}_h)) : (\mathbf{F}^T(\mathbf{u}) \cdot \text{Grad}_{\mathbf{z}} - \mathbf{F}^T(\mathbf{u}_h) \cdot \text{Grad}_{\mathbf{z}_h}) dV \right]^{t_n} \\ &= \left[\int_{\tilde{\mathcal{B}}_0} (\mathbf{S}(\mathbf{u}) - \mathbf{S}(\mathbf{u}_h)) : (\delta \mathbf{E}(\mathbf{z}) - \delta \mathbf{E}(\mathbf{z}_h)) dV \right]^{t_n} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Für die Fehlerschätzung werden nun die exakten Spannungen $\mathbf{S}(\mathbf{u})$ und die exakten Variationen $\delta \mathbf{E}(\mathbf{z})$ des Verzerrungstensors durch aus den diskreten Verläufen gewonnene geglättete Größen ersetzt. Es ergibt sich damit der folgende Fehlerindikator:

$$E(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h) \approx \left[\int_{\tilde{\mathcal{B}}_0} (\mathbf{S}^*(\mathbf{u}_h) - \mathbf{S}(\mathbf{u}_h)) : (\delta \mathbf{E}^*(\mathbf{z}_h) - \delta \mathbf{E}(\mathbf{z}_h)) dV \right]^{t_n} \quad (4.8)$$

Die geglätteten Größen \mathbf{S}^* und $\delta \mathbf{E}^*$ werden analog zum linearen Fehlerschätzer mit Hilfe des *Superconvergent-Patch-Recovery*-Konzeptes nach ZIENKIEWICZ & ZHU [123, 124] bestimmt.

Für die hier verwendeten Elemente mit angenommenen Verzerrungen werden die Spannungen und Dehnungen unter Berücksichtigung der ANS-Modifikation berechnet. Gleichung (4.8) wird somit auch dann verwendet, wenn das Element ANS6z auf Basis des kondensierten Stoffgesetzes gemäß Abschnitt 1.3.2 eingesetzt wird.

Es sei darauf hingewiesen, dass das hier beschriebene Vorgehen streng genommen inkonsistent ist, da für die Fehlerschätzung eine Fehlerdarstellung auf Basis der Sekantenform verwendet wird, wohingegen die duale Lösung mit Hilfe der Tangentenform

bestimmt wird. Wie bereits im 2. Kapitel dieser Arbeit erwähnt wurde, unterscheiden sich die Tangentenbilinearform und die Sekantenform für ausreichend kleine Diskretisierungsfehler nur unwesentlich, weshalb diese Ungenauigkeit vernachlässigt werden kann.

4.2.2 7-Parameter-Schalenformulierung

Für die 7-Parameter-Schalenformulierung mit erweiterten Verzerrungen soll nachfolgend der zu (4.8) analoge Fehlerindikator angegeben werden. Ausgangspunkt der Betrachtungen ist die zu (4.5) äquivalente Sekantendarstellung des Fehlers für die 7-Parameter-Schalenformulierung. Diese lautet

$$E(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h) = [a_S(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h; \mathbf{e}_S, \mathbf{e}_Z) + b_S(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h; \mathbf{e}_Z, e_\beta) + b_S(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h; \mathbf{e}_S, e_{\beta,Z}) + c(e_\beta, e_{\beta,Z})]^{t_n}, \quad (4.9)$$

bzw. in einer ausführlicheren Darstellung:

$$E(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h) = \left[\int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{S}(\mathbf{u}, \beta) : \delta \mathbf{E}(\mathbf{e}_Z) dV - \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{S}(\mathbf{u}_h, \beta_h) : \delta \mathbf{E}(\mathbf{e}_Z) dV + \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{S}(\mathbf{u}) : \tilde{\mathbf{E}}(e_{\beta,Z}) dV - \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{S}(\mathbf{u}_h) : \tilde{\mathbf{E}}(e_{\beta,Z}) dV + \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{S}(\beta) : \tilde{\mathbf{E}}(e_{\beta,Z}) dV - \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{S}(\beta_h) : \tilde{\mathbf{E}}(e_{\beta,Z}) dV \right]^{t_n} \quad (4.10)$$

Unter Verwendung der erweiterten Variation der Verzerrungen

$$\delta \mathbf{E}(\mathbf{z}, \beta_Z) = \delta \mathbf{E}(\mathbf{z}) + \tilde{\mathbf{E}}(\beta_Z) \quad (4.11)$$

lässt sich Gleichung (4.10) vereinfacht darstellen als:

$$E(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h) \approx \left[\int_{\mathcal{B}_0} (\mathbf{S}(\mathbf{u}, \beta) - \mathbf{S}(\mathbf{u}_h, \beta_h)) : (\delta \mathbf{E}(\mathbf{z}, \beta_Z) - \delta \mathbf{E}(\mathbf{z}_h, \beta_{Z,h})) dV \right]^{t_n} \quad (4.12)$$

Zur Fehlerschätzung werden nun auch hier die exakten Größen durch die entsprechenden geglätteten Verläufe ersetzt. Der zu (4.8) äquivalente Fehlerindikator für die 7-Parameter-Formulierung lautet damit schließlich:

$$E(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h) \approx \left[\int_{\mathcal{B}_0} (\mathbf{S}^*(\mathbf{u}_h, \beta_h) - \mathbf{S}(\mathbf{u}_h, \beta_h)) : (\delta \mathbf{E}^*(\mathbf{z}_h, \beta_{Z,h}) - \delta \mathbf{E}(\mathbf{z}_h, \beta_{Z,h})) dV \right]^{t_n} \quad (4.13)$$

Analog zum Zienkiewicz-Zhu-Fehlerschätzer zur Schätzung der Energienorm in linearen Fall, werden also hier die Spannungen und die linearisierten Verzerrungen unter Berücksichtigung der Verzerrungserweiterungen bestimmt.

4.2.3 Zum numerischen Aufwand für die Fehlerschätzung

Die praktische Anwendung eines Fehlerschätzers mit vollständiger Lösung des dualen Rückwärtsproblems scheitert hauptsächlich am ungerechtfertigt hohen numerischen Aufwand für die Fehlerschätzung. Die vorgeschlagenen Fehlerschätzer stellen diesbezüglich eine erhebliche Reduktion des Aufwands dar, welche die Anwendung der Fehlerschätzung für praktische Aufgabenstellungen erst ermöglicht.

Die Schätzung des Fehlers in einem ausiterierten Zustand \mathbf{u}_h mit den Fehlerindikatoren (4.8) und (4.13) besteht im Wesentlichen aus den folgenden Schritten:

1. Bestimmung der tangentiellen Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_T = \left. \frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_h}$.
2. Berechnung des diskreten dualen Problems $\mathbf{K}_T \cdot \mathbf{d}_z = \mathbf{F}_z$ mit der Belastung \mathbf{F}_z gemäß Tabelle 2.2.
3. Glättung der 2. Piola-Kirchhoff-Spannungen des primalen Problem mit Hilfe des *Superconvergent-Patch-Recovery*-Konzepts.
4. Glättung der Variation $\delta \mathbf{E}(\mathbf{z}_h) = \mathbf{F}^T(\mathbf{u}_h) \cdot \text{Grad} \mathbf{z}_h$ der Verzerrungen mit Hilfe des *Superconvergent-Patch-Recovery*-Konzepts.
5. Elementweise Auswertung des Fehlerindikators (4.8) bzw. (4.13).

Der Aufwand für die numerische Bestimmung des dualen Problems entspricht damit dem Aufwand für einen zusätzlichen Iterationsschritt innerhalb der Newton-Iteration. Der gesamte Aufwand für die Fehlerschätzung im geometrisch nichtlinearen Fall fällt damit gegenüber dem Aufwand für die iterative Lösung des Problems mit Hilfe des Newmarkverfahrens verhältnismäßig wenig ins Gewicht.

4.3 Netzadaption

Die hier vorgestellten Fehlerindikatoren (4.8) und (4.13) sind geeignete Grundlagen für die adaptive Anpassung der räumlichen Diskretisierung. Die Adaptionstrategie mit Datentransfer gemäß Bild 3.18 und die Adaptionstrategie ohne Datentransfer gemäß Bild 3.19, welche bereits für die linearen Problemstellungen Anwendung fanden, lassen sich direkt auf den nichtlinearen Fall übertragen. Es erfolgt wiederum eine Beschränkung auf die Netzverfeinerung.

Auch der für die erste Adaptionstrategie benötigte Algorithmus zum Transfer der Zustandsgrößen nach RADOVITZKY & ORTIZ [92] auf das adaptierte Netz kann im

Wesentlichen von den linearen Problemstellungen übernommen werden. Bei Verletzung des Fehlerkriteriums zum Zeitpunkt t_n erfolgt eine geometrischen Interpolation der Verschiebungen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen zum Zeitpunkt $t_{n-1} = t_n - \Delta t_n$ auf dem neuen Netz. Für die 7-Parameter-Formulierung der Volumenschale ergibt sich zusätzlich die Notwendigkeit, die zu diesem interpolierten Verschiebungszustand gehörenden erweiterten Verzerrungen als innere Geschichtsvariablen auf dem neuen Netz zu bestimmen.

Die Bedingung zur Bestimmung der erweiterten Verzerrungen für einen gegebenen Verschiebungsverlauf ergibt sich aus der 2. Zeile von Gleichung (1.91):

$$\int_{\tilde{\mathcal{B}}_0} \mathbf{E}(\mathbf{u}_h) : \mathbb{C} : \tilde{\mathbf{E}}(\gamma_h) dV + \int_{\tilde{\mathcal{B}}_0} \tilde{\mathbf{E}}(\beta_h) : \mathbb{C} : \tilde{\mathbf{E}}(\gamma_h) dV = 0 \quad \forall \gamma_h \in \Gamma^h \quad (4.14)$$

Man erkennt sofort, dass die Bedingung (4.14) linear in den erweiterten Verzerrungen $\tilde{\mathbf{E}}(\beta_h)$ ist. Hieraus folgt, dass für jeden gegebenen Verschiebungszustand mit Hilfe von Gleichung (4.14) die erweiterten Verzerrungen direkt, d.h. ohne Iteration direkt bestimmt werden können. Der gesamte Transferalgorithmus für die erweiterten Verzerrungen besteht damit aus den folgenden Schritten:

- Geometrische Interpolation der Verschiebungen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen zu Beginn des Zeitschrittes ($t = t_{n-1}$) auf dem neuen Netz.
- Berechnung der zugehörigen erweiterten Verzerrungen mit Hilfe der Beziehung (4.14).
- Iterative Berechnung des Zustandes zum Zeitpunkt t_n mit Hilfe des Newmark-Algorithmus.

Zum Ende des Zeitschrittes liegt damit ein zulässiger Zustand auf dem neuen Netz vor. Die Interpolation der Verschiebungsgrößen des alten Netzes auf dem neuen Netz zu Beginn des Zeitschrittes führt in der Regel dazu, dass in diesem Fall für die Berechnung des Zustandes zum Ende des Zeitschrittes erheblich mehr Iterationsschritte notwendig sind als in den anderen Zeitschritten. Darüber hinaus gilt auch hier wie im linearen Fall, dass der durch den Transfer in die Lösung eingebrachte Fehler, hier insbesondere der Fehler in lokalen Größen, bisher nicht zuverlässig abgeschätzt und minimiert werden kann. Der Einfluss des Datentransfers auf die Lösung zeigt sich auch in dem nachfolgenden numerischen Beispiel.

4.4 Numerisches Beispiel

Die Netzadaptionsstrategien werden nun anhand der in Bild 4.1 dargestellten T-förmigen Kragplatte untersucht. Die T-förmige Platte kann als einfachstes Beispiel einer aufgelösten Struktur angesehen werden, bei der große Teile des Gebietes bei der Betrachtung von lokalen Größen eine sehr untergeordnete Rolle spielen. Gerade bei solchen Strukturen soll ein ortsadaptives Verfahren zu sehr effizienten räumlichen Diskretisierungen führen.

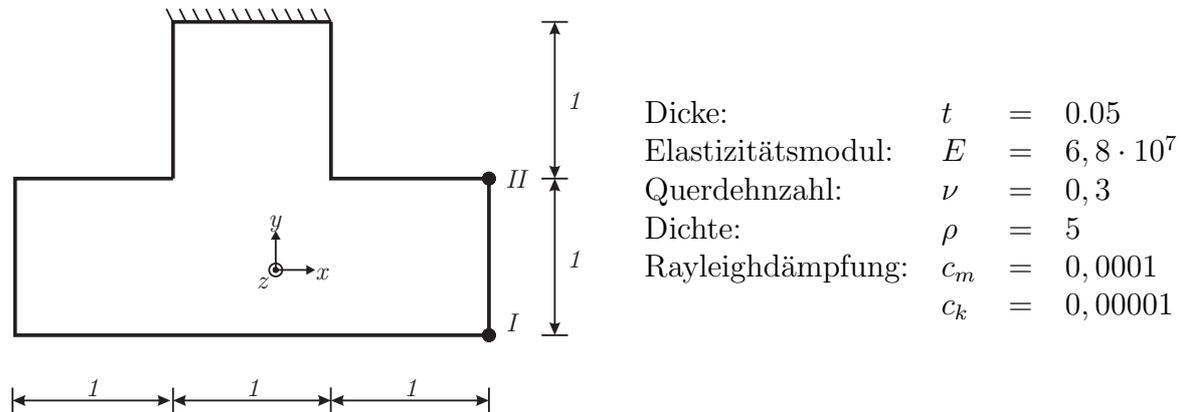


Bild 4.1: Beispiel T-Platte: Geometrie und Materialparameter

Die Platte wird durch zwei Einzellasten $F_{I,z}$ und $F_{II,z}$ in z -Richtung in den Punkten I und II belastet. Der zeitliche Verlauf der Kräfte ist

$$F_{I,z}(t) = F_{II,z}(t) = -40 \cdot \sin(12\pi t).$$

Die Zeitintegration erfolgt mit dem Newmarkverfahren mit $\gamma = 2\beta = 0,5$ und einer konstanten Zeitschrittweite von $\Delta t = 0,0025$. Der gesamte Berechnungszeitraum beträgt $T = 0,5$.

Die räumliche Diskretisierung erfolgt mit dem Volumen-Schalenelement *ANS3DEAS* auf Grundlage der 7-Parameter-Formulierung. Als Ausgangsdiskretisierung für beide Adaptionsstrategien wird ein sehr grobes Netz mit 64 Elementen und $n_{eq,0} = 480$ Freiheitsgraden verwendet. Die Referenzlösung wird auf einem uniform feinen Netz mit 16384 Elementen und $n_{eq,ref} = 99840$ Freiheitsgraden ermittelt. Die Ergebnisse der ortsadaptiven Verfahren werden mit der Lösung auf einem uniformen Netz mit 4096 Elementen und $n_{eq,uni} = 25344$ Freiheitsgraden verglichen.

Zielgröße ist die vertikale Verschiebung des Punktes I . Bild 4.2 zeigt den Verlauf der Zielgröße für das Referenznetz. Als oberster Grenzwert für den Betrag des Fehlers in der Zielgröße wird für beide adaptiven Verfahren $\varepsilon_o = 1,2 \cdot 10^{-3}$ vorgegeben. Zur Beurteilung der Ergebnisse werden wiederum die Lösungen in den lokalen Minima bzw. Maxima in den in Bild 4.2 gekennzeichneten Zeitpunkten A–E verglichen.

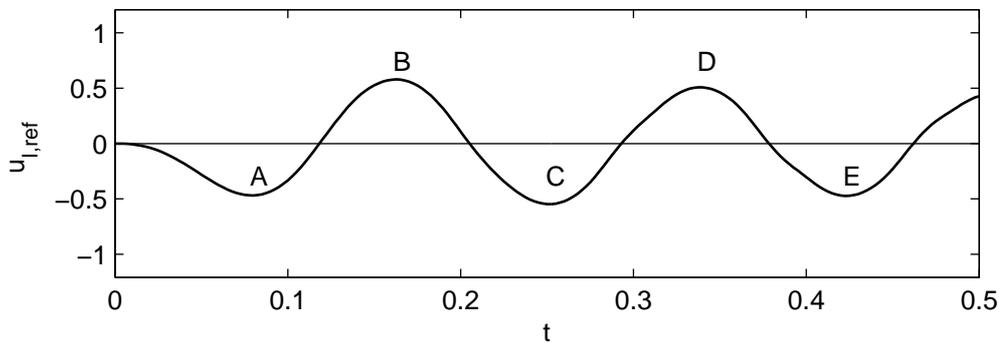


Bild 4.2: Beispiel T-Platte: Verlauf der Referenzlösung der vertikalen Verschiebung des Punktes I

Strategie 1 - Adaption mit Datentransfer

Zunächst erfolgt die Netzadaption mit der Adaptionstrategie 1 nach Bild 3.18. Bild 4.3 zeigt die Entwicklung der Anzahl der Freiheitsgrade über die Berechnungszeit. Man erkennt, dass die Netzanpassungen in Folge des relativ groben Startnetzes verhältnismäßig dicht aufeinanderfolgend zu Beginn der Berechnung erfolgen.

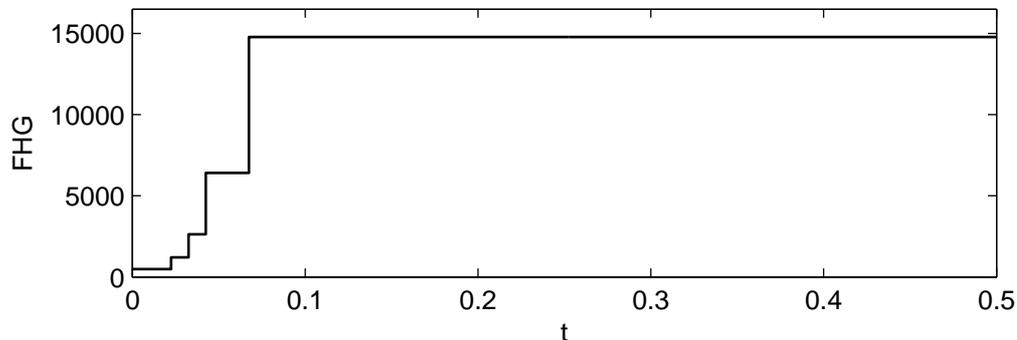


Bild 4.3: Beispiel T-Platte: Anzahl der Gleichungen über die Zeit bei Adaption des Netzes mit Strategie 1 – mit Datentransfer

Die aus der Netzadaption resultierende Netzsequenz ist in Bild 4.4 dargestellt. Die Verfeinerung des Netzes konzentriert sich erwartungsgemäß auf die einspringenden Ecken und die Umgebung des Punktes I .

Tabelle 4.1 zeigt den Vergleich der Lösungen des adaptiven Algorithmus mit der Lösung auf dem uniformen Vergleichsnetz mit 25344 Freiheitsgraden. Das adaptive Verfahren liefert bis auf den Zeitpunkt A deutlich bessere Ergebnisse als das uniforme Netz. Des Weiteren liegen die Fehler zu den Zeitpunkten B–E unterhalb der im Verfahren vorgegebenen Toleranz von $\varepsilon_o = 1,2 \cdot 10^{-3}$. Nur zum Zeitpunkt A wird die vorgegebene Toleranz wesentlich überschritten und die adaptive Lösung ist schlechter als die Lösung auf dem uniformen Netz.

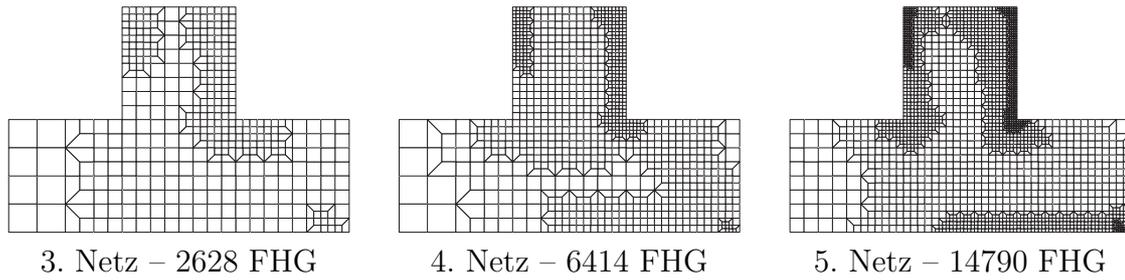


Bild 4.4: Beispiel T-Platte: Netzsequenz bei Netzadaption mit Strategie 1 – Netzadaption mit Datentransfer

	$u_{I,ref}$	unif. Netz – 25344 FHG		adapt. Netz – 14790 FHG	
		$ e_I $	e_{rel}	$ e_I $	e_{rel}
<i>A</i>	−0,46904	$1,33 \cdot 10^{-3}$	0,28%	$3,53 \cdot 10^{-3}$	0,75%
<i>B</i>	0,57933	$1,63 \cdot 10^{-3}$	0,28%	$0,26 \cdot 10^{-3}$	0,05%
<i>C</i>	−0,54742	$2,16 \cdot 10^{-3}$	0,39%	$0,56 \cdot 10^{-3}$	0,10%
<i>D</i>	0,50731	$2,32 \cdot 10^{-3}$	0,46%	$0,28 \cdot 10^{-3}$	0,06%
<i>E</i>	−0,47319	$2,26 \cdot 10^{-3}$	0,48%	$0,74 \cdot 10^{-3}$	0,16%

Tabelle 4.1: Beispiel T-Platte: Vergleich des Fehlers in den Verschiebungen des Punktes *I* für ein uniformes Netz mit den Fehlern bei der Netzadaption mit Datentransfer

Die verhältnismäßig schlechte Lösung zum Zeitpunkt *A* ist auf die Übertragungsfehler beim Datentransfer zwischen den Netzen zu Beginn der Berechnung zurückzuführen. Um dies zu belegen, wird die gesamte Berechnung mit dem letzten Netz des ortsadaptiven Verfahrens (Netz 5 in Bild 4.4) wiederholt. Die Ergebnisse dieser Berechnung sind in Tabelle 4.2 angegeben. Die hiermit erzielten Genauigkeiten in der Zielgröße liegen über den gesamten Berechnungszeitraum weit über denen des verhältnismäßig feinen uniformen Netzes.

	$u_{I,ref}$	unif. Netz – 25344 FHG		adapt. Netz – 14790 FHG	
		$ e_I $	e_{rel}	$ e_I $	e_{rel}
<i>A</i>	−0,46904	$1,33 \cdot 10^{-3}$	0,28%	$0,28 \cdot 10^{-3}$	0,06%
<i>B</i>	0,57933	$1,63 \cdot 10^{-3}$	0,28%	$0,44 \cdot 10^{-3}$	0,08%
<i>C</i>	−0,54742	$2,16 \cdot 10^{-3}$	0,39%	$0,46 \cdot 10^{-3}$	0,08%
<i>D</i>	0,50731	$2,32 \cdot 10^{-3}$	0,46%	$0,28 \cdot 10^{-3}$	0,06%
<i>E</i>	−0,47319	$2,26 \cdot 10^{-3}$	0,48%	$0,48 \cdot 10^{-3}$	0,10%

Tabelle 4.2: Beispiel T-Platte: Vergleich des Fehlers in den Verschiebungen des Punktes *I* für ein uniformes Netz mit den Fehlern bei Verwendung des letzten Netzes der Netzadaption für die gesamte Berechnung (Netz 5 – Bild 4.4)

Die Tatsache, dass die Adaptionsstrategie mit Datentransfer für die späteren Zeitpunkte *B*–*E* bessere Ergebnisse liefert als das uniforme Netz, obwohl der Fehler in der Zielgröße zum früheren Zeitpunkt *A* schon viel größer ist, lässt sich damit er-

klären, dass die Fehler in der Datenübertragung, wie auch von HAN [42, 43] angegeben, hauptsächlich lokale Fehler und damit eher höherfrequente Größen sind. Diese höherfrequenten Größen werden auch bei der hier gewählten verhältnismäßig schwachen Dämpfung relativ schnell aus der Lösung herausgedämpft. Entsprechend pflanzt sich der Datentransferfehler nur über einen kurzen Zeitraum fort.

Strategie 2 - Adaption ohne Datentransfer

Nun erfolgt die Anwendung der zweiten Adaptionsstrategie nach Bild 3.19 auf das Problem der T-förmigen Platte. Für die hier vorgegebene Fehlertoleranz und das verwendete Startnetz endet das Verfahren nach 5 vollständigen Berechnungsläufen mit einem Raumnetz mit 2436 Elementen und 15366 Freiheitsgraden, siehe Bild 4.5. Nebenbei sei bemerkt, dass sich auch der Aufwand für das adaptive Verfahren massiv reduzieren lässt, wenn ein feineres Startnetz verwendet wird.

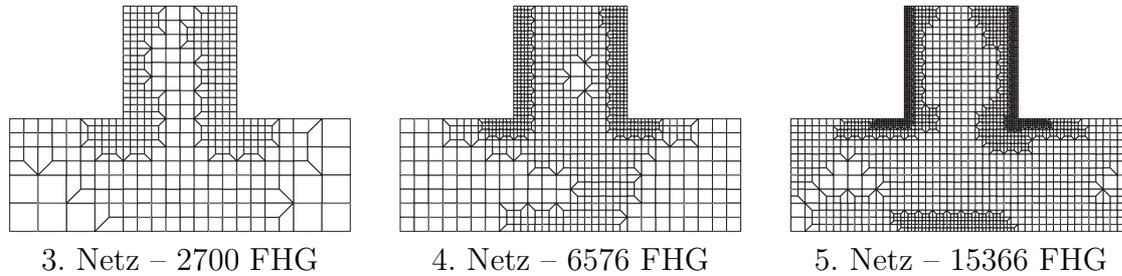


Bild 4.5: Beispiel T-Platte: Netzsequenz bei Netzadaption mit Strategie 2 – Netzadaption ohne Datentransfer

Im Gegensatz zur Strategie 1 erfolgt nun eine verhältnismäßig starke Verfeinerung auch im unbelasteten 'Arm' der T-Platte. Ganz allgemein lässt sich feststellen, dass die zweite Strategie zu einer eher gleichmäßigen Verfeinerung des Netzes führt. Dies lässt sich darauf zurückführen, dass die Adaptionsstrategie ohne Datentransfer sämtliche Zustände im Verlauf der Berechnung berücksichtigt, wohingegen die Adaption der Netze nach Strategie 1 ausschließlich die Zustände berücksichtigt, in denen der geschätzte Fehler in der Zielgröße tatsächlich die Fehlergrenze überschritten hat.

	$u_{I,ref}$	unif. Netz – 25344 FHG		adapt. Netz – 15366 FHG	
		$ e_I $	e_{rel}	$ e_I $	e_{rel}
A	-0,46904	$1,33 \cdot 10^{-3}$	0,28%	$0,8 \cdot 10^{-3}$	0,17%
B	0,57933	$1,63 \cdot 10^{-3}$	0,28%	$0,76 \cdot 10^{-3}$	0,13%
C	-0,54742	$2,16 \cdot 10^{-3}$	0,39%	$0,86 \cdot 10^{-3}$	0,16%
D	0,50731	$2,32 \cdot 10^{-3}$	0,46%	$0,84 \cdot 10^{-3}$	0,17%
E	-0,47319	$2,26 \cdot 10^{-3}$	0,48%	$0,76 \cdot 10^{-3}$	0,16%

Tabelle 4.3: Beispiel T-Platte: Vergleich des Fehlers in den Verschiebungen des Punktes I für ein uniformes Netz mit den Fehlern bei der Netzadaption ohne Datentransfer

Tabelle 4.3 zeigt wiederum die Gegenüberstellung der Fehler für das uniforme Netz mit 25344 Freiheitsgraden und das letzte adaptierte Netz aus Bild 4.5 mit 15366 Freiheitsgraden. Die Lösung in der Zielgröße auf dem adaptierten Netz ist wiederum wesentlich genauer als die Lösung auf dem uniformen Netz. Die Netzadaption führt folglich zu einer erheblichen Verbesserung der Lösung in der Zielgröße bei gleichzeitiger Verringerung der Freiheitsgrade gegenüber dem uniformen Netz. Allerdings sind die Fehler etwas größer als bei der Strategie 1 mit Datentransfer.

Zusammenfassung und Bewertung des Beispiels

Die Ergebnisse des Beispiels zeigen, dass die hier verwendeten Fehlerschätzer und die darauf beruhenden Netzadaptionsstrategien geeignet sind, den Fehler in einer Zielgröße im Vergleich zu einer uniformen Diskretisierung wesentlich zu reduzieren. Die mit Hilfe der Netzadaption gewonnenen räumlichen Diskretisierungen stellen mit Hinblick auf die Genauigkeit und die Anzahl der Freiheitsgrade wesentlich effizientere Diskretisierungen als die uniformen Netze dar. Beide Adaptionstrategien sind geeignet, den Fehler auf ein zuvor festgelegtes Maß zu beschränken.

Ein grundlegendes Problem der Netzadaption mit Datentransfer ist der durch den Datentransfer in die Lösung eingebrachte Fehler. Es hat sich gezeigt, dass dieser Fehler wesentlichen Einfluss auf die lokale Zielgröße haben kann. Dies kann dazu führen, dass der Fehler nach der Netzadaption und dem Transfer größer ist als vor der Netzadaption. Werden im Algorithmus nun mehrfache Netzverfeinerungen in einem Zeitschritt zugelassen, kann dies zum Versagen des Verfahrens führen.

Für schwach gedämpfte Probleme zeigt sich aber auch, dass der durch den Datentransfer verursachte Fehler in der lokalen Größe nur über einen beschränkten Zeitraum transportiert wird.

Aufgrund des Verzichts auf den Datentransfer ist die Strategie 2 wesentlich robuster als die Strategie 1 mit Datentransfer. Sie führt jedoch auch zu einem erheblich höheren numerischen Aufwand, da zur endgültigen Lösung des Problems mit der entsprechenden Fehlerbegrenzung mehrere Berechnungsläufe notwendig sind.

Kapitel 5

Schätzung des Zeitintegrationsfehlers für lineare Probleme

Im vorliegenden Kapitel wird die Schätzung des Zeitintegrationsfehlers für lineare Probleme behandelt. Aufgrund der Äquivalenz des Newmarkverfahrens mit den Newmarkparametern $\gamma = 2\beta = 0,5$ mit einem kontinuierlichen Galerkinverfahren können für die Schätzung des Fehlers die gleichen Methoden verwendet werden, die bereits für die Schätzung des räumlichen Diskretisierungsfehlers Anwendung fanden. Im Wesentlichen sind dies die Darstellung des Zeitintegrationsfehlers mit Hilfe der Dual-Weighted-Residual-Methode und die anschließende numerische Auswertung dieser Fehleridentität.

5.1 Definitionen

Nachfolgend soll ausschließlich der Zeitintegrationsfehler betrachtet werden. Hierfür werden zunächst die üblichen Definitionen des zeitlich lokalen und zeitlich globalen Fehlers eingeführt, wie sie sich u.a. in den Arbeiten von MAUTE [70] und NEUMANN [73] und den Beiträgen von ROMERO & LACOMA [101, 100] wiederfinden.

Ausgangspunkt der Betrachtungen ist die lineare semidiskrete Bewegungsgleichung

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{d}(t) = \mathbf{F}(t) \quad 0 \leq t \leq T. \quad (5.1)$$

Der *globale Zeitintegrationsfehler* zum Zeitpunkt $t = t_n$ ergibt sich aus der Differenz der exakten Lösung von Gl. (5.1) $\mathbf{d}(t_n)$ und der mit Hilfe des Zeitintegrationsverfahrens ermittelten Lösung \mathbf{d}_n^k :

$$\mathbf{e}_t(t = t_n) = \mathbf{d}(t_n) - \mathbf{d}_n^k \quad (5.2)$$

Der globale Fehler misst den gesamten akkumulierten zeitlichen Fehler des bisherigen Berechnungszeitraums $[0, t_n]$.

Der *lokale Zeitintegrationsfehler* hingegen stellt ein Maß für den Fehler im aktuellen Zeitschritt dar. Er resultiert aus der numerischen Einschrittlösung $t_{n-1} \rightarrow t_n$ unter der Annahme, dass die numerische Lösung zum Zeitpunkt t_{n-1} mit der exakten Lösung übereinstimmt:

$$\mathbf{d}(t = t_{n-1}) \equiv \mathbf{d}_{n-1}^k$$

Dieser Wert $\mathbf{d}(t = t_{n-1})$ wird nun als Anfangsbedingung gewählt, um die Referenzlösung $\bar{\mathbf{d}}(t_n)$ am Ende des Zeitschrittes zu bestimmen. Die Definition des lokalen Integrationsfehlers im Zeitschritt ist dann:

$$\mathbf{e}_i^l(t = t_n) = \bar{\mathbf{d}}(t_n) - \mathbf{d}_n^k \tag{5.3}$$

5.2 A-priori Fehlerabschätzungen

Nachfolgend wird kurz der Zusammenhang zwischen dem lokalen und dem globalen Zeitintegrationsfehler dargestellt. Die Bezeichnungen entsprechen dabei im Wesentlichen denen in ROMERO ET AL. [101, 100]. Für die Herleitungen bietet sich die Darstellung der Bewegungsgleichung (5.1) als System von Differentialgleichungen erster Ordnung an. Hierfür werden zunächst die Vektoren

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{d}(t) \\ \dot{\mathbf{d}}(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{Y}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{d}(0) \\ \dot{\mathbf{d}}(0) \end{bmatrix} \quad \mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}(t) \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

und die Matrix

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D} \end{bmatrix} \tag{5.5}$$

eingeführt. Hiermit lässt sich die Bewegungsgleichung (5.1) in die Darstellung

$$\dot{\mathbf{Y}}(t) = \mathbf{B}\mathbf{Y}(t) + \mathbf{g}(t) \quad \text{mit } \mathbf{Y}(0) = \mathbf{Y}_0 \tag{5.6}$$

überführen, für die sich eine geschlossene Form der Lösung angeben lässt, siehe [100]:

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{H}(t)\mathbf{Y}_0 + \mathbf{h}(0, t), \tag{5.7}$$

mit

$$\mathbf{H}(t) = e^{\mathbf{B}t} \tag{5.8}$$

und

$$\mathbf{h}(\zeta, t) = \int_{\zeta}^t \mathbf{H}(t - \tau)\mathbf{g}(\tau)d\tau. \tag{5.9}$$

Als nächstes wird der globale Zeitintegrationsfehler für den Zustandsvektor definiert:

$$\bar{\mathbf{e}}_t(t_n) = \mathbf{Y}(t_n) - \mathbf{Y}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{d}(t_n) - \mathbf{d}_n \\ \dot{\mathbf{d}}(t_n) - \dot{\mathbf{d}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_t \\ \dot{\mathbf{e}}_t \end{bmatrix}. \quad (5.10)$$

Zur Bestimmung des entsprechenden lokalen Zeitintegrationsfehlers im Intervall wird das folgende lokale Anfangswertproblem im aktuellen Zeitschritt betrachtet:

$$\dot{\bar{\mathbf{Y}}}(t) = \mathbf{B}\bar{\mathbf{Y}}(t) + \mathbf{g}(t) \quad t \in [t_n, t_{n+1}] \quad \text{mit} \quad \bar{\mathbf{Y}}(t_n) = \mathbf{Y}_n \quad (5.11)$$

Auch für dieses Problem lässt sich wiederum die geschlossene Form der Lösung angeben:

$$\bar{\mathbf{Y}}(t_{n+1}) = \mathbf{H}(\Delta t)\mathbf{Y}_n + \mathbf{h}(t_n, t_{n+1}) \quad \text{mit} \quad \Delta t = t_{n+1} - t_n \quad (5.12)$$

Für den lokalen Zeitintegrationsfehler gilt dann:

$$\bar{\mathbf{e}}_t^l(t_{n+1}) = \bar{\mathbf{Y}}(t_{n+1}) - \mathbf{Y}_{n+1} = \mathbf{H}(\Delta t)\mathbf{Y}_n + \mathbf{h}(t_n, t_{n+1}) - \mathbf{Y}_{n+1} \quad (5.13)$$

Nun lässt sich der Zusammenhang zwischen den lokalen Zeitintegrationsfehlern und dem globalen Zeitintegrationsfehler unter der Annahme einer konstanten Zeitschrittweite Δt angeben:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{e}}_t(t_{n+1}) &= \mathbf{Y}((n+1)\Delta t) - \mathbf{Y}_{n+1} & (5.14) \\ &= \mathbf{H}(\Delta t)\mathbf{Y}(n\Delta t) + \mathbf{h}(t_n, t_{n+1}) - \mathbf{Y}_{n+1} \\ &= \mathbf{H}(\Delta t)(\mathbf{Y}_n + \bar{\mathbf{e}}_t(t_n)) + \mathbf{h}(t_n, t_{n+1}) - \mathbf{Y}_{n+1} \\ &= \mathbf{H}(\Delta t)\bar{\mathbf{e}}_t(t_n) + \underbrace{\mathbf{H}(\Delta t)\mathbf{Y}_n + \mathbf{h}(t_n, t_{n+1}) - \mathbf{Y}_{n+1}}_{\bar{\mathbf{e}}_t^l(t_{n+1})} \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} [\mathbf{H}(\Delta t)]^{n+1-i} \bar{\mathbf{e}}_t^l(t_i) \end{aligned}$$

Für die Gesamtenergienorm des globalen Fehlers

$$\|\bar{\mathbf{e}}_t(t_n)\|_E = (\mathbf{e}_t \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{e}_t + \dot{\mathbf{e}}_t \cdot \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{e}}_t)^{\frac{1}{2}} \quad (5.15)$$

lässt sich hieraus die folgende Abschätzung gewinnen:

$$\|\bar{\mathbf{e}}_t(t_n)\|_E \leq \sum_{i=1}^n \|\bar{\mathbf{e}}_t^l(t_i)\|_E. \quad (5.16)$$

Aufgrund dieses Zusammenhanges können verschiedene Fehlerschätzer für den globalen Zeitintegrationsfehler entwickelt werden, welche auf der Summation geeigneter lokaler Fehlerschätzer beruhen. Die lokale Fehlerschätzung basiert dabei in der Regel auf höherordrigen Finite-Differenzen-Ansätzen. Ein Nachteil der Abschätzung (5.16) ist, dass die Abschätzung durch die Summation der Normen der lokalen Fehler insbesondere für Langzeitsimulationen sehr unscharf wird. Gleichung (5.16) beinhaltet darüber

hinaus die Annahme, dass der Zeitintegrationsfehler immer weiter ansteigt. Dabei wird nicht berücksichtigt, dass der exakte Zeitintegrationsfehler auch wieder kleiner werden kann. Des Weiteren berücksichtigt die Abschätzung (5.16) nicht den beschränkten zeitlichen Transport des lokalen Fehlers als Folge der Dämpfung.

Eine alternative Abschätzung zu (5.16) geben ZIENKIEWICZ & XIE [121] an. Dort wird der globale Fehler in den Verschiebungen durch den aktuellen lokalen Fehler multipliziert mit der Anzahl der Zeitschritte abgeschätzt:

$$\mathbf{e}_t(t_n) \approx n\mathbf{e}_t^l(t_n) \tag{5.17}$$

RICCIUS [98] leitet hieraus für eine konstante Zeitschrittweite Δt einen mittleren lokalen Fehler $\mathbf{e}_t^l(t_n) = \Delta t/t_n \mathbf{e}_t(t_n)$ ab, mit dem sich zeigen lässt, dass die lokale Konvergenzordnung des Zeitintegrationsverfahrens um eine Ordnung höher ist, als die globale Konvergenzordnung. Dieser Verlust einer Ordnung beim Übergang vom lokalen zum globalen Fehler findet sich auch in den Abschätzungen von ESTEP in [34] und [33] wieder. Der Vorteil dieser Abschätzung ist aber, dass der geschätzte Zeitintegrationsfehler hier nicht unbeschränkt anwächst. Als Nachteil verbleibt jedoch, dass als Folge der Annahme eines mittleren Zeitintegrationsfehlers in allen Zeitintervallen auch hier der tatsächliche Transport des Fehlers nicht berücksichtigt wird.

Ein alternatives Vorgehen zur Schätzung des globalen Zeitintegrationsfehlers, welches den vollständigen Transport des Fehlers über die Zeit berücksichtigt stellt die bereits für den räumlichen Diskretisierungsfehler verwendete *Dual-Weighted-Residual*-Methode dar. Diese setzt voraus, dass es sich bei dem verwendeten Zeitintegrationsverfahren um eine Galerkin-Formulierung in der Zeit handelt.

5.3 Darstellung des Zeitintegrationsfehlers mit der DWR-Methode

Nachfolgend wird ein Fehlerschätzer für kontinuierliche Galerkinverfahren in der Zeit mit Hilfe des *Dual-Weighted-Residual*-Konzeptes dargestellt. Mit dem vorgestellten Ansatz lässt sich sowohl der zeitlich lokale als auch der zeitlich globale Zeitintegrationsfehler schätzen. Aufgrund der bereits erläuterten Äquivalenz zwischen einem kontinuierlichen Petrov–Galerkin–Verfahren und dem Newmarkverfahren mit der speziellen Parameterwahl $2\beta = \gamma = 0.5$ ergibt sich mit den nachfolgenden Betrachtungen auch ein Fehlerschätzer für das Standard-Newmarkverfahren. Die Fehlerschätzung basiert auf der Betrachtung der zur Differentialgleichung des Fehlers adjungierten Differentialgleichung. Dieser Ansatz wurde unter anderem bereits in den Beiträgen von NEUMANN ET AL. [73, 105] verfolgt. Die hier angestellten Betrachtungen stellen im Wesentlichen eine Erweiterung der Arbeit von NEUMANN, mit Hinblick auf die Anwendung der Fehlerschätzung auf größere FEM-Modelle dar.

Das Vorgehen bei der Herleitung der Fehleridentität für den Zeitintegrationsfehler entspricht im Wesentlichen dem Vorgehen bei der Behandlung des räumlichen Diskretisie-

rungsfehlers. Zunächst wird wiederum die schwache Formulierung der Differentialgleichung des globalen Zeitintegrationsfehlers \mathbf{e}_t benötigt. Ausgangspunkt ist zunächst die kontinuierliche Galerkinformulierung der semidiskreten Differentialgleichung (5.1):

$$\sum_{n=1}^m \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} \mathbf{w} \cdot \left(M\ddot{\mathbf{d}} + C\dot{\mathbf{d}} + K\mathbf{d} - \mathbf{F} \right) dt \right) = 0, \quad \forall \mathbf{w} \in V \quad (5.18)$$

V sind hier alle zulässigen zeitlichen Wichtungsfunktionen. Die zugehörige diskreten Galerkinformulierung lautet:

$$\sum_{n=1}^m \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} \mathbf{w}^k \cdot \left(M\ddot{\mathbf{d}}_n^k + C\dot{\mathbf{d}}_n^k + K\mathbf{d}_n^k - \mathbf{F} \right) dt \right) = 0, \quad \forall \mathbf{w}^k \in V^k \subset V \quad (5.19)$$

Die Differenz der kontinuierlichen und der diskreten Formulierungen liefert für den diskreten Testraum V^k die bekannte Galerkinorthogonalität des Residuums \mathbf{R} :

$$\int_0^{t_n} \mathbf{w}^k \cdot \underbrace{\left(M(\ddot{\mathbf{d}} - \ddot{\mathbf{d}}_n^k) + C(\dot{\mathbf{d}} - \dot{\mathbf{d}}_n^k) + K(\mathbf{d} - \mathbf{d}_n^k) \right)}_{\mathbf{R}} dt = 0, \quad (5.20)$$

bzw. $\int_0^{t_n} \mathbf{w}^k \cdot (M\ddot{\mathbf{e}}_t + C\dot{\mathbf{e}}_t + K\mathbf{e}_t) dt = 0 \quad \forall \mathbf{w}^k \in V^k,$

mit der Differentialgleichung für den globalen Zeitintegrationsfehler $\mathbf{e}_t(t)$

$$M\ddot{\mathbf{e}}_t + C\dot{\mathbf{e}}_t + K\mathbf{e}_t = \mathbf{F} - (M\ddot{\mathbf{d}}^k + C\dot{\mathbf{d}}^k + K\mathbf{d}^k) = \mathbf{R} \quad (5.21)$$

und den Anfangsbedingungen : $\mathbf{e}_t(t=0) = \mathbf{0}$ und $\dot{\mathbf{e}}_t(t=0) = \mathbf{0}$.

Der globale Zeitintegrationsfehler $\mathbf{e}_t(t)$ erfüllt also die ursprüngliche Bewegungsgleichung mit dem Residuum \mathbf{R} als rechter Seite. Für die Schätzung des Fehlers in einem Zielfunktional der Lösung \mathbf{d} wird die Lösung \mathbf{z} eines dualen Problems als Wichtungsfunktion für die Differentialgleichung des Fehlers verwendet. Die Multiplikation von Gleichung (5.21) mit der vektorwertigen Wichtungsfunktion \mathbf{z} und die zweimalige partielle Integration über die Zeit führen auf die Fehleridentität:

$$\begin{aligned} \int_0^{t_m} \mathbf{z} \cdot \mathbf{R} dt &= \int_0^{t_m} \mathbf{z} \cdot (M\ddot{\mathbf{e}}_t + C\dot{\mathbf{e}}_t + K\mathbf{e}_t) dt \\ &= \int_0^{t_m} \mathbf{e}_t \cdot (M\ddot{\mathbf{z}} - C\dot{\mathbf{z}} + K\mathbf{z}) dt - [\mathbf{e}_t \cdot M\dot{\mathbf{z}}]_0^{t_m} \\ &\quad + [\dot{\mathbf{e}}_t \cdot M\mathbf{z}]_0^{t_m} + [\mathbf{e}_t \cdot C\mathbf{z}]_0^{t_m} \end{aligned} \quad (5.22)$$

Die Wichtungsfunktion \mathbf{z} ist wiederum die Lösung eines homogenen dualen Problems

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{z}} - \mathbf{C}\dot{\mathbf{z}} + \mathbf{K}\mathbf{z} = \mathbf{0} \quad \forall t \in [0, t_n] \quad (5.23)$$

mit Anfangsbedingungen zum Zeitpunkt t_n . Mit Hilfe der Transformation $t^* = t_n - t$ ergibt sich für diese duale Differentialgleichung folgende Form:

$$\mathbf{M}\mathbf{z}'' + \mathbf{C}\mathbf{z}' + \mathbf{K}\mathbf{z} = \mathbf{0} \quad \forall t^* \in [0, t_n] \quad (5.24)$$

$(\cdot)' = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t^*}$ stellt hier die Ableitung nach der transformierten Zeit t^* dar. Gleichung (5.24) hat nun die gleiche Form wie das primale Problem (5.1) und kann folglich mit demselben Zeitintegrationsverfahren wie das primale Problem gelöst werden.

Anfangsbedingungen für das duale Problem

Wenn \mathbf{z} Lösung des dualen Problems (5.23) ist, dann ist die mit Hilfe von Gleichung (5.22) bestimmte Fehlergröße nur noch von den Anfangsbedingungen des dualen Problems abhängig. Unter der Annahme, dass die primale Lösung die Anfangsbedingungen exakt erfüllt, d.h. dass $\mathbf{e}_t(t=0) = \dot{\mathbf{e}}_t(t=0) = \mathbf{0}$, fallen sämtliche Randterme bei $t=0$ weg und es ergibt sich eine Fehleridentität in der Form:

$$\int_0^{t_n} \mathbf{z} \cdot \mathbf{R} dt = - [\mathbf{e}_t \cdot \mathbf{M}\dot{\mathbf{z}}]^{t_n} + [\dot{\mathbf{e}}_t \cdot \mathbf{M}\mathbf{z}]^{t_n} + [\mathbf{e}_t \cdot \mathbf{C}\mathbf{z}]^{t_n} \quad (5.25)$$

Für verschiedene Fehlergrößen lassen sich nun die entsprechenden Anfangsbedingungen für das duale Problem angeben. Für die Wahl $\mathbf{z}(t_n) = \mathbf{0}$ ergibt sich beispielsweise die Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{z}}(t_n)$ als notwendige Anfangsbedingung zur Bestimmung der **euklidischen Norm** $|\mathbf{e}_t(t_n)| = \sqrt{\mathbf{e}_t(t_n) \cdot \mathbf{e}_t(t_n)}$ des Fehlers zu:

$$\dot{\mathbf{z}}(t_n) = -\frac{\mathbf{M}^{-1}\mathbf{e}_t(t_n)}{|\mathbf{e}_t(t_n)|} \implies \int_0^{t_n} \mathbf{z} \cdot \mathbf{R} dt = \frac{\mathbf{e}_t(t_n) \cdot \mathbf{e}_t(t_n)}{|\mathbf{e}_t(t_n)|} = |\mathbf{e}_t(t_n)| \quad (5.26)$$

Aus Gleichung (5.26) folgt, dass der zu bestimmende Fehler \mathbf{e}_t , bzw. die Fehlerverteilung, schon für die Anfangsbedingungen des dualen Problems bekannt sein müsste. NEUMANN [73] schlägt deshalb vor, die Anfangsbedingungen für das duale Problem selbst mit einem Fehlerschätzer für den lokalen Zeitintegrationsfehler für das Newmarkverfahren nach RICCIUS [98] zu schätzen:

$$\dot{\mathbf{z}}(t_n) = -\mathbf{M}^{-1} \frac{\tilde{\mathbf{e}}_l(t_n)}{|\tilde{\mathbf{e}}_l(t_n)|} \quad (5.27)$$

NEUMANN zeigt anhand eines einfachen Beispiels, dass diese Annahme bei linearen homogenen Bewegungsgleichungen zu guten Ergebnissen führt. Das sind jedoch auch die

Fälle, in denen die von RICCIUS vorgeschlagene Schätzung des globalen Fehlers auf der Basis der Abschätzung (5.17) sehr gute Ergebnisse liefert. In Anbetracht des erheblichen Berechnungsaufwandes der Fehlerschätzung mit Hilfe des dualen Problems scheint diese Vorgehensweise deshalb für lineare Bewegungsgleichungen ungeeignet. Für nichtlineare Problemstellungen versagt diese Methode ebenfalls [73]. Darüberhinaus gilt für nichtlineare Bewegungsgleichungen die Äquivalenz zwischen dem Newmarkverfahren als Finite-Differenzen-Verfahren und dem Galerkinverfahren in der Zeit nicht mehr. Die Schätzung der Anfangsbedingungen mit einem auf dem FD-Ansatz beruhenden lokalen Fehlerschätzer erscheint daher auch aus diesem Gesichtspunkt nicht gerechtfertigt.

Das Problem der Wahl der Anfangsbedingungen lässt sich umgehen, indem der Zeitintegrationsfehler nicht räumlich global in einer Norm geschätzt wird, sondern analog zum Vorgehen in Kapitel 2 für ein Zielfunktional der Lösung bestimmt wird. Im Folgenden wird exemplarisch die Beschränkung auf die Verschiebung in einem Freiheitsgrad i behandelt. Die notwendigen Anfangsbedingungen sind dann eindeutig aus Gleichung (5.25) zu bestimmen. Mit der Wahl $\mathbf{z}(t_n) = \mathbf{0}$ ergibt sich:

$$\dot{\mathbf{z}}(t_n) = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{1} \implies \int_0^{t_n} \mathbf{z} \cdot \mathbf{R} dt = \mathbf{e}_t \cdot \mathbf{M}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{1} = e_{t,i} = d_i - d_i^k \quad (5.28)$$

Hier ist $\mathbf{1}$ ein Einheitsvektor mit $\mathbf{1}(j) = 1$ für $j = i$ und $\mathbf{1}(j) = 0$ für $j \neq i$. Ein weiterer Vorteil der Beschränkung auf einen Freiheitsgrad liegt darin, dass die Anfangsbedingungen für das duale Problem im Gegensatz zu denen nach Gleichung (5.27) unabhängig von der Zeit sind und die duale Lösung folglich nicht für jeden Zeitpunkt neu ermittelt werden muss. Wegen dieser Eindeutigkeit der Anfangsbedingungen für das duale Probleme beschränken sich die nachfolgenden Betrachtungen auf diesen Fall.

5.4 Schätzung des globalen Zeitintegrationsfehlers

Nachfolgend werden zwei Fehlerschätzer zur Schätzung des globalen Zeitintegrationsfehlers in einem Freiheitsgrad i dargestellt.

5.4.1 Numerische Integration des dualen Problems

Der naheliegende Ansatz zur Fehlerschätzung des Zeitintegrationsfehlers an einem Freiheitsgrad i zum Zeitpunkt t_n beruht wiederum auf der direkten numerischen Auswertung der Fehleridentität

$$e_{t,i}(t_n) = \int_0^{t_n} \mathbf{z} \cdot \mathbf{R} dt \quad (5.29)$$

zur Bestimmung des zeitlich globalen Fehlers, bzw. von

$$\mathbf{e}_{t,i}^l(t_n) = \int_{t_{m-1}}^{t_n} \mathbf{z} \cdot \mathbf{R} dt \quad (5.30)$$

zur Bestimmung des zeitlich lokalen Fehlers. Wenn sowohl die duale Lösung exakt bestimmt als auch die Integration exakt durchgeführt wird, dann liefern die direkten Auswertungen auch die exakten Fehlergrößen gemäß den gewählten Anfangsbedingungen. Im Folgenden wird die numerische Lösung des dualen Problems mit dem gleichen Integrationsverfahren wie das primale Problem bestimmt. Im Gegensatz zu den Ausführungen bei der Schätzung des räumlichen Diskretisierungsfehlers ist hier die numerische Lösung \mathbf{z}^k als Wichtungsfunktion zulässig, da es sich bei kontinuierlichen Galerkinverfahren um Petrov-Galerkin-Verfahren handelt, d.h. $\mathbf{z}^k \notin V^k$.

Der Näherungscharakter des vorgestellten Fehlerschätzers ergibt sich also aus der numerischen Bestimmung der dualen Lösung $\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{z}^k$ und der numerischen Auswertung des Zeitintegrals. Die numerische Bestimmung des globalen Zeitintegrationsfehlerschätzers $\tilde{e}_{t,i}(t_n)$ am Freiheitsgrad i mit Hilfe einer numerischen Integration mit n_{ip} Integrationspunkten je Zeitintervall lautet dann:

$$e_{t,i}(t_n) = \int_0^{t_n} \mathbf{z} \cdot \mathbf{R} dt \approx \sum_{n=1}^m \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} \mathbf{z}^k \cdot \mathbf{R} dt \right) \quad (5.31)$$

$$\implies \tilde{e}_{t,i}(t_n) = \sum_{n=1}^m \left(\sum_{j=1}^{n_{ip}} \mathbf{z}_j^k \cdot \mathbf{R}_j w_j(t_n - t_{n-1}) \right). \quad (5.32)$$

Die Schätzung des Zeitintegrationsfehlers umfasst also im Wesentlichen die Punkte:

1. Bestimmung der Anfangsbedingungen für das duale Problem gemäß Gleichung (5.28). Im Falle einer diagonalisierten Massenmatrix wird nur auf den betrachteten Freiheitsgrad eine Anfangsgeschwindigkeit aufgebracht. An den anderen Knoten ist die Anfangsgeschwindigkeit Null.
2. Bestimmung der dualen Lösung an den Intervallgrenzen mit Hilfe des gewählten Zeitintegrationsverfahrens.
3. Bestimmung des Residuums \mathbf{R} und der dualen Lösung \mathbf{z} an den Integrationspunkten in jedem Zeitintervall.
4. Auswertung des Skalarproduktes $\mathbf{z}_j^k \cdot \mathbf{R}_j$, Wichten und Aufsummieren.

Aufgrund des gewählten quadratischen Verlaufes von \mathbf{d} und \mathbf{z} im Zeitintervall, müssen im hier vorliegenden Fall bei Anwendung der Gauß-Quadratur 3 Integrationspunkte in jedem Intervall gewählt werden. Entsprechend groß ist der numerische Aufwand für die

globale Fehlerschätzung, insbesondere für größere Finite-Element-Modelle mit entsprechend großen Systemmatrizen. Ein weiterer Nachteil der Bestimmung von \mathbf{z} mit Hilfe eines Zeitintegrationsverfahrens liegt darin, dass insbesondere bei Langzeitsimulationen ungedämpfter Probleme als Folge des Phasenfehlers des Zeitintegrationsverfahrens die Fehlerschätzung für die späteren Zeitpunkte immer ungenauer erfolgt. Für diese Zeitpunkte ist jedoch gerade der Aufwand zur Schätzung des Fehlers am größten. Des Weiteren muss auch hier für die Fehlerschätzung die vollständige primale und duale Lösung über den gesamten Berechnungszeitraum abgespeichert werden.

Um den Berechnungsaufwand zu minimieren bieten sich u.a. folgende Strategien an:

1. Bestimmung des globalen Fehlers nur in jedem k -ten Zeitschritt (z.B. $k = 2, 3, 4, \dots$).
2. Für gedämpfte Probleme muss für spätere Zeitpunkte nicht bis zum Zeitpunkt $t = 0$ zurückgerechnet werden, sondern nur bis zu der Zeit, bei der die duale Lösung auf einen ausreichend kleinen Wert abgeklungen ist. Problematisch ist hierbei, dass dieser Zeitpunkt für ein allgemeines Problem nicht a-priori bestimmt werden kann. Abhilfe besteht aber z.B. in der Möglichkeit, das duale Problem vor der eigentlichen Berechnung mit einem großen Zeitschritt zu lösen.

Die hier vorgeschlagenen Strategien benötigen somit Voruntersuchungen zum Verhalten der dualen Lösung, die sich nur schwer in einem Algorithmus für allgemeine Problemstellungen unterbringen lassen.

Eine weitere Alternative zur Aufwandsreduktion insbesondere für sehr große Finite-Element-Modelle wird im folgenden Abschnitt dargestellt.

5.4.2 Darstellung des globalen Zeitintegrationsfehlers in modalen Koordinaten

Der numerische Aufwand für den in Abschnitt 5.3 vorgestellten globalen Zeitintegrationsfehlerschätzer nimmt bei größeren Systemmatrizen derartige Ausmaße an, dass die Anwendung auf praktische Probleme in der dort dargestellten Form fragwürdig ist. Im Folgenden wird der im vorangegangenen Kapitel behandelte Fehlerschätzer für lineare Probleme in modalen Koordinaten dargestellt. Dies erlaubt die Rückführung auf entkoppelte Einfreiheitsgradsysteme, was eine effektivere Auswertung der Fehlergleichung erlaubt.

Mit Hilfe der Modalmatrix Φ mit den Eigenvektoren des ungedämpften Eigenwertproblems

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (5.33)$$

lässt sich die lineare Bewegungsgleichung (5.1) unter der Annahme der Rayleigh-Dämpfung mit unterkritischen Dämpfungsmaßen diagonalisieren:

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi \ddot{\mathbf{q}}_p + \Phi^T \mathbf{C} \Phi \dot{\mathbf{q}}_p + \Phi^T \mathbf{K} \Phi \mathbf{q}_p = \Phi^T \mathbf{F} \quad (5.34)$$

mit

$$\Phi = [\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_{ndf.}] \quad \text{und} \quad \mathbf{C} = c_m \mathbf{M} + c_k \mathbf{K} \quad (5.35)$$

Unter den gleichen Voraussetzungen ergibt sich auch für das duale Problem eine entkoppelte Diagonalform. Sowohl die primale als auch die duale Lösung werden nun in Modalkoordinaten dargestellt:

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= \Phi \mathbf{q}_p \\ \mathbf{z} &= \Phi \mathbf{q}_d \end{aligned} \quad (5.36)$$

\mathbf{q}_p ist die Lösung des primalen Problems in modalen Koordinaten, \mathbf{q}_d die entsprechende duale Lösung. Das Einsetzen dieser Transformation in die Fehleridentität liefert für den Fehler $e_{t,i}(t_n)$:

$$e_{t,i}(t_n) = \int_0^{t_n} \mathbf{q}_d \cdot \underbrace{(\Phi^T \mathbf{F} - \overbrace{\Phi^T \mathbf{M} \Phi}^{\mathbf{m}_{diag}} \ddot{\mathbf{q}}_p - \overbrace{\Phi^T \mathbf{C} \Phi}^{\mathbf{c}_{diag}} \dot{\mathbf{q}}_p - \overbrace{\Phi^T \mathbf{K} \Phi}^{\mathbf{k}_{diag}} \mathbf{q}_p)}_{\mathbf{R}_{mod}} dt \quad (5.37)$$

\mathbf{R}_{mod} ist hier der Vektor der Residuen der einzelnen Eigenformen, \mathbf{m}_{diag} , \mathbf{c}_{diag} und \mathbf{k}_{diag} sind die modalen Systemmatrizen, die aufgrund der Orthogonalität der Eigenformen Diagonalmatrizen sind. Dies ermöglicht die Aufspaltung des Integrals in Gleichung (5.37) in eine Summe von Integralen über die einzelnen Eigenformen:

$$e_{t,i}(t_n) = \sum_{j=1}^{ndf} \left(\int_0^{t_n} q_{d,j} \cdot R_j dt \right) \quad (5.38)$$

Die modale Lösung des dualen Problems stellt somit ein Maß für den Einfluss der einzelnen Eigenformen auf den Zeitintegrationsfehler des betrachteten Freiheitsgrades dar. Ob eine bestimmte Eigenform überhaupt einen Einfluss auf den Zeitintegrationsfehler in der Zielgröße hat, läßt sich direkt aus den modalen Anfangsbedingungen des dualen Problems ablesen. Aus dem Zusammenhang

$$\dot{\mathbf{z}}(t_n) = \Phi \dot{\mathbf{q}}_d(t_n) = -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{1} \quad (5.39)$$

ergibt sich durch Multiplikation von links mit $\Phi^T \mathbf{M}$ unter Berücksichtigung der Orthogonalitätsbedingung:

$$\mathbf{m}_{diag} \dot{\mathbf{q}}_d(t_n) = \Phi^T \mathbf{M} \cdot (-\mathbf{M}^{-1}) \mathbf{1} \implies \dot{\mathbf{q}}_d(t_n) = \mathbf{m}_{diag}^{-1} \Phi^T (-\mathbf{1}) = - \begin{bmatrix} \frac{X_{1,i}}{m_1} \\ \frac{X_{2,i}}{m_2} \\ \vdots \\ \frac{X_{n,i}}{m_{ndf}} \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

Bei der üblichen Normierung der Eigenformen mit $\mathbf{m}_{diag} = \mathbf{I}$ ergibt sich hieraus die einfache Form:

$$\dot{\mathbf{q}}_d(t_n) = \mathbf{\Phi}^T(-\mathbf{1}) = - \begin{bmatrix} X_{1,i} \\ X_{2,i} \\ \vdots \\ X_{n,i} \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

Das maßgebliche Kriterium für den möglichen Einfluss der j -ten Eigenform am Zeitintegrationsfehler ist die Amplitude der dualen Lösung der entsprechenden Eigenform. Aufgrund der einfachen Struktur des dualen Problems lässt sich diese direkt in Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen angeben:

$$q_{d,j,amp} = \left| \frac{\dot{q}_{d,j}(t_n)}{\sqrt{1 - \xi_j^2 \omega_j}} \right| \quad \text{mit } \xi_j = \frac{c_{diag,j}}{2m_j \omega_j} \quad (5.42)$$

Die hier dargestellte Vorgehensweise bietet nun die Möglichkeit, den Aufwand für die eigentliche Fehlerberechnung zu reduzieren, indem

- a) die Auswertung des Integrals $\int_0^{t_n} \mathbf{z} \cdot \mathbf{R} dt$ in modalen Koordinaten erfolgt und dabei
- b) nur Moden betrachtet werden, die sowohl in der dualen als auch in der primalen Lösung signifikant enthalten sind.

Zur Auswahl der zu berücksichtigenden Eigenformen wird folgendes Verfahren vorgeschlagen:

Zunächst erfolgt in Abhängigkeit von der Belastung und der Geometrie des Problems eine Beschränkung auf die ersten n_{eig} Eigenformen. Dann wird für jede dieser Eigenform die Amplitude der dualen Lösung anhand Gleichung (5.42) bestimmt. Die größte Amplitude bildet einen Referenzwert für die Auswahl der Eigenmoden:

$$q_{d,ref} = \max(q_{d,j,amp}) \quad j = 1, \dots, n_{eig} \quad (5.43)$$

Für die Fehlerschätzung werden anschließend nur die Eigenformen berücksichtigt, für die gilt:

$$q_{d,j,amp} \geq c_{amp} q_{d,ref} \quad \text{mit } c_{amp} \leq 1 \quad (5.44)$$

c_{amp} ist hierbei ein frei zu wählender Parameter, mit dem sich die Anzahl der berücksichtigten Eigenmoden steuern lässt. Mit dem hier vorgeschlagenen Verfahren kann die Anzahl der Eigenmoden, die zur Fehlerschätzung herangezogen werden, massiv reduziert werden. Beispielsweise fallen bei einem Schalenproblem bei der Schätzung des Zeitintegrationsfehlers für einen Freiheitsgrad senkrecht zur Schalenebene die Eigenformen, die hauptsächlich Eigenschwingungen in Schalenebene beschreiben, sofort heraus.

Es muss an dieser Stelle allerdings erwähnt werden, dass die hier beschriebene Auswahl der Eigenformen von der gewählten Normierung der Eigenformen abhängig ist. Da diese beliebig ist, ist die Auswahl nicht objektiv. Bei der hier gewählten Normierung ($\mathbf{m}_{diag} = \mathbf{I}$) und wenn c_{amp} nicht zu groß gewählt wird führt das beschriebene Vorgehen jedoch zu sehr guten Ergebnissen.

Der große Vorteil der Beschreibung in Modalkoordinaten liegt in der Tatsache begründet, dass die dualen Lösungen für die einzelnen Moden exakt bestimmt werden können und folglich keine numerische Zeitintegration des dualen Problems notwendig ist. Infolge dessen ergibt sich auch kein zusätzlicher Fehler durch die numerische Bestimmung der dualen Lösung und der Aufwand für die direkte Zeitintegration entfällt. Der Näherungscharakter des Fehlerschätzers ergibt sich hier aus der reduzierten Anzahl n_{red} an Eigenformen bei der Fehlerberechnung und der numerischen Auswertung des Integrals:

$$\tilde{e}_{t,i}(t_n) = \sum_{j=1}^{n_{red}} \left(\int_0^{t_n} q_{d,j} \cdot R_{mod,j} dt \right) \quad (5.45)$$

Ein weiterer erheblicher Vorteil liegt darin, dass nicht mehr die gesamte primale Lösung abgespeichert werden muss, sondern lediglich die modalen Antworten der n_{red} berücksichtigten Eigenformen.

Der größte Aufwand für das hier beschriebene Vorgehen liegt dann in der Bestimmung der modalen Anfangsbedingungen für das duale Problem, da hierfür das Eigenwertproblem (5.33) gelöst werden muss, was im Gegensatz zur Lösung des Gleichungssystems (5.28) einen nicht unerheblichen Mehraufwand bedeutet.

5.4.3 Numerisches Beispiel

Die beiden Fehlerschätzer zur Schätzung des globalen Zeitintegrationsfehlers in einer Punktverschiebung werden nun anhand eines numerischen Beispiels getestet. Hierfür wird die bereits in Kapitel 3 behandelte Halbkugel mit Loch gemäß Bild 3.3 betrachtet. Als Belastung wird der Lastfall b) aus Bild 3.4 verwendet. Die Zielgröße ist die horizontale Verschiebung $u_{y,II}$ des Punktes II , siehe Bild 3.3. Es wird ein uniformes Raumnetz mit $n_{dof} = 6336$ Freiheitsgraden verwendet. Die Berechnungen erfolgen mit den beiden konstanten Zeitschrittweiten $\Delta t_1 = 0,005$ und $\Delta t_2 = 0,0025$. Die Referenzlösung wird mit einer Zeitschrittweite von $\Delta t_{ref} = 0,00001$ ermittelt, die gesamte Berechnungsdauer beträgt $T = 2$.

Aufgrund der gegebenen niederfrequenten Belastung erfolgt für die Auswahl der Eigenformen bei der Verwendung des Fehlerschätzers (5.45) zunächst eine Beschränkung auf die ersten 20 Eigenformen. Für die weitere Reduktion der Anzahl der Eigenformen wird das im vorangegangenen Abschnitt beschriebene Verfahren mit $c_{amp} = 0,20$ verwendet. Dies führt dazu, dass für die Fehlerschätzung nur noch $n_{red} = 11$ Eigenformen berücksichtigt werden. Die mit Hilfe der Anfangsbedingungen des dualen Problems ermittelten Einflussfaktoren für die ersten 20 Eigenformen sind in Bild 5.1 dargestellt.

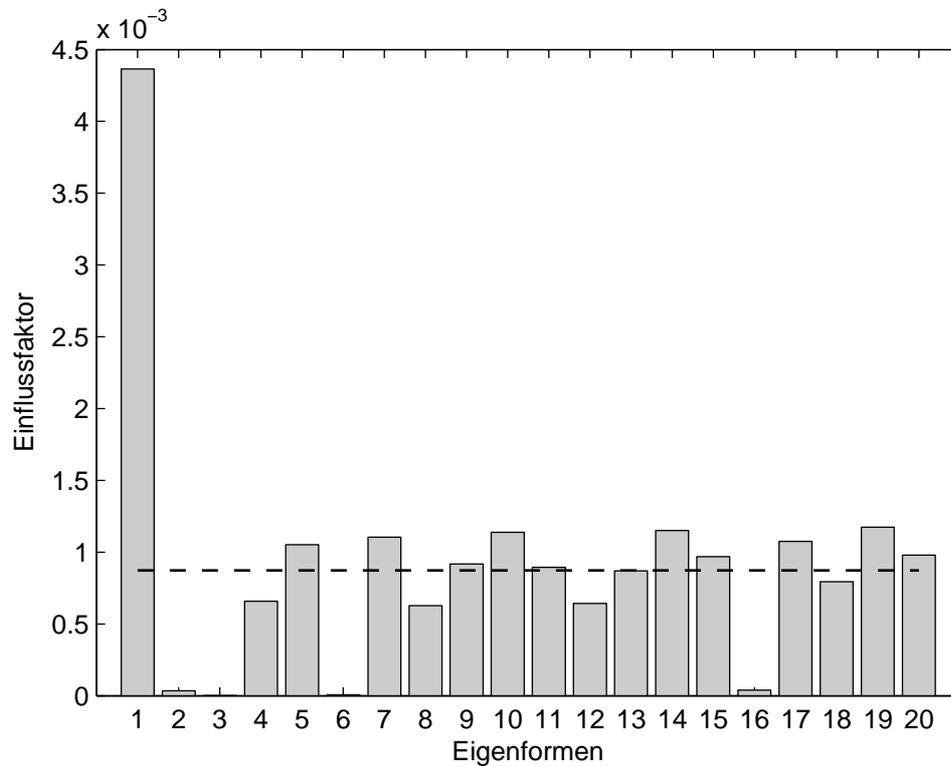


Bild 5.1: Modale Einflussfaktoren für die Zielgröße $u_{y,II}$

Ebenso ist die Grenze für die Berücksichtigung der Eigenformen für $c_{amp} = 0,20$ angegeben. Man erkennt sofort, dass beispielsweise die zweite und die dritte Eigenform keinen Einfluss auf die Zielgröße haben und folglich bei der Fehlerschätzung auch nicht berücksichtigt werden müssen.

Die Bilder 5.2– 5.5 zeigen jeweils die Gegenüberstellungen des Referenzfehlers und der geschätzten globalen Zeitintegrationsfehler für die unterschiedlichen Zeitschrittweiten bei Verwendung der beiden Fehlerschätzer. Zur Beurteilung der Güte der Fehlerschätzung ist zusätzlich jeweils noch der Effektivitätsindex angegeben.

Man erkennt, dass die numerische Zeitintegration des dualen Problems bei Verwendung des Fehlerschätzers (5.31) für die größere Zeitschrittweite Δt_1 zu einer verhältnismäßig schlechten Schätzung des globalen Zeitintegrationsfehlers führt. Der tatsächliche Fehler wird hier relativ stark unterschätzt. Der Zeitintegrationsfehler der dualen Lösung ist hier offensichtlich für eine zufriedenstellende Fehlerschätzung zu groß. Für die kleinere Zeitschrittweite Δt_2 hingegen ergibt sich eine gute Schätzung des Fehlers, auch wenn deutliche Oszillationen des geschätzten Fehlers gegenüber dem Referenzfehler auftreten.

Bei Verwendung des Fehlerschätzers (5.45) ergibt sich für 11 Eigenformen eine sehr gute Schätzung des globalen Zeitintegrationsfehlers für beide Zeitschritte. Auffallend ist hier, dass die Fehlerschätzung mit der Zeit besser wird. Dies ist darauf zurückzuführen, dass der globale Zeitintegrationsfehler hier vom Fehleranteil der ersten Eigenform do-

miniert wird, wohingegen die höherfrequenten Anteile verhältnismäßig schnell abklingen und nur über geringe Zeiträume transportiert werden. Weiterhin fällt auf, dass die Fehlerschätzung hier im Gegensatz zum Fehlerschätzer (5.31) für die größere Zeitschrittweite besser ist als für die kleinere. Dies ist darauf zurückzuführen, dass durch die kleinere Zeitschrittweite insbesondere die Fehleranteile der niedrigen Eigenfrequenzen reduziert werden, wohingegen die höherfrequenten Fehleranteile im Verhältnis nicht so stark verkleinert werden. Dies lässt sich auch daran erkennen, dass die Anteile der höherfrequenten Fehler am exakten Zeitintegrationsfehler für die Zeitschrittweite Δt_2 deutlich größer sind als für Δt_1 .

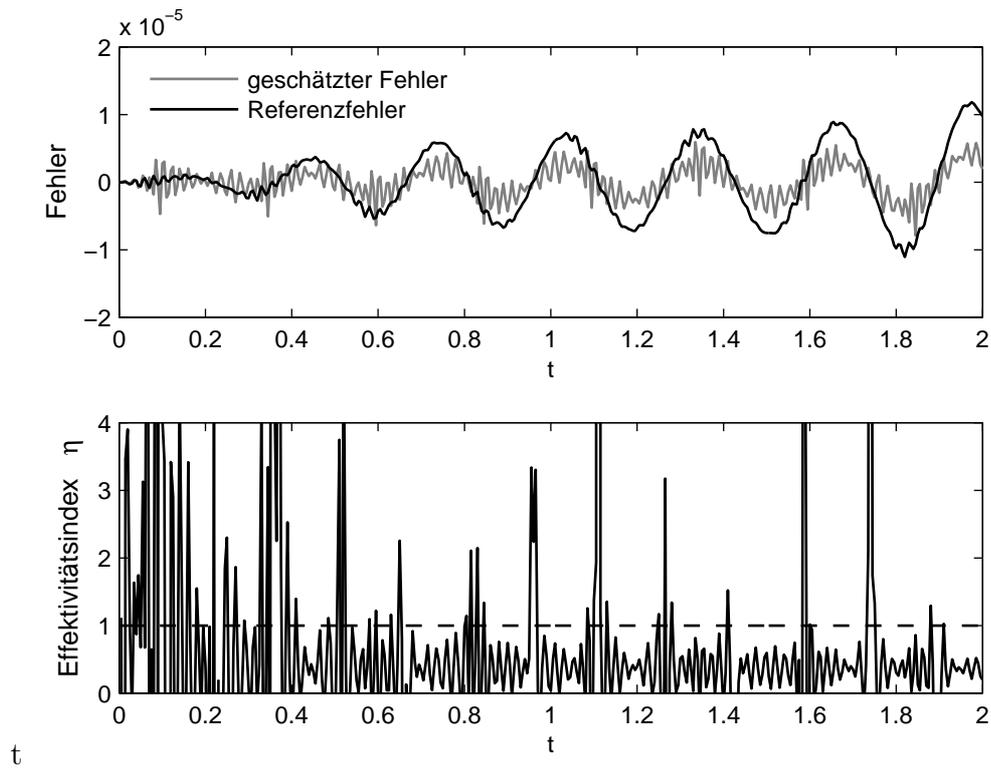


Bild 5.2: Gegenüberstellung von geschätztem und exaktem Fehler sowie Effektivitätsindex für den Fehlerschätzer mit *Zeitintegration der dualen Lösung* für die Zeitschrittweite $\Delta t_1 = 0,005$

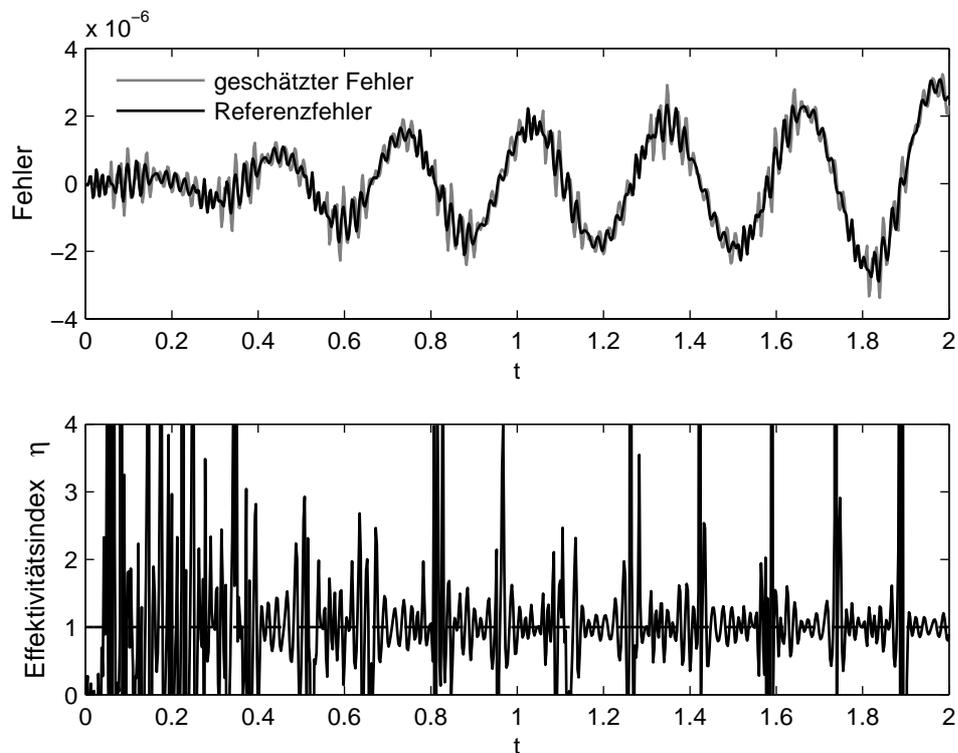


Bild 5.3: Gegenüberstellung von geschätztem und exaktem Fehler sowie Effektivitätsindex für den Fehlerschätzer mit *Zeitintegration der dualen Lösung* für die Zeitschrittweite $\Delta t_2 = 0,0025$

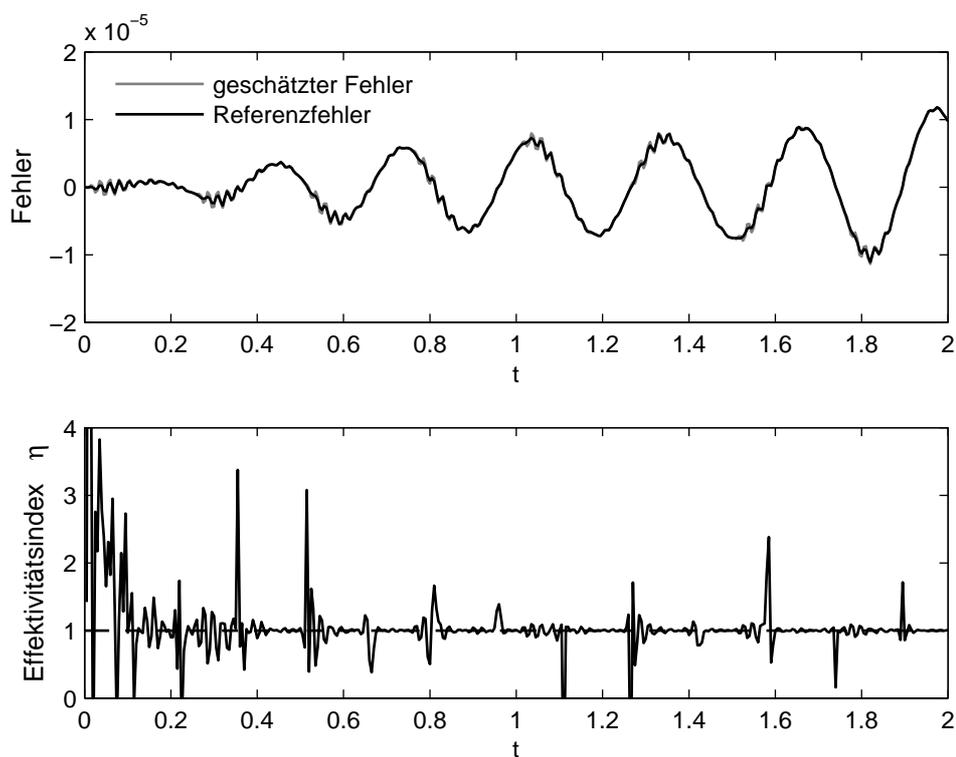


Bild 5.4: Gegenüberstellung von geschätztem und exaktem Fehler sowie Effektivitätsindex für den Fehlerschätzer mit *modaler dualer Lösung* für die Zeitschrittweite $\Delta t_1 = 0,005$

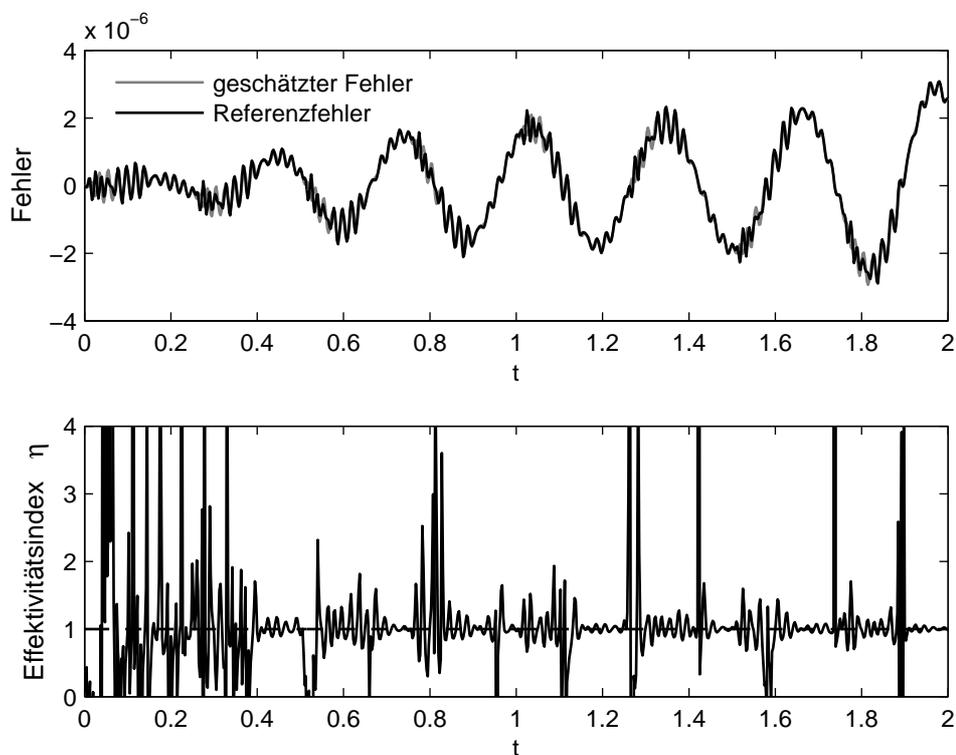


Bild 5.5: Gegenüberstellung von geschätztem und exaktem Fehler sowie Effektivitätsindex für den Fehlerschätzer mit *modaler dualer Lösung* für die Zeitschrittweite $\Delta t_2 = 0,0025$

Bewertung des Beispiels

Anhand des Beispiels lässt sich feststellen, dass die Fehlerschätzung mit Hilfe der numerischen Zeitintegration des dualen Problems für praktische Problemstellungen zu aufwendig ist. Darüber hinaus liefert der Fehlerschätzer erst für verhältnismäßig kleine Zeitschritte eine zufriedenstellende Schätzung des Fehlers in der Zielgröße.

Der modifizierte modale Zeitintegrationsfehlerschätzer hingegen erlaubt eine zuverlässige Fehlerschätzung in einer stark reduzierten modalen Basis. Der wesentliche Aufwand für die Fehlerschätzung besteht dann in der Lösung des Eigenwertproblems und der Auswahl der maßgebenden Eigenformen. Hierbei zeigt sich, dass das duale Problem sehr gut geeignet ist, eine auf die Zielgröße zugeschnittene Auswahl maßgebender Eigenformen durchzuführen. Entsprechend wurde von MEYER [71] das *Dual-Weighted-Residual*-Konzept zur Auswahl von Basisvektoren im Rahmen der Modellreduktion bei der numerischen Simulation von Windkraftanlagen verwendet.

5.5 Abschließende Bemerkungen zur Relevanz des Zeitintegrationsfehlers

Auf der Basis der Fehlerschätzung des lokalen und globalen Zeitintegrationsfehlers mit Hilfe des *Dual-Weighted-Residual*-Konzeptes schlägt NEUMANN [73] eine adaptive Zeitschrittsteuerung vor. Aufgrund des unverhältnismäßig hohen Aufwands für die Schätzung des globalen Zeitintegrationsfehlers wurde im Rahmen dieser Arbeit auf die Zeitschrittadaption verzichtet. Bei der Zeitschrittadaption auf der Basis eines Fehlerkriteriums muss mit Hinblick auf den gesamten Diskretisierungsfehler berücksichtigt werden, dass die Reduktion des Zeitintegrationsfehlers nur die genauere Lösung der bereits aufgrund der räumlichen Diskretisierung fehlerbehafteten semidiskreten Bewegungsgleichung zum Ziel hat.

Ein weiterer Aspekt, welcher gegen die Zeitschrittadaption auf der Basis eines Fehlerkriteriums spricht ist der, dass in der Regel die Phasenfehler in Folge der räumlichen und der zeitlichen Diskretisierung gerade gegenläufig sind und sich dementsprechend oft gegenseitig – zumindest teilweise – ausgleichen. Entsprechend weist HUGHES [57] darauf hin, dass die Gesamtlösung bei Verwendung eines zu kleinen Zeitschrittes schlechter ist, als bei einem ausreichend großen. Für eine sinnvolle Wahl der Zeitschrittweite ist somit das Ziel eines ausgewogenen Verhältnisses zwischen Zeitintegrationsfehler und dem gesamten räumlichen Diskretisierungsfehler – einschließlich des Phasenfehlers – anzustreben. Folglich ist die Zeitschrittadaption auch nur in Verbindung mit einer Netzanpassung sinnvoll. Hierbei ergibt sich jedoch das Problem, dass die Schätzung des vollständigen räumlichen Diskretisierungsfehlers und des globalen Zeitintegrationsfehlers mit einem unverhältnismäßig hohen numerischen Aufwand verbunden ist.

Für die Auswahl einer geeigneten konstanten Zeitschrittweite sollte unter diesen Gesichtspunkten deshalb auf bekannte Abschätzungen in Abhängigkeit von der maßgeb-

lichen im Problem abzubildenden Eigenfrequenz zurückgegriffen werden, siehe z.B. HUGHES [57].

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit werden adaptive Methoden im Rahmen von numerischen Simulationen in der Strukturmechanik behandelt. Die räumliche Diskretisierung erfolgt mit Volumen-Schalen-Elementen mit bilinearen Verschiebungsansätzen in der Schalebene. Für die Zeitintegration wird das Newmark-Verfahren verwendet. Der gesamte Diskretisierungsfehler innerhalb dieses zweistufigen Diskretisierungsprozesses lässt sich dann aufspalten in den räumlichen Diskretisierungsfehler und den Zeitintegrationsfehler.

Ein Großteil der Arbeit befasst sich mit der Schätzung des räumlichen Diskretisierungsfehlers in einem beliebigen Zielfunktional der Lösung, wie etwa lokalen Verschiebungen. Hierfür werden zunächst geeignete Fehlerdarstellungen des räumlichen Diskretisierungsfehlers in der Zielgröße auf der Basis des *Dual-Weighted-Residual*-Konzeptes dargestellt. Hierbei erfolgt die Wichtung des Residuums der numerischen Lösung mit der Lösung des dualen Problems, welches ein Rückwärtsproblem in der Zeit mit Anfangsbedingungen im aktuellen Zeitpunkt darstellt. Die duale Lösung ist die Einflussfunktion für die gewählte Zielgröße. Entsprechend lassen sich für lineare Problemstellungen die Fehleridentitäten auch direkt aus elastodynamischen Reziprozitätstheoremen im Zeitbereich, wie etwa dem Reziprozitätstheorem nach GRAFFI, ableiten.

Die Schätzung des räumlichen Diskretisierungsfehlers erfolgt dann auf der Basis der Fehleridentitäten. Der numerische Aufwand für die vollständige numerische Auswertung einer Fehleridentität scheint dabei aufgrund des enormen numerischen Aufwands nicht für die praktische Anwendung geeignet. Dies führt auf die Einführung eines vereinfachten Fehlerindikators für Schwingungsprobleme, welcher auf die Schätzung des Phasenfehlers in Folge der räumlichen Diskretisierung verzichtet. Stattdessen erfolgt ausschließlich die Bewertung des aktuellen Zustandes mit Hinblick auf die gewählte Zielgröße auf der Basis der Zustandsgrößen zum aktuellen Zeitpunkt. Die zeitliche Kopplung zwischen dem Residuum des primalen Problems und der dualen Lösung kann dann entfallen. Der Fehlerindikator für lineare Problemstellungen greift auf Standardfehlerschätzer für die Fehlerschätzung in der Gesamtenergienorm zurück, für nichtlineare Probleme erfolgt die Fehlerschätzung auf der Basis geglätteter Spannungen des primalen Problems und geglätteter Verzerrungen des dualen Problems. Die so konstruierten Fehlerindikatoren führen zu einer starken Reduktion des Aufwands für die Fehlerschätzung und erweisen sich als geeignete Basis für die Adaption der Raumdiskretisierung im aktuellen Zeitpunkt. Die große Stärke der vereinfachten Fehlerindikatoren gründet sich auf die Tatsache, dass sie die wesentlichen Informationen des dualen

Problems für die Fehlerschätzung berücksichtigen, ohne das duale Problem vollständig in der Zeit zu lösen. Die Fehlerschätzer berücksichtigen dadurch das grundlegende Lösungsverhalten von Schwingungsproblemen, bei denen die zeitliche Änderung des Bewegungszustandes von untergeordneter Bedeutung ist.

Für die Anpassung des Raumnetzes auf der Basis der vereinfachten Fehlerindikatoren werden zwei Adaptionsstrategien behandelt. Dabei erweist sich die Strategie, welche auf den Transfer von Daten zwischen unterschiedlichen Diskretisierungen verzichtet als robuster aber auch aufwendiger als die Adaptionsstrategie mit veränderlichen Netzen und Datentransfer. Ein weiterer Nachteil der Adaptionsstrategie mit Datentransfer ist der durch den Datentransfer verursachte zusätzliche Fehler, welcher sich insbesondere in lokalen Größen niederschlägt. Dieser Datenübertragungsfehler kann bisher nicht in geeigneter Form kontrolliert werden. Die numerischen Beispiele unterstreichen die Effizienz der mit ortsadaptiven Verfahren gewonnenen Raumdiskretisierungen.

Ein weiterer Aspekt der Arbeit ist die Schätzung des Diskretisierungsfehlers in Zielfunktionalen einzelner Eigenformen. Auch hier wird das *Dual-Weighted-Residual*-Konzept zur Fehlerschätzung verwendet. Der dargestellte Fehlerindikator beruht auf der Fehlerschätzung des primalen und des dualen Problems mit Hilfe des *Zienkiewicz-Zhu*-Fehlerindikators. Die Fehlerschätzung des Fehlers des betrachteten Eigenwertes ist als Sonderfall in der Fehlerschätzung in linearen Zielfunktionalen der Lösung enthalten. Die numerischen Beispiele zeigen, dass sich durch die Netzadaption auf der Basis des Fehlerindikators eine wesentlichen Effizienzsteigerung für ebene Probleme erzielen lässt. Für gekrümmte Schalenstrukturen ergibt sich für die unteren biegedominanten Eigenformen teilweise eine Verschlechterung des Ergebnisses. Dies ist jedoch auf die generelle Anfälligkeit bilinearer Schalenelemente bei der Abbildung reiner Biegezustände zurückzuführen und stellt keine generelle Schwäche des Fehlerindikators dar.

Aufgrund der Äquivalenz des Standard-Newmark-Verfahrens mit einem kontinuierlichen Petrov-Galerkin-Verfahren lässt sich der globale Zeitintegrationsfehler für das Newmark-Verfahren ebenfalls mit Hilfe des *Dual-Weighted-Residual*-Konzeptes darstellen. Es werden zwei Fehlerindikatoren für den Fehler in einem speziellen Freiheitsgrad vorgestellt. Dabei erweist sich der Fehlerschätzer auf der Basis der numerischen Zeitintegration des dualen Problems als zu aufwendig und insbesondere für größere Zeitschritte als zu ungenau. Als Alternative wird ein Fehlerindikator in einer stark reduzierten modalen Basis vorgestellt. Die Auswahl der für die Zielgröße maßgebenden Eigenformen kann dabei auf der Basis der modalen Anfangsbedingungen des dualen Problems erfolgen. Das numerische Beispiel unterstreicht die Effizienz dieses Vorgehens gegenüber dem Fehlerschätzer mit numerischer dualer Lösung. Mit Hinblick auf den gesamten Diskretisierungsfehler einer numerischen Lösung muss jedoch berücksichtigt werden, dass die alleinige Minimierung des Zeitintegrationsfehlers nicht zwangsläufig zu einer Minimierung des gesamten Fehlers führt, da hierdurch nur die bereits fehlerbehaftete Lösung der räumlich diskretisierten Bewegungsgleichung genauer angenähert wird.

Literaturverzeichnis

- [1] J.D. Achenbach. *Reciprocity in Elastodynamics*. Cambridge University Press, 2003.
- [2] J. Altenbach und H. Altenbach. *Einführung in die Kontinuumsmechanik*. B.G. Teubner, 1994.
- [3] S.S. Antmann. *Nonlinear Problems of Elasticity*. Springer-Verlag, 1995.
- [4] I. Babuska und T. Strouboulis. *The Finite Element Method and its Reliability*. Clarendon Press Oxford, 2001.
- [5] W. Bangerth. *Adaptive Finite-Elemente-Methoden zur Lösung der Wellengleichung mit Anwendung in der Physik der Sonne*. Diplomarbeit, Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg, 1998.
- [6] W. Bangerth und R. Rannacher. Finite element approximation of the acoustic wave equation: Error control and mesh adaptation. *East-West J. Numer. Math.*, 7(4):263–282, 1999.
- [7] W. Bangerth und R. Rannacher. Adaptive finite element techniques for the acoustic wave equation. *J. Comput. Acoustics*, 9(2):575–591, 2001.
- [8] W. Bangerth und R. Rannacher. *Adaptive Finite Element Methods for Differential Equations*. Birkhäuser Verlag, 2003.
- [9] J. Barlow. Optimal stress locations in Finite Element models. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 10:143–251, 1976.
- [10] K.-J. Bathe. *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, 1996.
- [11] K.-J. Bathe, A. Iosilevich und D. Chapelle. An evaluation of the MITC shell elements. *Computers and Structures*, 75:1–30, 2000.
- [12] M. Baumann. *Lineare Finite Element Konzepte für Schalenträgerwerke unter Berücksichtigung von adaptiven Methoden*. Dissertation, Institut für Baustatik, Universität Karlsruhe, 1994.

- [13] R. Becker und R. Rannacher. *A feed-back approach to error control in finite element methods: Basic analysis and examples*. Preprint 08/96, Institut für Angewandte Mathematik, Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg, 1996.
- [14] R. Becker und R. Rannacher. An optimal control approach to a posteriori error estimation in finite element methods. *Acta Numerica*, 10:1–102, 2001.
- [15] T. Belytschko, W.K. Liu und B. Moran. *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. John Wiley & Sons, Ltd, 2001.
- [16] M. Bischoff. *Theorie und Numerik einer dreidimensionalen Schalenformulierung*. Dissertation, Insitut für Baustatik , Universität Stuttgart, 1999.
- [17] D. Braess. *Finite Elemente*. Springer, Berlin – Heidelberg, 1996.
- [18] D. Braess. Enhanced Assumed Strain Elements and Locking in Membrane Problems. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 165:155–174, 1998.
- [19] S.C. Brenner und L.R. Scott. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Springer.
- [20] F. Cirak. *Adaptive Finite-Element-Methoden bei der nichtlinearen Analyse von Flächentragwerken*. Dissertation, Insitut für Baustatik , Universität Stuttgart, 1998.
- [21] F. Cirak und E. Ramm. A posteriori error estimation and adaptivity for linear elasticity using the reciprocal theorem. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 156:351–362, 1998.
- [22] F. Cirak und E. Ramm. A posteriori error estimation and adaptivity for elastoplasticity using the reciprocal theorem. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 47:379–393, 2000.
- [23] R.W. Clough und J. Penzien. *Dynamics of structures*. McGraw-Hill, 2. Auflage, 1993.
- [24] M.A. Crisfield. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures – Volume 1: Essentials*. John Wiley & Sons Ltd., 1991.
- [25] M.A. Crisfield. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures – Volume 2: Advanced Topics*. John Wiley & Sons Ltd., 1997.
- [26] P. Diez, I. Morata und A. Huerta. Goal-oriented adaptivity for shell structures - error assessment and remeshing criteria. *Revue européenne des élément finis*, 12(6):691–715, 2003.
- [27] P. Diez und G. Calderon. Remeshing criteria and proper error representations for goal oriented h-adaptivity. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 196(4-6):719–733, 2007.

- [28] S. Doll. *Zur numerischen Behandlung großer elasto-viskoplastischer Deformationen bei isochor-volumetrisch entkoppeltem Stoffverhalten*. Dissertation, Institut für Mechanik, Universität Karlsruhe, 1998.
- [29] J. Douglas, T. Dupont und M.F. Wheeler. An L^∞ estimate and a superconvergence result for a galerkin method for elliptic equations based on tensor products of piecewise polynomials. *Anal. Numer.*, 8:47–59, 1974.
- [30] A. Düster, H. Bröker und E. Rank. The p -version of the Finite Element Method for three-dimensional curved thin walled structures. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 52:673–703, 2001.
- [31] E. Dvorkin und K.J. Bathe. A continuum mechanics based four-node shell element for general nonlinear analysis. *Engineering computations*, 1:77–88, 1984.
- [32] K. Eriksson und C. Johnson. Adaptive Finite Element Methods for Parabolic Problems I: A linear model problem. *SIAM Journal of Numer. Analysis*, 28(1):43–77, 1991.
- [33] D. Estep. A posteriori error bounds and global error control for approximations of ordinary differential equations. *SIAM Journal of Numer. Analysis*, 32(1):1–48, 1995.
- [34] D. Estep und D. French. Global error control for the continuous Galerkin finite element method for ordinary differential equations. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 28(7):815–852, 1994.
- [35] D. Fuentes, D. Littlefield, J.T. Oden und S. Prudhomme. Extensions of goal-oriented error estimation methods to simulations of highly-nonlinear response of shock-loaded elastomer-reinforced structures. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 195:4659–4680, 2006.
- [36] L. Gaul und C. Fiedler. *Methode der Randelemente in Statik und Dynamik*. Vieweg, 1997.
- [37] M.B. Giles und E. Süli. Adjoint methods for PDEs: a posteriori error analysis and postprocessing by duality. *Acta numerica*, 11:145–236, 2002.
- [38] K.F. Graff. *Wave motion in elastic solids*. Ohio State University Press, 1975.
- [39] D. Graffi. Über den Reziprozitätssatz in der Dynamik der elastischen Körper. *Ingenieur-Archiv*, 12:45–46, 1954.
- [40] T. Grätsch. *L2 - Statik - Eine auf dem Skalarprodukt basierende Darstellung der modernen Statik unter besonderer Betrachtung der Methode der finiten Elemente*. Dissertation, Universität Kassel, 2002.
- [41] C. Großmann und H.-G. Roos. *Numerik partieller Differentialgleichungen*. B.G. Teubner, Stuttgart, 1994.

-
- [42] C.-S. Han. *Eine h-adaptive Finite-Element-Methode für elasto-plastische Schalenprobleme in unilateralem Kontakt*. Dissertation, Universität Hannover, 1999.
- [43] C.-S. Han. An h-adaptive method for elasto-plastic shell problems. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 189:651–671, 2000.
- [44] K. Eriksson, D. Estep, P. Hansbo und C. Johnson. Introduction to Adaptive Methods for Differential Equations. *Acta Numerica*, 4:105–158, 1995.
- [45] M. Harnau. *Finite Volumen-Schalenelemente für große Deformationen und Kontakt*. Dissertation, Institut für Mechanik, Universität Karlsruhe, 2004.
- [46] F. Hartmann. *The Mathematical Foundation of Structural Mechanics*. Springer-Verlag, 1985.
- [47] F. Hartmann. *Methode der Randelemente*. Springer-Verlag, 1987.
- [48] P. Haupt. *Continuum Mechanics and Theory of Materials*. Springer-Verlag, 2005.
- [49] R. Hauptmann. *Strukturangepaßte geometrisch nichtlineare Finite Elemente für Flächentragwerke*. Dissertation, Institut für Mechanik, Universität Karlsruhe, 1997.
- [50] R. Hauptmann und K. Schweizerhof. A systematic development of 'solid-shell' element formulations for linear and non-linear analyses employing only displacement degrees of freedom. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 41:00–01, 1998.
- [51] C. Haußer. *Effiziente Dreieckselemente für Flächentragwerke*. Dissertation, Universität Stuttgart, 1996.
- [52] V. Havu und J. Pitkäranta. *Analysis of a bilinear finite element for shallow shells I: Approximations of inextensional deformations*. Institutsbericht A430, Helsinki University of Technology, 2000.
- [53] P. Heintz, F. Larsson, P. Hansbo und K. Runesson. Adaptive strategies and error control for computing material forces in fracture mechanics. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 60:1287–1299, 2004.
- [54] V. Heuveline und R. Rannacher. A posteriori error control for finite element approximations of elliptic eigenvalue problems. *Advances in Computational Mathematics*, 15:107–138, 2001.
- [55] V. Heuveline und R. Rannacher. Adaptive FEM for eigenvalue problems with application in hydrodynamic stability analysis. *Proc. Int. Conf. on Advances in Numerical Mathematics*, Moskau, 16–17 Sept. 2005.
- [56] A. Huerta, A. Rodriguez-Ferran und P. Diez. Error estimation and adaptivity for nonlinear fe analysis. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Sciences*, 12(1):59–70, 2002.

- [57] T.J.R. Hughes. *The Finite Element Method – Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Prentice–Hall International Editions, 1987.
- [58] S.R. Idelsohn und A. Cardona. A reduction method for nonlinear structural dynamic analysis. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 49(3):253–279, 1985.
- [59] C. Johnson und P. Hansbo. Adaptive Finite Element methods in computational mechanics. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 101:143–181, 1992.
- [60] S. Kizio, K. Schweizerhof, A. Düster und E. Rank. Benchmark Computations of low and high order Shell Elements on adaptively generated FE Meshes. Proceedings 10. Dresdner Baustatik-Seminar, 311–330, 2006.
- [61] M. Kleiber. *Parameter Sensitivity in Nonlinear Mechanics*. John Wiley & Sons, 1997.
- [62] F. Koschnick. *Geometrische Locking-Effekte bei Finiten Elementen und ein allgemeines Konzept zu ihrer Vermeidung*. Dissertation, Technische Universität München, 2004.
- [63] P. Krysl, S. Lall und J.E. Marsden. Dimensional model reduction in non-linear finite element dynamics of solids and structures. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 51:479–504, 2001.
- [64] D. Kuhl. *Modellierung und Simulation von Mehrfeldproblemen der Strukturmechanik*. Habilitationsschrift, Fakultät für Bauingenieurwesen, Ruhr - Universität Bochum, 2004.
- [65] D. Kuhl und E. Ramm. Time Integration in the Context of Energy Control and Locking Free Finite Elements. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 7(3):299–332, 2000.
- [66] M.G. Larson. A posteriori and a priori error analysis for finite element approximations of selfadjoint elliptic eigenvalue problems. *SIAM Journal of Numer. Analysis*, 38(2):608–625, 2000.
- [67] F. Larsson, P. Hansbo und K. Runesson. Strategies for computing goal-oriented a posteriori error measures in non-linear elasticity. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 55:879–894, 2002.
- [68] K. Magnus und K. Popp. *Schwingungen*. Teubner Verlag, 5. Auflage, 2005.
- [69] J.E. Marsden und T.J.R. Hughes. *Mathematical Foundations of Elasticity*. Dover Publications, 1983.
- [70] A. Maute. *Fehlerkontrolle bei Finite-Elemente-Methoden in der linearen Strukturdynamik*. Dissertation, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 2001.
- [71] M. Meyer. *Reduktionsmethoden zur Simulation des aeroelastischen Verhaltens von Windkraftanlagen*. Dissertation, Universität Braunschweig, 2002.

-
- [72] C. Miehe und J. Schröder. Energy and momentum conserving elastodynamics of a non-linear brick-type mixed finite shell element. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 50(8):1801–1823, 2001.
- [73] J. Neumann. *Anwendung von adaptiven Finite Element Algorithmen auf Probleme der Strukturmechanik*. Dissertation, Institut für Mechanik, Universität Karlsruhe, 2004.
- [74] J. Neumann und K. Schweizerhof. Computation of Single Eigenfrequencies and Eigenfunctions of Plate and Shell Structures Using an h-adaptive FE-method. *Computational Mechanics*, 40(1):111–126, 2007.
- [75] N.M. Newmark. A numerical method for structural dynamics. *J. Eng. Mech. Div. ASCE*, 85:67–94, 1959.
- [76] Chr. Nystedt. A priori and a posteriori error estimates and adaptive finite element methods for a model eigenvalue problem. Institutsbericht Nr. 1995-05, Department of Mathematics, Chalmers University of Technology, 1995.
- [77] J. T. Oden und J. N. Reddy. *An introduction to the mathematical theory of finite elements*. Wiley, 1976.
- [78] J.T. Oden und S. Prudhomme. Goal-oriented error estimation and adaptivity for the finite element method. *Computers & mathematics with applications*, 41:735–756, 2001.
- [79] J.T. Oden und S. Prudhomme. Estimation of Modeling Error in Computational Mechanics. *Journal of Computational Physics*, 182:496–515, 2002.
- [80] J.T. Oden, S. Prudhomme und L. Demkowicz. A Posteriori Error Estimation for Acoustic Wave Propagation Problems. *Archives of Computational Mechanics and Engineering*, 12(4):343–389, 2005.
- [81] J.T. Oden, S. Prudhomme, T. Westermann, J. Bass und M.E. Botkin. Error estimation of eigenfrequencies for elasticity and shell problems. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 13(3):323–344, 2003.
- [82] A. Orlando und D. Peric. Analysis of transfer procedures in elastoplasticity based on the error in the constitutive equations: Theory and numerical illustration. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 60(9):1595–1631, 2004.
- [83] M. Ortiz und J.J. Quigley. Adaptive mesh refinement in strain localization problems. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 90:781–804, 1991.
- [84] H. Parisch. *Festkörper-Kontinuumsmechanik*. B.G. Teubner, 2003.
- [85] D. Peric, Ch. Hochard, M. Dutko und D.R.J. Owen. Transfer operators for evolving meshes in small strain elasto-plasticity. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 137:331–344, 1996.

- [86] J. Pitkäranta. *The first locking-free plane-elastic finite element: Historia mathematica*. Institutsbericht A411, Helsinki University of Technology, 1999.
- [87] J. Pitkäranta. Mathematical and historical reflections of the lowest-order finite element models for thin structures. Institutsbericht A449 , Helsinki University of Technology, 2003.
- [88] J. Pitkäranta, Y. Leino, O. Ovaskainen und J. Piila. Shell deformation states and the finite element method: A benchmark study of cylindrical shells. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 128:81–121, 1995.
- [89] S. Prudhomme, J. T. Oden, T. Westermann, J. Bass und M.E. Botkin. Practical methods for a posteriori error estimation in engineering applications. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 56(8):1193–1224, 2003.
- [90] S. Prudhomme und J.T. Oden. On goal-oriented error estimation for elliptic problems: application to the control of pointwise errors. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 176:313–331, 1999.
- [91] W. Rachowicz, D. Pardo und L. Demkowicz. Fully Automatic hp-Adaptivity in Three Dimensions. Institutsbericht 04-22, ICES, University of Texas, 2004.
- [92] R. Radovitzky und M. Ortiz. Error estimation and adaptive meshing in strongly nonlinear dynamic problems. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 172:203–240, 1999.
- [93] E. Rank, H. Düster, V. Nübel, K. Preusch und O.T. Bruhns. High order finite elements for shells. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 194:2494–2512, 2005.
- [94] R. Rannacher und F.-T. Suttmeier. *A posteriori error control and mesh adaptation for FE models in Elasticity and Elasto-Plasticity*. Preprint 07/1997, Institut für Angewandte Mathematik, Universität Heidelberg, 1997.
- [95] R. Rannacher und F.-T. Suttmeier. A posteriori error estimation and mesh adaptation for finite element models in elasto-plasticity. *Proc. Workshop „Advances in Adaptive Computational Methods Mechanics“*, Cachan, 17.–19. Sept. 1997.
- [96] R. Rannacher und F.-T. Suttmeier. A posteriori error control in finite element methods via duality techniques: application to perfect plasticity. *Computational Mechanics*, 21:123-133, 1998.
- [97] M.M. Rashid. Material state remapping in computational solid mechanics. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 55:431–450, 2002.
- [98] J. Riccius. *Adaptive Methoden zur statischen und dynamischen Analyse von Flächentragwerken mit linearen Finiten Elementen*. Dissertation, Institut für Mechanik, Universität Karlsruhe, 1997.
- [99] J. Riccius und K. Schweizerhof. Aspects of hierarchical h -adaptive dynamic analyses. *Proc. Third International Conference on Computational Structures Technology*, 1996.

- [100] I. Romero und L.M.. Lacoma. Analysis of error estimators for the semidiscrete equations of linear solid structural dynamics. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 195:2674–2696, 2006.
- [101] I. Romero und L.M.. Lacoma. A methodology for the formulation of error estimators for time integration in linear solid and structural dynamics. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 66:635–660, 2006.
- [102] M. Rüter. *Error-controlled Adaptive Finite Element Methods in Large Strain Hyperelasticity and Fracture Mechanics*. Dissertation, Universität Hannover, 2004.
- [103] M. Rüter, S. Korotov und C. Steenbock. Goal-oriented Error Estimates based on Different FE-Spaces for the Primal and the Dual Problem with Applications to Fracture Mechanics. *Computational Mechanics*, 39(6):787–797, 2007.
- [104] M. Rüter, E. Stein, F. Larsson, P. Hansbo und K. Runesson. Strategies for goal-oriented a posteriori error measures in nonlinear elasticity. *Proc. European Conference on Computational Mechanics.*, Krakau, Juni 2001.
- [105] K. Schweizerhof, J. Neumann und S. Kizio. On time integration error estimation and adaptive time stepping in structural dynamics. *Proc. Appl. Math. Mech.*, 4:35–38, 2004.
- [106] J.C. Simo und F. Armero. Geometrically non-linear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 33:1413–1449, 1992.
- [107] J.C. Simo und T.J.R. Hughes. On the variational foundations of assumed strain methods. *Journal of Applied Mechanics*, 53:51–54, 1986.
- [108] J.C. Simo und M.Si. Rifai. Geometrically non-linear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 33:1413–1449, 1990.
- [109] P. Solin und L. Demkowicz. Goal-Oriented hp-Adaptivity for Elliptic Problems. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 193:449–468, 2004.
- [110] H. Steeb. *Fehlerschätzer für FE-Berechnungen bei entfestigenden Materialien*. Dissertation, Universität Stuttgart, 2002.
- [111] E. Stein, C. Carstensen, B. Seifert und S Ohnimus. Adaptive finite element analysis of geometrically nonlinear plates and shells, especially buckling. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 37:2631–2655, 1994.
- [112] G. Strang und G.J. Fix. *An Analysis of the Finite Element Method*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1973.
- [113] B. A. Szabo und I. Babuska. *Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, 1991.

- [114] N.E. Wiberg und X.D. Li. Superconvergent solution and a posteriori L_2 norm error estimate. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 10:313–320, 1994.
- [115] W.L. Wood. *Practical Time-stepping Schemes*. Clarendon Press, Oxford University Press, 1990.
- [116] P. Wriggers. *Nichtlineare Finite-Element-Methoden*. Springer, 2001.
- [117] Z. Yue und D.H. Robbins Jr. Adaptive superposition of finite element meshes in elastodynamic problems. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 63:1604–1635, 2005.
- [118] L.F. Zeng. *On adaptive Finite Element procedures for static and dynamic problems*. Dissertation, Chalmers University of Technology, Göteborg, Schweden, 1991.
- [119] L.F. Zeng und N.E. Wiberg. Adaptive FE-analysis procedure and error estimations for 2d linear elastic problems. *Proc. Third International Conference on Numerical Methods in Engineering*, Swansea, 7.–11. Jan. 1990.
- [120] O.C. Zienkiewicz und R.L. Taylor. *The Finite Element Method - Volume 1: The Basis*. Butterworth-Heinemann, 2000.
- [121] O.C. Zienkiewicz und Y.M. Xie. A simple local error estimate and an adaptive time-stepping procedure for dynamic analysis. *Earthquake Eng. Structural Dyn.*, 22:871–887, 1991.
- [122] O.C. Zienkiewicz und J.Z. Zhu. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 24:337–357, 1987.
- [123] O.C. Zienkiewicz und J.Z. Zhu. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1: The recovery technique. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 33:1131–1364, 1992.
- [124] O.C. Zienkiewicz und J.Z. Zhu. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 2: Error estimates and adaptivity. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 33:1365–1382, 1992.

Anhang A

Mathematische Grundlagen

In diesem Abschnitt werden kurz einige mathematische Beziehungen angegeben, die in der vorliegenden Arbeit verwendet werden. Für ausführlichere Darstellungen wird auf das Fachschrifttum verwiesen.

A.1 Rechenregeln für Tensoren

A.1.1 Tensoralgebra

Indizes:

$$i, j, k, l, m, n \in \{1, 2, 3\}$$

Kroneckersymbol:

$$\delta_{ij} = \delta^{ij} = \delta_i^j = \delta_j^i = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

Summationskonvention

Tritt in einem Produkt ein Index zweimal auf, einmal kovariant und einmal kontravariant, dann ist über diesen Index zu summieren.

Orthonormale Basis

Die Basisvektoren $\mathbf{e}_i = \mathbf{e}^i$ der orthonormalen Basis stehen senkrecht aufeinander und besitzen die Länge eins.

Darstellung Vektoren (Tensoren 1.Stufe)

$$\mathbf{a} = a_i \mathbf{G}^i = a^i \mathbf{G}_i$$

Die kovarianten Basisvektoren \mathbf{G}_i stehen ebenso wie die kontravarianten Basisvektoren \mathbf{G}^i in der Regel nicht senkrecht aufeinander und sind nicht normiert.

Duale Basis

Die dualen Basisvektoren \mathbf{G}_i und \mathbf{G}^j stehen senkrecht aufeinander.

$$\mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}^j = \delta_i^j$$

Metrikoeffizienten

$$G_{ij} = G_{ji} = \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j, \quad G^{ij} = G^{ji} = \mathbf{G}^i \cdot \mathbf{G}^j$$

Mit Hilfe der Metrikoeffizienten lassen sich die dualen Basen ineinander überführen:

$$\mathbf{G}_i = G_{ij} \mathbf{G}^j, \quad \mathbf{G}^i = G^{ij} \mathbf{G}_j$$

Metriktenor

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= G_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j = \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}_i = \\ \mathbf{G}^T &= G_{ji} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j = \mathbf{G}_j \otimes \mathbf{G}^j = \\ \mathbf{G}^{-T} &= G^{ji} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j = \mathbf{G}^j \otimes \mathbf{G}_j = \\ \mathbf{G}^{-1} &= G^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j = \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}^j \end{aligned}$$

Addition von Vektoren

$$\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = a_i \mathbf{G}^i \pm b_j \mathbf{G}^j = (a_i \pm b_i) \mathbf{G}^i$$

Inneres Produkt zweier Vektoren

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (a_i \mathbf{G}^i) \cdot (b_j \mathbf{G}^j) = a_i b_j \mathbf{G}^i \cdot \mathbf{G}^j = a_i b_j G^{ij} \\ &= (a^i \mathbf{G}_i) \cdot (b^j \mathbf{G}_j) = a^i b^j \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j = a^i b^j G_{ij} \\ &= (a^i \mathbf{G}_i) \cdot (b_j \mathbf{G}^j) = a^i b_j \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}^j = a^i b_j \delta_i^j = a^i b_i \\ &= (a_i \mathbf{G}^i) \cdot (b^j \mathbf{G}_j) = a_i b^j \mathbf{G}^i \cdot \mathbf{G}_j = a_i b^j \delta_j^i = a_i b^i \\ &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \end{aligned}$$

Darstellung von Tensoren 2. Stufe

$$\mathbf{A} = A_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j = A^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j = A_i^j \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}_j = A^i_j \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}^j$$

Addition von Tensoren

Tensoren gleicher Stufe über den gleichen Basen werden addiert, indem man ihre Koordinaten addiert:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = A^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j + B^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j = (A^{ij} + B^{ij}) \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j$$

Multiplikation mit einem Faktor

$$\mathbf{C} = \lambda \mathbf{A} \implies C^{ij} = \lambda A^{ij}$$

Verjüngendes Produkt

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{u} &= (A^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j) \cdot (u_k \mathbf{G}^k) = A^{ij} u_j \mathbf{G}_i \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{A} &= (u^k \mathbf{e}_k) \cdot (A^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = u_i A^{ij} \mathbf{e}_j \end{aligned}$$

Zweifache Verjüngung

Die zweifache Verjüngung von Tensoren entspricht zwei aufeinanderfolgenden inneren Produkten. Dabei sind die beiden folgenden Fälle zu unterscheiden:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} : \mathbf{B} &= A^{ij} B^{kl} (\mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j) : (\mathbf{G}_k \otimes \mathbf{e}_l) = A^{ij} B^{kl} (\mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_k) (\mathbf{G}_j \cdot \mathbf{G}_l) = A^{ij} G_{ik} G_{jl} B^{kl} = A^{ij} B_{ij} \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= A^{ij} B^{kl} (\mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j) \cdot (\mathbf{G}_k \otimes \mathbf{G}_l) = A^{ij} B^{kl} (\mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_l) (\mathbf{G}_j \cdot \mathbf{G}_k) = A^{ij} G_{il} G_{jk} B^{kl} = A^{ij} B_{ji} \end{aligned}$$

Die zweifache Verjüngung ist kommutativ, d.h.:

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = \mathbf{B} : \mathbf{A} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

Transponieren eines Tensors 2. Stufe

Sei \mathbf{A} ein Tensor 2. Stufe, dann muss der transponierte Tensor \mathbf{A}^T für beliebige Vektoren \mathbf{u} und \mathbf{v} die folgende Beziehung erfüllen:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{A} \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}^T \mathbf{u}$$

Mit $\mathbf{A} = \mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$ folgt daraus: $\mathbf{A}^T = \mathbf{y} \otimes \mathbf{x}$.

Symmetrie und Antisymmetrie eines Tensors 2. Stufe

Der Tensor \mathbf{A} ist symmetrisch, wenn er die Gleichung

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{A} \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \mathbf{u} \implies \mathbf{A} = \mathbf{A}^T$$

erfüllt. Der Tensor \mathbf{A} ist antisymmetrisch, wenn er die Gleichung

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{A} \mathbf{v} = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \mathbf{u} \implies \mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$$

erfüllt.

Symmetrische und antisymmetrische Zerlegung eines Tensors 2. Stufe

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) + \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T) \\ &= \mathbf{A}^{sym} + \mathbf{A}^{asy} \end{aligned}$$

Spur eines Tensors 2. Stufe

Die Spur eines Tensors 2. Stufe ergibt sich durch zweifache Verjüngung mit seinen dualen Basen:

$$\begin{aligned} Sp(\mathbf{A}) = Sp(A^{ij}\mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j) &= \mathbf{G}^k \cdot \mathbf{A}\mathbf{G}_k = \delta_i^k A^{ij} G_{jk} = A^{kj} G_{jk} \\ &= \mathbf{G}_k \cdot \mathbf{A}\mathbf{G}^k = G_{ki} A^{ij} \delta_j^k = G_{ki} A^{ik} \end{aligned}$$

A.1.2 Tensoranalysis

Gradient

$$\text{Grad}(\cdot) = \frac{(\cdot)}{\partial \xi^i} \otimes \mathbf{G}^i$$

Divergenz

$$\text{Div}(\mathbf{A}) = \text{Grad}(\mathbf{A}) : \mathbf{G} = \left(\frac{\partial A^{ij}}{\partial \xi^k} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j \otimes \mathbf{G}^k \right) : \mathbf{G}^l \otimes \mathbf{G}_l = \frac{\partial A^{ik}}{\partial \xi^k} \mathbf{G}_i$$

Rechenregeln für die Divergenz

$$\begin{aligned} \text{Div}(\alpha \mathbf{A}) &= \mathbf{A}^T \cdot \text{Grad} \alpha + \alpha \text{Div}(\mathbf{A}) \\ \text{Div}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}) &= \mathbf{a} \cdot \text{Div}(\mathbf{A}^T) + \mathbf{A}^T : \text{Grad} \mathbf{a} \end{aligned}$$

Gaußscher Integralsatz (Divergenztheorem)

$$\int_{\mathcal{B}_0} \text{Div} \mathbf{A} dV = \int_{\partial \mathcal{B}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{N} dA \quad (\mathbf{N} \text{ ist äußere Flächennormale}).$$

Gateaux-Ableitung

Ist $\mathbf{A}(\mathbf{X})$ eine skalar-, vektor- oder tensorwertige Funktion einer skalar-, vektor- oder tensorwertigen Größe \mathbf{X} , dann ist

$$D\mathbf{A}(\mathbf{X}) \cdot \Delta\mathbf{X} = \frac{d}{d\epsilon}[\mathbf{A}(\mathbf{X} + \epsilon\Delta\mathbf{X})]_{\epsilon=0}$$

die Gateaux-Ableitung von \mathbf{A} in Richtung von $\Delta\mathbf{X}$.

Linearisierung

Ist $\mathbf{A}(\mathbf{X})$ eine skalar-, vektor- oder tensorwertige Funktion einer skalar-, vektor- oder tensorwertigen Größe \mathbf{X} , dann ist

$$L[\mathbf{A}]_{\mathbf{X}=\bar{\mathbf{X}}} = [\mathbf{A}(\mathbf{X}) + D\mathbf{A}(\mathbf{X}) \cdot \Delta\mathbf{X}]_{\mathbf{X}=\bar{\mathbf{X}}}$$

die Linearisierung von \mathbf{A} an der Stelle $\bar{\mathbf{X}}$ in Richtung von $\Delta\mathbf{X}$.

A.2 Laplace-Transformation

Die Laplace-Transformation ist eine Integraltransformation. Sie ordnet (in dieser Arbeit zeitabhängigen) Funktion $f(t)$ eine Funktion $\bar{f}(s)$ der komplexen Variablen s zu:

$$\bar{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt \quad (\operatorname{Re}(s) > 0)$$

Symbolische Schreibweise

$$\bar{f}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

A.2.1 Ableitungssätze

Die Laplace-Transformierten der Ableitungen der Originalfunktion $f(t)$ nach der Variablen t lauten:

1. Ableitung

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = s \cdot \bar{f}(s) - f(0)$$

2. Ableitung

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{d^2 f(t)}{dt^2} \right\} = s^2 \cdot \bar{f}(s) - s \cdot f(0) - \frac{df(0)}{dt}$$

A.2.2 Faltungssatz

Faltungsprodukt

Unter dem Faltungsprodukt $f_1(t) * f_2(t)$ zweier Originalfunktionen $f_1(t)$ und $f_2(t)$ versteht man das Integral:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) dt$$

Faltungssatz

Die Laplace-Transformierte des Faltungsproduktes $f_1(t) * f_2(t)$ ist gleich dem Produkt der Laplace-Transformierten von $f_1(t)$ und $f_2(t)$:

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \mathcal{L}\{f_1(t)\} \cdot \mathcal{L}\{f_2(t)\}$$

A.3 Linearisierung von Funktionalen

Ein wichtiges Werkzeug bei der numerischen Behandlung nichtlinearer Probleme ist die Linearisierung der auftretenden Funktionalen, was die Darstellung der Funktionalen mit Hilfe von Taylorreihenentwicklungen mit Restglied erfordert. Die Restglieder treten dabei in Form von Integralen auf. Nachfolgend sind einige gebräuchliche Taylorreihenentwicklungen für Funktionalen und semilineare Formen angegeben, welche im Rahmen dieser Arbeit benötigt werden. Die nachfolgende Übersicht ist dabei im Wesentlichen aus ODEN & PRUDHOMME [79] entnommen.

Sei V ein Banach-Raum, $a(\cdot; \cdot)$ eine auf V definierte semilineare Form und $Q(\cdot)$ ein auf V definiertes Funktional:

$$\begin{aligned} a &: V \times V \rightarrow \mathbb{R} \\ Q &: V \rightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

Die Notation ist hier so gewählt, dass $a(\cdot; \cdot)$ linear in allen Argumenten nach dem Semikolon ist, d.h. beispielsweise dass $a(\mathbf{u}; \mathbf{w})$ linear in \mathbf{w} ist aber nichtlinear in \mathbf{u} sein

kann. Nachfolgend wird angenommen, dass $a(\cdot; \cdot)$ und $Q(\cdot)$ ausreichend oft differenzierbar sind. Das bedeutet, dass die Grenzwerte

$$\begin{aligned} a'(\mathbf{u}; \mathbf{p}, \mathbf{w}) &= \lim_{\Theta \rightarrow 0} [a(\mathbf{u} + \Theta \mathbf{p}; \mathbf{w}) - a(\mathbf{u}; \mathbf{w})], \\ a''(\mathbf{u}; \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{w}) &= \lim_{\Theta \rightarrow 0} [a'(\mathbf{u} + \Theta \mathbf{q}; \mathbf{p}, \mathbf{w}) - a'(\mathbf{u}; \mathbf{p}, \mathbf{w})], \\ a'''(\mathbf{u}; \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{w}) &= \lim_{\Theta \rightarrow 0} [a''(\mathbf{u} + \Theta \mathbf{r}; \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{w}) - a''(\mathbf{u}; \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{w})], \dots, \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} Q'(\mathbf{u}; \mathbf{p}) &= \lim_{\Theta \rightarrow 0} [Q(\mathbf{u} + \Theta \mathbf{p}) - Q(\mathbf{u})], \\ Q''(\mathbf{u}; \mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \lim_{\Theta \rightarrow 0} [Q'(\mathbf{u} + \Theta \mathbf{q}; \mathbf{p}) - Q'(\mathbf{u}; \mathbf{p})], \\ Q'''(\mathbf{u}; \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) &= \lim_{\Theta \rightarrow 0} [Q''(\mathbf{u} + \Theta \mathbf{r}; \mathbf{p}, \mathbf{q}) - Q''(\mathbf{u}; \mathbf{p}, \mathbf{q})], \dots, \end{aligned}$$

existieren. Dann lassen sich $a(\cdot; \cdot)$ und $Q(\cdot)$ in Taylorreihen mit Restglied entwickeln. Einige gebräuchliche Entwicklungen sind nachfolgend angegeben.

Taylorreihenentwicklungen von $Q(\cdot)$:

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{u} + \mathbf{v}) - Q(\mathbf{u}) &= \int_0^1 Q'(\mathbf{u} + s\mathbf{v}; \mathbf{v}) ds, \\ Q(\mathbf{u} + \mathbf{v}) - Q(\mathbf{u}) &= Q'(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \int_0^1 Q''(\mathbf{u} + s\mathbf{v}; \mathbf{v}, \mathbf{v})(1-s) ds, \\ Q(\mathbf{u} + \mathbf{v}) - Q(\mathbf{u}) &= \frac{1}{2} Q'(\mathbf{u}; \mathbf{v}) + \frac{1}{2} Q'(\mathbf{u}; \mathbf{v}) + \int_0^1 Q'''(\mathbf{u} + s\mathbf{v}; \mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{v})(s-1) ds \end{aligned}$$

Taylorreihenentwicklungen von $a(\cdot; \cdot)$:

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u} + \mathbf{v}; \mathbf{w}) - a(\mathbf{u}; \mathbf{w}) &= \int_0^1 a'(\mathbf{u} + s\mathbf{v}; \mathbf{v}, \mathbf{w}) ds, \\ a(\mathbf{u} + \mathbf{v}; \mathbf{w}) - a(\mathbf{u}; \mathbf{w}) &= a'(\mathbf{u}; \mathbf{v}, \mathbf{w}) + \int_0^1 a''(\mathbf{u} + s\mathbf{v}; \mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{w})(1-s) ds \end{aligned}$$

Lebenslauf

Name	Stephan Kizio
Geburtsdatum	13. Juni 1975
Geburtsort	Koblenz
Schulbildung	1981 – 1985 Grundschule 1985 – 1994 Justus-Knecht-Gymnasium Bruchsal Abschluss mit allgemeiner Hochschulreife
Studium	10.1994 – 7.1999 Bauingenieurwesen an der Universität Kassel 1. Studienstufe Abschluss als Diplom-Ingenieur 10.1999 – 7.2001 Bauingenieurwesen an der Universität Kassel 2. Studienstufe Abschluss als Diplom-Ingenieur
Beruf	seit 8.2001 wissenschaftlicher Angestellter am Institut für Mechanik der Universität Karlsruhe (TH)

