

Universität Karlsruhe (TH)

Schriftenreihe des Instituts für Technische Mechanik  
Bd. 9

Frank Dienerowitz

**Der Helixaktor – Zum Konzept  
eines vorverwundenen Biegeaktors**



universitätsverlag karlsruhe



Frank Dienerowitz

**Der Helixaktor – Zum Konzept  
eines vorverwundenen Biegeaktors**

**Universität Karlsruhe (TH)**

**Schriftenreihe des Instituts für Technische Mechanik**

Band 9

# **Der Helixaktor – Zum Konzept eines vorverwundenen Biegeaktors**

von  
Frank Dienerowitz



---

universitätsverlag karlsruhe

Dissertation, Universität Karlsruhe (TH)  
Fakultät für Maschinenbau  
Tag der mündlichen Prüfung: 15. Februar 2008  
Referent: Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Seemann  
Korreferent: Jun.-Prof. Dr.-Ing. Thomas Sattel

## Impressum

Universitätsverlag Karlsruhe  
c/o Universitätsbibliothek  
Straße am Forum 2  
D-76131 Karlsruhe  
www.uvka.de



Dieses Werk ist unter folgender Creative Commons-Lizenz  
lizenziert: <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/de/>

Universitätsverlag Karlsruhe 2008  
Print on Demand

ISSN: 1614-3914  
ISBN: 978-3-86644-232-0

# Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Technische Mechanik der Universität Karlsruhe (TH).

Herr Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Seemann skizzierte erste Ideen zum „Helixaktor“, er regte zu dieser Arbeit an, er betreute sie wissenschaftlich und er übernahm das Hauptreferat. Dafür danke ich ihm sehr herzlich, insbesondere für die mir gewährte Freiheit, die angenehme Zusammenarbeit sowie die stete Unterstützung und Förderung. Ein besonderer Dank gilt Herrn Jun.-Prof. Dr.-Ing. Thomas Sattel vom Heinz Nixdorf Institut der Universität Paderborn. Er übernahm das Korreferat zu dieser Arbeit. Seine kritischen jedoch stets fröhlichen und förderlichen Anmerkungen trugen sehr zum Gelingen dieser Arbeit bei.

Außerdem möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr.-Ing. Dr. h.c. Jörg Wauer und bei Herrn Prof. Dr.-Ing. Carsten Proppe bedanken. Sie begleiteten meine Arbeit mit großem Interesse und gaben in zahlreichen Diskussionen wichtige Impulse, insbesondere zu den Kapiteln 3 und 4. Allen Mitarbeitern des Instituts für Technische Mechanik danke ich für die wunderbare Arbeitsatmosphäre, auch für die neugierig freudige Aufnahme eines Dresdners in Karlsruhe.

Ihren besonderen Anteil an dieser Arbeit haben meine Studien- und Diplomarbeiter Carsten Fleck, Nicole Gaus, Karolina Bach, Lin Jia, Andreas Brey, Christoph Baum und Björn Goldschmidt. Ihre Fragen und Beiträge ließen den „Helixaktor“ wachsen und es war mir stets eine große Freude, mit ihnen zusammenzuarbeiten.

Unendlich dankbar bin ich auch meiner Familie, insbesondere meiner lieben Maria. Auf euch konnte ich mich immer verlassen. Dort wo ihr seid, ist mein Zuhause.

Karlsruhe, im April 2008  
Frank Dienerowitz





# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Ausgewählte Begriffe . . . . .	2
1.2	Anmerkungen zur mathematischen Schreibweise . . . . .	3
1.3	Motivation zum Helixaktor . . . . .	5
1.4	Bekannte Konzepte bidirektionaler Biegeaktoren . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Realisierung des Prototyps</b>	<b>11</b>
2.1	Schraubenfläche . . . . .	12
2.1.1	Hauptkrümmungen . . . . .	13
2.1.2	Faserdehnung . . . . .	14
2.1.3	Faserkrümmung und Faserdrillung . . . . .	17
2.1.4	Abwickelbarkeit . . . . .	18
2.2	Vorverwundene Piezoaktoren . . . . .	19
2.2.1	Helimorph . . . . .	19
2.2.2	Macro Fiber Composite . . . . .	21
2.3	Prototyp des Helixaktors . . . . .	25
2.3.1	Vorverwindung, Querschnittsbreite und aktive Elemente . . . . .	25
2.3.2	Querschnittshöhe . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Mathematische Modelle des Helixaktors</b>	<b>31</b>
3.1	Vorbemerkungen . . . . .	32
3.1.1	Zum Materialverhalten der MFCs . . . . .	32
3.1.2	Zum Aktor-Träger-Verbund . . . . .	33
3.1.3	Zur Vorverwindung . . . . .	35
3.2	Helixaktor als Euler-Bernoulli-Balken . . . . .	38
3.2.1	Grundgleichungen der linearen Piezoelektrizität . . . . .	39
3.2.2	Hauptachsensystem . . . . .	39
3.2.3	Annahmen und Einschränkungen . . . . .	42
3.2.4	Verschiebung und elektrische Feldstärke . . . . .	46
3.2.5	Querschnittskenngrößen . . . . .	48
3.3	Statisches Modell . . . . .	50
3.4	Dynamisches Modell . . . . .	53
3.4.1	Prinzip von Hamilton für den Helixaktor . . . . .	53
3.4.2	Diskretisieren . . . . .	55
3.4.3	Finite Elemente-Ansätze . . . . .	58
3.4.4	Einbau der Rand- und Nebenbedingungen . . . . .	61
3.4.5	Lösen der Bewegungsgleichungen . . . . .	62

3.4.6	Notwendige Elementanzahl . . . . .	63
3.4.7	Eigenfrequenzen und Eigenschwingungsformen . . . . .	64
<b>4</b>	<b>Arbeitsraum, Optimierung und inverse Aufgabe</b>	<b>73</b>
4.1	Berechnung des Arbeitsraumes . . . . .	74
4.1.1	Lineare Optimierung . . . . .	74
4.1.2	Graham Scan . . . . .	75
4.1.3	Sortieren der Richtungsvektoren . . . . .	77
4.1.4	Flächeninhalt des Arbeitsraumes . . . . .	79
4.1.5	Gestaltmaß des Arbeitsraumes . . . . .	80
4.1.6	Beispiele zum Arbeitsraum . . . . .	81
4.2	Optimale Aktorgestaltung . . . . .	81
4.2.1	Unverwundener, bidirektionaler Biegeaktor . . . . .	84
4.2.2	Formulieren des Optimierungsproblems . . . . .	84
4.2.3	Parameterbereich, Einstellen der Optimierungsschritte . . . . .	87
4.2.4	Optimale Topologie . . . . .	89
4.3	Inverse Aufgabe des Helixaktors . . . . .	95
4.3.1	Methode der kleinsten Norm des Eingangsvektors . . . . .	95
4.3.2	Methode der Pseudoinversen . . . . .	96
4.3.3	Sektormethode . . . . .	96
<b>5</b>	<b>Experimente</b>	<b>101</b>
5.1	Versuchsaufbau . . . . .	102
5.2	Quasistatisches Übertragungsverhalten . . . . .	106
5.2.1	Kriechverhalten . . . . .	106
5.2.2	Identifikation der statischen Übertragungsmatrix . . . . .	106
5.3	Dynamisches Übertragungsverhalten . . . . .	110
5.3.1	Struktur des dynamischen Modells . . . . .	110
5.3.2	Experimentelle Modalanalyse . . . . .	112
5.3.3	Identifizierte Eigenlösungen . . . . .	115
5.3.4	Gemessenes dynamisches Modell . . . . .	117
5.4	Positionsregelung . . . . .	120
5.4.1	Reglerstruktur . . . . .	120
5.4.2	Beispiele . . . . .	124
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>127</b>
6.1	Zusammenfassung . . . . .	127
6.2	Ausblick . . . . .	128
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>130</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

Intelligente Werkstoffe wie Formgedächtnislegierungen und Piezokeramiken sind außergewöhnliche Werkstoffe. Beispielsweise transformieren piezokeramische Aktoren elektrische Energie *direkt* in mechanische Energie. Umwege über Magnetfelder wie bei Elektromotoren sind nicht erforderlich. Intelligente Werkstoffe erlauben faszinierende, neuartige Anwendungen: Medizinische Werkzeuge, angetrieben durch Formgedächtnislegierungen, aktive Schwingungsdämpfung von Papiermaschinen mittels Piezoaktoren oder Flugzeuge mit aktiv deformierbaren Tragflügeln - sie sind nur einige Beispiele der Vielfalt. Die vorliegende Arbeit steht genau in diesem Kontext. Sie diskutiert einen außergewöhnlichen Biegeaktor, der entlang seiner Stabachse vorverwunden ist und der durch Piezokeramiken angetrieben wird. Der Aktor wird als *Helixaktor* bezeichnet, um den korrekten, jedoch etwas sperrigen Begriff *vorverwundener Biegeaktor* abzukürzen.

Der Helixaktor hat die Gestalt eines vorverwundenen Stabes. Seine Oberflächen sind gekrümmt und nicht abwickelbar. Piezokeramiken werden zumeist eben gefertigt und das Aufbringen dieser spröden Werkstoffe auf gekrümmte Oberflächen oder das Fertigen gekrümmter Piezoaktoren sind Sonderfälle.

Beim Helixaktor sind die Querverschiebungen der Stabachse stark gekoppelt. Ursache ist die Vorverwindung. Studien zum Verständnis dieser Kopplung, zu sinnvollen Modellansätzen und zu Lösungswegen sind seit mehr als einem Jahrhundert bekannt. Auch in jüngster Zeit finden sich Beiträge zu vorverwundenen Stäben, beispielsweise zu Rotorblättern von Windkraftwerken oder zu adaptiven Tragflügeln. Das Gebiet ist somit nach wie vor aktuell.

Die schon genannten Kopplungen der Querverschiebungen wirken sich auf den möglichen Arbeitsraum des Helixaktors aus, das heißt, auf das Gebiet der anfahrbaren Positionen. Der Arbeitsraum lässt sich ohne tiefergehendes Verständnis dieser Kopplungen nicht bestimmen. Ähnlich simple Zusammenhänge wie bei unverwundenen Biegeaktoren sind nicht zu erwarten.

Die wissenschaftlichen Fragestellungen des Helixaktors sind spannend und sie führen Ergebnisse aus unterschiedlichen Gebieten zusammen. Insbesondere das motiviert die Untersuchungen zum Helixaktor. Interessante Anwendungen für den Helixaktor sind durchaus denkbar, sie sind jedoch nicht Schwerpunkt dieser Arbeit.

Im Anschluss an diese Einleitung wird das Konzept des Helixaktors eingeführt und es werden bisher bekannte Biegeaktoren vorgestellt. Kapitel 2 diskutiert die Realisierung eines Prototyps und stellt ihn detailliert vor. Kapitel 3 widmet sich der Modellbildung. Auf der Grundlage etablierter Stabtheorien werden ein statisches und ein

dynamisches Modell entwickelt. Kapitel 4 erörtert den Arbeitsraum des Helixaktors, es diskutiert seine optimale Gestaltung sowie das Lösen der inversen Aufgabe. Kapitel 5 beschreibt Experimente zum Prototyp. Darin werden die Modelle validiert und es wird eine einfache Positionsregelung vorgestellt. Die Arbeit schließt mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick.

## 1.1 Ausgewählte Begriffe

**Zum Begriff „Biegeaktor“:** Ein Biegeaktor ist ein *Biegewandler*. Die Spezifizierung *Biegeaktor* folgt aus der vorgesehenen Anwendung. Durch äußere Anregung, beispielsweise durch ein elektrisches Feld bei Piezoaktoren, wird an erster Stelle eine Verschiebung und/oder Kraftwirkung am Aktorende realisiert. Am Sensoreffekt besteht in dieser Arbeit kein Interesse.

Biegeaktoren mit eindimensionalen Arbeitsräumen werden hier als *unidirektionale Biegeaktoren* bezeichnet. Biegeaktoren mit zweidimensionalen Arbeitsräumen sind analog dazu *bidirektionale Biegeaktoren*.

Biegeaktoren sind zumeist Laminare aus aktiven und passiven Schichten. Entsprechend ihres Aufbaus sind die Begriffe *Monomorph*, *Bimorph* und *Trimorph* üblich [79].

**Zum Präfix „Piezo“:** Piezoelektrische Keramiken wie Blei-Zirkonat-Titanat sind die Basiswerkstoffe piezoelektrischer Wandler. Sie sind polykristalline Festkörper und spezielle Ferroelektrika. Ferroelektrizität schließt Piezoelektrizität immer ein. „Ferroelektrische Keramik“ wäre also auch zutreffend. Um diese Begriffe abzukürzen, hat sich das Präfix „Piezo“ weitgehend durchgesetzt. „Piezowandler“, „Piezowerkstoff“ und „Piezofaser“ sind einige Beispiele. Auch in dieser Arbeit wird „Piezo“ in dieser üblichen Konvention eingesetzt und impliziert dabei immer: „auf Piezoelektrizität beruhend“ beziehungsweise „Piezoelektrizität zeigend“. Nur falls notwendig, werden detaillierte Bezeichnungen verwendet.

**Zum Begriff „Intelligenter Werkstoff“:** Piezokeramiken, Formgedächtnislegierungen, elektroaktive Polymere und einige weitere Werkstoffe werden häufig unter dem Begriff „intelligente Werkstoffe“ zusammengefasst. Im englischsprachigen Raum hat sich der Begriff „smart materials“ durchgesetzt. Der Begriff kann irritieren. Der Werkstoff denkt nicht und er trifft selbst keine Entscheidungen.

„Intelligente Werkstoffe“ koppeln verschiedene Energieformen. Beispielsweise wandeln piezoelektrische Keramiken elektrische Energie in mechanische Energie und umgekehrt. Aufgrund dieser Eigenschaft - des Wandels - ist es möglich, ein und das selbe Bauteil zum selben Zeitpunkt sowohl als Aktor als auch als Sensor einzusetzen. Getrennte Sensoren und Aktoren scheinen nicht mehr notwendig. Voraussetzung sind entsprechende Regelungskonzepte. Ist das gegeben, so kann dies zur Bezeichnung „intelligente Systeme“ motivieren. Solche Systeme werden auch „adaptronische Systeme“ oder „smart structures“ genannt.

Alternativ zu „intelligenter Werkstoff“ sind auch weitere Begriffe für die genannten Werkstoffe denkbar. Sie wandeln Energieformen, was die Bezeichnung „Wandlerwerkstoff“ erlaubt [22]. Die Werkstoffe vereinen anders als klassische Konstruktionswerkstoffe wie Stahl mehrere Funktionen. Sie sind Aktor, Sensor und im besten Fall auch

tragende Struktur. Daraus folgt der Begriff „Multifunktionaler Werkstoff“ [102]. Insbesondere Piezokomposite werden flächig auf Strukturen geklebt. Das heißt, ihre Lasteinleitung ist verteilt und nicht, wie bis dahin üblich, konzentriert an einzelnen Punkten. Die Bezeichnungen „Flächenaktor“ beziehungsweise „Flächensensor“ sind passend [102].

Die genannten Begriffe sind exakter als „intelligenter Werkstoff“. Insbesondere „Wandlerwerkstoff“ ist sicher treffend. Nichtsdestotrotz wird in dieser Arbeit die Bezeichnung „intelligenter Werkstoff“ beibehalten.

## 1.2 Anmerkungen zur mathematischen Schreibweise

Die Arbeit folgt, soweit möglich, den üblichen Schreibweisen der Technischen Mechanik und der Mathematik [6]. Einige Punkte und Abweichungen werden jedoch gesondert herausgestellt, um das Lesen der Arbeit zu erleichtern.

**Summenkonvention, Vektoren, Matrizen:** Die in der Tensorrechnung etablierte Einsteinsche Summenkonvention, das heißt, das Summieren über doppelt auftretende Indizes, wird hier allgemein zum Abkürzen einer Summation

$$\tilde{b}_j = \sum_i a_{ji} b_i = a_{ji} b_i \quad (1.1)$$

über den vorgesehenen Wertebereich eines Indexes  $i$  genutzt.

Matrizen und Vektoren im Sinne der Matrizenrechnung werden mit fetten Großbuchstaben beziehungsweise fetten Kleinbuchstaben bezeichnet, beispielsweise  $\mathbf{M}$  und  $\mathbf{a}$ . Deren Elemente sind

$$\mathbf{M} = (M_{ij}) \quad (1.2)$$

beziehungsweise

$$\mathbf{a} = (a_i). \quad (1.3)$$

Die Elemente der Matrizen werden üblicherweise mit Kleinbuchstaben bezeichnet [6]. Davon wird hier abgewichen, um andere Größen problemlos mit Kleinbuchstaben bezeichnen zu können. Die Einheitsmatrix wird mit  $\mathbf{I}$  bezeichnet.

Vektoren im dreidimensionalen Raum im Sinne der Vektoralgebra werden mit

$$\vec{\mathbf{r}} = r_i \vec{\mathbf{e}}_i = \bar{r}_i \vec{\mathbf{b}}_i, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.4)$$

angegeben. Die Vektoren  $\vec{\mathbf{e}}_i$  sind die Basisvektoren des kartesischen Koordinatensystems<sup>1</sup>. Die Vektoren  $\vec{\mathbf{b}}_i$  sind die Basisvektoren des Hauptachsensystems, siehe Kapitel 3.2.2. Die  $r_i$  sind die kartesischen Koordinaten des Vektors. Die  $\bar{r}_i$  sind die krummlinigen Koordinaten des Vektors im Hauptachsensystem. Ist klar, in welchem Koordinatensystem  $\vec{\mathbf{r}}$  diskutiert wird, so werden die Basisvektoren weggelassen und es genügen die Tripel seiner Koordinaten

$$\vec{\mathbf{r}} = [r_1, r_2, r_3]^T \quad \text{bzw.} \quad \vec{\mathbf{r}} = [\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3]^T. \quad (1.5)$$

---

<sup>1</sup>Im Übrigen sind alle in dieser Arbeit verwendeten Koordinatensysteme raumfeste Koordinatensysteme.

Zum Teil werden die Koordinaten des Vektors als Elemente eines Spaltenvektors

$$\mathbf{r} = [r_1, r_2, r_3]^T \quad \text{bzw.} \quad \bar{\mathbf{r}} = [\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3]^T \quad (1.6)$$

ohne den Vektorpfeil angegeben. Somit sind  $\mathbf{r}$  und  $\bar{\mathbf{r}}$  keine Vektoren im Sinne der Vektoralgebra, sondern Spaltenvektoren im Sinne der Matrizenrechnung. Sie implizieren jedoch immer einen entsprechenden Vektor  $\vec{r}$ . Die zu wählende Darstellung (1.4) oder (1.6) orientiert sich an der anzugebenden Gleichung.

**Funktionen:** Die Sprungfunktion, auch Heaviside-Funktion, ist

$$\sigma(z) = \begin{cases} 0 & \text{für } z < 0 \\ 1 & \text{für } 0 \leq z \end{cases} . \quad (1.7)$$

Die Vorzeichenfunktion, auch Signum-Funktion, ist

$$\text{sign}(z) = \begin{cases} -1 & \text{für } z < 0 \\ 0 & \text{für } z = 0 \\ 1 & \text{für } z > 0 \end{cases} . \quad (1.8)$$

Soweit möglich und sinnvoll werden die Argumente von Funktionen beziehungsweise Unabhängigen von Feldgrößen nur bei ihrer Einführung angegeben und später zwecks kompakter Schreibweise weggelassen, beispielsweise anstatt  $u(t, z)$  nur  $u$ .

**Abkürzungen:** Es werden noch folgende Abkürzungen eingeführt: der Wert einer Feldgröße  $u(x)$  an einer Stelle  $x$

$$u|_x = u(x), \quad (1.9)$$

die partielle Ableitung nach einer Koordinate  $x$

$$u_{,x}(x) = \frac{\partial}{\partial x} u(x), \quad (1.10)$$

die partielle Ableitung nach der Koordinate  $z$

$$u'(z) = \frac{\partial}{\partial z} u(z) \quad (1.11)$$

sowie die Zeitableitung

$$\dot{u}(t) = \frac{d}{dt} u(t). \quad (1.12)$$

**Eigenkreisfrequenz:** Eigenfrequenz  $f_0$  und Eigenkreisfrequenz  $\omega_0$  werden einheitlich als *Eigenfrequenz* bezeichnet. Das ist durchaus üblich, siehe beispielsweise NATKE [64]. Zwischen Beiden vermittelt

$$\omega_0 = 2\pi f_0. \quad (1.13)$$

### 1.3 Motivation zum Helixaktor

Bei einigen intelligenten Werkstoffen sind die durch äußere Anregung erreichbaren Dehnungen nur minimal. Beispielsweise ermöglichen Piezokeramiken selbst bei großen Feldstärken nur wenige Promille Dehnungen. Somit lassen sich in Dehnungsrichtung mit vernünftigen Bauteilabmessungen nur kleine Verschiebungen realisieren. Biegeaktoren können hier Auswege anbieten. Ohne zusätzliches Getriebe transformieren sie aufgrund ihrer Kinematik kleine Dehnungen in große Verschiebungen. Sie sind für dieses Problem die einfachst mögliche Lösung.

Das Prinzip eines Biegeaktors ist wohlbekannt. Durch äußere Anregung wird die Stabachse gekrümmt. Die vormals gerade Stabachse wird um

$$\vec{\mathbf{r}}(z) = \begin{bmatrix} u(z) \\ v(z) \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

verschoben<sup>2</sup>. Gleichung (1.14) ist die Biegelinie des Aktors mit den Verschiebungsfeldern  $u(z)$  und  $v(z)$  in Richtung  $\vec{\mathbf{e}}_1$  und  $\vec{\mathbf{e}}_2$ . Der zugrunde liegende physikalische Effekt ist vorläufig nicht wichtig. Entscheidend ist, dass eine Krümmungsänderung der Stabachse

$$k(z) = f\{E(z)\} \quad (1.15)$$

in Abhängigkeit der Anregung  $E(z)$  eintritt. Häufig kann ein proportionaler Zusammenhang zwischen Anregung und Krümmung unterstellt werden, beispielsweise zwischen der Temperaturänderung eines Bimetalls und seiner Krümmung, also

$$k(z) \sim E(z). \quad (1.16)$$

Abbildung 1.1 zeigt einen unverwundenen Biegeaktor. Er ist linksseitig ( $z = 0$ ) fest eingespannt und an seinem rechten Ende ( $z = L$ ) frei. Es greifen keine weiteren Lasten an. Werden kleine Verschiebungen unterstellt, so gilt mit guter Näherung für den Krümmungsvektor<sup>3</sup>

$$\vec{\mathbf{k}}(z) = \begin{bmatrix} u''(z) \\ v''(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ k(z) \end{bmatrix}. \quad (1.17)$$

Der skizzierte Aktor zeigt lediglich Krümmungen in Richtung  $\vec{\mathbf{e}}_2$ . Mit Gleichung (1.17) gilt sofort für den Verschiebungsvektor des freien Endes (Index  $e$ )

$$\vec{\mathbf{u}}_e = \begin{bmatrix} u_e \\ v_e \end{bmatrix} = \int_0^L \int_0^z \begin{bmatrix} 0 \\ k(\bar{z}) \end{bmatrix} d\bar{z} dz. \quad (1.18)$$

In den meisten Fällen wird die erreichbare Krümmung begrenzt sein. Die Spannung an einem Piezoaktor darf beispielsweise nur innerhalb bestimmter Grenzen eingestellt werden. Das heißt,

$$k_{min} \leq k(z) \leq k_{max}, \quad (1.19)$$

<sup>2</sup>Vorerst werden Zeitabhängigkeiten vernachlässigt. Sie werden in Kapitel 3.4 beim Formulieren des dynamischen Modells eingeführt.

<sup>3</sup>Der *Krümmungsvektor*  $\vec{\mathbf{k}}(s) = \vec{\mathbf{r}}''(s)$  einer Raumkurve  $\vec{\mathbf{r}}(s)$  wird u.a. von SHIKIN in [88] eingeführt. Darin bezeichnet  $s$  die Bogenlänge, die hier näherungsweise  $z$  entspricht.

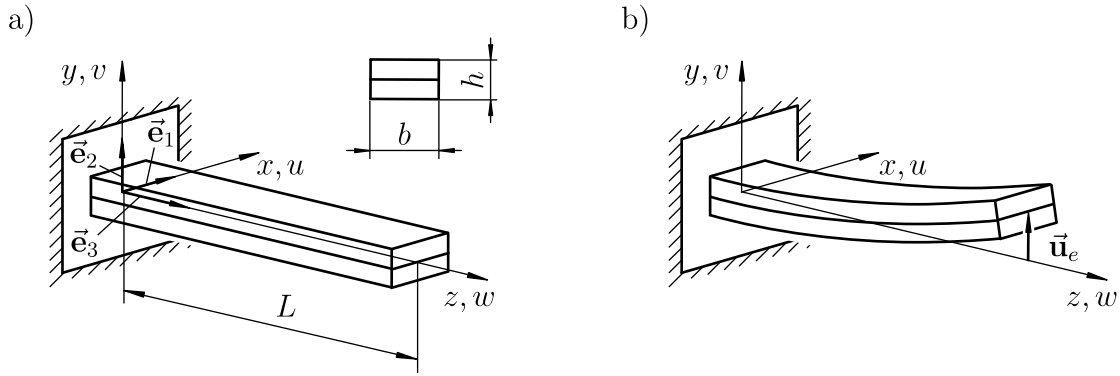


Abbildung 1.1: Unverwundener Biegeaktor a) ohne Anregung, b) mit Anregung.

wobei  $k_{min}$  und  $k_{max}$  die untere und die obere Grenze bezeichnen. Somit sind auch die möglichen Verschiebungen des Aktorendes begrenzt. Das Gebiet aller möglichen Verschiebungen, also das Gebiet aller erreichbaren Positionen, ist der Arbeitsraum des Aktors.

**Konzept des Helixaktors:** Der Arbeitsraum des Biegeaktors in Abbildung 1.1 ist offensichtlich nur eindimensional - eine Strecke. Wie auch immer  $k(z)$  gewählt wird, es sind keine Verschiebungen  $u_e \neq 0$  möglich. Biegeaktoren mit zweidimensionalem Arbeitsraum, also  $u_e \neq 0$ , sind jedoch ohne weiteres realisierbar. Beispielsweise können zwei unverwundene, zueinander verdrehte Biegeaktoren verbunden werden, siehe Abbildung 1.2. Ein solcher bidirektionaler Biegeaktor mit zweidimensionalem Arbeitsraum besitzt also mindestens zwei Bereiche, deren Krümmungen unabhängig voneinander beeinflusst werden können und deren Krümmungsrichtungen nicht zusammenfallen.

Ein außergewöhnlicher Vorschlag eines bidirektionalen Biegeaktors ist das Konzept des Helixaktors. Abbildung 1.2 illustriert das Konzept. Ein bis dahin unverwundener Biegeaktor wird dauerhaft vorverwunden. *Vorverwunden* heißt: Der Aktorquerschnitt bei  $z$  ist gegenüber dem Aktorquerschnitt bei  $z = 0$  um den Winkel

$$\varphi(z) = \vartheta z \quad (1.20)$$

verdreht. Alle weiteren Merkmale wie Querschnittsabmessungen und Werkstoffeigenschaften bleiben unverändert. Die Konstante  $\vartheta$  ist die Drillung

$$\vartheta = \frac{\varphi_e}{L}. \quad (1.21)$$

Sie wird in dieser Arbeit als konstant angenommen und berechnet sich aus der Verdrehung  $\varphi_e$  am Aktorende und der Aktorlänge  $L$ . Die Verdrehung  $\varphi_e$  am Aktorende wird hier auch als *Vorverwindung* bezeichnet.

Dank der Vorverwindung ändert der Krümmungsvektor seine Richtung entlang der Stabachse. Er zeigt in Richtung

$$\vec{\mathbf{b}}_2 = -\sin \varphi(z) \vec{\mathbf{e}}_1 + \cos \varphi(z) \vec{\mathbf{e}}_2. \quad (1.22)$$

Der Krümmungsvektor des Helixaktors beträgt in kartesischen Koordinaten

$$\vec{\mathbf{k}}(z) = \begin{bmatrix} u''(z) \\ v''(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \varphi(z) \\ \cos \varphi(z) \end{bmatrix} k(z). \quad (1.23)$$



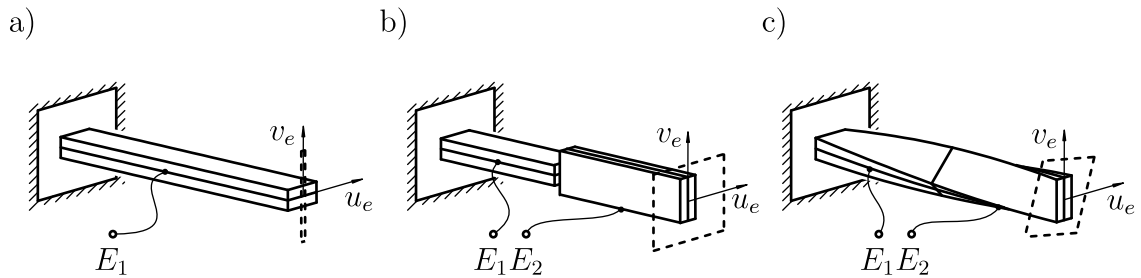


Abbildung 1.2: Biegeaktoren im Vergleich: a) unverwundener, unidirektionaler Biegeaktor, b) unverwundener, bidirektionaler Biegeaktor, c) vorverwundener, bidirektionaler Biegeaktor. Die Größen  $E_1$ ,  $E_2$  bezeichnen die Eingänge der Aktoren.

Anders als beim unverwundenen Biegeaktor, siehe Gleichung (1.17), sind jetzt Verschiebungen in *beide* Richtungen  $\vec{e}_1$  und  $\vec{e}_2$  möglich. Das heißt, ein zweidimensionaler Arbeitsraum ist grundsätzlich möglich.

Offen ist, wie das Krümmungsfeld  $k(z)$  einzustellen ist, so dass eine gewünschte Position des Aktorendes erreicht wird. Dieses Problem ist für den Helixaktor von herausragender Bedeutung. Die Verschiebungsfelder  $u(z)$  und  $v(z)$  sind infolge Gleichung (1.23) stark gekoppelt. Neben der Gestalt und den damit auftretenden Problemen beim Bau des Helixaktors ist diese starke Kopplung *der* Unterschied zu anderen bidirektionalen Biegeaktoren. Der Zusammenhang zwischen der Anregung des Biegeaktors  $E(z)$  und der Position des Aktorendes ist insbesondere bei dynamischen Problemen nicht trivial.

Sieht man von Spezialfällen ab, so ist es praktisch nicht möglich, das Krümmungsfeld  $k(z)$  frei zu wählen. Spezialfälle wären zum Beispiel Lamine mit veränderlicher Breite, siehe „spatial modal filters“ in [74] oder eine gezielte lokale Erwärmung eines Bimetalls, ähnlich zu [30]. Realistisch werden einzelne Bereiche  $[z_{L,i}, z_{R,i}]$  gleicher Krümmung sein. Diese Bereiche werden hier als *aktive Elemente* bezeichnet. Somit beträgt das Krümmungsfeld

$$k(z) = \sum_{i=1}^{N_e} k_i [\sigma(z_{L,i}) - \sigma(z_{R,i})]. \quad (1.24)$$

Darin sind  $k_i$  die Krümmungen in den aktiven Elementen,  $N_e$  die Anzahl der aktiven Elemente und  $\sigma(z)$  die Heaviside-Funktion. Abbildung 1.3 zeigt beispielsweise einen Helixaktor mit sechs unabhängig einstellbaren aktiven Elementen.

Im Folgenden werden die Krümmungen  $k_i$  der aktiven Elemente auch als *Eingänge* des Helixaktors bezeichnet. Analog dazu sind die Verschiebungen am freien Aktorende die *Ausgänge* des Helixaktors. Wird der Helixaktor als *Strecke* im Sinne der Regelungstechnik [57] begriffen, so sind die Krümmungen  $k_i$  seine Stellgrößen und die Verschiebungen  $u_e$  und  $v_e$  seine Regelgrößen.

Die vorerst wichtigen Fragen zum Helixaktor sind der Zusammenhang zwischen den Krümmungen der aktiven Elemente und den Verschiebungen des freien Aktorendes, der mögliche Arbeitsraum des Aktors sowie seine optimale Gestaltung. Naheliegend sind auch Probleme zur Regelung von stark gekoppelten Systemen.

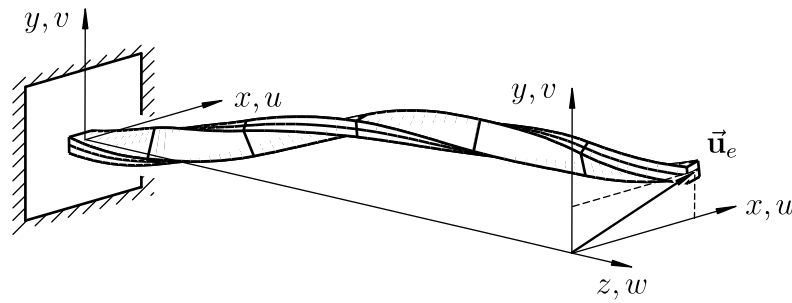


Abbildung 1.3: Helixaktor mit sechs aktiven Elementen bei willkürlicher Anregung.

## 1.4 Bekannte Konzepte bidirektionaler Biegeaktoren

Der Helixaktor ist ein *vorverwundener* Biegeaktor mit zweidimensionalem Arbeitsraum. Auch andere Biegeaktoren erlauben zweidimensionale Arbeitsräume, die in Konkurrenz zum Helixaktor stehen. Ihre Konzepte werden im Folgenden erläutert und dokumentieren somit den Stand der Technik. Die Auswahl konzentriert sich auf Piezoaktoren. Neben bidirektionalen Biegeaktoren werden auch einige Arbeiten zu unidirektionalen Biegeaktoren genannt.

Die gezeigten Varianten bidirektionaler Biegeaktoren erscheinen einfacher als der Helixaktor, insbesondere da sie ebene Oberflächen aufweisen und wohl einfacher zu fertigen sind als der Helixaktor. Auf diese besondere Problematik wird im Kapitel 2.2 eingegangen. Der dort beschriebene *Helimorph* ist ein Beispiel für Biegeaktoren mit vorgekrümmten Oberflächen und er beweist, dass vorgekrümmte Piezoaktoren durchaus möglich sind. Weiterhin werden in Kapitel 2.2 die so genannten *Macro Fiber Composites* vorgestellt. Diese flexiblen Piezoaktoren können auf vorgekrümmte Träger aufgeklebt werden.

**Unidirektionale Biegeaktoren:** Der Bimetallstreifen ist sicherlich einer der ältesten Biegeaktoren. Zwei Metalle mit unterschiedlichen Wärmeausdehnungskoeffizienten werden miteinander verbunden. Bei Temperaturänderung kommt es zu unterschiedlichen Dehnungen der zwei Schichten und somit zu einer Krümmungsänderung.

Die Brüder CURIE entdeckten 1880 den direkten piezoelektrischen Effekt: mechanische Beanspruchungen induzieren Ladungsverschiebungen. Das umgekehrte Phänomen - ein elektrisches Feld induziert mechanische Deformationen - erlaubt dann Aktoranwendungen. Das Patent von HOWATT [33] zu einem Barium Titanat Bimorph mag beispielhaft für erste piezoelektrische Biegeaktoren stehen. Abbildung 1.4 zeigt eine Skizze aus seiner Patentschrift.

Die folgenden Veröffentlichungen illustrieren im Auszug aktuelle Arbeiten zu unidirektionalen Biegeaktoren. PARK et al. [69] und ZHU et al. [111] realisieren Mikro-Biegeaktoren aus Piezokeramik mit Aktorlängen von ca.  $400 \mu\text{m}$ . Der Biegeaktor von WANG et al. in [100] trägt einen Festplatten-Schreibkopf. Anders als üblich wird hier die steifere Biegerichtung aktiviert und es sind somit kleinste Verschiebungen des Schreibkopfes möglich. Thermisch betriebene Mikro-Biegeaktoren finden sich bei JAIN et al. [37], JIANG et al. [38] und HAN et al. [30]. Letztere erwärmen den Biegeaktor mit Hilfe eines Lasers. Heizelemente auf dem Aktor sind somit überflüssig. CHRISTOPHERSEN et al. [10] und ALICI et al. [1] stellen Polypyrrol betriebene Biegeaktoren

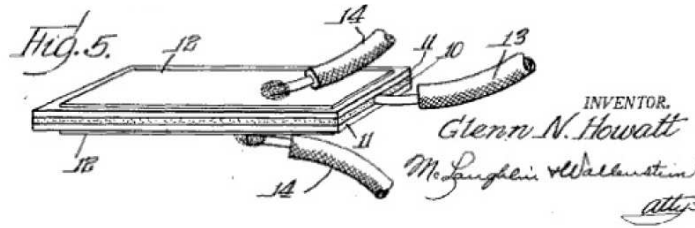


Abbildung 1.4: Skizze aus der Patentschrift von HOWATT [33] zu einem Piezobiegeaktor.

vor. Die beobachteten Krümmungsänderungen bei diesen Polymer-Biegeaktoren sind enorm. Auf Formgedächtnislegierungen basierende Aktoren finden sich beispielsweise bei ICARDI [35] und SUGAWARA et al. [94]. Mit dem Biegeaktor von SUGAWARA et al. werden kleine Blutgefäße festgehalten. Auch bei Formgedächtnislegierungen sind große Krümmungsänderungen möglich.

**Bidirektionale Biegeaktoren:** Die folgenden Biegeaktoren ermöglichen zweidimensionale Arbeitsräume. Die Dimensionen des Arbeitsraumes können sowohl Verschiebungen als auch Verdrehungen darstellen.

Der Biegeaktor in Abbildung 1.5 a) besteht aus einem Träger und zwei aufgeklebten, senkrecht zueinander stehenden Aktorpaaren. Ein Aktorpaar erlaubt horizontale Auslenkungen, ein weiteres erlaubt vertikale Auslenkungen. Mögliche Anwendungen sind Roboterbeine wie beim Miniman-Robotersystem [21, 109, 110] oder bei JUHAS et al. [39]. ISHIDA et al. [36] unterteilen die horizontalen und vertikalen Aktoren entlang der Stabachse in viele unabhängig kontrollierbare Bereiche. Ihr sogenannter omnidirektionaler Biegeaktor hat dementsprechend viele Freiheitsgrade. PEREZ et al. [71] zeigen ein zu Abbildung a) ähnliches Konzept, jedoch ohne passiven Träger.

Biegeaktoren in L-Form stellen SIMON [89], TODA et al. [98] und SCHWEIZER et al. [82] vor. Zwei seriell verbundene Biegeaktoren tragen einen optischen Spiegel. Die Neigung des Spiegels kann variiert werden und somit auch die Verschiebung des freien Endes, siehe Abbildung 1.5 b).

Der von GARNIER et al. [23] untersuchte Biegeaktor realisiert Neigung und Verschiebung am Endeffektor durch Anregen von Biege- und Torsionsschwingungen. Abbildung 1.5 c) zeigt eine Skizze des Aufbaus. Auch der Aktor von KOHL et al. [48] erlaubt gleiche Bewegungen, das heißt, Neigen und Verschieben des Aktorendes. Die freien Enden zweier Biegeaktoren sind fest miteinander verbunden und sie tragen einen Mikroskopspiegel, siehe Abbildung 1.5 d).

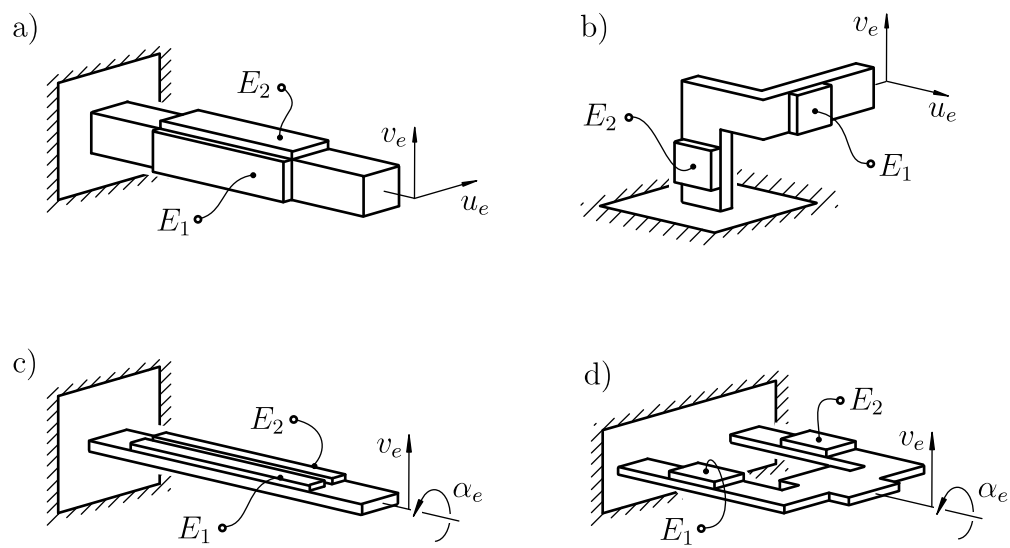


Abbildung 1.5: Ausgewählte Konzepte bidirektionaler Biegeaktoren. Die Größen  $E_i$  bezeichnen die Eingänge der Aktoren. Die Größen  $u_e$ ,  $v_e$  und  $\alpha_e$  bezeichnen die möglichen Verschiebungen beziehungsweise die mögliche Verdrehung des freien Aktorendes.

# Kapitel 2

## Realisierung des Prototyps

Aus einem unverwundenen Aluminiumstreifen lässt sich problemlos die Form des Helixaktors fertigen. Der Streifen wird verdreht, er wird plastisch deformiert und erhält so die charakteristische Form. Piezokeramiken sind spröde und ausgesprochen steif. Plastische Deformationen sind nicht möglich und die Form des Helixaktors kann nicht ohne weiteres realisiert werden. Der Grundkörper des Aktors muss entweder vorverwunden gefertigt werden oder die Piezokeramik muss auf einen vorverwundenen, passiven Träger aufgeklebt werden. Insbesondere für Letzteres sind Beziehungen zwischen den Materialbeanspruchungen und den Gestaltparametern des Helixaktors wünschenswert.

Eine geschlossene Lösung des Problems - das starke Verwinden eines Quaders, bestehend aus unterschiedlichen Werkstoffen - ist wohl kaum möglich. Näherungslösungen mittels numerischer Verfahren wie der Finite-Elemente-Methode sind durchaus machbar und sie liefern sehr gute Ergebnisse. Die Zusammenhänge zwischen Gestaltparametern und Beanspruchungen müssen jedoch über aufwendige Parameterstudien bestimmt werden und symbolische Beziehungen sind nicht möglich.

Der Helixaktor ist einer Schraubenfläche ähnlich, siehe Abbildung 2.1. Im Folgenden werden ausgewählte Charakteristiken der Schraubenfläche symbolisch berechnet. Sie können ein Maß für die Materialbeanspruchungen bei der Fertigung sein. Zunehmende Vorverwindung führt zu größeren Beanspruchungen. Dieser Sachverhalt ist einfach nachvollziehbar. Die Abschätzungen auf Grundlage der Schraubenfläche erlauben hierzu konkretere Aussagen. Beispielsweise nimmt die Faserdehnung quadratisch mit  $\varphi_e$  zu, die Fasertorsion und die Hauptkrümmung nehmen jedoch nur linear mit  $\varphi_e$  zu<sup>1</sup>.

Es ist a priori klar, dass die Ergebnisse lediglich grobe Näherungen sind. Die Untersuchungen beschränken sich weitgehend auf kinematische Zusammenhänge. Werden konstitutive Gleichungen und Gleichgewichtsbedingungen eingebaut, kurz: wird das komplette elastomechanische Problem gelöst, so sind komplizierte Beziehungen zu erwarten und die gewünschte Überschaubarkeit der symbolischen Beziehungen geht verloren. Numerische Näherungslösungen sind dann sinnvoller.

An die Diskussion der Schraubenfläche schließen sich Ausführungen zur Herstellung des Prototyps an. Es werden der ebenfalls außergewöhnliche Helimorph-Aktor und die sogenannten Macro Fiber Composites vorgestellt. Der Prototyp des Helixaktors wird letztlich mit Macro Fiber Composites realisiert.

---

<sup>1</sup>Die Vorverwindung  $\varphi_e$  zeigt sich in Kapitel 4 als wesentlicher Gestaltparameter. In den folgenden Beziehungen charakterisiert deshalb  $\varphi_e$  und nicht die Drillung  $\vartheta$  die Verwindung des Helixaktors. Zwischen  $\varphi_e$  und  $\vartheta$  kann jedoch ohne weiteres umgerechnet werden, siehe Gleichung (1.21).

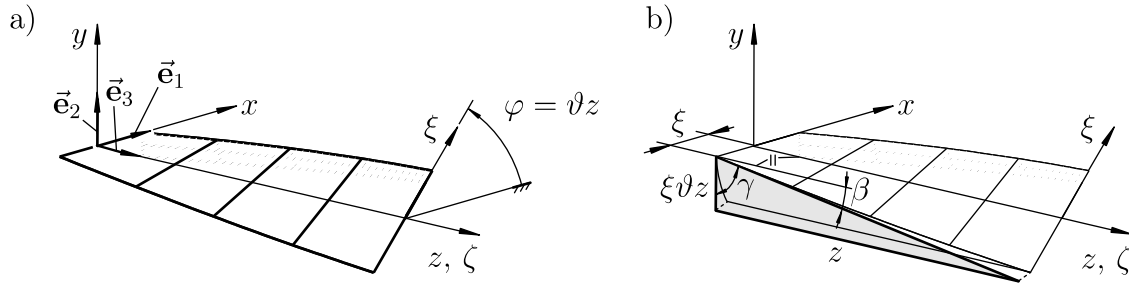


Abbildung 2.1: a) Approximation der Gestalt des Helixaktors als Schraubenfläche, Koordinaten  $\xi$  und  $\zeta$ , b) Anstiegsdreieck der Randfaser, Steigungswinkel  $\gamma$  und Faserwinkel  $\beta$ .

## 2.1 Schraubenfläche

Die Gestalt des Helixaktors entsteht, indem ein Rechteck der Breite  $b$  und der Höhe  $h$  entlang einer geraden Leitlinie, der  $z$ -Achse, geführt wird. Das Rechteck wird entlang  $z$  um den Winkel

$$\varphi = \vartheta z \quad (2.1)$$

verdreht. Die Drehachse  $\vec{e}_3$  durchstößt das Rechteck in seinem Flächenschwerpunkt. Beschränkt sich der untersuchte Helixaktor auf flache Querschnitte

$$h \ll b, \quad (2.2)$$

so entspricht die Gestalt des Helixaktors näherungsweise einer Schraubenfläche, siehe Abbildung 2.1 a). Die Schraubenfläche wird auch als Helikoid bezeichnet [19]<sup>2</sup>.

Mit den Koordinaten  $\xi$  und  $\zeta$ , den Basisvektoren  $\vec{e}_i$  des kartesischen Koordinatensystems sowie

$$-\frac{b}{2} \leq \xi \leq \frac{b}{2}, \quad 0 \leq \zeta \leq L \quad (2.3)$$

ist die Vektorform der Schraubenfläche [6]

$$\vec{r} = \xi (\cos \vartheta \zeta \vec{e}_1 + \sin \vartheta \zeta \vec{e}_2) + \zeta \vec{e}_3. \quad (2.4)$$

Die Koordinate  $\xi$  beschreibt den Abstand einer Schraubenlinie von der  $z$ -Achse - der Mittellinie der Schraubenfläche. Die Koordinate  $\zeta$  entspricht der  $z$ -Koordinate.

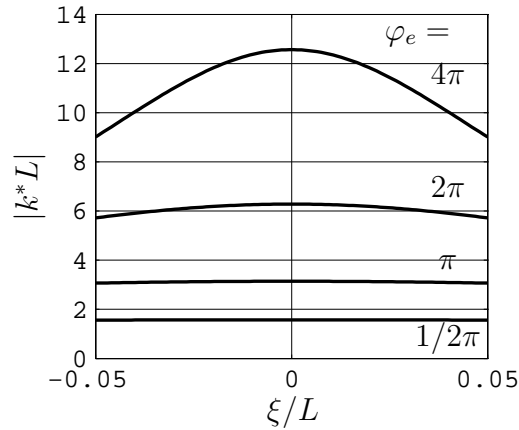
Für eine Schraubenlinie  $\xi = \text{const}$  können weiterhin der Steigungswinkel  $\gamma$  und der Faserwinkel  $\beta$  angegeben werden. Der Steigungswinkel beschreibt den Anstieg der Schraubung. Der Faserwinkel gibt die Neigung der Schraubenlinie gegenüber der Mittellinie an.

Abbildung 2.1 b) illustriert beide Winkel anhand des Anstiegsdreiecks der Randfaser. Für eine Schraubenfläche der Drillung  $\vartheta$ , der Länge  $z$  und der dann folgenden Verdrehung  $\vartheta z$  ergeben sich als Längen der Katheten des Anstiegsdreiecks  $z$  und  $\xi\vartheta z$ . Daraus lassen sich ohne weiteres die Beziehungen für den Steigungswinkel und den Faserwinkel

$$\tan \gamma = \frac{1}{\vartheta \xi}, \quad \tan \beta = \vartheta \xi \quad (2.5)$$

einer Schraubenlinie  $\xi = \text{const}$  ableiten. Die Winkel  $\gamma$  und  $\beta$  sind Komplementärwinkel.

<sup>2</sup>siehe [19], Seite 77f.

Abbildung 2.2: Hauptkrümmung  $k^*$  der Schraubenfläche, bezogen auf  $L$ .

### 2.1.1 Hauptkrümmungen

Die Krümmung ist ein Maß für die Biegedeformation von Strukturen. Bei Euler-Bernoulli-Balken und bei Kirchhoff-Platten gelten besonders einfache Beziehungen zwischen Krümmung und Dehnung [27]. Dieser Zusammenhang motiviert zum Bestimmen der Hauptkrümmungen der Schraubenfläche. Die Hauptkrümmungen sind die Reziproken der Hauptkrümmungskreisradien, worunter die maximal und minimal möglichen Radien einer Fläche an einem Flächenpunkt verstanden werden. Wird ein ebener Körper in die Schraubenflächenform deformiert, so erlauben diese einfachen differentialgeometrischen Abschätzungen zwar kein exaktes Berechnen der Verzerrungs- und Spannungsfelder, sie geben jedoch ein Erwartungsbild. Die Berechnung der Hauptkrümmungen aus den Hauptkrümmungskreisradien folgt [6].

Ausgehend von der Vektorform der Schraubenfläche (2.4) werden die Koeffizienten der ersten quadratischen Fundamentalform<sup>3</sup>

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = 1 + \vartheta^2 \xi^2 \quad (2.6)$$

und die Koeffizienten der zweiten quadratischen Fundamentalform<sup>4</sup>

$$L = 0, \quad M = -\frac{\vartheta}{\sqrt{1 + \vartheta^2 \xi^2}}, \quad N = 0 \quad (2.7)$$

eingeführt. Darin bezeichnet  $\vartheta$  die Drillung (1.21). Mit

$$0 = (LN - M^2) \frac{1}{k^{*2}} - (EN - 2FM + GL) \frac{1}{k^*} + (EG - F^2) \quad (2.8)$$

können die Hauptkrümmungen

$$k^* = \pm \frac{\vartheta}{1 + \vartheta^2 \xi^2} = \pm \frac{1}{L} \cdot \frac{\varphi_e}{1 + \xi^2 \left(\frac{\varphi_e}{L}\right)^2} \quad (2.9)$$

<sup>3</sup>siehe [6], Seite 254f.

<sup>4</sup>siehe [6], Seite 257

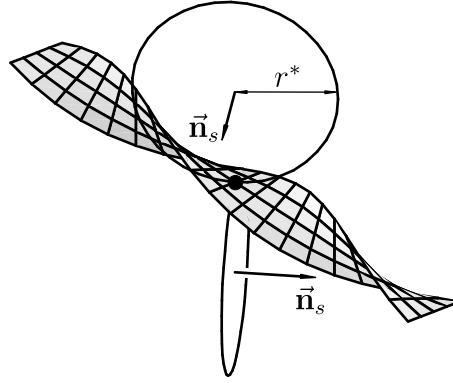


Abbildung 2.3: Hauptkrümmungen  $k^*$  an einem willkürlich gewählten Punkt der Mittellinie der Schraubenfläche, dargestellt als Kreise mit Radius  $r^*$ .

berechnet werden. Abbildung 2.2 illustriert die Beziehung zwischen  $\xi$  und  $|k^*|$ , bezogen auf  $L$ , für verschiedene  $\varphi_e$ . Auf der Mittellinie der Schraubenfläche ( $\xi = 0$ ) erreichen die Hauptkrümmungen ihre Maximalwerte

$$k_{max}^* = \pm \frac{\varphi_e}{L}. \quad (2.10)$$

Die Hauptkrümmung nimmt zum Rand hin ab und sie verschwindet für  $\xi \rightarrow \infty$ . Die maximale Hauptkrümmung (2.10) lässt somit vermuten, dass die Verbiegungen nahe der Stabachse des Helixaktors am größten sind. Sie nehmen mit  $\varphi_e$  linear zu.

Weiterhin können noch die Hauptkrümmungsrichtungen  $\frac{d\zeta}{d\xi}$  berechnet werden. Sie werden hier lediglich für die Mittelachse angegeben. Sie betragen für  $\xi = 0$  immer

$$\frac{d\zeta}{d\xi} = \pm 1. \quad (2.11)$$

Der Wert 1 ist so zu verstehen, dass die zu den Hauptkrümmungen gehörenden Krümmungslinien [6] die Mittellinie immer unter einem Winkel von  $\pm\pi/4$  beziehungsweise  $\pm 45^\circ$  schneiden. Abbildung 2.3 illustriert diese Eigenschaft. Mit Hilfe der Hauptkrümmung lässt sich der Hauptkrümmungskreisradius

$$r^* = \frac{1}{k^*} \quad (2.12)$$

berechnen und ein entsprechender Kreis mit dem Radius  $r^*$  konstruieren. Er berührt die Schraubenfläche im betrachteten Punkt. Der Kreisbogen ist in diesem Punkt identisch mit der Krümmungslinie und er liegt in der Schmiegungeebene der Krümmungslinie. In der Skizze kennzeichnet  $\vec{n}_s$  den Normalenvektor der Schmiegungeebene.

### 2.1.2 Faserdehnung

Werden einzelne Fasern auf einen vorverwundenen Träger geklebt, so erfahren die Fasern bis auf das Verbiegen in die Schraubenlinienform keine Beanspruchungen. Insbesondere werden sie nicht gedehnt. Sind die Fasern zu einem Faserpaket verbunden, wie zum Beispiel bei Piezokompositen, so werden sie beim Aufkleben verzerrt.



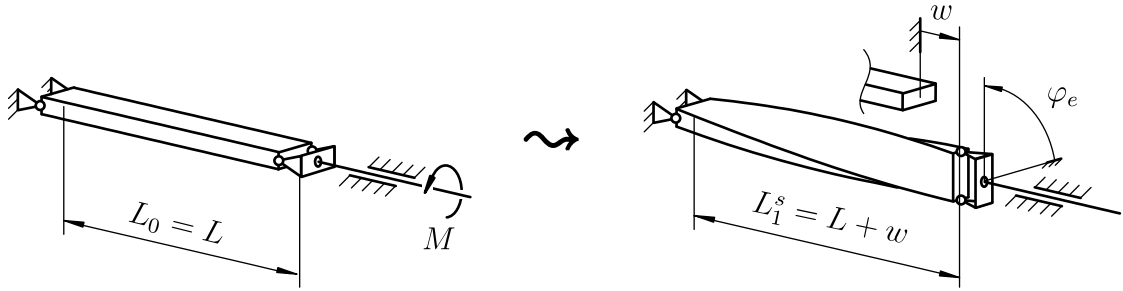


Abbildung 2.4: Deformation eines Quaders mit Hilfe eines Momentes  $M$  in einen vorverwundenen Quader, linkes und rechtes Ende gelenkig gelagert, rechtes Ende frei verschiebbar in  $z$ -Richtung.

Eine exakte Lösung des Problems wird hier nicht diskutiert. Es werden nur die Dehnungen der Fasern abgeschätzt. Folgende Deformation wird unterstellt: Ein flacher Quader ist an beiden Enden gelenkig gelagert, siehe Abbildung 2.4. Der Quader wird am rechten Ende um  $\varphi_e$  verdreht. Das rechte Ende kann sich dabei frei in  $z$ -Richtung um  $w$  verschieben<sup>5</sup>. Der Abstand zwischen den Fasern ist unveränderlich. Es wird lediglich eine Längsdehnung

$$S_F = \frac{L_1 - L_0}{L_0} \quad (2.13)$$

in Faserrichtung angenommen<sup>6</sup>. Diese Dehnung ist zu bestimmen. In der Ausgangskonfiguration ist die Länge aller Fasern gleich der Länge des Quaders, also

$$L_0 = L. \quad (2.14)$$

Nach der Deformation beträgt die Länge der Mittelachse

$$L_1^S = L + w \quad (2.15)$$

und somit die Drillung

$$\vartheta_1 = \frac{\varphi_e}{L + w}. \quad (2.16)$$

Mit Hilfe der Vektorform der Schraubenfläche (2.4) folgen dann die Raumkurven der deformierten Fasern

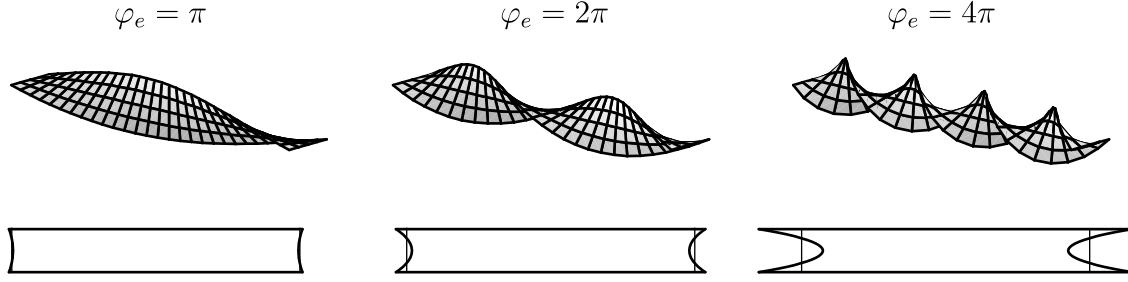
$$\vec{\mathbf{r}}_S = \begin{bmatrix} \xi \cos \vartheta_1 \zeta \\ \xi \sin \vartheta_1 \zeta \\ \zeta \end{bmatrix}, \quad -\frac{b}{2} \leq \xi \leq \frac{b}{2}, \quad 0 \leq \zeta \leq L + w. \quad (2.17)$$

Somit ist die Länge der Fasern

$$L_1 = \int_0^{L+w} \left| \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}_S}{\partial \zeta} \right| d\zeta \quad (2.18)$$

<sup>5</sup>Die Skizze 2.4 impliziert, dass es zu einer Verlängerung des Quaders kommt - die Verschiebung  $w$  des rechten Endes zeigt in positive  $z$ -Richtung. Wie sich später zeigen wird, führt das hier angenommene Fasermodell jedoch zu einer Verkürzung. Dieses Verhalten mag schnell einsehbar sein - es ist jedoch nicht zwangsläufig. LENZ und VIELSACK beschreiben in [54] Gegenteiliges. Sie berichten, dass sich zylindrische Vollkörper bei Torsion stets verlängern.

<sup>6</sup>Die Bezeichnungen der mechanischen Verzerrung mit  $S$  und der mechanischen Spannung mit  $\tau$  folgen TIERSTEN in [96].

Abbildung 2.5: Schraubenflächen und gedehnte Faserpakete,  $b/L = 0,15$ .

und letztlich die Faserdehnung

$$S_F = \sqrt{1 + \xi^2 \left(\frac{\varphi_e}{L}\right)^2 + 2\frac{w}{L} + \frac{w^2}{L^2}} - 1. \quad (2.19)$$

Werden kleine Verschiebungen unterstellt, also

$$w \ll L \quad (2.20)$$

und ist die Breite des Helixaktors klein gegenüber der Länge, so beträgt die Dehnung näherungsweise

$$S_F \approx \frac{w}{L} + \frac{\xi^2}{2} \left(\frac{\varphi_e}{L}\right)^2. \quad (2.21)$$

Mit einem linearelastischen Materialgesetz, Elastizitätsmodul  $c$ ,

$$\tau_F = c S_F, \quad (2.22)$$

kleinen Faserwinkeln  $\beta$  und verschwindender resultierender Kraft in  $z$ -Richtung

$$F_z \stackrel{!}{=} 0 = \int_{-b/2}^{+b/2} \tau_F h d\xi \quad (2.23)$$

folgt für die Verschiebung

$$w \approx -\frac{b^2 \varphi_e^2}{24L} \quad (2.24)$$

und somit für den Dehnungsverlauf

$$S_F \approx \left(\frac{\varphi_e}{L}\right)^2 \left(\frac{\xi^2}{2} - \frac{b^2}{24}\right). \quad (2.25)$$

Abbildung 2.5 illustriert das Ergebnis. Sie zeigt verschiedene Schraubenflächen sowie die zugehörigen Faserpakete. Unter den getroffenen Annahmen ergibt sich für  $S_F$  ein quadratischer Verlauf über  $\xi$ . Die Fasern werden auf der Mittellinie gestaucht und am Rand gestreckt. Die Faserdehnung erreicht ihr Maximum am Rand ( $\xi = b/2$ )

$$S_{max}^F \approx \frac{b^2}{12} \left(\frac{\varphi_e}{L}\right)^2. \quad (2.26)$$

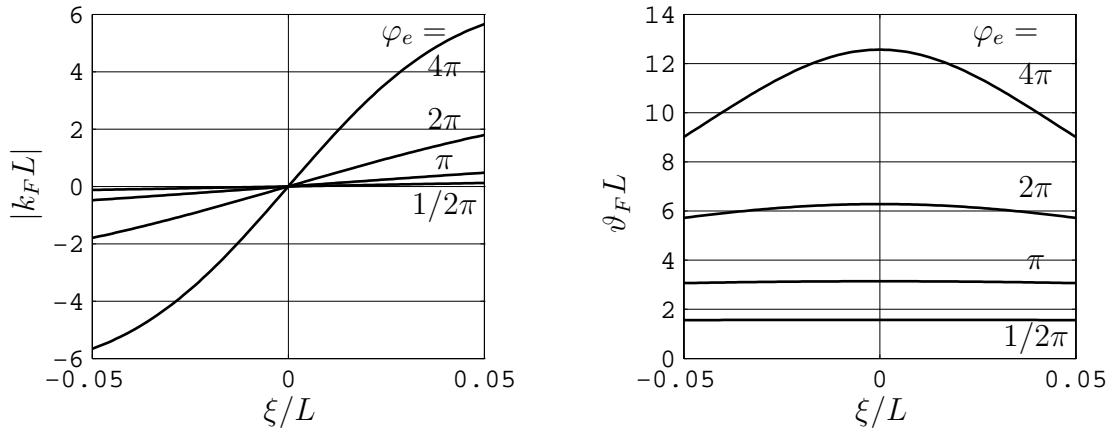


Abbildung 2.6: Krümmung  $k_F$  und Drillung  $\vartheta_F$  der Fasern, bezogen auf  $L$ .

Die maximale Dehnung nimmt quadratisch mit  $\varphi_e$  und  $b$  zu. Das heißt, sind kleine Faserdehnungen gewünscht, so müssen sowohl die Breite  $b$  des Helixaktors als auch dessen Vorverwindung  $\varphi_e$  möglichst klein sein.

Die getroffenen Modellannahmen sind einfach und die Beziehung (2.25) schätzt  $S_F$  nur ab. Die tatsächliche Faserdehnung wird vermutlich kleiner sein als die hier Vorhergesagte, da die angenommene kinematische Beziehung zwischen den Verschiebungen der einzelnen Fasern ausgesprochen steif ist. Die maximale Dehnung (2.26) kann somit als obere Grenze begriffen werden.

Genauere Lösungen können durchaus bestimmt werden, beispielsweise mittels der Finite-Elemente-Methode. Sie sind jedoch nur sinnvoll, wenn die notwendigen Materialparameter vollständig und zuverlässig bekannt sind. Piezokomposite, wie beispielsweise Macro Fiber Composites, sind heterogene Bauelemente und das Bestimmen effektiver Materialparameter ist aufwendig. Sie scheitern häufig an nicht verfügbaren Materialparametern, siehe dazu die Kritik von DERAEMAERKER et al. in [18].

### 2.1.3 Faserkrümmung und Faserdrillung

Fasern auf einem vorverwundenen Träger haben Schraubenlinienform. Sie werden somit innerhalb der Schraubenfläche gekrümmt. Für kleine Breiten und moderate Vorverwindungen wird diese Faserkrümmung wohl klein sein und kann vernachlässigt werden. Nichtsdestotrotz wird die entsprechende Beziehung angegeben. Nach [6] ist die Faserkrümmung<sup>7</sup>

$$k_F = \frac{1}{L} \cdot \frac{\frac{\xi}{L} \varphi_e^2}{1 + \left(\frac{\xi}{L}\right)^2 \varphi_e^2} \quad (2.27)$$

und damit auch der Faserkrümmungskreisradius

$$r_F = L \frac{1 + \left(\frac{\xi}{L}\right)^2 \varphi_e^2}{\frac{\xi}{L} \varphi_e^2}. \quad (2.28)$$

<sup>7</sup>siehe [6], Seite 250

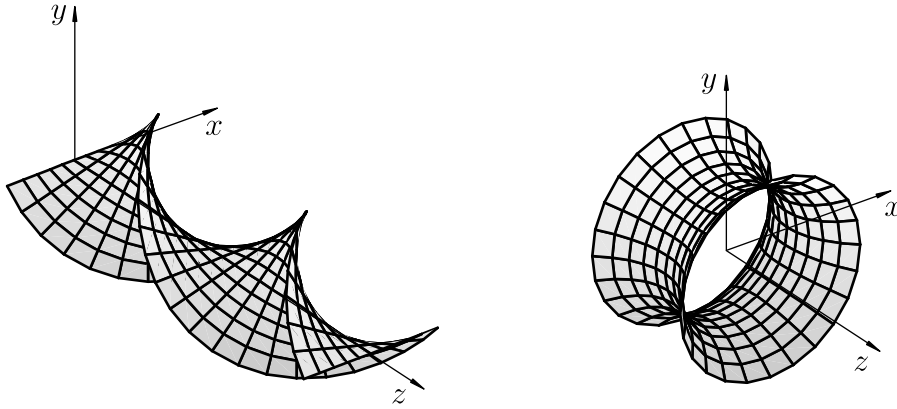


Abbildung 2.7: Helikoid und Katenoid.

Bei kleinen Breiten lässt sich die Krümmung näherungsweise mit

$$k_F \approx \xi \left( \frac{\varphi_e}{L} \right)^2 \quad (2.29)$$

angeben. Abbildung 2.6 zeigt  $k_F$ , bezogen auf  $L$ , für ausgewählte Vorverwindungen. Die Krümmung verschwindet auf der Mittellinie. Sie nimmt mit  $\xi$  linear und mit  $\varphi_e$  quadratisch zu. Das heißt, am Rand erreicht die Krümmung der Fasern ihren Maximalwert

$$k_{max}^F \approx \frac{b}{2} \left( \frac{\varphi_e}{L} \right)^2. \quad (2.30)$$

Die Drillung einer Faser lässt sich mit Hilfe der Windung der Schraubenlinie bestimmen. Sie ist nach [6]<sup>8</sup>

$$\vartheta_F = \frac{1}{L} \cdot \frac{\varphi_e}{1 + \xi^2 \left( \frac{\varphi_e}{L} \right)^2}. \quad (2.31)$$

Näherungsweise lässt sich

$$\vartheta_F \approx \frac{\varphi_e}{L} \left( 1 - \xi^2 \left[ \frac{\varphi_e}{L} \right]^2 \right) \quad (2.32)$$

angeben, wieder kleine Breiten unterstellend. Die Drillung der Fasern erreicht ihren Maximalwert auf der Mittellinie ( $\xi = 0$ )

$$\vartheta_{max}^F = \frac{\varphi_e}{L}. \quad (2.33)$$

Der Maximalwert entspricht der Drillung des Helixaktors  $\frac{\varphi_e}{L}$ . Mit zunehmendem Abstand  $\xi$  schwächt sich  $\vartheta_F$  ab. Abbildung 2.6 illustriert  $\vartheta_F$ , bezogen auf  $L$ .

### 2.1.4 Abwickelbarkeit

Die Schraubenfläche kann nicht auf eine Ebene abgewickelt werden. Sie ist keine *abwickelbare Fläche*, da die Metriken der Ebene und der Schraubenfläche nicht gleich sind. Abwickelbare Flächen sind beispielsweise Zylindermantel und Kegelmantel.

Auch wenn die Schraubenfläche - das Helikoid - nicht *abwickelbar* ist, so kann sie auf der Rotationsfläche der Kettenlinie - dem Katenoid - abgewickelt werden, siehe [19].

<sup>8</sup>siehe [6], Seite 251

Abbildung 2.7 zeigt ein Helikoid und das entsprechende Katenoid. Wird das Helikoid durch die zu Gleichung (2.4) äquivalente Parametrisierung

$$\vec{\mathbf{r}}_H = \begin{bmatrix} a \sinh \zeta \cos \xi \\ a \sinh \zeta \sin \xi \\ a \xi \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

angegeben und wird das Katenoid mit

$$\vec{\mathbf{r}}_K = \begin{bmatrix} a \cosh \zeta \cos \xi \\ a \cosh \zeta \sin \xi \\ a \zeta \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

beschrieben<sup>9</sup>, so ergeben sich für die Metriken beider Flächen, gemessen als Koeffizienten der ersten quadratischen Fundamentalform

$$E = a^2 \cosh^2 \zeta, \quad F = 0, \quad G = a^2 \cosh^2 \zeta. \quad (2.36)$$

Winkel und Längen sind auf beiden Flächen lokal gleich. Das heißt, eine in der Form des Katenoids gefertigte Membran kann ohne weitere Verzerrungen der Fläche in ein Helikoid deformiert werden. Die Membran wird lediglich verbogen.

## 2.2 Vorverwundene Piezoaktoren

Der Helixaktor wird durch Piezokeramiken angetrieben. Diese Werkstoffe sind spröde, und Umformungen des Festkörpers mit Hilfe von Plastifizierungen sind nicht möglich. Nichtsdestotrotz lassen sich auch mit Piezokeramiken gekrümmte Aktoren realisieren. Zwei Wege werden im Folgenden skizziert und mit Beispielen illustriert:

- Variante 1: Der Grundkörper des Helixaktors wird aus Vorstufen der Piezokeramik gefertigt. Das heißt, die charakteristische Form wird vor dem Sintern der Keramik realisiert. Es bieten sich auf vorgeformten Trägern aufgebrachte Sol-Gele an, siehe zum Beispiel [53], oder es können sogenannte *green tapes* eingesetzt werden. Letzteres wird am Beispiel des *Helimorphs* vorgestellt.
- Variante 2: Ein ebener piezokeramischer Körper wird auf einen ausreichend steifen vorverwundenen Träger geklebt. Am Beispiel der schon genannten Piezokomposite, hier Macro Fiber Composites, wird dieser Weg erläutert.

### 2.2.1 Helimorph

Der Helimorph [32, 70, 86, 99] ist ein Piezobiegeaktor außergewöhnlicher Form. Abbildung 2.8 zeigt Bilder des Aktors. Die möglichen Verschiebungen von ca.  $\pm 3$  mm sind groß bezogen auf seine Grundfläche von ca. 45 mm  $\times$  45 mm.

Die besondere Form des Helimorphs wurde mit Keramikfolien, englisch: green tapes, realisiert. Aus den ungesinterten Keramikfolien, bestehend aus PZT-Pulver, Binder

---

<sup>9</sup>Allein für diesen Abschnitt zur Abwickelbarkeit sind die Koordinaten  $\xi$  und  $\zeta$  als dimensionslose Längen zu begreifen, um einerseits den in [19] eingeführten Beziehungen zu entsprechen und andererseits widerspruchsfreie Argumente der trigonometrischen Funktionen zu erlauben. Im Übrigen ist  $a$  in Gleichung (2.35) der Radius des Katenoids bei  $\zeta = 0$ . Das entsprechende, um  $2\pi$  vorverwundene Helikoid hat die Länge  $2\pi a$ .

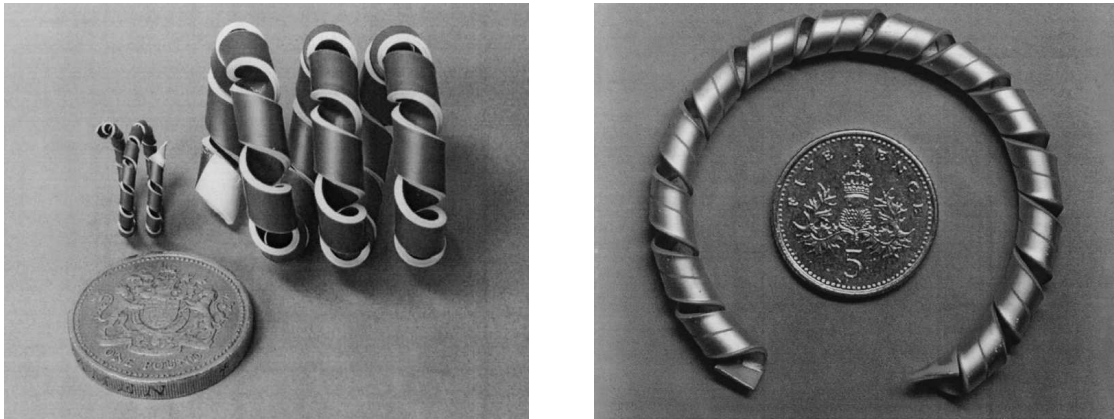


Abbildung 2.8: Helimorph, aus [70].

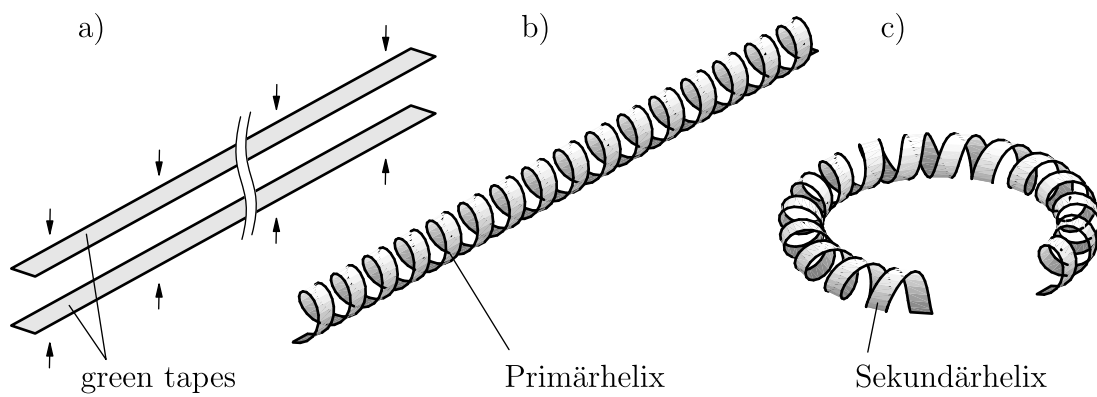


Abbildung 2.9: Herstellung des Helimorphs: a) Laminieren der Keramikfolien, b) Formen der Primärhelix und c) Formen der Sekundärhelix.

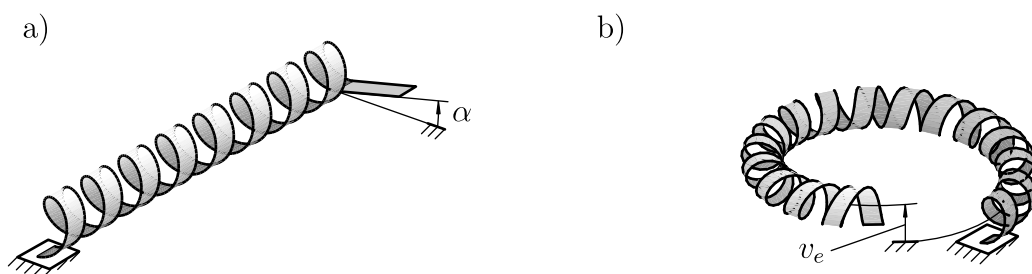


Abbildung 2.10: Funktionsprinzip des Helimorphs: a) Deformation der Primärhelix, b) Deformation der Sekundärhelix.

und aufgedruckten Elektroden, werden zuerst Lamine gefertigt - der Rohkörper des Biegeaktors. Danach werden Primärhelix und Sekundärhelix geformt<sup>10</sup>, siehe Abbildung 2.9. Anschließend wird der Körper gesintert und polarisiert. Der so hergestellte Aktor behält die gewünschte Form ohne weitere Stützstrukturen bei. Grundsätzlich wäre ein ähnlicher Weg auch für den Helixaktor denkbar.

Der Helimorph ist ein Biegeaktor. Das mag nicht ohne weiteres einsehbar sein und wird deshalb kurz erläutert. Die Primärhelix ist ein in Schraubenlinienform aufgewickelter Biegeaktor. Ein angelegtes elektrisches Feld induziert Krümmungs- und Neigungsänderungen seiner Stabachse, siehe Abbildung 2.10. Die Primärhelix kann jedoch auch als Torsionsstab verstanden werden. Die Wickelachse der Primärhelix ist dann die Stabachse des Torsionsstabs und die Neigungsänderungen der Primärhelix sind dann Verdrehungen des Torsionsstabs. Der Torsionsstab ist in Kreisform gebogen - die Sekundärhelix - und das Verdrehen führt in diesem Fall zu Verschiebungen  $v$  senkrecht zur Stabachse, siehe Abbildung 2.10.

Der Helimorph ist in seiner Gestalt wohl einmalig und das Fertigungsprinzip ist auch für andere Formen wie den hier untersuchten Helixaktor denkbar. Der Helimorph wird inzwischen von der Firma *1 Ltd* vertrieben<sup>11</sup>. Er wird in flächigen Lautsprechern und in Autofokus-Einheiten von Miniaturkameras eingesetzt.

### 2.2.2 Macro Fiber Composite

Sollen vorgekrümmte Strukturen mit piezokeramischen Aktoren ausgerüstet werden, so ist das nicht ohne weiteres möglich. Piezokeramische Werkstoffe sind spröde und bruchempfindlich. Fasern aus Piezokeramik können hier Auswege bieten. Ihre Querschnittsabmessungen sind klein - nur wenige hundert Mikrometer - und sie sind ausreichend biegsam. Nach dem Einbau der Fasern in die Struktur müssen diese nur noch mit Elektroden versehen werden und gepolt werden. Dennoch werden heutzutage kaum Piezofasern eingesetzt.

Die Arbeiten zu Piezofasern haben Arbeiten zu sogenannten aktiven Faserkompositen, auch: Piezokompositen, stimuliert. Dadurch konnten einige Probleme beim Einbau von Piezofasern elegant gelöst werden, wie zum Beispiel eine unkomplizierte Faser- und Elektrodenausrichtung oder die elektrische Isolierung des Aktors. Werden Piezofasern, Elektroden und Träger in einem ersten Schritt kombiniert - das Komposit - so lässt sich der Aktor einfacher in die Struktur integrieren. Das heißt, gegenüber Piezofasern sind Piezokomposite insgesamt besser handhabbar. WIERACH und SCHÖNECKER geben in [102] einen guten Überblick zu aktuell verfügbaren Fasern und Kompositen.

Der Macro Fiber Composite, kurz: MFC, ist sicherlich das bekannteste Piezokomposit. Abbildung 2.11 zeigt eine Fotografie des Aktors. Entwickelt vom *Jet Propulsion Laboratory* der *National Aeronautics and Space Administration* wird er inzwischen von der Firma *Smart Material GmbH* hergestellt und vertrieben<sup>12</sup>. Eine sehr gute Einführung zum MFC geben WILKIE et al. von der Entwicklergruppe am *Jet Propulsion Laboratory* in [104].

---

<sup>10</sup>Die Begriffe *Primärhelix* und *Sekundärhelix* werden aus den genannten Veröffentlichungen übernommen.

<sup>11</sup>*1 Ltd*, St John's Innovation Centre, Cowley Road, Cambridge, CB4 0WS, England

<sup>12</sup>*Smart Material GmbH*, Löbtauer Str. 69, 01159 Dresden, Deutschland

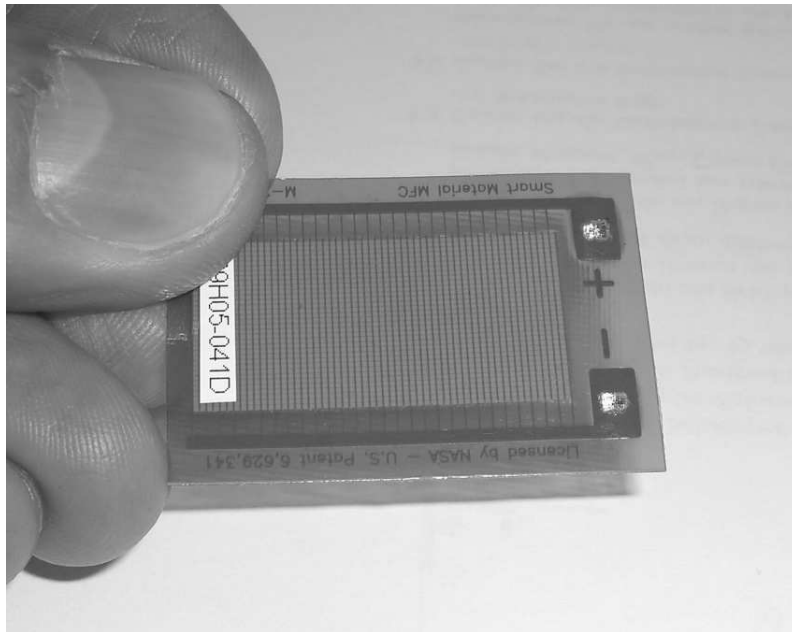


Abbildung 2.11: Macro Fiber Composite.

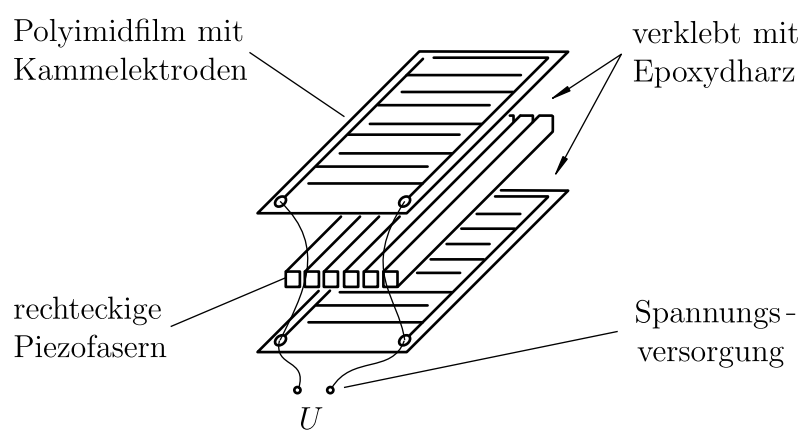


Abbildung 2.12: Aufbau eines Macro Fiber Composites.



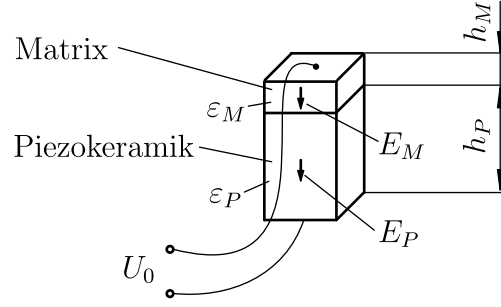


Abbildung 2.13: Komposit aus Matrix und Piezokeramik.

Abbildung 2.12 zeigt den Aufbau des MFCs mit Piezofasern und Elektroden. Die Elektroden sind als Kammelektroden ausgeführt - sie erlauben hohe elektrische Felder *in* Faserrichtung. Der Wandler kann bei entsprechender Polarisierung sowohl im  $d_{33}$ -Modus als auch im  $d_{31}$ -Modus betrieben werden.

Die Piezofasern des MFCs sind rechteckig. Sie werden aus Monolithen gesägt. So werden hohe Faservolumenanteile erreicht und eine besonders gute Kontaktierung der Keramik ist möglich. Zwischen Piezokeramik und Elektrode kann kaum Matrixmaterial eindringen. Das ist einer der wesentlichen Vorteile gegenüber normalen Piezofasern, denn selbst dünnste Matrixschichten zwischen Elektrode und Keramik reduzieren das nutzbare elektrische Feld stark. Anhand des Beispiels in Abbildung 2.13 wird der Zusammenhang illustriert.

Eine Piezoschicht (Index  $P$ ) und eine Matrixschicht (Index  $M$ ) sind in Reihe geschaltet. Die maximal mögliche elektrische Feldstärke in der Piezokeramik ist

$$E_{P,0} = \frac{U_0}{h_P}, \quad (2.37)$$

wobei  $U_0$  die Quellenspannung ist. Als tatsächlich erreichbare elektrische Feldstärke  $E_P$ , bezogen auf  $E_{P,0}$ , lässt sich dann

$$\frac{E_P}{E_{P,0}} = \frac{1}{1 + \eta \frac{\varepsilon_P}{\varepsilon_M}} \quad (2.38)$$

herleiten. Darin sind  $\varepsilon_P$  und  $\varepsilon_M$  die relativen Permittivitäten und

$$\eta = \frac{h_M}{h_P} \quad (2.39)$$

ist die relative Schichtdicke der Matrix. Die Permittivität von Piezokeramiken ist üblicherweise groß gegenüber der Permittivität des Matrixmaterials. Für  $\varepsilon_P$  der Piezokeramik wird näherungsweise

$$\varepsilon_P \approx 1000 \varepsilon_0 \quad (2.40)$$

angenommen, siehe Material *Sonox P8* in [79]. Für  $\varepsilon_M$  der Matrix wird

$$\varepsilon_M \approx 5 \varepsilon_0 \quad (2.41)$$

unterstellt, siehe *Kunstharz* in [13]. Der Quotient  $\varepsilon_P/\varepsilon_M$  ist dadurch sehr groß und beträgt in diesem Beispiel

$$\frac{\varepsilon_P}{\varepsilon_M} \approx 200. \quad (2.42)$$

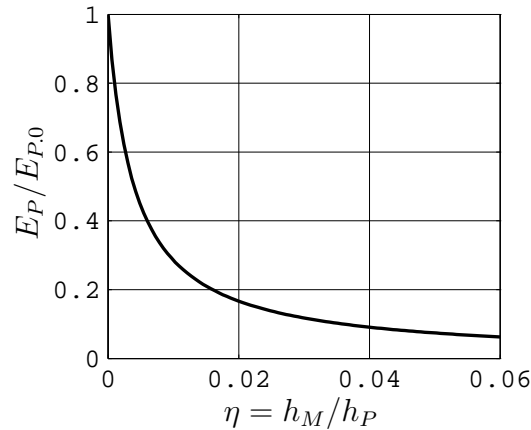


Abbildung 2.14: Tatsächliche elektrische Feldstärke  $E_P$ , bezogen auf  $E_{P,0}$ , über relativer Matrixschichtdicke  $\eta = h_M/h_P$ .

Aufgrund dessen reduzieren selbst kleinste Matrixschichten das nutzbare elektrische Feld erheblich. Das Diagramm in Abbildung 2.14 zeigt den starken Abfall von  $E_P/E_{P,0}$  über  $\eta$  bei den gewählten Materialparametern.

Ist die relative Matrixschichtdicke beispielsweise 5 %, also offensichtlich klein, so beträgt die effektive Feldstärke in der Piezokeramik nur noch 7 % der maximal Möglichen. Eine Feldstärke  $E_P$  in der Größenordnung von  $E_{P,0}$  kann nur noch durch sehr hohe Quellenspannungen erreicht werden, hier ca.  $13 \cdot U_0$ .

Piezofasern verursachen möglicherweise keine Schwierigkeiten beim Aufkleben auf den vorverwundenen Träger. Sehr wohl ist jedoch mit Problemen beim Aufbringen der Elektroden und beim Erreichen eines zufriedenstellenden elektrischen Feldes zu rechnen, insbesondere beim Polarisieren der Piezokeramik. Der Prototyp des Helixaktors soll zunächst zeigen, dass das Konzept umsetzbar ist. Anstatt Piezofasern werden deshalb Macro Fiber Composites als Antriebe eingesetzt, da die oben genannten Probleme bei ihnen nicht zu erwarten sind.

**Ausgewählte Arbeiten zu MFCs:** SODANO et al. [92] und PRETORIUS et al. [73] bewerten verschiedene Piezokomposite, unter anderen auch die Macro Fiber Composites. WILKIE et al. äußern sich in [103] zur Zuverlässigkeit der MFCs. WILLIAMS et al. [106] charakterisieren die elektromechanischen Eigenschaften und untersuchen in [105] experimentell auftretende Nichtlinearitäten.

Zu theoretischen Modellen des MFCs äußern sich LLOYD et al. in [55] von der Entwicklergruppe am *Jet Propulsion Laboratory* sowie BENT und HAGOOD [5, 28] und DERAEMAERKER et al. in [18]. In den Arbeiten werden vor allem effektive Materialparameter des MFCs entwickelt und diskutiert. Insbesondere DERAEMAERKER et al. weisen darauf hin, dass momentan nur wenige Veröffentlichungen zur Modellierung der MFCs bekannt sind. Schwierigkeiten bereitet nicht nur die Homogenisierung des MFC-Aufbaus, sondern auch fehlende Herstellerangaben zu Materialkonstanten. Bei NGUYEN und KORNMANN [66] finden sich FEM-Modelle der MFCs, die die Elemente des Aktors, das heißt, Matrix, Piezofasern und Elektroden, als diskrete Bauelemente berücksichtigen.

Macro Fiber Composites sind robust und werden vielfältig eingesetzt. Die folgen-

de Auflistung stellt lediglich einen Auszug dar, da durch die Kommerzialisierung der MFCs die Vielfalt der Anwendungen ständig wächst. SHETA et al. [87] realisieren ein durch MFCs deformierbares Höhenleitwerk eines F/A-18 Flugzeuges. MASARATI et al. stellen in [61] ein deformierbares Rotorblatt vor. KEIMER et al. [41] setzen MFCs für Parallelkinematiken ein. RUGGIERO, INMAN und PARK [68, 78] verwenden MFCs für experimentelle Untersuchungen an aufblasbaren Strukturen eines Raumfahrzeugs. SODANO et al. [91] vergleichen verschiedene Piezowandler für die Gewinnung elektrischer Energie aus mechanischer Energie unter Ausnutzung des piezoelektrischen Effekts, dem sogenannten *energy harvesting*. Unter anderem vergleichen sie PZT-Platten und MFCs.

## 2.3 Prototyp des Helixaktors

Der Prototyp soll zeigen, dass das Konzept grundsätzlich funktioniert, sprich, dass ein vorverwundener Biegeaktor mit ausgewogenem zweidimensionalem Arbeitsraum realisiert werden kann. Der Schwerpunkt der Arbeit ist die Diskussion zum Arbeitsraum, da ihn diese Problematik von anderen Biegeaktoren unterscheidet. Ausgehend davon sind weitere Schritte hinsichtlich besonderer Herstellungsverfahren oder außergewöhnlicher Regelungskonzepte möglich.

Der Helixaktor wird in dieser Arbeit aus einem vorverwundenen Aluminiumträger und einem Macro Fiber Composite gefertigt. Der MFC wird mittels Klammern auf den vorverwundenen Träger gepresst und mit Cyanacrylatklebstoff (Sekundenkleber) verklebt. Zur Unterteilung des MFCs in verschiedene aktive Elemente werden lediglich die Kontaktbahnen an bestimmten Stellen getrennt. Die piezokeramischen Fasern werden nicht unterbrochen. Es gibt somit keinen Steifigkeitssprung an den Elementengrenzen.

Abbildung 2.15 zeigt eine Fotografie des Versuchsaufbaus. Die Skizze in Abbildung 2.17 beschreibt den Aufbau des Prototyps. Darin sind auch die Sensorflächen für die Laser-Wegsensoren dargestellt. Die Tabelle 2.1 fasst die Daten des Trägers, des Macro Fiber Composites und des Helixaktors zusammen. Im Folgenden werden die gewählten Aktorparameter begründet.

### 2.3.1 Vorverwindung, Querschnittsbreite und aktive Elemente

Ab  $\varphi_e \approx \pi$  ist mit ausgewogenen, zweidimensionalen Arbeitsräumen zu rechnen. Das zeigen die Optimierungen in Kapitel 4. Größere Werte für  $\varphi_e$  erweitern den Arbeitsraum nur unwesentlich, es ist jedoch minimal

$$\varphi_e \geq \pi \quad (2.43)$$

notwendig - eine Forderung, die der Prototyp mit

$$\varphi_e = 220^\circ \quad (2.44)$$

erfüllt.

Im Kapitel 2.1 wurden Hauptkrümmung, Faserdehnung, Faserkrümmung und Fasertorsion diskutiert. Faserkrümmung und Fasertorsion erscheinen angesichts der kleinen Querschnittsabmessungen der Piezofasern des MFCs, ca.  $0,2 \text{ mm} \times 0,2 \text{ mm}$ , unproblematisch. Die maßgebliche Beanspruchung wird die Faserdehnung (2.26) sein. Sie soll

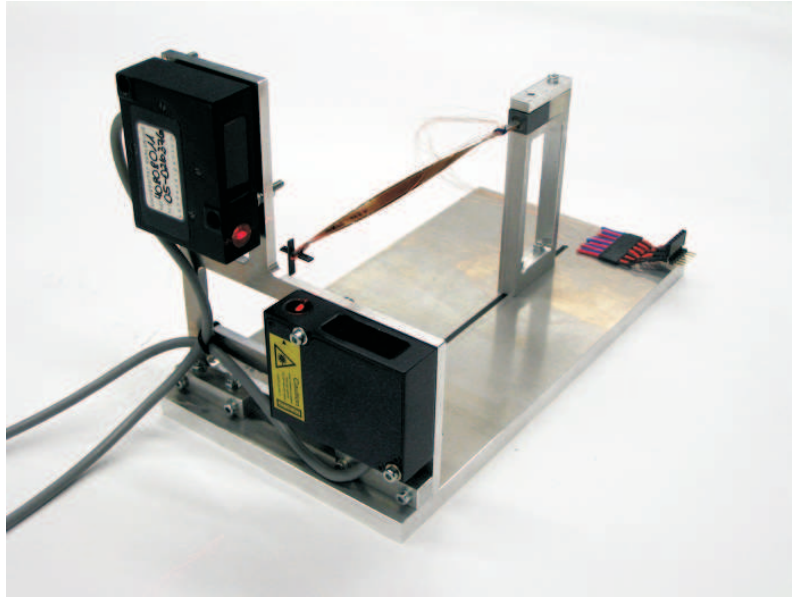


Abbildung 2.15: Versuchsaufbau mit Helixaktor und Laser-Wegsensoren.

möglichst klein sein. Die Faserdehnung ist klein für große Länge-zu-Breite-Verhältnisse  $L/b$  und kleine Vorverwindungen. Die minimale Vorverwindung ist festgelegt, somit muss  $L/b$  möglichst groß sein. Der Helixaktor wurde mit dem MFC-Typ M14003 realisiert. Sein Länge-zu-Breite-Verhältnis beträgt

$$\frac{L}{b} = \frac{140 \text{ mm}}{3 \text{ mm}}. \quad (2.45)$$

Mit der Vorverwindung des Prototyps ist die maximale Faserdehnung nach Gleichung (2.26)

$$S_F \approx 6 \cdot 10^{-4}. \quad (2.46)$$

Sie liegt deutlich unterhalb der vom MFC ertragbaren Dehnung von  $4,5 \cdot 10^{-3}$ .

Der MFC wird in drei aktive Elemente unterteilt, die unabhängig voneinander kontrollierbar sind. Die Optimierungen in Kapitel 4 zeigen, dass drei unabhängige Eingänge gegenüber zwei unabhängigen Eingängen unter Umständen größere Arbeitsräume ermöglichen.

### 2.3.2 Querschnittshöhe

Biegeaktoren mit kleiner Querschnittshöhe erlauben große Verschiebungen. Diese bekannte Eigenschaft wird mit Hilfe einer einfachen Rechnung illustriert. Gleichzeitig kann so, zumindest näherungsweise, die Querschnittshöhe des Helixaktors festgelegt werden<sup>13</sup>.

Neben maximaler Verschiebung am Aktorende sind weitere Optimierungsziele für Biegeaktoren etabliert, wie zum Beispiel die sogenannte Leerlaufenergie, siehe [79], oder der elektromechanische Kopplungsfaktor, siehe beispielsweise [107].

<sup>13</sup>Die Breite der Piezokeramik des MFCs und die Breite des Trägers unterscheiden sich um ca. 30 %, was in dieser Abschätzung jedoch vernachlässigt wird.

Der Prototyp des Helixaktors ist ein Monomorph. Das heißt, das Laminat besteht aus einer Piezoschicht (Index  $P$ ), dem MFC, und einer Trägerschicht (Index  $T$ ), dem Aluminiumstreifen. Die Schichthöhen sind  $h_T$  und  $h_P$ . Der Helixaktor wird als Euler-Bernoulli-Balken modelliert und die dafür üblichen Annahmen werden vorläufig als erfüllt angesehen. Detaillierte Diskussionen folgen in Kapitel 3.

STEEL et al. experimentieren in [93] mit Monomorphs, bestehend aus Piezoplaten und Metallträgern. Auch sie nutzen das hier verwendete Euler-Bernoulli-Balkenmodell zum Optimieren der Aktoren. Die vorhergesagten Werte werden erreicht, sowohl hinsichtlich Auslenkung als auch hinsichtlich des Schichthöhenverhältnisses. Die Ergebnisse von STEEL et al. sprechen für die gewählte einfache Modellierung.

Die Verzerrung in Längsrichtung beträgt

$$S = v''y + w'. \quad (2.47)$$

Die Feldgröße  $v(z)$  ist die Verschiebung in  $y$ -Richtung, also in Richtung der Querschnittshöhe. Die Feldgröße  $w(z)$  ist die Verschiebung in  $z$ -Richtung, also in Richtung der Stabachse. Die Krümmung soll maximiert werden, das heißt,

$$v'' = \max! \quad (2.48)$$

Als konstitutive Gleichungen sollen für den elastischen Träger

$$\tau_T = c_T S \quad (2.49)$$

und für den MFC im Aktorbetrieb

$$\tau_P = c_P S + \tau_A \quad (2.50)$$

genügen. Die Spannung  $\tau_A$  bezeichnet die im MFC induzierte mechanische Spannung bei angelegtem elektrischen Feld aufgrund des inversen piezoelektrischen Effektes. Sie wird als konstant über  $y$  angenommen. Die Parameter  $c_T$  und  $c_P$  bezeichnen die Elastizitätskonstanten. Mit den konstitutiven Gleichungen betragen die mechanischen Spannungen im Querschnitt

$$\tau = \begin{cases} c_T S & \text{für } 0 \leq y < h_T \\ c_P S + \tau_A & \text{für } h_T \leq y \leq h_T + h_P \end{cases} \quad (2.51)$$

Mit den resultierenden Schnittlasten für einen mechanisch unbelasteten Aktor

$$M_x \stackrel{!}{=} 0 = \int_0^{h_P+h_T} b\tau y \, dy, \quad F_z \stackrel{!}{=} 0 = \int_0^{h_P+h_T} b\tau \, dy, \quad (2.52)$$

der relativen Höhe der Trägerschicht

$$\eta = \frac{h_T}{h_P} \quad (2.53)$$

sowie der relativen Elastizitätskonstante der Trägerschicht

$$\gamma = \frac{c_T}{c_P} \quad (2.54)$$

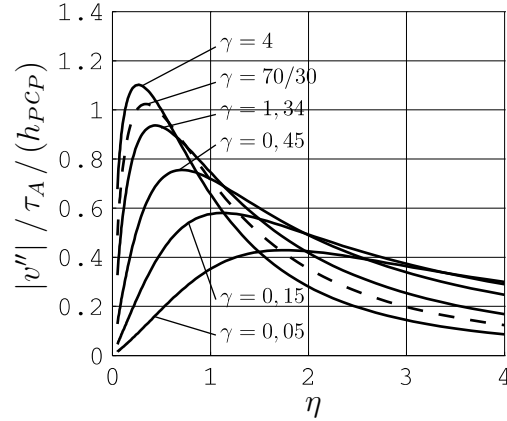


Abbildung 2.16: Krümmung  $|v''|$  des Monomorphs, bezogen auf  $\tau_A/(h_P c_P)$ , über relativer Trägerdicke  $\eta$  für verschiedene relative Elastizitätskonstanten  $\gamma$  des Trägers.

folgt für den Betrag der Krümmung

$$|v''| = \frac{\tau_A}{h_P c_P} \cdot \left| \frac{6\gamma\eta(\eta+1)}{(4\gamma\eta^3 + 1 + \gamma^2\eta^4 + 6\gamma\eta^2 + 4\gamma\eta)} \right|. \quad (2.55)$$

Der erste Term lässt erkennen, dass kleine Höhen  $h_P$  große Krümmungen erlauben. Abbildung 2.16 zeigt das Verhalten des zweiten Terms - die auf  $\tau_A/(h_P c_P)$  bezogene Krümmung. Kleine  $\eta$  bei großen  $\gamma$  sind optimal. Somit sind dünne, steife Träger bei insgesamt geringer Aktorhöhe für große Krümmungen erforderlich.

Mit der Höhe des MFCs und den Elastizitätskonstanten für MFC und Aluminiumträger, siehe Tabelle 2.1, folgt die optimale Höhe

$$\eta = 0,33, \quad h_T \approx 0,1 \text{ mm} \quad (2.56)$$

der Trägerschicht. Für den Prototyp wird ein etwas dickerer Träger mit

$$h_T \approx 0,6 \text{ mm} \quad (2.57)$$

verwendet. Er ist robuster als ein Träger mit  $h_T \approx 0,1 \text{ mm}$ . Die erreichbare Krümmung beträgt jedoch nur 35 % der maximal Erreichbaren.

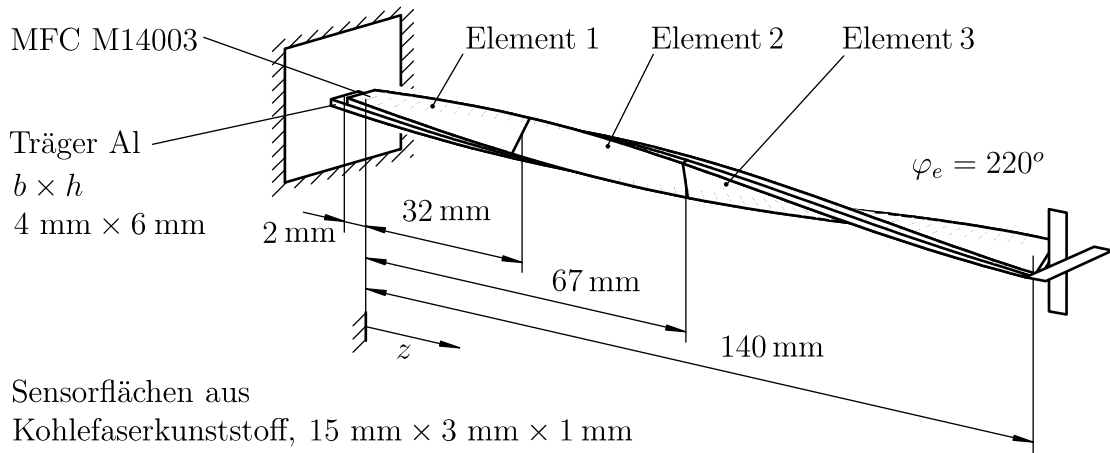


Abbildung 2.17: Aufbau und Abmessungen des Prototyps inklusive Sensorfläche.

Träger	
Material	Aluminium
Elastizitätskonstante	$c \approx 70 \text{ GPa}$
Abmessungen	$b \times h \times L = 4 \text{ mm} \times 0,6 \text{ mm} \times 144 \text{ mm}$

Macro Fiber Composite	
Typ, Piezokeramik	M14003, PZT5A1
Abmessungen	$b \times h \times L = 3 \text{ mm} \times 0,3 \text{ mm} \times 140 \text{ mm}$
Elastizitätskonstante	$c = 30,34 \text{ GPa}$
max. Betriebstemperatur	$\vartheta_{max.op} < 66^\circ\text{C}$
zulässige Betriebsspannung	$-500 \text{ V} \leq U_{op} \leq 1500 \text{ V}$
max. ertragbare Dehnung	$S_{max.op} \approx 4,5 \cdot 10^{-3}$
min. ertragbarer Krümmungsradius	$r \geq 4,3 \text{ cm}$

Helixaktor	
Vorverwindung	$\varphi_e = 220^\circ$
Länge	$L = 140 \text{ mm}$
Element 1	$z_{t.1} = 32 \text{ mm}, L_1 = 32 \text{ mm}, C_1 \approx 0,40 \text{ nF}$
Element 2	$z_{t.2} = 67 \text{ mm}, L_2 = 35 \text{ mm}, C_2 \approx 0,44 \text{ nF}$
Element 3	$z_{t.3} = 140 \text{ mm}, L_3 = 73 \text{ mm}, C_3 \approx 0,92 \text{ nF}$

Tabelle 2.1: Eigenschaften des Trägers, des MFCs und des Prototyps des Helixaktors; Elastizitätskonstante von Aluminium nach [13], Eigenschaften des MFCs nach [90];  $z_{t.i}$  bezeichnen die Trennstellen der aktiven Elemente,  $L_i$  bezeichnen die Elementlängen,  $C_i$  bezeichnen die Kapazitäten, abgeschätzt nach [90].





# Kapitel 3

## Mathematische Modelle des Helixaktors

Das Verhalten des Helixaktors lässt sich sowohl experimentell als auch theoretisch untersuchen. Experimente zeigen das tatsächliche Verhalten des Aktors. Mathematische Modelle bilden das Verhalten nur näherungsweise ab. Sie erlauben jedoch Einblicke, die experimentell nur aufwendig bestimmbar sind. Insbesondere Parameterstudien oder Optimierungen sind mit Hilfe mathematischer Modelle bequem durchführbar. Werden übersichtliche, symbolische Modelle hergeleitet, so können Eigenschaften des Aktors auch ohne Parameterstudien sofort erkennbar sein.

Anhand eines simplen, statischen Modells des Helixaktors werden Arbeitsraum, Aktoroptimierung und inverse Aufgabe diskutiert. Ein weiteres, nunmehr dynamisches Modell beschreibt das Zeitverhalten des Aktors, es zeigt die Eigenschwingungsformen und es erlaubt Reglerentwürfe. Im Kapitel 5 werden theoretische Ergebnisse und experimentelle Ergebnisse verglichen. Sowohl das statische Modell als auch das dynamische Modell können die gemessenen physikalischen Werte nicht vorhersagen, jedoch stimmen die normierten gemessenen Größen durchweg gut mit den Vorhergesagten überein.

Aufgrund der Vorverwindung koppeln die Verschiebungsfelder  $u(z)$  und  $v(z)$  stark. Das ist auch im Modell sicherzustellen und ist ein Schwerpunkt der Modellierung. Die Lage der deformierten Stabachse, beschrieben durch  $u(z)$  und  $v(z)$ , ist jedoch nur insofern wichtig, als dass sie für  $z = L$  die Ausgangswerte  $u_e$  und  $v_e$  des Helixaktors bereitstellt. Die MFCs sind piezokeramische Aktoren, die ein ausgeprägt nichtlineares Verhalten zeigen. In diesem ersten Beitrag zum Helixaktor wird auf ein genaues Abbilden der Nichtlinearitäten verzichtet und die piezoelektrische Kopplung wird linearisiert. Die gewonnenen Erkenntnisse, insbesondere zum Arbeitsraum und zur Optimierung, werden dadurch nicht beeinträchtigt.

Im Rahmen dieser Arbeit besteht kein Interesse an der genauen Bestimmung aller Feldgrößen. Zum Beispiel wird nicht nach der exakten Spannungsverteilung oder der Verteilung des elektrischen Feldes über dem Aktorquerschnitt gefragt - ein Zugeständnis an einfache Modelle.

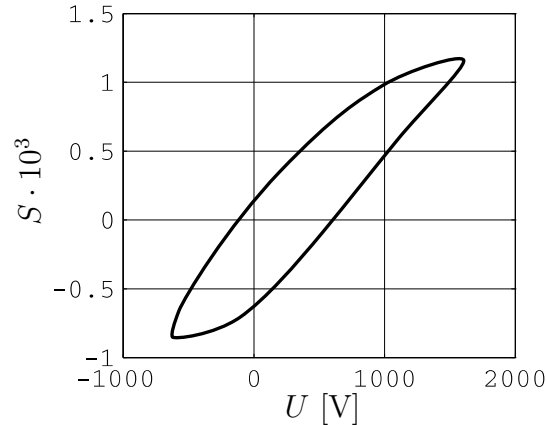


Abbildung 3.1: MFC, betrieben im  $d_{33}$ -Modus: Freie Dehnung  $S$  über elektrischer Spannung  $U$ . Zyklen mit  $f = 0,1$  Hz,  $U_m = 500$  V,  $U_{pp} = 2250$  V,  $\vartheta = 27^\circ\text{C}$ , aus [90].

### 3.1 Vorbemerkungen

Das Modellieren des Helixaktors zerfällt in drei Probleme, die vorerst getrennt diskutiert werden: die Beschreibung des Materialverhaltens der MFCs, die Beschreibung des Aktor-Träger-Verbundes und die Beschreibung der Vorverwindung. Nach diesen Vorüberlegungen werden das statische Modell und das dynamische Modell entwickelt.

#### 3.1.1 Zum Materialverhalten der MFCs

Der piezoelektrische Effekt in Einkristallen ist weitgehend linear [79]. Macro Fiber Composites bestehen jedoch aus Piezokeramiken, sprich Ferroelektrika. Sie sind polykristallin und ihr Materialverhalten ist nichtlinear. Die MFCs zeigen das typische Hystereseverhalten ferroelektrischer Werkstoffe, siehe Abbildung 3.1. In Kapitel 5.2.1 wird zusätzlich ihr Kriechverhalten illustriert.

KAMLAH beschreibt in [40] das Hystereseverhalten von Ferroelektrika. Er zeigt Modellansätze und nennt wichtige Beiträge zu diesem Problem. Sein Bericht ist umfassend und zitiert mehr als hundert Quellen. KAMLAH geht zwar nicht auf MFCs im speziellen ein, es bleibt jedoch festzustellen, dass das korrekte Beschreiben und Modellieren des nichtlinearen Verhaltens von Piezokeramiken sehr aufwendig ist.

Das Materialverhalten von Piezokeramiken kann trotz offensichtlicher Nichtlinearitäten linear approximiert werden und wohl die meisten Veröffentlichungen zu piezokeramischen Aktoren oder deren Anwendungen beschränken sich auf lineare konstitutive Gleichungen. Im Kleinsignalbereich, das heißt, bei kleinen Feldstärken, geben die linearen Beziehungen das Materialverhalten zufriedenstellend wieder. Im Großsignalbereich und bei Betrieb in Resonanz mit großen Auslenkungen sind deutliche Abweichungen zu erwarten.

PREUMONT äußert sich in [74] zur Berücksichtigung des nichtlinearen Materialverhaltens bei Regelungsproblemen: Bei quasistatischen Anwendungen kann die Hysterese durch geschlossene Regelkreise einfach kompensiert werden. Bei dynamischen Anwendungen wie aktiver Dämpfung scheint das Kompensieren der Hysterese mit Hilfe geschlossener Regelkreise nicht notwendig. PREUMONT befürchtet, dass die Hysterese-

kompensation in dynamischen Anwendungen instabile Systemantworten provoziert.

Wege zur Kompensation nichtlinearer Effekte zeigen JANOCHA, KUHNEN und KREJCI in [49–51]. Mit Hilfe sogenannter Hystereseoperatoren gelingen ihnen echtzeitfähige Kompensationen von Hysterese- und Kriechverhalten. Die Ansätze sind aufwendig, jedoch sehr effektiv. Wird zwischen Regler und Aktor ein solcher Kompensator geschaltet, so kann dann von nahezu linearem Materialverhalten ausgegangen werden.

Zum rein mechanischen Verhalten der MFCs äußern sich WILLIAMS et al. in [105]. Im Zugversuch zeigen die MFCs bei kurzgeschlossenen Elektroden linear elastisches Verhalten für Dehnungen in Faserrichtung bis  $S \approx 10^{-3}$ . Für größere Dehnungen nimmt die Steigung der Spannungs-Dehnungs-Kurve ab, da plastische Deformationen auftreten. Die Grenze des linear-elastischen Verhaltens von  $S \approx 10^{-3}$  genügt, um bei normalem Betrieb einen proportionalen Zusammenhang zwischen mechanischer Spannung und mechanischer Dehnung zu unterstellen.

Im Rahmen dieser Arbeit wird lineares Materialverhalten für die Macro Fiber Composites angenommen. Eine aufwendige, nichtlineare Modellierung des Verhaltens der MFCs erscheint hier nicht notwendig. Sie würde im Übrigen einfache Beziehungen verhindern und aufwendige Experimente zur Parameteridentifikation erfordern.

### 3.1.2 Zum Aktor-Träger-Verbund

Der Helixaktor ist ein schlanker Stab und es bieten sich etablierte Stabmodelle an, ergänzt um den MFC. Vorerst sollen nur mögliche Ansätze zum Modellieren des Piezolaminates - dem Aktor-Träger-Verbund - diskutiert werden. Die Vorverwindung wird anschließend betrachtet.

Abbildung 3.2 zeigt zwei Schnitte durch den Helixaktor. Sein Aufbau ist ausgesprochen heterogen. Ursache ist der Macro Fiber Composite. Zwischen Piezokeramik und Träger befinden sich Matrix, Elektroden, Polyimidfilm und Klebeschicht. Insbesondere sind die Feldlinien im MFC stark gekrümmt und es ist klar, dass für genaue Modelle des MFC-Träger-Laminats simple Ansätze nicht genügen. Das heißt: Offensichtlich kann durch Ändern der Feldstärke die Gestalt des MFCs und somit die Krümmung des Helixaktors einfach geändert werden, jedoch ist das genaue Berechnen aller mechanischen und elektrischen Feldgrößen und letztlich auch der tatsächlichen Verschiebungen schwierig.

Es bietet sich an, das Verhalten der MFCs zunächst zu homogenisieren. Dieses Gebiet wird von mehreren Autoren bearbeitet und es haben sich zwei wesentliche Annahmen durchgesetzt: 1.) Das elektrische Feld zeigt nur in Richtung  $\vec{e}_3$ , 2.) der MFC wird als Monolith mit orthotropem Materialverhalten modelliert. Die notwendigen Materialparameter werden sowohl in Experimenten, siehe [105, 106], als auch mit Hilfe von Modellrechnungen bestimmt, siehe [5, 18, 28]. Die genannten Arbeiten beschränken sich weitgehend auf Zugversuche. Somit können konstante mechanische Spannungen und Dehnungen über dem Aktorquerschnitt angenommen werden. Die Übertragung auf Biegeaktoren darf durchaus kritisch gesehen werden, da hier nicht von der genannten Gleichverteilung ausgegangen werden kann. Unterschiede im Verhalten von Piezofasern, Matrix und Polyimidfilm sind unter Umständen bedeutsam. Der Sachverhalt wird hier nicht weiter diskutiert, da es kein spezielles Problem des Helixaktors ist und im Übrigen für diese Arbeiten unwesentlich erscheint. Im Folgenden wird unterstellt, dass der MFC zufriedenstellend als Monolith mit orthotropem Materialverhalten angesehen werden

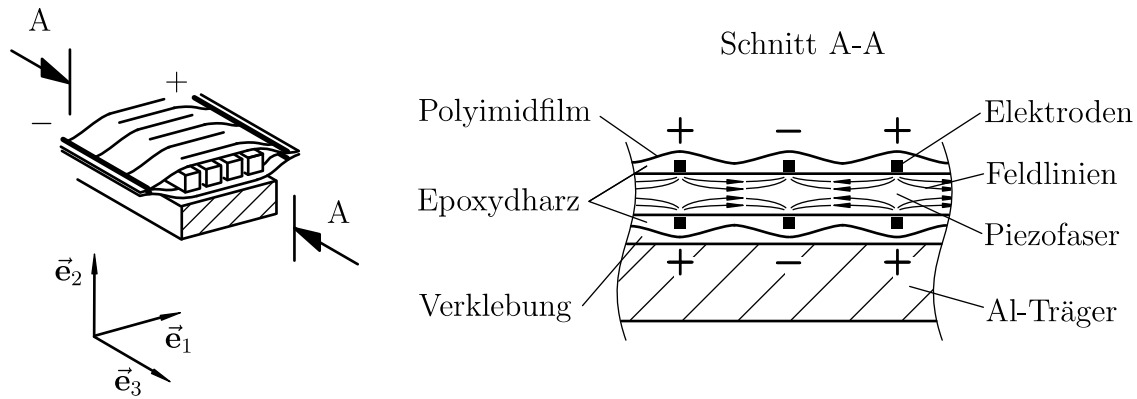


Abbildung 3.2: Schnitt durch MFC und Aluminiumträger. Betrieb im  $d_{33}$ -Modus.

kann. Das elektrische Feld zeigt nur in Richtung  $\vec{e}_3$ .

Modelle zu Piezolaminaten werden von vielen Autoren diskutiert. SARAVANOS und HEYLIGER [80], CHOPRA [9] sowie CRAWLEY und ANDERSON [12] stellen bekannte Theorien im Überblick vor und vergleichen die Modelle, teilweise durch eigene Rechnungen und Experimente. Sie betrachten sowohl einfache als auch komplexe Modelle. Einfache Modelle sind zum Beispiel Ansätze nach der klassischen Laminattheorie, das heißt, es wird für das gesamte Laminat eine lineare Verschiebungsverteilung ausschließlich in Richtung  $\vec{e}_3$  unterstellt. Dies entspricht der Modellierung als Euler-Bernoulli-Balken<sup>1</sup>. Komplexe Modelle erlauben beispielsweise Verschiebungsansätze für jede Schicht und in jede Richtung.

Der Helixaktor ist schlank. Sein Länge-Breite-Verhältnis beträgt  $L/b \approx 35$ . Sein Länge-Höhe-Verhältnis beträgt  $L/h \approx 140$ . Letzteres ist für Ansätze über die Laminathöhe entscheidend. Der Helixaktor wird als vergleichsweise einfacher Euler-Bernoulli-Balken modelliert. Schubeffekte und Rotationsträgheiten der Querschnitte werden vernachlässigt und es werden nur Materialparameter in Richtung  $\vec{e}_3$  benötigt. Die genannten Quellen sprechen für eine derartige Modellierung. Die Arbeiten von CRAWLEY und ANDERSON zeigen, dass ab  $L/h > 100$  Schubeffekte vernachlässigt werden können, unterstellend, dass die Klebeschicht ausreichend steif ist. SARAVANOS und HEYLIGER berichten, dass ab  $L/h > 50$  selbst einfache Euler-Bernoulli-Balkenmodelle gute Ergebnisse liefern.

Der Helixaktor ist ein Monomorph, das heißt, sein Laminat besteht aus einer piezoelektrischen Schicht und einem rein mechanischen Träger. Der Aufbau ist asymmetrisch bezüglich der  $x$ -Achse. Beim Anregen des Aktor sind somit neben den Querverschiebungen der Stabachse auch Längsverschiebungen zu erwarten. Diese Längsverschiebungen sind klein gegenüber den Querverschiebungen und sie können hier vernachlässigt werden. Für die Bewertung des Helixaktors sind sie unerheblich. Lamine mit symmetrischem Aufbau zeigen a priori nur Querverschiebungen und es ist praktisch, abweichend vom Prototyp, im Modell einen symmetrischen Laminataufbau anzunehmen. Das heißt, der Aktor besteht dann aus zwei piezoelektrischen Schichten und ist ein Bimorph. Die

<sup>1</sup>Schlankte Strukturen sind *Stäbe*. Werden Stäbe nur auf Biegung beansprucht, so können sie auch als *Balken* bezeichnet werden. In dieser Arbeit wird die Bezeichnung *Balken* allein in den Wortgruppen *Euler-Bernoulli-Balken* beziehungsweise *Euler-Bernoulli-Balkenmodell* verwendet, da es die übliche Bezeichnung für diese spezielle Stabtheorie ist. In allen anderen Fällen wird durchweg der weiter gefasste Begriff *Stab* verwendet. Er schließt somit *Balken* ein.

elektrischen Felder in der oberen und der unteren piezoelektrischen Schicht sind entgegengesetzt gerichtet. Weiterhin wird auf eine rein mechanische Trägerschicht verzichtet. Auch diese Vereinfachung schränkt die späteren Aussagen zum Helixaktor nicht ein. Entscheidend ist, dass es durch die Macro Fiber Composites zu einer Krümmungsänderung kommt. Die effektiven Materialparameter für diese Bimorph-Formulierung können mit Hilfe weniger Experimente identifiziert werden. Die notwendigen Parameter der piezoelektrischen Schichten sind die Elastizitätskonstante  $c$  und die piezoelektrische Konstante  $e$ .

Neben einer Modellierung als Euler-Bernoulli-Balken wäre auch eine Modellierung als Timoshenko-Balken denkbar. Der Aufwand ist kaum größer. Zwei Probleme sprechen jedoch dagegen. Der Helixaktor ist sehr schlank und die Neigung der deformierten Stabachse  $u'$  sowie der Neigungswinkel des Stabquerschnitts  $\psi$  sind nahezu gleich. In den beschreibenden partiellen Differentialgleichungen treten Differenzen  $u' - \psi$  auf, die im Vergleich zu anderen Feldern nahezu verschwinden. Das kann zu numerischen Problemen führen. Weiterhin wäre für das Laminat ein effektiver Schubmodul festzulegen, was nicht ohne weiteres zufriedenstellend möglich ist. Der erreichte Gewinn an Genauigkeit wird wohl durch die Näherungen beim piezoelektrischen Verhalten vernichtet.

Bei der Modellierung des Helixaktors werden Schubeffekte zwischen Träger und MFC am linken und rechten Rand des MFCs nicht besonders diskutiert. Die Arbeiten [12, 62, 84, 85] befassen sich mit diesem Problem, hier allerdings für Piezoplatten.

Die Modellierung von Biegeaktoren als Euler-Bernoulli-Balken ist ein weit verbreiteter Ansatz. Er ist es unter anderem deshalb, weil große Verschiebungen nur mit schlanken, langen Biegeaktoren möglich sind. In diesem Zusammenhang ist auch die Veröffentlichung von TIMOSHENKO [97] aus dem Jahr 1925 zur Modellierung eines Bimetallstreifens interessant. Auch er nutzt die üblichen Euler-Bernoulli-Balkenmodelle.

### 3.1.3 Zur Vorverwindung

Für den Helixaktor genügt die Modellierung als Euler-Bernoulli-Balken mit *veränderlichem* Querschnitt. An diesem Modell lassen sich die eigentlichen Fragestellungen, wie Aktorraum und Kopplung zwischen Eingangs- und Ausgangsgrößen, bequem diskutieren. Vorverwundene Stäbe sind jedoch an sich bemerkenswert und neben der hier wichtigen Biegekopplung werden weitere Phänomene herausgestellt. Einen ausgezeichneten Einstieg gibt ROSEN in [76]. Der Umfang des Berichts ist wohl einmalig. Er beschreibt viele Phänomene vorverwundener Stäbe und er zitiert zahlreiche Arbeiten, sowohl zu Experimenten als auch zu Berechnungen. Insbesondere fasst er Diskussionen zur Modellierung zusammen.

Im Kontrast zu unverwundenen Stäben charakterisiert vorverwundene Stäbe ihr veränderlicher Querschnitt, genauer: die Hauptträgheitsachsen eines Querschnitts bei  $z$  sind gegenüber den Hauptträgheitsachsen des Querschnitts bei  $z = 0$  um einen Winkel  $\varphi(z)$  verdreht. Einige Körper lassen sich näherungsweise als vorverwundene Stäbe modellieren, wie zum Beispiel Luftschrauben, Turbinenschaufeln oder Tragflügel. Aber auch nahezu unverwundene Stäbe mit Imperfektionen können als Stäbe mit Vorverwindung aufgefasst werden.

Bei schlanken Stäben wird häufig das sogenannte Fasermmodell bemüht, das heißt, die Vorstellung, dass Stäbe aus dünnen Fasern bestehen, die sich nicht gegenseitig beeinflussen. Ist der Stab vorverwunden, so sind die gedachten Fasern vorgekrümmt und sie

haben Schraubenlinienform. Auch *vorgekrümmte* Stäbe besitzen vorgekrümmte Fasern und es können Analogien zu vorverwundenen Stäben möglich sein. LOVE behandelt in seiner umfangreichen Abhandlung zur Elastizität [56] beide Fälle gemeinsam. Seine kinematischen Beziehungen berücksichtigen sowohl Vorkrümmung als auch Vorverwindung. Beispiele für vorgekrümmte Stäbe wären Seekabel [25], Drähte in Schraubenlinienform [83] oder Modelle zu biologischen Strukturen [44].

Vorverwundene Stäbe zeigen sowohl Kopplungen zwischen den Querverschiebungen als auch Kopplungen zwischen Verdrehung und Längsverschiebung. Eine Kopplung zwischen beiden Effekten besteht nicht, wenn Flächenschwerpunkt und Schubmittelpunkt des Stabquerschnitts zusammenfallen. Das soll hier gelten. Die beiden Effekte - *Biegekopplung* und *Dehnungstorsionskopplung* - werden nachfolgend erläutert.

**Biegekopplung:** Bei unverwundenen, geraden Stäben mit konstantem Querschnitt sind die Flächenmomente 2. Grades  $I_x$ ,  $I_y$  und  $I_{xy}$  für alle  $z$  gleich. Insbesondere verschwindet das biaxiale Flächenmoment  $I_{xy}$  bei doppelt symmetrischen Querschnitten, wenn die  $x$ -Achse und die  $y$ -Achse mit den Hauptträgheitsachsen zusammenfallen. Bei vorverwundenen Stäben sind die Flächenmomente 2. Grades veränderlich entlang der Stabachse. Das biaxiale Flächenmoment  $I_{xy}$  verschwindet im Allgemeinen nicht und die Querverschiebungen koppeln. Die Biegekopplung hat weitreichende Konsequenzen, sowohl für statische als auch für dynamische Fragestellung.

ROSEN zitiert in seinem Bericht [76] viele Arbeiten zu statischen Problemen. Neben anderen hat CARNEGIE in [8] die statische Auslenkung von linksseitig fest eingespannten, vorverwundenen Stäben untersucht. Die Vorhersagen seines Euler-Bernoulli-Balkenmodells stimmen gut mit seinen Messungen überein. Die untersuchten Querschnitte waren doppelt symmetrisch und die Belastung wurde nur am freien Ende eingeleitet. Die Studie wurde durch Probleme an Tragflügeln mit gewölbtem Profil motiviert. Die Flügelquerschnitte sind dort nicht symmetrisch und die aerodynamischen Lasten sind verteilt über die Flügelspannweite. CARNEGIE vermutet jedoch, dass auch bei diesem Problem Modell und Experiment gut übereinstimmen.

WAUER erörtert in [101] Stabilitätsprobleme vorverwundener Kragträger. Ein Kragträger mit kleinen Imperfektionen - die Vorverwindung - wird durch eine Querkraft und ein Biegemoment am freien Ende belastet. Es zeigt sich, dass aufgrund der Vorverwindung die kritischen Kipplasten gegenüber perfekt unverwundenen Kragträgern abnehmen. Die Annahme perfekt unverwundener Kragträger ist hinsichtlich Kippen somit nicht konservativ.

DEN HARTOG [17] weist auf ein besonderes Problem der Flächenmomente 2. Grades hin. Bei einem vorverwundenen Stab quadratischen Querschnitts verschwindet  $I_{xy}$  und die Querverschiebungen sind trotz Vorverwindung nicht gekoppelt. Es kann vermutet werden, dass ein unverwundener Stab gleichen Querschnitts bei gleicher Belastung auch gleich große Verschiebungen zeigt. DEN HARTOG berichtet, dass der vorverwundene Stab nachgiebiger ist, dass also trotz gleicher Querschnitte beim vorverwundenen Stab tatsächlich geringere Biegesteifigkeiten auftreten.

Ein Beispiel für frühe Arbeiten zu dynamischen Problemen ist eine Untersuchung von MAIER. Er berechnet in [60] Biegeschwingungen von Luftschrauben. Auch ROSEN erörtert in [76] dynamische Fragestellungen und nennt weitere Beiträge, die im Folgenden auszugsweise zitiert werden.

ANLIKER und TRÖSCH berechnen in [2] für Euler-Bernoulli-Balken und bei acht

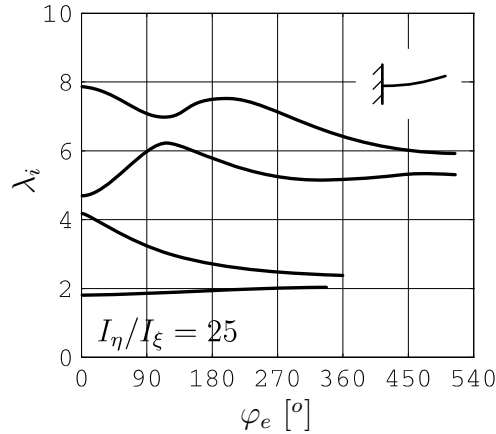


Abbildung 3.3: Normierte Eigenfrequenzen  $\lambda_i = \sqrt{\omega_{0,i}} \left( \frac{\mu L^4}{c I_\xi} \right)^{1/4}$  eines linksseitig fest eingespannten, vorverwundenen Stabs, aus [2].

verschiedenen Einspannungen die ersten vier Eigenfrequenzen, siehe Abbildung 3.3. Sie zeigen, dass bei Vorverwindungen bis zu  $30^\circ$  die Eigenfrequenzen um bis zu 150 % von den Eigenfrequenzen des unverwundenen Stabes abweichen.

DAWSON und CARNEGIE [15] berechnen und vermessen die Schwingungsformen flacher, vorverwundener Stäbe. Ihre umfangreichen Daten sind ausgesprochen wertvoll zur Verifikation eigener Modelle. Natürlicherweise koppeln auch hier  $u(z)$  und  $v(z)$  stark.

In [16] vergleichen DAWSON et al. Euler-Bernoulli-Balken mit Timoshenko-Balken für verschiedene Schlankheitsgrade. Ergänzend führen sie Experimente durch. Sie untersuchen Vorverwindungen bis  $90^\circ$ , Stablängen zwischen 3 in und 20 in und Querschnitte mit Breite-Höhe-Verhältnissen zwischen 8 : 1 und 2 : 1. Die Autoren stellen fest, dass bei vorverwundenen Stäben mit einem Länge-Breite-Verhältnis kleiner als 12 : 1 und einem Länge-Höhe-Verhältnis kleiner als 96 : 1 Euler-Bernoulli-Balkenmodelle erkennbare Fehler verursachen. Die entsprechenden Parameter des Helixaktors liegen klar oberhalb dieser Grenzen.

Die genannten Arbeiten [2, 15, 16] zeigen: Besteht lediglich Interesse an der Biegekopplung und beschränkt man sich auf schlanke, vorverwundene Stäbe, so genügt für den Helixaktor eine Modellierung als Euler-Bernoulli-Balken.

**Dehnungstorsionskopplung:** Die kinematischen Annahmen zur Biegekopplung sind denkbar einfach - sie entsprechen den Annahmen bei unverwundenen Stäben. Für die Dehnungstorsionskopplung sind einfache Beziehungen zwar durchaus möglich; es zeigt sich jedoch, dass das Problem kontrovers diskutiert wird und insbesondere das Fasermodell kritisch betrachtet wird.

Startpunkt ist für viele Autoren die Arbeit von CHU [11] aus dem Jahr 1951. Er untersucht die Torsionssteifigkeit vorverwundener Stäbe, sowohl mit dünnwandigen Querschnitten als auch mit Vollquerschnitten. Er stellt fest, dass mit zunehmender Vorverwindung auch die Torsionssteifigkeit zunimmt, siehe Abbildung 3.4. Der Effekt ist nur für flache Querschnitte ausgeprägt. Als Maß für die Vorverwindung ist der maximale Faserwinkel  $\beta$  entscheidend. Er ist die maximale Neigung der Fasern gegenüber

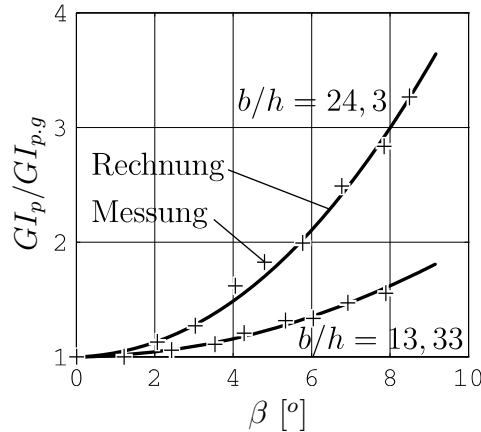


Abbildung 3.4: Torsionssteifigkeit  $GI_p$  eines vorverwundenen Stabes bezogen auf  $GI_{p,g}$  eines unverwundenen Stabes über dem Faserwinkel  $\beta$ , aus [11].

der geraden Stabachse, siehe Gleichung (2.5). CHU untersuchte Faserwinkel bis ca.  $10^\circ$  und beschränkte sich auf Stäbe mit flachem Querschnitt. Er nutzt das Fasermmodell und schränkt seine Gültigkeit auf kleine Faserwinkel ein. Seine Vorhersagen und seine gemessenen Werte stimmen für diesen Parameterbereich sehr gut überein.

Das Fasermmodell impliziert folgende Kopplungen: Wird ein vorverwundener Stab weiter verdreht, so verkürzt er sich; wird er entdreht, so verlängert er sich. Diese Kopplung zeigt ROSEN [75] im Experiment: flache, vorverwundene Metallstreifen entdrehen sich unter Zuglast. LENZ und VIELSACK weisen in [54] auf einen gegenteiligen Effekt hin. Sie berichten, dass bei Torsionsexperimenten mit Vollzylindern bisher nur Verlängerungen der Proben und insbesondere keine Verkürzungen beobachtet wurden. Sie sagen weiter, dass alle bis dahin gemachten Versuche zur Erklärung des Effektes mit dem Fasermmodell gescheitert sind. Das Fasermmodell lässt Normal- und Tangentialkräfte außer acht. Sie zitieren eine Arbeit von RIVLIN, die auf Grundlage nichtlinearer Elastizitätstheorie eine befriedigende theoretische Erklärung liefert und auch zeigt, dass sich inkompressible Körper bei Torsion stets verlängern.

Aus den genannten Veröffentlichungen kann Folgendes abgeleitet werden: Das Fasermmodell ist für flache Querschnitte einsetzbar, bei Vollquerschnitten mit  $b/h \approx 1$  ist es nicht anwendbar. Die Behandlung der Dehnungstorsionskopplung erscheint insgesamt aufwendiger als die Behandlung der Biegekopplung.

Die Dehnungstorsionskopplung ist beim Helixaktor ohne Bedeutung, da sein Querschnitt doppelt symmetrisch ist. In diesem Fall sind die Querverschiebungen von der Längsverschiebung und der Verdrehung entkoppelt.

## 3.2 Helixaktor als Euler-Bernoulli-Balken

Im Folgenden werden sowohl ein statisches Modell als auch ein dynamisches Modell formuliert. Die zugrunde liegenden Gleichungen der linearen Piezoelektrizität werden eingeführt, es wird das sogenannte Hauptachsensystem beschrieben sowie Annahmen und Einschränkungen des Euler-Bernoulli-Balkenmodells diskutiert.



### 3.2.1 Grundgleichungen der linearen Piezoelektrizität

Die Bewegungsgleichungen des Helixaktors werden auf Grundlage der Theorie der linearen Piezoelektrizität hergeleitet. TIERSTEN stellt die Theorie in [96] vor und die entsprechenden Gleichungen werden von ihm übernommen. Die Gleichungen sind hinreichend bekannt und es wird auf eine separate Herleitung verzichtet. Die von TIERSTEN getroffenen Annahmen gelten dann auch hier. Beispielsweise werden magnetische Felder und elektrodynamische Effekte vernachlässigt.

Die Gleichungen werden in Koordinatenschreibweise angegeben und es gelten die üblichen Vereinbarungen der Tensorrechnung [46], wie Summenkonvention und verkürzte Schreibweise der partiellen Ableitung. Die angegebenen Gleichungen gelten für ein kartesisches Koordinatensystem. Dessen Koordinaten sind  $x$ ,  $y$ ,  $z$  und dessen Koordinatenrichtungen werden durch die Basisvektoren  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  und  $\vec{e}_3$  beschrieben. Für die Indizes gilt

$$i, j, k, l = 1, 2, 3. \quad (3.1)$$

Die Gleichungen der Theorie der linearen Piezoelektrizität sind dann durch

$$\tau_{ij,i} = \rho \ddot{u}_j, \quad (3.2)$$

$$D_{i,i} = 0, \quad (3.3)$$

$$\tau_{ij} = c_{ijkl} S_{kl} - e_{kij} E_k, \quad (3.4)$$

$$D_i = e_{ikl} S_{kl} + \varepsilon_{ik} E_k, \quad (3.5)$$

$$S_{kl} = \frac{1}{2} (u_{k,l} + u_{l,k}), \quad (3.6)$$

$$E_k = -\varphi_{,k}. \quad (3.7)$$

gegeben. Die Gleichungen (3.2) sind die Gleichgewichtsbedingungen am Volumenelement mit den Koordinaten des Spannungstensors  $\tau_{ij}$ , der Dichte  $\rho$  sowie den Koordinaten des Verschiebungsvektors  $u_j$ . Gleichung (3.3) ist die Ladungsgleichung der Elektrostatik mit den Koordinaten der elektrischen Flussdichte  $D_i$ . Die Gleichungen (3.4) und (3.5) sind die konstitutiven Gleichungen, also das Stoffgesetz, mit den Koordinaten des Verzerrungstensors  $S_{kl}$ , den Koordinaten des elektrischen Feldes  $E_k$ , den Koordinaten des Elastizitätstensors  $c_{ijkl}$ , den Koordinaten des piezoelektrischen Tensors  $e_{kij}$  und den Koordinaten des Permittivitätstensors  $\varepsilon_{ik}$ . Die Gleichungen (3.6) sind die Formänderungsbeziehungen. Die Gleichungen (3.7) geben die Beziehungen zwischen den elektrischen Feldstärken und dem elektrischen Potential  $\varphi$  im Rahmen der üblichen Elektrostatik wieder.

### 3.2.2 Hauptachsensystem

Neben dem kartesischen Koordinatensystem wird ein weiteres Koordinatensystem eingeführt - das Hauptachsensystem. Es ist bei vorverwundenen Stäben üblich und wird zum Beispiel von ROSEN und LOVE in [56, 76] genutzt.

Im kartesischen Koordinatensystem können die Bewegungsgleichungen ohne besondere Schwierigkeiten hergeleitet werden, jedoch ergeben sich partielle Differentialgleichungen mit veränderlichen Koeffizienten - die trigonometrischen Funktionen aufgrund der Vorverwindung. Im Hauptachsensystem treten ausschließlich konstante Koeffizienten auf, jedoch verlangen Neigung und Krümmung der Biegelinie aufgrund veränderlicher Basisvektoren besondere Aufmerksamkeit.

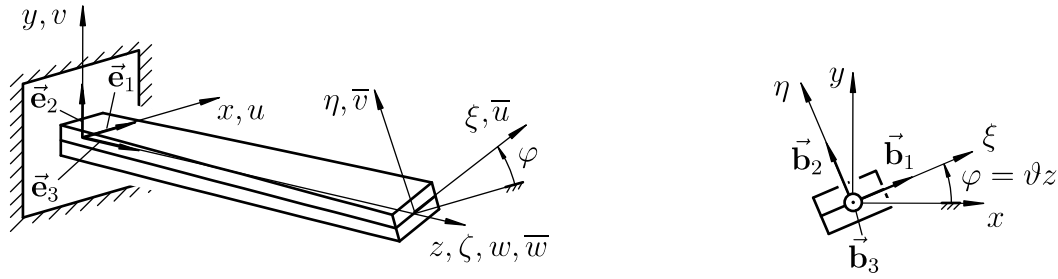


Abbildung 3.5: Kartesisches Koordinatensystem mit den Basisvektoren  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ , kartesischen Koordinaten  $x, y, z$  und Verschiebungen  $u, v, w$ . Hauptachsensystem mit den Basisvektoren  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ , krummlinigen Koordinaten  $\xi, \eta, \zeta$  und Verschiebungen  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ .

Abbildung 3.5 illustriert das kartesische Koordinatensystem und das Hauptachsensystem. Beide Koordinatensysteme gelten global. Beide Koordinatensysteme sind Inertialsysteme, da ihre Basisvektoren nicht zeitabhängig sind. Die Koordinatenlinien des Hauptachsensystems sind jedoch krummlinig.

Die Koordinaten  $\xi, \eta$  und die Basisvektoren  $\vec{b}_1, \vec{b}_2$  zeigen in Richtung der Querschnittshauptachsen. Sie ändern somit entlang  $z$  ihre Richtung. Der Basisvektor  $\vec{b}_3$  zeigt in Richtung der Stabachse und ist identisch mit  $\vec{e}_3$ . Die Koordinate  $\zeta$  entlang der Stabachse ist identisch mit  $z$ . Soweit möglich und praktisch wird im Folgenden  $\zeta$  durch  $z$  ersetzt.

Zwischen kartesischen und krummlinigen Koordinaten bestehen die Beziehungen

$$x = \xi \cos \vartheta \zeta - \eta \sin \vartheta \zeta, \quad y = \xi \sin \vartheta \zeta + \eta \cos \vartheta \zeta, \quad z = \zeta. \quad (3.8)$$

Es wird eine Transformationsmatrix

$$(A_{ij}) = \begin{bmatrix} \cos \vartheta z & \sin \vartheta z & 0 \\ -\sin \vartheta z & \cos \vartheta z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

eingeführt. Sie beschreibt eine Drehung um  $\vec{e}_3$  von der Größe des Winkels  $\vartheta z$ . Sie ist eine Drehmatrix und somit ist ihre Inverse

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T, \quad (3.10)$$

das heißt,

$$\bar{A}_{ij} = A_{ji}. \quad (3.11)$$

Die Basisvektoren des Hauptachsensystems können dann mit

$$\vec{b}_i = A_{ij} \vec{e}_j \quad (3.12)$$

angegeben werden.

Die Basisvektoren  $\vec{b}_i$  sind nicht die kovarianten Basisvektoren  $\vec{g}_i$  zu den Koordinatenlinien  $\xi, \eta, \zeta$ . Die Basisvektoren  $\vec{b}_i$  sind bei festgehaltenem  $z$  unveränderlich für alle  $\xi, \eta$ . Die kovarianten Basisvektoren wären sehr wohl abhängig von  $\xi$  und  $\eta$ . Einzig für  $\xi = 0$  und  $\eta = 0$  gilt  $\vec{b}_i = \vec{g}_i$ .

Neben den zwei schon eingeführten Koordinatensystemen existiert noch ein drittes, lokales Querschnittskordinatensystem. Es gilt nur im Bereich  $[z, z + dz]$  und wird aus dem Hauptachsensystem abgeleitet. Die Koordinaten  $\xi, \eta, \zeta$  des Hauptachsensystems sind auch seine Koordinaten. Sie sind jedoch anders als im Hauptachsensystem gerade - natürlich beschränkt auf den Bereich  $[z, z + dz]$ . Einzig aus diesem Grund kann trotz krummliniger Koordinaten auf kovariante Ableitungen in den Gleichungen der linearen Piezoelektrizität (3.2-3.7) verzichtet werden.

Die Feldgrößen des Stabmodells hängen nur von  $z$  ab. Das übliche Zusammenfassen über dem Querschnitt zum Reduzieren des dreidimensionalen Problems auf ein eindimensionales Problem beseitigt mögliche Widersprüche zwischen den Koordinaten  $\xi, \eta, \zeta$  im Hauptachsensystem und im Querschnittskordinatensystem. Letztlich ist nur die Lage der Biegelinie gesucht. Deren Lagrangesche Koordinaten sind  $\xi = 0$  und  $\eta = 0$ , womit dann tatsächlich die Basisvektoren  $\vec{\mathbf{b}}_i$  und die kovarianten Basisvektoren  $\vec{\mathbf{g}}_i$  identisch sind.

**Tangenten- und Krümmungsvektor:** Ein Ortsvektor  $\vec{\mathbf{r}}$  kann sowohl im kartesischen Koordinatensystem

$$\vec{\mathbf{r}} = r_i \vec{\mathbf{e}}_i \quad (3.13)$$

als auch im Hauptachsensystem

$$\vec{\mathbf{r}} = \bar{r}_i \vec{\mathbf{b}}_i \quad (3.14)$$

angegeben werden. Die überstrichenen Größen sind Koordinaten im Hauptachsensystem. Zwischen beiden Koordinatensystemen wird mit der Transformationsmatrix (3.9)

$$\bar{r}_i = A_{ij} r_j \quad (3.15)$$

umgerechnet. Der Tangentenvektor der durch  $\vec{\mathbf{r}}$  beschriebenen Raumkurve ist

$$\vec{\mathbf{t}} = (\vec{\mathbf{r}})' \quad (3.16)$$

Er beträgt im kartesischen Koordinatensystem

$$\vec{\mathbf{t}} = t_i \vec{\mathbf{e}}_i = r_i' \vec{\mathbf{e}}_i. \quad (3.17)$$

Ableitungen der Basisvektoren  $\vec{\mathbf{e}}_i$  treten nicht auf. Sie sind unabhängig von  $z$ . Im Hauptachsensystem folgt für den Tangentenvektor

$$\vec{\mathbf{t}} = \bar{t}_i \vec{\mathbf{b}}_i = \bar{r}_i' \vec{\mathbf{b}}_i + \bar{r}_i (\vec{\mathbf{b}}_i)' \quad (3.18)$$

Werden die partiellen Ableitungen der Basisvektoren nach  $z$  ausgeführt, so folgt

$$\vec{\mathbf{t}} = \underbrace{(\bar{r}_1' - \vartheta \bar{r}_2)}_{=\bar{t}_1} \vec{\mathbf{b}}_1 + \underbrace{(\bar{r}_2' + \vartheta \bar{r}_1)}_{=\bar{t}_2} \vec{\mathbf{b}}_2 + \underbrace{\bar{r}_3'}_{=\bar{t}_3} \vec{\mathbf{b}}_3. \quad (3.19)$$

Ist  $\vec{\mathbf{r}}$  die Biegelinie, so beschreiben die Koordinaten des Tangentenvektors die Neigung der Biegelinie im jeweiligen Koordinatensystem.

Analog zum Tangentenvektor lässt sich der Krümmungsvektor<sup>2</sup> im kartesischen Koordinatensystem

$$\vec{\mathbf{k}} = k_i \vec{\mathbf{e}}_i = r_i'' \vec{\mathbf{e}}_i \quad (3.20)$$

---

<sup>2</sup>siehe zum Begriff *Krümmungsvektor* auch Anmerkung zu Gleichung (1.17)

und im Hauptachsensystem

$$\vec{\mathbf{k}} = \underbrace{(\bar{r}_1'' - 2\vartheta\bar{r}_2' - \vartheta^2\bar{r}_1)}_{=\bar{k}_1} \vec{\mathbf{b}}_1 + \underbrace{(\bar{r}_2'' + 2\vartheta\bar{r}_1' - \vartheta^2\bar{r}_2)}_{=k_2} \vec{\mathbf{b}}_2 + \underbrace{\bar{r}_3''}_{=\bar{k}_3} \vec{\mathbf{b}}_3 \quad (3.21)$$

herleiten. Diese Beziehungen für den Krümmungsvektor sind bei vorverwundenen Stäben üblich und sie werden auch schon von LOVE [56] so angegeben.

Die Transformation zwischen den Koordinaten des Tangentenvektors und des Krümmungsvektors kann wie bei  $r_i$  und  $\bar{r}_j$  in Gleichung (3.15) mit Hilfe der Transformationsmatrix  $A_{ij}$  ausgeführt werden, also

$$\bar{t}_i = A_{ij}t_j, \quad t_i = \bar{A}_{ij}\bar{t}_j \quad (3.22)$$

und

$$\bar{k}_i = A_{ij}k_j, \quad k_i = \bar{A}_{ij}\bar{k}_j. \quad (3.23)$$

### 3.2.3 Annahmen und Einschränkungen

Für den Helixaktor ist ein exaktes Lösen der Gleichungen der linearen Piezoelektrizität (3.2-3.7) wohl unmöglich. Werden jedoch geeignete Annahmen getroffen, so lässt sich das komplizierte dreidimensionale Problem auf ein eindimensionales Problem reduzieren, wodurch zufriedenstellende Näherungslösungen möglich werden. Diese Methode, plausible Annahmen zu treffen und damit zumindest einen Teil der Lösung zu erraten, geht auf ST. VENANT zurück, siehe [29]. Im Folgenden werden die Annahmen und Bedingungen für das statische und das dynamische Modell des Helixaktors dargestellt und erläutert.

**Annahmen:** Der gerade, vorverwundene Stab, modelliert als Euler-Bernoulli-Balken, ist lokal zwischen  $z$  und  $z + dz$  immer ein gerader, unverwundener Stab. Es ist ohne Belang, wie die globale Gestalt des Stabes ist. Insbesondere sind alle Oberflächen eines Stabquerschnitts  $[z, z + dz]$  eben und nicht gekrümmt. Es gelten somit für den geraden, vorverwundenen Euler-Bernoulli-Balken unmittelbar die Annahmen des geraden, unverwundenen Euler-Bernoulli-Balkens:

- *A1:* Die Stabquerschnitte sind vor und nach der Deformation eben. Die Stabquerschnitte stehen immer senkrecht zur Biegelinie.
- *A2:* Es gilt das Prinzip von der elastischen Gleichwertigkeit statisch äquivalenter Belastungssysteme - das Prinzip von ST. VENANT, siehe beispielsweise [29]. Das heißt, die Deformation des Stabes durch Belastungssysteme ist in ausreichender Entfernung von deren Lasteinleitung nur von den resultierenden Schnittlasten abhängig.
- *A3:* Von den Koordinaten des Spannungstensors und des Verzerrungstensors werden nur  $\tau_{33}$  und  $S_{33}$  berücksichtigt. Alle anderen Einträge verschwinden. Sie sind ausreichend klein gegenüber  $\tau_{33}$  und  $S_{33}$ .
- *A4:* Rotationsträgheiten der Stabquerschnitte werden vernachlässigt.

Die Annahmen  $A1$  bis  $A4$  sind die klassischen Annahmen für Euler-Bernoulli-Balken und bedürfen keiner besonderen Erklärung. Der Helixaktor ist jedoch ein *vorverwundener Biegeaktor* und insbesondere dazu sind weitere Annahmen notwendig.

- $A5$ : Die Biegesteifigkeiten  $cI_\xi$  und  $cI_\eta$  sind die tatsächlichen Biegesteifigkeiten des vorverwundenen Stabes.

Diese Annahme bezieht sich auf die Veröffentlichung von DEN HARTOG [17] und sie wurde schon in Kapitel 3.1.3 erwähnt. DEN HARTOG weist darauf hin, dass ein unverwundener Stab und ein vorverwundener Stab gleicher Querschnittsgeometrie durchaus unterschiedliche Biegesteifigkeiten zeigen. Sie sind beim vorverwundenen Stab geringer.

- $A6$ : Das Prinzip von ST. VENANT, siehe  $A2$ , wird weiter gefasst. Die Deformation soll auch nahe der Lasteinleitung ausreichend genau allein von den resultierenden Schnittlasten abhängen.
- $A7$ : Es genügt eine lineare Beschreibung des piezoelektrischen Verhaltens.

Die Erweiterung des Prinzips von ST. VENANT in Annahme  $A6$  ist insofern wichtig, da durch die MFCs keine konzentrierten Lasten sondern verteilte Lasten eingeleitet werden. Ein *genügend weiter Abstand* wie in Annahme  $A2$  ist somit durchweg nicht möglich.

Die Annahme  $A7$  zum Stoffgesetz wurde ausführlich in Kapitel 3.1.1 diskutiert. Die lineare Approximation kann nur eine grobe Näherung des nichtlinearen Materialverhaltens sein und sie ist ein Zugeständnis an einfache Modelle.

Der Helixaktor ist ein piezoelektrischer Wandler, dessen Verhalten durch die Gleichungen der linearen Piezoelektrizität (3.2-3.7) beschrieben wird. Mechanische und elektrische Feldgrößen des Wandlers beeinflussen sich gegenseitig, hier speziell die mechanischen Verschiebungen  $u_i$  und das elektrische Potential  $\varphi$ . Die folgenden Näherungen erlauben ein a priori bekanntes elektrisches Potential und nur die mechanischen Verschiebungen verbleiben als unbekannte Feldgröße. Insbesondere ist  $\varphi$  dann unabhängig von  $u_i$ :

- $A8$ : Die elektrische Feldstärke ist an einer Stelle  $z$  konstant über dem Querschnitt. Die elektrischen Feldstärken in der oberen und der unteren Schicht sind entgegengesetzt gerichtet.
- $A9$ : Innerhalb eines aktiven Elements, das heißt, innerhalb eines elektrisch verbundenen Bereichs des MFCs, kann eine konstante elektrische Feldstärke unterstellt werden. Sie zeigt lediglich in Richtung  $\vec{e}_3$ , sprich nur  $E_3$  wird berücksichtigt.
- $A10$ : Der Helixaktor wird spannungsgeregelt betrieben.

Die Annahme  $A8$  einer konstanten Feldstärke über dem Querschnitt approximiert den Verlauf der elektrischen Feldstärke im Macro Fiber Composite. Die tatsächliche Verteilung über dem MFC-Querschnitt wird wohl kaum bestimmbar sein.

Die Annahme  $A9$  ist durch den ausgesprochen kleinen Elektrodenabstand der MFCs motiviert. Er beträgt ca. 1/3 mm. Bei statischen Problemen ohne zusätzliche mechanische Lasten darf wohl unterstellt werden, dass die mechanische Dehnung im Bereich zwischen den Elektroden nahezu konstant ist. Aus der konstitutiven Gleichung (3.4)

folgt somit auch ein konstantes elektrisches Feld in diesem Bereich. Bei dynamischen Problemen stellt diese Annahme nur eine grobe Näherung dar. Nichtsdestotrotz lassen sich die Modelle auch in diesem Fall zufriedenstellend validieren, siehe Kapitel 5.3.3.

Der spannungsgeregelte Betrieb des Helixaktors nach Annahme *A10* erzwingt an den Elektroden ein bestimmtes elektrisches Potential. Somit ist mit *A8*, *A9* und *A10* das elektrische Potential vollständig festgelegt und es ist insbesondere unabhängig von den mechanischen Verschiebungen  $u_i$ .

**Einschränkungen zur Gültigkeit der Annahmen:** Die genannten Vereinfachungen erlauben erst unter bestimmten Bedingungen sinnvolle Näherungslösungen.

- *B1*: Die Querschnittsabmessungen  $b$  und  $h$  sind klein gegenüber der Stablänge, also

$$\frac{b}{L} \ll 1, \quad \frac{h}{L} \ll 1. \quad (3.24)$$

Diese Bedingung ist *die* entscheidende Forderung für Euler-Bernoulli-Balken. Nur unter dieser Voraussetzung sind die Annahmen *A1* bis *A4* sinnvoll.

- *B2*: Es werden lediglich kleine Verschiebungen betrachtet.

Mit *B2* muss nicht zwischen Lagrangeschen Koordinaten und Eulerkoordinaten unterschieden werden. Auch der Unterschied zwischen Bogenlänge  $s$  und der Koordinate  $z$  ist hinfällig, somit auch  $ds \approx dz$ .

- *B3*: Der minimale Krümmungsradius  $r$  der Biegelinie ist groß gegenüber den Querschnittsabmessungen. Das heißt,

$$\frac{b}{r} \ll 1, \quad \frac{h}{r} \ll 1. \quad (3.25)$$

Diese Forderung stellt sicher, dass später lediglich kleine Verzerrungen auftreten, hier nur  $S_{33}$ . Somit genügen die linearisierten Formänderungsbeziehungen (3.6).

- *B4*: Die Biegelinie ist nur schwach geneigt.

Sind die Neigungen klein, so sind wegen Annahme *A1* auch die Verdrehungen der Querschnitte klein. Sie sollen insbesondere so klein sein, dass erstens für die Neigungswinkel  $\alpha$  um die Koordinatenachsen

$$\alpha_x \approx -t_2, \quad \alpha_y \approx t_1 \quad \text{bzw.} \quad \alpha_\xi \approx -\bar{t}_2, \quad \alpha_\eta \approx \bar{t}_1 \quad (3.26)$$

gelten kann. Zweitens sollen die Neigungswinkel so klein sein, dass keine Festlegung der Drehreihenfolge notwendig ist und eine linearisierte Drehmatrix im Verschiebungsansatz genügt. Weiterhin erlauben kleine Neigungen kleine Werte  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $\bar{t}_1$ ,  $\bar{t}_2$  und ein vereinfachter Krümmungsvektor kann angegeben werden. Der Krümmungsvektor ist dann abweichend von den Beziehungen (3.20) und (3.21)

$$\vec{\mathbf{k}} = k_1 \vec{\mathbf{e}}_1 + k_2 \vec{\mathbf{e}}_2 \quad (3.27)$$

beziehungsweise

$$\vec{\mathbf{k}} = \bar{k}_1 \vec{\mathbf{b}}_1 + \bar{k}_2 \vec{\mathbf{b}}_2, \quad (3.28)$$

da die Koordinaten  $k_3$  beziehungsweise  $\bar{k}_3$  verschwinden.

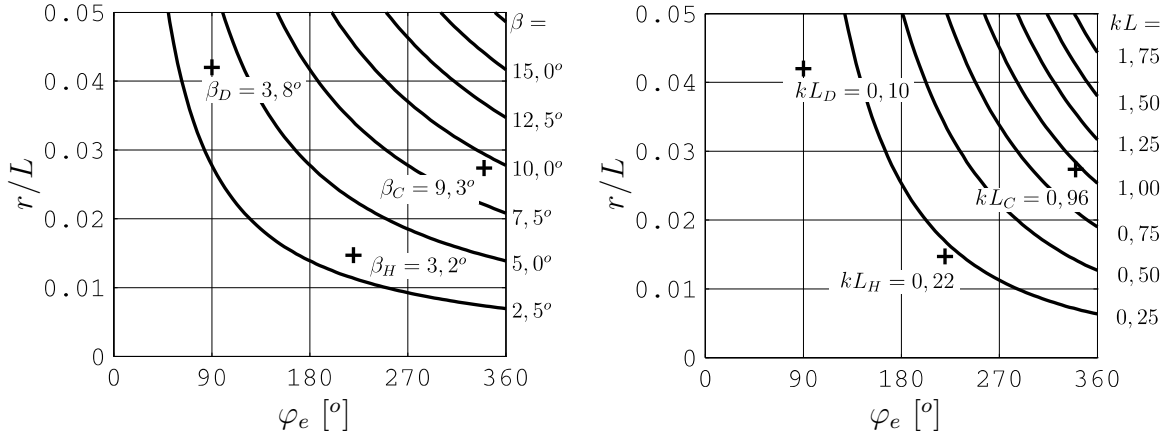


Abbildung 3.6: Faserwinkel  $\beta$  und bezogene Faserkrümmung  $kL$  über  $r/L$  und  $\varphi_e$ . Parameter der gekennzeichneten Punkte:  $H$  für Helixaktor 4 mm  $\times$  1 mm  $\times$  140 mm,  $\varphi_e = 220^\circ$ ;  $D$  für Stab nach DAWSON et al. 1 in  $\times$  0,125 in  $\times$  12 in,  $\varphi_e = 90^\circ$ ;  $C$  für Stab nach CHU 0,875 in  $\times$  0,036 in  $\times$  16 in,  $\varphi_e = 335^\circ$ .

- $B5$ : Zum Beschreiben des dynamischen Verhaltens werden nur wenige erste Eigenschwingungsformen niedriger Frequenz benötigt.

Nur unter dieser Voraussetzung können Rotationsträgheit und Schubeffekte bei dynamischen Fragestellungen vernachlässigt werden. Eine Modellierung als Timoshenko-Balken ist somit nicht erforderlich.

- $B6$ : Der maximal auftretende Faserwinkel  $\beta$  und die maximal auftretende Faserkrümmung  $k$  sind klein.

Der Euler-Bernoulli-Balken besteht - zumindest gedacht - aus langen, dünnen Längsprismen, die unabhängig voneinander sind. Sie üben keine Tangential- oder Normalkräfte aufeinander aus. Unter anderem diese Annahme erlaubt die einfachen Modellannahmen des Euler-Bernoulli-Balkens. Der Helixaktor ist vorverwunden und seine gedachten Fasern sind nicht mehr gerade. Sie sind gekrümmt und gegenüber der Stabachse geneigt. Nur für kleine Faserwinkel und kleine Faserkrümmungen sind voneinander unabhängige Fasern denkbar<sup>3</sup>.

In Kapitel 2.1, in den Gleichungen (2.5) und (2.27), wurden Beziehungen für  $\beta$  und  $k$  eingeführt. Sie werden hier in linearisierter Form verwendet. Der Faserwinkel ist

$$\beta \approx \frac{r}{L} \varphi_e, \quad (3.29)$$

während sich für die Faserkrümmung, bezogen auf die Länge  $L$ ,

$$kL \approx \frac{r}{L} \varphi_e^2 \quad (3.30)$$

ergibt. Darin ist  $r$  der Abstand von der Stabachse und er beträgt maximal

$$r = \frac{\sqrt{b^2 + h^2}}{2}. \quad (3.31)$$

<sup>3</sup>Bei unverwundenen Stäben wird häufig gefordert, dass Querschnittsänderungen nur allmählich entlang  $z$  erfolgen dürfen. Diese Forderung ist letztlich gleichbedeutend mit Bedingung  $B6$ .

Es zeigt sich in den Gleichungen (3.29) und (3.30), dass für kleine Faserwinkel und für kleine Faserkrümmungen nicht zwingend kleine Vorverwindungen  $\varphi_e$  notwendig sind. Es genügen ausreichend kleine Querschnittsabmessungen  $b$  und  $h$ , um auch Stäbe großer Vorverwindung als Euler-Bernoulli-Balken zu modellieren.

Die Beziehungen (3.29) und (3.30) zwischen  $\varphi_e$ ,  $\beta$  und  $kL$  werden in den Diagrammen in Abbildung 3.6 illustriert. Darin sind auch drei ausgewählte Parametersätze eingetragen: Index  $H$  steht für den Prototyp des Helixaktors, Index  $D$  steht für einen Stab aus [16] von DAWSON et al., Index  $C$  steht für einen Stab aus [11] von CHU. DAWSON et al. untersuchen das Schwingungsverhalten vorverwundener Stäbe. Bei dem angegebenen Parametersatz ist eine Modellierung als Euler-Bernoulli-Balken noch ausreichend. CHU untersucht Dehnungstorsionskopplungen mit Hilfe des Fasermodells. Der gewählte Parametersatz gibt die Grenze des von CHU untersuchten Bereichs an. Rechnung und Experiment stimmen darin sehr gut überein.

Das Festlegen noch tolerierbarer Werte für  $\beta$  und  $kL$  ist kein spezielles Problem des Helixaktors und wird hier nicht weiter vertieft. Es betrifft vorverwundene Stäbe generell und wird beispielsweise auch in dem Bericht von ROSEN diskutiert [76]. Der Prototyp des Helixaktors ist hinsichtlich Faserwinkel und Faserkrümmung den Stäben von CHU und DAWSON et al. ähnlich. Die Modellierung als Euler-Bernoulli-Balken erscheint somit auch unter diesem Gesichtspunkt vertretbar.

Die folgenden Bedingungen sind nicht zwingend für die Modellierung als Euler-Bernoulli-Balken erforderlich. Sie reduzieren lediglich den Aufwand für die hier untersuchten Fragen zum Helixaktor.

- $B8$ : Die Stabachse ist gerade. Sie ist die Verbindungslinie der Flächenschwerpunkte aller Querschnitte.
- $B9$ : Der Querschnitt ist doppelt symmetrisch.
- $B10$ : Alle resultierenden Kräfte greifen an der Stabachse an.
- $B11$ : Der Helixaktor wird als Bimorph modelliert.

Die Bedingungen  $B8$  bis  $B10$  stellen sicher, dass der Stab lediglich verbogen wird. Torsion tritt nicht auf. Wegen Bedingung  $B11$  entkoppeln die Querverschiebungen und die Längsverschiebung der Stabachse.

### 3.2.4 Verschiebung und elektrische Feldstärke

Mit den Annahmen  $A1$  bis  $A4$  lässt sich der übliche Verschiebungsansatz

$$\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{u}}_t + \vec{\mathbf{u}}_r \tag{3.32}$$

eines Euler-Bernoulli-Balkens formulieren. Er besteht aus einem translatorischen Anteil  $\vec{\mathbf{u}}_t$  und einem Anteil  $\vec{\mathbf{u}}_r$  infolge Rotation des Querschnitts. Im kartesischen Koordinatensystem sind diese Anteile

$$\vec{\mathbf{u}}_t = [u, v, 0]^T \tag{3.33}$$

sowie

$$\vec{\mathbf{u}}_r = \mathbf{D} [x, y, 0]^T - [x, y, 0]^T. \tag{3.34}$$



Darin sind  $u$  und  $v$  die Verschiebungen der Stabachse, mithin die Lage der Biegelinie. Die Drehmatrix  $\mathbf{D}$  beschreibt die Verdrehungen der Stabquerschnitte um die  $x$ - und  $y$ -Achse mit den Drehwinkeln  $\alpha_x$  und  $\alpha_y$ . Sie ist

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_y \mathbf{D}_x \quad (3.35)$$

mit den Drehmatrizen

$$\mathbf{D}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_x & -\sin \alpha_x \\ 0 & \sin \alpha_x & \cos \alpha_x \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{D}_y = \begin{bmatrix} \cos \alpha_y & 0 & \sin \alpha_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha_y & 0 & \cos \alpha_y \end{bmatrix}. \quad (3.36)$$

Die Drehmatrix  $\mathbf{D}$  wird linearisiert wegen Bedingung  $B_4$ . Die Drehreihenfolge ist somit bedeutungslos. Die Drehwinkel werden näherungsweise durch die Koordinaten  $t_1$  und  $t_2$  des Tangentenvektors beschrieben, siehe Gleichung (3.26). Somit ist der Verschiebungsvektor im kartesischen Koordinatensystem

$$\bar{\mathbf{u}} = [u, v, -t_1 x - t_2 y]^T. \quad (3.37)$$

Mit dem Verschiebungsvektor (3.37) und den Formänderungsbeziehungen (3.6) folgt

$$S_{33} = -k_1 x - k_2 y \quad (3.38)$$

beziehungsweise mit den Koordinaten des Krümmungsvektors (3.20) der Biegelinie

$$S_{33} = - \underbrace{u''}_{=k_1} x - \underbrace{v''}_{=k_2} y. \quad (3.39)$$

Im Euler-Bernoulli-Balkenmodell wird nur die Koordinate  $S_{33}$  des Verzerrungstensors benötigt

Auch im Hauptachsensystem lässt sich  $S_{33}$  ohne besondere Schwierigkeiten und analog zur Rechnung im kartesischen Koordinatensystem herleiten. Die Dehnung  $S_{33}$  ist im Hauptachsensystem

$$S_{33} = -\bar{k}_1 \xi - \bar{k}_2 \eta \quad (3.40)$$

beziehungsweise mit den Koordinaten des Krümmungsvektors (3.21) im Hauptachsensystem

$$S_{33} = - \underbrace{(\bar{u}'' - 2\vartheta \bar{v}' - \vartheta^2 \bar{u})}_{=\bar{k}_1} \xi - \underbrace{(\bar{v}'' + 2\vartheta \bar{u}' - \vartheta^2 \bar{v})}_{=\bar{k}_2} \eta. \quad (3.41)$$

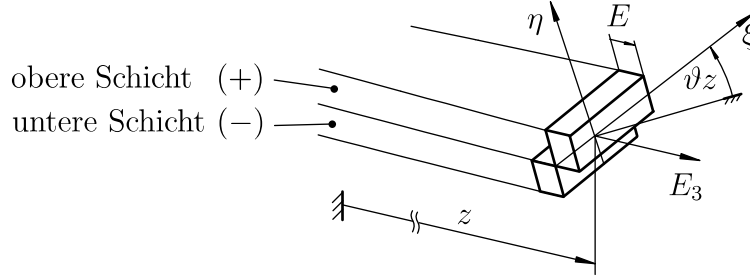
Die Basisvektoren  $\bar{\mathbf{b}}_i$  des Hauptachsensystems sind entlang  $z$  veränderlich.

**Elektrische Feldstärke:** Die elektrische Feldstärke ist innerhalb eines aktiven Elements konstant und in oberer und unterer Schicht entgegengesetzt orientiert, siehe Annahme  $A_8$ . Somit ist ein Ansatz

$$E_3(z) = \text{sign} \eta E(z) \quad (3.42)$$

möglich. Abbildung 3.7 illustriert den Ansatz. Die Funktion  $E$  bezeichnet die vorgegebene und a priori bekannte elektrische Feldstärke, siehe Annahmen  $A_8$  bis  $A_{10}$ . Sie setzt sich aus den diskreten Werten  $E_i$  der aktiven Elemente zusammen. Das heißt,

$$E(z) = \sum_{i=1}^{N_e} [\sigma(z - z_{L,i}) - \sigma(z - z_{R,i})] E_i. \quad (3.43)$$

Abbildung 3.7: Ansatz für die elektrische Feldstärke  $E_3$ .

Darin ist  $\sigma$  die Heaviside-Funktion. Die  $z_{L,i}$  und  $z_{R,i}$  bezeichnen die linken und rechten Grenzen der aktiven Elemente. So sinnvoll und möglich, wird abkürzend für Gleichung (3.43) nur Gleichung (3.42) genutzt. Widersprüche zwischen der Bezeichnung  $E_3$  sowohl für die elektrische Feldstärke in  $z$ -Richtung als auch für die elektrische Feldstärke im dritten aktiven Element sind dann ausgeschlossen.

Der Helixaktor wird in  $N_e$  gleichlange aktive Elemente der Länge

$$L_e = \frac{L}{N_e} \quad (3.44)$$

unterteilt und der Verlauf der elektrischen Feldstärke entlang der Stabachse ist somit

$$E(z) = \sum_{i=1}^{N_e} [\sigma(z - \{i - 1\} L_e) - \sigma(z - i L_e)] E_i. \quad (3.45)$$

Allein praktische Überlegungen sprechen für diese gleichmäßige Unterteilung. Die Verschiebungen  $u_e$  und  $v_e$  des freien Aktorendes können dann bequem und in überschaubarer, symbolischer Form für beliebig viele aktive Elemente hergeleitet werden. Später können einzelne aktive Elemente zu größeren Elementen gleicher elektrischer Feldstärke verschaltet werden.

Ein Ansatz für das elektrische Potential  $\varphi$  ist nicht zwingend erforderlich. Mit den Beziehungen (3.7) wäre ein möglicher Ansatz

$$\varphi = -\text{sign}\eta E z. \quad (3.46)$$

Ein konstanter Anteil ist überflüssig, da nur Ableitungen von  $\varphi$  nach  $z$  auftreten.

### 3.2.5 Querschnittskenngrößen

In den Modellgleichungen des Helixaktors sind diverse Flächenintegrale über  $x$ ,  $y$  beziehungsweise über  $\xi$ ,  $\eta$  auszuwerten. Sie werden vor der eigentlichen Herleitung eingeführt. Der Querschnitt ist doppelt symmetrisch. Ausgesprochen einfach sind die Integrale

$$A = \int_A dA, \quad A = \int_A \text{sign}^2 \eta dA, \quad 0 = \int_A \text{sign} \eta dA. \quad (3.47)$$

Darin ist  $A$  der Flächeninhalt des Querschnitts. Die axialen Flächenmomente 2. Grades und das biaxiale Flächenmoment 2. Grades betragen im Hauptachsensystem

$$I_\xi = \int_A \eta^2 dA, \quad I_\eta = \int_A \xi^2 dA, \quad I_{\xi\eta} = \int_A \xi\eta dA = 0. \quad (3.48)$$

Das biaxiale Flächenmoment  $I_{\xi\eta}$  verschwindet. Die Flächenmomente 2. Grades betragen im kartesischen Koordinatensystem

$$I_x = \int_A y^2 dA, \quad I_y = \int_A x^2 dA, \quad I_{xy} = \int_A xy dA. \quad (3.49)$$

Mit Hilfe der Transformationsbeziehungen (3.8) lassen sich  $x$  und  $y$  durch  $\xi$  und  $\eta$  ersetzen. Die Flächenmomente 2. Grades betragen dann im kartesischen Koordinatensystem in Abhängigkeit der Flächenmomente des Hauptachsensystems

$$I_x = I_\xi \cos^2 \vartheta z + I_\eta \sin^2 \vartheta z, \quad I_y = I_\xi \sin^2 \vartheta z + I_\eta \cos^2 \vartheta z \quad (3.50)$$

sowie

$$I_{xy} = (I_\eta - I_\xi) \cos \vartheta z \sin \vartheta z. \quad (3.51)$$

Die Flächenmomente 1. Grades

$$0 = \int_A \xi dA, \quad 0 = \int_A \eta dA, \quad 0 = \int_A x dA, \quad 0 = \int_A y dA \quad (3.52)$$

verschwinden, da Schubmittelpunkt und Flächenschwerpunkt identisch sind. Aufgrund des gewählten Ansatzes für die elektrische Feldstärke treten weitere, modifizierte Flächenmomente 1. Grades auf - *modifiziert*, da neben den Koordinaten  $x$ ,  $y$ ,  $\xi$ ,  $\eta$  auch die Signum-Funktion auftritt. Die modifizierten Flächenmomente 1. Grades um die  $\xi$ -Achse und  $\eta$ -Achse betragen

$$B_\xi = \int_A \text{sign}\eta \eta dA, \quad B_\eta = \int_A \text{sign}\eta \xi dA = 0. \quad (3.53)$$

Die MFCs erzeugen keine Momente um die  $\eta$ -Achse, so dass  $B_\eta$  verschwindet. Die modifizierten Flächenmomente 1. Grades betragen im kartesischen Koordinatensystem

$$B_x = \int_A \text{sign}(-x \sin \vartheta z + y \cos \vartheta z) y dA \quad (3.54)$$

und

$$B_y = \int_A \text{sign}(-x \sin \vartheta z + y \cos \vartheta z) x dA \quad (3.55)$$

beziehungweise mit Hilfe der modifizierten Flächenmomente 1. Grades des Hauptachsensystems

$$B_x = B_\xi \cos \vartheta z, \quad B_y = -B_\xi \sin \vartheta z. \quad (3.56)$$

Zur Angabe aller Querschnittskenngrößen im kartesischen Koordinatensystem und im Hauptachsensystem werden nur  $A$ ,  $I_\xi$ ,  $I_\eta$  und  $B_\xi$  benötigt. Sie betragen mit der Querschnittsbreite  $b$  und der Querschnittshöhe  $h$ :

$$A = bh, \quad I_\xi = \frac{bh^3}{12}, \quad I_\eta = \frac{b^3h}{12}, \quad B_\xi = \frac{bh^2}{4}. \quad (3.57)$$

### 3.3 Statisches Modell

Mit Hilfe des statischen Modells werden Arbeitsraum und optimale Gestalt des Helixaktors bestimmt. Das Modell ist einfach, auf Trägheitseinflüsse sowie zusätzliche Lasten wird verzichtet und die Beziehungen zwischen den Eingängen des Helixaktors - den elektrischen Feldstärken  $E_i$  der aktiven Elemente - und den Ausgängen des Helixaktors - den Verschiebungen des freien Aktorendes  $u_e$  und  $v_e$  - können noch in geschlossener Form angegeben werden. Von den konstitutiven Gleichungen (3.4) werden nur die Anteile in  $z$ -Richtung benötigt und abkürzend kann

$$\tau = cS - eE \quad (3.58)$$

geschrieben werden. Darin sind  $\tau$ ,  $S$  und  $E$  die Normalspannung, die mechanische Dehnung und die elektrische Feldstärke in  $z$ -Richtung. Die Größen  $c$  und  $e$  sind die effektive Elastizitätskonstante und die effektive piezoelektrische Konstante in  $z$ -Richtung.

Zunächst werden die Krümmungen  $\bar{k}_1$  und  $\bar{k}_2$  der Biegelinie im Hauptachsensystem ermittelt. Sie werden in das kartesische Koordinatensystem transformiert. Anschließend werden die Koordinaten  $u_e$  und  $v_e$  des Verschiebungsvektors des freien Aktorendes

$$\vec{\mathbf{u}}_e = u_e \vec{\mathbf{e}}_1 + v_e \vec{\mathbf{e}}_2 \quad (3.59)$$

berechnet.

Mit verschwindenden resultierenden Schnittlasten

$$F_L \stackrel{!}{=} 0 = \int_A \tau dA, \quad M_\xi \stackrel{!}{=} 0 = \int_A \eta \tau dA, \quad M_\eta \stackrel{!}{=} 0 = - \int_A \xi \tau dA, \quad (3.60)$$

der konstitutiven Gleichung (3.58) und der mechanischen Dehnung im Hauptachsensystem (3.40) folgen die Koordinaten des Krümmungsvektors

$$\bar{k}_1 = 0, \quad \bar{k}_2 = - \frac{eB_\xi}{cI_\xi} E. \quad (3.61)$$

Erwartungsgemäß tritt nur  $\bar{k}_2$  auf - die MFCs verbiegen die Stabachse in Richtung  $\eta$ . Mit der Transformationsbeziehung (3.23) sind die Koordinaten des Krümmungsvektors im kartesischen Koordinatensystem

$$u'' = k_1 = -\bar{k}_2 \sin \vartheta z, \quad v'' = k_2 = \bar{k}_2 \cos \vartheta z. \quad (3.62)$$

Zweimaliges Integrieren der Gleichungen liefert die Verschiebungen am freien Aktorende. Somit sind die Koordinaten des Verschiebungsvektors (3.59) im kartesischen Koordinatensystem

$$\mathbf{u}_e = \begin{bmatrix} u_e \\ v_e \end{bmatrix} = \int_0^L \int_0^z \bar{k}_2 \begin{bmatrix} -\sin \vartheta z^* \\ \cos \vartheta z^* \end{bmatrix} dz^* dz. \quad (3.63)$$

Die Gestalt des Arbeitsraums ist weder von der Länge des Helixaktors noch von den Material- und Querschnittskennwerten in Gleichung (3.61) abhängig. Wesentlich sind für den Arbeitsraum nur die Vorverwindung  $\varphi_e$  und die Unterteilung der aktiven Elemente. Es werden deshalb normierte Verschiebungen und normierte Krümmungen eingeführt.

Die erreichbare maximale elektrische Feldstärke im MFC wird wohl begrenzt sein. Somit sind auch die erreichbaren Krümmungen begrenzt - hier auf  $\pm\hat{k}$ . Die Krümmung  $\bar{k}_2$  der Biegelinie wird auf  $\hat{k}$  bezogen und es wird eine normierte Krümmung

$$\bar{k} = \frac{\bar{k}_2}{\hat{k}} \quad (3.64)$$

definiert. Sie nimmt nur Werte im Bereich

$$-1 \leq \bar{k} \leq 1 \quad (3.65)$$

an. Der Helixaktor ist in  $N_e$  gleich lange aktive Elemente unterteilt, siehe Kapitel 3.2.4. Die in den  $i$  Elementen vorzuwählenden elektrischen Feldstärken  $E_i$  sind jetzt als vorzuwählende normierte Krümmungen  $\bar{k}_i$  aufzufassen. Der Ansatz für  $\bar{k}(z)$  ist somit analog zu Gleichung (3.45):

$$\bar{k}(z) = \sum_{i=1}^{N_e} [\sigma(z - \{i-1\}L_e) - \sigma(z - iL_e)] \bar{k}_i. \quad (3.66)$$

Mit  $\hat{k}$  wird die maximale Verschiebung am freien Ende eines unverwundenen Biegeaktors berechnet. Sie ist

$$\hat{v}_e = \frac{1}{2} \hat{k} L^2. \quad (3.67)$$

Die Verschiebungen des Helixaktors werden darauf bezogen. Die normierten Verschiebungen sind

$$\underline{u}_e = \frac{u_e}{\hat{v}_e}, \quad \underline{v}_e = \frac{v_e}{\hat{v}_e} \quad (3.68)$$

und mit Gleichung (3.63) folgt

$$\underline{\mathbf{u}}_e = \begin{bmatrix} \underline{u}_e \\ \underline{v}_e \end{bmatrix} = \frac{2}{L^2} \int_0^L \int_0^z \bar{k} \begin{bmatrix} -\sin \vartheta z^* \\ \cos \vartheta z^* \end{bmatrix} dz^* dz. \quad (3.69)$$

So möglich und sinnvoll, wird auf das Attribut *normiert* verzichtet. Unterstreichen kennzeichnet normierte Größen.

Die Integrationen werden ausgeführt und die Beziehung (3.69) in der Form

$$\underline{\mathbf{u}}_e = \underline{\mathbf{G}} \bar{\mathbf{k}} \quad (3.70)$$

dargestellt. Darin ist  $\underline{\mathbf{G}}$  die normierte statische Übertragungsmatrix des Helixaktors. Sie vermittelt zwischen den Eingängen  $\bar{k}_i$ , zusammengefasst im Spaltenvektor

$$\bar{\mathbf{k}} = [\bar{k}_1, \bar{k}_2, \dots, \bar{k}_{N_e}]^T, \quad (3.71)$$

und den Ausgängen  $\underline{u}_e$  und  $\underline{v}_e$ , zusammengefasst im Verschiebungsvektor  $\underline{\mathbf{u}}_e$ . Die statische Übertragungsmatrix ist vom Typ  $(2, N_e)$ . Sie wird nach der Vorschrift

$$\underline{\mathbf{G}} = [\underline{\mathbf{g}}_1, \underline{\mathbf{g}}_2, \dots, \underline{\mathbf{g}}_{N_e}] \quad (3.72)$$

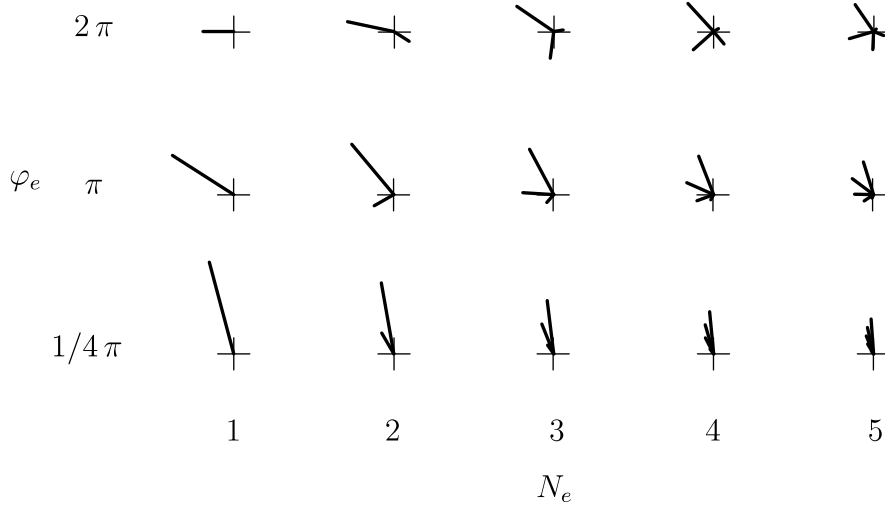


Abbildung 3.8: Normierte ausgezeichnete Richtungsvektoren  $\underline{\mathbf{g}}_i$  des Helixaktors bei gleichmäßiger Elementteilung für verschiedene  $\varphi_e$  und verschiedene  $N_e$ . Die  $x$ - und  $y$ -Koordinatenachsen sind lediglich angedeutet.

gebildet. Für die Spaltenvektoren  $\underline{\mathbf{g}}_i$  in  $\underline{\mathbf{G}}$  folgt nach längerer Rechnung [24]

$$\underline{\mathbf{g}}_i = \frac{2}{\varphi_e^2} \begin{bmatrix} \sin \frac{i\varphi_e}{N_e} - \sin \frac{(i-1)\varphi_e}{N_e} + \varphi_e \frac{N_e-i}{N_e} \cos \frac{i\varphi_e}{N_e} - \varphi_e \frac{N_e-i+1}{N_e} \cos \frac{(i-1)\varphi_e}{N_e} \\ -\cos \frac{i\varphi_e}{N_e} + \cos \frac{(i-1)\varphi_e}{N_e} + \varphi_e \frac{N_e-i}{N_e} \sin \frac{i\varphi_e}{N_e} - \varphi_e \frac{N_e-i+1}{N_e} \sin \frac{(i-1)\varphi_e}{N_e} \end{bmatrix}. \quad (3.73)$$

Die Spaltenvektoren  $\underline{\mathbf{g}}_i$ , beziehungsweise der Vektor

$$\underline{\mathbf{g}}_i = g_{1,i} \vec{\mathbf{e}}_1 + g_{2,i} \vec{\mathbf{e}}_2 \quad (3.74)$$

sind die normierten ausgezeichneten Richtungsvektoren des Helixaktors<sup>4</sup>. Sie charakterisieren das statische Übertragungsverhalten des Aktors. Die Verschiebung  $\underline{\mathbf{u}}_e$  des freien Aktorendes lässt sich somit als Superposition der  $\underline{\mathbf{g}}_i$  begreifen, gewichtet mit den Krümmungen  $\bar{k}_i$  nach Gleichung (3.70). Abbildung 3.8 illustriert die  $\underline{\mathbf{g}}_i$  für ausgewählte Parametersätze.

Die Singularität der Richtungsvektoren (3.73) bei  $\varphi_e = 0$  kann durch Berechnen des Grenzwertes

$$\underline{\mathbf{g}}_i^* = \lim_{\varphi_e \rightarrow 0} \underline{\mathbf{g}}_i \quad (3.75)$$

behoben werden. Es gilt dann

$$\underline{\mathbf{g}}_i^* = 2 \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2N_e - 2i + 1}{2N_e^2} \end{bmatrix}. \quad (3.76)$$

Sie beschreiben das statische Übertragungsverhalten eines unverwundenen Biegeaktors. Wie nicht anders zu erwarten, sind nur Verschiebungen in  $y$ -Richtung möglich.

<sup>4</sup>Normiert bezieht sich auf das Normieren in Gleichung (3.68). Die  $\underline{\mathbf{g}}_i$  sind insbesondere keine Einheitsvektoren.

### 3.4 Dynamisches Modell

Das Randwertproblem zum Beschreiben des dynamischen Verhaltens des Helixaktors lässt sich trotz starker Biegekopplungen durchaus einfach herleiten, beispielsweise mit dem Prinzip von Hamilton für lineare Piezoelektrizität [96]. Die Lösung des Problems ist jedoch ausgesprochen schwierig und eine geschlossene Lösung ist nicht möglich<sup>5</sup>. In dieser Arbeit zum Helixaktor sollen Näherungslösungen für dynamische Probleme genügen. Mit Ansatzfunktionen im Ort und gesuchtem Zeitverhalten in Form eines gemischten Ritz-Ansatzes wird das Problem diskretisiert und auf gewöhnliche Differentialgleichungen reduziert, die dann zu lösen sind. Die Bewegungsgleichungen werden im Hauptachsensystem hergeleitet und ausgewertet. Das Ergebnis wird anschließend in das kartesische Koordinatensystem transformiert und das Aktorverhalten kann dann in der Form

$$\underline{\mathbf{u}}_e(t) = f \{ \overline{\mathbf{k}}(t) \} \quad (3.77)$$

angegeben werden. Wie schon beim statischen Modell ist  $\overline{\mathbf{k}}$  der Eingangsvektor und  $\underline{\mathbf{u}}_e$  der Ausgangsvektor.

#### 3.4.1 Prinzip von Hamilton für den Helixaktor

Das Prinzip von Hamilton für lineare Piezoelektrizität ist nach TIERSTEN [96]

$$0 = \delta \int_{t_0}^t (T - H) dt + \int_{t_0}^t \delta W dt. \quad (3.78)$$

Darin enthalten sind die kinetische Energie

$$T = \int_V \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i dV, \quad (3.79)$$

die Enthalpie

$$H = \int_V \frac{1}{2} c_{ijkl} S_{ij} S_{kl} - e_{ijk} E_i S_{jk} - \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} E_i E_j dV, \quad (3.80)$$

und die virtuelle Arbeit

$$\delta W = \int_O (t_k \delta u_k - \sigma \delta \varphi) dO \quad (3.81)$$

mit den Koordinaten des Spannungsvektors  $t_k$  und der Flächenladung  $\sigma$  an der Oberfläche  $O$  des Körpers.

Bei der Modellierung des Helixaktors als Euler-Bernoulli-Balken betragen kinetische Energie

$$T = \int_V \frac{1}{2} \rho (\dot{u}^2 + \dot{v}^2) dV \quad (3.82)$$

und Enthalpie

$$H = \int_V \frac{1}{2} c (\bar{k}_1 \xi + \bar{k}_2 \eta)^2 + e (\bar{k}_1 \xi + \bar{k}_2 \eta) \text{sign} \eta E - \frac{1}{2} \varepsilon \text{sign}^2 \eta E^2 dV \quad (3.83)$$

---

<sup>5</sup>In [2] werden zumindest die Eigenwerte des geraden, vorverwundenen Stabes exakt bestimmt, wenn auch nur numerisch.

mit den Krümmungen  $\bar{k}_1$  und  $\bar{k}_2$  nach Gleichung (3.41). Die Parameter  $c$ ,  $e$  und  $\varepsilon$  bezeichnen die Elastizitätskonstante, die piezoelektrische Konstante und die Permittivität.

Die virtuelle Arbeit

$$\delta W = 0 \quad (3.84)$$

verschwindet. Der mechanische Anteil verschwindet, da keine weiteren mechanischen Lasten angreifen. Der elektrische Anteil verschwindet, da nur zwei Betriebsfälle zugelassen werden. Entweder ist das elektrische Potential vorgegeben, wie bei spannungsgeregeltem Betrieb oder bei kurzgeschlossenen Elektroden, oder der Stromkreis ist geöffnet. Somit fließen keine Ströme und die Flächenladungen  $\sigma$  an der Oberfläche verschwinden.

Die Feldvariablen werden analog zum statischen Modell normiert. Mit den Gleichungen (3.67) und (3.68) werden die normierten Verschiebungen

$$\bar{u} = \frac{\underline{u}}{2} \hat{k} L^2, \quad \bar{v} = \frac{\underline{v}}{2} \hat{k} L^2. \quad (3.85)$$

eingeführt. Die elektrische Feldstärke wird den Gleichungen (3.61) und (3.64) folgend durch die normierte Krümmung  $\bar{k}$  in der Form

$$E = -\bar{k} \hat{k} \frac{c I_\xi}{e B_\xi} \quad (3.86)$$

ersetzt. Praktischerweise werden noch drei Parameter eingeführt: ein Biegesteifigkeitsverhältnis

$$\Upsilon = \frac{I_\eta}{I_\xi}, \quad (3.87)$$

ein Trägheitsparameter

$$\Lambda = \frac{\rho A L^4}{c I_\xi} \quad (3.88)$$

sowie ein elektrischer Parameter

$$\Psi = \frac{\varepsilon A c I_\xi}{e^2 B_\xi^2}. \quad (3.89)$$

Die Feldgrößen werden in einem Vektor

$$\mathbf{y} = [\bar{u}, \bar{v}, \bar{k}]^T \quad (3.90)$$

zusammengefasst. Das Krümmungsfeld  $\bar{k}$  verbleibt vorerst als Unbekannte, auch wenn es im Aktorbetrieb durch Vorgabe des elektrischen Potentials a priori bekannt ist. Die entsprechenden Nebenbedingungen lassen sich nach dem Diskretisieren bequem einarbeiten.

Die Koordinate  $z$  entlang der Stabachse wird durch eine dimensionslose Koordinate  $\underline{z}$  mit

$$z = L \underline{z}, \quad 0 \leq \underline{z} \leq 1 \quad (3.91)$$

ersetzt. Das Prinzip von Hamilton (3.78) des Helixaktors kann damit in der Form

$$\begin{aligned} 0 = & \delta \int_{t_0}^t \int_0^1 \dot{\mathbf{y}}^T \mathbf{A}_T^{00} \dot{\mathbf{y}} + \dots \\ & - \mathbf{y}_{,zz}^T \mathbf{A}_H^{22} \mathbf{y}_{,zz} - \mathbf{y}_{,z}^T \mathbf{A}_H^{11} \mathbf{y}_{,z} - \mathbf{y}^T \mathbf{A}_H^{00} \mathbf{y} + \dots \\ & - \mathbf{y}_{,zz}^T \mathbf{A}_H^{21} \mathbf{y}_{,z} - \mathbf{y}_{,zz}^T \mathbf{A}_H^{20} \mathbf{y} - \mathbf{y}_{,z}^T \mathbf{A}_H^{10} \mathbf{y} \, d\underline{z} \, dt \end{aligned} \quad (3.92)$$



angegeben werden. Darin sind die Matrizen

$$\mathbf{A}_T = \begin{bmatrix} \frac{\Lambda}{8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Lambda}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.93)$$

und

$$\mathbf{A}_H^{22} = \begin{bmatrix} \frac{\Upsilon}{8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_H^{11} = \begin{bmatrix} \frac{\varphi_e^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Upsilon\varphi_e^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.94)$$

$$\mathbf{A}_H^{00} = \begin{bmatrix} \frac{\Upsilon\varphi_e^4}{8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\varphi_e^4}{8} & \frac{\varphi_e^2}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{\Psi}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_H^{21} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\Upsilon\varphi_e}{2} & 0 \\ \frac{\varphi_e}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.95)$$

$$\mathbf{A}_H^{20} = \begin{bmatrix} -\frac{\Upsilon\varphi_e^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\varphi_e^2}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_H^{10} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\varphi_e^3}{2} & -\varphi_e \\ \frac{\Upsilon\varphi_e^3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.96)$$

Weiterhin werden die geometrischen Randbedingungen des linksseitig fest eingespannten Helixaktors benötigt. An linken Rand verschwinden die Verschiebungen

$$\bar{u}|_0 = 0, \quad \bar{v}|_0 = 0 \quad (3.97)$$

sowie die Neigungen  $\bar{l}_1|_0, \bar{l}_2|_0$ . Mit den Neigungen nach Gleichung (3.19) und den Bedingungen (3.97) gilt dann auch

$$\bar{u}_{,z}|_0 = 0, \quad \bar{v}_{,z}|_0 = 0. \quad (3.98)$$

Für den rechten Rand - das freie Aktorende - sind keine geometrischen Randbedingungen erforderlich.

Nach dem Lösen der Bewegungsgleichungen sind die Verschiebungen  $\bar{u}|_1, \bar{v}|_1$  des freien Aktorendes im Hauptachsensystem bekannt. Mit der Transformation (3.15) können die Verschiebungen im kartesischen Koordinatensystem

$$\underline{\mathbf{u}}_e = \mathbf{D}_e \underline{\mathbf{u}}_e|_1, \quad \mathbf{D}_e = \begin{bmatrix} \cos \varphi_e & -\sin \varphi_e \\ \sin \varphi_e & \cos \varphi_e \end{bmatrix} \quad (3.99)$$

angegeben werden. Das dynamische Problem des Helixaktors ist somit vollständig beschrieben. Sollen lediglich die normierten Verschiebungen  $\bar{u}, \bar{v}$  in Abhängigkeit der normierten Krümmungen  $\bar{k}$  diskutiert werden, so genügen die Parameter  $\varphi_e, \Upsilon, \Lambda$  und  $\Psi$ . Sind auch die tatsächlichen Feldgrößen  $\bar{u}, \bar{v}, E$  über  $z$  verlangt, so sind noch  $L, \hat{k}$  und das Verhältnis  $cI_\xi/eB_\xi$  festzulegen.

### 3.4.2 Diskretisieren

ROSEN zitiert in seinem Bericht zu vorverwundenen Stäben [76] einige Arbeiten zum Approximieren der Verschiebungsfelder. Beispielsweise nutzt DAWSON in [14] die Eigenfunktionen des unverwundenen Stabes. Ihm genügen neun Ansatzfunktionen, um

bei Vorverwindungen bis  $\varphi_e = 90^\circ$  zufriedenstellende Ergebnisse bis zur fünften Eigenschwingungsform zu erhalten. DOKUMACI, THOMAS und CARNEGIE nutzen in [20] Finite Elemente-Ansätze mit kubischen Polynomen. Später setzen sie in [95] quintische Polynome, also Polynome fünften Grades, ein.

Auch in dieser Arbeit zum Helixaktor werden Finite Elemente-Ansätze mit quintischen Polynomen eingesetzt. Bei diesem Ansatz sind drei globale Koeffizienten pro Knoten möglich. Sie repräsentieren die nullte, erste und zweite Ableitung der approximierten Verschiebungsfelder an der Knotenposition. Das Implementieren von Finite Elemente-Ansätzen ist gegenüber dem Implementieren globaler Ansätze etwas aufwendiger. Der Aufwand erscheint jedoch gerechtfertigt, da der Finite Elemente-Ansatz die Feldgrößen wohl weniger einschränkt als beispielsweise ein globaler Ansatz auf Grundlage der Eigenfunktionen des unverwundenen Stabes. Im Übrigen lassen sich bei Finite Elemente-Formulierungen die geometrischen Randbedingungen besonders einfach berücksichtigen.

Finite Elemente-Ansätze sind weithin bekannt. Gute Einführungen geben beispielsweise [4], [47] und [81]. Die folgende Herleitung des Diskretisierens wird deshalb bewusst kompakt gehalten. Zuerst wird das Prinzip von Hamilton des Helixaktors formell diskretisiert. Danach werden die Finite Elemente-Ansätze sowie der Einbau von Rand- und Nebenbedingungen erläutert. Die Lösung wird durch gewichtetes Überlagern der Eigenvektoren angegeben. Abschließend wird das dynamische Modell anhand anderer Arbeiten verifiziert.

Die Feldvariablen  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$  und  $\underline{k}$  werden mit Hilfe eines gemischten Ritz-Ansatzes

$$\underline{u} = \sum_{i=1}^{N_{au}} \gamma_i^u(\underline{z}) a_i^u(t), \quad \underline{v} = \sum_{i=1}^{N_{av}} \gamma_i^v(\underline{z}) a_i^v(t), \quad \underline{k} = \sum_{i=1}^{N_{ak}} \gamma_i^k(\underline{z}) a_i^k(t) \quad (3.100)$$

approximiert. Die  $a_i$  sind globale Koeffizienten und die  $\gamma_i(\underline{z})$  globale Ansatzfunktionen. Die  $N_{au}$ ,  $N_{av}$  und  $N_{ak}$  sind die Anzahlen der globalen Ansatzfunktionen. Im Prinzip von Hamilton des Helixaktors (3.92) tritt generell ein Diskretisierungsproblem

$$\delta \int_{t_0}^t \int_0^1 \mathbf{y}^{(r)\text{T}} \mathbf{A}^{rs} \mathbf{y}^{(s)} d\underline{z} dt = \int_{t_0}^t \delta \mathbf{a}^{\text{T}} \mathbf{\Gamma}^{rs} \mathbf{a} dt \quad (3.101)$$

auf, das vorerst diskutiert wird<sup>6</sup>. Darin bezeichnen  $r$  und  $s$  den Grad der partiellen Ableitungen nach  $\underline{z}$ . Der Vektor

$$\mathbf{a} = [a_1^u, \dots, a_{N_{au}}^u, a_1^v, \dots, a_{N_{av}}^v, a_1^k, \dots, a_{N_{ak}}^k]^{\text{T}} \quad (3.102)$$

fasst alle

$$N_a = N_{au} + N_{av} + N_{ak} \quad (3.103)$$

globalen Koeffizienten  $a_i$  zusammen. Somit ist nur zu klären, wie bei gegebener Matrix  $\mathbf{A}^{rs}$  die Matrix  $\mathbf{\Gamma}^{rs}$  zu berechnen ist. Auch die kinetische Energie kann nach dieser Vorschrift ohne Probleme variiert und diskretisiert werden. Die auftretenden Zeitableitungen sind separat zu behandeln und es gilt

$$\delta \int_{t_0}^t \int_0^1 \dot{\mathbf{x}}^{\text{T}} \mathbf{A}^{00} \dot{\mathbf{x}} d\underline{z} dt = - \int_{t_0}^t \delta \mathbf{a}^{\text{T}} \mathbf{\Gamma}^{00} \dot{\mathbf{a}} dt. \quad (3.104)$$

<sup>6</sup>Der übliche Faktor  $\frac{1}{2}$  in den Energieausdrücken wird durch die Matrizen (3.93)-(3.96) erfasst.

Zuerst werden die Variationen

$$\delta \int_{t_0}^t \int_0^1 \mathbf{y}^{(r)\top} \mathbf{A} \mathbf{y}^{(s)} d\underline{z} dt = \int_{t_0}^t \int_0^1 \delta \mathbf{y}^{(r)\top} \mathbf{A} \mathbf{y}^{(s)} + \delta \mathbf{y}^{(s)\top} \left( \mathbf{A} \right)^{\top} \mathbf{y}^{(r)} d\underline{z} dt \quad (3.105)$$

ausgeföhrt. Mit den Ansätzen (3.100), hier als

$$x_m^{(r)} = \gamma_{mi}^{(r)} a_i, \quad m \in \{\underline{u}, \underline{v}, \underline{k}\} \quad (3.106)$$

geschrieben, und den Variationen der Feldgrößen

$$\delta x_m^{(r)} = \gamma_{mi}^{(r)} \delta a_i, \quad (3.107)$$

sowie der Matrix

$$\underline{\Gamma}_{mn}^{rs} = \int_0^1 \gamma_{mi}^{(r)} A_{mn}^{rs} \gamma_{nj}^{(s)} d\underline{z} \quad (3.108)$$

ist Gleichung (3.105)

$$\delta \int_{t_0}^t \int_0^1 \mathbf{y}^{(r)\top} \mathbf{A} \mathbf{y}^{(s)} d\underline{z} dt = \int_{t_0}^t \delta \mathbf{a}^{\top} \underline{\Gamma} \mathbf{a} + \delta \mathbf{a}^{\top} \left( \underline{\Gamma} \right)^{\top} \mathbf{a} dt \quad (3.109)$$

beziehungsweise mit

$$\underline{\Gamma} = \underline{\Gamma} + \left( \underline{\Gamma} \right)^{\top} \quad (3.110)$$

auch

$$\delta \int_{t_0}^t \int_0^1 \mathbf{y}^{(r)\top} \mathbf{A} \mathbf{y}^{(s)} d\underline{z} dt = \int_{t_0}^t \delta \mathbf{a}^{\top} \underline{\Gamma} \mathbf{a} dt. \quad (3.111)$$

Somit können alle Matrizen (3.93-3.96) nach der Vorschrift (3.111) diskretisiert werden. Mit der Massenmatrix und der Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{M}^{\mathbf{D}} = \underline{\Gamma}_T^{00}, \quad \mathbf{K}^{\mathbf{D}} = \underline{\Gamma}_H^{22} + \underline{\Gamma}_H^{11} + \underline{\Gamma}_H^{00} + \underline{\Gamma}_H^{21} + \underline{\Gamma}_H^{20} + \underline{\Gamma}_H^{10} \quad (3.112)$$

folgt das Prinzip von Hamilton des Helixaktors (3.92) in diskretisierter Form

$$0 = \int_{t_0}^t \delta \mathbf{a}^{\top} (\mathbf{M}^{\mathbf{D}} \ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{K}^{\mathbf{D}} \mathbf{a}) dt. \quad (3.113)$$

Daraus folgt mit dem Fundamentalsatz der Variationsrechnung das System gewöhnlicher Differentialgleichungen für die globalen Koeffizienten des diskretisierten Problems

$$\delta a_i \neq 0 : \quad 0 = M_{ij}^{\mathbf{D}} \ddot{a}_j + K_{ij}^{\mathbf{D}} a_j \quad (3.114)$$

beziehungsweise in Matrixschreibweise

$$\delta \mathbf{a} \neq \mathbf{0} : \quad \mathbf{M}^{\mathbf{D}} \ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{K}^{\mathbf{D}} \mathbf{a} = \mathbf{0}. \quad (3.115)$$

### 3.4.3 Finite Elemente-Ansätze

Die dimensionslose Stablänge wird in  $N_e$  gleich lange finite Elemente der dimensionslosen Länge

$$\underline{L}_e = \frac{1}{N_e} \quad (3.116)$$

unterteilt. Für die Knotenpositionen gilt

$$\underline{z}_e = \underline{L}_e(e-1), \quad e = 1, \dots, N_e + 1. \quad (3.117)$$

Innerhalb eines Elementes  $e$  wird die lokale Koordinate

$$\underline{\tilde{z}} = \underline{z} - \underline{z}_e, \quad 0 \leq \underline{\tilde{z}} \leq \underline{L}_e \quad (3.118)$$

eingeführt.

**Verschiebungen:** Die Verschiebungsfelder werden im Element als quintische Polynome

$$\underline{u}(t, \underline{\tilde{z}}) = c_1(t) + c_2(t)\underline{\tilde{z}} + c_3(t)\underline{\tilde{z}}^2 + c_4(t)\underline{\tilde{z}}^3 + c_5(t)\underline{\tilde{z}}^4 + c_6(t)\underline{\tilde{z}}^5 \quad (3.119)$$

approximiert. Mit den Randbedingungen am linken Elementrand

$$\underline{u}|_0 = b_1^{u,e}, \quad \underline{u}_{,\underline{\tilde{z}}}|_0 = b_2^{u,e}, \quad \underline{u}_{,\underline{\tilde{z}}\underline{\tilde{z}}}|_0 = b_3^{u,e} \quad (3.120)$$

und am rechten Elementrand

$$\underline{u}|_{\underline{L}_e} = b_4^{u,e}, \quad \underline{u}_{,\underline{\tilde{z}}}|_{\underline{L}_e} = b_5^{u,e}, \quad \underline{u}_{,\underline{\tilde{z}}\underline{\tilde{z}}}|_{\underline{L}_e} = b_6^{u,e} \quad (3.121)$$

wird das Polynom in

$$\underline{u}(t, \underline{\tilde{z}}) = \sum_{i=1}^6 b_i^{u,e}(t) N_{u,e}(\underline{\tilde{z}}). \quad (3.122)$$

umgeschrieben. Darin sind die  $b_i^{u,e}$  die lokalen Koeffizienten und die  $N_i^{u,e}(\underline{\tilde{z}})$  die Formfunktionen im Element  $e$ . Sie betragen

$$\begin{aligned} N_1^{u,e} &= 1 - 10 \frac{\underline{\tilde{z}}^3}{\underline{L}_e^3} + 15 \frac{\underline{\tilde{z}}^4}{\underline{L}_e^4} - 6 \frac{\underline{\tilde{z}}^5}{\underline{L}_e^5}, \\ N_2^{u,e} &= \underline{\tilde{z}} - 6 \frac{\underline{\tilde{z}}^3}{\underline{L}_e^2} + 8 \frac{\underline{\tilde{z}}^4}{\underline{L}_e^3} - 3 \frac{\underline{\tilde{z}}^5}{\underline{L}_e^4}, \\ N_3^{u,e} &= \frac{1}{2} \underline{\tilde{z}}^2 - \frac{3}{2} \frac{\underline{\tilde{z}}^3}{\underline{L}_e} + \frac{3}{2} \frac{\underline{\tilde{z}}^4}{\underline{L}_e^2} - \frac{1}{2} \frac{\underline{\tilde{z}}^5}{\underline{L}_e^3}, \\ N_4^{u,e} &= 10 \frac{\underline{\tilde{z}}^3}{\underline{L}_e^3} - 15 \frac{\underline{\tilde{z}}^4}{\underline{L}_e^4} + 6 \frac{\underline{\tilde{z}}^5}{\underline{L}_e^5}, \\ N_5^{u,e} &= -4 \frac{\underline{\tilde{z}}^3}{\underline{L}_e^2} + 7 \frac{\underline{\tilde{z}}^4}{\underline{L}_e^3} - 3 \frac{\underline{\tilde{z}}^5}{\underline{L}_e^4}, \\ N_6^{u,e} &= \frac{1}{2} \frac{\underline{\tilde{z}}^3}{\underline{L}_e} - \frac{\underline{\tilde{z}}^4}{\underline{L}_e^2} + \frac{1}{2} \frac{\underline{\tilde{z}}^5}{\underline{L}_e^3}. \end{aligned} \quad (3.123)$$

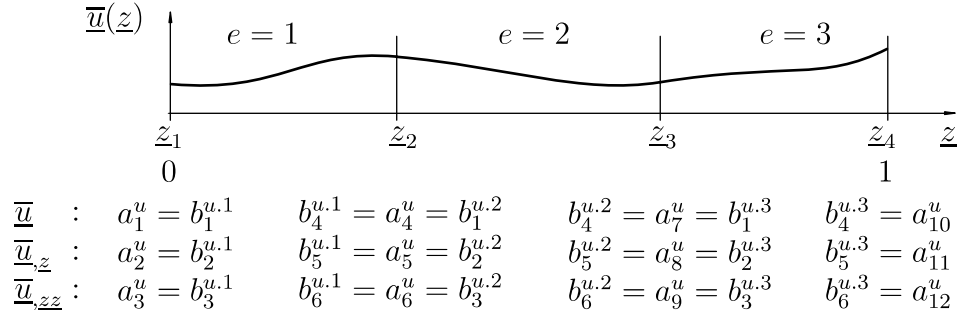


Abbildung 3.9: Unterteilung der Stabachse in drei finite Elemente. Beziehungen zwischen den globalen und den lokalen Koeffizienten  $a_i^u$  und  $b_i^{u,e}$ .

Die Formfunktionen der einzelnen Elemente sind gleich.

Die lokalen Koeffizienten eines Elementes sind mit bestimmten globalen Koeffizienten identisch. Abbildung 3.9 illustriert diese Beziehungen zwischen  $b_i^{u,e}$  und  $a_j^u$  an einem Beispiel mit drei Elementen. Der Zusammenhang wird mit Hilfe eines Verknüpfungssymbols  $\mathbf{T}_u^{ba}$  in der Form

$$b_i^{u,e} = T_{u,eij}^{ba} a_j^u \quad (3.124)$$

angegeben. Das Verknüpfungssystemsymbol lässt sich ohne weiteres als Matrix schreiben, indem die Spaltenvektoren der lokalen Koeffizienten

$$\mathbf{b}^{u,e} = [b_1^{u,e}, \dots, b_6^{u,e}]^T \quad (3.125)$$

fortlaufend hintereinander angeordnet werden. Für das skizzierte Beispiel gilt

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}^{u,1} \\ \mathbf{b}^{u,2} \\ \mathbf{b}^{u,3} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_u^{ba} \begin{bmatrix} a_1^u \\ \vdots \\ a_{12}^u \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_u^{ba} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{(6,6)} & \mathbf{0}_{(6,6)} \\ \mathbf{0}_{(6,3)} & \mathbf{I}_{(6,6)} & \mathbf{0}_{(6,3)} \\ \mathbf{0}_{(6,6)} & \mathbf{0}_{(6,3)} & \mathbf{I}_{(6,6)} \end{bmatrix}. \quad (3.126)$$

Darin sind  $\mathbf{I}_{(x,y)}$  und  $\mathbf{0}_{(x,y)}$  Einheitsmatrix und Nullmatrix des Typs  $(x, y)$ .

Mit dem globalen Verschiebungsansatz (3.100), dem Verschiebungsansatz im Element (3.122) sowie den Beziehungen (3.124) zwischen lokalen und globalen Koeffizienten folgen die globalen Ansatzfunktionen

$$\gamma_j^u(\underline{z}) = \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^6 T_{u,eij}^{ba} N_i^{u,e}(\underline{z}), \quad j = 1, \dots, N_{au}. \quad (3.127)$$

Die globalen Ansatzfunktionen  $\gamma_j^u(\underline{z})$  sind die angestückelten Formfunktionen der einzelnen Elemente - der Finite Elemente-Ansatz. Die Ansätze für  $\underline{v}$  werden analog zu  $\underline{u}$  hergeleitet.

**Elektrische Feldstärke:** Die Ansatzfunktionen der elektrische Feldstärke im *finiten Element* sind konstante Funktionen. Der Ansatz folgt der im Kapitel 3.2.4 getroffenen Annahme konstanter elektrischer Feldstärke im *aktiven Element des Helixaktors*. Das Gebiet eines *aktiven Elementes* kann mehrere, zusammenhängende *finite Elemente* umfassen. Somit sind die globalen Ansatzfunktionen für  $\underline{k}$  in Gleichung (3.100)

$$\gamma_e^k(\underline{z}) = \sigma(\underline{z} - \underline{z}_e) - \sigma(\underline{z} - \underline{z}_{e+1}). \quad (3.128)$$

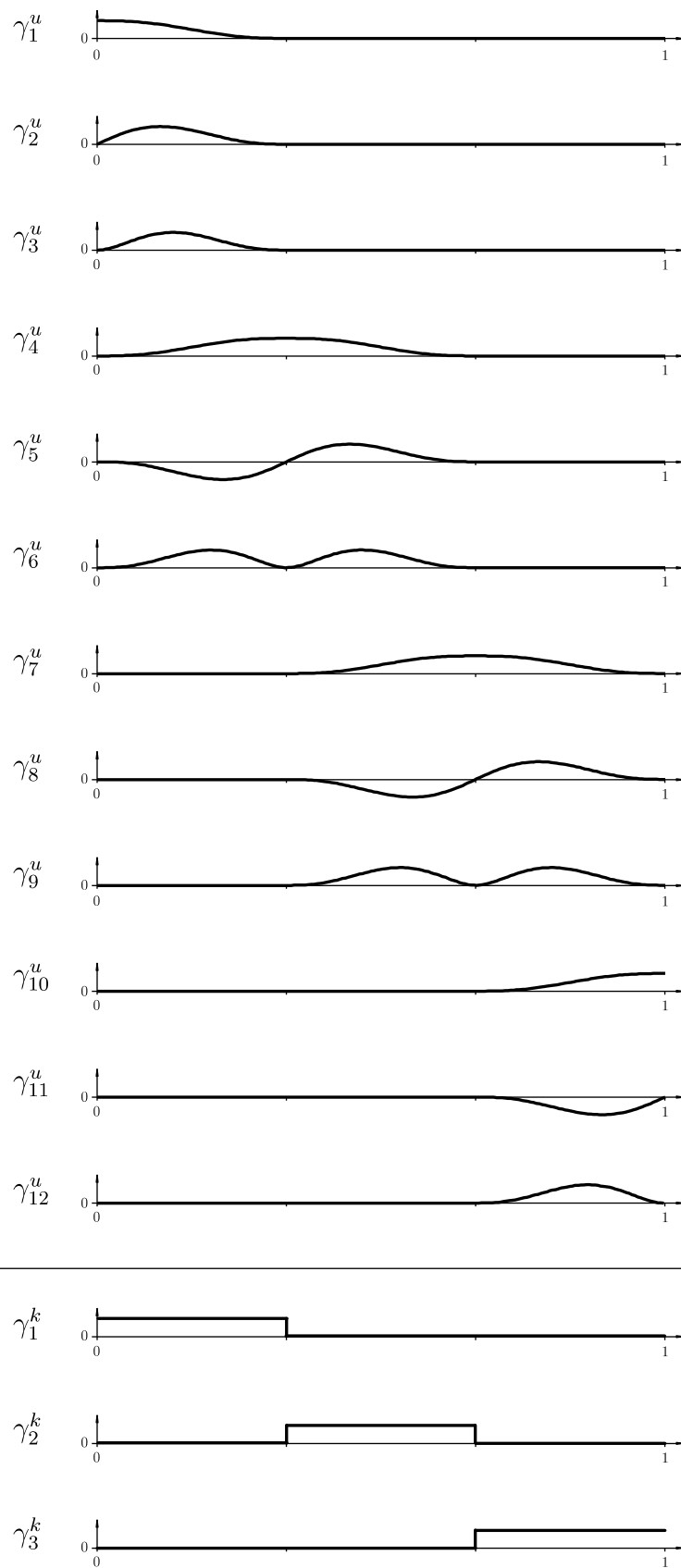


Abbildung 3.10: Globale Ansatzfunktionen  $\gamma_i^u$  und  $\gamma_i^k$  für  $N_e = 3$ .

Die  $\underline{z}_e$  sind die Knotenpositionen nach Gleichung (3.117). Zur Illustration skizziert Abbildung 3.10 alle globalen Ansatzfunktionen  $\gamma_j^u$  und  $\gamma_e^k$  des Beispiels aus Abbildung 3.9.

### 3.4.4 Einbau der Rand- und Nebenbedingungen

Aufgrund des finite Elemente-Ansatzes lassen sich geometrische Randbedingungen problemlos einarbeiten, da lediglich zu berücksichtigen ist, dass einige globale Koeffizienten am linken und/oder rechten Rand bekannt sind. Diese Koeffizienten werden in einem Spaltenvektor  $\mathbf{a}^g$  zusammengefasst.

Die Eingänge der finiten Elemente - die globalen Koeffizienten  $a_i^k$  - sind mit dem Eingangsvektor  $\underline{\mathbf{k}}$  verschaltet, beschrieben durch die Nebenbedingungen

$$\mathbf{a}^k = \mathbf{R}^D \underline{\mathbf{k}}. \quad (3.129)$$

Der Spaltenvektor  $\mathbf{a}^k$  fasst die  $a_i^k$  zusammen. Die Matrix  $\mathbf{R}^D$  codiert die Verschaltungen.

Die noch verbleibenden  $N_{uv}$  globalen Koeffizienten werden in dem Spaltenvektor  $\mathbf{a}^{uv}$  zusammengefasst und der Vektor  $\mathbf{a}$  der globalen Koeffizienten (3.102) mit

$$\mathbf{a} = \left[ \mathbf{a}^{uv T}, \mathbf{a}^g T, \mathbf{a}^k T \right]^T \quad (3.130)$$

angegeben. Die Massenmatrix und die Steifigkeitsmatrix im Differentialgleichungssystem (3.115) werden dem Aufbau von  $\mathbf{a}$  folgend unterteilt, das heißt,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_1^D & \mathbf{M}_2^D & \mathbf{M}_3^D \\ \mathbf{M}_4^D & \mathbf{M}_5^D & \mathbf{M}_6^D \\ \mathbf{M}_7^D & \mathbf{M}_8^D & \mathbf{M}_9^D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{a}}^{uv} \\ \ddot{\mathbf{a}}^g \\ \ddot{\mathbf{a}}^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1^D & \mathbf{K}_2^D & \mathbf{K}_3^D \\ \mathbf{K}_4^D & \mathbf{K}_5^D & \mathbf{K}_6^D \\ \mathbf{K}_7^D & \mathbf{K}_8^D & \mathbf{K}_9^D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}^{uv} \\ \mathbf{a}^g \\ \mathbf{a}^k \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (3.131)$$

Die Untermatrizen  $\mathbf{M}_3^D$ ,  $\mathbf{M}_6^D$ ,  $\mathbf{M}_7^D$ ,  $\mathbf{M}_8^D$  und  $\mathbf{M}_9^D$  sind Nullmatrizen, da nur das elektrostatische Problem betrachtet wird. Somit existieren keine Trägheitsterme für die elektrische Feldstärke.

Die Variationen

$$\delta \mathbf{a}^g = \mathbf{0}, \quad \delta \mathbf{a}^k = \mathbf{0} \quad (3.132)$$

verschwinden, da sowohl  $\mathbf{a}^g$  als auch  $\mathbf{a}^k$  bekannt sind. Die entsprechenden Gleichungen im Differentialgleichungssystem (3.131) fallen somit weg. Letztlich folgt

$$\mathbf{M}_1^D \ddot{\mathbf{a}}^{uv} + \mathbf{K}_1^D \mathbf{a}^{uv} = -\mathbf{K}_3^D \mathbf{R}^D \underline{\mathbf{k}} \quad (3.133)$$

beziehungsweise mit

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1^D, \quad \mathbf{K} = \mathbf{K}_1^D, \quad \mathbf{S} = -\mathbf{K}_3^D \mathbf{R}^D \quad (3.134)$$

auch

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{a}}^{uv} + \mathbf{K} \mathbf{a}^{uv} = \mathbf{S} \underline{\mathbf{k}}. \quad (3.135)$$

Das System (3.135) gewöhnlicher Differentialgleichungen beschreibt das dynamische Verhalten des Helixaktors in den globalen Koeffizienten  $\mathbf{a}^{uv}$ . Die Verschiebungen  $\underline{\mathbf{u}}_e$  des freien Aktorendes bei  $\underline{z} = 1$  ergeben sich aus  $\mathbf{a}^{uv}$  mit den Ansätzen (3.100) zu

$$\underline{\mathbf{u}}|_1 = \gamma_i^u|_1 a_i^u, \quad \underline{\mathbf{v}}|_1 = \gamma_i^v|_1 a_i^v \quad (3.136)$$

beziehungsweise mit einer Ausgabematrix  $\mathbf{T}_e$ , die die Ansatzfunktionen bei  $\underline{z} = 1$  zusammenfasst,

$$\underline{\mathbf{u}}_e = [\underline{u}|_1, \underline{v}|_1]^T = \mathbf{T}_e \mathbf{a}^{uv}. \quad (3.137)$$

Die Ausgabematrix wählt die globalen Koeffizienten  $a_i^u$  und  $a_i^v$  des rechten Randes aus.

### 3.4.5 Lösen der Bewegungsgleichungen

Bequemerweise werden zuerst die Eigenfrequenzen und Eigenvektoren berechnet, danach Hauptkoordinaten eingeführt [59] und die Lösung als gewichtetes Überlagern der Eigenvektoren angegeben.

Mit dem üblichen Ansatz bei linearen Schwingungsproblemen

$$\mathbf{a}^{uv} = \hat{\mathbf{a}}^{uv} e^{i\omega t} \quad (3.138)$$

folgt aus dem Differentialgleichungssystem (3.135) das Eigenwertproblem

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \hat{\mathbf{a}}^{uv} = \mathbf{0} \quad (3.139)$$

mit den Eigenkreisfrequenzen  $\omega_{0,i}$ , ( $i = 1, \dots, N^{uv}$ ) und den Eigenvektoren  $\hat{\mathbf{a}}_i^{uv}$ , zusammengefasst in der Modalmatrix

$$\mathbf{T} = [\hat{\mathbf{a}}_1^{uv}, \dots, \hat{\mathbf{a}}_{N_e}^{uv}]. \quad (3.140)$$

Die Modalmatrix wird bezüglich der Massenmatrix normiert, also

$$\mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{T} = \mathbf{I} \quad (3.141)$$

und somit auch

$$\mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T} = \text{diag}\{\omega_{0,i}^2\}. \quad (3.142)$$

Mit der Hauptachsentransformation

$$\mathbf{a}^{uv} = \mathbf{T} \mathbf{q} \quad (3.143)$$

mit den Hauptkoordinaten  $q_i$ , zusammengefasst im Spaltenvektor

$$\mathbf{q} = [q_1, \dots, q_{N_{uv}}]^T, \quad (3.144)$$

folgt aus Gleichung (3.135) das System entkoppelter, gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\ddot{\mathbf{q}} + \text{diag}\{\omega_{0,i}^2\} \mathbf{q} = \mathbf{T}^T \mathbf{S} \bar{\mathbf{k}}. \quad (3.145)$$

Willkürlich wird noch eine viskose Dämpfung, Dämpfungsmaß  $D$ , eingefügt, um abklingende Lösungen zu ermöglichen. Es wird in allen Bewegungsgleichungen das gleiche Dämpfungsmaß angenommen, da die unterstellte viskose Dämpfung ohnehin nur eine grobe Näherung des tatsächlichen Verhaltens darstellt. Es gilt dann

$$\ddot{\mathbf{q}} + \text{diag}\{2D\omega_{0,i}\} \dot{\mathbf{q}} + \text{diag}\{\omega_{0,i}^2\} \mathbf{q} = \mathbf{T}^T \mathbf{S} \bar{\mathbf{k}}. \quad (3.146)$$

Die  $N_{uv}$  entkoppelten Gleichungen lassen sich einfach lösen. Sind die  $q_i$  bekannt, so kann mit

$$\underline{\mathbf{u}}_e = \mathbf{C}_e \mathbf{T} \mathbf{q}, \quad \mathbf{C}_e = \mathbf{D}_e \mathbf{T}_e \quad (3.147)$$



der normierte Verschiebungsvektor des freien Aktorendes in kartesischen Koordinaten angegeben werden. Darin ist  $\mathbf{D}_e$  die Drehmatrix nach Gleichung (3.99) und  $\mathbf{T}_e$  die Ausgabematrix nach Gleichung (3.137). Die Matrix  $\mathbf{C}_e$  fasst beide Matrizen zusammen.

Das dynamische Modell des Helixaktors ist mit den Gleichungen (3.146) und (3.147) hergeleitet. Aus den Gleichungen kann auch ein statisches Modell abgeleitet werden. Seine statische Übertragungsmatrix

$$\underline{\mathbf{G}} = \mathbf{C}_e \mathbf{K}^{-1} \mathbf{S}. \quad (3.148)$$

folgt aus den Gleichungen (3.146) und (3.147) bei verschwindenden Beschleunigungen  $\ddot{\mathbf{a}}^{uv}$  und verschwindenden Geschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{a}}^{uv}$ . Sie konvergiert mit zunehmender Elementanzahl gegen die Übertragungsmatrix (3.72) des statischen Modells.

### 3.4.6 Notwendige Elementanzahl

Die gewählten Finite Elemente-Ansätze erfüllen sowohl die *Stetigkeitsforderungen* des Euler-Bernoulli-Balkens, das heißt, mindestens  $C^1$ -Stetigkeit der Verschiebungen, als auch die *Darstellbarkeitsforderungen*, das heißt, Starrkörperverschiebungen und konstante Krümmungen sind möglich. Somit konvergiert die Lösung mit zunehmender Elementanzahl gegen die exakte Lösung, siehe [47]. Es ist noch zu klären, wieviele Elemente mindestens notwendig sind. Das Netz wird somit nach der  $h$ -Berechnungsmethode festgelegt [4].

Die notwendige Elementanzahl wird anhand von zwei Kriterien eingestellt. Das erste Kriterium bewertet den Verschiebungsvektor  $\underline{\mathbf{u}}_e$  eines Helixaktors mit einem aktiven Element, das heißt, der Helixaktor besitzt nur einen Eingang. Diese Konfiguration ist im Betrieb zwar nicht sinnvoll - es werden mindestens zwei unabhängige Eingänge benötigt - jedoch soll die so ermittelte Elementanzahl vorerst als Abschätzung genügen.

Das zweite Kriterium bewertet normierte Eigenfrequenzen

$$\lambda_i = \sqrt{\omega_{0,i}} \Lambda^{\frac{1}{4}}. \quad (3.149)$$

Darin ist  $\Lambda$  der in Gleichung (3.88) eingeführte Trägheitsparameter. Die gewählte Normierung der  $\omega_{0,i}$  entspricht der Normierung in [2]. Im Übrigen sind die  $\lambda_i$  bei unverwundenen Stäben die Eigenwerte der transzendenten Gleichung, siehe [59]. Die Bewertung der Eigenfrequenzen beschränkt sich auf wenige erste Eigenfrequenzen, hier auszugsweise auf  $\lambda_1$  und  $\lambda_8$ .

Die Elementanzahl wird schrittweise nach der Vorschrift

$$N_{e,j} = 2^j, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (3.150)$$

erhöht. Die quadratische Potenzreihe stellt sicher, dass das verfeinerte Netz immer auch das Ausgangsnetz enthält. Die Änderung vom Schritt  $j$  zum Schritt  $j+1$  wird bewertet und jeweils auf den Wert bei Schritt  $j+1$  bezogen. Liegen die Änderungen unterhalb einer Schwelle  $\hat{\epsilon}$ , so genügt die Netzeinstellung des Schrittes  $j$  und die Lösung mit dieser Netzverfeinerung wird als genügend nahe an der exakten Lösung liegend angenommen.

Für  $\underline{\mathbf{u}}_e$  wird als Konvergenzmaß

$$\epsilon_{u,j} = \frac{|\underline{\mathbf{u}}_{e,(j+1)} - \underline{\mathbf{u}}_{e,j}|}{|\underline{\mathbf{u}}_{e,(j+1)}|} \quad (3.151)$$

eingeführt. Für  $\lambda_i$  beträgt das Konvergenzmaß

$$\epsilon_{\lambda,j} = \frac{|\lambda_{(j+1)} - \lambda_j|}{|\lambda_{(j+1)}|}. \quad (3.152)$$

Als Parameterbereiche erscheinen für den Helixaktor

$$4 \leq \Upsilon \leq 256, \quad 0 \leq \varphi_e \leq 4\pi \quad (3.153)$$

sinnvoll. Sie orientieren sich auch an den Untersuchungen in [2]. Im Übrigen ist der Helixaktor linksseitig fest eingespannt.

Die Diagramme in Abbildung 3.11 zeigen das Konvergenzmaß  $\epsilon$  über der Vorverwindung  $\varphi_e$ . Die Berechnungen beim Steifigkeitsverhältnis  $\Upsilon = 256$  zeigen die höchsten Werte  $\epsilon$ . Anhand dieses Parametersatzes wird  $N_e$  festgelegt. Für diese Arbeit soll als Schwelle

$$\hat{\epsilon} = 10^{-3} \quad (3.154)$$

genügen. Das heißt, verbessert sich das Ergebnis bei zunehmender Netzverfeinerung um weniger als 0,1 %, so genügt diese Elementanzahl, hier also

$$N_e = 16. \quad (3.155)$$

Bei den Berechnungen zum Helixaktor werden somit mindestens 16 finite Elemente verwendet.

### 3.4.7 Eigenfrequenzen und Eigenschwingungsformen

ANLIKER und TRÖSCH untersuchen in [2] umfassend die Eigenfrequenzen der Biegeschwingungen vorverwundener Stäbe. Sie betrachten acht verschiedene Randbedingungen. DAWSON und CARNEGIE berechnen in [15] die Eigenschwingungsformen vorverwundener Stäbe. Beide Arbeiten nutzen Euler-Bernoulli-Balkenmodelle.

Vergleichend werden die Eigenfrequenzen und Eigenschwingungsformen des Helixaktors berechnet. Sie stimmen durchweg sehr gut mit den in [2] und [15] veröffentlichten Daten überein und das dynamische Modell des Helixaktors wird zumindest unter diesem Aspekt als verifiziert angesehen. Ein Verifizieren des statischen Modells erscheint nicht notwendig - es ist ausgesprochen simpel. Die im Experiment gemessenen Werte, siehe Kapitel 5, stimmen gut mit den Vorhergesagten überein.

Im Aktorbetrieb sind alle Eingänge  $\bar{k}_i$  bekannt. In den Bewegungsgleichungen (3.135) treten die  $\bar{k}_i$  nur auf der rechten Seite auf. Das Eigenwertproblem des Helixaktors (3.139) entspricht somit dem Eigenwertproblem des vorverwundenen Stabes. Zu bestimmen sind die Eigenfrequenzen  $\omega_{0,i}$  sowie die Eigenschwingungsformen  $\hat{u}_i(\underline{z})$  und  $\hat{v}_i(\underline{z})$ .

**Eigenfrequenzen:** Die Eigenfrequenzen des Helixaktors werden für den von ANLIKER und TRÖSCH [2] untersuchten Parameterbereich berechnet, das heißt für Steifigkeitsverhältnisse

$$\Upsilon \in \{4, 25, 256\} \quad (3.156)$$

und für Vorverwindungen

$$0 \leq \varphi_e \leq 540^\circ. \quad (3.157)$$

Die Eigenfrequenzen werden als normierte Eigenfrequenzen  $\lambda_i$  dargestellt, siehe Gleichung (3.149). In [2] wurden die ersten vier  $\lambda_i$  berechnet, hier dagegen alle  $\lambda_i$  im Bereich

$$0 \leq \lambda_i \leq 14. \quad (3.158)$$

Von den in [2] untersuchten Randbedingungen werden hier nur *fest-frei*, also wie beim Helixaktor (3.97,3.98), und *gelenkig-gelenkig*, also

$$\underline{u}|_0 = 0, \quad \underline{v}|_0 = 0, \quad \underline{u}|_1 = 0, \quad \underline{v}|_1 = 0 \quad (3.159)$$

diskutiert. Die Diagramme in Abbildung 3.12 zeigen die  $\lambda_i$  über  $\varphi_e$ , die im Übrigen mit den in [2] veröffentlichten Verläufen übereinstimmen. In den Diagrammen ist durch „–“ und „|“ gekennzeichnet, ob die zu  $\lambda_i$  gehörende Eigenschwingungsform bei  $\varphi_e = 0^\circ$  rein in  $\underline{u}$ -Richtung oder rein in  $\underline{v}$ -Richtung schwingt. Beispielsweise wechseln sich bei  $\Upsilon = 4$  horizontale und vertikale Eigenschwingungsformen bis zur fünften Eigenform ab. Bei  $\Upsilon = 256$  treten kaum horizontale Eigenschwingungsformen auf, da die horizontale Biegesteifigkeit sehr groß gegenüber der vertikalen Biegesteifigkeit ist.

Die starke Kopplung zwischen den Querverschiebungen eines vorverwundenen Stabes zeigt sich auch in den Eigenfrequenzen. Steigt  $\varphi_e$  an, so beeinflussen sich  $u$ -Anteil und  $v$ -Anteil der Eigenschwingungsformen zunehmend. Die erste Eigenkreisfrequenz, zur nachgiebigeren Biegerichtung gehörend, nimmt zu. Gleichzeitig nimmt die zweite Eigenkreisfrequenz ab. Ihre Biegerichtung wird geschwächt. Die weiteren Verläufe  $\lambda_i = f(\varphi_e)$  können wohl nur zur Kenntnis genommen werden und tiefere Interpretationen sind schwierig.

**Eigenschwingungsformen:** Die Eigenschwingungsformen  $\hat{u}_i(\underline{z})$  und  $\hat{v}_i(\underline{z})$  werden mit Hilfe der Eigenvektoren des diskretisierten Problems (3.135) und den globalen Ansatzfunktionen (3.100) berechnet. Das kontinuierliche Problem hat unendliche viele Eigenlösungen. Das diskretisierte Problem besitzt lediglich  $N_{uv}$  Eigenlösungen, das heißt, soviele Eigenlösungen wie unbekannte Koeffizienten  $a_i^{uv}$  nach Einbau der Rand- und Nebenbedingungen.

Die von DAWSON und CARNEGIE in [15] berechneten und experimentell bestimmten Eigenschwingungsformen wurden für den darin untersuchten Bereich

$$\Upsilon \in \{256, 144, 64, 16\}, \quad \varphi_e \in \{30^\circ, 60^\circ, 90^\circ\} \quad (3.160)$$

mit dem hier formulierten dynamischen Modell des Helixaktors bei  $N_e = 16$  Elementen nachgerechnet und sie stimmen überein. Auszugsweise werden die Eigenschwingungsformen für

$$\Upsilon = 25 \quad (3.161)$$

und

$$\varphi_e \in \{0^\circ, 10^\circ, \dots, 90^\circ\} \quad (3.162)$$

dargestellt. Die Diagramme in den Abbildungen 3.13 und 3.14 zeigen die Eigenschwingungsformen. In den Diagrammen ist durch „–“ und „|“ gekennzeichnet, ob die Eigenschwingungsform des unverwundenen Stabes nur in  $\underline{u}$ -Richtung oder  $\underline{v}$ -Richtung schwingt - hier als Vorzugsschwingungsform bezeichnet.

Bei der ersten Eigenschwingungsform bleibt die Vorzugsschwingungsform bis  $\varphi_e = 90^\circ$  nahezu unverändert. Die bei  $\varphi_e = 0^\circ$  verschwindende Eigenschwingungsform zeigt

bei  $\varphi_e = 90^\circ$  erste, schwache Auslenkungen. Bei höheren Eigenschwingungsformen ist die gegenseitige Beeinflussung deutlich ausgeprägter. Die Vorzugsschwingungsform der sechsten Eigenschwingungsform verliert schon ab  $\varphi_e = 50^\circ$  ihren bei  $\varphi_e = 0^\circ$  zu beobachtenden Charakter.

Weiterhin werden die Auslenkungsrichtungen der Eigenschwingungsformen am Stabende

$$\alpha_e = \sphericalangle(\vec{e}_1, \vec{u}_e) \quad (3.163)$$

illustriert. Bei  $\varphi_e = 0$  werden ausschließlich die Richtungen

$$\alpha_e \in \{0^\circ, 90^\circ\} \quad (3.164)$$

beobachtbar sein, also reine  $\hat{u}$ - oder  $\hat{v}$ -Eigenschwingungsformen. Dagegen wird bei großen  $\varphi_e$  wohl nahezu jede Richtung auftreten.

Die Diagramme in Abbildung 3.15 zeigen die Auslenkungsrichtungen der ersten sechs Eigenschwingungsformen. Klar erkennbar führt steigende Vorverwindung auch zu steigenden  $\alpha_e$ . Für kleine  $\varphi_e$  ist diese Feststellung noch interpretierbar: Beträgt die Vorverwindung nur wenige Grad und wird am Stabende eine Kraft in  $y$ -Richtung eingeleitet, so zeigt die Richtung der Verschiebung nicht mehr genau in  $y$ -Richtung. Sie wird um wenige Grad im Drehsinn der Vorverwindung verdreht sein. Bekanntermaßen sind statische Biegelinie und erste Eigenschwingungsform bei unverwundenen Stäben durchaus ähnlich. Darüber hinausgehende Interpretationen der  $\alpha_e$  sind schwierig.

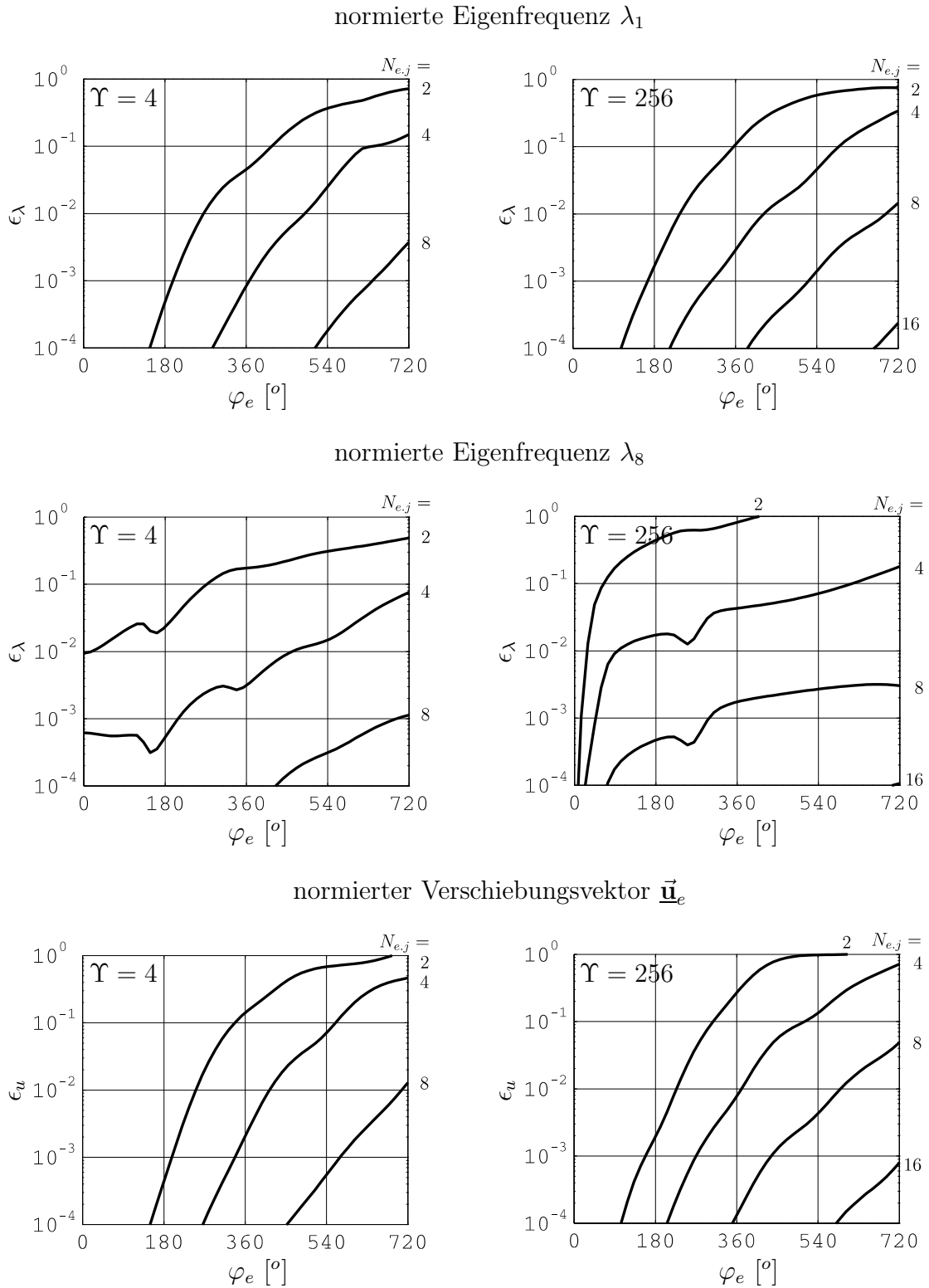


Abbildung 3.11: Konvergenzmaß  $\epsilon_\lambda$  und  $\epsilon_u$  über  $\varphi_e$  bei verschiedenen Steifigkeitsverhältnissen  $\Upsilon$ . Die Anzahl  $N_{e,j}$  ist die zum Schritt  $j$  gehörende Anzahl der finiten Elemente.

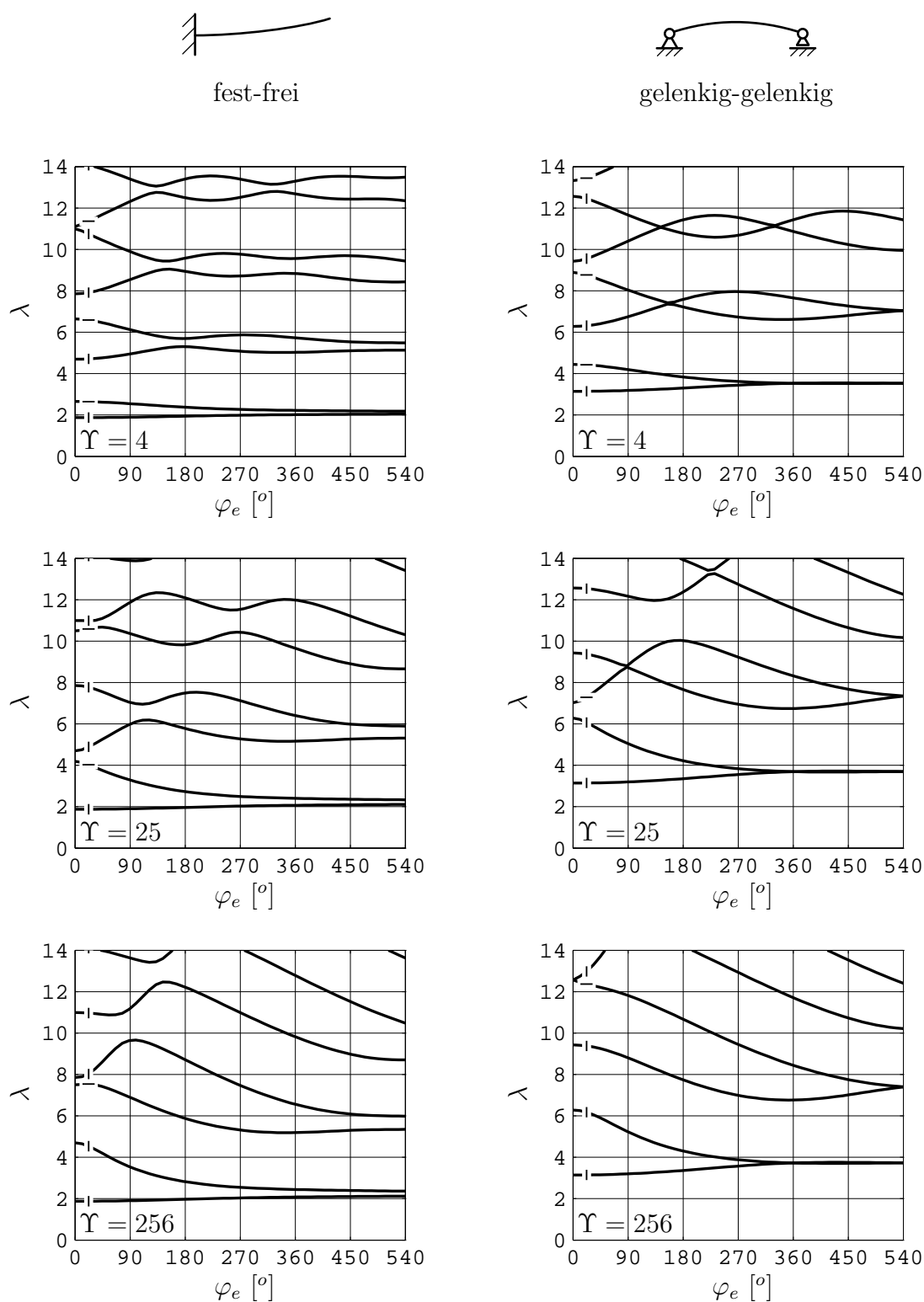


Abbildung 3.12: Normierte Eigenfrequenzen  $\lambda_i$  über  $\varphi_e$  mit  $N_e = 16$ . Die Markierungen „-“ und „|“ kennzeichnen, ob die Eigenschwingungsform bei  $\varphi_e = 0^\circ$  ausschließlich in  $\underline{u}$ -Richtung oder in  $\underline{v}$ -Richtung schwingt.

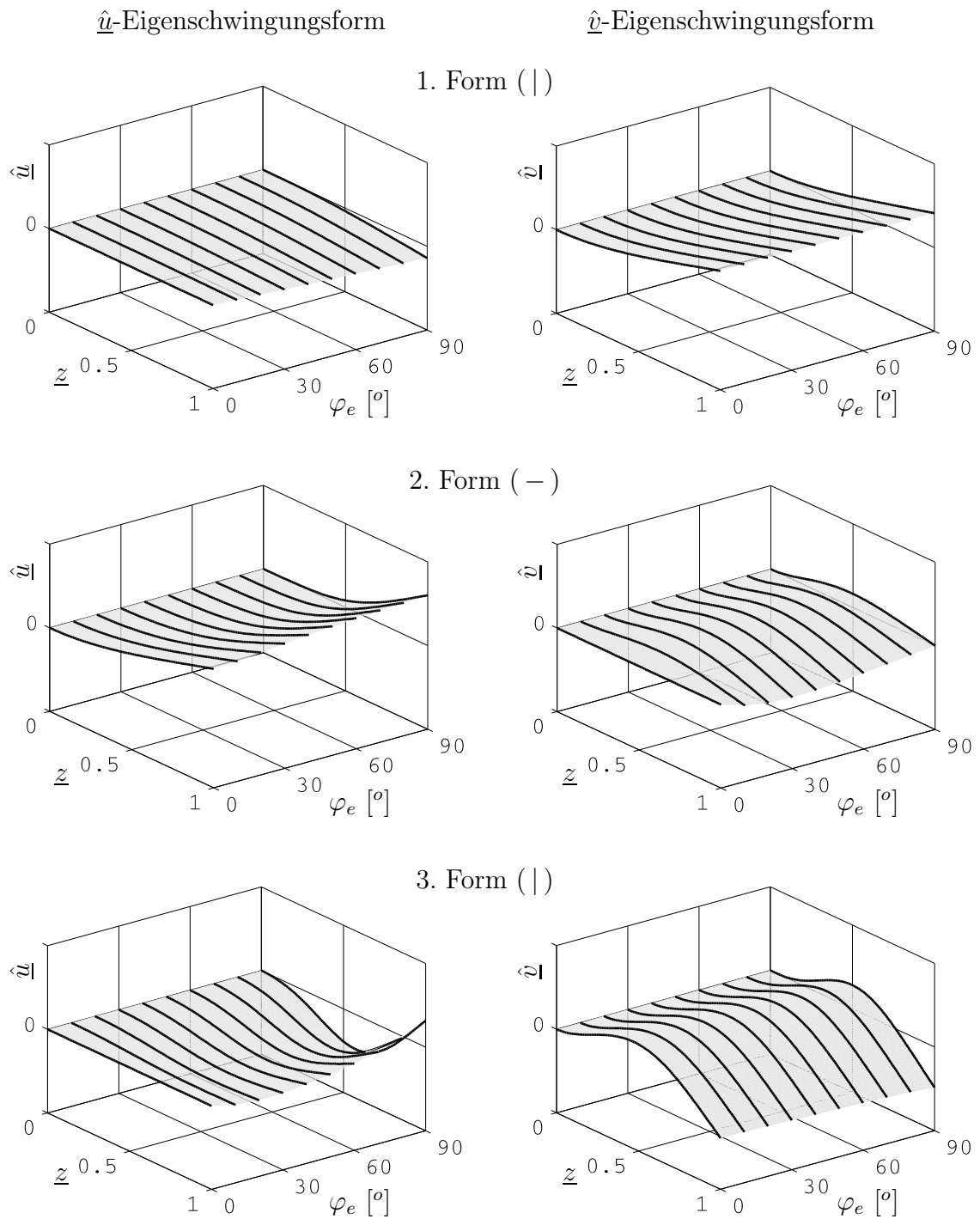


Abbildung 3.13: Eigenschwingungsformen  $i \in \{1, 2, 3\}$  bei verschiedenen  $\varphi_e$ . Steifigkeitsverhältnis  $\Upsilon = 25$ , Elementanzahl  $N_e = 16$ .

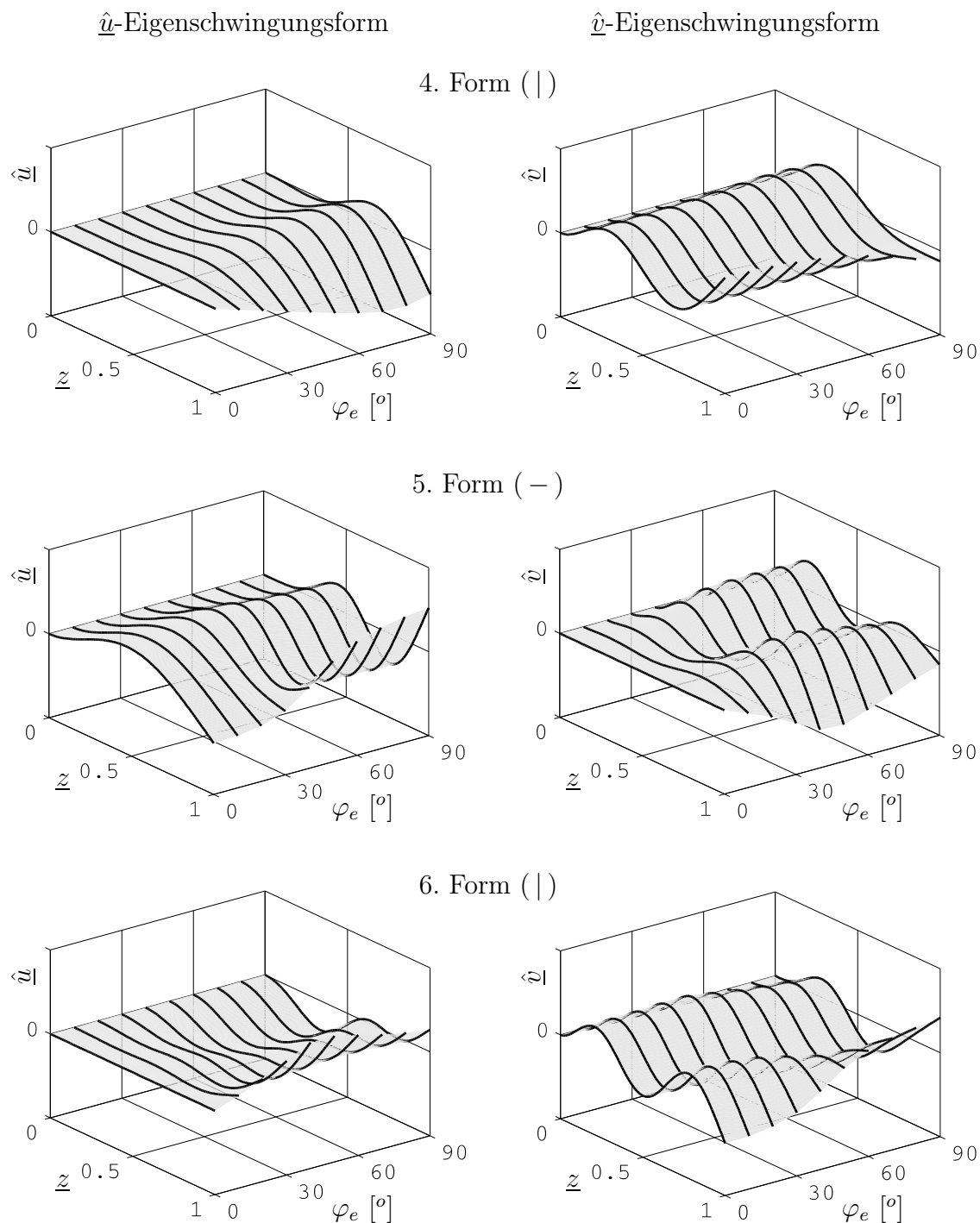


Abbildung 3.14: Eigenschwingungsformen  $i \in \{4, 5, 6\}$  bei verschiedenen  $\varphi_e$ . Steifigkeitsverhältnis  $\Upsilon = 25$ , Elementanzahl  $N_e = 16$ .



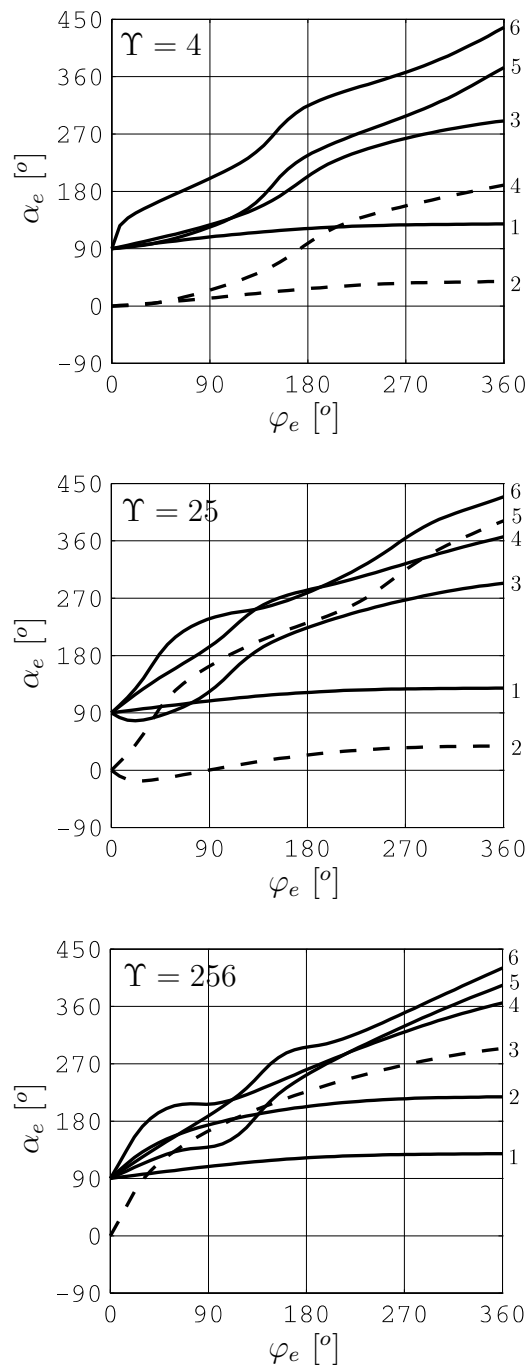


Abbildung 3.15: Auslenkungsrichtungen  $\alpha_e$  der Eigenschwingungsformen am Stabende. Die Zahlen bezeichnen die Indizes der Eigenschwingungsformen. Unterbrochene Verläufe kennzeichnen die bei  $\varphi_e = 0^\circ$  reinen  $\hat{u}$ -Eigenschwingungsformen. Durchgezogene Verläufe kennzeichnen die bei  $\varphi_e = 0^\circ$  reinen  $\hat{v}$ -Eigenschwingungsformen.



# Kapitel 4

## Arbeitsraum, Optimierung und inverse Aufgabe

Der Arbeitsraum des Helixaktors ist das Gebiet aller erreichbaren Positionen des freien Aktorendes. Seine Größe und seine Gestalt sind von den Parametern des Helixaktors abhängig und die Berechnung des Arbeitsraumes wird zunächst hergeleitet. Darauf aufbauend werden optimale Parameter für einen maximal günstigen Arbeitsraum bestimmt. Abschließend wird die inverse Aufgabe des Helixaktors diskutiert, also das Festlegen der Eingangswerte bei gegebener Position<sup>1</sup>.

Die Probleme werden ohne Zeiteinflüsse und ohne weitere mechanische Lasten diskutiert. Somit genügt das statische Modell (3.70) aus Kapitel 3.3, beschrieben durch

$$\underline{\mathbf{u}}_e = \underline{\mathbf{G}}\bar{\mathbf{k}} \quad (4.1)$$

mit dem normierten Verschiebungsvektor  $\underline{\mathbf{u}}_e$ , geschrieben als Spaltenvektor

$$\underline{\mathbf{u}}_e = [\underline{u}_e, \underline{v}_e]^T, \quad (4.2)$$

dem normierten Krümmungsvektor

$$\bar{\mathbf{k}} = [\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_{N_e}]^T, \quad -1 \leq \bar{k}_i \leq 1 \quad (4.3)$$

sowie der normierten statischen Übertragungsmatrix

$$\underline{\mathbf{G}} = [\underline{\mathbf{g}}_1, \dots, \underline{\mathbf{g}}_{N_e}]. \quad (4.4)$$

Die  $\bar{k}_i$  sind die Eingänge des Aktors. Die  $\underline{u}_e$  und  $\underline{v}_e$  sind die Ausgänge.

Es ist letztlich unerheblich, dass  $\underline{\mathbf{G}}$  die statische Übertragungsmatrix des Helixaktors ist. Auch jedes andere statische Übertragungsverhalten, beschrieben durch Gleichung (4.1), kann mit den folgenden Methoden untersucht werden. Im Übrigen mag man sich den Helixaktor als einen in der  $x$ - $y$ -Ebene operierenden, seriellen Manipulator mit  $N_e$  Schubgelenken und den Gelenkvariablen  $\bar{k}_i$  vorstellen.

---

<sup>1</sup>Die Bezeichnungen *Arbeitsraum* und *inverse Aufgabe* folgen den üblichen Begriffen der Robotik, siehe [34].

## 4.1 Berechnung des Arbeitsraumes

Der Arbeitsraum des Helixaktors ist das Gebiet aller Positionen, für die Lösungen zu den Eingängen gefunden werden können. Nach [63] ist der hier untersuchte Arbeitsraum ein *Positionsarbeitsraum*, englisch: *reachable workspace*. *Positionsarbeitsraum* impliziert, dass nur die Verschiebungen  $\underline{u}_e$  und  $\underline{v}_e$ , jedoch nicht die Neigungen  $\underline{u}'_e$  und  $\underline{v}'_e$  betrachtet werden. Die Hülle des Arbeitsraumes  $\partial W$  trennt das erreichbare vom nicht erreichbaren Gebiet.

Zwei Umstände können Arbeitsräume von Manipulatoren und somit auch Aktoren begrenzen. Erstens kann schon die Struktur des Manipulators den Arbeitsraum eingrenzen. Beispielsweise wird ein Zwei-Arm-Manipulator höchstens Punkte innerhalb einer Kugel mit dem Radius der gesamten Armlänge erreichen. Zweitens können begrenzte Gelenkvariablen den Arbeitsraum einschränken.

Die Arbeitsräume von Manipulatoren und Robotern werden intensiv diskutiert. Die Aufgabe ist anspruchsvoll, da häufig stark nichtlineare Kinematiken vorliegen. Die Arbeiten von ROTH [77] und KUMAR und WALDRON [52] sind viel zitierte, frühe Beiträge dazu. Der Arbeitsraum und seine Grenzen werden meist mit Hilfe der Jacobi-Matrix  $\mathbf{J}$  diskutiert, also der zwischen Eingangs- und Ausgangsgeschwindigkeiten vermittelnden Matrix, siehe unter anderem [43, 45]. Die Jacobi-Matrix des Helixaktors

$$(\underline{J}_{ij}) = \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial \dot{k}_j}, \quad \underline{u}_1 = \underline{u}_e, \quad \underline{u}_2 = \underline{v}_e \quad (4.5)$$

ist gleich seiner statischen Übertragungsmatrix

$$\underline{\mathbf{J}} = \underline{\mathbf{G}} \quad (4.6)$$

und somit konstant. Der Arbeitsraum des Helixaktors wird einzig durch die begrenzten Eingänge limitiert und Berechnungen auf Grundlage der Jacobi-Matrix sind hier nicht zielführend.

Das statische Modell (4.1) beschreibt eine begrenzte Ebene, aufgespannt durch die Richtungsvektoren  $\underline{\bar{g}}_i$ , die wiederum durch die Eingänge  $\bar{k}_i$  skaliert werden. Die Richtungsvektoren können durchaus linear abhängig sein, beispielsweise bei Helixaktoren mit mehr als zwei Eingängen.

Es werden drei Wege zum Berechnen des Arbeitsraumes vorgestellt, wobei allein der Letztere später verwendet wird.

### 4.1.1 Lineare Optimierung

Der wohl naheliegendste Weg zur Hülle des Arbeitsraumes ist ein lineares Optimierungsproblem. Abbildung 4.1 illustriert die Methode bei einer willkürlich gewählten Übertragungsmatrix. Die Hülle wird durch die geschlossene Kurve

$$\underline{\bar{\mathbf{w}}} = f(\alpha), \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi \quad (4.7)$$

beschrieben. Bei einem bestimmten, festgehaltenen Winkel  $\alpha$  ist die Länge  $|\underline{\bar{\mathbf{w}}}|$  zu maximieren, also ein möglichst großer Abstand zum Ursprung einzustellen. Das ent-

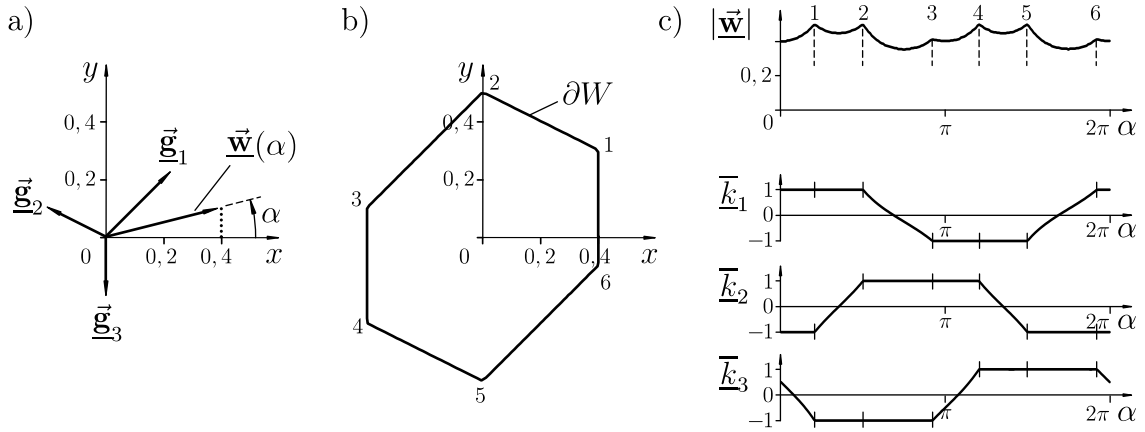


Abbildung 4.1: Berechnen des Arbeitsraumes mittels linearer Optimierung: a) normierte Richtungsvektoren  $\underline{g}_i^v$ , b) Hülle des Arbeitsraumes  $\partial W$  sowie c) Verlauf des Abstandes  $|\underline{w}^v|$  und der Eingänge  $\bar{k}_j$  über  $\alpha$ .

sprechende lineare Optimierungsproblems ist

$$\begin{aligned} \text{ZF: } \quad & \underline{c}_1 \cdot \underline{u}_e = \max!, \\ & \underline{u}_e = \underline{G}\underline{k}, \\ \text{NB: } \quad & \underline{c}_2 \cdot \underline{u}_e = 0, \\ & |\underline{k}_i| \leq 1 \quad (i = 1, \dots, N_e) \end{aligned} \quad (4.8)$$

mit

$$\underline{c}_1 = \underline{e}_1 \cos \alpha + \underline{e}_2 \sin \alpha, \quad \underline{c}_2 = -\underline{e}_1 \sin \alpha + \underline{e}_2 \cos \alpha. \quad (4.9)$$

Die Zielfunktion ist der Abstand  $|\underline{w}^v|$ . Die erste Nebenbedingung erzwingt die Verschiebung in Richtung  $\alpha$ . Die zweite Nebenbedingung begrenzt die Eingänge  $\bar{k}_i$ , die auch die Optimierungsparameter sind. Die Einheitsvektoren  $\underline{c}_1$  und  $\underline{c}_2$  projizieren  $\underline{u}_e$  in Richtung  $\alpha$  und senkrecht dazu. Mit den optimalen Eingängen  $\bar{k}_{w,i}$  in Abhängigkeit von  $\alpha$  beschreibt

$$\underline{w}^v(\alpha) = \underline{G}\bar{\underline{k}}_w(\alpha) \quad (4.10)$$

die Hülle des Arbeitsraumes. In Abbildung 4.1 werden die Hülle des Arbeitsraumes sowie die Funktionen  $|\underline{w}^v|(\alpha)$  und  $\bar{k}_{w,i}(\alpha)$  an einem Beispiel illustriert. Die Hülle ist ein konvexer Polygonzug, in dessen Eckpunkten die Eingänge extremal sind. Die Eckpunkte genügen somit zum Beschreiben der Hülle, sie lassen sich aus dem Optimierungsproblem (4.8) jedoch nur iterativ bestimmen.

### 4.1.2 Graham Scan

Wie gezeigt, sind die Eingänge in den Eckpunkten der Hülle extremal. Werden somit alle möglichen Permutationen

$$\bar{\underline{k}}_1 = [-1, \dots, -1, -1]^T, \quad (4.11)$$

$$\bar{\underline{k}}_2 = [-1, \dots, -1, 1]^T,$$

$\vdots$

$$\bar{\underline{k}}_N = [1, \dots, 1, 1]^T \quad (4.12)$$

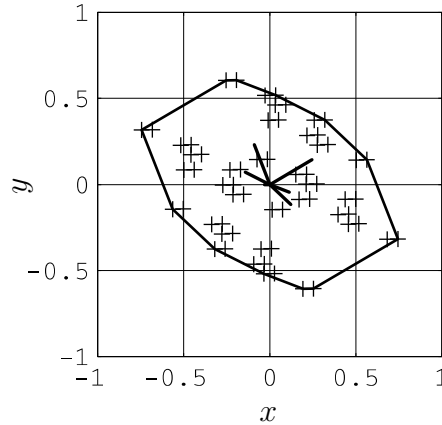


Abbildung 4.2: Berechnen des Arbeitsraumes mittels *Graham Scan*: normierte Richtungsvektoren  $\underline{\mathbf{g}}_i$ , Hülle des Arbeitsraumes sowie Verschiebungsvektoren  $\underline{\mathbf{w}}_i$  aller möglichen Permutationen der Eingänge, gekennzeichnet durch +.

aufgestellt, es sind  $N = 2^{N_e}$ , und werden die entsprechenden Positionen

$$\underline{\mathbf{w}}_i = \underline{\mathbf{G}}\bar{\mathbf{k}}_i \quad (i = 1, \dots, 2^{N_e}) \quad (4.13)$$

berechnet, so enthält diese Punktmenge sicher auch die Eckpunkte der Hülle des Arbeitsraumes. Diese Eckpunkte müssen erkannt und in der richtigen Reihenfolge angeordnet werden.

Das Bestimmen der konvexen Hülle aus einer Punktmenge ist ein bekanntes Problem der Computergeometrie. PREPARATA und SHAMOS geben in [72] eine gute Einführung und sie widmen sich ausführlich dem Berechnen konvexer Hüllen, sowohl für zwei- als auch dreidimensionale Probleme. Ein effizienter Algorithmus ist der sogenannte *Graham Scan*, siehe auch [26]. Er wird hier in etwas veränderter Form implementiert und er lässt sich wie folgt beschreiben:

1. Aus der Menge aller Punkte  $\underline{\mathbf{w}}_i$  wird ein Startpunkt  $\underline{\mathbf{w}}_s$  ausgewählt, der sicher ein Eckpunkt ist, praktischerweise der Punkt mit kleinster  $y$ -Koordinate. Ist das noch nicht eindeutig, so wird aus dieser Untermenge der Punkt mit kleinster  $x$ -Koordinate gewählt.
2. Für alle Punkte wird der Winkel  $\beta_j$  berechnet, gemessen zwischen dem Vektor vom Startpunkt zum betrachteten Punkt  $\underline{\mathbf{w}}_j - \underline{\mathbf{w}}_s$  und der  $x$ -Achse.
3. Der Index des Startpunktes  $\underline{\mathbf{w}}_s$  wird in einer Liste abgelegt. Der Punkt wird jedoch nicht aus der Menge aller Punkte (4.13) entfernt. Der Punkt  $\underline{\mathbf{w}}_j$  mit kleinstem Winkel  $\beta_j$  und kleinstem Abstand zu  $\underline{\mathbf{w}}_s$  wird zum neuen Startpunkt.
4. Alle Punkte werden um den neuen Startpunkt um einen Winkel  $-\beta$  verdreht.
5. Die Schritte 2, 3 und 4 werden so lange wiederholt, bis der erste Startpunkt erneut gefunden wird. Die konvexe Hülle ist jetzt bekannt, abgelegt in der Liste der Indizes.

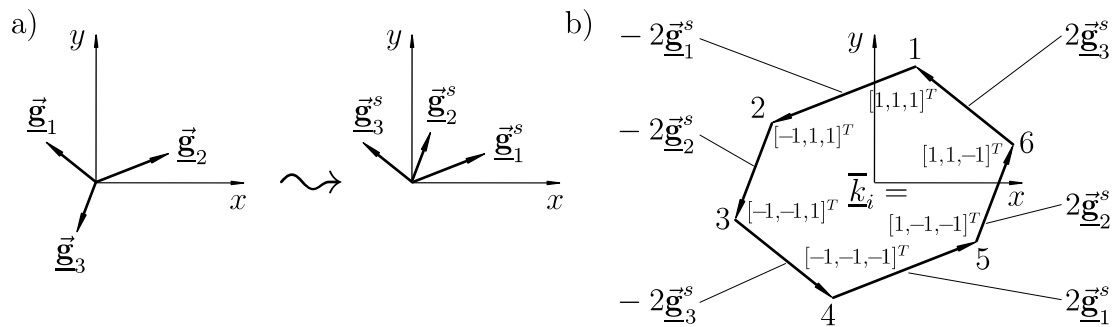


Abbildung 4.3: Berechnen des Arbeitsraumes mittels Vorsortieren der normierten Richtungsvektoren: a) Sortieren der Richtungsvektoren und b) Hülle des Arbeitsraumes, beschrieben durch  $\vec{g}_i^s$ .

Im ursprünglichen Algorithmus wird die Punktmenge nach  $\beta_j$  sortiert und durchgeprüft, ob drei aufeinanderfolgende Punkte eine einspringende Ecke beschreiben. Ist das der Fall, so wird der mittlere Punkt gelöscht. Da im Schritt 3 der Punkt mit kleinstem  $\beta$  jedoch sicher zu einer Kante der Hülle gehört und im besten Fall ein Eckpunkt ist, so wird die Prüfung hier nicht weiter fortgeführt. Vielmehr wird im Schritt 4 eine Ausgangssituation analog zu Schritt 1 hergestellt. Die hier gewählte Abwandlung des Graham Scan ist vermutlich etwas rechenintensiver, sie lässt sich jedoch bequem implementieren.

Abbildung 4.2 skizziert ein Beispiel mit 6 Eingängen und es zeigt schon mögliche Grenzen dieses kombinatorischen Verfahrens. Mit zunehmender Anzahl der Eingänge nimmt die Anzahl der zu berücksichtigenden Punkte massiv zu.

Da die Vorschrift für alle Punkte  $\vec{w}_i$  bekannt ist - das statische Modell - so wäre es auch denkbar, mit einem beliebigen Eckpunkt zu beginnen und anhand der Richtungsvektoren  $\vec{g}_i^s$  zu entscheiden, wie die Eingänge zu ändern sind, um den nächsten Punkt der Hülle zu erreichen. Letztlich folgt daraus der dritte Algorithmus.

### 4.1.3 Sortieren der Richtungsvektoren

Der dritte Algorithmus erscheint im Nachhinein geradezu offensichtlich. Er wurde jedoch über die genannten zwei Vorstufen *lineare Optimierung* und *Graham Scan* entwickelt und deshalb auch so dargestellt.

Beim Schritt von einer Ecke der Hülle zur Nächsten ändert sich lediglich ein Eingang  $\bar{k}_i$ . Diese Eigenschaft zeigt sich beispielsweise in Abbildung 4.1. Ändert sich nur ein Eingang, so kann sich der Ortsvektor benachbarter Ecken nur um einen Richtungsvektor  $\vec{g}_i^s$ , genauer sein Doppeltes, unterscheiden. Das Berechnen der Hülle ist dann ausgesprochen einfach. Der Algorithmus wird wieder an einem Beispiel illustriert, siehe Abbildung 4.3. Ausgangspunkt ist das statische Modell (4.1).

In einem ersten Schritt werden die Richtungsvektoren  $\vec{g}_i^s$  umgeordnet und zwar so, dass deren Richtungswinkel nur im Bereich

$$0 \leq \alpha_i \leq \pi \quad (4.14)$$

liegen und die  $\vec{g}_i^s$  nach aufsteigenden  $\alpha_i$  sortiert sind. Richtungsvektoren mit  $\alpha_i > \pi$  werden vor dem Sortieren am Koordinatenursprung gespiegelt. Eine Matrix  $\mathbf{R}^s$  co-

diert das Umordnen. Sie transformiert die Eingänge  $\bar{\mathbf{k}}^s$  des sortierten Modells in die ursprünglichen Eingänge

$$\bar{\mathbf{k}} = \mathbf{R}^s \bar{\mathbf{k}}^s. \quad (4.15)$$

Somit ist die sortierte Übertragungsmatrix

$$\underline{\mathbf{G}}^s = \underline{\mathbf{G}} \mathbf{R}^s \quad (4.16)$$

und das sortierte Modell

$$\underline{\mathbf{u}}_e = \underline{\mathbf{G}}^s \bar{\mathbf{k}}^s. \quad (4.17)$$

In dem Beispiel in Abbildung 4.3 gilt

$$\mathbf{R}^s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

Die Eingangswerte  $\bar{\mathbf{k}}_{w,i}^s$  der Ecken, zusammengefasst in einer Matrix

$$\bar{\mathbf{K}}_w^s = [\bar{\mathbf{k}}_{w,1}^s, \dots, \bar{\mathbf{k}}_{w,2N_e}^s], \quad (4.19)$$

betragen im skizzierten Beispiel

$$\bar{\mathbf{K}}_w^s = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right]. \quad (4.20)$$

Bei vorsortierter Übertragungsmatrix folgt die Matrix  $\bar{\mathbf{K}}_w^s$  immer diesem Aufbau. Sie lässt sich mit

$$\bar{\mathbf{K}}_w^s = [\bar{\mathbf{K}}^1, -\bar{\mathbf{K}}^1] \quad (4.21)$$

und

$$\bar{K}_{ij}^1 = \begin{cases} 1, & \text{für } i \geq j \\ -1, & \text{für } i < j \end{cases} \quad (i, j = 1, \dots, N_e) \quad (4.22)$$

allgemein beschreiben. Mit Gleichung (4.21) und der Transformation (4.15) folgen sofort die Eingangswerte

$$\bar{\mathbf{K}}_w = [\bar{\mathbf{k}}_{w,1}, \dots, \bar{\mathbf{k}}_{w,2N_e}] = \mathbf{R}^s [\bar{\mathbf{K}}^1, -\bar{\mathbf{K}}^1] \quad (4.23)$$

der Hülle des ursprünglichen, nicht sortierten Modells und somit auch in der richtigen Abfolge die Ecken

$$\underline{\mathbf{w}}_j = \underline{\mathbf{G}} \bar{\mathbf{k}}_{w,j} \quad (j = 1, \dots, 2N_e). \quad (4.24)$$

Der Algorithmus wird noch einmal zusammengefasst:

1. Zuerst wird die Übertragungsmatrix vorsortiert, um die Matrix  $\mathbf{R}^s$  zu ermitteln.
2. Anschließend wird die Matrix  $\bar{\mathbf{K}}^1$  erstellt und die Matrix  $\bar{\mathbf{K}}_w$  nach Gleichung (4.23) bestimmt.
3. Die gesuchten Ecken  $\underline{\mathbf{w}}_j$  der Hülle werden nach Gleichung (4.24) berechnet.



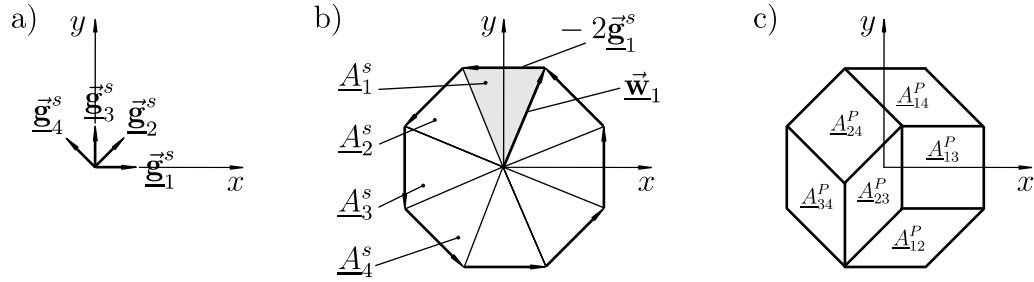


Abbildung 4.4: Berechnen des Flächeninhaltes mittels vorsortierter normierter Richtungsvektoren: a) Richtungsvektoren, b) Zerlegung des Arbeitsraumes in Dreiecke sowie c) Zerlegung des Arbeitsraumes in Parallelogramme.

Das Bestimmen des Arbeitsraumes nach dieser Methode ist einfach. Die einzige Aufgabe besteht im Ermitteln von  $\mathbf{R}^s$ , also dem eventuellen Spiegeln und Sortieren der Richtungsvektoren.

Der Begriff *Ecke* ist noch abzuschwächen. Zeigen mehrere  $\underline{\mathbf{g}}_i^s$  in die gleiche Richtung, so gibt Gleichung (4.24) Ecken an, deren angrenzende Kanten parallel zueinander sind. Es werden somit mehr als die zur Beschreibung der Hülle notwendigen Ecken berücksichtigt. Die überflüssigen *Ecken* werden nicht vernachlässigt, da so bei  $N_e$  Eingängen streng  $2N_e$  *Ecken* auftreten.

#### 4.1.4 Flächeninhalt des Arbeitsraumes

Der Flächeninhalt des Arbeitsraumes lässt sich mit Hilfe der Integration

$$\underline{A}_W = \int_0^{2\pi} \int_0^{|\underline{\mathbf{w}}(\alpha)|} r \, dr \, d\alpha \quad (4.25)$$

berechnen. Alternativ und deutlich einfacher kann  $\underline{A}_W$  auch mit den Kreuzprodukten der Richtungsvektoren bestimmt werden. Die Herleitung wird am Beispiel in Abbildung 4.4 erläutert. Sie zeigt die Richtungsvektoren  $\underline{\mathbf{g}}_i^s$  eines Aktors mit vier Eingängen und die Hülle des entsprechenden Arbeitsraumes. Es wird vorerst angenommen, dass die Richtungsvektoren sortiert sind, dass also

$$\underline{\mathbf{G}} = \underline{\mathbf{G}}_s \quad (4.26)$$

gilt. Diese Bedingung dient einzig dem Verständnis der Herleitung und sie wird später fallengelassen.

Jeder Arbeitsraum eines Aktors mit  $N_e$  Richtungsvektoren lässt sich in  $2N_e$  Dreiecke unterteilen, siehe Abbildung 4.4, wobei die Dreiecke  $i$  und  $i + N_e$  jeweils gleich sind. Somit kann der Flächeninhalt des Arbeitsraumes auch mit Hilfe der Flächeninhalte  $\underline{A}_{D,i}$  der Dreiecke gemäß

$$\underline{A}_W = 2 \sum_{i=1}^{N_e} \underline{A}_{D,i} \quad (4.27)$$

angegeben werden. Der Flächeninhalt der Dreiecke lässt sich bequem mit dem Betrag des Kreuzprodukts seiner zwei Seiten  $\underline{\mathbf{w}}_i$  und  $-2\underline{\mathbf{g}}_i^s$  zu

$$\underline{A}_{D,i} = \frac{1}{2} |\underline{\mathbf{w}}_i \times (-2\underline{\mathbf{g}}_i^s)| \quad (4.28)$$

berechnen. Die  $\vec{w}_i$  werden nach dem Algorithmus *Vorsortieren der Richtungsvektoren* bestimmt, das heißt, sie werden entsprechend Gleichung (4.24) durch die  $\vec{g}_j^s$  ausgedrückt. Einsetzen von Gleichung (4.28) in Gleichung (4.27) liefert dann für den Flächeninhalt des Arbeitsraumes

$$\underline{A}_W = 4 \sum_{i=1}^{N_e-1} \sum_{j=i+1}^{N_e} |\vec{g}_i^s \times \vec{g}_j^s|. \quad (4.29)$$

Die Beziehung (4.29) verlangt letztlich, dass jedes mögliche Kreuzprodukt ohne Berücksichtigung der Reihenfolge, ohne Wiederholung aus je zwei Richtungsvektoren aus den  $N_e$  Richtungsvektoren zu berechnen ist und deren Beträge aufzusummieren sind. Ein Schema lässt sich bequem mit der Matrix

$$\mathbf{M}_{Aw} = \begin{bmatrix} 0 & |\vec{g}_1^s \times \vec{g}_2^s| & |\vec{g}_1^s \times \vec{g}_3^s| & |\vec{g}_1^s \times \vec{g}_4^s| & \dots & |\vec{g}_1^s \times \vec{g}_{N_e}^s| \\ 0 & 0 & |\vec{g}_2^s \times \vec{g}_3^s| & |\vec{g}_2^s \times \vec{g}_4^s| & \dots & |\vec{g}_2^s \times \vec{g}_{N_e}^s| \\ 0 & 0 & 0 & |\vec{g}_3^s \times \vec{g}_4^s| & \dots & |\vec{g}_3^s \times \vec{g}_{N_e}^s| \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & |\vec{g}_{N_e-1}^s \times \vec{g}_{N_e}^s| \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

angeben, deren Elemente noch aufzusummieren sind:

$$\underline{A}_W = 4 \sum_{i=1}^{N_e} \sum_{j=1}^{N_e} M_{Aw \cdot ij}. \quad (4.31)$$

Wegen des Summierens in Gleichung (4.31) ist das Vorsortieren der  $\vec{g}_i^s$  letztlich überflüssig.

Die Kreuzprodukte in Gleichung (4.29) können auch so verstanden werden, dass sich der Arbeitsraum aus

$$N_P = \frac{N_e!}{(N_e - 2)!2!} \quad (4.32)$$

Parallelogrammen zusammensetzt. Abbildung 4.4 skizziert diese Vorstellung.

#### 4.1.5 Gestaltmaß des Arbeitsraumes

Der Helixaktor ist ein bidirektionaler Biegeaktor und sicherlich ist ein ausgewogener Arbeitsraum für einen bidirektionalen Biegeaktor wünschenswert. Unter *ausgewogen* wird hier verstanden, dass der Aktor möglichst in alle Richtungen gleich weite Verschiebungen erlaubt, also ein möglichst isotroper Arbeitsraum.

Die Hülle des Arbeitsraumes ist zumindest näherungsweise einer Ellipse ähnlich und deren Geometrie wird zum Bewerten der Gestalt des Arbeitsraumes herangezogen. Abbildung 4.5 unterstreicht diese Approximation an drei Beispielen. Wird die maximal mögliche Verschiebung im Arbeitsraum als Länge der großen Halbachse der Ellipse begriffen, also

$$a = \max |\vec{w}(\alpha)|, \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi, \quad (4.33)$$

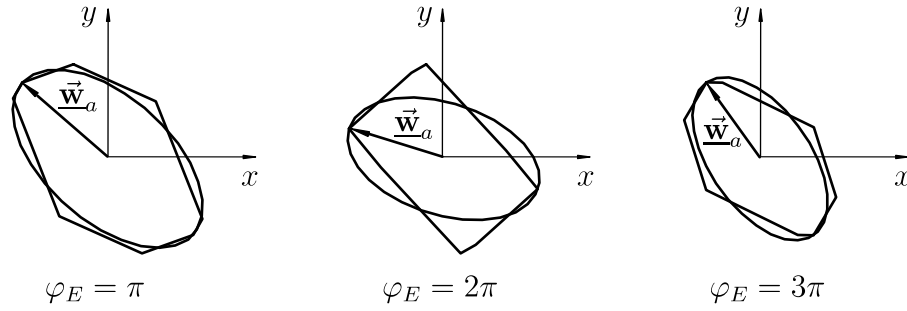


Abbildung 4.5: Approximieren des Arbeitsraumes durch eine Ellipse. Beispiele für einen Helixaktor mit  $N_e = 4$  und gleichmäßig unterteilten aktiven Elementen.

und beträgt der Radius eines zu  $\underline{A}_W$  flächengleichen Kreises

$$r = \sqrt{\frac{\underline{A}_W}{\pi}}, \quad (4.34)$$

so lässt sich ein Exzentrizitätsmaß

$$\rho = \frac{r}{a}, \quad 0 \leq \rho \leq 1 \quad (4.35)$$

definieren. Die Länge der kleinen Halbachse der Ellipse beträgt dann

$$b = \rho^2 a. \quad (4.36)$$

Ist  $\rho$  nahezu 1, so gilt der Arbeitsraum als ausgewogen und als nahezu isotrop. Verschwindet  $\rho$ , so gilt der Arbeitsraum als stark anisotrop. Das Exzentrizitätsmaß einer Linie ist 0, das eines Kreises ist 1.

#### 4.1.6 Beispiele zum Arbeitsraum

Abbildung 4.6 zeigt die Arbeitsräume für einen repräsentativen Parameterbereich. Einfach erkennbar ist eine gewisse Vorverwindung für einen ausgewogenen Arbeitsraum notwendig. Mit zunehmender Anzahl der Eingänge nimmt auch die Größe des Arbeitsraumes zu, gut erkennbar beispielsweise bei  $\varphi_e = 2\pi$ . Bei großer Vorverwindung und vielen Eingängen, hier  $\varphi_e = 20\pi$  und  $N_e = 200$ , stellt sich ein kreisförmiger Arbeitsraum ein.

Der Flächeninhalt  $\underline{A}_W$  und das Gestaltmaß  $\rho$  charakterisieren den Arbeitsraum. In Abbildung 4.6 zeigt sich, dass große  $\underline{A}_W$  und große  $\rho$  korrelieren, dass also ein großer Flächeninhalt des Arbeitsraumes einen ausgewogenen, kreisähnlichen Arbeitsraum bedingt. Offensichtlich sind die maximal möglichen Verschiebungen begrenzt und ein großer Flächeninhalt ist nur durch Aufweiten der Hülle des Arbeitsraumes möglich.

Die bis hierher angenommene gleichmäßige Unterteilung der aktiven Elemente entlang der Stabachse, siehe Gleichung (3.66), ist sicher noch nicht zufriedenstellend und sie wird im Folgenden optimiert.

## 4.2 Optimale Aktorgestaltung

Bei Piezobiegeaktoren sind verschiedene Optimierungsziele etabliert. Naheliegend ist ein möglichst großer Verschiebungs- und/oder Kraftbereich. Üblich sind jedoch auch

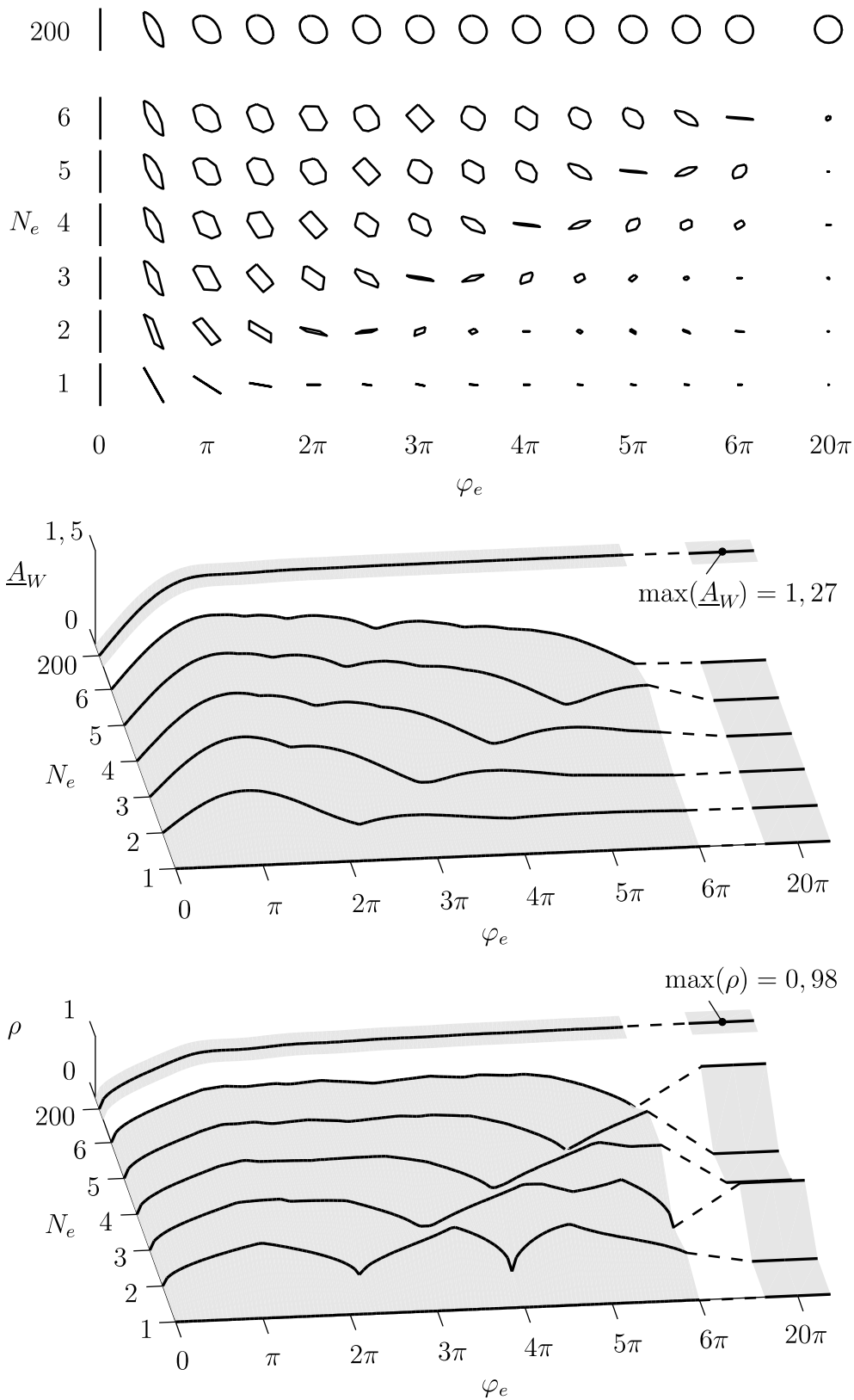


Abbildung 4.6: Arbeitsraum des Helixaktors für verschiedene  $N_e$  und  $\varphi_e$  bei gleichmäßiger Elementteilung. Flächeninhalt des Arbeitsraumes  $\underline{A}_W$ . Exzentrizitätsmaß  $\rho$  des Arbeitsraumes.

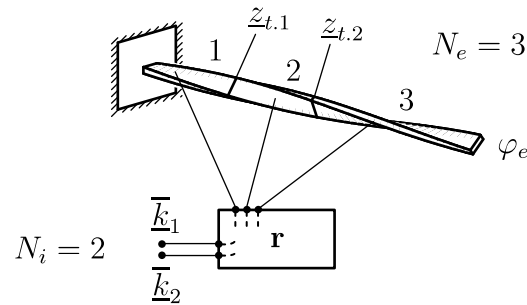


Abbildung 4.7: Zu optimierende Parameter: Anzahl der Eingänge  $N_i$ , Vorverwindung  $\varphi_e$  sowie die Topologie der aktiven Elemente, beschrieben durch die Anzahl der aktiven Elemente  $N_e$ , die Verschaltung  $\mathbf{r}$  und die Positionen der Trennstellen  $z_{t.i}$ .

der elektromechanische Kopplungsfaktor [3,107] oder die Leerlaufenergie [79], zum Teil massebezogen als Energiedichte [108]. Die hier gezeigten Optimierungen beschränken sich auf mögliche Verschiebungen. Eine konkrete Aufgabe für den Helixaktor ist noch nicht festgelegt und ein Aktor mit möglichst großem und ausgewogenem Arbeitsraum erscheint wünschenswert, wohl unter der Maßgabe weniger Eingänge und geringer Vorverwindung. Die Größe des Arbeitsraumes lässt sich bequem anhand seines Flächeninhaltes bewerten. Da große  $\underline{A}_W$  auch ausgewogene Arbeitsräume bedingen, siehe Kapitel 4.1.6, wird das Gestaltmaß  $\rho$  beim Optimieren nicht berücksichtigt.

Der Arbeitsraum des Helixaktors hängt einzig von drei Parametern ab, die optimal zu wählen sind: von der Vorverwindung  $\varphi_e$ , von der Anzahl der Eingänge  $N_i$  sowie von der Topologie der aktiven Elemente. Unter *Topologie der aktiven Elemente* wird sowohl die Gestalt der aktiven Elemente als auch deren Verschaltung mit den Eingängen verstanden. Das eigentlich Herausfordernde ist die Topologieoptimierung. Abbildung 4.7 illustriert das Problem. Bei vorgegebener Anzahl der Eingänge sind sowohl Anzahl, Größe und Lage der aktiven Elemente als auch deren Verschaltung mit den Eingängen zu optimieren. Das Problem zeigt sowohl kontinuierliche Optimierungsparameter - Lage und Größe der aktiven Elemente - als auch diskrete Optimierungsparameter - die Anzahl der aktiven Elemente und deren Verschaltung. Ohne Zweifel sind solche Optimierungsprobleme anspruchsvoll. Insbesondere der kombinatorische Aspekt - die Verschaltung - bereitet Schwierigkeiten.

Zur Lösung diskreter beziehungsweise kombinatorischer Optimierungsprobleme sind vielfältige Verfahren bekannt, siehe unter anderem die Lehrbücher [7,65] oder zu kombinatorischen Optimierungsproblemen bei Sensor- und Aktorplatzierungen [67]. Letztlich wird mit Hilfe eines jeden Verfahrens ein möglichst eleganter Weg zum globalen Maximum gesucht, ohne jedoch eine „astronomische Zahl von Möglichkeiten zu prüfen“ (Zitat aus [7]).

Anstatt aus der Menge etablierter Verfahren ein Vielversprechendes auszuwählen, wird hier auf das denkbar Einfachste zurückgegriffen: das Untersuchen aller möglichen Kombinationen, also aller möglichen Verschaltungen. Unter dem Blickwinkel eines möglichst eleganten Optimierungsverfahrens mag dieser Weg enttäuschen, er hat jedoch einen wichtigen Vorteil: es wird für das Optimierungsproblem sicher die beste Lösung gefunden. Das simple statische Modell erlaubt das Bewerten von mehr als tausend Konfigurationen pro Sekunde. So sind durchaus viele Konfigurationen prüfbar, wenn auch nicht „astronomisch“ viele Kombinationen, was im Übrigen nicht notwendig ist.

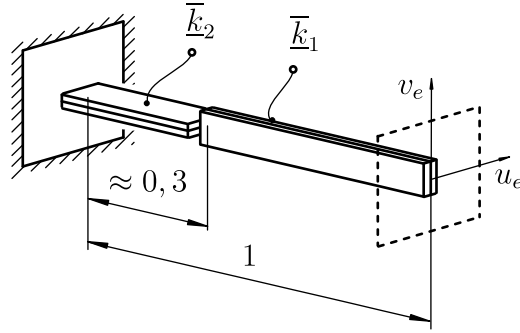


Abbildung 4.8: Optimale Gestaltung des univertierten, bidirektionalen Biegeaktors.

### 4.2.1 Univertierter, bidirektionaler Biegeaktor

In direkter Konkurrenz zum Helixaktor mag ein aus zwei univertierten Biegeaktoren kombinierter Aktor stehen, siehe Abbildung 4.8. Vergleichend wird für ihn der maximal mögliche  $\underline{A}_W$  bestimmt. Seine normierten Eingänge  $\bar{k}_1$  und  $\bar{k}_2$  liegen im Bereich

$$-1 \leq \bar{k}_1 \leq 1, \quad -1 \leq \bar{k}_2 \leq 1. \quad (4.37)$$

In Abhängigkeit der Lage der Trennstelle  $z_t$  beträgt die statische Übertragungsmatrix

$$\underline{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} z_t^2 - 2z_t + 1 & 0 \\ 0 & -z_t^2 + 2z_t \end{bmatrix}. \quad (4.38)$$

Der Flächeninhalt des Arbeitsraumes lässt sich beispielsweise mit Gleichung (4.29) bestimmen und nach kurzer Rechnung folgen

$$z_t^{opt} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (4.39)$$

als optimale Lage der Trennstelle und

$$\underline{A}_W = 1 \quad (4.40)$$

als maximal möglicher Flächeninhalt. Die Hülle des Arbeitsraumes ist dann im Übrigen ein Quadrat mit dem Gestaltmaß

$$\rho = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \approx 0,8. \quad (4.41)$$

Die statische Übertragungsmatrix des optimierten univertierten, bidirektionalen Biegeaktors ist somit

$$\underline{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \quad (4.42)$$

### 4.2.2 Formulieren des Optimierungsproblems

Die Topologie der aktiven Elemente lässt sich wie folgt beschreiben. Der Helixaktor besitzt  $N_i$  Eingänge und  $N_e$  aktive Elemente. Das erste aktive Element beginnt bei

$\underline{z} = 0$ . Das letzte aktive Element endet bei  $\underline{z} = 1$ . Die Trennstellen zwischen den aktiven Elementen liegen bei  $\underline{z}_{t,i}$  mit  $i = 1, \dots, N_e - 1$ . Sie lassen sich in einem Vektor

$$\underline{\mathbf{z}}_t = [\underline{z}_{t,1}, \dots, \underline{z}_{t,(N_e-1)}] \quad (4.43)$$

zusammenfassen. Jedes aktive Element ist mit einem Eingang verbunden. Auch das Negative des Eingangs soll erlaubt sein, da es technisch realisierbar ist. Das Verschalten der aktiven Elemente mit den Eingängen wird mit Hilfe eines Vektors

$$\mathbf{r} = [r_1, \dots, r_{N_e}] \quad (4.44)$$

codiert, wobei  $r_i$  die Verknüpfung des  $i$ -ten aktiven Elementes mit dem Eingang des Indexes  $r_i$ , also  $\overline{k}_{r_i}$ , beschreiben. Die Einträge  $r_i$  können somit die Werte

$$r_i \in \{1, -1, 2, -2, \dots, N_i, -N_i\} \quad (i = 1, \dots, N_e) \quad (4.45)$$

annehmen. Die Topologieoptimierung sucht bei festgelegter Anzahl der Eingänge und festgelegter Vorverwindung die optimale Anzahl aktiver Elemente  $N_e$ , eine optimale Verschaltung  $\mathbf{r}$  und eine optimale Lage der Trennstellen  $\underline{\mathbf{z}}_t$ . Das Optimierungsproblem ist somit

$$\begin{aligned} \text{ZF: } & \underline{A}_W = \max!, \\ \text{NB: } & N_i \leq N_e && (N_e = 1, 2, \dots), \\ & r_i \in \{1, -1, \dots, N_i, -N_i\} && (i = 1, \dots, N_e), \\ & 0 < \underline{z}_{t,j} < 1 && (j = 1, \dots, N_e - 1), \\ & \underline{z}_{t,j} < \underline{z}_{t,j+1}. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Es ist ein nichtlineares Optimierungsproblem, bedingt durch das Berechnen des Flächeninhaltes des Arbeitsraumes.

Die möglichen Lösungen des Optimierungsproblems (4.46) werden im Folgenden eingeschränkt. Insbesondere sollen als Trennstellen nur feste Positionen

$$\underline{z}_{t,j} = j \frac{1}{N_e} \quad (j = 1, \dots, N_e - 1) \quad (4.47)$$

zulässig sein. Das Optimierungsproblem lässt sich dann als rein kombinatorisches Problem formulieren.

In einem ersten Schritt wird der Helixaktor in eine bestimmte Anzahl aktiver Elemente gleicher Länge unterteilt. Somit sind  $N_e$  und die Lage der Trennstellen (4.47) a priori bekannt. Einzig die Verschaltung  $\mathbf{r}$  verbleibt als Optimierungsparameter. Das Optimierungsproblem im ersten Schritt ist

$$\begin{aligned} \text{ZF: } & \underline{A}_W = \max!, \\ \text{NB: } & r_i \in \{1, -1, \dots, N_i, -N_i\} && (i = 1, \dots, N_e). \end{aligned} \quad (4.48)$$

Das Optimierungsproblem besitzt nur ganzzahlige Parameter - die  $r_i$  des Verschaltungsvektors  $\mathbf{r}$ . Die Anzahl aller möglichen, zu prüfenden Verschaltungen des ersten Schrittes beträgt

$$N_1 = (2N_e)^{N_e-1}. \quad (4.49)$$

Da das erste Element immer mit dem ersten Eingang verbunden ist, folgt als Exponent in Gleichung (4.49)  $N_e - 1$  anstatt  $N_e$ .

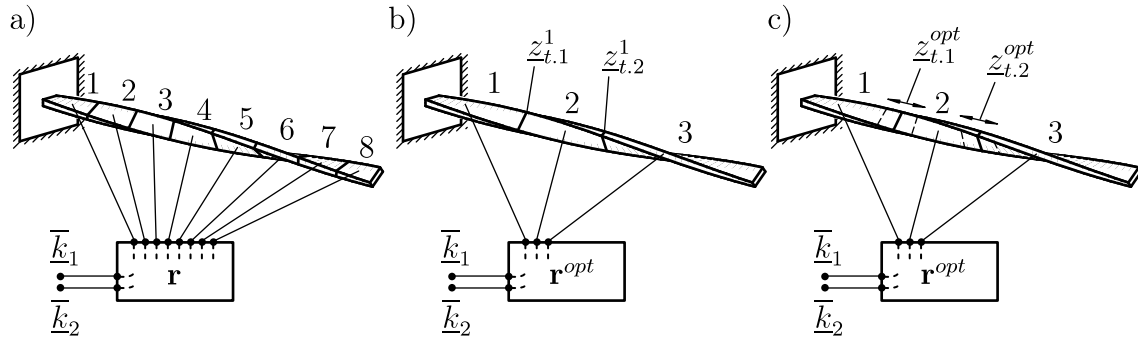


Abbildung 4.9: Zwei-Schritt-Topologieoptimierung: a) Ausgangstopologie, b) optimierte Verschaltung, c) Optimieren der Positionen der Trennstellen.

Nach dem ersten Schritt ist eine optimale Verschaltung bekannt. Gleich beschaltete aktive Elemente lassen sich zusammenfassen. Das heißt, aus  $\mathbf{r}$ ,  $N_e$  und  $\underline{z}_{t,j}$  des ersten Schrittes werden  $\mathbf{r}^{opt}$ ,  $N_e^{opt}$  und die entsprechenden Trennstellen  $\underline{z}_{t,j}^1$  abgeleitet.

Im zweiten Optimierungsschritt bleibt die Verschaltung  $\mathbf{r}^{opt}$  unverändert und einzig die Lage der Trennstellen wird variiert - maximal um

$$\Delta \underline{z}_t = \frac{1}{N_e}, \quad (4.50)$$

also maximal um die Länge der aktiven Elemente des ersten Optimierungsschrittes. Das Optimierungsproblem des zweiten Schrittes wird somit durch

$$\begin{aligned} \text{ZF:} \quad & \underline{A}_W = \max!, \\ \text{NB:} \quad & \underline{z}_{t,j}^1 - \Delta \underline{z}_t \leq \underline{z}_{t,j}^{opt} \leq \underline{z}_{t,j}^1 + \Delta \underline{z}_t, \\ & 0 < \underline{z}_{t,j}^{opt} < 1 \quad (j = 1, \dots, N_e^{opt} - 1), \\ & \underline{z}_{t,j}^{opt} < \underline{z}_{t,j+1}^{opt}. \end{aligned} \quad (4.51)$$

beschrieben. Dieses kontinuierliche Optimierungsproblem für die Trennstellen  $\underline{z}_{t,j}^{opt}$  wird als diskretes Optimierungsproblem gelöst, was nicht zwingend erforderlich ist, jedoch einfach zum globalen Maximum führt. Die Positionen  $\underline{z}_{t,j}^{opt}$  der Trennstellen dürfen im möglichen Gebiet  $[\underline{z}_{t,j}^1 - \Delta \underline{z}_t, \underline{z}_{t,j}^1 + \Delta \underline{z}_t]$  nur  $N_t$  diskrete, gleichverteilte Werte annehmen. Für  $N_t$  genügen kleine Anzahlen und die

$$N_2 = N_t^{(N_e^{opt}-1)} \quad (4.52)$$

Varianten sind schnell nach einer optimalen Lösung durchsuchbar, die dann sicher das maximal mögliche  $\underline{A}_W$  bei dieser Unterteilung liefert.

Abbildung 4.9 illustriert die Zwei-Schritt-Optimierung an einem Helixaktor mit zwei Eingängen. Zuerst wird bei grober Unterteilung die optimale Verschaltung berechnet, hier mit  $N_e = 8$ . Es ergibt sich als optimale Verschaltung

$$\mathbf{r} = [1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1] \quad (4.53)$$

und somit zusammengefasst

$$\mathbf{r}^{opt} = [1, 2, 1], \quad N_e^{opt} = 3, \quad \underline{z}_{t,1}^1 = \frac{2}{8}, \quad \underline{z}_{t,2}^1 = \frac{4}{8}. \quad (4.54)$$



Im zweiten Schritt werden die Positionen der Trennstellen innerhalb der Gebiete

$$\left[ \frac{z_{t.1}^1}{8} - \frac{1}{8}, \frac{z_{t.1}^1}{8} + \frac{1}{8} \right], \quad \left[ \frac{z_{t.2}^1}{8} - \frac{1}{8}, \frac{z_{t.2}^1}{8} + \frac{1}{8} \right] \quad (4.55)$$

weiter optimiert.

### 4.2.3 Parameterbereich, Einstellen der Optimierungsschritte

Einem bidirektionalen Biegeaktor, bestehend aus zwei unverwundenen Biegeaktoren, genügen zwei Eingänge. Die Anzahl der Eingänge des Helixaktors wird deshalb auf

$$N_i \in \{2, 3, 8\} \quad (4.56)$$

beschränkt. Deutlich größere Anzahlen sind schon wegen des gewählten Lösungsweges - dem Durchprobieren - unpraktisch. Der Bereich möglicher Vorverwindungen wird auf

$$0 < \varphi_e \leq 720^\circ \quad (4.57)$$

eingegrenzt. Die späteren Ergebnisse begründen diesen Bereich. Der Helixaktor mit  $\varphi_e = 0^\circ$  muss nicht untersucht werden, da hier  $\underline{A}_W = 0$  gilt.

**Einstellen des ersten Optimierungsschrittes:** In dem ersten Optimierungsschritt wird jede mögliche Verschaltung der gleichmäßig unterteilten aktiven Elemente mit den Eingängen geprüft. Die Anzahl der aktiven Elemente  $N_e$  ist dabei so groß wie möglich zu wählen. Sie wird jedoch wegen der vielen, zu prüfenden Varianten, siehe Gleichung (4.49), begrenzt sein. Es wird für die Topologieoptimierung

$$N_e = 8 \quad (4.58)$$

festgelegt und im Folgenden gezeigt, dass diese obere Grenze durchaus zufriedenstellt.

Der Helixaktor wird in

$$N_e \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8\} \quad (4.59)$$

gleich lange aktive Elemente unterteilt und allein der erste Optimierungsschritt ausgeführt. In Abhängigkeit der Vorverwindung und der Anzahl der aktiven Elemente stellt sich eine optimale Verschaltung ein und somit auch ein maximales  $\underline{A}_W$ . Die Diagramme in Abbildung 4.10 zeigen das Ergebnis. Der unterbrochene Verlauf gibt  $\underline{A}_W(\varphi_e)$  für  $N_e = N_i$  an, sprich jedes aktive Element kann separat kontrolliert werden. Dieser Verlauf beschreibt somit den maximal möglichen Flächeninhalt des Arbeitsraumes bei dieser Elementteilung. Die durchgezogenen Verläufe geben  $\underline{A}_W(\varphi_e)$  für  $N_i = 2$  und  $N_i = 3$  wieder.

Für sehr große  $N_e$ , hier  $N_e = 200$ , steigt  $\underline{A}_W$  mit zunehmenden  $\varphi_e$  an und das hohe Niveau wird beibehalten. Ist  $N_e$  jedoch klein, so fällt der Verlauf bei großen Vorverwindungen wieder ab. Das zeigen die Diagramme in Abbildung 4.10.

Der Abfall des  $\underline{A}_W(\varphi_e)$ -Verlaufs bei großen Vorverwindungen ist nachvollziehbar. Jedes aktive Element kann auch als Helixaktor mit einem Eingang verstanden werden. Ein solcher Helixaktor wird sich bei großen Vorverwindungen in Schraubenlinienform verbiegen und die Verschiebung des freien Endes wird dann klein gegenüber den Verschiebungen eines nahezu unverwundenen Helixaktors sein. Die Richtungsvektoren in

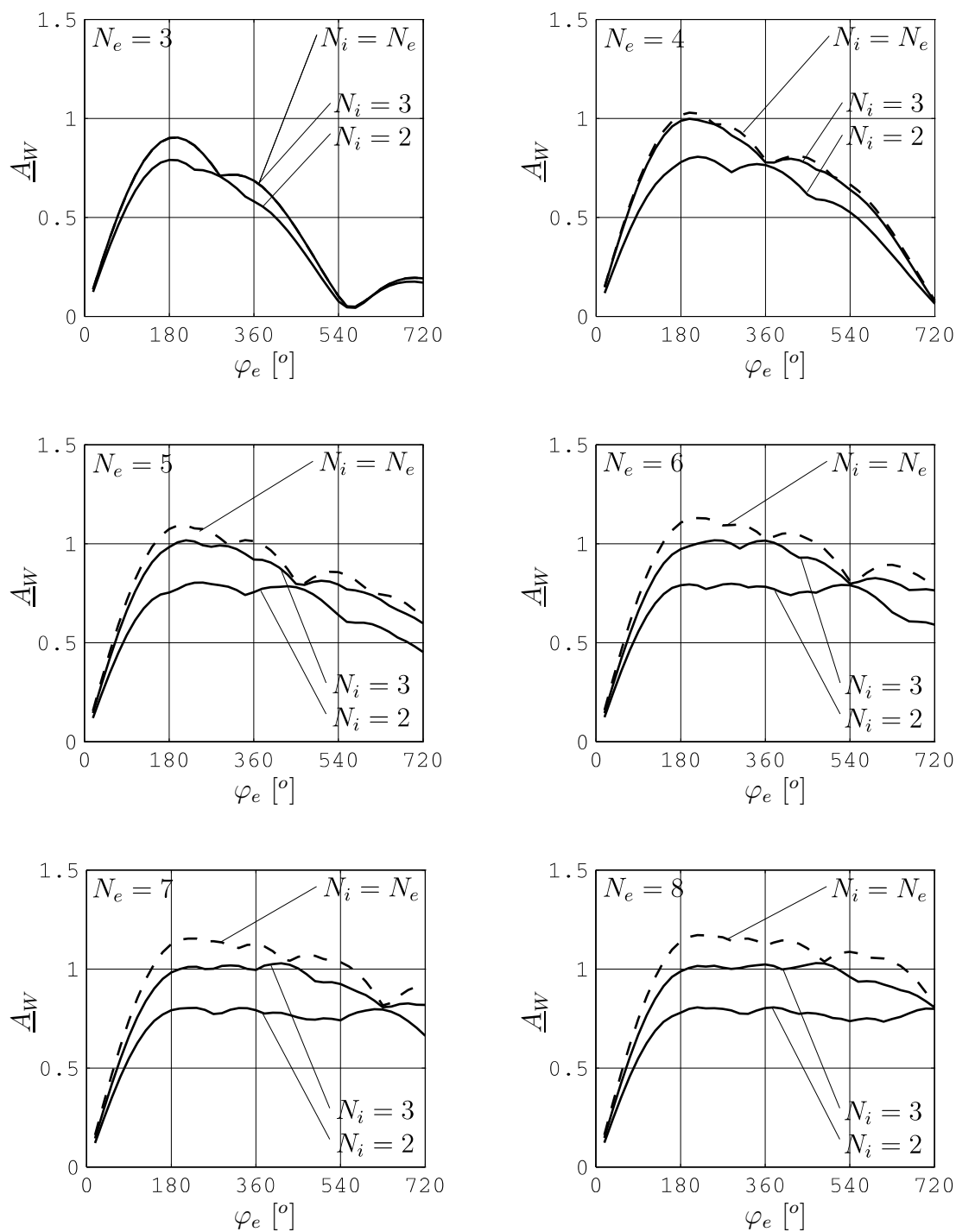


Abbildung 4.10: Einstellen des ersten Optimierungsschrittes: maximal erreichbarer  $A_W$  für  $N_i = N_e$ , für  $N_i = 2$  sowie für  $N_i = 3$  bei gleichmäßiger Unterteilung der aktiven Elemente.

Abbildung 4.6 bei  $N_e = 1$  illustrieren diesen Effekt. Sind die möglichen Verschiebungen klein, so ist auch  $\underline{A}_W$  klein. Kleine Vorverwindungen

$$\Delta\varphi = \frac{\varphi_e}{N_e} \quad (4.60)$$

der aktiven Elemente sind somit anzustreben. Wenige  $N_e$  führen jedoch zu großen  $\Delta\varphi$  und es sind nur noch kleine Verschiebungen möglich. Zwangsläufig ist der Flächeninhalt des Arbeitsraumes klein und somit fällt  $\underline{A}_W(\varphi_e)$  bei großen  $\varphi_e$  ab.

Aus dem Niveauabfall bei  $N_i = 3$ , siehe Abbildung 4.10 für  $N_e = 8$ , wird der Schluss gezogen, dass bis  $\varphi_e \approx 470^\circ$  mit tatsächlich optimalen Ergebnissen zu rechnen ist, sprich, dass andere, leistungsfähigere Optimierungsverfahren die hier gefundenen Lösungen nur wenig verbessern. Ab  $\varphi_e \approx 470^\circ$  werden die Ergebnisse nur als optimal im Sinne des hier eingesetzten Optimierungsverfahrens angesehen. Bei  $N_i = 2$  werden die Ergebnisse als durchweg optimal angesehen, da das Niveau von  $\underline{A}_W$  gehalten wird.

**Einstellen des zweiten Optimierungsschrittes:** Für den zweiten Optimierungsschritt ist nur die Anzahl der möglichen Trennstellenverschiebungen  $N_t$  vorzugeben. Eine maximale Anzahl von

$$N_t = 7 \quad (4.61)$$

hat sich als praktisch erwiesen - primär begrenzt durch die Anzahl der zu prüfenden Varianten, siehe Gleichung (4.52). Größere Werte würden die Lage der Trennstellen präziser optimieren und das maximal erreichbare  $\underline{A}_W$  wird wohl etwas größer sein. Für diese erste Topologieoptimierung zum Helixaktor soll die Einstellung  $N_t = 7$  genügen.

#### 4.2.4 Optimale Topologie

Die optimale Topologie wurde für drei Helixaktoren berechnet: für  $N_i = 2$ ,  $N_i = 3$  und  $N_i = N_e = 200$ . Der Letztere soll hier als das maximal Mögliche verstanden werden, alternativ zu  $\underline{A}_W$  bei  $N_i = N_e \rightarrow \infty$ . Die Ergebnisse werden im Folgenden diskutiert.

**Arbeitsraum:** Die Diagramme in Abbildung 4.11 zeigen den maximal möglichen Flächeninhalt des Arbeitsraumes. Der Aktor mit  $N_i = 200$  erreicht im berücksichtigten Intervall der Vorverwindung maximal

$$\underline{A}_W^* = 1,27. \quad (4.62)$$

Dieser Wert wird als der maximal erreichbare Flächeninhalt des Arbeitsraumes angesehen. Der Helixaktor mit  $N_i = 2$  erreicht maximal 64 % des Wertes. Der Helixaktor mit  $N_i = 3$  erreicht maximal 82 % des Wertes. Offensichtlich erreichen jedoch alle drei Verläufe ab  $\varphi_e \approx 180^\circ$  ein hohes Niveau und  $\underline{A}_W$  nimmt anschließend nur noch wenig zu.

Begnügt man sich mit etwas geringerem  $\underline{A}_W$ , beispielsweise 95 % des jeweils Maximalen eines jeden Aktors, so genügt beim Helixaktor mit  $N_i = 2$  schon  $\varphi_e = 162^\circ$  und beim Helixaktor mit  $N_i = 3$  schon  $\varphi_e = 180^\circ$ . Abbildung 4.14 zeigt, dass bei diesen moderaten Vorverwindungen auch ausgewogene Arbeitsräume möglich sind. Mit anderen Worten: für große  $\underline{A}_W$  und einen offensichtlich zweidimensionalen Arbeitsraum sind zwei oder drei Eingänge und Vorverwindungen von ca.  $180^\circ$  völlig ausreichend - das ist

Aktor	$\varphi_e [^\circ]$	$\underline{A}_W$	$\underline{A}_W/\underline{A}_W^*$	$\rho$
$N_i = N_e = 200, \underline{A}_W^*$	$720^\circ$	1,27	1	0,95
$N_i = 2, \max(\underline{A}_W)$	$396^\circ$	0,82	0,64	0,75
$N_i = 2, 0,95 \cdot \max(\underline{A}_W)$	$162^\circ$	0,78	0,61	0,62
$N_i = 3, \max(\underline{A}_W)$	$432^\circ$	1,04	0,82	0,85
$N_i = 3, 0,95 \cdot \max(\underline{A}_W)$	$180^\circ$	1,00	0,79	0,75
$N_i = 2, \text{unverw. bidirekt. B.}$		1,00	0,79	0,80

Tabelle 4.1: Bei optimaler Topologie der aktiven Elemente maximal erreichbare  $\underline{A}_W$  und entsprechende  $\rho$  für Helixaktoren mit  $N_i = N_e = 200$ ,  $N_i = 2$ ,  $N_i = 3$  sowie für den unverwundenen, bidirektionalen Biegeaktor.

die Kernaussage der Topologieoptimierung. Abbildung 4.14 zeigt optimale Topologien und zugehörige Arbeitsräume bei ausgewählten Vorverwindungen.

Tabelle 4.1 enthält alle genannten Werte. Sie zeigt auch, dass der  $\underline{A}_W$  eines Helixaktors mit zwei oder drei Eingängen durchaus mit dem  $\underline{A}_W$  des unverwundenen, bidirektionalen Biegeaktors aus Kapitel 4.2.1 vergleichbar ist.

Im Übrigen zeigen die Ergebnisse in Abbildung 4.12, dass sowohl gleiche Längen der Richtungsvektoren als auch gleiche Winkeldifferenzen zwischen den Richtungsvektoren optimal sind - bei  $N_i = 2$  ca.  $90^\circ$  und bei  $N_i = 3$  ca.  $60^\circ$ . Mit zunehmender Vorverwindung nähert sich die Hülle des Arbeitsraumes bei  $N_i = 2$  einem Quadrat und bei  $N_i = 3$  einem regelmäßigen Sechseck an - die bei  $N_i = 2$  beziehungsweise  $N_i = 3$  maximal mögliche Isotropie des Arbeitsraumes.

**Topologie der aktiven Elemente:** Abbildung 4.13 skizziert die optimalen Topologien der aktiven Elemente. Die Trennstellen und Verschaltungen werden sowohl über  $\underline{z}$  als auch über

$$\varphi(\underline{z}) = \underline{z}\varphi_e \tag{4.63}$$

aufgetragen. Der Winkel  $\varphi(\underline{z})$  ist die Verdrehung eines Abschnittes  $d\underline{z}$  des Helixaktors an der Stelle  $\underline{z}$ . Dieser Abschnitt ermöglicht allein Verschiebungen in Richtung  $\varphi(\underline{z})$  oder  $\varphi(\underline{z}) + \pi$ , denn er ist ein unverwundener Biegeaktor der Länge  $d\underline{z}$ , insgesamt verdreht um  $\varphi(\underline{z})$ .

In der  $\varphi(\underline{z})$ -Darstellung setzt der Optimierer die Trennstellen zwischen den aktiven Elementen im Abstand von ca.  $90^\circ$  bei  $N_i = 2$  und im Abstand von ca.  $60^\circ$  bei  $N_i = 3$ . Genau dann sind die optimalen Hüllen *Quadrat* und *regelmäßiges Sechseck* möglich. Damit sind auch die sich einstellenden Verschaltungsabfolgen entlang  $\underline{z}$  nachvollziehbar. Bei  $N_i = 2$  wird sich

$$\mathbf{r} = [1, 2, -1, -2, 1, 2, \dots] \tag{4.64}$$

einstellen und bei  $N_i = 3$  wird sich

$$\mathbf{r} = [1, 2, 3, -1, -2, -3, 1, 2, 3, \dots] \tag{4.65}$$

ergeben. Der Optimierer verbindet Gebiete ähnlicher Verschiebungsrichtungen mit den gleichen Eingängen.

Die Ergebnisse des Helixaktors mit  $N_i = 3$  sollten für  $\varphi_e \geq 470^\circ$  nicht interpretiert werden, siehe Anmerkung in Kapitel 4.2.3 zum Einstellen des ersten Optimierungs-

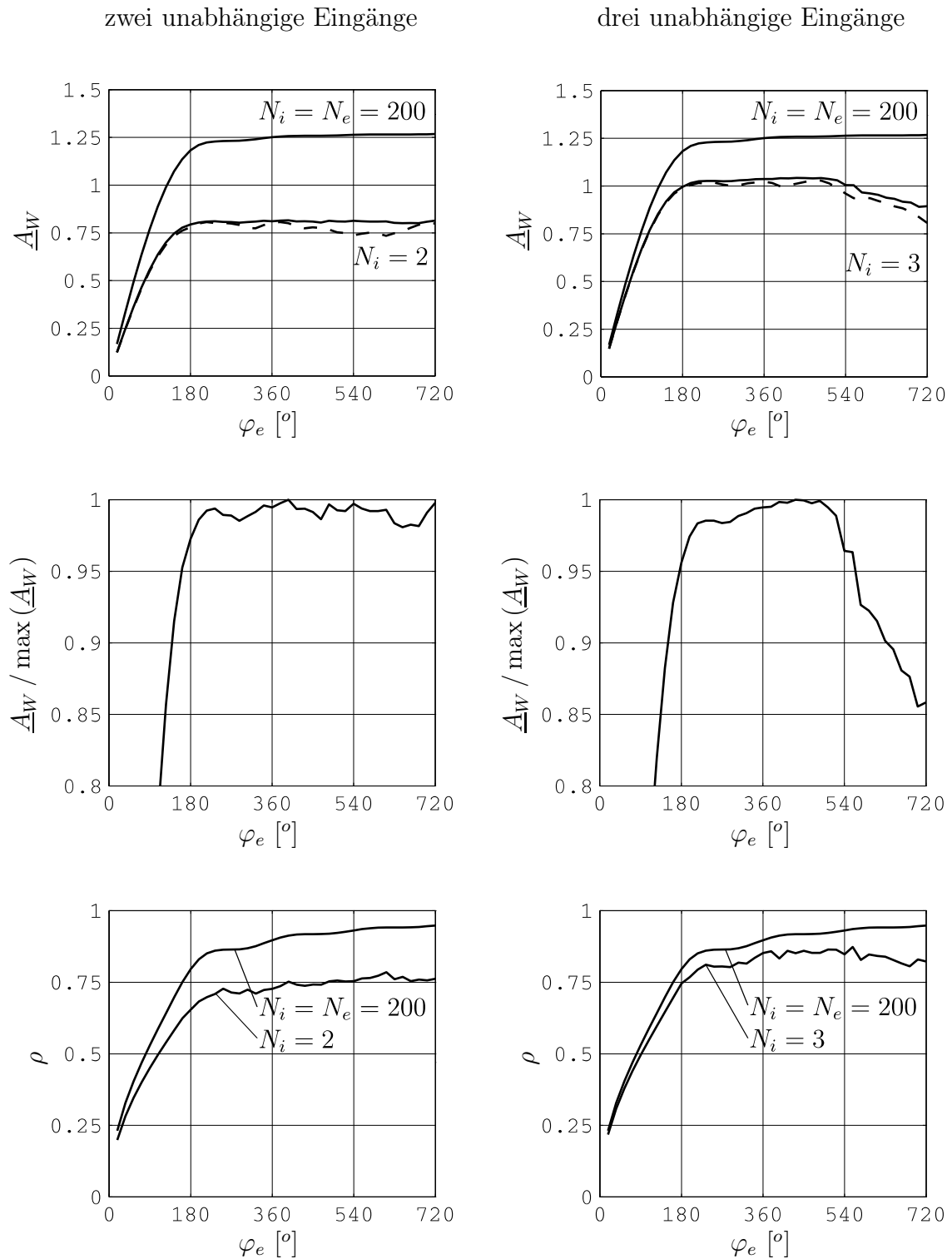


Abbildung 4.11: Optimale Topologie bei zwei ( $N_i = 2$ ) und drei ( $N_i = 3$ ) unabhängigen Eingängen: maximaler  $\underline{A}_W$ , maximaler relativer  $\underline{A}_W$  sowie  $\rho$ ; vergleichend auch für  $N_i = N_e = 200$ . Der unterbrochene Funktionsverlauf in  $\underline{A}_W(\varphi_e)$  ist der maximale  $\underline{A}_W$  nach dem ersten Optimierungsschritt.

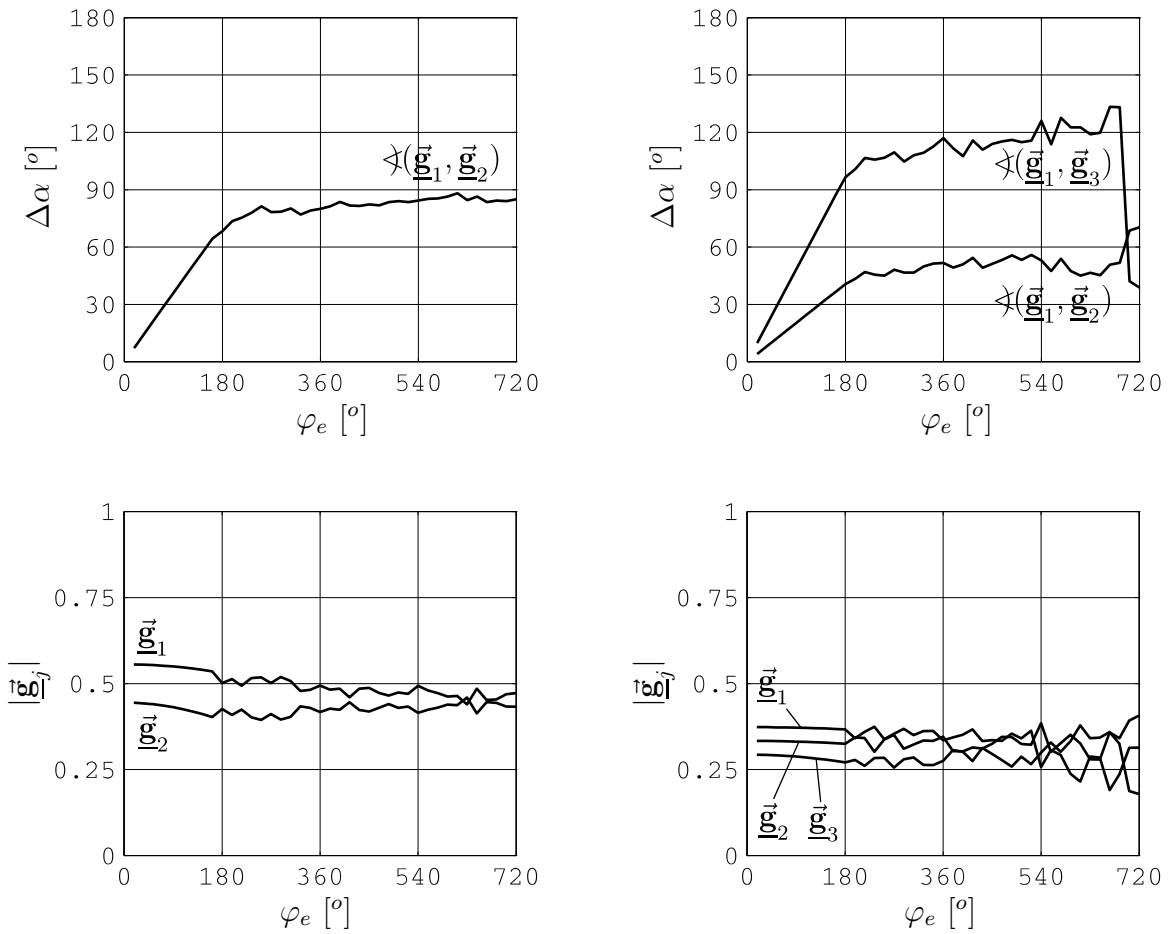


Abbildung 4.12: Winkeldifferenzen  $\Delta\alpha$  zwischen den Richtungsvektoren sowie Längen der Richtungsvektoren  $|\vec{g}_j|$  bei optimaler Topologie.

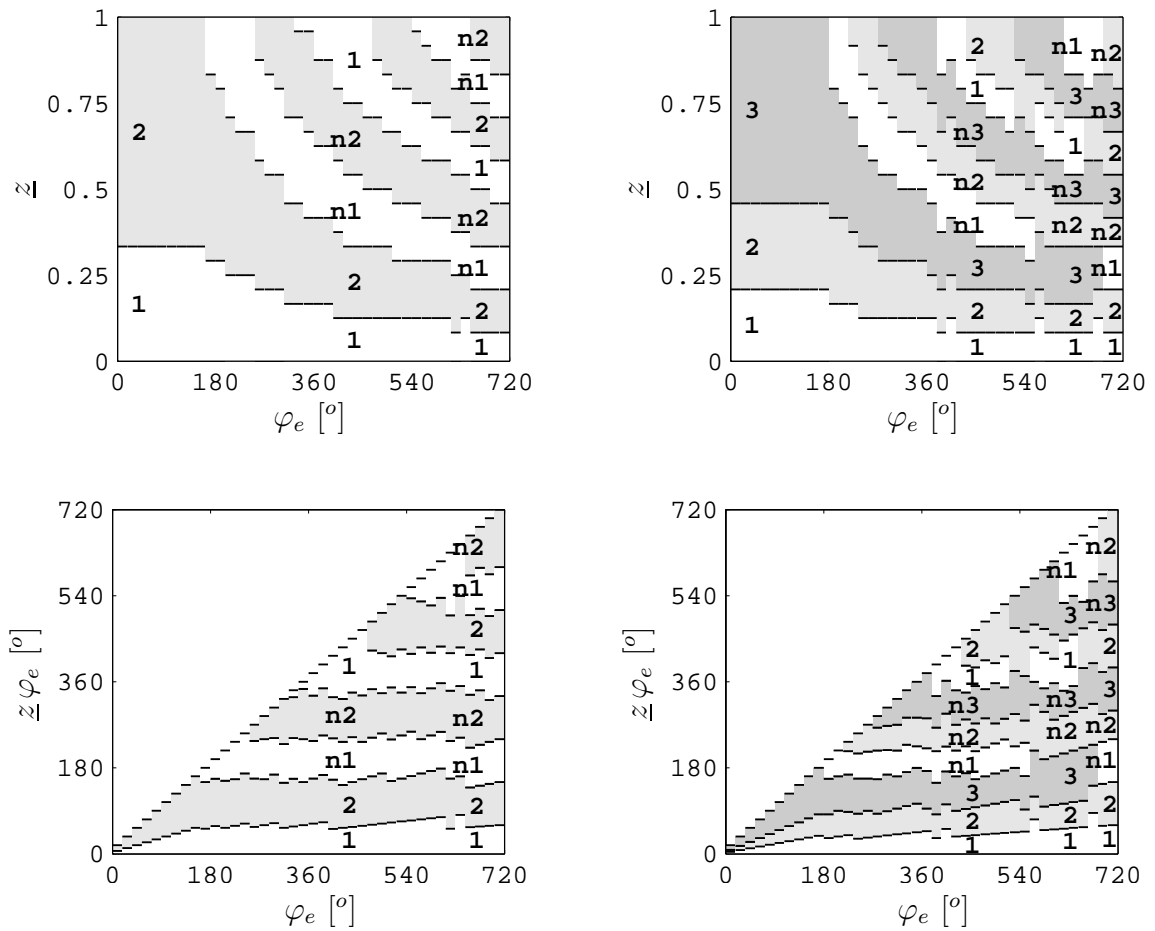


Abbildung 4.13: Optimale Topologien für  $N_i = 2$  und  $N_i = 3$ . Die Zeichen „1“, „2“, „3“ stehen für  $\bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3$ . Die Zeichen „n1“, „n2“, „n3“ stehen für  $-\bar{k}_1, -\bar{k}_2, -\bar{k}_3$ .

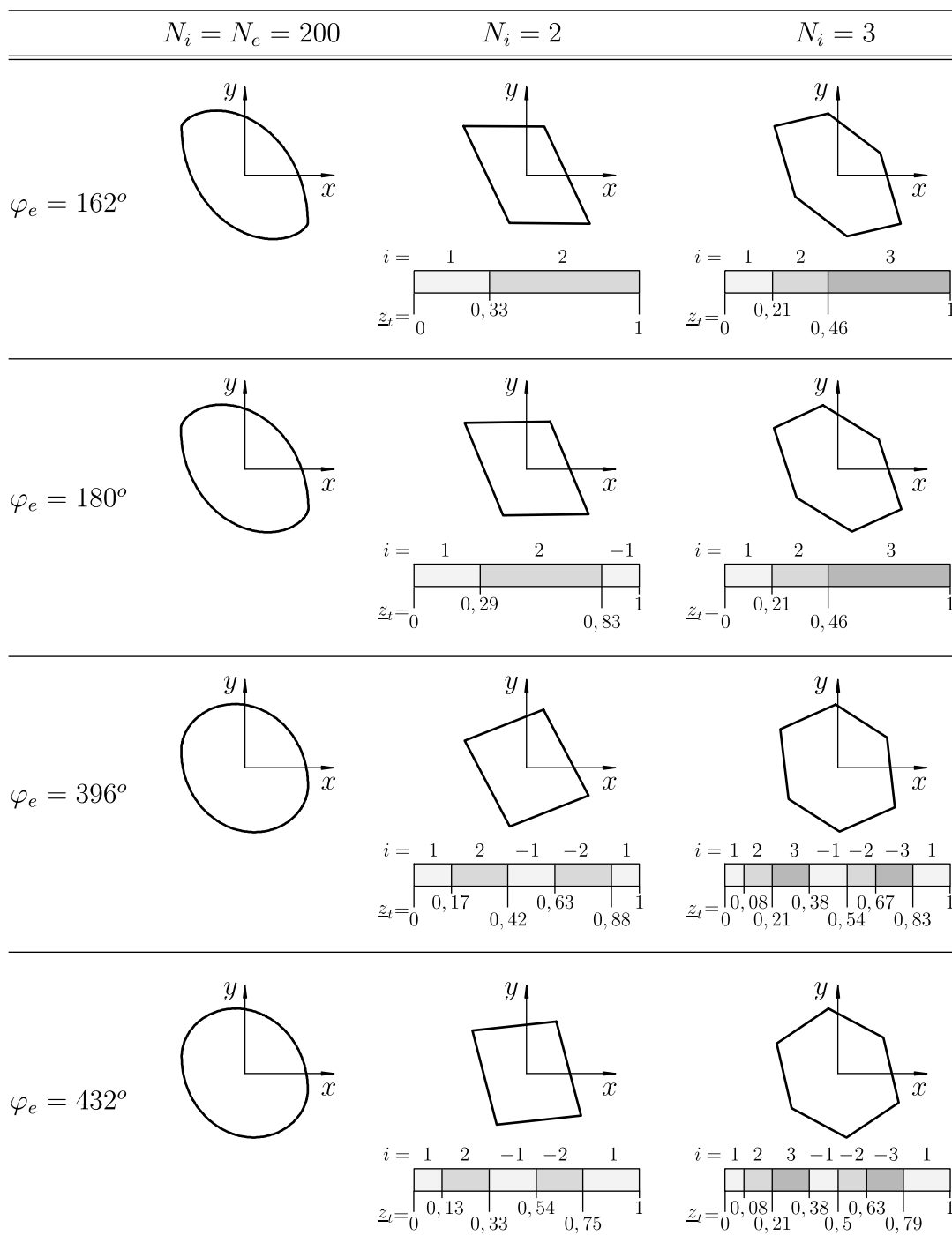


Abbildung 4.14: Optimale Topologien der aktiven Elemente und zugehörige Arbeitsräume bei ausgewählten  $\varphi_e$ .



schrittes.

Werden im Übrigen der unverwundene, bidirektionale Biegeaktor und der Helixaktor mit  $N_i = 2$ ,  $\varphi_e = 162^\circ$  verglichen, so ergibt sich bei beiden Aktoren nahezu die gleiche Position der Trennstelle

$$z_t^{opt} \approx 0,3 \quad (4.66)$$

zwischen den zwei aktiven Elementen.

### 4.3 Inverse Aufgabe des Helixaktors

Unter der inversen Aufgabe des Helixaktors wird das Bestimmen der Eingänge  $\bar{k}_i$  bei gegebenem Verschiebungsvektor  $\underline{\mathbf{u}}_e$  verstanden. Sie wird nur anhand des statischen Modells (3.70) diskutiert, das heißt, im Sinne einer quasistatischen Steuerung.

Der Helixaktor besitzt die zwei Ausgänge  $\underline{u}_e$  und  $\underline{v}_e$ . Für einen Aktor mit  $N_i = 2$  betragen die Eingangswerte dann sofort

$$\bar{\mathbf{k}} = \mathbf{G}^{-1} \underline{\mathbf{u}}_e. \quad (4.67)$$

Die statische Übertragungsmatrix ist quadratisch und invertierbar, wenn sie regulär ist. Besitzt der Aktor überzählige Eingänge, das heißt, gilt

$$N_i \geq 3, \quad (4.68)$$

so ist  $\mathbf{G}$  nicht mehr quadratisch und nicht mehr invertierbar. Die statische Übertragungsmatrix ist vom Typ  $(2, N_i)$  und das Gleichungssystem (3.70) des statischen Modells ist dann unterbestimmt. Die Eingänge  $\bar{k}_i$  lassen sich vorerst nicht festlegen und weitere Bedingungen sind notwendig. Im Folgenden wird diskutiert, wie dann

$$\bar{\mathbf{k}} = f(\underline{\mathbf{u}}_e) \quad (4.69)$$

zu lösen ist. Es werden drei Wege zur Lösung der inversen Aufgabe beschrieben, wobei die sogenannte Sektormethode bevorzugt wird.

#### 4.3.1 Methode der kleinsten Norm des Eingangsvektors

Auch ohne spezielle Aufgabe für den Helixaktor kann wohl gefordert werden, dass die Eingänge bei gegebenem  $\underline{\mathbf{u}}_e$  möglichst klein sein sollen. Als skalare Zielfunktion bietet sich dann die euklidische Norm des Eingangsvektors  $\bar{\mathbf{k}}$  an, das heißt, es wird

$$|\bar{\mathbf{k}}| = \min! \quad (4.70)$$

verlangt. Mit den Nebenbedingungen, dass  $\underline{\mathbf{u}}_e$  zu erreichen ist und dass die Eingänge begrenzt sind, folgt ein quadratisches Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \text{ZF: } & |\bar{\mathbf{k}}| = \min!, \\ \text{NB: } & \underline{\mathbf{u}}_e = \mathbf{G}\bar{\mathbf{k}}, \\ & -1 \leq \bar{k}_i \leq 1 \quad (i = 1, \dots, N_i), \end{aligned} \quad (4.71)$$

wobei die  $\bar{k}_i$  die Optimierungsparameter sind. Ist die gewünschte Position  $\underline{\mathbf{u}}_e$  gegeben, so lässt sich mit dem Optimierungsproblem auch die Lösung der inversen Aufgabe (4.69) berechnen. Der Zusammenhang zwischen  $\underline{\mathbf{u}}_e$  und  $\bar{\mathbf{k}}$  ist nur stückweise linear, da die  $\bar{k}_i$  auf  $\pm 1$  begrenzt sind. Bei Positionen nahe der Grenze des Arbeitsraumes können einzelne Eingänge schon gesättigt sein. Das heißt, für diese Eingänge gilt dort  $\bar{k}_i = \pm 1$ .

### 4.3.2 Methode der Pseudoinversen

Begnügt man sich mit dem linearen Bereich des Kennfeldes aus dem Optimierungsproblem (4.71), das heißt, werden  $\underline{u}_e$  und  $\underline{v}_e$  nur soweit vergrößert, bis einer der Eingänge  $\pm 1$  erreicht, so kann die Lösung der inversen Aufgabe des Optimierungsproblems einfacher bestimmt werden. Letztlich wird die Nebenbedingung  $-1 \leq \bar{k}_i \leq 1$  außerhalb des Optimierungsproblems geprüft und im Optimierungsproblem fallen gelassen. Es folgt ein vereinfachtes Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \text{ZF: } & |\bar{\mathbf{k}}| = \min!, \\ \text{NB: } & \underline{\mathbf{u}}_e = \underline{\mathbf{G}}\bar{\mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Die Lösung des Problems lässt sich bequem mit

$$\bar{\mathbf{k}} = \underline{\mathbf{G}}^+ \underline{\mathbf{u}}_e \quad (4.73)$$

angeben, wobei  $\underline{\mathbf{G}}^+$  die Moore-Penrose-Pseudoinverse

$$\underline{\mathbf{G}}^+ = \underline{\mathbf{G}}^T (\underline{\mathbf{G}}\underline{\mathbf{G}}^T)^{-1} \quad (4.74)$$

ist, siehe [42]. Die Zeilen von  $\underline{\mathbf{G}}$  müssen linear unabhängig sein, was hier unterstellt wird. Die Moore-Penrose-Pseudoinverse gibt für ein Problem

$$\mathbf{b}_{(m)} = \mathbf{A}_{(m,n)} \mathbf{x}_{(n)} \quad (4.75)$$

mit  $m < n$  die Lösung

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^+ \mathbf{b} \quad (4.76)$$

kleinster euklidischer Norm  $|\mathbf{x}|$  an. Das Problem entspricht somit dem vereinfachten quadratischen Optimierungsproblem (4.72).

Wird die Lösung der inversen Aufgabe mittels der Pseudoinversen berechnet, so verkleinert sich der nutzbare Arbeitsraum. Die Hülle des zugehörigen Arbeitsraumes beschreibt dann genau die Punkte  $\bar{\mathbf{w}}$ , bei denen mindestens einer der Eingänge gerade  $\bar{k}_i = \pm 1$  erreicht.

### 4.3.3 Sektormethode

Wie in Kapitel 4.1.3 gezeigt, lässt sich die Hülle des Arbeitsraumes bequem mit Hilfe der vorsortierten Richtungsvektoren berechnen. Sind die Eingangswerte der Ecken

$$\bar{\mathbf{K}}_w = [\bar{\mathbf{k}}^1, \dots, \bar{\mathbf{k}}^{N_e}] \quad (4.77)$$

aus  $\bar{\mathbf{K}}_w$  nach Gleichung (4.23) bestimmt<sup>2</sup>, so lassen sich die Ecken  $\bar{\mathbf{w}}^s$  mit

$$\bar{\mathbf{w}}^s = \underline{\mathbf{G}}\bar{\mathbf{k}}^s \quad (s = 1, \dots, 2N_e) \quad (4.78)$$

angeben. Diese Ergebnisse werden zum Lösen der inversen Aufgabe genutzt.

---

<sup>2</sup>Die Indizierungen der  $\bar{\mathbf{k}}^s$  in Gleichung (4.77) und der  $\bar{\mathbf{k}}_{w,j}$  in Gleichung (4.23) weichen voneinander ab. Dieser Unterschied ist für das Herleiten der Sektormethode notwendig. Jedoch sind die Matrizen  $\bar{\mathbf{K}}_w$  in beiden Gleichungen identisch und somit auch  $\bar{\mathbf{k}}^s = \bar{\mathbf{k}}_{w,s}$ .

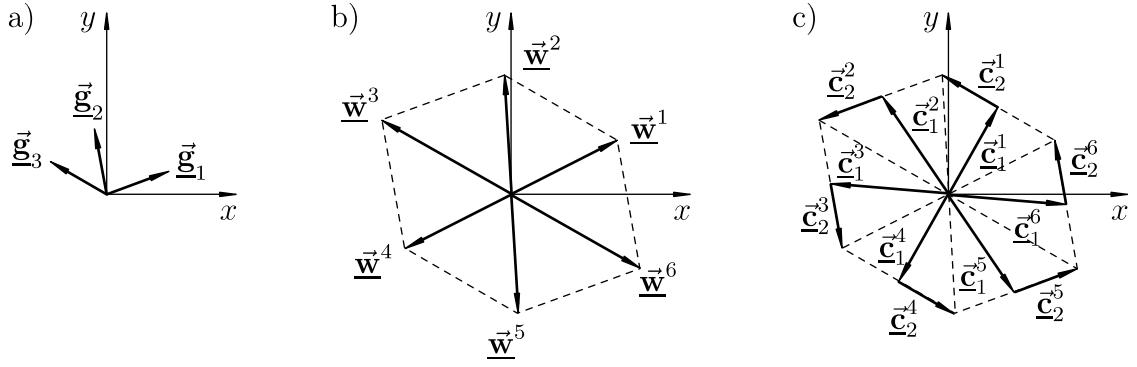


Abbildung 4.15: Sektormethode: a) willkürlich gewählte, normierte Richtungsvektoren, b) Ortsvektoren der Ecken der Hülle des Arbeitsraumes sowie c) Basisvektoren der Sektoren.

Der Arbeitsraum wird in  $2N_e$  Sektoren zerlegt, wobei Sektor  $s$  das durch den Ursprung, Ecke  $s$  und Ecke  $s+1$  beschriebene Dreieck ist. Aus den  $\bar{\mathbf{k}}^s$  werden die Vektoren

$$\bar{\mathbf{k}}_1^s = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{k}}^{s+1} + \bar{\mathbf{k}}^s), \quad \bar{\mathbf{k}}_2^s = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{k}}^{s+1} - \bar{\mathbf{k}}^s) \quad (s = 1, \dots, 2N_e) \quad (4.79)$$

sowie die Vektoren  $\bar{\mathbf{c}}_1^s$  und  $\bar{\mathbf{c}}_2^s$  mit

$$\bar{\mathbf{c}}_1^s = \mathbf{G}\bar{\mathbf{k}}_1^s, \quad \bar{\mathbf{c}}_2^s = \mathbf{G}\bar{\mathbf{k}}_2^s \quad (s = 1, \dots, 2N_e) \quad (4.80)$$

gebildet. Die Vektoren  $\bar{\mathbf{c}}_i^s$  sind eine Zerlegung der Ortsvektoren  $\bar{\mathbf{w}}^s$  der Ecken, siehe Abbildung 4.15, und sie lassen sich als schiefwinklige, nicht normierte Basisvektoren eines zu Sektor  $s$  gehörenden Koordinatensystems begreifen. Jede Position

$$\bar{\mathbf{u}}_e = \underline{u}_e \bar{\mathbf{e}}_1 + \underline{v}_e \bar{\mathbf{e}}_2 \quad (4.81)$$

lässt sich dann auch durch

$$\bar{\mathbf{u}}_e = \gamma_1^s \bar{\mathbf{c}}_1^s + \gamma_2^s \bar{\mathbf{c}}_2^s \quad (4.82)$$

beschreiben. Die  $\gamma_i^s$  sind die Koordinaten des Sektorkoordinatensystems. Mit einem Transformationstensor

$$(A_{ki}^s) = \bar{\mathbf{c}}_k^s \cdot \bar{\mathbf{e}}_i \quad (i, k = 1, 2) \quad (4.83)$$

und einem Metriktensor

$$(C_{kj}^s) = \bar{\mathbf{c}}_k^s \cdot \bar{\mathbf{c}}_j^s \quad (k, j = 1, 2) \quad (4.84)$$

folgt die Koordinatentransformation zwischen kartesischen Koordinaten und Sektorkoordinaten

$$\begin{bmatrix} \gamma_1^s \\ \gamma_2^s \end{bmatrix} = (\mathbf{C}^s)^{-1} \mathbf{A}^s \begin{bmatrix} \underline{u}_e \\ \underline{v}_e \end{bmatrix}. \quad (4.85)$$

Der Verschiebungsvektor  $\bar{\mathbf{u}}_e$  zeigt genau dann in den Sektor  $s$ , wenn die Bedingungen

$$0 \leq \gamma_1^s \leq 1, \quad -\gamma_1^s < \gamma_2^s \leq \gamma_1^s \quad (4.86)$$

erfüllt sind. Die Zuordnung ist eindeutig. Einzig für  $\bar{\mathbf{u}}_e = \bar{\mathbf{0}}$  kann kein Sektor identifiziert werden, was jedoch bedeutungslos ist, da dann immer  $\bar{\mathbf{k}} = \mathbf{0}$  gelten kann.

Ist der entsprechende Sektor  $s$  gefunden und sind somit auch die Koordinaten  $\gamma_i^s$  bekannt, so lässt sich der Verschiebungsvektor mit Gleichung (4.82) angeben, also

$$\underline{\mathbf{u}}_e = \gamma_1^s \underline{\mathbf{c}}_1^s + \gamma_2^s \underline{\mathbf{c}}_2^s. \quad (4.87)$$

Mit den Koordinaten  $\gamma_i^s$  nach Gleichung (4.85) folgt dann

$$\underline{\mathbf{u}}_e = [\underline{\mathbf{c}}_1^s, \underline{\mathbf{c}}_2^s] (\mathbf{C}^s)^{-1} \mathbf{A}^s \underline{\mathbf{u}}_e. \quad (4.88)$$

Werden die Basisvektoren der Sektoren durch die Beziehungen (4.80) und (4.79) ersetzt, so folgt

$$\underline{\mathbf{u}}_e = \underline{\mathbf{G}} \underbrace{\frac{1}{2} [\underline{\mathbf{k}}^{s+1} + \underline{\mathbf{k}}^s, \underline{\mathbf{k}}^{s+1} - \underline{\mathbf{k}}^s]}_{=\underline{\mathbf{k}}} (\mathbf{C}^s)^{-1} \mathbf{A}^s \underline{\mathbf{u}}_e, \quad (4.89)$$

womit der gesuchte Eingangsvektor  $\underline{\mathbf{k}}$  bestimmt ist. Daraus kann die Stellmatrix

$$\mathbf{R}^s = \frac{1}{2} [\underline{\mathbf{k}}^{s+1} + \underline{\mathbf{k}}^s, \underline{\mathbf{k}}^{s+1} - \underline{\mathbf{k}}^s] (\mathbf{C}^s)^{-1} \mathbf{A}^s \quad (4.90)$$

abgelesen werden und der Eingangsvektor kann bequem mit

$$\underline{\mathbf{k}} = \mathbf{R}^s \underline{\mathbf{u}}_e \quad (4.91)$$

angegeben werden. Gleichung (4.91) ist die Lösung der inversen Aufgabe nach der Sektormethode.

Ist die Übertragungsmatrix  $\underline{\mathbf{G}}$  eines Aktors bekannt, so werden einmalig alle Transformationstensoren  $\mathbf{A}^s$  nach Gleichung (4.83), alle Metrikstensoren  $\mathbf{C}^s$  nach Gleichung (4.84) sowie alle Stellmatrizen  $\mathbf{R}^s$  nach Gleichung (4.90) berechnet. Bei gegebenem  $\underline{\mathbf{u}}_e$  werden in einem ersten Schritt die Bedingungen (4.86) geprüft und somit der gültige Sektor  $s$  ermittelt. Anschließend wird die entsprechende Stellmatrix  $\mathbf{R}^s$  ausgewählt und mit Gleichung (4.91) der Eingangsvektor  $\underline{\mathbf{k}}$  bestimmt.

Die Lösung der inversen Aufgabe nach der Sektormethode ist wie die Lösung nach der Methode der kleinsten Norm des Eingangsvektors nur stückweise linear. Die Grenzen der einzelnen Gebiete rein linearen Verhaltens sind die Sektorgrenzen, also die Strecken vom Ursprung zu den Ecken der Hülle des Arbeitsraumes.

Abbildung 4.16 illustriert für alle drei Verfahren die Lösungen der inversen Aufgabe. Sowohl mit der Sektormethode als auch der Methode der kleinsten Norm des Eingangsvektors kann jeder Punkt des Arbeitsraumes angefahren werden. Das Lösen nach der Sektormethode erscheint praktischer als nach der Methode der kleinsten Norm, da kein Optimierungsproblem für *jeden*  $\underline{\mathbf{u}}_e$  zu lösen ist. Die Funktionen  $\underline{k}_i(\underline{\mathbf{u}}_e)$  erscheinen bei der Sektormethode ausgewogener als bei der Methode der kleinsten Norm, insbesondere nahe der Grenze des Arbeitsraumes. Die Sektormethode wird deshalb bevorzugt. Genügt auch ein reduzierter Arbeitsraum, so kann auf die Methode der Pseudoinversen zurückgegriffen werden.

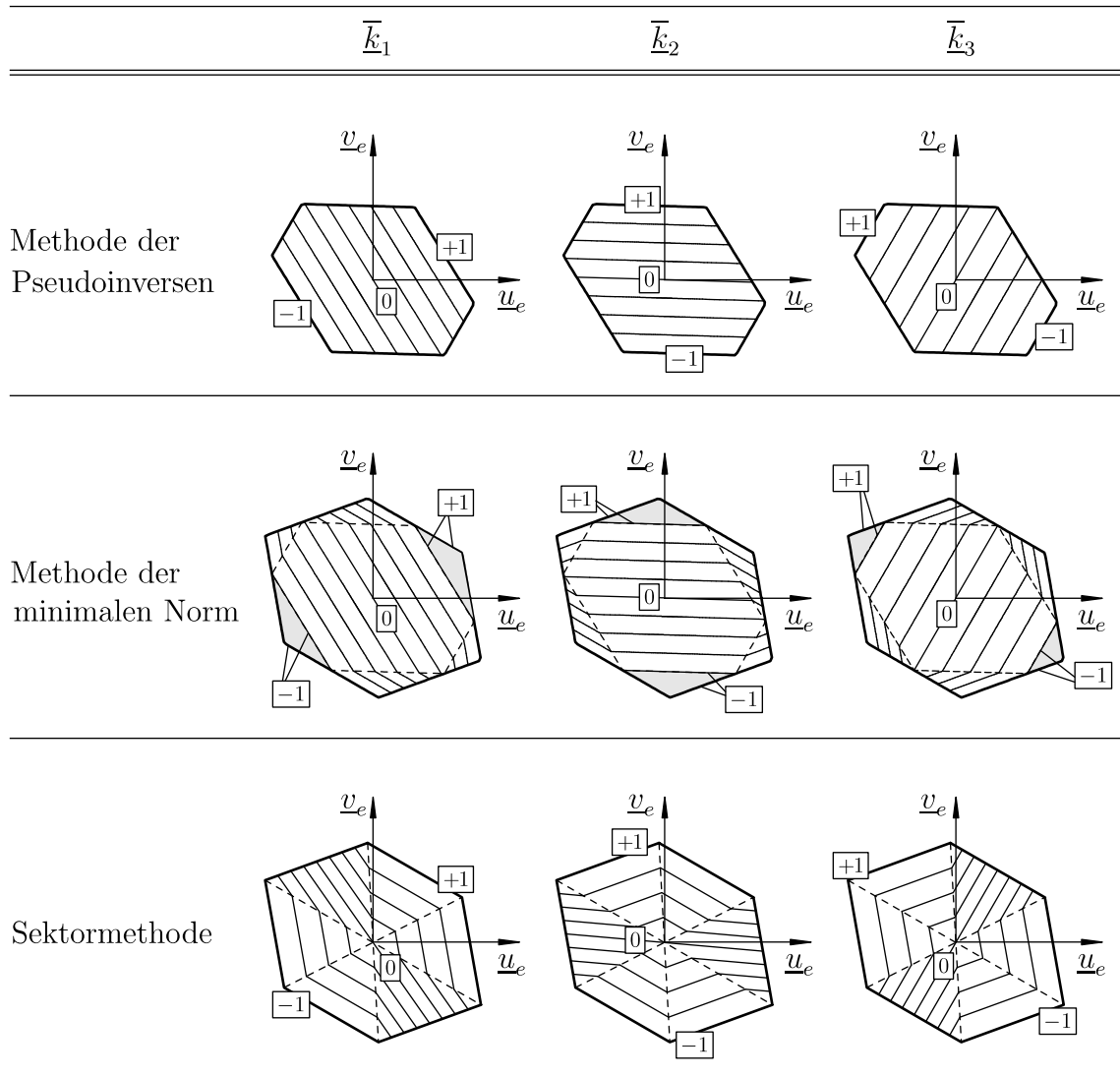


Abbildung 4.16: Lösung der inversen Aufgabe für einen willkürlich gewählten Helixaktor mit drei Eingängen: notwendige Eingangswerte  $\bar{k}_i$  für die Positionen  $\underline{\mathbf{u}}_e = [\underline{u}_e, \underline{v}_e]^T$ .



# Kapitel 5

## Experimente

Im Folgenden wird das Übertragungsverhalten des Aktors analysiert, insbesondere um daraus die Parameter des statischen und dynamischen Modells zu identifizieren. Als Funktionsnachweis wird eine simple, integrale Positionsregelung aufgebaut, auch unter Verwendung der Lösung der inversen Aufgabe. Es wird sich zeigen, dass die gewählten Euler-Bernoulli-Balkenmodelle durchaus zufriedenstellen und aufwendigere Modellierungen, insbesondere der Vorverwindung, nicht zwingend erforderlich sind.

Das schon erwähnte nichtlineare Materialverhalten der piezokeramischen Antriebe, der MFCs, ist auch im Experiment zu beobachten. Sowohl im statischen als auch im dynamischen Modell wurden diese Nichtlinearitäten durch lineare Zusammenhänge approximiert. Genaue Vorhersagen sind deshalb kaum zu erwarten. Es gelingt nicht, die physikalischen Werte korrekt zu berechnen, wie beispielsweise maximale Verschiebungen oder Eigenfrequenzen, jedoch können bezogene Werte gut vorhergesagt werden, wie die normierten Richtungsvektoren der statischen Übertragungsmatrix oder die Eigenschwingungsformen des Aktorendes.

Der Aufbau des Prototyps wird detailliert in Kapitel 2.3 beschrieben und weitere Erläuterung sind hier nicht erforderlich. Zum Auswerten der theoretischen Modelle werden lediglich ausgewählte Parameter aus Tabelle 2.1 benötigt, die ergänzend in Tabelle 5.1 zusammengefasst werden.

Zur besseren Unterscheidung der Modelle werden die in Kapitel 3 eingeführten Modelle als *theoretische* Modelle und die im Experiment identifizierten Modelle als *gemessene* Modelle bezeichnet.

**Anmerkungen zu den Ein- und Ausgangsgrößen:** Der Betriebsbereich der Macro Fiber Composites mit einer Mittelspannung

$$U_m^* = 500 \text{ V} \quad (5.1)$$

ist unsymmetrisch, siehe Tabelle 2.1. In den Modellen werden symmetrische Betriebsbereiche angenommen und es ist somit praktisch, anstatt der tatsächlichen Spannung  $U^*$  eine um  $U_m^*$  korrigierte Spannung

$$U = U^* - U_m^* \quad (5.2)$$

zu verwenden. Soweit möglich und sinnvoll werden nur diese Spannungen angegeben.

Die Spannungen  $U_1, U_2, U_3$  der aktiven Elemente sind die Eingänge des Helixaktors. Die Verschiebungen  $u_e, v_e$  des freien Aktorendes sind die Ausgänge des Helixaktors. In

Helixaktor	
Vorverwindung	$\varphi_e = 220^\circ$
Länge-Breite-Verhältnis	$b/h = 3/1$
normierte Lage der ersten Trennstelle	$z_{t.1} = 32/140$
normierte Lage der zweiten Trennstelle	$z_{t.2} = 67/140$
Anzahl der finiten Elemente des dynamischen Modells	Ne=140

Tabelle 5.1: Ausgewählte Parameter des Prototyps.

den Modellbeschreibungen werden die normierten Eingänge  $\bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3$  und die normierten Ausgänge  $\underline{u}_e, \underline{v}_e$  benutzt. Zwischen den normierten Größen und den physikalischen Größen vermitteln die Beziehungen (3.64) und (3.68), hier speziell

$$\bar{k}_i = \frac{U_i}{\hat{U}_i}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.3)$$

beziehungsweise

$$\underline{u}_e = \frac{u_e}{\hat{v}_e}, \quad \underline{v}_e = \frac{v_e}{\hat{v}_e}. \quad (5.4)$$

Als Bezugsspannungsamplitude wird für alle Experimente

$$\hat{U} = 450 \text{ V} \quad (5.5)$$

festgelegt. Die Bezugsverschiebung  $\hat{v}_e$  wird erst anhand der gemessenen statischen Übertragungsmatrix festgelegt.

## 5.1 Versuchsaufbau

Abbildung 5.1 zeigt den Versuchsaufbau bei allen Experimenten. Zentrales Element ist ein *dSPACE*-System. Es realisiert die Datenerfassung, die Ansteuerung des Aktors sowie die Regleralgorithmen. Die Verschiebungen des freien Aktorendes werden mit Laser-Wegsensoren gemessen. Die Wegsensoren und der Helixaktor sind auf einem robusten Gestell montiert, siehe Abbildung 2.15. Die MFCs werden mit einem spannungsgeregelten Piezoverstärker betrieben. Für die experimentelle Modalanalyse werden ergänzend ein Signalgenerator und ein Laser-Doppler-Vibrometer zur Messung der Verschiebungsgeschwindigkeiten verwendet.

Bei allen Messungen von  $u_e, v_e, \dot{u}_e$  und  $\dot{v}_e$  entsprechen Lagen und Richtungen der Koordinatenachsen den Konventionen in Abbildung 3.5.

***dSPACE*-System, Signalgenerator:** Das *dSPACE*-System<sup>1</sup> ist ein Echtzeitsystem zum einfachen Realisieren von Regelungsalgorithmen. Die Datenerfassung, die Ansteuerung und die Algorithmen werden im Programm *MATLAB-SIMULINK*<sup>2</sup> implementiert. Die Controllerkarte - der eigentliche Echtzeitrechner - wird in einem Personalcomputer installiert. Das hier verwendete *ds1104*-System besitzt unter anderem 8 analoge

<sup>1</sup> *dSPACE GmbH*, Technologiepark 25, 33100 Paderborn.

<sup>2</sup> *The MathWorks Deutschland Offices*, Adalperostr. 45, 85737 Ismaning.



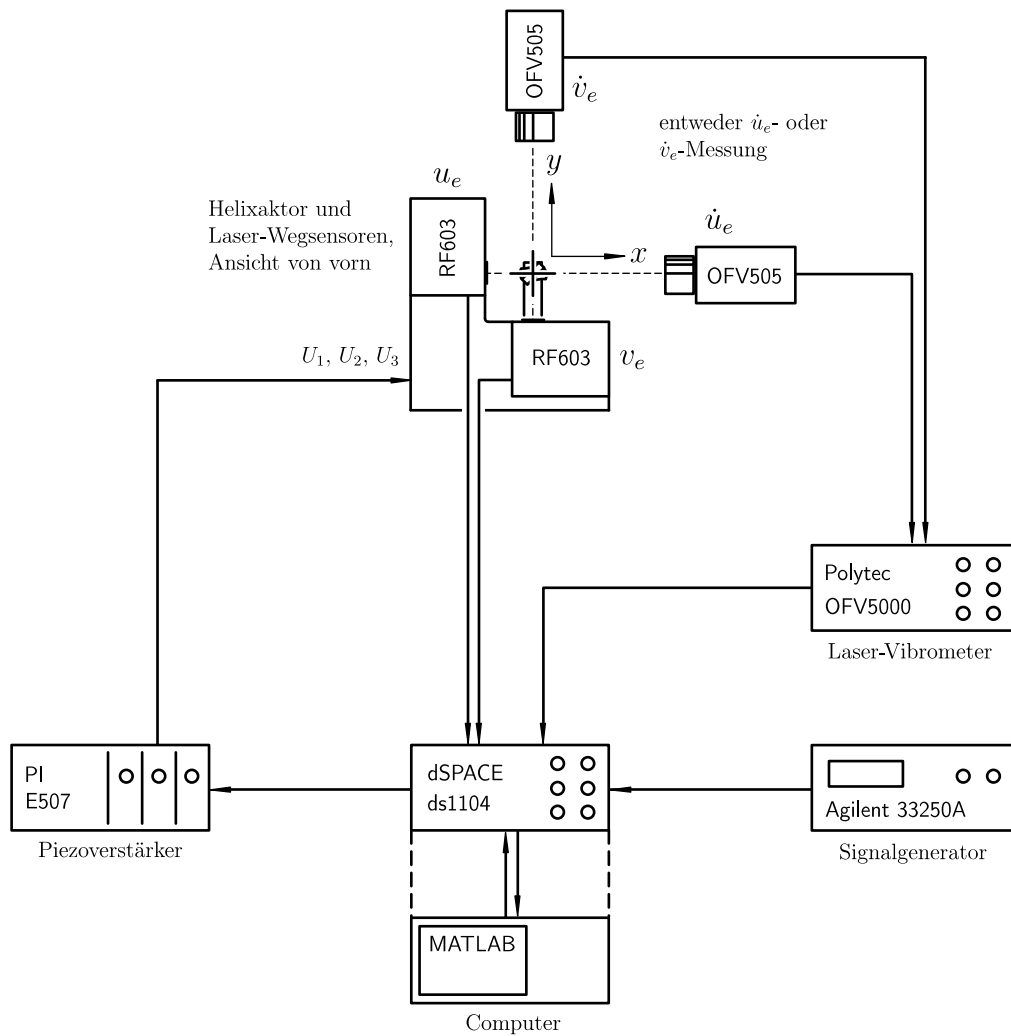


Abbildung 5.1: Versuchsaufbau.

Ausgänge und 8 analoge Eingänge, die jeweils Spannungen im Bereich  $\pm 10$  V messen und ausgeben können.

Der Signalgenerator *Agilent 33250A*<sup>3</sup> wird allein bei der experimentellen Modalanalyse eingesetzt. Die Signale können auch mit dem *dSPACE*-System generiert werden. Das Generieren ist jedoch mit Hilfe des Signalgenerators insgesamt bequemer.

**Piezoverstärker:** In den Experimenten werden drei Piezoverstärker *E-507*<sup>4</sup> eingesetzt. Sie verstärken die Ansteuerspannungen des *dSPACE*-Systems und erlauben Ausgangsspannungen im Bereich

$$0 \text{ V} \leq U^* \leq 1000 \text{ V} \quad (5.6)$$

beziehungsweise

$$-500 \text{ V} \leq U \leq 500 \text{ V}. \quad (5.7)$$

Die Verstärkung wird als ideal angenommen und nicht weiter geprüft, unterstellend, dass die Fehler aufgrund der Linearisierung des Materialverhaltens der MFCs größer als die Fehler des Verstärkers sind.

Die Kapazitäten der aktiven Elemente von ca. 1 nF, siehe Tabelle 2.1, sind klein verglichen mit anderen Piezoaktoren. Bei diesen kleinen Kapazitäten ermöglichen die *E-507*-Verstärker selbst bei Frequenzen bis 1 kHz Spannungsamplituden von  $\pm 500$  V.

Zu jedem Ausgang des Verstärkers sind Widerstände von 20 M $\Omega$  parallelgeschaltet. Sie entladen die MFCs bei abgeschaltetem Verstärker und schützen vor Stromschlag.

**Wegsensoren:** Die Verschiebungen  $u_e$  und  $v_e$  werden mit zwei *RF603*-Sensoren<sup>5</sup> gemessen. Es sind berührungslose Laser-Wegsensoren, die nach dem Triangulationsprinzip arbeiten. Die Sensoren benötigen am Messort ebene Rückstrahlflächen. Das freie Aktorende besitzt deshalb zwei Sensorflächen als Rückstrahlflächen, siehe Abbildung 2.17. Die Sensoren übersetzen Positionen im Messbereich von 0 mm bis 15 mm linear in Spannungen von 0 V bis 10 V.

Der absolute Fehler der Wegsensoren wird mit

$$\Delta x = \pm 50 \mu\text{m} \quad (5.8)$$

angenommen. Der Fehler besteht aus einem Linearisierungsfehler von  $\pm 15 \mu\text{m}$  laut Hersteller und einem Fehler von ca.  $\pm 30 \mu\text{m}$  aufgrund der Streuung der Messwerte. Letzterer wurde experimentell bei festgehaltener Position bestimmt und beinhaltet auch mögliche Fehler des *dSPACE*-Systems. Bei vorlaufender Messung und bei sehr vielen Messereignissen lagen mindestens 99,9 % der Messwerte innerhalb der Fehlergrenzen von  $\pm 30 \mu\text{m}$ .

Bei  $\hat{U} = 450$  V, also bei nahezu maximal möglichem Spannungsbereich, beträgt die Breite des Arbeitsraumes des Prototyps 7,4 mm und die Höhe 7,2 mm. Der relative Fehler

$$\frac{\Delta x}{x_{pp}} = \frac{50 \mu\text{m}}{7,2 \text{ mm}} \approx 1 \%, \quad (5.9)$$

<sup>3</sup>*Agilent Technologies Deutschland GmbH*, Herrenberger Str. 130, 71034 Böblingen.

<sup>4</sup>*Physik Instrumente (PI) GmbH & Co. KG*, Auf der Römerstr. 1, 76228 Karlsruhe.

<sup>5</sup>*disynet GmbH*, Westwall 12, D-41379 Brüggen; Sensor RF603-15/15-232-U-12.

bezogen auf die Breite des Arbeitsraumes, erscheint somit ausreichend klein.

Die *RF603*-Sensoren werden auch bei den Regelungsexperimenten eingesetzt. LUNZE [58] und PREUMONT [74] äußern sich zur Wahl der Abtastfrequenz bei maximal auftretender Frequenz  $f_{Gr}$  im Regelkreis. Sie empfehlen mindestens

$$f_s \approx 20f_{Gr} \quad (5.10)$$

beziehungsweise

$$f_s \approx 100f_{Gr}. \quad (5.11)$$

Wird  $f_s$  entsprechend gewählt, so sind sinusförmige Signale bei  $f_{Gr}$  gut abtastbar und im Übrigen kann ein zeitkontinuierlicher Regler dann ohne wesentliche Änderungen als zeitdiskreter Regler verwendet werden. Die Abtastfrequenz der *RF603*-Sensoren beträgt

$$f_s = 1000 \text{ Hz}. \quad (5.12)$$

Somit wären maximal

$$f_{Gr} = 50 \text{ Hz} \quad (5.13)$$

beziehungsweise

$$f_{Gr} = 10 \text{ Hz} \quad (5.14)$$

möglich. Die erste Eigenfrequenz des Prototyps liegt bei ca. 20 Hz. Ausgeprägte Resonanzen sind jedoch mindestens bis 170 Hz beobachtbar. Diese Resonanzen können mit den *RF603*-Sensoren nicht zufriedenstellend beobachtet werden und es sind somit nur Regelungen geringer Dynamik realisierbar. Sie beschränken sich hier auf integrale Regelungen.

**Laser-Doppler-Vibrometer:** Bei der experimentellen Modalanalyse wird ein Laser-Doppler-Vibrometer<sup>6</sup> eingesetzt, da die Abtastfrequenz der Wegsensoren hierfür zu gering ist. Es misst die Geschwindigkeiten des freien Aktorendes. Die Geschwindigkeiten  $\dot{u}_e$  und  $\dot{v}_e$  werden in separaten Experimenten gemessen, da so ein einziges Vibrometer genügt. Die Abtastfrequenz des Vibrometers ist deutlich größer als die wohl maximal beobachtbare Eigenfrequenz des Prototyps.

Der Messfehler des Vibrometers beträgt laut Hersteller bei dem gewählten Messbereich

$$\Delta\dot{x} = \pm 9 \text{ mm/s}. \quad (5.15)$$

In den Experimenten zur Modalanalyse traten maximale Geschwindigkeitsamplituden zwischen 190 mm/s und 640 mm/s auf. Auch hier erscheint der relative Fehler

$$\frac{\Delta\dot{x}}{\dot{x}_{pp}} = \frac{9 \text{ mm/s}}{190 \text{ mm/s}} = 5 \%, \quad (5.16)$$

bezogen auf die maximalen Amplituden, ausreichend klein.

---

<sup>6</sup>*Polytec GmbH*, Polytec-Platz 1-7, 76337 Waldbronn; Messkopf *OFV-505*, Controller *OFV-5000*, Decoder *VD-02*.

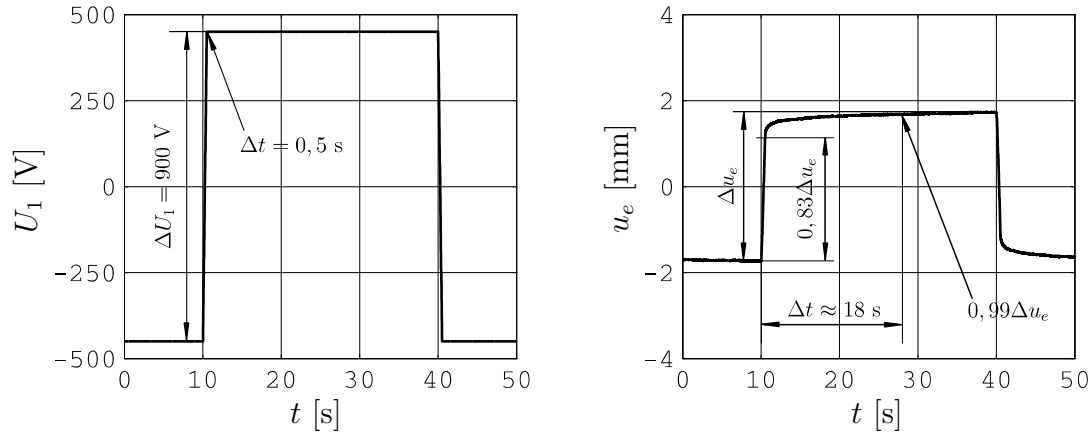


Abbildung 5.2: Kriechverhalten des Prototyps bei Wegmessung.

## 5.2 Quasistatisches Übertragungsverhalten

Die folgenden Experimente illustrieren das Kriechverhalten, die ausgezeichneten Richtungsvektoren des Prototyps sowie seinen Arbeitsraum. Die identifizierten Richtungsvektoren erlauben einerseits das Validieren des statischen Modells. Andererseits werden sie für die integrale Positionsregelung benötigt.

Bei den folgenden Experimenten liegen die Anregungsfrequenzen weit unterhalb der ersten Eigenfrequenz des Prototyps. Die Experimente werden deshalb als *quasistatisch* bezeichnet, auch wenn Zeiteinflüsse aufgrund des Kriechens sehr wohl auftreten.

### 5.2.1 Kriechverhalten

Die Diagramme in Abbildung 5.2 illustrieren das Kriechverhalten des Prototyps. In dem Versuch wurde  $U_1$  in 0,5 s von  $-450$  V auf  $450$  V erhöht. Bei dieser Übergangszeit sind noch keine Schwingungen beobachtbar und es wäre zu erwarten, dass  $u_e$  sehr schnell gegen seinen Endwert bei  $450$  V konvergiert. Nichtsdestotrotz erreicht die Verschiebung nach 0,5 s nur etwa 83 % der späteren Verschiebungsdifferenz  $\Delta u_e$ , hier gemessen nach 30 s. Nach etwa 18 s wird ca. 99 % von  $\Delta u_e$  erreicht.

Das in den Diagrammen gezeigte Verhalten für  $u_e$  über  $U_1$  kann so auch bei allen weiteren Eingangs-Ausgangs-Kombinationen beobachtet werden. Die angegebenen Werte wurden bei ansteigender Spannung bestimmt, gemittelt über alle Eingangs-Ausgangs-Kombinationen und gemittelt über 5 Versuche.

Das Kriechverhalten wird bei der Positionsregelung mittels I-Anteil kompensiert und hier nicht weiter untersucht. In den Experimenten zum Bestimmen der statischen Übertragungsmatrix wird es bei der Wahl der Anregungsfrequenz berücksichtigt. Wird die Anregungsfrequenz zu groß gewählt, so sind die gemessenen Verschiebungen deutlich kleiner als die tatsächlich maximal Möglichen.

### 5.2.2 Identifikation der statischen Übertragungsmatrix

**Theoretische statische Übertragungsmatrix:** Das statische Modell (3.70) beschreibt die Beziehungen zwischen dem normierten Eingangsvektor  $\underline{\bar{\mathbf{k}}}$  und dem nor-

mierten Ausgangsvektor  $\underline{u}_e$ . Die normierte statische Übertragungsmatrix  $\underline{\mathbf{G}}$  vermittelt zwischen Beiden. Mit den Parametern des Prototyps, siehe Tabelle 5.1, ergibt sich die theoretische normierte statische Übertragungsmatrix

$$\underline{\mathbf{G}}^M = \begin{bmatrix} -0,16 & -0,30 & -0,15 \\ 0,36 & 0,08 & -0,19 \end{bmatrix}. \quad (5.17)$$

**Gemessene statische Übertragungsmatrix:** Zur experimentellen Bestimmung der statischen Übertragungsmatrix wird jeweils ein Eingang des Prototyps harmonisch angeregt und es werden die Spannungs-Verschiebungs-Verläufe aufgezeichnet. Die Diagramme in Abbildung 5.3 zeigen die gemessenen Verläufe bei  $f = 0,05$  Hz und  $\hat{U} \in \{250 \text{ V}, 450 \text{ V}\}$ . Wie zu erwarten sind ausgeprägte Hysteresen aufgrund des Materialverhaltens der MFCs erkennbar.

Die Spannungs-Verschiebungs-Verläufe werden für  $\hat{U} = 450 \text{ V}$  linear interpoliert und mittlere Anstiege  $\frac{\partial u_e}{\partial U_i}$  und  $\frac{\partial v_e}{\partial U_i}$  bestimmt. Sie sind die Elemente der gemessenen statischen Übertragungsmatrix

$$\mathbf{G}^S = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_e}{\partial U_1} & \frac{\partial u_e}{\partial U_2} & \frac{\partial u_e}{\partial U_3} \\ \frac{\partial v_e}{\partial U_1} & \frac{\partial v_e}{\partial U_2} & \frac{\partial v_e}{\partial U_3} \end{bmatrix} = 10^{-3} \frac{\text{mm}}{\text{V}} \begin{bmatrix} -1,85 & -3,36 & -1,86 \\ 3,65 & 0,81 & -2,02 \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

des gemessenen statischen Modells

$$[u_e, v_e]^T = \mathbf{G}^S [U_1, U_2, U_3]^T. \quad (5.19)$$

Der Aktor-Träger-Verbund des Helixaktors ist kompliziert, er wurde jedoch ausgesprochen einfach modelliert. Das Bewerten der tatsächlichen physikalischen Verschiebungen ist somit wenig sinnvoll und aus  $\mathbf{G}^S$  wird eine normierte gemessene statische Übertragungsmatrix  $\underline{\mathbf{G}}^S$  berechnet.

Im besten Fall bei perfekter Übereinstimmung zwischen Modell und Experiment besteht zwischen  $\underline{\mathbf{G}}^M$  und  $\mathbf{G}^S$  mit den Normierungen (5.3) und (5.4) die Beziehung

$$\underline{\mathbf{G}}^M = \frac{\hat{U}}{\hat{v}_e} \mathbf{G}^S. \quad (5.20)$$

Die  $\underline{\mathbf{G}}^M$  und  $\mathbf{G}^S$  würden sich nur um den konstanten Faktor  $\hat{U}/\hat{v}_e$  voneinander unterscheiden. Sicher werden Modell und Experiment nicht perfekt übereinstimmen und somit lässt sich auch keine Bezugsverschiebung  $\hat{v}_e$  angeben. Mittels Ausgleichsrechnung kann jedoch zumindest eine Bezugsverschiebung

$$\hat{v}_e = 4,88 \text{ mm} \quad (5.21)$$

bestimmt werden, bei der möglichst kleine Unterschiede zwischen linker und rechter Seite der Gleichung (5.20) bestehen. Somit lässt sich eine normierte gemessene statische Übertragungsmatrix

$$\underline{\mathbf{G}}^S = \frac{\hat{U}}{\hat{v}_e} \mathbf{G}^S = \begin{bmatrix} -0,17 & -0,31 & -0,17 \\ 0,34 & 0,07 & -0,19 \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

angeben.

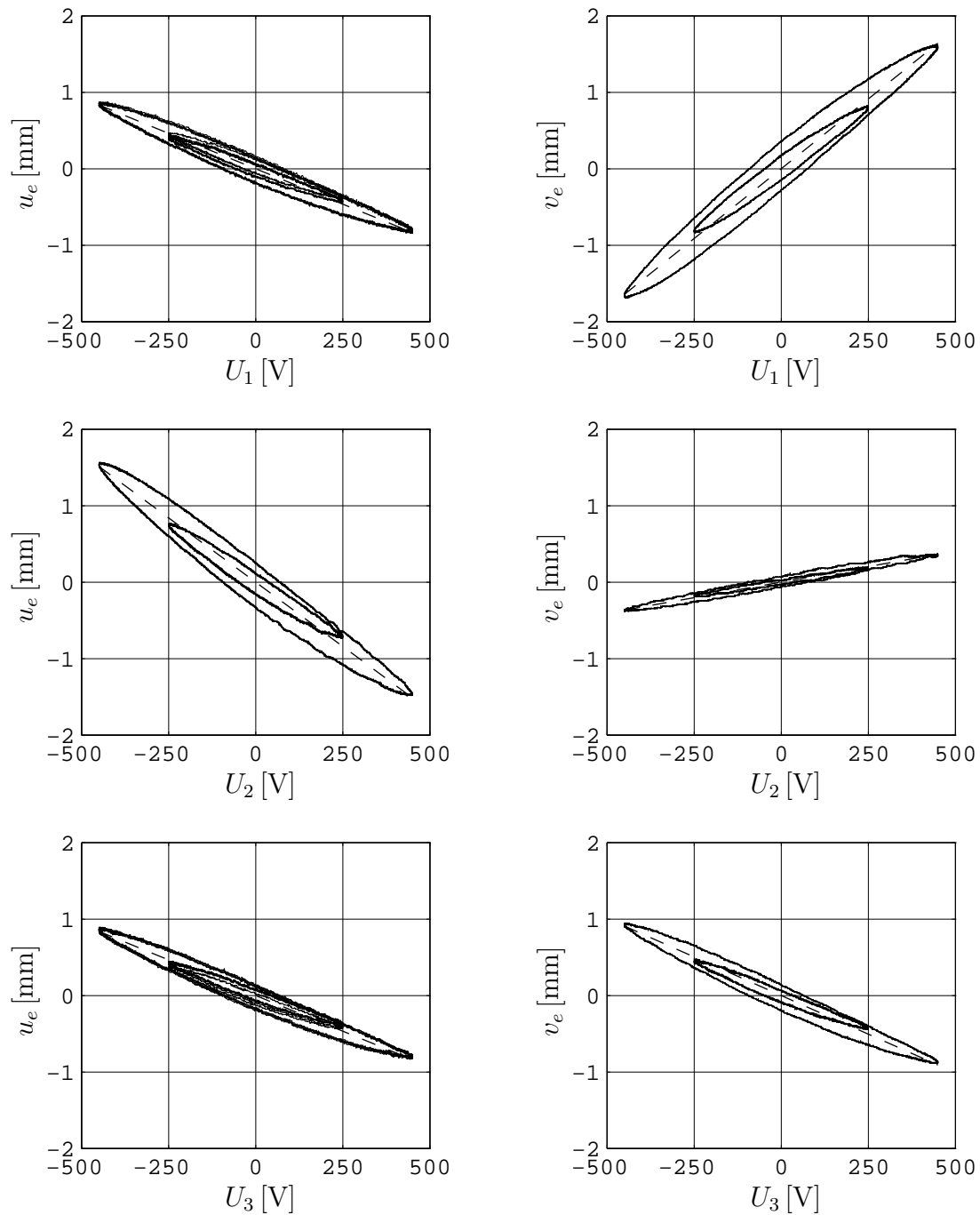


Abbildung 5.3: Quasistatische Spannungs-Verschiebungs-Verläufe. Dargestellt sind fünf zusammenhängende Perioden, jeweils für  $\hat{U} = 250$  V und  $\hat{U} = 450$  V. Die unterbrochenen Linien geben die interpolierten Verläufe an.

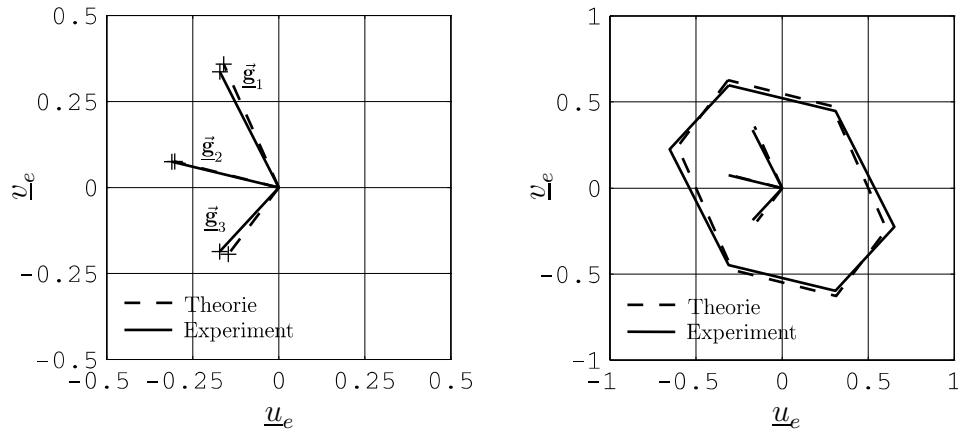


Abbildung 5.4: Richtungsvektoren und Arbeitsräume der theoretischen und gemessenen statischen Übertragungsmatrizen.

Die Diagramme in Abbildung 5.4 vergleichen  $\underline{\mathbf{G}}^M$  und  $\underline{\mathbf{G}}^S$  anhand der zugehörigen Richtungsvektoren sowie der entsprechenden Arbeitsräume. Klar erkennbar stimmen Modell und Experiment gut überein. Die Richtungen und Längen der Richtungsvektoren weichen nur wenig voneinander ab. Mit anderen Worten: Das in Kapitel 3.3 formulierte, denkbar einfache Euler-Bernoulli-Balkenmodell ermöglicht gute Vorhersagen der normierten Richtungsvektoren des Helixaktors. Auch wenn diese Feststellung nur für den Prototyp geprüft wurde, so darf vermutet werden, dass auch bei anderen Parametern, insbesondere bei kleineren Vorverwindungen, Modell und Experiment ähnlich gut übereinstimmen.

**Grenzen des Arbeitsraumes:** Die Diagramme in Abbildung 5.5 zeigen die Verschiebungspfade beim Abfahren der Grenzen des Arbeitsraumes für  $\dot{U} \in \{250 \text{ V}, 450 \text{ V}\}$ .

Es werden zwei Fälle dargestellt. Im ersten Fall werden die Spannungen bei der Fahrt von einer Ecke zur nächsten sehr schnell geändert, hier linear in 2 s. Anschließend werden die Spannungen für 28 s konstant gehalten. Ohne Rast in den Ecken würde das Kriechverhalten der MFCs zu Verrundungen der Ecken führen. Das zweite Diagramm zeigt genau diesen Fall. Der Wechsel von einer Ecke zur nächsten in 30 s erfolgt zwar deutlich langsamer als im ersten Fall, jedoch wird nach Erreichen einer Ecke sofort die nächste Ecke angefahren. In beiden Fällen beträgt die Umlaufzeit 120 s.

Auch anhand der gemessenen statischen Übertragungsmatrix (5.18) kann der mögliche Arbeitsraum des Prototyps berechnet werden. Er ist in den Diagrammen eingetragen. Zu erwarten wären deckungsgleiche Grenzen. Tatsächlich zeigt sich ein etwas kleinerer Arbeitsraum. In den Experimenten zu  $\underline{\mathbf{G}}^S$  mit  $f = 0,05 \text{ Hz}$  wird der gesamte Spannungsbereich in 10 s durchfahren. Aufgrund des ausgeprägten Kriechverhaltens genügt diese Zeit nicht zum Erreichen der maximal möglichen Verschiebungen. Somit prognostiziert  $\underline{\mathbf{G}}^S$  etwas geringere Übertragungsfaktoren, als tatsächlich möglich wären.

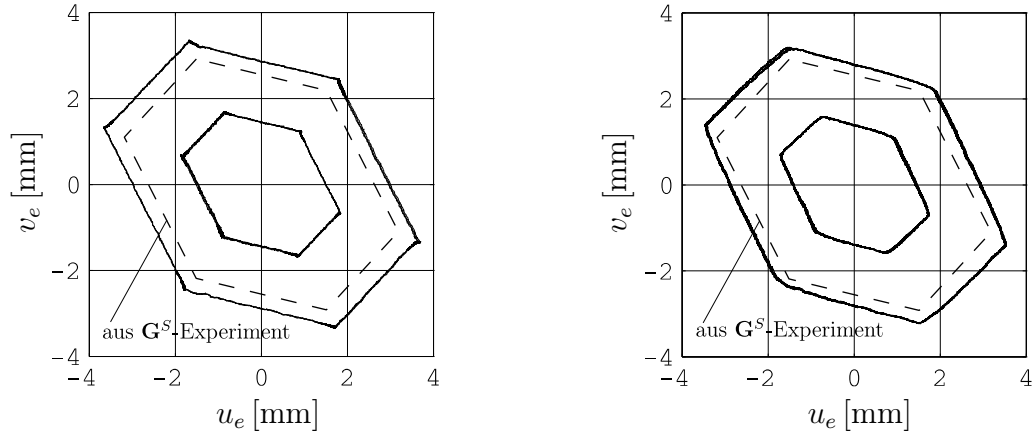


Abbildung 5.5: Abfahren der Grenzen des Arbeitsraumes, sowohl mit als auch ohne Rast in den Ecken, jeweils für  $\hat{U} = 250$  V und  $\hat{U} = 450$  V. Die unterbrochenen Kurven kennzeichnen die Grenzen auf Grundlage der gemessenen statischen Übertragungsmatrix bei  $\hat{U} = 450$  V.

### 5.3 Dynamisches Übertragungsverhalten

Die Identifikation eines dynamischen Modells des Prototyps erlaubt einerseits die Validierung des theoretischen dynamischen Modells. Andererseits kann mit diesem Modell näherungsweise die Verstärkung der Positionsregelung festgelegt werden.

Der Prototyp des Helixaktors entspricht nicht dem Helixaktor des theoretischen dynamischen Modells, primär aufgrund der Sensorflächen am freien Aktorende. Die Masse der Sensorflächen beträgt ca. 10 % der Masse des Aktor-Träger-Laminats. Auch wenn die Masse der Sensorflächen klein erscheint, so ist sie doch am freien Aktorende konzentriert und die Massenverteilung des Modells und des Prototyps weichen voneinander ab. Weiterhin sind die Abmessungen der Sensorflächen deutlich größer als die Querschnittsabmessungen des Aktors. Auch die Rotationsträgheiten der Sensorflächen werden somit das Systemverhalten beeinflussen.

Aufgrund der genannten Trägheitsunterschiede erscheint es wenig sinnvoll, die identifizierten Eigenfrequenzen zu bewerten. Modell und Experiment werden nur hinsichtlich der ersten Eigenschwingungsformen und der Wirkungen der Eingänge auf die Eigenschwingungsformen verglichen, unterstellend dass zumindest für diese ersten Resonanzen nur geringe Abweichungen auftreten.

#### 5.3.1 Struktur des dynamischen Modells

Die Struktur des gemessenen dynamischen Modells folgt der Struktur des theoretischen dynamischen Modells aus Kapitel 3.4. Die Systemgleichungen des theoretischen Modells,

$$\ddot{\mathbf{q}} + \text{diag}\{2D\omega_{0,i}\}\dot{\mathbf{q}} + \text{diag}\{\omega_{0,i}^2\}\mathbf{q} = \mathbf{T}^T \mathbf{S} \bar{\mathbf{k}} \quad (5.23)$$

und

$$\underline{\mathbf{u}}_e = \mathbf{C}_e \mathbf{T} \mathbf{q}, \quad (5.24)$$



werden aus den Gleichungen (3.146) und (3.147) übernommen. Darin bezeichnet  $\mathbf{q}$  den Vektor der Hauptkoordinaten

$$\mathbf{q} = [q_1, \dots, q_{N_t}]^T \quad (5.25)$$

und  $\mathbf{T}$  bezeichnet die Modalmatrix

$$\mathbf{T} = [\hat{\mathbf{a}}_1^{uv}, \dots, \hat{\mathbf{a}}_{N_t}^{uv}] \quad (5.26)$$

mit den Eigenvektoren  $\hat{\mathbf{a}}_t^{uv}$ , siehe Gleichungen (3.144) und (3.140). Die Matrix  $\mathbf{S}$  beschreibt die Wirkungen der Eingänge  $\bar{\mathbf{k}}$  auf die Hauptkoordinaten. Die Matrix  $\mathbf{C}_e$  vermittelt zwischen den Hauptkoordinaten und den Ausgängen  $\underline{\mathbf{u}}_e$ .

Die Gleichungen (5.23) und (5.24) können im Bildbereich zu einer Gleichung

$$\underline{\mathbf{U}}_e(j\Omega) = \underline{\mathbf{G}}(j\Omega)\bar{\mathbf{K}}(j\Omega) \quad (5.27)$$

mit

$$\underline{\mathbf{G}}(j\Omega) = \sum_{t=1}^{N_t} \frac{1}{-\Omega^2 + 2D\omega_{0,t}j\Omega + \omega_{0,t}^2} \mathbf{C}_e \hat{\mathbf{a}}_t^{uv} \hat{\mathbf{a}}_t^{uvT} \mathbf{S} \quad (5.28)$$

zusammengefasst werden. Die Variable  $\Omega$  ist die Frequenz. Die Matrix  $\underline{\mathbf{G}}(j\Omega)$  bezeichnet die Frequenzgangmatrix

$$\underline{\mathbf{G}}(j\Omega) = \{\underline{\mathbf{G}}_{rm}(j\Omega)\}, \quad r = 1, 2, \quad m = 1, 2, 3 \quad (5.29)$$

mit den Frequenzgängen  $\underline{\mathbf{G}}_{rm}(j\Omega)$ . Die Vektoren  $\bar{\mathbf{K}}(j\Omega)$  und  $\underline{\mathbf{U}}_e(j\Omega)$  mit

$$\bar{\mathbf{K}}(j\Omega) = [\bar{\mathbf{K}}_1(j\Omega), \bar{\mathbf{K}}_2(j\Omega), \bar{\mathbf{K}}_3(j\Omega)]^T \quad (5.30)$$

und

$$\underline{\mathbf{U}}_e(j\Omega) = [\underline{U}_{e,1}(j\Omega), \underline{U}_{e,2}(j\Omega)]^T \quad (5.31)$$

bezeichnen die Fouriertransformierten des Eingangsvektors  $\bar{\mathbf{k}}(t)$  und des Ausgangsvektors  $\underline{\mathbf{u}}_e(t)$ .

Die Darstellung von  $\underline{\mathbf{G}}(j\Omega)$  in Gleichung (5.28) enthält neben den Eigenfrequenzen und dem Dämpfungsmaß insbesondere die Eigenvektoren  $\hat{\mathbf{a}}_t^{uv}$  sowie die Matrizen  $\mathbf{C}_e$  und  $\mathbf{S}$ . Im Experiment wird das Matrizenprodukt  $\mathbf{C}_e \hat{\mathbf{a}}_t^{uv} \hat{\mathbf{a}}_t^{uvT} \mathbf{S}$  gemessen, das nicht eindeutig in  $\hat{\mathbf{a}}_t^{uv}$ ,  $\mathbf{C}_e$  und  $\mathbf{S}$  zerlegt werden kann. Wegen  $\mathbf{C}_e$  und  $\mathbf{S}$  können nur die projizierten Eigenvektoren  $\mathbf{C}_e \hat{\mathbf{a}}_t^{uv}$  und  $\mathbf{S}^T \hat{\mathbf{a}}_t^{uv}$  nicht jedoch die Eigenvektoren selbst beobachtet werden. Das Matrizenprodukt wird deshalb nach der Vorschrift

$$\mathbf{C}_e \hat{\mathbf{a}}_t^{uv} \hat{\mathbf{a}}_t^{uvT} \mathbf{S} = a_t \mathbf{v}_t^u \mathbf{v}_t^kT, \quad |\mathbf{v}_t^u| = 1, |\mathbf{v}_t^k| = 1 \quad (5.32)$$

parametrisiert. Die Vektoren  $\mathbf{v}_t^u$  und  $\mathbf{v}_t^k$  sind somit verschiedene Projektionen ein und des selben Eigenvektors. Bei der  $t$ -ten Resonanz beschreibt  $\mathbf{v}_t^u$  das Verhältnis zwischen den Ausgängen  $\underline{u}_e$  und  $\underline{v}_e$ . Der Vektor  $\mathbf{v}_t^k$  beschreibt den Einfluss der Eingänge auf die Ausgänge. Willkürlich festgelegt sind beide  $\mathbf{v}_t^u$  und  $\mathbf{v}_t^k$  Einheitsvektoren und ein weiterer Koeffizient  $a_t$  ist erforderlich.

Mit  $a_t$ ,  $\mathbf{v}_t^u$  und  $\mathbf{v}_t^k$  anstatt  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{C}_e$  und  $\mathbf{S}$  ist die Frequenzgangmatrix

$$\underline{\mathbf{G}}(j\Omega) = \sum_{t=1}^{N_t} \frac{1}{-\Omega^2 + 2D\omega_{0,t}j\Omega + \omega_{0,t}^2} \mathbf{V}_t, \quad \mathbf{V}_t = a_t \mathbf{v}_t^u \mathbf{v}_t^kT. \quad (5.33)$$

Sollen die  $\mathbf{v}_t^u$  und  $\mathbf{v}_t^k$  eindeutig bestimmt werden, so sind mindestens eine Zeile und eine Spalte des dyadischen Produkts  $\mathbf{V}_t$  zu identifizieren. Im Gegensatz dazu genügt bei der experimentellen Modalanalyse rein mechanischer Systeme die Identifizierung einer Spalte oder einer Zeile. Besteht Kollokation zwischen den Punkten der Lasteinleitung und den Punkten der Verschiebungsmessung, so gilt dort  $\mathbf{v}_t^u = \mathbf{v}_t^k$ .

### 5.3.2 Experimentelle Modalanalyse

Zur Identifikation der Modellparameter werden nach NATKE [64] bestimmte Verfahren der experimentellen Modalanalyse ausgewählt, die als robust und einfach gelten. Die Verfahren unterstellen, dass das Systemverhalten näherungsweise als lineare Überlagerung  $N_t$  unabhängiger, linearer, zeitinvarianter Systeme mit einem Freiheitsgrad und der Eigenfrequenz  $\omega_{0,t}$  begriffen werden kann. Die Frequenzgangmatrix in Gleichung (5.33) besitzt genau diese Eigenschaft. In der Umgebung von  $\omega_{0,t}$  beträgt sie näherungsweise

$$\underline{\mathbf{G}}(j\Omega) = \underline{\mathbf{G}}_t(j\Omega) + \mathbf{B}_t, \quad \underline{\mathbf{G}}_t(j\Omega) = \frac{1}{-\Omega^2 + 2D\omega_{0,t}j\Omega + \omega_{0,t}^2} \mathbf{V}_t. \quad (5.34)$$

Die Matrix  $\underline{\mathbf{G}}_t(j\Omega)$  ist die Frequenzgangmatrix des zur  $t$ -ten Resonanz gehörenden Einfreiheitsgradsystems. Die Matrix  $\mathbf{B}_t$  fasst alle weiteren  $\underline{\mathbf{G}}_t(j\Omega)$  zusammen. Ihre Einträge sind nahe  $\omega_{0,t}$  annähernd konstant und die Frequenzgangmatrix des Gesamtsystems ist gegenüber der Frequenzgangmatrix des Einfreiheitsgradsystems lediglich um die komplexe Matrix  $\mathbf{B}_t$  verschoben.

Die Identifikation verläuft in zwei Schritten. Im ersten - experimentellen - Schritt wird die Frequenzgangmatrix  $\underline{\mathbf{G}}(j\Omega)$  gemessen. Im zweiten Schritt - der eigentlichen Identifikation - werden klar hervortretende Resonanzen ausgewählt und bei allen ausgewählten Resonanzen die Frequenzgangmatrizen  $\underline{\mathbf{G}}_t(j\Omega)$  analysiert, das heißt, es werden  $\omega_{0,t}$ ,  $D_t$  sowie  $\mathbf{V}_t$  identifiziert. Die Elemente  $\underline{G}_{t,rm}(j\Omega)$  der Frequenzgangmatrix werden in getrennten Versuchen gemessen.

**Eigenfrequenz  $\omega_{0,t}$ :** NATKE schlägt zum Bestimmen der Eigenfrequenz das Imaginärteilkriterium vor. Darf kleine Dämpfung unterstellt werden, so erreicht der Imaginärteilverlauf näherungsweise bei  $\omega_{0,t}$  sein Extremum

$$\Im\{\underline{G}_{rm}(j\omega_{0,t})\} \approx -\frac{1}{2D\omega_{0,t}^2} V_{t,rm} + \Im\{B_{t,rm}\}. \quad (5.35)$$

Aus dem gemessenen Imaginärteilverlauf in der Umgebung von  $\omega_{0,t}$  wird die Frequenz  $\omega_{R,t}$  des Extremwerts abgelesen, die dann näherungsweise der Eigenfrequenz

$$\omega_{0,t} \approx \omega_{R,t} \quad (5.36)$$

entspricht.

Abbildung 5.6 illustriert das Identifizieren von  $\omega_{0,t}$  an einem Beispiel. Vor dem eigentlichen Ablesen der Frequenz wird aus den verrauschten Messwerten ein interpolierter Funktionsverlauf approximiert. Der angenommene Funktionsverlauf entspricht dem Imaginärteilverlauf eines Einfreiheitsgradsystems. Beim Interpolieren wird zwangsläufig auch ein Dämpfungsmaß ermittelt, was jedoch ignoriert wird.

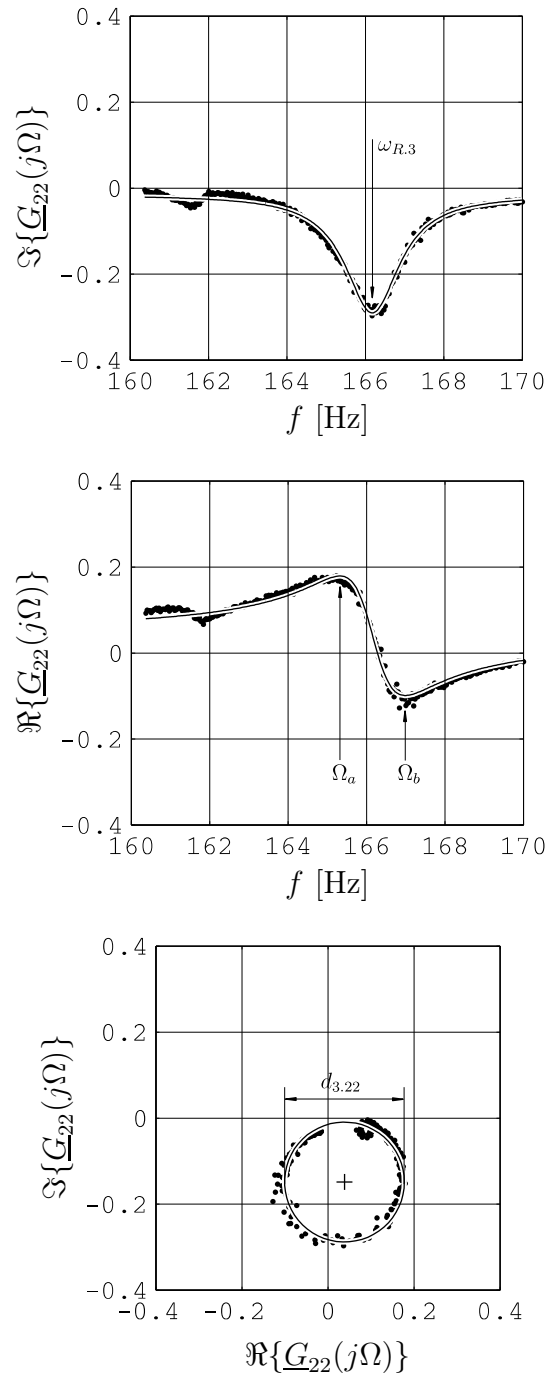


Abbildung 5.6: Beispiele zur Identifizierung der Eigenfrequenz, des Dämpfungsmaßes sowie des Ortskurvendurchmessers.

Die Eigenfrequenzen  $\omega_{0,t}$  aller Frequenzgänge  $\underline{G}_{t,rm}(j\Omega)$  sind theoretisch gleich, im Experiment sind sie es jedoch nicht. NATKE schlägt eine gewichtete Mittelung aller Eigenfrequenzen vor, wobei mit den Elementen von  $\mathbf{V}_t$  gewichtet wird, also

$$\omega_{0,t} = \frac{\sum_{r=1}^2 \sum_{m=1}^3 |V_{t,rm}| \omega_{0,t,rm}}{\sum_{r=1}^2 \sum_{m=1}^3 |V_{t,rm}|}. \quad (5.37)$$

Identifizierte Eigenfrequenzen großer  $|\underline{G}_{t,rm}(j\omega_{0,t})|$  werden somit bevorzugt, was sinnvoll erscheint.

**Dämpfungsmaß  $D_t$ :** Das Dämpfungsmaß wird aus den gemessenen Realteilfrequenzgängen  $\Re\{\underline{G}_{rm}(j\Omega)\}$  ermittelt. Abbildung 5.6 illustriert das Verfahren. Wieder wird ein interpolierter Funktionsverlauf bestimmt, der dem Verlauf des Realteilfrequenzgangs eines Einfreiheitsgradsystems entspricht. Das Dämpfungsmaß des interpolierten Verlaufs entspricht dem identifizierten Dämpfungsmaß  $D_t$ . Die dabei bestimmte Eigenfrequenz wird ignoriert. Sie würde theoretisch der tatsächlichen Eigenfrequenz entsprechen, was im Experiment jedoch so nicht eintritt.

Das Identifizieren des Dämpfungsmaßes anhand des interpolierten Realteilfrequenzgangs entspricht weitgehend dem von NATKE vorgeschlagenen Messen der Extremwertabszissen des Realteilfrequenzgangs. Sind die Frequenzen  $\Omega_a$  und  $\Omega_b$  der Extrema bekannt, so lässt sich daraus mit

$$D_t = \frac{1}{2} \frac{\Omega_b^2 - \Omega_a^2}{\Omega_b^2 + \Omega_a^2} \quad (5.38)$$

ein Dämpfungsmaß des Einfreiheitsgradsystems ermitteln.

Wie schon bei der Berechnung der Eigenfrequenz wird beim Dämpfungsmaß durch gewichtete Mittelung der  $D_{t,rm}$  ein mittleres Dämpfungsmaß  $D_t$  bestimmt, siehe Gleichung (5.37).

**Dyadisches Produkt  $\mathbf{V}_t$ :** Gilt  $D \ll 1$ , so beträgt die Frequenzgangmatrix im Resonanzfall annähernd

$$\underline{\mathbf{G}}(j\omega_{0,t}) \approx -j \frac{1}{2D\omega_{0,t}^2} \mathbf{V}_t + \mathbf{B}_t. \quad (5.39)$$

Anstatt bei  $\omega_{0,t}$  aus allen  $\underline{G}_{rm}$  die Beträge  $|\underline{G}_{rm}|$  abzulesen und daraus  $V_{t,rm}$  zu bestimmen, empfehlen NATKE [64] und auch andere [31] das Messen des Ortskurvendurchmessers. Bei kleiner Dämpfung kann die Ortskurve in der Umgebung von  $\omega_{0,t}$  als Kreis approximiert werden. Der Durchmesser  $d_{t,rm}$  des Kreises entspricht näherungsweise dem Betrag  $|\underline{G}_{t,rm}|$ , woraus mit  $D_t$  und  $\omega_{0,t}$  sofort

$$|V_{t,rm}| \approx d_{t,rm} 2D\omega_{0,t}^2 \quad (5.40)$$

folgt. Das Ergebnis wird somit nicht durch  $\mathbf{B}_t$  verfälscht. Die Matrix  $\mathbf{B}_t$  verschiebt lediglich die Position des Kreises. Abbildung 5.6 verdeutlicht die Methode. In der Ortskurve des Beispiels ist auch eine weitere Resonanz erkennbar. Ihr Betrag ist jedoch klein und sie wird hier nicht berücksichtigt. Vermutlich zeigt sie die Resonanz einer der Anschlussdrähte des Prototyps.

Das Vorzeichen von  $V_{t.rm}$  kann beispielsweise am Extremum von  $\Im\{\underline{G}_{rm}(j\omega_{0,t})\}$  abgelesen werden. Ist es ein Minimum, so ist  $V_{t.rm}$  positiv. Ist es ein Maximum, so ist  $V_{t.rm}$  negativ.

Aus dem ermittelten dyadischen Produkt  $\mathbf{V}_t$  werden die  $\mathbf{v}_t^u$ ,  $\mathbf{v}_t^k$  sowie  $a_t$  identifiziert. Die Elemente von  $\mathbf{V}_t$  sind wegen des dyadischen Produkts der projizierten Eigenvektoren nicht unabhängig voneinander. Somit können aufgrund von Mess- und Modellfehlern nur projizierte Eigenvektoren gefunden werden, die das dyadische Produkt

$$\mathbf{V}_t = a_t \mathbf{v}_t^u \mathbf{v}_t^{kT} \quad (5.41)$$

näherungsweise erfüllen. In einem ersten Schritt wird eine mittlere Verschiebungsrichtung  $\mathbf{v}_t^u$  aus allen Spalten von  $\mathbf{V}_t$  bestimmt. Anschließend wird mittels Ausgleichsrechnung aus Gleichung (5.41) der Vektor  $\mathbf{v}_t^k$  und die Konstante  $a_t$  berechnet.

### 5.3.3 Identifizierte Eigenlösungen

In getrennten Experimenten wurden alle Elemente  $\underline{G}_{rm}(j\Omega)$  der Frequenzgangmatrix gemessen. Die Eingänge des Prototyps wurden mit *einem* Rechteckimpuls, Breite  $\Delta t = 1$  ms, Amplitude  $\hat{U} = 900$  V, angeregt und die Zeitverläufe  $\dot{u}_e(t)$  beziehungsweise  $\dot{v}_e(t)$  über 30 s gemessen<sup>7</sup>. Die physikalischen Zeitverläufe werden entsprechend den Gleichungen (5.3) und (5.4) und mit der im quasistatischen Versuch bestimmten Bezugsverschiebung (5.21) normiert. Mittels diskreter Fouriertransformation lassen sich daraus näherungsweise die Frequenzgänge

$$\underline{G}_{rm}(j\Omega) = \frac{\underline{U}_r(j\Omega)}{\underline{K}_m(j\Omega)} \quad (5.42)$$

bestimmen.

**Frequenzgänge, Eigenfrequenzen, Dämpfungsmaß:** Abbildung 5.7 zeigt die gemessenen normierten Frequenzgänge des Prototyps. Die Anregung mittels Rechteckimpuls approximiert eine Dirac-Stoßanregung. Der erste Nullpunkt der Fouriertransformierten des verwendeten Rechteckimpulses liegt bei  $f = 1000$  Hz. Die Abtastfrequenz des *dSPACE*-Systems beträgt in diesen Versuchen  $f_s = 2500$  Hz. Somit werden nur klar unterhalb dieser Frequenzen liegende Bereiche analysiert. Die Frequenzgänge werden zwar bis 800 Hz dargestellt und auch die Eigenfrequenzen bis dahin bestimmt, jedoch werden Dämpfungsmaß, Ortskurvendurchmesser und die Vorzeichen der Elemente von  $\mathbf{V}_t$  nur bis 500 Hz ausgewertet<sup>8</sup>.

In den dargestellten Frequenzgängen sind die untersuchten Resonanzen durch fortlaufende Ziffern gekennzeichnet. Tabelle 5.2 fasst ihre Eigenfrequenzen zusammen. Neben den ausgewählten Resonanzen zeichnen sich auch weitere Resonanzen ab. Deren Beiträge sind jedoch klein gegenüber den Ausgewählten und sie werden nicht analysiert. Es wird angenommen, dass sie keine auch im theoretischen dynamischen Modell

<sup>7</sup>Die nicht angeregten Eingänge wurden auf  $U = 0$  V gehalten.

<sup>8</sup>Die Wahl der oberen Grenze orientiert sich an LUNZES Diskussion zur Abtastfrequenz bei Reglern [58]. Bei  $f_s \approx 6f_{Gr}$  ist eine harmonische Schwingung noch vertretbar als Solche erkennbar. Bei  $f_s = 2500$  Hz wäre eine sinnvolle Obergrenze somit  $f_{Gr} = 417$  Hz. Es wird hier  $f_{Gr} \approx 500$  Hz festgelegt.

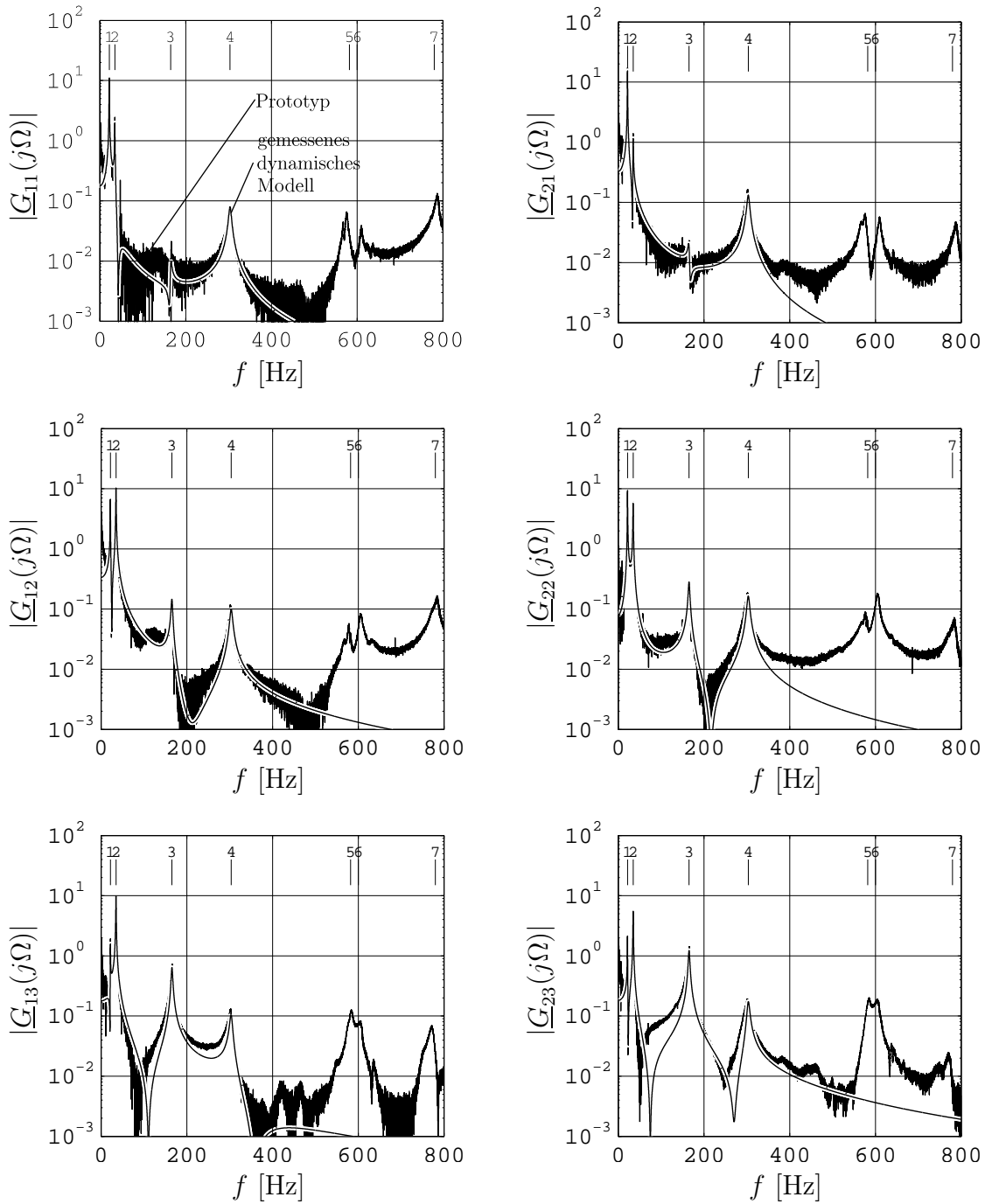


Abbildung 5.7: Beträge der normierten Frequenzgänge des Prototyps und des gemessenen dynamischen Modells.

wiedergebbar Resonanzen zeigen. Wie schon angedeutet, kann es sich beispielsweise um Resonanzen der Anschlussdrähte handeln.

Aufgrund der unterschiedlichen Massenverteilungen des Modells und des Prototyps werden die identifizierten Eigenfrequenzen nicht bewertet und sie werden hier lediglich zur Kenntnis genommen.

Das identifizierte Dämpfungsmaß beträgt in allen Messungen bei allen Resonanzen ca. 0,7 %. Die experimentelle Bestimmung des Dämpfungsmaßes darf durchaus kritisch gesehen werden und es wird für das gemessene dynamische Modell des Prototyps näherungsweise

$$D = D_t \approx 1 \% \quad (5.43)$$

festgelegt.

**Eigenvektoren:** Tabelle 5.2 zeigt die ersten vier Eigenvektoren des Prototyps und vergleichend die Eigenvektoren des theoretischen Modells mit den Parametern aus Tabelle 5.1. Dargestellt sind sowohl die projizierten Eigenvektoren  $\mathbf{v}_t^u$ , also die Eigenschwingungsformen des Aktorendes, als auch die Vektoren  $\mathbf{v}_t^k$ , also die Wirkungen der Eingänge auf die Ausgänge, mithin die Skalierungen der  $\mathbf{v}_t^u$ . Für  $\mathbf{v}_t^u$  werden auch deren Richtungswinkel

$$\tan \alpha_{e,t} = \frac{v_{t,2}^u}{v_{t,1}^u} \quad (5.44)$$

angegeben. Weiterhin zeigt die Tabelle für das theoretische Modell die normierten Eigenfrequenzen  $\lambda_t$ , siehe Gleichung (3.149) sowie die für das gemessene Modell die Dämpfungsmaße  $D_t$  und die Konstante  $a_t$  des dyadischen Produkts (5.41).

Offensichtlich sind die vorgesagten projizierten Eigenvektoren  $\mathbf{v}_t^u$  nahezu identisch mit den identifizierten  $\mathbf{v}_t^u$ . Deren Richtungswinkel  $\alpha_{e,t}$  unterscheiden sich nur um wenige Grad voneinander. Auch die Verhältnisse der Eingangswirkungen, beschrieben durch  $\mathbf{v}_t^k$ , sind annähernd gleich.

Aus den gemessenen Frequenzgängen werden lediglich die ersten vier Eigenvektoren identifiziert, das heißt, alle Eigenlösungen bis ca. 500 Hz.

### 5.3.4 Gemessenes dynamisches Modell

Aus den identifizierten ersten vier Eigenlösungen wird das gemessene dynamische Modell

$$\underline{\mathbf{U}}_e(j\Omega) = \underline{\mathbf{G}}^D(j\Omega) \overline{\mathbf{K}}(j\Omega) \quad (5.45)$$

synthetisiert. Seine Frequenzgangmatrix beträgt mit den in Tabelle 5.2 angegebenen Werten

$$\underline{\mathbf{G}}^D(j\Omega) = \sum_{t=1}^4 \frac{1}{-\Omega^2 + 2D\omega_{0,t}j\Omega + \omega_{0,t}^2} \mathbf{V}_t, \quad \mathbf{V} = a_t \mathbf{v}_t^u \mathbf{v}_t^{kT} \quad (5.46)$$

mit

$$\omega_{0,t} = 2\pi f_{0,t} \quad (5.47)$$

und

$$\mathbf{v}_t^u = [\cos \alpha_{e,t}, \sin \alpha_{e,t}]^T. \quad (5.48)$$

FEM		exp. Modalanalyse
<b>1. Eigenlösung</b>		
	$\lambda_1 = 1,99$ $\alpha_{e.1} = -54,8^\circ$ $\mathbf{v}_1^k = \begin{bmatrix} -0,89 \\ -0,46 \\ 0,05 \end{bmatrix}$	$f_{0.1} = 21,8 \text{ Hz}$ $\alpha_{e.1} = -54,6^\circ$ $\mathbf{v}_1^k = \begin{bmatrix} -0,85 \\ -0,51 \\ 0,12 \end{bmatrix}$ $a_1 = 8,36 \cdot 10^3 \text{ 1/s}^2$ $D_1 = 0,01$
<b>2. Eigenlösung</b>		
	$\lambda_2 = 2,49$ $\alpha_{e.2} = 31,1^\circ$ $\mathbf{v}_2^k = \begin{bmatrix} 0,31 \\ -0,76 \\ -0,57 \end{bmatrix}$	$f_{0.2} = 35,0 \text{ Hz}$ $\alpha_{e.2} = 29,3^\circ$ $\mathbf{v}_2^k = \begin{bmatrix} 0,14 \\ -0,71 \\ -0,69 \end{bmatrix}$ $a_2 = 1,59 \cdot 10^4 \text{ 1/s}^2$ $D_2 = 0,01$
<b>3. Eigenlösung</b>		
	$\lambda_3 = 5,39$ $\alpha_{e.3} = 62,9^\circ$ $\mathbf{v}_3^k = \begin{bmatrix} -0,15 \\ 0,08 \\ -0,99 \end{bmatrix}$	$f_{0.3} = 165,4 \text{ Hz}$ $\alpha_{e.3} = 62,5^\circ$ $\mathbf{v}_3^k = \begin{bmatrix} -0,01 \\ 0,22 \\ -0,97 \end{bmatrix}$ $a_3 = 3,06 \cdot 10^4 \text{ 1/s}^2$ $D_3 = 0,01$
<b>4. Eigenlösung</b>		
	$\lambda_4 = 6,55$ $\alpha_{e.4} = -50,2^\circ$ $\mathbf{v}_4^k = \begin{bmatrix} 0,42 \\ -0,79 \\ 0,45 \end{bmatrix}$	$f_{0.4} = 303,6 \text{ Hz}$ $\alpha_{e.4} = -58,9^\circ$ $\mathbf{v}_4^k = \begin{bmatrix} 0,48 \\ -0,60 \\ 0,63 \end{bmatrix}$ $a_4 = 2,32 \cdot 10^4 \text{ 1/s}^2$ $D_4 = 0,01$
weitere Eigenfrequenzen	$\lambda_5 = 9,21$ $\lambda_6 = 10,93$ $\lambda_7 = 13,37$ $\vdots$	$f_{0.5} = 583,6 \text{ Hz}$ $f_{0.6} = 598,0 \text{ Hz}$ $f_{0.7} = 779,2 \text{ Hz}$ $\vdots$

Tabelle 5.2: Eigenlösungen des theoretischen dynamischen Modells, bestimmt mittels Ritz-Diskretisierung, und Eigenlösungen des gemessenen dynamischen Modells, bestimmt mittels experimenteller Modalanalyse.



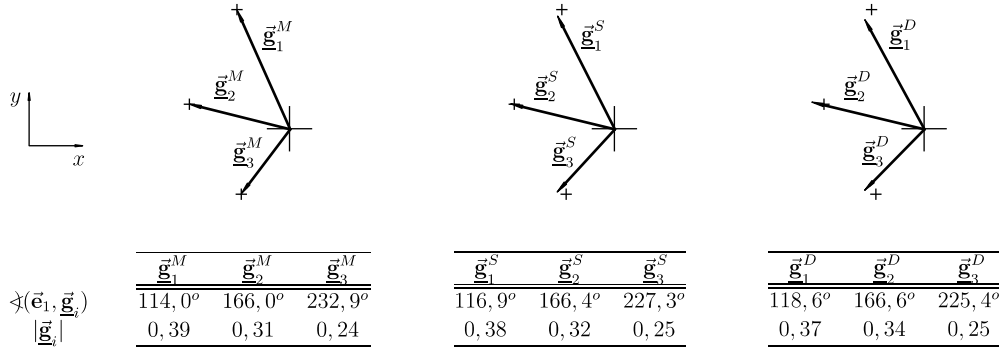


Abbildung 5.8: Richtungsvektoren der normierten statischen Übertragungsmatrizen des theoretischen statischen Modells  $\mathbf{G}^M$ , des gemessenen statischen Modells  $\mathbf{G}^S$  sowie des gemessenen dynamischen Modells  $\mathbf{G}^D$ . Die „+“ markieren die Endpunkte der  $\underline{\mathbf{g}}_i^M$  des theoretischen statischen Modells.

Die Diagramme in Abbildung 5.7 zeigen neben den gemessenen Frequenzgängen des Prototyps auch die Frequenzgänge des gemessenen dynamischen Modells. Wie zu erwarten werden zwar die Eigenfrequenzen gut wiedergegeben, jedoch verschieben sich aufgrund vernachlässigter Eigenlösungen die Minima der Frequenzgänge.

Im Zeitbereich lässt sich das gemessene dynamische Modell mit den Bewegungsgleichungen

$$\ddot{\mathbf{q}} + \text{diag}\{2D\omega_{0,t}\}\dot{\mathbf{q}} + \text{diag}\{\omega_{0,t}^2\}\mathbf{q} = \mathbf{T}_k^T \bar{\mathbf{k}}, \quad t = 1, 2, 3, 4, \quad (5.49)$$

der Ausgangsgleichung

$$\underline{\mathbf{u}}_e = \mathbf{T}_u \mathbf{q} \quad (5.50)$$

und den Modalmatrizen

$$\mathbf{T}_u = [\mathbf{v}_1^u, \dots, \mathbf{v}_4^u], \quad \mathbf{T}_k = [a_1 \mathbf{v}_1^k, \dots, a_4 \mathbf{v}_4^k] \quad (5.51)$$

darstellen.

Aus dem Frequenzgang des gemessenen dynamischen Modells lässt sich für  $\Omega = 0$  Hz eine statische Übertragungsmatrix

$$\mathbf{G}^D = \sum_{t=1}^4 \frac{1}{\omega_{0,t}^2} \mathbf{v}_t \quad (5.52)$$

bestimmen und den statischen Übertragungsmatrizen des theoretischen statischen Modells (5.17) und des gemessenen statischen Modells (5.22) gegenüberstellen. In Abbildung 5.8 sind die normierten ausgezeichneten Richtungsvektoren aller Übertragungsmatrizen skizziert. Auch bei diesem Vergleich stimmen offensichtlich die Richtungen und Längen der Richtungsvektoren gut überein.

Letztlich zeigen sowohl die experimentelle Modalanalyse als auch die quasistatischen Experimente, dass die gewählten einfachen Euler-Bernoulli-Balkenmodelle genügen und insbesondere zum Beschreiben der Vorverwindung keine aufwendigeren Modelle notwendig sind.

## 5.4 Positionsregelung

In Kapitel 4.3 wurden drei Lösungen der inversen Aufgabe des Helixaktors diskutiert: die Methode der kleinsten Norm des Eingangsvektors, die Methode der Pseudoinversen sowie die Sektormethode. Die ersten beiden Methoden werden nicht im Experiment demonstriert, da ihre Implementierung klar ist: bei gegebenem  $\underline{\mathbf{u}}_e$  wird ein quadratisches Optimierungsproblem gelöst, das den Eingangsvektor  $\underline{\mathbf{k}}$  bereitstellt. Die dritte Methode - die Sektormethode - löst die inverse Aufgabe durch geschicktes Zerlegen des Arbeitsraumes in Sektoren. Ihr Verfahren wird am Beispiel einer simplen integralen Positionsregelung, kurz: I-Regler, demonstriert.

Abbildung 5.9 a) zeigt einleitend eine reine *Positionssteuerung* nach der Sektormethode, das heißt, die Regelabweichung

$$\Delta \underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{u}}_w - \underline{\mathbf{u}}_e \quad (5.53)$$

zwischen Soll-Position  $\underline{\mathbf{u}}_w$  und Ist-Position  $\underline{\mathbf{u}}_e$  wird nicht zurückgeführt. Springt die Soll-Position auf  $\underline{\mathbf{u}}_w$ , so wird sich nur annähernd

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \underline{\mathbf{u}}_e(t) \approx \underline{\mathbf{u}}_w \quad (5.54)$$

einstellen.

Die Stellmatrix  $\mathbf{R}^s$  ist bei der Sektormethode veränderlich und sie muss entsprechend des angefahrenen Sektors vorgewählt werden. In Kapitel 4.3.3 wird detailliert beschrieben, wie der Sektor aus der Soll-Position bestimmt werden kann, wie also

$$s = f(\underline{\mathbf{u}}_w) \quad (5.55)$$

festzulegen ist.

### 5.4.1 Reglerstruktur

Der Prototyp des Helixaktors besitzt drei Eingänge. Somit lässt sich der Arbeitsraum streng in sechs Sektoren zerlegen, in denen jeweils bestimmte Stellmatrizen gelten. Mit der gemessenen statischen Übertragungsmatrix (5.22) und der Vorschrift (4.90) können alle  $\mathbf{R}^s$  berechnet werden. Jede Stellmatrix  $\mathbf{R}^s$  setzt sich aus zwei Vektoren

$$\mathbf{r}_u^s = \mathbf{R}^s [1, 0]^T, \quad \mathbf{r}_v^s = \mathbf{R}^s [0, 1]^T, \quad \mathbf{R}^s = [\mathbf{r}_u^s, \mathbf{r}_v^s] \quad (5.56)$$

zusammen. Der Vektor  $\underline{\mathbf{k}} = \mathbf{r}_u^s$  ermöglicht reine  $\underline{u}$ -Fahrten, der Vektor  $\underline{\mathbf{k}} = \mathbf{r}_v^s$  ermöglicht reine  $\underline{v}$ -Fahrten. Tabelle 5.3 illustriert die Vektoren  $\mathbf{r}_u^s$  und  $\mathbf{r}_v^s$ . Ergänzend werden auch die zugehörigen Sektoren dargestellt. Im Übrigen führen gegenüberliegende Sektoren zu gleichen Stellmatrizen und es gilt

$$\mathbf{R}^{s+N_e} = \mathbf{R}^s. \quad (5.57)$$

Somit genügen bei sechs Sektoren drei Stellmatrizen  $\mathbf{R}^s$ .

Der Positionsregler ist ein I-Regler. Üblicherweise wird als Reglermatrix die Inverse der statischen Übertragungsmatrix gewählt, siehe [58]. Die in Kapitel 4.3 diskutierten Lösungen der inversen Aufgabe liefern genau diese „Invertierungen“ der statischen Übertragungsmatrix. Bei der Sektormethode beträgt die Reglermatrix somit

$$\mathbf{K}_I = \beta \mathbf{R}^s. \quad (5.58)$$

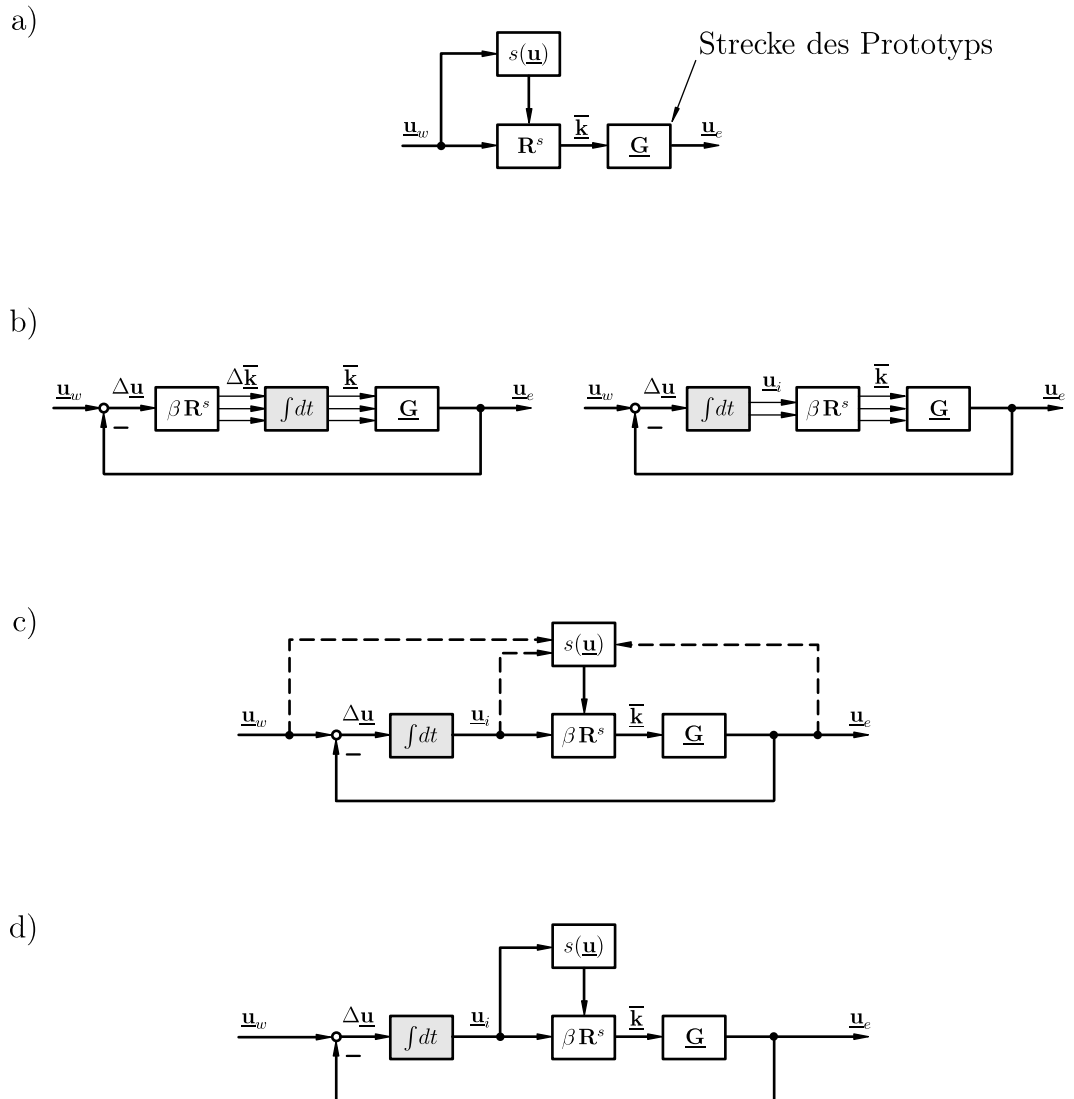


Abbildung 5.9: Reglerentwürfe zur Sektorermethode: a) reine Steuerung, b) I-Regler, Integrator vor oder nach  $\mathbf{R}^s$ , c) I-Regler, verschiedene Abgriffe zur Sektoridentifizierung, d) im Experiment implementierter I-Regler.

	$\mathbf{R}^1$	$\mathbf{R}^2$	$\mathbf{R}^3$
Sektor			
$\underline{u}$ -Fahrt	$r_u^1$  $\bar{k}_1 \quad \bar{k}_2 \quad \bar{k}_3$	$r_u^2$  $\bar{k}_1 \quad \bar{k}_2 \quad \bar{k}_3$	$r_u^3$  $\bar{k}_1 \quad \bar{k}_2 \quad \bar{k}_3$
$\underline{v}$ -Fahrt	$r_v^1$  $\bar{k}_1 \quad \bar{k}_2 \quad \bar{k}_3$	$r_v^2$  $\bar{k}_1 \quad \bar{k}_2 \quad \bar{k}_3$	$r_v^3$  $\bar{k}_1 \quad \bar{k}_2 \quad \bar{k}_3$

Tabelle 5.3: Stellmatrizen des Prototyps nach der Sektormethode.

Die Verstärkung  $\beta$  ist später noch einzustellen. Die Reglermatrix  $\mathbf{K}_I$  ist veränderlich, da  $\mathbf{R}^s$  veränderlich ist. Insbesondere wird sich die Reglermatrix an den Sektorgrenzen sprunghaft ändern.

Abbildung 5.9 b) illustriert zwei mögliche Entwürfe des I-Reglers mit den Reglergesetzen

$$\bar{\mathbf{k}} = \int_0^t \beta \mathbf{R}^s \Delta \underline{\mathbf{u}} \, d\bar{t} \quad (5.59)$$

und

$$\bar{\mathbf{k}} = \beta \mathbf{R}^s \int_0^t \Delta \underline{\mathbf{u}} \, d\bar{t}. \quad (5.60)$$

In den Skizzen bezeichnet  $\underline{\mathbf{u}}_i$  den Verschiebungsvektor des Integratorausgangs, hier als Integrator-Position bezeichnet.

Die Reglerentwürfe unterscheiden sich hinsichtlich der Lage des Integrators und der Reglermatrix. Beim ersten Entwurf kann die Reglermatrix problemlos sprunghaft geändert werden, da sie vor dem Integrator steht. Der Integrator glättet die Sprünge. Trotz allem ist der erste Reglerentwurf unbrauchbar, da der Integrator drei *unabhängige* Ausgänge besitzt.

Befindet sich  $\underline{\mathbf{u}}_w$  innerhalb des zulässigen Arbeitsraumes, so existiert mindestens ein zulässiger Eingangsvektor

$$\bar{\mathbf{k}}_w = f(\underline{\mathbf{u}}_w), \quad (5.61)$$

im besten Fall ein geeignet gewählter. Aufgrund der überzähligen Eingänge des Helixaktors existieren bei gegebenem  $\underline{\mathbf{u}}_w$  jedoch beliebig viele Lösungen  $\bar{\mathbf{k}}$ . Sollen sich mit zunehmender Zeit keine unzulässigen Eingangswerte ergeben, so muss die Regelung sicherstellen, dass  $\bar{\mathbf{k}}$  gegen  $\bar{\mathbf{k}}_w$  konvergiert. Diese Forderung wird genau dann erfüllt, wenn die Anzahl der Regelgrößen der Anzahl der Integratorausgänge entspricht, da dann keine überzähligen *unabhängigen* Eingänge existieren. Der zweite Reglerentwurf zeigt diesen Fall und somit den einzig praktikablen Entwurf<sup>9</sup>.

Die Reglermatrix wird sich im Betrieb sprunghaft ändern und im zweiten Entwurf wäre im Moment des Umschaltens mit Sprüngen des Eingangsvektors  $\bar{\mathbf{k}}$  zu rechnen. Wird jedoch genau dann umgeschaltet, wenn der Verschiebungspfad eine Sektorgrenze überschreitet, so treten keine  $\bar{\mathbf{k}}$ -Sprünge auf. Zeigt ein Verschiebungsvektor genau auf eine Sektorgrenze, so sind zwar zwei unterschiedliche Reglermatrizen möglich. Beide führen jedoch auf der Sektorgrenze zu gleichen Eingangsvektoren. Abbildung 4.16 mag das verdeutlichen.

Es bleibt noch zu klären, welche der drei Positionen  $\underline{\mathbf{u}}_w$ ,  $\underline{\mathbf{u}}_i$  oder  $\underline{\mathbf{u}}_e$  zur Identifizierung des Sektors und somit auch zum Umschalten der Reglermatrix genutzt werden kann. Der Reglerentwurf in Abbildung 5.9 c) illustriert das Problem. Naheliegender wäre eine Sektoridentifizierung mit der Soll-Position oder der Ist-Position. Einzig praktikabel ist jedoch  $\underline{\mathbf{u}}_i$ , also eine Identifizierung auf Grundlage der Integrator-Position. Sie steht über  $\mathbf{R}^s$  in direkter Beziehung zu  $\bar{\mathbf{k}}$  und ist die Projektion des aktuell eingestellten  $\bar{\mathbf{k}}$  in den zulässigen Arbeitsraum.

Abbildung 5.9 d) skizziert den im Experiment implementierten Regler.

<sup>9</sup>Wäre  $\mathbf{K}_I$  konstant, was hier jedoch nicht gilt, so müsste nicht zwischen erstem und zweitem Entwurf unterschieden werden. Der Integrator kann dann beliebig platziert werden.

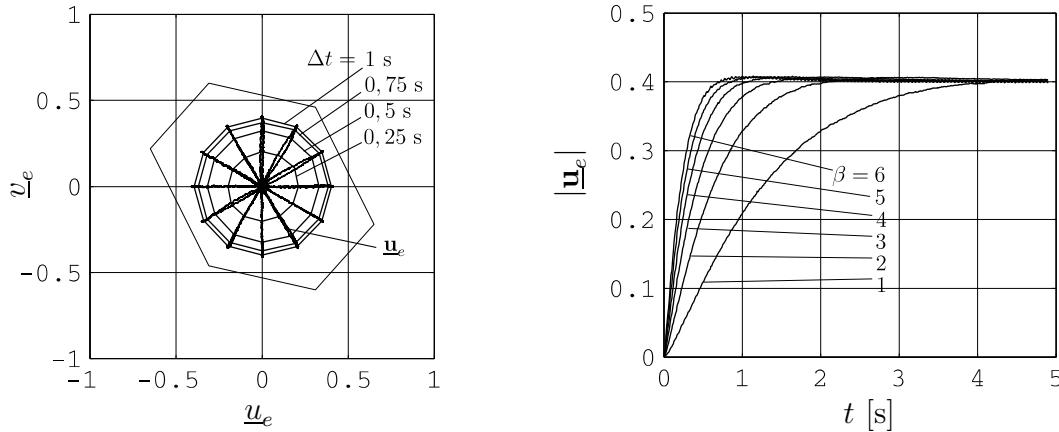


Abbildung 5.10: Strahlfahrten: Ist-Positionen  $\underline{u}_e$  bei verschiedenen Winkeln  $\alpha$  sowie die Sprungantworten  $|\underline{u}_e(t)|$  bei verschiedenen Verstärkungen  $\beta$ .

### 5.4.2 Beispiele

**Strahlfahrten:** Der Positionsregler wird an zwei Beispielen demonstriert. Im ersten Beispiel wird alle 5 s zwischen

$$\underline{u}_w = \mathbf{0} \quad (5.62)$$

und

$$\underline{u}_w = 0,4[\cos \alpha, \sin \alpha]^T \quad (5.63)$$

umgeschaltet. Es werden somit vom Ursprung beginnende Strahlen abgefahren.

Das erste Diagramm in Abbildung 5.10 zeigt die Ist-Positionen, hier für eine Verstärkung  $\beta = 4$  und für Winkel  $\alpha = 0^\circ, 30^\circ, \dots, 330^\circ$ . Die kreisähnlichen Polygonzüge markieren Abstände  $|\underline{u}_e(t)|$  gleicher Zeitdauern  $\Delta t$  nach der sprunghaften Erhöhung von  $\underline{u}_w$ . Da die Polygonzüge kreisähnlich sind, treten offensichtlich bei allen Richtungen gleiche Verschiebungsgeschwindigkeiten auf. Das ist angesichts der durchaus unterschiedlichen Reglermatrizen  $\mathbf{R}^s$  nicht zwangsläufig.

Das zweite Diagramm in Abbildung 5.10 zeigt die über alle  $\alpha$  gemittelten Sprungantworten  $|\underline{u}_e(t)|$  bei verschiedenen Verstärkungen. Die maximal dargestellte Verstärkung

$$\beta = 6 \quad (5.64)$$

kann als Stabilitätsgrenze des Regelkreises begriffen werden. Bei  $\beta \approx 7,5$  sind schwach mit der Zeit zunehmende Schwingungen beobachtbar, also instabiles Verhalten. Bei  $\beta \approx 5,5$  sind schwach mit der Zeit abnehmende Schwingungen beobachtbar, also stabiles Verhalten.

Als Verstärkung des Regelkreises in allen Sektoren wird letztlich

$$\beta = 4 \quad (5.65)$$

festgelegt, also ein klar unterhalb der experimentell bestimmten Stabilitätsgrenze liegender Wert.

Die Stabilitätsgrenze der Verstärkung kann auch näherungsweise anhand des gemessenen dynamischen Modells ermittelt werden. Mit den Modellgleichungen (5.49)

und (5.50), sowie dem Reglergesetz (5.60) folgt das Zustandsraummodell

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{r}} \\ \dot{\mathbf{u}}_i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\text{diag}\{\omega_{0,t}^2\} & -\text{diag}\{2D\omega_{0,t}\} & \mathbf{T}_k^T \mathbf{R}^s \\ -\beta \mathbf{T}_u & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{r} \\ \mathbf{u}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \beta \mathbf{I} \end{bmatrix} \underline{\mathbf{u}}_w, \\ \underline{\mathbf{u}}_i &= \mathbf{T}_u \mathbf{q} \end{aligned} \quad (5.66)$$

des Regelkreises. Die Verstärkung  $\beta$  ist genau so zu bestimmen, dass alle Eigenwerte der Systemmatrix in der linken Halbebene liegen, jedoch für mindestens einen Eigenwert

$$\Re\{\lambda_i\} = 0 \quad (5.67)$$

gilt. Bei dieser Verstärkung verhält sich der Regelkreis grenzstabil. Da in jedem Sektor unterschiedliche  $\mathbf{R}^s$  gelten, so ergeben sich auch unterschiedliche Verstärkungen  $\beta^s$  mit

$$\beta^1 = 2,82, \quad \beta^2 = 2,71, \quad \beta^3 = 2,84. \quad (5.68)$$

Das gemessene dynamische Modell - ein lineares, zeitinvariantes Modell - approximiert nur grob das tatsächlich stark nichtlineare Verhalten des Prototyps. Insofern sind die Unterschiede zwischen vorhergesagter Stabilitätsgrenze von  $\beta \approx 3$  und tatsächlicher Stabilitätsgrenze von  $\beta \approx 6$ , siehe Gleichung (5.64), durchaus tolerierbar.

**Rechteckfahrten:** Im zweiten Beispiel werden Rechtecke der Kantenlänge

$$\underline{a} = 0,6 \quad (5.69)$$

abgefahren. Die Soll-Position wird innerhalb  $\Delta t$  linear von einer Ecke zur nächsten verfahren. Die Diagramme in Abbildung 5.11 vergleichen sowohl Soll- und Ist-Position als auch Soll- und Integrator-Position, jeweils für  $\Delta t \in \{0,5 \text{ s}, 2 \text{ s}, 4 \text{ s}\}$ .

I-Regelungen sind grundsätzlich langsame Regelungen und bei schnellen Soll-Änderungen folgen große Regelabweichungen. Das zeigen auch die  $\underline{\mathbf{u}}_w$ - $\underline{\mathbf{u}}_e$ -Diagramme. Interessanter ist jedoch die Darstellung der Integrator-Position  $\underline{\mathbf{u}}_i$  bei guter Sollwertfolge, hier insbesondere für  $\Delta t = 4 \text{ s}$ . Im Vergleich zwischen Soll- und Integrator-Position zeigen sich trotz guter Sollwertfolge große Abweichungen. Sie sind wohl auf nichtlineare Effekte der MFCs zurückzuführen, die der I-Regler kompensiert - erkennbar an dem Unterschied zwischen  $\underline{\mathbf{u}}_w$  und  $\underline{\mathbf{u}}_i$ .

Die Markierungen in der  $\underline{\mathbf{u}}_w$ - $\underline{\mathbf{u}}_i$ -Darstellung deuten die Sektorgrenzen an, das heißt, genau die Positionen, bei denen die Reglermatrix umgeschaltet wird. Offensichtlich treten trotz des Umschaltens keine Störungen der Ist-Position auf.

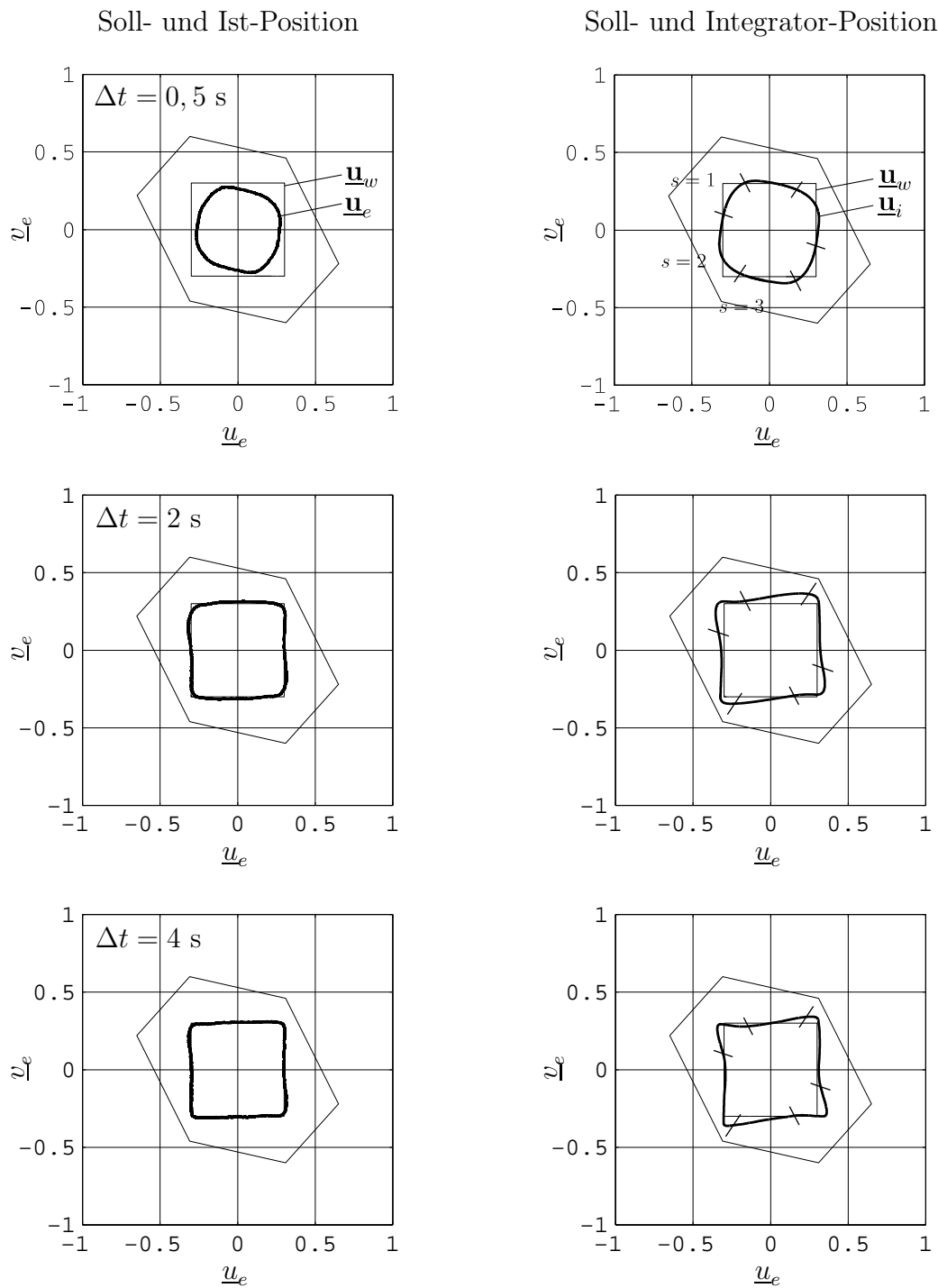


Abbildung 5.11: Rechteckfahrten für  $\Delta t \in \{0,5 \text{ s}, 2 \text{ s}, 4 \text{ s}\}$ : Vergleich zwischen Soll- und Ist-Position sowie zwischen Soll- und Integrator-Position.



# Kapitel 6

## Zusammenfassung und Ausblick

### 6.1 Zusammenfassung

Viele Biegeaktoren erlauben nur eindimensionale Arbeitsräume. Nichtsdestotrotz sind einige Wege bekannt, wie sich auch mit Biegeaktoren zweidimensionale Arbeitsräume realisieren lassen. Die vorliegende Arbeit skizziert eine weitere Lösung - das Konzept des Helixaktors. Die wohl wichtigste Frage zum Helixaktor ist seine optimale Gestaltung - nur dann ist er brauchbar. Das Problem wird hier umfassend diskutiert. Es werden auch weitere Aspekte erörtert, wie sinnvolle Modelle, schnelle Wege zur Konstruktion des Arbeitsraumes, Positionierprobleme und der Bau eines Prototyps.

Die Gestalt des Helixaktors entspricht näherungsweise einer Schraubenfläche. Ausgewählte Eigenschaften des Helixaktors lassen sich anhand der Schraubenfläche zumindest abschätzen. Wird beispielsweise ein vormals unverwundener Streifen in die Form der Schraubenfläche verdreht, so nehmen die Längsdehnungen quadratisch mit der Vorverwindung und der Querschnittsbreite zu. Der Prototyp des Helixaktors wird durch Piezokeramiken angetrieben. Bekanntermaßen sind Piezokeramiken ausgesprochen spröde und empfindlich gegenüber Dehnungen. Die abgeschätzten Längsdehnungen zeigen, dass dann kleine Vorverwindungen und kleine Breiten günstig sind.

Der Prototyp des Helixaktors ist ein Monomorph. Er besteht aus einem vorverwundenem Aluminiumträger mit aufgeklebtem Macro Fiber Composite. Die Abmaße des Prototyps betragen

$$L \approx 140 \text{ mm}, \quad b \times h \approx 3 \text{ mm} \times 1 \text{ mm}. \quad (6.1)$$

Er ist somit ausgesprochen schlank und bei einem unverwundenen Biegeaktor wären Euler-Bernoulli-Balkenmodelle ohne besonderen Nachweis sinnvoll. Der Helixaktor ist jedoch ein *vorverwundender Biegeaktor*. Eine umfangreiche Literaturstudie zu vorverwundenen Stäben belegt, dass auch stark vorverwundene Stäbe als Euler-Bernoulli-Balken modellierbar sind, siehe vor allem [76]. Der maximale Faserwinkel der gedachten Längsfasern erscheint besonders wichtig. Ist er klein, so kann ein vorverwundener Stab als stückweise unverwundener Stab approximiert werden. Die Vorverwindung des Prototyps beträgt  $220^\circ$  und sie ist durchaus groß. Sein maximaler Faserwinkel beträgt jedoch nur  $3,2^\circ$ .

Auf Grundlage der etablierten Euler-Bernoulli-Balkenmodelle werden ein statisches und ein dynamisches Modell des Helixaktors hergeleitet. Die Vorverwindung bereitet dabei keine besonderen Schwierigkeiten. Das Materialverhalten der piezokeramischen

Antriebe wird in den Modellen linearisiert. Somit werden nichtlineare Effekte der Piezokeramik vernachlässigt. Trotzdem lassen sich die Modelle zufriedenstellend im Experiment validieren.

Das dynamische Modell des Helixaktors wird in dieser Arbeit nur validiert, sonst jedoch nicht weiter benötigt. Im Gegensatz dazu wird anhand des statischen Modells der Arbeitsraum diskutiert, der Helixaktor optimiert und die inverse Aufgabe gelöst. Das statische Modell beschreibt die Verschiebung des freien Aktorendes in Abhängigkeit der Eingangswerte. Es vernachlässigt weitere mechanische Lasten, um möglichst einfache Eingangs-Ausgangs-Beziehungen angeben zu können.

Besitzt der Helixaktor  $N_e$  aktive Elemente, mithin  $N_e$  unabhängige Eingänge, so enthält seine statische Übertragungsmatrix  $N_e$  *ausgezeichnete Richtungsvektoren*. Aus den Richtungsvektoren lässt sich sofort der Arbeitsraum des Helixaktors bestimmen, also das Gebiet aller erreichbaren Positionen. Werden die Richtungsvektoren nach ihrem Richtungswinkel vorsortiert, so kann die Hülle des Arbeitsraumes durch einfaches Aneinanderreihen der Richtungsvektoren konstruiert werden.

Auch ohne konkrete Arbeitsaufgabe für den Helixaktor erscheint ein möglichst großer und ausgewogener Arbeitsraum sinnvoll. Ein gutes Maß für beide Ziele ist der Flächeninhalt des Arbeitsraumes. Basierend darauf wird ein Optimierungsproblem formuliert. Das Optimierungsproblem ist anspruchsvoll, da einerseits kontinuierliche Parameter auftreten, wie die Vorverwindung, andererseits aber auch diskrete Parameter erforderlich sind, wie die Anzahl der unabhängigen Eingänge oder die Topologie der aktiven Elemente. Das Optimierungsproblem wird hier in zwei kombinatorische Optimierungsprobleme zerlegt und es ist dadurch gut lösbar.

Die optimalen Topologien der aktiven Elemente werden für Vorverwindungen bis  $720^\circ$  berechnet. Zwei Ergebnisse verdienen besondere Erwähnung. Erstens genügen für große, zweidimensionale Arbeitsräume zwei oder drei unabhängige Eingänge und Vorverwindungen von ca.  $180^\circ$ . Zweitens wird sich als optimale Verschaltung zwischen den aktiven Elementen und den unabhängigen Eingängen immer

$$\mathbf{r} = [1, 2, 3, -1, -2 - 3, 1, 2, 3, \dots] \quad (6.2)$$

einstellen, hier angegeben für drei unabhängige Eingänge.

Die *inverse Aufgabe des Helixaktors* ist das Bestimmen günstiger Eingangswerte bei gegebener Position. In dieser Arbeit werden drei Wege diskutiert. Die ersten beiden Verfahren lösen ein quadratisches Optimierungsproblem. Das dritte Verfahren - die hier eingeführte Sektormethode - nutzt eine geschickte Zerlegung des Arbeitsraumes in Sektoren. Mit ihr können auf einfachem Weg alle Punkte innerhalb des Arbeitsraumes angefahren werden. In Abhängigkeit des angefahrenen Sektors wird eine bestimmte Stellmatrix vorgewählt, mit der die Eingangswerte berechnet werden. Das Verfahren wird auch experimentell demonstriert.

## 6.2 Ausblick

Diese erste Arbeit zum Helixaktor beschreibt wesentliche Fragen seiner Realisierung. Einige Probleme konnten gelöst werden. Beispielsweise genügen für den Helixaktor Euler-Bernoulli-Balkenmodelle. Auch die Topologie der aktiven Elemente erscheint optimal und sie erlaubt klar zweidimensionale Arbeitsräume.

Der Prototyp des Helixaktors wird mit Macro Fiber Composites angetrieben. Es wäre denkbar, auf Grundlage der hier berechneten optimalen Topologien einen besonders konfektionierten MFC zu fertigen, der dann bequem auf einen vorverwundenen Träger aufgeklebt werden kann. Bei diesem MFC ist allein das Layout der Kontaktbahnen zu modifizieren, so dass sich die notwendige Elementteilung ergibt. Neuartige Fertigungsmethoden sind somit nicht erforderlich. Der Prototyp des Helixaktors wurde aus einem vollständig durchkontaktierten MFC gefertigt, dessen Kontaktbahnen nachträglich unterbrochen wurden. Mit dem vorgeschlagenen, speziellen MFC wäre dies überflüssig<sup>1</sup>.

Neben dem hier realisierten Helixaktor mit Macro Fiber Composites wäre auch ein vorverwundener piezokeramischer Grundkörper denkbar. Das heißt, die charakteristische Form des Helixaktors wird vor dem Sintern der Keramik erzeugt. Der hier erwähnte *Helimorph* lässt vermuten, dass dieser Weg möglich ist. Der *Helimorph* besitzt durchgehende Kontakte auf Unter- und Oberseite. Für den Helixaktor müssen diese Kontakte jedoch an bestimmten Stellen unterbrochen werden. Insbesondere diese technologische Fragestellung wäre somit zu klären.

Der Helixaktor ist ein gerader Stab konstanter Vorverwindung. Sein Konzept muss jedoch keineswegs auf solche Stäbe beschränkt bleiben. Auch beliebig vorgekrümmte und vorverwundene Stäbe sind als Grundkörper möglich. Bei geschickter Platzierung der aktiven Elemente ist dann ein Biegeaktor mit dreidimensionalem Arbeitsraum realisierbar. Die hier eingeführten Stabmodelle lassen sich entsprechend erweitern. Bleibt der Aktor nach wie vor schlank, so genügen auch in diesem Fall Euler-Bernoulli-Balkenmodelle. Die hergeleiteten Methoden zum Arbeitsraum, zur Optimierung und zur inversen Aufgabe beschränken sich zwar auf zweidimensionale Arbeitsräume, es ist jedoch denkbar, sie entsprechend für dreidimensionale Arbeitsräume zu erweitern.

---

<sup>1</sup>Als Ausgangspunkt würde sich der Typ M14003 anbieten. Er wird auch in dieser Arbeit verwendet. Mögliche optimale Topologien, sprich Elementteilungen, zeigt beispielsweise Abbildung 4.14. Es ist bekannt, dass der Hersteller der MFCs individuelle Kundenwünsche zum Layout der Kontaktbahnen realisieren kann.



# Literaturverzeichnis

- [1] ALICI, G. ; MUI, B. ; COOK, C.: Bending modeling and its experimental verification for conducting polymer actuators dedicated to manipulation applications. In: *Sensors and Actuators A* 126 (2006), S. 396–404
- [2] ANLIKER, M. ; TROESCH, B.A.: Lateral vibrations of pretwisted rods with various boundary conditions. In: *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik* 14 (1963), S. 218–236
- [3] BASAK, S. ; RAMAN, A. ; GARIMELLA, S.V.: Dynamic response optimization of asymmetrically configured piezoelectric fans. In: *Proceedings of ASME 2003 Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference, Chicago, 2003*
- [4] BATHE, K.J.: *Finite-Elemente-Methoden*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 2002
- [5] BENT, A.A. ; HAGOOD, N.W.: Piezoelectric fiber composites with interdigitated electrodes. In: *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 8 (1997), S. 903–919
- [6] BRONSTEIN, I.N. ; SEMENDJAJEW, K.A. ; MUSIOL, G. ; MÜHLIG, H.: *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, Thun, Frankfurt am Main, 2001
- [7] BURKARD, R.E.: *Methoden der ganzzahligen Optimierung*. Springer Verlag, Wien, New York, 1972
- [8] CARNEGIE, W.: Static bending of pre-twisted cantilever blading. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers* 171 (1957), S. 873–894
- [9] CHOPRA, I.: Review of state of art of smart structures and integrated systems. In: *AIAA Journal* 40 (2002), S. 2145–2187
- [10] CHRISTOPHERSEN, M. ; SHAPIRO, B. ; SMELA, E.: Characterization and modeling of PPy bilayer microactuators, Part 1. Curvature. In: *Sensors and Actuators B* 115 (2006), S. 596–609
- [11] CHU, C.: The effect of initial twist on the torsional rigidity of thin prismatical bars and tubular members. In: *Proceedings of the First U.S. National Congress of Applied Mechanics, Chicago, 1951*, S. 265–269

- [12] CRAWLEY, E.F. ; ANDERSON, E.H.: Detailed models of piezoceramic actuation of beams. In: *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 1 (1990), S. 4–25
- [13] CZICHOS, H.(Hrsg.): *Hütte - Die Grundlagen der Ingenieurwissenschaften, 31. Auflage*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2000
- [14] DAWSON, B.: Coupled bending-bending vibrations of pre-twisted cantilever blading treated by the Rayleigh-Ritz energy method. In: *Journal of Mechanical Engineering Science* 10 (1968), S. 381–388
- [15] DAWSON, B. ; CARNEGIE, W.: Modal curves of pre-twisted beams of rectangular cross-section. In: *Journal of Mechanical Engineering Science* 11 (1969), S. 1–13
- [16] DAWSON, B. ; GHOSH, N.G. ; CARNEGIE, W.: Effect of slenderness ratio on the natural frequencies of pre-twisted cantilever beams of uniform rectangular cross-section. In: *Journal of Mechanical Engineering Science* 13 (1971), S. 51–59
- [17] DEN HARTOG, J.P.: *Advanced Strength of Materials*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1952
- [18] DERAEMAERKER, A. ; BENELECHI, S. ; BENJEDDOU, A. ; PREUMONT, A.: Analytical and numerical computation of homogenized properties of MFCs: application to a composite boom with MFC actuators and sensors. In: *Proceedings of III EC-COMAS Thematic Conference on Smart Structures and Materials, Gdansk, 2007*
- [19] DO CARMO, M.P.: *Differentialgeometrie von Kurven und Flächen*. Vieweg Verlag, Braunschweig, Wiesbaden, 1993
- [20] DOKUMACI, E. ; THOMAS, J. ; CARNEGIE, W.: Matrix displacement analysis of coupled bending-bending vibrations of pretwisted blading. In: *Journal of Mechanical Engineering Science* 9 (1967), S. 247–254
- [21] FATIKOW, S.: *Mikroroboter und Mikromontage: Aufbau, Steuerung und Planung von flexiblen, mikroroboterbasierten Montagestationen*. Teubner Verlag, Stuttgart, Leipzig, 2000
- [22] FHG IKTS: *Jahresbericht 2005*. Fraunhofer-Institut für Keramische Technologien und Systeme (FhG IKTS), Dresden, 2005
- [23] GARNIER, A. ; BOUROUINA, T. ; FUJITA, H. ; HIRAMOTO, T. ; ORSIER, E. ; PEUZIN, J.C.: Magnetic actuation of bending and torsional vibrations for 2D optical-scanner application. In: *Sensors and Actuators A* 84 (2000), S. 156–160
- [24] GAUS, N.: *Entwurf zur Regelung eines vorverwundenen Biegeaktors - Modellbildung und Mehrgrößenregelung*. Studienarbeit, Universität Karlsruhe (TH), Fakultät für Maschinenbau, Institut für Technische Mechanik, 2006
- [25] GOYAL, S. ; PERKINS, N.C. ; LEE, C.L.: Torsional buckling and writhing dynamics of elastic cables and DNA. In: *Proceedings of ASME 2003 Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference, Chicago, 2003*

- [26] GRAHAM, R.L.: An efficient algorithm for determining the convex hull of a finite planar set. In: *Information Processing Letters* 1 (1972), S. 132–133
- [27] GROSS, D. ; HAUGER, W. ; SCHNELL, W. ; WRIGGERS, P.: *Technische Mechanik, Band 4: Hydromechanik, Elemente der Höheren Mechanik, Numerische Methoden*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 2004
- [28] HAGOOD, N.W. ; BENT, A.: Development of piezoelectric fiber composites for structural actuation. In: *34th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, La Jolla*, 1993, S. 3625–3638
- [29] HAHN, H.G.: *Elastizitätstheorie: Grundlagen der linearen Theorie und Anwendungen auf eindimensionale, ebene und räumliche Probleme*. Teubner Verlag, Stuttgart, 1985
- [30] HAN, L.H. ; CHEN, S.: Wireless bimorph micro-actuators by pulsed laser heating. In: *Sensors and Actuators A* 121 (2005), S. 35–43
- [31] HE, J. ; FU, Z.F.: *Modal Analysis*. Butterworth-Heinemann, Oxford, 2001
- [32] HOOLEY, A. ; PEARCE, D.H. ; LENEL, U.R. ; MCKEVITT, G. ; SHEPHERD, M.R.: *Electro active devices*. United States Patent, No.: US 6,833,656 B2, 2004
- [33] HOWATT, G.N.: *Bimorph Element*. United States Patent, No.: 2,633,543, 1953
- [34] HUSTY, M. ; KARGER, A. ; SACHS, H. ; STEINHILPER, W.: *Kinematik und Robotik*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1997
- [35] ICARDI, U.: Large bending actuator made with SMA contractile wires: theory, numerical simulation and experiments. In: *Composites, Part B* 32 (2001), S. 259–267
- [36] ISHIDA, A. ; SATO, M. ; SAWAGUCHI, T.: *Omnidirectional flex-type shape memory alloy film actuator individual, process for producing the same, and optical fiber*. United States Patent Application Publication, Pub. No.: US 2001/0021290 A1, 2001
- [37] JAIN, A. ; QU, H. ; TODD, S. ; XIE, H.: A thermal bimorph micromirror with large bi-directional and vertical actuation. In: *Sensors and Actuators A* 122 (2005), S. 9–15
- [38] JIANG, J. ; HILLERINGMANN, U. ; SHUI, X.: Electro-thermo-mechanical analytical modeling of multilayer cantilever microactuator. In: *Sensors and Actuators A* 137 (2007), S. 302–307
- [39] JUHAS, L. ; VUJANIĆ, A. ; ADAMOVIĆ, N. ; NAGY, L. ; BOROVAC, B.: A platform for micropositioning based on piezo legs. In: *Mechatronics* 11 (2001), S. 869–897
- [40] KAMLAH, M.: Ferroelectric and ferroelastic piezoceramics-modeling of electromechanical hysteresis phenomena. In: *Continuum Mechanics and Thermodynamics* 13 (2001), S. 219–268

- [41] KEIMER, R. ; ALGERMISSEN, S. ; PAVLOVIC, N. ; BUDDE, C.: Smart structures technologies for parallel kinematics in handling and assembly. In: *Proceedings of SPIE* 6527 (2007), S. 65270D
- [42] KIELBASINSKY, A. ; SCHWETLICK, H.: *Numerische lineare Algebra, eine computerorientierte Einführung*. 1988
- [43] KIM, J.O. ; KHOSLA, K.: Dexterity measures for design and control of manipulators. In: *Proceedings of IROS'91, IEEE/RSJ International Workshop on Intelligent Robots and Systems, Osaka*, 1991, S. 758–763
- [44] KLAPPER, I.: Biological applications of the dynamics of twisted elastic rods. In: *Journal of Computational Physics* 125 (1996), S. 325–337
- [45] KLEIN, C.A. ; BLAHO, B.E.: Dexterity measures for the design and control of kinematically redundant manipulators. In: *The International Journal of Robotics Research* 6 (1987), S. 72–83
- [46] KLINGBEIL, E.: *Tensorrechnung für Ingenieure*. Bibliographisches Institut, Mannheim, 1966
- [47] KNOTHE, K. ; WESSELS, H.: *Finite Elemente*. Springer Verlag, Berlin, 1992
- [48] KOHL, M. ; BRUGGER, D. ; OHTSUKA, M. ; KREVET, B.: A ferromagnetic shape memory actuator designed for large 2D optical scanning. In: *Sensors and Actuators A* 135 (2007), S. 92–98
- [49] KREJCI, P. ; KUHNEN, K.: Inverse control of systems with hysteresis and creep. In: *IEEE Proceedings - Control Theory and Applications* 148 (2001), S. 185–192
- [50] KUHNEN, K.: *Inverse Steuerung piezoelektrischer Aktoren mit Hysterese-, Kriech- und Superpositionsoperatoren*. Dissertation, Fakultät Physik und Elektrotechnik der Universität des Saarlandes, Dissertation, 2001
- [51] KUHNEN, K. ; JANOCHA, H.: Complex hysteresis modeling of a broad class of hysteretic nonlinearities. In: *Proceedings of Actuator 2002, 8th International Conference on New Actuators, Bremen*, 2002, S. 688–691
- [52] KUMAR, A. ; WALDRON, K.J.: The workspaces of a mechanical manipulator. In: *Journal of Mechanical Design* 103 (1981), S. 665–672
- [53] LÖBMANN, P. ; LANGE, U. ; GLAUBITT, W. ; HUTTER, F. ; SPORN, D.: Powders, fibers, thin films and aerogels: sol-gel-derived piezoelectric materials. In: *Key Engineering Materials* 224–226 (2002), S. 613–618
- [54] LENZ, J. ; VIELSACK, P.: Eine kritische Bemerkung zur Theorie des Drillknickens. In: *Der Stahlbau* 8 (1980), S. 245
- [55] LLOYD, J.M. ; WILLIAMS, R.B. ; INMAN, D.J. ; WILKIE, W.K.: An analytical model of the mechanical properties of the single-crystal macro-fiber composite actuator. In: *Proceedings of SPIE* 5387 (2004), S. 37–46



- [56] LOVE, A.E.H.: *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Cambridge University Press, Cambridge, 1927
- [57] LUNZE, J.: *Regelungstechnik 1: Systemtheoretische Grundlagen, Analyse und Entwurf einschleifiger Regelungen*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2001
- [58] LUNZE, J.: *Regelungstechnik 2: Mehrgrößensysteme, Digitale Regelung*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2005
- [59] MAGNUS, K. ; POPP, K.: *Schwingungen: Eine Einführung in physikalische Grundlagen und die theoretische Behandlung von Schwingungsproblemen*. Teubner Verlag, Wiesbaden, 2005
- [60] MAIER, E.: Biegeschwingungen von spannungslos verwundenen Stäben, insbesondere von Luftschraubenblättern. In: *Ingenieur Archiv* 11 (1940), S. 73–98
- [61] MASARATI, P. ; MORANDINI, M. ; RIEMENSCHNEIDER, J. ; WIERACH, P. ; GLUHH, S. ; BARKANOV, E.: Optimal design of an active twist 1:2.5 scale rotor blade. In: *Proceedings of the 31st European Rotorcraft Forum, Firenze, 2005*
- [62] MAURINI, C. ; PORFIRI, M. ; POUGET, J.: Numerical methods for modal analysis of stepped piezoelectric beams. In: *Journal of Sound and Vibration* 298 (2006), S. 918–933
- [63] MURRAY, R.M. ; ; ZEXIANG, L. ; SASTRY, S.S.: *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. CRC Press, Boca Raton, 1994
- [64] NATKE, H.G.: *Einführung in Theorie und Praxis der Zeitreihen- und Modalanalyse*. Vieweg Verlag, Braunschweig, Wiesbaden, 1992
- [65] NEMHAUSER, G.L. ; WOLSEY, L.A.: *Integer and combinatorial optimization*. Wiley, New York, 1988
- [66] NGUYEN, C.H. ; KORNMAN, X.: A comparison of dynamic piezoactuation of fiber-based actuators and conventional PZT patches. In: *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 17 (2006), S. 45–55
- [67] PADULA, S.L. ; KINCAID, R.K.: *Optimization Strategies for Sensor and Actuator Placement (NASA/TM-1999-209126)*. National Aeronautics and Space Administration, Langley Research Center, Hampton, 1999
- [68] PARK, G. ; RUGGIERO, E. ; INMAN, D.J.: Dynamic testing of an inflatable structure using smart materials. In: *Smart Materials and Structures* 11 (2002), S. 147–166
- [69] PARK, J.H. ; KWON, T.Y. ; YOON, D.S. ; KIM, H. ; KIM, T.S.: Fabrication of microcantilever sensors actuated by piezoelectric  $Pb(Zr_{0.52}Ti_{0.48})O_3$  thick films and determination of their electromechanical characteristics. In: *Advanced Functional Materials* 15 (2005), S. 2021–2028

- [70] PEARCE, D.H. ; HOOLEY, A. ; BUTTON, T.W.: On piezoelectric super-helix actuators. In: *Sensors and Actuators A* 100 (2002), S. 281–286
- [71] PEREZ, R. ; AGNUS, J. ; CLEVY, C. ; HUBERT, A. ; CHAILLET, N.: Modeling, fabrication, and validation of a high-performance 2-dof piezoactuator for micro-manipulation. In: *IEEE Transactions on Mechatronics* 10 (2005), S. 161–171
- [72] PREPARATA, F.P. ; SHAMOS, M.I.: *Computational geometry: an introduction*. Springer Verlag, New York, 1985
- [73] PRETORIUS, J. ; HUGO, M. ; SPANGLER, R.: A comparison of packaged piezoactuators for industrial applications. In: *Proceedings of SPIE* 5388 (2004), S. 131–142
- [74] PREUMONT, A.: *Vibration Control of Active Structures: An Introduction*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002
- [75] ROSEN, A.: Theoretical and experimental investigation of the nonlinear torsion and extension of initially twisted bars. In: *Journal of Applied Mechanics* 50 (1983), S. 321–326
- [76] ROSEN, A.: Structural and dynamic behavior of pretwisted rods and beams. In: *Applied Mechanics Reviews* 44 (1991), S. 483–515
- [77] ROTH, B.: Performance evaluation of manipulators from a kinematic viewpoint. In: *Performance evaluation of programmable robots and manipulators, National Bureau of Standards, publication 459* (1976), S. 39–61
- [78] RUGGIERO, E.J. ; INMAN, D.J.: Gossamer spacecraft: recent trends in design, analysis, experimentation, and control. In: *Journal of Spacecraft and Rockets* 43 (2006), S. 10–24
- [79] RUSCHMEYER, K.: *Piezokeramik - Grundlagen, Werkstoffe, Applikationen*. Expert Verlag, Renningen-Malmsheim, 1995
- [80] SARAVANOS, D.A. ; HEYLIGER, P.R.: Mechanics and computational models for laminated piezoelectric beams, plates, and shells. In: *Applied Mechanics Reviews* 52 (1999), S. 305–319
- [81] SCHWARZ, H.R.: *Methode der finiten Elemente: Eine Einführung unter besonderer Berücksichtigung der Rechnerpraxis*. Teubner Verlag, Stuttgart, 1980
- [82] SCHWEIZER, S. ; COUSSEAU, P. ; LAMMEL, G. ; CALMES, S. ; RENAUD, P.: Two-dimensional thermally actuated optical microprojector. In: *Sensors and Actuators A* 85 (2000), S. 424–429
- [83] SEEMANN, W.: Deformation of an elastic helix in contact with a rigid cylinder. In: *Archive of Applied Mechanics* 67 (1996), S. 117–139
- [84] SEEMANN, W.: Stresses in a thin piezoelectric element bonded to a half-space. In: *Applied Mechanics Reviews* 50 (1997), S. 204–209

- [85] SEEMANN, W. ; WOLF, K. ; HAGEDORN, P.: Comparison of refined beam theory and FEM for piezo-actuated structures. In: *Proceedings of the ASME 1997 Design Engineering Technical Conferences, Sacramento, 1997*
- [86] SEFFEN, K.A.: Theoretical performance of a coiled coil piezoelectric bimorph. In: *Sensors and Actuators A* 133 (2007), S. 486–492
- [87] SHETA, E.F. ; MOSES, R. ; HUTTSELL, L. ; HARRAND, V.: Active control of F/A-18 vertical tail buffeting using piezoelectric actuators. In: *Proceedings of 44th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Norfolk, 2003*, S. 4427–4437
- [88] SHIKIN, E.V.: *Handbook and Atlas of Curves*. CRC Press, Boca Raton, 1995
- [89] SIMON, P.: *Low Cost Bending Actuator with Two-Dimensional Motion*. European Patent Office, Intl. Pub. No.: WO 03/071613 A2, 2004
- [90] SMART MATERIAL GMBH: *Produktbeschreibung zu Macro Fiber Composite*. Smart Material GmbH, Dresden, 2007
- [91] SODANO, H.A. ; INMAN, D.J. ; PARK, G.: Comparison of piezoelectric energy harvesting devices for recharging batteries. In: *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 16 (2005), S. 799–807
- [92] SODANO, H.A. ; LLOYD, J. ; INMAN, D.J.: An experimental comparison between several active composite actuators for power generation. In: *Smart Materials and Structures* 15 (2006), S. 1211–1216
- [93] STEEL, M.R. ; HARRISON, F. ; HARPER, P.G.: The piezoelectric bimorph: an experimental and theoretical study of its quasistatic response. In: *Journal of Physics D: Applied Physics* 11 (1978), S. 979–89
- [94] SUGAWARA, T. ; HIROTA, K. ; WATANABE, M. ; MINETA, T. ; MAKINO, E. ; TOH, S. ; SHIBATA, T.: Shape memory thin film actuator for holding a fine blood vessel. In: *Sensors and Actuators A* 130–131 (2006), S. 461–467
- [95] THOMAS, J. ; DOKUMACI, E.: Simple finite elements for pre-twisted blading vibration. In: *Aeronautical Quarterly* 25 (1974), S. 109–118
- [96] TIERSTEN, H.F.: *Linear Piezoelectric Plate Vibrations*. Plenum Press, New York, 1969
- [97] TIMOSHENKO, S.: Analysis of bi-metal thermostats. In: *Journal of the Optical Society of America* 11 (1925), S. 233–255
- [98] TODA, M. ; LAWRENCEVILLE, N.J.: *Two-dimensional laser beam scanner using PVDF bimorph*. United States Patent, No.: 5,295,014, 1994
- [99] WAGNER, M. ; ROOSEN, A. ; OOSTRA, H. ; HÖPPENER, R. ; DE MOYA, M.: Novel low voltage piezoactuators for high displacements. In: *Journal of Electroceramics* 14 (2005), S. 231–238

- [100] WANG, Z. ; ZHU, W. ; YAO, X.: d31-type inplane bending multilayer piezoelectric microactuators - a design concept and its applications. In: *Sensors and Actuators A* 101 (2002), S. 262–268
- [101] WAUER, J.: Zum Kippen vorverwundener Stäbe unter konservativer Biegung. In: *Bauingenieur* 56 (1981), S. 307–310
- [102] WIERACH, P. ; SCHÖNECKER, A.: Bauweisen und Anwendungen von Piezokompositen in der Adaptronik. In: *Tagungsband zum Adaptronic Congress 2005, Göttingen, 2005*
- [103] WILKIE, W. ; HIGH, J. ; BOCKMAN, J.: Reliability testing of NASA piezocomposite actuators. In: *Proceedings of Actuator 2002, 8th International Conference on New Actuators, Bremen* Bd. 8, 2002
- [104] WILKIE, W.K. ; BRYANT, R.G. ; HIGH, J.W. ; FOX, R.L. ; HELLBAUM, R.F. ; JALINK, A. ; LITTLE, B.D. ; MIRICK, P.H.: Low-cost piezocomposite actuator for structural control applications. In: *Proceedings of SPIE's 7th Annual International Symposium on Smart Structures and Materials, Newport Beach, 2000*
- [105] WILLIAMS, R.B. ; INMAN, D.J. ; SCHULTZ, M.R. ; HYER, M.W. ; WILKIE, W.K.: Nonlinear tensile and shear behavior of Macro Fiber Composite actuators. In: *Journal of Composite Materials* 38 (2004), S. 855–869
- [106] WILLIAMS, R.B. ; INMAN, D.J. ; WILKIE, W.K.: Electromechanical property characterization of the Macro Fiber Composite actuator. In: *Proceedings of ISMA 2005, First International Symposium on Macro Fiber Composite Applications, Dresden, 2005*
- [107] WOLF, K. ; FRESE, S. ; HAGEDORN, P. ; SEEMANN, W.: Thickness-optimization of piezoceramic transducers for energy transfer. In: *Proceedings of the ASME 1997 Design Engineering Technical Conferences, Sacramento, 1997*
- [108] WOOD, R.J. ; STELTZ, E. ; FEARING, R.S.: Optimal energy density piezoelectric bending actuators. In: *Sensors and Actuators A* 119 (2005), S. 476–488
- [109] WÖRN, H. ; MUNASSYPOV, R. ; FATIKOW, S.: Actuation principle and motion control of a three-leg piezoelectric micromanipulation robot. In: *Proceedings of Actuator 98, 6th International Conference on New Actuators, Bremen, 1998*, S. 203–206
- [110] WÖRN, H. ; SCHMOECKEL, F. ; BUERKLE, A. ; SAMITIER, J. ; PUIG-VIDAL, M. ; JOHANSSON, S. ; SIMU, U. ; MEYER, J.U. ; BICHL, M.: From decimeter- to centimeter-sized mobile microrobots - the development of the MINIMAN system. In: *Proceedings of SPIE* 4568 (2001), S. 175–186
- [111] ZHU, H. ; MIAO, J. ; CHEN, B. ; WANG, Z. ; ZHU, W.: Micromachining process of piezoelectric microcantilever using PZT thin film. In: *International Journal of Computational Engineering Science* 4 (2003), S. 509–512



Schriftenreihe des Instituts für  
Technische Mechanik



ISSN: 1614-3914

ISBN: 978-3-86644-232-0

---

[www.uvka.de](http://www.uvka.de)