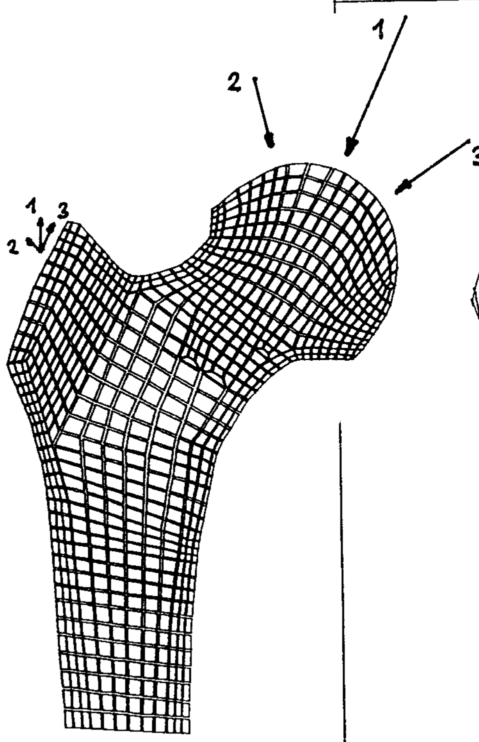
First published in: ZAMM (Z. angew. Math. Mech.) 71 (1991), T697-T700



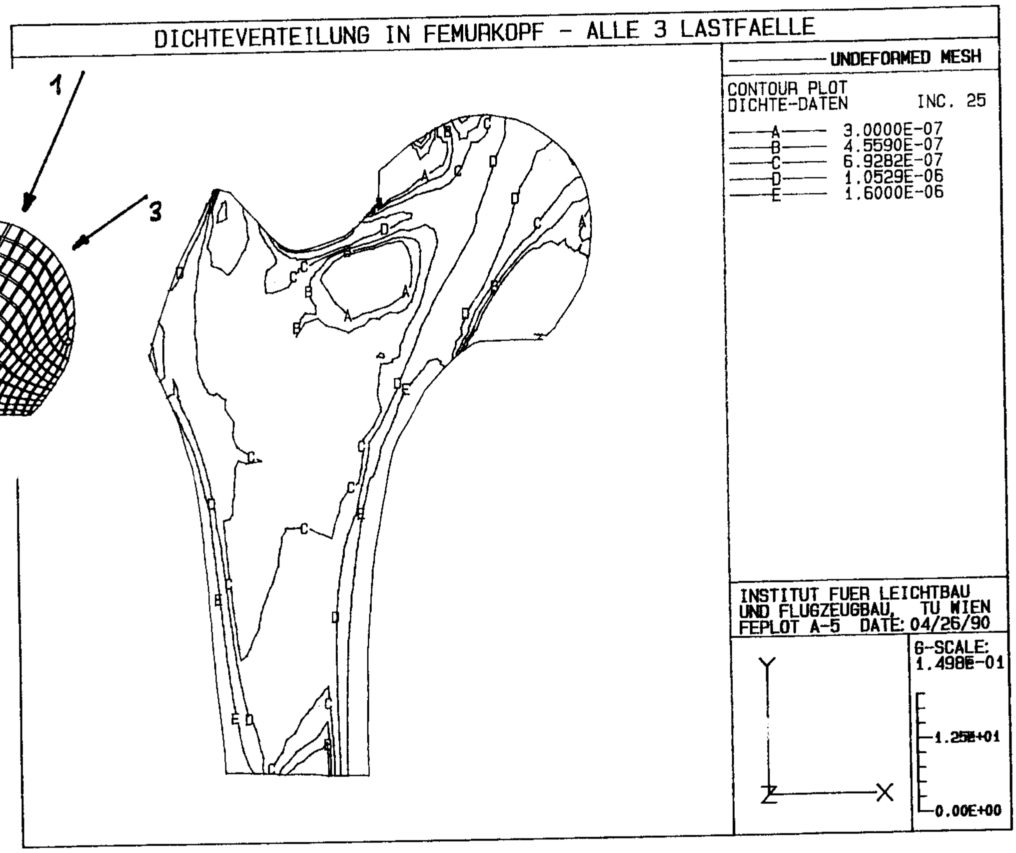


Abb. 7 Abb. 8

Abb. 7. Dichteverteilung in Femur-Kopf: Finite Elemente Netz, sowie die drei benützten typischen Lastfälle.
Abb. 8. Dichteverteilung in Femur-Kopf: Ergebnis der numerischen Simulation.

Literatur

1 Wolff, J.: Das Gesetz der Transformation der Knochen. Hirschwald, Berlin 1892.
2 Carter, D. R.; Fyhrie, D. P.; Whalen, R. T.: Trabecular bone density and loading history: Regulation of connective tissue biology by mechanical energy. J. Biomech. **20** (1987), 785–794.
3 Huiskes, R.; Weinans, H.; Grootenboer, H. J.; Dalstra, M.; Fudala, B.; Slooff, T.J.: Adaptive bone-remodeling theory applied to prosthetic-design analysis. J. Biomech. **20** (1987), 1135–1150.
4 Hughes, T. J. R.: The Finite Element method: Linear static and dynamic finite element analysis. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ 1987.

Anschriften: Dipl. Ing. Thomas J. Reiter, O. Univ.-Prof. Dr. Franz G. Rammerstorfer und Dipl. Ing. Helmut J. Böhm M.S., Institut für Leichtbau und Flugzeugbau, Technische Universität Wien, Gußhausstraße 27-29/317. A-1040 Wien, Österreich.

4.6b NUMERISCHE BEHANDLUNG VON DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

ZAMM · Z. angew. Math. Mech. **71** (1991) 6, T 697–T 700 Akademie Verlag

Neher, M.

Lösungseinschließung bei linearen elliptischen Differentialgeichungen

In [2] wurden Einschließungen von Randwertproblemen bei elliptischen Differentialgleichungen berechnet. In der vorliegenden Arbeit wird ein modifizierter Algorithmus angegeben, mit dem sich gute Lösungseinschließungen ergeben. Bei der Einschließung werden sämtliche auftretenden Fehler (Diskretisierungsfehler, Darstellungs- und Rundungsfehler) erfaßt.

1. Problemstellung

Auf einem rechtwinkligen Polygon $G \subset \mathbb{R}^2$ ist das Dirichletsche Randwertproblem

$$D[u] = f \quad \text{in } G; \qquad u = g \quad \text{auf } \partial G \tag{*}$$

eines auf $\bar{G}$ elliptischen Differentialoperators

$$D := \sum_{k,\, l=1}^{2} a_{lk}(x, y) \frac{\partial^2}{\partial^l x\, \partial^k y} + a_1(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + a_2(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$$

mit $a_{lk}, a_i \in C^\alpha(\bar{G})$, $0 < \alpha < 1$, $f \in C(\bar{G})$ und $g \in C(\partial G)$ gegeben (unter diesen Voraussetzungen genügt D dem Maximumprinzip, s. [4]).

Als *Lösung* wird eine Funktion $u(x, y) \in C(\bar{G}) \cap C^2(G)$ gesucht, die (*) erfüllt. Dabei sei D so vorausgesetzt, daß (*) eine (eindeutige) Lösung besitzt.

Weiter seien auf G eine *Abschätzfunktion* $t(x, y) \in C(\bar{G}) \cap C^2(G)$ mit $Dt \leqq -1$ in G und $t(x, y) \geqq 0$ auf ∂G sowie eine *Näherungslösung* $\tilde{u}(x, y) \in C^2(\bar{G})$ mit $D\tilde{u} = \tilde{f}(x, y)$ in G und $\tilde{u} = \tilde{g}(x, y)$ auf ∂G gegeben.

Einschließungssatz: *Unter den obigen Voraussetzungen gilt für die gesuchte Lösung* $u(x, y)$ *von (*) für alle* $(x, y) \in \bar{G}$ *die* (auf [6] zurückgehende) *Abschätzung*

$$|u(x, y) - \tilde{u}(x, y)| \leqq \max_{\partial G} |g - \tilde{g}| + t(x, y) \cdot \max_{\bar{G}} |D\tilde{u} - f| .$$

Beweis: [2].

2. Bestimmung einer Näherungslösung

Es hat sich als vorteilhaft erwiesen (s. [5]), biquintische Splines als Näherungslösungen zu verwenden. Zur Konstruktion eines biquintischen Näherungssplines wird G mit einem Rechteckgitter überzogen, und es werden mit einem Mehrgitterverfahren (s. [3]) Näherungswerte $\tilde{u}_{ij} \approx u(x_i, y_j)$ berechnet. Aus diesen Werten können durch Differenzenquotienten Approximationen $\tilde{u}_{ij}^{(l,k)}$ für die partiellen Ableitungen $\partial^{l+k}u/\partial x^l\, \partial y^k$, $k, l = 0, 1, 2$, in den Gitterpunkten (x_i, y_j) gewonnen werden (s. [5]). Dadurch ist eindeutig ein Spline $\tilde{u}(x, y)$ bestimmt (s. [5]), so daß gilt:

- $\tilde{u}(x, y) \in C^2(\bar{G})$, und $\tilde{u}(x, y)$ ist in jedem Teilrechteck $R^{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ des Gitters ein biquintisches Polynom in x und y: $\tilde{u}(x, y)|_{R^{ij}} = \sum_{r,s=0}^{5} a_{rs} x^r y^s$;
- $\partial^{l+k}\tilde{u}/\partial x^l\, \partial y^k(x_i, y_j) = \tilde{u}_{ij}^{(l,k)}$ für $k, l = 0, 1, 2$.

3. Auswertung von $(D\tilde{u} - f)$ in $\bar{G}$ und $(\tilde{u} - g)$ auf ∂G

Zur Fehlerabschätzung sind die Wertebereiche von $(D\tilde{u} - f)$ in $\bar{G}$ und von $(\tilde{u} - g)$ auf ∂G zu bestimmen. Dazu werden für jedes Teilrechteck R^{ij} Größen $f_{ij} \geqq \max |D\tilde{u} - f|$ auf R^{ij} und $g_{ij} \geqq \max |\tilde{u} - g|$ auf $R^{ij} \cap \partial G$ berechnet. Mit $F_1 := \max g_{ij}$ und $F_2 := \max f_{ij}$ erhält man dann aus dem Einschließungssatz:

$$u(x, y) \in \tilde{u}(x, y) + [-F_1, F_1] + t(x, y) \cdot [-F_2, F_2] .$$

Sind die Funktionen $D\tilde{u}$, f und g als biquintische Splines exakt darstellbar, sind auf den einzelnen R^{ij} jeweils biquintische Polynome auszuwerten. Eine gute und einfach zu realisierende Einschließung für den Wertebereich eines Polynoms erhält man durch Entwickeln des Funktionsausdrucks in eine zentrierte Form (s. [1]). Bei der intervall-arithmetischen Auswertung ist darauf zu achten, daß sämtliche Darstellungs- und Rundungsfehler mit erfaßt werden. Dies wird durch eine geeignete Intervallarithmetik auf dem Rechner (PASCAL-SC, ACRITH o. ä.) garantiert.

4. Güte der Fehlerabschätzung

Mit dem beschriebenen Verfahren wird ein Intervallspline $w(x, y)$ konstruiert, der sowohl die (unbekannte) Lösung $u(x, y)$ von (*) als auch den Näherungsspline $\tilde{u}(x, y)$ einschließt. Daraus ergibt sich für die maximale Intervallbreite $D(w)$ in $\bar{G}$:

$$D(w) \geqq \max |u(x_i, y_j) - \tilde{u}_{ij}| =: N .$$

N kann zwar nicht exakt berechnet werden, i. a. stehen aber Erfahrungswerte zur Verfügung, die eine Schätzung ermöglichen.

F_1 ($\cong \max |\tilde{u} - g|$ auf ∂G) und N sind in der Praxis meist klein gegenüber $|u|$. Anders verhält es sich mit F_2 ($\cong \max |D\tilde{u} - f|$ in $\bar{G}$). Ist $Dg \neq f$ in einer Ecke von G, wird eine sinnvolle Lösungseinschließung auf die beschriebene Art nicht zu erhalten sein, da die durch Differenzenquotienten berechneten Ableitungen $\partial\tilde{u}/\partial x$, $\partial^2\tilde{u}/\partial x^2$ etc. in den Ecken von $\bar{G}$ i. a. sehr genau mit den entsprechenden Ableitungen von g übereinstimmen, so daß $Dg \approx D\tilde{u}$ in den Ecken von G gilt, also F_2 das Maximum über alle Ecken von G von $|Dg - f|$ nicht wesentlich unterschreitet.

5. Verbesserung von $|D\bar{u} - f|$ in $\bar{G}$

Da gerade die exakten Werte der Funktion u auf dem Rand eine sinnvolle Fehlerabschätzung verhindern, wird eine genauere Fehlerschranke durch Abändern der Randwerte erzielt. Es wird also statt (*) ein geändertes Randwertproblem

$$D\bar{u} = f \quad \text{in } G, \qquad \bar{u} = \bar{g} \quad \text{auf } \partial G \tag{**}$$

betrachtet. Für das geänderte Problem wird mit dem in Kapitel 2 beschriebenen Algorithmus eine Näherungslösung $\tilde{u}(x, y)$ berechnet. Diese Näherungslösung wird dann zur Fehlerabschätzung bei der ursprünglich gestellten Aufgabe herangezogen.

Dies ist sinnvoll, solange $|g - \bar{g}|$ auf ∂G klein ist. Aus dem Maximumprinzip folgt dann $\|u - \bar{u}\| \leqq \max_{\partial G} |g - \bar{g}|$, und daher ist eine gute Näherungslösung $\tilde{u}$ für $\bar{u}$ auch eine gute Näherung für u. Um die Lösungseinschließung zu verbessern, ist $\bar{g}$ so zu bestimmen, daß $|D\bar{g} - f|$ in den Ecken des Gebietes klein ist.

Zur einfacheren Darstellung wird das Vorgehen am Modellproblem

$$\Delta u = f \quad \text{in} \quad G := (a, b) \times (c, d); \qquad u = g \quad \text{auf } \partial G$$

erläutert. Die Verallgemeinerung auf beliebige rechtwinklige Polygone ist unmittelbar.

Zur Änderung der Funktion g werden die Hilfsfunktionen

$$k_1(t) := \tfrac{38}{105} x^5 + \tfrac{467}{420} x^4 - \tfrac{373}{315} x^3 + \tfrac{1}{2} x^2 - \tfrac{83}{1260} x \quad \text{und} \quad k_2(t) := \tfrac{38}{105} x^5 - \tfrac{293}{420} x^4 + \tfrac{16}{45} x^3 - \tfrac{5}{252} x$$

(mit $k_1(0) = k_1(1) = k_2(0) = k_2(1) = 0$, $k_1''(1) = k_2''(0) = 0$, $k_1''(0) = k_2''(1) = 1$ und kleiner Norm: $\|k_1\| = \|k_2\| < 2.675 \cdot 10^{-3}$) benutzt. Entlang der Seite ($x \in [a, b]$, $y = c$) ergibt sich dann die folgende Korrektur:

Durch Differenzenquotienten werden in den Ecken die Werte $\alpha := \frac{1}{2}(Dg - f)|_{(x,y)=(a,c)}$ und $\beta := \frac{1}{2}(Dg - f)|_{(x,y)=(b,c)}$ berechnet und daraus die Korrekturfunktion

$$k(x) := (b - a)^2 \left\{\alpha \cdot k_1\left(\frac{x - a}{b - a}\right) + \beta \cdot k_2\left(\frac{x - a}{b - a}\right)\right\}$$

mit $k(a) = k(b) = 0$, $k''(a) = \alpha$, $k''(b) = \beta$ bestimmt.

Setzt man nun $\bar{g}(x, c) := g(x, c) - k(x)$ und führt analoge Korrekturen auch für die anderen Seiten von G durch, erhält man eine stetige Randfunktion $\bar{g}$, die von g nicht stark abweicht und in den Ecken von G die Differentialgleichung erfüllt. Die aus den so geänderten Ausgangsdaten resultierende Näherungslösung läßt also eine gute Lösungseinschließung für das ursprünglich gegebene Randwertproblem (*) erwarten.

6. Numerische Ergebnisse

Behandelt wurde das Problem

$$\Delta u = 0 \quad \text{in} \quad G := (-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) \times (-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}); \qquad u = g \quad \text{auf } \partial G$$

für verschiedene Randfunktionen g. Als Abschätzfunktion wurde $t(x, y) := \frac{1}{4} \cdot (\frac{1}{2} - x^2 - y^2)$ mit $|t(x, y)| \leqq t(0, 0) = \frac{1}{8}$ auf $\bar{G}$ verwendet. G wurde mit einem quadratischen Gitter mit Gitterkonstante $h = \frac{1}{8}$ überzogen und ein Näherungsspline nach dem in den Kapiteln 2 und 5 beschriebenen Algorithmus berechnet. Die Berechnung wurde auf einer IBM 4361 des Rechenzentrums der Universität Karlsruhe in FORTRAN unter Einschluß der Intervallarithmetik-Bibliothek ACRITH durchgeführt.

In Tabelle 1 sind jeweils angegeben: die Randfunktion g, die aus dem Näherungsspline $\tilde{u}$ berechneten Größen F_1 und F_2 und die maximale Intervallbreite $D(w)$ des die Lösung einschließenden Intervallsplines w (die an der Stelle (0, 0) angenommen wird).

Tabelle 1

$g(x, y)$	F_1	F_2	$D(w)$
$x^4 - 6x^2y^2 + y^4$	$1{,}351 \cdot 10^{-16}$	$1{,}195 \cdot 10^{-4}$	$2{,}988 \cdot 10^{-5}$
$x^2 + y^2$	$9.403 \cdot 10^{-3}$	$9.914 \cdot 10^{-5}$	$1{,}883 \cdot 10^{-2}$
$x^4 + y^4$	$1.411 \cdot 10^{-2}$	$2{,}921 \cdot 10^{-5}$	$2{,}823 \cdot 10^{-2}$

Literatur

1 ALEFELD, G.; HERZBERGER, J.: Introduction to interval computations. Academic Press, New York 1983.
2 APPELT, W.: Fehlereinschließung bei der numerischen Lösung elliptischer Randwertprobleme unter Verwendung eines intervallarithmetischen Defektverfahrens. Berichte der GMD Nr. 73, Bonn 1973.
3 HACKBUSCH, W.: Multi-grid methods and applications. Springer-Verlag, Berlin 1985.
4 HELLWIG, G.: Partielle Differentialgleichungen. Teubner-Verlag, Stuttgart 1960.
5 NEHER, M.: Garantierte Fehlerschranken bei der numerischen Behandlung elliptischer Differentialgleichungen. Diplomarbeit, Universität Karlsruhe 1987.
6 SCHRÖDER, J.: Differential inequalities and error bounds. In RALL, L. B. (ed.): Error in digital computation. J. Wiley & sons, New York 1965.

Anschrift: Dipl.-Math. techn. MARKUS NEHER, Institut für Angewandte Mathematik, Universität Karlsruhe, Kaiserstr. 12, W-7500 Karlsruhe, Deutschland

5.1 MATHEMATISCHE OPTIMIERUNG

ZAMM · Z. angew. Math. Mech. **71** (1991) 6, T 700 – T 703 Akademie Verlag

CHUDEJ, K.

Optimale Steuerung und Stufung eines zweistufigen Raumtransporters

Das SÄNGER-Projekt eines wiederverwendbaren, horizontalstartenden, zweistufigen und mit Tragflächen versehenen europäischen Raumtransporters für den Pendelverkehr zwischen der Erde und einer europäischen Raumstation, dessen erste Stufe mit einem luftatmenden Triebwerk und dessen zweite Stufe mit einem Raketentriebwerk versehen ist, steht momentan im Mittelpunkt der wissenschaftlichen und industriellen Entwicklung. Die im Antrieb modifizierte SHAUsche Version eines zweistufigen nur mit Raketen angetriebenen Raumtransporters wird als Aufgabe der gleichzeitigen Bahn- und Stufungsoptimierung zur Maximierung der Nutzlast formuliert, um insbesondere die Auswirkung des Startbreitengrades (für einen Start in Europa) auf die Nutzlast und die Flugbahn zu untersuchen.

Ausgegangen wird von einer festen Gesamtstartmasse m_0, die sich aus den Struktur- und Treibstoffmassen der beiden Stufen sowie der Nutzlast zusammensetzt:

$$m_0 = m_{\mathrm{St,I}} + m_{\mathrm{Tr,I}} + m_{\mathrm{St,II}} + m_{\mathrm{Tr,II}} + m_{\mathrm{Nutzlast}} \,.$$

Als Nebenbedingung an das mitzuoptimierende Massenverhältnis von erster zu zweiter Stufe und den mitzuoptimierenden Stufungszeitpunkt t_s werden die beiden Gleichungen

$$m_{\mathrm{St,I}} = A_{\mathrm{I}} \cdot \exp\,[B_{\mathrm{I}} \cdot m_{\mathrm{Tr,I}}]\,, \qquad m_{\mathrm{St,II}} = A_{\mathrm{II}} + B_{\mathrm{II}} \cdot m_{\mathrm{Tr,II}}$$

mit gegebenen positiven Konstanten A_{I}, B_{I}, A_{II}, B_{II} gefordert, die die Strukturmassen der beiden Stufen als Summe von Triebwerksmasse und Treibstoffumhüllung modellieren.

Durch das erweiterte Modell der Bewegungsdifferentialgleichungen wird ein dreidimensionaler Flug um die rotierende Erde beschrieben. Die Differentialgleichungsnebenbedingungen legen die Zustandsgrößen Geschwindigkeit v, Bahnneigungswinkel γ, Bahnazimutwinkel χ, Höhe h, Masse m, Breitengrad Λ und Längengrad θ in Abhängigkeit von den zu ermittelnden Steuerungen Massendurchsatz des Raketentriebwerkes b, Schubwinkel ε_1 und ε_2, Anstellwinkel der Tragflächen u und Auftriebsquerneigungswinkel μ fest. Als Randbedingung wird gefordert, daß der Raumtransporter mit 275 m/sek horizontal startet und in 500 km Höhe in einen Kreisorbit mit zugehöriger Kreisbahngeschwindigkeit einfliegt.

Damit ergibt sich die folgende Aufgabenstellung:

$$\min_{t_s, t_f, u, \mu, \varepsilon_1, \varepsilon_2, b} \quad I(m(t_f), m(t_s^+))$$

mit

$$-I(m(t_f), m(t_s^+)) = \underbrace{m(t_f) - [A_{\mathrm{II}} + B_{\mathrm{II}}(m(t_s^+) - m(t_f))]}_{\text{Nutzlast}}$$