





**Theorie und Numerik unidirektional  
verstärkter Faserverbundwerkstoffe:  
3D Finite-Element-Untersuchungen der  
Faser-Matrix Mikroinstabilitäten**

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

**DOKTOR-INGENIEURS**

von der Fakultät für

Bauingenieur-, Geo und Umweltwissenschaften  
der Universität Fridericiana zu Karlsruhe (TH)

genehmigte

**DISSERTATION**

von

**Dipl.–Ing. Jens Harich**

aus Karlsruhe

Tag der mündlichen Prüfung: 21. Februar 2008

Hauptreferent: Prof. Dr.–Ing. habil. W. Wagner

Korreferent: Prof. Dr.–Ing. habil. Y. Lapusta

Karlsruhe 2008

**Herausgeber:**

Prof. Dr.-Ing. habil. W. Wagner

**Organisation und Verwaltung:**

Institut für Baustatik

Universität Karlsruhe

Postfach 6980

76128 Karlsruhe

Telefon: (0721) 608-2280

Telefax: (0721) 608-6015

E-mail: [baustatik@bs.uni-karlsruhe.de](mailto:baustatik@bs.uni-karlsruhe.de)

© 2008 Jens Harich  
Institut für Baustatik  
Universität Karlsruhe  
Kaiserstraße 12  
76131 Karlsruhe

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten. Unter Angabe der Quelle ist es gestattet, dieses Heft ganz oder teilweise auf fotomechanischem Wege (Fotokopie, Mikrokopie) zu vervielfältigen oder in elektronischen Medien zu speichern.

ISBN 978-3-935322-15-7

## Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Assistent am Institut für Baustatik der Universität Karlsruhe (TH).

Ganz besonders herzlich möchte ich mich beim Hauptreferenten und Institutsleiter Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. W. Wagner für seine stetige, fachkundige und wissenschaftliche Betreuung bedanken. Seine sehr angenehme und dem wissenschaftlichen Arbeiten zuträgliche Art der Leitung des Instituts war die Grundlage für das Gelingen dieser Arbeit. Dazu trug auch die hervorragende technische Ausstattung des Instituts bei.

Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Y. Lapusta danke ich sehr für die vielen wertvollen Fachdiskussionen und die andauernde Betreuung des Themas. Seine kritische Durchsicht und bereitwillige Übernahme des Korreferats bildeten den Abschluss einer intensiven Zusammenarbeit.

Mein Dank gilt allen Kollegen und Mitarbeitern des Instituts für Baustatik für die stets gute und konstruktive Zusammenarbeit. Besonders hervorzuheben sind hierbei die Herren PD. Dr.-Ing. habil. S. Klinkel, Dr.-Ing. I. Münch sowie Dipl.-Ing. C. Balzani für diverse wertvolle Hilfestellungen.

Ohne die Unterstützung meiner Eltern auf privater Ebene hätte diese Arbeit nicht gelingen können. Für all die Mühen und die geopfert Zeit danke ich herzlich.

Karlsruhe, im März 2008

*Jens Harich*



## Kurzfassung

Strukturen aus Faserverbundwerkstoffen zeigen unterschiedliche Versagensmechanismen, welche u. a. von der Verstärkungsart durch die Fasern abhängen. Die vorliegende Arbeit befasst sich mit dem Mikroinstabilitätsverhalten von unidirektional verstärkten Faserverbundwerkstoffen. Unter Druckbelastung in Faserlängsrichtung eines unidirektional verstärkten Faserverbundwerkstoffs beginnt der Schädigungs- bzw. Versagensprozess häufig mit der Instabilität einzelner oder mehrerer Fasern auf Mikroebene. Aufgrund der großen Schlankheit der Fasern entziehen sich diese der Druckbelastung durch seitliches Ausweichen. Dabei stellt sich eine abstützende Wirkung durch das fasenumgebende Matrixmaterial ein.

Das Mikroinstabilitätsverhalten wird mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente an verschiedenen Probekörpern mit unterschiedlichen Netzgeometrien untersucht. Aus mikroskopischer Sicht ist die Anordnung aus Fasern und Matrix ein dreidimensionales Problem. Daher wird die Geometrie der Modellprobleme mit speziellen Volumenelementen diskretisiert. Es wird eine Einheitszelle eingeführt, welche durch die Wahl bestimmter Randbedingungen repräsentativ für die innere Struktur des Verbundwerkstoffs ist.

Für die Berechnungen wird das Mikroinstabilitätsverhalten einer Faser in einer Matrix zunächst auf das Stabilitätsverhalten des elastisch gebetteten Balkens zurückgeführt. Im Anschluss daran wird eine dreidimensionale analytische Beschreibung des Stabilitätsverhaltens einer Einzelfaser in einer Matrix zum Vergleich zu den numerischen Lösungen vorgestellt.

Durch eine Variation der Größe der faserausschließenden Matrix kann gezeigt werden, dass bei der Modellierungswahl ein ausreichend großer Matrixbereich angenommen wird. Aufgrund des anisotropen Verhaltens bestimmter Faserarten werden neben isotropen auch anisotrope Fasern bei der Stabilitätsuntersuchung berücksichtigt. Es wird weiterhin der Einfluss der faserparallelen Oberfläche der Matrix auf das Stabilitätsverhalten der Faser analysiert. Um periodisch angeordnete Fasern in der Matrix untersuchen zu können, müssen entsprechende Randbedingungen gefunden und auf die Einheitszelle angewendet werden. Dabei werden in allen Fällen Symmetrieeigenschaften zur Minimierung des Berechnungsaufwands ausgenutzt.

Die Ergebnisse der numerischen Untersuchungen werden qualitativ und quantitativ mit analytischen und experimentellen Werten verglichen.

# Abstract

Fiber-reinforced composite materials subjected to compression along in the fibers direction demonstrate different failure mechanisms. One of these is fiber instability at the micro-level, which also is called microbuckling. The topic of this work is a study of the microbuckling behavior of unidirectional fiber-reinforced composite materials.

The internal structure of such materials at the micro-level is essentially three-dimensional. Therefore, a displacement based hexahedral geometric non-linear finite element with trilinear shape functions is employed. Characteristic cells and corresponding boundary conditions, which are representative for the internal microstructure of the composite, are introduced.

Firstly, the microbuckling of a fiber in a matrix is analyzed using a simplified model of an infinite beam on an elastic foundation. Then, a three-dimensional analytical description of the stability behavior of a single fiber in a matrix is presented to have comparative solutions for the numerical calculations.

Some alternative finite element discretizations are compared in order to model the characteristic cell. The region of the matrix must be large enough to investigate the stability behavior of a single fiber in a matrix. Therefore, different widths of the fiber surrounding matrix are chosen to exclude influences of the boundary.

Transversely isotropic material behavior is taken into account to model some anisotropic fibers. The free surface of the matrix has also influence on the fiber microbuckling. This influence was studied as well. To analyze periodical fiber arrangements, the appropriate boundary conditions are employed. The symmetry of the problem is used to reduce the number of degrees of freedom in the numerical calculations.

The obtained results are compared qualitatively and quantitatively with analytical solutions and experiments.

*Larissa, Jan und Josefina,  
Monika und Franz Josef.*



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Motivation und Einordnung . . . . .	1
1.2	Stand der Wissenschaft . . . . .	2
1.3	Gliederung der Arbeit . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Kontinuumsmechanische Grundlagen</b>	<b>6</b>
2.1	Kinematik . . . . .	6
2.2	Spannungen . . . . .	11
2.3	Bilanzgleichungen . . . . .	13
2.3.1	Massenbilanz . . . . .	14
2.3.2	Impulsbilanz . . . . .	15
2.3.3	Drehimpulsbilanz . . . . .	16
2.3.4	Bilanz der Energie . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Faserverbundwerkstoffe</b>	<b>23</b>
3.1	Abgrenzung und Überblick . . . . .	23
3.2	Bemerkungen zu Faserverbundwerkstoffen . . . . .	26
3.3	Einsatzgebiete von Faserverbundwerkstoffen . . . . .	27
3.4	Polymere Werkstoffe . . . . .	30
3.4.1	Thermoplaste . . . . .	32
3.4.2	Duroplaste . . . . .	32
3.4.3	Elastoplaste . . . . .	33
3.5	Fasermaterialien . . . . .	33
3.6	Verstärkungsarten . . . . .	37
3.7	Anisotropes Materialverhalten . . . . .	39
3.7.1	Richtungstransformation . . . . .	41
3.7.2	Monotropie . . . . .	44
3.7.3	Orthotropie . . . . .	45
3.7.4	Transversale Isotropie . . . . .	45

3.7.5	Orthotropie und transversale Isotropie in Ingenieurkonstanten . . . . .	47
3.7.6	Isotropie . . . . .	50
3.7.7	Anforderungen an die Ingenieurkonstanten bei transversaler Isotropie . . . . .	51
3.8	Homogenisierung . . . . .	53
3.8.1	Zweidimensionale Homogenisierungsmethode . . . . .	56
3.8.2	Erweiterte Homogenisierungsmethoden . . . . .	62
<b>4</b>	<b>Versagen von Faserverbundwerkstoffen</b>	<b>66</b>
4.1	Versagensmechanismen . . . . .	66
4.2	Versagenskriterien . . . . .	69
4.2.1	Tsai-Wu-Kriterium . . . . .	70
4.2.2	Tsai-Hill-Kriterium . . . . .	72
4.2.3	Von Mises-Kriterium . . . . .	74
4.2.4	Kriterium nach Hashin . . . . .	76
4.2.5	Maximalspannungskriterium . . . . .	76
4.2.6	Maximaldehnungskriterium . . . . .	77
4.3	Degradationsmodelle . . . . .	77
4.4	Delamination . . . . .	81
4.4.1	Delaminationskriterium nach Hashin . . . . .	82
4.4.2	Interface-Elemente bei Delamination . . . . .	84
<b>5</b>	<b>Finite-Element-Formulierung</b>	<b>88</b>
5.1	Schwache Form des Gleichgewichts und Linearisierung . . . . .	88
5.2	Nichtlineare Finite-Element-Formulierung . . . . .	91
5.2.1	Dreidimensionale Elementformulierung und Grundgleichungen . . . . .	91
5.2.2	Versteifungseffekte bei Biegung . . . . .	96
5.2.3	Methode der hybriden Verzerrungen . . . . .	97
5.3	Nichtlineare Algorithmen . . . . .	104
5.3.1	Laststeigerung . . . . .	104

---

5.3.2	Pfadverfolgung durch das Bogenlängenverfahren . . . . .	105
5.3.3	Lineare und nichtlineare Eigenwertanalyse . . . . .	107
5.3.4	Bisektionsverfahren . . . . .	110
5.3.5	Nachbeulbereich bei Verzweigungsproblemen . . . . .	111
<b>6</b>	<b>Mikroinstabilität</b>	<b>113</b>
6.1	Allgemeines . . . . .	113
6.2	Elastisch gebetteter Balken . . . . .	114
6.3	Dreidimensionale analytische Beschreibung . . . . .	118
6.4	Instabilität einer isotropen Einzelfaser in einer Matrix . . . . .	126
6.4.1	Beschreibung der Modellierung . . . . .	126
6.4.2	Numerische Ergebnisse . . . . .	128
6.4.3	Konvergenzuntersuchung . . . . .	130
6.4.4	Vergleich mit einer analytischen Lösung . . . . .	132
6.5	Instabilität einer anisotropen Einzelfaser in einer Matrix . . . . .	133
6.6	Einbeziehung von Randeffekten . . . . .	136
6.6.1	Isotropes Fasermaterial . . . . .	136
6.6.2	Transversal isotropes Fasermaterial . . . . .	140
6.7	Periodizität . . . . .	142
6.7.1	Periodizität einer Faserreihe . . . . .	142
6.7.2	Biperiodizität . . . . .	146
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>150</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>152</b>



# 1 Einleitung

## 1.1 Motivation und Einordnung

Faserverbundwerkstoffe bestehen aus Fasern, die in einem Matrixmaterial eingebettet sind. Aufgrund der geringen Rohdichte sowohl der Fasern als auch der Matrix entstehen so vergleichsweise leichte Werkstoffe mit sehr hohen Festigkeits- und Steifigkeitseigenschaften. Die Materialeigenschaften eines Faserverbundwerkstoffs hängen maßgeblich von seinen Komponenten ab, also von den Faser- und den Matrixeigenschaften sowie der Verbundwirkung in der Grenzfläche zwischen Faser und Matrix (Interface). Optimale Festigkeits- und Steifigkeitseigenschaften in einer Richtung werden erzielt, indem die Fasern in nur diese Richtung in das Matrixmaterial eingelegt und gestreckt werden. Es entsteht ein unidirektional verstärkter Faserverbundwerkstoff, der in Faserrichtung hervorragende Eigenschaften aufweist. In Querrichtung wirkt sich die Verstärkung durch die Fasern weniger stark aus, womit die mechanischen Eigenschaften um ein bis zwei Größenordnungen geringer sind als in Faserlängsrichtung. Aufgrund wechselnder Beanspruchung werden unidirektional verstärkte Faserverbundwerkstoffe daher in Schichten unterschiedlicher Faserorientierungen hergestellt. Jede einzelne Schicht verhält sich aufgrund unterschiedlicher Steifigkeiten von Fasern und Matrix anisotrop. Mit Hilfe von Homogenisierungsmethoden werden einer einzelnen Schicht effektive Werkstoffkenngrößen zugewiesen. Mit dieser verschmierten Betrachtung einer Schicht kann ein Laminat, bestehend aus mehreren Einzelschichten und somit eine gesamte Struktur aus Faserverbundwerkstoffen untersucht werden. Zur Analyse des Tragverhaltens von Faserverbundstrukturen hat sich die Methode der Finiten Elemente etabliert, die im elastischen Bereich sehr gute Vorhersagen liefert. Während einer Spannungsanalyse kann durch die Anwendung von Versagenskriterien die Tragfähigkeit einer Struktur aus Faserverbundwerkstoffen vorhergesagt werden.

Die Komplexität der inneren Struktur von inhomogenen Faserverbundwerkstoffen bestimmt eine Vielzahl von Versagens- und Schädigungsmechanismen. Diese müssen jedoch zuverlässig und systematisch untersucht werden. Allein für Druckbelastung sind Knicken der Fasern, Ablösungen zwischen Fasern und Matrix, Matrix-Risse oder Faserbrüche als gefährliche Versagens- bzw. Schädigungsmechanismen auf der Mikroebene bekannt. Häufig beginnt der Versagens- bzw. Schädigungsprozess unter Druckbelastung mit der Instabilität einzelner oder mehrerer Fasern.

Aufgrund der großen Schlankheit der Fasern entziehen sich diese der Last bei Druckbeanspruchung durch seitliches Ausweichen. Die abstützende Wirkung

muss das Matrixmaterial übernehmen. Das Matrixmaterial kann dies aber nur bis zu einem gewissen Grad. Hierbei hat PUCK [114] festgestellt, dass mit zunehmendem Faseranteil die stützende Wirkung durch das Matrixmaterial abnimmt. Das seitliche Ausweichen der Fasern unter Druckbelastung wird in diesem Zusammenhang als Mikrobeulen bezeichnet. Bedingt durch das Mikrobeulen wird die Festigkeit der Fasern nicht voll ausgenutzt. Das Mikrobeulen wiederum kann andere Versagensmechanismen hervorrufen oder zumindest dazu beitragen. So können Delaminationen durch Instabilitäten auf der Mikroebene initiiert werden.

Durch den oben beschriebenen Homogenisierungsprozess werden Phänomene auf der Mikroebene, wie das Mikrobeulen, welches zum Schichtversagen und zum Versagen der gesamten Struktur führen kann, jedoch nicht mehr abgebildet. Daher müssen Methoden entwickelt werden, um dieses Phänomen exakter zu beschreiben. Dies ist das Hauptziel der vorliegenden Arbeit.

## 1.2 Stand der Wissenschaft

Das Mikrobeulen als Versagens- bzw. Schädigungsart von Faserverbundwerkstoffen wurde zunächst von ROSEN [123] und SCHUERCH [132] behandelt, welche Faser und Matrix als zweidimensionale Schichten betrachten. Diese Arbeiten basieren auf den Untersuchungen von TIMOSHENKO & GERE [144], die das Stabilitätsverhalten elastisch gebetteter Balken unterschiedlicher Länge und Bettungsmoduli untersuchen. SADOVSKY ET AL. [125] schlagen zur Untersuchung des Mikrobeulens die Kombination einer eindimensionalen Betrachtung der Faser mit einer dreidimensionalen Betrachtung der Matrix vor. GUZ [56] entwickelt eine linearisierte dreidimensionale Näherung zur Mikroinstabilitätsuntersuchung. Das Verhalten von Faserverbundwerkstoffen unter Druckbelastung wird in Artikeln von GUYNN ET AL. [55], GUZ [57], SCHULTHEISZ & WAAS [133] oder FLECK [49] verallgemeinert. Ein Überblick über dreidimensionale Modelle und Methoden der Stabilitätstheorie bei Faserverbundwerkstoffen findet sich beispielsweise in GUZ [57] oder GUZ & LAPUSTA [60]. Im Zusammenhang dazu haben GUZ [59], LAPUSTA & WAGNER [93] oder ZHUK ET AL. [165] Beulphänomene in unterschiedlichen Skalen untersucht. Es sei darauf hingewiesen, dass die Mehrheit existierender Modelle, die das Beulen auf Mikroebene von Faserverbundwerkstoffen beschreiben, auf einer zweidimensionalen Formulierung beruhen. Die dreidimensionale mechanische Beschreibung von Faserinstabilitäten auf Mikroebene, insbesondere durch die Verwendung von dreidimensionalen Finiten Elementen, hat bedeutend weniger Aufmerksamkeit erhalten, obwohl das Spannungs-Dehnungs-Feld in der Nähe der Faser ausgeprägt dreidimensional ist.

Neben dem Mikrobeulen ist das Schubknicken (kinking) bekannt, welches bei fa-

serparalleler Druckbeanspruchung in Verbindung mit Schubspannungen hervorgerufen wird und von einer Mikroinstabilität oder/und einer imperfekten Faserorientierung ausgeht. Das Schubknicken wird in den Arbeiten von EVANS & ADLER [46], BUDIANSKY [22] und BUDIANSKY & FLECK [23] behandelt. Eine Kombination des Mikrobeulens und des Schubknickens als Versagensmechanismus wird in den Arbeiten von STEIF [136] oder SCHAPERY [128] untersucht.

Mit Hilfe der Finite-Element-Methode wird seit längerer Zeit das Verhalten dünnwandiger Faserverbundstrukturen untersucht.

Die Arbeiten von WAGNER & GRUTTMANN [153] und GRUTTMANN & WAGNER [54] für Vier-Knoten-Schalenelemente mit gemischten Ansätzen seien an dieser Stelle exemplarisch genannt. Zur Untersuchung lokaler Effekte, bei denen der dreidimensionale Spannungszustand vorliegen muss, werden zunehmend Volumenelemente eingesetzt, was nicht zuletzt auf die rasant anwachsenden Rechnerkapazitäten zurückzuführen ist. Dabei ist der Übergang vom Schalen- zum Volumenkonzept fließend, da z. B. zur Unterdrückung bestimmter Versteifungseffekte in Schalendickenrichtung spezielle Ansätze gewählt werden. KLINKEL [80] u. a. prägen in diesem Zusammenhang den Begriff des Volumen-Schalen-Elements.

Das Stabilitätsverhalten von Faserverbundstrukturen wird z. B. in WAGNER & GRUTTMANN [154], GRUTTMANN & WAGNER [54] oder DEGENHARDT ET AL. [38] untersucht. Einen Beitrag zum Stabilitätsverhalten von faserverstärkten Platten geben THURLEY & MARSHALL [143].

WALSH ET AL. [158] oder BASCHEK ET AL. [13] haben Eigenschaften von Faserverbundwerkstoffen bei hohen und tiefen Temperaturen untersucht. Diese waren durch die enormen Temperaturschwankungen hoch aufsteigender Flugzeuge motiviert. Das Entstehen von Eigenspannungen bei Faserverbundwerkstoffen, verursacht durch das Schrumpfen duroplastischer Harze beim Erhärten, wurde beispielsweise in SCHNACK & MESKE [130] behandelt. SADOVSKY ET AL. [125] gehen in diesem Zusammenhang auf mögliche Instabilitäten der Fasern beim Schrumpfen der Matrix ein. Erreicht die Schrumpfung der Matrix die kritische Gesamtdehnung des Faserverbundwerkstoffs, so beult dieser auf der Mikroebene. Aufgrund eines Feuchtigkeitsgefälles kann in das Harzmaterial Wasser diffundieren, welches hygroskopische Dehnungen hervorruft. Die mit der hygroskopischen Eigendehnung verbundenen Änderungen der Eigenschaften von Verbundwerkstoffen werden in POMIES & CARLSSON [113] oder CLARK ET AL. [26] behandelt.

### 1.3 Gliederung der Arbeit

In dieser Arbeit wird das Mikrobeulen von unidirektional verstärkten Verbundwerkstoffen mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente untersucht. Es wird jeweils die kritische Verkürzung in Faserlängsrichtung bei Erreichen des Stabilitätspunktes berechnet. Hierzu werden verschiedene Modellierungen entwickelt und diskutiert.

In Kapitel 2 werden kontinuumsmechanische Grundlagen zusammengestellt, die zur Beschreibung der mechanischen Zusammenhänge erforderlich sind. Sie bilden die Grundlage für eine lineare und nichtlineare Finite-Element-Formulierung. Neben der Kinematik nehmen die stofffreien Gleichungen der Mechanik eine zentrale Stellung ein.

Die Thematik von Faserverbundwerkstoffen wird in Kapitel 3 behandelt. Nach einer Diskussion grundlegender Eigenschaften dieser Werkstoffe und nach der Darstellung einiger Anwendungsgebiete werden zunächst die Bestandteile von Faserverbundwerkstoffen erläutert. Da polymere Werkstoffe in der Regel als Matrixmaterial zum Einsatz kommen, werden diese Materialien nach ihren Eigenschaften klassifiziert. Die am häufigsten verwendeten Fasermaterialien (Glas-, Kohlenstoff- und Aramidfasern) werden vorgestellt. Das anisotrope Materialgesetz eines unidirektional verstärkten Faserverbundwerkstoffs wird mit Hilfe von Symmetrieebenen abgeleitet und mittels Ingenieurkonstanten dargestellt. Da hierbei effektive Materialkennwerte Verwendung finden, werden Homogenisierungsmethoden angegeben, um für Faserverbundwerkstoffe diese effektiven Materialkennwerte aus den Kennwerten der Einzelkomponenten bereitzustellen.

In Kapitel 4 werden unterschiedliche Versagensmechanismen von Faserverbundwerkstoffen erläutert. Es werden einige klassische Versagenskriterien einer Einzelschicht angegeben, welche effektive Materialkennwerte dieser Schicht zugrunde legen. Das Prinzip von Degradationsmodellen nach Erreichen der First-Ply-Failure-Last wird vorgestellt. Es folgen Ursachen von Delaminationen sowie das zugehörige Versagenskriterium nach HASHIN [65]. Die Grundlagen für die Entwicklung von Interface-Elementen zur Beschreibung fortschreitender Delamination werden dargestellt.

Die geometrisch nichtlineare Finite-Element-Formulierung, basierend auf einem dreidimensionalen 8-Knoten-Volumenelement mit trilinearen Ansätzen, wird in Kapitel 5 angegeben. Nach Einführung der schwachen Form des Gleichgewichts und der Linearisierung werden nichtlineare Algorithmen zur Lösung des Randwertproblems vorgestellt. Zur Stabilitätsuntersuchung von Faserverbundwerkstoffen auf der Mikroebene werden die begleitende Eigenwertanalyse und das Bisektionsverfahren verwendet. Die Klassifizierung singularer Punkte sowie Methoden

zur Analyse des Nachbeulverhaltens runden dieses Kapitel ab.

Kapitel 6 beschäftigt sich mit der Mikroinstabilität von Faserverbundwerkstoffen. Zunächst wird das Modell eines elastisch gebetteten Balkens diskutiert. Hierbei ist der Bettungsmodul aus den Materialkennwerten der Matrix zu ermitteln. Es folgt die Untersuchung einer einzelnen Faser in einer Matrix. Hierzu wird zunächst eine analytische Lösung des Problems nach LAPUSTA & WAGNER [93] vorgestellt. Aufgrund des anisotropen Verhaltens einiger Faserarten werden neben isotropen auch anisotrope Fasern bei der Stabilitätsuntersuchung mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente einbezogen. Nach der Berücksichtigung von Randeffekten werden periodisch angeordnete Fasern in der Matrix untersucht. Es werden Symmetrieeigenschaften genutzt, um den Rechenaufwand zu minimieren. Dazu werden geeignete Randbedingungen gefunden und auf die Einheitszelle abgebildet. Mit dem Vergleich zu experimentellen Untersuchungen des Problems schließt dieses Kapitel.

Die Arbeit endet in Kapitel 7 mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick.

## 2 Kontinuumsmechanische Grundlagen

Zur Beschreibung mechanischer Zusammenhänge werden zunächst einige Begriffe definiert. Dieses Kapitel stellt kontinuumsmechanische Grundlagen für das Verhalten von Festkörpern zusammen, welche die Basis für eine lineare und nichtlineare Finite-Element-Formulierung bilden. Die Kontinuumsmechanik fester Körper stellt eine Idealisierung realer Strukturen dar. Dabei wird ein materieller Körper als Menge materieller Punkte im euklidischen Raum  $\mathbb{E}^3$  angesehen. Diese Herangehensweise erlaubt es, bekannte mathematische Werkzeuge wie Differential- und Integralrechnung zur Analyse der mechanischen Zusammenhänge zu verwenden. Es werden Verzerrungen und Spannungen eingeführt, die mit Hilfe des in Kapitel 3.7 eingeführten Stoffgesetzes miteinander verknüpft werden. Neben der Kinematik nehmen die stofffreien Gleichungen der Mechanik dabei eine zentrale Stellung ein. Eine ausführliche Darstellung der kontinuumsmechanischen Grundlagen ist beispielsweise in BAŞAR & WEICHERT [9], MARSDEN & HUGHES [98], NOLL [105], OGDEN [107] oder STEIN & BARTHOLD [137] zu finden.

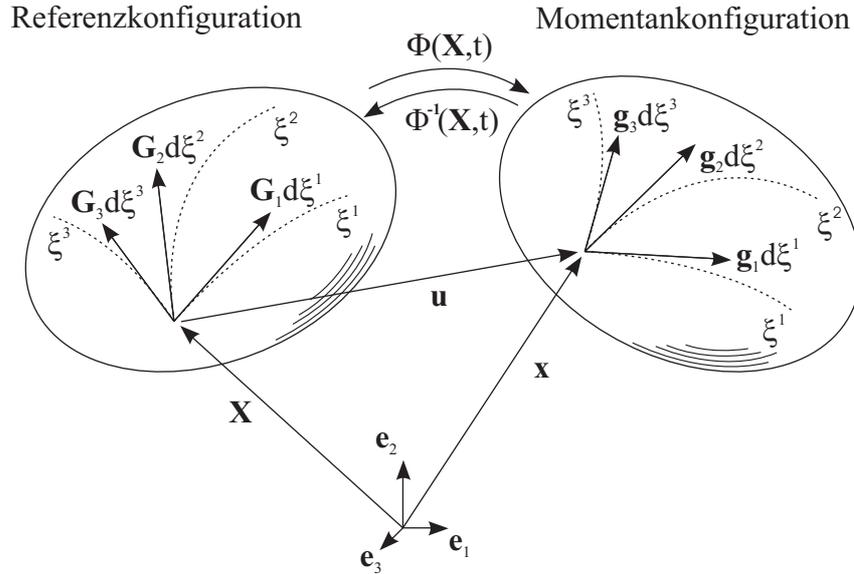
### 2.1 Kinematik

In der Kontinuumsmechanik dient die Kinematik zur Beschreibung der Bewegung von Körpern in Abhängigkeit der Zeit. Ein Körper  $\mathcal{B}$  mit der Oberfläche  $\partial\mathcal{B}$  kann als Menge von Punkten  $\mathcal{M}$  im euklidischen Raum  $\mathbb{E}^3$  aufgefasst werden. Zum Zeitpunkt  $t = t_0$  befindet sich der Körper  $\mathcal{B}_0$  in seinem Ausgangszustand, der Referenzkonfiguration. Zum Zeitpunkt  $t > 0$  befindet sich der Körper  $\mathcal{B}_t$  in einem deformierten Zustand, der Momentankonfiguration. Ein Punkt der Referenzkonfiguration wird mit den Lagrangeschen oder materiellen Koordinaten  $\mathbf{X}$ , in der Momentankonfiguration mit den Eulerschen oder räumlichen Koordinaten  $\mathbf{x}$  identifiziert. Die Deformation  $\Phi$  des Körpers stellt eine Abbildung zwischen beiden Konfigurationen dar. Benachbarte Punkte befinden sich nach der Deformation nach wie vor in der Nachbarschaft. Um eine Selbstdurchdringung oder Spiegelung auszuschließen, muss  $\Phi$  stetig und bijektiv sein. Es wird

$$\mathbf{x} := \Phi(\mathbf{X}, t) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{X} := \Phi^{-1}(\mathbf{x}, t) \quad (2.1)$$

definiert, wobei  $\Phi$  als Lagrangesche oder materielle,  $\Phi^{-1}$  als Eulersche oder räumliche Abbildung bezeichnet wird. Konvektive Koordinaten sind in den Körper eingeritzt gedachte kartesische oder krummlinige Koordinaten. Ausgehend von einem kartesischen Koordinatensystem  $\mathbf{e}_i$  befindet sich der Körper zunächst in

der Referenzkonfiguration mit dem Ortsvektor  $\mathbf{X}$  und den Basisvektoren  $\mathbf{G}_i$ , die tangential an den konvektiven Koordinaten verlaufen. Die Basisvektoren  $\mathbf{G}_i$  der Referenzkonfiguration gehen bei der Deformation in die Basisvektoren  $\mathbf{g}_i$  der Momentankonfiguration über. Eine grafische Veranschaulichung ist in Abbildung 2.1 gegeben.



**Abbildung 2.1:** Abbildung  $\Phi$  zwischen Referenz- und Momentankonfiguration

Im Weiteren sollen Größen in der Referenzkonfiguration durch Großbuchstaben und Größen in der Momentankonfiguration durch Kleinbuchstaben notiert werden. Zwischen den Ortsvektoren der jeweiligen Konfiguration und den kovarianten Basisvektoren gelten folgende Beziehungen

$$\mathbf{G}_i := \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi^i}, \quad \mathbf{g}_i := \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^i}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.2)$$

Über die Orthogonalitätsbedingung  $\mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}^j = \delta_i^j$  und  $\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^j = \delta_i^j$  wird die kontravariante Basis bestimmt, wobei

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} \quad (2.3)$$

das Kronecker-Symbol ist. Aus den ko- und kontravarianten Basisvektoren folgen dann die ko- und kontravarianten Metrikkoeffizienten der Referenzkonfiguration und der Momentankonfiguration

$$\begin{aligned} G_{ij} &= \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j, & G^{ij} &= \mathbf{G}^i \cdot \mathbf{G}^j, \\ g_{ij} &= \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j, & g^{ij} &= \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Mit den Metrikkoeffizienten ist der Identitätstensor zweiter Stufe in der jeweiligen Konfiguration gegeben

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= G_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j = G^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j, \\ \mathbf{g} &= g_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j = g^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Der Wechsel zwischen ko- und kontravarianten Größen einer Konfiguration, das so genannte "Heben und Senken" der Indizes, ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^i &= G^{ij} \mathbf{G}_j, & \mathbf{G}_i &= G_{ij} \mathbf{G}^j, \\ \mathbf{g}^i &= g^{ij} \mathbf{g}_j, & \mathbf{g}_i &= g_{ij} \mathbf{g}^j. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Die Basisvektoren  $\mathbf{G}_i$  lassen sich mit einer *push-forward*-Operation

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{F} \mathbf{G}_i \quad (2.7)$$

in die Momentankonfiguration  $\mathbf{g}_i$  überführen. Hierbei ist die lineare Abbildung  $\mathbf{F}$  der materielle Deformationsgradient. Aus der linearen Abbildungsvorschrift (2.7) lässt sich der Deformationsgradient durch

$$\mathbf{F} = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^i \quad (2.8)$$

darstellen. Eine weitere Darstellung des Deformationsgradienten lautet

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \text{Grad } \mathbf{x}. \quad (2.9)$$

Der Deformationsgradient  $\mathbf{F}$  transformiert damit ein unverformtes Linienelement  $d\mathbf{X}$  der Referenzkonfiguration auf ein verformtes Linienelement  $d\mathbf{x}$  der Momentankonfiguration. Um stets den Zusammenhang zur Ausgangslage des Körpers herstellen zu können, muss die Abbildung  $\mathbf{F}$  eineindeutig sein. Dies ist gleichbedeutend mit der Existenz einer inversen Abbildung  $\mathbf{F}^{-1}$ , was wiederum an die Bedingung  $\det \mathbf{F} \neq 0$  gekoppelt ist. Wird außerdem  $\det \mathbf{F} > 0$  gefordert, so sind Selbstdurchdringungen des Körpers ausgeschlossen. Die inverse Abbildung  $\mathbf{F}^{-1}$  lautet

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} = \text{grad } \mathbf{X} = \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{g}^i, \quad (2.10)$$

womit die *pull-back*-Operation

$$\mathbf{G}_i = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{g}_i \quad (2.11)$$

angegeben werden kann. Das infinitesimale Volumenelement  $dV$  der Referenzkonfiguration und das infinitesimale Volumenelement  $dv$  der Momentankonfiguration kann mit

$$dv = J dV \quad (2.12)$$

beschrieben werden. Hierbei ist

$$J := \det \mathbf{F} > 0 \quad (2.13)$$

die Jakobi-Determinante. Sie ist eine skalare Größe und wird auch als Volumenverhältnis oder Dilatation bezeichnet.

Die polare Zerlegung des Deformationsgradienten lautet

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \mathbf{U} = \mathbf{V} \mathbf{R} . \quad (2.14)$$

Hierbei ist  $\mathbf{U}$  der symmetrische ( $\mathbf{U} = \mathbf{U}^T$ ) und positiv definite ( $\det \mathbf{U} > 0$ ) materielle Rechts-Strecktensor.  $\mathbf{V}$  ist der symmetrische ( $\mathbf{V} = \mathbf{V}^T$ ) räumliche Links-Strecktensor. Der Tensor  $\mathbf{R}$  ist ein eigentlich orthogonaler Drehtensor ( $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{1}$ ,  $\det \mathbf{R} = 1$  d. h.  $\mathbf{R} \in SO(3)$ ). Die Zerlegung kann als Trennung in objektive Verzerrungen  $\mathbf{U}$  bzw.  $\mathbf{V}$  und eine Starrkörperrotation  $\mathbf{R}$  aufgefasst werden.

Für eine spätere Arbeitsdefinition wird der Greensche Verzerrungstensor

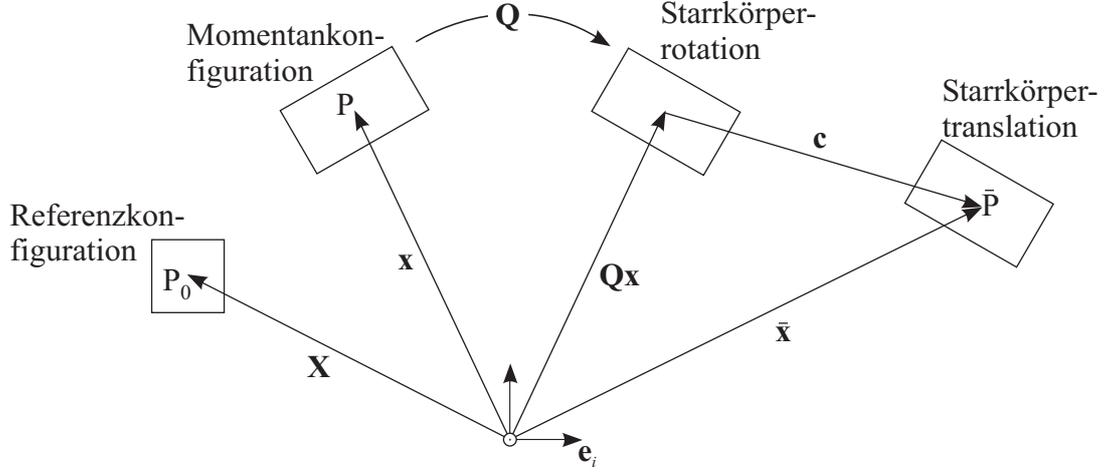
$$\mathbf{E} := \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}) \quad (2.15)$$

als Verzerrungsmaß eingeführt. Er ist invariant gegen Starrkörperrotation und -translation und verschwindet somit bei einer reinen Starrkörperbewegung.

Dies wird nachfolgend gezeigt. In Abbildung 2.2 folgt einer Deformation mit der Verzerrung  $\mathbf{E}$  eine Starrkörperbewegung. Für den sich einstellenden Zustand gilt

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}(t) \mathbf{x} + \mathbf{c}(t) , \quad (2.16)$$

wobei die Starrkörperbewegung mit einem Drehtensor  $\mathbf{Q}(t) \in SO(3)$  und einem Vektor  $\mathbf{c}(t)$  stattfindet. Mit Gleichung (2.16) ergibt sich der Deformationsgradient nun zu



**Abbildung 2.2:** Starrkörperbewegung aus Rotation  $\mathbf{Q}$  und Translation  $\mathbf{c}$  nach einer Deformation

$$\bar{\mathbf{F}} = \frac{d\bar{\mathbf{x}}}{d\mathbf{X}} = \frac{d(\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{c})}{d\mathbf{X}} = \frac{d(\mathbf{Q}\mathbf{x})}{d\mathbf{X}} = \frac{\mathbf{Q} d\mathbf{x}}{d\mathbf{X}} = \mathbf{Q}\mathbf{F} . \quad (2.17)$$

Einsetzen von  $\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{Q}\mathbf{F}$  in Gleichung (2.15) liefert die Verzerrung  $\bar{\mathbf{E}}$

$$\bar{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} ((\mathbf{Q}\mathbf{F})^T \mathbf{Q}\mathbf{F} - \mathbf{1}) = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \underbrace{\mathbf{Q}^T \mathbf{Q}}_{=\mathbf{1}} \mathbf{F} - \mathbf{1}) = \mathbf{E} , \quad (2.18)$$

womit gezeigt ist, dass sich der Greensche Verzerrungstensor  $\mathbf{E}$  bei einer Starrkörperbewegung nicht ändert. Bei dem quadratischen Term  $\mathbf{F}^T \mathbf{F}$  spielen die Vorzeichen der Koeffizienten von  $\mathbf{F}$  keine Rolle (Richtungsunabhängigkeit). Mit Hilfe der polaren Zerlegung (2.14) kann der materielle Rechts-Cauchy-Green-Tensor eingeführt werden

$$\mathbf{C} := \mathbf{F}^T \mathbf{F} = (\mathbf{R}\mathbf{U})^T \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{U}^T \mathbf{R}^T \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{U}^2 . \quad (2.19)$$

Hieraus ist die Symmetrie ( $\mathbf{E} = \mathbf{E}^T$ ) des Greenschen Verzerrungstensors zu erkennen. Mit der in Gleichung (2.5) notierten Identität und mit Gleichung (2.8) lautet die Darstellung des Greenschen Verzerrungstensors

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}) = \frac{1}{2} ((\mathbf{G}^i \otimes \mathbf{g}_i) (\mathbf{g}_j \otimes \mathbf{G}^j) - G_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j) \\ &= \frac{1}{2} (g_{ij} - G_{ij}) \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j = E_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \end{aligned} \quad (2.20)$$

und man erkennt an den Basen  $\mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j$ , dass sich dieses Verzerrungsmaß auf die Referenzkonfiguration bezieht. Später wird gezeigt, dass die Cauchy-Spannung  $\boldsymbol{\sigma}$  der Momentankonfiguration mit Hilfe einer *pull-back*-Operation auf die Referenzkonfiguration transformiert werden muss, um die Spannungen und Verzerrungen konstitutiv zu verknüpfen. In Abbildung 2.1 wurde die Beziehung

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u} \quad (2.21)$$

bereits visualisiert. Wegen der Linearität des Gradientenoperators gilt

$$\mathbf{F} = \text{Grad } \mathbf{x} = \text{Grad } (\mathbf{X} + \mathbf{u}) = \text{Grad } \mathbf{X} + \text{Grad } \mathbf{u} = \mathbf{1} + \text{Grad } \mathbf{u} . \quad (2.22)$$

Nun wird der materielle Verschiebungsgradient  $\mathbf{H} := \text{Grad } \mathbf{u}$  eingeführt und durch den Zusammenhang  $\mathbf{F} = \mathbf{1} + \mathbf{H}$  lässt sich der Greensche Verzerrungstensor angeben zu

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \mathbf{H}) . \quad (2.23)$$

Eine Trennung in einen linearen und einen nichtlinearen Anteil des Greenschen Verzerrungstensors

$$\mathbf{E}_{lin} := \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T) , \quad \mathbf{E}_{nlin} := \frac{1}{2} (\mathbf{H}^T \mathbf{H}) \quad (2.24)$$

ist möglich.

## 2.2 Spannungen

Spannung ist die im Innern eines Körpers wirkende Kraft, bezogen auf die zugehörige Schnittfläche in der Momentankonfiguration. Somit kann ein Spannungsvektor  $\mathbf{t}$  über

$$\mathbf{t} := \frac{d\mathbf{f}}{da} , \quad (2.25)$$

definiert werden, wobei  $d\mathbf{f}$  der Kraftvektor auf der Schnittfläche  $da$  ist. Der Spannungsvektor  $\mathbf{t}$  ändert sich je nach Schnittrichtung, also mit der Normalen  $\mathbf{n}$  der Schnittfläche. Mit Hilfe einer linearen Abbildung  $\boldsymbol{\sigma}$  kann der Normalenvektor  $\mathbf{n}$  auf den Spannungsvektor  $\mathbf{t}$  abgebildet werden. Das Cauchy-Theorem lautet

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \quad (2.26)$$

und man erkennt, bezogen auf das vektorielle Flächenelement  $d\mathbf{a}$  mit dem Spannungsvektor aus Gleichung (2.25)

$$d\mathbf{f} = \boldsymbol{\sigma} d\mathbf{a} \quad \text{mit} \quad d\mathbf{a} = \mathbf{n} da . \quad (2.27)$$

Hierbei ist  $\boldsymbol{\sigma}$  der auf die Momentankonfiguration bezogene Cauchysche Spannungstensor und kann in Indexnotation zu

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \quad (2.28)$$

angegeben werden. In Abschnitt 2.3.3 wird gezeigt, dass der Cauchysche Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  symmetrisch ist. Der Kirchhoffsche Spannungstensor  $\boldsymbol{\tau} = J \boldsymbol{\sigma}$  ist ein weiterer räumlicher Spannungstensor und wird durch die Jakobi-Determinante  $J$  transformiert. Um im Rahmen konstitutiver Überlegungen das in der Referenzkonfiguration notierte Greensche Verzerrungsmaß  $\mathbf{E}$  mit Spannungen verknüpfen zu können, muss ein ebenfalls auf die Referenzkonfiguration bezogenes Spannungsmaß gefunden werden (vgl. Kapitel 2.3.4). Mit Hilfe der Transformation des Volumenelements (2.12) gilt

$$\begin{aligned} d\mathbf{a} \cdot d\mathbf{x} &= J d\mathbf{A} \cdot d\mathbf{X} \\ &= J d\mathbf{A} \cdot \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x} \\ &= J \mathbf{F}^{-T} d\mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (2.29)$$

und es ergibt sich die Transformation eines vektoriellen Flächenelements

$$d\mathbf{a} = J \mathbf{F}^{-T} d\mathbf{A} . \quad (2.30)$$

Hiermit kann der Schnittkraftvektor  $d\mathbf{f}$  nach Gleichung (2.27) umgeschrieben werden zu

$$d\mathbf{f} = \boldsymbol{\sigma} d\mathbf{a} = \mathbf{P} d\mathbf{A} . \quad (2.31)$$

Man definiert den 1. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor durch

$$\mathbf{P} := J \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} . \quad (2.32)$$

Der 1. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor kann durch Einsetzen von Gleichung (2.10) und Transponieren der Inversen des Deformationsgradienten aus Gleichung (2.28) in Indexnotation geschrieben werden

$$\begin{aligned}
\mathbf{P} &= J \sigma^{ij} (\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j) (\mathbf{g}^k \otimes \mathbf{G}_k) \\
&= J \delta_j^k \sigma^{ij} (\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}_k) \\
&= P^{ik} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}_k \\
&= P^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}_j .
\end{aligned} \tag{2.33}$$

An den Basen wird deutlich, dass sich der 1. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor teilweise auf die Referenz, teilweise auf die Momentankonfiguration bezieht. Um ein Spannungsmaß zu generieren, das sich vollständig auf die Referenzkonfiguration bezieht, wird der Schnittkraftvektor zusätzlich durch eine *pull-back*-Operation zurück auf die Referenzkonfiguration transformiert

$$\mathbf{F}^{-1} d\mathbf{f} = \mathbf{S} d\mathbf{A} \tag{2.34}$$

und man erhält die Darstellung des 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensors

$$\mathbf{S} = J \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P} . \tag{2.35}$$

In analoger Weise zur Zwischenrechnung nach Gleichung (2.33) ergibt sich  $\mathbf{S}$  mit Gleichung (2.10) in Indexschreibweise

$$\mathbf{S} = S^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j \tag{2.36}$$

und es wird deutlich, dass sich der 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor vollständig auf die Referenzkonfiguration bezieht. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass dieser Spannungstensor physikalisch nicht interpretierbar und als eine reine Rechengröße anzusehen ist.

## 2.3 Bilanzgleichungen

In diesem Abschnitt werden die mechanischen Bilanzgleichungen Massenbilanz, Impuls- und Drehimpulsbilanz sowie die Energiebilanz wiedergegeben. Diese Differentialgleichungen enthalten keine konstitutiven Aussagen, sie sind daher stofffrei und stellen die fundamentalen Beziehungen der Kontinuumsmechanik dar. Sie sind von axiomatischem Charakter und voneinander unabhängig.

### 2.3.1 Massenbilanz

Die Massenbilanz besagt, dass die Masse  $m$  eines Körpers während eines Verformungsprozesses erhalten bleibt. Eine Massenzufuhr über die Oberfläche oder eine Massenzunahme im Innern des Volumens ist ausgeschlossen. Die Masse eines Körpers ist die Dichte, integriert über das gesamte Volumen eines Körpers. Sowohl die Dichte als auch das Volumen ändern sich während einer Deformation. In der Momentankonfiguration ist  $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$  die Dichte mit dem zugehörigen Volumen  $dv$ . Bezogen auf die Referenzkonfiguration ist die Dichte  $\rho_0 = \rho_0(\mathbf{X})$  und das Volumen  $dV$ . Die Massenbilanz lautet

$$m = \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 dV = \int_{\mathcal{B}_t} \rho dv = \text{konst.} \quad (2.37)$$

Mit Gleichung (2.12) kann die Massenbilanz umgeformt werden zu

$$\int_{\mathcal{B}_0} (\rho_0 - \rho J) dV = 0 \quad (2.38)$$

Da diese Formulierung für ein beliebig kleines Teilvolumen gilt, muss der Integrand in Gleichung (2.38) verschwinden und man erkennt den Zusammenhang zwischen der Dichte in Referenz- und Momentankonfiguration

$$\rho_0 = \rho J \quad (2.39)$$

Über das Verschwinden der zeitlichen Ableitung motiviert

$$\frac{d}{dt} m = 0 \quad (2.40)$$

folgt mit Hilfe der Kettenregel und der Rechenregel  $\dot{J} = J \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}}$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 dV &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_0} \rho J dV \\ &= \int_{\mathcal{B}_0} J (\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}}) dV \\ &= \int_{\mathcal{B}_t} (\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}}) dv = 0 \quad , \end{aligned} \quad (2.41)$$

wobei die lokale Form

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}} = 0 \quad (2.42)$$

als Kontinuitätsbedingung bezeichnet wird.

### 2.3.2 Impulsbilanz

Nach dem zweiten und dritten Newtonschen Axiom ist der Gesamtimpuls in einem abgeschlossenem System konstant. Allgemein ist für einen Körper die zeitliche Ableitung des Impulses  $I$  gleich der Summe aller angreifenden Volumen- und Oberflächenkräfte  $\mathbf{p}$ . Formal kann diese Aussage folgendermaßen angegeben werden

$$\frac{d}{dt} I = \mathbf{p} , \quad (2.43)$$

wobei der Impuls  $I$  durch

$$I := \int_{\mathcal{B}_t} \rho \dot{\mathbf{x}} \, dv = \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \dot{\mathbf{x}} \, dV \quad (2.44)$$

in Momentan- und Referenzkonfiguration definiert ist. Die resultierende Kraft  $\mathbf{p}$  ergibt sich aus der massenbezogenen Beschleunigung  $\mathbf{b}_0$  bzw.  $\mathbf{b}$  und der auf die Oberfläche wirkenden Spannung  $\mathbf{t}_0$  bzw.  $\mathbf{t}$  zu

$$\mathbf{p} = \int_{\mathcal{B}_t} \rho \mathbf{b} \, dv + \int_{\partial \mathcal{B}_t} \mathbf{t} \, da = \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \mathbf{b}_0 \, dV + \int_{\partial \mathcal{B}_0} \mathbf{t}_0 \, dA . \quad (2.45)$$

Damit ergibt sich das dynamische Kräftegleichgewicht in räumlicher und materieller Darstellung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_t} \rho \dot{\mathbf{x}} \, dv &= \int_{\mathcal{B}_t} \rho \mathbf{b} \, dv + \int_{\partial \mathcal{B}_t} \mathbf{t} \, da , \\ \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \dot{\mathbf{x}} \, dV &= \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \mathbf{b}_0 \, dV + \int_{\partial \mathcal{B}_0} \mathbf{t}_0 \, dA . \end{aligned} \quad (2.46)$$

Der Gaußsche Integralsatz überführt ein Oberflächenintegral in ein Volumenintegral. Hiermit sowie mit dem Cauchy-Theorem nach Gleichung (2.26) ergeben sich aus den Gleichungen (2.46) die lokalen Feldgleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho (\mathbf{b} - \ddot{\mathbf{x}}) &= \mathbf{0} \quad \text{in } \mathcal{B}_t, \\ \operatorname{Div} [\mathbf{FS}] + \rho_0 (\mathbf{b}_0 - \ddot{\mathbf{x}}) &= \mathbf{0} \quad \text{in } \mathcal{B}_0 \end{aligned} \quad (2.47)$$

sowie

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} &= \mathbf{t} \quad \text{auf } \mathcal{B}_t, \\ \mathbf{FS} \mathbf{N} &= \mathbf{t}_0 \quad \text{auf } \mathcal{B}_0. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Hierbei ist  $\mathbf{n}$ , wie bereits in Gleichung (2.26) eingeführt, der Flächennormalenvektor der Momentankonfiguration und  $\mathbf{N}$  der Flächennormalenvektor der Referenzkonfiguration. Die lokale dynamische Feldgleichung bzw. Kräftegleichgewichtsbedingung (2.47) wird auch Erste Cauchy'sche-Bewegungsgleichung genannt.

### 2.3.3 Drehimpulsbilanz

Die Drehimpulsbilanz postuliert, analog zur Impulsbilanz, den Zusammenhang zwischen Moment und Drehimpuls. Demzufolge ist die zeitliche Änderung des Drehimpulses  $L_p$  bezüglich eines beliebigen Drehpunktes  $p$  gleich der Summe der Momente  $m_p$  infolge der von außen wirkenden Volumen- und Oberflächenkräfte.

$$\frac{d}{dt} L_p = \mathbf{m}_p. \quad (2.49)$$

Nach dem Schnittprinzip gilt diese Aussage für jeden beliebigen, noch so kleinen Teilkörper. Der räumliche bzw. materielle Drehimpuls bezüglich des Punktes  $p$  ist definiert mit

$$L_p = \int_{\mathcal{B}_t} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \times \rho \dot{\mathbf{x}} \, dv = \int_{\mathcal{B}_0} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \times \rho_0 \dot{\mathbf{x}} \, dV. \quad (2.50)$$

Die Summe der Momente bezüglich  $p$

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_p &= \int_{\mathcal{B}_t} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \times \rho \mathbf{b} \, dv + \int_{\partial \mathcal{B}_t} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \times \mathbf{t} \, da \\ &= \int_{\mathcal{B}_0} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \times \rho_0 \mathbf{b}_0 \, dV + \int_{\partial \mathcal{B}_0} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \times \mathbf{t}_0 \, dA \end{aligned} \quad (2.51)$$

liefert schließlich die Drehimpulsbilanz in der entsprechenden Konfiguration

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_t} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \times \rho \dot{\mathbf{x}} \, dv &= \int_{\mathcal{B}_t} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \times \rho \mathbf{b} \, dv + \int_{\partial \mathcal{B}_t} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \times \mathbf{t} \, da , \\
\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_0} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \times \rho_0 \dot{\mathbf{x}} \, dV &= \int_{\mathcal{B}_0} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \times \rho_0 \mathbf{b}_0 \, dV + \int_{\partial \mathcal{B}_0} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \times \mathbf{t}_0 \, dA .
\end{aligned} \tag{2.52}$$

Im statischen Fall entspricht die Drehimpulsbilanz der Momentengleichgewichtsaussage ( $\Sigma M = 0$ ). Aus Gleichung (2.52) lässt sich nach Umformungen die Symmetrie des Cauchyschen Spannungstensors  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$  ableiten, was im Folgenden gezeigt wird. Hierzu wird zunächst die linke Seite von Gleichung (2.52) mit Hilfe der Kontinuitätsbedingung gemäß Gleichung (2.42) und unter Anwendung der Kettenregel umgeformt

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} L_p &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_t} \rho (\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \times \dot{\mathbf{x}} \, dv = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_0} \{ \rho (\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \times \dot{\mathbf{x}} \} J \, dV \\
&= \int_{\mathcal{B}_0} \frac{d}{dt} \{ \rho J (\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \times \dot{\mathbf{x}} \} \, dV \\
&= \int_{\mathcal{B}_0} [ \underbrace{(\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}})}_{=0} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \times \dot{\mathbf{x}} + \rho \underbrace{\dot{\mathbf{x}} \times \dot{\mathbf{x}}}_{=0} + \rho (\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \times \ddot{\mathbf{x}} ] J \, dV \\
&= \int_{\mathcal{B}_t} \rho (\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \times \ddot{\mathbf{x}} \, dv .
\end{aligned} \tag{2.53}$$

Mit dem Cauchy-Theorem nach Gleichung (2.26) lässt sich das Oberflächenintegral aus Gleichung (2.52) mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes für Kreuzprodukte (vgl. DE BOER [36]) in ein Volumenintegral transformieren

$$\int_{\partial \mathcal{B}_t} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \times (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) \, da = \int_{\mathcal{B}_t} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \times \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \operatorname{grad} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \times \boldsymbol{\sigma} \, dv . \tag{2.54}$$

Die eben umgeformten Terme (2.53) und (2.54) können dann in Gleichung (2.52) eingesetzt werden, welche mit der lokalen Kräftegleichgewichtsbedingung (2.47) auf die Beziehung

$$\int_{\mathcal{B}_t} [(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \times \underbrace{(\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} - \rho \ddot{\mathbf{x}})}_{=0} + \operatorname{grad}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \times \boldsymbol{\sigma}] dv = 0 \quad (2.55)$$

und schließlich auf

$$\int_{\mathcal{B}_t} \operatorname{grad}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \times \boldsymbol{\sigma} dv = 0 \quad (2.56)$$

führt. Wegen

$$\operatorname{grad}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) = \operatorname{grad} \mathbf{x} - \operatorname{grad} \mathbf{x}_p = \mathbf{1} - \mathbf{0} \quad (2.57)$$

vereinfacht sich die Darstellung (2.56) weiter und führt auf

$$\int_{\mathcal{B}_t} \mathbf{1} \times \boldsymbol{\sigma} dv = 0 . \quad (2.58)$$

Da die Drehimpulsbilanz in jedem Punkt erfüllt sein muss, verschwindet der Integrand und es muss gelten

$$\mathbf{1} \times \boldsymbol{\sigma} = 0 . \quad (2.59)$$

Nach DE BOER [36] gilt als Rechenregel für das Kreuzprodukt zweier Tensoren  $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{E}^3 : (\mathbf{A}\mathbf{B}^T)$ , wobei  $\mathbf{E}^3$  ein Einheitstensor 3. Stufe ist. Damit ist Bedingung (2.59)

$$\begin{aligned} \mathbf{1} \times \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{E}^3 : (\mathbf{1}\boldsymbol{\sigma}^T) = \mathbf{E}^3 : \boldsymbol{\sigma}^T \\ &= 1/\sqrt{g} e^{ijk} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}_k : \sigma_{ml} \mathbf{g}^l \otimes \mathbf{g}^m = 1/\sqrt{g} e^{ijk} \delta_j^l \delta_k^m \sigma_{ml} \mathbf{g}_i \\ &= 1/\sqrt{g} e^{ijk} \sigma_{kj} \mathbf{g}_i = 0 . \end{aligned} \quad (2.60)$$

Hierbei ist  $g = (\mathbf{g}^i \times \mathbf{g}^j) \cdot \mathbf{g}^k$  das Spatprodukt der dualen Basis. Das Permutationssymbol  $e^{ijk}$  ist für eine gerade Permutation +1, für eine ungerade Permutation -1 und in allen anderen Fällen verschwindet es

$$e^{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{für } ijk = 123, 312, 231 \\ -1 & \text{für } ijk = 321, 213, 132 \\ 0 & \text{sonst .} \end{cases} \quad (2.61)$$

Damit kann Bedingung (2.60) für z. B.  $i = 1$  entsprechend ausgewertet werden

$$\begin{aligned} & \underbrace{e^{111}}_{=0} \sigma_{11} + \underbrace{e^{112}}_{=0} \sigma_{12} + \underbrace{e^{113}}_{=0} \sigma_{13} \\ & + \underbrace{e^{121}}_{=0} \sigma_{21} + \underbrace{e^{122}}_{=0} \sigma_{22} + \underbrace{e^{123}}_{=1} \sigma_{23} \\ & + \underbrace{e^{131}}_{=0} \sigma_{31} + \underbrace{e^{132}}_{=-1} \sigma_{32} + \underbrace{e^{133}}_{=0} \sigma_{33} = 0 \end{aligned}$$

und man erkennt  $\sigma_{23} = \sigma_{32}$ . Die Gleichheit der verbleibenden Nebendiagonalelemente  $\sigma_{13} = \sigma_{31}$  und  $\sigma_{12} = \sigma_{21}$  wird auf analoge Weise abgeleitet, womit die Symmetrie des Cauchyschen Spannungstensors  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$  gezeigt ist.

### 2.3.4 Bilanz der Energie

Der erste Hauptsatz der Thermodynamik ist die Bilanz der Energie und besagt, dass ein abgeschlossenes System die Energie als Zustandsgröße besitzt. In der Elastostatik beschränkt sich die Energieerhaltung auf Bewegungsgrößen, Kraftgrößen und thermische Größen. Eine ausführliche Darstellung der Thermodynamik findet sich in DOERING ET AL. [39], LUCAS [95] oder LANGEHEINECKE ET AL. [87].

Die zeitliche Änderung der Gesamtenergie  $E$  eines Systems ist gleich der Summe der Leistung der äußeren Volumen- und Oberflächenkräfte  $\dot{W}^{ext}$  sowie der äußeren Wärmezufuhr  $\dot{Q}$ . Formal bedeutet dies

$$\frac{d}{dt} E = \dot{W}^{ext} + \dot{Q} . \quad (2.62)$$

Die Energie  $E$  kann als Summe der kinetischen Energie  $K$  und der inneren Energie  $U$  (Ruheenergie) notiert werden. Die Definition der Energie  $E$  ist

$$E := \int_{\mathcal{B}_t} \rho \left( u + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} \right) dv = \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \left( u + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} \right) dV , \quad (2.63)$$

wobei  $u$  die innere Energiedichte ist, die auch als Ruheenergie bezeichnet wird. Die kinetische Energie ist definiert mit

$$K := \int_{\mathcal{B}_t} \rho \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} dv = \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} dV . \quad (2.64)$$

Die Summe der Leistung der äußeren Volumen- und Oberflächenkräfte  $\dot{W}^{ext}$  sowie die äußere Wärmezufuhr  $\dot{Q}$  lauten

$$\dot{W}^{ext} = \int_{\mathcal{B}_t} \rho \mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{x}} \, dv + \int_{\partial \mathcal{B}_t} \mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{x}} \, da = \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \mathbf{b}_0 \cdot \dot{\mathbf{x}} \, dV + \int_{\partial \mathcal{B}_0} \mathbf{t}_0 \cdot \dot{\mathbf{x}} \, dA \quad (2.65)$$

und

$$\dot{Q} = \int_{\mathcal{B}_t} \rho r \, dv + \int_{\partial \mathcal{B}_t} (-\mathbf{q}) \cdot \mathbf{n} \, da = \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 r \, dV + \int_{\partial \mathcal{B}_0} (-\mathbf{Q}) \cdot \mathbf{N} \, dA . \quad (2.66)$$

Hierbei ist  $r$  die spezifische Wärmezufuhr sowie  $\mathbf{q}$  und  $\mathbf{Q}$  der Wärmeflussvektor der jeweiligen Konfiguration, wobei  $\mathbf{q} = J \mathbf{F}^{-T} \mathbf{Q}$  analog zu Gleichung (2.29) gilt. Die zeitliche Änderung der inneren Energie ist nach dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik gleich der inneren Spannungsleistung und der Wärmemengenänderung

$$\frac{d}{dt} U = \dot{W}^{int} + \dot{Q} . \quad (2.67)$$

Dies liefert mit der additiven Aufspaltung  $\frac{d}{dt} E = \frac{d}{dt} K + \frac{d}{dt} U$  der zeitlichen Änderung der gesamten Energie eingesetzt in Gleichung (2.62), dass die zeitliche Änderung der kinetischen Energie gleich der Leistung der Volumen- und Oberflächenkräfte abzüglich der inneren Spannungsleistung ist

$$\frac{d}{dt} K = \dot{W}^{ext} - \dot{W}^{int} . \quad (2.68)$$

Hieraus ist der Arbeitssatz der Mechanik ableitbar, denn bei Beschränkung auf quasi-statische Prozesse verschwinden zeitliche Wegänderungen ( $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ ) und nach Integration folgt

$$W^{ext} = W^{int} . \quad (2.69)$$

Da beliebige Verzerrungs- und Spannungstensoren nicht miteinander kombiniert werden können, geben z. B. MACVEAN [97], OGDEN [107] oder SANSOUR UND KOLLMANN [126] eine Zusammenstellung arbeitskonformer Größen wieder. In der folgenden Zusammenstellung werden Temperatureinflüsse außer Acht gelassen. Für hyperelastische Materialien gilt, dass die spezifische Formänderungsenergie-dichte  $W_{0S}$  und die Formänderungsenergie  $W^{int}$  bezüglich der Spannungen Potentialcharakter besitzen.  $W_{0S}$  ist somit wegunabhängig, hängt also nur von der

Differenz zwischen Anfangs- und Enddeformationszustand ab. Mit  $W_{0S}$  lässt sich die zeitliche Änderung von  $W^{int}$ , also die Elementarleistung  $\dot{W}^{int}$  in materieller Schreibweise

$$\dot{W}^{int} = \int_{\mathcal{B}_0} \frac{\partial W_{0S}}{\partial \mathbf{E}} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} dV = \int_{\mathcal{B}_0} \frac{\partial W_{0S}}{\partial \mathbf{E}} : \dot{\mathbf{E}} dV \quad (2.70)$$

angeben. Aufgrund des Potentialcharakters der Formänderungsenergie ergibt sich für hyperelastische Materialien der 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor zu

$$\mathbf{S} := \frac{\partial W_{0S}}{\partial \mathbf{E}} . \quad (2.71)$$

Die zeitliche Ableitung des Greenschen Verzerrungstensors, also der materielle Verzerrungsgeschwindigkeitstensor oder Verzerrungsratentensor, folgt aus der Produktregel

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}} + \dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{F}) , \quad (2.72)$$

wobei

$$\dot{\mathbf{F}} = \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{X}} = \text{Grad } \dot{\mathbf{x}} \quad (2.73)$$

den materiellen Geschwindigkeitsgradienten darstellt. Aus einer *push-forward*-Operation des materiellen Geschwindigkeitsgradienten erhält man den räumlichen Geschwindigkeitsgradienten

$$\mathbf{l} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} = \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} = \text{grad } \dot{\mathbf{x}} . \quad (2.74)$$

Der räumliche Deformationsgeschwindigkeitstensor  $\mathbf{d}$  ergibt sich aus der Transformation des materiellen Verzerrungsratentensors in die Momentankonfiguration und lautet

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= \mathbf{F}^{-1} \dot{\mathbf{E}} \mathbf{F}^{-1} \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{l} + \mathbf{l}^T) . \end{aligned} \quad (2.75)$$

Das Skalarprodukt  $\mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}}$  wird mit Hilfe der Definition über die Spur<sup>1</sup> genauer untersucht

---

<sup>1</sup> $\text{tr}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{tr} \mathbf{A} + \text{tr} \mathbf{B}$  und  $\text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{A} \mathbf{B}^T) = \text{tr}(\mathbf{A} \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{B} \mathbf{A})$

$$\begin{aligned}
\mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} &= \text{tr}(\mathbf{S}^T \dot{\mathbf{E}}) = \text{tr}\left(\frac{1}{2} \mathbf{S}^T \mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}} + \frac{1}{2} \mathbf{S}^T \dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{F}\right) \\
&= \text{tr}((\mathbf{F} \mathbf{S})^T \dot{\mathbf{F}}) = \mathbf{F} \mathbf{S} : \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} \\
&= \text{tr}((\boldsymbol{\tau} \mathbf{F}^{-T})^T \dot{\mathbf{F}}) = \text{tr}(\boldsymbol{\tau}^T \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}) = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{l} \\
&= \text{tr}\left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\tau}^T \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau}^T (\dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1})^T\right) = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} .
\end{aligned} \tag{2.76}$$

Es ergeben sich damit folgende arbeitskonforme Paarungen:

$$\dot{W}^{int} = \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} \, dV = \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} \, dV = \int_{\mathcal{B}_0} \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} \, dV . \tag{2.77}$$

Der dritte Term aus Gleichung (2.77) lässt sich mit der Transformationsbeziehung für ein Volumenelement  $dv = J \, dV$  (2.12) in die Momentankonfiguration überführen und es ergibt sich die arbeitskonforme Paarung für den Cauchyschen Spannungstensor

$$\dot{W}^{int} = \int_{\mathcal{B}_t} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \, dv . \tag{2.78}$$

## 3 Faserverbundwerkstoffe

### 3.1 Abgrenzung und Überblick

Die Werkstoffkunde beschäftigt sich nach HORNBOGEN [72] überwiegend mit künstlich erzeugten Werkstoffen. HORNBOGEN [72] teilt die klassische Werkstoffkunde in drei Werkstoffklassen ein: Metalle, Keramiken und Polymere.

Metalle sind gute elektrische Leiter und chemisch meist beständig. Sie reflektieren Licht und schmelzen bei hohen Temperaturen. Sie zeigen auch bei tiefen Temperaturen plastisches Verformungsvermögen.

Keramische Werkstoffe sind schlechte elektrische Leiter, dafür chemisch sehr beständig. Sie können durchsichtig sein und sie schmelzen, ähnlich wie Metalle, bei hohen Temperaturen. Sie weisen in der Regel kein plastisches Verformungsverhalten auf.

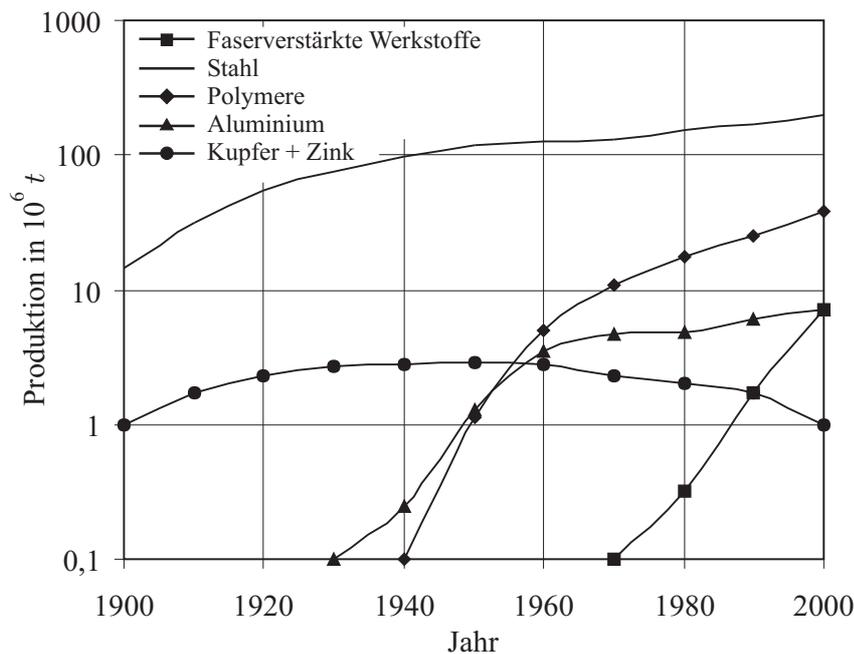
Polymere sind schlechte elektrische Leiter und chemisch bedingt beständig. Bei hohen Temperaturen schmelzen oder zersetzen sie sich. Sie verhalten sich bei tiefen Temperaturen spröde, bei erhöhter Temperatur werden sie jedoch zunehmend plastischer. Die übliche Bezeichnung für Polymere ist der Begriff *Kunststoffe*. Diese Bezeichnung entspringt keiner Logik, denn die Herstellung nahezu aller Werkstoffe geschieht auf künstlichem Wege. Die Bezeichnung *Kunststoffe* leitet sich von der 1911 erstmals erschienenen gleichnamigen Fachzeitschrift ab, in der Publikationen über die damals neuen Werkstoffe veröffentlicht wurden. Der international übliche Ausdruck für Polymere ist Plastik (plastics [englisch], plastique [französisch] bzw. plastmass [russisch]).

Werden mindestens zwei Werkstoffe aus verschiedenen oder gleichen Werkstoffklassen kombiniert, entsteht ein neuer Werkstoff, der als Verbundwerkstoff oder Kompositwerkstoff bezeichnet wird. Dabei weisen Verbundwerkstoffe neue, gegenüber den Einzelwerkstoffen veränderte Gebrauchseigenschaften auf, welche von den Eigenschaften und dem Volumenanteil sowie deren Orientierung und Wechselwirkung der jeweiligen Einzelkomponenten abhängen.

Nicht nur physikalische Eigenschaften entscheiden über den Einsatz von Werkstoffen, sondern oft auch der Werkstoffpreis. Im Bauwesen zählen Stahl, Holz sowie Beton und Mauerwerk zu den preiswerten Baustoffen, wobei Stahl zu den metallischen und Beton zu den keramischen Werkstoffen gehört. Holz ist ein natürliches Polymer, das mit seiner Röhrenstruktur aus Zellulose  $(C_6H_{10}O_5)_n$  und der Hemizellulosematrix eingebettet in Lignin sehr an unidirektional verstärkte Verbundwerkstoffe erinnert (vgl. BLASS ET AL. [18]).

Stahlkonstruktionen können, abgesehen vom Korrosionsschutz, als reine Stahlkonstruktionen ohne Zuhilfenahme weiterer Werkstoffe ausgeführt werden. Holzkonstruktionen benötigen an Verbindungsstellen, den so genannten Knotenpunkten, Stahl in Form von Nägeln, Dübeln, Blechen usw. Beton kann in Fundamenten oder Fahrbahnen zum Einsatz kommen. In Tragkonstruktionen aus Beton treten jedoch Zugspannungen auf, die der Beton nicht aufnehmen kann. Er wird daher mit Stahl armiert und ist somit ein Verbundwerkstoff.

Welche wirtschaftliche Rolle unterschiedliche Werkstoffe im letzten Jahrhundert spielten, zeigen die in Abbildung 3.1 dargestellten produzierten Werkstoffmassen nach HORNBOGEN [72]. Die Nachfrage nach Stahl nimmt nach wie vor stetig zu. Obgleich Polymere teuer sind, ist die Nachfrage für diese Werkstoffe in der zweiten Hälfte des letzten Jahrhunderts stark gestiegen mit zeitgleich sinkender Nachfrage nach Buntmetallen. Auffallend ist auch der relativ schnelle und anhaltende Anstieg der Nachfrage nach Faserverbundwerkstoffen.



**Abbildung 3.1:** Produzierte Massen wichtiger Werkstoffe (USA) des letzten Jahrhunderts, (HORNBOGEN [72])

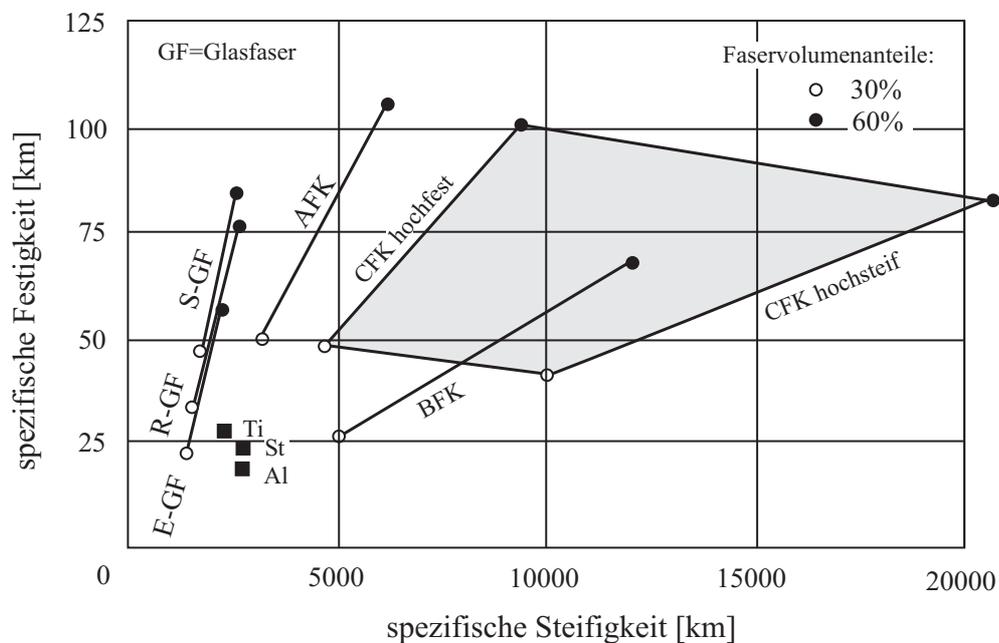
Werkstoffe werden in erster Linie mechanisch beansprucht. Eine Gegenüberstellung der relativen Kosten in Bezug auf die Zugfestigkeit  $\sigma_u$  von Baustahl S355 ist in Tabelle 3.1 dargestellt und macht die Attraktivität von Baustahl deutlich.

Zudem wird die hohe gewichtsbezogene Festigkeit von mit Glasfasern verstärktem Kunstharz (GFK) deutlich.

Werkstoff	Zugfestigkeit	Dichte	Kosten
	$\frac{\sigma_u}{\frac{N}{mm^2}}$	$\frac{\rho}{\frac{g}{cm^3}}$	pro $\frac{N}{mm^2}$ (S355 = 1)
Baustahl, Stahlblech	370	7,8	1
graues Gusseisen	120	7,3	3
Aluminiumlegierung	200	2,7	3,5
Polyvinylchlorid	40	1,4	4
GFK	500	1,9	10
Polyäthylen	10	0.9	12

**Tabelle 3.1:** relative Kosten in Bezug auf die Zugfestigkeit  $\sigma_u$  von Baustahl S355

Polymere finden Verwendung, wenn der Anspruch an die Werkstofffestigkeit gering ist und gleichzeitig das Gewicht begrenzt bleiben soll, wie beispielsweise bei Gehäusen von Haushaltsgeräten und Elektronikartikeln oder als Verkleidungsteile im Fahrzeug- und Flugzeugbau. Ist dagegen der Anspruch an die Werkstofffestigkeit sehr hoch bei gleichzeitiger Gewichtsminimierung, so kommen faserverstärkte Polymerwerkstoffe zum Einsatz.

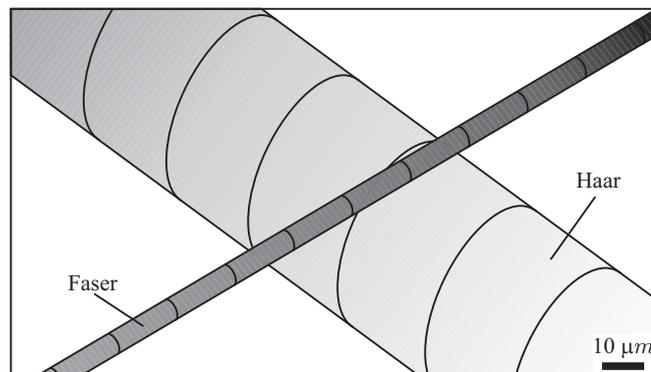


**Abbildung 3.2:** Spezifische Festigkeiten und Steifigkeiten von Faserverbundwerkstoffen und metallischen Werkstoffen, (NIEDERSTADT [103])

In Abbildung 3.2 ist gemäß NIEDERSTADT [103] das Verhältnis von spezifischer Festigkeit  $\sigma_u/\rho g$  zu spezifischer Steifigkeit  $E/\rho g$  für einige Faserverbundwerkstoffe und die Metalle Stahl, Aluminium und Titan in der Dimension Länge dargestellt. Die Abkürzungen AFK, BFK und CFK stehen hierbei für Aramid-, Bor- und Kohlenstoff-Faser-Kunststoffe. Es fällt auf, dass Verbundwerkstoffe aus CFK besonders hohe spezifische Steifigkeiten und Festigkeiten besitzen, was den Einsatz in Extrembereichen rechtfertigt.

### 3.2 Bemerkungen zu Faserverbundwerkstoffen

Das Ziel beim Einsatz eines Faserverbundwerkstoffs ist die Erzielung optimaler mechanischer Eigenschaften wie Steifigkeit und Festigkeit bei geringem Gewicht. Faserverbundwerkstoffe bestehen aus dünnen Fasern hoher Festigkeit und Steifigkeit, die in einem Matrixmaterial eingebettet sind. Die Fasern weisen hierbei aufgrund hoher chemischer Reinheit und extremer Schlankheit (vgl. Abbildung 3.3) eine sehr geringe Wahrscheinlichkeit von Fehlstellen (Fremdmoleküle, Versetzungen, Kerben) auf, wodurch die hohe Festigkeit begründet ist.



**Abbildung 3.3:** Größenvergleich einer Kohlenstofffaser mit einem menschlichen Haar

Das Matrixmaterial schützt dabei die Fasern vor äußeren Einflüssen, sorgt für die Übertragung von Schubkräften und hält die Fasern in einer gewünschten Orientierung, stabilisiert diese also. Die Festigkeits- und Steifigkeitswerte des Matrixmaterials liegen deutlich unter denen der Fasern (vgl. Tabelle 3.2 bzw. 3.3). Die hohe gewichtsbezogene Festigkeit und die Möglichkeit der Anpassung an den Kraftfluss sowie gute Ermüdungseigenschaften zeichnen Faserverbundwerkstoffe aus. Die geringe Bruchdehnung der Fasern und Temperaturbeständigkeit des Matrixmaterials sowie die geringe Bruchfestigkeit senkrecht zur Faserrichtung sind als Nachteile anzusehen. Eine vertiefte Darstellung vorteilhafter und weniger vorteil-

hafter Eigenschaften von faserverstärkten Kunststoffen findet sich beispielsweise in DOMKE [41], VEREIN DEUTSCHER INGENIEURE [148] oder HORNBOKEN [72].

### 3.3 Einsatzgebiete von Faserverbundwerkstoffen

Faserverbundwerkstoffe lösen aufgrund ihrer vorteilhaften mechanischen und chemischen Eigenschaften in vielen Bereichen metallische Werkstoffe ab. Sie finden beispielsweise im Flugzeugbau (z. B. Höhenleitwerk vgl. Abbildung 3.4, Heckteile, etc.) oder bei Windkrafträdern Verwendung, aber auch bei Hochleistungssportgeräten, die extrem leicht und damit wenig träge, aber dennoch sehr steif sein müssen. Tennisschläger und Wintersportgeräte wie Ski oder Snowboards fallen in diesen Bereich.



**Abbildung 3.4:** Höhenleitwerk eines Flugzeugs

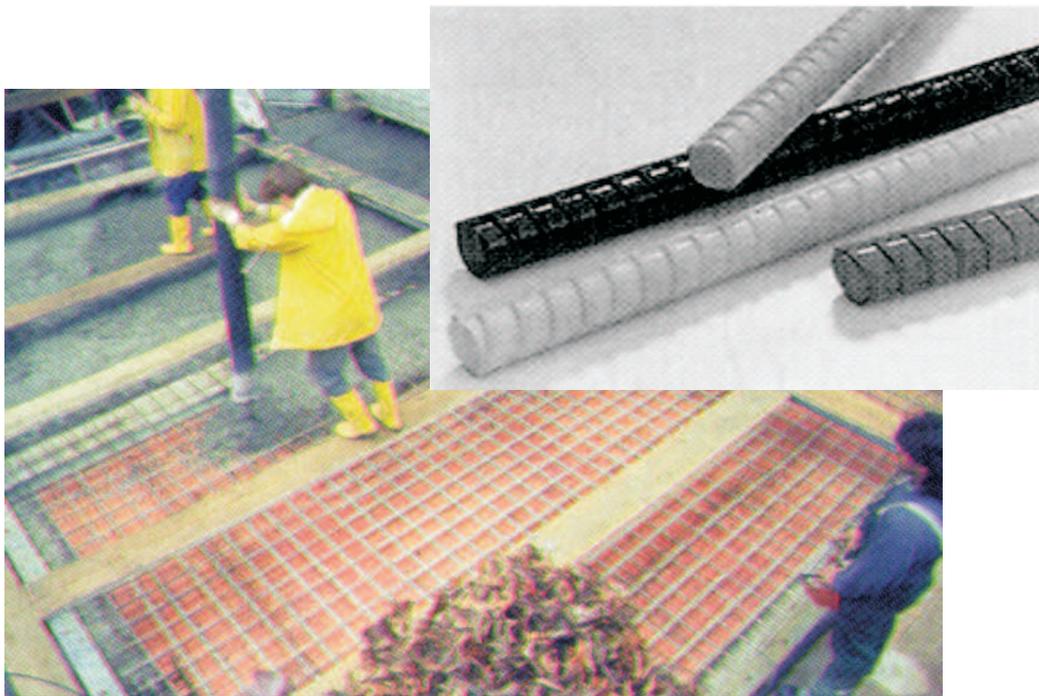
Insbesondere beim Flugzeugbau ist derzeit ein wesentlicher Wechsel in der Anwendung von Faserverbundwerkstoffen zu beobachten. Wurden bisher nur Sekundärstrukturen aus diesen Materialien erstellt, werden nun auch Primärbauerteile, wie z. B. Teile des Rumpfes und der Flügel sowie das vollständige Höhen- und Seitenleitwerk aus Faserverbundstrukturen erstellt. Aktuelles Beispiel ist der Airbus A380, bei dem der Faserverbundanteil bei etwa 40 % liegt.

Im Fahrzeugbau werden Faserverbundwerkstoffe aufgrund der Möglichkeit der freien Formgebung in erster Linie als Verkleidungsteile verwendet. Fronthauben,

Fahrerkabine von Lastkraftwagen oder Kofferraumdeckel sind einige Beispiele. Im Omnibusbau werden vollständig selbsttragende Karosserien aus Faserverbundwerkstoffen hergestellt, was zu einer enormen Gewichtsreduzierung führt. Im Rennsport werden Monoques aus hochwertigen Faserverbundwerkstoffen hergestellt. Die erheblich geringere Massenträgheit der Walzen von Druckmaschinen aus CFK gegenüber Stahlwalzen ermöglicht in vielen Fällen den Verzicht des Walzantriebs. Stattdessen kann im sog. Schleppbetrieb gefahren werden.

Der Großteil aller Yachten und Sportboote ist aus besagtem Werkstoff gefertigt und hat aufgrund der vergleichsweise einfacheren Formgestaltung die Holzbauweise fast völlig verdrängt. Dank der Gewichtsersparnis besitzen solche Boote einen geringeren Tiefgang, was den Bedarf einer geringeren Antriebsenergie zur Folge hat.

Hinsichtlich der chemischen Beständigkeit sind Faserverbundwerkstoffe auch im Apparate-, Rohrleitungs- und Behälterbau zu finden. Wegen der magnetischen Passivität und der elektrischen Isolationsfähigkeit sind Faserverbundwerkstoffe in der Elektrotechnik weit verbreitet.

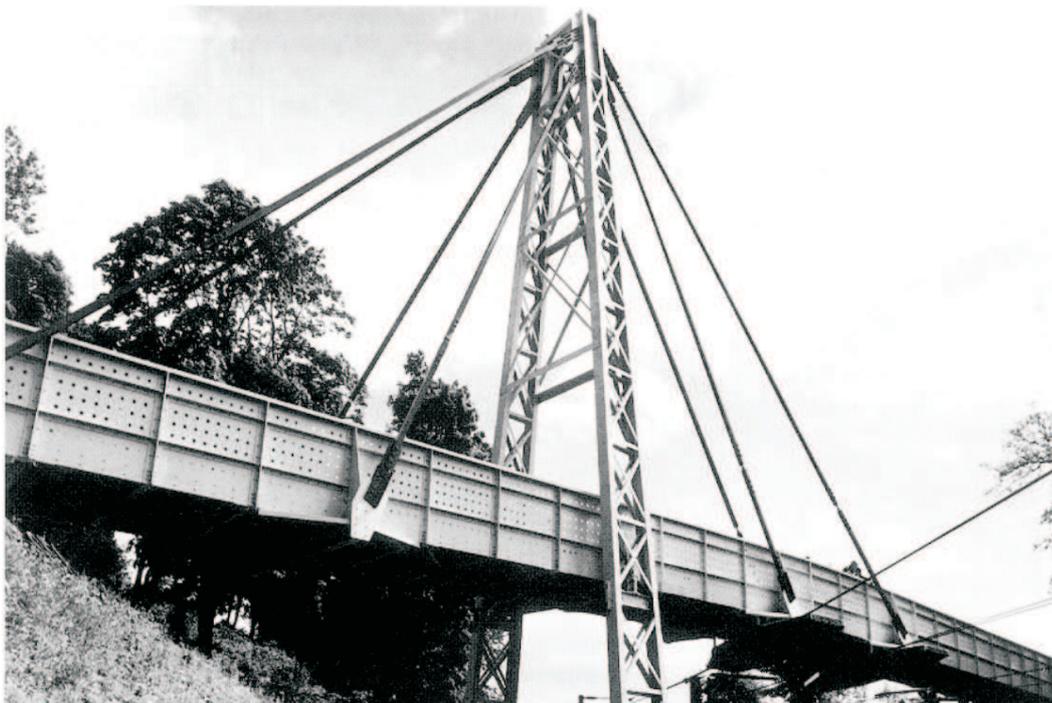


**Abbildung 3.5:** Bewehrungsstäbe aus Faserverbundwerkstoffen, SCHÖCK BAUTEILE GMBH [129]

Angesichts ihrer Korrosionsbeständigkeit werden im Bauwesen Spannkabel aus Faserverbundwerkstoffen zur Vorspannung von Beton eingesetzt. Es finden auch schlaffe Bewehrungsstäbe aus GFK im Bauwesen Verwendung (vgl. Abbildung 3.5, SCHÖCK BAUTEILE GMBH [129]). Veränderten Nutzungsbedingungen und der damit verbundenen Abtragung erhöhter Verkehrslasten begegnet man durch nachträglich aufgeklebte oder eingeschlitzte CFK-Laschen bei biegebeanspruchten Bauteilen aus Stahlbeton oder Holz.

Im Bereich von Ausklinkungen sind Brettschichtholzträger stark querzuggefährdet. Eine Verstärkung durch Auflaminieren von Faserverbundwerkstoffen im querzuggefährdeten Bereich erhöht die Tragfähigkeit dieser Diskontinuitätsbereiche um ein Vielfaches.

In Abbildung 3.6 ist die 1997 in Kolding (Dänemark) errichtete Fußgänger- und Radfahrerbrücke dargestellt, die nahezu vollständig aus glasfaserverstärktem Kunststoff besteht. Lediglich die Schraubenverbindungen der asymmetrischen Schrägseilkonstruktion sind aus Stahl. Sie wurde nach Angabe der herstellenden Firma (FIBERLINE COMPOSITES A/S [48]) in drei Teilen komplett vorgefertigt und innerhalb 18 Stunden während drei Nächten bei laufendem Bahnbetrieb aufgestellt.



**Abbildung 3.6:** Fußgänger- und Radfahrerbrücke als reine Faserverbundkonstruktion in Kolding (Dänemark), FIBERLINE COMPOSITES A/S [48]

### 3.4 Polymere Werkstoffe

In diesem Kapitel werden Polymere etwas ausführlicher behandelt, da diese Werkstoffe meist als Matrixmaterial von Faserverbundwerkstoffen zum Einsatz kommen. Polymere zählen grundsätzlich zu den Leichtwerkstoffen mit einem spezifischen Gewicht um  $1\text{ g/cm}^3$  oder wenig darüber. Darüber hinaus gehören sie zu den organischen Werkstoffen. Der Umgang und der Gebrauch von organischen Werkstoffen ist nicht neu, denn die Verwendung von Holz als organischer Werkstoff geht bis zum Ursprung der Menschheit zurück. Die späte Herstellung künstlicher polymerer Werkstoffe lässt sich darauf zurückführen, dass erst durch die Entwicklung physikalischer Instrumente Ende des 20. Jahrhunderts der Aufbau der natürlichen Polymere wie Holz oder Leder entschlüsselt werden konnte. Man entdeckte Riesenmoleküle, welche aus immer wiederkehrenden Einheiten in großer Anzahl zusammengesetzt waren. Neu ist daher die ab etwa Anfang der 30er Jahre beginnende künstliche Herstellung organischer Werkstoffe mit dem Ziel neuer oder verbesserter technischer Eigenschaften, wie beispielsweise der dielektrischen Wirkung des Polyäthylens oder des sehr guten Wärmeleitwiderstands von geschäumtem Polyurethan.

Polymere bestehen aus langen Kettenmolekülen, den sog. Makromolekülen, die durch Verbinden kürzerer Moleküle, den Monomeren, hergestellt werden. Dabei besteht ein Makromolekül aus über 10.000 Monomeren. Bei einer millionenfachen Vergrößerung wäre ein solches Makromolekül etwa  $20\text{ cm}$  breit und  $1\text{ km}$  lang. Monomere bestehen hauptsächlich aus den Elementen Kohlenstoff  $C$  und Wasserstoff  $H$  sowie Sauerstoff  $O$ , Stickstoff  $N$ , Schwefel  $S$  und Chlor  $Cl$ . Bei der Herstellung von Makromolekülen durch Monomere werden drei Methoden unterschieden: die Polymerisation, die Polykondensation sowie die Polyaddition. In Abbildung 3.7 ist zu jeder Herstellungsmethode ein Beispiel dargestellt (vgl. ARPE [5]).

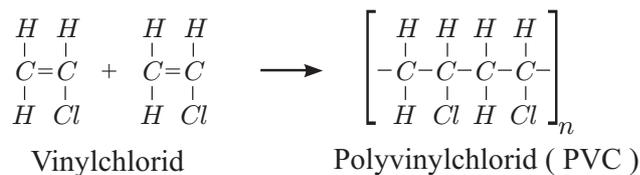
Bei der **Polymerisation** werden die Doppelbindungen der Monomere mit Hilfe von Katalysatoren oder Radikalen aufgebrochen und diese zu langen Makromolekülen zusammengefügt. Werden hierbei gleiche Sorten von Monomeren verwendet, so entsteht ein Homopolymerisat, andernfalls ein Copolymerisat. Beispiele für Polymerisate und Anwendungsbereiche sind Polyethylen (PE) für Flaschen oder Rohrleitungen, Polypropylen (PP) für Gerätegehäuse oder Polymethylmethacrylat (PMMA) für Verglasungen.

Die **Polykondensation** verkettet gleiche oder verschiedene Monomere unter Abspaltung von Nebenprodukten wie Wasser oder Alkohol zu Makromolekülen. Beispiele für Polykondensate sind Polyethylenterephthalat (PET) für Folien, ungesättigter Polyester (UP) als Matrixmaterial für Faserverbundwerkstoffe, Poly-

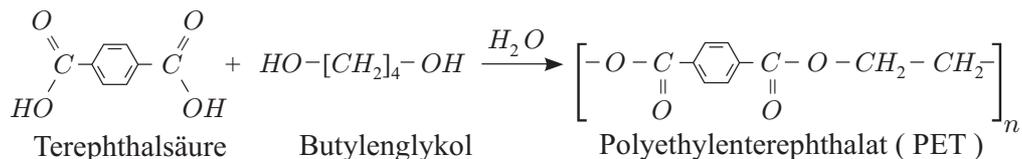
carbonat (PC) für CDs oder Polyamide (PA) für Befestigungsmittel wie Dübel.

Bei der **Polyaddition** werden verschiedene Monomere durch Platzwechsel einiger Atome oder Atomgruppen ohne Abspaltung von Nebenprodukten verkettet. Polyurethan (PUR) für Rollen oder Lager, Polyurethanschaum (PUR-Schaum) als Wärmedämmstoffplatten oder Epoxide (EP) für Klebstoffe oder als Matrixmaterial für Faserverbundwerkstoffe sind Vertreter der Polyaddukte.

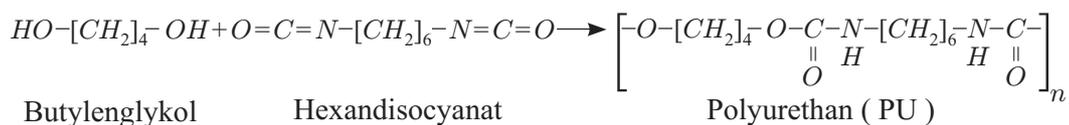
Polymerisation  $\longrightarrow$  Polymerisat



Polykondensation  $\longrightarrow$  Polykondensat



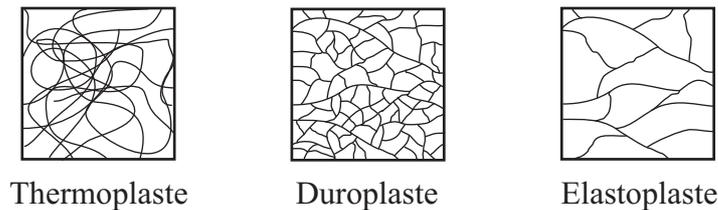
Polyaddition  $\longrightarrow$  Polyaddukt



**Abbildung 3.7:** Beispiele zur Polymerisation, -kondensation und -addition

Für einen vertieften Einblick der chemischen Hintergründe von Polymeren sei an dieser Stelle z. B. auf ARPE [5], FEDTKE [47] oder KAISER [76] verwiesen.

Das Ausmaß der Vernetzung der Kettenmoleküle untereinander entscheidet maßgeblich die Werkstoffeigenschaften und teilt die Polymere in drei charakteristische Gruppen: Thermoplaste, Duroplaste und Elastoplaste. In Abbildung 3.8 ist der schematische Aufbau dieser Haupttypen dargestellt (vgl. z. B. DOMINGHAUS [40]). In den folgenden Unterkapiteln werden diese Haupttypen kurz behandelt. Eine ausführliche Darstellung der Eigenschaften der Polymerhauptgruppen findet sich beispielsweise bei DOMINGHAUS [40] oder MICHAELI ET AL [100].



**Abbildung 3.8:** Schematischer Aufbau der Polymerhaupttypen (DOMININGHAUS [40])

### 3.4.1 Thermoplaste

Die langen Kettenmoleküle der Thermoplaste sind untereinander nicht vernetzt. Ihre Struktur ist entweder amorph, d.h. die Molekülketten sind unregelmäßig angeordnet, oder teilkristallin mit stellenweise parallel angeordneten Molekülketten. Oberhalb der sog. Glasübergangstemperatur verflüssigen sich Thermoplaste, darunter erstarren sie. Dieser Vorgang ist reversibel. Der Elastizitätsmodul von Thermoplasten ist wie auch die Zugfestigkeit zum Teil sehr unterschiedlich und stark von der Art des Thermoplasts abhängig.

Im Bauwesen kommen Thermoplaste in vielfältiger Weise zum Einsatz: als Rohre zur Entwässerung oder im Lüftungsbau, in Form von Folien schützen sie Bauwerke vor Feuchtigkeit, als Fugenbänder verhindern sie bei Arbeitsfugen im Erdreich das Eindringen von drückendem Wasser. Sie werden als preiswerte Boden- oder Wandbeläge verwendet und aufgeschäumt zur Wärmedämmung oder als Kern von Sandwichelementen benutzt. Als Fensterrahmen werden Thermoplaste seit den 1970er Jahren eingesetzt.

### 3.4.2 Duroplaste

Nach Zugabe des Härters vernetzen sich die Makromoleküle des zunächst flüssigen duroplastischen Harzes sehr stark untereinander. Dieser Vorgang ist irreversibel, denn vor Erreichen der Glasübergangstemperatur zersetzen sich Duroplaste. Sie werden aufgrund des flüssigen Ausgangszustands häufig als Matrixmaterial eines Faserverbundwerkstoffs verwendet.

Im Bauwesen werden Duroplaste als Anstriche zum Schutz vor mechanischem, chemischem und atmosphärischem Angriff verwendet. Neben der Funktion als korrosionsverhütende Überzüge können Duroplaste auch geschäumt werden und kommen so als Wärmedämmstoffplatten oder als Kern von Sandwichelementen zum Einsatz.

### 3.4.3 Elastoplaste

Der Vernetzungsgrad von Elastoplasten bzw. Elastomeren liegt wie ihre Eigenschaften zwischen dem der Thermoplaste und dem der Duroplaste. Wie die Thermoplaste lassen sie sich wieder verflüssigen, allerdings ist hierzu neben höherer Temperatur auch erhöhter Druck notwendig. Bemerkenswert ist gerade bei diesen Polymeren eine Bruchdehnung  $\varepsilon_u$  von bis zu 800 %.

Im Bauwesen dienen Elastomere zur Fugendichtung oder als Lagerung zwischen Bauteilen. Bei geringer Last genügen unbewehrte Elastomerlager. Bei großen Lasten, wie es beispielsweise bei Brücken der Fall ist, werden die Elastomere mit Stahlblechen quer zur Lastrichtung bewehrt. Aufgrund der Querdehnungsbehinderung durch die Stahlbleche wird die Stauchung des Lagers minimiert, jedoch bleibt die gewünschte Scherfähigkeit erhalten.

In Tabelle 3.2 sind ausgewählte polymere Werkstoffkenngrößen nach ALTENBACH [2] dargestellt. Weitere physikalische Eigenschaften gängiger Polymere sind in KÄMPF [82] katalogisiert dargestellt.

Polymer	Dichte $\rho$ [ $\frac{g}{cm^3}$ ]	Elastizitätsmodul $E$ [ $10^3 \cdot \frac{N}{mm^2}$ ]	Zugfestigkeit $\sigma_u$ [ $\frac{N}{mm^2}$ ]	thermischer Ausdehnungskoeffizient $\alpha_T$ [ $\frac{1}{10^6 K}$ ]
UP-Harze	1,2 – 1,30	3 – 4,2	40 – 70	80 – 150
Epoxidharz	1,1 – 1,20	3 – 6,0	30 – 100	45 – 80
Thermoplaste	0,9 – 1,42	1 – 5,0	25 – 250	10 – 27
Balsaholz	0,1 – 0,19	2 – 6,0	8 – 18	
Schäume				
Polyurethan	0,03 – 0,07	0,025 – 0,06		
Polystyren	0,03 – 0,07	0,020 – 0,03	0,25 – 1,25	

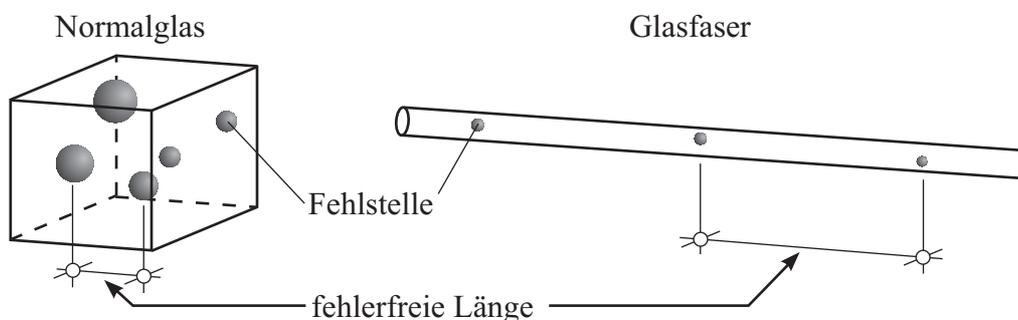
**Tabelle 3.2:** Ausgewählte Werkstoffkenngrößen verschiedener Matrixwerkstoffe, (ALTENBACH [2])

## 3.5 Fasermaterialien

Zur Verstärkung polymerer Werkstoffe kommen hauptsächlich Glasfasern, Kohlenstofffasern sowie Aramidfasern zum Einsatz, auf die sich dieses Kapitel beschränkt. In ausgewählten Fällen werden auch Bor-, Keramik-, Siliziumcarbid-, Polyethylen- oder Aluminiumoxidfasern verwendet. Fasern sind gekennzeichnet

durch hohe Festigkeit und Steifigkeit. Sie sind im Allgemeinen anisotrop und spröde. Wegen ihrer im Normalfall deutlich geringeren Bruchdehnung als der des Matrixmaterials wird ihre Zugfestigkeit voll ausgenutzt, was im Hinblick auf die hohen Herstellungskosten der Fasern beabsichtigt ist.

**Glasfasern** werden mit hoher Geschwindigkeit aus einer Glasschmelze, die hauptsächlich aus Siliziumdioxid ( $SiO_2$ ) besteht, durch Düsen gezogen oder gepresst. Da sich duroplastische Harze nicht chemisch an Glas binden, wird direkt nach dem Ziehen aus der Glasschmelze eine Schlichte mit Haftvermittler auf die Faser aufgebracht, welche sich chemisch an die Faser bindet. Durch den relativ schnellen Abkühlvorgang nimmt das Siliziumdioxid nach dem Schmelzen ohne Kristallbildung eine amorphe Struktur an, weshalb Glasfasern im Vergleich zu den anderen beiden Faserarten isotropes Materialverhalten aufweisen. Zur gezielten Änderung physikalischer Eigenschaften werden dem Siliziumdioxid noch weitere Oxide wie Aluminiumtrioxid ( $AlO_3$ ), Kalziumoxid ( $CaO$ ), Magnesiumoxid ( $MgO$ ) oder Bortrioxid ( $B_2O_3$ ) und in wesentlich geringeren Mengen noch weitere Oxide beigemischt. Durch das Dotieren mit den genannten Oxiden erhält man z. B. M-, oder R/S-Glasfasern für besonders hohe Steifigkeiten bzw. Festigkeiten. Der Gesamtanteil zusätzlicher Oxide liegt bei Glasfasern bei 25 bis 35 % (vgl. FLEMMING ET AL. [50]). Die bis zu 40-fach höhere Zugfestigkeit von Glasfasern im Vergleich zu Normalglas mit gleicher chemischer Zusammensetzung ist auf den Größeneffekt, also der großen Schlankheit der Fasern zurückzuführen. Die Zugfestigkeit sinkt mit steigendem Durchmesser der Glasfasern, da sich mit der Vergrößerung der Querschnittsfläche die Wahrscheinlichkeit von Fehlstellen erhöht, diese an Größe zunehmen und sich damit die fehlerfreie Länge verringert. In Abbildung 3.9 ist die fehlerfreie Länge qualitativ dargestellt. Glasfasern werden mit einem Faserdurchmesser zwischen 5 und 13  $\mu m$  hergestellt und nach dem Ziehen zu Rovings versponnen. Rovings sind Bündel von zumeist 60 Fäden, von denen jeder einzelne aus bis zu 800 Elementarfäden besteht.

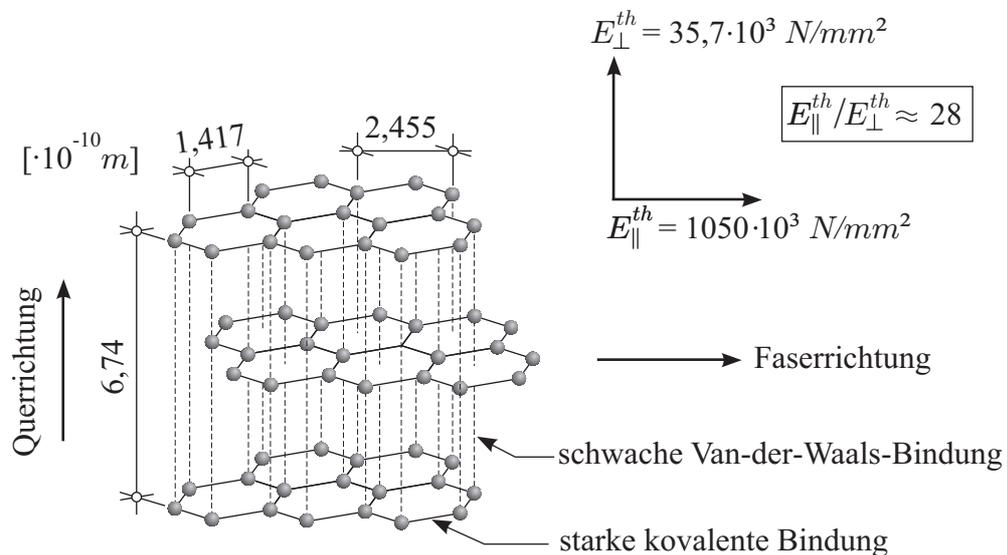


**Abbildung 3.9:** Größeneffekt der Glasfaser

**Kohlenstofffasern** unterscheiden sich durch ihre drei unterschiedlichen Herstellungsverfahren:

1. Einkristallwachstum in einem Kohlelichtbogen,
2. Entstehung aus der Dampfphase durch thermische Zersetzung eines Kohlenwasserstoffgases,
3. Pyrolyse von organischen **P**olyacrylnitrilfasern (PAN).

Kohlenstofffasern aus den ersten beiden Herstellungsverfahren sind sehr teuer. Daher werden im Allgemeinen nur Fasern verwendet, die mit der Pyrolyse produziert werden. Dabei entstehen aus den PAN-Fasern bei 300 °C Kohlenstofffasern niedriger Festigkeit. Durch die Karbonisierung bei 1600 °C nimmt die Festigkeit stark zu (um ca. 36 %), die Steifigkeit weniger stark (um ca. 15 %) und es entstehen hochfeste (HT) Kohlenstofffasern. Hochsteife bzw. hochmodule (HM) Kohlenstofffasern entstehen durch Graphitierung bei 3000 °C. Gegenüber hochfesten Kohlenstofffasern zeigen sie eine deutliche Abnahme der Festigkeit, jedoch eine deutliche Zunahme der Steifigkeit.

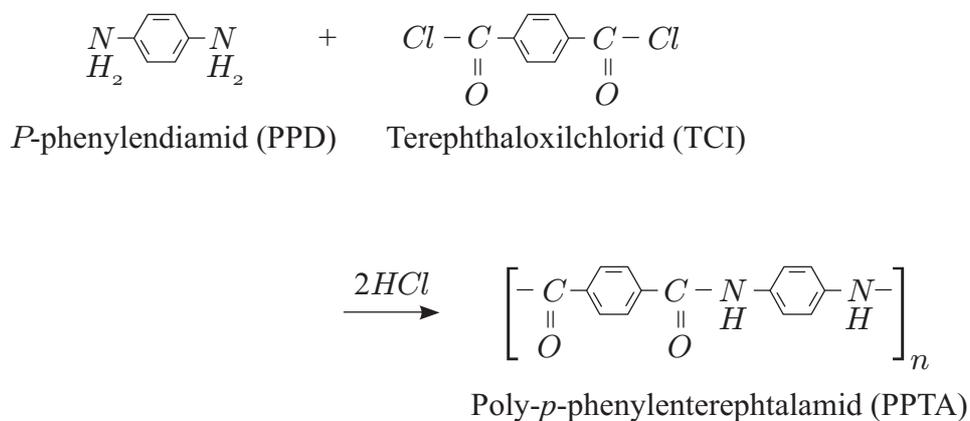


**Abbildung 3.10:** Gitteraufbau des Kohlenstoffkristalls (MCGUIRE [99])

Die Graphitschicht ist das elementare Strukturelement der Kohlenstofffaser und mit dem Elektronenmikroskop nachweisbar. Kohlenstofffasern weisen eine sehr

geringe Dichte auf und sind spröde. Ihre Steifigkeit und Festigkeit in Faserrichtung sind deutlich höher als quer zur Faserrichtung. Der theoretische Elastizitätsmodul in Faserrichtung ist  $E_{\parallel}^{th} = 1050 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2$  und in Querrichtung  $E_{\perp}^{th} = 37,5 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2$ , was zu einem Verhältnis von  $E_{\parallel}^{th}/E_{\perp}^{th} \approx 28$  führt (vgl. Abbildung 3.10). Um die mit Durchmessern zwischen 5 und 10  $\mu\text{m}$  sehr dünnen Fasern beim Verarbeitungsprozess vor Beschädigungen zu schützen, werden sie mit einer Schichte aus härtefreiem Epoxidharz, jedoch ohne Haftvermittler, besprüht. Einen umfassenden und vertiefenden Einblick in die Thematik der Kohlenstofffasern und der Verbundwerkstoffe mit diesen Fasern findet sich in MORGAN [102].

**Aramidfasern** sind stark richtungsorientierte **aromatische Polyamide**, die durch die bereits erläuterte Polykondensation hergestellt werden. Sie gehören damit zu den Vertretern polymerer Fasern. In Abbildung 3.11 ist die Polykondensationsreaktion einer Aramidfaser vom Typ Kevlar (du Pont) dargestellt. Aramidfasern unterscheiden sich kaum in ihrer Festigkeit, werden aber mit verschiedenen Steifigkeiten hergestellt (hochzäh, hochsteif und extrem steif). Ihre Steifigkeit und Festigkeit in Faserrichtung ist wie auch bei der Kohlenstofffaser deutlich höher als quer zur Faserrichtung, da die Makromoleküle untereinander über Wasserstoffbrücken verbunden sind. Der Durchmesser einer Faser liegt bei 12  $\mu\text{m}$ . Wie die Kohlenstofffaser wird sie mit einer Schichte besprüht, um sie vor Beschädigungen während des Verarbeitungsprozesses zu schützen. Aramidfasern werden zumeist in Rovings oder Geweben als Verbundfasern verarbeitet. Aufgrund der besonderen Temperaturfestigkeit mit einer Glasübergangstemperatur von bis zu 550°C und der relativ hohen Bruchdehnung der Aramidfasern werden diese in Sicherheitskleidung und zur thermischen Abschirmung von Maschinenteilen eingesetzt.



**Abbildung 3.11:** Reaktionsgleichung zur Herstellung einer Aramidfaser

Einen Überblick bezüglich Herstellung und Eigenschaften der jeweiligen Fasertypen gibt der VEREIN DEUTSCHER INGENIEURE [148], BERTHELOT [17] oder FLEMMING ET AL. [50]. In Tabelle 3.3 sind gemäß SCHÜRMAN [131] ausgewählte Eigenschaften der drei Fasertypen gegenübergestellt und zum Vergleich Kenngrößen für hochfesten Stahl sowie Aluminium angegeben. Bemerkenswert ist der inverse thermische Ausdehnungskoeffizient der Aramid- und Kohlenstofffasern in Faserlängsrichtung. Die langen in Faserlängsrichtung angeordneten Molekülketten der Aramidfasern schwingen bei Temperaturerhöhung in Querrichtung um ein Vielfaches mehr als in Längsrichtung. Bei den Kohlenstofffasern lassen die schwachen Van-der-Waals-Bindungen ebenfalls wesentlich größere Querschwingungen zu als die kovalente Bindung in Längsrichtung. Daher ist die Temperaturdehnung in Faserquerrichtung positiv und betragsmäßig eine Größenordnung größer als in Längsrichtung.

Faserwerkstoff	Faser- $\emptyset$	Dichte	E-Modul	Zugfestigkeit	therm. Ausd.koeff.
	$d$ [ $\mu\text{m}$ ]	$\rho$ [ $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ ]	$E$ [ $10^3 \cdot \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ ]	$\sigma_u \alpha_T$ [ $10^3 \cdot \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ ]	[ $\frac{1}{10^6 \text{K}}$ ]
Glas	7 – 13	2,14 – 2,55	55 – 87	1,65 – 4,50	3,50 – 7,20
Kohlenstoff	5 – 10	1,74 – 1,90	230 – 450	2,1 – 4,5	-0,45 – -1,08
Aramid	12	1,44 – 1,45	67 – 130	2,8	-2
zum Vergleich:					
Stahl		7,83	210	0,4 – 1,2	13
Aluminium		2,71	70	0,3	23

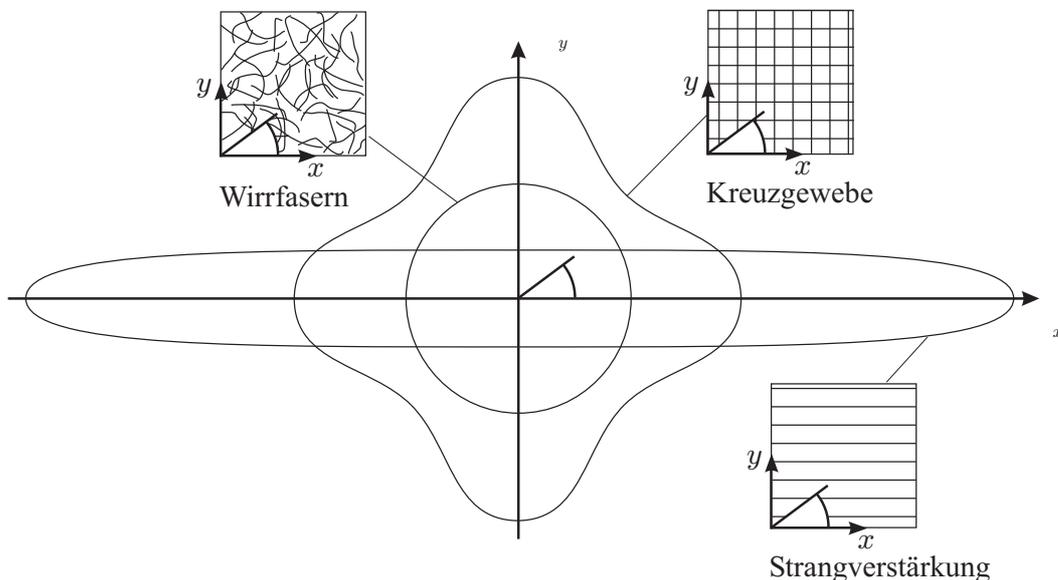
**Tabelle 3.3:** Ausgewählte Werkstoffkenngrößen verschiedener Faserwerkstoffe, (SCHÜRMAN [131])

### 3.6 Verstärkungsarten

Faserverstärkte Polymerwerkstoffe werden nach der Ausrichtung der Fasern unterschieden. Bei Verstärkung durch Wirrfasern liegen die Fasern zufällig in der Matrix, sind also weder gestreckt noch in einer Richtung bevorzugt orientiert. Die Tragfähigkeit der Fasern kann deshalb nicht voll ausgenutzt werden. Die Eigenschaften der Matrix werden jedoch in alle Richtungen gleichmäßig verbessert. Wegen der einfachen Herstellungsweise werden Thermoplaste oft durch kurze Fasern ab 0,1 mm bis ca. 1 mm Länge verstärkt, wobei die Fasern schon vor dem Gießen zugegeben werden. Duroplaste hingegen werden mit Wirrfasermatten aus langen Fasern im Handauflegeverfahren verstärkt.

Bei unidirektionaler Verstärkung, auch Strangverstärkung genannt, werden die Fasern entlang einer Richtung in Bündeln, so genannten Rovings, eingelegt und gestreckt. Es wird die maximale Beanspruchbarkeit in dieser Richtung erreicht und die Faserfestigkeit voll ausgenutzt. Die Belastbarkeit in Querrichtung ist allerdings sehr gering.

In einem Gewebe sind Fasern in variablen Verhältnissen senkrecht zueinander verwoben. Da die Fasern in Gewebematten miteinander verwoben und nicht gestreckt sind, kann die Faserfestigkeit nicht voll ausgenutzt werden. In Abbildung 3.12 sind die eben genannten Zusammenhänge für die Festigkeit  $\sigma_u = \sigma_u(\alpha)$  gemäß DOMKE [41] qualitativ dargestellt.



**Abbildung 3.12:** Verstärkungsarten gemäß DOMKE [41]

Ein unidirektional verstärkter Faserverbundwerkstoff besitzt nur dann optimale Eigenschaften, wenn die von außen einwirkenden Kräfte in die Fasern eingeleitet werden. Diese Krafteinleitung geschieht über Schubspannungen  $\tau$  in der Grenzfläche zwischen Faser und Matrix, die auch Interface genannt wird. Zu dem Lastaufbau entlang der Faser lassen sich zwei grundlegende Modellvorstellungen unterscheiden. Dies sind die Shear-Lag-Theorie nach COX [28] und die elastisch-plastische Analyse nach KELLY [78] bzw. KELLY & TYSON [79]. Bei der Shear-Lag-Theorie ist die Faser von einer zylindrischen Matrix umgeben. Beide Materialien sind ideal elastisch und haften perfekt aneinander. Die Bruchdehnung der Matrix liegt zudem über der der Faser und an den Faserenden findet keine

Kraftübertragung statt. Diese Annahmen führen zu großen Schubspannungsspitzen an den Faserenden.

Bei der elastisch-plastischen Analyse nach KELLY [78] bzw. KELLY & TYSON [79] werden diese Schubspannungsspitzen durch plastisches Matrixfließen abgebaut und führen mit der Annahme eines ideal elastisch-plastischen Matrixverhaltens auf eine konstante Grenzs Schubspannung  $\tau_{Gr}$  zwischen Faser und Matrix. Um die Festigkeit der Faser  $\sigma_u^f$  vollständig auszunutzen, muss diese eine Mindestlänge, die sog. kritische Faserlänge  $l_{krit}$  aufweisen. Unter den oben genannten Voraussetzungen ergibt sich mit dem Faserdurchmesser  $d$  die kritische Faserlänge

$$l_{krit} = \frac{d \sigma_u^f}{2 \tau_{Gr}} . \quad (3.1)$$

Entscheidend für die Kraftübertragung ist die schubfeste Haftung der Faser in der Matrix. Sie wird über den sich in der Schlichte befindlichen Haftvermittler sichergestellt, der sich chemisch sowohl an das Faser- als auch an das Matrixmaterial bindet. Die maximal übertragbare Grenzs Schubspannung  $\tau_{Gr}$  wird mittels Faserauszugsversuchen (Pull-Out-Versuchen) für bestimmte Faser-Matrix-Kombinationen bestimmt (siehe hierzu z. B. CORDES & DANIEL [27]). Mit Hilfe der Finite-Element-Methode werden solche Auszugsversuche numerisch mittels sog. Interface-Elementen simuliert. Die Grundidee dieser Elemente ist in Kapitel 4.4.2 dargestellt.

### 3.7 Anisotropes Materialverhalten

In den folgenden Ausführungen wird ein Stoffgesetz für anisotrope, linear-elastische Materialien hergeleitet, da unidirektional verstärkte Faserverbundwerkstoffe, bedingt durch ihre Mikrostruktur, ein derartiges Materialverhalten besitzen. Die Materialformulierung beruht auf einer makroskopischen Betrachtung, bei der die Homogenität des Materials vorausgesetzt wird. In Kapitel 3.8 werden daher einige Homogenisierungsverfahren vorgestellt. Die Ausgangskonfiguration sei undeformiert und spannungsfrei. Temperatureinflüsse bleiben unberücksichtigt, es werden also lediglich isotherme Prozesse betrachtet.

Die Darstellung der monotropen, orthotropen, transversal isotropen sowie der isotropen Materialmatrix erfolgt gemäß ALTENBACH [2], [3] und [4] sowie NIEDERSTADT [103], YE [163] oder ZOHDI & WRIGGERS [168], nach dem Prinzip der materiellen Symmetrie. Ein bestimmtes Material ist demnach invariant bezüglich Spiegelungen an speziellen Symmetrieebenen.

Mit der Forderung einer quadratischen Formänderungsenergiefunktion ist der lineare Zusammenhang der Spannungen und der Verzerrungen sichergestellt und führt auf das verallgemeinerte Hookesche Stoffgesetz

$$\mathbf{S} = \mathbf{C} : \mathbf{E} . \quad (3.2)$$

Der Materialtensor  $\mathbf{C}$  ist eine lineare Abbildung der Verzerrungen auf die Spannungen, weshalb dieser von vierter Stufe ist. In Indexnotation folgt daher

$$S^{ij} = \mathbb{C}^{ijkl} E_{kl} . \quad (3.3)$$

Der Materialtensor besitzt zunächst  $3^4 = 81$  unabhängige Komponenten. Aufgrund der in Abschnitt 2.3 gezeigten Symmetrie des 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensors folgt für den Materialtensor bezüglich der ersten beiden Indizes  $i \leftrightarrow j$

$$\mathbb{C}^{ijkl} = \mathbb{C}^{jikl} \quad (3.4)$$

und wegen der Symmetrie des Greenschen Verzerrungstensors (vgl. Abschnitt 2.1) ergibt sich bezüglich der letzten beiden Indizes  $k \leftrightarrow l$

$$\mathbb{C}^{ijkl} = \mathbb{C}^{ijlk} , \quad (3.5)$$

womit sich die Anzahl der unabhängigen Komponenten des Materialtensors  $\mathbf{C}$  auf  $(3^2 - 3)^2 = 36$  reduziert.

Bei elastischen Materialien kann die von den Spannungen geleistete Arbeit wegunabhängig sein. In diesem Fall spricht man von Cauchy-elastischen Materialien. Bei hyperelastischen oder Greenschen Materialien besitzt die Formänderungsenergie-dichte Potentialcharakter, ist also wegunabhängig. Damit gilt die in Gleichung (2.71) eingeführte Beziehung, die sich in Indexnotation angeben lässt

$$S^{ij} = \frac{\partial W_{0S}}{\partial E_{ij}} . \quad (3.6)$$

Mit dem verallgemeinerten Hookeschen Gesetz (3.3) folgt durch Differenzieren nach den Verzerrungen der Materialtensor

$$\mathbb{C}^{ijkl} = \frac{\partial}{\partial E_{kl}} \left( \frac{\partial W_{0S}}{\partial E_{ij}} \right) . \quad (3.7)$$

Nach dem Satz von Schwarz ist die Reihenfolge der Ableitungen vertauschbar, so dass Gleichung (3.7) auch in der Form

$$\mathbb{C}^{klij} = \frac{\partial}{\partial E_{ij}} \left( \frac{\partial W_{0S}}{\partial E_{kl}} \right) \quad (3.8)$$

geschrieben werden kann. Formal folgt also der Materialtensor aus der zweifachen partiellen Ableitung der Formänderungsenergie

$$\mathbb{C} = \frac{\partial^2 W_{0S}}{\partial \mathbf{E}^2} . \quad (3.9)$$

Die Beschränkung auf hyperelastische Materialien führt mit Gleichung (3.7) und (3.8) zu einer weiteren Symmetrie des Materialtensors, denn die beiden vorderen und hinteren Indexpaare dürfen vertauscht werden  $(ij) \leftrightarrow (kl)$ . Die Anzahl unabhängiger Materialkomponenten reduziert sich damit auf 21. Ein Material mit 21 unabhängigen Materialkomponenten wird aleotrop oder triklin bezeichnet.

Unter Ausnutzung der Symmetrieeigenschaften des Spannungs- und Verzerrungstensors können die maßgebenden Terme dieser Tensoren in Vektornotation angegeben werden

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &:= [ S^{11} \ S^{22} \ S^{33} \ S^{12} \ S^{13} \ S^{23} ]^T , \\ \mathbf{E} &:= [ E_{11} \ E_{22} \ E_{33} \ 2E_{12} \ 2E_{13} \ 2E_{23} ]^T . \end{aligned} \quad (3.10)$$

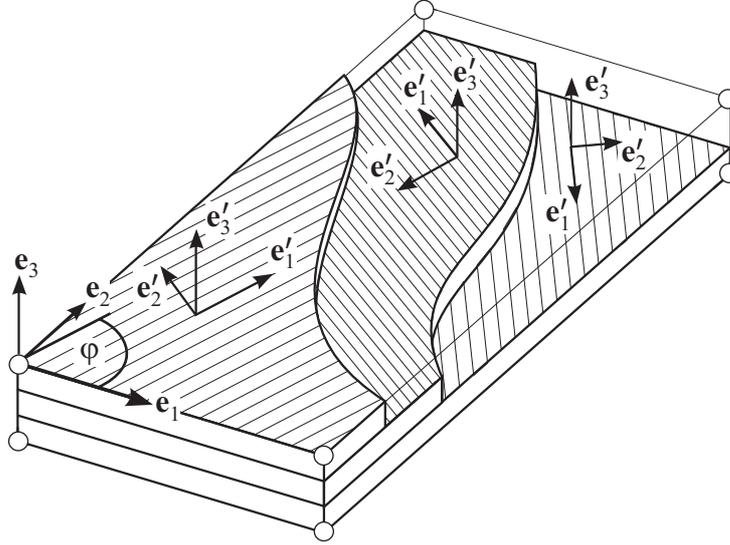
Der vierstufige Materialtensor  $\mathbb{C}$  kann analog infolge der eingeführten Vektornotation als Matrix  $\mathbb{C}$  dargestellt werden

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ S & Y & M & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} . \quad (3.11)$$

### 3.7.1 Richtungstransformation

In vielen Fällen fällt die lokale Materialrichtung nicht mit dem globalen Koordinatensystem zusammen. In Abbildung 3.13 ist ein Ausschnitt eines dreilagigen

Faserverbundwerkstoffs mit der globalen Basis  $\mathbf{e}_i$  und lokalen Koordinaten  $\mathbf{e}'_i$  dargestellt.



**Abbildung 3.13:** Faserverbundlaminat und mögliche Koordinatensysteme

Die Richtungstransformation von dem lokalen Koordinatensystem  $\mathbf{e}'_i$  zum globalen Koordinatensystem  $\mathbf{e}_i$  erfolgt durch skalare Multiplikation des Greenschen Verzerrungstensors von links und rechts mit  $\mathbf{e}'_k$  bzw.  $\mathbf{e}'_l$

$$\begin{aligned}
 E'_{ij}(\mathbf{e}'_i \otimes \mathbf{e}'_j) &= E_{ij}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \\
 \mathbf{e}'_k \cdot E'_{ij}(\mathbf{e}'_i \otimes \mathbf{e}'_j) \cdot \mathbf{e}'_l &= \mathbf{e}'_k \cdot E_{ij}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}'_l \\
 E'_{ij} \delta^{ik} \delta^{jl} &= \mathbf{e}'_k \cdot \mathbf{e}_i E_{ij} \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}'_l \\
 E'_{kl} &= (\mathbf{e}'_k \cdot \mathbf{e}_i) E_{ij} (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}'_l) .
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Es ergibt sich mit  $\mathbf{t}_{ik} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_k$  und unter Berücksichtigung der in (3.10) eingeführten Notation die Transformationsbeziehung

$$\mathbf{E}' = \mathbf{T}_E \mathbf{E} , \tag{3.13}$$

wobei

$$\mathbf{T}_E = \begin{bmatrix} (t_{11})^2 & (t_{12})^2 & (t_{13})^2 & t_{11}t_{12} & t_{11}t_{13} & t_{12}t_{13} \\ (t_{21})^2 & (t_{22})^2 & (t_{23})^2 & t_{21}t_{22} & t_{21}t_{23} & t_{22}t_{23} \\ (t_{31})^2 & (t_{32})^2 & (t_{33})^2 & t_{31}t_{32} & t_{31}t_{33} & t_{32}t_{33} \\ 2t_{11}t_{21} & 2t_{12}t_{22} & 2t_{13}t_{23} & t_{11}t_{22} + t_{12}t_{21} & t_{11}t_{23} + t_{13}t_{21} & t_{12}t_{23} + t_{13}t_{22} \\ 2t_{11}t_{31} & 2t_{12}t_{32} & 2t_{13}t_{33} & t_{11}t_{32} + t_{12}t_{31} & t_{11}t_{33} + t_{13}t_{31} & t_{12}t_{33} + t_{13}t_{32} \\ 2t_{21}t_{31} & 2t_{22}t_{32} & 2t_{23}t_{33} & t_{21}t_{32} + t_{22}t_{31} & t_{21}t_{33} + t_{23}t_{31} & t_{22}t_{33} + t_{23}t_{32} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

die zugehörige Transformationsmatrix ist. Die Transformationsmatrix kann auch mit dem Winkel  $\varphi$  bezüglich der Basis  $\mathbf{e}_i$  dargestellt werden. Da der Richtungs-cosinus zweier Vektoren der Länge 1 gleich dem Skalarprodukt dieser Vektoren ist, gilt

$$\mathbf{t}_{ik} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_k = \cos(\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}_k) . \quad (3.15)$$

Mit der Reduktionsformel der trigonometrischen Funktion  $\cos(90^\circ \pm \varphi) = \mp \sin \varphi$  folgt die Transformationsmatrix

$$\mathbf{T}_E = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & sc & 0 & 0 \\ -s^2 & c^2 & 0 & -sc & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2sc & 2sc & 0 & c^2 - s^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} , \quad \begin{array}{l} c := \cos \varphi \\ s := \sin \varphi \end{array} . \quad (3.16)$$

Um nun den Zusammenhang zwischen der Materialmatrix  $\mathbb{C}$  bezüglich des globalen Basissystems und der entsprechenden Materialmatrix  $\mathbb{C}'$  bezüglich der lokalen Basis zu erkennen, wird die Formänderungsenergiedichte  $W_{0S}$  betrachtet. Da die Formänderungsenergiedichte eine skalare Größe ist, gilt der Zusammenhang

$$W_{0S} = \frac{1}{2} \mathbf{E}'^T \mathbb{C}' \mathbf{E}' = \frac{1}{2} \mathbf{E}^T \mathbb{C} \mathbf{E} . \quad (3.17)$$

Diese Energieäquivalenz führt mit Gleichung (3.13) auf die Transformation der Materialmatrix bezüglich des konvektiven und des orthonormierten Basissystems

$$\mathbb{C} = \mathbf{T}_E^T \mathbb{C}' \mathbf{T}_E . \quad (3.18)$$

Mit dem in Vektornotation formulierten Stoffgesetz  $\mathbf{S} = \mathbb{C} \mathbf{E}$  folgt aus Gleichung (3.17) unter Zuhilfenahme von Gleichung (3.13) die Transformationsvorschrift für den 2. Piola-Kirchhoff-Spannungsvektor

$$\mathbf{S} = \mathbf{T}_E^T \mathbf{S}' . \quad (3.19)$$

Mit den Transformationsbeziehungen (3.13), (3.18) und (3.19) lassen sich die Verzerrungen, die Materialmatrix und die Spannungen in beliebige Koordinatensysteme umrechnen.

### 3.7.2 Monotropie

Mit Hilfe der in Kapitel 3.7.1 eingeführten Transformationsbeziehung kann die triklone Materialmatrix aus Gleichung (3.11) zunächst zu einer monotropen Materialmatrix vereinfacht werden. Monotropes Material ist durch eine Symmetrieebene charakterisiert. Eine Spiegelung zu dieser Ebene erhält die Materialeigenschaften und damit die Koeffizienten der Materialmatrix. VOIGT [149] nennt solche Spiegelungen (oder Drehungen), die die Koeffizienten der Materialmatrix erhalten, Deckbewegungen und leitet diese an unterschiedlichen Kristallgittertypen her. Ausgehend von einem orthonormierten Bezugssystem  $\mathbf{e}_i$  lässt sich die Transformationsmatrix für eine Spiegelung bezüglich der 1-2-Ebene mit Hilfe des Skalarprodukts  $\mathbf{t}_{ik} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_k$  darstellen. Dabei geht der Basisvektor  $\mathbf{e}_3$  über in den Basisvektor  $-\mathbf{e}'_3$ . Die Basen  $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1$  sowie  $\mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_2$  bleiben dabei erhalten. Diese Vereinbarung führt auf die Transformationsmatrix

$$\mathbf{T}_E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} . \quad (3.20)$$

Die Anwendung der Transformationsvorschrift  $\mathbb{C}_{13} = \mathbf{T}_E^T \mathbb{C}_\perp \mathbf{T}_E$  aus Gleichung (3.18) liefert mit dem Erhalt der Koeffizienten die Materialmatrix für monotropes Materialverhalten

$$\mathbb{C}_{13} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & 0 & 0 \\ & & C_{33} & C_{34} & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ S & Y & M & & C_{55} & C_{65} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} . \quad (3.21)$$

Es genügen 13 unabhängige elastische Konstanten, um monotropes Materialverhalten beschreiben zu können.

### 3.7.3 Orthotropie

Ausgehend von monotropem Materialverhalten bezüglich der 1-2-Ebene in einem orthonormierten Bezugssystem wird nun eine weitere Symmetrieebene in der 1-3-Ebene eingeführt, zu der die Komponenten der Materialmatrix erhalten bleiben. Dies führt mit  $\mathbf{e}'_2 = -\mathbf{e}_2$  bei Erhalten der anderen beiden Basisvektoren auf die Transformationsmatrix

$$\mathbf{T}_E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

Die monotrope Materialmatrix (3.21) geht entsprechend der Transformationsbeziehung  $\mathbb{C}_9 = \mathbf{T}_E^T \mathbb{C}_{13} \mathbf{T}_E$  aus Gleichung (3.18) in

$$\mathbb{C}_9 = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ S & Y & M & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

über. Das orthotrope Material kann mit 9 unabhängigen elastischen Konstanten beschrieben werden. Die Anwendung der Transformationsmatrix bezüglich der Symmetrie der 2-3-Ebene liefert keine neue Materialmatrix. Materialsymmetrie bezüglich zweier orthogonaler Ebenen hat also die Symmetrie der dritten noch verbleibenden Ebene zur Folge. VOIGT [149] nennt das Materialverhalten drei zueinander senkrecht stehender Symmetrieebenen rombische Anisotropie.

### 3.7.4 Transversale Isotropie

Zusätzlich zu drei zueinander senkrecht stehenden Symmetrieebenen hat ein transversal isotropes Material eine Vorzugsachse, d. h. richtungsunabhängige Eigenschaften der zur Vorzugsachse senkrecht stehenden Ebene. Wird ausgehend

von orthotropem Materialverhalten die 1-Achse als Vorzugsachse gewählt, so stellt sich die Richtungsunabhängigkeit in der 2-3-Ebene ein. Beliebige Drehungen des Koordinatensystems um die 1-Achse liefern die Bedingungen für die transversale Isotropie. Zunächst wird eine Drehung um  $90^\circ$ , im Anschluss eine Drehung um  $45^\circ$  durchgeführt. Die Drehung um die Vorzugsachse um  $90^\circ$  hat eine Aktivierung der Dehn- bzw. Normalspannungsanteile zur Folge. Es gilt  $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_3$  und  $\mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_2$  und die Transformationsmatrix erhält damit folgende Gestalt

$$\mathbf{T}_E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

Die Transformationsvorschrift  $\mathbb{C}_{90^\circ} = \mathbf{T}_E^T \mathbb{C}_9 \mathbf{T}_E$  aus Gleichung (3.18) liefert

$$\mathbb{C}_{90^\circ} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ S & Y & M & & C_{44} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

Eine weitere Drehung um  $45^\circ$  aktiviert ausschließlich Gleitungen bzw. Schubspannungen. Es gilt also  $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}'_2 = [0 \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}]^T$  und  $\mathbf{e}'_3 = [0 \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad -\frac{1}{\sqrt{2}}]^T$ . Die Transformationsmatrix lautet

$$\mathbf{T}_E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

und die Transformationsvorschrift  $\mathbb{C}_{45^\circ} = \mathbf{T}_E^T \mathbb{C}_{90^\circ} \mathbf{T}_E$  aus Gleichung (3.18) liefert

$$\mathbb{C}_5 = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & & 0 \\ S & Y & M & & C_{44} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}) \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

und es wird deutlich, dass transversal isotropes Material 5 unabhängige elastische Konstanten besitzt. Daher wurde  $\mathbb{C}_{45^\circ}$  durch  $\mathbb{C}_5$  ersetzt.

### 3.7.5 Orthotropie und transversale Isotropie in Ingenieurkonstanten

Durch geeignete physikalische Versuche werden nun die Materialkonstanten für orthotropes und transversal isotropes Material bestimmt. Hierfür werden an einer Probe Zug- und Scherversuche durchgeführt. Aufgrund einer definierten Last werden definierte Spannungen auf die Probe aufgebracht und die Verzerrungen gemessen. Es werden also nicht die Spannungen  $\mathbf{S} = \mathbb{C} \mathbf{E}$  sondern die Verzerrungen  $\mathbf{E} = \mathbb{C}^{-1} \mathbf{S}$  gemessen. Die Inverse der Materialmatrix wird als Nachgiebigkeitsmatrix  $\mathbf{N} = \mathbb{C}^{-1}$  bezeichnet. Invertieren der Transformationsbeziehung (3.18) liefert  $\mathbf{N} = \mathbf{T}_E^{-1} \mathbf{N}_\perp \mathbf{T}_E^{-T}$ , woraus sich mit gleichen Überlegungen wie in den Kapiteln 3.7.2 bis 3.7.4 beschrieben, die Nachgiebigkeitsmatrizen  $\mathbf{N}_9$  und  $\mathbf{N}_5$  ergeben. Die Verzerrungs-Spannungsbedingungen lauten dann

$$\underbrace{\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & N_{22} & N_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & N_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & & N_{44} & & 0 \\ S & Y & M & & N_{55} & 0 \\ & & & & & N_{66} \end{bmatrix}}_{= \mathbf{N}_9} \begin{bmatrix} S^{11} \\ S^{22} \\ S^{33} \\ S^{12} \\ S^{13} \\ S^{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ 2 E_{12} \\ 2 E_{13} \\ 2 E_{23} \end{bmatrix}, \quad (3.28)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & N_{22} & N_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & N_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & & N_{44} & & 0 \\ S & Y & M & & N_{44} & 0 \\ & & & & & 2(N_{22} - N_{23}) \end{bmatrix}}_{= \mathbf{N}_5} \begin{bmatrix} S^{11} \\ S^{22} \\ S^{33} \\ S^{12} \\ S^{13} \\ S^{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ 2 E_{12} \\ 2 E_{13} \\ 2 E_{23} \end{bmatrix}. \quad (3.29)$$

Die Probe aus orthotropem Material wird drei einachsigen Zugversuchen unterworfen. Der Zugversuch in 1-Richtung liefert eine messbare Längsdehnung  $E_{11}$  in Richtung der wirkenden Spannung  $S^{11}$  sowie senkrecht dazu zwei messbare Querdehnungen  $E_{22}$  und  $E_{33}$ . Aus Gleichung (3.28) und der Definition der Querdehnzahl  $\nu_{12} = -E_{22}/E_{11}$  bzw.  $\nu_{13} = -E_{33}/E_{11}$  resultiert

$$N_{11} = \frac{E_{11}}{S^{11}} = \frac{1}{E_1}, \quad N_{21} = \frac{E_{22}}{S^{11}} = -\frac{\nu_{12}}{E_1}, \quad N_{31} = \frac{E_{33}}{S^{11}} = -\frac{\nu_{13}}{E_1}. \quad (3.30)$$

Hierbei ist  $E_1$  der Elastizitätsmodul in Faserrichtung. Über einen einachsigen Zugversuch in 2-Richtung erhält man eine messbare Längsdehnung  $E_{22}$  in Richtung der wirkenden Spannung  $S^{22}$  und senkrecht dazu zwei messbare Querdehnungen  $E_{11}$  und  $E_{33}$ . Mit Hilfe von Gleichung (3.28) und der Definition der Querdehnzahl  $\nu_{21} = -E_{11}/E_{22}$  bzw.  $\nu_{23} = -E_{33}/E_{22}$  folgt

$$N_{12} = \frac{E_{11}}{S^{22}} = -\frac{\nu_{21}}{E_2}, \quad N_{22} = \frac{E_{22}}{S^{22}} = \frac{1}{E_2}, \quad N_{32} = \frac{E_{33}}{S^{22}} = -\frac{\nu_{23}}{E_2}, \quad (3.31)$$

wobei  $E_2$  den Elastizitätsmodul in 2-Richtung darstellt. In gleicher Weise erhält man durch einen einachsigen Zugversuch in 3-Richtung mit der Definition der Querdehnzahl  $\nu_{31} = -E_{11}/E_{33}$  bzw.  $\nu_{32} = -E_{22}/E_{33}$

$$N_{13} = \frac{E_{11}}{S^{33}} = -\frac{\nu_{31}}{E_3}, \quad N_{23} = \frac{E_{22}}{S^{33}} = -\frac{\nu_{32}}{E_3}, \quad N_{33} = \frac{E_{33}}{S^{33}} = -\frac{1}{E_3}. \quad (3.32)$$

Aufgrund der Symmetrie der Nachgiebigkeitsmatrix  $\mathbf{N}_9$  folgt für die Nebendiagonalelemente der Zusammenhang

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2}, \quad \frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_3}, \quad \frac{\nu_{23}}{E_2} = \frac{\nu_{32}}{E_3}. \quad (3.33)$$

Der Schubversuch in der 1-2-Ebene aufgrund der Schubspannung  $S^{12}$  liefert Gleichungen  $2 E_{12}$ . Der Schubmodul ist definiert mit  $G_{12} = S^{12}/2 E_{12}$ . Damit ergibt sich für

$$N_{44} = \frac{2 E_{12}}{S^{12}} = \frac{1}{G_{12}}. \quad (3.34)$$

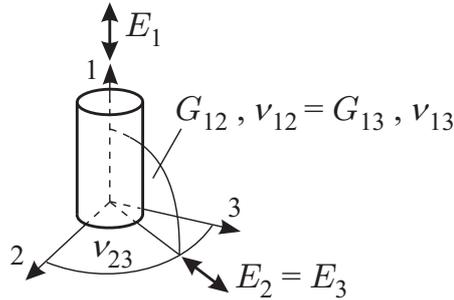
Mit entsprechenden Schubversuchen in den beiden verbleibenden Ebenen ergeben sich die Einträge der Nachgiebigkeitsmatrix

$$N_{55} = \frac{2E_{13}}{S_{13}} = \frac{1}{G_{13}}, \quad N_{66} = \frac{2E_{23}}{S_{23}} = \frac{1}{G_{23}}. \quad (3.35)$$

Die Nachgiebigkeitsmatrix für orthotropes Materialverhalten erhält mit den eingeführten Ingenieurkonstanten folgende Gestalt

$$\mathbf{N}_9 = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ S & Y & M & & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{G_{23}} \end{bmatrix}. \quad (3.36)$$

Nun sei gemäß Abbildung 3.14 die 1-Achse die Vorzugsachse eines transversal isotropen Materials. In der 2-3-Ebene besitzt der Werkstoff isotrope Eigenschaften, womit sich die Nachgiebigkeit  $\mathbf{N}_5$  ergibt



**Abbildung 3.14:** Schematische Darstellung eines transversal isotropen Materials mit den fünf unabhängigen Materialkonstanten

$$\mathbf{N}_5 = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ S & Y & M & & \frac{1}{G_{12}} & 0 \\ & & & & & \frac{2(1+\nu_{23})}{E_2} \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

Durch Invertierung der Nachgiebigkeitsmatrix folgt die Materialmatrix der transversalen Isotropie mit Ingenieurkonstanten

$$\mathbb{C}_5 = \begin{bmatrix} E_1^*(1 - \nu_{23}^2) & E_2^*\nu_{12}(1 + \nu_{23}) & E_2^*\nu_{12}(1 + \nu_{23}) & 0 & 0 & 0 \\ & E_2^*(1 - \nu_{12}^2\frac{E_2}{E_1}) & E_2^*(\nu_{23} + \nu_{12}^2\frac{E_2}{E_1}) & 0 & 0 & 0 \\ & & E_2^*(1 - \nu_{12}^2\frac{E_2}{E_1}) & 0 & 0 & 0 \\ & & & G_{12} & 0 & 0 \\ & S & Y & M & & G_{12} & 0 \\ & & & & & & \frac{E_2}{2(1 + \nu_{23})} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

mit

$$E_1^* = E_1/\Delta, \quad E_2^* = E_2/\Delta \quad \text{und} \quad \Delta = (1 + \nu_{23})(1 - \nu_{23} - 2\nu_{12}^2\frac{E_2}{E_1}).$$

Der letzte Diagonaleintrag ist der Schubmodul  $G_{23}$  in 2-3-Ebene und es gilt der Zusammenhang

$$\nu_{23} = \frac{E_2}{2G_{23}} - 1. \quad (3.39)$$

Aus den Einträgen in Gleichung (3.38) lassen sich Anforderungen an die Materialparameter ableiten, welche in Kapitel 3.7.7 angegeben werden.

### 3.7.6 Isotropie

Isotropes Material hat punktsymmetrische Eigenschaften, weist also unendlich viele Symmetrieebenen auf. Eine beliebige Drehung der Materialmatrix  $\mathbb{C}_5$  aus Gleichung (3.27) um die 2- oder 3- Achse liefert den Elastizitätsmodul und die Querdehnzahl als unabhängige Materialkonstanten. Der einachsige Zugversuch genügt, um diese für eine isotrope Probe zu bestimmen. Die Nachgiebigkeitsmatrix und die Materialmatrix nehmen dann folgende Gestalt an

$$\mathbf{N}_2 = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2(1 + \nu) & 0 & 0 \\ S & Y & M & & 2(1 + \nu) & 0 \\ & & & & & 2(1 + \nu) \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

bzw.

$$\mathbb{C}_2 = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ S & Y & M & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (3.41)$$

### 3.7.7 Anforderungen an die Ingenieurkonstanten bei transversaler Isotropie

In Kapitel 3.7 wurde die Symmetrie der Materialmatrix gezeigt. Darüberhinaus wurde in Gleichung (3.17) die Formänderungsenergiedichte  $W_{0S} = \frac{1}{2} \mathbf{E}^T \mathbb{C} \mathbf{E}$  eingeführt. Die Formänderungsenergiedichte ist eine skalare Größe und stets positiv. Sie verschwindet nur in der unverformten Referenzkonfiguration, wenn also  $\mathbf{E} = \mathbf{0}$  gilt. Da die Verzerrungen beliebige Werte annehmen können, muss die Materialmatrix  $\mathbb{C}$  positiv definit sein. Damit ist  $\mathbb{C}$  formal auch invertierbar. Die positive Definitheit stellt gewisse Bedingungen an  $\mathbb{C}$  bzw. an die Nachgiebigkeit  $\mathbf{N}$  und damit an die Koeffizienten dieser Matrizen. Zunächst wird der Fall betrachtet, dass jeweils nur ein Eintrag der Verzerrungen von Null verschieden ist. Für festes  $i$  gilt dann

$$W_{0S} = \frac{1}{2} (E)_i C_{ii} (E)_i = \frac{1}{2} C_{ii} (E)_i^2 > 0. \quad (3.42)$$

Es wird deutlich, dass alle Hauptdiagonalelemente von  $\mathbb{C}$  positiv sein müssen. Hieraus ergeben sich die Bedingungen

$$E_1 > 0, \quad E_2 > 0, \quad G_{12} > 0, \quad G_{23} > 0. \quad (3.43)$$

Wegen Gleichung (3.39) gilt

$$G_{23} = \frac{E_2}{2(1+\nu_{23})} > 0 \quad \Rightarrow \quad \nu_{23} > -1. \quad (3.44)$$

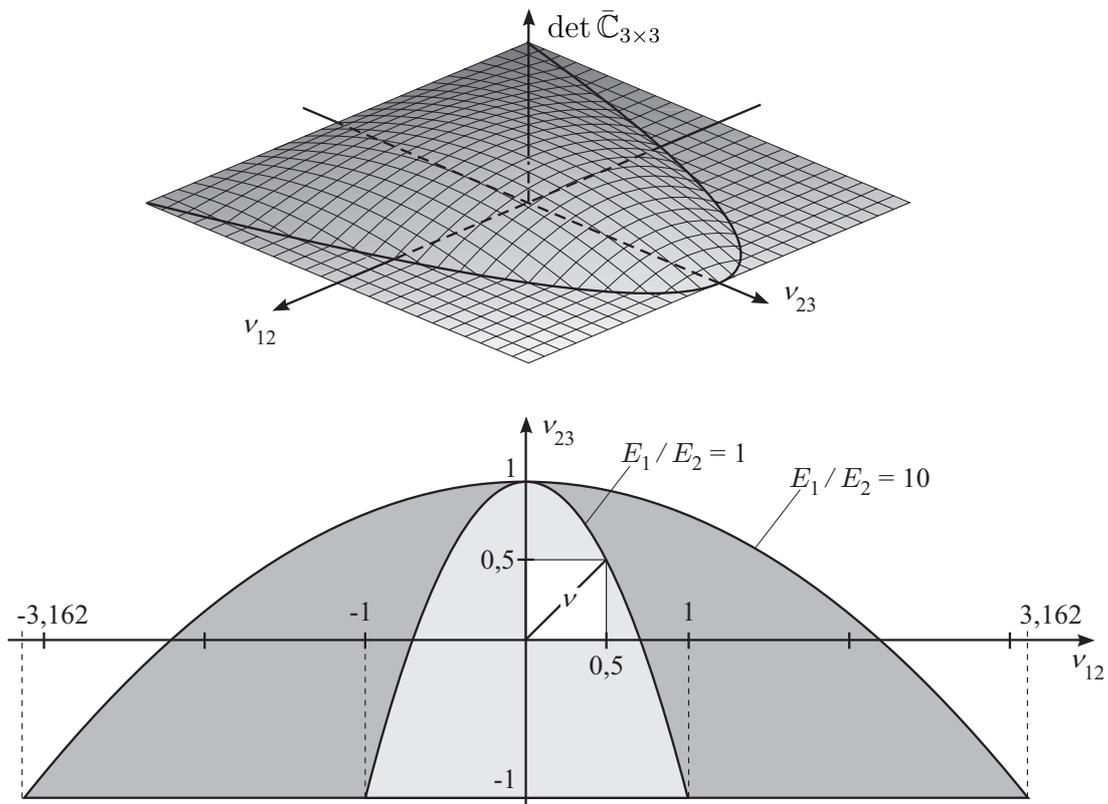
Eine symmetrische Matrix ist positiv definit, wenn die Determinante dieser Matrix und die Determinante der führenden Hauptuntermatrizen positiv sind. Diese Überlegung führt bei transversal isotropem Materialverhalten auf folgende Bedingungen:

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} \end{array} \right| = \frac{1}{E_1} \frac{1}{E_2} - \frac{\nu_{12}^2}{E_1^2} > 0 \Rightarrow -\sqrt{\frac{E_1}{E_2}} < \nu_{12} < \sqrt{\frac{E_1}{E_2}}, \quad (3.45)$$

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} \\ -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_2} \end{array} \right| = \frac{1}{E_2^2} - \frac{\nu_{23}^2}{E_2^2} > 0 \Rightarrow -1 < \nu_{23} < 1, \quad (3.46)$$

$$\det \bar{\mathbb{C}}_{3 \times 3} = \left| \begin{array}{ccc} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} \\ \frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_2} \end{array} \right| = 1 - \nu_{23}^2 - 2\nu_{12}^2(1 + \nu_{23})\frac{E_2}{E_1} > 0 \quad (3.47)$$

$$\Rightarrow 1 - 2\nu_{12}^2\frac{E_2}{E_1} > \nu_{23}.$$

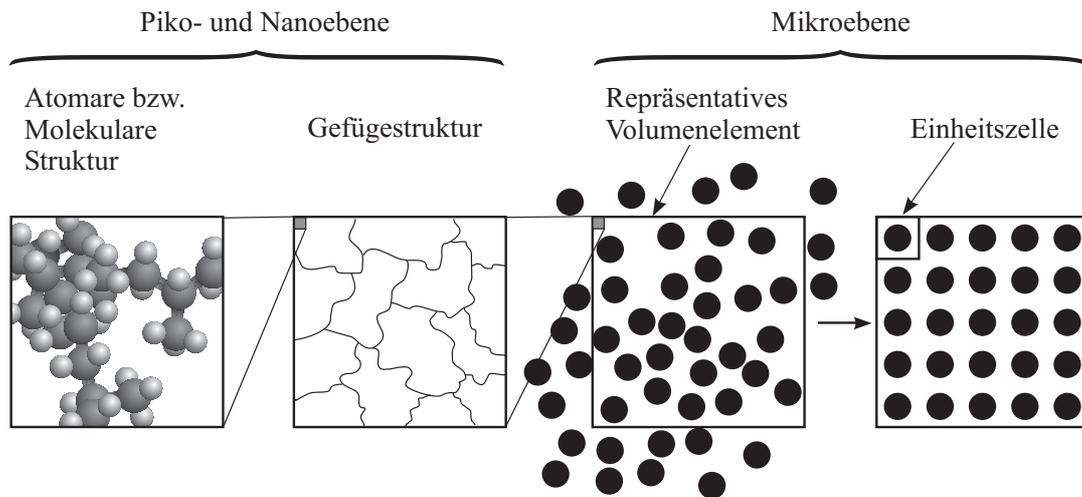


**Abbildung 3.15:** Geltungsbereich der Querdehnzahlen eines transversal isotropen Materials

Für transversal isotropes Material sind negative Querdehnzahlen theoretisch zulässig. In Abbildung 3.15 ist für ein Verhältnis der E-Moduli  $E_1/E_2 = 10$  ( $\sqrt{E_1/E_2} = 3.162$ ) der Bereich der zulässigen Wertepaare  $\nu_{12}$  und  $\nu_{23}$  grau eingefärbt. Reale Werkstoffe besitzen Querdehnzahlen im Bereich zwischen 0 und 0,5. Dieser Bereich ist als weißes Quadrat dargestellt. Damit wird deutlich, dass die Bedingungen (3.45) bis (3.47) im Allgemeinen erfüllt sind, da die Parabel mit zunehmendem Verhältnis  $E_1/E_2$  immer flacher wird. Weist die Vorzugsachse im Vergleich zu den beiden anderen Achsen jedoch einen geringeren E-Modul auf, so müssen die Bedingungen streng geprüft werden. Dieser eher theoretische Fall ist jedoch von untergeordneter Bedeutung, da es sich hier z. B. um eine unidirektionale Verstärkung handeln würde, deren Verstärkungsfasern einen niedrigeren E-Modul als das umgebende Matrixmaterial hätten. Isotropes Material mit  $E_1 = E_2$  und  $\nu_{12} = \nu_{23} = \nu$  ist ebenfalls dargestellt und es wird deutlich, dass hier  $\nu < 0,5$  gelten muss.

### 3.8 Homogenisierung

Homogenisierung bezeichnet das Ersetzen eines heterogenen Materials durch ein homogenes Ersatzmaterial mit äquivalentem Verhalten. Auf der Mikroskala bestehen Faserverbundwerkstoffe aus Fasern und Matrix. Diese sind oft im elastischen Bereich isotrop. Einige Fasern zeigen darüber hinaus transversal isotrope Eigenschaften. Um die Eigenschaften von unidirektional verstärkten Faserverbundwerkstoffen mittels einer Homogenisierung zu bestimmen, nutzt man daher die Materialparameter von Faser und Matrix. Dabei stellt das sog. repräsentative Volumenelement die Materialeigenschaften in homogenisierter Form auf der Mikroskala dar (vgl. HILL [68] oder HASHIN & SHTRIKMAN [66]). Es stellt einen Punkt des Kontinuums als materielles Volumenelement dar, das in seiner Größe statistisch repräsentativ für die Mikrostruktur des betrachteten Punktes ist. SUQUET [140] motiviert die Einheitszelle aufgrund der Periodizität der Mikrostruktur. Hierbei setzt sich die innere Struktur des Verbundwerkstoffs aus regelmäßig aufeinander folgenden Einheitszellen zusammen. Damit wird das repräsentative Volumenelement auf die periodische Einheitszelle mit periodischen Randbedingungen reduziert. Abbildung 3.16 stellt die Mikroebene eines unidirektional verstärkten Faserverbundwerkstoffs und das repräsentative Volumenelement sowie die Einheitszelle innerhalb einer periodischen (quadratischen) Faserverteilung dar (vgl. DÖBERT [34]) und zeigt die Grenze zu noch feinerer Auflösung (Piko- bzw. Nanoebene). Die Makroebene ist ein Schichtverbund aus homogenisierten Einzelschichten, womit eine Strukturanalyse möglich wird.



**Abbildung 3.16:** Mikroebene und repräsentatives Volumenelement mit Einheitszelle

Das Gesamtvolumen  $V$  der Einheitszelle besteht aus dem Faservolumen  $V_f$  und dem Matrixvolumen  $V_m$ . Der bezogene Volumenanteil der Konstituenten ergibt sich durch Division des Gesamtvolumens

$$1 = v^f + v^m$$

mit 
$$v^f = \frac{V^f}{V} \left( = \frac{A^f}{A} = a^f \right) \quad (3.48)$$

und 
$$v^m = \frac{V^m}{V} \left( = \frac{A^m}{A} = a^m \right) .$$

Der Abstand  $e$  von einem Rand der Faser zum nächsten ist ein Maß für den Faseranteil. Wählt man  $e = x_e d$  als Vielfaches des Faserdurchmessers, so kann der Faseranteil bzw. das dem Faseranteil entsprechende Vielfache  $x_e$  für eine quadratische Faseranordnung in der Form

$$v^f = \frac{\pi}{4(x_e + 1)^2} \quad \text{bzw.} \quad x_e = \sqrt{\frac{\pi}{4v^f}} - 1 \quad (3.49)$$

angegeben werden. Bei quadratischer Faseranordnung beträgt der maximale Faseranteil  $v^f = \pi/4 = 0,785$ . Der funktionale Zusammenhang für diese Art der Faseranordnung ist in Abbildung 3.17 wiedergeben.

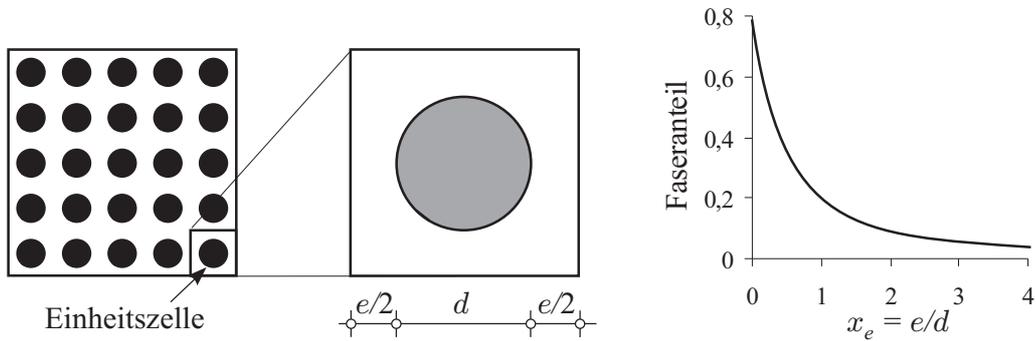


Abbildung 3.17: Geometrie der Einheitszelle

Bei hexagonaler Faseranordnung liegt der maximale Faseranteil bei  $v^f = \sqrt{3}\pi/6 = 0,907$ . In Abbildung 3.18 sind die beiden unterschiedlichen Faseranordnungen grafisch veranschaulicht (vgl. z. B. SCHÜRMAN [131]).

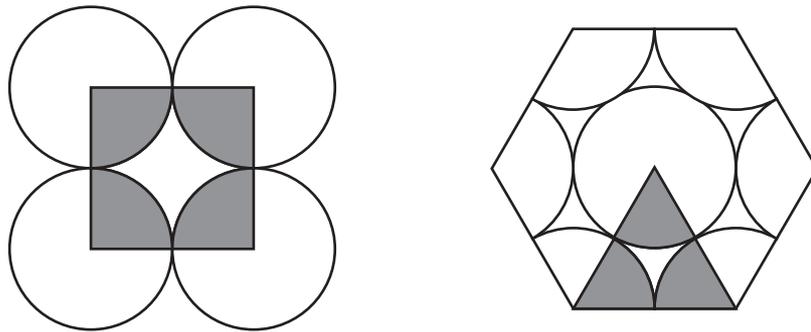


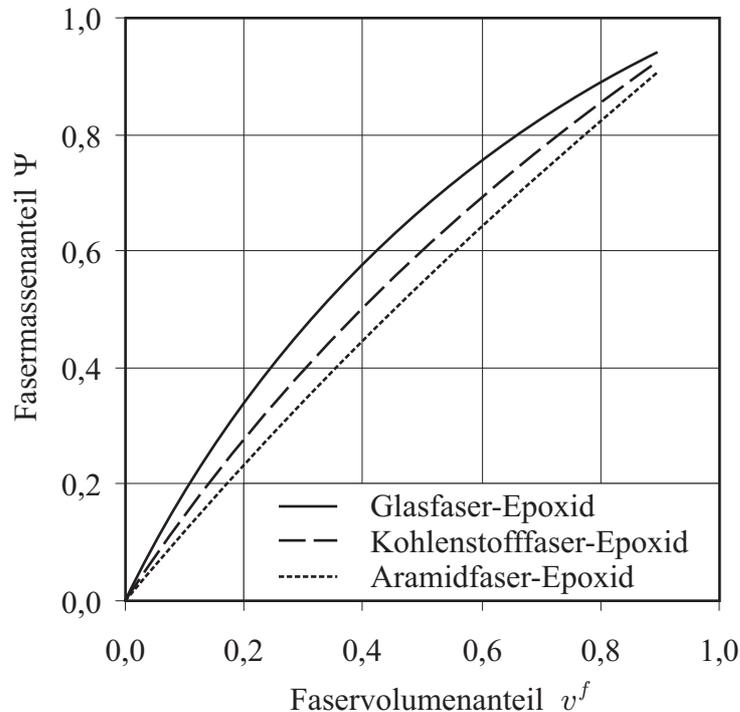
Abbildung 3.18: Dichteste quadratische und hexagonale Faseranordnung

In der Literatur wird der Faservolumenanteil  $v^f$  oft mit dem griechischen Buchstaben  $\varphi$  identifiziert. Er kann jedoch gemäß Gleichung (3.48) auch über den äquivalenten Flächenanteil  $a^f$  angegeben werden. Neben dem Faservolumenanteil wird der Fasermassenanteil  $\Psi$  eingeführt und lautet mit den jeweiligen Massen  $m^f = \rho^f V^f$  bzw.  $m^m = \rho^m V^m$  der Konstituenten

$$\Psi = \frac{m^f}{m^f + m^m} = \frac{\rho^f v^f}{\rho^f v^f + \rho^m (1 - v^f)}. \quad (3.50)$$

Der Zusammenhang zwischen dem Faservolumenanteil  $v^f$  und dem Fasermassenanteil  $\Psi$  ist in Abbildung 3.19 für einen faserverstärkten Epoxidharz mit der

Dichte  $\rho^{EP} = 1,2 \text{ g/dm}^3$  dargestellt, wobei für die Dichte der Fasern jeweils Glasfasern mit  $\rho^{GF} = 2,5 \text{ g/dm}^3$ , Kohlenstofffasern mit  $\rho^{CF} = 1,8 \text{ g/dm}^3$  sowie Aramidfasern mit  $\rho^{AF} = 1,45 \text{ g/dm}^3$  gewählt wurden.



**Abbildung 3.19:** Zusammenhang zwischen Faservolumen- und Fasermassenanteil am Beispiel eines Epoxidharzes der Dichte  $\rho^{EP} = 1,2 \text{ g/dm}^3$

### 3.8.1 Zweidimensionale Homogenisierungsmethode

Nachfolgend wird zunächst eine zweidimensionale Homogenisierungsmethode für unidirektional verstärkte Faserverbundwerkstoffe unter der Annahme kleiner elastischer Verzerrungen, Isotropie von Faser- und Matrixmaterial, idealer Haftung zwischen Faser und Matrix und gleichmäßiger Verteilung der Fasern im Matrixmaterial dargestellt. Für den effektiven E-Modul  $E_1$  und die Querdehnzahl  $\nu_{12}$  wird diese Methode auch Mischungsregel genannt. Die übrigen effektiven Größen können ebenfalls aus der zweidimensionalen Betrachtungsweise abgeleitet werden. Weitere Homogenisierungsmethoden können beispielsweise DANIEL & ISHAI [32], KOLLÁR & SPRINGER [84] NIEDERSTADT [103] oder TSAI & HAHN [147] entnommen werden. Die Darstellung effektiver Elastizitätsgrößen erfolgt aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht in der in Gleichung (3.10) eingeführten Schreibweise. Stattdessen werden Spannungen mit  $\sigma$  und  $\tau$  und Verzerrungen

mit  $\varepsilon$  angegeben und entsprechend indiziert. Um eine Verwechslung mit der Querdehnzahl  $\nu^f$  bzw.  $\nu^m$  zu vermeiden, wird der Volumenanteil der Fasern  $v^f$  bzw. der Matrix  $v^m$  mit dem Äquivalent der Flächenanteile  $a^f$  sowie  $a^m$  angegeben.

### Effektiver Elastizitätsmodul $E_1$ in Faserrichtung

Die Bestimmung des effektiven Elastizitätsmoduls in Faserrichtung  $E_1$  erfolgt unter der Annahme gleicher Dehnungen für die Fasern  $\varepsilon_1^f$  und für die Matrix  $\varepsilon_1^m$ , was einer Parallelschaltung zweier Federn entspricht. Die resultierende Kraft  $F$  ergibt sich aus der Addition der Teilkräfte der einzelnen Phasen

$$F = \sigma_1^f A^f + \sigma_1^m A^m . \quad (3.51)$$

Die effektive Spannung  $\sigma_1$  ergibt sich damit durch den Bezug auf die Gesamtquerschnittsfläche

$$\sigma_1 = \frac{F}{A} = \frac{\sigma_1^f A^f}{A} + \frac{\sigma_1^m A^m}{A} . \quad (3.52)$$

Die Spannungen lassen sich über das Hookesche Gesetz in gewohnter Weise darstellen

$$\sigma_1 = E_1 \varepsilon_1 , \quad \sigma_1^f = E^f \varepsilon_1^f , \quad \sigma_1^m = E^m \varepsilon_1^m . \quad (3.53)$$

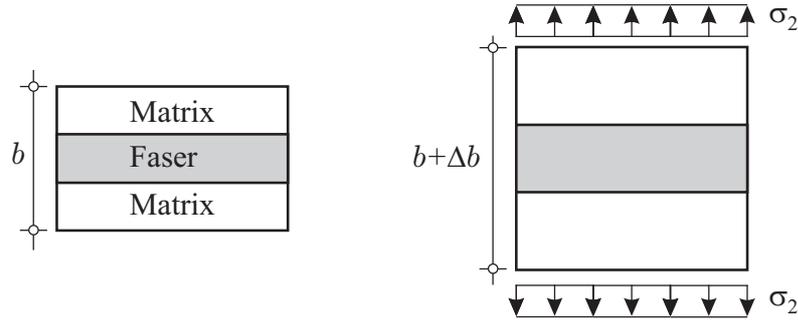
Nach Einsetzen dieser Spannungen in Gleichung (3.52) ergibt sich aufgrund der Voraussetzung gleicher Dehnungen der effektive Elastizitätsmodul in Faserrichtung zu

$$E_1 = a^f E^f + a^m E^m = a^f E^f + (1 - a^f) E^m . \quad (3.54)$$

### Effektiver Elastizitätsmodul $E_2$ in Faserquerrichtung

Die Bestimmung des effektiven Elastizitätsmoduls in Faserquerrichtung  $E_2$  erfolgt durch Anlegen einer Spannung  $\sigma_2$ . Mit Hilfe des Schnittprinzips ergibt sich die Gleichheit der Spannungen der einzelnen Phasen  $\sigma_2 = \sigma_2^f = \sigma_2^m$ , was einer Reihenschaltung von Federn entspricht.

Für die Änderung  $\Delta b$  der Breite  $b$  ergibt sich gemäß Abbildung 3.20 der anteilige Zuwachs  $\Delta b = \Delta b^f + \Delta b^m$ . Die Gesamtdehnung lässt sich damit angeben zu



**Abbildung 3.20:** Mechanisches Modell zur Ermittlung des effektiven Elastizitätsmoduls  $E_2$  in Faserquerrichtung

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta b}{b} = \frac{\Delta b^f + \Delta b^m}{b} . \quad (3.55)$$

Die Ausgangsbreite  $b$  ergibt sich aus der Summe der Anteile  $b^f$  und  $b^m$ . Außerdem gilt anteilig  $b^f = a^f b$  und  $b^m = a^m b$ . Damit kann die Dehnung der jeweiligen Phase angegeben werden

$$\varepsilon_2^f = \frac{\Delta b^f}{b^f} = \frac{\Delta b^f}{a^f b} , \quad \varepsilon_2^m = \frac{\Delta b^m}{b^m} = \frac{\Delta b^m}{a^m b} . \quad (3.56)$$

Durch Erweitern von Gleichung (3.55) mit der über den Volumenanteilen ausgedrückten Ausgangsbreite

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta b^f}{b} \frac{a^f b}{a^f b} + \frac{\Delta b^m}{b} \frac{a^m b}{a^m b} \quad (3.57)$$

ergibt sich der Zusammenhang für die Gesamtdehnung aus der Summe der anteiligen Phasendehnungen nach Gleichung (3.56) zu

$$\varepsilon_2 = a^f \varepsilon_2^f + a^m \varepsilon_2^m . \quad (3.58)$$

Das Einsetzen des Hookeschen Gesetzes (3.53) der jeweiligen Phasen liefert mit der Gleichheit der Spannungen den effektiven Elastizitätsmodul in Faserquerrichtung

$$\frac{1}{E_2} = \frac{a^f}{E^f} + \frac{a^m}{E^m} \quad \text{bzw.} \quad E_2 = \frac{E^f E^m}{(1 - a^f)E^f + a^f E^m} . \quad (3.59)$$

**Effektive Querdehnzahl  $\nu_{12}$** 

Die Bestimmung der effektiven Querdehnzahl  $\nu_{12}$  erfolgt über die Definition dieser Größe

$$\nu_{12} := -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} . \quad (3.60)$$

Durch Anlegen einer Spannung  $\sigma_1$  in Faserrichtung resultiert eine Dehnung  $\varepsilon_1$  in Faserrichtung und eine Dehnung  $\varepsilon_2$  quer dazu. Für Dehnungen in Querrichtung gilt die Beziehung aus Gleichung (3.58), welche mit den Querdehnzahlen der einzelnen Phasen  $\varepsilon_2^f = -\nu^f \varepsilon_1^f$  sowie  $\varepsilon_2^m = -\nu^m \varepsilon_1^m$  folgende Gestalt annimmt

$$\varepsilon_2 = -a^f \nu^f \varepsilon_1^f - a^m \nu^m \varepsilon_1^m . \quad (3.61)$$

Unter Beachtung der Gleichheit der Dehnungen in Faserrichtung ergibt sich die effektive Querdehnung durch Einsetzen der Dehnung  $\varepsilon_2$  gemäß Gleichung (3.61) in die Definition der Querdehnzahl (3.60) zu

$$\nu_{12} = a^f \nu^f + a^m \nu^m = a^f \nu^f + (1 - a^f) \nu^m . \quad (3.62)$$

**Effektiver Schubmodul  $G_{12}$** 

Zur Bestimmung des effektiven Schubmoduls wird in Abbildung (3.21) die Scherung der Einheitszelle aufgrund einer Schubspannung  $\tau_{12}$  betrachtet. Das Schnittprinzip liefert die Gleichheit der Schubspannungen der jeweiligen Phasen  $\tau_{12} = \tau_{12}^f = \tau_{12}^m$ . Die Scherungen der jeweiligen Phasen sind jedoch unterschiedlich und ergeben sich aufgrund der unterschiedlichen Schubmoduli zu

$$\gamma^f = \frac{\tau_{12}^f}{G^f} , \quad \gamma^m = \frac{\tau_{12}^m}{G^m} . \quad (3.63)$$

Der Schubweg  $\Delta$  setzt sich aus der Summe der jeweiligen Schubwege

$$\Delta = \Delta^f + \Delta^m \quad (3.64)$$

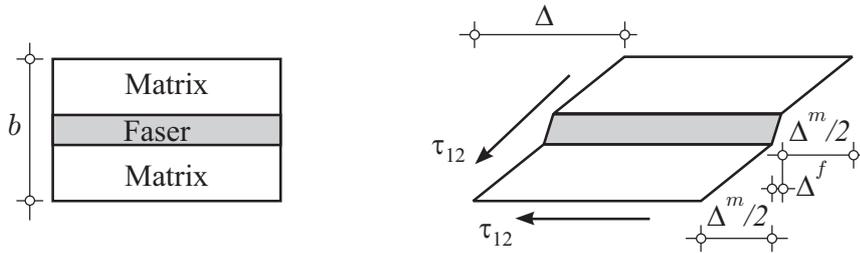
zusammen, wobei sich diese Schubwege jeweils in der Form

$$\Delta = \gamma b , \quad \Delta^f = \gamma^f b^f , \quad \Delta^m = \gamma^m b^m \quad (3.65)$$

angeben lassen. Die anteiligen Phasenbreiten lassen sich wieder über die Volumenanteile  $b^f = a^f b$  und  $b^m = a^m b$  ausdrücken. Aufgrund der Gleichheit der

Schubspannungen ergibt sich durch Einsetzen der Beziehungen (3.63) und (3.65) in Gleichung (3.64) der Zusammenhang für den effektiven Schubmodul

$$\frac{1}{G_{12}} = \frac{a^f}{G^f} + \frac{a^m}{G^m} \quad \text{bzw.} \quad G_{12} = \frac{G^f G^m}{(1 - a^f)G^f + a^f G^m} . \quad (3.66)$$



**Abbildung 3.21:** Mechanisches Modell zur Ermittlung des effektiven Schubmoduls  $G_{12}$

### Effektive Querdehnzahl $\nu_{23}$

Zur Ermittlung der effektiven Querdehnzahl  $\nu_{23}$  schlägt FOYE [51] die Anwendung von Gleichung (3.62) mit zusätzlicher Einbeziehung der Dehnungsbehinderung der Matrix durch die Fasern vor. Der Ansatz lautet

$$\nu_{23} = a^f \nu^f + (1 - a^f) \nu^{m,eff} . \quad (3.67)$$

Durch eine Querbelastung  $\sigma_2$  bauen sich in der Matrix aufgrund der Dehnungsbehinderung auch Spannungen  $\sigma_1$  in Faserlängsrichtung auf. Die Dehnung in Faserlängsrichtung lässt sich für diesen Fall mit dem Elastizitätsgesetz (3.29) darstellen

$$\varepsilon_1 = -\frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_2 . \quad (3.68)$$

Aufgrund der Dehnungsbehinderung durch die Fasern entstehen Spannungen  $\sigma_1^m$  in der Matrix. Für die Dehnungen der Matrix folgt dabei mit dem Elastizitätsgesetz (3.29)

$$\varepsilon_1^m = \frac{1}{E^m} \sigma_1 - \frac{\nu^m}{E^m} \sigma_2, \quad (3.69)$$

$$\varepsilon_2^m = -\frac{\nu^m}{E^m} \sigma_1 + \frac{1}{E^m} \sigma_2, \quad (3.70)$$

$$\varepsilon_3^m = -\frac{\nu^m}{E^m} \sigma_1 - \frac{\nu^m}{E^m} \sigma_2. \quad (3.71)$$

Nun wird die Querspannung als Einheitsspannung  $\sigma_2 = 1$  aufgebracht. Damit ergibt sich unter Annahme gleicher Dehnungen  $\varepsilon_1 = \varepsilon_1^m$  aus Gleichung (3.69) unter Berücksichtigung von Gleichung (3.68) die resultierende Matrixspannung

$$\sigma_1^m = -E^m \frac{\nu_{12}}{E_1} + \nu^m. \quad (3.72)$$

Die effektiv wirksame Querdehnzahl der Matrix  $\nu^{m,eff}$  ergibt sich aufgrund der Dehnungsbehinderung aus Gleichungen (3.70) und (3.71)

$$\nu^{m,eff} = -\frac{\varepsilon_3^m}{\varepsilon_2^m} = \nu^m \frac{1 + \nu^m - \nu_{12} \frac{E^m}{E_1}}{1 - (\nu^m)^2 + \nu^m \nu_{12} \frac{E^m}{E_1}} \quad (3.73)$$

und es folgt mit Gleichung (3.67) die effektive Querdehnzahl

$$\nu_{23} = a^f \nu^f + (1 - a^f) \nu^m \frac{1 + \nu^m - \nu_{12} \frac{E^m}{E_1}}{1 - (\nu^m)^2 + \nu^m \nu_{12} \frac{E^m}{E_1}}. \quad (3.74)$$

Eine Umrechnung der Querdehnzahl  $\nu_{23}$  in den Schubmodul  $G_{23}$  erfolgt aufgrund der Isotropie der 2-3-Ebene mit Gleichung (3.39).

Die zweidimensionale Homogenisierungsmethode liefert gut übereinstimmende Ergebnisse mit experimentellen Untersuchungen für den effektiven Elastizitätsmodul  $E_1$  und die effektive Querdehnzahl  $\nu_{12}$  in Faserrichtung (vgl. z. B. NIEDERSTADT [103]). Die Querdehnzahl  $\nu_{23}$  liefert gemäß SCHÜRMAN [131] ebenfalls gut übereinstimmende Ergebnisse. Für den Elastizitätsmodul  $E_2$  sowie den Schubmodul  $G_{12}$  weichen diese jedoch je nach Faser-Matrix-Kombination von experimentellen Untersuchungen ab. Daher wurden erweiterte Homogenisierungsmethoden entwickelt, auf welche im folgenden Kapitel eingegangen wird.

### 3.8.2 Erweiterte Homogenisierungsmethoden

Zur Prognose effektiver Materialkennwerte wurde z. B. von HILL [70] die selbst-konsistente Methode entwickelt. Diese betrachtet eine Faser eingebettet in einer unendlich großen Matrix. Dabei wird von der durch ESHELBY [45] eingeführten Methode Gebrauch gemacht. Erweitert wurde diese Methode durch CHRISTENSEN & LO [25] oder HALPIN & KARDOS [62] zur generalisierten selbst-konsistenten Methode. Diese Methode betrachtet eine einzelne Faser eingebettet in einem zylinderförmigen Matrixmaterial, welches wiederum von einem effektiven Medium mit effektiven Materialeigenschaften des Faserverbundwerkstoffs umgeben ist. Mit Ansätzen über das Minimum der potentiellen Energie bzw. der komplementären Energie können obere und untere Schranken für effektive Materialkennwerte angegeben werden. Hierunter fallen die Arbeiten von REUSS [117], HASCHIN & SHTRIKMAN [66] oder HILL [69]. HUET [73] und SAB [124] untersuchen unter Einarbeitung unterschiedlicher Randbedingungen den Einfluss der Größe des repräsentativen Volumenelements. Einen Überblick über erweiterte Homogenisierungsmethoden findet sich z. B. bei CHRISTENSEN [24].

NIEDERSTADT [103] gibt erweiterte Gleichungen zur Homogenisierung für den Elastizitätsmodul  $E_2$  in Faserquerrichtung und für den Schubmodul  $G_{12}$  an und vergleicht diese mit den in den Arbeiten von TSAI & HAHN [147] und PUCK [115] entnommenen Gleichungen zur Homogenisierung dieser Materialkennwerte. Diese Beziehungen setzten isotrope Faser- und Matrixeigenschaften voraus. Sie werden in den folgenden Gleichungen (3.75) bis (3.80) angegeben und sind zum Vergleich in den Abbildungen 3.22 und 3.23 als Funktion des Faservolumenanteils mit Werten  $E^f = 73 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2$  und  $\nu^f = 0,18$  für das Faser- sowie  $E^m = 4 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2$  und  $\nu^m = 0,4$  für das Matrixmaterial dargestellt. Diese Materialkennwerte sind typische Werte für glasfaserverstärkte Epoxidharze (vgl. Tabelle 3.2 und 3.3).

$$E_2^{\text{Puck}} = \frac{E^m}{1 - (\nu^m)^2} \cdot \frac{(1 + 0,85 (a^f)^2)}{a^f \frac{E^m}{(1 - (\nu^m)^2) E^f} + (1 - a^f)^{1,25}} \quad (3.75)$$

$$E_2^{\text{Nied}} = \left( \frac{a^f}{E^f} + \frac{1 - a^f}{E^m} - a^f (1 - a^f) \frac{\frac{E^m}{E^f} [(\nu^f)^2 + (\nu^m)^2] - 2 \nu^m \nu^f}{a^f E^f + (1 - a^f) E^m} \right)^{-1} \quad (3.76)$$

$$E_2^{\text{Tasai}} = \left( \frac{1}{a^f + 0,5(1 - a^f)} \left[ \frac{a^f}{E^f} + \frac{0,5(1 - a^f)}{E^m} \right] \right)^{-1} \quad (3.77)$$

$$G_{12}^{\text{Puck}} = \frac{(1 + 0,6\sqrt{a^f}) G^m}{a^f \frac{G^m}{G^f} + (1 - a^f)^{1,25}} \quad (3.78)$$

$$G_{12}^{\text{Nied}} = \left( \frac{a^f}{G^f} + \frac{1 - a^f}{G^m} \right)^{-1} \quad (3.79)$$

$$G_{12}^{\text{Tsai}} = \left( \frac{1}{a^f + 0,5(1 - a^f)} \left[ \frac{a^f}{G^f} + \frac{0,5(1 - a^f)}{G^m} \right] \right)^{-1} \quad (3.80)$$

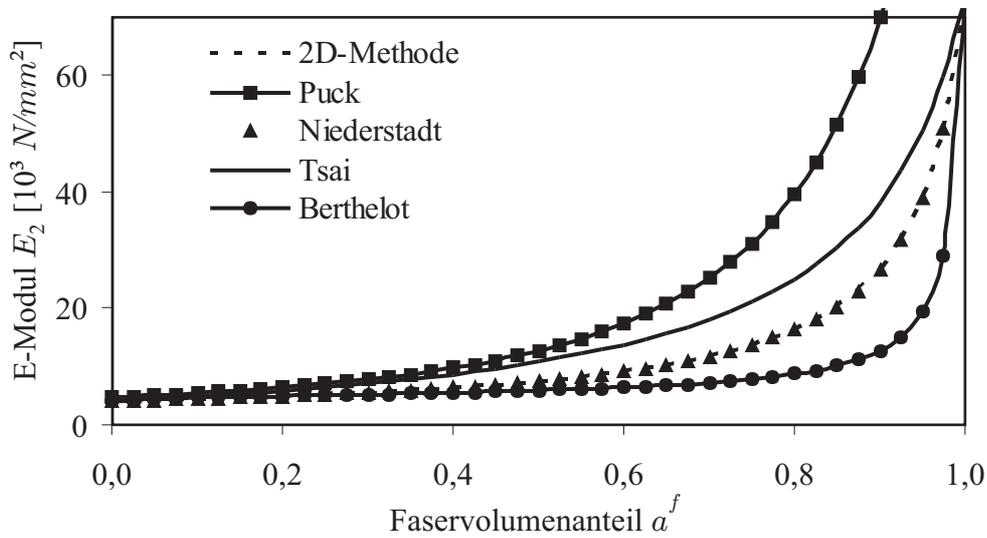


Abbildung 3.22: Vergleich der Homogenisierungsgleichungen für  $E_2$

BERTHELOT [17] stellt Vergleiche der jeweiligen Homogenisierungsmethoden mit Versuchsergebnissen von glasfaser-, kohlenstofffaser- und aramidfaserverstärkten Verbundwerkstoffen gegenüber und gibt Empfehlungen für die Wahl der jeweiligen Homogenisierungsmethode an. Für die drei genannten Faserarten schlägt er folgende Gleichungen für effektive Materialparameter vor, welche ebenfalls in den Abbildungen 3.22 und 3.23 für  $E_2$  und  $G_{12}$  mit den oben aufgeführten Materialparametern für glasfaserverstärkte Epoxidharze dargestellt sind.

$$E_1 = a^f E^f + (1 - a^f) E^m \quad \text{gemäß Gleichung (3.54),}$$

$$\nu_{12} = a^f \nu^f + (1 - a^f) \nu^m \quad \text{gemäß Gleichung (3.62),}$$

$$G_{12} = \frac{G^f(1 + a^f) + G^m(1 - a^f)}{G^f(1 - a^f) + G^m(1 + a^f)}, \quad (3.81)$$

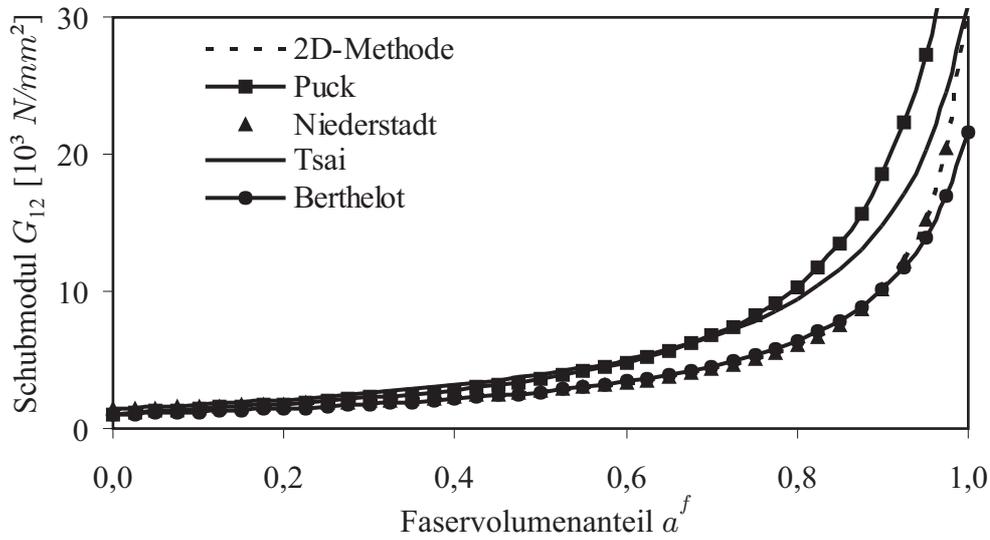


Abbildung 3.23: Vergleich der Homogenisierungsgleichungen für  $G_{12}$

$$G_{23} = G^m \left( 1 + \frac{a^f}{\frac{G^m}{G^f - G^m} + \frac{\frac{E^m}{3(1-2\nu^m)} + \frac{7}{3} G^m}{2\frac{E^m}{3(1-2\nu^m)} + \frac{8}{3} G^m} (1 - a^f)} \right), \quad (3.82)$$

$$E_2 = \frac{2}{\frac{1}{2K_1} + \frac{1}{G_{23}} + \frac{2\nu_{12}^2}{E_1}}, \quad (3.83)$$

mit

$$K_1 = \frac{E^m}{2(1-2\nu_m)(1+\nu^m)},$$

$$+ \frac{a^f}{\frac{1}{\frac{E^f}{3(1-2\nu^f)} - \frac{E^m}{3(1-2\nu^m)} + \frac{1}{3}(G^f - G^m)} + \frac{1 - a^f}{\frac{E^m}{3(1-2\nu^m)} + \frac{4}{3} G^m}}. \quad (3.84)$$

Auffallend ist hierbei, dass die von BERTHELOT [17] vorgeschlagenen Gleichungen für den gesamten Bereich des Faservolumenanteils etwa eine untere Grenze für den jeweiligen effektiven Materialkennwert darstellen. Nach BERTHELOT [17] ergibt sich für diese Gleichungen eine gute Übereinstimmung mit experimentell

---

bestimmten Materialkennwerten. Mit Hilfe von Gleichung (3.39) kann der transversale Schubmodul  $G_{23}$  in die zugehörige Querdehnzahl  $\nu_{23}$  überführt werden. Die Gleichungen (3.81) und (3.82) entsprechen jeweils der unteren Schranke der von HILL [69] und HASHIN [64] vorgestellten Energiemethode, wobei Gleichungen (3.81) auch das Ergebnis der selbstkonsistenten Methode nach HILL [70] und (3.82) das Resultat der generalisierten selbstkonsistenten Methode gemäß CHRISTENSEN & LO [25] ist. Bei der direkten Methode werden effektive Materialkennwerte mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente bestimmt. Hierunter fallen Arbeiten von SUQUET [140], ZOHDI ET AL [167] oder DÖBERT [34].

## 4 Versagen von Faserverbundwerkstoffen

Faserverbundwerkstoffe versagen aufgrund unterschiedlicher Mechanismen. Um das Versagen einer Struktur aus faserverstärkten Werkstoffen vorherzusagen, wurden diverse Versagenskriterien entwickelt. In den folgenden beiden Unterkapiteln werden die grundlegenden Mechanismen und Kriterien vorgestellt.

### 4.1 Versagensmechanismen

Faserverbundwerkstoffe zeigen unterschiedlichste Versagensmechanismen. Je nach Belastungszustand entstehen Matrixrisse, Ablösungen im Faser-Matrixbereich, Faserbrüche, Delaminationen oder Ausweichen von Fasern aus der Belastungsebene. Unter Zugbeanspruchung beispielsweise können Mikrorisse im Matrixmaterial in Größe und Anzahl wachsen, sich vereinigen und zum Versagen auf der Makroebene führen.

Unter Zug kann es zum Matrixbruch kommen, wenn das Matrixmaterial spröde und der Verbund zwischen Faser und Matrix sehr stark ist. Bei relativ schwachem Verbund zwischen Faser und Matrix kommt es zu Ablösungen zwischen Fasern und dem Matrixmaterial. Zum Schubbruch mit Einschnürung kann es bei duktiler Matrix und starkem Verbund zwischen Faser und Matrix kommen. Mit dem Versagen unter Zug in Faserrichtung haben sich u. a. ROSEN [122], BADER [10] oder LEE & DANIEL [94] beschäftigt.

Matrixrisse entstehen sowohl unter Querkzug als auch unter Querdruck. Unter Querdruck bilden sich an beliebigen Stellen kleine Matrixrisse, die sich bei Laststeigerung zu einem durchgehenden Schubriss verbinden können. Die Matrix kann sich dabei von der Faser ablösen. Es kann sogar zum Fasersplit kommen, bei dem einzelne Fasern aufgerissen werden. Annähernd senkrechte Risse bilden sich unter Querkzug aus. Hierbei kann sich die Matrix ebenfalls von den Fasern ablösen oder diese auftrennen. Die komplexen Versagensvorgänge bei Matrixrissen sind bis heute Gegenstand der Forschung. Einen Überblick über Veröffentlichungen zu diesem Thema liefern KWON & BRENNER [86]. Unterschiedliche Versagensarten einer Faserschicht sind nach SCHULTZ [134] in Abbildung 4.1 dargestellt.

Durch den Schichtaufbau von Laminaten kann es zu weiteren Phänomenen wie erhöhten Randquerkzug- oder Randschubspannungen kommen, die ihrerseits Delaminationen auslösen können. Durch Biegebeanspruchungen gekrümmter Strukturen kann es zu Querkzugspannungen kommen, die wiederum Delaminationen hervorrufen können.

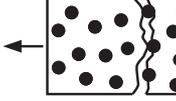
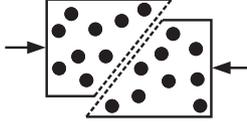
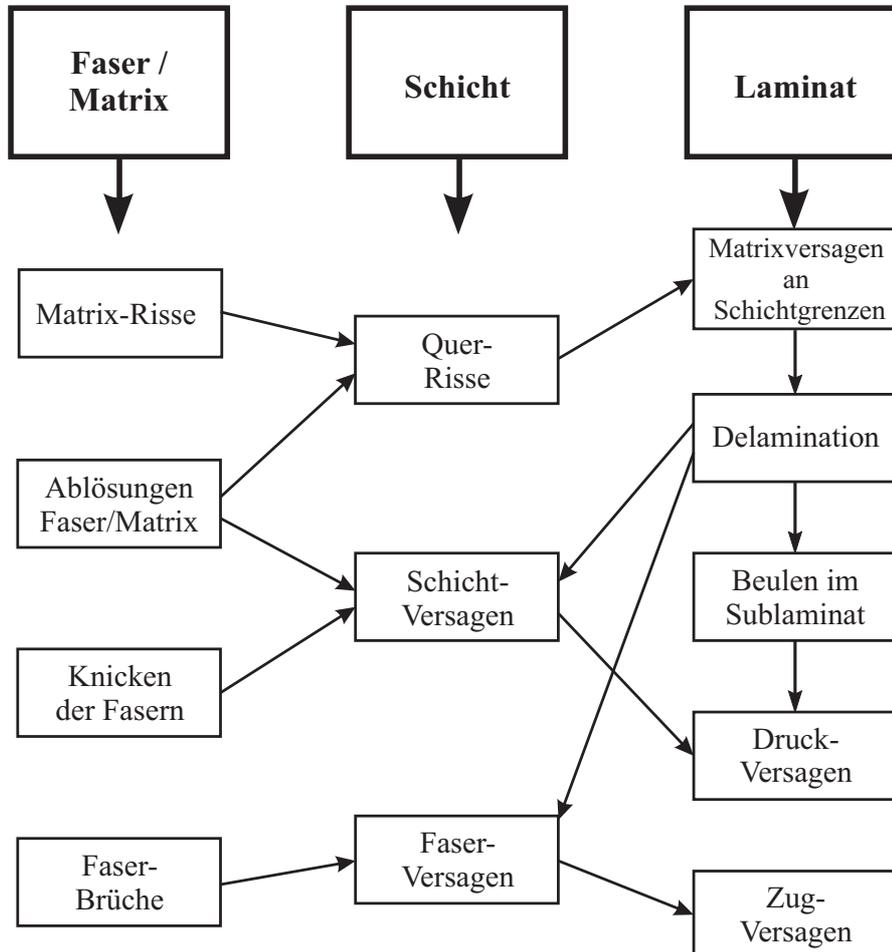
	Bruchbild		
Längszug			
	Faserbruch ( $\epsilon_u^m > \epsilon_u^f$ )	Matrixbruch ( $\epsilon_u^f > \epsilon_u^m$ )	
Längsdruck			
	out-of-phase-Mikrobeulen	in-phase-Mikrobeulen	Schubversagen
Querzug			
	Matrixbruch	Zwischenfaserbruch in Grenzfläche	
Querdruck			
	Schub ohne Faserbruch	Schub mit Faserbruch	

Abbildung 4.1: Versagensarten von Faserschichten

In der Literatur finden sich zahlreiche Aufsätze zum Thema Delamination als Schädigungsart von Faserverbundwerkstoffen. LUO & HANAGUD [96], MÜLLER & VIELSACK [101] oder STEINER [139] entwickeln Methoden zur Auffindung von Delaminationen. Andere Arbeiten beschäftigen sich mit dem Thema fortschreitender Delamination. Bruchmechanische Ansätze zur Beschreibung dieses Phänomens liegen z. B. den Arbeiten von DAVIDSON [33], KRÜGER [85], NILSSON & STORAKERS [104], TESSMER [141], WANG ET AL. [159] oder ZHANG [164] zugrunde. BALZANI & WAGNER [11], CRISTFIELD ET AL. [31] oder WAGNER ET AL. [156] beschreiben Delamination mit Hilfe von kohäsiven Interface-Elementen. Mögliche Interaktionen von Anfangsschadensmodi bis hin zum Versagen eines

Faserverbundwerkstoffe sind nach OCHOA & REDDY [106] in Abbildung 4.2 zusammengestellt.



**Abbildung 4.2:** Versagensarten von Faserverbundstrukturen

Das Stabilitätsverhalten von Faserverbundstrukturen wird beispielsweise in WAGNER & GRUTTMANN [154] oder DEGENHARDT ET AL. [38] untersucht. Einen Beitrag zum Stabilitätsverhalten von faserverstärkten Platten geben THURLEY & MARSHALL [143].

Das Verhalten von Faserverbundwerkstoffen unter axialer Druckbelastung in Faserrichtung bedarf weiterer Aufmerksamkeit. Unter Druckbelastung kann es zu Instabilitäten auf Mikroebene bzw. Faser-Matrix-Instabilitäten (Ausbeulen auf Mikroebene) kommen. Dies kann zu einer Kettenreaktion führen, die einen Bruch zur Folge hat. Dabei entstehen recht ausgedehnte und stark zerklüftete Bruchbereiche. Auf das Mikrobeulen wird in Kapitel 6 eingegangen.

Im Gegensatz zum Zwischenfaserbruch sind für den Faserbruch vor allem Zug- und Druckspannungen in Faserrichtung ein Maß für die Bruchbedingungen. PUCK [116] bemerkt, dass die Zugfestigkeit der Schicht analytisch zutreffend ermittelbar ist, da die Homogenisierung in Faserrichtung sehr gute effektive Materialkennwerte liefert (vgl. Kapitel 3.8). Die Druckfestigkeit hingegen wird durch Instabilitäten auf Mikroebene, dem Mikrobeulen, begrenzt und muss i. d. R. experimentell bestimmt werden.

## 4.2 Versagenskriterien

Unter Gebrauchslast dürfen bei Konstruktionen aus Faserverbundwerkstoffen keine irreversiblen Schädigungen des Materials eintreten. Die Versagenskriterien für Faserverbundwerkstoffe beziehen sich oft auf eine Einzelschichtanalyse mit homogenisierten Materialkennwerten, bei der untersucht wird, welche Schicht bei steigender Last zuerst an ihre Versagensgrenze gelangt. Hierbei handelt es sich um die sog. First-Ply-Failure-Last bzw. um eine First-Ply-Failure-Analyse.

Die unterschiedlichen Versagenskriterien für anisotrope Werkstoffe können in die Gruppe der entkoppelten und der gekoppelten Versagenskriterien unterteilt werden. Bei den entkoppelten Versagenskriterien werden die faserorientierten Spannungen einer Schicht nicht miteinander verknüpft. Tritt beispielsweise nur eine elementare Beanspruchungsart auf, können die berechneten Spannungswerte unmittelbar mit experimentell ermittelten Festigkeitswerten verglichen werden. Es tritt keine Interaktion unterschiedlicher Spannungen auf und es kann das Kriterium der maximalen Spannung und der maximalen Dehnung angewendet werden. In aller Regel kommt es jedoch zu einer Überlagerung unterschiedlicher Spannungskomponenten, so dass verschiedene Versagensmodi eintreten können. Es existieren daher gekoppelte pauschale Versagenskriterien, welche die auftretenden Spannungen in nur einer Gleichung miteinander verknüpfen sowie nichtpauschale Versagenskriterien zur Differenzierung der Bruchart. Da die Schubfestigkeit einer UD-Schicht unabhängig vom Richtungssinn der Schubspannung ist, muss ein gekoppeltes Versagenskriterium vom Vorzeichen der wirkenden Schubspannung unabhängig sein. Dies gelingt mittels polynomialer Versagenskriterien zweiter Ordnung der Form

$$g(\mathbf{S}) = \mathbf{S}^T \mathbf{A} \mathbf{S} \leq 1 . \quad (4.1)$$

Die Bedingung (4.1) stellt eine Bruchfläche im Spannungsraum dar. Da die Bruchspannungen endlich sind, muss die Bruchfläche geschlossen sein. Jeder Punkt innerhalb dieser Bruchfläche repräsentiert einen Spannungszustand, der nicht zum

Versagen führt. Punkte auf oder außerhalb der Bruchfläche kennzeichnen Versagen. In Bedingung (4.1) ist  $\mathbf{A}$  eine  $(6 \times 6)$ -Matrix, in der die Bruchspannungen gewichtet werden und das jeweilige Versagenskriterium definieren. Die Festigkeiten einer homogenisierten Schicht werden nun wie folgt eingeführt

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_{11} & \text{ Längszugfestigkeit (lokale 1-Richtung),} \\
\hat{\sigma}_{11}^* & \text{ Längsdruckfestigkeit (lokale 1-Richtung),} \\
\hat{\sigma}_{22} & \text{ Querzugfestigkeit (lokale 2-Richtung),} \\
\hat{\sigma}_{22}^* & \text{ Querdruckfestigkeit (lokale 2-Richtung),} \\
\hat{\sigma}_{33} & \text{ Zugfestigkeit (lokale 3-Richtung),} \\
\hat{\sigma}_{33}^* & \text{ Druckfestigkeit (lokale 3-Richtung),} \\
\hat{\sigma}_{12} & \text{ Schubfestigkeit (lokale 1-2-Ebene),} \\
\hat{\sigma}_{13} & \text{ Schubfestigkeit (lokale 1-3-Ebene),} \\
\hat{\sigma}_{23} & \text{ Schubfestigkeit (lokale 2-3-Ebene).}
\end{aligned} \tag{4.2}$$

In der Literatur sind die Bezeichnungen der Festigkeiten uneinheitlich. So werden z. B. die Festigkeiten nach TSAI & WU [146] mit  $X$  und  $X'$  für die Längszug- und Längsdruckfestigkeit, mit  $Y$  bzw.  $Y'$  und  $Z$  bzw.  $Z'$  für die Querzug- bzw. Querdruckfestigkeiten und die Schubfestigkeiten mit  $R$ ,  $Q$  bzw.  $S$  bezeichnet. PUCK [116] beschränkt sich auf transversal isotropes Material und wählt jeweils  $R_{\parallel}^{(+)}$ ,  $R_{\parallel}^{(-)}$ ,  $R_{\perp}^{(+)}$ ,  $R_{\perp}^{(-)}$ ,  $R_{\perp\parallel}$  bzw.  $R_{\perp\perp}$ . Er setzt damit die Gleichheit der Festigkeiten in Querrichtung sowie die Gleichheit der Schubfestigkeiten in lokaler 1-2- und lokaler 1-3-Ebene voraus.

#### 4.2.1 Tsai-Wu-Kriterium

Eine Form des polynomialen Versagenskriteriums, in das lineare oder quadratische Spannungscombinationen einfließen, ist das Tsai-Wu-Kriterium, TSAI & WU [146]

$$A_{ij}^* S_{ij} + A_{ijrs}^* S_{ij} S_{rs} - 1 \leq 0 \quad \text{mit } (i, j, r, s = 1, 2, 3) . \tag{4.3}$$

Dieses Kriterium geht von der Annahme einer geschlossenen Versagensfläche im Spannungsraum aus. Da die Spannungen auf die Orthotropieachsen bezogen sind, hat das Vorzeichen der Schubspannungen  $S_{ij}$  keinen Einfluss auf die Festigkeit. Daher werden die linearen Schubspannungsterme aus Gleichung (4.3) gestrichen und das Kriterium für orthotropes Material lautet

$$\begin{aligned}
& A_{11}^* S_{11} + A_{22}^* S_{22} + A_{33}^* S_{33} + \\
& A_{1111}^* (S_{11})^2 + A_{2222}^* (S_{22})^2 + A_{3333}^* (S_{33})^2 + \\
& A_{2323}^* (S_{23})^2 + A_{3131}^* (S_{31})^2 + A_{1212}^* (S_{12})^2 + \\
& A_{1122}^* S_{11} S_{22} + A_{2233}^* S_{22} S_{33} + A_{1133}^* S_{11} S_{33} \leq 1
\end{aligned} \tag{4.4}$$

mit den Festigkeitskomponenten

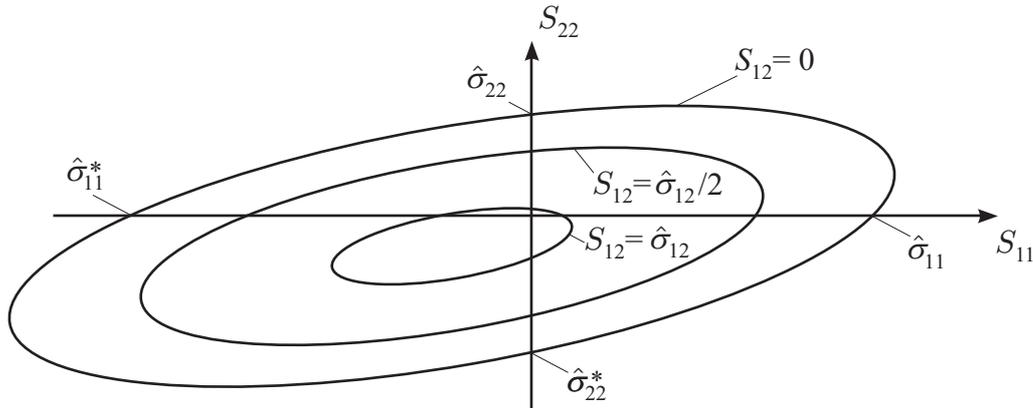
$$\begin{aligned}
A_{ii}^* &= \frac{1}{\hat{\sigma}_{ii}} - \frac{1}{\hat{\sigma}_{ii}^*} & (ii = 11, 22, 33) , \\
A_{iiii}^* &= \frac{1}{\hat{\sigma}_{ii}^* \hat{\sigma}_{ii}} & (iiii = 1111, 2222, 3333) , \\
A_{ijij}^* &= \frac{1}{(\hat{\sigma}_{ij})^2} & (ijij = 1212, 2323, 3131) \\
A_{iijj}^* &= \frac{2F_{ij}^*}{\sqrt{\hat{\sigma}_{11}^* \hat{\sigma}_{11} \hat{\sigma}_{22}^* \hat{\sigma}_{22}}} & (iijj = 1122, 1133, 2233) .
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Sehr oft wird für den Parameter  $F_{ij}^* = -\frac{1}{2}$  gewählt. Bei der Berechnung müssen die Spannungen in lokaler Materialrichtung vorliegen. Gegebenfalls müssen sie zunächst entsprechend transformiert werden, da sich die Festigkeiten  $\hat{\sigma}_{ij}$  stets auf das lokale Koordinatensystem beziehen. Die Festigkeitstensoren zweiter ( $A_{ij}^*$ ) bzw. vierter Ordnung ( $A_{ijrs}^*$ ) weisen analog zu den Elastizitätstensoren anisotroper Materialien Symmetrien auf. Wegen der vorkommenden linearen Spannungsanteile ( $A_{ij}^*$ ) ist darauf hinzuweisen, dass es sich bei dem Tensor  $\mathbf{A}^*$  nicht um den Festigkeitstensor  $\mathbf{A}$  nach Gleichung (4.1) handelt.

Für den ebenen Spannungszustand vereinfacht sich Gleichung (4.4) um alle Terme, die mit 3 indiziert sind. Mit den Festigkeitskomponenten gemäß Gleichung (4.5) lautet dann das Tsai-Wu-Kriterium für den ebenen Spannungszustand

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{1}{\hat{\sigma}_{11}} - \frac{1}{\hat{\sigma}_{11}^*} \right) S_{11} + \left( \frac{1}{\hat{\sigma}_{22}} - \frac{1}{\hat{\sigma}_{22}^*} \right) S_{22} + \frac{1}{\hat{\sigma}_{11}^* \hat{\sigma}_{11}} (S_{11})^2 + \frac{1}{\hat{\sigma}_{22}^* \hat{\sigma}_{22}} (S_{22})^2 \\
& - \sqrt{\frac{1}{\hat{\sigma}_{11}^* \hat{\sigma}_{11} \hat{\sigma}_{22}^* \hat{\sigma}_{22}}} S_{11} S_{22} + \frac{(S_{12})^2}{(\hat{\sigma}_{12})^2} \leq 1 .
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Gleichung (4.6) stellt eine Ellipse dar, die, bedingt durch die beiden ersten linearen Terme ihr Zentrum nicht im Koordinatenursprung hat.  $S_{12}$  kann als Parameter identifiziert werden, der die Größe der Ellipse mitbestimmt (vgl. Abbildung 4.3).



**Abbildung 4.3:** Das Tsai-Wu-Kriterium im  $S_{11}$ - $S_{22}$ -Spannungsraum

Das Tsai-Wu-Kriterium ist ein gekoppeltes Pauschkriterium, da es Versagen in nur einer Gleichung formuliert. Dies führt jedoch dazu, dass nicht differenziert werden kann, um welche Art von Versagen es sich handelt.

#### 4.2.2 Tsai-Hill-Kriterium

Das Tsai-Hill-Kriterium ist ebenfalls ein gekoppeltes Pauschkriterium. Beim allgemeinen Versagenskriterium nach Tsai-Wu gehen Spannungen sowohl in linearer als auch in quadratischer Form ein und es sind unterschiedliche Zug- und Druckfestigkeiten in den Hauptrichtungen des Materials möglich. Beim Tsai-Hill-Kriterium gehen alle Spannungen ausschließlich in quadratischer Form ein.

$$A_{ijrs}^* S_{ij} S_{rs} - 1 \leq 0 \quad \text{mit } (i, j, r, s = 1, 2, 3) . \quad (4.7)$$

Die Zug- und Druckfestigkeiten sind betragsmäßig gleich, so dass sich die unabhängigen Festigkeitskomponenten auf 6 reduzieren, siehe z. B. DE BORST & FEENSTRA [37]. Auch hier müssen die Spannungen im lokalen Materialkoordinatensystem vorliegen oder in dieses transformiert werden.

$$\hat{\sigma}_{11} = \hat{\sigma}_{11}^* , \quad \hat{\sigma}_{22} = \hat{\sigma}_{22}^* , \quad \hat{\sigma}_{33} = \hat{\sigma}_{33}^* . \quad (4.8)$$

Dabei gilt

$$\begin{aligned}
& A_{1111}^* (S_{11})^2 + A_{2222}^* (S_{22})^2 + A_{3333}^* (S_{33})^2 + \\
& A_{2323}^* (S_{23})^2 + A_{3131}^* (S_{31})^2 + A_{1212}^* (S_{12})^2 + \\
& A_{1122}^* S_{11} S_{22} + A_{2233}^* S_{22} S_{33} + A_{1133}^* S_{11} S_{33} \leq 1
\end{aligned} \tag{4.9}$$

mit

$$\begin{aligned}
A_{iii}^* &= \frac{1}{\hat{\sigma}_{ii}^2} & (iii = 1111, 2222, 3333), \\
A_{ijij}^* &= \frac{1}{(\hat{\sigma}_{ij})^2} & (ijij = 1212, 2323, 3131) \\
A_{1122}^* &= -\left(\frac{1}{\hat{\sigma}_{11}^2} + \frac{1}{\hat{\sigma}_{22}^2} - \frac{1}{\hat{\sigma}_{33}^2}\right) \\
A_{2233}^* &= -\left(\frac{1}{\hat{\sigma}_{22}^2} + \frac{1}{\hat{\sigma}_{33}^2} - \frac{1}{\hat{\sigma}_{11}^2}\right) \\
A_{3311}^* &= -\left(\frac{1}{\hat{\sigma}_{33}^2} + \frac{1}{\hat{\sigma}_{11}^2} - \frac{1}{\hat{\sigma}_{22}^2}\right).
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Nach Einführen der Abkürzungen

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{(\hat{\sigma}_{11})^2} + \frac{1}{(\hat{\sigma}_{22})^2} + \frac{1}{(\hat{\sigma}_{33})^2} \right], & C_4 &= \frac{1}{(\hat{\sigma}_{12})^2}, \\
C_2 &= \frac{1}{2} \left[ +\frac{1}{(\hat{\sigma}_{11})^2} - \frac{1}{(\hat{\sigma}_{22})^2} + \frac{1}{(\hat{\sigma}_{33})^2} \right], & C_5 &= \frac{1}{(\hat{\sigma}_{13})^2}, \\
C_3 &= \frac{1}{2} \left[ +\frac{1}{(\hat{\sigma}_{11})^2} + \frac{1}{(\hat{\sigma}_{22})^2} - \frac{1}{(\hat{\sigma}_{33})^2} \right], & C_6 &= \frac{1}{(\hat{\sigma}_{23})^2},
\end{aligned} \tag{4.11}$$

gilt für die Festigkeitsmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} C_2 + C_3 & -C_3 & -C_2 & 0 & 0 & 0 \\ -C_3 & C_1 + C_3 & -C_1 & 0 & 0 & 0 \\ -C_2 & -C_1 & C_1 + C_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_6 \end{bmatrix}. \tag{4.12}$$

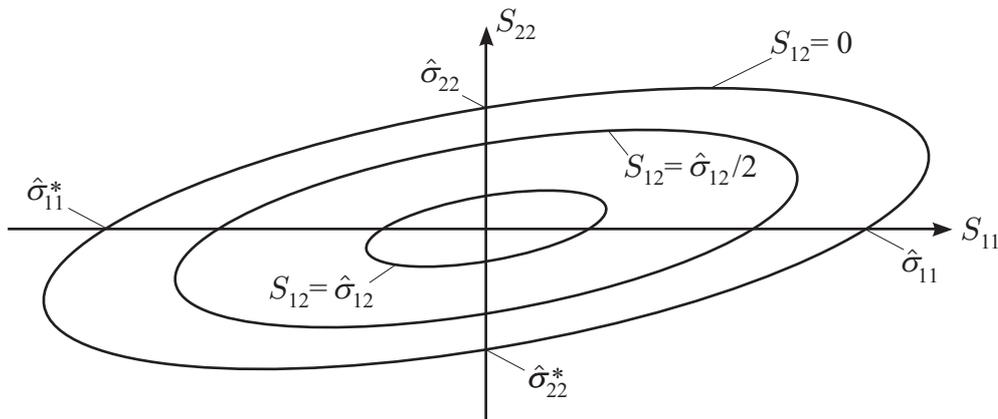
Das Tsai-Hill-Kriterium lautet damit

$$g(\mathbf{S}) = \mathbf{S}^T \mathbf{A} \mathbf{S} \leq 1 . \quad (4.13)$$

Für den ebenen Spannungszustand vereinfacht sich das Tsai-Hill-Kriterium in entsprechender Weise wie das Tsai-Wu-Kriterium. Da beim Tsai-Hill-Kriterium die Spannungen ausschließlich in quadratischer Form eingehen, lässt es sich wie folgt angeben

$$\frac{(S_{11})^2}{(\hat{\sigma}_{11})^2} + \frac{(S_{22})^2}{(\hat{\sigma}_{22})^2} - \left( \frac{1}{(\hat{\sigma}_{11})^2} + \frac{1}{(\hat{\sigma}_{22})^2} \right) S_{11} S_{22} + \frac{(S_{12})^2}{(\hat{\sigma}_{12})^2} \leq 1 . \quad (4.14)$$

Gleichung (4.14) stellt eine Ellipse dar, die ihr Zentrum im Koordinatenursprung des  $S_{11}$ - $S_{22}$ -Spannungsraums hat. Die Schubspannung  $S_{12}$  ist ein Maß für die Größe der Ellipse. Abbildung 4.4 veranschaulicht das Tsai-Hill-Kriterium grafisch.



**Abbildung 4.4:** Das Tsai-Hill-Kriterium im  $S_{11}$ - $S_{22}$ -Spannungsraum

### 4.2.3 Von Mises-Kriterium

Bei der Plastifizierung isotroper Materialien spielen nur deviatorische Spannungsanteile eine Rolle. Dieser von von Mises entdeckte Zusammenhang kann als Sonderfall des Tsai-Hill-Kriteriums interpretiert werden. Der Festigkeitstensor  $\mathbf{A}$ , mit dem sich dieses Kriterium gemäß Gleichung (4.13) überprüfen lässt, lautet

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}. \quad (4.15)$$

Das von Mises-Kriterium lautet dann mit der Grenzspannung  $\sigma_v$  des isotropen Materials, welches aus einem einfachen Zugversuch bestimmt wird

$$\sqrt{\mathbf{S}^T \mathbf{A} \mathbf{S}} \leq \sigma_v. \quad (4.16)$$

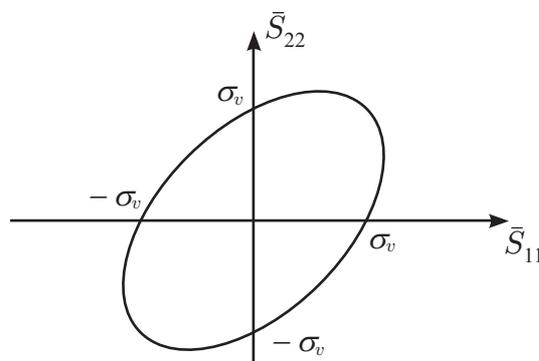
Für den ebenen Spannungszustand in Hauptspannungsrichtungen  $\bar{S}_{ii}$  ergibt sich mit der Festigkeitsmatrix (4.15) das von Mises-Kriterium zu

$$\sqrt{(\bar{S}_{11})^2 - \bar{S}_{11} \bar{S}_{22} + (\bar{S}_{22})^2} \leq \sigma_v. \quad (4.17)$$

Nach einer Umformung erhält Gleichung (4.17) die Form

$$\frac{(\bar{S}_{11})^2}{(\sigma_v)^2} - \frac{\bar{S}_{11} \bar{S}_{22}}{(\sigma_v)^2} + \frac{(\bar{S}_{22})^2}{(\sigma_v)^2} \leq 1 \quad (4.18)$$

und kann wie in Abbildung 4.5 als Ellipse im  $\bar{S}_{11}$ - $\bar{S}_{22}$ -Spannungsraum dargestellt werden.



**Abbildung 4.5:** von Mises-Kriterium im Hauptspannungsraum

#### 4.2.4 Kriterium nach Hashin

Das Pauschkriterium nach Tsai-Wu ist mathematisch elegant, da es das Versagen einer Schicht in nur einer Gleichung darstellt. Es ist aber nicht in der Lage zu differenzieren, ob es sich um einen Faserbruch oder einen Zwischenfaserbruch handelt. Das von HASHIN [65] vorgeschlagene nichtpauschale Versagenskriterium stellt dagegen differenzierte Kriterien für Faserbruch und Zwischenfaserbruch dar. Für den reinen Faserbruch gelten die Kriterien jeweils für Zug- bzw. Druckspannungen getrennt

$$g(\mathbf{S})_{Ft} = \left( \frac{S_{11}}{\hat{\sigma}_{11}} \right)^2 + \left( \frac{S_{12}}{\hat{\sigma}_{12}} \right)^2 + \left( \frac{S_{13}}{\hat{\sigma}_{13}} \right)^2 \leq 1, \quad (4.19)$$

$$g(\mathbf{S})_{Fc} = \left( \frac{S_{11}}{\hat{\sigma}_{11}^*} \right)^2 \leq 1. \quad (4.20)$$

Für den Zwischenfaserbruch für Zug- bzw. Druckspannungen gelten

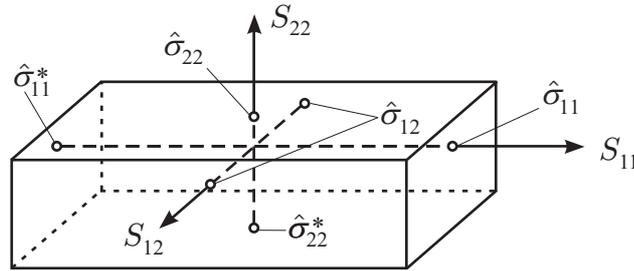
$$g(\mathbf{S})_{Zt} = \left( \frac{S_{22} + S_{33}}{\hat{\sigma}_{22}} \right)^2 + \left( \frac{S_{12}}{\hat{\sigma}_{12}} \right)^2 + \left( \frac{S_{13}}{\hat{\sigma}_{13}} \right)^2 + \left( \frac{S_{23} - S_{22} S_{33}}{\hat{\sigma}_{23}} \right)^2 \leq 1, \quad (4.21)$$

$$g(\mathbf{S})_{Zc} = \frac{S_{22} + S_{33}}{\hat{\sigma}_{22}^*} \left[ \left( \frac{\hat{\sigma}_{22}^*}{2\hat{\sigma}_{23}} \right)^2 - 1 \right] + \left( \frac{S_{22} + S_{33}}{2\hat{\sigma}_{23}} \right)^2 + \left( \frac{S_{12}}{\hat{\sigma}_{12}} \right)^2 + \left( \frac{S_{13}}{\hat{\sigma}_{13}} \right)^2 + \left( \frac{S_{23} - S_{22} S_{33}}{\hat{\sigma}_{23}} \right)^2 \leq 1. \quad (4.22)$$

#### 4.2.5 Maximalspannungskriterium

Das Maximalspannungskriterium ist ein entkoppeltes Versagenskriterium, bei dem das Material versagt, wenn mindestens eine Spannungskomponente in lokaler Materialrichtung den zugehörigen Festigkeitsgrenzwert erreicht. Diese Aussage lässt sich angeben zu

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{11}^* \leq S_{11} \leq \hat{\sigma}_{11}, & \quad \hat{\sigma}_{22}^* \leq S_{22} \leq \hat{\sigma}_{22}, & \quad \hat{\sigma}_{33}^* \leq S_{33} \leq \hat{\sigma}_{33}, \\ |\hat{\sigma}_{12}| \leq S_{12}, & \quad |\hat{\sigma}_{13}| \leq S_{13}, & \quad |\hat{\sigma}_{23}| \leq S_{23}. \end{aligned} \quad (4.23)$$



**Abbildung 4.6:** Maximalspannungskriterium im  $S_{11}$ - $S_{22}$ - $S_{12}$ -Spannungsraum

Im Falle des ebenen Spannungszustands kann dieses Maximalspannungskriterium im  $S_{11}$ - $S_{22}$ - $S_{12}$ -Spannungsraum grafisch dargestellt werden, vgl. Abbildung 4.6.

Neben den o.g. quadratischen Kriterien werden das Maximalspannungs- und Maximaldehnungskriterium am häufigsten verwendet.

#### 4.2.6 Maximaldehnungskriterium

Das Maximaldehnungskriterium ist ein ebenso entkoppeltes Versagenskriterium, bei dem das Material versagt, wenn mindestens eine Dehnungskomponente in lokaler Materialrichtung den zugehörigen Grenzwert erreicht.

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_{11}^* \leq E_{11} \leq \hat{\varepsilon}_{11} , \quad \hat{\varepsilon}_{22}^* \leq E_{22} \leq \hat{\varepsilon}_{22} , \quad \hat{\varepsilon}_{33}^* \leq E_{33} \leq \hat{\varepsilon}_{33} , \\ |\hat{\varepsilon}_{12}| \leq E_{12} , \quad |\hat{\varepsilon}_{13}| \leq E_{13} , \quad |\hat{\varepsilon}_{23}| \leq E_{23} . \end{aligned} \quad (4.24)$$

Im Falle des ebenen Dehnungszustands kann das Maximaldehnungskriterium im  $E_{11}$ - $E_{22}$ - $E_{12}$ -Dehnungsraum analog zum Maximalspannungskriterium für den ebenen Spannungszustand grafisch dargestellt werden.

### 4.3 Degradationsmodelle

Im Rahmen First-Ply-Failure-Analyse (FPF) wird das Versagen einer Schicht gleichgesetzt mit dem Versagen eines Laminats. Dieses Konzept berücksichtigt jedoch nicht die verbleibende Tragfähigkeit ungeschädigter Schichten. Nach Erreichen eines Faser- oder Zwischenfaserbruchs in einer Schicht kann durch Spannungsumlagerung die Last u. U. weiter gesteigert werden. Das Laminatversagen tritt erst dann ein, wenn die letzte Schicht versagt. In diesem Zusammenhang spricht man vom Grenzlastkonzept der letzten Schicht oder der Last-Ply-Failure-Analyse (LPF). Mit Hilfe der o. a. Versagenskriterien wird die Grenzlast für FPF

berechnet. Für die gebrochene Schicht werden entsprechende Steifigkeiten reduziert. Die Reduktion der Steifigkeit wird als Degradation bezeichnet und führt zur Spannungsumlagerung auf andere Schichten. Bei weiterer Laststeigerung kommt es zum Versagen einer anderen Schicht und zu einer erneuten Reduzierung der Steifigkeit. Dieses Szenario wird so lange wiederholt, bis die letzte Schicht versagt.

Ein einfaches Degradationsmodell nutzen TOBAJAS ET AL. [145], bei welchem eine Steifigkeitsreduktion vorgenommen wird, wenn das Tsai-Wu-Kriterium (4.4) nicht mehr erfüllt ist. Bei dieser Steifigkeitsreduktion wird zunächst der Elastizitätsmodul  $E_1$  gleich dem Elastizitätsmodul  $E_2$  gesetzt. Anschließend wird der Elastizitätsmodul  $E_2$  auf 10 % der Ausgangssteifigkeit reduziert. Wird das Tsai-Wu-Kriterium verletzt, so gilt

$$\begin{aligned} E_1 &:= E_2 , \\ E_2 &:= 0,1 E_2 . \end{aligned} \tag{4.25}$$

Unter Zuhilfenahme des Versagenskriteriums nach HASHIN [65] schlagen ORIFICI ET AL. [108] ein Degradationsmodell vor, welches in Anlehnung an TOBAJAS ET AL. [145] die elastischen Materialparameter reduziert. Beim Eintreten eines Faserbruchs gemäß Gleichung (4.19) bzw. (4.20) werden alle Materialparameter auf 10 % ihrer Ausgangswerte reduziert

$$\begin{aligned} E_1 &:= 0,1 E_1 , \\ E_2 &:= 0,1 E_2 , \\ G_{12} &:= 0,1 G_{12} , \\ \nu_{12} &:= 0,1 \nu_{12} , \\ \nu_{23} &:= 0,1 \nu_{23} . \end{aligned} \tag{4.26}$$

Ereignet sich ein Zwischenfaserbruch, ist Gleichung (4.21) bzw. (4.22) nicht mehr eingehalten und es werden folgende Materialparameter auf 10 % ihrer Ausgangswerte gesetzt

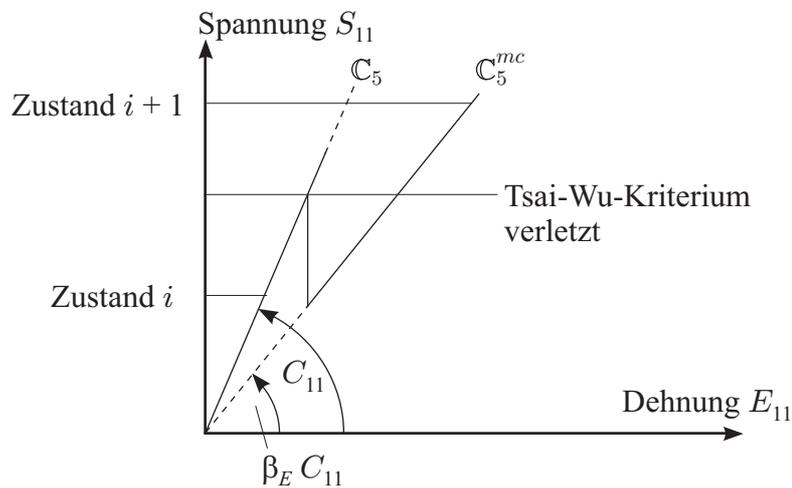
$$\begin{aligned} E_2 &:= 0,1 E_2 , \\ \nu_{12} &:= 0,1 \nu_{12} . \end{aligned} \tag{4.27}$$

Der Zwischenfaserbruch ist weit weniger kritisch als der Faserbruch, da lediglich der Elastizitätsmodul  $E_2$  sowie die Querdehnzahl  $\nu_{12}$  reduziert werden. Es ist also denkbar, dass nach einem Zwischenfaserbruch die Last in der Schicht weiter gesteigert werden kann, bis ein Faserbruch entsteht.

Ein weiteres Degradationsmodell schlägt DORNINGER [42] vor. Er benutzt das Tsai-Wu-Kriterium, um Zwischenfaserbruch zu prognostizieren. Wird dieses Kriterium an irgendeiner Stelle nicht mehr eingehalten, so wird an dieser Stelle eine Steifigkeitsreduktion vorgenommen, indem dort die transversalen Anteile der Materialmatrix  $\mathbb{C}_5$  aus Gleichung (3.38) reduziert werden. Es ergibt sich für die Materialmatrix  $\mathbb{C}_5^{mc}$  nach dem Zwischenfaserbruch

$$\mathbb{C}_5^{mc} = \begin{bmatrix} \beta_E C_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & & 0 \\ S & Y & M & & C_{44} & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.28)$$

Dabei werden diejenigen Terme zu Null gesetzt, die von der transversalen Materialrichtung abhängen. Die Reduktion des ersten Diagonalelements  $C_{11}$  durch den Faktor  $\beta_E$  gründet sich auf den Wegfall des in Längsrichtung tragenden Matrixanteils und hängt vom Aufbau und der Zusammensetzung des Faserverbundwerkstoffs ab. Der qualitative Verlauf des Elastizitätsgesetzes bei Zwischenfaserbruch ist für den eindimensionalen Belastungszustand in Abbildung 4.7 gemäß DORNINGER [42] dargestellt.



**Abbildung 4.7:** Eindimensionales Elastizitätsgesetz bei Zwischenfaserbruch (DORNINGER [42])

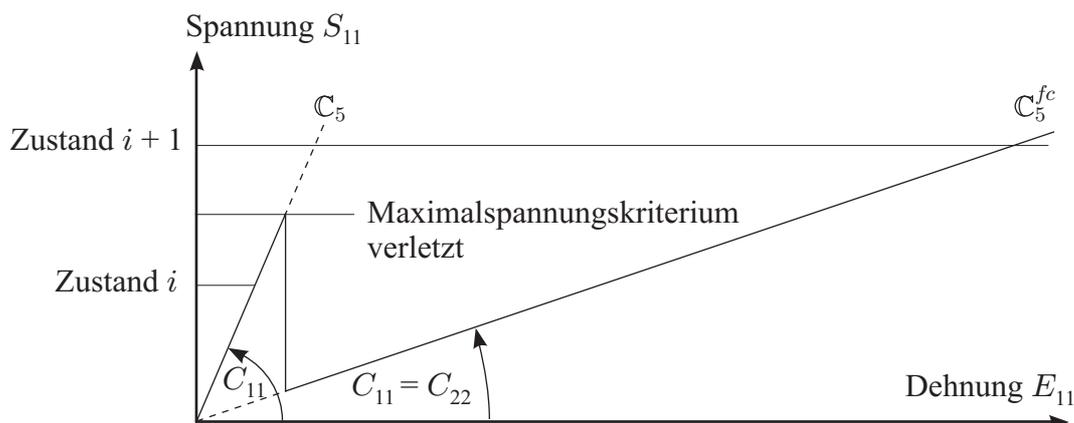
In Kapitel 3.7.7 wurde mit Hilfe einiger Überlegungen bezüglich der Formänderungsenergiegedichte gefordert, dass die Hauptdiagonalelemente der Materialmatrix

positiv sein müssen. Daher sollte statt dem Nullsetzen der Diagonalelemente in Gleichung (4.28) lediglich ein kleiner, positiver Wert angesetzt werden.

Für den Faserbruch wird das Maximalspannungskriterium herangezogen, d. h. bei Überschreiten der Grenzspannung in Faserlängsrichtung  $\hat{\sigma}_{11}^* \leq S_{11} \leq \hat{\sigma}_{11}$  wird Faserbruch angenommen und die Steifigkeit in der Weise reduziert, dass in Faserlängsrichtung die transversale Steifigkeit  $C_{22}$  angesetzt wird. Daraus ergibt sich die reduzierte Materialmatrix zu

$$\mathbb{C}_5^{fc} = \begin{bmatrix} C_{22} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & & 0 \\ S & Y & M & & C_{44} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}) \end{bmatrix}. \quad (4.29)$$

Das erste Diagonalelement  $C_{11}$ , also die Vorzugsachse der transversal isotropen Materialmatrix, wird aufgegeben und gleich dem zweiten Diagonalelement  $C_{22}$  gesetzt. Dies entspricht der Überlegung, dass nach Faserbruch nur noch das Matrixmaterial zur Spannungsübertragung beiträgt. Diese große Steifigkeitsänderung führt normalerweise zum Kollaps der gesamten Schicht. Der qualitative Verlauf des Elastizitätsgesetzes bei Faserbruch ist am Beispiel des eindimensionalen Belastungszustands in Abbildung 4.8 gemäß DORNINGER [42] dargestellt.



**Abbildung 4.8:** Eindimensionales Elastizitätsgesetz bei Faserbruch (DORNINGER [42])

## 4.4 Delamination

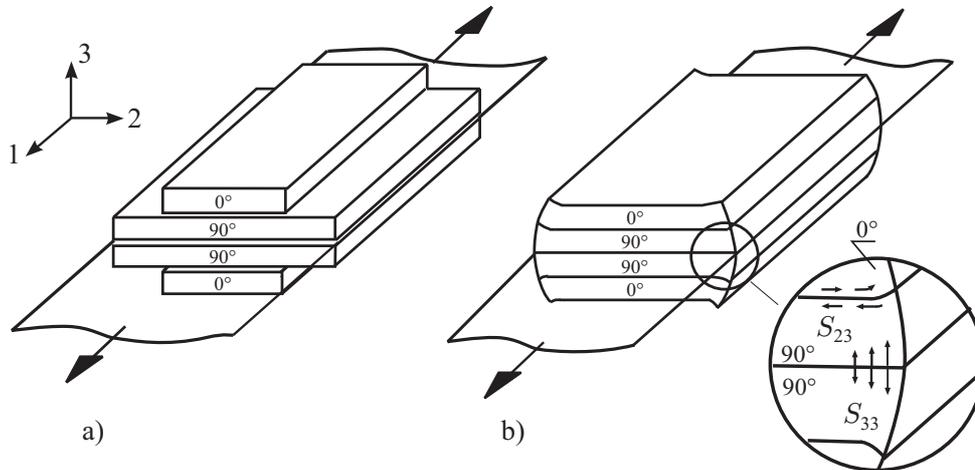
Das Ablösen zweier aneinander angrenzender Schichten innerhalb eines Faserverbundwerkstoffs wird als Delamination bezeichnet. In vielen Fällen ist eine Delamination von außen nicht sichtbar. Daher entwickeln z. B. LUO & HANAGUD [96], MÜLLER & VIELSACK [101] oder STEINER [139] Methoden zur Auffindung von Delaminationen. Bei transparenten Glasfaser-Epoxidharz-Verbunden sind Delaminationen durch milchige Trübungen zu erkennen. Die Lebensdauer einer Faserverbundkonstruktion wird durch wachsende Delamination erheblich reduziert. Zahlreiche Arbeiten beschäftigen sich daher mit dem Thema fortschreitender Delamination. Bruchmechanische Ansätze zur Beschreibung dieses Phänomens liegen z. B. den Arbeiten von DAVIDSON [33], KRÜGER [85], NILSSON & STORAKERS [104], WANG ET AL. [159], TESSMER [141] oder ZHANG [164] zugrunde. BALZANI & WAGNER [11], CRISTFIELD ET AL. [31] oder WAGNER ET AL. [156] beschreiben Delamination mit Hilfe von kohäsiven Interface-Elementen.

Die Ursachen für die Entstehung von Delaminationen sind vielfältig. Durch mangelhafte Fabrikation können einzelne Schichten einen schlechten gegenseitigen Verbund aufweisen. Verursacht durch wechselnde Beanspruchung kann es dann zu Delaminationen kommen.

Durch eine Schlagbeanspruchung, beispielsweise durch ein Projektil, wird das Material in direkter Umgebung des Einschlagbereichs augenblicklich stark deformiert, noch bevor die Gesamtstruktur hinsichtlich der Massenträgheit auf diese Belastung reagiert. Es entstehen örtlich große transversale Schub- und Normalspannungen, die Delaminationen verursachen können. GARG [53] zeigt die Abhängigkeit der Größe des Einwirkungsgegenstands und der Einwirkungsgeschwindigkeit, wonach kleinere Geschwindigkeiten eher zu Delamination führen. Größere Geschwindigkeiten führen zum Aufreißen ganzer Schichten oder zu einer kompletten Durchdringung des Laminatquerschnitts.

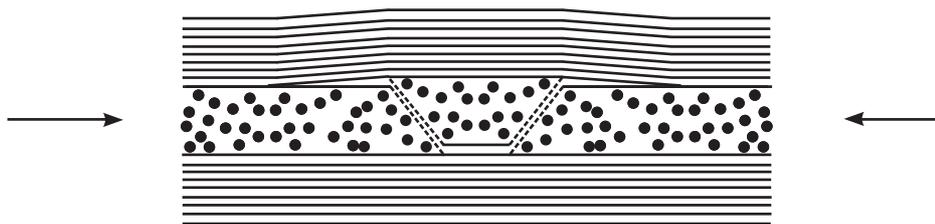
Spannungen an freien Rändern können Randdelaminationen hervorrufen. PIPES & PAGANO [112] und PAGANO [110] haben diesen Effekt an einem zugbeanspruchten, vierlagigen Faserverbundstreifen mit symmetrischem  $[0^\circ, 90^\circ]_S$  Schichtaufbau nachgewiesen. Die  $0^\circ$ -Schicht würde unter einer Zugbeanspruchung wesentlich stärker kontrahieren als die  $90^\circ$ -Schicht (vgl. Abbildung 4.9 a). Aufgrund des Laminatverbunds entstehen interlaminare Schubspannungen  $S_{23}$ , die am Rand am größten sind und zur Mitte hin durch das Aufbauen von Zug- bzw. Druckspannungen  $S_{22}$  der jeweiligen Schichten abklingen. Die Normalspannungen  $S_{22}$  bilden Biegemomente, die das Bestreben haben, die beiden Hälften  $[0^\circ, 90^\circ]$  und  $[90^\circ, 0^\circ]$  auseinanderzubiegen. Es entstehen Zugspannungen  $S_{33}$  zwischen den  $90^\circ$ -Schichten, welche die Biegung der jeweiligen Hälften verhindert. Erreichen

diese Zugspannungen  $S_{33}$  die entsprechende Festigkeit, entstehen Randaldelaminationen.



**Abbildung 4.9:** Zugprobe eines Laminitats der Schichtung  $[0^\circ, 90^\circ]_S$

Unter Längsdruck können Fasern in der Matrix ausbeulen, was zum Ablösen angrenzender Schichten führen kann. Ein Zwischenfaserbruch des Modus C, verursacht durch Querdruckspannungen  $S_{22} < 0$  in Verbindung mit Schubspannungen  $S_{23}$  (vgl. PUCK [116]), erzeugt einen keilförmigen Bruchkörper, der zur Ablösung der angrenzenden Laminatschicht führen und Delamination auslösen kann (vgl. Abbildung 4.10).



**Abbildung 4.10:** Delamination ausgelöst durch einem Zwischenfaserbruch (Mode C)

#### 4.4.1 Delaminationskriterium nach Hashin

Ein Versagenskriterium zur Bestimmung von Delaminationen, d. h. Schichtablösungen innerhalb einer Faserverbundstruktur, ist das Hashin-Kriterium, HASHIN

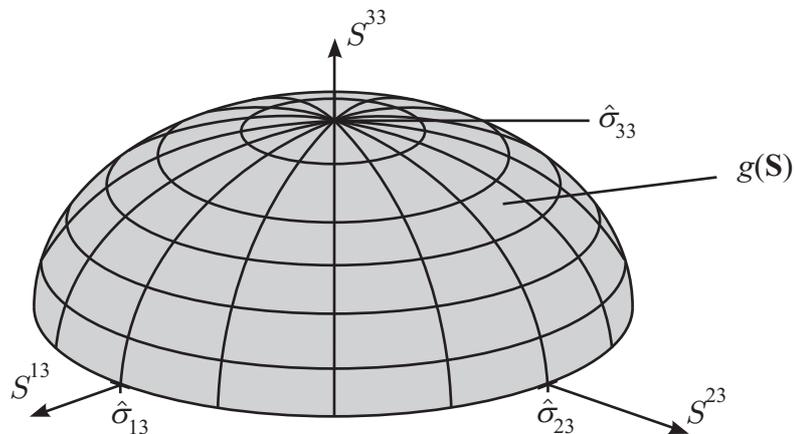
[65]. Danach kommt es zu Delaminationen, sobald die Kombination der interlaminaren Spannungen  $S^{33}$ ,  $S^{13}$  und  $S^{23}$  einen bestimmten Wert erreicht haben. Das Delaminationskriterium lautet

$$g(\mathbf{S}) = \frac{(S^{33})^2}{(\hat{\sigma}_{33})^2} + \frac{(S^{13})^2 + (S^{23})^2}{(\hat{\sigma}_{13})^2} \leq 1 \quad \text{mit} \quad (\hat{\sigma}_{13})^2 = (\hat{\sigma}_{23})^2. \quad (4.30)$$

Für die Festigkeitsmatrix  $\mathbf{A}$  gemäß Gleichung (4.1) gilt damit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\hat{\sigma}_{33}^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\hat{\sigma}_{13}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\hat{\sigma}_{13}^2} \end{bmatrix}. \quad (4.31)$$

Die Spannungen müssen insofern in lokaler Materialkoordinatenrichtung vorliegen, dass die 3-Richtung der Koordinatensysteme übereinstimmt. Obige Bruchbedingung berücksichtigt den allgemeinen Fall einer Delamination, d. h. den sog. Mixed-Mode, der die Sonderfälle Modus-I mit reiner Zugbeanspruchung sowie Modus-II und Modus-III mit reiner Schubbeanspruchung enthält (vgl. auch Abbildung 4.12). Da nur 3 Spannungskomponenten in das Delaminationskriterium eingehen, kann es grafisch dargestellt werden (vgl. Abbildung 4.11).



**Abbildung 4.11:** Delaminationskriterium nach Hashin

Mit der von Hashin vorgestellten Bedingung ist das Belastungsniveau der ersten Schädigung durch Delamination berechenbar. Die Untersuchung fortschreitender Delamination kann mit Hilfe von Interface-Elementen geschehen.

#### 4.4.2 Interface-Elemente bei Delamination

In diesem Unterkapitel wird die Idee kohäsiver Interface-Elemente vorgestellt. Für einen vertieften Einblick wird an entsprechender Stelle auf weiterführende Literatur verwiesen.

Bei Betrachtung der Relativbewegung zweier Rissoberflächen kann in Abhängigkeit des auftretenden Spannungsfeldes zwischen drei verschiedenen Rissöffnungsarten unterschieden werden, welche in Abbildung 4.12 dargestellt sind. Modus I wird durch eine reine Zugbeanspruchung, Modus II und Modus III werden durch Schubbeanspruchungen verursacht.

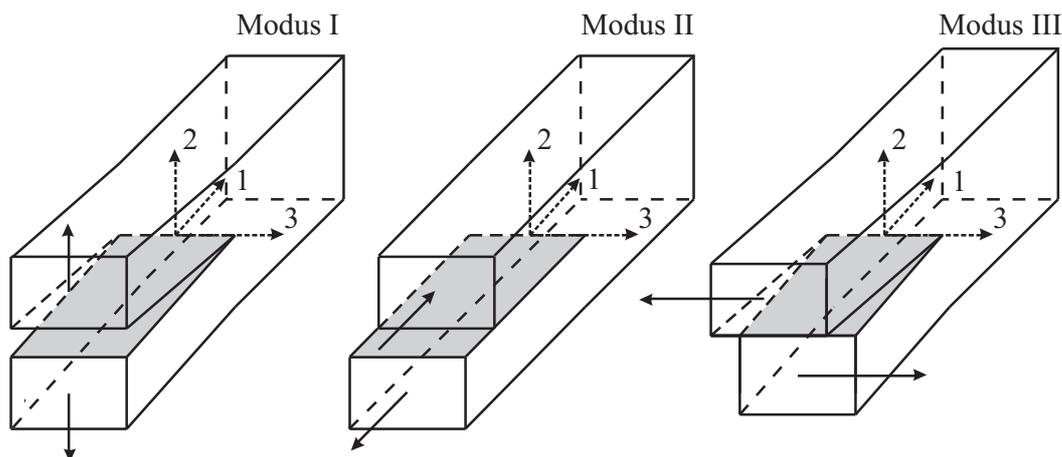
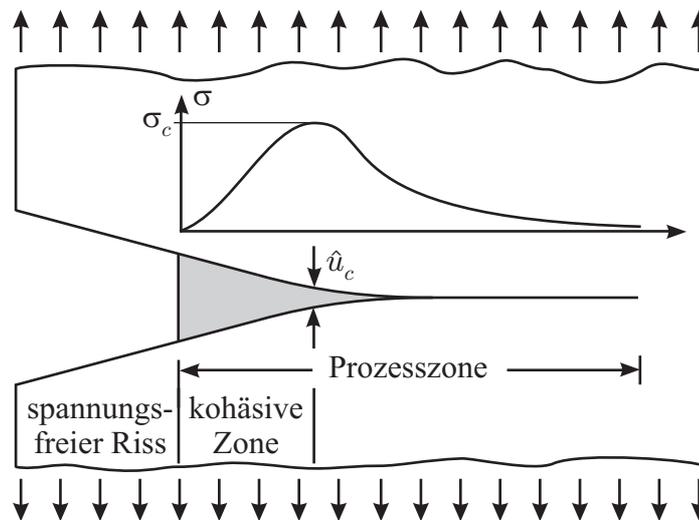


Abbildung 4.12: Rissöffnungsarten

Ist die Lage eines Risses, z. B. durch einen Wechsel der verwendeten Materialien, im Vorfeld bekannt, eignet sich zur numerischen Erfassung und Beschreibung des Rissverhaltens im Rahmen der Methode der Finiten Elemente die Verwendung sog. Interface-Elemente. Mit diesen können Delaminationen zwischen einzelnen Schichten eines Laminats oder aber auch Grenzschichtablösungen (debonding) in der Grenzfläche zwischen Faser und Matrix simuliert werden. Hierbei können Interface-Elemente mit einer initialen Dicke von Null (vgl. z. B. CRISFIELD ET AL. [30], DE ANDRÉS ET AL. [35] oder ORTIZ & PANDOLFI [109]) oder Elemente mit einer gewissen Anfangsdicke (vgl. z. B. HAN ET AL. [63] oder WAGNER & BALZANI [152]) verwendet werden.

Interface-Elemente basieren auf dem von DUGDALE [43] und BARENBLATT [12] entwickelten Kohäsionsrissmodell. Dabei wird angenommen, dass über einen bereits geöffneten Riss aufgrund molekularer Kräfte noch Spannungen übertragen werden können. Während bei dem Ansatz von DUGDALE [43] die übertragenen Spannungen in der kohäsiven Zone konstant sind, nehmen diese bei BARENBLATT [12] mit zunehmender Rissöffnung ab und verschwinden am Ende der kohäsiven Zone.

Bei den Interface-Elementen mit einer initialen Dicke von Null wird die Rissöffnung durch die Relativverschiebung  $\hat{u}$  zweier zunächst positionsgleicher Punkte eingeführt. Die kritische Rissöffnung  $\hat{u}_c$  gibt diejenige Rissöffnung an, bei der die maximale Spannung  $\sigma_c$  in der Rissfuge übertragen wird. In Abbildung 4.13 ist gemäß HAN ET AL. [63] die kohäsive Zone sowie die qualitative Spannungsverteilung innerhalb der Prozesszone für eine Rissöffnung nach Modus I dargestellt. Die kritische Spannung  $\sigma_c$  entspricht in diesem Fall der Zugfestigkeit  $\hat{\sigma}_{33}$  aus Gleichung (4.30) bei kritischer Rissöffnung  $\hat{u}_c$ .

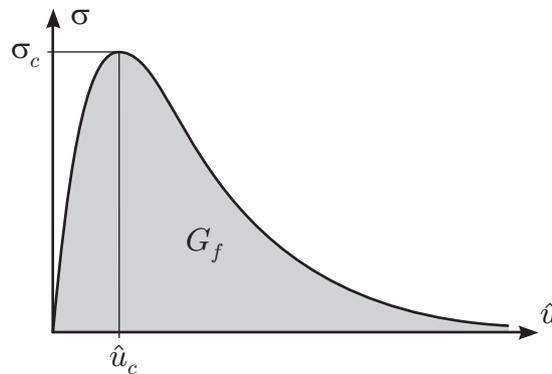


**Abbildung 4.13:** Kohäsionsrissmodell nach HAN ET AL. [63]

Die Spannungs-Rissöffnungs-Beziehung gilt für einen Ort in der Prozesszone vom ungerissenen bis zum vollständig gerissenen Zustand. Im ungerissenen Zustand ist dieser Ort die Stelle der beiden positionsgleichen Punkte. Im gerissenen Zustand repräsentiert dieser Ort zwei Punkte auf den entstandenen Rissflächen. Die Spannungs-Rissöffnungs-Beziehung kann in Anlehnung an DE ANDRÉS ET AL. [35] bzw. ORTIZ & PANDOLFI [109] mittels einer SMITH-FERRANTE-FUNKTION [121] der Form

$$\sigma = \sigma(\hat{u}) = e \sigma_c \frac{\hat{u}}{\hat{u}_c} e^{-\hat{u}/\hat{u}_c} \quad (4.32)$$

dargestellt werden. Dabei ist  $e \approx 2,71828$  die Eulersche Zahl. Der Verlauf dieser Exponentialfunktion ist in Abbildung 4.14 qualitativ dargestellt. Die kritische Energiefreisetzungsrate  $G_f$  ist die freigesetzte Energie pro neu erzeugter, spannungsfreier Rissoberfläche. Sie ist eine materialabhängige Größe und wird für den jeweiligen Modus mittels standardisierter Versuche ermittelt (siehe z. B. [6], [7], [8] oder [75]).



**Abbildung 4.14:** Spannungs-Rissöffnungs-Beziehung vom Typus SMITH-FERRANTE [121]

Die kritische Energiefreisetzungsrate wird auch als Bruchenergie bezeichnet und entspricht der Fläche unter der Spannungs-Rissöffnungskurve. Die Integration von Gleichung (4.32) führt auf

$$G(\hat{u}) = e \sigma_c \hat{u}_c \left[ 1 - \left( 1 + \frac{\hat{u}}{\hat{u}_c} \right) e^{-\hat{u}/\hat{u}_c} \right] \quad (4.33)$$

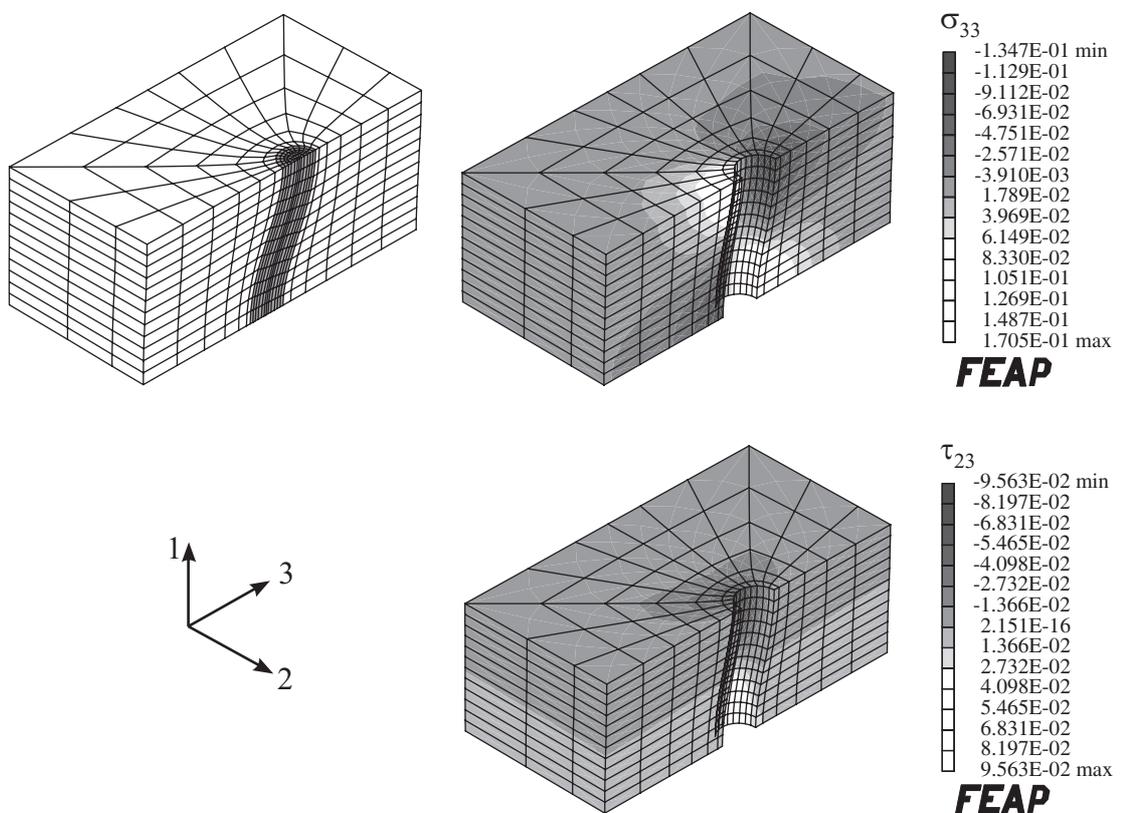
und gibt die Energiefreisetzungsrate bei einer bestimmten relativen Rissöffnung  $\hat{u}$  an. Die Bruchenergie ergibt sich über die Grenzbetrachtung von Gleichung (4.33) zu

$$G_f = \lim_{\hat{u} \rightarrow \infty} G(\hat{u}) = e \sigma_c \hat{u}_c . \quad (4.34)$$

Damit lässt sich ein Schädigungsparameter  $Z$  als Quotient der Energiefreisetzungsrate und der Bruchenergie definieren

$$Z := \frac{G(\hat{u})}{G_f} \quad Z \in [0, 1] . \quad (4.35)$$

Die Zuhilfenahme des Kohäsionsrissmodells führt auf ein entfestigendes Materialverhalten im Bereich der Delamination bzw. der Grenzschichtablösung, welches sich bei fortschreitendem Wachstum des Risses auf die Gesamtsteifigkeit der Struktur auswirkt. Bei den in dieser Arbeit untersuchten Faserverbundstrukturen ist zumindest die Möglichkeit der Grenzschichtablösung bei Eintreten von Mikroinstabilitäten zu erwähnen, wie in Abbildung 4.15 schematisch dargestellt.



**Abbildung 4.15:** Ausgebeulte Faser in der Matrix (links) und Verlauf der Spannungskomponente  $\sigma_{33}$  sowie  $\tau_{23}$  auf der Matrixober- bzw. Grenzfläche (rechts)

Die Spannungsanalyse aus der Finite-Element-Untersuchung einer ausgebeulten Faser in einer Matrix untermauert die Gefahr einer solchen Grenzschichtablösung, wie der Verlauf der Spannungskomponente  $\sigma_{33}$  bzw.  $\tau_{23}$  in Abbildung 4.15 zeigt. So sind z. B. deutlich Zugspannungen im Bereich der ausgebeulten Faser zwischen Matrix und Faser zu erkennen.

## 5 Finite-Element-Formulierung

Bei der Methode der Finiten Elemente werden die Eigenschaften des Kontinuums bzw. aller materiellen Punkte auf endlich viele diskrete Knoten bzw. definierte Gebiete zwischen diesen reduziert. Diese Gebiete werden Finite Elemente genannt, wobei alle im Element vorhandenen Eigenschaften mittels Ansatzfunktionen auf die Knoten projiziert werden. Die Knotenfreiheitsgrade, z. B. klassischerweise Verschiebungen oder Verdrehungen, sind die Unbekannten des Systems.

### 5.1 Schwache Form des Gleichgewichts und Linearisierung

In Kapitel 2.3 wurden die grundlegenden kontinuumsmechanischen Feldgleichungen vorgestellt. Diese stellen ein gekoppeltes System von Differentialgleichungen mit Randbedingungen dar, welches nur in Ausnahmefällen in analytischer Form lösbar ist. Daher sind alternative Formulierungen notwendig. Die Methode der Finiten Elemente basiert auf dem Prinzip der Variationsrechnung und einer sogenannten schwachen Form des Gleichgewichts. Die Existenz einer Potentialfunktion ist dabei nicht erforderlich, was insbesondere für Probleme mit nichtkonservativer Belastung oder Reibung vorteilhaft ist, vgl. WRIGGERS [161]. Für den statischen Fall folgt die schwache Form des Gleichgewichts in Lagrange-scher Formulierung aus der lokalen Form der Impulsbilanz (2.47) nach skalarer Multiplikation mit einer vektorwertigen Testfunktion  $\boldsymbol{\eta}$  und Integration über das Referenzvolumen  $\mathcal{B}_0$

$$\int_{\mathcal{B}_0} \boldsymbol{\eta} \cdot (\text{Div } \mathbf{P} + \rho_0 \mathbf{b}_0) \, dV = 0 . \quad (5.1)$$

Mit der Umformung des ersten Terms

$$\begin{aligned} \text{Div}[\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{P}] &= (\eta_i P_{ij})_{,j} = \eta_{i,j} P_{ij} + \eta_i P_{ij,j} \\ &= \text{Grad } \boldsymbol{\eta} : \mathbf{P} + \boldsymbol{\eta} \cdot \text{Div } \mathbf{P} \\ \Leftrightarrow \boldsymbol{\eta} \cdot \text{Div } \mathbf{P} &= \text{Div}[\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{P}] - \mathbf{P} : \text{Grad } \boldsymbol{\eta} \end{aligned} \quad (5.2)$$

und unter Anwendung des Gaußschen Integralsatzes

$$\int_{\mathcal{B}_0} \text{Div}[\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{P}] \, dV = \int_{\partial \mathcal{B}_0} \boldsymbol{\eta} \cdot \underbrace{\mathbf{P} \mathbf{N}}_{\mathbf{t}_0} \, dA \quad (5.3)$$

folgt aus Gleichung (5.1) nach Einarbeitung der Spannungsrandbedingungen (2.48) die schwache Form des Gleichgewichts

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{P} : \text{Grad } \boldsymbol{\eta} \, dV + \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \mathbf{b}_0 \cdot \boldsymbol{\eta} \, dV + \int_{\partial\mathcal{B}_0} \mathbf{t}_0 \cdot \boldsymbol{\eta} \, dA = 0 \\
 \Rightarrow G(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}) & := \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{P} : \text{Grad } \boldsymbol{\eta} \, dV - \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \mathbf{b}_0 \cdot \boldsymbol{\eta} \, dV - \int_{\partial\mathcal{B}_0} \mathbf{t}_0 \cdot \boldsymbol{\eta} \, dA = 0 \quad (5.4)
 \end{aligned}$$

Das Verschiebungsfeld  $\mathbf{u} = \mathbf{X} - \mathbf{x}$  ist ein unbekanntes Feld im Funktional  $G(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta})$ . Die Testfunktion  $\boldsymbol{\eta}$  wird später separiert und nicht weiter spezifiziert. Bei der Lösung des Funktionals  $G$  werden die Kinematik und das Stoffgesetz exakt, das Gleichgewicht jedoch nur im integralen Mittel erfüllt. Die schwache Form des Gleichgewichts ist identisch mit der Variation des Potentials nach der Verschiebung  $\mathbf{u}$ . Mit der von Verzerrungen  $\mathbf{E}$  abhängigen Formänderungsenergiedichte  $W_{0S}(\mathbf{E})$  wird das Potential

$$\Pi(\mathbf{u}) = \int_{\mathcal{B}_0} W_{0S} \, dV - \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{u} \, dV - \int_{\partial\mathcal{B}_0} \mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{u} \, dA \quad \longrightarrow \quad \text{min.} \quad (5.5)$$

Die Variation von Gleichung (5.5) nach der Verschiebung  $\mathbf{u}$  ergibt

$$\delta\Pi(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \int_{\mathcal{B}_0} \frac{\partial W_{0S}}{\partial \mathbf{E}} : \delta\mathbf{E} \, dV - \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \mathbf{b}_0 \cdot \delta\mathbf{u} \, dV - \int_{\partial\mathcal{B}_0} \mathbf{t}_0 \cdot \delta\mathbf{u} \, dA = 0 \quad (5.6)$$

und korrespondiert mit Gleichung (5.4). Hierbei ist  $\delta\mathbf{E}$  die erste Variation des in Gleichung (2.20) angegebenen Greenschen Verzerrungstensors und ergibt sich zu

$$\delta\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\delta\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j + \mathbf{g}_i \cdot \delta\mathbf{g}_j) \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \quad \text{mit} \quad \delta\mathbf{g}_i = \frac{\partial \delta\mathbf{u}}{\partial \xi^i} . \quad (5.7)$$

Die notwendige Bedingung für das Vorhandensein des Gleichgewichtszustands eines Systems ist das Verschwinden der ersten Variation. Damit entspricht Gleichung (5.6) dem Prinzip vom stationären Wert des Potentials. Die Lösung dieses Randwertproblems erfolgt direkt oder im nichtlinearen Fall iterativ mit Hilfe des Newton-Raphson-Verfahrens. Dabei wird Gleichung (5.6) an der Stelle der gesuchten Verschiebung  $\mathbf{u}$  in einer Taylorreihe entwickelt und linearisiert. Terme quadratischer und höherer Ordnung werden dabei vernachlässigt. Durch diese konsistente Linearisierung wird eine quadratische Konvergenz in der Nähe der

Lösung sichergestellt (vgl. WRIGGERS [161]). Mit Hilfe der Richtungsableitung (Gateaux-Ableitung)

$$D \Pi(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\eta} = \left. \frac{d}{d\varepsilon} [\Pi(\mathbf{u} + \varepsilon \boldsymbol{\eta})] \right|_{\varepsilon=0} \quad (5.8)$$

lässt sich die Linearisierung der ersten Variation des Potentials in der Form

$$\text{Lin}[\delta \Pi(\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{u})] = \delta \Pi(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) + D \delta \Pi(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) \cdot \Delta \mathbf{u} = 0 \quad (5.9)$$

angeben. Hierbei ist

$$D \delta \Pi(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) \cdot \Delta \mathbf{u} = \int_{\mathcal{B}_0} \left( \delta \mathbf{E} : \frac{\partial^2 W_{0S}}{\partial \mathbf{E}^2} : \Delta \mathbf{E} + \frac{\partial W_{0S}}{\partial \mathbf{E}} : \Delta \delta \mathbf{E} \right) dV. \quad (5.10)$$

Die Linearisierung der Variation der Verzerrung  $\mathbf{E}$  ergibt sich mit  $\Delta \mathbf{g}_i = \partial \Delta \mathbf{u} / \partial \xi^i$  zu

$$\Delta \delta \mathbf{E} = \frac{1}{2} (\delta \mathbf{g}_i \cdot \Delta \mathbf{g}_j + \Delta \mathbf{g}_i \cdot \delta \mathbf{g}_j) \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j. \quad (5.11)$$

Unter Einarbeitung des 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensors aus Gleichung (2.71) und des Materialtensors (3.9) folgt aus Gleichung (5.9)

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}_0} \delta \mathbf{E} : \mathbf{C} : \Delta \mathbf{E} + \mathbf{S} : \Delta \delta \mathbf{E} dV = \\ - \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} dV + \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \mathbf{b}_0 \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_{\partial \mathcal{B}_0} \mathbf{t}_0 \cdot \delta \mathbf{u} dA. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Ausführlich wird das Thema Linearisierung u. a. in den Arbeiten von HUGHES & PISTER [74], MARSDEN & HUGHES [98] oder WRIGGERS [160] behandelt.

Die in diesem Kapitel dargestellte Formulierung bezieht sich auf ein konvektives Koordinatensystem. Die Darstellung des Materialtensors mit Ingenieurkonstanten ist jedoch an orthonormierte Basisvektoren gebunden. Daher wird eine Transformation von der orthonormierten Basis  $\mathbf{t}_i$  auf die konvektive Basis  $\mathbf{G}_i$  erforderlich. Zunächst wird die orthogonale Basis  $\mathbf{t}_i$  mit Hilfe des Kreuzprodukts aus  $\mathbf{G}_i$  konstruiert.

$$\mathbf{t}_1 = \frac{\mathbf{G}_1}{|\mathbf{G}_1|} \quad \mathbf{t}_2 = \mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_3 \quad \mathbf{t}_3 = \frac{\mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2}{|\mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2|}. \quad (5.13)$$

Durch skalare Multiplikation des Greenschen Verzerrungstensors von links und rechts mit  $\mathbf{t}_k$  bzw.  $\mathbf{t}_l$  ergibt sich mit  $\mathbf{t}_i^k = \mathbf{t}_i \cdot \mathbf{G}^k$  und unter Berücksichtigung der in (3.10) eingeführten Notation die Transformationsbeziehung

$$\mathbf{E}_\perp = \mathbf{T}_E \mathbf{E} . \quad (5.14)$$

Dabei ist  $\mathbf{T}_E$  die zugehörige Transformationsmatrix in Analogie zu Gleichung (3.14). Ferner gelten die Beziehungen (vgl. z. B. KLINKEL [80])

$$\mathbf{C} = \mathbf{T}_E^T \mathbf{C}_\perp \mathbf{T}_E , \quad \mathbf{S} = \mathbf{T}_E^T \mathbf{S}_\perp . \quad (5.15)$$

## 5.2 Nichtlineare Finite-Element-Formulierung

### 5.2.1 Dreidimensionale Elementformulierung und Grundgleichungen

Die im vorigen Kapitel formulierte schwache Form des Gleichgewichts kann im Rahmen der Finite-Element-Methode näherungsweise gelöst werden. In diesem Kapitel werden die hierzu notwendigen Gleichungen aufbereitet. Einen vertieften Einblick zur Methode der Finiten Elemente findet sich z. B. bei BATHE [14], FUNG & TONG [52] oder ZIENKIEWICZ & TAYLOR [166].

Die in dieser Arbeit zu betrachtende Struktur  $\mathcal{B}$  wird in eine endliche Anzahl von Teilgebieten  $\Omega_e$  zerlegt, siehe Abbildung 5.1

$$\mathcal{B}^h = \bigcup_{e=1}^{numel} \Omega_e . \quad (5.16)$$

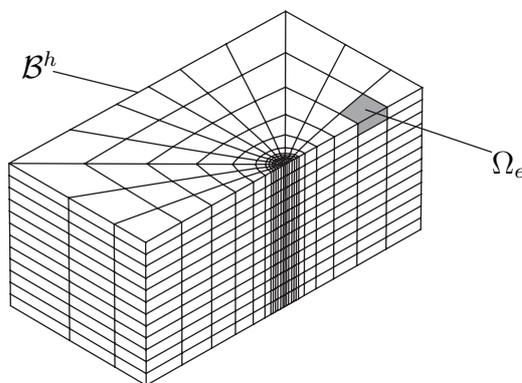
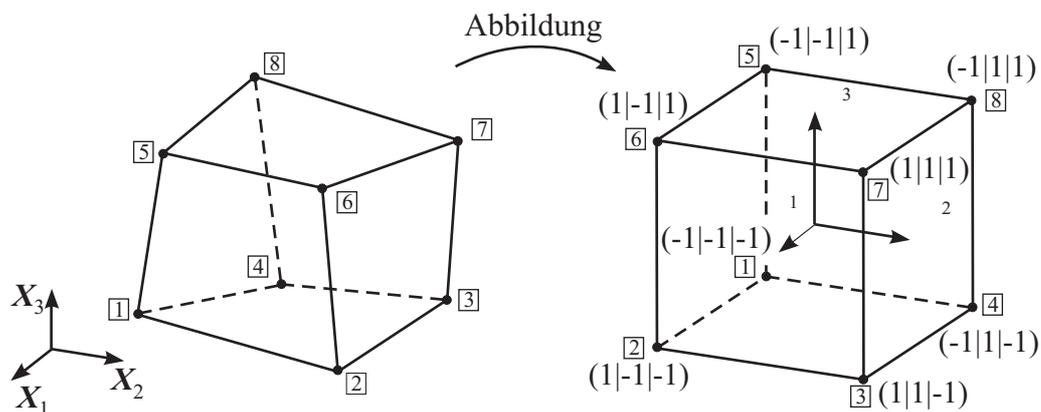


Abbildung 5.1: Struktur  $\mathcal{B}^h$  und Teilgebiet  $\Omega_e$

Hierbei ist  $\cup$  ein Operator, welcher den Zusammenbau aller Teilgebiete mit Anzahl *numel* ('number of elements') symbolisch darstellt. Der hochgestellte Index  $h$  kennzeichnet hierbei die Näherungscharakteristik. Aufgrund der universellen Anwendbarkeit ist im Rahmen der Finite-Element-Methode das sog. isoparametrische Konzept verbreitet. Dabei werden sowohl die Elementgeometrie als auch die Verschiebungen mit den gleichen Ansatzfunktionen approximiert. Das in konvektiven Koordinaten formulierte Volumenelement wird dabei auf einen Einheitsquader der Kantenlänge 2 im lokalen  $\xi^i$ -Koordinatensystem mit  $\xi^i = 1, 2, 3$  abgebildet. Die Ansatzfunktionen sind damit unabhängig von der Elementgeometrie und müssen einige Voraussetzungen erfüllen. Das Verschiebungsfeld muss im Element und über die Elementgrenzen hinweg stetig wiedergegeben werden. Starrkörperbewegungen und konstante Verzerrungszustände müssen ebenfalls darstellbar sein. Mit steigender Anzahl von Elementen nimmt damit die Güte der Näherungslösung zu und konvergiert gegen die der Theorie zugrunde liegende exakte Lösung. Für das in dieser Arbeit verwendete 8-Knoten-Volumenelement werden trilineare Ansatzfunktionen der Form

$$N_I = \frac{1}{8}(1 + \xi_I^1 \xi^1)(1 + \xi_I^2 \xi^2)(1 + \xi_I^3 \xi^3) \quad (5.17)$$

benutzt. Hierbei ist  $I$  die Knotennummer,  $N$  die zum jeweiligen Knoten gehörende Ansatzfunktion und  $\xi_I^1, \xi_I^2, \xi_I^3$  sind die lokalen Koordinaten des betreffenden Knotens.



**Abbildung 5.2:** links: globales Koordinatensystem und 8-Knoten-Volumenelement mit Knotennummern, rechts: Abbildung auf Einheitsquader mit lokalem Koordinatensystem

Das lokale Koordinatensystem liegt dabei, wie in Abbildung 5.2 skizziert, im

Elementmittelpunkt. Die Geometrie der Referenz- und Momentankonfiguration lässt sich über

$$\mathbf{X}^h = \sum_{I=1}^{nel} N_I \mathbf{X}_I \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{x}^h = \sum_{I=1}^{nel} N_I \mathbf{x}_I \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}^h = \mathbf{X}^h + \mathbf{u}^h \quad (5.18)$$

aus den Ansatzfunktionen  $N_I$  approximieren. Hierbei steht  $nel$  ('nodes per element') für die Anzahl der Knoten je Element. Der Verschiebungsvektor  $\mathbf{u}^h$  folgt aus den jeweiligen Knotenverschiebungen  $\mathbf{v}_I$

$$\mathbf{u}^h = \sum_{I=1}^{nel} N_I \mathbf{v}_I \quad \text{mit} \quad \mathbf{v}_I := \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}. \quad (5.19)$$

Die kartesische Ableitung der Ansatzfunktionen nach den Referenzkoordinaten ist gegeben durch

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_I}{\partial X_1} \\ \frac{\partial N_I}{\partial X_2} \\ \frac{\partial N_I}{\partial X_3} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_I}{\partial \xi^1} \\ \frac{\partial N_I}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial N_I}{\partial \xi^3} \end{bmatrix}, \quad (5.20)$$

mit der Jakobi-Matrix

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial \xi^1} & \frac{\partial X_2}{\partial \xi^1} & \frac{\partial X_3}{\partial \xi^1} \\ \frac{\partial X_1}{\partial \xi^2} & \frac{\partial X_2}{\partial \xi^2} & \frac{\partial X_3}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial X_1}{\partial \xi^3} & \frac{\partial X_2}{\partial \xi^3} & \frac{\partial X_3}{\partial \xi^3} \end{bmatrix}. \quad (5.21)$$

Im Rahmen der Finite-Elemente-Methode wird diese approximiert über

$$\mathbf{J} = \sum_{I=1}^{nel} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_I}{\partial \xi^1} X_{1I} & \frac{\partial N_I}{\partial \xi^1} X_{2I} & \frac{\partial N_I}{\partial \xi^1} X_{3I} \\ \frac{\partial N_I}{\partial \xi^2} X_{1I} & \frac{\partial N_I}{\partial \xi^2} X_{2I} & \frac{\partial N_I}{\partial \xi^2} X_{3I} \\ \frac{\partial N_I}{\partial \xi^3} X_{1I} & \frac{\partial N_I}{\partial \xi^3} X_{2I} & \frac{\partial N_I}{\partial \xi^3} X_{3I} \end{bmatrix}. \quad (5.22)$$

Die in Gleichung (2.2) eingeführten Basisvektoren lassen sich mit der partiellen Ableitung  $N_{I,i} = \partial N_I / \partial \xi^i$  darstellen

$$\mathbf{G}_i^h = \sum_{I=1}^{nel} N_{I,i} \mathbf{X}_I \quad \mathbf{g}_i^h = \sum_{I=1}^{nel} N_{I,i} \mathbf{x}_I . \quad (5.23)$$

Die erste Variation des Greenschen Verzerrungstensors kann damit auf Elementebene wie folgt angegeben werden

$$\delta \mathbf{E}^h = \sum_{I=1}^{nel} \mathbf{B}_I \delta \mathbf{v}_I \quad \text{mit} \quad \mathbf{B}_I = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1^T N_{I,1} \\ \mathbf{g}_2^T N_{I,2} \\ \mathbf{g}_3^T N_{I,3} \\ \mathbf{g}_2^T N_{I,1} + \mathbf{g}_1^T N_{I,2} \\ \mathbf{g}_3^T N_{I,1} + \mathbf{g}_1^T N_{I,3} \\ \mathbf{g}_3^T N_{I,2} + \mathbf{g}_2^T N_{I,3} \end{bmatrix} . \quad (5.24)$$

Nach Einsetzen von Gleichung (5.19) und (5.24) in die linearisierte schwache Form des Gleichgewichts (5.12) gilt für die linke und rechte Seite die Approximation auf Elementebene

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{v}^{eT} \mathbf{K}_T^e \Delta \mathbf{v}^e &= \sum_{I=1}^{nel} \sum_{K=1}^{nel} \delta \mathbf{v}_I^T \mathbf{K}_{TIK}^e \Delta \mathbf{v}_K \\ \delta \mathbf{v}^{eT} (\mathbf{f}^{e,int} - \mathbf{f}^{e,ext}) &= \sum_{I=1}^{nel} \delta \mathbf{v}_I^T (\mathbf{f}_I^{e,int} - \mathbf{f}_I^{e,ext}) \end{aligned} \quad (5.25)$$

Hierbei sind  $\mathbf{f}_I^{e,int}$  und  $\mathbf{f}_I^{e,ext}$  der interne und externe Lastvektor für den Knoten I und ergeben sich zu

$$\mathbf{f}_I^{e,int} = \int_{\mathcal{B}_0^e} \mathbf{B}_I^T \mathbf{S} \, dV \quad (5.26)$$

$$\mathbf{f}_I^{e,ext} = \int_{\mathcal{B}_0^e} N_I^T \rho_0 \mathbf{b}_0 \, dV + \int_{\partial \mathcal{B}_0^e} N_I^T \mathbf{t}_0 \, dA . \quad (5.27)$$

Die tangentielle Elementsteifigkeitsmatrix für die Knoten I und K  $\mathbf{K}_{TIK}^e$  setzt sich zusammen aus

$$\mathbf{K}_{TIK}^e = \int_{\mathcal{B}_0^e} \mathbf{B}_I^T \mathbb{C} \mathbf{B}_K + \mathbf{G}_{IK} \, dV , \quad (5.28)$$

wobei sich die Matrix  $\mathbf{G}_{IK} = \text{diag}(G_{IK}, G_{IK}, G_{IK})$  aus der Linearisierung der ersten Variation der Verzerrungen multipliziert mit den Spannungen ergibt

$$\mathbf{S} : \Delta \delta \mathbf{E} = \sum_{I=1}^{nel} \sum_{K=1}^{nel} \delta \mathbf{v}_I^T \mathbf{G}_{IK} \Delta \mathbf{v}_K . \quad (5.29)$$

Die Komponenten von  $\mathbf{G}_{IK}$  lassen sich angeben als

$$\begin{aligned} G_{IK} = & S^{11} N_{I,1} N_{K,1} + S^{22} N_{I,2} N_{K,2} + S^{33} N_{I,3} N_{K,3} + S^{12} (N_{I,1} N_{K,2} + N_{I,2} N_{K,1}) \\ & + S^{13} (N_{I,1} N_{K,3} + N_{I,3} N_{K,1}) + S^{23} (N_{I,2} N_{K,3} + N_{I,3} N_{K,2}) . \end{aligned} \quad (5.30)$$

In Anlehnung an Aussage (5.16) wird die Gesamtstruktur aus den einzelnen Elementen zusammengebaut und es ergibt sich für die tangentielle Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_T$  sowie das Residuum  $\mathbf{G}$

$$\mathbf{G}(\mathbf{v}, \lambda) = \mathbf{R}(\mathbf{v}) - \lambda \mathbf{P} = \bigcup_{e=1}^{numel} (\mathbf{f}^{e,int} - \mathbf{f}^{e,ext}) \quad \text{und} \quad \mathbf{K}_T = \bigcup_{e=1}^{numel} \mathbf{K}_T^e . \quad (5.31)$$

Das Gleichungssystem aus Gleichung (5.12) lässt sich in der Form

$$\mathbf{G}(\mathbf{v}, \lambda) + \mathbf{K}_T \Delta \mathbf{v} = 0 \quad (5.32)$$

aufstellen, wobei  $\lambda$  der Laststeigerungsfaktor ist. Ein Gleichgewichtszustand ist erreicht, wenn das Residuum  $\mathbf{G}(\mathbf{v}, \lambda)$  verschwindet, wenn also die internen Reaktionskräfte gleich den externen Lasten sind

$$\mathbf{G}(\mathbf{v}, \lambda) = \mathbf{R}(\mathbf{v}) - \lambda \mathbf{P} = 0 . \quad (5.33)$$

Wegen der nichtlinearen Zusammenhänge in  $\mathbf{R}(\mathbf{v})$  wird das in Kapitel 5.3.1 erläuterte Newton-Raphson-Verfahren angewendet. An dieser Stelle sei angemerkt, dass obige Gleichgewichtsaussage dem globalen Verschwinden der ersten Variation des Potentials gemäß Gleichung (5.6) entspricht.

Die Auswertung der Integrale aus den Gleichungen (5.26) bis (5.28) erfolgt numerisch mit Hilfe der Gauß-Punkt-Integration. Hierbei werden die Felder der Formulierung an  $m$  Stützstellen, den sog. Gauß-Punkten, ausgewertet und die gewichtete Summe über alle Stützstellen gebildet. Dabei ist zu beachten, dass  $m$

Gauß-Punkte bei einem Polynom  $n = (2m - 1)$ -ten Grades zu einem exakten Integrationsergebnis führen.

In  $\mathbf{K}_{TIK}^e$  treten die verwendeten trilinearen Ansatzfunktionen jeweils quadratisch in ihren partiellen Ableitungen auf. Es werden  $m = (n + 1)/2 = 1,5$  und damit 2 Gauß-Punkte je Richtung erforderlich. Aufgrund der drei Richtungen  $\xi^i$ ,  $i = 1, 2, 3$  werden  $2 \times 2 \times 2 = 8$  Gauß-Punkte zur Integration im Element verwendet. Die Wichtungsfaktoren  $w$  besitzen dabei den Wert 1, die Stützstellen befinden sich bei  $\xi^i = \pm 1/\sqrt{3}$ . Obige Aussagen gelten nur für rechtwinklige Finite-Element-Netze. Andernfalls entstehen in  $\mathbf{J}$  gebrochen rationale Funktionen und die Integration erfolgt nur näherungsweise.

Durch die Jakobideterminante ist das Volumenverhältnis zwischen den lokalen und globalen Koordinaten

$$dV = \det \mathbf{J} d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 . \quad (5.34)$$

gegeben. Damit folgt z. B. für die knotenbezogene tangentielle Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K}_{TIK}^e = \int_{B_0^e} (\mathbf{B}_I^T \mathbf{C} \mathbf{B}_K + \mathbf{G}_{IK}) dV \quad (5.35)$$

$$= \int_{\xi^1} \int_{\xi^2} \int_{\xi^3} (\mathbf{B}_I^T \mathbf{C} \mathbf{B}_K + \mathbf{G}_{IK}) \det \mathbf{J} d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 . \quad (5.36)$$

sowie nach Einführung der numerischen Gauß-Punkt-Integration

$$\mathbf{K}_{TIK}^e = \sum_{p=1}^{n_{\xi^1}} \sum_{q=1}^{n_{\xi^2}} \sum_{r=1}^{n_{\xi^3}} (\mathbf{B}_I^T \mathbf{C} \mathbf{B}_K + \mathbf{G}_{IK}) \det \mathbf{J} w_p(\xi^1) w_q(\xi^2) w_r(\xi^3) \quad (5.37)$$

mit

$$n_{\xi^1} = n_{\xi^2} = n_{\xi^3} = 2 . \quad (5.38)$$

### 5.2.2 Versteifungseffekte bei Biegung

In Kapitel 5.2 wurden aufgrund der Einfachheit, z. B. bei der Vernetzung der Volumenelemente, lineare Ansatzfunktionen gewählt. Damit lassen sich jedoch dünne, biegebeanspruchte Strukturen nur eingeschränkt untersuchen. Das entstehende zu steife Verhalten kann durch höhere (z. B. quadratische) Ansätze abgemildert oder durch andere Maßnahmen modifiziert werden. Gerade bei dünnen

Strukturen gewinnen diese Versteifungseffekte an Einfluss. Zur Unterdrückung dieser Locking-Effekte findet sich in der Literatur eine Vielzahl an Beiträgen. Reduzierte Integration, hybride oder gemischte Variationsprinzipien finden sich z. B. in ZIENKEWICZ & TAYLOR [166], BELYTSCHKO ET AL. [16], BATHE [14] oder KLINKEL & WAGNER [81]. Für dünne Strukturen wird im Folgenden der hybride Verzerrungsansatz nach SANSOUR & KOLLMANN [127] auf ein dreidimensionales Volumenelement weiterentwickelt.

### 5.2.3 Methode der hybriden Verzerrungen

In diesem Kapitel wird ein hybrider Verzerrungsansatz zur Minderung von Locking-Effekten vorgestellt. Dabei wird die Formulierung von SANSOUR & KOLLMANN [127] auf ein dreidimensionales Volumenelement erweitert. Die Gesamtenergie aus Gleichung (5.5) wird durch ein hybrides Verzerrungsfeld  $\check{\mathbf{E}}$  erweitert. Damit präsentiert sich die Gesamtenergie  $\Pi$  durch die drei Felder  $\mathbf{u}$ ,  $\check{\mathbf{E}}$  und  $\mathbf{S}$  über

$$\Pi(\mathbf{u}, \check{\mathbf{E}}, \mathbf{S}) = \int_{\mathcal{B}_0} W_{0S} - \mathbf{S} : (\check{\mathbf{E}} - \mathbf{E}) \, dV - \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{u} \, dV - \int_{\partial\mathcal{B}_0} \mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{u} \, dA . \quad (5.39)$$

Mit der Formänderungsenergiedichte

$$W_{0S}(\check{\mathbf{E}}) = \frac{1}{2} \check{\mathbf{E}} : \mathbb{C} : \check{\mathbf{E}} \quad (5.40)$$

und den Beziehungen

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W_{0S}}{\partial \check{\mathbf{E}}} = \mathbb{C} : \check{\mathbf{E}} , \quad (5.41)$$

$$\mathbb{C} = \frac{\partial^2 W_{0S}}{\partial \check{\mathbf{E}}^2} \quad (5.42)$$

reduziert sich die Abhängigkeit der Gesamtenergie auf die beiden Felder  $\mathbf{u}$  und  $\check{\mathbf{E}}$

$$\Pi(\mathbf{u}, \check{\mathbf{E}}) = \int_{\mathcal{B}_0} W_{0S} - \frac{\partial W_{0S}}{\partial \check{\mathbf{E}}} : (\check{\mathbf{E}} - \mathbf{E}) \, dV - \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{u} \, dV - \int_{\partial\mathcal{B}_0} \mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{u} \, dA . \quad (5.43)$$

Die erste Variation der Gesamtenergie liefert

$$\begin{aligned}
\delta\Pi(\mathbf{u}, \check{\mathbf{E}}, \delta\mathbf{u}, \delta\check{\mathbf{E}}) &= \int_{\mathcal{B}_0} \frac{\partial W_{0S}}{\partial \check{\mathbf{E}}} : \delta\mathbf{E} \, dV - \int_{\mathcal{B}_0} (\check{\mathbf{E}} - \mathbf{E}) : \frac{\partial^2 W_{0S}}{\partial \check{\mathbf{E}}^2} : \delta\check{\mathbf{E}} \, dV \\
&\quad - \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \mathbf{b}_0 \cdot \delta\mathbf{u} \, dV - \int_{\partial\mathcal{B}_0} \mathbf{t}_0 \cdot \delta\mathbf{u} \, dA = 0 .
\end{aligned} \tag{5.44}$$

Nach der Nebenrechnung  $\mathbf{S} : \delta\mathbf{E} = \text{Div} [\delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{P}] - \delta\mathbf{u} \cdot \text{Div} \mathbf{P}$  und unter Anwendung des Gaußschen Integralsatzes lassen sich aus Gleichung (5.44) die Eulergleichungen ableiten

$$\begin{aligned}
\text{Div} \mathbf{P} + \rho_0 \mathbf{b}_0 &= \mathbf{0} \quad \text{in } \mathcal{B}_0 \\
\mathbf{P} \mathbf{N} - \mathbf{t}_0 &= \mathbf{0} \quad \text{auf } \mathcal{B}_0 \\
\check{\mathbf{E}} - \mathbf{E} &= \mathbf{0} \quad \text{in } \mathcal{B}_0 .
\end{aligned} \tag{5.45}$$

Gleichung (5.44) enthält somit in schwacher Form die Impulsbilanz als statische Feldgleichungen, die statischen Randbedingungen sowie die geometrischen Feldgleichungen. Das Funktional aus Gleichung (5.39) enthält also die Euler-Lagrange-Gleichungen des Standardproblems und ist damit zulässig. Die Linearisierung gemäß Gleichung (5.9) liefert

$$\begin{aligned}
D \delta\Pi(\mathbf{u}, \check{\mathbf{E}}, \delta\mathbf{u}, \delta\check{\mathbf{E}}) \cdot (\Delta\mathbf{u}, \Delta\check{\mathbf{E}}) &= \\
&\int_{\mathcal{B}_0} \delta\mathbf{E} : \frac{\partial^2 W_{0S}}{\partial \check{\mathbf{E}}^2} : \Delta\check{\mathbf{E}} \, dV - \int_{\mathcal{B}_0} \delta\check{\mathbf{E}} : \frac{\partial^2 W_{0S}}{\partial \check{\mathbf{E}}^2} : \Delta\check{\mathbf{E}} \, dV \\
&+ \int_{\mathcal{B}_0} \delta\check{\mathbf{E}} : \frac{\partial^2 W_{0S}}{\partial \check{\mathbf{E}}^2} : \Delta\mathbf{E} \, dV + \int_{\mathcal{B}_0} \frac{\partial W_{0S}}{\partial \check{\mathbf{E}}} : \Delta\delta\mathbf{E} \, dV .
\end{aligned} \tag{5.46}$$

Zur Konstruktion des hybriden Verzerrungstensors formuliert BRAESS [19] die Ladyshenskaya-Babuška-Brezzi-Bedingung. Sie besagt, dass ein beliebiger virtueller Verzerrungszustand aus den Spannungen  $\mathbf{S} = \mathbb{C} : \check{\mathbf{E}}$  aus Gleichung (5.41) Arbeit verrichten muss. Die Spannungen dürfen also nicht orthogonal zu den gewählten Verzerrungen sein.

$$\inf_{\delta\check{\mathbf{E}} \in \delta\check{\mathbf{E}}^h} \sup_{\delta\mathbf{x} \in \delta\mathbf{x}^h} \frac{\int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{S} : \delta\mathbf{E} \, dV}{\|\delta\mathbf{x}\| \|\delta\check{\mathbf{E}}\|} > 0 . \tag{5.47}$$

Die hybriden Verzerrungen enthalten den Ansatz

$$\check{\mathbf{E}} = \check{E}_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j = \frac{\det \mathbf{J}_0}{\det \mathbf{J}} \check{E}_{ij}^0 \mathbf{G}_0^i \otimes \mathbf{G}_0^j, \quad (5.48)$$

wobei die mit dem Index 0 versehenen Größen im Elementmittelpunkt ausgewertet werden. Die Koeffizienten  $\check{E}_{ij}$  und  $\check{E}_{ij}^0$  werden entsprechend der in (3.10)<sub>2</sub> eingeführten Schreibweise als Vektoren  $\check{\mathbf{E}}$  und  $\check{\mathbf{E}}^0$  notiert. Damit lautet Gleichung (5.48) in Matrixschreibweise

$$\check{\mathbf{E}} = \frac{\det \mathbf{J}_0}{\det \mathbf{J}} \mathbf{T}_E^0 \check{\mathbf{E}}^0, \quad (5.49)$$

wobei sich die Transformationsmatrix analog zu Gleichung (3.13) mit den Koeffizienten  $\mathbf{t}_{ik}^0 = \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_0^k$  ergibt.

Für die hybriden Verzerrungen im Elementmittelpunkt  $\check{\mathbf{E}}^0$  wird eine über die Elementgrenzen hinweg diskontinuierliche Interpolation gewählt, was den einfachen Ansatz

$$\check{\mathbf{E}}^0 = \mathbf{M}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \boldsymbol{\alpha} \quad (5.50)$$

erlaubt. Der Vektor der unabhängigen inneren Freiheitsgrade wird hierbei mit  $\boldsymbol{\alpha}$  eingeführt. Das 8-Knoten-Volumenelement mit jeweils drei Knotenfreiheitsgraden besitzt 24 Verschiebungszustände. Ohne die Starrkörperbewegungen erhält man 18 Verschiebungszustände, für welche die Verzerrungsenergie ungleich Null ist.

Um die Interpolationsmatrix  $\mathbf{M}$  zu konstruieren, werden zunächst die approximierten Verschiebungen als Linearkombination der einzelnen Polynomanteile dargestellt und es ergibt sich mit den Ansatzfunktionen  $N_I$  gemäß Gleichung (5.17)

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^h &= \sum_{I=1}^8 N_I \mathbf{v}_I \\ &= \sum_{I=1}^8 \left[ (h_1)_I \mathbf{v}_I + (h_2)_I \mathbf{v}_I \xi^1 + (h_3)_I \mathbf{v}_I \xi^2 + (h_4)_I \mathbf{v}_I \xi^3 \right. \\ &\quad \left. + (h_5)_I \mathbf{v}_I \xi^1 \xi^2 + (h_6)_I \mathbf{v}_I \xi^1 \xi^3 + (h_7)_I \mathbf{v}_I \xi^2 \xi^3 + (h_8)_I \mathbf{v}_I \xi^1 \xi^2 \xi^3 \right]. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Die Vektoren  $\mathbf{h}_i = (h_i)_I$

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}_1 &= \frac{1}{8} [ 1 \quad 1 ]^T, \\
\mathbf{h}_2 &= \frac{1}{8} [ -1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 ]^T, \\
\mathbf{h}_3 &= \frac{1}{8} [ -1 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \quad 1 ]^T, \\
\mathbf{h}_4 &= \frac{1}{8} [ -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 ]^T, \\
\mathbf{h}_5 &= \frac{1}{8} [ 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 ]^T, \\
\mathbf{h}_6 &= \frac{1}{8} [ 1 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 ]^T, \\
\mathbf{h}_7 &= \frac{1}{8} [ 1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \quad 1 ]^T, \\
\mathbf{h}_8 &= \frac{1}{8} [ -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 ]^T,
\end{aligned} \tag{5.52}$$

mit

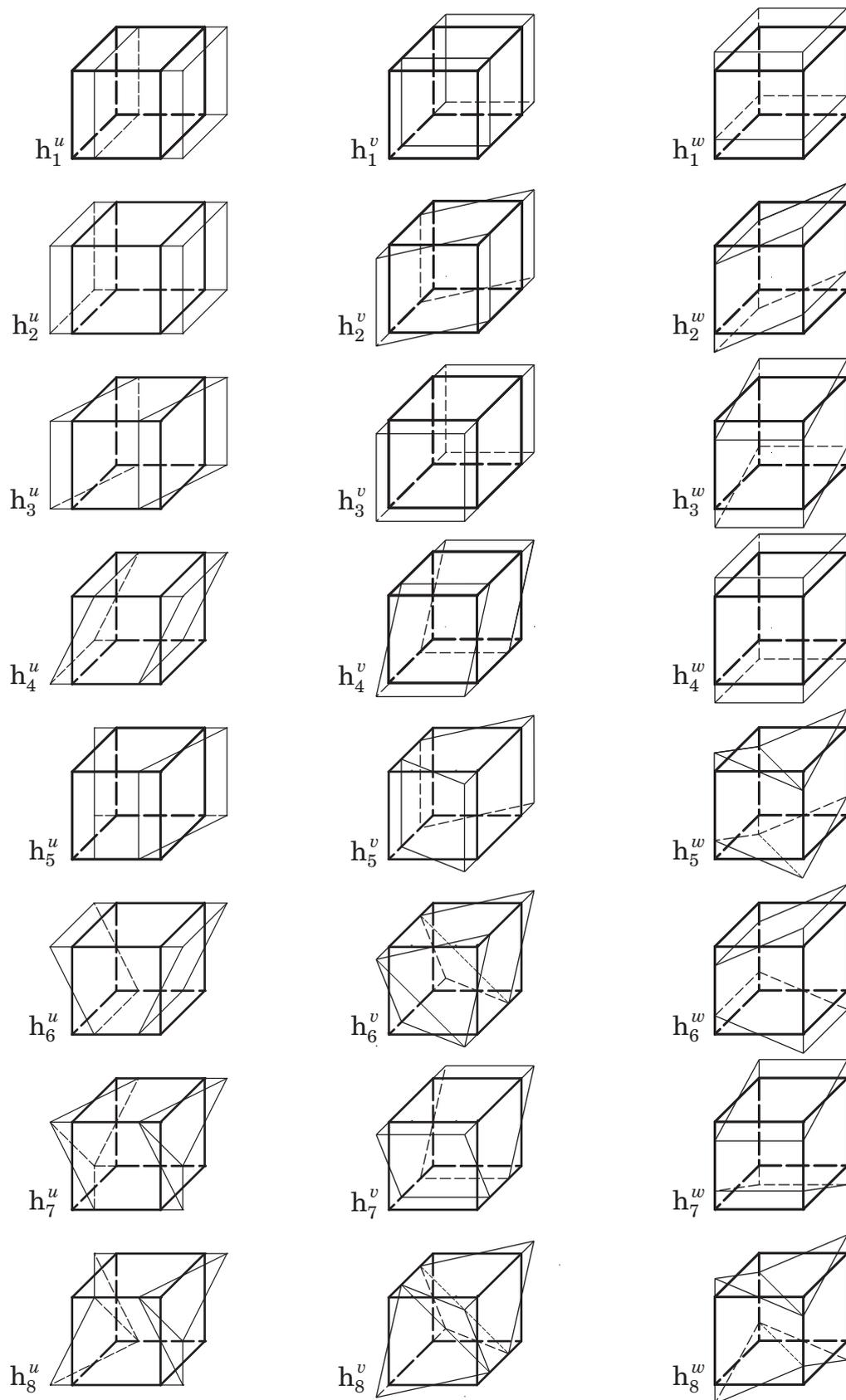
$$\mathbf{h}_i \cdot \mathbf{h}_j = \frac{1}{8} \delta_{ij} \tag{5.53}$$

stehen rechtwinklig aufeinander und bilden eine orthogonale Basis im  $\mathbb{R}^8$ . Sie stellen Grundtypen von Verschiebungen (Starrkörperverschiebungen, Dehnungen und Gleitungen) dar, womit sich jeder denkbare Verschiebungszustand durch geeignete Wahl der Faktoren  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  und  $\gamma_i$  darstellen lässt

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{u}} &= \alpha_1 \mathbf{h}_1^u + \alpha_2 \mathbf{h}_2^u + \alpha_3 \mathbf{h}_3^u + \alpha_4 \mathbf{h}_4^u + \alpha_5 \mathbf{h}_5^u + \alpha_6 \mathbf{h}_6^u + \alpha_7 \mathbf{h}_7^u + \alpha_8 \mathbf{h}_8^u, \\
\hat{\mathbf{v}} &= \beta_1 \mathbf{h}_1^v + \beta_2 \mathbf{h}_2^v + \beta_3 \mathbf{h}_3^v + \beta_4 \mathbf{h}_4^v + \beta_5 \mathbf{h}_5^v + \beta_6 \mathbf{h}_6^v + \beta_7 \mathbf{h}_7^v + \beta_8 \mathbf{h}_8^v, \\
\hat{\mathbf{w}} &= \gamma_1 \mathbf{h}_1^w + \gamma_2 \mathbf{h}_2^w + \gamma_3 \mathbf{h}_3^w + \gamma_4 \mathbf{h}_4^w + \gamma_5 \mathbf{h}_5^w + \gamma_6 \mathbf{h}_6^w + \gamma_7 \mathbf{h}_7^w + \gamma_8 \mathbf{h}_8^w.
\end{aligned} \tag{5.54}$$

Die Einheitsverschiebungszustände sind für die 3 Richtungen ( $u$ ,  $v$ ,  $w$ ) in Abbildung 5.3 dargestellt. Die partiellen Ableitungen von  $\mathbf{u}^h$  nach den konvektiven Koordinaten sind gegeben mit

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_{,\xi^1}^h &= \sum_{I=1}^8 [ (h_2)_I \mathbf{v}_I + (h_5)_I \mathbf{v}_I \xi^2 + (h_6)_I \mathbf{v}_I \xi^3 + (h_8)_I \mathbf{v}_I \xi^2 \xi^3 ] , \\
\mathbf{u}_{,\xi^2}^h &= \sum_{I=1}^8 [ (h_3)_I \mathbf{v}_I + (h_5)_I \mathbf{v}_I \xi^1 + (h_7)_I \mathbf{v}_I \xi^3 + (h_8)_I \mathbf{v}_I \xi^1 \xi^3 ] , \\
\mathbf{u}_{,\xi^3}^h &= \sum_{I=1}^8 [ (h_4)_I \mathbf{v}_I + (h_6)_I \mathbf{v}_I \xi^1 + (h_7)_I \mathbf{v}_I \xi^2 + (h_8)_I \mathbf{v}_I \xi^1 \xi^2 ] .
\end{aligned} \tag{5.55}$$

Abbildung 5.3: Einheitsverschiebungszustände der  $\hat{u}$ -,  $\hat{v}$ - und  $\hat{w}$ -Verschiebung

Die Funktionsanteile der hybriden Verzerrungen lassen sich damit wie folgt angeben

$$\check{E}_{ii}^0 = u_{i,\xi^i}^h, \quad (5.56)$$

$$2\check{E}_{ij}^0 = u_{j,\xi^i}^h + u_{i,\xi^j}^h. \quad (5.57)$$

Für die Dehnung  $\check{E}_{11}^0$  ergibt sich hieraus

$$\check{E}_{11}^0 = \alpha_1 + \alpha_1 \xi^2 + \alpha_3 \xi^3 + \alpha_4 \xi^2 \xi^3 \quad (5.58)$$

und für die Gleitung  $2\check{E}_{12}^0$  folgt nach Streichen der unerwünschten Dehnungen

$$2\check{E}_{12}^0 = \alpha_{13} + \alpha_{14} \xi^3. \quad (5.59)$$

Für die übrigen Verzerrungskomponenten wird analog verfahren und es ergibt sich für die Interpolationsmatrix  $\mathbf{M}$  die Gestalt

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & \xi^2 & \xi^3 & \xi^2 \xi^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi^1 & \xi^3 & \xi^1 \xi^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi^1 & \xi^2 & \xi^1 \xi^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xi^1 \quad (5.60)$$

Um die Übersicht zu wahren wird die abkürzende Schreibweise  $\check{\mathbf{E}} = \check{\mathbf{M}} \boldsymbol{\alpha}$  mit

$$\check{\mathbf{M}} = \frac{\det \mathbf{J}_0}{\det \mathbf{J}} \mathbf{T}_E^0 \mathbf{M} \quad (5.61)$$

eingeführt. Mit der Approximation der virtuellen hybriden Verzerrungen

$$\delta \check{\mathbf{E}} = \check{\mathbf{M}} \delta \boldsymbol{\alpha} \quad (5.62)$$

ergibt sich mit Gleichung (5.44) und (5.46) auf Elementebene das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^e & \mathbf{L}^e \\ \mathbf{L}^{eT} & \mathbf{H}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{v}^e \\ \Delta \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_I^{e,ext} - \mathbf{f}_I^{e,int} \\ \mathbf{h}^e \end{bmatrix}, \quad (5.63)$$

mit

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}^e &= \sum_{I=1}^{nel} \sum_{K=1}^{nel} \int_{\check{\mathcal{B}}_0} \mathbf{G}_{IK} \, dV, & \mathbf{L}^e &= \sum_{I=1}^{nel} \int_{\check{\mathcal{B}}_0} \mathbf{B}_I^T \mathbf{C} \check{\mathbf{M}} \, dV, \\
\mathbf{H}^e &= \sum_{I=1}^{nel} \int_{\check{\mathcal{B}}_0} \check{\mathbf{M}}^T \mathbf{C} \check{\mathbf{M}} \, dV, & \mathbf{h}^e &= \sum_{I=1}^{nel} \int_{\check{\mathcal{B}}_0} \check{\mathbf{M}}^T \mathbf{C} (\check{\mathbf{E}} - \mathbf{E}) \, dV, \\
\mathbf{f}^{e,int} &= \sum_{I=1}^{nel} \int_{\check{\mathcal{B}}_0} \mathbf{B}_I^T \mathbf{C} \check{\mathbf{E}} \, dV, & \mathbf{f}^{e,ext} &= \sum_{I=1}^{nel} \left( \int_{\check{\mathcal{B}}_0^e} N_I^T \rho_0 \mathbf{b}_0 \, dV + \int_{\partial \check{\mathcal{B}}_0^e} N_I^T \mathbf{t}_0 \, dA \right).
\end{aligned} \tag{5.64}$$

Da die hybriden Verzerrungen diskontinuierlich über die Elementgrenzen hinweg interpoliert werden, kann der inkrementelle Vektor  $\Delta \boldsymbol{\alpha}$  auf Elementebene eliminiert werden, was auf das statisch kondensierte System

$$\mathbf{K}^e \Delta \mathbf{v}^e = \mathbf{R}^e \tag{5.65}$$

mit

$$\mathbf{K}_T^e = \mathbf{K}^e - \mathbf{L}^e (\mathbf{H}^e)^{-1} (\mathbf{L}^e)^T \quad \text{und} \quad \mathbf{R}^e = \mathbf{f}^{e,ext} - \mathbf{f}^{e,int} - \mathbf{L}^e (\mathbf{H}^e)^{-1} \mathbf{h}^e \tag{5.66}$$

führt. Der Zusammenbau zu einem System der Gesamtstruktur erfolgt in Anlehnung an Gleichung (5.16) und ergibt mit

$$\check{\mathbf{G}}(\mathbf{v}, \lambda) = \check{\mathbf{R}}(\mathbf{v}) - \lambda \mathbf{P} = \bigcup_{e=1}^{numel} (\mathbf{f}^{e,int} + \mathbf{L}^e (\mathbf{H}^e)^{-1} \mathbf{h}^e - \mathbf{f}^{e,ext}) \tag{5.67}$$

und

$$\check{\mathbf{K}}_T = \bigcup_{e=1}^{numel} \mathbf{K}^e \tag{5.68}$$

einen zu Gleichung (5.66) entsprechender Ausdruck

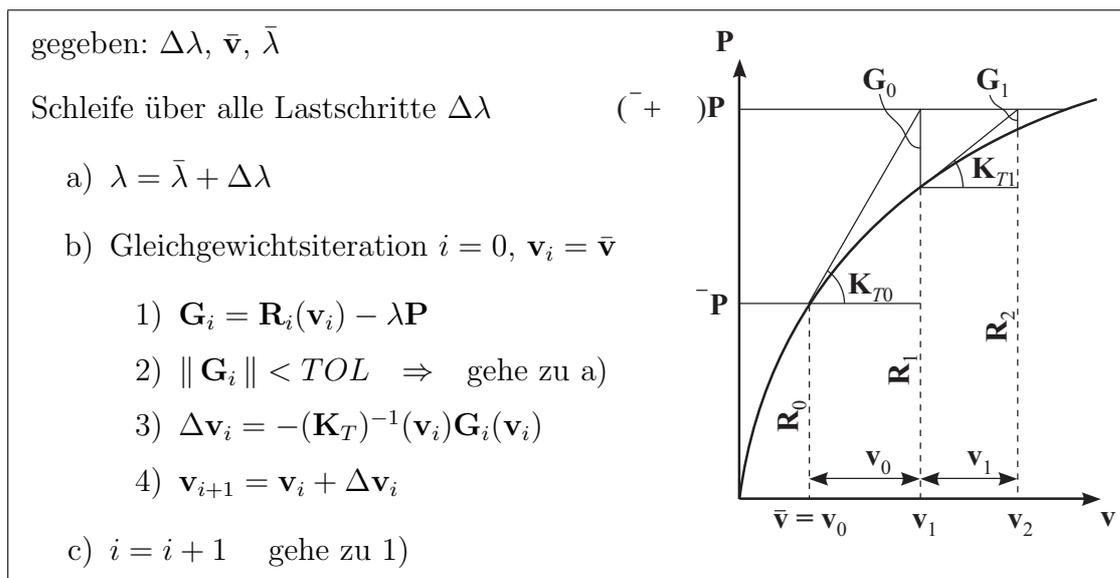
$$\check{\mathbf{G}}(\mathbf{v}, \lambda) + \check{\mathbf{K}}_T \Delta \mathbf{v} = 0. \tag{5.69}$$

### 5.3 Nichtlineare Algorithmen

In diesem Kapitel werden numerische Lösungsverfahren für nichtlineare Probleme der Strukturmechanik diskutiert. Im Speziellen sind dies das Newton-Raphson-Verfahren und das Bogenlängenverfahren. Die Lösung nichtlinearer Eigenwertprobleme wird ebenfalls behandelt. Zum Auffinden von singulären Punkten kommt dabei ein Bisektionsverfahren zur Anwendung.

#### 5.3.1 Laststeigerung

Um Gleichung (5.33) zu lösen, wird diese Gleichung linearisiert und entspricht dann Gleichung (5.32). Der Verschiebungszustand  $\mathbf{v}$  kann, ausgehend von einem bekannten Zustand  $\bar{\mathbf{v}}$ ,  $\bar{\lambda}$  für einen neuen Lastzustand  $\lambda = \bar{\lambda} + \Delta\lambda$  mit Hilfe des Newton-Raphson-Verfahrens iterativ gefunden werden. Die Konvergenz ist dabei in der Nähe der Lösung quadratisch. Der Algorithmus des Newton-Raphson-Verfahrens ist in Tafel 5.1 wiedergegeben.



**Tafel 5.1:** Newton-Raphson-Algorithmus

Gehören zu einem Lastfaktor  $\lambda$  jedoch mehr als nur ein Verschiebungszustand, ist die Lösung nicht eindeutig. Derartige Fälle treten z. B. bei Stabilitätsproblemen im überkritischen Bereich auf, bei denen die klassische Laststeuerung versagt. In solchen Fällen wird eine verschiebungsgesteuerte Berechnung zur Lösung von Gleichung (5.32) erforderlich. Diese versagt erst dann, wenn zu einem Verschiebungszustand mehr als ein Lastzustand gehört. Aufgrund dessen wurde das Bogenlängenverfahren von RIKS [119] formuliert. Ein Überblick hierzu findet sich in RIKS [120] oder WAGNER [151].

### 5.3.2 Pfadverfolgung durch das Bogenlängenverfahren

Wie bereits erwähnt, versagen last- bzw. verschiebungsgesteuerte Berechnungen, wenn zu einer vorgegebenen Last mehr als ein Verschiebungszustand bzw. zu einem Verschiebungszustand mehr als ein Lastzustand existiert (vgl. Abbildung 5.4). Daher wurde von RIKS [119] das Bogenlängenverfahren entwickelt, welches in der Lage ist, einen allgemeinen Last-Verschiebungspfad zu verfolgen. Varianten des Bogenlängenverfahrens finden sich z. B. in CRISFIELD [29] oder WAGNER [150], die sich im Wesentlichen durch die Wahl der Nebenbedingung unterscheiden.

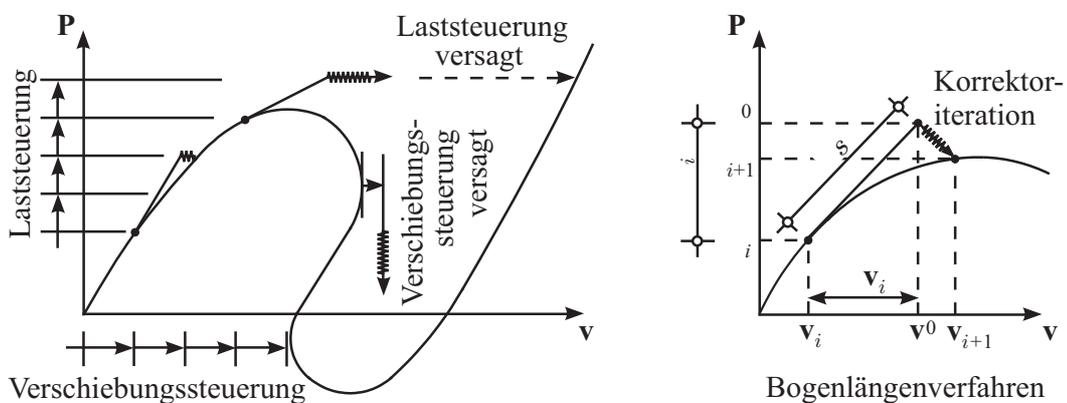


Abbildung 5.4: Idee des Bogenlängenverfahrens

Bei der reinen Laststeuerung wird der Lastfaktor  $\Delta\lambda$  konstant gehalten und die zugehörige Verschiebung ermittelt. Bei der reinen Verschiebungssteuerung wird eine konstante Einzelverschiebung vorgegeben, das Gleichungssystem an entsprechender Stelle um die jeweiligen Zeilen und Spalten gestrichen, die entstehenden Zwänge auf der rechten Seite berücksichtigt und der Gesamtverschiebungszustand sowie der zugehörige Lastfaktor ermittelt. Die Idee des Bogenlängenverfahrens besteht nun in der gleichzeitigen Änderung von Last und Verschiebung innerhalb einer Gleichgewichtssiteration. Daher handelt es sich bei diesem Verfahren um ein Zweischrittverfahren mit einem Prädiktor- und mehreren Korrektorschritten. Es wird eine Nebenbedingung  $f = \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = 0$  mit

$$\mathbf{p}^T = [\Delta\mathbf{v}_i, \Delta\lambda_i] \quad \text{und} \quad \mathbf{q}^T = [\mathbf{v} - \mathbf{v}^0, \lambda - \lambda^0] \quad (5.70)$$

eingeführt, welche die Form der Korrekturiteration beschreibt. Sie kann formal ausgeschrieben werden durch

$$f(\mathbf{v}, \lambda) = \Delta \mathbf{v}_i^T (\mathbf{v} - \mathbf{v}^0) + \Delta \lambda_i (\lambda - \lambda^0) = 0 . \quad (5.71)$$

Die Gleichgewichtsaussage (5.33) wird um diese Nebenbedingung erweitert und lautet damit

$$\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{v}, \lambda) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(\mathbf{v}) - \lambda \mathbf{P} \\ f(\mathbf{v}, \lambda) \end{bmatrix} . \quad (5.72)$$

Es kann gezeigt werden, dass sich hieraus Last- und Verschiebungssteuerung als Sonderfälle ableiten lassen, siehe z. B. WAGNER [150]. Die Linearisierung an der Stelle  $k$  führt mit

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^{(k+1)} &= \mathbf{G}^{(k)} + \mathbf{D}_v \mathbf{G}^{(k)} \Delta \mathbf{v}^{(k)} + \frac{\partial \mathbf{G}^{(k)}}{\partial \lambda} \Delta \lambda^{(k)} = 0 \\ f^{(k+1)} &= f^{(k)} + \frac{\partial f^{(k)}}{\partial \mathbf{v}} \Delta \mathbf{v}^{(k)} + \frac{\partial f}{\partial \lambda} \Delta \lambda^{(k)} = 0 \end{aligned} \quad (5.73)$$

für konservative Lasten auf das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_T^{(k)} & -\mathbf{P} \\ \Delta \mathbf{v}_i^T & \Delta \lambda_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{v}^{(k)} \\ \Delta \lambda^{(k)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{G}^{(k)} \\ f^{(k)} \end{bmatrix} . \quad (5.74)$$

Mit der Aufteilung des Gesamtverschiebungsincrements

$$\Delta \mathbf{v}^{(k)} = \Delta \lambda^{(k)} \Delta \mathbf{v}_P^{(k)} + \Delta \mathbf{v}_G^{(k)} \quad (5.75)$$

erhält man aus der ersten Zeile für den Iterationsschritt  $k$  die beiden Aussagen

$$\mathbf{K}_T^{(k)} \Delta \mathbf{v}_P^{(k)} = \mathbf{P} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{K}_T^{(k)} \Delta \mathbf{v}_G^{(k)} = -\mathbf{G}^{(k)} . \quad (5.76)$$

Das noch unbekannte Inkrement des Lastparameters erhält man aus der zweiten Zeile und es sich ergibt sich mit Gleichung (5.76)

$$\Delta \lambda^{(k)} = - \frac{f^{(k)} + \Delta \mathbf{v}_i^T \Delta \mathbf{v}_G^{(k)}}{\Delta \mathbf{v}_i^T \Delta \mathbf{v}_P^{(k)} + \Delta \lambda_i} . \quad (5.77)$$

Aus einer vorgegebenen Bogenlänge  $\Delta s$  wird der Lastschritt  $\Delta \lambda_i$  wie folgt errechnet

$$\Delta\lambda_i = \frac{\Delta s}{\sqrt{\Delta\mathbf{v}_{P_i}^T \Delta\mathbf{v}_{P_i}}} . \quad (5.78)$$

Damit kann das in Tafel 5.2 dargestellte Bogenlängenverfahren auf allgemeine Last-Verschiebungskurven angewendet werden.

gegeben: $\Delta s, \mathbf{v}_i, \lambda_i$	
Prädiktor:	$\Delta\mathbf{v}_{P_i} = (\mathbf{K}_{T_i})^{-1} \mathbf{P}$ $\Delta\lambda_i = \frac{\Delta s}{\sqrt{\Delta\mathbf{v}_{P_i}^T \Delta\mathbf{v}_{P_i}}}$ $\Delta\mathbf{v}_i = \Delta\lambda_i \Delta\mathbf{v}_{P_i}$
Korrektor:	$k = 0, \quad \mathbf{v}^0 = \mathbf{v}_i + \Delta\mathbf{v}_i, \quad \lambda^0 = \lambda_i + \Delta\lambda_i$
1)	$\Delta\mathbf{v}_P^{(k)} = (\mathbf{K}_T^{(k)})^{-1} \mathbf{P}$ $\Delta\mathbf{v}_G^{(k)} = -(\mathbf{K}_T^{(k)})^{-1} \mathbf{G}^{(k)}$
2)	$\Delta\lambda^{(k)} = -\frac{f^{(k)} + \Delta\mathbf{v}_i^T \Delta\mathbf{v}_G^{(k)}}{\Delta\mathbf{v}_i^T \Delta\mathbf{v}_P^{(k)} + \Delta\lambda_i}$ $\Delta\mathbf{v}^{(k)} = \Delta\lambda^{(k)} \Delta\mathbf{v}_P^{(k)} + \Delta\mathbf{v}_G^{(k)}$
3)	$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + \Delta\lambda^{(k)}$ $\mathbf{v}^{(k+1)} = \mathbf{v}^{(k)} + \Delta\mathbf{v}^{(k)}$
4)	$\ \mathbf{G}(\mathbf{v}^{(k+1)}, \lambda^{(k+1)})\  < TOL$ <p>nein: <math>\Rightarrow k = k + 1</math> gehe zu 1)</p> <p>ja: <math>\Rightarrow \mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{v}^{(k+1)}, \quad \lambda_{i+1} = \lambda^{(k+1)}</math></p>
Nächster Lastschritt $i = i + 1$ gehe zu Prädiktor	

**Tafel 5.2:** Algorithmus des Bogenlängenverfahrens

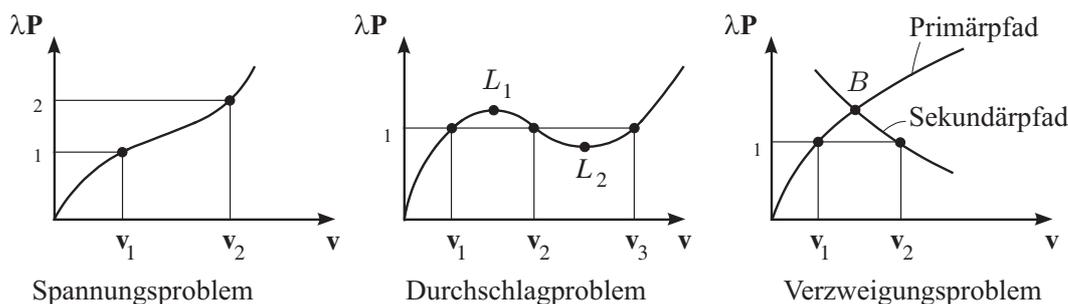
### 5.3.3 Lineare und nichtlineare Eigenwertanalyse

Neben der Pfadverfolgung durch Last- oder Verschiebungssteuerung bzw. Bogenlängenverfahren können auch andere Effekte auftreten. Durchschlags- und Verzweigungspunkte werden allgemein als singuläre Punkte bezeichnet. Darüber hinaus existieren die Bezeichnungen Stabilitäts- oder Instabilitätspunkte. Die zum singulären Punkt gehörende Last wird als Knick- bzw. Beullast oder allgemein als kritische Last bezeichnet. Aus der Diskussion der Last-Verschiebungskurve erhält

man Kriterien für das nichtlineare Stabilitätsverhalten einer Struktur. Hierzu sind diese Kurven hinsichtlich singularer Punkte zu untersuchen.

Steigt die Last-Verschiebungskurve monoton an und besitzt keinen Verzweigungspunkt, so liegt kein Stabilitätsproblem, sondern ein Spannungsproblem vor. Existieren jedoch zu einem Lastniveau  $\lambda$  mehrere Gleichgewichtslagen  $\mathbf{v}_i$ , so ist das Stabilitätsverhalten der Struktur zu untersuchen. In diesem Fall gibt es dann keine eindeutige Zuordnung zwischen Last und zugehöriger Verschiebung. In Abbildung 5.5 liegt im Zustand  $L_1$  und  $L_2$  jeweils ein Durchschlagspunkt vor, während  $B$  einen Verzweigungspunkt darstellt. Eine ausführliche Diskussion zu diesem Thema findet sich z. B. bei KOITER [83], THOMPSON & HUNT [142], BUDIANSKY [21] oder BAZANT & CEDOLIN [15].

Der Bereich der Last-Verschiebungskurve vor Erreichen eines singularen Punktes wird Vorbeulbereich, der Bereich danach Nachbeulbereich genannt. Beim Erreichen von singularen Punkten kann es zu einem dynamischen Verhalten der Struktur kommen, so z. B. beim Erreichen eines Durchschlagspunktes  $L_1$  oder eines Verzweigungspunktes  $B$  auf einen stabilen Ast.



**Abbildung 5.5:** Allgemeines Stabilitätsverhalten

Das Verschwinden der 2. Variation der potentiellen Energie ist ein Kriterium für das Vorhandensein eines singularen Punktes. PLÜGER [111] führt hierzu zum vorhandenen Gleichgewichtszustand  $\mathbf{G}^G$  mit zugehörigem Verschiebungszustand  $\mathbf{v}_1$  eine benachbarte Gleichgewichtslage  $\mathbf{G}^N$  mit dem Verschiebungszustand  $\mathbf{v}_2$  bei gleichem Lastniveau  $\lambda$  ein. Der Grund- und der Nachbarzustand lauten ausgehend von Gleichung (5.32)

$$\mathbf{G}^G(\mathbf{v}_1, \lambda) + \mathbf{K}_T \mathbf{v}_1 = 0 \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{G}^N(\mathbf{v}_2, \lambda) + \mathbf{K}_T \mathbf{v}_2 = 0 . \quad (5.79)$$

Aufgrund der Gleichheit des Lastniveaus  $\mathbf{G}^G(\mathbf{v}_1, \lambda) = \mathbf{G}^N(\mathbf{v}_2, \lambda)$  können obige Zustände gleichgesetzt werden und es verbleibt das homogene Gleichungssystem

$$\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{v} = 0, \quad \text{mit } \Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2. \quad (5.80)$$

Das Gleichungssystem besitzt nichttriviale Lösungen für  $\det \mathbf{K}_T = 0$ , was sich ebenfalls durch das spezielle Eigenwertproblem

$$(\mathbf{K}_T - \omega_i \mathbf{1}) \boldsymbol{\phi} = 0 \quad (5.81)$$

darstellen lässt. Hierbei ist  $\omega_i$  der  $i$ -te Eigenwert mit zugehörigem Eigenvektor  $\boldsymbol{\phi}$ . Kritische Punkte sind für  $\omega_i = 0$  erreicht.

Für die Bemessung eines Systems ist die niedrigste Beullast von Interesse, insbesondere bei Systemen mit einem dynamischen Nachbeulverhalten, bei dem sich schlagartig große Verformungen einstellen, was somit das Versagen einer Struktur zur Folge haben kann.

Ist nur eine näherungsweise Berechnung des ersten singulären Punktes von Interesse, bedient man sich der klassischen oder der linearen Beulanalyse. Im Rahmen dieser Vorgehensweise wird ein allgemeines Eigenwertproblem für den Lastparameter  $\Lambda$  formuliert und die Vorbeulverschiebungen in einer Potenzreihe  $\mathbf{v} = \Lambda \mathbf{v}_1 + \Lambda^2 \mathbf{v}_2 + \Lambda^3 \mathbf{v}_3 + \dots$  bezüglich des Lastparameters entwickelt. Das Streichen höherer Terme führt auf die Formulierung eines linearen Eigenwertproblems. Die tangentielle Steifigkeitsmatrix wird hinsichtlich ihrer Abhängigkeit von den Verschiebungen in einen linearen Anteil  $\mathbf{K}_0$ , in die Anfangsverschiebungsmatrix  $\mathbf{K}_U$  und die Anfangsspannungsmatrix  $\mathbf{K}_\sigma$  zerlegt. Die Beschränkung auf lineare Verschiebungsanteile führt auf linearisierte Steifigkeitsmatrizen  $\mathbf{K}_U^L$  und  $\mathbf{K}_\sigma^L$  und damit auf die lineare Eigenwertanalyse

$$[\mathbf{K}_0 + \Lambda(\mathbf{K}_U^L + \mathbf{K}_\sigma^L)] \boldsymbol{\psi} = 0. \quad (5.82)$$

Unter Vernachlässigung der Matrix  $\mathbf{K}_U^L$  wird der Einfluss des Vorbeulverhaltens unterdrückt und man erhält das klassische Eigenwertproblem

$$(\mathbf{K}_0 + \Lambda \mathbf{K}_\sigma^L) \boldsymbol{\psi} = 0. \quad (5.83)$$

Der Parameter  $\Lambda$  ist ein Faktor, der beschreibt, wie weit der aktuelle Lastfaktor  $\lambda$  vom kritischen Lastfaktor abweicht. Die geschätzte kritische Last ist  $\Lambda \lambda \mathbf{P}$  mit dem zugehörigen Eigenvektor  $\boldsymbol{\psi}$ . Sie ist genau erreicht für  $\Lambda = 1$ . Die lineare und die klassische Beulanalyse sind als Sonderfall in der speziellen Beulanalyse (5.81) enthalten. Es ist bekannt, dass die Lösung der linearen Beulanalyse erheblich von der tatsächlichen, nichtlinearen Lösung abweichen kann, siehe z. B. BRENDDEL [20].

Darüber hinaus führt im Rahmen der Methode der Finiten Elemente die Zerlegung der tangentialen Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_T$  zunächst zu einem erhöhten Kodierungsaufwand, da die Anteile von  $\mathbf{K}_T$  nicht getrennt voneinander vorliegen. Ein spezieller Eigenwertlösungsalgorithmus wird aufgrund der nicht positiven Definitheit der Matrizen  $\mathbf{K}_U^L$  und  $\mathbf{K}_\sigma^L$  erforderlich. Eine solche Separierung ist nicht immer möglich, siehe z. B. bei Elementformulierungen mit endlichen Rotationen, z. B. WAGNER & GRUTTMANN [153], WAGNER & GRUTTMANN [155].

Eine einfache Methode zum Auffinden von singulären Punkten ist die Untersuchung der Determinante von  $\mathbf{K}_T$ . Hierbei wird begleitend zur Berechnung des aktuellen Lastzustandes die Determinante von  $\mathbf{K}_T$  beobachtet. Die Determinante von  $\mathbf{K}_T$  kann bei der Dreieckszerlegung von  $\mathbf{K}_T = \mathbf{L} \mathbf{D} \mathbf{L}^T$  leicht ermittelt werden und liefert dabei die folgende Aussage über die Art des Gleichgewichtszustandes, die allerdings nicht eindeutig ist

$$\begin{aligned} \det \mathbf{K}_T > 0 &\longrightarrow \text{stabiles Gleichgewicht} \\ \det \mathbf{K}_T = 0 &\longrightarrow \text{indifferentes Gleichgewicht} \\ \det \mathbf{K}_T < 0 &\longrightarrow \text{instabiles Gleichgewicht} . \end{aligned}$$

Grundsätzlich werden instabile Pfade durch ein oder mehrere negative Diagonalelemente  $D_{ii}$  von  $\mathbf{K}_T$  beschrieben und es gilt

$$\begin{aligned} \text{alle } D_{ii} > 0 &\longrightarrow \mathbf{K}_T \text{ positiv definit} && \text{stabiles Gleichgewicht} \\ \text{mind.1 } D_{ii} = 0 &\longrightarrow \mathbf{K}_T \text{ positiv semidefinit} && \text{indifferentes Gleichgewicht} \\ \text{mind.1 } D_{ii} < 0 &\longrightarrow \mathbf{K}_T \text{ negativ definit} && \text{instabiles Gleichgewicht} . \end{aligned}$$

Die Bestimmung singulärer Punkte erfolgt im Rahmen dieser Arbeit mit Hilfe eines Bisektionsverfahrens, welches im folgenden Kapitel erläutert wird.

### 5.3.4 Bisektionsverfahren

Zur Auffindung singulärer Punkte genügt es, die Vorzeichen der Diagonalelemente der tangentialen Steifigkeitsmatrix zu observieren. Hierzu dient ein Bisektionsverfahren, siehe z. B. WAGNER & WRIGGERS [157], welches in eine Last- oder in eine Verschiebungssteuerung implementiert werden kann, vgl. hierzu auch KELLER [77]. Treten bei Laststeigerung zu einem Lastschritt  $k + 1$  ein oder mehrere negative Diagonalelemente  $D_{ii} < 0$  auf, wird die Last um  $\Delta\lambda$  auf den Lastschritt  $k$  verringert und der Lastschritt verkleinert. Die Verkleinerung des Lastschritts muss hierbei nicht eine Halbierung sein, sondern liegt im Bereich  $\Delta\lambda_{neu} = \xi \cdot \Delta\lambda$

mit  $0 < \xi < 1$ . In einem Bogenlängenverfahren muss die Möglichkeit der Lastumkehr sowie der Modifikation der Bogenlänge realisiert sein. Erreicht die Größe des Lastschritts eine gewisse Toleranz  $\Delta\lambda < TOL$ , ist der singuläre Punkt mit zugehöriger kritischer Last und Verschiebung gefunden.

### 5.3.5 Nachbeulbereich bei Verzweigungsproblemen

Wird bei einem Verzweigungsproblem die Last-Verformungskurve ab dem Verzweigungspunkt auf dem Sekundärpfad verfolgt, muss zunächst der Verzweigungspunkt  $B$  bestimmt werden. Hierzu dient das im vorigen Abschnitt vorgestellte Bisektionsverfahren innerhalb des Bogenlängenverfahrens. Formal ist zunächst zu prüfen, ob der singuläre Punkt tatsächlich einen Verzweigungspunkt darstellt. In Anlehnung an STEIN ET AL. [138] wird das Residuum an der Stelle  $\bar{\mathbf{v}}, \bar{\lambda}$  in einer Taylorreihe entwickelt

$$\underbrace{\mathbf{G}(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\lambda})}_{\mathbf{G}^N=0} = \underbrace{\mathbf{G}(\bar{\mathbf{v}}, \bar{\lambda})}_{\mathbf{G}^G=0} + \underbrace{D_v \mathbf{G}}_{\mathbf{K}_T} \Delta \mathbf{v} + \underbrace{D_\lambda \mathbf{G}}_{-\mathbf{P}} \Delta \lambda + \dots \quad , \quad (5.84)$$

was aufgrund der Gleichheit des Grund- und Nachbarzustands auf die Beziehungen

$$\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{v} - \Delta \lambda \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (5.85)$$

führt. Beschreibt  $(\bar{\mathbf{v}}, \bar{\lambda})$  einen singulären Punkt, so verschwindet der Eigenwert in Gleichung (5.81) und es gilt

$$\mathbf{K}_T \boldsymbol{\phi} = \mathbf{0} \quad . \quad (5.86)$$

Aufgrund der Symmetrie der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_T$  ist der Rechts- und Linkseigenvektor identisch. Neben Gleichung (5.86) gilt also auch  $\boldsymbol{\phi}^T \mathbf{K}_T = 0$  und nach Multiplikation von Gleichung (5.85) mit dem Linkseigenvektors  $\boldsymbol{\phi}^T$  folgt die Bedingung

$$\boldsymbol{\phi}^T \mathbf{P} \Delta \lambda = 0 \quad , \quad (5.87)$$

die nach SPENCE & JEPSON [135] oder auch WRIGGERS ET AL. [162] auf die Art des singulären Punktes mit Hilfe der Fallunterscheidung

$$\boldsymbol{\phi}^T \mathbf{P} = \begin{cases} = 0 & \text{Verzweigungspunkt} \\ \neq 0 & \text{Durchschlagspunkt} \end{cases} \quad (5.88)$$

schließen lässt. Aus der Betrachtung der Lastschrittänderung  $\Delta\lambda$  lässt sich zusätzlich beurteilen, ob es sich bei dem Verzweigungspunkt für  $\phi^T \mathbf{P} = 0$  um eine symmetrische ( $\Delta\lambda=0$ ) oder eine antisymmetrische ( $\Delta\lambda \neq 0$ ) Verzweigung handelt, vgl. Abbildung 5.6. Eine detaillierte Darstellung und weitere Klassifizierung von singulären Punkten findet sich in WAGNER [151].

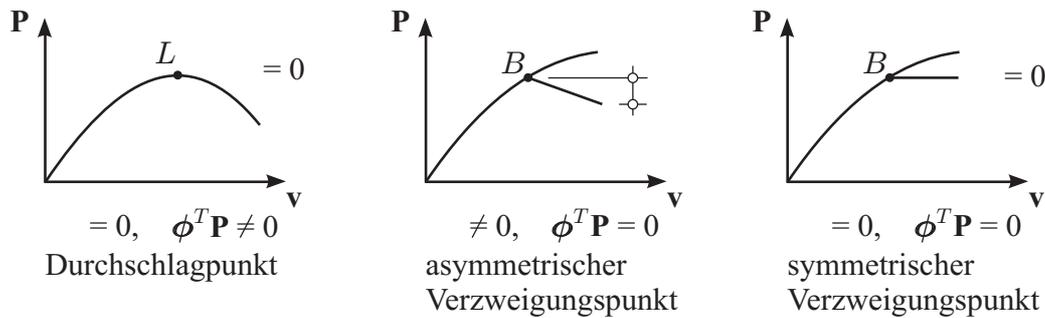


Abbildung 5.6: Art des singulären Punktes

Ist ein singulärer Punkt als Verzweigungspunkt identifiziert und das spezielle Eigenwertproblem gemäß Gleichung (5.81) gelöst, wird der errechnete Eigenvektor  $\phi_i$  auf den aktuellen Verschiebungszustand  $\bar{\mathbf{v}}$  in der Form  $\hat{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{v}} + \zeta \hat{\phi}_i$  aufaddiert. Mit dem Skalierungsfaktor  $\zeta$  wird der Eigenvektor  $\hat{\phi}_i = \phi_i / \|\phi_i\|$  betragsmäßig der Größe des aktuellen Verschiebungszustands  $\bar{\mathbf{v}}$  angepasst. Die Größe der Störung von  $\bar{\mathbf{v}}$  zu  $\hat{\mathbf{v}}$  ist so zu wählen, dass ein Wechsel auf den sekundären Pfad erfolgt. Dabei führen zu kleine Werte von  $\zeta$  dazu, dass in der nachfolgenden Iteration eine Lösung auf dem Ausgangspfad gefunden wird. Alternativ führen zu große Werte von  $\zeta$  dazu, dass keine Lösung gefunden wird. Weitere Strategien zu Pfadwechselprozeduren finden sich z. B. in RIKS [120] oder RHEINBOLDT [118].

## 6 Mikroinstabilität

Im Folgenden wird das Stabilitätsverhalten einer Faser bzw. mehrerer Fasern in einem Matrixmaterial anhand verschiedener FE-Modellierungen untersucht. Das sog. Mikrobeulen wird zunächst auf einen elastisch gebetteten Balken zurückgeführt und dort die kritische Dehnung bei Erreichen des Stabilitätspunktes angegeben. Obwohl dieses klassische Modell für die hier untersuchten Probleme sehr vereinfacht ist, dient es zur Einschätzung der Größenordnung der Ergebnisse einer einzelnen Faser in einem Matrixmaterial, gewonnen aus einer Berechnung mit Hilfe der Finite-Element-Methode. Eine analytische Lösung einer einzelnen Faser in einer Matrix liegt z. B. der Arbeit von LAPUSTA & WAGNER [93] zugrunde, welche ebenfalls zur Einschätzung der Qualität der numerischen Ergebnisse dient. Es wird eine Faser in einer Matrix in der Nähe des freien Randes modelliert und mit analytischen Lösungen verglichen. Die analytischen Vergleichslösungen dienen zur Beurteilung der Qualität der verwendeten FE-Modellierungen. Für periodisch angeordnete Fasern in einer Reihe sowie für biperiodisch angeordnete Fasern werden zur Minderung des Berechnungsaufwands entsprechende Randbedingungen verwendet. Die Mikroinstabilitätsuntersuchung vieler Fasern kann damit auf eine Einheitszelle zurückgeführt werden. Die gewonnenen Ergebnisse der biperiodisch angeordneten Fasern werden experimentell ermittelten Ergebnissen gegenübergestellt.

### 6.1 Allgemeines

Unter Druckbelastung in Faserrichtung eines unidirektional verstärkten Faserverbundwerkstoffs kann es zu Instabilitäten auf Mikroebene (Ausbeulen auf Mikroebene) kommen. Das Mikrobeulen kann Delamination auslösen, wodurch die Steifigkeit eines Laminats reduziert wird. Unter Umständen kann das Mikrobeulen das Versagen einer ganzen Struktur zur Folge haben. Daher ist es wichtig, diese Schädigungsart genauer zu analysieren. ROSEN [123] und SCHUERCH [132] betrachten Faser und Matrix als zweidimensionale Schichten. Ihre Arbeit basiert auf den Untersuchungen von TIMOSHENKO & GERE [144], die das Stabilitätsverhalten elastisch gebetteter Balken unterschiedlicher Länge und Bettungsmoduli untersuchen. SADOVSKY ET AL. [125] schlagen die Kombination einer eindimensionalen Betrachtung der Faser mit einer dreidimensionalen Betrachtung der Matrix vor. Das Verhalten von Faserverbundwerkstoffen unter Druckbelastung wird in Arbeiten von GUYNN ET AL. [55], GUZ [57], SCHULTHEISZ & WAAS [133] sowie FLECK [49] verallgemeinert. Einen Überblick über dreidimensionale Modelle und Methoden der Stabilitätstheorie bei Faserverbundwerkstoffen ist beispiels-

weise in GUZ & LAPUSTA [60] zu finden. Im Zusammenhang dazu haben GUZ [59], LAPUSTA & WAGNER [93] und ZHUK ET AL. [165] Beulphänomene in unterschiedlichen Skalen untersucht. Es sei darauf hingewiesen, dass die Mehrheit existierender Modelle, die das Ausbeulen auf Mikroebene von Verbundwerkstoffen beschreiben, auf einer zweidimensionalen Formulierung beruhen. Die dreidimensionale mechanische Beschreibung des Faserbeulens auf Mikroebene, insbesondere durch die Verwendung von dreidimensionalen Finiten Elementen, hat bedeutend weniger Aufmerksamkeit erhalten, obwohl das Spannungs-Dehnungs-Feld in der Nähe der Faser ausgeprägt dreidimensional ist.

Das Mikrobeulen kann gemäß Abbildung 6.1 auf die in Kapitel 3.8 dargestellte Einheitszelle reduziert werden, da sich in Faserlängsrichtung die Beulwelle des Mikrobeulens beliebig oft wiederholt. Es kann also von der Periodizität des Mikrobeulens in longitudinaler Richtung Gebrauch gemacht werden. An dieser Stelle wird die Höhe  $h$  der Einheitszelle eingeführt, welche gerade der Beullänge entspricht. Um das Mikrobeulen korrekt auf die Einheitszelle der Höhe  $h$  abzubilden, sind entsprechende Randbedingungen zu berücksichtigen. Auf die Randbedingungen wird genauer in Kapitel 6.4 eingegangen.

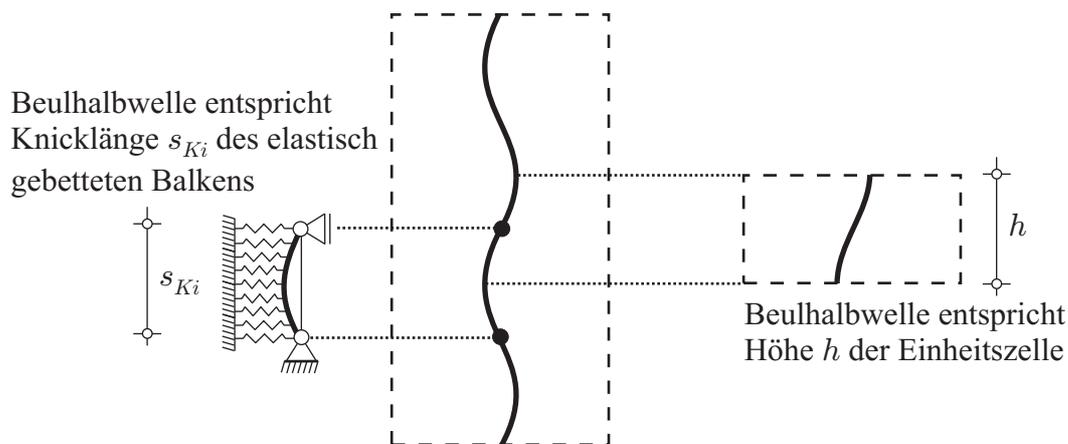


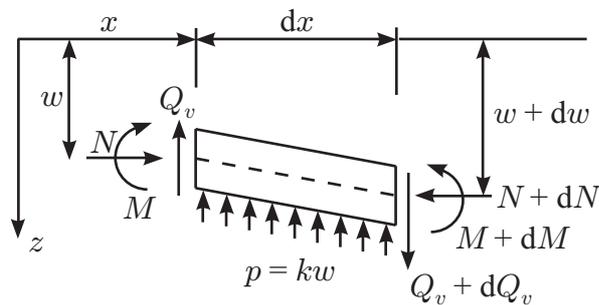
Abbildung 6.1: Mikrobeulen der Einheitszelle mit Zellhöhe  $h$

## 6.2 Elastisch gebetteter Balken

Eine mögliche analytische Beschreibung des Mikrobeulens einer einzelnen Faser in einer Matrix ist über die Betrachtung eines elastisch gebetteten Balkens gegeben. Im Folgenden wird eine Einzelfaser in einer genügend großen Matrix betrachtet, d. h. Interaktionen zwischen den Fasern werden ausgeschlossen. In Abbildung 6.1 ist der Zusammenhang zwischen der Beulhalbwelle der Einheitszelle der Höhe  $h$

sowie der Knicklänge  $s_{Ki}$  des entsprechenden elastisch gebetteten Balkens grafisch veranschaulicht.

TIMOSHENKO & GERE [144] geben ausgehend vom Potential des Balkens und der Bettung das Stabilitätsverhalten des elastisch gebetteten Balkens endlicher Länge an. Aufbauend darauf stellt ALBER [1], in Anlehnung an HETÉNYI [67], die nötigen Zusammenhänge des unendlich langen, elastisch gebetteten Balkens dar. Das Momentengleichgewicht am verformten Balkenelement der Länge  $dx$  liefert gemäß Abbildung 6.2



**Abbildung 6.2:** Differentielles Balkenelement

$$(M + dM) - M - Ndw - Q_v dx - kw \frac{dx^2}{2} = 0 . \quad (6.1)$$

Hierbei ist  $k$  [ $N/mm^2$ ] der Bettungsmodul, der bereits mit der Breite  $b$  des elastisch gebetteten Balkens multipliziert ist. Unter Vernachlässigung des höheren Terms folgt daraus

$$\frac{dM}{dx} - N \frac{dw}{dx} - Q_v = 0 . \quad (6.2)$$

Die Normalkraft  $N$  wird entgegen der üblichen Konvention als Druckkraft positiv eingeführt. Aus der Summe der Querkräfte folgt die Beziehung

$$\frac{dQ_v}{dx} = kw . \quad (6.3)$$

Nach einmaligem Differenzieren von Gleichung (6.2) und Einsetzen der Differentialgleichung des Biegebalkens  $M = -EI(d^2w/dx^2)$  folgt unter Verwendung von Gleichung (6.3) die homogene Differentialgleichung des elastisch gebetteten Balkens

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} + N \frac{d^2 w}{dx^2} + kw = 0 . \quad (6.4)$$

Gleichung (6.4) besitzt mit den eingeführten Hilfsvariablen

$$\alpha = \sqrt{\sqrt{\frac{k}{4EI} - \frac{N}{4EI}}}, \quad \beta = \sqrt{\sqrt{\frac{k}{4EI} + \frac{N}{4EI}}} \quad (6.5)$$

die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} w(x) = & C_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + C_2 e^{-\alpha x} \cos(\beta x) \\ & + C_3 e^{\alpha x} \sin(\beta x) + C_4 e^{-\alpha x} \sin(\beta x) . \end{aligned} \quad (6.6)$$

Für den unendlich langen, elastisch gebetteten Balken darf  $w(x)$  nicht über alle Maßen wachsen. Diese Bedingung führt zum Verschwinden der Integrationskonstanten  $C_1$  und  $C_3$ . Die Knickbiegeline ist eine über die gesamte Balkenlänge verlaufende Sinuskurve mit nicht abklingender Amplitude, was zu der Forderung  $\alpha = 0$  führt. Damit ergibt sich mit Gleichung (6.5)<sub>links</sub> die Knicklast

$$N_{Ki} = 2\sqrt{kEI} . \quad (6.7)$$

Der Abstand der Wendepunkte der Knickbiegeline ergibt die Knicklänge, die der halben Periode  $\pi$  der trigonometrischen Sinusfunktion der Frequenz  $\beta$  entspricht. Nach Einarbeitung von Gleichung (6.7) in Gleichung (6.5)<sub>rechts</sub> folgt die Knicklänge

$$s_{Ki} = \pi/\beta = \pi \sqrt[4]{EI/k} . \quad (6.8)$$

Der Bettungsmodul  $k$  hängt von den Materialkennwerten  $E^m$  und  $\nu^m$  der Matrix und der Geometrie des elastisch gebetteten Balkens ab. Zur Bestimmung von  $k$  schlägt HIRSCHFELD [71] die Beziehung

$$k = \frac{\chi}{\sqrt{l/b}} \cdot \frac{E^m}{1 - (\nu^m)^2} \quad (6.9)$$

vor. Hierbei ist  $\chi = \chi(l/b)$  ein vom Längen- zu Breitenverhältnis  $l/b$  des elastisch gebetteten Balkens abhängiger Formbeiwert (vgl. Tabelle 6.1).

$l/b$ ( $:= s_{Ki}/d$ )	2	3	5	10	100
$\chi$	1,09	1,13	1,22	1,41	2,71

**Tabelle 6.1:** Formbeiwert  $\chi = \chi(l/b)$  nach HIRSCHFELD [71]

Würde zur Bestimmung des Formbeiwerts  $\chi$  die unendlich lange Faser in Ansatz gebracht, ginge der Bettungsmodul nach Gleichung (6.9) gegen null. Daher wird die benachbarte Gleichgewichtslage der ausgeknickten Faser gemäß Abbildung 6.1 betrachtet. Der Bettungsmodul wird im Bereich der Knicklänge  $s_{Ki}$  aktiviert, womit die Wahl des Längen-/ Breitenverhältnisses  $l/b$  gleich dem Verhältnis der auf den Faserdurchmesser bezogenen Knicklänge  $s_{Ki}/d$  gerechtfertigt ist. Mit Hilfe von Gleichung (6.8) ist nun der Bettungsmodul gemäß Gleichung (6.9) iterativ bei gleichzeitiger linearer Interpolation von  $\chi$  anhand Tabelle 6.1 ermittelbar. Das Schema zur Bestimmung des Bettungsmoduls ist in Tafel 6.1 dargestellt.

1) Wahl eines Startwerts der bezogenen Knicklänge $s_{Ki}/d$	
2) Bestimmung von $\chi$ durch lineare Interpolation (Tabelle 6.1)	
3) $k = \frac{\chi}{\sqrt{s_{Ki}/d}} \cdot \frac{E^m}{1 - (\nu^m)^2}$	gemäß Gleichung (6.9)
4) $\left(\frac{s_{Ki}}{d}\right)^{neu} = \frac{\pi}{d} \sqrt[4]{\frac{EI}{k}}$	gemäß Gleichung (6.8)
5) $\left  \left(\frac{s_{Ki}}{d}\right)^{neu} - \frac{s_{Ki}}{d} \right  < TOL$	
nein	$\rightarrow \left(\frac{s_{Ki}}{d}\right)^{neu} := \frac{s_{Ki}}{d} \rightarrow$ gehe zu 2)
ja	$\rightarrow$ Ende

**Tafel 6.1:** Iterative Bestimmung des Bettungsmoduls  $k$ 

Da die Faser vollständig von der Matrix umgeben ist, wird die Bettung beidseitig angesetzt und der in Schritt 3) bestimmte Bettungsmodul nach Tafel 6.1 mit dem Faktor 2 versehen. Ist der Bettungsmodul bestimmt, lässt sich die kritische Dehnung  $u_1/s_{Ki}$ , bei welcher die Faser beult, aus der Knicklast (6.7) durch Division der Dehnsteifigkeit der Faser  $EA$  bestimmen. Hierbei ist  $u_1$  die Verkürzung des elastisch gebetteten Balkens der Länge  $s_{Ki}$ . Damit ergibt sich die kritische Dehnung

$$u_1/s_{Ki} = N_{Ki}/EA . \quad (6.10)$$

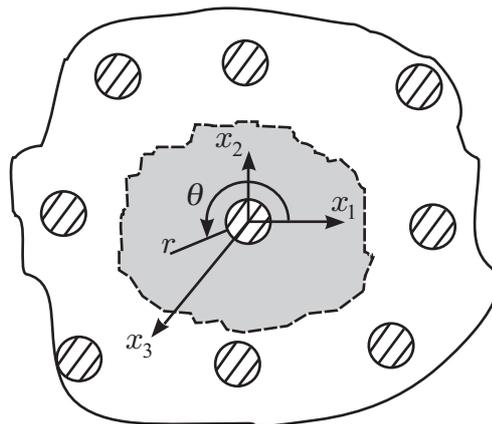
Auf dieses Ergebnis und dessen Auswertung wird an späterer Stelle zurückgegriffen.

Für den Grenzfall  $\lim_{k \rightarrow 0}$  wird aus Gleichung (6.8) deutlich, dass die Knicklänge  $s_{K_i}$  über alle Maßen wächst, also der gesamten unendlichen Balkenlänge entspricht. Für den bekannten Eulerknickstab bedeutet eine unendlich lange Knicklänge, dass der Balken keine axiale Druckkraft aufnehmen kann. Diese Grenzbetrachtung deckt sich mit Gleichung (6.7), für welche für ein Verschwinden des Bettungsmoduls  $k$ , die kritische Last  $N_{K_i}$  verschwindet.

### 6.3 Dreidimensionale analytische Beschreibung

In diesem Abschnitt wird eine dreidimensionale analytische Beschreibung des Stabilitätsverhaltens einer Einzelfaser in einer Matrix gemäß LAPUSTA & WAGNER [93] vorgestellt. Auf die Aufbereitung der mechanischen Zusammenhänge der dreidimensionalen Stabilitätstheorie deformierbarer Körper wird an dieser Stelle verzichtet und auf die Arbeit von GUZ [58] und der dort verwendeten Notation verwiesen.

Zunächst wird ein Bereich eines unidirektional verstärkten Verbundwerkstoffs in Augenschein genommen. Die mikromechanische Betrachtung beschränkt sich auf eine dreidimensionale charakteristische Zelle, bestehend aus einer Faser und einem Matrixbereich, welche in Abbildung 6.3 grau hinterlegt ist. Für diesen Fall wird zwischen den jeweiligen Fasern eine gegenseitige Interaktion ausgeschlossen. Diese Annahme ist gleichbedeutend mit der Annahme einer Einzelfaser, welche in einem unendlich großen Matrixmaterial eingebettet ist.



**Abbildung 6.3:** Wahl der charakteristischen Zelle und des Koordinatensystems

Es werden Lagrangesche Koordinaten  $(r, \theta, z)$  für die Faser und die Matrix eingeführt. Die  $z$ -Achse stimmt mit der Faserachse  $x_3$  überein. Unter axialer

Belastung ist im vorkritischen Bereich die Verkürzung  $\varepsilon^f$  der Faser gleich der Verkürzung  $\varepsilon^m$  der Matrix. Die Annahme eines perfekten Verbunds in der Grenzfläche ( $r = R$  mit  $R = \text{Faserradius}$ ) zwischen Faser und Matrix führt auf Übergangsbedingungen für Verschiebungen und Kräfte der Form

$$\begin{aligned} u_r^f &= u_r^m, & u_\theta^f &= u_\theta^m, & u_z^f &= u_z^m, \\ P_{rr}^f &= P_{rr}^m, & P_{r\theta}^f &= P_{r\theta}^m, & P_{rz}^f &= P_{rz}^m. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Ein Stabilitätsfall liegt vor, wenn bei einem Lastniveau neben der Gleichgewichtslage im Grundzustand eine benachbarte Gleichgewichtslage (Nachbarzustand) existiert. Das Gleichgewicht ist durch die folgenden Gleichungen nach GUZ [58] für das Fasergebiet  $V^f$  und das Matrixgebiet  $V^m$  beschrieben

$$(x_i) \in V^f : \quad [\omega_{it\alpha\beta}^f u_{\alpha,\beta}^f]_{,i} = 0, \quad (6.12)$$

$$(x_i) \in V^m : \quad [\omega_{it\alpha\beta}^m u_{\alpha,\beta}^m]_{,i} = 0. \quad (6.13)$$

Die Größen  $\omega_{it\alpha\beta}^f$  und  $\omega_{it\alpha\beta}^m$  sind abhängige Koeffizienten des Materials der Faser und der Matrix sowie der Spannung im vorkritischen Bereich. Mit den Funktionen  $\psi^f$  und  $\chi^f$  gilt für die Verschiebungen der Faser

$$u_r^f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \psi^f - \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \chi^f, \quad (6.14)$$

$$u_\theta^f = -\frac{\partial}{\partial r} \psi^f - \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial z} \chi^f, \quad (6.15)$$

$$u_z^f = \frac{1}{\omega_{1133}^f + \omega_{1313}^f} \left( \omega_{1111}^f \Delta + \omega_{3113}^f \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \chi^f \quad (6.16)$$

und mit  $\psi^m$  und  $\chi^m$  gilt für die Verschiebungen der Matrix

$$u_r^m = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \psi^m - \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \chi^m, \quad (6.17)$$

$$u_\theta^m = -\frac{\partial}{\partial r} \psi^m - \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial z} \chi^m, \quad (6.18)$$

$$u_z^m = \frac{1}{\omega_{1133}^m + \omega_{1313}^m} \left( \omega_{1111}^m \Delta + \omega_{3113}^m \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \chi^m. \quad (6.19)$$

Dabei ist

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (6.20)$$

der zweidimensionale Laplace-Operator. Gemäß GUZ [58] sind die Bedingungen (6.12) und (6.13) erfüllt, wenn für die Funktionen  $\psi^f$ ,  $\chi^f$ ,  $\psi^m$  und  $\chi^m$  gilt

$$\begin{aligned} \left( \Delta + (\zeta_1^f)^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi^f &= 0, \\ \left( \Delta + (\zeta_2^f)^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left( \Delta + (\zeta_3^f)^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \chi^f &= 0, \end{aligned} \quad (6.21)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \left( \Delta + (\zeta_1^m)^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi^m &= 0, \\ \left( \Delta + (\zeta_2^m)^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left( \Delta + (\zeta_3^m)^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \chi^m &= 0. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Die Koeffizienten  $(\zeta_j^m)^2$  und  $(\zeta_j^f)^2$  hängen von  $\omega_{it\alpha\beta}^m$  und  $\omega_{it\alpha\beta}^f$  ab und haben die Form

$$(\zeta_1^f)^2 = \frac{\omega_{3113}^f}{\omega_{1221}^f}, \quad (6.23)$$

$$(\zeta_{2,3}^f)^2 = c^f \pm \sqrt{(c^f)^2 - \frac{\omega_{3333}^f \omega_{3113}^f}{\omega_{1111}^f \omega_{1331}^f}}, \quad (6.24)$$

mit

$$c^f = \frac{\omega_{1111}^f \omega_{3333}^f + \omega_{1331}^f \omega_{3113}^f - (\omega_{3131}^f + \omega_{1133}^f)(\omega_{1313}^f + \omega_{3311}^f)}{2 \omega_{1111}^f \omega_{1331}^f}, \quad (6.25)$$

und

$$(\zeta_1^m)^2 = \frac{\omega_{3113}^m}{\omega_{1221}^m}, \quad (6.26)$$

$$(\zeta_{2,3}^m)^2 = c^m \pm \sqrt{(c^m)^2 - \frac{\omega_{3333}^m \omega_{3113}^m}{\omega_{1111}^m \omega_{1331}^m}}, \quad (6.27)$$

mit

$$c^m = \frac{\omega_{1111}^m \omega_{3333}^m + \omega_{1331}^m \omega_{3113}^m - (\omega_{3131}^m + \omega_{1133}^m)(\omega_{1313}^m + \omega_{3311}^m)}{2 \omega_{1111}^m \omega_{1331}^m}. \quad (6.28)$$

Für elastische Materialien gilt  $(\zeta_2^f)^2 \neq (\zeta_3^f)^2$ ,  $(\zeta_2^m)^2 \neq (\zeta_3^m)^2$ . Die Übergangsbedingungen gemäß Gleichung (6.11) nehmen dann folgende Gestalt an

$$u_r^m = u_r^f, \quad u_\theta^m = u_\theta^f, \quad u_z^m = u_z^f, \quad (6.29)$$

$$\begin{aligned} P_{rr}^f &= \omega_{1111}^f \frac{\partial u_r^f}{\partial r} + \omega_{1122}^f \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) + \omega_{1133}^f \frac{\partial u_z^f}{\partial z} \\ &= \omega_{1111}^m \frac{\partial u_r^m}{\partial r} + \omega_{1122}^m \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) + \omega_{1133}^m \frac{\partial u_z^m}{\partial z} = P_{rr}^m, \end{aligned} \quad (6.30)$$

$$\begin{aligned} P_{r\theta}^f &= \omega_{1221}^f \frac{\partial u_\theta^f}{\partial r} + \omega_{1212}^f \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \right) \\ &= \omega_{1221}^m \frac{\partial u_\theta^m}{\partial r} + \omega_{1212}^m \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \right) = P_{r\theta}^m, \end{aligned} \quad (6.31)$$

$$P_{rz}^f = \omega_{1313}^f \frac{\partial u_r^f}{\partial z} + \omega_{1331}^f \frac{\partial u_z^f}{\partial r} = \omega_{1313}^m \frac{\partial u_r^m}{\partial z} + \omega_{1331}^m \frac{\partial u_z^m}{\partial r} = P_{rz}^m. \quad (6.32)$$

Mit der Länge  $L$  der Beulhalbwelle der Faser wird die Abkürzung  $\gamma = \pi L^{-1}$  eingeführt. Die Funktionen  $\psi^f$  und  $\chi^f$  der Fasern, welche die Gleichungen (6.21) erfüllen, können als Reihe entwickelt werden

$$\psi^f = \sum_{n=1}^{\infty} X_{n,1}^f \sin(\gamma z) I_n(\zeta_1^f \gamma r) \sin(n\theta), \quad (6.33)$$

$$\chi^f = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=2}^3 X_{n,s}^f \cos(\gamma z) I_n(\zeta_s^f \gamma r) \cos(n\theta). \quad (6.34)$$

Gleiches gilt für die Matrix

$$\psi^m = \sum_{n=1}^{\infty} X_{n,1}^m \sin(\gamma z) K_n(\zeta_1^m \gamma r) \sin(n\theta), \quad (6.35)$$

$$\chi^m = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=2}^3 X_{n,s}^m \cos(\gamma z) K_n(\zeta_s^m \gamma r) \cos(n\theta), \quad (6.36)$$

wobei  $X_{n,1}^f$ ,  $X_{n,2}^f$ ,  $X_{n,3}^f$  und  $X_{n,1}^m$ ,  $X_{n,2}^m$ ,  $X_{n,3}^m$  unbekannte Koeffizienten sind. Einsetzen der Gleichungen (6.33) bis (6.36) in Gleichungen (6.21) bis (6.22) führt

jeweils mit der Substitution  $x = \zeta_j^{f,m} \gamma r$  und unter Anwendung der Kettenregel  $\partial/\partial x \cdot \partial x/\partial r$  auf die Besselsche Differentialgleichung

$$x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x \frac{\partial y}{\partial x} - (x^2 + n^2) y = 0 . \quad (6.37)$$

Lösungen dieser Differentialgleichung sind die Bessel-Funktion  $I_n(x)$  sowie die MacDonald-Funktion  $K_n(x)$ , womit gezeigt ist, dass die Ansätze (6.33) bis (6.36) die Bedingungen (6.21) und (6.22) erfüllen. Die Einarbeitung der Übergangsbedingungen (6.11) für  $r = R$  führt mit Gleichungen (6.14) bis (6.19) sowie Gleichungen (6.29) bis (6.32) auf ein unendliches System homogener Gleichungen

$$B_{n,kl}^f X_{n,l}^f + B_{n,kl}^m X_{n,l}^m = 0 , \quad k = 1 \dots 6 , \quad l = 1 \dots 3 , \quad n = 0 \dots \infty , \quad (6.38)$$

bzw. in ausgeschriebener Form

$$\underbrace{\begin{bmatrix} B_{n,11}^f & B_{n,12}^f & B_{n,13}^f & B_{n,11}^m & B_{n,12}^m & B_{n,13}^m \\ B_{n,21}^f & B_{n,22}^f & B_{n,23}^f & B_{n,21}^m & B_{n,22}^m & B_{n,23}^m \\ B_{n,31}^f & B_{n,32}^f & B_{n,33}^f & B_{n,31}^m & B_{n,32}^m & B_{n,33}^m \\ B_{n,41}^f & B_{n,42}^f & B_{n,43}^f & B_{n,41}^m & B_{n,42}^m & B_{n,43}^m \\ B_{n,51}^f & B_{n,52}^f & B_{n,53}^f & B_{n,51}^m & B_{n,52}^m & B_{n,53}^m \\ B_{n,61}^f & B_{n,62}^f & B_{n,63}^f & B_{n,61}^m & B_{n,62}^m & B_{n,63}^m \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_n} \begin{bmatrix} X_{n,1}^f \\ X_{n,2}^f \\ X_{n,3}^f \\ X_{n,1}^m \\ X_{n,2}^m \\ X_{n,3}^m \end{bmatrix} = 0 , \quad n = 0 \dots \infty , \quad (6.39)$$

wobei die Einsteinsche Summenkonvention (bezüglich  $n$ ) anzuwenden ist. Die Koeffizientenfunktionen  $B_{n,kl}^f$  bzw.  $B_{n,kl}^m$  der Koeffizientenmatrix  $\mathbf{B}_n$  lauten mit dem Parameter der Beulhalbwelle

$$\kappa = \gamma R = \pi \frac{R}{L} \quad (6.40)$$

und der Abkürzung

$$I'_n = \frac{\partial I_n}{\partial r} \quad \text{bzw.} \quad K'_n = \frac{\partial K_n}{\partial r} \quad (6.41)$$

für die ersten drei Zeilen

Zeile 1:

$$\begin{aligned}
B_{n,11}^f &= \frac{n}{R} I_n(\zeta_1^f \kappa) , \\
B_{n,12}^f &= \frac{\kappa}{R} I_n'(\zeta_2^f \kappa) , \\
B_{n,13}^f &= \frac{\kappa}{R} I_n'(\zeta_3^f \kappa) , \\
B_{n,11}^m &= -\frac{n}{R} K_n(\zeta_1^m \kappa) , \\
B_{n,12}^m &= -\frac{\kappa}{R} K_n'(\zeta_2^m \kappa) , \\
B_{n,13}^m &= -\frac{\kappa}{R} K_n'(\zeta_3^m \kappa) ,
\end{aligned}$$

Zeile 2:

$$\begin{aligned}
B_{n,21}^f &= I_n'(\zeta_1^f \kappa) , \\
B_{n,22}^f &= \frac{n\kappa}{R^2} I_n(\zeta_2^f \kappa) , \\
B_{n,23}^f &= \frac{n\kappa}{R^2} I_n(\zeta_3^f \kappa) , \\
B_{n,21}^m &= -K_n'(\zeta_1^m \kappa) , \\
B_{n,22}^m &= -\frac{n\kappa}{R^2} K_n'(\zeta_2^m \kappa) , \\
B_{n,23}^m &= -\frac{n\kappa}{R^2} K_n'(\zeta_3^m \kappa) ,
\end{aligned}$$

Zeile 3:

$$\begin{aligned}
B_{n,31}^f &= 0 , \\
B_{n,32}^f &= \frac{1}{\omega_{1133}^f + \omega_{1313}^f} \left[ \omega_{1111}^f \left( I_n''(\zeta_2^f \kappa) + I_n'(\zeta_2^f \kappa) - \frac{n^2}{R^2} I_n(\zeta_2^f \kappa) \right) \right. \\
&\quad \left. - \omega_{3113}^f \frac{\kappa^2}{R^2} I_n(\zeta_2^f \kappa) \right] , \\
B_{n,33}^f &= \frac{1}{\omega_{1133}^f + \omega_{1313}^f} \left[ \omega_{1111}^f \left( I_n''(\zeta_3^f \kappa) + I_n'(\zeta_3^f \kappa) - \frac{n^2}{R^2} I_n(\zeta_3^f \kappa) \right) \right. \\
&\quad \left. - \omega_{3113}^f \frac{\kappa^2}{R^2} I_n(\zeta_3^f \kappa) \right] , \\
B_{n,31}^m &= 0 , \\
B_{n,32}^m &= \frac{-1}{\omega_{1133}^m + \omega_{1313}^m} \left[ \omega_{1111}^m \left( K_n''(\zeta_2^m \kappa) + K_n'(\zeta_2^m \kappa) - \frac{n^2}{R^2} K_n(\zeta_2^m \kappa) \right) \right. \\
&\quad \left. - \omega_{3113}^m \frac{\kappa^2}{R^2} K_n(\zeta_2^m \kappa) \right] , \\
B_{n,33}^m &= \frac{-1}{\omega_{1133}^m + \omega_{1313}^m} \left[ \omega_{1111}^m \left( K_n''(\zeta_3^m \kappa) + K_n'(\zeta_3^m \kappa) - \frac{n^2}{R^2} K_n(\zeta_3^m \kappa) \right) \right. \\
&\quad \left. - \omega_{3113}^m \frac{\kappa^2}{R^2} K_n(\zeta_3^m \kappa) \right] .
\end{aligned}$$

Die verbleibenden drei Zeilen ergeben sich sinngemäß, wobei diese etwas längere Ausdrücke ergeben, da die Übergangsbedingungen für die Kräfte nach Gleichun-

gen (6.30) bis (6.32) Kombinationen partieller Ableitungen der Verschiebungen (6.14) bis (6.19) enthalten. Eine nichttriviale Lösung von Gleichung (6.38) bzw. (6.39) ergibt sich, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix  $\mathbf{B}_n$  verschwindet

$$\text{Det}[\mathbf{B}_n] = \text{Det}[\mathbf{B}_n(\varepsilon_{zz}, \kappa)] = 0, \quad (6.42)$$

wobei die Determinante der Koeffizientenmatrix Bestimmungsgleichungen für die kritische Dehnung  $\varepsilon_{zz}$  in Abhängigkeit des Parameters der Beulhalbwelle  $\kappa$  liefert. Gleichung (6.42) wird für vorgegebene Werte für  $\kappa$  sowie Materialparameter numerisch gelöst, wobei für elastisches Material jeweils für die Faser bzw. die Matrix gilt

$$\begin{aligned} \omega_{1111} &= \lambda + 2\mu + \sigma_{11}^0, & \omega_{2222} &= \lambda + 2\mu + \sigma_{22}^0, & \omega_{3333} &= \lambda + 2\mu + \sigma_{33}^0, \\ \omega_{1122} &= \omega_{2211} = \omega_{1133} = \omega_{3311} = \omega_{2233} = \omega_{3322} = \lambda, \\ \omega_{1212} &= \omega_{2121} = \omega_{1313} = \omega_{3131} = \omega_{2323} = \omega_{3232} = \mu, \\ \omega_{2112} &= \omega_{2332} = \mu + \sigma_{22}^0, & \omega_{1221} &= \omega_{1331} = \mu + \sigma_{11}^0, & \omega_{3113} &= \omega_{3223} = \mu + \sigma_{33}^0. \end{aligned} \quad (6.43)$$

Für ein bestimmtes  $\kappa^i$  bildet die zugehörige kleinste Dehnung  $\varepsilon_{zz}^i$  einen Punkt in einem  $\varepsilon_{zz}$ - $\kappa$ -Diagramm. Der Parameter der Beulhalbwelle  $\kappa$  wird sukzessive verändert, so dass sich für die jeweils kleinste Dehnung  $\varepsilon_{zz}^i(\kappa^i)$  weitere Punkte im  $\varepsilon_{zz}$ - $\kappa$ -Diagramm ergeben. Das Minimum in diesem  $\varepsilon_{zz}$ - $\kappa$ -Diagramm liefert die kritische Dehnung mit zugehöriger Beulhalbwelle

$$\varepsilon_{cr} = \min_i(\varepsilon_{zz}^i(\kappa)). \quad (6.44)$$

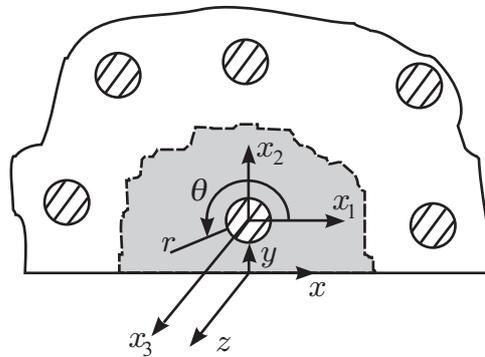
In GUZ & LAPUSTA [60] wurde gezeigt, dass sich für 10 Gleichungen des Systems (6.38) die kritische Dehnung  $\varepsilon_{cr}$  bereits mit einer Genauigkeit von  $10^{-4}$  angeben lässt.

Das Modell mit perfektem Verbund stellt eine obere Grenze der kritischen Dehnung  $\varepsilon_{cr}$  dar, die schon bei wenigen Defekten in der Grenzschicht zwischen Faser und Matrix unterschritten werden. Im Rahmen der mechanischen Beschreibung ist es schwierig, einzelne Defekte zu berücksichtigen. Daher wird, was den Verbund in der Grenzschicht angeht, ein Fall konstruiert, der eine untere Grenze der kritischen Dehnungen  $\varepsilon_{cr}$  angibt. Die Wirklichkeit liegt dann irgendwo dazwischen. Es werden also Übergangsbedingungen konstruiert, die lediglich Gleichheit der Normalkomponenten der Verschiebungen  $u_r^f$ ,  $u_r^m$  sowie die der Kräfte  $P_{rr}^f$ ,  $P_{rr}^m$  fordern, während die restlichen Kräfte verschwinden

$$\begin{aligned}
u_r^f &= u_r^m, & P_{rr}^f &= P_{rr}^m, \\
P_{r\theta}^f &= 0, & P_{r\theta}^m &= 0, & P_{rz}^f &= 0, & P_{rz}^m &= 0.
\end{aligned}
\tag{6.45}$$

Diese Übergangsbedingungen sind gleichbedeutend mit einem reibungsfreien Verbund in der Grenzfläche zwischen Faser und Matrix. Für den reibungsfreien Verbund lassen sich in analoger Weise minimale kritische Dehnungen  $\varepsilon_{cr}$  mit zugehörigen Parametern der Beulhalbwelle  $\kappa$  finden.

In LAPUSTA & WAGNER [93] finden sich auch Formulierungen für Fasern mit perfektem und gleitendem Verbund zwischen Faser und Matrix, die Effekte der faserparallelen freien Oberfläche berücksichtigen. Hierbei werden neben den lokalen Koordinaten  $(r, \theta, z_1)$  für die Faser Koordinaten  $(x_1, x_2, x_3)$  bzw.  $(x, y, z)$  für die Matrix eingeführt. Die  $z$ - sowie die  $x_3$ -Achse zeigen in Faserrichtung, wobei sich die  $z$ -Achse auf dem freien Rand der Matrix befindet. Die  $z_1$ -Achse fällt mit der  $x_3$ -Achse der Faser zusammen. Es wird wieder angenommen, dass Fasern untereinander nicht in Interaktion treten. Der Bereich, der für eine mechanische Beschreibung des Problems herangezogen wird, ist in Abbildung 6.4 grau hinterlegt.



**Abbildung 6.4:** Charakteristische Zelle und Koordinatensysteme bei Existenz einer freien Oberfläche

Bei der Lösung an der unbelasteten freien Oberfläche der Matrix werden zusätzlich entsprechende Krafttrandbedingungen eingeführt

$$P_{yy}^m = 0, \quad P_{yx}^m = 0, \quad P_{yz}^m = 0, \tag{6.46}$$

sowie zusätzliche Glieder in den Lösungen für die Funktionen  $\psi^m$  und  $\chi^m$  nach Gleichung (6.35) und (6.36). Im Rahmen dieser Arbeit wird auf die Einzelhei-

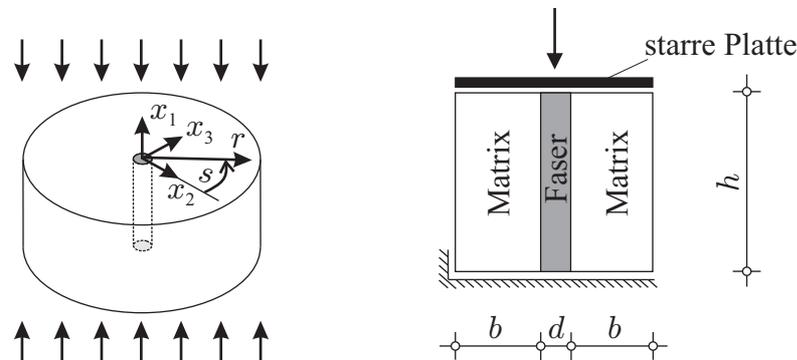
ten nicht eingegangen und auf entsprechende Literatur (GUZ [57], LAPUSTA & WAGNER [93] oder LAPUSTA [88]) verwiesen.

Die Ergebnisse der in diesem Kapitel dargestellten Varianten zur Bestimmung der minimalen kritischen Dehnung  $\varepsilon_{cr}$  dienen in den weiteren Kapiteln als Vergleichswerte und werden an entsprechender Stelle bereitgestellt.

## 6.4 Instabilität einer isotropen Einzelfaser in einer Matrix

### 6.4.1 Beschreibung der Modellierung

Es wird das Stabilitätsverhalten einer Einheitszelle eines Faserverbundwerkstoffs untersucht. Die Einheitszelle besteht zunächst in Anlehnung an Kapitel 3.8 aus einer einzelnen Faser in einer Matrix. Der Durchmesser  $d$  der Faser bleibt unverändert, wohingegen die Höhe  $h$  der Einheitszelle variiert wird. Um Randeinflüsse auf das Stabilitätsverhalten in diesem Fall auszuschließen, wird die Breite der Einheitszelle  $b = h$  gewählt. Zur Rechtfertigung dieser Wahl werden Berechnungen mit größerer Breite ( $b = 2h$ ) durchgeführt. Die Einheitszelle wird am unteren Rand in longitudinaler  $x_1$ -Richtung gehalten. Alle Knoten des oberen Randes erfahren dieselbe Verschiebung in  $x_1$ -Richtung, was dem Modell einer reibungsfreien starren Platte entspricht. Durch diese Randbedingungen an Ober- und Unterseite der Einheitszelle wird das Mikrobeulen gemäß Abbildung 6.1 (rechts) realisiert und die Periodizität des Mikrobeulens in Faserlängsrichtung ausgenutzt. Der Verbund zwischen Faser und Matrix ist perfekt, d. h. sowohl Verschiebungen als auch Kräfte in der Grenzfläche zwischen beiden Phasen sind identisch. Die seitlichen Ränder der Zelle sind unbelastet und in ihrer Verformung nicht behindert.



**Abbildung 6.5:** Einheitszelle mit gewählten Koordinaten  $x_1$ ,  $x_2$  und  $x_3$  sowie  $r$  und  $s$

Abbildung 6.5 zeigt die Einheitszelle mit dem eingeführten Koordinatensystem, den Maßen und den erläuterten Randbedingungen. Die angenommene Geometrie der Einheitszelle entspricht einem sehr geringen Faservolumenanteil und schließt Interaktionen von Fasern untereinander aus. Unter der Annahme von Schädigungen des Matrixmaterials im Bereich der Einheitszelle kann das Modell als Grundlage zur Einarbeitung von einzelnen nichtperiodischen Matrixfehlern dienen, welche Einfluss auf das lokale Stabilitätsverhalten haben. Derartige Schädigungen können in einfacher Näherung über eine Herabsetzung des E-Moduls  $E^m$  der Matrix in der Form  $\tilde{E}^m = E^m (1 - \zeta)$  und/oder über eine entsprechende Herabsetzung des Schubmoduls  $\tilde{G}^m = G^m (1 - \zeta)$  geschehen, wobei  $\zeta$  ein Schädigungsparameter ist. Auf die Art der Schädigung wird an dieser Stelle nicht eingegangen. In den folgenden Kapiteln wird diese Schädigungsart indirekt diskutiert, indem das Stabilitätsverhalten der Einheitszelle mit verschiedenen E-Moduli  $E^m$  für das Matrixmaterial analysiert wird. Untersuchungen zum Einfluss von Matrixfehlern auf das Stabilitätsverhalten auf Mikroebene finden sich z. B. bei LAPUSTA & WAGNER [92]. Dort wird die Schädigung als zylindrischer Hohlraum in der Nähe einer Faser und der Schädigung der Grenzschicht angenommen.

Faserinteraktionen und deren Einfluss auf das Mikroinstabilitätsverhalten können Berücksichtigung finden, wenn periodische Randbedingungen an den seitlichen Rändern eingearbeitet werden. Diese Fragestellung wird an späterer Stelle diskutiert. Um die Anzahl der Freiheitsgrade zu reduzieren und damit Rechenzeit einzusparen, wird die Symmetrie der Beulebene ausgenutzt und unter Einarbeitung entsprechender Symmetrierandbedingungen am halben System gerechnet. In Abbildung 6.6 ist jeweils die Symmetrie der Beulebene gekennzeichnet. Für beide Phasen wird isotropes Materialverhalten vorausgesetzt, so dass die Materialmatrix  $\mathbb{C}_2$  entsprechend Gleichung (3.41) Verwendung findet. Es werden für das Faser- und das Matrixmaterial die Materialparameter entsprechend der folgenden Tabelle 6.2 gewählt.

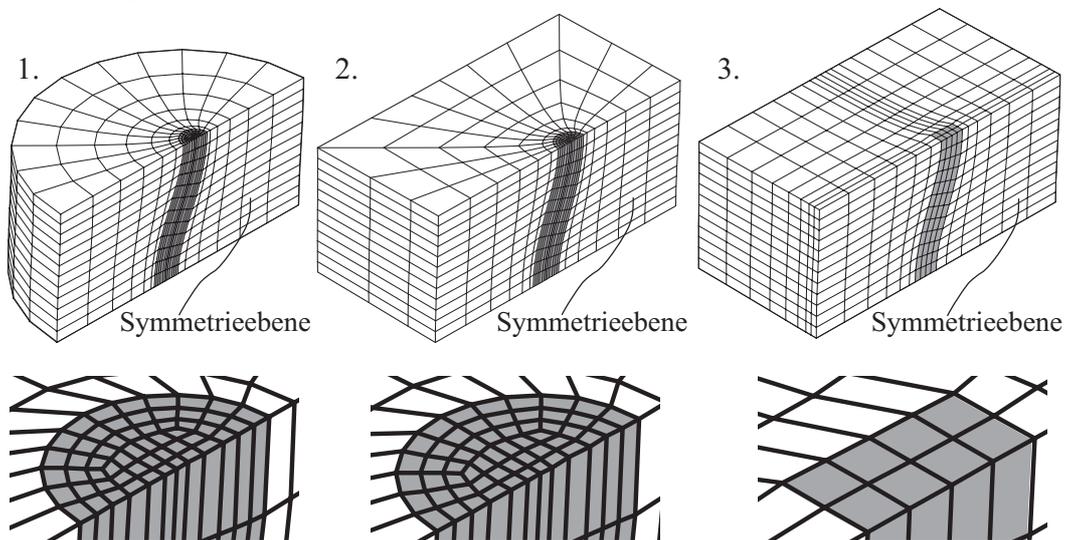
$E^f$	$=$	$390 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2$	$\nu^f$	$=$	$0,30$
$E^m$	$=$	$2,4375 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2$	$\nu^m$	$=$	$0,30$
$d$	$=$	$8,0 \mu\text{m}$			

**Tabelle 6.2:** Materialdaten für die Faser und die Matrix sowie Durchmesser der Faser

Die zur kritischen Beullast gehörende kritische axiale Verschiebung  $u_1$  in Faserlängsrichtung wird mit dem in Kapitel 5.3.4 beschriebenen Bisektionsverfahren berechnet, woraus im Anschluss die kritische Verkürzung  $u_1/h$  bestimmt wird.

Für die Untersuchung einer Einzelfaser in einer sehr großen Matrix ist die Modellierung einer kreiszylindrischen Faser eingebettet in einer kreiszylindrischen

Matrix nahe liegend. Das Einbeziehen von Interaktionen der Fasern untereinander bzw. periodische Randbedingungen können bei dieser Modellierung jedoch nur mit großem Aufwand eingearbeitet werden. Daher wird die Einheitszelle mit zwei weiteren Netzgeometrien diskretisiert. Zusätzlich zur kreiszylindrischen Faser, eingebettet in einer kreiszylindrischen Matrix, besitzt die zweite Modellierung ebenfalls eine kreiszylindrische Faser, jedoch eine quaderförmig berandete Matrix. Aufgrund der Einfachheit der Netzgeometrie wird schließlich noch eine dritte Modellierung mit quadratischem Faserquerschnitt und einer quaderförmig berandeten Matrix gewählt. Die Abbildung 6.6 zeigt die drei unterschiedlichen Modellierungen in der ersten Beuleigenform sowie die zugehörigen Details der Faserdiskretisierung. Die erste und dritte Modellierung wurde bereits in LAPUSTA ET AL. [89] vorgestellt.



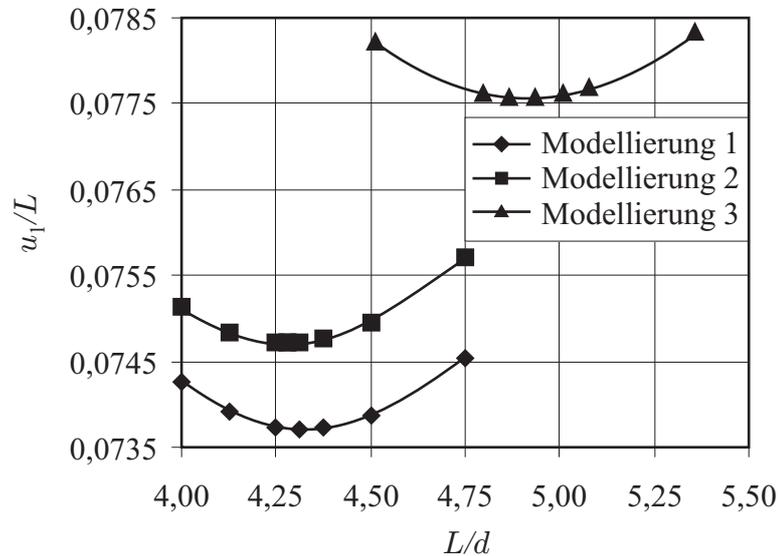
**Abbildung 6.6:** Eigenformen der verschiedenen FE-Modellierungen der Einheitszelle und Details der Diskretisierung der Fasern

Für die erste und zweite FE-Modellierung werden 12 Elemente in  $r$ - und  $s$ -Richtung und  $k = 12$  Elemente in  $x_1$ -Richtung gewählt. Das dritte Modell besitzt  $m = 16$  Elemente in  $x_3$ -,  $n = 8$  Elemente in  $x_2$ - und ebenfalls  $k = 12$  Elemente in  $x_1$ -Richtung. Die Koordinaten  $x_i$  sowie  $r$  und  $s$  wurden bereits in Abbildung 6.5 eingeführt. Später werden diese Parameter zur Netzverfeinerung und einer damit verbundenen Konvergenzuntersuchung genutzt.

### 6.4.2 Numerische Ergebnisse

Die Höhe  $h$  der Einheitszelle wird nun variiert und die kritische Verschiebung  $u_1$  bei Erreichen des Stabilitätspunktes als Funktion der Länge  $L = h$  der Beul-

halbwellenlänge berechnet. Die kritische Verkürzung  $u_1/L$  wird als Funktion der auf den Faserdurchmesser  $d$  bezogenen dimensionslosen Länge  $L/d$  angegeben. Hieraus resultieren die in Abbildung 6.7 angegebenen Verläufe für die drei unterschiedlichen FE-Netze. Die minimalen kritischen Verkürzungen sind in Tabelle 6.3 angegeben.



**Abbildung 6.7:** Kritische Verkürzung  $u_1/L = f(L/d)$

	$L/d$	$u_1/L$
Modellierung 1	4,3125	0,0737
Modellierung 2	4,2813	0,0747
Modellierung 3	4,9367	0,0776

**Tabelle 6.3:** Minimale kritische Verkürzung der drei FE-Modellierungen

Die Modellierung 3 liefert eine minimale kritische Verkürzung, welche um 5,3% von dem Ergebnis der Modellierung 1 abweicht, wohingegen die Modellierung 2 lediglich um 1,4% davon abweicht. Im Vergleich zu Modellierung 1 und 2 ist die dritte Modellierung sehr einfach zu diskretisieren. Auf der anderen Seite erfassen die Modellierungen mit der kreiszylindrischen Faser die Geometrie der Faser wesentlich exakter und sollten für weitere Untersuchungen verwendet werden, in jedem Fall dann, wenn hohe Anforderungen an die Qualität der Ergebnisse gestellt werden.

In einer weiteren Untersuchung wird die Breite der Matrix vergrößert. Die minimale kritische Verkürzung weicht für eine Verdopplung der Breite  $b = 2h$  in Bezug auf die Ausgangsbreite  $b = h$  um weniger als 3% ab. Aufgrund dieser geringen Abweichung kann die Wahl der Breite  $b = h$  als ausreichend groß angesehen werden, um Randeinflüsse auszuschließen.

Zur Verdeutlichung des Einflusses der Nichtlinearität des Problems, wird das lineare Eigenwertproblem nach Gleichung (5.82) gelöst und mit den Ergebnissen des speziellen Eigenwertproblems entsprechend Gleichung (5.81) für die Ausgangsnetze gemäß Abbildung 6.6 verglichen. Die berechneten minimalen kritischen Verkürzungen und die Abweichung in Bezug auf die Ergebnisse des speziellen Eigenwertproblems sind in Tabelle 6.4 angegeben. Hierbei sind Abweichungen der minimalen kritischen Verkürzung  $u_1/L$  festzustellen, was die Nichtlinearität des Problems unterstreicht und die Anwendung des Bisektionsverfahrens rechtfertigt.

	$L/d$	$u_1/L$ spezielles Eigenwertproblem	$u_1/L$ lineares Eigenwertproblem	Abweichung zum speziellen Eigenwertproblem
Mod. 1	4,3125	0,0737	0,0690	6,4 %
Mod. 2	4,2813	0,0747	0,0697	6,7 %
Mod. 3	4,9367	0,0776	0,0750	3,4 %

**Tabelle 6.4:** Abweichung der minimalen kritischen Verkürzung der linearen und nicht-linearen Eigenwertanalyse

### 6.4.3 Konvergenzuntersuchung

Die Abbildung 6.8 zeigt Konvergenzstudien für die jeweilige minimale kritische Verkürzung  $u_1/L$  bei Erreichen des Stabilitätspunktes der drei verwendeten Modellierungen. Es wird jeweils die Anzahl der Elemente in einer Richtung erhöht, während in den beiden verbleibenden Richtungen die Elementanzahl unverändert bleibt. Die Konvergenzstudie liefert eine Abweichung  $D$  [%] der minimalen kritischen Verkürzung in Bezug auf ein Netz, bei dem die Dehnungsänderung aufgrund einer weiteren Netzverfeinerung kleiner als 0,1 % ist. Dabei zeigt sich, dass bei den Modellierungen 1 und 2 eine Verfeinerung in der Ebene senkrecht zur Faserrichtung schnell zu einer auskonvergierten Lösung führt, wohingegen die Verfeinerung in Faserrichtung weniger schnell konvergiert.

Insgesamt wird aus der Konvergenzstudie deutlich, dass die Summe der Abweichungen zwischen den auskonvergierten Ergebnissen je Richtung und Netz, welches in Kapitel 6.4.1 gewählt wurde, in einem Bereich von 0 bis 7 % liegt. Für eine spezielle Wahl der Netzverfeinerung  $r = 12$ ,  $s = 20$  und  $k = 18$  erhält man  $u_1/L = 0,0716$  für die Modellierung 1 sowie  $u_1/L = 0,0724$  für die zweite Modellierung. Dies sind beinahe gleiche minimale kritische Verkürzungen mit einer Abweichung von nur noch 1,1 % in Bezug auf die erste Modellierung, was den sehr geringen Einfluss der Geometrie des Randes der Einheitszelle auf das Mikrobeulverhalten der Einzelfaser unterstreicht.

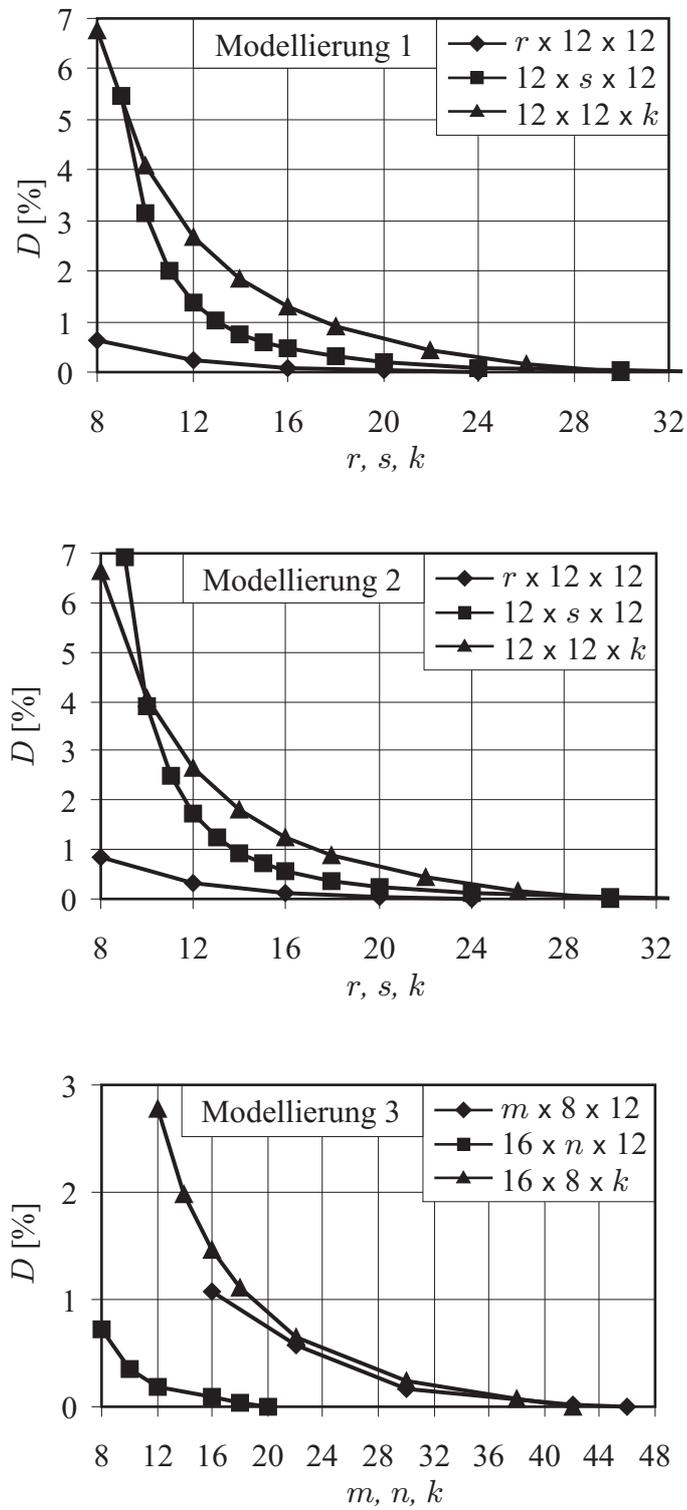


Abbildung 6.8: Konvergenzverhalten der Modellierungen 1, 2 und 3

#### 6.4.4 Vergleich mit einer analytischen Lösung

LAPUSTA & WAGNER [93] stellen eine analytische Lösung für das Mikrobeulen einer einzelnen Faser in einem Matrixmaterial vor. In Kapitel 6.3 wurden die grundlegenden Zusammenhänge bereits aufbereitet. Es werden dort zwei Grenzfälle betrachtet. Der erste Grenzfall beschreibt den vollständigen Verbund zwischen Faser und Matrix. Der zweite Grenzfall stellt ein reibungsfreies Gleiten zwischen Faser und Matrix dar, d. h. es existieren keine Schubkräfte in der Grenzfläche zwischen Faser und Matrix.

Es zeigt sich, dass für den zweiten Grenzfall das Mikrobeulen schon bei etwa 20 % geringeren minimalen kritischen Dehnungen  $u_1/L$  eintritt als für den Grenzfall des perfekten Verbunds. Da im Rahmen dieser Arbeit jeweils von einem perfekten Verbund ausgegangen wird, beschränkt sich der Vergleich der analytischen Lösungen auf den ersten Grenzfall. Bei den gewählten Materialparametern  $E^f = 390 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2$ ,  $E^m = 2,4375 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2$  und einer Querdehnzahl von  $\nu^f = \nu^m = 0,3$  ergibt sich bei LAPUSTA & WAGNER [93] eine minimale kritische Dehnung  $u_1/L = 0,067$ .

Zum Vergleich sind die analytische Lösung und die FE-Lösung der Modellierungen 1 und 2 für eine spezielle Wahl der Netzverfeinerung  $r = 12$ ,  $s = 20$  und  $k = 18$  sowie die Lösung des elastisch gebetteten Balkens in Tabelle 6.5 dargestellt. Dabei wird für den elastisch gebetteten Balken der Bettungsmodul gemäß Tafel 6.1 iterativ ermittelt. Es ergibt sich für den E-Modul der Matrix von  $E^m = 2,4375 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2$  ein Bettungsmodul von  $k = 2,917 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2$ .

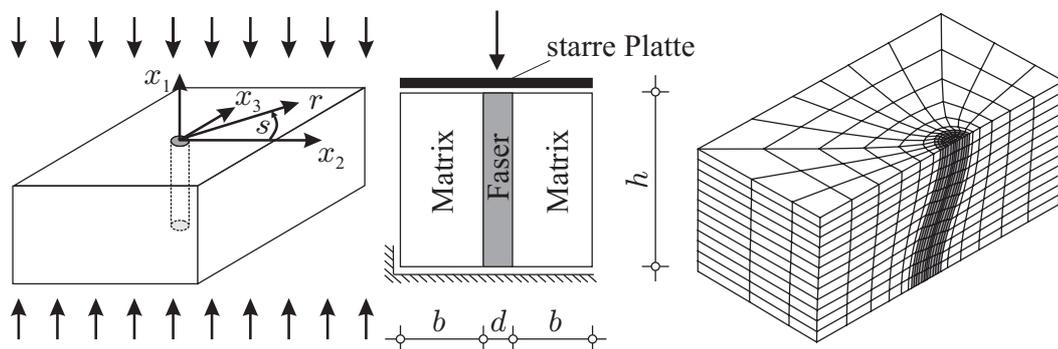
	$L/d$	$u_1/L$
analytisch nach [93]	4,91	0,0670
FE-Modellierung 1	4,31	0,0716
FE-Modellierung 2	4,28	0,0724
gebetteter Balken	5,03	0,0488

**Tabelle 6.5:** Vergleich der minimalen kritischen Verkürzung mit analytischen Lösungen

Es zeigt sich eine gute Übereinstimmung der kritischen Beullänge  $L/d$ . Die oben beschriebenen Modellierungen 1 und 2 liefern mit der minimalen kritischen Dehnung von  $u_1/L = 0,0716$  und  $u_1/L = 0,0724$  eine Überschätzung von 7 bzw. 8 % in Bezug auf die analytische Lösung nach LAPUSTA & WAGNER [93]. Die Lösung des elastisch gebetteten Balkens unterschätzt die minimale kritische Dehnung um 27 % in Bezug auf die analytische Lösung.

## 6.5 Instabilität einer anisotropen Einzelfaser in einer Matrix

Es wird erneut das Stabilitätsverhalten einer einzelnen Faser in einer Matrix analysiert. Nun wird jedoch abweichend vom vorigen Kapitel transversal isotropes Fasermaterial betrachtet, womit Kohlenstofffasern und Aramidfasern in guter Näherung abgebildet werden. Für das Fasermaterial wird die Materialmatrix  $\mathbb{C}_5$  entsprechend Gleichung (3.38) verwendet. Die Untersuchungen des vorigen Kapitels haben gezeigt, dass die beiden Modellierungen 1 und 2 gut übereinstimmende Ergebnisse liefern. Daher wird im Folgenden mit der kreiszylindrischen Faser eingebettet in einer quaderförmigen Matrix (Modellierung 2) gearbeitet. Eine Interaktion mehrerer Fasern und die damit verbundenen periodischen Randbedingungen kann bei dieser Modellierung realisiert werden, wie in Kapitel 6.7 ersichtlich wird. Die dritte Netzgeometrie (quadratischer Faserquerschnitt mit quaderförmig berandeter Matrix) wäre hierfür ebenfalls geeignet, obgleich die Fasergeometrie nicht exakt abbildbar ist. In Abbildung 6.9 ist die Modellwahl und das verwendete Netz in der ersten Beuleigenform dargestellt.



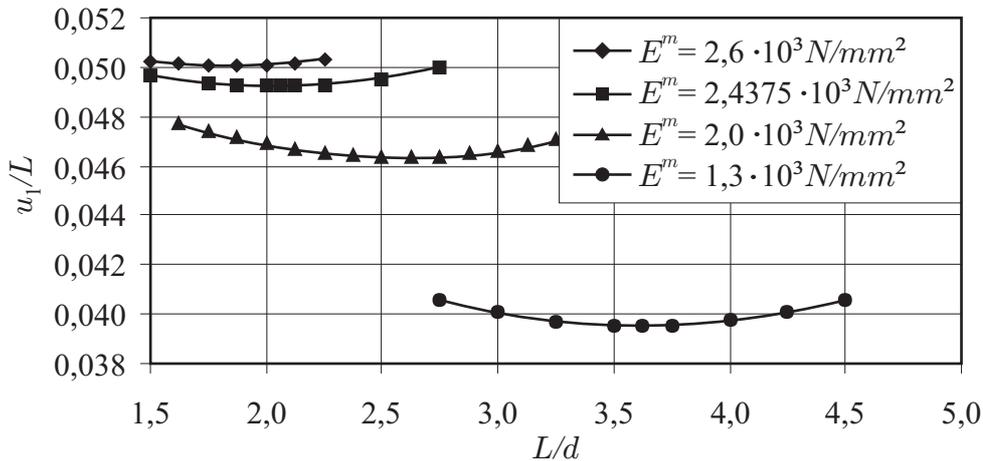
**Abbildung 6.9:** Modellwahl und zugehörige Netzgeometrie in der ersten Beulform

Für die transversal isotrope Faser werden die für Kohlenstofffasern typischen Materialparameter gemäß Tabelle 6.6 gewählt:

$E_1^f$	$= 390 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2$	$\nu_{12}^f$	$= 0,20$
$E_2^f$	$= 14 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2$	$\nu_{23}^f$	$= 0,25$
$G_{12}^f$	$= 20 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2$	$d$	$= 8,0 \text{ }\mu\text{m}$

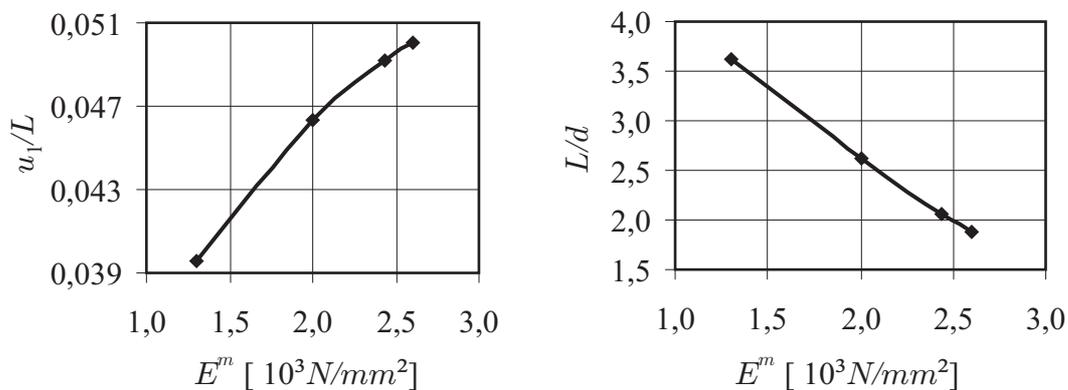
**Tabelle 6.6:** Materialdaten des verwendeten transversal isotropen Fasermaterials

Für das isotrope Matrixmaterial wird eine Querdehnzahl von  $\nu^m = 0,34$  und verschiedene E-Moduli  $E^m = 2,6 / 2,4375 / 2,0 / 1,3 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2$  gewählt. Das FE-Netz besteht aus 12 Elementen in  $r$ - und  $s$ -Richtung sowie  $k = 12$  Elementen in  $x_1$ -Richtung (vgl. Abbildung 6.9).



**Abbildung 6.10:** Kritische Verkürzungen  $u_1/L = f(L/d)$

Der jeweilige Stabilitätspunkt wird mit dem in Kapitel 5.3.4 beschriebenen Bisektionsverfahren berechnet und anschließend das spezielle Eigenwertproblem gemäß Gleichung (5.81) gelöst. Abbildung 6.10 stellt die kritische Verkürzung  $u_1/L$  als Funktion der Beulhalbwelle  $L/d$  für die vier verschiedenen E-Moduli des Matrixmaterials dar.



**Abbildung 6.11:** Minimale kritische Verkürzung  $u_1/L$  sowie Beullänge ( $L/d$ ) für verschiedene Matrix-E-Moduli

Es wird ersichtlich, dass mit sinkendem E-Modul des Matrixmaterials die Beullänge  $L/d$  zunimmt, während die kritische Verkürzung  $u_1/L$  sinkt. Dieser Zusammenhang ist in Abbildung 6.11 grafisch veranschaulicht. Im Vergleich zu dem Berechnungsergebnis mit isotropem Fasermaterial des vorigen Kapitels tritt der Stabilitätsfall bei geringeren kritischen Verkürzungen ein. In Tabelle 6.7 sind die minimalen kritischen Verkürzungen und die zugehörigen Beullängen für das jeweilige Matrixmaterial gegenübergestellt.

	$E$ [ $N/mm^2$ ]	$u_1/L$	$L/d$
Matrix 1	$2,6000 \cdot 10^3$	0,0500	1,875
Matrix 2	$2,4375 \cdot 10^3$	0,0492	2,063
Matrix 3	$2,0000 \cdot 10^3$	0,0464	2,625
Matrix 4	$1,3000 \cdot 10^3$	0,0395	3,625

**Tabelle 6.7:** Kritische Beullänge  $L/d$  mit zugehöriger minimaler kritischer Verkürzung  $u_1/L$  der vier verschiedenen Matrixmaterialien

Eine Konvergenzuntersuchung mit einer Netzverfeinerung von  $r = 12$ ,  $s = 20$  und  $k = 18$  Elementen ergibt eine Reduzierung der minimalen kritischen Dehnungen  $u_1/L$  von 0,58 % für das Matrixmaterial 1, 0,66 % für das Matrixmaterial 2, 0,90 % für 3 und 1,32 % für das Matrixmaterial 4 jeweils in Bezug auf das Ausgangsnetz mit einer Diskretisierung von  $r = s = k = 12$  Elementen. Das anisotrope Fasermaterial reduziert im Vergleich zum isotropen Fall des vorigen Kapitels wesentlich die kritische Verkürzung und damit die kritische Beullast. Die Differenz der kritischen Verkürzung beträgt 34 % in Bezug auf das Ergebnis mit isotropem Fasermaterial. Diese große Differenz ist auf den im Vergleich zum isotropen Fasermaterial wesentlich geringeren Schubmodul zurückzuführen. Im isotropen Fall resultiert dieser aus den beiden Materialkennwerten  $E^f$  und  $\nu^f$  gemäß der Vorschrift  $G^f = \frac{E^f}{2(1 + \nu^f)}$  aus Gleichung (3.41) und ergibt mit den Materialparametern des vorigen Kapitels einen Schubmodul von  $G^f = 153,8 \cdot 10^3 N/mm^2$ , wohingegen der Schubmodul für die hier verwendete Kohlenstofffaser  $G_{12}^f = 20 \cdot 10^3 N/mm^2$  beträgt.

Bei Kohlenstoff- und Aramidfasern ist die Verwendung von transversal isotropem Material also unbedingt erforderlich, da sonst die kritische Beullast überschätzt wird. LAPUSTA ET. AL. [90], [91] haben auf diesen Sachverhalt hingewiesen und dies ebenfalls auf den wesentlich geringeren Schubmodul des transversal isotropen Fasermaterials zurückgeführt.

## 6.6 Einbeziehung von Randeffekten

### 6.6.1 Isotropes Fasermaterial

Zur Einbeziehung von Effekten des freien Randes auf das Stabilitätsverhalten wird die kritische Verkürzung  $u_1/L$  einer Faser in der Nähe des freien Randes berechnet. Dazu wird der Abstand  $c$  der Faser zum freien Rand eingeführt und als dimensionslose Größe  $c/d$  auf den Faserdurchmesser bezogen. Zunächst wird sowohl die Faser als auch die Matrix mit isotropem Materialverhalten und quadratischem Faserquerschnitt (Modellierung 3) betrachtet. Hierbei wird senkrecht zur Symmetrieachse das FE-Netz sukzessive abgebaut, bis die Faser den freien Rand erreicht hat.

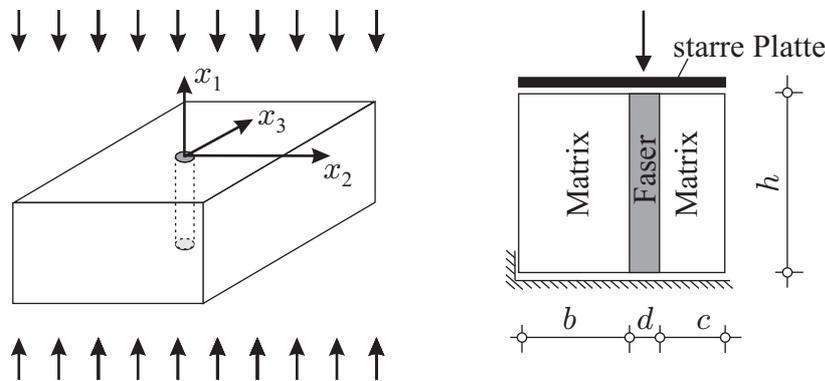


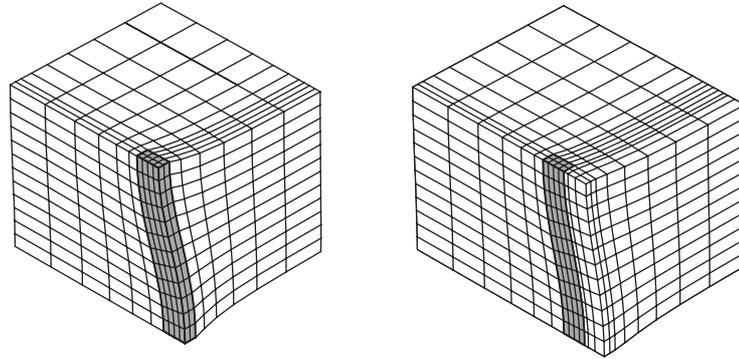
Abbildung 6.12: Modellwahl mit Randdistanzparameter  $c$

Abbildung 6.12 zeigt die Modellwahl mit dem eingeführten Parameter  $c$  zum freien Rand hin. In Kapitel 6.4 wurde die Wahl der Breite der Matrix  $b = h$  gerechtfertigt. Hierbei wurde gezeigt, dass sich die kritische Verkürzung  $u_1/L$  so verhält, als sei die Faser von einer unendlich breiten Matrix umgeben. Zur Veranschaulichung des sukzessiven Abbaus der Elemente der Matrix zum freien Rand hin ist in Abbildung 6.13 jeweils die erste Beuleigenform für eine Randdistanz  $c/d = 0$  sowie  $c/d = 1$  mit zugehöriger Finite-Element-Diskretisierung (Modellierung 3) dargestellt.

$E^f$	$= 390 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2$	$\nu^f$	$= 0,30$
$E^m$	$= 2,4375 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2$	$\nu^m$	$= 0,30$
$d$	$= 8,0 \text{ }\mu\text{m}$		

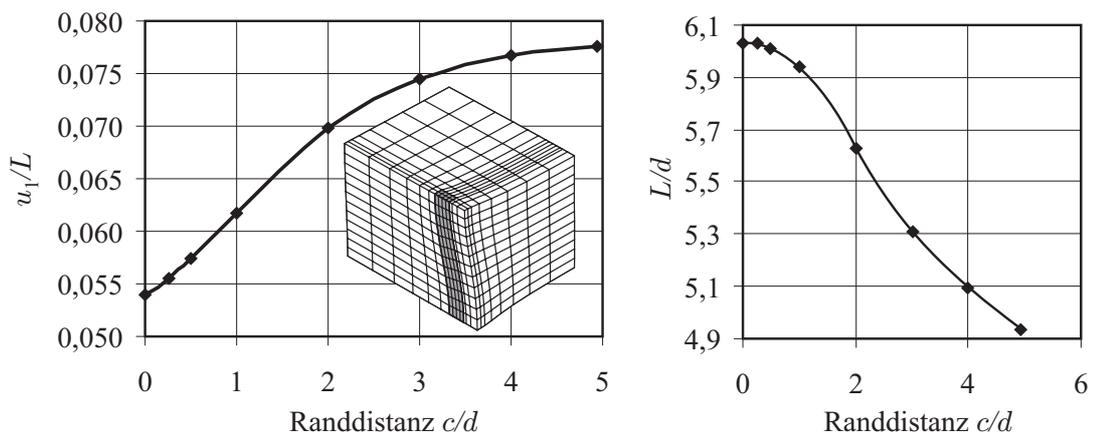
Tabelle 6.8: Materialdaten für die Faser und die Matrix sowie Durchmesser der Faser

Für das Faser- und das Matrixmaterial werden die Materialparameter wie in Tabelle 6.8 angegeben gewählt.



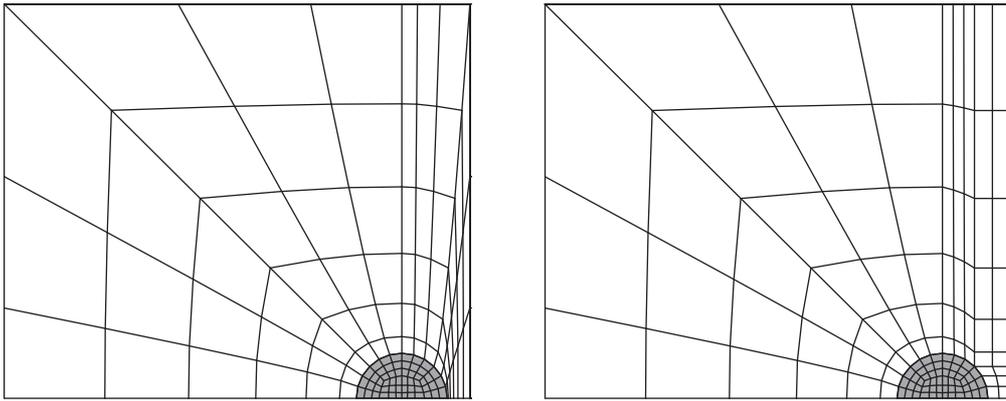
**Abbildung 6.13:** FE-Netz für  $c/d = 0$  und  $c/d = 1$  in jeweils erster Beuleigenform

Zur Berechnung der Kurve der minimalen kritischen Verkürzung  $u_1/L$  als Funktion des Randdistanzparameters  $c/d$  wird erneut das Bisektionsverfahren angewendet und zur Bestimmung der Beuleigenform das spezielle Eigenwertproblem gemäß Gleichung (5.81) gelöst. Das Berechnungsergebnis ist in Abbildung 6.14 dargestellt. Die kritische Beullänge  $L/d$  wächst mit kleiner werdendem Randabstand der Faser, da sich die stützende Wirkung durch die Matrix verringert. Die kritische Verkürzung  $u_1/L$  nimmt mit kleiner werdendem Randabstand  $c$  ab. Dies lässt sich ebenfalls auf die Verringerung der abstützenden Wirkung der Matrix auf die Faser erklären.



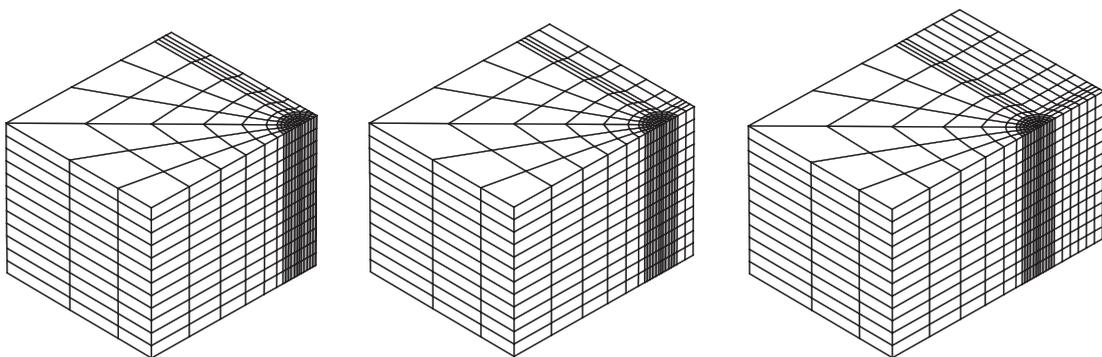
**Abbildung 6.14:** Kritische Verkürzung  $u_1/L$  und bezogene Beullänge  $L/d$  über Randdistanzparameter  $c/d$

Im Weiteren wird eine kreiszylindrische Faser in einer quaderförmigen Matrix (Modellierung 2) in der Nähe des freien Randes untersucht. Hierbei muss eine Änderung der Netzgeometrie vorgenommen werden, da ein einfaches Stauchen des Netzes des zum freien Rand hin schrumpfenden Matrixmaterials zu einer stark verzerrten Netzgeometrie führt, wie in Abbildung 6.15 (links) zu sehen ist. Daher wird die Matrix zum freien Rand hin gemäß Abbildung 6.15 (rechts) mit einer modifizierten Randnetzgeometrie diskretisiert.



**Abbildung 6.15:** Modifizierte Netzgeometrie für die Einzelfaser im Randbereich

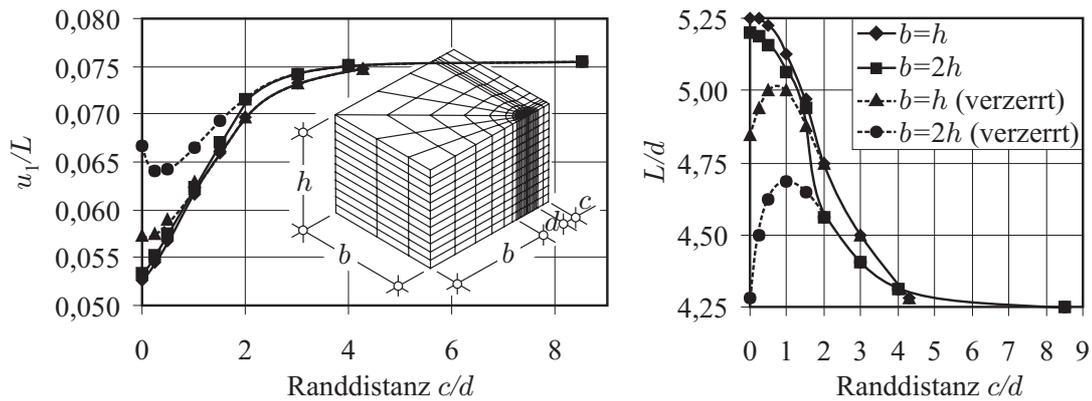
Für das Faser- und das Matrixmaterial werden die Materialparameter gemäß Tabelle 6.8 gewählt. Abbildung 6.16 zeigt die Verringerung der Elementanzahl zum kleiner werdenden Rand für eine Randdistanz  $c/d = 0,01 / 0,5 / 1,5$ .



**Abbildung 6.16:** Verwendete FE-Netze für die Randdistanz  $c/d = 0,01 / 0,5 / 1,5$

Für die Modellierung 2 wird die kritische Verkürzung  $u_1/L$  explizit mit einer Matrixbreite von  $b = h$  und  $b = 2h$  berechnet. Es ergibt sich durch die Verdopplung

der Breite  $b$  der Matrix für die kritische Verkürzung  $u_1/L$  lediglich eine Vergrößerung von weniger als einem Prozent, so dass, abgesehen vom freien Rand, die Annahme einer Einzelfaser eingebettet in eine unendlich breite Matrix bereits für die Breite  $b = h$  gerechtfertigt ist. Der Verlauf der minimalen kritischen Verkürzung  $u_1/L$  sowie die zugehörige bezogene Beullänge  $L/d$  als Funktion der Randdistanz  $c/d$  ist für  $b = h$  und  $b = 2h$  in Abbildung 6.17 dargestellt.

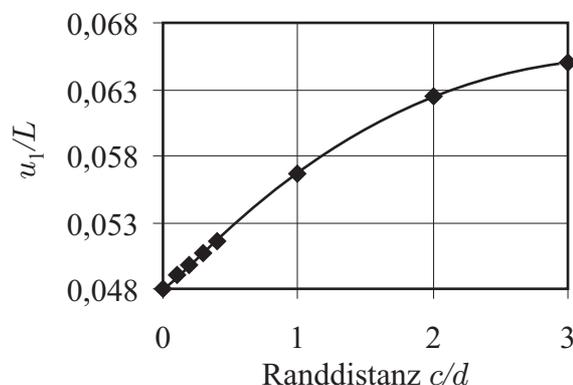


**Abbildung 6.17:** Kritische Verkürzung  $u_1/L$  und bezogene Beullänge  $L/d$  über Randdistanzparameter  $c/d$

Durch die verzerrte Netzgeometrie zeigt sich eine deutliche Diskrepanz der kritischen Verkürzung  $u_1/L$  in der Nähe des freien Randes im Vergleich zur modifizierten Diskretisierung. Dieser Einfluss ist jedoch bei einem Randabstand von etwa  $c/d = 2$  abgeklungen. Ausgehend von der Einzelfaser, eingebettet in eine in allen Richtungen breite Matrix, verringert sich die kritische Verkürzung bei einer Breite  $b = h$  von  $u_1/L = 0,075$  auf einen Wert von  $u_1/L = 0,053$  für die Faser direkt am freien Rand, was einer Verringerung von 30% entspricht. Der Unterschied der kritischen Verkürzung für die Matrixbreite  $b = 2h$  liegt hierbei unter einem Prozent und die Differenz der Beullänge bei 1,2%.

LAPUSTA & WAGNER [93] haben auf analytischem Wege eine Faser eingebettet in einer Matrix in der Nähe des freien Randes untersucht. Dort werden die Materialparameter gemäß Tabelle 6.8 verwendet. Der Verlauf der kritischen Verkürzung  $u_1/L$  in Abhängigkeit der Randdistanz  $c/d$  ist in Abbildung 6.18 wiedergegeben. Qualitativ stimmt der Verlauf der kritischen Dehnung in Abhängigkeit der Randdistanz mit den hier berechneten numerischen Ergebnissen überein. Es ergibt sich für eine Faser unmittelbar am freien Rand eine kritische Verkürzung von  $u_1/L = 0,048$  und für den Abstand  $c/d = 3$  ein Wert  $u_1/L = 0,065$ . Die mit der

Modellierung 2 ermittelte kritische Verkürzung unmittelbar am freien Rand ist um 10,4% größer als diejenige von LAPUSTA & WAGNER [93].



**Abbildung 6.18:** Kritische Verkürzung  $u_1/L$  über Randdistanzparameter  $c/d$  nach LAPUSTA & WAGNER [93]

Die Einzelfaser, die sich direkt am freien Rand befindet, entspricht dem Modell des elastisch gebetteten Balkens aus Kapitel 6.2. Für den Bettungsmodul ergibt sich gemäß Tafel 6.1 für die Materialparameter der Matrix nach Tabelle 6.8 ein Wert von  $k = 1,370 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2$ . Daraus resultiert aus Gleichung (6.10) eine kritische Dehnung von  $u_1/L = 0,033$ .

### 6.6.2 Transversal isotropes Fasermaterial

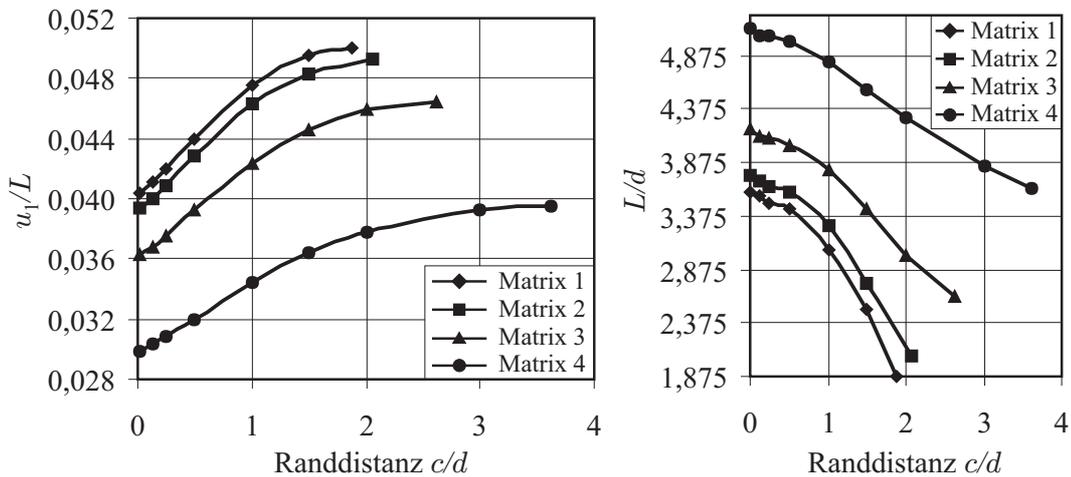
Nun werden die Effekte des freien Randes mit transversal isotropem Fasermaterial untersucht, was im Hinblick auf Kohlenstoff- oder Aramidfasern gerechtfertigt ist. In Anlehnung an Kapitel 6.5 wird für die Faser mit den in Tabelle 6.9 angegebenen Materialparametern gerechnet. Die jeweiligen E-Moduli der Matrix können Tabelle 6.10 entnommen werden.

$E_1^f$	$= 390 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2$	$\nu_{12}^f$	$= 0,20$
$E_2^f$	$= 14 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2$	$\nu_{23}^f$	$= 0,25$
$G_{12}^f$	$= 20 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2$	$d$	$= 8,0 \mu\text{m}$

**Tabelle 6.9:** Materialdaten des verwendeten Fasermaterials

Die gewonnenen Erkenntnisse aus dem vorangehenden Unterkapitel werden konsequent umgesetzt. Es wird daher lediglich mit einer Matrixbreite  $b = h$  und

der modifizierten Netzgeometrie gemäß Abbildung 6.15 (rechts) gerechnet. Die Kurven der minimalen kritischen Verkürzung  $u_1/L$  sowie die Beullänge  $L/d$  in Abhängigkeit des Randdistanzparameters  $c/d$  sind in Abbildung 6.19 für die vier unterschiedlichen Matrixmaterialien dargestellt.



**Abbildung 6.19:** Kritische Verkürzung  $u_1/L$  und Beullänge  $L/d$  über Randdistanz  $c/d$

Es zeigt sich die gleiche Tendenz wie bei isotropem Fasermaterial in der Nähe des freien Randes. Darüber hinaus wird der mit sinkendem E-Modul des Matrixmaterials schwächer werdende stützende Einfluss deutlich.

	$E [N/mm^2]$	$(u_1/L)^\infty$	$(u_1/L)^0$	$D$
Matrix 1	$2,6000 \cdot 10^3$	0,0501	0,0404	19,4 %
Matrix 2	$2,4375 \cdot 10^3$	0,0492	0,0394	20,1 %
Matrix 3	$2,0000 \cdot 10^3$	0,0464	0,0362	21,8 %
Matrix 4	$1,3000 \cdot 10^3$	0,0395	0,0299	24,4 %

**Tabelle 6.10:** Differenz  $D$  von  $(u_1/L)^\infty$  und  $(u_1/L)^0$

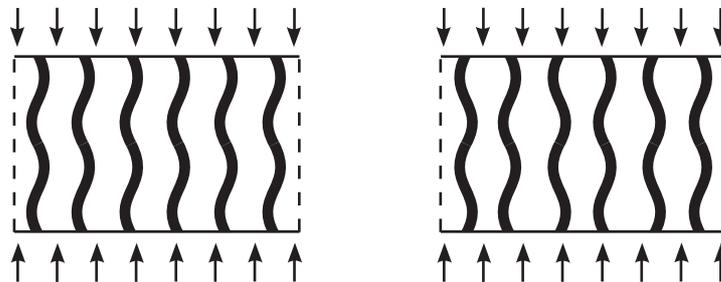
Der Stabilitätsfall tritt bei der Matrix mit dem höchsten E-Modul im Vergleich zu den anderen Matrixmaterialien später ein. Die prozentuale Differenz  $D$  der minimalen kritischen Verkürzung zwischen der Faser in einer breiten Matrix  $(u_1/L)^\infty$  aus Kapitel 6.5 und der minimalen kritischen Verkürzung  $(u_1/L)^0$  direkt am Rand, bezogen auf  $(u_1/L)^\infty$ , ist in Tabelle 6.10 angegeben. Je weicher das Matrixmaterial ist, desto größer wird die prozentuale Differenz  $D$ , so dass der Stabilitätsfall demnach bei weicherem Matrixmaterial und geringerem Randabstand früher eintritt.

## 6.7 Periodizität

### 6.7.1 Periodizität einer Faserreihe

In der nun folgenden Untersuchung wird das Stabilitätsverhalten einer periodisch angeordneten Faserreihe mit sehr vielen Fasern betrachtet. Beim in-phase-Mikrobeulen weichen die Fasern der Druckbeanspruchung gleichgerichtet aus, wohingegen beim out-of-phase-Mikrobeulen die Fasern gleich, aber entgegengesetzt gerichtet ausweichen, vgl. Abbildung 6.20. Diese Arbeit beschränkt sich auf die Untersuchung des in-phase-Mikrobeulens, da dies, wie z. B. schon von ROSEN [123] gezeigt wurde, zu kleineren kritischen Lasten führt und damit maßgebend ist.

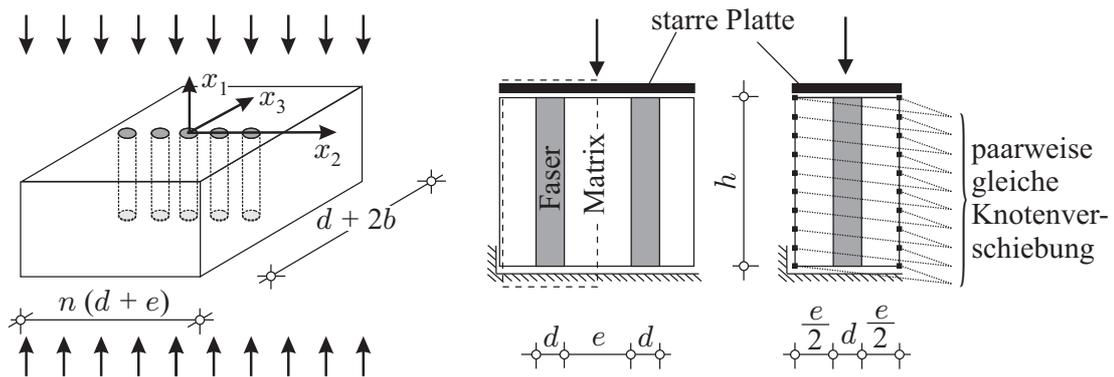
Unter der Annahme von in-phase-Mikrobeulen werden periodische Randbedingungen eingeführt, um die Anzahl der Freiheitsgrade zu reduzieren und Rechenzeit einzusparen. Um Randeffekte auszuschließen, besitzt die Matrix die Breite  $b = h$  in  $x_3$ -Richtung. Es werden Eigenwertuntersuchungen sowohl für isotropes als auch transversal isotropes Fasermaterial durchgeführt. Die Symmetrie der Beulebene wird genutzt, so dass am halben System gerechnet und die Anzahl der Freiheitsgrade reduziert werden kann. Daher werden entsprechende Verschiebungsbehinderungen an der  $x_1$ - $x_2$ -Symmetrieebene in Richtung  $x_3$  eingeführt.



**Abbildung 6.20:** Periodisches in-phase (links) und out-of-phase (rechts) Mikrobeulen

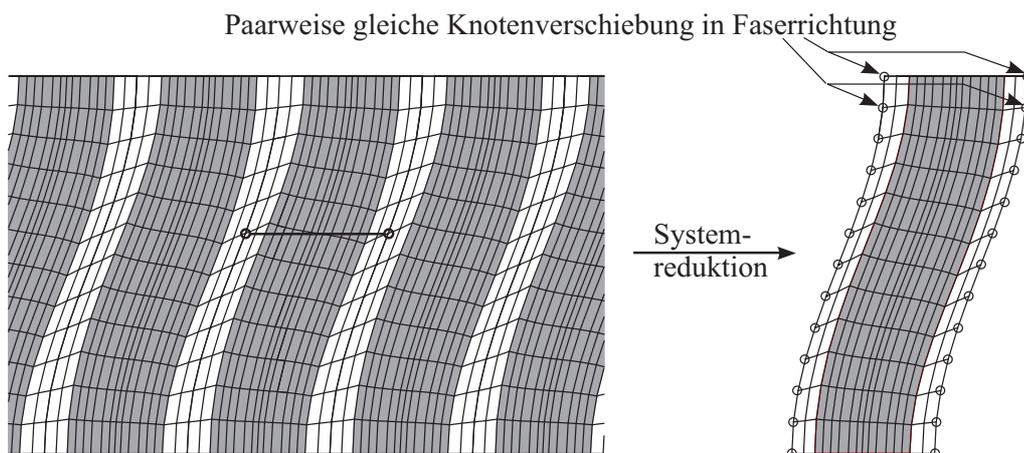
Das in-phase-Mikrobeulen besitzt einen solchen Charakter, dass eine einzelne Faser eingebettet in einer Matrix untersucht werden kann, wenn entsprechende sog. antimetrische Randbedingungen gefunden werden. Aus der Baustatik ist die Reduktion symmetrischer Systeme unter Zuhilfenahme von Symmetrie- bzw. Antimetrierandbedingungen bekannt. Besitzt ein System viele Symmetrieachsen, so kann das System in der Weise reduziert werden, dass es genau zwei Symmetrieebenen besitzt und bei der richtigen Wahl der Randbedingungen das Verhalten des gesamten Systems widerspiegelt. Im vorliegenden Fall befinden sich die  $x_1$ - $x_3$ -Symmetrieebenen bei den beiden Koordinaten  $x_2 = \pm 1/2(d + e)$ . Es muss jeder Punkt auf der einen Symmetrieebene die gleiche Randbedingung erhalten wie

der entsprechende Punkt auf der gegenüberliegenden Symmetrieebene. Da sich die periodische Einheitszelle bei Belastung verkürzt, können keine Verschiebungsbehinderungen im klassischen Sinne in  $x_1$ -Richtung (Faserrichtung) angeordnet werden. Die antimetrischen Randbedingungen werden hier durch paarweise Vorgabe gleicher Verschiebungen in Faserrichtung realisiert. In Abbildung 6.21 ist der gerade beschriebene Sachverhalt für  $n$  Fasern angeordnet in einer Reihe dargestellt.



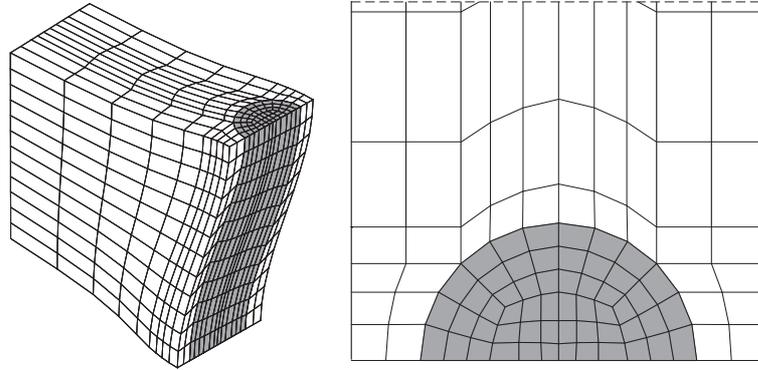
**Abbildung 6.21:** Systemskizze und Modellwahl mit periodischen Randbedingungen

Eine Untersuchung an vielen Fasern unter vorgegebenem Faserabstand  $e$  rechtfertigt diese Modellwahl. In diesem Fall führt ein FE-Modell mit einer großen Anzahl von Fasern mit dem Abstand  $e$  zu einer identischen kritischen Verkürzung  $u_1/L$ , wenn diese mit Hilfe der Einheitszelle mit periodischen Randbedingungen berechnet wird. Abbildung 6.22 zeigt die Systemreduktion auf die Einheitszelle mit periodischen Randbedingungen.



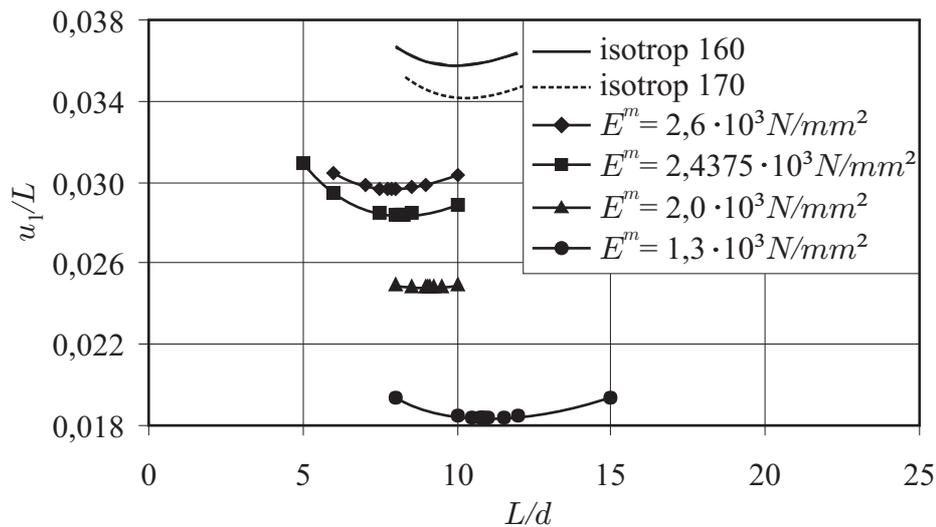
**Abbildung 6.22:** Periodisches Mikrobeulen und Systemreduktion auf die Einheitszelle mit periodischen Randbedingungen

Zur Verdeutlichung des gewählten FE-Netzes ist in Abbildung 6.23 das verwendete Netz in der ersten Beuleigenform angegeben.



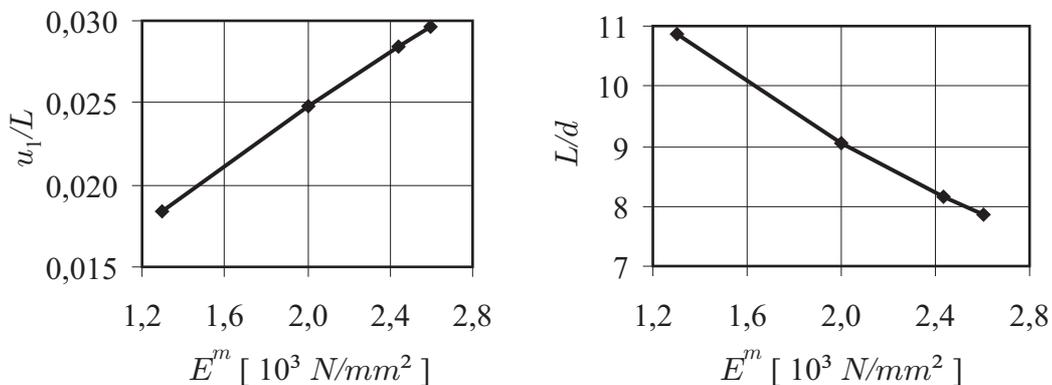
**Abbildung 6.23:** FE-Netz der Faserreihe reduziert auf ein doppelsymmetrisches System in der ersten Beuleigenform

Für isotropes Fasermaterial werden die Materialparameter gemäß Tabelle 6.2 übernommen. Für transversal isotropes Fasermaterial werden Kenngrößen entsprechend Tabelle 6.6 verwendet. Die Fasern werden in einer isotropen Matrix mit einer Querdehnzahl von 0.34 und den E-Moduli von jeweils  $E^m = 2,6 / 2,4375 / 2,0 / 1,3 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2$  eingebettet. Mit Hilfe des Bisektionsverfahrens wird die kritische Verkürzung  $u_1/L$  berechnet und mit dem speziellen Eigenwertproblem (5.81) die zugehörige Beuleigenform bestimmt.



**Abbildung 6.24:** Kritische Verkürzung  $u_1/L = f(L/d)$  für transversal isotrope und isotrope Fasern für verschiedene Matrix-E-Moduli in einer Reihe

Abbildung 6.24 zeigt die daraus resultierende kritische Verkürzung  $u_1/L$  für transversal isotrope und isotrope Fasern als Funktion der Beulhalbwelle  $L/d$  mit einem Faserabstand von  $e/d = 0,25$ . Mit steigendem Elastizitätsmodul des Matrixmaterials sinkt auch in diesem Fall die Beullänge  $L/d$  bei steigender minimaler kritischer Verkürzung  $u_1/L$ . Das Stabilitätsverhalten der Faserreihe mit transversal isotropem Fasermaterial besitzt kleinere kritische Verkürzungen als das der isotropen Faserreihe. Die dimensionslose Beullänge  $L/d$  sowie die zugehörige minimale kritische Verkürzung  $u_1/L$  sind in Abbildung 6.25 für die transversal isotrope Faserreihe jeweils in Abhängigkeit des Elastizitätsmoduls des Matrixmaterials dargestellt und veranschaulichen diese Tendenz.



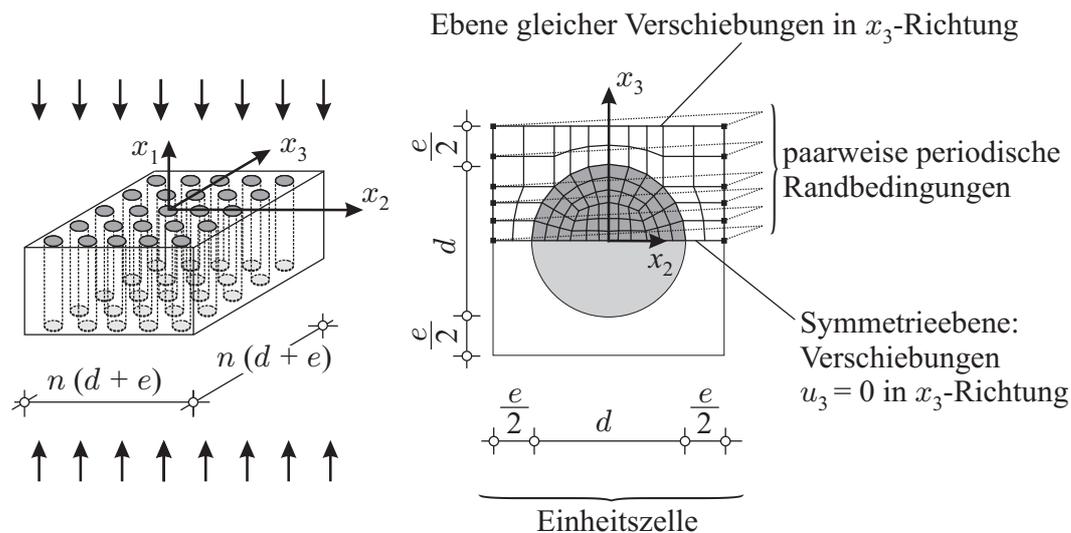
**Abbildung 6.25:** Minimale kritische Verkürzung  $u_1/L$  sowie Beullänge ( $L/d$ ) für verschiedene Matrix-E-Moduli

In LAPUSTA [88] finden sich analytische Lösungen für die kritische Verkürzung  $u_1/L$  einer Faserreihe für isotropes, inkompressibles Neo-Hooke-Material in einer unendlich breiten Matrix. Bei einem Verhältnis  $E^f/E^m = 170$  ergibt sich dort für einen Faserabstand  $e/d = 0,25$  eine minimale kritische Verkürzung  $u_1/L = 0,036$  bei einer Beullänge von  $L/d = 11,23$ . Zum Vergleich wird daher an der oben beschriebenen Modellierung erneut die minimale kritische Dehnung berechnet. Für Dehnungen im Bereich von 7–10% liefern St. Venant-Kirchhoff-, bzw. Neo-Hooke-Materialien annähernd identische Ergebnisse, wie KLINKEL [80] an einer Zugprobe gezeigt hat. Daher wurde die kritische Verkürzung  $u_1/L$  als Funktion der bezogenen Beullänge  $L/d$  für ein Verhältnis  $E^f/E^m = 170$  sowie einer Querdehnzahl von  $\nu^f = \nu^m = 0,3$  berechnet, in Abbildung 6.24 aufgenommen und mit "isotrop 170" bezeichnet. Die minimale kritische Verkürzung beträgt hierbei 0,034 und weicht damit um 5% von der analytischen Lösung ab.

### 6.7.2 Biperiodizität

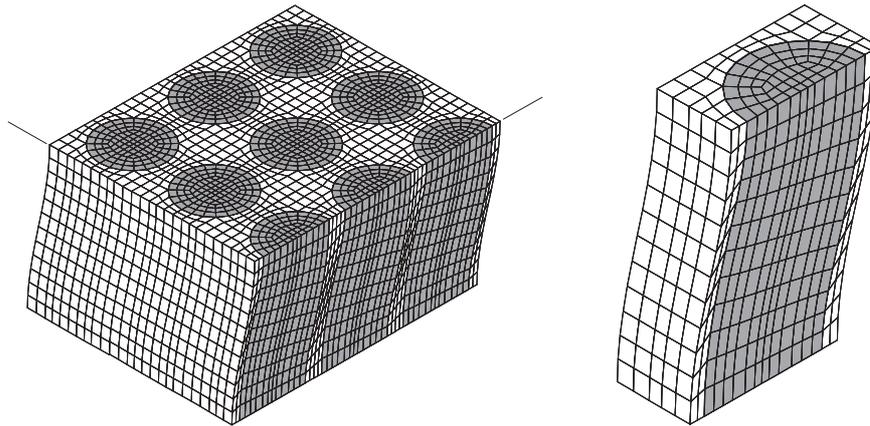
In Kapitel 3.8 wurde die Einheitszelle als Volumenelement eingeführt, das in seiner Größe repräsentativ für die Mikrostruktur des betrachteten Teilvolumens des Materials ist. Mit der Wahl entsprechender Randbedingungen kann die periodische Einheitszelle mit den Erkenntnissen der in einer Reihe angeordneten Fasern modelliert werden. Die innere Struktur des Verbundwerkstoffs setzt sich dann aus regelmäßig aufeinander folgenden Einheitszellen zusammen, womit das repräsentative Volumenelement auf die periodische Einheitszelle mit periodischen Randbedingungen reduziert wird. Unter der Annahme von periodischem in-phase-Mikrobeulen gemäß Abbildung 6.20 werden zunächst einige Randbedingungen eingeführt.

Die Symmetrie der Beulebene wird ausgenutzt, so dass am halben System gerechnet werden kann. Diese Halbierung führt auf einen unendlichen Halbraum. Aus diesem wird ein unendlich langer Streifen der Breite  $1/2(d + e)$ , indem für alle Punkte in der Ebene parallel zur Beulebene ( $x_1$ - $x_2$ -Ebene) an der Stelle  $x_3 = 1/2(d + e)$  lediglich gleiche Verschiebungen in  $x_3$ -Richtung zugelassen werden. Aus diesem Streifen entsteht in Analogie zum vorigen Unterkapitel schließlich die periodische Einheitszelle. Unter Vorgabe paarweiser gleicher Verschiebungen in  $x_1$ -Richtung an den Symmetrieebenen bei  $x_2 = \pm 1/2(d + e)$  sind die für die Einheitszelle notwendigen periodischen Randbedingungen eingearbeitet. Die Einheitszelle mit den beschriebenen Randbedingungen ist in Abbildung 6.26 grafisch dargestellt.



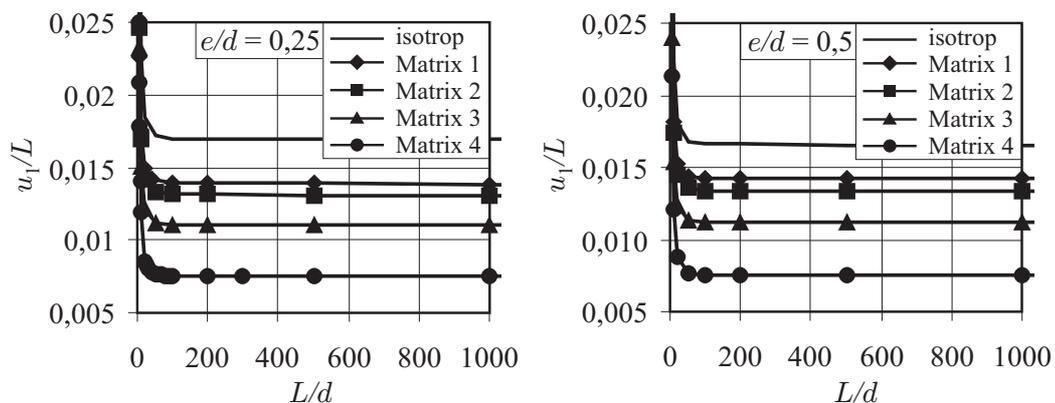
**Abbildung 6.26:** Systemskizze und Wahl der biperiodischen Randbedingungen

In Kapitel 3.8 wurde der Faserabstand  $e = x_e d$  als Maß für den Faseranteil eines unidirektional verstärkten Faserverbundwerkstoffs eingeführt. Der hier verwendete Faserabstand von  $e/d = 0,25$  bzw.  $e/d = 0,50$  entspricht gemäß Gleichung (3.49) einem Faservolumenanteil von 50 bzw. 35%. In Abbildung 6.27 ist das biperiodische Mikrobeulen an einem Ausschnitt des unidirektional verstärkten Faserverbundwerkstoffs sowie die Einheitszelle in der ersten Beuleigenform dargestellt.



**Abbildung 6.27:** Biperiodisches Mikrobeulen mit gewählter Einheitszelle unter Ausnutzung der Symmetrie in erster Beuleigenform

Der Verlauf der kritischen Verkürzung  $u_1/L$  als Funktion der Beulwelle  $L/d$  ist in Abbildung 6.28 für den jeweiligen Faserabstand dargestellt.



**Abbildung 6.28:** Kritische Verkürzung  $u_1/L = f(L/d)$  der verschiedenen Matrix-E-Moduli für einen Faserabstand  $e/d = 0,25$  (links) und  $e/d = 0,50$  (rechts)

Für das Mikrobeulen des biperiodischen Systems aus Fasern und Matrix ist aus Abbildung 6.28 ersichtlich, dass sich ab einer Beulhalbwelle von etwa  $L/d = 100$  jeweils eine untere Grenze für die kritische Verkürzung  $u_1/L$  einstellt.

Für isotrope Fasern mit  $E^f = 390 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2$ ,  $E^m = 2,4375 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2$  und einer Querdehnzahl von  $\nu^f = \nu^m = 0,3$  ergibt sich eine kritische Verkürzung für einen Faserabstand  $e/d = 0,25$  von  $u_1/L = 0,0169$  und für  $e/d = 0,50$  von  $u_1/L = 0,0166$ . Die jeweilige kritische Verkürzung  $u_1/L$  für transversal isotropes Fasermaterial ist in Tabelle 6.11 für die verschiedenen Matrixsteifigkeiten angegeben.

	$e/d$	$E \text{ [N/mm}^2\text{]}$	$u_1/L$
Matrix 1	0,25	$2,6000 \cdot 10^3$	0,0139
	0,50	$2,6000 \cdot 10^3$	0,0142
Matrix 2	0,25	$2,4375 \cdot 10^3$	0,0131
	0,50	$2,4375 \cdot 10^3$	0,0134
Matrix 3	0,25	$2,0000 \cdot 10^3$	0,0110
	0,50	$2,0000 \cdot 10^3$	0,0111
Matrix 4	0,25	$1,3000 \cdot 10^3$	0,0075
	0,50	$1,3000 \cdot 10^3$	0,0075

**Tabelle 6.11:** Kritische Verkürzung  $u_1/L$  der verschiedenen Matrix-E-Moduli für einen Faserabstand  $e/d = 0,25$  und  $e/d = 0,50$

EHRENSTEIN [44] merkt an, dass die Beullänge des Mikrobeulens in weiten Bereichen streut, i. d. R. jedoch zwischen dem 10- bis 100-fachen des Faserdurchmessers. Er führt diese Streuung auf die Problematik des Druckversuchs eines unidirektional verstärkten Verbundwerkstoffes in Bezug auf die Versuchsbedingungen (Lasteinleitung und damit verbundene ungewollte Ausmitten, Imperfektionen der Fasergeometrie und -anordnung usw.) zurück. Die numerischen Ergebnisse unterstreichen die fehlende Eindeutigkeit in Bezug auf die Beullänge.

ROSEN [123] hat in seiner linearen, zweidimensionalen Stabilitätsuntersuchung bereits gezeigt, dass die sich einstellende Beulhalbwelle, bezogen auf den Faserdurchmesser, sehr groß ist und mit zunehmendem Faservolumenanteil immer größer wird.

HAHN & SOHI [61] haben das Mikroinstabilitätsverhalten an unterschiedlichen Proben untersucht. Für Kohlenstofffasern T700 mit einem E-Modul von  $E^f = 234 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2$  eingebettet in Epoxidharz (Epon 815) mit  $E^m = 2,13 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2$  (entspricht einem Verhältnis von  $E^f/E^m = 110$ ) ergibt sich

dort bei einem Faservolumenanteil von 50 % eine kritische Verkürzung  $u_1/L$  im Bereich zwischen 0,0190 – 0,0214. Für diese Materialkennwerte ergibt sich mit Hilfe der numerischen Modellierung (vgl. Abbildung 6.27) unter Verwendung isotroper Materialeigenschaften und einer Querdehnzahl von  $\nu^f = \nu^m = 0,3$  eine minimale kritische Dehnung von  $u_1/L = 0,0236$  für einen Faservolumenanteil von ebenfalls 50 %. Die Überschätzung der kritischen Verkürzung liegt in einem Bereich zwischen 10 und 24 %.

Aufgrund des transversal isotropen Materialverhaltens der Kohlenstofffasern wird mit den in Tabelle 6.12 angegebenen Größen erneut die kritische Verkürzung berechnet. Die Materialkenngrößen für die Kohlenstofffasern T700 können z. B. SCHÜRMAN [131] entnommen werden. Es ergibt sich damit eine kritische Verkürzung von  $u_1/L = 0,022$  mit einer Abweichung zwischen 3 und 16 % in Bezug auf die Messergebnisse.

$E_1^f$	$= 234 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2$	$\nu_{12}^f$	$= 0,23$
$E_2^f$	$= 28 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2$	$\nu_{23}^f$	$= 0,23$
$G_{12}^f$	$= 50 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2$	$d$	$= 8,0 \text{ } \mu\text{m}$

**Tabelle 6.12:** Materialdaten der verwendeten Kohlenstofffaser

Diese Abweichungen lassen sich durch die dem Experiment zugrunde liegenden Unschärfen erklären, denn neben Matrixfehlern und Imperfektionen seitens der Faserausrichtung und der Lasteinleitung ist der Verbund zwischen Faser und Matrix nicht perfekt. LAPUSTA & WAGNER [93] haben gezeigt, dass die kritischen Verkürzungen durch die Annahme eines imperfekten Verbunds zwischen Faser und Matrix um bis zu 16 % geringer sein können als bei perfektem Verbund. Des Weiteren ist in LAPUSTA & WAGNER [92] dargestellt, dass sich die kritische Verkürzung je nach Größe und Abstand einer Fehlstelle in der Matrix bei perfektem Verbund zwischen Faser und Matrix um bis zu 20 % und bei vollständig reibungsfreiem Verbund und einer Fehlstelle sogar um bis zu 36 % reduziert.

Bei der Modellierung mit Finiten Elementen würde sich unter Berücksichtigung von Fehlstellen im Matrixmaterial der Form  $\tilde{E}^m = E^m (1 - \zeta)$ , wobei  $\zeta$  ein Schädigungsparameter ist, die kritische Verkürzung weiter verringern und den experimentellen Ergebnissen sehr nahe kommen. Mit den entwickelten Modellierungen und Berechnungsmethoden ist damit ein geeignetes Werkzeug entstanden, um das Mikroinstabilitätsverhalten von Faserverbundwerkstoffen im Vorfeld sehr genau abzuschätzen.

## 7 Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurde das Mikroinstabilitätsverhalten von unidirektional verstärkten Faserverbundwerkstoffen mit Hilfe der Finite-Element-Methode simuliert. Es wurde jeweils die kritische Verkürzung in Faserlängsrichtung und die zugehörige Beullänge bei Erreichen des Stabilitätspunktes anhand verschiedener Modellierungen berechnet.

Zunächst wurden kontinuumsmechanische Grundlagen als Voraussetzung für eine geometrisch lineare und nichtlineare Finite-Element-Formulierung bereitgestellt. Anschließend wurden einige Anwendungsgebiete von Faserverbundwerkstoffen dargestellt sowie die Bestandteile dieser Werkstoffe erläutert. Da das Matrixmaterial eines Faserverbundwerkstoffs meist aus einem Polymer besteht, wurden die Polymerhauptgruppen, deren struktureller Aufbau sowie deren Eigenschaften vorgestellt. Es folgte die Darstellung der in der Praxis hauptsächlich verwendeten Faserarten. Hierbei wurden wiederum deren struktureller Aufbau und die mechanischen Eigenschaften sowie die jeweilige Herstellungsart beschrieben. Dem anisotropen Materialverhalten von Faserverbundwerkstoffen auf der Makroebene wurde durch die Aufbereitung des entsprechenden anisotropen Stoffgesetzes Rechnung getragen. Kohlenstoff- und Aramidfasern weisen ebenfalls anisotropes Materialverhalten auf und können daher mit Hilfe des aufbereiteten Stoffgesetzes beschrieben werden. Durch geeignete Homogenisierungsverfahren konnte der inhomogene Werkstoff, bestehend aus Fasern und Matrix, in ein homogenes Ersatzmaterial mit effektiven Werkstoffkenngrößen überführt werden. Dabei wurde der Faservolumenanteil als zentrale Variable definiert.

Faserverbundwerkstoffe zeigen unterschiedliche Versagensmechanismen. Diese wurden erläutert und im Anschluss daran verschiedene Versagenskriterien sowie einige Degradationsmodelle vorgestellt. Auf das Thema Delamination, das zugehörige Versagenskriterium und die Vorstellung der Grundlagen für die Entwicklung kohäsiver Interface-Elemente zur Beschreibung fortschreitender Delamination wurde separat eingegangen.

Der geometrisch nichtlinearen Finite-Element-Formulierung liegt die schwache Form des Gleichgewichts zugrunde. Dank der isoparametrischen Formulierung wurde sowohl die Geometrie als auch die Verschiebung einer Struktur mit denselben Ansätzen approximiert. Die Methode der hybriden Verzerrungen wurde als eine Möglichkeit zur Minderung von Schublocking vorgestellt. Mit Hilfe des Bisektionsverfahrens konnten singuläre Punkte berechnet und über eine begleitende Eigenwertanalyse die zugehörige Eigenform bestimmt werden.

Das Stabilitätsverhalten einer Faser in einer Matrix konnte zunächst auf das verhältnismäßig einfache Stabilitätsverhalten des elastisch gebetteten Balkens un-

endlicher Länge zurückgeführt werden. Hierbei war die Bestimmung des Bettungsmoduls aus den Materialkennwerten der Matrix erforderlich. Im Anschluss daran erfolgte die Aufbereitung der dreidimensionalen analytischen Beschreibung des Stabilitätsverhaltens einer Einzelfaser in einer Matrix. Es wurden unterschiedliche FE-Modellierungen zur Beschreibung der Geometrie der Einheitszelle entwickelt und untereinander verglichen. Dabei konnte durch eine Variation der Größe der faserumschließenden Matrix gezeigt werden, dass bei der Modellierungswahl eine genügend große Matrix gewählt wurde. Aufgrund des anisotropen Verhaltens der bereits genannten Faserarten wurden neben isotropen auch anisotrope Fasern bei der Stabilitätsuntersuchung berücksichtigt. Nach der Untersuchung des Einflusses der faserparallelen Oberfläche auf das Stabilitätsverhalten wurden periodisch angeordnete Fasern in der Matrix untersucht. Es konnten Symmetrieeigenschaften genutzt werden, um den Berechnungsaufwand zu minimieren. Dazu mussten geeignete Randbedingungen gefunden und auf die Einheitszelle abgebildet werden. Es folgten schließlich Vergleiche zu experimentellen Untersuchungen.

Insgesamt konnte eine Methode entwickelt werden, bei welcher die kritische Verkürzung eines Faserverbundwerkstoffs bei Erreichen der Mikroinstabilität bestimmbar ist. Aufgrund der perfekten Verbundbedingungen in der Grenzfläche zwischen Faser und Matrix entsprechen die erhaltenen Ergebnisse einer oberen Schranke für die kritische Verkürzung, da reale Materialien und Grenzflächen geschädigt sind. Eine untere Schranke für die kritische Verkürzung (z. B. bezüglich der Grenzfläche mit Defekten oder Schädigung) kann im Rahmen einer Untersuchung mit der Methode der Finiten Elemente durch eine entsprechende Modellierung des Verbunds in der Grenzfläche zwischen Faser und Matrix numerisch bestimmt werden. Man kann z. B. gleiche Verschiebungen nur in Faserquerrichtung positionsgleicher Punkte vorgeben. Eine weitere Möglichkeit, die Grenzfläche wirklichkeitsnäher abzubilden, ist durch die Verwendung von Interface-Elementen zu realisieren. Darüber hinaus kann bei Erreichen des Stabilitätspunktes durch Aufbringen der zugehörigen und entsprechend skalierten ersten Eigenform als Imperfektion ein Pfadwechsel vom Primärpfad auf den Sekundärpfad erfolgen und so das Nachbeulverhalten studiert werden. Die Einarbeitung geometrischer Imperfektionen kann dabei entscheidende Auswirkungen auf das Mikroinstabilitätsverhalten haben und könnte in zukünftigen Untersuchungen auch im Hinblick auf das Nachbeulverhalten Berücksichtigung finden.

## Literatur

- [1] ALBER, D.: *Das Knicken elastisch gebetteter Balken*. Bauingenieur 82(2) (2007), S. 95–102.
- [2] ALTENBACH, H. / ALTENBACH, J. / KISSING, W.: *Dünnwandige Stab- und Stabschalenträgerwerke*. Verlag Vieweg, Braunschweig / Wiesbaden, 1994.
- [3] ALTENBACH, H. / ALTENBACH, J. / RIKARDSM, R.: *Einführung in die Mechanik der Laminat- und Sandwichträgerwerke*. Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Stuttgart, 1996.
- [4] ALTENBACH, H. / KISSING, W.: *Mechanics of Composite Structural Elements*. Springer-Verlag, Heidelberg / Berlin, 2004.
- [5] ARPE, H.-J.: *Industrielle Organische Chemie : bedeutende Vor- und Zwischenprodukte*. Band 6, Wiley-VCH, Weinheim, 2007.
- [6] ASTM: *Standard test method for apparent interlaminar shear strength of parallel fiber composites by short-beam method*. Test Method D2344-01, American Society for Testing and Materials, West Conshohocken, PA, USA, 1995.
- [7] ASTM: *Standard test method for mixed mode I–mode II interlaminar fracture toughness of unidirectional fiber reinforced polymer matrix composites*. Test Method D6671-01, American Society for Testing and Materials, West Conshohocken, PA, USA, 2002.
- [8] ASTM: *Standard test method for mode I interlaminar fracture toughness of unidirectional fiber-reinforced polymer matrix composites*. Test Method D5528-01, American Society for Testing and Materials, West Conshohocken, PA, USA, 2002.
- [9] BAŞAR, Y. / WEICHERT, D.: *Nonlinear Continuum Mechanics of Solids*. Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg, 2000.
- [10] BADER, M.G.: *Tensile strength of uniaxial composites*. Sci. and Eng. of Composite Materials 1(1) (1988), S. 1–11.
- [11] BALZANI, C. / WAGNER, W.: *An interface element for the simulation of delamination in unidirectional fiber-reinforced composite laminates*. Engineering Fracture Mechanics doi:10.1016/j.engfracmech.2007.03.013 (2007).

- 
- [12] BARENBLATT, G.I.: *The mathematical theory of equilibrium crack in the brittle fracture*. Advance in Applied Mechanics 7 (1962), S. 55–129.
- [13] BASCHEK, G. / HARTWIG, G. / ZAHRADNIK, F.: *Effect of water absorption in polymers at low and high temperatures*. Polymer 40 (1999), S. 3433–3441.
- [14] BATHE, K.-J. / ALTENBACH, J. / KISSING, W.: *Finite-Element-Methoden*. Band 2, Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg, 2002.
- [15] BAZANT, Z.P. / CEDOLIN, L.: *Stability of Structures: Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories*. Oxford University Press, New York / Oxford, 1991.
- [16] BELYTSCHKO, T. AND LIU, W.K. / MORANNB.: *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999.
- [17] BERTHELOT, J.-M.: *Composite Materials: Mechanical Behavior and Structural Analysis*. Springer-Verlag, New York / Berlin / Heidelberg / Barcelona / Budapest / Hong Kong / London / Milan / Paris / Singapore / Tokyo, 1999.
- [18] BLASS, H.J. / GÖRLACHER, R. / STECK, G.: *Informationsdienst Holz: Holzbauwerke STEP 1 - Konstruktion und Bemessung*. Druckhaus Fromm, Osnabrück / Wien / Zürich, 1995.
- [19] BRAESS, D.: *Finite Elemente*. Springer-Verlag, Heidelberg, 1992.
- [20] BRENDL, B.: *Zur geometrischen nichtlinearen Elastostatik*. Bericht Nr. 79-1, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1979.
- [21] BUDIANSKY, B.: *Theory of buckling and post-buckling behavior of elastic structures*. Advanced Applied Mechanics 14 (1974), S. 2–63.
- [22] BUDIANSKY, B.: *Micromechanics*. Computers and Structures 16 (1983), S. 3–12.
- [23] BUDIANSKY, B. / FLECK, N.A.: *Compressive failure of fiber composites*. J. Mech. Phys. Solids 41(1) (1993), S. 183–211.
- [24] CHRISTENSEN, R.M.: *Mechanics of Composite Materials*. John Wiley and Sons, New York / Chichester / Brisbane / Singapore, 1979.

- [25] CHRISTENSEN, R.M. / LO, K.H.: *Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models*. Journal of Mechanics and Physics of Solids 27 (1979), S. 315–330.
- [26] CLARK, G. / SAUNDERS, D.S. / VAN BLARICUM, T.J. / RICHMOND, M.: *Moisture absorption in graphite/epoxy laminates*. Composites Science and Technology 39 (1990), S. 355–375.
- [27] CORDES, R.D. / DANIEL, I.M.: *Determination of interfacial properties from observations of progressive fiber debonding and pullout*. Composites Engineering 5(6) (1994), S. 633–648.
- [28] COX, H.L.: *The elasticity and strength of paper and other fibrous materials*. British Journal of Applied Physics 3 (1981), S. 72–79.
- [29] CRISFIELD, M.A.: *A fast incremental/iterative solution procedure that handles snap through*. Comput. & Struct. 13 (1981), S. 55–62.
- [30] CRISFIELD, M.A. / DAVIES, G.A.O. / HELLWEG, H.-B.: *Progressive delamination using interface elements*. Journal of Composite Materials 32(14) (1998), S. 1246–1372.
- [31] CRISFIELD, M.A. / JELENIC, G. / MI, Y. / ZHONG, H.-G. / FAN, Z.: *Some aspects of the non-linear finite element method*. Finite Elements in Analysis and Design 27 (1997), S. 19–40.
- [32] DANIEL, I.M. / ISHAI, O.: *Engineering Mechanics of Composite Materials*. Oxford University Press, New York / Oxford, 2006.
- [33] DAVIDSON, B.D. / KRÜGER, R. / KÖNIG, M.: *Effect of stacking sequence on energy release rate distributions in multidirectional DCB and ENF specimens*. Engineering Fracture Mechanics 55 (1996), S. 557–569.
- [34] DÖBERT, C.: *Meso- makromechanische Modellierung von Faserverbundwerkstoffen mit Schädigung*. Dissertation, Universität Hannover, Institut für Baumechanik und numerische Mechanik, 2001.
- [35] DE ANDRÉS, A. / PÉREZ, J.L. / ORTIZ, M.: *Elastoplastic finite element analysis of three-dimensional fatigue crack growth in aluminium shafts subjected to axial loading*. Int. J. of Sol. and Struc. 36 (1999), S. 2231–2258.
- [36] DE BOER, R.: *Vektor- und Tensorrechnung für Ingenieure*. Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg / New York, 1982.

- [37] DE BORST, R. / PAMIN, J.: *Some novel developments in finite element procedures for gradient-dependent plasticity*. Int. J. Num. Meth. Eng. 39 (1996), S. 2477–2505.
- [38] DEGENHARDT, R. / ROHWER, K. / WAGNER, W. / DELSEMME, J.P.: *Postbuckling and collapse analysis of stringer stiffened panels - a GARTEUR activity*. In: LOUGHLAN, J., (HRSG.), *Thin-Walled Structures - Advances in Research, Design and Manufacturing Technology*, S. 121–128, Bristol, 2004 IoP Publishing.
- [39] DOERING, E. / SCHEDWILL, H. / DEHIL, M: *Grundlagen der Technischen Thermodynamik*. Teubner-Verlag, Stuttgart / Leipzig / Wiesbaden, 5. Auflage, 2005.
- [40] DOMININGHAUS, H.: *Die Kunststoffe und ihre Eigenschaften*. Band 5, Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg, 2005.
- [41] DOMKE, H.: *Kunststoffbau: Bemessung, Konstruktion, Langzeiteigenschaften*. Bauverlag GmbH, Berlin / Wiesbaden, 1981.
- [42] DORNINGER, K.: *Entwicklung von nichtlinearen FE-Algorithmen zur Berechnung von Schalenkonstruktionen aus Faserverbundstoffen*. VDI-Verlag, Reihe 18, Nr. 65, Düsseldorf, 1989.
- [43] DUGDALE, D.S.: *Yielding of steel sheets containing slits*. J. Mech. Phys. Solids 8 (1960), S. 100–104.
- [44] EHRENSTEIN, G.W.: *Faerverbund-Kunststoffe: Werkstoffe - Verarbeitung - Eigenschaften*. Hanser-Verlag, München / Wien, 2. Auflage, 2006.
- [45] ESHELBY, J.D.: *The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems*. Proceedings of the Royal Society of London 241(1226) (1957), S. 376–396.
- [46] EVANS, W.G. / ADLER, W.G.: *Kinking as a mode of structural degradation in carbon fiber composites*. Acta Metall 26 (1978), S. 725–738.
- [47] FEDTKE, M.: *Technische organische Chemie: Grundstoffe, Zwischenprodukte, Finalprodukte, Polymere*. Band 1, Dt. Verl. für Grundstoffindustrie, Leipzig / Weinheim, 1992.
- [48] FIBERLINE COMPOSITES A/S: Barmstedt Allé 5, DKDK-5500 Middelfart, <http://www.fiberline.com> (2008).

- [49] FLECK, N.A.: *Compressive failure of fiber composites*. Advances in Applied Mechanics 33 (1997), S. 43–117.
- [50] FLEMMING, M. / ZIEGMANN, G. / ROTH, S.: *Faserverbundbauweisen - Fasern und Matrices*. Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg, 1995.
- [51] FOYE, R.L.: *The transverse poisson's ratio of composites*. Journal of Composite Materials 6 (1972), S. 293–295.
- [52] FUNG, Y.C. / TONG, P.: *Classical and Computational Solid Mechanics*. Band 1, World Scientific, Singapore / New Jersey / London / Hong Kong, 2001.
- [53] GARG, AMAR C.: *Delamination - a damage mode in composite structures*. Engineering Fracture Mechanics 29(5) (1988), S. 557–584.
- [54] GRUTTMANN, F. / WAGNER, W.: *Structural analysis of composite laminates using a mixed hybrid shell element*. Comp. Mech. 37 (2006), S. 479–497.
- [55] GUYNN, E.G. / BRADLEY, W.L. / OCHOA, O.O.: *A parametric study of variables that affect fiber microbuckling initiation in composite laminates: Part 1 - Analysis*. Journal of Composite Materials 11(26) (1992), S. 1594–1616.
- [56] GUZ, A.N.: *Construction of a theory of stability of unidirectional fiber composites*. Prikladnaya Mekhanika 2(5) (1969), S. 62–70.
- [57] GUZ, A.N.: *Micromechanics of composite materials: focus on Ukrainian research*. Applied Mechanics Reviews, Special Issue 2(45) (1992), S. 13–101.
- [58] GUZ, A.N.: *Fundamentals of the Three-Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies*. Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg / Ney York / Barcelona / Hong Kong / London / Milan / Paris / Singapore / Tokyo, 1999.
- [59] GUZ, A.N.: *Critical phenomena in cracking of the interface between two prestressed materials. 1. Problem formulation and basic relations*. International Applied Mechanics 4(38) (2002), S. 423–431.
- [60] GUZ, A.N. / LAPUSTA, Y.: *Three-dimensional problems of the near-surface instability of fiber composites in compression (model of a piecewise-uniform medium) (survey)*. International Applied Mechanics 7(35) (1999), S. 641–670.

- 
- [61] HAHN, H.T. / SOHI, M.M.: *Buckling of a fiber bundle embedded in epoxy*. Composites Science and Technology 27 (1986), S. 25–41.
- [62] HALPIN, J. C. / KARDOS, J. L.: *The Halpin-Tsai equations: a review*. Polymer Engineering and Science 16(5) (1976), S. 344–352.
- [63] HAN, T.-S. / URAL, A. / CHEN, C.-S. / ZEHNDER, A.T. / INGRAFFEA, A.R. / BILLINGTON, S.L.: *Delamination buckling and propagation analysis of honeycomb panels using a cohesive element approach*. International Journal of Fracture 115 (2002), S. 101–123.
- [64] HASHIN, Z.: *Viscoelastic fiber reinforced materials*. ASME Journal 4 (1966), S. 1411–1422.
- [65] HASHIN, Z.: *Failure criteria for unidirectional fiber composites*. J. Appl. Mech. 47 (1980), S. 329–334.
- [66] HASHIN, Z. / SHTRIKMAN, S.: *A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials*. Journal of Mechanics and Physics of Solids 11 (1963), S. 127–140.
- [67] HETÉNYI, M.: *Beams on Elastic Foundation*. Ann Arbor: The University of Michigan Press, Michigan, 1971.
- [68] HILL, R.: *Elastic properties of reinforced solids: some theoretical principles*. Journal of Mechanics and Physics of Solids 11 (1963), S. 357–372.
- [69] HILL, R.: *Theory of mechanical properties of fiber-strengthened materials*. Journal of Mechanics and Physics of Solids 12 (1964), S. 199.
- [70] HILL, R.: *A self-consistent mechanics of composite materials*. Journal of Mechanics and Physics of Solids 13 (1965), S. 213–222.
- [71] HIRSCHFELD, H.: *Baustatik - Theorie und Beispiele*. Band 5, Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg / New York, 8. Auflage, 2006.
- [72] HORNBOKEN, E.: *Aufbau und Eigenschaften von Keramik-, Metall-, Polymer- und Verbundwerkstoffen*. Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg, 8. Auflage, 2006.
- [73] HUET, C.: *Application of variational concepts to size effects in elastic heterogeneous bodies*. Journal of Mechanics and Physics of Solids 38(6) (1989), S. 813–841.

- [74] HUGHES, T.J.R. / PISTER, K.S.: *Consistent linearization in mechanics of solids and structures*. Computers and Structures 8(3–4) (1978), S. 391–397.
- [75] JSA: *Testing methods for interlaminar fracture toughness of carbon fiber reinforced plastics*. Test Method JIS 7086, Japan Industrial Standards, Japanese Standards Association, Tokyo, 1993.
- [76] KAISER, W.: *Kunststoffchemie für Ingenieure*. Hanser-Verlag, München / Wien, 2006.
- [77] KELLER, H.B.: *Numerical solutions of bifurcation and nonlinear eigenvalue problems*. In: RABINOWITZ, P., (HRSG.), *Application of Bifurcation Theory*, S. 359–384, New York, 1977 Academic Press.
- [78] KELLY, A.: *Strong Solids*. Oxford University Press, Oxford, 1966.
- [79] KELLY, A. / TYSON, W.A.: *Tensile properties of fiber-reinforced materials: copper/tungsten and copper/molybdenum*. Journal of Mechanics and Physics of Solids 13 (1965), S. 329–350.
- [80] KLINKEL, S.: *Theorie und Numerik eines Volumen-Schalen-Elementes bei finiten elastischen und plastischen Verzerrungen*. Dissertation, Universität Karlsruhe, Institut für Baustatik, 2000.
- [81] KLINKEL, S. / WAGNER, W.: *A geometrical non-linear brick element based on the eas-method*. Int. J. Num. Meth. Eng. 40 (1997), S. 4529–4545.
- [82] KÄMPF, G.: *Industrielle Methoden der Kunststoff-Charakterisierung*. Hanser-Verlag, München / Wien, 2. Auflage, 1996.
- [83] KOITER, W.T.: *On the Stability of Elastic Equilibrium, Translation of 'Over de Stabiliteit van het Elastisch Evenwicht'*. Dissertation, Polytechnic Institut Delft, H. J. Paris Publisher Amsterdam, 1945.
- [84] KOLLÁR, L.P. / SPRINGER, G.S.: *Mechanics of Composite Materials*. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [85] KRÜGER, R.: *Delaminationswachstum in Faserverbundlaminate - Entwicklung eines auf bruchmechanischen Ansätzen basierenden Berechnungsverfahrens*. Dissertation, Universität Stuttgart, Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen, 1996.
- [86] KWON, Y.W. / BERNER, J.: *Analysis of matrix damage evolution in laminated composite plates*. Engineering Fracture Mechanics 48(6) (1994), S. 811–817.

- [87] LANGEHEINECKE, K. / JANY, P. AND SAPPER, E.: *Thermodynamik für Ingenieure*. Vieweg, Wiesbaden, 6. Auflage, 2006.
- [88] LAPUSTA, Y.: *A 3d model of possible micro-instability patterns in a boundary layer of a fiber composite under compression*. Composites Science and Technology 62 (2002), S. 805–817.
- [89] LAPUSTA, Y. / HARICH, J. / WAGNER, W.: *3d finite element modeling of fiber-matrix instabilities in compression*. Int. J. of Fracture 122 (2003), S. 125–130.
- [90] LAPUSTA, Y. / HARICH, J. / WAGNER, W.: *Micromechanical formulation and 3D finite element modeling of microinstabilities in composites*. Computational Material Science 38 (2007), S. 692–696.
- [91] LAPUSTA, Y. / HARICH, J. / WAGNER, W.: *Three-dimensional FE model for fiber interaction effects during microbuckling in composites with isotropic and anisotropic fibers*. Commun. Num. Meth. Eng. doi:10.1002/cnm.1084 (2007).
- [92] LAPUSTA, Y. / WAGNER, W.: *A numerical estimation of effects of a cylindrical hole and imperfect bonding on stability of a fiber in an elastic matrix*. Int. J. Num. Meth. Eng. 51 (2001), S. 631–646.
- [93] LAPUSTA, Y. / WAGNER, W.: *On various material and fiber-matrix interface models in the near-surface instability problems for fibrous composites*. Composites Part A: Applied Science and Manufacturing 32 (2001), S. 413–423.
- [94] LEE, J.-W. / DANIEL, I.M.: *Deformation and failure of longitudinally loaded brittle-matrix composites*. In: GRIMES, G.C., (HRSG.), *Composite Materials: Testing and Design*, 1120, S. 204–221, West Conshohocken, 1992 American Society for Testing and Materials.
- [95] LUCAS, K.: *Thermodynamik: die Grundgesetze der Energie- und Stoffumwandlungen*. Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg, 3. Auflage, 2001.
- [96] LUO, H. / HANAGUD, S.: *Delamination modes in composite plates*. Journal of Aerospace Engineering 10 (1996), S. 106–113.
- [97] MACVEAN, D.M.: *Die Elementararbeit in einem Kontinuum und die Zuordnung von Spannungs- und Verzerrungstensoren*. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik 19 (1968), S. 157–185.

- [98] MARSDEN, J.E. / HUGHES, T.J.R.: *Mathematical Foundations of Elasticity*. Dover Publications, New York, 1994.
- [99] MCGUIRE, C. / VOLLERIN, B.: *Thermal Management of Space Structures*. SAMPE-European Chapter, 1990.
- [100] MICHAELI, W. / GREIF, H. / WOLTERS, L. / VOSSEBÜRGER, F.-J.: *Technologie der Kunststoffe*. Hanser-Verlag, München / Wien, 2. Auflage, 1998.
- [101] MÜLLER, I. / VIELSACK, P.: *Identification of delaminations based on non-smooth vibrations*. In: SOIZE / SCHUELLER / MILLPRESS, (HRSG.), *International Conference on Structural Dynamics Eurodyn*, 2, S. 1429–1434, Rotterdam, 2005.
- [102] MORGAN, P.: *Carbon Fibers and their Composites*. Taylor & Francis Group, Boca Raton / London / New York / Singapore, 2005.
- [103] NIEDERSTADT, G.: *Ökonomischer und ökologischer Leichtbau mit faserverstärkten Polymeren*. expert verlag, Renningen-Malmsheim, 2. Auflage, 1997.
- [104] NILSSON, K.F. / STORAKERS, B.: *On interface crack growth in composite plates*. J. Appl. Mech. (1990), S. 530–538.
- [105] NOLL, W.: *The Foundations of Mechanics and Thermodynamics*. Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg / New York, 1974.
- [106] OCHOA, O.O. / REDDY, J.N.: *Finite Element Analysis of Composite Laminates*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht / Boston / London, 1992.
- [107] OGDEN, R.W.: *Non-Linear Elastic Deformations*. Halsted Press, New York, 1984.
- [108] ORIFICI, A.C. / THOMSON, R.S. / DEGENHARDT, R. / BAYANDOR, J.: *Development of a finite element methodology for the collapse analysis of composite aerospace structures*. In: CAMANHO, P.P., (HRSG.), *Thematic Conference on Mechanical Response of Composites*, Porto, 2007 ECCOMAS.
- [109] ORTIZ, M. / PANDOLFI, A.: *Finite-deformation irreversible cohesive elements for three-dimensional crack-propagation analysis*. Int. J. Num. Meth. Eng. 44 (1999), S. 1267–1282.
- [110] PAGANO, N.J.: *On the calculation of interlaminar normal stress in composite laminate*. Journal of Composite Materials 8 (1974), S. 65–81.

- 
- [111] PFLÜGER, A.: *Stabilitätsprobleme der Elastostatik*. Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg, 1975.
- [112] PIPES, R.B. / PAGANO, N.J.: *Interlaminar stresses in composite laminates under uniform axial extension*. Journal of Composite Materials 4 (1970), S. 538–544.
- [113] POMIES, F. / CARLSSON, L.A.: *Analysis of modulus and strength of dry and wet thermoset and thermoplastic composites loaded in transverse tension*. Journal of Composite Materials 28(1) (1994), S. 22–35.
- [114] PUCK, A.: *Werkstoffgemäße Dimensionierungs-Größen für den Entwurf von Bauteilen aus kunstharzgebundenen Glasfasern*. Teil I, Deutsches Kunststoff-Institut Darmstadt, Forschungsbericht Nr. 1253, 1963.
- [115] PUCK, A.: *Zur Beanspruchung und Verformung von GFK-Mehrschichtverbund-Bauelementen*. Kunststoffe 4 (1967), S. 284–293.
- [116] PUCK, A.: *Festigkeitsanalysen von Faser-Matrix-Laminaten*. Hanser-Verlag, München / Wien, 1996.
- [117] REUSS, A.: *Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätstheorie*. Zeitung für angewandte Mathematik und Mechanik 9 (1929), S. 49–58.
- [118] RHEINBOLDT, W.: *Numerical analysis of continuation methods for nonlinear structural problems*. Comput. & Struct. 13 (1981), S. 103–113.
- [119] RIKS, E.: *The application of newtons method to the problem of elastic stability*. Journal of Applied Mechanics 39 (1972), S. 1060–1066.
- [120] RIKS, E.: *Some computational aspects to the solution of snapping and buckling problems*. Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. 47 (1984), S. 219–260.
- [121] ROSE, J.H. / FERRANTE, J. / SMITH, J.R.: *Universal binding energy curves for metals and bimetallic interfaces*. Physical Review Letters 47(9) (1981), S. 675–678.
- [122] ROSEN, B.W.: *Tensile failure of fiber composites*. AIAA 2 (1964), S. 1985–1991.
- [123] ROSEN, B.W.: *Mechanics of composite strengthening*. Fiber Composite Materials, American Society of Metals (1965), S. 37–75.

- [124] SAB, K.: *On the homogenization and the simulation of random materials*. European Journal of Mechanics and Solids 11 (1992), S. 585–607.
- [125] SADOVSKY, M.A. / PU, S.L. / HUSSAIN, M.A.: *Buckling of microfibers*. Journal of Applied Mechanics (1967), S. 1011–1016.
- [126] SANSOUR, C.: *On the dual variable of the logarithmic strain tensor, the dual variable of the cauchy stress tensor, and related issues*. Int. J. of Sol. and Struc. 38 (2001), S. 9221–9232.
- [127] SANSOUR, C. / KOLLMANN, F.G.: *Families of 4-node and 9-node finite elements for a finite deformation shell theory: an assessment of hybrid stress, hybrid strain, and enhanced strain elements*. Comp. Mech. 24 (1999), S. 435–447.
- [128] SCHAPERLY, R.A.: *Prediction of compressive strength and kink bands in compression using a work potential*. International Journal of Solids and Structures 32(6/7) (1995), S. 739–765.
- [129] SCHÖCK BAUTEILE GMBH: *Technische Information Schöck ComBAR®*. Vimbacher Straße 2, 76534 Baden-Baden, <http://www.schoeck.de> (2007).
- [130] SCHNACK, E. / MESKE, R.: *Eigenspannungen bei viskoelastischen Verbundwerkstoffen*. Institut für technische Mechanik/Festigkeitslehre, Universität Karlsruhe, 1996 Schn 245/18-1, ES-COMP.
- [131] SCHÜRMAN, H.: *Konstruieren mit Faser-Kunststoff-Verbunden*. Band 2, Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg / New York, 2007.
- [132] SCHUERCH, H.: *Prediction of compressive strength in uniaxial boron fiber-metal matrix composite materials*. AIAA Journal 1(4) (1966), S. 102–106.
- [133] SCHULTHEISZ, C.R. / WAAS, A.M.: *Compressive failure of composites*. Prog. Aerospace Sci. 32 (1996), S. 1–78.
- [134] SCHULTZ, R.: *Nichtlineare Struktur- und Versagensanalyse von Faserverbundsystemen mit Mehrschicht-Schalelementen*. Technisch-wissenschaftliche Mitteilungen 96-3, Ruhr - Universität Bochum, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, 1996.
- [135] SPENCE, A. / JEPSON, A.D.: *The numerical calculation of cusps, bifurcation points and isola formation points in two parameter problems*. In: KÜPPER, T. / MITTELMANN, H.D. / WEBER, H., (HRSG.), *Numerical Methods for Bifurcation Problems*, 70, S. 502–514, Basel / Boston / Stuttgart, 1984.

- [136] STEIF, P.S.: *A model for kinking in fiber composites; I. Fiber breakage via Microbuckling; II. Kink band formation*. International Journal of Solids and Structures 26 (1990), S. 549–558.
- [137] STEIN, E. / BARTHOLD, F.-J.: *Elastizitätstheorie*. In: MEHLHORN, G., (HRSG.), *Der Ingenieurbau*, S. 165–428, Berlin, 1997 Ernst & Sohn.
- [138] STEIN, E / WAGNER, W. / WRIGGERS, P.: *Numerical procedures for the computation of singular points and postcritical branches*. In: KLEIBER, M. / KÖNIG, J.A., (HRSG.), *Inelastic Solids and Structures (Sawczuk Memorial)*, S. 145–164, Swansea, 1990 Pineridge Press.
- [139] STEINER, K.V.: *Detect classifications in composite using ultrasonic non-destructive evaluation techniques*. In: MASTERS, J.E., (HRSG.), *Damage detection in Composite Materials*, ASTM, S. 72–84, Philadelphia, 1992.
- [140] SUQUET, P.M.: *Elements of homogenization for inelastic solid mechanics*. In: SANCHEZ-PALENICA, E. / A., ZAOUI, (HRSG.), *Homoginization Techniques for Composite Media*, S. 193–278, Berlin, 1987 Springer-Verlag.
- [141] TESSMER, J.: *Theoretische und algorithmische Beiträge zur Berechnung von Faserverbundschalen*. Dissertation, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover, 2000.
- [142] THOMPSON, J.M.T. / HUNT, G.W.: *A General Theory of Elastic Stability*. John Wiley & Jons Ltd., London, 1973.
- [143] THURLEY, G.J. / MARSHALL, I.H.: *Buckling and Postbuckling of Composite Plates*. Chapman & Hall, London, 1995.
- [144] TIMOSHENKO, S.P. / GERE, J.M.: *Theory of Elastic Stability*. McGraw-Hill, New York, 2. Auflage, 1961.
- [145] TOBAJAS, O. / ESQUISABEL DE BUSTURIA, I. / ORTIZ DE ZARATE, I.: *Tsai-Wu failure criterion with reduction of material parameters – MARC analysis on small degradation specimens*. AERnova Minano - Alava, Spain, technical report, part of the specific targeted research project "COCOMAT", funded by the European Community, priority aeronautics and space, <http://www.aernnova.com>, 2006.
- [146] TSAI, S.W. / WU, E.M.: *A general theory of strength for anisotropic materials*. Journal of Composite Materials 5 (1971), S. 58–80.

- [147] TSAI, W. / HAHN, H. T.: *Introduction to Composite Materials*. Technomic Publishing, USA, 2000.
- [148] VEREIN DEUTSCHER INGENIEURE: *Verbundwerkstoffe und Werkstoffverbunde in der Kunststofftechnik*. VDI-Verlag, Düsseldorf, 1982.
- [149] VOIGT, W.: *Lehrbuch der Kristallphysik*. Teubner-Verlag, Stuttgart, Reproduktion, 1966.
- [150] WAGNER, W.: *A path-following algorithm with quadratic predictor*. *Comput. & Struct.* 39 (1991), S. 339–348.
- [151] WAGNER, W.: *Zur Behandlung von Stabilitätsproblemen der Elastostatik mit der Methode der Finiten Elemente*. Dissertation, Universität Hannover, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, 1991.
- [152] WAGNER, W. / BALZANI, C.: *Simulation of delamination in stringer stiffened fiber-reinforced composite shells*. *Comput. & Struct.* doi:10.1016/j.compstruc.2007.04.018 (2007).
- [153] WAGNER, W. / GRUTTMANN, F.: *A simple finite rotation formulation for composite shell elements*. *Eng. Comp.* 11 (1994), S. 145–176.
- [154] WAGNER, W. / GRUTTMANN, F.: *On efficient FE-formulations in the stability analysis of thin-walled structures*. Sixth World Congress on Computational Mechanics (WCCM VI) (2004), S. 1–10.
- [155] WAGNER, W. / GRUTTMANN, F.: *A robust nonlinear mixed hybrid quadrilateral shell element*. *Int. J. Num. Meth. Eng.* 64 (2005), S. 635–666.
- [156] WAGNER, W. / GRUTTMANN, F. / SPRENGER, W.: *A finite element formulation for the simulation of propagating delamination in layered composite structures*. *Int. J. Num. Meth. Eng.* 51 (2001), S. 1337–1359.
- [157] WAGNER, W. / WRIGGERS, P.: *A simple method for the calculation of postcritical branches*. *Eng. Comp.* 5 (1988), S. 103–109.
- [158] WALSH, R.P. / MCCOLSKEY, J.D. / REED, R.P.: *Low temperature properties of a unidirectionally reinforced epoxy fiberglass composite*. *Cryogenics* 35 (1995), S. 732–725.
- [159] WANG, A.S.D. / SLOMIANA, M. / BUCINELL, R.B.: *Delamination crack growth in composite laminates*. In: JOHNSON, W.S., (HRSG.), *Delamination and Debonding of Materials*, ASTM, S. 135–167, Philadelphia, 1995.

- 
- [160] WRIGGERS, P.: *Konsistente Linearisierung in der Kontinuumsmechanik und ihre Anwendung auf die Finite-Elemente-Methode*. Dissertation, Universität Hannover, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, 1988.
- [161] WRIGGERS, P.: *Nichtlineare Finite-Element-Methoden*. Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg / New York / Barcelona / Hong Kong / London / Mailand / Paris / Singapur / Tokio, 1. Auflage, 2001.
- [162] WRIGGERS, P. / WAGNER, W. / MIEHE, C.: *A quadratical convergent procedure for the calculation of stability points in finite element analysis*. Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. 70 (1988), S. 329–347.
- [163] YE, J.: *Laminated Composite Plates and Shells*. Springer-Verlag, London / Berlin / Heidelberg / New York / Hong Kong / Milan / Paris / Tokio, 2003.
- [164] ZHANG, S.Y.: *A new model for the energy release rate of fibre/matrix interfacial fracture*. Composites Science and Technology 58 (1998), S. 163–166.
- [165] ZHUK, YA.A. / SOUTIS, S. / GUZ, I.A.: *Stiffened composite panels with a stress concentrator und in-plane compression*. International Applied Mechanics 2(38) (2002), S. 240–252.
- [166] ZIENKIEWICZ, O.C. / TAYLOR, R.L.: *The Finite Element Method*. Band 1-3, Butterworth-Heinemann, Oxford / Auckland / Boston / Johannesburg / Melbourne / New Delhi, 6th. Auflage, 2005.
- [167] ZOHDI, T.I. / FEUCHT, M. / GROSS, D. / WRIGGERS, P.: *A description of macroscopic damage via microstructural constraints and lokal stiffness reduction*. Int. J. Num. Meth. Eng. 43 (1998), S. 493–506.
- [168] ZOHDI, T.I. / WRIGGERS, P.: *Introduction to Computational Micromechanics*. Band 20, Springer-Verlag, Heidelberg, 2005.



# Berichte des Instituts für Baustatik, Universität Fridericiana Karlsruhe (TH)

## Verzeichnis der bisher erschienenen Berichte:

- 51/1: Beitrag zur Ermittlung der zeitabhängigen Eigenspannungen in Verbundträgern, Dissertation, Hansjürgen Sonntag, 1951.
- 54/2: Beiträge zur Ermittlung der zeitabhängigen Spannungen in Verbundträgern, Dissertation, Eugen Müller, 1954.
- 54/3: Zur Statik räumlich gekrümmter Träger, Dissertation, Heinrich Bechert, 1954.
- 55/4: Bemessungsverfahren für Verbundträger, Dissertation, Günter Utescher, 1955.
- 57/5: Einflußfelder für die Hauptträgerschnittkräfte zweistegiger Plattenbal-kensysteme, Dissertation, Otto Köller, 1957.
- 60/6: Beitrag zur numerischen Berechnung der Schnittkräfte von rechtecki-gen und schiefen randversteiften Platten, Dissertation, Klaus Stiglat, 1960.
- 61/7: Allgemeines und einheitliches Berechnungsverfahren für Verbundkon-struktionen aus Stahl und Beton, Dissertation, Herbert Wippel, 1961.
- 62/8: Beitrag zur Bemessung vorgespannter stählerner Fachwerkträger mit besonderer Berücksichtigung der Tragsicherheit, Dissertation, Wolf-gang Heidecker, 1962.
- 63/9: Beitrag zur Berechnung der Schnittkräfte und Durchbiegungen von umfanggelagerten Rechteckplatten mit veränderlichem Querschnitt in einer Spannrichtung, Dissertation, Ernst Buchholz, 1963.
- 63/10: Der winkelrecht zu seiner Ebene belastete, kreisförmig gekrümmte Träger mit starrer Torsionseinspannung an den Auflagerpunkten, Dis-sertation, Hans Wittfoht, 1963.

- 63/11: Ein Verfahren zur Berechnung biegsamer rechteckiger Gründungsplatten mit elektronischen Rechengerten, Dissertation, Artur Deninger, 1963.
- 64/12: Anwendung des Momentenausgleichsverfahrens für durchlaufende schiefwinklige Platten, Dissertation, Jahiclul Alum, 1964.
- 67/13: Beitrag zur Berechnung des Tragvermögens von Rahmentragwerken aus Stahl nach der Plastizitätstheorie II. Ordnung, Dissertation, Mieng-Siong Wang, 1967.
- 67/14: Zusammenwirken von biegesteifem Skelett und aussteifenden Wandscheiben in Hochhauskonstruktionen, Dissertation, Rolf Zickendraht, 1967.
- 68/15: Experimentelle Untersuchung von beliebig gelagerten Plattentragwerken mit Hilfe von elektrischen Analogieschaltungen, Dissertation, Werner Sitzler, 1968.
- 0/75 : Berechnung einfeldriger und durchlaufender Kastenträger unter Berücksichtigung der Querschnittsdeformation, Dissertation, J. Hanisch, 1975.
- 1/76 : Das Tragverhalten längsversteifter, vorverformter Rechteckplatten unter Axialbelastung nach der nichtlinearen Beultheorie (unter Berücksichtigung der orthotropen Struktur sowie einer elastischen Lagerung am Längsrand), Habilitationsschrift, Helmut Rubin, 1976.
- 2/78 : Traglastuntersuchungen ebener Rahmen aus Stahl unter Berücksichtigung teilplastischer Zonen, Dissertation, Ülgen Korkut, 1978.
- 3/79 : Traglastermittlung von räumlich belasteten Durchlaufträgern mit offenem, dünnwandigem Querschnitt bei beliebigem Werkstoffgesetz, Dissertation, Wolfgang Heil, 1979.
- 4/79 : Schnittgrößen im Verschneidungsbereich eines kreiszylindrischen Druckbehälters mit einem Stutzen beliebiger Länge, Dissertation, Kurt Schumer, 1979.
- 5/81 : Traglastberechnung räumlicher Rahmen aus Stahl- oder Leichtmetallprofilen mit dünnwandigen offenen Querschnitten, Dissertation, Theodor Ackermann, 1981.

- 6/83 : Berechnung orthotroper Rechteckplatten nach der nichtlinearen Elastizitätstheorie für beliebige Randbedingungen, Dissertation, Karl Morgen, 1983.
- 7/86 : Traglastermittlung räumlicher Stabtragwerke aus Stahl und Leichtmetall unter Berücksichtigung der Schubweichheit, Dissertation, Dietmar H. Maier, 1986.
- 8/89 : Bemessung von Raumfachwerken bezüglich ihrer Grenztragfähigkeit mit Hilfe der mathematischen Optimierung, Dissertation, Richard Harich, 1989.
- 9/89 : Quasi-Newton Verfahren und Kurvenverfolgungsalgorithmen für die Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme in der Strukturmechanik, Forschungsbericht, Karl Schweizerhof, 1989.
- 10/90 : Finite Element Konzepte für schubelastische Schalen mit endlichen Drehungen, Dissertation, Heinrich Gebhardt, 1990.
- 11/91 : Theorie II. Ordnung des eben gekrümmten Stabes bei nicht richtungstreuen Kräften, Dissertation, Peter Brković, 1991.
- 12/91 : Nichtlineare Finite Element Berechnungen von Schalenträgwerken mit geschichtetem anisotropen Querschnitt, Dissertation, Rudolf Klarman, 1991.
- 13/94 : Adaptive Finite Element Konzepte zur Analyse von Schalenträgwerken, Dissertation, Markus Baumann, 1994.
- 1 (1995) : Optimierung von Stockwerkrahmen aus Stahl mit biegesteifen und biegeweichen Rahmenknoten, Dissertation, Petra Höß, 1994, ISBN: 978-3-935322-00-3.
- 2 (1996) : Theorie und Numerik dünnwandiger Faserverbundstrukturen, Forschungsbericht, Friedrich Gruttmann, 1996, ISBN: 978-3-935322-01-1.
- 3 (1997) : Stabilität von Stahlzylindern mit unilateralen Randbedingungen bei statischen und dynamischen Beanspruchungen, Forschungsbericht, Klaus Knebel, 1997, ISBN: 978-3-935322-02-7.
- 4 (1998) : Eine einheitliche Finite-Element-Formulierung für Stab- und Schalenträgwerke mit endlichen Rotationen, Dissertation, Roland Sauer, 1998, ISBN: 978-3-935322-03-4.

- 5 (1999) : Finite-Element-Modellierung von Starrkörper- und Übergangsbedingungen in der Statik, Dissertation, Joachim Kugler, 1999, ISBN: 978-3-935322-04-1.
- 6 (2000) : Delaminationsanalysen von Faserverbundstrukturen mit der Methode der finiten Elemente, Dissertation, Wolfgang Sprenger, 2000, ISBN: 978-3-935322-05-8.
- 7 (2000) : Theorie und Numerik eines Volumen-Schalen-Elementes bei finiten elastischen und plastischen Verzerrungen, Dissertation, Sven Klinkel, 2000, ISBN: 978-3-935322-06-5.
- 8 (2001) : Theorie und Numerik für den Entwurf von vorgespannten Membrantragwerken, Dissertation, René Ziegler, 2001, ISBN: 978-3-935322-07-2.
- 9 (2005) : Ein inelastisches 3D-Versagensmodell für Beton und seine Finite-Element-Implementierung, Dissertation, Jan Schütt, 2005, ISBN: 978-3-935322-08-9.
- 10 (2006) : Formfindung der Fließliniengeometrie für polygonale Platten im Traglastzustand, Dissertation, Jochen Wüst, 2006, ISBN: 978-3-935322-09-6.
- 11 (2006) : Nichtlineare Formulierung piezoelektrischer 3D-Stabstrukturen - Theorie und Finite-Element-Modellierung, Dissertation, Alexander Butz, 2006, ISBN: 978-3-935322-10-2.
- 12 (2007) : Nichtlineare Modellierung ferroelektrischer Keramiken und piezoelektrischer Strukturen – Analyse und Finite-Element-Formulierung, Habilitationsschrift, Sven Klinkel, 2007, ISBN: 978-3-935322-11-9.
- 13 (2007) : Ein geometrisch und materiell nichtlineares Cosserat-Modell – Theorie, Numerik und Anwendungsmöglichkeiten, Dissertation, Ingo Münch, 2007, ISBN: 978-3-935322-12-6.
- 14 (2008) : Magnetostriktive und piezoelektrische Materialien – Konstitutive Modellierung und Finite-Element-Formulierung, Dissertation, Konrad Linnemann, 2008, ISBN: 978-3-935322-13-3.

# Lebenslauf

Name	Jens Josef Harich
Geburtsdatum	30. September 1975 in Karlsruhe
1982 - 1995	Schulbildung Tulla-Realschule in Karlsruhe Abschluss: Mittlere Reife Technisches Gymnasium Karlsruhe, Carl-Engler-Schule Abschluss: Allgemeine Hochschulreife
10/95 - 2/01	Studium des Bauingenieurwesens Universität Karlsruhe (TH) Vertiefungsrichtung: Konstruktiver Ingenieurbau Abschluss: Diplom-Ingenieur
11/97 - 9/98	Wissenschaftliche Hilfskraft Lehrstuhl für Ingenieurholzbau und Baukonstruktionen Universität Karlsruhe (TH)
10/98 - 3/01	Wissenschaftliche Hilfskraft Institut für Baustatik, Universität Karlsruhe (TH)
04/01 - 03/08	Wissenschaftlicher Assistent Institut für Baustatik, Universität Karlsruhe (TH)
4/03 - 7/04	Studium der Erziehungswissenschaften mit dem Schwerpunkt Erwachsenenbildung Universität Karlsruhe (TH) Abschluss: Betriebspädagogik
03/04 - 07/06	Lehrauftrag für Technische Mechanik Fachbereich Baubetrieb und Baumanagement Hochschule Karlsruhe - Technik und Wirtschaft
03/08 - 07/08	Lehrauftrag für Baustatik I Fachbereich Baubetrieb und Baumanagement Hochschule Karlsruhe - Technik und Wirtschaft
seit 9/00	Referent des Badischen Turnerbundes Kampfrichterschulung Kunstturnen Männer









