



---

**Forschungszentrum Karlsruhe**  
in der Helmholtz-Gemeinschaft

---

**Wissenschaftliche Berichte**  
FZKA 7406

# **Untersuchungen zur Vereinfachung biomechanisch inspirierter Strukturoptimierung**

**A. Sauer**

Institut für Materialforschung

**Juni 2008**



**Forschungszentrum Karlsruhe**

in der Helmholtz-Gemeinschaft

Wissenschaftliche Berichte

FZKA 7406

Untersuchungen zur Vereinfachung  
biomechanisch inspirierter  
Strukturoptimierung\*

Alexander Sauer

Institut für Materialforschung

\*Von der Fakultät für Maschinenbau

der Universität Karlsruhe (TH)

genehmigte Dissertation

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe

2008

Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH  
Postfach 3640, 76021 Karlsruhe

Mitglied der Hermann von Helmholtz-Gemeinschaft  
Deutscher Forschungszentren (HGF)

ISSN 0947-8620

urn:nbn:de:0005-074062

# Untersuchungen zur Vereinfachung biomechanisch inspirierter Strukturoptimierung

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

**Doktors der Ingenieurwissenschaften**

von der Fakultät für Maschinenbau der  
Universität Karlsruhe (TH)

genehmigte

**Dissertation**

von

Dipl.-Ing. Alexander Sauer

aus Linkenheim-Hochstetten

Tag der mündlichen Prüfung: 10.04.2008  
Hauptreferent: Prof. Dr. Claus Mattheck  
Korreferent: Prof. Dr. Oliver Kraft



## **Untersuchungen zur Vereinfachung biomechanisch inspirierter Strukturoptimierung**

Die Gestalt biologischer Organismen übt schon immer eine Faszination auf den Menschen aus. Neben der Ästhetik und dem rein biologischen Interesse faszinieren diese Strukturen aber zunehmend auch die technischen Disziplinen, die in der Natur Inspiration und Ideenquellen für technische Produkte finden. Denn die Natur ist dadurch geprägt, dass ein hoher Selektionsdruck zu Organismen führt, die mit minimalem Aufwand möglichst gut an die herrschenden Bedingungen angepasst sind. Von ihrer Gestalt und ihrem Wachstumsprozess werden in dieser Arbeit Strategien zur Strukturoptimierung entwickelt, die es ermöglichen diese Erkenntnisse in der Technik vorteilhaft anzuwenden und zu nutzen.

Als erstes wird die SKO-Methode (Soft Kill Option) betrachtet und erweitert. Diese Methode simuliert die Mineralisation im Knochen, wodurch hochbelastete Bereiche versteift und niedrig belastete Bereiche entfernt werden. Auf technische Strukturen angewandt, führt die SKO-Strategie zu einer optimalen Materialausnutzung und somit zum Leichtbau. Dieses schon bestehende Topologieoptimierungsprogramm wird im ersten Teil der Arbeit dahingehend erweitert, dass nun reine zug- oder druckbelastete Strukturen erstellt werden können.

Das andere betrachtete Verfahren betrifft die Methode der Zugdreiecke. Dies ist ein graphisches Verfahren zur Erstellung kraftflussgerechter Konturen. Die so erhaltene Modellkontur wird dazu genutzt, in schubdominierten Bereichen, wie beispielsweise Kerben und Querschnittsübergängen, einen mechanisch günstigen Kraftflussverlauf zu bewirken. Weicht die Bauteilgestalt von diesem Verlauf ab, kann durch lokale Konturvergrößerung, also „Wachsen“, die Kerbspannung reduziert oder durch Konturverkleinerung, also „Schrumpfen“, Gewicht und Material eingespart werden.

### **Study For Simplifying Biomechanically Inspired Structure Optimization**

The design of biological organisms has always been fascinating to human beings. Due to their advantageous properties, these structures do not only arouse our purely biological interest, but increasingly fascinate technical disciplines that find their inspiration and ideas for technical products in nature. A high selection pressure results in organisms that are better adapted to the conditions prevailing with a minimum expenditure. From their design and growth process, strategies can be derived for the profitable use of these methods in engineering.

First, the SKO (soft kill option) method shall be studied and extended. This method simulates mineralization processes in bones, as a result of which highly loaded areas are stiffened and less loaded areas are eliminated. When applied to technical structures, the SKO strategy leads to an optimum use of material and, hence, to light-weight construction. This already existing topology optimization program shall be extended to also cover the generation of purely tension- or compression-loaded structures.

The other method presented shall be the method of tensile triangles. This is a graphic method to generate contours tailored to force flow. The resulting model contour is used to obtain a mechanically favorable force flow in shear-dominated areas like notches and transitions. In case the component design deviates from this favorable force flow, notch stress can be reduced by local contour enlargement, i.e. „growth“. By means of contour reduction, i.e. „shrinkage“, weight and material can be saved.





# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>3</b>
2.1	Optimierung . . . . .	3
2.1.1	Grundbegriffe . . . . .	3
2.1.2	Optimierungsverfahren . . . . .	4
2.1.3	Strukturoptimierung . . . . .	6
2.2	Festigkeitslehre . . . . .	7
2.2.1	Spannungen . . . . .	8
2.2.2	Versagenshypothesen . . . . .	10
2.2.3	Spannungssituation im Kerbgrund . . . . .	11
2.3	Biologische Strukturen . . . . .	13
2.3.1	Knochen . . . . .	13
2.3.2	Stamm und Holz der Bäume . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Methoden</b>	<b>17</b>
3.1	SKO-Methode . . . . .	17
3.1.1	Stellgrößen der SKO-Methode . . . . .	19
3.2	Die Schubvierecksmethode . . . . .	22
3.3	Die Methode der Zugdreiecke . . . . .	22
3.3.1	Zugdreiecksmethode bei einer Balkenschulter . . . . .	23
<b>4</b>	<b>SKO-Methodenerweiterung zur Bildung reiner Zug- oder Druckstrukturen</b>	<b>27</b>
4.1	Qualitative und quantitative Betrachtung der SKO-Strukturvorschläge . . . . .	27
4.2	SKO-Strukturen, die nur auf Druck oder nur auf Zug belastet werden . . . . .	30
4.3	Versteifungen einer Rahmenstruktur . . . . .	33
4.4	Selektion von Zug- oder Druckstreben und ihre optimale Lage . . . . .	34
<b>5</b>	<b>Untersuchung zum strukturmechanischen Aufbau von Laubblättern</b>	<b>37</b>
5.1	Hypothese zur Gestaltung der Blattstruktur aus mechanischer Sicht . . . . .	38
5.2	FEM-Ersatzmodell . . . . .	39
5.3	SKO-Optimierung . . . . .	40
5.4	Parameterstudie zur Nebenadergestalt . . . . .	42
5.4.1	Variation der Spreitenbelastbarkeit . . . . .	42

5.4.2	Variation des Steifigkeitsverhältnisses der beiden Blattschichten . . .	42
5.5	Knicke an der Nebenaderanbindung . . . . .	45
5.6	Einfluss der äußeren Blattform auf den Nebenaderwinkel . . . . .	46
5.7	Zusammenfassung der Ergebnisse zur Blattstruktur . . . . .	47
<b>6</b>	<b>Methode der Zugdreiecke zur Kerbspannungsreduktion</b>	<b>49</b>
6.1	Balken mit Querschnittssprung als Modell . . . . .	49
6.2	Methode der Zugdreiecke mit Variation der Dreiecksanzahl . . . . .	50
6.3	Beschreibung der Zugdreieckskontur . . . . .	52
6.4	Konturvergleich zwischen Zugdreiecks- und SKO-Methode . . . . .	53
6.5	Verrundungen der Konturknicke zur Spannungsminderung . . . . .	54
6.5.1	Balkenschulter mit Viertelkreiskerbe als Referenzstruktur . . . . .	55
6.5.2	Verrundung mit einem Spline . . . . .	55
6.5.3	Verrundung der Kerbkonturknicke mittels tangentialer Kreisbögen . . . . .	57
6.6	Kerbformoptimierung bei Winkeln größer 90° . . . . .	62
<b>7</b>	<b>Methode der Zugdreiecke zur Materialentfernung</b>	<b>65</b>
7.1	Einfluss der Lagerung auf den Spannungsverlauf einer Balkenschulter . . . . .	65
7.2	Materialentfernen mit der Methode der Zugdreiecke . . . . .	68
7.2.1	Einfluss der Kraftflussumlenkung auf die Maximalspannung . . . . .	71
7.2.2	Untersuchung des Konturübergangs . . . . .	72
7.3	Einzelkrafteinleitung beim Zugstab . . . . .	76
7.4	Methode der Zugdreiecke bei Biegestrukturen . . . . .	77
7.4.1	Mittige Lasteinleitung . . . . .	77
7.4.2	Exzentrische Krafteinleitung . . . . .	80
7.5	Krafteinleitung an einer Konturrecke . . . . .	81
7.6	Auswirkung der Kragträglänge . . . . .	83
<b>8</b>	<b>Gleichzeitiges Wachsen und Schrumpfen mit der Zugdreiecksmethode</b>	<b>85</b>
8.1	Beispiel I: Wachsen und Schrumpfen an einer Wellenschulter . . . . .	85
8.2	Beispiel II: Wachsen und Schrumpfen an einem Kragträger . . . . .	88
8.3	Verrundung einer Kragträgerspitze . . . . .	89
<b>9</b>	<b>Überprüfung der Zugdreieckskontur an einer Gabel mit einem Ermüdungsversuch</b>	<b>91</b>
<b>10</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>95</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>99</b>

# 1 Einleitung

Das Streben der Menschen nach stetiger Verbesserung zeigt sich in einer Begeisterung für einzigartige Höchstleistungen, die als Rekorde kommuniziert werden, aber auch im Alltag in kleinen Dingen, wie bei der Suche nach dem schnellsten Arbeitsweg. Die Vorgehensweise das Bestmögliche anzustreben, also ein Optimum zu finden, entspricht dem menschlichen Wesen und begründet letztendlich seine erfolgreiche Überlebensstrategie. Neben diesem bewussten Optimieren, das dem Menschen eigen ist, findet in der Natur über die Evolution eine passive Optimierung durch Selektion statt.

Evolution bedeutet allgemein, dass der besser angepasste Wettbewerber überlebt. Hierbei sind in der Regel ressourcenschonende Verbesserungen vorteilhafter als funktionelle Maximallösungen, die aber aufwendig sind. Das bedeutet, dass sogenannte „good enough“-Lösungen hinsichtlich ihrer Ausgangslage und der verwendeten Ressourcen, also des Verhältnisses von Aufwand zu Nutzen, optimal sind.

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Strukturoptimierung, also der mechanisch günstigsten Gestalt von Bauteilen. Obwohl dies ein altes Grundproblem ist, hat es erst vor wenigen Jahren in der Industrie einen Durchbruch gegeben und sich die Strukturoptimierung etabliert. Dieser Durchbruch wurde durch die Bereitstellung großer Rechenleistungen ermöglicht. Damit konnte der zeitaufwendige Prototypenbau und die zugehörigen Versuche durch Simulation mit virtuellen Bauteilen ersetzt werden, wodurch Strukturmodifikationen schneller und effektiver bewertet werden können.

Aktuell beschränkt sich ein Einsatz der Optimierungsmethoden nur auf besonders kritische Problembereiche, die eine optimale Lösung erfordern. Da der Lösungsaufwand gleich groß bleibt, auch wenn die Lösung qualitativ nicht optimal sein muss, wird in diesen Fällen die Methode nicht eingesetzt. Das bedeutet, dass man aus finanziellen Gesichtspunkten auf traditionell bekannte Strukturlösungen zurückgreift und damit das Produktpotential nicht nutzt.

Es werden also Methoden benötigt, die mit geringem Aufwand verbunden sind. Löst man sich zunächst von einer Fokussierung auf eine Optimallösung, dann bieten sich neue Vorgehensweisen an. Hierbei lohnt auch ein Blick in die Natur, die sehr effiziente Strategien entwickelt hat. Von dieser biomechanischen Inspiration ausgehend, werden in dieser Arbeit Methodiken verifiziert und weiterentwickelt, die es ermöglichen mit einem geringen Aufwand zu einer besseren Struktur zu gelangen.

### **Aufbau der Arbeit**

In Kapitel 2 werden zunächst die Grundlagen vorgestellt, auf denen sich diese Arbeit stützt und im Kapitel 3 werden die speziellen Methoden erläutert, mit denen die Untersuchungen durchgeführt werden. Die darauf folgenden Kapitel befassen sich mit den Ergebnissen und Erkenntnissen, die im Rahmen dieser Arbeit erzielt wurden.

Als erstes wird in Kapitel 4 die SKO-Methode dahingehend erweitert, dass getrennt nach Zug- oder Druckstrukturen optimiert werden kann. Diese Methodenerweiterung führt zu neuen Strukturlösungen, deren Einsatz anhand von Beispielen dargestellt wird. In Kapitel 5 wird mit der erweiterten SKO-Methode überprüft, ob Laubblätter bezüglich ihrer Struktur mechanisch optimal gestaltet sind. Hierbei wird als Arbeitshypothese angenommen, dass die Nebenadern mechanisch als Zugstrukturen wirken.

Die Kapitel 6, 7 und 8 beschäftigen sich mit der von Prof. Mattheck entwickelten Zugdreiecksmethode. Anhand von technischen Grundstrukturen wird diese Vorgehensweise qualitativ und quantitativ auf ihre Wirksamkeit hin untersucht und weiterentwickelt. In Kapitel 6 wird mit der Methode der Zugdreiecke Material an Kerben angelagert und damit die Übergänge kerbspannungsreduzierend gestaltet. Da sich durch dieses Vorgehen die Kerbkontur in der Regel vergrößert, wird sie auch als Methode der Wachstums-Zugdreiecke bezeichnet. In Kapitel 7 wird mit der Methode der Zugdreiecke Material kraftflussfreundlich entfernt, weshalb man auch von der Methode der Schrumpf-Zugdreiecke spricht. Dies führt zu einer Material- und damit Gewichtseinsparung. In Kapitel 8 wird schließlich untersucht, wie mittels der Methode der Zugdreiecke gleichzeitiges Wachsen und Schrumpfen sinnvoll angewendet werden kann.

Nachdem die Kerbkonturen mit Hilfe der FEM bewertet wurden, werden in Kapitel 9 die Ergebnisse eines Ermüdungsversuchs beschrieben. Hierbei wird die Zugdreieckskontur mit klassischen Verrundungskernen verglichen. Zunächst werden die Strukturen wieder mit der FEM analysiert und anschließend entsprechende Proben im Dauerschwingversuch bis zum Versagen belastet.

# 2 Grundlagen

## 2.1 Optimierung

### 2.1.1 Grundbegriffe

Optimierung bedeutet mögliche Designvariablen so zu wählen, dass unter Einhaltung von Restriktionen ein gewünschtes Ziel erreicht wird. Hierbei ist das Ziel eine oder mehrere Eigenschaften, welche minimiert bzw. maximiert werden sollen. Die Design- bzw. Entwurfsvariablen sind Parameter, welche die Eigenschaft verändern. Die Restriktionen bzw. die Nebenbedingungen sind einzuhaltende Einschränkungen. Diese Beschreibung ist allgemein anwendbar.

Am Anfang einer Optimierungsaufgabe steht in der Regel eine noch unscharfe Vorstellung wie ein Problem gelöst werden kann, welches durch weiteres Auseinandersetzen stetig konkretisiert wird. Hilfreich ist es hierbei, das Optimierungsproblem mathematisch zu beschreiben, wodurch die Aufgabe präzisiert und schließlich eindeutig festgelegt werden kann. Mit Hilfe eines eindimensionalen Optimierungsbeispiels werden die Fachbegriffe vorgestellt:

Herr M möchte mit dem Zug von A nach B fahren und dabei die günstigste Verbindung benutzen. Der Fahrpreis  $P$  hängt von der Kombination der gefahrenen Streckenabschnitte  $x$  ab und ist die Zielfunktion der Optimierung. Diese Zielfunktion soll minimiert werden, womit das Optimierungsproblem mathematisch mit „min  $P(x)$ “ ausgedrückt wird. Zielfunktionen werden allgemein so formuliert, dass sie minimiert werden können.

Da Herr M nicht öfters als 3-mal umsteigen möchte, werden alle Zugverbindungen (d.h. Streckenkombination  $x$ ) mit vier und mehr Umstiegen nicht weiter betrachtet. Mit dieser Vorgabe ist das Optimierungsproblem um eine Ungleichheitsrestriktion  $g(x)$  erweitert. Ungleichheitsrestriktion grenzen den Lösungsraum  $R$  ein, indem sie einen Bereich vorgeben, in welchem sich die Lösung befinden muss. Wenn Herr M auf jeden Fall in C einen Zwischenstopp einlegen möchte, dann müssen alle möglichen Zugverbindungen diesen zusätzlichen Stopp beinhalten. Dies stellt eine Gleichheitsrestriktion  $h(x)$  dar, welche genaue Werte vorgibt und damit den Lösungsraum auf die genannten Werte begrenzt.

Mit diesen Begriffen ist das Optimierungsproblem mathematisch beschrieben und kann entsprechend Abbildung 2.1 visualisiert werden [12]. Dort ist eine zweidimensionale Optimierungsaufgabe, mit den beiden unabhängigen Parametern  $x_1$  und  $x_2$ , dargestellt. Die beiden Parameter erzeugen einen flächigen Lösungsraum, der von vier Ungleichheitsrestriktionen

$$\underset{x \in \mathcal{R}^{n_x}}{\text{Min}} \{ f(x) \mid \underline{h}(x) = \underline{0}; \underline{g}(x) \leq \underline{0} \}$$

$\mathcal{R}$  Menge der reellen Zahlen

$x$  Optimierungsvariable

$f(x)$  Zielfunktion

$g(x)$  Ungleichheitsrestriktion

$h(x)$  Gleichheitsrestriktion

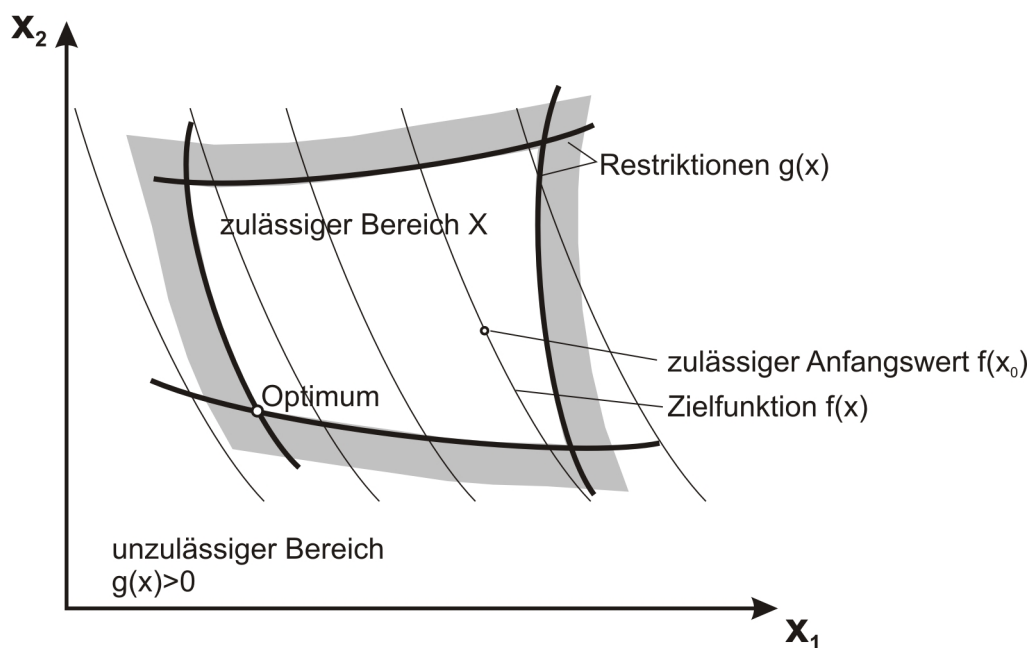


Abbildung 2.1: Mathematische Nomenklatur und Darstellung eines 2-dimensionalen Optimierungsproblems

limitiert wird. Diese Problembeschreibung ist allgemein und es bieten sich unterschiedliche Verfahren zur Lösung an.

## 2.1.2 Optimierungsverfahren

Zur Lösung einer Optimierungsaufgaben existieren verschiedene und vielfältige Vorgehensweisen, die in der Regel zu gleichen Ergebnissen führen sollten. Diese Verfahren unterscheiden sich im Ansatz, der Konvergenzgeschwindigkeit, der Robustheit, der Rechenintensität, etc. Je nach Komplexität und Aufgabenstellung eines Optimierungsproblems können natürlich manche Strategien überfordert sein und zu keiner sinnvollen Lösung führen. Es gilt die am besten geeignete Optimierungsmethode herauszusuchen.

**Trial and Error** ist keine systematische Vorgehensweise, welche aber aufgrund ihrer Einfachheit sehr oft angewendet wird. Das Vorgehen kann mit dem TOTE-Schema (Trial-Operate-Test-Exit) beschrieben werden. Hierbei wird das Problem jeweils solange willkürlich modifiziert und anschließend hinsichtlich des Ziels geprüft, bis ein zufriedenstellendes Ergebnis erreicht wird [10].

**Heuristische Algorithmen** versuchen über eine zufällige Auswahl von Werten an das Optimum zu gelangen. Die Optimierungsstrategien unterscheiden sich durch die Art der Werteermittlung. Rein stochastische Werte des gesamten Lösungsraums liefert die Monte Carlo Methode. Im Unterschied dazu findet bei der Evolutionsstrategie eine iterative Wertestreuung statt. Diese Methoden imitiert die biologische Evolution, bei der eine Vererbung der Elternmerkmale zu einer Merkmalsvariation führt. Die Nachkommen werden hinsichtlich festgelegter Kriterien selektiert und sind die Eltern der nächsten Generation [44].

**Mathematische Algorithmen** lösen das Optimierungsproblem mit mathematischen Methoden. Meist ist keine direkte Lösung möglich, weshalb iterative Lösungsverfahren verwendet werden. Iterative Verfahren führen bei linearen Problemstellungen noch zu der exakten Lösung. Im Unterschied dazu wird bei nichtlinearen Problemstellungen die exakte Lösung nicht erreicht, weshalb die Lösungssuche abgebrochen wird, wenn sich das aktuelle Ergebnis hinreichend nahe der angestrebten Lösung befindet [1][5].

**Optimalitätskriterien** nutzen Kenntnisse aus der Physik, um Bedingungen aufzustellen, die das Optimierungsziel charakterisieren. Diese Bedingungen werden meist durch einfache Lösungsalgorithmen iterativ erfüllt. Ein klassisches Beispiel ist das Prinzip des voll beanspruchten Tragwerks „Fully stressed Design“ (FSD) [1]. Nach diesem Prinzip ist ein Tragwerk dann gewichtsoptimal, wenn der Werkstoff im gesamten Bauteil maximal ausgelastet wird. Bis auf wenige Ausnahmen gilt dieses Prinzip für die meisten Strukturen und wird erfolgreich angewendet. Beispielsweise wird der Zustand des FSD bei den biologischen Wachstumsstrategien, wie CAO (Computer Aided Optimization) und SKO (Soft Kill Option), angestrebt [31]. Ganz allgemein ausgedrückt lagern beide Methoden Material bevorzugt an hochbelasteten Bereichen an und entfernen unterbelastete Bereiche, wodurch sich die Spannungsverteilung homogenisiert.

**Empirische Verfahren** haben sich aus der Erfahrung und nicht aus der Theorie heraus entwickelt. Sie gelten meist nur in einem eng begrenzten Lösungsraum, führen aber in diesem Gebiet meist schnell und zuverlässig zur der Lösung. Beispielsweise stellt Grodzinski [16] eine graphische Vorgehensweise vor, mit der Kerbkonturen gestaltet werden können.

Neben diesen bekannten Lösungsstrategien existieren noch weitere Vorgehensweisen und es werden ständig weitere Methoden entwickelt. Ein aktueller Ansatz ist die Schwarm- bzw. Partikeloptimierung. Hierbei wird das gruppensdynamische Schwarmverhalten von Vögeln als Vorbild für den Optimierungsansatz genommen [23].

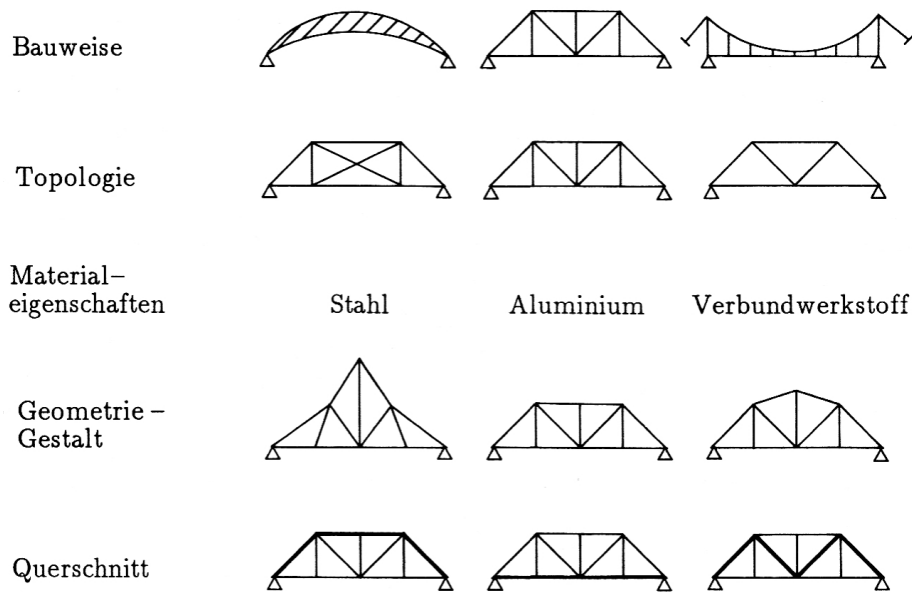


Abbildung 2.2: Die unterschiedlichen Entwurfsvariablen führen zu einer Klassifizierung der Strukturoptimierung [12]

### 2.1.3 Strukturoptimierung

Die Strukturoptimierung ist ein spezialisierter Zweig der Optimierung. Sie beschäftigt sich mit der optimalen Auslegung von Bauteilen an die jeweils herrschenden Randbedingungen. Häufig zu optimierende Eigenschaften sind das Gewicht, die Verformung, die Lebensdauer, die Steifigkeit und die Eigenfrequenz. Eine oder mehrere dieser Eigenschaften sind das Optimierungsziel und sollen maximiert bzw. minimiert werden. Sie können aber auch als Nebenbedingung verwendet werden, um den Lösungsraum einzugrenzen. Die Entwurfsvariablen sind Parameter, welche die Struktur beschreiben. Nach Schmit werden die Optimierungsvariablen am Beispiel einer Fachwerkstruktur entsprechend Abbildung 2.2 in fünf Gruppen eingeteilt, welche die verschiedenen Optimierungsdisziplinen charakterisieren [49]. Dies sind die Bauweise, die Topologie, die Materialeigenschaft, die Gestalt und der Querschnitt einer Struktur.

#### Topologieoptimierung

Ermittlung einer optimalen Bauteilgestalt unter Berücksichtigung des zu Verfügung stehenden Bauraums und der Randbedingungen. Ausgehend von einer zu großen Struktur werden die mechanisch relevanten Bereiche herausdifferenziert und die nicht relevanten Bereiche entfernt. Als Optimierungsvariable dient hierbei entweder der lokale E-Modul oder die lokale Dichte, die jeweils modifiziert werden.

#### Materialoptimierung

Auswahl der Materialeigenschaften und der Materialstruktur. Bei einer Optimierung der Materialstruktur sind mögliche Optimierungsvariablen die Schichtdicken und die Faserausrichtung



**Gestalt- bzw. Formoptimierung**

Anpassen einer vorgegebenen Form an die herrschende Belastung. Dies ermöglicht eine Reduzierung der Kerbspannung durch Modifikation der Kerbform oder eine Versteifung von Schalenstrukturen durch Einbringen von Sicken.

**Parameteroptimierung (Sizing)**

Wertebestimmung von einzelnen oder mehreren Optimierungsvariablen, beispielsweise den Querschnitten von Fachwerkstreben.

## 2.2 Festigkeitslehre

Die Festigkeitslehre ist ein Teilgebiet der technischen Mechanik und beschäftigt sich mit den Reaktionen von verformbaren Körpern, wenn Kräfte auf sie einwirken. So ruft jede auf den Körper einwirkende Belastung gleichgroße aber gegengerichtete Reaktionskräfte im Körperinneren hervor. Die Begriffe Dehnung, Spannung und Materialgesetz charakterisieren dieses Teilgebiet, mit dem es möglich ist rechnerisch zu überprüfen, ob eine Struktur den zugeordneten Belastungen standhält [58].

Die drei Begriffe werden exemplarisch an einer eindimensionalen Struktur visualisiert, Abbildung 2.3. Diese Struktur besteht aus einer kettenförmigen Anordnung aus Federn und Atomen, die sich zwischen einer Einspannung befinden. Das **Materialgesetz** lässt sich anhand des Werkstoffaufbaus beschreiben. So setzt sich eine Struktur aus vielen Molekülen zusammen, welche wiederum aus Atomen bestehen. In einem unbelasteten Werkstoff befinden sich die anziehenden und abstoßenden Kräfte zwischen den Atomen im Gleichgewicht (Energiesenke) [14]. Wirken nun äußere Kräfte auf den Körper und verändern den „Lieblingsabstand“ der Atome, wird das Kräftegleichgewicht aufgehoben und mit zunehmender Änderung des Abstandes bildet sich eine ansteigende Gegenkraft zwischen den Atomen aus [15]. Bei einem linearen Zusammenhang und kleinen Verformungen wird der Widerstand des Werkstoffes gegen eine Verformung als Elastizitätsmodul oder E-Modul (E) bezeichnet. Der Zusammenhang zwischen Verformung und der jeweils benötigten Kraft ist materialspezifisch. Bei dem eindimensionalen Strukturbeispiel entspricht der E-Modul der Federsteifigkeit.

Gegenüber dem sehr allgemeinen Begriff Verformung bezeichnet **Dehnung** eine Längenänderung. Wird eine belastete Struktur in Belastungsrichtung länger, dann spricht man von einer positiven Dehnung. Eine negative Dehnung entspricht einer Verkürzung, die auch als Stauchung bezeichnet wird. Die Dehnung  $\epsilon$  entspricht dem Quotient aus Längenänderung zu Ausgangslänge.

Die **Spannung** beschreibt die lokale Belastung einer Struktur. Dies entspricht inneren, flächennormierten Kräften, welche einer Verformung entgegen wirken. Die Normierung der Kraft auf die Fläche ermöglicht eine geometriefreie Beschreibung der jeweiligen Materialbelastung. Die Höhe der Spannung ist von der Belastung oder einer vorgegebenen Dehnung und den Materialeigenschaften abhängig. Allgemein bezeichnet eine positive Spannung eine

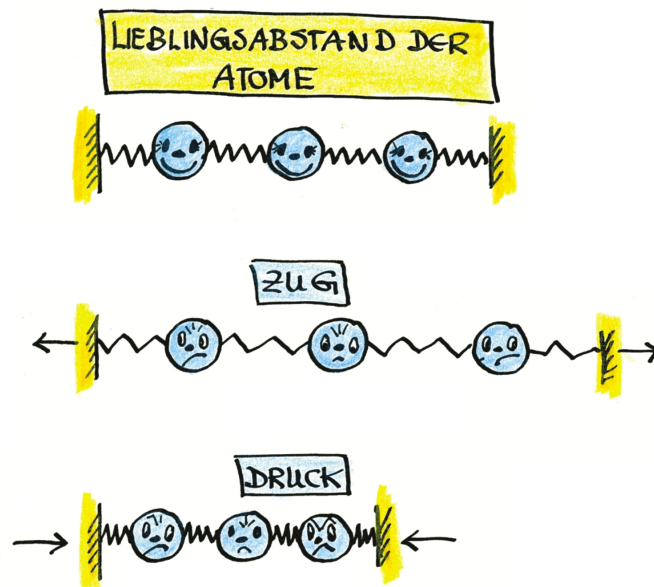


Abbildung 2.3: Modellhafte Darstellung der Bindungskräfte zwischen den Atomen nach [34]

Zugbelastung und eine negative Spannung eine Druckbelastung. Die spezielle Nomenklatur der Spannungen wird im Folgenden Kapitel 2.2.1 beschrieben.

In dieser Arbeit werden die folgenden drei Materialeigenschaften vorausgesetzt. Als erstes gilt rein elastisches Materialverhalten. Diese Vorgabe bedeutet, dass eine Verformung wieder vollständig verschwindet, wenn die Kräfte nicht mehr auf den Körper wirken. Des Weiteren gelten diese elastischen Eigenschaften in alle Richtungen, was als isotropes Werkstoffverhalten bezeichnet wird. Und schließlich gilt dieses beschriebene Materialverhalten in folge einer angenommenen homogenen Materialverteilung im mikroskopischen wie auch im makroskopischen Bereich.

### 2.2.1 Spannungen

Die räumlichen Spannungen werden mit einem Spannungstensor  $\sigma_{km}$  beschrieben. Er ist ein Tensor zweiter Stufe dessen Indizes  $k$  und  $m$  für die Richtungen  $x, y$  und  $z$  des kartesischen Koordinatensystems stehen. An einem Volumenelement bezeichnet der Index  $k$  die Normalenrichtung eines Flächenelements und  $m$  die Richtung der Spannung, siehe Abbildung 2.4.

Spannungen, bei denen die Orientierung der Flächennormalen  $k$  auch der Spannungsrichtung  $m$  entspricht, werden Normalspannungen genannt. Da die Wirkrichtung dieser Spannungskomponente schon im Namen angegeben ist, nämlich senkrecht zur entsprechenden Fläche, muss bei der Normalspannung nur noch die entsprechende Fläche indiziert werden.

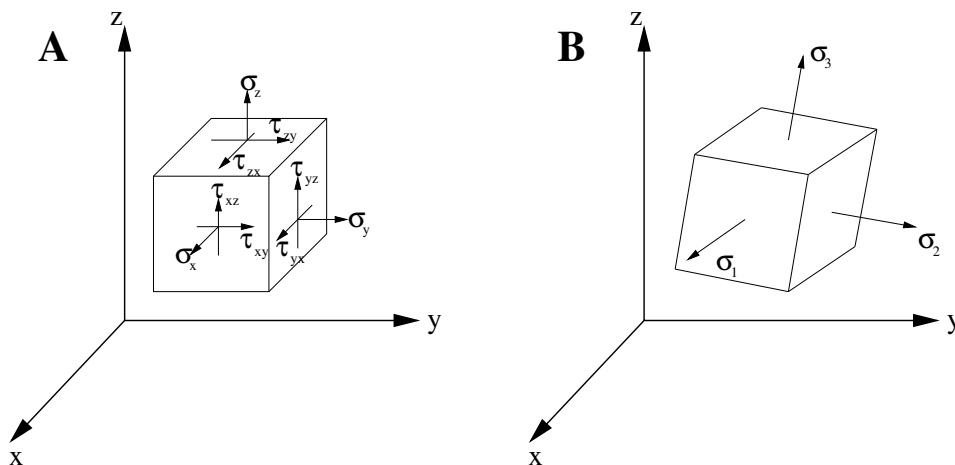


Abbildung 2.4: (A) Normal- und Schubspannungen an einem Volumenelement und Sonderfall (B), bei dem die Hauptspannungen maximal werden und die Schubspannungen verschwinden

Deshalb gilt:  $\sigma_{xx} = \sigma_x, \sigma_{yy} = \sigma_y, \sigma_{zz} = \sigma_z$ . Unterscheiden sich die beiden Indizes, spricht man von Schubspannungen  $\tau$ .

Abbildung 2.5 zeigt eine  $3 \times 3$  Matrix eines 3-dimensionalen Spannungszustandes. An einem infinitesimalen Volumenelement, wie in Abbildung 2.4, entsprechen die Normal- und die Schubkräfte den angreifenden Kräften und aufgrund der Gleichgewichtsbedingungen gilt  $\sigma_{km} = \sigma_{mk}$ . Daraus ergibt sich die Symmetrie des Spannungstensors.

$$\sigma_{km} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ & \sigma_y & \tau_{yz} \\ sym. & & \sigma_z \end{pmatrix}$$

Abbildung 2.5: Symmetrische Matrix des Spannungstensors  $\sigma_{km}$

Die Werte des Spannungstensors sind von der Betrachtungsorientierung abhängig. Ein Sonderfall stellt die Orientierung dar, in der die Normalspannungen maximal werden und die Schubspannungen verschwinden, Abbildung 2.4 B. In diesem Fall werden die Normalspannungen zu Hauptnormalspannungen und als  $\sigma_1, \sigma_2$  und  $\sigma_3$  bezeichnet. Die positivste Spannung ist die Hauptspannung  $\sigma_1$  und die negativste Spannung ist die Hauptspannung  $\sigma_3$ . Somit gilt  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  und die Schubspannungen haben den Wert Null. Die Vektoren der Hauptnormalspannungen  $\sigma_1, \sigma_2$  und  $\sigma_3$  werden oft auch als Kraftfluss bezeichnet [31]. Der Kraftfluss veranschaulicht bildlich, dass Kräfte und Momente durch ein Bauteil geleitet werden. Hierbei „fließen“ gleichsam Kräfte von einer Lasteinleitungsstelle hin zur Lagerstelle. Aus dieser bildlichen Vorstellung lassen sich in Analogie zu Flüssigkeiten prinzipielle Forderungen an eine kraftflussgerechte Konstruktion stellen [4]. So sind scharfe Umlenkungen und Querschnittsänderungen zu vermeiden.

## 2.2.2 Versagenshypothesen

Wann ein Bauteil unter einem mehrachsigen Spannungszustand versagt, lässt sich mit einer Vergleichsspannung beurteilen. Die Vergleichsspannung ermöglicht es, einen beliebigen komplexen Spannungszustand in einen skalaren Wert zu transformieren. Dieser Wert stellt den relevanten Belastungswert für das jeweilige Versagen dar und kann mit Hilfe von Messwerten aus einachsigen Festigkeitsversuchen des jeweiligen Materials beurteilt werden.

Auf Grundlage experimenteller Materialuntersuchungen wurden Versagenshypothesen entwickelt, welche den Übergangsbereich vom elastischen zum plastischen Materialverhalten bestimmen. Da die Werkstoffe jedoch unterschiedlich empfindlich gegenüber der Beanspruchungsart sind, gibt es mehrere Versagenshypothesen, von denen drei vorgestellt werden.

### Normalspannungshypothese

Spröde Werkstoffe, wie beispielsweise Grauguss [13], versagen unter Zugbelastung in der Regel mit einem Trennbruch senkrecht zur Hauptzugspannung. Hierbei tritt nahezu keine plastische Verformung vor dem Versagen auf. Für diese Werkstoffe wird die Normalspannungshypothese verwendet. Mit  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  gilt für die Vergleichsspannung  $\sigma_v = \sigma_1$  [4].

### Schubspannungshypothese

Verformbare Werkstoffe versagen unter Zug- oder Druckbeanspruchung in der Regel mit einem Gleitbruch, wie beispielsweise Stahl [13]. Diese Versagensart gilt auch für druckbelastete spröde Werkstoffe. In diesem Fall müssen die Bauteile nach der maximal auftretenden Schubbelastung  $\tau_{max}$  ausgelegt werden. Für diese Werkstoffe wird die Schubspannungshypothese mit einer Vergleichsspannung von  $\sigma_v = 2\tau_{max} = \sigma_1 - \sigma_3$  verwendet [4].

### Gestaltänderungsenergiehypothese

Wenn verformbare Werkstoffe, wie beispielsweise Aluminium [13], beim Auftreten plastischer Verformung oder durch Ermüdung bei schwingender Belastung versagen, dann wird die Gestaltänderungsenergiehypothese verwendet. Sie wird auch als GE-Hypothese oder v.Mises-Hypothese bezeichnet. Die GE-Hypothese vergleicht die zur Gestaltänderung erforderliche Arbeit und liefert daraus die Vergleichsspannung  $\sigma_v = \sigma_{Mises}$  [4].

$$\sigma_{Mises} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

Die drei Versagenshypothesen für einen zweiachsigen Spannungszustand sind in Abbildung 2.6 graphisch dargestellt. Hierbei wird der ertragbare Bereich jeder Versagenshypothese mit unterschiedlichen Strichkonturen dargestellt, wobei der eingezeichnete Flächenrand dem maximal ertragbaren Spannungszustand entspricht. Befindet sich die Belastung nun innerhalb der zugehörigen Fläche, erträgt die Struktur die aufgebrachten Belastungen. Liegt die Belastung außerhalb der Fläche, ist mit einem Versagen zu rechnen.

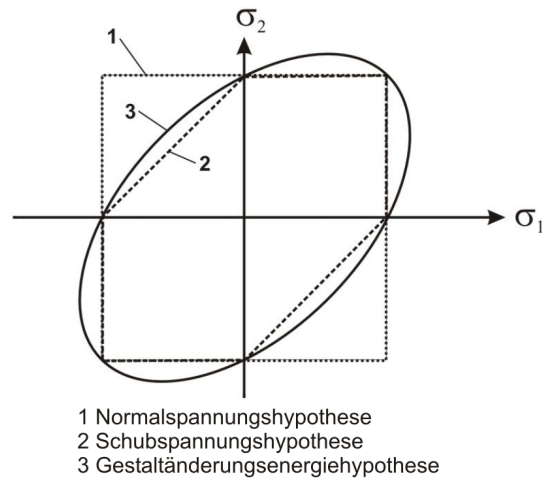


Abbildung 2.6: Zulässiger Bereich der Versagenskriterien bei zweiachsiger Beanspruchung nach [43]

### 2.2.3 Spannungssituation im Kerbgrund

Die Spannungserhöhung an Kerben und die elastische Verformung der Kerbkontur kann als Wirkung einer überlagerten Biegespannung beschrieben werden [34]. Zur Veranschaulichung werden bei einer Lochplatte gedanklich Zugseile entlang des Kraftflusses um das Loch gelegt, Abbildung 2.7A. Wird nun die Platte mit Zug belastet, werden die Seile mehr oder weniger gerade gezogen und damit gegenüber ihrer ursprünglichen Gestalt gestreckt. Diese Verformung führt zu Querspannungen in Richtung des Loches. Da das Material der Lochplatte jedoch steif ist, führt dieses „Geradebiegen“ dieser beiden Strukturbereiche zu Biegespannungen, siehe Abbildung 2.7B. Diese Biegespannungen wirken auf der Lochseite als Zugspannung und auf der Plattenaußenseite als Druckspannung. In Teilbild 2.7C ist an einem gekrümmten Biegebalken die Biegespannung infolge einer Zugbelastung dargestellt. Handelt es sich um einen stark gekrümmten Biegebalken führt dies zu einer

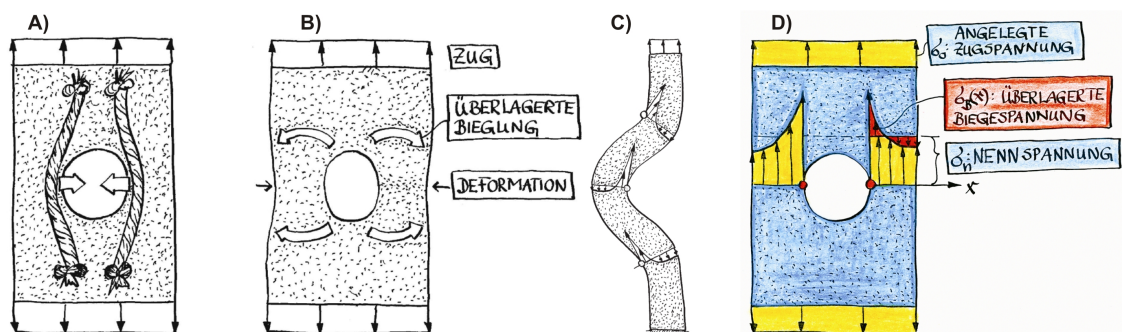


Abbildung 2.7: Kerbspannung als überlagerte Biegespannung betrachtet, nach [34]: A) Gekrümmte Seile erzeugen Querzug; B) Aufbiegen erzeugt Biegespannung; C) Biegebalken mit Spannungsspitzen an den konkaven Bereichen; D) Lochplatte mit Spannungsüberlagerung

hyperbolischen Spannungsverteilung [4]. Diese überlagerte Biegespannung mit ihrem nicht-linearen Spannungsverlauf führt bei einer elastischen Verformung zu Zugspannungsspitzen an den konkaven Bögen. Diese Spannungsspitzen sind die Kerbspannungen.

In Abbildung 2.7D wird an der Lochplatte die Überlagerung von Nennspannung und Biegespannung qualitativ dargestellt. An der Lochseite erhöht sich aufgrund des Zuganteils der Biegespannung die Gesamtzugspannung, während sich an der Plattenaußenseite aufgrund des Druckanteils der Biegespannung die Gesamtzugspannung reduziert. Damit bilden die Biegespannungsspitzen mit der überlagerten Nennspannung die Kerbspannung.

Die Spannungssituation im Kerbgrund einer Balkenschulter kann modellhaft gemäß Abbildung 2.8 als eine Schubspannungsfolge beschrieben werden. Wird der Balken an den beiden unterschiedlich breiten Enden belastet, ergeben sich in Zugrichtung potentielle Gleitlinien. Diesen entlang würde sich die belastete Struktur dehnen, wenn es keine Schubspannungen gäbe, wodurch am Querschnittsprung die größten Relativverschiebungen aufträten. Das Gleiten wird jedoch durch entgegengewirkende Schubspannungen verhindert, wodurch sie im Kerbgrund ihren maximalen Wert annehmen.

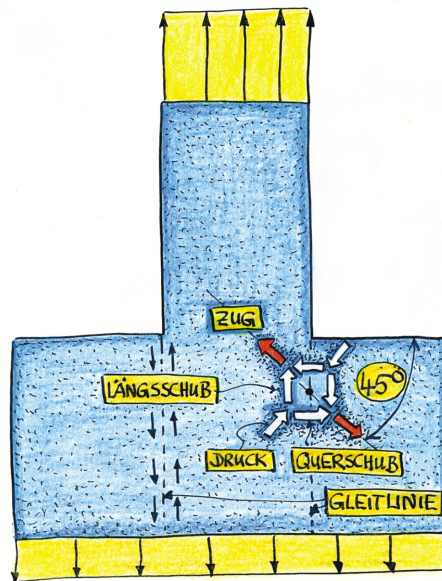


Abbildung 2.8: Modellhafte Darstellung der Spannungssituation im Kerbgrund einer Balkenschulter [34]

Dem Schubspannungspaar, das in Kerbnähe in Längsrichtung des Balkens verläuft, entspricht ein gleichgroßes Schubspannungspaar in Querrichtung. Die gleichgroßen Kräftepaare Längsschub und Querschub (Symmetrie des Spannungstensors) führen zu den Hauptnormalspannungen, die zu den Schubspannungen um  $\pm 45^\circ$  geneigt sind, siehe Abbildung 2.8. Wenn nun die Wirkung der um  $45^\circ$  geneigten Zugspannung in der Kerbe vermindert werden soll, dann bietet sich eine in diese Richtung wirkende Verstärkung an [34][48].

## 2.3 Biologische Strukturen

Knochen, Holz und Blätter sind biologische Strukturen, die in dieser Arbeit behandelt werden. Mit der Gestalt und den Merkmalen dieser Organe beschäftigt sich die Morphologie. Durch die Einführung des Licht- und später des Elektronenmikroskops konnten immer kleinere Bestandteile betrachtet werden, so dass die Morphologie in die makroskopische und in die mikroskopische Morphologie unterteilt wird. Die makroskopische Morphologie beschäftigt sich mit Strukturen, welche noch mit bloßem Auge sichtbar sind. Dies sind vor allem äußere Merkmale aber auch makroskopische Strukturen des inneren Aufbaus.

Die mikroskopische Morphologie unterteilt sich in Gewebe- (Histologie) und Zellenlehre (Cytologie). Die Histologie befasst sich unter anderem mit tierischen Muskel-, Nerven- und Stützgeweben sowie pflanzlichen Grund-, Festigungs- und Leitgeweben. Eine Hierarchieebene tiefer bestehen die Gewebe aus Zellen und extrazellulärer Matrix. Mit dem Feinbau der Zelle beschäftigt sich die Cytologie [9].

### 2.3.1 Knochen

Ein Knochen ist ein besonders hartes Gewebe, welches bei den Wirbeltieren Stützfunktionen übernimmt und das Skelett bildet. Der Aufbau des Knochens wird in einen äußeren und einen inneren Strukturbereich gegliedert. *Substantia corticalis* bezeichnet die kompakte Außenschicht und *Substantia spongiosa* bezeichnet die innere schwammartige Fachwerkstruktur. Schließlich wird die *Substantia corticalis* mit einer Bindegewebshaut, dem Periost, umgeben [51].

Der größte menschliche Knochen ist der Oberschenkelknochen, der Femur, welcher sich zwischen Becken und Knie befindet. Er muss einerseits die Drucklast aus dem Körpergewicht aufnehmen, andererseits wirken an ihm aber auch Zuglasten aus Muskelkontraktionen. Diese Lasten werden flächig an den Knochenenden, den Epiphysen, in den Knochen eingeleitet und haben damit Einfluss auf den lokalen Knochenaufbau. Im Bereich der Knochenenden verteilt sich der Kraftfluss über einen weiten Bereich, weshalb sich hier verstärkt die schwammartige *Substantia spongiosa* ausbildet. Im Knochenschaft, der Diaphyse, verläuft der Kraftfluss in einem engeren Gebiet, weshalb die kompakte *Substantia corticalis* vorherrscht und stark ausgeprägt ist.

Ein Femur wird in Abbildung 2.9 anatomisch betrachtet. In a) ist der Femur und das Hüftgelenk bei einem Einbeinstand skizziert. Der Zustand des Einbeinstandes stellt sich beim Laufen bei jedem Schritt ein und führt zu einer Belastung des Femurs b) mit Druck- und Zugkräften. Das Gewicht des Oberkörpers wird als Drucklast in das kugelförmige Knochenende eingeleitet. Da die Gewichtskraft beim Einbeinstand jedoch unsymmetrisch wirkt, müssen Kräfte einer Rotation entgegen wirken. Die Muskelkontraktion führt zum Kräfteausgleich und damit zu Zugkräften, die in den Femur eingeleitet werden. Der Längsschnitt durch den Knochen c) zeigt das Knochenfachwerk, welches sich entlang des Kraftflusses ausbildet. Dieser Kraftfluss wird in d) durch eine CAIO-Rechnung (Computer Aided Internal Optimization) visualisiert, bei der Druck rot und Zug schwarz dargestellt sind [45].

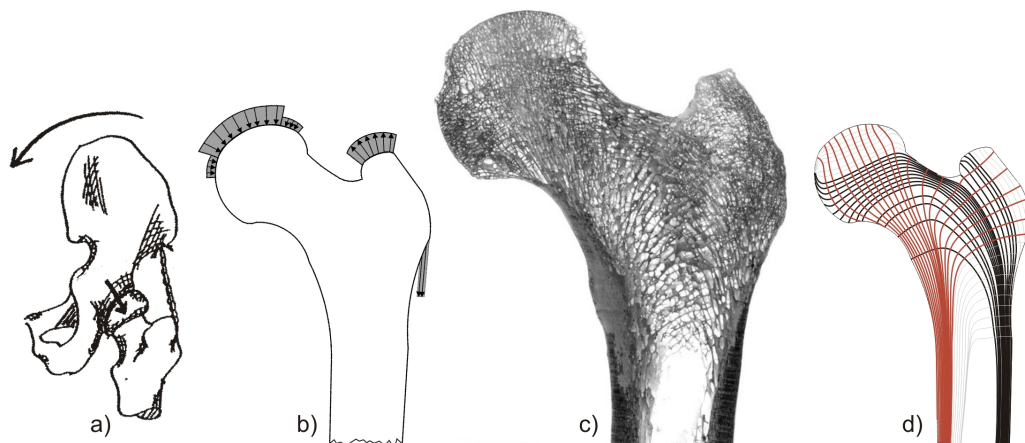


Abbildung 2.9: Menschlicher Oberschenkelknochen: a) Randbedingung, b) Belastung, c) Längsschnitt und d) visualisierte Strukturfunktionen

### Lastadaptives Wachstum des Knochens

Das Knochengewebe befindet sich auch nach der Wachstumsphase im ständigen Umbau. Die Gewebebildung erfolgt durch die Osteoplasten, und den Abbau übernehmen Osteoklasten. Diese Knochenumbildungsprozesse sind mechanisch stimuliert, weshalb lange Bettlägerigkeit, Aufenthalte in der Schwerelosigkeit oder eine über längere Zeit andauernde zu starre Schienung von Knochenbrüchen zur Rückbildung des Knochengewebes führen. Wird der Knochen jedoch mechanisch belastet, beispielsweise durch physiotherapeutische Maßnahmen, wird der Knochenaufbau bzw. die Knochenheilung gefördert [59].

Ein Beispiel für diese adaptive Mineralisation ist die *Substantia spongiosa* des Femurs, welche in Richtung des Kraftflusses orientiert ist. Durch die Orientierung entlang der Kraftflussstrajektorien, werden die Elemente des Fachwerks entweder nur auf Zug oder Druck belastet, wodurch Biegebeanspruchungen in der Knochenstruktur bei normalen Belastungsfällen weitgehend vermieden werden. Der Vorteil von reinen Zug- und Druckelementen gegenüber biegebelasteten Strukturen besteht in einer Gewichtersparnis, denn biegebelastete Strukturen enthalten eine neutrale Faser, die nicht beansprucht wird, die Struktur aber unnötig schwer macht.

### 2.3.2 Stamm und Holz der Bäume

Das Dickenwachstum der Bäume erfolgt durch das Kambium. Dies ist ein Gewebe, welches sich zwischen Holzkörper und Borke befindet und während der jährlichen Wachstumsperiode seine Zellen teilt, Abbildung 2.10. Nach außen werden Siebelemente (Siebzellen, Siebröhren) abgegeben, welche im Wesentlichen den Bast bilden. In diesem Gewebe werden hauptsächlich die in den Blättern synthetisierten Nährstoffe, die Assimilate, transportiert. Abgestorbenes Bastgewebe bildet mit Korkgewebe die Borke. Bast und Borke werden auch als Rinde bezeichnet. Sie schützt den Baum vor Verletzungen, Austrocknung und kann sogar ein gu-



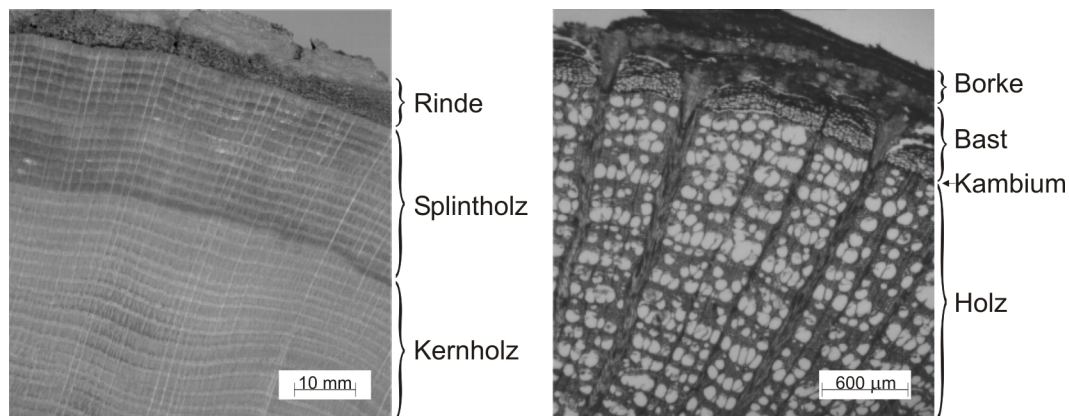


Abbildung 2.10: Holzaufbau: Querschnitte durch Holz (links Übersicht; rechts starke Vergrößerung) Foto K.H. Weber

ter Feuerschutz sein. Nach innen bildet das Kambium Holzzellen, welche das Stammholz ergeben. Der äußere Bereich des Stammes ist das Splintholz, welches Wasser und Mineralstoffe transportiert und auch mechanische Stützfunktionen übernimmt. Das Holzgewebe im Bereich des Stammkernes wird als Kernholz bezeichnet, dessen Hauptaufgabe die mechanische Stützfunktion ist, jedoch ist es nicht mehr am Wassertransport beteiligt [50][55]. Alle diese Zellen sind parallel zur Stammachse orientiert im Unterschied zu den Zellen der Holzstrahlen. Diese Zellen verlaufen vom Stammzentrum radial nach außen und sind in der Regel senkrecht zu den Jahresringen orientiert. Sie übernehmen neben der radialen Transportfunktion auch eine mechanische Funktion, indem sie den Stamm radial verspannen und damit einem Delaminieren der Jahresringe aufeinander entgegen wirken.

Je nach Wachstumsphase unterscheiden sich die gebildeten Holzzellen. Im Frühjahr wird vor allem großes, zellulosereiches Zellgewebe mit weiten Gefäßen gebildet, dessen Hauptaufgabe der Transport von Wasser und Mineralien ist. Im Spätjahr ist das Zellgewebe jedoch kleiner, ligninreicher und dickwandiger und damit besonders für Stützfunktionen des Stammes ausgelegt [42]. Diese abwechselnden Früh- und Spätholzschichten bilden gemeinsam das typische Muster der Jahresringe, welches an einem radialen Sägeschnitt gut zu erkennen ist wie in Abbildung 2.10.

### Lastadaptives Wachstum des Holzes

Bäume wachsen lastadaptiv. Das bedeutet, dass der Holzzuwachs auch mechanischen stimuliert ist und dadurch Material vermehrt an den Stellen angelagert wird, wo hohe Spannungen wirken. Die mechanische Stimulans kann neben der Quantität auch die Qualität des neu gebildeten Holzes beeinflussen. Durch die Anpassung der Form und des Materials an die wirkenden Belastungen wird eine homogene Spannungsverteilung im zeitlichen Mittel angestrebt. Ein Sicherheitsfaktor von etwa vier ermöglicht das Abfangen temporärer Spannungsspitzen [33]. Die homogene Spannungsverteilung wird auch als „Axiom konstanter Spannung“ bezeichnet [29][31].

Abbildung 2.11 zeigt an einem Wurzelquerschnitt den Einfluss der Belastung auf die weiteren Holzzuwächse. Als Beispiel eignet sich Wurzelholz, da Wurzeln kein Reaktionsholz bilden. Es

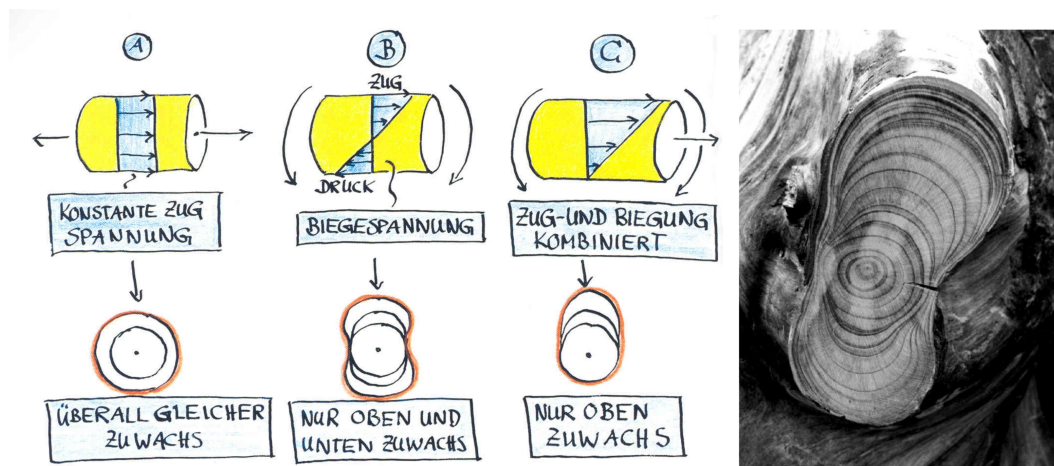


Abbildung 2.11: Der Wurzelquerschnitt visualisiert die Art der herrschende Belastung. Ausgehend von einem runden Querschnitt wird im Bereich hoher Spannungen mehr Holz gebildet. Das Foto zeigt eine Biegewurzel [32][33]

wird jeweils von einem runden Wurzelquerschnitt ausgegangen und die Belastung geändert: Eine konstante Zugspannung (A) führt zu radial gleichen Zuwächsen, damit ändert sich die Kreisform der Wurzel nicht. Eine Biegespannung (B) führt zu einer neutralen Faser in der Wurzelmitte und zu hochbelasteten Randbereichen. Dies führt zu Zuwächsen an den oberen und unteren Wurzelrändern, wodurch eine achtförmige Form entsteht. Einer Überlagerung von Zug (A) und Biegung (B) führt in Fall (C) nur oben zu Zuwächsen und damit zu einem ovalisierten Querschnitt. Das lastadaptive Wachstum protokolliert damit über die Querschnittsform bzw. Querschnittsänderung die Belastung.

# 3 Methoden

## 3.1 SKO-Methode

Die im Forschungszentrum Karlsruhe entwickelte SKO-Methode (**Soft Kill Option**) simuliert das Prinzip der adaptiven Knochenmineralisation: Hochbeanspruchte Bereiche werden mineralisiert, also versteift, und weniger oder gar nicht belastete Gebiete werden demineralisiert, also abgebaut [2]. Die technische Durchführung dieses Prinzips erfolgt mit der Finite-Elemente-Methode (FEM) [41] und einem Programm, welches den Elastizitätsmodul ( $E$ ) lokal in Abhängigkeit von den im Bauteil auftretenden Spannungen verändert. Der Optimierungsablauf ist in Abbildung 3.1 als Flussdiagramm dargestellt.

Die Topologieoptimierungsmethode SKO ist ein iteratives Verfahren bestehend aus den Hauptschritten Spannungsermittlung und Modifikation des E-Moduls. Zuerst wird ein FE-Modell mit den angreifenden Randbedingungen und den maximal zu Verfügung stehenden Grenzabmaßen erstellt. Dieser definierte Bereich wird Designraum genannt und ist in der Regel deutlich überdimensioniert. In der darauf folgenden ersten FE-Analyse werden die im Bauteil herrschenden Spannungen ermittelt. Diese sind üblicherweise an den Lasteinleitungs- und Einspannungspunkten erhöht und nehmen mit Abstand zu diesen Reaktionsorten ab. Die Krafteinleitungs- und Lagerpunkte sind die Start- und Endpunkte des noch unbekanntes Kraftflusses durch die Struktur.

Auf Basis der berechneten Spannungen erfolgt nun der Kernschritt der Optimierung: Die lokale Modifikation des E-Moduls in Abhängigkeit von der örtlich herrschenden Spannung.

$$E_{neu}(\sigma) = E_{alt} + a(\sigma - \sigma_{ref}) \quad (3.1)$$

Hierbei steht  $E_{neu}$  für den neu berechneten E-Modul,  $E_{alt}$  für den aktuellen E-Modul,  $a$  für einen Skalierungsfaktor,  $\sigma$  für die lokal herrschende Spannung und  $\sigma_{ref}$  für eine Referenzspannung. Die Referenzspannung wird vom Anwender vorgegeben und bestimmt die Spannung, die nach Abschluss der Optimierung im ganzen Bauteil herrschen soll.

Abhängig von der vorgegebenen Referenzspannung wird der E-Modul in niedriger belasteten Bereichen herabgesetzt und somit die Struktur erweicht. Bereiche, die im Vergleich zu der vorgegebenen Referenzspannung stärker belastet werden, erhalten eine E-Modulerhöhung, die eine Versteifung dieser Bereiche erzielt. Beim folgenden FE-Lauf werden in der Regel die erweichten Bereiche noch weniger belastet, im Unterschied zu den versteiften Bereichen, welche nun noch mehr Last übernehmen und dadurch noch mehr tragen als zuvor.

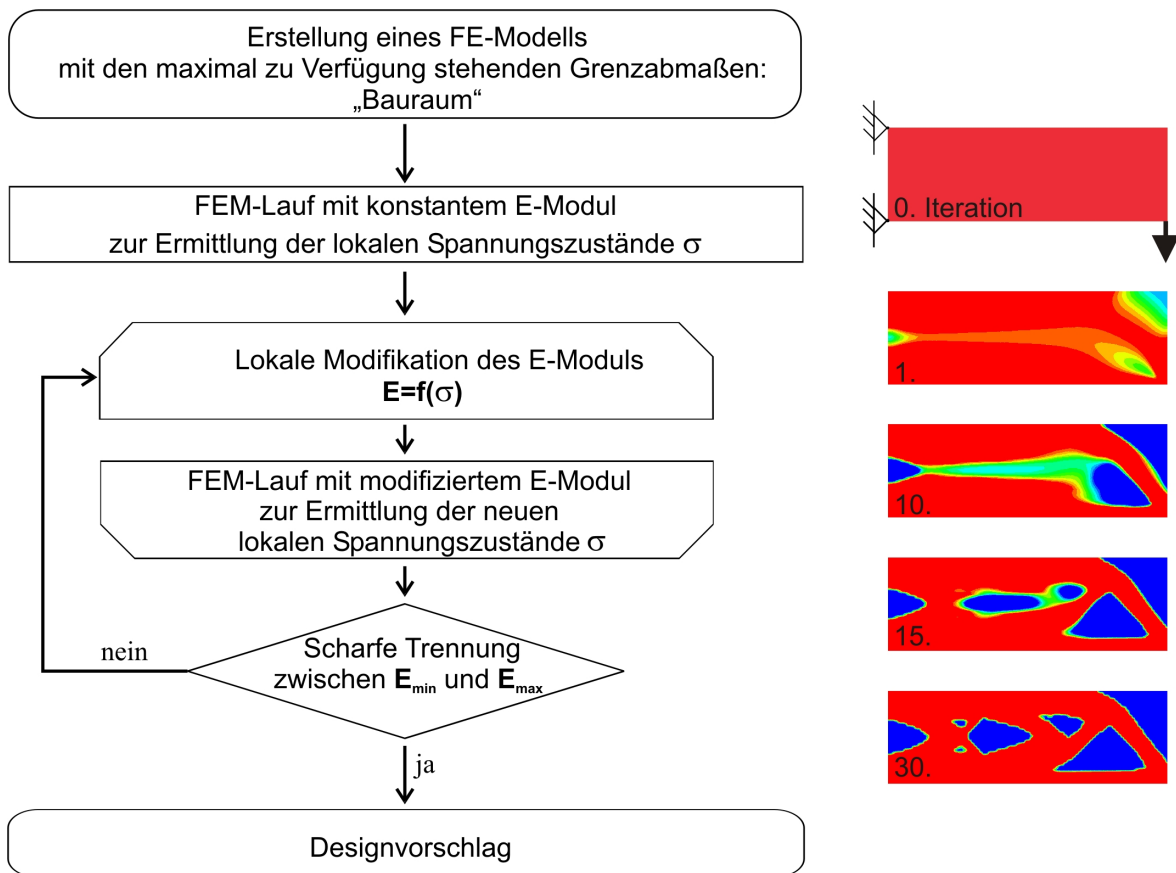


Abbildung 3.1: SKO-Ablaufdiagramm (links) und als Beispiel die E-Modulentwicklung einer Kragträgeroptimierung nach verschiedenen Iterationen (rechts)

Dieser Zyklus aus Spannungsermittlung und anschließender Modifikation des E-Moduls wird solange durchgeführt (häufig genügen 20 bis 30 Iterationen), bis sich eine scharfe Trennung zwischen den Strukturbereichen mit den steifen und denen mit den weichen Materialeigenschaften eingestellt hat. In diesem Endstadium liegen die Isolinien der Spannung sehr dicht beieinander – die lasttragenden sowie die unterbelasteten Strukturbereiche sind herausdifferenziert. Im letzten Schritt werden schließlich die weich gesetzten, statisch nicht relevanten Bereiche entfernt. So entsteht für die geforderten Randbedingungen ein Strukturvorschlag, der bezüglich des reduzierten Gewichts maximale Steifigkeit erreicht.

### Ein Kragträger als Optimierungsbeispiel

Der Ablauf einer Topologieoptimierung wird am Beispiel eines Kragträges in Abbildung 3.1 rechts dargestellt. Dieser Kragträger ist auf der einen (linken) Seite fest eingespannt und wird auf der anderen (rechten) Seite mit einer Einzellast belastet. Der Farbverlauf des FE-Plots zeigt den Wert des E-Moduls an. Hierbei steht Rot für den Wert  $E_{\max}$ , das damit die versteiften Elemente kennzeichnet, und Blau für den Wert  $E_{\min}$  und damit für die erweichten Elemente. Die Farbskala zwischen Blau und Rot stellt Zwischenwerte des E-Moduls dar. Am Anfang, also beim Iterationsschritt 0, wird der E-Modul im ganzen Designraum standardmäßig auf  $E_{\max}$  gesetzt. Schon in der ersten Iteration werden kaum

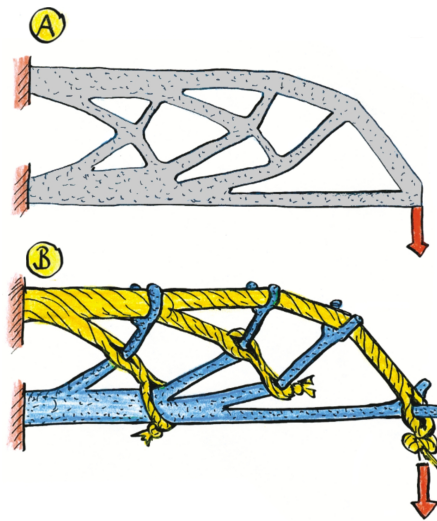


Abbildung 3.2: Anschauliche Darstellung der SKO optimierten Kragträgerstruktur mittels Zugseilen (gelb) und Druckstützen (blau) nach [34]

belastete Bereiche, wie die obere rechte Ecke (Farbverlauf zu Blau), aufgeweicht. Zum selben Optimierungszeitpunkt zeigt der Mittelbereich um die neutrale Faser großflächig erste Erweichungen. Erst im weiteren Optimierungsablauf differenzieren sich aus diesem Mittelbereich die statisch relevanten und die nicht relevanten Strukturbereiche heraus. Der Verlauf der Optimierungsschritte 1 bis 30 zeigt auch, warum die niedrig belasteten Bereiche erst ganz am Ende entfernt werden dürfen. Denn stetige Umstrukturierungen im Bauteil können dazu führen, dass zunächst lokal erweichte Bereiche später neu belastet werden. Beim Iterationsschritt 30 hat sich schließlich eine scharfe Trennung zwischen den belasteten und den nicht belasteten Bereichen herausdifferenziert. Die nicht belasteten Bereiche können nun endgültig aus der Struktur entfernt werden.

Nachdem die mechanisch relevanten Strukturbereiche nun bekannt sind, lässt sich ihre jeweilige mechanische Funktion mit einem visuellen Hilfsmittel darstellen [31]. Abbildung 3.2A zeigt einen Strukturvorschlag eines Kragträgers, welcher der Endstruktur aus Abbildung 3.1 ähnlich ist. Im zugehörigen Teilbild B werden nun Bauteilbereiche, die zugbelastet sind, durch die Farbe gelb als Zugseile symbolisiert. Bereiche, die druckbelastet sind, werden hellblau als Druckstützen dargestellt. In dieser Darstellung mit Zugseilen und Druckstützen wird die funktionelle Bauteilstruktur aus Teilbild A nachvollziehbar.

### 3.1.1 Stellgrößen der SKO-Methode

Die mit der SKO-Methode gefundene Struktur wird im Wesentlichen durch wenige Parameter beeinflusst. Diese Stellgrößen sind der Designraum, die Randbedingung, die FE-Netzfeinheit, die Referenzspannung, der Skalierungsfaktor und der E-Modulbereich. Dabei ergeben sich folgende Einflüsse auf das sich herausbildende Ergebnis.

Unterschreitet der **Designraum** kritische Abmessungen, wird der optimale Kraftfluss behindert und es bildet sich daher nur eine den beschränkten geometrischen Vorgaben angepasste Lösung heraus, deren Optimierungsbefit relativ gering sein kann.

Geänderte **Randbedingungen** haben einen direkten Einfluss auf den Kraftfluss und somit auf die sich ausbildende Struktur.

Die Feinheit des **FE-Netzes** muss an die Struktur angepasst sein, da die Elementgröße die Auflösung der optimierten Struktur bestimmt.

Die Höhe der **Referenzspannung** im Verhältnis zur Belastungshöhe beeinflusst die Lösung dahin, ob der Strukturvorschlag eher massiv oder eher filigran ausfällt. Bei einer niedrigen Referenzspannung liegt unter Umständen nur ein kleiner Spannungsbereich unterhalb der Referenzspannung. Damit ist die Ausgangsstruktur bezüglich der Referenzspannung stark belastet, weshalb nur ein kleiner Teil der Struktur entfernt werden kann und dadurch kompakte Strukturen entstehen. Bei hohen Referenzspannungen haben weite Bereiche der Struktur niedrigere Spannungswerte, werden dadurch erweicht und schließlich entfernt. Übrig bleibt eine filigrane Materialanordnung. Auf diese Weise können Strukturbereiche hinsichtlich ihrer Zug- oder Druckfunktion aufgetrennt werden. Biegestrukturen werden so in Zug und in Druck tragende Bereiche aufgeteilt. Wird die Referenzspannung so hoch gewählt, dass sich keine sinnvolle Struktur mehr einstellen kann, ist das FE-Netz zu grob und muss verfeinert werden.

Der **Skalierungsfaktor**  $a$  reguliert die Konvergenzgeschwindigkeit der Strukturfindung. Am Anfang einer Optimierung wird sein Wert über die Referenzspannung mit  $a = 100/\sigma_{ref}$  festgelegt [3]. Durch diese Wertwahl erhalten nicht belastete Elemente schon in der ersten Iteration den minimalen E-Modulwert und stark belastete Elemente den maximalen E-Modulwert.

Der **E-Modulbereich** legt Grenzwerte fest, welche die funktionelle Verknüpfung zwischen E-Modul und Spannung auf einen Bereich beschränken. Gleichung 3.1 verstärkt im mathematischen Sinne die Extrembereiche. Aus diesem Grund würde eine höhere Iterationszahl zu immer größeren  $E_{max}$ -Werten und zu immer niedrigeren  $E_{min}$ -Werten führen. Zur Begrenzung dieses Rückkopplungseffektes wird der E-Modulbereich limitiert.

Der vorgegebene Modifikationsbereich des E-Moduls liegt zwischen den Werten  $E_{min}$  und  $E_{max}$  und ist linear von der Spannung abhängig, Abbildung 3.3.  $E_{max}$  entspricht hierbei dem E-Modulwert des verwendeten Materials und  $E_{min} = E_{max}/1000$  [3]. Iterationsergebnisse, welche über  $E_{max}$  liegen, bekommen als oberen Grenzwert den Wert  $E_{max}$  zugewiesen, und Iterationsergebnisse, die unterhalb von  $E_{min}$  liegen, werden automatisch auf den unteren Grenzwert  $E_{min}$  gesetzt. Durch diese Zuordnung werden Materialbereiche mit einem E-Modulwert von  $E_{max}$  mit einer Spannung größer der Referenzspannung belastet, wobei durchaus hohe Spannungen auftreten können. Allerdings ist eine einfache Bewertung dieser hochbelasteten Bereiche über die schon existierenden FE-Ergebnisse ohne zusätzlichen Aufwand möglich.

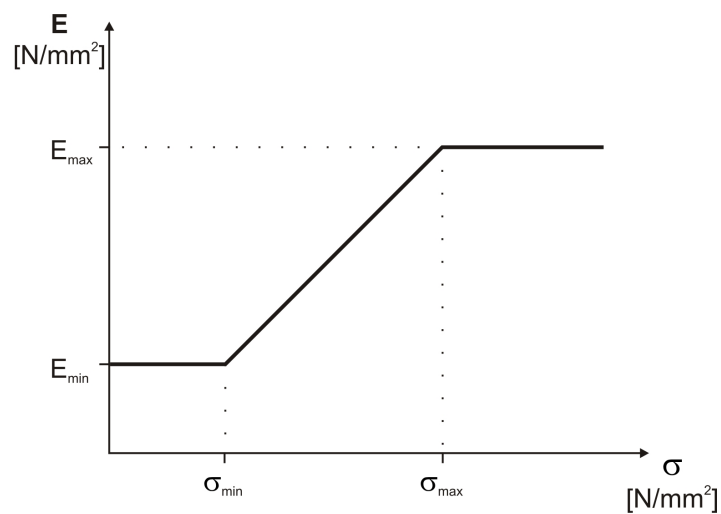


Abbildung 3.3: Linearer Zusammenhang zwischen Spannung und E-Modul, der nach unten und oben begrenzt ist

### „Soft Kill Option“ bedeutet bedachtes Materialentfernen

Das Vorgängerprogramm der SKO ist die KO-Methode (Kill-Option), welche Elemente aus dem Designvorschlag entfernt, nachdem der E-Modul unterhalb von  $E_{min}$  sinkt [3]. Im Unterschied dazu wird bei der „Soft-Kill-Option“ ein „softes“, also bedachtes, Löschen niedrigbelasteter Elemente angewendet. Elemente die unterhalb von  $E_{min}$  sinken, werden auf den Wert  $E_{min}$  gesetzt, aber nicht aus dem Designraum entfernt. Erst nach dem Abschluss der Optimierung, wenn es keine Strukturänderungen mehr gibt, werden die nichtbelasteten und weichgesetzten Elemente entfernt. Dieses Vorgehen ermöglicht es, dass Elemente, welche während des Optimierungsprozesses weich wurden, im späteren Verlauf der Optimierung wieder steif werden und so erneut mechanische Funktionen übernehmen.

## 3.2 Die Schubvierecksmethode

Die Methode der Schubvierecke ist ein Denkwerkzeug nach Mattheck [40], welches hilft die Kraftflussverläufe innerhalb einer Struktur qualitativ zu visualisieren. Für einen Einsatz der Methode werden nur die Belastungsart und der Belastungsort benötigt. Das heißt es muss bekannt sein, wo die Struktur in welcher Art belastet wird und an welcher Stelle sie gelagert ist. Mit diesen Angaben wird die Orientierung der entsprechenden Zug-, Druck- und Schubbelastungen durch Zeichnen des Schubvierecks ermittelt.

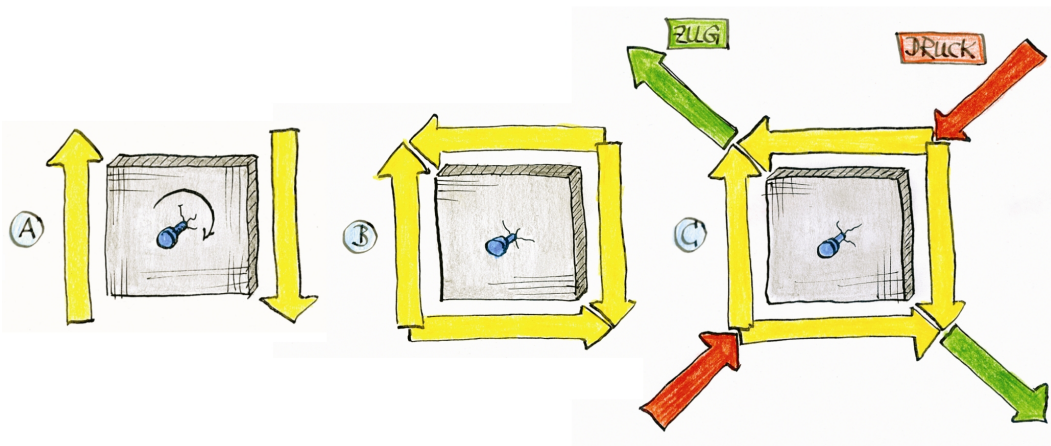


Abbildung 3.4: Modellhafte Darstellung des Schubvierecks [39]

Die Schubvierecks-Methode geht von einem drehbar gelagerten Viereck aus. Würde an diesem Viereck nur Längsschub wirken (A), würde es um die Drehachse rotieren. Da jedoch gleich große Querschubspannungen (B) wirken, dreht es sich nicht. Dies ist eine bildliche Darstellung der Symmetrie des Spannungstensors  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ . Eine Vektoraddition ist hier nicht zulässig, jedoch kann man die Richtungen der Zug- und Druckkräfte, die den Schubkräften gleichwertig sind, durch deren Zusammensetzen an den Ecken ablesen (C). Es gibt stets einen Winkel von  $45^\circ$  zwischen Hauptschubrichtung und Hauptnormalspannungsrichtung.

Im Unterschied zur Schubvierecksmethode führt der Mohrsche-Spannungskreis zu einer exakten Richtungs- und Größenangabe der einzelnen Spannungskomponenten. Diese können neben den Hauptspannungsrichtungen auch bei anderen Orientierungen ermittelt werden, womit der Mohrsche-Spannungskreis quantitative und qualitative Aussagen bei beliebiger Spannungssituation liefert [7]. Jedoch führt unter anderem die doppelte Auftragung eines Drehwinkels  $\varphi$  dazu, dass die Anschaulichkeit deutlich nachlässt.

## 3.3 Die Methode der Zugdreiecke

Die Methode der Zugdreiecke ist ein von Mattheck [37][36] entwickeltes graphisches Verfahren, um kraftflussgerechte Konturübergänge zu erstellen. Hierbei wird eine Kerbe mit



einem gleichschenkligen Dreieck überbrückt, wodurch im Kerbgrund Material hinzugefügt wird, siehe Abbildung 3.5. Das zusätzliche Material wirkt wie ein Seil, welches einen direkteren Kraftfluss und letztlich eine weichere Kraftflussumlenkung ermöglicht.

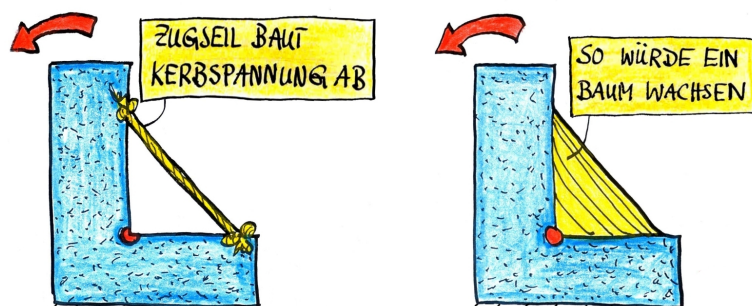


Abbildung 3.5: Die Kerbe einer Winkelstruktur wird mit einem Spannseil oder entsprechendem Materialdreieck überbrückt und damit entschärft [39]

Diese sehr einfache und effektive Vorgehensweise zur Reduktion der Kerbspannung ist ein Ergebnis langjähriger Beschäftigung auf diesem Gebiet. Frühe Arbeiten beschäftigen sich mit biologischen Strukturen, welche Kerben ohne nennenswerte Spannungsüberhöhungen aufweisen und damit quasi kerbspannungsfrei sind [27]. Zunächst wurden verschiedenste Lastträger morphologisch betrachtet, dabei stellten sich die Bäume mit dem in den Jahresringen protokolliertem Wachstum als besonders geeignet heraus [30]. Vom lastadaptiven Wachstum der Bäume wurde schließlich eine der technisch bedeutendsten Designregel der Natur abgeleitet: Das Axiom konstanter Spannung [31]. Die technische Übertragung des lastadaptiven Wachstums wurde mit der Entwicklung der Simulationssoftware CAO (Computer Aided Optimization) ermöglicht [28]. Mit diesem Programm konnten nun auch technische Strukturen kerbspannungsfrei gestaltet werden. Diese grob skizzierte Entwicklung führte schließlich zu der wesentlichen Vereinfachung der Kerbformoptimierung mit der Methode der Zugdreiecke.

### 3.3.1 Zugdreiecksmethode bei einer Balkenschulter

Der Einsatz der Methode der Zugdreiecke bei unsymmetrischen Strukturen wird an einer Balkenschulter in Abbildung 3.6 gezeigt. Die in Längsrichtung gezogene Balkenschulter weist an der Kerbe des Querschnittsprungs, also der Ecke des Balkenabsatzes, eine Spannungsüberhöhung auf. Diese Kerbe A wird durch ein Zugdreieck überbrückt und somit die Kerbspannung reduziert. Die neu entstandene Ecke B, die zwischen dem Zugdreieck und der schmalen Balkenflanke entsteht, führt allerdings zu einer neuen, wenn auch geringeren Spannungsüberhöhung. Diese Kerbspannung wird analog zu Abbildung 3.6 durch ein zweites, gleichschenkliges Zugdreieck überbrückt. Das zweite Zugdreieck geht von der Mitte des ersten Zugdreiecks aus, wodurch die halbe Basis des ersten Zugdreiecks die Schenkellänge des zweiten Zugdreiecks ist. Die Basis des zweiten Zugdreiecks bildet mit dem dünnen Bal-

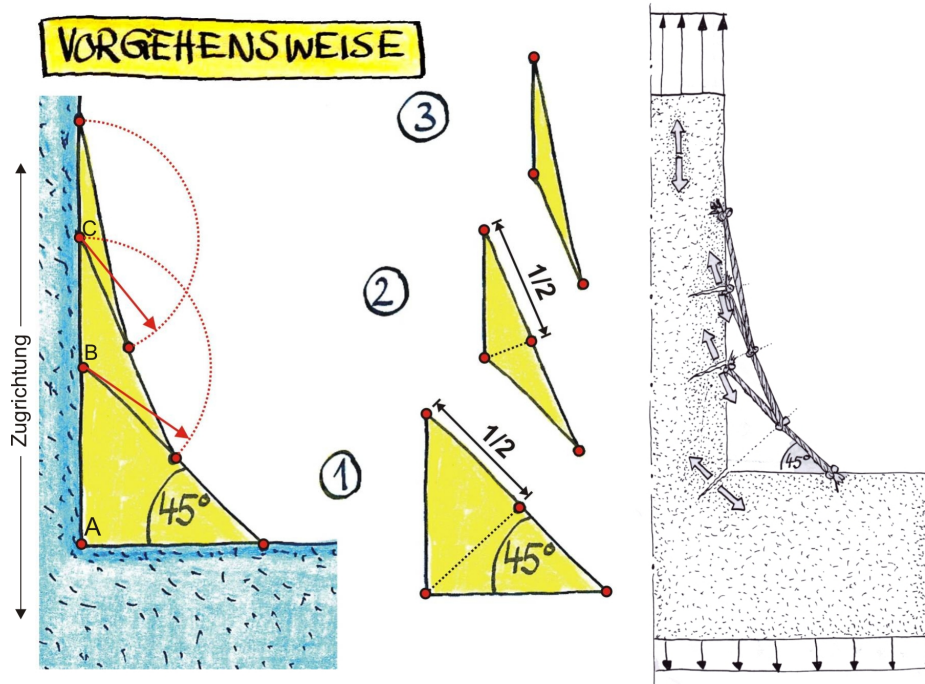


Abbildung 3.6: Kerbformoptimierung mit der Methode der Zugdreiecke. Links die Konstruktion der Kerbkontur mit Zugdreiecken. In der Mitte die drei aufeinander folgenden gleichschenkligen Dreiecke. Und rechts die symbolische Darstellung der Zugdreiecksstruktur mit überbrückenden Seilen an den hochbelasteten und versagenskritischen Stellen [39].

kenabschnitt wieder eine Kerbe C. Diese Kerbe kann wieder analog mit einem Zugdreieck überbrückt werden. Dies ist die Vorgehensweise der „Methode der Zugdreiecke“.

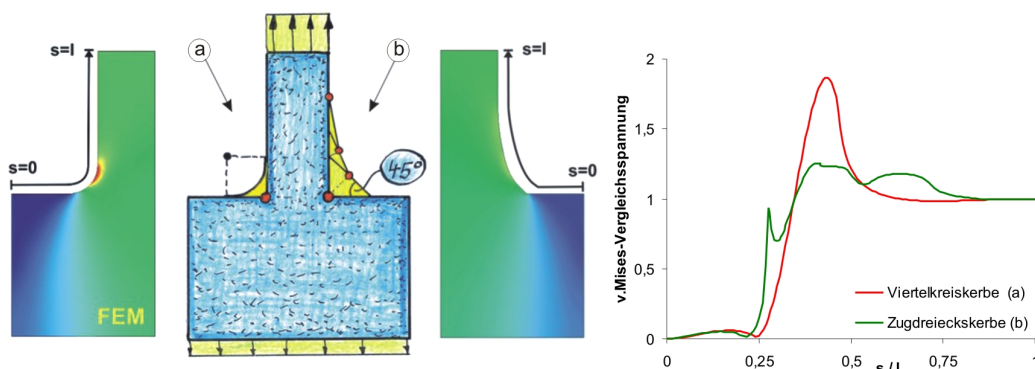


Abbildung 3.7: Spannungsvergleich zwischen einer Viertelkreis- und einer Zugdreieckskerbe an einer Balkenschulter [39]

Durch das sukzessive Überbrücken von Kerben mit Zugdreiecken entsteht eine linearisierte Kerbkontur, welche noch stumpfe Knicke aufweist. Diese Knicke führen zu lokalen Span-

nungserhöhungen, die durch Verrundung reduziert werden. Die Ausnahme bildet hierbei der  $45^\circ$  Knick an der Balkenschulter, der nicht verrundet werden muss [39]. Die Knicke kann man auf verschiedene Arten abrunden, wie in dieser Arbeit gezeigt wird. Tendenziell zeigen die Verrundungsverfahren untereinander keine großen Ergebnisunterschiede, da die Zugdreieckskontur an sich schon einen hohen kerbspannungsminimierenden Effekt aufweist.

In Abbildung 3.7 wird die verrundete Zugdreieckskerbe und die Viertelkreiskerbe einander gegenübergestellt. Beide Kerbformen haben die gleiche radiale Ausdehnung, unterscheiden sich aber in axialer Ausdehnung. Die Spannungsanalyse der beiden Strukturen zeigt im Bereich der Kerbe deutliche Unterschiede. Bei der Zugdreieckskerbe verteilt sich die Spannung auf einen größeren Konturbereich und führt im Vergleich mit der Kreiskerbe zu einer deutlich niedrigerer Maximalspannung.

### Zweiachsige Belastung

Die Methode der Zugdreiecke kann leicht modifiziert auch auf zweiachsig belastete Strukturen angewendet werden. Die Einsatzmöglichkeit der Methode der Zugdreiecke wird an drei Anwendungsbeispielen in Abbildung 3.8 kurz vorgestellt. Für weitergehende Angaben wird auf die Literatur verwiesen [39][52][36]. Bei den Strukturen A) und B) wirken jeweils gleichgroße Lasten, wodurch symmetrische Kerbkonturen durch die Methode der Zugdreiecke entstehen. Auf die spitzwinklige Struktur C) wirken unterschiedlich großen Lasten, wodurch die modifizierte Kerbkontur asymmetrisch gestaltet wird.

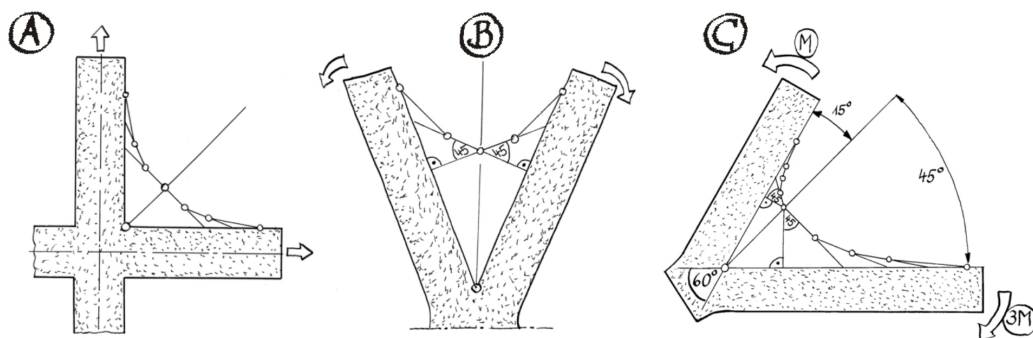


Abbildung 3.8: Anwendung der Methode der Zugdreiecke bei zweiachsiger Strukturbelastung [39]



## 4 SKO-Methodenerweiterung zur Bildung reiner Zug- oder Druckstrukturen

Nachdem in den vorherigen Kapiteln verwendete Grundlagen und Methoden erläutert wurden, stellen die folgenden Kapitel neue Ergebnisse und Erkenntnisse vor. Zunächst wird in diesem Kapitel die SKO-Methode dahingehend entwickelt, dass sie nicht nur allgemein belastete Strukturbereiche identifiziert und die unbelasteten entfernt, sondern dass zwischen rein zug- oder druckbelasteten Elementen gewählt werden kann.

### 4.1 Qualitative und quantitative Betrachtung der SKO-Strukturvorschläge

Die Charakterisierung der SKO-Strukturvorschläge wird exemplarisch an einem Kragträger durchgeführt. Er ist auf der linken Seite fest eingespannt und wird an der rechten unteren Ecke mit einer Zugkraft belastet. Bei diesem Kragträger, dargestellt in Abbildung 4.1, wird schrittweise die Referenzspannung erhöht, während die restlichen Parameter und die Randbedingungen konstant gehalten werden. Jeder Kragträger stellt den optimierten Strukturvorschlag für die jeweilige Referenzspannung dar, die von 0 bis 22 variiert wird. In Abbildung 4.1 sind davon sieben Fälle abgebildet.

#### **Qualitative Betrachtung der Strukturvorschläge**

Die optimierten Lösungsvorschläge lassen sich in drei verschiedene Klassen einteilen. Die erste Klasse betrifft sehr kleine Referenzspannungen. In Abbildung 4.1 entspricht dies dem Kragträger mit der Referenzspannung 3. Bei diesen Referenzspannungen werden die nicht benötigten und damit nicht belasteten Bereiche, in diesem Fall die obere rechte Ecke, aus dem Strukturvorschlag entfernt. Die zweite Klasse betrifft höhere Referenzspannungen, bei dem Kragträgerbeispiel die Referenzspannungen 7 und 10. Diese führen zu einer Funktionstrennung in reine Zug- und Druckstreben. Je höher dabei die Referenzspannung ist, desto differenzierter und damit komplexer wird der Strukturvorschlag. Bei der dritten Klasse wird die Referenzspannung weiter erhöht, weshalb die Streben dieses komplexen Designvorschlag zunächst dünner werden. Bei einem weiteren Referenzspannungsanstieg lösen sich dann auch komplette Streben auf. Aufgrund dieser wegfallenden Streben ändern benachbarte Streben leicht ihre Gestalt und passen sich so der neuen Situation an. Mit jeder entfernten Strebe

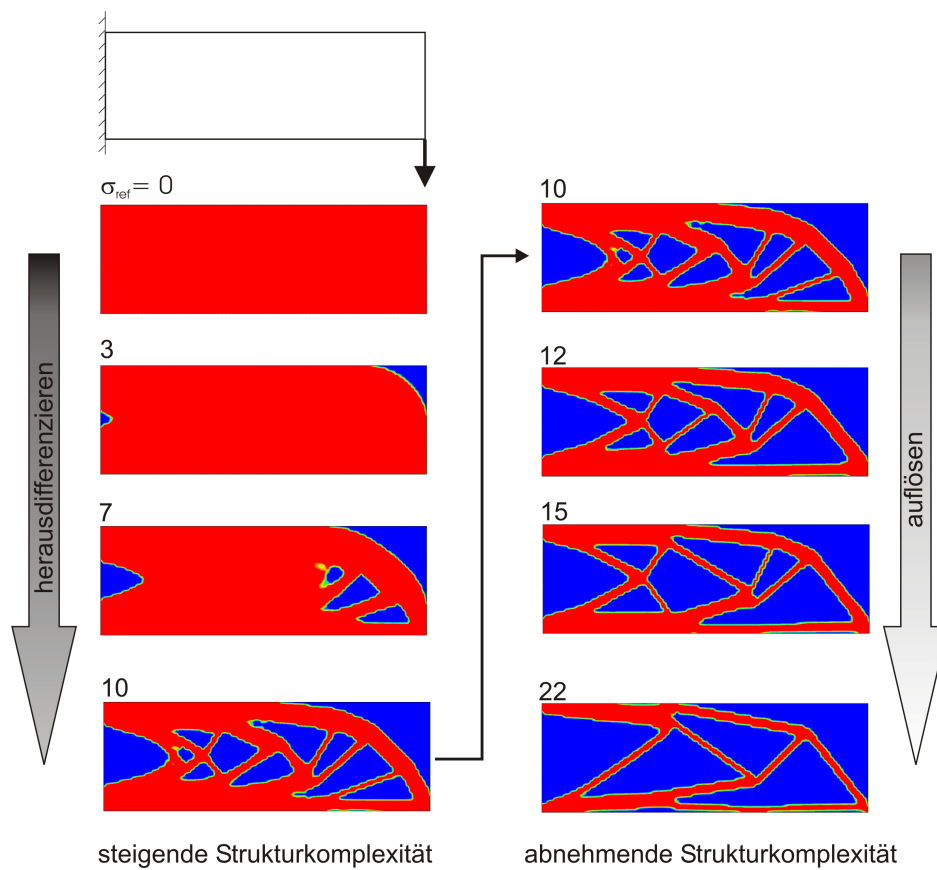


Abbildung 4.1: Verschiedene Referenzspannungen führen zu Strukturvarianten des Kragträgerdesigns

nimmt die Strukturkomplexität wieder ab, jedoch ist die „Verwandtschaft“ zu dem komplexen Designvorschlag noch deutlich erkennbar. Bei dem Kragträgerbeispiel in Abbildung 4.1 erfolgt dies bei den Referenzspannungen 12, 15 und 22.

Die Entwicklung der Strukturvorschläge lässt sich wie folgt zusammenfassen: Ausgehend von einer kompakten Ausgangsstruktur differenziert sich bei einer schrittweisen Erhöhung der Referenzspannung ein komplexer Designvorschlag heraus, welcher sich dann sukzessiv aber gestaltähnlich teilweise wieder vereinfacht.

#### Quantitative Betrachtung der Strukturvorschläge

Zur quantitativen Beurteilung dieser doch sehr unterschiedlichen Strukturen wird ein mechanisches Gütemaß benötigt. Als deren Maß wird das Gewicht der belasteten Struktur im Verhältnis zu der entsprechenden Verschiebung betrachtet. Hierzu werden das Strukturgewicht und die Verschiebung an der rechten unteren Ecke mittels der FEM bestimmt. Aus der Addition der horizontalen und vertikalen Verschiebungen setzt sich der Verschiebungsbetrag zusammen, welcher durch den größten Verschiebungsbetrag normiert wird. Entsprechend wird zur besseren Darstellung auch die Güte noch durch ihren größten Wert normiert.

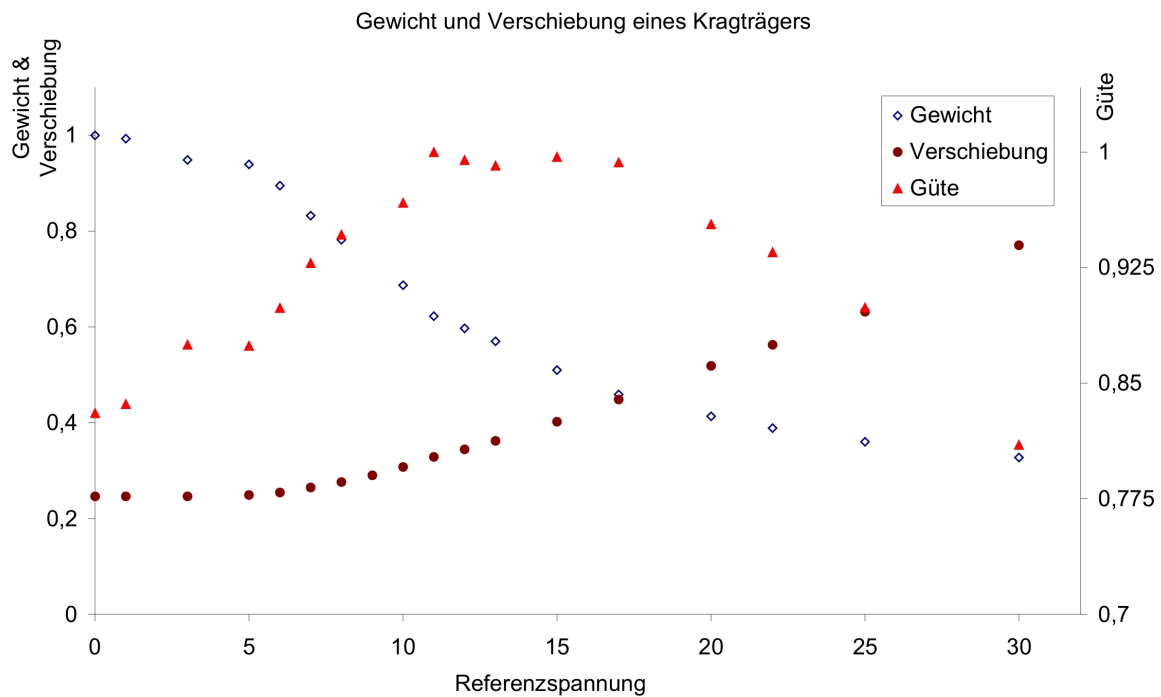


Abbildung 4.2: Gewicht, Verschiebung und Güte des Kragträgers in Abhängigkeit von der gewählten Referenzspannung

Die Ergebnisse sind im Diagramm von Abbildung 4.2 dargestellt, bei dem auf der x-Achse die Referenzspannung, auf der y-Achse das normierte Gewicht und die normierte Verschiebung und auf der sekundären y-Achse die Güte aufgetragen ist. Die braunen Diagrammpunkte geben die Verschiebungen an, die schwarzen Diagrammpunkte stehen für das zugehörige Gewicht und die orangenen Diagrammpunkte für die Güte. Betrachtet man den Verlauf der Diagrammpunkte für kleine Referenzspannungen bis ca.  $\sigma_{ref} = 6$ , sind zwar Gewichtsabnahmen aber nur minimale Verschiebungszunahmen feststellbar. Die entfernten Bereiche sind damit mechanisch nicht relevant, da die Steifigkeit der gesamten Struktur nahezu konstant geblieben ist. Wird die Referenzspannung weiter erhöht (ca. bis  $\sigma_{ref} = 10$ ) nimmt nach einer Übergangphase das Gewicht stark ab, jedoch steigt die Verschiebung nur langsam linear an. Im Bereich von  $\sigma_{ref}$  11 bis 16 liegt die Strukturgüte im Bereich von 1. Ab  $\sigma_{ref} = 16$  fällt die Strukturgüte wieder ab, da die Verschiebung ab hier weiterhin linear zunimmt, das Gewicht aber nur geringfügig abnimmt. Die Unstetigkeiten im Güteverlauf sind auf die endliche Maschengröße des FE-Netzes zurückzuführen.

## 4.2 SKO-Strukturen, die nur auf Druck oder nur auf Zug belastet werden

Die Direktive der SKO-Methode lautet nur belastete Strukturbereiche auszubilden. Aber was Belastung bedeutet, wird durch die Optimierungsvariable  $\sigma$  definiert. Als Optimierungsvariable können ungerichtete und gerichtete Belastungsvariablen verwendet werden. Ungerichtete Belastungsvariablen sind in dieser Untersuchung die v.Mises-Vergleichsspannung und gerichtete Belastungsvariablen die Hauptnormalspannungen.

Bevor jedoch mit der Optimierung mittels der Hauptnormalspannungen begonnen werden kann, sind zwei Punkte zu beachten. Als erstes muss der SKO-Algorithmus überprüft werden, da im Unterschied zur betragsmäßigen v.Mises-Vergleichsspannung die Hauptnormalspannungen gerichtete Optimierungsvariablen sind. Als zweiter Punkt ist zu überprüfen, ob es überhaupt eine sinnvolle Struktur gibt, die rein mit Seilen bzw. rein mit Druckstützen lösbar ist.

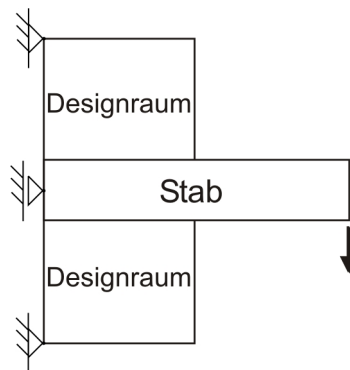


Abbildung 4.3: Randbedingungen eines starren Stabes, welcher an einer senkrechten Ebene befestigt werden soll

Aus diesem Grund eignet sich ein einfacher Kragträger nicht als Beispiel, da er auf Biegung beansprucht wird und damit Zug- und Druckelemente benötigt. Aus diesem Grund wird nur seine senkrechte Anbindung als starrer Stab an eine Ebene untersucht, wofür ein oberer und ein unterer rechteckiger Designraum zur Verfügung stehen.

### Ungerichtete Optimierungsvariablen führen zu Zug- und Druckstreben

Die v.Mises-Vergleichsspannung errechnet aus einem mehrachsigen Spannungszustand einen Skalar, also einen ungerichteten Vergleichswert. Somit führt diese Optimierungsvariable zu Strukturen, die je nach Belastung aus Zug- und Druckstreben bzw. bei einem einachsigen Spannungszustand auch nur aus einer Strebenart bestehen.

Das mit der v.Mises-Vergleichsspannung ermittelte Optimierungsergebnis für die Anbindung des Stabes an der horizontalen Fläche ist in Abbildung 4.4 dargestellt. Diese Struktur weist versteifte Bereiche als Zug- und Druckstützen auf und dient als Referenz zu den Strukturen, welche im Folgenden mit gerichteten Optimierungsvariablen ermittelt werden.



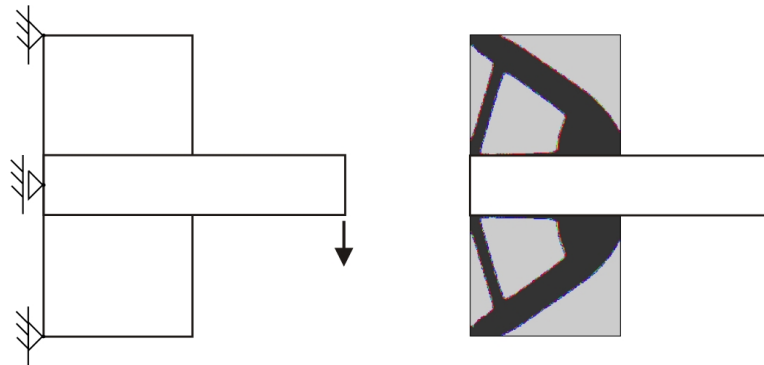


Abbildung 4.4: Die v.Mises-Vergleichsspannung als Optimierungsvariable erzeugt Zug- und Druckstreben bei dem Strukturbeispiel einer senkrechten Anbindung eines starren Stabes

### Gerichtete Optimierungsvariablen

Im Unterschied zu den ungerichteten Optimierungsvariablen führen gerichtete Optimierungsvariablen entweder zu Zug- oder Druckstreben.

#### Größte Hauptnormalspannung $\sigma_1$ führt zu Zugstreben

Die Hauptnormalspannung  $\sigma_1$  ist die positivste Spannung, in der Regel eine Zugspannung, die in einem mehrachsigen Spannungszustand vorkommen kann. Nimmt die HNS einen negativen Wert an, entspricht sie einer Druckspannung, was in Gleichung 3.1 zu einer Abnahme des E-Moduls führt. Somit werden mit dieser Optimierungsvariablen Strukturvorschläge erzeugt, die nur aus Zugstreben bestehen, vgl. Abbildung 4.5.

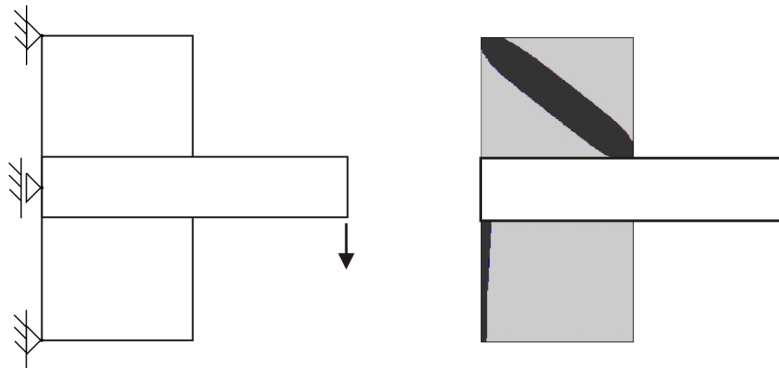


Abbildung 4.5: Als positivste Hauptnormalspannung erzeugt  $\sigma_1$  bei dem Strukturbeispiel nur Zugstreben

#### Kleinste Hauptnormalspannung $\sigma_3$ führt zu Druckstreben

Die kleinste Hauptnormalspannung  $\sigma_3$  ist die negativste Spannung, in der Regel eine Druckspannung, die in einem mehrachsigen Spannungszustand vorkommen kann. Da Drücke mit

negativen Spannungen beschrieben werden, muss der Algorithmus in Gleichung 3.1 angepasst werden.

$$E_{neu}(\sigma) = E_{alt} + a(-\sigma + \sigma_{ref}) \quad (4.1)$$

Hierbei ist zu beachten, dass auch die Referenzspannung im Druckbereich liegt und somit auch einen negativen Wert aufweist. Sollte  $\sigma_3$  positiv werden, also eine Zugspannung sein, führt dies in Gleichung 4.1 zu einer Abnahme des E-Moduls. Somit werden mit dieser Optimierungsvariablen Strukturvorschläge erzeugt, die nur Druckstreben enthalten.

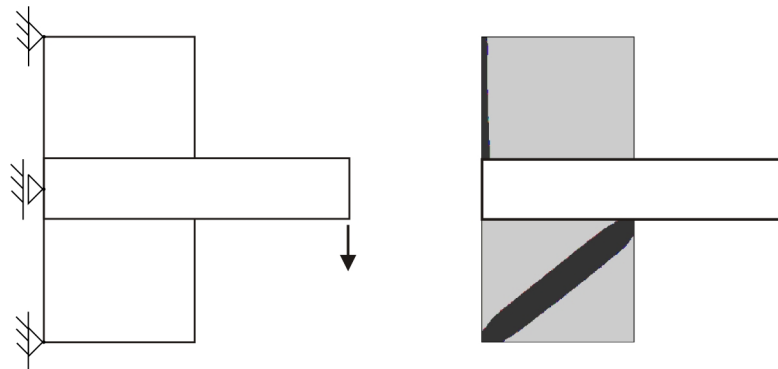


Abbildung 4.6: Als negativste Hauptnormalspannung erzeugt  $\sigma_3$  bei dem Strukturbeispiel nur Druckstreben

Auf diese Art ist es möglich, sowohl für reine Zug- als auch für reine Druckkonstruktionen materialgerechte Optimalstrukturen zu erhalten. Die mechanisch günstigste Position für Zugseile bzw. Druckstützen ist im Gegensatz zu dem hier verwendeten Beispiel oft nicht vorhersehbar. Wird bei der verwendeten Struktur, aus Abbildung 4.3, als Modifikation lediglich das mittige Lager entfernt, das untere Lager an die anderer Ecke des Bauraums verschoben und als Optimierungsvariable die maximale Hauptnormalspannung verwendet, bildet sich im Unterschied zu Abbildung 4.5 eine anders gestaltete Struktur aus. In Abbildung 4.7 sind die modifizierten Randbedingungen und der neu berechnete Strukturvorschlag abgebildet.

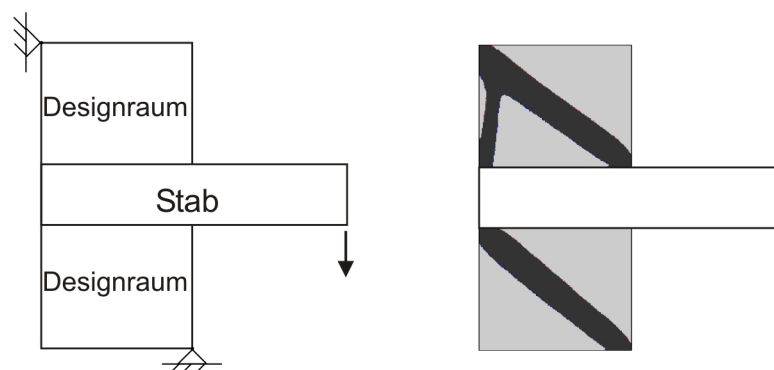
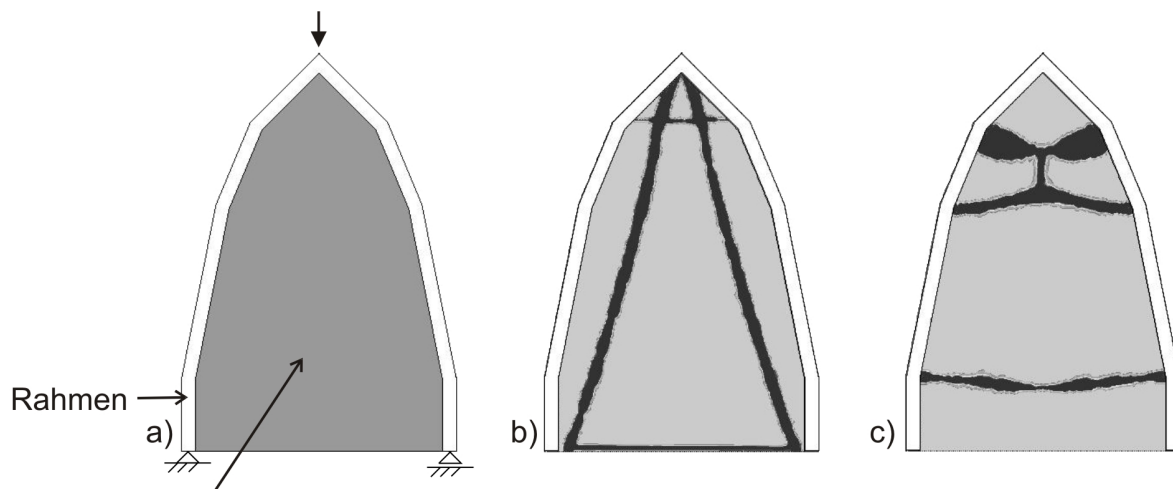


Abbildung 4.7: Eine geänderte Lagerung führt zu einer anderen Strebenbildung (Optimierungsvariable  $\sigma_1$ )

Nachdem die Optimierung mit unterschiedlichen Optimierungsvariablen bei der Anbindung des Kragträgers eingeführt wurde, werden an zwei weiteren Strukturbeispielen der Einsatz der gerichteten Optimierungsvariablen und die resultierenden Lösungsvorschläge dargestellt.

### 4.3 Versteifungen einer Rahmenstruktur

Die in Abbildung 4.8 a dargestellte symmetrische Rahmenstruktur R1 soll zur Minderung der Verformung bei senkrechtem Druck auf die Spitze versteift werden, wofür als Designraum das Innenvolumen zur Verfügung steht. Es werden zwei Optimierungsläufe mit jeweils unterschiedlichen Optimierungsvariablen durchgeführt. Im ersten Lauf, siehe Teilbild b, wird die Optimierungsvariable  $v$ .Mises und im zweiten Lauf, siehe Teilbild c, die maximale HNS verwendet. Beide Designvorschläge unterscheiden sich grundsätzlich in den Strukturen und den zugehörigen mechanischen Eigenschaften. Die Versteifungselemente in R1b, Zug- und Druckelemente, stützen vor allem die belastete Spitze und führen die eingeleitete Last direkt in die Einspannung ab. Dies ist eine effiziente Versteifungsvariante, jedoch müssen die Druckstäbe noch gegen Knicken ausgelegt werden. Zusätzlich wird durch diese Versteifungsstruktur der gekrümmte Rahmen entlastet, wodurch seine Ausbeulgefahr reduziert wird und sich deshalb nur zwei dünne Querverseilungen ausbilden.



Innenvolumen = Designraum

Abbildung 4.8: Versteifung einer Rahmenstruktur R1: a) Randbedingung, b) Lösungsstruktur mit  $v$ .Mises-Vergleichsspannung als Optimierungsvariable und c) Lösungsstruktur mit  $\sigma_1$  als Optimierungsvariable

Bei der Rahmenstruktur R1c können als restriktive Vorgabe nur Zugseile zur Versteifung verwendet werden. Diese bilden sich vor allem in horizontaler Richtung aus und greifen an den Ecken der Rahmenstruktur an. Von der Größe der Eckwinkel sind die Querkräfte abhängig, womit das oberste Seil die größte Kraft aufnehmen muss und auch die größte Breite aufweist. Im Unterschied dazu ist das unterste das dünnste Seil, welches sich an der stumpfsten Ecke gebildet hat und die geringsten Kräfte aufnehmen muss. Im Unterschied

zu R1b, wird mit dem Rahmen R1c die Belastung abgeleitet. Somit versteifen die Seile indirekt den Rahmen, da sie seine Verformung nach außen verhindern.

## 4.4 Selektion von Zug- oder Druckstreben und ihre optimale Lage

Die gerichteten Optimierungsvariablen ermöglichen es, aus einem Fachwerk aus Zug- und Druckstreben eine Strebenart auszuwählen und deren optimale Lage zu bestimmen. Hierfür wird als Beispiel eine unsymmetrische Rahmenstruktur R2 verwendet, siehe Abbildung 4.9, zu deren Versteifung das Innenvolumen zu Verfügung steht. Innerhalb des Designraums bildet sich während der Optimierung mit der v.Mises-Vergleichsspannung ein filigraner Strukturaufbau. Zur Veranschaulichung des Fachwerks sind die zugbeanspruchten Bereiche gelb und die druckbeanspruchten Bereiche blau eingefärbt.

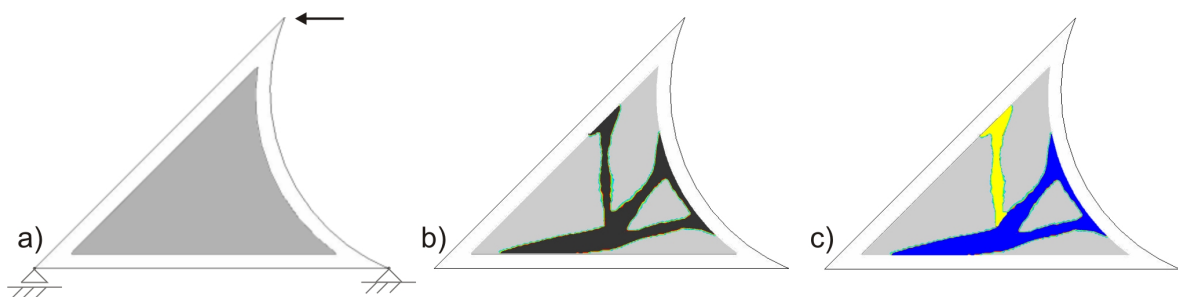


Abbildung 4.9: Die Rahmenstruktur R2 ist mit einem Strebenfachwerk versteift: a) Randbedingung, b) Lösungsstruktur mit v.Mises-Vergleichsspannung und c) farbige Darstellung der Zug- (gelb) und Druckstützen (blau)

Wird nun die Rahmenstruktur R2 mit der Optimierungsvariable  $\sigma_3$  berechnet, erhält man nur den Teil des v.Mises-Lösungsdesigns, welcher mit Druck belastet wird. Diese geänderten Randbedingungen führen zu der Struktur in Abbildung 4.10. Da sich keine zugbelasteten Streben ausbilden, können auch keine Wechselwirkungen zwischen Zug- und Druckstreben stattfinden. Aus diesem Grund sind die Druckstreben von Abbildung 4.9 und Abbildung 4.10 ähnlich, aber nicht identisch. Beide Strukturvorschläge sind jedoch für die unterschiedlichen Randbedingungen jeweils optimal.

Aufbauend auf den Untersuchungen lässt sich zusammenfassend sagen, dass die Modifikation der SKO-Methode die Wahl ermöglicht, ob eine reine Zug- oder Druckkonstruktion optimiert werden soll. Mit der Wahl der Optimierungsvariablen, welche in Gleichung 3.1 u als  $\sigma$  deklariert wird, kann das Lösungssuchfeld eingegrenzt und damit die Lösung beeinflusst werden. Ihre Wahl bestimmt, ob der Strukturvorschlag aus Zug- und Druckelementen, nur aus Zugelementen oder nur aus Druckelementen bestehen soll. Eine Vergleichsspannung, z.B. die v.Mises-Spannung, führt zu Strukturen, die aus Zug- und Druckelementen bestehen kann. Die größte Hauptnormalspannung  $\sigma_1$  führt zu Strukturen, welche nur aus Zug-

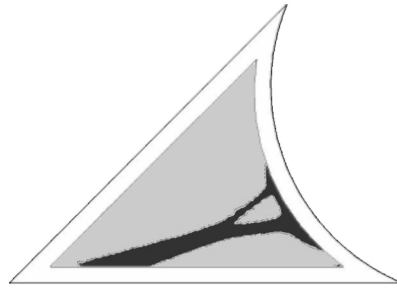


Abbildung 4.10: Berechnung der optimalen Lage der verbleibenden Druckstruktur bei einer Optimierung mit  $\sigma_3$  als Optimierungsvariable

elementen bestehen und die kleinste Hauptnormalspannung  $\sigma_3$  führt zu Strukturen, welche nur aus Druckelementen bestehen. Somit ist es über die Wahl der Optimierungsvariablen möglich, eine materialgerechte Optimierung auch derjenigen Materialien zu berechnen, die im Wesentlichen entweder nur auf Zug oder nur auf Druck belastbar sind. Diese zusätzliche Restriktion führt zu neuen Strukturlösungen und damit zu neuen Anwendungsbereichen.



# 5 Untersuchung zum strukturmechanischen Aufbau von Laubblättern

Die modifizierte SKO-Methode aus Kapitel 4 wird bei der folgenden Untersuchung angewendet, um die Struktur von Laubblättern am Beispiel eines Rotbuchenblattes zu analysieren, Abbildung 5.1.

Blätter sind Organe der höheren Pflanzen, zu deren Hauptaufgaben die Photosynthese, der Gaswechsel und die Transpiration gehören. Aus diesem Grund werden sie meist nur im Hinblick auf die Photosynthese beschrieben und als „Chlorophyllträger“ gesehen [50]. Chlorophyll ermöglicht den Pflanzen Energie aus Sonnenlicht zu gewinnen, um es für biochemische Stoffwechselprozesse bereit zu stellen [20].



Abbildung 5.1: Blatt einer Rotbuche (*Fagus sylvatica* L.)

Jedoch muss ein Blatt weitere Eigenschaften erfüllen, um eine zuverlässige Bildung der Assimilate zu ermöglichen, wovon folgende besonders in Betracht zu ziehen sind: Die mechanische Widerstandsfähigkeit gegen Niederschlag und Windbelastung, die Größe der Blattfläche, die schnelle Entfaltung des Blattes aus der Knospe sowie die Schädlingsresistenz. Aus dieser Vielzahl von Vorgaben, die teilweise auch diametral zueinander sind, bildet sich im Laufe der Entwicklung je nach Umwelteinflüssen ein optimales Resultat für den lokalen Lebensraum aus.

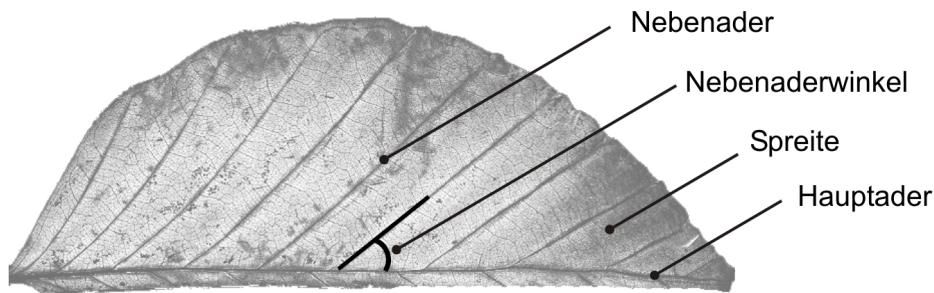


Abbildung 5.2: Blatthälfte einer Rotbuche (*Fagus sylvatica* L.)

Viele Blätter weisen trotz ihrer Gestaltungsvielfalt [24] gemeinsame Strukturmerkmale auf (Abbildung 5.2): Eine flächige, lanzettförmige Grundform, die im Verhältnis zur Blattfläche eine geringe Dicke aufweist und von Blattadern durchzogen ist. Bei den Blattadern fällt auf, dass es meist eine stabile, in Längsrichtung ausgebildete Hauptader gibt, von der seitlich deutlich erkennbare Nebenadern abzweigen. Die Nebenadern sind bei den meisten Blattarten etwa parallel angeordnet, weisen ungefähr gleiche Abstände zueinander auf und bilden mit der Hauptader einen Winkel.

Die Biologie bezeichnet die Blattfläche als Spreite, die Hauptader als Hauptnerv oder Nervatur erster Ordnung und die Nebenadern als Nervatur zweiter Ordnung. Bei manchen Arten zweigen weitere Adern höherer Ordnung ab, die Nervatur dritter Ordnung usw... [11][53]. Das Blattwachstum ist grundsätzlich genetisch festgelegt und kann nur relativ gering auf örtliche Umwelteinflüsse reagieren. Da Laubblätter jährlich neu gebildet werden, sind sie ein Wegwerfprodukt des Baumes, welches sich jedoch im Laufe der Zeit evolutionär optimiert hat [20].

Die weitere Betrachtung geht jedoch nun von der Annahme aus, dass die Hauptursache der Blattgestaltung die mechanische Windbelastung sein dürfte. So stellt ein Sturm für Blätter eine Extremsituation dar, für welche sie aber ausgelegt sein müssen.

## 5.1 Hypothese zur Gestaltung der Blattstruktur aus mechanischer Sicht

Laubblätter wehen wie Fahnen im Wind, wodurch die Windkraft in der Regel in Richtung der Hauptader angreift. Diese Flächenlast erzeugt in der Blattebene Schubkräfte, die ein Abscheren der Blattfläche an der Hauptader verhindern. Aus den Schubkräften kann das zugehörige Schubviereck gebildet werden, mit welchem man die  $\pm 45^\circ$ -Orientierung der Hauptnormalspannungen erhält. In Abbildung 5.3 ist das Schubviereck an einem Blatt eingezeichnet. Es zeigt, dass die Nebenadern in Richtung der Hauptnormalspannung  $\sigma_1$  orientiert sind. Wenn nun angenommen wird, dass die Nebenadern auch mechanische Funktionen übernehmen, dann versteifen sie die Blattstruktur als Zugelemente.



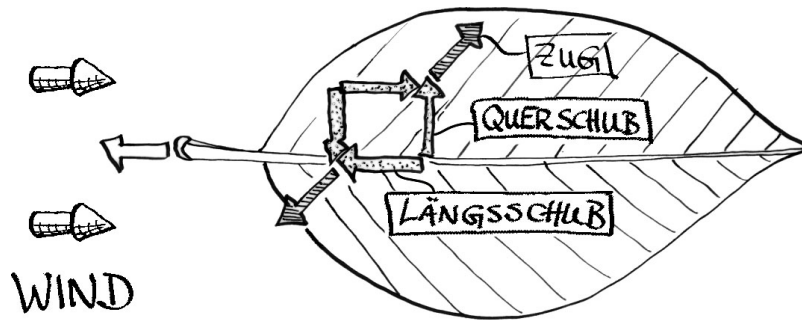


Abbildung 5.3: Das Schubviereck legt die Hypothese nah, dass es sich bei den unter  $45^\circ$  abzweigenden Nebenadern mechanisch um Zugseile handelt, weil sie in Richtung der windinduzierten Zugspannung orientiert sind [6].

Diese Hypothese wird rechnerisch an einem Modell untersucht, dessen Form von der Gestalt eines Rotbuchenblattes abgeleitet wird, Abbildung 5.3. Das Blatt besteht dabei im Wesentlichen aus einer Spreite, in der die Hauptader und die Nebenadern liegen. Die Nebenadern zweigen von der Hauptader in einem Winkel von etwa  $45^\circ$  ab.

## 5.2 FEM-Ersatzmodell

Ein FE-Blattmodell wird erstellt, um mit Hilfe der FEM die lokale Belastung des Blattes zu ermitteln. Hierzu werden mechanisch unrelevante Geometriedaten ignoriert und schließlich das bereinigte Blatt FE-gerecht aufbereitet. Die unterschiedliche Funktionalität und Materialeigenschaft von Spreite und Nebenader wird durch eine Schichtstruktur ermöglicht, die sich aus einer Spreiten- und einer Nebenaderschicht zusammensetzt. Beide Schichten sind fest miteinander verbunden und jeweils einlagig in finite Elemente unterteilt, was im Blattquerschnitt von Abbildung 5.4 schematisch dargestellt ist. Die Symmetrie des Blattes zur Mittellinie [54] ermöglicht es, dass nur eine Blatthälfte erstellt werden muss, wodurch sich der Rechenaufwand halbiert. Diese Geometriereduktion erfordert jedoch, dass die Blatthälfte mit einer speziellen Einspannung an der Symmetrielinie gelagert wird. In der Blattaufsicht sind die aus der Windbelastung hervorgerufene Flächenlast und die Einspannung an der Hauptader schematisch dargestellt.

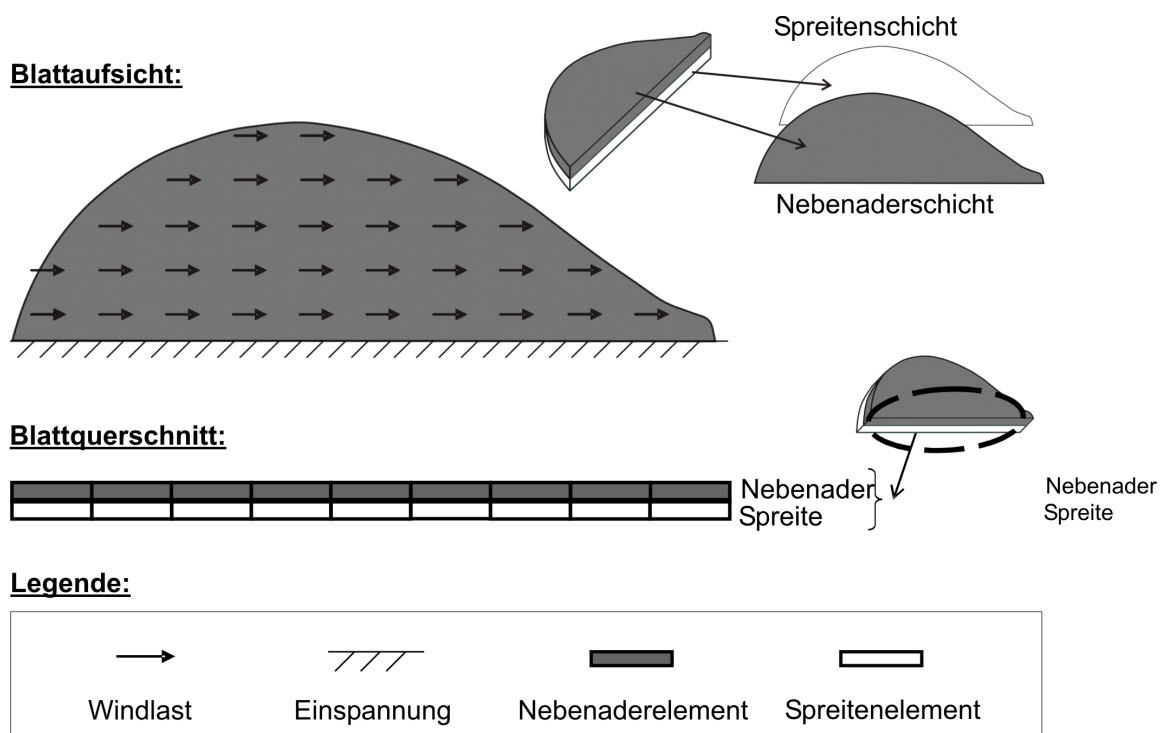


Abbildung 5.4: Aufsicht und Querschnitt des FE-Blattmodells

### 5.3 SKO-Optimierung

Die mechanisch optimalen Versteifungselemente ermittelt die SKO-Methode mit der Optimierungsvariablen  $\sigma_1$ . Bei der Optimierung wird die Spreitenschicht (hellgrau in Abbildung 5.5) in der Struktur nicht verändert, jedoch wird die Belastung der einzelnen Spreitenelemente bestimmt. Je nach Elementbelastung wird der zugehörige Bereich der Nebenaderschicht modifiziert. Es gibt hierbei folgende zwei Fälle:

**Fall 1:** Ausreichende Spreitenbelastbarkeit

Ist die Elementbelastung niedriger als eine vorgegebene Referenzspannung, reicht die Spreitenbelastbarkeit für sich alleine schon aus. Eine Übernahme von Zugspannungen durch die Nebenaderschicht ist nicht erforderlich. Das zum jeweiligen Spreitenelement zugehörige parallele Nebenaderelement kann somit entfernt werden.

**Fall 2:** Nicht ausreichende Spreitenbelastbarkeit

Ist jedoch die Belastung des Spreitenelements höher als die Referenzspannung, ist die Spreite überbelastet. In diesem Fall wird der überbelastete Spreitenbereich durch das zugehörige parallele Nebenaderelement verstärkt, so dass die Blattstruktur damit belastbarer wird und die Last erträgt.

Das Ergebnis einer SKO-Optimierung sieht man in der Darstellung 5.6. Anhand des berechneten Beispiels erkennt man deutlich, wie sich aus der ehemals homogenen, flächigen

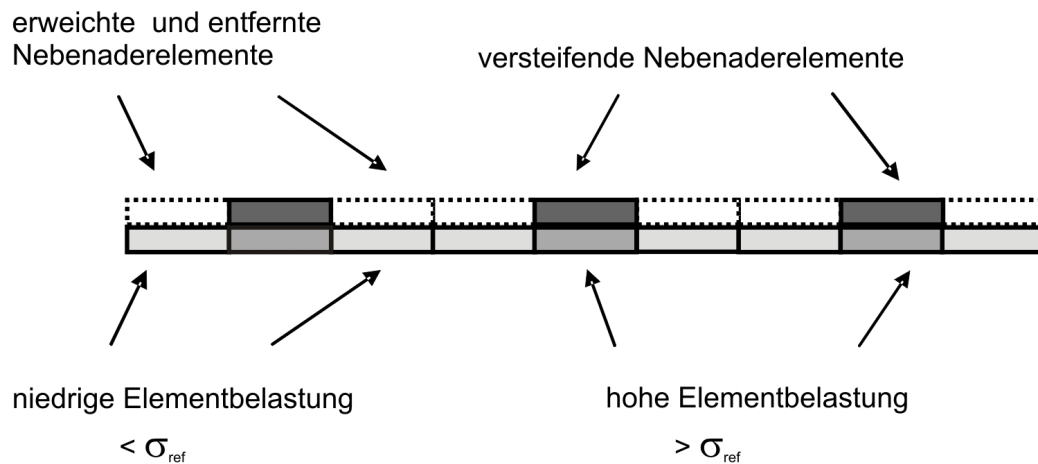


Abbildung 5.5: Erläuterung zum Optimierungsablauf an Elementen des Blattquerschnitts

Nebenerschicht (dunkelgrau) schlanke, dreiecksförmige Nebenadern von der Mittellinie zum Blattrand hin ausbilden. Diese Nebenadern verjüngen sich in Richtung Blattrand und weisen im Wesentlichen einen konstanten Winkel zur Hauptader auf, der im Folgenden als Nebenaderwinkel bezeichnet wird. Da die Nebenadern den Zuganteil des Schubes aufnehmen, werden sie nach Mattheck [35] auch als „Schubkiller“ bezeichnet.

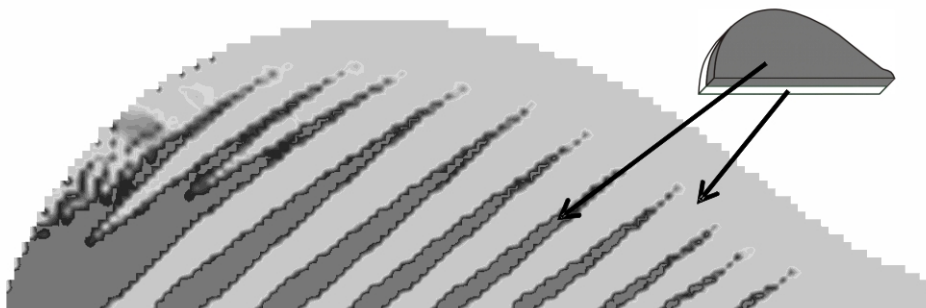


Abbildung 5.6: Mit der SKO-Methode berechnete Blattstruktur

Am Blattrand und an der Blattspitze sind keine Nebenadern vorhanden. In diesen Bereichen bleibt die Belastung unterhalb der Referenzspannung, weshalb durch die SKO-Methode alle Nebenerenelemente entfernt werden. Die Belastbarkeit der Spreite reicht in diesen Zonen aus, alle lokalen Kräfte aufzunehmen. Bei vielen natürlichen Blättern kann auch beobachtet werden, dass die Nebenadern nicht bis zum Blattrand reichen [42].

## 5.4 Parameterstudie zur Nebenadergestalt

Bei der Nebenaderbildung unterscheidet man die Form, die Größe, die Anzahl und die Orientierung der Nebenadern. Der Einfluss auf diese Merkmale wird in der folgenden Untersuchung durch Variation der Spreitenbelastbarkeit und Struktursteifigkeit untersucht.

### 5.4.1 Variation der Spreitenbelastbarkeit

Als erster Parameter wird die maximale Belastbarkeit der Spreite in Form der Referenzspannung verändert. Ist sie niedrig, hält die Spreite nur geringe Lasten aus, ist sie hoch, erträgt die Spreite entsprechend große Lasten.

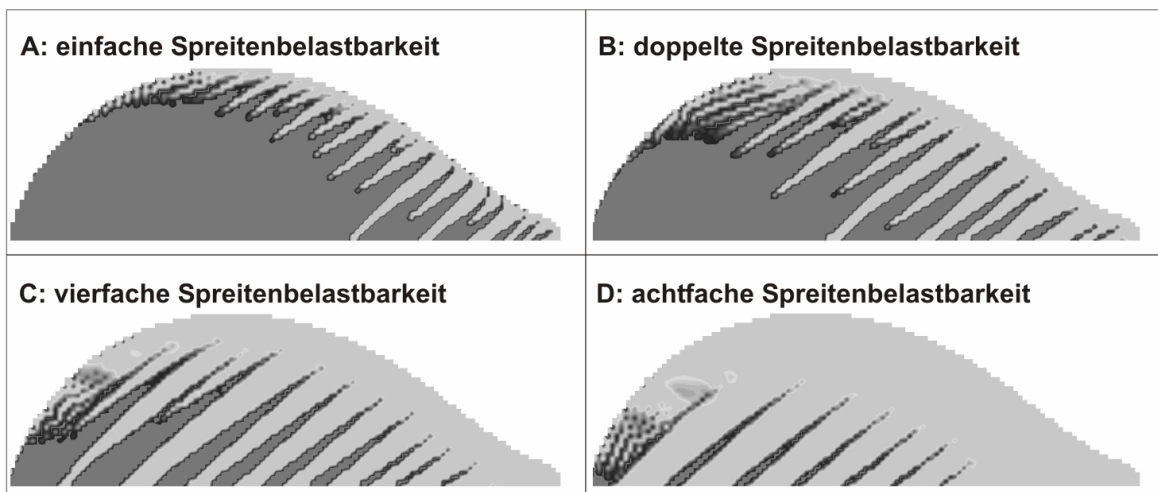


Abbildung 5.7: Einfluss der Referenzspannung auf die Bildung der Nebenadern

Verändert man entsprechend Abbildung 5.7 die Referenzspannung der Blattspreite, so hat dies unter anderem Einfluss auf die Anzahl der Nebenadern und ihre jeweilige Größe. Eine schwache Blattspreite (A) benötigt viele Nebenadern als Helfer, die größtenteils sogar noch flächig zusammenhängen. Eine tragfähigere Blattspreite übernimmt mehr Last und benötigt weniger lasttragende Nebenadern. Somit weist das Blatt mit der belastbarsten Spreite (D) die wenigsten und kleinsten Nebenadern auf.

### 5.4.2 Variation des Steifigkeitsverhältnisses der beiden Blattschichten

Als zweiter Parameter wird das Steifigkeitsverhältnis der beiden Blattschichten variiert. Durch Variieren der Nebenadersteifigkeit wird bei konstanter Spreitensteifigkeit das Steifigkeitsverhältnis verändert. Wird die Nebenaderschicht steifer, erhöht sich ihr Einfluss auf

das mechanische Blattverhalten. Wird hingegen die Steifigkeit der Nebenaderschicht verringert, nimmt ihr mechanischer Beitrag am Kraftfluss ab, bis sie im Extremfall mechanisch vernachlässigt werden kann. In einer Parameterstudie werden die Eigenschaften von fünf Steifigkeitsverhältnissen von Nebenader- zu Spreitenschicht von 0,5:1, 1:1, 2:1, 5:1 und 10:1 untersucht. Diese Blattstrukturen werden bei konstanten Randbedingungen, wie Einspannung und Last, auf die normierte Referenzspannungen von 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10 und 12 hin optimiert. Nach den jeweiligen Optimierungsläufen wird die jeweilige Nebenaderanzahl ermittelt. Bei flächigen Nebenaderbereichen, bei denen die Nebenadern nicht komplett herausdifferenziert sind, werden die Nebenaderspitzen ausgewertet. In Abbildung 5.8 ist die Anzahl der Nebenadern pro Blatt über der zugehörigen Referenzspannung aufgetragen.

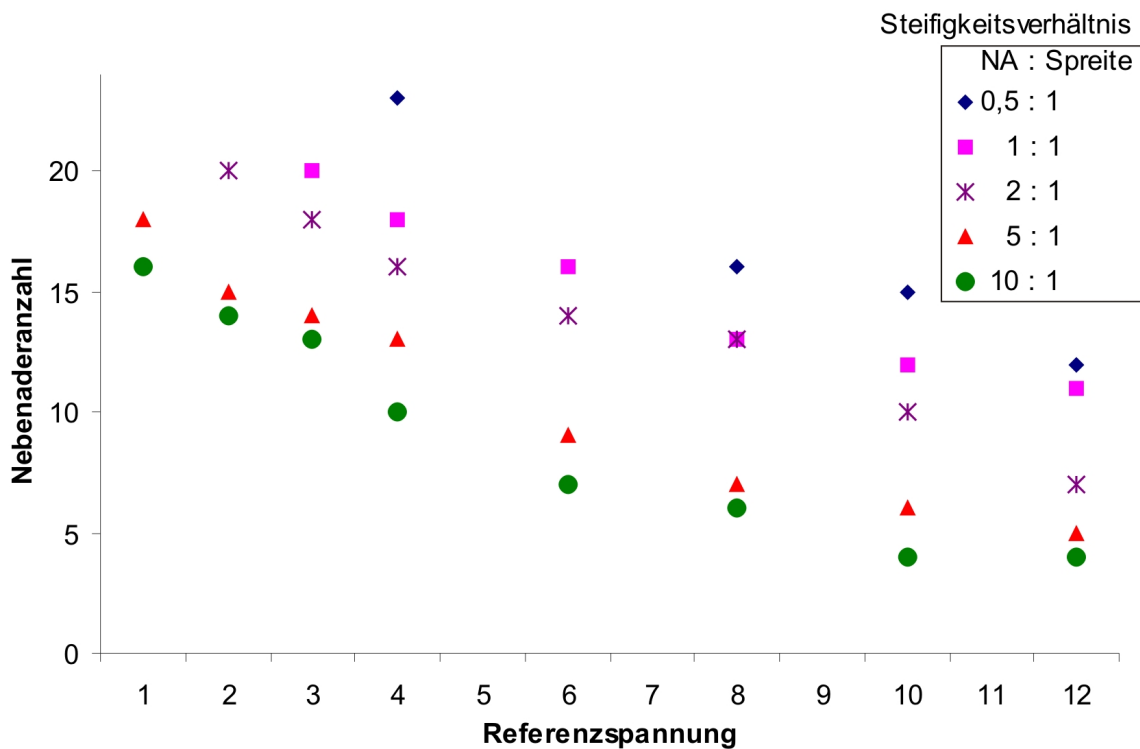


Abbildung 5.8: Anzahl der Nebenadern als Funktion der Referenzspannung und des Steifigkeitsverhältnisses von Nebenader- zur Spreitenschicht

Abbildung 5.8 zeigt, dass bei allen Steifigkeitsverhältnissen die Nebenaderanzahl sinkt, wenn die Referenzspannung erhöht wird. Daneben nimmt auch die Anzahl der Nebenadern ab, wenn die Nebenaderschicht relativ zur Spreitenschicht steifer wird. Somit sind zwei Abhängigkeiten vorhanden: Bei größerer Referenzspannung und bei höherer Nebenadersteife gibt es im Modell jeweils weniger Nebenadern. Die Anzahl der Nebenadern sinkt ungefähr auf ein Drittel, wenn die Referenzspannung von 1 auf 12 erhöht wird. Und die Nebenaderanzahl nimmt etwa um die Hälfte ab, wenn das Steifigkeitsverhältnis der Nebenader- zu Spreitenschicht von 0,5:1 auf 10:1 ansteigt. In beiden Fällen wird das mechanische System „Blatt“ bei konstant gehaltener Last belastbarer, wodurch weniger versteifende Nebenadern benötigt werden.

### Einfluss des Steifigkeitsverhältnisses auf den Nebenaderwinkel

Ein weiteres Ergebnis dieser Parameterstudie ist, dass die Variation des Steifigkeitsverhältnisses der Nebenader- zu Spreitenschicht einen Einfluss auf den Nebenaderwinkel hat. Untersucht werden die Steifigkeitsverhältnisse von Nebenader- zu Spreitenschicht im Bereich von 0,5:1 bis 10:1. In Abbildung 5.9 lassen sich dabei im Wesentlichen zwei Bereiche (A und B) für den Verlauf des Nebenaderwinkels unterscheiden.

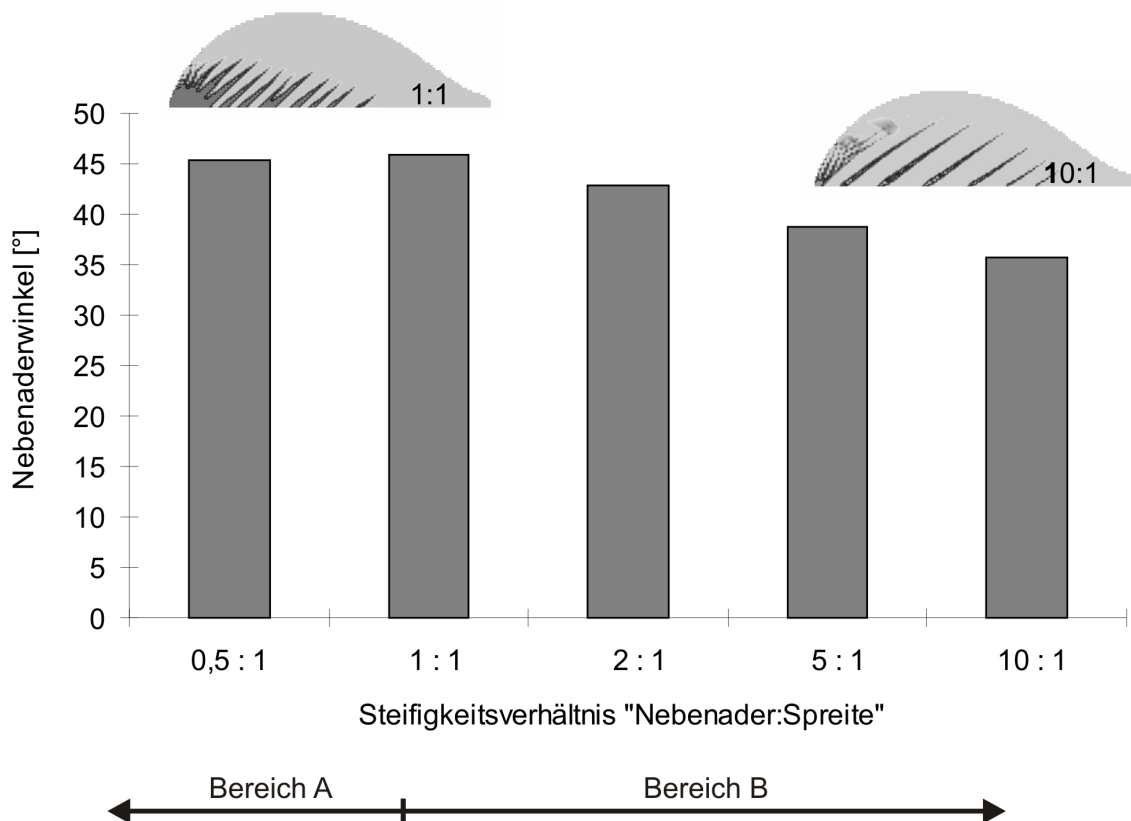


Abbildung 5.9: Einfluss des Steifigkeitsverhältnisses von Nebenader- zur Spreitenschicht auf den Nebenaderwinkel

**Bereich A:** Der Nebenaderwinkel weist einen Wert nahe bei 45° auf.

In diesem Bereich A ist die Spreitenschicht genau so steif oder steifer als die Nebenader-schicht.

**Bereich B:** Der Nebenaderwinkel nimmt ab.

In diesem Bereich B ist die Nebenaderschicht steifer als die Spreitenschicht. Mit zunehmendem Steifigkeitsverhältnis von Nebenader- zu Spreitenschicht wird der Nebenaderwinkel (von 45° ausgehend) stetig kleiner.

Nach Abbildung 5.9 ist ein Einfluss des Steifigkeitsverhältnisses Nebenader- zu Spreiten-schicht auf den Nebenaderwinkel feststellbar, welcher aber moderat ausfällt. Im Bereich A bleibt der Nebenaderwinkel weitgehend konstant bei 45°. Dabei kann als Grenzwert diejenige Nebenadersteife angesehen werden, bei der ein Einfluss auf die Nebenaderwinkel nicht mehr signifikant ist. Dieser liegt nach Abbildung 5.9 etwa bei einem Steifigkeitsbereich von

Nebenader- zu Spreitenschicht von 1:1. In diesem Fall, bei dem die Nebenadern mechanisch nicht relevant sind, kann eine andere, sonst untergeordnete Funktion die Nebenadergestaltung beeinflussen. Im Bereich B ist zwar eine stetige Absenkung von  $45^\circ$  auf  $35^\circ$  erkennbar, aber im Hinblick auf das zugehörige Steifigkeitsverhältnis, das sich von 1:1 auf 10:1 um den Faktor 10 geändert hat, ist die Winkelabnahme relativ gering.

## 5.5 Knicke an der Nebenaderanbindung

An einigen Blättern weisen die Nebenadern einen Knick an der Ansatzstelle zur Hauptader auf. Zunächst zeigen die Nebenadern eine Orientierung von  $45^\circ$  zur Hauptader auf und knicken dann nach einer Länge, die der lokalen Nebenaderbreite entspricht, auf ihren, dem Steifigkeitsverhältnis entsprechenden spitzeren Winkel ab. Diese Winkelabweichung wird in Abbildung 5.10 an einem Blatt, mit einem Steifigkeitsverhältnis von Nebenader- zu Spreitenschicht von 10:1, bei drei Nebenadern hervorgehoben. Dargestellt sind hierzu die Mittellinien dieser Nebenadern, die an der Anbindung zur Hauptader einen Winkel von  $45^\circ$  aufweisen und dann zu einem kleineren Winkel abknicken.

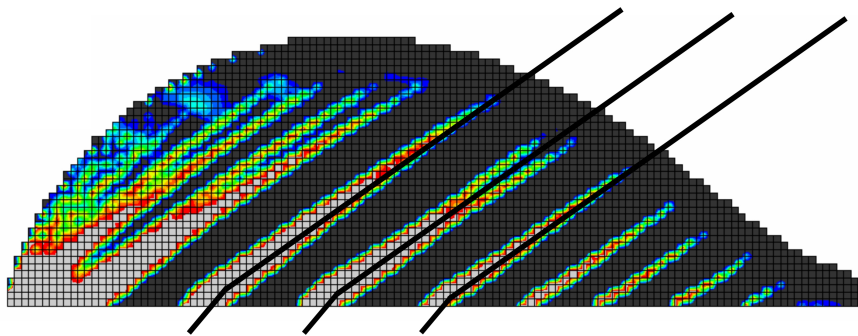


Abbildung 5.10: Im Bereich der Ansatzstelle abknickende Nebenadern

Dieser Knick beruht auf der nicht vernachlässigbaren Breite der Nebenadern. An der Ansatzstelle ist die Nebenaderschicht noch zusammenhängend, weshalb lokal noch keine Strukturanisotropie wie im übrigen Blatt existiert. In diesem eng begrenzten Bereich um die Ansatzstelle herum werden die Biegespannungen den Zugspannungen überlagert und die Druckkomponente des Schubes kann direkt über die Nebenader in die Hauptader eingeleitet werden. Aus diesem Grund führen in diesem isotropen Bereich die windinduzierten Schubspannungen zu  $\pm 45^\circ$  gedrehte Hauptnormalspannungen, welche die Nebenaderorientierung vorgeben.

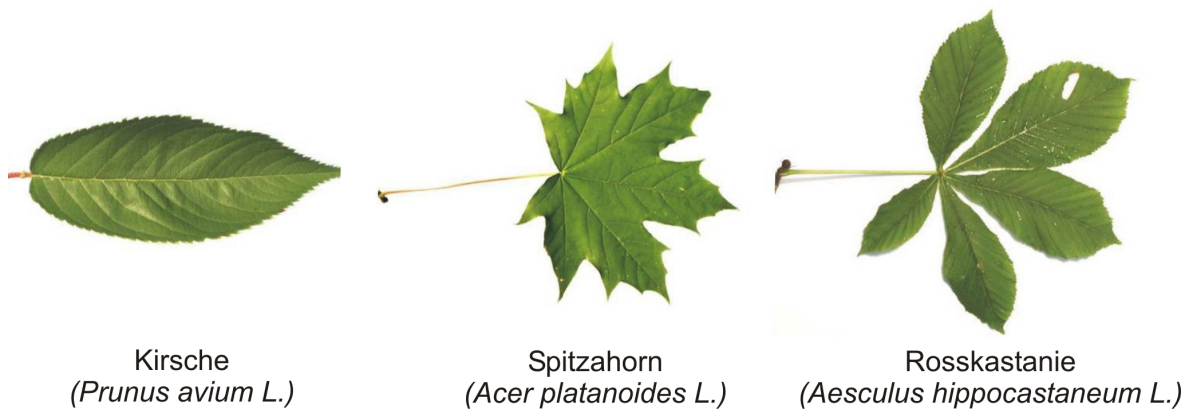


Abbildung 5.11: Die Biodiversität führt zu unterschiedlichen Blattformen und Nebenadergestaltungen [22]

## 5.6 Einfluss der äußeren Blattform auf den Nebenaderwinkel

Auch die Form des Blattes beeinflusst die mechanisch günstigste Lage der Nebenadern, beispielsweise durch eine überlagerte Biegespannung und ausladende Blattenden. In Abbildung 5.11 sind als Beispiel für die Biodiversität drei verschiedene gestaltete Blätter mit ihrer unterschiedlichen Nervatur dargestellt.

Die auf die Blätter wirkende Flächenlast erzeugt neben einer Schubbelastung auch eine senkrecht zur Hauptader wirkenden Biegespannung mit einer Zugspannung an der Stielseite und einer Druckspannung an der Blattspitze. Die Biegespannung ist der Schubspannung überlagert, wodurch die Nebenaderwinkel an der Stielseite im Vergleich mit denen im Bereich der Blattspitze um wenige Grad größer sind.

Neben der überlagerten Biegespannung sind auch ausladende Blattenden an einer Winkelvariation beteiligt. Je nach ausgebildetem Blattende wird der Kraftfluss von der Einleitungs-

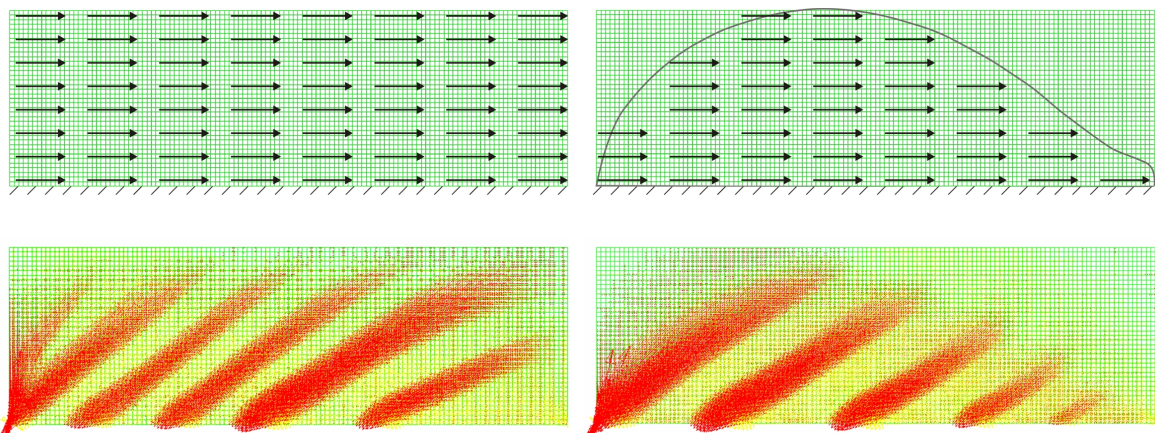


Abbildung 5.12: Einfluss der äußeren Blattform auf die Nebenaderbildung



stelle zur Hauptader beeinflusst. Um dies zu veranschaulichen werden an einer rechteckigen Blattstruktur, gemäß Abbildung 5.12, die Nebenadern mit der SKO-Methode ermittelt. Es entstehen die bekannten Nebenadern, welche aber Unterschiede am Stielansatz und an der Spitze des Blattes aufweisen: An dem windzugewandtem linken Blattrand bildet sich eine Nebenader mit einem Winkel von  $90^\circ$  aus, und an der Blattspitze ist der Nebenaderwinkel kleiner als bei den Nebenadern in der Blattmitte. Im Unterschied dazu wird nun von diesem Rechteck nur die eingeschlossene typische Blattform der Windlast ausgesetzt, wodurch die ungünstigen Lasteinleitungsstellen am Anfang und Ende des rechteckförmigen Blattes vermieden werden. Dadurch bleiben die Nebenaderwinkel über die gesamte Blattlänge in einem engeren Winkelkorridor. In der Natur werden diese ausladenden Blattendgen genau wie großflächige und gefiederte Blattarten durch den Wind oft konisch gerollt und erhalten auf diese Weise eine aerodynamisch günstigere Form [21][56], siehe Abbildung 5.13.

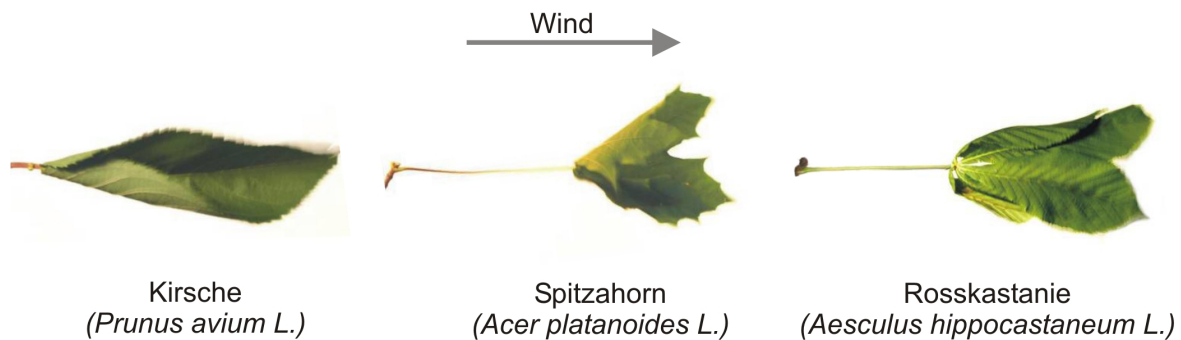


Abbildung 5.13: Einfluss des Windes auf die Blattform [22]

## 5.7 Zusammenfassung der Ergebnisse zur Blattstruktur

Zur Untersuchung mechanisch günstiger Nebenaderwinkel wird eine FEM-gestützte Studie durchgeführt, auf deren Rechenmodell sich die Aussagen und Ergebnisse beziehen. Die Ergebnisse von Weber [57], Kobayashi [25] und der Vergleich mit der Natur zeigen die Analogien der Nebenadergestaltung natürlicher Blätter und der berechneten Strukturen auf.

Das FE-Modell wird auf die wesentlichen mechanischen Merkmale eines Blattes reduziert und erlaubt eine Funktionstrennung zwischen zug- und druckleitenden Strukturelementen. Hierbei wird die Nebenaderschicht überwiegend zugbeansprucht und die Spreiteschicht druckbeansprucht.

Die Untersuchung zeigt, dass ein mechanisch optimaler Nebenaderwinkel im Bereich von  $45^\circ$  liegt. Der Nebenaderwinkel von  $45^\circ$  ist darauf zurückzuführen, dass der aus der Flächenlast und der Einspannung entstehende Schub in einer zunächst homogen angenommenen Blattstruktur zu sich senkrecht kreuzenden Zug- Druckhauptspannungen führt. Durch die

Windausrichtung des Blattes wirkt der Schub parallel zur Hauptader, womit die Zug- und Druckkomponenten im  $45^\circ$ -Winkel zur Hauptader stehen.

Des Weiteren zeigen die Rechnungen, dass die Bildung der Nebenadern von den gewählten Materialeigenschaften des Blattes abhängig ist. Um diese Einflüsse zu quantifizieren wird eine Parameterstudie durchgeführt, bei der als erstes die Belastbarkeit der Spreite variiert wird. Hierbei zeigt sich, dass eine belastbarere Spreite weniger und kleinere Nebenadern benötigt als eine schwächere Spreite. Ein weiterer untersuchter Einfluss ist das Steifigkeitsverhältnis von Nebenader zu Spreite. Mit zunehmender Steife der Nebenader übernimmt sie mechanische Funktionen und versteift die Spreite. Hierdurch wird der Nebenaderwinkel langsam, aber stetig kleiner und ebenso sinkt die Nebenaderanzahl und deren Größe. Bei allen Modifikationen wird das mechanische System „Blatt“ belastbarer, wodurch weniger und kleinere Nebenadern benötigt werden.

# 6 Methode der Zugdreiecke zur Kerbspannungsreduktion

Die Methode der Zugdreiecke wird in diesem Kapitel zur Reduktion der Kerbspannung eingesetzt. Die hochbelasteten Bereiche in der Kerbe werden dabei durch Materialaddition in Form der Zugdreiecke verstärkt und die daraus resultierenden Auswirkungen auf die Spannungsentwicklung untersucht.

## 6.1 Balken mit Querschnittssprung als Modell

Das verwendete Modell ist ein Balken mit einer sprunghaften Änderung des Querschnitts, Abbildung 6.1. Dieser Sprung vom kleineren auf den größeren Querschnitt wird als Schulter oder Balkenschulter bezeichnet. Belastet wird der Balken mit einer Zugkraft, welche am kleineren Querschnitt in Richtung der Längsachse angreift. Die Lagerung befindet sich am gegenüberliegenden Balkenende. Dieses Strukturelement wird in technischen Anwendungen oft verwendet, entweder wie in Abbildung 6.1 als Balken oder als Welle, wenn diese Kontur um die Längsachse rotiert.

Für eine strukturmechanische Untersuchung mit der FE-Methode wird die Balkenstruktur idealisiert und als FE-Modell generiert. Hierbei ermöglicht die Bauteilsymmetrie nur eine Längshälfte der Balkenstruktur zu modellieren und damit den Rechenaufwand zu reduzieren. Abbildung 6.1 zeigt die zu berechnende Struktur (A) und das zugehörige FE-Modell (B) mit Randbedingungen und dem FE-Netz. Das Ergebnis der FE-Analyse ist in (C) als v.Mises-Spannungsplot und in (D) als Diagramm dargestellt, bei dem die Spannung über dem Konturverlauf  $s$  aufgetragen wird. Der Konturverlauf bezieht sich dabei auf den normierten Weg  $s$  entlang der Konturlinie. Er zeigt einen 2,2-fach überhöhten Spannungswert im Kerbgrund der Balkenschulter.

Wo Zahlenwerte bei Beispielen genannt werden, handelt es sich in der Regel um normierte Werte, um sie miteinander vergleichen zu können. Nur dort, wo der Bezug nicht eindeutig oder schwer erkennbar ist, wird angegeben auf was sich die Normierung bezieht.

Im Folgenden wird untersucht, in welcher Art und Umfang mit Hilfe der Zugdreiecksmethode die Spannungsüberhöhung an der Kerbe reduziert werden kann.

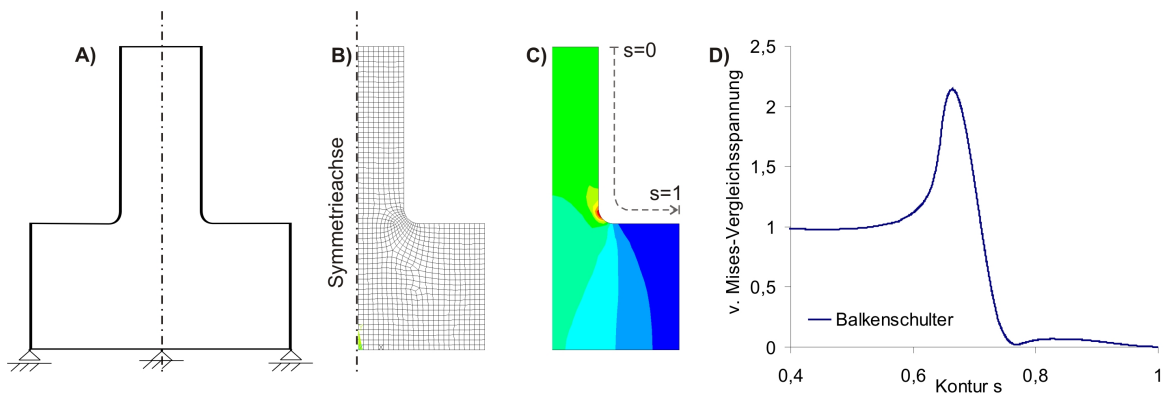


Abbildung 6.1: A) Balkenmodell mit Randbedingungen, B) FE-Modell C) v.Mises-Spannungsplot und D) der Spannungsverlauf über der Kontur

## 6.2 Methode der Zugdreiecke mit Variation der Dreiecksanzahl

Mit der Methode der Zugdreiecke aus Kapitel 3.3.1 wird der Querschnittsübergang der Balkenschulter schrittweise mit Zugdreiecken gestaltet. Hierzu wird die 90°-Kerbe mit einem Segment, dann mit zwei, mit drei und schließlich mit vier Segmenten überbrückt. Die Konturknicke werden entsprechend der Zeichnung in Abbildung 6.2 mit  $K_i$  und  $K_{i-2}$  bezeichnet, wobei  $i$  als Platzhalter für die Segmentnummer steht. Der radiale Bauraum ist bei allen vier Konturen gleich groß. Für einen besseren Vergleich wird in den einzelnen Abbildungen für die v.Mises-Spannungsplots jeweils die gleiche Farbskala verwendet.

Die Spannungen der verschiedenen Balkenschultern werden in Abbildung 6.2 jeweils als v.Mises-Spannungsplot und zusammen als Spannungsdiagramm über der Kontur  $s$  dargestellt. Hierbei zeigt sich, dass mit der Erhöhung der Segmentanzahl die Spannung entlang der Kontur homogenisiert wird, wodurch die versagenskritischen Spannungsspitzen (rote und gelbe Bereiche der Farbskala) nicht mehr vorhanden sind. Die verbliebenen, niedrigeren Spannungsspitzen finden sich an den Konturknicken und sind im Spannungsdiagramm als lokale Peaks erkennbar.

Mit Zunahme der Segmentanzahl sinkt die maximale Spannung und wandert entlang der Kontur  $s$ . Bei einem Segment befindet sich der Ort der Maximalspannung am Übergang zum dünnen Balkenschaft ( $K_{1-2}$ ). Bei zwei Segmenten liegt der Ort am Übergang des zweiten Segments zum dünnen Balkenschaft ( $K_{2-2}$ ). Bei einer Kontur mit drei oder vier Segmenten befindet sich die Maximalspannung am Übergang des ersten zu dem zweiten Segment ( $K_2$ ). Bei einer Kontur mit vier Segmenten ändert sich die Spannung gegenüber einer Kontur mit drei Segmenten nur in dem Bereich, in dem auch die Kontur geändert wird. Dies ist der Bereich vom dritten zum vierten Segment. Das bedeutet, dass beide Konturen am Übergang des ersten zu dem zweiten Segment ( $K_2$ ) gleichgroße Spitzenspannungen aufweisen. Bei vier Segmenten ist jedoch in dem nun längeren Konturauslauf  $K_4$  bis  $K_{4-2}$  die Spannung leicht niedriger als bei drei Segmenten im Bereich von  $K_{3-2}$ .

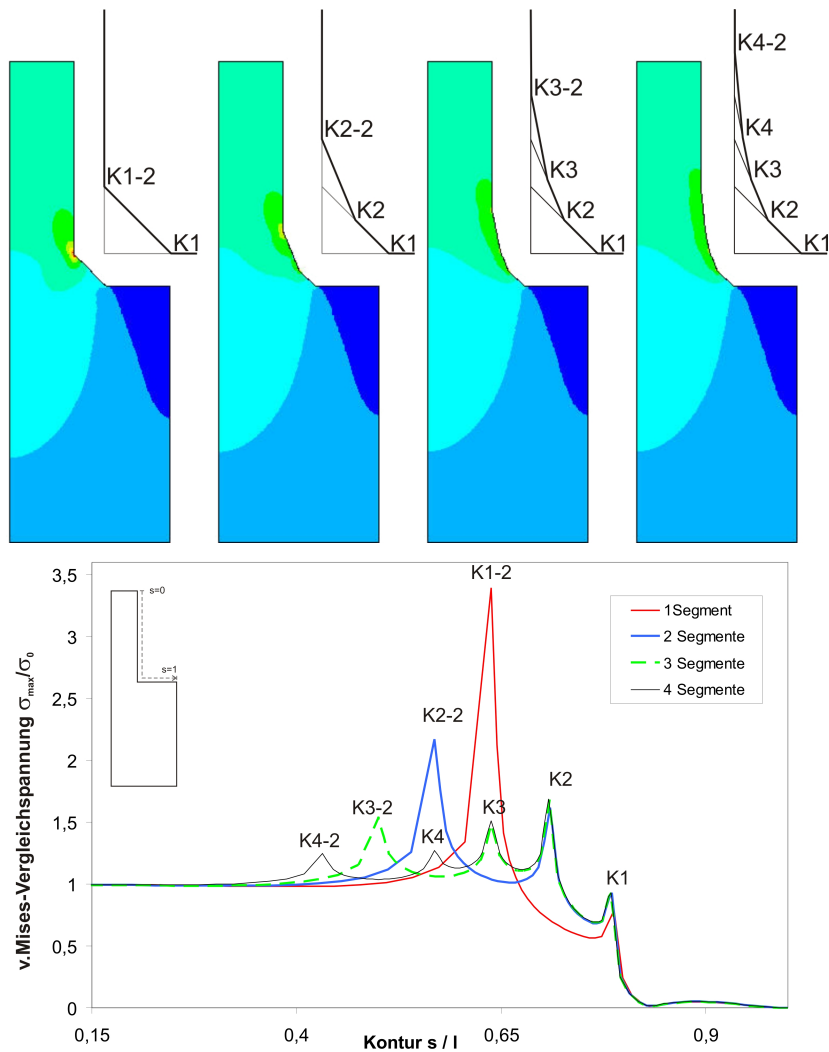


Abbildung 6.2: Überbrückung der 90°-Kerbe einer Balkenschulter mit der Methode der Zugdreiecke mit 1, 2, 3 und 4 Segmenten und dem zugehörigen Spannungsdiagramm.

Die Segmentübergänge der Zugdreieckskontur führen zu Spannungsspitzen. Die Knickstellen wirken als Kerben, an denen der Kraftfluss lokal umgelenkt wird und sich dadurch erhöht. Darüber hinaus sind dies singuläre Bereiche, die bei einer elastischen Spannungsberechnung mit einem hohen Gradienten gekennzeichnet sind, womit das berechnete Spannungsmaximum von der Feinheit des FE-Netzes abhängig ist. Die so ermittelten Spannungswerte sind damit nur in Bezug mit der verwendeten Netzfeinheit aussagefähig. Aus diesem Grund wird für einen Vergleich der Modelle jeweils die gleiche FE-Netzfeinheit verwendet.

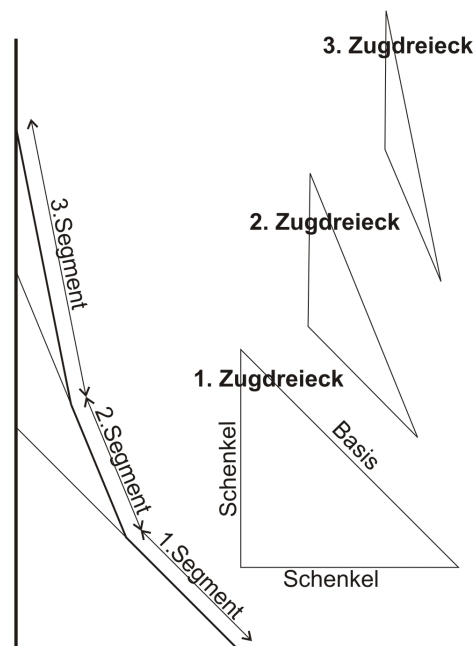


Abbildung 6.3: Beschreibung der Zugdreieckskontur

## 6.3 Beschreibung der Zugdreieckskontur

Die Zugdreieckskontur ist geometrisch definiert und damit allgemein beschreibbar. Je nach Einsatz kann die Kontur gestaltähnlich skaliert werden, wobei sich ihre geometrische Form nicht ändert. Sie setzt sich aus gleichschenkligen Zugdreiecken zusammen. Aus der Größe des ersten Zugdreiecks lassen sich die Abmessungen der folgenden Zugdreieckskontur einfach bestimmen.

Der Startwinkel der Kontur ist der  $45^\circ$ -Schenkel-Basiswinkel des ersten Zugdreiecks, welches in der Regel rechtwinklig ist. Die Schenkel-Basis Winkel  $\varphi$  der folgenden Zugdreiecke halbieren sich jeweils zu  $\varphi_2=22,5^\circ$ ,  $\varphi_3=11,25^\circ$  und  $\varphi_i = \varphi_{i-1}/2$ . Diese Winkel sind die Ursache dafür, dass die nachfolgenden Zugdreiecke kleiner werden und einen stumpferen Scheitelwinkel aufweisen. Diese beiden Änderungen an der Geometrie führen zu einer Flächenabnahme. Denn die jeweilige neue Schenkellänge ist die halbe Basislänge des vorhergehenden Zugdreiecks. Die Basislänge ergibt sich aus der trigonometrischen Zuordnung: Vorausgehende Basislänge mal Kosinus ( $\varphi_i$ ). Das bedeutet, dass das letzte Zugdreieck die kleinste Basis aufweist.

Die Basis eines Zugdreiecks wird durch das folgende Zugdreieck halb überdeckt, wodurch nur noch eine Basishälfte an dem Konturrand liegt. Dieser Abschnitt wird als Segment bezeichnet. Da die letzte Basis jedoch nicht durch ein weiteres Zugdreieck überdeckt wird, ist sie stets das längste Segment der Zugdreieckskontur. Die radiale Konturlänge ergibt sich aus der Schenkellänge des ersten Zugdreiecks, für die der Wert 1 gesetzt wird und die als Normierungsgröße verwendet wird. Die axiale Konturlänge ergibt sich bei einer dreisegmentigen Struktur aus der Addition der einzelnen Schenkellängen „ $1 + 0,71 + 0,65$ “ zu

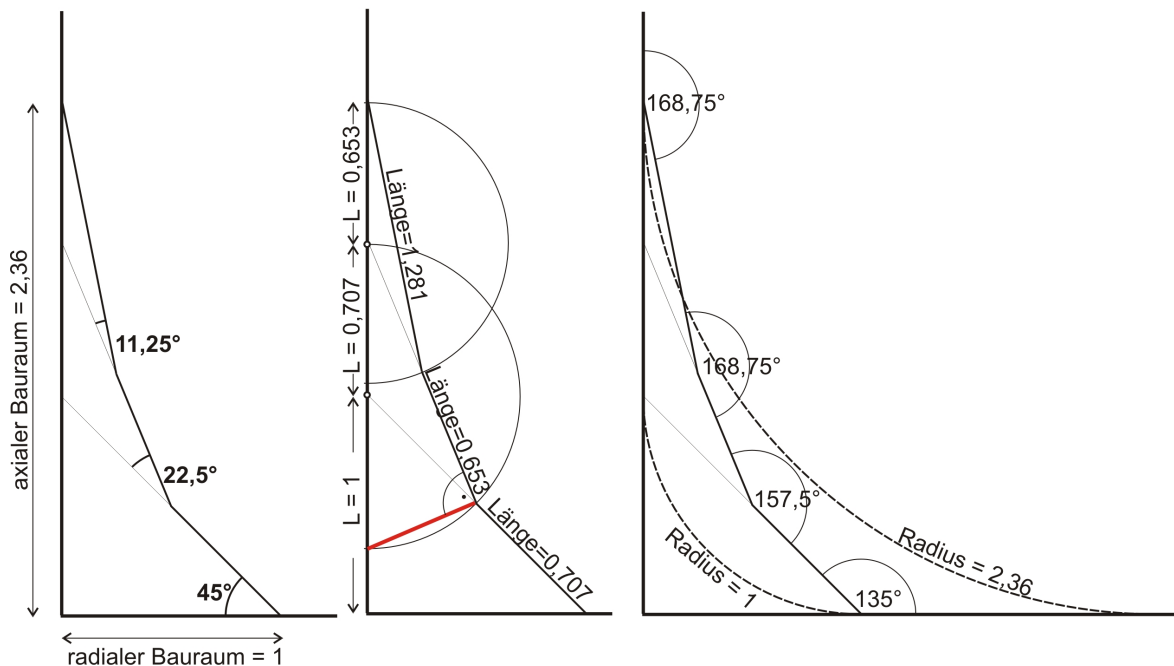


Abbildung 6.4: Charakterisierung der Zugdreieckskontur: a) Ausdehnung und Winkel, b) Länge der Segmente und c) Vergleich mit den beide Viertelkreisen, die durch die radiale und axiale Länge des Bauraumes definiert sind

der axialen Konturlänge von 2,36. Bei weiteren Zugdreiecken wird die axiale Konturlänge entsprechend größer. Der Konturbauraum ergibt sich somit als eine Rechteckfläche, die in radialer Richtung den Wert 1 und in axialer Richtung den 2,36-fachen Wert aufweist.

Die Basis-Schenkelwinkel der einzelnen Zugdreiecke addieren sich für die Steilheit der drei Segmente zu  $45^\circ$ ;  $67,5^\circ$  und  $78,75^\circ$ . Die entsprechenden Außenwinkel in den Konturknicken sind  $135^\circ$ ;  $157,5^\circ$  und  $168,75^\circ$  und zwischen dem dritten Segment und dem Balkenschaft ebenfalls  $168,75^\circ$ .

Eine konkave Zugdreieckskontur, welche sich aus drei Segmenten mit einer radialen Ausdehnung von 1 zusammensetzt, hat eine Fläche von 0,758. Im Vergleich dazu führt eine Viertelkreiskerbe mit dem Radius 1 zu einer Fläche von 0,215 und bei einem Radius von 2,36 zu einer Fläche von 1,195.

## 6.4 Konturvergleich zwischen Zugdreiecks- und SKO-Methode

Zur Bewertung des Zugdreiecks-Konturverlaufes wird als Vergleich mit der SKO-Methode ein Designvorschlag für den Balkenschulterübergang berechnet. Der verwendete Balken ist mit dem Balken sowie den Randbedingungen aus Kapitel 6.1 identisch und wird für die

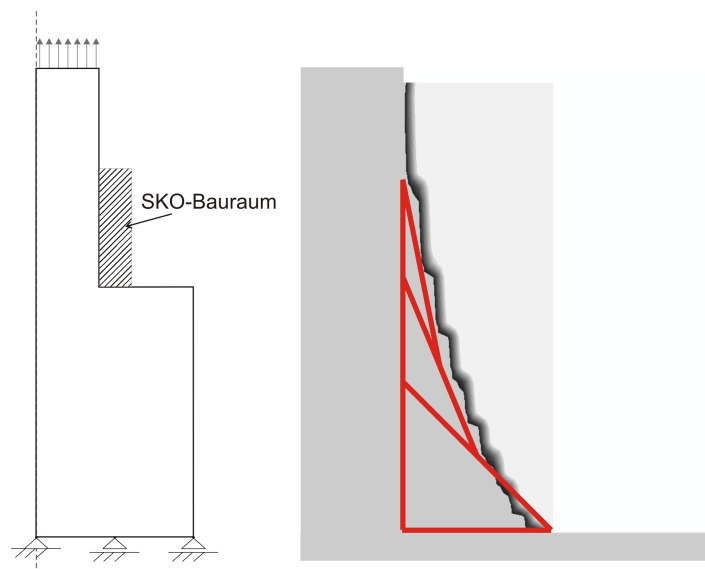


Abbildung 6.5: Vergleich zwischen den beiden Konturverläufen von SKO- und Zugdreiecksmethode

Optimierung durch einen SKO-Bauraum ergänzt. Der Bauraum ist ein Rechteck und befindet sich am Querschnittsübergang. Seine Abmessungen sind in radialer Richtung die Schenkellänge des ersten Segments und deren fünffache Länge in axialer Richtung. Bei der Optimierung wird iterativ die Referenzspannung erhöht, bis an den Außenseiten des Bauraums nur noch erweichtes Material vorliegt.

In Abbildung 6.5 wird das Optimierungsergebnis gezeigt, bei dem versteifte Bereiche dunkelgrau und weichgesetzte Bereiche hellgrau dargestellt sind. Da jedes Element nur einen E-Modulwert annehmen kann, ist der Konturverlauf treppenförmig. Diesem Strukturvorschlag ist eine dreisegmentige Zugdreieckskontur überlagert, welche im Vergleich etwa gestaltähnlich verläuft.

### 6.5 Verrundungen der Konturknicke zur Spannungsminderung

Die Knickübergänge der Zugdreieckskontur führen zu Spannungsspitzen, welche sich durch geringe Konturmodifikationen reduzieren lassen. Hierzu gibt es mehrere Möglichkeiten, die Übergänge zwischen den einzelnen Segmenten kraftflussgerechter zu gestalten. In dieser Arbeit werden zwei Varianten untersucht und die Ergebnisse verglichen. Die erste Variante ist die Verrundung mittels eines Splines und die zweite Variante ist die Verrundung über tangentielle Kreisbögen. Die Verrundung bezieht sich jedoch nicht auf den untersten Knick  $K_1$ , bei dem das erste Zugdreieck in die niedriger belastete Wellenschulter unter  $45^\circ$  eintaucht. Die Spannungsüberhöhung an diesem Ort  $K_1$  ist auf die Singularität zurückzuführen [52].



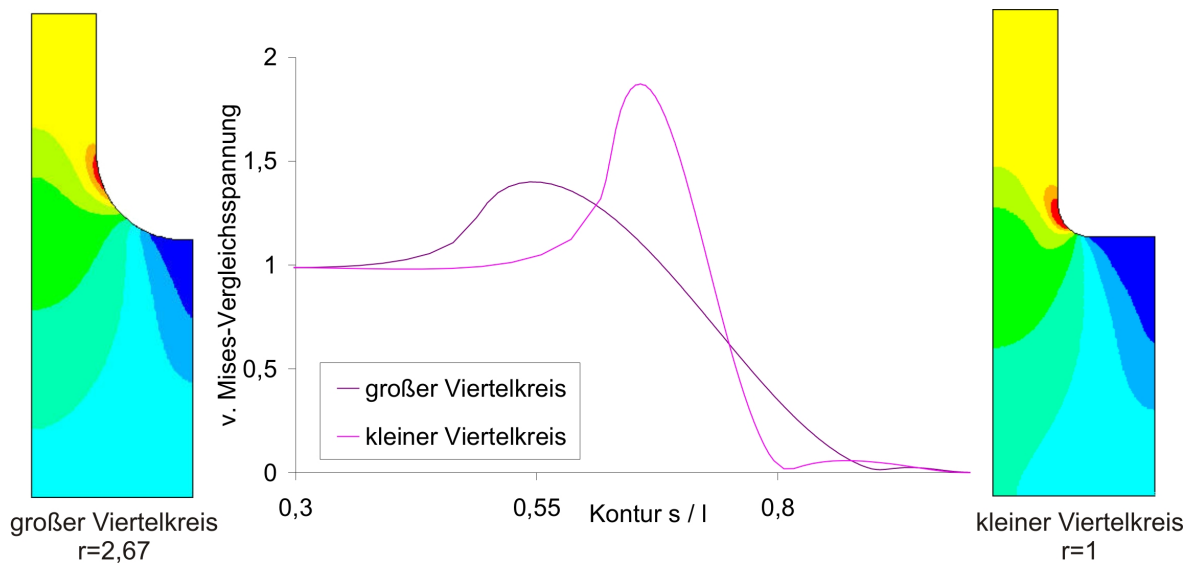


Abbildung 6.6: Balkenschultern mit zwei unterschiedlichen Viertelkreisen als Kerben

### 6.5.1 Balkenschulter mit Viertelkreiskerbe als Referenzstruktur

Zwei Balkenschultern mit unterschiedlich großen Viertelkreiskerben bilden in Abbildung 6.6 die Referenzstrukturen der Verrundungsstudie. Der große Verrundungsradius entspricht der axialen Länge einer verrundeten Zugdreieckskontur aus drei Segmenten, also dem 2,67-fachen des radialen Bauraums. Diese Kerbkontur führt zu einer Maximalspannung von 1,40 am Übergang des Kreisbogens zur Flanke des dünnen Balkens. Der kleine Verrundungsradius an der zweiten Balkenschulter entspricht der radialen Ausdehnung der Zugdreieckskontur mit der Länge 1. Diese Kerbkontur führt zu einer Maximalspannung von 1,85, welche gleichfalls am Übergang des kleinen Kreisbogens zur Flanke des dünnen Balkens lokalisiert ist. Der Vergleich der beiden Spannungsverläufe zeigt, dass die Kerbkontur mit dem kleineren Verrundungsradius in einem engen Bereich von etwa  $0,6 < s < 0,75$  höher belastet ist, während beim große Kreisradius ein breiterer Bereich von etwas  $0,45 < s < 0,75$  aber mit einem niedrigerem Spannungsniveau belastet ist.

### 6.5.2 Verrundung mit einem Spline

Ein Spline erzeugt durch vorgegebene Stützstellen einen stetigen Krümmungsverlauf. Je nach Wahl der Stützstellen können zwei unterschiedliche Splines zur Verrundung der linearisierten Kontur generiert werden. Bei der ersten Variante sind die Knickstellen der Zugdreieckskontur die Stützstellen des Splines und bei der zweiten Variante sind die Mittelpunkte der einzelnen Segmente die Stützstellen.

#### Spline-Variante I: Konturknicke als Stützstellen

Die vier Knickstellen ( $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  und  $K_{3-2}$ ) sind die Stützstellen des Splines I. Bei diesem „Eck-Spline“ findet die Verrundung durch Materialwegnahme statt, wodurch die Konturflä-

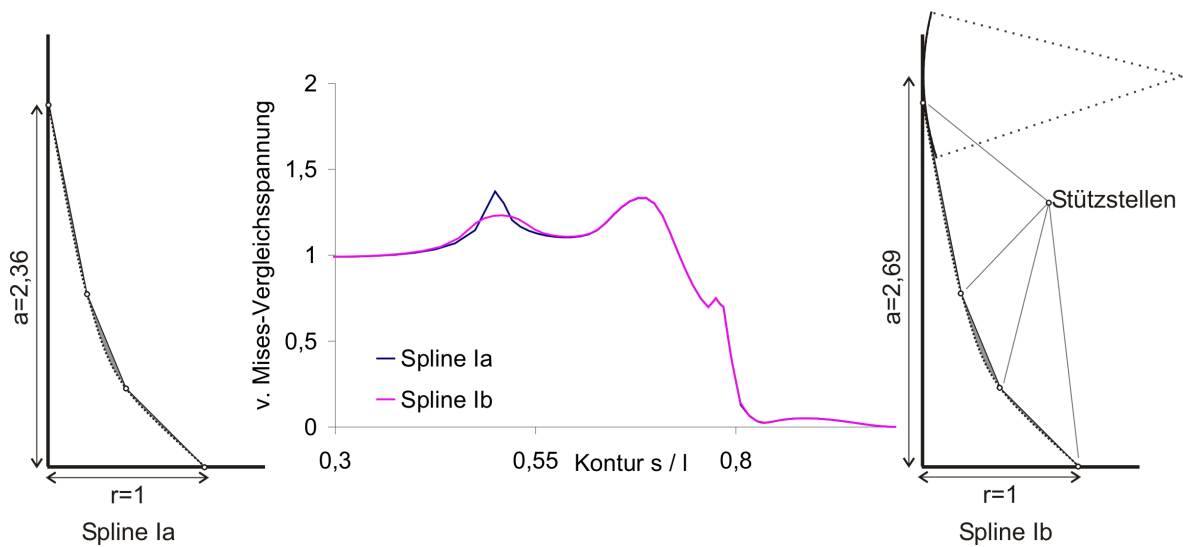


Abbildung 6.7: Glättung durch einen Spline mit den Konturknicken als Stützstellen. Links Variante Ia mit einem Knickübergang am oberen Auslauf der Kontur und rechts Variante Ib mit einer zusätzlichen Kreisbogenverrundung

che kleiner wird. Aus diesem Grund ist es nicht möglich mit einer weiteren Stützstelle, welche auf der Balkenflanke über der Knickstelle  $K_{3-2}$  lokalisiert wäre, einen weichen Übergang zur dünneren Balkenflanke zu erstellen. Diese Kerbkontur, Spline Ia, wird durch Modifizieren dieses Übergangs zu Spline Ib erweitert. Bei Spline Ib wird der Übergang zur dünnen Balkenflanke mit einer Kreisbogenverrundung geglättet. Die Kreistangente entspricht der halben Länge des zweiten Segments. Um diesen Betrag ist die axiale Länge dieser Kerbkontur Ib größer als Spline Ia und nur in diesem Übergangsbereich unterscheiden sich die beiden Konturen.

Durch den Spline Ia wird die Maximalspannung der Kontur auf 1,37 reduziert. Der Ort der Spitzenspannung befindet sich am stumpfen Knick ( $K_{3-2}$ ) des Splines zum dünnen Balken. Die Kerbfläche beträgt 0,724 und ist damit geringfügig kleiner als die Fläche der unverrundete Kontur (Fläche = 0,758). Wenn der verbliebene stumpfe Knick mit einem Kreisbogen ausgerundet (Spline Ib) wird, dann reduziert sich diese lokale Spannungsspitze auf 1,23 bei einer geringfügigen Flächenzunahme von 0,003 auf insgesamt 0,727. Nun liegt die höchste Spannung im Bereich zwischen dem ersten und dem zweiten Segment mit einem Wert von 1,34. Dieser Wert gilt für beide Kerbkonturen (Ia und Ib), da sie sich nur im Bereich um  $K_{3-2}$  unterscheiden.

### Spline-Variante II: Segmentmitten als Stützstellen

Bei dieser Variante sind die drei Segmentmitten und ein weiterer Punkt auf dem Rand des dünneren Balkens, welcher über dem dritten Zugdreieck liegt, die vier Stützstellen des Splines. Der Abstand der zusätzlichen Stützstelle am Balkenrand entspricht der halben Länge des zweiten Segments. Diese Stützstellen werden über den Spline miteinander verbunden, wodurch die Knicke ausgerundet werden. Diese Konturverschiebung führt zu einer Flächenvergrößerung der Kontur.

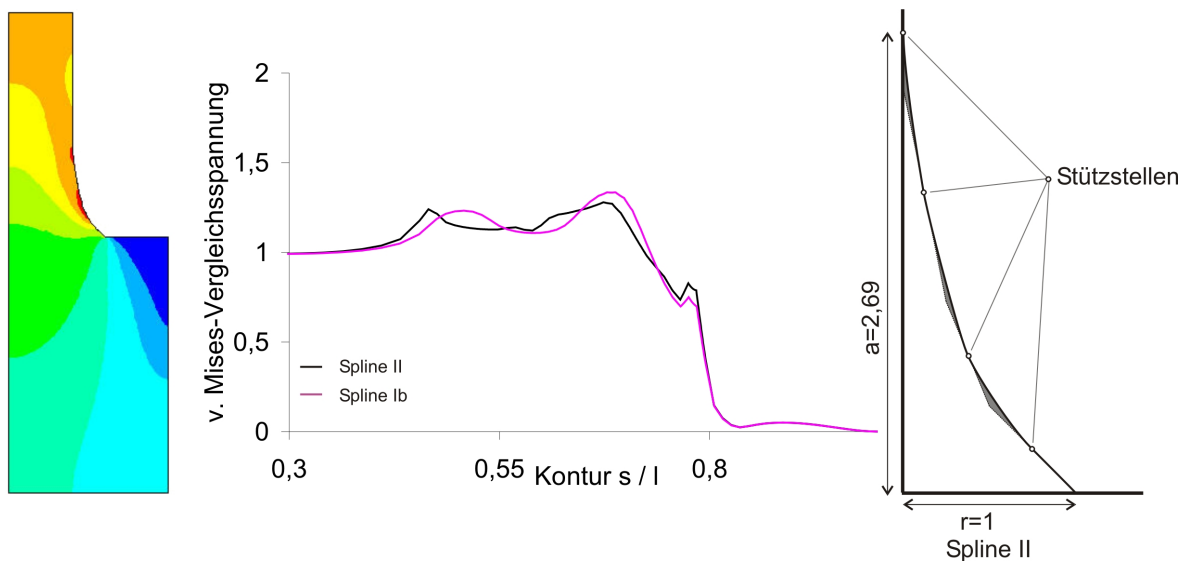


Abbildung 6.8: Glättung durch einen Spline mit den Segmentmitten als Stützstellen

Durch den Spline II wird die Maximalspannung der Kontur auf 1,28 reduziert. Der Ort der Spitzenspannung liegt im Bereich des Übergangs vom ersten zum zweiten Segment. Ein weiteres lokales Spannungsmaximum befindet sich am Übergang zur Balkenkante mit einem Wert von 1,23. Neben der Spannungsreduktion führt die Konturverrundung zu einer um 0,026 größere Fläche auf 0,784.

### 6.5.3 Verrundung der Kerbkonturknicke mittels tangentialer Kreisbögen

Eine weitere Möglichkeit, die Knickstellen der Zugdreieckskontur kraftflussfreundlicher zu gestalten, sind Kreisbögen. Hierbei berührt jeder der Kreisbögen die beiden benachbarten Segmente tangential, wodurch ein weicher Übergang zwischen den beiden Segmenten entsteht, Abbildung 6.9. Der Abstand zwischen dem Knick und dem Berührungspunkt von Kreisbogen und Segment wird Kreistangente genannt. Je länger dieser Segmentabschnitt bei einem vorgegebenen Knickwinkel ist, umso größer ist der Krümmungsradius und desto günstiger ist die Kraftflussumlenkung.

Der Radius  $r_v$  des zugehörigen Verrundungskreises berechnet sich aus der Länge der Kreistangente und dem zu überbrückenden Außenwinkel wie folgt:

$$r_v = \text{Kreistangente} / \sin(90^\circ - 0,5 * \text{Aussenwinkel})$$

Bei der Zugdreieckskontur wird durch die vorgegebene Geometrie die Kreistangentenlängen begrenzt und der Verrundungsablauf vorgegeben. Zuerst wird mit der Verrundung des kleinsten Segments begonnen. Die Kreistangentenlänge entspricht der halben Segmentlänge, da bis auf die Ausnahme des ersten Segmentes alle Segmente an beiden Enden verrundet werden. Danach ist das nächstgrößere Segment an der Reihe. Dessen maximale Kreistan-

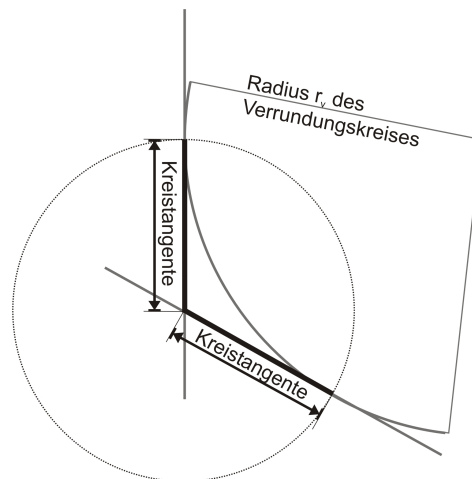


Abbildung 6.9: Verrundung der Konturknicke mit tangentialen Kreisbögen

gentenlänge ist die Differenz zwischen der Segmentlänge und der Kreistangentenlänge der vorhergehenden Verrundung. Diese Vorgabe sichert eine maximale Verrundung, ohne dass sich die Verrundungsbögen schneiden.

### Verrundete Zugdreieckskontur mit einem Segment

Auch eine Zugdreieckskontur, welche nur aus dem ersten 45°-Segment besteht, kann verrundet werden. In diesem Fall kann das gesamte Segment als Kreistangente verwendet werden, womit der Berührungspunkt von Kreis und Segment genau in  $K_1$  liegt, siehe Abbildung 6.2. Somit entspricht eine maximal verrundete einsegmentige Zugdreieckskontur einem Kreisbogensegment mit einem 45°-Eintauchwinkel in die Balkenschulter, was Scherrer [48] untersucht hat. Die verrundete Kerbkontur ergibt bei einer radialen Konturausdehnung mit dem Wert 1, einen Verrundungsradius von  $r_v=3,70$  und eine axiale Kerblänge von 2,41. Die mit der FEM ermittelte Maximalspannung beträgt 1,33 und ist im Diagramm von Abbildung 6.10 dargestellt.

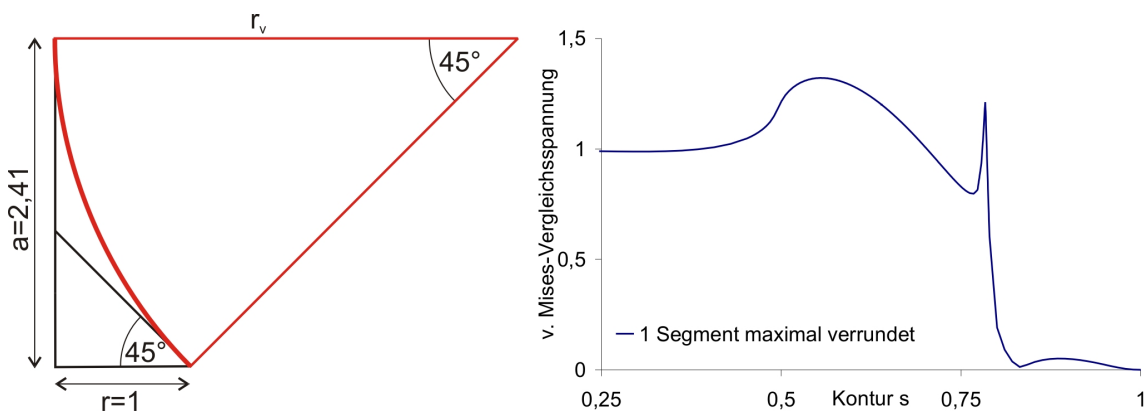


Abbildung 6.10: Maximale Verrundung einer Zugdreieckskontur, die nur aus einem Segment besteht

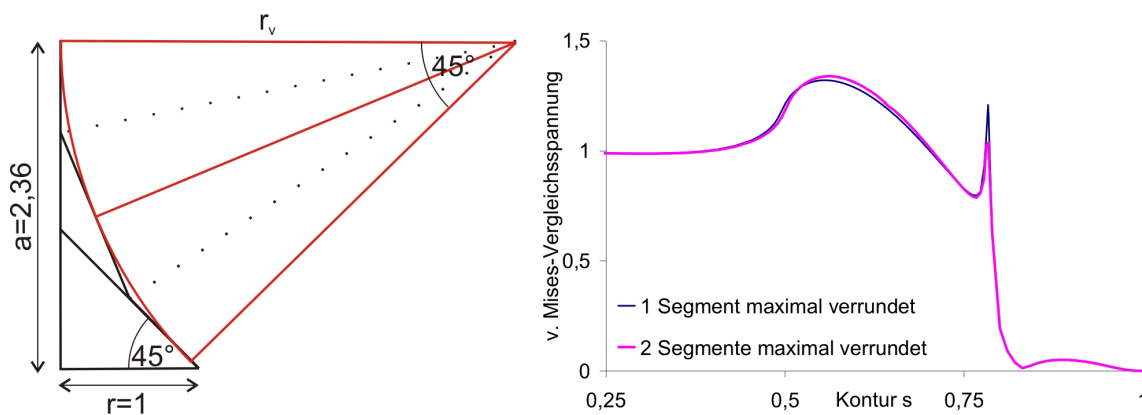


Abbildung 6.11: Maximale Verrundung einer Zugkontur, die aus 2 Segmenten besteht

### Verrundete Zugdreieckskontur mit zwei Segmenten

Bei einer Zugdreieckskontur, welche aus zwei Segmenten besteht, gibt das zweite Segment als kürzestes Segment die Kreistangentenlänge vor. Da zusätzliche auch beide Kerbwinkel mit  $157,5^\circ$  gleich stumpf sind, führt dies zu gleich großen Verrundungsradien  $r_v=3,35$ . Bei einer radialen Ausdehnung der Kerbkontur mit dem Wert 1 wird ihre axiale Länge über die Länge der beiden Segmentschenkel und der oberen Kreistangente der Verrundung zu  $1+0,707+0,653 = 2,36$  bestimmt, was auch die axiale Länge einer unverrundeten dreisegmentigen Zugdreieckskontur ist. Dieser Kerbübergang ist axial geringfügig kleiner als beim zuvor behandelten  $45^\circ$ -Kreissegment (axiale Länge 2,41) und führt zu einer geringfügigen Spannungsüberhöhung von 1,34 gegenüber 1,33. Durch die großen Ähnlichkeiten der Konturen sind die Spannungsverläufe entlang der Kontur  $s$  bei einem und zwei verrundeten Segmenten nahezu identisch.

### Zugdreieckskontur mit drei Segmenten

Bei einer Zugdreieckskontur mit mehr als zwei Segmenten bieten sich für die Verrundung unterschiedliche Varianten an.

#### Verrundung mit größtmöglichen, aber gleichlangen Kreistangenten

Zur Verrundung einer dreisegmentigen Zugdreieckskontur wird die größtmögliche gemeinsame Kreistangentenlänge gesucht. Diese ergibt sich aus dem halben zweiten Segment, da es die kleinste Länge aufweist und an beiden Enden verrundet wird. Nun wird um die Knickpunkte  $K_2$ ,  $K_3$  und  $K_{3-2}$  jeweils ein Kreis geschlagen, dessen Radius genau der ermittelten Kreistangentenlänge entspricht (siehe Abbildung 6.12). Die gleichgroßen Kreise geben die jeweiligen Verrundungsbereiche der Kontur an. Hierbei ist der Schnittpunkt von Kreis und Kontur der Start bzw. Endpunkt der Verrundung. Die durch diese Verrundung entstandene Kontur setzt sich vom ersten Segment  $S_1$  ausgehend wie folgt zusammen: Ein gerader Abschnitt des  $45^\circ$ -Segments  $S_1$ , ein erster Kreisbogen mit  $r=r_1$ , ein zweiter Kreisbogen mit  $r=r_2$ , ein gerades Stück des 3. Segments  $S_3$  und schließlich ein dritter Kreisbogen mit  $r=r_3$ .

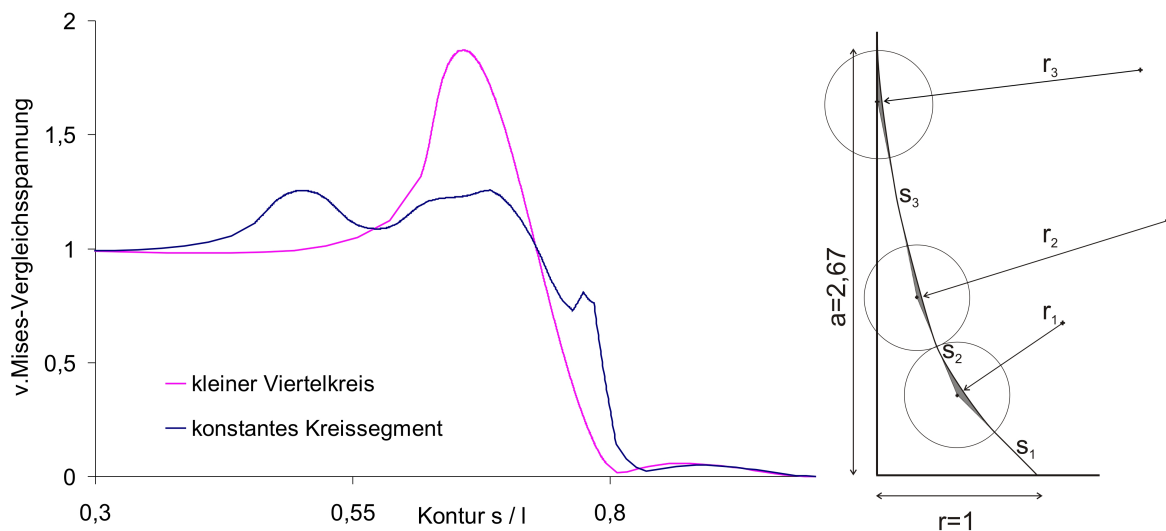


Abbildung 6.12: Verrundung der Zugdreieckskontur mit gleich langen Kreistangenten

Da die Außenknickwinkel bei  $K_3$  und  $K_{3-2}$  mit  $168,75^\circ$  gleich groß sind, sind auch beide Verrundungsradien  $r_2$  und  $r_3$  mit  $r_v=3,33$  gleich; der Verrundungsradius  $r_1$  beträgt 1,67.

Am Übergang zwischen dem ersten  $S_1$  und zweiten Segment  $S_2$  bildet sich ein Spannungsmaximum mit 1,26-facher Spannung aus. An dem anschließenden geraden Abschnitt des dritten Segments  $S_3$  sinkt die Spannung auf ein lokales Minimum und steigt danach am Übergang vom dritten Segment  $S_3$  zur Balkenflanke auf ein lokales Maximum mit 1,25-facher Spannung an. Durch die Verrundung wird die Fläche der Zugdreieckskontur um 1,89% größer und die axiale Länge der Kontur steigt um 13,5% auf 2,67.

### Verrundung des Übergangs vom dritten Segment auf die Balkenflanke mit unterschiedlich langen Kreistangenten

Das lokale Spannungsmaximum am Übergang des 3. Segmentes zur Balkenflanke kann durch einen größeren Verrundungsradius erniedrigt werden. Der größere Verrundungsradius wird durch das deutlich größere 3. Segment ermöglicht, siehe Abbildung 6.13. Ein größerer Verrundungsradius beim letzten Segment wirkt sich direkt auf die axiale Konturgröße aus. Als Folge der bisherigen Verrundungsüberlegungen bieten sich neben der schon vorgestellten Verrundung mit gleichlangen Kreistangenten (**Variante 1**) zwei weitere Varianten an, die die Länge der letzten Kreistangente zu wählen.

**Variante 1:** Verrunden des dritten Segments mit größtmöglichen, aber gleichlangen Kreistangenten

Bei Variante 1 wird für alle Verrundungen stets die halbe Länge des zweiten Segments als Kreistangente gewählt. Diese Variante wurde schon vorgestellt und führt zu einer Maximalspannung von 1,26 bei einer axialen Konturlänge von 2,67.

**Variante 2:** Verrunden des dritten Segments mit dessen halber Segmentlänge als Kreistangente

Bei Variante 2 wird die Hälfte des dritten Segments als Kreistangente für die letzte Ver-

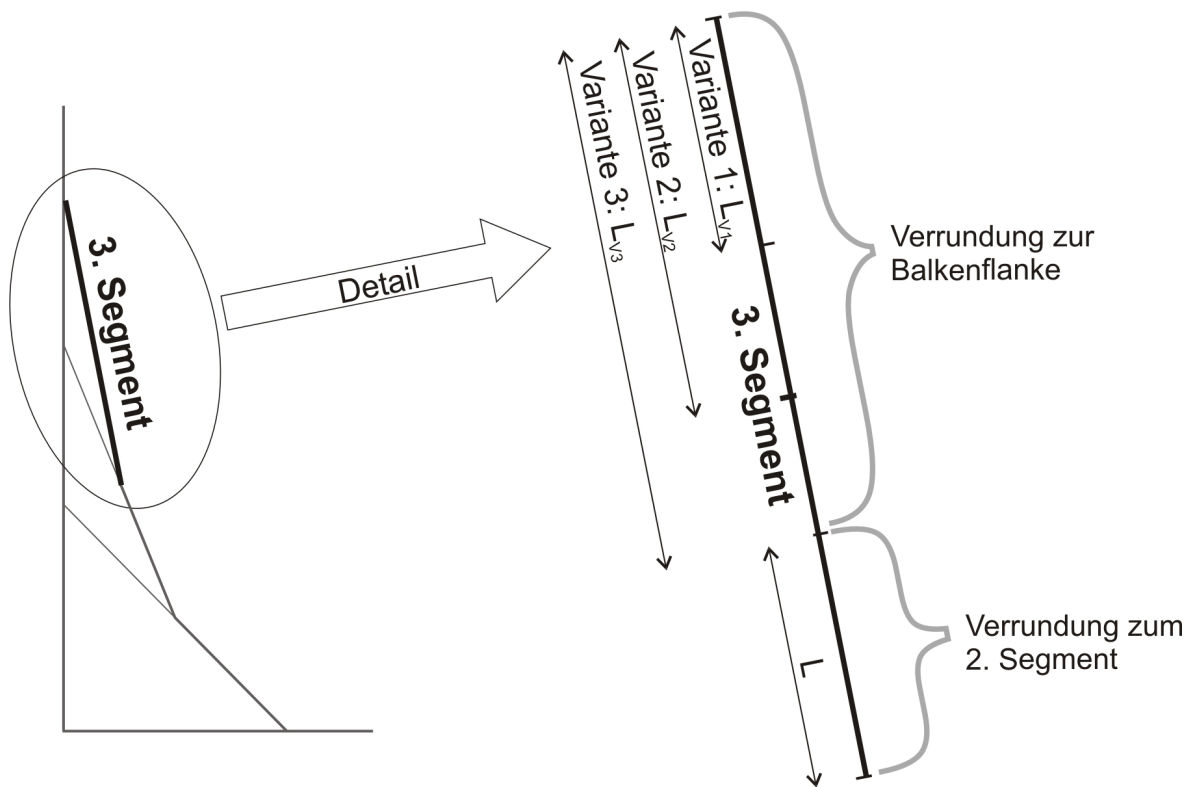


Abbildung 6.13: Verschiedene Kreistangentenlängen zur Verrundung des dritten Segmentes

rundung gewählt. Dies führt zu den Verrundungsradien  $r_1=1,67$ ,  $r_2=3,33$  und  $r_3=6,53$ . Im Bereich des ersten und zweiten Segmentes verändert sich die Kontur nicht und führt damit zu den selben Spannungswerten wie bei der Verrundungsvariante 1. Auf Grund des größeren Kreisbogens reduziert sich im Bereich von  $K_3$  die Spannung auf 1,17. Zusätzlich wirkt sich die größere Kreistangente direkt auf die axiale Länge der Kontur aus, die um 27,1%

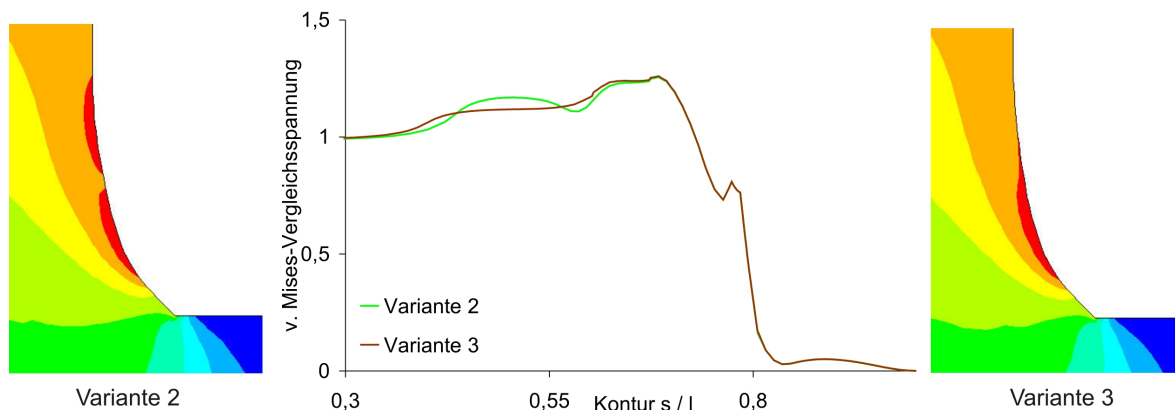


Abbildung 6.14: Unterschiedliche Verrundung des dritten Segmentes

auf 3,0 steigt. Damit nimmt auch die Fläche der Kontur gegenüber der unausgerundeten Zugdreieckskontur um 3% auf 0,781 zu.

**Variante 3:** Verrunden des dritten Segmentes mit maximaler Kreistangentenlänge  
 Bei Variante 3 wird der Übergang vom dritten Segment auf die Balkenflanke mit größtmöglichem Verrundungsradius realisiert. Dieser ergibt sich aus der Längendifferenz des dritten Segments und der zweiten Kreistangentenlänge. Damit sind die Verrundungsradien  $r_1=1,67$  und  $r_2=3,33$  gleichgeblieben und es ändert sich nur  $r_3=9,74$ . Dieser Übergang führt in diesem Konturbereich zum niedrigsten Spannungswert der drei Verrundungsvarianten. Die Spannung wird in dem Übergangsbereich des dritten Segmentes so weit reduziert, dass das in Variante 1 und 2 noch vorhandene lokale Spannungsmaximum verschwindet. In axialer Richtung verlängert sich die Kontur um 40,7% auf 3,31. Die Fläche der Kontur nimmt durch die Verrundung gegenüber der unausgerundeten Zugdreieckskontur um 5,2% auf 0,797 zu.

## 6.6 Kerbformoptimierung bei Winkeln größer $90^\circ$

Balkenschultern mit einem Öffnungswinkel größer  $90^\circ$  können auch mit der Methode der Zugdreiecke kraftflussfreundlich gestaltet werden. Jedoch ist es nun nicht mehr möglich, in den Kerbgrund ein rechtwinkliges, gleichschenkliges Dreieck zu legen. Die jeweilige Anpas-

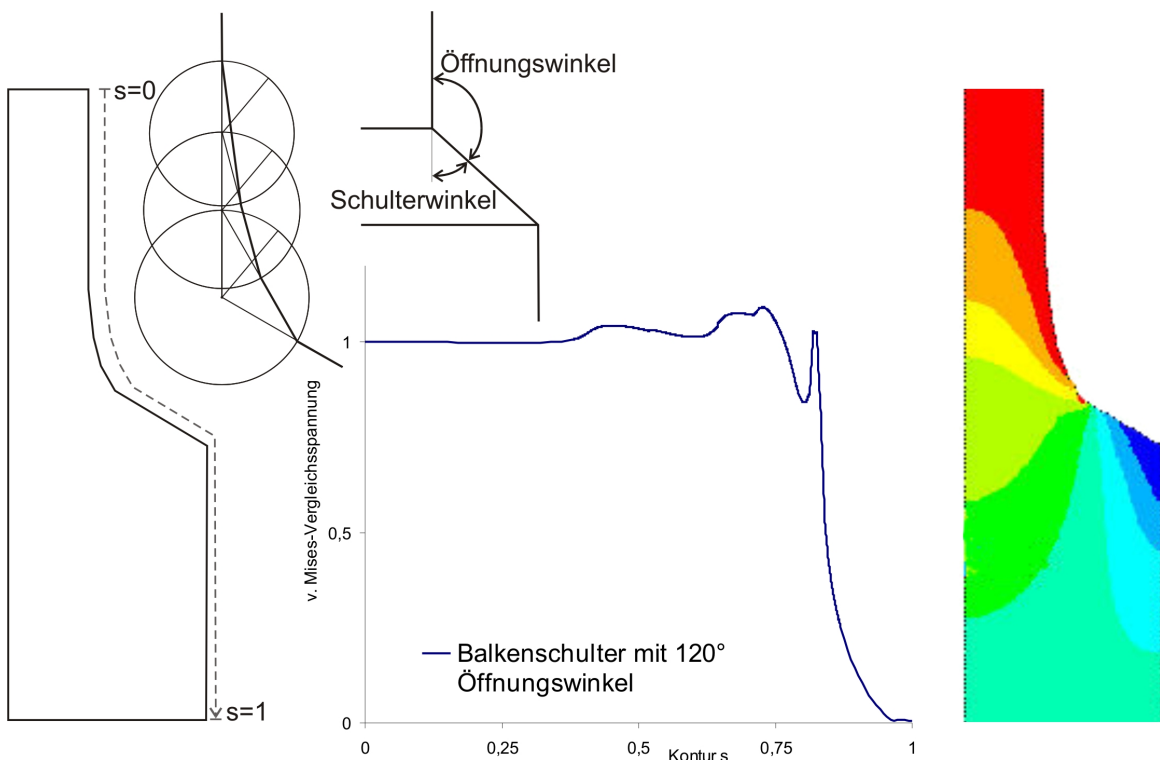


Abbildung 6.15: Kerbformgestaltung mittels der Methode der Zugdreiecke bei einem Öffnungswinkel von  $120^\circ$



sung der Konstruktionsvorschrift hängt von der Winkeldifferenz zur rechtwinkligen Balkenschulter ab. Bei kleinen Winkelunterschieden kann die Zugdreieckskontur verzerrt werden oder die Zugdreieckskontur wird axial leicht verschoben und dadurch das rechtwinklige erste Dreieck beibehalten. Beide Vorgehensweisen sind möglich, da die Zugdreieckskontur eine „gutmütige“ Form ist. Bei stumpferen Balkenschultern muss die Methode der Zugdreiecke modifiziert werden. Hierzu wird der Kerbgrund mit einem gleichschenkligen Dreieck als erstes Zugdreieck überbrückt, wobei der Scheitelwinkel identisch zum Öffnungswinkel der Balkenschulter ist. Die anderen Zugdreiecke werden wie bekannt konstruiert. Bei einer 90°-Balkenschulter tritt ein sehr ähnlicher Fall beim 2. Zugdreieck auf, welches einen Kerbwinkel von 135° mittels eines gleichschenkligen Dreiecks mit einem 135°-Scheitelwinkel überbrückt.

Die Konstruktion dieser modifizierten Zugdreieckskontur wird an einer Balkenschulter mit einem Öffnungswinkel von 120° beispielhaft angewendet. Als Referenzkontur wird die Balkenschulter mit einem tangentialen Kreisbogen des gleichen radialen Bauraums verrundet. In Abbildung 6.15 ist links die Konstruktion, in der Mitte die Spannung über der Kontur und rechts der Spannungsplot der Balkenschulter dargestellt. Die Spannungsverteilung entlang der gerundeten Kerbkontur weist die charakteristischen Merkmale der Zugdreieckskontur von der bekannten 90°-Balkenschulter auf.

Der Einfluss des Balkenschulterwinkels auf die Spannung wird in einer Parameterstudie untersucht. Hierbei wird der Öffnungswinkel der Balkenschulter von 90° bis 140° schrittweise vergrößert und die Kerbe jeweils mit einer Zugdreieckskontur und mit einem Kreisbogen ausgerundet. Während der Studie bleibt bei beiden Konturvarianten der radiale Bauraum konstant. An jeder Kontur werden die Maximalspannung und der axiale Bauraum ermittelt.

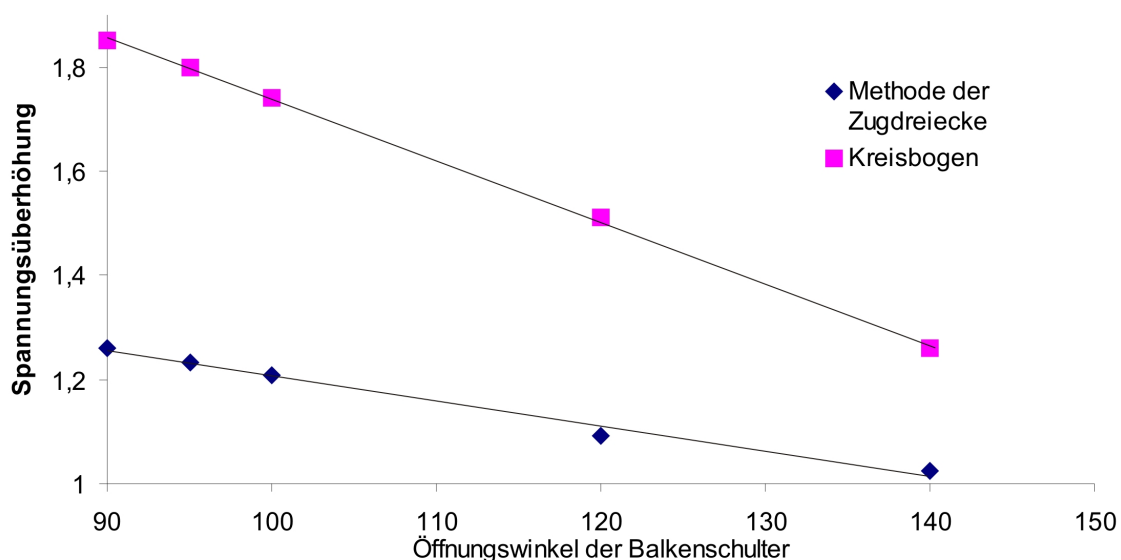


Abbildung 6.16: Einfluss des Öffnungswinkels auf die Maximalspannung bei einer Zugdreiecks- und einer Kreisbogenkontur

Die maximalen Spannungswerte der beiden Kerbkonturen sind in Abbildung 6.16 über dem jeweiligen Öffnungswinkel dargestellt. Bei beiden Kerbkonturen sinkt von  $90^\circ$  ausgehend bei größerem Öffnungswinkel die Maximalspannung nahezu linear ab. Hierbei liegen die Werte der Zugdreieckskontur deutlich unterhalb der Werte des Kreisbogens.

Der axiale Bauraum der Kerbkonturen wird schließlich über dem zugehörigen Balkenschulterwinkel im Diagramm von Abbildung 6.17 aufgetragen. Bei der Kreisbogenform wird wie bei der Verrundung in Kapitel 6.5.3 der Verrundungsradius mit zunehmendem Öffnungswinkel größer und entsprechend auch der axiale Bauraum. Im Vergleich dazu ist der axiale Bauraum der Zugdreieckskontur deutlich größer. Die Werte beider Kerbkonturen liegen jeweils auf einer Kurve, welche sich mit einer quadratischen Funktion beschreiben lässt. Diese beiden Bauraumkurven weisen bis ca.  $120^\circ$  etwa gleiche Steigungen und ähnliche Zunahmen der axialen Bauräume auf. Danach ist die Zunahme des axialen Bauraums bei der Zugdreieckskontur stärker ausgeprägt.

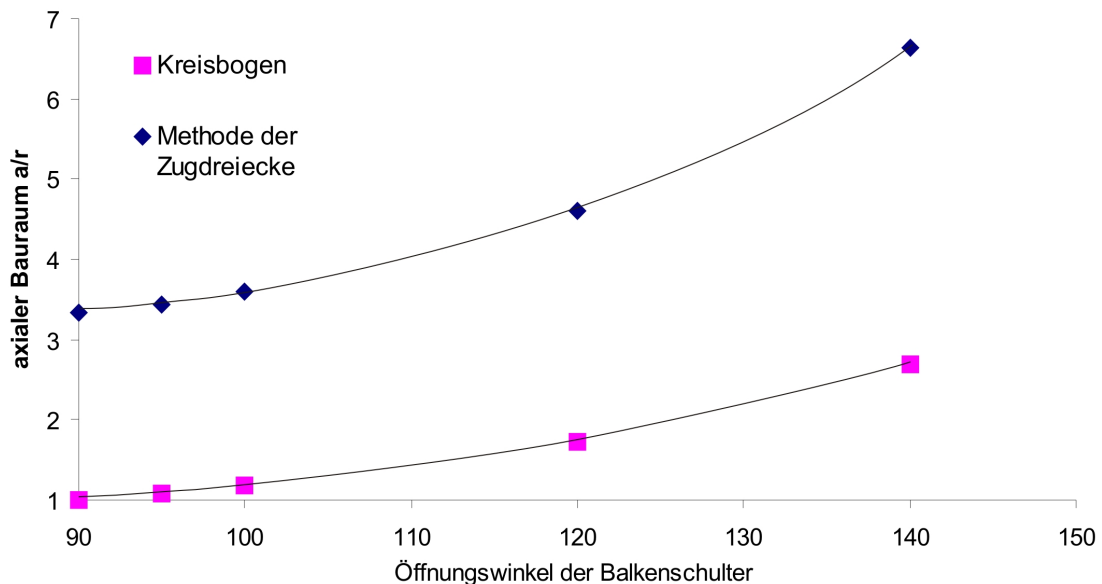


Abbildung 6.17: Axiale Länge der Kerbform in Abhängigkeit des Balkenschulterwinkels

# 7 Methode der Zugdreiecke zur Materialentfernung

In diesem Kapitel wird die Methode der Zugdreiecke dazu verwendet, unterbelastete Strukturbereiche zu entfernen. Die unterbelasteten Bereiche werden dabei mit der Methode der Zugdreiecke identifiziert, entfernt und die Auswirkungen auf die Spannungsverteilung und das Strukturgewicht betrachtet.

## 7.1 Einfluss der Lagerung auf den Spannungsverlauf einer Balkenschulter

Da ein Materialentfernen bis zum Einflussbereich der Lagerung führen kann, wird zunächst die Auswirkungen unterschiedlicher Lagerarten auf den Spannungsverlauf untersucht. Als Lager bezeichnet man in der Technik die funktionelle Verbindung von Strukturelementen. Lager können Kräfte übertragen bzw. ermöglichen es erst, resultierende Kräfte abzuleiten [8]. Damit bilden Lagerstellen die Verbindungen zwischen unterschiedlichen Strukturen und führen zu einem Kräfteausgleich. Die Art der Lagerung wirkt sich auf den Verlauf des Kraftflusses aus und beeinflusst damit auch lokal die Spannungen.

### **Einfluss eines Loslagers auf den Kraftflussverlauf**

Loslager können Kräfte nur in einer Richtung aufnehmen. Diese Lagerart ermöglicht somit eine zu der Lagerung orthogonale Bewegung, wie beispielsweise die Querkontraktion einer Struktur.

Abbildung 7.1 zeigt eine Balkenschulter, die mit Zug belastet und durch eine Loslagerung fixiert ist. Durch die Belastung bilden sich Kraftflüsse von der Krafteinleitung zur Lagerung und erzeugen Spannungen. Dieser Kraftflussverlauf kann anhand der Spannungsisolinien, die jeweils unterschiedliche Farbgebiete trennen, nachvollzogen werden. Die jeweilige Belastungshöhe wird durch eine Farbskala dargestellt. Hinsichtlich einer detaillierten Spannungsauflösung im Bereich der Lagerung wird die komplette Farbskala nur für Spannungswerte zwischen 0 und 0,5 verwendet und allen größeren Spannungen die graue Farbe zugewiesen.

Im Bereich des dünnen Balkenquerschnitts herrscht bis auf die Lasteinleitung und den Bereich der Kerbe eine homogene Spannungsverteilung. Durch die Querschnittsverbreiterung und den dadurch entstehenden Steifigkeitssprung fächert sich der belastete Bereich auf. Die Last verteilt sich nun über eine größere Querschnittsfläche. Hierdurch werden die Span-

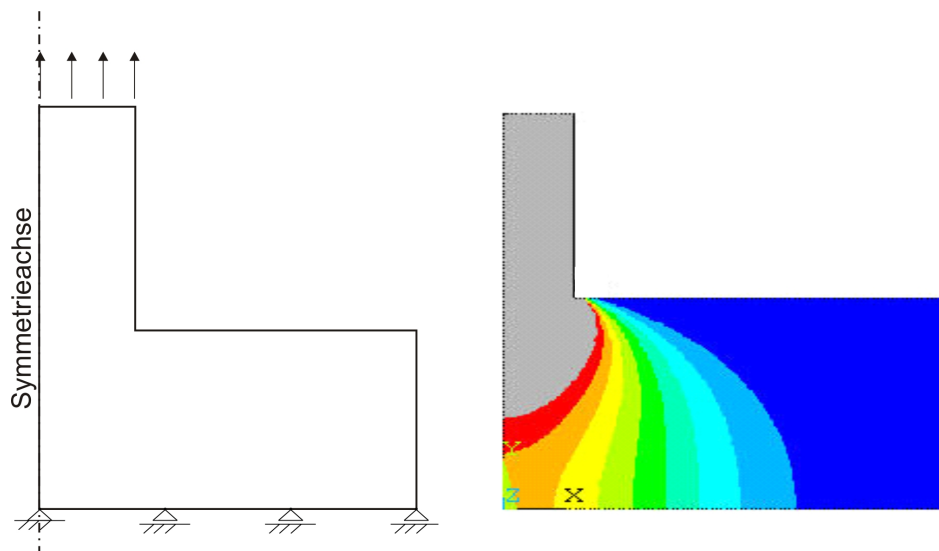


Abbildung 7.1: Spannungsverlauf an einer Balkenschulter mit Loslagerung

nungswerte kleiner, um schließlich in hinreichender axialer Entfernung wieder einen homogenen Spannungszustand anzunehmen. Die axiale Länge des breiten Balkenquerschnitts ist in Abbildung 7.1 so kurz, so dass dieser homogene Spannungszustand nicht erreicht wird.

Die Spannungsisolinien verlaufen am Querschnittsprung, also der Kerbe, sehr gedrängt, etwa in horizontaler Orientierung. Im weiteren bogenförmigen Verlauf richten sie sich all-

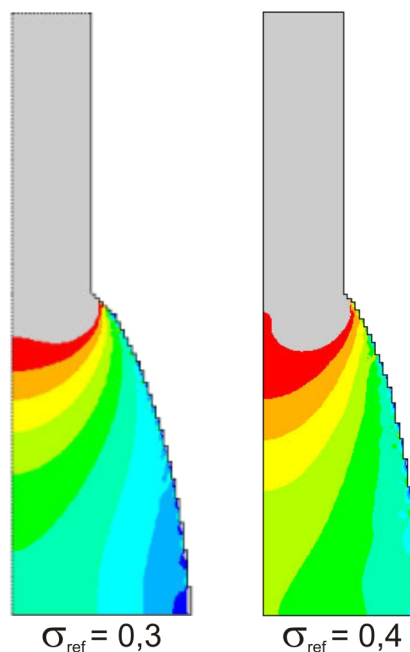


Abbildung 7.2: Die SKO-Methode entfernt entlang des Kraftflusses unterbelastetes Material (die Farbskala zeigt die Spannungswerte von 0,3 bis 0,8)

mählich vertikal aus. Dies ist die Folge der Loslagerung, welche keine horizontalen Spannungskomponenten aufnehmen kann.

Dieser vertikale Kraftfluss an der Lagerung wird auch mit Hilfe der SKO sichtbar, wenn von der Struktur niedrig belastete Bereiche entfernt werden. In Abbildung 7.2 sind die Ergebnisse, welche mit den Referenzspannungen von 0,3 und 0,4 erzielt werden, dargestellt. Die Farbskala zeigt Werte zwischen 0,3 und 0,8 an. Darüber liegende Werte sind als graue Bereiche gekennzeichnet.

### **Einfluss eines Festlagers auf den Kraftflussverlauf**

Ein Festlager kann Kräfte in alle Richtungen aufnehmen. Hierdurch wird jede Querbewegung verhindert.

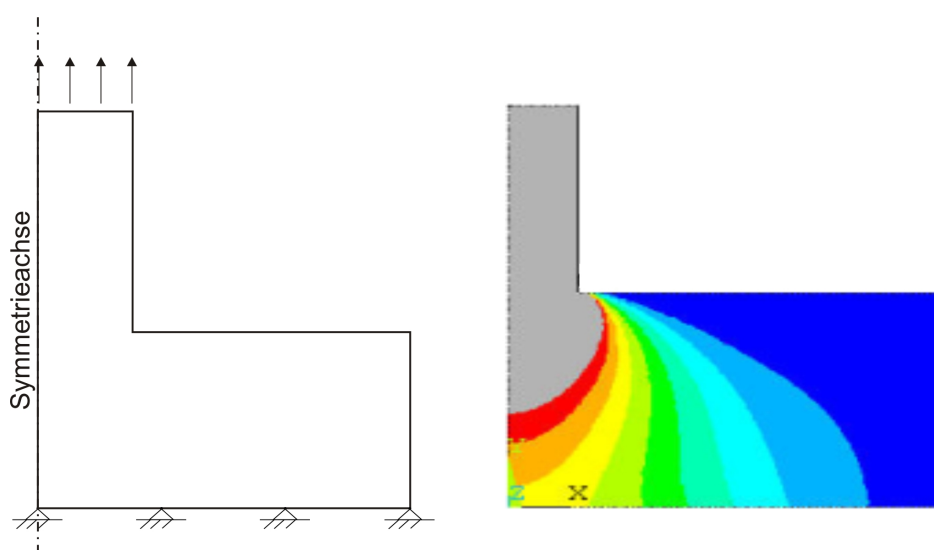


Abbildung 7.3: Spannungverlauf an einer Balkenschulter mit Festlagerung

Abbildung 7.3 zeigt eine zugbelastete Balkenschulter mit Festlagerung. Die sich dabei ausbildenden Spannungen und Kraftflüsse zeigt das FEM-Spannungsbild. Im Bereich des dünnen Balkenquerschnitts herrscht wie bei der Struktur mit dem Loslager ein homogener Spannungszustand, der durch die Balkenverbreiterung aufgefächert und verkleinert wird. Da durch das Festlager auch horizontale Spannungskomponenten in die Lagerung eingeleitet werden, verlaufen die Spannungsisolinien an der Lagerung in Richtung des jeweils resultierenden Kraftflusses. Eine Querkontraktion oder Querstreckung der Struktur findet im Lagerbereich nicht statt.

Dieser Spannungsverlauf, welcher an der Lagerung auch horizontale Komponenten aufweist, wird auch durch den Einsatz der SKO-Methode sichtbar. In Abbildung 7.4 sind die Ergebnisse dargestellt, welche mit einer Referenzspannung von 0,1 und 0,2 erzielt werden. Die Farbskala zeigt Spannungswerte von 0 bis 1 an. Werte darüber werden grau dargestellt. Beide Balken verbreitern sich an der Übergangsstelle durch einen konvexförmigen Bogen, welcher in eine Gerade übergeht. Diese Gerade weist bei beiden Strukturen in Bezug zur horizontalen Lagerung unterschiedliche Winkel auf, welche aber jeweils kleiner als  $90^\circ$  sind.

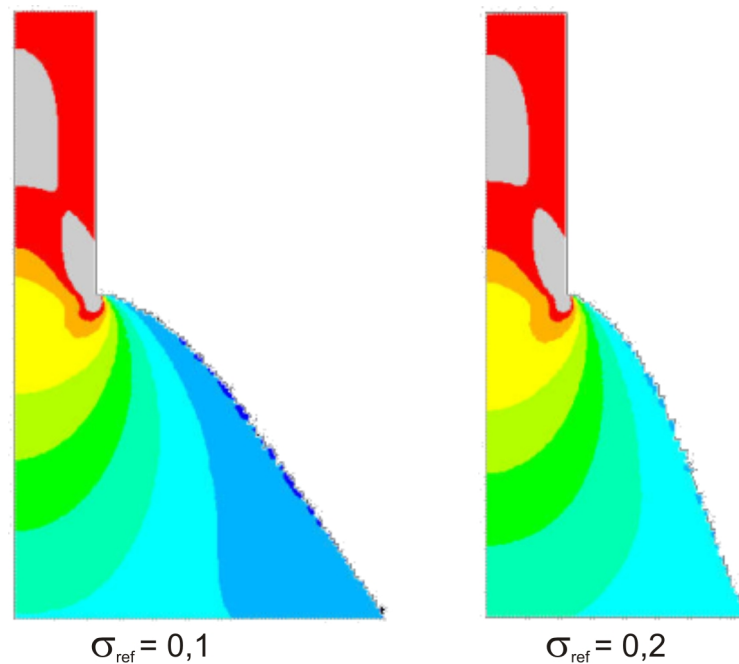


Abbildung 7.4: SKO-Strukturvorschläge bei Balkenschultern mit Festlagerung

Die Auswirkungen einer Fest- und einer Loslagerung auf den Spannungsverlauf wurden gezeigt. Das bedeutet für die Methode der Zugdreiecke, dass bei einem Einsatz im Wirkungsbereich eines Lagers, sich dessen Einfluss ungünstig auf die Spannungsverteilung entlang der Oberfläche auswirken kann. Für eine günstige Spannungsverteilung muss eine gleichbleibende endliche Steifigkeit und damit Elastizität vorliegen. Dies bedeutet, dass die Methode der Zugdreiecke nicht bei unterschiedlich steifen Komponenten, oder im Bereich einer starren Lagerung angewendet werden sollte.

## 7.2 Materialentfernen mit der Methode der Zugdreiecke

In diesem Abschnitt wird untersucht, wie mit der Methode der Zugdreiecke auch unterbelastete Bereiche entfernt werden können. Für die weitere Betrachtung wird von folgender Vereinfachung ausgegangen: Vom Kraftfluss durchzogene Strukturgebiete gelten als belastete Gebiete und Strukturgebiete, die fern vom Kraftfluss liegen, gelten als unbelastete Gebiete. Als Folge davon können aus mechanischer Sicht diese nicht belasteten Bauteilbereiche entfernt werden.

Bei einer Balkenschulter wird mit der Methode der Zugdreiecke niedrig belastetes Material entfernt. Hierzu wird die Orientierung des Kraftflusses am Querschnittsübergang der Balkenschulter mit dem Schubviereck dargestellt. Dieses Schubviereck, Abbildung 7.5, wird schon verwendet, um in Kapitel 6 den Übergang von der Balkenschulter zum dünnen Bal-

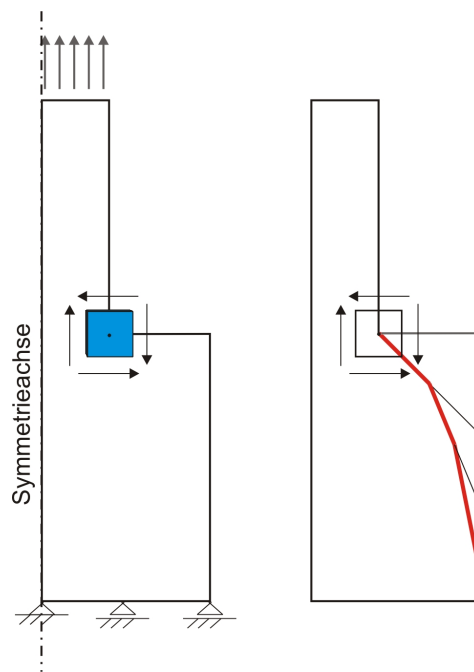


Abbildung 7.5: Mittels des Schubvierecks gefundenen Kraftflussverlauf und die zugehörige Zugdreieckskonstruktion zur Materialentfernung

kenschaft kraftflussgerecht zu gestalten und entspricht dem Schubviereck aus Abbildung 3.4, aus dem sich die  $45^\circ$ -Orientierung des Kraftflusses ergibt. Diese  $45^\circ$ -Grad Orientierung des Kraftflusses gilt natürlich in beide Richtung und somit auch in Richtung der Balkenschulter. Aus diesem Grund ist der Eckbereich oberhalb dieser  $45^\circ$ -Linie kaum belastet und kann entsprechend der oben genannten Vereinfachung entfernt werden. Dieses Eckdreieck ist gleichschenkelig, hat einen  $90^\circ$ -Schenkelwinkel und entspricht damit dem ersten Dreieck einer Zugdreieckskontur, die mit weiteren gleichschenkeligen Dreiecken ergänzt werden kann. Diese Zugdreieckskontur wird genutzt, niedrig belastetes Material abzugrenzen und ist damit eine „Schrumpf“-Zugdreieckskontur.

Zugdreieckskonturen werden im vorausgehenden Kapitel 6 als Wachstumsstrukturen behandelt, in diesem Kapitel 7 als Schrumpfstrukturen und das gleichzeitiges Wachsen und Schrumpfen wird in Kapitel 8 untersucht.

Die Spannungen entlang der Balkenkontur, welche mit Schrumpf-Zugdreiecken modifiziert wird, werden mit einer FE-Analyse ermittelt. Hierbei wird eine nicht verrundete und eine verrundete Zugdreieckskontur betrachtet. Das verwendete Modell ist eine Balkenschulter, ähnlich der Struktur aus Kapitel 6.1, mit einem dünnen Durchmesser ( $d$ ) und einem breiteren Durchmesser ( $D$ ). Der Durchmesser  $D$  entspricht der 2,75-fachen Breite des dünnen Durchmessers  $d$ . Das Modell wird mit einer Zugkraft axial belastet und ist über eine Loslagerung fixiert. Entlang der Laufkoordinate  $s$ , die entlang der Kontur führt, wird die Spannung dargestellt.

In Abbildung 7.6 sind die Spannungswerte der beiden Balkenschultern dargestellt. Die Krafteinleitungs- und die Lagerstelle sind vom Querschnittsübergang so weit entfernt, dass

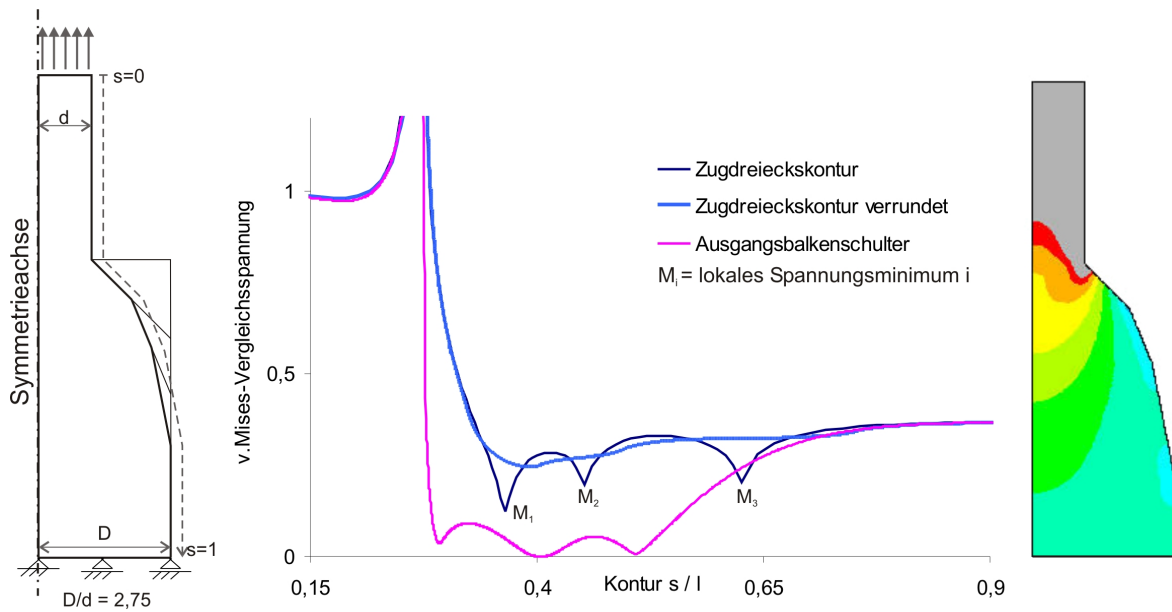


Abbildung 7.6: Spannungsverlauf entlang einer Zugdreieckskontur und der zugehörigen 90°-Balkenschulter mit einem  $D/d$ -Verhältnis von 2,75

sie die Spannungsverteilung in diesen Bereichen nicht beeinflussen. Da für die Materialwegnahme nur die unterbelasteten Bereiche von Interesse sind, wird im Spannungsdiagramm der besseren Auflösung wegen, die Spannung nur bis zu einem Wert von 1,2 aufgelöst. Die Graphenfarbe Rosa repräsentiert die Ausgangsrechteckstruktur, Dunkelblau die nicht verrundete Zugdreieckskontur und Hellblau die verrundete Zugdreieckskontur. Bei allen drei Balkenschultern startet der Spannungsverlauf mit  $s=0$  an der Flanke des dünnen Balkenabschnittes. Dort herrscht eine homogene Spannung. Diese erhöht sich erst am Querschnittsübergang durch die Kraftflussumlenkung und die geometrisch bedingte Singularität. Ab dieser Konturstelle unterscheiden sich nun die drei Balkenstrukturen.

Bei der Ausgangsbalkenschulter sinkt die Spannung entlang der waagrechten Balkenschulter rasch bis auf sehr kleine Werte ab, bleibt dort im gesamten horizontalen und vertikalen Bereich der Außenecke und steigt danach langsam auf den homogenen Wert des breiteren Balkenabschnitts an. Bei der verrundeten Zugdreieckskontur sinkt die Spannung nach der Spitzenspannung in einem kurzen Abschnitt auf ein Niveau, welches etwa 70% der Nennspannung des breiten Balkenschaftes entspricht. Von diesem globalen Minimum steigt die Spannung langsam entlang der modifizierten Kontur auf die Nennspannung des breiten Balkenabschnittes. Bei der unverrundeten Zugdreieckskontur sinkt die Spannung nochmals kurzfristig an den Segmentübergängen jeweils auf ein lokales Spannungsminimum. Am Übergang des ersten zu dem zweiten Segment befindet sich bei  $M_1$  das globale Minimum. Am Übergang von Segment zwei und drei ist das Minimum  $M_2$ , und  $M_3$  befindet sich am Übergang des dritten Segmentes zur Balkenflanke. Im Vergleich mit der Ausgangsbalkenschulter wird bei der Zugdreieckskontur der kaum belastete Bereich bei  $s=0,3$  bis  $0,55$  entfernt.



### Auswirkung der Verrundung bei der Schrumpf-Zugdreiecksmethode

Die Schrumpf-Methode der Zugdreiecke ist in der unausgerundeten Version unkritisch bezüglich der Spannung. Die konvexen Knicke der Struktur führen zu einem relativen Spannungsminimum. Natürlich können diese unterbelasteten Knickbereiche verrundet und damit entfernt werden. Durch die Verrundung ändert sich die Fläche im Bereich der Zugdreiecks-kontur nur gering, wie die Verrundungsstudie in Kapitel 6.5 zeigt.

#### 7.2.1 Einfluss der Kraftflussumlenkung auf die Maximalspannung

In diesem Kapitel wird mit der Methode der Zugdreiecke niedrig belastetes Material vornehmlich entfernt, um Material und Gewicht einzusparen, jedoch sinkt am Balkenschulterübergang zusätzlich die Kerbspannung. Im Beispiel von Abbildung 7.7, bei dem der Winkel der Balkenschulter mittels der Methode der Zugdreiecke von  $90^\circ$  auf  $45^\circ$  abgesenkt ist, ergibt sich am Querschnittsübergang auch eine Spannungsreduktion. Die Spannungsüberhöhung von 2,64 sinkt auf 2,23 ab, was einer Reduktion um 16% entspricht. Somit kann eine Materialentfernung bei richtiger Gestaltung auch zu einer geringeren Kraftflussumlenkung und damit zu einer niedrigeren Maximalspannung führen.

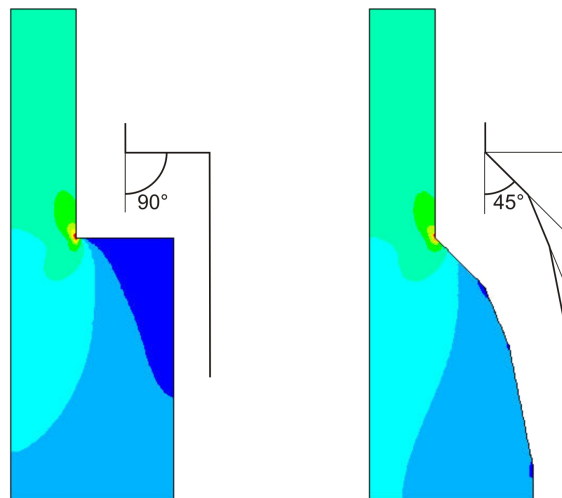


Abbildung 7.7: Durch die Methode der Zugdreiecke reduziert sich der Schulterwinkel von  $90^\circ$  auf  $45^\circ$  und damit auch die Maximalspannung

Die Übergänge der beiden Strukturen aus Abbildung 7.7 sind nicht ausgerundet und bilden damit Singularitäten. Aus diesem Grund sind die ermittelten Spannungswerte nur bei Strukturen mit identischer Netzdichte vergleichbar. Der beschriebene Einfluss des Schulterwinkels auf die Maximalspannung gilt jedoch auch für netzunabhängige FE-Analysen [48][19]. Die ermittelten Werte von Scherrer [48] sind in Abbildung 7.8 dargestellt.

In der Regel führt eine größere bzw. schärfere Kraftflussumlenkung zu einer höheren Maximalspannung. In Abbildung 7.8 sind die Spannungsüberhöhungen in Abhängigkeit des

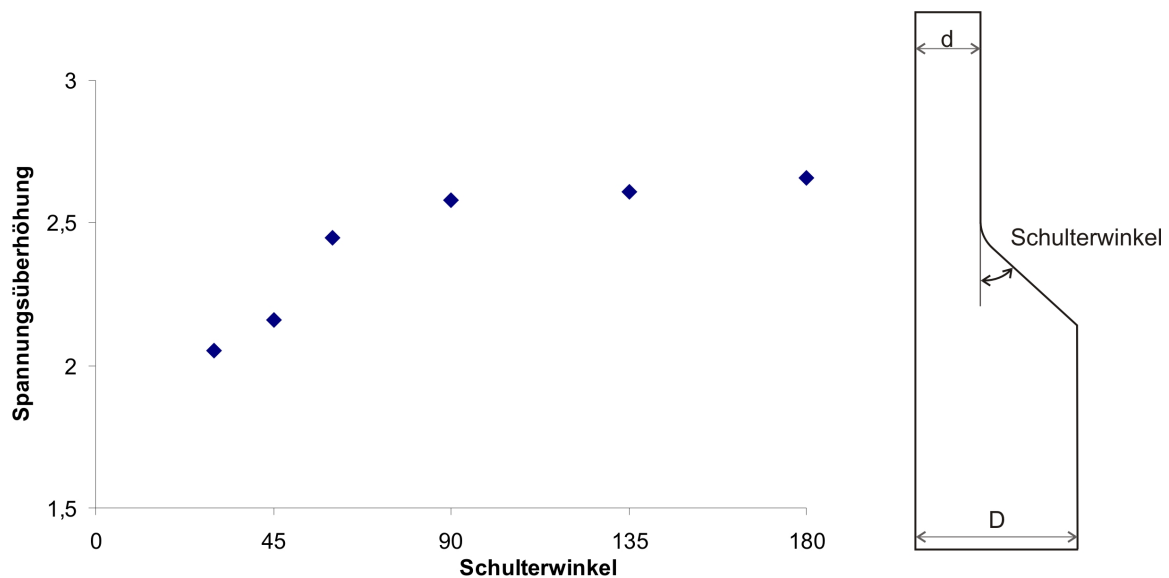


Abbildung 7.8: Einfluss der Kraftflussumlenkung durch den Schulterwinkel auf die Maximalspannung [48]

Schulterwinkels ohne weitere Konturmodifikation dargestellt. Die Spannungswerte sind als Diagramm über dem jeweiligen Schulterwinkel aufgetragen. Im Bereich von  $30^\circ$  bis  $90^\circ$  steigt die Spannungserhöhung an. Danach findet kein wesentlicher Spannungsanstieg mehr statt.

### 7.2.2 Untersuchung des Konturübergangs

Der Konturübergang von dem dünnen Wellenabschnitt auf den dicken Wellenabschnitt wird von zwei unterschiedlichen Seiten beleuchtet und bewertet. Zunächst werden mit der SKO-Methode in Abhängigkeit von ansteigenden Referenzspannungen mechanisch optimale Konturen an einer Balkenschulter erzeugt und danach die Zugdreieckskontur auf unterschiedliche Durchmesserhältnisse angewendet.

#### Bauraumermittlung mit der SKO-Methode

Mit der SKO-Methode werden an fünf Balkenschultern die niedrig belasteten Eckbereiche entfernt. Die untersuchte Balkenschultern haben alle ein  $D/d$ -Verhältnis von  $D/d=2$ , jedoch wird die Referenzspannung als Parameter in fünf Schritten von 0,1 auf 0,5 erhöht. Von den entfernten Konturecken werden die jeweiligen radialen ( $r$ ) und axialen ( $a$ ) Längen ermittelt. Aus den SKO-Untersuchungen ergeben sich fünf unterschiedliche Bauraumformen, die in Abbildung 7.9 mit den zugehörigen Werten für  $a$ ,  $r$  und dem Verhältnis  $a/r$  angegeben sind.

$\sigma_{ref}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$r$	1	1	1	1	0,5
$a$	1,3	1,9	2,6	3,3	2,3
$a/r$	1,3	1,9	2,6	3,3	4,6

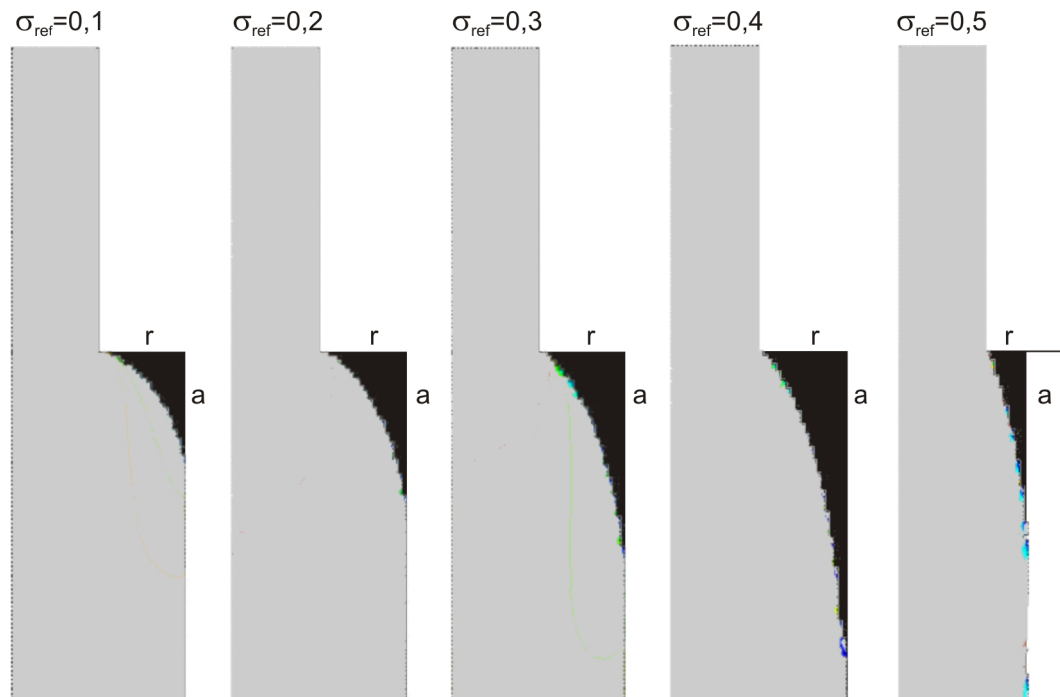


Abbildung 7.9: SKO-Bauräume einer Balkenschulter in Abhängigkeit von der Referenzspannung

Die Ergebnisse zeigen, dass die Materialwegnahme von der Referenzspannung abhängig ist und dabei unterschiedliche Bauraumdimensionen  $a$  und  $r$  erzeugt. Das Bauraumverhältnis  $a/r$  zeigt bei zunehmender Referenzspannung eine Tendenz zu Verlängerung des axialen Bauraums, also zu relativ schlankeren Konturen. Sobald die Referenzspannung der Nennspannung des breiten Balkens entspricht, verjüngt sich dieser. Dies ist im Beispiel der Fall bei  $\sigma_{ref} = 0,5$ .

Die Referenzspannung kann solange weiter erhöht werden, bis die Nennspannung des dünnen Balkenabschnittes erreicht wird. In diesem Fall wird aus der Balkenschulter ein Stab. Hiervon lässt sich deduzieren, dass eine hohe Referenzspannung zu einer Balkenschulter führt, bei der das Durchmesserverhältnis  $D/d$  gegen 1 geht. Für optimierte Konturen zur Kerbspannungsreduktion beschreibt Scherrer[48] die gleichen Tendenzen - kleinere Durchmesserverhältnisse der Balkenschulter führen zu einer schlankeren Kerbkontur.

### **Einfluss des Durchmesserverhältnisses auf den Spannungsverlauf**

Der Einfluss des Balkendurchmesserverhältnisses auf den Spannungsverlauf entlang der skalierten Zugdreieckskontur wird nun ermittelt. Für diese Betrachtung bleibt der dünnere Balkendurchmesser  $d$  konstant und der breitere Durchmesser  $D_x$  wird als Parameter verändert.

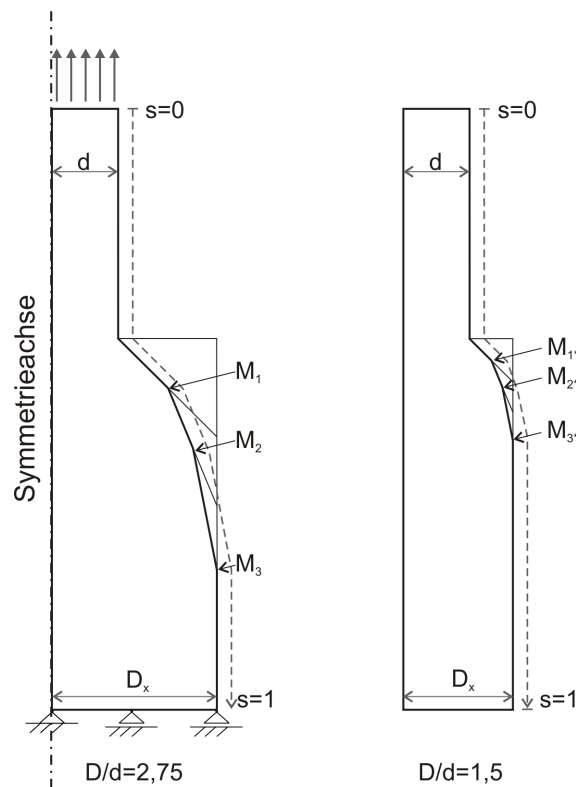


Abbildung 7.10: Balkenschulter mit variablem Durchmesser  $D_x$

Direkt abhängig von dem Durchmesser  $D_x$  ist die Größe der skalierten Zugdreieckskontur, deren radiale Abmessung der Länge der Balkenschulter entspricht (Balkenschulterlänge =  $D_x - d$ ).

Die Spannungswerte zweier Balkenschultern mit den  $D/d$ -Verhältnissen von 2,75 und 1,5, Abbildung 7.10, sind in Abbildung 7.11 dargestellt. Es werden jeweils die verrundeten und nicht verrundeten Konturen betrachtet. Die Spannungswerte am Balken  $D/d=2,75$  wurden schon in Abbildung 7.6 gezeigt und diskutiert. An dieser Stelle wird nochmals erwähnt, dass bei der verrundeten Zugdreieckskontur die Spannung auf 70% der Nennspannung  $N$  des breiten Balkenschaftes sinkt.

Die Spannungsverteilung des Balkens  $D/d=1,5$  ist am dünneren Balken ebenfalls homogen und steigt an der Kerbe wie beim Balken  $D/d=2,75$  an. Nach dem Spannungsmaximum an der Übergangsecke sinkt die Spannung bei der verrundeten Kontur auf ca. 50% der Nennspannung  $N^*$  des breiteren Balkenschaftes. Somit ist der relative Spannungsabfall an der Querschnittsverbreiterung bei dem Balken  $D/d=1,5$  größer. Dies führt im weiteren Konturverlauf beim Balken  $D/d=1,5$  dazu, dass die Spannung bis zur Nennspannung steiler ansteigt.

In einer Parameterstudie werden weitere Durchmesserhältnisse  $D/d$  im Bereich von  $D/d=1,25$  bis 4,5 untersucht. Die im unverrundeten Fall auftretenden drei Spannungsminima  $M_1$ ,  $M_2$  und  $M_3$  jedes Balkens werden in Abbildung 7.12 über dem entsprechenden

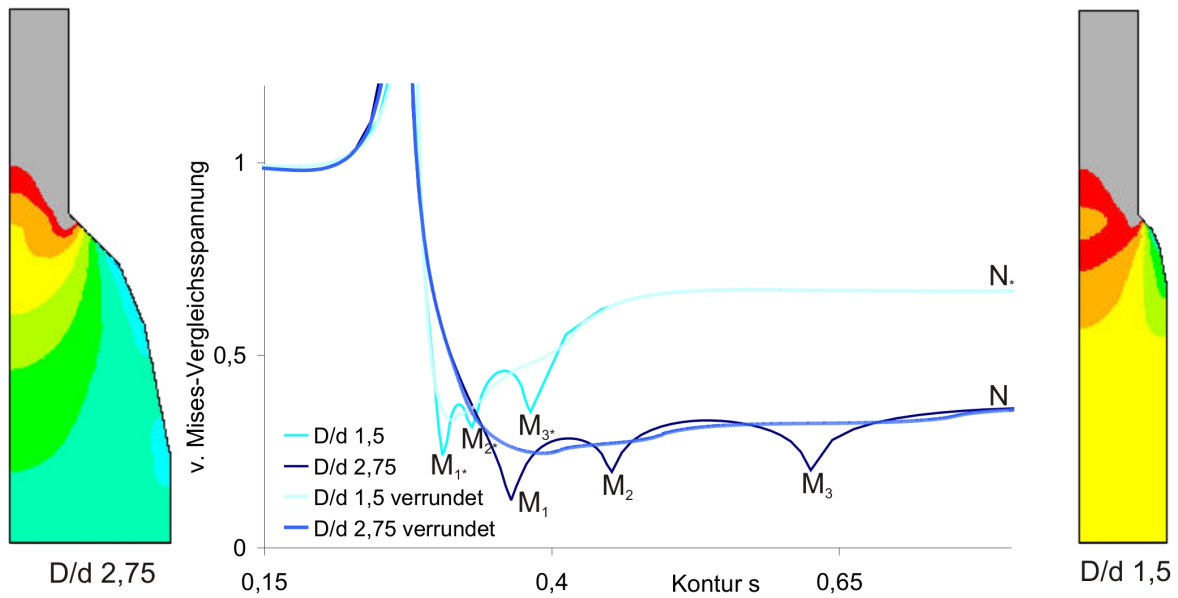


Abbildung 7.11: Spannungsverläufe bei unterschiedlich breiten Balkenschultern

Durchmesser Verhältnis aufgetragen. Bei einem größeren  $D/d$ -Verhältnis sind die Spannungswerte der Minima insgesamt niedriger als bei einem kleineren  $D/d$ -Verhältnis. Zusätzlich unterscheiden sich je nach  $D/d$ -Verhältnis die relativen Spannungsdifferenzen der Minima untereinander. Das Minimum  $M_1$  ist in dem betrachteten Variationsbereich jeweils das globale Minimum. Die Kurven der Minima  $M_2$  und  $M_3$  schneiden sich bei einem  $D/d$ -Wert

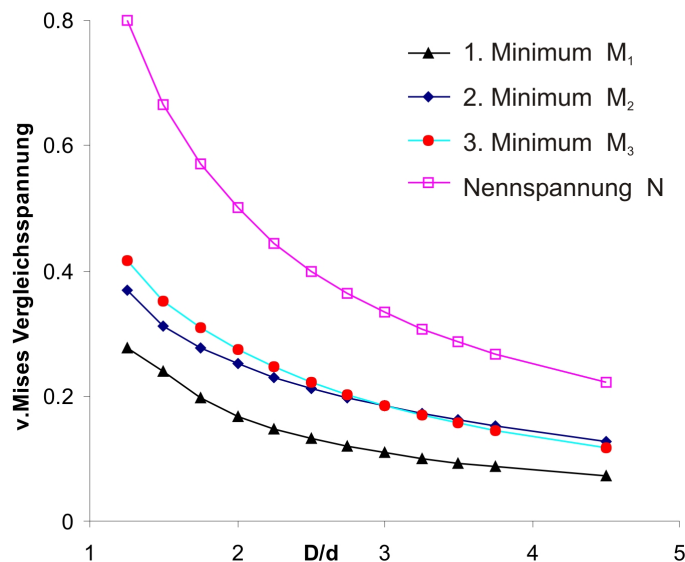


Abbildung 7.12: Verlauf der Minima und der Nennspannung in Abhängigkeit des Durchmesser Verhältnisses  $D/d$

von 3. Von 1,25 bis 3 ist die Spannung bei  $M_3$  höher. Für die  $D/d$ -Werte von 3 bis 4,5 ist die Spannung bei  $M_2$  höher. Demnach ist für diese untersuchten Balkenschultern das Verhältnis von  $D/d=3$  am günstigsten und für kleinere  $D/d$ -Werte ist die axiale Zugdreieckskonturlänge tendenziell zu kurz. Für  $D/d$ -Werte, welche größer als drei sind ändern sich die Unterschiede zwischen den Minima nur gering, die Kontur ist aber tendenziell etwas zu lang.

### 7.3 Einzelkrafteinleitung beim Zugstab

Nach der Balkenschulter wird nun untersucht, ob die Methode der Zugdreiecke auch an einem Stab niedrig belastete Strukturbereiche kraftflussgerecht entfernen kann. Der Stab A in Abbildung 7.13 wird von einer mittigen Einzelkraft gezogen und ist am gegenüberliegenden Stabende gelagert. Die punktuelle Lasteinleitung führt zu hoch- und niedrigbelasteten Strukturbereichen innerhalb der Stabquerschnittsebene. Mit zunehmender Entfernung von der Lasteinleitung wird die Spannungsverteilung über den Stabquerschnitt immer gleichmäßiger. Wie auch bei der Balkenschulter führt die Zugdreiecksmethode zu einer kraftflussfreundlichen Kontur. Hierzu wird die Zugdreieckskontur analog zur Vorgehensweise bei der Balkenschulter an der Gleitlinie ausgerichtet. Damit sind Strukturbereiche, welcher außerhalb dieser Kontur liegen, mechanisch nicht sehr relevant und können entfernt werden. Die Spannung des modifizierten Stabes wird im Spannungsdiagramm von Abbildung 7.13 betrachtet. An der Lasteinleitungsstelle bei  $s=0$  wird der Stab stark belastet und weist dort

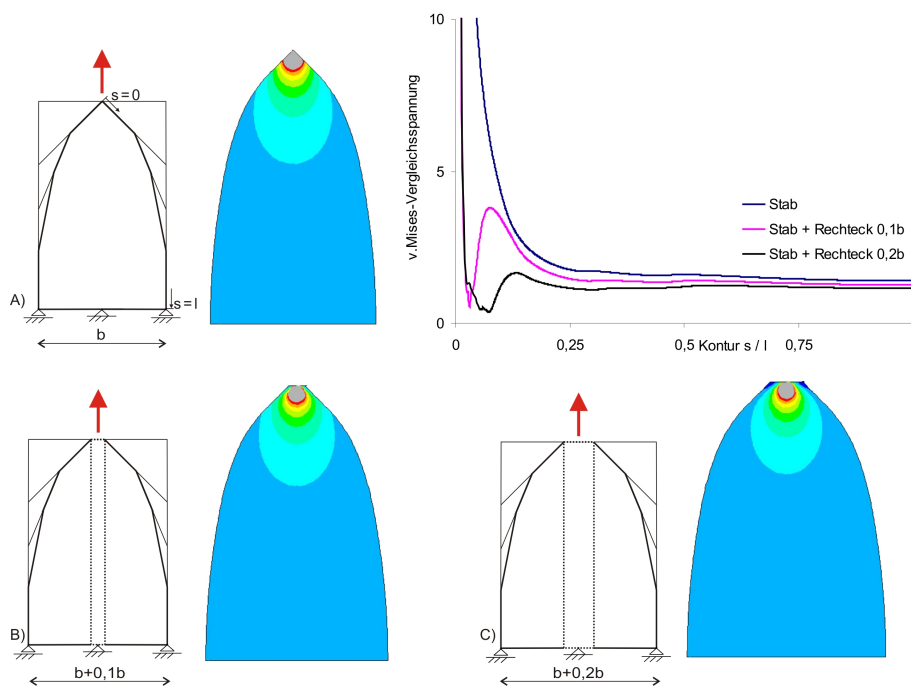


Abbildung 7.13: Spannungsverlauf bei einem Zugstab mit Einzelkrafteinleitung und bei Zugstäben mit radial verschobener Zugdreieckskontur

die höchste Lastspitze auf, welche FE-bedingt quantitativ wenig aussagekräftig ist. Aus diesem Grund wird im Spannungsdiagramm, Abbildung 7.13, die Spitzenspannung bei 10 abgeschnitten. Diese starke Spitzenbelastung sinkt dann bis zu  $s=0,15$  deutlich ab, um dann im nächsten Zehntel weich in den homogenen Bereich überzugehen. Der Spannungsverlauf nimmt dabei im gesamten Verlauf monoton ab.

Bei den beiden unteren Zugstäben B und C in Abbildung 7.13 werden die verrundeten Zugdreiecke nicht auf die potentielle Gleitlinie bezogen, sondern orthogonal dazu etwas versetzt. Im Beispiel B wird die Balkenbreite dadurch um  $1/10$  und im Beispiel C um  $1/5$  verbreitert. Die Größe der Zugdreiecke und deren Seitenorientierung wird beibehalten. Durch diese Strukturverbreiterung bei gleichbleibender Belastung sinkt insgesamt die Spannung. Jedoch weisen beide Spannungsverläufe die gleichen Tendenzen auf: Eine hohe Spitzenspannung durch die Einzelkrafteinleitung, ein Spannungsminimum am Rand des jeweils eingeschobenen Rechtecks, ein Spannungsanstieg durch die Kraftflussumlenkung am ersten Zugdreieckssegment und schließlich ein allmählicher Spannungsangleich auf die Nennspannung. Der Spannungsabfall nach der Lasteinleitung wird bei der Verbreiterung des Stabes steiler.

Statt der Querschnittsvergrößerung durch Einfügen des Rechtecks, hätten auch die Zugdreiecke kleiner werden können, um den Ansatzpunkt des ersten Dreiecks von der Gleitlinie abweichen zu lassen. Bei diesem Verfahren wäre der Stabquerschnitt konstant geblieben und die Breite des eingeschobenen Rechtecks wäre von der Größe der Zugdreiecke abhängig.

Das Abrücken der Zugdreieckskontur von der gedachten Gleitlinie stellt eine Änderung der üblichen Zugdreieckskonstruktion dar. Diese Modifikation führt bei den Strukturen in Abbildung 7.13 zu einer leicht geänderten Spannungsverteilung entlang der Kontur mit einem zusätzlichen Minimum. Dieses ist der Indikator für unbelastetes Material, welches eigentlich entfernt werden sollte. Jedoch erweist sich bei dieser Modifikation die Zugdreieckskontur wieder als „gutmütige“ Konstruktionsvorschrift, da trotz abweichender Anwendung kein kritisches Spannungsmaxima erzeugt wird.

## 7.4 Methode der Zugdreiecke bei Biegestrukturen

Die Methode der Zugdreiecke wird nun auf biegebeanspruchte Stäbe angewendet, um niedrig belastete Bereiche zu identifizieren und schließlich zu entfernen.

### 7.4.1 Mittige Lasteinleitung

Die Methode der Zugdreiecke wird auf einen mittig belasteten Biegestab angewendet. Der Biegestab hat die Form eines Rechtecks und wird in der Mitte des oberen Stabendes mit einer Querkraft belastet, siehe Abbildung 7.14. Die Querkraft führt im Stab zu einer Biegespannung, welche sich aus gleichwertigen Zug- und Druckspannungen zusammensetzt.

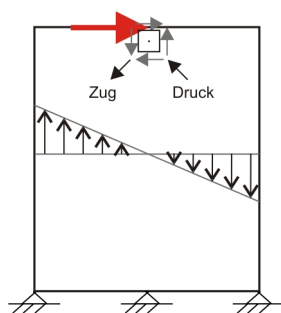


Abbildung 7.14: Biegebelasteter Stab mit eingezeichnetem Schubviereck

Ein an der Lasteinleitungsstelle eingezeichnetes Schubviereck verdeutlicht die Orientierung der Hauptnormalspannungen. Diese sind von dem oberen horizontalen Stabende ausgehend eine um  $45^\circ$  geneigte Zughauptnormalspannung auf der linken Seite und eine um  $45^\circ$  ansteigende Druckhauptnormalspannung auf der rechten Seite. Diese Hauptnormalspannungen geben die Basisrichtungen der beiden ersten Dreiecke vor. Auf der linken Seite des Stabes, also bei der Zugkomponente der Biegung, führen das erste  $45^\circ$ -Dreieck und weitere Dreiecke zu der bekannten Zugdreieckskontur. Auf der rechten Seite, also bei der Druckkomponente der Biegung, führen das erste  $45^\circ$ -Dreieck und weitere Dreiecke zu der bekannten Kontur, welche aber druckbelastet ist und damit auch als „Druckdreieckskontur“ bezeichnet werden kann.

Die Belastung des biegebelasteten Rechteckstabes und des Stabes mit der Zug- und Druckdreieckskontur werden mit der FEM ermittelt. Die Ergebnisse sind in Abbildung 7.15 dargestellt und sind mit einer neutralen Faser in der Stablängsachse charakteristisch für eine Biegebelastung. Die neutrale Faser in der Strukturmitte ist nahezu unbelastet. Mit zunehmender radialer Entfernung von der neutralen Faser steigt die Spannung an.

Die Randkonturspannung des umhüllenden Rechteckstabes ist direkt an der Lasteinleitung hoch belastet und sinkt dann im Bereich der unbelasteten Ecken (ca.  $0,2 < s < 0,4$ ) auf den Wert 0 ab. Ab  $s=0,4$  steigt die Spannung linear auf die maximale Biegespannung an der Lagerung, wo sich der Spannungszustand durch Einspanneffekte noch weiter erhöht. Der Spannungsverlauf gilt für beide Seiten des Rechteckstabes, dabei handelt es sich auf der linken Seite um Zugspannungen und auf der rechten um Druckspannungen.

Die Randkonturspannung der Zugdreieckskontur ist an der Lasteinleitung und der näheren Umgebung ebenfalls sehr hoch belastet, gefolgt von einem nahezu gleichmäßigen Spannungsniveau zwischen  $s=0,3$  bis  $s=0,97$ . Dieses Niveau entspricht der maximalen Biegespannung, welche sich analytisch aus dem maximalen Biegemoment und dem Widerstandsmoment ermitteln lässt. Zusätzlich ergibt sich bei  $s=1$  aufgrund der Lagerstelle ein Spannungsanstieg.

Die Spannung entlang der Außenkante der Zugdreieckskontur ist ähnlich zu dem entsprechenden Spannungsverlauf beim Zugstab aus Abbildung 7.13. Da sich der Biegestab zur Lagerstelle hin verbreitert, bleibt die Spannung an der Oberfläche, etwa ab  $s=0,3$ , in einem ungefähr konstanten Bereich.



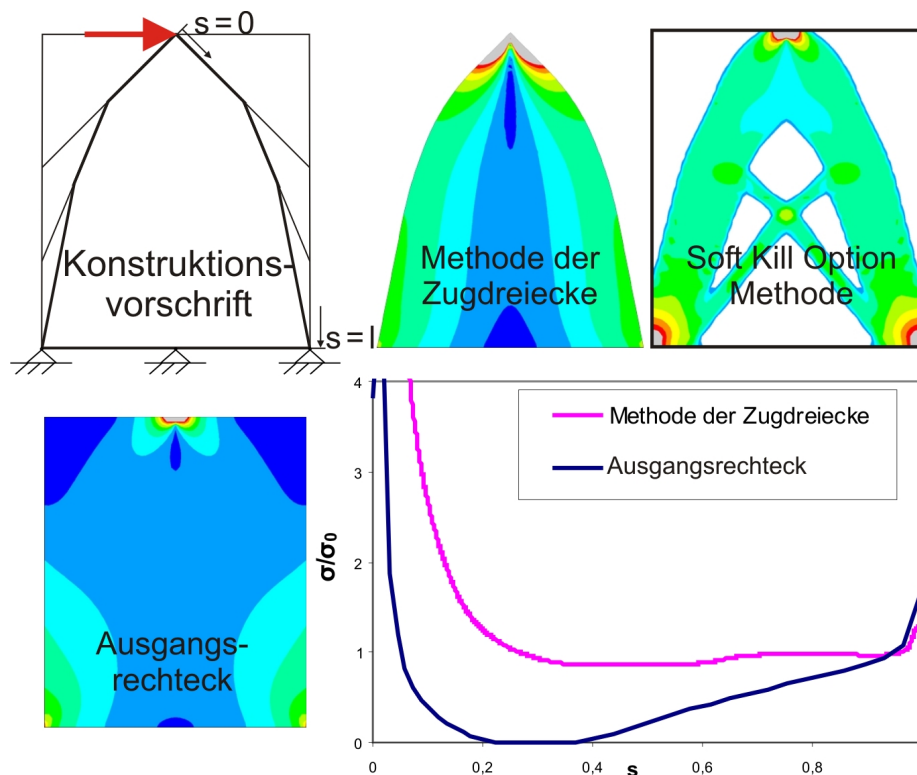


Abbildung 7.15: Kontur- und Spannungsvergleich eines Biegestabes mit Zugdreiecks-, Rechtecks- und SKO-Kontur

In einer weiteren Untersuchung werden von dem rechteckförmigen Biegestab ausgehend mit der SKO-Methode die niedrig belasteten Bereiche entfernt. Die Belastung der so erhaltenen Kontur entspricht einer vorgegebenen Referenzspannung und weist nur punktuell an den Lager- und Kräfteinleitungsbereichen einen höheren Wert auf. In dem niedrig belasteten Bereich um die neutrale Faser herum, wird Material entfernt und es bildet sich dort ein Fachwerk aus, siehe Abbildung 7.15.

Bei der folgenden Untersuchung, entsprechend Abbildung 7.16, starten die beiden Zugdreieckskonturen nicht bei der Lasteinleitung, sondern dazu radial versetzt. Durch die seitliche Versetzung der beiden Zugdreieckskonturen wird ein rechteckförmiges Ergänzungsstück in den Biegestab eingefügt, analog zu den Zugstäben aus Kapitel 7.3. In Abbildung 7.16 sind die Konstruktionen und die Spannungen als FEM-Plot und als Spannungsdiagramm dargestellt. Die linke Struktur wird um  $1/10$  der Grundseite und die rechte Struktur um  $1/5$  verbreitert.

Die Strukturverbreiterung führt zu einer Verschiebung der Zugdreieckskonturen, ohne ihre jeweilige Größe zu ändern. Die Verbreiterung führt bei gleichbleibender Belastung zu einer Spannungsreduktion. Die beiden Spannungsverläufe weisen die gleichen gemeinsamen Tendenzen auf: Eine Spitzenspannung am Ort der Kräfteinleitung, ein Spannungsminimum am Rand des eingeschobenen Rechtecks, eine lokale Spannungsspitze durch die Kraftflussumlenkung am ersten Zugdreieckssegment, eine Annäherung an die jeweilige Nennspannung

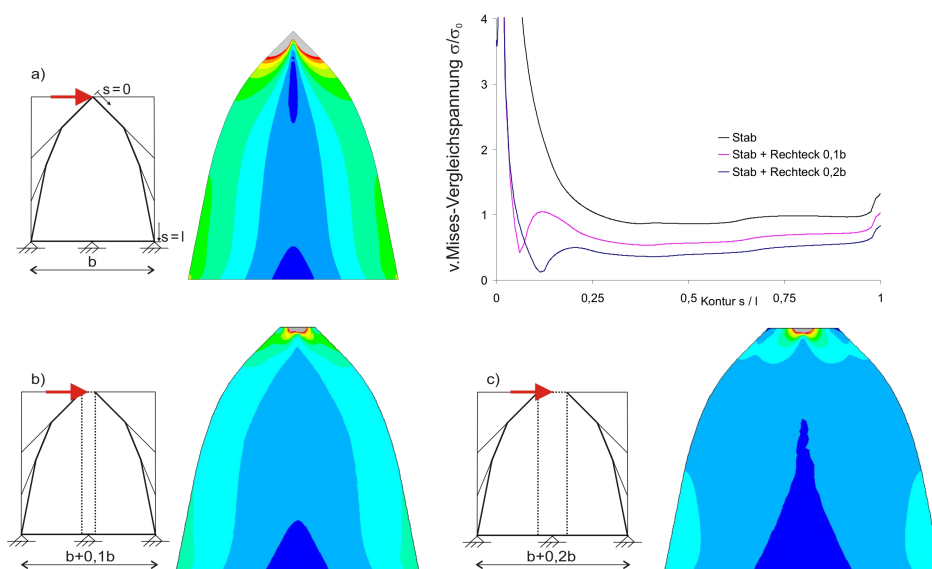


Abbildung 7.16: Spannungsverlauf bei einem Biegestab mit Einzelkrafteinleitung und bei Biegestäben mit radial verschobener Zugdreieckskontur

und schließlich ein lokaler Spannungsanstieg im Bereich der Lagerung bei  $s=1$ . Bei den beiden verbreiterten Stäben ist der Spannungsabfall nach der Lasteinleitung steiler im Vergleich mit dem Biegestab, bei dem die Zugdreieckskontur an der Lasteinleitung ansetzt.

Statt der Strukturverbreiterung hätten auch hier die Zugdreiecke verkleinert werden können, um ihren Ansatzpunkt seitlich zum Kraftangriffspunkt zu verschieben. Bei diesem Verfahren bliebe der Stabquerschnitt konstant, weshalb die Breite des eingeschobenen Rechtecks von der Größe der Zugdreiecke abhängig wäre. Wie beim Zugstab aus Abbildung 7.13 beeinflusst analog auch hier der modifizierte Ansatzpunkt der Zugdreieckskontur die Spannungsverteilung. Es bildet sich ein zusätzliches Spannungsminimum, jedoch keine kritischen Spannungsspitzen. Auch diese Modifikation zeigt das „gutmütige“ Verhalten der Zugdreieckskontur.

### 7.4.2 Exzentrische Krafteinleitung

Der Einfluss einer außermittigen Lasteinleitung auf unterschiedliche Biegestabformen ist in Abbildung 7.17 dargestellt. Die verwendeten Stabformen sind eine Rechteckskontur, eine mit Zugdreiecken modifizierte Kontur und ein SKO-Designvorschlag. Bei dem mit der Methode der Zugdreiecke gestalteten Biegestab sind durch die außermittige Krafteinleitung die beiden Zugdreiecke unterschiedlich groß. Auf der linken Seite erhält man eine Kontur aus drei Segmenten und auf der rechten, wegen des größeren ersten Segments, nur zwei Segmente.

Bei allen drei Konturen führen die Lasteinleitung- und die Lagerstellen zu hohen Spannungswerten. Von der Lasteinleitung ausgehend sinkt beim Rechteck die Spannung an den unbelasteten Ecken auf den Wert 0 und steigt nach einem Übergangsbereich auf beiden Seiten in

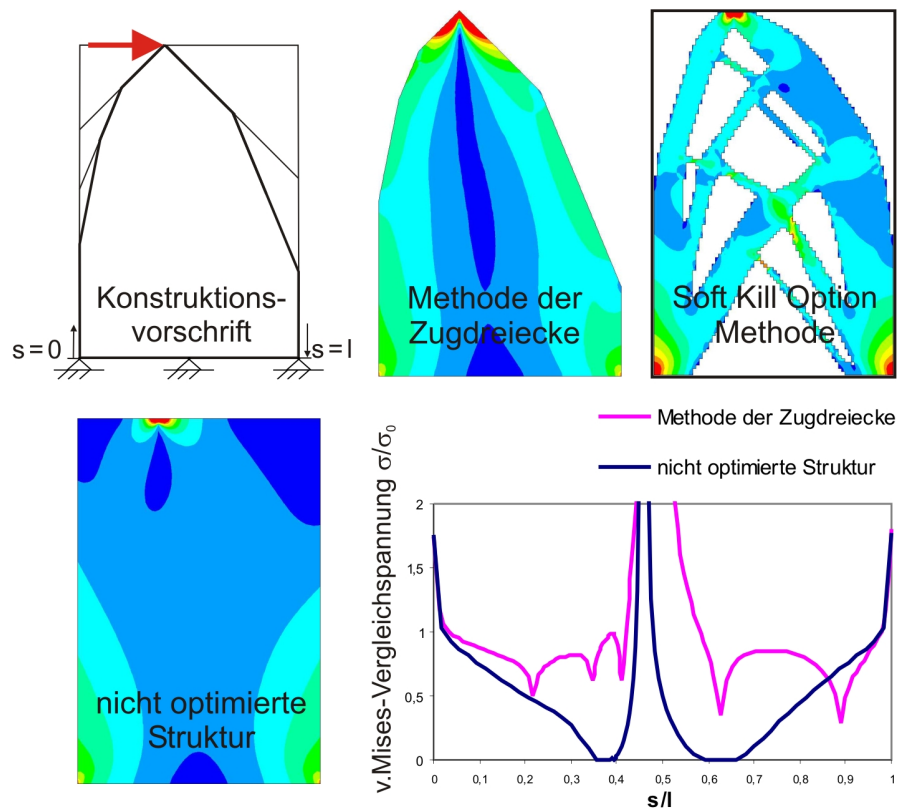


Abbildung 7.17: Exzentrische Krafteinleitung bei einem Biegestab

Richtung der Lagerung linear wieder an. Bei dem Zugdreiecksstab weisen die Spannungsverläufe an beiden Seiten die bekannten charakteristischen Merkmale der Zugdreiecksstruktur auf. Da die linke Zugdreiecksstruktur in der Skalierung kleiner ist, findet dieser Ablauf auf einer kleineren Konturlänge statt. Nach dem dritten Segment verbreitert sich hier die Struktur nicht mehr und die Spannung steigt nun proportional an. Die drei Segmentübergänge führen zu drei Minima. Auf der rechten Seite führen die zwei Segmente nur zu zwei Segmentübergängen und damit zu zwei Spannungsminima. Die Spannungsverläufe bei den Strukturen im Diagramm von Abbildung 7.17 starten jeweils an der linken Lagerung. Der mit der SKO-Methode ermittelte Designvorschlag weist ähnlich zur SKO-Lösung aus Abbildung 7.15 am Rand konvexe Bogenstrukturen auf, welche im niedrig belasteten Innenbereich mit einem Fachwerk versteift werden.

## 7.5 Krafteinleitung an einer Konturecke

Der Extremfall einer außermittigen Belastung eines rechteckförmigen Biegestabes ist der Lastangriff an einer Konturecke – also ein Kragträger. Dies ist eine aus der Literatur bekannte Struktur, welche oft als Beispiel für Strukturoptimierungen herangezogen wird [1][17].

Auch für den Kragträger bietet sich die Methode der Zugdreiecke zur Modifikation der Gestalt an.

Es werden drei Kragträgerformen in Abbildung 7.18 miteinander verglichen: a) eine Rechteckkontur, b) eine ausgerundete Zugdreieckskontur und c) eine Wurzelkontur. Bei der Rechteckform a) greift die Kraft bei der unteren Ecke der Stirnseite an. Dieser Bereich ist hoch belastet, im Unterschied zu dem anderen Eckbereich der Stirnseite, welcher wenig bis gar nicht belastet ist. Die Zugdreieckskontur b) erhält man von einem Rechteck ausgehend. Ein gedachtes Schubviereck an der Lasteinleitung gibt die Richtung der Hauptnormalspannung und damit die Orientierung der Zugdreieckskontur vor. Die Wurzelkontur c) führt zu einem „Träger konstanter Biegespannung“, dessen Kontur sich analytisch ermitteln lässt [13]. Um die Biegespannung an der Oberfläche konstant zu halten, wird aus dem Widerstands- und dem Biegemoment die Strukturhöhe als Funktion des axialen Laufparameters beschrieben. Auf diese Weise erhält man die gesuchte Quadratwurzelfunktion.

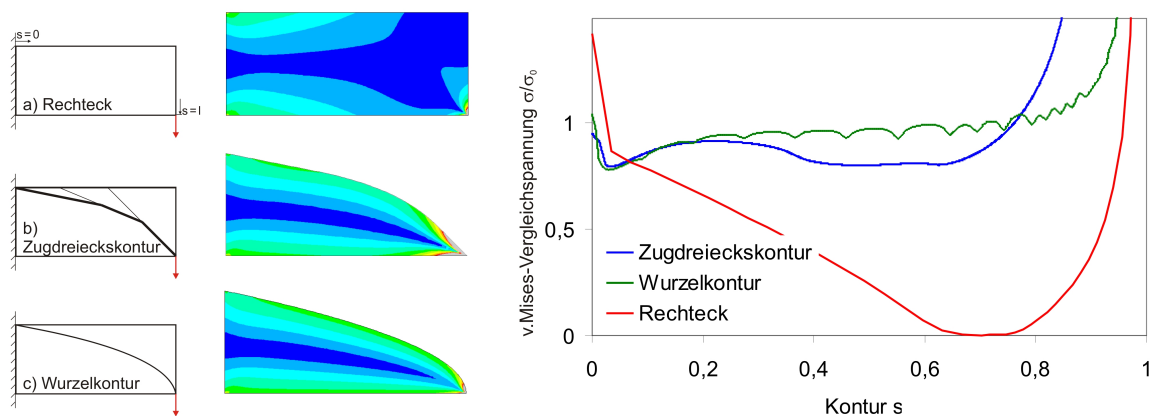


Abbildung 7.18: Spannungsverläufe bei drei Kragträgern unterschiedlicher Randkontur

Die Spannungsverläufe der drei Kragträgerbeispiele weisen die gleichen Tendenzen auf wie bei der außermittigen Lasteinleitung beim Biegestab, jedoch sind sie hier stärker ausgeprägt. Das Rechteck a) ist bis auf die Bereiche der Lasteinleitung und Einspannung unterbelastet. Die Zugdreieckskontur (b) ist in Längsrichtung über die Bereiche des zweiten und dritten Segments weitgehend homogen ausgelastet, im Bereich des ersten Segments  $s=0,8$  steigt jedoch die Spannung an. Die analytische Wurzelkontur c) ist bis auf die Einleitungs- und Lagerstelle homogen belastet. Die Wurzelkontur wird bei dem FE-Modell stückweise linearisiert, wodurch der wellige Spannungsverlauf entlang der Kontur entsteht. Für einen Rechteckkragträger, welcher auf die Belastung an der Einspannstelle ausgelegt ist, bedeutet dies, dass er an allen anderen Bereichen überdimensioniert ist. Im Unterschied dazu nutzt ein Kragträger gleicher Biegebeanspruchung das Material überall optimal aus. Ein Kragträger, der gerade so lang wie die Zugdreieckskontur ist, wird etwa homogen belastet. Wäre der Kragträger länger, wäre die Homogenität gestört.

## 7.6 Auswirkung der Kragträgerlänge

In diesem Kapitel wird der Einfluss der Kragträgerlänge auf das Optimierungsergebnis hin betrachtet. Die Methode der Zugdreiecke wird hierzu auf einen Balken angewendet, der etwa neunmal so lang wie breit ist. Aufgrund des festen „Länge zu Breite“-Verhältnisses der Zugdreieckskontur von 2,36, wird bei einem längeren Balken nur der vordere Konturbereich modifiziert.

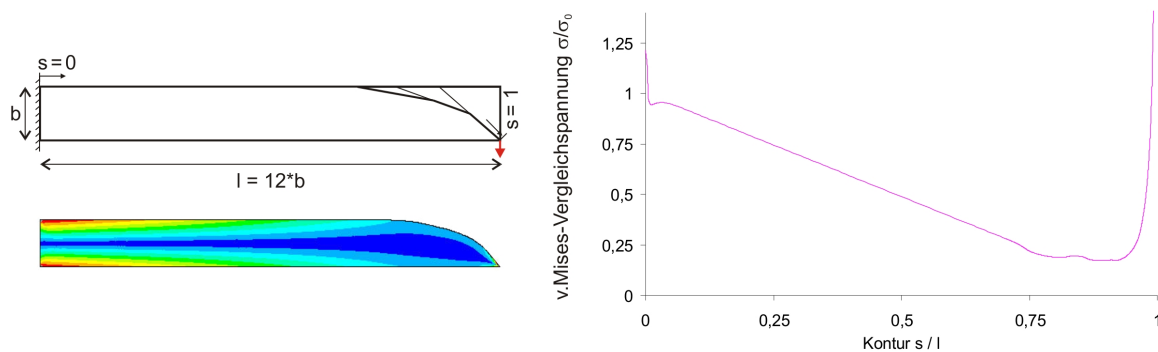


Abbildung 7.19: Ein Kragträger, der länger als die Zugdreieckskontur ist, wird nur im vorderen Bereich gestaltet und damit die Spannung nur in diesem Bereich homogenisiert.

Der Balken mit den Randbedingungen und dem FEM-Ergebnis ist in Abbildung 7.19 dargestellt. Im Bereich der Zugdreieckskontur herrscht eine nahezu gleiche Spannung entlang der Randkontur, welche mit dem Spannungsverlauf des Zugdreieck-Kragträgers aus Kapitel 7.5 übereinstimmt. Im nicht modifizierten Balkenbereich, der nun einem reinen Biegebalken entspricht, steigt die Spannung in Richtung der Lagerung konstant an. Hierbei ist die Biegespannung an der Lagerstelle erwartungsgemäß maximal, da hier der größte Hebelarm wirkt.

In der folgenden Parameterstudie wird die Kragträgerlänge variiert, während die Kragträgerbreite konstant gehalten wird. Hierbei werden drei Kragträgerformen miteinander verglichen a) eine Rechteck-, b) eine partielle Zugdreieck- und c) eine Wurzelstruktur. Der kürzeste betrachtete Kragträger hat eine Länge von der 2,36-fachen Breite, was genau die normierte Länge der Zugdreieckskontur ist. Ausgehend von dieser Länge wird sie schrittweise bis zu einer Länge von 12 erhöht. Die so erhaltenen unterschiedlichen Flächen werden zum Vergleich auf die jeweils längengleiche Rechtecksfläche normiert. Aus diesem Grund erhält der Rechteckkragträger bei jeder Länge 100% und die Wurzelkontur nimmt wegen ihrer Skalierung immer 66% der zugehörigen Rechtecksfläche ein. Im Unterschied zu diesen beiden Kragträgerformen ist der Flächenanteil der Zugdreieckskontur von der Länge abhängig. So nimmt bei der Länge 2,36 die Zugdreieckskontur 68% der Rechtecksfläche ein und ist damit mit der Wurzelkontur fast flächengleich. Mit zunehmender Länge gleicht sich die Fläche des Zugdreieckskragträgers der Rechteckfläche an und erreicht bei einer Länge von 12 schon 93% der Rechteckfläche.

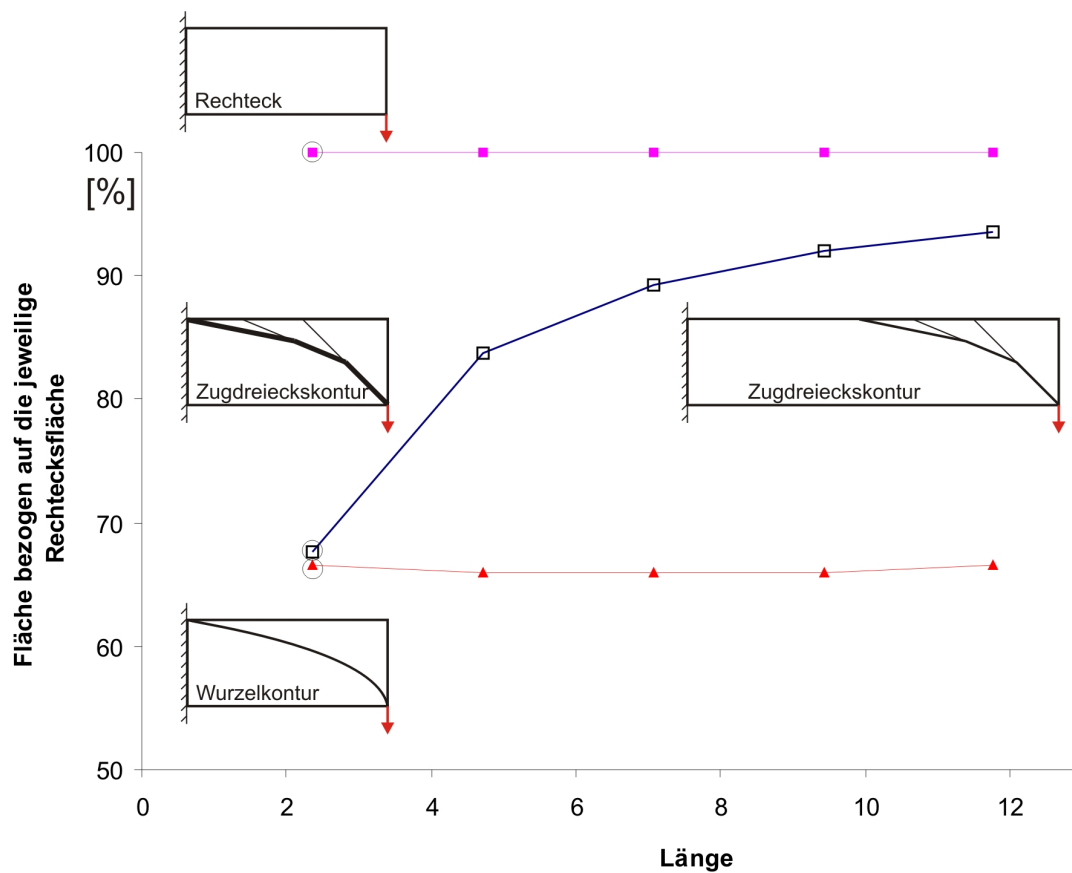


Abbildung 7.20: Einfluss der Kragträgerlänge auf das Flächenverhältnis

Die biegebelasteten Kragträger werden an der Einspannstelle maximal belastet, weshalb sie auf diesen Bereich ausgelegt werden müssen. Das bedeutet, dass die Beanspruchung lagerferner Bereiche niedriger ist und somit Material eingespart werden kann. Ein mit der Methode der Zugdreiecke gestalteter Kragträger, dessen Länge drei Segmenten entspricht, ist weitgehend homogen ausgelastet. Ist der Kragträger länger, ist er nur an der Lagerstelle ausgelastet und ist im Unterschied dazu in den anderen Bereichen unterbelastet.

# 8 Gleichzeitiges Wachsen und Schrumpfen mit der Zugdreiecksmethode

Die Methode der Zugdreiecke wird nun dahingehend untersucht, wie mit ihrer Hilfe in benachbarten Strukturbereichen die Kerbspannung reduziert und gleichzeitig auch unterbelastete Strukturbereiche entfernt werden können. Nachdem beide Verfahren einzeln untersucht und als einsatzfähig befunden wurden, stellt sich die Frage, ob sie sich gegenseitig stören, sich sogar gegenseitig ausschließen oder ob sie miteinander harmonisieren.

## 8.1 Beispiel I: Wachsen und Schrumpfen an einer Wellenschulter

In Kapitel 6 wurde gezeigt, dass mit der Methode der Zugdreiecke durch Materialaddition Kerbspannungen reduziert werden können. Diese Spannungsreduktionen sind von der Größe der Zugdreiecke abhängig, weshalb die neue Kerbkontur so groß wie möglich gestaltet werden soll. Der zu Verfügung stehende Bauraum ist jedoch meist konstruktiv limitiert, da die Bauteilform der Bauteilfunktion folgt. Lässt es die Bauteilfunktion und Bauteilform zu, dann kann mit der Methode der Zugdreiecke auch nicht benötigtes Material entfernt werden, was das Bauteilgewicht reduziert, siehe Kapitel 7. Dabei werden unterbelastete Materialbereiche identifiziert und entfernt. Dies führt zu einer besseren Materialausnutzung, weil die Belastung des verbleibenden Materials auf das Niveau der gewünschten Nennspannung angehoben wird. Konstruktive Restriktionen können natürlich auch hier zu einer mechanisch nicht so optimalen Struktur führen. Mechanisch nicht optimal bedeutet in diesem Fall jedoch nicht, dass sich kritische Spitzenspannungen bilden, sondern nur, dass Strukturbereiche unnötig niedriger belastet sind.

Bei beiden Varianten liegt das Schubviereck an dem gleichen Ort, dem Querschnittsprung, und zeigt die Richtung des Kraftflusses an, siehe Abbildung 8.1. Bei der Kerbspannungsreduktion, dem Wachsen, wird Material senkrecht zu dieser Orientierung in der Kerbe hinzugefügt, wodurch sich das Bauteil in diesem Bereich vergrößert. Bei dem Schrumpfen wird Material senkrecht zu dieser Orientierung außerhalb des Kerbbereiches entfernt, wodurch sich das Bauteil lokal verkleinert. Somit starten beide Vorgehensweisen zwar vom selben Ausgangspunkt, der Kerbe am Querschnittsprung, aber durch ihre unterschiedlichen Stra-

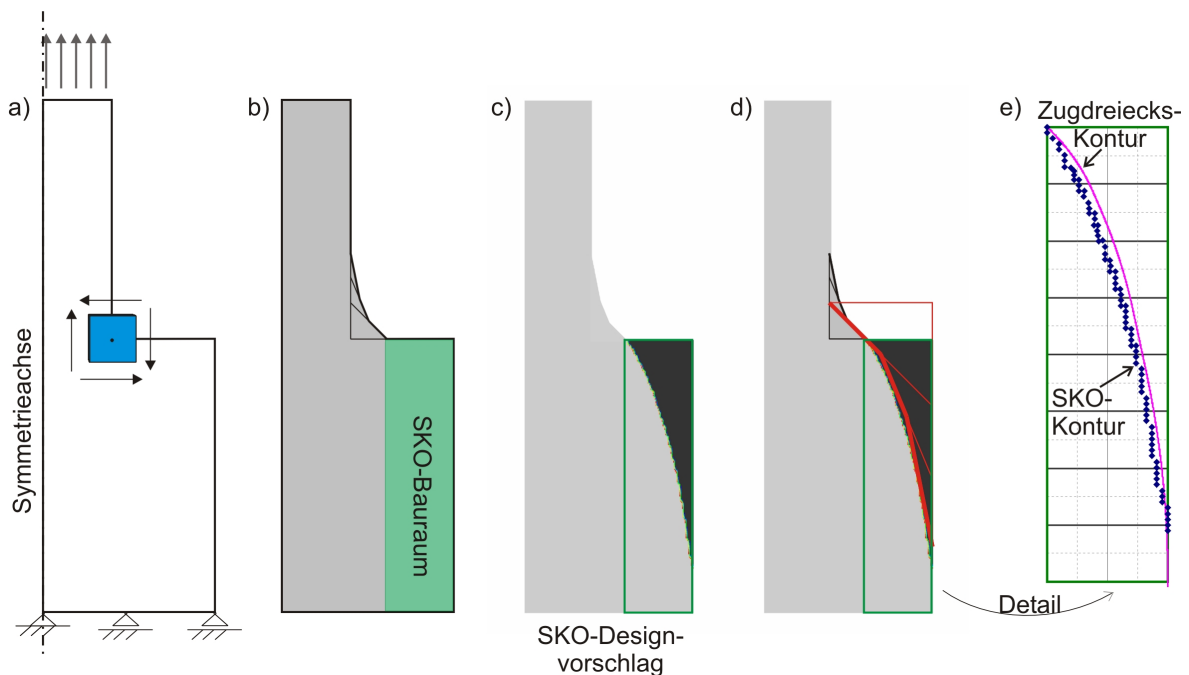


Abbildung 8.1: Entfernung niedrig belasteter Balkenbereiche mit der SKO-Methode und Vergleich der gefundenen SKO-Außenkontur mit der ausgerundeten Zugdreieckskontur

tegien verschiebt sich der Konturverlauf bei der Wachstums-Version axial in Richtung des dünneren Balkenschaftes. Deshalb müssen die beiden Zugdreieckskonturen axial zueinander verschoben werden.

Ob diese Konturverschiebung im Sinne einer Verbesserung des Kraftflussverlaufes sinnvoll ist, wird durch eine SKO-Optimierung überprüft, Abbildung 8.1. Hierdurch wird der Kraftflussverlauf an einer modifizierten Balkenschulter b) visualisiert. Die Modifikationen bestehen aus einem kraftflussfreundlichen Kerbübergang mit einer Wachstums-Zugdreiecksstruktur und einem sich daran anschließenden rechteckigen SKO-Bauraum. Der Bauraum wird in grüner Farbe dargestellt. Schließlich wird die mit der SKO-Methode gefundene Optimalkontur c) mit der verschoben Zugdreieckskontur d) und e) verglichen.

Abbildung 8.1 c) zeigt das Ergebnis der SKO-Optimierung. Der zu entfernende Bereich ist schwarz und der versteifte Bereich ist hellgrau dargestellt. In d) wird zum Vergleich die dunkelgraue Wachstums-Zugdreieckskontur und die rote Schrumpf-Zugdreieckskontur mit Konstruktionslinien eingezeichnet und daneben in e) der Schrumpfbereich mit der ausgerundeten Zugdreieckskontur als Detailausschnitt vergrößert dargestellt. Die mit der SKO-Methode ermittelte Kontur ähnelt stark der Kontur, welche mit der Methode der Zugdreiecke erstellt wird. Der stufenartige Verlauf der SKO-Kontur hängt von der Ausrichtung und der Feinheit des verwendeten FE-Netzes ab. Die SKO-Kontur verläuft leicht unterhalb der ausgerundeten Zugdreieckskontur, ansonsten aber ähneln sich die beiden Konturverläufe sehr stark.



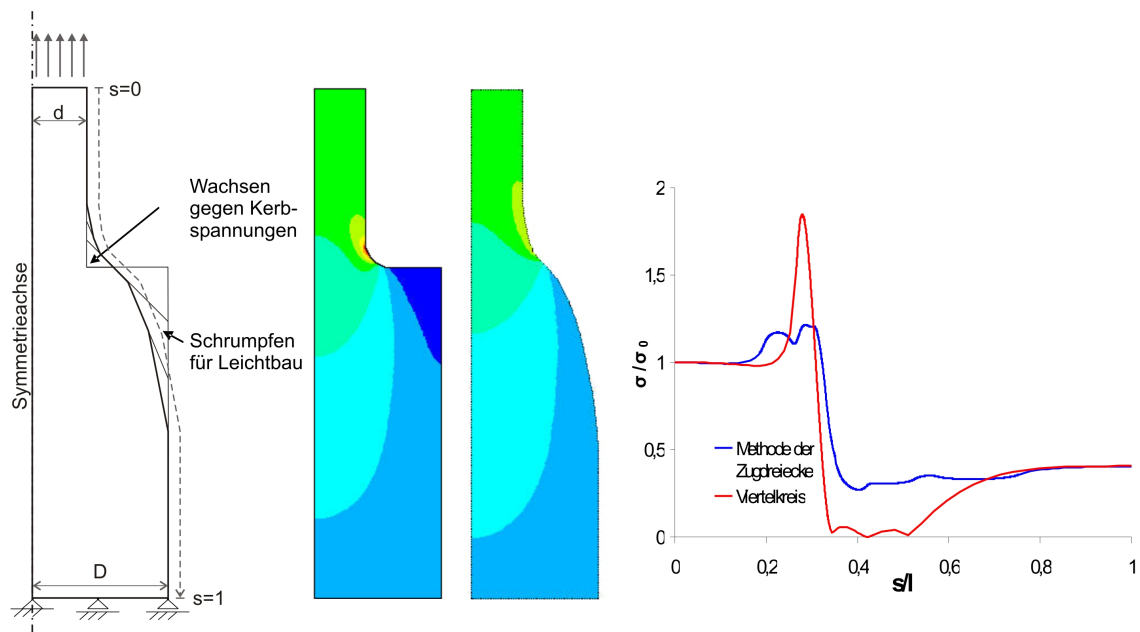


Abbildung 8.2: Verbesserung des Spannungsverlaufs an einer Balkenschulter bei gleichzeitigem Schrumpfen und Wachsen

Zur quantitativen Bewertung der modifizierten Wellenschulter aus Abbildung 8.1d wird ihre Spannung ermittelt und die FEM-Ergebnisse in Abbildung 8.2 dargestellt. Auch hier führt die Wachstums-Zugdreieckskontur zu einer Reduktion der Kerbspannung. Die Höhe der verbliebenen Spannungsspitze ist hauptsächlich von der frei wählbaren Größe der Wachstums-Zugdreieckskontur und nicht signifikant von der Schrumpf-Kontur abhängig. Gleichzeitig wird der unterbelastete Bereich durch eine Schrumpf-Zugdreieckskontur entfernt. Im Schrumpfbereich liegt die Spannung leicht unterhalb der entsprechenden Normalspannung, was hinsichtlich Abbildung 8.1 e) auf die leicht breitere Konturfläche in diesem Bereich zurückzuführen ist.

An der Balkenschulter in Abbildung 8.2 wird gezeigt, dass die axiale Verschiebung der Zugdreieckskonturen gegeneinander zulässig ist und zu einem verbesserten Spannungsverlauf führt. Damit liegt die Hypotenuse der Wachstums-Zugdreieckskontur auf der größeren Hypotenuse der Schrumpf-Zugdreieckskontur. Auf diese Weise können die Vorteile der beiden Konturen gemeinsam genutzt werden.

Die modifizierte Kontur der Balkenschulter weicht stark von der ursprünglichen  $90^\circ$ -Kerbe ab und entspricht eher einem weichen, stumpfwinkligen Übergang von dem dünnen auf den breiten Balkendurchmesser. Im noch nicht verrundeten Stadium beträgt der Außenwinkel zwischen erstem und zweitem Segment der Wachstums-Zugdreieckskontur  $135^\circ$ , dagegen sind alle anderen Übergangswinkel größer. Wenn nun funktionell ein  $90^\circ$ -Schulterbereich benötigt wird, dann muss die Kontur geändert werden. Werden über den Schulterbereich zusätzlich Lasten eingeleitet, dann hat dies Einfluss auf die Spannungssituation (die nun eventuell zweiachsig ist) und damit auch auf die Konturgestaltung. Wird diese senkrechte Schulter beispielsweise fertigungsbedingt benötigt und leitet aber keine mechanischen Las-

ten in die Struktur ein, dann ändert sich der Bauraum der Schrumpf-Zugdreieckskontur. Die Kontur ist nun kleiner und muss radial verschoben werden. Dies ist mechanisch zwar nicht optimal und führt zu Bereichen, welche niedriger belastet sind, siehe Kapitel 7.3.

## 8.2 Beispiel II: Wachsen und Schrumpfen an einem Kragträger

Ein weiteres Beispiel, bei dem Wachsen und Schrumpfen mit Hilfe der Zugdreiecksmethode gleichzeitig angewendet wird, ist der Kragträger aus Kapitel 7.5. Die unterbelasteten Bereiche dieses Kragträgers sind dort mit der Schrumpf-Zugdreieckskontur entfernt worden, wodurch die Spannung an der Oberfläche auf einem etwa konstanten Spannungsniveau geblieben ist. Jedoch bildet sich am Ort der festen Lagerung ein Spannungsanstieg, welcher mit einer Wachstums-Zugdreieckskontur reduziert werden kann.

Für einen Einsatz der Zugdreiecksmethode muss aber die Lagerung modifiziert werden. Die Festlagerung des Kragträgers entspricht einem idealisierten Modell, welches eine Anbindungsart an eine vertikale Ebene, eine Wand, vereinfacht nachbildet. Festlager sind jedoch starr und damit für einen Einsatz der Elastizität voraussetzende Zugdreiecksmethode nicht geeignet, siehe Kapitel 7.1. Aus diesem Grund muss dieser Bereich zuerst angepasst werden. Das bedeutet, dass eine vertikale Anschlussebene zusätzlich im FE-Modell erstellt werden muss und damit elastische Eigenschaften erhält.

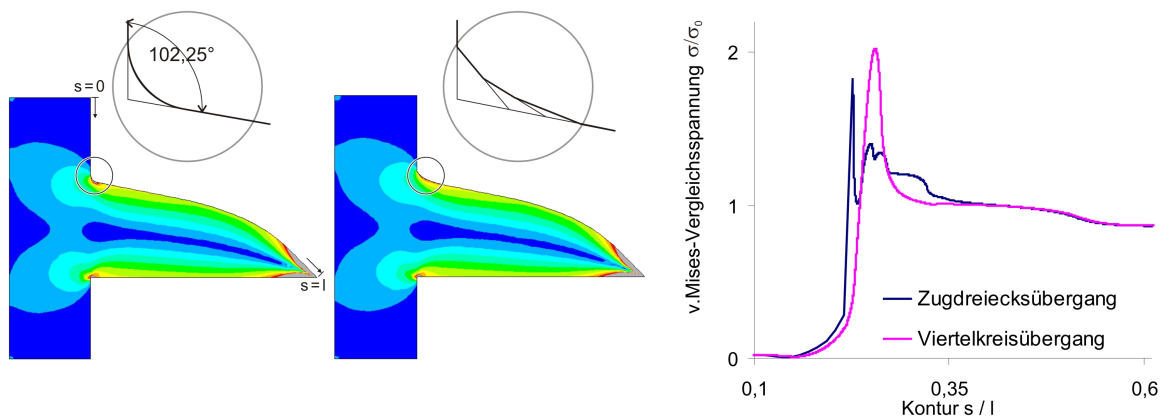


Abbildung 8.3: Verbesserung des Spannungsverlaufs an einem Kragträger durch Wachsen und Schrumpfen

Die weitere Betrachtung bezieht sich nur auf die obere Kerbe zwischen Wand und Kragträger, siehe Abbildung 8.3. Der Kerbwinkel zwischen der Wand und dem dritten Segment des ursprünglichen Kragträgers beträgt  $102,25^\circ$  ( $=90^\circ + 11,25^\circ$ ). Damit ist der Kerbwinkel größer als  $90^\circ$ , weshalb die verzerrte Methode der Zugdreiecke verwendet wird. Der zu Verfügung stehende radiale Bauraum wird auf  $1/12$  der Kragträgerhöhe festgelegt. Bei

einem weiteren identischen Kragträger wird als Vergleich die Kerbe mit einem Kreisbogen ausgeformt, der einen Radius von  $1/12$  der Kragträgerhöhe hat. Schließlich wird die Spannung der beiden Strukturen berechnet und in Abbildung 8.3 dargestellt. Das Ergebnis der FE-Analyse zeigt bei der Zugdreieckskontur eine deutlich niedrigere Maximalspannung als bei der Kreiskerbe. Die Zugdreieckskontur zeigt zwar am Eintauchort in die Wand eine mathematische Singularität als schmale Spannungsspitze auf, welche aber wie bei Sörensen [52] angegeben, praktisch nicht relevant ist.

### 8.3 Verrundung einer Kragträgerspitze

Eine kraftflussfreundlich gestaltete Innenkontur einer Gabel führt nach Mattheck [39] zu einem Konus, welcher eine kraftflussfreundliche Außenkontur aufweist. In diesem Kapitel wird der Konus behandelt, im nächsten Kapitel 9 das zugehörige Gegenstück die Gabel. Der Konus entspricht dem längs gespiegelten Kragträger aus Kapitel 7.5 und ist in Abbildung 8.4 dargestellt. Diese Ähnlichkeit gilt jedoch nicht für die Konusspitze, die im Unterschied zu der Kragträgerspitze verrundet wird. Denn zur Vermeidung der Kerbwirkung muß die Gabel aus Kapitel 9 und somit auch der Konus mit einem Kreisbogen verrundet werden, dessen Radius sich aus der Längendifferenz des ersten Segments und des halben zweiten Segments ergibt. Der Verrundungsradius verläuft damit tangential in den Verrundungsbogen, welcher das erste Segment mit dem zweiten Segment verrundet. Die geänderte Spitzenform führt in Bezug zu der dreisegmentigen Zugdreieckskontur zu einer axialen Länge, welche um 7% kürzer ist.

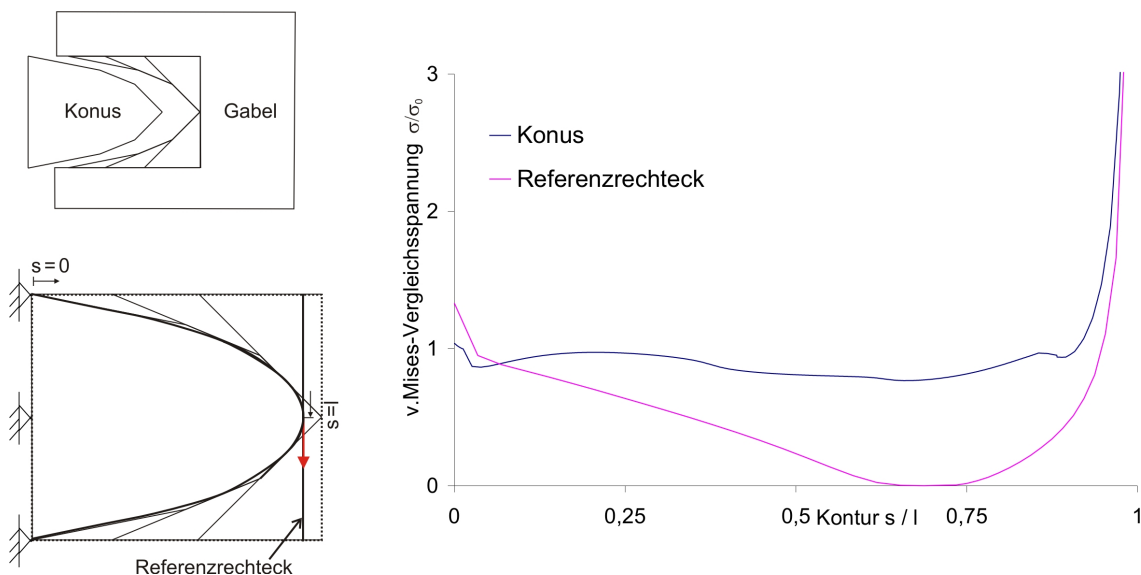


Abbildung 8.4: Ein Kragträger mit Zugdreieckskontur und verrundeter Spitze als Gegenstück zu einer Gabel

Nun wird dieser Konus an der verrundeten Spitze mit einer Querkraft belastet und der Einfluss der Spitzenverrundung auf die Spannungsverteilung mit einer FE-Analyse unter-

sucht. Hierzu wird als Referenzstruktur ein gleichlanges Rechteck gewählt und zusätzlich der Spannungsverlauf des verrundeten Kragträges aus Kapitel 7.5 für qualitative Vergleiche verwendet.

Der Spannungsverlauf in Abbildung 8.4 entlang der Konuskontur zeigt über einen weiten Konturbereich ( $0,05 < s < 0,9$ ) ein nahezu homogenes Spannungsniveau. Im Gegensatz dazu ist der Rechteckkragträger über den gesamten Bereich niedriger belastet und erreicht das Spannungsniveau des Konuses erst im Bereich der Lagerung. Die Lagerung und die punktförmige Lasteinleitung führen bei beiden Strukturen zu lokalen Spannungsspitzen. Im Vergleich mit dem verrundeten Kragträger aus Kapitel 7.5 steigt die Spannung erst sehr spät und somit dichter an der Lasteinleitungsstelle an. Der Spannungsverlauf an der Lasteinleitungsstelle ähnelt nun stärker dem Verlauf des Referenzrechtecks. Im Bereich der Lasteinleitung liegt bei beiden Modellen eine Singularität vor.

Somit erweist sich die Verrundung der Konusspitze, wie auch schon bei der Gabel, positiv auf die Spannungsverteilung aus. Es liegt nun eine deutliche Verbesserung des Spannungsverlaufs an der Spitze vor, ohne dass diese Konturmodifikation sich negativ auf andere Bereiche auswirkt.

### **Zusammenfassung der Ergebnisse**

Das simultane Anwenden der Zugdreiecksmethode zur Reduktion der Kerbspannung und zur Entfernung unterbelasteter Strukturbereiche ist sinnvoll. Durch das Verstärken hochbelasteter Bereiche (erniedrigt die Maximalspannung) und das Entfernen niedrig belasteter Bereiche (nutzt das Material besser aus und hebt damit die Spannung) wird der Spannungsverlauf entlang der Kontur homogener.

## 9 Überprüfung der Zugdreieckskontur an einer Gabel mit einem Ermüdungsversuch

An einem Strukturbeispiel werden unterschiedliche Kerbkonturen gestaltet, berechnet und schließlich mit mechanischen Ermüdungsversuchen geprüft. Die Struktur ist eine Gabel, deren Schenkel auseinander gebogen werden, Abbildung 9.1. Sie hat als Ausgangsdesign eine U-Form und ist somit mit zwei parallel nebeneinander stehenden Balkenschultern vergleichbar. Die Querschnittsübergänge der beiden Schenkel führen zu den Kerben, deren Gestalt modifiziert werden soll.

Es werden drei verschiedene Kerbkonturen miteinander verglichen. Bei der ersten Gabel werden die beiden Kerben klassisch mit Viertelkreisen verrundet. Die Radien der Viertelkreise werden auf  $3/8$  der Schenkelbreite festgelegt. Bei der zweiten Gabel entsprechen die Radien der Viertelkreise der Hälfte der Innenkonturbreite. Dies führt dazu, dass sich die Kreisbögen an der Symmetrielinie treffen und einen Halbkreis bilden. Bei der dritten Gabel wird die Gabelinnenseite mit der Zugdreieckskontur gestaltet. Aufgrund der längssymmetrischen Gabelform ergibt sich ein maximaler radialer Bauraum von der halben Innenkonturbreite. Werden die beiden Zugdreieckskonturen auf diese Größe skaliert, dann treffen sie sich gerade auf der Symmetrielinie. Die Hypotenusen der beiden ersten Zugdreiecke bilden die Flanken einer neuen Kerbe, welche einen Öffnungswinkel von  $90^\circ$  hat. Diese neue Kerbe wird mit einem Kreisbogen verrundet. Der hierzu nutzbare axiale Bauraum wird durch den nicht verrundeten Bereich der beiden Zugdreieckskonturen vorgegeben, vgl. Kapitel 8.3.

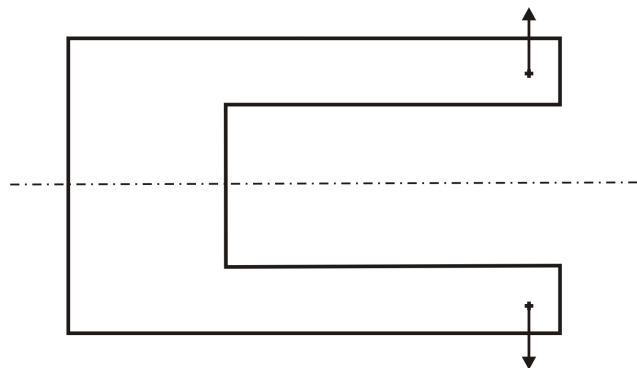


Abbildung 9.1: Schema einer Gabel, die durch Querkräfte an den Schenkeln belastet wird

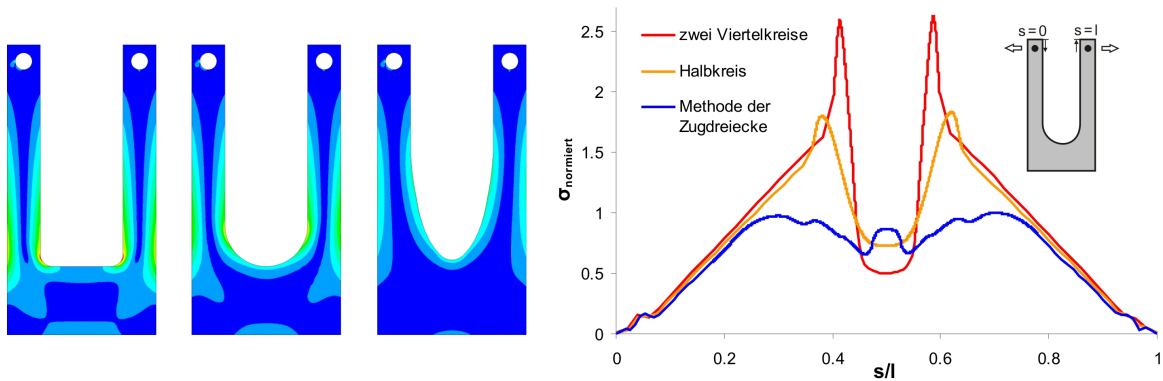


Abbildung 9.2: Die FEM-Analysen der drei Strukturen zeigen signifikante Spannungsunterschiede

### FEM-Analyse

Die FEM-Analysen der drei Strukturen zeigen die Auswirkungen der unterschiedlichen Innenkonturen auf die Spannungsentwicklung. In Abbildung 9.2 sind die Ergebnisse als Spannungsplot und als Konturdiagramm abgebildet. Im Konturdiagramm werden die Spannungswerte mit der größten Spannung der Zugdreieckskontur normiert. Bei allen Gabeln steigt mit Zunahme des Hebels die Konturspannung linear an. Da bei Gabel a) mit den Viertelkreiskerben die Schenkel nahezu über die gesamte Länge eine konstante Breite beibehalten, ist dieser lineare Anstieg am größten und führt bis zur 1,6-fachen Spannung. Die anschließende Viertelkreiskerbe führt zu einer weiteren deutlichen Spannungserhöhung und damit zu einer Maximalspannung von 2,6. Gabel b) mit ihrer Halbkreiskerbe führt zu einem ähnlichen aber moderateren Spannungsverlauf. Im linearen Bereich steigt die Spannung bis zum 1,4-fachen Wert an, welcher sich durch die anschließende Kerbspannung schließlich auf die 1,75-fache Spannung als Maximalwert erhöht. Bei Gabel c) ist die Innenkontur mit der Zugdreiecksmethode gestaltet, weshalb sich die Schenkel im Vergleich mit den anderen Konturen schon früher verbreitern. Aus diesem Grund steigt die Spannung nur bis zum Anfang der Konturverbreiterung linear an, danach wirkt das größere Flächenträgheitsmoment einem weiteren Spannungsanstieg entgegen. Zuerst sinkt die Spannung sogar wieder leicht ab, um im Kerbgrund schließlich wieder anzusteigen.

### Dauerschwingversuch

In einem Dauerschwingversuch werden die drei Gabelvarianten mit ihren verschiedenen Innenkonturen mechanisch geprüft. Die Versuche finden an einer servohydraulischen Materialprüfmaschine der Firma Schenk, Serie Hydropuls PSA, statt. Die Belastung, die auf die Proben wirkt, misst ein Kraftaufnehmer, der sich an der stillstehenden Traverse befindet. Am Kraftaufnehmer ist ein Probenhalter befestigt, an dem die Probe mittels eines Bolzens fixiert wird. Über einen weiteren Bolzen wird die Probe mit dem Hydraulikzylinder verbunden und belastet. Die Prüfmaschine erzeugt eine periodische Beanspruchung mit einer Frequenz von 5 Hz. Die Belastung findet im Zugschwellbereich mit einer Oberlast von 5,8 kN, einer Mittellast von 3,19 kN und einer Unterlast von 0,58 kN statt. Da die periodische Beanspruchung der Probe konstant gehalten wird, dient die Auslenkung des

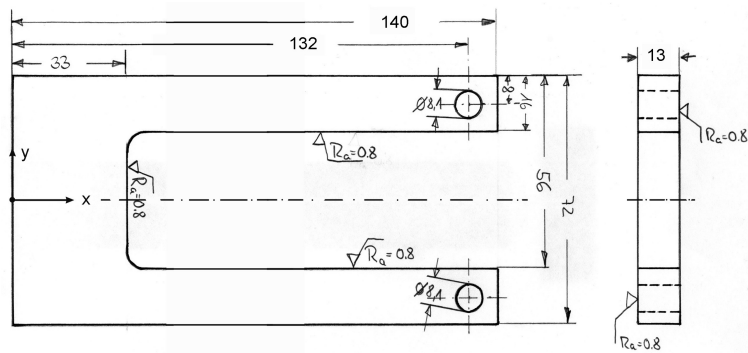


Abbildung 9.3: Die fertigungsbemaßte Gabelprobe mit Viertelkreiskerben (Zeichnung K. Bethge)

Zylinders als Abbruchkriterium. Der Versuch wird somit abgebrochen, sobald der Zylinder einen vorgegebenen Hub überschreitet.

Die Probengeometrie ist identisch zu den untersuchten FEM-Strukturen. Die entsprechende fertigungstechnische Zeichnung einer Probe ist in Abbildung 9.3 abgebildet, die jedoch exemplarisch nur die Viertelkreis-Innenkontur zeigt. Die Proben werden aus dem Stahl S235JR+C (St 37K) gefertigt, wobei die Innenkonturen drahterodiert sind.

### Versuchsergebnisse

Die Gabeln mit den drei unterschiedlichen Innenkonturen (Viertelkreis, Halbkreis und Zugdreieckskontur) werden bis zum Versagen zyklisch einer Zugschwellbelastung ausgesetzt. Die Lastspielzahlen, die zum Versagen der jeweiligen Probe führen, sind in Abbildung 9.5 als Balken dargestellt. In dem Diagramm sind die Proben gleicher Konturvarianten farblich gruppiert und nach ansteigender Lebensdauer geordnet.



Abbildung 9.4: Die Gabeln mit Viertelkreiskerben versagen im Versuch bereits nach wenigen Lastspielen durch plastische Deformation [39]

Die Belastung liegt bei den Gabeln mit den Viertelkreiskerben im überelastischen Bereich, weshalb sie schon nach wenigen Lastspielen durch plastische Deformation versagen. Bei den Proben mit der Halbkreiskerbe führt eine Belastung zwischen 40300 und 54500 Lastwech-

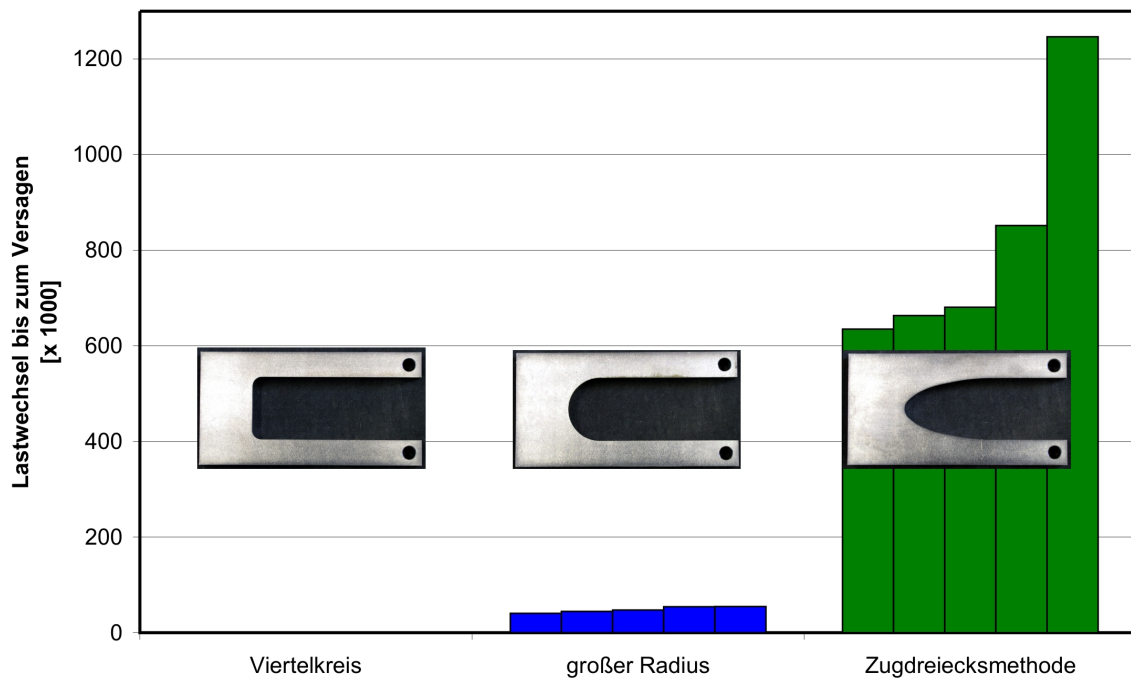


Abbildung 9.5: Erreichte Bruchlastspielzahlen der drei Gabelvarianten [39]

seln zum Versagen. Dies entspricht einer mittleren Belastung von 48300 Lastwechseln. Die Proben mit der Zugdreieckkontur halten zwischen 635000 und 1246600 Lastwechseln stand, was zu einer mittleren Zyklenzahl von 815500 führt. Ausschlaggebend für die höhere Lebensdauer ist einerseits die Verbreiterung der Schenkel und andererseits die Reduktion der Kerbspannung durch die Kerbgestaltung. Dies führt bei den Gabeln mit der Zugdreieckskerbe im Durchschnitt zu einer 15-fach höheren Lebensdauer im Vergleich zu den Gabeln mit der Halbkreiskerbe.



# 10 Zusammenfassung

Im Rahmen dieser Arbeit werden biomechanisch inspirierte Vorgehensweisen zur Strukturoptimierung entwickelt und untersucht. Hierbei liegt der Schwerpunkt auf einfachen, ressourcenschonenden Verfahren, weshalb anstatt einer technologischen Optimallösung kostengünstige und einfach umsetzbare Methoden vorgezogen werden. Diese gefundenen Vorgehensweisen werden an grundlegenden Strukturbeispielen aus der Technik und der Natur vorgestellt und qualitativ und quantitativ untersucht.

In den ersten drei Kapiteln wird in das Thema eingeführt, die benötigten Grundlagen vorgestellt und die Untersuchungsmethoden erläutert. Ausgehend von einem generellen Überblick auf das Thema der Strukturoptimierung werden am Institut für Materialforschung II erarbeitete Untersuchungsverfahren aufgegriffen und anhand von Beispielen erläutert.

Im 4. Kapitel „SKO-Methodenerweiterung zur Bildung reiner Zug- und Druckstrukturen“ wird die bereits 1991 entwickelte und erfolgreich in der Industrie eingesetzte SKO-Methode dahingehend weiterentwickelt, dass sie nicht nur allgemein belastete Strukturteile erfasst und die unbelasteten entfernt, sondern dass dabei gezielt zwischen zug- oder druckbelasteten Bereichen gewählt werden kann. Dies ermöglicht nun Strukturen zu optimieren, die je nach Wahl nur aus Druck- oder nur aus Zugstreben bestehen. Hierdurch kann besser auf konstruktive Vorgaben eingegangen werden. Ferner kann man damit materialgerechte Konstruktionen auch für diejenigen Materialien entwerfen, die im Wesentlichen entweder nur auf Zug oder nur auf Druck belastbar sind. Dies führt zu neuen Strukturösungen und damit zu neuen Anwendungsbereichen der Methode. Anhand verschiedener Beispiele wird die Anwendung dieser erweiterten SKO-Methode gezeigt und die erhaltenen Strukturvorschläge mit den Strukturvorschlägen verglichen, die mit der bisherigen SKO-Methode erhalten werden.

Neben diesen rein technischen Strukturen wird die erweiterte SKO-Methode auf das natürliche Strukturbeispiel eines Laubblattes im 5. Kapitel „Untersuchung zum strukturmechanischen Aufbau von Laubblättern“ angewendet. Hierbei wird die aufgestellte Arbeitshypothese, dass Blattnebenadern neben ihrer Transportfunktion auch mechanische Funktionen erfüllen und entsprechend optimiert sind, überprüft. Es wird angenommen, dass die Struktur der Blätter auf die Extrembelastung Sturm hin gestaltet sein müsste. Zur Überprüfung wird ein FE-Modell vom Blatt erstellt und mittels der erweiterten SKO-Methode untersucht. Die SKO-Methode führt zu Ergebnissen, bei denen sich schlanke dreiecksförmige Strukturen in der Art von Nebenadern ausbilden, die von der Hauptader mit einem Winkel von ungefähr  $45^\circ$  abzweigen und bis zum Blattrand sich erstrecken – was die aufgestellte Hypothese bestätigt. Damit zeigen Laubblätter eine Strategie auf, wie in der Natur Schubbeanspruchung mit  $45^\circ$ -Zugelementen aufgefangen werden.

Im 6. Kapitel „Methode der Zugdreiecke zur Kerbspannungsreduktion“ wird die von Prof. Mattheck entwickelte Methode der Zugdreiecke anhand von technischen Grundstrukturen qualitativ und quantitativ auf ihre Wirksamkeit hin untersucht und partiell weiterentwickelt. Mit der Methode wird der hochbelastete Kerbgrund durch Materialaddition in Form von gleichschenkligen Dreiecken verstärkt. Dies führt zu einem direkteren und weicheren Kraftfluss und damit zu einer niedrigeren Spannungsüberhöhung.

Je mehr Zugdreiecke die Kerbe ausformen, desto stärker reduziert sich die Maximalspannung. Mehr als drei Zugdreiecke bewirken jedoch keine weitere Spannungsreduktion. So erweist sich als eines der Hauptergebnisse dieser Untersuchung, dass die größte Spannungsreduktion bereits mit drei Zugdreiecken erreicht wird. Damit ist diese spezielle Kerbgeometrie mit drei Zugdreiecken definiert, deren axialer Bauraum dem 2,36-fachen radialen Bauraum entspricht. Innerhalb dieses Bauraums wird aus den drei geraden Basen der Dreiecke eine konkave Kontur gebildet. Diese Kerbform führt zu dem typischen Spannungsverlauf, bei dem an den Ecken der Dreiecksübergänge noch charakteristische Spannungsspitzen auftreten.

Die Spannungsspitzen an den Segmentübergängen können durch Verrundung reduziert werden. Hierzu bieten sich mehrere Möglichkeiten an, von denen exemplarisch die Verrundung mittels Spline und mittels tangentialer Kreisbögen untersucht wird. Tendenziell zeigen die Verrundungsverfahren untereinander kaum Ergebnisunterschiede, da die Zugdreiecks-kontur an sich schon eine hohe kerbspannungsmindernde Eigenschaft aufweist.

In Kapitel 6 wird ferner die Methode der Zugdreiecke dahingehend erweitert, dass sie auch auf größere Winkel als  $90^\circ$  anwendbar ist. Hierzu wird das erste Zugdreieck dem zugehörigen Öffnungswinkel angepasst. Die weiteren Zugdreiecke werden dann wie bisher von diesem ersten Dreieck abgeleitet.

Das 7. Kapitel „Methode der Zugdreiecke zur Materialentfernung“ befasst sich mit den Struktur-bereichen, die außerhalb des Kraftflusses liegen, mechanisch nicht relevant sind und deshalb entfernt werden können. Nachdem die Methode der Zugdreiecke in Kapitel 6 gezeigt hat, dass mit ihrer Hilfe kraftflussgerechte Konturen erstellt werden können, wird sie nun dazu verwendet, niedrig belastete Struktur-bereiche von den belasteten Bereichen abzugrenzen. Das einfache Verfahren ermöglicht so bei vielen Strukturen unter vorgegebenen Lastverhältnissen eine Material- und damit Gewichtseinsparung.

Ausgehend von der rechtwinkligen Außenschulter führt die „Methode der Zugdreiecke zur Materialentfernung“ zu einer konvexen Außenkontur. Diese entspricht einer Inversion der konkaven Kontur, welche mit der Wachstums-Methode der Zugdreiecke gestaltet wird. Diese Inversion bezieht sich nicht nur auf die Geometrie, sondern auch auf die Spannungsverläufe, die beide dieselben Charakteristiken, aber invertiert aufzeigen: Statt den lokalen Spannungsspitzen an den Konturknicken treten nun lokale Spannungsminima auf. Im Gegensatz zu der Verrundung der Zugdreiecke bei der Kerbspannungsreduktion bringt hier eine zusätzliche Verrundung nur geringe Verbesserungen im unkritischen Bereich. So führt eine Verrundung zu einer etwas besseren Materialausnutzung und damit zu Material- und Gewichtseinsparung.

---

Die Methode der Zugdreiecke liefert qualitative gute Strukturvorschläge, wenn das Verhältnis von Strukturlänge zu Breite im Verhältnis 2,4:1 oder auch kürzer liegt. Weicht die Strukturgeometrie von diesem Bauraumverhältnis ab, dann ist mit zunehmender Länge die kraftflussgerechte Gestaltung nur noch in einem Teil des zu Verfügung stehenden Bauraumes möglich. Das bedeutet, dass mit zunehmender Länge des Bauraumes der mit der Zugdreiecksmethode gewonnene Vorteil relativ geringer wird, aber hierbei keine neuen Spannungsspitzen auftreten.

Nachdem die Methode der Zugdreiecke jeweils getrennt auf Wachsen oder Schrumpfen hin betrachtet wurde, stellt sich die Frage, wie diese beiden Verfahren auch gemeinsam genutzt werden können. Im 8. Kapitel „Gleichzeitiges Wachsen und Schrumpfen mit der Zugdreiecksmethode“ wird die Methode nun dahingehend untersucht, ob mit ihrer Hilfe in unmittelbar benachbarten Strukturbereichen die Kerbspannung reduziert und gleichzeitig auch unterbelastete Strukturbereiche entfernt werden können. Diese Untersuchungen werden zunächst an dem typischen Testelement Balkenschulter durchgeführt und dann an weiteren Strukturen.

Die FE-Analyse zeigt, dass durch die Verstärkung des hochbelasteten Kerbbereichs die Maximalspannung reduziert wird und dass durch die Entfernung der niedrig belasteten Strukturbereiche die Spannung in angrenzenden Bereichen angehoben wird. Dies führt zu einem homogenen Spannungsverlauf, der nun der querschnittsabhängigen Nennspannung weitgehend entspricht. Eine Überprüfung des Konturübergangs mit der SKO-Methode ergibt einen nahezu identischen Strukturverlauf. Die Ergebnisse zeigen, dass die Zugdreiecksmethode auch ein gleichzeitiges Wachsen und Schrumpfen zur Strukturverbesserung zulässt und so die spannungs- und gewichtsreduzierenden Vorteile der Methode der Zugdreiecke auch gemeinsam genutzt werden können.

Nach diesen Simulationen werden im 9. Kapitel „Überprüfung der Zugdreieckskontur an einer Gabel mit einem Ermüdungsversuch“ schließlich verschiedene Kerbkonturen experimentell hinsichtlich ihrer Lebensdauer geprüft. Die Probenform ist eine Gabel, deren Innenkontur mit Viertelkreis-, Halbkreis- und Zugdreieckskerben gestaltet ist. Diese drei Gabelvarianten werden zunächst mit der FEM hinsichtlich ihrer Belastung berechnet. Die Spannungsanalyse zeigt, dass die Zugdreieckskontur die niedrigste Maximalspannung aufweist. Bei dem anschließenden Ermüdungsversuch werden die Gabeln mit Wechselbiegung bis zum Versagen belastet. Die Gabeln mit Viertelkreiskerben verformen sich innerhalb weniger Belastungszyklen plastisch. Im Unterschied dazu ertragen die Gabeln mit Halbkreiskerben fünfstellige Lastspielzahlen und die Gabeln mit der Zugdreieckskontur erhöhen im Vergleich zu der Halbkreiskerbe die Lebensdauer um das 15-fache. Diese Lebensdauererhöhung bestätigt experimentell die kraftflussgünstige Gestalt der Zugdreieckskontur.

Die Arbeit trägt zur Erreichung des Zieles einer computerfreien Bauteiloptimierung bei, indem die grundsätzliche Möglichkeit verifiziert und realistische Arbeitsstrategien für weitere Arbeiten angegangen werden. Damit kann diese Arbeit helfen, Materialien und Ressourcen effektiver zu nutzen und Konstruktionen stabiler und dauerfester zu gestalten.



# Literaturverzeichnis

- [1] Baier, H.; Seeßelberg, C. und Specht, B.: *Optimierung in der Strukturmechanik*. Wiesbaden : Vieweg Verlag, 1994
- [2] Baumgartner A. und Mattheck, C.: *SKO: Soft killoption - an effective method to determine optimum structural topology*. In: *Proc. II. Int. Symp. SFB 230 „Natural Structures, Principles, Strategies, and Models in Architecture and Nature,“* Vol. I, S. 111-113, Stuttgart October 1-4, 1991
- [3] Baumgartner, A.: *Ein Verfahren zur Strukturoptimierung mechanisch belasteter Bauteile auf der Basis des Axioms konstanter Spannung*. Fortschrittberichte VDI 145 : VDI-Verlag, 1994
- [4] Beitz, W. und Küttner, K.H.: *Dubbel - Taschenbuch für den Maschinenbau*. 20. Auflage. Berlin : Springer-Verlag, 2001
- [5] Bendsoe, M.P. und Kikuchi, N.: *Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method*. In: *Computer method applied mechanical engineering*, Vol. 71, Issue 2, S. 197-224, 1988
- [6] Bethge, K. und Mattheck, C.: *Die Biomechanik und Festigkeiten der Laubblätter*. In: *12. VTA Spezialseminar „Messen und Beurteilen am Baum“*, Forschungszentrum Karlsruhe in der Helmholtz-Gemeinschaft, 4.-5. Mai 2006
- [7] Birnbaum, H. und Denkmann, N.: *Taschenbuch der Technischen Mechanik*. Thun : Verlag Harry Deutsch, 1997
- [8] Böge, A.: *Technische Mechanik : Statik, Dynamik, Fluidmechanik, Festigkeitslehre*. Wiesbaden : Vieweg-Verlag, 2005
- [9] Drenckhahn, D.: *Anatomie: Makroskopische Anatomie, Histologie, Embryologie, Zellbiologie*. 16. Auflage. München : Urban & Fischer, 2003
- [10] Ehrlenspiel, K.: *Integrierte Produktentwicklung : Denkabläufe, Methodeneinsatz, Zusammenarbeit*. 3. Auflage. München : Hanser Verlag, 2007
- [11] Esau, K.: *Anatomy of seed plants*. 2. Auflage. New York : Wiley Verlag, 1977
- [12] Eschenauer, H. und Schnell, W.: *Elastizitätstheorie: Grundlagen, Flächentragwerke, Strukturoptimierung*. Mannheim : BI-Wissenschaftlicher Verlag, 1993

- [13] Giek, K. und Giek, R.: *Technische Formelsammlung*. Germering : Giek Verlag GmbH, 2005
- [14] Gordon, J. E.: *The new science of strong materials : or Why you don't fall through the floor*. 2. Auflage. London : Penguin Books, 1976
- [15] Gordon, J. E.: *Structures - or why things don't fall down*. London : Penguin Books, 1978
- [16] Grodzinski, P.: *Investigations on shaft fillets*. In: Engineering, S. 321-324, 1941
- [17] Haftka, R. und Gürdal, Z.: *Elements of Structural Optimization*. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1992
- [18] Hansch, W. und Bappert, R.: *Hightech-Labor Natur: Vorbild für die Technik der Zukunft*. Heilbronn : Städtische Museen, 2005
- [19] Holtzmer, M.: *Untersuchungen von CAO- und analytisch optimierten Kerbformen*. Diplomarbeit am Institut für Zuverlässigkeit von Bauteilen und Systemen, Universität Karlsruhe (TH), 2004
- [20] Jurzitza, G.: *Anatomie der Samenpflanzen*. Stuttgart : Thieme Verlag, 1987
- [21] Kappel, R.; Bethge, K.; Tesari, I. und Mattheck, C.: *Die Verformung der Blätter im Wind*. In: 12. VTA Spezialsseminar „Messen und Beurteilen am Baum“, Forschungszentrum Karlsruhe in der Helmholtz-Gemeinschaft, 4.-5. Mai 2006
- [22] Kappel, R.: *Zugseile in der Natur*. Dissertation an der Fakultät für Maschinenbau der Universität Karlsruhe (TH), Forschungszentrum Karlsruhe FZKA-7317, 2007
- [23] Kennedy, J. und Eberhart, R.: *Particle Swarm Optimization*. In: Proc. IEEE Int'l conference on neural networks, IEEE Service Center, NJ IV, 1942-1948, 1995
- [24] Klucking, P.: *The classification of Leaf Venation Patterns*. Berlin : Gebrüder Borntraeger Verlag, 1995
- [25] Kobayashi, H.; Kresling, B. und Vincent, J.F.V.: *The geometry of unfolding tree leaves*. In: Proc. R. Soc. Lond. B. 265, S. 147-154, 1998
- [26] Kull, U. und Herbig, A.: *Das Blattadersystem der Angiospermen: Form und Evolution*. In: Naturwissenschaften 82, S. 441-451, 1995
- [27] Mattheck, C. und Huber-Betzer, H.: *Die Baudkurve - ein allgemeines Designprinzip für biologische Kraftträger?* In: Allgemeine Forst und Jagdzeitung, 9/10, S. 194-195, 1989
- [28] Mattheck, C.: *Design and growth rules for biological structures and their application to engineering*. In: Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct., 13, Nr.5, S. 535-550, 1990

- 
- [29] Mattheck, C.: *Why they grow, how they grow: the mechanics of trees*. In: *Arboricultural Journal*, 14, S. 1-17, 1990
- [30] Mattheck, C.: *Die Baumgestalt als Autobiographie - Einführung in die Mechanik der Bäume und ihre Körpersprache*. Braunschweig : Bernhard Thalacker Verlag, 1992
- [31] Mattheck, C.: *Design in der Natur - Der Baum als Lehrmeister*. 3.Auflage. Freiburg : Rombach Verlag, 1997
- [32] Mattheck, C.: *Stupsi erklärt den Baum*. 3. Auflage. Forschungszentrum Karlsruhe in der Helmholtz-Gemeinschaft, 1999
- [33] Mattheck, C.: *Mechanik am Baum - erläutert mit einfühlsamen Worten von Pauli dem Bär*. Forschungszentrum Karlsruhe in der Helmholtz-Gemeinschaft, 2002
- [34] Mattheck, C.: *Warum alles kaputt geht - Form und Versagen in Natur und Technik*. Forschungszentrum Karlsruhe in der Helmholtz-Gemeinschaft, 2003
- [35] Mattheck, C. und Kappel, R.: *Festgekrallt - Verzweigung als Schubkiller*. In: *Konstruktionspraxis*, Nr. 3, S. 18-19, Würzburg : Vogel Industrie Medien, 2005
- [36] Mattheck, C.; Sörensen, J.; Sauer, A. und Tesari, I.: *Methode der Zugdreiecke - Eine grafische Methode zur Kerbformoptimierung*. In: *Konstruktionspraxis*, S. 12-13, 2005
- [37] Mattheck, C.: *Teacher Tree: The evolution of notch shape optimization from complex to simple*. In: *Engineering Fracture Mechanics*, 73, S. 1732-1742, 2006
- [38] Mattheck, C.; Sauer, A. und Kappel, R.: *Reinforcement ropes against shear in leaves*. In: *Design and Nature II*, Southampton : WIT-Press, S. 285-293, 2006
- [39] Mattheck, C.: *Verborgene Gestaltgesetze der Natur - Optimalformen ohne Computer*. Forschungszentrum Karlsruhe in der Helmholtz-Gemeinschaft, 2006
- [40] Mattheck, C.; Kappel, R. und Bethge, K.: *Das Schubviereck - Mechanisches Hintergrundwissen für eine Designregel der Natur*. In: *12. VTA Spezialseminar „Messen und Beurteilen am Baum“*, Forschungszentrum Karlsruhe in der Helmholtz-Gemeinschaft, 4.-5. Mai 2006
- [41] Müller, G. und Groth, C.: *FEM für Praktiker – Band 1: Grundlagen*. 6.Auflage. Reningen : expert verlag, 2001
- [42] Nultsch, W.: *Allgemeine Botanik*. 7. Auflage. Stuttgart : Georg Thieme Verlag, 1982
- [43] Peterson, R.E.: *Stress Concentration Factors*. New-York : John Wiley & Sons, 1974
- [44] Rechenberg, I.: *Evolutionsstrategie*. Stuttgart : Frommann-Holzboog, 1994
- [45] Reuschel, D.; Mattheck, C. und Tesari, I.: *Prediction of Cancellous Bone Arrangement in a Human Femur with CAIO (Computer Aided Internal Optimization)*. In: *Journal of Biomechanics*, 34, S. 33-34, 2001

- [46] Sauer, A. und Mattheck, C.: *SKO Topology Optimization with Functional Separation of Tension and Compression Structures*. In: Kwak, B.M.: *WCSSMO-7 Proceedings*. Seoul, Korea, May 21-25, 2007, SBM 978-89-959384-2-3
- [47] Sauer, A. und Mattheck, C.: *Wenn Knochen Blätter wären*. In: *12. VTA Spezialseminar „Messen und Beurteilen am Baum“*, Forschungszentrum Karlsruhe in der Helmholtz-Gemeinschaft, 4.-5. Mai 2006
- [48] Scherrer, M.: *Kerbspannung und Kerbformoptimierung*. Dissertation an der Fakultät für Maschinenbau der Universität Karlsruhe (TH), Forschungszentrum Karlsruhe FZKA-7021, 2004
- [49] Schmit, L.A.: *Structural Optimization – Some Key Ideas and Insights*. In: *New Directions in optimum structural design*, Tucson, ed. by E. Atrek, John Wiley, 1984
- [50] Serges Medien: *Schule 2000 – Grundstock des Wissens*. Köln : Serges Medien, 1999
- [51] Sobotta, J. und Putz, R.[Hrsg.]: *Anatomie des Menschen*. 22. Auflage. München : Urban & Fischer, 2007
- [52] Sörensen, J.: *Untersuchungen zur Vereinfachung der Kerbformoptimierung*. Dissertation an der Fakultät für Maschinenbau der Universität Karlsruhe (TH), Forschungszentrum Karlsruhe FZKA-7397, 2007
- [53] Strasburger, E.: *Lehrbuch der Botanik für Hochschulen*. 32. Auflage. Stuttgart : Fischer-Verlag, 1983
- [54] Troll, W.: *Praktische Einführung in die Pflanzenmorphologie*. Band 1, Teil 1, Jena : Verlag Gustav Fischer, 1954
- [55] Troll W.: *Allgemein Botanik*. Stuttgart : Ferdinand Enke Verlag, 1973
- [56] Vogel, S.: *Von Grashalmen und Hochhäusern*. Weinheim : WILEY-VCH Verlag GmbH, 2000
- [57] Weber, K.H.: *Untersuchung zur Anatomie der Blattnerven und der Nervenbindung bei Laubbäumen*. In: *12. VTA Spezialseminar „Messen und Beurteilen am Baum“*, Forschungszentrum Karlsruhe in der Helmholtz-Gemeinschaft, 4.-5. Mai 2006
- [58] Weichert, D.: *Mechanik II für Ingenieure - Festigkeitslehre*. Aachen : RWTH-Aachen, 1999
- [59] Wolff, J.: *The Law of Bone Remodelling*. Berlin : Springer-Verlag, 1986