

Stabilitäts- und Sensitivitätsuntersuchungen dünnwandiger Kreiszyylinder unter axialem und radialem Druck mit der Methode der Finiten Elemente

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

DOKTOR-INGENIEURS

von der Fakultät für

Bauingenieur-, Geo- und Umweltwissenschaften
der Universität Fridericiana zu Karlsruhe (TH)

genehmigte

DISSERTATION

von

Dipl.-Ing. Eduard Ewert
aus Rudnyj

Tag der mündlichen Prüfung : 12. Februar 2008
Hauptreferent : Prof. Dr.-Ing. K. Schweizerhof
Korreferent : Prof. Dr.-Ing. habil. P. Vielsack
Korreferent : Prof. Dr.-Ing. H. Saal

Karlsruhe 2008

Kurzfassung

Aufgrund der Fortschritte im Bereich numerischer Methoden und der signifikanten Verbesserung der Leistungsfähigkeit der Computer sind numerisch bestimmte Traglasten zu einem festen Bestandteil in der Bemessung von Schalentragwerken geworden. Hierbei beschränken sich Vorschriften wie Eurocode 3 auf die Ermittlung von Stabilitätslasten mittels statischer Betrachtung. Diese Vorgehensweise wird in der vorliegenden Arbeit in einem ersten Schritt hinsichtlich Genauigkeit, Effizienz und Robustheit untersucht. Hierbei werden elastische Stabilitätslasten für mittellange, dünnwandige Zylinder für die Lastfälle des axialen und des radialen Drucks für geometrisch perfekte und radial imperfekte Zylinder bestimmt. Das besondere Augenmerk liegt hierbei auf dem Einfluss der Approximation der gekrümmten Geometrie mit Schalenelementen unterschiedlicher Ansatzordnung – bilinear, biquadratisch und bikubisch – auf die Robustheit und die Konvergenzgeschwindigkeit bei regelmäßiger, d.h. uniform verfeinerter, und unregelmäßiger, d.h. adaptiv verfeinerter FE-Netze.

Im nächsten Schritt erfolgt eine Untersuchung zur Abbildung des Tragverhaltens im gesamten Beulbereich – insbesondere dem Nachbeulbereich – mit Hilfe transientser Betrachtung. Mittels eines Vergleichs mit den Bemessungslasten nach DIN 18800 und Eurocode 3 wird geprüft, inwieweit die so bestimmten Gleichgewichtslagen im Nachbeulbereich zur Bemessung herangezogen werden können. Die Begründung zur Verwendung der transienten Analyse liegt hauptsächlich darin, dass erst dadurch eine Abbildung des Nachbeulbereichs mit dem aus den Experimenten bekannten "mode-jumping" Phänomen zuverlässig durchgeführt werden kann. Desweiteren ist die Bestimmung von Gleichgewichtslagen mittels statischer Betrachtung bei vielen Tragwerken auf den sogenannten Vorbeulbereich beschränkt, da oft keine Konvergenz nach Überschreiten der Stabilitätslasten erreicht wird.

Abschließend werden als eine alternative Methode zur Bemessung stabilitätsgefährdeter, dünnwandiger Tragwerke die stabilen Gleichgewichtslagen im Vorbeulbereich hinsichtlich ihrer Sensitivität gegenüber endlichen kinetischen Störungen untersucht. Hierzu werden zunächst Indikatoren zur Analyse der Bewegung der Struktur nach einer Störung hergeleitet. Anschließend werden Sensitivitätsanalysen an einem Kreisbogen und an Kreiszyklindern unter axialer und radialer Druckbeanspruchung durchgeführt.

Abstract

As the result of the progress in numerical methods and performance of computers the computation of limit loads using the Finite Element Method has become a standard procedure within the design process of shell structures. According to design rules, e.g. Eurocode 3, it is sufficient to use a static approach in the computation of stability loads. For such a procedure the accuracy, efficiency and numerical robustness are investigated first in the present work. Within this investigation the stability loads of thin-walled cylinders with medium length are computed for the load cases of axial compression and external pressure for perfect and radially imperfect geometries using elastic material behaviour. A special focus is on the influence of the approximation of the curved geometry with different order of ansatz functions – bi-linear, bi-quadratic and bi-cubic – on the numerical robustness and convergence velocity using regular and irregular meshes.

A second major focus is on the post-buckling behaviour investigated using transient analyses. The post-buckling loads from these investigations are compared with the design loads from different codes to answer the question, how they could be used in design as an alternative for static stability loads. The transient approach is taken for two reasons, first the complete buckling process can be followed including mode jumping and second the convergence problems of static methods in the post-buckling region can be avoided.

The third topic is the computation of the sensitivity of stable equilibrium states against finite kinetic perturbations, which may result in a further alternative method for design. The behaviour of the structures after initiating perturbations is investigated using exponents, which are drawn from Liapunov Exponents. The sensitivity investigations are performed for a simple structure, a shallow shell, and for cylinders under axial compression and external pressure.

The numerical investigations show that transient analyses as well as sensitivity investigations provide a better insight into the stability behaviour of complex structures and may lead to further alternative procedures in the design of shell structures.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik der Universität Karlsruhe in den Jahren 2000 bis 2008.

Herrn Prof. Dr.-Ing. K. Schweizerhof danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit, die Übernahme des Hauptreferats und seine kompetente und engagierte wissenschaftliche Unterstützung.

Mein Dank gilt ferner Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. P. Vielsack und Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Saal für die Übernahme des Korreferats und die sorgfältige Durchsicht der Arbeit.

Schließlich danke ich denjenigen Kollegen, die mich bei der Erstellung dieser Arbeit mit fachlichen Diskussionen unterstützt und/oder für das angenehme Arbeitsklima am Institut gesorgt haben.

Karlsruhe, März 2008

Eduard Ewert

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	4
1 Einführung zu Strukturstabilität	10
1.1 Klassifikation von Stabilitätspunkten	10
1.2 Imperfektionen	12
1.3 Stabilitätsgrad und Sensitivität	14
1.4 Stabilitätsverhalten von Kreiszyklindern	16
2 Behandlung strukturemechanischer Probleme mit Hilfe der FEM	20
2.1 Kontinuumsmechanische Grundlagen	20
2.2 Diskretisierung mit der FEM	24
2.3 Lösungsverfahren im statischen Fall	26
2.4 Schalenelemente	28
2.4.1 Das Degenerationskonzept	28
2.4.2 Versteifungseffekte	31
3 Behandlung von Stabilitätsproblemen mit Hilfe der FEM	36
3.1 Kurvenverfolgung	36
3.2 Eigenwertprobleme bei linearen und nichtlinearen Berechnungen	38
3.2.1 Lineare Eigenwertprobleme	38
3.2.2 Konsistente Linearisierung und Abschätzung höherer Ordnung	41
3.2.3 Begleitende Analysen	43
3.2.4 Direkte Bestimmung singulärer Punkte	44
3.3 Adaptivität	45
3.4 Störenergiekonzept	54

4	Zeitintegration	57
4.1	Klassifikation der Zeitintegrationsverfahren	57
4.2	Das NEWMARK Zeitintegrationsverfahren	60
4.3	Das Verfahren der Zentralen Differenzen	62
4.4	Zeitintegrationsverfahren für nichtlineare Probleme	65
4.5	Gegenüberstellung statischer und transienter Methoden bei Stabilitäts- untersuchungen	70
5	Kreiszyylinder unter axialer Druckbeanspruchung	72
5.1	Analytische Lösungen und Bemessung	73
5.1.1	Analytische Lösungen für Verzweigungslasten	73
5.1.2	Experimentelle und theoretische Untersuchungen des Nachbeul- bereichs	75
5.1.3	Bemessungsrichtlinien	77
5.2	FE Untersuchungen an geometrisch perfekten Kreiszyindern	85
5.2.1	Bestimmung der Beullast mittels statischer FE-Analysen	85
5.2.2	Untersuchung des Nachbeulverhaltens mittels transienter FE- Analysen	95
5.3	FE Untersuchungen an geometrisch imperfekten Zylindern	106
5.3.1	Analyse der Imperfektionen	106
5.3.2	Allgemeines zur Modellierung	110
5.3.3	Bestimmung singulärer Punkte mittels statischer FE-Analysen	110
5.3.4	Vergleich statischer Beullasten mit den Versuchsergebnissen	121
5.3.5	Untersuchung des Nachbeulverhaltens mittels transienter FE- Analysen	127
5.4	Zusammenfassung	135
6	Kreiszyylinder unter Außendruckbeanspruchung	137
6.1	Analytische Lösungen und Bemessung	137
6.1.1	Analytische Lösungen für Verzweigungslasten	137
6.1.2	Diskussion von Bemessungsrichtlinien	140
6.2	FE Untersuchungen am geometrisch perfekten Kreiszyylinder	142
6.2.1	Bestimmung singulärer Punkte mittels statischer FE-Analysen	142

6.2.2	Untersuchung des Nachbeulverhaltens mittels transienter FE-Analysen	147
6.3	FE Untersuchungen an geometrisch imperfekten Kreiszyklindern unter Außendruck	157
6.3.1	Bestimmung singulärer Punkte mittels statischer FE-Analysen	157
6.3.2	Untersuchung des Nachbeulverhaltens mittels transienter FE-Analysen	160
6.4	Zusammenfassung	163
7	Sensitivität	164
7.1	Sensitivität – Definition und Algorithmus	164
7.2	Liapunov Exponenten	168
7.3	Sensitivitätsuntersuchungen am Kreisbogen unter zwei Einzellasten	172
7.3.1	Lage der stabilen und der instabilen Gleichgewichtspunkte	172
7.3.2	Sensitivitätsuntersuchungen	176
7.4	Sensitivitätsuntersuchungen an Kreiszyklindern unter axialer Druckbeanspruchung	182
7.4.1	Verwendung von Liapunov Exponenten	182
7.4.2	Variation der Form des Störvektors	183
7.5	Sensitivitätsuntersuchungen an Kreiszyklindern unter Außendruck	187
7.6	Vergleich mit den Bemessungsnormen	188
8	Zusammenfassung und Ausblick	191
	Literaturverzeichnis	196
9	Diskrete Fourier Transformation	204
10	Zu den in der Arbeit verwendeten Imperfektionen	211
A	Diskrete Fourier Transformation	212
B	Zu den in der Arbeit verwendeten Imperfektionen	219

Einleitung

Sachlage und Motivation

Die Tragfähigkeit schlanker Strukturen unter Druckbeanspruchung ist meist nicht durch das Materialversagen sondern durch sogenannte *Stabilitätslasten* begrenzt. Das Erreichen oder Überschreiten von Stabilitätslasten geht mit einem plötzliche Verformungszuwachs gefolgt vom anschließenden Kollaps einher. Das Auffinden dieser Stabilitätslasten wird als *Stabilitätsanalyse* oder genauer als *Analyse der Strukturstabilität* bezeichnet.

Besonders wichtig für die Bemessung solcher Tragwerke ist die Sensitivität der Stabilitätslasten gegenüber den Abweichungen von der perfekten Geometrie, der perfekten Lagerung oder Lasteinleitung, Eigenspannungen, sowie Streuungen der Materialeigenschaften, den sogenannten *Imperfektionen*. Unterschiedliche Stabilitätsfälle können hinsichtlich ihrer *Imperfektionsempfindlichkeit* in sogenannte *"gutartige"* und *"böartige"* Fälle eingeteilt werden. Zu der ersten Klasse gehören Strukturen, deren Stabilitätslasten kaum durch Imperfektionen beeinflusst werden, wodurch die Bemessung direkt mit den analytisch bestimmten Stabilitätslasten erfolgen kann. Dies sind beispielsweise Knickstäbe und Platten.

Zu der zweiten Klasse gehören sogenannte *imperfektionsempfindliche* Fälle, wie z.B. Kreiszyylinder unter axialem Druck. Bei der Bemessung solcher Tragwerke muss der Einfluss der Imperfektionen berücksichtigt werden, da die Stabilitätslasten hier je nach Struktur und Lastfall bereits bei kleinsten Imperfektionen großen Schwankungen unterliegen. Alle Anstrengungen, diese Einflüsse zuverlässig zu quantifizieren, schlugen bisher fehl, daher basiert die Bemessung imperfektionsempfindlicher Stabilitätsfälle auf einer Abminderung analytischer Werte mit Abminderungsfaktoren, die in Versuchen ermittelt werden.

Zur Erfassung der oben genannten Imperfektionseinflüsse werden Untersuchungen der Strukturstabilität zunehmend mittels numerischer Methoden, wie der Methode der Finiten Elemente (FEM) durchgeführt. Seit der Entwicklung erster Computer gewinnen numerische Methoden immer mehr an Bedeutung, da viele Feldprobleme analytisch nur für einfache Gebietsgeometrien wie Rechtecke oder Kreise lösbar sind. Der Einsatz der FEM ermöglicht die Lösung dieser Probleme für beliebig berandete Gebiete. Weitere Vorteile der FEM liegen in der sehr einfachen Handhabung unterschiedlicher Randbedingungen und beim direkten Einbau von geometrischen Nichtlinearitäten. Im Rahmen der Untersuchungen zur Strukturstabilität mit der FEM werden meist *Eigen-*

wertprobleme verwendet. Hierbei wird die sogenannte tangentielle Steifigkeitsmatrix, die bei der Linearisierung der Gleichgewichtsaussage als Systemmatrix anfällt, in eine Reihe mit linearen und nichtlinearen Termen entwickelt. Zur Formulierung dieser Terme existieren unterschiedliche Vorschläge, s. z.B. RAMM [64], BRENDDEL [19], HELNWEIN [42]. Die oben genannten Stabilitätslasten zeichnen sich bei einer FE-Analyse dadurch aus, dass die tangentielle Steifigkeitsmatrix an diesen Punkten singulär wird. Daher werden diese Punkte als *singuläre Punkte* einer Last-Verformungskurve, die je nach Strukturverhalten entweder Verzweigungs- oder Durchschlagpunkte sein können, bezeichnet. Die Genauigkeit der Vorhersage dieser Punkte mittels oben genannter Eigenwertprobleme von einem anderen möglichst niedrigen Lastniveau ist weitgehend vom Grad der Nichtlinearität des betrachteten Problems abhängig. Alternativ können eine begleitende Eigenwertanalyse im Rahmen einer Bestimmung der nichtlinearen Last-Verformungskurve oder auch die sogenannte direkte Berechnung mittels eines erweiterten Gleichungssystems nach WRIGGERS [96] genannt werden. Die erste Eigenform, die sich als Lösung der oben genannten Eigenwertprobleme ergibt, repräsentiert bei klar getrennten Eigenwerten den sogenannten *benachbarten Gleichgewichtszustand* - benachbart zum Verformungszustand am singulären Punkt - und wird als *Beulform* bezeichnet.

Der oben genannte Einfluss unterschiedlicher Imperfektionen auf die Stabilitätslasten wird seit Jahrzehnten sehr intensiv untersucht. Der Fall des Kreiszyinders unter axialem Druck gilt dabei als einer der schwierigsten Fälle, da die Stabilitätslasten in diesem Fall extrem sensitiv gegenüber Imperfektionen jeglicher Art sind. Der Großteil der Untersuchungen hierzu beschäftigt sich mit den Abweichungen der Schalen­geometrie von der perfekten Soll­geometrie. Hierzu existiert eine Fülle von Arbeiten, die sich sowohl mit analytisch definierten Imperfektionsformen unter Verwendung trigonometrischer Funktionen, s. z.B. KOITER [52], [54], ARBOCZ und BABCOCK [4], als auch mit zufällig verteilten Imperfektionen, s. z.B. AMAZIO [1], ELISHAKOFF ET AL. [27], ARBOCZ [5], und real gemessenen Imperfektionen, s. z.B. ARBOCZ [3], KNEBEL ET AL. [50] beschäftigen. Außerdem gibt es Vorschläge, im Rahmen einer FE-Analyse eine ungünstigste Imperfektionsform direkt durch Aufnahme von Geometriefreiheitsgraden in eine Elementformulierung zu bestimmen, s. DEML ET AL. [23]. Im wesentlichen zeigen alle diese Untersuchungen, dass der Fall des Kreiszyinders unter axialem Druck so imperfektionssensitiv ist, dass bereits Abweichungen in der Geometrie in der Größenordnung der Schalendicke zu einer Reduktion der Stabilitätslasten um bis zu 80% gegenüber der analytischen Lösung für einen perfekten Kreiszyinder führen. Entsprechende Untersuchungen wurden auch für andere Lastfälle eines Kreiszyinders wie Außendruck, Biegung usw. aber auch für andere Schalen­geometrien wie Kegel- und Kugelschale durchgeführt. Die Ergebnisse sind mit den oben genannten vergleichbar, wenn auch die jeweilige Reduktion der Stabilitätslasten infolge von Imperfektionen deutlich geringer ist, als für den Fall des axial gedrückten Kreiszyinders. All diese Untersuchungen haben zwar wesentlich dazu beigetragen, das Beulverhalten dünnwandiger Schalen besser zu verstehen, allerdings ist die direkte Bemessung mit Hilfe experimentell ermittelter Abminderungsfaktoren neben der Bemessung mit Hilfe der Finite Elemente Berechnungen nachwievor ein fester Bestandteil der Normen.

Neben den oben genannten Untersuchungen zur Bestimmung der Stabilitätslasten wurde in vielen Arbeiten versucht, den Beulvorgang über die singulären Punkte hinaus zu bestimmen. Dabei wird der Bereich der Last-Verformungskurven vor dem singulären Punkt als *Vorbeulbereich* und dahinter als *Nachbeulbereich* bezeichnet. Die Gleichgewichtslagen im Nachbeulbereich können unter anderem zur Beurteilung der Sensitivität der Gleichgewichtslagen im Vorbeulbereich gegenüber möglichen Störungen verwendet werden. Die Ermittlung des Verhaltens im Nachbeulbereich wird meist statisch durchgeführt, obgleich der Beulvorgang eindeutig ein transienter Vorgang ist. Im Rahmen einer FE-Analyse erfolgt die statische Betrachtung meist mittels des sogenannten Bogenlängenverfahrens (arc-length) in Kombination mit Pfadwechsel-Algorithmien (path-switching), s. RIKS [68], RAMM [65], SCHWEIZERHOF UND WRIGGERS [75], SCHWEIZERHOF [76]. Eine besonders effiziente Methode zur Bestimmung der Last-Verformungspfade über die singulären Punkte hinaus stellt die sogenannte numerische asymptotische Entwicklung dar, s. z.B. BAGUET ET AL. [11]. Diese Methoden können sehr erfolgreich zur Untersuchung einfacher FE-Modelle verwendet werden, versagen aber meist bei realitätsnahen Schalenmodellen. So verzweigen die Last-Verformungskurven von Kreiszyklindern oft nach dem singulären Punkt in weitere Gleichgewichtspfade. Theoretisch müssen dann alle Pfade bestimmt werden, um das Nachbeulverhalten korrekt beschreiben zu können. Dies ist sehr aufwendig und erfordert meist händische Steuerung, s. z.B. ROTTNER [69]. Ein weiterer Nachteil statischer Analysen des Nachbeulbereichs liegt darin, dass der Beulvorgang ein ausgeprägt dynamischer Prozess ist, demnach die Verwirklichung der Nachbeulpfade nicht möglich ist und die Aussagekraft solcher Analysen sehr beschränkt bleibt.

Die oben genannten Entwicklungen im Bereich numerischer Methoden und die Verbesserung der Leistungsfähigkeit von Computern führten dazu, dass die Verwendung numerischer Verfahren wie der FE-Methode auch Einzug in die Normen gehalten hat, s. EUROCODE 3 [31]. Hierbei können unterschiedliche Analysen von im einfachsten Fall linearen Berechnungen der Stabilitätspunkte mit Hilfe oben genannter Eigenwertprobleme bis hin zu vollständig nichtlinearen Analysen unter Berücksichtigung sowohl geometrischer Imperfektionen als auch materieller Nichtlinearitäten verwendet werden. Bezüglich der Annahme über die oben genannten geometrischen Imperfektionen wird meist empfohlen, die Eigenformen geometrisch perfekter Strukturen am Stabilitätspunkt zu verwenden. Es sei angemerkt, dass andere Imperfektionsarten, wie Auflagerung, Lasteinleitung und Eigenspannungen hierbei vernachlässigt werden dürfen. Einige Untersuchungen zeigen aber, dass das reale, in Versuchen beobachtete Verhalten mit dieser Vorgehensweise nicht abgebildet werden kann, s. z.B. HÜBNER ET AL. [47], HORNING und SAAL [41], ESSLINGER [30].

Alternativ zu den eigenformaffinen Imperfektionen können auch - falls bekannt - die wirklichen geometrischen Imperfektionen verwendet werden. Dies ist für reale Strukturen meist nicht möglich, da diese erst nach der Bemessung errichtet werden, sodass die realen Imperfektionen zum Zeitpunkt des Entwurfs nicht bekannt sind. Eine Berücksichtigung realer Imperfektionen ist demnach im Allgemeinen nur bei wissenschaftlichen Experimenten möglich. Dort zeigt sich allerdings, dass auch die Berücksichtigung aufwendig vermessener realer Imperfektionen in numerischen Modellen zu Stabilitätslasten

führt, die oft kaum mit den experimentell gemessenen Traglasten übereinstimmen, s. KNEBEL [50], UMMENHOFER [84], ROTTNER [69].

Da die Quantifizierung der lastmindernden Einflüsse unterschiedlicher Imperfektionsarten sehr schwierig ist, existieren auch Vorschläge, die Bemessungslasten mit Hilfe generalisierter Imperfektionen bzw. der Definition von Störenergien zu bestimmen, s. WAGENHUBER [88], TRANEL [83] und SPOHR [77]. Diese Vorschläge haben sich allerdings bisher nicht in der Bemessungspraxis durchgesetzt.

Zielsetzung

Die genaue Betrachtung der oben aufgeführten numerischen Untersuchungen zum Beulen von Kreiszyklindern unter axialem und radialem Druck zeigt, dass ausnahmslos Schalenelemente mit der bilinearen Approximation der Geometrie bzw. der Verschiebungen verwendet werden. Außerdem wird nach wie vor, auch in den meisten aktuellen Untersuchungen, kaum Gebrauch von der Möglichkeiten einer adaptiven Netzverfeinerung gemacht. Hierzu existieren nur einige wenige Arbeiten, die sich auf mäßig dünne Schalen beschränken, s. STEIN ET AL. [79], CIRAK [21].

Andererseits ist bekannt, dass die Verwendung von bilinearen Schalenelementen bei der Modellierung gekrümmter Geometrien mit beliebigen FE-Netzen zur sogenannten *Facettierung* und damit oft zu einer *Verfälschung der Originalgeometrie* führt. Es ist jedoch offen, wie stark dieser Einfluss unter anderem bei der Verwendung adaptiver Netze auf das Beulverhalten sehr dünner Schalen ist. Eines der Ziele der vorliegenden Arbeit ist daher, einen Beitrag zur Klärung dieser Einflüsse zu leisten. Hierzu wird die Netzkonvergenz für Schalenelemente unterschiedlicher Ansatzordnung bei Verwendung regelmäßiger sowie beliebig adaptiv verfeinerter FE-Netze hinsichtlich sowohl der Stabilitätslasten als auch der Beulformen für die Fälle des axialen und des radialen Drucks untersucht. Der Schwerpunkt bei der Betrachtung der dabei erreichten Ergebnisse liegt auf der Robustheit der verwendeten Elemente und Algorithmen, da dies von zentraler Bedeutung bei ihrer Nutzung für die Bemessung ist.

Ein weiterer zentraler Teil der vorliegenden Arbeit ist die Abbildung des gesamten Beulvorgangs mittels transienter FE-Analysen. Die Motivation zur Verwendung transienter Analysen liegt zum einen in der schlechten Konvergenz statischer Methoden in unmittelbarer Nähe der Stabilitätspunkte sowie im Nachbeulbereich, s. z.B. KNEBEL [50] und ROTTNER [69]. Zum anderen lässt der in den Versuchen beobachtete Wechsel der Beulformen mit statischer Betrachtung nicht ohne weiteres abbilden, da ein Wechsel des Gleichgewichtspfades meist nur manuell erfolgen kann. Im Gegensatz hierzu erfolgt dieser Wechsel bei transienter Betrachtung "automatisch". Bei diesen Untersuchungen ist vor allem die Lage der stabilen Gleichgewichtslagen im Nachbeulbereich von Interesse, da diese unter Umständen zur Bemessung herangezogen werden können. In den beiden zuletzt genannten Arbeiten wurden solche Untersuchungen an einem Beispiel-Zylinder mit Erfolg durchgeführt. Offen ist allerdings die Frage, ob sich diese Ergebnisse verallgemeinern, d.h. auf andere Geometrien übertragen und damit in der Bemessungspraxis verwenden lassen. An dieser Stelle wird in der vorliegenden Arbeit zusätzlich zur Netzkonvergenz der Einfluss unterschiedlicher Zeitintegrationsverfahren

sowie weiterer Rechen-Parameter wie Zeitschritt, Dämpfung und Belastungsgeschwindigkeit untersucht. Sowohl die Untersuchungen zu statischen Stabilitätslasten als auch die des Nachbeulbereichs erfolgen zunächst für geometrisch perfekte Zylinder und anschließend für Zylinder mit real gemessenen Imperfektionen.

Die Kenntnis stabiler Gleichgewichtslagen allein ist bei der Bemessung imperfektions-sensitiver Schalen nicht ausreichend. Vielmehr ist hierzu die Frage nach der *Beulsicherheit bei endlichen Störungen* zu beantworten. Dies führt zur Definition des *Stabilitätsgrades* nach LEIPHOLZ [56] oder der sogenannten *praktischen Stabilität* nach LA SALLE [55] und VIELSACK [86]. Hierbei wird die Energie gesucht, die dem System bei einem definierten Beanspruchungsniveau zugeführt werden muss, um einen Beulvorgang zu initiieren. Unter Verwendung dieser Energie kann nach einem Vorschlag von VIELSACK [87] die *Sensitivität* einer Gleichgewichtslage als Kehrwert dieser Energie eingeführt werden. Die Vorgehensweise ähnelt vom Prinzip her dem oben genannten Störenergiekonzept nach WAGENHUBER und Folgeautoren. Allerdings wird in der vorliegenden Arbeit die Störung nicht statisch aufgebracht, sondern es wird der dynamischen Natur des Beulvorgangs Rechnung getragen, indem die Störung in Form eines Impulses definiert wird. Die Bewegung der Struktur nach der Störung gibt Aufschluß darüber, ob ein Beulvorgang initiiert wurde oder nicht. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist hierbei, die Sensitivität stabiler Gleichgewichtslagen unterschiedlicher beulgefährdeter Strukturen zu untersuchen. Hierzu sollen Indikatoren hergeleitet werden, die eine automatische und effiziente Beurteilung der Strukturbewegung nach dem Aufbringen der Störung ermöglichen. Damit ergibt sich folgende **Gliederung der Arbeit**:

In **Kapitel 1** wird eine Einführung zum Thema Stabilität gegeben. Hierbei werden die Stabilitätsfälle klassifiziert. In **Kapitel 2** werden die kontinuumsmechanischen Grundlagen kurz dargelegt gefolgt vom Übergang zu Finiten Elementen. Es werden die in dieser Arbeit verwendeten degenerierten Schalenelemente mit bilinearen (ANS4), bi-quadratischen (MITC9) und bikubischen (MITC16) Ansätzen vorgestellt. In **Kapitel 3** folgen Darstellung und Bewertung ausgewählter Lösungsalgorithmen im Rahmen der FE-Methode, die für die Untersuchungen der Strukturstabilität erforderlich sind.

Nach der Darstellung der Verfahren für statische Probleme werden in **Kapitel 4** nach einer kurzen Einführung in Zeitintegrationsverfahren zur Lösung von Bewegungsgleichungen die zwei in dieser Arbeit verwendeten Verfahren - das Newmark-Verfahren und das Verfahren der Zentralen Differenzen - ausführlich dargestellt. Anschließend werden die statische und die transiente Betrachtungsweise hinsichtlich ihres Einsatzes bei Stabilitätsuntersuchungen gegenübergestellt. In nachfolgenden Kapiteln erfolgen Anwendungen dieser Algorithmen auf reale Problemstellungen.

In den **Kapiteln 5** und **6** werden Kreiszyylinder für die zwei wesentlichen Lastfälle, axiale und radiale Druckbelastung, untersucht. Hierfür werden zunächst Netzkonvergenz und Robustheit der oben genannten Schalenelemente unterschiedlicher Ansatzordnung für die Bestimmung singulärer Punkte mit der statischen Betrachtung bei uniformer und adaptiver Netzverfeinerung untersucht. Anschließend folgt eine Untersuchung des Nachbeulverhaltens mit Hilfe der transienten Betrachtung. Alle Untersuchungen erfolgen sowohl für geometrisch perfekte Zylinder als auch für Zylinder mit real gemessenen

geometrischen Imperfektionen. Abschließend werden die Ergebnisse der FE Untersuchungen mit experimentellen Ergebnissen und den Bemessungslasten aus Vorschriften verglichen.

Kapitel 7 behandelt Untersuchungen zur Sensitivität stabiler Gleichgewichtslagen gegenüber endlichen kinetischen Störungen. Hier wird zunächst der Begriff der Sensitivität, wie er im Rahmen dieser Untersuchungen verwendet wird, definiert. Danach werden aus Liapunov-Exponenten Indikatoren zur automatischen Verfolgung der Bewegung für den speziellen Fall der untersuchten Schwingungen entwickelt. Anschließend erfolgen Untersuchungen zum Einsatz der hergeleiteten Indikatoren bei Sensitivitätsbetrachtungen zuerst an einfachen Strukturen (Bogen) gefolgt von Untersuchungen an Kreiszyklindern unter axialer und radialer Druckbelastung.

Die Arbeit schließt mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick in **Kapitel 8**.

Kapitel 1

Einführung zu Strukturstabilität

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, zeichnet sich das Versagen schlanker Strukturen unter Druckbeanspruchung durch einen plötzlichen Zuwachs von Verformungen bei Überschreiten der *Stabilitätslast* aus. Diese Versagensart wird als *statische Instabilität* bezeichnet. In der Realität ist das Stabilitätsversagen auch im Falle der statischen Instabilität ein dynamischer Prozess. Trotzdem werden die Stabilitätslasten meist mit Hilfe statischer Analysen ermittelt. Die Begründung zur statischen Behandlung der Strukturstabilität liegt darin, dass die Belastung in diesem Fall quasi-statisch aufgebracht wird, wodurch auch das Strukturverhalten bis zum Erreichen der Stabilitätslasten quasi-statisch ist. Dies ermöglicht meist eine korrekte Bestimmung der Stabilitätslasten mittels statischer Analysen. Der Sachverhalt ist schematisch am einfachen Beispiel eines Dreigelenkbogens in Abb. 1.1 dargestellt.

Bei Beschränkung auf den Fall der statischen Instabilität werden im vorliegenden Kapitel Begriffe und Definitionen, die im Rahmen von Stabilitätsuntersuchungen in der Strukturmechanik bekannt sind, vorgestellt und erläutert. Genauere Information können z.B. LEIPHOLZ [56], THOMPSON & HUNT [81], PFLÜGER [63] entnommen werden.

1.1 Klassifikation von Stabilitätspunkten

Die Stabilitätslasten werden auch als *kritische Punkte* eines Last-Verformungsverlaufs bezeichnet und in zwei Kategorien eingeteilt: *Durchschlagpunkte* und *Verzweigungspunkte*. Durchschlagpunkte zeichnen sich dadurch aus, dass keine Laststeigerung über die Durchschlaglast hinaus möglich ist, und der statische Last-Verformungspfad nach einem Durchschlagpunkt abfällt, wie dies bei dem oben dargestellten Dreigelenkbogen der Fall ist. Erweitert man den Dreigelenkbogen zu einem kontinuierlichen Bogen, so können beide Arten der kritischen Punkte beobachtet werden, s. Abb. 1.2. Die Verzweigungspunkte zeichnen sich dabei dadurch aus, dass der Last-Verformungspfad in diesen Punkten in mehrere Pfade *verzweigt*. Je nach Wahl der Systemparameter, wie Öffnungswinkel und Querschnitt, wird bei dem dargestellten Bogen entweder der Durchschlagpunkt oder der Verzweigungspunkt für die Bestimmung der Tragfähigkeit

maßgebend.

Stabilitätspunkte können über eine *Energiebetrachtung* bestimmt werden. Mit dem *Satz vom Minimum der potentiellen Energie* können die Gleichgewichtslagen und die Stabilitätspunkte folgendermaßen bestimmt werden:

$$\delta\Pi = 0 \quad \rightarrow \quad \text{Gleichgewichtslage} \quad (1.1)$$

$$\delta\Pi = 0 \quad \text{und} \quad \begin{cases} \delta^2\Pi > 0 & \rightarrow \text{stabile Gleichgewichtslage} \\ \delta^2\Pi = 0 & \rightarrow \text{Stabilitätspunkt} \\ \delta^2\Pi < 0 & \rightarrow \text{instabile Gleichgewichtslage.} \end{cases} \quad (1.2)$$

Π ist hierbei das Potential des untersuchten Systems, $\delta\Pi$ die erste und $\delta^2\Pi$ die zweite Variation des Potentials. Der Sachverhalt kann mit Hilfe der *Analogie der Kugel im Schwerfeld* veranschaulicht werden, s. Abb. 1.3. Eine stabile Gleichgewichtslage zeichnet sich dadurch aus, dass die Kugel nach einer Störung wieder in die Ausgangslage zurückkehrt. Hingegen wird eine instabile Gleichgewichtslage bei einer beliebig kleinen Störung verlassen.

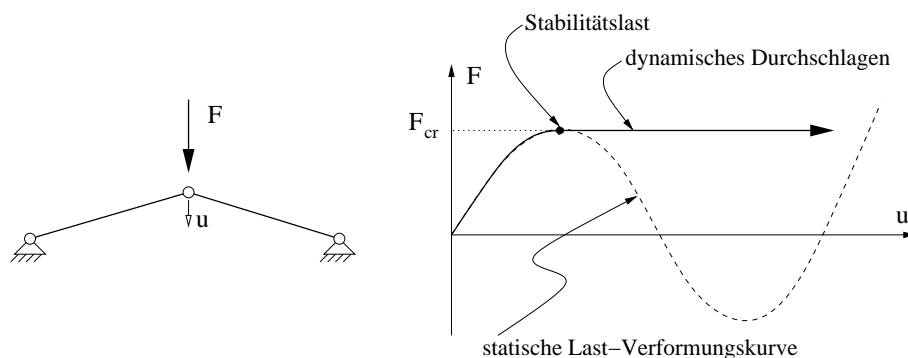


Abbildung 1.1: Schematische Darstellung der statischen Last-Verformungskurve und des dynamischen Durchschlagens am Beispiel eines Dreigelenkbogens.

Mit Hilfe der *Anfangs-Nachbeul Theorie*, die von KOITER [52] auf der Grundlage der Störungsrechnung entwickelt wurde, lassen sich drei Arten von Verzweigungspunkten unterscheiden: symmetrisch stabil, symmetrisch instabil und unsymmetrisch. In Abb. 1.4 sind die Gleichgewichtslagen und die einfachsten zugehörigen ein-Freiheitsgrad Modell-Systeme für diese drei Verzweigungsarten dargestellt. Für alle drei Arten gilt: die Gleichgewichtslagen bei $\varphi = 0$ sind unterhalb der Verzweigungspunkte F_{cr} stabil und oberhalb dieser Punkte instabil. Die Unterschiede liegen in der Anzahl und der Art der Gleichgewichtslagen bei unterschiedlichen Laststufen. Die *symmetrisch stabile Verzweigung* ist dadurch gekennzeichnet, dass unterhalb des Verzweigungspunktes F_{cr} nur eine stabile Gleichgewichtslage existiert, wobei oberhalb von F_{cr} neben der instabilen Gleichgewichtslage $\varphi = 0$ zwei weitere Gleichgewichtslagen existieren, die stabil sind. Im Falle der *symmetrisch instabilen Verzweigung* existieren bereits unterhalb von

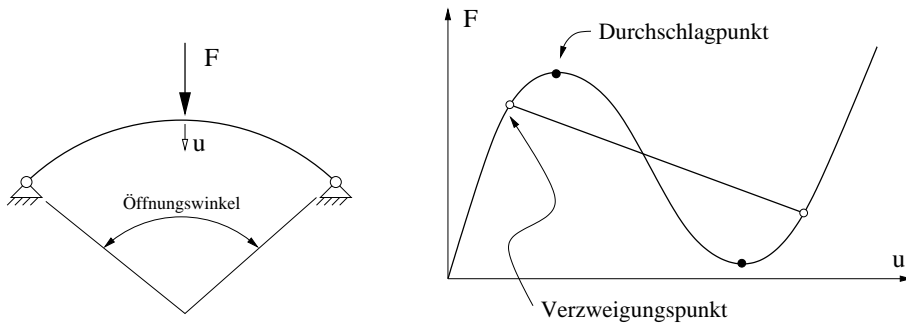


Abbildung 1.2: Typische Last-Verformungskurve eines Bogens bei Annahme statischen Stabilitätsverhaltens.

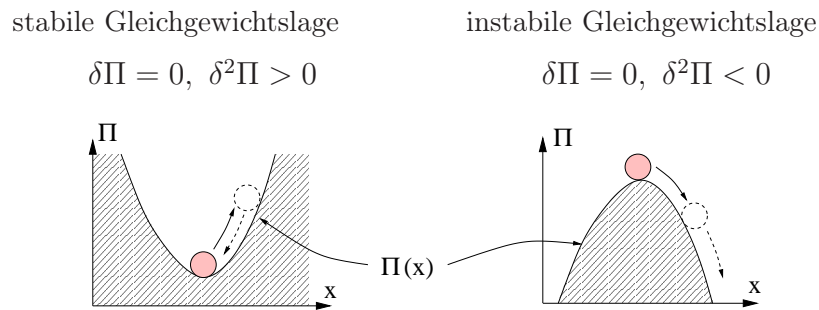


Abbildung 1.3: Kugelanalogie zur Definition stabiler und instabiler Gleichgewichtslagen; $\Pi \equiv$ Potential.

F_{cr} drei Gleichgewichtslagen: eine stabile und zwei weitere, die instabil sind. Der Fall der *unsymmetrischen Verzweigung* zeichnet sich durch das Vorhandensein von zwei Gleichgewichtslagen im gesamten Lastbereich aus, wovon stets eine stabil und die andere instabil ist. Der Vollständigkeit halber sei angemerkt, dass diese Ausführungen bei einer Beschränkung auf Winkel $\varphi \leq \pm 90^\circ$ gelten. Es ist offensichtlich, dass beispielsweise im Fall b) bei dem unbelasteten System alle Punkte bei $\varphi = 2n \cdot (\pm 90^\circ)$ stabile und $\varphi = (2n - 1) \cdot (\pm 90^\circ)$ instabile Gleichgewichtslagen darstellen, wobei $n = 1, 2, 3, \dots$ gilt. Allerdings stellen die Gleichgewichtslagen für $n > 1$ eine Wiederholung bereits vorliegender Situation dar und bedürfen keiner weiteren Betrachtung.

1.2 Imperfektionen

Bei der Fertigung realer Strukturen sind Imperfektionen unvermeidbar. Aus diesem Grund ist das Strukturverhalten für alle der vier oben genannten Stabilitätsfälle - Durchschlagen, stabile, instabile und unsymmetrische Verzweigungen - nicht nur für perfekte Systeme, sondern vor allem bei Vorhandensein von Imperfektionen von zentraler Bedeutung für die Bemessung stabilitätsgefährdeter Strukturen.

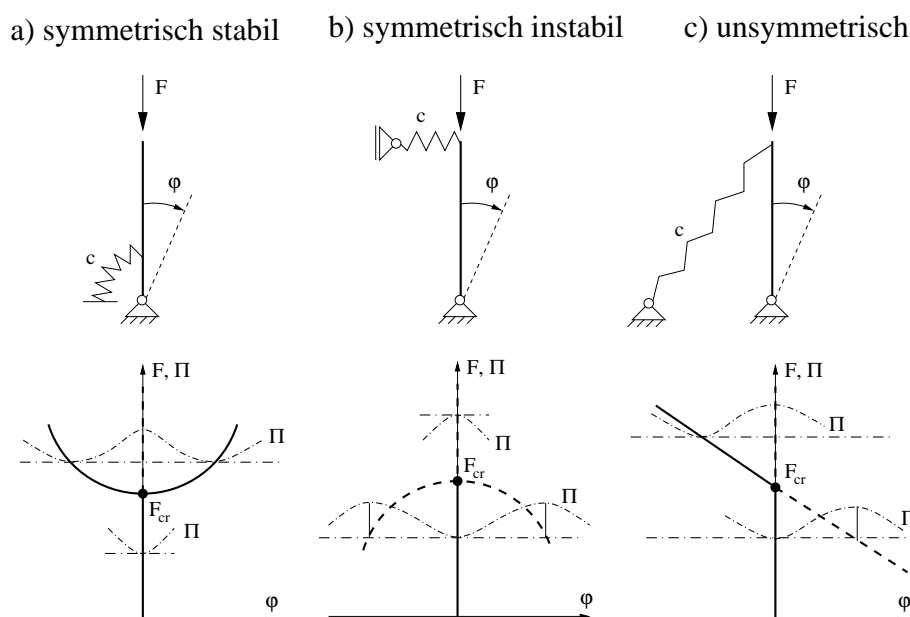


Abbildung 1.4: Klassifizierung von Verzweigungspunkten. Die stabilen Gleichgewichtslagen sind mit durchgezogenen und die instabilen mit gestrichelten Linien dargestellt. Mit den Strich-Punkt-Linien sind die Potentialverläufe bei unterschiedlichen Laststufen gegeben.

Die Imperfektionen können in folgende Gruppen eingeteilt werden

- strukturelle Imperfektionen
- geometrische Imperfektionen

Zu den *strukturellen Imperfektionen* zählen variierende Materialeigenschaften wie richtungsabhängige Elastizitätsmoduli infolge von Walzvorgängen, oder Eigenspannungen, die beispielsweise infolge von Schweißvorgängen eingebracht werden. Zu den *geometrischen Imperfektionen* werden zum einen die *ungewollten* geometrischen Abweichungen der Struktur von der perfekten Sollgeometrie gezählt. Zum anderen können es imperfekte Lasteinleitungen oder Lagerungen sein, wobei diese beiden bei Schalenstrukturen ebenso auf geometrische Abweichungen an den gelagerten bzw. belasteten Rändern zurückgeführt werden.

Eine genaue Quantifizierung von Imperfektionen ist nicht immer möglich. So sind im Regelfall die planmäßigen strukturellen Imperfektionen *a-priori* bekannt und können ohne weiteres in den Berechnungsmodellen berücksichtigt werden. Die Erfassung von ungewollten geometrischen Imperfektionen realer Schalenstrukturen ist hingegen meist kaum durchführbar, daher werden bei theoretischen Untersuchungen oft Imperfektionsformen affin zu Beulformen gewählt. Materielle Imperfektionen - wie Eigenspannungen oder Materialstreuungen - werden bei Stabilitätsuntersuchungen kaum berücksichtigt, was nicht zuletzt daran liegt, dass deren Erfassung kaum möglich ist.

Stellvertretend wird an dieser Stelle qualitativ der Einfluß geometrischer Imperfektionen auf das Stabilitätsverhalten dargestellt. Als Imperfektion wird eine Anfangsauslenkung φ_0 bei den Systemen in Abb. 1.4 und dem Dreigelenkbogen in Abb. 1.1 gewählt. Das Last-Verformungsverhalten der vier Strukturen für unterschiedlich große Anfangsauslenkungen φ_0 ist in Abb. 1.5 dargestellt. Folgendes läßt sich feststellen: Im Falle des Durchschlagens ändert sich das Strukturverhalten grundsätzlich nicht. Das Stabilitätsversagen erfolgt immer noch als Durchschlagen, mit dem Unterschied, dass die Stabilitätslast der imperfekten Struktur niedriger ist, als die des perfekten Systems. Die Stabilitätslast F_{cr} nimmt hier mit zunehmender Imperfektion φ_0 nur langsam ab, daher ist die Bemessung solcher Strukturen weitgehend unproblematisch.

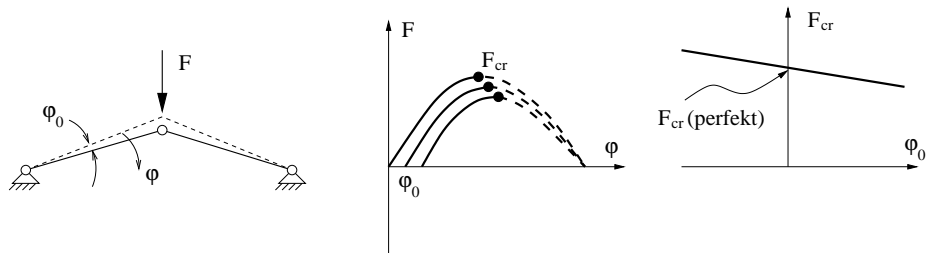
Im Gegensatz hierzu ändert sich das Strukturverhalten bei Verzweigungsproblemen im Falle von Imperfektionen signifikant. Das Einführen einer Anfangsauslenkung φ_0 führt hier zu jeweils zwei unabhängigen Last-Verformungspfaden. Die Pfade, die bei $F = 0$ und $\varphi = \varphi_0$ beginnen, werden als *natürlich* oder auch als *primär* bezeichnet. Andere Pfade werden als *sekundär* bezeichnet. Im Falle der symmetrisch stabilen Verzweigung liegt bei einem imperfekten System auf dem primären Pfad kein Stabilitätspunkt im engeren Sinne nach Gl. (1.2) mehr vor. Die Verwendung des Stabilitätspunktes des sekundären Pfades zur Bemessung solcher Systeme ist nicht sinnvoll, da diese Punkte *oberhalb* des Verzweigungspunktes des perfekten Systems liegen, s. Abb. 1.5. Von LEIPHOLZ [56] wird für solche Systeme die Verwendung der Wendepunkte des primären Pfades als Stabilitätspunkte vorgeschlagen. In der Praxis werden zur Bemessung solcher Strukturen jedoch vereinfachend die Verzweigungspunkte der perfekten Struktur verwendet. Diese Kategorie, zu der beispielsweise Knickstäbe gehören, kann als *"gutartig"* bezeichnet werden, da die Bemessung ähnlich den Durchschlagproblemen auch hier unproblematisch ist.

Die zwei letzten zu betrachtenden Fälle - die symmetrisch instabile und die unsymmetrische Verzweigungen - sind die "Sorgenkinder" der Stabilitätsuntersuchungen. Wie aus Abb. 1.5 ersichtlich, ändert sich hier bei Imperfektionen das Stabilitätsverhalten vom Verzweigen zum Durchschlagen auf dem primären Last-Verformungspfad. Der wesentliche Unterschied zum oben behandelten Durchschlagproblem liegt im Einfluß der Imperfektionsgröße bzw. Amplitude auf die Höhe der kritischen Last F_{cr} . Im betrachteten Fall liegt an der Stelle $\varphi_0 = 0$ eine vertikale Tangente der Funktion $F_{cr}(\varphi_0)$ vor, was dazu führt, dass bereits sehr kleine Imperfektionen zu einem signifikanten Abfall der Stabilitätslasten führen. Aus diesem Grund kann diese Klasse der Stabilitätsfälle als *"bösaartig"* bezeichnet werden. Zur selben Klasse gehören beispielsweise auch die später in dieser Arbeit untersuchten Kreiszyylinder.

1.3 Stabilitätsgrad und Sensitivität

Die Kenntnis einer stabilen Gleichgewichtslage selbst ist nicht ausreichend, um Aussagen über ihre Realisierbarkeit treffen zu können. Vielmehr ist hier das Verhalten der Struktur bei Störungen von Interesse. Aus diesem Grund wurde von LEIPHOLZ [56]

Durchschlagen



Verzweigungsfälle

a) symmetrisch stabil

b) symmetrisch instabil

c) unsymmetrisch

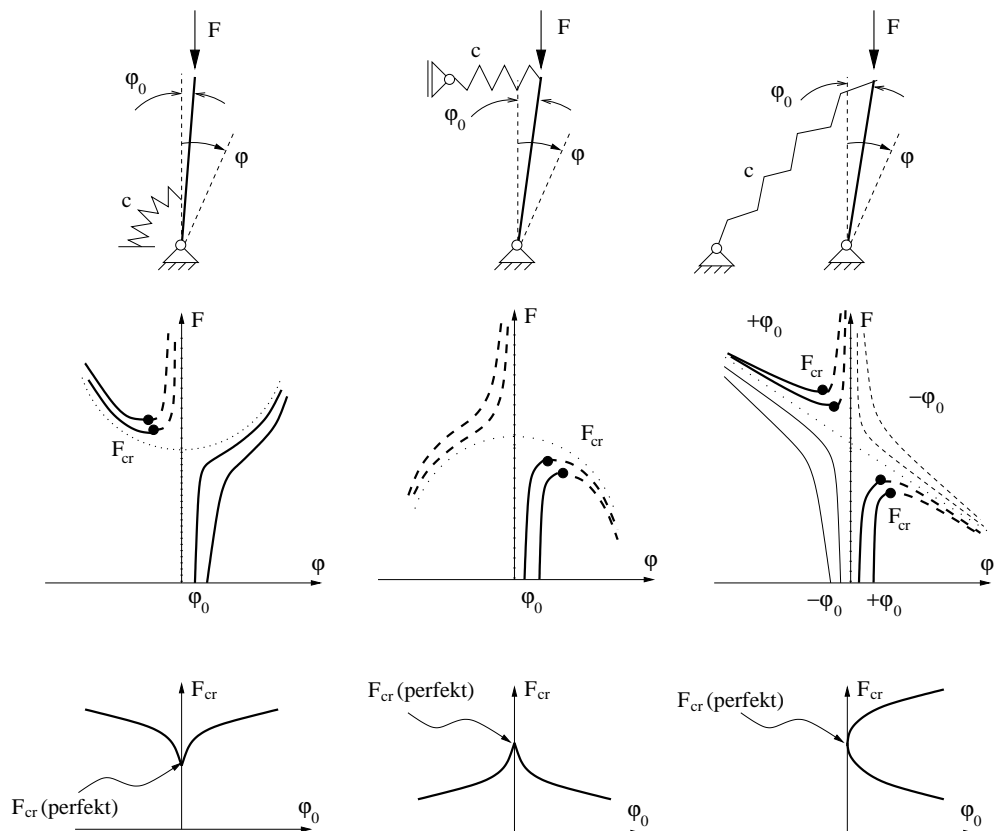


Abbildung 1.5: Last-Verformungsverhalten eines Durchschlagproblems sowie bei stabiler, instabiler und unsymmetrischer Verzweigung bei Vorhandensein von Imperfektionen.

der Begriff des *Stabilitätsgrades* einer Gleichgewichtslage eingeführt. Dabei kann der Abstand von einer betrachteten stabilen Gleichgewichtslage zu der nächsten instabilen Gleichgewichtslage als Stabilitätsgrad d und dessen Kehrwert als Sensitivität $S = 1/d$ definiert werden, s. Abb. 1.6. Allerdings führt diese Definition bei Systemen mit meh-

ren Freiheitsgraden zu subjektiven Aussagen hinsichtlich des Stabilitätsgrades d , da zur Auftragung der Last-Verformungskurve einer der Freiheitsgrade als charakteristisch gewählt werden muss. Eine allgemeinere und dadurch objektivere Definition ergibt sich aus einer Energiebetrachtung. Als Maß des Stabilitätsgrades d wird nun die entsprechende Potentialdifferenz $\Delta\Pi$ bzw. die minimale Störenergie $W_{stör,min}$ betrachtet, die erforderlich ist, um einen Körper aus einer stabilen Gleichgewichtslage in eine instabile Gleichgewichtslage zu befördern, s. Abb. 1.7. Hierfür kann nach einem Vorschlag von VIELSACK [87] die Sensitivität einer Gleichgewichtslage als der Kehrwert dieser Störenergie definiert werden

$$S = \frac{1}{W_{stör,min}}. \quad (1.3)$$

Zur einheitenfreien Darstellung kann die Störenergie mit einer für den betrachteten Fall typischen Energie normiert werden. Hierzu kann beispielsweise die am betrachteten Lastniveau gespeicherte Verzerrungsenergie oder die Verzerrungsenergie am Stabilitätspunkt verwendet werden:

$$\tilde{S} = \frac{W_{bezug}}{W_{stör,min}}. \quad (1.4)$$

Diese Definition wird im Rahmen der Sensitivitätsuntersuchungen in der vorliegenden Arbeit verwendet. Der hierfür verwendete Algorithmus ist ausführlich in Kapitel 7 dargestellt.

1.4 Stabilitätsverhalten von Kreiszy lindern

An dieser Stelle sollen nur die wesentlichen Merkmale des Stabilitätsverhaltens einer Kreiszy linderschale dargestellt werden. Die Ausführungen gelten für mittellange dünnwandige Kreiszy linder. Die analytischen Lösungen sowie bekannte experimentelle und numerische Untersuchungen sind für den Fall des axialen Drucks in Kapitel 5 und für den Fall des Außendrucks in Kapitel 6 ausführlich beschrieben.

Das Tragverhalten eines Kreiszy lindern unter axialem Druck unterscheidet sich maßgeblich von dem eines Knickstabes oder dem einer Platte. Wie oben dargestellt liegt der Grund hierfür darin, dass der Stabilitätspunkt eines Kreiszy lindern ein Verzweigungspunkt der Klasse *symmetrisch instabil* ist. Aus den Untersuchungen von KOITER [52] ist bekannt, dass für derartig beanspruchte Kreiszy linder die instabilen Gleichgewichtslagen des Nachbeulpfades sehr nahe an den stabilen Gleichgewichtslagen des Vorbeulpfades liegen, s. Abb. 1.8. Für imperfekte Kreiszy linder geht das Verzweigen in ein Durchschlagen über. Allerdings ist das Nachbeulverhalten eines Kreiszy lindern wesentlich komplexer als das Verhalten der einfachen Ein-Freiheitsgrad Modell-Systeme, die im oben genannten Kapitel behandelt wurden. Der primäre Pfad verzweigt im Nachbeulbereich eines Kreiszy lindern unter axialem Druck mehrfach und es existieren

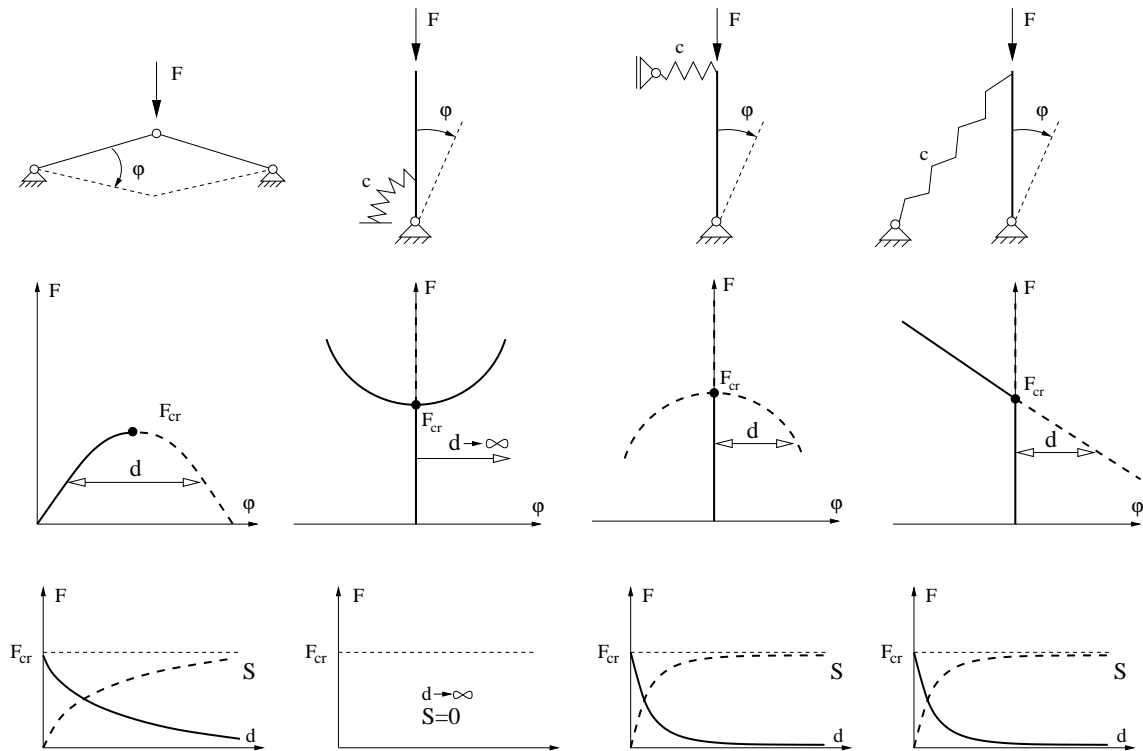


Abbildung 1.6: Definition des Stabilitätsgrades d und der Sensitivität S .

mehrere sekundäre Pfade. Jedem sekundären Pfad ist eine Verformungsfigur, die so genannte *Nachbeulform*, zugeordnet. Dieses Verhalten wurde auch in Versuchen beobachtet, wo bei Erreichen der Stabilitätslast unmittelbar nach dem Einfallen erster Beulen mehrere Nachbeulformen mit unterschiedlicher Anzahl von Beulwellen in axialer und umlaufender Richtung in schneller Abfolge eingenommen werden. Dies wird als *mode jumping* bezeichnet und bedingt die Sprünge in der Last-Verformungskurve im Nachbeulbereich.

Im Gegensatz zum einfachen System-Modell b) in den Abb. 1.4 und 1.5 fallen die sekundären Pfade eines Kreiszylinders nicht auf Null ab, sondern weisen lokale Minima auf. Die Minima der sekundären Nachbeulpfade werden als *Nachbeullasten* bezeichnet. Unter der Voraussetzung, dass eine niedrigste Nachbeullast und damit ein globales Minimum existiert, ist unterhalb dieses Minimums keine Sensitivität bzw. ein unendlich großer Stabilitätsgrad zu erwarten. Daher stellen die Nachbeullasten eine "natürliche" untere Grenze für die mit zunehmender Imperfektionsgröße abfallenden kritischen Lasten dar, deren tiefste experimentelle Werte bei 10 – 20 % der analytischen kritischen Last liegen; für eine Diskussion der Zuverlässigkeit der Versuchsergebnisse siehe z.B. HÜBNER ET AL. [47].

Das Tragverhalten von Kreiszylindern unter Außendruck ist dem oben beschriebenen grundsätzlichen Verhalten ähnlich. Der wesentliche Unterschied liegt darin, dass im Falle des Außendrucks die Untergrenze der experimentellen Stabilitätslasten bei ca.

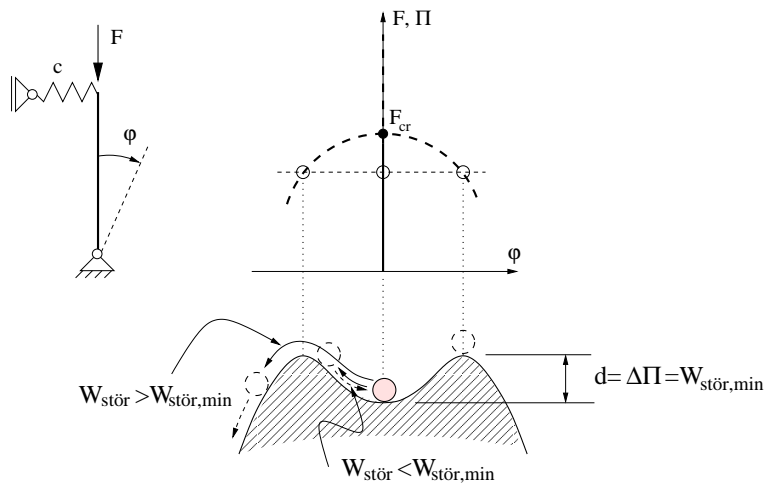
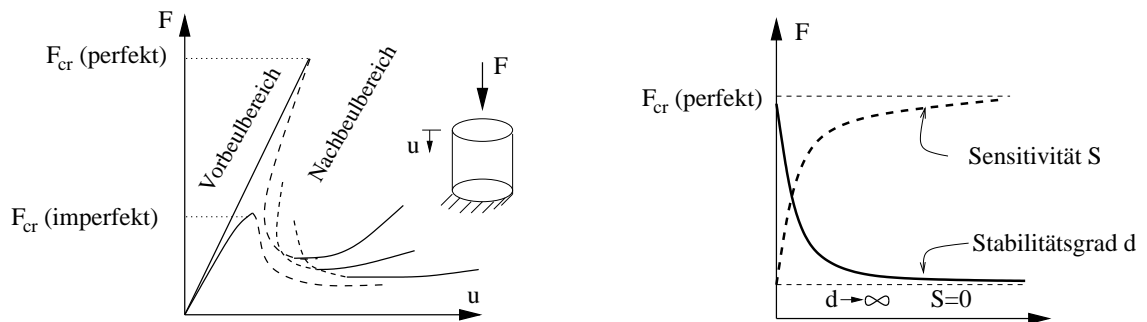


Abbildung 1.7: Definition des Stabilitätsgrades über Energiebetrachtung.

65 % der kritischen Last der perfekten Strukturen liegt.

theoretische Untersuchungen



Experimente

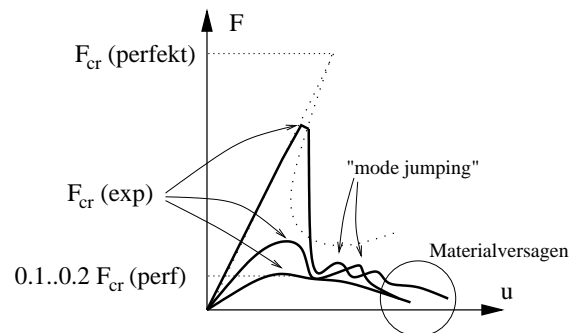


Abbildung 1.8: Schematische Darstellung typischer Last-Verformungskurven eines Kreiszyllinders unter axialer Druckbeanspruchung als Ergebnis theoretischer und experimenteller Untersuchungen.

Kapitel 2

Behandlung strukturmechanischer Probleme mit Hilfe der FEM

Nachfolgend werden die Grundlagen der Kontinuumsmechanik kurz dargelegt, gefolgt vom kurzen Umriß zur Lösung strukturmechanischer Probleme mit der Methode der Finiten Elemente. Zur detaillierten Darstellung siehe z.B. WRIGGERS [94], BETTEN [17].

2.1 Kontinuumsmechanische Grundlagen

Kinematik und Verzerrung

Die Lagen eines materiellen Punktes eines Körpers können im Ausgangszustand (= Referenzkonfiguration) mit dem Ortsvektor \mathbf{X}

$$\mathbf{X} = X_1 \mathbf{e}_1 + X_2 \mathbf{e}_2 + X_3 \mathbf{e}_3 \quad (2.1)$$

und im verformten Zustand (= Momentankonfiguration) mit dem Ortsvektor \mathbf{x}

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 \quad (2.2)$$

angegeben werden. Dabei stellen \mathbf{e}_i eine feste kartesische Basis dar. Die Koordinaten X_i werden als *Lagrangesche* und die Koordinaten x_i als *Eulerische* Koordinaten bezeichnet. Damit läßt sich die Verschiebung \mathbf{u} angeben als

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}. \quad (2.3)$$

Mit dem Deformationsgradienten

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{1} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{1} + \text{Grad } \mathbf{u} \quad (2.4)$$

kann als Verzerrungsmaß der *Green-Lagrangesche* Verzerrungstensor definiert werden:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}). \quad (2.5)$$

Dabei ist $\mathbf{1}$ der Einheitstensor 2. Stufe. Der *Green-Lagrangesche* Verzerrungstensor stellt ein quadratisches Verzerrungsmaß bezogen auf die Referenzkonfiguration dar und nimmt bei einer Starrkörperverschiebung, also bei $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{0}$, korrekterweise den Wert Null an.

Bilanzgleichungen

Der **Massenerhaltungssatz** fordert das Konstantbleiben der gesamten Masse des Körpers \mathcal{B} in jedem Verformungszustand:

$$m = \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 dV = \int_{\mathcal{B}} \rho dv = const. \quad (2.6)$$

Hierbei steht der Index "0" für die Referenzkonfiguration. Durch Anwendung der Transformationsvorschrift der Volumenelemente bei der Abbildung der Referenz- auf die Momentankonfiguration

$$dv = \det \mathbf{F} dV \quad (2.7)$$

ergibt sich die lokale Form der Massenerhaltung zu

$$\rho_0 = \det \mathbf{F} \rho. \quad (2.8)$$

Die Determinante $\det \mathbf{F}$ wird auch als JACOBI-determinante $J = \det \mathbf{F}$ bezeichnet. Es sei angemerkt, dass die Abbildung eindeutig und frei von Selbstdurchdringung ist, wenn $J > 0$ gilt.

Der **Impulssatz** fordert die Gleichheit zwischen der Änderung des Impulses und den auf den Körper einwirkenden Kräften. Mit der zeitlichen Ableitung $(\dot{}) = \frac{\partial}{\partial t}()$ lässt sich die Impulsänderung in der Momentankonfiguration als

$$\dot{\mathbf{i}} = \int_{\mathcal{B}} \rho \dot{\mathbf{x}} dv \quad (2.9)$$

angeben. Die Summe der am Körper angreifenden Kräfte \mathbf{f} besteht aus den eingprägten Volumenkräften \mathbf{b} und den Oberflächenspannungen \mathbf{t} , die auf der Oberfläche $\partial \mathcal{B}$ angreifen. In der Momentankonfiguration ergibt dies

$$\mathbf{f} = \int_{\mathcal{B}} \rho \mathbf{b} dv + \int_{\partial \mathcal{B}} \mathbf{t} da. \quad (2.10)$$

Mit Hilfe

- des *Cauchy*-Theorems

$$\mathbf{t} = \mathbf{T}\mathbf{n} \quad (2.11)$$

mit dem Normalenvektor \mathbf{n} und dem *Cauchy*schen Spannungstensor \mathbf{T}

- dem *Gauß*schen Integralsatz
- der Beziehung für die Transformation von Flächen von der Momentan- in die Referenzkonfiguration

$$da = \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-T} dA \quad (2.12)$$

- und den Transformationsvorschriften in Gl.n (2.7) und (2.8)

lassen sich die angreifenden Kräfte in der Referenzkonfiguration folgendermaßen angeben

$$\mathbf{f} = \int_{\mathcal{B}_0} (\rho_0 \mathbf{b} + \text{Div} \mathbf{P}) dV. \quad (2.13)$$

Hierbei ist \mathbf{P} der sogenannte unsymmetrische 1. *Piola-Kirchhoff* Spannungstensor

$$\mathbf{P} = \det \mathbf{F} \mathbf{T} \mathbf{F}^{-T}. \quad (2.14)$$

Mit (2.13) und unter Berücksichtigung von (2.8) läßt sich der Impulssatz in der Referenzkonfiguration schreiben als

$$\int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{x}} dV = \int_{\mathcal{B}_0} (\rho_0 \mathbf{b} + \text{Div} \mathbf{P}) dV. \quad (2.15)$$

Hieraus ergibt sich die lokale Formulierung des Impulssatzes in der Referenzkonfiguration zu

$$\rho_0 \ddot{\mathbf{x}} - (\rho_0 \mathbf{b} + \text{Div} \mathbf{P}) = \mathbf{0}. \quad (2.16)$$

Der **Drallerhaltungssatz** fordert, dass die zeitliche Ableitung des Dralls \mathbf{L}

$$\mathbf{L} = \int_{\mathcal{B}} \rho \mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}} dv \quad (2.17)$$

gleich dem Moment \mathbf{m} aus den Volumen- und Oberflächenkräften

$$\mathbf{m} = \int_{\mathcal{B}} \rho \mathbf{x} \times \mathbf{b} dv + \int_{\partial \mathcal{B}} \mathbf{x} \times \mathbf{t} da \quad (2.18)$$

entspricht, d.h.

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{m}. \quad (2.19)$$

Durch Anwendung des *Gaußschen* Integralsatzes und Bezug auf die Referenzkonfiguration läßt sich damit die Symmetrie des Spannungstensors zeigen.

Spannungsmaße und Stoffgesetz

Zu dem oben dargestellten *Green-Lagrangeschen* Verzerrungstensor stellt der *2.Piola-Kirchhoff* Spannungstensor

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P} = \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{T} \mathbf{F}^{-T} \quad (2.20)$$

ein konjugiertes Spannungsmaß dar. Unter Annahme eines linear-elastischen, homogenen und isotropen Werkstoffverhaltens ergibt sich folgende Verknüpfung zwischen den Spannungen \mathbf{S} und den Verzerrungen \mathbf{E}

$$\mathbf{S} = \mathbf{C} \mathbf{E}. \quad (2.21)$$

Der vierstufige Materialtensor \mathbf{C} ist für ein linear-elastisches Material gegeben durch

$$\mathbf{C} = \lambda \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{I} \quad (2.22)$$

mit $\mathbf{1}$ als einem 2-stufigen und \mathbf{I} als einem 4-stufigen Einheitstensor. Dabei berechnen sich die *Lamé* Konstanten λ und μ zu

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{und} \quad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.23)$$

Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen

Ausgehend von den Gleichungen für

- Gleichgewicht: lokale Impulsbilanz (2.16)
- Kinematik (2.5)
- Stoffgesetz (2.21)
- Randbedingungen:
 - Verschiebungsrandbedingungen (*Dirichlet*): $\mathbf{u}_0 = \hat{\mathbf{u}}$ auf $\partial\mathcal{B}_u$
 - Spannungsrandbedingungen (*Neumann*): $\mathbf{t}_0 = \mathbf{P}\mathbf{n}_0$ auf $\partial\mathcal{B}_\sigma$

ergibt sich eine mathematische Formulierung für kontinuumsmechanische Probleme. Wegen der Schwierigkeiten bei der Erfüllung von Randbedingungen sind analytische Lösungen nur in Sonderfällen möglich. Zur Lösung mittels numerischer Verfahren wird auf die sogenannte *schwache Form* übergegangen. Diese ergibt sich durch die Anwendung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen auf die Impulsbilanz. Hierzu wird die Gl. (2.16) mit einer Testfunktion $\delta \mathbf{u}$ multipliziert und anschließend über das ganze Gebiet \mathcal{B}_0 integriert

$$\int_{\mathcal{B}_0} \delta \mathbf{u} (\text{Div} \mathbf{P} + \rho_0 \mathbf{b} - \rho_0 \ddot{\mathbf{x}}) dV = \mathbf{0}. \quad (2.24)$$

Hierbei stellt die Testfunktion $\delta \mathbf{u}$ die virtuellen Verschiebungen, die die *Dirichlet* Randbedingungen exakt erfüllen müssen, dar. Das Gleichgewicht wird hingegen nur im *integralen* Mittel im Gebiet \mathcal{B}_0 erfüllt. Nach Einbau der Kinematik und des Stoffgesetzes und Anwendung der Rechenregeln für "Div" und des *Gaußschen* Integralsatzes läßt sich die *schwache Form* folgendermaßen schreiben

$$\underbrace{\int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{S} \delta \mathbf{E} dV}_{\text{innere Arbeit}} - \underbrace{\int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \mathbf{b} \delta \mathbf{u} dV - \int_{\partial \mathcal{B}_\sigma} \mathbf{t}_0 \delta \mathbf{u} dA}_{\text{Arbeit der Volumen- und der Oberflächenkräfte}} + \underbrace{\int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{x}} \delta \mathbf{u} dV}_{\text{Arbeit der Trägheitskräfte}} = 0. \quad (2.25)$$

2.2 Diskretisierung mit der FEM

An dieser Stelle wird die Diskretisierung der oben dargestellten Gleichungen mit der Methode der Finiten Elemente kurz dargestellt. Zur detaillierten Information wird auf das Standardschrifttum verwiesen, z.B. BATHE [12], KNOTHE/WESSELS [51], WRIGGERS [94], BELYTSCHKO [14], ZIENKIEWICZ/TAYLOR [98].

Das DGL-System (2.25) wird mit der Methode der Finiten Elemente in ein algebraisches Gleichungssystem überführt. Hierzu wird das Gebiet \mathcal{B} des untersuchten Körpers in Finite Elemente unterteilt, die nicht überlappend sind. Die Elemente sind an den Knoten, Kanten oder Flächen – je nach Dimension des Problems – miteinander "verbunden". Die gesuchten Größen, hier das Verschiebungsfeld, werden nun nur an den Knoten bestimmt. Im Elementinneren werden sowohl die Geometrie als auch die Verschiebungen durch Ansatzfunktionen approximiert. Bei einem isoparametrischen Konzept werden für beides, Geometrie und Verschiebungen, gleiche Ansatzfunktionen gewählt. Dies ergibt für den Ortsvektor und das Verschiebungsfeld eines Elements e

$$\mathbf{X}_e^h = \sum_{k=1}^{n_K} N_k(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{X}_k \quad \text{und} \quad \mathbf{u}_e^h = \sum_{k=1}^{n_K} N_k(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{d}_k. \quad (2.26)$$

Dabei ist \mathbf{X}_k der Ortsvektor und der Vektor \mathbf{d}_k beinhaltet die diskreten Verschiebungen des Knotens k . Da durch die Approximation Fehler in die Lösung eingebracht werden,

sind die neuen Größen mit einem "h" versehen. Damit werden auch die Integrationsgebiete nur näherungsweise erfasst:

$$\mathcal{B} \approx \mathcal{B}^h = \bigcup_{e=1}^{n_{el}} \mathcal{B}_e \quad \text{und} \quad \partial\mathcal{B} \approx \partial\mathcal{B}^h = \bigcup_{e=1}^{n_{Rand}} \partial\mathcal{B}_e. \quad (2.27)$$

Wie in Gl. (2.26) ersichtlich werden die Ansatzfunktionen N_k nicht in X_1, X_2, X_3 -Koordinaten gewählt, sondern in Koordinaten ξ_j . Die tatsächliche Geometrie eines Elements \mathcal{B}_e wird dabei auf ein Einheitsgebiet \mathcal{B}_\square mit den orthogonalen Koordinaten $\xi_j \in [-1, +1]$ abgebildet. Dies macht die Ansatzfunktionen unabhängig von der tatsächlichen Geometrie der Elemente, wodurch alle mathematischen Umformungen und Operationen wie Integration und Gradientenbildung im lokalen ξ_1, ξ_2, ξ_3 -Koordinatensystem erfolgt. Der Bezug zur tatsächlichen Geometrie und die Transformation der Differentialoperatoren werden mit Hilfe der JACOBIMatrix \mathbf{J}_e oder deren Determinante $\det\mathbf{J}_e$ realisiert.

Bei der Zerlegung des gesamten Gebiets in einzelne Finite Elemente (Triangulierung) muss beachtet werden, dass die Abbildung eines Elements mit der realen Geometrie auf ein Einheitsselement eindeutig und ohne Selbstdurchdringung erfolgt. Weiter müssen die Ansatzfunktionen an den entsprechenden Knoten den Wert "1", an anderen Knoten den Wert "0" annehmen. Damit keine Klaffungen in der approximierten Geometrie oder Sprünge im Verschiebungsfeld auftreten müssen die Ansatzfunktionen C^0 -stetig sein.

Mit der Diskretisierung läßt sich das DGL-System (2.25) in ein nach wie vor nichtlineares aber nun algebraisches semidiskretes Gleichungssystem der Form

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{f}^{int}(\mathbf{d}) - \mathbf{f}^{\bar{ext}}(\mathbf{d}) = \mathbf{0} \quad (2.28)$$

überführen, wobei sowohl der Term der inneren Kräfte \mathbf{f}^{int} als auch die äußeren Lasten $\mathbf{f}^{\bar{ext}}$ im allgemeinen Fall von den diskreten Knotenverschiebungen \mathbf{d} abhängen können. Die Massenmatrix \mathbf{M} wird üblicherweise als verformungsunabhängig angenommen.

Der Term der inneren Kräfte ergibt sich aus dem Term der inneren Verzerrungsenergie in (2.25):

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}_0} \delta \mathbf{E} \mathbf{S} \, dV &\approx \int_{\mathcal{B}_0^h} \delta \mathbf{E}^{*T} \mathbf{S}^* \, dV = \bigcup_{e=1}^{n_{el}} \left(\sum_{k=1}^{n_K} \delta \mathbf{u}_k^{hT} \int_{\mathcal{B}_e} \mathbf{B}_k^T(\mathbf{d}_k) \mathbf{S}_e \, dV_e \right) \\ &= \delta \mathbf{u}^{hT} \bigcup_{e=1}^{n_{el}} \left(\sum_{k=1}^{n_K} \int_{\mathcal{B}_\square} \mathbf{B}_k^T(\mathbf{d}_k) \mathbf{S}_e \det \mathbf{J}_e \, dV_\square \right) = \delta \mathbf{u}^{hT} \mathbf{f}^{int}(\mathbf{d}). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Dabei beinhalten die Matrizen $\mathbf{B}_k(\mathbf{d}_k)$ die Gradienten der Ansatzfunktionen $N_k(\boldsymbol{\xi})$ und die Vektoren \mathbf{S}_e die Einträge aus dem Spannungstensor. Die Massenmatrix \mathbf{M} ergibt

sich aus dem Trägheitsterm in (2.25) als Folge der räumlichen Diskretisierung wie folgt:

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{x}} \delta \mathbf{u} \, dV &\approx \int_{\mathcal{B}_0^h} \delta \mathbf{u}^{hT} \rho_0 \ddot{\mathbf{d}} \, dV \\
 &= \bigcup_{e=1}^{n_{el}} \left(\sum_{k=1}^{n_K} \sum_{l=1}^{n_K} \delta \mathbf{u}_k^{hT} \int_{\mathcal{B}_e} N_k \rho_0 N_l \, dV_e \ddot{\mathbf{d}}_k \right) \\
 &= \delta \mathbf{u}^{hT} \left[\bigcup_{e=1}^{n_{el}} \left(\sum_{k=1}^{n_K} \sum_{l=1}^{n_K} \int_{\mathcal{B}_e} N_k \rho_0 N_l \det \mathbf{J}_e \, dV_{\square} \right) \right] \ddot{\mathbf{d}} \\
 &= \delta \mathbf{u}^{hT} \mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}}.
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

Analog ergibt sich für den Lastvektor $\mathbf{f}^{\bar{ext}}$, der die Anteile aus den Volumen- und Oberflächenkräften enthält:

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \mathbf{b} \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{\partial \mathcal{B}_\sigma} \mathbf{t}_0 \delta \mathbf{u} \, dA &\approx \\
 \approx \bigcup_{e=1}^{n_{el}} \left(\sum_{k=1}^{n_K} \delta \mathbf{u}_k^{hT} \int_{\mathcal{B}_e} \rho_0 \mathbf{b} N_k \, dV_e \right) + \bigcup_{e=1}^{n_{Rand}} \left(\sum_{k=1}^{m_{K,Rand}} \delta \mathbf{u}_k^{hT} \int_{\partial \mathcal{B}_{\sigma e}} \mathbf{t}_0 N_k \, dA_e \right) \\
 = \delta \mathbf{u}^{hT} \left[\bigcup_{e=1}^{n_{el}} \mathbf{f}_{be} + \bigcup_{e=1}^{n_{Rand}} \mathbf{f}_{te} \right] = \delta \mathbf{u}^{hT} \mathbf{f}^{\bar{ext}}.
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

Aus der Forderung nach Beliebigkeit der virtuellen Verschiebungen $\delta \mathbf{u}^h$ ergibt sich die oben angegebene Gl. (2.28). Die Integrale in den Ausdrücken (2.29) - (2.31) werden nicht analytisch, sondern numerisch ausgewertet. Hier hat sich die *Gauß*-Punktintegration als Standardmethode durchgesetzt.

Werden die Trägheitskräfte vernachlässigt, so ergibt sich folgender Ausdruck für das statische Gleichgewicht

$$\mathbf{f}^{int}(\mathbf{d}) - \lambda \mathbf{f}^{ext}(\mathbf{d}) = \mathbf{0}. \tag{2.32}$$

2.3 Lösungsverfahren im statischen Fall

Dieses Kapitel beschränkt sich auf die Darstellung der Lösungsverfahren zur Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems (2.32), d.h. nur für den statischen Fall. Die Lösung der Bewegungsgleichung (2.28) wird in einem separaten Kapitel über die Zeitintegration beschrieben.

Zur Lösung des statischen Problems muss die diskretisierte schwache Form linearisiert werden, damit sie anschließend mit einem NEWTON-artigen Verfahren gelöst werden

kann. An dieser Stelle werden die äußeren Kräfte als verformungsunabhängig, d.h. *richtungstreu und körperfest*¹ angenommen. Dies führt auf

$$\mathbf{f}^{int}(\mathbf{d}) - \lambda \mathbf{f}^{ext} = \mathbf{0}. \quad (2.33)$$

Dabei wird der Lastvektor \mathbf{f}^{ext} durch den Grundlastvektor \mathbf{f}^{ext} und einen Lastparameter λ ausgedrückt. Zur Behandlung verformungsabhängiger Belastung siehe z.B. SCHWEIZERHOF [74].

Für die Linearisierung wird der Ausdruck (2.33) folgendermaßen geschrieben

$$\mathbf{G}(\mathbf{d}) = \mathbf{f}^{int}(\mathbf{d}) - \lambda \mathbf{f}^{ext} = \mathbf{0} \quad (2.34)$$

und an einer Stelle $\bar{\mathbf{d}}$ bei einem festen Lastparameter λ bis zum linearen Glied entwickelt

$$\mathbf{G}(\mathbf{d}) = \mathbf{G}(\bar{\mathbf{d}} + \Delta\mathbf{d}) = \mathbf{G}(\bar{\mathbf{d}}) + D\mathbf{G}(\bar{\mathbf{d}})\Delta\mathbf{d}\{+\mathbf{R}(\Delta\mathbf{d})\}. \quad (2.35)$$

$\mathbf{R}(\Delta\mathbf{d})$ stellt die Terme höherer Ordnung dar, die vernachlässigt werden. Die Richtungsableitung von \mathbf{G} an der Stelle $\bar{\mathbf{d}}$ wird folgendermaßen bestimmt

$$D\mathbf{G}(\bar{\mathbf{d}}) = \frac{d}{d\epsilon} [\mathbf{G}(\bar{\mathbf{d}} + \epsilon\Delta\mathbf{d})]_{\epsilon=0} = \left. \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{d})}{\partial \mathbf{d}} \right|_{\bar{\mathbf{d}}} = \mathbf{K}_T|_{\bar{\mathbf{d}}}. \quad (2.36)$$

\mathbf{K}_T wird tangentielle Steifigkeitsmatrix genannt. Damit ergibt sich ein lineares Gleichungssystem

$$\mathbf{K}_T|_{\bar{\mathbf{d}}} \cdot \Delta\mathbf{d} = -\mathbf{G}(\bar{\mathbf{d}}). \quad (2.37)$$

Mit (2.34) folgt die Iterationsvorschrift zur Bestimmung des Verschiebungszustandes \mathbf{d} für einen festgehaltenen Lastparameter λ

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{d}_i) \cdot \Delta\mathbf{d}_{i+1} = \mathbf{f}^{int}(\mathbf{d}_i) - \lambda \mathbf{f}^{ext} \quad (2.38)$$

mit dem Verschiebungszuwachs

$$\mathbf{d}_{i+1} = \mathbf{d}_i + \Delta\mathbf{d}_{i+1}. \quad (2.39)$$

Die Iteration wird abgebrochen, wenn eine geeignete Norm, meist die Energienorm, eine festgelegte Toleranzschranke unterschreitet. Wie aus (2.38) ersichtlich, wird hier die tangentielle Steifigkeitsmatrix in jedem Iterationsschritt neu aufgestellt. Dieses Verfahren wird als *Standard Newton-Raphson* Verfahren bezeichnet. Zur Effizienzsteigerung kann die Iterationsvorschrift dahingehend geändert werden, dass die Steifigkeitsmatrix nur am Beginn der Iteration bestimmt wird und während des Iterationsprozesses gleich

¹Diese Klassifikation wurde SCHWEIZERHOF [74] Seite 33 entnommen.

bleibt. Dieses Verfahren wird als *Modifiziertes Newton-Raphson* Verfahren bezeichnet. Allerdings konvergiert das modifizierte Verfahren nicht mehr quadratisch und kann somit nur für "schwach" nichtlineare Problemstellungen effizient eingesetzt werden.

Zur Anwendung des *Newton-Raphson* Verfahrens ist ein Steuerparameter vorzugeben. Alternativ zum Lastparameter λ (Laststeuerung) können auch Verschiebungen vorgeschrieben werden (Verschiebungssteuerung²). Die Verschiebungssteuerung ist sinnvoll, wenn der Konvergenzradius für den Lastparameter λ schwer abzuschätzen ist und bekannt ist, dass ein monotoner Verschiebungszuwachs stattfindet. Die Vorgabe des Steuerparameters schränkt den Einsatz des *Newton-Raphson* Verfahrens bei Untersuchungen zur Strukturstabilität stark ein. Mit Hilfe der Laststeuerung können nur Bereiche mit positiv definiter tangentieller Matrix \mathbf{K}_T bestimmt werden, sichtbar an monoton steigenden Last-Verformungspfaden: Strecke 0 bis A in Abb. 2.1. Hingegen erlaubt der Einsatz einer Verschiebungssteuerung auch die Bestimmung von Gleichgewichtspfaden mit einer negativ definiten Steifigkeitsmatrix, allerdings nur solange die Verschiebungen monoton ansteigen: Strecke 0– A – B in Abb. 2.1. Weist ein Gleichgewichtspfad ein sogenanntes "snap-back" auf (Strecke B bis C in Abb. 2.1), so kann dieser Bereich nur mit Verfahren bestimmt werden, die ohne festzulegende Parameter auskommen. Zu solchen Verfahren gehört beispielsweise das sogenannte *Bogenlängenverfahren* (engl.: *arc-length*). Mit dem *Bogenlängenverfahren* läßt sich die gesamte Last-Verformungskurve in Abb. 2.1 bestimmen. Dieses Verfahren, wie auch andere bei den Untersuchungen zur Strukturstabilität eingesetzte Verfahren, werden in einem separaten Kapitel beschrieben.

2.4 Schalenelemente

In den vorhergehenden Abschnitten ist die Herleitung der schwachen Form der Impulsbilanz und das FE Konzept kurz skizziert worden. Hier werden nun die in dieser Arbeit verwendeten Schalenelemente kurz vorgestellt. Die Elemente basieren auf den von BATHÉ ET AL. [20] und [25] entwickelten MITC Elementen, die auf der gemischten Interpolation der Tensoren basieren (engl.: **M**ixed **I**nterpolation of **T**ensorial **C**omponents). Die Elemente wurden von GEBHARDT [35] und HAUPTMANN [38] für Analysen mit endlichen Verdrehungen weiterentwickelt.

2.4.1 Das Degenerationskonzept

Da bei Schalen die Abmessungen der Schalenmittelfläche wesentlich größer sind als die Dicke, wird beim *Degenerationskonzept* das dreidimensionale Kontinuum auf eine zweidimensionale Referenzfläche mit einer gesonderten Beschreibung in Dickenrichtung *degeneriert*. Dabei werden folgende Annahmen getroffen

²Bei der Vorgabe der Verschiebungen werden die zugehörigen Terme in einem Block-Gauß Schritt auf die rechte Seite gebracht, wodurch implizit wieder eine Lastvorgabe stattfindet.

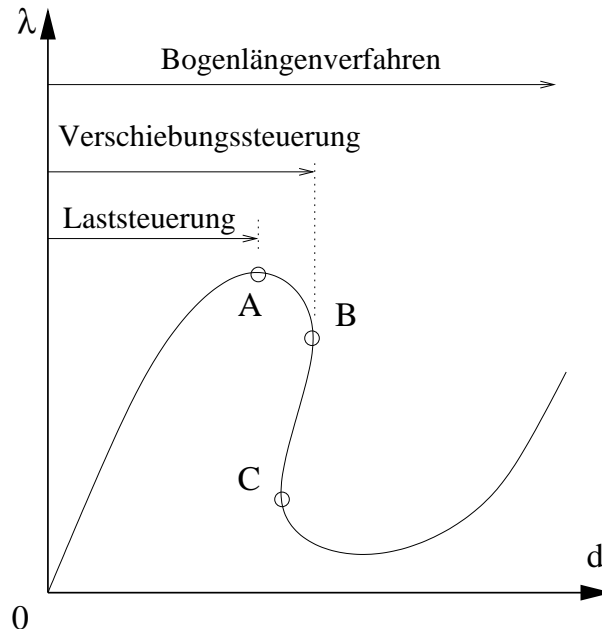


Abbildung 2.1: Konvergenz des Newton-Raphson Verfahrens am Beispiel einer nicht-linearen Last-Verformungskurve mit "snap-back".

- Der Direktor auf der Mittelfläche – im Schalenfall identisch mit der Normalen der Schale bleiben sowohl in der Referenz- als auch in der Momentankonfiguration gerade (= Ebenbleiben der Querschnitte).
- Die Länge des Direktors bleibt konstant (= keine Dickenänderung).
- Die Spannungen in Dickenrichtung werden vernachlässigt.

Aus den ersten zwei Annahmen ergibt sich folgende Vorschrift zur Beschreibung der Schalengeometrie in der Referenzkonfiguration

$$\mathbf{X}(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{X}_R(\xi, \eta) + \zeta \frac{t}{2} \mathbf{D}(\xi, \eta). \quad (2.40)$$

\mathbf{X}_R ist der Ortsvektor der Referenzfläche (meist Schalenmittelfläche), t ist die Schalendicke und $\mathbf{D}(\xi, \eta)$ das Direktorfeld. Koordinaten ξ , η und ζ sind natürliche gekrümmte Koordinaten, wobei ξ und η in der Schalenebene liegen und ζ rechtwinklig dazu ist. Die verformte Konfiguration ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\xi, \eta, \zeta) &= \mathbf{x}_R + \zeta \frac{t}{2} \mathbf{d}(\xi, \eta) \\ &= \mathbf{X}_R(\xi, \eta) + \mathbf{u}_R(\xi, \eta) + \zeta \frac{t}{2} \mathbf{R} \mathbf{D}(\xi, \eta). \end{aligned} \quad (2.41)$$

$\mathbf{u}_R(\xi, \eta)$ repräsentiert die Verschiebungen der Referenzfläche und \mathbf{R} ist der Rotationstensor, der das Direktorfeld der Referenzkonfiguration auf die Momentankonfiguration

abbildet. Die Aufstellung des Tensors \mathbf{R} ist für große Rotationen nicht trivial. Ausführliche Beschreibung unterschiedlicher Formulierungen und eine Diskussion der Vor- und Nachteile kann beispielsweise GEBHARDT [35] und HAUPTMANN [38] entnommen werden.

Zur Erfüllung der dritten Annahme muss das Materialgesetz in das lokale ξ, η, ζ -Koordinatensystem transformiert werden. Unter der Annahme verschwindender Spannungen S_{33} in Dickenrichtung kann dann die Dickenverzerrung E_{33} bestimmt und das Materialgesetz entsprechend kondensiert werden.

Bei der **Diskretisierung** einer degenerierten Schale wird die Referenzfläche mit Ansatzfunktionen zwischen den Knoten interpoliert. Der Bereich außerhalb der Referenzfläche wird durch eine separate Interpolation des Direktorfeldes mit den gleichen Ansatzfunktionen bei Nutzung der Direktoren an den einzelnen Knoten als Stützwerte approximiert. Für ein Element e ergibt dies

$$\mathbf{X}_e^h(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{k=1}^{n_K} \left(N_k(\xi, \eta) \mathbf{X}_{Rk} + \zeta \frac{t}{2} N_k(\xi, \eta) \mathbf{D}_k \right). \quad (2.42)$$

Mit diesem Ansatz ergeben sich Elemente mit *fünf Freiheitsgraden pro Knoten*: drei Verschiebungs- und zwei Drehfreiheitsgrade.

Wie bereits erwähnt, müssen die Ansatzfunktionen mindestens C^0 -stetig sein. Zusammen mit der Forderung, dass bei der Triangulierung zwischen benachbarten Finiten Elementen keine Klaffungen und Überlappungen entstehen dürfen, wird die Geometrie der Referenzfläche durch den Ansatz (2.42) stetig approximiert. Dies ist für das Direktorfeld nicht automatisch gegeben. Je nach Eingabe der Schalengeometrie während einer FE Berechnung kann es vorkommen, dass das Direktorfeld Unstetigkeiten an Elementgrenzen aufweist. Wird die Schalengeometrie über die Ober- und Unterseite der Schale eingegeben, so ergibt sich eine eindeutige Definition des Direktors eines bestimmten Knotens für alle angrenzenden Elemente, siehe Abb. 2.2. Damit wird in diesem Fall das Direktorfeld stetig über das ganze Gebiet definiert. Wird die Schalengeometrie über die Referenzfläche und die Dicke definiert, so werden die Direktoren elementweise mit

$$\mathbf{D}_{ek} = \frac{\mathbf{G}_{(ek)1} \times \mathbf{G}_{(ek)2}}{|\mathbf{G}_{(ek)1} \times \mathbf{G}_{(ek)2}|} \quad (2.43)$$

bestimmt. Dabei können an einem Knoten unterschiedliche Direktoren entstehen. Um ein stetiges Direktorfeld zu erhalten, müssen die unterschiedlichen Direktoren zu einem gemeinsamen Direktor zusammengefaßt werden. Dies kann beispielsweise durch die Mittelung der Direktoren der angrenzenden Elemente erreicht werden. Bei unterschiedlicher Größe der angrenzenden Elemente muss die Mittelung gewichtet erfolgen. Bei den in dieser Arbeit verwendeten Elementen wird das Direktorfeld durch gewichtete Mittelung erzeugt, bei der die Größe der angrenzenden Elemente berücksichtigt wird.

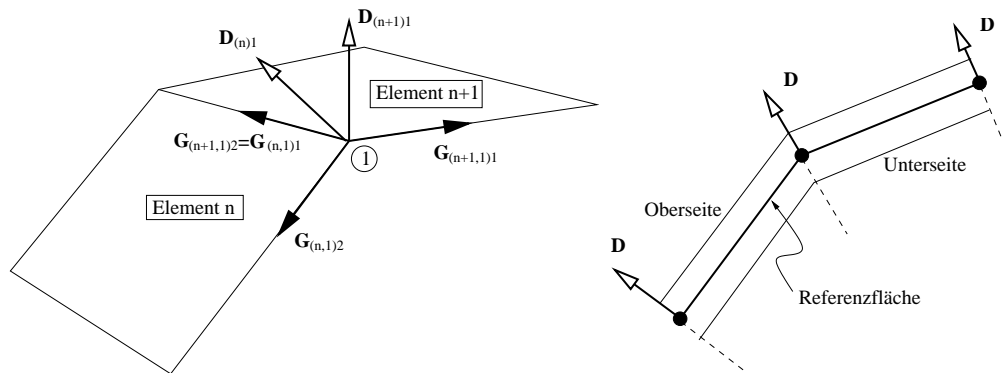


Abbildung 2.2: Definition des Direktorfeldes am Beispiel bilinearer degenerierter Schalelemente.

2.4.2 Versteifungseffekte

Degenerierte Schalelemente mit niedriger Ordnung der Ansatzfunktionen weisen bei reiner Verschiebungsformulierung zwei Versteifungseffekte auf: **Querschubversteifung** und **Membranversteifung**, s. ANDELFINGER [2]. Dabei nimmt die Versteifung mit zunehmender Ansatzordnung ab, so dass ab siebter Ordnung der Ansatzfunktionen auch bei reiner Verschiebungsformulierung keine Versteifungseffekte mehr auftreten, s. z.B. HAKULA ET AL. [37]. Trotzdem werden im Großteil der FE-Untersuchungen nur Elemente mit linearen Ansätzen verwendet. Die Gründe gegen den Einsatz von Elementen höherer Ordnung liegen hauptsächlich im erhöhten Aufwand beim Vernetzen und der größeren Bandbreite der Steifigkeitsmatrix, die im Regelfall zu steigenden Rechenzeiten führt.

Die **Querschubversteifung** (engl.: transverse shear locking) tritt dann auf, wenn ein schubfreier Biegezustand dargestellt werden soll. Da dies bei niedriger Ansatzordnung nicht möglich ist, werden hier parasitäre Schubanteile aktiviert, die zu einer zu hohen inneren Verzerrungsenergie führen.

Die **Membranversteifung** (engl.: membrane locking) wird bei Biegung von gekrümmten Schalen, d.h. bei Schalelementen ab biquadratischer Ansatzordnung, beobachtet. Hier werden bei Darstellung reiner Biegung parasitäre Membrananteile aktiviert.

Zur Vermeidung von Versteifungseffekten existieren unterschiedliche Ansätze. Die einfachste Möglichkeit stellt die sogenannte **Unterintegration** oder auch **reduzierte Integration** dar. Da die Integrale beim Aufstellen des algebraischen Gleichungssystems im Rahmen einer FE-Lösung numerisch bestimmt werden, kann eine Unterintegration besonders einfach durchgeführt werden. Allerdings führt diese Methode zu unerwünschten Kinematiken. Wesentlich weniger Kinematiken weist die **selektive Unterintegration** auf, bei der nur bestimmte Verzerrungs- bzw. Spannungsanteile reduziert integriert werden. Diese Methode ist allerdings auf Materialgesetze beschränkt, die eine Entkopplung von Biege- und Schubanteilen erlauben.

In den letzten Jahren hat sich eine weitere Möglichkeit zur Vermeidung von Versteifungseffekten durchgesetzt: direkte Modifikation der Verzerrungsverläufe. Hier unterscheidet man zwischen dem Konzept der **angenommenen Verzerrungen** kurz **ANS** (engl.: *assumed natural strain*) und dem Konzept der **erweiterten Verzerrungen** kurz **EAS** (engl.: *enhanced assumed strain*).

Eine umfassende Untersuchung zum Einsatz unterschiedlicher Konzepte ist beispielsweise bei HAUPTMANN [38] gegeben. Dort zeigt sich, dass der Einsatz der **ANS**-Methode bei degenerierten Schalen der Ansatzordnungen bilinear, biquadratisch und bikubisch meist sehr gute Ergebnisse liefert. Der Einsatz der **EAS**-Methode führt lediglich bei Problemen mit stark dominierenden Membranspannungen zu einer nennenswerten Verbesserung. Aus diesen Gründen werden in der vorliegenden Arbeit ausschließlich **ANS**-Elemente verwendet.

Bilineares ANS4 Element

Bei dem hier verwendeten bilinearen 4-Knoten Schalenelement ANS4 werden die üblichen multiplikativen Lagrange Ansatzfunktionen

$$N_k = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_k)(1 + \eta\eta_k) \quad k = 1 \dots 4 \text{ Knotennummer} \quad (2.44)$$

verwendet. Dieses Element ist sehr robust, zeigt allerdings bei reiner Verschiebungsformulierung insbesondere bei dünnwandigen Schalenstrukturen deutliche Versteifungstendenzen. Die **ANS**-Methode wurde von HUGHES UND TEZDUYAR [46] erstmals bei diesem Element angewendet und anschließend von DVORKIN UND BATHE [25] formal begründet. Die Querschubverzerrungen $E_{\xi\zeta}$ und $E_{\eta\zeta}$ werden bei diesem Element konstant in ihrer Wirkungsrichtung ξ oder η und jeweils linear in der Querrichtung angenommen. Dadurch entspricht diese Vorgehensweise auch einer selektiv reduzierten Integration. In Abb. 2.3 ist die Lage der Knoten und der Integrationspunkte dargestellt.

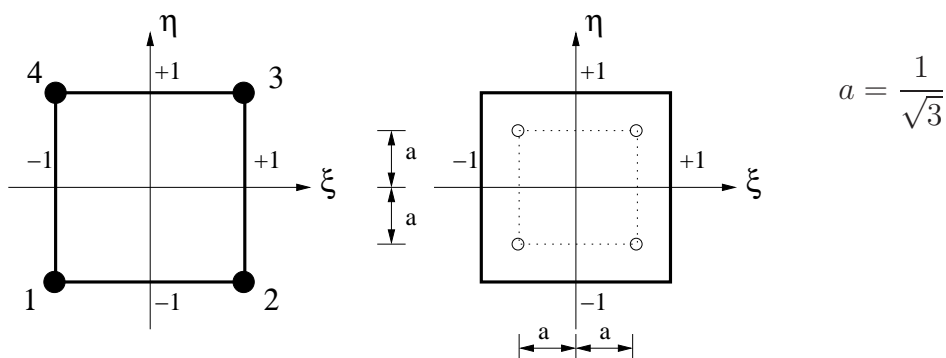


Abbildung 2.3: Lage der Knoten und der Integrationspunkte (vollständige Integration) für das bilineare Element ANS4 in natürlichen Koordinaten ξ, η .

Biquadratisches MITC9 Element

Das 9-Knoten Element mit vollständigen biquadratischen Lagrange Ansätzen

$$N_k = \left[\frac{1}{2} \xi \xi_k (1 + \xi \xi_k) + (1 - \xi^2)(1 - \xi_k^2) \right] \cdot \left[\frac{1}{2} \eta \eta_k (1 + \eta \eta_k) + (1 - \eta^2)(1 - \eta_k^2) \right] \quad k = 1 \dots 9 \text{ Knotennummer} \quad (2.45)$$

zeigt bei reiner Verschiebungsformulierung leichte Anzeichen zum Versteifen. Zur Behebung von Versteifungseffekten werden hier nach dem Vorschlag von BUCALEM UND BATHE [20] nicht nur die Querschubanteile sondern auch die Membran- und Biegeverzerrungsanteile modifiziert. Bei den Querschubanteilen werden analog zum Element ANS4 die Verzerrungen $E_{\xi\zeta}$ und $E_{\eta\zeta}$ in ihrer Wirkungsrichtung eine Ordnung niedriger - hier linear, und in der Querrichtung quadratisch approximiert. Zusätzlich werden die Schubverzerrungen $E_{\xi\eta}$ in der Schalenebene bilinear interpoliert. In Abb. 2.4 ist die Lage der Knoten und der Integrationspunkte dargestellt.

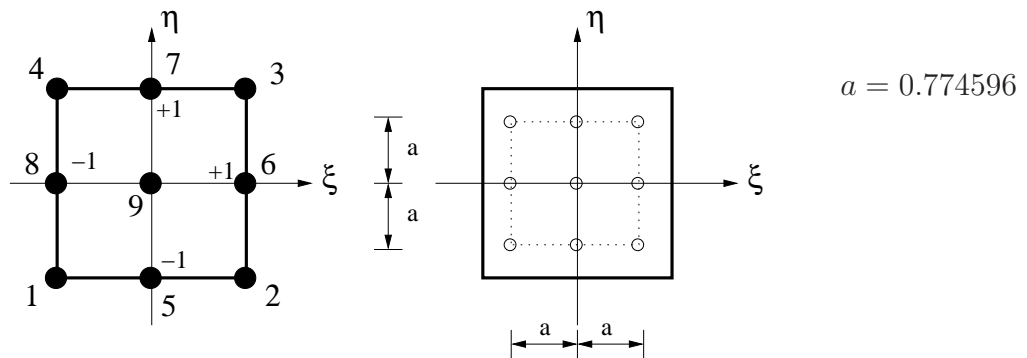


Abbildung 2.4: Lage der Knoten und der Integrationspunkte (vollständige Integration) für das biquadratische Element MITC9 in natürlichen Koordinaten ξ, η .

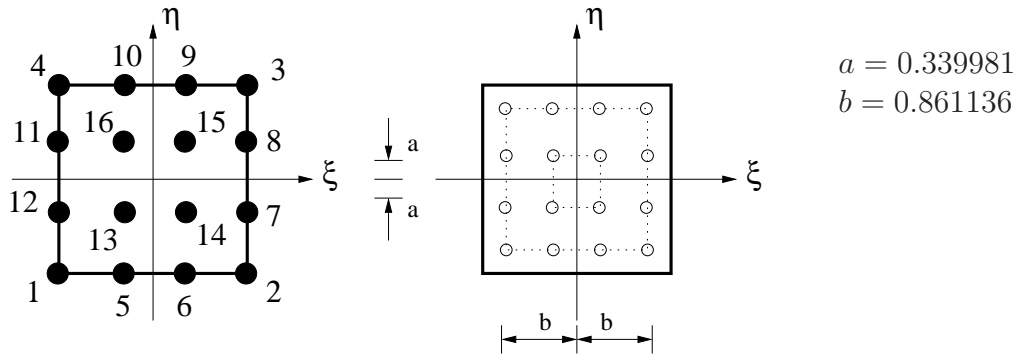


Abbildung 2.5: Lage der Knoten und der Integrationspunkte (vollständige Integration) für das bikubische Element MITC16 in natürlichen Koordinaten ξ, η .

Bikubisches MITC16 Element

Das 16-Knoten Schalenelement mit vollständigen bikubischen Lagrange Ansätzen

Eckknoten:

$$N_k = \frac{81}{256} \left(\xi^2 - \frac{1}{9} \right) \left(\eta^2 - \frac{1}{9} \right) (1 \pm \xi)(1 \pm \eta) \quad k = 1 \dots 4$$

Seitenknoten:

$$N_k = -\frac{243}{256} \left(\xi^2 - 1 \right) \left(\eta^2 - \frac{1}{9} \right) \left(\frac{1}{3} \pm \xi \right) (1 \pm \eta) \quad k = 5, 6, 9, 10$$

$$N_k = -\frac{243}{256} \left(\xi^2 - \frac{1}{9} \right) \left(\eta^2 - 1 \right) (1 \pm \xi) \left(\frac{1}{3} \pm \eta \right) \quad k = 7, 8, 11, 12$$

Innenknoten:

$$N_k = \frac{729}{256} \left(\xi^2 - 1 \right) \left(\eta^2 - 1 \right) \left(\frac{1}{3} \pm \xi \right) \left(\frac{1}{3} \pm \eta \right) \quad k = 13 \dots 16$$

zeigt eigentlich auch ohne weitere Modifikationen der Verzerrungsverläufe kaum Anzeichen zum Versteifen. Um ein gänzlich versteifungsfreies Element zu erhalten, werden analog zu MITC9 nach dem Vorschlag von BUCALEM UND BATHE [20] die Querschubverzerrungen und die Membran- und Biegeverzerrungen in ihrer Wirkungsrichtung eine Ordnung niedriger - hier quadratisch, und quer dazu kubisch approximiert. In Abb. 2.5 ist die Lage der Knoten und der Integrationspunkte dargestellt.

Die oben genannten Elemente wurden unter anderem von HAUPTMANN [38] anhand von Testbeispielen mit sowohl ebener als auch gekrümmter Geometrie auf die Konvergenz, Robustheit und Effizienz bei linearen und nichtlinearen Berechnungen untersucht. Das Fazit seiner Untersuchungen war, dass sich das biquadratische Element MITC9 in diesen Testbeispielen hinsichtlich aller drei Kriterien im Durchschnitt als optimal erwiesen hat. Das bilineare Element ANS4 ist zwar etwas robuster, z.B. bei nichtlinearen Berechnungen mit Knicken in der Verformungsfigur, konvergiert aber we-

sentlich langsamer. Das bikubische Element MITC16 liefert eine kaum nennenswerte Verbesserung der Konvergenzgeschwindigkeit gegenüber dem biquadratischen Element, erfordert aber einen unverhältnismäßig höheren Rechenaufwand. Bei den Beispielen wurden in [38] mäßig dicke Schalen mit einem $R/t \approx 100$ verwendet. In der vorliegenden Arbeit werden hingegen wesentlich dünnwandigere Schalen untersucht. Da die Sensitivität gekrümmter Schalen gegenüber Geometrieabweichungen mit zunehmender Schlankheit zunimmt, kann die Übertragbarkeit der Ergebnisse von HAUPTMANN nicht automatisch angenommen werden. Gerade beim linearen Element ANS4 führt eine Vernetzung einer gekrümmten Geometrie zu einer Facettierung, was unter Umständen zu einer weiteren Verschlechterung des Konvergenzverhaltens führen kann. Dies wird in der vorliegenden Arbeit an Beispielen von Kreiszyinderschalen untersucht.

Kapitel 3

Behandlung von Stabilitätsproblemen mit Hilfe der FEM

An dieser Stelle werden ausgewählte FE-Algorithmen zur Behandlung von Stabilitätsproblemen kurz vorgestellt.

3.1 Kurvenverfolgung

Wie in Abschnitt 2.3 erwähnt, ist die Konvergenz des Newton-Raphson Verfahrens bei der Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems (2.38) auf Bereiche mit positiver Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_T bei Laststeuerung oder Bereiche mit monoton anwachsenden Verschiebungen bei Verschiebungssteuerung beschränkt. Die Bestimmung von Last-Verformungspfaden mit einem nicht-monotonen Verlauf sowohl hinsichtlich der Last als auch der Verschiebungen ist nur mit Hilfe sogenannter Kurvenverfolgungsalgorithmen, auch unter dem Begriff *Bogenlängenverfahren* bekannt, möglich. Seit der ersten Arbeit von RIKS [68] sind in den letzten Jahrzehnten einige Arbeiten hierzu erschienen, z.B. RAMM [65], SCHWEIZERHOF UND WRIGGERS [75]. Eine umfassende Darstellung unterschiedlicher Verfahren und Algorithmen zur Kurvenverfolgung ist beispielsweise in SCHWEIZERHOF [76] enthalten.

Die Grundidee dieser Verfahren besteht darin, den Lastparameter λ als eine weitere Unbekannte einzuführen. Dies geschieht formal durch Erweitern des Gleichungssystems (2.34) mit einer Zwangsbedingung $f(\mathbf{d}, \lambda)$:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{G}(\mathbf{d}, \lambda) \\ f(\mathbf{d}, \lambda) \end{Bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (3.1)$$

Nach Linearisierung erhält man folgendes im Allgemeinen unsymmetrische Gleichungs-

system

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_T & -\mathbf{f}^{ext} \\ \nabla_{\mathbf{d}} f & \frac{\partial f}{\partial \lambda} \end{pmatrix}_i \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{d} \\ \Delta \lambda \end{Bmatrix}_{i+1} = - \begin{Bmatrix} \mathbf{G} \\ f \end{Bmatrix}_i, \quad (3.2)$$

wobei die rechte Seite folgendermaßen definiert ist

$$- \begin{Bmatrix} \mathbf{G} \\ f \end{Bmatrix}_i = - \begin{Bmatrix} \mathbf{f}^{int}(\mathbf{d}_i) - \lambda_i \mathbf{f}^{ext} \\ f(\mathbf{d}_i, \lambda_i) \end{Bmatrix}. \quad (3.3)$$

Zur Lösung von (3.2) kann der Verschiebungszuwachs in zwei Anteile aufgespalten werden

$$\Delta \mathbf{d}_{i+1} = \Delta \lambda_{i+1} \Delta \mathbf{d}^I + \Delta \mathbf{d}^{II}. \quad (3.4)$$

Die einzelnen Anteile \mathbf{d}^I und \mathbf{d}^{II} können dann mit Hilfe der ersten Gleichungen in (3.2) bestimmt werden. Diese werden umgeschrieben, sodass nun zwei einzelne Gleichungssysteme

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{d}_i) \Delta \mathbf{d}^I = \mathbf{f}^{ext} \quad \text{und} \quad \mathbf{K}_T(\mathbf{d}_i) \Delta \mathbf{d}^{II} = \mathbf{f}^{int}(\mathbf{d}_i) - \lambda_i \mathbf{f}^{ext} \quad (3.5)$$

gelöst werden müssen. Anschließend wird der unbekannte Lastzuwachs $\Delta \lambda$ für den nächsten Iterationsschritt mit

$$\Delta \lambda_{i+1} = \frac{f_i + \nabla_{\mathbf{d}} f_i \cdot \Delta \mathbf{d}^{II}}{\left(\frac{\partial f}{\partial \lambda} \right)_i + \nabla_{\mathbf{d}} f_i \cdot \Delta \mathbf{d}^I} \quad (3.6)$$

bestimmt. Im Gegensatz zum Newton-Raphson Verfahren benötigt das Bogenlängenverfahren am Beginn der Iteration in jedem Lastschritt einen Prädiktorschritt. Hierzu muss vom Anwender ein Bogenlängeninkrement Δs (daher auch der Name des Verfahrens) vorgegeben werden. Aus Δs kann dann in einem Prädiktorschritt der Betrag des Prädiktors für das Lastinkrement $\Delta \lambda^*$ bestimmt werden. Das Vorzeichen des Lastinkrements muss separat bestimmt werden. Bei ansteigenden Last-Verformungspfaden muss dieses Inkrement positiv, andernfalls negativ gewählt werden. Weist die Last-Verformungskurve nur Durchschlagpunkte auf, Punkte 2 und 5 in Abb. 3.1 – auch Lastumkehrpunkte genannt – so kann zur Bestimmung des korrekten Vorzeichens die Determinante der Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_T herangezogen werden:

$$\text{sign}(\Delta \lambda^*) = \text{sign}(\det \mathbf{K}_T). \quad (3.7)$$

Das Vorzeichen der Determinante ändert sich immer dann, wenn sich die Anzahl der negativen Diagonalelemente der Steifigkeitsmatrix ändert.

Treten unterhalb der Durchschlagpunkte Verzweigungspunkte auf, Punkte 1 und 6 in Abb. 3.1, so kann diese Vorgehensweise versagen, da dann die Determinante der Steifigkeitsmatrix bereits unterhalb des Durchschlagpunktes nach Überschreiten des Verzweigungspunktes ihr Vorzeichen ändert. In diesem Fall empfiehlt sich die Verwendung des Steifigkeitsparameters S_P nach BERGAN [16]:

$$S_P = \frac{\Delta \mathbf{d}_0^T \mathbf{f}^{ext}}{\Delta \mathbf{d}_n^T \mathbf{f}^{ext}} \quad (3.8)$$

mit

$\Delta \mathbf{d}_0$... Bezugsverschiebungsinkrement
 $\Delta \mathbf{d}_n$... aktuelles Verschiebungsinkrement
 \mathbf{f}^{ext} ... Einheitslastvektor

Da der Steifigkeitsparameter S_P sein Vorzeichen erst nach Durchfahren des Durchschlagpunktes ändert, kann der Verzweigungspunkt problemlos durchfahren werden. Problematisch bei dieser Vorgehensweise sind die sogenannten Verschiebungsumkehrpunkte, Punkte 3 und 4 in Abb. 3.1.

Zur weitestgehend sicheren Bestimmung des korrekten Vorzeichens zur Steuerung eines Bogenlängenverfahrens wurde von SCHWEIZERHOF [76] daher vorgeschlagen, beide Kriterien zu kombinieren. Demnach muss das Vorzeichen des Lastinkrements erst dann geändert werden, wenn sich gleichzeitig die Anzahl der negativen Diagonalelemente der Steifigkeitsmatrix und das Vorzeichen des Steifigkeitsparameters S_P ändern. Die Skizze in Abb. 3.1 zeigt, dass bei dieser Vorgehensweise das Vorzeichen des Lastparameters λ korrekterweise nur an Punkten 2 und 5 geändert wird.

Zur Bestimmung von Verzweigungspunkten, aber auch zur genauen Bestimmung von Durchschlagpunkten, die durch das Bogenlängenverfahren zwar "durchfahren" aber nicht genau bestimmt werden, sind andere Algorithmen erforderlich. Sie basieren auf Eigenwertproblemen, die im nächsten Abschnitt dargestellt werden.

3.2 Eigenwertprobleme bei linearen und nichtlinearen Berechnungen

3.2.1 Lineare Eigenwertprobleme

Bei Untersuchungen zur Strukturstabilität werden Stabilitätslasten oder -punkte¹ gesucht. Wie bereits in Kapitel 1 dargestellt sind solche Punkte des Lösungspfades dadurch ausgezeichnet, dass hier die 2. Variation des Potentials verschwindet. Eine mechanisch anschauliche Interpretation liefert PFLÜGER [63]: *an einem Stabilitätspunkt*

¹Manchmal werden diese Punkte im Schrifttum auch als Instabilitätspunkte bezeichnet, womit ausgedrückt werden soll, dass die Struktur an diesen Punkten ihre "Stabilität verliert", siehe z.B. WRIGGERS [94]

3.2. EIGENWERTPROBLEME BEI LINEAREN UND NICHTLINEAREN BERECHNUNGEN

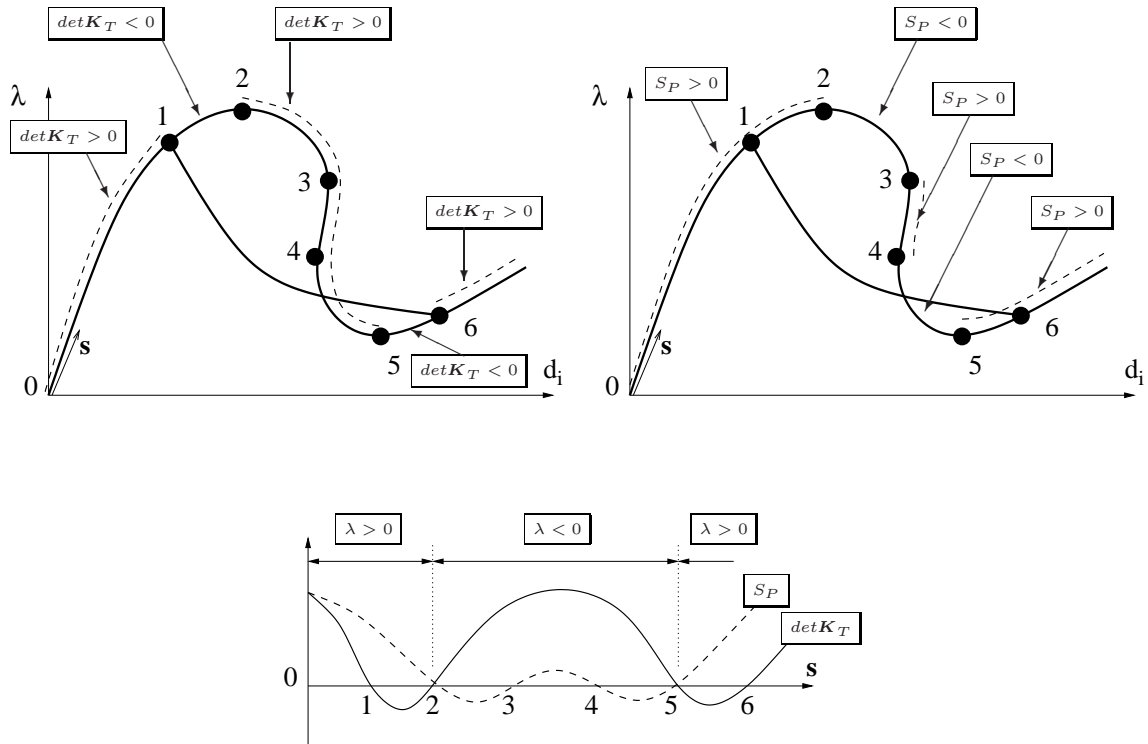


Abbildung 3.1: Schematische Darstellung der Vorzeichenänderung der Determinante der Steifigkeitsmatrix $\det \mathbf{K}_T$ und des Steifigkeitsparameters S_P nach BERGAN [16] anhand einer typischen Last-Verformungskurve. Gestrichelte Linien markieren die positiven Bereiche der jeweiligen Parameter.

existiert ein weiterer zum bekannten Gleichgewichtszustand (Grundzustand) benachbarter Gleichgewichtszustand (Nachbarzustand) mit gleichem Lastniveau und unterschiedlichen Verformungen. Die Anwendung des Prinzips auf das mit FE diskretisierte und linearisierte Problem liefert am Stabilitätspunkt $\lambda = \lambda_{cr}$

$$\mathbf{K}_T(\lambda_{cr}) \Delta \mathbf{d}^* = \mathbf{0}. \quad (3.9)$$

Hierbei stellt der Verschiebungsvektor $\Delta \mathbf{d}^*$ die Verschiebungstörung vom Grund- in den Nachbarzustand dar. Gl. (3.9) hat nichttriviale Lösungen nur, wenn gilt

$$\det \mathbf{K}_T(\lambda_{cr}) = 0. \quad (3.10)$$

Das bedeutet, dass die Suche nach Stabilitätspunkten mathematisch gesehen eine Suche nach singulären Punkten der tangentiellen Steifigkeitsmatrix ist. Daher werden die Stabilitätspunkte auch als singuläre Punkte des Lösungspfades bezeichnet. Die Forderung (3.10) repräsentiert das Standard Eigenwertproblem

$$[\mathbf{K}_T(\lambda_{cr}) - \mu \mathbf{1}] \Phi = \mathbf{0}. \quad (3.11)$$

Demnach liegt ein Stabilitätspunkt vor, wenn mindestens einer der Eigenwerte μ_i gleich Null ist, wobei der dazugehörige Eigenvektor Φ_i die Beulform Φ_{cr} repräsentiert.

Da eine nichtlineare Berechnung des gesamten Lösungspfades je nach Modellgröße sehr rechenintensiv sein kann, werden in den Ingenieurwissenschaften oft **lineare Stabilitätsanalysen** verwendet. Dabei werden die Verschiebungen \mathbf{d} , die im allgemeinen nichtlinear vom Laststeuerparameter λ abhängen, bezüglich λ in eine Reihe entwickelt, die üblicherweise nach dem linearen Glied abgebrochen wird. Bei einer Entwicklung an einem bekannten Gleichgewichtspunkt $(\bar{\lambda}, \bar{\mathbf{d}})$ ergibt sich formal

$$\mathbf{d}(\lambda) = \bar{\mathbf{d}} + \Lambda \left. \frac{d\mathbf{d}}{d\lambda} \right|_{\bar{\lambda}} + \dots \quad (3.12)$$

Dies führt zum folgenden Ausdruck für die Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{d}) = \mathbf{K}_{T0}(\bar{\mathbf{d}})|_{\bar{\lambda}} + \Lambda \mathbf{K}_{T1}(\bar{\mathbf{d}})|_{\bar{\lambda}}. \quad (3.13)$$

Im Schrifttum werden oft folgende Bezeichnungen für die Zerlegung der Steifigkeitsmatrix verwendet

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_T &= \mathbf{K}_L + \Lambda \mathbf{K}_{NL} \\ &= \mathbf{K}_L + \Lambda(\mathbf{K}_d + \mathbf{K}_\sigma). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Damit soll zum Ausdruck gebracht werden, dass die Matrix \mathbf{K}_T in einen linearen Teil \mathbf{K}_L und einen nichtlinearen Teil \mathbf{K}_{NL} zerlegt wird. Dabei sind die Begriffe linear und nichtlinear an dieser Stelle etwas irreführend, da der Teil \mathbf{K}_L offensichtlich das konstante Glied und der Teil \mathbf{K}_{NL} die linearisierte Änderung von \mathbf{K}_T darstellt, die zusammen mit dem Entwicklungsparameter Λ das lineare Glied darstellen. Der Teil \mathbf{K}_{NL} kann seinerseits in eine sogenannte *Anfangsverschiebungsmatrix* \mathbf{K}_d und eine *Anfangsspannungsmatrix* \mathbf{K}_σ aufgespalten werden.

Mit dem Ansatz (3.14) kann nun ein Eigenwertproblem für den Parameter Λ formuliert werden:

$$[\mathbf{K}_L + \Lambda \mathbf{K}_{NL}] \Phi = \mathbf{0}. \quad (3.15)$$

Als Lösung erhält man die Lösungspaare (Λ_i, Φ_i) . Der 1. Eigenwert liefert dann die Schätzung für die Stabilitätslast: $\lambda_{cr}^* = \Lambda_1 \approx \lambda_{cr}$ und die 1. Eigenform die Schätzung für die Beulform $\Phi_1 \approx \Phi_{cr}$.

Eine weitere Möglichkeit zur Formulierung eines linearen Eigenwertproblems zur Bestimmung singulärer Punkte stellt die Verwendung der Änderung der Steifigkeitsmatrix $\Delta \mathbf{K}_T$ zwischen zwei Gleichgewichtslagen während einer nichtlinearen Berechnung dar. Die Verwendung von $\Delta \mathbf{K}_T$ anstatt von \mathbf{K}_{NL} führt auf folgendes Eigenwertproblem

$$[\mathbf{K}_T|_{\lambda_n} + \Lambda \Delta \mathbf{K}_T] \Phi = \mathbf{0} \quad \text{mit} \quad \Delta \mathbf{K}_T = \mathbf{K}_T|_{\lambda_{n+1}} - \mathbf{K}_T|_{\lambda_n}. \quad (3.16)$$

Die Schätzung der Stabilitätslast ergibt sich dann zu

$$\lambda_{cr}^* = \lambda_n + \Lambda_1 \Delta\lambda \quad \text{mit} \quad \Delta\lambda = \lambda_{n+1} - \lambda_n. \quad (3.17)$$

Zur Verdeutlichung ist der Sachverhalt in Abb. 3.2 für ein eindimensionales Problem graphisch dargestellt. Es sei angemerkt, dass, wenn das Eigenwertproblem (3.16) für ein unbelastetes System, d.h. bei $\lambda_n = 0$, und mit einem ersten Lastschritt $\Delta\lambda = 1$ gelöst wird, sich dann der gleiche Ausdruck für den singulären Punkt ergibt, wie oben: $\lambda_{cr}^* = \Lambda_1$.

Die Abschätzung des singulären Punktes für nichtlineare Last-Verformungsverläufe ist umso besser, je näher zu diesem Punkt eines der oben dargestellten linearen Eigenwertprobleme ausgewertet wird. Wird das Problem in unmittelbarer Nähe des singulären Punktes ausgewertet, so gilt $\lambda_n \approx \lambda_{cr}$, s. Abb. 3.3.

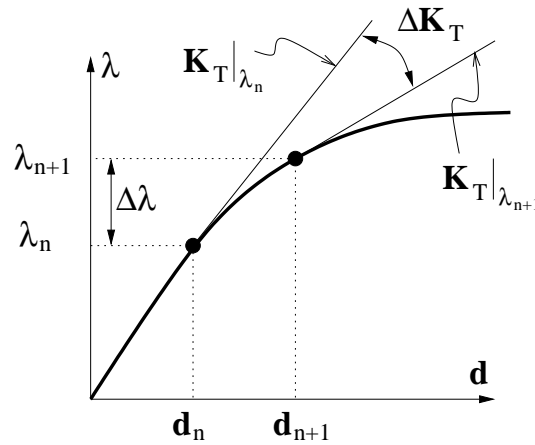


Abbildung 3.2: Zur Bestimmung der Änderung der tangentiellen Steifigkeitsmatrix.

3.2.2 Konsistente Linearisierung und Abschätzung höherer Ordnung

Zur genaueren Bestimmung eines singulären Punktes wird bei HELNWEIN und MANG vorgeschlagen, das Ausgangs-Eigenwertproblem (3.9) konsistent zu linearisieren, s. z.B. [42], [44], [43]. Das **konsistent linearisierte Eigenwertproblem**

$$[\mathbf{K}_T(\lambda) - \Lambda \mathbf{K}'_T(\lambda)] \Phi = \mathbf{0} \quad (3.18)$$

mit der Ableitung der tangentiellen Steifigkeitsmatrix nach dem Lastparameter λ

$$\mathbf{K}'_T(\lambda) = \frac{d\mathbf{K}_T}{d\lambda} \quad (3.19)$$

wird dann dazu verwendet, den Verlauf der Funktion der kritischen Last

$$\lambda_{cr}^*(\lambda) = \lambda + \Lambda_1 \quad (3.20)$$

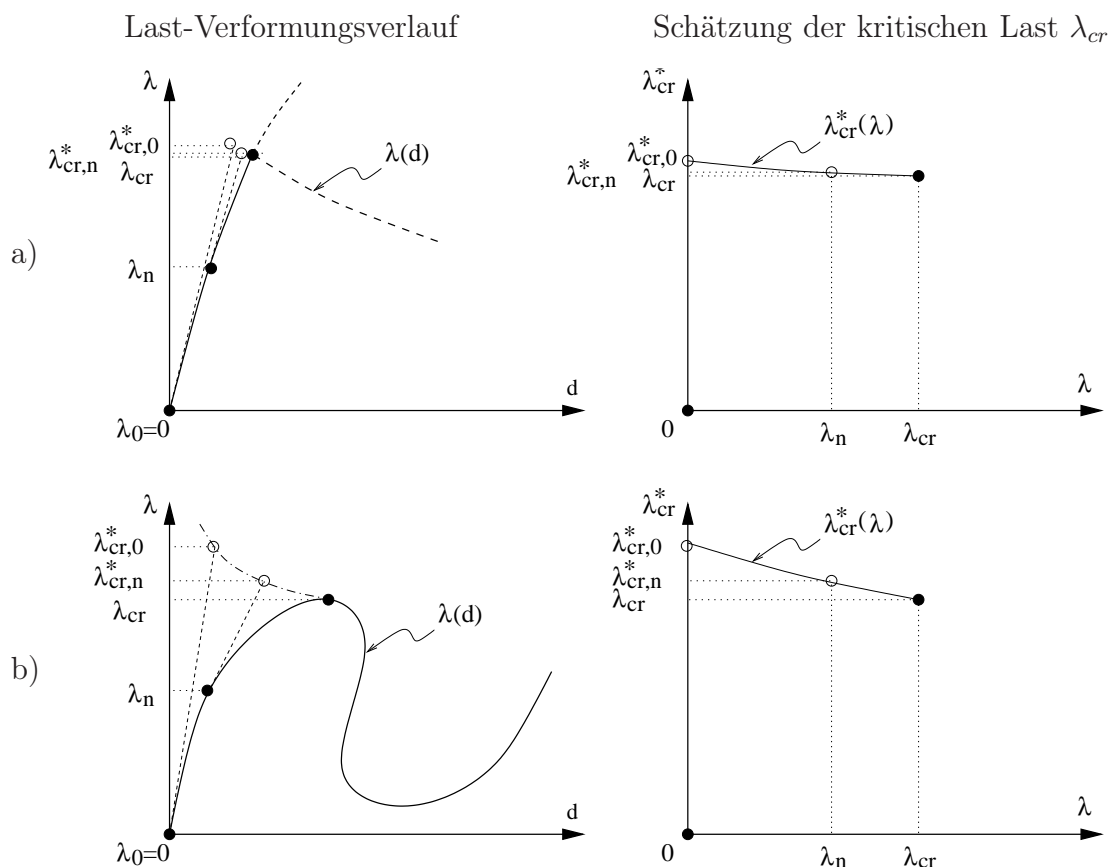


Abbildung 3.3: Schematische Darstellung zur Bestimmung der singulären Punkte bei a) weitgehend linearem und b) ausgeprägt nichtlinearem Vorbeulverhalten.

in Abb. 3.3 abzuschätzen. Hierzu wird das Eigenwertproblem (3.18) nochmals nach dem Lastparameter abgeleitet. Dies führt unter Verwendung der Definition $(\dots)' = d(\dots)/d\lambda$ nach HELNWEIN ET AL. [43] auf folgenden Ausdruck

$$(\lambda_{cr}^* \mathbf{K}'_T + \Lambda \mathbf{K}''_T) \Phi + (\mathbf{K}_T + \Lambda \mathbf{K}'_T) \Phi' = \mathbf{0}. \quad (3.21)$$

Hieraus ergibt sich als Schätzung der "Steigung" $\lambda_{cr}^{* \prime}$ der Funktion $\lambda_{cr}^*(\lambda)$

$$\lambda_{cr}^{* \prime} = -\Lambda \frac{\Phi^T \mathbf{K}''_T \Phi}{\Phi^T \mathbf{K}'_T \Phi}. \quad (3.22)$$

Die Bestimmung der Ableitungen der Steifigkeitsmatrix in der obigen Gleichung ist nicht trivial und ist in HELNWEIN [42] ausführlich dargestellt.

Als eine weitere Verbesserung wird bei HELNWEIN ET AL. ausgehend vom Eigenwert des konsistent linearisierten Eigenwertproblems (3.18) und der Steigung für λ_{cr}^* nach

(3.22) folgende **Abschätzung höherer Ordnung** vorgeschlagen:

$$\text{Durchschlagpunkt: } \lambda_{cr,DP}^* = \lambda + \frac{\Lambda}{1 - \lambda_{cr}^{*'} } \quad (3.23)$$

$$\text{Verzweigungspunkt: } \lambda_{cr,VZP}^* = \lambda + \frac{\Lambda}{1 - \frac{1}{2}\lambda_{cr}^{*'} } \quad (3.24)$$

Bei der Anwendung dieser Vorgehensweise muss nun auch die Art des singulären Punktes *a-priori* bestimmt werden. Am singulären Punkt selbst, d.h. bei $\lambda = \lambda_{cr}$, gilt mit dem Grundlastvektor \mathbf{f}^{ext} :

$$\Phi_{cr}^T \cdot \mathbf{f}^{ext} \begin{cases} = 0 & \Rightarrow \text{einfacher Verzweigungspunkt} \\ \neq 0 & \Rightarrow \text{Durchschlagpunkt} \end{cases} \quad (3.25)$$

Andere Klassifizierungen finden sich z.B. in WAGNER [89].

Ausgehend von der Annahme, dass die Bedingung (3.25) auch in einiger Entfernung vom Stabilitätspunkt bei seiner Schätzung mit dem konsistent linearisierten Eigenwertproblem näherungsweise gilt, wird vorgeschlagen, die Art des maßgebenden singulären Punktes mit Hilfe eines Winkels α^* nach

$$\alpha^* = \arcsin \frac{|\Phi_1^T \cdot \mathbf{f}^{ext}|}{\|\Phi_1^T\| \|\mathbf{f}^{ext}\|} \quad (3.26)$$

zu bestimmen. Der Winkel α^* beschreibt die Abweichung von der Orthogonalität zwischen dem Eigenwert Φ_1 , der die Schätzung der Beulform repräsentiert, und dem Grundlastvektor \mathbf{f}^{ext} . Bei "kleinen" Winkeln α^* liegt ein Verzweigungspunkt und bei "großen" Winkeln α^* ein Durchschlagpunkt vor. Die Unterscheidung zwischen klein und groß wird anhand numerischer Beispielrechnungen untersucht. Dabei wird empfohlen, nicht nur den ersten Eigenwert sondern bis zu 5 niedrigsten Eigenwerte zu betrachten. In HELNWEIN ET AL. wird [43] ausdrücklich darauf hingewiesen, dass diese Vorgehensweise bei großen FE-Modellen und *iterativer* Bestimmung niedriger Eigenwerte versagen kann. Allerdings stellt die iterative Bestimmung die übliche Vorgehensweise bei realitätsnahen Schalenmodellen dar, wodurch die Anwendung der Vorgehensweise nach HELNWEIN/MANG auf "einfache" FE-Modelle, beispielsweise aus Balkenelementen, beschränkt zu sein scheint.

3.2.3 Begleitende Analysen

Es ist offensichtlich, dass die oben dargestellten auf linearen Eigenwertproblemen basierten Verfahren nur für Strukturen mit einem nahezu linearen Vorbeulverhalten ausreichend genaue Vorhersagen der singulären Lasten und den dazugehörigen Beulformen liefern. Bei einem ausgeprägt nichtlinearen Verhalten im Vorbeulbereich ist der Einsatz inkrementell-iterativer Verfahren sinnvoller. Hierzu wird **begleitend** im Rahmen

einer nichtlinearen Berechnung die positive Definitheit der tangentiellen Steifigkeitsmatrix überwacht. Ist ein Gleichgewichtspunkt mit einer negativ definiten Steifigkeitsmatrix gefunden, so kann durch **Bisektion** zwischen diesem Punkt und dem letzten Gleichgewichtspunkt mit positiv definiten Steifigkeitsmatrix der singuläre Punkt genau eingeschachtelt werden, siehe z.B. WAGNER UND WRIGGERS [90].

Zur Detektion der Bereiche mit negativ definiten Steifigkeitsmatrix kann beispielsweise das Standard Eigenwertproblem (3.11) verwendet werden. Da die Bestimmung *aller* Eigenwerte für große Modelle sehr rechenintensiv ist, werden meist nur die niedrigsten Eigenwerte berechnet und überwacht. Vereinfachend können auch die Diagonaleinträge von \mathbf{K}_T nach jeder Gleichgewichtsiteration auf Negativeinträge kontrolliert werden. Es existieren auch Vorschläge, das lineare Beulproblem (3.15) begleitend zu einer nichtlinearen Analyse zu lösen, siehe z.B. BRENDEL UND RAMM [18].

Ist der singuläre Punkt ein Verzweigungspunkt, s. Gl. (3.25), so ist ein Weiterrechnen auf dem Nachbeulpfad nicht so einfach möglich, wie es bei einem Durchschlagpunkt der Fall ist. Der Sekundärpfad kann unter Umständen durch das Hinzuaddieren des Null-Eigenvektors zum letzten konvergierten Verschiebungszustand im Vorbeulbereich erreicht werden. Allerdings zeigen viele Untersuchungen, dass diese Vorgehensweise speziell bei imperfekten Zylinderschalen aufgrund mehrfacher oder knapp hintereinander folgender Verzweigungspunkte zu einem nicht mehr vertretbaren Aufwand führt, siehe z.B. ROTTNER [69].

3.2.4 Direkte Bestimmung singulärer Punkte

Das oben aufgeführte Bisektionsverfahren hat lineare Konvergenzeigenschaften. Von WRIGGERS ET AL. [95], [96] wurde das sogenannte **direkte Verfahren** entwickelt, das eine weitgehend quadratische Konvergenz aufweist. Dazu wird ähnlich dem Bogenlängenverfahren ein erweitertes Gleichungssystem mit zusätzlichen Zwangsbedingungen aufgestellt:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{G}(\mathbf{d}, \lambda) \\ \mathbf{K}_T(\mathbf{d}, \lambda) \Phi \\ l(\Phi) \end{array} \right\} = \mathbf{0}. \quad (3.27)$$

Dabei ergibt sich das Gleichungssystem (3.27²) aus der Überlegung heraus, dass der erste Eigenwert des Standard Eigenwertproblems (3.11) am singulären Punkt den Wert Null annimmt. Die Gleichung (3.27³) sorgt dafür, dass die trivialen Lösungen für den Eigenvektor Φ ausgeschlossen werden. Zur Formulierung des Verfahrens müssen alle Terme in (3.27) konsistent linearisiert werden. Dies ist ausführlich in den oben angegebenen Beiträgen enthalten. Die praktische Anwendung des Verfahrens erfolgt nach folgendem Schema:

1. Zunächst wird der Vorbeulpfad mit dem Bogenlängenverfahren bestimmt.

2. In der Nähe des singulären Punktes wird dann auf das direkte Verfahren umgeschaltet.
3. Zum Start des Verfahrens wird ein *Starteigenvektor* Φ_0 gewählt oder berechnet.
4. Mit Φ_0 wird iterativ der singuläre Punkt bestimmt.

Es sind zwei Schwächen des Verfahrens sofort erkennbar: zum einen wird das direkte Verfahren in einer nicht näher definierten "Nähe" des singulären Punktes eingeschaltet, zum anderen muss ein Starteigenvektor gewählt werden. Untersuchungen an imperfekten Kreiszyklindern mit realer Geometrie zeigen, dass das Verfahren dort oft divergiert, wenn der Starteigenvektor nicht in unmittelbarer Nähe des Stabilitätspunktes berechnet wird, siehe z.B. KNEBEL [50]. Der Grund hierfür liegt in der oft auftretenden Verschiebung der Eigenwerte in direkter Nähe zum Stabilitätspunkt. Dabei ändert sich die Reihenfolge der Eigenwerte und der zugehörigen Eigenvektoren derart, dass der erste Eigenvektor Φ_1 eines Eigenwertproblems bei einer Laststufe weit entfernt vom singulären Punkt nicht mehr zum ersten Eigenwert am singulären Punkt selbst gehört. Der Eigenwert und damit der Eigenvektor verschieben sich in der Reihenfolge. Dies führt dazu, dass das direkte Verfahren erst nah am gesuchten Punkt erfolgreich eingesetzt werden kann. Der Mehraufwand lohnt sich dann oft nicht, da der Stabilitätspunkt effizienter mit dem einfachen Bisektionsverfahren bestimmt werden kann.

3.3 Adaptivität

Die adaptive Netzverfeinerung, sogenannte *h-Adaptivität*, wird im folgenden zur Beschleunigung der Konvergenz bei der Bestimmung von Verzweigungslasten und Beulformen verwendet. Daher sollen an dieser Stelle kurz die wesentlichen Aspekte dieser Methode erläutert werden.

Im Falle stark unterschiedlicher Gradienten einer Lösung im Berechnungsgebiet, z.B. lokaler Spannungskonzentrationen, kann eine adaptive Netzverfeinerung zur Verbesserung der Konvergenzgeschwindigkeit der Lösung führen. Als Fehlerindikatoren können *a-posteriori* Fehlerschätzer, die auf einer FE-Lösung eines zu verfeinernden Netzes basieren, verwendet werden. Hierfür sind unterschiedliche Formulierungen bekannt: residuelle Fehlerschätzer, s. z.B. BABUSKA, STROUBOULIS [8], STEIN ET AL. [78], wie auch glättungsbasierte Fehlerschätzer, s. z.B. ZIENKIEWICZ/ZHU [99].

Der Gesamtfehler e kann als Summe der Fehler in den einzelnen Elementen i bestimmt werden:

$$e_i = \sum_{i=1}^{n_{el}} e_i. \tag{3.28}$$

Meist wird hierzu die Energienorm des Fehlers verwendet. Diese kann für den exakten

Fehler im Element i folgendermaßen angegeben werden

$$e_i = \|\mathbf{e}_{ex}\|_i = \left(\int_{\mathcal{B}_i^h} (\boldsymbol{\sigma}_i - \boldsymbol{\sigma}_i^h)^T (\boldsymbol{\epsilon}_i - \boldsymbol{\epsilon}_i^h) dV_i \right)^{1/2}. \quad (3.29)$$

mit \mathcal{B}_i^h als Gebiet des Elements i , über das integriert werden muss. Hierbei stellen $\boldsymbol{\sigma}_i$ und $\boldsymbol{\epsilon}_i$ die exakten Werte der Spannungen bzw. der Verzerrungen im Element dar. Die Größen mit dem Index h stehen für die mit der FEM bestimmten Werte.

Während der *Gesamtfehler* zur Formulierung eines Abbruchkriteriums der Verfeinerungssequenz genutzt werden kann, wird die *Fehlerverteilung* zur Beurteilung der lokalen Genauigkeit und als Indikator zur adaptiven Netzverfeinerung verwendet. Hierfür kann ein normiertes Fehlermaß η_i eingeführt werden

$$\eta_i = \frac{e_i}{e_{max}}. \quad (3.30)$$

e_{max} steht hierbei für den maximalen Elementfehler im Berechnungsgebiet und e_i stellt den Fehler im momentan betrachteten Element dar. Mit der Definition einer Schranke $\tilde{\eta}$ wird die Netzverfeinerung nur dort vorgenommen, wo die Elementfehler größer als diese Schranke sind:

$$\eta_i \geq \tilde{\eta} \rightarrow \text{verfeinern}. \quad (3.31)$$

Man kann zeigen, dass bei Verwendung bilinearer Elemente die Wahl

$$\tilde{\eta} = \frac{1}{4} \quad (3.32)$$

die optimale Konvergenzgeschwindigkeit liefert. Dies ergibt folgenden Algorithmus für die Lösung elastostatischer Probleme unter Verwendung von Schalenelementen:

1. Start mit einem groben Netz (im Extremfall mit einem Element).
2. Lösung der Gleichgewichtsgleichung \rightarrow Ergebnis: Vektor der Knotenverschiebungen bzw. -verdrehungen \mathbf{d}
3. Bestimmung der FE Spannungen mit $\boldsymbol{\sigma}^h = \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{d}$
4. Bestimmung der Fehlerverteilung e_i und des maximalen Fehlers e_{max} ; je nach Formulierung unterschiedlich (s.unten)
5. *Globaler Fehler* $<$ *Abbruchkriterium* \rightarrow ENDE, sonst:
6. Elementweise Bestimmung des Fehlermaßes η_i
7. Adaptive Netzverfeinerung, wenn gilt

$$\eta_i \geq \tilde{\eta}.$$

Die unterschiedlichen Strategien zur Netzverfeinerung sind im folgenden dargestellt.

8. Weiter mit Punkt 2.

Glättungsbasierter Indikator nach Zienkiewicz/Zhu

Die Spannungen aus einer FE Berechnung sind im Allgemeinen unstetig an den Elementgrenzen. Die zu bestimmenden, exakten Spannungen sind hingegen stetig. Demnach erscheint es sinnvoll, zur Schätzung des Fehlers ausgehend von den berechneten Spannungen einen stetigen Verlauf zu generieren. Die neuen, kontinuierlich verteilten Spannungen werden als verbesserte Größen bezeichnet. Mit den verbesserten Spannungen wird nun anstatt des exakten Fehlers e_{ex} eine Näherung e^h bestimmt

$$e_i^2 = \|e^h\|_i^2 = \int_{\mathcal{B}_i^h} (\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}^h)^T (\boldsymbol{\epsilon}^* - \boldsymbol{\epsilon}^h) dV_i. \quad (3.33)$$

Dies kann mit der Definition des Fehlers in den Spannungen

$$e_\sigma = \boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}^h \quad (3.34)$$

unter Ausnutzung des Materialgesetzes auch in einer kompakteren Form als

$$e_i^2 = \int_{\mathcal{B}_i^h} \mathbf{e}_\sigma^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{e}_\sigma dV_i \quad (3.35)$$

geschrieben werden.

Das kontinuierliche Spannungsfeld der verbesserten Spannungen wird in den Elementen mit denselben Ansatzfunktionen interpoliert, die auch für die Elementformulierung verwendet werden. Zur Bestimmung der verbesserten Knotenspannungen werden die Spannungswerte an den sogenannten *superkonvergenten Punkten* verwendet. Die superkonvergenten Punkte zeichnen sich dadurch aus, dass die Spannungen dort eine größere Genauigkeit haben als im Rest des Gebiets. Dadurch konvergiert der Spannungsfehler an diesen Punkten schneller gegen Null. Bei rechteckigen Elementen mit bilinearen Ansätzen liegen die superkonvergenten Punkte in Elementmitte.

Bei der Bestimmung verbesserter Knotenspannungen kann unterschiedlich vorgegangen werden. Die einfachste Methode ist die einfache Mittelung der superkonvergenten Spannungen aller am betrachteten Knoten angrenzender Elemente. Diese Methode kann durch eine Wichtung entsprechend der Elementgröße modifiziert werden. Allerdings kann damit bei unregelmäßigen Netzen kein linearer Verlauf der Spannungen im Berechnungsgebiet wiedergegeben werden. Daher wurde von ZIENKIEWICZ und ZHU [99] die SCRP- Methode (super convergent recovery patch) vorgestellt. Dort wird vorgeschlagen, unter Verwendung der superkonvergenten Punkte einen sogenannten "Recovery Patch" um den betrachteten Knoten i herum zu definieren. Auf diesem "Patch" werden dann mittels der Methode der kleinsten Quadrate die verbesserten Werte $\boldsymbol{\epsilon}_i^*$ und $\boldsymbol{\sigma}_i^*$ bestimmt. Zur ausführlichen Darstellung wird an dieser Stelle auf [99] verwiesen. Alle oben genannten Verfahren sind z.B. in RICCIUS [67] oder CIRAK [21] dargestellt und bewertet.

Residueller Indikator nach Babuska/Miller

Für zweidimensionale lineare elliptische Randwertprobleme wurde von BABUSKA/MILLER [9] basierend auf Residuen im Elementinneren \mathbf{R} und an den Elementrändern \mathbf{J} folgender Fehlerschätzer des Fehlers im Element i hergeleitet

$$e_i^2 \leq \frac{h_i^2}{24Ep} \|\mathbf{R}\|_{\mathcal{B}_i^h}^2 + \frac{h_i}{24Ep} \|\mathbf{GJ}\|_{\partial\mathcal{B}_i^h}^2 \quad (3.36)$$

h_i ... charakteristische Länge des i -ten Elements

E ... Elastizitätsmodul

p ... Polynomordnung der Ansatzfunktionen

Bei Elementen mit bilinearen Ansätzen ($p = 1$) ergeben sich die residuellen Anteile im Inneren der Elemente $\|\mathbf{R}\|_{\mathcal{B}_i^h}^2$ zu Null, wenn keine Elementlasten vorhanden sind und die Elemente eine rechteckige Form besitzen. Bei Vernachlässigung dieser Anteile wird von RUST [72] und STEIN ET AL. [78] folgender Indikator zur Verfeinerung von Netzen mit bilinearen Schalenelementen vorgeschlagen:

$$e_i^2 = e_{i,M}^2 + e_{i,B}^2 + e_{i,S}^2 \quad (3.37)$$

mit dem Membrananteil

$$e_{i,M}^2 = \frac{t_i}{K_{i,M}^2} \int_{\partial\mathcal{B}_i^h} \mathbf{J}(\sigma_{h,M})^T \mathbf{J}(\sigma_{h,M}) ds \quad (3.38)$$

dem Biegeanteil

$$e_{i,B}^2 = \frac{t_i^3}{K_{i,B}^2} \int_{\partial\mathcal{B}_i^h} \mathbf{J}(\sigma_{h,B})^T \mathbf{J}(\sigma_{h,B}) ds \quad (3.39)$$

und dem Schubanteil

$$e_{i,S}^2 = \frac{t_i}{K_{i,S}^2} \int_{\partial\mathcal{B}_i^h} \mathbf{J}(\sigma_{h,S})^T \mathbf{J}(\sigma_{h,S}) ds. \quad (3.40)$$

Die einzelnen Stoffkonstanten K_i sind folgendermaßen definiert:

$$K_{i,M} = \frac{Et_i}{1 - \nu^2}; \quad K_{i,B} = \frac{Et_i^3}{12(1 - \nu^2)}; \quad K_{i,S} = \kappa \frac{Et_i}{2(1 + \nu)}. \quad (3.41)$$

Die Ausdrücke $\mathbf{J}(\cdot)$ repräsentieren Spannungssprünge an Elementkanten zwischen benachbarten Elementen, die über den Elementrand $\partial\mathcal{B}_i^h$ aufintegriert werden.

Vernetzungsstrategien

Mit den oben beschriebenen Fehlerschätzern und den darauf basierenden Indikatoren können die Teile des Berechnungsgebiets bestimmt werden, die adaptiv verfeinert werden sollen. Die Netzverfeinerung kann mit unterschiedlichen Techniken erfolgen.

Hier unterscheidet man zwischen einer hierarchischen Verfeinerung, bei der die Knoten des groben Netzes bestehen bleiben und die zu verfeinernden Elemente durch das Hinzufügen neuer Knoten in kleinere Elemente unterteilt werden, und einer völligen Neuvernetzung. Es ist wohlbekannt, dass eine Vernetzung mit weitgehend rechtwinkligen Elementen bessere Ergebnisse liefert, als ein Netz, das schiefwinklige Elemente enthält. Bei einer adaptiven hierarchischen Netzverfeinerung ohne Verwendung spezieller Elemente mit sogenannten *hanging nodes* erhält man zwangsläufig schiefwinklige Übergangselemente, s. Abb. 3.4. Durch eine Glättung des Netzes kann der Grad der "Schiefwinkligkeit" vermindert werden, indem sie auf die angrenzenden Elemente "aufgeteilt" wird.

Zusätzlich können neue Knoten auf die exakte zu approximierende Geometrie projiziert werden, sofern diese bekannt ist. Dies führt bei gekrümmten Geometrien im Regelfall dazu, dass die Übergangselemente nicht nur schiefwinklig sondern auch verwölbt sind. Dies ist z.B. der Fall, wenn bei Verwendung von Elementen niedriger Ansatzordnung die Elementkanten nicht entlang der Erzeugenden angeordnet werden können, wie z.B. bei einem Kreiszyylinder. In Abb. 3.5 ist beispielhaft eine Verfeinerung von einem Element zu drei Elementen dargestellt, wobei zwei Übergangselemente entstehen. Eines der Übergangselemente ist schiefwinklig aber eben, das schraffierte Element ist hingegen schiefwinklig und verwölbt – die Normalen an den Knoten (Kreuzprodukte aus den anschließenden Kantenvektoren) sind nicht alle parallel zueinander. Verwölbte Übergangselemente führen zu einer zusätzlichen Verfälschung der Geometrie – künstlichen Imperfektionen, die das Ergebnis wesentlich beeinflussen können.

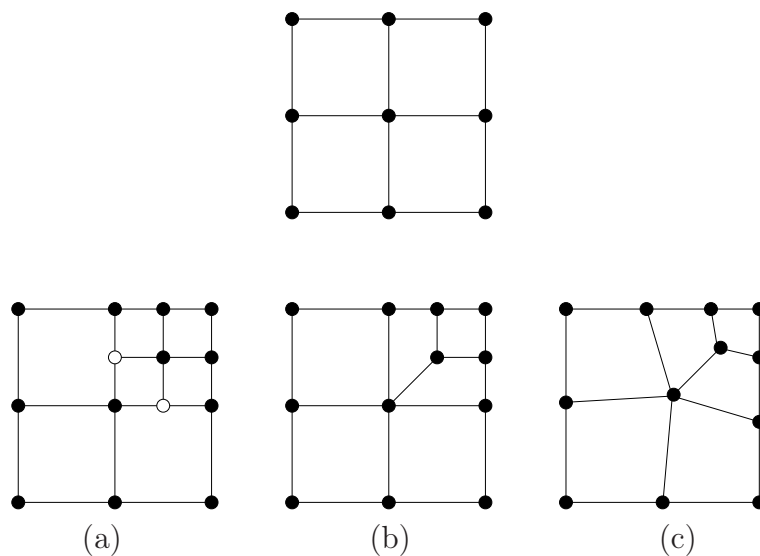


Abbildung 3.4: Adaptive Verfeinerung ebener Gebiete; oben: grobes Netz, (a) Vernetzung mit *hanging nodes*, (b) hierarchische Verfeinerung, (c) hierarchische Verfeinerung mit Netzglättung.

Adaptivität bei Stabilitätsuntersuchungen

Die oben dargestellten Fehlerschätzer sind zunächst nur auf lineare Probleme angewend-

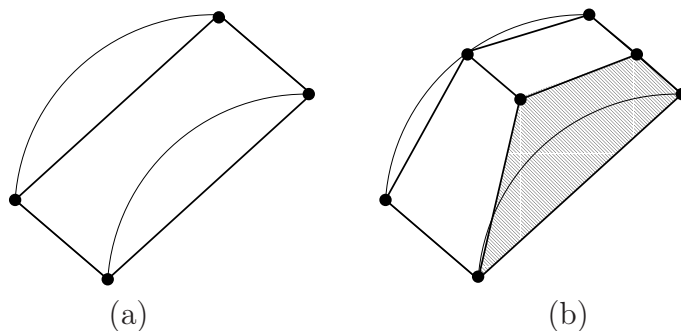


Abbildung 3.5: Adaptive Verfeinerung auf einem Kreissegment mit Projektion der Knoten auf die Originalgeometrie; (a) grobes Netz (1 Element), (b) hierarchische Verfeinerung (schraffiert \equiv Element mit Verwölbung).

bar. Zur Lösung eines nichtlinearen Problems mit Hilfe eines Newton Verfahrens, z.B. im Rahmen einer FE Berechnung, wird das Gleichgewicht durch iteratives Lösen des linearisierten Problems gefunden. Auf das linearisierte Problem können dann die dargestellten Fehlerschätzer direkt angewendet werden. Hierzu müssen in (3.33) und (3.38 - 3.40) nach Vorschlag von RHEINBOLDT [66] anstatt der Spannungen σ^h lediglich die inkrementellen Spannungen

$$\Delta\sigma^h = \mathbf{CB}|_{\lambda_n} \Delta\mathbf{d}^* \quad (3.42)$$

eingesetzt werden. Hierbei ist $\mathbf{B}|_{\lambda_n} = \mathbf{B}(\mathbf{d}(\lambda_n))$ die Differentialoperator-Matrix an der untersuchten Laststufe λ_n . Für die Verschiebungsdifferenz $\Delta\mathbf{d}^*$ wird in üblichen Spannungsproblemen die Differenz zwischen dem aktuellen Lastschritt n und dem vorhergehenden Schritt $n - 1$ verwendet

$$\Delta\mathbf{d}^* = \mathbf{d}(\lambda_n) - \mathbf{d}(\lambda_{n-1}). \quad (3.43)$$

Bei der Bestimmung von Stabilitätspunkten wird der Fehler in der Lösung durch die Beulform bestimmt. Für ein auskonvergiertes Netz ist die gesuchte Beulform gleich dem ersten Eigenvektor Φ_1 des Standard-Eigenwertproblems

$$[\mathbf{K}_T(\lambda) - \mu\mathbf{1}] \Phi = \mathbf{0}. \quad (3.44)$$

am Stabilitätspunkt ($\lambda = \lambda_{cr}$). Die Bestimmung des Fehlers am Stabilitätspunkt selbst scheitert an der Singularität der Steifigkeitsmatrix. Einen Ausweg besteht nach einem Vorschlag von STEIN ET AL. darin, die Fehlerverteilung *in der Nähe* des Stabilitätspunktes zu bestimmen. Hierzu wird die Differentialoperatormatrix \mathbf{B} nicht am Stabilitätspunkt λ_{cr} selbst, sondern am letzten konvergierten Punkt mit positiv definiten Steifigkeitsmatrix bei $\lambda^* < \lambda_{cr}$ verwendet. Zur Bestimmung des Verfeinerungsindikators werden inkrementelle Spannungen mit dem normierten ersten Eigenvektor des Standard-Eigenwertproblems (3.44) am singulären Punkt ($\Phi_{cr} = \Phi_1(\lambda = \lambda_{cr})$) bestimmt:

$$\Delta\mathbf{d}^* = \frac{\Phi_{cr}}{|\Phi_{cr}|} \rightsquigarrow \Delta\sigma^h = \mathbf{CB}|_{\lambda^*} \frac{\Phi_{cr}}{|\Phi_{cr}|}. \quad (3.45)$$

Dies ergibt das in Abb. 3.6 dargestellte Verfahren.

Eine andere Vorgehensweise wird bei CIRAK [21] vorgeschlagen. Dort wird zunächst eine nichtlineare Berechnung gestartet, die abgebrochen wird, sobald die Steifigkeitsmatrix negativ definit wird. Vom letzten konvergierten Schritt aus wird der Stabilitätspunkt dann mittels eines erweiterten Gleichungssystems nach (3.27) direkt bestimmt. Zur Schätzung des Fehlers wird von CIRAK vorgeschlagen, die Verschiebungen am kritischen Punkt mit der Beulform zu überlagern. Weiter soll im Falle des axial gedrückten Kreiszyinders nicht nur der erste sondern auch der zweite Eigenvektor zur Fehlerschätzung herangezogen werden. Dieser Vorschlag ist durch die Tatsache motiviert, dass sich die Reihenfolge der Eigenwerte und Eigenvektoren am singulären Punkt mit zunehmender Verfeinerung des Netzes ändern kann. Das Problem ist der Verschiebung der Eigenwerte bei schrittweiser Lastaufbringung, das im Abschnitt 3.2.4 erläutert wurde, ähnlich. Entspricht der 1. Eigenvektor für ein nicht auskonvergiertes Netz, z.B. am Beginn einer adaptiven Berechnung, nicht dem 1. Eigenvektor des konvergierten Netzes, wird durch einen Verfeinerungsindikator, der ausschließlich auf dem 1. Eigenvektor basiert, an der falschen Stelle verfeinert. Hierzu können zwei kritische Anmerkungen gemacht werden. Zum einen stellt auch die Berücksichtigung von zwei Eigenvektoren nicht sicher, dass der gesuchte Eigenvektor des auskonvergierten Netzes sicher angesteuert wird. Zum anderen kann die gleichzeitige Berücksichtigung stark unterschiedlicher Eigenvektoren dazu führen, dass das ganze Gebiet gleichmäßig verfeinert wird, wodurch der Vorteil adaptiver Verfeinerung verloren geht.

Der Beschreibung in der Arbeit von CIRAK nach wurde die Fehlerschätzung dort folgendermaßen bestimmt

$$\Delta \mathbf{d}_i^* = \frac{\mathbf{d}(\lambda_{cr})}{|\mathbf{d}(\lambda_{cr})|} + \frac{\Phi_{i,cr}}{|\Phi_{i,cr}|}. \quad (3.46)$$

Dabei ist $\mathbf{d}(\lambda_{cr})$ der Verschiebungsvektor und $\Phi_{i,cr}$ sind die Eigenvektoren am kritischen Punkt. Anschließend wird die Fehlerverteilung mit dem Fehlerschätzer nach ZIENKIEWICZ/ZHU durch Einsetzen von (3.46) in (3.42) und (3.33) bestimmt. Die Netzverfeinerung wird basierend auf dem größten der Indikatoren ($i = 1$ bzw. $i = 2$) durchgeführt. Hierbei wird vollkommen neu vernetzt. Dies führt auf den in Abb. 3.7 dargestellten Algorithmus.

Zur Robustheit des Verfahrens ist folgendes anzumerken: Die Nachteile der direkten Bestimmung von Stabilitätspunkten mit einem erweiterten Gleichungssystem sind bereits oben diskutiert worden. Das Verfahren arbeitet zuverlässig nur in *ausreichender* Nähe des Stabilitätspunktes, die aber a-priori nicht bekannt ist. Als weiterer unsicherer Punkt ist der Transfer der Variablen auf das neue Netz zu nennen. Bei CIRAK selbst [21] wird angegeben, dass bei zu großen Netzunterschieden die Korrekturiteration divergieren kann. Demnach ist der Algorithmus nach CIRAK als numerisch wesentlich weniger robust einzustufen als der Algorithmus nach STEIN ET AL.

Beide oben beschriebenen Algorithmen wurden in den jeweiligen Arbeiten lediglich anmäßig dünnen Schalen mit einer Schlankheit $R/t = 200$ getestet. Die Zuverlässigkeit

1. Start mit einem "groben" Netz
2. Bestimmung des Stabilitätspunktes mit dem Bisektionsverfahren mit folgenden Einzelschritten (Start mit $\lambda = 0$, schrittweise Aufbringung der Last):
 - (a) Bestimmung des nichtlinearen Gleichgewichts mit Newton Verfahren
 - (b) Bestimmung der Eigenwerte der Steifigkeitsmatrix nach (3.44)
 - (c) bei Auftreten negativer Eigenwerte wird der Stabilitätspunkt durch Bisektion eingeschachtelt
3. Bestimmung des Fehlers nach (3.37) und (3.45) unter Verwendung des 1. Eigenvektors und der \mathbf{B} -Matrix aus dem letzten konvergierten Lastschritt mit positiv definiten Steifigkeitsmatrix
4. *globaler Fehler* $<$ *Abbruchkriterium* \rightarrow ENDE, sonst:
5. Adaptive Netzverfeinerung
6. Weiter mit Punkt 2.

Abbildung 3.6: Adaptiver Algorithmus zur Bestimmung singulärer Punkte nach STEIN ET AL. [78].

dieser Verfahren bei Bestimmung von singulären Punkten dünnwandigerer Schalen ist daher unsicher. Dies wird in der vorliegenden Arbeit untersucht, wobei die Vorgehensweise nach STEIN ET AL. mit der glättungsbasierten Fehlerschätzung nach ZIENKIEWICZ/ZHU kombiniert wird. Die genaue Beschreibung des in der vorliegenden Arbeit verwendeten Algorithmus erfolgt in Abschnitt 5.2.1.

1. Start mit einem "groben" Netz
2. Nichtlineare Berechnung bis die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} negativ definit wird; d.h. $\det(\mathbf{K}) < 0$ oder mindestens ein negatives Diagonalelement in \mathbf{K} (Start mit $\lambda = 0$, schrittweises Aufbringung der Last):
 - (a) Bestimmung des Gleichgewichts mit Hilfe des Newton Verfahrens
 - (b) Wenn \mathbf{K} negativ definit, gehe zu Punkt 3
3. Direkte Bestimmung des Stabilitätspunktes mit einem erweiterten Gleichungssystem (ausgehend vom letzten konvergier-ten Schritt mit positiv definiten Steifigkeitsmatrix)
4. Bestimmung des Fehlers nach ZIENKIEWICZ/ZHU
5. *globaler Fehler* $<$ *Abbruchkriterium* \rightarrow **ENDE**, sonst:
6. Völlige Neuvernetzung (Netzdichtefunktion)
7. Transfer der Zustandsvariablen auf das neue Netz und anschließende Korrektoriteration
8. Weiter mit Punkt 3.

Abbildung 3.7: Adaptiver Algorithmus zur Bestimmung singularer Punkte nach CIRAK ET AL. [21].

3.4 Störenergiekonzept

Zur Beurteilung der Qualität der Gleichgewichtslagen im Vorbeulbereich wurde von KRÖPLIN ET AL. [53] ein Störenergiekonzept vorgestellt. In weiteren darauffolgenden Arbeiten wurde dieses Konzept von WAGENHUBER [88] durch nichtlineare Eigenwertprobleme, weiter von TRANEL [83] für beliebige Belastungen und von SPOHR [77] für plastisches Materialverhalten erweitert.

Wie bereits dargestellt, wird bei den Untersuchungen zum Stabilitätsverhalten meist der "nichtlineare" Pfad bis zum Verzweigungs- und Durchschlagpunkt und anschließend der Nachbeulpfad bestimmt. Dagegen liegt dem Störenergiekonzept die Idee zugrunde, von einem stabilen Gleichgewicht des Vorbeulpfades den Gleichgewichtszustand auf dem nächstliegenden Nachbeulpfad direkt zu bestimmen. Hierzu wird von einem aus-terierten primären Gleichgewichtspunkt $(\lambda_0 \mathbf{f}^{ext}, \mathbf{d}_0)$ ein benachbarter Gleichgewichtspunkt $(\lambda_0 \mathbf{f}^{ext}, \mathbf{d}^*)$ mit gleichem Lastniveau gesucht, s. Abb. 3.8. Mit einer Sekantenformulierung wird in den oben genannten Arbeiten für die Suche nach einem allgemeinen Nachbarpunkt folgender Ausdruck angegeben

$$\delta \Delta \Pi = \delta \Delta \mathbf{d}^T \left[\mathbf{K}_T(d_0) + \mathbf{K}_{NL} \left(\frac{1}{2} \Delta \mathbf{d} \right) \right] \Delta \mathbf{d} - \delta \Delta \mathbf{d}^T \Delta \mathbf{f}^{ext} = 0. \quad (3.47)$$

Dabei werden zur Bestimmung der Matrix $\mathbf{K}_{NL} \left(\frac{1}{2} \Delta \mathbf{d} \right)$ keine näheren Angaben gemacht. Da der gesuchte Nachbarpunkt auf dem gleichen Lastniveau liegen soll, gilt $\Delta \mathbf{f}^{ext} = 0$. Darauf wird dann das folgende nichtlineare Eigenwertproblem für das Verschwinden der Sekante formuliert

$$\left[\mathbf{K}_T(d_0) + \Lambda^S \mathbf{K}_{NL} \left(\frac{1}{2} \Delta \mathbf{d} \right) \right] \Delta \mathbf{d} = 0. \quad (3.48)$$

Das Eigenwertproblem (3.48) wird als *Sekanten-Eigenwertproblem* bezeichnet und beschreibt das Durchschlagen mit den Verschiebungen $\Delta \mathbf{d}$, die *affin* zu den Anfangsverschiebungen sind. Aus der Annahme heraus, dass andere instabile Gleichgewichtslagen auf dem Weg vom Vorbeul- in den Nachbeulbereich existieren können, die nicht affin zu den Anfangsverschiebungen sind, wird nun die *ungünstigste Richtung* gesucht, bei der der Wechsel vom Vorbeul- in den Nachbeulbereich mit geringstem Energieaufwand geschieht. Hierzu wird in den o.g. Arbeiten vom Verschwinden der zweiten Variation des Potentials an einem Stabilitätspunkt ausgegangen.

$$\delta^2 \Delta \Pi = \delta \Delta \mathbf{d}^T [\mathbf{K}_T(d_0) + \mathbf{K}_{NL}(\Delta \mathbf{d})] \Delta \mathbf{d} - 2 \delta \Delta \mathbf{d}^T \Delta \mathbf{f}^{ext} = 0. \quad (3.49)$$

Zur Beurteilung des Widerstands der Struktur gegen eine Störung wird dann bei Beschränkung auf Durchschlagprobleme folgendes *Tangenten-Eigenwertproblem* formuliert

$$[\mathbf{K}_T(d_0) + \Lambda^t \mathbf{K}_{NL}(\Delta \mathbf{d})] \Delta \mathbf{d} = 0. \quad (3.50)$$

Als Ergebnis erhält man die kritische Störung $\Delta \mathbf{d}_{cr} = \Lambda^T \Delta \mathbf{d}$, s. Abb. 3.8 gegeben. Dabei wird davon ausgegangen, dass die ungünstigste Störung affin zur Lösung des Tangenten-Eigenwertproblems ist, d.h. es wird vorausgesetzt dass durch die iterative Lösung von (3.50) die Richtung der Störung minimiert wird. In TRANEL [83] findet sich der Hinweis, dass diese Annahme durch *umfangreiche Testrechnungen* bestätigt wird. Die Orthogonalität des Störvektors \mathbf{f}^{st}

$$\mathbf{f}^{st} = \left[\mathbf{K}_T(d_0) + \mathbf{K}_{NL}\left(\frac{1}{2}\Delta \mathbf{d}_{cr}\right) \right] \Delta \mathbf{d}_{cr} \quad (3.51)$$

zum Grundlastvektor \mathbf{f}^{ext} wird ebenso durch Testrechnungen belegt.

Die Störenergie selbst wird folgendermaßen angegeben

$$\Pi_{st} = \Delta \mathbf{d}_{cr} \left[\frac{1}{2} \mathbf{K}_T(\mathbf{d}_0) + \frac{1}{6} \mathbf{K}_{NL}(\Delta \mathbf{d}_{cr}) \right] \Delta \mathbf{d}_{cr}. \quad (3.52)$$

In der Arbeit von SPOHR [77] werden Vergleiche mit den Bemessungslasten nach DIN 18800 geführt. Sie zeigen, dass sich hier für unterschiedliche Lastfälle unterschiedliche kritische Störenergien ergeben. Zur Vereinheitlichung des Konzepts wird dort folgende Normierung vorgeschlagen:

$$\pi_{st} = \frac{\Pi_{st}}{B^*} \quad (3.53)$$

mit

$$B^* = \alpha_l \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (3.54)$$

Dabei erfaßt der Parameter α_l den Längeneinfluß für kurze Zylinder. Nach den Angaben in SPOHR [77] ergibt sich für $\pi_{st} = 3.5 \%$ gute Übereinstimmung der nach dem Störenergiekonzept bestimmten Lasten mit den Normen für die Lastfälle Axiallast, Außendruck und die Kombination dieser Lasten für Kreiszyylinder. Danach ergibt sich für die axiale Last eine Beulform mit einer Einzelbeule als ungünstigste Störriichtung.

In allen oben angegebenen Arbeiten wird auf folgende Probleme dieses Konzeptes hingewiesen:

- Bei der Lösung des nichtlinearen Eigenwertproblems (3.50) wird die Konvergenz wesentlich durch die Wahl des Starteigenvektors bestimmt, da in der Folge dieser Wahl bestimmte Beulformen bevorzugt werden. Die Behauptung, dass auch eine "ungeschickte" Wahl eines Startvektors nicht zu Beulformen führt, die zu wesentlich höheren Störenergien gehören, basiert allein auf Testberechnungen.
- Liegen mehrere Gleichgewichtspfade dicht benachbart, so wird ein "Nest" von Eigenwerten zugleich aniteriert. Hier tritt die sogenannte KRYLOV-Folge in der Eigenvektoriteration auf. In WAGENHUBER [88] wird in diesem Fall empfohlen, die Berechnung von einer benachbarten Laststufe ausgehend zu wiederholen.

Insgesamt scheint die Zuverlässigkeit und Robustheit des Verfahrens unsicher. Aus diesem Grund wird im Rahmen der vorliegenden Arbeit die Störung durch Einbringen kinetischer Energie, die eine möglichst allgemeine Form der Störung darstellt, aufgebracht.

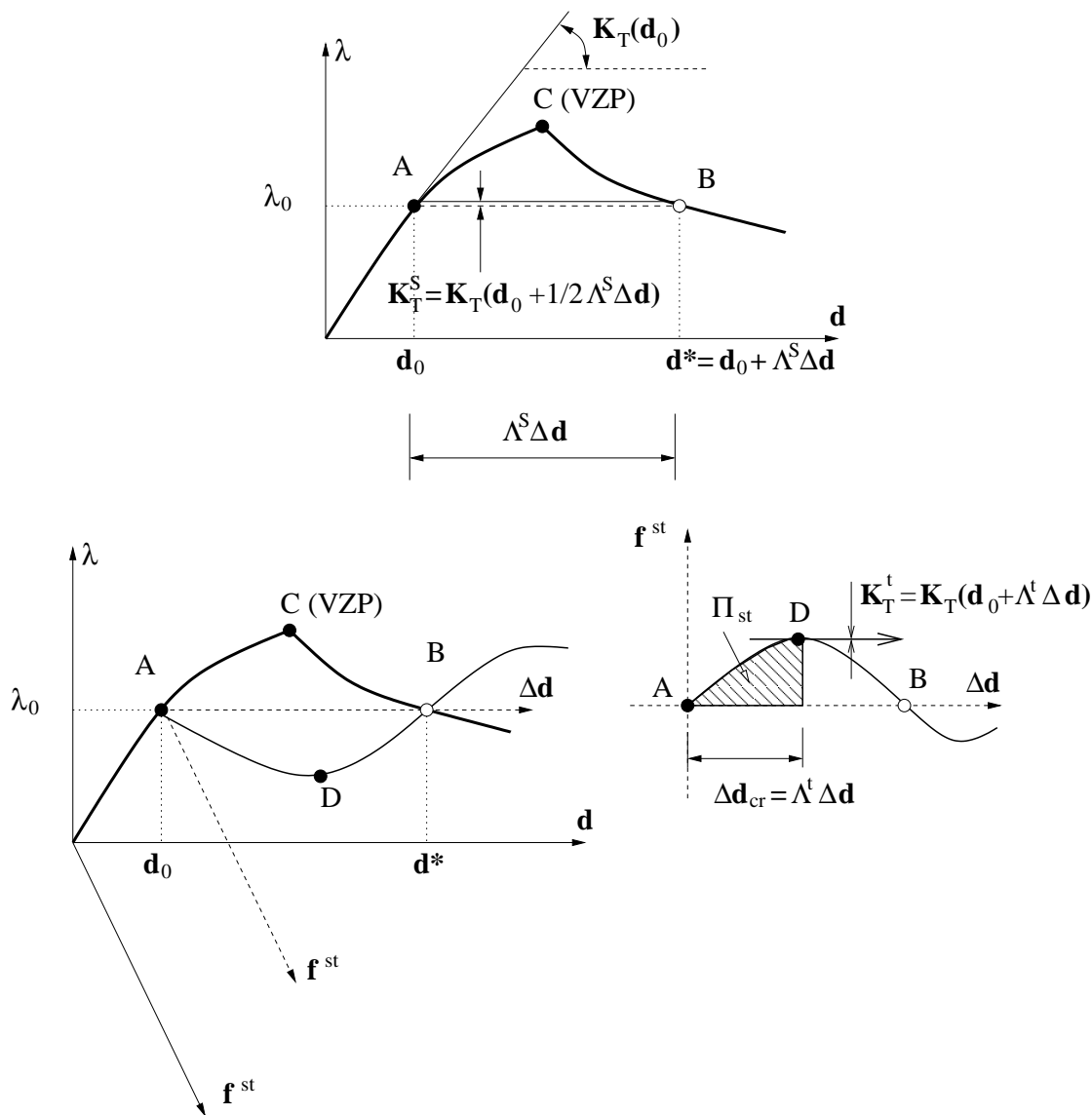


Abbildung 3.8: Prinzipskizze zum Störenergiekonzept, entnommen [53], [88], [83], [77].

Kapitel 4

Zeitintegration

In der vorliegenden Arbeit werden unter anderem transiente Untersuchungen von stabilitätsgefährdeten Tragwerken durchgeführt. Hierzu werden in Kombination mit einer Semidiskretisierung zwei Zeitintegrationsverfahren verwendet: das implizite NEWMARK-Verfahren und das explizite Verfahren der Zentralen Differenzen in einer Implementierung in LS-DYNA. Nachfolgend wird zunächst eine Darstellung und Klassifikation der Zeitintegrationsverfahren am Beispiel der linearen Bewegungsgleichung gegeben. Anschließend erfolgt eine ausführliche Darstellung der im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Verfahren gefolgt von der Diskussion zur Zeitintegration nichtlinearer Bewegungsgleichungen.

Nachfolgende Ausführungen sind WOOD [92], ARGYRIS/MLEJNEK [6], HUGHES [45], BELYTSCHKO ET AL. [14], WRIGGERS [94] sowie dem THEORY MANUAL VON LS-DYNA [59] entnommen.

4.1 Klassifikation der Zeitintegrationsverfahren

Grundsätzlich ist es möglich, die zu lösende Differentialgleichung einer Bewegung

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} + c \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{p}^{int} = \mathbf{p}^{ext} \quad \text{mit } (\dot{}) \equiv \frac{\partial}{\partial t}() \quad (4.1)$$

mit

ρ = Massendichte

c = Dämpfung

$\dot{\mathbf{u}}$ = Geschwindigkeiten

$\ddot{\mathbf{u}}$ = Beschleunigungen

simultan in Raum und Zeit zu diskretisieren. Dies führt im Allgemeinen zu unterschiedlichen Zeitschritten in den einzelnen Elementen. Meist sind aber die Verformungen zu bestimmten Zeitpunkten gesucht, so dass die übliche Vorgehensweise in der Trennung

der Veränderlichen nach Raum und Zeit liegt. In einer sogenannten Semidiskretisierung erfolgt zuerst eine räumliche Diskretisierung. Diese führt im geometrisch linearen Fall auf das folgende semidiskrete Gleichungssystem

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}} + \mathbf{K}\mathbf{d} = \mathbf{f}^{ext} \quad (4.2)$$

mit

$$\mathbf{M} = \rho \int_{\Omega_0} \mathbf{N}\mathbf{N}^T d\Omega = \text{Massenmatrix} \quad (4.3)$$

$$\mathbf{C} = \alpha_D \mathbf{M} + \beta_D \mathbf{K} = \text{Dämpfungsmatrix nach Rayleigh} \quad (4.4)$$

$\dot{\mathbf{d}}$ = diskrete Geschwindigkeiten

$\ddot{\mathbf{d}}$ = diskrete Beschleunigungen

welches diskret im Raum und kontinuierlich in der Zeit ist. Die dargestellte Formulierung der Dämpfung nach Rayleigh in Gl. (4.4) wird oft verwendet, weil durch bestimmte Wahl der Parameter α_D und β_D definierte Frequenzbereiche gezielt gedämpft werden können. So können über eine überwiegende Dämpfung mit Hilfe des Steifigkeitsanteils, d.h. durch die Wahl $\beta_D \gg \alpha_D$, die oberen Frequenzen des Systems, die durch die räumliche Diskretisierung bekannterweise schlecht approximiert werden, gedämpft werden.

Zur Integration des Gleichungssystems (4.2) in der Zeit stehen einige Verfahren zur Verfügung, z.B. NEWMARK, α -HHT, Runge-Kutta usw., s. z.B. WOOD [92]. Sie lassen sich nach unterschiedlichen Kriterien in Gruppen einteilen:

- Einschrittverfahren – Mehrschrittverfahren
- implizit – explizit

Bei **Einschrittverfahren** wird der unbekannte Zustand im Zeitschritt t_{n+1} unter Verwendung der bekannten Zustandsgrößen im Zeitschritt t_n bestimmt, d.h. es wird nur einen Zeitschritt zurückgegangen, daher auch der Name *Einschrittverfahren*. Hierbei läßt sich die Berechnungsvorschrift allgemein folgendermaßen angeben

$$\begin{bmatrix} \mathbf{d}_{n+1} \\ \dot{\mathbf{d}}_{n+1} \\ \ddot{\mathbf{d}}_{n+1} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_n \\ \dot{\mathbf{d}}_n \\ \ddot{\mathbf{d}}_n \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

wobei die Matrix \mathbf{A} Amplifikations- oder Übertragungsmatrix genannt wird. Wie in Gl. (4.5) ersichtlich, werden bei Einschrittverfahren nicht nur die Verschiebungen \mathbf{d} , sondern auch zeitliche Ableitungen davon, d.h. Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{d}}$ und Beschleunigungen $\ddot{\mathbf{d}}$ bei der Lösung verwendet. Dieser Umstand wird oft durch die Bezeichnung *1-Schritt-3-Ebenen Verfahren*¹ – 3 für die Anzahl der verwendeten zeitlichen Ableitungen der Verschiebungen \mathbf{d} : 0-te, 1-te und 2-te – zum Ausdruck gebracht. Hierzu zählt

¹Diese Bezeichnung geht auf WOOD [92] zurück, der vorgeschlagen hat, die Verfahren allgemein als *p-Schritt-q-Ebenen Verfahren* zu klassifizieren

auch das später ausführlich dargestellte NEWMARK-Verfahren in seiner ursprünglichen Formulierung.

Bei **Mehrschrittverfahren**, auch als p -Schritt Verfahren bezeichnet, kann die Berechnungsvorschrift zur Lösung der Gl. (4.2) folgendermaßen allgemein dargestellt werden

$$\sum_{j=0}^p \{(\alpha_j \mathbf{M} + \gamma_j \Delta t \mathbf{C} + \beta_j \Delta t^2 \mathbf{K}) \mathbf{d}_{(n+1-j)} - \beta_j \Delta t^2 \mathbf{f}_{(n+1-j)}^{ext}\} = \mathbf{0} \quad (4.6)$$

Hierbei steht p für die Anzahl der Schritte, die zur Bestimmung des gesuchten Zustandes zum Zeitpunkt t_{n+1} , benutzt werden. Bei der Darstellung (4.6) werden für die Zeitintegration keine Geschwindigkeiten oder Beschleunigungen, sondern ausschließlich nur Verschiebungen benötigt, daher auch der vollständige Name *p-Schritt-1-Ebenen Verfahren*. Allerdings ist zur Bestimmung des Verformungszustandes zum Zeitpunkt t_{n+1} nicht nur die Kenntnis der Verschiebungen aus dem vorhergehenden Zeitschritt t_n sondern auch die der Verschiebungen aus den früheren Zeitschritten erforderlich: insgesamt von p Zeitschritten. Hieraus folgt sofort, dass zur Bestimmung des Zustandes im ersten Zeitschritt nach Gl. (4.6) die Zustände für die Zeitpunkte mit $t < 0$ benötigt werden. Da diese nicht vorliegen, benötigen solche Verfahren einen separaten *Startalgorithmus*. Hierzu sind zusätzliche Überlegungen notwendig, die im Abschnitt zum *Verfahren der Zentralen Differenzen* dargestellt sind. Bei Einschrittverfahren startet die Berechnung hingegen "automatisch", indem die Bewegungsgleichung (4.2) ausgehend von bekannten Anfangsbedingungen $\dot{\mathbf{d}}(t = 0) = \mathbf{v}_0$ und $\mathbf{d}(t = 0) = \mathbf{d}_0$ zum Zeitpunkt $t = 0$ gelöst wird.

Neben der Einteilung in Einschritt- und Mehrschrittverfahren lassen sich Zeitintegrationsverfahren in **explizite** und **implizite** Verfahren einteilen. Ein **explizites** Zeitintegrationsverfahren ist dadurch gekennzeichnet, dass die Bewegungsgleichung (4.2) zum Zeitpunkt t_n gelöst wird. Die gesuchten Zustandsgrößen zum Zeitpunkt t_{n+1} werden über Interpolationsansätze in die Gleichung eingebracht, und sind dadurch *explizit* in Abhängigkeit der Zustandsgrößen aus den vorhergehenden Zeitschritten angegeben. Dies führt zu dem Hauptmerkmal expliziter Verfahren, das gleichzeitig auch den Hauptvorteil darstellt: die zu invertierende Systemmatrix enthält im Gegensatz zu impliziten Verfahren keine Steifigkeitsmatrix, sondern besteht nur aus der Massen- und gegebenenfalls der Dämpfungsmatrix. Kann die Systemmatrix in einer Diagonalform angegeben werden, so wird die Invertierung der zu lösenden Gleichung trivial und der Algorithmus kann sehr einfach implementiert werden. Da sich allerdings nur die Massenmatrix diagonalisieren läßt, müssen für die Behandlung der Dämpfung bestimmte Annahmen getroffen werden, die weiter unten beschrieben sind.

Bei einem **impliziten** Verfahren wird die Bewegungsgleichung zum Zeitpunkt t_{n+1} gelöst, wodurch sowohl die gesuchten als auch die Ausgangsgrößen, die über Interpolationen eingebracht werden, in der Gleichung *implizit* enthalten sind. Bei einem impliziten Verfahren muss auch die Steifigkeitsmatrix, die keine Diagonalform hat, invertiert werden. Die Invertierung erfolgt nur formal. In der Praxis wird an dieser Stelle das Gleichgewicht bestimmt, was vor allem bei nichtlinearen Problemen, s. Abschnitt

4.4, einen nennenswerten Anstieg des Rechenaufwands bedeutet.

Zusätzlich unterscheiden sich explizite und implizite Verfahren in der **numerischen Stabilität**. Implizite Verfahren lassen sich sowohl als *bedingt* als auch im linearen Fall als *unbedingt stabile* Verfahren formulieren. Im letzteren Fall ist dann die Zeitschrittgröße nicht beschränkt. Als Folge größerer Zeitschritte werden dann allerdings nur die Vorgänge in den niedrigeren Eigenfrequenzen gut abgebildet. Deswegen werden solche Verfahren vorwiegend für Langzeitvorgänge, bei denen die niederfrequenten Anteile dominieren, verwendet.

Im Gegensatz zu den impliziten sind die expliziten Verfahren stets *bedingt stabil*. Dadurch kann der Zeitschritt nicht beliebig groß gewählt werden, was den hauptsächlichsten Nachteil expliziter Verfahren darstellt. Die Größe des Zeitschritts orientiert sich an der höchsten Eigenfrequenz des Systems und ist somit sehr klein zu wählen. Daher eignen sich explizite Verfahren primär für schnell ablaufende kurzzeitige Vorgänge wie Crash-Probleme.

4.2 Das NEWMARK Zeitintegrationsverfahren

Das NEWMARK-Verfahren basiert auf folgenden Berechnungsvorschriften für die Verschiebungen und die Geschwindigkeiten zum Zeitpunkt $t_{n+1} = t_n + \Delta t$

$$\mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{d}_n + \Delta t \dot{\mathbf{d}}_n + \frac{1}{2}(1 - 2\beta)\Delta t^2 \ddot{\mathbf{d}}_n + \beta \Delta t^2 \ddot{\mathbf{d}}_{n+1} \quad (4.7)$$

$$\dot{\mathbf{d}}_{n+1} = \dot{\mathbf{d}}_n + (1 - \gamma)\Delta t \ddot{\mathbf{d}}_n + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{d}}_{n+1}. \quad (4.8)$$

Die Parameter β und γ sind die sogenannten NEWMARK-Parameter und steuern die Wichtung der Beschleunigungen und der Geschwindigkeiten im Zeitschritt. Für unterschiedliche Parameter β und γ ergeben sich Verfahren, die sich hinsichtlich Genauigkeit, numerischer Dämpfung und Stabilität wesentlich unterscheiden. Zusammen mit der Bewegungsgleichung zum Zeitpunkt t_{n+1}

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}}_{n+1} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{d}}_{n+1} + \mathbf{K} \mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{f}_{n+1}^{ext} \quad (4.9)$$

und den bekannten Werten zum Zeitpunkt t_n lassen sich die gesuchten Beschleunigungen $\ddot{\mathbf{d}}_{n+1}$ und anschließend die Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{d}}_{n+1}$ und die Verschiebungen \mathbf{d}_{n+1} bestimmen. Hierzu können die Ansätze (4.7) und (4.8) folgendermaßen umgeschrieben werden:

$$\mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{d}_{n+1}^p + \beta \Delta t^2 \ddot{\mathbf{d}}_{n+1} \quad (4.10)$$

$$\dot{\mathbf{d}}_{n+1} = \dot{\mathbf{d}}_{n+1}^p + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{d}}_{n+1}. \quad (4.11)$$

Die Prädiktoren, die nur bekannte Größen zum Zeitpunkt t_n enthalten, bestimmen sich zu

$$\mathbf{d}_{n+1}^p = \mathbf{d}_n + \Delta t \dot{\mathbf{d}}_n + \Delta t^2 (0.5 - \beta) \ddot{\mathbf{d}}_n \quad (4.12)$$

$$\dot{\mathbf{d}}_{n+1}^p = \dot{\mathbf{d}}_n + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{\mathbf{d}}_n. \quad (4.13)$$

Durch Auflösen der Gl. (4.10) nach den Beschleunigungen

$$\ddot{\mathbf{d}}_{n+1} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} (\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_{n+1}^p) \quad (4.14)$$

und Einsetzen von (4.14) und (4.11) in die Bewegungsgleichung zum Zeitpunkt t_{n+1} lassen sich direkt die gesuchten Verschiebungen \mathbf{d}_{n+1} bestimmen:

$$\tilde{\mathbf{K}} \mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{f}_{n+1}^{ext} + \frac{1}{\Delta t^2 \beta} \mathbf{M} \mathbf{d}_{n+1}^p + \mathbf{C} \left(\frac{\gamma}{\Delta t \beta} \mathbf{d}_{n+1}^p + \dot{\mathbf{d}}_{n+1}^p \right). \quad (4.15)$$

$$\tilde{\mathbf{K}} = \left(\frac{1}{\Delta t^2 \beta} \mathbf{M} + \frac{\gamma}{\Delta t \beta} \mathbf{C} + \mathbf{K} \right) \quad \dots \text{Systemmatrix} \quad (4.16)$$

Anschließend werden mit (4.11) und (4.14) die aktuellen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen bestimmt.

Die Berechnung wird gestartet, indem ausgehend von bekannten Verschiebungen \mathbf{d}_0 und Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{d}}_0$ die Beschleunigungen $\ddot{\mathbf{d}}_0$ durch Lösen der Bewegungsgleichung zum Zeitpunkt $t_0 = 0$

$$\ddot{\mathbf{d}}_0 = \mathbf{M}^{-1} \left(\mathbf{f}_0^{ext} - \mathbf{K} \mathbf{d}_0 - \mathbf{C} \dot{\mathbf{d}}_0 \right) \quad (4.17)$$

bestimmt werden.

Die Ordnung der Genauigkeit und die numerische Stabilität des Verfahrens wird durch die Wahl der Parameter β und γ bestimmt. Das Standard NEWMARK-Verfahren ist gegeben, wenn diese Parameter zu $\beta = 0.25$ und $\gamma = 0.5$ gewählt werden. In diesem Fall ist das Verfahren im Linearen unbedingt stabil, energieerhaltend für $\mathbf{C} \equiv \mathbf{0}$ und 2-ter Ordnung genau ($\mathcal{O}(\Delta t^2)$). Eine von den oben angegebenen Werten abweichende Wahl der NEWMARK-Parameter kann sinnvoll sein, wenn die sogenannte numerische Dämpfung eingeführt werden soll. So kann über die Wahl des Parameters $\gamma > 0.5$ die Dämpfung der oberen Frequenzanteile numerisch erreicht werden. Allerdings ergibt sich dann eine niedrigere Genauigkeitsordnung $\mathcal{O}(\Delta t)$. In diesem Fall bleibt das Verfahren nur unbedingt stabil, wenn $\beta \geq \frac{1}{2}\gamma$ gewählt wird.

Wird das NEWMARK-Verfahren so implementiert, wie oben dargestellt, dann werden in jedem Zeitschritt die Beschleunigungen, die Geschwindigkeiten und die Verschiebungen berechnet. In diesem Fall liegt es als 1-Schritt-3-Ebenen Verfahren vor. Andere Formulierungen, beispielsweise als 1-Schritt-2-Ebenen Verfahren oder auch als 2-Schritt-1-Ebenen Verfahren sind möglich, wenn die Beschleunigungen oder die Beschleunigungen und die Geschwindigkeiten in der Bewegungsgleichung (4.9) eliminiert werden.

4.3 Das Verfahren der Zentralen Differenzen

Beim Verfahren der Zentralen Differenzen werden die Beschleunigungen und die Geschwindigkeiten *zentral* um den Zeitpunkt t_n mit den Werten an den Zeitpunkten t_{n-1} und t_{n+1} gleichmäßig gewichtet angenommen, s. Abb. 4.1:

$$\dot{\mathbf{d}}_n = \frac{(\dot{\mathbf{d}}_{n+\frac{1}{2}} + \dot{\mathbf{d}}_{n-\frac{1}{2}})}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n}{\Delta t} + \frac{\mathbf{d}_n - \mathbf{d}_{n-1}}{\Delta t} \right) \quad (4.18)$$

$$= \frac{\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_{n-1}}{2\Delta t} \quad (4.19)$$

$$\ddot{\mathbf{d}}_n = \frac{\dot{\mathbf{d}}_{n+\frac{1}{2}} - \dot{\mathbf{d}}_{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n}{\Delta t} - \frac{\mathbf{d}_n - \mathbf{d}_{n-1}}{\Delta t} \right) \quad (4.20)$$

$$= \frac{\mathbf{d}_{n+1} - 2\mathbf{d}_n + \mathbf{d}_{n-1}}{\Delta t^2}. \quad (4.21)$$

Hierbei kommen die im Zeitschritt konstant angesetzten Geschwindigkeiten durch die Indizes " $n + \frac{1}{2}$ " und " $n - \frac{1}{2}$ " zum Ausdruck. Das Einsetzen von (4.21) und (4.19) in die Bewegungsgleichung (4.2) zum Zeitpunkt t_n ergibt

$$\mathbf{M}(\mathbf{d}_{n-1} - 2\mathbf{d}_n + \mathbf{d}_{n+1}) + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{C}(\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_{n-1}) + \Delta t^2\mathbf{K}\mathbf{d}_n = \Delta t^2\mathbf{f}_n^{ext}. \quad (4.22)$$

Damit können die Verschiebungen zum Zeitpunkt t_{n+1} aus den Werten der zwei vorhergehenden Zeitschritte bestimmt werden

$$\left(\mathbf{M} + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{C}\right)\mathbf{d}_{n+1} = \Delta t^2\mathbf{f}_n^{ext} + (2\mathbf{M} - \Delta t^2\mathbf{K})\mathbf{d}_n - \left(\mathbf{M} + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{C}\right)\mathbf{d}_{n-1}, \quad (4.23)$$

womit man ein 2-Schritt-1-Ebenen Verfahren erhält. Die Systemmatrix $(\mathbf{M} + 0.5\Delta t\mathbf{C})$, die hierzu invertiert werden muss, enthält keine Steifigkeitsmatrix. Wie bereits oben erwähnt, resultiert dies direkt aus dem Vorgehen, die Bewegungsgleichung zum Zeitpunkt t_n und nicht wie bei impliziten Verfahren zum Zeitpunkt t_{n+1} zu lösen, und ist daher bezeichnend für explizite Verfahren. Wird allerdings die Dämpfung nach Rayleigh, d.h. nach Gl. (4.4) definiert, so unterscheiden sich die zu invertierenden Systemmatrizen in (4.15) und (4.23) nicht wesentlich voneinander, da dann auch die Systemmatrix im Falle des Zentralen Differenzen Verfahrens über die Dämpfungsmatrix \mathbf{C} auch die Steifigkeitsmatrix enthält. Auch wenn die Matrizen im Linearen konstant sind und nur am Beginn der Berechnung invertiert werden müssen, führt die Formulierung (4.23) zu einem ineffizienteren Verfahren, als das NEWMARK-Verfahren. Der Grund hierfür liegt darin, dass das Zentrale Differenzen Verfahren ein bedingt stabiles Verfahren ist, infolge dessen vor allem bei feinen Netzen mit sehr kleinen Zeitschritten gerechnet werden muss.

Effizient wird das Verfahren erst, wenn die zu invertierende Systemmatrix eine Diagonalstruktur hat. Dies ist gegeben, wenn ohne Dämpfung gerechnet wird, d.h. die

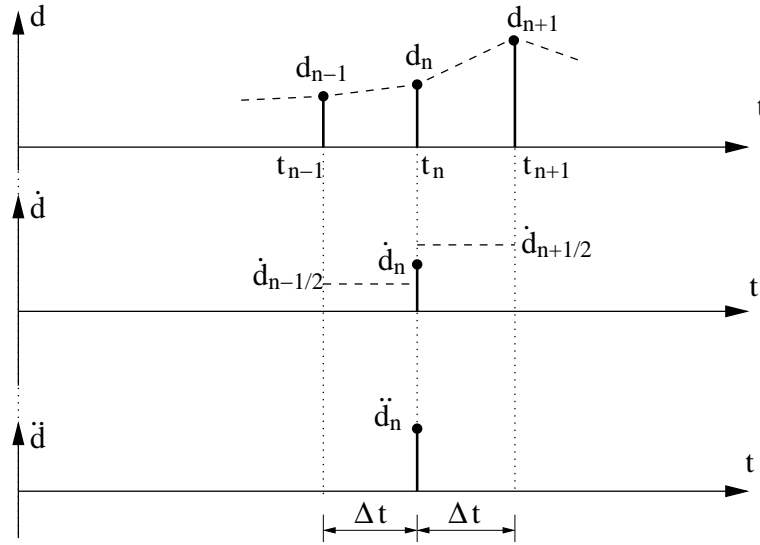


Abbildung 4.1: Prinzipalskizze zu Interpolationsansätzen im Zentralen Differenzen Verfahren.

Systemmatrix lediglich aus der diagonalisierten Massenmatrix besteht. Dann kann die Inverse der Systemmatrix direkt mit

$$M^{-1} = [m_{ii}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ m_{ii} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

angegeben werden. Dies reduziert den rechnerischen Aufwand zur Lösung der Gleichung (4.23) auf die Matrix-Vektor Operationen auf der rechten Seite. Wird die Rayleigh Dämpfung berücksichtigt, so läßt sich die Systemmatrix nicht ohne weiteres diagonalisieren. Zur Erhaltung eines effizienten Algorithmus werden üblicherweise die Interpolationsansätze (4.19) und (4.21) umgeschrieben, siehe z.B. BELYTSCHKO ET AL. [14], und man erhält zusammen mit der Bewegungsgleichung zum Zeitpunkt t_n den folgenden Satz von Gleichungen

$$\ddot{\mathbf{d}}_n = M^{-1} \left(\mathbf{f}_n^{ext} - \mathbf{K} \mathbf{d}_n - \mathbf{C} \dot{\mathbf{d}}_n \right) \quad (4.25)$$

$$\dot{\mathbf{d}}_{n+\frac{1}{2}} = \dot{\mathbf{d}}_{n-\frac{1}{2}} + \ddot{\mathbf{d}}_n \Delta t \quad (4.26)$$

$$\mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{d}_n + \dot{\mathbf{d}}_{n+\frac{1}{2}} \Delta t. \quad (4.27)$$

Da die Verschiebungen \mathbf{d}_n bekannt sind, könnten die obigen Gleichungen sukzessive gelöst werden, wenn die Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{d}}_n$ bekannt wären. Damit auf die Bestimmung der Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{d}}_n$ verzichtet werden kann, wird in der Gleichung (4.25) der Dämpfungsterm durch eine Näherung ersetzt:

$$\ddot{\mathbf{d}}_n = M^{-1} \left(\mathbf{f}_n^{ext} - \mathbf{K} \mathbf{d}_n - \mathbf{C} \dot{\mathbf{d}}_{n-\frac{1}{2}} \right). \quad (4.28)$$

Dies führt zu einem Verlust der Genauigkeitsordnung, liefert aber ein sehr effizientes 1-Schritt-3-Ebenen Verfahren zur Zeitintegration semidiskreter Gleichungen.

Die näherungsweise Berücksichtigung des Trägheitsterms kann auch anders dargestellt werden. Wird die Gl. (4.26) in den Differenzenansatz für die Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{d}}_n$ (4.18) eingesetzt, die ihrerseits in die Bewegungsgleichung zum Zeitpunkt t_n eingesetzt wird, so ergibt sich folgender Ausdruck

$$\ddot{\mathbf{d}}_n = \left(\mathbf{M} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{C} \right)^{-1} \left(\mathbf{f}_n^{ext} - \mathbf{K} \mathbf{d}_n - \mathbf{C} \dot{\mathbf{d}}_{n-\frac{1}{2}} \right). \quad (4.29)$$

Bei dieser Darstellung wird durch einen einfachen Koeffizientenvergleich mit der Gl. (4.28) sichtbar, dass die näherungsweise Bestimmung des Dämpfungsterms mit den Geschwindigkeiten aus dem vorhergehenden Zeitschritt in (4.28) gleich dem Weglassen des Dämpfungsterms in der Systemmatrix ist. Dies scheint für sehr kleine Zeitschritte Δt , die bei expliziten Verfahren gewählt werden, wegen der Multiplikation der Dämpfungsmatrix mit $\Delta t/2$ in der Systemmatrix gerechtfertigt zu sein.

Startalgorithmus

Zum Starten des Verfahrens der Zentralen Differenzen sind mehrere Algorithmen bekannt. Die erforderliche Beschleunigung zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ wird analog zum NEWMARK-Verfahren durch Lösen der Bewegungsgleichung zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ bestimmt, s. Gl. (4.17). Danach werden im Falle des 1-Schritt-3-Ebenen Verfahrens meist die Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{d}}_{0+\frac{1}{2}}$ mit

$$\dot{\mathbf{d}}_{0+\frac{1}{2}} = \dot{\mathbf{d}}_0 + \frac{\Delta t}{2} \ddot{\mathbf{d}}_0 \quad (4.30)$$

und die Verschiebungen \mathbf{d}_1 mit

$$\mathbf{d}_1 = \mathbf{d}_0 + \Delta t \dot{\mathbf{d}}_{0+\frac{1}{2}} \quad (4.31)$$

bestimmt. Anschließend kann die Zeitintegrationsschleife gestartet werden.

Ist das Verfahren als ein 2-Schritt-1-Ebenen Verfahren formuliert, kann nach der Bestimmung der Beschleunigungen nach Gl. (4.17) alternativ auch mit den Verschiebungen \mathbf{d}_0 und \mathbf{d}_{0-1} gestartet werden. Dabei können die letzteren aus der folgenden Taylorreihenentwicklung

$$\mathbf{d}_{0-1} = \mathbf{d}_0 - \Delta t \dot{\mathbf{d}}_0 + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{d}}_0 \quad (4.32)$$

bestimmt werden.

Kritischer Zeitschritt

Die Stabilität des Verfahrens der Zentralen Differenzen wird im Falle einer ungedämpften Schwingung durch den kritischen Zeitschritt

$$\Delta t_{krit} = \frac{2}{\omega_{max}} \quad (4.33)$$

begrenzt. Dabei steht ω_{max} für die höchste Eigenkreisfrequenz im System, die mit der höchsten Eigenkreisfrequenz der einzelnen Elemente folgendermaßen abgeschätzt werden kann.

$$\omega_{max} \leq \max\{\omega_{e,i}\} \quad (4.34)$$

Zur Bestimmung der Eigenkreisfrequenzen $\omega_{e,i}$ muss für jedes Element ein Eigenwertproblem gelöst werden. Aus Effizienzgründen wird meist darauf verzichtet, und der kritische Zeitschritt nach der Courant-Formel

$$\Delta t_{krit} = \min \left\{ \frac{\ell_e}{c_e} \right\} \quad (4.35)$$

mit

ℓ_e = charakteristische Elementlänge

c_e = Geschwindigkeit einer Kompressionswelle

bestimmt, s. COURANT ET AL. [22]. Hierbei kann die charakteristische Elementlänge bei mehrdimensionalen Problemen, beispielsweise Schalen- oder Volumenelementen, gleich der kürzesten Verbindung zwischen den Knoten eines Elements gesetzt werden.

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Kompressionswelle c_e bestimmt sich für die im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Schalenelemente – 2D-Kontinuum – zu

$$c_e = \sqrt{\frac{E}{\rho(1 + \nu^2)}} \quad (4.36)$$

mit

E = Elastizitätsmodul

ρ = Massendichte

ν = Querdehnzahl.

Für andere Kinematiken, wie Balken (\equiv 1D-Kontinuum) oder Volumen (\equiv 3D-Kontinuum) ergeben sich andere Wellenausbreitungsgeschwindigkeiten, s. z.B. GRAFF [36].

4.4 Zeitintegrationsverfahren für nichtlineare Probleme

Die obigen Ausführungen hinsichtlich Stabilität gelten nur für den Fall linearer Bewegungsgleichungen. Für nichtlineare semidiskrete Bewegungsgleichungen mit einem nichtlinearen Term der inneren Knotenkräfte:

$$M\ddot{\mathbf{d}} + C\dot{\mathbf{d}} + \mathbf{f}^{int}(\mathbf{d}) = \mathbf{f}^{ext} \quad (4.37)$$

existieren bekannterweise keine unbedingt stabilen Zeitintegrationsverfahren. Ebensovienig kann der kritische Zeitschritt angegeben werden. Eine pragmatische Vorgehensweise bei nichtlinearen Problemen ist es, entweder das Zeitintegrationsverfahren so zu wählen, dass es im Linearen unbedingt stabil ist, oder ein bedingt stabiles Verfahren mit einem verminderten kritischen Zeitschritt nach (4.35) zu verwenden. Im ersten Fall müssen die Verformungen im Zeitschritt durch die Wahl der Zeitschrittgröße so gering gehalten werden, dass nur eine "leichte Nichtlinearität" im Zeitschritt vorliegt. Hierbei lässt sich die genaue Zeitschrittgröße a-priori nicht angeben, da sie vom "Grad der Nichtlinearität" des abzubildenden Vorgangs abhängt. Im zweiten Fall kann die Stabilität des Verfahrens unter Zuhilfenahme der Energieerhaltung bzw. Energiebilanz kontrolliert werden.

Der nichtlineare Term der inneren Knotenkräfte $\mathbf{f}^{int}(\mathbf{d})$ wird je nach Zeitintegrationsverfahren unterschiedlich behandelt. Im Falle des **NEWMARK-Verfahrens** können die Gleichungen (4.12), (4.13), (4.14) und (4.11) dazu verwendet werden, die unbekanntes Geschwindigkeiten und Beschleunigungen zum Zeitpunkt t_{n+1} in der Bewegungsgleichung zu eliminieren. Dann liegt die Gleichung in einer Form vor, in der sie analog zur Vorgehensweise bei statischen nichtlinearen Problemen, s. Abschnitt 2.3, linearisiert und mit dem Newton Verfahren iterativ gelöst werden kann. Mit den Abkürzungen α_i führt es auf den in Abb. 4.2 dargestellten Algorithmus. Hier wird der signifikant gestiegene Rechenaufwand aufgrund der Gleichgewichtsiterationen in jedem Zeitschritt sichtbar. Jedoch gibt die Anzahl der Iterationen eine Auskunft über den "Grad der Nichtlinearität" im Zeitschritt. Hieraus ergibt sich die Möglichkeit, die Zeitschrittgröße problemangepasst zu steuern.

Im Falle des **Zentralen Differenzen Verfahrens** ändert sich durch den Einbau des nichtlinearen Terms lediglich die Berechnung der rechten Seite in Gl. (4.28):

$$\ddot{\mathbf{d}}_n = \mathbf{M}^{-1} \left(\mathbf{f}_n^{ext} - \mathbf{f}^{int}(\mathbf{d}_n) - \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}}_{n-\frac{1}{2}} \right). \quad (4.38)$$

Demnach erhöht sich der rechnerische Aufwand hier nur um die Bestimmung der inneren Knotenkräfte $\mathbf{f}^{int}(\mathbf{d}_n)$ in jedem Zeitschritt. Obwohl es gegenüber einem linearen Problem zu einem erheblich größeren Rechenaufwand führt, ist das Verfahren wegen der fehlenden Gleichgewichtsiteration im Zeitschritt wesentlich effizienter als das NEWMARK-Verfahren.

Wie oben erwähnt wird hier üblicherweise mit einem abgeminderten kritischen Zeitschritt nach (4.35) gerechnet:

$$\Delta t_{krit, nili} = \alpha \Delta t_{krit}, \quad \text{mit } \alpha \in [0.2, 0.9] \quad (4.39)$$

Die Stabilität wird dabei durch die Kontrolle der Energieerhaltung im dämpfungsfreien Fall oder der Energiebilanz, wenn eine Dämpfung verwendet wird, wie nachfolgend dargestellt gesichert.

$$W_{int} + W_{kin} - W_{ext} - W_{Dämp} \leq TOL = \epsilon \cdot \max\{W_{int}, W_{kin}, W_{ext}, W_{Dämp}\} \quad (4.40)$$

Die Terme der inneren und der äußeren Arbeit und der Dämpfung ergeben sich durch eine Integration mit Hilfe der Trapezregel zu

$$W_{int,n+1} = W_{int,n} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{d}^T (\mathbf{f}^{int}(\mathbf{d}_n) + \mathbf{f}^{int}(\mathbf{d}_{n+1})) \quad (4.41)$$

$$W_{ext,n+1} = W_{ext,n} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{d}^T (\mathbf{f}_n^{ext} + \mathbf{f}_{n+1}^{ext}) \quad (4.42)$$

$$W_{Dämp,n+1} = W_{Dämp,n} + \Delta \mathbf{d}^T \mathbf{f}_{Dämp} \quad (4.43)$$

mit dem Verschiebungsinkrement $\Delta \mathbf{d}$ nach

$$\Delta \mathbf{d} = \mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n \quad (4.44)$$

und den mittleren Dämpfungskräften nach

$$\mathbf{f}_{Dämp} = \mathbf{C} \dot{\mathbf{d}}_{n+\frac{1}{2}}. \quad (4.45)$$

Die kinetische Energie in (4.40) bestimmt sich zu

$$W_{kin} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{d}}_n^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{d}}_n. \quad (4.46)$$

Dies führt auf den in Abb. 4.3 dargestellten Algorithmus, der auch als Verlet-Algorithmus bekannt ist, s. VERLET [85].

INITIALISIERUNG DER BERECHNUNG

1. Berechnung der Konstanten
- α_i

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{1}{\beta\Delta t^2}, & \alpha_2 &= \frac{1}{\beta\Delta t}, & \alpha_3 &= \frac{1-2\beta}{2\beta}, \\ \alpha_4 &= \frac{\gamma}{\beta\Delta t}, & \alpha_5 &= 1 - \frac{\gamma}{\beta}, & \alpha_6 &= \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)\Delta t.\end{aligned}\quad (4.47)$$

2. Bestimmung der Beschleunigung
- $\ddot{\mathbf{d}}_0$
- durch Lösen der Bewegungsgleichung zum Zeitpunkt
- t_0
- mit den Anfangsbedingungen
- \mathbf{d}_0
- und
- $\dot{\mathbf{d}}_0$
- .

$$\ddot{\mathbf{d}}_0 = \mathbf{M}^{-1} \left(\mathbf{f}_0^{ext} - \mathbf{f}^{int}(\mathbf{d}_0) - \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}}_0 \right) \quad (4.48)$$

SCHLEIFE DER ZEITINTEGRATION

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

1. Gleichgewicht:

 SCHLEIFE DER GLEICHGEWICHTSITERATION ($i = 1, 2, \dots$)

- (a) Bestimmung der inneren Knotenkräfte und der rechten Seite (Residuum)

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(\mathbf{d}_{n+1}^i) &= \mathbf{M} \left(\alpha_1(\mathbf{d}_{n+1}^i - \mathbf{d}_n) - \alpha_2\dot{\mathbf{d}}_n - \alpha_3\ddot{\mathbf{d}}_n \right) \\ &\quad + \mathbf{C} \left(\alpha_4(\mathbf{d}_{n+1}^i - \mathbf{d}_n) + \alpha_5\dot{\mathbf{d}}_n + \alpha_6\ddot{\mathbf{d}}_n \right) \\ &\quad + \mathbf{f}^{int}(\mathbf{d}_{n+1}^i) - \mathbf{f}_{n+1}^{ext}\end{aligned}\quad (4.49)$$

- (b) Bestimmung der Systemmatrix (Iterationsmatrix)

$$\tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{d}_{n+1}^i) = \alpha_1\mathbf{M} + \alpha_4\mathbf{C} + \mathbf{K}_T(\mathbf{d}_{n+1}^i) \quad (4.50)$$

- (c) Lösen des Gleichungssystems

$$\tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{d}_{n+1}^i)\Delta\mathbf{d}_{n+1}^i = -\mathbf{r}(\mathbf{d}_{n+1}^i) \approx \mathbf{0}, \quad \mathbf{d}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{d}_{n+1}^i + \Delta\mathbf{d}_{n+1}^i \quad (4.51)$$

- (d) Abbruch, wenn Konvergenz erreicht, d.h.
- $\|\mathbf{r}(\mathbf{d}_{n+1}^i)\| < TOL$
- .

2. Bestimmung der aktuellen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen

$$\ddot{\mathbf{d}}_{n+1} = \alpha_1(\mathbf{d}_{n+1}^i - \mathbf{d}_n) - \alpha_2\dot{\mathbf{d}}_n - \alpha_3\ddot{\mathbf{d}}_n \quad (4.52)$$

$$\dot{\mathbf{d}}_{n+1} = \alpha_4(\mathbf{d}_{n+1}^i - \mathbf{d}_n) + \alpha_5\dot{\mathbf{d}}_n + \alpha_6\ddot{\mathbf{d}}_n \quad (4.53)$$

3. Nächster Zeitschritt:
- $t_{n+1} = t_n + \Delta t$
- .

Abbildung 4.2: Der Algorithmus zum NEWMARK-Verfahren für nichtlineare Probleme.

INITIALISIERUNG DER BERECHNUNG

1. Berechnung des Zeitschritts

$$\Delta t = \alpha \min \left\{ \frac{\ell_e}{c_e} \right\}; \text{ mit } \alpha \leq 0.9 \quad (4.54)$$

2. Bestimmung der Beschleunigungen, der Geschwindigkeiten und der Verschiebungen im ersten Zeitschritt durch Einbauen der Anfangsbedingungen:

$$\ddot{\mathbf{d}}_0 = \mathbf{M}^{-1} \left(\mathbf{f}_0^{ext} - \mathbf{f}^{int}(\mathbf{d}_0) - \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}}_0 \right) \quad (4.55)$$

$$\dot{\mathbf{d}}_{0+\frac{1}{2}} = \dot{\mathbf{d}}_0 + \frac{\Delta t}{2} \ddot{\mathbf{d}}_0 \quad (4.56)$$

$$\mathbf{d}_1 = \mathbf{d}_0 + \Delta t \dot{\mathbf{d}}_{0+\frac{1}{2}} \quad (4.57)$$

SCHLEIFE DER ZEITINTEGRATION

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

1. Bestimmung der inneren Knotenkräfte
- $\mathbf{f}^{int}(\mathbf{d}_n)$
-
2. Bestimmung der Beschleunigungen (nachgezogene Dämpfung)

$$\ddot{\mathbf{d}}_n = \mathbf{M}^{-1} \left(\mathbf{f}_n^{ext} - \mathbf{f}^{int}(\mathbf{d}_n) - \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}}_{n-\frac{1}{2}} \right) \quad (4.58)$$

3. der Geschwindigkeiten

$$\dot{\mathbf{d}}_{n+\frac{1}{2}} = \dot{\mathbf{d}}_{n-\frac{1}{2}} + \Delta t \ddot{\mathbf{d}}_n \quad (4.59)$$

4. und der Verschiebungen

$$\mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{d}_n + \Delta t \dot{\mathbf{d}}_{n+\frac{1}{2}} \quad (4.60)$$

5. Überprüfung der Energiebilanz

$$W_{int} + W_{kin} - W_{ext} - W_{Dämp} \leq TOL \quad (4.61)$$

6. Nächster Zeitschritt:
- $t_{n+1} = t_n + \Delta t$
- .

Abbildung 4.3: Algorithmus des Zentralen Differenzen Verfahrens für nichtlineare Probleme mit nachgezogener Dämpfung, bekannt als Verlet-Algorithmus [85].

4.5 Gegenüberstellung statischer und transienter Methoden bei Stabilitätsuntersuchungen

Bei Untersuchungen zu Strukturstabilität werden meist die in Kapitel 3 dargestellten Methoden der *statischen* FE-Analysen verwendet. Allerdings ist die Aussagekraft solcher Untersuchungen, wie bereits angemerkt, wegen des dynamischen Charakters des Stabilitätsversagens und wegen der Schwierigkeiten bei der Pfadverfolgung über die Stabilitätslast hinaus eingeschränkt. Daher kommen immer häufiger auch transiente Methoden bei Stabilitätsuntersuchungen zum Einsatz, was durch die rasante Entwicklung der Computer unterstützt wird.

Nachfolgend sind kurz die wesentlichen Vor- und Nachteile der statischen und der transienten Methoden hinsichtlich ihrer Verwendung für Stabilitätsuntersuchungen kurz dargestellt.

Vorteile statischer Methoden:

- Statische Methoden sind bei Bestimmung von Stabilitätslasten effizienter als transiente Methoden.
- Sie ermöglichen - zumindest für einfache Strukturen - die Bestimmung instabiler Pfade. Allerdings erscheint dieser oft genannte Vorteil nur selten nutzbar, da die Kenntnis instabiler Pfade zur Beurteilung des Stabilitätsverhaltens fragwürdig ist.

Nachteile statischer Methoden:

- Die Abbildung des Nachbeulverhaltens beschränkt sich auf "einfache" Strukturen, da nach Überschreitung des Stabilitätspunktes oft Konvergenzprobleme auftreten.

Vorteile transienter Methoden:

- Das Stabilitätsversagen ist in der Realität ein dynamischer Prozess. Daher führen die Untersuchungen mittels transienter Methoden zu Ergebnissen, die näher am realen Strukturverhalten sind.
- Sie weisen kaum Konvergenzprobleme bei Singularität der Steifigkeitsmatrix auf und sind daher sowohl zur Untersuchung des Vor- als auch des Nachbeulverhaltens verwendbar.

Nachteile transienter Methoden:

- Wegen der Trägheitskräfte ergeben sich bei transienten Analysen höhere Stabilitätslasten als statisch. Allerdings sind diese Einflüsse vernachlässigbar, wenn die

4.5. GEGENÜBERSTELLUNG STATISCHER UND TRANSIENTER METHODEN BEI STABILITÄTSUNTERSUCHUNGEN

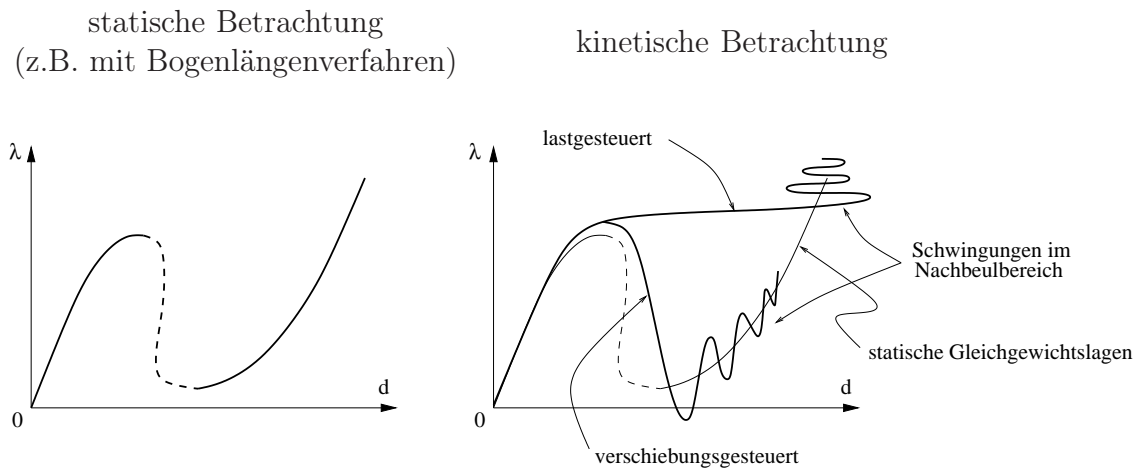


Abbildung 4.4: Schematische Gegenüberstellung einer rein statischen Betrachtung und einer kinetischen Betrachtung mit endlich großer Geschwindigkeit.

Belastungsgeschwindigkeiten klein genug sind. Andererseits wird aus Effizienzgründen angestrebt, mit möglichst hohen Belastungsgeschwindigkeiten zu arbeiten. Daher sind zur Einschätzung des Einflusses der Trägheitskräfte zusätzliche Untersuchungen erforderlich.

- Während eines Durchschlagvorgangs wird potentielle Energie in kinetische umgewandelt, was Schwingungen um die stabilen Gleichgewichtslagen im Nachbeulbereich verursacht, s. Abb. 4.4. Aus diesem Grund lassen sich die gesuchten statischen Gleichgewichtslagen nur näherungsweise ablesen. Dem kann mit Hilfe moderater Dämpfung entgegengewirkt werden.
- Je nach Zeitschrittweite und verwendeter Zeitintegrationsmethode kann der Rechenaufwand gegenüber statischen Methoden steigen.
- Neben der Konvergenz der Lösung hinsichtlich räumlicher Diskretisierung muss bei impliziter Zeitintegration auch die Konvergenz im Zeitschritt untersucht werden.

Kapitel 5

Kreiszyylinder unter axialer Druckbeanspruchung

Im vorliegenden Kapitel wird das Beulverhalten von Kreiszyindern unter axialem Druck untersucht. Die Motivation hierzu wurde bereits in der Einleitung zu der vorliegenden Arbeit dargelegt. Diese liegt im wesentlichen darin, dass die rechnerischen Beullasten aus FE-Analysen, die im Schrifttum zu finden sind, oft kaum mit den Versuchsergebnissen übereinstimmen, s. z.B. KNEBEL [50], Ummenhofer [84] und ROTTNER [69].

Das Studium des Schrifttums zeigt weiter, dass die meisten Untersuchungen an Kreiszyindern mit bilinearen Schalenelementen erfolgen. Sucht man nach Analysen mit Verwendung von Schalenelementen höherer Ansatzordnung und fortschrittlicheren Methoden wie adaptiven Netzverfeinerungstechniken, so stellt man fest, dass sich solche Untersuchungen auf mäßig dünne Schalen beschränken, s. z.B. STEIN ET AL. [79], CIRAK [21]. Daher wird in der vorliegenden Arbeit der Einfluss der Ansatzordnung auf die Genauigkeit und Effizienz bei Stabilitätsanalysen untersucht. Hierbei ist bei Vergleichen mit den experimentellen Ergebnissen und analytischen Referenz-Lösungen das Sicherstellen der Netzkonvergenz der Lösung unerlässlich. In früheren, oben genannten Arbeiten wurde darauf meist verzichtet. Einer der wichtigsten Gründe hierfür lag wohl in der begrenzten Kapazität der damals verwendeten FE-Programme sowie der Computer.

Dieser Umstand wird zum Anlaß genommen, das Konvergenzverhalten der Lösung zunächst für den geometrisch perfekten und anschließend für die geometrisch imperfekten Zylinder sowohl bei statischen als auch bei transienten Analysen eingehend zu untersuchen. Hierbei werden gleichmäßig und adaptiv verfeinerte Netze mit Schalenelementen der Ansatzordnungen bilinear, biquadratisch und bikubisch verwendet.

5.1 Analytische Lösungen und Bemessung

Bei den Untersuchungen zur Genauigkeit und Effizienz von Schalenelementen unterschiedlicher Ansatzordnung hinsichtlich Stabilitätslasten einer geometrisch perfekten Kreiszyinderschale werden in der vorliegenden Arbeit analytische Lösungen als Referenzlösungen verwendet. Diese Lösungen werden hier vor allem hinsichtlich der Randbedingungen ausführlich dargestellt, da deren korrekte Berücksichtigung zentral für einen solchen Vergleich ist.

Als Referenz für numerisch ermittelte Nachbeulpfade werden experimentelle Ergebnisse sowie unten dargestellte Bemessungslasten aktueller Bemessungsrichtlinien verwendet.

5.1.1 Analytische Lösungen für Verzweigungslasten

Bereits Anfang des letzten Jahrhunderts wurde von LORENZ [58] auf der Basis einer linearen Theorie, d.h. mit Annahme infinitesimal kleiner Verschiebungen, eine einfache Gleichung zur Bestimmung der Beullast eines Kreiszyinders unter axialer Druckbeanspruchung angegeben

$$\sigma_{cr,cl} = \frac{E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \cdot \frac{t}{R} \quad (5.1)$$

Hierbei bedeuten E Elastizitätsmodul, ν Querdehnzahl, t Schalendicke und R Radius der Zylindermittelfläche. Sie stellt auch noch in heutiger Zeit die Grundlage der Bemessungsrichtlinien dar. Mit einer Querdehnzahl $\nu = 0.3$ ergeben sich für stählerne Kreiszyinder die klassische kritische Beulspannung $\sigma_{cr,cl}$ und die klassische kritische Beullast $F_{cr,cl}$ zu

$$\sigma_{cr,cl} = 0.605 \cdot \frac{Et}{R} \quad (5.2)$$

$$F_{cr,cl} = \sigma_{cr,cl} \cdot t \cdot 2\pi R = 0.605 \cdot 2\pi Et^2. \quad (5.3)$$

Das Ergebnis gilt für die sogenannten *klassischen Randbedingungen*:

- Gelenkige Lagerung der Zylinderränder.
- Annahme eines Membranspannungszustandes, d.h. bis zum Verzweigungspunkt wird die radiale Aufweitung des Mantels an den Zylinderenden zugelassen.
- Die Verschiebung der Ränder in radialer Richtung wird erst am Verzweigungspunkt verhindert.

Zur Bestimmung des Verzweigungspunktes wird die zugehörige Beulform mit trigonometrischen Funktionen approximiert. Bezeichnend für die klassische kritische Beulspannung nach (5.1) ist, dass sie von der Zylinderlänge und von der Annahme der Beulform

unabhängig ist. Außerdem ist die Annahme eines reinen Membranspannungszustandes und damit verbunden die freie Randaufweitung bei den Verformungen bis zum Verzweigungspunkt nicht realistisch. Daher eignet sich diese Lösung kaum als Referenzlösung.

Eine treffendere Darstellung des Beulverhaltens von Kreiszyklindern ergibt sich bei der Lösung der Gleichungen von DONNELL [24] und der Gleichungen von FLÜGGE [34]. Diese sind auf der Grundlage nichtlinearer Theorien hergeleitet und ermöglichen im Gegensatz zur Lösung nach LORENZ auch eine eindeutige Bestimmung von Beulformen. Es sei angemerkt, dass die Gleichungen von DONNELL in denen von FLÜGGE enthalten sind, und somit deren vereinfachte Variante darstellen, s. z.B. YAMAKI [97]. Für den in der vorliegenden Arbeit relevanten Geometriebereich liefert die Lösung sowohl der DONNELLSchen als auch der FLÜGGESchen Gleichungen nahezu identische Ergebnisse, daher werden weiter nur noch die ersteren berücksichtigt.

Die Berücksichtigung der verhinderten radialen Aufweitung an Zylinderenden im Vorbeulzustand führt zur Reduktion der Beulspannung gegenüber der Lösung nach LORENZ. Der Grund hierfür liegt darin, dass der Membranspannungszustand nahe der Zylinderenden durch Biegemomente gestört wird, was sich auch in der Verteilung der Beulen widerspiegelt, s. Abb. 5.2. Bei dieser Vorgehensweise ergeben sich je nach Art der Randbedingungen leicht unterschiedliche Beullasten und Beulformen. Aus einer Vielzahl möglicher Randbedingungen – gelenkig oder eingespannt, wölbfrei oder wölbbehindert usw. – sind nur wenige Kombinationen aus ingenieurtechnischer Sicht von Interesse. Diese sind in Tabelle 5.1 mit der Definition der Schnittgrößen nach Abb. 5.1 dargestellt. Dabei steht der Index “1” für den Zustand “1”, welcher der infinitesimal benachbarte Zustand am Verzweigungspunkt zum Ausgangszustand ist. D.h die Definition der Randbedingungen gilt nur für den Verzweigungspunkt selbst, nicht für die Verformungen im Vorbeulbereich. Da in der Realität keine vollkommen drehfreie oder vollständig eingespannte Lagerung der Ränder vorliegt, stellen diese Randbedingungen eine Näherung der realen Lagerung dar.

Für die in Tabelle 5.1 dargestellten Randbedingungen ergeben sich durch Lösung DONNELLScher Gleichungen mit Berücksichtigung der Verformungen im Vorbeulbereich folgende Faktoren für die Beulspannungen bzw. die Beulformen:

$$S1 : \alpha = 0.87 \quad \mu = 0.94 \quad (5.4)$$

$$S3 : \alpha = 0.84 \quad \mu = 0.87 \quad (5.5)$$

$$C1 : \alpha = 0.93 \quad \mu = 0.94. \quad (5.6)$$

Die Beulspannung σ_{cr} und die Anzahl der Beulen in Umfangsrichtung N können dann folgendermaßen berechnet werden

$$\sigma_{cr} = \alpha \sigma_{cr,cl} \quad (5.7)$$

$$N = \mu N_{cl}. \quad (5.8)$$

Mit einer Querdehnzahl $\nu = 0.3$ bestimmt sich die kritische klassische Beullast $\sigma_{cr,cl}$ nach Gl. (5.2) und die Anzahl der Beulen in Umfangsrichtung für klassische Randbe-

dingungen nach

$$N_{cl} = 0.909 \sqrt{\frac{R}{t}}. \quad (5.9)$$

Die in den Gleichungen (5.4) bis (5.6) angegebenen Werte gelten für den Bereich mittellanger Zylinder. Dieser Bereich läßt sich mit dem sogenannten Batdorf-Parameter Z nach unten folgendermaßen abgrenzen:

$$Z = \sqrt{1 - \nu^2} \frac{L^2}{Rt} \geq 500. \quad (5.10)$$

Bei sehr langen Zylindern geht das Zylinderbeulen in das Eulerstabknicken über. Die Grenze hierfür ist je nach Randbedingungen unterschiedlich und wird bei YAMAKI [97] folgendermaßen angegeben:

$$\begin{aligned} S1 & : Z \cdot \left(\frac{t}{R}\right)^2 \leq 10 \\ S3 & : Z \cdot \left(\frac{t}{R}\right)^2 \leq 0.32 \\ C1 & : Z \cdot \left(\frac{t}{R}\right)^2 \leq 4.0. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Die Werte für α und μ sind allerdings auch im Bereich mittellanger Zylinder nur annähernd konstant, was bei der späteren Verwendung dieser Lösung zur Validierung des numerischen Modells beachtet werden muss.

Die oben dargestellte Lösung der DONNELL'schen Gleichungen mit Berücksichtigung der Verformungen im Vorbeulbereich, d.h. mit Berücksichtigung der behinderten radialen Aufweitung an den Zylinderenden, wird als Referenzlösung bei numerischen Untersuchungen an geometrisch perfekten Kreiszylindern verwendet. Zur Validierung der numerischen Ergebnisse für den Nachbeulbereich werden die nachfolgend dargestellten Untersuchungen von ESSLINGER ET AL. [29] und YAMAKI [97], experimentelle Ergebnisse aus dem Sonderforschungsbereich 219 [48] sowie die Bemessungslasten herangezogen.

5.1.2 Experimentelle und theoretische Untersuchungen des Nachbeulbereichs

In ersten Versuchen zum Beulen eines Kreiszylinders unter axialem Druck konnten die Lasten der oben beschriebenen analytischen Lösung nicht erreicht werden. Für sehr dünnwandige Schalen betrug die experimentelle Beullast oft weniger als 20 % der klassischen kritischen Last nach Gl. (5.2), s. Abb. 5.3. Obgleich die analytische Lösung lange

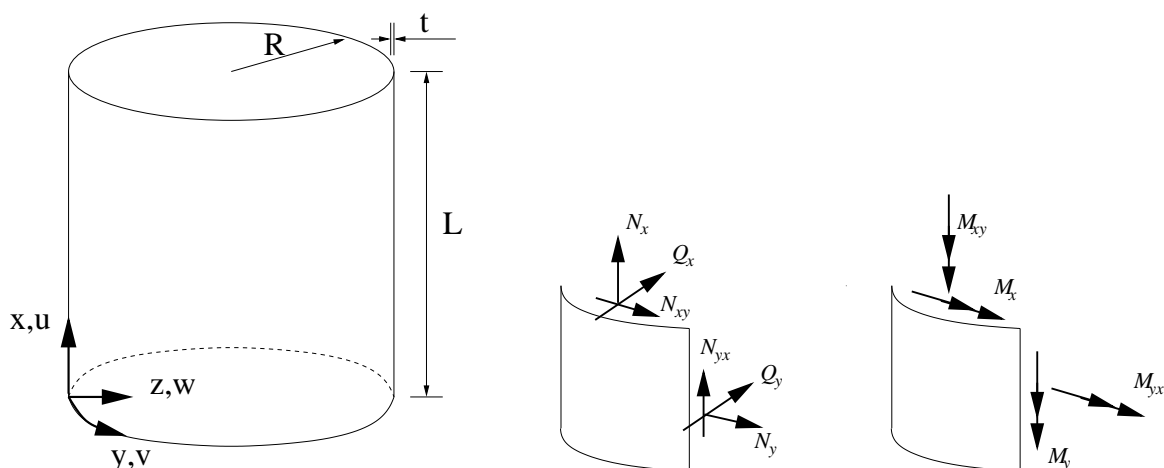


Abbildung 5.1: Definition von Zylinderkoordinaten und Schnittgrößen

bekannt war, war es unklar, warum die Versuchsergebnisse so stark davon abweichen. Auch die genauere Lösung nach DONNELL mit Berücksichtigung der behinderten Randaufweitung konnte diese große Diskrepanz nicht erklären. Erst KOITER [52] gelang es, mit Hilfe der Störungsrechnung, die Abweichungen auf eine starke Imperfektionsempfindlichkeit analytisch zurückzuführen. In späteren Versuchen mit nahezu perfekten Versuchskörpern wurden dann auch experimentell die analytisch bestimmten Werte nach (5.4) - (5.6) erreicht, siehe z.B. TENNYSON [80], YAMAKI [97], wodurch dann endgültig gezeigt war, dass Imperfektionen die Streuung der Beullasten verursachen.

Aus der Annahme heraus, dass die niedrigste Nachbeullast eines perfekten Zylinders eine untere Grenze für mögliche Beullasten imperfekter, realer Zylinder darstellt, wurden Bestrebungen unternommen, das Nachbeulverhalten vollständig abzubilden. Hierzu war die Vorgehensweise von KOITER nicht geeignet, da damit nur Aussagen für die unmittelbare Umgebung des Verzweigungspunktes möglich sind. Eine der ersten Untersuchungen führten v. KÁRMÁN und TSIEN [49] durch. Sie bestimmten eine Nachbeullast mit Hilfe der DONNELL'schen Gleichungen, indem sie ein in den Versuchen beobachtetes periodisches rautenförmiges Beulmuster benutzten. Die Lösung erfolgte mit einem dreigliedrigen Ritzansatz ohne Berücksichtigung von Randbedingungen an Zylinderenden, d.h. an einem unendlich langen Zylinder. Dadurch war der Einfluss der Lagerung an Zylinderenden nicht erfasst. Etwas später zeigte HOFF [39], dass diese Vorgehensweise bei Hinzunahme von immer mehr Gliedern im Ansatz zu einer kleinsten Nachbeullast führt, die gegen Null strebt. Da dies nicht dem in den Versuchen beobachteten Verhalten entsprach, musste diese Vorgehensweise aufgegeben werden.

Erst ESSLINGER und Koautoren [29] gelang die treffende Berechnung des Nachbeulverhaltens. Analog zu vorher beschriebenen Untersuchungen wurden auch hier DONNELL'sche Gleichungen und ein rautenförmiges Beulmuster verwendet. Allerdings wurden die Ansatzfunktionen für die Lösung mit dem GALERKIN-Verfahren so gewählt, dass die Randbedingungen erfüllt waren, wodurch der Einfluss der Lagerung an Zylinderenden erfasst war. Die Ergebnisse wurden anhand von Versuchen an Zylindern aus

Bezeichnung nach		Randbedingungen	Beschreibung
YAMAKI	DIN 18800 (4)		
S1	RB1	$w_1 = 0$ $w_{1,xx} = 0$ $u_1 = 0$ $v_1 = 0$	keine radiale Aufweitung gelenkig wölbbehindert schubbehindert
S3	RB2	$w_1 = 0$ $w_{1,xx} = 0$ $N_{x1} = 0$ $v_1 = 0$	keine radiale Aufweitung gelenkig wölbfrei schubbehindert
C1	RB1 kurze Zylinder	$w_1 = 0$ $w_{1,x} = 0$ $u_1 = 0$ $v_1 = 0$	keine radiale Aufweitung eingespannt wölbbehindert schubbehindert

Tabelle 5.1: Definition der Lagerung nach YAMAKI und DIN 18800, Teil 4.

Mylar, die wegen der hohen Streckgrenze eine Untersuchung des elastischen Beulens auch für große Verformungen ermöglichen, validiert.

Ein Beispiel für experimentelle und theoretische Ergebnisse zu Untersuchungen des Nachbeulbereichs ist in Abb. 5.4 gegeben. Die in Abb. 5.4 dargestellten Nachbeulpfade mussten einzeln bestimmt werden. Hierfür war die explizite Vorgabe der Verformungszustände, d.h. der Anzahl der Beulen in axialer und umlaufender Richtung, erforderlich. Dieses Vorgehen ist sehr ineffizient und führt nur zum Erfolg, wenn die Nachbeulformen bereits qualitativ bekannt sind. Daher wird im Rahmen der vorliegenden Arbeit geprüft, ob die modernen Algorithmen der FE-Methode zu einer effizienteren und robusteren Lösung zur Beschreibung des Nachbeulverhaltens führen.

5.1.3 Bemessungsrichtlinien

Bemessungsrichtlinien für Schalentragwerke sind nach gleichem Prinzip der Abminderung der klassischen kritischen Last aufgebaut. Dabei wird der Abminderungsfaktor im Wesentlichen aus Versuchen ermittelt. Allerdings wird das reale in Versuchen beobachtete Verhalten in den Normen unterschiedlich berücksichtigt. Bei den hier dargestellten

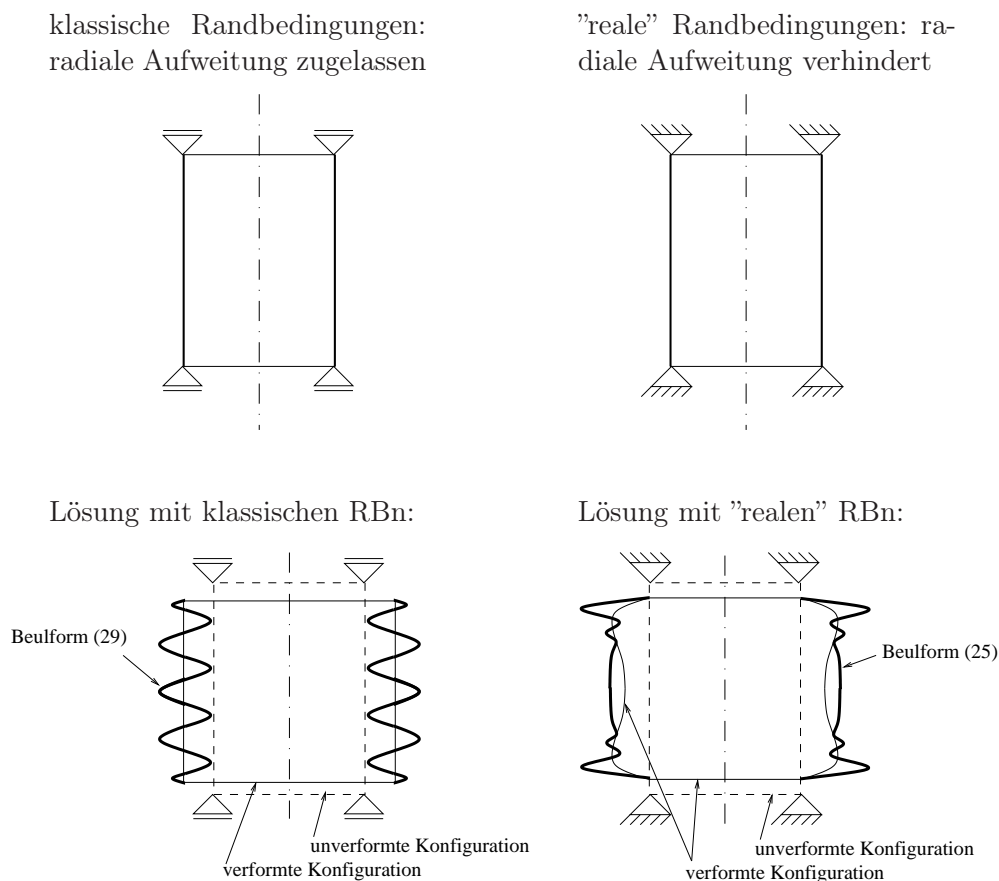


Abbildung 5.2: Beulformen für die analytischen Lösungen für einen Kreiszyylinder mit der Batdorf-Zahl $Z = 1000$ unter axialem Druck ohne (links) und mit Berücksichtigung der Verformungen im Vorbeulbereich (rechts), entnommen YAMAKI [97].

Normen DIN 18800 Teil 4 [26] und Eurocode 3 [31] ergeben sich beispielsweise signifikante Unterschiede hinsichtlich der Grenze des elastischen Beulens. Außerdem wird die aus Versuchen bekannte Tatsache, dass die untere Grenze der experimentellen Beulasten und damit die Abminderung der klassischen Last mit zunehmender Schlankheit der Kreiszyylinder kontinuierlich abnimmt, unterschiedlich behandelt. Beides ist für den Vergleich mit den numerischen Ergebnissen von zentraler Bedeutung.

DIN 18800, Teil 4

Nach DIN 18800, Teil 4 wird ein charakteristischer Wert der Beulspannung (Beullast $F_{cr} = \sigma_{cr} \cdot t \cdot 2\pi R$) für einen stählernen Kreiszyylinder unter axialem Druck zunächst in Abhängigkeit der Streckgrenze $f_{y,k}$ definiert

$$\sigma_{xS,R,k} = \kappa_2 \cdot f_{y,k}. \quad (5.12)$$

Der Abminderungsfaktor κ_2 ist eine Funktion der bezogenen Schlankheit $\bar{\lambda}_S$

$$\bar{\lambda}_S = \sqrt{\frac{f_{y,k}}{\sigma_{xSi}}}. \quad (5.13)$$

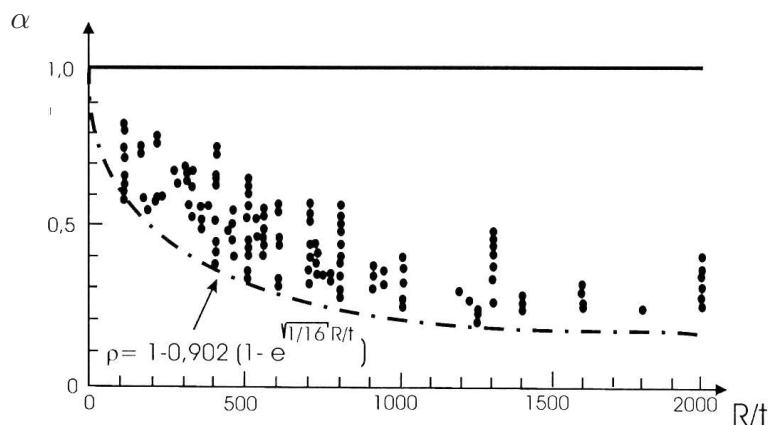


Abbildung 5.3: Experimentell bestimmte Stabilitätslasten axialbelasteter Kreiszyylinder, entnommen WEINGARTEN ET AL. [91].

Dabei ist ideale Beulspannung σ_{xSi} meist¹ gleich der klassischen kritischen Spannung, d.h. es gilt

$$\sigma_{xSi} = \sigma_{cr,cl} = 0.605 \cdot \frac{Et}{R}. \quad (5.14)$$

Der Abminderungsfaktor κ_2 ist bereichsweise definiert zu

$$\kappa_2 = \begin{cases} \frac{0.3}{\bar{\lambda}_S} & \text{für } 1.0 < \bar{\lambda}_S \leq 1.5 \quad \text{elastisch-plastischer Bereich} \\ \frac{0.2}{\bar{\lambda}_S^2} & \text{für } \bar{\lambda}_S > 1.5 \quad \text{elastischer Bereich} \end{cases} \quad (5.15)$$

wobei hier der plastische Bereich mit $\bar{\lambda}_S < 1.0$ außer acht gelassen wird, da er für die in der vorliegenden Arbeit betrachteten Zylinderschalen unwesentlich ist. Mit den Gl. (5.12) - (5.15) läßt sich die charakteristische Beulspannung auch folgendermaßen angeben

$$\sigma_{xS,R,k} = \begin{cases} \frac{0.3}{\bar{\lambda}_S} \cdot \sigma_{cr,cl} & \text{für } 0.44f_{y,k} \leq \sigma_{cr,cl} < f_{y,k} \\ 0.2 \cdot \sigma_{cr,cl} & \text{für } \sigma_{xSi} < 0.44f_{y,k}. \end{cases} \quad (5.16)$$

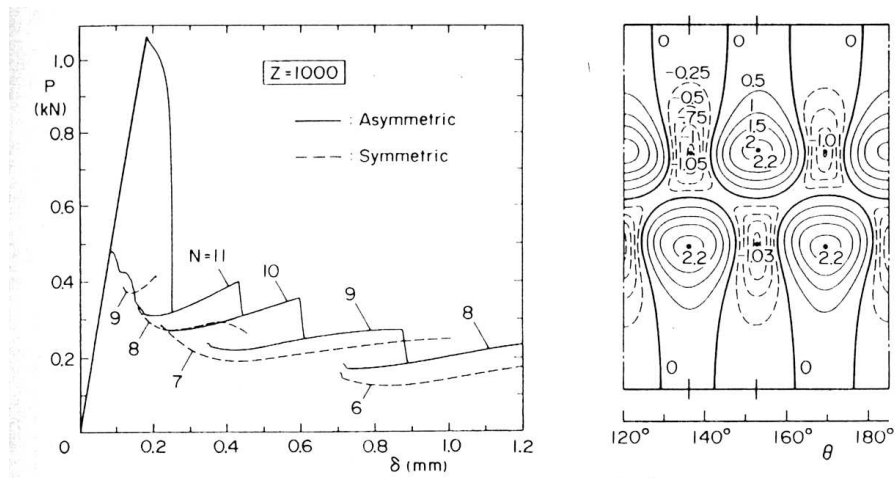
D.h. der charakteristische Wert wird im elastischen Bereich einfach durch die Abminderung der klassischen kritischen Beulspannung auf 20 % bestimmt. Diese Abminderung ist unabhängig von der Länge und vom R/t -Verhältnis der Schale.

¹Eigentlich muss die kritische klassische Spannung noch mit einem Faktor C_x , der die Zylinderlänge berücksichtigt, multipliziert werden $\sigma_{xSi} = C_x \cdot \sigma_{cr,cl}$. Allerdings gilt für einen weiten Geometriebereich $C_x \approx 1.0$.

Experiment:

Last-Verformungsverlauf
(Be- und Entlastung)

Verformung im Nachbeulbereich



Berechnung:

Gleichgewichtslagen im Vor- und Nachbeulbereich

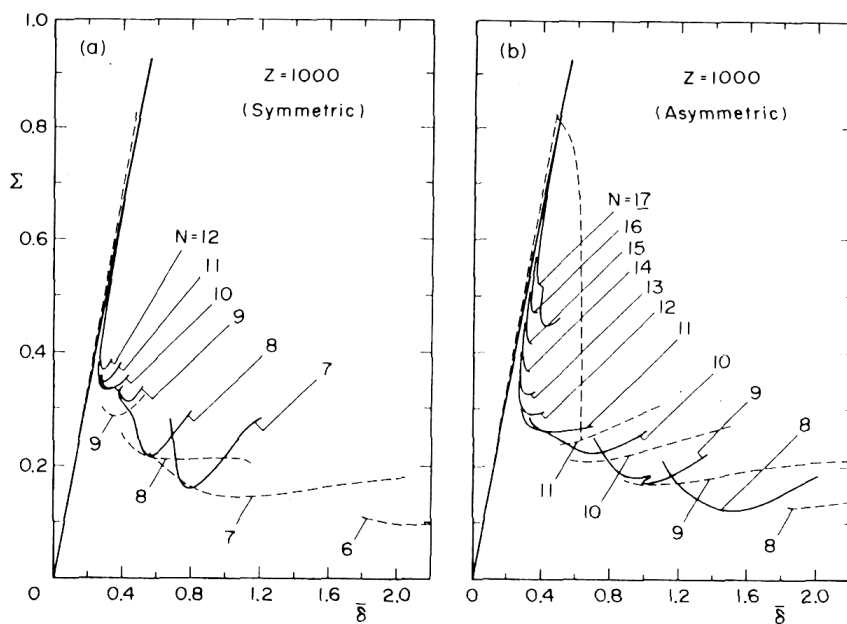


Abbildung 5.4: Experimentelle und berechnete Beulkurven und Beulformen axialbelasteter Kreiszyylinder, entnommen YAMAKI [97].

Der Bemessungswert wird schließlich durch eine Abminderung des charakteristischen Wertes mit dem Sicherheitsfaktor γ_{M2} bestimmt

$$\sigma_{xS,R,d} = \frac{\sigma_{xS,R,k}}{\gamma_{M2}} \tag{5.17}$$

mit

$$\begin{aligned}\gamma_{M2} &= 1.1 \left(1 + 0.318 \cdot \frac{\bar{\lambda}_S - 0.25}{1.75} \right) \quad \text{für } 0.25 \leq \bar{\lambda}_S \leq 2.0 \\ \gamma_{M2} &= 1.45 \quad \text{für } \bar{\lambda}_S > 2.0.\end{aligned}\tag{5.18}$$

Demnach nimmt der Sicherheitsbeiwert γ_{M2} für dünnwandige Zylinder mit $\bar{\lambda}_S > 0.25$ linear auf den Wert 1.45 zu.

Eurocode 3

Analog zur DIN 18800 ist auch im Eurocode [31] (EC3) die charakteristische Beulspannung zunächst in Abhängigkeit der Streckgrenze definiert

$$\sigma_{x,Rk} = \kappa_x \cdot f_{yk}.\tag{5.19}$$

Auch hier ist der Abminderungsfaktor κ_x eine Funktion der Schlankheit $\bar{\lambda}_x$

$$\bar{\lambda}_x = \sqrt{\frac{f_{yk}}{\sigma_{x,Rcr}}} \quad \sigma_{x,Rcr} = \sigma_{cr,cl}\tag{5.20}$$

und ist bereichsweise definiert als

$$\kappa_x = \begin{cases} 1 - 0.6 \left(\frac{\bar{\lambda}_x - 0.2}{\bar{\lambda}_p - 0.2} \right) & \text{für } 0.2 < \bar{\lambda}_x < \bar{\lambda}_p \quad \text{elastisch-plastischer Bereich} \\ \frac{\alpha}{\bar{\lambda}_x^2} & \text{für } \bar{\lambda}_x \geq \bar{\lambda}_p \quad \text{elastischer Bereich} \end{cases}\tag{5.21}$$

Der plastische Bereich mit $\bar{\lambda}_x < 0.2$ wird hier außer acht gelassen. Im Gegensatz zu DIN 18800 ist hier die Grenze des elastischen Bereichs nicht als Zahlenwert der bezogenen Schlankheit fest vorgegeben, sondern ist durch den sogenannten teilplastischen Schlankheitsgrad $\bar{\lambda}_p$ festgelegt. Dieser ist seinerseits eine Funktion des elastischen Imperfektions-Abminderungsfaktors α_x

$$\bar{\lambda}_p = \sqrt{\frac{\alpha_x}{0.4}}\tag{5.22}$$

mit

$$\alpha_x = \frac{0.62}{1 + 1.91 \left(\frac{1}{Q} \sqrt{\frac{R}{t}} \right)^{1.44}}.\tag{5.23}$$

Mit dem Faktor Q wird die Qualitätsklasse berücksichtigt: $Q_A = 40$ (exzellent), $Q_B = 25$ (hoch), $Q_C = 16$ (normal).

Im Falle des elastischen Beulens darf die charakteristische Beulspannung direkt mit

$$\sigma_{x,Rk} = \alpha_x \sigma_{x,Rcr} \quad (5.24)$$

bestimmt werden. Dabei läßt sich die Grenze des elastischen Bereichs mit (5.20)-(5.22) auch folgendermaßen angeben:

$$\sigma_{x,Rcr} \leq \frac{0.4 f_{yk}}{\alpha_x}. \quad (5.25)$$

Der Bemessungswert wird durch die Abminderung des charakteristischen Wertes bestimmt:

$$\sigma_{x,Rd} = \frac{\sigma_{x,Rk}}{\gamma_{M1}} \quad \text{mit} \quad \gamma_{M1} = 1.1. \quad (5.26)$$

Vergleich

Mehrere Unterschiede lassen sich beim Vergleich der DIN 18800 Teil 4 mit dem Eurocode 3 feststellen:

- Die Abminderungsfaktoren κ sind sehr unterschiedlich definiert: im elastischen Beulbereich darf die Bemessungsspannung nach DIN 18800 einfach mit der Abminderung der klassischen Beulspannung auf 20% bestimmt werden. Hingegen nimmt der Abminderungsfaktor κ nach EC3 auch im elastischen Bereich weiter ab.
- Im EC3 sind im Gegensatz zu DIN 18800 Qualitätsklassen eingeführt, die unterschiedliche Herstelltoleranzen berücksichtigen.
- Die Abminderung der charakteristischen Beulspannung erfolgt im EC3 mit einem konstanten Faktor $\gamma_{M1} = 1.1$. Im Gegensatz hierzu wird in der DIN der Abminderungsfaktor $\gamma_{M2} = 1.1$ nur für weniger schlanke Schalen mit $\lambda_S < 0.25$ verwendet. Für sehr schlanke Schalen mit $\lambda_S > 2.0$ gilt $\gamma_{M2} = 1.45$, dazwischen ist der Abminderungsfaktor linear veränderlich.
- Die Grenze des elastischen Bereichs kann nach DIN 18800 mit 44% der Fließspannung $f_{y,k}$ direkt angegeben werden, s. Gl. (5.16). Hingegen ist diese Grenze nach EC3 zusätzlich vom elastischen Abminderungsfaktor α_x abhängig, s. Gl. (5.25).

Zusammenfassend können die Bemessungswerte der Beulspannungen nach DIN 18800 und nach EC3 einheitlich folgendermaßen dargestellt werden

$$\begin{aligned} \sigma_{DIN,d} &= \alpha_{DIN} \cdot \sigma_{cr,cl} \\ \sigma_{EC,d} &= \alpha_{EC} \cdot \sigma_{cr,cl} \end{aligned} \quad (5.27)$$

Da die Abminderungsfaktoren und die Grenzen der elastischen Beulbereiche von der Streckgrenze und dem E-Modul abhängen, kann ein Vergleich nur für bestimmte Zahlenwerte vorgenommen werden. Mit $E = 2.0 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$ und $f_{y,k} = 240 \text{ N/mm}^2$ ergeben sich folgende Grenzen der elastischen Bereiche:

- DIN 18800, Teil 4:
 - Grenze zu teilplastisch: $\bar{\lambda}_S = 1.0 \Rightarrow R/t = 504$
 - Grenze zu elastisch-plastisch: $\bar{\lambda}_S = 1.5 \Rightarrow R/t = 1134$
- Eurocode 3:
 - Grenze zu vollplastisch: $\bar{\lambda}_x = 0.2 \Rightarrow R/t = 21$
 - Grenze zu elastisch-plastisch²:
 - * Klasse A: $Q = 40 \Rightarrow R/t = 445$
 - * Klasse B: $Q = 25 \Rightarrow R/t = 346$
 - * Klasse C: $Q = 16 \Rightarrow R/t = 264$

Damit beginnt der elastische Bereich nach EC3 je nach Qualitätsklasse bei $R/t \approx 250$ bis 450. Nach DIN 18800 gilt hier aber noch der teilplastische Bereich. Der elastische Bereich beginnt nach DIN 18800 erst bei $R/t \approx 1200$. Dies läßt den Schluß zu, dass die Einteilung in vollplastische, elastisch-plastische und elastische Bereiche nicht gesichert auf die plastischen Einflüsse zurückzuführen ist. Dieser Sachverhalt ist wichtig für den Vergleich numerischer Ergebnisse mit den Bemessungswerten.

Das Diagramm in Abb. 5.5 zeigt die charakteristischen Werte α ohne die Sicherheitsfaktoren. Erwartungsgemäß ergeben sich hier signifikante Unterschiede. In Abb. 5.6 sind die Bemessungsspannungen mit Berücksichtigung von Abminderungsfaktoren dargestellt. Beachtet man die recht unterschiedlichen Konzepte, die den beiden Normen zugrunde liegen (beispielsweise die κ -Werte) so ist es überraschend, dass die Bemessungswerte nach EC3 mit der Qualitätsklasse B mit den Bemessungswerten der DIN 18800 für einen weiten R/t -Bereich gut übereinstimmen, s. Abb. 5.6. Demnach wird hier der gleiche experimentelle Sachverhalt mit zwei unterschiedlichen Konzepten beschrieben.

²Hier wurden die R/t -Grenzen des elastischen Bereichs mit den Gleichungen (5.25) und (5.23) unter Zuhilfenahme eines Graphik-Lösers bestimmt.

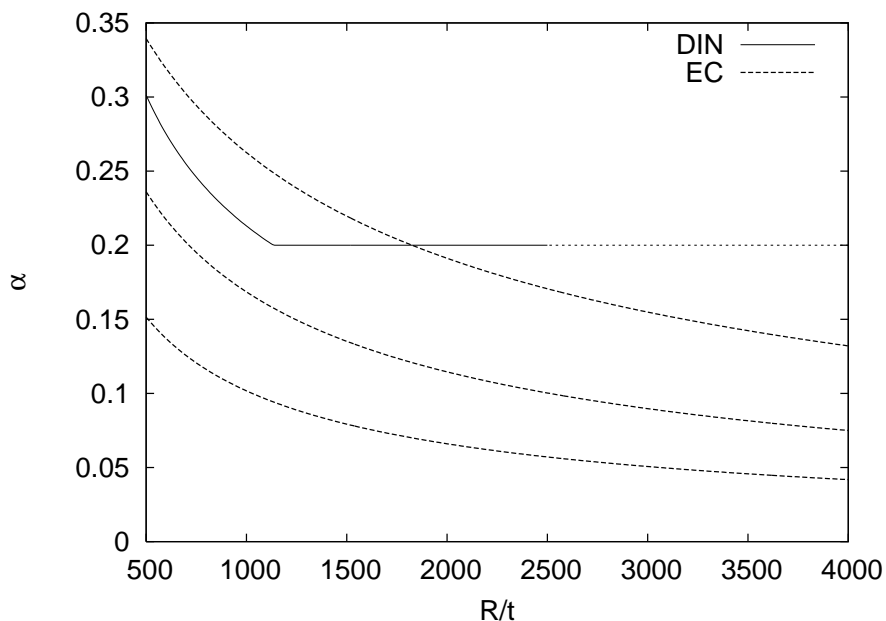


Abbildung 5.5: Abminderungsfaktoren α_{DIN} und α_{EC} für den Fall der axialen Druckbeanspruchung, berechnet mit der Streckgrenze von $f_{y,k} = 240 \text{ N/mm}^2$ ohne Berücksichtigung der Sicherheitsfaktoren γ_{M1} und γ_{M2} .

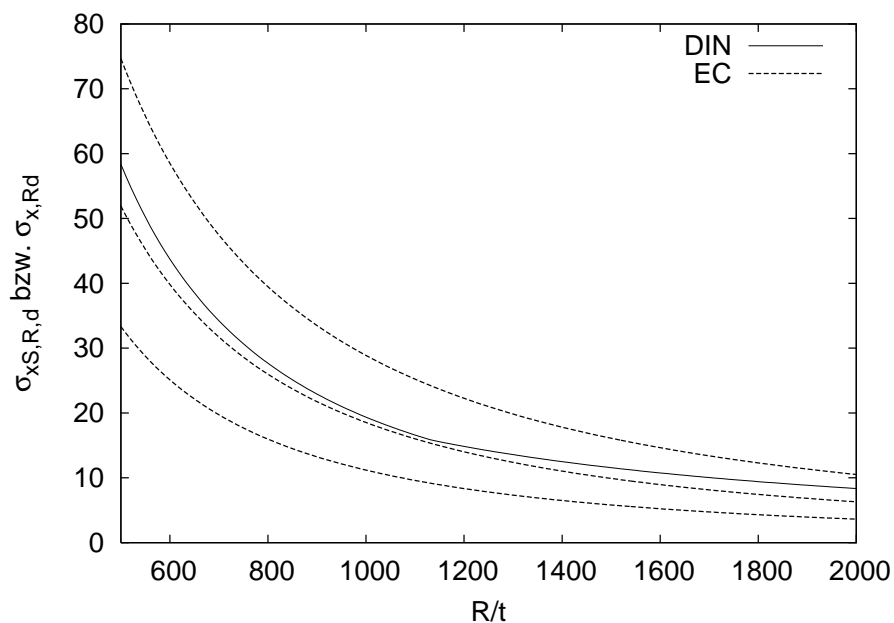


Abbildung 5.6: Bemessungswerte der Beulspannungen $\sigma_{x,S,R,d}$ nach DIN 18800, Teil 4 und $\sigma_{x,Rd}$ nach Eurocode 3 für den Fall der axialen Druckbeanspruchung, berechnet mit der Streckgrenze von $f_{y,k} = 240 \text{ N/mm}^2$.

5.2 FE Untersuchungen an geometrisch perfekten Kreiszy lindern

Im vorliegenden Kapitel erfolgt eine Untersuchung zur Bestimmung von Stabilitätslasten von geometrisch perfekten Kreiszy lindern unter axialem Druck mittels einer statischen FE-Analyse. Anschließend werden die Möglichkeiten transienter FE-Analysen zur Abbildung des Beulverhaltens, insbesondere bei der Analyse des Nachbeulbereichs untersucht.

Die Beulformen, d.h. Lösungen des Standard eigenwertproblems am Stabilitätspunkt, und Nachbeulformen, d.h. Verformungsmuster im Nachbeulbereich, werden oft als wesentliches Imperfektionsmaß verwendet. Aus diesem Grund wird nachfolgend neben den Stabilitätslasten auch die korrekte Abbildung der Beulformen untersucht. Hierbei wird für unterschiedliche Elementtypen – bilinear, biquadratisch und bikubisch – die Lösung hinsichtlich Genauigkeit (\equiv Konvergenzverhalten), numerische Robustheit und Effizienz, untersucht.

5.2.1 Bestimmung der Beullast mittels statischer FE-Analysen

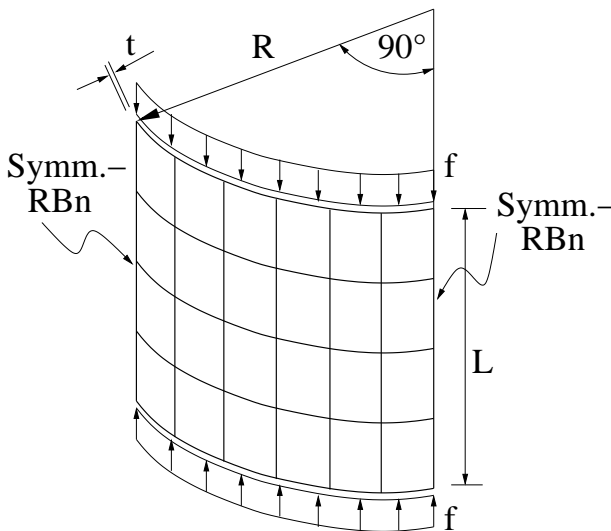
Die Bestimmung der Beullast erfolgt mittels einer nichtlinearen Berechnung mit Überwachung der Eigenwerte der Steifigkeitsmatrix. Das nichtlineare Gleichungssystem wird mit dem Newton-Verfahren gelöst. Anschließend wird in jedem konvergierten Lastschritt das Standard eigenwertproblem (3.44) gelöst. Bei Auftreten negativer Eigenwerte bei der Lösung des Standard eigenwertproblems wird der Stabilitätspunkt unter Verwendung des Bisektionsverfahrens genau bestimmt. Frühere Untersuchungen, s. z.B. KNEBEL [50] und ROTTNER [69], zeigten, dass die Nutzung des sogenannten linearen Beuleigenwertproblems zu einer signifikanten Überschätzung der Stabilitätslast führen kann. Desweiteren erwies sich das direkte Verfahren mit einem erweiterten Gleichungssystem nach WRIGGERS [95], s. Abschnitt 3.2, als nicht zuverlässig, insbesondere bei imperfekten Strukturen, die hier anschließend untersucht werden sollen. Daher wird hier dem Bisektionsverfahren wegen seiner numerischen Robustheit der Vorzug gegeben.

Mit den in Abb. 5.7 gegebenen Geometrie- und Materialdaten ergeben sich nach Abschnitt 5.1.1 die klassische kritische Beullast und die Wellenzahl in Umfangsrichtung zu

$$F_{cr,cl} = 0.605 \cdot 2\pi \cdot Et^2 = 0.605 \cdot 2\pi \cdot 2.0 \cdot 10^5 \cdot 0.56^2 = 238.4 \text{ kN} \quad (5.28)$$

$$N_{cl} = 0.909 \cdot \sqrt{\frac{625}{0.56}} \approx 30. \quad (5.29)$$

Für den Vergleich mit den Ergebnissen aus der FE-Untersuchung muss die Verformung im Vorbeulbereich berücksichtigt werden. Für die vorliegende Geometrie ergeben sich nach Kapitel 5.1.1 die Referenzwerte in Tabelle 5.2.



Radius $R = 625 \text{ mm}$
 Länge $L = 966 \text{ mm}$
 Dicke $t = 0,56 \text{ mm}$

Elast.-Modul $E = 200000 \text{ N/mm}^2$
 Querdehnzahl $\nu = 0.3$
 linear elastisches Materialverhalten

$$Z = \sqrt{1 - 0.3^2} \frac{966^2}{625 \cdot 0.56} = 2543$$

$$R/t = 625/0.56 = 1116$$

$$L/R = 966/625 = 1.55$$

Abbildung 5.7: Systemskizze zum FE-Modell eines Zylinderviertels und die Geometrie und Materialdaten; Lagerungsrandbedingungen an Zylinderenden: S3.

Aus Effizienzgründen erfolgt die Untersuchung an einem Zylinderviertel, s. Abb. 5.7. Die Verwendung von Symmetrie-Randbedingungen schränkt die Lösung auf symmetrische Eigenformen ein. Da aber die Beullasten für eine perfekte Zylinderschale für leicht unterschiedliche Anzahl der Umfangsbeulen nahezu identisch sind, ist dies an dieser Stelle wegen der großen Anzahl der Beulwellen in Umfangsrichtung zulässig. Die Stichhaltigkeit dieser Annahme wurde durch stichprobenartige Berechnungen an Vollzylindern bestätigt.

Die Vernetzung erfolgt zunächst mit gleichmäßig verfeinerten Netzen, da eine unregelmäßige Vernetzung bekannterweise die Lösung zusätzlich beeinflussen kann. Hierbei werden zur Untersuchung der gewählten FE-Methode drei unterschiedlichen Elementtypen verwendet: bilinear (ANS4), biquadratisch (MITC9) und bikubisch (MITC16).

Gleichmäßige Netzverfeinerung

Die Auswertung der Ergebnisse für die wölbfreie gelenkige Lagerung S3 bei einer gleichmäßigen Netzverfeinerung zeigt das erwartete Ergebnis: die Lösungen mit allen untersuchten Elementtypen konvergieren gegen die kritische Last von DONNELL, Abb. 5.8. Die konvergierten Beulformen ergeben sich zu $4 \cdot 6.5 = 26$ Sinus-Vollwellen an den Zylinderrändern in Umfangsrichtung, siehe Abb. 5.10, was sehr nahe an der Referenz-Beulform in Tabelle 5.2 liegt. Erwartungsgemäß konvergiert die Lösung bei höheren Ansätzen zunehmend besser. Zwar ergibt sich auch für das bilineare Element verhältnismäßig schnell das Abb. der konvergierten "korrekten" Beulform, doch konvergiert der Eigenwert im Vergleich mit den höheren Ansätzen wesentlich langsamer, siehe Abb. 5.8, Abb. 5.10 und Tabelle 5.3. Dies liegt an der schlechteren Approximation der gekrümmten Geometrie durch die bilinearen Elemente (Facettierung), die zu einer Versteifung führt. Auffallend ist, dass die Lösung für biquadratische und bikubische

RB	$F_{cr,cl}$ [kN]	α	F_{cr} [kN]	DONNELL
				N Beulform, <i>Sinus</i> -Vollwellen
S1	238.4	0.866	206.7	28
S3		0.843	201.0	25
C1		0.924	220.5	28

Tabelle 5.2: Beullasten und -formen nach DONNELL für den untersuchten Zylinder nach Abb. 5.7.

Elementierung bilinear / biquadr.	FHG	F_{cr} bilinear	F_{cr} biquadr.	Elementierung (FHG) bikubisch	F_{cr} bikubisch
20x20 / 10x10	2040	284.8	232.3	6x6 (1656)	236.8
40x40 / 20x20	8080	252.8	223.6	12x12 (6552)	211.9
80x80 / 40x40	32160	214.0	202.3	24x24 (26064)	200.7
160x160 / 80x80	128320	204.3	202.4	48x48 (103968)	201.2

Tabelle 5.3: Beullasten F_{cr} in kN aus der FE-Untersuchung an einem Zylinderviertel unter Axiallast bei gleichmäßiger Netzverfeinerung mit bilinearen, biquadratischen und bikubischen Schalenelementen; mit Ausschnittvergrößerung

Elemente in der Nähe des konvergierten Wertes keine monotone Konvergenz zeigt. Der Grund hierfür liegt vermutlich in den gemischten Anteilen in der Elementformulierung. Dieses Verhalten ist hier nur in unmittelbarer Nähe zur Referenzlösung zu beobachten und ist für die eigentliche Lösung unerheblich. Für die Randbedingungen C1 und S1 ergeben sich identische Verläufe.

Für die Auftragung des Fehlers wird folgende Definition verwendet

$$e_{rel} = \frac{|F_{cr,h} - F_{cr,a}|}{F_{cr,a}} \quad (5.30)$$

mit der FE-Lösung $F_{cr,h}$ und der Referenzlösung nach DONNELL $F_{cr,a}$. Bei doppellogarithmischer Auftragung in Abb. 5.9 wird ersichtlich, dass die Konvergenzrate mit zunehmender Ansatzordnung nicht im gleichen Maße ansteigt, wie für ein Spannungs-

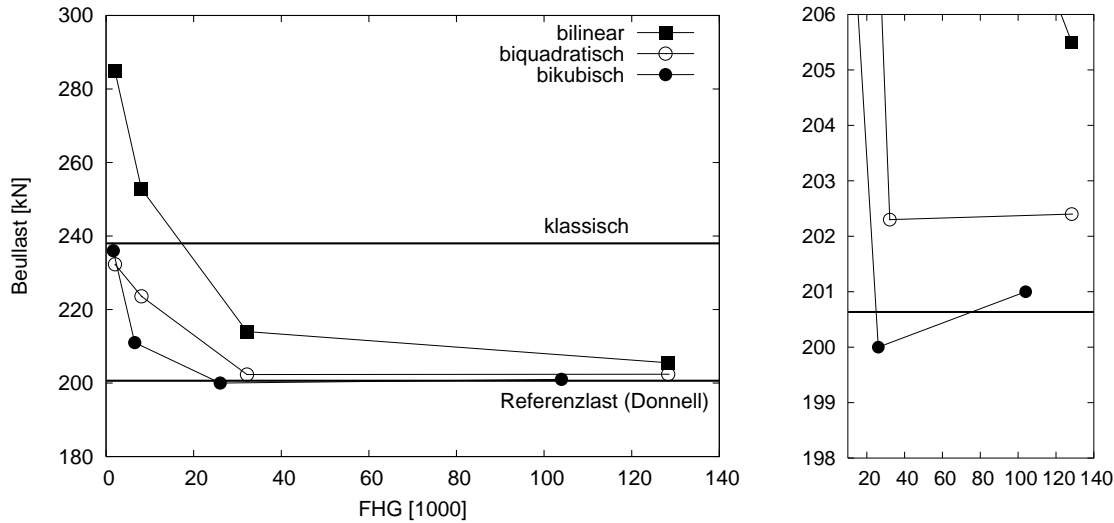


Abbildung 5.8: FE-Beullasten für einen Zylinderviertel unter Axiallast bei gleichmäßiger Netzverfeinerung mit bilinearen, biquadratischen und bikubischen Schalenelementen; rechts: Ausschnitt in der unmittelbaren Umgebung der konvergierten Lösung

problem mit reinen Verschiebungselementen, wo die Konvergenzrate a-priori mit

$$\frac{\Delta(\log e_{rel})}{\Delta(\log FHG)} \sim p \quad p \equiv \text{Polynomgrad der Ansatzfunktionen} \quad (5.31)$$

angegeben werden kann. Dieses Ergebnis ist deckungsgleich mit den Untersuchungen von BATHE und Koautoren [13], in denen das Konvergenzverhalten der Lösung hinsichtlich der Verzerrungsenergie eines Kreiszylinders unter axialem Druck beobachtet wird (keine Strukturstabilität). Dort wird gezeigt, dass die maximale Konvergenzrate nach Gl. (5.31) nur bei problemangepasster adaptiver Vernetzung erreicht werden kann, hier bei einer Netzverfeinerung an Zylinderrändern. In einer ausreichenden Entfernung vom Zylinderrand liegt hier ein homogenes Spannungsfeld mit dominierenden Membranspannungen vor, wogegen an den Zylinderrändern die Biegespannungen, die zu einer sogenannten Randstörung führen, dominieren. Die maximale Konvergenzrate lässt sich daher nur mit einer an die Verteilung der Biegespannungen angepassten Vernetzung erreichen, s. BATHE ET AL. [13].

In Abb. 5.11 sind die Rechenzeiten für einen Iterationsschritt für die drei verwendeten Elementtypen tabellarisch und als Diagramm dargestellt. Wie erwartet steigen die Rechenzeiten mit steigender Ansatzordnung in den Elementen. Vor allem für die bikubischen Ansätze MITC16 ist ein deutlicher Anstieg der Rechenzeit zu verzeichnen. Unter Zugrundelegung einer definierten Genauigkeit lässt sich die Effizienz der untersuchten Elemente für das vorliegende Problem mit Hilfe der Diagramme in Abb. 5.9 und 5.11 direkt vergleichen. Die Auswertung der Diagramme beispielhaft für eine 5%-Abweichung von der Lösung nach DONNELL ergibt die Modelle und die Rechenzeiten in

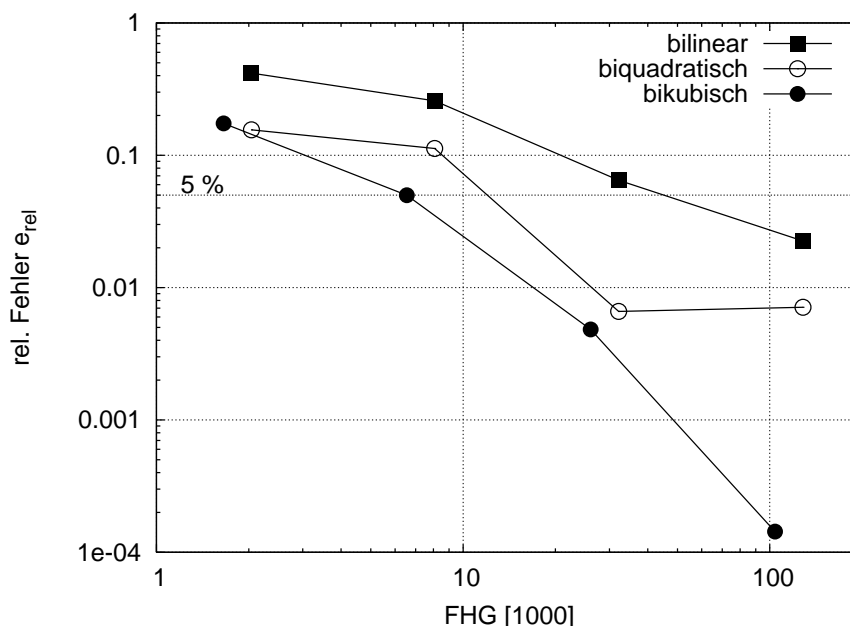


Abbildung 5.9: Relativer Fehler der FE-Beullasten für einen Zylinderviertel unter Axiallast bei gleichmäßiger Netzverfeinerung mit bilinearen, biquadratischen und bikubischen Schalenelementen; doppellogarithmischer Maßstab; relativer Fehler: $e_{rel} = \frac{|F_{cr,h} - F_{cr,a}|}{F_{cr,a}}$ mit $F_{cr,a}$ nach DONNELL.

Tabelle 5.12. Der Vergleich spricht deutlich für die Nutzung von Elementen höherer Ansatzordnung. Allerdings sei angemerkt, dass zumindest für die vorliegende Struktur die erreichte größere Genauigkeit bei bikubischen Elementen wegen der höheren Rechenzeit kaum relevant ist. Es muss angemerkt werden, dass die verwendete Lösungsroutine nicht für Elemente mit höheren Ansatzordnungen optimiert ist. Bei Einsatz spezieller Lösungsalgorithmen lässt sich die Effizienz dieser Elemente wesentlich steigern.

Adaptive Netzverfeinerung

Im nächsten Schritt wird das Lösungsverhalten für adaptive Netzverfeinerung mit bilinearen Elementen untersucht. Dabei wird wegen der größeren numerischen Robustheit im Wesentlichen die Vorgehensweise von STEIN und Koautoren [78] übernommen, siehe Diskussion in Abschnitt 3.3. Die Netzverfeinerung erfolgt hierarchisch, wobei der singuläre Punkt für jedes Netz vom unbelasteten Zustand aus mit dem Bisektionsverfahren bestimmt wird. Dadurch werden Konvergenzprobleme vermieden, die bei völliger Neuvernetzung und direkter Bestimmung kritischer Punkte auftreten können. Zur Bestimmung der Fehlerverteilung wird analog zu [78] die erste Eigenform am Singularitätspunkt herangezogen, da diese die Beulform repräsentiert, die abgebildet werden soll. Allerdings wird abweichend vom Vorgehen in [78] nicht der residuelle Fehlerschätzer sondern der glättungsbasierte Fehlerschätzer nach ZIENKIEWICZ/ZHU [99] als Verfeinerungsindikator verwendet. Außerdem wird vereinfachend die Differentialoperator-

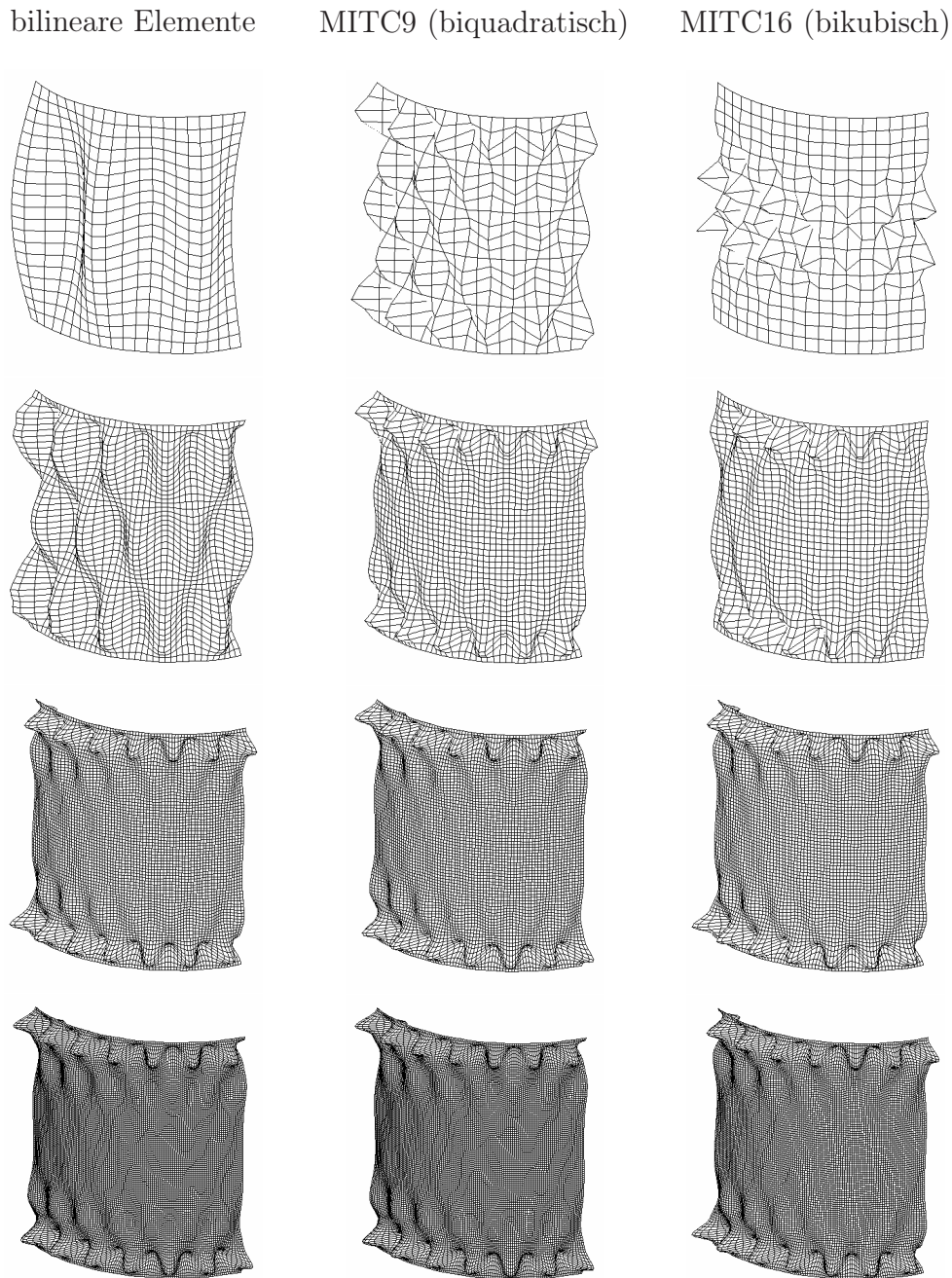


Abbildung 5.10: Beulformen für einen Zylinderausschnitt unter Axiallast bei gleichmäßiger Netzverfeinerung (Tab. 5.3) mit bilinearen, biquadratischen und bikubischen Schalenelementen; Lagerung S3.

Matrix (**B**-Matrix) des unbelasteten Zustandes verwendet.

$$\Delta\sigma_h = \mathbf{CB}|_{\lambda=0}\Phi_1 \tag{5.32}$$

Dieser Vereinfachung liegt die Überlegung zugrunde, dass bei einer Zylinderschale unter axialem Druck im Vorbeulbereich ein nahezu lineares Problem vorliegt. Demnach kann

FHG	bilinear	MITC9	FHG	MITC16
2040	0.06	1.14	1656	3.81
8080	1.38	5.74	6552	16.24
18120	8.16	17.9	14688	39.14
32160	25.53	40.27	26064	76.11
72240	126.37	156.59	50536	211.26

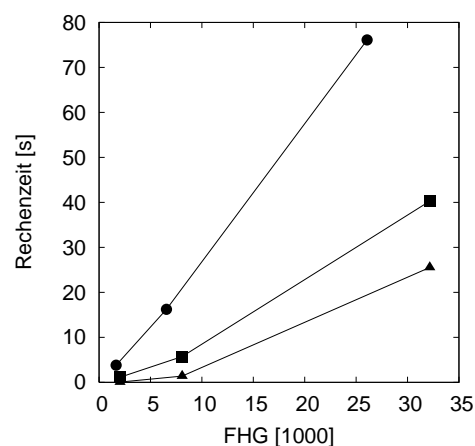


Abbildung 5.11: Rechenzeiten in [s] für eine Gleichgewichtsiteration für einen Viertelzylinder diskretisiert mit bilinearen, biquadratischen und bikubischen Elementen mit unterschiedlich feinen Netzen.

Elementtyp	FHG	Rechenzeit [s]
bilinear	46000	60
MITC9	13000	12
MITC16	7000	17

Abbildung 5.12: Modellgröße ausgedrückt durch die Zahl der Freiheitsgrade (FHG) und zugehörige Rechenzeiten für einen Iterationsschritt für axial gedrückten Viertelzylinder; alle Modelle ergeben die gleiche singuläre Last, die ca 5% von der Referenzlast abweicht.

davon ausgegangen werden, dass hier Änderungen in der \mathbf{B} -Matrix sehr gering sind. Als Verfeinerungskriterium wird $\tilde{\eta} = 0.25$ gewählt³, d.h. alle Elemente mit einem Fehler von $> 25\%$ des größten ermittelten Elementenfehlers werden verfeinert.

Die Ergebnisse der Untersuchung sind in Abb. 5.13 dargestellt. Zum Vergleich sind hier nochmals die Beullasten aus der uniformen Netzverfeinerung mit gestrichelten Linien eingetragen. Das Verhalten der Lösung für bilineare Elemente scheint durch adaptive Berechnung wesentlich verbessert worden zu sein. Allerdings fällt auf, dass das Konvergenzverhalten nicht monoton ist - Verfeinerungsschritte 3-4 und 5-6. Hier ergibt sich jeweils im nachfolgenden Verfeinerungsschritt eine höhere Beullast als im vorhergehenden. Durch Betrachten der Beulformen kann dieses Verhalten erklärt werden, Abb. 5.14. Die bei adaptiver Berechnung bestimmten Beulformen konvergieren nicht gegen die Beulform der Referenzlösung, wie in der vorhergehenden Untersuchung mit uniformer Netzverfeinerung, sondern gegen deutlich abweichende Formen. Der Grund hierfür

³Zur Begründung dieser Wahl siehe Abschnitt 3.3

sind die Übergangselemente in den adaptiven Netzen, die wie bereits oben erwähnt bei gekrümmten Oberflächen verwölbt sein können. Durch verwölbte Elemente werden künstlich lokale Imperfektionen eingebracht, die die Lösung wesentlich beeinflussen. Da die hohe Imperfektionssensitivität von Zylinderschalen gerade im Falle der axialen Druckbelastung wohlbekannt ist, erklärt sich dadurch der starke Abfall der Beullasten für adaptive Netze. Demnach ist hier die vermeintlich bessere Konvergenz der Lösung nicht auf die Verfeinerung der Netze sondern auf den lastmindernden Einfluss der künstlichen Imperfektionen zurückzuführen.

Zum Vergleich wird das Lösungsverhalten an adaptiv verfeinerten Netzen mit biquadratischen Elementen MITC9 untersucht. Hierfür war der vorab geschilderte Fehlerindikator nicht implementiert, daher wurden die Netze vereinfachend in zwei Stufen an den Zylinderrändern verfeinert. Auch hier entstanden Übergangselemente mit Verwölbung. Die Ergebnisse, ebenfalls in Abb. 5.13 und 5.14 dargestellt, zeigen, dass das Lösungsverhalten durch verwölbte Elemente in diesem Fall nicht negativ beeinflusst wird.

Zur Vermeidung negativer Einflüsse von Übergangselementen in adaptiven Netze, die hier bei Verwendung bilinearer Elemente beobachtet wurden, kann folgender **Lösungsvorschlag** gemacht werden: nach Berechnung des Verfeinerungsindikators wird kontrolliert, ob die Verfeinerung in unmittelbarer Umgebung von Übergangselementen stattfinden soll. Ist dies der Fall, so muss einen Verfeinerungsschritt zurückgegangen werden, wobei anschließend unterschiedliche Vorgehensweisen denkbar sind:

1. Ist die Verfeinerungsrate hoch, z.B. $> 50\%$, so erscheint es sinnvoll, das gesamte Gebiet in dem aktuellen Verfeinerungsschritt uniform zu verfeinern.
2. Ist die Verfeinerungsrate niedrig, so kann das adaptiv verfeinerte Gebiet vergrößert werden.

Im Falle des hier untersuchten Beispiels würde diese Vorgehensweise zum Verwerfen des adaptiven Netzes mit 25834 FHG (Abb. 5.14) im dritten Schritt und einer uniformen Verfeinerung des gesamten Gebiets führen. Anschließend kann dann wieder adaptiv verfeinert werden.

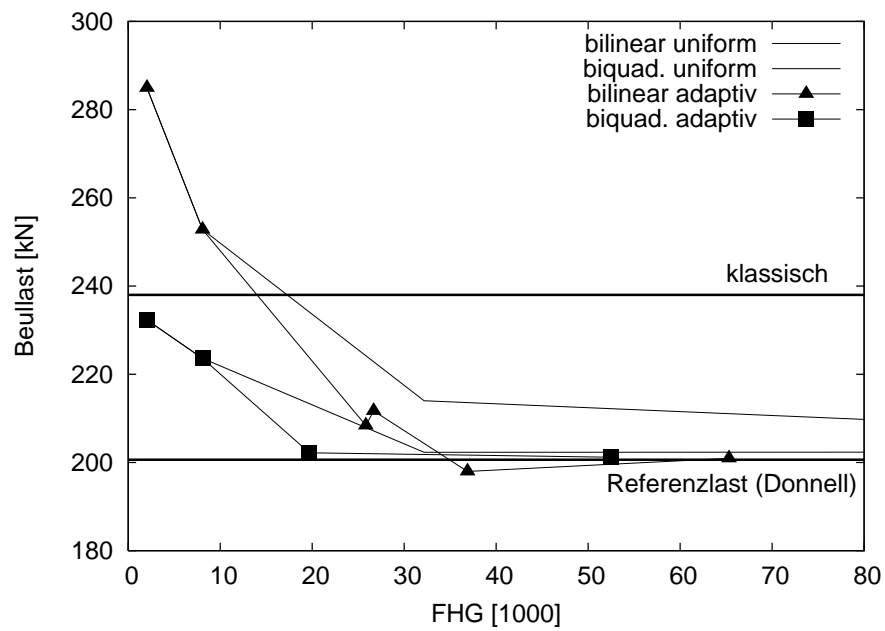


Abbildung 5.13: FE-Beullasten für einen 90° -Zylinderausschnitt unter Axiallast bei adaptiver Netzverfeinerung mit bilinearen und biquadratischen Schalenelementen

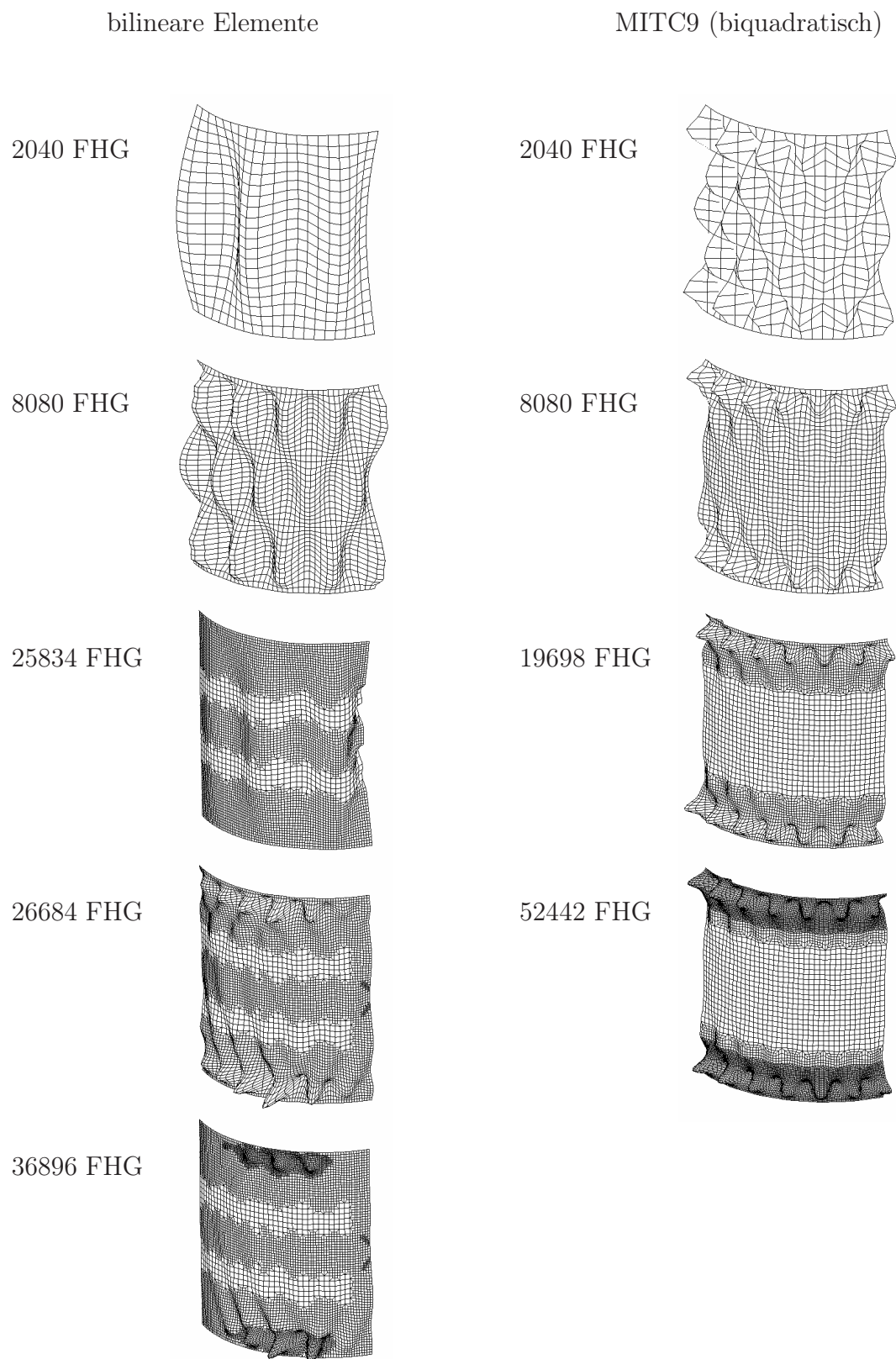


Abbildung 5.14: Beulfomen für einen Zylinderausschnitt unter Axiallast bei adaptiver Netzverfeinerung mit bilinearen und biquadratischen Schalenelementen; Lagerung S3.

5.2.2 Untersuchung des Nachbeulverhaltens mittels transienter FE-Analysen

Aufgrund der oben genannten Konvergenzschwierigkeiten bei Verwendung statischer FE-Analysen im Nachbeulbereich, s. z.B. ROTTNER [69], wird hier das Nachbeulverhalten eines geometrisch perfekten Kreiszyllinders mittels transienter Analysen untersucht. Hierzu wird ein Zylinderviertel aus den vorhergehenden statischen Untersuchungen mit abgeänderten Randbedingungen übernommen, Abb. 5.15. Dabei wird der untere Rand festgehalten und anstatt einer definierten Last der Belastungsvorgang mit einer Lastplatte, wie er bei Versuchen vorliegt, simuliert. Hierzu werden bei den Knoten des oberen Randes die Verschiebungsfreiheitsgrade in radialer und tangentialer Richtung festgehalten und in axialer Richtung zu einem Freiheitsgrad zusammengefasst. Die Last wird durch definierte Verschiebung des oberen Randes, die hier mit konstanter Geschwindigkeit erfolgt, eingeleitet. Die axiale Drucklast ergibt sich als Summe aller Reaktionskräfte an den Knoten des oberen Randes in axialer Richtung. Demnach liegt hier nach Definition von YAMAKI eine S1-Lagerung vor.

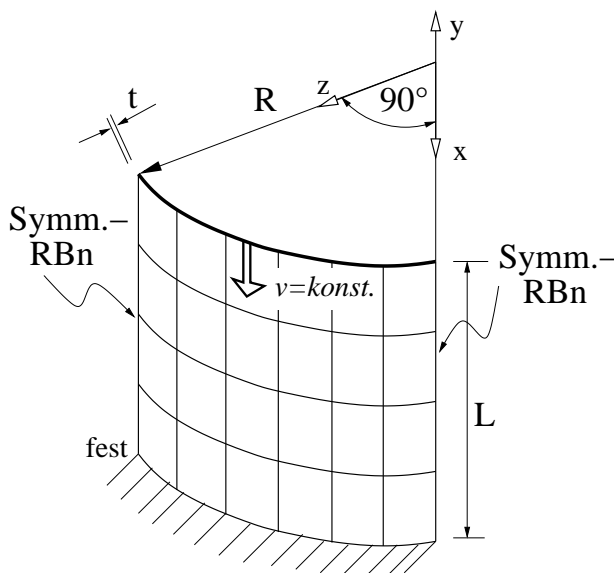
An dieser Stelle sei angemerkt, dass eine genauere Modellierung der Lastplatte unter Zuhilfenahme von Kontakt auch möglich gewesen wäre. In diesem Fall wäre das Abbilden einer eventuellen Ablösung des belasteten Zylinderrandes von der Lastplatte während des Beulvorgangs möglich gewesen. Allerdings zeigen die Beobachtungen an dem hier verwendeten Modell eines perfekten Zylinders, dass am Rand mit vorgeschriebenen Verschiebungen keine Zugspannungen auftreten. Demnach kann davon ausgegangen werden, dass hier keine Ablösung stattfinden kann. Da die Berücksichtigung des Kontakts zwischen dem belasteten Zylinderrand und der Lastplatte zu einem Anstieg der Rechenzeit führen würde, wurde hier auf diese Modellierung verzichtet.

Analog zu den vorhergehenden Untersuchungen mittels statischer FE-Analysen werden auch bei den hier beschriebenen transienten Berechnungen Netzkonvergenzstudien durchgeführt. Zusätzlich zur räumlichen Diskretisierung ergeben sich bei transienten Untersuchungen weitere Parameter, deren Einfluss auf die FE-Lösung untersucht werden muss. Diese sind:

- die zeitliche Diskretisierung, d.h. der Zeitschritt Δt
- die Dämpfung, falls definiert
- hier speziell: die Belastungsgeschwindigkeit.

Die zwei erstgenannten Parameter, Zeitschritt und Dämpfung, bestimmen die numerische Stabilität der Lösung. In Anlehnung an die Ausführungen im Kapitel 4 muss der Zeitschritt so gewählt werden, dass die Verformungen im Zeitschritt ausreichend klein für eine stabile Zeitintegration sind. Da die Belastung über eine definierte Verschiebung erfolgt, wird über die Wahl der Zeitschrittgröße auch die Lastschrittgröße definiert. Dies kann unterschiedlich große Zeitschritte für unterschiedliche Belastungsgeschwindigkeiten erforderlich machen.

Die Sensitivität der Lösung hinsichtlich der oben genannten Parameter wird für zwei unterschiedliche Zeitintegrationsverfahren untersucht. Zum einen steht das implizite Integrationsverfahren der NEWMARK-Familie zur Verfügung, welches im institutseigenen Programm FEAP-MeKA implementiert ist. Zum anderen werden Untersuchungen mit einem expliziten Löser des kommerziellen Programms LS-DYNA durchgeführt.



Radius $R = 625 \text{ mm}$

Länge $L = 966 \text{ mm}$

Dicke $t = 0.56 \text{ mm}$

E-Modul $E = 200000 \text{ N/mm}^2$

Querdehnzahl $\nu = 0.3$

linear elastisches Materialverhalten

$$Z = \sqrt{1 - 0.3^2} \frac{966^2}{625 \cdot 0.56} = 2543$$

$$R/t = 625/0.56 = 1116$$

$$L/R = 966/625 = 1.55$$

Abbildung 5.15: Systemskizze zum FE-Modell eines Zylinderviertels und die Geometrie und Materialdaten; transiente Berechnung mit Verschiebungssteuerung mit konstanter Geschwindigkeit am oberen Rand.

Untersuchungen mit dem NEWMARK-Verfahren

Zunächst wird die Parametersensitivität des NEWMARK-Verfahrens für das vorliegende Problem des Kreiszyinders unter axialer Drucklast untersucht. Hier werden in jedem Zeitschritt Gleichgewichtsiterationen durchgeführt, so dass damit auch quasi eine Kontrolle der Nichtlinearität im Zeitschritt vorliegt: übersteigt die Zahl der Iterationen pro Zeitschritt eine festgelegte Größe, so wird ein kleinerer Zeitschritt gewählt. In der vorliegenden Arbeit wurde stets als maximale Anzahl 5 Gleichgewichtsiterationen pro Zeitschritt gewählt.

Weiter muss bei der Wahl des Zeitschritts auch der Aspekt der ausreichend guten Abbildung des untersuchten Phänomens berücksichtigt werden. Im Vorbeulbereich ist das Verhalten der Zylinder quasi-statisch. Aus diesem Grund kann hier mit sehr großen Zeit(Last-)schritten gerechnet werden. Aus der Annahme heraus, dass die Beullast bei transienten Untersuchungen aufgrund der Trägheitskräfte höher ist als die kritische Last aus einer statischen Berechnung, wird hier bis zur analytischen kritischen Last $F_{cr} = 206.7 \text{ kN}$ ⁴ mit wenigen großen Zeit- bzw. Lastschritten gerechnet. Danach wird mit einem kleineren Zeitschritt weiter gerechnet, dessen Größe noch zu bestimmen ist. Er kann zunächst mit Hilfe der Eigenfrequenzen, die abgebildet werden sollen, d.h. mit

⁴nach Abschnitt 5.2.1 mit Randbedingungen S1

Hilfe der Lösung des Eigenwertproblems

$$(\mathbf{K}_T - \omega^2 \mathbf{M}) \Phi = 0 \quad (5.33)$$

abgeschätzt werden. Dieses liefert für die Eigenkreisfrequenzen bei unterschiedlicher Vernetzung mit bilinearen Elementen:

Diskretisierung El.xEl.	Eigenkreisfrequenzen [1/s]		
20x20	$\omega_1 = 0.57 \cdot 10^3$	$\omega_{10} = 1.02 \cdot 10^3$	$\omega_{50} = 2.67 \cdot 10^3$
40x40	$\omega_1 = 0.56 \cdot 10^3$	$\omega_{10} = 0.98 \cdot 10^3$	$\omega_{50} = 2.30 \cdot 10^3$
80x80	$\omega_1 = 0.55 \cdot 10^3$	$\omega_{10} = 0.97 \cdot 10^3$	$\omega_{50} = 2.25 \cdot 10^3$

Die Beschränkung auf die ersten 50 Eigenformen ist durch die Untersuchungen von ROTTNER [69] zur Beteiligung von Eigenformen in den Verformungszuständen des Nachbeulbereichs motiviert. Erwartungsgemäß sind die Eigenwerte im unteren Frequenzbereich für unterschiedliche Vernetzungen nahezu gleich. Mit der Annahme von 10 Zeitschritten zur adäquaten Abbildung der Schwingung in der 50-ten Eigenfrequenz ergibt sich für den Zeitschritt Δt

$$erf \Delta t = \frac{1}{10} \cdot \frac{2\pi}{\omega_{50}} \approx 2.0 \cdot 10^{-4} \text{ s} \quad (5.34)$$

Dieser Zeitschritt dient als Ausgangswert für die nachfolgende Untersuchung.

Die Dämpfung wird vereinfachend als numerische Dämpfung durch entsprechende Wahl der NEWMARK-Parameter β und γ eingebracht. Dabei werden die Parameter stets so gewählt, dass das Verfahren im Linearen unbedingt stabil ist, d.h. $2\beta \geq \gamma \geq 0.5$.

Die Untersuchung zeigt folgendes:

1. Im Wesentlichen wird die Größe des erforderlichen Zeitschritts nicht durch die Belastungsgeschwindigkeit, wie eingangs vermutet, sondern durch den sehr kurzzeitigen Beulprozess bestimmt. Vom Einfallen der ersten Beulen an Zylinderrändern bis zur Ausbildung des ersten stabilen Nachbeulmusters sind es ca. 0.05 s. Hier ergeben sich zeitlich große Verformungsgradienten, was einen sehr kleinen Zeitschritt von $\Delta t = 1.0 \cdot 10^{-4} \text{ s}$, der geringfügig unter der Abschätzung nach Gl. (5.34) liegt, erforderlich macht.
2. Berechnungen ohne Dämpfung ($\gamma = 0.5$; $\beta = 0.25$) führen zu starken Schwingungen im Nachbeulbereich. Dadurch wird eine Bestimmung von quasi-statischen Nachbeullasten in den Diagrammen nahezu unmöglich, Abb. 5.16¹. Zur besseren Bestimmung der quasi-statischen Nachbeullasten wird über die Wahl von $\gamma > 0.5$ eine Dämpfung eingebracht. Die Untersuchung zeigt, dass dies zulässig ist, da die Höhe der Nachbeullasten durch die numerische Dämpfung im untersuchten Bereich von $\gamma \in [0.5, 4.0]$ mit $\beta = 0.5\gamma$ kaum beeinflusst wird, Abb. 5.16² und 5.16³.

3. Im Unterschied zu 1. ergeben sich für unterschiedliche Belastungsgeschwindigkeiten aufgrund der Massenträgheit erwartungsgemäß unterschiedlich hohe Beullasten. Hingegen sind die berechneten Nachbeulminima nahezu unveränderlich im untersuchten Bereich der Belastungsgeschwindigkeiten von 1 mm/s bis 10 mm/s . Allerdings wird durch das schnelle Durchfahren am Beginn des Beulvorgangs bei höheren Geschwindigkeiten und durch die dabei entstehenden größeren Schwingungsamplituden die Bestimmung der quasi-statischen Nachbeullasten erschwert, Abb. 5.17.

Untersuchungen mit biquadratischen Elementen MITC9 führen zu ähnlichen Ergebnissen hinsichtlich Zeitschritt, Dämpfung und Belastungsgeschwindigkeit.

Aufgrund der vorangegangenen Ergebnisse erfolgt die Untersuchung zur Netzkonvergenz der bilinearen und der biquadratischen Elemente mit der Belastungsgeschwindigkeit von $v = 2 \text{ mm/s}$, dem Zeitschritt von $\Delta t = 1.0 \cdot 10^{-4} \text{ s}$ und den NEWMARK-Parametern $\gamma = 2.0$ und $\beta = 1.0$. Die in Abb. 5.18 und 5.20 dargestellten Last-Verschiebungskurven zeigen, dass die Lösung im Nachbeulbereich ab ca. 40×40 bilinearen bzw. 20×20 biquadratischen Elementen als konvergiert betrachtet werden kann. Hierbei konvergiert die Lösung hinsichtlich des ersten Nachbeulminimums mit bilinearen Elementen gegen den Wert von ca. 48 kN und mit biquadratischen Elementen nicht unerwartet gegen einen etwas niedrigeren Wert von ca. 45 kN . Damit konvergiert die Lösung für die Nachbeullasten wesentlich schneller als diejenige für die statischen kritischen Lasten in Abschnitt 5.2.1. Ein weiterer Unterschied zu den mittels statischer Betrachtung bestimmten Stabilitätslasten besteht darin, dass die Verwendung von biquadratischen Elementen bei der Bestimmung der Nachbeullasten keine wesentliche Verbesserung der Netzkonvergenz, d.h. der Genauigkeit bei vergleichbarem Rechenaufwand bewirkt.

Hinsichtlich der Verformungszustände im Nachbeulbereich wird die Konvergenz sehr schnell erreicht, Abb. 5.19. Hier ergeben sich für feinere Netze nur noch zwei Beulformen: dreireihig am ersten Nachbeulminimum und zweireihig am zweiten Nachbeulminimum; das Modell mit den biquadratischen Elementen führt zu gleichen Beulformen. Der Wechsel von der dreireihigen Beulform zu der zweireihigen Beulform (mode jumping) ist als Sprung im Last-Verformungsdiagramm zu sehen. Dies entspricht qualitativ den Versuchsbeobachtungen bzw. den analytischen Lösungen, die in Abschnitt 5.1.2 dargestellt wurden.

Zur Untersuchung der Robustheit der Ergebnisse wurden stichprobenartige Berechnungen mit adaptiv verfeinerten Netzen aus Abschnitt 5.2.1 und unterschiedlichen Zylinderausschnitten durchgeführt. Eine transiente Berechnung mit dem adaptiv verfeinerten Netz mit 25843 FHG führt zu einem Last-Verformungsverlauf, der weitgehend identisch ist mit dem aus der Berechnung mit einem uniformen Netz mit 60×60 bilinearen Elementen (19020 FHG), s. Abb. 5.21. Es zeigt sich, dass die Beulformen im Nachbeulbereich durch verwölbte Übergangselemente in adaptiv verfeinerten Netzen nicht beeinflusst werden, s. Abb. 5.22. Unterschiede ergeben sich lediglich zu Beginn des Beulvorgangs.

Untersuchungen mit dem Modell eines halben und eines ganzen Zylinders ergeben leicht abweichende Last-Verformungsverläufe, s. Abb. 5.23. Der Unterschied in den Verläufen erklärt sich aus den unterschiedlichen Wechseln der Beulmuster. Bei nahezu allen Berechnungen mit den unterschiedlichen Modellen wird der Wechsel der Beulformen von (3,16) zu (2,12) bei dem Viertelzylinder und dem halben Zylinder und von (3,15) zu (2,12) bei dem ganzen Zylinder beobachtet. Allerdings wird bei kleiner Dämpfung und sehr langsamen Belastungsgeschwindigkeiten ($v < 2 \text{ mm/s}$) bei den Modellen des halben und des ganzen Zylinders die dreireihige Beulform schnell "durchfahren" und eine erste zweireihige Beulform (2,14) eingenommen. Die endgültige zweireihige Beulform (2,12) ergibt sich erst später im Nachbeulbereich. Da sich dabei keine nennenswerten Unterschiede in den Nachbeullasten ergeben, ist die Verwendung eines Viertelzylinder-Ausschnitts hier zulässig.

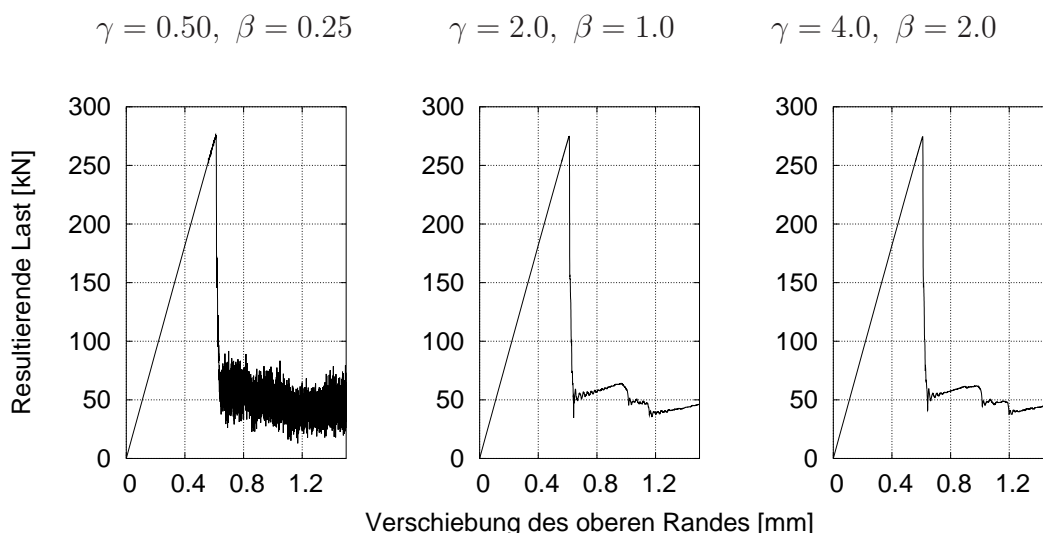


Abbildung 5.16: Last-Verformungsverlauf für einen geom. perfekten Viertelzylinder unter axialem Druck für **unterschiedliche numerische Dämpfung**; verschiebungsgesteuerte transiente Berechnung mit der Belastungsgeschwindigkeit $v = 2 \text{ mm/s}$ und dem Zeitschritt $\Delta t = 1.0 \cdot 10^{-4} \text{ s}$; Diskretisierung mit 40x40 bilinearen Elementen.

Untersuchungen mit dem Verfahren der Zentralen Differenzen

Bei der Zeitintegration mit dem Verfahren der Zentralen Differenzen ist der kritische Zeitschritt bereits im Linearen begrenzt und wird nach der COURANT-Gleichung (4.35) bestimmt, s. Kapitel 4. Zur Berücksichtigung nichtlinearer Einflüsse wird der Zeitschritt nochmals mit dem Faktor 0.9 verkleinert⁵. Da dies aber keine numerische Stabilität garantiert, wird im Programm LS-DYNA die sogenannte Energiebilanz überwacht, s. Kapitel 4.

Untersuchungen mit unterschiedlichen Belastungsgeschwindigkeiten zeigen, dass die Berechnungen bei kleineren Geschwindigkeiten numerisch instabil werden, s. Abb. 5.24.

⁵Die Abminderung des kritischen Zeitschritts mit 0.9 erfolgt im Programm LS-DYNA automatisch.

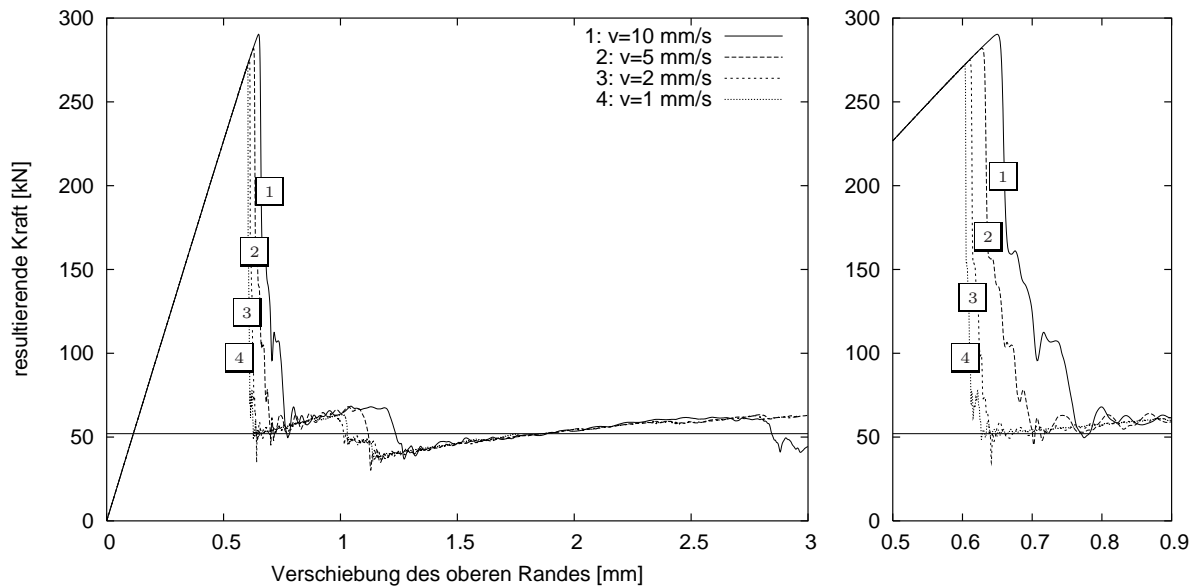


Abbildung 5.17: Last-Verformungsverläufe für einen geom. perfekten Viertelzylinder unter axialem Druck für **unterschiedliche Belastungsgeschwindigkeiten**; verschiebungsgesteuerte transiente Berechnung; Zeitschritt $\Delta t = 1.0 \cdot 10^{-4}$ s; Diskretisierung mit 40×40 bilinearen Elementen; numerische Dämpfung mit $\gamma = 2.0$, $\beta = 1.0$.

Eine Reduktion des Zeitschritts bis $0.1 \Delta t_{crit}$ führt hier nicht zum gewünschten stabilen Ergebnis. Erst die Erhöhung der viskosen Dämpfung (BULK_VISCOSITY) mit gleichzeitiger Reduktion des Zeitschritts auf $0.7 \Delta t_{crit}$ bewirkt eine numerisch stabile Berechnung. Obwohl der Zeitschritt bei den Berechnungen mit LS-DYNA mit $\Delta t \approx 1.0 \cdot 10^{-6}$ s wesentlich kleiner ist als der bei den Berechnungen mit dem NEWMARK-Verfahren, kann die Berechnung deutlich effizienter durchgeführt werden. Die hierbei erhaltenen Last-Verschiebungsverläufe sind denen aus den Untersuchungen mit dem NEWMARK-Verfahren weitgehend gleich.

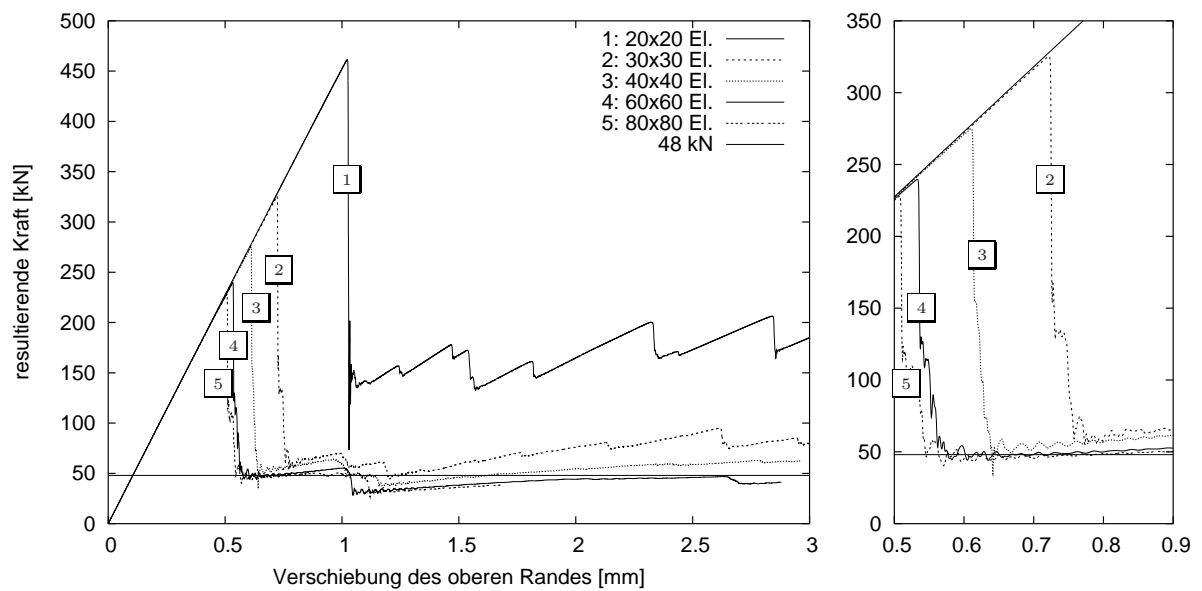
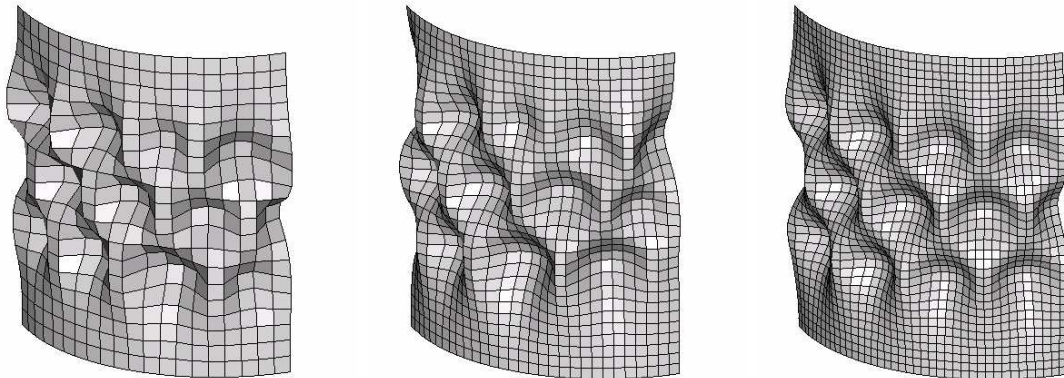
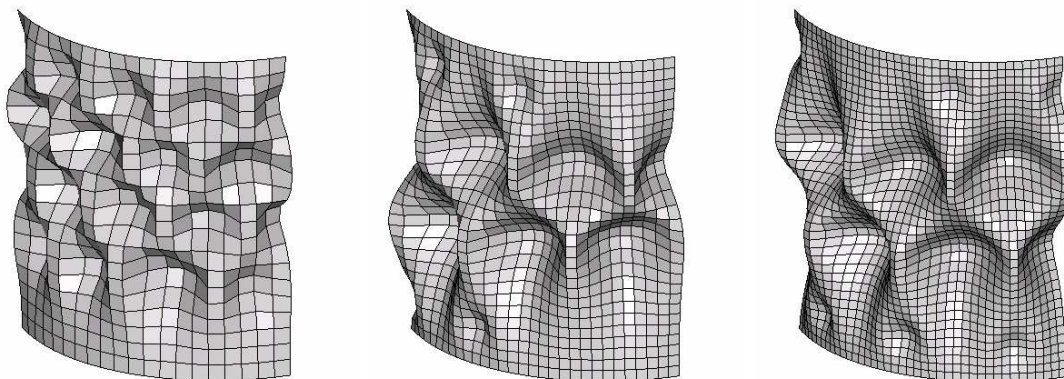


Abbildung 5.18: Last-Verformungsverläufe für einen geom. perfekten Viertelzylinder unter axialem Druck für **unterschiedliche Vernetzungen mit bilinearen Elementen**; verschiebungsgesteuerte transiente Berechnung mit der Belastungsgeschwindigkeit $v = 2 \text{ mm/s}$; numerische Dämpfung mit $\gamma = 2.0$, $\beta = 1.0$.

Verformungen beim ersten Nachbeulminimum (Beulform (3,16))



Verformungen beim zweiten Nachbeulminimum (Beulform (2,12))



20x20 Elemente

30x30 Elemente

40x40 Elemente

Abbildung 5.19: Verformungszustände im Nachbeulbereich für einen geom. perfekten Viertelzylinder unter axialem Druck für **unterschiedliche Vernetzungen mit bilinearen Elementen**; verschiebungsgesteuerte transiente Berechnung mit der Belastungsgeschwindigkeit $v = 2 \text{ mm/s}$; numerische Dämpfung mit $\gamma = 2.0$, $\beta = 1.0$.

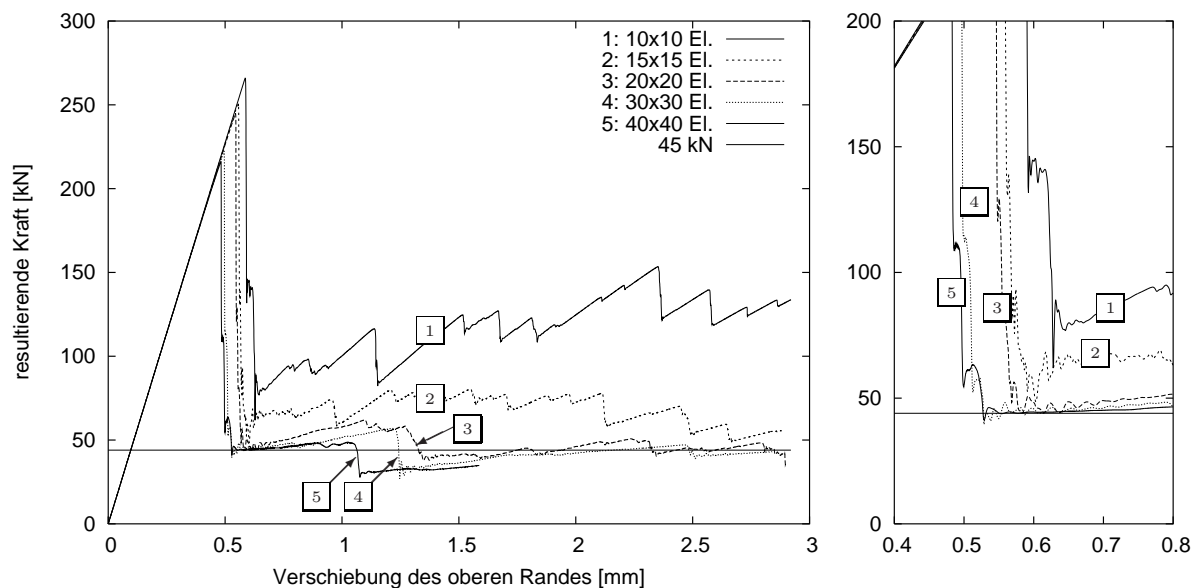


Abbildung 5.20: Last-Verformungsverläufe für einen geom. perfekten Viertelzylinder unter axialem Druck für **unterschiedliche Vernetzungen mit bi-quadratischen Elementen**; verschiebungsgesteuerte transiente Berechnung mit der Belastungsgeschwindigkeit $v = 2 \text{ mm/s}$; numerische Dämpfung mit $\gamma = 2.0$, $\beta = 1.0$.

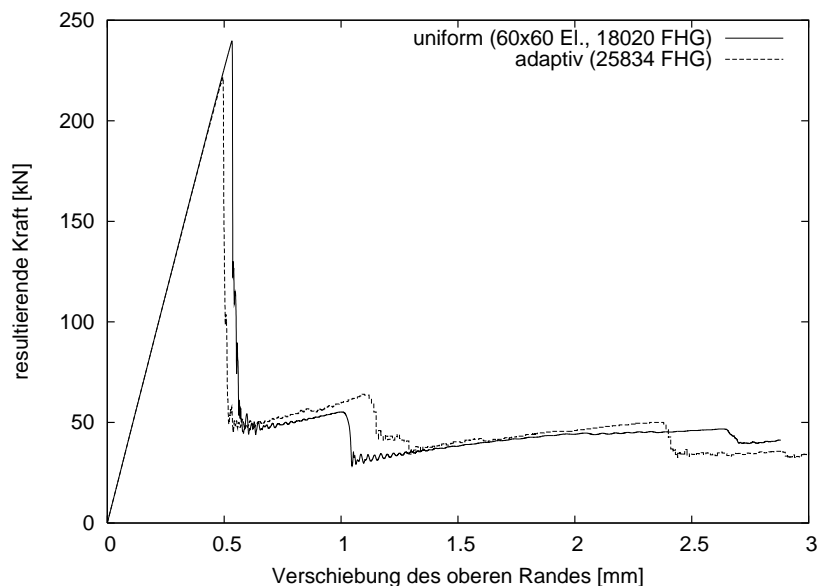


Abbildung 5.21: Last-Verformungsverläufe für einen geom. perfekten Viertelzylinder unter axialem Druck **mit einer uniformen und einer adaptiven Vernetzung** mit bilinearen Elementen; verschiebungsgesteuerte transiente Berechnung mit der Belastungsgeschwindigkeit $v = 2 \text{ mm/s}$; numerische Dämpfung mit $\gamma = 2.0$, $\beta = 1.0$.

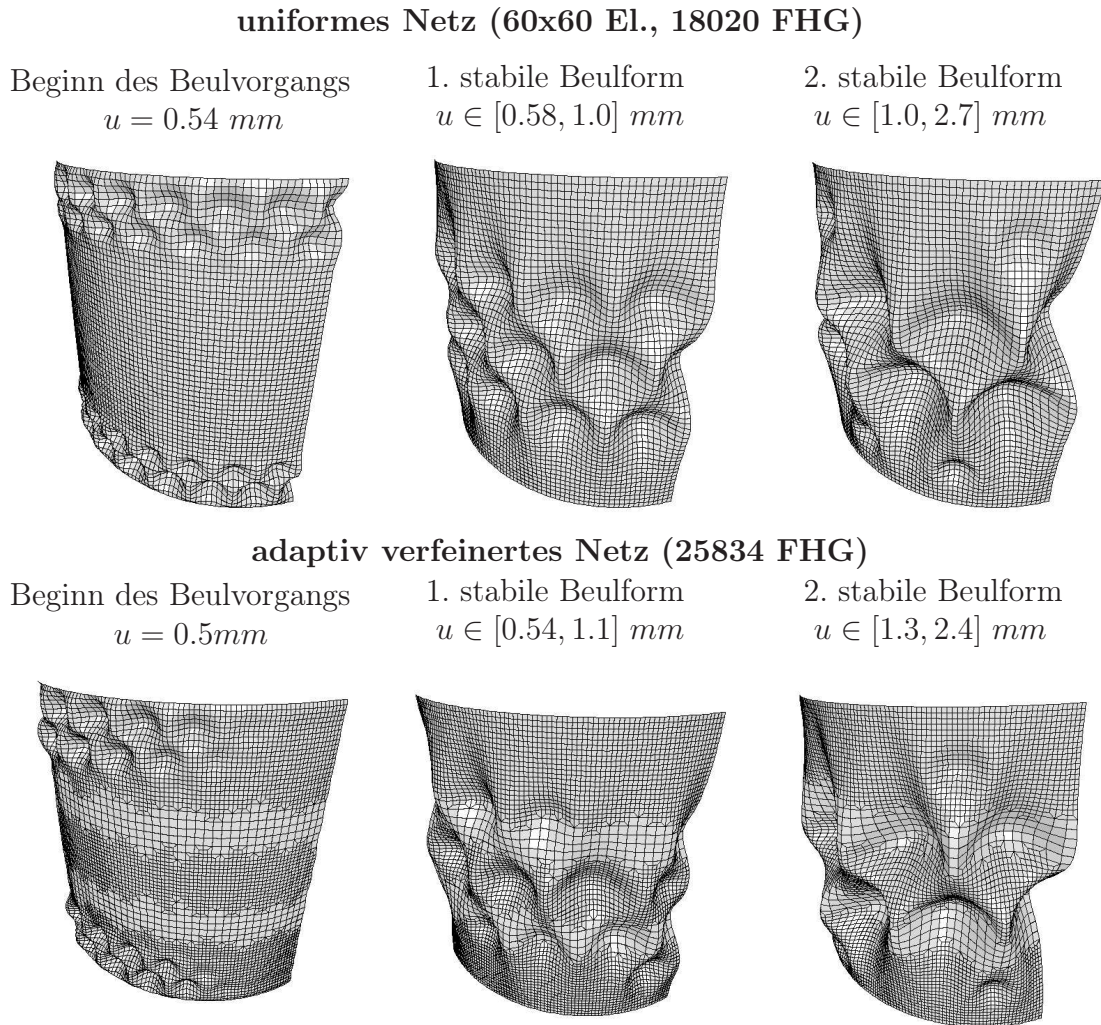


Abbildung 5.22: Verformungszustände im Nachbeulbereich (10 bis 20-fach überhöht) für einen geom. perfekten Viertelzylinder unter axialem Druck mit **uniformer und adaptiver Vernetzung** mit bilinearen Elementen; verschiebungsgesteuerte transiente Berechnung mit der Belastungsgeschwindigkeit $v = 2 \text{ mm/s}$; numerische Dämpfung mit $\gamma = 2.0$, $\beta = 1.0$; u =Verschiebung des oberen Randes.

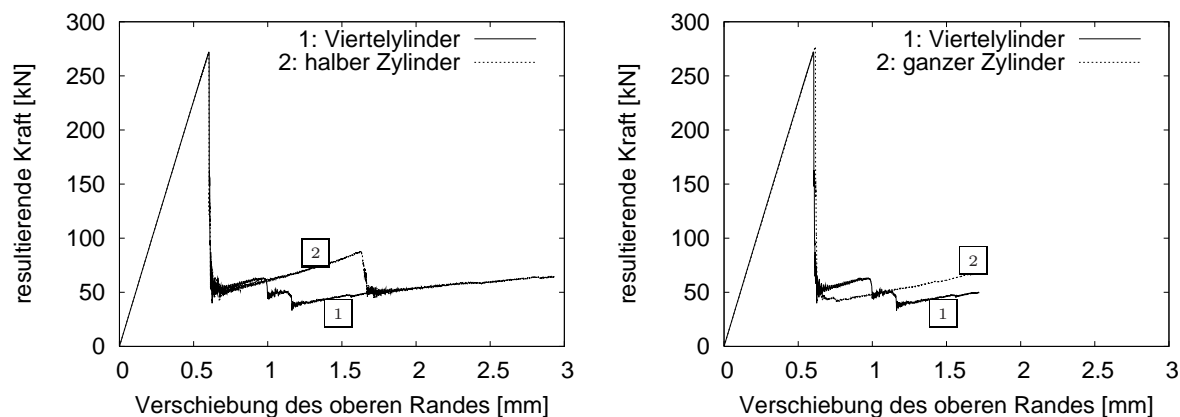


Abbildung 5.23: Last-Verformungsverläufe für einen geom. perfekten Zylinder unter axialem Druck modelliert mit einem 90° -, 180° -Ausschnitt (links) und als ganzer Zylinder (rechts); verschiebungsgesteuerte transiente Berechnung mit der Belastungsgeschwindigkeit $v = 1 \text{ mm/s}$; numerische Dämpfung mit $\gamma = 0.6$, $\beta = 0.3$.

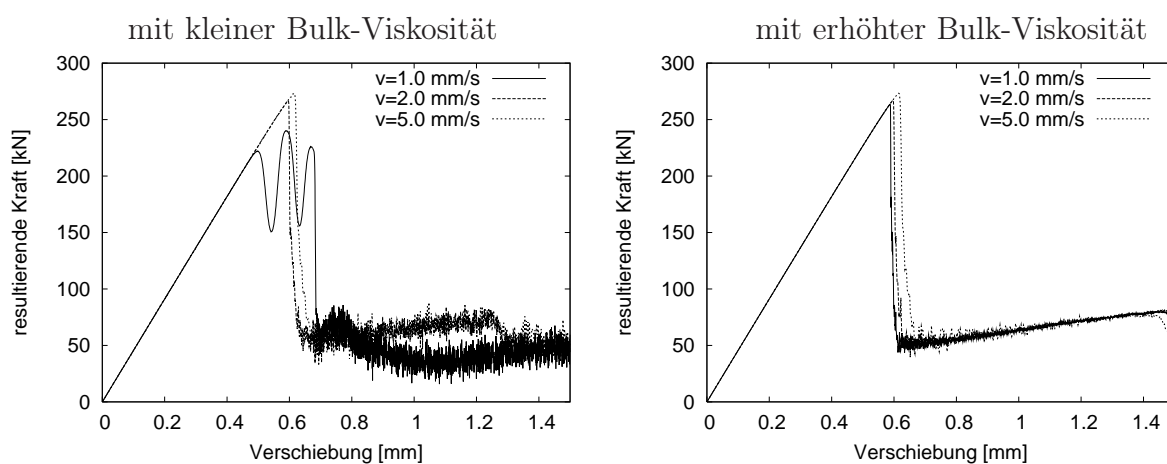


Abbildung 5.24: Last-Verformungsverläufe für einen geom. perfekten Viertelzylinder unter axialem Druck für verschiebungsgesteuerte transiente Berechnung mit dem Programm LS-DYNA bei unterschiedlicher Bulk-Viskosität; unterschiedliche Belastungsgeschwindigkeiten, Diskretisierung mit 40×40 bilinearen Elementen.

5.3 FE Untersuchungen an geometrisch imperfekten Zylindern

Bei den Untersuchungen an geometrisch imperfekten Kreiszyllindern des vorliegenden Kapitels werden Daten aus dem Sonderforschungsbereich 219 (SFB 219) [48] der Deutschen Forschungsgesellschaft verwendet. Dort wurden Stahlzylinder experimentell⁶ und numerisch untersucht. Für den besseren Vergleich mit numerischen Untersuchungen wurde dort sowohl die Geometrie als auch der Elastizitätsmodul der Versuchskörper möglichst genau bestimmt. Die numerischen Untersuchungen erfolgten mittels FEM. Die dabei verwendeten FE-Netze wurden durch direkte Übernahme der Koordinaten der gemessenen Punkte erzeugt, wobei zur Vernetzung ausschließlich Schalenelemente mit bilinearen Ansatzfunktionen verwendet wurden, siehe die im Rahmen des SFB 219 entstandenen Arbeiten von UMMENHOFER [84] und KNEBEL [50] und die spätere Arbeit von ROTTNER [69]. Bei diesen Untersuchungen wurden keine Netzkonvergenzstudien durchgeführt, da die Rechnerkapazitäten hierfür nicht ausreichend waren, s. [84]. Wie Ergebnisse aus den vorhergehenden Abschnitten zeigen, sind zur korrekten Bestimmung der Stabilitätslast eines perfekten Kreiszyllinders sehr feine Netze erforderlich, wenn bilineare Elemente verwendet werden. Daher wird die weitgehend schlechte Übereinstimmung der numerischen Ergebnisse aus dem SFB 219 mit den experimentellen Beullasten in den nicht auskonvergierten Netzen und in der schlechten Approximation der gekrümmten Geometrie infolge der niedrigen Ansatzordnung der dort verwendeten Elemente vermutet.

Zur Überprüfung dieser Annahme wird im Folgenden das Lösungsverhalten für die oben genannten realen Zylinder bei unterschiedlichen Vernetzungen untersucht. Wegen der hierfür erforderlichen weiteren Netzpunkte muss die Geometrie in einer kontinuierlichen Form vorliegen. Im Falle der imperfekten Geometrie, die über die gemessenen Punkte vorliegt, kann eine Fourier-Transformation zum Erzeugen einer kontinuierlichen Form genutzt werden. Dieser Weg wird im folgenden besprochen. Zunächst werden die Meßpunkte mit einer Fourier-Transformation analysiert. Anschließend werden FE Berechnungen auf der nun kontinuierlichen imperfekten Geometrie mit unterschiedlichen Vernetzungen und Finiten Elementen unterschiedlicher Ansatzordnung durchgeführt. Dabei werden zuerst die singulären Punkte mittels statischer Analysen bestimmt und anschließend wird das Nachbeulverhalten mit Hilfe transienter Betrachtung untersucht. Die Ergebnisse der numerischen Untersuchungen werden abschließend mit den Versuchsergebnissen aus dem SFB 219 [48] und den Bemessungsrichtlinien verglichen.

5.3.1 Analyse der Imperfektionen

Die Fourier-Transformation (FT) stellt eine gängige Methode zur harmonischen Analyse von Signalen und Entwicklung von Funktionen dar. Da gemessene Daten meist nicht

⁶Ausführliche Beschreibung zur Herstellung der Versuchszylinder und der Durchführung der Experimente ist in UMMENHOFER [84] zu finden.

in einer kontinuierlichen Form sondern nur in Form von diskreten Punkten vorliegen, kommt hier die sogenannte diskrete Fourier-Transformation (DFT) zum Einsatz. Die Rückabbildung des analysierten Signals wird als inverse Transformation bezeichnet. Im Falle eindimensionaler diskreter Signale wird dann das Kürzel IDFT und im zweidimensionalen Fall das Kürzel 2d-IDFT verwendet. Die Herleitung der Ausdrücke für die Fourier Koeffizienten und die Vorschriften zur inversen Transformation sind ausführlich im Anhang A dargestellt.

Die DFT und die entsprechende IDFT sind für den Fall periodischer Signale hergeleitet worden, und liefern bei der Rückabbildung zunächst nur die gemessenen diskreten Stützwerte des Signals. Wird die IDFT zum Erzeugen eines kontinuierlichen Signals aus einer diskreten Meßreihe verwendet, so müssen bestimmte Aspekte beachtet werden. Zum einen muss das Signal nicht nur periodisch sondern auch stetig sein. Ist das Signal unstetig, so ergeben sich in der Nähe der Unstetigkeitsstellen unerwünschte Oberwellen, man spricht hier vom *Gibbs*-Phänomen. Die hierfür verantwortlichen Unstetigkeitstellen können zum einen bei einer schlechten Abtastrate des Signals auftreten. Dieser Fall wird weiter unten diskutiert. Beim vorliegenden Problem kann die Unstetigkeit aber vor allem dann entstehen, wenn die Periodenlänge bei der Analyse der gemessenen Imperfektionen falsch gewählt wird.

Die untersuchten Zylinder wurden in einem annähernd quadratischen Raster mit 200 Punkten in Umfangsrichtung und 47 Punkten in Achsrichtung vermessen. Die Meßdaten sind für den Zylinder AL1100 dreidimensional mit Überhöhung der Imperfektionen in Abb. 5.25 dargestellt. Durch Abrollen des Zylindermantels ergibt sich eine Signal-Matrix mit den Radius-Stützwerten $R_{i,j}(\theta_i, y_j)$ und den Koordinaten $\theta \in [0, 2\pi]$ in Umfangsrichtung und $y \in [0, L]$ (L = Zylinderlänge) in axialer Richtung, s. Abb. 5.26. Wird die Periode in Umfangsrichtung zu $T_\theta = 2\pi$ gewählt, so ergibt sich in dieser Richtung "automatisch" ein stetiges Signal, da die Stützwerte am Beginn und Ende der Periode gleich sind. In axialer Richtung hingegen würde bei einer Periode gleich der Zylinderlänge $T_y = L$ eine Unstetigkeit an den Periodengrenzen entstehen, da die Werte am unteren Zylinderrand nicht gleich den Werten am oberen Rand sind, s. Abb. 5.26. Um ein stetiges Signal auch in axialer Richtung zu erhalten, wird die gegebene Matrix in axialer Richtung gespiegelt hinzugenommen und dadurch verdoppelt, d.h. die Periode ergibt sich zu $T_y = 2L$. Die Anzahl der Fourier Koeffizienten und damit auch der Berechnungsaufwand bleiben allerdings gleich, da die *sinus*-Koeffizienten wegen der Symmetrie zu Null werden, s. Anhang A.

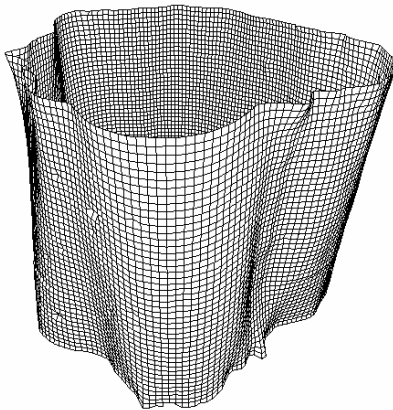
Wie oben erwähnt muss das vorliegende Signal der imperfekten Geometrie glatt genug sein, andernfalls ist die Sinnhaftigkeit der beschriebenen Vorgehensweise zur Abbildung einer punktuell vermessenen Oberfläche fraglich. Anders ausgedrückt muss die imperfekte Geometrie ausreichend fein abgetastet sein. In diesem Fall sind die Koeffizienten im oberen Fourier-Frequenzspektrum sehr klein. Werden nun die Stützwerte mit der 2d-IDFT unter Vernachlässigung hochfrequenter Anteile im Koeffizientenspektrum erzeugt, so kann aus den dabei entstehenden Fehlern auf die Abtastrate geschlossen werden. Bei einem glatten Signal würde der Fehler hinreichend klein sein. Aus diesen Überlegungen heraus wurde folgender relativer Fehler zur Analyse der Signalglattheit

hergeleitet:

$$\epsilon_{IDFT} = \frac{\sum_{i=1}^{N_\theta} \sum_{j=1}^{N_y} \epsilon_{i,j}}{\sum_{i=1}^{N_\theta} \sum_{j=1}^{N_y} Imp_{i,j}} = \frac{\sum_{i=1}^{N_\theta} \sum_{j=1}^{N_y} |R_{i,j} - r(\theta_i, y_j)|}{\sum_{i=1}^{N_\theta} \sum_{j=1}^{N_y} |R_{i,j} - R_{mittel}|} \quad (5.35)$$

- $\epsilon_{i,j}$... Fehler an der Stützstelle (θ_i, y_j)
- $Imp_{i,j}$... gemessene Imperfektion an der Stützstelle (θ_i, y_j)
- $R_{i,j}$... gemessene Radien
- $r(\theta_i, y_j)$... mit 2d-IDFT berechneter Radius an der Stützstelle (θ_i, y_j) .

Angewendet auf die Geometrien der hier untersuchten Zylinder ergibt sich nach Formel (5.35) beispielsweise bei Vernachlässigung von 30% der hohen Fourier Koeffizienten ein sehr kleiner Fehler von $\epsilon_{IDFT} \approx 1 \%$. Demnach ist der Einfluß hoher Fourier-Koeffizienten bei vorliegenden Meßdaten vernachlässigbar, d.h. das Signal $R_{i,j}$ ist durch die Messung glatt genug abgebildet, sodass die Fourier-Transformation hier zum Erzeugen kontinuierlicher imperfekter Geometrie der betrachteten Zylinder herangezogen werden kann.



Mittlerer Radius: $R \approx 625 \text{ mm}$
 Höhe: $L = 966 \text{ mm}$
 Blechdicke: $t = 0.56 \text{ mm}$
 $\Rightarrow R/t \approx 1100$
 E-Modul: $E = 2.03 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$
 Fließgrenze: $R_{eff} = 379 \text{ N/mm}^2$ ^a
 Experimentelle Beullast: $F_{cr,exp} = 135 \text{ kN}$

^aIn den FE-Modellen wird die Fließgrenze nicht berücksichtigt. Sie wird lediglich zur Bestimmung der Bemessungslast verwendet.

Abbildung 5.25: Geometrie und Materialdaten des Zylinders AL1100. Die Imperfektion ist um den Faktor 100 überhöht dargestellt.

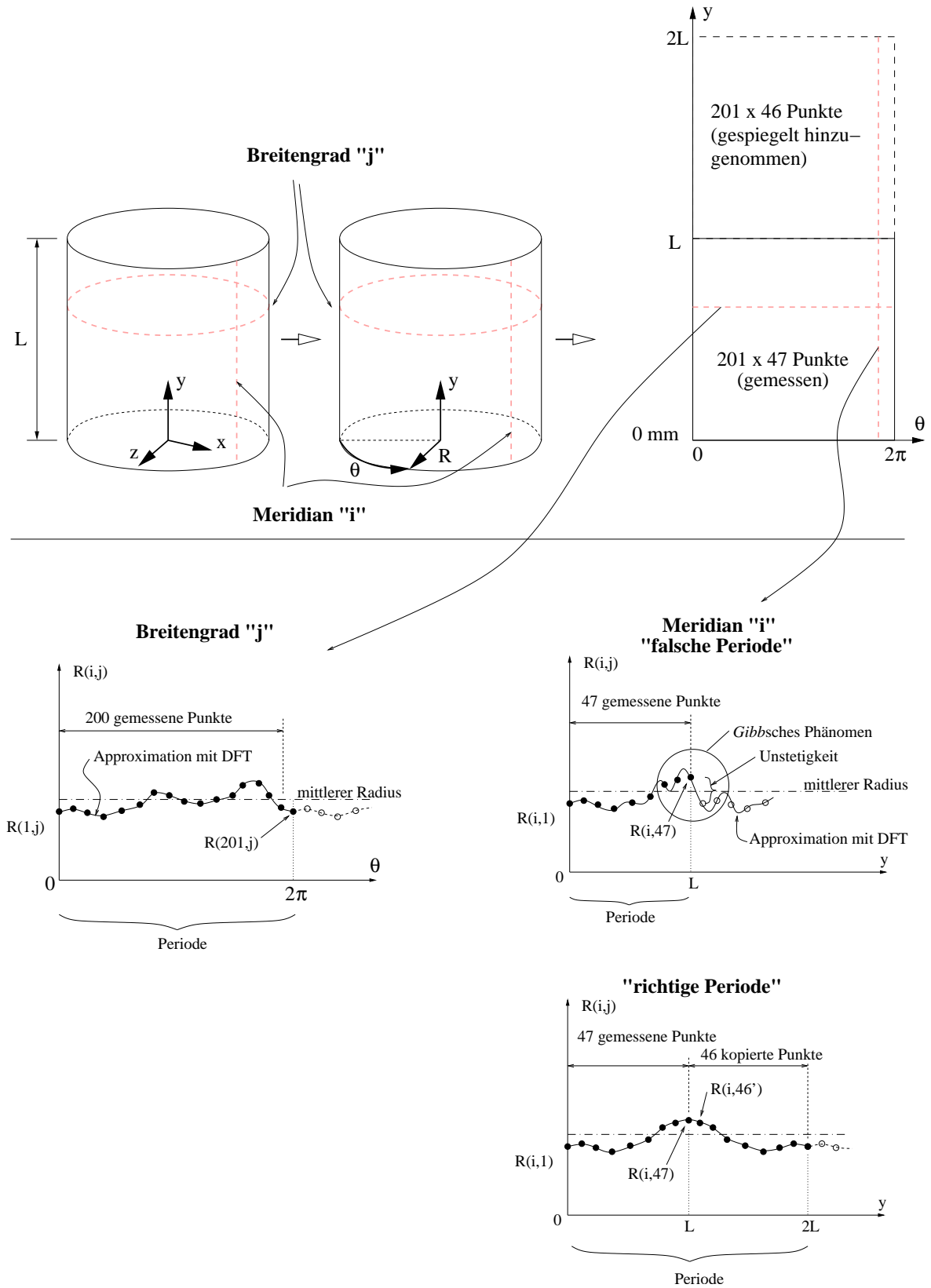


Abbildung 5.26: Schematische Darstellung der Vorgehensweise bei der 2d-IDFT der Meßdaten eines imperfekten Kreiszyinders.

5.3.2 Allgemeines zur Modellierung

Zur Validierung der FE-Untersuchungen imperfekter Zylinder stehen Messungen aus dem SFB 219 [48] zur Verfügung. Allerdings sind bei einem Vergleich der Berechnungsergebnisse mit den Versuchsergebnissen die Unterschiede zwischen den wirklichen und den modellierten Lagerungs- und Belastungsbedingungen zu beachten. Dies sind:

- Drehbarkeit des gelagerten Randes
- Verwölbung des gelagerten Randes in Achsrichtung
- ungleichmäßige Lasteinleitung
- ungleichmäßige Lagerung

In der Realität kann eine drehbare Lagerung (S-RBn) genausowenig verwirklicht werden, wie eine eingespannte Lagerung (C-RBn). Bei der Wölbbehinderung in Achsrichtung liegt ein ähnlicher Sachverhalt vor: die reale Lagerung wird immer eine gewisse Nachgiebigkeit aufweisen. KNEBEL [50] und UMMENHOFER [84] untersuchten rechnerisch den Einfluss unterschiedlicher Lagerungen auf die Stabilitätslasten von Zylindern mit gemessenen Imperfektionen. Hierbei wurde der untere Rand immer wölbbehindert gelagert und am oberen, belasteten Rand die RBn S1, S3, C1 und C3 modelliert. Als Hauptergebnis wurde eine Wechselwirkung zwischen den untersuchten Imperfektionen und den Randbedingungen festgestellt. Dabei war der Einfluss der Wölbbehinderung aber auch der Einspannung teilweise wesentlich größer als bei analogen Untersuchungen für geometrisch perfekte Kreiszyylinder. In Versuchen an weitestgehend perfekten Zylindern konnte aber der Einfluss der Einspannung auf die Beullasten, d.h. der Unterschied zwischen S- und C-Lagerungen nicht nachgewiesen werden, siehe z.B. OSTAPENKO [62].

Bei den experimentellen Untersuchungen im Rahmen des SFB 219 wurden beide Zylinderenden in Flansche mit großer Biegesteifigkeit eingefasst, daher kann davon ausgegangen werden, dass die Verwölbung in Achsrichtung nahezu verhindert war. Bei den Untersuchungen in den folgenden Kapiteln wird auf die Modellierung der Flansche selbst verzichtet und nur der Bereich zwischen den Flanschen modelliert. Dabei werden an den Knoten des unteren Randes alle Verschiebungen festgehalten. An den Knoten des oberen Randes werden die Verschiebungen in radialer und tangentialer Richtung festgehalten und die Verschiebungsfreiheitsgrade in axialer Richtung zu einem Freiheitsgrad zusammengefasst (gekoppelt). Dadurch wird der Belastungsvorgang in der Prüfmaschine simuliert. Wegen obiger Ausführungen zum Einfluss der Randeinspannung werden die Drehfreiheitsgrade an den Zylinderenden nicht behindert.

5.3.3 Bestimmung singulärer Punkte mittels statischer FE-Analysen

Die kritischen Lasten geometrisch imperfekter Zylinder werden analog zur Vorgehensweise für geometrisch perfekte Zylinder mit dem Bisektionsverfahren bestimmt. Die

Konvergenz der Lösung wird mit unterschiedlichen Netzen und Approximationsordnungen untersucht. Zur Generierung der FE-Netze wird die kontinuierliche Darstellung der gemessenen Oberfläche mit Hilfe der oben dargestellten Fourieranalyse genutzt. Im Gegensatz zum perfekten Zylinder kann die Untersuchung nicht an einem Zylinderausschnitt erfolgen, die Zylinder müssen komplett modelliert werden.

Durch die Verwendung der Meßpunkte als Knoten eines FE-Netzes entstehen im Falle der bilinearen Interpolation 200 Elemente in Umfangsrichtung und 46 Elemente in Achsrichtung. Da die Elementanzahl gerade ist, kann dieses Netz auch für die biquadratischen Elemente MITC9 verwendet werden. Allerdings können die vorliegenden Meßpunkte nicht direkt mit den bikubischen Elementen vernetzt werden. Hierzu wurde ein Netz mit einer vergleichbaren Anzahl an Freiheitsgraden erzeugt (65x15 Elemente; 43875 FHG). Weitere Netze, sowohl gröber als auch feiner als das durch die Meßpunkte vorgegebene Netz, werden mit der oben beschriebenen 2d-IDFT so erzeugt, dass die Anzahl der Freiheitsgrade für alle drei Elementtypen gleich ist.

Die numerisch bestimmten Stabilitätslasten für unterschiedliche Vernetzungen in Tabelle 5.4 und Abb. 5.27 zeigen, dass analog zum geometrisch perfekten Zylinder die Lösung für höhere Ansätze wesentlich schneller konvergiert, als für die bilinearen Elemente. Allerdings ist eine Verbesserung der Konvergenzgeschwindigkeit bei Verwendung von bikubischen Elementen gegenüber der biquadratischen kaum erkennbar. Auffallend ist das oszillatorische Konvergenzverhalten der Lösung für biquadratische und bikubische Elemente vor allem in der Nähe der konvergierten Lösung. Wie bereits beim geometrisch perfekten Zylinder kann dies zum Teil auf die gemischten Terme in der Formulierung zurückgeführt werden. Ein weiterer Grund für die Oszillationen liegt in der gemessenen Imperfektion und der Approximierung der Geometrie, wie weiter unten gezeigt wird.

Analog zur Vorgehensweise bei den Untersuchungen des geometrisch perfekten Zylinderviertels aus Abschnitt 5.2.1 wurden auch für den geometrisch imperfekten Zylinder Beullasten für adaptiv verfeinerte Netze mit bilinearen Elementen bestimmt. Hierbei diente das Netz aus der direkten Übernahme von Meßpunkten als Startnetz. Die Ergebnisse der Berechnungen mit diesen Netzen sind ebenfalls in Tabelle 5.4 und Abb. 5.27 dargestellt. Es ist deutlich erkennbar, dass das Konvergenzverhalten für bilineare Elemente bei Verwendung adaptiver Netze wesentlich verbessert werden konnte. Der Grund hierfür liegt im ausgesprochen lokalen Charakter der Beulform, sichtbar an den Beulformen in den Abb. 5.28 und 5.29. Interessant ist, dass die Verwölbung der Übergangselemente, die im Falle der geometrisch perfekten Schale (Abschnitt 5.2.1) zu abweichenden Eigenvektoren führte, sich hier nicht negativ auf die Ergebnisse auswirkt. Offensichtlich ist im vorliegenden Fall die Verfälschung der Geometrie durch die Verwölbung geringer als die "Störung" infolge der gemessenen Imperfektionen.

bilinear		MITC9		MITC16	
El./FHG	Last	El./FHG	Last	El./FHG	Last
108x24/12853	244.8	54x12/12853	167.7	36x8/12853	139.4
150x36/26851	191.7	75x18/26851	147.8	50x12/26851	148.5
200x46/45801*	165.1	100x23/45801*	146.1	65x15/43875	143.5
228x55/61333	150.9	114x27/61333	133.6	76x18/61333	128.5
252x60/75349	147.0	126x30/75349	134.1	84x20/75349	136.7
adaptiv 1 /47737	138.3				
adaptiv 2 /48201	137.2				

Tabelle 5.4: Kritische Lasten (Beullasten) des geometrisch imperfekten Zylinders AL1100 für unterschiedliche Vernetzungen mit unterschiedlichen Elementen (bilinear, biquadratisch MITC9, bikubisch MITC16). Die mit einem (*) markierten Netze entstanden durch direkte Übernahme der Meßpunkte.

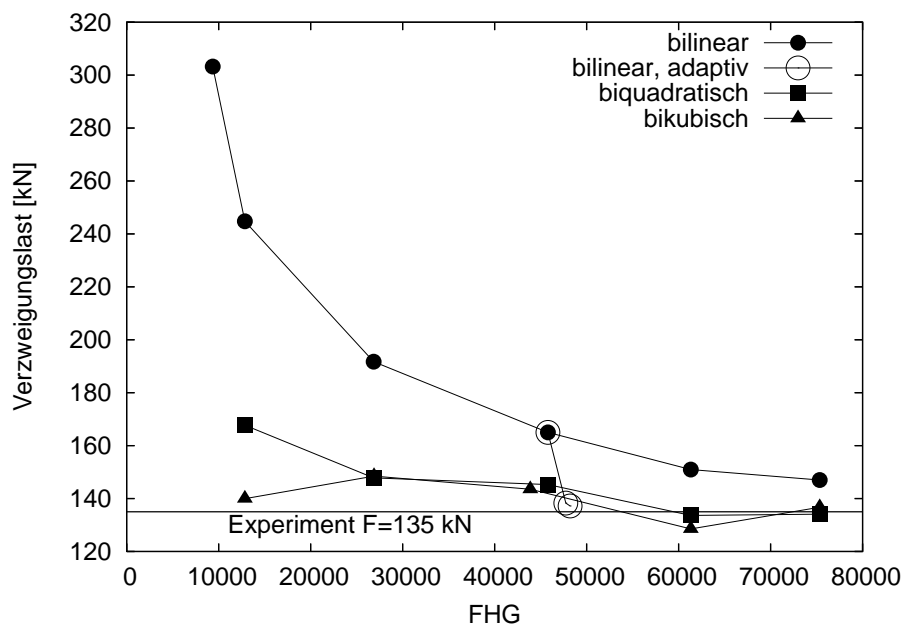


Abbildung 5.27: Netzkonvergenz kritischer Lasten des geometrisch imperfekten Zylinders AL1100 für für Elemente der Ansatzordnung bilinear, biquadratisch (MITC9) und bikubisch (MITC16).

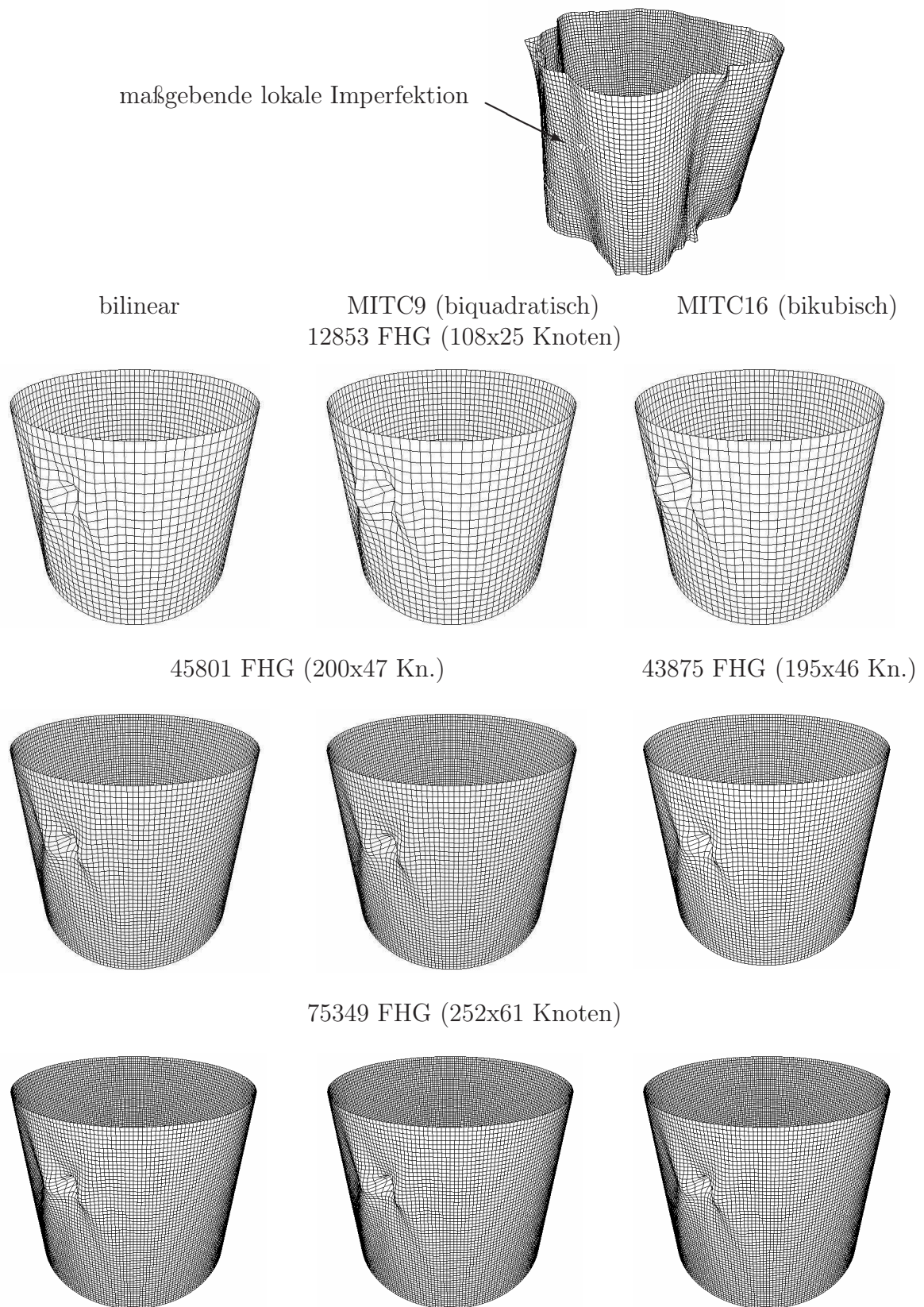


Abbildung 5.28: Beulformen für den Zylinder AL1100 unter Axiallast bei gleichmäßiger Netzverfeinerung mit bilinearen, biquadratischen und bikubischen Schalenelementen.

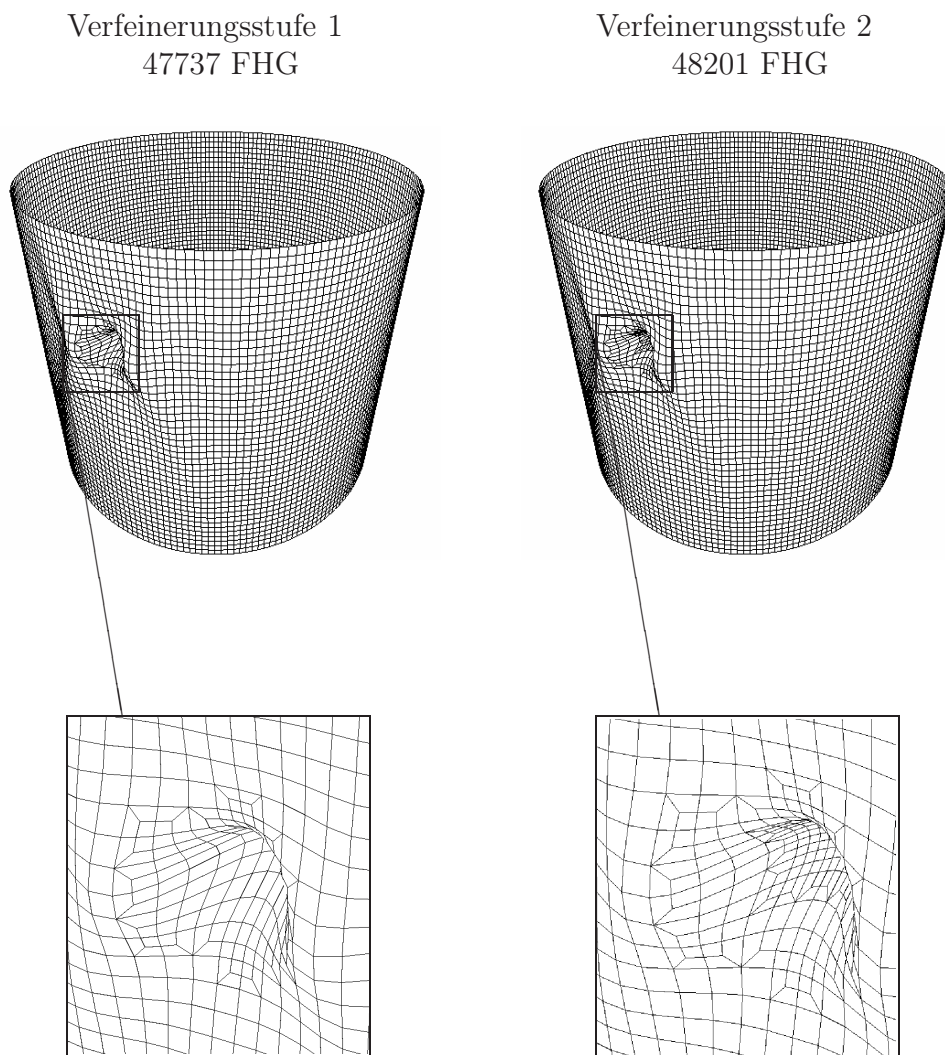


Abbildung 5.29: Beulformen für den Zylinder AL1100 unter Axiallast bei adaptiver Netzverfeinerung mit bilinearen Schalenelementen; die Verfeinerung erfolgte mit dem Indikator, der aus dem glättungsbasierten Fehler-schätzer nach ZIENKIEWICZ/ZHU [99] abgeleitet wurde; zum Algo-rithmus siehe Kapitel 3.3 und 5.2.1.

Wie bereits oben erwähnt, kann das oszillatorische Konvergenzverhalten bei biquadratischen und bikubischen Elementen zum einen an der gemischten Formulierung der Elemente MITC9 und MITC16 liegen. Zum anderen aber könnte der Grund auch in der Fourier-Transformation, die zum Erzeugen beliebiger FE-Netze verwendet wurde, liegen. Bei Betrachtung des Konvergenzverlaufs für biquadratische Elemente in Abb. 5.27 fällt auf, dass das nicht monotone Konvergenzverhalten erst bei einer Verfeinerung über die gemessenen Punkte hinaus auftritt. Werden nur die drei größten Netze mit biquadratischen Elementen betrachtet - 54x12, 75x18, 100x23 Elemente, so erscheint das Netz mit 100x23 Elementen (45801 FHG) bereits auskonvergiert. Bei weiterer Verfeinerung ergibt sich etwas unerwartet ein weiterer Abfall der Beullasten. Zur genaueren Untersuchung dieses Sachverhalts werden weitere FE-Modelle mit unterschiedlichen Netzen für biquadratische Elemente betrachtet. Die Ergebnisse sind in Abb. 5.30 dargestellt. Nun ist der plötzliche Abfall der Beullasten bei Verfeinerung über das Netz mit den Meßpunkten (100x23 El.) hinaus deutlich erkennbar. Da die Netze mit Hilfe der inversen Fourier-Transformation erzeugt werden, wird im folgenden der Einfluss dieser Interpolation untersucht.

Die Glattheit des Eingangssignals, d.h. die ausreichende Abstrakte der gemessenen Imperfektionen, ist bereits oben untersucht und bestätigt worden. Demnach hat das Weglassen der oberen Frequenzanteile der Fourier-Koeffiziente, auch *Filterung* genannt, bei der Rückabbildung kaum Einfluss auf die so gewonnene Geometrie. Allerdings wird die Geometrie bei stärkerer Filterung zunehmend glatter. Dieser Einfluss wird hier für die spezielle Geometrie des Zylinders AL1100 untersucht. Die Stabilitätslasten aus der Untersuchung mit unterschiedlicher Filterung sind in Abb. 5.31 dargestellt. Erwartungsgemäß wird der "Knick" im Konvergenzverlauf an der Stelle mit 45801 FHG bei zunehmender Filterung immer geringer, so dass das Konvergenzverhalten der Lösung zunehmend monotoner wird. Der Grund hierfür ist die oben beschriebene Glättung der Oberfläche. Unerwartet ist allerdings, dass die kritischen Lasten bei glatteren Oberflächen zunächst abfallen, anstatt wie erwartet anzusteigen.

Ausgehend von der Annahme, dass die Beullasten bei Schalen mit abnehmender Imperfektionstiefe ansteigen, sollten die kritischen Lasten der Modelle mit herausgefilterten Fourier-Koeffizienten d.h. kleineren Imperfektionen größer sein als die Lasten der "Originaloberfläche". Dies ist hier aber nicht der Fall. Im vorliegenden Fall ergeben sich für die geglättete Geometrie bei Weglassen von bis zu 50% der Koeffizienten zunächst niedrigere Beullasten. Erst bei der Geometrie mit lediglich 25% aller Koeffizienten ergeben sich Beullasten, die größer sind als die Beullasten für die Originalgeometrie mit allen Fourier-Koeffizienten, s. Abb. 5.31. Der Grund hierfür liegt im ausgeprägt lokalen Charakter einer einzelnen Imperfektion, die für die Beulenbildung und somit für die Beullast maßgebend ist. Diese Imperfektion liegt bei $\theta \approx 5.3 \text{ rad}$ und $y \approx 670 \text{ mm}$ und besteht lediglich aus zwei Meßpunkten, s. Abb. 5.32.

Bei der Rückabbildung der Geometrie mit 2d-IDFT mit den hier vorgenommenen Filterungen ändern sich weder der globale Charakter des Imperfektionsmusters noch der Maximalwert der Imperfektion, s. Abb. 5.33. Die wesentlichen Änderungen erfahren nur lokale Imperfektionen, im speziellen die dargestellte Delle bei den Koordinaten

$\theta \approx 5.3 \text{ rad}$ und $y \approx 670 \text{ mm}$. Diese Delle wird mit zunehmender Filterung kleiner, bis sie bei der Berücksichtigung von lediglich 25% aller Fourier-Koeffizienten kaum noch sichtbar ist. D.h. hier liegt der Umstand vor, dass die Beullast mit abnehmender Tiefe der lokalen Imperfektion zunächst sinkt und erst ab einer gewissen Tiefe wieder ansteigt. Es ist bekannt, dass lokale Imperfektionen mit großen Amplituden eine versteifende Wirkung haben können. Offensichtlich ist das hier vorliegende Verhältnis der gemessenen Imperfektionsamplitude zu ihrer Ausbreitung so groß, dass eine Versteifung eintritt.

Mit dieser Erkenntnis läßt sich nun auch das Ausgangsproblem, der Knick in der Konvergenzkurve für die ungefilterte Originalgeometrie in Abb. 5.30, erklären. Hierzu ist es notwendig, die Abbildung der lokalen Imperfektion für unterschiedliche Vernetzungsdichten zu betrachten, Abb. 5.34. Bei Netzen, die vom Raster der gemessenen Punkte abweichen, ergibt sich stets eine geringere Amplitude bei der betrachteten lokalen Imperfektion. Demnach wirkt sich hier eine Netzverfeinerung in zweifacher Hinsicht lastmindernd aus. Zum einen wird die Approximation der Verschiebungen durch ein feineres Netz besser. Zum anderen sinkt die Beullast infolge einer kleineren lokalen Imperfektion. Demzufolge resultiert das oszillatorische Konvergenzverhalten in der Nähe der konvergierten Beullast aus der Tatsache, dass jedes untersuchte Netz eine geringfügig andere Geometrie repräsentiert.

Die Untersuchung zeigt deutlich, dass die Konvergenz einer imperfekten Struktur hinsichtlich der Beullast erst dann erreicht ist, wenn die maßgebende lokale Imperfektion ausreichend genau approximiert ist. Dies kann sehr feine Netze erfordern, abhängig vom lokalen Charakter der Imperfektion, und einen oszillatorischen Konvergenzverlauf verursachen. Dadurch wird die Entscheidung, wann eine Konvergenzuntersuchung in der Praxis abgebrochen werden kann, deutlich erschwert.

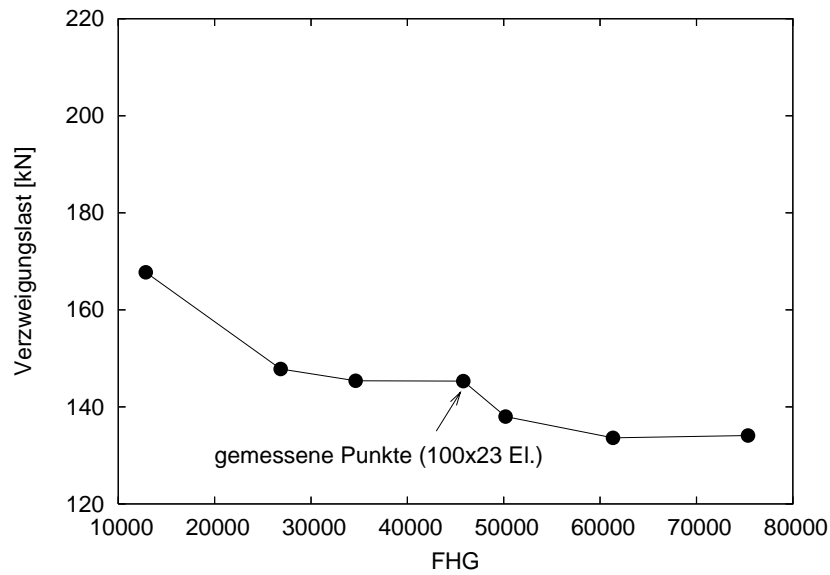


Abbildung 5.30: Kritische Lasten des geometrisch imperfekten Zylinders AL1100 für unterschiedliche Vernetzungen mit biquadratischen Elementen (MITC9).

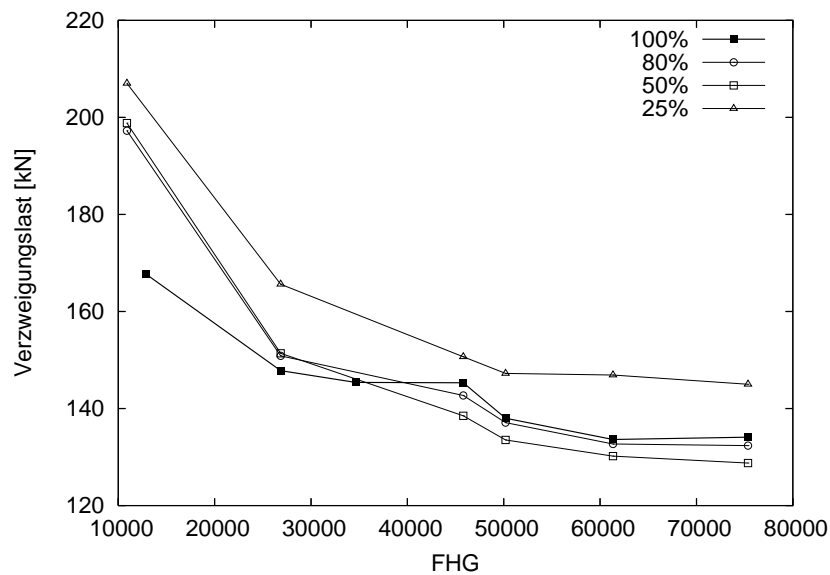


Abbildung 5.31: Kritische Lasten des geometrisch imperfekten Zylinders AL1100 für unterschiedliche Vernetzungen mit biquadratischen Elementen (MITC9) bei unterschiedlicher Filterung der Rückabbildung der Geometrie. Der prozentuale Anteil der bei der Rückabbildung berücksichtigten Fourier-Koeffizienten ist in der Legende angegeben.

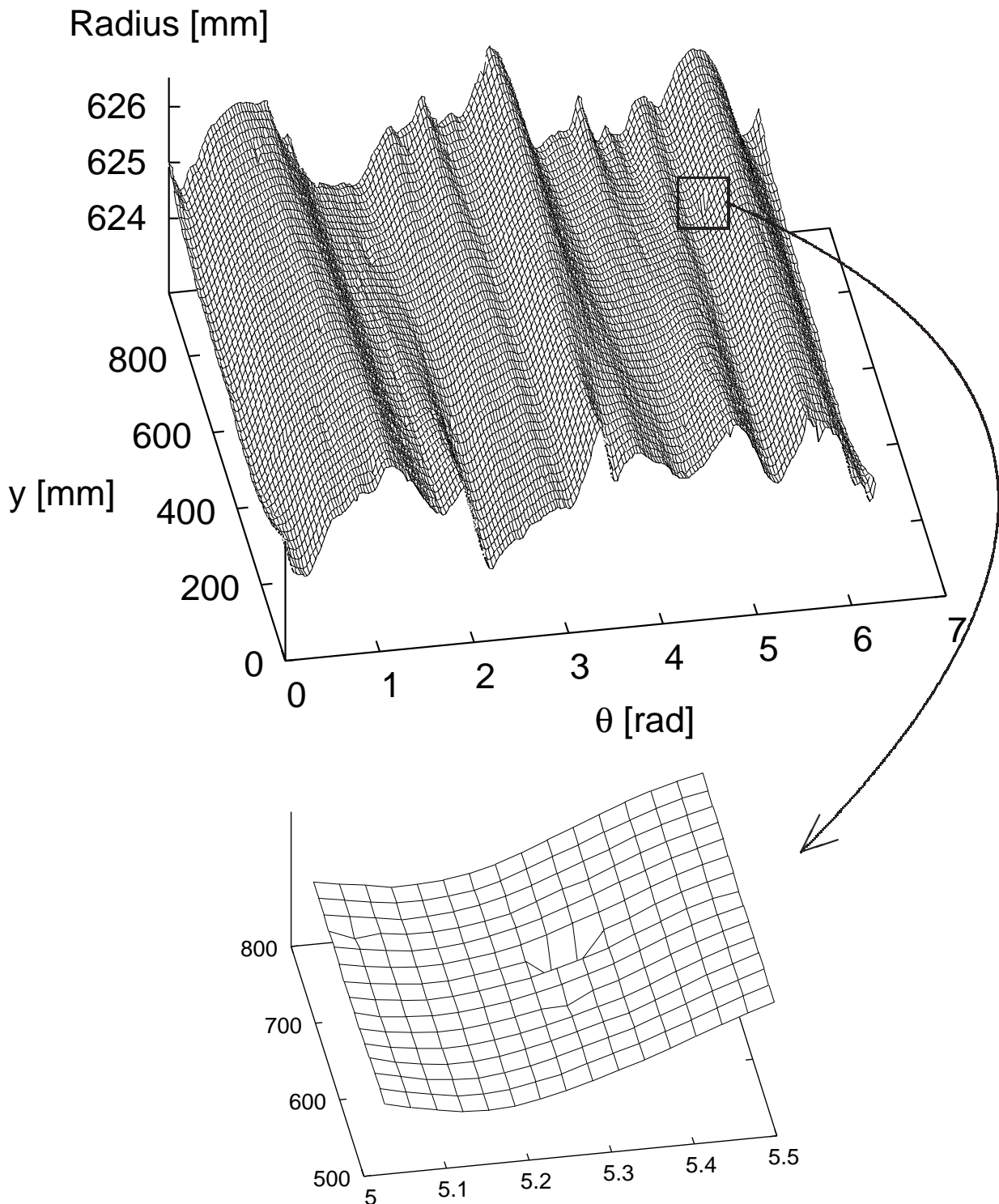


Abbildung 5.32: Abgerollte gemessene Geometrie des Zylinders AL1100 mit dem Ausschnitt der für die Einleitung des Beulvorgangs maßgebenden lokalen Imperfektion.

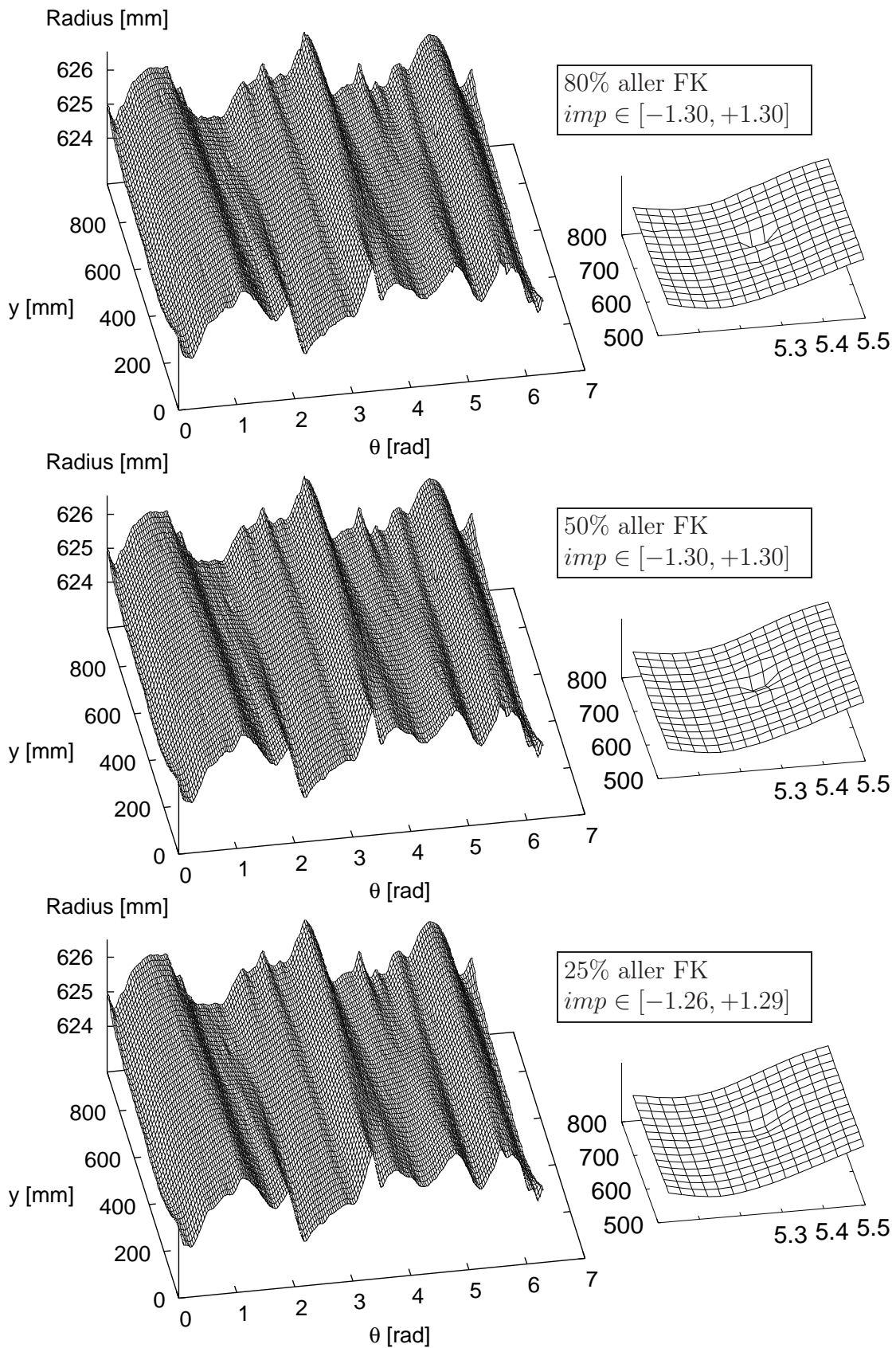


Abbildung 5.33: Rückabgebildete imperfekte Geometrie des Zylinders AL1100 für unterschiedliche Anzahl von Fourier-Koeffizienten (FK).

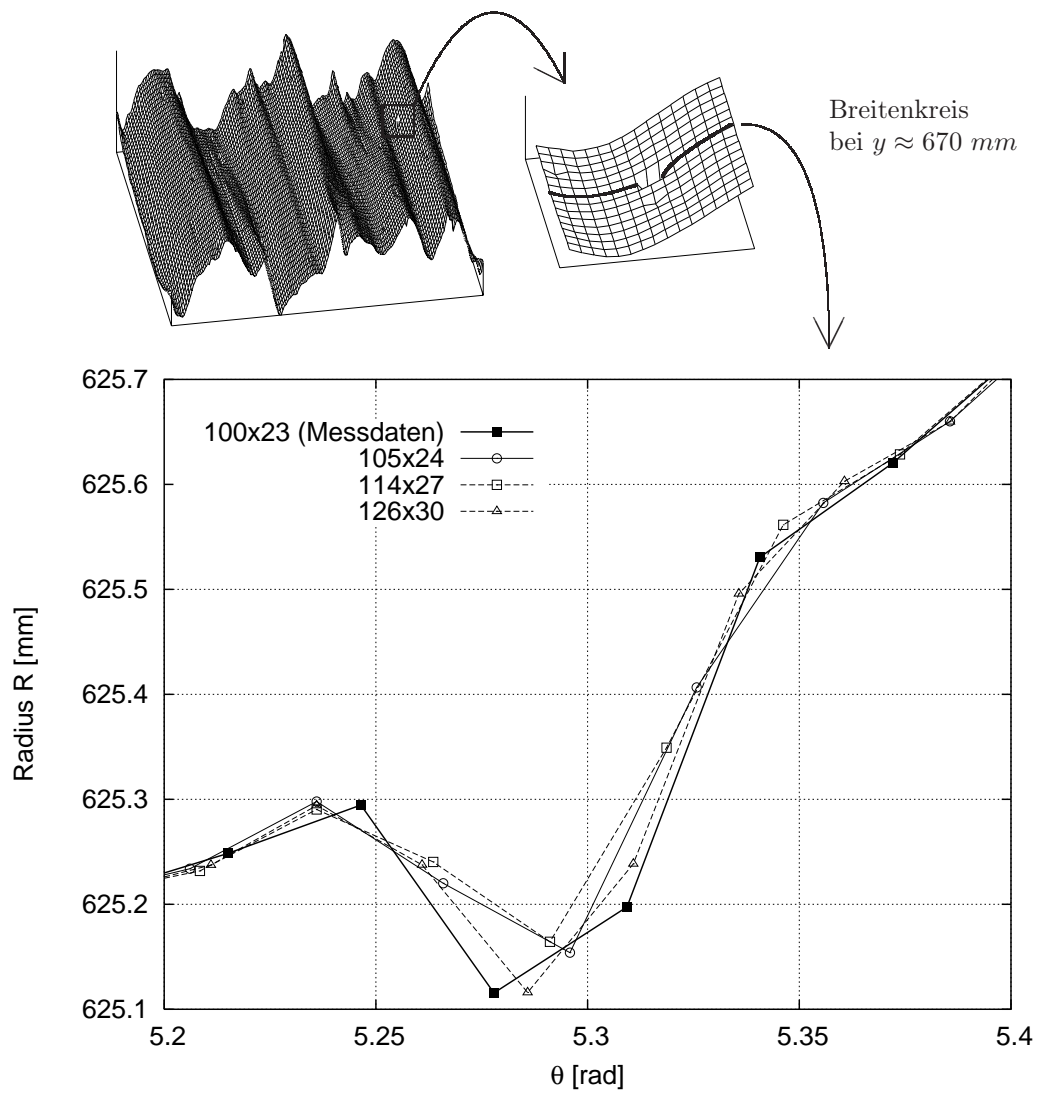


Abbildung 5.34: Ausschnitt des Breitenkreises des Zylinders AL1100 um die maßgebende Imperfektion für unterschiedliche Netze. In der Legende ist die Anzahl der biquadratischen Elemente angegeben.

5.3.4 Vergleich statischer Beullasten mit den Versuchsergebnissen

Nachdem im vorhergehenden Abschnitt die Netzkonvergenz hinsichtlich Stabilitätslasten und Beulformen am Beispiel des Zylinders AL1100 für Schalenelemente mit bilinearer, biquadratischer und bikubischer Ansatzordnungen untersucht worden ist, wird hier der Vergleich mit Versuchsergebnissen aus dem SFB 219 geführt. Zur Verstärkung der Aussagekraft des Vergleichs werden zwei weitere imperfekte Zylinder mit den Bezeichnungen AL850 und AL650, die ebenso im Rahmen des SFB 219 numerisch und experimentell untersucht wurden, herangezogen.

Die Geometrie und die Materialdaten der hier untersuchten Zylinder AL850 und AL650 sind in Abb. 5.35 und 5.36 dargestellt. Die vorhergehende Konvergenzuntersuchung des AL1100 mit unterschiedlichen Elementen zeigte, dass die biquadratische Approximierung als ausreichend genau angesehen werden kann. Daher werden diese Zylinder nur mit biquadratischen Elementen vernetzt. Hierzu wird analog zum Zylinder AL1100 die 2d-IDFT zum Erzeugen unterschiedlicher Netze verwendet, s. Abschnitt 5.3.1.

Wie die Ergebnisse in Abb. 5.37 zeigen, ergibt sich analog zum Zylinder AL1100 auch für die hier untersuchten Zylinder AL850 und AL650 eine nicht monotone Netzkonvergenz, sichtbar an dem markanten Lastabfall bei der Netzverfeinerung über die gemessenen Punkte hinaus. Dieser fällt bei allen drei Zylindern unterschiedlich hoch aus. Ein Vergleich der Geometrien zeigt, dass beim Zylinder AL650 keine derart stark lokalisierte Imperfektion vorliegt, wie es bei dem Zylinder AL1100 und Zylinder AL850 der Fall ist. Hieraus erklärt sich die Tatsache, dass beim Zylinder AL650 dieser Abfall merklich kleiner ausfällt. Der Lastabfall im letzten Verfeinerungsschritt beim Zylinder AL650 liegt im Wechsel der Beulform begründet, s. Abb. 5.38. Bei allen drei untersuchten Zylindern ist ein leichtes Oszillieren der Beullasten in der Nähe des konvergierten Wertes zu beobachten. Der Grund hierfür liegt im lokalen Charakter der maßgebenden Imperfektion und wurde bereits im vorhergehenden Abschnitt ausführlich diskutiert.

Beachtet man die Sensitivität des betrachteten Problems, ist die Übereinstimmung zwischen den auskonvergierten Stabilitätslasten und dem Experiment mit maximaler Abweichung von 10% trotz allem als gut zu bezeichnen. Störend ist allerdings die Tatsache, dass die rechnerischen Stabilitätslasten im Falle der Zylinder AL1100 und AL650 leicht, und im Falle des Zylinders AL850 deutlich *unter* den experimentellen liegen. Zu erwarten wäre, dass die Beullasten aus den FE-Berechnungen höher als die experimentellen Lasten sind, da bei den aktuellen Untersuchungen nur geometrische Imperfektionen, nicht aber die Imperfektionen bei der Lasteinleitung und der Auflagerung, berücksichtigt wurden.

Für die unerwartet niedrige rechnerische Beullasten kommen mehrere Erklärungsmöglichkeiten infrage. Zum einen können Meßfehler bei der Erfassung der Geometrie vorliegen. Speziell im Falle des Zylinders AL1100, dessen maßgebende Imperfektion lediglich durch zwei Meßpunkte definiert wird, ist diese Möglichkeit naheliegend. Zur Genauigkeit der Meßanlage, die zum Vermessen der Zylinder im Rahmen des SFB 219 verwendet wurde, wird bei Ummenhofer [84] als maximaler Meßfehler $\epsilon_{max} = 0.0137 \text{ mm}$ ange-

geben. Für den Fall des AL1100 ist die lokale Imperfektion ca. 0.2 mm groß, s. Abb. 5.34. Da die Größenordnung der Imperfektion wesentlich über der Meßgenauigkeit liegt, können eventuelle Meßfehler als Ursache ausgeschlossen werden.

Eine weitere Fehlerquelle bei der Modellierung der Zylinder liegt in der Abbildung des Zylindermantels. Dieser besteht in der Realität aus einem Stahlkern welcher beidseitig verzinkt ist. Die Zinkschicht stellt einen Korrosionsschutz dar und ist meist vernachlässigbar dünn gegenüber der Stahlschicht. Allerdings liegen bei den hier untersuchten Zylindern die Dicken der Stahlschichten bei < 1 mm. Die Dicke der Zinkschicht wird bei Ummenhofer [84] mit $t_Z = 2 \cdot 0.035$ mm = 0.07 mm angegeben. Damit liegt der Anteil der Zinkschichten an der Gesamtdicke bei 7 – 11% und ist unter Umständen nicht mehr vernachlässigbar.

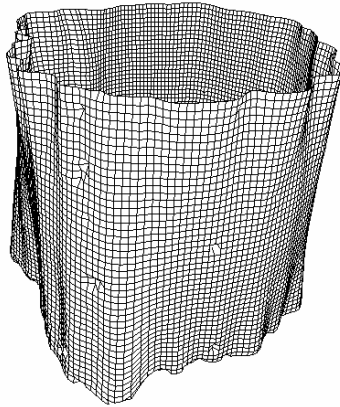
Eine genaue Modellierung der Zylinderhaut mit beispielsweise Volumen-Schalen-Elementen ist grundsätzlich möglich, würde aber hier zu einem signifikanten Anstieg der Rechenzeiten führen. Daher wird die beidseitige Zinkbeschichtung vereinfachend über einen Ersatz-E-Modul berücksichtigt. Der E-Modul für Zink kann mit etwa $E_Z = 1.1 \cdot 10^5$ N/mm² angegeben werden. Für einen Spannungszustand mit dominierenden Normalspannungen, der bei einem axial gedrückten Zylinder vorliegt, kann der Ersatz-E-Modul folgendermaßen angegeben werden:

$$E^* = \frac{E_S t_S + E_Z t_Z}{t_S + t_Z}. \quad (5.36)$$

Hierbei stehen die Größen mit dem Index "S" für Stahl und dem Index "Z" für Zink.

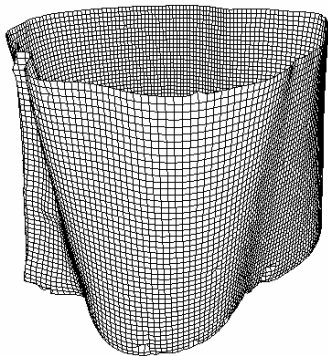
Die mit den Ersatz-E-Moduli und den entsprechenden Ersatzdicken nach (5.36) bestimmten Stabilitätslasten für die Zylinder AL1100, AL850 und AL650 sind in Abb. 5.39 dargestellt. Das Ergebnis zeigt, dass der Einfluss der sehr dünnen Korrosionsschutzschicht aus Zink bei den vorliegenden Zylindern nicht vernachlässigbar ist. Die Beullasten steigen in den Modellen mit der Zinkschicht signifikant an. Erwartungsgemäß fällt der Anstieg unterschiedlich hoch aus, da die Nettowanddicken unterschiedlich sind, die Dicke der Zinkschicht aber für alle drei Zylinder gleich ist. Am größten ist der Anstieg beim Zylinder AL1100 mit ca. 25 %. Dann folgen der Zylinder AL850 mit ca. 21 % und der Zylinder AL650 mit ca. 13 %. Der Vergleich der "neuen" auskonvergier-ten Stabilitätslasten mit den Experimenten scheint nun durchaus plausibel, denn nun liegen die rechnerischen Beullasten ca. 10 % bis 25 % über den experimentellen. Interpretiert man den Unterschied zwischen Berechnung und Experiment als den Einfluss der bisher nicht berücksichtigten Aufstands- und Lastimperfektionen, so korrelieren die Ergebnisse sehr gut mit den Versuchserfahrungen, die zeigen, dass dieser Einfluss mit abnehmender Wanddicke zunimmt.

Diese Untersuchung zeigt einmal mehr die sehr hohe Sensitivität des untersuchten Problems.



Mittlerer Radius: $R \approx 625 \text{ mm}$
Höhe: $L = 966 \text{ mm}$
Blechdicke: $t = 0.68 \text{ mm}$
 $\Rightarrow R/t \approx 850$
E-Modul: $E = 2.1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$
Experimentelle Beullast: $F_{cr,exp} = 230 \text{ kN}$

Abbildung 5.35: Geometrie und Materialdaten des Zylinders AL850. Die Imperfektion ist um den Faktor 100 überhöht dargestellt.



Mittlerer Radius: $R \approx 625 \text{ mm}$
Höhe: $L = 966 \text{ mm}$
Blechdicke: $t = 0.93 \text{ mm}$
 $\Rightarrow R/t \approx 650$
E-Modul: $E = 2.14 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$
Experimentelle Beullast: $F_{cr,exp} = 535 \text{ kN}$

Abbildung 5.36: Geometrie und Materialdaten des Zylinders AL650. Die Imperfektion ist um den Faktor 100 überhöht dargestellt.

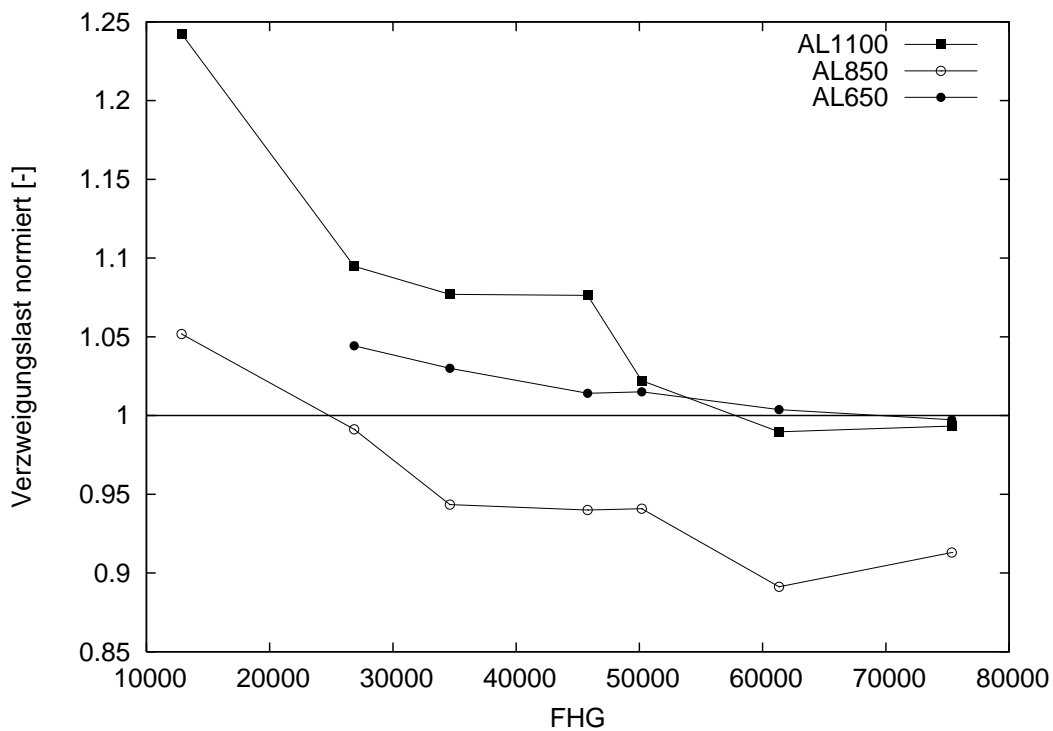


Abbildung 5.37: Kritische Lasten geometrisch imperfekter Zylinder AL1100, AL850 und AL650 für unterschiedliche Vernetzungen mit biquadratischen Elementen (MITC9). Die Lasten sind mit den jeweiligen Beullasten aus den Versuchen normiert: $F_{cr,FEM}/F_{cr,exp}$.

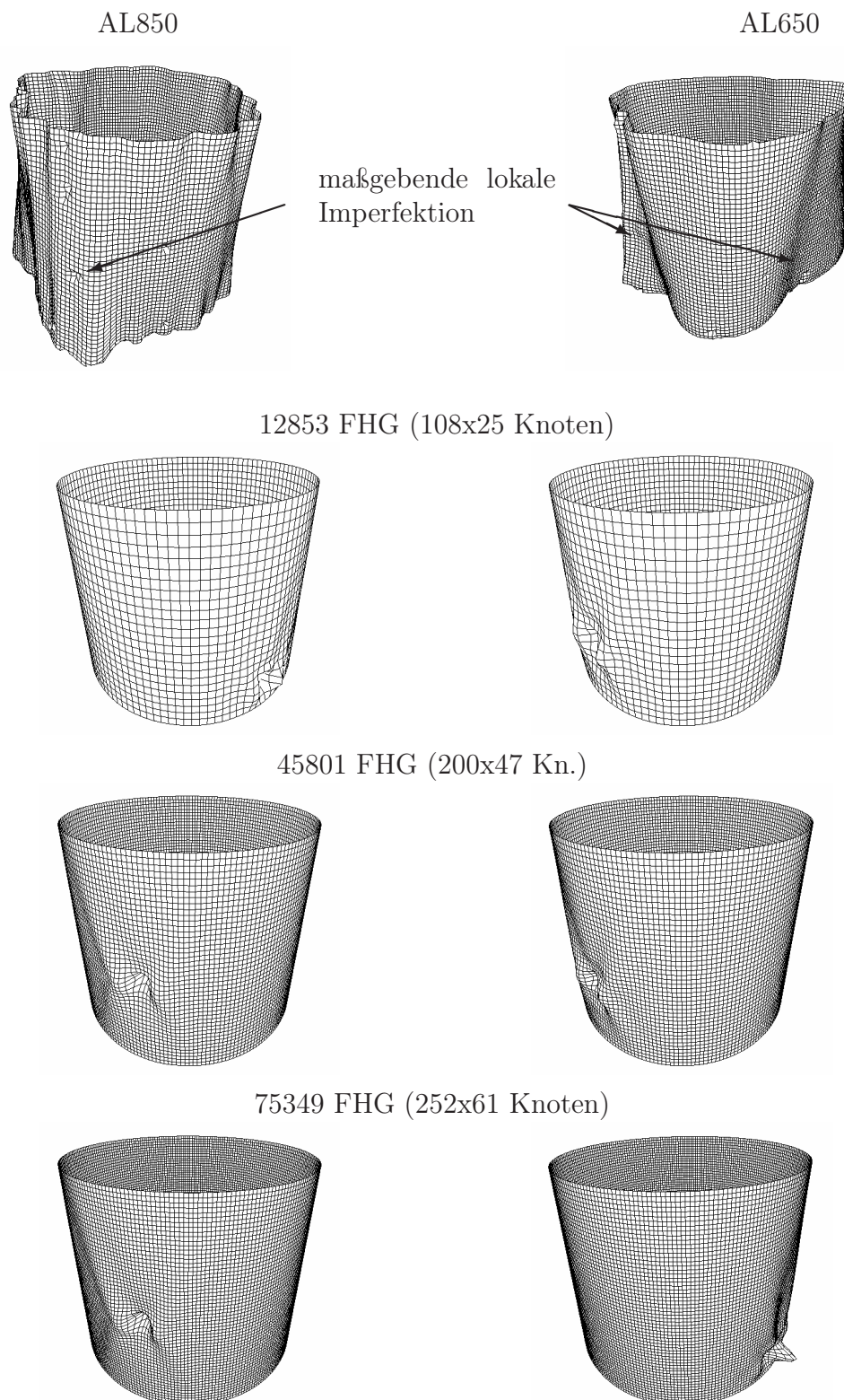


Abbildung 5.38: Beulformen für die Zylinder AL850 und AL650 unter Axiallast bei gleichmäßiger Netzverfeinerung mit biquadratischen Schalenelementen.

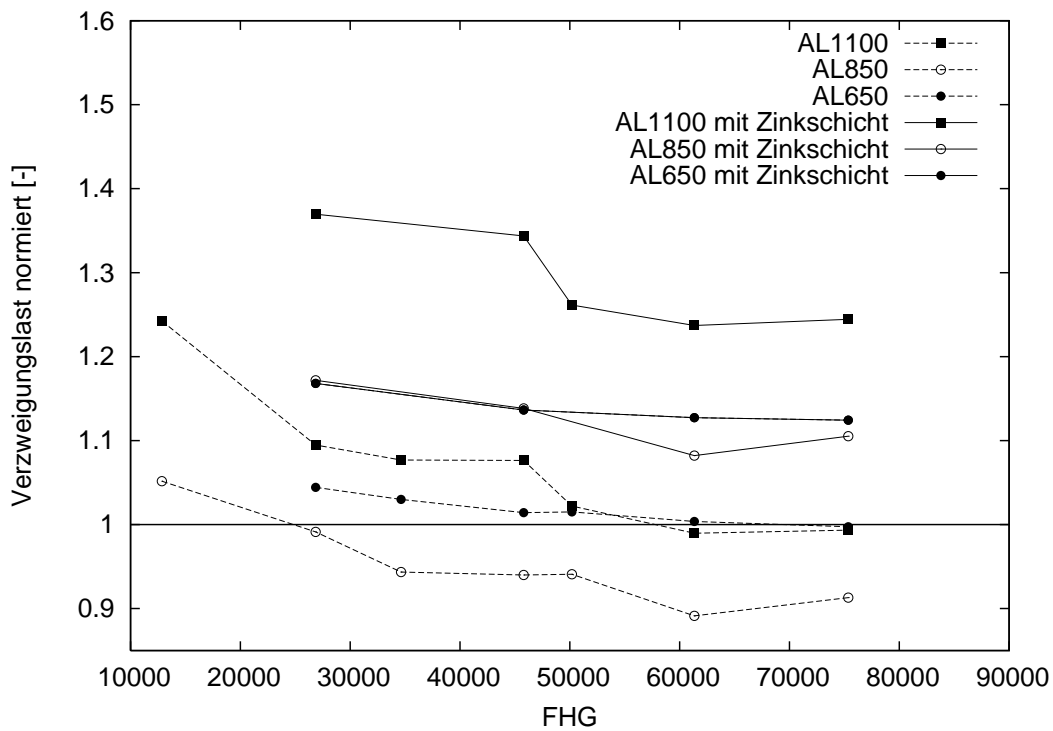


Abbildung 5.39: Kritische Lasten geometrisch imperfekter Zylinder AL1100, AL850 und AL650 für unterschiedliche Vernetzungen mit biquadratischen Elementen (MITC9) mit Berücksichtigung der Zinkschicht nach Gl. (5.36). Die Lasten sind mit den jeweiligen Beullasten aus den Versuchen normiert: $F_{cr,FEM}/F_{cr,exp}$.

5.3.5 Untersuchung des Nachbeulverhaltens mittels transientser FE-Analysen

Analog zu den Untersuchungen am geometrisch perfekten Zylinder wird hier das Nachbeulverhalten imperfekter Zylinder mit Hilfe transientser Analysen untersucht. Die Untersuchungen am perfekten Zylinder zeigten, dass der Zeitschritt durch den kurzzeitigen Beulvorgang bestimmt wird und hier sehr klein zu wählen ist. Dies reduziert die Effizienz des Newmark-Verfahrens erheblich. Daher werden die nachfolgenden Untersuchungen mit dem Programmpaket LS-DYNA, d.h. unter Verwendung expliziter Zeitintegration durchgeführt.

In Abschnitt 5.2.2 wurden die Parametersensitivität und die Netzkonvergenz bereits umfangreich untersucht. Die Untersuchung zeigte, dass eine Vernetzung eines perfekten Viertelzylinders mit 40x40 bilinearen Elementen hinsichtlich der Nachbeullasten und -formen als konvergiert betrachtet werden kann. Unter der Annahme, dass die Ergebnisse auf die imperfekten Zylinder übertragbar sind, wird nun mit einem FE-Netz von 200x47 Knoten bzw. 200x46 bilinearen Elementen, das sich bei direkter Übernahme der Koordinaten der Meßpunkte ergibt, gerechnet. Die so bestimmten Nachbeullasten werden mit den Bemessungslasten und den Versuchsergebnissen verglichen.

Mit den Materialdaten aus Abb. 5.25 und der Streckgrenze $f_{y,k} = 379 \text{ N/mm}^2$ ergeben sich folgende Werte für die Beulspannungen und -lasten:

DIN 18800, Teil 4

- klassische Beulspannung: $\sigma_{cr,cl} = 0.605 \cdot \frac{2.0 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2 \cdot 0.56 \text{ mm}}{625 \text{ mm}} = 108 \text{ N/mm}^2$
- Schlankheit: $\bar{\lambda}_S = \sqrt{\frac{379}{108}} = 1.9 > 1.5 \rightsquigarrow$ elastischer Bereich
- char. Beulspannung: $\sigma_{xS,R,k} = 0.2 \cdot \sigma_{cr,cl} = 0.2 \cdot 108 \text{ N/mm}^2 = 21.7 \text{ N/mm}^2$
- char. Beullast $F_{xS,R,k} = \sigma_{xS,R,k} \cdot 2\pi R t = 47.7 \text{ kN}$.

Eurocode 3

- el. Imp.-Abminderungsfaktor: $\alpha_x(QA/QB/QC) = 0.25/0.16/0.09$
- el.-plastische Grenze: $\bar{\lambda}_p = \sqrt{\frac{\alpha_x}{0.4}} = 0.78/0.63/0.47$
- Schlankheit: $\bar{\lambda}_x = \sqrt{\frac{379}{108.4}} = 1.9 > 0.78 \rightsquigarrow$ elastischer Bereich
- char. Beulspannung: $\sigma_{x,Rk}(QA/QB/QC) = \alpha_x \cdot \sigma_{cr,cl} = 27.1/17.3/9.8 \text{ N/mm}^2$
- char. Beullast $F_{x,Rk}(QA/QB/QC) = 59.6/38.0/21.6 \text{ kN}$.

Die Ergebnisse sind nochmals zur Übersichtlichkeit in Tabelle 5.5 dargestellt. Es zeigt sich, dass die Beullasten in den Normen doch sehr stark voneinander abweichen. Überraschend ist hier die sehr gute Übereinstimmung der charakteristischen Last nach DIN 18800 mit der Nachbeullast aus dem Experiment.

Zunächst wird eine transiente Analyse am Zylinder AL1100 durchgeführt. Das Ergebnis für die Belastungsgeschwindigkeit von $v = 2 \text{ mm/s}$ ist in Abb. 5.40 und 5.41 dargestellt. Zum Vergleich mit den Bemessungsnormen wird das erste Nachbeulminimum verwendet. Dieses repräsentiert die "natürliche" untere Grenze der Beullasten imperfekter Zylinder, da weitere Nachbeulminima so weit vom Vorbeulpfad entfernt sind, dass hier das Plastizieren vor dem Erreichen der Stabilitätslast eintreten würde. Der Vergleich des ersten Nachbeulminimums aus der FE Berechnung mit den Bemessungslasten sowie den experimentellen Beullasten zeigt eine gute Übereinstimmung mit der DIN 18800 und dem Experiment. Die Beullasten nach EC3 liegen für die Qualitätsklassen *B* und *C* unter und für die Qualitätsklasse *A* ca. 20% höher als das erste Nachbeulminimum. Die Entwicklung der Beulformen im Nachbeulbereich ist denen des perfekten Zylinders aus Abschnitt 5.2.2 ähnlich, mit dem Unterschied, dass bei dem imperfekten Zylinder keine stabile dreireihige Nachbeulform auftritt, sondern direkt zweireihige Formen mit abnehmender Zahl der Beulen in Umfangsrichtung: 15-12-11-10 eingenommen werden, s. Abb. 5.41.

Zur Überprüfung der Übertragbarkeit der obigen Ergebnisse auf Zylinder mit anderen Schlankheiten und zur Untersuchung des Einflusses unterschiedlicher Imperfektionen auf die Höhe der Nachbeulminima wird anschließend eine Parameterstudie durchgeführt. Dabei werden die imperfekten Geometrien der realen Zylinder AL1100, AL850 und AL650 verwendet und die Schalendicke variiert. Zusätzlich wird zum Vergleich die perfekte Geometrie in die Untersuchung mit einbezogen. Bei gleichbleibender Zylinderlänge von $L = 966 \text{ mm}$ und Radius $R = 625 \text{ mm}$ wird die Dicke so gewählt, dass zunächst der Bereich mit $R/t \in [600, 2000]$ abgedeckt wird. Der Bereich ist so gewählt, dass mit der Streckgrenze $R_{eff} \approx 400 \text{ N/mm}^2$ der Zylinder AL1100, AL850 und AL650 des SFB 219 sowohl nach DIN 18800 als auch nach EC3 elastisches Beulen vorliegt. Die Ergebnisse der Untersuchung sind auszugsweise in Abb. 5.42 - 5.45 dargestellt. Erwartungsgemäß variieren die Beullasten (limit loads) stark in Abhängigkeit von den Imperfektionen. Hingegen streuen die Nachbeulminima für die drei verwendeten Imperfektionstypen und die perfekten Zylinder kaum.

Für den Vergleich mit den Bemessungsnormen werden die charakteristischen Beullasten nach DIN 18800 und EC3 elastisch, d.h. mit $R_{eff} \rightarrow \infty$ berechnet. Dadurch ergeben sich die charakteristischen Beullasten nach DIN 18800 stets zu $0.2F_{cr,cl}$. Ein Vergleich dieser Beullasten mit den Ergebnissen der transienten Analysen zeigt, dass die ersten Nachbeulminima durchweg sehr gut mit den charakteristischen Beullasten nach DIN 18800 übereinstimmen, s. Abb. 5.42 - 5.45. Eine Übereinstimmung mit den Beullasten nach EC3 kann lediglich für den Bereich $R/t < 1000$ für die Qualitätsklasse *B* festgestellt werden. Der Sachverhalt ist nochmals in Abb. 5.46 dargestellt, wobei hier die ersten Nachbeulminima aus den Last-Verformungsdiagrammen abgelesen wurden. Hier sind die geringe Streuung der ersten Nachbeulminima sowie die oben beschriebenen

Übereinstimmungen besonders deutlich sichtbar.

Wie bereits mehrfach erwähnt werden die elastischen Beullasten nach DIN 18800 vereinfachend mit der Abminderung der klassischen kritischen Beullast auf 20% bestimmt. Der bekannte Abfall der unteren Grenze für experimentelle Beullasten unter die 20%-Marke für sehr dünnwandige Kreiszyylinder wird in DIN 18800 durch einen veränderlichen Sicherheitsbeiwert eingebracht. Die Ursache für diesen Abfall konnte bisher nicht eindeutig identifiziert werden. Zur Klärung dieses Sachverhalts wurde in der vorliegenden Arbeit der untersuchte Bereich der R/t -Werte nach unten bis $R/t = 300$ und nach oben bis $R/t = 4000$ erweitert. Die Ergebnisse sind in Abb. 5.47 dargestellt, wobei die Nachbeulminima aus den FE-Analysen mit der klassischen Beullast normiert sind.

Zum einen läßt sich eine gute Übereinstimmung der numerisch bestimmten Nachbeulminima mit den charakteristischen Werten nach EC3 der Qualitätsklasse B im Bereich $R/t \in [300, 1000]$ feststellen. Nach DIN 18800 wird der Anstieg der α -Werte im Bereich kleinerer R/t -Werte mit einem sogenannten *elastisch-plastischen* Übergang erfaßt. Die Untersuchungen zeigen, dass dieser Anstieg nicht auf die plastischen Einflüsse zurückzuführen ist, da bei den FE-Untersuchungen ein linear-elastisches Werkstoffverhalten vorausgesetzt wurde.

Für den Bereich $R/t > 1000$ fallen die α -Werte nicht unter die 0.2-Marke, sondern steigen sogar leicht an. Demnach reicht die Berücksichtigung geometrischer Imperfektionen im numerischen Modell nicht aus, um den experimentell belegten Abfall der unteren Grenze der Beullasten für große R/t -Werte abzubilden. Der Einfluß der Aufstands- und Lastimperfektionen darf hier wohl nicht unberücksichtigt gelassen werden. Aus diesem Grund scheint eine Überarbeitung der Empfehlungen des EC3 hinsichtlich numerischer Bestimmung von Bemessungslasten dringend erforderlich.

DIN 18800	EC3			Experiment
	QA	QB	QC	
47.7	59.6	38.0	21.6	48

Tabelle 5.5: Bemessungslasten ohne Sicherheitsfaktoren nach DIN 18800 und EC3 für einen Kreiszyylinder nach Abb. 5.25 sowie die Nachbeullast aus dem Experiment für den Zylinder AL1100, alle Werte in $[kN]$.

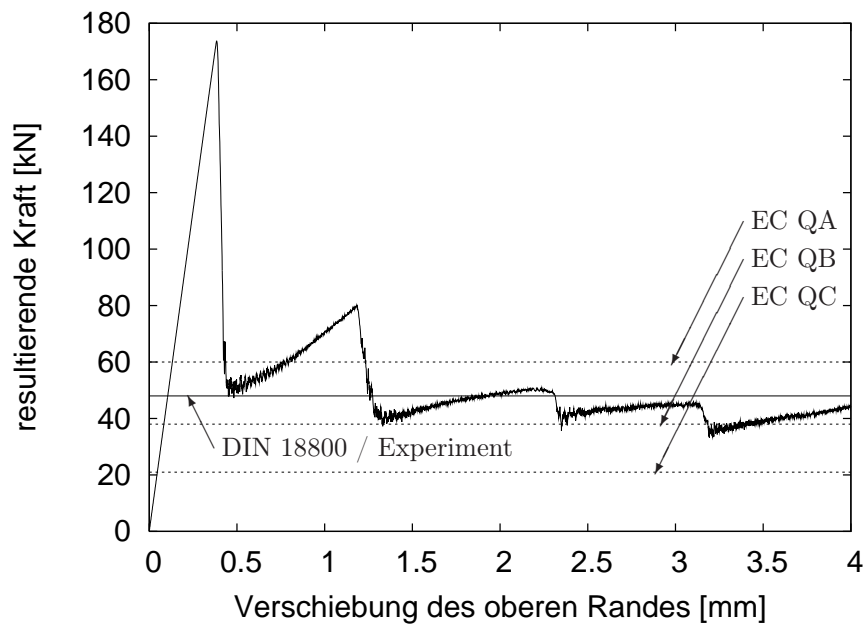


Abbildung 5.40: Last-Verformungsverlauf für den Zylinder AL1100 aus einer transienten Berechnung mit LS-DYNA mit der Belastungsgeschwindigkeit $v = 2 \text{ mm/s}$.

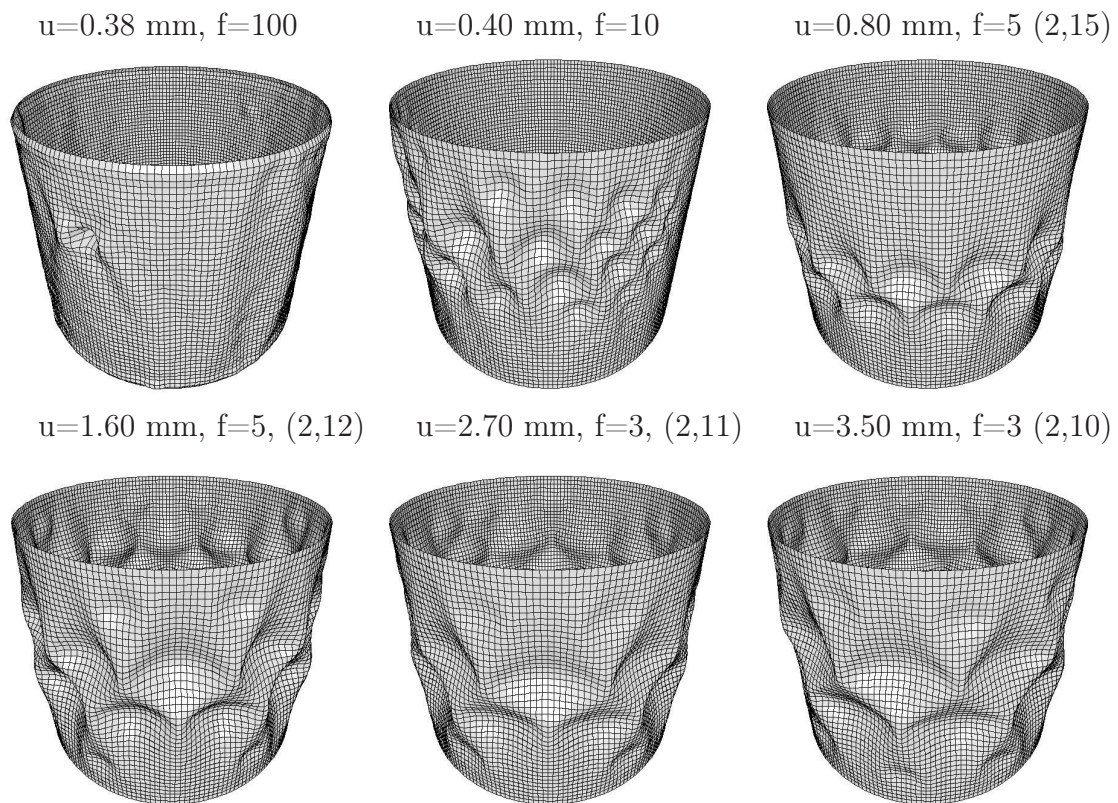


Abbildung 5.41: Verformungszustände im Nachbeulbereich für den Zylinder AL1100 aus einer transienten Berechnung mit LS-DYNA mit der Belastungsgeschwindigkeit $v = 2 \text{ mm/s}$; "f" gibt die Überhöhung der Verschiebungen und die Zahlen in den Klammern die Anzahl der Beulen in axialer bzw. umlaufender Richtung an.

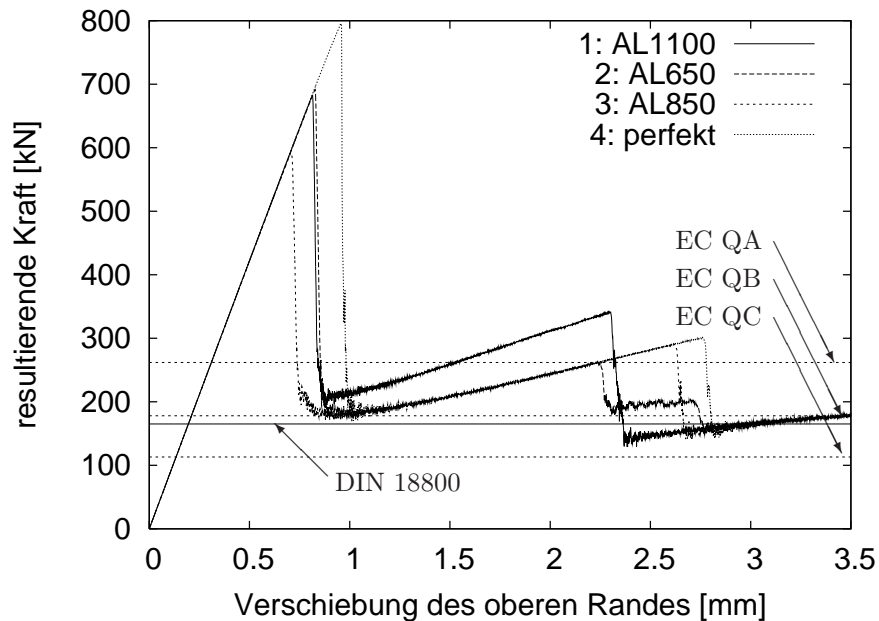


Abbildung 5.42: Last-Verformungsverlauf für Zylinder mit $R/t = 600$ mit vier unterschiedlichen Geometrien: affin zu AL1100, AL850, AL650 und perfekt; transiente Berechnung mit LS-DYNA mit der Belastungsgeschwindigkeit $v = 2 \text{ mm/s}$.

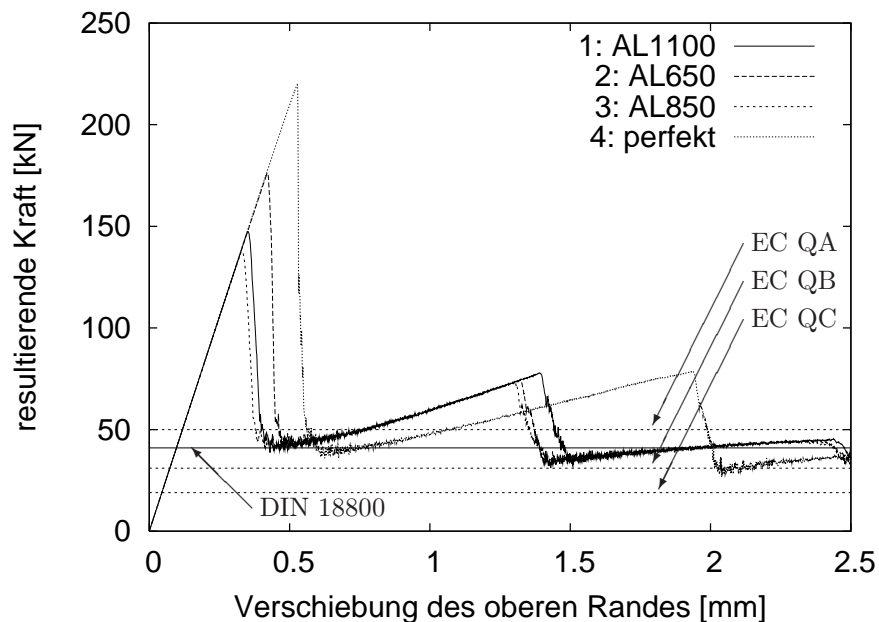


Abbildung 5.43: Last-Verformungsverlauf für Zylinder mit $R/t = 1200$ mit vier unterschiedlichen Geometrien: affin zu AL1100, AL850, AL650 und perfekt; transiente Berechnung mit LS-DYNA mit der Belastungsgeschwindigkeit $v = 2 \text{ mm/s}$.

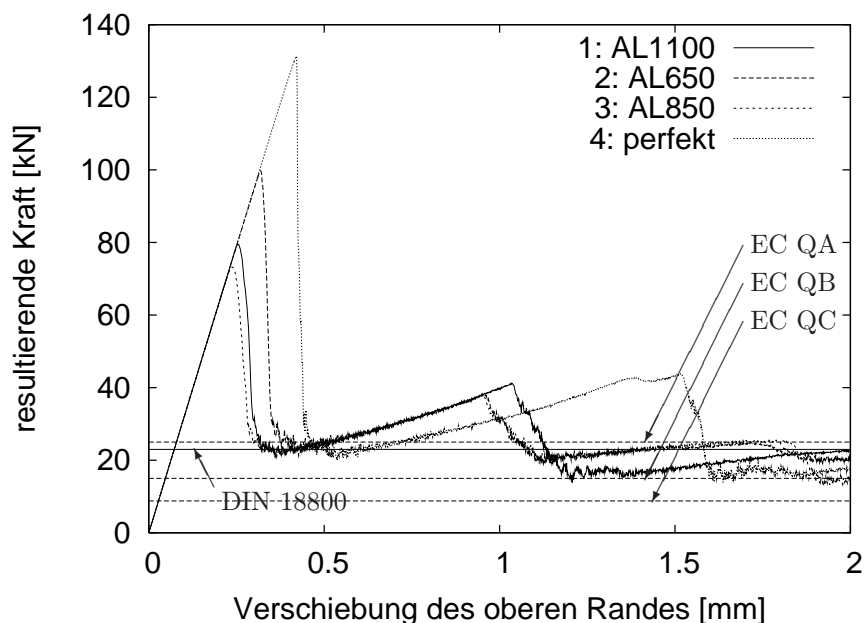


Abbildung 5.44: Last-Verformungsverlauf für Zylinder mit $R/t = 1600$ mit vier unterschiedlichen Geometrien: affin zu AL1100, AL850, AL650 und perfekt; transiente Berechnung mit LS-DYNA mit der Belastungsgeschwindigkeit $v = 2 \text{ mm/s}$.

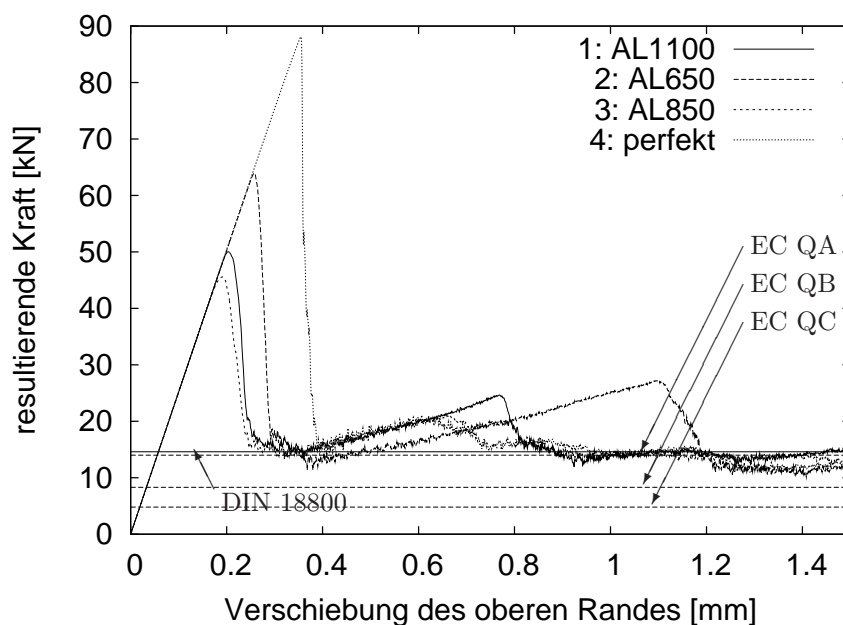


Abbildung 5.45: Last-Verformungsverlauf für Zylinder mit $R/t = 2000$ mit vier unterschiedlichen Geometrien: affin zu AL1100, AL850, AL650 und perfekt; transiente Berechnung mit LS-DYNA mit der Belastungsgeschwindigkeit $v = 2 \text{ mm/s}$.

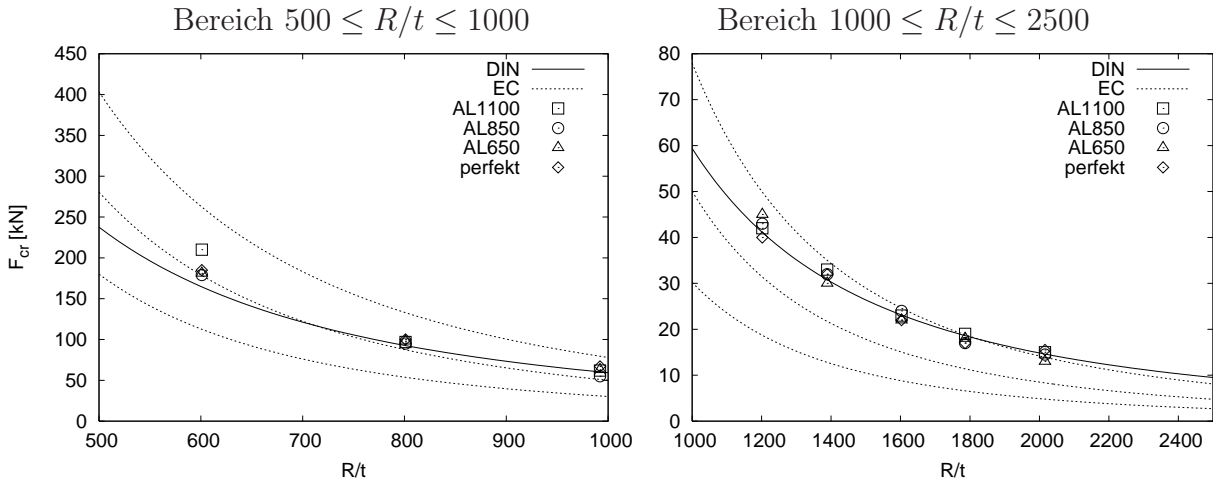


Abbildung 5.46: Elastische Beullasten nach DIN 18800 und EC3 und erste Nachbeulminima bestimmt mittels transienter FE-Analysen für vier unterschiedliche Geometrien: affin zu AL1100, AL850, AL650 und perfekt.

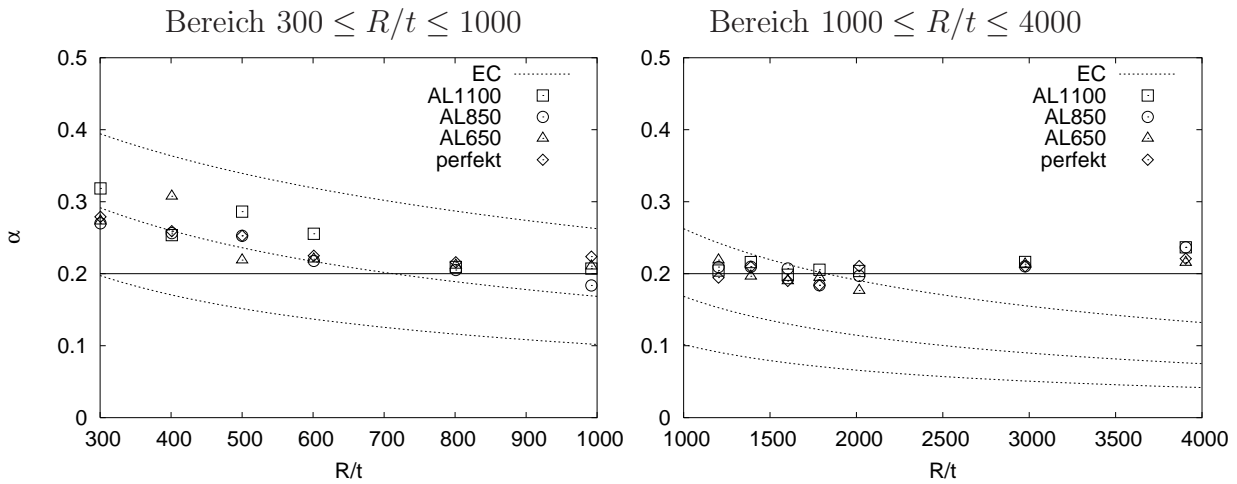


Abbildung 5.47: Elastische Abminderung α nach EC3 und normierte Werte der ersten Nachbeulminima bestimmt mittels transienter FE-Analysen für vier unterschiedliche Geometrien: affin zu AL1100, AL850, AL650 und perfekt.

5.4 Zusammenfassung

An dieser Stelle werden die Ergebnisse der Untersuchungen zum Beulverhalten von geometrisch perfekten und imperfekten Zylindern unter axialem Druck mittels statischer und transienter FE Analysen zusammengefasst.

Statische Untersuchungen

1. Bei Bestimmung der Stabilitätslast mittels der statischen FE-Analyse mit **uniformer Netzverfeinerung** zeigt sich, dass mit biquadratischen Elementen (MITC9) die besten Ergebnisse hinsichtlich Genauigkeit und Effizienz erzielt werden. Mit diesen Elemente wird schnelle Konvergenz sowohl gegen die erwartete Stabilitätslast als auch gegen die korrekte Beulform für alle untersuchten geometrisch perfekten Zylinder und auch für die untersuchten Zylinder mit realen Imperfektionen beobachtet.
2. Die Verwendung **adaptiver Netzverfeinerung** führt zu einer wesentlichen Verbesserung der Konvergenz der Stabilitätslasten für bilineare Elemente bei gleichzeitig guter Effizienz. Im Falle des *perfekten Zylinders* ergeben sich allerdings wegen der durch Übergangselemente künstlich eingebrachten Imperfektionen Beulformen, die deutlich von der korrekten Referenzform abweichen. Hingegen führen die biquadratischen Elemente auch bei ähnlich unregelmäßig verfeinerten Netzen zu den Beulformen der Referenzlösung. Im Falle des untersuchten *imperfekten Zylinders* war auch bei adaptiven Netzen mit bilinearen Elementen kein negativer Einfluss hinsichtlich falscher Beulformen zu beobachten. Es muss aber angemerkt werden, dass beim imperfekten Zylinder die adaptive Vernetzung erst bei einem bereits sehr feinen Netz angewendet wurde.
3. Die Untersuchungen an Zylindern mit **realen Imperfektionen** zeigen in allen drei untersuchten Fällen ein nicht monotonen Konvergenzverhalten der Stabilitätslasten bei der Verfeinerung der Netze über die gemessenen Punkte der realen Geometrie hinaus. Dies liegt an der sehr hohen Sensitivität des untersuchten Phänomens, sodass kleinste Änderungen, auch bei bereits imperfekten Geometrien, zu Änderungen der Beullast führen können, die durchaus als bemessungsrelevant angesehen werden können.
4. Insgesamt zeigen sich die kritischen Lasten als hoch sensitiv gegenüber vielen Berechnungsparametern wie Vernetzung, Geometrie und Materialdaten. Dies macht die Verwendung statisch bestimmter Stabilitätslasten zur Vorhersage von Beullasten realer Strukturen oft unzuverlässig und damit letztlich unpraktikabel.

Transiente Untersuchungen

1. Untersuchungen des gesamten Beulprozesses insbesondere des Nachbeulverhaltens zeigen, dass die transiente Analyse, sowohl unter Verwendung der impliziten Zeitintegration (NEWMARK-Familie), als auch der expliziten Zeitintegration, sehr gute mit der Versuchspraxis vergleichbare Ergebnisse liefert.

2. Bei Verwendung uniformer Zeitschrittweite während der gesamten Berechnung erweist sich die explizite Methode als wesentlich effizienter als die NEWMARK-Integration, weil der Zeitschritt aufgrund des sehr kurzzeitigen Beulprozesses auch bei der NEWMARK-Integration klein gewählt werden muss.
3. Die bei den transienten Untersuchungen bestimmten Nachbeulminima variieren kaum für unterschiedliche Berechnungsparameter wie Zeitschritt, Dämpfung und Belastungsgeschwindigkeit. Dies macht die Bestimmung der Nachbeullasten mittels transienter FE Analysen sehr robust.
4. Da die Nachbeulminima als die "natürliche" untere Grenze für Stabilitätslasten realer Zylinder angesehen werden können, erscheint die Tatsache, dass sich die Werte für die ersten Nachbeulminima als nahezu unabhängig von den geometrischen Imperfektionen zeigen, wichtig für die Ingenieurpraxis. Die Verwendung dieser Lasten bei der Bemessung würde die schwierige Diskussion über die maßgebenden Imperfektionsformen überflüssig machen, da die Nachbeullasten auch ohne Imperfektionen, d.h. an geometrisch perfekten Zylindern bestimmt werden können.
5. Der Vergleich mit den Normen zeigt im Bereich $R/t < 1000$ eine gute Übereinstimmung numerisch bestimmter Nachbeulminima mit den charakteristischen Werten der Bemessungslasten nach Eurocode 3 der Qualitätsklasse B. Hierbei kann der Anstieg des Abminderungsfaktors von ca. 0.2 für dünnwandige Zylinder auf ca. 0.3 für Zylinder mit $R/t = 300$ auch ohne plastisches Materialverhalten gut abgebildet werden. Für dünnwandigere Schalen kann der aus den Experimenten bekannte Abfall der Untergrenze der Beullasten nicht mit dem hier verwendeten FE-Modell abgebildet werden. Der Grund hierfür liegt vermutlich darin, dass eine Berücksichtigung von Last- und Aufstandsimperfektionen für die Abbildung dieses Phänomens erforderlich ist. Dies sollte bei den numerischen Nachweisen im Eurocode 3 berücksichtigt werden.

Kapitel 6

Kreiszyylinder unter Außendruckbeanspruchung

Analog zum Fall des axial belasteten Kreiszyinders werden auch im Falle des Kreiszyinders unter Außendruckbeanspruchung zunächst die analytischen Lösungen und die Bemessungsrichtlinien kurz dargestellt. Anschließend erfolgt eine Untersuchung der Netzkonvergenz für die mittels statischer Betrachtung bestimmten Stabilitätslasten gefolgt von einer transienten Analyse zur Abbildung des Nachbeulverhaltens jeweils für geometrisch perfekte und imperfekte Zylinder.

6.1 Analytische Lösungen und Bemessung

Zunächst wird die geschichtliche Entwicklung der analytischen Lösungen dargestellt, entnommen YAMAKI [97] und PFLÜGER [63], gefolgt von der Darstellung der aktuellen Bemessungsrichtlinien DIN 18800, Teil 4 [26] und Eurocode 3 [31]. Mehr zur geschichtlichen Entwicklung kann beispielsweise SCHWEIZERHOF [74] oder HORNING [40] entnommen werden.

6.1.1 Analytische Lösungen für Verzweigungslasten

1914 leitete MISES [61] als erster Formeln zur Bestimmung des kritischen radialen Drucks eines Kreiszyinders mit gelenkig gelagerten Enden her. Die Stabilitätslasten wurden dort unter Vernachlässigung der Verformungen im Vorbeulbereich bestimmt, d.h. mit der Annahme eines reinen Membranspannungszustandes. Der Unterschied zwischen dem normalentreuen und richtungstreuen Druck wurde bereits hier eingeführt, da dieser Einfluss aus dem Ringknicken bekannt war. Außerdem wurde es als sinnvoll erkannt, den dimensionslosen Längenparameter "L/R" einzuführen. Später wurden einige Arbeiten zum Einfluss der Lagerung und des Vorbeulzustandes mit verbesserten Ansätzen für das Verschiebungsfeld veröffentlicht. Der Vergleich mit den Versuchen zeigte

eine wesentlich bessere Übereinstimmung von Theorie und Experiment, als im Falle der axialen Druckbeanspruchung. Dies liegt an der wesentlich geringeren Sensitivität des Lastfalles Außendruck gegenüber Störungen wie beispielsweise Imperfektionen in der Geometrie und in der Lagerung.

In YAMAKI [97] finden sich übersichtlich und ausführlich sowohl Lösungen der vereinfachten Gleichungen nach DONNELL [24] als auch Lösungen der genaueren Gleichungen nach FLÜGGE [34] dargestellt. Dort werden kritische Drücke für unterschiedliche Lagerungsarten, deren praxisrelevante Kombinationen in Tab. 5.1 dargestellt sind, mit und ohne Berücksichtigung der Verformungen im Vorbeulbereich bestimmt. Die Ergebnisse von YAMAKI sind deckungsgleich mit anderen Untersuchungen wie THIELEMANN UND ESSLINGER [82] und ARMENAKAS UND HERRMANN [7]. Es zeigt sich, dass die einfacheren Formeln nach DONNELL und die Annahme eines Membranspannungszustandes im Vorbeulbereich für einen großen Geometriebereich, sogenannte mittellange Zylinder, ausreichend genaue Ergebnisse liefern. Dieser Geometriebereich wird nach unten für kurze Zylinder mit der Batdorf-Zahl $Z \geq 100$ und nach oben für lange Zylinder mit der Beulwellenzahl in Umfangsrichtung $N_p \geq 5$ begrenzt. Für diesen Bereich werden von YAMAKI unter Annahme richtungstreuer Last folgende Berechnungsformeln zum kritischen Außendruck p_c und der Anzahl der Beulwellen in Umfangsrichtung N_p angegeben

$$p_c = \frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)^{3/4}} a_p E \left(\frac{R}{L}\right) \left(\frac{t}{R}\right)^{5/2} \quad (6.1)$$

$$N_p = \pi(1-\nu^2)^{1/8} b_p \left(\frac{R}{L}\right)^{1/2} \left(\frac{R}{t}\right)^{1/4}.$$

Mit dem Längenparameter L/R , dem Wanddickenparameter R/t und der Querdehnzahl $\nu = 0.3$ lassen sich die Ausdrücke (6.1) und (6.1) auch folgendermaßen darstellen:

$$p_c = 0.883 a_p E \frac{1}{(L/R)(R/t)^{5/2}} \quad (6.2)$$

$$N_p = 3.12 b_p \frac{(Rt)^{1/4}}{(L/R)^{1/2}}.$$

Die Parameter a_p und b_p sind Funktionen der Batdorf-Zahl Z . Sie variieren für Zylinder mit Batdorf-Zahlen $Z \geq 10^3$ kaum und nehmen für $Z \geq 10^4$ folgende konstante Werte an, s. Abb. 6.1:

- Lagerung C1, C2, S1, S2 (wölbbehindert): $a_p = 1.56$ und $b_p = 1.07$
- Lagerung C3, C4, S3, S4 (wölbfrei): $a_p = 1.05$ und $b_p = 0.88$.

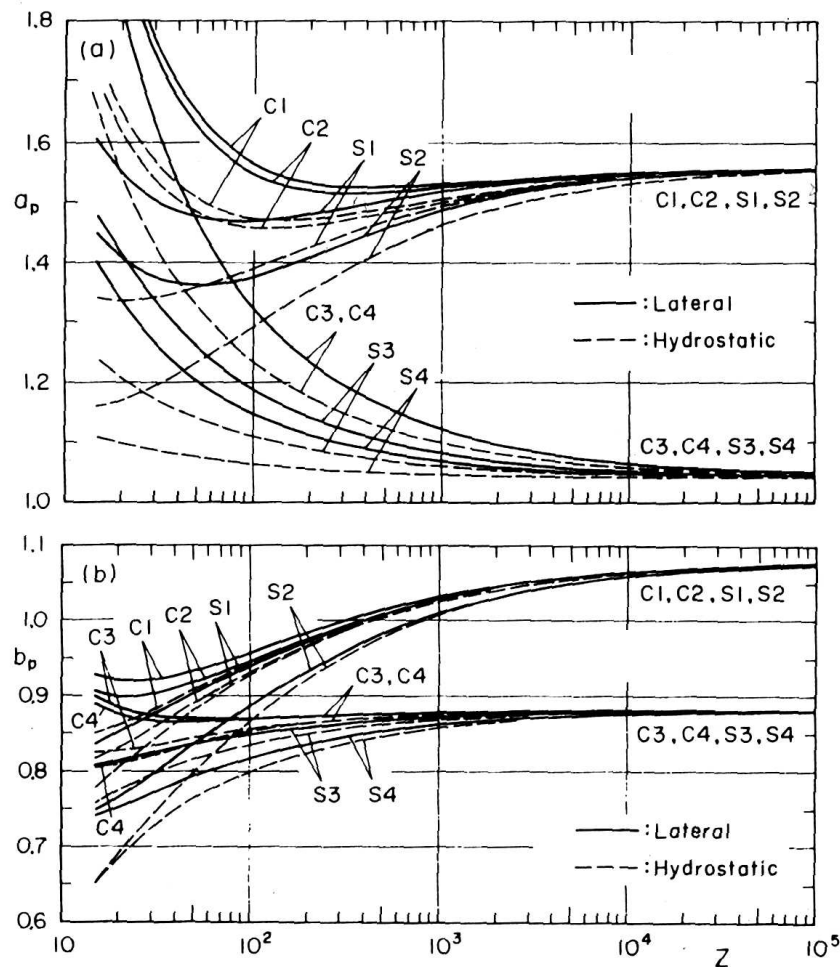


Abbildung 6.1: Parameter a_p und b_p zur Bestimmung des kritischen Drucks und der Beulwellenzahl für Kreiszyylinder unter Außendruck; entnommen YAMAKI [97].

Interessant ist hier der ausgeprägte Einfluss der Wölbbehinderung auf die Höhe des kritischen Drucks: bei wölbbehinderter Lagerung erhöht sich die kritische Last um ca. 50 % ($a_p = 1.56$ und $a_p = 1.05$). Damit ist bei einer Belastung durch Außendruck der Einfluss der Lagerung wölbbehindert-wölbfrei wesentlich stärker ausgeprägt als bei axialer Druckbeanspruchung.

Der Einfluss der Richtungstreue oder Normalentreue der Last ist zum einen bei sehr kurzen Zylindern mit $Z \leq 100$ zu beobachten. Zum anderen aber auch bei sehr langen Zylindern mit der Beulwellenzahl $N_p < 5$, bei denen der Einfluss der gelagerten Ränder verschwindet und das Zylinderbeulen in das Ringbeulen übergeht. Abschließend muss angemerkt werden, dass im Gegensatz zum Fall der axialen Belastung die Höhe des kritischen Drucks von der Zylinderlänge abhängt. Der kritische Druck nimmt mit zunehmenden Zylinderlänge bis auf die Werte des Kreisringes ab.

6.1.2 Diskussion von Bemessungsrichtlinien

Analog zum Fall der Axiallast gilt auch für den Fall Außendruck bei der Bemessungsfrage das Prinzip der Abminderung der klassischen kritischen Last mit experimentell ermittelten Abminderungsfaktoren. Die im Folgenden dargestellten Bemessungswerte werden bei späteren Untersuchungen des Nachbeulverhaltens zum Vergleich mit den numerischen Ergebnissen herangezogen.

DIN 18800, Teil 4

Nach DIN 18800, Teil 4 ist der charakteristische Wert der Beulspannung für einen stählernen Kreiszylinder unter Außendruck zunächst in Abhängigkeit der Streckgrenze $f_{y,k}$ definiert

$$\sigma_{\varphi S,R,k} = \kappa_1 \cdot f_{y,k}. \quad (6.3)$$

Der Abminderungsfaktor κ_1 ist eine Funktion der Schlankheit $\bar{\lambda}_S$

$$\bar{\lambda}_S = \sqrt{\frac{f_{y,k}}{\sigma_{\varphi Si}}}. \quad (6.4)$$

Dabei ist die ideale Beulspannung $\sigma_{\varphi Si}$ für mittellange Zylinder gleich der klassischen kritischen Spannung nach der linearen Beultheorie für konstanten Manteldruck

$$\sigma_{\varphi Si} = 0.92 C_\varphi \cdot E \frac{R}{L} \left(\frac{t}{R} \right)^{3/2}. \quad (6.5)$$

Der Faktor C_φ berücksichtigt den bereits im vorhergehenden Kapitel angesprochenen Einfluss der Wölbbehinderung mit

- beidseitig wölbbehindert RB1-RB1 ($S_1 - S_1$): $C_\varphi = 1.5$
- einseitig wölbbehindert RB2-RB1 ($S_3 - S_1$): $C_\varphi = 1.25$
- wölbfrei RB1-RB1 ($S_3 - S_3$): $C_\varphi = 1.0$.

Der Abminderungsfaktor κ_1 ist für elastisches Beulen folgendermaßen definiert

$$\kappa_1 = \frac{0.65}{\bar{\lambda}_S^2} \quad \text{mit} \quad \bar{\lambda}_S > 1.2 \quad (6.6)$$

Mit den Gl. (6.3) - (6.6) ergibt sich für die charakteristische Beulspannung

$$\sigma_{\varphi S,R,k} = 0.65 \cdot \sigma_{\varphi Si} \quad \text{mit} \quad \sigma_{\varphi Si} < 0.70 \cdot f_{y,k}. \quad (6.7)$$

Bei dieser Darstellung wird deutlich erkennbar, dass die charakteristische Beulspannung im elastischen Bereich 65 % der klassischen kritischen Spannung beträgt. Nennenswert ist die Tatsache, dass der elastische Bereich für den hier dargestellten Lastfall der

Außendruckbeanspruchung mit 70 % der Fließgrenze wesentlich größer ist, als für den Fall der axialen Drucklast.

Eurocode 3

Analog zur DIN 18800 ist auch im Eurocode 3 [31] (EC3) die charakteristische Beulspannung zunächst in Abhängigkeit der Streckgrenze definiert

$$\sigma_{\theta,Rk} = \kappa_{\theta} \cdot f_{yk}. \quad (6.8)$$

Auch hier ist der Abminderungsfaktor κ_{θ} eine Funktion der Schlankheit $\bar{\lambda}_{\theta}$

$$\bar{\lambda}_{\theta} = \sqrt{\frac{f_{yk}}{\sigma_{\theta,Rcr}}} \quad \text{mit } \sigma_{\theta,Rcr} = \sigma_{\varphi Si} \text{ nach (6.5)} \quad (6.9)$$

und ist für elastisches Beulen definiert als

$$\kappa_{\theta} = \frac{\alpha}{\bar{\lambda}_{\theta}^2} \quad \text{mit } \bar{\lambda}_{\theta} \geq \bar{\lambda}_p. \quad (6.10)$$

Im Gegensatz zu DIN 18800 ist im EC 3 die Grenze des elastischen Bereichs nicht fest vorgegeben, sondern ist durch den sogenannten teilplastischen Schlankheitsgrad $\bar{\lambda}_p$ festgelegt. Dieser ist seinerseits eine Funktion des elastischen Imperfektions-Abminderungsfaktors α_{θ} .

$$\bar{\lambda}_p = \sqrt{\frac{\alpha_x}{0.4}} \quad (6.11)$$

Im Gegensatz zum Fall des axialen Drucks sind die Imperfektions-Abminderungsfaktoren für den radialen Druck für die jeweilige Qualitätsklasse konstant. Dies führt zu:

$$\begin{aligned} \text{Qualitätsklasse A, exzellent: } \alpha_{\theta} = 0.75 &\Rightarrow \bar{\lambda}_p(A) = 1.37 \\ \text{Qualitätsklasse B, hoch: } \alpha_{\theta} = 0.65 &\Rightarrow \bar{\lambda}_p(B) = 1.27 \\ \text{Qualitätsklasse C, normal: } \alpha_{\theta} = 0.50 &\Rightarrow \bar{\lambda}_p(C) = 1.12. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Im elastischen Fall darf die charakteristische Beulspannung auch direkt mit

$$\sigma_{\theta,Rk} = \alpha_{\theta} \cdot \sigma_{\theta,Rcr} \quad (6.13)$$

bestimmt werden, womit sich folgende Ausdrücke ergeben:

$$\begin{aligned} \text{Qualitätsklasse A: } \sigma_{\theta,Rk}(A) &= 0.75 \cdot \sigma_{\theta,Rcr} \quad \text{für } \sigma_{\theta,Rcr} < 0.53 \cdot f_{yk} \\ \text{Qualitätsklasse B: } \sigma_{\theta,Rk}(B) &= 0.65 \cdot \sigma_{\theta,Rcr} \quad \text{für } \sigma_{\theta,Rcr} < 0.62 \cdot f_{yk} \\ \text{Qualitätsklasse C: } \sigma_{\theta,Rk}(C) &= 0.50 \cdot \sigma_{\theta,Rcr} \quad \text{für } \sigma_{\theta,Rcr} < 0.80 \cdot f_{yk}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Demnach ergibt sich hier für die Qualitätsklasse B der gleiche Ausdruck wie in der DIN 18800, vgl. Gleichung (6.7²).

6.2 FE Untersuchungen am geometrisch perfekten Kreiszyylinder

Nachfolgend wird am Beispiel des geometrisch perfekten Zylinders das Konvergenzverhalten der Lösung hinsichtlich der Stabilitätslasten und des Nachbeulverhaltens sowie die korrekte Abbildung der Beulformen mit statischen und anschließend transienten FE-Analyse untersucht.

6.2.1 Bestimmung singulärer Punkte mittels statischer FE-Analysen

Zunächst werden die Stabilitätslasten für einen Zylinderausschnitt mit den Geometrie- und Materialdaten aus Abb. 6.2 bestimmt. Hierbei wird die Netzkonvergenz für bilineare und biquadratische Schalenelementen bestimmt. Als Referenzlösung wird der analytische kritische Druck und die Beulform nach Gl. (6.2) verwendet. Diese ergeben sich hier zu

$$p_c = 0.883 \cdot 1.06 \cdot 2.0 \cdot 10^5 \frac{1}{1.55 \cdot (1116)^{5/2}} = 2.93 \cdot 10^{-3} \text{ N/mm}^2$$

$$N_p = 3.12 \cdot 0.88 \frac{(1116)^{1/4}}{(1.55)^{1/2}} = 12.8 \rightsquigarrow 13 \text{ Beulen in Umfangsrichtung}$$

mit
$$\left. \begin{array}{l} Z = 2543 \\ \text{Lagerung } S_3-S_3 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Abb. 6.1}} \left\{ \begin{array}{l} a_p = 1.07 \\ b_p = 0.88 \end{array} \right. .$$

Die Stabilitätslasten wurden im Rahmen der FE-Untersuchung sowohl mit dem linearen Beul-Eigenwertproblem nach Gl. (3.16) als auch mit Hilfe einer nichtlinearen Berechnung mit Bisektion auf den singulären Punkt bestimmt. Erwartungsgemäß zeigt sich hier im Vorbeulbereich ein lineares Verhalten, d.h. die Verzweigungslast aus einer linearen Stabilitätsanalyse unterscheidet sich nicht von der mit der nichtlinearen Berechnung und mit Bisektion bestimmten singulären Last. Dies stellt einen der Hauptunterschiede zum Fall der axialen Druckbelastung dar, und entspricht dem Ergebnis der analytischen Untersuchungen, s. Abschnitt 6.1.1.

Ein weiterer Unterschied zu dem Fall der axialen Drucklast liegt in der wesentlich schnelleren Konvergenz der Beullasten und der Beulformen, s. Tabelle 6.1 und Abb. 6.3 und 6.4. Erwartungsgemäß konvergiert auch hier die Lösung mit biquadratischen Elementen schneller als die mit bilinearen Elementen. So kann bei biquadratischen Elementen bereits das Netz im ersten Verfeinerungsschritt als konvergiert betrachtet werden, d.h. bei 8080 FHG beim Viertelzylinder-Ausschnitt bzw. 16120 FHG beim halben Zylinder. Die schnelle Konvergenz der Lösung liegt in der Beulform begründet, die hier im Vergleich zum Fall der axialen Druckbeanspruchung eine größere "Periode" und einen globalen Charakter und damit kleinere Verformungsgradienten aufweist. Für beide verwendeten Elementtypen, bilinear und biquadratisch, ergeben sich identische

Beulformen. Aus diesem Grund sind in Abb. 6.4 nur die Beulformen des Modells mit bilinearen Elementen dargestellt.

Im Gegensatz zum Fall der axialen Druckbeanspruchung ist zur genauen Bestimmung der Beullast unter Außendruck wegen der kleineren Beulwellenzahl in Umfangsrichtung mindestens eine Modellierung eines halben Zylinders erforderlich. Mit dem Modell eines Viertelzylinders kann die Referenz-Beulform, die für die angegebenen Geometrie- und Materialdaten 13 Umfangsbeulen ergibt, nicht abgebildet werden, daher ergeben sich hier etwas höheren Beullasten, s. Abb. 6.3.

Aufgrund der sehr guten Konvergenz des Modells mit biquadratischen Elementen erscheint eine Verwendung von Elementen noch höherer Ordnung nicht erforderlich. Daher wird hier auf eine Untersuchung mit bikubischen Elementen verzichtet.

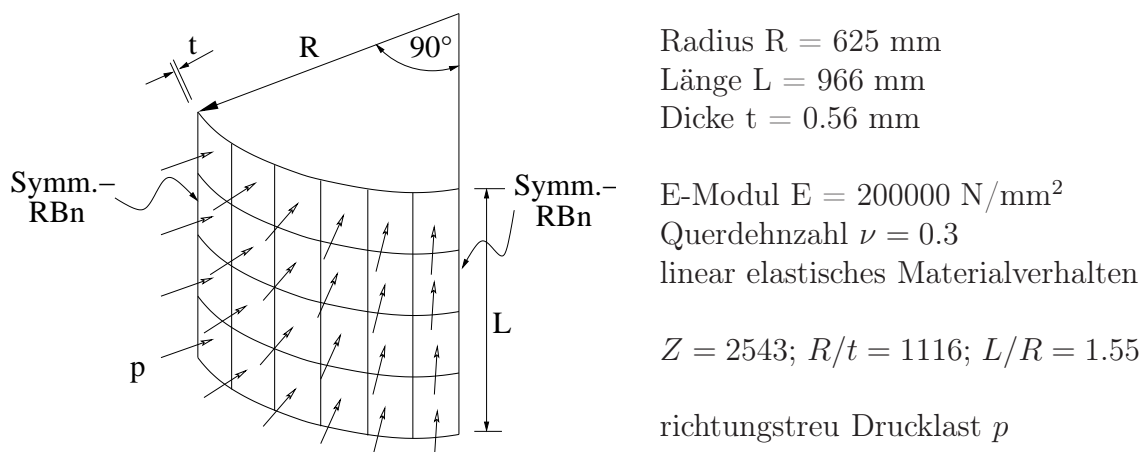


Abbildung 6.2: Systemskizze zum FE-Modell eines Zylinderviertels unter Außendruckbelastung und die Geometrie- und Materialdaten; Lagerungsrandbedingungen an Zylinderenden: S3.

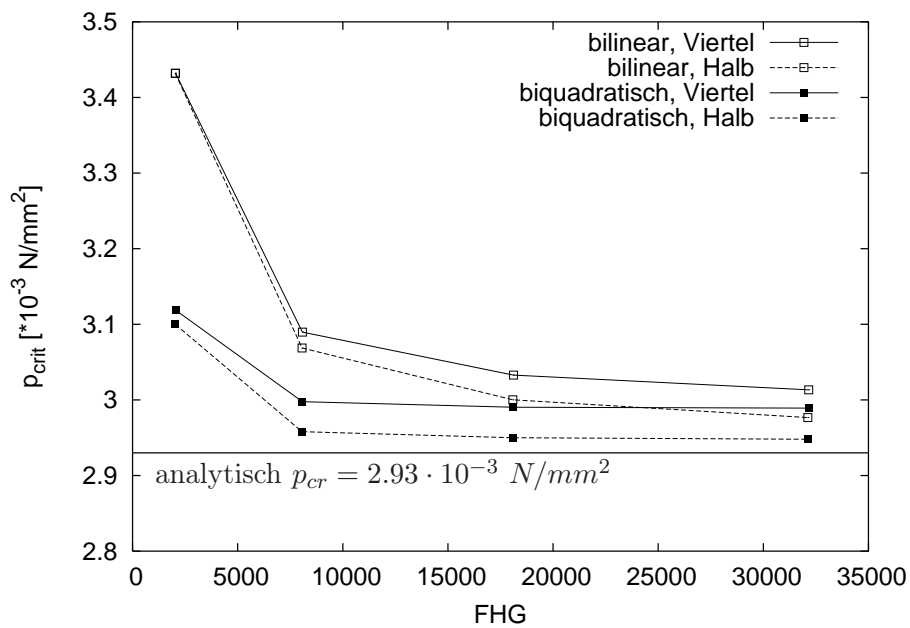


Abbildung 6.3: Beullasten eines geometrisch perfekten Zylinders nach Abb. 6.2 unter Außendruck, modelliert als Viertelzylinder und halber Zylinder und vernetzt mit bilinearen und biquadratischen Elementen; zur einheitlichen Darstellung wurde für die Werte des halben Zylinders jeweils die Zahl der FHG halbiert.

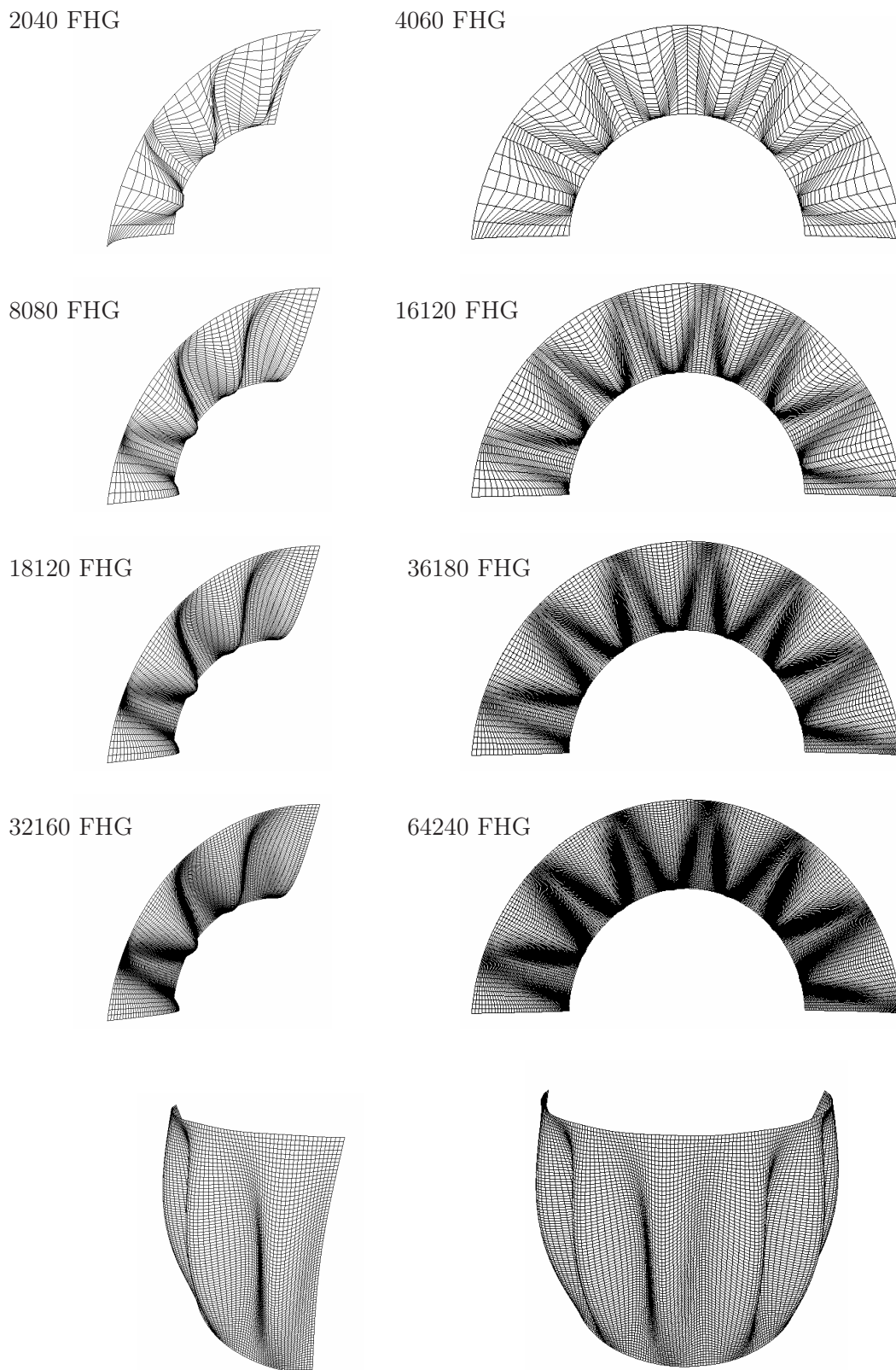


Abbildung 6.4: Beulformen eines geometrisch perfekten Zylinders unter Außendruck; Viertelzylinder und halber Zylinder vernetzt mit bilinearen und biquadratischen Elementen; statische Berechnung.

Viertelzylinder							
FHG	bilinear			biquadratisch			analytisch [$10^{-3} \frac{N}{mm^2}$]
	Elem.	p_{cr} [$10^{-3} \frac{N}{mm^2}$]	ϵ [%]	Elem.	p_{cr} [$10^{-3} \frac{N}{mm^2}$]	ϵ [%]	
2040	20x20	3.43	17	10x10	3.119	6.5	2.93
8080	40x40	3.09	5.5	20x20	2.998	2.3	
18120	60x60	3.03	3.4	30x30	2.990	2.0	
32160	80x80	3.01	2.7	40x40	2.989	2.0	

halber Zylinder							
FHG	bilinear			biquadratisch			analytisch [$10^{-3} \frac{N}{mm^2}$]
	Elem.	p_{cr} [$10^{-3} \frac{N}{mm^2}$]	ϵ [%]	Elem.	p_{cr} [$10^{-3} \frac{N}{mm^2}$]	ϵ [%]	
4060	20x40	3.43	17	10x20	3.100	5.8	2.93
16120	40x80	3.07	4.8	20x40	2.958	1.0	
36180	60x120	3.00	2.4	30x60	2.950	0.7	
64240	80x160	2.98	1.7	40x80	2.948	0.6	

Tabelle 6.1: Beullasten eines geometrisch perfekten Zylinders nach Abb. 6.2 unter Außendruck, modelliert als Viertelzylinder und halber Zylinder und vernetzt mit bilinearen und biquadratischen Elementen.

6.2.2 Untersuchung des Nachbeulverhaltens mittels transienter FE-Analysen

Im Gegensatz zur axialen Druckbeanspruchung kann bei einem durch Außendruck belasteten Kreiszyylinder keine einer Verschiebungssteuerung ähnliche Untersuchung durchgeführt werden, da die Belastung über den ganzen Zylinder gleichförmig erfolgt. Eine Möglichkeit einer umfassenden Untersuchung des Nachbeulbereichs besteht über einen Belastungs-Entlastungs-Zyklus, siehe Prinzipskizze in Abb. 6.5. Hierzu ist es erforderlich, den stabilen Gleichgewichtspfad im Nachbeulbereich abzubilden. Die Verformungen, die hierbei auftreten, können sehr groß sein. Dies kann auch bei transienten Berechnungen, die im Bereich singulärer Steifigkeitsmatrizen bessere Konvergenzeigenschaften als die statischen Analysen aufweisen, zu Konvergenzproblemen an der Stelle des Durchschlagens führen. Zur Steuerung der Beanspruchung bietet sich die Verwendung eines Kolbens, d.h. eines vorgegebenen Volumens zur Regulierung des Unterdrucks an ("Airbag-Funktion" in LS-DYNA). Eine andere effiziente Möglichkeit stellt beispielsweise der Vorschlag zur netzfreien Modellierung von Fluiden nach RUMPEL UND SCHWEIZERHOF [71], der ebenso eine Berücksichtigung der Fluid-Struktur-Interaktion ermöglicht.

Das Vorgehen mit der Kontrolle der Unterdruckbeanspruchung mittels der "Airbag-Funktion" in LS-DYNA, das in der vorliegenden Arbeit verwendet wird, ist in Abb. 6.6 dargestellt. Im Rechenmodell wird ein geschlossener Kreiszyylinder mit einem Außen- und Innendruck, die am Beginn der Untersuchung beide gleich dem atmosphärischen Druck von $p_0 = 0.1013 \text{ N/mm}^2$ sind, modelliert. Anschließend wird durch das Herausziehen eines Kolbens Vakuum erzeugt. Über eine exakte Volumenberechnung wird erreicht, dass die Höhe des Unterdrucks auch von den Verformungen des Zylinders abhängt. Dabei wird der Unterdruck entsprechend der Größe der Beulen reduziert.

Unter Verwendung des GREENSchen Integralsatzes ergibt sich für ein Volumen V

$$V = \int_B dv = \frac{1}{3} \int_{\partial B} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}) da \quad (6.15)$$

mit

∂B = die Oberfläche, die das gesuchte Volumen einschließt

\mathbf{x} = Ortsvektor der Oberfläche ∂B

\mathbf{n} = Normalenvektor auf der Oberfläche ∂B .

Für das Volumen, das durch die Finiten Elemente der Zylinderhaut sowie den Kolben

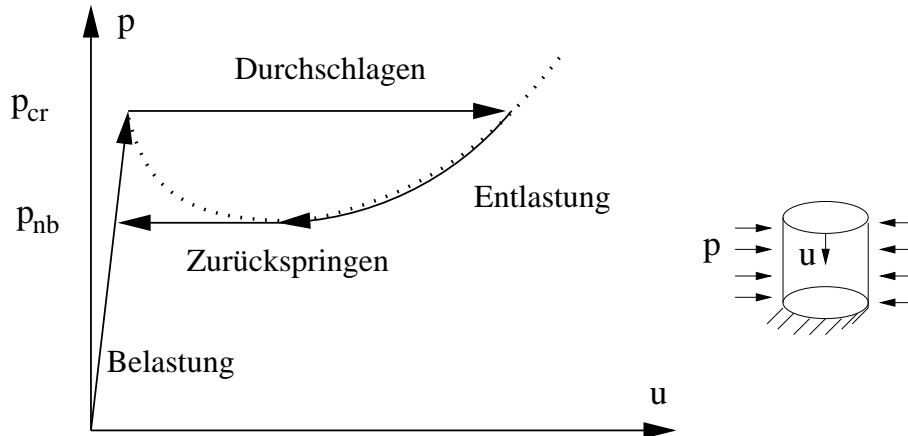


Abbildung 6.5: Belastungs-Entlastungs-Zyklus zur Bestimmung der Nachbeullast eines Zylinders unter Außendruckbelastung.

(K) und die Bodenplatte (P) eingeschlossen wird, ergibt sich

$$V \approx \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{N_{el}} \{\bar{\mathbf{x}}_i \cdot \mathbf{n}_i A_i\} + \frac{1}{3} \int_{K,P} \{\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}\} da \quad (6.16)$$

mit

$\bar{\mathbf{x}}_i$ = mittlerer Ortsvektor des i -ten Elementes

\mathbf{n} = Normalenvektor des i -ten Elementes

In den Untersuchungen wird ein ideales Gas mit konstanter Menge und konstanter Temperatur angenommen. Hierfür gilt

$$p_t V_t = p_0 V_0 \quad (6.17)$$

mit

p_0, V_0 = Druck und Volumen im Ausgangszustand, $V_0 = V_{K,0} + V_{Zyl,0}$

p_t, V_t = Druck und Volumen zu einem beliebigen Zeitpunkt t , $V_t = V_{K,t} + V_{Zyl,t}$.

Mit den nach Gl. (6.16) bestimmten Volumina läßt sich dann der Druck innerhalb eines Kontrollvolumens zum Zeitpunkt t folgendermaßen bestimmen

$$p_t = p_0 \frac{V_0}{V_t} \quad (6.18)$$

Vernetzung und Lagerung; Vergleichslasten

Bei dieser Untersuchung wird der perfekte Zylinder komplett modelliert und zunächst mit 200 bilinearen Elementen in Umfangs- und 46 Elementen in Achsrichtung vernetzt.

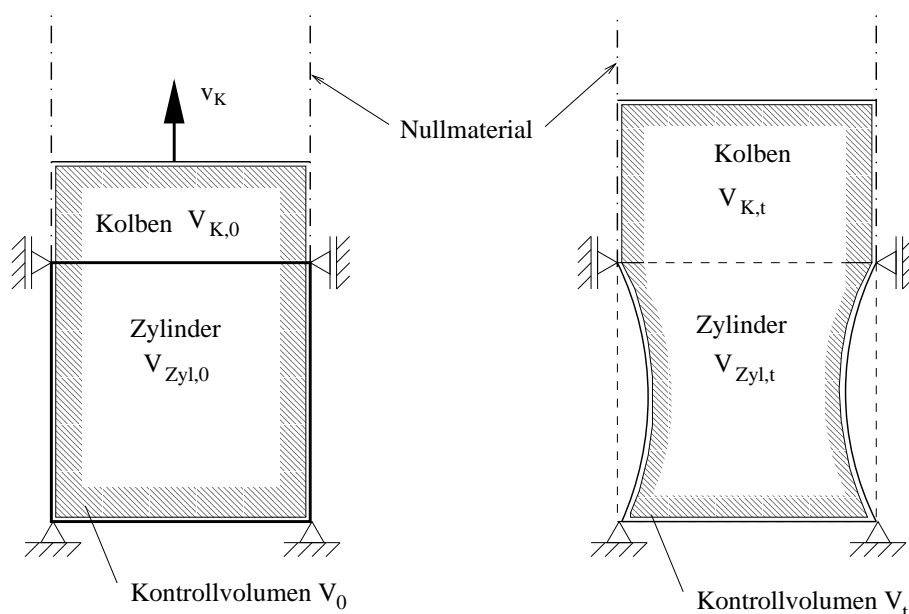


Abbildung 6.6: FE Modell zur Bestimmung der Nachbeullast eines Zylinders unter Vakuum-Belastung.

Diese Vernetzung ergibt sich aus der Anzahl der Meßpunkte realer Zylinder, die später untersucht werden, und entspricht in etwa dem Modell eines halben Zylinders mit 40x80 Elementen aus dem vorhergehenden Kapitel.

Der obere Rand des Zylinders ist wie zuvor wölbfrei gelagert, während alle Verschiebungen der Knoten des unteren Randes festgehalten werden, d.h. es liegt wölbbehinderte Lagerung vor. Damit handelt es sich hier um gemischte Randbedingungen, die nach YAMAKI mit S_1-S_3 und nach DIN 18800 mit $RB1-RB2$ bezeichnet werden. Da keine analytische Lösung hierfür bekannt ist, wird für die Referenzlösung zwischen den Werten der Beullasten für die Lagerungen S_1-S_1 und S_3-S_3 linear interpoliert. Die gleiche Vorgehensweise wird auch in den Bemessungsrichtlinien verwendet. Beispielsweise ergeben sich dann nach DIN 18800 folgende ideale Beulwerte:

$$\begin{aligned} \text{Lagerung RB1-RB2} &\Rightarrow C_\varphi = 1.25 \\ \text{ideale Beulspannung:} &\quad \sigma_{\varphi Si} = 0.92 \cdot 1.25 \cdot 2.0 \cdot 10^5 \frac{625}{966} \left(\frac{0.56}{625} \right)^{3/2} \\ &\quad \sigma_{\varphi Si} = 3.99 \text{ N/mm}^2 \\ \text{ideale Beullast:} &\quad p_{cr} = \sigma_{\varphi Si} \frac{t}{R} = 3.57 \cdot 10^{-3} \text{ N/mm}^2. \end{aligned}$$

Die statische Verzweigungslast für ein auskonvergiertes FE-Modell mit den Randbedingungen S_1-S_3 ergibt sich zu

$$p_{cr,FEM} = 3.70 \cdot 10^{-3} \text{ N/mm}^2$$

und ist damit erwartungsgemäß etwas höher als die ideale Beullast nach DIN 18800.

Da die ideale Beulspannung kleiner als 70% der Fließgrenze $f_{y,k} = 400 \text{ N/mm}^2$ ist, können nach DIN 18800 die charakteristischen Beulwerte vereinfachend mit

$$\begin{aligned} \text{charakteristische Beulspannung:} & \quad \sigma_{\varphi S,R,k} = 0.65 \cdot 3.99 = 2.59 \text{ N/mm}^2 \\ \text{charakteristische Beullast:} & \quad p_{cr,R,k} = 2.32 \cdot 10^{-3} \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

angegeben werden.

Nach Eurocode 3 ergeben sich folgende Werte für die charakteristische Beullast

$$\begin{aligned} \text{Qualitätsklasse A:} & \quad p_{\theta,Rk}(A) = 0.75 \cdot 3.57 \cdot 10^{-3} = 2.68 \cdot 10^{-3} \text{ N/mm}^2 \\ \text{Qualitätsklasse B:} & \quad p_{\theta,Rk}(B) = 0.65 \cdot 3.57 \cdot 10^{-3} = 2.32 \cdot 10^{-3} \text{ N/mm}^2 \\ \text{Qualitätsklasse C:} & \quad p_{\theta,Rk}(C) = 0.50 \cdot 3.57 \cdot 10^{-3} = 1.79 \cdot 10^{-3} \text{ N/mm}^2. \end{aligned}$$

Vergleich des Verhaltens bei Außendruck und Vakuum

Zunächst wird das unterschiedliche Verhalten bei Belastung durch konstanten Außendruck und bei Belastung durch Vakuum, erzeugt durch Herausziehen eines Kolbens, untersucht. Hierbei wird die Last mit konstanter Geschwindigkeit aufgegeben: $0.05 \text{ (N/mm}^2\text{)/s}$ im Falle der Außendruckbelastung und 500 mm/s Herausziehgeschwindigkeit des Kolbens im Falle der Vakuumbelastung. Erwartungsgemäß sind die Verformungen im Falle des Außendrucks wesentlich größer als bei der Vakuumbelastung, sichtbar an einer größeren Volumenänderung in Abb. 6.7¹. Der Grund hierfür liegt in der Volumenreduktion bei der Beulenbildung, die ihrerseits beim Modell mit Vakuumbelastung zum verminderten Anstieg des Unterdrucks führt, Abb. 6.7². Zum Zwecke der besseren Interpretation werden beide Verläufe kombiniert, d.h. der Druck wird über das Volumen aufgetragen, wodurch sich eine zeitfreie Darstellung ergibt. Zusätzlich wird anstatt des Zylindervolumens die prozentuale Volumenabnahme

$$dV = \frac{V_{Zyl,0} - V_{Zyl,1}(t)}{V_{Zyl,0}} \cdot 100\% \quad (6.19)$$

aufgetragen. Dies macht die Interaktion Zylindervolumen-Unterdruck im Falle der Vakuumbelastung noch besser sichtbar: bezogen auf aktuelles Volumen kann eine begrenzte Verminderung des Unterdrucks mit Beginn des Beulvorgangs bei ca. 0.006 N/mm^2 festgestellt werden, s. Abb. 6.8.

Um Hinweise auf andere Gleichgewichtspfade zu erhalten, wird der oben dargestellte Belastungs-Entlastungs Zyklus für die Bewegung des Kolbens und damit für den Unterdruck angenommen. Hierbei wird nach der Belastungsphase eine Haltephase eingebaut, um eine stationäre Schwingung zu erhalten, bevor die Struktur entlastet wird. In beiden Fällen wird die Last innerhalb von 0.13 s aufgebracht, bis 0.8 s gehalten und anschließend mit der gleichen Geschwindigkeit entlastet, siehe Druckverlauf bzw. Kolbenweg in Abb. 6.9 und 6.10. Ein Vergleich der Volumenänderung in der Haltephase zeigt auch

hier signifikant geringere Verformungen im Falle der Belastung durch Vakuum. Bedingt durch die Interaktion zwischen Zylindervolumen und Unterdruck schwingt sich hier der Zylinder auf einem gegenüber der Beullast niedrigeren Lastniveau ein, s. Abb. 6.11. Die maximale Volumenabnahme des Zylinders beträgt dabei ca. 2.5% des Ausgangsvolumens. Im Falle der Außendruckbelastung schwingt die Struktur in der Haltephase bei der definierten Last von 0.0065 N/mm^2 und zeigt eine maximale Volumenabnahme von ca. 8.5%.

In der Entlastungsphase wird deutlich erkennbar, dass in beiden Fällen für einen weiten Druck-(Volumen-)Bereich ein zweiter Gleichgewichtszustand existiert. Der Zylinder springt in der Entlastungsphase nicht sofort nach Rücknahme der Belastung sondern erst bei Erreichen einer bestimmten Last, der sogenannten tiefsten Nachbeullast, in die unverformte Lage zurück. Hier zeigt sich ein gravierender Unterschied zwischen den beiden Modellen. Im Falle der Außendruckbelastung gehen die Verformungen erst bei kompletter Entlastung zurück, so dass hier keine Nachbeullast angegeben werden kann, Abb. 6.11. Hingegen kann im Falle der Vakuumbelastung eine Nachbeullast mit ca. 0.002 N/mm^2 angegeben werden. Aus diesem Grund erfolgen die nachfolgenden Untersuchungen mit dem Vakuum-Modell.

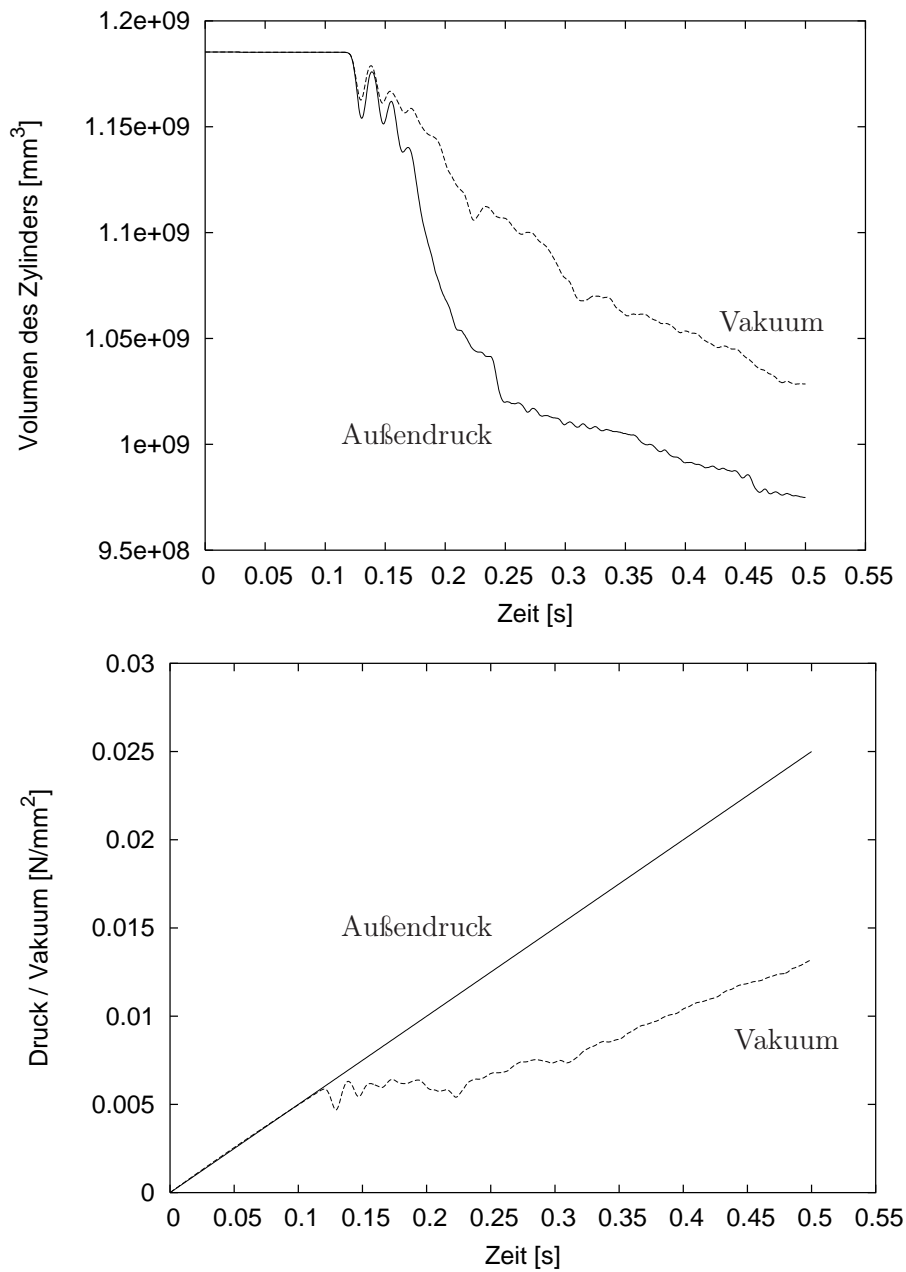


Abbildung 6.7: Zeitlicher Verlauf des Zylindervolumens und des Drucks für einen geometrisch perfekten Zylinder unter Außendruck- bzw. Vakuumbelastung; konstante Belastungsgeschwindigkeit $0.05 \text{ (N/mm}^2\text{)/s}$ bzw. Herausziehggeschwindigkeit des Kolbens 500 mm/s .

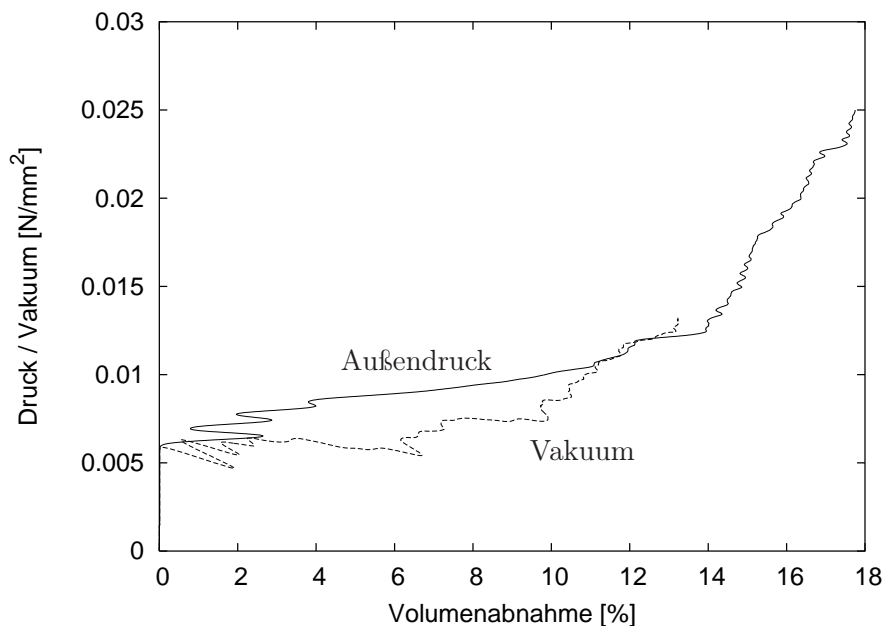


Abbildung 6.8: Verlauf des Drucks bzw. des Unterdrucks aufgetragen über die Abnahme des Zylindervolumens eines perfekten Zylinders unter Außendruck- bzw. Vakuumbelastung; konstante Belastungsgeschwindigkeit $0.05 \text{ (N/mm}^2\text{)/s}$ bzw. Herausziehgeschwindigkeit des Kolbens 500 mm/s .

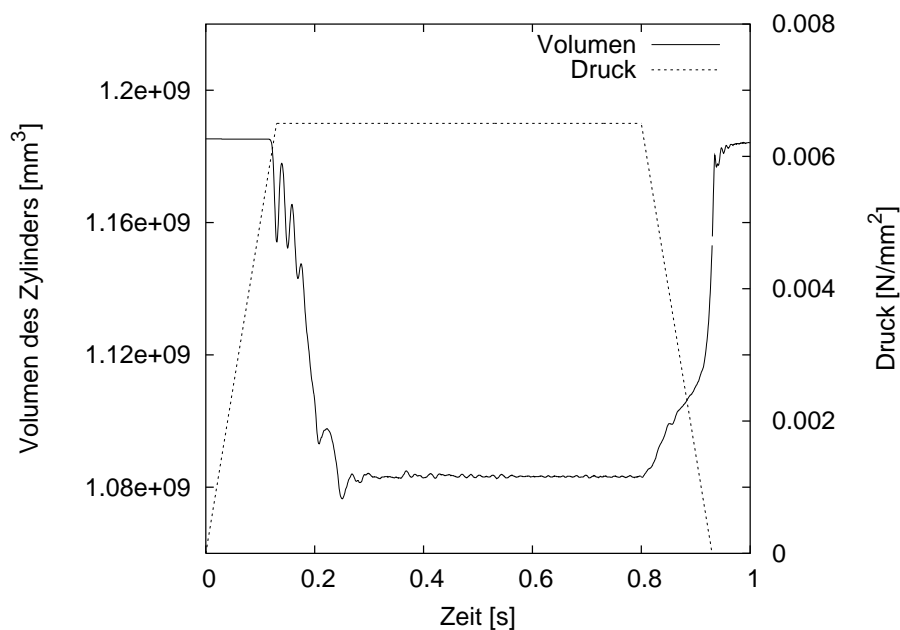


Abbildung 6.9: Verlauf des Zylindervolumens und des Drucks eines perfekten Zylinders unter Außendruckbelastung; Belasten-Halten-Entlasten Zyklus mit der Belastungs- bzw. Entlastungsgeschwindigkeit $0.05 \text{ (N/mm}^2\text{)/s}$.

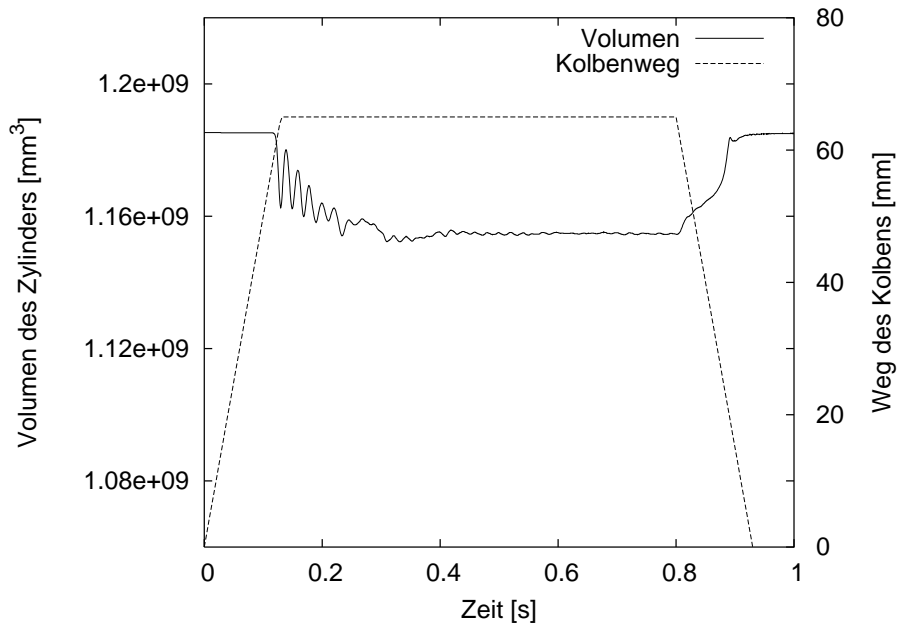


Abbildung 6.10: Verlauf des Zylindervolumens und des Unterdrucks eines perfekten Zylinders unter Vakuumbelastung; Belasten-Halten-Entlasten Zyklus mit der Geschwindigkeit des Kolbens 500 mm/s in der Belastungs- und der Entlastungsphasen.

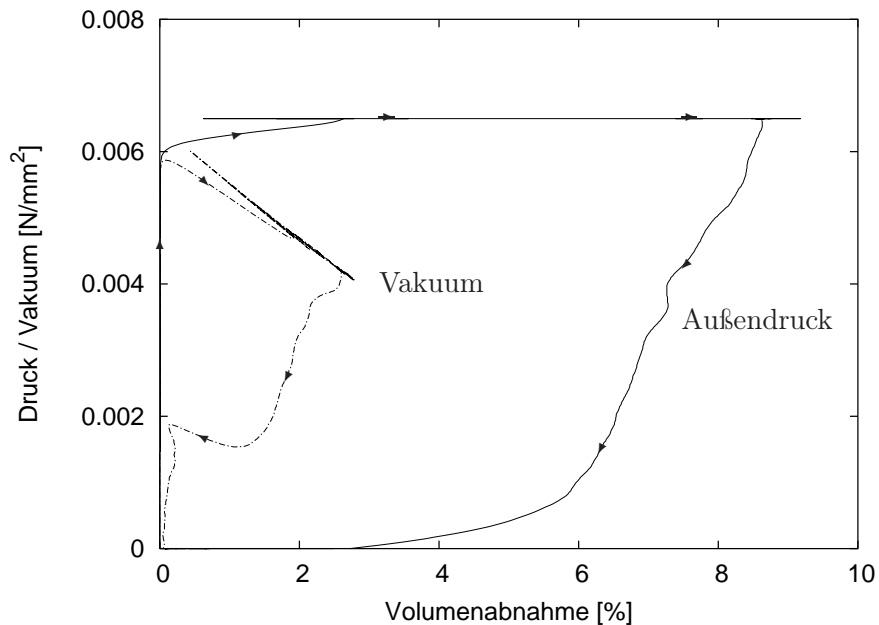


Abbildung 6.11: Verlauf des Drucks bzw. des Unterdrucks aufgetragen über die Abnahme des Zylindervolumens eines perfekten Zylinders unter Außendruck- bzw. Vakuumbelastung; Belasten-Halten-Entlasten Zyklus.

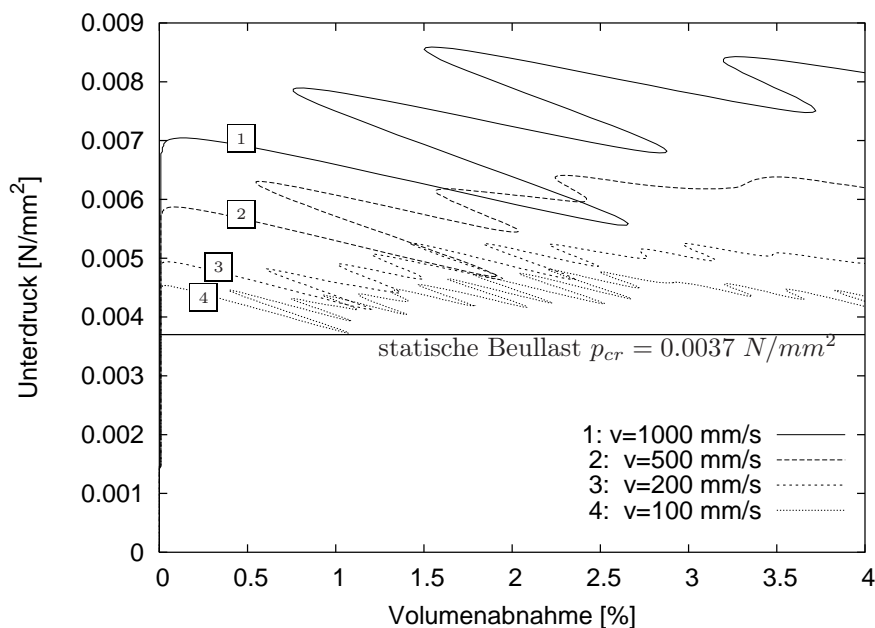


Abbildung 6.12: Verläufe des Unterdrucks aufgetragen über die Abnahme des Zylindervolumens eines perfekten Zylinders unter Vakuumbelastung für unterschiedliche Herausziehgeschwindigkeiten des Kolbens.

Unterschiedliche Geschwindigkeiten

Untersuchungen mit unterschiedlichen Kolbengeschwindigkeiten zeigen, dass auch hier, ähnlich dem axialbelasteten Zylinder, die transient bestimmte Stabilitätslast über dem statisch ermittelten Wert liegt und von der Belastungsgeschwindigkeit abhängt, s. Abb. 6.12. Aus dem Diagramm 6.12 ist außerdem ersichtlich, dass eine sehr langsame - aus Effizienzgründen nicht realisierte - Lastaufbringung erforderlich ist, um mit transienter Berechnung die statische Stabilitätslast korrekt abzubilden. Die Nachbeullast, bei der der Zylinder in der Entlastungsphase zurückspringt, ist erwartungsgemäß nicht von der Belastungs- sondern von der Entlastungsgeschwindigkeit abhängig, s. Abb. 6.13. Im Gegensatz zu den transient bestimmten Stabilitätslasten variiert die Nachbeullast nur leicht, und stimmt für die Entlastungsgeschwindigkeiten von 200 mm/s und kleiner überraschend gut mit dem charakteristischen Wert der Bemessungslast nach DIN 18800 und EC 3 der Qualitätsklasse B überein.

Konvergenz der Lösung im Nachbeulbereich

Wie im Abschnitt "Vernetzung und Lagerung; Vergleichslasten" ausgeführt, erfolgten alle vorhergehenden Untersuchungen dieses Kapitels zunächst mit einer Vernetzung aus 200×46 bilinearen Elementen. An dieser Stelle wird das Lösungsverhalten für abweichende Vernetzungen – hier größere Netze – untersucht. Die Ergebnisse in Abb. 6.14 zeigen eine sehr schnelle Konvergenz hinsichtlich der Nachbeullast: bereits das "zweite" Netz mit 120×30 Elementen kann als konvergiert betrachtet werden.

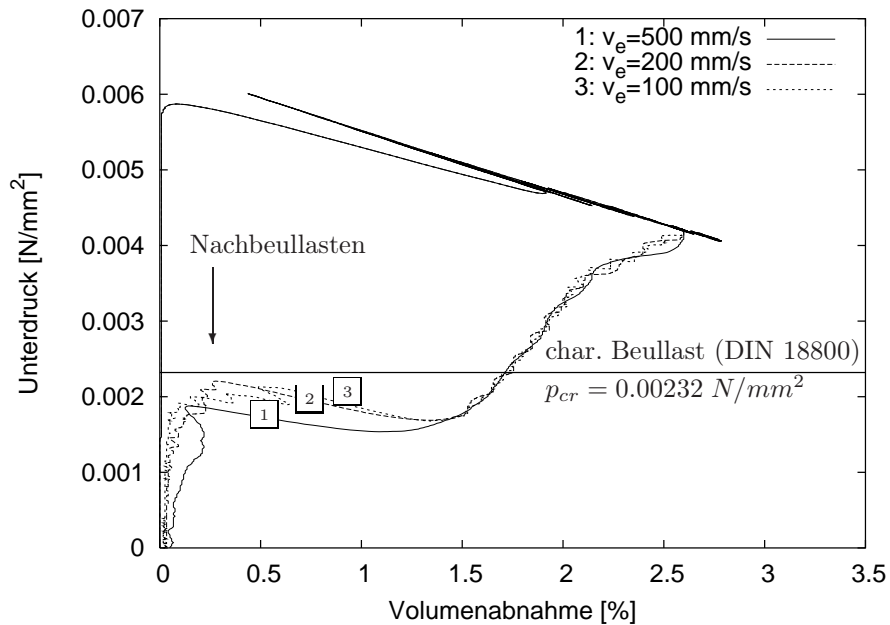


Abbildung 6.13: Verläufe des Unterdrucks aufgetragen über der Abnahme des Zylindervolumens eines perfekten Zylinders unter Vakuumbelastung für unterschiedliche Entlastungsgeschwindigkeiten v_e (Vernetzung mit 200x46 bilinearen Elementen).

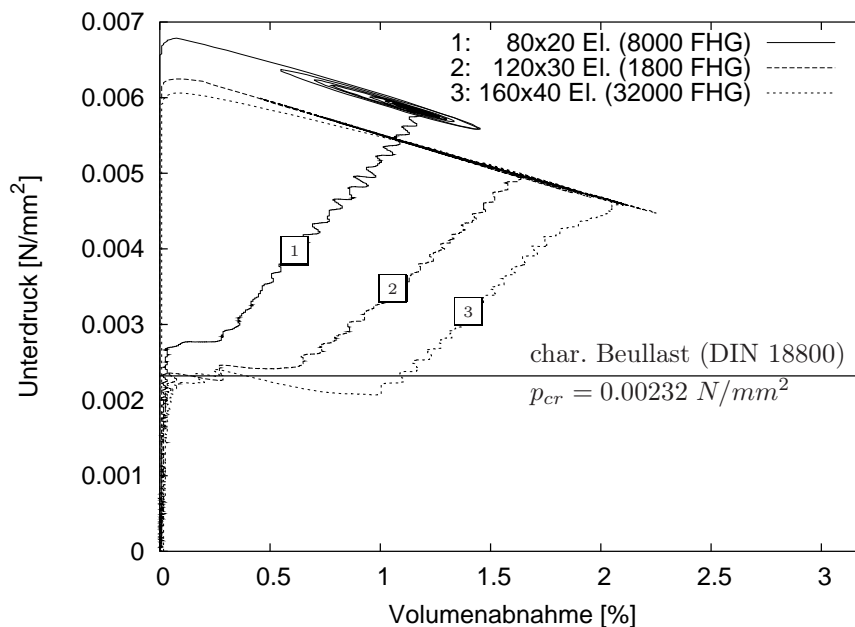


Abbildung 6.14: Verläufe des Unterdrucks aufgetragen über der Abnahme des Zylindervolumens eines perfekten Zylinders unter Vakuumbelastung für unterschiedliche FE-Netze; Belastung mit 500 mm/s , Entlastung mit 100 mm/s .

6.3 FE Untersuchungen an geometrisch imperfekten Kreiszyklindern unter Außendruck

Nachfolgend wird das Beulverhalten geometrisch imperfekter Kreiszyklinder unter Außendruck untersucht. Analog zur Vorgehensweise bei den geometrisch perfekten Zylindern in den vorhergehenden Kapiteln wird zunächst die Konvergenz der Lösung für statische Analysen und anschließend das gesamte Beulverhalten mit transienten Analysen untersucht.

6.3.1 Bestimmung singulärer Punkte mittels statischer FE-Analysen

Die Untersuchung erfolgt an den bereits unter axialer Drucklast im Abschnitt 5.3 untersuchten realen Zylindern AL1100, AL850 und AL650. Hierbei werden die gleichen Netze verwendet, die bereits für die Untersuchung in Abschnitt 5.3 mit Hilfe der 2-dimensionalen diskreten Fourieranalyse erzeugt wurden. Die Stabilitätslasten werden sowohl direkt mit dem linearen Eigenwertproblem als auch unter Berücksichtigung der geometrischen Nichtlinearität mit dem Bisektionsverfahren bestimmt. Im Gegensatz zum perfekten Zylinder führen die Verfahren wegen des deutlich nichtlinearen Vorbeulverhaltens zu leicht unterschiedlichen Ergebnissen. So ergibt sich für den Zylinder AL1100 bei einer Vernetzung mit 252 bilinearen Elementen in Umfangsrichtung und 60 Elementen in Achsrichtung mit dem Bisektionsverfahren $p_{cr} = 0.00352 \text{ N/mm}^2$, während die Bestimmung mit dem linearen Eigenwertproblem $p_{cr} = 0.00358 \text{ N/mm}^2$ liefert. Der Unterschied ist zwar gering, kann aber bei verschiedenen Imperfektionen unterschiedlich hoch ausfallen. Daher wird die statische Stabilitätslast im Folgenden mit dem Bisektionsverfahren bestimmt.

Die Ergebnisse in Abb. 6.15 - 6.17 zeigen, dass sich das Konvergenzverhalten für einen imperfekten Zylinder unter Außendruck nicht wesentlich von dem eines perfekten Zylinders unterscheidet, vgl. Abb. 6.3. Im Gegensatz zum Fall des axialen Drucks wird hier auch für die geometrisch imperfekten Zylinder eine monotone Netzkonvergenz beobachtet. Die Abweichung von der imperfekten Geometrie durch die unterschiedlichen Vernetzungen hat hier offensichtlich keinen negativen Einfluß auf die Ergebnisse. Die Konvergenz wird für die biquadratischen Elemente besonders schnell erreicht. Beispielsweise beträgt die maximale Abweichung der Beullasten (vom größten zum feinsten verwendeten Netz) für den Zylinder AL1100 lediglich 1.8 %.

Bei der direkten Vernetzung der gegebenen Meßpunkte (46200 FHG) können beide Modelle, sowohl das mit bilinearen als auch das mit biquadratischen Elementen als auskonvergiert betrachtet werden. Es zeigt sich also, dass bei Kreiszyklindern unter Außendruckbelastung die Verwendung von bilinearen Elementen durchaus ausreichend ist. Der Grund hierfür liegt in den deutlich kleineren Verschiebungs- und Spannungsgradienten als Folge der größeren Beulamplituden als im Falle des axialen Drucks.

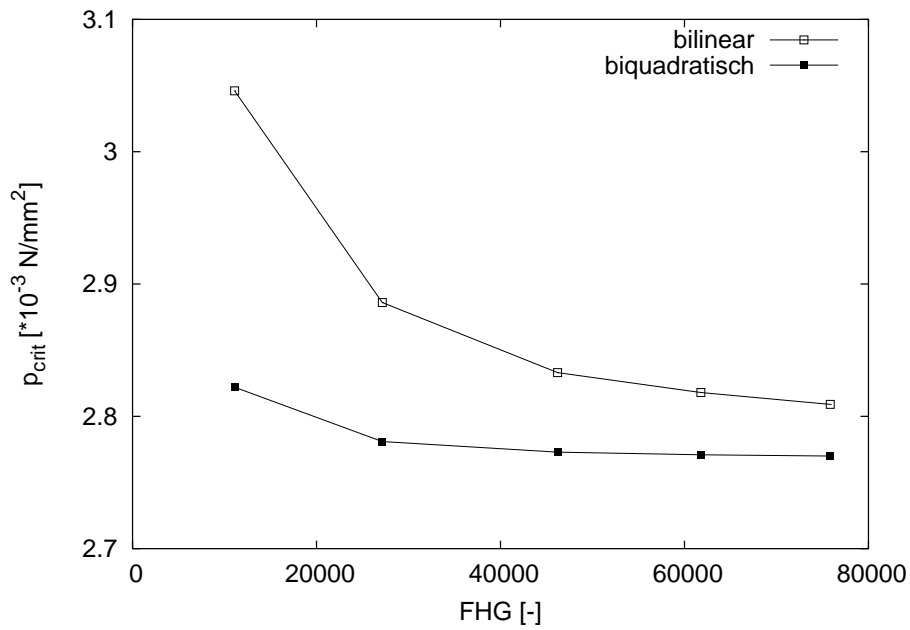


Abbildung 6.15: Netzkonvergenz für Beullasten des Zylinders AL1100 unter Außendruck; Vergleich bilineare und biquadratische Elemente.

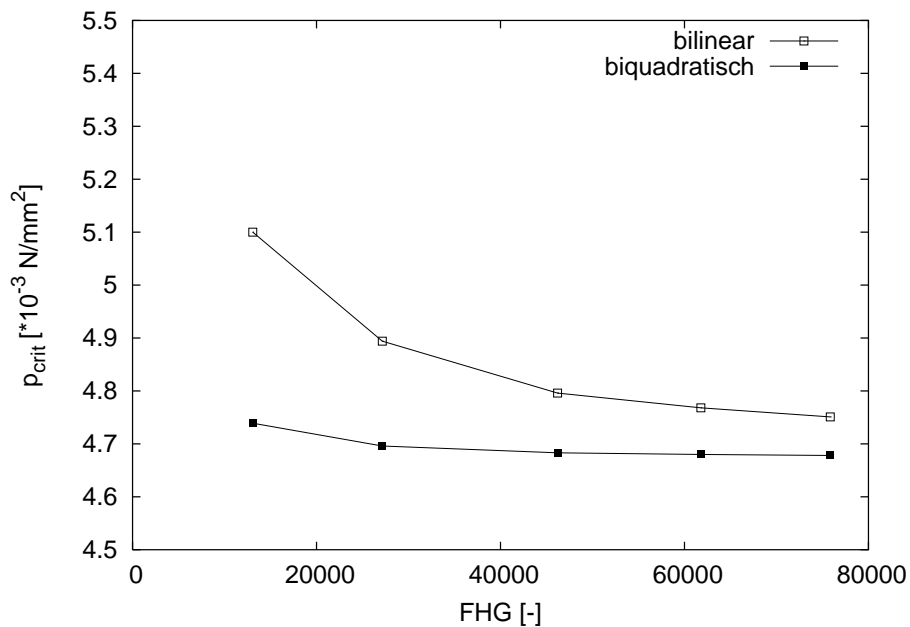


Abbildung 6.16: Netzkonvergenz für Beullasten des Zylinders AL850 unter Außendruck; Vergleich bilineare und biquadratische Elemente.

6.3. FE UNTERSUCHUNGEN AN GEOMETRISCH IMPERFEKTEN KREISZYLINDERN UNTER AUSSENDRUCK

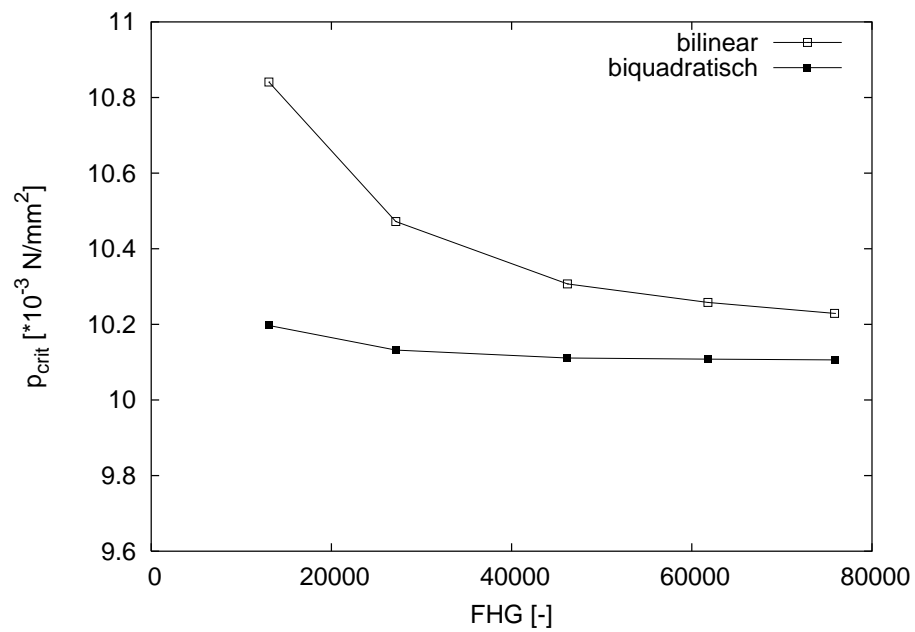


Abbildung 6.17: Netzkonvergenz für Beullasten des Zylinders AL650 unter Außendruck; Vergleich bilineare und biquadratische Elemente.

6.3.2 Untersuchung des Nachbeulverhaltens mittels transienter FE-Analysen

Bei der Untersuchung des Nachbeulverhaltens imperfekter Zylinder unter Außendruck wird das in Abschnitt 6.2.2 dargestellte Vakuum-Modell mit dem durch das Kontrollvolumen gesteuerten Unterdruck im Zylinderinneren verwendet. Die Untersuchung erfolgt mit dem Programm LS-DYNA.

Die vorhergehenden Untersuchungen der Netzkonvergenz statischer Stabilitätslasten perfekter wie auch imperfekter Zylinder, sowie die Untersuchungen zum Nachbeulverhalten perfekter Zylinder zeigen, dass die direkte Vernetzung der gemessenen Punkte der geometrisch imperfekten Zylinder ausreichend feine FE-Netze liefert. Ausgehend von den Ergebnissen in Abschnitt 6.2.2 für den perfekten Zylinder wird die Belastung zunächst mit der Kolbengeschwindigkeit von 500 mm/s aufgebracht und die Entlastung mit 100 mm/s durchgeführt. Allerdings zeigen Untersuchungen an sehr dünnwandigen Zylindern ($R/t \geq 1600$), dass hier die Entlastungsgeschwindigkeit noch kleiner gewählt werden muss, um ein Ablesen der Nachbeullast zu ermöglichen. Analog zur Vorgehensweise bei der Untersuchung des Nachbeulverhaltens von Zylindern unter axialer Drucklast, Abschnitt 5.3.5, wird auch hier eine Parameterstudie durchgeführt, bei der das Nachbeulverhalten für unterschiedliche Wanddicken bzw. R/t -Verhältnisse untersucht wird. Dabei werden vier unterschiedliche Geometrien verwendet: ein geometrisch perfekter Zylinder und die imperfekten Geometrien der Zylinder AL1100, AL850 und AL650, wobei die Wanddicken im Bereich des R/t -Verhältnisses von 600 bis 2000 gewählt werden.

Nachfolgend sind in Abb. 6.18 und 6.19 beispielhaft die Ergebnisse für die R/t -Verhältnisse von 600, 1000, 1600 und 2000 dargestellt. Bei den Untersuchungen wurde das Verhältnis von $L/R = 966/625$ beibehalten und nur die Schalendicke verändert. Die Imperfektionen wurden nicht verändert. Erwartungsgemäß ist bei den unterschiedlichen Geometrien ein teilweise deutlicher Unterschied in den Stabilitätslasten sichtbar. Hingegen ergeben sich für die Nachbeullasten nahezu identische Werte für alle vier Geometrien im gesamten untersuchten R/t -Bereich. Im Gegensatz zu den Untersuchungen an imperfekten Zylindern unter axialem Druck stimmen die Nachbeullasten für den Außendruck im gesamten untersuchten R/t -Bereich sowohl mit den Bemessungswerten nach DIN 18800 sondern auch nach EC 3 (B) sehr gut überein, und können daher zur Bemessung herangezogen werden.

6.3. FE UNTERSUCHUNGEN AN GEOMETRISCH IMPERFEKTEN KREISZYLINDERN UNTER AUSSENDRUCK

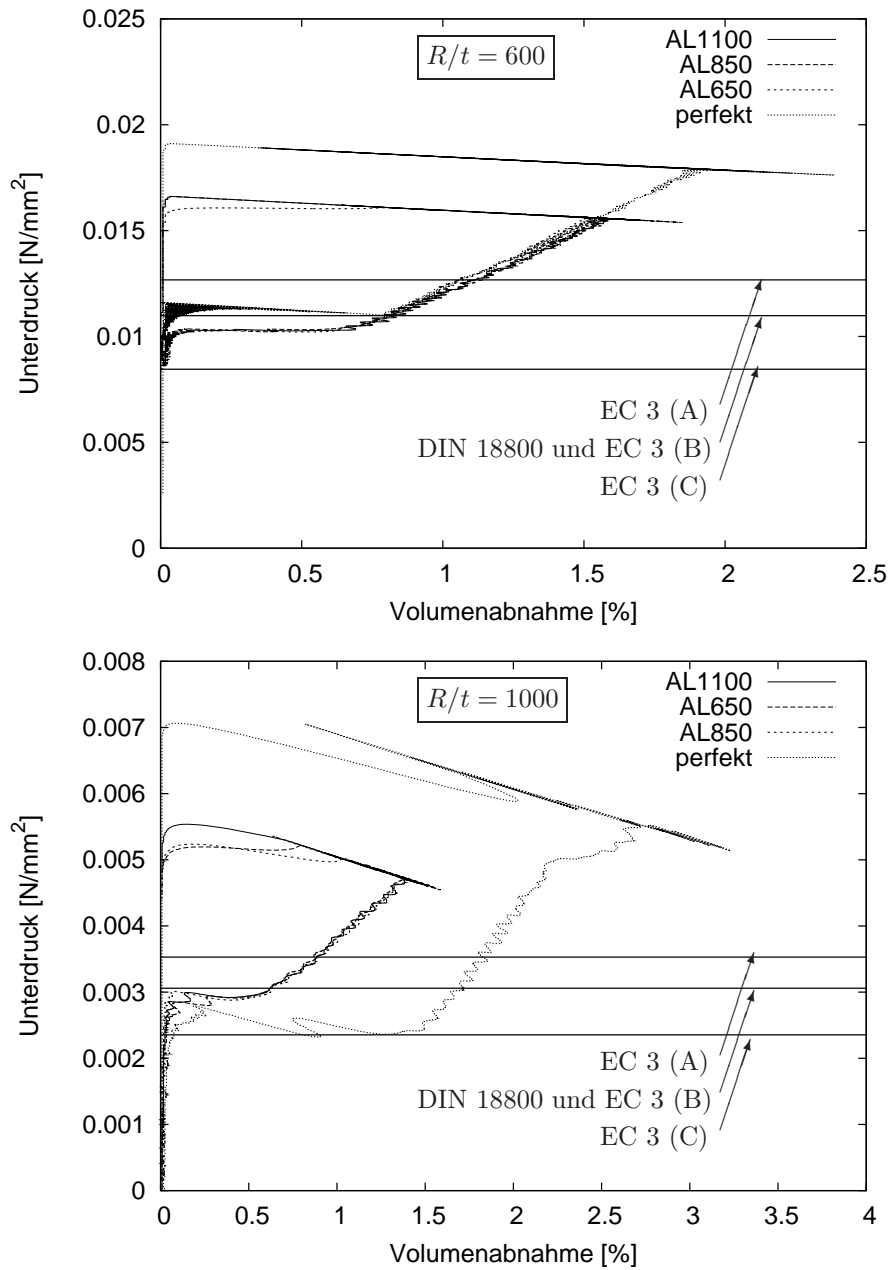


Abbildung 6.18: Verläufe des Unterdrucks aufgetragen über die Abnahme des Zylindervolumens der Zylinder mit $R/t = 600$ und $R/t = 1000$ mit vier unterschiedlichen Geometrien unter Vakuumbelastung; Belastung mit 500 mm/s , Entlastung mit 100 mm/s Kolbengeschwindigkeit.

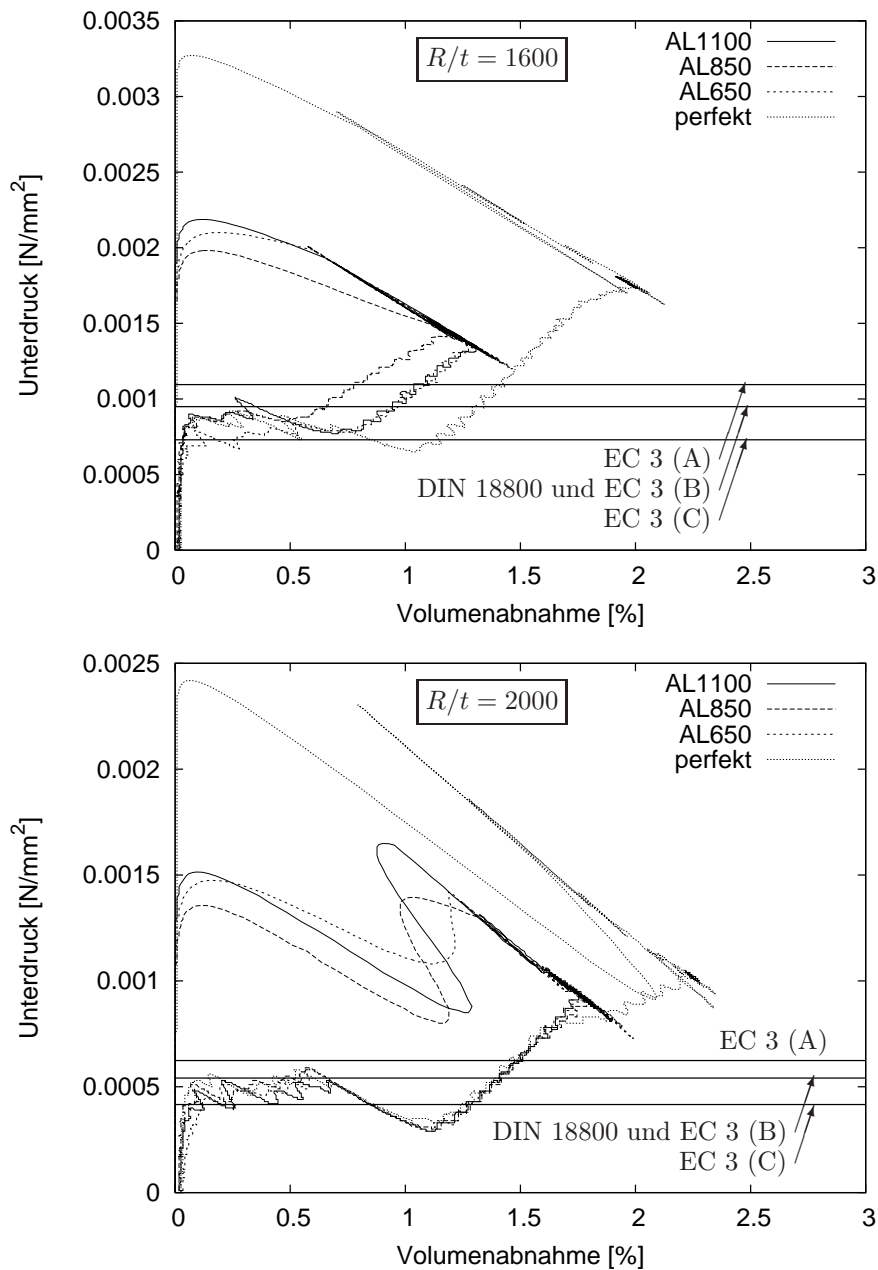


Abbildung 6.19: Verläufe des Unterdrucks aufgetragen über die Abnahme des Zylindervolumens der Zylinder mit $R/t = 1600$ und $R/t = 2000$ mit vier unterschiedlichen Geometrien unter Vakuumbelastung; Belastung mit 500 mm/s , Entlastung mit 50 mm/s Kolbengeschwindigkeit.

6.4 Zusammenfassung

Zusammenfassend ergibt sich aus den Untersuchungen zum Beulverhalten von geometrisch perfekten und imperfekten Zylindern unter Außendruckbeanspruchung mittels statischer und transienter FE Analysen folgendes:

Statische Untersuchungen

1. Bei Bestimmung von Stabilitätslasten mittels statischer Analysen mit uniformer Netzverfeinerung zeigt sich, dass sowohl für den Fall eines geometrisch perfekten Zylinders als auch im Falle der imperfekten Zylinder die Lösung bei einer h -Verfeinerung so schnell konvergiert, dass hier die Verwendung "recht grober Netze" ausreichend ist.
2. Im Gegensatz zum Fall der axialen Druckbeanspruchung ist der Zuwachs der Genauigkeit durch Verwendung von biquadratischen Elementen gegenüber bilinearen Elementen bei gleicher Zahl an Freiheitsgraden marginal. Unter Berücksichtigung des Aspektes der Effizienz ist es demnach ausreichend, bilineare Elemente zu verwenden.
3. Wegen der schnellen Konvergenz der Stabilitätslasten und Beulformen bei Untersuchungen zur Netzkonvergenz mit uniformer Netzverfeinerung kann hier auf den Einsatz adaptiver Netze verzichtet werden.

Transiente Untersuchungen

1. Für die transienten Untersuchungen wurde primär das Programm LS-DYNA verwendet, da erst die Verwendung eines Modells mit Vakuumbelastung in Kombination mit Volumenkontrolle die Verformungen im Nachbeulbereich soweit einschränkt, dass die Bestimmung der Nachbeullast möglich wird.
2. Analog zum Fall des Axialdrucks zeigen diese Untersuchungen, dass die Bestimmung der Nachbeullast mittels transienter FE-Analysen sehr robust ist: zum einen wurde die Netzkonvergenz hinsichtlich der niedrigsten Nachbeullast sehr schnell erreicht, zum anderen zeigte die Lösung kaum Abhängigkeiten von der Entlastungsgeschwindigkeit.
3. Die berechneten Nachbeullasten stimmen sehr gut mit den Bemessungslasten nach DIN 18800 und Eurocode 3 der Qualitätsklasse B überein und können zur Bemessung herangezogen werden. Die Verwendung der Qualitätsklasse C im Eurocode scheint zu konservativ.

Kapitel 7

Sensitivität

Die vorhergehenden Untersuchungen an Kreiszyindern haben gezeigt, dass die Bestimmung von Stabilitätslasten aufgrund der sehr hohen Sensitivität im Falle des axialen Drucks, sichtbar daran, dass kleine Änderungen der Berechnungsparameter große Abweichungen im Ergebnis verursachen können, oft wenig aussagekräftig ist.

Die Anwendung transienter FE Analysen bei Untersuchungen des Nachbeulverhaltens erwies sich als wesentlich robuster und lieferte Werte für die Nachbeullasten, die mit der Bemessungs- und Versuchspraxis gut übereinstimmen. Allerdings kann die Bemessung unter Zuhilfenahme von Nachbeullasten zu einer eventuell zu konservativen Bemessung führen. Daher wird nun ein zusätzliches Kriterium zur Beurteilung der Stabilitätsgefährdung von Strukturen mit mehreren Gleichgewichtslagen bei einem Lastniveau benötigt. Hierzu wird im Folgenden versucht, stabile Gleichgewichtslagen im Vorbeulbereich bezüglich der *Sensitivität* gegenüber endlichen Störungen zu untersuchen und dabei einen *Stabilitätsgrad* zu ermitteln.

7.1 Sensitivität – Definition und Algorithmus

Die Begriffe *Stabilitätsgrad* und *Sensitivität* einer Gleichgewichtslage wurden bereits in Abschnitt 1.3 eingeführt. Der Sachverhalt ist hier nochmals in Abb. 7.1 dargestellt. Nach einem Vorschlag von VIELSACK [87] kann die Sensitivität einer Gleichgewichtslage als der Kehrwert der minimalen Störenergie definiert werden, die zum Verlassen des Einzugsgebiets der untersuchten Gleichgewichtslage führt:

$$S = \frac{1}{W_{stör,min}}. \quad (7.1)$$

Bei einer größeren Störung würde die Struktur in Abb. 7.1 das Einzugsgebiet der stabilen Gleichgewichtslage u_1 verlassen und bei Vorhandensein von Dämpfung die zweite stabile Gleichgewichtslage bei u_3 einnehmen. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit erfolgt die Störung durch Zufuhr kinetischer Energie W_{kin} , d.h. $W_{stör} = W_{kin}$. Dies wird

im Rechenmodell über aufgebrauchte Geschwindigkeiten realisiert, d.h. über die Definition eines Geschwindigkeitsvektors – einen momentanen Impuls, dessen Größe über eine Skalierung der Geschwindigkeiten verändert werden kann.

Die Bestimmung der Sensitivität einer stabilen Gleichgewichtslage verläuft in der vorliegenden Arbeit in folgenden Schritten:

1. *Statische Bestimmung des Gleichgewichtszustandes*

Zunächst wird mittels einer statischen iterativen Berechnung des nichtlinearen Problems die Gleichgewichtslage ermittelt, die zu dem zu untersuchenden Lastniveau gehört. Hierzu wird das linearisierte Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_T(\mathbf{d}_i)\Delta\mathbf{d}_i &= \lambda_0\mathbf{f}^{ext} - \mathbf{f}^{int}(\mathbf{d}_i) \\ \mathbf{d}_{i+1} &= \mathbf{d}_i + \Delta\mathbf{d}_i \end{aligned} \quad (7.2)$$

mit

$\lambda_0 \dots$ das auf Sensitivität zu untersuchende Lastniveau

iterativ gelöst. Als Ergebnis in diesem Lastschritt ergibt sich ein Verformungszustand \mathbf{d}_0 , der zur Last $\lambda_0\mathbf{f}^{ext}$ gehört.

2. *Iterative Bestimmung der Sensitivität*

Der in Schritt 1 bestimmte Gleichgewichtszustand wird nun gestört.

- (a) Zunächst wird ein Störvektor $\alpha_1\dot{\mathbf{d}}_0$ mit einem anfänglichen Skalierfaktor α_1 definiert. Hieraus ergibt sich die Störenergie im ersten Iterationsschritt zu

$$W_{stör,1} = W_{kin,1} = \alpha_1^2 \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{d}}_0^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{d}}_0 \right). \quad (7.3)$$

- (b) Dann wird die Bewegung ermittelt, die sich nach der aufgebrauchten Störung einstellt. Hierbei wird die Last $\lambda_0\mathbf{f}^{ext}$ konstant gehalten und das Vektorpaar $(\mathbf{d}_0, \dot{\mathbf{d}}_0)$ repräsentiert die Anfangsbedingungen. Die Bewegung wird mit dem NEWMARK-Algorithmus berechnet, wobei eine kleine Dämpfung angenommen wird. Mit der Dämpfung wird erreicht, dass die Bewegung gegen einen eventuellen Attraktor, d.h. eine stabile Gleichgewichtslage, konvergiert.
- (c) Die berechnete Bewegung muss dann hinsichtlich ihrer Aussage zur Sensitivität der untersuchten Gleichgewichtslage beurteilt werden. Abhängig vom Ergebnis wird dann die Störenergie variiert, hier durch die Wahl eines neuen Skalierungsfaktors für den Störvektor. Folgende Bewegungen können sich einstellen:

i. **”stabile Situation”**

Dies ist eine Schwingung um die untersuchte Gleichgewichtslage, d.h. das System bleibt im Einzugsbereich der ursprünglichen Gleichgewichtslage (Abb. 7.1 Bahn (a), Störung mit $\dot{u}_{0,1}$)

→ Zur Bestimmung der Sensitivität ist die Störenergie über die Wahl eines größeren Skalierungsfaktors $\alpha_{n+1} > \alpha_n$ zu erhöhen.

ii. **”instabile Situation”**

Dies ist eine Bewegung zu einer anderen Gleichgewichtslage hin, z.B. zu einem stabilen Gleichgewicht im Nachbeulbereich. Dabei verlässt das System den Einzugsbereich der ursprünglichen Gleichgewichtslage (Abb. 7.1 Bahn (b), Störung mit $\dot{u}_{0,2}$)

→ Zur Bestimmung der kleinsten maßgebenden Störenergie ist ein kleinerer Skalierfaktor $\alpha_{n+1} < \alpha_n$ zu wählen.

- (d) Die Untersuchung wird beendet, wenn eine bestimmte Genauigkeit des minimalen Störenergiewertes erreicht ist, der ausreicht, den stabilen Zustand zu verlassen.

$$\Delta W_{Stör} = (\Delta\alpha)^2 \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{d}}_0^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{d}}_0 \right) < TOL. \quad (7.4)$$

Bei diesem Vorgehen zur Untersuchung der Sensitivität stellen sich zwei Fragen:

- Wie kann die Art der Bewegung, die eine Struktur nach dem Aufbringen einer Störung ausführt – i) oder ii) – effizient und ”automatisch” erfaßt werden?
- Welche Störform, d.h. Verteilung der Geschwindigkeiten, führt zur größten Sensitivität?

Beide Fragestellungen werden im Folgenden untersucht.

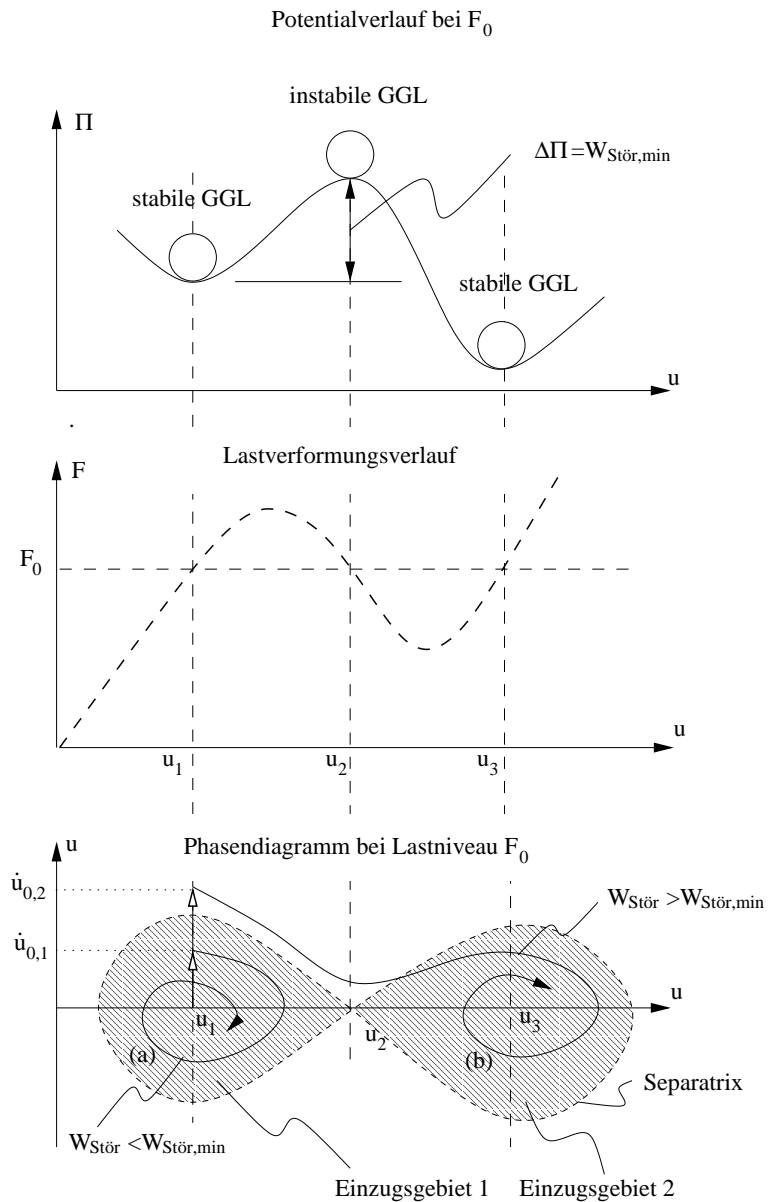


Abbildung 7.1: Ein Ein-Freiheitsgradsystem mit Dämpfung. Schematische Darstellung des Zusammenhangs zwischen Potentialfunktion, Last-Verformungsdiagramm und den Einzugsbereichen stabiler Gleichgewichtslagen bei endlichen Störungen.

7.2 Liapunov Exponenten

Zur Beurteilung der Bewegung, d.h. ob es sich um Fall i) oder ii) des im vorhergehenden Kapitel dargestellten Algorithmus handelt, können Phasendiagramme für charakteristische Freiheitsgrade zur Hilfe genommen werden. Für letztere muss allerdings **ein** einzelner Freiheitsgrad des Systems als der **charakteristische Freiheitsgrad** gewählt werden, was bei einer "ungeschickten" Wahl zu falschen Schlußfolgerungen führen kann. Dies kann durch Einsatz von Liapunov Exponenten, LIAPUNOV [57] oder Varianten davon vermieden werden.

Liapunov Exponenten (LE) erlauben es, die Stabilität einer Bewegung anhand einer skalaren Größe zu beurteilen. Hierbei ist der LE nach WORG [93] definiert als

$$\mathcal{L} = \lim_{t \rightarrow \infty} (\mathcal{L}(t)) \quad (7.5)$$

mit

$$\mathcal{L}(t) = \lim_{\delta_0 \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t} \ln \frac{\|\delta(t)\|}{\|\delta_0\|} \right). \quad (7.6)$$

$\mathcal{L}(t)$ ist der LE zum Zeitpunkt t , δ_0 repräsentiert die Anfangsstörung und $\delta(t)$ die Störung zum Zeitpunkt t . $\|\dots\|$ ist eine Norm, deren Definition zunächst frei ist. Als Störung wird im vorliegenden Fall der Abstandsvektor zwischen der Bahn der untersuchten Referenzbewegung \mathbf{a}_r und der Bahn der gestörten Bewegung \mathbf{a}_s im Phasenraum betrachtet. Sind die Bewegungen im Phasenraum durch $\mathbf{a}_r = (\mathbf{u}_r, \dot{\mathbf{u}}_r)$ im Falle der Referenzbewegung und durch $\mathbf{a}_s = (\mathbf{u}_s, \dot{\mathbf{u}}_s)$ im Falle der gestörten Bewegung beschrieben, so lassen sich die Normen folgendermaßen darstellen

$$\|\delta_0\| = \|(\tilde{\mathbf{u}}(t=0), \dot{\tilde{\mathbf{u}}}(t=0))\| \quad (7.7)$$

und

$$\|\delta(t)\| = \|(\tilde{\mathbf{u}}(t), \dot{\tilde{\mathbf{u}}}(t))\| \quad (7.8)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_s - \mathbf{u}_r \quad \text{und} \quad \dot{\tilde{\mathbf{u}}} = \dot{\mathbf{u}}_s - \dot{\mathbf{u}}_r. \quad (7.9)$$

Der LE kann grundsätzlich drei unterschiedliche Werte annehmen und damit die drei Arten der Bewegung indizieren. Ist die untersuchte Bewegung asymptotisch stabil, so ergibt sich $\mathcal{L} < 0$, siehe Abb. 7.2. In diesem Fall konvergiert die gestörte Bewegung zur untersuchten Referenzbewegung hin. Bleibt der "Abstand" zwischen den Bahnen der Referenzbewegung und der gestörten Bewegung konstant, ergibt sich für den Wert des Liapunov Exponenten $\mathcal{L} = 0$. Im Falle einer chaotischen Bewegung, d.h. wenn der Störvektor mit der Zeit unbegrenzt wächst, ergibt sich $\mathcal{L} > 0$.

Bei der praktischen Berechnung von Liapunov Exponenten ist die Erfüllung der Forderungen $t \rightarrow \infty$ in Formel (7.5) und $\delta_0 \rightarrow 0$ in Formel (7.6) problematisch. Die

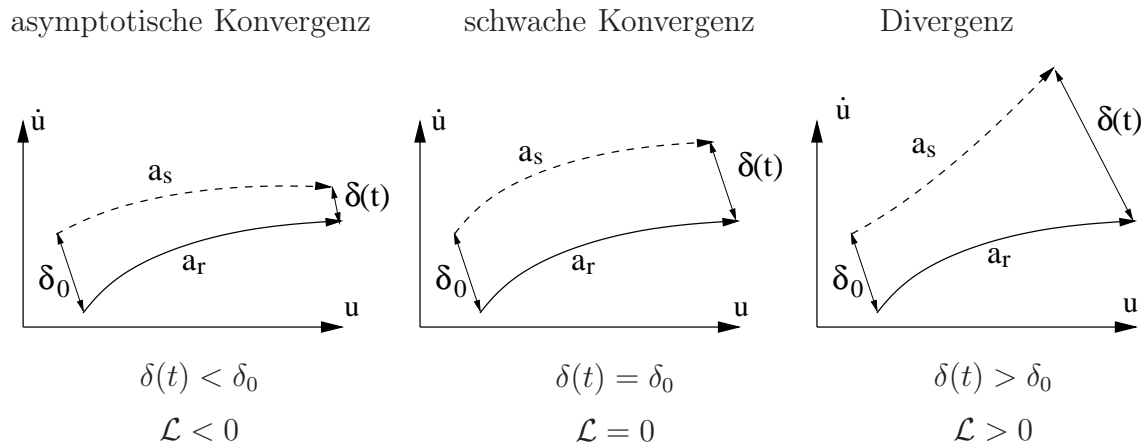


Abbildung 7.2: Schematische Darstellung der Trajektorien im Phasenraum für die drei Hauptfälle der Werte der Liapunov Exponenten.

Forderung $t \rightarrow \infty$ wird in der Praxis dadurch erfüllt, dass die Berechnungen solange durchgeführt werden, bis der Liapunov Exponent mit einer endlichen Genauigkeit konvergiert ist.

Die zweite Forderung, $\delta_0 \rightarrow 0$, kann laut der Arbeit von BENETTIN ET AL. [15] fallengelassen werden, solange beide Bewegungen, die Referenzbewegung und die gestörte Bewegung, in *einem Gebiet* starten. Bezogen auf das hier untersuchte Problem bedeutet dies, dass der LE für unterschiedliche Störungen den gleichen Wert annimmt, wenn beide Bewegungen im Einzugsgebiet der untersuchten Gleichgewichtslage starten, siehe Abb. 7.1. Umgekehrt bedeutet es, dass der Wert des LE sich sprunghaft ändert, sobald die Störung ausreichend groß ist, um die Struktur in einen anderen Gleichgewichtszustand zu befördern. Diese Eigenschaft des LE wird nun dazu genutzt, die Bewegung zum ursprünglichen Attraktor von der Bewegung zu einem anderen Attraktor zu separieren. Werden die Untersuchungen mit einer Dämpfung durchgeführt, so muss der LE einen negativen Wert annehmen, solange die gestörte Bewegung im Einzugsgebiet der untersuchten Gleichgewichtslage bleibt und für $t \rightarrow \infty$ gegen diese Lage konvergiert. Sobald die Struktur dieses Einzugsgebiet verlässt, wird der LE entweder den Wert Null annehmen – im Falle der Konvergenz zu einer anderen stabilen Gleichgewichtslage, oder einen positiven Wert im Falle einer unbegrenzt anwachsenden Bewegung.

Damit ergibt sich für den LE

$$\mathcal{L}(t) = \frac{1}{t} \ln \frac{\|(\tilde{\mathbf{u}}(t), \dot{\tilde{\mathbf{u}}}(t))\|}{\|(\tilde{\mathbf{u}}(t=0), \dot{\tilde{\mathbf{u}}}(t=0))\|}. \quad (7.10)$$

Nun gilt es, die Norm in Gl. (7.10) zu definieren. Hierfür kann z.B. die Euklidische Norm verwendet werden, die für einen Vektor $\mathbf{v}^T = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ folgendermaßen

definiert ist

$$\|\mathbf{v}\|_{EUCL} = \sqrt{\mathbf{v}^T \mathbf{v}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}. \quad (7.11)$$

Bei Anwendung dieser Norm auf den Störvektor, der aus Verschiebungen $\tilde{\mathbf{u}}$ und Geschwindigkeiten $\dot{\tilde{\mathbf{u}}}$ besteht, müssen die einzelnen Anteile in geeigneter Weise normiert werden. Dazu müssen eine charakteristische Länge L und eine charakteristische Frequenz ω definiert werden. Dies führt auf den folgenden Ausdruck

$$\|(\tilde{\mathbf{u}}, \dot{\tilde{\mathbf{u}}})\|_{EUCL} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N_{dof}} \left(\frac{\tilde{u}_i^2}{L^2} + \frac{\dot{\tilde{u}}_i^2}{L^2 \omega^2} \right)}. \quad (7.12)$$

Hierbei bezeichnet N_{dof} die Anzahl der Freiheitsgrade des behandelten Problems. Da die charakteristische Länge L beim Einsetzen in die Gleichung (7.10) sowohl im Nenner als auch im Zähler auftritt, ist sie für die Bestimmung des LE ohne Bedeutung. Die Wahl der charakteristischen Frequenz ω hingegen ist entscheidend für den Wert des LE und bereitet oft Schwierigkeiten. Wird ω zu groß gewählt, so wird der Einfluß der Geschwindigkeiten unterschätzt, im umgekehrten Fall überschätzt. Daher werden die Geschwindigkeiten bei der Bestimmung des LE gerne weggelassen, s. beispielsweise RUGONYI UND BATHE [70]. Dabei vereinfacht sich Gl. (7.10) zu

$$\mathcal{L}_{EUCL}(t) = \frac{1}{t} \ln \frac{\sqrt{\tilde{\mathbf{u}}(t)^T \tilde{\mathbf{u}}(t)}}{\sqrt{\tilde{\mathbf{u}}_0^T \tilde{\mathbf{u}}_0}}. \quad (7.13)$$

Ein weiterer Grund zur Vernachlässigung der Geschwindigkeiten liegt speziell beim betrachteten Problem darin, dass die zu separierenden Bewegungen ausschließlich durch die unterschiedliche Lage der Attraktoren – Ortsvektoren der Gleichgewichtslagen – und nicht durch Geschwindigkeiten gekennzeichnet sind. Eine Berücksichtigung der Geschwindigkeiten mit einem zu großen Faktor könnte demnach sogar zu einer Verfälschung der Ergebnisse führen. Daher werden im Weiteren die Geschwindigkeiten nicht berücksichtigt.

Als Referenzbewegung kann eine Bewegung definiert werden, die bei einer beliebig kleinen Störung im Einzugsgebiet der Ausgangsgleichgewichtslage beginnt und auch zu dieser Gleichgewichtslage konvergiert. Bei einem Grenzübergang kann nun die Gleichgewichtslage selbst als die Referenzbewegung definiert werden. Bei Verwendung von diskreten Verschiebungen \mathbf{d} eines FE-Modells anstatt der kontinuierlichen Verschiebungen \mathbf{u} eines Kontinuums ergibt sich aus Gl. (7.13) und der Definition des Störvektors nach Gl. (7.9)

$$\mathcal{L}_{EUCL}(t) = \frac{1}{t} \ln \frac{\sqrt{(\mathbf{d}(t) - \mathbf{d}_{\lambda_0})^T (\mathbf{d}(t) - \mathbf{d}_{\lambda_0})}}{\sqrt{(\mathbf{d}_0 - \mathbf{d}_{\lambda_0})^T (\mathbf{d}_0 - \mathbf{d}_{\lambda_0})}}. \quad (7.14)$$

Hierbei ist \mathbf{d}_{λ_0} der Verschiebungszustand, der zur untersuchten Gleichgewichtslage bei Lastniveau λ_0 gehört, \mathbf{d}_0 die Verschiebung unmittelbar nach Aufbringen der Anfangsstörung und $\mathbf{d}(t)$ der Verschiebungsvektor zum beliebigen Zeitpunkt t der untersuchten Bewegung.

Wie in der Gleichung (7.14) ersichtlich, müssen bei Berechnung des Liapunov Exponenten Verschiebungsvektoren gespeichert und verarbeitet werden. Dies kann bei großen Modellen zu einem Anstieg der Rechenzeit führen. Zur Effizienzsteigerung werden daher weitere Vereinfachungen vorgenommen, deren Gültigkeit später an Beispielen untersucht wird. Zum einen kann anstatt eines Verschiebungsvektors \mathbf{d} ein charakteristischer Freiheitsgrad d^* gewählt werden. Der so bestimmte LE wird im folgenden mit \mathcal{L}_{SDOF} bezeichnet (SDOF=single degree of freedom). Durch den Übergang von einem Vektor zu einem einzelnen Freiheitsgrad wird aus der Euklidischen Norm ein Betrag:

$$\mathcal{L}_{SDOF}(t) = \frac{1}{t} \ln \frac{|d^*(t) - d_{\lambda_0}^*|}{|d_0^* - d_{\lambda_0}^*|} \quad (7.15)$$

Im Falle einer "stabilen Situation" nach Definition im Kapitel 7.1 wird der LE einen negativen Wert annehmen. Der Fall einer "instabilen Situation" wird dadurch indiziert, dass der LE den Wert Null oder einen positiven Wert annimmt. Demnach ist es ausreichend, die *Maxima* im zeitlichen Verlauf *des Liapunov Exponenten* zu betrachten. Dies kann im Falle eines charakteristischen Freiheitsgrades durch *Betrachtung der extremalen Werte der gewählten Verschiebung* erreicht werden. Liegt eine Schwingung vor, so kann der extremale Wert der charakteristischen Verschiebung d^* zum Zeitpunkt bestimmt werden, an dem die entsprechende Geschwindigkeit zu Null wird. Dies führt zur folgenden Berechnungsvorschrift für den Liapunov Exponenten

$$\mathcal{L}_{SDOF,max}(t^*) = \frac{1}{t^*} \ln \frac{|d^*(t^*) - d_{\lambda_0}^*|}{|d_0^* - d_{\lambda_0}^*|} \quad (7.16)$$

$$t^* \text{ so, dass gilt } \dot{d}^*(t^*) = 0.$$

D.h. die LE müssen nicht in jedem Zeitschritt, sondern nur an den Zeitpunkten t^* ($\dot{d}^*(t^*) = 0$) berechnet werden.

Analog dazu kann auch die Berechnungsvorschrift in Gl. (7.14) vereinfacht werden. Hierbei wird vereinfachend nicht die Norm des Störvektors berechnet, sondern die Differenz der Normen der jeweils betrachteten Zustände:

$$\mathcal{L}_{EUCL,max}(t^*) = \frac{1}{t^*} \ln \frac{\sqrt{(\mathbf{d}(t^*))^T \mathbf{d}(t^*)} - \sqrt{\mathbf{d}_{\lambda_0}^T \mathbf{d}_{\lambda_0}}}{\sqrt{\mathbf{d}_0^T \mathbf{d}_0} - \sqrt{\mathbf{d}_{\lambda_0}^T \mathbf{d}_{\lambda_0}}} \quad (7.17)$$

Ermittlung von t^* mit $\sqrt{\dot{\mathbf{d}}(t^*)^T \dot{\mathbf{d}}(t^*)} \approx 0$, d.h. in jedem Zeitschritt zu bestimmen. Demnach werden in der obigen Gleichung die maximalen Werte der Normen der Ver-

schiebungsvektoren verwendet, d.h. die Zustände, für die die Norm des Geschwindigkeitsvektors nahezu Null ist. Dies vereinfacht die Berechnung, da nun nicht mehr Vektoren sondern lediglich Normen der Vektoren, also wenige skalare Größen, gespeichert werden.

7.3 Sensitivitätsuntersuchungen am Kreisbogen unter zwei Einzellasten

Zunächst wird am Beispiel einer einfachen Struktur – einem Kreisbogen – die Vorgehensweise zur Bestimmung der Sensitivität einer Gleichgewichtslage verdeutlicht und die Verwendbarkeit der im vorhergehenden Kapitel vorgeschlagenen Exponenten untersucht.

7.3.1 Lage der stabilen und der instabilen Gleichgewichtspunkte

Der hier untersuchte Kreisbogen hat den Öffnungswinkel $\theta = 90^\circ$ und wird in den Drittpunkten jeweils bei 30° und 60° durch zwei Einzellasten belastet, siehe Abb. 7.3. Für die nachfolgenden Untersuchungen wird die Struktur mit 18 bilinearen Schalenelementen diskretisiert, wobei eine Einheitsbreite gewählt wird. Der Bogen ist an den Rändern eingespannt, d.h. dort sind sowohl die Verschiebungen als auch die Verdrehungen festgehalten. Rechtwinklig zur Zeichenebene sind die Verformungen verhindert.

Zunächst wird das Tragverhalten mit einer nichtlinearen statischen Analyse untersucht. Hierzu wird das Bogenlängenverfahren (arc-length method) verwendet. Als Ergebnis erhält man den in Abb. 7.4 dargestellten Last-Verformungsverlauf für den Lastfaktor λ und die Verschiebung des Scheitels w , wobei die stabilen Gleichgewichtslagen mit durchgezogenen und die instabilen Gleichgewichtslagen mit gestrichelten Linien dargestellt sind. Wie aus dem Diagramm ersichtlich wird der Verzweigungspunkt bei der Last $\lambda_{VZP} = 2.2$ ($F_{VZP} = 110 \text{ MN}$) vor dem Durchschlagpunkt bei der Last $\lambda_D = 2.6$ ($F_D = 130 \text{ MN}$) erreicht. Der Durchschlag mit einer symmetrischen Beulfigur kann nur mit einem symmetrischen System, d.h. perfekte symmetrische Geometrie und Belastung (Störlast $\epsilon = 0$), berechnet werden. Bei beliebig kleinen unsymmetrischen Imperfektionen, beispielsweise einer beliebig kleinen Laststörung ϵ im Abb. 7.3, wird die Struktur am ursprünglichen Verzweigungspunkt, der dann zu einem neuen Durchschlagpunkt wird, auf dem Verzweigungspfad in den Nachbeulbereich wechseln. Hierbei nimmt der Bogen eine der asymmetrischen Verformungsfiguren ein.

Der Abstand zwischen dem Ast der stabilen und dem Ast der instabilen Gleichgewichtslagen gibt einen Hinweis auf den Stabilitätsgrad. Dieser wird oft zur Beurteilung der Sensitivität der stabilen Gleichgewichtslagen herangezogen, s. Definition zum Stabilitätsgrad in Kapitel 1. Aufgrund der Projektion des Strukturverhaltens auf einen Freiheitsgrad, hier die Verschiebung des Scheitelpunktes w , entsteht der falsche Ein-

7.3. SENSITIVITÄTSUNTERSUCHUNGEN AM KREISBOGEN UNTER ZWEI EINZELLASTEN

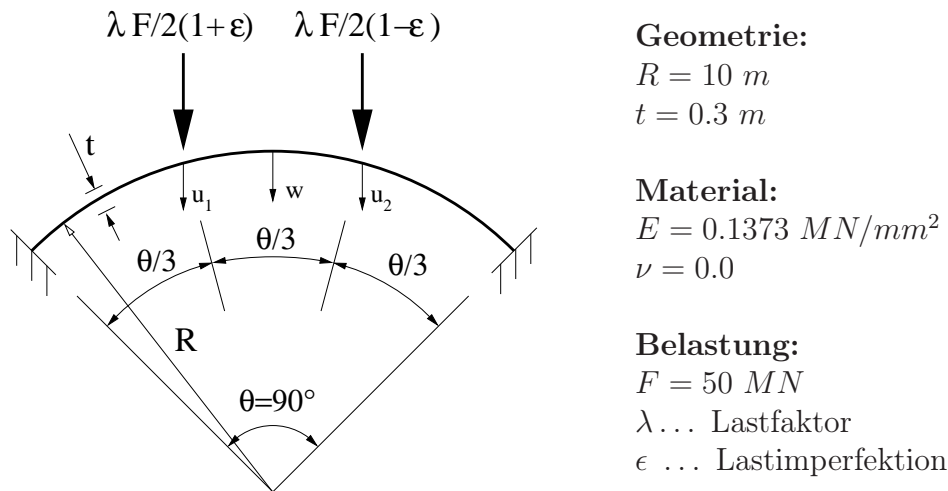


Abbildung 7.3: Geometrie und Materialdaten des Bogens unter zwei Einzellasten.

druck, als würden zwischen zwei Ästen mit stabilen Gleichgewichtslagen drei Äste mit instabilen Gleichgewichtslagen vorliegen, die sich bei $w \approx 2.5 \text{ m}$ schneiden. Zum Zwecke einer eindeutigen Zuordnung der Pfade und der Verformungsfiguren, werden hier die Verschiebungen der Lastangriffspunkte u_1 und u_2 analog zu einem Vorschlag von VIELSACK und Koautoren [87] zu zwei neuen Freiheitsgraden ξ und η zusammengefasst:

$$\xi = u_1 + u_2 \quad (7.18)$$

$$\eta = u_1 - u_2.$$

Bei Auftragung der Gesamtlast über die neuen Freiheitsgrade nach Gl. (7.18) ergibt sich der Last-Verformungsverlauf in Abb. 7.5. Die Darstellung des Tragverhaltens ist nun wesentlich differenzierter, obgleich nur zwei der Freiheitsgrade hierzu herangezogen wurden. Der Vorteil der neuen Darstellung liegt darin, dass nun jeder Verformungsfigur ein eigener Pfad zugeordnet ist: dem symmetrischen Durchschlagen die Kurve bei $\eta \equiv 0$, da in diesem Fall $u_1 = u_2$ gilt, und jeder der asymmetrischen Verformungsfiguren jeweils eine eigene Kurve: $\eta > 0$ für $u_1 > u_2$ und $\eta < 0$ für $u_1 < u_2$. Weiterhin wird durch die neue Darstellung sichtbar, dass die unterschiedlichen Pfade nur in den Verzweigungspunkten miteinander verbunden sind.

Noch deutlicher wird der Vorteil der Verwendung der Freiheitsgrade nach Gl. (7.18) bei Untersuchungen des Kreisbogens mit Imperfektionen. Für eine kleine Imperfektion $\epsilon = 1 \cdot 10^{-2}$ ergeben sich die Last-Verformungsverläufe in Abb. 7.6. Hier zeigt sich, dass durch eine ungünstige Wahl des Freiheitsgrades – hier u_2 – eine Interpretation des Last-Verformungsverlaufs hinsichtlich des Abstandes vom stabilen zum instabilen Pfad zur Beurteilung der Sensitivität unmöglich wird.

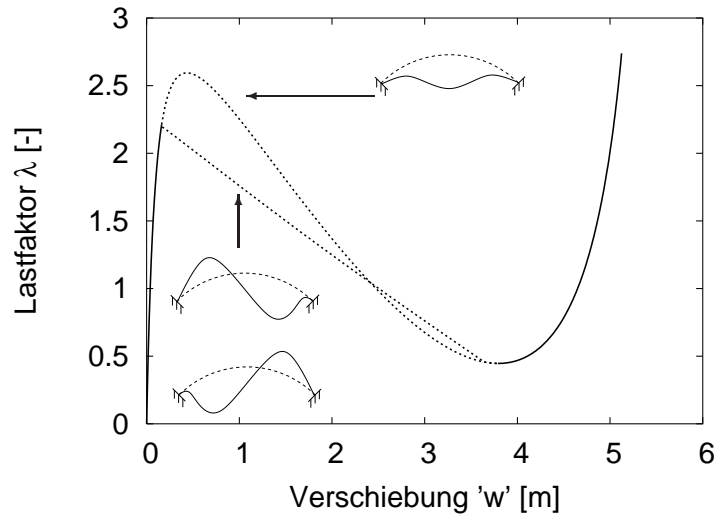


Abbildung 7.4: Last-Verformungsverhalten des Bogens unter zwei Einzellasten.

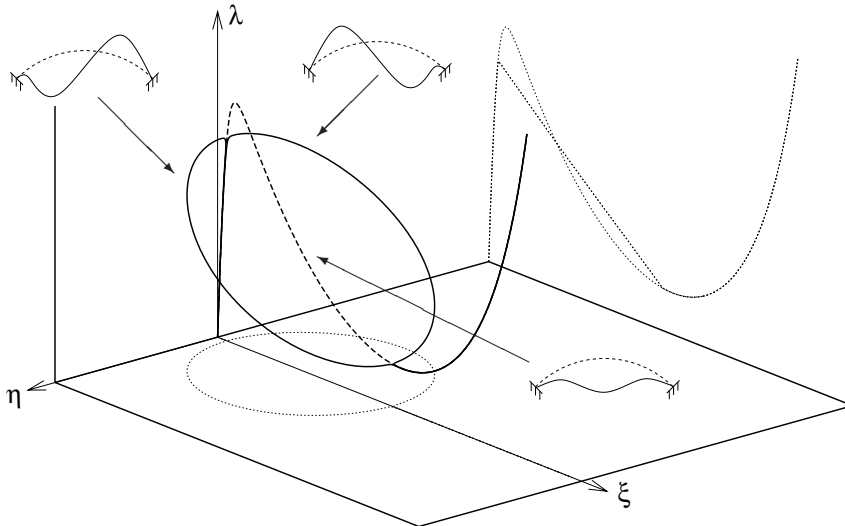


Abbildung 7.5: Last-Verformungsverhalten des Bogens unter zwei Einzellasten; Darstellung mit den nach Gl. (7.18) definierten Freiheitsgraden.

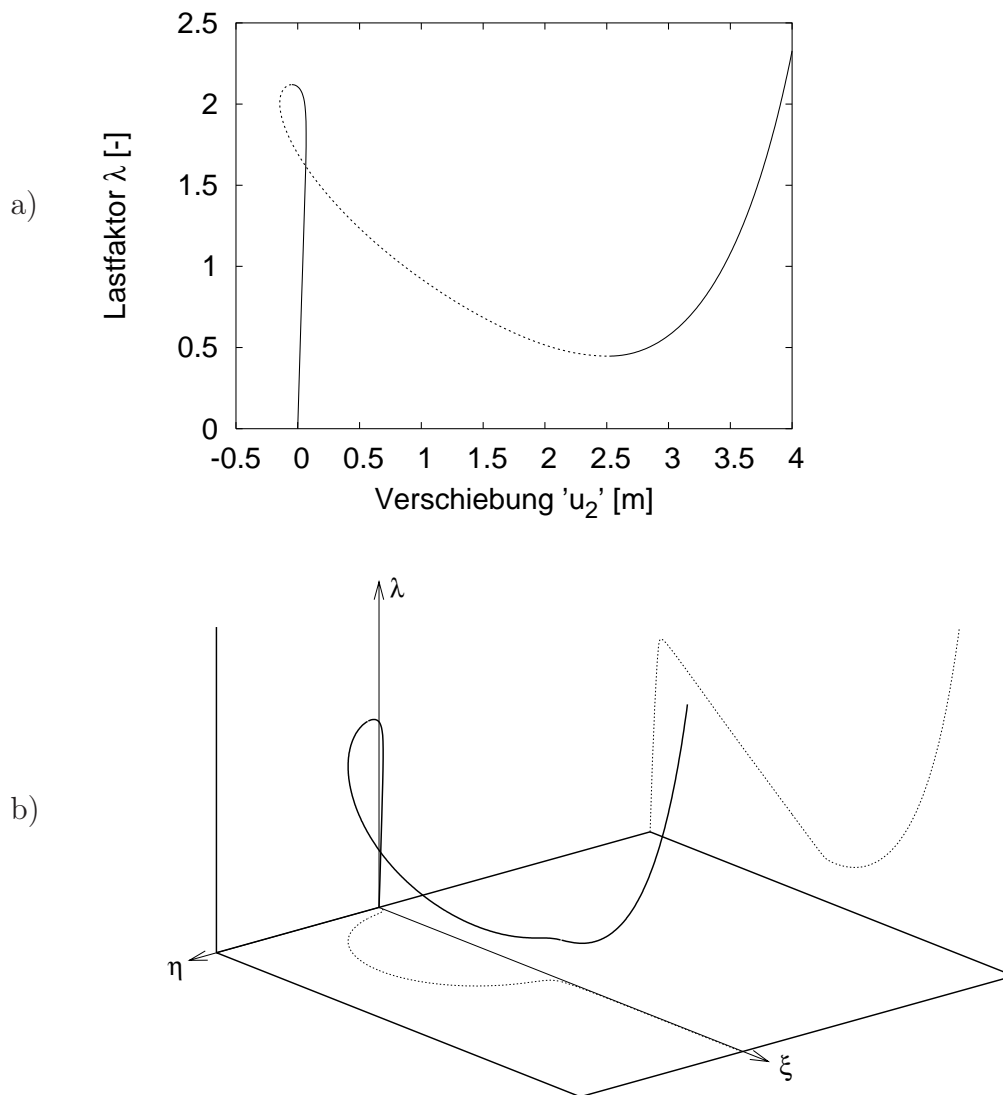


Abbildung 7.6: Last-Verformungsverhalten des Bogens unter zwei Einzellasten mit der Lastimperfektion $\epsilon = 1 \cdot 10^{-2}$, aufgetragen a) über die Verschiebung u_2 und b) über ξ und η nach Gl. (7.18).

7.3.2 Sensitivitätsuntersuchungen

Die Untersuchung der Sensitivität erfolgt nach dem Algorithmus, der bereits in Abschnitt 7.1 dargestellt wurde:

- Bestimmung der Gleichgewichtslage bei der Ziellast $\lambda_0 F$.
- Aufbringen der Störung in Form eines Geschwindigkeitsvektors $\alpha \dot{\mathbf{d}}_0$ und Bestimmung der Störenergie nach Gl. (7.3).
- Bestimmung der Bewegung nach der Störung bei konstant gehaltener Last $\lambda_0 F$.
- Iterative Bestimmung der kleinsten Störenergie $W_{stör,min} = W_{kin,min}$, wobei die Größe der Störung über die Änderung des Parameters α eingestellt wird. Die Sensitivität ergibt sich dann zu

$$S = \frac{1}{W_{stör,min}}.$$

Der sensitive Bereich stabiler Gleichgewichtslagen des Vorbeulpfades liegt für den vorliegenden Kreisbogen zwischen der kleinsten Nachbeullast $\lambda_{NB} \approx 0.5$ und dem Verzweigungspunkt $\lambda_{VZP} = 2.2$. An jeder Laststufe in diesem Bereich besitzt das System mehrere Gleichgewichtslagen s. Abb. 7.4. Am Beispiel der stabilen Gleichgewichtslage bei der Laststufe $\lambda_0 = 1.5$, die in diesem Bereich liegt, wird zunächst die Verwendbarkeit der im vorhergehenden Abschnitt vorgeschlagenen Liapunov Exponenten untersucht. Wichtig für die Untersuchung der Bewegung nach Aufbringung der Störung ist die Tatsache, dass der Bogen bei dieser Laststufe fünf Gleichgewichtslagen, die fünf unterschiedlichen Verformungszuständen zugeordnet sind, aufweist, s. Abb. 7.7.

Als Störvektor wird die asymmetrische Geschwindigkeitsverteilung affin zu der ersten Schwingungseigenform Φ_1 gewählt; Untersuchungen zum Einfluß der Wahl unterschiedlicher Störformen werden weiter unten beschrieben. Die Schwingungseigenform Φ_1 ergibt sich als Lösung von

$$(\mathbf{K}_{T,0} - \omega_i^2 \mathbf{M}) \Phi_i = 0 \tag{7.19}$$

für $i = 1$. Hierbei ist $\mathbf{K}_{T,0}$ die tangentielle Steifigkeitsmatrix des unbelasteten Systems, \mathbf{M} ist die Massenmatrix und ω_i^2 sind die zu den Eigenformen Φ_i zugehörigen Eigenwerte. Es sei angemerkt, dass die Eigenform Φ_1 eine ähnliche Gestalt hat, wie die Verzweigungsform Φ_{VZP} in Abb. 7.8. Bei der gewählten Laststufe von $\lambda_0 = 1.5$ ergibt sich nach einer iterativen Berechnung die minimale Störenergie, bei der das System in den Nachbeulbereich wechselt, zu $W_{stör,min} = 19.5 \text{ MNm}$.

Zur Visualisierung von Bewegungen werden üblicherweise Phasendiagramme herangezogen. Hierbei werden die Geschwindigkeiten über den Verschiebungen aufgetragen. In Abb. 7.9 und 7.10 sind die Phasendiagramme zu den Bewegungen nach der Störung mit $W_{stör} = W_{stör,min} = 19.5 \text{ MNm}$ und nach einer kleineren Störung $W_{stör} = 19.4 \text{ MNm}$

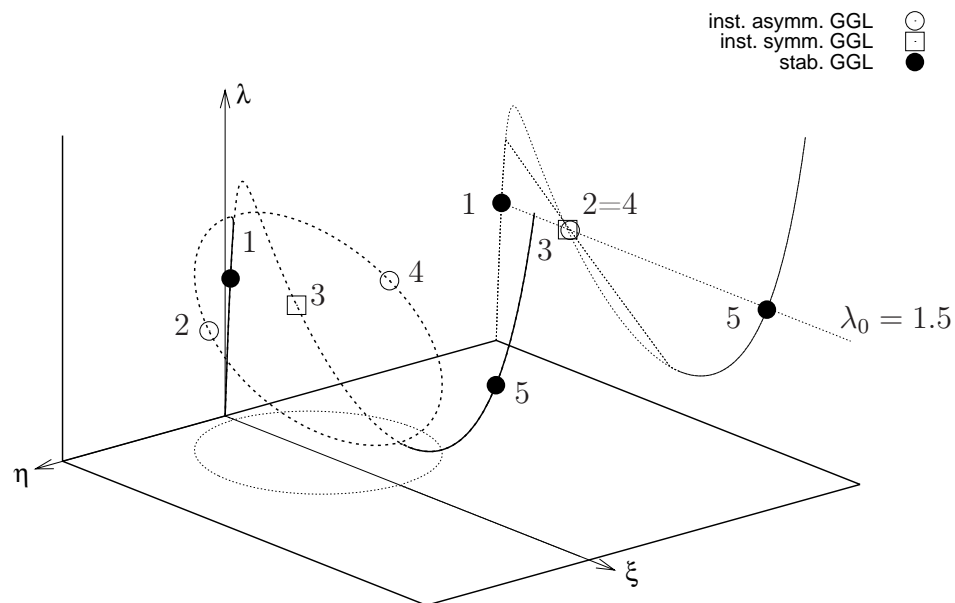


Abbildung 7.7: Last-Verformungskurve des Bogens unter zwei Einzellasten und die Lage der Gleichgewichtspunkte bei Lastniveau $\lambda = 1.5$.

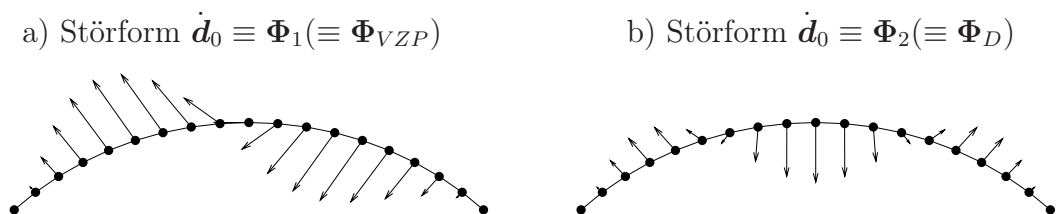


Abbildung 7.8: Störformen affin zur ersten (a)) bzw. zweiten (b)) Schwingungseigenform (Lösungen von 7.19).

dargestellt. Hierbei werden zwei unterschiedliche Phasenräume verwendet: zum einen der Phasenraum der Koordinate ξ und zum anderen der Phasenraum der Verschiebung u_2 . In beiden Darstellungen ist deutlich sichtbar, dass die Struktur den Einzugsbereich der Gleichgewichtslage "1" für Störenergien größer als 19.4 MNm verlässt und gegen die Gleichgewichtslage "5" im Nachbeulbereich konvergiert. Diesmal zeigt sich die Auftragung im Phasenraum der Verschiebung u_2 als die bessere Variante, da hier das Passieren der instabilen Gleichgewichtslage "4" auf dem Weg in den Nachbeulbereich etwas besser zu erkennen ist.

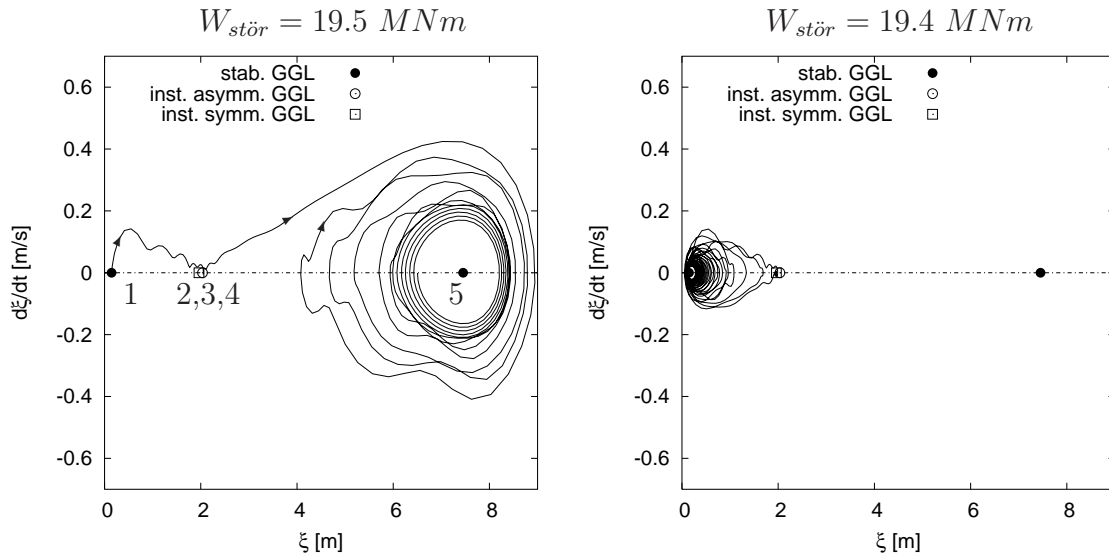


Abbildung 7.9: Phasendiagramm im ξ - $\dot{\xi}$ -Raum für den Kreisbogen beim Lastniveau $\lambda = 1.5$ für Störenergien $W_{stör} = 19.5 \text{ MNm}$ und $W_{stör} = 19.4 \text{ MNm}$.

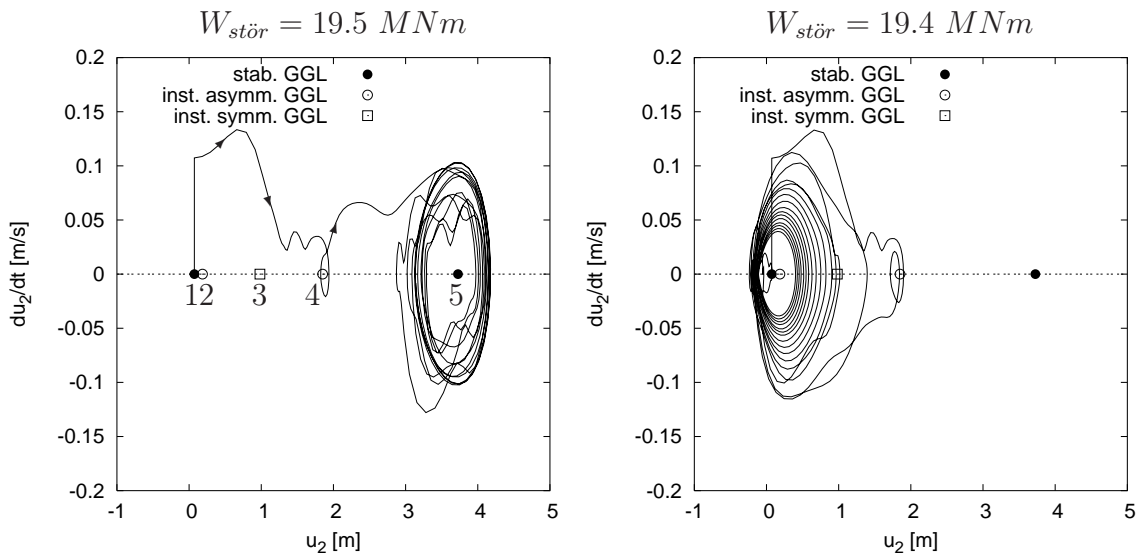


Abbildung 7.10: Phasendiagramm im u_2 - \dot{u}_2 -Raum für den Kreisbogen beim Lastniveau $\lambda = 1.5$ für Störenergien $W_{stör} = 19.5 \text{ MNm}$ und $W_{stör} = 19.4 \text{ MNm}$.

Im folgenden wird die Anwendbarkeit der im Abschnitt 7.2 vorgeschlagenen Liapunov Exponenten (LE) überprüft. Da bei diesem Beispiel die Verwendung der Verschiebungsfreiheitsgrade zu einer eindeutigen Identifikation der Bewegung in den Phasendiagrammen führt, werden zur Bestimmung des LE mit einem Freiheitsgrad nach Gl. (7.16) nicht die Freiheitsgrade ξ und η sondern drei unterschiedliche Verschiebungen verwendet: zum einen wird der zeitliche Verlauf des Exponenten für die vertikale Verschiebung w des Scheitelpunktes und zum anderen für die vertikalen Verschiebungen u_1 und u_2 der Lastangriffspunkte bestimmt. Die Ergebnisse für eine kleine Störenergie $W_{stör} = 2.75 \text{ MNm}$ sind in Abb. 7.11 aufgetragen. Es zeigt sich, dass der LE für alle

7.3. SENSITIVITÄTSUNTERSUCHUNGEN AM KREISBOGEN UNTER ZWEI EINZELLASTEN

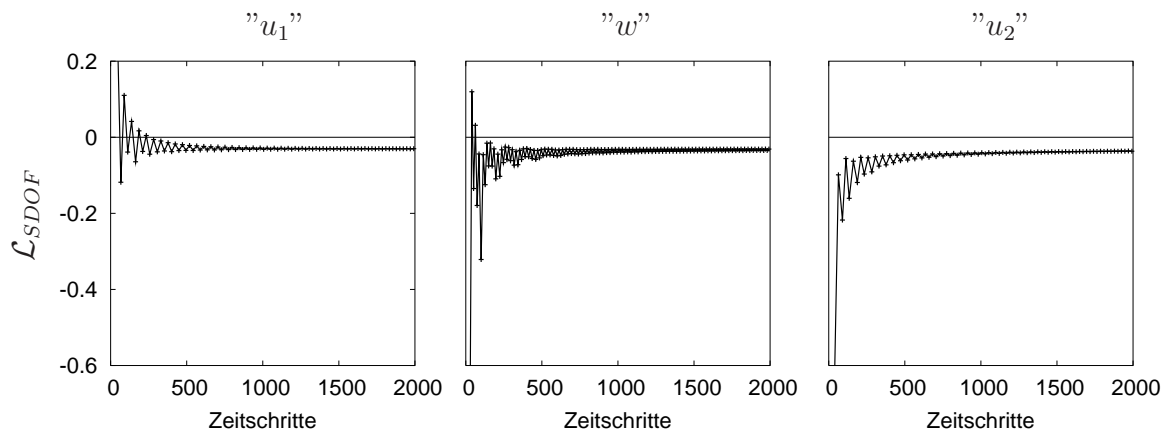


Abbildung 7.11: Zeitlicher Verlauf des Exponenten \mathcal{L}_{SDOF} nach Gl. (7.16) für unterschiedliche Wahl des charakteristischen Freiheitsgrades u_1 , w und u_2 ; kleine Störenergie $W_{stör} = 2.75 \text{ MNm}$.

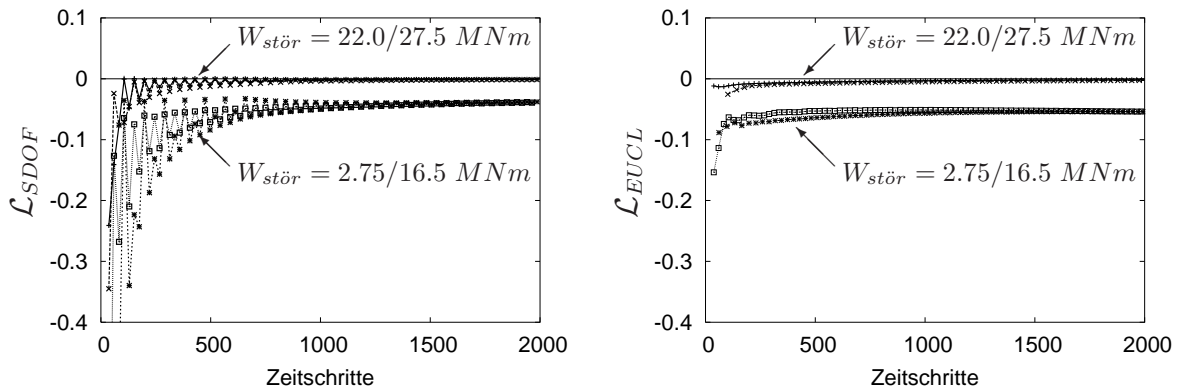


Abbildung 7.12: Zeitlicher Verlauf des Exponenten \mathcal{L}_{SDOF} nach Gl. (7.16) für die Verschiebung u_2 (links) und \mathcal{L}_{EUCL} nach Gl. (7.17) (rechts) für unterschiedliche Störenergien $W_{stör} = 2.75/16.5/22.0/27.5 \text{ MNm}$.

verwendeten Freiheitsgrade gegen den gleichen Wert von $\mathcal{L} \approx -0.03$ konvergiert und damit korrekt die "stabile Situation" indiziert. Berechnungen mit unterschiedlichen Störenergien zeigen, dass sowohl die Variante bei der Berechnung des LE nach Gl. (7.16) basierend auf einem FHG, hier u_2 , als auch die Variante mit der Euklidischen Norm nach Gl. (7.17) stets die Situation richtig indizieren, siehe Abb. 7.12. Allerdings konvergiert der Exponent, der auf der Euklidischen Norm des gesamten Verschiebungsvektors basiert, wesentlich schneller, und ermöglicht damit eine frühere Information und Beurteilung während der Berechnung.

Im nächsten Schritt wird der Einfluss unterschiedlicher Störvektoren auf die Sensitivität untersucht. Wie bereits oben dargestellt, besitzt der hier untersuchte Kreisbogen im sensitiven Lastbereich fünf Gleichgewichtslagen: jeweils eine stabile Gleichgewichtslage im Vor- und Nachbeulbereich, sowie drei instabile Gleichgewichtslagen, s. Abb. 7.7. Demnach kann die Struktur bei einer ausreichend großen Störung auf drei unterschiedlichen Wegen vom Vorbeulbereich in den Nachbeulbereich gelangen. Es ist

offensichtlich, dass diese Wege durch die Wahl der Geschwindigkeitsverteilung des Störvektors bestimmt werden: wird der Störvektor affin zu der symmetrischen Beulform gewählt, so beult die Struktur auf dem Weg 1-3-5, bei einer asymmetrischen Geschwindigkeitsverteilung auf den Wegen 1-2-5 oder 1-4-5, siehe Abb. 7.13. Wie oben erwähnt, führt die Störung mit der asymmetrischen Form Φ_1 zur minimalen Störenergie $W_{stör,min}(\Phi_1) = 19.5 MNm$. Versucht man den Stabilitätsgrad anhand des Abstandes der stabilen Gleichgewichtslage 1 zur nächsten instabilen Gleichgewichtslage, d.h. zu Gleichgewichtslagen 2, 3 oder 4, abzuschätzen, so wird für eine symmetrische Störform Φ_2 eine kleinere Störenergie erwartet. Die Berechnungen zeigen allerdings, dass trotz des augenscheinlich kleineren Abstandes nach Abb. 7.13 die symmetrische Geschwindigkeitsverteilung in der Störform zu einer 1.5-fachen minimalen Störenergie von $W_{stör,min}(\Phi_2) = 31.7 MNm$ führt. Dies zeigt, dass die Abschätzung des Stabilitätsgrades über den Abstand von stabilen zu instabilen Ästen keine zuverlässige quantitative Aussage darstellt, und die Sensitivitätsuntersuchungen, wie sie im Rahmen dieser Arbeit durchgeführt werden, eine deutlich bessere Aussagekraft besitzen.

Abschließend wird die Sensitivität des Bogens für den gesamten sensitiven Lastbereich für beide Störformen bestimmt. Das Ergebnis ist in Abb. 7.14 in einer normierter Form aufgetragen. Die Normierung erfolgt in der Form, dass die Last auf der Ordinatenachse mit der Verzweigungslast normiert wird: $\tilde{\lambda} = \lambda/\lambda_{VZP}$. Da die Sensitivität am Verzweigungspunkt unendlich groß wird, gilt nun $\tilde{S} \rightarrow \infty$ für $\tilde{\lambda} \rightarrow 1.0$. Die Normierung der Störenergie erfolgt mit der Verzerrungsenergie am Verzweigungspunkt: $\tilde{S} = 1/\tilde{W}_{stör}$ mit $\tilde{W}_{stör} = W_{stör}/W_{VZP}$, um einen einheitenfreien Wert für die Sensitivität zu erhalten. Demnach bedeutet die Sensitivität $\tilde{S} = 1.0$, dass die Struktur erst bei einer Störung gleich der Verzerrungsenergie am Verzweigungspunkt in den Nachbeulbereich wechselt. Der Verlauf der Sensitivität in Abb. 7.14 zeigt, dass der sensitive Lastbereich sehr groß ist, was aber bereits aus der Betrachtung des Last-Verformungsverlaufs in Abb. 7.4 ersichtlich ist. Allerdings ist der Wert der Sensitivität gemessen an der Verzerrungsenergie am Verzweigungspunkt im gesamten Bereich sehr niedrig. Beispielsweise wird $\tilde{S} = 1.0$ erst bei $\lambda \approx 0.8\lambda_{VZP}$ erreicht. Lediglich in unmittelbarer Nähe zum Verzweigungspunkt steigt die Sensitivität stark an. Interessant ist die Tatsache, dass bei niedrigen Laststufen der Wert der Sensitivität nahezu unabhängig von der Störform ist. Für die praktische Bestimmung der Sensitivität bedeutet es, dass die Störform beliebig gewählt werden kann, wenn die Untersuchung für den unteren Lastbereich durchgeführt wird.

7.3. SENSITIVITÄTSUNTERSUCHUNGEN AM KREISBOGEN UNTER ZWEI EINZELLASTEN

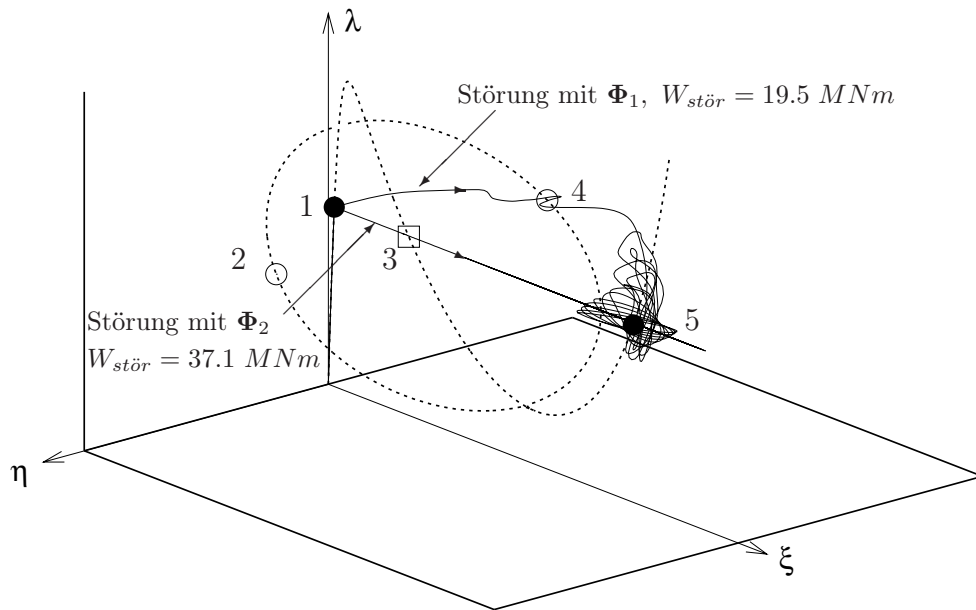


Abbildung 7.13: Verschiebungszustände für die Freiheitsgrade ξ und η des Bogens unter zwei Einzellasten nach Aufbringen der Störung bei Lastniveau $\lambda = 1.5$.

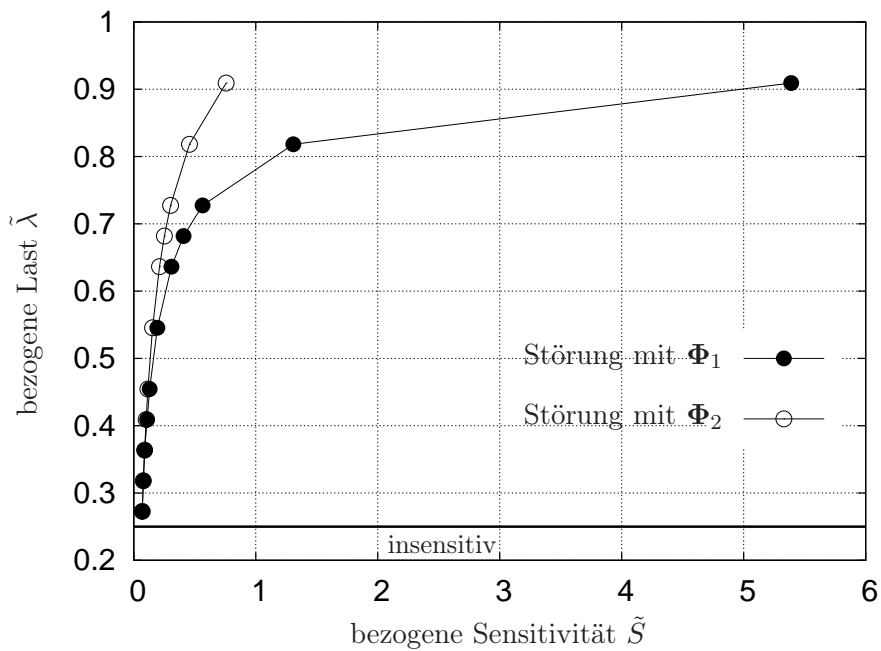


Abbildung 7.14: Sensitivität für den Kreisbogen unter zwei Einzellasten für zwei unterschiedliche Störformen, nach Abb. 7.8.

7.4 Sensitivitätsuntersuchungen an Kreiszyklindern unter axialer Druckbeanspruchung

Nachdem die vorgeschlagene Vorgehensweise bei der Bestimmung der Sensitivität im vorhergehenden Abschnitt am Beispiel eines Kreisbogens getestet wurde, erfolgen im vorliegenden Abschnitt Untersuchungen an Kreiszyklindern unter axialer Drucklast.

7.4.1 Verwendung von Liapunov Exponenten

Zunächst wird die Verwendbarkeit der im Abschnitt 7.2 vorgeschlagenen Exponenten zur Beurteilung der Bewegung nach Aufbringen der kinetischen Störung am Beispiel des imperfekten Zylinders AL1100 betrachtet. Hierzu wird das FE-Modell mit direkter Vernetzung der gemessenen Punkte der imperfekten Geometrie mit bilinearen Elementen (ANS4) verwendet. Für diese Vernetzung kann die obere Grenze des sensitiven Bereichs mit $F = 165 \text{ kN}$, und die untere Grenze mit etwa $F = 30 \text{ kN}$ angegeben werden, s. Abschnitt 5.3. Die Verteilung der Geschwindigkeiten des Störvektors wird zunächst analog zu den Untersuchungen am Kreisbogen in Abschnitt 7.3 affin zur ersten Schwingungseigenform des unbelasteten Systems $\Phi_{1,0}$ gewählt, s. Abb. 7.17. Der Einfluß der Wahl der Störform auf die Sensitivität wird weiter unten diskutiert.

Beispielhaft wird das Verhalten bei der Laststufe $F = 100 \text{ kN}$ untersucht. Die iterative Bestimmung der kritischen Störenergie bei dieser Laststufe ergibt $W_{stör,min} = 1.35 \text{ Nm}$. Wie die Phasendiagramme in Abb. 7.15 zeigen, konvergiert die Bewegung für kleinere Störenergien zur Ausgangsgleichgewichtslage zurück. Für Störenergien $W_{stör} \geq 1.35 \text{ Nm}$ findet nach dem Verlassen des Einzugsbereichs der untersuchten Gleichgewichtslage eine unbegrenzt anwachsende Bewegung statt, bis die Berechnung nicht mehr konvergiert. Auch wenn hier eventuell eine Gleichgewichtslage im Nachbeulbereich existiert, ist sie wohl weiter entfernt, als es das Modell abzubilden vermag.

Zur Bestimmung des Exponenten \mathcal{L}_{SDOF} mit einem charakteristischen FHG nach Gl. (7.16) wird die vertikale Verschiebung des oberen Randes als charakteristischer Freiheitsgrad gewählt. Die Ergebnisse für die zeitlichen Verläufe für die Exponenten \mathcal{L}_{SDOF} und \mathcal{L}_{EUCLE} für unterschiedliche Störenergien in Abb. 7.16 zeigen, dass im Falle der "stabilen Situation", d.h. $W_{stör} < 1.35 \text{ Nm}$ die Exponenten korrekterweise einen negativen Wert annehmen. Für den Fall der "instabilen Situation" konnten nicht ausreichend viele Exponenten berechnet werden, da die Struktur nach wenigen Schwingungen den Einzugsbereich der Ausgangsgleichgewichtslage verlässt und im Weiteren eine unbegrenzt anwachsende Bewegung ohne weitere Schwingungen ausführt. Im Gegensatz zu den Untersuchungen am Kreisbogen, zeigt sich hier eine sehr langsame Konvergenz der Exponenten. Im Falle des Exponenten \mathcal{L}_{SDOF} ist kaum eine Konvergenz feststellbar, und im Falle von \mathcal{L}_{EUCLE} sind lange Rechenzeiten zur Feststellung der Konvergenz erforderlich.

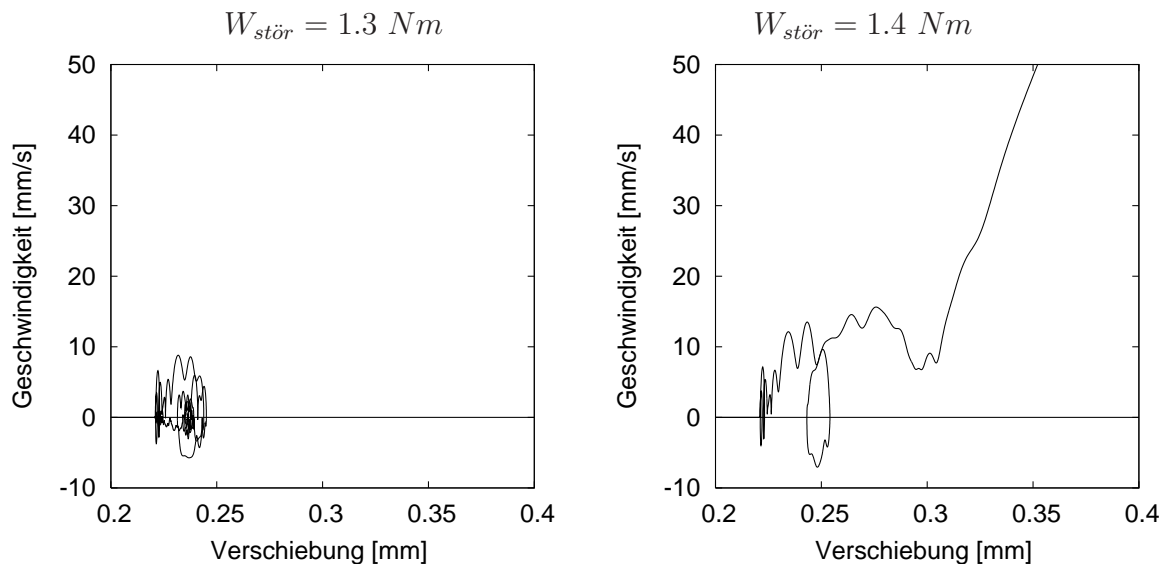


Abbildung 7.15: Phasendiagramme für den Kreiszylinder AL1100 unter axialer Drucklast bei Laststufe $F = 100 kN$ für zwei unterschiedliche Störenergien; Störung affin zur ersten Schwingungseigenform, Phasenraum der vertikalen Verschiebung des oberen Randes.

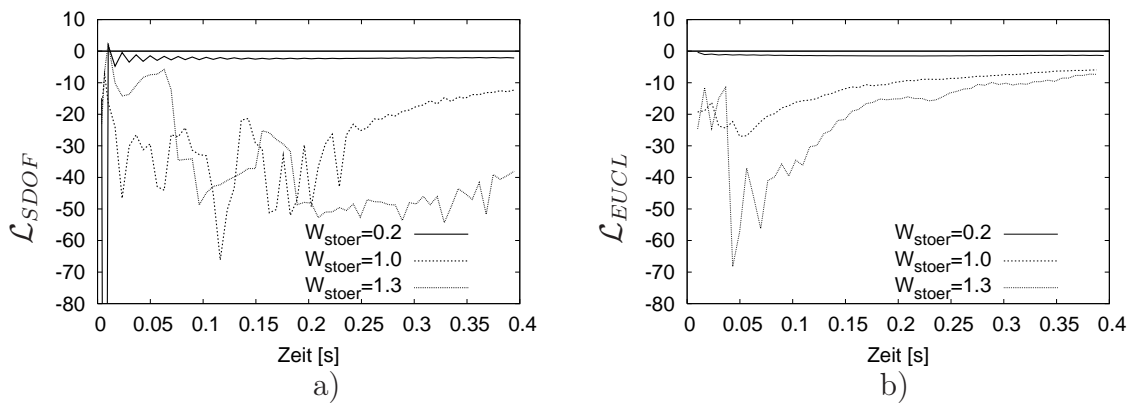


Abbildung 7.16: Zeitlicher Verlauf der Exponenten a) \mathcal{L}_{SDOF} und b) \mathcal{L}_{EUCL} für den Kreiszylinder AL1100 unter axialer Drucklast bei der Laststufe $F = 100 kN$ für unterschiedliche Störenergien; Störung affin zur ersten Schwingungseigenform des unbelasteten Systems $\Phi_{1,0}$.

7.4.2 Variation der Form des Störvektors

Die Sensitivität wird bei unterschiedlichen Laststufen für vier unterschiedliche Störformen, d.h. Formen für die Verteilung der Geschwindigkeiten des Störvektors, bestimmt. Die verwendeten Störformen sind in Abb. 7.17 dargestellt. Sie basieren alle auf Deformationsmoden, die für das Verhalten des Zylinders bezüglich Beulen wesentlich sind.

Bekanntermaßen lässt sich eine Struktur in der niedrigsten Eigenform mit dem geringsten Widerstand verformen. Aus diesem Grund sind zwei der verwendeten Geschwindigkeitsverteilungen $\Phi_{1,Last}$ und $\Phi_{1,0}$ affin zu Schwingungseigenformen, d.h. Lösungen des Eigenwertproblems

$$(\mathbf{K}_T(\lambda) - \omega_i^2 \mathbf{M}) \Phi_i = \mathbf{0}. \quad (7.20)$$

Bei der Bestimmung von $\Phi_{1,Last}$ wird die Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_T(\lambda = \lambda_0)$ am betrachteten Lastniveau verwendet. $\Phi_{1,Last}$ ist dann die zum ersten Eigenwert ω_1^2 gehörende Eigenform. Bei der Bestimmung von $\Phi_{1,0}$ wird das Eigenwertproblem (7.20) für das unbelastete System gelöst, d.h. mit der Anfangssteifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_T(\lambda = 0)$. Die Form $\Phi_{1,0}$ kann als eine Näherung für $\Phi_{1,Last}$ interpretiert werden und ist im weiten Lastbereich dieser sehr ähnlich.

Weitere Möglichkeiten zur Wahl der Geschwindigkeitsverteilung stellen die Beulform am singulären Punkt $\Phi_{1,S}$ sowie die bei der transienten Analyse ermittelte Nachbeulform Φ_{Beul} dar.

Für alle vier dargestellten Störformen ist die Sensitivität für den gesamten sensitiven Bereich ermittelt worden. Nachfolgend werden die Ergebnisse exemplarisch zunächst für zwei Laststufen $F = 50 \text{ kN}$ und $F = 100 \text{ kN}$ diskutiert.

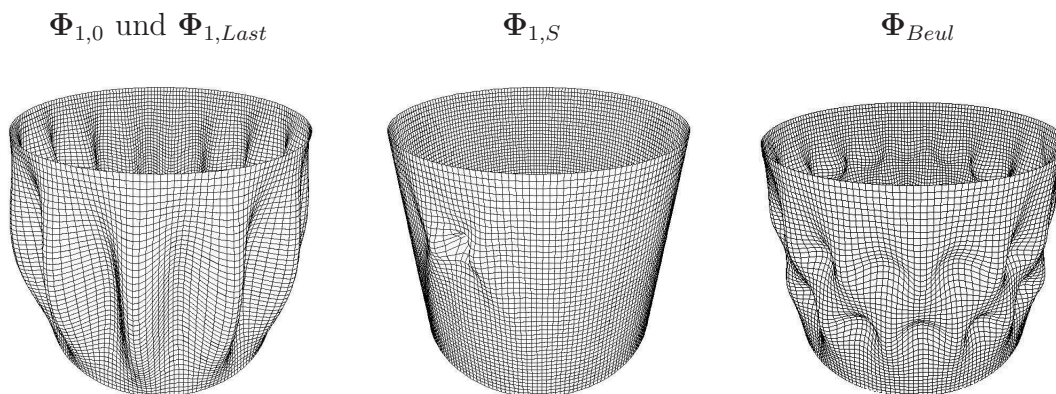


Abbildung 7.17: Störformen für den Kreiszylinder AL1100.

Sensitivität bei 50 kN

Die Laststufe von $F = 50 \text{ kN}$ liegt am unteren Ende des sensitiven Bereichs, s. Abschnitt 5.3. Erwartungsgemäß ergibt sich hier ein sehr kleiner Wert für die Sensitivität gegenüber Störungen, d.h. es wird eine sehr große Störenergie benötigt, um den Einzugsbereich der untersuchten Gleichgewichtslage zu verlassen. Dies geschieht bei der zu $\Phi_{1,0}$ affinen Störform erst bei einer Störenergie von $W_{stör,min} = 1400 \text{ Nm}$, d.h. bei einem ca. 47-fachen Wert verglichen mit der Verzerrungsenergie am singulären Punkt $F_S = 165 \text{ kN}$, die $W_S \approx 30 \text{ Nm}$ beträgt. Interessant ist die Beobachtung, dass nach Verlassen des Einzugsbereichs der ursprünglichen Gleichgewichtslage unterschiedliche stabile Gleichgewichtslagen im Nachbeulbereich angesteuert werden, Abb. 7.18. Dies

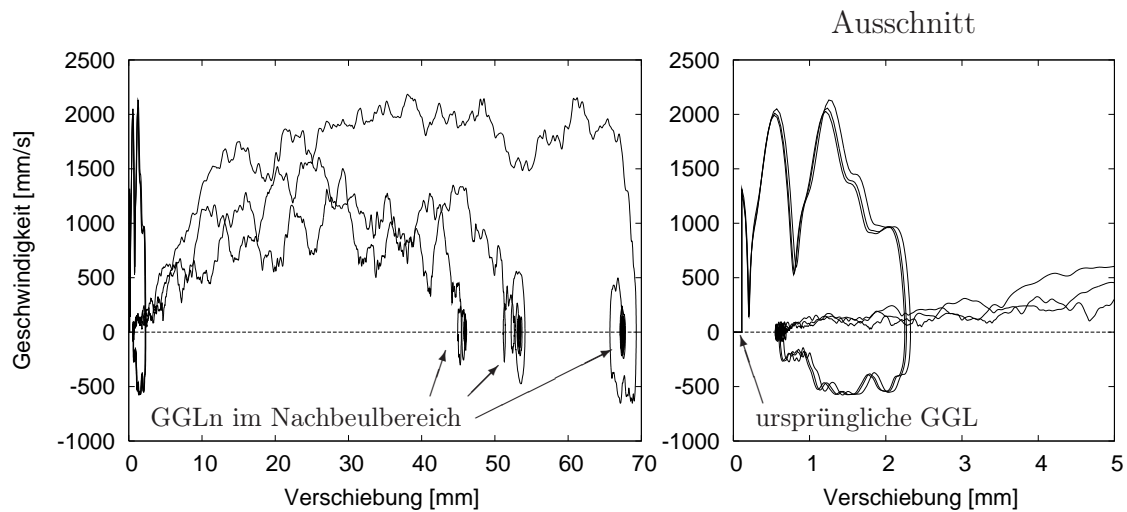


Abbildung 7.18: Phasendiagramme für den Zylinder AL1100 unter axialer Drucklast für drei unterschiedliche Störenergien $W_{stör} = 390/400/425 \text{ Nm}$; Störung affin zur Verformung im Nachbeulbereich Φ_{Beul} ; GGL=Gleichgewichtslage.

korreliert sehr gut mit den Ergebnissen der transienten Untersuchungen in Abschnitt 5.3.5, wo mehrere stabile Gleichgewichtslagen im Nachbeulbereich beobachtet wurden. Allerdings sind die im Rechenmodell ermittelten zugehörigen Verformungen so groß, dass bei einer realen Struktur ein Plastizieren des Materials eintreten würde. In Tabelle 7.1 sind die Ergebnisse der Sensitivitätsuntersuchungen für alle Störformen bei dieser Laststufe dargestellt. Demnach reagiert die Struktur auf die Störung affin zur Beulform Φ_{Beul} am empfindlichsten. Allerdings beträgt hier die kritische Störenergie immer noch das 13-fache von W_S .

Störform	$\Phi_{1,0}$	$\Phi_{1,Last}$	Φ_S	Φ_{Beul}
Störenergie $W_{stör,min} \text{ [Nm]}$	1400	1200	1000	390
Sensitivität $[(Nm)^{-1}]$	0.0007	0.0008	0.001	0.0026

Tabelle 7.1: Störenergien $W_{stör,min}$ für den imperfekten Zylinder AL1100 für unterschiedliche Störformen bei Lastniveau $F = 50 \text{ kN}$.

Sensitivität bei 100 kN

Das Verhalten des Zylinders bei dieser Laststufe wurde bereits oben für den Störvektor affin zu $\Phi_{1,0}$ bei der Bestimmung der LE diskutiert. Diese Laststufe ist deutlich näher am singulären Punkt mit $F_S = 165 \text{ kN}$ und das Strukturverhalten weicht erheblich von dem bei der Laststufe $F = 50 \text{ kN}$ ermittelten Verhalten ab (s. Abb. 7.15). Erwartungsgemäß ergibt sich hier eine wesentlich höhere Sensitivität $S = 0.76 \text{ (Nm)^{-1}}$. Ein weiterer Unterschied zum Verhalten bei der Laststufe $F = 50 \text{ kN}$ liegt darin, dass die Struktur am empfindlichsten auf die Störung affin zu $\Phi_{1,Last}$ reagiert, siehe Tabelle 7.2.

Betrachtet man alle Ergebnisse zu den untersuchten Laststufen von $F = 30 \text{ kN}$ bis $F = 140 \text{ kN}$, Abb. 7.19, so läßt sich der untersuchte Bereich hinsichtlich der maßgebenden

Störform	$\Phi_{1,0}$	$\Phi_{1,Last}$	Φ_S	Φ_{Beul}
Störenergie $W_{stör,min}$ [Nm]	1.35	1.31	1.6	2.95
Sensitivität $[(Nm)^{-1}]$	0.74	0.76	0.63	0.34

Tabelle 7.2: Störenergien $W_{stör,min}$ für den imperfekten Zylinder AL1100 für unterschiedliche Störformen bei Lastniveau $F = 100 \text{ kN}$.

Störform in drei Teilbereiche einteilen. Im unteren Lastbereich für $35 \text{ kN} < F < 70 \text{ kN}$, d.h. in etwa auf dem Niveau der Nachbeullast, führt die Störung mit der Beulform Φ_{beul} zur größten Sensitivität. Bei höheren Laststufen bis ca $F = 100 \text{ kN}$ sind die Schwingungseigenformen $\Phi_{1,0}$ und $\Phi_{1,Last}$ maßgebend. Dabei unterscheiden sich die Ergebnisse für diese zwei Störformen in diesem Teilbereich kaum voneinander. Bei den Lasten in der unmittelbaren Nähe zur Beullast, reagiert die Struktur auf die Störung mit der Einzelbeule Φ_S , d.h. die Schwingungseigenform am singulären Punkt, am empfindlichsten.

Im nächsten Schritt wird der Einfluss unterschiedlicher Geometrien auf den Verlauf der Sensitivität untersucht. Hierzu wird der Verlauf der Sensitivität zusätzlich zum bereits untersuchten Zylinder AL1100 für zwei weitere Zylinder den AL850 und einen geometrisch perfekten Zylinder bestimmt. Die Geschwindigkeitsverteilung wird affin zur Schwingungseigenform des jeweiligen unbelasteten Zylinders gewählt. Bei der Auftragung der Ergebnisse normiert mit der klassischen kritischen Stabilitätslast in Abb. 7.20 zeigt sich, dass die Sensitivitätsverläufe nur im Lastbereich größer als ca. 30% der klassischen kritischen Stabilitätslast unterschiedlich sind. Unterhalb dieser Grenze hat die Sensitivität für alle drei untersuchte Zylinder ähnliche sehr niedrige Werte.

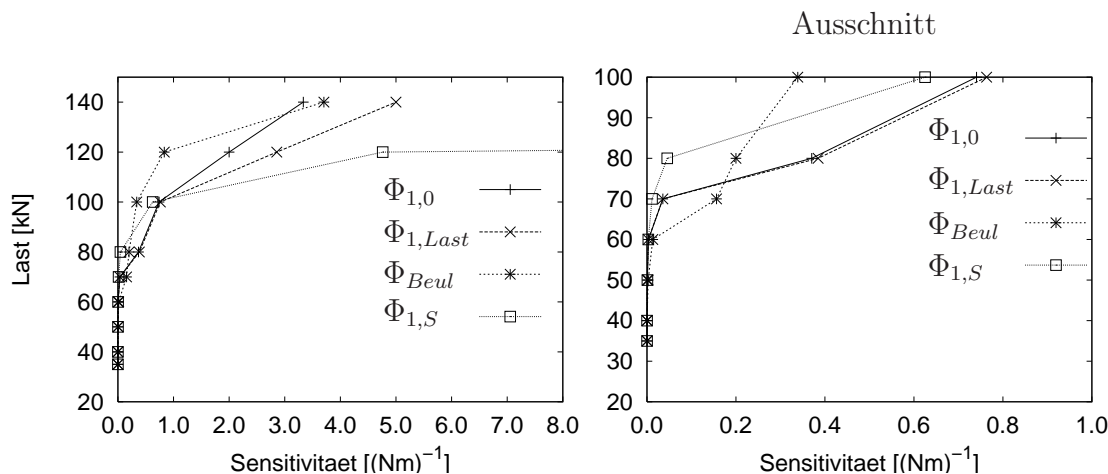


Abbildung 7.19: Sensitivität des Zylinders AL1100 unter axialer Drucklast für unterschiedliche Störvektoren.

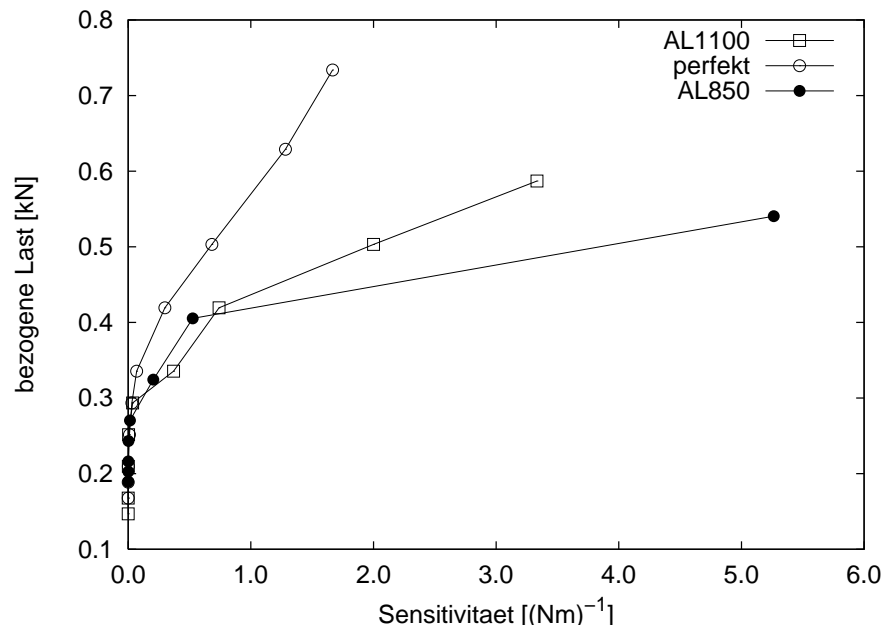


Abbildung 7.20: Sensitivität für Zylinder unter axialer Druckbeanspruchung für unterschiedliche Geometrien: AL1100, AL850 und perfekt; die Lasten auf der Ordinatenachse sind auf die klassische kritische Stabilitätslast bezogen.

7.5 Sensitivitätsuntersuchungen an Kreiszylindern unter Außendruck

Hier werden Kreiszyylinder unter Außendruck bezüglich der Sensitivität stabiler Gleichgewichtslagen untersucht. Aus den Analysen in Kapitel 6 ist ersichtlich, dass der sensitive Lastbereich hier wesentlich kleiner ist, als im Falle des axialen Drucks, da die transient ermittelte Nachbeullast für den Außendruck bei ca. 65% der statischen Beullast eines geometrisch perfekten Zylinders liegt.

Die Untersuchungen der Sensitivität erfolgen analog wie bei den Zylindern unter axialem Druck. Da die Last nach dem Aufbringen der Störung konstant bleiben soll, wird der Außendruck mit verteilten Oberflächenkräften und nicht mit dem Unterdruck modelliert. Als Randbedingungen werden an einem Zylinderrand alle Verschiebungen fest gehalten. Am anderen Zylinderrand werden die radialen Verschiebungen verhindert, die axialen Verschiebungen sind frei. Als Modell wird hier der mit 200x46 bilinearen Schalelementen (ANS4) vernetzte imperfekte Zylinder AL1100 verwendet. In Analogie zum vorhergehenden Kapitel erfolgt die Störung affin zum ersten Schwingungseigenvektor der unbelasteten Struktur Φ_0 , s. Abb. 7.17. Die Ergebnisse der Sensitivitätsuntersuchungen sind in Abb. 7.21 dargestellt. Erwartungsgemäß ergibt sich unterhalb der Nachbeullast die Sensitivität zu Null. Zwischen der Nachbeullast und der statischen Beullast steigt die Sensitivität stark an und strebt in der Nähe der statischen Beullast gegen Unendlich.

Im Gegensatz zum Fall des axialen Drucks sind alle Verformungszustände, die im Falle des Außendrucks für das Beulen des Kreiszylinders von Interesse sind – Eigenform am singulären Punkt, Verformungszustände im Nachbeulbereich – der betrachteten Schwingungsgeigenform sehr ähnlich. Deswegen und wegen des vergleichsweise kleinen sensitiven Bereichs und des schnellen Anstiegs der Sensitivität für die betrachtete Störform, kann hier auf die Untersuchung mit anderen Störformen verzichtet werden.

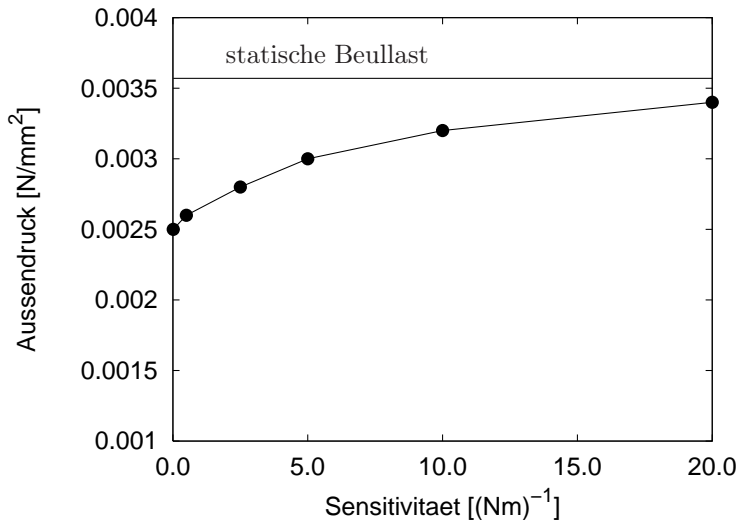


Abbildung 7.21: Sensitivität des Zylinders AL1100 unter Außendruck für die Störung mit einem zu Φ_0 affin verteilten Geschwindigkeitsvektor.

7.6 Vergleich mit den Bemessungsnormen

Für den nachfolgenden Vergleich werden im Falle des axialen Drucks die jeweils größten Werte der Sensitivität für unterschiedliche Störformen aus dem Abschnitt 7.4 und im Falle des Außendrucks die Sensitivitätswerte aus Abschnitt 7.5 über normierten Lasten aufgetragen. Dabei erfolgt die Normierung mit den klassischen kritischen Lasten und führt zu den Verläufen in Abb. 7.22.

Zunächst wird bei der gewählten Auftragung nochmals der Unterschied zwischen den beiden betrachteten Lastfällen deutlich: der sensitive Bereich ist im Falle des axialen Drucks wesentlich größer, als der für den Außendruck. D.h. bei entsprechender Störung kann der Zylinder im Falle der axialen Druckbeanspruchung bei einer niedrigeren bezogenen Last versagen, als bei der Außendruckbeanspruchung. Dies entspricht den experimentellen Beobachtungen und den Untersuchungen zum Verhalten im Nachbeulbereich aus der vorliegenden Arbeit.

Ein weiterer Unterschied besteht im Ansteigen des Wertes der Sensitivität innerhalb des sensitiven Bereichs. Im Falle des Außendrucks erfolgt dieser Anstieg sehr schnell. Im Falle der axialen Druckbeanspruchung hingegen ergeben sich unterhalb von 40%

der klassischen Beullast sehr niedrige Werte der Sensitivität, die erst für höhere Lasten ansteigen. Unterhalb der 25%-Marke ist die Sensitivität nahezu Null. Daher kann hier der Lastbereich bis zur 25%-Marke als *praktisch insensitiv* bezeichnet werden.

Der Vergleich mit den Bemessungslasten nach DIN 18800 Teil 4 und Eurocode 3 zeigt, dass die Bemessungslasten für beide Lastfälle erwartungsgemäß im Bereich der niedrigen Sensitivität liegen. Für beide Fälle scheinen die Bemessungslasten nach EC3 der Qualitätsklasse C zu konservativ, da sie im vollkommen insensitiven Lastbereich liegen. Hinsichtlich anderer Bemessungslasten unterscheiden sich allerdings die Ergebnisse für die zwei betrachteten Lastfälle voneinander.

Im Falle des Außendrucks liegen die Bemessungslasten nach DIN 18800 und EC3 (B) an der Grenze des sensitiven Bereichs und sind damit *seitens der Sensitivitätsbetrachtung* sinnvoll gewählt. Da die Sensitivität für diesen Lastfall sehr schnell ansteigt, erscheint eine Erhöhung der Bemessungslast über die Sensitivitätsgrenze hinaus ohne eine genaue Quantifizierung der Grenz-Sensitivität für den hier untersuchten Zylinder mittlerer Länge als nicht sinnvoll zu sein.

Im Falle des axialen Drucks stimmt die Grenze des *praktisch insensitiven Bereichs* überraschend gut mit der Bemessungslast nach EC3 der Qualitätsklasse A überein. Demnach wären die Bemessungslasten nach DIN 18800 und EC3 (B) als sehr konservativ einzustufen.

Diese Aussagen sind zunächst auf die Klasse der mittellangen Zylinder mit der hier untersuchten Schlankheit von $R/t = 1100$ beschränkt. Wie oben gezeigt, beginnt der sensitive Bereich stets bei der Laststufe, die der kleinsten Nachbeullast entspricht. Damit beschränken sich die Aussagen auf die Tragwerke, bei denen die Nachbeullasten unabhängig von den Imperfektionen sind. Diese Unabhängigkeit ist in der vorliegenden Arbeit zunächst für die radialen Formabweichungen gezeigt worden. Bei Berücksichtigung der Aufstandsimperfektionen ist allerdings unter Umständen mit dem Absinken der Nachbeullasten und damit mit Vergrößerung des sensitiven Bereichs zu rechnen. Dies könnte mit Hilfe transienter Betrachtungen, wie sie in der vorliegenden Arbeit durchgeführt wurden, überprüft werden. Zum anderen ist aber auch als Folge von Aufstandsimperfektionen eine Änderung im Verlauf der Werte der Sensitivität bei einer unveränderten Größe des Sensitivitätsbereichs denkbar, beispielsweise ein schnelleres Anwachsen der Sensitivität und damit eine Verkleinerung des oben genannten *praktisch insensitiven Bereichs*. Beides muss noch untersucht werden.

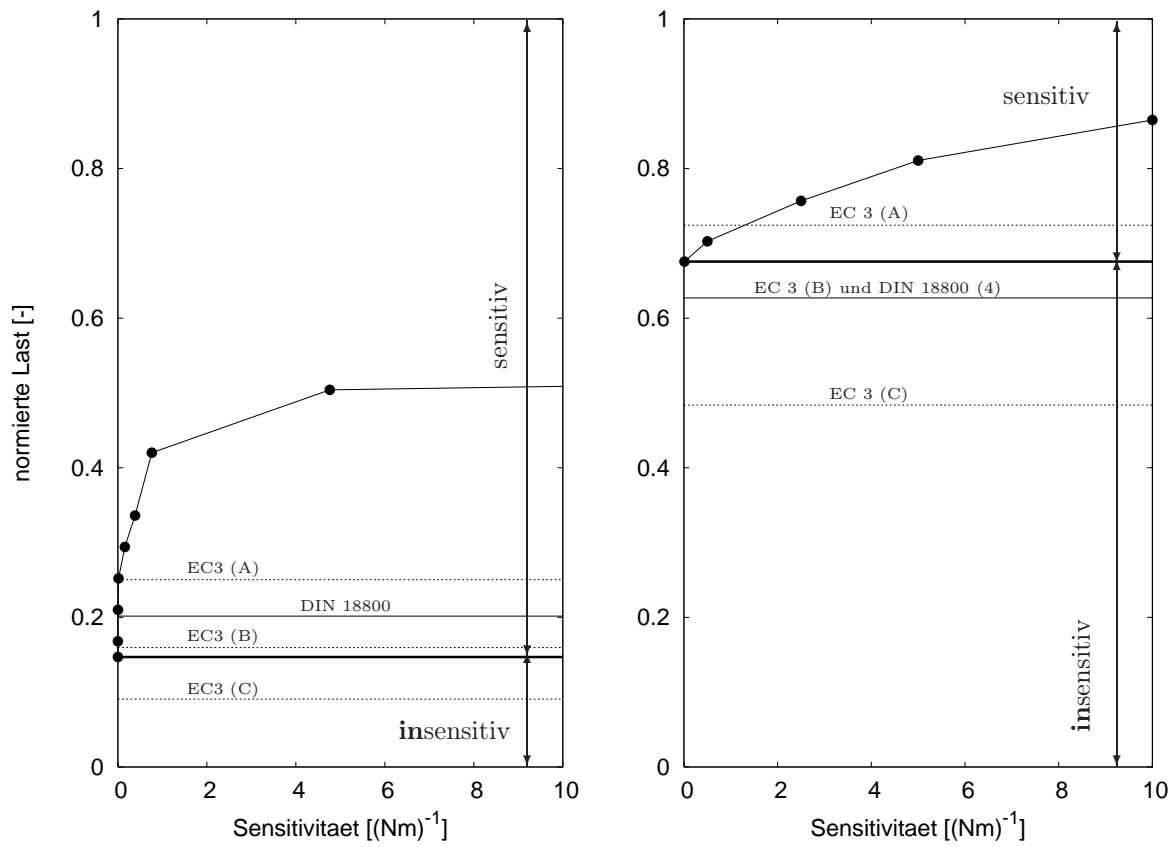


Abbildung 7.22: Sensitivität des Zylinders AL1100 unter Axiallast und Außendruck für die Störung mit einem zu Φ_0 affin verteilten Geschwindigkeitsvektor; die Lasten sind jeweils mit der klassischen kritischen Lasten normiert.

Kapitel 8

Zusammenfassung und Ausblick

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit dem Beulen von Kreiszyindern für die Lastfälle des axialen und des Außendrucks. Die Untersuchungen können in drei Themengebiete unterteilt werden:

1. Bestimmung der kritischen Lasten mit Hilfe statischer FE-Analysen.
2. Untersuchung des gesamten Beulverhaltens - Vor- und Nachbeulbereich - mit Hilfe transienter FE-Analysen.
3. Untersuchungen zur Sensitivität stabiler Gleichgewichtslagen des Vorbeulbereichs bei endlichen Störungen.

1. Stabilitätsuntersuchungen mittels statischer FE-Analysen

Die begrenzte Aussagekraft statischer Betrachtung bei Untersuchungen zu Strukturstabilität ist hinlänglich bekannt. Trotzdem wird die statische FE-Analyse in den modernen Bemessungsnormen bei der Nachweisführung dünnwandiger beulgefährdeter Strukturen zugelassen. Aus diesem Grund war es notwendig, in einem ersten Schritt nochmals die Verwendbarkeit der im Rahmen einer FE-Untersuchung zur Verfügung stehenden Algorithmen und Elemente im Hinblick auf die *Genauigkeit*, *Effizienz* und *Robustheit* zu überprüfen. Nach einem sorgfältigen Studium des Schrifttums wurde festgestellt, dass eine Bisektion in Kombination mit einer nichtlinearen Bestimmung des Last-Verformungspfades die größtmögliche Zuverlässigkeit bei der Ermittlung singulärer Punkte bietet. Andere Methoden – wenn auch augenscheinlich effizienter – versagen oft bei Problemen mit Verzweigungspunkten wie Kreiszyindern unter axialem Druck. Daher wurden die singulären Punkte in der vorliegenden Arbeit ausschließlich mit der Bisektions-Methode ermittelt.

Zunächst wurden Stabilitätsuntersuchungen für den bekanntermaßen hochsensitiven Fall des **Kreiszyinders unter axialer Druckbeanspruchung** durchgeführt. Das besondere Augenmerk lag hierbei auf dem Einfluss der Facettierung auf die Stabilitätslasten und Beulformen, die bei der Approximation gekrümmter Schalen mit Elementen niedriger Ansatzordnung entsteht. Hierzu wurde die Konvergenzgeschwindigkeit

der Lösung hinsichtlich der Stabilitätslasten und der Beulformen für einen geometrisch perfekten Kreiszyylinder sowie drei unterschiedliche Zylinder mit realen Imperfektionen sowohl für regelmäßige, uniform verfeinerte Netze als auch für unregelmäßige, adaptiv verfeinerte Netze untersucht.

Bei Bestimmung der Beullast mittels der statischen Analysen mit *uniformer Netzverfeinerung* zeigte sich, dass die Approximierung der gekrümmten Geometrie und der hier auftretenden Verschiebungen mindestens mit quadratischen Ansatzfunktionen erfolgen sollte. Mit den verwendeten biquadratischen Elementen (MITC9) wurden die besten Ergebnisse hinsichtlich Genauigkeit und Effizienz erzielt. Bei diesem Element wurde eine vergleichsweise schnelle Konvergenz sowohl gegen den erwarteten Beulwert als auch gegen die korrekte Beulform für alle untersuchten geometrisch perfekten Zylinder und auch für die untersuchten Zylinder mit realen Imperfektionen beobachtet. Die Verwendung *adaptiver Netzverfeinerung* führte für die bilinearen Elemente im Falle des *perfekten Zylinders* zu künstlichen Imperfektionen, die deutlich von der korrekten Referenzform abweichende Beulformen verursachten. Bei Verwendung biquadratischer Elemente bei ähnlich unregelmäßig verfeinerten Netzen konnte hingegen kein negativer Einfluss unregelmäßiger Elementformen festgestellt werden.

Bei Untersuchungen zur Netzkonvergenz der Stabilitätslasten an *Zylindern mit realen Imperfektionen* wurde die zweidimensionale diskrete Fourier Transformation dazu verwendet, ausgehend von einer punktuell vermessenen Geometrie beliebig feine Netze zu erzeugen. Die hier bestimmten Stabilitätslasten zeigten auch bei Verwendung uniformer Netzverfeinerung mit biquadratischen Elementen in allen drei untersuchten Fällen ein nicht monotonen Konvergenzverhalten. Trotz der augenscheinlich sehr feinschichtigen Vermessung der Zylinder, ergab sich stets ein bemessungsrelevanter Abfall der Stabilitätslasten bei der Verfeinerung der Netze über die gemessenen Punkte der realen Geometrie hinaus. Dieser Abfall der Stabilitätslasten in den Konvergenzverläufen trat nahezu sprunghaft auf. Dieses Verhalten, welches typisch zu sein scheint, erschwert deutlich in der Praxis die Entscheidung darüber, ob die Netzkonvergenz in einem betrachteten Verfeinerungsschritt bereits erreicht ist.

Im Falle des **Kreiszyinders unter Außendruckbeanspruchung** zeigte sich bei uniformer Netzverfeinerung, dass sowohl für den Fall eines geometrisch perfekten Zylinders als auch im Falle der imperfekten Zylinder die Stabilitätslasten so schnell konvergieren, dass hier die Verwendung "recht grober" Netze ausreichend ist. Im Gegensatz zum Fall der axialen Druckbeanspruchung war der Zuwachs der Genauigkeit durch Verwendung von biquadratischen Elementen gegenüber bilinearen Elementen bei gleicher Zahl an Freiheitsgraden marginal. Unter Berücksichtigung des Aspekts der Effizienz ist es demnach ausreichend, im Falle der Außendruckbeanspruchung bilineare Elemente zu verwenden.

Insgesamt zeigt sich die statische Methode bei der Bestimmung der Stabilitätslasten zumindest im Falle der axialen Druckbeanspruchung als derart sensitiv gegenüber vielen Berechnungsparametern, dass die Anwendung solcher Analysen zur Bemessung realer Strukturen als unzuverlässig und damit letztlich unpraktikabel erscheint.

2. Transiente Untersuchungen zum Beulverhalten von Kreiszyklindern

Die Untersuchungen des gesamten Beulprozesses insbesondere des Nachbeulverhaltens mittels transienter FE-Analysen wurden für die betrachteten Fälle der axialen und Außendruckbeanspruchung unterschiedlich durchgeführt. Im **Falle des axialen Drucks** wurde der Vorgang in einer Prüfmaschine simuliert. Die Lagerung erfolgte über das Festhalten aller Verschiebungen an einem Zylinderrand. Am ungelagerten Rand erfolgte die Lasteinleitung über die Vorgabe von Verschiebungen in axialer Richtung, wobei hier mittels einer "Kopplung" der Freiheitsgrade der Versuch mit einer Lastplatte simuliert wurde.

Im Falle des **Kreiszylinders unter Außendruck** war keine explizite Vorgabe der Verschiebungen möglich, da die Belastung im Falle der Außendruckbeanspruchung über die gesamte Struktur aufgebracht wird. An dieser Stelle bestand die einzige Möglichkeit, Hinweise auf Gleichgewichtspfade im Nachbeulbereich zu erhalten, in der Definition eines Belastungs-Entlastungs-Zyklus. Voruntersuchungen mit unterschiedlicher Modellierung des Außendrucks zeigten, dass eine Nachbeullast nur dann bestimmt werden konnte, wenn die Verformungen des Zylinders nach Überschreiten der Stabilitätslast beschränkt waren. Dies wurde in der vorliegenden Arbeit über das sogenannte *Kontrollvolumen-Modell* erreicht. Dabei wurde im Inneren des Zylinders Unterdruck durch das Herausziehen eines Kolbens erzeugt. Die Höhe des Unterdrucks war mit dem Volumen des Zylinders über das Kontrollvolumen gekoppelt und fiel bei Einfallen der Beulen ab, was die Verformungen einschränkte.

Die Ergebnisse zeigten sich hinsichtlich des Last-Verformungsverlaufs im Nachbeulbereich in beiden Lastfällen weitgehend insensitive gegenüber Änderungen der Berechnungsparameter wie Dämpfung, Belastungsgeschwindigkeit und Zeitschritt (bei impliziter Zeitintegration mit NEWMARK-Verfahren). Außerdem konvergierten die hier bestimmten Nachbeulminima recht schnell sowohl bei Verwendung bilinearer als auch bi-quadratischer Elemente. Im Gegensatz zu statisch bestimmten Stabilitätslasten besteht hier demnach kein Zwang, Elemente höherer Ansatzordnung als bilinear zu verwenden.

Die explizite Methode, die hier in Form der Implementierung in LS-DYNA verwendet wurde, erwies sich als wesentlich effizienter als die NEWMARK-Integration, weil der Zeitschritt aufgrund des sehr kurzzeitigen Beulprozesses im Falle des axialen Drucks auch bei der NEWMARK-Integration klein gewählt werden musste.

Als wichtig für die Ingenieurpraxis erscheint die Tatsache, dass sich die Höhe der Nachbeullasten als nahezu unabhängig von den geometrischen Imperfektionen zeigte. Dies macht die schwierige Diskussion über die maßgebenden Imperfektionsformen an dieser Stelle überflüssig, da damit Nachbeullasten auch ohne Imperfektionen, d.h. an geometrisch perfekten Zylindern bestimmt werden können.

Der **Vergleich der numerisch ermittelten Nachbeullasten mit den Bemessungsnormen** DIN 18800 Teil 4 und Eurocode 3 (EC3) fiel für die zwei untersuchten Lastfälle unterschiedlich aus. Im Falle des Außendrucks stimmten die Nachbeullasten sehr gut mit den charakteristischen Beullasten nach DIN 18800 und nach EC3 der Qualitätsklasse B im gesamten untersuchten Geometriebereich $600 < R/t < 2000$ überein.

Zum Vergleich mit den Normen wurden die *ersten Nachbeulminima* der numerisch bestimmten Last-Verformungsverläufe verwendet, da sie – ähnlich den charakteristischen Beullasten – die ”natürliche” untere Schranke für Beullasten imperfekter Zylinder repräsentieren. Der Vergleich zeigte, dass die Ergebnisse hinsichtlich der untersuchten Schlankheiten in zwei Bereiche unterteilt werden können. Im Bereich mäßig dünnwandiger Schalen mit $R/t < 1000$ ergab sich eine gute Übereinstimmung der numerisch bestimmten Nachbeullasten mit den charakteristischen Werten der Bemessungslasten nach Eurocode 3 der Qualitätsklasse B. Ebenso konnte der Anstieg der unteren Grenze auf 30 % der klassischen kritischen Beullast für dickere Schalen mit $R/t = 300$ im verwendeten Modell abgebildet werden. Für dünnwandigere Schalen mit $R/t < 1000$ konnte allerdings der oben genannte Abfall der unteren Grenze nicht abgebildet werden – die numerisch ermittelten Nachbeulminima ergaben sich auch bei sehr dünnwandigen Schalen mit $R/t = 4000$ stets zu ca. 20% der klassischen kritischen Beullast. Offensichtlich liegt dieser Abfall der unteren Grenze der Beullasten für dünnwandige Schalen nicht in den radialen Abweichungen von der perfekten Geometrie begründet. Hiernach müssen die Lager- bzw. Lastimperfectionen, die im verwendeten Modell nicht berücksichtigt wurden, der Grund hierfür sein. Diese Schlussfolgerung wird durch die Untersuchungen in [47] bestätigt. Da die letztgenannten Imperfektionsarten bislang im Eurocode 3 bei der Bestimmung von Traglasten imperfekter Schalen mittels numerischer Methoden unberücksichtigt bleiben, erscheint hier eine entsprechende Untersuchung und evtl. eine Überarbeitung der Norm dringend notwendig.

3. Sensitivitätsuntersuchungen

Die Untersuchungen der Sensitivität stabiler Gleichgewichtslagen im Vorbeulbereich sind dadurch motiviert, dass letztendlich nicht die Kenntnis stabiler Gleichgewichtslagen allein, sondern vielmehr deren Sicherheit gegen Stabilitätsversagen bei endlichen Störungen für die Nutzung dieser Gleichgewichtslagen bei der Bemessung ausschlaggebend ist. Dabei wurde die Störung in der vorliegenden Arbeit mittels eines momentanen Impulses aufgebracht, indem der untersuchten Struktur an einer definierten Laststufe eine Geschwindigkeitsverteilung aufgeprägt wurde. Bei Verwendung kleiner Dämpfung wird die Struktur nach der Störung entweder zur untersuchten Gleichgewichtslage zurückkehren, oder das Einzugsgebiet verlassen. Im ersten Fall liegt eine ”stabile Situation” vor, da die eingebrachte Störenergie zu klein ist, um einen Beulvorgang zu initiieren. Im zweiten Fall ist die eingebrachte Störenergie groß genug, um ein Stabilitätsversagen zu verursachen, hier liegt eine ”instabile Situation” vor. Die kritische Störenergie, bei der ein Übergang von der stabilen zur instabilen Situation stattfindet, wurde iterativ mittels Skalierung des Geschwindigkeitsvektors der Störung ermittelt. Die Sensitivität wurde dann als Kehrwert der kritischen Störenergie definiert.

Im ersten Schritt wurde nach Indikatoren für die Bewegung nach Aufbringen der Störung gesucht, die eine automatische und effiziente Entscheidung darüber ermöglichen, ob eine stabile oder eine instabile Situation vorliegt. Hierzu wurden ausgehend von der ursprünglichen Definition des sogenannten *Liapunov Exponenten* vereinfachte Indikatoren hergeleitet, die zum einen auf einem einzelnen Freiheitsgrad und zum anderen auf der Euklidischen Norm des gesamten Verschiebungsvektors des Systems basieren.

Numerische "Tests" der hergeleiteten Indikatoren an einer einfachen Struktur – einem Kreisbogen – und an realitätsnahen Schalenstrukturen – den Kreiszyklindern – zeigten, dass die Art der Bewegung korrekt indiziert wird. Allerdings wurde die Konvergenz der Indikatoren im Falle der Kreiszyklinder erst nach längerer Rechenzeit erreicht, was die Effizienz bei der Anwendung dieser Indikatoren herabsetzt.

Im nächsten Schritt wurde die Sensitivität für den Kreiszyklinder unter Beanspruchung durch axialen Druck untersucht. Die Untersuchung zeigte, dass je nach gewähltem Lastniveau unterschiedliche Geschwindigkeitsverteilungen bei der Ermittlung der maximalen Sensitivität maßgebend werden. Allerdings nahm die Sensitivität im unteren, bemessungsrelevanten Lastbereich für alle untersuchten Verteilungen des Störvektors stets sehr niedrige Werte an. Ein signifikanter Anstieg der Sensitivität war erst für Laststufen höher als ca. 25% der klassischen kritischen Beullast ermittelt. Ein weiteres bemessungsrelevantes Ergebnis liegt darin, dass die Verläufe der Sensitivität unterhalb der 25%-Marke außerdem auch für drei unterschiedliche Geometrien – perfekt bzw. imperfekt mit $R/t = 1100$ und imperfekt mit $R/t = 850$ – nahezu identisch waren. Für die untersuchten Zylinder stimmt diese Grenze gut mit Eurocode 3 der Qualitätsklasse A überein. D.h. die kleineren Bemessungslasten nach EC3 (B) und (C) erscheinen hier als zu konservativ. Zur Verallgemeinerung dieser Aussage sind weitere Untersuchungen vor allem für den Bereich der sehr schlanken Zylinder mit Berücksichtigung weiterer Imperfektionseinflüsse erforderlich.

Im Gegensatz zum Fall des axialen Drucks ergibt sich im Falle der Außendruckbeanspruchung für den hier untersuchten mittellangen Zylinder der Schlankheit $R/t = 1100$ ein derart schneller Anstieg der Sensitivität bei Laststufen höher als die niedrigste Nachbeullast, dass eine Anhebung der Bemessungswerte über die Bemessungslasten nach DIN 18800 oder Eurocode 3 der Qualitätsklasse B *seitens der hier vorgestellten Sensitivitätsuntersuchungen* ohne die Kenntnis einer Grenz-Sensitivität nicht empfohlen werden kann.

Ausblick

Aufgrund der Ergebnisse der Untersuchungen des Nachbeulverhaltens mittels transien-ter FE-Analysen scheint eine Untersuchung des Einflusses von Aufstands- und Lastimperfektionen auf die Höhe der Nachbeullasten sinnvoll. Aus den oben genannten Gründen sollte hier auch eine entsprechende Sensitivitätsstudie durchgeführt werden.

Weiter scheint eine Erweiterung der Sensitivitätsuntersuchungen auf die Stabilitätsfälle mit einseitigen Bindungen, wie Kontaktprobleme erstrebenswert.

Literaturverzeichnis

- [1] Amazio, J. C. *Buckling Under Axial Compression of Long Cylindrical Shells with Random Axisymmetric Imperfections*. Quarterly of Appl. Mech., Vol. 26, No.4, S.537-566. (1969)
- [2] Andelfinger, U. Untersuchungen zur Zuverlässigkeit hybrid-gemischter Finiter Elemente für Flächentragwerke. *Bericht Nr. 13*, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart. (1991)
- [3] Arbocz, J. *The Imperfection Data Bank, a Means to Obtain Realistic Buckling Loads*. E. Ramm (Hrsg.) Proceedings, Buckling of Shells – A State-of-the-Art Colloquium, Springer Verlag, S. 535-567. (1982)
- [4] Arbocz, J. and Babcock, C. D. Jr. *The Effect of General Imperfections on the Buckling Load of Cylindrical Shells*. J. Appl. Mech., Vol. 36, S. 28-38. (1969)
- [5] Arbocz, J. and Hol, J. M. *Collapse of Axially Compressed Cylindrical Shells with Random Imperfections*. AIAA Journal, Vol.29, No. 12, S. 2247-2256. (1991)
- [6] Argyris, J. und Mlejnek, H.-P. *Die Methode der Finiten Elemente, Band III, Einführung in die Dynamik*. Friedr. Vieweg & Sohn Braunschweig/Wiesbaden (1988)
- [7] Armenakas, A. E. and Herrmann, G. *Buckling of Thin Shells Under External Pressure*. Proc. ASCE, Bd. 89-EM3, S. 131-146. (1963)
- [8] Babuska, I. and Strouboulis, T. *The Finite Element Method and its Reliability*. Oxford University Press. (2001)
- [9] Babuska, I., Miller, A. *A feedback Finite Element method with a-posteriori error estimator: Part I. The Finite Element method and some properties of the a-posteriori estimator*. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., Bd. 61, S. 1 - 40. (1987)
- [10] Babcock, C. D. and Sechler, E. E. *The Effect of Initial Imperfections on the Buckling Stress of Cylindrical Shells*. NASA TN D-2005, S. 135-142. (1963)
- [11] Baguet, S., and B. Cochelin, B. *Direct computation of paths of limit points using the asymptotic numerical method*. in M. Papadrakakis, ed., Forth International Colloquium on Computation of Shell & Spatial Structures IASS-IACM, Chania. (2000)

- [12] Bathe, K.-J. *Finite Elemente Methoden*. Springer-Verlag, Berlin. (1986)
- [13] Bathe, K.-J., Iosilevich, A., Chapelle, D. *An evaluation of the MITC shell elements*. *Comp. & Struc.*, Bd. 75, S. 1 - 30. (2000)
- [14] Belytschko, T., Liu, W. K., Moran, B. *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. John Wiley & Sons Ltd. (2000)
- [15] Benettin, G., Galgani, L. and Strelcyn, J.M. *Kolmogorov entropy and numerical experiments*. *Phys. Rev.* Vol. 14, S. 2338-2345. (1976)
- [16] Bergan, P. G., Horrigmoe, G., Krakeland, B., Soreide, T. H. *Solution techniques for non-linear finite element problems*. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 12, S. 1677-1696. (1978)
- [17] Betten, J., *Kontinuumsmechanik.*, Springer-Verlag. (1993)
- [18] Brendel, B. und Ramm, E. *Nichtlineare Stabilitätsuntersuchungen mit der Methode der Finiten Elemente*. *Ingenieur-Archiv*, Band 51, S. 337-362. (1982)
- [19] Brendel, B. *Geometrisch nichtlineare Elastostabilität*. Dissertation, Universität Stuttgart. (1979)
- [20] Bucalem, M.L., Bathe, K.J. *Higher-order MITC general shell elements*. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 36, S. 3729 – 3754. (1993)
- [21] Cirak, F. *Adaptive Finite-Elemente-Methoden bei der nichtlinearen Analyse von Flächentragwerken*. Dissertation, Universität Stuttgart. (1998)
- [22] Courant, R, Friedrichs, K.O. und Lewy, H. *Über die partielle Differentialgleichungen der Mathematischen Physik*. *Math. Ann.*, Vol. 100, S. 32. (1928)
- [23] Deml, M. and Wunderlich, W. *Direct evaluation of 'worst' imperfection shape in shell buckling*. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, vol 149, S. 201-222. (1997)
- [24] Donnell, L. H. *Stability of Thin-Walled Tubes under Torsion*. NACA Rep. No. 479. (1933)
- [25] Dvorkin, E.N., Bathe, K.-J. *A continuum mechanics based four node shell element for general nonlinear analysis*. *Eng. Comp.*, Vol 1, S. 77 - 88. (1989)
- [26] DIN 18800, Teil 4 Stahlbauten, Stabilitätsfälle, Schalenbeulen, Normenausschuss Bauwesen, Deutsches Institut für Normung e.V., Beuth Verlag GmbH, Berlin. (1990)
- [27] Elishakoff, I. an Arbocz, J. *Reliability of Axially Compressed Cylindrical Shells with General Nonsymmetric Imperfections*. *J. Appl. Mech.*, Vol. 52, S.122-128. (1985)

-
- [28] Eriksson, A., Pacoste, C., Zdunek, A. *Numerical analysis of complex instability behaviour using incremental-iterative strategies*. Comp. Meth Appl. Eng., Vol. 179, S. 265-305. (1999)
- [29] Esslinger, M., Geier, B. *Gerechnete Nachbeullasten als untere Grenze der experimentellen axialen Beullasten von Kreiszy lindern*. Der Stahlbau, Bd. 12, S. 353-360. (1972)
- [30] Esslinger, M. *Rechenbeispiele zum Entwurf der DASt-Richtlinie 017, Kapitel 6*. Stahlbau, 62, Heft 9, S.269-280. (1993)
- [31] Eurocode 3 (DIN EN 1993-1-6): *Bemessung und Konstruktion von Stahlbauten - Teil 1-6: Festigkeit und Stabilität von Schalen; Deutsche Fassung EN 1993-1-6:2007*. Normenausschuss Bauwesen, Deutsches Institut für Normung e.V., Beuth Verlag GmbH, Berlin. (2007)
- [32] Ewert, E., Schweizerhof, K., Vielsack, P. *Measures to judge the sensitivity of thin-walled shells concerning stability under different loading conditions*. Comp. Mech., Vol. 37, S. 507-522. (2006)
- [33] Fichtenholz, G.M. *Differential- und Integralrechnung*. Lehrbuch Band III; VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin. (1987)
- [34] Flügge, W. *Die Stabilität der Kreiszy linderschale*. Ing.-Arch., Vol. 3, S. 463-506. (1932)
- [35] Gebhardt, H. *Finite Element Konzepte für schubelastische Schalen mit endlichen Verdrehungen*. Dissertation. Institut für Baustatik, Universität Karlsruhe. (1990)
- [36] Graff, K.F. *Wave motion in elastic solids*. Ohio State University Press. (1975)
- [37] Hakula, H., Leino, Y., Pitkäranta, J. *Scale resolution, locking, and higher-order finite element modeling of shells*. J. Comp. Appl. Math. Vol 133, S. 157-182. (1996)
- [38] Hauptmann, R. *Strukturangepaßte geometrisch nichtlineare Finite Elemente für Flächentragwerke*. Dissertation. Institut für Mechanik, Universität Karlsruhe. (1997)
- [39] Hoff, N.J., Madsen, W.A., Mayers, J. *Postbuckling Equilibrium of Axially Compressed Cylindrical Shells*. AIAA Journal, Vol. 4, No. 1, S. 126-133. (1966)
- [40] Hornung, U. *Beulen von Tankbauwerken unter Außendruck*. Dissertation, Universität Karlsruhe. (2000)
- [41] Hornung, U. and Saal, H. *Buckling loads of tank shells with imperfections*. Int. J. N.-Lin. Mech., Vol. 37, S. 605-621. (2002)
- [42] Helnwein, P. *Zur initialen Abschätzbarkeit von Stabilitätsgrenzen auf nichtlinearen Last-Verschiebungspfaden elastischer Strukturen mittels der Methode der Finiten Elemente*. Dissertation, Universität Wien. (1996)

- [43] Helnwein, P., Mang, H. A. und Pichler, B. *Ab initio estimates of stability limits on nonlinear load-displacement path: potential and limitations*. Comp. Assisted Mech. and Eng. Sciences, by Institute of Fundamental Technological Research, Polish Academy of Sciences, Vol. 6, S. 345-360. (1999)
- [44] Helnwein, P. und, Mang, H. A. *An asymptotic approach for the evaluation of errors resulting from estimations of stability limits in nonlinear elasticity*. Acta Mechanica, Vol. 125, S. 235-254. (1997)
- [45] Hughes, Th. J. R. *The Finite Element Method, Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Dover Publications, Inc., Mineola, New York, (2000)
- [46] Hughes, Th. J. R., Tezduyar, T. E. *Finite elements based upon Mindlin plate theory with particular reference to the four-node bilinear isoparametric element*. J. Appl. Mech. Vol. 48, S. 587-596. (1981)
- [47] Hübner, A., Albiez, M., Saal., H. *Buckling Design for Axially Loaded Cylindrical Shells with Large Radius over Thickness Ratios*. Proc. SEMC 2007, Cape Town, South Africa, 10-12 September. (2007)
- [48] Knebel, K., Peil, U, Schulz, U., Schweizerhof, K. und Ummenhofer, T. *Stabilität von stählernen Silozylinderschalen bei Belastung mit ruhendem und bewegtem Schüttgut*. in Eibl, J. and Gudehus, G., eds. DFG Reihe Sonderforschungsbereiche, SFB 219 Silobauwerke und ihre spezifischen Beanspruchungen, Wiley-VCH, Weinheim, Germany. In German. (2000)
- [49] von Kármán, T., Tsien, H.S. *The Buckling of Thin Cylindrical Shells under Axial Compression*. Journal of Aeronautical Sciences, Vol. 8, S. 303-312. (1941)
- [50] Knebel, K. *Stabilität von Stahlzylindern mit unilateralen Randbedingungen bei statischen und dynamischen Beanspruchungen*. Dissertation, Universität Karlsruhe. (1997)
- [51] Knothe, K., Wessels, H. *Finite Elemente (Eine Einführung für Ingenieure)*. 3. Auflage, Springer-Verlag. (1999)
- [52] Koiter, W.T. *Over de Stabiliteit van het Evenwicht*. Dissertation, Delft. (1945)
Englische Übersetzung: *On the stability of elastic equilibrium*. NASA TT F-10. (1967)
- [53] B. Kröplin, D. Dinkler, J. Hillmann. *An energy perturbation applied to nonlinear structural analysis*. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol:52, 885 - 897. (1985)
- [54] Koiter, W.T. *The Effect of Axisymmetric Imperfections on the Buckling of Cylindrical Shells under Axial Compression*. Proceedings of the Royal Netherlands Academy of Sciences, Amsterdam, Series B., Vol. 66, No.5, S. 265-279. (1963)

- [55] La Salle, J. and Lefschetz, S. *Stability by Liapunov's Direct Method*. Band 4 in der Reihe: Mathematics in Science and Engineering Academic Press, New York / London. (1981)
- [56] Leipholz, H. *Stabilität elastischer Systeme*. Braun Verlag, Karlsruhe. (1989)
- [57] Liapunov, M. A. *Problème générale de la stabilité de mouvement*. Ann. Fac. Sci. Toulouse, S. 203-474 (Original in Russisch 1893). (1907)
- [58] Lorenz, R. *Achsensymmetrische Verzerrungen in dünnwandigen Hohlzylindern*. VDI-Zeitschrift, Bd. 52, S. 1706-1713. (1908)
- [59] LS-DYNA *Theoretical Manual*. Livermore Software Technology Corporation, Compiled by Hallquist, J. O. (1998)
- [60] Meyberg, K, Vachenauer, P. *Höhere Mathematik 2*. Springer-Lehrbuch, Springer-Verlag Berlin Heidelberg. (1991)
- [61] Mises, R. V. *Der kritische Aussendruck zylindrischer Rohre*. VDI-Zeitschrift, Bd. 58, S. 750-755. (1914)
- [62] Ostapenko, A., Gunzelman S.X. *Local Buckling Tests on Three Steel Large-Diameter Tubular Columns*. Recent Research and Developments in Cold-Formed Steel Structures, Fourth International Speciality Conference on Cold-Formed Steel Structures. Vol. 1. (1978)
- [63] Pflüger, A. *Stabilitätsprobleme der Elastostatik*. Dritte Auflage, Springer-Verlag. (1975)
- [64] Ramm, E. *Geometrisch nichtlineare Elastostatik und Finite Elemente*. Habilitationsschrift, Universität Stuttgart. (1976)
- [65] Ramm, E. *Strategies for tracing the nonlinear response near limit points*. In Wunderlich, Stein, Bathe, ed.: *Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*, Springer-Verlag. (1981)
- [66] Rheinboldt, W. C. Error Estimates for Nonlinear Finite Element Computations. *Computers & Structures*, Bd. 52, S. 91-98. (1985)
- [67] Riccius, J. *Adaptive Methoden zur statischen und dynamischen Analyse von Flächentragwerken mit linearen Finiten Elementen*. Dissertation, Universität Karlsruhe. (1997)
- [68] Riks, E. *The application of Newtons method to the problem of elastic stability*. J. Appl. Mech. Eng., Vol. 39, S. 1060-1066. (1972)
- [69] Rottner, T. *Sensitivitätsanalyse stabiler Gleichgewichtslagen dünnwandiger Strukturen unter Verwendung von Lösungsverfahren für Parallelrechner*. Dissertation, Universität Karlsruhe. (2000)

- [70] Rudonyi, S. and Bathe, K.J. *Lyapunov characteristic exponent calculation for finite element discretized models*. Proceedings: First MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics, S. 1640-1643. (2001)
- [71] Rumpel, T., Schweizerhof, K. *Hydrostatic Fluid Loading in Non-Linear Finite Element Analysis*. Int. J. Num. Meth. Eng. Vol. 59 (6), S. 849-870. (2004)
- [72] Rust, W. *Mehrgitterverfahren und Netzadaption für lineare und nichtlineare statische Finite-Elemente-Berechnungen von Flächentragwerken*. Dissertation, Universität Hannover. (1991)
- [73] Saal, H., Kahmer, H und Reif, A. *Beullasten axial gedrückter Kreiszyinderschalen mit Innendruck – Neue Versuche und Vorschriften*. Stahlbau, 48, Heft 9, S. 262-269. (1979)
- [74] Schweizerhof, K. *Nichtlineare Berechnungen von Tragwerken unter verformungsabhängiger Belastung mit finiten Elementen*. Dissertation, Universität Stuttgart. (1982)
- [75] Schweizerhof, K. and Wriggers, P. *Consistent linearization for path following methods in nonlinear fe-analysis*. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol. 59, S. 261-279. (1986)
- [76] Schweizerhof, K. *Quasi-Newton Verfahren und Kurvenverfolgungsalgorithmen für die Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme in der Strukturmechanik*. Institut für Baustatik, Universität Karlsruhe, Heft 9. (1989)
- [77] Spohr, I. *Störenergie-Konzept für den elasto-plastischen Beulsicherheitsnachweis beliebig belasteter Schalen*. Dissertation, Institut für Statik, Technische Universität Braunschweig. (1998)
- [78] Stein, E., Seifert, B., Rust, W. *Adaptive Verfeinerung von Finite-Element-Netzen für Stabilitätsprobleme von Flächentragwerken*. Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover. (1994)
- [79] Stein, E., Seifert, B., Ohnimus, S., Carstensen, C. *Adaptive Finite Element Analysis of Geometrically Non-linear Plates and Shells, Especially Buckling*. Int. J. Num. Meth. Eng., Band 37, Heft 15, S. 2631-2656 (1994)
- [80] Tennyson, R.C. *A Note on the Classical Buckling Load of Circular Cylindrical Shells under Axial Compression*. AIAA Journal, Vol. 1, S. 475-476. (1963)
- [81] Thompson, A.M.T. und Hunt, G.W. *A General Theory of Elastic Stability*. John Wiley & Sons, London. (1973)
- [82] Thielemann, W. und Esslinger, M. *Einfluss der Randbedingungen auf die Beullast von Kreiszyinderschalen*. Der Stahlbau, Bd. 33, S. 353-360. (1964)

- [83] Tranel, G. *Stabilitätsnachweis beliebiger Schalen mit dem Konzept der Störenergie*. Dissertation, Institut für Statik, Technische Universität Braunschweig. (1994)
- [84] Ummenhofer, T. *Stabilitätsverhalten imperfekter zylindrischer Stahlsiloschalen – experimentelle und numerische Untersuchungen*. Dissertation, Universität Karlsruhe. (1996)
- [85] Verlet, L. *Computer "Experiments" on classical Fluids I. Thermomechanical Properties of Lennard-Jones Molecules*. Physical Review, Vol. 159, S. 98-103. (1967)
- [86] Vielsack, P. *Praktische Stabilität und Kollaps eines Stabes mit trockener Reibung in den Lagern*. Ingenieur-Archiv, 56, S. 229-240. (1986)
- [87] Vielsack, P., Sprenger, W., Hesse, T. *Sensitivität stabiler Gleichgewichtszustände elastischer Strukturen*. Stahlbau 64, Heft 11, S. 321-325. (1995)
- [88] Wagenhuber, W. *Imperfektionssensitivität und rechnerischer Nachweis der Beulstabilität dünner Schalen*. Dissertation, Institut für Statik, Technische Universität Braunschweig. (1989)
- [89] Wagner, W. *Zur Behandlung von Stabilitätsproblemen mit der Methode der Finiten Elemente*. Technischer Bericht F91/1, Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover. (1991)
- [90] Wagner, W. and Wriggers, P. *A Simple Method for the Calculation of Secondary Branches*. Eng. Comp., Vol. 5, S. 103-109. (1988)
- [91] Weingarten, V.I., Morgan, E.J., Seide, P. *Elastic stability of thin-walled cylindrical and conical shells under axial compression*. AIAA Journal, Vol. 3 (3), S. 500-505. (1965)
- [92] Wood, W. L. *Practical Time-stepping Schemes*. Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series, Clarendon Press - Oxford. (1990)
- [93] Worg, R. *Deterministisches Chaos: Wege in die nichtlineare Dynamik*. BI- Wiss. Verlag. (1993)
- [94] Wriggers, P. *Nichtlineare Finite-Element-Methoden* Springer-Verlag (2001).
- [95] Wriggers, P. *Konsistente Linearisierung und ihre Anwendung auf die Finite Elemente Methode*. Technischer Bericht F88/4, Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover. (1988)
- [96] Wriggers, P. and Simo, J. *A General Procedure for the Direct Computation of Turning and Bifurcation Points*. Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 30, S. 155-176. (1990)
- [97] Yamaki, N. *Elastic stability of circular cylindrical shells*. North-Holland series in applied mathematics and mechanics, Vol. 27. (1984)

- [98] Zienkiewicz, O., Taylor, R. L. *The Finite Element Method*, McGraw-Hill. (1989)
- [99] Zienkiewicz, O., Zhu. J. *The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1: The recovery technique. Part 2: Error estimates and adaptivity.* Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 33, S. 1131–1382. (1992)

Kapitel 9

Diskrete Fourier Transformation

Die nachfolgend dargestellten Zusammenhänge zur Fourier Transformation (FT) und diskreter Fourier Transformation (DFT) sind FICHTENHOLZ [33] und MEYBERG/VACHENAUER [60] entnommen.

Eindimensionale Fourier-Transformation

Eine T -periodische Funktion $f(x)$ kann mit Hilfe der Fourierkoeffizienten a_k und b_k durch die sogenannte inverse Fourier Transformation (IFT) exakt durch

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) \right] \quad (9.1)$$

oder näherungsweise durch

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) \right] \quad (9.2)$$

$n \equiv$ höchste Ordnungsnummer der verwendeten Fourierkoeffizienten

dargestellt werden. Es werden also immer $2n + 1$ Koeffizienten benötigt. Die Fourierkoeffizienten a_k und b_k bestimmen sich zu

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (9.3)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) dx \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Bei einer diskreten Datenreihe ist keine kontinuierliche Funktion $f(x)$ sondern es sind Stützwerte $F_i(x_i)$ mit $i = 1, 2, 3, \dots, N + 1$ gegeben, wobei wir uns hier auf stetige Funktionen mit $F_1 = F_{N+1}$ beschränken. In diesem Fall ist kein exaktes Integrieren in den Ausdrücken (A.3) möglich, da der Funktionsverlauf $f(x)$ zwischen den Stützwerten unbekannt ist. Hier muss anstatt der FT eine DFT durchgeführt werden. Eine

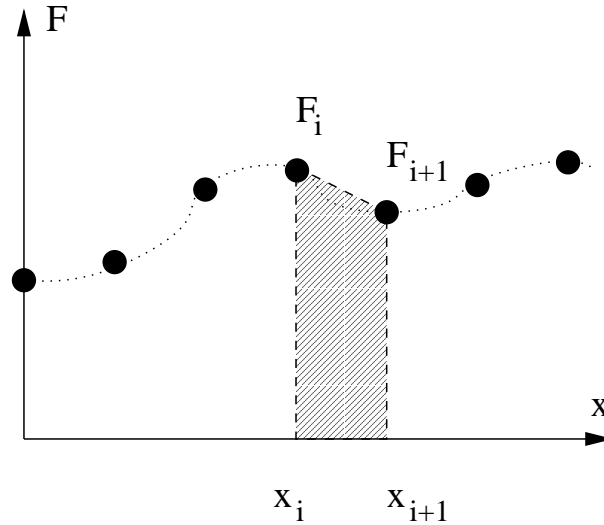


Abbildung 9.1: Näherungsweise Integration diskreter Datenreihe mit der Trapezregel.

oft verwendete Vorgehensweise zur näherungsweisen Bestimmung der Integrale (A.3) stellt die Trapezregel dar (andere Vorgehensweisen sind möglich). Hierbei werden die Integranden an den Stützstellen x_i ausgewertet und anschließend das Integral unter der Annahme eines linearen Verlaufs dazwischen ermittelt, s. Abb. A.1. Mit $N + 1$ Stützstellen sind dann N Flächenstücke zur Auswertung der Integrale zu berechnen. Unter Beachtung des Sonderfalls $n = 0$ mit $\cos 0 = 1$ und $\sin 0 = 0$ führt dies auf folgende Vorschrift zur Bestimmung der Fourierkoeffizienten

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{2}{T} \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{2} (F_i + F_{i+1}) (x_{i+1} - x_i) \right] \\
 a_k &= \frac{2}{T} \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{2} \left(F_i \cos\left(\frac{2\pi k}{T} x_i\right) + F_{i+1} \cos\left(\frac{2\pi k}{T} x_i\right) \right) (x_{i+1} - x_i) \right] \\
 &\qquad\qquad\qquad \text{für } k = 1, 2, 3, \dots, n \qquad (9.4) \\
 b_k &= \frac{2}{T} \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{2} \left(F_i \sin\left(\frac{2\pi k}{T} x_i\right) + F_{i+1} \sin\left(\frac{2\pi k}{T} x_i\right) \right) (x_{i+1} - x_i) \right] \\
 &\qquad\qquad\qquad \text{für } k = 1, 2, 3, \dots, n.
 \end{aligned}$$

Unter Beachtung der Periodizität

$$\begin{aligned}
 F_1 &= F_{N+1} \\
 F_1 \cos\left(\frac{2\pi k}{T} x_1\right) &= F_{N+1} \cos\left(\frac{2\pi k}{T} x_{N+1}\right) = F_1 \\
 F_1 \sin\left(\frac{2\pi k}{T} x_1\right) &= F_{N+1} \sin\left(\frac{2\pi k}{T} x_{N+1}\right) = 0
 \end{aligned} \qquad (9.5)$$

und der Äquidistanz der Punkte

$$\begin{aligned} x_{i+1} - x_i &= \Delta x && \text{für alle } i \\ T/\Delta x &= N && (\equiv \text{Anzahl der Integrationsintervalle}) \end{aligned} \quad (9.6)$$

erhält man aus (A.4) die Ausdrücke

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N F_i \\ a_k &= \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \left(F_i \cos\left(\frac{2\pi k}{T} x_i\right) \right) && \text{für } k = 1, 2, 3, \dots, n \\ b_k &= \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \left(F_i \sin\left(\frac{2\pi k}{T} x_i\right) \right) && \text{für } k = 1, 2, 3, \dots, n. \end{aligned} \quad (9.7)$$

Durch die Umformung

$$\frac{x_i}{T} = \frac{(i-1)\Delta x}{N\Delta x} = \frac{(i-1)}{N} \quad (9.8)$$

lassen sich die Ausdrücke (A.7) in die endgültige Form

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N F_i \\ a_k &= \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \left(F_i \cos\left(\frac{2\pi k}{N}(i-1)\right) \right) && \text{für } k = 1, 2, 3, \dots, n \\ b_k &= \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \left(F_i \sin\left(\frac{2\pi k}{N}(i-1)\right) \right) && \text{für } k = 1, 2, 3, \dots, n \end{aligned} \quad (9.9)$$

bringen, in der die Periode T nicht mehr auftritt. Die Ausdrücke (A.9) stellen gleichzeitig die Lösung des Problems einer **trigonometrischen Interpolation** einer durch äquidistant verteilte Punkte gegebenen Funktion dar. Mit der inversen diskreten Fourier-Transformation (IDFT) ist es nun möglich, diese über diskrete Punkte rückabzubilden. Hierbei müssen zwei Fälle unterschieden werden: Fall 1 mit einer ungeraden Anzahl der Intervalle $N = 2n + 1$, und Fall 2 mit einer geraden Anzahl der Intervalle $N = 2n$.

Fall 1 ($N = 2n + 1$, ungerade)

Hier kann das Problem der geometrischen Interpolation eindeutig gelöst werden, und die kontinuierliche Funktion $f(x)$ ist analog der IFT definiert als

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T} x\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T} x\right) \right]. \quad (9.10)$$

Fall 2 ($N = 2n$, gerade)

Hier ist das Problem der geometrischen Interpolation nicht eindeutig lösbar. Die kontinuierliche Funktion $f(x)$ läßt sich trotzdem angeben, und zwar mit

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) \right] + \frac{a_n}{2} \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right). \quad (9.11)$$

Demnach wird im *Fall 2* bei den letzten Termen in der Summe nur der cos-Koeffizient a_n multipliziert mit 0.5 berücksichtigt

Für beide Fälle berechnen sich die Fourierkoeffizienten identisch nach (A.9), lediglich die Rückabbildung erfolgt unterschiedlich. Es sei angemerkt, dass in beiden Fällen die gegebenen Stützwerte F_i durch die IDFT exakt wieder hergestellt (rückabgebildet) werden.

Zweidimensionale Fourier-Transformation

Bei einer zweidimensionalen Funktion $f(x, y)$ kommt die sogenannte zweidimensionale Fourier-Transformation zum Einsatz (2d-FT). Dabei wird die kontinuierliche Funktion $f(x, y)$ durch folgenden Ansatz approximiert

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left[\left(a_{k,l} \cos\left(\frac{2\pi k}{T_x}x\right) + b_{k,l} \sin\left(\frac{2\pi k}{T_x}x\right) \right) \cdot \left(c_{k,l} \cos\left(\frac{2\pi l}{T_y}y\right) + d_{k,l} \sin\left(\frac{2\pi l}{T_y}y\right) \right) \right] \quad (9.12)$$

oder umgeformt

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left[\tilde{a}_{k,l} \cos\left(\frac{2\pi k}{T_x}x\right) \cos\left(\frac{2\pi l}{T_y}y\right) + \tilde{b}_{k,l} \cos\left(\frac{2\pi k}{T_x}x\right) \sin\left(\frac{2\pi l}{T_y}y\right) \right. \\ \left. + \tilde{c}_{k,l} \sin\left(\frac{2\pi k}{T_x}x\right) \cos\left(\frac{2\pi l}{T_y}y\right) + \tilde{d}_{k,l} \sin\left(\frac{2\pi k}{T_x}x\right) \sin\left(\frac{2\pi l}{T_y}y\right) \right]. \quad (9.13)$$

Die Koeffizienten sind folgendermaßen definiert:

$$\tilde{a}_{k,l} = \frac{\nu}{\Omega} \int_0^{T_y} \int_0^{T_x} f(x, y) \cdot \cos\left(\frac{2\pi k}{T_x}x\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi l}{T_y}y\right) dx dy \quad (9.14)$$

$$\tilde{b}_{k,l} = \frac{\nu}{\Omega} \int_0^{T_y} \int_0^{T_x} f(x, y) \cdot \cos\left(\frac{2\pi k}{T_x}x\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi l}{T_y}y\right) dx dy \quad (9.15)$$

$$\tilde{c}_{k,l} = \frac{\nu}{\Omega} \int_0^{T_y} \int_0^{T_x} f(x, y) \cdot \sin\left(\frac{2\pi k}{T_x}x\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi l}{T_y}y\right) dx dy \quad (9.16)$$

$$\tilde{d}_{k,l} = \frac{\nu}{\Omega} \int_0^{T_y} \int_0^{T_x} f(x, y) \cdot \sin\left(\frac{2\pi k}{T_x}x\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi l}{T_y}y\right) dx dy \quad (9.17)$$

mit

$$\Omega = T_x \cdot T_y \tag{9.18}$$

$$\nu = \begin{cases} 1 & \text{für } k = l = 0 \\ 2 & \text{für } k = 0 \text{ oder } l = 0 \\ 4 & \text{für } k \neq 0 \text{ und } l \neq 0 \end{cases} .$$

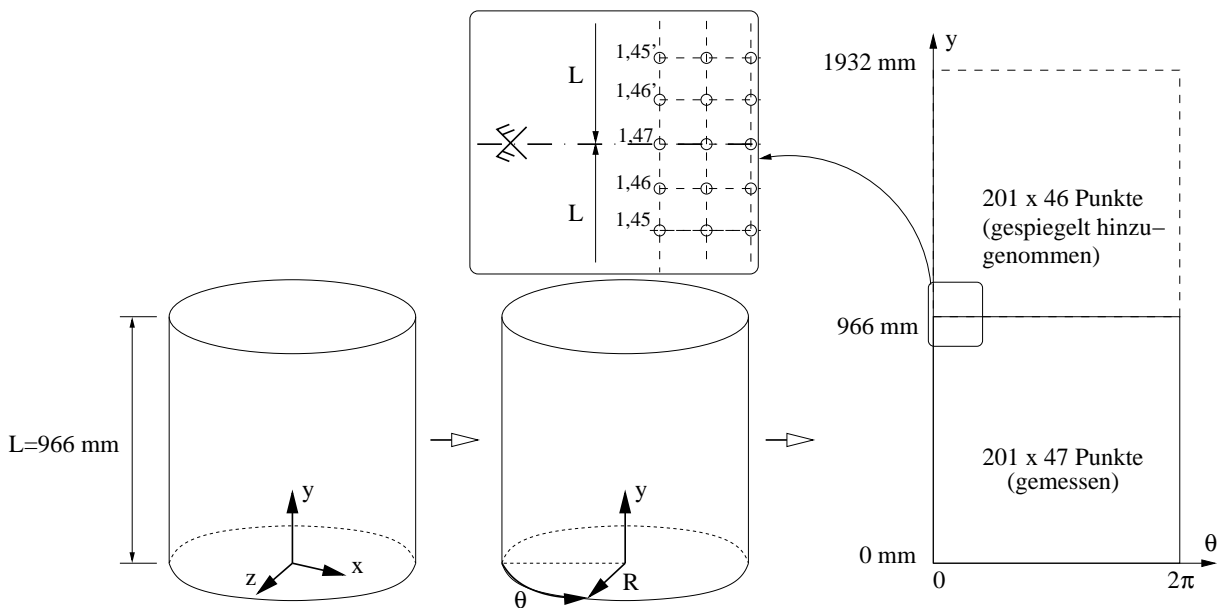


Abbildung 9.2: Transformation der Geometriedaten eines imperfekten Kreiszyinders zur diskreten zweidimensionalen Fourier-Transformation

Die untersuchten Zylinder wurden in einem annähernd quadratischen Raster mit 200 Punkten in Umfangsrichtung und 47 Punkten in Achsrichtung vermessen. Nach einer Transformation in Zylinderkoordinaten, d.h. Abrollen des Zylindermantels, ergibt sich eine 2-dimensionale Signalmatrix $R_{i,j} = R(\theta_i, y_j)$ zunächst der Dimension 201×47 ¹ Stützwerte $R_{i,j}$, s. Abb. 5.26. Diese kann dann mit der 2d-DFT analysiert werden. Die Periode in Umfangsrichtung wird zu $T_\theta = 2\pi$ mit $N_\theta = 200$ Integrationsintervallen gewählt. Hier ist "automatisch" eine Stetigkeit des Signals gegeben. In axialer Richtung werden die gemessenen Stützwerte gespiegelt hinzugenommen, wodurch auch in dieser Richtung die Stetigkeit des Signals erreicht wird. Die Periode ergibt sich in dieser Richtung zu $T_y = 2L$ mit $N_y = 92$ Integrationsintervallen, s. Abb. A.2. Trotz der nahezu Verdoppelung der Matrixgröße von (201×47) auf (201×93) Stützwerte steigt der Aufwand und die Anzahl der Koeffiziente nicht, wie weiter unten gezeigt wird.

¹Beim Abrollen des Zylindermantels werden die Stützwerte $R_{1,j}$ am Ende der Periode hinzugenommen, sodass gilt $R_{1,j} = R_{201,j}$

Mit den so gewählten Perioden ergibt sich der Ansatz unter Annahme einer kontinuierlich verteilten Radius-Funktion $r(\theta, y)$ zu

$$r(\theta, y) \approx \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m \left[\tilde{a}_{k,l} \cos(k\theta) \cos\left(\frac{\pi l}{L}y\right) + \tilde{b}_{k,l} \cos(k\theta) \sin\left(\frac{\pi l}{L}y\right) + \tilde{c}_{k,l} \sin(k\theta) \cos\left(\frac{\pi l}{L}y\right) + \tilde{d}_{k,l} \sin(k\theta) \sin\left(\frac{\pi l}{L}y\right) \right]. \quad (9.19)$$

Die Zahlen n und m stehen für die Anzahl der verwendeten Fourier-Koeffizienten. Die Koeffizienten selbst sind im vorliegenden Fall folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{k,l} &= \frac{\nu}{\Omega} \int_0^{2L} \int_0^{2\pi} r(\theta, y) \cdot \cos(k\theta) \cdot \cos\left(\frac{\pi l}{L}y\right) d\theta dy \\ \tilde{b}_{k,l} &= \frac{\nu}{\Omega} \int_0^{2L} \int_0^{2\pi} r(\theta, y) \cdot \cos(k\theta) \cdot \sin\left(\frac{\pi l}{L}y\right) d\theta dy \\ \tilde{c}_{k,l} &= \frac{\nu}{\Omega} \int_0^{2L} \int_0^{2\pi} r(\theta, y) \cdot \sin(k\theta) \cdot \cos\left(\frac{\pi l}{L}y\right) d\theta dy \\ \tilde{d}_{k,l} &= \frac{\nu}{\Omega} \int_0^{2L} \int_0^{2\pi} r(\theta, y) \cdot \sin(k\theta) \cdot \sin\left(\frac{\pi l}{L}y\right) d\theta dy \end{aligned} \quad (9.20)$$

mit

$$\begin{aligned} \Omega &= 2\pi \cdot 2L \\ \nu &= \begin{cases} 1 & \text{für } k = l = 0 \\ 2 & \text{für } k = 0 \text{ oder } l = 0 \\ 4 & \text{für } k \neq 0 \text{ und } l \neq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (9.21)$$

Das zu analysierende Gebiet des doppelten abgerollten Zylindermantels ist achsensymmetrisch zur Achse $y = 966 \text{ mm}$. Es ist leicht einsehbar, dass sich deswegen die Koeffizienten mit $\sin(\frac{\pi l}{L}y)$, d.h. $\tilde{b}_{k,l}$ und $\tilde{d}_{k,l}$, zu Null ergeben². Dadurch vereinfacht sich der Ansatz zu

$$r(\theta, y) \approx \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m \left[\cos\left(\frac{\pi l}{L}y\right) (\tilde{a}_{k,l} \cos(k\theta) + \tilde{c}_{k,l} \sin(k\theta)) \right]. \quad (9.22)$$

In der Folge der Anwendung der Trapezregel im vorliegenden zweidimensionalen Fall ergeben sich analog zum Vorgehen bei der oben beschriebenen eindimensionalen DFT

²Sind zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ im Intervall $[-a; +a]$ gegeben, und ist eine davon achsensymmetrisch zur Achse $x = 0$ (hier die Datenreihe in Achsrichtung des Zylinders) und die andere punktsymmetrisch bezüglich Koordinatenursprungs (hier $\sin(x)$), so gilt $\int_{-a}^{+a} f(x)g(x) dx = 0$. Man spricht hier auch von Orthogonalität.

folgende Vorschriften zur Bestimmung der Fourierkoeffizienten der 2d-DFT

$$\begin{aligned}
 a_{0,0} &= \frac{1}{N_\theta N_y} \sum_{i=1}^{N_\theta} \sum_{j=1}^{N_y} [R_{i,j}] \quad (k = 0, l = 0) \\
 a_{0,l} &= \frac{2}{N_\theta N_y} \sum_{i=1}^{N_\theta} \sum_{j=1}^{N_y} \left[R_{i,j} \cos \left(\frac{2\pi l}{N_y} (j-1) \right) \right] \quad (k = 0; l = 1, 2, 3, \dots, m) \\
 c_{0,l} &= 0
 \end{aligned} \tag{9.23}$$

$$a_{k,0} = \frac{2}{N_\theta N_y} \sum_{i=1}^{N_\theta} \sum_{j=1}^{N_y} \left[R_{i,j} \cos \left(\frac{2\pi k}{N_\theta} (i-1) \right) \right] \quad (k = 1, 2, 3, \dots, n; l = 0)$$

$$c_{k,0} = \frac{2}{N_\theta N_y} \sum_{i=1}^{N_\theta} \sum_{j=1}^{N_y} \left[R_{i,j} \sin \left(\frac{2\pi k}{N_\theta} (i-1) \right) \right] \quad (k = 1, 2, 3, \dots, n; l = 0)$$

$$\begin{aligned}
 a_{k,l} &= \frac{4}{N_\theta N_y} \sum_{i=1}^{N_\theta} \sum_{j=1}^{N_y} \left[R_{i,j} \cos \left(\frac{2\pi k}{N_\theta} (i-1) \right) \cos \left(\frac{2\pi l}{N_y} (j-1) \right) \right] \\
 &\quad (k = 1, 2, 3, \dots, n; l = 1, 2, 3, \dots, m)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_{k,l} &= \frac{4}{N_\theta N_y} \sum_{i=1}^{N_\theta} \sum_{j=1}^{N_y} \left[R_{i,j} \sin \left(\frac{2\pi k}{N_\theta} (i-1) \right) \cos \left(\frac{2\pi l}{N_y} (j-1) \right) \right] \\
 &\quad (k = 1, 2, 3, \dots, n; l = 1, 2, 3, \dots, m)
 \end{aligned}$$

mit $n = \frac{N_\theta}{2} = 100 \dots$ Anzahl der jew. FK in Umfangsrichtung

und $m = \frac{N_y}{2} = 46 \dots$ Anzahl der jew. FK in Achsrichtung.

Bei anschließender Rückabbildung der Stützwerte, der 2d-IDFT, muss auch hier zwischen gerader und ungerader Anzahl der Intervalle N_θ und N_y unterschieden werden. Allerdings konnten im einschlägigen Schrifttum keine Angaben zu einer geraden Anzahl gefunden werden. Aus diesem Grund wird die inverse Transformation für eine ungerade Anzahl der Intervalle verwendet.

Kapitel 10

Zu den in der Arbeit verwendeten Imperfektionen

Die in der vorliegenden Arbeit verwendeten Imperfektionen entsprechen den im Rahmen des Sonderforschungsbereichs 219 [48] vermessenen realen Versuchskörpern mit den Bezeichnungen *AL-1100*, *AL-850* und *AL-650*. Die Vermessung der Imperfektionen beschränkte sich auf radiale Formabweichungen. Der Vorgang der Vermessung und die Auswertungen der Imperfektionen sind in UMMENHOFER [84] ausführlich beschrieben und bereits in den Arbeiten von KNEBEL [50] und ROTTNER [69] verwendet.

Die imperfekte Geometrie der o.g. Zylinder ist überhöht im Abschnitt 5.3 dargestellt. Die Daten können in elektronischer Form beim Institut für Mechanik

Adresse: Institut für Mechanik
Universität Karlsruhe (TH)
76128 Karlsruhe

WEB: www.ifm.uni-karlsruhe.de

angefordert werden.

Anhang A

Diskrete Fourier Transformation

Die nachfolgend dargestellten Zusammenhänge zur Fourier Transformation (FT) und diskreter Fourier Transformation (DFT) sind FICHTENHOLZ [33] und MEYBERG/VACHENAUER [60] entnommen.

Eindimensionale Fourier-Transformation

Eine T -periodische Funktion $f(x)$ kann mit Hilfe der Fourierkoeffizienten a_k und b_k durch die sogenannte inverse Fourier Transformation (IFT) exakt durch

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) \right] \quad (\text{A.1})$$

oder näherungsweise durch

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) \right] \quad (\text{A.2})$$

$n \equiv$ höchste Ordnungsnummer der verwendeten Fourierkoeffizienten

dargestellt werden. Es werden also immer $2n + 1$ Koeffizienten benötigt. Die Fourierkoeffizienten a_k und b_k bestimmen sich zu

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (\text{A.3})$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) dx \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Bei einer diskreten Datenreihe ist keine kontinuierliche Funktion $f(x)$ sondern es sind Stützwerte $F_i(x_i)$ mit $i = 1, 2, 3, \dots, N + 1$ gegeben, wobei wir uns hier auf stetige Funktionen mit $F_1 = F_{N+1}$ beschränken. In diesem Fall ist kein exaktes Integrieren in den Ausdrücken (A.3) möglich, da der Funktionsverlauf $f(x)$ zwischen den Stützwerten unbekannt ist. Hier muss anstatt der FT eine DFT durchgeführt werden. Eine

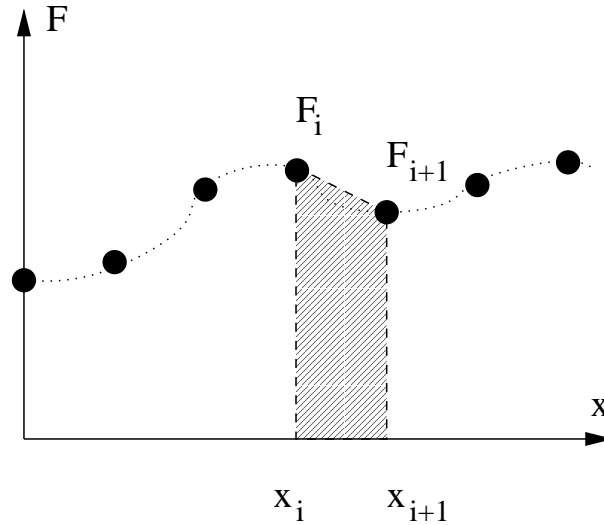


Abbildung A.1: Näherungsweise Integration diskreter Datenreihe mit der Trapezregel.

oft verwendete Vorgehensweise zur näherungsweisen Bestimmung der Integrale (A.3) stellt die Trapezregel dar (andere Vorgehensweisen sind möglich). Hierbei werden die Integranden an den Stützstellen x_i ausgewertet und anschließend das Integral unter der Annahme eines linearen Verlaufs dazwischen ermittelt, s. Abb. A.1. Mit $N + 1$ Stützstellen sind dann N Flächenstücke zur Auswertung der Integrale zu berechnen. Unter Beachtung des Sonderfalls $n = 0$ mit $\cos 0 = 1$ und $\sin 0 = 0$ führt dies auf folgende Vorschrift zur Bestimmung der Fourierkoeffizienten

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{2}{T} \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{2} (F_i + F_{i+1}) (x_{i+1} - x_i) \right] \\
 a_k &= \frac{2}{T} \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{2} \left(F_i \cos\left(\frac{2\pi k}{T} x_i\right) + F_{i+1} \cos\left(\frac{2\pi k}{T} x_i\right) \right) (x_{i+1} - x_i) \right] \\
 &\qquad\qquad\qquad \text{für } k = 1, 2, 3, \dots, n \quad (\text{A.4}) \\
 b_k &= \frac{2}{T} \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{2} \left(F_i \sin\left(\frac{2\pi k}{T} x_i\right) + F_{i+1} \sin\left(\frac{2\pi k}{T} x_i\right) \right) (x_{i+1} - x_i) \right] \\
 &\qquad\qquad\qquad \text{für } k = 1, 2, 3, \dots, n.
 \end{aligned}$$

Unter Beachtung der Periodizität

$$\begin{aligned}
 F_1 &= F_{N+1} \\
 F_1 \cos\left(\frac{2\pi k}{T} x_1\right) &= F_{N+1} \cos\left(\frac{2\pi k}{T} x_{N+1}\right) = F_1 \\
 F_1 \sin\left(\frac{2\pi k}{T} x_1\right) &= F_{N+1} \sin\left(\frac{2\pi k}{T} x_{N+1}\right) = 0
 \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

und der Äquidistanz der Punkte

$$\begin{aligned} x_{i+1} - x_i &= \Delta x \quad \text{für alle } i \\ T/\Delta x &= N \quad (\equiv \text{Anzahl der Integrationsintervalle}) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

erhält man aus (A.4) die Ausdrücke

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N F_i \\ a_k &= \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \left(F_i \cos\left(\frac{2\pi k}{T} x_i\right) \right) \quad \text{für } k = 1, 2, 3, \dots, n \\ b_k &= \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \left(F_i \sin\left(\frac{2\pi k}{T} x_i\right) \right) \quad \text{für } k = 1, 2, 3, \dots, n. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Durch die Umformung

$$\frac{x_i}{T} = \frac{(i-1)\Delta x}{N\Delta x} = \frac{(i-1)}{N} \quad (\text{A.8})$$

lassen sich die Ausdrücke (A.7) in die endgültige Form

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N F_i \\ a_k &= \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \left(F_i \cos\left(\frac{2\pi k}{N}(i-1)\right) \right) \quad \text{für } k = 1, 2, 3, \dots, n \\ b_k &= \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \left(F_i \sin\left(\frac{2\pi k}{N}(i-1)\right) \right) \quad \text{für } k = 1, 2, 3, \dots, n \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

bringen, in der die Periode T nicht mehr auftritt. Die Ausdrücke (A.9) stellen gleichzeitig die Lösung des Problems einer **trigonometrischen Interpolation** einer durch äquidistant verteilte Punkte gegebenen Funktion dar. Mit der inversen diskreten Fourier-Transformation (IDFT) ist es nun möglich, diese über diskrete Punkte rückabzubilden. Hierbei müssen zwei Fälle unterschieden werden: Fall 1 mit einer ungeraden Anzahl der Intervalle $N = 2n + 1$, und Fall 2 mit einer geraden Anzahl der Intervalle $N = 2n$.

Fall 1 ($N = 2n + 1$, ungerade)

Hier kann das Problem der geometrischen Interpolation eindeutig gelöst werden, und die kontinuierliche Funktion $f(x)$ ist analog der IFT definiert als

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T} x\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T} x\right) \right]. \quad (\text{A.10})$$

Fall 2 ($N = 2n$, gerade)

Hier ist das Problem der geometrischen Interpolation nicht eindeutig lösbar. Die kontinuierliche Funktion $f(x)$ läßt sich trotzdem angeben, und zwar mit

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) \right] + \frac{a_n}{2} \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right). \quad (\text{A.11})$$

Demnach wird im *Fall 2* bei den letzten Termen in der Summe nur der cos-Koeffizient a_n multipliziert mit 0.5 berücksichtigt

Für beide Fälle berechnen sich die Fourierkoeffizienten identisch nach (A.9), lediglich die Rückabbildung erfolgt unterschiedlich. Es sei angemerkt, dass in beiden Fällen die gegebenen Stützwerte F_i durch die IDFT exakt wieder hergestellt (rückabgebildet) werden.

Zweidimensionale Fourier-Transformation

Bei einer zweidimensionalen Funktion $f(x, y)$ kommt die sogenannte zweidimensionale Fourier-Transformation zum Einsatz (2d-FT). Dabei wird die kontinuierliche Funktion $f(x, y)$ durch folgenden Ansatz approximiert

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left[\left(a_{k,l} \cos\left(\frac{2\pi k}{T_x}x\right) + b_{k,l} \sin\left(\frac{2\pi k}{T_x}x\right) \right) \cdot \left(c_{k,l} \cos\left(\frac{2\pi l}{T_y}y\right) + d_{k,l} \sin\left(\frac{2\pi l}{T_y}y\right) \right) \right] \quad (\text{A.12})$$

oder umgeformt

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left[\tilde{a}_{k,l} \cos\left(\frac{2\pi k}{T_x}x\right) \cos\left(\frac{2\pi l}{T_y}y\right) + \tilde{b}_{k,l} \cos\left(\frac{2\pi k}{T_x}x\right) \sin\left(\frac{2\pi l}{T_y}y\right) \right. \\ \left. + \tilde{c}_{k,l} \sin\left(\frac{2\pi k}{T_x}x\right) \cos\left(\frac{2\pi l}{T_y}y\right) + \tilde{d}_{k,l} \sin\left(\frac{2\pi k}{T_x}x\right) \sin\left(\frac{2\pi l}{T_y}y\right) \right]. \quad (\text{A.13})$$

Die Koeffizienten sind folgendermaßen definiert:

$$\tilde{a}_{k,l} = \frac{\nu}{\Omega} \int_0^{T_y} \int_0^{T_x} f(x, y) \cdot \cos\left(\frac{2\pi k}{T_x}x\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi l}{T_y}y\right) dx dy \quad (\text{A.14})$$

$$\tilde{b}_{k,l} = \frac{\nu}{\Omega} \int_0^{T_y} \int_0^{T_x} f(x, y) \cdot \cos\left(\frac{2\pi k}{T_x}x\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi l}{T_y}y\right) dx dy \quad (\text{A.15})$$

$$\tilde{c}_{k,l} = \frac{\nu}{\Omega} \int_0^{T_y} \int_0^{T_x} f(x, y) \cdot \sin\left(\frac{2\pi k}{T_x}x\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi l}{T_y}y\right) dx dy \quad (\text{A.16})$$

$$\tilde{d}_{k,l} = \frac{\nu}{\Omega} \int_0^{T_y} \int_0^{T_x} f(x, y) \cdot \sin\left(\frac{2\pi k}{T_x}x\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi l}{T_y}y\right) dx dy \quad (\text{A.17})$$

mit

$$\Omega = T_x \cdot T_y \quad (\text{A.18})$$

$$\nu = \begin{cases} 1 & \text{für } k = l = 0 \\ 2 & \text{für } k = 0 \text{ oder } l = 0 \\ 4 & \text{für } k \neq 0 \text{ und } l \neq 0 \end{cases} .$$

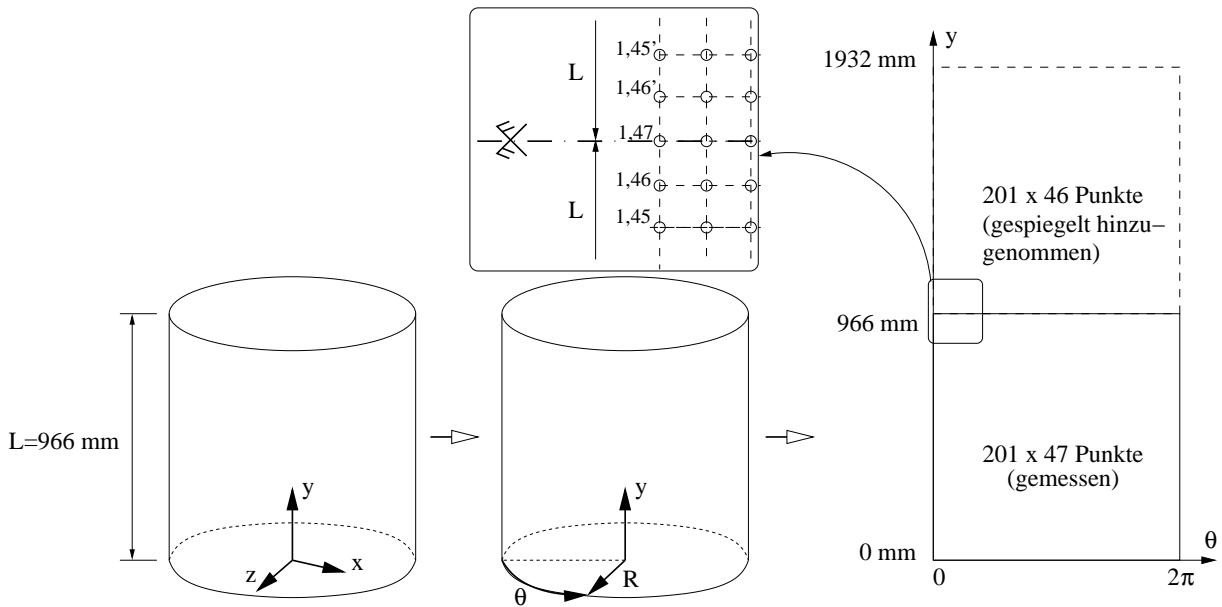


Abbildung A.2: Transformation der Geometriedaten eines imperfekten Kreiszyinders zur diskreten zweidimensionalen Fourier-Transformation

Die untersuchten Zylinder wurden in einem annähernd quadratischen Raster mit 200 Punkten in Umfangsrichtung und 47 Punkten in Achsrichtung vermessen. Nach einer Transformation in Zylinderkoordinaten, d.h. Abrollen des Zylindermantels, ergibt sich eine 2-dimensionale Signalmatrix $R_{i,j} = R(\theta_i, y_j)$ zunächst der Dimension 201×47 ¹ Stützwerte $R_{i,j}$, s. Abb. 5.26. Diese kann dann mit der 2d-DFT analysiert werden. Die Periode in Umfangsrichtung wird zu $T_\theta = 2\pi$ mit $N_\theta = 200$ Integrationsintervallen gewählt. Hier ist "automatisch" eine Stetigkeit des Signals gegeben. In axialer Richtung werden die gemessenen Stützwerte gespiegelt hinzugenommen, wodurch auch in dieser Richtung die Stetigkeit des Signals erreicht wird. Die Periode ergibt sich in dieser Richtung zu $T_y = 2L$ mit $N_y = 92$ Integrationsintervallen, s. Abb. A.2. Trotz der nahezu Verdoppelung der Matrixgröße von (201×47) auf (201×93) Stützwerte steigt der Aufwand und die Anzahl der Koeffiziente nicht, wie weiter unten gezeigt wird.

¹Beim Abrollen des Zylindermantels werden die Stützwerte $R_{1,j}$ am Ende der Periode hinzugenommen, sodass gilt $R_{1,j} = R_{201,j}$

Mit den so gewählten Perioden ergibt sich der Ansatz unter Annahme einer kontinuierlich verteilten Radius-Funktion $r(\theta, y)$ zu

$$r(\theta, y) \approx \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m \left[\tilde{a}_{k,l} \cos(k\theta) \cos\left(\frac{\pi l}{L}y\right) + \tilde{b}_{k,l} \cos(k\theta) \sin\left(\frac{\pi l}{L}y\right) + \tilde{c}_{k,l} \sin(k\theta) \cos\left(\frac{\pi l}{L}y\right) + \tilde{d}_{k,l} \sin(k\theta) \sin\left(\frac{\pi l}{L}y\right) \right]. \quad (\text{A.19})$$

Die Zahlen n und m stehen für die Anzahl der verwendeten Fourier-Koeffizienten. Die Koeffizienten selbst sind im vorliegenden Fall folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{k,l} &= \frac{\nu}{\Omega} \int_0^{2L} \int_0^{2\pi} r(\theta, y) \cdot \cos(k\theta) \cdot \cos\left(\frac{\pi l}{L}y\right) d\theta dy \\ \tilde{b}_{k,l} &= \frac{\nu}{\Omega} \int_0^{2L} \int_0^{2\pi} r(\theta, y) \cdot \cos(k\theta) \cdot \sin\left(\frac{\pi l}{L}y\right) d\theta dy \\ \tilde{c}_{k,l} &= \frac{\nu}{\Omega} \int_0^{2L} \int_0^{2\pi} r(\theta, y) \cdot \sin(k\theta) \cdot \cos\left(\frac{\pi l}{L}y\right) d\theta dy \\ \tilde{d}_{k,l} &= \frac{\nu}{\Omega} \int_0^{2L} \int_0^{2\pi} r(\theta, y) \cdot \sin(k\theta) \cdot \sin\left(\frac{\pi l}{L}y\right) d\theta dy \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

mit

$$\begin{aligned} \Omega &= 2\pi \cdot 2L \\ \nu &= \begin{cases} 1 & \text{für } k = l = 0 \\ 2 & \text{für } k = 0 \text{ oder } l = 0 \\ 4 & \text{für } k \neq 0 \text{ und } l \neq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Das zu analysierende Gebiet des doppelten abgerollten Zylindermantels ist achsensymmetrisch zur Achse $y = 966 \text{ mm}$. Es ist leicht einsehbar, dass sich deswegen die Koeffizienten mit $\sin(\frac{\pi l}{L}y)$, d.h. $\tilde{b}_{k,l}$ und $\tilde{d}_{k,l}$, zu Null ergeben². Dadurch vereinfacht sich der Ansatz zu

$$r(\theta, y) \approx \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m \left[\cos\left(\frac{\pi l}{L}y\right) (\tilde{a}_{k,l} \cos(k\theta) + \tilde{c}_{k,l} \sin(k\theta)) \right]. \quad (\text{A.22})$$

In der Folge der Anwendung der Trapezregel im vorliegenden zweidimensionalen Fall ergeben sich analog zum Vorgehen bei der oben beschriebenen eindimensionalen DFT

²Sind zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ im Intervall $[-a; +a]$ gegeben, und ist eine davon achsensymmetrisch zur Achse $x = 0$ (hier die Datenreihe in Achsrichtung des Zylinders) und die andere punktsymmetrisch bezüglich Koordinatenursprungs (hier $\sin(x)$), so gilt $\int_{-a}^{+a} f(x)g(x) dx = 0$. Man spricht hier auch von Orthogonalität.

folgende Vorschriften zur Bestimmung der Fourierkoeffizienten der 2d-DFT

$$\begin{aligned}
 a_{0,0} &= \frac{1}{N_\theta N_y} \sum_{i=1}^{N_\theta} \sum_{j=1}^{N_y} [R_{i,j}] \quad (k=0, l=0) \\
 a_{0,l} &= \frac{2}{N_\theta N_y} \sum_{i=1}^{N_\theta} \sum_{j=1}^{N_y} \left[R_{i,j} \cos \left(\frac{2\pi l}{N_y} (j-1) \right) \right] \quad (k=0; l=1, 2, 3, \dots, m) \\
 c_{0,l} &= 0
 \end{aligned} \tag{A.23}$$

$$a_{k,0} = \frac{2}{N_\theta N_y} \sum_{i=1}^{N_\theta} \sum_{j=1}^{N_y} \left[R_{i,j} \cos \left(\frac{2\pi k}{N_\theta} (i-1) \right) \right] \quad (k=1, 2, 3, \dots, n; l=0)$$

$$c_{k,0} = \frac{2}{N_\theta N_y} \sum_{i=1}^{N_\theta} \sum_{j=1}^{N_y} \left[R_{i,j} \sin \left(\frac{2\pi k}{N_\theta} (i-1) \right) \right] \quad (k=1, 2, 3, \dots, n; l=0)$$

$$\begin{aligned}
 a_{k,l} &= \frac{4}{N_\theta N_y} \sum_{i=1}^{N_\theta} \sum_{j=1}^{N_y} \left[R_{i,j} \cos \left(\frac{2\pi k}{N_\theta} (i-1) \right) \cos \left(\frac{2\pi l}{N_y} (j-1) \right) \right] \\
 &\quad (k=1, 2, 3, \dots, n; l=1, 2, 3, \dots, m)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_{k,l} &= \frac{4}{N_\theta N_y} \sum_{i=1}^{N_\theta} \sum_{j=1}^{N_y} \left[R_{i,j} \sin \left(\frac{2\pi k}{N_\theta} (i-1) \right) \cos \left(\frac{2\pi l}{N_y} (j-1) \right) \right] \\
 &\quad (k=1, 2, 3, \dots, n; l=1, 2, 3, \dots, m)
 \end{aligned}$$

mit $n = \frac{N_\theta}{2} = 100 \dots$ Anzahl der jew. FK in Umfangsrichtung

und $m = \frac{N_y}{2} = 46 \dots$ Anzahl der jew. FK in Achsrichtung.

Bei anschließender Rückabbildung der Stützwerte, der 2d-IDFT, muss auch hier zwischen gerader und ungerader Anzahl der Intervalle N_θ und N_y unterschieden werden. Allerdings konnten im einschlägigen Schrifttum keine Angaben zu einer geraden Anzahl gefunden werden. Aus diesem Grund wird die inverse Transformation für eine ungerade Anzahl der Intervalle verwendet.

Anhang B

Zu den in der Arbeit verwendeten Imperfektionen

Die in der vorliegenden Arbeit verwendeten Imperfektionen entsprechen den im Rahmen des Sonderforschungsbereichs 219 [48] vermessenen realen Versuchskörpern mit den Bezeichnungen *AL-1100*, *AL-850* und *AL-650*. Die Vermessung der Imperfektionen beschränkte sich auf radiale Formabweichungen. Der Vorgang der Vermessung und die Auswertungen der Imperfektionen sind in UMMENHOFER [84] ausführlich beschrieben und bereits in den Arbeiten von KNEBEL [50] und ROTTNER [69] verwendet.

Die imperfekte Geometrie der o.g. Zylinder ist überhöht im Abschnitt 5.3 dargestellt. Die Daten können in elektronischer Form beim Institut für Mechanik

Adresse: Institut für Mechanik
Universität Karlsruhe (TH)
76128 Karlsruhe

WEB: www.ifm.uni-karlsruhe.de

angefordert werden.

Lebenslauf

Name	Eduard Ewert
Geburtsdatum	9. Dezember 1971
Geburtsort	Rudnyj, Kasachstan
Schulbesuch	1979 – 1988 Allgemeine Schule in Rudnyj, Kasachstan 1989 – 1990 diverse Sprachkurse 1990 – 1993 Schloßgymnasium in Künzelsau (staatl. Gymnasium in Aufbauform mit Internat), Abschluss mit allgemeiner Hochschulreife
Ersatzdienst	1993 – 1994
Studium	1994 – 2000 Bauingenieurwesen an der Universität Karlsruhe (TH) Abschluss als Diplom-Ingenieur
Beruf	12/2000 – 02/2008 wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik der Universität Karlsruhe (TH)

In dieser Schriftenreihe bisher erschienene Berichte

- M97/1 KLAUS KNEBEL
Stabilität von Stahlzylindern mit unilateralen Randbedingungen bei statischen und dynamischen Beanspruchungen
- M97/2 JÖRG RICCIUS
Adaptive Methoden zur statischen und dynamischen Analyse von Flächentragwerken mit linearen Finiten Elementen
- M97/3 RALF HAUPTMANN
Strukturangepaßte geometrisch nichtlineare Finite Elemente für Flächentragwerke
- M98/1 HARALD KAMMERER
Nichtglatte Dynamik eines fremderregten elastischen Balkens mit Reibglied
- M98/2 STEFAN DOLL
Zur numerischen Behandlung großer elasto-viskoplastischer Deformationen bei isochor-volumetrisch entkoppeltem Stoffverhalten
- M00/1 THOMAS ROTTNER
Sensitivitätsanalyse stabiler Gleichgewichtslagen dünnwandiger Strukturen unter Verwendung von Lösungsverfahren für Parallelrechner
- M00/2 CHRISTOF FREISCHLÄGER
Konzepte zur Formulierung versteifungsfreier Volumenelemente
- M00/3 THOMAS ENGLER
Starrkörper und FE-Modellierung nichtglatter Schwingungen infolge Reibung und Stößen
- M02/1 BURKHARD GÖTTLICHER
Effiziente Finite-Element-Modellierung gekoppelter starrer und flexibler Strukturbereiche bei transienten Einwirkungen
- M02/2 QIGUO RONG
Finite Element Simulation of the Bone Modeling and Remodeling Processes around a Dental Implant
- M03/1 THORSTEN RUMPEL
Effiziente Diskretisierung von statischen Fluid-Struktur-Problemen bei großen Deformationen
- M04/1 MATTHIAS HARNAU
Finite Volumen-Schalenelemente für große Deformationen und Kontakt