

Theoretische Untersuchung zur Stabilität
der Strömung in einem konvergenten
Mikrospalt bei Benetzung

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Ingenieurwissenschaften

der Fakultät für Maschinenbau
der Universität Karlsruhe (TH)

genehmigte
Dissertation

von

Sabine Strein

aus Pforzheim

Tag der mündlichen Prüfung: 07. Juli 2008

Vorsitzender: Prof. Dr. rer. nat. D. Munz

Referenten: Prof. Dr.-Ing. H. Oertel jr.

Prof. Dr.-Ing. P. Ehrhard, TU Dortmund

Erklärung

Ich versichere die Dissertation bis auf die dort angegebenen Hilfen selbstständig angefertigt, alle benutzten Hilfsmittel vollständig und genau angegeben und alles kenntlich gemacht zu haben, was aus Arbeiten anderer entnommen wurde.

Remchingen, im Juli 2008

Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als Doktorandin am Institut für Kern- und Energietechnik (IKET) des Forschungszentrums Karlsruhe GmbH. Zunächst möchte ich meinem Referenten Herrn Prof. Dr.-Ing. P. Ehrhard vom Lehrstuhl Strömungsmechanik an der Technischen Universität Dortmund danken, der mir die Durchführung dieser Arbeit ermöglichte und mich während meiner Tätigkeit am IKET jederzeit mit Rat und Tat unterstützte.

Desweiteren geht mein Dank an Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Oertel jr. vom Institut für Strömungslehre der Universität Karlsruhe für die Übernahme eines Referats.

Weiterhin danke ich besonders meinem Mann, der mich während meiner Doktorarbeit mit viel Geduld unterstützte.

Zusammenfassung

Gegenwärtige Arbeit beschäftigt sich theoretisch mit einem instabilen Beschichtungsprozess. Grundlegend betrachten wir eine Folie, die vertikal in einen mit Flüssigkeit gefüllten Behälter getaucht wird. Dabei liegt die Konzentration vor allem auf die Keilströmung, die sich zwischen bewegter Wand und der freien Grenzfläche im entnetzenden Fluid einstellt. Je nach Verhältnis von Dichte und Viskosität stellen sich zwei grundlegende Strömungsformen im entnetzenden Fluid ein Viskositätsverhältnissen (Typ 1 und Typ 2).

Basierend auf der Kontinuitätsgleichung sowie der Navier–Stokes–Gleichung formulieren wir die zweidimensionale, stationäre und inkompressible Grundströmung im Keil für beide Typen in dimensionsloser Form. Die Grundströmung wird desweiteren mit einer dreidimensionalen, zeitabhängigen kleinen Störung gestört. Der Satz von Störgleichungen wird für beide Typen mittels geeignetem Näherungsverfahren (Galerkin-Verfahren) in Φ gemittelt und in R numerisch integriert.

Die Gegebenheiten an der freien Grenzfläche werden zuerst vereinfacht. Die Randbedingung an der freien Grenzfläche wird als geometrisch eben angenommen, wobei die tangential Geschwindigkeit dort entweder durch das entnetzende Fluid (Typ 1) oder das benetzende Fluid (Typ 2) aufgeprägt wird. Für diesen idealisierten Fall bleiben beide Grundströmungen (Typ 1 und Typ 2) stabil. Sowohl ebene als auch Z -periodische (kleine) Störungen werden exponentiell gedämpft. Die geringste Dämpfung erhalten wir für lange Wellen in Z ($a \rightarrow 0$). Für kleine Wellen, d.h. für steigende Wellenzahl a , nimmt die Dämpfungsrate kontinuierlich zu. Im Falle anwachsender Reynolds-Zahlen erhalten wir kleinere Dämpfungsraten, ohne daß eine Anfachung erreicht wird. Zur Bestätigung der Ergebnisse aus der linearen Strömungsrechnung werden dreidimensionale zeitabhängige FEM–Simulationen mit einer endlichen Störampplitude durchgeführt.

Desweiteren approximieren wir die freie Grenzfläche mit einer konstanten Krümmung. Wir erhalten mittels entsprechender linearen Stabilitätsanalyse, daß alle Störungen exponentiell in der Zeit gedämpft sind. Desweiteren zeigen die Reynolds–Zahl und die Wellenzahl gleiches Verhalten wie für die eben angenommene Grenzfläche. Da für steigende $M = r_1/r_0 \rightarrow \infty$ die Dämpfungsrate kleiner wird, stellt die eben angenommene Grenzfläche den kritischsten Fall dar.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation	1
1.2	Problemstellung	1
1.3	Zielsetzung	3
2	Grundlagen	4
2.1	Stand der Forschung	4
2.1.1	Kontaktlinie	5
2.1.2	Kontaktwinkel	7
2.1.3	Theoretische Behandlung von Spaltströmungen und Benetzungsströmungen	9
2.2	Lineare Stabilitätsanalyse	12
2.3	Grundströmungsformen	14
3	Strömung von Typ 1 mit vereinfachten Randbedingungen	18
3.1	Zweidimensionale Grundströmung	18
3.1.1	Stokessche Strömung	20
3.1.2	Euler-Strömung	22
3.2	Zeitliche und dreidimensionale Stabilitätsanalyse	23
3.2.1	Stördifferentialgleichung	23
3.2.2	Zweidimensionale Störung ($a = 0$)	26
3.2.3	Dreidimensionale Störung ($a \neq 0$)	29
3.2.4	Vergleich der Eigenwerte mit numerischer Simulation	30
3.2.5	Stördifferentialgleichung für Stokessche Grundströmung und freier Grenzfläche	32
3.2.6	Vergleich verschiedener Öffnungswinkel	34
3.3	Druck	34
3.3.1	Grenzflächenkontur	36

4	Strömung vom Typ 2 mit vereinfachten Randbedingungen	41
4.1	Zweidimensionale Grundströmung	41
4.1.1	Stokessche Strömung	42
4.1.2	Euler-Strömung	43
4.2	Zeitliche und dreidimensionale Stabilitätsanalyse	44
4.2.1	Randbedingungen in der Nachbarschaft von $R = 0$	46
4.2.2	Zweidimensionale ($a = 0$) und dreidimensionale ($a \neq 0$) Störung	48
4.2.3	Vergleich der Eigenwerte mit numerischer Simulation	51
4.3	Druck	52
4.3.1	Grenzflächenkontur	54
5	Strömung vom Typ 1 mit gekrümmter Grenzfläche	57
5.1	Zweidimensionale Grundströmung	57
5.2	Zeitliche und dreidimensionale Stabilitätsanalyse	59
5.2.1	Randbedingungen	62
5.2.2	Zweidimensionale ($a = 0$) und dreidimensionale ($a \neq 0$) Störung	63
6	Zusammenfassung und Ausblick	65
7	Anhang	68
	Literaturverzeichnis	71

1 Einleitung

1.1 Motivation

Die Untersuchung und Beschreibung von dynamischen Benetzungs- und Entnetzungs-vorgänge ist bei einer Vielzahl technischer Prozessen relevant. Die Beschichtung eines Festkörpers mit einer dünnen Flüssigkeitsschicht spielt beispielsweise bei der foto-graphischen und textilen Industrie, wie auch der Herstellung von LCD-Bildschirmen, Magnetbändern, Papier oder Klebestreifen eine große Rolle. Bei all diesen Verfah-ren ist es qualitätsbedingt besonders wichtig, und damit auch wirtschaftlich, eine möglichst schnelle, vollständige und gleichmäßige Beschichtung der Flüssigkeit auf den Festkörper zu erreichen. Die häufigste Beschränkung bei Beschichtungsprozessen, bei denen eine hohe Produktionsrate und absolute Reinheit der Beschichtung gefordert ist, ist die maximale Festkörpergeschwindigkeit. Bei Überschreitung einer kritischen Geschwindigkeit, die bei allen Beschichtungsprozessen vorkommt, ist eine komplette Benetzung des Produkts nicht mehr garantiert. Bei ansteigender Beschichtungsge-schwindigkeit wird eine instabile, dynamische Kontaktlinie (dort wo Flüssigkeit, Gas und Festkörper zusammentreffen) beobachtet, die die Strömung in den Fluiden in-stationär und dreidimensional werden lässt. In der Folge machen Lufteinschlüsse das Beschichtungsprodukt unbrauchbar. Bis zum jetzigen Zeitpunkt wird die Physik die-ser Beschichtungsprozesse immer noch diskutiert und belastbare Modelle liegen nicht vor.

Untersuchungen, die Be- und Entnetzungsvorgängen betreffen sind deshalb wichtig, weil bei praktischen Anwendungen das profitorientierte Ziel besteht, die Festkörperge-schwindigkeit zu erhöhen, ohne, dass Beschichtungsfehler auftreten. Bis heute wird in der praktischen Entwicklung von Beschichtungsprozessen meist empirisch vorgegan-gen. Auf Grund dessen benötigt der Beschichtungsprozess zum tieferen Verständnis weitere grundlegende Forschung. Im Gegensatz zu praktischen Untersuchungen von Be- bzw. Entnetzungsprozessen, sind theoretische Arbeiten zu diesen Prozessen eher selten.

1.2 Problemstellung

Die Untersuchungen konzentrieren sich auf einen Benetzungsvorgang eines Flüssig-keit-Gas-Systems. Eine Folie taucht vertikal in ein Becken ein, welches mit Flüssigkeit

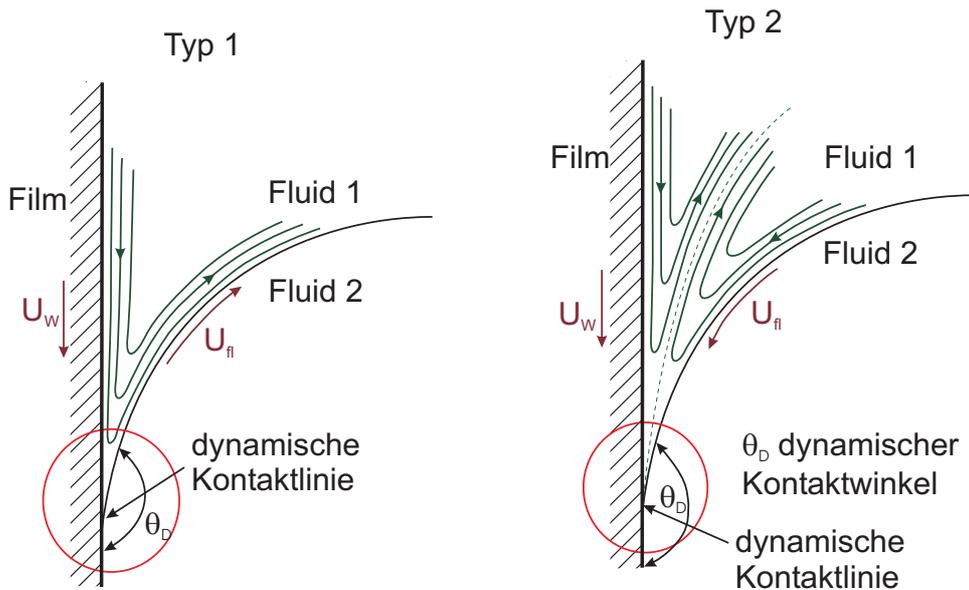


Abbildung 1: Prinzipskizze der Benetzungsströmung vom Typ 1 und 2.

gefüllt ist. Zwischen bewegtem Festkörper und freier Oberfläche entsteht in der Gasphase ein zusammenlaufender Mikropalt. Dies hängt damit zusammen, dass der dynamische Kontaktwinkel für große Benetzungsgeschwindigkeiten den Wert $\theta_D \rightarrow 180^\circ$ annimmt (vgl. Abbildung 1). Für die Strömungsstruktur im Spalt stellen sich je nach Viskosität von Fluid 1 und Fluid 2 und Foliengeschwindigkeit U_w zwei verschiedene Grundströmungen ein. Wir bezeichnen die beiden Fälle als Typ 1 oder Typ 2. Abbildung 1 zeigt die möglichen Typen in einer Prinzipskizze auf.

Tritt der Fall ein, dass die Foliengeschwindigkeit eine kritische Geschwindigkeit überschreitet, ergeben sich Instabilitäten der ursprünglich zweidimensionalen (ebenen) Strömungen und eine dreidimensionale Situation auf. In der Folge werden aufgrund der instabilen Kontaktlinie Luftblasen ins Benetzungsfluid gezogen, die den Beschichtungsprozess stören und zu einer unreinen Folienbeschichtung führen.

Der instabile Beschichtungsprozess, und damit die maximale Festkörpergeschwindigkeit, wird durch das benetzende Fluid, das zu beschichtende Material und das entnetzende Fluid (Fluid 1) bestimmt. Die Frage ist nun welche Rolle das entnetzende Fluid im gesamten Prozess spielt. Tauchen Störungen im entnetzenden Fluid auf und werden im weiteren Verlauf angefacht, hat dies zur Folge, dass das entnetzende Fluid Einfluß auf den Beschichtungsprozess nimmt. Letztendlich wird die maximale Festkörpergeschwindigkeit dann vom entnetzenden Fluid bestimmt. Alternativ können die Störungen im benetzenden Fluid entstehen und angefacht werden. In diesem Fall bestimmt

das Benetzungsfliuid die maximale Festkörpergeschwindigkeit.

1.3 Zielsetzung

Im Rahmen dieser Arbeit wird die Strömung in einem Mikropalt eines Flüssigkeit-Dampf-Systems untersucht. Der Schwerpunkt liegt dabei auf der Untersuchung von Stabilitäten der Strömung des entnetzenden Fluid (Fluid 1) in einem solchen Spalt. Für beide Fälle (Typ 1 und Typ 2) lassen sich gegenüber der tatsächlichen Physik die Randbedingungen vereinfachen. Basierend auf verschiedenen Vereinfachungen beschreiben wir in dieser Arbeit die zweidimensionale, ebene und stationäre Grundströmung, je nach Randbedingungen und Viskositätsen analytisch oder mit geeigneten numerischen Verfahren. Mittels einem entdimensionierten Satz von Strömungsgleichungen führen wir eine lineare Stabilitätsanalyse dieser inkompressiblen Grundströmung durch. Die Stabilitätsanalyse fragt hierbei nach dem Verhalten dreidimensionaler, räumlich periodischer Störungen in der Zeit. Für verschiedene Vereinfachungen werden für beide Typen von Strömung Stördifferentialgleichung hergeleitet und auf Eigenwerte untersucht. Der Einfluß verschiedener geometrischer Gegebenheiten im Spalt wird in dieser Arbeit zudem erarbeitet.

2 Grundlagen

2.1 Stand der Forschung

Ein vielfach untersuchtes Phänomen bei Beschichtungsprozessen ist die dynamische Benetzung von Festkörpern mit einer Flüssigkeit. Verschiedene produktionstechnische Methoden von Beschichtungstechniken sind beispielsweise Tauch-, Walzen-, Rollen oder Spaltverfahren. Bis zum jetzigen Zeitpunkt beschäftigen sich immer wieder Forschungsarbeiten mit Beschichtungs Vorgängen. Ein besonderes Augenmerk wird auf Tauchbeschichtungen gelegt, bei der eine Folie in ein Flüssigkeitsbad mit freier Oberfläche getaucht oder herausgezogen wird (Weinstein und Ruschak 2004, Benkreira 2004, Blake und Shikhmurzaev 2002, Yimsiri und Mackley 2006). Besonderes Interesse gilt u.a. der Untersuchung der instabilen Beschichtung bei ausreichend hohen Festkörpergeschwindigkeiten.

Gegenwärtige Untersuchungen konzentrieren sich zumeist auf Experimente zu statischen und dynamischen Kontaktwinkel und zur maximalen Festkörpergeschwindigkeiten (Inverarity 1969, Blake und Ruschak 1979, Burley und Jolly 1984a, Cohu und Benkreira 1998b, Royon und Ehrhard 2001, Benkreira 2004, Gutoff und Kendrick 1982, Blake, Dobson und Ruschak 2004). In all diesen Experimenten wird eine Folie in einen stehenden mit Flüssigkeit gefüllten Behälter getaucht oder herausgezogen. Abbildung 2 zeigt ein Beispiel eines solchen Versuchsstandes, wie ihn (Royon und Ehrhard 2001) benutzt haben. Gewöhnlich werden Kontaktwinkel und Kontaktlinien bei verschiedenen bekannten, vorgegebenen physikalischen Eigenschaften der Festkörper, entnetzenden und benetzenden Fluids untersucht und Aussagen über die maximale Festkörpergeschwindigkeit getroffen. Wirtschaftlich interessant ist vor allem die Frage, inwieweit der Beschichtungsprozess höhere Festkörpergeschwindigkeiten bei verschiedenen physikalischen Gegebenheiten zulässt. Solche Fragestellungen können beispielsweise sein:

- Der Einfluß einer rauhen Folienoberfläche: Die Folienrauigkeit und die Viskosität des Benetzungsfluids wirken zusammen auf die maximale Benetzungsgeschwindigkeit. Eine raue Oberfläche kann nur zu höheren Foliengeschwindigkeiten führen, wenn beide (Folienrauigkeit und Viskosität) einen kritischen Wert überschreiten. Andernfalls führt eine raue Oberfläche zu geringeren maximalen Beschichtungsgeschwindigkeiten (Benkreira 2004).

- Der Einfluß des Winkels, unter dem die Folie in das Flüssigkeitsbad getaucht wird. Die maximale Festkörpergeschwindigkeit wird zu höheren Werten verschoben (Ishimi, Hikita und Esmail 1986, Cohu und Benkreira 1998a). Grund hierfür ist, dass die Geschwindigkeit, die für die Instabilität relevant ist, nicht die Festkörpergeschwindigkeit ist, sondern die Geschwindigkeitskomponente normal zur Benetzungslinie (Blake und Ruschak 1979).
- Die Folienbreite wird variiert. Die Breite der Folie spielt bei Beschichtungsprozessen keinerlei Rolle (Burley und Jolly 1984b).
- Untersuchungen verschiedener Viskositäten im benetzenden bzw. entnetzenden Fluid. Steigt die Zähigkeit im benetzenden Fluid an, verschiebt sich die maximale Beschichtungsgeschwindigkeit zu geringeren Werten. Folglich hängt die Viskosität von der maximalen Beschichtungsgeschwindigkeit ab (Blake et al. 2004, Weinstein und Ruschak 2004, Burley und Kennedy 1976, Gutoff und Kendrick 1982).
- Das benetzende Fluid ist ein nicht-newtonsches Fluid. Untersuchungen zeigen, dass die maximale Festkörpergeschwindigkeit bei nicht-newtonschen Fluiden im Vergleich zu newtonschen Fluiden höher ist (Ghanman und Esmail 1997).
- Der Beschichtungsvorgang findet im Vakuum statt. Die maximale Festkörpergeschwindigkeit erhöht sich im Vakuum (Benkreira 2006). In diesem Fall ist die Strömung im entnetzenden Fluid (Fluid 1) nicht vorhanden.
- Verschiedene Folienmaterialien (z.B. Polymere, Metalle usw.) werden untersucht.

Bei all diesen Gegebenheiten ist die maximale Festkörpergeschwindigkeit durch eine instabile Kontaktlinie gekennzeichnet.

2.1.1 Kontaktlinie

Bringen wir eine Flüssigkeit auf einen ruhenden Festkörper auf, so existiert im Falle einer partiellen Benetzung eine stationäre Kontaktlinie. Dieser Gleichgewichtszustand wird nach einiger Zeit eingenommen, er ist charakterisiert durch einen statischen Kontaktwinkel. Im Falle einer vollständigen Benetzung, bewegt sich die Kontaktlinie immer kontinuierlich mit der Zeit voran, der statische Kontaktwinkel $\theta_D \rightarrow 0$ wird

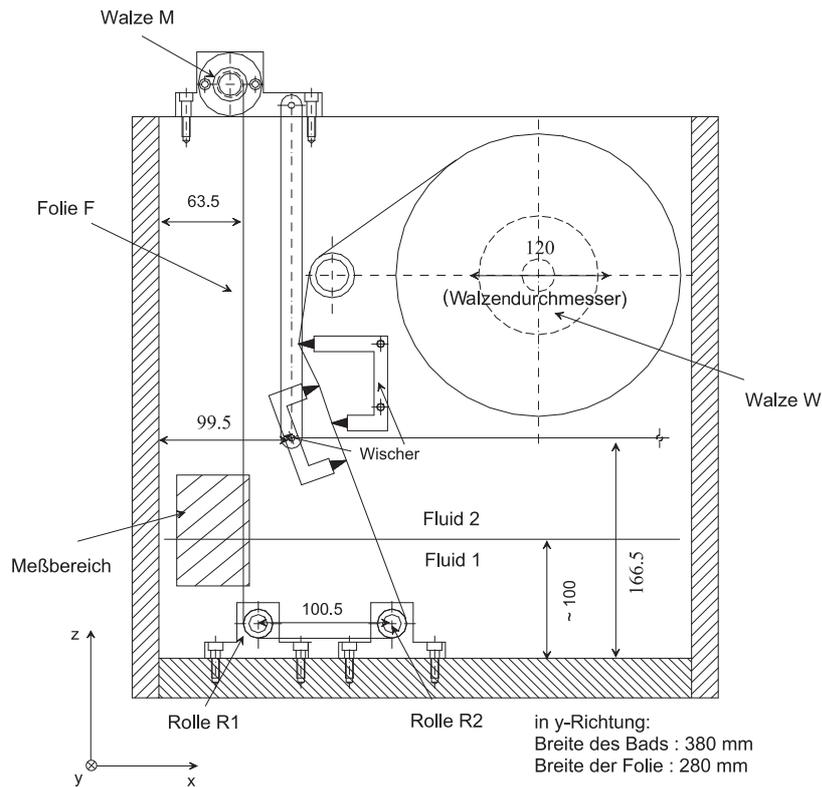


Abbildung 2: Versuchsstand von Royon01.

erreicht.

Erzwingen wir in einem System durch die Bewegung des Festkörpers eine Benetzung so ist bei kleinen Festkörpergeschwindigkeiten die dynamische Kontaktlinie gerade und stabil. Untersuchungen stellen erstmals fest, dass die dynamische Kontaktlinie, die sich relativ zur Festkörperoberfläche bewegt, bei ausreichend hohen Geschwindigkeiten instabil wird und eine sägezahnförmige Konfiguration bildet (Deryagin und Levi 1964). Dabei zerbricht die Kontaktlinie in mehrere geradlinige Segmente, die zur ursprünglich geraden Kontaktlinie geneigt sind. Das entnetzende Fluid -gewöhnlich Luft- tritt an dieser dreiphasigen Linie an den jeweiligen Spitzen ein. Dieses Verhalten belegt die Existenz einer maximale Benetzungsgeschwindigkeit in Gas-Flüssigkeit-Systemen. Die normale Geschwindigkeitskomponente eines Segments der Kontaktlinie übersteigt die maximale Benetzungsgeschwindigkeit nicht. Im Falle einer sägezahnförmigen Geometrie der dynamischen Kontaktlinie, geht die Strömung der beiden Fluide von einer 2D in eine 3D Strömung über (Blake und Ruschak 1979). Abbildung 3 zeigt eine solche sägezahnförmige Kontaktlinie im Experiment von (Blake und Ruschak 1979). Luftblasen werden an der Spitze eines Sägezahns in das benetzende Fluid hineingezogen; sie lassen sich in Abbildung 3 an der unteren Spitze des

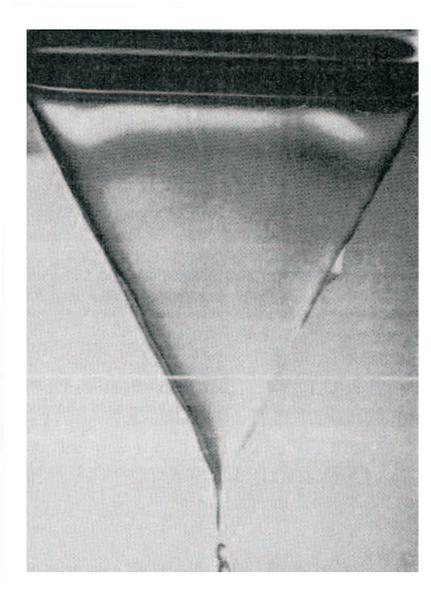


Abbildung 3: Dynamische Kontaktlinie mit sägezahnförmiger Konfiguration (nach Blake und Ruschak 1979).

Sägezahns erkennen.

2.1.2 Kontaktwinkel

Der Kontaktwinkel ist bei Beschichtungsprozessen ein Mass für die Benetzbarkeit. Folglich konzentrieren sich bis heute viele Forschungsarbeiten auf die Untersuchung von statischen und dynamischen Kontaktwinkeln. Bei bewegten Kontaktlinien zeigen Untersuchungen erstmals, dass sich der dynamische Kontaktwinkel mit der Geschwindigkeit der Kontaktlinie relativ zum Festkörper, ändert (Ablett 1923).

Im Falle eines stationären Gleichgewichts mit stationären Grenzflächen und Kontaktlinie kann der statischen Kontaktwinkel mit Hilfe der Youngsche Gleichung

$$\cos \theta_S = \frac{\sigma_S - \sigma_{LS}}{\sigma_L} \quad (2.1)$$

beschrieben werden. Dabei stellt die Youngsche Gleichung eine Beziehung zwischen der Oberflächenspannung zu Luft vom Festkörper σ_S , Oberflächenspannung zu Luft der Flüssigkeit σ_L , der Grenzflächenspannung σ_{LS} zwischen Festkörper und Flüssigkeit und dem Kontaktwinkel θ_S dar. Eine vollständige Benetzung erhalten wir im Grenzfall $\theta_S \rightarrow 0$, wobei $\sigma_S \gg \sigma_{LS}$ ist. In diesem Fall sind die intermolekularen Kräfte zwischen Festkörper und Flüssigkeit stark. Schwache intermolekulare Kräfte

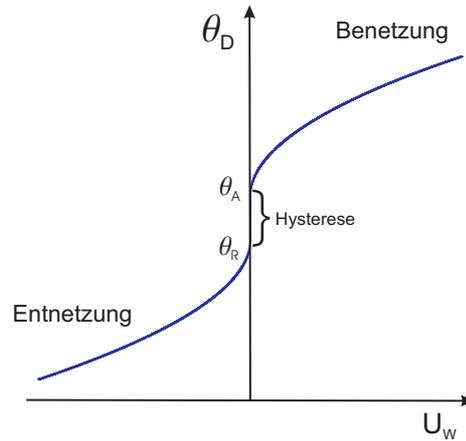


Abbildung 4: Dynamischer Kontaktwinkel über Foliengeschwindigkeit.

zwischen Festkörper- und Gasmolekülen hingegen bedingen eine große Grenzflächenspannung σ_S . Ein Gleichgewicht dieser Kräfte führt zu einer partiellen Benetzung mit statischem Kontaktwinkel θ_S .

Im allgemeinen ist der dynamische Kontaktwinkel θ_D bei Benetzungsvorgängen eine Funktion der Benetzungsgeschwindigkeit und strebt bei steigenden Geschwindigkeiten in Gas-Flüssigkeit-Systemen gegen den maximalen Wert von 180° (Inverarity 1969, Hoffmann 1975, Ström, Fredriksson, Stenius und Radoev 1990). In Abbildung 4 ist der Zusammenhang von Benetzungsgeschwindigkeit und Kontaktwinkel qualitativ dargestellt. Betrachten wir eine in Flüssigkeit eingetauchte Folie ($U_w > 0$), so steigt bei steigenden Geschwindigkeiten der dynamische Kontaktwinkel an. Kleiner werdende Geschwindigkeiten führen zu abfallenden kontaktwinkel.

Verschiedene Arbeiten stellen einen Zusammenhang zwischen dynamischem Kontaktwinkel, Oberflächenkräften und viskosen Kräften her. Beide Kräfte gehen als Quotient in eine dimensionslosen Kennzahl, die Kapillaritäts-Zahl $Ca = \nu\rho u_w/\sigma$ ein. Hierbei ist ν die kinematische Viskosität der Flüssigkeit, ρ die Dichte der Flüssigkeit, u_w die Benetzungsgeschwindigkeit und σ die Oberflächenspannung (Elliot und Riddiford 1965, Rose und Heins 1962, Burley und Kennedy 1976). Theoretische Untersuchungen bestätigen den Zusammenhang, dass bei dynamischer Benetzung der Kontaktwinkel von der Kapillaritäts-Zahl und dem statischen Kontaktwinkel θ_S abhängt (Blake und Ruschak 1997, Shikhmurzaev 1997, Kistler 1993), d.h. es ist

$$\cos \Theta_d = f(Ca, \theta_S). \quad (2.2)$$

Ein vielfach vorkommendes Phänomen bei dynamischen Kontaktwinkelproblemen ist

die Kontaktwinkelhysterese (vgl. Abbildung 4). Wird die Kontaktlinie in Ruhe gebracht, stellt sich kein eindeutiger Kontaktwinkel ein. Es werden zwei verschiedene Grenzwinkel unterschieden, der fortschreitender (θ_A) und der rückschreitender (θ_R) Kontaktwinkel. Je nachdem wie der statische Zustand eingestellt wird, stellt sich ein anderer Winkel ein. Wird die Folie aus einem Flüssigkeitsbad herausgezogen, verlangsamt und zum Stillstand gebracht, stellt sich in Ruhe der rückschreitende Kontaktwinkel θ_R ein. Wird die Folie anschließend vom Stillstand in das Flüssigkeitsbad eingetaucht, stellt sich kurz vor der Bewegung der fortschreitende Kontaktwinkel θ_A ein. Die Differenz aus beiden Kontaktwinkeln gibt die Kontaktwinkelhysterese an. Jeder Kontaktwinkel im Bereich $\theta_A \geq \theta \geq \theta_R$ ist statistisch möglich. Gründe für das Vorkommen einer Kontaktwinkelhysterese liegen in der Oberflächenrauigkeit des Festkörpers, welche die freie Bewegung der Kontaktlinie behindert.

Verschiedene Arbeiten stellen einen Zusammenhang zwischen maximaler Festkörpergeschwindigkeit und verschiedenen physikalischen Parametern, wie Viskositäten, Dichte und Oberflächenspannung her und entwickeln daraus Korrelationen (Burley 1975, Burley und Kennedy 1976, Guttoff und Kendrick 1982, Burley und Jolly 1984b). Bei diesen Untersuchungen wird beobachtet, dass die wichtigste physikalische Eigenschaft bei großen Geschwindigkeiten, die Zähigkeit des Benetzungsfluids ist. Hier bestimmen die viskosen Kräfte die Vorgänge und Oberflächenkräfte können vernachlässigt werden. Diese Beobachtungen stimmen mit früheren Untersuchungen überein (Inverarity 1969).

2.1.3 Theoretische Behandlung von Spaltströmungen und Benetzungsströmungen

1949 wird erstmals eine mathematische Formulierung für eine viskose Eckenströmung hergeleitet (Dean und Montagnon 1949). Zwei ruhende ebene Platten treffen sich in einer Ecke und es werden lokale Lösungen für bestimmte Spaltwinkel gefunden. Im weiteren wird eine theoretische Untersuchung einer Eckenströmung beschrieben (Moffatt 1964). Für eine viskose Strömung im konvergenten Spalt setzt Moffatt (1964) als Randbedingung an den ruhenden ebenen Platten die Haftbedingung an und findet ähnlichen Lösungen, die sogenannten Moffatt-Wirbel. Die Intensität und Anzahl der Wirbel hängt dabei vom Winkel ab. Desweiteren werden unter erweiterten Voraussetzungen Lösungen für Moffatt-Wirbel gefunden (Anderson und Davis 1993). Bei diesen Untersuchungen werden zwei verschiedene Fluide betrachtet, die sich in der

Ecke zwischen zwei ruhenden Platten bewegen. Sowohl Moffatt (1964) als auch Anderson und Davis (1993) betrachten nicht nur Eckenströmungen, welche durch feste Platten begrenzt sind. Vielmehr wird auch die Auswirkung von schubspannungsfreien Rändern betrachtet. Hier zeigt sich, dass für solche Ränder die Moffatt-Wirbel unter Umständen nicht auftreten.

Bei Benetzungsströmungen versagen klassische hydrodynamische Annahmen in der Nähe einer bewegten Kontaktlinie. Aufgrund des Zusammenspiels zwischen bewegter Kontaktlinie und Haftbedingung einer flüssig-fest Grenzfläche, kommt es zu Singularitäten in der Scherspannung, sowie im Druck der Flüssigkeit, die von der Flüssigkeit auf den Festkörper ausgeübt werden. Zur Vermeidung dieser Singularitäten werden in der Literatur vorrangig zwei verschiedene Modelle zur Beschreibung der dynamischen Kontaktlinie diskutiert: die molekular-kinetische (Frenkel 1946, Blake und Haynes 1969, Hoffmann 1983) und die makroskopische hydrodynamische Theorie (Hansen und Toong 1971, Voinov 1976, Cox 1986).

Das molekular-kinetische Modell basiert auf einer molekularen Abmessung des dreiphasigen Gebietes nahe der dynamischen Kontaktlinie und betrachtet Adsorptions- und Desorptionsprozesse der Moleküle von benetzendem Fluid und Festkörper. Prinzipiell sagt diese Theorie aus, dass die Geschwindigkeitsabhängigkeit des dynamischen Kontaktwinkels durch das Adsorptionsungleichgewicht an der Kontaktlinie entsteht. Dabei ist die Oberflächenspannung die treibende Kraft, die für die Molekülverschiebung und damit für die Bewegung der Kontaktlinie notwendig ist (Kistler 1993).

Das hydrodynamische Modell unterscheidet zwei verschiedene Bereiche (mikroskopischer und makroskopischer Bereich) nahe der bewegten Kontaktlinie. Befinden wir uns in mikroskopischen Abmessungen, kann die Strömung näherungsweise als Eckenströmung betrachtet werden. Der Meniskus und der Festkörper bilden einen lokalen mikroskopischen Kontaktwinkel (Voinov 1976). In diesem Bereich ist zudem die Rutschbedingung zulässig, um die Singularität an der Kontaktlinie zu eliminieren (Dussan V. 1976, Cox 1986). Im makroskopischen Bereich gelten die Haftbedingungen.

Unter anderem gibt es eine Arbeit, die sich mit der Strömung nahe der dynamischen Kontaktlinie für eine Beschichtungsströmung beschäftigt (Huh und Scriven 1971). Hier wird die Stokes'sche Strömung in der Umgebung des Tripelpunkts betrachtet und ein hydrodynamisches Modell nahe der bewegten Kontaktlinie hergeleitet. Beide Strömungstypen (Typ 1 und 2) werden für verschiedene Kontaktwinkel gefunden.

Desweiteren existieren experimentelle Untersuchungen zur Strömungstopologie nahe einer bewegten Kontaktlinie (Dussan V. und Davis 1974). Hier werden zwei Phänomene untersucht, die mit „rolling“ und „unrolling“ bezeichnet werden. In einem Experiment bewegt sich ein Honigtropfen entlang einer geneigten Platte nach unten. Eine Markierung, die an der Grenzfläche angebracht ist, bewegt sich entlang der Grenzfläche bis zur Kontaktlinie, d.h. der Flüssigkeitstropfen wird auf den Festkörper „aufgerollt“. Im umgekehrten Fall („unrolling“) entfernen sich die Fluidteilchen entlang einer Grenzfläche von der Kontaktlinie. In einem weiteren Experiment betrachten Dussan und Davis (1974) das „ejected surface“ und das „injected surface“ in einem mit Silikonöl und einer Wasser-Alkohol-Mischung gefüllten Behälter. Für den Fall eines „ejected surface“ fließt die Wasser-Alkohol-Mischung entlang der Grenzfläche und entlang des Festkörpers zur Kontaktlinie hin und entfernt sich entlang der Staustromlinie wieder. Wird die Geschwindigkeit der Kontaktlinie umgekehrt strömt das Silikonöl entlang der Staustromlinie zur Kontaktlinie hin und entfernt sich entlang der Grenzfläche und des Festkörpers („injected surface“).

Die Arbeit von (Royon und Ehrhard 2001) zeigt verschiedenen Strömungstopologien, sowohl numerisch als auch experimentell, nahe einer schnell bewegten Kontaktlinie auf. Zur Beschreibung der Strömungsstruktur im benetzenden und entnetzenden Fluid werden je zwei Wirbel (W_1 - W_4) und zwei Sattelpunkte (S_1 , S_2) in Abbildung 5a gefunden. Die Strömungstopologie von Typ 2 („ejected surface“) (vgl. Abbildung 1) stellt sich bei kleinen Reynolds-Zahlen im Fluid 1 ein. Beide Sattelpunkte befinden sich an der Kontaktlinie. In Fluid 1 sind zwei Wirbel (W_2, W_4) innerhalb des Fluids, die von der Staustromlinie getrennt werden. Bei steigenden Reynolds-Zahlen wandert der Sattelpunkt S_2 entlang der Grenzfläche nach links (Abbildung 5b). Das entnetzende Fluid bestimmt die Geschwindigkeit im benetzenden Fluid. Wirbel W_2 entfernt sich ebenfalls von der Kontaktlinie und wandert nach links, nahe der Kontaktlinie bleibt Wirbel W_4 stehen. In Fluid 1 hat sich die Strömungstopologie von Typ 1 (vgl. Abbildung 1) gebildet. Dieser Strömungstyp wird bei Dussan und Davis (1974) als „unrolling“ bezeichnet. Es existieren zudem Untersuchungen zur Stabilität einer Zwei-Schicht Strömung zwischen geneigten Wänden existieren (Severtson und Aidun 1996). Hier wird auf die Anwendung bei Beschichtungsprozessen gezielt. Die lineare Stabilitätsanalyse für lange Wellen zeigt, dass die Strömung im inneren Bereich nahe der Kontaktlinie immer stabil bleibt, wohingegen der äußere Bereich nahe der Seitenwände instabil wird. Dieses Ergebnis wird durch experimentelle Beobachtun-

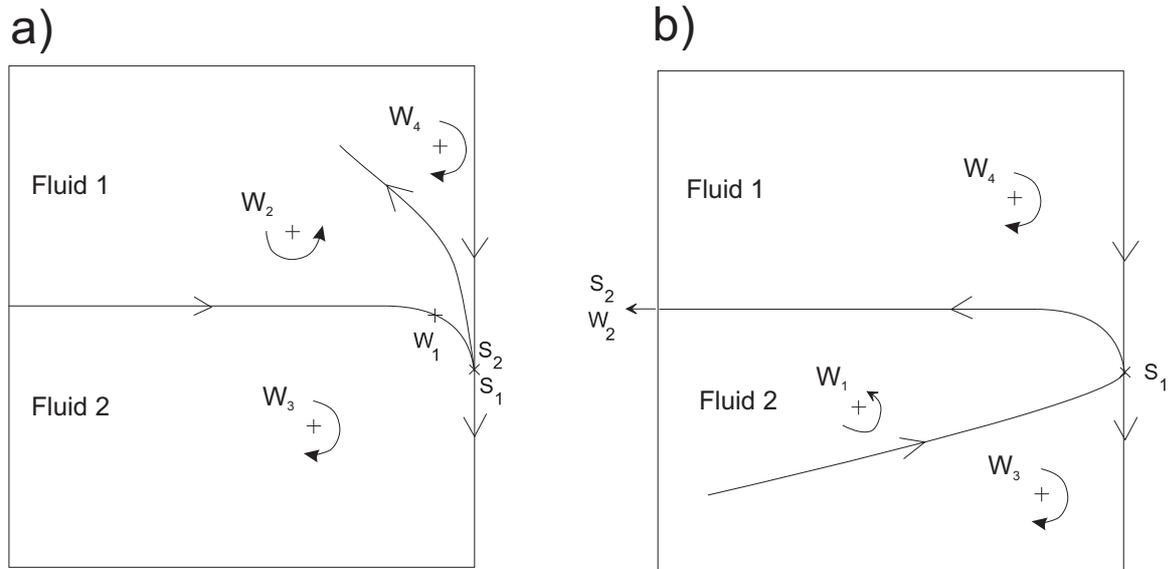


Abbildung 5: Skizze zur Strömungstopologie bei steigenden Reynolds-Zahlen oder Viskositätsverhältnissen $\mu_{fluid2}/\mu_{fluid1}$ (Royon und Ehrhard 2001).

gen bestätigt. Desweiteren gibt es Untersuchungen zu der Eckenströmung von zwei Fluiden einer Stokeschen Strömung (Anderson und Davis 1993). Dabei existieren für verschiedenen Geometrien lokale Lösungen, wobei Moffatt-Wirbel gefunden werden können. Auf die Rolle der Singularität in der Ecke wird bei den Untersuchungen von Anderson und Davis 1993 ein besonderes Augenmerk gelegt.

2.2 Lineare Stabilitätsanalyse

Hydrodynamische Stabilitätsuntersuchungen beschäftigen sich mit dem zeitlichen und räumlichen Verhalten eines gestörten Zustandes. Ein zentraler Punkt bei Stabilitätsanalysen ist, ob eine Strömung ihren Zustand beibehält oder verändert.

Je nachdem wie sich die Störungen im Laufe der Zeit weiterentwickeln, werden verschiedene Störungszustände unterschieden. Von einem stabilen Zustand ist die Rede, wenn alle Störungen auf Dauer keine Auswirkungen auf den Grundzustand haben und der ursprüngliche Zustand für alle Zeiten wieder erreicht wird. Eine Instabilität tritt auf, wenn die Störung das System dazu bringt, seine Ausgangslage auf Dauer zu verlassen. Bringen die aufgebrauchten Störungen keine Veränderung des Zustands mit sich, sprechen wir von einem indifferenten Ausgangszustand. Im Falle der lokalen Stabilität hängt die Stabilitätseigenschaft von der Stärke der Störung ab, ob ein stabiler oder instabiler Zustand erreicht wird (Oertel jr. und Delfs 1996).

Desweiteren unterscheiden wir zwei verschiedenen Ausbreitungen von Instabilitäten, konvektive und absolute Instabilität. Bei der absoluten Instabilität bleibt die aufgebrachte Störung auf Dauer am Ort ihrer Entstehung (z.B. Kármánsche Wirbelstraße). Andernfalls verschwindet Störung in der Zeit am Ort ihrer Entstehung (z.B. Plattengrenzschichtströmung) (Oertel jr. und Delfs 1996). Hydrodynamische Instabilitäten können u.a. den Übergang in eine andere Grundströmung oder turbulente Strömung bedeuten.

Bei der theoretischen Behandlung der Stabilität in einem hydrodynamischen System, beschäftigen wir uns im folgenden mit der lineare Stabilitätstheorie. Die Lösung der Grundströmung muss die Erhaltungsgleichungen der Kontinuumsmechanik erfüllen. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit inkompressiblem, isothermen Fluid. Hierfür formulieren wir die Massen- und Impulserhaltung

$$\nabla \mathbf{v} = 0, \quad (2.3)$$

$$\rho \left(\frac{\delta \mathbf{v}}{\delta t} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mu(\nabla^2 \mathbf{v}), \quad (2.4)$$

wobei \mathbf{v} der Geschwindigkeitsvektor, p der Druck, ρ die Dichte und μ die dynamische Zähigkeit ist.

Bei der Stabilitätsuntersuchung wird die Grundströmung eine physikalisch sinnvolle Störung überlagert. Die resultierende Strömung ist demnach

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \epsilon \mathbf{v}' + \epsilon^2 \mathbf{v}'' + \dots, p = P + \epsilon p' + \epsilon^2 p'' + \dots \quad (2.5)$$

Alle Störungen \mathbf{v}', p' bleiben stabil, sofern alle Störungen im Laufe der Zeit weggedämpft werden. Andernfalls erhalten wir einen instabilen Strömungszustand. Die überlagerten Störungen werden dabei als klein angenommen (ϵ), so dass sämtliche quadratische Glieder gegenüber linearen Termen vernachlässigt werden können. Der gestörte Zustand muss bei die Randbedingungen erfüllen.

Weiteres Vorgehen bei einer linearen Stabilitätsanalyse ist die Trennung der Variablen mit Hilfe eines Produktansatzes. Im Falle des Geschwindigkeitsvektor lautet dieser

$$\mathbf{v}'(x, y, z, t) = f_n(x) f_n(y) f_n(z) f_n(t). \quad (2.6)$$

Das Ziel hierbei ist, eine Differentialgleichung zu erhalten, die nur noch von einer Variablen abhängt. Der Ansatz (2.6) muss natürlich die Randbedingungen erfüllen. Wird eine Strömung beispielsweise nach einer räumlichen in und einer zeitlichen Störung entwickelt, so formulieren wir für den Störterme einer Exponentialfunktion

$$\mathbf{v}'(x, y, z, t) = f_n(x) f_n(y) \exp(iaz - i\omega t). \quad (2.7)$$

Bei einer rein zeitlichen Anfachung (ω imaginär, a reell), ist die Störung für $\omega_i < 0$ zeitlich gedämpft und für $\omega_i > 0$ zeitlich angefacht. Der Grenzfall wird als indifferent in der Zeit bezeichnet. Andere Störungsentwicklungen können u.a. zeitliche (ω reell, a imaginär) Anfachung oder räumlich-zeitliche (ω imaginär, a imaginär) Anfachung sein (Oertel jr. und Delfs 1996).

Setzen wir alle Störansätze in die Massen- und Impulserhaltung ein, so erhalten wir eine partielle Stördifferentialgleichung, die ein Eigenwertproblem darstellt. Dieses Eigenwertproblem muss in der Regel numerische gelöst werden, kann allerdings unter Umständen vereinfacht oder approximiert werden.

Als universelles Näherungsverfahren gilt das Galerkin-Verfahren, welches sich auf partielle Differentialgleichungen anwenden lässt. Das Ausgangsproblem wird mit einer Testfunktion multipliziert und integriert. Im folgendem erhält man ein lineares Gleichungssystem (Bronstein, Semendjajew, Musiol und Mühlig 1999). Weitere Näherungsverfahren zur Lösung von partiellen Differentialgleichungen sind u.a. das Taylorpolynom, Interpolationsfunktion, Tschebyschev-Polynome. All diese Näherungsverfahren zielen darauf eine Funktion durch eine Näherungsfunktion (Polynome) zu approximieren. Dabei ist bei der Wahl der Polynome darauf zu achten, dass das Residuum möglichst klein ist (Bronstein et al. 1999).

Numerische Verfahren zur Lösung von partiellen Differentialgleichungen sind unter anderem die FEM-, die FDM- und die FVM-Methode oder die Spektralmethode (Oertel jr. 2001).

2.3 Grundströmungsformen

Wie in Abbildung 1 ersichtlich, existieren zwei verschiedene Fälle (Typ 1 und Typ 2) einer Grundströmung in einem konvergenten Spalt mit zwei bewegten Rändern. In beiden Fällen bewegt sich die Strömung zunächst aufgrund der Haftbedingung entlang der bewegten Folien nach unten in den Spalt. Typ 2 stellt sich ein, wenn das benetzende Fluid (Fluid 2) entweder viskoser als das entnetzende Fluid (Fluid 1) oder die Festkörpergeschwindigkeit klein ist. Im Falle eines viskosen Fluid 2, bewirkt dieses aufgrund hoher Schubspannung eine Bewegung des Fluid 1 in die Ecke hinein. Die Strömung fließt entlang der Staustromlinie wieder aus dem Keil heraus. Ist das entnetzende Fluid zäher als das benetzende Fluid, oder wird die Festkörpergeschwindigkeit erhöht, wird Typ 1 begünstigt. Die Strömung fließt entlang der Grenzfläche

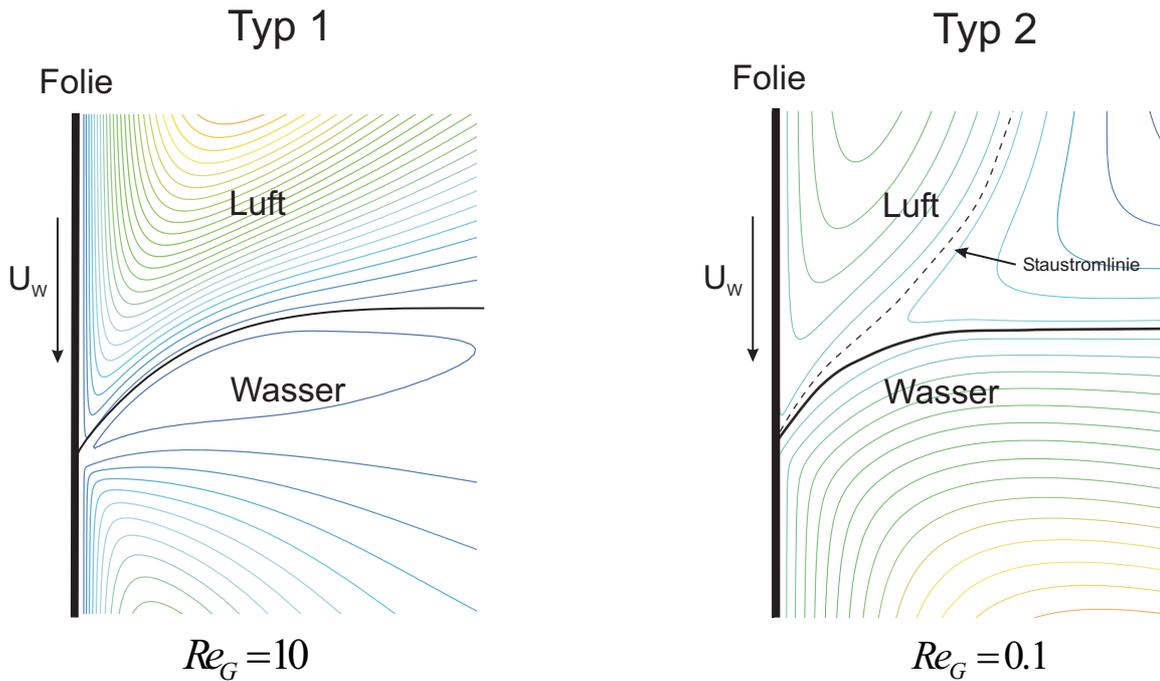


Abbildung 6: FEM Simulation für $Re_G = 10$ und $Re_G = 0.1$.

aus dem Spalt heraus, dabei drängt das entnetzende Fluid dem benetzende Fluid an der Grenzfläche seine Geschwindigkeit auf.

Wir simulieren mit dem FEM-Programm FIDAP eine Folie, die in ein Wasserbad eintaucht. Abbildung 6 veranschaulicht die zwei verschiedenen Strömungsfälle des ersten und zweiten Typs für Reynolds-Zahlen im Gas ($Re_G = u_W r_0 / \nu_G$) von $Re_G = 10$ und $Re_G = 0.1$. Die Reynolds-Zahl für das Gas wird mit der Wandgeschwindigkeit u_W , dem Krümmungsradius an der Grenzfläche r_0 und der kinematischen Viskosität im Gas ν_G gebildet. Die erforderlichen Parametern sind aus dem Luft-Wasser-System entnommen, wobei die Variation der Foliengeschwindigkeit eine Änderung der Reynolds-Zahl erlaubt. Abbildung 6 veranschaulicht Stromlinien bei einem (konstanten) dynamischen Kontaktwinkel von $\Phi_D = 150$ für beide Fälle. In diesem Fall bewirkt eine verringerte Wandgeschwindigkeit und konstante Viskositäts, dass die Strömung vom Typ 2 begünstigt wird.

Beide Strömungsfälle sind experimentell untersucht worden (Royon und Ehrhard 2001). Abbildung 7 zeigt die experimentellen Ergebnisse. Eine Folie taucht in ein Wasserbad ein, wobei das Fluid 1 in diesem Fall Silikonöl ist. Die Foliengeschwindigkeit wird in diesem Experiment variiert. Abbildung 7 veranschaulicht, dass bei einer Reynolds-Zahl von $Re_1 = 1150$ im Silikonölsplatt die Strömungsstruktur des zweiten

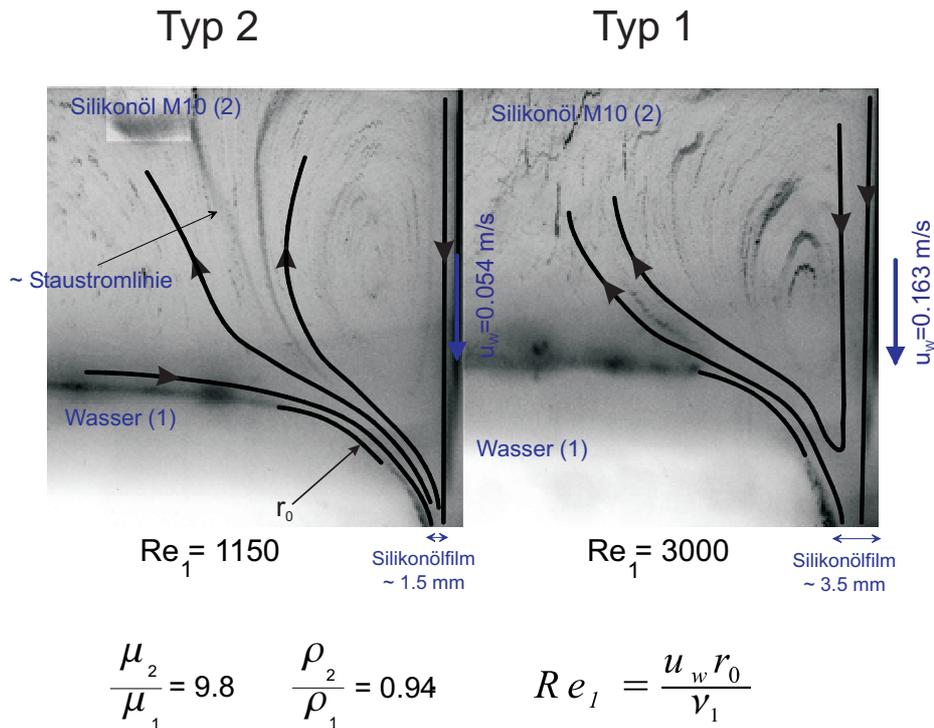


Abbildung 7: Experimentelle Untersuchung bei Benetzung.

Typs erscheint. Bei einer größer werdenden Reynolds-Zahl stellt sich für $Re_1 = 3000$ die Strömungsstruktur von Typ 1 ein. Sowohl die Simulation, als auch das Experiment veranschaulichen, dass bei der jeweils kleineren Reynolds-Zahl, d.h. bei kleinen Foliengeschwindigkeiten, Typ 2 bevorzugt wird.

Im folgenden untersuchen wir in Kapitel 3 die Strömung vom Typ 1. Als ersten Schritt vereinfachen wir die Oberflächenrandbedingungen, indem wir die Oberfläche eben annehmen und die Geschwindigkeit vorgeben. Im weiteren untersuchen wir die entdimensionierte Grundströmung analytisch für $Re \rightarrow 0$ und $Re \rightarrow \infty$. Kapitel 3.2 beschäftigt sich mit der zeitlichen und dreidimensionalen Störanalyse für Typ 1. Mittels linearen Störanalyse leiten wir für Typ 1 eine entdimensionierte Stördifferentialgleichung mittels Massen- und Impulserhaltungsgleichungen, sowie ein geeignetes Näherungsverfahren her. Die Störungen im Keil sind im weiteren in zweidimensionale (Kapitel 3.2.2) und dreidimensionale (Kapitel 3.2.3) Störungen aufgeteilt. In beiden Kapiteln werten wir die Eigenwerte für verschiedene Reynolds-Zahlen aus Stabilitätsdiagramme zeigen die Ergebnisse auf. Die gewonnenen Ergebnisse vergleichen wir mit einer numerischen Simulation in Kapitel 3.2.4 und mit der Stördifferentialgleichung einer viskosen Strömung (Kapitel 3.2.5). Zudem untersuchen wir den Keil für verschiedene Öffnungswinkel (Kapitel 3.2.6). In Kapitel 3.3 leiten wir den Grunddruck,

den Stördruck, sowie die hypothetische Grenzflächenkontur der freien Oberfläche aus dem Druckfeld her.

Im weiteren Verlauf betrachten wir in Kapitel 4 die Strömung von Typ 2. Hierbei ist das prinzipielle Vorgehen gleich dem Vorgehen für Typ 1. Die entdimensionierte Grundströmung leiten wir analytisch für die beiden Grenzfälle $Re \rightarrow 0$ und $Re \rightarrow \infty$ her (Kapitel 4.1). In Kapitel 4.2 findet die lineare Stabilitätsanalyse statt. Aus Massen- und Impulserhaltung gewinnen wir mittels geeigneter mathematischer Verfahren eine Stördifferentialgleichung. Die Eigenwerte werten wir auch dieses Mal aus der Stördifferentialgleichung für den zweidimensionalen und dreidimensionalen Störfall aus. In Kapitel 4.2.3 diskutieren wir die gewonnenen Ergebnisse im Vergleich mit einer numerischen Simulation. Druck und Grenzflächenkontur werden desweiteren für Typ 2 in Kapitel 4.3 untersucht.

Untersuchungen zeigen, dass die freie Grenzfläche näherungsweise die Form eines Kreises annimmt (Royon und Ehrhard 2001). Wir führen deshalb in Kapitel 5 eine konstante gekrümmte freie Oberfläche ein. Die Grundströmung leiten wir entdimensioniert und numerisch mit Massen- und Impulserhaltungsgleichungen her (Kapitel 5.1). Nach Herleitung der Stördifferentialgleichungen und Randbedingungen (Kapitel 5.2.1), diskutieren wir die Ergebnisse in Kapitel 5.2.2. Die Arbeit endet mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick (s. Kapitel 6).

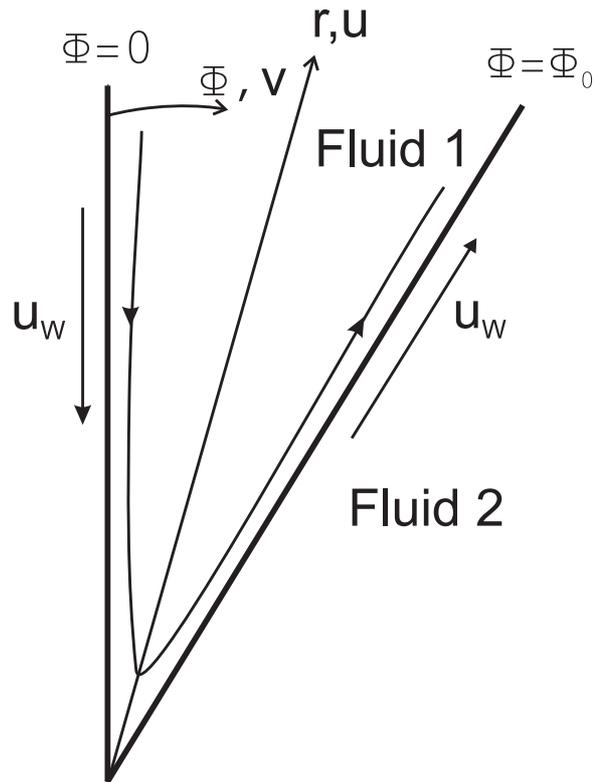


Abbildung 8: Strömung im Keil für Typ 1.

3 Strömung von Typ 1 mit vereinfachten Randbedingungen

3.1 Zweidimensionale Grundströmung

Als ersten Schritt wird die freie Grenzfläche für Typ 1 idealisiert dargestellt und zwar als vorgegeben und eben (vgl. Abbildung 8). Somit sind die kinematischen Randbedingungen im Spalt näherungsweise wiedergegeben. Als Grundgleichungen betrachten wir für den Spalt die Erhaltungsgleichungen für Masse und Impuls. Das Strömungsproblem wird zweidimensional in r und Φ , stationär, isotherm und inkompressibel behandelt. Die jeweiligen Massen- und Impulsgleichungen sind in Polarkoordinaten formuliert gemäß

$$\nabla \mathbf{v} = 0, \quad (3.8)$$

$$\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) = -\nabla p + \mu(\nabla^2 \mathbf{v}). \quad (3.9)$$

\mathbf{v} ist der Geschwindigkeitsvektor, p der Druck und ρ die Dichte.

Die Randbedingungen stellen sicher, dass das Fluid an den Grenzflächen bei $\Phi =$

Φ_0 durch das zweite (zähe) Fluid vorgegeben ist und bei $\Phi = 0$ haftet. Wir haben demnach

$$r, \Phi = 0 \quad : \quad u = -u_W, v = 0, \quad (3.10)$$

$$r, \Phi = \Phi_0 \quad : \quad u = u_W, v = 0. \quad (3.11)$$

Die Grundgleichungen (3.8,3.9) werden dimensionslos formuliert mit den Skalen

$$R = \frac{r}{l_0}, \quad (3.12)$$

$$Z = \frac{z}{l_0}, \quad (3.13)$$

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{v}}{u_W}, \quad (3.14)$$

$$P = \frac{p}{\rho u_W^2}, \quad (3.15)$$

$$\tau = \frac{t u_W}{l_0}, \quad (3.16)$$

$$l_0 = r_0 \Phi_0. \quad (3.17)$$

Skaliert werden die Raumrichtungen R und Z mit der Länge l_0 , wobei $l_0 = r_0 \Phi_0$ durch den Gebietsrand bei r_0 und den Öffnungswinkel Φ_0 festgelegt ist. Der Geschwindigkeitsvektor \mathbf{V} ist mit der Wandgeschwindigkeit u_W , der Druck P mit dem Staudruck ρu_W^2 und die Zeit τ mit der Wandgeschwindigkeit und der Länge l_0 skaliert.

Bringt man die Skalen (3.12-3.17) in die Erhaltungsgleichungen (3.8,3.9) und Randbedingungen (3.10,3.11) ein, erhält man die dimensionslose Formulierung der Massen- und Impulsgleichungen, mit den zugehörigen Randbedingungen (3.20,3.21) für Typ 1. Es gilt

$$\nabla \mathbf{V} = 0, \quad (3.18)$$

$$\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} = -\nabla P + Re^{-1}(\nabla^2 \mathbf{V}), \quad (3.19)$$

$$R, \Phi = 0 \quad : \quad U = -1, V = 0, \quad (3.20)$$

$$R, \Phi = \Phi_0 \quad : \quad U = 1, V = 0. \quad (3.21)$$

Die Reynolds-Zahl ist mit

$$Re = \frac{l_0 u_W}{\nu}, \quad (3.22)$$

definiert, wobei ν die kinematische Zähigkeit ist.

In radialen Richtung wird der dimensionslose Gebietsrand durch

$$R_0 = \frac{1}{\Phi_0}, \quad (3.23)$$

vorgegeben. Mit $0 \leq R \leq R_0$ ist ein endliches Rechengebiet erreicht, im Gegensatz zum ursprünglichen Gebiet $0 \leq r \leq \infty$. Die Größe des Rechengebiets findet sich über $l_0 = r_0 \Phi_0$ in der Reynolds-Zahl wieder.

Durch die Einführung der Stromfunktion ψ können wir das ebene Problem kompakter formulieren. Vorteilhaft ist dabei, dass wir den Druck eliminieren und die Kontinuitätsgleichung a priori erfüllen. Für die Stromfunktion ψ gilt

$$U = \frac{1}{R} \psi_{\Phi}, \quad V = -\psi_R. \quad (3.24)$$

Durch geeignete Differentiation und Subtraktion werden die Impulsgleichungen (3.19) zusammengefasst und der Druck eliminiert. Das Ergebnis ist

$$\begin{aligned} \nabla^2(\nabla^2 \Psi) = \frac{Re}{R} \left[\psi_{\Phi} \left(\psi_{RRR} + \frac{1}{R} \psi_{RR} + \frac{1}{R^2} (\psi_{R\Phi\Phi} - \psi_R) - \right. \right. \\ \left. \left. \frac{2}{R^3} \psi_{\Phi\Phi} \right) - \psi_R \left(\psi_{RR\Phi} + \frac{1}{R} \psi_{R\Phi} \frac{1}{R^2} \psi_{\Phi\Phi\Phi} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Hinzu treten die Randbedingungen

$$R, \Phi = 0 \quad : \quad \psi = 0, \psi_{\Phi} = -R, \quad (3.26)$$

$$R, \Phi = \Phi_0 \quad : \quad \psi = 0, \psi_{\Phi} = R. \quad (3.27)$$

Zunächst werden wir zwei Grenzfälle, die zähigkeitsbestimmte ($Re \rightarrow 0$) und die trägheitsbestimmte ($Re \rightarrow \infty$) Strömung, betrachten. Als ersten Grenzfall betrachten wir den Fall der viskos bestimmten Strömung, die sogenannte Stokessche Strömung.

3.1.1 Stokessche Strömung

Bei der Stokesschen Strömung dominieren die viskosen Terme, d.h. die Reynolds-Zahl strebt gegen null. In Gleichung (3.25) bleiben nur die linearen Glieder (linke Seite) und damit eine so genannte biharmonische Gleichung übrig. Wir erhalten

$$\nabla^4 \psi = 0. \quad (3.28)$$

Wir führen einen Ähnlichkeitsansatz für eine Eckenströmung nach (Dean und Montagnon 1949) ein, um eine ähnliche Lösung des Problems gemäß

$$\psi = R^n f(\Phi) \quad (3.29)$$

zu erhalten. Für $n = 1$ können wir zum einen die Randbedingungen (3.26,3.27) erfüllen. Zum anderen geht Gleichung (3.28) in eine gewöhnliche Differentialgleichung über. Wir erhalten

$$f(\Phi) + 2f_{\Phi\Phi}(\Phi) + f_{\Phi\Phi\Phi\Phi}(\Phi) = 0, \quad (3.30)$$

mit den für den Typ 1 relevanten Randbedingungen

$$\Phi = 0 \quad : \quad f = 0, f_{\Phi} = -1, \quad (3.31)$$

$$\Phi = \Phi_0 \quad : \quad f = 0, f_{\Phi} = 1. \quad (3.32)$$

(Batchelor 1970) untersucht ebenfalls eine zweidimensionale Strömung, die sich zwischen zwei Platten bewegt. Hierbei bewegt sich die eine Platte mit der Geschwindigkeit U und die zweite Platte ist in Ruhe. Der Winkel zwischen den beiden Platten beträgt 90° . Mit dem Ähnlichkeitsansatz (3.29) für $n = 1$ und den Randbedingungen

$$\Phi = 0 \quad : \quad f = 0, f_{\Phi} = -1, \quad (3.33)$$

$$\Phi = \Phi_0 \quad : \quad f = 0, f_{\Phi} = 1, \quad (3.34)$$

erhält (Batchelor 1970) ebenfalls die gewöhnliche Differentialgleichung (3.30).

(Moffatt 1964) leitet eine allgemeine Lösung für $f(\Phi)$ gemäß

$$f_1(\Phi) = A \cos(\Phi) + B \sin(\Phi) + C\Phi \cos(\Phi) + D\Phi \sin(\Phi). \quad (3.35)$$

her. Mit den gegebenen Randbedingungen (3.31,3.32) werden die Konstanten A, B, C und D bestimmt, nach einigen Vereinfachungen erhalten wir aus (3.35) folgende Lösung

$$f(\Phi) = (\Phi_0^2 - \sin^2 \Phi_0)^{-1} \left(\Phi_0^2 \sin \Phi + \Phi_0 \Phi [\sin(\Phi - \Phi_0) - \sin \Phi] - \Phi_0 \sin \Phi \sin \Phi_0 + \Phi \left[\sin \Phi \left(\frac{1}{2} \sin(2\Phi_0) - \sin \Phi_0 \right) - \cos \Phi \sin^2 \Phi \right] \right). \quad (3.36)$$

Die Lösung von Gleichung 3.36 für eine schleichende Strömung vom Typ 1 ist für $\Phi = 30^\circ$ in Abbildung 9 in Form von Stromlinien dargestellt. Die Strömung bewegt sich dabei am linken Rand nach unten in den Keil hinein. An der Keilspitze kehrt die Strömung um, und bewegt sich entlang der Grenzfläche nach oben.

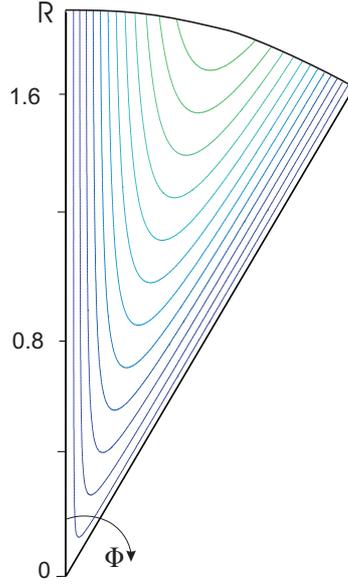


Abbildung 9: Stokesschen Strömung in Fluid 1 von Typ1 in Form von Linien $\Psi = \text{konstant}$.

3.1.2 Euler-Strömung

Im Falle der trägheitsbestimmten Strömung erhalten wir die sogenannte Euler-Gleichungen. Dabei werden die viskosen Kräfte in der Impulsgleichung (3.9) vernachlässigbar klein und die konvektiven Terme dominieren ($Re \rightarrow \infty$). Demnach erhalten wir aus Gleichung (3.25)

$$\begin{aligned} \psi_{\Phi} \left(\psi_{RRR} + \frac{1}{R} \psi_{RR} + \frac{1}{R^2} (\psi_{R\Phi\Phi} - \psi_R) - \frac{2}{R^3} \psi_{\Phi\Phi} \right) \\ - \psi_R \left(\psi_{RR\Phi} + \frac{1}{R} \psi_{R\Phi} + \frac{1}{R^2} \psi_{\Phi\Phi\Phi} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Wiederum benutzen wir den Ähnlichkeitsansatz (3.29). Der Exponent wird für die Euler-Strömung ebenfalls $n = 1$, wofür Gleichung (3.37) in die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\left(f_{\Phi\Phi}(\Phi) f(\Phi) \right)_{\Phi} + f_{\Phi}(\Phi) f(\Phi) = 0, \quad (3.38)$$

übergeht. Die gewöhnliche Differentialgleichung (3.38) kann allerdings mit den gegebenen Randbedingungen (3.31,3.32) nicht gelöst werden. Wir sind demnach nicht in der Lage auf beiden Rändern die Haftbedingung zu erfüllen, ein bekanntes Problem bei der reibungsfreien (Euler-) Strömung. Folglich existiert keine Ähnlichkeitslösung dieses Problems.

3.2 Zeitliche und dreidimensionale Stabilitätsanalyse

3.2.1 Stördifferentialgleichung

Für die lineare Stabilitätsanalyse der zweidimensionalen, stationären Grundströmung ist von den dreidimensionalen, zeitabhängigen Grundgleichungen auszugehen. Es gilt

$$\nabla \mathbf{V} = 0, \quad (3.39)$$

$$\mathbf{V}_t + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} = -\nabla P + Re^{-1}(\nabla^2 \mathbf{V}). \quad (3.40)$$

Die zweidimensionale (ebene), stationäre Grundlösung $\mathbf{V}_0(R, \Phi)$ wird nun mit einer kleinen Störung der Amplitude ϵ in der Zeit τ und in der dritten Raumrichtung Z gestört. Der Störterm \mathbf{V}' hängt von den Ortskoordinaten R, Φ, Z und der Zeit τ ab. Wir verwenden demnach den Störansatz

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0(R, \Phi) + \epsilon \mathbf{V}'(R, \Phi, Z, \tau) + \dots \quad (3.41)$$

Weiter setzen wir den Störansatz (3.41) in die Massenerhaltung (3.39) und Impulsgleichung (3.40) ein. Dabei werden im Störterm \mathbf{V}' die Abhängigkeiten gemäß

$$U' = \sum_{k=1}^N -\frac{1}{R} A_k(R) \frac{2\pi k}{\Phi_0} (\sin(\frac{2\pi k}{\Phi_0} \Phi)) \exp(i\omega\tau + iaZ), \quad (3.42)$$

$$V' = \sum_{k=1}^N -B_{kR}(R) (\cos(\frac{2\pi k}{\Phi_0} \Phi) - 1) \exp(i\omega\tau + iaZ), \quad (3.43)$$

$$W' = \sum_{k=1}^N C_k(R) (\cos(\frac{2\pi k}{\Phi_0} \Phi) - 1) \exp(i\omega\tau + iaZ), \quad (3.44)$$

$$P' = \sum_{k=1}^N D_k(R) (\cos(\frac{2\pi k}{\Phi_0} \Phi) - 1) \exp(i\omega\tau + iaZ), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.45)$$

modelliert. Die Amplitudenfunktionen $A_k(R), B_k(R), C_k(R)$ und $D_k(R)$ werden allgemein gehalten. Die Abhängigkeit vom Winkel Φ ist periodisch in Form von Fourier-Reihen gegeben, wobei lediglich Terme berücksichtigt werden, welche die Randbedingungen

$$U'(0) = 0, \quad U'(\Phi_0) = 0, \quad (3.46)$$

$$V'(0) = 0, \quad V'(\Phi_0) = 0, \quad (3.47)$$

$$W'(0) = 0, \quad W'(\Phi_0) = 0, \quad (3.48)$$

$$P'(0) = 0, \quad P'(\Phi_0) = 0, \quad (3.49)$$

erfüllen. Zudem enthalten die Produktansätze (3.42-3.45) einen Wellenterm (in τ, Z).
Zeitlich wird gemäß

$$\omega = \omega_r + i\omega_i, \quad (3.50)$$

periodisches Verhalten unterstellt, welches zudem gedämpft oder angefacht sein kann. Ist $\omega_i > 0$, so klingt die Störung zeitlich ab und der Zustand ist zeitlich stabil. Im Falle $\omega_i < 0$ ist der Zustand zeitlich instabil, die Störung wächst zeitlich an. In Z -Richtung wird periodisches Verhalten unterstellt, mit der reellen Wellenzahl a .

Der Ansatz (3.41) mit den dazugehörigen Fourier-Reihenansätze (3.42-3.44) wird in die Kontinuitätsgleichung (3.39) eingesetzt und wir erhalten

$$C_1 iaR \left(\cos \frac{2\pi}{\Phi_0} - 1 \right) + C_2 iaR \left(\cos \frac{4\pi}{\Phi_0} - 1 \right) + \dots = 0, \quad (3.51)$$

$$\left(-2A_{1R} + 2B_{1R} \right) \sin \frac{2\pi}{\Phi_0} \Phi + \left(-4A_{2R} + 4B_{2R} \right) \sin \frac{4\pi}{\Phi_0} \Phi + \dots = 0. \quad (3.52)$$

Imaginärteil und Realteil können aufgrund ihrer Orthogonalität separiert werden. Betrachten wir die Terme, die zu $k = 1$ gehören, so folgt aus Gleichung (3.51)

$$C_1 = 0. \quad (3.53)$$

Entsprechend der Randbedingungen fordern wir, dass die Amplituden A_1 und B_1 bei $R = 0$ verschwinden müssen und erhalten nach Integration aus Gleichung (3.52)

$$B_1 = A_1. \quad (3.54)$$

Analog erhalten wir für $k = 2$ die Bedingungen $C_2 = 0$ und $B_2 = A_2$.

Die Ansätze (3.41-3.45) werden in die Impulsgleichung (3.40) eingebracht und wir erhalten durch geeignete Differentiation und Subtraktion zwei Gleichungen für Real- und Imaginärteil, nämlich

$$S(R, \Phi, \omega_r) = \left[F_1(R) + F_2(R) \cos \frac{2\pi}{\Phi_0} \Phi + G_1(R) + G_2(R) \cos \frac{4\pi}{\Phi_0} \Phi + \dots \right] i\omega_r = 0, \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} T(R, \Phi, \omega_i, a) = & F_3(R, a) + F_4(R, \Phi, \omega_i) + \\ & \left[F_5(R, a) + F_6(R, \Phi, \omega_i) \right] \cos \frac{2\pi}{\Phi_0} \Phi + F_7(R, \Phi) \sin \frac{2\pi}{\Phi_0} \Phi + \\ & G_3(R, a) + G_4(R, \Phi, \omega_i) + \left[G_5(R, a) + G_6(R, \Phi, \omega_i) \right] \cos \frac{4\pi}{\Phi_0} \Phi + \\ & G_7(R, \Phi) \sin \frac{4\pi}{\Phi_0} \Phi + \dots = 0. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Die Funktionen F_l ($l = 1, 2..8$) resultieren dabei aus dem ersten Mod (A_1), die Funktion G_l ($l = 1, 2..8$) aus dem zweiten Mod (A_2). Beide Funktionen (F_l, G_l) sind im Anhang gelistet (vgl. (7.194-7.207)). Da Real- und Imaginärteil orthogonal sind, können wir beide Teile getrennt voneinander betrachten.

Zur Lösung der Differentialgleichungen (3.55,3.56) suchen wir mittels des Galerkin-Verfahrens Näherungslösungen. Hierzu integrieren wir beide Gleichungen über Φ , d.h.

$$\int_{\Phi=0}^{\Phi_0} f_m(\Phi)T(R, \Phi, \omega_i, a) d\Phi, m = 1, 2, 3; \quad (3.57)$$

$$\int_{\Phi=0}^{\Phi_0} f_m(\Phi)S(R, \Phi, \omega_i, a) d\Phi, m = 1, 2, 3; \quad (3.58)$$

wobei die Testfunktionen $f_1(\Phi) = 1$, $f_2(\Phi) = \cos(\frac{2\pi}{\Phi_0}\Phi)$, $f_3(\Phi) = \sin(\frac{2\pi}{\Phi_0}\Phi)$, $f_4(\Phi) = \cos(\frac{4\pi}{\Phi_0}\Phi)$ und $f_5(\Phi) = \sin(\frac{4\pi}{\Phi_0}\Phi)$ verwendet werden. Der Vorteil dieses Näherungsverfahrens ist, dass wir eine Differentialgleichung erhalten, die nicht mehr vom Winkel abhängt. Andererseits ist die Differentialgleichung natürlich nicht mehr lokal erfüllt, sondern lediglich integral

Aus dem Imaginärteil (3.55) erhalten wir im ersten Mod zwei gewöhnliche Differentialgleichungen für $A_1(R)$, nämlich

$$F_1(R) = -A_{1R}R - A_{1RR}R^2 = 0, \quad (3.59)$$

$$F_2(R) = -4\frac{\pi^2}{\Phi_0^2}A_1 + A_{1R}R + R^2A_{1RR} = 0. \quad (3.60)$$

Die Lösung dieser Gleichungen liefert die triviale Lösung $A_1 = 0$. Gleichung (3.55) kann somit (integral) nur erfüllt werden, wenn $A_1 = 0$ oder wenn $\omega_r = 0$ wird. Die triviale Lösung können wir in einem gestörtem System ausschließen, so dass $\omega_r = 0$ sein muss. Physikalisch bedeutet dies, dass die Störungen exponentiell (und nicht oszillatorisch) gedämpft oder angefacht werden.

Aus dem Realteil (3.56) erhalten wir mittels des Galerkin-Verfahrens drei gewöhnliche Differentialgleichungen. Die Integrale, die in diesen Differentialgleichungen vorkommen, sind unter anderem mit der Grundströmung gekoppelt. Die Auswertung dieser Integrale findet mittels einer Simulation der Grundströmung mit dem kommerziellen FEM-Programm FEMLAB statt.

Durch das Galerkin-Verfahren treten Integrale der Form

$$\int_{\Phi=0}^{\Phi_0} H(R, \omega_i, a) \sin \frac{2\pi k}{\Phi_0}\Phi \cos \frac{2\pi k}{\Phi_0}\Phi d\Phi, \quad (3.61)$$

auf. Für diese Integrale kann die Winkelbeziehung

$$\sin \frac{2\pi k}{\Phi_0}\Phi \cos \frac{2\pi k}{\Phi_0}\Phi = \frac{1}{2} \sin 2\frac{2\pi k}{\Phi_0}\Phi, \quad (3.62)$$

ausgenutzt werden. Auf diese Weise können alle Integrale mit der trigonometrischen Form $\sin \frac{2\pi k}{\Phi_0} \Phi \cos \frac{2\pi k}{\Phi_0} \Phi$ haben, in den nächst höheren Mod verschoben. D.h. für den 1. Mod ($k = 1$) werden die Integrale (3.61) in den 2. Mod ($k = 2$) geschoben, usw.. Fassen wir die drei gewonnenen Differentialgleichungen jeweils zusammen, erhalten wir für $k = 1$

$$A_1(2 + \frac{1}{2}R^2 Re\omega_i - 2\frac{\pi^2}{\Phi_0^2} - \frac{1}{2}a^2 R^2) - A_{1R}R + A_{1RR}R^2 = 0, \quad (3.63)$$

und für $k = 2$

$$A_2(2 + \frac{1}{2}R^2 Re\omega_i - 8\frac{\pi^2}{\Phi_0^2} - \frac{1}{2}a^2 R^2) - A_{2R}R + A_{2RR}R^2 = 0. \quad (3.64)$$

Beide Differentialgleichungen (3.63,3.64) sind gewöhnlich in R , linear, zweiter Ordnung und nur vom Radius R abhängig.

3.2.2 Zweidimensionale Störung ($a = 0$)

Bei einer Wellenzahl $a = 0$ stellt die Differentialgleichung (3.63) eine Besselsche Differentialgleichung dar und kann analytisch gelöst werden. Die allgemeine Lösung ist

$$A_1(R) = RJ_j(x)K_1 + RY_j(x)K_2; j = \sqrt{-1 + \frac{2\pi^2}{\Phi_0^2}}; x = \frac{R\sqrt{Re\omega_i}}{\sqrt{2}}. \quad (3.65)$$

Da $Y_j(x)$ die Randbedingung am linken Rand bei $x = 0$ ($R = 0$) nicht erfüllt ist, ist $K_2 = 0$. Die Bessel-Funktion $Y_j(x)$ kommt bei $x \rightarrow 0$ aus dem Unendlichen. Übrig bleibt die Bessel-Funktion $J_j(R)$ und damit die Lösung

$$A_1(R) = RJ_j(x)K_1. \quad (3.66)$$

Analog zur Gleichung (3.63), ergibt sich aus der Differentialgleichung (3.64) die Lösung

$$A_2(R) = RJ_j(x)K_3; j = \sqrt{-1 + \frac{8\pi^2}{\Phi_0^2}}; x = \frac{R\sqrt{Re\omega_i}}{\sqrt{2}}. \quad (3.67)$$

Die Lösung (3.66,3.67) müssen zudem die Randbedingungen am äußeren Rand bei $R = R_\infty = 1/\Phi_0$ erfüllen, dort muss

$$A_1(R_\infty) = 0, A_2(R_\infty) = 0, \quad (3.68)$$

gelten. Die Bessel-Funktionen $J_j(x)$ besitzen jeweils ein Vielzahl von Nullstellen, so daß letztlich die Eigenwerte $Re\omega_i$ zu finden sind, für welche die Bessel-Funktionen

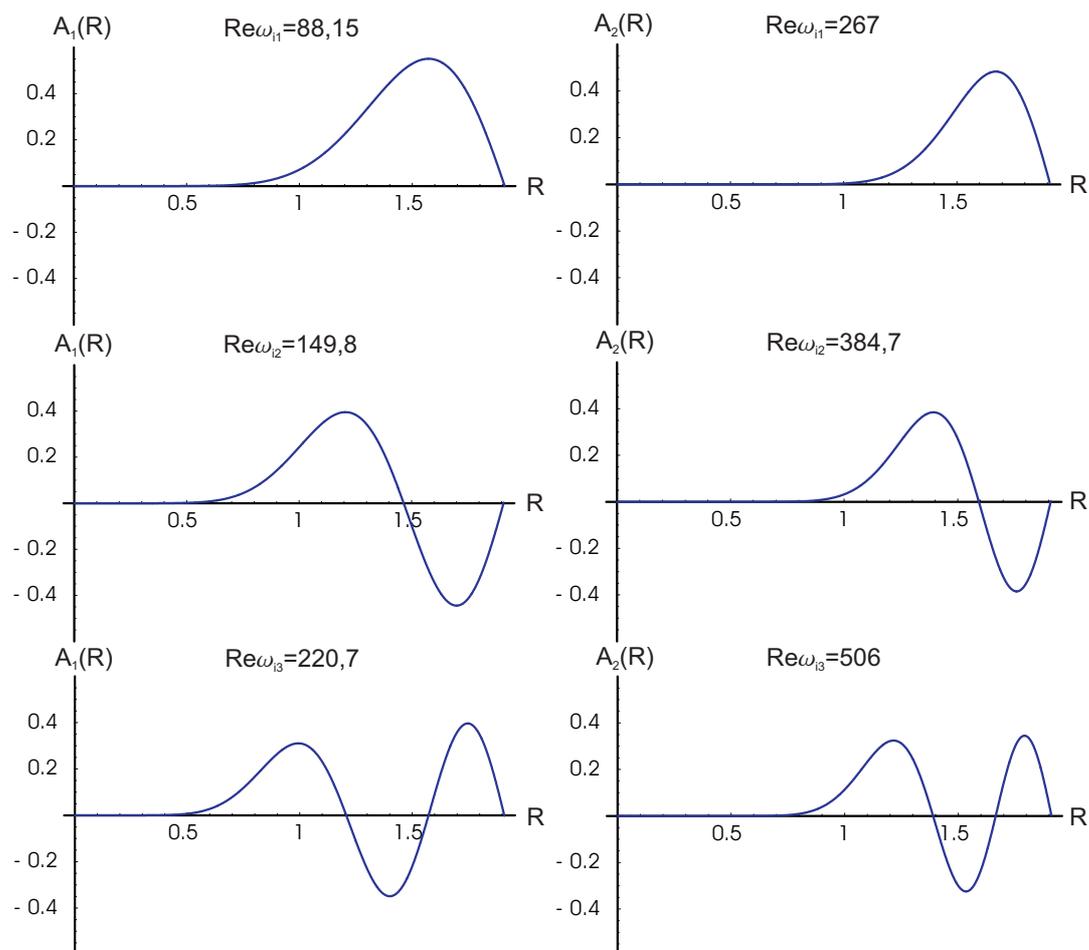


Abbildung 10: Eigenwerte für $k = 1$ und $k = 2$.

Nullstellen aufweisen. Abbildung 10 zeigt die ersten drei Eigenwerte $Re\omega_i$ für die Moden $k = 1$ und $k = 2$. Der Öffnungswinkel ist in allen Fällen auf $\Phi_0 = 30^\circ$ festgelegt, d.h. der äußere Rand liegt bei $R_\infty = 1/\Phi_0 = 6/\pi$.

Zunächst gilt in allen Fällen $Re\omega_i > 0$, d.h. alle Moden und Eigenwerte sind zeitlich gedämpft. Abbildung 10 zeigt weiter, dass in allen Fällen die höheren Eigenwerte eine größere Dämpfung und eine kleinerer Amplitude aufweisen. Insofern erscheint der erste Eigenwert jeweils als der relevante. Die Amplituden der Störung wachsen über dem Radius an. An einem bestimmten, festen Ort sind die Amplituden $A_k(R)$ jedoch zeitlich, exponentiell gedämpft. Vergleichen wir die Moden A_1 und A_2 (und höhere Moden), so wird deutlich, dass die höheren Moden deutlich stärker gedämpft sind (vgl. $Re\omega_i$). Zusammenfassend ist somit der erste Eigenwert des ersten Modus der kritische.

In Abbildung 11 sehen wir die Eigenwerte $Re\omega_i$ der Bessel-Funktionen (3.67,3.67) über den Nullstellen für beide Moden dargestellt. Die Dämpfungsraten ω_i von Mod 1

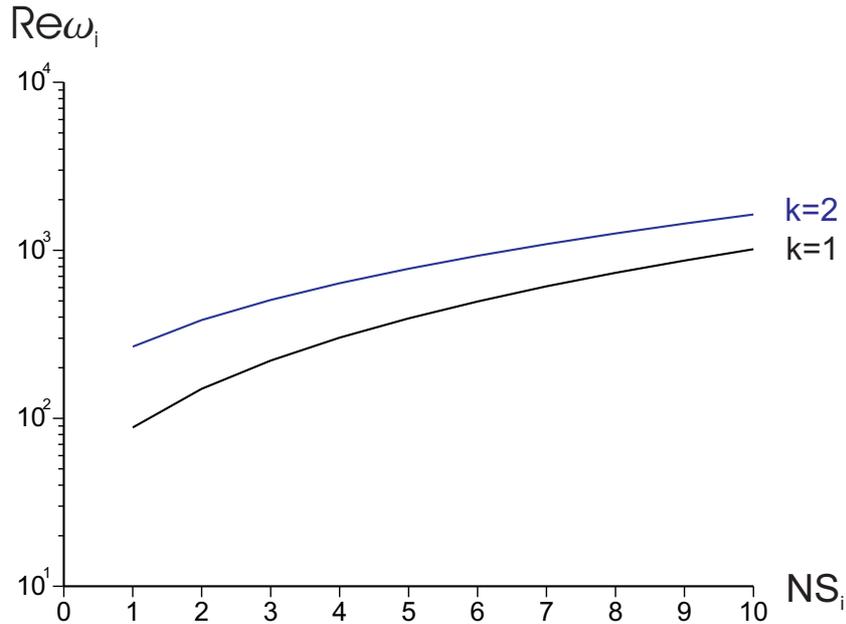


Abbildung 11: Nullstellen der Bessel-Funktionen des ersten und zweiten Mods.

bleiben bei gleicher Reynolds-Zahl immer unterhalb den Dämpfungsraten von Mod 2. Dies belegt wiederum, dass der erste Mod schwächer gedämpft ist und damit der für die Stabilität relevante Mod ist. Wir erkennen zudem, dass wegen $Re\omega_i = konstant$ für steigende Reynolds-Zahlen die Dämpfungsraten ω_i abnimmt und gegen null strebt. Letztendlich sind keine negativen Dämpfungsraten ω_i vorhanden und das System bleibt gegenüber kleinen, ebenen Störungen stabil.

In Abbildung 12 sind die Störungen der Geschwindigkeiten U' und V' in Form der Störstromfunktion Ψ' im Strömungsgebiet dargestellt. Wir erkennen, dass die Störung einen einzigen Wirbel im Keil darstellt. Bei steigenden Eigenwerten nimmt die Anzahl der Wirbel zu und die Amplitude der Störung ab. In Abbildung 13 sind die Drehrichtungen der Wirbel im Spalt für den 1. und 2. Eigenwert dargestellt. Wir erkennen, dass beim 1. Eigenwert, und damit bei einem positiven Amplitudenwert, sich der Wirbel in positiver Richtung dreht. Beim 2. Eigenwert zeigt sich, dass sich bei negativem Amplitudenwert der Wirbel in negativer Richtung und bei positivem Amplitudenwert in positiver Richtung entsprechend dreht. Bei höheren Eigenwerten setzt sich die Reihe fort.

Störung Ψ' : $\text{Re}\omega_i=88,15; a=0$.

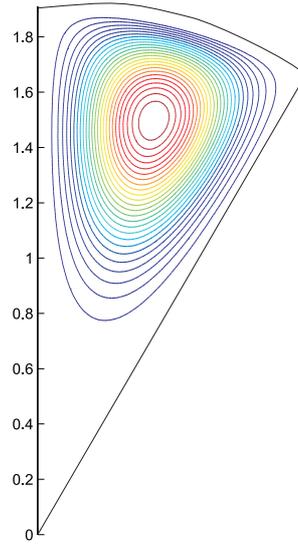


Abbildung 12: Linien $\Psi' = \text{konstant}$ für $\text{Re}\omega_i = 88,15$ und $a = 0$.

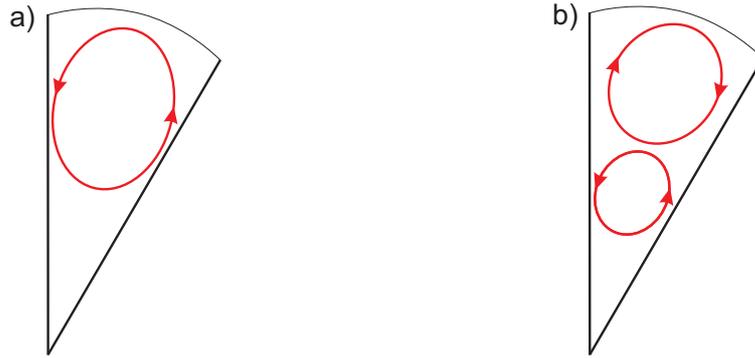


Abbildung 13: Drehrichtungen der Störwinkel für den 1. und 2. Eigenwert.

3.2.3 Dreidimensionale Störung ($a \neq 0$)

Betrachten wir nun dreidimensionale Störungen der Grundströmung, welche periodisch in Z sind (d.h. $a \neq 0$), so ergeben sich aus den Differentialgleichungen (3.63, 3.64) für die Amplituden $A_1(R)$ und $A_2(R)$ die allgemeinen Lösungen

$$A_1(R) = RJ_n(x)K_1^* + RY_n(x)K_2^*; n = \sqrt{-1 + \frac{2\pi^2}{\Phi 0^2}}; x = -\frac{iR\sqrt{a^2 - \text{Re}\omega_i}}{\sqrt{2}}, \quad (3.69)$$

$$A_2(R) = RJ_n(x)K_3^* + RY_n(x)K_4^*; n = \sqrt{-1 + \frac{8\pi^2}{\Phi 0^2}}; x = -\frac{iR\sqrt{a^2 - \text{Re}\omega_i}}{\sqrt{2}}. \quad (3.70)$$

Aufgrund der Randbedingung bei $R = 0$, sind die Konstanten K_2^* und K_4^* zu null zu setzen und es bleibt

$$A_1(R) = RJ_n(x)K_1^*, \quad (3.71)$$

$$A_2(R) = RJ_n(x)K_3^*. \quad (3.72)$$

Die Amplitude muss am äußeren Rand des Rechengebietes wiederum zu null werden. Damit sind wiederum die Nullstellen der Bessel-Funktion x_i mit den Parametern in (3.71, 3.72) zu verknüpfen. Wir haben demnach

$$-\frac{iR\sqrt{a^2 - Re\omega_i}}{\sqrt{2}} = x_i. \quad (3.73)$$

Da nur reelle Nullstellen zugelassen sind, muss bei reeller Wellenzahl $a^2 - Re\omega_i < 0$ gelten. Wegen $Re\omega_i > a^2$ haben deshalb alle Störungen mit $a > 0$ größere Eigenwerte $Re\omega_i$ und damit (bei fester Reynolds-Zahl) eine größere Dämpfung. Dies wird für beide Moden $k = 1, 2$ auch aus Abbildung 14 ersichtlich, in welcher die Eigenwerte $Re\omega_i$ als Funktion der Wellenzahl dargestellt sind. Der Grenzwert für $a \rightarrow 0$ ist im übrigen konsistent mit dem Ergebnis in Abschnitt 3.2.2 für $a = 0$. Dies bedeutet, dass sehr langwellige Störungen $a \rightarrow 0$, oder gar ebene Störungen, die geringste Dämpfung aufweisen und damit die kritischsten Störungen darstellen. Kurzwellige Störungen hingegen, sind deutlich stärker gedämpft. Da für $a = 0$ bereits stabiles Verhalten gefunden wurde, bleibt die Strömung damit (auch für Z -periodische Störungen) stets stabil.

3.2.4 Vergleich der Eigenwerte mit numerischer Simulation

Zur Überprüfung der analytisch hergeleiteten Stabilitätsaussagen, werden diese numerisch überprüft. Dafür simulieren wir die Strömung im Keil mit dem Finite-Elemente-Code (FEM) FEMLAB. Die Strömung ist dreidimensional und zeitabhängig, in der Simulation werden die vollen Navier-Stokes-Gleichungen gelöst und keine Vereinfachungen eingeführt. In der Z -Richtung verwenden wir bei $Z = 0$ und $Z = Z_0$ periodische Randbedingungen, die Länge des Keils in der Z -Richtung ist durch die Wellenzahl a gegeben. In die Grundströmungen bringen wir eine lokale Störung ein. Abbildung 15 zeigt das Gitter und den Ort der Störung. Der Keil ist mit einem tetraedrischen Gitter vernetzt. Die Störung geschieht demnach auf der Wand, welche an sich die Randbedingung $U = -1$, $V = 0$ aufweist. Als Störung wird im Detail die

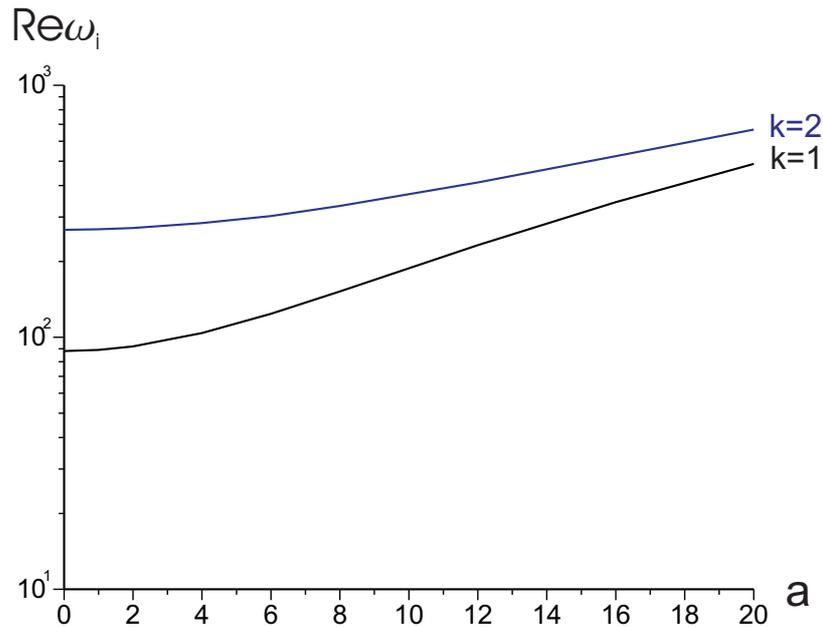


Abbildung 14: Eigenwerte $Re\omega_i$ für die ersten Moden $k = 1, 2$ als Funktion der Wellenzahl.

Amplitude der Komponente U verdoppelt (d.h. $U = -2$). Schließlich entfernen wir die Störung und beobachten das Verhalten der Störungen in der Zeit.

Abbildung 16 zeigt die Eigenwerte $Re\omega_i$ aus der numerischen Simulation (Symbole) aufgetragen über die Wellenzahl a . Zusätzlich sind die analytischen Ergebnisse in Form durchgezogener Kurven dargestellt. Die Simulationen sind für $a = 0, 4, 7$ durchgeführt. Für alle Simulationen ist jeweils eine Reynolds-Zahl von $Re = 1$ und $Re = 100$ angenommen. Wir erkennen, dass die aus der numerischen Simulation stammenden Eigenwerte $Re\omega_i$ im gleichen Wertebereich, wie die aus der analytischen Rechnung hergeleiteten Eigenwerte sind.

Für alle Simulationen finden wir $Re\omega_i > 0$, d.h. die Störungen werden wegen $\omega_i > 0$ in allen Fällen exponentiell gedämpft. Dies verallgemeinert unsere Aussage zur linearen Stabilität bei kleinen Störungen hin zu großen Störampplituden. Offensichtlich bleibt die Strömung auch bei Störungen von ~ 1 stabil. Weiterhin zeigen die gefundenen Eigenwerte $Re\omega_i$ eine recht gute Übereinstimmung mit den analytischen Werten. Somit ist sichergestellt, dass die (lineare) Störungsrechnung die kritischen Moden erfasst hat.

Generell finden wir die schwächste Dämpfung an Punkten, die recht weit von der

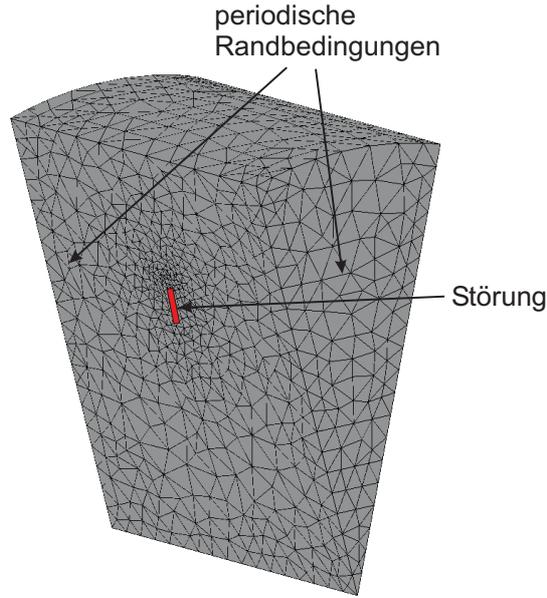


Abbildung 15: Gitter der 3D Störungssimulation.

Störung entfernt sind. Die Eigenwerte dieser Punkte stimmen gut mit den analytischen Eigenwerte überein. Schwache Dämpfung findet sich im übrigen auch im Inneren des Keils wieder. In unmittelbarer Umgebung der Störung hingegen, werden die Störungen schnell weggedämpft, bei entsprechend großen Eigenwerten.

3.2.5 Stördifferentialgleichung für Stokessche Grundströmung und freier Grenzfläche

In diesem Abschnitt bringen wir in die Stördifferentialgleichungen (3.55,3.56) eine viskose Stokes

Zuerst sind die beiden Stokes

$$\Phi = 0 : \Psi = 0, \Psi_{\Phi} = -R, \quad (3.74)$$

$$\Phi = \Phi_0 : \Psi = 0, \Psi_{\Phi} = R. \quad (3.75)$$

Dies ergibt entsprechend der allgemeinen Lösung nach (Moffatt 1964) die Grundlösung

$$\Psi_0 = R^n (\Phi_0^2 - \sin^2 \Phi_0)^{-1} \left(\Phi_0^2 \sin \Phi + \Phi_0 \Phi [\sin(\Phi - \Phi_0) - \sin \Phi] - \Phi_0 \sin \Phi \sin \Phi_0 + \Phi [\sin \Phi \left(\frac{1}{2} \sin(2\Phi_0) - \sin \Phi_0 \right) - \cos \Phi \sin^2 \Phi] \right). \quad (3.76)$$

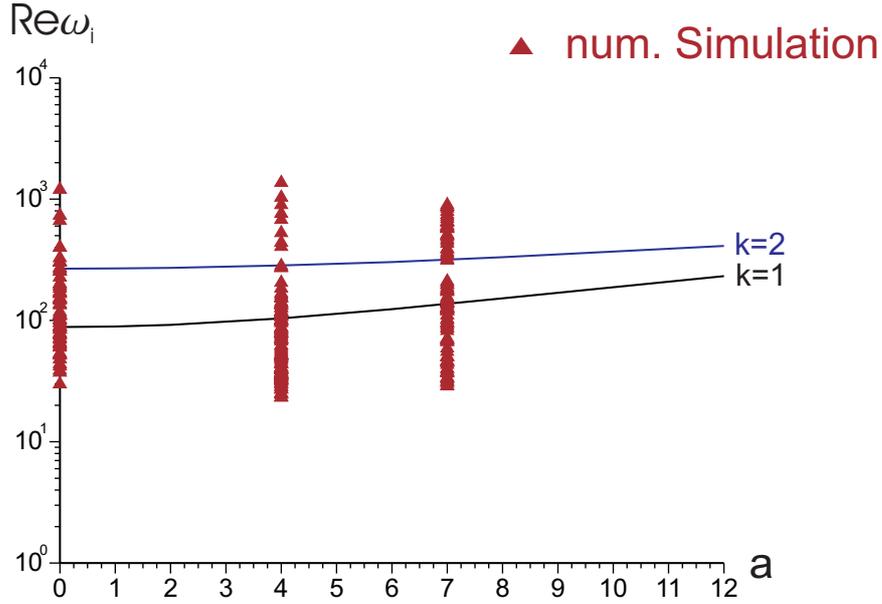


Abbildung 16: Vergleich lineare Störungsrechnung und numerische Simulation

Wird nun die freie Grenzfläche bei $\Phi = \Phi_0$ als schubspannungsfrei behandelt, ergeben sich die Randbedingungen

$$\Phi = 0 : \Psi = 0, \Psi_{\Phi} = -R, \quad (3.77)$$

$$\Phi = \Phi_0 : \Psi = 0, \Psi_{\Phi\Phi} = 0, \quad (3.78)$$

sowie die analytische Lösung

$$\Psi_0 = \frac{R}{\sin \Phi_0 \cos \Phi_0 - \Phi_0} [(\Phi - \Phi_0) \sin \Phi - \Phi \cos \Phi_0 \sin(\Phi - \Phi_0)]. \quad (3.79)$$

Setzen wir diese analytische Lösungen der beiden Grundströmungen in die Stördifferentialgleichungen (3.55, 3.56) ein, erhalten wir nach dem Galerkin-Verfahren (3.57, 3.58) mit den Testfunktionen $f_1(\Phi) = 1$, $f_2(\Phi) = \cos(\frac{2\pi}{\Phi_0}\Phi)$, $f_3(\Phi) = \sin(\frac{2\pi}{\Phi_0}\Phi)$ die Stördifferentialgleichungen der verschiedenen Moden. Die Rechenschritte sind gleich denen, wie sie in Kapitel 3.2.1 beschrieben sind. Für die ersten beiden Moden erhalten wir als Stördifferentialgleichung, unabhängig von der Grundströmung,

$$A_1(2 + \frac{1}{2}R^2 Re\omega_i - 2\frac{\pi^2}{\Phi_0^2} - \frac{1}{2}a^2 R^2) - A_{1R}R + A_{1RR}R^2 = 0, \quad (3.80)$$

$$A_1(2 + \frac{1}{2}R^2 Re\omega_i - 8\frac{\pi^2}{\Phi_0^2} - \frac{1}{2}a^2 R^2) - A_{1R}R + A_{1RR}R^2 = 0. \quad (3.81)$$

Die gewonnenen Stördifferentialgleichungen (3.80,3.81) sind identisch mit den Gleichungen (3.63,3.64). Somit gelten alle Lösungen und Schaubilder die in Kapitel 3.2.2

und 3.2.3 hergeleitet sind auch für diese beiden Fälle. Ob bei der Grundströmung an der freien Grenzfläche die Randbedingung durch das zähe Benetzungsfluid vorgegeben ist, oder dort ein schubspannungsfreier Rand angenommen wird, wie erhalten beides mal die gleiche Stabilitätsaussage. Schlussfolgernd bringt eine Änderung der Randbedingung an der freien Grenzfläche für eine viskose Grundströmung keinen destabilisierenden Effekt mit sich. Einschränkend ist anzumerken, dass diese Aussage strikt nur in der Galerkin-Näherung gültig ist.

3.2.6 Vergleich verschiedener Öffnungswinkel

Die Stabilität im Keil ist in Abbildung 17 für verschiedene Winkel aufgetragen. Wir sehen, dass sowohl bei der zweidimensionalen Störung ($a = 0$), als auch bei der dreidimensionalen Störung ($a \neq 0$), die Eigenwerte bei $\Phi_0 = 10^\circ$ am schwächsten gedämpft sind. Das System erscheint demnach für kleine Öffnungswinkel weniger stabil zu sein. Die Eigenwerte sind allerdings stets positiv, so dass kleine Öffnungswinkel keine Instabilität ins System bringen. Dieses Ergebnis erscheint zunächst physikalisch widersprüchlich. Durch einen kleinen Öffnungswinkel Φ_0 würde man intuitiv eine Stabilisierung durch die näher liegenden Ränder (Randbedingungen) erwarten. Vermutlich kommen hier Fehler aus dem Galerkin-Verfahren durch die Integration über einen größeren Winkel Φ_0 zu tragen. Demgemäß waren die Dämpfungswerte für kleine Φ_0 in guter Näherung richtig. Für große Φ_0 werden die Dämpfungswerte hingegen ungenau.

3.3 Druck

Zur Lösung des Druckfeldes im Spalt ziehen wir die zweite Navier-Stokes-Gleichung heran. Es ist

$$U_0 V_{0R} + \frac{1}{R} V_0 V_{0\Phi} + \frac{1}{R} U_0 V_0 = -P_{0\Phi} + Re^{-1} (V_{0RR} + \frac{1}{R} V_{0R} - \frac{1}{R^2} V_0 + \frac{1}{R^2} V_{0\Phi\Phi} + \frac{2}{R^2} U_{0\Phi}). \quad (3.82)$$

Mittels einer Integration über Φ , kann Gleichung (3.83) für den Druck P_0 in der Grundströmung mit der Randbedingung

$$\Phi = \Phi_0 : P_\infty = 0; \quad (3.83)$$

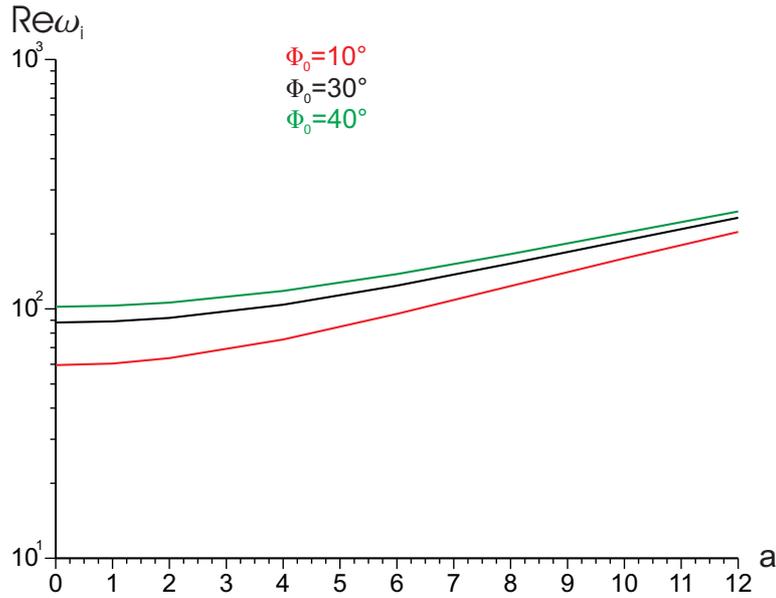


Abbildung 17: Stabilitätsdiagramm für verschiedene Öffnungswinkel.

gelöst werden. Wir bezeichnen den Außendruck mit P_∞ .

Um den Stördruck P' im Keil bestimmen zu können, setzen wir die Störansätze (3.41-3.45) in die instationäre Navier-Stokes-Gleichung der Φ -Richtung

$$\begin{aligned}
 V_t + UV_R + \frac{1}{R}VV_\Phi + \frac{1}{R}UV + WV_Z = \\
 -P_\Phi + Re^{-1}(V_{RR} + \frac{1}{R}V_R - \frac{1}{R^2}V + \frac{1}{R^2}V_{\Phi\Phi} + \frac{2}{R^2}U_\Phi + V_{ZZ})
 \end{aligned} \tag{3.84}$$

ein. Wir erhalten eine Differentialgleichung für den ersten Mod, welche die Grundströmung (V_0 , U_0) und deren Ableitungen, sowie die Störamplituden $A_1(R)$ der Geschwindigkeiten und $D_1(R)$ des Druckes enthält. es ist

$$\begin{aligned}
 R^2\Phi_0^2 \left[A_{1R}(R)(a^2R + Re(V_{0\Phi} - U_0 - \omega_i R) + A_{1RR}(R)(ReU_0 - 1) - \right. \\
 \left. A_{1RRR}R \right] \left(\cos \frac{2\pi\Phi}{\Phi_0} - 1 \right) + R\pi\Phi_0 Re \left[A_1(2V_0 + 2V_{0R}) - 2V_0R^2A_{1R} + \right. \\
 \left. 2D_1R \right] \sin \frac{2\pi\Phi}{\Phi_0} + 4\pi^2 \left[A_{1R} - 2A_1 \right] \cos \frac{2\pi\Phi}{\Phi_0} = 0.
 \end{aligned} \tag{3.85}$$

Die jeweiligen Terme aus der Grundströmung werden mittels einer FEM-Simulation mit dem kommerziellen Code (FEMLAB) ermittelt. Die Störamplitude $A_1(R)$ ist

bereits in Kapitel 3.2.3 hergeleitet worden (Gleichung (3.71)). Sind alle Grundströmungsterme $(U_0, V_0, V_{0R}, V_{0\Phi})$, die Störamplitude $A_1(R)$ und deren Ableitungen bekannt, so kann Gleichung (3.86) nach der Störamplitude D_1 gelöst werden und der Stördruck P' ist ermittelt. Der Druck der Grundströmung P_0 und der Stördruck P' sind im folgenden für einen festen Winkel $\Phi = 7/8\Phi_0$ über den Radius R ausgewertet (Abbildung 18). Der Stördruck P' ist für den 1. Eigenwert $Re\omega_i = 88,15$ (b) dargestellt. Die Wellenzahl a ist zu null gesetzt, d.h. wir betrachten eine ebene Strömung. Der Druck der Grundströmung kommt bei allen Winkeln für kleine Radien wegen der Singularität bei $R = 0$ aus dem Unendlichen. Gegenüber dem Außendruck $P_\infty = 0$ ist der Grunddruck im Spalt positiv, d.h. der Druck im Spalt ist stets größer als der Außendruck. Für größer werdenden Radien strebt der Druck der Grundströmung gegen null. Der Druckabfall am Gebietsrand $R \rightarrow R_0$ ist durch den Randeinfluss begründet. Der Stördruck zeigt bei kleinen Radien verschwindende Werte. Mit steigendem Radius steigt der Stördruck an. In der Mitte des Störwirbels dreht der Stördruck sein Vorzeichen zu negativen Werten um, bevor er am Gebietsrand wieder verschwindet.

3.3.1 Grenzflächenkontur

Bei $\Phi = \Phi_0$ wollen wir die hypothetische Kontur $h(r)$ der Grenzfläche berechnet. An der Grenzfläche wird im allgemeinen eine tangentielle Strömung auf beiden Seiten der Grenzfläche, sowie die Stetigkeit der normalen und tangentialen Spannung gefordert. Es ergeben sich für die Spannungen deshalb an den Grenzflächen die Sprungbedingungen

$$[\tilde{t} \cdot \bar{T} \cdot \tilde{n}] = 0, \quad (3.86)$$

$$[\tilde{n} \cdot \bar{T} \cdot \tilde{n}] = 2\bar{H}\sigma. \quad (3.87)$$

Hierin ist \tilde{n} als Normal-, \tilde{t} als Tangentialeinheitsvektor und \bar{T} als Spannungstensor benannt. Es ist zu beachten, dass die eckigen Klammern an dieser Stelle den Sprung der Größen über die Grenzfläche bezeichnen. In Gleichung (3.87) ist $2\bar{H}$ die mittlere Krümmung der Grenzfläche. Für Normal- und Tangentialeinheitsvektor sowie Span-

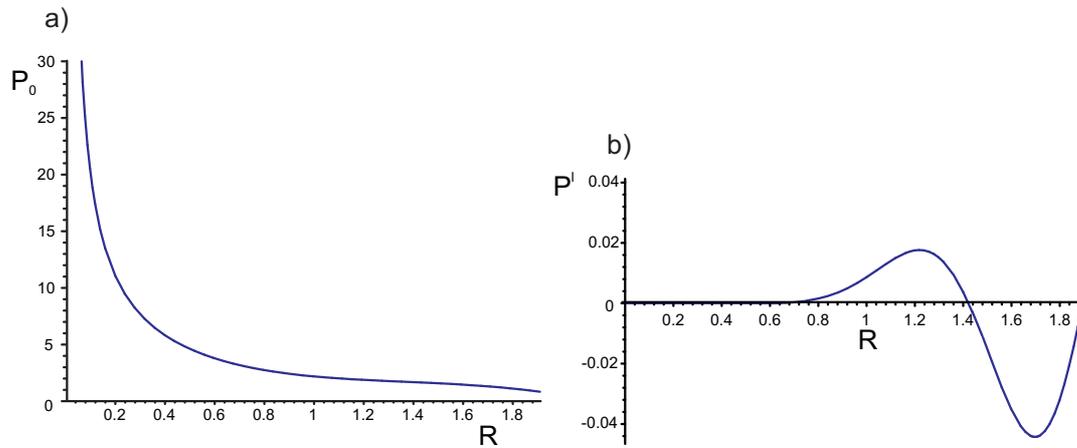


Abbildung 18: Druck der Grundströmung (a) und Stördruck für den 1. Eigenwert (b) über R für $\Phi = \frac{7}{8}\Phi_0$.

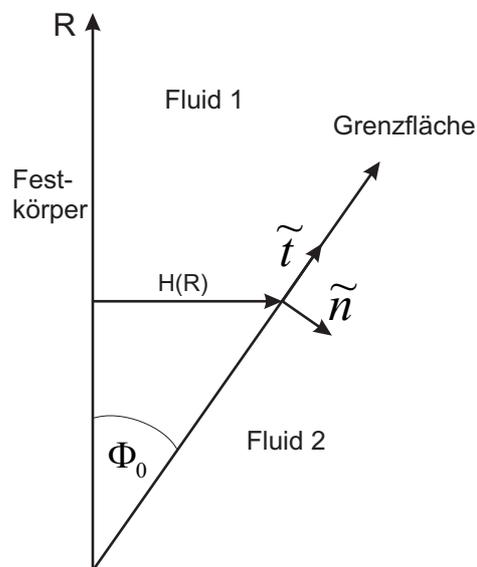


Abbildung 19: Skizze zur Grenzflächenkontur.

nungstensor erhalten wir

$$\tilde{n} = (1 + h_r^2) \begin{pmatrix} 1 \\ -h_r \end{pmatrix}, \quad (3.88)$$

$$\tilde{t} = (1 + h_r^2) \begin{pmatrix} h_r \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.89)$$

$$\bar{T} = \begin{pmatrix} -p + 2\mu u_r, & \mu(v_r - \frac{v}{r} + \frac{u_\phi}{r}) \\ \mu(v_r - \frac{v}{r} + \frac{u_\phi}{r}), & -p + 2\mu(\frac{v_\phi}{r} + \frac{u}{r}) \end{pmatrix}. \quad (3.90)$$

Die Behandlung einer Grenzfläche erfordert in der Regel die Kenntnis der Strömungen und Spannungen auf beiden Seiten. Im vorliegenden Fall wird jedoch nur die Strömung auf einer Seite im Keil betrachtet. Wir haben bisher eine Strömung tangential zur ebenen Grenzfläche angenommen, wobei statt der Bedingung für die tangentialen Spannungen (3.87) entweder eine feste Geschwindigkeit oder ein schubspannungsfreier Rand vorgegeben sind. Unterstellen wir nun im zweiten Fluid (benetzendes Fluid) einen konstanten Druck $P = P_\infty$, so können wir die hypothetische Grenzflächenkontur aufgrund des Druckfeldes im Keil berechnen. Aus Gleichung (3.87) ergibt sich mit (3.88-3.90)

$$\left[-p + \frac{2\mu}{1 + h_r^2} \left\{ -h_r(v_r - \frac{v}{r} + \frac{u_\phi}{r}) + u_r + h_r^2(\frac{v_\phi}{r} + \frac{u}{r}) \right\} \right] = 2\bar{H}\sigma. \quad (3.91)$$

Mit den Skalen (3.12-3.17) erhalten wir die dimensionslose Formen

$$\left[-WeP + \frac{2Ca}{1 + H_R^2} \left\{ -H_R(V_R - \frac{V}{R} + \frac{U_\Phi}{R}) + U_r + H_R^2(\frac{V_\Phi}{R} + \frac{U}{R}) \right\} \right] = 2\bar{H}. \quad (3.92)$$

Der dimensionslose Parameter Weber-Zahl We bezeichnet das Verhältnis von Trägheitskräften und Oberflächenkräften, gemäß

$$We = \frac{\rho u_W^2 l_0}{\sigma}. \quad (3.93)$$

Hingegen ist die Kapillaritäts-Zahl Ca als Verhältnis von viskosen Kräften und Oberflächenkräften zu interpretieren, d.h.

$$Ca = \frac{\mu u_W}{\sigma}. \quad (3.94)$$

Die mittlere Krümmung $2\bar{H}$ in Gleichung (3.92) ist allgemein durch die Funktion $H(R)$ gemäß

$$2\bar{H} = \frac{H_{RR}}{(1 + H_R^2)^{3/2}}, \quad (3.95)$$

gegeben. Der Druck im Spalt ist stets größer als der Außendruck. Für diesen Fall gilt für eine konkave Kontur $2\bar{H} > 0$. Beschränken wir uns desweiteren auf den Grenzfall $Ca \ll We$, d.h. die Trägheitskräfte sind deutlich größer als die viskosen Kräfte. Dieser Fall ist für große R gegeben. Für den Drucksprung über die Grenzfläche bei einem Umgebungsdruck von $P_\infty = 0$ erhalten wir den Zusammenhang

$$P(\phi_0) = -\frac{H_{RR}}{(1 + H_R^2)^{3/2}} We^{-1}. \quad (3.96)$$

Gleichung (3.96) ist eine nichtlineare Differentialgleichung für die Kontur $H(R)$. Sie ist mit sinnvollen Randbedingungen bei $R = 0$ und $R = R_0$ numerisch zu lösen. Diese sind

$$R = 0 \quad : \quad H = 0, \quad (3.97)$$

$$R = R_0 \quad : \quad H = 3/\pi. \quad (3.98)$$

Die Ergebnisse für die Kontur $H(R)$ sind in Abbildung 20 über dem Radius R dargestellt. Der Druck am Gebietsrand Φ_0 wird bei einer Reynolds-Zahl $Re = 500$ aus Gleichung (3.83) berechnet.

Wir erkennen, dass für kleine Weber-Zahlen die Krümmung der Grenzfläche sehr gering ist. Für kleine Weber-Zahl dominieren die Kapillarkräfte gegenüber den Trägheitskräften. Dies bedeutet, dass eine große Oberflächenspannung die Krümmung an der Grenzfläche unterbindet. Dahingegen erhalten wir bei steigender Weber-Zahl ($We \rightarrow \infty$), und damit für kleine Oberflächenspannung, eine starke Krümmung.

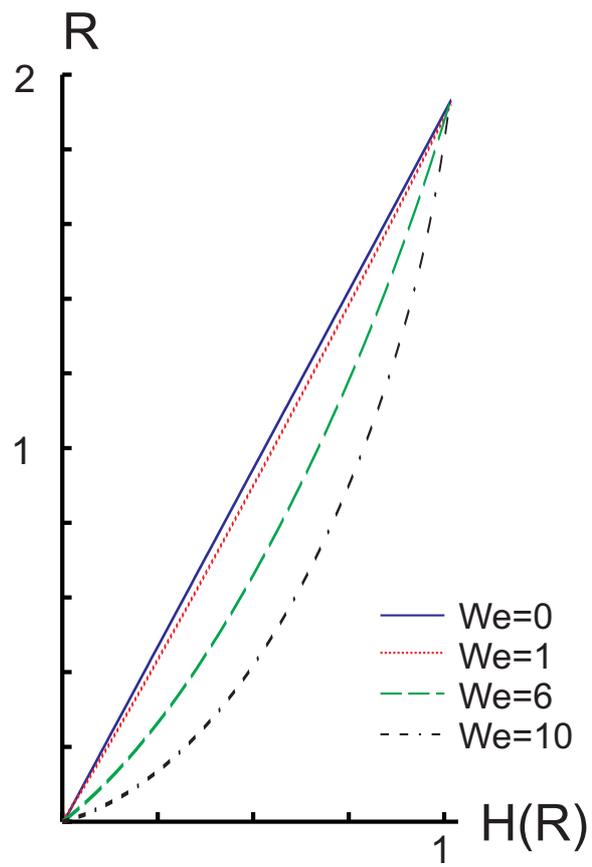


Abbildung 20: Hypothetische Kontur der freien Grenzfläche

4 Strömung vom Typ 2 mit vereinfachten Randbedingungen

4.1 Zweidimensionale Grundströmung

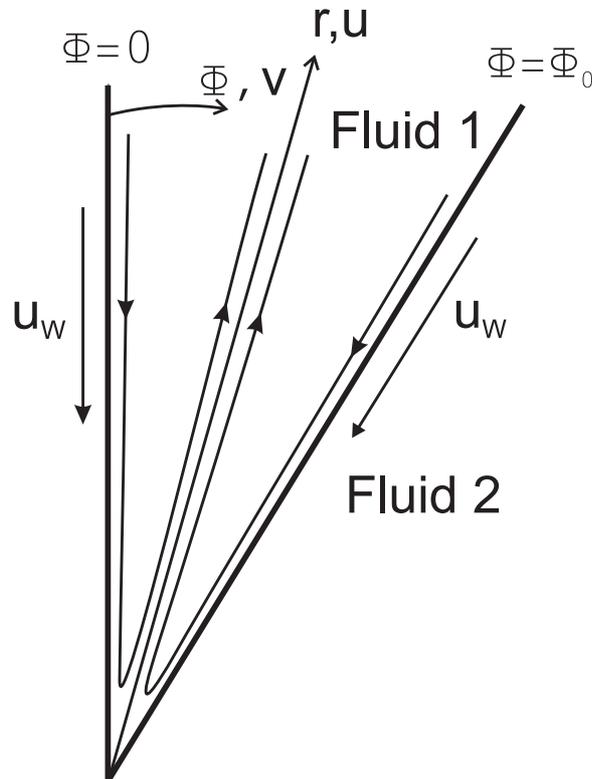


Abbildung 21: Prinzipskizze für Typ 2.

Typ 2 stellt den zweiten vorkommenden Strömungsfall bei Benetzungsvorgängen dar. Die Formulierung der Grundströmung und die Herleitung der Stördifferentialgleichung folgt dem prinzipiellen Vorgehen aus Kapitel. Für Typ 2 ist in Abbildung (21) eine Prinzipskizze der Strömung mit idealisierter ebener Grenzfläche und kinematisch vereinfachte Randbedingung zu sehen. Für die Beschreibung der zweidimensionalen, stationären und inkompressiblen Grundströmung werden wiederum die Massen- und Impulsgleichungen in r, ϕ -Koordinaten, d.h.

$$\nabla \mathbf{V} = 0, \quad (4.99)$$

$$\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} = -\nabla P + Re^{-1}(\nabla^2 \mathbf{V}), \quad (4.100)$$

herangezogen. Die dazugehörigen Randbedingungen an den Rändern $\Phi = 0$ und $\Phi =$

Φ_0 sind

$$R, \Phi = 0 \quad : \quad U = -1, V = 0, \quad (4.101)$$

$$R, \Phi = \Phi_0 \quad : \quad U = -1, V = 0. \quad (4.102)$$

In die dimensionslose Gleichungen (4.99-4.102) ist bereits die Skalierung (3.12-3.17) eingebracht. Die relevante dimensionslose Kennzahl ist die Reynolds-Zahl gemäß Gleichung (3.22). Mittels Einführung einer Stromfunktion Ψ für die Geschwindigkeiten $U = \frac{1}{R}\Psi_\Phi$ und $V = -\Psi_R$ erreichen wir, dass die Massenerhaltung von vornherein erfüllt ist und der Druckterm durch geeignete Operationen eliminiert werden kann. Schließlich erhalten wir aus Gleichung (4.100)

$$\begin{aligned} \nabla^2(\nabla^2\Psi) = \frac{Re}{R} \left[\psi_\Phi \left(\psi_{RRR} + \frac{1}{R}\psi_{RR} + \frac{1}{R^2}(\psi_{R\Phi\Phi} - \psi_R) - \right. \right. \\ \left. \left. \frac{2}{R^3}\psi_{\Phi\Phi} \right) - \psi_R \left(\psi_{RR\Phi} + \frac{1}{R}\psi_{R\Phi} \frac{1}{R^2}\psi_{\Phi\Phi\Phi} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.103)$$

mit den dazugehörigen Randbedingungen für Typ 2

$$R, \Phi = 0 \quad : \quad \psi = 0, \psi_\Phi = -R, \quad (4.104)$$

$$R, \Phi = \Phi_0 \quad : \quad \psi = 0, \psi_\Phi = -R. \quad (4.105)$$

Wir wollen im nächsten Schritt wiederum die beiden Grenzfälle, die schleichende Stokessche ($Re \rightarrow 0$) und die trägheitsbestimmte ($Re \rightarrow \infty$) Strömung betrachten.

4.1.1 Stokessche Strömung

Wir führen den Separationsansatz $\Psi = R^n f(\Phi)$ (Dean und Montagnon 1949) in Gleichung (4.103) ein und erhalten im Grenzfall $Re \rightarrow 0$

$$\nabla^4 \psi = 0. \quad (4.106)$$

Mit den gegebenen Randbedingungen (4.104,4.105) muss $n = 1$ sein. Schließlich bekommen wir für die Stokessche Strömung die gewöhnliche Differentialgleichung

$$f(\Phi) + 2f_{\Phi\Phi}(\Phi) + f_{\Phi\Phi\Phi\Phi}(\Phi) = 0. \quad (4.107)$$

Für die Randbedingungen gilt

$$\Phi = 0 \quad : \quad f = 0, f_\Phi = -1, \quad (4.108)$$

$$\Phi = \Phi_0 \quad : \quad f = 0, f_\Phi = -1. \quad (4.109)$$

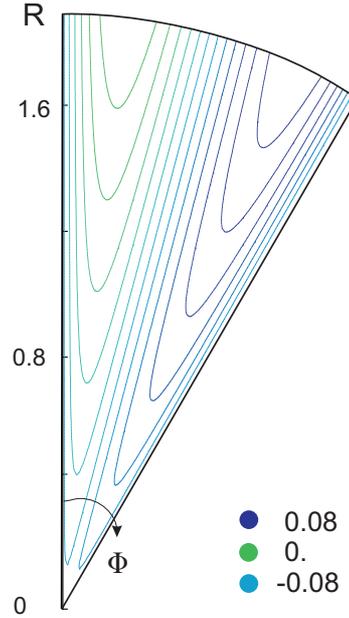


Abbildung 22: Stokessche Strömung vom Typ 1 in Form von Linien $\Psi = \textit{konstant}$.

Mit der allgemeinen Lösung (3.35) von (Moffatt 1964) für $f(\Phi)$, werden die Konstanten A, B, C und D unter Einhaltung der Randbedingungen (4.108,4.109) bestimmt, und wir erhalten für die Keilströmung des zweiten Typs

$$f_2(\Phi) = (\Phi_0^2 - \sin^2 \Phi_0)^{-1} \left[-\Phi_0^2 \sin \Phi + \Phi_0 \Phi \left(\sin(\Phi - \Phi_0) + \sin \Phi \right) - \Phi_0 \sin \Phi \sin \Phi_0 + \Phi \left(\sin \Phi \left(-\frac{1}{2} \sin 2\Phi_0 - \sin \Phi_0 \right) + \cos \Phi \sin^2 \Phi \right) \right]. \quad (4.110)$$

Abbildung 22 zeigt die Lösung von Gleichung (4.110) mit den Randbedingungen (4.114,4.115) für einen Winkel von 30° und den Radius von $R_0 = 1/\Phi_0$. Die Abbildung zeigt Stromlinien im Keil. Die Strömung bewegt sich dabei an beiden Rändern in Richtung Keilspitze, kehrt ihre Richtung um und strömt mittig entlang der Staustromlinie aus dem Keil heraus.

4.1.2 Euler-Strömung

Setzen wir den Ähnlichkeitssansatz $\Psi = R^n f(\Phi)$ (Dean und Montagnon 1949) in die Impulserhaltung (4.103) ein, so erhalten wir zunächst für $Re \rightarrow \infty$

$$\psi_\Phi \left(\psi_{RRR} + \frac{1}{R} \psi_{RR} + \frac{1}{R^2} (\psi_{R\Phi\Phi} - \psi_R) - \frac{2}{R^3} \psi_{\Phi\Phi} \right) - \quad (4.111)$$

$$\psi_R \left(\psi_{RR\Phi} + \frac{1}{R} \psi_{R\Phi} - \frac{1}{R^2} \psi_{\Phi\Phi\Phi} \right) = 0. \quad (4.112)$$

Für $n = 1$ wird die resultierende Differentialgleichung gewöhnlich, d.h. wir haben

$$\left(f_{\Phi\Phi}(\Phi)f(\Phi) \right)_{\Phi} + f_{\Phi}(\Phi)f(\Phi) = 0. \quad (4.113)$$

Auch in diesem Fall kann die Lösung der Differentialgleichung (4.113) die Haftbedingung an den Rändern mit den Randbedingungen

$$\Phi = 0 : f = 0, f_{\Phi} = -1, \quad (4.114)$$

$$\Phi = \Phi_0 : f = 0, f_{\Phi} = -1, \quad (4.115)$$

nicht einhalten. Demnach existiert auch für diesen Fall der Euler-Strömung keine Ähnlichkeits-Lösung.

4.2 Zeitliche und dreidimensionale Stabilitätsanalyse

Bei der linearen Stabilitätsanalyse gehen wir auf dieselbe Art und Weise vor, wie in Kapitel 3.2 beschrieben vor. Dabei wird die zweidimensionale, stationäre Grundströmung mit ihren Grundgleichungen

$$\nabla \mathbf{V} = 0, \quad (4.116)$$

$$\mathbf{V}_t + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} = -\nabla P + Re^{-1}(\nabla^2 \mathbf{V}), \quad (4.117)$$

mit einer dreidimensionalen, zeitabhängigen, kleinen Störung der Größenordnung ϵ , d.h. gestört

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0(R, \Phi) + \epsilon \mathbf{V}'(R, \Phi, Z, \tau) + \dots \quad (4.118)$$

Für die Störung \mathbf{V} verwenden wir die Separationsansätze

$$U' = \sum_{k=1}^N -\frac{1}{R} A_k(R) \frac{2\pi k}{\Phi_0} \left(\sin\left(\frac{2\pi k}{\Phi_0} \Phi\right) \right) \exp(i\omega\tau + iaZ), \quad (4.119)$$

$$V' = \sum_{k=1}^N -B_{kR}(R) \left(\cos\left(\frac{2\pi k}{\Phi_0} \Phi\right) - 1 \right) \exp(i\omega\tau + iaZ), \quad (4.120)$$

$$W' = \sum_{k=1}^N C_k(R) \left(\cos\left(\frac{2\pi k}{\Phi_0} \Phi\right) - 1 \right) \exp(i\omega\tau + iaZ), \quad (4.121)$$

$$P' = \sum_{k=1}^N D_k(R) \sin\left(\frac{2\pi k}{\Phi_0} \Phi\right) \exp(i\omega\tau + iaZ), k = 1, 2, 3, \dots \quad (4.122)$$

In den Ansätzen (4.119-4.122) sind die Variablen (R, Φ, Z, τ) separiert. Die Amplitudenfunktionen $A_k(R)$, $B_k(R)$, $C_k(R)$ und $D_k(R)$ sind dabei allgemein gehalten,

wohingegen die Abhängigkeit in Φ in Form von Fourier-Reihen periodisches Verhalten aufweisen. Zusätzlich wird in der Zeit τ allgemein periodisch angefachtes oder gedämpftes Verhalten mit $\omega = \omega_r + i\omega_i$ angenommen. Die Wellenzahl a ist reell, d.h. wir unterstellen in der Z -Richtung lediglich periodisches Verhalten. Die Störungen müssen ebenfalls am Rand verschwinden, damit gelten auch für Typ 2 die Randbedingungen

$$U'(0) = 0, \quad U'(\Phi_0) = 0, \quad (4.123)$$

$$V'(0) = 0, \quad V'(\Phi_0) = 0, \quad (4.124)$$

$$W'(0) = 0, \quad W'(\Phi_0) = 0, \quad (4.125)$$

$$P'(0) = 0, \quad P'(\Phi_0) = 0. \quad (4.126)$$

Die Randbedingungen (4.124-4.125) werden bereits durch die Fourier-Reihen in (4.119-4.122) erfüllt. Letztendlich führen wir die Störansätze (4.118-4.122) in die instationäre, dreidimensionale Massenerhaltung (4.116) und Impulsgleichung (4.117) ein und erhalten die gleichen Stördifferentialgleichungen wie in Kapitel 3.2. Es gilt

$$C_1 iaR \left(\cos \frac{2\pi}{\Phi_0} - 1 \right) + C_2 iaR \left(\cos \frac{4\pi}{\Phi_0} - 1 \right) + \dots = 0, \quad (4.127)$$

$$\left(-2A_{1R} + 2B_{1R} \right) \sin \frac{2\pi}{\Phi_0} \Phi + \left(-4A_{2R} + 4B_{2R} \right) \sin \frac{4\pi}{\Phi_0} \Phi + \dots = 0. \quad (4.128)$$

für die Massenerhaltung und

$$S(R, \Phi, \omega_r) = \left[F_1(R) + F_2(R) \cos \frac{2\pi}{\Phi_0} \Phi + G_1(R) + G_2(R) \cos \frac{4\pi}{\Phi_0} \Phi + \dots \right] i\omega_r = 0, \quad (4.129)$$

$$\begin{aligned} T(R, \Phi, \omega_i, a) = & F_3(R, a) + F_4(R, \Phi, \omega_i) + \\ & \left[F_5(R, a) + F_6(R, \Phi, \omega_i) \right] \cos \frac{2\pi}{\Phi_0} \Phi + F_7(R, \Phi) \sin \frac{2\pi}{\Phi_0} \Phi + \\ & G_3(R, a) + G_4(R, \Phi, \omega_i) + \left[G_5(R, a) + G_6(R, \Phi, \omega_i) \right] \cos \frac{4\pi}{\Phi_0} \Phi + \\ & G_7(R, \Phi) \sin \frac{4\pi}{\Phi_0} \Phi + \dots = 0. \end{aligned} \quad (4.130)$$

für die Impulserhaltung. Wie in Kapitel 3.2 beschrieben, folgt analog für die ersten beiden Moden $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, $B_1 = A_1$ und $B_2 = A_2$.

Wir suchen wiederum mittels des Galerkin-Verfahrens (3.57,3.58) eine Näherungslösung der Gleichungen (4.129,4.130). Hierzu verwenden wir im Galerkin-Verfahren

die Testfunktionen $f_1(\Phi) = 1$, $f_2(\Phi) = \cos(\frac{2\pi}{\Phi_0}\Phi)$, $f_3(\Phi) = \sin(\frac{2\pi}{\Phi_0}\Phi)$, $f_4(\Phi) = \cos(\frac{4\pi}{\Phi_0}\Phi)$ und $f_5(\Phi) = \sin(\frac{4\pi}{\Phi_0}\Phi)$ und integrieren die Gleichung (4.129,4.130) über Φ . Die Moden können nunmehr ausgekoppelt und separiert voneinander betrachtet werden. Aus Gleichung (4.129) folgen die gewöhnliche Differentialgleichungen

$$F_1(R) = -A_{1R}R - A_{1RR}R^2 = 0, \quad (4.131)$$

$$F_2(R) = -4\frac{\pi^2}{\Phi_0^2}A_1 + A_{1R}R + R^2A_{1RR} = 0, \quad (4.132)$$

die nunmehr nicht mehr vom Winkel Φ abhängen. Die Gleichungen (4.131,4.132) liefern die Forderung, dass entweder A_1 oder ω_r null sein müssen. Weil die triviale Lösung in einem gestörten System ausgeschlossen werden kann, folgt, $\omega_r = 0$. Die Störungen im Keil sind somit exponentiell gedämpft oder angefacht.

Zur weiteren Lösung von (4.130) nutzen wir die Winkelbeziehung $\sin \frac{2\pi k}{\Phi_0}\Phi \cos \frac{2\pi k}{\Phi_0}\Phi = \frac{1}{2} \sin 2\frac{2\pi k}{\Phi_0}\Phi$ aus. Dabei werden die jeweiligen Integrale in den nächst höheren Mod geschoben. Mittels Galerkin-Verfahrens erhalten wir drei gewöhnliche Differentialgleichungen. Die vorkommenden Integrale sind mit der Grundströmung gekoppelt, die mittels einer FEM-Simulation des kommerziellen Programms FEMLAB ausgewertet werden können. Für die ersten beiden Moden ($k = 1$, $k = 2$) ergeben sich gewöhnliche, lineare Differentialgleichungen dritter Ordnung, die nur noch vom Radius R abhängen. Als Beispiel erhalten wir für den ersten Mod bei $Re = 1$ die Stördifferentialgleichung

$$A_1F_8(R, a, \omega_i) + A_{1R}F_9(R) + A_{1RR}F_{10}(R) + A_{1RRR}F_{11}(R) = 0. \quad (4.133)$$

Für den zweiten Mod ergibt sich bei $Re = 1$

$$A_1G_8(R, a, \omega_i) + A_{1R}G_9(R) + A_{1RR}G_{10}(R) + A_{1RRR}G_{11}(R) = 0. \quad (4.134)$$

Die Terme ($F_8 - F_{11}, G_8 - G_{11}$) können im Anhang (Kapitel 7) nachgesehen werden.

4.2.1 Randbedingungen in der Nachbarschaft von $R = 0$

Um die Stördifferentialgleichungen (4.133,4.134) numerisch zu lösen, sind Randbedingungen bei $R = 0$ nötig. Eine numerische Integration ab $R = 0$ ist aufgrund von Singularitäten nur schwer möglich. Deshalb müssen wir die Randbedingungen in der Umgebung von $R = 0$ (für $R \ll 1$) herleiten. Die konvektiven Terme in der Impulserhaltung (4.100) können für $R \ll 1$ vernachlässigt werden. Nach der

Entdimensionierung und dem Einsetzen der Störansätze (3.41-3.45), ergibt sich die Stördifferentialgleichung für die schleichende Strömung zu

$$F_3(R, a) + F_5(R, a) \cos\left(\frac{2\pi}{\Phi_0}\Phi\right) + G_3(R, a) + G_5(R, a) \cos\left(\frac{4\pi}{\Phi_0}\Phi\right) = 0. \quad (4.135)$$

$a = 0$:

Zur Lösung dieser, von der Grundströmung unabhängigen, gewöhnlichen Differentialgleichung (4.135) vierter Ordnung beschränken wir uns zuerst auf eine zweidimensionale Störung ($a = 0$). Um eine Näherungslösung zu bestimmen, benutzen wir das Galerkin-Verfahren (3.57,3.58), mit den Testfunktionen von $f_1(\Phi) = 1$, $f_2(\Phi) = \cos\left(\frac{2\pi}{\Phi_0}\Phi\right)$ und $f_3(\Phi) = \cos\left(\frac{4\pi}{\Phi_0}\Phi\right)$. Es ergeben sich zwei lineare Differentialgleichungen, welche für den ersten Mod und den zweiten Mod separiert zu

$$2A_1\left(1 - \frac{\pi^2}{\Phi_0^2}\right) - A_{1R}R + A_{1RR}R^2 = 0, \quad (4.136)$$

$$2A_2\left(1 - 4\frac{\pi^2}{\Phi_0^2}\right) - A_{2R}R + A_{2RR}R^2 = 0, \quad (4.137)$$

angegeben werden können. Die Gleichungen (4.136,4.137) stellen Eulersche Differentialgleichungen dar. Die Eulersche Differentialgleichung besitzt eine allgemeine Lösung, die für die ersten Moden als

$$A_1(R) = C_1R^{1+\sqrt{2\frac{\pi^2}{\Phi_0^2}-1}} + C_2R^{1-\sqrt{2\frac{\pi^2}{\Phi_0^2}-1}}, \quad (4.138)$$

$$A_2(R) = C_3R^{1+\sqrt{8\frac{\pi^2}{\Phi_0^2}-1}} + C_4R^{1-\sqrt{8\frac{\pi^2}{\Phi_0^2}-1}}, \quad (4.139)$$

angegeben werden kann. Physikalisch ist zu erwarten, dass jegliche Störung für $R \rightarrow 0$ verschwindet. Es muss deshalb $C_2 = 0$ und $C_4 = 0$ sein, womit die speziellen Lösungen

$$A_1(R) = C_1R^{1+\sqrt{2\frac{\pi^2}{\Phi_0^2}-1}}, \quad (4.140)$$

$$A_2(R) = C_3R^{1+\sqrt{8\frac{\pi^2}{\Phi_0^2}-1}}, \quad (4.141)$$

verbleiben.

$a \neq 0$:

Bei einer dreidimensionalen Störung ($a \neq 0$) erhalten wir nach der Anwendung des Galerkin-Verfahrens (3.57,3.58) zwei Differentialgleichungen für den 1. Mod und 2.

Mod, nämlich

$$2A_1\left(1 - \frac{\pi^2}{\Phi_0^2} - \frac{1}{4}a^2R^2\right) - A_{1R}R + A_{1RR}R^2 = 0, \quad (4.142)$$

$$2A_2\left(1 - 4\frac{\pi^2}{\Phi_0^2} - \frac{1}{4}a^2R^2\right) - A_{2R}R + A_{2RR}R^2 = 0. \quad (4.143)$$

Die Testfunktionen sind auch hier $f_1(\Phi) = 1$, $f_2(\Phi) = \cos(\frac{2\pi}{\Phi_0}\Phi)$ und $f_3(\Phi) = \cos(\frac{4\pi}{\Phi_0}\Phi)$, wobei von $\Phi = 0$ bis $\Phi = \Phi_0$ integriert wird. Gleichungen (4.142, 4.143) stellen eine Besselsche Differentialgleichung dar. Die analytischen Lösungen lautet

$$A_1(R) = C_5RI_j(x) + C_6RK_j(x); j = \sqrt{-1 + \frac{2\pi}{\Phi_0^2}}; x = a\sqrt{2}R, \quad (4.144)$$

$$A_2(R) = C_7RI_j(x) + C_8RK_j(x); j = \sqrt{-1 + \frac{8\pi}{\Phi_0^2}}; x = a\sqrt{2}R. \quad (4.145)$$

$K_j(x)$ kommt bei $x \rightarrow 0$ aus dem Unendlichen und erfüllt aus diesem Grund nicht die Randbedingungen. Konstanten C_6 und C_8 sind deshalb zu null zu setzen. Übrig bleiben für somit die Lösungen

$$A_1(R) = C_5RI_j(x), \quad (4.146)$$

$$A_2(R) = C_7RI_j(x). \quad (4.147)$$

4.2.2 Zweidimensionale ($a = 0$) und dreidimensionale ($a \neq 0$) Störung

Im Falle $a = 0$ und $a \neq 0$ können die Stördifferentialgleichungen nicht mehr analytisch, gelöst werden, sondern müssen nunmehr numerisch integriert werden. Die Randbedingungen können aus den in Kapitel (4.2.1) hergeleiteten Lösungen (4.140,4.141) und (4.146,4.147) bestimmt werden. Die Konstanten C_1, C_3, C_5, C_7 können dabei mit ϵ aus Gleichung (3.41) zusammengefasst werden. Die Randbedingungen werden bei dem Radius $R = 0.06$ festgelegt. Der Öffnungswinkel ist für alle Fälle $\Phi_0 = 30^\circ$, der äußere Rand liegt somit bei $R_\infty = 1/\Phi_0 = 6/\pi$.

$a = 0$:

Abbildung 23 zeigt für den Mod $k = 1$ die Lösungen $A_1(R)$ für die ersten drei Eigenwerte. Für diesen Typ der Strömung (Typ 2) finden wir nicht mehr den Eigenwert in Form $Re\omega_i$, sondern ω_i tritt separat auf. In Abbildung 23 ist zu sehen, dass die höheren Eigenwert bei großer Dämpfung eine kleinere Amplitude aufweisen. Der erste

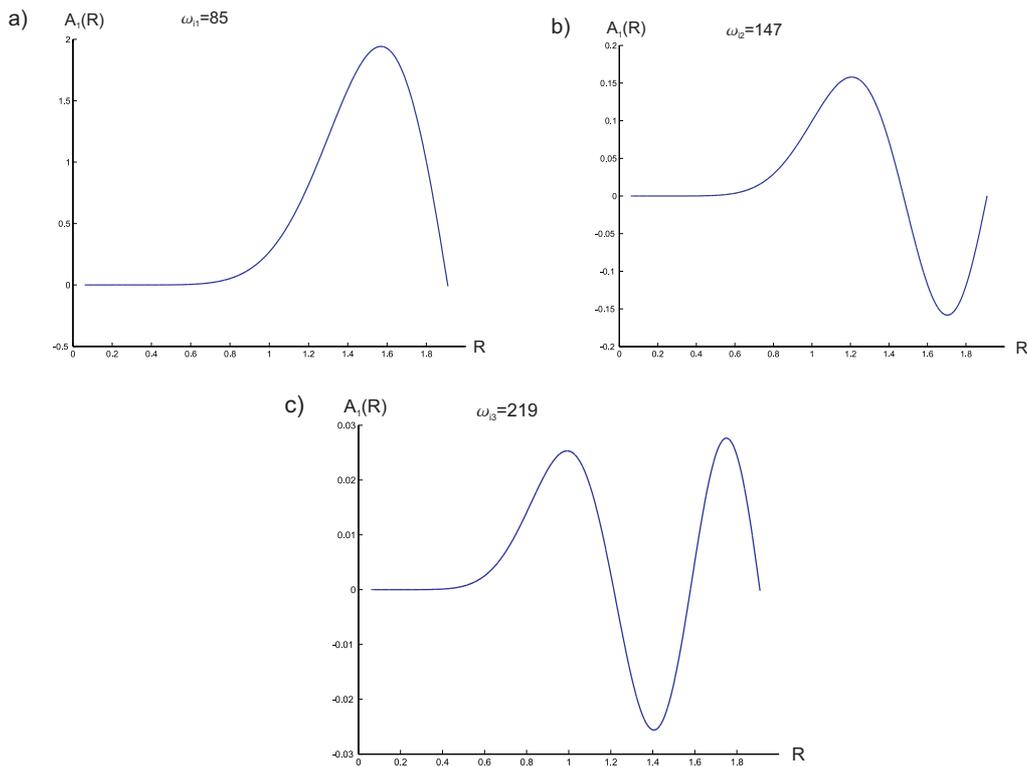


Abbildung 23: Lösungen $A_1(R)$ für die ersten drei Eigenwerte.

Eigenwert scheint wiederum der relevante Eigenwert zu sein. Zudem sind alle Eigenwerte ω_i positiv, d.h. alle Störungen $A_1(R)$ sind zeitlich gedämpft. Die Amplituden $A_k(R)$ wachsen bei steigendem R an. An einem festen Ort ist zeitlich eine exponentielle Dämpfung zu erwarten.

In Abbildung 24 sind die Eigenwerte ω_i über die Anzahl Nullstellen NS_i der verschiedenen Stördifferentialgleichungen aufgetragen. Bei gleicher Reynolds-Zahl (vgl. $Re = 1$) sind die Dämpfungsraten ω_i von Mod 1 unterhalb denen von Mod 2. Dies belegt wiederum, dass der erste Mod für die Stabilität entscheidende Mod ist. Wir erkennen zudem, dass die Dämpfungsraten für steigende Reynolds-Zahl abnehmen und gegen null streben. Damit führt eine steigende Reynolds-Zahl offensichtlich zu einer weniger stabilen Situation. Auch in diesem Strömungsfall (Typ 2) existieren bei der linearen Störanalyse keine negativen Eigenwerte ω_i , sodass das System gegenüber kleinen Störungen stabil bleibt.

Abbildung (25) zeigt für $Re = 1$ die Störungen der Geschwindigkeiten U' , V' in Form der Störstromfunktion Ψ' für den 1. Eigenwert ($k = 1$). Im Keil stellt sich ein Wirbel ein, mit steigenden Eigenwerten nimmt die Anzahl der Wirbel im Keil zu und die

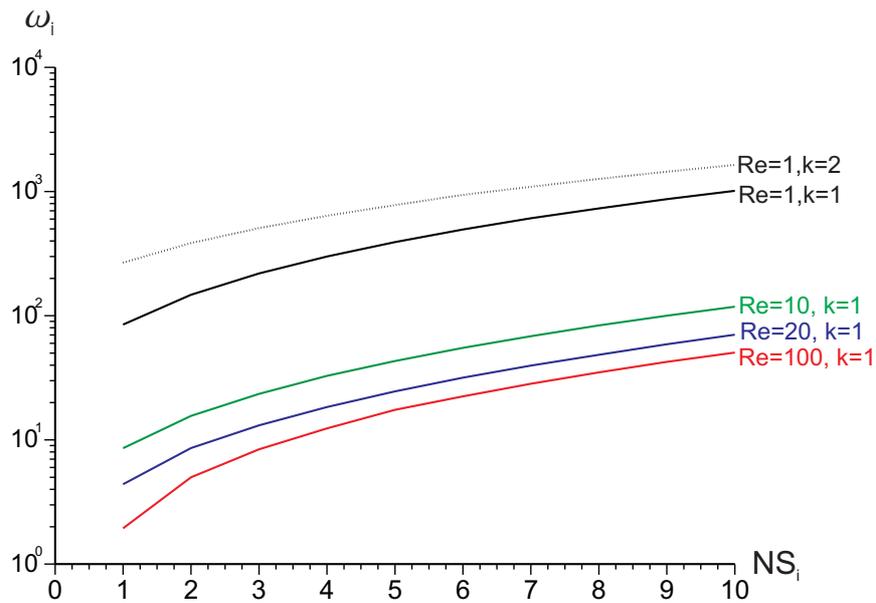


Abbildung 24: Nullstellen der Stördifferentialgleichungen für verschiedene Reynolds-Zahlen.

Amplitude der Störung $A_k(R)$ nimmt ab. Die Drehrichtungen der Wirbel sind für die Eigenwerte $\omega_i = 85$ und $\omega_i = 147$ in Abbildung 26 zu sehen. Hinsichtlich $\omega_i = 85$ (Abbildung 26 a) erhalten wir einen in positiver Richtung drehenden Wirbel, wobei auch die Amplitude $A_1(R)$ positive Werte hat (vgl. Abbildung 23 a). Beim Eigenwert $\omega_i = 147$ (Abbildung 26 b) zeigt sich wiederum das Verhalten, dass positive Amplitudenwerte zu positiv drehenden Wirbel und negative Amplitudenwerte zu negativ drehenden Wirbel gehören. Die Höheren Eigenwerte zeigen ein analoges Verhalten.

$a \neq 0$:

Für den Fall dreidimensionale Störungen sind in Abbildung 27 die Eigenwerte über der Wellenzahl a aufgetragen. Bei einer Wellenzahl von $a = 0$ sind die Ergebnisse mit Abbildung 24 für die jeweils ersten Nullstellen konsistent. An dieser Stelle signalisieren die Eigenwerte ω_i die geringste Dämpfung. Dieser Sachverhalt zeigt uns, dass Typ 2 langwellige oder gar ebene Störungen die geringste Dämpfung aufweisen und damit den kritischen Eigenwert darstellen. Kurzwellige Störungen sind stärker gedämpft. Schlussfolgernd wird für $a = 0$ stabiles Verhalten für die Strömung im Keil gefunden.

Störung Ψ' : $Re=1; \omega_1=85; a=0$.

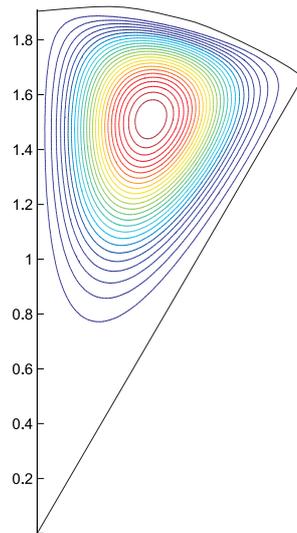


Abbildung 25: Linien $\Psi' = \text{konstant}$ für $Re = 1$, $\omega_1 = 85$, $k = 1$ und $a = 0$.

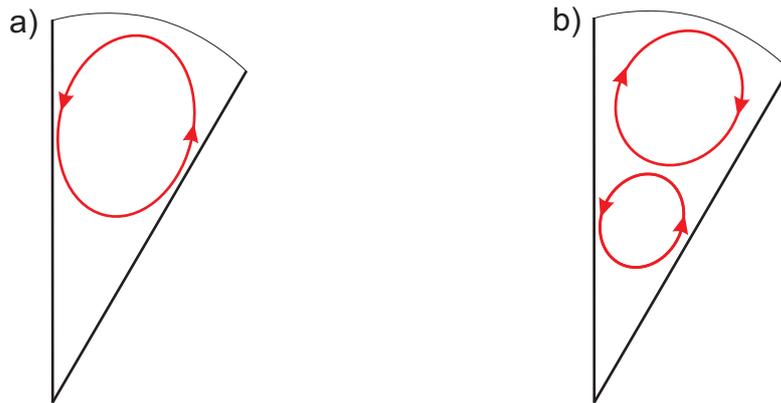


Abbildung 26: Wirbelrichtungen für den 1. (a) und 2. (b) Eigenwert.

Die Keilströmung bleibt aber auch gegenüber periodischen Störungen stets stabil.

4.2.3 Vergleich der Eigenwerte mit numerischer Simulation

Schließlich überprüfen wir die hergeleiteten Dämpfungsraten mit einer numerischen Simulation. Die zweidimensionale, stationäre Grundströmung wird mittels des FEM-Programms FEMLAB wie in Kapitel 3.2.4 beschrieben, simuliert und auf diese Grundströmung wird eine dreidimensionale, zeitabhängige Simulation einer Störung aufgebracht. Die Randbedingungen und die Vorgehensweise der Simulation sind in Kapitel 3.2.4 nachzulesen.

Als Ergebnis zeigt Abbildung 28 für ausgewählte Punkte im Keil, Dämpfungsraten ω_i

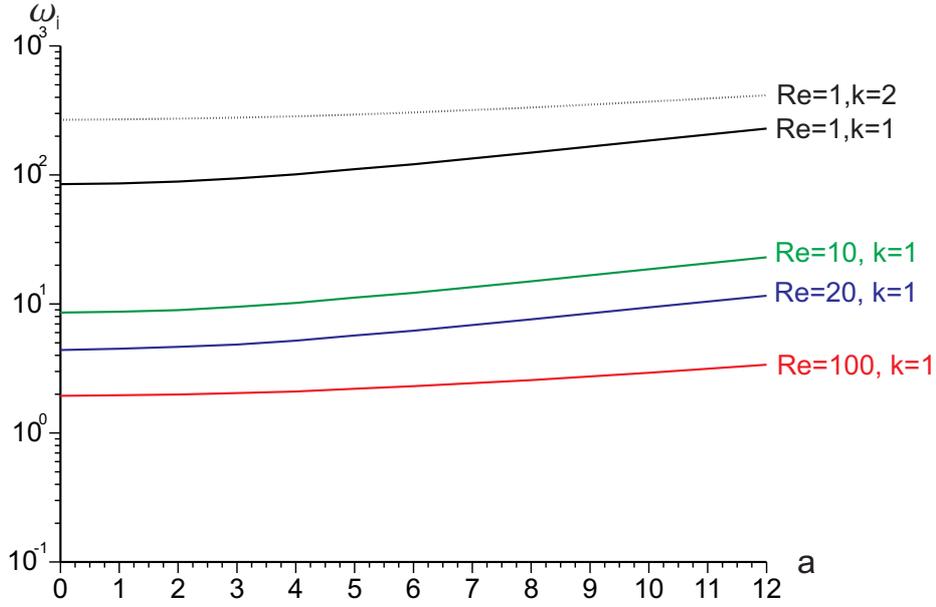


Abbildung 27: Eigenwerte ω_i für verschiedene Reynolds-Zahlen und Moden als Funktion der Wellenzahl a .

aus der Simulation (Symbole) über die Wellenzahl a aufgetragen. Die Simulationen sind für $a = 0, 4$ und 7 mit Reynolds-Zahlen von $Re = 1$ und $Re = 100$ durchgeführt. Die Eigenwerte liegen im gleichen Wertebereich, wie die analytisch hergeleitete Eigenwerte. Für alle Simulationen existieren insbesondere keine negativen Eigenwerte. In allen Fällen bleiben die Störungen auch bei Amplituden von ~ 1 exponentiell gedämpft. Somit ist sichergestellt, dass die kritischen Moden in der linearen Störungsrechnung erfasst sind. Die Auswertepunkte, die weit von der Störung entfernt sind, werden von der Störung wenig erfasst und besitzen die geringste Dämpfung. In der Nähe der aufgebrachten Störung wird die Störung schnell gedämpft. Die Dämpfungsraten sind dort groß und die höhere Moden treten dort bevorzugt auf.

4.3 Druck

Wir lösen das Druckfeld im Keil für Typ 2 auf Basis der zweiten Impulsgleichung

$$\begin{aligned}
 U_0 V_{0R} + \frac{1}{R} V_0 V_{0\Phi} + \frac{1}{R} U_0 V_0 = & \quad (4.148) \\
 -P_{0\Phi} + Re^{-1} (V_{0RR} + \frac{1}{R} V_{0R} - \frac{1}{R^2} V_0 + \frac{1}{R^2} V_{0\Phi\Phi} + \frac{2}{R^2} U_0\Phi), &
 \end{aligned}$$

durch Integration mit der Randbedingung

$$\Phi = \Phi_0 : P_\infty = 0. \quad (4.149)$$

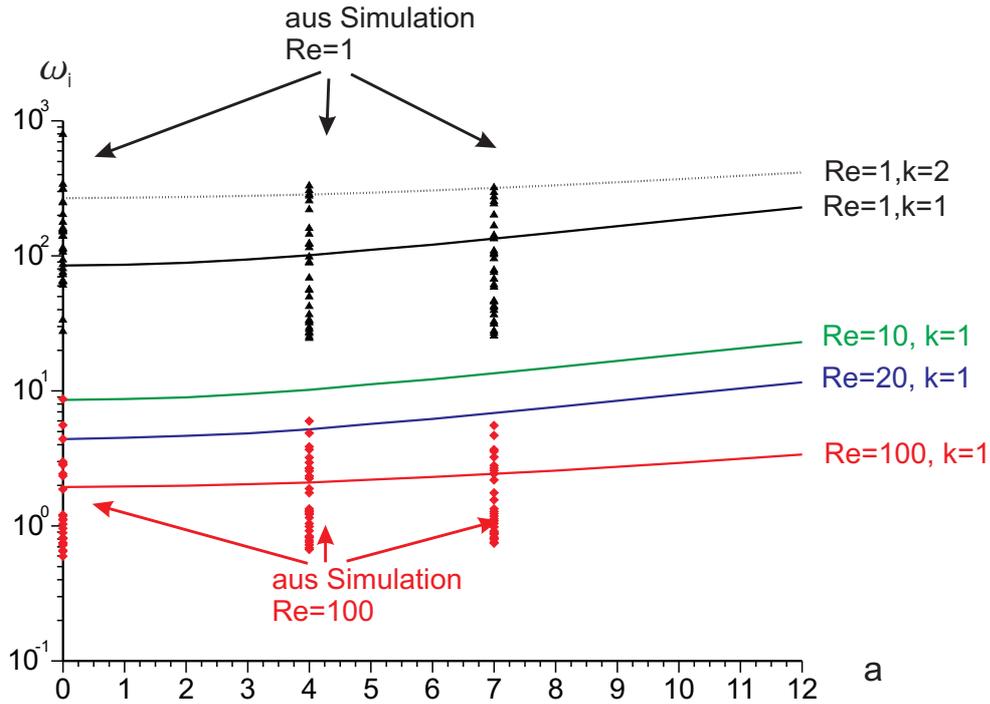


Abbildung 28: Vergleich der Eigenwerte aus der linearen Stabilitätsanalyse hergeleitet mit den Eigenwerten aus numerischer Simulation.

Zur Bestimmung des Stördruckes P' werden die Störansätze (3.41-3.45) in die instationäre Navier-Stokes Gleichung (4.149) der Φ -Richtung eingesetzt. Wir erhalten für den ersten Mod die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\begin{aligned}
 R^2 \Phi_0^2 & \left[A_{1R}(R)(a^2 R + Re(V_{0\Phi} - U_0 - \omega_i R) + A_{1RR}(R)(ReU_0 - 1) - \right. \\
 A_{1RRR}R & \left. \right] \left(\cos \frac{2\pi\Phi}{\Phi_0} - 1 \right) + R\pi\Phi_0 Re \left[A_1(2V_0 + 2V_{0R}) - 2V_0 R^2 A_{1R} + (4.150) \right. \\
 2D_1 R & \left. \right] \sin \frac{2\pi\Phi}{\Phi_0} + 4\pi^2 \left[A_{1R} - 2A_1 \right] \cos \frac{2\pi\Phi}{\Phi_0} = 0.
 \end{aligned}$$

Der Stördruck kann dann mittels der bekannten Größen $A_1(R)$ aus Kapitel 4.2.2 und mit den Grundströmungstermen V_0 , $V_{0\Phi}$, V_{0R} und U_0 aus der FEM-Simulation (FEMLAB) berechnet werden. Wir setzen die Wellenzahl zu $a = 0$ und die Reynoldszahl zu $Re = 1$. Wir betrachten den Druck der Grundströmung P_0 und den Stördruck P' im folgenden für einen festen Winkel $\Phi = 7/8\Phi_0$ über den Radius R . Das linke Diagramm (a) in Abbildung 29 zeigt den Grunddruck P_0 und die Abbildungen links (b) den ersten Eigenwert ($\omega_i = 85$). Der Druck der Grundströmung kommt für kleine

Radien wegen der Singularität bei $R \rightarrow 0$ aus dem Unendlichen. Gegenüber dem Außendruck $P_\infty = 0$ ist der Druck der Grundströmung im Spalt stets positiv, d.h. der Außendruck (P_∞) ist kleiner als der Druck im Keil. Der Anstieg der Druckwerte am Gebietsrand ($R \rightarrow R_0$) ist durch den Randeinfluss bedingt. Für kleinen Radien R zeigt der Stördruck verschwindende Werte. Mit steigendem Radius ist der Stördruck positiv. Allerdings kehrt der Stördruck in der Mitte des Geschwindigkeitswirbels sein Vorzeichen um und wird negativ. Am Gebietsrand verschwindet der Stördruck wieder.

4.3.1 Grenzflächenkontur

Wir wollen auch hier die hypothetische Lage der Grenzfläche bei $\Phi = \Phi_0$ in Form der Kontur $H(r)$ berechnen. Die genaue Herleitung für den Drucksprung

$$P(\phi_0) = -2\bar{H}We^{-1}. \quad (4.151)$$

an dieser Grenzfläche ($\Phi = \Phi_0$) kann in Kapitel 3.3 nachgelesen werden. Wir betrachten den Grenzfall $Ca \ll We$ und haben den Umgebungsdruck $P_\infty = 0$. Die mittlere Krümmung $2\bar{H}$ wird durch die Funktion $H(R)$

$$2\bar{H} = \frac{H_{RR}}{(1 + H_R^2)^{3/2}}, \quad (4.152)$$

ausgedrückt. Da der Außendruck stets größer ist als der Druck im Keil, ergibt sich eine konkav geformte Kontur mit $\bar{H} > 0$. Zur numerischen Lösung der Differentialgleichung (4.151) geben wir als Randbedingungen

$$R = 0 \quad : \quad H = 0, \quad (4.153)$$

$$R = R_0 \quad : \quad H = 3/\pi, \quad (4.154)$$

vor.

Die Ergebnisse für die hypothetische Kontur $H(R)$ sind in Abbildung 30 über dem Radius R aufgetragen. Der Druck am Gebietsrand $\Phi = \Phi_0$ wird bei einer Reynolds-Zahl von $Re = 500$ aus Gleichung (4.149) berechnet.

Für kleine Weber-Zahlen verschwindet die Krümmung an der Grenzfläche. In diesem Wertebereich ($We \rightarrow 0$) dominieren die Kapillarkräfte gegenüber den Trägheitskräften, d.h. die Krümmung der Grenzfläche wird durch eine große Oberflächenspannungen verhindert. Bei wachsenden Weber-Zahlen ($We \rightarrow \infty$) lassen die schwachen Kapillarkräfte eine stärkere mehr Krümmung der Grenzfläche zu. Damit haben wir

die Grenzfläche geometrisch als konstant gekrümmt und kinematisch mit aufgeprägter Geschwindigkeit angenähert. Diese vereinfachten Bedingungen ersetzen die eigentlich gültigen Bedingungen für die normale und tangential Spannung.

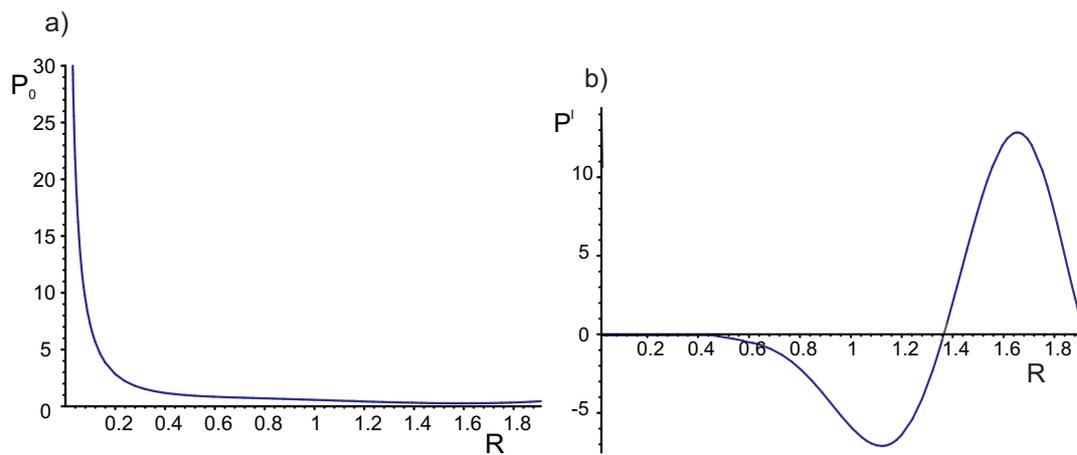


Abbildung 29: Druck der Grundströmung (a) und Stördruck für den 1. Eigenwert (b) über R für $\Phi = \frac{7}{8}\Phi_0$.

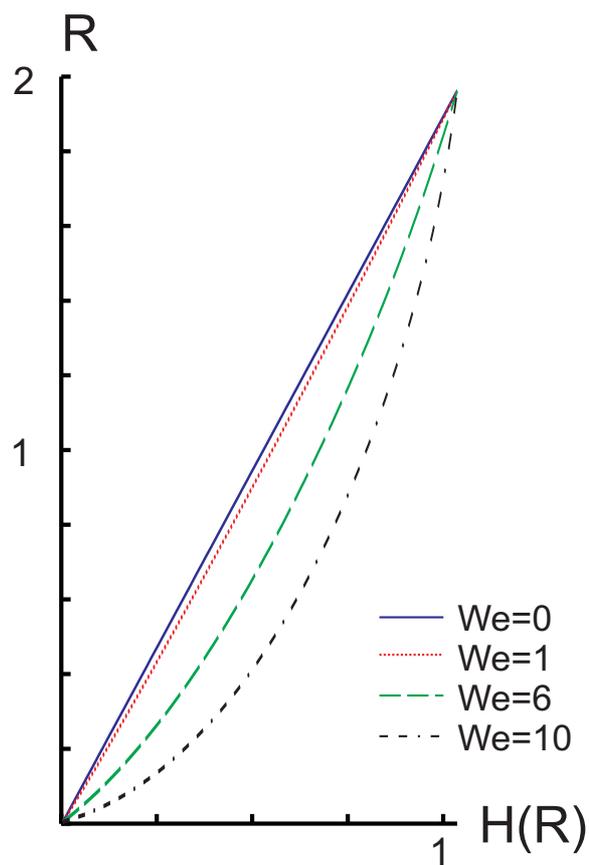


Abbildung 30: Kontur der freien Grenzfläche

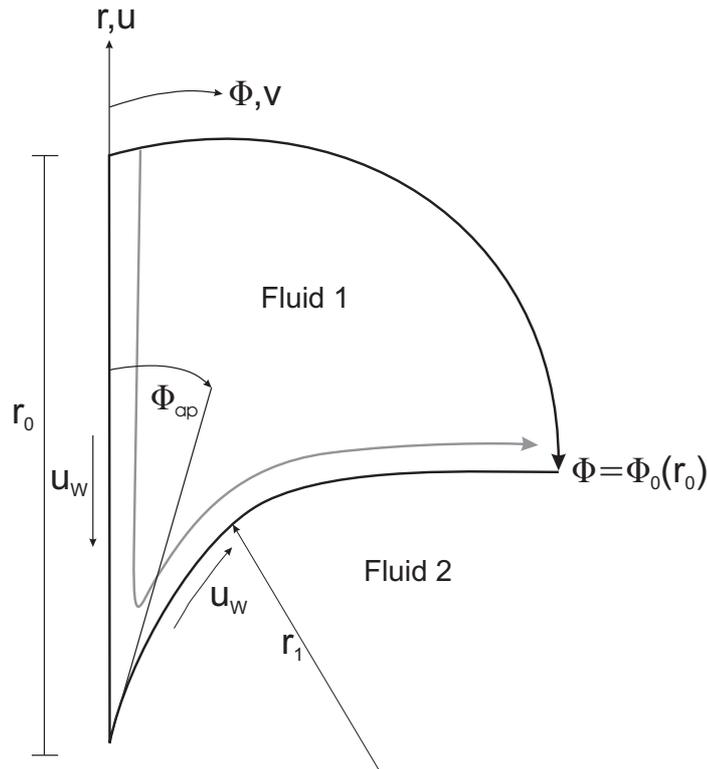


Abbildung 31: Strömung für Typ 1 mit gekrümmter Grenzfläche

5 Strömung vom Typ 1 mit gekrümmter Grenzfläche

5.1 Zweidimensionale Grundströmung

Als nächsten Schritt wird die Form der freien Grenzfläche für Typ 1 modifiziert. Experimente von Royon und Ehrhard 2001 zeigen, dass die freie Grenzfläche eine in etwa konstante Krümmung besitzt (vgl. Abbildung 7). Wir modifizieren deshalb die Geometrie der freien Grenzfläche, indem wir einen konstanten Krümmungsradius r_1 einführen. Am Grund des Keils wird der Öffnungswinkel Φ_{ap} vorgegeben. In Abbildung 31 sehen wir die Prinzipskizze der Situation. Als Grundgleichung betrachten wir die Massen- und Impulserhaltung. Das zweidimensionale, stationäre Strömungsproblem ist in r und ϕ Koordinaten gemäß

$$\nabla \mathbf{v} = 0, \quad (5.155)$$

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \mu(\nabla^2 \mathbf{v}), \quad (5.156)$$

formuliert. Die Randbedingungen an der Grenzfläche sind bei Typ 1 durch das zähe Fluid 1 vorgegeben, an der vertikal bewegten Folie haftet das Fluid. Damit haben wir die Grenzfläche als geometrisch als konstant gekrümmt und kinematisch mit aufgeprägter Geschwindigkeit angenähert. Diese vereinfachten Bedingungen ersetzen die eigentliche gültigen Bedingungen für die normale und tangential Spannung. Demnach haben wir die Randbedingungen

$$r, \Phi = 0 \quad : \quad u = -u_W, v = 0, \quad (5.157)$$

$$r, \Phi = \Phi_0(r) \quad : \quad u = u_W, v = 0. \quad (5.158)$$

Als $\Phi_0(r)$ ist der lokale Öffnungswinkel bezeichnet, der desweiteren vom Krümmungsradius r_1 , dem Gebietsrand r_0 und dem Öffnungswinkel Φ_{ap} im Keilgrund bei $r = 0$ abhängt. Es gelten die geometrischen Beziehungen

$$r_1 < r_0 \quad : \quad \Phi_0(r) = \frac{\pi}{2} + \phi_{ap} - \arccos\left(\frac{r}{2r_1}\right), \quad (5.159)$$

$$r_1 > r_0 \quad : \quad \Phi_0(r) = \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{r_1 - r_1 \sin \Phi_{ap}}{r}\right). \quad (5.160)$$

Das Verhältnis der Radien ist durch den dimensionslosen Parameter

$$M = \frac{r_1}{r_0}, \quad (5.161)$$

gegeben. Die Erhaltungsgleichungen (5.155,5.156) werden dimensionslos formuliert. Zur Entdimensionierung sind die Skalen

$$R = \frac{r}{\lambda_0}, R_1 = \frac{r_1}{\lambda_0}, \quad (5.162)$$

$$Z = \frac{z}{\lambda_0}, \quad (5.163)$$

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{v}}{u_W}, \quad (5.164)$$

$$P = \frac{p}{\rho u_W^2}, \quad (5.165)$$

$$\tau = \frac{t u_W}{\lambda_0}, \quad (5.166)$$

$$\lambda_0 = r_0 \Phi_0(r_0), \quad (5.167)$$

sinnvoll. Die Geschwindigkeit \mathbf{v} wird mit der Wandgeschwindigkeit u_w skaliert. Desweiteren ist der Druck p mit dem Staudruck normiert. Für die dimensionslose Formulierung der Raumrichtungen R und Z dient der Gebietsrand r_0 und der Öffnungswinkel $\Phi_0(r_0)$ als Skala. Eine dimensionslose Formulierung des Problems erhalten wir,

indem wir die Skalen (5.162-5.167) in die Erhaltungsgleichungen und Randbedingungen (5.155-5.158) einbringen. Es gibt sich

$$\nabla \mathbf{V} = 0, \quad (5.168)$$

$$\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} = -\nabla P + Re^{-1}(\nabla^2 \mathbf{V}). \quad (5.169)$$

$$R, \Phi = 0 : U = -1, V = 0, \quad (5.170)$$

$$R, \Phi = \Phi_0(R) : U = 1, V = 0. \quad (5.171)$$

In diesem Falls erscheint die Reynolds-Zahl

$$Re = \frac{\lambda_0 u_W}{\nu}, \quad (5.172)$$

als dimensionslose Kennzahl. Die geometrische Beziehung für den Öffnungswinkel $\Phi_0(R)$ lautet skaliert

$$R_1 < R_0 : \Phi_0(R) = \frac{\pi}{2} + \phi_{ap} - \arccos\left(\frac{R}{2R_1}\right), \quad (5.173)$$

$$R_1 > R_0 : \Phi_0(R) = \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{R_1 - R_1 \sin \Phi_{ap}}{R}\right). \quad (5.174)$$

Das endliche Rechengebiet erreichen wir, indem der Gebietsrand in radialer Richtung bei

$$R_0 = \frac{1}{\Phi_0(R_0)}, \quad (5.175)$$

vorgegeben ist. Die mit den Gleichungen (5.168-5.171) beschriebene Grundströmung wird mittels eines kommerziellen FEM-Codes (FEMLAB) gelöst. Abbildung 32 zeigt für Typ 1 das Geschwindigkeitsfeld im Fluid 1. Gegeben sind die Geschwindigkeitsvektoren und farblich codiert der Betrag der Geschwindigkeit. Fluid 1 strömt entlang dem linken Rand mit $U_W = -1$ in den Keil hinein und entlang der gekrümmtem Grenzfläche mit $U_W = 1$ wieder aus dem Keil heraus. Für diese Simulation haben wir eine Reynolds-Zahl von $Re = 1$, ein Radienverhältnis $M = 0.75$ und einen Öffnungswinkel von $\Phi_{ap} = 30^\circ$ angenommen.

5.2 Zeitliche und dreidimensionale Stabilitätsanalyse

Die zweidimensionale, stationäre Grundlösung $\mathbf{V}_0(\mathbf{R}, \Phi)$ wird mit einer kleinen Störung der Größenordnung ϵ gestört, welche die Form

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0(R, \Phi) + \epsilon \mathbf{V}'(R, \Phi, Z, \tau) + \dots, \quad (5.176)$$

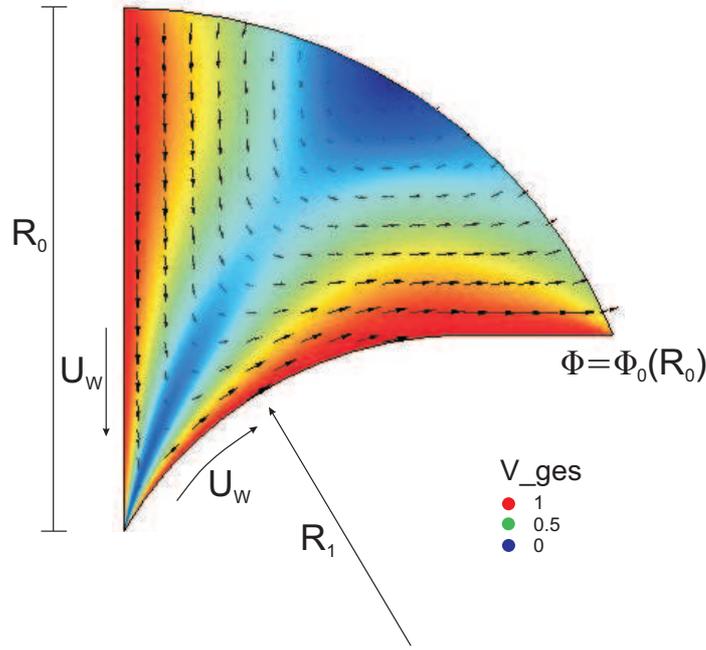


Abbildung 32: Geschwindigkeitsbetrag und -richtung im Spalt.

hat. Diesen Störansatz bringen wir in die dreidimensionale, zeitabhängigen Massenerhaltung

$$\nabla \mathbf{V} = \mathbf{0}, \quad (5.177)$$

und Impulserhaltung

$$\mathbf{V}_t + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} = -\nabla P + \mathbf{Re}^{-1}(\nabla^2 \mathbf{V}), \quad (5.178)$$

ein. Mittels der Separationsansätze

$$U' = \sum_{k=1}^N -\frac{1}{R} A_k(R) \frac{2\pi k}{\Phi_0(R)} \left(\sin\left(\frac{2\pi k}{\Phi_0(R)} \Phi\right) \right) \exp(i\omega\tau + iaZ), \quad (5.179)$$

$$V' = \sum_{k=1}^N -B_{kR}(R) \left(\cos\left(\frac{2\pi k}{\Phi_0(R)} \Phi\right) - 1 \right) \exp(i\omega\tau + iaZ), \quad (5.180)$$

$$W' = \sum_{k=1}^N C_k(R) \left(\cos\left(\frac{2\pi k}{\Phi_0(R)} \Phi\right) - 1 \right) \exp(i\omega\tau + iaZ), \quad (5.181)$$

$$P' = \sum_{k=1}^N D_k(R) \left(\cos\left(\frac{2\pi k}{\Phi_0(R)} \Phi\right) - 1 \right) \exp(i\omega\tau + iaZ), k = 1, 2, 3, \dots \quad (5.182)$$

werden die Störterme \mathbf{V}' in Φ durch Fourier-Reihen genähert und in radialer Richtung R allgemein gehalten. Zeitlich und in der Z -Richtung separieren wir die Störterme \mathbf{V}' mittels exponentieller Wellenansätze. In der Z -Richtung unterstellen wir mit der

reellen Wellenzahl a lediglich periodisches Verhalten. In der Zeit ist periodisches, angefachtetes oder gedämpftes Verhalten möglich. Deshalb ist ω komplex aufzufassen, wobei der Imaginärteil ω_i die Stabilität festlegt. Im Falle $\omega_i > 0$ ist klingen die Störungen ab, ein stabiles System ist die Folge. Im Falle $\omega_i < 0$ finden sich aufklingende Störungen und damit wird eine Instabilität des Systems die Folge sein. Die Fourier-Ansätze in Φ müssen desweiteren die Randbedingungen

$$U'(0) = 0, \quad U'(\Phi_0) = 0, \quad (5.183)$$

$$V'(0) = 0, \quad V'(\Phi_0) = 0, \quad (5.184)$$

$$W'(0) = 0, \quad W'(\Phi_0) = 0, \quad (5.185)$$

$$(5.186)$$

erfüllen.

Setzen wir die Ansätze (5.176-5.182) in die Massenerhaltung (5.177) ein, so erhalten wir für Real- und Imaginärteil im Mod $k = 1$

$$C_1 i a R \Phi_0(R)^3 \left(\cos \frac{2\pi}{\Phi_0(R)} - 1 \right) + \dots = 0, \quad (5.187)$$

$$2\Phi_0(R)^2 (A_{1R} - B_{1R}) \sin \frac{2\pi}{\Phi_0(R)} \Phi + 2\Phi_{0R}(R) (B_1 - A_1) \quad (5.188)$$

$$\left\{ \Phi_0(R) \sin \frac{2\pi}{\Phi_0(R)} \Phi + 2\pi \Phi \cos \frac{2\pi}{\Phi_0(R)} \Phi \right\} \dots = 0.$$

Es folgt aus Gleichungen (5.187), dass $C_1 = 0$ ist. Gleichung (5.189) fordert, dass nach einer Integration mittels des Galerkin-Verfahrens A_1 und B_1 bei $R = 0$ aufgrund verschwindender Störterme zu null werden. Es folgt, dass $B_1 = A_1$ ist. Für die höheren Moden gilt analog, $C_2 = 0$, $B_2 = A_2$. Weiterhin werden die Ansätze (5.176-5.182) in die Impulserhaltung (5.178) eingesetzt. Wir erhalten, separiert für Real- und Imaginärteil bei Mod $k = 1 \dots$

$$\begin{aligned} & i\omega_r R \left[A_{1RR} \left(\cos \frac{2\pi\Phi}{\Phi_0(R)} - 1 \right) + \right. \\ & A_{1R} \left[\frac{4\Phi\Phi_{0R}(R)}{\Phi_0(R)^2} \sin \frac{2\pi\Phi}{\Phi_0(R)} + \frac{1}{R} \left(\cos \frac{2\pi\Phi}{\Phi_0(R)} - 1 \right) \right] - \\ & A_1 \frac{4\pi\Phi}{\Phi_0(R)^2} \left[\left(\frac{\pi}{\Phi R^2} + \frac{\pi\Phi\Phi_{0R}(R)^2}{\Phi_0(R)^2} \right) \cos \frac{2\pi\Phi}{\Phi_0(R)} - \right. \\ & \left. \left. \left(\frac{\Phi_{0R}(R)^2}{\Phi_0(R)} - \frac{\Phi_{0RR}(R)}{2} + \frac{\Phi_{0R}(R)}{R} \right) \sin \frac{2\pi\Phi}{\Phi_0(R)} \right] \right] = 0, \end{aligned} \quad (5.189)$$

$$\begin{aligned}
& f_1(A_1, R, \Phi, \Phi_0(R), \omega_i, a) + f_1(A_1, R, \Phi, \Phi_0(R), \omega_i, a) \sin \frac{2\pi\Phi}{\Phi_0(R)} \\
& + f_3(A_1, R, \Phi, \Phi_0(R), \omega_i, a) \cos \frac{2\pi\Phi}{\Phi_0(R)} = 0.
\end{aligned} \tag{5.190}$$

Wiederum wird eine Näherungslösung für die Differentialgleichungen (5.189,5.190) mittels des Galerkin-Verfahrens gesucht. Näheres zur Verwendung des Galerkin-Verfahrens kann in Kapitel 3.2.1 nachgelesen werden. Als Testfunktionen verwenden wir für beide Differentialgleichungen die Funktionen $f_1(\Phi) = 1$, $f_2(\Phi) = \cos(\frac{2\pi}{\Phi_0}\Phi)$, $f_3(\Phi) = \sin(\frac{2\pi}{\Phi_0}\Phi)$.

Gleichung (5.189) kann nur erfüllt werden, wenn A_1 oder ω_r zu null werden. Die triviale Lösung $A_1 = 0$ wird in einem gestörtem System ausgeschlossen und es folgt, dass $\omega_i = 0$ sein muss. Das System enthält somit zeitlich exponentielle Anfachung oder Dämpfung. In Gleichung (5.190) werden die mit der Grundströmung gekoppelten Integralterme $f_1 - f_3$ mittels des FEM-Codes FEMLAB berechnet. Fassen wir die nun gewonnenen angenäherten Differentialgleichungen zusammen und vernachlässigen verschwindend kleine Terme, erhalten wir eine gewöhnlich Differentialgleichung, die nur noch vom Radius R linear abhängig ist.

5.2.1 Randbedingungen

Zur Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichungen für $A_i(R)$ benötigen wir bei $R = 0$ Randbedingungen. Aufgrund der Singularität bei $R = 0$ ist es nicht möglich, eine numerische Integration an dieser Stelle durchzuführen. Deshalb nähern wir uns einem kleinen Radius $R \ll 1$ an und leiten dort die erforderlichen Randbedingungen her. Bei einem Radius $R \ll 1$ können wir eine Keilströmung mit geraden Rändern betrachten. Im Keil ist für $R \ll 1$ eine Stokessche Strömung vorzufinden und die konvektiven Terme in der Impulsgleichung können deshalb vernachlässigt werden. Die Behandlung der Randbedingungen bei gekrümmter Grenzfläche ist damit gleich wie für die ebene Grenzfläche. Die genaue Herleitung der Randbedingungen für $R \ll 1$ bei der ebenen Grenzfläche ist in Kapitel 4.2.1 zu entnehmen. Als Ergebnis erhalten wir für den ersten Mod $k = 1$

$$a = 0 \quad : \quad A_1(R) = C_1 R^{1 + \sqrt{2\frac{\pi^2}{\Phi_0^2} - 1}}, \tag{5.191}$$

$$a \neq 0 \quad : \quad A_1(R) = C_5 R I_j(x), j = \sqrt{-1 + \frac{2\pi}{\Phi_0^2}}; x = a\sqrt{2}R. \tag{5.192}$$

Die Konstanten C_1 und C_5 können mit ϵ aus dem Störansatz (5.176) zusammengefasst werden.

5.2.2 Zweidimensionale ($a = 0$) und dreidimensionale ($a \neq 0$) Störung

Die Differentialgleichungen können nunmehr mittels den Randbedingungen (5.191, 5.192) numerisch integriert werden. Der Öffnungswinkel wird mit $\Phi_{ap} = 30^\circ$ festgelegt. Um eine Stabilitätsaussage für diesen Fall treffen zu können, suchen wir die relevanten Eigenwerte.

Im zweidimensionalen Fall ($a = 0$) sind die Dämpfungsraten ω_i logarithmisch über das Radienverhältnis M aufgetragen und zwar für verschiedene Reynolds-Zahlen (vgl. Abbildung 33). Es zeigt sich, dass steigende Reynolds-Zahlen eine Abnahme der Dämpfungsraten mit sich bringen. Es treten jedoch keine negativen Eigenwerte auf, sodass die Grundströmung stabil ist. Zudem nehmen die Eigenwerte mit gleichbleibenden Reynolds-Zahlen bei steigendem Radienverhältnis M ab. Dies bedeutet, dass ein enger werdender Spalt mit schwach gekrümmter Grenzfläche weniger gedämpfte Störungen mit sich bringt. Allerdings werden die Eigenwerte auch hier nicht negativ, sodass alle eingebrachten Störungen weggedämpft werden. Hier liegt der Verdacht nahe, dass für kleine M das Galerkin-Verfahren größere Fehler mit sich bringt, weil die Integration über einen größeren Bereich (in Φ) erfolgt. Insofern sind die größeren Dämpfungsraten für kleine M kritisch. Desweiteren zeigt sich, dass bei einem Radienverhältnis von $M = 0.6$ ein lokales Minimum der Eigenwerten (für $Re = 50, 100, 200$) existiert.

Betrachten wir desweiteren den dreidimensionalen Fall ($a \neq 0$). Abbildung 34 zeigt das Ergebnis der dreidimensionalen Betrachtung, wobei die Eigenwerte ω_i über der Wellenzahl a aufgetragen sind. Die Reynolds-Zahl ist dabei bei einem konstanten Wert von $Re = 100$. Es zeigt sich gleiches Stabilitätsverhalten wie in den vorangegangenen Kapiteln. Die Strömung ist gegenüber periodischen Störungen stets stabil. Im Falle wachsender Wellenzahlen a , steigen die Eigenwerte ω_i für alle Radienverhältnisse an. Die geringste Dämpfung wiederum bei einer Wellenzahl von $a = 0$, und damit bei sehr langwelligen oder gar ebenen Störungen, gefunden.

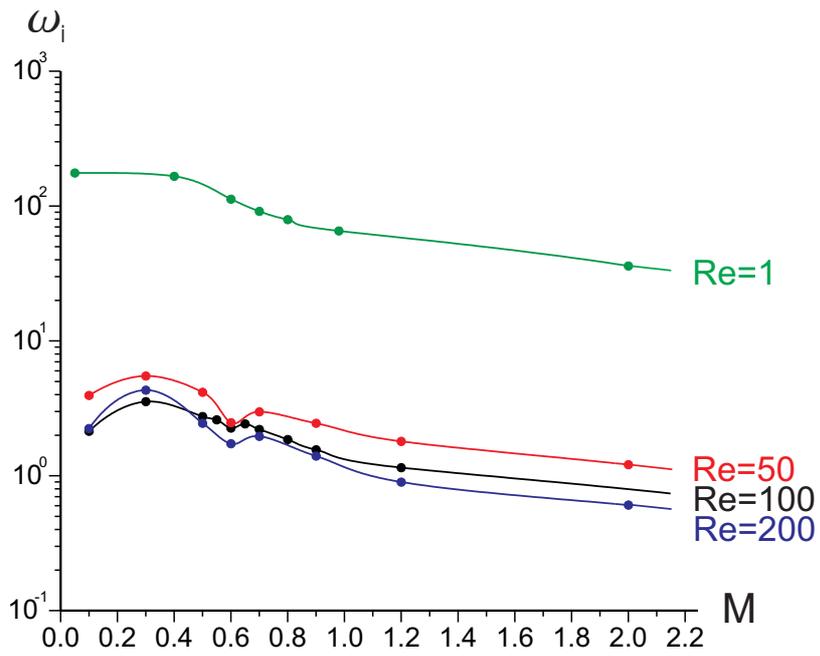


Abbildung 33: Stabilitätsdiagramm 2D.

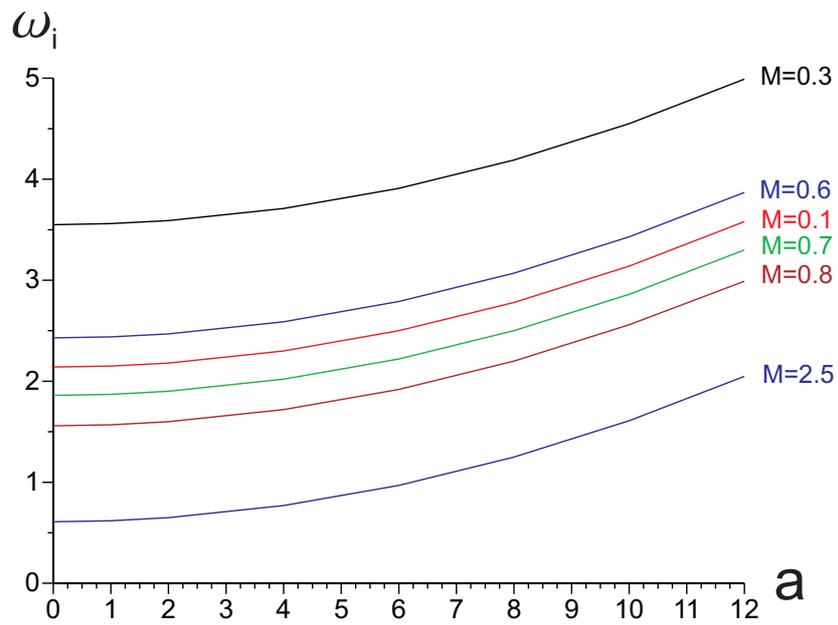


Abbildung 34: Stabilitätsdiagramm 3D für $Re = 100$.

6 Zusammenfassung und Ausblick

Ausgangspunkt der vorliegenden theoretischen Arbeit ist ein Beschichtungsprozess, bei dem eine Folie in einen mit Flüssigkeit gefüllten Behälter eingetaucht wird. Hierbei wechselwirken über die freie Grenzfläche zwei Strömungsgebiete: (i) die Strömung im entnetzenden Gas (Luft) und (ii) die Strömung in der benetzenden Flüssigkeit. Alle (experimentelle) Beobachtungen zeigen übereinstimmend (vgl. etwa (Blake und Ruschak 1979)), daß dieser Beschichtungsprozess bei Zunahme der Geschwindigkeit der Folie instabil wird und zu Lufteinzug führt. In anderen Worten, die zunächst gerade Benetzungsfront (bewegte Kontaktlinie) wird periodisch gestört und nimmt eine sägezahnförmige Form an. Parallel ist ein Übergang von einer zweidimensionalen (ebenen) Grundströmung, hin zu einer dreidimensionalen Strömung zu erwarten. Strömungsmechanisch stellt sich nun die Frage, wo die Ursache für diese Instabilität zu suchen ist. Diese Frage ist bis zum heutigen Tag in der Literatur nicht beantwortet. Drei Antworten sind im Prinzip auf diese Frage möglich: (i) die Strömung im entnetzenden Fluid wird instabil, (ii) die Strömung im benetzenden Fluid wird instabil und (iii) die Instabilität ist durch die Wechselwirkung beider Strömungen und die freien Grenzfläche bedingt. Es sei an dieser Stelle noch angemerkt, daß beim Herausziehen der Folie aus der Flüssigkeit völlig analoge Fragestellungen auftauchen, die aber technisch weniger relevant erscheinen.

Wir konzentrieren uns in der vorliegenden Arbeit auf die Strömung im entnetzenden Fluid. In der Arbeit von (Royon und Ehrhard 2001) wird aufgezeigt, daß abhängig vom Verhältnis der Viskositäten und Dichten, sowie abhängig von der Reynolds-Zahl, zwei grundsätzliche Strömungsformen in den beiden Strömungsgebieten auftreten können. Bei der Strömung vom Typ 1 wird das entnetzende Fluid entlang der Folie in den konvergenten Spalt gezogen und verläßt den Spalt entlang der freien Grenzfläche. Bei der Strömung vom Typ 2 wird das entnetzende Fluid sowohl entlang der Folie als auch entlang der freien Grenzfläche in den konvergenten Spalt gezogen und verläßt den Spalt mittig entlang einer (umgekehrten) Staustromlinie. Ziel ist es also, die Stabilität dieser beiden Grundströmungen im entnetzenden Fluid mithilfe einer linearen Störungsrechnung näher zu beleuchten.

Für die Strömung im entnetzenden Fluid haben wir die Kontinuitätsgleichung sowie die Navier–Stokes–Gleichung in zylindrischen Koordinaten als Basis, wobei wir das Fluid als inkompressibel auffassen. Die Gleichungen werden entdimensioniert, sodaß

wir die eigentlich unendliche Ausdehnung des konvergenten Spalts in radialer Richtung auf ein endliches Rechengebiet abbilden können. Die radiale Ausdehnung r_0 wird dabei in die Reynolds-Zahl projiziert. Im allgemeinen werden diese Gleichungen für die Grundströmung (eben in R, Φ) mithilfe eines Finite-Elemente-Verfahrens (FEM) gelöst, im Fall $Re \rightarrow 0$ ist eine ähnliche Lösungen (analytisch) möglich. Der Grundströmung werden jeweils kleine Störungen überlagert, welche allgemein in R und mithilfe von Fourier-Reihen in Φ angesetzt sind. In der dritten Raumrichtung Z wird ein periodisches Verhalten und in der Zeit allgemein ein periodisches Verhalten mit einer exponentiellen Einhüllenden angesetzt. Die Stördifferentialgleichungen werden mit dem Galerkin-Verfahren über Φ gewichtet gemittelt und schließlich in R numerisch integriert.

In einem ersten Schritt approximieren wir die Gegebenheiten an der freien Grenzfläche in zweierlei Hinsicht. Wir nehmen an, daß die freie Grenzfläche geometrisch eben ist. Damit wird die Grenzfläche in ihrer Lage vorgegeben und eine Bedingung für die normale Spannung und den Laplace-Drucksprung ist nicht notwendig. Zudem nehmen wir an, daß die tangentielle Geschwindigkeit an der Grenzfläche entweder durch das entnetzende Fluid (Fluid 1) oder das benetzende Fluid (Fluid 2) aufgeprägt wird, diese Annahme ersetzt die Bedingung für die tangentielle Spannung. Diese Annahme stellt eine vernünftige Näherung dar, wenn eines der beiden Fluide etwa durch große viskose Kräfte die Kinematik bestimmt. Diese vereinfachten Randbedingungen spiegeln demnach eine Strömung in einem Keil mit bewegten Wänden wieder.

Für diesen idealisierten Fall finden wir, daß beide Grundströmungen (Typ 1 und Typ 2) stabil bleiben, indem sowohl ebene als auch Z -periodische (kleine) Störungen exponentiell gedämpft werden. Die geringste Dämpfung besitzen lange Wellen in Z ($a \rightarrow 0$), für steigende Wellenzahl a steigt die Dämpfungsrate kontinuierlich an. Wachsende Reynolds-Zahlen führen zu fallenden Dämpfungsraten, ohne daß jedoch eine Anfachung erreicht wird. Der erste Mod der Fourier-Reihe erweist sich in allen Fällen als der kritische, die höheren Moden werden stärker gedämpft. Zur Überprüfung der Ergebnisse aus der linearen Strömungsrechnung werden dreidimensionale zeitabhängige FEM-Simulationen mit endlicher Störampplitude durchgeführt. Hierbei wird die Strömung in einem Keil definierter Länge ΔZ betrachtet und an den Schnittflächen ($Z = \textit{konstant}$) werden periodische Randbedingungen gestellt. Dies erlaubt die Simulation von Z -periodischen Störungen, wobei die Keillänge ΔZ mit der Wellenzahl a verknüpft ist. Diese Simulationen bestätigen einerseits die gefunde-

nen Ergebnisse für kleine Störungen, liefern aber weitergehend den Hinweis, daß auch Störungen endlicher Amplitude gedämpft werden. Schließlich wird die Randbedingung an der freien Grenzfläche verändert, indem ein (ebener) schubspannungsfreier Rand angenommen wird. Dies führt für die Grundströmung vom Typ 1 zu keiner Veränderung der Stabilitätsaussagen: Nach Anwendung des Galerkin-Verfahrens ergeben sich exakt die gleichen Störungsdifferentialgleichungen.

In einem zweiten Schritt approximieren wir die Gegebenheiten an der freien Grenzfläche, indem wir annehmen, daß die freie Grenzfläche eine konstante Krümmung (Krümmungsradius r_1) besitzt. Ansonsten werden die kinematischen Bedingungen unverändert angewandt. Die analoge lineare Stabilitätsanalyse zeigt wiederum, daß alle Störungen exponentiell in der Zeit gedämpft sind. Die Ergebnisse bzgl. des Einflusses der Reynolds-Zahl und der Wellenzahl zeigen die gleichen Abhängigkeiten wie für die eben angenommene Grenzfläche. Der Grenzfall $M = r_1/r_0 \rightarrow \infty$ führt im übrigen wieder auf die ebene Grenzfläche, die entsprechenden Ergebnisse erscheinen konsistent. Mit wachsendem M fällt die Dämpfungsrates ab, was bedeutet, daß die eben angenommene Grenzfläche den kritischsten Fall darstellt. Im Bereich $M = 0.6$ finden wir ein lokales Minimum der Dämpfungsrates, dessen physikalische Interpretation nicht ohne weiteres möglich erscheint.

Zusammenfassend ergeben unsere Betrachtungen keinerlei Hinweise darauf, daß von der Strömung im entnetzenden Fluid eine Instabilität ausgeht. Es ist also davon auszugehen, daß die Strömung im entnetzenden Fluid nicht die Ursache der Instabilität darstellt. Es wäre demnach sinnvoll mit einer Stabilitätsanalyse zu klären, ob die Strömung im benetzenden Fluid eine solche Instabilität verursachen kann. Eine solche Analyse könnte einerseits auf Basis ähnlicher, idealisierender Annahmen durchgeführt werden. Alternativ könnte die numerische Berechnung beider Strömungen bei vollständiger Abbildung der freien Grenzfläche angestrebt werden. Solche Simulationen sind etwa mit der sog. volume-of-fluid-Methode (VOF) möglich, sie würden die Strömungen auf beiden Seiten der Grenzfläche erfassen und ihre Wechselwirkung mit der Grenzfläche beinhalten. Tritt in solchen Simulationen eine Instabilität auf, wäre jedoch nicht unmittelbar zu erkennen, wo die Ursache liegt.

7 Anhang

$$F_1(R) = -A_{1R}R - A_{1RR}R^2, \quad (7.193)$$

$$F_2(R) = -4\frac{\pi^2}{\Phi_0^2}A_1 + A_{1R}R + R^2A_{1RR}, \quad (7.194)$$

$$F_3(R) = R\left[A_{1R}\left(-1 + a^2R^2\right) + A_{1RR}R\left(1 + a^2R^2 - 2A_{1RRR}R^2 - A_{1RRRR}R^3\right)\right], \quad (7.195)$$

$$F_4(R, \Phi, \omega_i, Re) = ReR^2\left[A_{1R}\left(-\omega_iR + U_{0R}R - U_{1\Phi\Phi} + 2V_{0\Phi} + V_{0R\Phi}R\right) + A_{1RR}R\left(\omega_iR + 2U_0 + V_{0\Phi}\right) + A_{1RRR}R^4U_0\right], \quad (7.196)$$

$$F_5(R, a) = -A_1\frac{4\pi^2}{\Phi_0^2}\left(4 - \frac{4\pi^2}{\Phi_0^2} - a^2R^2\right) + A_{1R}R\left(1 - a^2R^2 + \frac{8\pi^2}{\Phi_0^2}\right) - A_{1RR}R^2\left(1 + a^2R^2 + \frac{8\pi^2}{\Phi_0^2}\right) + 2A_{1RRR}R^3 + A_{1RRRR}R^4, \quad (7.197)$$

$$F_6(R, \Phi, \omega_i, Re) = ReR\left[A_14\frac{\pi^2}{\Phi_0^2}\left(U_{0R}R + V_{0\Phi} - R\omega_i - U_0\right) + A_{1R}R\left(U_0\left(4\frac{\pi^2}{\Phi_0^2} + 1\right) - U_{0R}R + U_{0\Phi\Phi} - RV_{0R\Phi} - 2V_{0\Phi}\right) + A_{1RR}R^2\left(\omega_iR - RU_{0R} - 2U_0 - V_{0\Phi}\right) - A_{1RRR}R^3U_0\right], \quad (7.198)$$

$$F_7(R, a) = Re\frac{2\pi}{\Phi_0}\left[A_1R\left(-U_{0\Phi} + U_{0R\Phi}R + V_0\left(1 - \frac{4\pi^2}{\Phi_0^2} - V_{0R}R - V_{0RR}R^2\right)\right) + A_{1R}R^2V_0 + A_{1RR}R^3V_0\right], \quad (7.199)$$

$$G_1(R) = -A_{2R}R - A_{2RR}R^2, \quad (7.200)$$

$$G_2(R) = -16\frac{\pi^2}{\Phi_0^2}A_2 + A_{2R}R + R^2A_{2RR}, \quad (7.201)$$

$$G_3(R) = R\left[A_{2R}\left(-1 + a^2R^2\right) + A_{2RR}R\left(1 + a^2R^2 - 2A_{2RRR}R^2 - A_{2RRRR}R^3\right)\right], \quad (7.202)$$

$$\begin{aligned}
G_4(R, \Phi, \omega_i, Re) = & ReR^2 \left[A_{1R} \left(-\omega_i R + U_{0R}R - U_{1\Phi\Phi} + 2V_{0\Phi} + \right. \right. \\
& \left. \left. V_{0R\Phi}R \right) + A_{1RR}R \left(\omega_i R + 2U_0 + V_{0\Phi} \right) + \right. \\
& \left. A_{1RRR}R^4 U_0 \right], \tag{7.203}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_5(R, a) = & -A_2 \frac{16\pi^2}{\Phi_0^2} \left(16 - \frac{4\pi^2}{\Phi_0^2} - a^2 R^2 \right) + A_{2R}R \left(1 - a^2 R^2 + \right. \\
& \left. \frac{32\pi^2}{\Phi_0^2} \right) - A_{2RR}R^2 \left(1 + a^2 R^2 + \frac{32\pi^2}{\Phi_0^2} \right) + \\
& 2A_{2RRR}R^3 + A_{2RRRR}R^4, \tag{7.204}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_6(R, \Phi, \omega_i, Re) = & ReR \left[A_2 16 \frac{\pi^2}{\Phi_0^2} \left(U_{0R}R + V_{0\Phi} - R\omega_i - U_0 \right) + \right. \\
& A_{2R}R \left(U_0 \left(16 \frac{\pi^2}{\Phi_0^2} + 1 \right) - U_{0R}R + U_{0\Phi\Phi} - RV_{0R\Phi} - \right. \\
& \left. \left. 2V_{0\Phi} \right) + A_{2RR}R^2 \left(\omega_i R - RU_{0R} - 2U_0 - V_{0\Phi} \right) - \right. \\
& \left. A_{2RRR}R^3 U_0 \right], \tag{7.205}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_7(R, a) = & Re \frac{4\pi}{\Phi_0} \left[A_2 R \left(-U_{0\Phi} + U_{0R\Phi}R + V_0 \left(1 - \frac{16\pi^2}{\Phi_0^2} - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. V_{0R}R - V_{0RR}R^2 \right) \right) + A_{2R}R^2 V_0 + A_{2RR}R^3 V_0 \right]. \tag{7.206}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_8(R, a, \omega_i) = & A_1 \left[\Phi_0 (-78.96\Phi_0^2 + 779.23) + \right. \\
& R\Phi_0 (-5.92\Phi_0^2 - .77\Phi_0 + 1.81) + R^2\Phi_0 (-2.08 - \\
& 81.82\Phi_0 + \Phi_0^2 (14.48 + 19.74a^2 - 19.74\omega_i - .046)) + \\
& R^3\Phi_0^2 (-55.16\Phi_0 + 8.04 + 196.84\Phi_0 + 3.19\Phi_0^2) + \\
& R^4\Phi_0 (-12.33 - 113.96\Phi_0 + 61.13\Phi_0^2) + \\
& R^5\Phi_0 (-10.72\Phi_0 + 8.05 - 20.3\Phi_0^2) + \\
& \left. R^6\Phi_0 (.047\Phi_0^2 - 1.86 + 9.02\Phi_0) \right] \tag{7.207}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_9(R) = & A_{1R}\Phi_0^2 \left[+ 39.48R\Phi_0 + \right. \\
& R^2 (-3.1 - .7\Phi_0^2) + R^3 (-.31 + .053\Phi_0) + \\
& R^4 (.35 - 7.65\Phi_0^2 - .2\Phi_0) + \\
& R^5 (7.2\Phi_0^2 + .31\Phi_0 - 0.13) + \\
& \left. R^6\Phi_0 (-2.88\Phi_0 - .2) + R^7\Phi_0^3 (.047 + .460\Phi_0) \right] \tag{7.208}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{10}(R) = A_{1RR}\Phi_0^3R^2 & \left[-39.48 - R.26\Phi_0 + R^2(2.53\Phi_0 - \right. \\
& .046) + R^3(-.2 - 6.36\Phi_0) + R^4(5.59\Phi_0 + .31) \\
& \left. + R^5(-1.88\Phi_0 - .2R^7) + R^6(.23\Phi_0 + .047) \right] \quad (7.209)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{11}(R) = A_{1RRR}R^4\Phi_0^4 & \left[-.0033R^3 - .008R - .078 + \right. \\
& \left. .0089R^2 \right] \quad (7.210)
\end{aligned}$$

Literatur

- Ablett, R.: 1923, An investigation of the angle of the contact between paraffin wax and water, *Phil. Mag.* **46**, 244–256.
- Anderson, D. M. und Davis, S. H.: 1993, Two fluid flow in a corner, *Journal of Fluid Mechanics* **251**, 1–31.
- Batchelor, G.: 1970, *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press.
- Benkreira, H.: 2004, The effect of substrate roughness on air entrainment in dip coating, *Chemical Engineering Science* **59**, 2745–2751.
- Benkreira, H.: 2006, Dynamic wetting line under vacuum, 13th International Coating Science and Technology Symposium, Denver, Colorado, USA.
- Blake, T. D., Dobson, R. A. und Ruschak, K. J.: 2004, Wetting at high capillary number, *Journal of Colloid and Interface Science.* **279**, 205–221.
- Blake, T. D. und Haynes, J. M.: 1969, Kinetics of liquid/liquid displacement, *Journal of Colloid and Interface Science.* **30**, 421–423.
- Blake, T. D. und Ruschak, K. J.: 1997, Wetting: Static and dynamic contact lines, in S. Kistler und P. M. Schweizer (eds.), *Liquid Film Coating*, Chapman & Hall, London, chapter 3, pp. 63–97.
- Blake, T. D. und Shikhmurzaev, Y. D.: 2002, Dynamic wetting by liquids of different viscosity, *Journal of Colloid and Interface Science.* **253**, 196–202.
- Blake, T. und Ruschak, K.: 1979, A maximum speed of wetting, *Nature* **282**, 489–491.
- Bronstein, I. N., Semendjajew, K. A., Musiol, G. und Mühlig, H.: 1999, *Taschenbuch der Mathematik*, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, Thun.
- Burley, R.: 1975, Air entrainment and the limits of coatability, *JOCCA* **25**, 192–202.
- Burley, R. und Jolly, R.: 1984a, Entrainment of air into liquids by a high speed continous solid surface, *Chemical Engineering Science* **39**, 1357.
- Burley, R. und Jolly, R. P. S.: 1984b, Entrainment of air into liquids by a high speed continous solid surface, *Chemical Engineering Science* **39**, 1357–1372.

- Burley, R. und Kennedy, B.: 1976, An experimental study of air entrainment at a solid/liquid/gas interface, *Chemical Engineering Science* **31**, 901–911.
- Cohu, O. und Benkreira, H.: 1998a, Air entrainment in angled dip coating, *Chemical Engineering Science* **53**, 553–540.
- Cohu, O. und Benkreira, H.: 1998b, Entrainment of air by a solid surface plunging into a non-newtonian liquid, *AIChE J.* **44**, 2360–2368.
- Cox, R. G.: 1986, The dynamics of the spreading of liquids on a solid surface. part 1. viscous flow, *Journal of Fluid Mechanics* **168**, 169–194.
- Dean, W. R. und Montagnon, P. E.: 1949, On the steady motion of viscous liquid in a corner, *Proceeding Cambridge Phil. Soc.* **45**, 389–394.
- Deryagin, B. M. und Levi, S. M.: 1964, Film coating theory, *Focal Press* **137**, 190.
- Dussan V., E. B.: 1976, The moving contact line: the slip boundary condition, *Journal of Fluid Mechanics* **77**, 665–684.
- Dussan V., E. B. und Davis, S.: 1974, On the motion of a fluid-fluid interface along a solid surface., *Journal of Fluid Mechanics* **65**, 71–95.
- Elliot, G. E. P. und Riddiford, A. C.: 1965, Contact angles, *Rec. Prog. Surface Sci.* **2**, 111–128.
- Frenkel, J. I.: 1946, *Kinetic Theorie of Liquids*, Oxford University Press, London.
- Ghannman, M. T. und Esmail, M. N.: 1997, Experimental study on wetting of fibres with non-newtonian liquids, *AIChE J.* **43**, 1579–1588.
- Gutoff, E. B. und Kendrick, C. E.: 1982, Dynamic contact angles, *AIChE J.* **28**, 459–466.
- Hansen, R. J. und Toong, T. Y.: 1971, Dynamic contact angle and its relationship to forces of hydrodynamic origin, *Journal of Colloid and Interface Science.* **37**, 196–207.
- Hoffmann, R. L.: 1975, A study of the advancing interface. i. interface shape in liquid-gas systems., *Journal of Colloid and Interface Science.* **50**, 228–241.

- Hoffmann, R. L.: 1983, A study of the advancing interface. ii. theoretical prediction of the dynamic contact angle in liquid-gas systems., *Journal of Colloid and Interface Science*. **94**, 470–486.
- Huh, C. und Scriven, L. E.: 1971, Hydrodynamic model of steady movement of a solid/liquid/fluid contact line., *Journal of Colloid and Interface Science*. **35**, 85–1011.
- Inverarity, G.: 1969, Dynamic wetting of glass fibre and polymer fibre, *Br. Polym. J.* **1**, 245–251.
- Ishimi, K., Hikita, H. und Esmail, M. N.: 1986, Dynamic contact angle on moving plates, *AIChE J.* **32**, 486–492.
- Kistler, S. F.: 1993, Hydrodynamics of wetting, in J. C. Berg (ed.), *Wettability*, Marcel Dekker, New York, U.S.A., pp. 311–429.
- Moffatt, H. K.: 1964, Viscous and resistive eddies near a sharp corner, *Journal of Fluid Mechanics* **18**, 1–18.
- Oertel jr., H.: 2001, *Prandtl-Führer durch die Strömungslehre*, Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden.
- Oertel jr., H. und Delfs, J.: 1996, *Strömungsmechanische Instabilitäten*, Springer.
- Rose, W. und Heins, R. W.: 1962, Moving interfaces and contact-angle rate-dependency, *Journal of Colloid Science* **17**, 39–48.
- Royon, A. und Ehrhard, P.: 2001, Strömungsstruktur nahe einer bewegten Kontaktlinie, *Technical Report FZKA 6627*, Forschungszentrum Karlsruhe.
- Severtson, Y. C. und Aidun, C. K.: 1996, Stability of two-layer stratified flow in inclined channels: applications to air entrainment in coating systems, *Journal of Fluid Mechanics* **312**, 173–200.
- Shikmurzaev, Y. D.: 1997, Moving contact line in liquid/liquid/solid system, *Journal of Fluid Mechanics* **334**, 211–249.
- Ström, G., Fredriksson, M., Stenius, P. und Radoev, B.: 1990, Kinetics of steady-state wetting, *Journal of Colloid and Interface Science*. **134**, 107–115.

- Voinov, O. V.: 1976, Hydrodynamics of wetting, *Fluid Dynamics* **11**, 714–721.
- Weinstein, S. J. und Ruschak, K. J.: 2004, Coating flows, *Annual Review of Fluid Mechanics* **36**, 29–53.
- Yimsiri, P. und Mackley, M. R.: 2006, Spin and dip coating of light-emitting polymer solutions: Matching experiment with modelling, *Chemical Engineering Science* **61**, 3496–3505.