

# **Elektroschwache Korrekturen bei der hadronischen Erzeugung schwerer Quarks**

Zur Erlangung des akademischen Grades eines  
**DOKTORS DER NATURWISSENSCHAFTEN**  
der Fakultät für Physik der  
Universität Karlsruhe (TH)

genehmigte

**DISSERTATION**

von

**Dipl.-Phys. Andreas Bernhard Scharf**  
**aus Landau i.d. Pfalz**

Tag der mündlichen Prüfung: 27. Juni 2008  
Referent: Prof. Dr. Johann H. Kühn  
Korreferent: Prof. Dr. Dieter Zeppenfeld









# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Methoden</b>	<b>5</b>
2.1	Massen, Kopplungen und Feynman-Regeln . . . . .	5
2.2	Wirkungsquerschnitt und Zerfall auf Parton-Niveau . . . . .	10
2.3	Crossing-Symmetrien . . . . .	11
2.4	Berechnung hadronischer Prozesse . . . . .	13
2.4.1	Parton-Luminositäten am Tevatron und am LHC . . . . .	13
2.5	Korrekturen nächstführender Ordnung . . . . .	18
2.5.1	Virtuelle Korrekturen . . . . .	19
2.5.2	Reelle Korrekturen . . . . .	21
2.6	Sudakov-Logarithmen . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Top-Quark-Paarproduktion</b>	<b>31</b>
3.1	Motivation und experimentelle Aspekte . . . . .	31
3.2	Hadronische Top-Quark-Paarproduktion in führender Ordnung . . . . .	35
3.3	Korrekturen der Ordnung $\alpha$ zur hadronischen $t\bar{t}$ -Produktion . . . . .	43
3.3.1	Korrekturen zu $q\bar{q} \rightarrow t\bar{t}$ . . . . .	43
3.3.2	Korrekturen zu $gg \rightarrow t\bar{t}$ . . . . .	45
3.4	Konsistenz und Ergebnisse . . . . .	52
3.4.1	Konsistenz . . . . .	52
3.4.2	Ergebnisse . . . . .	52
<b>4</b>	<b>Bottom-Jet-Produktion</b>	<b>61</b>
4.1	Motivation und experimentelle Aspekte . . . . .	61
4.2	Hadronische $b$ -Jet-Produktion in führender Ordnung . . . . .	63
4.3	Korrekturen der Ordnung $\alpha$ zur hadronischen $b$ -Jet-Produktion . . . . .	75
4.3.1	Korrekturen zu quark-induzierten Prozessen . . . . .	76
4.3.2	Korrekturen zu gluon-induzierten Prozessen . . . . .	82
4.3.3	Neue Prozesse zur Ordnung $\alpha\alpha_s^2$ . . . . .	86
4.4	Konsistenz und Ergebnisse . . . . .	87
4.4.1	Konsistenz . . . . .	87

4.4.2	Ergebnisse . . . . .	89
<b>5</b>	<b>Diskussion</b>	<b>97</b>
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>99</b>
<b>A</b>	<b>Definition der skalaren Integrale</b>	<b>101</b>
<b>B</b>	<b>Renormierungskonstanten im <i>on-shell</i> Schema</b>	<b>105</b>
<b>C</b>	<b>Beiträge zu <math>gg \rightarrow t\bar{t}</math></b>	<b>109</b>





# Kapitel 1

## Einleitung

Die Teilchenphysik beschäftigt sich mit dem Studium der fundamentalen Bausteine der Materie und deren Wechselwirkung untereinander. Seit nunmehr 40 Jahren werden die im Mikrokosmos relevanten Kräfte von einer Theorie, dem Standardmodell der Elementarteilchenphysik erfolgreich beschrieben. In dieser Theorie werden drei der vier bekannten fundamentalen Wechselwirkungen im Rahmen einer sogenannten Eichtheorie eingeführt. Den theoretischen Rahmen bildet die Quantenfeldtheorie. Im einzelnen sind das:

- Die Elektromagnetische Wechselwirkung, welche z.B. Grundlage der Elektrizität ist.
- Die Starke Wechselwirkung, welche z.B. die Stabilität der Atomkerne erklärt.
- Die Schwache Wechselwirkung, welche z.B. für den radioaktiven Beta-Zerfall verantwortlich ist.

Nach heutigem Kenntnisstand beschreiben diese drei Wechselwirkungen zusammen mit der Gravitation alle in der Natur vorkommenden Wechselwirkungen. Aufgrund der unterschiedlichen Reichweiten dieser Kräfte nehmen wir im alltäglichen Leben nur die Elektromagnetische Kraft wahr (Licht, Elektrizität, Magnetismus), welche eine unbegrenzte Wechselwirkungsreichweite besitzt. Die Starke und die Schwache Kraft spielen für unsere alltägliche Wahrnehmung nur eine indirekte Rolle. Ihre Reichweite ist auf sehr kleine Skalen beschränkt. Deshalb ist zum Studium dieser Kräfte eine besondere Art von „Mikroskop“ nötig, um solch kleine Strukturen aufzulösen. Diese Mikroskope sind die Teilchenbeschleuniger zusammen mit den dazugehörigen Detektoren, welche es erlauben, die Grundbausteine der Materie auf sehr kleinen Längenskalen zu studieren. Seit der Einführung der elektroschwachen Theorie in den 60er Jahren [1–3] und der Quantenchromodynamik (QCD) als Theorie der starken Wechselwirkung Anfang der 70er Jahre lieferten Messungen an den entsprechenden Beschleunigern eine beeindruckende Übereinstimmung mit den Vorhersagen dieser Theorien. Seitdem spricht man von beiden Theorien zusammen von dem Standardmodell der Elementarteilchenphysik. Einige ausgewählte Entdeckungen von Teilchen, welche durch das Standardmodell beschrieben werden können, sind in Tabelle 1.1 dargestellt. Einen Meilen-

1977	Entdeckung des Bottom-Quarks am Fermilab Proton Synchrotron
1979	Entdeckung des Gluons in Drei-Jet-Ereignissen an der Positron-Elektron-Tandem-Ring-Anlage (PETRA), DESY
1984	Entdeckung der Z- und W-Bosonen am Super-Proton-Synchrotron (SPS), CERN
1995	Entdeckung des Top-Quarks am Tevatron, Fermilab

Tabelle 1.1: Ausgewählte Entdeckungen an Teilchen-Beschleunigern.

stein für den Erfolg des Standardmodells stellt die Entdeckung des Top-Quarks dar; bei dieser Entdeckung wurde die große Vorhersagekraft der Theorie unter Beweis gestellt. Im Standardmodell kann bei hohen Energien die Störungstheorie angewendet werden kann. Diese erlaubt es eine physikalische Größe in Form einer Entwicklungsreihe in einem kleinen Parameter darzustellen. Vor der Entdeckung des Top-Quarks wurden verschiedene Observablen unter Berücksichtigung mehrerer Terme der Störungstheorie berechnet (eine Liste solcher Observablen ist z.B. in [4] zu finden). Mit der Messung dieser Observablen unter anderem am *Large Electron Positron Collider* (LEP) war es dann möglich, indirekte Vorhersagen für die Top-Quark-Masse zu machen. Diese Vorhersagen sind zusammen mit den gemessenen Werten der Top-Quark-Masse am Tevatron in Abb. 1.1 (mit freundlicher Genehmigung von Dr. C. Quigg) dargestellt [5]. Die Abbildung zeigt, dass die meisten indirekten Vorhersagen im Rahmen des Fehlers mit dem anschließend gemessenen Wert für die Top-Quark-Masse übereinstimmen. Dies ist ein großer Erfolg für die Vorhersagekraft des Standardmodells unter Anwendung der Störungstheorie.

Auch in dieser Arbeit wird die Störungstheorie zur Anwendung kommen. Es ist üblich zwischen der führenden Ordnung (*leading order* LO), dem ersten nichtverschwindenden Term in der Störungsreihe und der nächstführenden Ordnung (*next-to-leading order* NLO, zweiter Term in der Störungsreihe) zu unterscheiden. Höhere Terme in der Störungsreihe werden in dieser Arbeit nicht berücksichtigt. Konkret werden in der vorliegenden Arbeit die schwachen  $\mathcal{O}(\alpha)$ -Korrekturen für die folgenden Produktionsprozesse studiert:

- Die Top-Quark-Paarproduktion ( $t\bar{t}$ ).
- Die Erzeugung von Bottom-Quark-Jets ( $b$ -Jets).

Anschaulich versteht man unter einem *Jet* ein Teilchenbündel, welches von einem einzelnen Gluon oder Quark induziert wird und aufgrund der Starken Wechselwirkung (Hadronisierung) in viele Teilchen schauert. Sowohl experimentell als auch theoretisch kann die Definition eines Jets durch einen sogenannten Jet-Algorithmus präzise festgelegt werden. Die Betrachtung von schwachen  $\mathcal{O}(\alpha)$ -Korrekturen ist durch das Auftreten von sogenannten Sudakov-Logarithmen in nächstführenden Ordnungen Störungstheorie der elektroschwachen Theorie motiviert. Diese Logarithmen sind in den vergangenen Jahren intensiv studiert

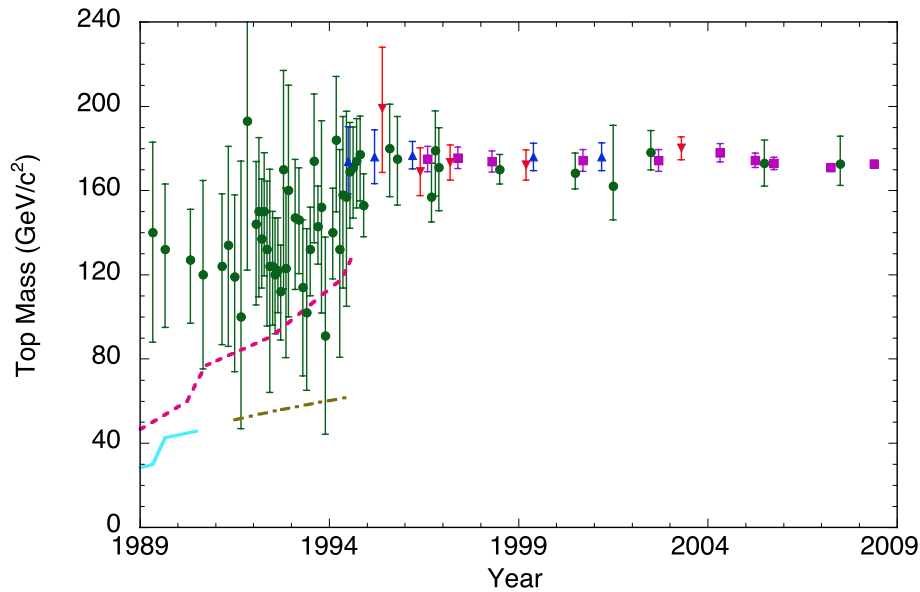


Abbildung 1.1: Die Abbildung zeigt die indirekten Vorhersagen (grün) und die Messungen der Top-Quark-Masse am Tevatron (CDF: Blaue Dreiecke, D0: Rote Dreiecke, CDF und D0 kombiniert: Magenta Boxen) und die entsprechenden Fehler im Verlauf der letzten 19 Jahre. Die farbigen Linien sind Ausschlussgrenzen von: Direkter Suche in Elektron-Positron-Kollisionen (türkise Linie), direkter Suche in Proton–Anti-Proton-Kollisionen (rote gestrichelte Linie) Indirekter Suche in  $p\bar{p} \rightarrow W/Z + X$ -Prozessen (braune gestrichelpunktete Linie).

worden [6–11] und werden später eingehender behandelt. Vorweggenommen sei die Tatsache, dass die Existenz dieser Logarithmen zu sehr großen Korrekturen in differentiellen Verteilungen bei hohen Impulsüberträgen führen kann. Im Hinblick auf den im Bau befindlichen *Large Hadron Collider* (LHC) am CERN und dem in Betrieb befindlichen Tevatron am Fermilab gibt es bald zwei Beschleuniger, welche hochenergetische Endzustände erzeugen können. Gerade am LHC wird es die Möglichkeit geben, Endzustände mit einer kinetischen Energie im TeV-Bereich zu erzeugen, und damit in einen Energiebereich vorzustoßen, in dem das Standardmodell noch nicht untersucht wurde. Demnach ist die Kenntnis von schwachen Korrekturen wesentlich, wenn man das Standardmodell testen will. Dieser Test ist notwendig, denn das Standardmodell beschreibt zwar die bisher bekannten Wechselwirkungen in der Natur, besitzt aber einige unbefriedigende Aspekte. So wurde beispielsweise das vom Standardmodell vorhergesagte Higgs-Boson bisher nicht nachgewiesen. Darüber hinaus möchte man am LHC natürlich auch nach möglichen Erweiterungen des Standardmodells suchen. Eine Testmöglichkeit besteht im Studium von differentiellen Verteilungen für Standardmodell-Prozesse. Diese werden auf Abweichungen von der theoretischen Vorhersage untersucht. Um solche Abweichungen, wie z.B. Resonanzen von neuen Teilchen nachzuweisen, bedarf es einer theoretischen Vorhersage deren Genauigkeit vergleichbar ist

mit den experimentellen Ergebnissen.

Im Folgenden wird der Status der theoretischen Standardmodell-Vorhersage für die Top-Quark-Paarproduktion und die Bottom-Jet-Produktion aufgeführt. Für die Top-Quark-Paarproduktion wurden die QCD-Korrekturen bereits Ende der 80er Jahre [12, 13] berechnet. Eine neuere Analyse [14] beinhaltet auch die NLO-QCD-Effekte auf Spin-Observablen. Des Weiteren sind auch die Effekte von weichen Gluonen in nächstführender Ordnung QCD untersucht worden [15]. Die Korrekturen zur Top-Quark-Paarproduktion in nächstnächstführender Ordnung QCD sind Bestandteil aktueller Forschungen [16, 17]. Der Einfluss von schwachen Korrekturen der  $\mathcal{O}(\alpha)$  auf den totalen  $t\bar{t}$ -Produktionsquerschnitt ist ebenfalls bekannt [18]. Allerdings wurden bei dieser Studie keine differentiellen Verteilungen untersucht. Daneben wurden in [18] nicht alle Beiträge zur Ordnung  $\alpha_s^2\alpha$  berücksichtigt. Deswegen werden in dieser Arbeit die schwachen Einschleifen-Korrekturen zur Top-Quark-Paarproduktion erneut berechnet und ihr Einfluss auf differentielle Verteilungen studiert. Diese Analyse wurde zeitgleich mit einer anderen Gruppe abgeschlossen [19]. Dabei wurde großen Wert auf analytische Ergebnisse gelegt, welche das Studium von weiteren Observablen erlauben. Diese Ergebnisse für die schwachen Korrekturen zur Top-Quark-Paarproduktion werden in der vorliegenden Arbeit angegeben. Schließlich sind in den letzten Jahren auch die rein elektromagnetischen Korrekturen zur  $t\bar{t}$ -Erzeugung berechnet worden [20].

Für die Erzeugung von Bottom-Quark-Jets sind ebenfalls die QCD-Korrekturen nächstführender Ordnung bekannt. Werden die Bottom-Quarks als massiv angenommen sind die Korrekturen für die Erzeugung von zwei Bottom-Jets von derselben Struktur wie bei der Top-Quark-Paarproduktion [12, 13]. In der Näherung masseloser Bottom-Quarks können die QCD-Korrekturen für die Bottom-Jet-Produktion aus den Arbeiten für die Jet-Produktion bestimmt werden [21–23]. Neuere Studien beinhalten auch die Effekte von weichen Gluonen bei der Produktion von zwei schweren Quark-Flavour's [24]. Die schwachen Korrekturen sind bisher nur für die  $b\bar{b}$ -Produktion bekannt [25]. Dabei wurden in der letztgenannten Arbeit keine analytischen Ergebnisse angegeben. Deshalb werden in dieser Arbeit kompakte analytische Ergebnisse für die schwachen Korrekturen zur Erzeugung von Bottom-Quark-Jets angegeben. Diese werden verwendet um den Effekt dieser schwachen Korrekturen auf den differentiellen Wirkungsquerschnitt zu studieren.

Im Folgenden soll die Gliederung dieser Arbeit beschrieben werden. In Kapitel 2 werden die Methoden zur Berechnung von Observablen in führender und nächstführender Ordnung vorgestellt und der Ursprung der Sudakov-Logarithmen beschrieben. Anschließend werden jeweils in den Kapiteln 3 und 4 verschiedene Observablen in führender und nächstführender Ordnung für die Top-Quark-Paarproduktion und die Bottom-Jet-Erzeugung diskutiert. Dabei werden kompakte analytische Ergebnisse für die verschiedenen Terme der Störungsreihe angegeben. In Kapitel 5 wird die Relevanz der gefundenen Ergebnisse für die Top-Quark-Paarproduktion und die Bottom-Jet-Erzeugung am LHC diskutiert. Abschließend werden in Kapitel 6 die in dieser Arbeit ermittelten Ergebnisse zusammengefasst.

# Kapitel 2

## Methoden

In diesem Kapitel werden die in dieser Arbeit verwendeten Parameter sowie die benötigten Feynman-Regeln eingeführt. Des Weiteren werden die Grundlagen zur Berechnung hadronischer Wirkungsquerschnitte und die verwendeten Methoden für Einschleifen-Rechnungen vorgestellt. Außerdem werden zwei Methoden zur Behandlung von infraroten Divergenzen erläutert. Abschließend wird der Ursprung der Sudakov-Logarithmen diskutiert.

### 2.1 Massen, Kopplungen und Feynman-Regeln

In diesem Abschnitt werden die Abkürzungen, welche im Folgenden verwendet werden, angegeben. Wenn es nicht ausdrücklich anders erwähnt wird, werden in den folgenden Kapiteln die hier aufgeführten numerischen Werte benutzt.

#### Massen

Da im Rahmen dieser Arbeit nur die Fermionmassen der Quarks benötigt werden, wird auf die Angabe der Leptonmassen verzichtet. Für die Top-Quark-Masse wird der Wert

$$m_t = 172.7 \text{ GeV}$$

verwendet. Dabei ist zu beachten, dass durch die fortlaufenden Messungen am Tevatron der experimentelle Wert der Top-Quark-Masse Schwankungen unterworfen ist. Diese werden im Folgenden nicht berücksichtigt, d.h. der obige Wert für  $m_t$  ist nicht der aktuelle Weltmittelwert. Das Bottom-Quark wird außer im Fall der Top-Quark-Paarproduktion (Kapitel 3) als masselos angenommen

$$m_b = 0.$$

Die Quarks der ersten beiden Familien werden immer als masselos angenommen

$$m_u = m_d = m_c = m_s = 0.$$

Die Massen der  $Z$ - und  $W^\pm$ -Bosonen werden mit  $M_Z$  und  $M_W$  bezeichnet. Zusammen mit der Masse des Higgs-Bosons ( $m_H$ ) werden sie zu

$$M_Z = 91.1876 \text{ GeV}, \quad M_W = 80.425 \text{ GeV}, \quad m_H = 120 \text{ GeV}$$

gesetzt.

### Kopplungen

Die elektromagnetische Feinstrukturkonstante wird mit  $\alpha$  bezeichnet und ist mit der Elementarladung  $e$  über die Beziehung

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$$

verknüpft. Dabei werden natürliche Einheiten verwendet ( $\hbar = c = 1$ ). Analog dazu ist die Kopplungskonstante der starken Wechselwirkung  $\alpha_s$  durch

$$\alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi}$$

gegeben. Die numerischen Werte für diese Kopplungen sind den jeweiligen Prozessen anzupassen und werden in den entsprechenden Kapiteln angegeben. Da in dieser Arbeit ausschließlich Observablen im *on-shell* Schema (siehe Kapitel 2) berechnet werden, ist die schwache Kopplung, speziell der schwache Mischungswinkel,  $\Theta_W$  so zu wählen, dass gilt:

$$s_W = \sin(\Theta_W) = \sqrt{1 - \frac{M_W^2}{M_Z^2}}.$$

Daneben ist es üblich die Fermi-Konstante  $G_F$  einzuführen

$$G_F = \frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}M_W^2 s_W^2}.$$

### Feynman-Regeln

In diesem Unterabschnitt werden die verwendeten Feynman-Regeln angegeben, wobei auf eine vollständige Angabe der Feynman-Regeln für das Standardmodell verzichtet wird. Im Folgenden werden neben den Kopplungen und Massen aus dem vorigen Abschnitt die üblichen Bezeichnungen für die Dirac-Gamma-Matrizen  $\gamma_\mu$ , sowie die Generatoren  $T_{ij}^a$  in der fundamentalen Darstellung und Strukturkonstanten  $f^{abc}$  der  $SU(3)$  eingeführt. Des Weiteren werden an Vertizes alle Impulse als einlaufend angenommen. Die folgende Auswahl an Feynman-Regeln ist dabei aus [26] entnommen und entspricht den Regeln in 't Hooft-Feynman-Eichung.

Damit ergeben sich für externe Felder die folgenden Regeln:

- Einlaufendes Quark mit Impuls  $k$  und Spin  $s$ :  $u_s(k)$
- Auslaufendes Quark mit Impuls  $k$  und Spin  $s$ :  $\bar{u}_s(k)$
- Einlaufendes Anti-Quark mit Impuls  $k$  und Spin  $s$ :  $\bar{v}_s(k)$
- Auslaufendes Anti-Quark mit Impuls  $k$  und Spin  $s$ :  $v_s(k)$
- Einlaufendes Gluon mit Impuls  $k$ :  $\epsilon_\mu(k, \lambda)$
- Auslaufendes Gluon mit Impuls  $k$ :  $\epsilon_\mu^*(k, \lambda)$

Dabei bezeichnen  $u, \bar{u}$  und  $v, \bar{v}$  die Spinoren, welche den Lösungen mit positiven und negativen Energien der Dirac-Gleichung entsprechen. Der Vierer-Vektor  $\epsilon_\mu$  ist der Polarisations-Vektor des externen Gluons mit der Polarisation  $\lambda$ . Um nur die physikalischen (transversalen) Gluon-Polarisationen zu berücksichtigen, gilt die Polarisationssumme:

$$\sum_{\lambda=1}^2 \epsilon_\mu(k, \lambda) \epsilon_\nu^*(k, \lambda) = - \left[ g_{\mu\nu} - \frac{n_\mu k_\nu + n_\nu k_\mu}{(n \cdot k)} + \frac{n^2 k_\nu k_\mu}{(n \cdot k)^2} \right]. \quad (2.1)$$

Dabei ist  $n^\mu$  ein beliebiger externer Vierer-Vektor, welchen man zweckmäßig so wählt, dass gilt  $n^2 = 0$ .

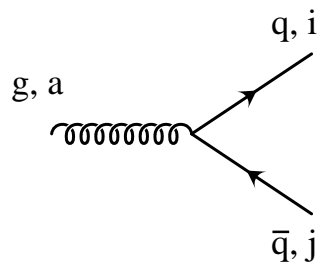
Des Weiteren gelten folgende Regeln für die Propagatoren von Quarks und Gluonen:

$$\bar{q}, i \quad p \rightarrow \quad q, j \quad = \quad \frac{i \delta_{ij} (\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad (2.2)$$

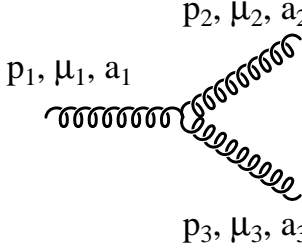
$$\mu, a \quad p \rightarrow \quad \nu, b \quad = \quad \frac{-i g_{\mu\nu} \delta^{ab}}{p^2 + i\epsilon}, \quad (2.3)$$

$$(2.4)$$

Dabei werden mit  $i, j$  die Indizes in der fundamentalen Darstellung der SU(3) bezeichnet und mit  $a, b$  die Indizes in der adjungierten Darstellung. Die benötigten QCD-Vertizes sind

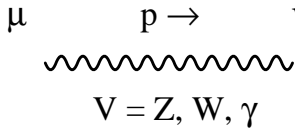


$$= i \gamma_\mu T_{ij}^a, \quad (2.5)$$

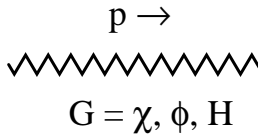


$$= g_s f^{a_1 a_2 a_3} \left[ g_{\mu_1 \mu_2} (p_1 - p_2)_{\mu_3} + g_{\mu_2 \mu_3} (p_2 - p_3)_{\mu_1} + g_{\mu_3 \mu_1} (p_3 - p_1)_{\mu_2} \right]. \quad (2.6)$$

Als nächstes werden die benötigten Feynman-Regeln des elektroschwachen Sektors des Standardmodells eingeführt. Die Propagatoren der elektroschwachen Eichbosonen  $V = Z, W^\pm, \gamma$ , der Goldstone-Bosonen sowie dem Higgs-Boson  $G = \chi, \phi^\pm, H$  sind gegeben durch:



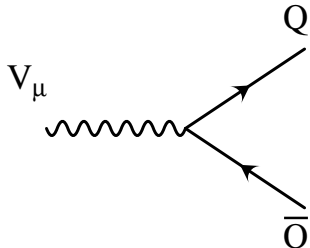
$$V = Z, W, \gamma \quad = \quad \frac{-i g_{\mu\nu}}{p^2 - M_V^2 + i\epsilon}, \quad (2.7)$$



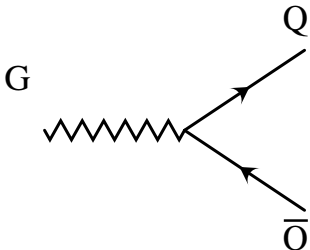
$$G = \chi, \phi, H \quad = \quad \frac{i}{p^2 - M_G^2 + i\epsilon}. \quad (2.8)$$

$$(2.9)$$

Schließlich lauten die Vertizes in der Notation von [26]



$$= i e \gamma_\mu \left( C_L \frac{1 - \gamma_5}{2} + C_R \frac{1 + \gamma_5}{2} \right), \quad (2.10)$$



$$= i e \left( C_L \frac{1 - \gamma_5}{2} + C_R \frac{1 + \gamma_5}{2} \right). \quad (2.11)$$



$V\bar{Q}Q$	$\gamma\bar{q}_i q_j$	$Z\bar{q}_i q_j$	$W^+ \bar{u}_i d_j$	$W^- \bar{d}_j u_i$
$C_L$	$-Q_q \delta_{ij}$	$g_q^- \delta_{ij}$	$\frac{1}{\sqrt{2}s_W} V_{ij}$	$\frac{1}{\sqrt{2}s_W} V_{ji}^\dagger$
$C_R$	$-Q_q \delta_{ij}$	$g_q^+ \delta_{ij}$	0	0

Tabelle 2.1: Kopplungen der Eichbosonen an die (Anti-) Quarks. Die Indizes  $i$  und  $j$  bezeichnen den Flavour des (Anti-) Quarks.

$G\bar{Q}Q$	$\chi\bar{q}_i q_j$	$\phi^+ \bar{u}_i d_j$	$\phi^- \bar{d}_j u_i$	$H\bar{q}_i q_j$
$C_L$	$-\frac{i}{s_W} I_W^3 \frac{m_q}{M_W} \delta_{ij}$	$+\frac{1}{\sqrt{2}s_W} \frac{m_{u,i}}{M_W} V_{ij}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}s_W} \frac{m_{d,j}}{M_W} V_{ji}^\dagger$	$-\frac{1}{2s_W} \frac{m_q}{M_W} \delta_{ij}$
$C_R$	$\frac{i}{s_W} I_W^3 \frac{m_q}{M_W} \delta_{ij}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}s_W} \frac{m_{d,j}}{M_W} V_{ij}$	$+\frac{1}{\sqrt{2}s_W} \frac{m_{u,i}}{M_W} V_{ji}^\dagger$	$-\frac{1}{2s_W} \frac{m_q}{M_W} \delta_{ij}$

Tabelle 2.2: Kopplungen der Goldstone-Bosonen an die (Anti-) Quarks. Die Indizes  $i$  und  $j$  bezeichnen den Flavour des (Anti-) Quarks.

Dabei sind die Konstanten  $C_L$  und  $C_R$  für die Eichbosonen bzw. Goldstone-Bosonen in Tab. 2.1 bzw. Tab. 2.2 angegeben. Im Rahmen dieser Arbeit wird die Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-Massenmatrix (CKM-Matrix) zu  $\mathbb{1}$  gesetzt. Außerdem wird für die  $Zq\bar{q}$ -Kopplung die übliche Vektor- und Axialvektor-Kopplung eingeführt:

$$g_v^q = \frac{1}{2}(g_q^- + g_q^+) = \frac{I_{w,q}^3 - 2s_W^2 Q_q}{2s_W c_W}, \quad (2.12)$$

$$g_a^q = \frac{1}{2}(g_q^- - g_q^+) = \frac{I_{w,q}^3}{2s_W c_W}. \quad (2.13)$$

Dabei bezeichnet  $I_{w,q}^3$  die dritte Komponente des schwachen Isospins des Quarks und  $c_W$  den Cosinus des Weinberg-Winkels. Der Bruchteil der elektrischen Quark-Ladung in Einheiten der Elementarladung  $e$  ist mit  $Q_q$  bezeichnet. Analog wird für die Kopplung des  $W$ -Bosons an Quarks die Abkürzung

$$g_W = \frac{1}{2\sqrt{2}s_W} \quad (2.14)$$

eingeführt. Mit diesen Ersetzungsregeln ist die Berechnung der in dieser Arbeit auftretenden Prozesse in führender Ordnung Störungstheorie möglich. Des Weiteren werden für Prozesse in nächstführender Ordnung die folgenden Regeln benötigt:

- Jede geschlossene Schleife impliziert ein Integral über den unbestimmten Schleifen-Impuls  $\ell$ :  $\int \frac{d^d \ell}{(2\pi)^d}$ .
- Für jede geschlossene Schleife von anti-kommutierenden Feldern wird ein Faktor  $(-1)$  an die Amplitude multipliziert.

- Die Feynman-Regeln für die Counterterme (siehe Abschnitt 2.5)

Dieser Satz von Feynman-Regeln reicht aus, um die in dieser Arbeit auftretenden Amplituden zu berechnen.

## 2.2 Wirkungsquerschnitt und Zerfall auf Parton-Niveau

In diesem Unterkapitel werden in aller Kürze die benötigten Formeln zur Berechnung partonischer Wirkungsquerschnitte wiedergegeben. Daneben wird auch die Berechnung von Zerfallsbreiten kurz vorgestellt, da in Kapitel 3 der Top-Quark-Zerfall angesprochen wird.

Für Kollisionen von Elementarteilchen ist die allgemeine Form eines differentiellen Wirkungsquerschnitts für einen  $2 \rightarrow n$ -Teilchen Prozess gegeben durch [27]

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{1}{4E_A E_B |v_A - v_B|} \left( \prod_{f=1}^n \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) \\ &\times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - \sum_{f=1}^n p_f) \left| \overline{\sum} \mathcal{M} \left( A + B \rightarrow \sum_{f=1}^n f \right) \right|^2. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Dabei bezeichnen die Indizes  $A$  und  $B$  die Teilchen im Anfangszustand und der Index  $f$  die Teilchen im Endzustand. Die Geschwindigkeiten der beiden kollidierenden Teilchen in Einheiten der Lichtgeschwindigkeit sind  $v_{A,B}$  und bilden zusammen mit den entsprechenden Energien  $E_{A,B}$  den einlaufenden Teilchenfluss  $\frac{1}{4E_A E_B |v_A - v_B|}$ . Das folgende Produkt von infinitesimalen räumlichen Impulsen und dem Kehrwert der entsprechenden Energien bestimmt zusammen mit der Energie-Impuls-Erhaltung ( $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - \sum_{f=1}^n p_f)$ ) das differentielle Phasenraum-Maß  $d\Pi_n$ . Bei der Bestimmung des totalen Wirkungsquerschnitts muss unter Berücksichtigung der Energie-Impuls-Erhaltung über alle möglichen Endzustände summiert werden. Man nennt das Integral über diese beiden Faktoren das relativistisch invariante  $n$ -Teilchen Phasenraum-Volumen

$$\int d\Pi_n = \int \left( \prod_{f=1}^n \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - \sum_{f=1}^n p_f). \quad (2.16)$$

Da die einlaufenden Teilchen in dieser Arbeit immer als masselos und hochrelativistisch angenommen werden, gilt  $|v_A - v_B| = 2$ . Der letzte Faktor in Gl. (2.15) ist das Betragsquadrat der Streuamplitude, welche mit Hilfe der Feynman-Regeln im vorigen Abschnitt berechnet werden kann. Dabei wird die Mittelung über alle Quantenzahlen im Anfangszustand und Summation über die Quantenzahlen im Endzustand durchgeführt:

$$\overline{\sum} \left| \mathcal{M} \left( A + B \rightarrow \sum_{f=1}^n f \right) \right|^2 = \frac{1}{S_A} \frac{1}{S_B} \frac{1}{C_A} \frac{1}{C_B} \sum_{\text{Spin}} \sum_{\text{Farbe}} \left| \mathcal{M} \left( A + B \rightarrow \sum_{f=1}^n f \right) \right|^2. \quad (2.17)$$

Die Variablen  $S_A, S_B$  ( $C_A, C_B$ ) bezeichnen die Anzahl der Spin- (Farb-) Freiheitsgrade der einlaufenden Teilchen.

Im Rahmen dieser Arbeit werden viele Wirkungsquerschnitte für  $2 \rightarrow 2$ -Prozesse berechnet, für die  $m_1 = m_2 = m$  gilt, dabei bezeichnet  $m_i$  die Masse des Endzustandsteilchens. Deshalb wird für diesen Fall eine kompakte Formel für den differentiellen Wirkungsquerschnitt angegeben

$$\frac{d\sigma^{2 \rightarrow 2(m)}}{dz} = \frac{1}{I} \frac{\beta_m}{32\pi s} \sum |\mathcal{M}(s, m, z)|^2. \quad (2.18)$$

Dabei wird wie üblich die Variable  $s$  als Bezeichnung des Quadrates der Schwerpunktsenergie eingeführt  $s = E_{\text{cm}}^2 = 2E_A 2E_B$ , wobei  $E_{\text{cm}}$  die Energie im Schwerpunktsystem der einlaufenden Teilchen bezeichnet. Der Cosinus des Streuwinkels  $\Theta$ , welcher dem Winkel zwischen der Strahlachse und einem auslaufenden Teilchen entspricht, wird mit  $z$  bezeichnet. Der Faktor  $\beta_m$  in Gl. (2.18) ist gegeben durch

$$\beta_m = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}}$$

und entspricht der Geschwindigkeit der Endzustandsteilchen in Einheiten der Lichtgeschwindigkeit  $c$ . Schließlich trägt der Faktor  $\frac{1}{I}$  der Tatsache Rechnung, dass man zwei identische Teilchen im Endzustand erzeugen kann. Für ununterscheidbare Teilchen gilt  $I = 2$  sonst  $I = 1$ .

Zum Abschluss dieses Unterkapitels wird noch die Zerfallsbreite eines instabilen Teilchens  $A$  angegeben. Die differentielle Zerfallsbreite ist im Ruhesystem des zerfallenden Teilchens durch

$$d\Gamma = \frac{1}{2m_A} \left( \prod_{f=1}^n \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A - \sum_{f=1}^n p_f) \left| \mathcal{M} \left( A \rightarrow \sum_{f=1}^n f \right) \right|^2 \quad (2.19)$$

gegeben [27]. Bei der Berechnung einer totalen Breite gelten dieselben Angaben wie für den totalen Wirkungsquerschnitt (siehe oben).

## 2.3 Crossing-Symmetrien

Nachdem alle Bausteine zur Berechnung eines partonischen Wirkungsquerschnitts bekannt sind, wird in diesem Abschnitt auf Relationen zwischen verschiedenen Streuamplituden eingegangen. Zur Herleitung der benötigten Relationen wird dabei den Ausführungen in [27] gefolgt. Als Beispiel werden die beiden Prozesse  $q\bar{q} \rightarrow q'\bar{q}'$  und  $q'\bar{q} \rightarrow q'\bar{q}$  mit Photon-Austausch betrachtet. Im Folgenden sind die einlaufenden Impulse mit  $p_1$  und  $p_2$  bezeichnet,

während die auslaufenden Impulse  $k_1$  und  $k_2$  sind. Schreibt man die Amplituden dieser beiden Prozesse auf, so ergeben sich die folgenden Ausdrücke:

$$\mathcal{M}_{q\bar{q} \rightarrow q'\bar{q}'}(p_1, p_2, k_1, k_2) = \bar{v}(p_2)ie\gamma_\mu u(p_1) \frac{-ig^{\mu\nu}}{(p_1 + p_2)^2} \bar{u}(k_1)ie\gamma^\nu v(k_2), \quad (2.20)$$

$$\mathcal{M}_{q'\bar{q} \rightarrow q\bar{q}}(p_1, p_2, k_1, k_2) = \bar{u}(k_1)ie\gamma_\mu u(p_1) \frac{-ig^{\mu\nu}}{(p_1 - k_1)^2} \bar{v}(p_2)ie\gamma^\nu v(k_2). \quad (2.21)$$

Dabei sollen alle Fermionen als masselos gelten. Wie man erkennen kann, sind die beiden Amplituden einander sehr ähnlich. Es wird sich zeigen, dass im Wesentlichen die Vertauschung  $p_2 \leftrightarrow -k_1$  ausreicht, um Gl. (2.20) in Gl. (2.21) zu überführen. Um eine solche Vertauschung vornehmen zu können, benötigt man Relationen für Spinoren der Form  $u(-p)$ . Für das betrachtete Beispiel sind sie gegeben durch

$$\begin{aligned} \bar{v}(p_2) \xrightarrow{p_2 \leftrightarrow -k_1} \bar{u}(-k_1) &= i \bar{u}(k_1), \\ \bar{u}(k_1) \xrightarrow{p_2 \leftrightarrow -k_1} \bar{v}(-p_2) &= i \bar{v}(p_2). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Damit ergibt sich für die Amplitude Gl. (2.20)

$$\mathcal{M}_{q\bar{q} \rightarrow q'\bar{q}'}(p_1, p_2, k_1, k_2) \xrightarrow{p_2 \leftrightarrow -k_1} \mathcal{M}_{q\bar{q} \rightarrow q'\bar{q}'}(p_1, -k_1, -p_2, k_2) = -\mathcal{M}_{q'\bar{q} \rightarrow q\bar{q}}(p_1, p_2, k_1, k_2). \quad (2.23)$$

Als Folge ergibt sich auf Amplitudenquadrat-Niveau:

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{M}_{q\bar{q} \rightarrow q'\bar{q}'}(p_1, p_2, k_1, k_2) \right|^2 &\xrightarrow{p_2 \leftrightarrow -k_1} \left| \mathcal{M}_{q\bar{q} \rightarrow q'\bar{q}'}(p_1, -k_1, -p_2, k_2) \right|^2 \\ &= \left| \mathcal{M}_{q'\bar{q} \rightarrow q\bar{q}}(p_1, p_2, k_1, k_2) \right|^2. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Die bisherigen Resultate lassen sich wie folgt zusammenfassen. Für jedes (Anti-) Fermion, welches gekreuzt wird, wird die ursprüngliche Amplitude mit einem Faktor  $i$  versehen. Als Konsequenz führt eine ungerade Anzahl von Kreuzungen der (Anti-) Fermionen zu einem Vorzeichenwechsel auf Amplitudenquadrat-Niveau. Für das Kreuzen von externen Bosonen treten solche Faktoren nicht auf. Das Kreuzen auf Amplitudenquadrat-Niveau wird unter Benutzung der Mandelstam-Variablen  $s$ ,  $t$  und  $u$  für  $2 \rightarrow 2$ -Prozesse besonders einfach. Für eine Amplitude der Form  $\mathcal{M}_{(ij \rightarrow kl)}(k_i, k_j, k_k, k_l)$  sind sie in dieser Arbeit definiert als:

$$s = (k_i + k_j)^2, \quad t = (k_i - k_k)^2, \quad u = (k_i - k_l)^2. \quad (2.25)$$

Sie stehen mit dem Cosinus des Streuwinkels  $z$  in folgender Beziehung

$$z(s, t, u) = \frac{u - t}{s}. \quad (2.26)$$

Demnach muss für das Kreuzen auf Amplitudenquadrat-Niveau nur die entsprechende Ersetzung in den Mandelstam-Variablen angegeben werden. Für das obige Beispiel ergibt sich dann die Crossing-Relation

$$\left| \mathcal{M}_{q\bar{q}' \rightarrow q\bar{q}'} \right|^2(s, z(s, t, u)) = \left| \mathcal{M}_{q\bar{q} \rightarrow q'\bar{q}'} \right|^2(s, z(s, t, u)) \Big|_{s \leftrightarrow t}. \quad (2.27)$$

## 2.4 Berechnung hadronischer Prozesse

An Hadronen-Beschleunigern wie dem Tevatron oder dem LHC werden zusammengesetzte Teilchen (Hadronen) zur Kollision gebracht (die Vierer-Impulse der Hadronen sind im Folgenden mit  $P_1$  und  $P_2$  bezeichnet, das Quadrat der hadronischen Schwerpunktsenergie mit  $s_H$ ). Die eigentlichen Reaktionspartner des harten Streuprozesses sind die Konstituenten dieser zusammengesetzten Teilchen, die Partonen. Um nun einen hadronischen Wechselwirkungsprozess zu beschreiben, wird das sogenannte Parton-Modell verwendet. Die Grundannahme dieses Modells ist, dass die Wechselwirkung der Bindungszustände in einem Hadron zeitlich sehr langsam ablaufen, verglichen mit dem harten partonischen Streuprozess. Demnach „sehen“ die Kollisionspartner ein quasi-statisches Bild der Partonen im Hadron, welche einen festen Bruchteil des hadronischen Vierer-Impulses tragen. Diese Trennung der nicht-perturbativen Wechselwirkung zwischen den Bindungszuständen und der störungstheoretisch zugänglichen harten Partonstreuung nennt man Faktorisierung. Im Folgenden werden bei der Berechnung hadronischer Prozesse nur Gluonen und (Anti-) Quarks als Partonen betrachtet. Photonische Anfangszustände werden nicht berücksichtigt. Für die Kollision von zwei Hadronen  $H_1$  und  $H_2$  ergibt sich der hadronische Wirkungsquerschnitt zu

$$d\sigma_{H_1 H_2 \rightarrow X} = \sum_{i,j=q,\bar{q},g} \int_0^1 dx_1 dx_2 f_{i,H_1}(x_1, \mu_F^2) f_{j,H_2}(x_2, \mu_F^2) d\hat{\sigma}_{ij \rightarrow X}(x_1 P_1, x_2 P_2, \mu_F^2, \mu_R^2). \quad (2.28)$$

Dabei bezeichnet  $\hat{\sigma}$  den partonischen faktorisierten harten Streuquerschnitt. Mit  $\mu_R$  wird die Renormierungsskala und mit  $\mu_F$  die Faktorisierungsskala bezeichnet. Um das Auftreten großer Logarithmen zu vermeiden, wird die Faktorisierungsskala typischerweise auf die charakteristische Energieskala des Prozesses gesetzt. Da es nicht möglich ist eine Aussage über Impuls und Energie der Partonen zu machen, muss über alle erlaubten Impuls- und Energiekonfigurationen der Partonen ( $x_1 P_1, x_2 P_2$ ) im Anfangszustand summiert werden. Die Funktion  $f_{i,H_1}$  ist eine sogenannte Partonverteilungsfunktion (PDF), welche für einen gegebenen Vierer-Impuls-Bruchteil  $[x_1, x_1 + dx_1]$  qualitativ die Wahrscheinlichkeit liefert, ein Parton des Typs  $i$  in einem Hadron  $H_1$  zu finden. Für einen definierten Endzustand muss über alle partonischen Anfangszustände  $i, j$  summiert werden, welche zu diesem Endzustand führen. Damit sind die Bausteine komplett, um einen hadronischen Wirkungsquerschnitt in führender Ordnung QCD zu berechnen.

### 2.4.1 Parton-Luminositäten am Tevatron und am LHC

In diesem Abschnitt werden die Parton-Luminositäten am Tevatron und am LHC studiert. Wie sich in den folgenden Kapiteln zeigen wird, haben diese Luminositäten einen großen Einfluss auf differentielle Verteilungen. Die folgende Studie bleibt dabei auf PDF's in führender Ordnung Störungstheorie beschränkt, wobei Parameter wie z.B. die Faktorisierungsskala fixiert werden. Das wesentliche Bild bleibt qualitativ allerdings auch für die PDF's in

nächstführender Ordnung bestehen.

Im Rahmen dieser Arbeit werden die PDF's von CTEQ6 der CTEQ Kollaboration [28] verwendet um Observablen am Tevatron (Proton–Anti-Proton Kollisionen,  $\sqrt{s_H} = 1.96$  TeV) und am LHC (Proton–Proton Kollisionen,  $\sqrt{s_H} = 14$  TeV) zu berechnen. Die Faktorisierungsskala  $\mu_F$  wird zu 100 GeV gesetzt. Je nach Beschleuniger muss aufgrund vorhandener Symmetrien (z.B. Proton–Anti-Proton) eine unterschiedliche Anzahl von Parton-Luminositäten untersucht werden. Dabei wird grundsätzlich zwischen leichten (Anti-) Quarks ( $\bar{q}$ ),  $q$ , Gluonen  $g$  und (Anti-) Bottom-Quarks ( $\bar{b}$ ),  $b$  unterschieden. Auf ein separates Studium der anderen Quark-Flavours ( $u, d, s, c$ ) wird verzichtet, da die Starke Wechselwirkung nicht zwischen den Quark-Flavours unterscheidet. Dies gilt zwar nicht für die elektroschwache Wechselwirkung, allerdings spielen in dieser Arbeit Prozesse in führender Ordnung ( $O(\alpha^2)$ ,  $O(\alpha\alpha_s)$ ) nur eine untergeordnete Rolle. Die Luminosität von Top-Quarks in einem Hadron wird zu Null angenommen. Für den Tevatron und den LHC ergeben sich dann die in den Tabellen 2.3 und 2.4 aufgeführten Anfangszustände. Es ist zweckmäßig

	Anfangszustände mit $q, \bar{q}, g$					
LHC	$q\bar{q}$	$qq$	$\bar{q}\bar{q}$	$gg$	$qg$	$\bar{q}g$
Tevatron	$q\bar{q}$	$qq \hat{=} \bar{q}\bar{q}$	$gg$	$qg \hat{=} \bar{q}g$		

Tabelle 2.3: Liste der möglichen partonischen Anfangszustände am Tevatron und am LHC für leichte (Anti-) Quarks und Gluonen.

	Anfangszustände mit $b, \bar{b}$ und $q, \bar{q}, g$			
LHC	$qb \hat{=} q\bar{b}$	$\bar{q}b \hat{=} \bar{q}\bar{b}$	$gb \hat{=} g\bar{b}$	$b\bar{b} \hat{=} \frac{1}{2}bb \hat{=} \frac{1}{2}\bar{b}\bar{b}$
Tevatron	$qb \hat{=} q\bar{b} \hat{=} \bar{q}b \hat{=} \bar{q}\bar{b}$	$gb \hat{=} g\bar{b}$	$b\bar{b} \hat{=} \frac{1}{2}bb \hat{=} \frac{1}{2}\bar{b}\bar{b}$	

Tabelle 2.4: Liste der möglichen partonischen Anfangszustände am Tevatron und am LHC für leichte (Anti-) Quarks bzw. Gluonen und (Anti-) Bottom-Quarks.

eine Luminositätsfunktion wie folgt zu definieren

$$L_{ij}(\tau, \mu_F) = \int_{\tau}^1 \frac{1}{x_1} f_{i,H_1}(x_1, \mu_F^2) f_{j,H_2}\left(\frac{\tau}{x_1}, \mu_F^2\right) dx_1 \quad (2.29)$$

mit

$$\tau = \frac{s}{s_H} \geq \frac{E_{\min}^2}{s_H}.$$

Mit dieser Funktion sollen die verschiedenen Parton-Luminositäten für partonische Schwerpunktsenergien untersucht werden. Für den Tevatron wird der Energiebereich 100 GeV <

$E_{\text{cm}} < 1000 \text{ GeV}$  und für den LHC  $100 \text{ GeV} < E_{\text{cm}} < 5000 \text{ GeV}$  studiert. Dabei werden am LHC mit Energien bis 5 TeV auch sehr hochenergetische Ereignisse bzgl. der Parton-Luminositäten untersucht. Der Hauptgrund hierfür ist, dass Ereignisse mit einer Gesamtenergie 5 TeV am LHC erzeugt werden können. Nach einigen Jahren Beschleuniger-Laufzeit wird die angesammelte Statistik ausreichen, um eine Analyse solcher hochenergetischer Ereignisse durchführen zu können. Für solche Ereignisse werden die Einflüsse der Sudakov-Logarithmen wichtig und können wie in der Einleitung erwähnt zu großen Korrekturen in differentiellen Verteilungen führen (siehe auch Abschnitt 2.6). Berechnet man die Luminositätsfunktion normiert auf  $s_H$  unter Verwendung der PDF CTEQ6L, ergeben sich am Tevatron die in Abb. 2.1 gezeigten Kurven als Funktion der partonischen Schwerpunktsenergie  $E_{\text{cm}}$ . Im oberen Diagramm sind alle möglichen Anfangszustandskombinationen aus leichten (Anti-) Quarks und Gluonen dargestellt. Wie man der Abbildung entnehmen kann, sind am Tevatron im Energiebereich  $E_{\text{cm}} < 200 \text{ GeV}$  die  $qg$ - bzw. die  $gg$ -Luminositäten am größten. Die Luminositäten von  $qq$ - und  $q\bar{q}$  sind etwa eine Größenordnung kleiner für  $E_{\text{cm}} = 100 \text{ GeV}$ . Allerdings hat sich bereits an der  $t\bar{t}$ -Schwelle das Bild geändert. Dort sind die Beiträge von  $gg$  nur noch in der Größenordnung einiger Prozent verglichen mit den Luminositäten von  $qg$  und  $q\bar{q}$ . Mit steigender Energie werden die Gluon-Gluon-Luminositäten praktisch vernachlässigbar und der dominante Anteil kommt von  $q\bar{q}$ -Anfangszuständen. Im unteren Teil von Abb. 2.1 sind die Luminositäten für Anfangszustände mit Bottom-Quarks gezeigt. Die gezeigten Kurven für  $qb$  und  $gb$  liegen bei  $E_{\text{cm}} = 100 \text{ GeV}$  etwa ein bis zwei Größenordnungen niedriger als die Kurven in der oberen Figur. Auch hier liefert ab der  $t\bar{t}$ -Schwelle die Luminosität mit leichten Quarks ( $qb$ ) den dominanten Anteil. Der Beitrag von  $b\bar{b}$ -Anfangszuständen ist gemessen an der Gesamt-Luminosität vernachlässigbar.

Für Kollisionen am LHC gibt es keine Proton–Anti-Proton-Symmetrie und deshalb sind nach Tab. 2.3 und Tab. 2.4 weitere Anfangszustände zu berücksichtigen. Diese sind im oberen Diagramm von Abb. 2.2 ( $\bar{q}g$  und  $\bar{q}\bar{q}$ ) dargestellt. Der auffälligste Unterschied im Vergleich zu den Resultaten am Tevatron ist, dass im LHC-Niederenergiebereich der Beitrag von gluon-induzierten Anfangszuständen eine größere Rolle spielt. Bis etwa  $E_{\text{cm}} = 1 \text{ TeV}$  stellen  $qg$ ,  $gg$ ,  $\bar{q}g$  die dominanten Luminositäten. Der erste Beitrag bleibt dabei der Größte bis etwa  $E_{\text{cm}} = 3.5 \text{ TeV}$ . Die  $gg$ - und  $\bar{q}g$ -Kurven fallen mit steigender partonischer Schwerpunktsenergie sehr schnell ab. Ab  $E_{\text{cm}} \simeq 1.3 \text{ TeV}$  sind die  $gg$ - und  $\bar{q}g$ -Luminositäten von der selben Größenordnung wie Beiträge von  $q\bar{q}$ - und  $qq$ -Anfangszuständen. Für Energien  $E_{\text{cm}} > 2 \text{ TeV}$  liefern die Anfangszustände  $qg$ ,  $qq$  und  $q\bar{q}$  den Hauptbeitrag zur Gesamt-Luminosität. Aufgrund des niedrigen Anti-Quark-Gehalts in Proton-Proton-Kollisionen besitzen Anfangszustände mit zwei Anti-Quarks über den gesamten Energiebereich nur einen kleinen relativen Beitrag, gemessen an der Gesamt-Luminosität.

In dem unteren Graphen von Abb. 2.2 sind die Luminositäten für Anfangszustände mit Bottom-Quarks gezeigt. Für Energien bis  $E_{\text{cm}} = 1 \text{ TeV}$  sind die Luminositäten für die Anfangszustände  $qb$ ,  $gb$  und  $\bar{q}b$  etwa von derselben Größenordnung wie der  $\bar{q}\bar{q}$ -Anfangszustand im oberen Diagramm. Auch hier ist der Anfangszustand mit leichten Quarks ( $qb$ ) über einen

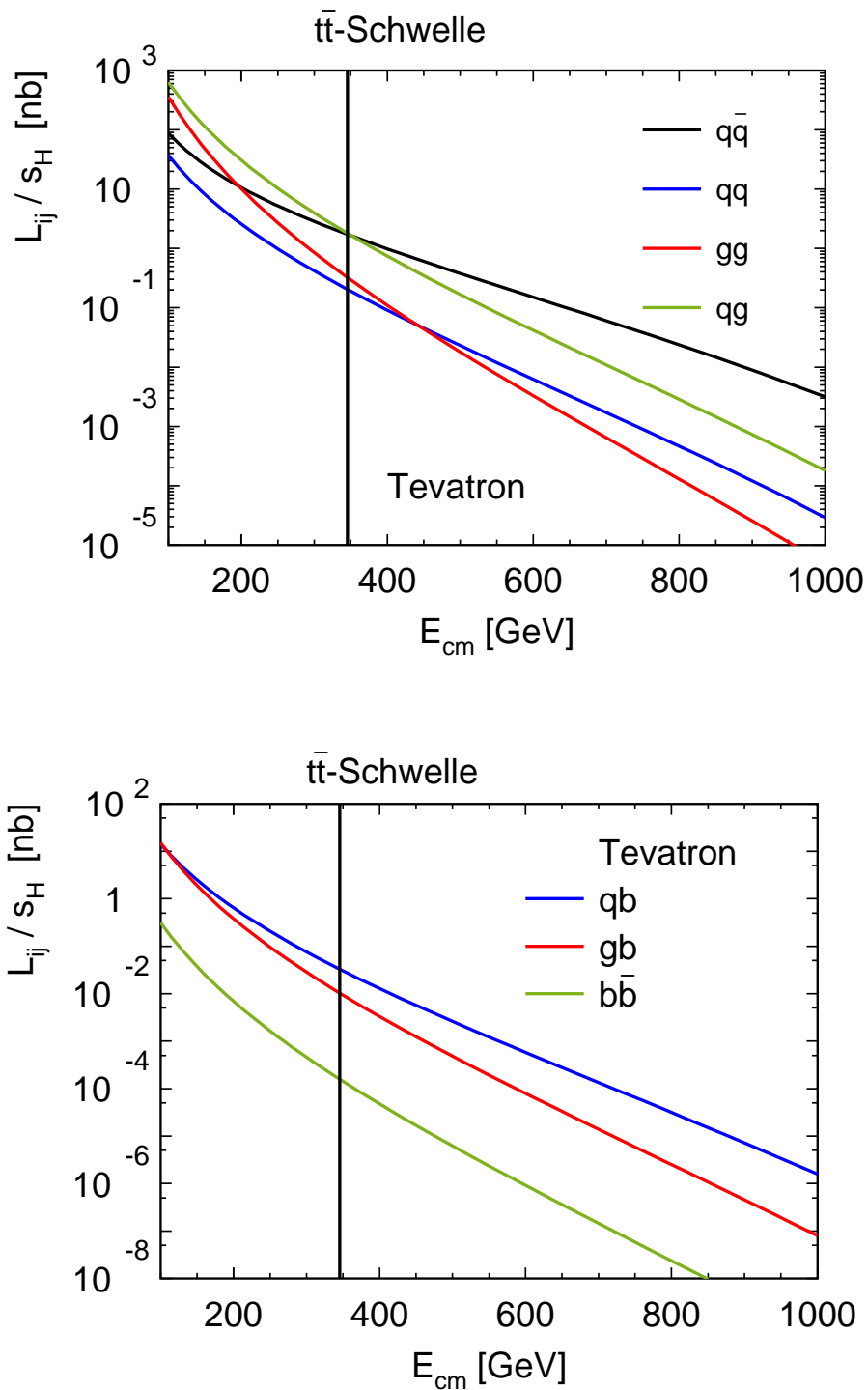


Abbildung 2.1: Gezeigt sind die verschiedenen Parton-Luminositäten am Tevatron (normiert auf das Quadrat der hadronischen Schwerpunktsenergie  $s_H$ ) als Funktion der partonischen Schwerpunktsenergie. Zur Orientierung ist die Produktionsschwelle für die  $t\bar{t}$ -Produktion eingezeichnet.



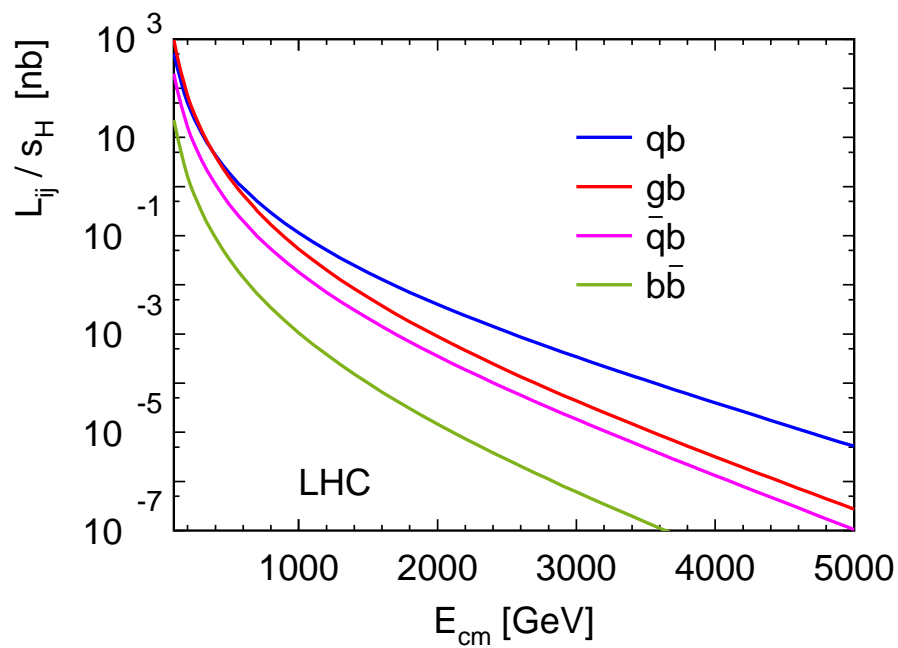
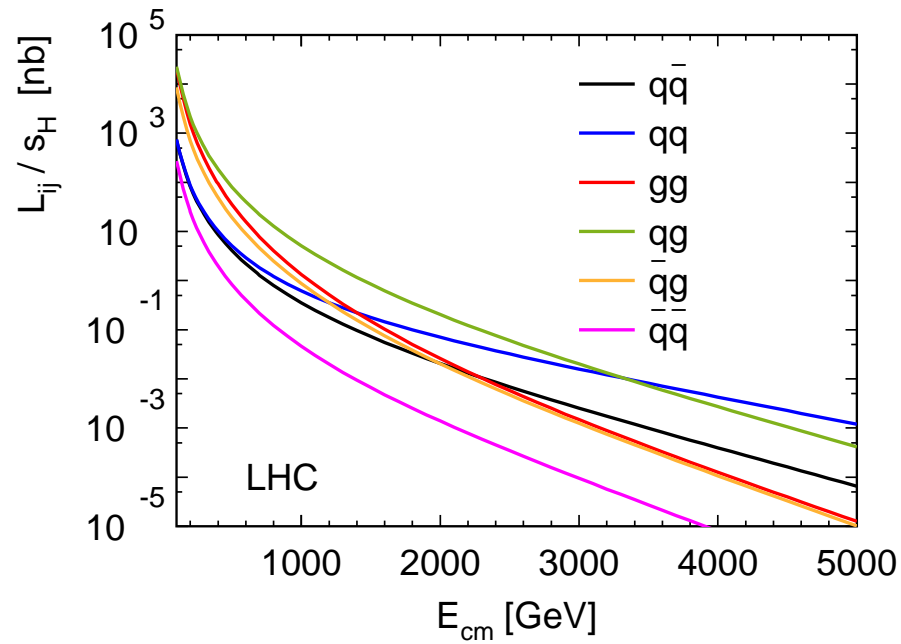


Abbildung 2.2: Gezeigt sind die verschiedenen Parton-Luminositäten am LHC (normiert auf das Quadrat der hadronischen Schwerpunktsenergie  $s_H$ ) als Funktion der partonischen Schwerpunktsenergie.

weiten Energiebereich dominant und liefert für Energien  $E_{\text{cm}} \geq 2$  TeV in etwa die gleiche Luminosität wie der Gluon-Gluon-Anfangszustand in der obigen Figur. Die Luminositäten von  $gb$  und  $\bar{q}b$  fallen schnell ab und sind ab  $E_{\text{cm}} = 2$  TeV etwa eine Größenordnung kleiner als  $qb$ . Die  $b\bar{b}$ -Anfangszustände sind bzgl. Gesamt-Luminosität wiederum vernachlässigbar. Die bisherigen Ausführungen im Hinblick auf den Sudakov-Grenzfall ( $E_{\text{cm}} > 1$  TeV) führen zu dem folgenden Schluss: Bei den Proton–Anti-Proton-Kollisionen am Tevatron sind die Quark–Anti-Quark-Luminositäten am größten. Bei hohen Energien ( $E_{\text{cm}} > 800$  GeV) liefern sie etwa 80-90% der Gesamt-Luminosität. Für einen speziellen Prozess wie  $p\bar{p} \rightarrow t\bar{t}$  in führender Ordnung QCD ist ein relativer Beitrag von 90% von  $q\bar{q}$ -Anfangszuständen bereits ab einer Schwerpunktsenergie von etwa 400 GeV gegeben. Die Effekte von Bottom-Quarks sind bzgl. der Gesamt-Luminosität von der Größenordnung weniger Promille.

Am LHC zeigt sich eine anderes Bild. Im Hochenergiebereich ( $E_{\text{cm}} \geq 2.5$  TeV) sind die Anfangszustände  $qg$  und  $qq$  dominant. Etwa eine Größenordnung darunter liegt die  $q\bar{q}$ -Luminosität, gefolgt von den Anfangszuständen  $gg$  und  $\bar{q}g$ . Der Beitrag von  $\bar{q}\bar{q}$  und Anfangszuständen mit Bottom-Quarks ist bzgl. der Gesamt-Luminosität vernachlässigbar.

Die Unterschiede zwischen den einzelnen Luminositäten können an beiden Beschleunigern einige Größenordnungen betragen. Im Hinblick auf das Studium differentieller Verteilungen liefert das Untersuchen der Parton-Luminositäten einen ersten Anhaltspunkt, welche partonischen Anfangszustände in einem Energiebereich dominieren. Natürlich muss für genauere quantitative Aussagen bzgl. hadronischer Observablen auch das Verhalten der entsprechenden partonischen Wirkungsquerschnitte studiert werden. Dies wird in den folgenden Kapiteln für die einzelnen Prozesse geschehen.

## 2.5 Korrekturen nächstführender Ordnung

In diesem Abschnitt werden Methoden für die in dieser Arbeit behandelten Korrekturen nächstführender Ordnung diskutiert. Da es sich um Berechnungen für Hadronen-Beschleuniger handelt, wird grundsätzlich zwischen gluon-induzierten (mit einem oder zwei Gluonen im Anfangszustand) und quark-induzierten (mit (Anti-)Quark–(Anti-)Quark im Anfangszustand) Beiträgen unterschieden. Des Weiteren werden nur schwache Korrekturen der Ordnung  $\alpha$  betrachtet, d.h. elektromagnetische Korrekturen werden in dieser Arbeit nicht berücksichtigt. Die Trennung von schwachen und elektromagnetischen Korrekturen auf Einschleifen-Niveau ist für die hier behandelten Prozesse eichinvariant möglich. Deshalb kann man die photonischen Korrekturen zu diesen Prozessen separieren und nur die schwachen Korrekturen mit  $Z$ -,  $W$ -,  $\chi$ -,  $\phi$ - und Higgs-Austausch betrachten. Wie sich in Abschnitt 2.6 zeigen wird, ist diese Separation auch phänomenologisch gerechtfertigt.

Zur Berechnung von Korrekturen der nächstführenden Ordnung sind in den vergangenen Jahrzehnten verschiedene Methoden entwickelt worden, um die auftretenden, verhältnismäßig langen Zwischen- und End-Ergebnisse zu handhaben. Im Folgenden werden die verwendeten Methoden kurz erläutert. Für eine ausführliche Beschreibung dieser Methoden

wird auf die angegebene Literatur verwiesen.

### 2.5.1 Virtuelle Korrekturen

Als virtuelle Korrekturen in nächstführender Ordnung  $d\sigma^V$  versteht man die Beiträge, welche sich aus der Interferenz zwischen den Baumgraphen ( $\mathcal{M}^0$ ) und den Einschleifen-Diagrammen ( $\mathcal{M}^1$ ) ergeben

$$d\sigma^V \propto 2\text{Re}[\mathcal{M}^0 \times \mathcal{M}^1].$$

Für die in dieser Arbeit behandelten Prozesse treten die in Abb. 2.3 dargestellten

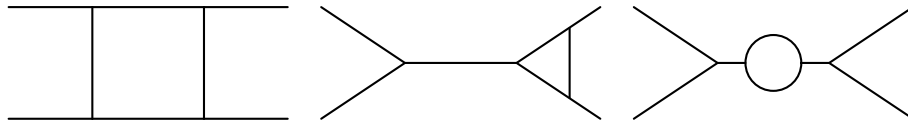


Abbildung 2.3: Beispiele für Einschleifen-Topologien: Boxen, Vertizes, Selbstenergien (von links nach rechts).

Einschleifen-Topologien auf. Es wird zwischen Boxgraphen, Vertex-Korrekturen und Selbstenergien unterschieden. Die einzelnen Diagramme enthalten Tensorintegrale, welche unter Verwendung der Passarino-Veltman-Reduktion [29] auf skalare Integrale reduziert werden. Letztere werden teilweise numerisch unter Verwendung der FF-Bibliothek [30] ausgewertet oder analytisch berechnet. Die analytischen Ergebnisse einiger ausgewählter skalarer Integrale sind in Anhang A aufgelistet, wobei zur Parametrisierung der divergenten Integrale die Methode der dimensional Regularisierung verwendet wird. Die skalaren infrarot-divergenten Vier-Punkt-Funktionen  $D_0^d$  werden dabei mithilfe der Beziehung

$$D_{27}^d = -\frac{1}{2\pi} D_0^{d+2}$$

durch die endlichen Vier-Punkt-Funktionen  $D_0^{d+2}$  in  $d+2$  Dimensionen ersetzt. Dabei bezeichnet  $D_{27}^d$  den Passarino-Veltman-Koeffizienten, welcher in der Zerlegung eines  $D_{\mu\nu}^d$ -Tensors vor  $g_{\mu\nu}$  auftritt. Diese Ersetzung hat den Vorteil, dass alle Infrarot-Pole nun in den skalaren infrarot-divergenten Drei-Punkt-Funktionen  $C_0^d$  enthalten sind. Des Weiteren wird bei der Berechnung der analytischen Ausdrücke nur der Realteil der skalaren Integrale berücksichtigt. Die analytischen Fortsetzungen, welche durch das Anwenden der Crossing-Relationen benötigt werden, sind ebenfalls in Anhang A zu finden.

Aus der Tatsache, dass  $\mathcal{O}(\alpha)$  Korrekturen berechnet werden folgt, dass alle gluon-induzierten Prozesse nur endliche oder ultraviolett (UV) divergente Einschleifen-Diagramme beisteuern. Im Gegensatz dazu enthalten die Korrekturen zu quark-induzierten Prozessen auch infrarot (IR) divergente Diagramme. Die UV-Singularitäten werden durch die Renormierung der Parameter entfernt, welche hier im Formalismus der Counterterme erfolgt. Diese Counterterme

ergeben sich aus der Redefinition der freien Parameter ( $\Psi_0, m_0$ , usw.) in der Lagrange-Dichte

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\Psi_0, A_0, m_0, g_0) &= \mathcal{L}(Z_\Psi^{1/2}\Psi_R, Z_A^{1/2}A_R, Z_m m_R, Z_g g_R) \\ &\equiv \mathcal{L}(\Psi_R, A_R, m_R, g_R) + \mathcal{L}_{ct}(\Psi_R, A_R, m_R, g_R).\end{aligned}\quad (2.30)$$

Der Beitrag  $\mathcal{L}(\Psi_R, A_R, m_R, g_R)$  liefert die üblichen Feynman-Regeln, wobei nun allerdings die freien Parameter der Theorie durch die Renormierten ersetzt sind. Der Zusatzterm  $\mathcal{L}_{ct}$  beschreibt die Counterterme. Die entsprechenden Feynman-Regeln finden sich z.B. in [31]. Hier werden nur  $O(\alpha)$ -Korrekturen zu QCD-Prozessen in führender Ordnung ( $O(\alpha_s^2)$ ) betrachtet. Deshalb ist keine Renormierung der Kopplung nötig, da die Einschleifen-Korrekturen bezüglich der schwachen und der starken Kopplung in führender Ordnung auftreten. Die verbleibende Renormierung der fermionischen Felder  $\Psi$  und Massen  $m$  erfolgt im *on-shell* Schema:

$$m_0 = m + \delta m, \quad (2.31)$$

$$\Psi_0^{R,L} = (Z^{R,L})^{1/2} \Psi^{R,L} = \left(1 + \frac{1}{2} \delta Z^{R,L}\right) \Psi^{R,L}. \quad (2.32)$$

Dabei bezeichnen  $L$  und  $R$  die Chiralitäten der fermionischen Felder. Die Feldrenormierungskonstante  $\delta Z$  wird durch folgende Bedingung an den Fermionpropagator fixiert

$$\lim_{\not{p} \rightarrow m} \frac{1}{\not{p} - m} \hat{\Sigma}(\not{p}) = 0. \quad (2.33)$$

Analog wird die Fermionmasse im *on-shell* Schema durch den Pol des Fermionpropagators definiert

$$\hat{\Sigma}(\not{p} = m) = 0. \quad (2.34)$$

Die Renormierungskonstanten  $\delta Z$  und  $\delta m$  werden durch die entsprechenden Selbstenergien  $\Sigma$  und deren Ableitungen bestimmt

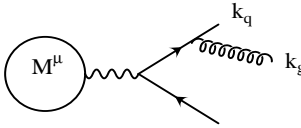
$$\begin{aligned}\delta Z_\Psi^V &= \frac{1}{2}(\delta Z^L + \delta Z^R) = -\Sigma_V(p^2 = m^2) - 2m^2 \frac{\partial}{\partial p^2} (\Sigma_V + \Sigma_S) \Big|_{p^2=m^2}, \\ \delta Z_\Psi^A &= \frac{1}{2}(\delta Z^L - \delta Z^R) = -\Sigma_A(p^2 = m^2), \\ \frac{\delta m}{m} &= -\Sigma_V(p^2 = m^2) - \Sigma_S(p^2 = m^2).\end{aligned}\quad (2.35)$$

Im Rahmen dieser Arbeit werden nur  $\delta Z_\Psi^V$  und  $\frac{\delta m}{m}$  benötigt, da keine paritätsverletzenden Observablen betrachtet werden. Die hier benötigten Selbstenergien sind in [31] zu finden und werden verwendet, um die Renormierungskonstanten als Funktionen von skalaren Integralen zu schreiben. Sie sind in Anhang B angegeben. Für die Top-Quark-Paarproduktion müssen sowohl die (Anti-) Quark-Felder als auch die Top-Quark-Masse renormiert werden. Bei der

Bottom-Jet-Produktion wird das Bottom-Quark als masselos angenommen, weswegen die Renormierung der Felder ausreicht, um UV-endliche Ergebnisse zu erhalten. Zusätzlich zu den UV-Singularitäten treten IR-Singularitäten auf. Deren Kürzung erfolgt durch die Hinzunahme entsprechender reeller Korrekturen die experimentell nicht unterschieden werden können. Dies wird im nächsten Abschnitt diskutiert.

### 2.5.2 Reelle Korrekturen

Die Matrixelemente von reellen Korrekturen nächstführender Ordnung zu einem gegebenen Prozess in führender Ordnung (ohne Schleifen) werden von Baumgraphen gebildet. Diese unterscheiden sich bzgl. der Born-Diagramme darin, dass ein zusätzliches Teilchen im Endzustand auftritt. Man unterscheidet zwischen endlichen und divergenten reellen Korrekturen. Erstere können prinzipiell über den  $n$ -Teilchen-Phasenraum integriert werden, während letztere in bestimmten Bereichen des Phasenraums singularär werden und eine sinnvolle numerische Integration nicht durchführbar ist. Je nach Phasenraumbereich unterscheidet man zwischen weichen und kollinearen Divergenzen. Zum Verständnis dieser Unterscheidung betrachtet man beispielhaft eine Amplitude mit masselosen Endzuständen ( $k_g^2 = k_q^2 = k_{\bar{q}}^2 = 0$ ) welche an einen Vektorstrom koppeln. Die Dirac- und Farb-Struktur dieser Amplitude ergibt sich dann zu



$$\begin{aligned}
 &= M^\mu \times \bar{u}(k_q) i g_s \not{\epsilon}^*(k_g) T_{ij}^a \frac{i(k_q + k_g)}{(k_q + k_g)^2} i \gamma_\mu v(k_{\bar{q}}) \\
 &= M^\mu \times (-i) g_s T_{ij}^a \bar{u}(k_q) \not{\epsilon}^*(k_g) \frac{(k_q + k_g)}{2(k_q \cdot k_g)} \gamma_\mu v(k_{\bar{q}}),
 \end{aligned}$$

wobei  $M^\mu$  die restliche Amplitude bezeichnet. Diesen Ausdruck betrachtet man nun in der sogenannten eikonalen Approximation, d.h. man berechnet die führende Singularität in der Gluon-Energie. Unter Verwendung der Dirac-Gleichung  $\bar{u}(k_q) \not{k}_q = 0$  ergibt sich damit für obige Amplitude

$$\begin{aligned}
 &M^\mu \times (-i) g_s T_{ij}^a \bar{u}(k_q) \not{\epsilon}^*(k_g) \frac{(k_q + k_g)}{2(k_q \cdot k_g)} \gamma_\mu v(k_{\bar{q}}) \\
 &= M^\mu \times (-i) g_s T_{ij}^a \bar{u}(k_q) \frac{(\epsilon^* \cdot k_q)}{(k_q \cdot k_g)} \gamma_\mu v(k_{\bar{q}}) \\
 &= M^\mu \times \bar{u}(k_q) \gamma_\mu v(k_{\bar{q}}) (-i) g_s T_{ij}^a \frac{(\epsilon^* \cdot k_q)}{(k_q \cdot k_g)} \\
 &= M (-i) g_s T_{ij}^a \frac{(\epsilon^* \cdot k_q)}{(k_q \cdot k_g)} \tag{2.36}
 \end{aligned}$$

Wie man erkennen kann faktorisiert die Amplitude in dieser Approximation in einen sogenannten Eikonal-Faktor und die Amplitude  $M$  der führenden Ordnung (ohne Gluon-

Abstrahlung). Diese Faktorisierung in den Eikonalfaktor und die Born-Amplitude ist universell und kann für beliebige Amplituden mit Abstrahlung eines masselosen weichen Eichbosons durchgeführt werden. Schreibt man den Nenner in den Energien  $E_q$  und  $E_g$  des Quarks und des Gluons sowie durch den von diesen Teilchen eingeschlossenen Winkel  $\Theta_{qg}$  ergibt sich Gl. (2.36) zu

$$M (-i)g_s T_{ij}^a \frac{(\epsilon^* \cdot k_q)}{E_q E_g (1 - \cos \Theta_{qg})} \quad (2.37)$$

An diesem Ausdruck kann man erkennen, dass für eine verschwindende Gluon-Energie (ein „weiches Gluon“) eine sogenannte weiche Singularität erzeugt wird. Andererseits wird ebenfalls ein divergenter Ausdruck erzeugt wenn Quark und Gluon kollinear zueinander ( $\Theta_{qg} \rightarrow 0$ ) werden. Man spricht dann von einer kollinearen Singularität. Im Fall eines massiven Quarks ( $k_q = m_q^2$ ) wird die kollineare Divergenz durch die Quark-Masse auf natürliche Weise reguliert

$$M (-i)g_s T_{ij}^a \frac{(\epsilon^* \cdot k_q)}{E_q E_g (1 - \beta_{m_q} \cos \Theta_{qg})}. \quad (2.38)$$

Für massive Quarks treten daher keine kollinearen Singularitäten auf. Das Auftreten von IR-Divergenzen in Übergangsamplituden ist bereits in den 30er Jahren des letzten Jahrhunderts von Bloch und Nordsieck für abelsche Eichtheorien (z.B. QED) untersucht worden [32]. Für nicht-abelsche Eichtheorien wurde dieses Problem von Kinoshita, Lee und Nauenberg in den 70er Jahren gelöst [33, 34]. Die Aussagen der entsprechenden Theoreme von Bloch-Nordsieck und Kinoshita-Lee-Nauenberg (KLN) werden im Folgenden kurz erläutert. Dazu wird der Begriff der „entarteten“ Übergangsamplitude eingeführt. Betrachtet man das Quadrat der reellen Amplitude in Abb. 2.4 im Grenzfall  $E_g \rightarrow 0$ , so erhält man für ein weiches Gluon quasi einen Zwei-Teilchen-Endzustand (Quark und Anti-Quark). Dieser Prozess ist

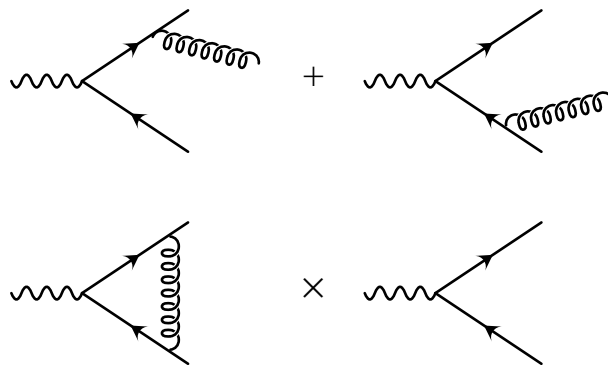


Abbildung 2.4: Beispiel für infrarot-divergente Amplituden zur gleichen Ordnung Störungstheorie. Die reellen Korrekturen werden aus der Summe von zwei Diagrammen gebildet (oben). Die entsprechende virtuelle Korrektur ergibt sich als Interferenz der Born-Amplitude mit der gezeigten Einschleifen-Amplitude (unten).

ununterscheidbar von dem Zustand der gleichen Ordnung (Abb. 2.4) in welchem nur ein Quark–Anti-Quark-Paar vorkommt. Man spricht von einer Energie-Entartung der Übergangsamplitude, denn der Zwei-Quark-Endzustand ist energetisch nicht unterscheidbar von dem Zwei-Quark-Endzustand *plus* einem weichen Gluon. Die Aussage des KLN-Theorems ist nun, dass die Summe über die entarteten Endzustände ein infrarot-endliches Ergebnis liefert. Für das hier angesprochene Beispiel heißt dies, dass die Summe aus virtuellen und reellen Korrekturen frei ist von weichen Divergenzen. Eine analoge Argumentation gilt für entartete kollineare Endzustände und damit ist das Problem der IR-Divergenzen prinzipiell gelöst. Allerdings ergeben sich bei der Umsetzung dieser Lösung einige Schwierigkeiten. Um die explizite Kürzung durchführen zu können, müssen die IR-Pole zunächst regularisiert werden. In den virtuellen Korrekturen treten die Singularitäten in den skalaren Integralen auf und können durch die Wahl eines Regularisierungsschemas analytisch bestimmt werden. Bei den reellen Korrekturen liegen die Divergenzen des Amplitudenquadrats in den Phasenraumbereichen in denen das Gluon weich und/oder kollinear ist. Daher können die IR-Pole der reellen Korrekturen erst nach der Phasenraumintegration explizit bestimmt werden. Dieser Umstand macht eine Kompensation der Divergenzen zwischen virtuellen und reellen Beiträgen sehr schwierig. In den vergangenen Jahrzehnten sind deshalb verschiedene Methoden entwickelt worden um dieses technische Problem zu lösen [13, 22, 35–38]. Im Folgenden werden die in dieser Arbeit verwendeten Lösungen, die Dipol-Subtraktionsmethode und das Ausschneiden der IR-Divergenzen aus dem Phasenraum (*phase-space-slicing*) diskutiert.

### Dipol-Subtraktionsmethode

In diesem Abschnitt wird die Anwendung der Dipol-Subtraktionsmethode [35, 36] skizziert. Für eine detaillierte Beschreibung der Methode wird auf die entsprechenden Referenzen verwiesen. Im Rahmen dieser Methode wird ein hadronischer Wirkungsquerschnitt für einen  $2 \rightarrow m$  Prozess in nächstführender Ordnung wie folgt umgeschrieben [35, 36]

$$\begin{aligned}
\sigma^{\text{NLO}} &= \int_{m+1} d\sigma^{\text{R}} + \int_m d\sigma^{\text{V}} + \int_m d\sigma^{\text{C}} \\
&= \int_{m+1} \left[ \left( d\sigma^{\text{R}} \right)_{\varepsilon=0} - \left( \sum_{\text{dipoles}} d\sigma^{\text{LO}} \otimes dV_{\text{dipole}} \right)_{\varepsilon=0} \right] \\
&+ \int_m \left[ d\sigma^{\text{V}} + d\sigma^{\text{LO}} \otimes \mathbf{I} \right]_{\varepsilon=0} + \int dx \int_m d\sigma^{\text{LO}}(x) \otimes \left( \mathbf{K}(x) + \mathbf{P}(x) \right).
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Die reellen Korrekturen  $d\sigma^{\text{R}}$ , welche über den  $m+1$ -Phasenraum integriert werden, sind mit einem sogenannten Subtraktionsterm versehen worden. Dieser Subtraktionsterm wird aus den Born-Matrixelementen ( $d\sigma^{\text{LO}}$ ) des Prozesses und den sogenannten Dipolen ( $dV_{\text{dipole}}$ ) gebildet. Diese Dipole besitzen im Grenzfall einer weichen und/oder kollinearen Abstrahlung eines Gluons per Konstruktion die gleiche Singularitätenstruktur wie die reellen Korrekturen. Die Differenz dieser beiden Terme kann daher numerisch in  $d = 4$  Dimensionen

integriert werden. Zu den virtuellen Korrekturen wird ein Term addiert, welcher neben dem Born-Matrixelement den sogenannten **I**-Operator enthält. Dieser Operator besitzt bis auf das Vorzeichen dieselbe  $\varepsilon$ -Polstruktur wie die virtuellen Korrekturen in dimensionaler Regularisierung. Der letzte Term in Gl. (2.39) enthält endliche Reste von allen Dipolbeiträgen und der Faktorisierung ( $d\sigma^C$ ) der PDF's in nächstführender Ordnung. Da hier Prozesse in führender Ordnung QCD  $\mathcal{O}(\alpha_s^2\alpha)$  berechnet werden, wird der Beitrag  $d\sigma^C$  nicht benötigt. Im Rahmen der Methode werden diese Beiträge **K**- und **P**-Operatoren genannt. Die Operatoren **I**, **K** und **P** werden auch als integrierte Dipole bezeichnet. Aus dem bisher Gesagten kann man den großen Vorteil der Methode erkennen. Neben den benötigten reellen und virtuellen Korrekturen lassen sich die einzelnen Terme in Gl. (2.39) bis auf das Born-Matrixelement prozessunabhängig konstruieren.

Im Folgenden wird auf die benötigten Dipolbeiträge und Operatoren sowie deren Konstruktion eingegangen. Zu diesem Zweck werden weitere Bezeichnungen der Dipol-Subtraktionsmethode eingeführt. Jeder (integrierte) Dipol-Beitrag beschreibt die weiche und/oder kollineare Abstrahlung von einem Paar einander zugeordneter Partonen. Jenes Parton, welches die kollineare bzw. weiche Konfiguration erzeugt, wird *emitter* genannt. Das andere Parton wird *spectator* genannt. Wie im Abschnitt 2.5.1 bereits erwähnt, sind hier nur quark-induzierte Prozesse (ohne Gluonen im Anfangs- oder Endzustand in führender Ordnung) in nächstführender Ordnung IR-divergent. Dies bedeutet, dass man für die hier behandelten Prozesse nur (Anti-) Quarks als *emitter* und *spectator* zu berücksichtigen hat. Ein weiteres Kriterium zur Unterscheidung der Dipol-Beiträge ist, ob sich *emitter* und *spectator* im Anfangs- oder Endzustand befinden. Demnach kann man für Quarks vier Typen von Dipolen unterscheiden:

- *emitter*  $q$  im Anfangszustand, *spectator*  $q$  im Anfangszustand :  $\mathcal{D}^{qg,q}$
- *emitter*  $q$  im Anfangszustand, *spectator*  $q$  im Endzustand :  $\mathcal{D}_q^{qg}$
- *emitter*  $q$  im Endzustand, *spectator*  $q$  im Anfangszustand :  $\mathcal{D}_{qg}^q$
- *emitter*  $q$  im Endzustand, *spectator*  $q$  im Endzustand :  $\mathcal{D}_{qg,q}$

Dabei beschreibt der Index  $qg$ , dass der *emitter*  $q$  ein weiches/kollineares Gluon  $g$  abstrahlt. In völliger Analogie sind Dipole mit Anti-Quarks bzw. Dipole mit z.B. Quark als *emitter* und Anti-Quark als *spectator* zu klassifizieren. Neben diesen Dipol-Typen werden in der vorliegenden Arbeit keine weiteren benötigt.

Zur Berechnung des Subtraktionsterms in Gl. (2.39) muss nun die Operation „ $\otimes$ “ zwischen Born-Matrixelement und Dipolen durchgeführt werden. Jeder Dipol-Beitrag enthält neben der kollinearen und weichen Singularitätenstruktur sogenannte Spin- (**V**) und Farbkorrelations-Operatoren (**T**). Diese Operatoren sind z.B. für den Dipol  $\mathcal{D}_{qg,q}$  durch

$$\frac{\mathbf{T}_{qg}\mathbf{T}_q}{\mathbf{T}_{qg}^2}\mathbf{V}_{qg,q}$$



	Anfangszustand	Endzustand
Quark $q$ im	$\mathbf{T}_q = -T_{i'i}^a$	$\mathbf{T}_q = T_{ii'}^a$
Anti-Quark $\bar{q}$ im	$\mathbf{T}_{\bar{q}} = T_{ii'}^a$	$\mathbf{T}_{\bar{q}} = -T_{i'i}^a$

Tabelle 2.5: Benötigte Farbkorrelations-Operatoren für die Berechnung der Farbfaktoren für die (integrierten) Dipole.

gegeben. Der Operator  $\mathbf{V}$  enthält die Spininformation des Prozesses. Da das Aufspalten  $q \rightarrow qg$  diagonal im Spinraum ist, werden hier keine Spinkorrelationen benötigt. Die Farbkorrelationen liefern zusammen mit den Born-Amplituden die benötigten Farbfaktoren für die Dipole. Dies ist im allgemeinen wesentlich, da in der QCD im Unterschied zur QED lediglich farbgeordnete Amplituden im weichen Limes faktorisieren. Zur Berechnung wird die Born-Amplitude als Vektor im Farbraum aufgefasst. Um das an einem einfachen Beispiel zu demonstrieren, betrachten wir hier das QCD-Born-Matrixelement zu  $q\bar{q} \rightarrow t\bar{t}$  und berechnen den Farbfaktor für den Dipol  $\mathcal{D}_{tg,\bar{t}}$ . Hier ist der *emitter* das Top-Quark  $t$  und der *spectator* das Anti-Top-Quark  $\bar{t}$ . In der *bra-ket* Schreibweise ist das Born-Matrixelement im Farbraum gegeben als

$$\left| \begin{array}{c} i' \\ \swarrow \\ \text{---} \\ \searrow \\ j' \end{array} \right\rangle \left\langle \begin{array}{c} k' \\ \swarrow \\ \text{---} \\ \searrow \\ l' \end{array} \right\rangle = |T_{j'i'}^a T_{k'l'}^a\rangle.$$

Um den Farbfaktor des Dipols zu bestimmen muss der folgende Ausdruck ausgewertet werden:

$$\mathcal{D}_{tg,\bar{t}} \propto \left\langle \begin{array}{c} \text{---} \\ \swarrow \\ \text{---} \\ \searrow \end{array} \right\rangle \left| \frac{\mathbf{T}_{tg} \mathbf{T}_{\bar{t}}}{\mathbf{T}_{tg}^2} \right| \left\langle \begin{array}{c} \text{---} \\ \swarrow \\ \text{---} \\ \searrow \end{array} \right\rangle = \langle T_{lk}^b T_{ij}^b | \frac{\mathbf{T}_{tg} \mathbf{T}_{\bar{t}}}{\mathbf{T}_{tg}^2} | T_{j'i'}^a T_{k'l'}^a \rangle. \quad (2.40)$$

Die Wirkung der Farbkorrelations-Operatoren  $\mathbf{T}_{tg}$  und  $\mathbf{T}_{\bar{t}}$  kann aus [35] entnommen werden. Sie ist für (Anti-) Quarks in der Tabelle 2.5 zusammengefasst. Der Index  $i'$  bzw.  $i$  bezieht sich dabei auf das *emitter/spectator* Parton im *ket* bzw. *bra* des Born-Matrixelements. Alle anderen (freien) Farbindizes des Born-Matrixelements werden durch die Korrelations-Operatoren kontrahiert. Des Weiteren gilt für das Quadrat von Farbkorrelations-Operatoren im Fall von (Anti-) Quarks  $\mathbf{T}_q^2 = \mathbf{T}_{\bar{q}}^2 = C_F$  ( $C_F = \frac{N^2-1}{2N}$ ). Mit diesen Relationen lässt sich nun der Farbfaktor für den Dipol  $\mathcal{D}_{tg,\bar{t}}$  zu

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{tg,\bar{t}} &\propto \langle T_{lk}^b T_{ij}^b | \frac{\mathbf{T}_{tg} \mathbf{T}_{\bar{t}}}{\mathbf{T}_{tg}^2} | T_{j'i'}^a T_{k'l'}^a \rangle \\ &= \frac{1}{C_F} \langle T_{lk}^b T_{ij}^b | \delta_{ii'} \delta_{jj'} (-T_{kk'}^c) T_{l'l}^c | T_{j'i'}^a T_{k'l'}^a \rangle \\ &= -\frac{1}{C_F} \text{Tr} [T^a T^b] \text{Tr} [T^b T^c T^a T^c] \\ &= \frac{1}{C_F} \frac{(N^2 - 1)}{8N} \end{aligned}$$

bestimmen.

Die analytischen Ausdrücke für die Dipole und die Beiträge der Operatoren  $\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{K}$  und  $\mathbf{P}$  sind in [35, 36] zu finden.

### Phase-space-slicing

Eine andere Möglichkeit, die Kürzung der IR-Divergenzen zwischen virtuellen und reellen Korrekturen durchzuführen, besteht in der Anwendung der *slicing*-Methode. Dabei wird der zur Verfügung stehende Phasenraum der reellen Korrekturen in verschiedene Sektoren „zerschnitten“. Die Grenzen dieser Sektoren werden dabei gerade so gewählt, dass die Phasenraumpunkte in denen die reellen Korrekturen divergieren von den Bereichen mit endlichem Beitrag getrennt werden. Zur Trennung der endlichen und divergenten Beiträge wird ein Schnitt-Parameter eingeführt. Da im Rahmen dieser Arbeit die *phase-space-slicing*-Methode nur auf reelle Beiträge mit weichen Gluonen angewandt wird, wird als Schnitt-Parameter ein Schnitt an die Gluon-Energie  $E_g$  gewählt. Nachdem die Phasenraumbereiche getrennt worden sind, kann der endliche Anteil in  $d = 4$  Dimensionen numerisch integriert werden. Um die IR-Pole zu bestimmen, wird das Integral über den divergenten Phasenraumbereich bzgl. des Gluons in  $d = 4 - 2\epsilon$  Dimensionen ausgewertet. Dabei wird das reelle Amplitudenquadrat in der eikonalen Approximation betrachtet. Das entsprechende 3-Teilchen-Phasenraumintegral über das quadrierte Matrixelement ergibt sich nach Gl. (2.16) zu

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^{d-1}k_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_1} \int \frac{d^{d-1}k_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_2} \int \frac{d^{d-1}k_g}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_g} |\mathcal{M}|^2 \\ &= \int \frac{d^{d-1}k_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_1} \int \frac{d^{d-1}k_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_2} \int \frac{d^{d-1}k_g}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_g} \theta(E_c - E_g) |\mathcal{M}|^2 \\ &+ \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_1} \int \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_2} \int \frac{d^3k_g}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_g} \theta(E_g - E_c) |\mathcal{M}|^2 + \mathcal{O}(\epsilon). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Dabei bezeichnet  $E_c$  den Schnitt an die Gluon-Energie, bei dem der endliche und der divergente Phasenraumbereich getrennt werden. Zur Berechnung des Integrals in  $d = 4 - 2\epsilon$  Dimensionen wird die folgende Parametrisierung

$$\begin{aligned} \int \frac{d^{d-1}k_g}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_g} \theta(E_c - E_g) &= \frac{2\pi^{\frac{d-3}{2}}}{(2\pi)^{d-1} \Gamma(\frac{d-3}{2})} \int_0^{E_c} dE_g E_g^{d-2} \frac{1}{2E_g} \\ &\times \int_0^\pi d\Theta_1 \sin^{d-3}(\Theta_1) \int_0^\pi d\Theta_2 \sin^{d-4}(\Theta_2). \end{aligned} \quad (2.42)$$

verwendet. Für den Eikonalfaktor zweier masseloser Fermionen  $i$  und  $j$  ergibt sich das Integral zu

$$I(k_i, k_j) = \int \frac{d^{d-1}k_g}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_g} \theta(E_c - E_g) \frac{k_i \cdot k_j}{(k_i \cdot k_g)(k_j \cdot k_g)} = \frac{\pi^{\frac{d-3}{2}}}{(2\pi)^{d-1} \Gamma(\frac{d-3}{2})} \int_0^{E_c} dE_g E_g^{d-3}$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_0^\pi d\Theta_1 \sin^{d-3} \Theta_1 \int_0^\pi d\Theta_2 \sin^{d-4} \Theta_2 \\
& \times \frac{k_i \cdot k_j}{E_i E_j E_g^2 (1 - \cos \Theta_1) (1 - \cos \psi \cos \Theta_1 - \sin \Theta_1 \cos \Theta_2 \sin \psi)}.
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Dabei bezeichnet der Winkel  $\psi$  den Winkel zwischen den räumlichen Impulsen  $\vec{k}_i$  und  $\vec{k}_j$ , welcher bei einem konkreten Prozess mit dem Streuwinkel  $z$  der  $2 \rightarrow 2$ -Kinematik in Relation gebracht werden muss. Die Integration über die Winkel  $\Theta_1$  und  $\Theta_2$  ergibt nach der Integraltabelle in [13] (dort sind:  $k = l = 1$ ,  $a = -b$ ,  $A^2 = B^2 + C^2$  mit  $a = 1$ ,  $A = 1$ ,  $B = -\cos \psi$ ,  $C = -\sin \psi$ ):

$$\begin{aligned}
& \int_0^\pi d\Theta_1 \sin^{d-3} \Theta_1 \int_0^\pi d\Theta_2 \sin^{d-4} \Theta_2 \\
& \times \frac{1}{(1 - \cos \Theta_1) (1 - \cos \psi \cos \Theta_1 - \sin \Theta_1 \cos \Theta_2 \sin \psi)} \\
& = 2\pi \frac{-1}{2\varepsilon} \left( \frac{1 - \cos \psi}{2} \right)^{-1-\varepsilon} \left( 1 + \varepsilon^2 \text{Li}_2 \left( \frac{1 + \cos \psi}{2} \right) \right).
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Analog erhält man für die Integration über die Gluon-Energie nach Einführung einer Skala  $\mu^{2\varepsilon}$ :

$$\int_0^{E_c} dE_g E_g^{-1-2\varepsilon} \mu^{2\varepsilon} = \frac{-1}{2\varepsilon} \left( \frac{\mu^2}{E_c^2} \right)^\varepsilon. \tag{2.45}$$

Damit folgt schließlich

$$\begin{aligned}
I(k_i, k_j) & = \frac{\pi}{(2\pi)^{d-1} (4\pi)^\varepsilon} \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \frac{1}{\varepsilon^2} \left( \frac{1 - \cos \psi}{2} \right)^{-\varepsilon} \left( \frac{\mu^2}{E_c^2} \right)^\varepsilon \left( 1 + \varepsilon^2 \text{Li}_2 \left( \frac{1 + \cos \psi}{2} \right) \right) \\
& = \frac{\pi}{(2\pi)^3} \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \frac{1}{\varepsilon^2} (2 - 2\cos \psi)^{-\varepsilon} \left( \frac{4\pi\mu^2}{E_c^2} \right)^\varepsilon \left( 1 + \varepsilon^2 \text{Li}_2 \left( \frac{1 + \cos \psi}{2} \right) \right).
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Mit diesem Ergebnis können die in Kapitel 4 auftretenden Eikonalfaktoren berechnet werden. Aus der Aufspaltung des Phasenraumintegrals in Gl. (2.41) folgt, dass beide Summanden nach der Integration eine logarithmische Abhängigkeit vom Schnitt-Parameter  $E_c$  besitzen. Da das physikalische Resultat (die Summe beider Beiträge) unabhängig von  $E_c$  ist, müssen sich diese Abhängigkeiten nach der Integration numerisch kompensieren. Diese Kompensation stellt den wichtigsten Nachteil der Methode dar, denn die beiden Summanden müssen numerisch sehr genau berechnet werden, damit der Fehler der Summe im Bereich weniger Prozent liegt.

## 2.6 Sudakov-Logarithmen

Der Schwerpunkt dieser Arbeit liegt auf der Berechnung von schwachen  $\mathcal{O}(\alpha)$ -Korrekturen zu Prozessen der Ordnung  $\alpha_s^2$ . Die folgenden Ausführungen beziehen sich deshalb nur auf die rein schwachen  $\mathcal{O}(\alpha)$ -Korrekturen und sind ausführlicher in [10, 11] zu finden. Zunächst wird an dieser Stelle der Ursprung der Sudakov-Logarithmen angeführt. In Abschnitt 2.5.2 wurde die Behandlung von IR-Divergenzen im Rahmen der starken Wechselwirkung diskutiert. Neben den vorgestellten Methoden zur Behandlung der auftretenden Divergenzen, gibt es die Möglichkeit dem masselosen Gluon eine Masse  $\lambda$  zu geben, um weiche und kollineare Singularitäten zu parametrisieren. Mithilfe dieser Regularisierung findet man für die in Abb. 2.4 gezeigte virtuelle Korrektur folgende Strukturen

$$a_1 \ln^2 \left( \frac{\lambda^2}{r} \right) + a_2 \ln \left( \frac{\lambda^2}{r} \right) + a_3 . \quad (2.47)$$

Dabei ist  $r$  eine der Mandelstam-Variablen  $r = s, t, u$ . Die Variablen  $a_1, a_2, a_3$  enthalten die Kinematik und Farbfaktoren des Prozesses. Das KLN-Theorem sagt nun, dass man bis auf das Vorzeichen dieselbe Struktur von Logarithmen in den reellen Korrekturen wiederfindet und die Summe aus beiden Beiträgen unabhängig von der Gluon-Masse  $\lambda$  ist. Diese Kürzung der IR-Pole findet nach der Summation über die Farbfreiheitsgrade statt.

Im Fall eines massiven Eichbosons wie dem  $Z$ -Boson würde man in den virtuellen Korrekturen eine ähnliche Struktur von Logarithmen wie in Gl. (2.47) finden. Natürlich wäre die unphysikalische Masse  $\lambda$  durch die physikalische  $Z$ -Masse  $M_Z$  zu ersetzen und entsprechend auch für den Beitrag der reellen Korrekturen. Damit sind die weichen und kollinearen Divergenzen im Fall massiver Eichbosonen auf natürliche Weise regularisiert. Allerdings kann man nun nicht mehr von entarteten Endzuständen sprechen, denn ein Endzustand mit zwei Fermionen (virtuelle Korrektur) und ein Endzustand mit zwei Fermionen und einem  $Z$ -Boson (reelle Korrektur) sind unterscheidbar. D.h. die virtuellen und reellen Korrekturen sind nun physikalisch separat sinnvolle Beiträge zu verschiedenen Endzuständen bzw. deren Observablen. Eine Summation über den schwachen Isospin würde hier in Analogie zur QCD ebenfalls zu einer Kürzung der Logarithmen führen. Werden die reellen Korrekturen nicht hinzugenommen verbleiben Logarithmen der Form

$$\ln^n \left( \frac{M_Z^2}{r} \right) \quad n = 1, 2$$

in den virtuellen Korrekturen. Diese werden Sudakov-Logarithmen genannt. Man unterscheidet auf Einschleifen-Niveau<sup>1</sup> zwischen führenden ( $n = 2$ ) und nächstführenden ( $n = 1$ ) Logarithmen. Die führenden Logarithmen stammen gerade aus Regionen, in denen das Eichboson „weich“ und „kollinear“ ausgetauscht wird. Dies geschieht gerade beim Austausch des virtuellen Bosons zwischen Paaren von externen Teilchen (Abb. 2.5). Daneben treten dort auch

<sup>1</sup>Die Bezeichnung Sudakov-Logarithmen gilt auch für Logarithmen, welche aus Korrekturen höherer Ordnung stammen.

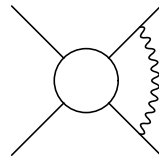


Abbildung 2.5: Generische Einschleifen-Amplitude welche für den Ursprung der führenden und nächstführenden Logarithmen verantwortlich ist.

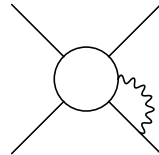


Abbildung 2.6: Generische Einschleifen-Amplitude welche für den Ursprung von nächstführenden Logarithmen verantwortlich ist.

nächstführende Logarithmen auf. Bei einem Austausch zwischen einer externen und einer internen Linie Abb. 2.6, treten dagegen nur nächstführende Logarithmen auf (entspricht einem „weichen“ oder „kollinearen“ Austausch).

Das Auftreten dieser Logarithmen hat phänomenologische Konsequenzen, denn für große Energien werden die Beträge dieser Logarithmen groß. Betrachtet man den Beitrag einer Einschleifen-Korrektur zum Wirkungsquerschnitt, so zeigt sich, dass für  $r \gg M_Z^2$  diese Logarithmen zu einer Korrektur des Wirkungsquerschnitts von der Form

$$\frac{\alpha}{4\pi} \left[ b_1 \ln^2 \left( \frac{M_Z^2}{r} \right) + b_2 \ln \left( \frac{M_Z^2}{r} \right) \right] \quad (2.48)$$

führen. Dabei beinhalten die  $b_i$  kinematische Faktoren sowie Kopplungen des Eichbosons an die externen Teilchen. Der effektive Entwicklungsparameter ist damit nicht länger  $\alpha$  sondern  $\frac{\alpha}{4\pi} \ln(M_Z^2/r)$  bzw.  $\frac{\alpha}{4\pi} \ln^2(M_Z^2/r)$ . Demnach erwartet man für hochenergetische Prozesse große Effekte durch schwache Einschleifen-Korrekturen. Außerdem zeigt die bisherige Argumentation, warum man die elektromagnetischen (photonischen) Korrekturen aus phänomenologischer Sicht vernachlässigen kann. Da diese Korrekturen keine Sudakov-Logarithmen beinhalten, sind keine großen Effekte bei hohen Energien zu erwarten.



# Kapitel 3

## Top-Quark-Paarproduktion

In diesem Kapitel werden die schwachen  $O(\alpha)$ -Korrekturen zu der Paarproduktion von Top-Quarks studiert. Das Kapitel ist in vier Abschnitte unterteilt. Zuerst soll das Studium von Top-Quarks motiviert werden und in einem kurzen Überblick die experimentelle Signatur im Detektor, sowie die wichtigsten experimentellen Ergebnisse skizziert werden. Im zweiten Abschnitt werden dann der totale Wirkungsquerschnitt und differentielle Verteilungen in führender Ordnung Störungstheorie diskutiert und entsprechende Ergebnisse für Tevatron und LHC angegeben. Anschließend werden mit Hilfe der Methoden aus Kapitel 2 die  $O(\alpha)$ -Korrekturen berechnet. Nachdem die Konsistenz der Rechnung diskutiert wurde, werden die Effekte der Ordnung  $\alpha$  für die genannten Observablen dargestellt.

### 3.1 Motivation und experimentelle Aspekte

#### Motivation

Das Top-Quark ist das schwerste fundamentale Fermion im Standardmodell. Seine Masse entspricht in etwa der Masse eines Goldatoms. Diese große Masse sorgte dafür, dass es erst im Jahre 1995 am Tevatron [39, 40] entdeckt werden konnte. Innerhalb des Standardmodells ist das Top-Quark der Partner bzgl. des schwachen Isospins des Bottom-Quarks. Berechnet man die Zerfallsbreite des Top-Quarks ( $t \rightarrow bW$ ) in führender Ordnung gemäß Gl. (2.19), so ergibt sie sich zu

$$\Gamma_{\text{LO}}(t \rightarrow bW) = \frac{\alpha}{16s_W^2} |V_{tb}|^2 \frac{1}{m_t} \frac{(m_t^2 - M_W^2)^2 (m_t^2 + 2M_W^2)}{m_t^2 M_W^2} \quad (3.1)$$

in Übereinstimmung mit [41]. Zahlenmäßig findet man für die Parameter in Abschnitt 2.1,  $\alpha = \frac{1}{128}$  und  $V_{tb} = 1$

$$\Gamma_{\text{LO}}(t \rightarrow bW) = 1.5 \text{ GeV} \quad (3.2)$$

Aus diesem Wert für die Zerfallsbreite kann die mittlere Lebensdauer  $\tau_t = \frac{1}{\Gamma} \simeq 4 \times 10^{-25} \text{ s}$  bestimmt werden. Vergleicht man diesen Wert für  $\tau_t$  mit der charakteristischen Zeitskala der

Hadronisierung  $\tau_{\text{Had}} \simeq \frac{1}{300\text{MeV}} \simeq 2 \times 10^{-24}\text{s}$  so erkennt man, dass das Top-Quark zerfällt bevor es hadronische Zustände bilden kann. Diese Eigenschaft erlaubt es, mit dem Top-Quark ein quasi-freies Quark zu studieren. Somit können Eigenschaften des Top-Quarks wie z.B. seine Polarisation an seinen Zerfallsprodukten gemessen werden. Eine Spin-Analyse in nächstführender Ordnung QCD ist in [14] zu finden. Die herausragende Eigenschaft des Top-Quarks ist seine große Masse, welche im Rahmen des Standardmodells durch den Higgs-Mechanismus erzeugt wird. Vergleicht man die Top-Yukawa-Kopplung  $y_t$  z.B. mit der Elektron-Yukawa-Kopplung  $y_e$  stellt man einen Unterschied von sechs Größenordnungen zwischen diesen Kopplungen fest. Die Yukawa-Kopplungen  $y_i$  sind freie Parameter im Standardmodell, d.h. diese Unterschiede in den Kopplungen können nicht vom Standardmodell erklärt werden. Somit ist das Top-Quark das einzige Fermion, welches mit „natürlicher“ Stärke  $y_t \simeq 1$  an das Higgs-Boson koppelt. Diese Ausnahmestellung des Top-Quarks im Standardmodell hat dazu geführt, dass es eine zentrale Rolle in vielen Erweiterungen des Standardmodells spielt (siehe z.B. [42]). Außerdem sind die Eigenschaften des Top-Quarks zum Zeitpunkt der Fertigstellung dieser Arbeit nicht sehr genau vermessen. Zum Beispiel ist für die Ladung des Top-Quarks bisher nur der Nicht-Standardmodell-Wert von  $-\frac{4}{3}$  ausgeschlossen. Somit bleibt die Top-Quark-Physik auch am LHC von großer Bedeutung, um das Standardmodell zu bestätigen oder zu modifizieren.

## Experimentelle Signatur

In diesem Abschnitt soll auf die experimentelle Signatur der Top-Quark-Paarproduktion eingegangen werden [43]. Das (Anti-) Top-Quark zerfällt unter der Annahme  $V_{tb} = 1$  in ein (Anti-) Bottom-Quark und ein ( $W^-$ )  $W^+$ -Boson. Deshalb ist ein  $t\bar{t}$  Ereignis mit zwei  $b$ -Jets versehen. Die Identifizierung von  $b$ -Jets kann daher benutzt werden, um das Signal-zu-Untergrund-Verhältnis zu erhöhen. Dies erfordert eine entsprechende Unterscheidung von  $b$ -Jets auf der einen und Jets von Gluonen und leichten Quarks auf der anderen Seite. In einem Detektor sind auch die erzeugten  $W$ -Bosonen nicht direkt nachweisbar. Die  $W$ -Bosonen zerfallen ebenfalls und erst ihre Zerfallsprodukte sind zusammen mit den Jets der Bottom-Quarks im Detektor nachzuweisen. Die Zerfallsmoden des  $W$ -Bosons dienen dabei der Klassifikation des  $t\bar{t}$  Ereignisses. Man unterscheidet zwischen

- Di-leptonischer Kanal: Beide  $W$ -Bosonen zerfallen in leichte Leptonen (z.B.  $W^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e$  oder  $W^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$ ).
- Semi-leptonischer Kanal: Ein  $W$ -Boson zerfällt leptonisch, das andere hadronisch (z.B.  $W \rightarrow u \bar{d}$ ).
- Hadronischer Kanal: Beide  $W$ -Bosonen zerfallen hadronisch.
- Zerfall mit  $\tau$  Leptonen: Ein oder beide  $W$ -Bosonen zerfallen in  $\tau^\pm \bar{\nu}_\tau$ , wobei  $\tau^\pm$  wiederum leptonisch oder hadronisch zerfallen kann.



Um das Verzweigungsverhältnis zwischen diesen Zerfallsmoden zu bestimmen, nehmen wir alle Zerfallsprodukte des  $W$ -Bosons als masselos an, was gemessen an der  $W$ -Boson-Masse eine gute Näherung ist. Damit kann man für die leptonischen Zerfallskanäle in führender Ordnung schreiben

$$\Gamma(W^\pm \rightarrow e^\pm \bar{\nu}_e^{(-)}) = \Gamma(W^\pm \rightarrow \mu^\pm \bar{\nu}_\mu^{(-)}) = \Gamma(W^\pm \rightarrow \tau^\pm \bar{\nu}_\tau^{(-)}) = \Gamma_W^0.$$

Für die hadronischen Zerfallskanäle muss die leptonische Zerfallsbreite mit einem Farbfaktor  $N$  multipliziert werden

$$\Gamma(W \rightarrow q\bar{q}') = N\Gamma_W^0.$$

Da wir die CKM-Matrix im vorigen Kapitel zu  $\mathbb{1}$  gesetzt haben, folgt die gesamte hadronische Zerfallsrate zu  $\Gamma_{\text{Had}} = 6\Gamma_W^0$ . Damit folgt für jeden leptonischen Zerfall eines  $W$ -Bosons ein Verzweigungsverhältnis von  $\frac{1}{9}$ , während der Zerfall in Quarks ein Verhältnis von  $\frac{6}{9}$  besitzt. Mit diesen Zahlen lassen sich die Verzweigungsverhältnisse der  $t\bar{t}$ -Zerfallsmoden bestimmen. Sie sind in Tab. 3.1 aufgelistet. Aus experimenteller Sicht sind Zerfallsmoden bei

W Zerfälle	$e^\pm \bar{\nu}_e^{(-)} (\mu^\pm \bar{\nu}_\mu^{(-)})$	$\tau^\pm \bar{\nu}_\tau^{(-)}$	$q\bar{q}'$
$e^\pm \bar{\nu}_e^{(-)} (\mu^\pm \bar{\nu}_\mu^{(-)})$	4/81	4/81	24/81
$\tau^\pm \bar{\nu}_\tau^{(-)}$	–	1/81	12/81
$q\bar{q}'$	–	–	36/81

Tabelle 3.1: Gezeigt sind Wahrscheinlichkeiten für den Zerfall von zwei  $W$ -Bosonen in (Anti-) Quarks und Leptonen.

denen ein (beide)  $W$ -Boson(en) in  $\tau$ -Leptonen zerfallen sehr schwierig zu identifizieren. Deshalb werden solche Prozesse im Folgenden nicht weiter diskutiert. Für den di-leptonischen Kanal ergibt sich ein kleines Verzweigungsverhältnis von etwa 5%. Seine experimentelle Signatur ist gegeben durch zwei Bottom-Quark-Jets, zwei Leptonen und fehlendem Transversalimpuls, welcher von den zwei nicht detektierbaren Neutrinos herrührt. Dieser Kanal hat den Vorteil, dass man aufgrund der zwei Leptonen relativ wenig Untergrundprozesse hat. Der Nachteil ist, dass man aufgrund der nicht direkt nachweisbaren Neutrinos die Top-Quark Viererimpulse nicht vollständig rekonstruieren kann, was z.B. bei der Bestimmung der Top-Quark-Masse zu größeren Unsicherheiten führt. Das größte Verzweigungsverhältnis besitzt der hadronische Kanal mit etwa 44%. Bei diesem Kanal können alle Endzustände (2  $b$ -Jets, 4 Jets) detektiert werden, allerdings hat man beachtliche Beiträge von Untergrundprozessen. Zusammen mit der Tatsache, dass die Messung der Jet-Energien mit großen Unsicherheiten behaftet ist, ist eine exakte Bestimmung der Top-Quark-Eigenschaften in diesem Kanal schwierig. Schließlich ist der semi-leptonische Kanal mit einem Verzweigungsverhältnis von

etwa 30% und kontrollierbaren Untergründen der wichtigste Kanal für die Analyse der Top-Quark-Paarproduktion. Hier besteht der Endzustand aus zwei  $b$ -Jets, zwei Jets, einem Lepton und fehlendem Transversalimpuls (Neutrino). In diesem Zerfallskanal wird am Tevatron das  $t\bar{t}$ -Signal im Wesentlichen von einem isolierten Lepton, fehlendem Transversalimpuls und einem nachgewiesenen  $b$ -Jet bestimmt (aus statistischen Gründen wird nur ein  $b$ -Jet gefordert). In Tab. 3.2 ist die relative Zusammensetzung des Gesamtuntergrundes am Tevatron für diesen Signalprozess gezeigt [44]. Die gezeigten Zahlen sind für eine integrierte Luminosität von  $\mathcal{L} = 1\text{fb}^{-1}$  bei einem Signal-zu-Untergrund-Verhältnis (S:B) von etwa 7 : 1 bestimmt worden. Die Tabelle zeigt, dass die Hauptbeiträge zum Gesamtuntergrund vom QCD-Untergrund und Misidentifikation kommen. Dabei versteht man unter Ersterem QCD-Prozesse, welche z.B. einen  $b$ -Jet und ein isoliertes Lepton erzeugen und somit ein  $t\bar{t}$ -Ereignis im Detektor simulieren können. Unter Misidentifikation versteht man sowohl Detektoreffekte (z.B. vermeintlicher Nachweis eines  $b$ -Jets im Detektor aufgrund instrumenteller Unsicherheiten) als auch Beiträge, welche von leichten Quark- und Gluon-Jets stammen und fälschlicherweise als  $b$ -Jet oder isoliertes Lepton identifiziert werden. Die Abschätzung dieser Untergründe geschieht anhand von Daten. Daneben gibt es weitere Prozesse, welche unter den obigen Forde-

Untergrundprozess	Relativer Anteil (%)
QCD-Untergrund (ohne $W$ -Bosonen)	21.7
Misidentifikation	39.1
$Wc$ -Produktion	1.9
$Wc\bar{c}$ -Produktion	9.7
$Wb\bar{b}$ -Produktion	20.4
$WW$ -, $WZ$ -, $ZZ$ -Produktion	5.2
$t$ -Produktion	2

Tabelle 3.2: Die Tabelle zeigt die Untergrundprozesse für den semi-leptonischen Kanal bei der Top-Quark-Paarproduktion, sowie deren relative Anteile am Gesamtuntergrund.

rungen ein  $t\bar{t}$ -Ereignis simulieren können ( $Wc$ -,  $Wc\bar{c}$ -,  $Wb\bar{b}$ -Produktion) und deren Beiträge ebenfalls anhand von Daten bestimmt werden. Schließlich werden Beiträge von der einfachen Top-Quark-Produktion und der Paarproduktion schwacher Eichbosonen ( $WW$ ,  $WZ$ ,  $ZZ$ ) mithilfe von Monte-Carlo-Simulationen bestimmt.

### Top-Quark Paarproduktion am Tevatron und am LHC

Zum Abschluss sollen kurz die experimentellen Ergebnisse am Tevatron mit den theoretischen Vorhersagen verglichen werden. Außerdem werden die entsprechenden experimentellen und theoretischen Erwartungen für den LHC angegeben. Der totale Wirkungsquerschnitt

für  $t\bar{t}$ -Produktion ergibt sich am Tevatron unter Berücksichtigung aller Zerfallsmoden zu [45] (Stand: April 2008):

$$\sigma_{\text{Tevatron}}^{\text{Exp}} = 7.3 \pm 0.5(\text{stat.}) \pm 0.6(\text{syst.}) \pm 0.4(\text{lumi.}) \text{ pb} \quad (3.3)$$

Dabei beziehen sich die angegebenen Fehler auf statistische (stat.) und systematische Unsicherheiten (syst.) sowie auf Unsicherheiten der Beschleuniger-Luminosität (lumi.). Der angegebene Wert stimmt im Rahmen der Fehler sehr gut mit der theoretischen Vorhersage überein. Diese ergibt sich für  $m_t = 172 \text{ GeV}$  nach [46] zu:

$$\sigma_{\text{Tevatron}}^{\text{Theo}} = 7.2 \pm 0.9 \text{ pb} \quad (3.4)$$

Der angegebene Fehler berücksichtigt dabei Unsicherheiten bzgl. der Faktorisierungsskala  $\mu_F$ , der Renormierungsskala  $\mu_R$  und Unsicherheiten der Partonverteilungsfunktionen. Am LHC wird die theoretische Vorhersage für den Wirkungsquerschnitt nach [46] mit ( $m_t = 172 \text{ GeV}$ )

$$\sigma_{\text{LHC}}^{\text{Theo}} = 865 \pm 121 \text{ pb} \quad (3.5)$$

angegeben. Nach [47] wird am LHC der totale Wirkungsquerschnitt bis auf 10% genau gemessen werden können. Dabei sind die limitierenden Unsicherheiten systematischer Natur (z.B. aufgrund von Unsicherheiten der Jet-Energie). Zum Zeitpunkt des Abschlusses dieser Arbeit ergibt sich aus den Messungen an CDF und D0 der folgende Wert für die Top-Quark-Masse [45] (Stand: April 2008):

$$m_t = 172.6 \pm 0.8(\text{stat}) \pm 1.1(\text{syst}) \text{ GeV}. \quad (3.6)$$

## 3.2 Hadronische Top-Quark-Paarproduktion in führender Ordnung

An Hadronen-Beschleunigern gibt es (unter Vernachlässigung von Photonen im Anfangszustand) zwei partonische Prozesse in führender Ordnung um  $t\bar{t}$ -Paare zu produzieren. Zum einen die Quark–Anti-Quark-Paarvernichtung und zum anderen die Gluonfusion mit zwei Gluonen im Anfangszustand. Die Feynman-Diagramme für die QCD-Prozesse ( $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ ) sind in Abb. 3.1 abgebildet. Dabei wird beim gluon-induzierten Prozess nach  $s$ -,  $t$ - und  $u$ -Kanal unterschieden. Eine andere Möglichkeit findet man im elektroschwachen Sektor des Standardmodells. Anstatt in ein Gluon zu annihilieren, kann ein Quark–Anti-Quark-Paar auch ein virtuelles  $Z$ -Boson oder ein Photon erzeugen, welches dann in das Top-Quark-Paar zerfällt. Daneben gibt es einen Beitrag, bei dem zwei Bottom-Quarks unter  $W$ -Boson Streuung ein  $t\bar{t}$ -Paar erzeugen. Die Feynman-Diagramme für diese elektroschwachen Beiträge ( $\mathcal{O}(\alpha^2)$ ) zur Top-Quark-Paarproduktion sind in Abb. 3.2 dargestellt. Schließlich gibt es einen Beitrag der Ordnung  $\alpha_s\alpha$  (Abb. 3.3), welcher unter der Annahme ( $V_{tb} = 1$ ) nur von Bottom-Quarks induziert werden kann.

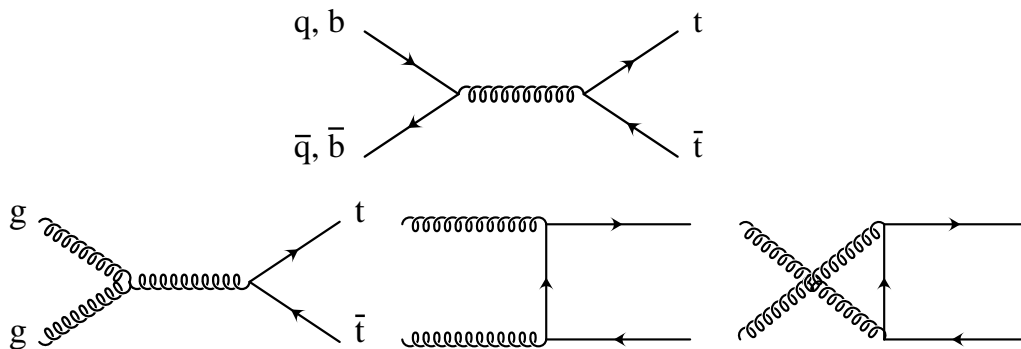


Abbildung 3.1: Feynman-Diagramme zur Top-Quark-Paarproduktion mit Quark–Antiquark-Paarvernichtung (oben) und Gluonfusion mit  $s$ -,  $t$ - und  $u$ -Kanal (unten).

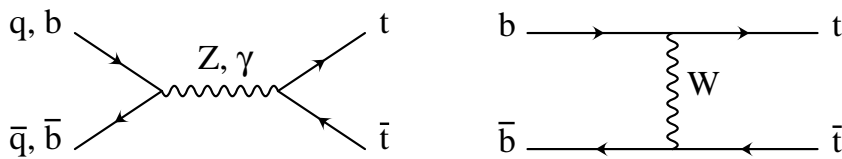


Abbildung 3.2: Feynman-Diagramme zur Quark–Antiquark-Paarvernichtung durch  $Z$ -Boson und Photon (links) und Bottom-Quark–Anti-Bottom-Quark-Streuung (rechts).

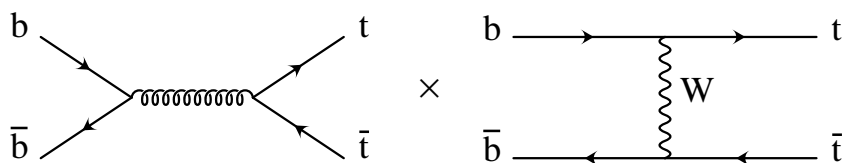


Abbildung 3.3: Interferenz zwischen der bottom-induzierten QCD Amplitude und der schwachen Amplitude mit  $W$ -Boson Austausch.

Berechnet man mithilfe der Feynman-Regeln aus Kapitel 2 die Amplitudenquadrate und nimmt alle einlaufenden Teilchen als masselos an, so ergeben sich für die verschiedenen Prozesse folgende Resultate

$$\overline{\sum} \left| \mathcal{M}_{q\bar{q} \rightarrow t\bar{t}}^{\alpha_s^2} \right|^2 = \overline{\sum} \left| \mathcal{M}_{b\bar{b} \rightarrow t\bar{t}}^{\alpha_s^2} \right|^2 = \alpha_s^2 (2\pi)^2 \frac{N^2 - 1}{N^2} (2 - \beta^2(1 - z^2)), \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \overline{\sum} \left| \mathcal{M}_{gg \rightarrow t\bar{t}}^{\alpha_s^2} \right|^2 &= \alpha_s^2 (2\pi)^2 \frac{(N^2 - 2 + N^2 z^2 \beta^2)}{(1 - z^2 \beta^2)^2 N(N - 1)} \\ &\times (1 - z^4 \beta^4 + 2\beta^2(1 - z^2)(1 - \beta^2)), \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \overline{\sum} \left| \mathcal{M}_{q\bar{q} \rightarrow t\bar{t}}^{\alpha_s^2} \right|^2 &= \alpha^2 (4\pi)^2 \left[ Q_q^2 Q_t^2 (2 - \beta^2(1 - z^2)) \right. \\ &+ \frac{s^2}{(s - M_Z^2)^2} \left( (g_v^{q2} + g_a^{q2})(g_v^{t2}(2 - \beta^2(1 - z^2))) \right. \\ &+ \left. g_a^{t2} \beta^2(1 + z^2) - 8g_v^q g_a^q g_v^t g_a^t \beta z \right) \\ &+ 2Q_q Q_t \frac{s}{s - M_Z^2} \left( g_v^q g_v^t (2 - \beta^2(1 - z^2)) \right. \\ &\left. \left. - 2g_a^q g_a^t \beta z \right) \right], \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \overline{\sum} \left| \mathcal{M}_{b\bar{b} \rightarrow t\bar{t}}^{\alpha_s^2} \right|^2 &= \alpha^2 (4\pi)^2 \left[ Q_b^2 Q_t^2 (2 - \beta^2(1 - z^2)) \right. \\ &+ \frac{s^2}{(s - M_Z^2)^2} \left( (g_v^{b2} + g_a^{b2})(g_v^{t2}(2 - \beta^2(1 - z^2))) \right. \\ &+ \left. g_a^{t2} \beta^2(1 + z^2) - 8g_v^b g_a^b g_v^t g_a^t \beta z \right) \\ &+ 2Q_b Q_t \frac{s}{s - M_Z^2} \left( g_v^b g_v^t (2 - \beta^2(1 - z^2)) - 2g_a^b g_a^t \beta z \right) \\ &+ 64g_W^4 \frac{(1 - \beta z)^2}{(s(1 + \beta^2) + 2s\beta z + 4M_W^2)^2} \\ &- 8g_W^2 \frac{Q_b Q_t}{N} \frac{s(2 - \beta^2(1 - z^2) - 2\beta z)}{s(1 + \beta^2) + 2s\beta z + 4M_W^2} \\ &- 8g_W^2 \frac{g_v^b + g_a^b}{N} \frac{s^2}{(s - M_Z^2)(s(1 + \beta^2) + 2s\beta z + 4M_W^2)} \\ &\left. \times \left( g_v^t (2 - \beta^2(1 - z^2) - 2\beta z) + g_a^t \beta^2(1 + z^2) \right) \right], \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\overline{\sum} \left| \mathcal{M}_{b\bar{b} \rightarrow t\bar{t}}^{\alpha_s \alpha} \right|^2 = -\alpha_s \alpha (8\pi)^2 g_W^2 \frac{N^2 - 1}{N^2} \frac{s(2 - \beta^2(1 - z^2) - 2\beta z)}{s(1 + \beta^2) + 2s\beta z + 4M_W^2}. \quad (3.11)$$

Dabei sind die Kopplungen an die elektroschwachen Eichbosonen in Abschnitt 2.1 definiert. Um die entsprechenden partonischen Wirkungsquerschnitte zu erhalten, müssen obige Ergebnisse in Gl. (2.18) eingesetzt werden.

Der totale hadronische Wirkungsquerschnitt in führender Ordnung wird im Folgenden bei einer Faktorisierungsskala  $\mu = \mu_R = \mu_F = 2m_t$  berechnet. Dabei werden für die starke Kopplung und die Feinstrukturkonstante die numerischen Werte

$$\alpha_s(\mu) = 0.1, \quad \alpha(\mu) = \frac{1}{126.3} \quad (3.12)$$

verwendet. Für den Tevatron-Beschleuniger ergibt sich der totale Wirkungsquerschnitt für die  $t\bar{t}$ -Produktion dann zu

$$\sigma^{\text{TEV}} = 4.42 \text{ pb}, \quad (3.13)$$

wobei 99% des Produktionsquerschnitts von QCD induzierten Prozessen mit leichten Quarks ( $q\bar{q}$ ) und Gluonen ( $gg$ ) stammen

$$\sigma_{\text{QCD}}^{\text{TEV}} = \sigma_{q\bar{q}}^{\text{TEV}} + \sigma_{gg}^{\text{TEV}} = 4.18 \text{ pb} + 0.2 \text{ pb} = 4.38 \text{ pb}. \quad (3.14)$$

Für den LHC findet man einen ähnlichen Sachverhalt für den totalen Wirkungsquerschnitt

$$\sigma^{\text{LHC}} = 425 \text{ pb}. \quad (3.15)$$

mit einem QCD-Anteil von

$$\sigma_{\text{QCD}}^{\text{LHC}} = \sigma_{q\bar{q}}^{\text{LHC}} + \sigma_{gg}^{\text{LHC}} = 56 \text{ pb} + 366 \text{ pb} = 422 \text{ pb}. \quad (3.16)$$

Man erkennt, dass der Produktionsquerschnitt von Top-Quark-Paaren am Tevatron deutlich durch die Quark–Antiquark-Paarvernichtung dominiert wird. Dies war aufgrund der Luminositätsstudien in Kapitel 2.4 zu erwarten. Entsprechend wird aufgrund der gegebenen Luminositäten der totale Wirkungsquerschnitt am LHC von der Gluonfusion dominiert. Die Beiträge von elektroschwachen und bottom-induzierten Prozessen sind in beiden Fällen von der Größenordnung 1%. An dieser Stelle muss erwähnt werden, dass die obigen Werte für die totalen Wirkungsquerschnitte wesentlich kleiner sind als die theoretischen Vorhersagen, welche in Kapitel 3.1 angegeben wurden. Diese Unterschiede sind auf Beiträge der nächstführenden Ordnung QCD und der Resummation von weichen Gluonen zurückzuführen, welche hier nicht berücksichtigt werden [14, 15]. Im nächsten Schritt werden differentielle Observablen in führender Ordnung betrachtet. Dazu werden der Transversalimpuls des Top-Quarks  $p_T$  und die invariante  $t\bar{t}$ -Masse  $M_{t\bar{t}}$  studiert. Legt man die  $z$ -Achse in Richtung der Strahlachse sind sie definiert als

$$p_T = \sqrt{k_{t_1}^2 + k_{t_2}^2}, \quad M_{t\bar{t}} = \sqrt{(k_t + k_{\bar{t}})^2}, \quad (3.17)$$

wobei  $k_t$  und  $k_{\bar{t}}$  die Vierer-Impulse des Top-Quarks bzw. des Anti-Top-Quarks bezeichnen. Betrachtet man nun den differentiellen Wirkungsquerschnitt als Funktion dieser Größen, so ergeben sich für Tevatron und LHC die Verteilungen in Abb. 3.4 und Abb. 3.5. Wie man erkennen kann, spiegeln die Verteilungen den Sachverhalt der totalen Produktionsquerschnitte Gln. (3.13),(3.15) wieder. Der differentielle Wirkungsquerschnitt am Tevatron wird von der Quark–Antiquark-Paarvernichtung so stark dominiert, dass die Summe aller Beiträge und der QCD  $q\bar{q}$ -Beitrag fast identisch sind. Der relative Beitrag des Gluonfusions-Prozesses ist für die gezeigten Verteilungen nur im Prozent- bis Promille-Bereich. Dieser große Unterschied in den relativen Beiträgen von  $q\bar{q} \rightarrow t\bar{t}$  und  $gg \rightarrow t\bar{t}$  ist im Wesentlichen auf die Parton-Luminositäten in Abschnitt 2.4 zurückzuführen. Die Parton-Luminosität des  $q\bar{q}$ -Anfangszustandes ist schließlich dafür verantwortlich, dass die quark-induzierten elektroschwachen Prozesse ab Energien von 500 GeV einen größeren Relativbeitrag liefern, als der Gluonfusions-Prozess. Allerdings sind dort beide Relativbeiträge nur noch von der Größenordnung weniger Promille. Die bottom-quark-induzierten Prozesse sind in allen Energiebereichen phänomenologisch irrelevant.

Die differentiellen Verteilungen am LHC zeigen ein anderes Verhalten. Entsprechend der Parton-Luminositäten dominiert der Gluonfusions-Prozess beide Verteilungen für  $M_{t\bar{t}} < 4.5$  TeV ( $p_T < 900$  GeV). Allerdings wird der QCD-Beitrag der Quark–Anti-Quark-Paarvernichtung mit steigender Energie immer wichtiger und im Fall der  $p_T$ -Verteilung dominiert er für  $p_T > 1.5$  TeV. Dieses Verhalten wird ebenfalls von den am LHC gegebenen Parton-Luminositäten bestimmt. Dies kann man mithilfe von Abb. 3.6 einsehen. Dort ist das Verhältnis der partonischen Wirkungsquerschnitte von  $q\bar{q} \rightarrow t\bar{t}$  und  $gg \rightarrow t\bar{t}$  bei festgehaltener Schwerpunktsenergie als Funktion von  $z$  dargestellt. Wie man erkennen kann, liegt das Verhältnis der beiden Funktionen zwischen 1 (bei großen Streuwinkeln) und etwa 10 (parallel zur Strahlachse). Verglichen mit den Unterschieden in der Luminosität Abb. 2.2 spielt diese Verhältnis bei hohen  $p_T$ -Werten aber eine untergeordnete Rolle. Abschließend spielen analog zu den Ergebnissen am Tevatron auch am LHC die elektroschwachen und bottom-quark-induzierten Prozesse keine phänomenologische Rolle.

Zusammengefasst zeigt sich, dass zum Studium der schwachen  $O(\alpha)$ -Korrekturen eine Beschränkung auf die QCD-Prozesse  $q\bar{q} \rightarrow t\bar{t}$  und  $gg \rightarrow t\bar{t}$  gerechtfertigt ist. Alle anderen Beiträge liegen relativ zur Summe dieser beiden Prozesse im Promille bis Sub-Promille Bereich und sind für das Studium der hier angesprochenen Observablen im Rahmen der Messgenauigkeit an Hadronen-Beschleunigern nicht von Bedeutung. Deshalb werden im folgenden Abschnitt nur die schwachen  $O(\alpha)$  Korrekturen zur Gluonfusion und zur Quark–Antiquark-Paarvernichtung diskutiert.

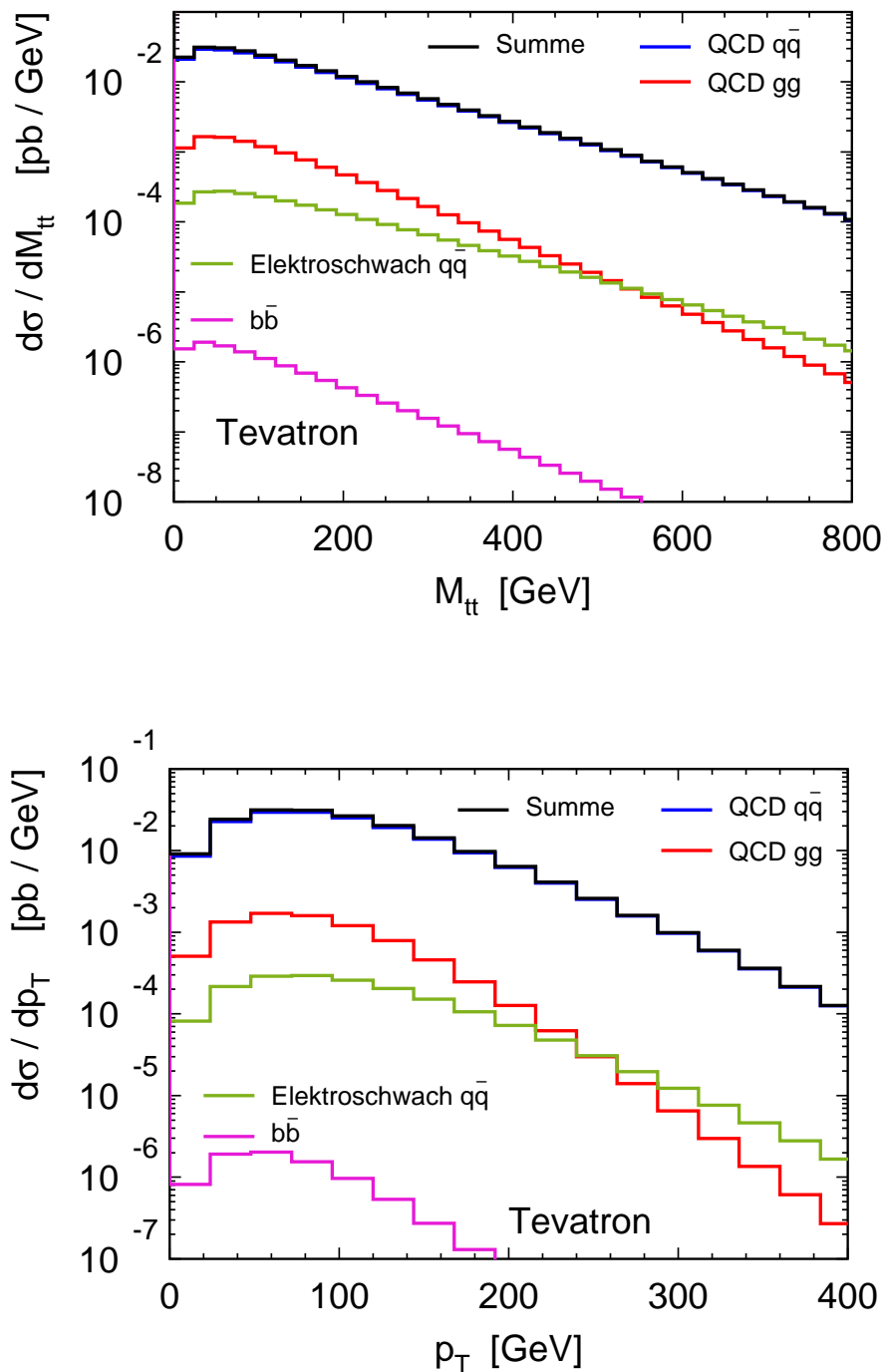


Abbildung 3.4: Gezeigt ist die Zusammensetzung des differentiellen Wirkungsquerschnitts als Funktion von  $M_{t\bar{t}}$  (oben) und  $p_T$  (unten) am Tevatron. Die schwarze Linie stellt die Summe aller Beiträge dar. Sie setzt sich aus gluon-induzierten (rot), QCD quark-induzierten (blau, fast deckungsgleich mit „schwarz“), bottom-induzierten (magenta) und elektroschwachen (grün) Beiträgen zusammen.



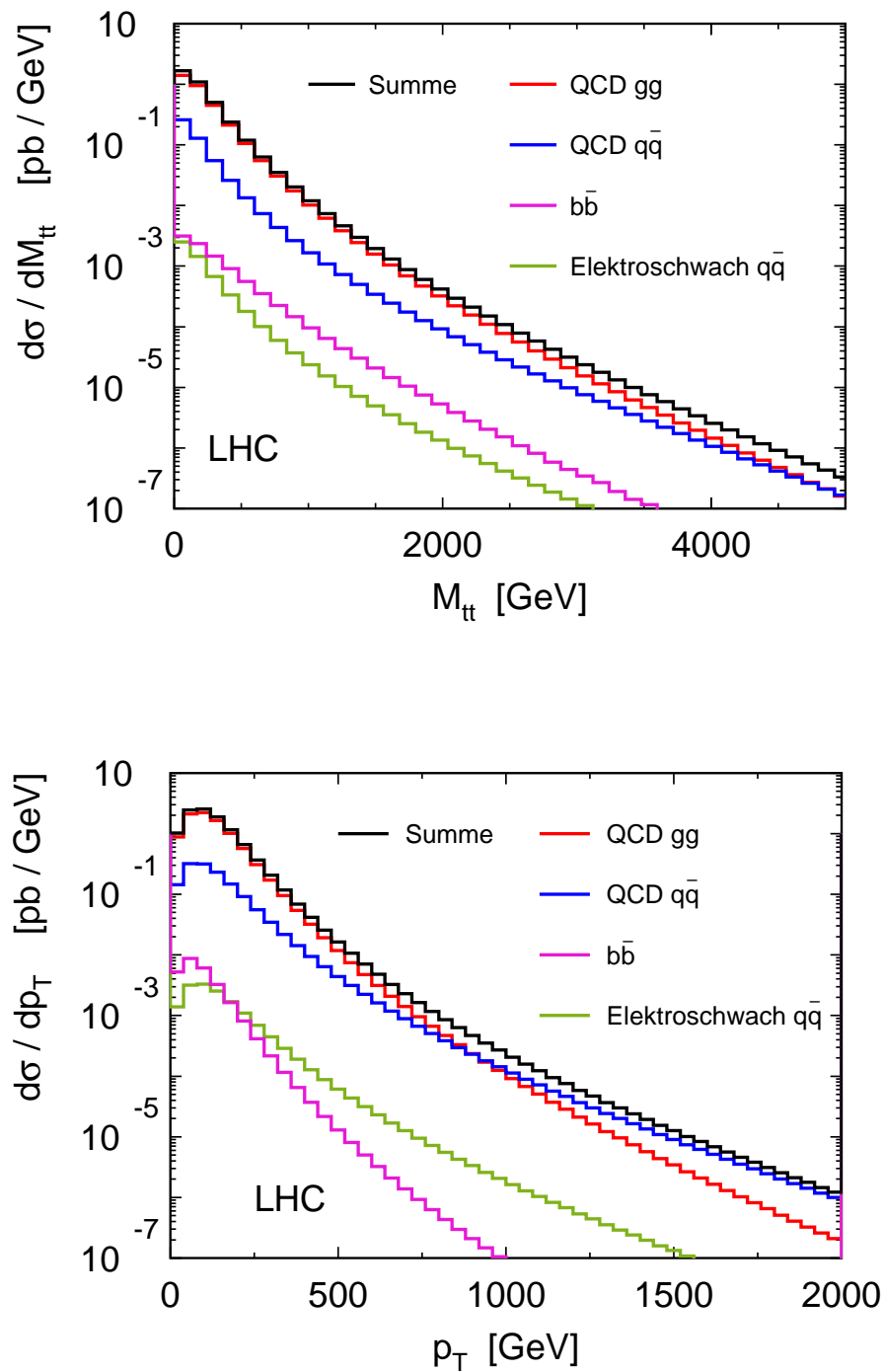


Abbildung 3.5: Gezeigt ist die Zusammensetzung des differentiellen Wirkungsquerschnitts als Funktion von  $M_{t\bar{t}}$  (oben) und  $p_T$  (unten) am LHC. Die schwarze Linie stellt die Summe aller Beiträge dar. Sie setzt sich aus gluon-induzierten (rot), QCD quark-induzierten (blau), bottom-induzierten (magenta) und elektroschwachen (grün) Beiträgen zusammen.

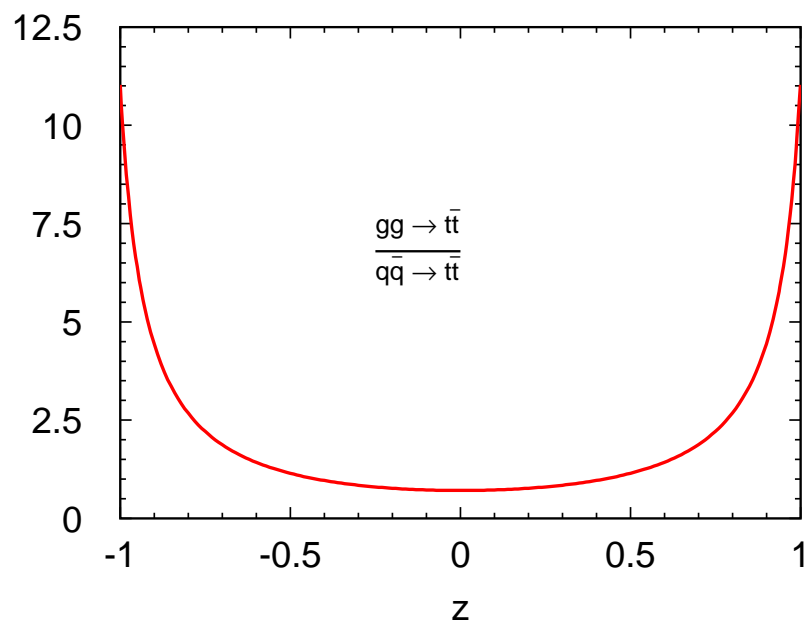


Abbildung 3.6: Gezeigt ist das Verhältnis der beiden partonischen QCD Wirkungsquerschnitte  $gg \rightarrow t\bar{t}$  über  $q\bar{q} \rightarrow t\bar{t}$  bei festgehaltener Schwerpunktsenergie als Funktion des Streuwinkels  $z = \cos \Theta$ .

### 3.3 Korrekturen der Ordnung $\alpha$ zur hadronischen $t\bar{t}$ -Produktion

In diesem Abschnitt werden die Beiträge der Ordnung  $\alpha_s^2\alpha$  zur Top-Quark-Paarproduktion berechnet und ihre phänomenologische Relevanz diskutiert. Zur Bestimmung der Einschleifen-Korrekturen und den reellen Korrekturen werden die Methoden aus Kapitel 2 verwendet. Im Rahmen dieses Kapitels wird nur noch auf die Eigenschaften einzelner Bausteine eingegangen. Des Weiteren wird bei der Berechnung der  $\mathcal{O}(\alpha)$ -Korrekturen das Bottom-Quark als massiv angenommen

$$m_b = 4.82 \text{ GeV}.$$

#### 3.3.1 Korrekturen zu $q\bar{q} \rightarrow t\bar{t}$

Die virtuellen partonischen  $\mathcal{O}(\alpha)$ -Korrekturen waren Thema meiner Diplomarbeit. Ihr Einfluss auf den totalen Wirkungsquerschnitt des  $q\bar{q} \rightarrow t\bar{t}$ -Kanals wurde in [48] dargestellt. In der vorliegenden Arbeit sollen hadronische differentielle Verteilungen untersucht werden. Da der Einfluss der partonischen  $\mathcal{O}(\alpha)$ -Korrekturen zu  $q\bar{q} \rightarrow t\bar{t}$  für dieses Studium wesentlich ist, werden diese Korrekturen hier noch einmal diskutiert.

Die schwachen Korrekturen  $\mathcal{O}(\alpha_s^2\alpha)$  zum  $q\bar{q} \rightarrow t\bar{t}$  Prozess setzen sich aus den Box- und Vertex-Diagrammen (Abb. 2.3) zusammen. Dabei muss man beachten, dass sich für die Box-Diagramme zwei verschiedene Beiträge zu dieser Ordnung ergeben, welche in Abb. 3.7 dargestellt sind. Diese Beiträge sind UV-endlich und müssen nicht renormiert werden. Allerdings sind sie IR-divergent und es müssen die entsprechenden reellen Korrekturen hinzugenommen werden (Abb. 3.8).

Die Vertex-Korrekturen sind nicht UV-endlich und müssen unter Hinzunahme der entsprechenden Counterterme (siehe Abb. 3.9) renormiert werden. Dabei wird für diese Korrekturen nur eine Renormierung der Felder benötigt. Dies geschieht im *on-shell*-Schema unter Verwendung der Renormierungskonstanten aus Anhang B. An dieser Stelle wird auf die Angabe der analytischen Ergebnisse verzichtet, sie können in [48] nachgeschlagen werden. In Abb. 3.10 sind die verschiedenen NLO Beiträge zum partonischen Wirkungsquerschnitt normiert auf den partonischen Born-Wirkungsquerschnitt als Funktion der partonischen Schwerpunktsenergie dargestellt. Dies ist in den gezeigten Diagrammen für up-artige Quarks im Anfangszustand gezeigt. Wie man in der oberen Figur erkennen kann sind die relativen Beiträge der Box-Graphen und der reellen Korrekturen positiv und liegen zwischen 0.5 – 2%. Die Beiträge der Vertex-Korrekturen sind für eine Higgs-Masse von 120 GeV bis zu einer Schwerpunktsenergie von etwa 400 GeV positiv und wechseln dann das Vorzeichen. Mit ansteigender Energie zeigen diese Beiträge dann das erwartete Sudakov-Verhalten, d.h. große negative Korrekturen welche auf die Sudakov-Logarithmen zurückzuführen sind. Bei Energien zwischen 1 – 3 TeV liefert die Summe aller Beiträge der Ordnung  $\alpha_s^2\alpha$  eine relative Korrektur von 10 – 20% zum partonischen  $q\bar{q} \rightarrow t\bar{t}$ -Produktionsquerschnitt in führen-

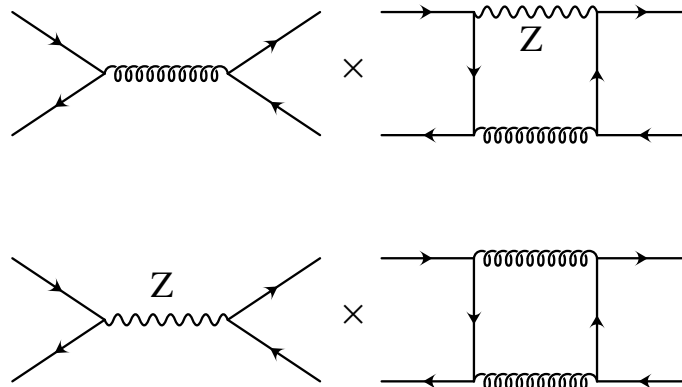


Abbildung 3.7: Einschleifen-Box-Diagramme für die Top-Quark-Paarproduktion zur Ordnung  $\alpha_s^2 \alpha$ .

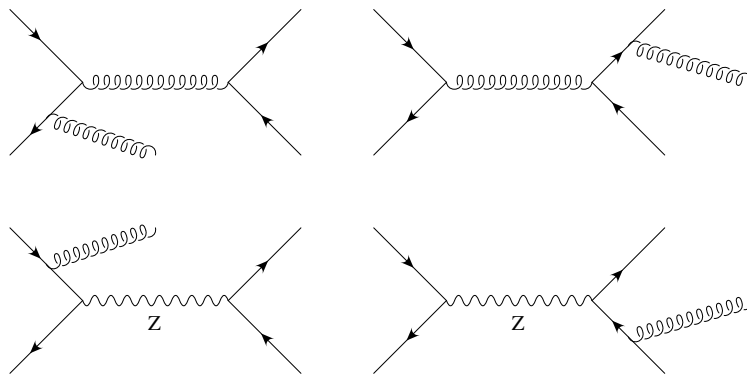


Abbildung 3.8: Beispieldiagramme für die reellen Korrekturen.

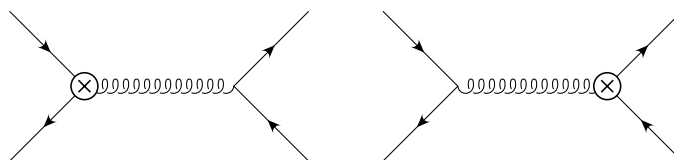


Abbildung 3.9: Counterterm-Diagramme für  $q\bar{q} \rightarrow t\bar{t}$ .

der Ordnung. Im unteren Diagramm von Abb. 3.10 ist die Abhängigkeit der partonischen Korrekturen von der Higgs-Masse dokumentiert. In der  $t\bar{t}$ -Schwellenregion ist eine starke Abhängigkeit der relativen Korrekturen zu erkennen. Direkt an der Schwelle ergibt sich im Vergleich von  $m_H = 120$  GeV und  $m_H = 1000$  GeV ein Unterschied von +6%. Für Energien  $E_{\text{cm}} > 600$  GeV stellt sich bzgl. der relativen Korrekturen ein Unterschied von etwa bei 2% zwischen einem leichten ( $m_H = 120$  GeV) und einem sehr schweren ( $m_H = 1$  TeV) Higgs-Boson ein.

### 3.3.2 Korrekturen zu $gg \rightarrow t\bar{t}$

In diesem Abschnitt werden die Korrekturen zur Gluonfusion vorgestellt. Einige Beispieldiagramme sind in Abb. 3.11 gezeigt. Dabei sind nur die Vertex- und Selbstenergie-Korrekturen UV-divergent. Die Box- und auch die Dreiecks-Graphen sind UV-endlich. Im Gegensatz zu den Diagrammen der Quark–Antiquark-Paarvernichtung sind hier alle Graphen IR-endlich. Daher müssen nur die entsprechenden Counterterme (siehe Abb. 3.12) addiert werden, um ein endliches Ergebnis zu erhalten.

Die Berechnung der Dreiecks( $\Delta$ )-Graphen (Abb. 3.11 e)) liefert

$$\begin{aligned} \overline{\sum} \left| \mathcal{M}_{gg \rightarrow t\bar{t}}^{\Delta_H} \alpha_s^2 \alpha \right|^2 &= 8\alpha_s^2 \alpha \pi \frac{1}{N^2 - 1} \frac{m_t^2}{M_W^2 s_W^2} \frac{\beta^2}{1 - \beta^2 z^2} \frac{1}{s - m_H^2} \\ &\times \left[ m_t^2 (s - 4m_t^2) C_0^t + m_b^2 (s - 4m_b^2) C_0^b - 2(m_t^2 + m_b^2) \right], \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\overline{\sum} \left| \mathcal{M}_{gg \rightarrow t\bar{t}}^{\Delta_{Z+\chi}} \alpha_s^2 \alpha \right|^2 = 128\alpha_s^2 \alpha \pi \frac{1}{N^2 - 1} g_a^t \frac{m_t^2}{M_Z^2 (1 - \beta^2 z^2)} \left( g_a^t m_t^2 C_0^t + g_a^b m_b^2 C_0^b \right), \quad (3.19)$$

wobei die skalaren Integrale  $C_0^{t,b}$  im Anhang A definiert sind. In Gl. (3.19) sind der Z- und  $\chi$ -Beitrag zusammengefasst. Wie man erkennen kann, gibt es keinen Vektor-Vektor-Beitrag (z.B.  $\propto g_v^{t,2}$ ) zum Wirkungsquerschnitt. Dies ist eine Konsequenz des Furry-Theorems [49] und wurde in ähnlichem Zusammenhang bereits bei der Quark–Anti-Quark-Paarvernichtung festgestellt [48]. Weiterhin ist entgegen der naiven Erwartung  $\overline{\sum} \left| \mathcal{M}_{gg \rightarrow t\bar{t}}^{\Delta_{Z+\chi}} \alpha_s^2 \alpha \right|^2$  nicht proportional zum Z-Propagator  $\frac{1}{s - M_Z^2}$ . Dieser Umstand hat seine Ursache im Landau-Yang-Theorem (siehe z.B. [50]). Dieses Theorem besagt, dass der Zerfall eines massiven, auf der Massenschale liegenden Spin 1 Teilchens in zwei masselose, ebenfalls auf der Massenschale liegenden Spin 1 Teilchen verboten ist. Das bedeutet, dass im Limes  $s \rightarrow M_Z$  die Vertex-Funktion verschwinden muss. Demnach kann der Z +  $\chi$ -Beitrag nicht proportional zum Z-Propagator sein.

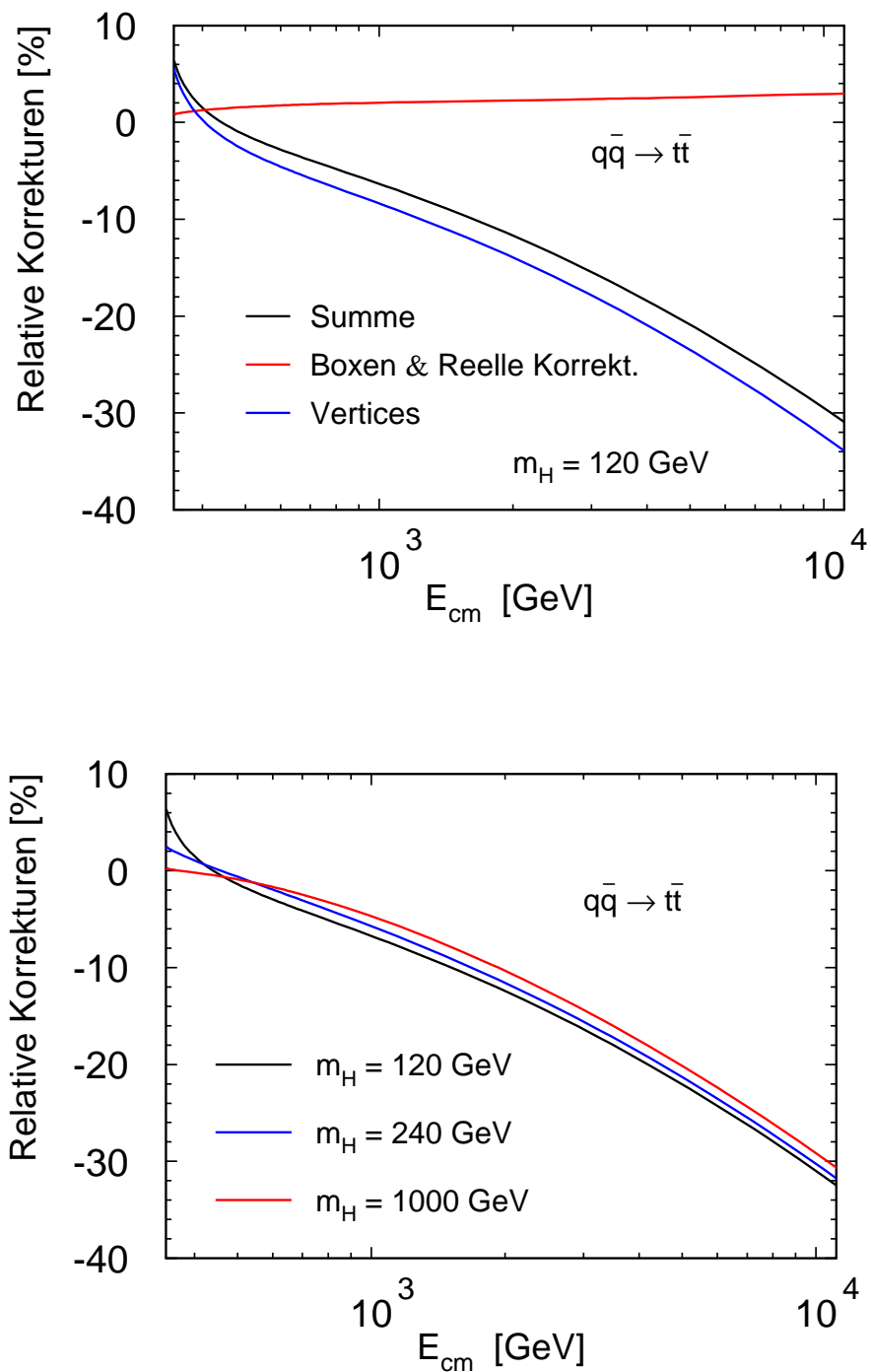


Abbildung 3.10: Relative Korrekturen zum partonischen Wirkungsquerschnitt in %, als Funktion der Schwerpunktsenergie für up-artige Quarks. Gezeigt sind oben die Beiträge der Vertices (blau), der Boxen und reellen Korrekturen (rot) und die Summe (schwarz). In der unteren Figur sind auf Parton-Niveau die Effekte für verschiedene Higgs-Massen dargestellt.

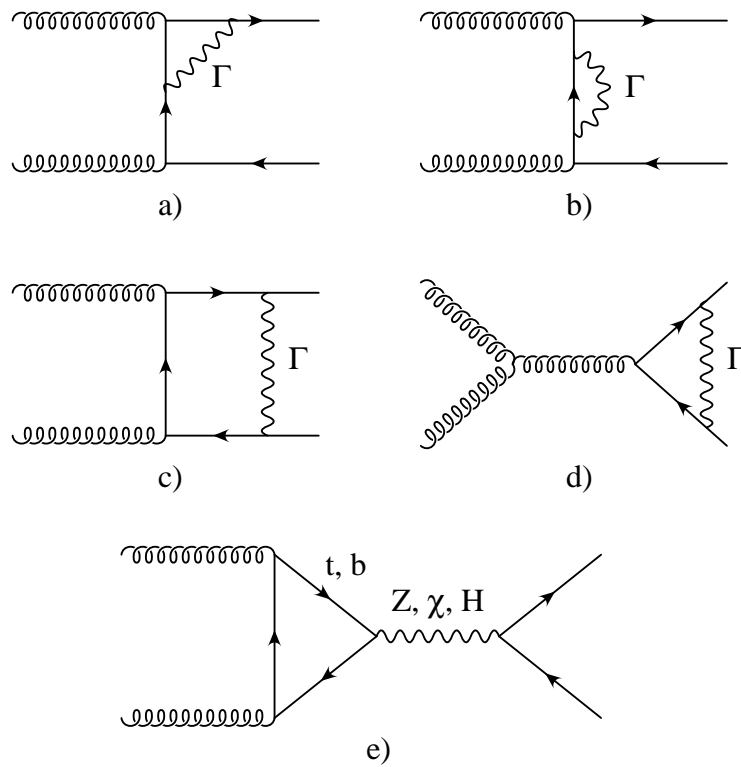


Abbildung 3.11: Beispieldiagramme für die Beiträge der Ordnung  $\alpha_s^2\alpha$  zur Gluonfusion: a)  $t$ -Kanal Vertex-Korrektur, b)  $t$ -Kanal Selbstenergie, c)  $t$ -Kanal Box-Graph, d)  $s$ -Kanal Vertex-Korrektur, e)  $t$ -Kanal Dreiecks-Graph. Das Zeichen  $\Gamma$  steht für den Austausch von  $Z, W, \chi, \phi$ - und Higgs-Bosonen.

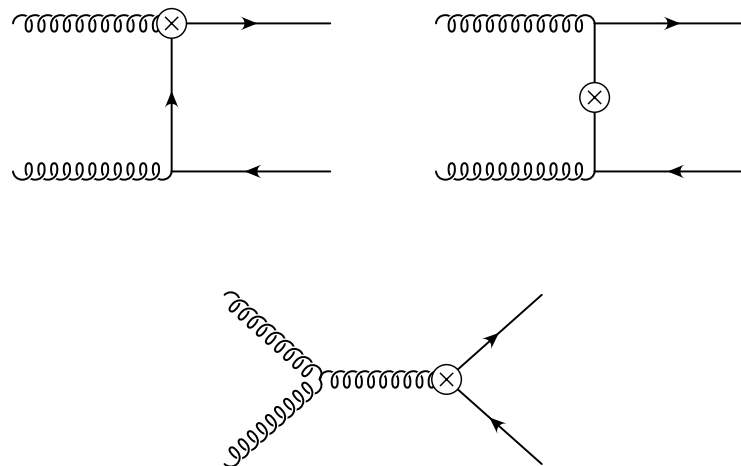


Abbildung 3.12: Beispiele für Counterterme zur Gluonfusion.

Analog ergeben sich die  $s$ -Kanal Vertex-Korrekturen (Abb. 3.11 d)) und die entsprechenden Counterterme zu:

$$\begin{aligned} \overline{\sum} \left| \mathcal{M}_{gg \rightarrow t\bar{t}}^{V_{sZ} \alpha_s^2 \alpha} \right|^2 &= -16\alpha_s^2 \alpha \pi \frac{N}{N^2-1} \frac{m_t^2}{s^2} \frac{z^2}{1-\beta^2 z^2} \left\{ \right. \\ & 2 \left[ 2(g_v^{t^2} + g_a^{t^2}) M_Z^2 - s\beta^2 (g_v^{t^2} - 3g_a^{t^2}) \right] \left( \overline{B}_0(s, m_t^2, m_t^2) - \overline{B}_0^Z \right) \\ & + \left[ 4(g_v^{t^2} + g_a^{t^2}) M_Z^4 + 8g_a^{t^2} M_Z^2 s\beta^2 \right. \\ & - \left. s^2 \beta^2 (g_v^{t^2} + g_a^{t^2} + \beta^2 (g_v^{t^2} - 3g_a^{t^2})) \right] C_0^Z \\ & + s\beta^2 \left[ 2M_Z^2 (g_v^{t^2} + g_a^{t^2}) \right. \\ & \left. + s(1-\beta^2)(g_v^{t^2} - 3g_a^{t^2}) \right] \frac{d}{dp^2} B_0^Z \Big|_{p^2=mt^2} \left. \right\}, \quad (3.20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\sum} \left| \mathcal{M}_{gg \rightarrow t\bar{t}}^{V_{sW} \alpha_s^2 \alpha} \right|^2 &= -64\alpha_s^2 \alpha \pi \frac{N}{N^2-1} \frac{m_t^2}{s^2} \frac{z^2}{1-\beta^2 z^2} g_W^2 \left\{ \right. \\ & \frac{1}{2} (s(1+\beta^2) + 4(M_W^2 - m_b^2)) \left( \overline{B}_0^b - \overline{B}_0^W \right) \\ & + \frac{1}{8} \left( (s(1+\beta^2) + 4(M_W^2 - m_b^2))^2 - 4\beta^2 s^2 \right) C_0^W \\ & - \left. \frac{1}{4} s\beta^2 \left( s(1-\beta^2) + 4(m_b^2 - M_W^2) \right) \frac{d}{dp^2} B_0^W \Big|_{p^2=mt^2} \right\}, \quad (3.21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\sum} \left| \mathcal{M}_{gg \rightarrow t\bar{t}}^{V_{s\chi} \alpha_s^2 \alpha} \right|^2 &= -64\alpha_s^2 \alpha \pi \frac{N}{N^2-1} \frac{m_t^4}{s^2} \frac{z^2}{1-\beta^2 z^2} g_a^{t^2} \left\{ \right. \\ & 2 \left( \overline{B}_0(s, m_t^2, m_t^2) - \overline{B}_0^Z \right) \\ & + \left. (2M_Z^2 + s\beta^2) C_0^Z + s\beta^2 \frac{d}{dp^2} B_0^Z \Big|_{p^2=mt^2} \right\}, \quad (3.22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\sum} \left| \mathcal{M}_{gg \rightarrow t\bar{t}}^{V_{s\phi} \alpha_s^2 \alpha} \right|^2 &= -64\alpha_s^2 \alpha \pi \frac{N}{N^2-1} \frac{m_t^2}{s^2} \frac{z^2}{1-\beta^2 z^2} \frac{g_W^2}{M_W^2} \left\{ \right. \\ & \frac{1}{16} \left( 16m_b^4 + m_b^2 (8s\beta^2 - 16M_W^2) \right. \\ & - \left. 4M_W^2 s(1-\beta^2) - s^2(1-\beta^4) \right) \left( \overline{B}_0^W - \overline{B}_0^b \right) \\ & + \frac{1}{64} \left[ 64m_b^6 - 16m_b^4 (8M_W^2 + s(1-\beta^2)) \right. \\ & \left. + 16M_W^4 s(1-\beta^2) + 4m_b^2 (16M_W^4 - s^2(1-\beta^2)^2) \right] \left. \right\}, \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + 8M_W^2 s^2 (1 - \beta^4) + s^3 (1 - \beta^2)^3 \Big] C_0^W \\
& - \frac{1}{32} \left[ 16m_b^4 s \beta^2 - 8m_b^2 (2M_W^2 s \beta^2 + s^2 \beta^2 (1 - \beta^2)) \right. \\
& \left. - 4M_W^2 s^2 \beta^2 (1 - \beta^2) + s^3 \beta^2 (1 - \beta^2)^2 \right] \frac{d}{dp^2} B_0^W \Big|_{p^2 = m^2} \Big\}, \quad (3.23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\Sigma} \left| \mathcal{M}_{gg \rightarrow t\bar{t}}^{V_{sH} \alpha_s^2 \alpha} \right|^2 & = 32 \alpha_s^2 \alpha \pi \frac{N}{N^2 - 1} \frac{m_t^2}{s^2} \frac{z^2}{1 - \beta^2 z^2} g_W^2 \frac{m_t^2}{M_W^2} \left\{ \right. \\
& 2(s\beta^2 + m_H^2) \left( \overline{B}_0^H - \overline{B}_0(s, m_t^2, m_t^2) \right) \\
& + \left( s^2 \beta^2 (1 - \beta^2) - 3m_H^2 s \beta^2 - 2m_H^4 \right) C_0^H \\
& \left. + s\beta^2 (s(1 - \beta^2) - m_H^2) \frac{d}{dp^2} B_0^H \Big|_{p^2 = m^2} \right\}. \quad (3.24)
\end{aligned}$$

Dabei bezeichnet der Index  $V$  eine Vertex-Korrektur (der Index  $s$  steht für den  $s$ -Kanal-Beitrag). Die Indizes  $Z, W, \phi, \chi, H$  stehen für die ausgetauschten virtuellen Eich-, Goldstone- bzw. Higgs-Bosonen. Die Abkürzung  $\overline{B}_0$  bezeichnet den endlichen Anteil der skalaren Zwei-Punkt-Funktion

$$B_0(p^2, m_1^2, m_2^2) = \Delta_{UV} + \overline{B}_0(p^2, m_1^2, m_2^2) = \frac{1}{\epsilon} - \gamma + \ln(4\pi) + \overline{B}_0(p^2, m_1^2, m_2^2). \quad (3.25)$$

Entsprechend ist der endliche Anteil der skalaren Ein-Punkt-Funktion definiert

$$A_0(m^2) = m^2 \Delta_{UV} + \overline{A}_0(m^2). \quad (3.26)$$

Die restlichen Beiträge von Box- ( $\square$ ), Vertex- ( $V$ ) und Selbstenergie- ( $\Sigma$ ) Korrekturen sind aufgrund ihrer Länge in Anhang C angegeben.

Die relativen Korrekturen zum partonischen Wirkungsquerschnitt sind in Abb. 3.13 aufgeschlüsselt. Wie man erkennen kann, wird die relative Korrektur in der  $t\bar{t}$ -Schwellenregion hauptsächlich von den Beiträgen der Box-Graphen und den der Dreiecks-Graphen bestimmt. Beide Beiträge sind von derselben Größenordnung, unterscheiden sich aber im Vorzeichen, so dass es zu einer signifikanten Kompensation kommt. Die Box-Beiträge wechseln bei etwa  $E_{\text{cm}} = 400$  GeV das Vorzeichen und zeigen mit steigender Energie das Sudakov-Verhalten. Die relativen Beiträge der Vertex-Korrekturen sind immer negativ und zeigen auch das Sudakov-Verhalten. Schließlich werden die negativen Beiträge von Vertizes und Boxen für Energien  $E_{\text{cm}} > 500$  GeV teilweise von den positiven Beiträgen der Selbstenergien kompensiert. In der Summe liefern die partonischen  $\mathcal{O}(\alpha_s^2 \alpha)$ -Beiträge für Energien zwischen 1 – 3 TeV Korrekturen von etwa 3-7%. Im oberen Graphen von Abb. 3.15 ist gezeigt,

dass der Hauptbeitrag der Dreiecks-Graphen aus dem  $Z + \chi$ -Austausch stammt. Dieser Beitrag wurde in [18] nicht berücksichtigt und beeinflusst die Schwellenregion maßgeblich. Für Schwerpunktsenergien  $E_{\text{cm}} > 600$  GeV werden die Beiträge der  $Z + \chi$ -Dreiecks-Graphen vernachlässigbar. In Abb. 3.15 unten ist die Abhängigkeit der Korrekturen von der Higgs-

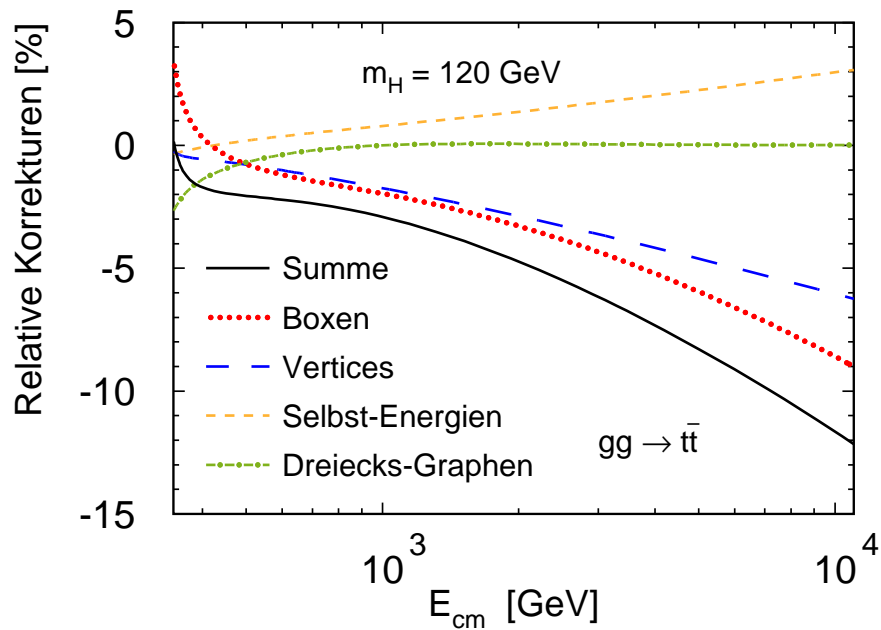


Abbildung 3.13: Gezeigt sind die relativen Korrekturen zur Gluonfusion (Parton-Niveau) in %, als Funktion der Schwerpunktsenergie: Selbstenergien (orange), Vertex-Korrekturen (blau), Box-Graphen (rot), Dreiecks-Graphen (grün), Summe aller Beiträge (schwarz).

Masse gezeigt. Wie beim  $q\bar{q} \rightarrow t\bar{t}$  Prozess sind die  $\alpha_s^2\alpha$ -Beiträge zur Gluonfusion in der Schwellenregion stark von der Higgs-Masse abhängig. Für größere Energien sind die Unterschiede in den schwachen  $O(\alpha)$ -Korrekturen zwischen einem leichten ( $m_H = 120$  GeV) und einem sehr schweren ( $m_H = 1000$  GeV) Higgs-Boson wiederum etwa 2%.

Vergleicht man die relativen partonischen Korrekturen von  $gg \rightarrow t\bar{t}$  und  $q\bar{q} \rightarrow t\bar{t}$  so sieht man einen Unterschied bei großen Energien, welcher in etwa einem Faktor 2 entspricht. Diesen Unterschied kann man qualitativ anhand der führenden und nächstführenden Sudakov-Logarithmen erklären. Wie in Abschnitt 2.6 erläutert wurde, treten führende Sudakov-Logarithmen beim Austausch eines schwachen Eichbosons zwischen externen Teilchen auf. Im  $q\bar{q} \rightarrow t\bar{t}$  Prozess existieren mit den vier externen (Anti-) Quark-Linien doppelt so viele Möglichkeiten für einen solchen Austausch wie bei der Gluonfusion. Damit ergeben sich

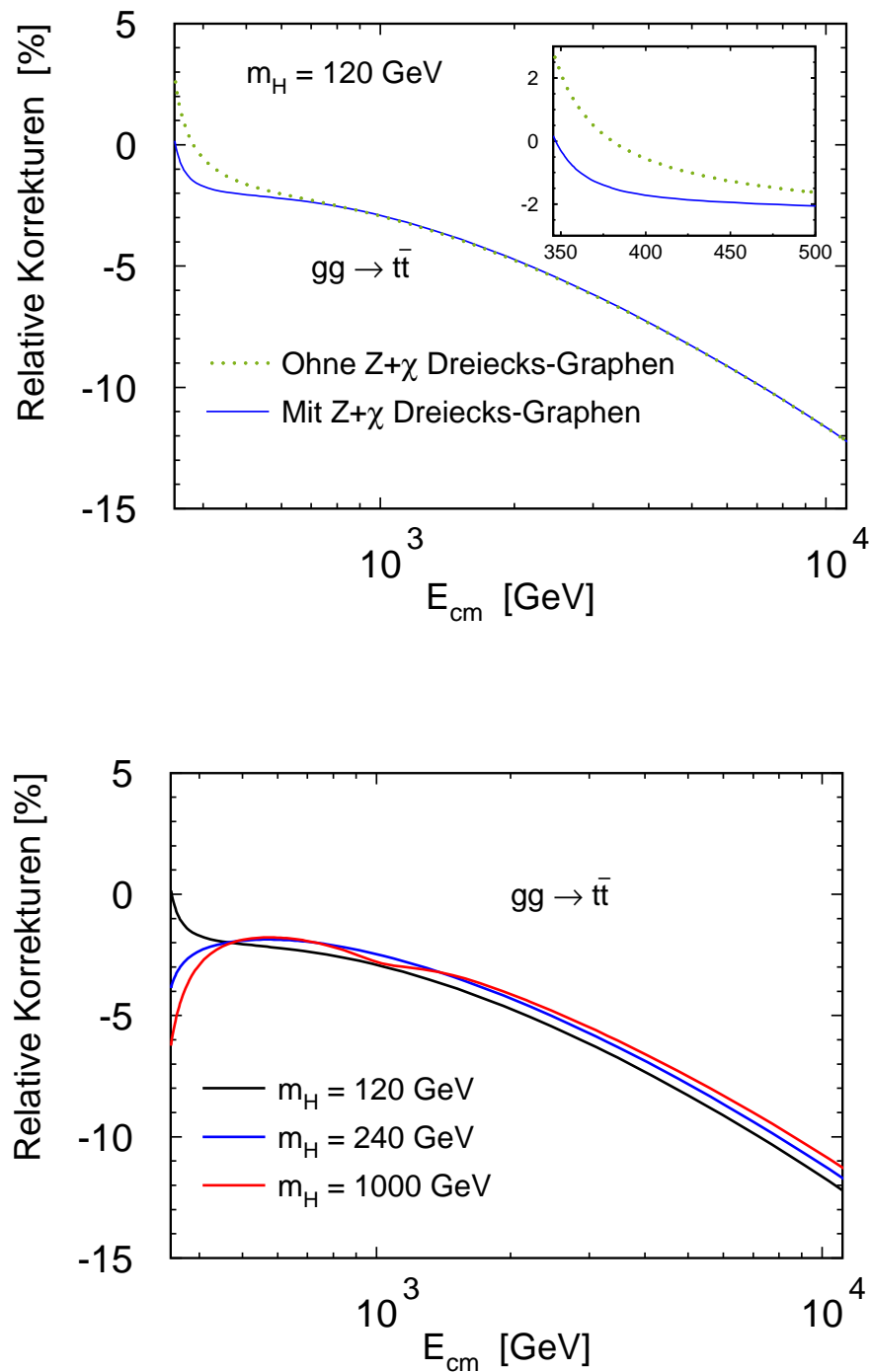


Abbildung 3.15: Gezeigt ist der Einfluss der  $Z + \chi$ -Dreiecks-Graphen (obere Abbildung) auf die relativen Korrekturen: Ohne  $Z + \chi$ -Dreiecks-Graphen (grün), mit  $Z + \chi$ -Dreiecks-Graphen (blau). Unten ist der Einfluss der Higgs-Masse auf die relativen Korrekturen zum partonischen Wirkungsquerschnitt dargestellt.

für die entsprechenden virtuellen Korrekturen im  $q\bar{q} \rightarrow t\bar{t}$  „doppelt“ so viele führende Logarithmen als im  $gg \rightarrow t\bar{t}$ -Prozess. Natürlich wird durch diese Argumentation das Auftreten von nächstführenden Logarithmen weitestgehend vernachlässigt, weswegen der so abgeleitete Faktor 2 auch nicht exakt reproduziert wird.

## 3.4 Konsistenz und Ergebnisse

### 3.4.1 Konsistenz

Bevor die Ergebnisse für hadronische Observablen präsentiert werden, soll an dieser Stelle die Konsistenz der Ergebnisse gezeigt werden. Ein erster Test liefert die Struktur der UV-Singularitäten. Wie man an den Ergebnissen in diesem Kapitel und im Anhang sehen kann, sind alle Beiträge nach der Counterterm-Renormierung UV-endlich. Dies ist ein exzellenter Konsistenztest der Koeffizienten vor den UV-divergenten  $A_0$  und  $B_0$  Integralen. Auch die Kürzung der IR-Singularitäten konnte explizit durchgeführt werden (siehe [48]). Außerdem wurden soweit möglich die Ergebnisse aus [18] analytisch verglichen. Dabei konnte, nach Berichtigung einiger evidenter Tippfehler in [18], analytische Übereinstimmung in den  $t$ - und  $u$ -Kanal Vertex-Korrekturen, Selbstenergien und Higgs-Dreiecks-Graphen gefunden werden. Auf einen analytischen Vergleich der Box-Diagramme wurde verzichtet, da in [18] die Formeln der benötigten Tensor-Koeffizienten nicht explizit angegeben wurden. Unter Benutzung derselben numerischen Parameter konnten aber die in [18] angegebenen Figuren erfolgreich verglichen werden. Des Weiteren wurde eine unabhängige Rechnung von Dr. P. Uwer durchgeführt. Sowohl analytisch als auch numerisch wurde perfekte Übereinstimmung mit den hier vorgestellten Resultaten gefunden. Schließlich wurde erfolgreich mit den numerischen Ergebnissen einer parallelen Arbeit verglichen [19]. Diese Reihe von Tests zeigt, dass von der Richtigkeit der hier präsentierten Resultate auszugehen ist. An dieser Stelle soll erwähnt werden, dass auch ein Vergleich mit den Ergebnissen aus [51] durchgeführt wurde. In dieser Arbeit wurden die schwachen  $\mathcal{O}(\alpha)$ -Korrekturen zur Gluonfusion berechnet. Unter Benutzung der Parameter aus [51] konnte keine Übereinstimmung mit den Ergebnissen in [51] gefunden werden. Die Autoren haben eine entsprechende Richtigstellung der Ergebnisse in [51] vorgenommen.

### 3.4.2 Ergebnisse

Mit den Resultaten aus dem Abschnitt 3.3 können nun die Observablen aus Abschnitt 3.2 in der Ordnung  $\alpha_s^2\alpha$  berechnet werden. Um den Einfluss der  $\mathcal{O}(\alpha)$ -Korrekturen darzustellen, werden im folgenden immer relative Größen betrachtet (d.h. alle Figuren sind auf den totalen bzw. differentiellen Wirkungsquerschnitt in führender Ordnung normiert).

Zuerst werden die relativen Korrekturen zum totalen Wirkungsquerschnitt gezeigt. Sie sind

in Abb. 3.16 als Funktion der Top-Quark-Masse für den Tevatron und den LHC dargestellt. Dabei werden jeweils drei verschiedene Higgs-Massen berücksichtigt. Wie man erkennen kann bewegen sich die Korrekturen im Bereich von einigen Promille (Tevatron) bis wenige Prozent (LHC). Diese kleinen Korrekturen zum totalen Wirkungsquerschnitt kann man folgendermaßen erklären. Für beide Beschleuniger kommt der Hauptbeitrag des Wirkungsquerschnitts in führender Ordnung aus der Region nahe der Produktionsschwelle (siehe Abb. 3.4 und 3.5). Betrachtet man die relativen Korrekturen zum partonischen Wirkungsquerschnitt (Abb. 3.10 und Abb. 3.13) so erkennt man für eine Higgs-Masse von 120 GeV, dass es für partonische Schwerpunktsenergien bis etwa 600 GeV in beiden Produktionskanälen einen Vorzeichenwechsel in den schwachen Korrekturen gibt. Folglich kommt es bei der Berechnung des hadronischen Wirkungsquerschnitts an beiden Beschleunigern zu einer Kompensation zwischen diesen negativen und positiven Beiträgen ( $m_H = 120$  GeV). Entsprechend der Ergebnisse in führender Ordnung (Gl. (3.14) und Gl. (3.16)) bestimmen am Tevatron die  $\mathcal{O}(\alpha)$ -Korrekturen des  $q\bar{q}$ -Kanals und am LHC die Korrekturen zur Gluonfusion maßgeblich die Korrektur zum totalen Wirkungsquerschnitt. Dies kann man auch an der Higgs-Massen Abhängigkeit des  $t\bar{t}$ -Produktionsquerschnitts erkennen. Für eine Higgs-Masse  $m_H = 1000$  GeV sind die Korrekturen zum totalen Wirkungsquerschnitt am Tevatron betragsmäßig etwa 10 mal so groß wie für eine Higgs-Masse von 120 GeV. Dies ist auf die partonischen Korrekturen in Abb. 3.10 zurückzuführen. Da es für  $m_H = 1000$  GeV nahe der  $t\bar{t}$ -Schwelle keine positiven Beiträge der  $\mathcal{O}(\alpha)$ -Korrekturen gibt, findet folglich keine Kompensation von positiven und negativen Beiträgen statt. Analog sind die Unterschiede für die Korrekturen zum totalen Wirkungsquerschnitt am LHC zu erklären, wenn man die partonischen Korrekturen zum Gluonfusions-Prozess betrachtet. Da am LHC im Mittel eine größere partonische Schwerpunktsenergie zur Verfügung steht als am Tevatron werden die Korrekturen zum totalen Wirkungsquerschnitt deutlicher vom Sudakov-Verhalten der partonischen Korrekturen beeinflusst und liegen bei etwa -2%.

Als nächstes werden die  $\mathcal{O}(\alpha)$ -Effekte auf die  $M_{t\bar{t}}$ - und  $p_T$ - Verteilungen gezeigt. Für den Tevatron-Beschleuniger sind die relativen Verteilungen in Abb. 3.17 dargestellt. Wie man erkennen kann, findet man das Verhalten der partonischen  $\mathcal{O}(\alpha)$ -Korrekturen zum  $q\bar{q}$ -Kanal wieder. Für Werte von  $M_{t\bar{t}} < 450$  GeV ( $p_T < 100$  GeV) sind die relativen Korrekturen bei einer Higgs-Masse von  $m_H = 120$  GeV positiv und erreichen an der  $t\bar{t}$ -Schwelle etwa +4%. Nach dem Vorzeichenwechsel setzt das Sudakov-Verhalten ein und für  $M_{t\bar{t}} = 800$  GeV ( $p_T = 400$  GeV) sind die relativen  $\mathcal{O}(\alpha)$ -Beiträge bei -4% (-6%). Entsprechend den partonischen Korrekturen zu  $q\bar{q} \rightarrow t\bar{t}$  findet man für  $m_H = 1000$  GeV relative Korrekturen von -0.5% bzw. -2.2% für  $M_{t\bar{t}} = 2m_t$  bzw.  $M_{t\bar{t}} = 800$  GeV. Für die  $p_T$ -Verteilung liegen sie für den gezeigten Bereich zwischen -0.2% und -4.2%. Für  $M_{t\bar{t}} > 600$  GeV ( $p_T > 200$  GeV) ist ein Unterschied in den relativen Korrekturen von 2% zwischen  $m_H = 120$  GeV und  $m_H = 1000$  GeV zu erkennen, welcher wiederum auf die partonischen Korrekturen zu  $q\bar{q} \rightarrow t\bar{t}$  zurückzuführen ist. Um die Relevanz der relativen Korrekturen zu dokumentieren, werden im nächsten Schritt integrierte Verteilungen betrachtet. Diese sind für  $M_{t\bar{t}}$  definiert

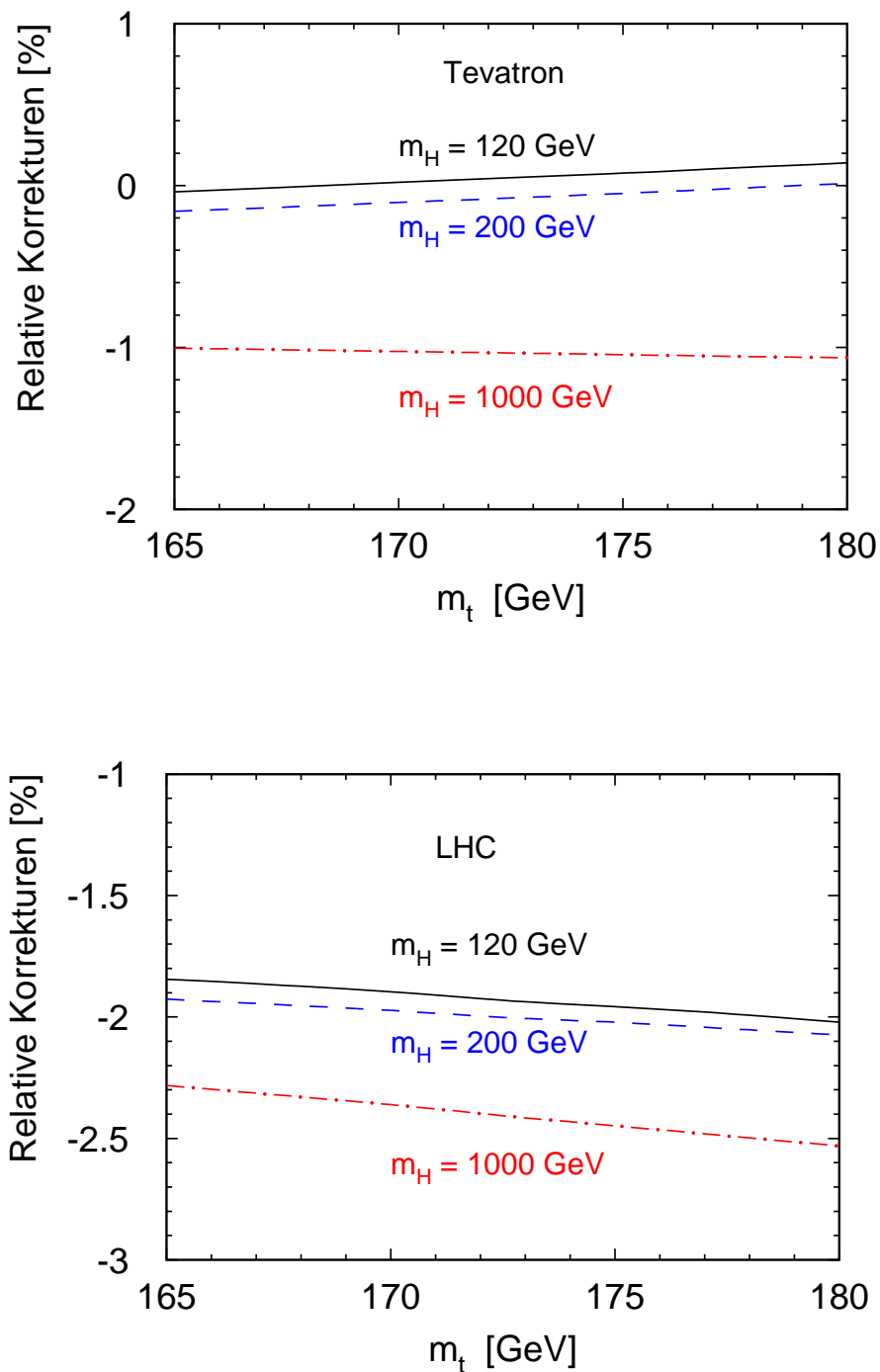


Abbildung 3.16: Schwache Korrekturen zum totalen Wirkungsquerschnitt zur Top-Quark-Paarproduktion an Tevatron (oben) und LHC (unten) für drei verschiedene Higgs-Massen. ( $m_H = 120$  GeV (schwarz),  $m_H = 200$  GeV (blau),  $m_H = 1000$  GeV (rot)).

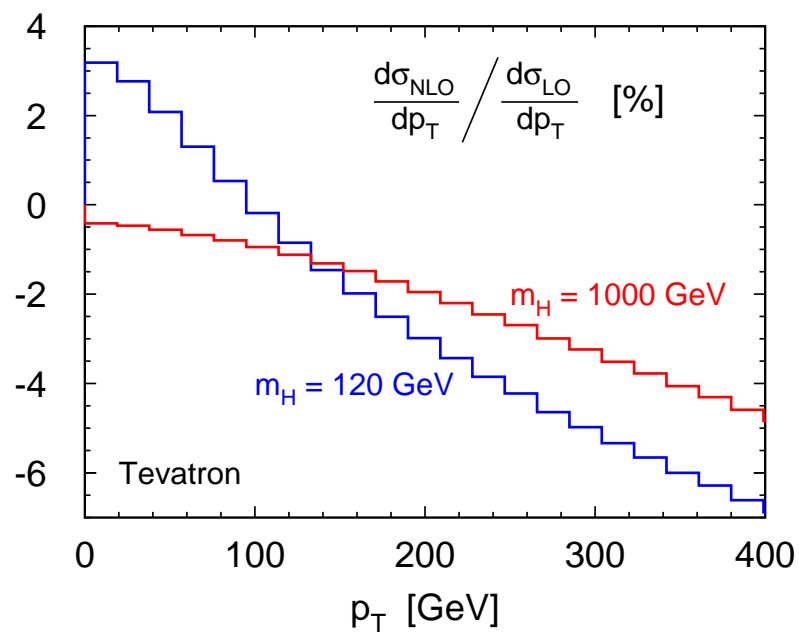
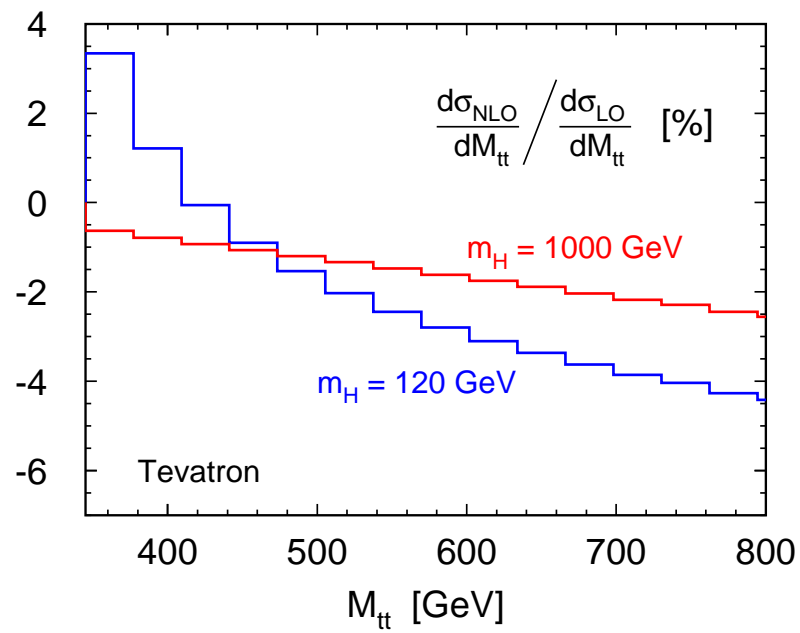


Abbildung 3.17: Die relativen Korrekturen für die  $M_{t\bar{t}}$ - (oben) und die  $p_T$ -Verteilung (unten) am Tevatron:  $m_H = 120$  GeV (blau) und  $m_H = 1000$  GeV (rot).

als

$$\sigma(M_{t\bar{t}} > M_{t\bar{t}}^{\text{cut}}) = \int_{M_{t\bar{t}}^{\text{cut}}}^{\infty} dM_{t\bar{t}} \frac{d\sigma}{dM_{t\bar{t}}} \quad (3.27)$$

bzw. für  $p_T$

$$\sigma(p_T > p_T^{\text{cut}}) = \int_{p_T^{\text{cut}}}^{\infty} dp_T \frac{d\sigma}{dp_T}. \quad (3.28)$$

Daneben wird eine Abschätzung des statistischen Fehlers angegeben. Die Berechnung des Fehlers beruht dabei auf dem Wirkungsquerschnitt in führender Ordnung und einer integrierten Luminosität von  $8 \text{ fb}^{-1}$  am Tevatron. Auf die in Abschnitt 3.1 angegebenen Verzweigungsverhältnisse wird dabei keine Rücksicht genommen. Die integrierten Verteilungen sind in Abb. 3.18 dargestellt. Anhand der groben Abschätzung für den statistischen Fehler kann man erkennen, dass die  $\mathcal{O}(\alpha)$ -Korrekturen am Tevatron gemessen an der Messgenauigkeit der entsprechenden Experimente wahrscheinlich nicht nachweisbar sein werden.

Die differentiellen Verteilungen des Wirkungsquerschnitts in  $M_{t\bar{t}}$  und  $p_T$  für den LHC sind in den Abb. 3.19 dargestellt. An der  $t\bar{t}$ -Schwelle sind die Korrekturen sowohl für  $M_{t\bar{t}}$  als auch für  $p_T$  negativ. Aufgrund der im Mittel höheren partonischen Schwerpunktsenergie ist der Einfluss der Sudakov-Logarithmen bedeutend größer. Im Bereich  $2m_t < M_{t\bar{t}} < 2 \text{ TeV}$  ( $0 < p_T < 500 \text{ GeV}$ ) liegen die relativen Korrekturen ( $m_H = 120 \text{ GeV}$ ) zwischen -1% und -7%, wobei in diesem Bereich die relative Verteilung hauptsächlich von den Korrekturen zur Gluonfusion bestimmt wird. Für größere Werte von  $M_{t\bar{t}}$  und  $p_T$  wird der Einfluss der Korrekturen zur Quark–Anti-Quark-Paarvernichtung immer wichtiger. Dies ist zum Einen auf die differentiellen Verteilungen in führender Ordnung bzw. die Parton-Luminositäten zurückzuführen. Zum Anderen sind die relativen partonischen Korrekturen des  $q\bar{q} \rightarrow t\bar{t}$ -Prozesses bei einer Energie von  $E_{\text{cm}} = 2 \text{ TeV}$  etwa doppelt so groß wie die Korrekturen zu  $gg \rightarrow t\bar{t}$  (Abb. 3.10 und Abb. 3.13). Deshalb erreichen die relativen Korrekturen bei  $M_{t\bar{t}} = 5 \text{ TeV}$  ( $p_T = 2 \text{ TeV}$ ) Werte von -15% (-20%) für eine Higgs-Masse von  $m_H = 120 \text{ GeV}$ . Auch hier ist ein Unterschied von etwa 2% zwischen einem schweren ( $m_H = 1000 \text{ GeV}$ ) und leichten ( $m_H = 120 \text{ GeV}$ ) Higgs-Boson zu erkennen. Analog zu den Resultaten am Tevatron sind in Abb. 3.20 die integrierten Verteilungen gezeigt. Dabei wird zur Ermittlung des statistischen Fehlers eine integrierte Luminosität von  $200 \text{ fb}^{-1}$  angenommen. Wie man deutlich erkennen kann sind die Beiträge der Ordnung  $\alpha_s^2 \alpha$  zur Top-Quark-Paarproduktion von großer Relevanz für das Studium der gezeigten Verteilungen am LHC. Abschließend soll die Abhängigkeit der Ergebnisse von der Renormierungsskala  $\mu_R$  und der Faktorisierungsskala  $\mu_F$  analysiert werden. Da sowohl der Born-Produktionsquerschnitt als auch der  $\mathcal{O}(\alpha)$ -Beitrag zum Wirkungsquerschnitt bzgl. der starken Kopplung  $\alpha_s$  Beiträge in führender Ordnung sind, kürzt sich im Verhältnis die Abhängigkeit von  $\mu_R$ . Des Weiteren besteht für die gezeigten relativen Korrekturen nur eine residuale Abhängigkeit von  $\mu_F$ . Dies belegt das in Abb. 3.21 gezeigte  $p_T$ -Spektrum. Dort sind die relativen Korrekturen am LHC für  $\mu_F = \frac{m_t}{2}$  und  $\mu_F = 2m_t$  abgebildet. Die geringen Abweichungen sind auf die Tatsache zurückzuführen, dass es bei



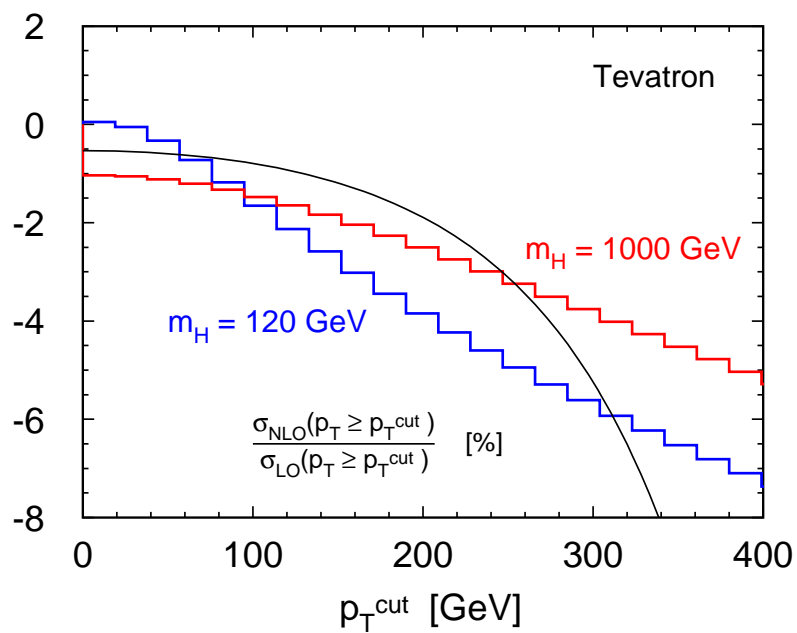
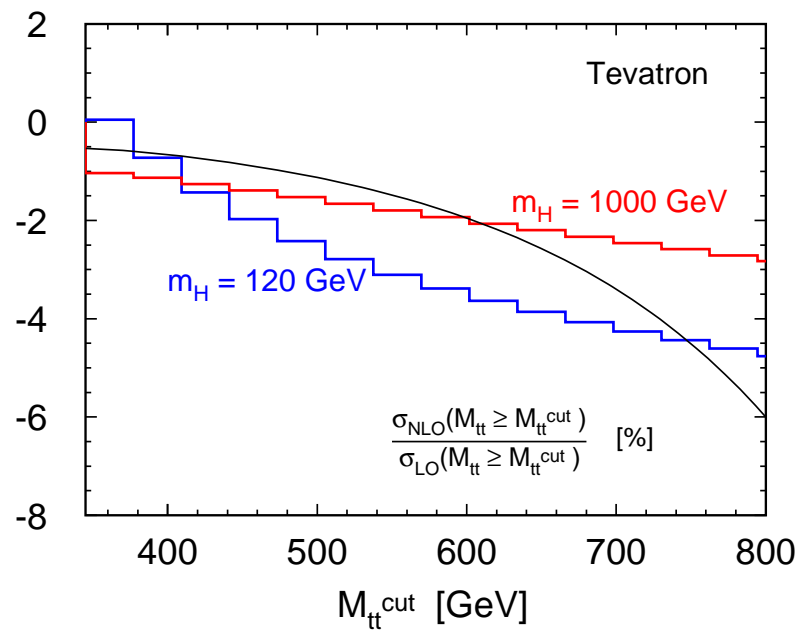


Abbildung 3.18: Die relativen Korrekturen für die integrierten Verteilungen am Tevatron:  $m_H = 120 \text{ GeV}$  (blau) und  $m_H = 1000 \text{ GeV}$  (rot), statistischer Fehler (durchgezogene Linie).

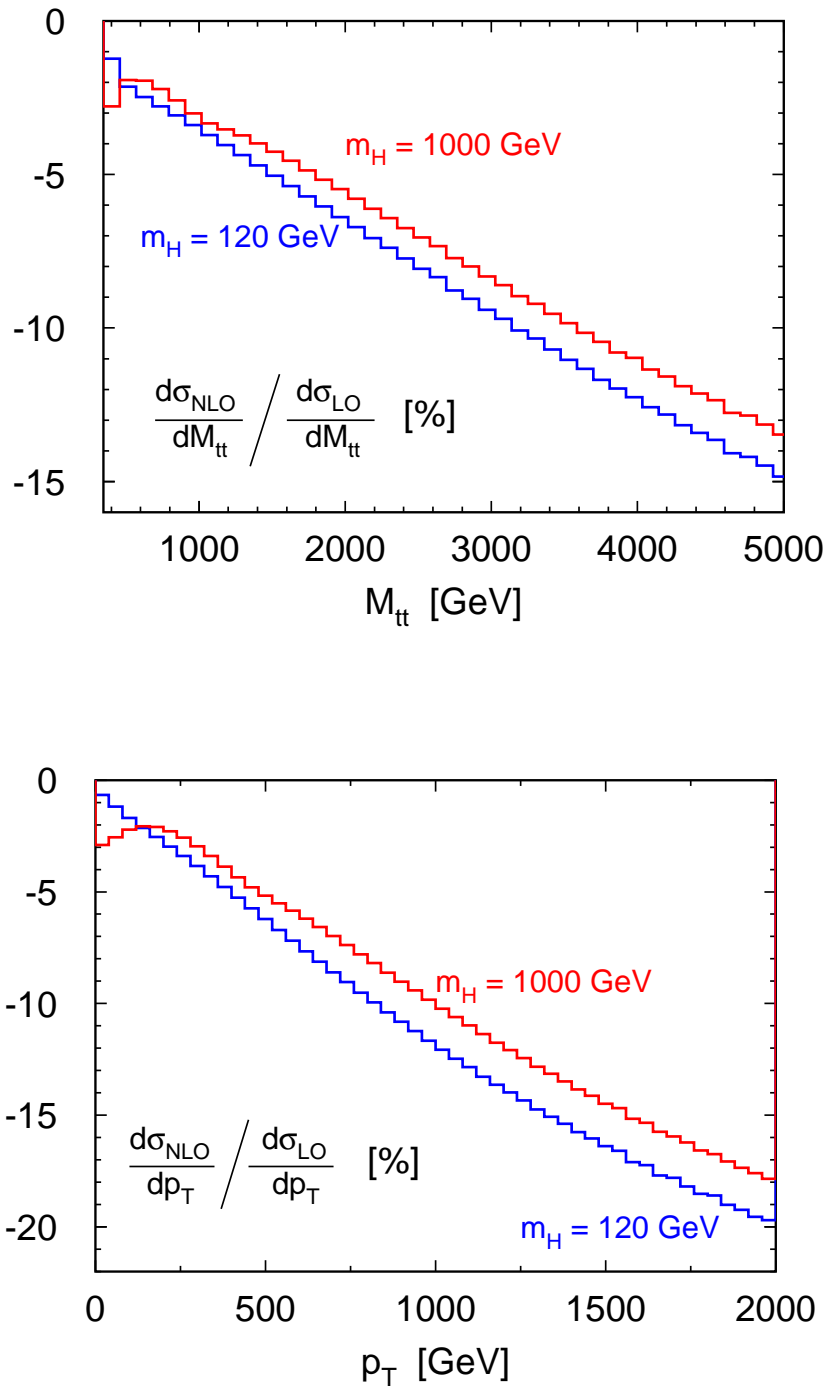


Abbildung 3.19: Die relativen Korrekturen für die differentiellen Verteilungen am LHC:  $m_H = 120$  GeV (blau) und  $m_H = 1000$  GeV (rot), statistischer Fehler (schwarz).

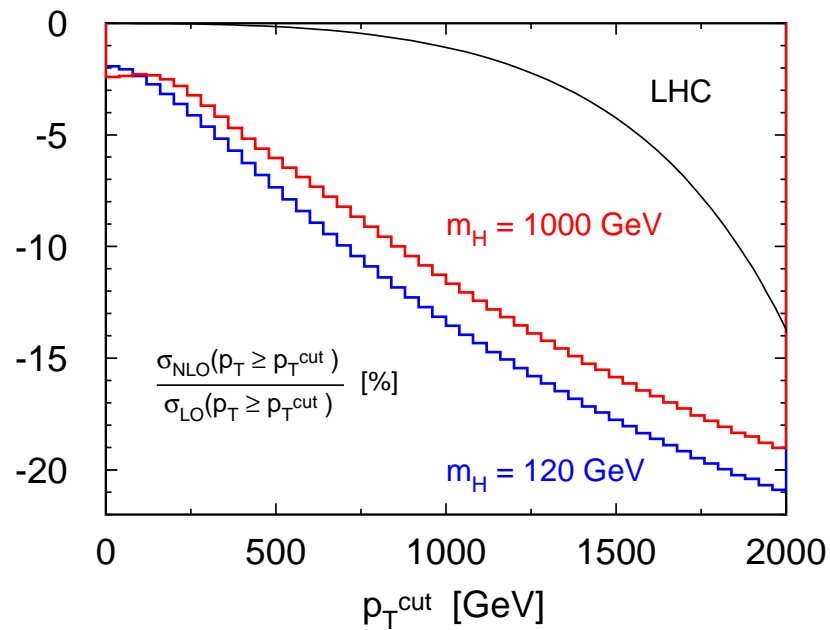
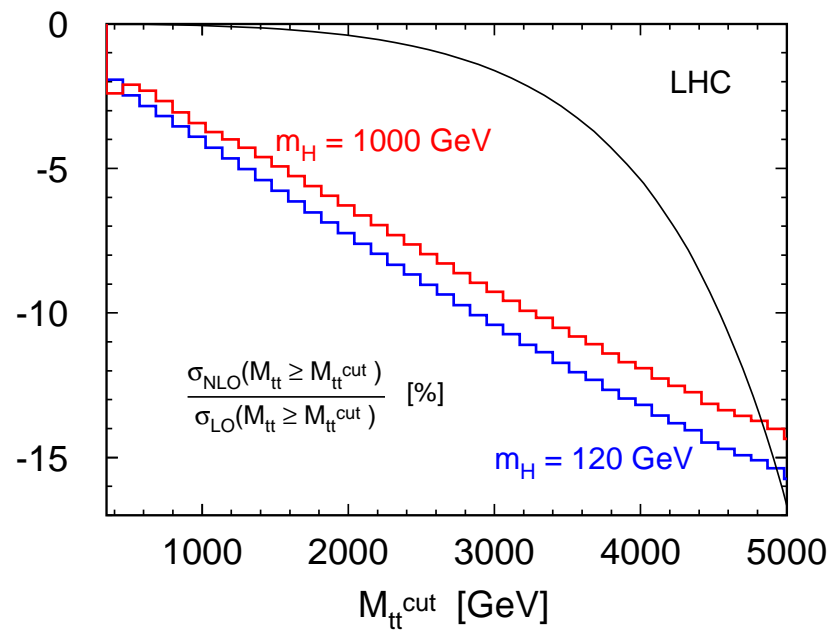


Abbildung 3.20: Die relativen Korrekturen die differentiellen Verteilungen am LHC:  $m_H = 120$  GeV (blau) und  $m_H = 1000$  GeV (rot), statistischer Fehler (schwarz).

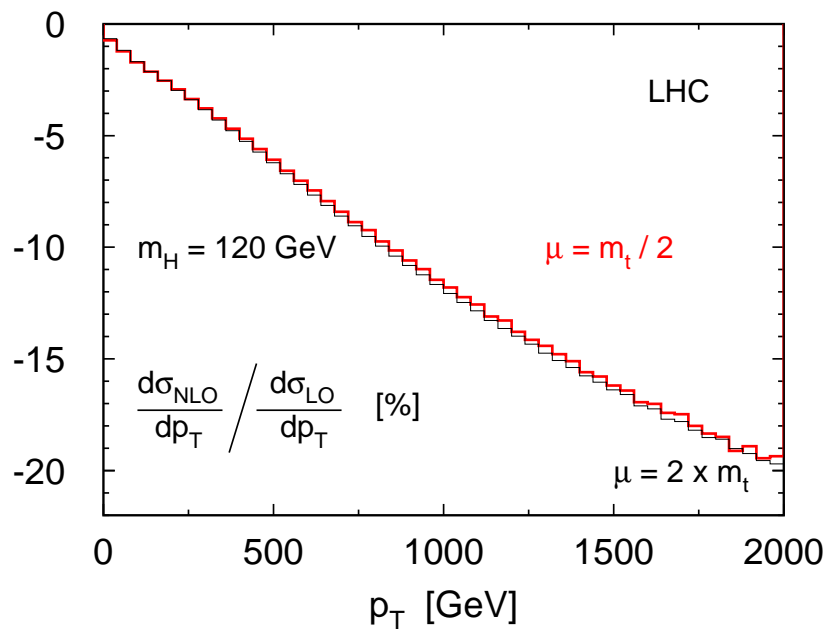


Abbildung 3.21: Das relative  $p_T$ -Spektrum am LHC für  $m_H = 120$  GeV für zwei verschiedene Werte der Faktorisierungsskala:  $\mu_F = \mu = \frac{m_t}{2}$  (rot) und  $\mu_F = \mu = 2m_t$  (schwarz).

der Betrachtung von relativen Korrekturen zu einer numerischen Kürzung der PDF's kommt. Diese Kürzung kann natürlich nicht exakt sein.

# Kapitel 4

## Bottom-Jet-Produktion

In diesem Kapitel werden die schwachen Korrekturen zur Bottom-Jet-Produktion betrachtet. Bei der Berechnung dieser Beiträge gibt es sehr viele Parallelen zur Top-Quark-Paarproduktion im vorigen Kapitel. Grundsätzlich können die Korrekturen für die massive Bottom-Quark-Paarzeugung, durch Anpassung der Kopplungen an die Eichbosonen und Vertauschen der Bottom- und Top-Quark-Masse aus den bisherigen Resultaten gewonnen werden. Allerdings soll im Rahmen dieses Kapitels sowohl die Produktion von zwei Bottom-Jets als auch die Erzeugung eines Bottom-Jets und eines Jets (von einem Gluon oder (Anti-) Quark) behandelt werden.

Das Kapitel ist wie folgt gegliedert. Zusammen mit einer Motivation wird die experimentelle Definition eines Bottom-Jets (*b*-Jet) im ersten Abschnitt erläutert. Im darauffolgenden Abschnitt wird dann eine theoretische Definition des *b*-Jet Wirkungsquerschnitts in führender Ordnung festgelegt. Anschließend werden die Beiträge der Ordnung  $\alpha_s^2 \alpha$  berechnet. Die Konsistenz der Rechnung und die Ergebnisse werden in Abschnitt 4.4 diskutiert.

### 4.1 Motivation und experimentelle Aspekte

#### Motivation

Im Standardmodell ist das Bottom-Quark bzgl. des schwachen Isospins der Partner des Top-Quarks. Das Bottom-Quark wurde 1977 am Fermilab in Proton-Nukleon-Kollisionen nachgewiesen [52]. Heute ist die *on-shell*-Masse des Bottom-Quarks mit  $m_b = 4.8$  GeV bestimmt [53]. Verglichen mit den Schwerpunktsenergien am Tevatron bzw. am LHC kann man deshalb die Masse in guter Näherung zu Null setzen. Bottom-Quark-Jets spielen eine zentrale bei der Identifikation von Standardmodell Prozessen wie z.B. der Top-Quark-Paarproduktion (siehe Abschnitt 3.1). Daneben gibt es auch in Erweiterungen des Standardmodells Produktionsprozesse, (z.B. Gluino-Produktion in der Supersymmetrie) welche eine Identifikation von Bottom-Quark-Jets im Detektor benötigen. Diese Nicht-Standardmodell Prozesse erzeugen *b*-Jets mit teilweise großen Transversalimpulsen. Somit stellt das Studi-

um von direkt produzierten  $b$ -Jets eine wichtige Untergrundstudie dar und wird bei großen Energien ( $\hat{=}$  Transversalimpulsen) benötigt. Des Weiteren stellt das Studium von  $b$ -Jets eine Möglichkeit dar nach Effekten jenseits des Standardmodells zu suchen. Eine indirekte Suche nach diesen Effekten besteht im Studium von differentiellen  $b$ -Jet-Observablen. Sollten im TeV-Energiebereich neue Resonanzen erzeugt werden, können diese in differentiellen Verteilungen nachgewiesen werden. Schließlich muss an dieser Stelle erwähnt werden, dass die Messung von Bottom-Quark-PDF's zum Zeitpunkt dieser Arbeit noch nicht erfolgte. Vielmehr werden die Bottom-Quark-PDF's bisher aus den Gluon-PDF's mithilfe des Aufspaltens  $g \rightarrow b\bar{b}$  abgeleitet. Somit besteht mit der Analyse von Bottom-Quark-Jets die Möglichkeit die Bottom-Quark-PDF's zu vermessen.

## Experimentelle Signatur

Aus dem bisher Gesagten ergibt sich die Folgerung, dass eine Identifikation von Bottom-Quark-Jets für Standardmodell-Prozesse als auch für Effekte neuer Physik wichtig ist. Die Unterscheidung von  $b$ -Jets einerseits und Jets von leichten Quarks und Gluonen andererseits ist aufgrund der mesonischen Bindungszustände möglich, welche das Bottom-Quark eingeht. Wird ein Bottom-Quark durch direkte Produktion oder Zerfall eines schwereren Teilchens in einer Reaktion erzeugt, so hadronisiert es und bildet ein sogenanntes  $B$ -Meson. Im Bezug auf das Bottom-Quark-Ereignis nennt man den Punkt an dem das  $b$ -Quark ( $B$ -Meson) erzeugt wird den Primärvertex. Die  $B$ -Mesonen haben eine endliche Lebensdauer und zerfallen im Mittel nach etwa 1.5 ps. Aufgrund des Impulses des erzeugten Bottom-Quarks können sie bis zu ihrem Zerfall einige hundert  $\mu\text{m}$  vom Primärvertex wegfliegen. Die dabei zurückgelegte Strecke bezeichnet man als Zerfallslänge und den Zerfallspunkt des  $B$ -Mesons nennt man Sekundärvertex. Dieser Ablauf eines  $b$ -Jet-Ereignisses ist in Abb. 4.1 schematisch dargestellt. Die bisherige Beschreibung erlaubt es mithilfe verschiedener Detektor-Komponenten einen Bottom-Quark-Jet von einem Jet, welcher von Gluonen oder leichten Quarks induziert wird, zu unterscheiden. Die Identifikation eines Bottom-Quark-Jets wird als  $b$ -tag bezeichnet, wobei im Folgenden nicht zwischen einem Bottom-Quark-Jet und einem Anti-Bottom-Quark-Jet unterschieden wird. Technisch wird das Identifizieren von  $b$ -

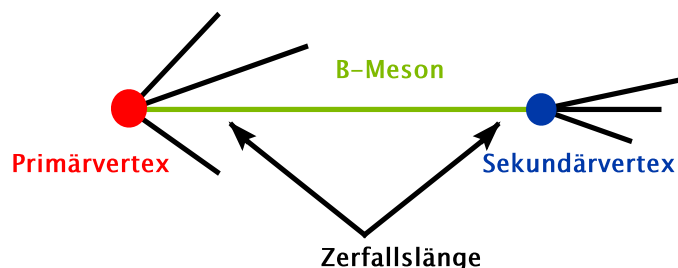


Abbildung 4.1: Schematische Darstellung eines  $b$ -Jets bzw. des Zerfalls eines  $B$ -Mesons.

Jets mithilfe von Spur-Detektoren umgesetzt, welche es ermöglichen den Sekundärvertex zu rekonstruieren und die Zerfallsprodukte des Primärvertex von denen des Sekundärvertex zu unterscheiden [54]. Dabei werden verschiedene Kriterien (z.B. Abstand von Primärvertex zu Sekundärvertex) angewandt, um festzustellen ob es sich um einen Bottom-Quark-Jet handelt oder nicht. Dieser Unterscheidung gelingt natürlich nicht zu 100%, man spricht dann von sogenannten *mis-tags* wenn im Detektor ein vermeintlicher  $b$ -Jets nachgewiesen wird. Außerdem besitzen  $D$ -Mesonen (beinhalten ein (Anti-) Charme-Quark) eine Lebensdauer die teilweise vergleichbar ist mit der eines  $B$ -Mesons und ebenfalls zu *mis-tags* führen können. Deshalb sind in den letzten Jahren verfeinerte Algorithmen entwickelt worden um die Effizienz von  $b$ -tags zu erhöhen (siehe z.B. [43, 54]).

In den folgenden Abschnitten wird die Bottom-Quark-Jet-Produktion an Hadronen-Beschleunigern in führender Ordnung und nächstführender Ordnung  $\alpha_s^2 \alpha$  diskutiert. Dabei wird zwischen einem einfachen  $b$ -tag und einem zweifachen  $b$ -tag unterschieden. Bei Ersterem wird bei einem Zwei-Jet-Ereignis im Endzustand mindestens ein Bottom-Quark-Jet gefordert. Entsprechend werden bei einem zweifachen  $b$ -tag mindestens zwei  $b$ -Jets im Endzustand gefordert.

## 4.2 Hadronische $b$ -Jet-Produktion in führender Ordnung

In diesem Abschnitt werden die Produktionskanäle zur  $b$ -Jet-Erzeugung in führender Ordnung Störungstheorie diskutiert. Wie bei der Top-Quark-Paarproduktion kann man zwischen QCD, elektroschwachen und gemischten QCD-elektroschwachen Beiträgen unterscheiden. Im Vergleich zur  $t\bar{t}$ -Produktion gibt es allerdings eine größere Anzahl partonischer Prozesse. Diese sind in Tabelle 4.1 für den einfachen und den zweifachen  $b$ -tag sowie nach Anfangszuständen geordnet angegeben. Wie bisher wird zwischen quark-induzierten (zwei (Anti)-Quarks im Anfangszustand), gluon-induzierten (ein oder zwei Gluonen im Anfangszustand) und rein bottom-induzierten Prozessen (zwei (Anti)-Bottom-Quarks im Anfangszustand) unterschieden. Die Berechnung für die verschiedenen Prozesse geschieht mithilfe der Methoden aus Kapitel 2 wobei im Folgenden vor allem von den in Abschnitt 2.3 vorgestellten Crossing-Symmetrien Gebrauch gemacht wird. Für die quark-induzierten Prozesse ergeben sie sich dann auf Amplitudenquadrat-Niveau die folgenden Relationen:

$$\begin{aligned} \overline{\sum} \left| \mathcal{M}_{q\bar{b} \rightarrow q\bar{b}} \right|^2 &= \overline{\sum} \left| \mathcal{M}_{\bar{q}b \rightarrow \bar{q}b} \right|^2 = \overline{\sum} \left| \mathcal{M}_{q\bar{q} \rightarrow b\bar{b}} \right|^2 \Big|_{s \leftrightarrow t}, \\ \overline{\sum} \left| \mathcal{M}_{qb \rightarrow qb} \right|^2 &= \overline{\sum} \left| \mathcal{M}_{\bar{q}\bar{b} \rightarrow \bar{q}\bar{b}} \right|^2 = \overline{\sum} \left| \mathcal{M}_{\bar{q}b \rightarrow \bar{q}b} \right|^2 \Big|_{s \leftrightarrow u} \\ &= \overline{\sum} \left| \mathcal{M}_{q\bar{q} \rightarrow b\bar{b}} \right|^2 \Big|_{s \rightarrow t, t \rightarrow -s, u \rightarrow -u}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Anfangszustand	Einfacher $b$ -tag	
Quark-induziert	$qb \rightarrow qb, q\bar{b} \rightarrow q\bar{b}, \bar{q}b \rightarrow \bar{q}b, \bar{q}\bar{b} \rightarrow \bar{q}\bar{b}$	$q\bar{q} \rightarrow b\bar{b}$
Gluon-induziert	$gb \rightarrow gb, g\bar{b} \rightarrow g\bar{b}$	$gg \rightarrow b\bar{b}$
Rein bottom-induziert	$b\bar{b} \rightarrow b\bar{b}, bb \rightarrow bb, \bar{b}\bar{b} \rightarrow \bar{b}\bar{b}$	
	Zweifacher $b$ -tag	

Tabelle 4.1: Die Tabelle zeigt die partonischen Prozesse zur  $b$ -Jet-Produktion nach Anfangszuständen geordnet (siehe Text). Außerdem werden die Prozesse nach einem einfachen  $b$ -tag (alle gezeigten Prozesse) und einem zweifachen  $b$ -tag (gelb unterlegt) unterschieden.

Analog ergeben sich für die gluon-induzierten Prozesse die Crossing-Symmetrien zu

$$\overline{\sum} |\mathcal{M}_{gb \rightarrow gb}|^2 = \overline{\sum} |\mathcal{M}_{g\bar{b} \rightarrow g\bar{b}}|^2 = -\overline{\sum} |\mathcal{M}_{gg \rightarrow b\bar{b}}|^2 \Big|_{s \leftrightarrow t} \quad (4.2)$$

und schließlich für die bottom-induzierte  $b$ -Jet-Erzeugung:

$$\overline{\sum} |\mathcal{M}_{bb \rightarrow bb}|^2 = \overline{\sum} |\mathcal{M}_{\bar{b}\bar{b} \rightarrow \bar{b}\bar{b}}|^2 = \overline{\sum} |\mathcal{M}_{b\bar{b} \rightarrow b\bar{b}}|^2 \Big|_{s \leftrightarrow u}. \quad (4.3)$$

Mit diesen Beziehungen ist nur die Berechnung von wenigen Amplitudenquadraten nötig. Diese sind im Folgenden  $q\bar{q} \rightarrow b\bar{b}$ ,  $gg \rightarrow b\bar{b}$  und  $b\bar{b} \rightarrow b\bar{b}$ . Aus Gl. (3.7) kann für  $m_t = 0$  sofort das quadrierte Matrixelement für die masselose  $q\bar{q} \rightarrow b\bar{b}$ -Produktion in der QCD angegeben werden

$$\overline{\sum} \left| \mathcal{M}_{q\bar{q} \rightarrow b\bar{b}}^{\alpha_s^2} \right|^2 (s, z(s, t, u)) = 4\alpha_s^2 \pi^2 \frac{N^2 - 1}{N^2} (1 + z^2). \quad (4.4)$$

Das Amplitudenquadrat für den schwachen Prozess ergibt sich für  $m_t = 0$  und dem Anpassen der Kopplungen ( $g_v^t \rightarrow g_v^b$ ,  $g_a^t \rightarrow g_a^b$ ,  $Q_t \rightarrow Q_b$ ) nach Gl. (3.9) zu

$$\begin{aligned} \overline{\sum} \left| \mathcal{M}_{q\bar{q} \rightarrow b\bar{b}}^{\alpha_s^2} \right|^2 (s, z(s, t, u)) &= 16\alpha_s^2 \pi^2 \left[ Q_b^2 Q_q^2 (1 + z^2) \right. \\ &+ \frac{s^2}{(s - M_Z^2)^2} \left( (g_v^{q2} + g_a^{q2})(g_v^{b2} + g_a^{b2})(1 + z^2) \right. \\ &- 8g_v^q g_v^b g_a^q g_a^b z) \\ &\left. + 2 \frac{s}{s - M_Z^2} Q_q Q_b \left( g_v^q g_v^b (1 + z^2) - 2g_a^q g_a^b z \right) \right]. \quad (4.5) \end{aligned}$$

Für den Gluonfusions-Prozess folgt für  $m_t = 0$  aus Gl. (3.8)

$$\overline{\sum} \left| \mathcal{M}_{gg \rightarrow b\bar{b}}^{\alpha_s^2} \right|^2 (s, z(s, t, u)) = 8\alpha_s^2 \pi^2 \frac{1}{N(N^2 - 1)} (N^2 - 2 + N^2 z^2) \frac{1 + z^2}{1 - z^2}. \quad (4.6)$$



Schließlich müssen für die bottom-induzierten Prozesse einige neue Beiträge berechnet werden. Für diese Prozesse ergeben sich QCD, elektroschwache und gemischte QCD-elektroschwache Amplitudenquadrate:

$$\begin{aligned} \overline{\sum} \left| \mathcal{M}_{b\bar{b} \rightarrow b\bar{b}}^{\alpha_s^2} \right|^2 (s, z(s, t, u)) &= 4\alpha_s^2 \pi^2 \frac{N^2 - 1}{N^3} \\ &\times \frac{2(1-z)(1-z^2) + N(11 - 2z + 4z^2 + 2z^3 + z^4)}{(1+z)^2}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \overline{\sum} \left| \mathcal{M}_{b\bar{b} \rightarrow b\bar{b}}^{\alpha_s^2} \right|^2 (s, z(s, t, u)) &= 16\alpha_s^2 \pi^2 \\ &\times \left[ Q_b^4 \frac{N(11 - 2z + 4z^2 + 2z^3 + z^4) - 2(1-z)(1-z^2)}{N(1+z)^2} \right. \\ &+ \frac{s^2}{N(s - M_Z^2)^2 (s(1+z) + 2M_Z^2)^2} \\ &\times \left[ (g_v^{b^4} + g_a^{b^4}) \left( 2M_Z^4 (2(1-z)^2 + N(7 - 2z + 3z^2)) \right. \right. \\ &- 2sM_Z^2 (1-z) ((1-z)^2 + 2N(4+z+z^2)) \\ &- \left. \left. s^2 (2(1+z)(1-z)^2 - N(11 - 2z + 4z^2 + 2z^3 + z^4)) \right) \right. \\ &+ g_a^{b^2} g_v^{b^2} \left( 4M_Z^4 (6(1-z)^2 + N(1 - 14z + 5z^2)) \right. \\ &- 4sM_Z^2 (1-z) (3(1-z)^2 - 2N(2 + 5z - z^2)) \\ &- \left. \left. 2s^2 (6(1+z)(1-z)^2 + N(1 + 14z + 2z^3 - z^4)) \right) \right] \\ &- 2Q_b^2 \frac{s}{N(1+z)(s - M_Z^2)(s(1+z) + 2M_Z^2)} \\ &\times \left[ g_v^{b^2} \left( M_Z^2 (1-z) ((1-z)^2 + 2N(4+z+z^2)) \right. \right. \\ &+ s(2(1+z)(1-z)^2 - N(11 - 2z + 4z^2 + 2z^3 + z^4)) \\ &+ \left. \left. g_a^{b^2} \left( M_Z^2 (1-z) ((1-z)^2 - 6N(1+z)) \right. \right. \right. \\ &+ \left. \left. \left. 2s(1+z) ((1-z)^2 + N(3+z^2)) \right) \right] \right], \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \overline{\sum} \left| \mathcal{M}_{b\bar{b} \rightarrow b\bar{b}}^{\alpha_s \alpha} \right|^2 (s, z(s, t, u)) &= -16\alpha_s \alpha_s \pi^2 \frac{N^2 - 1}{N^2} \left[ 2Q_b^2 \frac{(1-z)^2}{1+z} \right. \\ &+ \left. (g_v^{b^2} + g_a^{b^2}) \frac{s}{s - M_Z^2} \frac{(1-z)^2}{1+z} \frac{2s(1+z) + M_Z^2(1-z)}{s(1+z) + 2M_Z^2} \right] \end{aligned} \quad (4.9)$$

Mit den in Gl. (4.1-4.3) angegebenen Relationen können nun alle partonischen Prozesse berechnet werden.

Für die Berechnung hadronischer Observablen müssen wie im Fall der Top-Quark-Produktion die entsprechenden PDF's mit den partonischen Wirkungsquerschnitten gefaltet werden. Allerdings sind aufgrund der Näherung masseloser Bottom-Quarks einige Amplitudenquadrate nicht wohl definiert im Grenzfall  $z \rightarrow \pm 1$ . In diesem Limes handelt es sich um Ereignisse, bei denen die Partonen im Endzustand kollinear zur Strahlachse erzeugt werden. Solche Ereignisse können von einem die Strahlachse umfassenden Detektor nicht nachgewiesen werden und sind deshalb aus experimenteller Sicht irrelevant. Aus diesem Grund fordert man für die Endzustandspartonen einen minimalen Transversalimpuls von  $p_T = 50$  GeV. Damit ist sichergestellt, dass die entsprechenden Ereignisse experimentell aufgelöst werden können. Gleichzeitig wird die singuläre Region aus dem Phasenraum ausgeschnitten. Aufgrund dieses Schnitts wird im Folgenden auf eine Angabe des totalen Wirkungsquerschnitts verzichtet, denn der Hauptbeitrag zum totalen Wirkungsquerschnitt stammt natürlich (für reale massive Bottom-Quarks) aus dem ausgeschnittenen Phasenraumbereich.

Wegen der Vielzahl an Produktionsmöglichkeiten von  $b$ -Jets werden in der folgenden Diskussion nur die reinen QCD-Prozesse aufgeschlüsselt und getrennt von den elektroschwachen und QCD-elektroschwachen Prozessen betrachtet. Dabei werden folgende numerischen Parameter verwendet

$$\mu = \mu_R = \mu_F = 100 \text{ GeV}, \quad \alpha_s(\mu) = 0.116, \quad \alpha(\mu) = \frac{1}{128}.$$

In Abb. 4.2 ist die differentielle Verteilung in  $p_T$  sowie deren relative Zusammensetzung für einen einfachen  $b$ -tag am Tevatron dargestellt. Ähnlich wie bei der Top-Quark-Paarproduktion werden die Verteilungen über einen weiten Bereich von den quark-induzierten Prozessen dominiert. Die Beiträge von gluon-induzierten Prozessen sind bis etwa  $p_T = 200$  GeV relevant, werden aber für höhere Energien vernachlässigbar. Die Prozesse mit zwei Bottom-Quarks im Anfangszustand sind für alle Bereiche der einfachen  $b$ -Tag Verteilung ohne Bedeutung. Dasselbe gilt für die elektroschwachen und QCD-elektroschwachen Prozesse, welche für das gesamte  $p_T$ -Spektrum nur wenige Promille beitragen. Für den zweifachen  $b$ -tag (Abb. 4.3) zeigt sich ein ähnliches Bild wie für den einfachen  $b$ -tag. Ein Unterschied ist für kleine Transversalimpulse ( $p_T \leq 100$  GeV) auszumachen. Dort steuern die bottom-induzierten Prozesse einen relativen Beitrag von wenigen Prozent zur Verteilung bei. Mit ansteigender Energie werden diese Effekte auch vernachlässigbar. Schließlich sind in Abb. 4.4 die integrierten  $p_T^{\text{cut}}$ -Verteilungen am Tevatron dargestellt, für welche das bisher Gesagte ebenfalls zutrifft. Die bisherigen Resultate sind auch hier wieder weitestgehend auf das Verhalten der Parton-Luminositäten in Abschnitt 2.4 zurückzuführen. Eine entsprechende Studie der partonischen QCD-Wirkungsquerschnitte wird weiter unten angegeben.

Am LHC ergeben sich die differentielle und relativen  $p_T$ -Verteilungen für einen einfachen

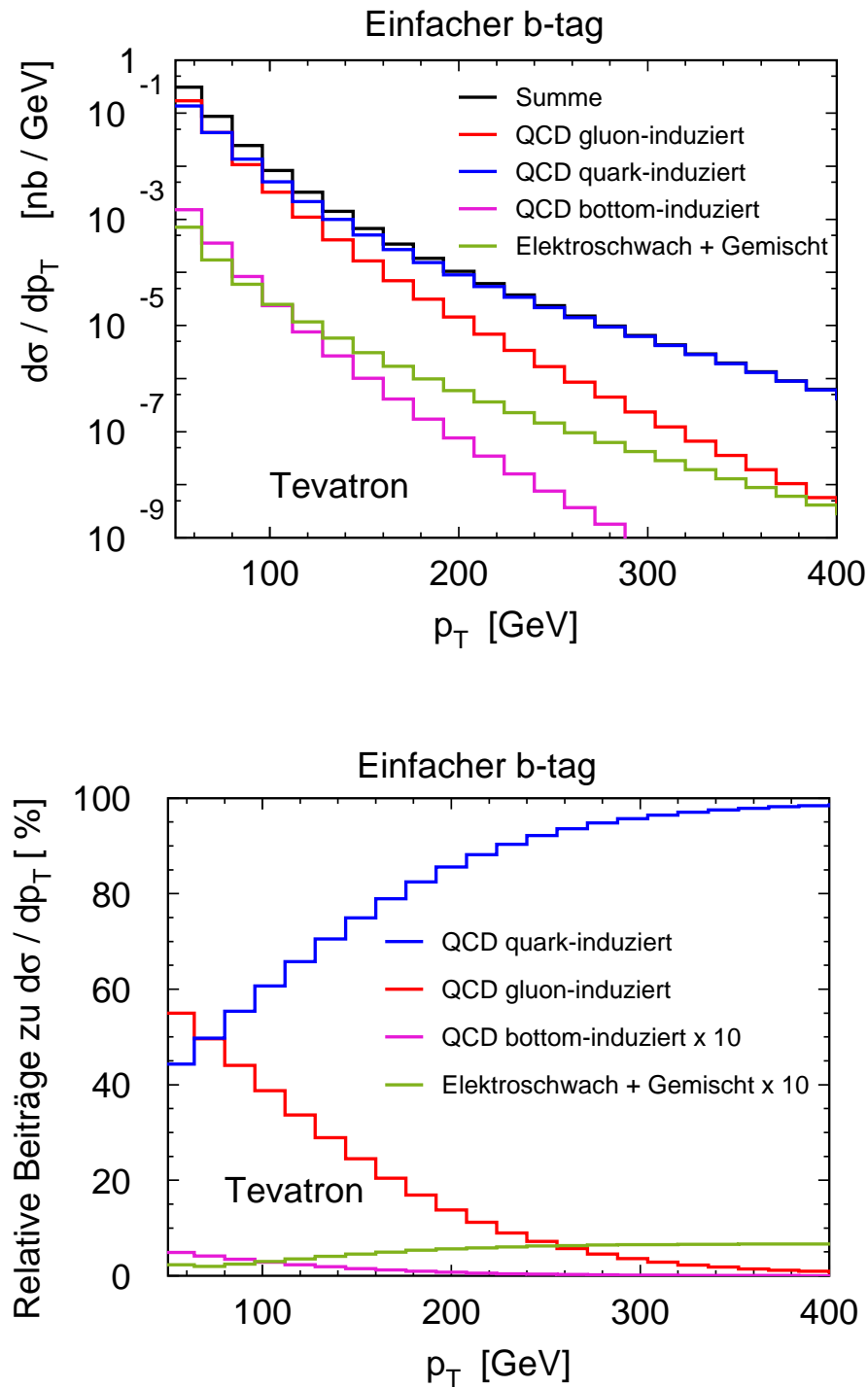


Abbildung 4.2: Gezeigt ist die differentielle Verteilung im Transversalimpuls  $p_T$  für einen einfachen  $b$ -tag am Tevatron (oben), sowie die relativen Beiträge der einzelnen partonischen Prozessklassen (unten).

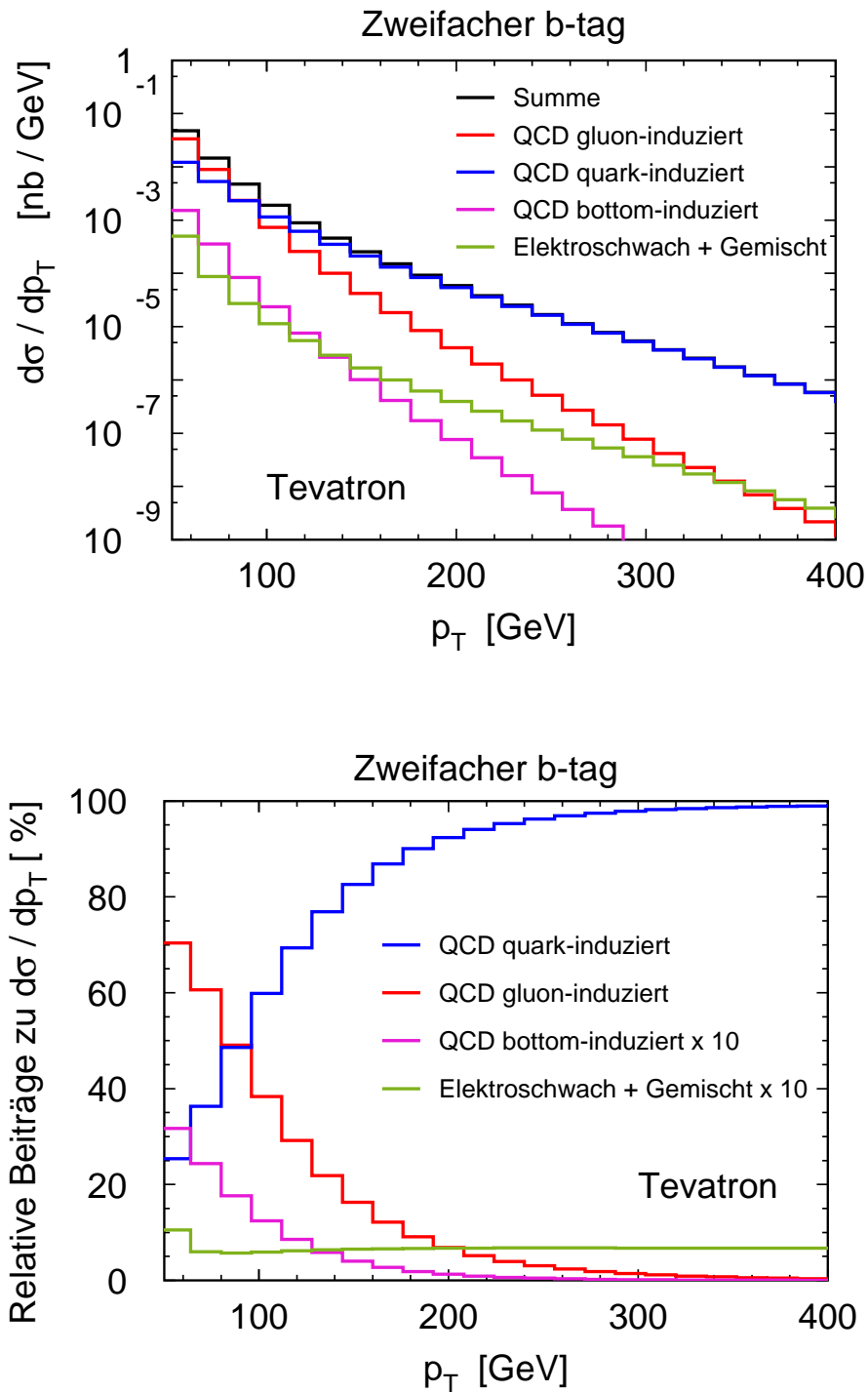


Abbildung 4.3: Gezeigt ist die differentielle Verteilung in  $p_T$  für einen zweifachen  $b$ -tag am Tevatron (oben), sowie die relativen Beiträge der einzelnen partonischen Prozessklassen (unten).

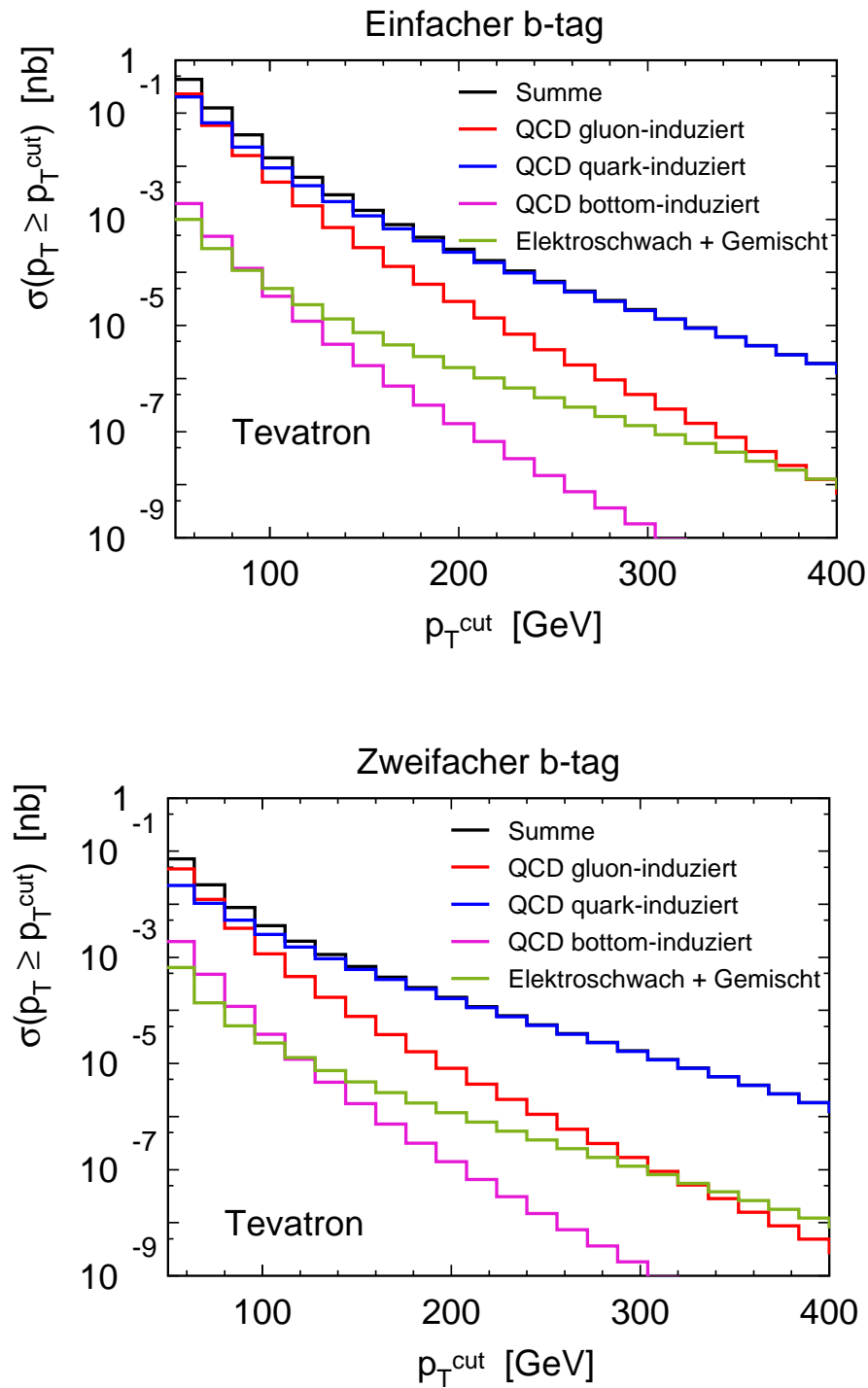


Abbildung 4.4: Gezeigt ist die integrierte  $p_T^{\text{cut}}$ -Verteilung am Tevatron für einen zweifachen  $b$ -tag (oben), sowie einen zweifachen  $b$ -tag (unten).

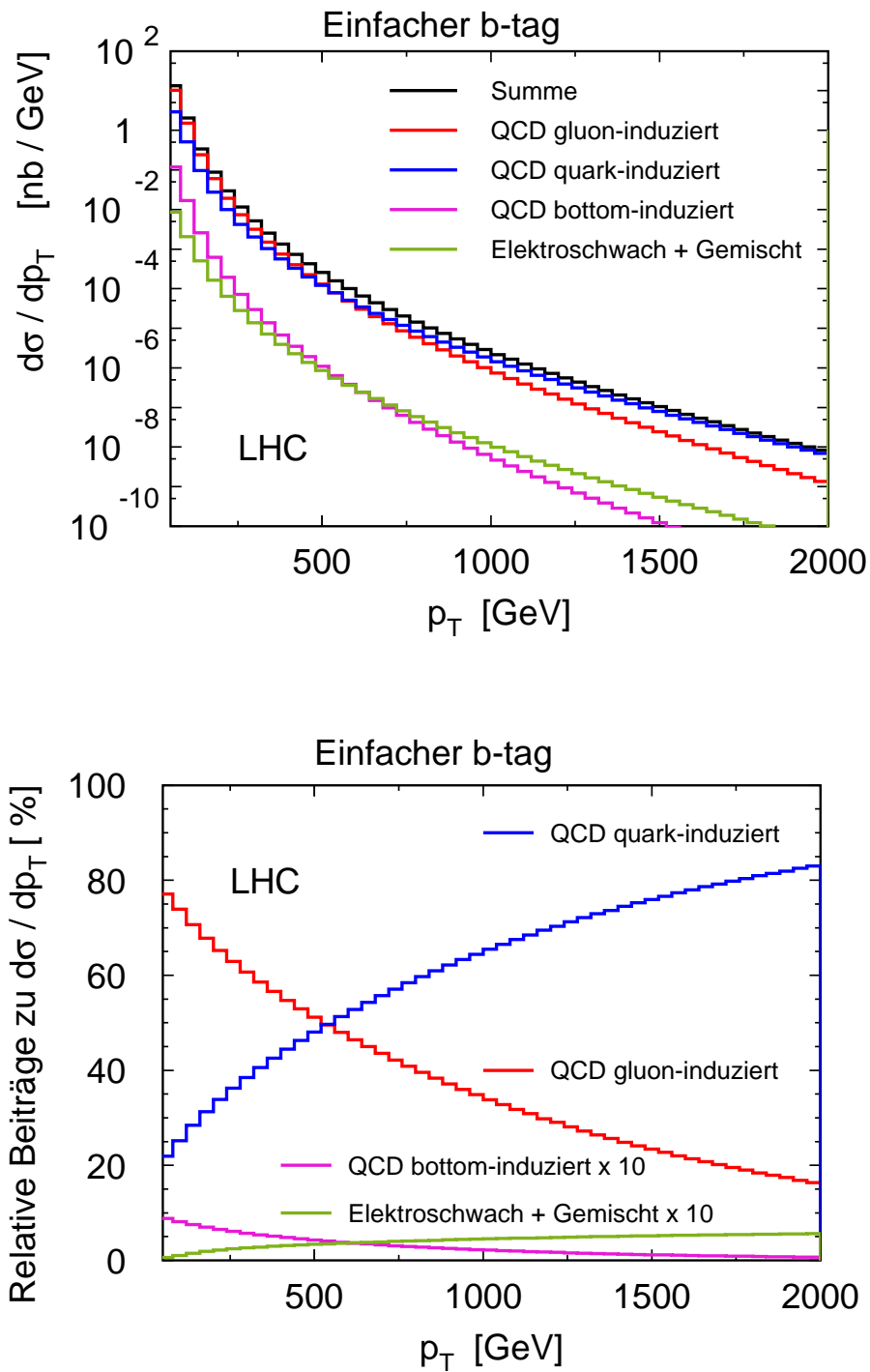


Abbildung 4.5: Gezeigt ist die differentielle Verteilung in  $p_T$  für einen einfachen  $b$ -tag am LHC (oben), sowie die relativen Beiträge der einzelnen partonischen Prozessklassen (unten).

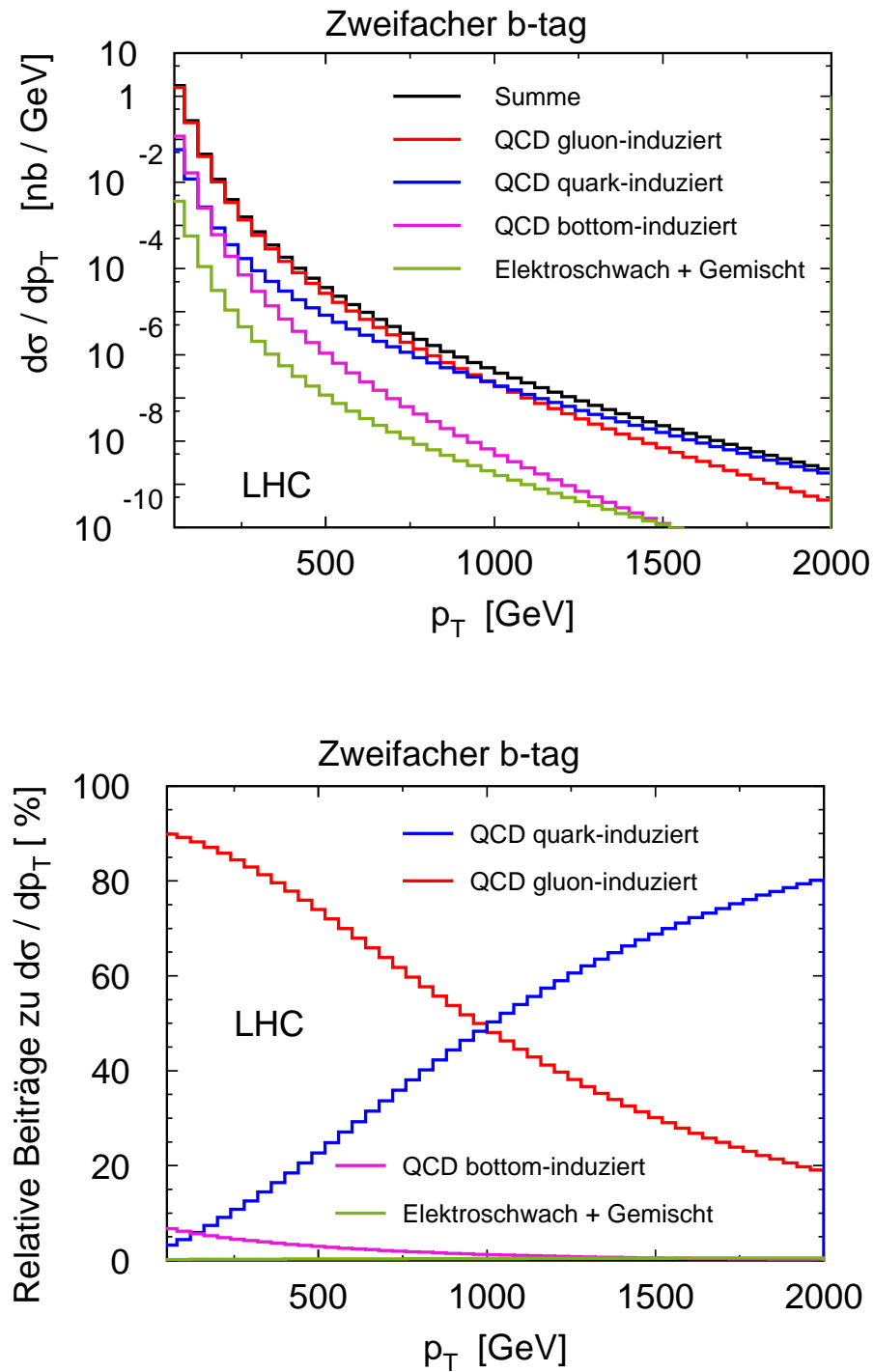


Abbildung 4.6: Gezeigt ist die differentielle Verteilung in  $p_T$  für einen zweifachen  $b$ -tag am LHC (oben), sowie die relativen Beiträge der einzelnen partonischen Prozessklassen (unten).

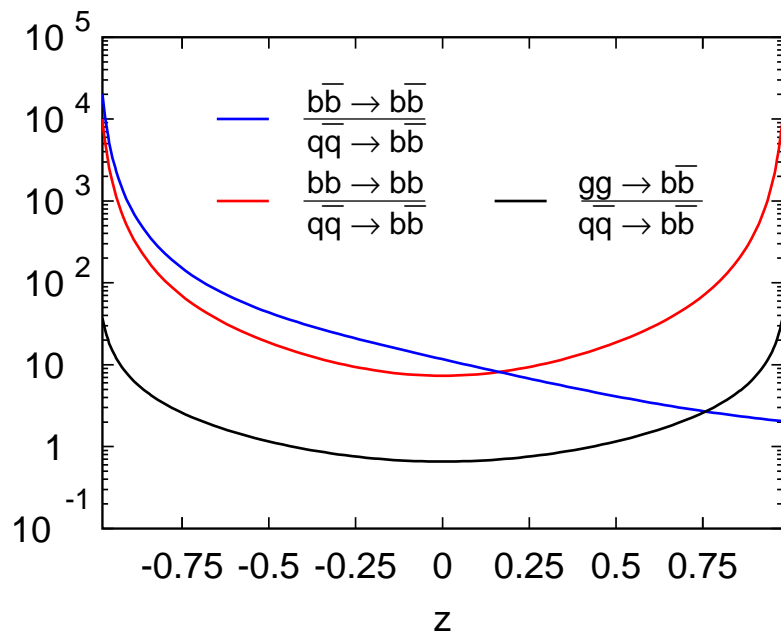
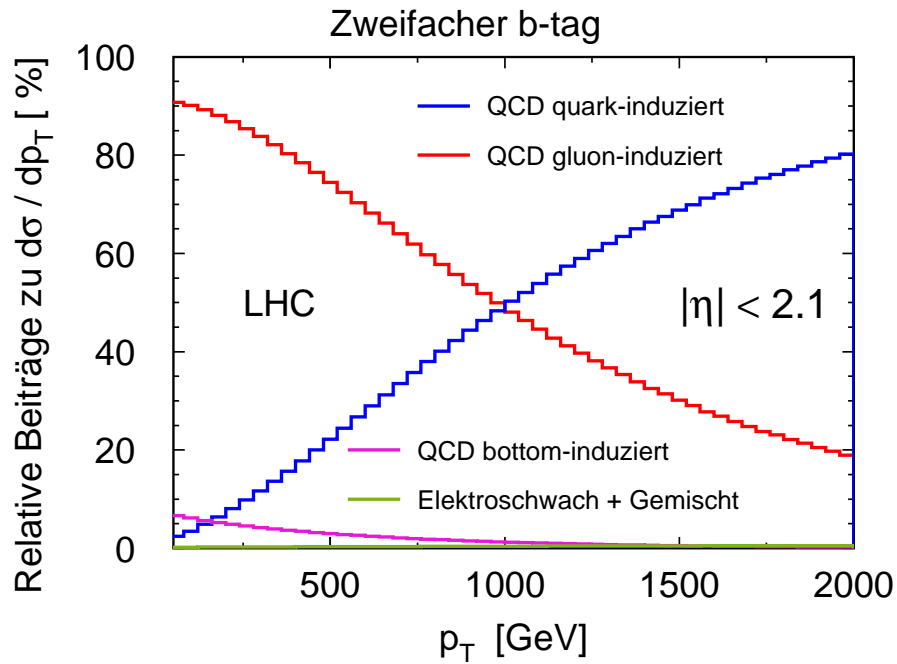


Abbildung 4.7: Der obere Graph zeigt die relative Zusammensetzung der  $p_T$ -Verteilung unter der Verwendung eines Schnitts auf die Pseudorapidität  $|\eta| < 2.1$ . Der untere Graph zeigt die Verhältnisse der partonischen Wirkungsquerschnitte  $b\bar{b} \rightarrow b\bar{b}$ ,  $bb \rightarrow bb$ ,  $gg \rightarrow b\bar{b}$  relativ zu  $q\bar{q} \rightarrow b\bar{b}$  bei fester Schwerpunktsenergie, als Funktion von  $z$ .



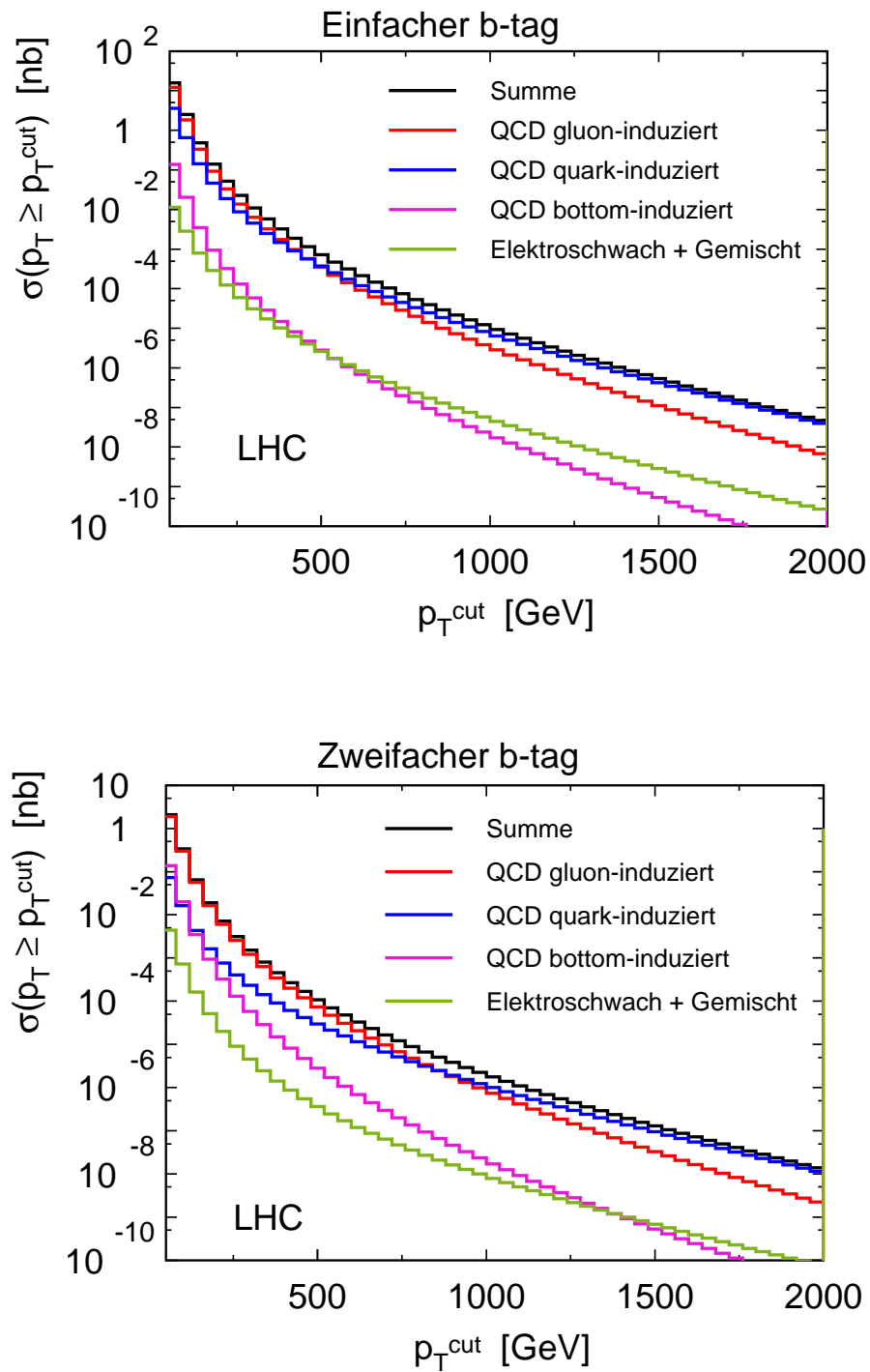


Abbildung 4.8: Gezeigt ist die integrierte Verteilung in  $p_T$  für einen zweifachen  $b$ -tag am LHC (oben), sowie die relativen Beiträge der einzelnen partonischen Prozessklassen (unten).

$b$ -tag wie in Abb. 4.5 gezeigt. Hier spielen die gluon-induzierten Prozesse eine weit wichtigere Rolle als am Tevatron. Im Bereich  $50 \text{ GeV} < p_T < 500 \text{ GeV}$  stellen die den dominanten Beitrag zur  $p_T$ -Verteilung. Für höhere Energien werden allerdings wieder die quark-induzierten Prozesse wichtiger und besitzen bei  $p_T = 2 \text{ TeV}$  einen relativen Anteil von etwa 80% an der gesamten Verteilung. Die bottom-induzierten Prozesse sowie die Beiträge mit Austausch von elektroschwachen Eichbosonen sind für den gezeigten  $p_T$ -Bereich immer vernachlässigbar. Bei zwei geforderten  $b$ -Jets im Endzustand, ergibt sich das in Abb. 4.6 gezeigte Bild. Die Abbildung zeigt, dass die gluon-induzierten Prozesse für  $p_T < 1 \text{ TeV}$  den wichtigsten Beitrag liefern, während die quark-induzierten Prozesse für höhere Energien dominieren. Dieses Verhalten ist natürlich dem Verhalten bei der Top-Quark-Paarproduktion (siehe Abb. 3.19 unterer Graph) sehr ähnlich. Bis auf die veränderte Faktorisierungsskala und den Unterschied in der Masse der erzeugten Teilchen betrachtet man bei einem zweifachen  $b$ -tag dieselben partonischen Prozesse ( $gg \rightarrow t\bar{t}(b\bar{b}), q\bar{q} \rightarrow t\bar{t}(b\bar{b})$ ). Deshalb ist das Verhalten der beiden Verteilungen ähnlich. Während die elektroschwachen und gemischten QCD-elektroschwachen Prozesse wieder keine Rolle spielen, liefern die bottom-induzierten Prozesse einen überraschend großen relativen Anteil von bis zu 7% bei  $p_T = 50 \text{ GeV}$ . Auch am Tevatron ist ihr relativer Anteil im Niederenergiebereich wenige Prozent. Dieser Umstand widerspricht der Erwartung, dass bottom-induzierte Prozesse aufgrund der PDF's stark unterdrückt sind (siehe Abschnitt 2.4). Die Begründung für diese relativ „großen“ bottom-induzierten Beiträge liefert Abb. 4.7 (unten). Dort sind als Funktion des Streuwinkels die verschiedenen partonischen Wirkungsquerschnitte normiert auf  $q\bar{q} \rightarrow b\bar{b}$  gezeigt. Wie aus Gl. (4.7) zu erwarten sind die Beiträge von bottom-induzierten partonischen Prozesse für  $|z| \rightarrow 1$  teilweise um mehrere Größenordnungen größer als die des  $q\bar{q} \rightarrow b\bar{b}$ -Prozesses. Dieses Verhalten der partonischen Wirkungsquerschnitte kompensiert die starke Unterdrückung durch die Bottom-Quark-PDF's im Niederenergiebereich. Durch den geforderten Schnitt  $p_T > 50 \text{ GeV}$  werden Ereignisse nahe  $|z| = 1$  nur bedingt weggeschnitten, da der Transversalimpuls eine Funktion sowohl von  $z$  als auch der Schwerpunktsenergie  $\sqrt{s}$  ist. Somit kann für große Schwerpunktsenergien auch für Werte von  $|z| \simeq 1$  der  $p_T$ -Schnitt passiert werden. Es wurde in Betracht gezogen diese Beiträge mithilfe eines Schnitts auf die Pseudorapidität  $\eta$  zu unterdrücken. Im hadronischen Schwerpunktsystem ist sie gegeben durch

$$\eta = \frac{1}{2} \left[ \ln \left( \frac{1+z}{1-z} \right) + \ln \left( \frac{x_1}{x_2} \right) \right].$$

Dabei sind  $x_1, x_2$  die Vierer-Impuls-Bruchteile der Hadronen (siehe Gl. (2.28)). Allerdings sorgt ein realistischer Schnitt von  $|\eta| < 2.1$ , wobei dieser Wert in etwa dem am CMS-Experiment möglichen Maximalwert für einen  $b$ -tag entspricht, nur für eine Abnahme des Wirkungsquerschnitts

$$\frac{\sigma^{b\bar{b}}(p_T > 50 \text{ GeV}, |\eta| < 2.1)}{\sigma^{b\bar{b}}(p_T > 50 \text{ GeV})} = 0.66.$$

Die relative Zusammensetzung der Verteilung ändert sich nicht (siehe Abb. 4.7 oben).

Abschließend sind die integrierten  $p_T^{\text{cut}}$ -Verteilungen für einen einfachen und zweifachen  $b$ -tag am LHC in Abb. 4.2 gezeigt. Für diese Observablen gilt im Wesentlichen die gleiche Argumentation wie für die differentiellen Verteilungen.

Die Resultate in führender Ordnung zur  $b$ -Jet-Produktion lassen sich wie folgt zusammenfassen. Am Tevatron sind wie bei der Top-Quark-Paarproduktion die quark-induzierten Prozesse dominant und stellen für höhere Energien den wesentlichen Beitrag. Gluon-induzierte Prozesse spielen nur bis  $p_T \leq 200$  GeV eine Rolle. Die Beiträge von zwei (Anti-) Bottom-Quarks im Anfangszustand und die elektroschwachen und gemischten Beiträge sind immer vernachlässigbar. Am LHC spielen die gluon-induzierten Prozesse eine wichtige Rolle im Niederenergiebereich, werden aber für hohe Energien wieder von den quark-induzierten Prozessen abgelöst. Elektroschwache und QCD-elektroschwache Effekte spielen keine signifikante Rolle. Dies gilt auch für rein bottom-induzierte Prozesse im Fall eines einfachen  $b$ -tags. Für einen zweifachen  $b$ -tag kann man diese Prozesse für kleine  $p_T$ -Werte nicht einfach vernachlässigen. Allerdings geht man an dieser Stelle davon aus, dass im Sudakov-Grenzfall die Effekte der bottom-induzierten Prozesse in nächstführender Ordnung keine relevante Signifikanz besitzen. Diese Annahme muss natürlich bzgl. der Korrekturen nächstführender Ordnung noch gerechtfertigt werden und wird am Ende des nächsten Abschnitts diskutiert. Als Folge der bisherigen Diskussion werden deshalb bzgl. der Korrekturen nächstführender Ordnung alle Beiträge von elektroschwachen und gemischten QCD-elektroschwachen Prozesse vernachlässigt. Die Beiträge von bottom-induzierten QCD-Prozessen in führender Ordnung werden bei den später gezeigten relativen Verteilungen mitberücksichtigt.

### 4.3 Korrekturen der Ordnung $\alpha$ zur hadronischen $b$ -Jet-Produktion

In diesem Abschnitt werden die schwachen  $\mathcal{O}(\alpha)$ -Korrekturen zu den folgenden partonischen QCD-Prozessen berechnet:

$$\begin{aligned} q\bar{q} &\rightarrow b\bar{b}, \bar{b}q \rightarrow \bar{b}q, b\bar{q} \rightarrow b\bar{q}, bq \rightarrow bq, \bar{b}\bar{q} \rightarrow \bar{b}\bar{q}, \\ gg &\rightarrow b\bar{b}, bg \rightarrow bg, \bar{b}g \rightarrow \bar{b}g. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Dabei wird für die analytische Darstellung der virtuellen Korrekturen wieder von den im vorigen Abschnitt aufgeführten Crossing-Symmetrien Gebrauch gemacht. Analog werden in diesem Abschnitt Crossing-Symmetrien für die reellen Korrekturen angegeben. Damit kann man sich bei der Angabe der analytischen  $\mathcal{O}(\alpha_s^2\alpha)$ -Beiträge auf die drei partonischen Prozesse  $q\bar{q} \rightarrow b\bar{b}$ ,  $gg \rightarrow b\bar{b}$  und  $q\bar{q} \rightarrow b\bar{b}g$  beschränken. Die Bestimmung dieser Beiträge kann natürlich unter Zuhilfenahme der Ergebnisse für die Top-Quark-Paarproduktion sehr einfach erfolgen. An dieser Stelle wird allerdings davon abgesehen um einen weiteren Konsistenztest für die Ergebnisse durchführen zu können (siehe Abschnitt 4.4).

### 4.3.1 Korrekturen zu quark-induzierten Prozessen

In direkter Analogie zur Top-Quark-Paarproduktion werden die virtuellen Korrekturen zu  $q\bar{q} \rightarrow b\bar{b}$  aufgespalten in Beiträge von Box-Diagrammen und Vertex-Diagrammen. Erste-re sind UV-endlich besitzen jedoch IR-Singularitäten. Die Vertex-Korrekturen sind UV-divergent und müssen mithilfe der Renormierungskonstanten in Anhang B renormiert werden. Diesen Resultaten folgt die Angabe der reellen Korrekturen mit den entsprechenden Crossing-Symmetrien. Anschließend werden in der eikonalen Approximation die IR-Pole der reellen Korrekturen und deren Kompensation mit den IR-Polen der virtuellen Korrekturen gezeigt.

Für die Vertex-Korrekturen im Anfangszustand ( $V_A$ ) und die entsprechenden Counterterme erhält man

$$\overline{\sum} \left| \mathcal{M}_{q\bar{q} \rightarrow b\bar{b}}^{V_A} \alpha_s^2 \alpha \right|^2 = - \overline{\sum} \left| \mathcal{M}_{q\bar{q} \rightarrow b\bar{b}}^{\alpha_s^2} \right|^2 \frac{\alpha}{2\pi} \left( \frac{1}{2} (g_v^{q^2} + g_a^{q^2}) f_1 \left( \frac{M_Z^2}{s} \right) + g_W^2 f_1 \left( \frac{M_W^2}{s} \right) \right) \quad (4.11)$$

mit

$$f_1(x) = 1 + 2 \left[ (1 + \ln(x)) (2x + 3) - 2(1 + x)^2 \left( \text{Li}_2 \left( 1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{\pi^2}{6} \right) \right].$$

Entsprechend ergeben sich die endlichen Vertex-Korrekturen für den  $b\bar{b}$ -Endzustand ( $V_E$ ) zu

$$\overline{\sum} \left| \mathcal{M}_{q\bar{q} \rightarrow b\bar{b}}^{VEZ} \alpha_s^2 \alpha \right|^2 = - \overline{\sum} \left| \mathcal{M}_{q\bar{q} \rightarrow b\bar{b}}^{\alpha_s^2} \right|^2 \frac{\alpha}{4\pi} (g_v^{b^2} + g_a^{b^2}) f_1 \left( \frac{M_Z^2}{s} \right), \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \overline{\sum} \left| \mathcal{M}_{q\bar{q} \rightarrow b\bar{b}}^{VEW} \alpha_s^2 \alpha \right|^2 &= \overline{\sum} \left| \mathcal{M}_{\text{QCD}}^{q\bar{q} \rightarrow b\bar{b}} \right|^2 \frac{\alpha}{\pi} g_W^2 \\ &\times \left\{ -1 + \frac{2m_t^2 - 2M_W^2 - 3s}{s} \right. \\ &\times \left( \frac{1}{m_t^2 - M_W^2} (\bar{A}_0(M_W^2) - \bar{A}_0(m_t^2)) + \bar{B}_0(s, m_t^2, m_t^2) \right) \\ &- \frac{2}{s} \left( (m_t^2 - M_W^2)^2 + s(s - m_t^2 + 2M_W^2) \right) C_0(0, s, 0, m_t^2, M_W^2, m_t^2) \\ &\left. - (m_t^2 - M_W^2) \frac{d}{dp^2} B_0(p^2, m_t^2, M_W^2) \Big|_{p^2=0} \right\}, \quad (4.13) \end{aligned}$$

$$\overline{\sum} \left| \mathcal{M}_{q\bar{q} \rightarrow b\bar{b}}^{VE\phi} \alpha_s^2 \alpha \right|^2 = \overline{\sum} \left| \mathcal{M}_{\text{QCD}}^{q\bar{q} \rightarrow b\bar{b}} \right|^2 \frac{\alpha}{\pi} g_W^2 \frac{m_t^2}{2M_W^2}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ -1 + \frac{2m_t^2 - 2M_W^2 + s}{s} \right. \\
& \times \left( \frac{1}{m_t^2 - M_W^2} (\bar{A}_0(M_W^2) - \bar{A}_0(m_t^2)) + \bar{B}_0(s, m_t^2, m_t^2) \right) \\
& - \frac{2}{s} \left( (m_t^2 - M_W^2)^2 + sm_t^2 \right) C_0(0, s, 0, m_t^2, M_W^2, m_t^2) \\
& \left. - (m_t^2 - M_W^2) \frac{d}{dp^2} B_0(p^2, m_t^2, M_W^2) \Big|_{p^2=0} \right\}, \tag{4.14}
\end{aligned}$$

Bei den letzten beiden Beiträgen ist zu beachten, dass aufgrund der Kinematik des Prozesses die virtuellen Top-Quarks auf der Massenschale liegen können. Demnach sind für eine Schwerpunktsenergie  $E_{\text{cm}} \simeq 2m_t$  Schwelleneffekte zu erwarten. Für die Beiträge von den Boxgraphen findet man schließlich

$$\begin{aligned}
\overline{\sum} \left| \mathcal{M}_{q\bar{q} \rightarrow b\bar{b}}^{\square_z \alpha_s^2 \alpha} \right|^2 &= 4\pi\alpha_s^2 \frac{N^2 - 1}{N^2} \\
&\times \left\{ g_v^q g_v^b \left[ 2 \ln \left( \frac{t}{u} \right) \right. \right. \\
&- 2z \left[ \ln \left( \frac{tu}{M_Z^4} \right) - 2 \frac{s - M_Z^2}{s} \ln \left( \left| 1 - \frac{s}{M_Z^2} \right| \right) - 4 \text{Li}_2 \left( 1 - \frac{s}{M_Z^2} \right) \right] \\
&- 4 \left[ \left( \frac{s(1+z^2)}{s - M_Z^2} - \frac{M_Z^2}{s} \right) \ln \left( \left| 1 - \frac{s}{M_Z^2} \right| \right) \ln \left( \frac{t}{u} \right) - z \ln \left( \left| 1 - \frac{s}{M_Z^2} \right| \right) \ln \left( \frac{s^2}{tu} \right) \right] \\
&- 2 \left[ \left( \frac{s(1+z^2)}{s - M_Z^2} - \frac{2M_Z^2}{s} \right) \left( \text{Li}_2 \left( 1 + \frac{t}{M_Z^2} \right) - \text{Li}_2 \left( 1 + \frac{u}{M_Z^2} \right) \right) \right. \\
&\left. \left. + 2z \left( \text{Li}_2 \left( 1 + \frac{u}{M_Z^2} \right) + \text{Li}_2 \left( 1 + \frac{t}{M_Z^2} \right) \right) \right] \right] \\
&+ g_a^b g_a^q \left[ 2 \ln \left( \frac{tu}{M_Z^4} \right) - 2z \ln \left( \frac{t}{u} \right) - 4 \frac{s - M_Z^2}{s} \ln \left( \left| 1 - \frac{s}{M_Z^2} \right| \right) \right. \\
&+ \frac{4M_Z^2}{s} \left[ \text{Li}_2 \left( 1 + \frac{t}{M_Z^2} \right) + \text{Li}_2 \left( 1 + \frac{u}{M_Z^2} \right) - 2 \text{Li}_2 \left( 1 - \frac{s}{M_Z^2} \right) \right. \\
&\left. \left. - \ln \left( \left| 1 - \frac{s}{M_Z^2} \right| \right) \ln \left( \frac{s^2}{tu} \right) \right] \right. \\
&\left. + 4z \frac{s + M_Z^2}{s - M_Z^2} \ln \left( \left| 1 - \frac{s}{M_Z^2} \right| \right) \ln \left( \frac{t}{u} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{4M_Z^2}{s-M_Z^2} z \left[ \text{Li}_2 \left( 1 + \frac{t}{M_Z^2} \right) - \text{Li}_2 \left( 1 + \frac{u}{M_Z^2} \right) \right] \Bigg\} \\
& + \pi \alpha_s^2 \frac{N^2-1}{N^2} \mathbf{B}^{q\bar{q} \rightarrow b\bar{b}} \left\{ (4\pi)^\varepsilon \Gamma(1+\varepsilon) \left[ \frac{1}{\varepsilon} \ln \left( \frac{t}{u} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{2} \ln^2 \left( \frac{\mu^2}{-u} \right) - \frac{1}{2} \ln^2 \left( \frac{\mu^2}{-t} \right) \right] \right\} \tag{4.15}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\overline{\sum} \left| \mathcal{M}_{q\bar{q} \rightarrow b\bar{b}}^{\square_g} \alpha_s^2 \alpha \right|^2 & = 4\pi \alpha_s^2 \frac{s}{s-M_Z^2} \frac{N^2-1}{N^2} \\
& \times \left\{ g_v^q g_v^b \left[ \ln \left( \frac{u}{t} \right) - z \ln \left( \frac{tu}{s^2} \right) \right. \right. \\
& + (1+z+z^2) \ln^2 \left( \frac{-t}{s} \right) - (1-z+z^2) \ln^2 \left( \frac{-u}{s} \right) \Bigg] \\
& + g_a^q g_a^b \left[ z \ln \left( \frac{u}{t} \right) + \ln \left( \frac{tu}{s^2} \right) - z \ln^2 \left( \frac{-t}{s} \right) + z \ln^2 \left( \frac{-u}{s} \right) \Bigg] \right\} \\
& + \pi \alpha_s^2 \frac{N^2-1}{N^2} \mathbf{B}^{q\bar{q} \rightarrow b\bar{b}} \left\{ (4\pi)^\varepsilon \Gamma(1+\varepsilon) \left[ \frac{1}{\varepsilon} \ln \left( \frac{t}{u} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{2} \ln^2 \left( \frac{\mu^2}{-u} \right) - \frac{1}{2} \ln^2 \left( \frac{\mu^2}{-t} \right) \right] \right\} \tag{4.16}
\end{aligned}$$

wobei der Index  $\square_Z$  den Box-Beitrag mit Z- und Gluon-Austausch bezeichnet, und  $\square_g$  jenen Box-Beitrag bei dem zwei Gluonen ausgetauscht werden (siehe Abb. 3.7). In Gl. (4.15) und Gl. (4.16) wurde die Skala  $\mu$  eingeführt und der Faktor vor den IR-Singularitäten ist gegeben durch

$$\mathbf{B}_{q\bar{q} \rightarrow b\bar{b}} = \frac{8s}{s-M_Z^2} \left( (d-3+z^2) g_v^q g_v^b - z(d-2)(d-3) g_a^q g_a^b \right). \tag{4.17}$$

Dieser Faktor entspricht kinematisch gerade der Interferenz zwischen der  $q\bar{q} \rightarrow b\bar{b}$  QCD-Amplitude mit der  $q\bar{q} \rightarrow b\bar{b}$  Amplitude bei welcher ein Z-Boson ausgetauscht wird in  $d$  Dimensionen. In sehr ähnlicher Form ist sie bereits bei der  $q\bar{q} \rightarrow t\bar{t}$  Erzeugung [48] aufgetreten. Aufgrund der Farberhaltung verschwindet dieser Beitrag in führender Ordnung und erscheint erst bei den  $\alpha_s^2 \alpha$ -Korrekturen. Zusammen ergeben die Box-Graphen des  $q\bar{q} \rightarrow b\bar{b}$ -

Prozesses den folgenden IR-divergenten Beitrag zum differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma_{q\bar{q}\rightarrow b\bar{b}}^{\square \text{ IR}}}{dz} = \frac{\alpha\alpha_s^2}{32s} \frac{N^2 - 1}{N^2} \mathbf{B}_{q\bar{q}\rightarrow b\bar{b}} \left\{ (4\pi)^\varepsilon \Gamma(1 + \varepsilon) \left[ \frac{2}{\varepsilon} \ln\left(\frac{t}{u}\right) + \ln^2\left(\frac{\mu^2}{-u}\right) - \ln^2\left(\frac{\mu^2}{-t}\right) \right] \right\}. \quad (4.18)$$

Für die anderen IR-divergenten partonischen Prozesse ergeben sich die entsprechenden Faktoren, durch Anwenden der Crossing-Relationen in Abschnitt 4.2 unter Beachtung der Anmerkungen in Anhang A.

### Reelle Korrekturen

Die IR-Singularitäten in Gl. 4.18 werden durch die entsprechenden reellen Korrekturen gekürzt. Die benötigten quadrierten Matrixelemente werden in diesem Abschnitt berechnet. Analog zu den Crossing-Symmetrien in Abschnitt 4.2 werden hier Crossing-Relationen für die benötigten  $2 \rightarrow 3$ -Prozesse angegeben. Das quadrierte Matrixelement für  $q\bar{q} \rightarrow b\bar{b}$  ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \overline{\sum} \left| \mathcal{M}_{q\bar{q}\rightarrow b\bar{b}g}^{\alpha_s^2 \alpha} \right|^2 &= \alpha_s^2 \alpha (4\pi)^3 \frac{N^2 - 1}{N^2} \\ &\times \left( g_v^q g_v^b (t_1^2 + t_2^2 + u_1^2 + u_2^2) - g_a^q g_a^b (t_1^2 + t_2^2 - u_1^2 - u_2^2) \right) \\ &\times \frac{1}{s} \frac{1}{s - M_Z^2} \frac{1}{s + t_1 + t_2 + u_1 + u_2} \frac{1}{s + t_1 + t_2 + u_1 + u_2 + M_Z^2} \\ &\times \frac{1}{s + t_1 + u_1} \frac{1}{s + t_2 + u_1} \frac{1}{s + t_1 + u_2} \frac{1}{s + t_2 + u_2} \\ &\times \left( 2s^2 + (t_1 + t_2 + u_1 + u_2)(2s - M_Z^2) \right) \\ &\times \left( (t_1 + t_2 - u_1 - u_2)s^2 + ((t_1 + t_2)^2 - (u_1 + u_2)^2)s \right. \\ &\left. + (t_1 + t_2 + u_1 + u_2)(t_1 t_2 - u_1 u_2) \right), \end{aligned} \quad (4.19)$$

wobei die folgenden Invarianten verwendet werden

$$\begin{aligned} t_1 &= -2k_q k_b, & t_2 &= -2k_{\bar{q}} k_{\bar{b}}, \\ u_1 &= -2k_q k_{\bar{b}}, & u_2 &= -2k_{\bar{q}} k_b. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Dabei bezeichnet  $(k_{\bar{q}})$ ,  $k_q$  und  $(k_{\bar{b}})$ ,  $k_b$  die Vierer-Impulse des (Anti-) Quarks und des (Anti-) Bottom-Quarks. Der Vierer-Impuls des Gluons  $k_g$  wurde mithilfe der Vierer-Impuls-Erhaltung eliminiert. Wie bei den Box-Graphen des  $q\bar{q} \rightarrow b\bar{b}$ -Prozesses gilt auch für den

reellen Beitrag in Gl. (4.19) das Furry-Theorem, sofern man über den gesamten Phasenraum integriert. Demnach trägt der Anteil aus Gl. (4.19), der proportional zu den Vektor-Kopplungen des  $Z$ -Bosons ist nicht zum totalen Wirkungsquerschnitt bei. An dieser Stelle muss darauf aufmerksam gemacht werden, dass der letzte Propagator in Zeile drei von Gl. (4.19) eine Divergenz bei der  $Z$ -Boson-Masse besitzt. Diese ist trotz eines minimal geforderten Transversalimpulses von  $p_T = 50$  GeV numerisch zugänglich. Deswegen wurde auf Parton-Niveau numerisch der Beitrag um diesen Phasenraumpunkt zum Integral über das quadrierte Matrixelement untersucht. Dabei wurde zum einen der Punkt mithilfe eines Abschneide-Parameters  $\delta$  aus dem Phasenraum ausgeschnitten

$$\delta > |s + t_1 + t_2 + u_1 + u_2 + M_Z^2|.$$

Der Parameter  $\delta$  wurde dabei zwischen  $10^{-2}$  und  $10^{-4}$  variiert ohne dabei eine numerische Abweichung des Integrals festzustellen. Zum anderen wurde eine technische Breite  $\Gamma_Z$  für das  $Z$ -Boson eingeführt (und ebenfalls variiert), wobei auch hier dasselbe Ergebnis wie mit dem Abschneide-Parameter erzielt wurde. Dies deckt sich mit der Beobachtung aus [55], dass das Ergebnis auf der  $Z$ -Resonanz unabhängig von  $\Gamma_Z$  ist. Die technische Breite wurde auch bei der Bestimmung hadronischer Ergebnisse verwendet, wobei sie dabei auf  $\Gamma_Z = 0.5$  GeV gesetzt wurde. Für die anderen quark-induzierten Prozesse zur  $b$ -Jet-Produktion wird eine solche Breite nicht benötigt. Diese kann man mit den folgenden Crossing-Relationen aus  $q\bar{q} \rightarrow b\bar{b}g$  gewinnen

$$\overline{\sum} \left| \mathcal{M}_{q\bar{b} \rightarrow q\bar{b}g}^{\alpha_s^2 \alpha} \right|^2 = \overline{\sum} \left| \mathcal{M}_{q\bar{b} \rightarrow q\bar{b}g}^{\alpha_s^2 \alpha} \right|^2 = \overline{\sum} \left| \mathcal{M}_{q\bar{q} \rightarrow b\bar{b}g}^{\alpha_s^2 \alpha} \right|^2 \Bigg|_{s \leftrightarrow t_1, \quad t_2 \rightarrow -s - t_1 - t_2 - u_1 - u_2}, \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} \overline{\sum} \left| \mathcal{M}_{qb \rightarrow qb\bar{g}}^{\alpha_s^2 \alpha} \right|^2 &= \overline{\sum} \left| \mathcal{M}_{q\bar{b} \rightarrow q\bar{b}g}^{\alpha_s^2 \alpha} \right|^2 \\ &= \overline{\sum} \left| \mathcal{M}_{q\bar{b} \rightarrow q\bar{b}g}^{\alpha_s^2 \alpha} \right|^2 \Bigg|_{s \leftrightarrow u_2, \quad u_1 \rightarrow -s - t_1 - t_2 - u_2 - u_1} \\ &= \overline{\sum} \left| \mathcal{M}_{q\bar{q} \rightarrow b\bar{b}g}^{\alpha_s^2 \alpha} \right|^2 \Bigg|_{s \rightarrow t_1, \quad t_1 \rightarrow u_1, \quad t_2 \rightarrow u_2, \quad u_1 \rightarrow s, \quad u_2 \rightarrow -s - t_1 - t_2 - u_1 - u_2} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Um ein IR-endliches Resultat für die reellen Korrekturen zu erhalten wird hier im Gegensatz zur Top-Quark-Paarproduktion die *phase-space-slicing*-Methode verwendet. Dies hat folgende Begründung:

Aufgrund der Vorteile bei der Implementierung und der numerischen Stabilität wurde auch bei der Bottom-Jet-Produktion zuerst die Dipol-Subtraktionsmethode verwendet. Die Kompensation der IR-Singularitäten wurde sowohl numerisch bei den reellen Korrekturen und den Dipolen als auch analytisch bei den virtuellen Korrekturen und dem  $\mathbf{I}$ -Operator festgestellt. Bezüglich der Dipole und den reellen Korrekturen wurde eine sehr gute numerische



Stabilität in den singulären Regionen festgestellt. Allerdings ergaben eingehende Studien, dass die Dipole das reelle Matrixelement auch in den endlichen Phasenraumbereichen sehr gut approximieren. Aufgrund des relativen Vorzeichens zwischen den beiden Termen kommt es daher zu großen Kürzungen im integrierten Ergebnis. Im Unterschied zu den singulären Regionen findet diese Kürzung jedoch nicht punktweise sondern zwischen unterschiedlichen Phasenraumbereichen statt. Dies führt dazu, dass die numerische Integration nur für eine sehr hohe Stützstellenanzahl stabil wird. Zur Berechnung der reellen Korrekturen wurde daher die Methode des *phase-space-slicing* verwendet.

In der Eikonal-Approximation ergibt sich für den Prozess  $q\bar{q} \rightarrow b\bar{b}$  der folgende Ausdruck für das Amplitudenquadrat

$$\begin{aligned} \overline{\sum} \left| \mathcal{M}_{q\bar{q} \rightarrow b\bar{b}g}^{\text{Eikon}} \right|^2 &= 128\alpha_s^2 \alpha \pi^3 \frac{N^2 - 1}{N^2} \frac{s}{s - M_Z^2} \left( (d - 3 + z^2) g_v^q g_v^b - 2z(d - 3)(d - 2) g_a^q g_a^b \right) \\ &\times \left( \frac{2k_q \cdot k_b}{2k_q \cdot k_g 2k_b \cdot k_g} + \frac{2k_{\bar{q}} \cdot k_{\bar{b}}}{2k_{\bar{q}} \cdot k_g 2k_{\bar{b}} \cdot k_g} - \frac{2k_q \cdot k_{\bar{b}}}{2k_q \cdot k_g 2k_{\bar{b}} \cdot k_g} - \frac{2k_{\bar{q}} \cdot k_b}{2k_{\bar{q}} \cdot k_g 2k_b \cdot k_g} \right). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Wie man erkennen kann ist das Amplitudenquadrat im eikonalen Grenzfall gerade proportional zu dem Faktor  $B^{q\bar{q} \rightarrow b\bar{b}}$  aus den virtuellen Korrekturen. Integriert man den Eikonal-Faktor nach Gl. (2.46) und ersetzt die auftretenden Winkel durch den Streuwinkel  $z$  der  $2 \rightarrow 2$ -Kinematik, so ergibt sich

$$\begin{aligned} &\int \frac{d^{d-1}k_g}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_g} \left[ \frac{2k_q \cdot k_b}{2k_q \cdot k_g 2k_b \cdot k_g} + \frac{2k_{\bar{q}} \cdot k_{\bar{b}}}{2k_{\bar{q}} \cdot k_g 2k_{\bar{b}} \cdot k_g} - \frac{2k_q \cdot k_{\bar{b}}}{2k_q \cdot k_g 2k_{\bar{b}} \cdot k_g} - \frac{2k_{\bar{q}} \cdot k_b}{2k_{\bar{q}} \cdot k_g 2k_b \cdot k_g} \right] \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{\varepsilon^2} \pi^\varepsilon \frac{\Gamma(1 - \varepsilon)}{\Gamma(1 - 2\varepsilon)} \left( \frac{\mu^2}{E_c^2} \right)^\varepsilon \\ &\times \left[ \left( \frac{-t}{s} \right)^{-\varepsilon} \left( 1 + \varepsilon^2 \text{Li}_2 \left( \frac{-u}{s} \right) \right) - \left( \frac{-u}{s} \right)^{-\varepsilon} \left( 1 + \varepsilon^2 \text{Li}_2 \left( \frac{-t}{s} \right) \right) \right] \end{aligned} \quad (4.24)$$

Mit diesem Ergebnis kann der endliche Anteil in der eikonalen Approximation bestimmt werden. Dazu addiert man den entsprechenden Beitrag des differentiellen Wirkungsquerschnitts zu Gl. (4.18) und erhält

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{q\bar{q} \rightarrow b\bar{b}}^{\text{Soft}}}{dz} &= \left[ \frac{d\sigma_{q\bar{q} \rightarrow b\bar{b}}^{\square \text{ IR}}}{dz} + \frac{d\sigma_{q\bar{q} \rightarrow b\bar{b}g}^{\text{Eikon}}}{dz} \right]_{\varepsilon \rightarrow 0} \\ &= \alpha_s^2 \alpha \frac{N^2 - 1}{2N^2} \frac{1}{s - M_Z^2} \left( (1 + z^2) g_v^q g_v^b - 2z g_a^b g_a^q \right) \end{aligned}$$

$$\times \left( \text{Li}_2 \left( \frac{-u}{s} \right) - \text{Li}_2 \left( \frac{-t}{s} \right) - \ln(x_{\min}^2) \ln \left( \frac{t}{u} \right) \right) \quad (4.25)$$

Die Variable  $x_{\min}$  ist eine dimensionslose Größe und legt den Schnitt an die Gluon-Energie fest. Für die Phasenraumintegration des endlichen Anteils der reellen Korrekturen wird sie zu

$$x_{\min} \leq \frac{2E_g}{\sqrt{s}}. \quad (4.26)$$

gewählt. Entsprechend ergeben sich die endlichen Anteile für die anderen partonischen Prozesse zu:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{q\bar{b} \rightarrow q\bar{b}}^{\text{Soft}}}{dz} &= \alpha_s^2 \alpha \frac{N^2 - 1}{N^2} \frac{1}{s(1+z) + 2M_Z^2} \frac{1}{1+z} \left( (4 + (1-z)^2) g_v^q g_v^b - (1+z)(3-z) g_a^q g_a^b \right) \\ &\times \left( \text{Li}_2 \left( \frac{-u}{s} \right) + \frac{\pi^2}{3} + \ln(x_{\min}^2) \ln \left( \frac{-s}{u} \right) \right), \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{qb \rightarrow qb}^{\text{Soft}}}{dz} &= \alpha_s^2 \alpha \frac{N^2 - 1}{N^2} \frac{1}{s(1+z) + 2M_Z^2} \frac{1}{1+z} \left( - (4 + (1-z)^2) g_v^q g_v^b - (1+z)(3-z) g_a^q g_a^b \right) \\ &\times \left( \text{Li}_2 \left( \frac{-u}{s} \right) + \frac{\pi^2}{3} + \ln(x_{\min}^2) \ln \left( \frac{-s}{u} \right) \right). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Damit sind alle reellen Beiträge zu den quark-induzierten Prozessen bekannt.

### 4.3.2 Korrekturen zu gluon-induzierten Prozessen

In diesem Abschnitt werden die virtuellen Korrekturen zu den gluon-induzierten Prozessen berechnet. Mit den Crossing-Relationen aus Abschnitt 4.2 genügt es den partonischen Prozess  $gg \rightarrow b\bar{b}$  zu betrachten. Die entsprechenden Resultate können wie für den  $q\bar{q} \rightarrow b\bar{b}$ -Prozess aus den Ergebnissen für die Top-Quark-Paarproduktion abgeleitet werden. Aufgrund der Proportionalität zur Masse der Endzustandsteilchen verschwinden alle Beiträge für die Felder  $\chi$  und  $H$ . Dasselbe Argument gilt für die  $Z + \chi$ -Dreiecksgraphen und die Vertex-Korrekturen zum  $s$ -Kanal (siehe Gln. (3.20)-(3.24)). Der Selbstenergie-Beitrag mit  $Z$ -Boson Austausch ergibt sich dann zu

$$\begin{aligned} \overline{\sum} \left| \mathcal{M}_{gg \rightarrow b\bar{b}}^{\Sigma_Z} \alpha_s^2 \alpha \right|^2 &= \pi \alpha_s^2 \alpha \left\{ \frac{2 - N^2 + N^2 z}{N(N^2 - 1)s} (g_v^{b^2} + g_a^{b^2}) \frac{1 + z^2}{(1+z)^2} \left[ 3s(1+z) + 4M_Z^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{2}{s(1+z)} \left( s(1+z) + 2M_Z^2 \right)^2 \ln \left( 1 - \frac{t}{M_Z^2} \right) \right] + (z \rightarrow -z) \right\}. \end{aligned}$$

(4.29)

Analog ergibt sich für den  $W$ -Boson Austausch

$$\begin{aligned} \overline{\sum} \left| \mathcal{M}_{gg \rightarrow b\bar{b}}^{\Sigma_W \alpha_s^2 \alpha} \right|^2 &= 4\pi\alpha_s^2 \alpha \left\{ \frac{2 - N^2 + N^2 z}{N(N^2 - 1)s} g_W^2 \frac{1 + z^2}{(1 + z)^2} \right. \\ &\quad \left[ \frac{1}{2(m_t^2 - M_W^2)} \left( s(1 + z)(m_t^2 - 3M_W^2) - 4(m_t^2 - M_W^2)^2 \right) \right. \\ &\quad + \frac{M_W^2}{(m_t^2 - M_W^2)^2} \left( s(1 + z)(2m_t^2 - M_W^2) - 2(m_t^2 - M_W^2)^2 \right) \ln \left( \frac{m_t^2}{M_W^2} \right) \\ &\quad \left. \left. + (s(1 + z) + 2M_W^2 - 2m_t^2) f(y_1, y_2) \right] + (z \rightarrow -z) \right\}, \end{aligned} \quad (4.30)$$

wobei die folgende Funktion eingeführt wird

$$f(y_1, y_2) = -y_1 \ln \left( \frac{y_1}{y_1 - 1} \right) - y_2 \ln \left( \frac{y_2}{y_2 - 1} \right) \quad (4.31)$$

mit

$$\begin{aligned} y_{1/2} &= \frac{b}{2} \times \left( 1 \mp \sqrt{1 - 4 \frac{M_W^2}{t} \frac{1}{b^2}} \right), \\ b &= 1 + \frac{M_W^2 - m_t^2}{t}. \end{aligned}$$

Die Vertex-Korrekturen ergeben sich zu

$$\overline{\sum} \left| \mathcal{M}_{gg \rightarrow b\bar{b}}^{V_i \alpha_s^2 \alpha} \right|^2 = -2 \overline{\sum} \left| \mathcal{M}_{gg \rightarrow b\bar{b}}^{\Sigma_i \alpha_s^2 \alpha} \right|^2. \quad (4.32)$$

Dabei steht der Index  $i$  gerade für die Felder  $Z$ ,  $W$ ,  $\phi$  und der Faktor zwei trägt der Tatsache Rechnung, dass es doppelt so viele Vertex-Diagramme wie Selbstenergie-Diagramme gibt.

Schließlich ergeben sich für die Beiträge von Box-Diagrammen die folgenden quadrierten Matrixelemente

$$\begin{aligned} \overline{\sum} \left| \mathcal{M}_{gg \rightarrow b\bar{b}}^{\square_Z \alpha_s^2 \alpha} \right|^2 &= 2\pi\alpha_s^2 \alpha \frac{1}{s} \frac{2 - N^2 + N^2 z}{N(N^2 - 1)} (g_v^{b^2} + g_a^{b^2}) \frac{1}{1 + z} \\ &\quad \left\{ 4(s + M_Z^2) + (s + 4M_Z^2)z + (5s + 2M_Z^2)z^2 \right. \\ &\quad \left. - (1 + z)(-2s + (3s + 2M_Z^2)z) \ln \left( \frac{s}{M_Z^2} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{s(1+z) + 2M_Z^2}{s(1+z)} (6s + 4M_Z^2 - (s - 2M_Z^2)z + sz^2) \ln \left( 1 - \frac{t}{M_Z^2} \right) \\
& - \frac{2(s + M_Z^2)^2(1+z)(4-z+z^2)}{s(1-z)} \left[ \text{Li}_2 \left( -\frac{s}{M_Z^2} \right) + \ln \left( \frac{s}{M_Z^2} \right) \ln \left( 1 + \frac{s}{M_Z^2} \right) \right] \\
& + \frac{2}{s(1-z)} \left( 5s^2 + 12sM_Z^2 + 8M_Z^4 + 2s(s + 2M_Z^2)z + s^2z^2 \right) \\
& \times \left[ \text{Li}_2 \left( \frac{t}{M_Z^2} \right) + \ln \left( \frac{s}{M_Z^2} \right) \ln \left( 1 - \frac{t}{M_Z^2} \right) \right] \Big\} + (z \rightarrow -z), \tag{4.33}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\sum} \left| \mathcal{M}_{gg \rightarrow b\bar{b}}^{\square_W} \alpha_s^2 \alpha \right|^2 &= 4\pi\alpha_s^2 \alpha \frac{1}{s} \frac{2 - N^2 + N^2z}{N(N^2 - 1)} g_W^2 \frac{1}{1+z} \\
& \left\{ sz(1+z) + \frac{2}{m_t^2 - M_W^2} \left( 2(s - m_t^2 + M_W^2) \right. \right. \\
& - 2(m_t^2 - M_W^2)z + (2s - m_t^2 + M_W^2)z^2 \Big) \left( \bar{A}_0(M_W^2) - \bar{A}_0(m_t^2) \right) \\
& - (1+z) \left( 2s - (3s - 2m_t^2 + 2M_W^2)z \right) \bar{B}_0(s, m_t^2, m_t^2) \\
& + \left( 6s - 4m_t^2 + 4M_W^2 - (s + 2mt^2 - 2M_W^2)z + sz^2 \right) \bar{B}_0(t, m_t^2, M_W^2) \\
& - \frac{1}{1-z} \left( 5s^2 + 4s(3M_W^2 - 2m_t^2) + 8(m_t^2 - M_W^2)^2 \right. \\
& + 2s(s - 2m_t^2 + 2M_W^2)z + s^2z^2 \Big) \\
& \times \left( C_0(0, 0, s, m_t^2, m_t^2, m_t^2) - (1+z)C_0(0, s, 0, m_t^2, m_t^2, M_W^2) \right) \\
& - \frac{1}{1-z} \left[ s(3s - 4m_t^2 + 4M_W^2) \right. \\
& + \left( 2s(2s - 3m_t^2 + 4M_W^2) + 6(m_t^2 - M_W^2)^2 \right) z \\
& - s^2z^2 + 2 \left( s(s - m_t^2 + 2M_W^2) + (m_t^2 - M_W^2)^2 \right) z^3 \Big] \\
& \times C_0(0, s, 0, m_t^2, m_t^2, M_W^2) \\
& - \frac{1}{2(1-z)} \left[ 5s^3 + 22s^2M_W^2 - 10s^2m_t^2 \right. \\
& + 16s(m_t^4 + 2M_W^4 - 3m_t^2M_W^2) - 16(m_t^2 - M_W^2)^3 \\
& + s \left( 7s^2 - 16sm_t^2 + 20sM_W^2 + 16(m_t^2 - M_W^2)^2 \right) z \\
& + s \left( 3s^2 + 6sM_W^2 - 14sm_t^2 + 8m_t^2(m_t^2 - M_W^2) \right) z^2 + s^3z^3 \Big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left. D_0^W(0,0,0,s,u,t,m_t^2,m_t^2,m_t^2,M_W^2) \right\} \\ & + (z \rightarrow -z), \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} \sum \left| \mathcal{M}_{gg \rightarrow b\bar{b}}^{\square_\phi \alpha_s^2 \alpha} \right|^2 &= 2pi\alpha_s^2 \frac{1}{s} \frac{2-N^2+N^2z}{N(N^2-1)} g_W^2 \frac{m_t^2}{M_W^2} \frac{1}{1+z} \\ & \left\{ sz(1+z) + 2 \left( 2(1+z) + z^2 \right) \left( \bar{A}_0(m_t^2) - \bar{A}_0(M_W^2) \right) \right. \\ & - (1+z) \left( 2s + (s+2m_t^2-2M_W^2)z \right) \bar{B}_0(s,m_t^2,m_t^2) \\ & + (2+z) \left( s(1+z) - 2(m_t^2-M_W^2) \right) \bar{B}_0(t,m_t^2,M_W^2) \\ & - \frac{1}{1-z} \left( s^2 + 4sM_W^2 + 8(m_t^2-M_W^2)^2 \right. \\ & \left. + 2s(s-2m_t^2+2M_W^2)z + s^2z^2 \right) \\ & \times \left( C_0(0,0,s,m_t^2,m_t^2,m_t^2) - (1+z)C_0(0,s,0,m_t^2,m_t^2,M_W^2) \right) \\ & - \frac{1}{1-z} \left[ s(s-4(m_t^2-M_W^2)) \right. \\ & \left. + 2 \left( s^2 - sm_t^2 + 2sM_W^2 + 3(m_t^2-M_W^2)^2 \right) z \right. \\ & \left. + s^2z^2 + 2(sm_t^2 + (m_t^2-M_W^2)^2)z^3 \right] C_0(0,s,0,m_t^2,m_t^2,M_W^2) \\ & - \frac{1}{2(1-z)} \left[ s^3 + 6s^2M_W^2 - 2s^2m_t^2 \right. \\ & \left. + 16sM_W^2(M_W^2-m_t^2) + 16(M_W^2-m_t^2)^3 \right. \\ & \left. + s \left( 3s^2 + 12sM_W^2 - 8sm_t^2 + 16(m_t^2-M_W^2)^2 \right) z \right. \\ & \left. + s \left( 3s(s-2m_t^2+2M_W^2) + 8m_t^2(m_t^2-M_W^2) \right) z^2 + s^3z^3 \right] \\ & \times \left. D_0^W(0,0,0,s,u,t,m_t^2,m_t^2,m_t^2,M_W^2) \right\} \\ & + (z \rightarrow -z). \end{aligned} \quad (4.35)$$

Die verwendeten Abkürzungen für die skalaren Integrale sind wiederum in Anhang A zu finden. Für die Box-Beiträge mit  $W$ - und  $\phi$ -Austausch kann das virtuelle  $t\bar{t}$ -Paar analog zu den Vertex-Korrekturen Gl. (4.13) und Gl. (4.14) auf der Massenschale liegen. Damit sind die schwachen Korrekturen nächstführender Ordnung zu  $gg \rightarrow b\bar{b}$  vollständig.

### 4.3.3 Neue Prozesse zur Ordnung $\alpha\alpha_s^2$

In diesem Abschnitt werden Born-Prozesse betrachtet, welche erst zur Ordnung  $\alpha_s^2\alpha$  auftreten. Im Einzelnen sind dies die Prozesse

$$\begin{aligned} gq &\rightarrow qb\bar{b}, \quad g\bar{q} \rightarrow \bar{q}b\bar{b}, \\ gb &\rightarrow bq\bar{q}, \quad g\bar{b} \rightarrow \bar{b}q\bar{q}, \\ gb &\rightarrow bb\bar{b}, \quad g\bar{b} \rightarrow \bar{b}b\bar{b}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Einige Beispieldiagramme sind in Abb.4.9 zu sehen. Kreuzt man für diese Prozesse die bei-

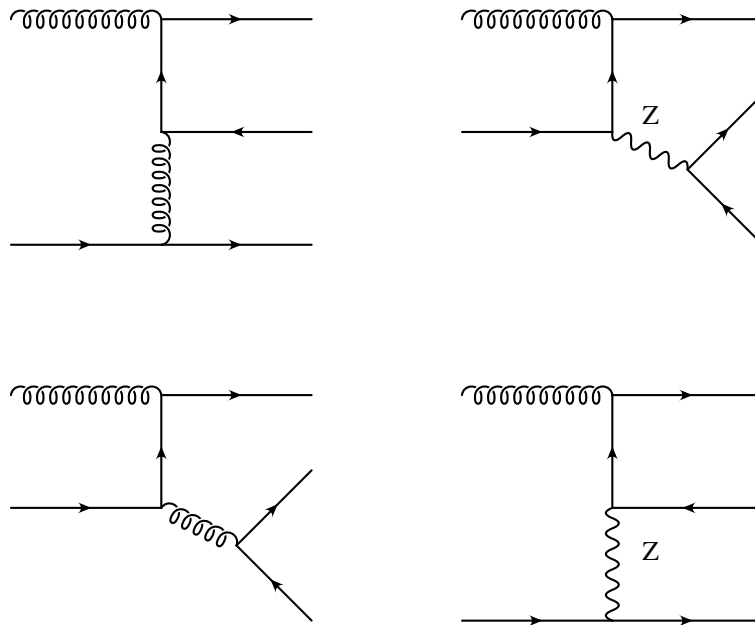


Abbildung 4.9: Beispieldiagramme für die in Gl. (4.36) aufgelisteten Prozesse.

den Anfangszustandsteilchen in den Endzustand, so wird deutlich, dass sich alle Streuamplituden auf den Prozess  $0 \rightarrow q\bar{q}b\bar{b}g$  zurückführen lassen. Daher sind die entsprechenden Amplitudenquadrate mit den Crossing-Relationen

$$\begin{aligned} \overline{\sum} \left| \mathcal{M}_{gq \rightarrow qb\bar{b}} \right|^2 &= \overline{\sum} \left| \mathcal{M}_{gb \rightarrow bq\bar{q}} \right|^2 \\ &= -\overline{\sum} \left| \mathcal{M}_{q\bar{q} \rightarrow b\bar{b}g} \right|^2 \Big|_{s \rightarrow -s-t_1-u_2, \quad t_2 \rightarrow s+t_1+u_1, \quad u_1 \rightarrow s+t_2+u_2} \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} \overline{\sum} \left| \mathcal{M}_{g\bar{q} \rightarrow \bar{q}b\bar{b}} \right|^2 &= \overline{\sum} \left| \mathcal{M}_{g\bar{b} \rightarrow \bar{b}q\bar{q}} \right|^2 \\ &= -\overline{\sum} \left| \mathcal{M}_{q\bar{q} \rightarrow b\bar{b}g} \right|^2 \Big|_{s \rightarrow -s-u_1-t_2, \quad t_1 \rightarrow s+t_2+u_2, \quad u_2 \rightarrow s+t_1+u_1} \end{aligned} \quad (4.38)$$

und

$$\overline{\sum} \left| \mathcal{M}_{gb \rightarrow bb\bar{b}} \right|^2 = \overline{\sum} \left| \mathcal{M}_{gq \rightarrow qb\bar{b}} \right|^2 \Big|_{g_v^q \rightarrow g_v^b, \quad g_a^q \rightarrow g_a^b}, \quad (4.39)$$

$$\overline{\sum} \left| \mathcal{M}_{g\bar{b} \rightarrow \bar{b}b\bar{b}} \right|^2 = \overline{\sum} \left| \mathcal{M}_{g\bar{q} \rightarrow \bar{q}b\bar{b}} \right|^2 \Big|_{g_v^q \rightarrow g_v^b, \quad g_a^q \rightarrow g_a^b}. \quad (4.40)$$

bestimmt. Auch für diese Klasse von Prozessen gilt wiederum das Furry-Theorem, so dass nur Anteile proportional zu den Axialvektor-Kopplungen zum totalen Wirkungsquerschnitt beitragen. Dies hat zur Folge, dass die Beiträge zum Wirkungsquerschnitt von  $gb \rightarrow bq\bar{q}$ ,  $g\bar{b} \rightarrow \bar{b}q\bar{q}$  gänzlich verschwinden. Dies kann man erkennen wenn man die Summe über die Axialvektor-Kopplungen der leichten Quarks ausführt:

$$\sum_{q=u,d,c,s} g_a^q g_a^b = 0 \quad \text{mit} \quad g_a^u = g_a^c = -g_a^d = -g_a^s. \quad (4.41)$$

Auf Parton-Niveau würde dies auch für die Prozesse  $gq \rightarrow qb\bar{b}$  und  $g\bar{q} \rightarrow \bar{q}b\bar{b}$  gelten. Auf Hadron-Niveau allerdings kann die Kompensation aufgrund verschiedener PDF's nicht vollständig erfolgen. Des Weiteren wird auch hier die weiter oben eingeführte technische Breite  $\Gamma_Z$  benötigt um den Pol für die Z-Boson-Masse aus dem Phasenraum auszuschneiden. Damit sind die partonischen Amplitudenquadrate zu den in Gl. (4.36) aufgeführten Prozessen bestimmt.

## 4.4 Konsistenz und Ergebnisse

### 4.4.1 Konsistenz

Nachdem die Berechnung der partonischen  $\alpha_s^2 \alpha$ -Beiträge abgeschlossen ist, soll an dieser Stelle die Konsistenz der bisherigen Berechnungen zur  $b$ -Jet Produktion diskutiert werden. Analog zur Top-Quark-Paarproduktion wurde die Kürzung der UV- und IR-Singularitäten in den virtuellen Korrekturen explizit durchgeführt. Da bei der Berechnung der reellen Korrekturen die *phase-space-slicing*-Methode verwendet wurde, ist ein wichtiger Konsistenz-Test die Unabhängigkeit des Ergebnisses vom Schnitt-Parameter  $E_c$ . Dies ist in Abb. 4.10 für die quark-induzierten Prozesse auf Parton-Niveau gezeigt. Um die Kompensation besser aufzuzeigen wurde für die Prozesse  $q\bar{b} \rightarrow q\bar{b}g$ ,  $qb \rightarrow qbg$  jeweils eine entsprechende Konstante hinzuaddiert. Wie man sehen kann bildet sich bei allen drei Prozessen für die Summe aus reellen Korrekturen und den weichen Anteilen ein Plateau aus. Dies belegt, dass die Summe aus reellen Korrekturen und den entsprechenden weichen Termen unabhängig vom Schnitt-Parameter  $E_c$  sind. Eine genauere Analyse unter Berücksichtigung der entsprechenden statistischen Fehler zeigte, dass man ab  $x_{\min} < 10^{-3}$  bereits auf dem Plateau ist. Für die folgenden numerischen Ergebnisse wird  $x_{\min} = 10^{-4}$  gewählt.

Ein sehr wichtiger Test ist, dass alle Korrekturen führender und nächstführender Ordnung

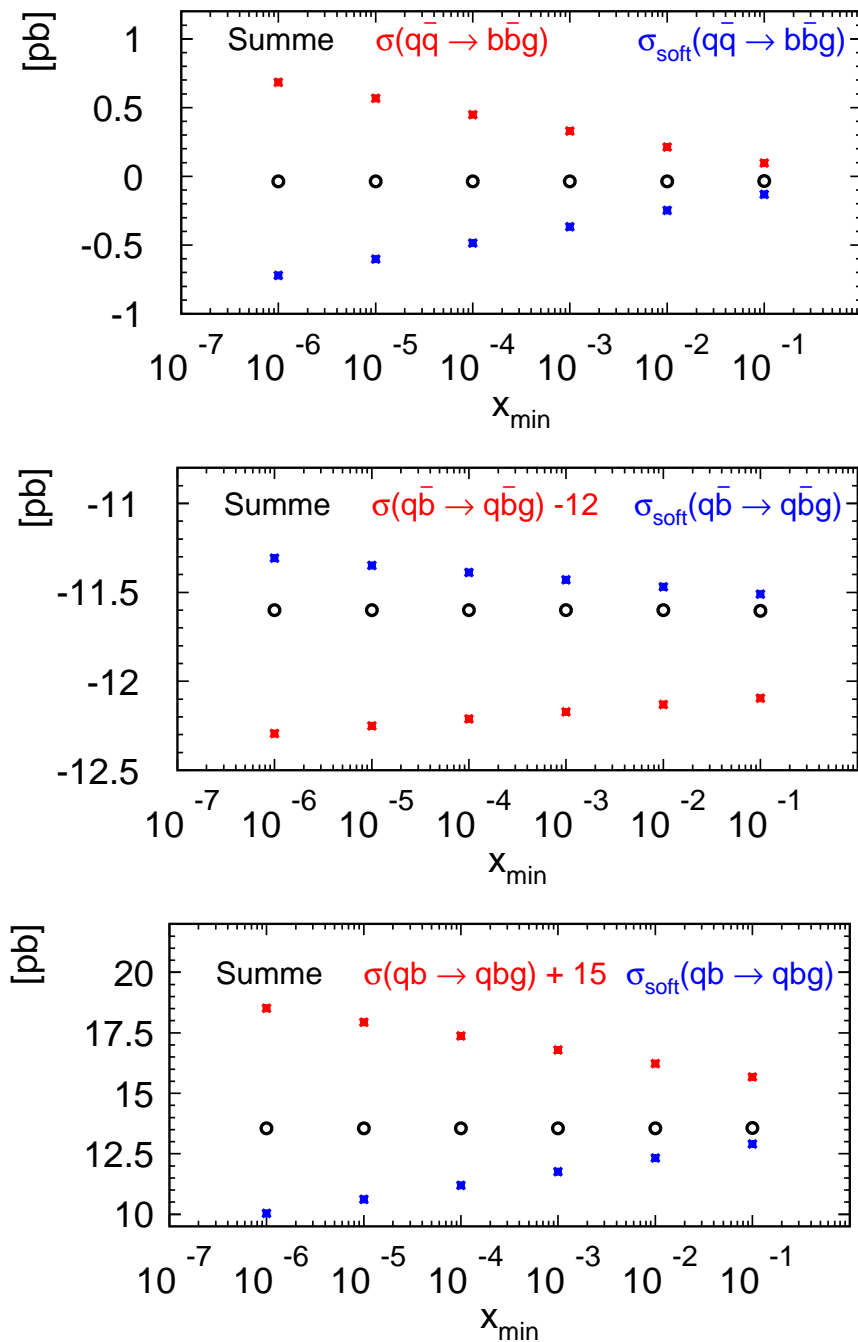


Abbildung 4.10: Die Graphen dokumentieren die Abhängigkeit der reellen Korrekturen (rot) und der weichen Anteile (blau) zum Wirkungsquerschnitt (Gln. (4.25),(4.27),(4.28)) als Funktion von  $x_{\min}$ . Um das Verhalten der reellen Korrekturen besser herauszustellen wurde bei den unteren zwei Figuren eine Konstante hinzuaddiert. Die Summe (ohne Konstante) der weichen und reellen Anteile ist für die jeweiligen Prozesse als schwarze Kreise dargestellt.



explizit ohne Verwendung der Crossing-Relationen berechnet wurden. Damit konnten alle in den vorigen Abschnitten angegebenen Crossing-Relationen sowohl analytisch als auch numerisch erfolgreich getestet werden. Ein weiterer Test ist der Vergleich der Ergebnisse für  $q\bar{q} \rightarrow b\bar{b}$  und  $gg \rightarrow b\bar{b}$  mit den Ergebnissen für die Top-Quark-Paarproduktion. Dieser Vergleich wurde sowohl analytisch als auch numerisch erfolgreich durchgeführt. Der numerische Vergleich auf Hadron-Niveau wird weiter unten diskutiert. Einige Bausteine wurden außerdem durch eine unabhängige Rechnung von Dr. P. Uwer getestet.

#### 4.4.2 Ergebnisse

Nun werden die Effekte der schwachen  $\mathcal{O}(\alpha)$ -Korrekturen auf die in Abschnitt 4.2 vorgestellten Observablen gezeigt. Dabei wird wie in Abschnitt 4.2 auch in nächstführender Ordnung ein minimaler Transversalimpuls von  $p_T = 50$  GeV für die „harten“ Endzustandpartonen gefordert. In Abb. 4.11 sind die relativen Korrekturen für einen einfachen (oberer Graph) und einen zweifachen (unterer Graph)  $b$ -tag am Tevatron gezeigt. Die gezeigten Kurven sind alle auf den vollen differentiellen Wirkungsquerschnitt in führender Ordnung QCD normiert, d.h. auf die Summe der gluon-, quark- und bottom-induzierten Beiträge. Um die Relevanz der gluon- und quark-induzierten Korrekturen zu diesen Prozessen herauszustellen, sind die entsprechenden Beiträge nächstführender Ordnung separat dargestellt. Wie man erkennen kann, sind die quark-induzierten Beiträge dominant und bestimmen das Bild der relativen Korrekturen am Tevatron. Die relativen Beiträge von gluon-induzierten Prozessen liegen nur im Promille-Bereich. Dieses unterschiedliche Verhalten von quark- und gluon-induzierten Korrekturen ist natürlich auf das Verhalten der Verteilungen in führender Ordnung und somit auf die Parton-Luminositäten zurückzuführen. Für einen einfachen  $b$ -tag (obere Figur in Abb. 4.11) ist die Summe der quark- und gluon-induzierten relativen Korrekturen negativ bis  $p_T = 160$  GeV. Der gezeigte Anstieg der quark-induzierten Korrekturen bei  $p_T = 120$  GeV wird durch die  $t\bar{t}$ -Schwelle in den Vertex-Korrekturen zu  $q\bar{q} \rightarrow b\bar{b}$  verursacht (siehe Gl. 4.13 und Gl. 4.14). Dieses Schwellen-Verhalten ist auch bei den gluon-induzierten im  $gg \rightarrow b\bar{b}$ -Kanal vorhanden aber aufgrund der Skalierung der Figur nicht zu erkennen. Nach der  $t\bar{t}$ -Schwelle setzt das Sudakov-Verhalten ein und für  $p_T = 400$  GeV erreichen die relativen Korrekturen etwa -3%. Für einen zweifachen  $b$ -tag ist die  $t\bar{t}$ -Schwelle deutlicher zu erkennen, da von den quark-induzierten Prozessen nur der  $q\bar{q} \rightarrow b\bar{b}$ -Prozess beiträgt. Der Schwellen-Effekt lässt die relativen Korrekturen bis auf +1.5% bei  $p_T = 160$  GeV ansteigen. Für große Transversalimpulse ( $p_T = 400$  GeV) erreichen die relativen Korrekturen wiederum etwa -3%. Das Verhalten an der  $t\bar{t}$ -Produktionsschwelle ist auch in den integrierten Verteilungen Abb. 4.12 zu erkennen. Dort erreichen die Korrekturen etwa -3.5% bei  $p_T = 400$  GeV relativ zu den Resultaten in führender Ordnung.

Für den LHC sind die entsprechenden differentiellen und integrierten Verteilungen in Abb. 4.13 und Abb. 4.14 abgebildet. Auch hier sind alle gezeigten Kurven auf die Summe aller QCD-Verteilungen in führender Ordnung normiert. Für einen einfachen  $b$ -tag lie-

gen die gluon-induzierten relativen Korrekturen für den gezeigten  $p_T$ -Bereich zwischen 0 und etwa -1.3%. Das Sudakov-Verhalten ist aufgrund der Normierung auf den gesamten differentiellen Wirkungsquerschnitt in führender Ordnung nur schwach ausgeprägt. Dagegen ist das Sudakov-Verhalten bei den relativen Korrekturen zu den quark-induzierten Prozessen sehr deutlich. Der große Unterschied zwischen quark- und gluon-induzierten Beiträgen ist wiederum durch die Zusammensetzung der Verteilung in führender Ordnung und durch die Anzahl führender Sudakov-Logarithmen (siehe Diskussion am Ende von Kapitel 3.3) begründet. In führender Ordnung waren gluon-induzierte Prozesse bis etwa  $p_T = 500$  GeV dominant. Bis zu diesen  $p_T$ -Werten erkennt man das Sudakov-Verhalten. Entsprechend ist das Verhalten der quark-induzierten Korrekturen zu erklären. Da man bei diesen Vier-Fermionen-Prozessen eine größere Anzahl von führenden Sudakov-Logarithmen vorfindet und die Parton-Luminositäten der quark-induzierten Prozesse im Sudakov-Grenzfall ( $E_{\text{cm}} > 1$  TeV) dominieren, liefern die entsprechenden Korrekturen für hohe Transversalimpulse große negative Korrekturen. In der Summe von quark- und gluon-induzierten Prozessen erreichen die relativen Korrekturen etwa -8% bei  $p_T = 1$  TeV. Für höhere Werte des Transversalimpulses werden die relativen Korrekturen bis zu -14% ( $p_T = 2$  TeV) groß. Der Effekt der  $t\bar{t}$ -Schwelle ist nicht zu erkennen, da er von den Beiträgen der anderen partonischen Prozesse überlagert wird. Für einen zweifachen  $b$ -tag liegen die gluon-induzierten Korrekturen zwischen 0 und -2% und das Sudakov-Verhalten ist dabei bis etwa  $p_T = 750$  GeV zu erkennen. Dies ist wieder anhand der Verteilung in führender Ordnung zu erklären, bei der die Gluonfusion bis etwa  $p_T = 1$  TeV die Verteilung dominiert. Dagegen zeigt der  $q\bar{q} \rightarrow b\bar{b}$ -Prozess ein sehr ausgeprägtes Sudakov-Verhalten. Der Effekt der  $t\bar{t}$ -Schwelle ist sowohl im quark- als auch im gluon-induzierten Beitrag, wenn auch nur sehr schwach, für  $p_T < 200$  GeV zu erkennen. Insgesamt erreichen die relativen Korrekturen für  $1 \text{ TeV} < p_T < 2 \text{ TeV}$  Werte zwischen -8% bis -14%. In Abb. 4.14 sind die entsprechenden integrierten  $p_T$ -Verteilungen für den LHC abgebildet. Für diese Observable gilt qualitativ dasselbe wie für die differentielle  $p_T$ -Verteilung. Hier erreichen die  $\mathcal{O}(\alpha)$  Korrekturen für den einfachen und zweifachen  $b$ -tag bei  $p_T = 2$  TeV bis zu -15% relativ zu den Resultaten in führender Ordnung. Schließlich ist in Abb. 4.15 der Vergleich zwischen massiver und masseloser  $b\bar{b}$ -Produktion am LHC gezeigt. Wie man der Abbildung entnehmen kann findet man eine sehr gute numerische Übereinstimmung, womit die Näherung masseloser (Anti-) Bottom-Quarks gerechtfertigt ist.

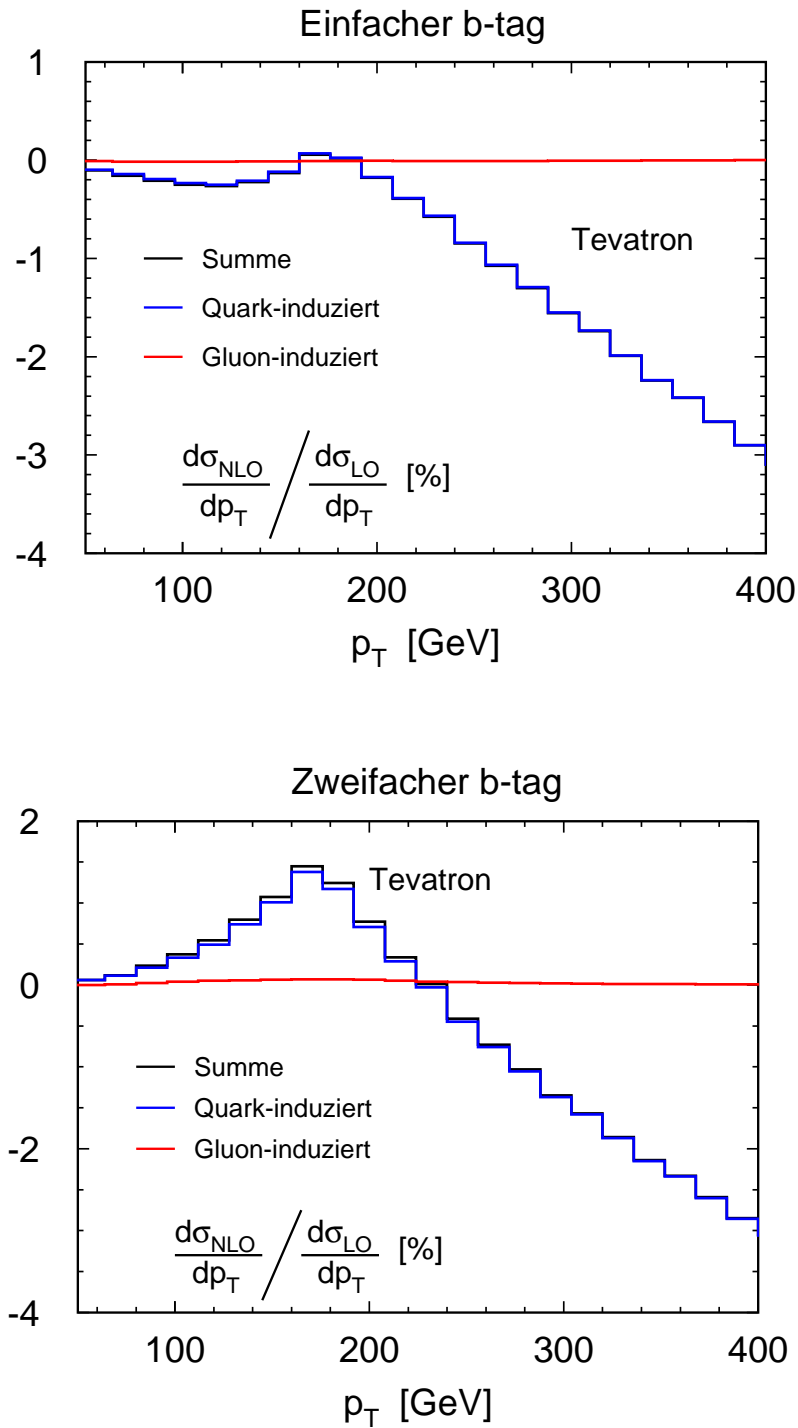


Abbildung 4.11: Gezeigt sind die relativen Beiträge zur differentiellen Verteilung im Transversalimpuls  $p_T$  am Tevatron. Dabei wird die Relevanz von quark-induzierten Prozessen (blau) und gluon-induzierten (rot) Prozessen aufgezeigt. Oben ist die Verteilung für einen einfachen  $b$ -tag, unten für einen zweifachen  $b$ -tag gezeigt.

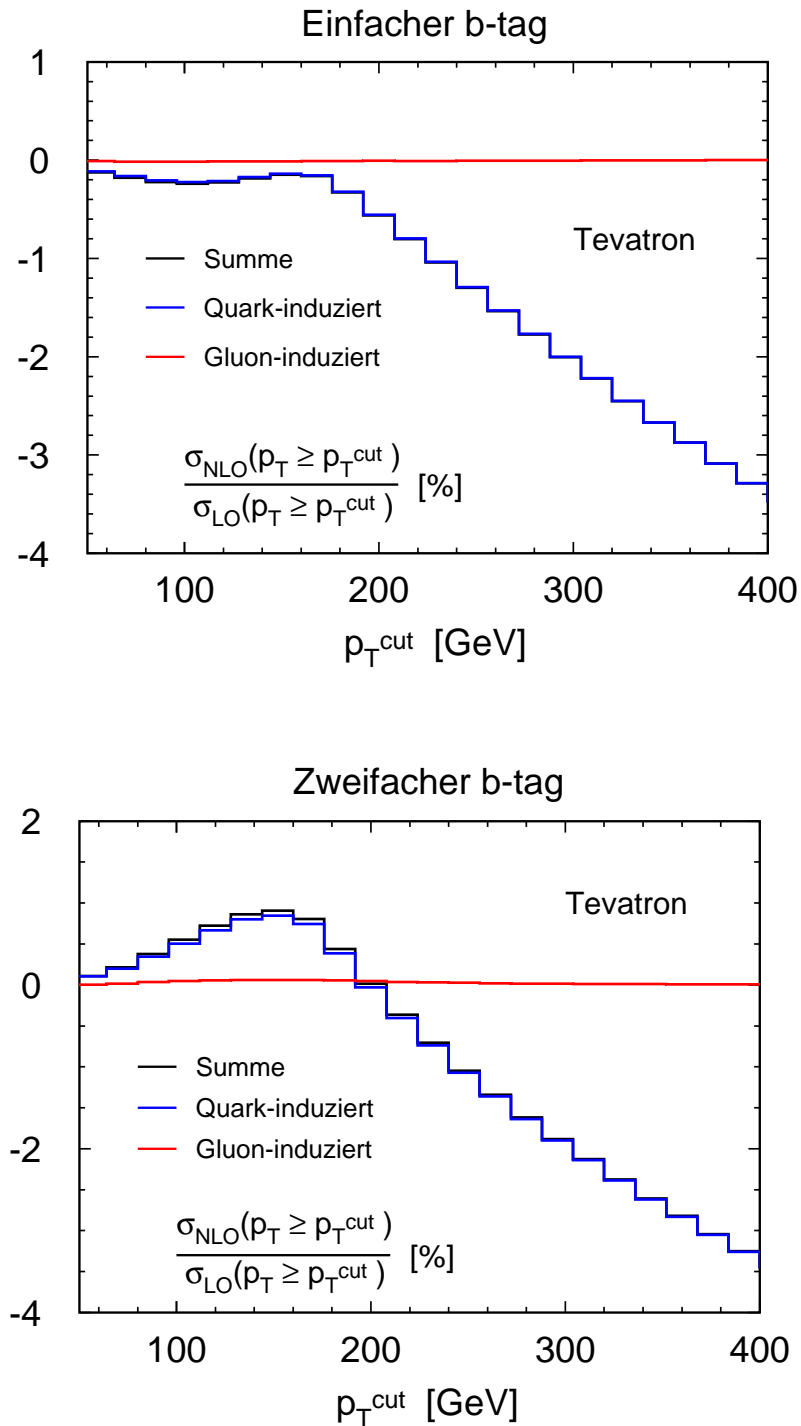


Abbildung 4.12: Gezeigt sind die relativen Beiträge zur integrierten Verteilung im Transversalimpuls  $p_T$  am Tevatron. Dabei wird die Relevanz von quark-induzierten Prozessen (blau) und gluon-induzierten (rot) Prozessen aufgezeigt. Oben ist die Verteilung für einen einfachen  $b$ -tag, unten für einen zweifachen  $b$ -tag gezeigt.

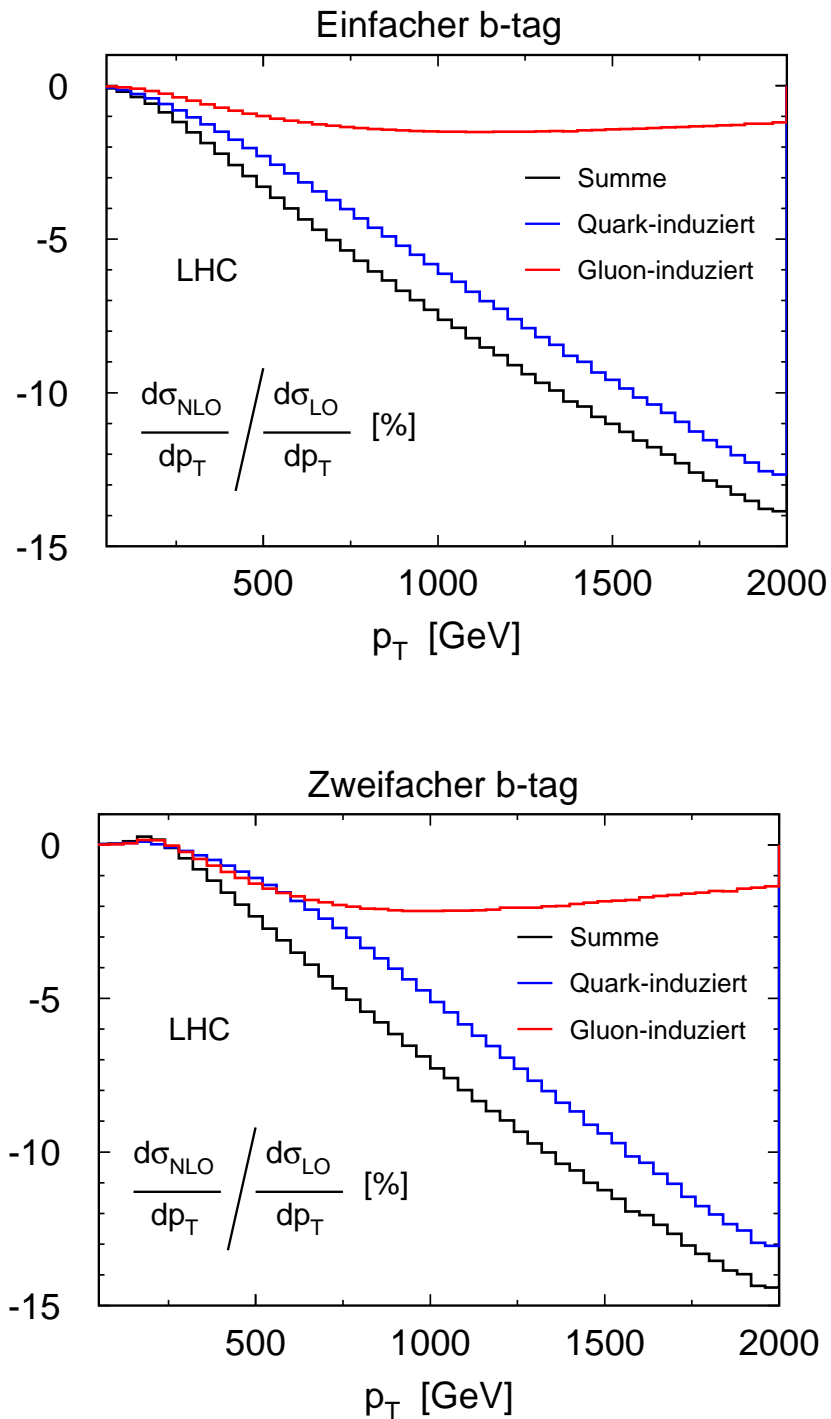


Abbildung 4.13: Gezeigt sind die relativen Beiträge zur differentiellen Verteilung im Transversalimpuls  $p_T$  am LHC. Dabei wird die Relevanz von quark-induzierten Prozessen (blau) und gluon-induzierten (rot) Prozessen aufgezeigt. Oben ist die Verteilung für einen einfachen  $b$ -tag, unten für einen zweifachen  $b$ -tag gezeigt.

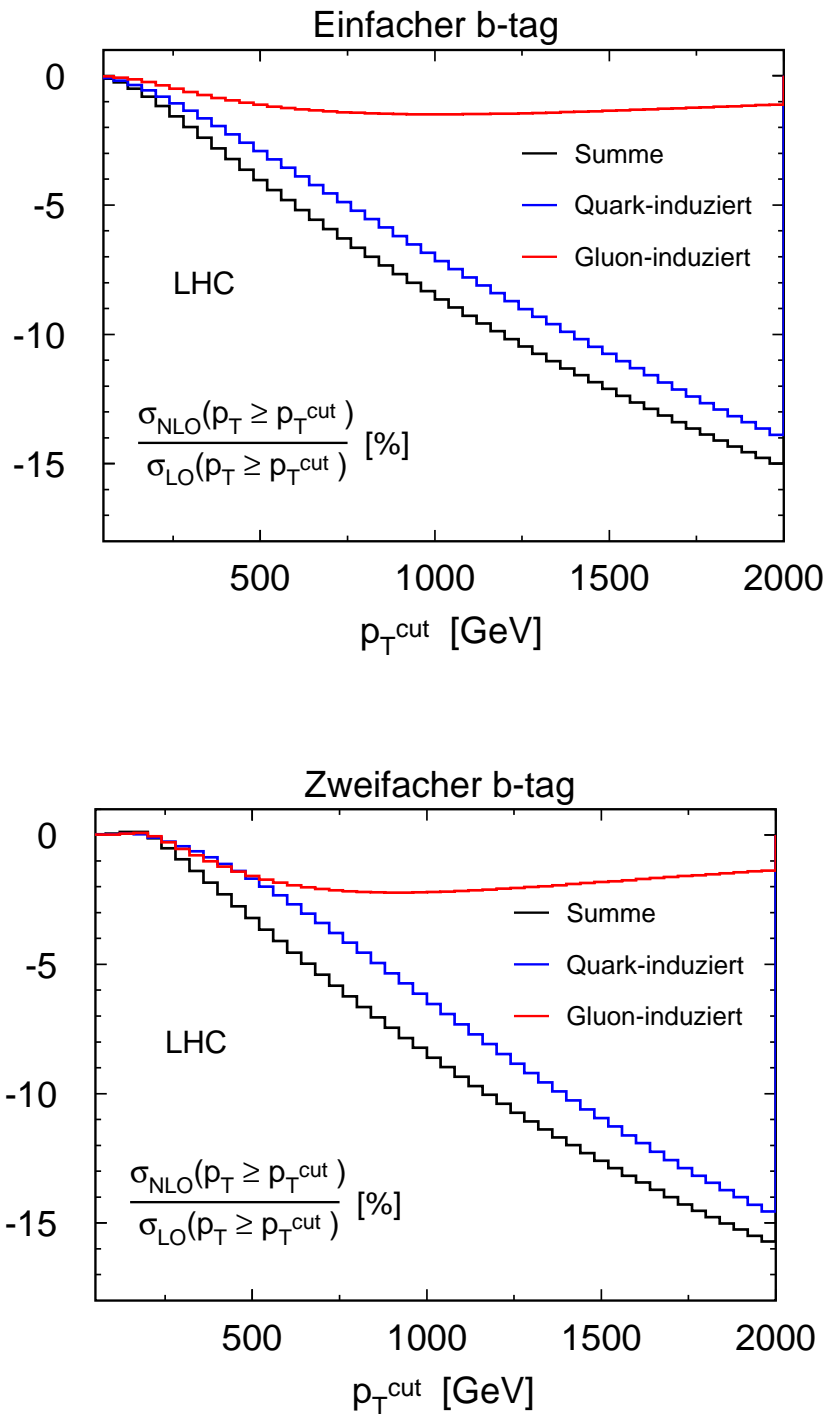


Abbildung 4.14: Gezeigt sind die relativen Beiträge zur integrierten Verteilung im Transversalimpuls  $p_T$  am LHC. Dabei wird die Relevanz von quark-induzierten Prozessen (blau) und gluon-induzierten (rot) Prozessen aufgezeigt. Oben ist die Verteilung für einen einfachen  $b$ -tag, unten für einen zweifachen  $b$ -tag gezeigt.

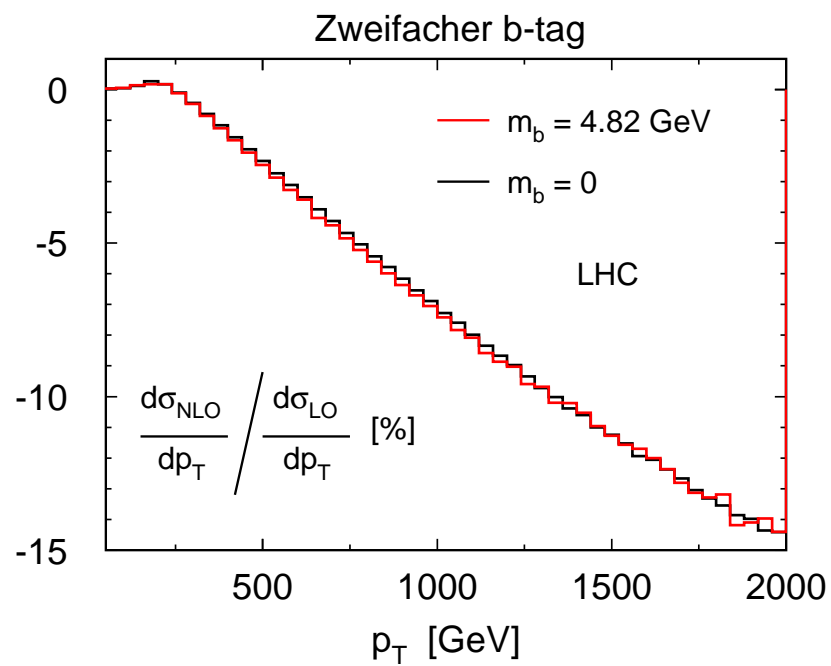


Abbildung 4.15: Gezeigt sind die relativen Beiträge für einen zweifachen  $b$ -tag am LHC für die  $p_T$ -Verteilung, wobei ein Vergleich von massiver (rot) und masseloser Rechnung (schwarz) gemacht wird.





# Kapitel 5

## Diskussion

In Kapitel 3 und Kapitel 4 wurden die  $o(\alpha)$ -Korrekturen zur Top-Quark-Paarproduktion und zur Bottom-Jet-Produktion berechnet. Die präsentierten Ergebnisse sollen nun in einem theoretischen und experimentellen Rahmen im Hinblick auf den LHC diskutiert werden.

Bei der Berechnung der schwachen  $o(\alpha)$ -Korrekturen wurden bzgl. der schwachen  $Z$ - und  $W$ -Bosonen nur die virtuellen Korrekturen berücksichtigt. Der Einfluss der Sudakov-Logarithmen auf differentielle Verteilungen ist an den berechneten Ergebnissen klar zu erkennen und führt zu großen Korrekturen.

In Kapitel 2 wurde erläutert, dass diese Logarithmen auch in den  $o(\alpha)$ -Korrekturen mit reeller Abstrahlung von schwachen Eichbosonen auftreten. Diese Beiträge führen jedoch zu einem anderen physikalischen Endzustand und sind daher nicht berücksichtigt worden. In einem Detektor kann es sein, dass z.B. ein  $b$ -Jet und ein kollinear dazu abgestrahltes reelles massives Eichboson nicht aufgelöst werden können. Dieser Umstand kann zu einer teilweisen Kompensation der Sudakov-Logarithmen aus den virtuellen Korrekturen führen (siehe z.B. [56]).

Eine Unsicherheit der Vorhersagen ist durch die Parton-Verteilungsfunktionen gegeben. Da sich am LHC die großen Korrekturen ( $o(-10\%)$ ) erst bei sehr hohen partonischen Schwerpunktsenergien einstellen, muss man fragen wie genau die PDF's bei diesen Energien bekannt sind. Wie neuere Studien zur Top-Quark-Paarproduktion [46] belegen sind beispielsweise die Unsicherheiten für den  $gg$ -Anfangszustand in nächstführender Ordnung QCD am LHC bereits ab 1 TeV partonischer Schwerpunktsenergie etwa 10% groß. Für den  $q\bar{q}$ -Anfangszustand wird diese Unsicherheit auf die Parton-Luminosität etwa bei 4 TeV in nächstführender Ordnung QCD erreicht. Damit sind die Unsicherheiten auf die PDF's von derselben Größenordnung wie die schwachen  $o(\alpha)$ -Korrekturen. Allerdings werden mit dem Start des LHC auch die PDF's bei hohen Energien genauer bestimmt werden. In jüngster Zeit wird die Möglichkeit diskutiert die Gluondichte des Protons durch Top-Quark-Paarproduktion zu bestimmen oder zumindest einzuschränken. Für diese Analyse bei großen Impulsüberträgen sind die schwachen  $o(\alpha)$ -Korrekturen wesentlich.

Schließlich muss aus theoretischer Sicht auch nach dem Einfluss von Zweischleifen-

Korrekturen auf die verschiedenen Verteilungen gefragt werden.

Aus experimenteller Sicht sind es statistische und systematische Unsicherheiten welche die Relevanz der schwachen  $\mathcal{O}(\alpha)$ -Korrekturen beeinflussen. Wie schon weiter oben erwähnt werden die Korrekturen etwa -10% groß am LHC, für partonische Schwerpunktsenergien  $E_{\text{cm}} > 2$  TeV. In diesem Energiebereich sind die relativen Beiträge zum totalen Wirkungsquerschnitt für die  $t\bar{t}$ - und  $b$ -Jet-Produktion in führender Ordnung nur noch im Bereich weniger (Sub-) Promille. Demnach sind bei diesen Energien nur wenige Ereignisse zu erwarten. Die statistische Analyse hochenergetischer Ereignisse ist daher nicht bei Inbetriebnahme des LHC zu erwarten, sondern bedarf einer längeren Beschleunigerlaufzeit. Der wichtigste Aspekt am LHC ist die systematische Unsicherheit der Jet-Energie-Skala, welche sowohl bei der  $b$ -Jet-Produktion als auch bei der Top-Quark-Paarproduktion (z.B. beim semi-leptonischen Zerfall des  $t\bar{t}$ -Paares) zum Tragen kommt. Mit dem Start des LHC werden die Unsicherheiten auf die Jet-Energie nach [47] mit etwa 5% erwartet. Nach dieser Abschätzung wären die schwachen  $\mathcal{O}(\alpha)$ -Korrekturen am LHC phänomenologisch nicht relevant. Allerdings wird der Einfluss dieser Unsicherheit mit fortlaufender Kalibrierung der Detektoren kleiner werden.

Die bisherige Diskussion zeigt, dass momentan noch keine eindeutige Aussage über die Relevanz der schwachen  $\mathcal{O}(\alpha)$ -Korrekturen zur Top-Quark-Paarproduktion und zur  $b$ -Jet-Erzeugung am LHC gemacht werden kann. Zum Einen müssen dazu weitere Parameter wie die PDF's genauer bestimmt werden. Zum Anderen muss der Start und die Kalibrierung der Experimente am LHC abgewartet werden.

# Kapitel 6

## Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurden die elektroschwachen Korrekturen zur Top-Quark-Paarproduktion und zur Erzeugung von Bottom-Quark-Jets studiert. Insbesondere wurden gemischte Einschleifen-Amplituden sowie die Interferenzen von elektroschwachen Born-Amplituden mit Einschleifen-QCD-Korrekturen berechnet. Diese Korrekturen sind von großer Bedeutung für die experimentellen Analysen am LHC. Für beide Prozesse wurden kompakte analytische Ergebnisse für die virtuellen und reellen Korrekturen berechnet.

Für den Tevatron und den LHC wurden die Korrekturen zum totalen Wirkungsquerschnitt für die Top-Quark-Paarproduktion bestimmt. Am Tevatron sind diese Korrekturen nur wenige Promille groß und daher bzgl. des totalen Wirkungsquerschnitts vermutlich vernachlässigbar. Für den LHC sind die Korrekturen einige Prozent groß und somit von der gleichen Größenordnung wie die zu erwartenden QCD-Korrekturen in nächst-nächstführender Ordnung zum totalen Wirkungsquerschnitt. Für die differentiellen Verteilungen in  $M_{\bar{t}t}$  und  $p_T$  liegen die relativen Korrekturen am Tevatron in Abhängigkeit von der Higgs-Masse zwischen +4% und -6%. Ein Vergleich zwischen den integrierten Verteilungen in  $p_T$  bzw.  $M_{\bar{t}t}$  und dem abgeschätzten statistischen Fehler zeigt, dass diese Korrekturen gegenwärtig nicht von Bedeutung sind. Am LHC wurden für die  $M_{\bar{t}t}$ - bzw.  $p_T$ -Verteilung in Abhängigkeit der Higgs-Masse große negative Korrekturen von bis zu -15% bzw. -20% gefunden für  $M_{\bar{t}t} = 5$  TeV ( $p_T = 2$  TeV). Der Vergleich zwischen den integrierten Verteilungen und dem statistischen Fehler zeigt, dass die schwachen  $\mathcal{O}(\alpha)$ -Korrekturen am LHC phänomenologisch relevant sind. Dies gilt insbesondere für die Suche nach neuer Physik bei großen  $M_{\bar{t}t}$ .

Für die Bottom-Jet-Produktion wurden die schwachen  $\mathcal{O}(\alpha)$ -Korrekturen für die differentielle und die integrierte  $p_T$ -Verteilung für einen einfachen und zweifachen  $b$ -tag berechnet. Am Tevatron liegen die Korrekturen für einen einfachen  $b$ -tag für die integrierte und differentielle  $p_T$ -Verteilung zwischen 0 und -3%. Für einen zweifachen  $b$ -tag sind Korrekturen zwischen +1.5% und -3% gefunden worden. Diese kleinen Korrekturen für einen einfachen und einen zweifachen  $b$ -tag am Tevatron sind somit vermutlich nicht relevant für entsprechende experimentelle Analysen. Am LHC werden die Korrekturen für den einfachen und den zweifachen  $b$ -tag bis zu -14% groß ( $p_T = 2$  TeV). Für das Studium der  $p_T$ -Verteilungen bei großen Transversalimpulsen sind die  $\mathcal{O}(\alpha)$ -Korrekturen damit von Bedeutung und nicht vernachlässigbar.



# Anhang A

## Definition der skalaren Integrale

Die skalaren Integrale in dieser Arbeit sind wie folgt definiert.

$$\begin{aligned} A_0(m_0) &= \frac{1}{i\pi^2} \int d^d \ell \frac{(2\pi\mu)^{2\varepsilon}}{(\ell^2 - m_0^2 + i\varepsilon)}, \\ B_0(p_1^2, m_1^2, m_2^2) &= \frac{1}{i\pi^2} \int d^d \ell \frac{(2\pi\mu)^{2\varepsilon}}{(\ell^2 - m_1^2 + i\varepsilon)((\ell + p_1)^2 - m_2^2 + i\varepsilon)}, \\ C_0(p_1^2, p_2^2, (p_1 + p_2)^2, m_1^2, m_2^2, m_3^2) &= \\ &= \frac{1}{i\pi^2} \int d^d \ell \frac{(2\pi\mu)^{2\varepsilon}}{(\ell^2 - m_1^2 + i\varepsilon)((\ell + p_1)^2 - m_2^2 + i\varepsilon)((\ell + p_1 + p_2)^2 - m_3^2 + i\varepsilon)}, \\ D_0(p_1^2, p_2^2, p_3^2, (p_1 + p_2)^2, (p_1 + p_3)^2, (p_2 + p_3)^2, m_1^2, m_2^2, m_3^2, m_4^2) &= \\ &= \frac{1}{i\pi^2} \int d^d \ell \frac{(2\pi\mu)^{2\varepsilon}}{(\ell^2 - m_1^2 + i\varepsilon)((\ell + p_1)^2 - m_2^2 + i\varepsilon)((\ell + p_1 + p_2)^2 - m_3^2 + i\varepsilon)} \times \\ &= \frac{1}{((\ell + p_1 + p_2 + p_3)^2 - m_4^2 + i\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Für den Prozess  $gg \rightarrow t\bar{t}$  erfüllen die Mandelstam-Variablen die folgende Relation

$$s + t + u = 2m_t^2. \quad (\text{A.1})$$

Damit ergeben sich die Abkürzungen der skalaren Integrale in Kapitel 3 und Anhang C ( $m_b \neq 0$ ) zu

$$\begin{aligned} B_0^t &= B_0(s, m_t^2, m_t^2), \\ B_0^b &= B_0(s, m_b^2, m_b^2), \\ B_0^Z &= B_0(m_t^2, m_t^2, M_Z^2), \\ B_0^W &= B_0(m_t^2, m_b^2, M_W^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_0^H &= B_0(m_t^2, m_t^2, m_H^2), \\
B_0^Z(z) &= B_0\left(-\frac{s}{2}(1 + \beta z) + m_t^2, m_t^2, M_Z^2\right), \\
B_0^W(z) &= B_0\left(-\frac{s}{2}(1 + \beta z) + m_t^2, m_b^2, M_W^2\right), \\
B_0^H(z) &= B_0\left(-\frac{s}{2}(1 + \beta z) + m_t^2, m_t^2, m_H^2\right), \\
C_0^t &= C_0(0, 0, s, m_t^2, m_t^2, m_t^2), \\
C_0^b &= C_0(0, 0, s, m_b^2, m_b^2, m_b^2), \\
C_0^Z &= C_0(s, m_t^2, m_t^2, m_t^2, m_t^2, M_Z^2), \\
C_0^W &= C_0(s, m_t^2, m_t^2, m_b^2, m_b^2, M_W^2), \\
C_0^H &= C_0(s, m_t^2, m_t^2, m_t^2, m_t^2, m_H^2), \\
C_0^Z(z) &= C_0(0, m_t^2, t, m_t^2, m_t^2, M_Z^2), \\
C_0^W(z) &= C_0(0, m_t^2, t, m_b^2, m_b^2, M_W^2), \\
C_0^H(z) &= C_0(0, m_t^2, t, m_t^2, m_t^2, m_H^2), \\
D_0^Z(z) &= D_0(0, 0, m_t^2, s, u, t, m_t^2, m_t^2, m_t^2, M_Z^2), \\
D_0^W(z) &= D_0(0, 0, m_t^2, s, u, t, m_b^2, m_b^2, m_b^2, M_W^2), \\
D_0^H(z) &= D_0(0, 0, m_t^2, s, u, t, m_t^2, m_t^2, m_t^2, m_H^2).
\end{aligned} \tag{A.2}$$

Diese Integrale wurden hauptsächlich numerisch mithilfe der FF-Bibliothek [30] ausgewertet. Des Weiteren werden folgende Abkürzungen für die skalaren Integrale bei der  $b$ -Jet-Erzeugung verwendet (Gl. (4.34) und Gl. (4.35)):

(A.3)

Für die analytische Berechnung von skalaren Integralen wird der Dilogarithmus eingeführt

$$\text{Li}_2(x) = -\int_0^1 dt \frac{\ln(1 - xt)}{t}. \tag{A.4}$$

Da in der vorliegenden Arbeit nur differentielle und totale Wirkungsquerschnitte berechnet werden, wurde bei der Berechnung der skalaren Integrale nur der Realteil berücksichtigt. Die Imaginärteile werden im Folgenden nicht angegeben. Dies hat zur Folge, dass bei der Anwendung von Crossing-Relationen die Argumente mancher Logarithmen und Dilogarithmen in Wertebereichen liegen, bei denen diese Funktionen (unter Vernachlässigung des Imaginärteils) nicht definiert sind. Für lineare Logarithmen und Dilogarithmen gelten dann folgende Regeln um den Realteil korrekt zu bestimmen.

$$\text{Re}\left[\ln(x)\Big|_{x<0}\right] = \ln(|x|), \tag{A.5}$$

$$\operatorname{Re} \left[ \operatorname{Li}_2(x) \Big|_{x>1} \right] = \frac{\pi^2}{6} - \operatorname{Li}_2(1-x) - \ln(x) \ln(|1-x|). \quad (\text{A.6})$$

Daneben treten in den berechneten Integralen Quadrate von Logarithmen auf. Für diese Fälle gilt dann

$$\operatorname{Re} \left[ \ln^2(x) \Big|_{x<0} \right] = \ln^2(|x|) - \pi^2. \quad (\text{A.7})$$

Der Fall, dass zwei Logarithmen mit unterschiedlichen negativen Argumenten auftreten, tritt bei den folgenden Integralen nicht auf.

Für die Bottom-Jet-Produktion wurde folgende Integrale analytisch berechnet ( $s+t+u=0$ ):

$$D_0^6(0,0,0,s,u,t,0,0,0,0) = \frac{\pi}{2u} \ln^2 \left( \frac{-t}{s} \right), \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{aligned} D_0^6(0,0,0,s,u,t,0,0,0,M_Z^2) &= -\frac{\pi}{su} \left\{ (M_Z^2 - s) \left[ \operatorname{Li}_2 \left( 1 - \frac{s}{M_Z^2} \right) + \ln \left( \left| 1 - \frac{s}{M_Z^2} \right| \right) \ln \left( -\frac{s}{t} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{s(t+M_Z^2)}{t} \operatorname{Li}_2 \left( 1 + \frac{t}{M_Z^2} \right) - \frac{\pi^2 M_Z^2 (s+t)}{6t} \right\}. \quad (\text{A.9}) \end{aligned}$$





# Anhang B

## Renormierungskonstanten im *on-shell* Schema

Dieser Anhang beinhaltet die in dieser Arbeit benötigten Renormierungskonstanten im *on-shell* Schema, welche in Kapitel 2.5.1 definiert wurden. Im Folgenden wird zwischen den Renormierungskonstanten für das Top-Quark, das Bottom-Quark und die leichten Quarks unterschieden.

### Renormierungskonstanten für das Top-Quark

Da bei der Berechnung der  $O(\alpha)$  Korrekturen zur Top-Quark-Paarproduktion das Bottom-Quark als massiv angenommen wird, weisen die Renormierungskonstanten eine entsprechende Abhängigkeit von der Bottom-Masse auf.

$$\begin{aligned}\delta Z_t^V &= \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ \left[ g_v^{t^2} + g_a^{t^2} + \frac{1}{m_t^2} (g_v^{t^2} + g_a^{t^2}) \left( A_0(M_Z^2) - A_0(m_t^2) - M_Z^2 B_0^Z \right) \right. \right. \\ &+ \left. \left( 2(g_v^{t^2} + g_a^{t^2}) M_Z^2 + 4m_t^2 (g_v^{t^2} - 3g_a^{t^2}) \right) \frac{d}{dp^2} B_0^Z \Big|_{p^2=m_t^2} \right] \\ &+ 4g_W^2 \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2m_t^2} \left( A_0(M_W^2) - A_0(m_b^2) \right) - \frac{m_t^2 - m_b^2 + M_W^2}{2m_t^2} B_0^W \right. \\ &- \left. \left. (m_t^2 - M_W^2 + m_b^2) \frac{d}{dp^2} B_0^W \Big|_{p^2=m_t^2} \right] \\ &+ \frac{m_t^2}{4s_W^2 M_W^2} \left[ \frac{1}{2m_t^2} \left( A_0(M_Z^2) - A_0(m_t^2) - M_Z^2 B_0^Z \right) \right. \\ &+ \left. M_Z^2 \frac{d}{dp^2} B_0^Z \Big|_{p^2=m_t^2} \right] \\ &+ 4g_W^2 \frac{1}{4M_W^2} \left[ \frac{m_t^2 + m_b^2}{m_t^2} \left( A_0(M_W^2) - A_0(m_b^2) \right) \right.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{(m_t^2 - m_b^2 + M_W^2)(m_t^2 + m_b^2)}{m_t^2} B_0^W \\
& - 2 \left( (m_t^2 - m_b^2)^2 - M_W^2 (m_t^2 + m_b^2) \right) \frac{d}{dp^2} B_0^W \Big|_{p^2=m_t^2} \\
& + \frac{m_t^2}{4s_W^2 M_W^2} \left[ \frac{1}{2m_t^2} \left( A_0(m_H^2) - A_0(m_t^2) - m_H^2 B_0^H \right) \right. \\
& \left. - (4m_t^2 - m_H^2) \frac{d}{dp^2} B_0^H \Big|_{p^2=m_t^2} \right] \Bigg\}, \tag{B.1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\delta m_t}{m_t} &= -\frac{\alpha}{4\pi} \left\{ \frac{1}{m_t^2} \left[ (3g_a^{t^2} - g_v^{t^2}) m_t^2 + (g_v^{t^2} + g_a^{t^2}) \left( A_0(m_t^2) - A_0(M_Z^2) \right) \right. \right. \\
& + \left. \left( (g_v^{t^2} + g_a^{t^2}) M_Z^2 + 2m_t^2 (g_v^{t^2} - 3g_a^{t^2}) \right) B_0^Z \right] \\
& + \frac{2g_W^2}{m_t^2} \left[ m_t^2 + \left( A_0(m_b^2) - A_0(M_W^2) \right) + (M_W^2 - m_b^2 - m_t^2) B_0^W \right] \\
& + \frac{1}{8s_W^2 M_W^2} \left[ A_0(m_t^2) - A_0(M_Z^2) + M_Z^2 B_0^Z \right] \\
& + \frac{g_W^2}{M_W^2 m_t^2} \left[ (m_t^2 + m_b^2) \left( A_0(m_b^2) - A_0(M_W^2) \right) \right. \\
& - \left. \left( (m_t^2 - m_b^2)^2 - M_W^2 (m_t^2 + m_b^2) \right) B_0^W \right] \\
& \left. + \frac{1}{8s_W^2 M_W^2} \left[ A_0(m_t^2) - A_0(m_H^2) + (m_H^2 - 4m_t^2) B_0^H \right] \right\}, \tag{B.2}
\end{aligned}$$

### Renormierungskonstanten für das Bottom-Quark

Für die Bottom-Jet-Produktion wird wie in Kapitel 4 angegeben, die Bottom-Masse  $m_b = 0$  gesetzt. Deshalb wird keine Renormierung der Bottom-Masse benötigt. Die folgende Feldrenormierungskonstante kann aus Gl. (B.1) unter der Vertauschung  $m_t \leftrightarrow m_b$ , Anpassen der entsprechenden Kopplungen und dem Grenzfall  $m_b \rightarrow 0$  abgeleitet werden.

$$\begin{aligned}
\delta Z_b^V &= \frac{\alpha}{4\pi} \left[ (g_v^{b^2} + g_a^{b^2}) \left( \frac{3}{2} - \frac{1}{M_Z^2} A_0(M_Z^2) \right) \right. \\
& + 2g_W^2 \left( 1 + \frac{1}{m_t^2 - M_W^2} \left( A_0(M_W^2) - A_0(m_t^2) \right) \right. \\
& \left. \left. - (m_t^2 - M_W^2) \frac{d}{dp^2} B_0(p^2, m_t^2, M_W^2) \Big|_{p^2=0} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + g_W^2 \frac{m_t^2}{M_W^2} \left( \frac{1}{m_t^2 - M_W^2} (A_0(M_W^2) - A_0(m_t^2)) \right. \\
& \left. - (m_t^2 - M_W^2) \frac{d}{dp^2} B_0(p^2, m_t^2, M_W^2) \Big|_{p^2=0} \right) \quad (B.3)
\end{aligned}$$

### Renormierungskonstanten für leichte Quarks ( $u, d, s, c$ )

Abschließend kann die Feldrenormierung für leichte Quarks im *on-shell* Schema aus Gl. (B.3) im Grenzfall  $m_t \rightarrow 0$  und  $g_v^b \rightarrow g_v^q, g_a^b \rightarrow g_a^q$  gewonnen werden.

$$\begin{aligned}
\delta Z_V^q &= \frac{\alpha}{4\pi} \left[ (g_v^{q2} + g_a^{q2}) \left( \frac{3}{2} - \frac{1}{M_Z^2} A_0(M_Z^2) \right) \right. \\
& \left. + 2g_W^2 \left( \frac{3}{2} - \frac{1}{M_W^2} A_0(M_W^2) \right) \right]. \quad (B.4)
\end{aligned}$$



# Anhang C

## Beiträge zu $gg \rightarrow t\bar{t}$

In diesem Anhang sind die verbleibenden  $O(\alpha)$ -Korrekturen zu  $gg \rightarrow t\bar{t}$  angegeben. Die verwendeten Abkürzungen für die skalaren Integrale sind in Anhang A angegeben.

Selbstenergie-Korrekturen:

$$\begin{aligned}
\sum \left| \mathcal{M}_{gg \rightarrow t\bar{t}}^{\Sigma_Z \alpha_s^2 \alpha} \right|^2 &= \alpha_s^2 \alpha \pi \frac{2 - N^2(1 - \beta z)}{N(N^2 - 1)(1 - \beta^2 z^2)} \left\{ \right. \\
&16(g_v^{t^2} + g_a^{t^2}) \frac{1 + \beta^2(1 - \beta^2)(1 - 3z^2) - \beta^4 z^4}{s(1 - \beta^2)(1 + \beta^2 + 2\beta z)} \left( \bar{A}_0(M_Z^2) - \bar{A}_0(m_t^2) \right) \\
&+ \frac{4}{(1 + \beta z)^2(1 + \beta^2 + 2\beta z)} \\
&\left[ 2(g_v^{t^2} + g_a^{t^2}) \frac{M_Z^2}{s} (1 - z^2) \beta^2 \left( 2 + \beta^2 - 2\beta^4 + (3\beta - 2\beta^3)z + \beta^4 z^2 + \beta^3 z^3 \right) \right. \\
&+ g_v^{t^2} \left( 2 + 2\beta^2 - 4\beta^4 - \beta^6 + 2\beta^8 + (4 + 2\beta^2 - 8\beta^4 + 4\beta^6)\beta z \right. \\
&+ (-4 + 7\beta^2 + \beta^4 - 3\beta^6)\beta^2 z^2 - (10 - 16\beta^2 + 6\beta^4)\beta^3 z^3 \\
&+ (-5 + 3\beta^2 + \beta^4)\beta^4 z^4 - (4 - 2\beta^2)\beta^5 z^5 - \beta^6 z^6 \left. \right) \\
&- g_a^{t^2} \left( 2 + 2\beta^2 - 8\beta^4 - 3\beta^6 + 6\beta^8 + 2(2 - \beta^2 - 8\beta^4 + 6\beta^6)\beta z \right. \\
&- (4 - 5\beta^2 - 7\beta^4 + 9\beta^6)\beta^2 z^2 - 6(1 - 4\beta^2 + 3\beta^4)\beta^3 z^3 \\
&+ (1 - 3\beta^2 + 3\beta^4)\beta^4 z^4 - (4 - 6\beta^2)\beta^5 z^5 + \beta^6 z^6 \left. \right) \left. \right] \bar{B}_0^Z(z) \\
&- \frac{4}{(1 + \beta z)^2} \left[ \frac{2}{1 - \beta^2} (g_v^{t^2} + g_a^{t^2}) \frac{M_Z^2}{s} \right. \\
&\left. \left( 2 + 2\beta^2 - 5\beta^4 + 2\beta^6 + (3 - 2\beta^2)\beta^3 z - 3(2 - 3\beta^2 + \beta^4)\beta^2 z^2 \right. \right. \\
&\left. \left. - 3(1 - \beta^2)\beta^3 z^3 - (2 - \beta^2)\beta^4 z^4 - z^5 \beta^5 \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (g_v^{t^2} - 3g_a^{t^2})(1 - \beta^2)(1 + \beta^2 - 2\beta^4 - (2 - 3\beta^2)\beta^2 z^2 - \beta^4 z^4) \bar{B}_0^Z \\
& + \frac{2}{1 + \beta z} \left[ (2(g_v^{t^2} + g_a^{t^2})M_Z^2 + s(1 - \beta^2)(g_v^{t^2} - 3g_a^{t^2})) \right. \\
& \quad \left. (1 + (1 - \beta^2)(2\beta^2 - \beta z - 3\beta^2 z^2) - \beta^4 z^4) \right] \frac{d}{dp^2} B_0^Z \Big|_{p^2=mt^2} \Big\} \\
& + (z \rightarrow -z), \tag{C.1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\Sigma} \left| \mathcal{M}_{gg \rightarrow t\bar{t}}^{\Sigma_W \alpha_s^2 \alpha} \right|^2 & = 8\alpha_s^2 \alpha \pi \frac{2 - N^2(1 - \beta z)}{N(N^2 - 1)(1 - \beta^2 z^2)} g_W^2 \Big\{ \\
& + 4 \frac{1 + \beta^2(1 - \beta^2)(1 - 3z^2) - \beta^4 z^4}{s(1 - \beta^2)(1 + \beta^2 + 2\beta z)} (\bar{A}_0(M_W^2) - \bar{A}_0(m_b^2)) \\
& + \frac{\beta^2(1 - z^2)}{2s(1 + \beta^2 + 2\beta z)(1 + \beta z)^2} (2 + \beta^2 - 2\beta^4 + (3 - 2\beta^2)\beta z + (z + \beta)\beta^3 z^2) \\
& \quad (s(1 + \beta^2 + 2\beta z) + 4(M_W^2 - m_b^2)) \bar{B}_0^W(z) \\
& + \frac{1}{2s(1 + \beta z)^2} [-s\beta^2(1 - z^2)(2 + \beta^2 - 2\beta^4 + (3 - 2\beta^2)\beta z + (z + \beta)\beta^3 z^2) \\
& - \frac{4}{1 - \beta^2} (-2 - 2\beta^2 + 5\beta^4 - 2\beta^6 - (3 - 2\beta^2)\beta^3 z + 3(2 - 3\beta^2 + \beta^4)\beta^2 z^2 \\
& + 3(1 - \beta^2)\beta^3 z^3 + (2 - \beta^2)\beta^4 z^4 + z^5 \beta^5) (m_b^2 - M_W^2)] \bar{B}_0^W \\
& + \frac{1}{4(1 + \beta z)} (1 + \beta(1 - \beta^2)(2\beta - z - 3\beta z^2) - \beta^4 z^4) \\
& \quad (s\beta^2 - 4m_b^2 + 4M_W^2 - s) \frac{d}{dp^2} B_0^W \Big|_{p^2=mt^2} \Big\} + (z \rightarrow -z), \tag{C.2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\Sigma} \left| \mathcal{M}_{gg \rightarrow t\bar{t}}^{\Sigma_\chi \alpha_s^2 \alpha} \right|^2 & = 16\alpha_s^2 \alpha \pi \frac{2 - N^2(1 - \beta z)}{N(N^2 - 1)(1 - \beta^2 z^2)} \frac{g_a^{t^2}}{M_Z^2} \Big\{ \\
& \frac{1 + (1 - \beta^2)(\beta^2 - 3\beta^2 z^2) - \beta^4 z^4}{2(1 + \beta^2 + 2\beta z)} (\bar{A}_0(M_Z^2) - \bar{A}_0(m_t^2)) \\
& + \frac{1 - \beta^2}{8(1 + \beta^2 + 2\beta z)} \left[ 2M_Z^2 \frac{\beta^2(1 - z^2)}{(1 + \beta z)^2} \right. \\
& \quad (2 + \beta^2 - 2\beta^4 + (3 - 2\beta^2)\beta z + (z + \beta)\beta^3 z^2) \\
& \quad \left. + s(1 + \beta^2 - \beta^4 - 3(1 - \beta^2)\beta^2 z^2 - \beta^4 z^4) \right] \bar{B}_0^Z(z)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{M_Z^2}{4(1+\beta z)^2} \left( 2 + 2\beta^2 - 5\beta^4 + 2\beta^6 + (3 - 2\beta^2)\beta^3 z \right. \\
& - 3(2 - 3\beta^2 + \beta^4)\beta^2 z^2 - 3(1 - \beta^2)\beta^3 z^3 - (2 - \beta^2)\beta^4 z^4 - \beta^5 z^5 \Big) \bar{B}_0^Z \\
& + \frac{M_Z^2 s(1 - \beta^2)}{8(1 + \beta z)} \left( 1 + \beta(1 - \beta^2)(2\beta - z - 3\beta z^2) - \beta^4 z^4 \right) \\
& \left. \frac{d}{dp^2} B_0^Z \Big|_{p^2=mt^2} \right\} + (z \rightarrow -z), \tag{C.3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum \left| \mathcal{M}_{gg \rightarrow t\bar{t}}^{\Sigma_\phi \alpha_s^2 \alpha} \right|^2 &= 8\alpha_s^2 \alpha \pi \frac{2 - N^2(1 - \beta z)}{N(N^2 - 1)(1 - \beta^2 z^2)} \frac{g_W^2}{M_W^2} \left\{ \right. \\
& \frac{(1 + \beta^2(1 - \beta^2)(1 - 3z^2) - \beta^4 z^4)(s(1 - \beta^2) + 4m_b^2)}{2s(1 - \beta^2)(1 + \beta^2 + 2\beta z)} \left( \bar{A}_0(M_W^2) - \bar{A}_0(m_b^2) \right) \\
& + \frac{1}{16s(1 + \beta z)^2(1 + \beta^2 + 2\beta z)} \left[ \right. \\
& - \beta^2(1 - z^2) \left( 2 + \beta^2 - 2\beta^4 + (3 - 2\beta^2)\beta z + (z + \beta)\beta^3 z^2 \right) \\
& \left( 16m_b^2(m_b^2 - M_W^2) - s^2(1 - \beta^4 + 2(1 - \beta^2)\beta z) - 4sM_W^2(1 - \beta^2) \right) \\
& - 8m_b^2 s \left( -2 - 2\beta^2 + 4\beta^4 + \beta^6 - 2\beta^8 - 2(2 + \beta^2 - 4\beta^4 + 2\beta^6)\beta z \right. \\
& + (4 - 7\beta^2 - \beta^4 + 3\beta^6)\beta^2 z^2 + 2(5 - 8\beta^2 + 3\beta^4)\beta^3 z^3 + (5 - 3\beta^2 - \beta^4)\beta^4 z^4 \\
& \left. + 2(2 - \beta^2)\beta^5 z^5 + \beta^6 z^6 \right) \Big] \bar{B}_0^W(z) \\
& - \frac{1}{16s(1 - \beta^2)(1 + \beta z)^2} \\
& \left[ \beta^2 s^2(1 - \beta^2)^2(1 - z^2) \left( 2 + \beta^2 - 2\beta^4 + (3 - 2\beta^2)\beta z + (z + \beta)\beta^3 z^2 \right) \right. \\
& - 4 \left( -2 - 2\beta^2 + 5\beta^4 - 2\beta^6 - (3 - 2\beta^2)\beta^3 z + 3(2 - 3\beta^2 + \beta^4)\beta^2 z^2 \right. \\
& + 3(1 - \beta^2)\beta^3 z^3 + (2 - \beta^2)\beta^4 z^4 + \beta^5 z^5 \left. \right) \left( sM_W^2(1 - \beta^2) + 4m_b^2(M_W^2 - m_b^2) \right) \\
& + 8m_b^2 s(1 - \beta^2)^2 \left( 1 + \beta^2 - 2\beta^4 - (2 - 3\beta^2)\beta^2 z^2 - \beta^4 z^4 \right) \Big] \bar{B}_0^W \\
& - \frac{1}{32(1 + \beta z)} \left( 1 + \beta(1 - \beta^2)(2\beta - z - 3\beta z^2) - \beta^4 z^4 \right) \\
& \left( s^2(1 - \beta^2)^2 - 4s(1 - \beta^2)(2m_b^2 + M_W^2) \right) \\
& \left. + 16m_b^2(m_b^2 - M_W^2) \frac{d}{dp^2} B_0^W \Big|_{p^2=mt^2} \right\} + (z \rightarrow -z), \tag{C.4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\sum} \left| \mathcal{M}_{gg \rightarrow t\bar{t}}^{\Sigma_H} \alpha_s^2 \alpha \right|^2 &= 8\alpha_s^2 \alpha \pi \frac{2 - N^2(1 - \beta z)}{N(N^2 - 1)(1 - \beta^2 z^2)} \frac{g_W^2}{M_W^2} \left\{ \right. \\
&\quad \frac{1 + \beta^2(1 - \beta^2)(1 - 3z^2) - \beta^4 z^4}{2(1 + \beta^2 + 2\beta z)} \left( \bar{A}_0(m_H^2) - \bar{A}_0(m_t^2) \right) \\
&\quad - \frac{(1 - \beta^2)}{8(1 + 2\beta z + \beta^2)(1 + \beta z)^2} \\
&\quad \left[ -2m_H^2 \beta^2(1 - z^2)(2 + \beta^2 - 2\beta^4 + (3 - 2\beta^2)\beta z + (z + \beta)\beta^3 z^2) \right. \\
&\quad + s(1 + \beta^2 - 5\beta^4 - 2\beta^6 + 4\beta^8 + 2(1 - \beta^2 - 5\beta^4 + 4\beta^6)\beta z \\
&\quad - (2 - 2\beta^2 - 5\beta^4 + 6\beta^6)\beta^2 z^2 - 2(1 - 7\beta^2 + 6\beta^4)\beta^3 z^3 \\
&\quad + (2 - 3\beta^2 + 2\beta^4)\beta^4 z^4 - 2(1 - 2\beta^2)\beta^5 z^5 + \beta^6 z^6 \left. \right] \bar{B}_0^H(z) \\
&\quad + \frac{1}{4(1 + \beta z)^2} \left[ s(1 - \beta^2)^2(1 + \beta^2 - 2\beta^4 - (2 - 3\beta^2)\beta^2 z^2 - \beta^4 z^4) \right. \\
&\quad + m_H^2(-2 - 2\beta^2 + 5\beta^4 - 2\beta^6 - (3 - 2\beta^2)\beta^3 z + 3(2 - 3\beta^2 + \beta^4)\beta^2 z^2 \\
&\quad + 3(1 - \beta^2)\beta^3 z^3 + (2 - \beta^2)\beta^4 z^4 + \beta^5 z^5 \left. \right] \bar{B}_0^H \\
&\quad - \frac{s(s(1 - \beta^2) - m_H^2)(1 - \beta^2)}{8(1 + \beta z)} \left( 1 + \beta(1 - \beta^2)(2\beta - z - 3\beta z^2) - \beta^4 z^4 \right) \\
&\quad \left. \frac{d}{dp^2} B_0^H \Big|_{p^2=mt^2} \right\} + (z \rightarrow -z). \tag{C.5}
\end{aligned}$$

Vertex-Korrekturen:

$$\begin{aligned}
\overline{\sum} \left| \mathcal{M}_{gg \rightarrow t\bar{t}}^{V_Z} \alpha_s^2 \alpha \right|^2 &= \alpha_s^2 \alpha \pi \frac{2 - N^2(1 - \beta z)}{N(N^2 - 1)(1 + \beta z)^2} \left\{ 4(1 - \beta^2)(g_v^{t^2} + g_a^{t^2}) \right. \\
&\quad + \frac{16(g_v^{t^2} + g_a^{t^2})}{s(1 - \beta z)(1 - \beta^2)(1 + 2\beta z + \beta^2)} \\
&\quad \left( 1 + 2\beta^2 - \beta^4 + (1 + 4\beta^2 - 3\beta^4)\beta z - 2(1 - \beta^2)(2\beta^2 z^2 + 3\beta^3 z^3) \right. \\
&\quad - 2(1 + \beta z)\beta^4 z^4 \left. \right) \left( \bar{A}_0(m_t^2) - \bar{A}_0(M_Z^2) \right) \\
&\quad + \frac{4}{(1 - \beta^2 z^2)(1 + 2\beta z + \beta^2)} \left[ 2(g_v^{t^2} + g_a^{t^2}) \frac{M_Z^2}{s} (1 - 4\beta^2 - 3\beta^4 + 4\beta^6) \right. \\
&\quad + (1 - 8\beta^2 + 5\beta^4)\beta z + 2(1 + 2\beta^2 - 3\beta^4)\beta^2 z^2 \\
&\quad + 6(1 - \beta^2)\beta^3 z^3 + 2\beta^6 z^4 + 2\beta^5 z^5 \left. \right) \\
&\quad - g_v^{t^2} \left( 2 + 3\beta^2 - 6\beta^4 - \beta^6 + 4\beta^8 + (3 + 7\beta^2 - 13\beta^4 + 7\beta^6)\beta z \right.
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& - (7 - 18\beta^2 + 3\beta^4 + 6\beta^6)\beta^2 z^2 - (14 - 26\beta^2 + 12\beta^4)\beta^3 z^3 \\
& - (10 - 6\beta^2 - 2\beta^4)\beta^4 z^4 - (8 - 4\beta^2)\beta^5 z^5 - 2\beta^6 z^6) \\
& + g_a^t{}^2 \left( -2 + 5\beta^2 - 10\beta^4 - 7\beta^6 + 12\beta^8 - (3 - 9\beta^2 + 35\beta^4 - 25\beta^6)\beta z \right. \\
& - (1 - 6\beta^2 - 11\beta^4 + 18\beta^6)\beta^2 z^2 - 2(1 - 19\beta^2 + 18\beta^4)\beta^3 z^3 \\
& \left. + 2(1 - 3\beta^2 + 3\beta^4)\beta^4 z^4 - 4(2 - 3\beta^2)\beta^5 z^5 + 2\beta^6 z^6 \right) \bar{B}_0^Z(z) \\
& + \frac{4}{(1 - \beta^2 z^2)(1 - \beta^2)} \left[ 2(g_v^t{}^2 + g_a^t{}^2) \frac{M_Z^2}{s} (1 + 8\beta^2 - 11\beta^4 + 4\beta^6 \right. \\
& + (1 + 4\beta^2 - 3\beta^4)\beta z - 2(5 - 8\beta^2 + 3\beta^4)\beta^2 z^2 \\
& - 6(1 - \beta^2)\beta^3 z^3 - 2(2 - \beta^2)\beta^4 z^4 - 2\beta^5 z^5) \\
& + (1 - \beta^2)^2 (g_v^t{}^2(1 + \beta^2 - 4\beta^4 - (1 - \beta^2)\beta z - 2(1 - 3\beta^2)\beta^2 z^2 - 2\beta^4 z^4) \\
& \left. + g_a^t{}^2(1 - 7\beta^2 + 12\beta^4 - (1 - \beta^2)\beta z + 6(1 - 3\beta^2)\beta^2 z^2 + 6\beta^4 z^4)) \right] \bar{B}_0^Z \\
& + 2(g_v^t{}^2 + g_a^t{}^2)s(1 - \beta^2)^2 C_0^Z(z) \\
& - \frac{4}{1 - \beta z} \left( ((g_v^t{}^2 - 3g_a^t{}^2)s(1 - \beta^2) + 2(g_v^t{}^2 + g_a^t{}^2)M_Z^2) \right. \\
& \left. (1 + \beta(1 - \beta^2)(2\beta - z - 3\beta z^2) - \beta^4 z^4) \right) \frac{d}{dp^2} B_0^Z \Big|_{p^2=mt^2} \Big\} \\
& + (z \rightarrow -z), \tag{C.6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\sum} \left| \mathcal{M}_{gg \rightarrow t\bar{t}}^{V_W \alpha_s^2 \alpha} \right|^2 & = 8\alpha_s^2 \alpha \pi \frac{2 - N^2(1 - \beta z)}{N(N^2 - 1)(1 + \beta z)^2} g_W^2 \left\{ (1 - \beta^2) \right. \\
& + \frac{4}{s(1 - \beta z)(1 - \beta^2)(1 + 2\beta z + \beta^2)} \\
& \left( 1 + 2\beta^2 - \beta^4 + (1 + 4\beta^2 - 3\beta^4)\beta z - 2(1 - \beta^2)(2\beta^2 z^2 + 3\beta^3 z^3) \right. \\
& \left. - 2(1 + \beta z)\beta^4 z^4 \right) \left( \bar{A}_0(m_b^2) - \bar{A}_0(M_W^2) \right) \\
& + \frac{1}{2s(1 - \beta^2 z^2)(1 + 2\beta z + \beta^2)} \left[ 4(M_W^2 - m_b^2) \left( 1 - 4\beta^2 - 3\beta^4 + 4\beta^6 \right. \right. \\
& + (1 - 8\beta^2 + 5\beta^4)\beta z + 2(1 + 2\beta^2 - 3\beta^4)\beta^2 z^2 + 6(1 - \beta^2)\beta^3 z^3 \\
& \left. + 2\beta^6 z^4 + 2\beta^5 z^5 \right) - s(1 + 2\beta z + \beta^2) \left( 3 + 3\beta^4 - 4\beta^6 - (1 - 8\beta^2 + 5\beta^4)\beta z \right. \\
& \left. \left. - 6(1 - \beta^4)\beta^2 z^2 - 6(1 - \beta^2)\beta^3 z^3 - 2\beta^6 z^4 - 2\beta^5 z^5 \right) \right] \bar{B}_0^W(z)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2s(1-\beta^2)(1-\beta^2z^2)} \left[ 4(M_W^2 - m_b^2) \left( 1 + 8\beta^2 - 11\beta^4 + 4\beta^6 \right. \right. \\
& + (1 + 4\beta^2 - 3\beta^4)\beta z - 2(5 - 8\beta^2 + 3\beta^4)\beta^2 z^2 \\
& - 6(1 - \beta^2)\beta^3 z^3 - 2(2 - \beta^2)\beta^4 z^4 - 2\beta^5 z^5 \left. \right) \\
& + s(1 - \beta^2) \left( 3 + 3\beta^4 - 4\beta^6 - (1 - 8\beta^2 + 5\beta^4)\beta z - 6(1 - \beta^4)\beta^2 z^2 \right. \\
& \left. \left. - 6(1 - \beta^2)\beta^3 z^3 - 2\beta^6 z^4 - 2\beta^5 z^5 \right) \right] \bar{B}_0^W \\
& + 2m_b^2(1 - \beta^2)C_0^W(z) \\
& + \frac{s(1 - \beta^2) + 4(m_b^2 - M_W^2)}{2(1 - \beta z)} \\
& \left. \left( 1 + \beta(1 - \beta^2)(2\beta - z - 3\beta z^2) - \beta^4 z^4 \right) \frac{d}{dp^2} B_0^W \Big|_{p^2=mt^2} \right\} \\
& + (z \rightarrow -z), \tag{C.7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\sum} \left| \mathcal{M}_{gg \rightarrow t\bar{t}}^{V_\chi \alpha_s^2 \alpha} \right|^2 & = 16\alpha_s^2 \alpha \pi \frac{2 - N^2(1 - \beta z)}{N(N^2 - 1)(1 + \beta z)^2} \frac{g_a^t{}^2}{M_Z^2} \left\{ \frac{s(1 - \beta^2)^2}{8} \right. \\
& + \frac{1}{2(1 - \beta z)(1 + 2\beta z + \beta^2)} \\
& \left( 1 + 2\beta^2 - \beta^4 + (1 + 4\beta^2 - 3\beta^4)\beta z - 2(1 - \beta^2)(2\beta^2 z^2 + 3\beta^3 z^3) \right. \\
& \left. - 2(1 + \beta z)\beta^4 z^4 \right) \left( \bar{A}_0(m_t^2) - \bar{A}_0(M_Z^2) \right) \\
& + \frac{(1 - \beta^2)}{8(1 - \beta^2 z^2)(1 + 2\beta z + \beta^2)} \left[ 2M_Z^2 \left( 1 - 4\beta^2 - 3\beta^4 + 4\beta^6 \right. \right. \\
& + (1 - 8\beta^2 + 5\beta^4)\beta z + 2(1 + 2\beta^2 - 3\beta^4)\beta^2 z^2 \\
& + 6(1 - \beta^2)\beta^3 z^3 + 2\beta^6 z^4 + 2\beta^5 z^5 \left. \right) \\
& + s\beta \left( -(1 + \beta^4)\beta + (1 - 7\beta^2 + \beta^4 + \beta^6)z + (3 - 12\beta^2 + 7\beta^4)\beta z^2 \right. \\
& \left. + 6(1 - \beta^2)\beta^2 z^3 + 2(4 - 3\beta^2)\beta^3 z^4 + 4\beta^4 z^5 + 2\beta^5 z^6 \right) \bar{B}_0^Z(z) \\
& + \frac{1}{8(1 - \beta^2 z^2)} \left[ 2M_Z^2 \left( 1 + 8\beta^2 - 11\beta^4 + 4\beta^6 + (1 + 4\beta^2 - 3\beta^4)\beta z \right. \right. \\
& - 2(5 - 8\beta^2 + 3\beta^4)\beta^2 z^2 - 6(1 - \beta^2)\beta^3 z^3 - 2(2 - \beta^2)\beta^4 z^4 - 2\beta^5 z^5 \left. \right) \\
& \left. - s(1 - \beta^2)^2(1 + 2\beta z + \beta^2)(1 - \beta z) \right] \bar{B}_0^Z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{s^2(1-\beta^2)^2(1+2\beta z+\beta^2)}{16} C_0^Z(z) \\
& - \frac{M_Z^2 s(1-\beta^2)}{4(1-\beta z)} \\
& \left. \left( (1+\beta(1-\beta^2))(2\beta-z-3\beta z^2)-\beta^4 z^4 \right) \frac{d}{dp^2} B_0^Z \Big|_{p^2=mt^2} \right\} \\
& + (z \rightarrow -z), \tag{C.8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\sum} \left| \mathcal{M}_{gg \rightarrow t\bar{t}}^{V_\phi \alpha_s^2 \alpha} \right|^2 &= 8\alpha_s^2 \alpha \pi \frac{2-N^2(1-\beta z)}{N(N^2-1)(1+\beta z)^2} \frac{g_W^2}{M_W^2} \left\{ \frac{(1-\beta^2)(s(1-\beta^2)+4m_b^2)}{8} \right. \\
& + \frac{s(1-\beta^2)+4m_b^2}{2s(1-\beta z)(1+2\beta z+\beta^2)(1-\beta^2)} \left( 1+2\beta^2-\beta^4+(1+4\beta^2-3\beta^4)\beta z \right. \\
& - \left. 2(1-\beta^2)(2\beta^2 z^2+3\beta^3 z^3)-2(1+\beta z)\beta^4 z^4 \right) \left( \bar{A}_0(m_b^2)-\bar{A}_0(M_W^2) \right) \\
& + \frac{1}{16s(1-\beta^2 z^2)(1+2\beta z+\beta^2)} \left[ \left( 4M_W^2(s(1-\beta^2)+4m_b^2)-16m_b^4 \right) \right. \\
& \left. \left( 1-4\beta^2-3\beta^4+4\beta^6+(1-8\beta^2+5\beta^4)\beta z+2(1+2\beta^2-3\beta^4)\beta^2 z^2 \right. \right. \\
& + \left. \left. 6(1-\beta^2)\beta^3 z^3+2\beta^6 z^4+2\beta^5 z^5 \right) \right. \\
& + \left. 8\beta m_b^2 s \left( -(3-4\beta^2-\beta^4+4\beta^6)\beta+(1-11\beta^2+13\beta^4-7\beta^6)z \right. \right. \\
& + \left. \left. (5-18\beta^2+5\beta^4+6\beta^6)\beta z^2+2(5-11\beta^2+6\beta^4)\beta^2 z^3 \right. \right. \\
& + \left. \left. 2(5-3\beta^2-\beta^4)\beta^3 z^4+4(2-\beta^2)\beta^4 z^5+2\beta^5 z^6 \right) \right. \\
& + \left. s^2(1-\beta^2)(1+2\beta z+\beta^2) \left( 1-4\beta^2-3\beta^4+4\beta^6+(1-8\beta^2+5\beta^4)\beta z \right. \right. \\
& + \left. \left. 2(1+2\beta^2-3\beta^4)\beta^2 z^2+6(1-\beta^2)\beta^3 z^3+2\beta^6 z^4+2\beta^5 z^5 \right) \right] \bar{B}_0^W(z) \\
& + \frac{1}{16s(1-\beta^2)(1-\beta^2 z^2)} \left[ \left( 4M_W^2(s(1-\beta^2)+4m_b^2)-16m_b^4 \right) \right. \\
& \left. \left( 1+8\beta^2-11\beta^4+4\beta^6+(1+4\beta^2-3\beta^4)\beta z-2(5-8\beta^2+3\beta^4)\beta^2 z^2 \right. \right. \\
& - \left. \left. 6(1-\beta^2)\beta^3 z^3-2(2-\beta^2)\beta^4 z^4-2\beta^5 z^5 \right) \right. \\
& - \left. 8m_b^2 s(1-\beta^2)^2 \left( 1-\beta^2+4\beta^4+(1-\beta^2)\beta z-6\beta^4 z^2+2\beta^4 z^4 \right) \right. \\
& - \left. s^2(1-\beta^2)^2 \left( 1-4\beta^2-3\beta^4+4\beta^6+(1-8\beta^2+5\beta^4)\beta z \right. \right. \\
& + \left. \left. 2(1+2\beta^2-3\beta^4)\beta^2 z^2+6(1-\beta^2)\beta^3 z^3+2\beta^6 z^4+2\beta^5 z^5 \right) \right] \bar{B}_0^W
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{4}m_b^2(1-\beta^2)(s\beta^2 + 4s\beta z + 3s - 4m_b^2)C_0^W(z) \\
& + \frac{1}{16(1-\beta z)} \left( s^2(1-\beta^2)^2 - 4s(M_W^2 + 2m_b^2)(1-\beta^2) + 16m_b^2(m_b^2 - M_W^2) \right) \\
& \quad \left. \left( 1 + \beta(1-\beta^2)(2\beta - z - 3\beta z^2) - \beta^4 z^4 \right) \frac{d}{dp^2} B_0^W \Big|_{p^2=mt^2} \right\} \\
& + (z \rightarrow -z), \tag{C.9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\Sigma} \left| \mathcal{M}_{gg \rightarrow t\bar{t}}^{V_H} \alpha_s^2 \alpha \right|^2 & = 8\alpha_s^2 \alpha \pi \frac{2 - N^2(1-\beta z)}{N(N^2 - 1)(1+\beta z)^2} \frac{g_W^2}{M_W^2} \left\{ \frac{s(1-\beta^2)^2}{8} \right. \\
& + \frac{1}{2(1-\beta z)(1+2\beta z + \beta^2)} \left( 1 + 2\beta^2 - \beta^4 + (1+4\beta^2 - 3\beta^4)\beta z \right. \\
& - 2(1-\beta^2)(2\beta^2 z^2 + 3\beta^3 z^3) - 2(1+\beta z)\beta^4 z^4 \left. \right) \left( \bar{A}_0(m_t^2) - \bar{A}_0(m_H^2) \right) \\
& + \frac{1-\beta^2}{8(1-\beta^2 z^2)(1+2\beta z + \beta^2)} \left[ 2m_H^2 \left( 1 - 4\beta^2 - 3\beta^4 + 4\beta^6 \right. \right. \\
& + (1-8\beta^2 + 5\beta^4)\beta z + 2(1+2\beta^2 - 3\beta^4)\beta^2 z^2 \\
& + 6(1-\beta^2)\beta^3 z^3 + 2\beta^6 z^4 + 2\beta^5 z^5 \left. \right) \\
& + s\beta \left( (3-8\beta^2 - 5\beta^4 + 8\beta^6)\beta + (1+\beta^2 - 23\beta^4 + 17\beta^6)z \right. \\
& - (1-11\beta^4 + 12\beta^6)\beta z^2 - 2(1-13\beta^2 + 12\beta^4)\beta^2 z^3 \\
& + 2(2-3\beta^2 + 2\beta^4)\beta^3 z^4 - 4(1-2\beta^2)\beta^4 z^5 + 2\beta^5 z^6 \left. \right) \bar{B}_0^H(z) \\
& + \frac{1}{8(1-\beta^2 z^2)} \left[ 2m_H^2 \left( 1 + 8\beta^2 - 11\beta^4 + 4\beta^6 + (1+4\beta^2 - 3\beta^4)\beta z \right. \right. \\
& - 2(5-8\beta^2 + 3\beta^4)\beta^2 z^2 - 6(1-\beta^2)\beta^3 z^3 - 2(2-\beta^2)\beta^4 z^4 - 2\beta^5 z^5 \left. \right) \\
& - s(1-\beta^2)^2 \left( 1 + 5\beta^2 - 8\beta^4 + (1-\beta^2)\beta z - 6(1-2\beta^2)\beta^2 z^2 - 4\beta^4 z^4 \right) \bar{B}_0^H \\
& + \frac{s^2(1-\beta^2)^2(3+2\beta z - \beta^2)}{16} C_0^H(z) \\
& + \frac{s(1-\beta^2)(s(1-\beta^2) - m_H^2)}{4(1-\beta z)} \left( 1 + \beta(1-\beta^2)(2\beta - z - 3\beta z^2) - \beta^4 z^4 \right) \\
& \quad \left. \frac{d}{dp^2} B_0^H \Big|_{p^2=mt^2} \right\} + (z \rightarrow -z). \tag{C.10}
\end{aligned}$$

Boxgraphen:

$$\begin{aligned}
\overline{\sum} \left| \mathcal{M}_{gg \rightarrow t\bar{t}}^{\square_Z} \alpha_s^2 \alpha \right|^2 &= \alpha_s^2 \alpha \pi \frac{N^2(1-\beta z) - 2}{N(N^2 - 1)(1 - \beta^2 z^2)} \left\{ -2(g_v^{t^2} + g_a^{t^2})\beta z(1 - z^2) \right. \\
&+ 8(g_v^{t^2} + g_a^{t^2}) \frac{\beta(1 - z^2)(4\beta - z - 2\beta z^2)}{s(1 + \beta^2 + 2\beta z)} \left( \overline{A}_0(m_t^2) - \overline{A}_0(M_Z^2) \right) \\
&- 2 \left[ 2(g_v^{t^2} + g_a^{t^2}) \frac{M_Z^2}{s\beta} z(5 - 4\beta^2 - (3 - 2\beta^2)z^2) \right. \\
&- g_v^{t^2}(2 + (1 - 4\beta^2)\beta z - 2z^2 + (1 + 2\beta^2)\beta z^3) \\
&- g_a^{t^2}(2 - 3(5 - 4\beta^2)\beta z - 2z^2 + 3(3 - 2\beta^2)\beta z^3) \left. \right] \overline{B}_0(s, m_t^2, m_t^2) \\
&+ \frac{4}{1 + \beta z} \left[ -(g_a^{t^2} + g_v^{t^2}) \frac{M_Z^2}{s\beta} \left( -6\beta^3 - (5 - 8\beta^2 + 4\beta^4)z \right. \right. \\
&- (5 - 12\beta^2)\beta z^2 + (3 - 4\beta^2 + 2\beta^4)z^3 + (3 - 4\beta^2)\beta z^4) \\
&+ g_v^{t^2}(5\beta^2 - 3\beta^4 + (1 + \beta^2 - 2\beta^4)\beta z + (1 - 4\beta^2 + 3\beta^4)z^2 \\
&- (1 - \beta^2)\beta^3 z^3 - (1 + \beta^2)\beta^2 z^4) \\
&- g_a^{t^2}(3\beta^2 - 5\beta^4 - 3(3 - 5\beta^2 + 2\beta^4)\beta z - (1 + 8\beta^2 - 9\beta^4)z^2 \\
&+ (4 - 7\beta^2 + 3\beta^4)\beta z^3 + (5 - 3\beta^2)\beta^2 z^4) \left. \right] \overline{B}_0^Z \\
&+ 2 \left[ 8(g_v^{t^2} + g_a^{t^2}) \frac{M_Z^4}{s} + 4M_Z^2 \left( g_v^{t^2}(3 + \beta z) - g_a^{t^2}(1 - 4\beta^2 - \beta z) \right) \right. \\
&+ s \left( g_v^{t^2}(4 + 2\beta^2 - \beta^4 + 2(2 - \beta^2)\beta z + \beta^2 z^2) \right. \\
&+ g_a^{t^2}(4 - 6\beta^2 + 7\beta^4 - 2(2 - 3\beta^2)\beta z + \beta^2 z^2) \left. \right) \left. \right] C_0^t \\
&+ 2 \left[ -2(g_v^{t^2} + g_a^{t^2}) \frac{M_Z^4}{s\beta} z(5 - 8\beta^2 - 3z^2 + 2\beta^2 z^2) \right. \\
&+ 2M_Z^2 \left( g_v^{t^2}(1 + \beta^2 + 4\beta z - (1 - \beta^2)z^2 + 2\beta z^3) \right. \\
&+ g_a^{t^2}(1 + \beta^2 - 4(3 - 4\beta^2)\beta z - (1 - \beta^2)z^2 + 2(3 - 2\beta^2)\beta z^3) \\
&+ \beta s \left( g_v^{t^2}((4 - \beta^2)\beta + \beta^4 z^3 + 4(1 + \beta^2 - \beta^4)z - \beta^3 z^2 + \beta^2 z^3) \right. \\
&- g_a^{t^2}(-3\beta^3 - 4(1 - 3\beta^2 + 3\beta^4)z + (4 - 3\beta^2)\beta z^2 - (5 - 3\beta^2)\beta^2 z^3) \left. \right) \left. \right] C_0^Z \\
&+ \frac{4}{(1 + \beta z)(1 + \beta^2 + 2\beta z)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[ 2(g_v^{t^2} + g_a^{t^2}) \frac{M_Z^2}{s} \beta(z + \beta) \left( 1 - 3\beta^2 + (1 - 2\beta^2)\beta z + 2\beta^2 z^2 + \beta^3 z^3 \right) \right. \\
& - g_v^{t^2} \left( 1 + 8\beta^2 - 3\beta^6 + (4 + 14\beta^2 - 11\beta^4 - 2\beta^6)\beta z \right. \\
& - (2 + \beta^2 + 3\beta^4)\beta^2 z^2 - (11 - 6\beta^2 - \beta^4)\beta^3 z^3 - 2(1 - \beta^2)\beta^4 z^4 - \beta^5 z^5 \left. \right) \\
& - g_a^{t^2} \left( 1 + 5\beta^6 + (4 - 10\beta^2 + 5\beta^4 + 6\beta^6)\beta z + (2 - 17\beta^2 + 9\beta^4)\beta^2 z^2 \right. \\
& + (1 - 2\beta^2 - 3\beta^4)\beta^3 z^3 + 6(1 - \beta^2)\beta^4 z^4 - \beta^5 z^5 \left. \right) \Big] \bar{B}_0^Z(z) \\
& - 2 \left[ 8(g_v^{t^2} + g_a^{t^2}) \frac{M_Z^4}{s} (1 + \beta z) \right. \\
& + 4M_Z^2 (1 + \beta z) \left( 3g_v^{t^2} - g_a^{t^2} + 4\beta^2 g_a^{t^2} + (g_v^{t^2} + g_a^{t^2})\beta z \right) \\
& + s \left( g_v^{t^2} (4 + 2\beta^2 - \beta^4 + (7 + 2\beta^2 - 2\beta^4)\beta z + (5 - 2\beta^2)\beta^2 z^2 + \beta^3 z^3) \right. \\
& + g_a^{t^2} (4 - 6\beta^2 + 7\beta^4 - (1 - 2\beta^2 - 6\beta^4)\beta z - 3(1 - 2\beta^2)\beta^2 z^2 + \beta^3 z^3) \left. \right) \Big] C_0^Z(z) \\
& + \left[ 16(g_v^{t^2} + g_a^{t^2}) \frac{M_Z^6}{s} + 8M_Z^4 (g_v^{t^2} (3 + \beta^2 + 2\beta z) - g_a^{t^2} (1 - 5\beta^2 - 2\beta z)) \right. \\
& + 2sM_Z^2 \left( g_v^{t^2} (4 + 9\beta^2 - 2\beta^4 + 10\beta z + (2 + \beta^2)\beta^2 z^2) \right. \\
& + g_a^{t^2} (4 - 7\beta^2 + 14\beta^4 - 2(3 - 8\beta^2)\beta z + (2 + \beta^2)\beta^2 z^2) \left. \right) \\
& + s^2 \left( g_v^{t^2} (1 + 7\beta^2 - \beta^4 - 2\beta^6 + (3 + 8\beta^2 - 4\beta^4)\beta z \right. \\
& + (1 + 3\beta^2 - \beta^4)\beta^2 z^2 + \beta^3 z^3) - g_a^{t^2} (3 - 7\beta^2 + 5\beta^4 - 6\beta^6 \\
& - (3 - 8\beta^2 + 12\beta^4)\beta z + 3(1 - \beta^2 - \beta^4)\beta^2 z^2 - \beta^3 z^3) \left. \right) \Big] D_0^Z(z) \Big\} \\
& + (z \rightarrow -z), \tag{C.11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\sum} \left| \mathcal{M}_{gg \rightarrow t\bar{t}}^{\square_W} \alpha_s^2 \alpha \right|^2 &= 4\alpha_s^2 \alpha \pi \frac{N^2(1 - \beta z) - 2}{N(N^2 - 1)(1 - \beta^2 z^2)} g_W^2 \left\{ - (1 - z^2)\beta z \right. \\
& + \frac{4\beta(1 - z^2)(4\beta - z - 2\beta z^2)}{s(1 + \beta^2 + 2\beta z)} \left( \bar{A}_0(m_b^2) - \bar{A}_0(M_W^2) \right) \\
& - \frac{1}{2s\beta} \left[ 4(M_W^2 - m_b^2)z(5 - 4\beta^2 - (3 - 2\beta^2)z^2) \right. \\
& - s \left( 4\beta - (5 + 5\beta^2 - 4\beta^4)z - 4\beta z^2 + (3 + 5\beta^2 - 2\beta^4)z^3 \right) \Big] \bar{B}_0^b \\
& + \frac{1}{2s\beta(1 + \beta z)} \left[ 4(M_W^2 - m_b^2) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left( 6\beta^3 + (5 - 8\beta^2 + 4\beta^4)z + (5 - 12\beta^2)\beta z^2 - (3 - 4\beta^2 + 2\beta^4)z^3 \right. \\
& - (3 - 4\beta^2)\beta z^4 \left. \right) + s \left( 2(5 - \beta^2)\beta^3 + (1 - \beta^2)((5 + 12\beta^2 - 4\beta^4)z \right. \\
& + 9\beta z^2 - (3 + 4\beta^2 - 2\beta^4)z^3) - \beta(3 + 5\beta^2)z^4 \left. \right) \overline{B}_0^W \\
& + \frac{1}{2s} \left[ (4(M_W^2 - m_b^2))^2 + 8M_W^2 s(2 + \beta^2 + \beta z) - 8m_b^2 s\beta(2\beta + z) \right. \\
& + s^2(7 + 2\beta^2 + \beta^4 + 2(1 + \beta^2)\beta z + 2\beta^2 z^2) \left. \right] C_0^b \\
& + \frac{1}{8s\beta} \left[ - (4(M_W^2 - m_b^2))^2 z(5 - 8\beta^2 - (3 - 2\beta^2)z^2) \right. \\
& + 8M_W^2 s(2(1 + \beta^2)\beta - (5 - 5\beta^2 - 8\beta^4)z \\
& - 2(1 - \beta^2)\beta z^2 + (3 + 3\beta^2 - 2\beta^4)z^3) \\
& - 8m_b^2 s(2(1 + \beta^2)\beta - (1 + \beta^2)(5 - 8\beta^2)z \\
& - 2(1 - \beta^2)\beta z^2 + (1 + \beta^2)(3 - 2\beta^2)z^3) \\
& - s^2(-4(1 + 4\beta^2 + \beta^4)\beta + (5 - 30\beta^2 + \beta^4 - 8\beta^6)z \\
& + 4(1 + 2\beta^2 - \beta^4)\beta z^2 - (3 + 4\beta^2 + 11\beta^4 - 2\beta^6)z^3) \left. \right] C_0^W \\
& + \frac{1}{s(1 + \beta z)(1 + \beta^2 + 2\beta z)} \left[ \right. \\
& 4(M_W^2 - m_b^2)\beta(z + \beta)(1 - 3\beta^2 + (1 - 2\beta^2)\beta z + 2\beta^2 z^2 + \beta^3 z^3) \\
& - s(1 + \beta^2 + 2\beta z)(2 + 5\beta^2 - \beta^4 + (3 - 6\beta^2 + 2\beta^4)\beta z \\
& - (7 - 2\beta^2)\beta^2 z^2 + (2 - \beta^2)\beta^3 z^3 - \beta^4 z^4) \left. \right] \overline{B}_0^W(z) \\
& - \frac{1}{2s} \left[ (4(M_W^2 - m_b^2))^2(1 + \beta z) + 8M_W^2 s(1 + \beta z)(2 + \beta^2 + \beta z) \right. \\
& - 8m_b^2 s\beta(\beta + z)(2 + \beta z) \\
& + s^2(1 + \beta z)(7 + 2\beta^2 + \beta^4 + 2(1 + \beta^2)\beta z + 2\beta^2 z^2) \left. \right] C_0^W(z) \\
& + \frac{1}{8s} \left[ (4(M_W^2 - m_b^2))^3 + 8s(2(M_W^2 - m_b^2)^2(3\beta^2 + 4\beta z) \right. \\
& + 10M_W^4 + 2m_b^4(1 + 2\beta^2 z^2) - 4M_W^2 m_b^2(3 + \beta^2 z^2)) \\
& + 4s^2(M_W^2(11 + 8\beta^2 + 3\beta^4 + 4(3 + 2\beta^2)\beta z + 6\beta^2 z^2) \\
& - m_b^2(11 - 4\beta^2 + 3\beta^4 + 8(1 + \beta^2)\beta z + 2(6 + \beta^2)\beta^2 z^2)) \left. \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + s^3(1 + \beta^2 + 2\beta z)(7 + 2\beta^2 + \beta^4 + 2(1 + \beta^2)\beta z + 2\beta^2 z^2) \Big] D_0^W(z) \Big\} \\
& + (z \rightarrow -z), \tag{C.12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\sum} \left| \mathcal{M}_{gg \rightarrow t\bar{t}}^{\square \chi \alpha_s^2 \alpha} \right|^2 &= 4\alpha_s^2 \alpha \pi m_t^2 \frac{g_a^t{}^2}{M_Z^2} \frac{N^2(1 - \beta z) - 2}{N(N^2 - 1)(1 - \beta^2 z^2)} \left\{ -\beta z(1 - z^2) \right. \\
& + \frac{4\beta(1 - z^2)(4\beta - z - 2\beta z^2)}{s(1 + \beta^2 + 2\beta z)} \left( \bar{A}_0(m_t^2) - \bar{A}_0(M_Z^2) \right) \\
& - \frac{1}{s\beta} \left[ 2M_Z^2 z(5 - 4\beta^2 - (3 - 2\beta^2)z^2) - s\beta(1 - z^2)(2 + \beta z) \right] \bar{B}_0(s, m_t^2, m_t^2) \\
& + \frac{1}{s\beta(1 + \beta z)} \left[ 2M_Z^2(6\beta^3 + (5 - 8\beta^2 + 4\beta^4)z + (5 - 12\beta^2)\beta z^2 \right. \\
& - (3 - 4\beta^2 + 2\beta^4)z^3 - (3 - 4\beta^2)\beta z^4) \\
& - 2\beta s(1 - \beta^2)(2 - \beta^2 + \beta z - z^2 - \beta z^3) \Big] \bar{B}_0^Z \\
& + \frac{1}{s} \left[ 8M_Z^4 + 4\beta s(\beta + z)M_Z^2 + s^2(2 - 2\beta^2 + \beta^4 + 2\beta z + \beta^2 z^2) \right] C_0^t \\
& - \frac{1}{s\beta} \left[ 2M_Z^4 z(5 - 8\beta^2 - (3 - 2\beta^2)z^2) \right. \\
& - 2M_Z^2 s\beta(1 + \beta^2 - 2(1 - 2\beta^2)\beta z - (1 - \beta^2)z^2 + (1 - \beta^2)\beta z^3) \\
& - s^2\beta^2(\beta + z)(1 + \beta z) \Big] C_0^Z \\
& + \frac{1}{s(1 + \beta z)(1 + \beta^2 + 2\beta z)} \left[ 4M_Z^2\beta(\beta + z) \left( 1 - 3\beta^2 + (1 - 2\beta^2)\beta z + 2z^2\beta^2 + \beta^3 z^3 \right) \right. \\
& + 2s \left( 1 - 4\beta^2 + \beta^6 + (2 - 10\beta^2 + 3\beta^4)\beta z + (3 - 5\beta^2)\beta^2 z^2 \right. \\
& + 2(3 - \beta^2)\beta^3 z^3 + 4\beta^4 z^4 + \beta^5 z^5) \Big] \bar{B}_0^Z(z) \\
& - \frac{1}{s} \left[ 4 \left( 2M_Z^4 + M_Z^2 s\beta(\beta + z) \right) (1 + \beta z) \right. \\
& + s^2 \left( 2 - 2\beta^2 + \beta^4 + 3\beta z + 3\beta^2 z^2 + \beta^3 z^3 \right) \Big] C_0^Z(z) \\
& + \frac{1}{2s} \left[ 16M_Z^6 + 16M_Z^4 s\beta(\beta + z) \right. \\
& + 2M_Z^2 s^2 \left( 2 - \beta^2 + 2\beta^4 + 2(1 + 2\beta^2)\beta z + (2 + \beta^2)\beta^2 z^2 \right) \\
& + s^3\beta(\beta + z)(1 + \beta z)^2 \Big] D_0^Z(z) \Big\} + (z \rightarrow -z), \tag{C.13}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\sum \left| \mathcal{M}_{gg \rightarrow t\bar{t}}^{\square_\phi \alpha_s^2 \alpha} \right|^2 &= 2\alpha_s^2 \alpha \pi \frac{g_W^2}{M_W^2} \frac{N^2(1-\beta z) - 2}{N(N^2 - 1)(1 - \beta^2 z^2)} \left\{ -\frac{\beta}{4} z(1-z^2)(s(1-\beta^2) + 4m_b^2) \right. \\
&+ \frac{\beta(1-z^2)(s(1-\beta^2) + 4m_b^2)(4\beta - z - 2\beta z^2)}{s(1 + \beta^2 + 2\beta z)} \left( \bar{A}_0(m_b^2) - \bar{A}_0(M_W^2) \right) \\
&+ \frac{1}{8s\beta} \left[ (16m_b^2(m_b^2 - M_W^2) - 4M_W^2 s(1-\beta^2)) z(5 - 4\beta^2 - (3 - 2\beta^2)z^2) \right. \\
&+ 8m_b^2 s\beta(2 + (5 - 4\beta^2)\beta z - 2z^2 - (3 - 2\beta^2)\beta z^3) \\
&+ \left. s^2(1-\beta^2)(4\beta - (5 - 3\beta^2 - 4\beta^4)z - 4\beta z^2 + (3 - 3\beta^2 - 2\beta^4)z^3) \right] \bar{B}_0^b \\
&- \frac{1}{8s\beta(1+\beta z)} \left[ (16m_b^2(m_b^2 - M_W^2) - 4M_W^2 s(1-\beta^2)) \right. \\
&\quad \left( 6\beta^3 + (5 - 8\beta^2 + 4\beta^4)z + (5 - 12\beta^2)\beta z^2 \right. \\
&\quad \left. - (3 - 4\beta^2 + 2\beta^4)z^3 - (3 - 4\beta^2)\beta z^4 \right) \\
&+ 16m_b^2 s\beta(1-\beta^2) \left( 2 - 3\beta^2 + (3 - 2\beta^2)\beta z - (1 - 3\beta^2)z^2 \right. \\
&\quad \left. - (2 - \beta^2)\beta z^3 - \beta^2 z^4 \right) + s^2(1-\beta^2)^2 \left( 8\beta - 2\beta^3 - (5 - 4\beta^2 - 4\beta^4)z \right. \\
&\quad \left. - 9\beta z^2 + (3 - 4\beta^2 - 2\beta^4)z^3 + 3\beta z^4 \right) \left. \right] \bar{B}_0^W \\
&+ \frac{1}{8s} \left[ 64m_b^6 + 16m_b^4(s(1-\beta^2) - 8M_W^2 - 2zs\beta) \right. \\
&+ 16M_W^4(s(1-\beta^2) + 4m_b^2) + 32m_b^2 M_W^2 s(1+\beta z) \\
&+ 4s^2 m_b^2 \left( 3 - 2\beta^2 + \beta^4 + 4(2-\beta^2)\beta z + 2\beta^2 z^2 \right) + 8s^2 M_W^2 \beta(1-\beta^2)(\beta + z) \\
&+ \left. s^3(1-\beta^2)(3 - 2\beta^2 + \beta^4 + 2(1+\beta^2)\beta z + 2\beta^2 z^2) \right] C_0^b \\
&+ \frac{1}{32s\beta} \left[ -16 \left( 4m_b^6 + M_W^4(s(1-\beta^2) + 4m_b^2) - 8m_b^4 M_W^2 \right) \right. \\
&\quad \left. z \left( 5 - 8\beta^2 - (3 - 2\beta^2)z^2 \right) \right. \\
&\quad - 16m_b^4 s \left( 4(1+\beta^2)\beta - (5 - 17\beta^2 + 8\beta^4)z \right. \\
&\quad \left. - 4(1-\beta^2)\beta z^2 + (3 - 9\beta^2 + 2\beta^4)z^3 \right) \\
&+ 64M_W^2 m_b^2 s\beta \left( 1 + \beta^2 + 2\beta z - (1-\beta^2)z^2 \right) \\
&+ 4s^2 m_b^2 \left( 8(2-\beta^2)\beta^3 + (5 - 2\beta^2 + 21\beta^4 - 8\beta^6)z \right. \\
&+ \left. 8(2-\beta^2)\beta^3 z^2 - (3 - \beta^4 - 2\beta^6)z^3 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 8M_W^2 s^2 (1 - \beta^2) \left( 2(1 + \beta^2)\beta - (5 - \beta^2 - 8\beta^4)z \right. \\
& - 2(1 - \beta^2)\beta z^2 + (3 - \beta^2 - 2\beta^4)z^3 \left. \right) \\
& + s^3 (1 - \beta^2) \left( 4(1 + \beta^4)\beta - (5 - 22\beta^2 + 9\beta^4 - 8\beta^6)z \right. \\
& - 4(1 - 2\beta^2 - \beta^4)\beta z^2 + (3 - 4\beta^2 + 3\beta^4 - 2\beta^6)z^3 \left. \right) \Big] C_0^W \\
& - \frac{1}{4s(1 + \beta z)(1 + \beta^2 + 2\beta z)} \left[ \left( 16m_b^2(m_b^2 - M_W^2) - 4M_W^2 s(1 - \beta^2) \right) \right. \\
& \beta(\beta + z) \left( 1 - 3\beta^2 + (1 - 2\beta^2)\beta z + 2\beta^2 z^2 + \beta^3 z^3 \right) \\
& - 8m_b^2 s \left( 1 - 6\beta^2 + 3\beta^6 + (2 - 16\beta^2 + 7\beta^4 + 2\beta^6)\beta z \right. \\
& + (4 - 9\beta^2 + 3\beta^4)\beta^2 z^2 + (9 - 4\beta^2 - \beta^4)\beta^3 z^3 + 2(3 - \beta^2)\beta^4 z^4 + \beta^5 z^5 \left. \right) \\
& - s^2(1 + \beta^2 + 2\beta z)(1 - \beta^2) \left( 2 - 5\beta^2 + \beta^4 + (1 - 2\beta^2 - 2\beta^4)\beta z \right. \\
& + (3 - 2\beta^2)\beta^2 z^2 + (2 + \beta^2)\beta^3 z^3 + \beta^4 z^4 \left. \right) \Big] \bar{B}_0^W(z) \\
& - \frac{1}{8s} \left[ 64m_b^6(1 + \beta z) - 16m_b^4 \left( 8M_W^2(1 + \beta z) - s(1 - \beta^2 - (3 - \beta^2)\beta z - 2\beta^2 z^2) \right) \right. \\
& + m_b^2 \left( 32(2M_W^4 + M_W^2 s(1 + \beta z))(1 + \beta z) \right. \\
& + 4s^2(3 - 4\beta^4 z^2 + 9\beta z - \beta^5 z + 2\beta^3 z^3 + 10\beta^2 z^2 - 2\beta^3 z - 2\beta^2 + \beta^4) \left. \right) \\
& + 16M_W^4 s(1 - \beta^2)(1 + \beta z) + 8M_W^2 s^2 \beta(1 - \beta^2)(\beta + z)(1 + \beta z) \\
& + s^3(1 - \beta^2)(1 + \beta z) \left( 3 - 2\beta^2 + \beta^4 + 2(1 + \beta^2)\beta z + 2\beta^2 z^2 \right) \Big] C_0^W(z) \\
& - \frac{1}{32s} \left[ 256m_b^8 - 128m_b^6(6M_W^2 + s\beta z(2 + \beta z)) \right. \\
& - 64M_W^6 s(1 - \beta^2) + 32m_b^4 \left( 24M_W^4 + 2M_W^2 s(3 + \beta^2 + 8\beta z + 2\beta^2 z^2) \right. \\
& - s^2(-3\beta^2 + \beta^4 + 1 + 2\beta^4 z^2 - 5\beta^2 z^2 - 6\beta z + 2\beta^3 z) \left. \right) \\
& - 16M_W^4 s^2(1 - \beta^2)(1 + 3\beta^2 + 4\beta z) \\
& - 8m_b^2 \left( 32M_W^6 + 16M_W^4 s(1 + \beta^2 + 2\beta z) + 2M_W^2 s^2(5 + \beta^4 + 12\beta z + 2(2 + \beta^2)\beta^2 z^2) \right. \\
& + s^3 \left( 4\beta^3 z - 4\beta^4 z^2 + \beta^6 z^2 - 2\beta^5 z + 6\beta^2 - 2 + 4\beta z + 2\beta^3 z^3 + 9\beta^2 z^2 - 2\beta^4 \right) \left. \right) \\
& - 4M_W^2 s^3(1 - \beta^2)(3 + 3\beta^4 + 4(1 + 2\beta^2)\beta z + 6\beta^2 z^2) \\
& \left. - s^4(1 - \beta^2)(1 + \beta^2 + 2\beta z)(3 - 2\beta^2 + \beta^4 + 2(1 + \beta^2)\beta z + 2\beta^2 z^2) \right] D_0^W(z) \Big\}
\end{aligned}$$

$$+ (z \rightarrow -z), \quad (\text{C.14})$$

$$\begin{aligned}
\overline{\sum} \left| \mathcal{M}_{gg \rightarrow t\bar{t}}^{\square_H \alpha_s^2 \alpha} \right|^2 &= -2\alpha_s^2 \alpha \pi g_W^2 \frac{m_t^2}{M_W^2} \frac{N^2(1-\beta z) - 2}{N(N^2 - 1)(1 - \beta^2 z^2)} \left\{ \beta z(1 - z^2) \right. \\
&\quad - \frac{4\beta(1 - z^2)(4\beta - z - 2\beta z^2)}{s(1 + \beta^2 + 2\beta z)} \left( \overline{A}_0(m_t^2) - \overline{A}_0(m_H^2) \right) \\
&\quad + \frac{1}{s\beta} \left[ 2m_H^2 z(5 - 4\beta^2 - (3 - 2\beta^2)z^2) \right. \\
&\quad \left. - s\beta \left( 2 - (7 - 8\beta^2)\beta z - 2z^2 + (3 - 4\beta^2)\beta z^3 \right) \right] \overline{B}_0(s, m_t^2, m_t^2) \\
&\quad + \frac{1}{s\beta(1 + \beta z)} \left[ 2m_H^2 \left( -6\beta^3 - (5 - 8\beta^2 + 4\beta^4)z \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (5 - 12\beta^2)\beta z^2 + (3 - 4\beta^2 + 2\beta^4)z^3 + (3 - 4\beta^2)\beta z^4 \right) \right. \\
&\quad \left. + 2s\beta(1 - \beta^2) \left( 2 + 3\beta^2 - (3 - 4\beta^2)\beta z \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (1 + 6\beta^2)z^2 + (1 - 2\beta^2)\beta z^3 + 2\beta^2 z^4 \right) \right] \overline{B}_0^H \\
&\quad - \frac{1}{s} \left[ 8m_H^4 - 4m_H^2 s(2 - 3\beta^2 - \beta z) \right. \\
&\quad \left. + s^2(6 - 10\beta^2 + 5\beta^4 - 2(1 - 2\beta^2)\beta z + \beta^2 z^2) \right] C_0^t \\
&\quad + \frac{1}{s\beta} \left[ 2m_H^4 z(5 - 8\beta^2 - (3 - 2\beta^2)z^2) \right. \\
&\quad \left. - 2m_H^2 s\beta \left( 1 + \beta^2 - 2(5 - 6\beta^2)\beta z - (1 - \beta^2)z^2 + 3(1 - \beta^2)\beta z^3 \right) \right. \\
&\quad \left. + s^2\beta^2 \left( \beta - 2\beta^3 - (7 - 13\beta^2 + 8\beta^4)z \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (1 - 2\beta^2)\beta z^2 - 2(1 - \beta^2)\beta^2 z^3 \right) \right] C_0^H \\
&\quad + \frac{1}{s(1 + \beta z)(1 + \beta^2 + 2\beta z)} \\
&\quad \left[ -4m_H^2 \beta(\beta + z) \left( 1 - 3\beta^2 + (1 - 2\beta^2)\beta z + 2\beta^2 z^2 + \beta^3 z^3 \right) \right. \\
&\quad \left. - 2s \left( 1 - 3\beta^6 + (2 + 2\beta^2 - 5\beta^4 - 4\beta^6)\beta z + (1 + 3\beta^2 - 6\beta^4)\beta^2 z^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2(1 + \beta^2)\beta^5 z^3 + 4\beta^6 z^4 + \beta^5 z^5 \right) \right] \overline{B}_0^H(z) \\
&\quad + \frac{1}{s} \left[ \left( 8m_H^4 - 4m_H^2 s(2 - 3\beta^2 - \beta z) \right) (1 + \beta z) \right. \\
&\quad \left. + s^2(6 - 10\beta^2 + 5\beta^4 + (3 - 4\beta^2 + 4\beta^4)\beta z - (1 - 4\beta^2)\beta^2 z^2 + \beta^3 z^3) \right] C_0^H(z)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2s} \left[ -16m_H^6 + 16m_H^4 s(1 - 2\beta^2 - \beta z) \right. \\
& - 2m_H^2 s^2 (6 - 13\beta^2 + 10\beta^4 - 6(1 - 2\beta^2)\beta z + (2 + \beta^2)\beta^2 z^2) \\
& - s^3 (2 + \beta^2 - 6\beta^4 + 4\beta^6 + (5 - 10\beta^2 + 8\beta^4)\beta z \\
& \left. + (1 + 2\beta^2)\beta^4 z^2 + \beta^3 z^3) \right] D_0^H(z) \Big\} + (z \rightarrow -z). \tag{C.15}
\end{aligned}$$

# Literaturverzeichnis

- [1] S. L. Glashow, Nucl. Phys. **22** (1961) 579.
- [2] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **19** (1967) 1264.
- [3] A. Salam und J. C. Ward, Phys. Lett. **13** (1964) 168.
- [4] W. Hollik, arXiv:hep-ph/9503410.
- [5] C. Quigg, Phys. Today **50N5** (1997) 20 [arXiv:hep-ph/9704332].
- [6] V. V. Sudakov, Sov. Phys. JETP **3** (1956) 65 [Zh. Eksp. Teor. Fiz. **30** (1956) 87].
- [7] J. H. Kühn und A. A. Penin, arXiv:hep-ph/9906545.
- [8] J. H. Kühn, A. A. Penin und V. A. Smirnov, Eur. Phys. J. C **17** (2000) 97 [arXiv:hep-ph/9912503].
- [9] M. Beccaria, P. Ciafaloni, D. Comelli, F. M. Renard und C. Verzegnassi, Phys. Rev. D **61** (2000) 073005 [arXiv:hep-ph/9906319].
- [10] A. Denner und S. Pozzorini, Eur. Phys. J. C **18** (2001) 461 [arXiv:hep-ph/0010201].
- [11] A. Denner und S. Pozzorini, Eur. Phys. J. C **21** (2001) 63 [arXiv:hep-ph/0104127].
- [12] P. Nason, S. Dawson und R. K. Ellis, Nucl. Phys. B **327** (1989) 49 [Erratum-ibid. B **335** (1990) 260].
- [13] W. Beenakker, H. Kuijf, W. L. van Neerven und J. Smith, Phys. Rev. D **40** (1989) 54.
- [14] W. Bernreuther, A. Brandenburg, Z. G. Si und P. Uwer, Nucl. Phys. B **690** (2004) 81 [arXiv:hep-ph/0403035].
- [15] R. Bonciani, S. Catani, M. L. Mangano und P. Nason, Nucl. Phys. B **529** (1998) 424 [arXiv:hep-ph/9801375].
- [16] M. Czakon, A. Mitov und S. Moch, Nucl. Phys. B **798** (2008) 210 [arXiv:0707.4139 [hep-ph]].

- [17] S. Dittmaier, P. Uwer und S. Weinzierl, Phys. Rev. Lett. **98** (2007) 262002 [arXiv:hep-ph/0703120].
- [18] W. Beenakker, A. Denner, W. Hollik, R. Mertig, T. Sack und D. Wackerroth, Nucl. Phys. B **411** (1994) 343.
- [19] W. Bernreuther, M. Fücker und Z. G. Si, Phys. Rev. D **74** (2006) 113005 [arXiv:hep-ph/0610334].
- [20] W. Hollik und M. Kollar, Phys. Rev. D **77** (2008) 014008 [arXiv:0708.1697 [hep-ph]].
- [21] R. K. Ellis und J. C. Sexton, Nucl. Phys. B **269** (1986) 445.
- [22] W. T. Giele, E. W. N. Glover und D. A. Kosower, Nucl. Phys. B **403** (1993) 633 [arXiv:hep-ph/9302225].
- [23] F. Aversa, M. Greco, P. Chiappetta und J. P. Guillet, Z. Phys. C **46** (1990) 253.
- [24] S. Frixione, M. L. Mangano, P. Nason und G. Ridolfi, Adv. Ser. Direct. High Energy Phys. **15** (1998) 609 [arXiv:hep-ph/9702287].
- [25] E. Maina, S. Moretti, M. R. Nolten und D. A. Ross, Phys. Lett. B **570** (2003) 205 [arXiv:hep-ph/0307021].
- [26] M. Böhm, A. Denner und H. Joos: Gauge Theories of the Strong and Electroweak Interaction *Stuttgart, Germany: Teubner (2001) S. 784*
- [27] M. E. Peskin und D. V. Schroeder: An Introduction to Quantum Field Theory *Reading, USA: Addison-Wesley (1995) S.842*
- [28] J. Botts, J. G. Morfin, J. F. Owens, J. w. Qiu, W. K. Tung und H. Weerts [CTEQ Collaboration], Phys. Lett. B **304** (1993) 159 [arXiv:hep-ph/9303255].
- [29] G. Passarino und M. J. G. Veltman, Nucl. Phys. B **160** (1979) 151.
- [30] G. J. van Oldenborgh, Comput. Phys. Commun. **66** (1991) 1.
- [31] A. Denner, Fortsch. Phys. **41** (1993) 307 [arXiv:0709.1075 [hep-ph]].
- [32] F. Bloch und A. Nordsieck, Phys. Rev. **52** (1937) 54.
- [33] T. D. Lee und M. Nauenberg, Phys. Rev. **133** (1964) B1549.
- [34] T. Kinoshita, J. Math. Phys. **3** (1962) 650.
- [35] S. Catani, S. Dittmaier, M. H. Seymour und Z. Trocsanyi, Nucl. Phys. B **627** (2002) 189 [arXiv:hep-ph/0201036].

- [36] S. Catani und M. H. Seymour, Nucl. Phys. B **485** (1997) 291 [Erratum-ibid. B **510** (1998) 503] [arXiv:hep-ph/9605323].
- [37] D. A. Kosower, Phys. Rev. D **57** (1998) 5410 [arXiv:hep-ph/9710213].
- [38] D. A. Kosower, Phys. Rev. D **71** (2005) 045016 [arXiv:hep-ph/0311272].
- [39] F. Abe *et al.* [CDF Collaboration], Phys. Rev. Lett. **74** (1995) 2626 [arXiv:hep-ex/9503002].
- [40] S. Abachi *et al.* [D0 Collaboration], Phys. Rev. Lett. **74** (1995) 2632 [arXiv:hep-ex/9503003].
- [41] M. Beneke *et al.*, arXiv:hep-ph/0003033.
- [42] K. Agashe, R. Contino und R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. **95** (2005) 171804 [arXiv:hep-ph/0502222].
- [43] W. Wagner, Rept. Prog. Phys. **68** (2005) 2409 [arXiv:hep-ph/0507207].
- [44] T. Chwalek, Diplomarbeit: „Measurement of the W boson helicity in top-antitop quark events with the CDF II experiment“
- [45] <http://www-cdf.fnal.gov/physics/new/top/top.html>
- [46] S. Moch und P. Uwer, arXiv:0804.1476 [hep-ph].
- [47] G. L. Bayatian *et al.* [CMS Collaboration], J. Phys. G **34** (2007) 995.
- [48] J. H. Kühn, A. Scharf und P. Uwer, Eur. Phys. J. C **45** (2006) 139 [arXiv:hep-ph/0508092].
- [49] W.H. Furry Phys. Rev. **51** (1937) 5
- [50] O. Nachtmann: Elementarteilchenphysik Phänomene und Konzepte *Braunschweig, Germany: (1986) S. 474*
- [51] S. Moretti, M. R. Nolten und D. A. Ross, Phys. Lett. B **639** (2006) 513 [Erratum-ibid. B **660** (2008) 607] [arXiv:hep-ph/0603083].
- [52] W. R. Innes *et al.*, Phys. Rev. Lett. **39** (1977) 1240 [Erratum-ibid. **39** (1977) 1640].
- [53] J. H. Kühn, M. Steinhauser und C. Sturm, arXiv:0705.2335 [hep-ph].
- [54] S. Richter, “Search for electroweak single top-quark production with the CDF II experiment”

[55] J. H. Kühn und R. G. Stuart, Phys. Lett. B **200** (1988) 360.

[56] U. Baur, Phys. Rev. D **75** (2007) 013005 [arXiv:hep-ph/0611241].



# Danksagung

Ich möchte mich an erster Stelle bei meinem Referenten Professor Dr. Johann H. Kühn bedanken. Er hat mir die Möglichkeit gegeben, nach meiner Diplomarbeit weiter an einer phänomenologisch interessanten Thematik zu arbeiten. Zusammen mit den vielen lehrreichen Besprechungen wurde es mir damit ermöglicht tiefe und motivierende Einblicke in die theoretische Teilchenphysik zu erhalten. Faszinierend ist für mich immer sein feines Gespür für physikalische Zusammenhänge und seine bemerkenswert anschaulichen Erklärungen dazu.

An zweiter Stelle möchte ich mich bei Peter Uwer bedanken. Er hat wesentlich zur Betreuung meiner Arbeit beigetragen und in den vielen Diskussionen mit ihm habe ich ein tieferes Verständnis für die Physik erworben. Seine Herangehensweise bezüglich physikalischer Probleme und seine bewundernswerte Präzision dabei gelten für mich als bisher unnachahmlich. Besonders freut es mich, dass trotz anfänglicher Anlaufschwierigkeiten auch privat ein gemeinsamer Hauptnenner gefunden wurde.

Professor Dr. Dieter Zeppenfeld möchte ich für die Übernahme des Korreferats danken.

Schließlich gilt mein Dank allen Mitgliedern des Instituts für Theoretische Teilchenphysik und vielen mehr, wobei ich an dieser Stelle einige hervorheben möchte. Ein großes Dankeschön möchte ich Markus Schulze aussprechen. Ihm habe ich es mit zu verdanken, dass ich glücklicherweise in der theoretischen Teilchenphysik gelandet bin. Unvergessen werden die vielen Diskussionen bleiben in denen wir technische Methoden, physikalische Phänomene oder physikalische Aussagen unseres Arbeitgebers analysierten. Weiterhin möchte ich mich bei Christian Sturm bedanken, mit dem ich ein Jahr dasselbe Büro teilte. Ich schätzte vor allem die so gewonnene pfälzische Atmosphäre und die große Schnittmenge bezüglich des Humors. Auch meinen beiden Bürokollegen Falk Metzler und Philipp Kant möchte ich an dieser Stelle für die angenehme Arbeitsatmosphäre danken. Vor allem Philipp Kant der mir bei vielen Computerproblemen geholfen hat und mit dem mich auch ein gesunder (Galgen-) Humor verbindet. In diesem Zusammenhang möchte ich auch Peter Marquard danken, der immer ein offenes Ohr für meine Fragen hatte. Zusammen mit Philipp Kant war er meiner teilweise extremen Ausgelassenheit sehr oft ausgesetzt. Meine kaum vorhandene Scheu Fragen zu stellen, wurde auch Professor Dr. Matthias Steinhauser und Professor Dr. Ulrich

Nierste zum Verhängnis. Ich danke ihnen dafür, dass sie mich bei zahlreichen Fragestellungen beraten haben. Für physikalische und nicht-physikalische Gespräche danke ich den Dreien vom Diplomandenzimmer: Jennifer Girrbach, Jörg Rittinger und dem lieben Herrn Matthias Kauth. Daneben möchte ich mich bei Joachim Brod und Philipp Maierhöfer bedanken. Ersterem vor allem für sein Engagement meinen Arbeitsplatzrechner am Laufen zu halten und Zweiterem für ein unvergessliches Fernseherlebnis in Hamburg.

Auch einige Mitglieder des Instituts für Experimentelle Kernphysik möchte ich hier erwähnen. Die sonst so gescholtene fehlende Kommunikation zwischen Experiment und Theorie fand hauptsächlich mit Wolfgang Wagner und Dominic Hirschbühl statt. Daneben danke ich Michael Milnik und Armin Scheurer für Gespräche über Physik jenseits des Biergartens. Iris Gebauer möchte ich danken für die vielen gemeinsamen Zigarettenpausen und für ihre Geduld mein Gequatsche zu ertragen.

Für aufmunternde Gespräche in den letzten Wochen meiner Arbeit danke ich Yasmin Anstruther.

Von meinen Freunden, welche sich intensiv nicht mit der Physik beschäftigen, bin ich vor allem Sina Keesser, Sandra Dinies, Christian Johner, Thomas Söhn, Martin Spengler und Thorsten Gnad für ihre Unterstützung dankbar.

Schließlich möchte ich mich recht herzlich bei meiner Familie für ihre Unterstützung bedanken, bei meinen beiden Brüdern Alexander und Michael, meinem Vater Winfried, meiner Großmutter Hedwig aber vor allem bei meiner Mutter Inge. Ohne ihren Beistand wäre es mir nicht möglich gewesen meine Arbeit in dieser Form umzusetzen.