

Mehrskalenberechnungen bei inhomogenen Körpern

Johann Bitzenbauer* und Karl Schweizerhof**

Institut für Mechanik, Universität Karlsruhe, Englerstr. 2, D-76131 Karlsruhe

Die Finite-Elemente-Untersuchung linearer und nichtlinearer Randwertprobleme der Elastizitätstheorie führt bei vorhandenen und durchgängig diskretisierten Mikrostrukturen üblicherweise auf sehr große dünnbesetzte Gleichungssysteme. Als ein effizientes Lösungsverfahren empfehlen sich Mehrgittermethoden. Während bei klassischen Mehrgitterverfahren die minimale Anzahl der zur Geometriebeschreibung notwendigen Finiten Elemente von der Geometrie selbst abhängig ist, besteht bei der Composite-Finite-Elemente-Methode (CFE) ein größtmögliches Gitter zur Diskretisierung einer beliebigen Geometrie stets aus einem Element [1]. Ein auf der CFE-Methode basierender Mehrgitteralgorithmus nebst zugehörigen Transferoperatoren zur Berechnung elastischer Körper wird vorgestellt. Im Gegensatz zu algebraischen Mehrgittermethoden, bei denen zur Konstruktion der Transferoperatoren die Steifigkeitsmatrizen des diskretisierten Problems herangezogen werden, nutzt der präsentierte Algorithmus Geometrieinformationen aus, ohne dabei jedoch die beim klassischen geometrischen Mehrgitterverfahren auftretenden Einschränkungen zu besitzen.

© 2006 WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim

1 Konstruktion einer Gitterhierarchie für CFE

Grundlage des vorgestellten Algorithmus ist die Konstruktion einer geeigneten Gitterhierarchie, die mittels eines Quadtree-Algorithmus erfolgt [2]. Ein zu vernetzendes Gebiet Ω wird von einer Ausgangszelle mit zugehöriger Anfangstriangulierung τ_0 und zugehöriger Netzweite $h_0 = \mathcal{O}(\text{diam}\Omega)$ komplett überdeckt. Daraus wird durch Verfeinerung eine Gitterfolge $\{\tau_l\}_{0 \leq l \leq l_{\max}}$ erzeugt. Die Gitter τ_l sind logisch und physisch verbunden: jedes Elternelement aus τ_l hat eine eindeutige Menge an Kinder-elementen in τ_{l+1} , und jedes Kinderelement aus τ_l hat einen eindeutigen Elternteil in τ_{l-1} . Es handelt sich bei den Gittern τ_l jedoch im allgemeinen um keine geeignete Approximation des Gebietes Ω . Im nächsten Schritt wird deshalb das feinste erzeugte Gitter durch kleine Modifikationen an den Rand angepasst. Dabei wird eine Kante XY des FE-Netzes als Randkante betrachtet, falls genau einer ihrer Knoten im Gebiet und einer ausserhalb liegt. In allen Randkanten wird der dem Rand am nächsten liegende Knoten X oder Y auf den Rand geschoben. Dadurch ändert sich die Form aller Elemente auf allen Gittern, die den verschobenen Punkt als Knoten haben. Die physikalische Ordnung der Gitter geht dabei verloren, allerdings bleibt die logische Ordnung der Eltern/Kinder-Beziehungen bestehen. Zur Diskretisierung werden zunächst ausschließlich Viereckselemente mit linearen Ansatzfunktionen verwendet. Falls nötig, erfolgt die Anpassung an gekrümmte Ränder unter lokaler Zuhilfenahme von Dreieckselementen [3, 4].

2 Mehrgitterdiskretisierung

Entstanden ist eine hierarchisch verschachtelte Folge von Gittern $\{\tau_l\}_{0 \leq l \leq l_{\max}}$. Im Rahmen der Konstruktion eines Mehrgitteralgorithmus zur Lösung des Variationsproblems

$$\text{finde } u \in H^1(\Omega) \quad \text{mit} \quad \int_{\Omega} \langle a \nabla u, \nabla v \rangle dx = \int_{\Omega} (f, v) dx \quad \forall v \in H^1(\Omega) \quad (1)$$

kann zunächst die Systemmatrix $K_{l_{\max}}$ auf dem feinsten Gitter $\tau_{l_{\max}}$ auf Standardweise aufgestellt werden. Die Grobgittermatrizen der Levels $l = 1, \dots, 0$ entstehen dann rekursiv durch die

$$\text{Galerkinprodukte} \quad K_{l-1} = (P_{l-1}^l)^T K_l P_{l-1}^l \quad (2)$$

mit den zu konstruierenden Prolongationsoperatoren $(P_{l-1}^l)_{1 \leq l \leq l_{\max}}$. Die Interpolation

$$w = P_{l-1}^l v \quad \text{mit} \quad (P_{l-1}^l)_{i,j} = N_{l-1,j}(x_{l,i}) \quad \forall 1 \leq i \leq n_l, 1 \leq j \leq n_{l-1} \quad (3)$$

von Feingitterfunktionen w aus Grobgitterfunktionen v wird dabei aus den zugehörigen Ansatzfunktionen N_l bestimmt. Hierbei kann die hierarchische Struktur der Netze ausgenutzt werden.

* e-mail: bitzenbauer@ifm.uni-karlsruhe.de, Phone: +0049 721 608 3715, Fax: +0049 721 608 7990

** e-mail: schweizerhof@ifm.uni-karlsruhe.de, Phone: +0049 721 608 2070, Fax: +0049 721 608 7990

3 Hängende Knoten

Zur adaptiven Verfeinerung der Vierecksnetze wird die Technik der hängenden Knoten verwendet. Diese werden über eine Filterfunktion an die regulären Knoten angebunden und eliminiert [5].

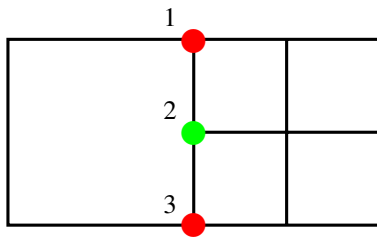


Fig. 1: Netz mit hängenden Knoten (links) und zugehörige Filterfunktion (rechts)

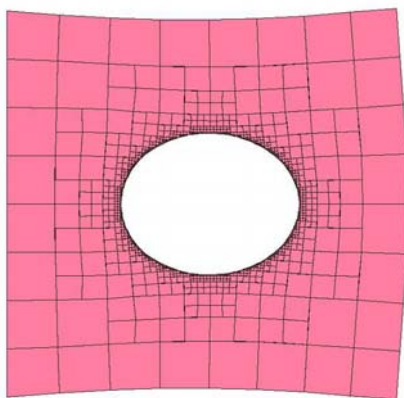
Fig. 1 zeigt links exemplarisch ein adaptiv verfeinertes Netz und rechts die zugehörige Filterfunktion. Durch den Interpolationsoperator Q wird die Verknüpfung der Unbekannten des Knotens 2 mit denen der Knoten 1 und 3 definiert. Die Unbekannten \tilde{u} eines Problems seien mit hängenden Knoten über $\tilde{u} = Qu$ mit den Unbekannten u eines Problems ohne hängende Knoten verknüpft. Das Minimierungsproblem $\min \tilde{u}^T \tilde{K} \tilde{u} - \tilde{u}^T \tilde{f}$ lässt sich dann als

$$\min u^T (Q^T \tilde{K} Q) u - u^T Q^T \tilde{f} \quad (4)$$

darstellen. Die Gesamtsteifigkeitsmatrix $K = Q^T \tilde{K} Q$ ist durch Standardalgorithmen im Mehrgitterkontext sehr effizient berechenbar.

4 Beispiel

Als Beispiel wird eine Scheibe mit Loch auf sechs, sieben bzw. acht Leveln jeweils mittels uniformer Verfeinerung sowie unter Verwendung von hängenden Knoten diskretisiert. Verwendet werden Standarddreiecks- und Viereckselemente mit linearen Ansatzfunktionen. Zur Lösung der Gleichungssysteme wird ein Mehrgitter V-Zyklus mit je einem Gauss-Seidel-Schritt zur Vor- und Nachglättung eingesetzt. Als Abbruchkriterium dient $\|\Delta u\|_\infty \leq 10^{-7}$. In Fig. 2 links ist die deformierte Konfiguration der mittels hängenden Knoten adaptiv diskretisierten Struktur unter zehn Prozent Dehnung dargestellt. Rechenzeitvergleiche zwischen den verschiedenen Verfeinerungsstufen sowie zwischen uniformer und adaptiver Verfeinerung finden sich in Fig. 2 rechts.



| Level | Knoten (uniform) | Rechenzeit Mehrgitter | Knoten (adaptiv) | Rechenzeit Mehrgitter |
|-------|------------------|-----------------------|------------------|-----------------------|
| 6 | 3012 | 13 sec | 408 | 2 sec |
| 7 | 14780 | 61 sec | 800 | 4 sec |
| 8 | 58212 | 253 sec | 1648 | 8 sec |

Fig. 2: Deformiertes Netz mit hängenden Knoten (links) und benötigte Rechenzeiten (rechts)

Literatur

- [1] SAUTER, S.A.: Vergrößerung von Finite-Elemente-Räumen. Habilitation, Universität Kiel (1997).
- [2] GEORGE, P.L.: Automatic Mesh Generation and Finite Element Computation. Handbook of Numerical Analysis Vol. IV. (1996), 69–190.
- [3] HACKBUSCH, W.; SAUTER, S.A.: Composite finite Elements for problems containing small geometric details, Part II: Implementation and numerical results. Computing and Visualization in Science **1** (1997), 15–25.
- [4] BITZENBAUER, J.; SCHWEIZERHOF, K.: Mehrgitterberechnungen von nichtlinearen Hohlstrukturen. Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics **3** (2003), 252–253.
- [5] SUTTMEIER, F.T.: Adaptive Finite Elemente Approximation of Problems in Elasto-Plasticity Theory. Dissertation, Universität Heidelberg (1996).