

# Semi-diskrete inverse Probleme: Die Approximative Inverse

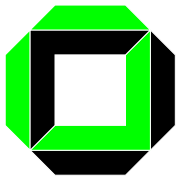
Andreas Rieder

UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)

Institut für Wissenschaftliches Rechnen  
und Mathematische Modellbildung

und

Institut für Praktische Mathematik



mit **Thomas Schuster**, z.Z. Tufts University, Boston

# Motivation: Diskretisierung durch Projektionsverfahren

$A \in \mathcal{L}(X, Y)$ ,  $X, Y$  reelle Hilberträume,  $\mathcal{R}(A)$  nicht abgeschl. in  $Y$   
z.B.  $A \in \mathcal{K}(X, Y)$  nicht degeneriert

inverses Problem:  $Af = g$  mit  $g \in \mathcal{D}(A^+) = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(A)^\perp$

$P_l \in \mathcal{L}(X)$  und  $Q_l \in \mathcal{L}(Y)$  Orthogonalprojekt. auf endlichdim. Unterräume

projiziertes Problem:  $A_l f_l = Q_l g$  mit  $A_l = Q_l A P_l$  und  $f_l \in \mathcal{R}(P_l)$

Schwierigkeiten:

- Unterräume nicht problemangepaßt
- Korrekte Berechnung von  $Q_l g$  verlangt komplette Kenntnis von  $g$   
Aber:  $g$  meist aus Messungen nur diskret bekannt

# Modellierung mit Meßprozeß

Baue Meßprozeß in das mathematische Modell ein!

$\Psi_n : Y \rightarrow \mathbb{R}^n$  Beobachtungsoperator (linear, stetig)

**Bsp.:**  $\psi_i \in Y$  Sensitivitätsprofil des  $i$ -ten Detektors

$$\Psi_n g := (\langle g, \psi_1 \rangle_Y, \dots, \langle g, \psi_n \rangle_Y)^t$$

semi-diskretes Problem (SDP):  $A_n f_n = g_n$  (Keine Diskretisierung!)

mit  $A_n = \Psi_n A \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R}^n)$ ,  $g_n = \Psi_n g$ ,  $f_n \in X$

SDP ist unterbestimmt,  $f_n^+ = A_n^+ g_n \in \mathcal{N}(A_n)^\perp$ ,  $A_n^+$  ist stetig!

# Modellierung mit Meßprozeß

Baue Meßprozeß in das mathematische Modell ein!

$\Psi_n : Y \rightarrow \mathbb{R}^n$  Beobachtungsoperator (linear, stetig)

**Bsp.:**  $\psi_i \in Y$  Sensitivitätsprofil des  $i$ -ten Detektors

$$\Psi_n g := (\langle g, \psi_1 \rangle_Y, \dots, \langle g, \psi_n \rangle_Y)^t$$

semi-diskretes Problem (SDP):  $A_n f_n = g_n$  (Keine Diskretisierung!)

mit  $A_n = \Psi_n A \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R}^n)$ ,  $g_n = \Psi_n g$ ,  $f_n \in X$

SDP ist unterbestimmt,  $f_n^+ = A_n^+ g_n \in \mathcal{N}(A_n)^\perp$ ,  $A_n^+$  ist stetig!

**JEDOCH:**  $A_n^+$  schlecht konditioniert

Instabilität von  $A^+$  vererbt sich

# Stabilisierung durch Mittelung

Rekonstruiere Momente von  $f_n^+$ :

$$\langle f_n^+, e_i \rangle_X, \quad i = 1, \dots, d$$

mit geeigneten  $e_i \in X$

**Definition:**  $\{e_i\}_{1 \leq i \leq d}$  **Mollifier**, falls es  $\{b_i\}_{1 \leq i \leq d} \subset X$  gibt, so daß

$$E_d w = \sum_{i=1}^d \langle w, e_i \rangle_X b_i$$

erfüllt

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \|E_d w - w\|_X = 0 \quad \text{für jedes } w \in X$$

# Stabilisierung durch Mittelung

Rekonstruiere Momente von  $f_n^+$ :

$$\langle f_n^+, e_i \rangle_X, \quad i = 1, \dots, d$$

mit geeigneten  $e_i \in X$

**Definition:**  $\{e_i\}_{1 \leq i \leq d}$  **Mollifier**, falls es  $\{b_i\}_{1 \leq i \leq d} \subset X$  gibt, so daß

$$E_d w = \sum_{i=1}^d \langle w, e_i \rangle_X b_i$$

erfüllt

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \|E_d w - w\|_X = 0 \quad \text{für jedes } w \in X$$

Wie erhalten wir  $\langle f_n^+, e_i \rangle_X$ ?

# Rekonstruktionskerne und Approximative Inverse

Approximiere  $e_i$  in  $\mathcal{R}(A_n^*)$  durch  $v_i^n \in \mathbb{R}^n$ :  $\|A_n^* v_i^n - e_i\|_X \rightarrow \min!$

$$\underbrace{A_n A_n^*}_{n \times n \text{ Matrix}} v_i^n = A_n e_i$$

$(e_i, v_i^n)$  Mollifier/Rekonstruktionskern-Paar

**Lemma:** Falls  $g \in \mathcal{R}(A)$  oder  $v_i^n \in \mathcal{N}(A_n^*)^\perp$ , dann  $\langle f_n^+, e_i \rangle_X = \langle g_n, v_i^n \rangle_{\mathbb{R}^n}$

**Definition:** Approximative Inverse  $\tilde{A}_{n,d} : \mathbb{R}^n \rightarrow X$  von  $A_n$  ist

$$\tilde{A}_{n,d} w := \sum_{i=1}^d \langle w, v_i^n \rangle_{\mathbb{R}^n} b_i$$

Es gilt:  $\tilde{A}_{n,d} g_n = E_d f_n^+ \xrightarrow{d \rightarrow \infty} f_n^+$

# Verallgemeinerung der AI: Motivation

Auflösen der Normalgleichung für  $v_i^n$  sollte vermieden werden:

- $A_n A_n^*$  dicht besetzt, schlecht konditioniert, hohe Dimension
- Änderung von  $n$  oder  $d \implies$  komplette Neuberechnung von  $v_i^n$
- Invarianzen von  $A$  und  $A^*$  übertragen sich nicht auf  $A_n$  und  $A_n^*$
- $A_n : \mathcal{D}(A_n) \subset X \rightarrow Y$  unbeschränkt und  $A_n^*$  existiert nicht, d.h. AI nicht definiert

Das letzte Szenario tritt ein, wenn

$\Psi_n$  nicht beschränkt auf  $Y$  definiert werden kann

**Bsp.:** Radon-Transformation  $\mathbf{R} : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(Z)$ ,  $Z = [-1, 1] \times [0, \pi]$

$\mathbf{R} : H_0^\alpha(\Omega) \rightarrow H^{\alpha+1/2}(Z)$ ,  $\alpha \geq 0$ ,  $\Psi_n : H^\kappa(Z) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\kappa > 1$ , Punktauswert.

$\mathbf{R}_n = \Psi_n \mathbf{R} : \mathcal{D}(\mathbf{R}_n) \subset L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{D}(\mathbf{R}_n) = H_0^\alpha(\Omega)$ ,  $\alpha > 1/2$ , **unbeschränkt**



# Verallgemeinerung der AI: Konstruktion

**Voraus.:**  $\mathcal{X} \hookrightarrow X$  und  $\mathcal{Y} \hookrightarrow Y$  stetig, injektiv und dicht

$$A \in \mathcal{L}(X, Y) \quad \text{und} \quad A \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$$

Neu-Definition von  $\Psi_n : \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}^n$  durch Funktionale  $\{\psi_{n,k}\}_{1 \leq k \leq n} \subset \mathcal{Y}'$ :

$$(\Psi_n u)_k := \langle \psi_{n,k}, u \rangle_{\mathcal{Y}' \times \mathcal{Y}}, \quad k = 1, \dots, n$$

$A_n = \Psi_n A : \mathcal{D}(A_n) \subset X \rightarrow Y$ ,  $\mathcal{D}(A_n) = \mathcal{X}$ , beschränkt oder unbeschränkt

Wie erhalten wir Rekonstruktionskerne?

$$\overline{\mathcal{R}(A^*)} = \mathcal{N}(A)^\perp \implies \forall \delta_i > 0 \exists v_i \in \mathcal{Y}:$$

$$\|P_{\mathcal{N}(A)^\perp} e_i - A^* v_i\|_X \leq \delta_i, \quad i = 1, \dots, d$$

# Neu-Definition der AI

Mit  $\{\varphi_k\}_{1 \leq k \leq n} \subset Y$  definiere Approximationsoperator  $\Pi_n : \mathcal{Y} \rightarrow Y$  durch

$$\Pi_n u := \sum_{k=1}^n (\Psi_n u)_k \varphi_k = \sum_{k=1}^n \langle \psi_{n,k}, u \rangle_{\mathcal{Y}' \times \mathcal{Y}} \varphi_k.$$

Es gebe NF  $\{\rho_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  mit

$$\|u - \Pi_n u\|_Y \leq \rho_n \|u\|_{\mathcal{Y}} \quad \text{für alle } u \in \mathcal{Y} \text{ und } n \rightarrow \infty$$

Außerdem

$$\|\Pi_n\|_{\mathcal{Y} \rightarrow Y} \leq C_{\Pi} \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

**Neu-Definition:** Approximative Inverse  $\tilde{A}_{n,d} : \mathbb{R}^n \rightarrow X$  von  $A_n$  ist

$$\tilde{A}_{n,d} w := \sum_{i=1}^d \langle w, G_n \Psi_n v_i \rangle_{\mathbb{R}^n} b_i$$

mit  $G_n$  Gramsche Matrix bzgl.  $\{\varphi_k\}_{1 \leq k \leq n}$ .

# Konvergenz der AI

**Satz:** Voraus. an  $A$ ,  $E_d$ ,  $\Psi_n$  und  $\Pi_n$  wie oben. Zusätzlich:

$\{b_i\}_{1 \leq i \leq d} \subset X$  und  $\{\varphi_k\}_{1 \leq k \leq n} \subset Y$  Riesz-Systeme

Falls  $g_n = \Psi_n g$  für  $g \in \mathcal{R}(A)$  und  $f^+ = A^+ g \in \mathcal{X}$ , dann

$$\|\tilde{A}_{n,d} g_n - f^+\|_X \leq \|(I - E_d) f^+\|_X + C_{AI} \left( \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d (\rho_n^2 \|v_i\|_Y^2 + \delta_i^2) \right)^{1/2} \|f^+\|_X$$

Falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho_n^2}{d_n} \sum_{i=1}^{d_n} \|v_i\|_Y^2 = 0 \quad \text{sowie} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d_n} \sum_{i=1}^{d_n} \delta_i^2 = 0,$$

dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{A}_{n,d_n} g_n - f^+\|_X = 0$$

# Regularisierungseigenschaft der AI

Meßrauschen wird durch eine Störung des Beobachtungsoperators modelliert:

$$(\Psi_n^\varepsilon w)_i = (\Psi_n w)_i + \varepsilon_i \|w\|_{\mathcal{Y}}, \quad |\varepsilon_i| \leq \varepsilon, \quad i = 1, \dots, n$$

**Satz:** Voraus. wie im Satz zuvor und Konvergenz für  $\varepsilon = 0$  liege vor.

Falls  $n = n_\varepsilon$  mit  $\varepsilon/\rho_{n_\varepsilon} = O(1)$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$ , dann

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \{ \|\tilde{A}_{n_\varepsilon, d_{n_\varepsilon}} w - f\|_X \mid w = \Psi_{n_\varepsilon}^\varepsilon A f, \Psi_{n_\varepsilon}^\varepsilon \text{ wie oben} \} = 0$$

für alle  $f \in \mathcal{X} \cap \mathcal{N}(A)^\perp$ .

# Ausnutzen von Invarianzen

**Lemma:** Seien  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ ,  $T \in \mathcal{L}(X)$  und  $S \in \mathcal{L}(Y)$  verknüpft durch

$$TA^* = A^*S.$$

Zusätzlich habe  $S$  ein dichtes Bild und  $T$  sei das Vielfache einer Isometrie. Falls

$$\|P_{\mathcal{N}(A)^\perp}e - A^*v\|_X \leq \delta,$$

dann

$$\|P_{\mathcal{N}(A)^\perp}Te - A^*Sv\|_X \leq \|T\| \delta.$$

Im Detail ausgeführt: 2D-Tomographie und 3D-Vektortomographie

# Literatur

1. *Approximate inverse in action with an application to 2D-computerized tomography*  
SIAM J. Numer. Anal., 37(6), 1909-1929, 2000  
Co-Autor: Th. Schuster
2. *Approximate inverse in action II: convergence and stability*  
Math. Comput., 72, 1399-1415, 2003  
Co-Autor: Th. Schuster
3. *Approximate inverse in action III: Doppler tomography*  
IWRMM-Preprint 02/15, 2002  
Co-Autor: Th. Schuster