

RUMPEL, T., SCHWEIZERHOF, K.

## Volumenabhängige hydrostatische Druckbelastung in der nichtlinearen FE-Analyse

Für dünnwandige Schalen- und Membranstrukturen ist die Wechselwirkung einer hydrostatischen Druckbelastung mit dem sich durch eine Belastung ergebenden Strukturverformungen sowohl für Stabilitätsbetrachtungen wie auch bei großen Deformationen von entscheidender Bedeutung. Über das Prinzip der virtuellen Arbeit wird die hydrostatische Druckbelastung in die schwache Gleichgewichtsformulierung der elastomechanischen Kräfte eingeführt. Wird für die sich in einem elastischen Behälter befindlichen Flüssigkeit Volumenerhaltung gefordert, so kann die resultierende Spiegelhöhenänderung berechnet werden. Die beschreibenden nichtlinearen Gleichungen sind für eine Lösung mittels Newtonverfahren zu linearisieren. Eine Finite Element Diskretisierung führt auf eine Laststeifigkeitsmatrix und das zugehörige Residuum der volumenabhängigen Druckkraft. Wesentlich ist, dass keine Diskretisierung der Flüssigkeit erforderlich ist. An einem numerischen Beispiel wird die Effektivität des Verfahrens vorgestellt.

### 1. Modellgleichungen

Die virtuelle Arbeit der Druckkraft  $p_i \mathbf{n}_i^*$  entlang  $\delta \mathbf{u}$  ergibt sich zu:

$$\delta \Pi_{ext} = \int_{\eta} \int_{\xi} p_i \mathbf{n}_i^* \cdot \delta \mathbf{u} \, d\xi d\eta, \quad (1)$$

mit  $\mathbf{n}_i^* = \mathbf{x}_{i,\xi} \times \mathbf{x}_{i,\eta}$  als nicht normiertem Richtungsvektor der Druckkraft bzw. Normalenvektor der Strukturoberfläche.  $\xi, \eta$  beschreiben körperfeste Koordinaten der Strukturfläche. Das Druckniveau  $p_i$  an einer Stelle  $\mathbf{x}_i$  unter einem Flüssigkeitsspiegel  $\mathbf{x}_{wi}$  in einem gefüllten Behälter  $i$  ergibt sich nach dem hydrostatischen Druckgesetz zu:

$$p_i = \gamma_i (\mathbf{x}_{wi} - \mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{w}. \quad (2)$$

$\gamma_i$  bezeichnet die Wichte der Flüssigkeit im Behälter  $i$  und  $\mathbf{w}$  den Normaleneinheitsvektor der freien Flüssigkeitsoberfläche. Das im Behälter  $i$  befindliche Flüssigkeitsvolumen berechnet sich mit  $\mathbf{w}_i^* = \mathbf{x}_{wi,\xi} \times \mathbf{x}_{wi,\eta}$  als nicht normierten Normalenvektor der freien Flüssigkeitsoberfläche entsprechend nachfolgender Formel:

$$v_i = \frac{1}{3} \int_{\eta} \int_{\xi} (\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{n}_i^* + \mathbf{x}_{wi} \cdot \mathbf{w}_i^*) \, d\xi d\eta \quad (3)$$

### 2. Linearisierung

Bei geometrisch nichtlinearem Strukturverhalten werden die Modellgleichungen üblicherweise mit Hilfe des Newtonverfahrens gelöst. Hierzu wird um einen bekannten Zustand  $\mathbf{x}_t = \mathbf{X} + \mathbf{u}_t$  der Struktur und  $\mathbf{x}_{wt} = \mathbf{X}_w + \mathbf{u}_{wt}$  des Flüssigkeitsniveaus linearisiert und der gesuchte Zustand  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_t + \Delta \mathbf{u}$  bzw.  $\mathbf{x}_w = \mathbf{x}_{wt} + \Delta \mathbf{u}_w$  von Struktur und Flüssigkeitsniveau über einen Verschiebungszuwachs  $\Delta \mathbf{u}$ ,  $\Delta \mathbf{u}_w$  iterativ angenähert.  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{X}_w$  beschreiben die Ausgangskonfiguration und  $\mathbf{u}_t$ ,  $\mathbf{u}_{wt}$  einen berechneten Verschiebungszuwachs für Struktur bzw. Flüssigkeitsniveau. Der linearisierte virtuelle Arbeitsausdruck für einen teilweise mit Flüssigkeit gefüllten Behälter lautet:

$$\delta \Pi_{ext}^{lin} = \int_{\eta} \int_{\xi} (p_t \mathbf{n}_t^* + \Delta p \mathbf{n}_t^* + p_t \Delta \mathbf{n}^*) \, d\xi d\eta, \quad (4)$$

mit  $\Delta \mathbf{n}^* = \Delta \mathbf{u}_{,\xi} \times \mathbf{x}_{t,\eta} - \Delta \mathbf{u}_{,\eta} \times \mathbf{x}_{t,\xi}$  als Normalenänderung der Strukturoberfläche. Die Linearisierung der Gleichungen (2) und (3) liefert die in Gleichung (4) benötigte Druckänderung  $\Delta p$  und die geforderte Volumenerhaltung für die Flüssigkeit.

$$\Delta p = \gamma (\Delta \mathbf{u}_w - \Delta \mathbf{u}) \cdot \mathbf{w} \quad (5)$$

$$\Delta v = \int_{\eta} \int_{\xi} (\Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_t^* + \mathbf{x} \cdot \Delta \mathbf{n}^* + \Delta \mathbf{u}_w \cdot \mathbf{w}_t^* + \mathbf{x}_{wt} \cdot \Delta \mathbf{w}^*) \, d\xi d\eta = 0 \quad (6)$$

Mit Hilfe der partiellen Integration kann die Konservativität der Druckbelastung analog zu [1] auch bei Berücksichtigung der Volumenerhaltung nachgewiesen werden und die Spiegelhöhenänderung eines Behälters  $\Delta \mathbf{u}_w \cdot \mathbf{w}$  explizit

durch Strukturverschiebungen  $\Delta \mathbf{u}$  und der Fläche  $S_t$  der freien Flüssigkeitsoberfläche dargestellt werden.

$$\Delta \mathbf{u}_w \cdot \mathbf{w} = -\frac{1}{S_t} \int_{\eta} \int_{\xi} \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_t^* d\xi d\eta \quad \text{mit} \quad S_t = \int_{\eta} \int_{\xi} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_t^* d\xi d\eta \quad (7)$$

### 3. Diskretisierung

Wird eine isoparametrische Finite Element Diskretisierung  $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{d}$ ,  $\delta \mathbf{u} = \mathbf{N}\delta \mathbf{d}$  der Struktur vorgenommen, ergibt sich ein algebraisches Gleichungssystem. Steifigkeitsmatrix und Residuum einer aus  $j$  Kammern bestehenden Struktur mit  $n$  Schalensegmenten sind:

$$[\mathbf{K}_T - \sum_{i=1}^j \mathbf{K}_{Druck,i}] \mathbf{d} = \mathbf{f}_{ext} + \sum_{i=1}^j \mathbf{f}_{Druck,i} - \mathbf{f}_{int} \quad (8)$$

Die Steifigkeitsmatrix setzt sich aus Struktursteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_T$  und einer durch die Linearisierung der Druckbeanspruchung entstehenden Laststeifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_{Druck,i} = \mathbf{K}_{press,i} - \gamma_i/S_{t,i} \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_i$  zusammen. Die Rang-eins-Aufaddierung zeigt für jede Kammer  $i$  die Kopplung der benetzten Knoten durch die im Inneren befindliche Flüssigkeit.

$$\mathbf{K}_{press,i} = \frac{1}{2} \sum_n \int_{\eta} \int_{\xi} p_t \begin{pmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{N}_{,\xi} \\ \mathbf{N}_{,\eta} \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{W}^{\xi} & \mathbf{W}^{\eta} \\ \mathbf{W}^{\xi T} & 0 & 0 \\ \mathbf{W}^{\eta T} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{N}_{,\xi} \\ \mathbf{N}_{,\eta} \end{pmatrix} d\xi d\eta - \frac{\gamma}{2} \int_{\eta} \int_{\xi} \mathbf{N}^T (\mathbf{n}_t^* \otimes \mathbf{w} + \mathbf{w} \otimes \mathbf{n}_t^*) \mathbf{N} d\xi d\eta, \quad (9)$$

$$\mathbf{a}_i = \sum_n \int_{\eta} \int_{\xi} \mathbf{N}^T \mathbf{n}_t^* d\xi d\eta, \quad (10) \quad \mathbf{f}_{Druck,i} = \sum_n \int_{\eta} \int_{\xi} p_t \mathbf{N}^T \mathbf{n}_t^* d\xi d\eta \quad (11)$$

Für die Lösung des globalen Gleichungssystems wird die Sherman-Morrison Formel verwendet. Dabei kann die ursprüngliche Steifigkeitsmatrix genutzt werden und es sind bei  $j$  Kammern pro Iteration  $j$  vorwärts-rückwärts Substitutionen auszuführen, um  $j$  Rang-eins-Aufaddierung zu berücksichtigen.

### 4. Numerisches Beispiel

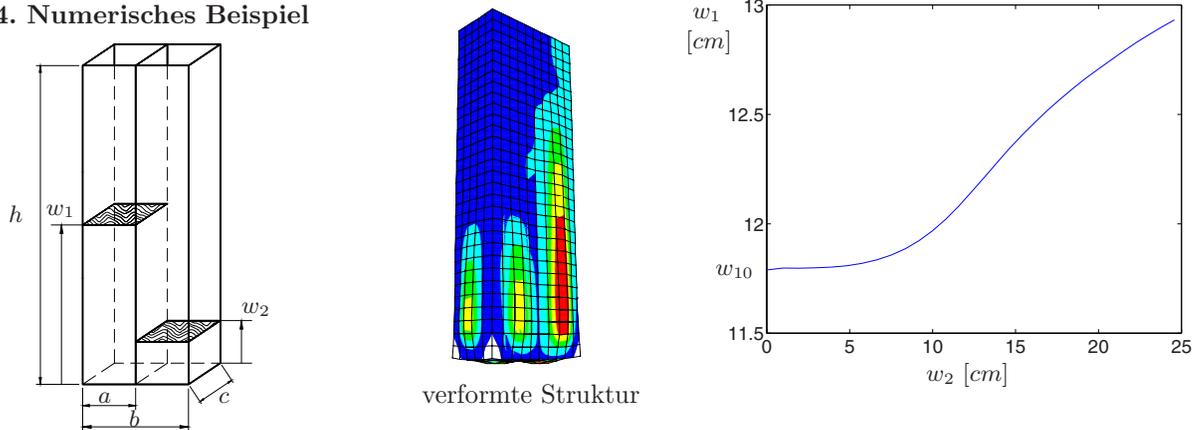


Abbildung 1: Elastische Struktur unter hydrostatischer Druckbelastung  $a = 5\text{cm}$ ,  $b = 10\text{cm}$ ,  $c = 5\text{cm}$ ,  $h = 30\text{cm}$

Das Beispiel zeigt die Wechselwirkung von zwei mit Flüssigkeit gefüllten elastischen Behältern mit einer gemeinsamen sehr flexiblen Wand ( $E\text{-Modul } E=1.0 \cdot 10^5 \frac{N}{\text{cm}^2}$ , Wandstärke  $t = 0.2\text{cm}$ , Wichte  $\gamma = 0.1 \frac{N}{\text{cm}^3}$ ). Nach Füllung des linken Behälters bis zur Höhe  $w_{10}$  wird der rechte Behälter kontinuierlich mit Flüssigkeit gefüllt. Als Folge der Verformbarkeit der Struktur beeinflussen sich die Flüssigkeitsspiegel  $w_1$  und  $w_2$  deutlich.

### 5. References

1 T. RUMPEL AND K. SCHWEIZERHOF, Volume dependent pressure loading and its influence on the stability of structures, Int. J. Numer. Meth. Engng. (in Druck), (2002).

T. RUMPEL, UNIVERSITÄT KARLSRUHE, INSTITUT FÜR TECHNISCHE MECHANIK, D-76128 KARLSRUHE  
K. SCHWEIZERHOF, UNIVERSITÄT KARLSRUHE, INSTITUT FÜR MECHANIK, D-76128 KARLSRUHE