

# STRIKTIONSPUNKT UND DRALL AUF DEN SCHROTENDEN AXOIDEN EINES STARREN KÖRPERS

J. Wittenburg

## Kurzfassung

Bei einer allgemeinen räumlichen Bewegung eines starren Körpers ist in jedem Augenblick der Geschwindigkeitszustand des Körpers der einer Schraubenbewegung mit einer Schraubachse und einer Steigung. Die Bewegung der Schraubachse relativ zum Bezugssystem und relativ zum Körper erzeugt je eine Axoid genannte Regelfläche. Die sog. schrotende Bewegung der beiden Axoide relativ zueinander ist die Überlagerung einer Translation entlang der momentan gemeinsamen Schraubachse und einer Abrollbewegung um die Schraubachse. Beide Axoide haben entlang der gemeinsamen Schraubachse in jedem Punkt jeweils gleiche Tangentialebenen. Die Verteilung der Tangentialebenen entlang der Schraubachse wird durch den Striktionspunkt auf der Schraubachse und durch den sog. Drall eindeutig beschrieben. In der Kinematikliteratur fehlen Formeln zur Berechnung des Ortsvektors des Striktionspunktes und des Dralls aus Größen, die üblicherweise als Funktionen eines Parameters bekannt sind. Diese sind der Ortsvektor  $\vec{r}_A$ , die Geschwindigkeit  $\vec{v}_A$  und die Beschleunigung  $\vec{a}_A$  eines körperfesten Punktes A sowie die Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  und die Winkelbeschleunigung  $\dot{\vec{\omega}}$  des Körpers. In der vorliegenden Arbeit werden derartige Formeln angegeben.

Schlüsselworte: Kinematik, schrotende Axoide, Striktionspunkt, Drall

## 1. Schraubachse. Steigung. Axoide

Der momentane Bewegungszustand eines starren Körpers wird durch fünf Größen beschrieben, nämlich durch den Ortsvektor  $\vec{r}_A$ , die Geschwindigkeit  $\vec{v}_A$  und die Beschleunigung  $\vec{a}_A$  eines beliebig gewählten körperfesten Punktes A sowie durch die Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  und die Winkelbeschleunigung  $\dot{\vec{\omega}}$  des Körpers (alles relativ zu einem Bezugssystem). Die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des körperfesten Punktes P am Ort  $\vec{\rho} = \overrightarrow{AP}$  sind

$$\vec{v} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{\rho}, \quad \vec{a} = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}). \quad (1)$$

Im folgenden wird der allgemeine Fall vorausgesetzt, daß die Bewegung des Körpers weder eben noch eine Drehung um einen festen Punkt ist und daß  $\dot{\vec{\omega}} \neq \vec{0}$  und  $\vec{\omega} \neq \vec{0}$  ist. Dann ist auch  $\vec{\omega} \times \dot{\vec{\omega}} \neq \vec{0}$ .

Alle körperfesten Punkte auf einer beliebigen zu  $\vec{\omega}$  parallelen Geraden haben momentan gleiche Geschwindigkeiten (auf jeder Geraden eine andere Geschwindigkeit). Es gibt genau eine Gerade parallel zu  $\vec{\omega}$ , deren Punkte eine Geschwindigkeit in Richtung von  $\vec{\omega}$  haben, d.h. die Geschwindigkeit  $\vec{v} = p\vec{\omega}$  mit einem Skalar  $p$  der Dimension Länge. Für alle Punkte dieser Geraden gilt also  $p\vec{\omega} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{\rho}$ . Sei  $\vec{u}$  der Lotvektor von A auf die ausgezeichnete Gerade. Dann gilt insbesondere

$$p\vec{\omega} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{u}. \quad (2)$$

Vektorielle und skalare Multiplikation dieser Gleichung mit  $\vec{\omega}$  liefern bei Beachtung der Voraussetzung  $\vec{\omega} \cdot \vec{u} = 0$  für  $\vec{u}$  und  $p$  die Ausdrücke

$$\vec{u} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_A}{\omega^2}, \quad p = \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{v}_A}{\omega^2}. \quad (3)$$

Wenn man in (1) als Punkt A einen beliebigen Punkt auf der durch  $\vec{u}$  bestimmten ausgezeichneten Geraden wählt, dann ist die Geschwindigkeitsverteilung im Körper

$$\vec{v} = p\vec{\omega} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}, \quad (4)$$

d.h. die Überlagerung der Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  um die ausgezeichnete Gerade und der Translation mit der Geschwindigkeit  $p\vec{\omega}$  entlang der Geraden. Das ist die Geschwindigkeitsverteilung einer Schraubenbewegung. Die ausgezeichnete Gerade ist die *momentane Schraubachse*

und  $p$  ist die *Steigung* der Schraube. Die Geschwindigkeit  $\vec{v}$  eines beliebigen körperfesten Punktes außerhalb der Schraubachse hat die Richtung der Schraubelinie durch diesen Punkt.

Die Schraubachse ist zeitlich veränderlich. Sie bewegt sich relativ zum Bezugssystem und relativ zum Körper. Dabei ist sie die *Erzeugende* einer im Bezugssystem festen Regelfläche und einer im Körper festen Regelfläche. Die im Bezugssystem feste Regelfläche wird *Rastaxoid*  $F_R$  genannt und die körperfeste Regelfläche wird *Gangaxoid*  $F_G$  genannt.

Definitionsgemäß haben  $F_R$  und  $F_G$  in jedem Augenblick die momentane Schraubachse (im folgenden  $\Sigma$  genannt) als gemeinsame Gerade. In jedem Punkt von  $\Sigma$  haben  $F_R$  und  $F_G$  auch eine gemeinsame Tangentialebene. Beweis: Sei  $k_G$  eine beliebige auf  $F_G$  feste Kurve, die die Erzeugenden von  $F_G$  schneidet, und sei  $P$  derjenige Punkt, der in jedem Zeitpunkt  $t$  sowohl auf  $k_G$  als auch auf  $\Sigma$  liegt. Entlang  $k_G$  bewegt sich  $P$  mit einer Geschwindigkeit  $\vec{v}_{rel}$  und entlang  $\Sigma$  mit einer Führungsgeschwindigkeit  $\vec{v}_F$ . Auf  $F_R$  bewegt sich  $P$  auf einer anderen Bahnkurve  $k_R$  mit der Geschwindigkeit  $\vec{v} = \vec{v}_{rel} + \vec{v}_F$ . Die Ebene von  $\vec{v}$  und  $\vec{v}_F$  ist auch die Ebene von  $\vec{v}_{rel}$  und  $\vec{v}_F$ . Diese beiden Ebenen sind die Tangentialebenen von  $F_R$  und  $F_G$ . Ende des Beweises.

Die Gleit-Roll-Bewegung des Gangaxoids auf dem Rastaxoid heißt im Deutschen nach Reuleaux *Schroten* und im Englischen *Raccording*.

## 2. Striktionspunkt und Drall einer Regelfläche

Um Aussagen über Tangentialebenen einer beliebigen Regelfläche zu gewinnen werden neue Bezeichnungen eingeführt. Die Kurve  $\vec{r}_A(t) + \vec{u}(t)$  wird in  $\vec{r}(t)$  umbenannt und statt  $\vec{\omega}(t)$  wird der Einheitsvektor  $\vec{e}(t)$  entlang der erzeugenden Geraden verwendet. Der Parameter  $t$  muß nicht die Zeit sein. Mit einem weiteren freien Parameter  $\lambda$  hat die Regelfläche die Parameterdarstellung (siehe [1])

$$\vec{x}(t, \lambda) = \vec{r}(t) + \lambda \vec{e}(t) . \quad (5)$$

Da ebene Bewegungen und Drehungen um einen festen Punkt ausgeschlossen werden, ist die Regelfläche weder ein allgemeiner Zylinder (alle Erzeugenden sind parallel) noch ein allgemeiner Kegel (alle Erzeugenden gehen durch einen festen Punkt). Ausgeschlossen werden auch Regelflächen, bei denen  $\vec{e}(t)$  als Tangenteneinheitsvektor von  $\vec{r}(t)$  definiert ist.

Die Tangentialebene im Punkt  $\vec{x}(t, \lambda)$  wird von dem Tangentenvektor  $\dot{\vec{x}} = \dot{\vec{r}} + \lambda \dot{\vec{e}}$  an die Kurve  $\lambda = \text{const}$  durch den Punkt und von dem Vektor  $\vec{e}$  der Erzeugenden durch den Punkt aufgespannt. Die beiden Vektoren bestimmen den Normaleneinheitsvektor  $\vec{n}$  der Tangentialebene in diesem Punkt:

$$\vec{n} = \frac{(\dot{\vec{r}} + \lambda \dot{\vec{e}}) \times \vec{e}}{|(\dot{\vec{r}} + \lambda \dot{\vec{e}}) \times \vec{e}|} . \quad (6)$$

Im folgenden werden Aussagen über eine einzige Erzeugende  $t = \text{const}$  (beliebig) gemacht. In den unendlich fernen Punkten  $\lambda \rightarrow -\infty$  und  $\lambda \rightarrow +\infty$  der Erzeugenden strebt  $\vec{n}$  gegen die entgegengesetzt gerichteten Vektoren (man beachte die Identität  $|\vec{e} \times \vec{e}| = |\dot{\vec{e}}|$ )

$$\vec{n}_{-\infty} = \frac{\vec{e} \times \dot{\vec{e}}}{|\dot{\vec{e}}|} \quad \text{bzw.} \quad \vec{n}_{+\infty} = \frac{-\vec{e} \times \dot{\vec{e}}}{|\dot{\vec{e}}|} . \quad (7)$$

Der Einheitsvektor

$$\vec{n}_s = \frac{\dot{\vec{e}}}{|\dot{\vec{e}}|} \quad (8)$$

ist orthogonal zu  $\vec{n}_{-\infty}$  und zu  $\vec{n}_{+\infty}$ . Derjenige Punkt auf der Erzeugenden  $t = \text{const}$ , in dem  $\vec{n}_s$  Normaleneinheitsvektor der Tangentialebene ist, wird *Striktionspunkt*  $S$  der Erzeugenden genannt. Im Punkt  $S$  hat  $\vec{n}_s$  nach Gl.(6) die Richtung  $(\dot{\vec{r}} + \lambda_s \dot{\vec{e}}) \times \vec{e}$  mit unbekanntem  $\lambda_s$ . Folglich ist mit Gl.(8)  $[(\dot{\vec{r}} + \lambda_s \dot{\vec{e}}) \times \vec{e}] \times \dot{\vec{e}} = \vec{0}$ . Bei Beachtung der Orthogonalität  $\vec{e} \cdot \dot{\vec{e}} = 0$  ergibt sich daraus  $(\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{e}} + \lambda_s \dot{\vec{e}}^2) \vec{e} = \vec{0}$  und folglich

$$\lambda_s = -\frac{\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{e}}}{\dot{\vec{e}}^2} . \quad (9)$$

Damit hat der Striktionspunkt auf der Erzeugenden  $t = \text{const}$  nach Gl.(5) den Ortsvektor

$$\vec{x}_s = \vec{r} + \lambda_s \vec{e} = \vec{r} - \frac{\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{e}}}{\dot{\vec{e}}^2} \vec{e}. \quad (10)$$

Die Kurve  $\vec{x}_s(t)$  auf der Regelfläche heißt *Striktionslinie* der Regelfläche.

Auf der Erzeugenden  $t = \text{const}$  (beliebig) bilden die zueinander orthogonalen Vektoren  $\vec{e}$ ,  $\vec{n}_s$  und  $\vec{n}_{-\infty} = \vec{e} \times \vec{n}_s$  im Striktionspunkt angetragen das natürliche Achsensystem. Sei  $\varphi(\lambda)$  der Winkel, um den die Tangentialebene im Punkt  $\lambda$  gegen die Tangentialebene im Striktionspunkt gedreht ist. Mit Gl.(6) für  $\vec{n}(\lambda)$  berechnet man  $\cos \varphi = \vec{n}_s \cdot \vec{n}$  und  $\sin \varphi = \vec{n}_{-\infty} \cdot \vec{n}$ . Einfaches Ausmultiplizieren liefert bei Beachtung von Gl.(9) die Ergebnisse

$$\cos \varphi = \frac{\dot{\vec{e}} \cdot \dot{\vec{r}} \times \vec{e}}{|\dot{\vec{e}}| |(\dot{\vec{r}} + \lambda \dot{\vec{e}}) \times \vec{e}|}, \quad \sin \varphi = \frac{-\dot{\vec{e}} \cdot \dot{\vec{r}} - \lambda \dot{\vec{e}}^2}{|\dot{\vec{e}}| |(\dot{\vec{r}} + \lambda \dot{\vec{e}}) \times \vec{e}|} = \frac{(\lambda_s - \lambda) \dot{\vec{e}}^2}{|\dot{\vec{e}}| |(\dot{\vec{r}} + \lambda \dot{\vec{e}}) \times \vec{e}|}. \quad (11)$$

Daraus folgt die für jede Regelfläche gültige Aussage

$$\tan \varphi = \frac{\lambda_s - \lambda}{\delta} \quad \text{mit} \quad \delta = \frac{\dot{\vec{e}} \cdot \dot{\vec{r}} \times \vec{e}}{\dot{\vec{e}}^2}. \quad (12)$$

Auf der Erzeugenden  $t = \text{const}$  ist  $\delta$  eine Konstante. Der Drehwinkel  $\varphi(\lambda)$  ist eine ungerade Funktion der Entfernung  $\lambda_s - \lambda$  vom Striktionspunkt. Beim Übergang vom Fernpunkt  $\lambda \rightarrow -\infty$  zum Fernpunkt  $\lambda \rightarrow +\infty$  dreht sich die Tangentialebene um den Winkel  $\pi$ . Im Striktionspunkt hat sie die Hälfte dieser Drehung ausgeführt. Die Konstante  $\delta(t)$  bestimmt die Verteilung der Tangentialebenen längs der Erzeugenden. Sie wird in der englischen Literatur *distribution parameter* genannt und im Deutschen *Drall*.

Striktionspunkt und Drall können auch wie folgt interpretiert werden. Man betrachtet zwei Erzeugende zu Parameterwerten  $t$  und  $t + \Delta t$ . Sie sind windschief. Sie haben ein gemeinsames Lot, eine Lotlänge  $\ell$  und einen Verdrehwinkel  $\alpha$  um das Lot. Das Lot ist die Achse der Schraube, mit der die eine Erzeugende in die andere überführt wird, und  $\ell$  und  $\alpha$  sind die Translation bzw. der Drehwinkel der Schraubung. Auch im Grenzfall  $\Delta t \rightarrow 0$  existieren eine Schraubachse und die Steigung  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\ell/\alpha)$  der Schraube. Man kann zeigen (siehe [1]):

- die Schraubachse hat die Richtung von  $\vec{n}_{-\infty}$
- die Schraubachse schneidet die Erzeugende  $t = \text{const}$  im Striktionspunkt
- die Steigung der Schraube ist der Drall  $\delta$ .

### 3. Striktionspunkt und Drall der Axoide des starren Körpers

Es wurde gezeigt, daß das Gangaxoid und das Rastaxoid in jedem Punkt der momentan gemeinsamen Schraubachse gleiche Tangentialebenen haben. Daraus folgt nun, daß beide Axoide auf der Schraubachse denselben Striktionspunkt und denselben Drall haben.

In der Literatur fehlen Formeln zur Berechnung des Striktionspunktes und des Dralls aus den Größen  $\vec{r}_A$ ,  $\vec{v}_A$ ,  $\vec{a}_A$ ,  $\vec{\omega}$  und  $\dot{\vec{\omega}}$ . Derartige Formeln werden im folgenden angegeben. Mit den Bezeichnungen von Abschn.1. hat die momentane Schraubachse die Gleichung

$$\vec{r}(\lambda) = \vec{r}_A + \vec{u} + \frac{\lambda}{|\vec{\omega}|} \vec{\omega} = \vec{r}_A + \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_A}{\omega^2} + \frac{\lambda}{|\vec{\omega}|} \vec{\omega}. \quad (13)$$

Der Normaleneinheitsvektor  $\vec{n}_s$  der Tangentialebene im Striktionspunkt S hat nach Gl.(8) die Richtung von  $\dot{\vec{e}} = (\vec{e} \times \dot{\vec{e}}) \times \vec{e}$ . Das ist wegen  $\vec{\omega} = \omega \vec{e}$  und  $\dot{\vec{\omega}} = \dot{\omega} \vec{e} + \omega \dot{\vec{e}}$  die Richtung von  $(\vec{\omega} \times \dot{\vec{\omega}}) \times \vec{\omega}$ . Also ist

$$\vec{n}_s = \frac{(\vec{\omega} \times \dot{\vec{\omega}}) \times \vec{\omega}}{|(\vec{\omega} \times \dot{\vec{\omega}}) \times \vec{\omega}|}. \quad (14)$$

Der mit  $\vec{r}(\lambda)$  zusammenfallende körperfeste Punkt hat nach Gl.(1) die Beschleunigung

$$\vec{a}(\lambda) = \vec{a}(0) - \frac{\lambda}{|\vec{\omega}|} \vec{\omega} \times \dot{\vec{\omega}}. \quad (15)$$

Darin ist  $\vec{a}(0)$  die Beschleunigung des körperfesten Punktes am Vektor  $\vec{r}_A + \vec{u}$  auf der Schraubachse:

$$\vec{a}(0) = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{u} - \omega^2 \vec{u} = \vec{a}_A - \vec{\omega} \times \vec{v}_A + \frac{\dot{\vec{\omega}} \times (\vec{\omega} \times \vec{v}_A)}{\omega^2}. \quad (16)$$

Die Beschleunigung  $\vec{a}(\lambda)$  hat eine Komponente in Richtung von  $\vec{\omega}$  infolge der Translation und eine Komponente in Richtung des Normaleneinheitsvektors  $\vec{n}(\lambda)$  infolge der Rollbewegung. Diese Komponente wird im folgenden mit  $\vec{a}_r(\lambda)$  bezeichnet. Insbesondere hat im Striktionspunkt die Beschleunigung  $\vec{a}_s = \vec{a}(\lambda_s)$  Komponenten in Richtung von  $\vec{\omega}$  und von  $\vec{n}_s$ . Daraus folgt mit Gl.(14), daß  $\vec{a}_s$ ,  $\vec{\omega}$  und  $\dot{\vec{\omega}}$  komplanar sind:

$$\vec{a}_s \cdot \vec{\omega} \times \dot{\vec{\omega}} = 0. \quad (17)$$

In diese Gleichung wird der Ausdruck aus Gl.(15) mit  $\lambda = \lambda_s$  eingesetzt. Die Auflösung der Gleichung liefert

$$\frac{\lambda_s}{|\vec{\omega}|} = \frac{\vec{a}(0) \cdot \vec{\omega} \times \dot{\vec{\omega}}}{(\vec{\omega} \times \dot{\vec{\omega}})^2}. \quad (18)$$

Substitution in Gl.(13) ergibt schließlich den gesuchten Ausdruck für den Ortsvektor  $\vec{r}_s$  des Striktionspunktes:

$$\vec{r}_s = \vec{r}_A + \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_A}{\omega^2} + \frac{\vec{a}(0) \cdot \vec{\omega} \times \dot{\vec{\omega}}}{(\vec{\omega} \times \dot{\vec{\omega}})^2} \vec{\omega}. \quad (19)$$

Einen Ausdruck für den Drall  $\delta$  erhält man wie folgt. Gl.(15) wird in der Form geschrieben:

$$\vec{a}(\lambda) = \vec{a}_s + (\lambda_s - \lambda) \frac{\vec{\omega} \times \dot{\vec{\omega}}}{|\vec{\omega}|}. \quad (20)$$

Man zeichne die zueinander orthogonalen Vektoren  $\vec{n}_s$  und  $\vec{\omega} \times \dot{\vec{\omega}}$  und unter dem Winkel  $\varphi(\lambda)$  gegen  $\vec{n}_s$  den Vektor  $\vec{n}(\lambda)$  und die gleichgerichtete Komponente  $\vec{a}_r(\lambda)$  der Beschleunigung  $\vec{a}(\lambda)$ . Der Vektor  $\vec{\omega}$  weist aus der Zeichenebene heraus. Man liest ab:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a}_r(\lambda) \cdot \vec{n}_s}{|\vec{a}_r(\lambda)|}, \quad \sin \varphi = \frac{\vec{a}_r(\lambda) \cdot \vec{\omega} \times \dot{\vec{\omega}}}{|\vec{a}_r(\lambda)| |\vec{\omega} \times \dot{\vec{\omega}}|}. \quad (21)$$

Darin ist mit den Gln.(14), (15), (17) und (20)

$$\vec{a}_r(\lambda) \cdot \vec{n}_s = \vec{a}(\lambda) \cdot \vec{n}_s = \vec{a}(0) \cdot \vec{n}_s, \quad \vec{a}_r(\lambda) \cdot \vec{\omega} \times \dot{\vec{\omega}} = (\lambda_s - \lambda) \frac{(\vec{\omega} \times \dot{\vec{\omega}})^2}{|\vec{\omega}|}. \quad (22)$$

Folglich ist

$$\tan \varphi = \frac{(\lambda_s - \lambda) |\vec{\omega} \times \dot{\vec{\omega}}|}{\vec{a}(0) \cdot \vec{n}_s |\vec{\omega}|} = \frac{(\lambda_s - \lambda) (\vec{\omega} \times \dot{\vec{\omega}})^2}{\vec{a}(0) \cdot [(\vec{\omega} \times \dot{\vec{\omega}}) \times \vec{\omega}]}. \quad (23)$$

Der Vergleich mit (12) liefert den gesuchten Ausdruck für den Drall:

$$\delta = \frac{\vec{a}(0) \cdot [(\vec{\omega} \times \dot{\vec{\omega}}) \times \vec{\omega}]}{(\vec{\omega} \times \dot{\vec{\omega}})^2}. \quad (24)$$

Mit den Gln.(19) und (24) kann man die Striktionslinie und für jeden Punkt dieser Linie den zugehörigen Drall angeben, sobald  $\vec{r}_A$ ,  $\vec{v}_A$ ,  $\vec{a}_A$ ,  $\vec{\omega}$  und  $\dot{\vec{\omega}}$  eines Körpers als Funktionen eines Parameters bekannt sind.

### Zusammenfassung

Für den Ortsvektor des Striktionspunktes und für den Drall der schrotenden Axoide des starren Körpers wurden neuartige Ausdrücke angegeben. Sie verwenden dieselben Größen, mit denen Lagen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen von Körperpunkten bestimmt werden.

## **Literatur**

[1] E. Kruppa: Analytische und konstruktive Differentialgeometrie. Springer 1957

Prof. Dr.-Ing., Dr.-Ing. h.c. Jens Wittenburg, Institut für Technische Mechanik, Universität  
Karlsruhe, Deutschland, Tel.+49-(0)721-2396, Fax: +49-(0)721-6070,  
e-mail: wittenburg@itm.uni-karlsruhe.de