RELATIONALE DATENBANKEN FÜR DIE TOPOLOGIE ARCHITEKTONISCHER RÄUME

Norbert Paul[1], Patrick Erik Bradley[1]

Institut für Industrielle Bauproduktion,
Universität Karlsruhe (TH)

Kurzfassung: *Architektur prägt dem Raum durch Partitionierung eine Topologie auf, die zu einem CW-Komplex verfeinerbar ist. Für diesen stellen wir eine Klasse relationaler Datenbankschemata DKetKomp vor und zeigen die Informationsverluste beim Übergang von Architektur zu DKetKomp. Aus DKetKomp wird dann DTop entwickelt und als zu den endlichen topologischen Räumen äquivalente Kategorie vorgestellt. Damit existiert keine Einschränkung bezüglich der Entwicklung von Datenstrukturen für endliche topologische Räume. Relationale Abfragen topologischer Eigenschaften und Konstruktionen werden demonstriert und für stetige Abbildungen eine charakteristische Konsistenzregel vorgestellt. DKetKomp und DTop sind direkt implementierbar und eignen sich als formale Grundlage für die Entwicklung raum-zeitlicher Modelle mit topologischer Information.*

1 Einleitung

Das Speichern von Informationen über architektonische Räume erfordert stets das Speichern ihrer topologischen Eigenschaften, wie etwa welche Räume durch eine gegebene Tür verbunden sind, welche Bauteile einen Raum beranden oder wie Bauteile untereinander verbunden sind. Wird dabei von den Grundlagen der Topologie (Einführung z.B. in [5] oder [7]) ausgegangen, zeigt es sich, dass die Modellierung dieser Informationen mit dem relationalen Datenmodell überraschend einfach ist. In der Folge wird ein Konzept für topologische Datenbanken vorgestellt, in denen sich beliebige topologische Informationen für endliche Mengen von Objekten effizient ablegen lassen. Insbesondere wird hier die Volumenkörpermodellierung auf Komplexe beliebiger Dimension verallgemeinert.

Leider muss auf Grund der geforderten Kürze des Beitrags auf motivierende Beispiele

[1] gefördert von der DFG im Projekt *Architektonische Komplexe* KO 1488/8-1

und Beweise meist verzichtet werden. Interessierte seien auf die geplante ausführliche Veröffentlichung [2] verwiesen. Wir setzen Kenntnisse über das relationale Datenmodell voraus, insbesondere die Problematik der Abfrage der transitiven Hülle einer Relation mit relationaler Algebra ([3]; [4], Chapter 5.10; [6], Chapter 14.3). Mengen sind überwiegend als Relationen (Tabellen) und Binärrelationen als *n*:*m* Relationentypen im Sinne des ER-Modells zu verstehen. Eine Abbildung kann eine Tabelle, Attribut, Fremdschlüssel, Projektion oder natürliche Projektion in einen Quotienten (group by) sein.

2 Topologische Räume

Wir definieren zunächst, was topologische Eigenschaften überhaupt sind. Sie sind genau diejenigen Eigenschaften, die sich mit einer Topologie ausdrücken lassen [5]:

Definition 2.1. *Sei X eine Menge. Eine Menge T_X von Teilmengen von X heißt eine* Topologie *auf X, falls*

1. *die leere Menge und X in T_X liegen,*
2. *die Vereinigung beliebig vieler Elemente aus T_X in T_X liegt,*
3. *der Durchschnitt endlich vieler Elemente aus T_X in T_X liegt.*

Die Elemente von T_X heißen offene Mengen von *X, das Paar $\boldsymbol{X} = (X, T_X)$ heißt ein* topologischer Raum.

Der euklidische Raum $\mathbf{R}^n$ trägt in natürlicher Weise eine Topologie, nämlich die kleinste Topologie, welche die offenen Kugeln enthält. Sie heißt die *euklidische Topologie.* Ist A Teilmenge der Grundmenge X eines topologischen Raums $\boldsymbol{X} = (X, T_X)$, so ist bilden die Durchschnitte von A mit den Elementen von T_X eine Topologie auf A. Sie heißt die *Teilraumtopologie,* und A heißt *topologischer Teilraum* von $\boldsymbol{X}$.

Definition 2.2. *Eine* stetige Abbildung *zwischen topologischen Räumen $(X,T_X)\to(Y,T_Y)$ ist eine Abbildung $f: X\to Y$, für welche das Urbild jeder offenen Menge in Y offen in X ist.*

Es ist eine Übungsaufgabe zu zeigen, dass Stetigkeit in obigem Sinn äquivalent zur ε-δ-Stetigkeit im Sinne der reellen Analysis ist.

Definition 2.3. *Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einem topologischen Raum X. Dann heißt die größte Topologie auf $X/\!\sim$, mit der die kanonische Projektion $X \to X/\!\sim$ stetig ist, die* Quotiententopologie. *Der topologische Raum $X/\!\sim$ heißt der* Quotientenraum.

Beispiel 2.1. *Sei $\boldsymbol{X} = (X,T_X)$ ein topologischer Raum, Y eine Teilmenge von X und $\sim$ die Äquivalenzrelation: $x \sim y$, falls $x = y$ oder x, y in Y. Dann heißt der Quotientenraum $\boldsymbol{X}/Y := \boldsymbol{X}/\!\sim$ die* Zusammenschlagung von *Y in $\boldsymbol{X}$.*

Beispiel 2.2. *Seien $\boldsymbol{X} = (X,T_X)$ und $\boldsymbol{Y} = (Y,T_Y)$ disjunkte topologische Räume, $\boldsymbol{A}$ Teilraum von $\boldsymbol{X}$, $f : \boldsymbol{A}\to\boldsymbol{Y}$ stetig und $\boldsymbol{S} := (X\cup Y, T_X \cup T_Y)$ die disjunkte Vereinigung von $\boldsymbol{X}$ und $\boldsymbol{Y}$. Dann heißt der Quotientenraum $\boldsymbol{Y}\cup_f \boldsymbol{X} := \boldsymbol{S}/\!\sim$, nach der Äquivalenzelation: $x \sim y$,* *falls* $x = y$, $x = f(y)$ *oder* $y = f(x)$, *die* Anheftung *oder* Verklebung *von* **Y** *an* **X**. *f heißt dabei die* Anheftungsabbildung.

3 Kettenkomplexe

Sei (M,+) eine abelsche Gruppe. In der linearen Algebra ist es üblich, (M,+) einen **Z**-*Modul* zu nennen, wobei **Z** die abelsche Gruppe der ganzen Zahlen (mit der Addition) bedeutet. Eine Abbildung $f : M \to N$ zwischen **Z**-Moduln heißt *linear*, wenn stets gilt:

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Definition 3.1. *Ein* Kettenkomplex *ist eine Sequenz*

$$C : \ldots \to C_n \to C_{n-1} \to \ldots$$

von **Z**-*Moduln mit* **Z**-*linearen Abbildungen* $\gamma_n : C_n \to C_{n-1}$, *sodass für alle n gilt:*

$$\gamma_{n-1} \circ \gamma_n = 0.$$

Die Elemente von C_n *heißen n*-Ketten, γ_n *heißt* Randoperator. *Ist* C_n *nur für endlich viele n ungleich Null, so heißt der Komplex C* endlich. *Ein* Morphismus $C \to D$ *von Kettenkomplexen ist eine Sequenz von* **Z**-*linearen Abbildungen* $f_n : C_n \to D_n$ *mit*

$$f_{n-1} \circ \gamma_n = \delta_n \circ f_n .$$

Seien für eine **Z**-lineare Abbildung $f : M \to N$ von **Z**-Moduln kern f das Urbild der Null und bild f das Bild $f(M)$, welche Teilmoduln von M bzw. N sind. Dann ist die Bedingung $\gamma_{n-1} \circ \gamma_n = 0$ äquivalent zu bild $\gamma_n \subseteq$ kern γ_{n-1}.

Definition 3.2. *Sei C ein Kettenkomplex. Dann heißt der* **Z**-*Modul*

$$H_n(C,\mathbf{Z}) := \text{kern } \gamma_n / \text{ bild } \gamma_{n+1}$$

die n-te Homologie *von C.*

Beispiel 3.1. *Sei* S^n *die n-Sphäre in* $\mathbf{R}^{n+1}$. *Fixiere einen Punkt* e^0 *in* S^n, *und sei* $e^n := S^n \setminus e^0$. *Dann erhalten wir zu* S^n *einen Kettenkomplex*

$$\mathbf{S}^n\text{:}\ \ \mathbf{Z} \to 0 \to \ldots \to 0 \to \mathbf{Z} \to 0,$$

deren Randoperatoren Nullabbildungen sind. Dann ist offenbar $H_q(\mathbf{S}^n,\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$ *für* $q = 0$ *oder n und* $H_q(\mathbf{S}^n,\mathbf{Z}) = 0$ *sonst.*

Beispiel 3.2. *Sei* $f : S^n \to S^n$ *eine stetige Abbildung von der n-Sphäre in sich, welche den ausgezeichneten Punkt* e^0 *in sich abbildet. Dann induziert f eine lineare Abbildung* $H_n(\mathbf{S}^n,\mathbf{Z}) = \mathbf{Z} \to H_n(\mathbf{S}^n,\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$. *Diese bildet die Homologieklasse von* e^0 *auf ein Vielfaches* $\deg(f) \cdot e^0$. *Die ganze Zahl* $\deg(f)$ *heißt der* Grad *der Abbildung* $f : S^n \to S^n$.

4 Architektonische Räume und Komplexe

Topologische Räume entstehen in der Architektur durch Partition des euklidischen

Raumes $\mathbf{R}^n$ in endlich viele Teile. Die dazu gehörige Äquivalenzrelation ~ auf $\mathbf{R}^n$ induziert auf der Quotientenmenge $X = \mathbf{R}^n / \sim$ die Quotiententopologie. Mit ihr wird X zu einem endlichen topologischen Raum.

Definition 4.1. *Eine* n-Zelle *(oder* Zelle der Dimension *n) ist ein topologischer Raum, der zur offenen Einheitskugel des* $\mathbf{R}^n$ *homöomorph ist*.

Interessant sind Partitionen, bei denen jede Äquivalenzklasse Vereinigung von Zellen jeweils der selben Dimension ist. Dies ist allerdings im Fall des euklidischen Raums $\mathbf{R}^n$ nicht möglich, da das Komplement einer n-Zelle in $\mathbf{R}^n$ i.A. keine n-Zelle ist. Dieses Problem lösen wir durch Kompaktifizierung.

Definition 4.2. *Sei ~ folgende Äquivalenzrelation auf* $\mathbf{R}^{n+1}$*:*

$$x \sim y, \quad \textit{falls } \exists\, r \textit{ in } \mathbf{R} \setminus 0 : \; x = r \cdot y.$$

Der Raum $\mathbf{P}^n := \mathbf{R}^{n+1}/\sim$ *heißt der* n-dimensionale projektive Raum *und wird mit der Quotiententopologie versehen.*

Der euklidische Raum $\mathbf{R}^n$ lässt sich bekanntlich homöomorph in den projektiven Raum $\mathbf{P}^n$ einbetten, $\mathbf{P}^n$ ist kompakt und enthält $\mathbf{R}^n$ als offene, dichte Teilmenge. In der Tat ist $\mathbf{P}^n$ disjunkte Vereinigung von $\mathbf{R}^n$ und $\mathbf{P}^{n-1}$.

Definition 4.3. *Ein* endlicher CW-Komplex *X wird folgendendermaßen konstruiert:*

1. *Starte mit einer endlichen Menge X^0, dem* 0-*Skelett von X.*
2. *Bilde induktiv das* n-Skelett *X^n aus dem $(n-1)$-Skelett X^{n-1} durch Anheften von n-Zellen e^n_a via stetiger Abbildungen $f_a : S^{n-1} \to X^{n-1}$.*
3. *$X = X^n$ für ein natürliches n.*

Durch die Anheftungsabbildungen ist ein endlicher CW-Komplex mit der Quotiententopologie versehen. X ist genau dann ein *Graph*, wenn gilt: $X = X^1$.

Definition 4.4. *Sei X endlicher CW-Komplex und ~ folgende Äquivalenzrelation auf X:*

$$x \sim y, \quad \textit{genau dann wenn } x \textit{ und } y \textit{ in derselben Zelle von } X \textit{ liegen.}$$

Dann heißt $X/\sim$ (mit der Quotiententopologie) der kombinatorische CW-Komplex *zu X. Ein* Morphismus *$X \to Y$ kombinatorischer CW-Komplexe ist eine stetige Abbildung zwischen ihren topologischen Räumen, welche n-Zellen auf n-Zellen abbildet.*

Partitionen von $\mathbf{P}^n$ nennen wir *Darstellungen* des projektiven Raums.

Postulat. *Eine architektonische Darstellung des projektiven Raums lässt sich stets zu einem kombinatorischen CW-Komplex verfeinern.*

Unter einer *Verfeinerung* einer Äquivalenzrelation R verstehen wir eine Äquivalenzrelation S, für welche gilt: $x\,S\,y$ impliziert $x\,R\,y$.

Das Postulat erlaubt uns, einer architektonischen Darstellung von $\mathbf{P}^n$ einen Kettenkomplex zuzuordnen. Gehen wir von einer Darstellung als kombinatorischem CW-Komplex aus, so erhalten wir den Kettenkomplex

$$0 \to C_n \to C_{n-1} \to \ldots \to C_1 \to C_0 \to 0$$

Hierbei ist C_m der freie **Z**-Modul über der Menge der kombinatorischen m-Zellen von X, und der Randoperator ist definiert als

$$d_m : C_m \to C_{m-1}, \quad e \mapsto \sum [e:e'] \, e',$$

wo [e:e'] der Grad von

$$S^{m-1} \to X^{m-1} \to X^{m-1} / (X^{m-1} - e') = S^{m-1}$$

ist, deren linker Teil die zu e gehörige Anheftungsabbildung ist und rechts die Zusammenschlagung von $X^{m-1} - e'$ steht.

5 Kategorien und Funktoren

Die Theorie der Kategorien und Funktoren wurde entwickelt, um Eigenschaften topologischer Räume systematisch mittels linearer Algebra zu beschreiben.

Definition 5.1. *Eine* Kategorie $\boldsymbol{C}$ *besteht aus einer Klasse* Ob($\boldsymbol{C}$) *von* Objekten *und für* A, B *in* Ob($\boldsymbol{C}$) *aus einer Menge von* Morphismen $\mathrm{Hom}(A,B) = \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(A,B) = \{f : A \to B\}$ *für welche gilt:*

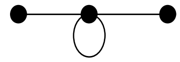
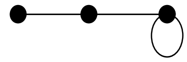
1. $f \in \mathrm{Hom}(A,B)$ *und* $g \in \mathrm{Hom}(B,C) \Rightarrow g \circ f$ *existiert in* $\mathrm{Hom}(A,C)$.
2. $\forall A \in \mathrm{Ob}(\boldsymbol{C})\ \exists\ 1_A \in \mathrm{Hom}(A,A)$: $\forall f \in \mathrm{Hom}(A,B)$: $1_A \circ f = f$ *und* $\forall g \in \mathrm{Hom}(C,A)$: $\circ 1_A = g$.
3. $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$, *sobald sich die drei Morphismen verketten lassen.*

Ein Morphismus $f : A \to B$, *zu dem es ein* $g : B \to A$ *gibt mit* $f \circ g = 1_B$ *und* $g \circ f = 1_A$, *heißt* Isomorphismus. *Ein* (kovarianter) Funktor *zwischen Kategorien* $F : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{D}$ *besteht aus einer Zuordnung* $\mathrm{Ob}(\boldsymbol{C}) \to \mathrm{Ob}(\boldsymbol{D})$ *und aus Abbildungen* $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(A,B) \to \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{D}}(FA,FB)$ *für Objekte* A,B *von* $\boldsymbol{C}$ *mit* $F(1_A) = 1_{FA}$ *und* $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$.

Beispiel 5.1. *Die topologischen Räume mit den stetigen Abbildungen als Morphismen bilden eine Kategorie* Top. *Die Kettenkomplexe mit Kettenkomplexmorphismen bilden eine Kategorie* KetKomp. *Ebenso bilden die kombinatorischen CW-Komplexe eine Kategorie* KombCW. *Im vorigen Abschnitt haben wir einen Funktor* K : KombCW $\to$ KetKomp *konstruiert.*

Definition 5.2. *Ein Funktor* $F : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{D}$ *heißt* Äquivalenz von Kategorien, *falls*

1. *die Abbildung* $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(A,B) \to \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{D}}(FA,FB)$ *bijektiv ist,*
2. *jedes Objekt* X *aus* $\boldsymbol{D}$ *zu einem Objekt der Form* FA *(*A *in* Ob $\boldsymbol{C}$*) isomorph ist.*

Beispiel 5.2. K : KombCW $\to$ KetKomp *ist keine Äquivalenz von Kategorien, da z.B. die* *nicht isomorphen Graphen*  *und*  *isomorphe Kettenkomplexe haben.*

Die Äquivalenz von Kategorien ist eine besonders wichtige Eigenschaft, da diese erlaubt, die Kategorie ohne Informationsverluste zu wechseln.

6 Datenbanken für markierte Kettenkomplexe

Definition 6.1. *Ein* **Z***-Modul M heißt* frei vom Rang *n, falls M als* **Z***-Modul zu* $\mathbf{Z}^n$ *isomorph ist. Eine* Basis *eines freien* **Z***-Moduls M vom Rang n ist ein* **Z***-linear unabhängiges Erzeugendensystem* $(m_1,...,m_n)$ *von M.*

Bekanntlich hat jeder freie **Z**-Modul eine Basis.

Definition 6.2. *Ein* markierter Kettenkomplex *ist ein Paar* (C,B), *wobei C endlicher Kettenkomplex von freien* **Z***-Moduln* C_n *endlichen Rangs mit Basis* B_n *und B die disjunkte Vereinigung der* B_n *ist. Ein* Morphismus $(C,B) \to (C',B')$ *markierter Kettenkomplexe ist ein Morphismus* $C \to C'$ *der zu Grunde liegenden Kettenkomplexe.* mKetKomp *bezeichne die Kategorie der markierten Kettenkomplexe.*

Zum Morphismus $f : (C,B) \to (C',B')$ markierter Kettenkomplexe gibt es eine eindeutig bestimmte Matrix $D_{B'B}(f)$: $B' \times B \to \mathbf{Z}$, sodass f in Koordinaten die Linksmultiplikation mit $D_{B'B}(f)$ ist. Ebenso hat in (C,B) der Randoperator γ die Matrix $D_{BB}(\gamma)$: $B \times B \to \mathbf{Z}$.

Definition 6.3. DKetKomp* *bezeichne die Kategorie, deren* Objekte *Tripel* $(B,\mathrm{bd},\mathrm{dim})$ *mit einer endlichen Menge B, einer Matrix* $\mathrm{bd}\colon B \times B \to \mathbf{Z}$ *mit* $\mathrm{bd}^2 = 0$ *und* $n + 1 \neq m \Rightarrow \mathrm{bd}(B_m \times B_n) = 0$ *und einer Abbildung* $\mathrm{dim}\colon B \to \mathbf{N}$ *in die natürlichen Zahlen* **N** *seien. Hier ist* $B_n := \mathrm{dim}^{-1}(n) \subseteq B$. *Ein* Morphismus *in* DKetKomp* $(B,\mathrm{bd},\mathrm{dim}) \to (B',\mathrm{bd}',\mathrm{dim}')$ *ist eine Matrix* $f : B' \times B \to \mathbf{Z}$ *mit* $f \cdot \mathrm{bd} = \mathrm{bd}' \cdot f$ *und deren Restriktion auf* $B'_n \times B_m$ *für* $n \neq m$ *verschwindet, wobei* $B'_n := (\mathrm{dim}')^{-1}(n) \subseteq B'$ *ist.*

Satz 1. *Es gibt eine Äquivalenz von Kategorien* F : mKetKomp → DKetKomp*.

Beweis. Auf Objekten: F schicke (C,B) auf das Tripel $(B,\mathrm{bd},\mathrm{dim})$, wo $\mathrm{bd} := D_{BB}(\gamma)$ sei; $\mathrm{dim}\colon B \to \mathbf{N}$ ordne b die Zahl n mit $b \in B_n$ zu. *Auf Morphismen:* F bilde den Morphismus $f : (C,B) \to (C',B')$ auf die Matrix $D_{B'B}(f)$ ab.

Da jede Matrix $B' \times B \to \mathbf{Z}$ eine Matrix einer eindeutig bestimmten linearen Abbildung $C \to C'$ ist, können wir die induzierte Abbildung

$$F : \mathrm{Hom}_{\mathrm{mKetKomp}}((C,B),(C',B')) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{DKetKomp}^*}(F(C,B),F(C',B'))$$

umkehren, diese ist also bijektiv. Schließlich lässt sich aus jedem Tripel $(B,\mathrm{bd},\mathrm{dim})$ ein Kettenkomplex konstruieren: C_n sei der freie **Z**-Modul mit Basis B_n und C die direkte Summe aller C_n. Dann definiert die Matrix bd auf C eine lineare Abbildung γ, welche lineare Abbildungen $\gamma_n\colon C_n \to C_{n-1}$ mit $\gamma_n \circ \gamma_{n+1} = 0$ induziert. □

Beispiel 6.1. *Als Datenbankrealisierung ergibt sich für Morphismen markierter Kettenkomplexe*

$$B[\ \underline{\mathrm{id}}{:}\mathbf{N},\underline{\mathrm{dim}}{:}\mathbf{N},\ldots\ ],\ \mathrm{bd}[\underline{X}{:}B.\mathrm{id},\underline{\mathrm{dim}X}{:}B.\mathrm{dim},\underline{Y}{:}B.\mathrm{id},\underline{\mathrm{dim}Y}{:}B.\mathrm{dim},\beta{:}\mathbf{Z}\ ]$$

$$f[\ \underline{B}{:}B.\mathrm{id},\ \underline{\mathrm{dim}B}{:}B.\mathrm{dim},\underline{K}{:}K.\mathrm{nr},\underline{\mathrm{deg}K}{:}K.\mathrm{deg},\varphi{:}\mathbf{Z}\ ]$$

$$K[\ \underline{\mathrm{nr}}{:}\mathbf{N},\underline{\mathrm{deg}}{:}\mathbf{N},\ldots\ ],\ \mathrm{rd}[\underline{U}{:}K.\mathrm{nr},\underline{\mathrm{deg}U}{:}K.\mathrm{deg},\underline{V}{:}K.\mathrm{nr},\underline{\mathrm{deg}U}{:}K.\mathrm{deg},\kappa{:}\mathbf{Z}\ ].$$

Oft ist es praktikabler, markierte Kettenkomplexe etwa folgendermaßen zu realisieren:

$$\vdots$$

$$\text{RaumzeitVolumen}[\ \underline{\text{hyp}}{:}\mathbf{N}\ ],\ \mathrm{bd}_4[\ \underline{H}{:}\text{Raumzeitvolumen.hyp},\underline{v}{:}\text{Volumen.vol},\chi{:}\mathbf{Z}\ ]$$

$$\text{Volumen}[\ \underline{\text{vol}}{:}\mathbf{N},\ldots\ ],\ \mathrm{bd}_3[\ \underline{V}{:}\text{Volumen.vol},\underline{f}{:}\text{Fläche.id},\upsilon{:}\mathbf{Z}\ ]$$

$$\text{Fläche}[\ \underline{\text{id}}{:}\mathbf{N},\ldots\ ],\ \mathrm{bd}_2[\ \underline{Fl}{:}\text{Fläche.id},\underline{lin}{:}\text{Linie.nr},\varphi{:}\mathbf{Z}\ ]$$

$$\text{Linie}[\ \underline{\text{nr}}{:}\mathbf{N},\ldots\ ],\ \mathrm{bd}_1[\ \underline{L}{:}\text{Linie.nr},\underline{P}{:}\text{Punkt.code},\lambda{:}\mathbf{Z}\ ]$$

$$\text{Punkt}[\ \underline{\text{code}}{:}\mathbf{N},x{:}\mathbf{R},y{:}\mathbf{R},z{:}\mathbf{R},\ldots\ ]\ .$$

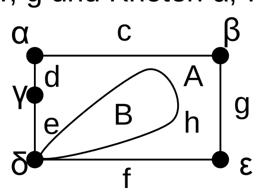
Dabei beinhaltet der realisierte Teilkomplex Fläche[...] → Linie[...] → Punkt[...] *das* Dual Independent Map Encoding (DIME) *aus der Kartographie, welches die Abbildung*

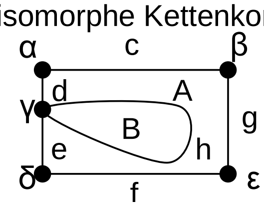
$$\text{Linie} \to \text{Punkt} \times \text{Punkt} \times \text{Fläche} \times \text{Fläche},\ l \mapsto (\text{Anfang,Ende,links,rechts})(l)$$

realisiert [2].

7 Reduktion der Informationsverluste

Die folgenden beiden nicht isomorphen kombinatorischen CW-Komplexe (mit Flächen A, B, Kanten c, …, g und Knoten α, … , ε) haben isomorphe Kettenkomplexe:





Deshalb definieren wir die Kategorie der *relationalen Kettenkomplexe* DKetKomp, deren *Objekte* Tripel (*B,*bd,dim) sind, nur dass im Unterschied zu DKetKomp* bd: $\subseteq B \times B \to \mathbf{Z}$ eine *partielle* Matrix ist, welche mindestens auf $B_m \times B_n$ mit $m \neq n + 1$ nicht definiert ist. Die *Morphismen* $(B,\mathrm{bd},\mathrm{dim}) \to (B',\mathrm{bd}',\mathrm{dim}')$ sind ebenfalls *partielle* Matrizen $f : \subseteq B' \times B \to \boldsymbol{Z}$ mit $f \cdot \mathrm{bd} = \mathrm{bd}' \cdot f$ und deren Restriktion auf $B'_n \times B_m$ für $n \neq m$ nicht definiert ist. In Beispiel 8.2 unten ist zu sehen, dass sich die zugehörigen Datenbanken tatsächlich unterscheiden.

8 Kategorien topologischer Datenbanken

In [1] zeigt Alexandroff, dass partiell geordnete Mengen eine natürliche Topologie tragen. Dies lässt sich auf Mengen mit beliebigen Relationen verallgemeinern.

Definition 8.1. *Sei* DTop *die Kategorie, deren* Objekte *Paare* (X,R) *sind, wobei X eine endliche Menge und R eine Relation auf X sei. Ein* Morphismus $f : (X,R) \to (Y,S)$ *ist eine Abbildung $f : X \to Y$ der zu Grunde liegenden Mengen mit der Eigenschaft* $(f \otimes f)(R) \subseteq S^*$, *wobei $f \otimes f : X{\times}X \to Y{\times}Y$ die Abbildung* $(u,v) \mapsto (f(u),f(v))$ *und S^* die reflexive und transitive Hülle von S sei. Die Objekte von* DTop *heißen* topologische Datenbanken *und die Morphismen* stetige Datenbankenabbildungen.

Beispiel 8.1. *Eine topologische Datenbank kann als einfacher Graph angesehen werden. Jedoch erfüllt ein Graphenmorphismus* $f : (X,R) \to (Y,S)$ *die stärkere Bedingung*

$$(f \otimes f)(R) \subseteq S \subseteq S^* .$$

Tab. 1: CW-Komplex in MySQL.

EXAMPLE / BOUNDARY: 0 Records (18 retrieved)

X	dimX	Y	dimY	a
A	2	h	1	-1
A	2	e	1	1
A	2	f	1	1
A	2	g	1	-1
A	2	d	1	1
A	2	c	1	-1
B	2	h	1	1
c	1	alpha	0	-1
c	1	beta	0	1
d	1	alpha	0	-1
d	1	gamma	0	1
e	1	delta	0	1
e	1	gamma	0	-1
f	1	delta	0	-1
f	1	epsilon	0	1
g	1	beta	0	-1
g	1	epsilon	0	1
h	1	gamma	0	0

SQL-Query on Database EXAMPLE: 51 Characters

```
SELECT distinct X, dimX, Y, dimY
FROM BOUNDARY ;
```

4 Field(s), 18 Record(s). Time: 0,02 sec.

X	dimX	Y	dimY
A	2	c	1
A	2	d	1
A	2	e	1
A	2	f	1
A	2	g	1
A	2	h	1
B	2	h	1
c	1	alpha	0
c	1	beta	0
d	1	alpha	0
d	1	gamma	0
e	1	delta	0
e	1	gamma	0
f	1	delta	0
f	1	epsilon	0
g	1	beta	0
g	1	epsilon	0
h	1	gamma	0

SQL-Query on Database EXAMPLE: 174 Characters

```
SELECT A.X, A.dimX, B.Y, B.dimY, sum(A.a*B.a) as a
FROM   BOUNDARY AS A INNER JOIN BOUNDARY AS B
       ON (A.Y=B.X and A.dimY=B.dimX)
GROUP BY A.X, A.dimX, B.Y, B.dimY;
```

5 Field(s), 6 Record(s). Time: 0,02 sec.

X	dimX	Y	dimY	a
A	2	alpha	0	0
A	2	beta	0	0
A	2	delta	0	0
A	2	epsilon	0	0
A	2	gamma	0	0
B	2	gamma	0	0

Beispiel 8.2. *Tabelle 1 zeigt den rechten CW-Komplex aus Abschnitt 7 in MySQL. Links oben ist die Matrix D des Randoperators: an der letzten Zeile (mit "a =* 0*") wird der rechte CW-Komplex erkannt; links unten: die Abfrage "Quadriere D", rechts unten: $D^2 = 0$, rechts oben: die zum Komplex gehörige topologische Datenbank, welche wiederum wegen der letzten Zeile zum rechten CW-Komplex in Abschnitt 7 gehört.*

Definition 8.2. *Sei* FTop *die Kategorie, deren* Objekte *die endlichen topologischen Räume seien und deren* Morphismen *die stetigen Abbildungen.*

Satz 2. *Es gibt eine Äquivalenz von Kategorien F :* DTop $\to$ FTop**.**

Beweisskizze. Für eine gegebene topologische Datenbank (X,R) ist das Bild im(St_{R^*}) der Abbildung (mit P(X), der Potenzmenge von X)

$$\mathrm{St}_{R^*}: \mathrm{P}(X) \to \mathrm{P}(X),\ A \mapsto \{\, x \in X \mid \exists\ a \in A : a\ R^*\ x \,\}$$

eine Topologie auf X. Der gesuchte Funktor F ordnet einer topologische Datenbank (X,R) den topologischen Raum (X,im(St_{R^*})) und einer stetigen Datenbankabbildung (X,R) → (Y,S) die zu Grunde liegende Abbildung $X \to Y$ zu, welche eine stetige Abbildung (X,im(St_{R^*})) → (Y,im(St_{S^*})) induziert [2]. In [2] wird auch gezeigt, dass F eine Äquivalenz von Kategorien ist. □

Bemerkung. *Satz 2 impliziert, dass die Bedingung* $(f \otimes f)(R) \subseteq S^*$ *ist eine charakteristische Konsistenzregel für stetige Abbildungen* $f : (X,R) \to (S,Y)$ *zwischen topologischen Datenbanken ist*. *Hierfür ist die transitive Hülle einer Relation notwendig.*

9 Topologische Konstruktionen

Wir wollen hier gemäß [2] Konstruktionen mit topologischen Datenbanken demonstrieren. Die Konstruktionen mit relationalen Komplexen sind ganz analog.

9.1 Teilraum

Sei (C,BD) eine topologische Datenbank und C_0 Teilmenge von C, dann heißt mit $\mathrm{BD}|_{C_0} := \mathrm{BD}^+ \cap (C_0 \times C_0)$ (hier meint BD^+ die transitive Hülle von BD) der Ausdruck

$$(C,\mathrm{BD})|_{C_0} := (C_0,\mathrm{BD}|_{C_0})$$

die *toplogische Datenbank des Teilraums* C_0 *von* C.

Bemerkung. *Die Ermittlung der transitiven Hülle* R^+ *einer Relation R ist auch hier notwendig für eine relationale Algebra, die den Teilraum (oder allgemein die Initialtopologie) konstruiert.*

9.2 Topologische Summe

Für zwei topologische Datenbanken (C,BD) und (K,RD) mit C und K bzw. BD und RD vereinigungsverträglich definieren wir die disjunkten Summen:

$$C + K := \{0\}\times C \cup \{1\}\times K$$

$$\mathrm{BD} + \mathrm{RD} := \{((0,a),(0,b)) \mid a\ \mathrm{BD}\ b\,\} \cup \{((1,x),(1,y)) \mid x\ \mathrm{RD}\ y\,\}$$

$$(C,\mathrm{BD}) + (K,\mathrm{RD}) := (C + K,\mathrm{BD} + \mathrm{RD})$$

Dann heißt (C,BD) + (K,RD) := ($C + K$,BD + RD) die *topologische Summe* der Datenbanken (C,BD) und (K,RD).

9.3 Quotientenräume

Sei (C,BD) eine topologische Datenbank, K eine beliebige Menge und $F : C \to K$ eine

Abbildung. Dann ist (K,($F \otimes F$)(BD)) eine topologische Datenbank, für die F stetig ist. Insbesondere ist ($F \otimes F$)(BD)* die minimale transitive und reflexive Relation auf K, mit der F stetig ist (Finaltopologie). Für eine Äquivalenzrelation ~ auf C haben wir die natürliche Abbildung $\boldsymbol{\pi} : C \to C / \sim$. Dann ist ($C$,BD) / ~ := ($C$ / ~,($\boldsymbol{\pi} \otimes \boldsymbol{\pi}$)(BD)) die *topologische Quotientendatenbank* von (C,BD) nach ~.

Ist C Relation einer Datenbank und F die Projektionsabbildung $\boldsymbol{\pi}_{\mathcal{A}}$ auf eine Attributmenge $\mathcal{A}$, dann bezeichnen wir mit

$$(C,\mathrm{BD}) / \mathcal{A} := (C / \mathcal{A}, (\boldsymbol{\pi}_{\mathcal{A}} \otimes \boldsymbol{\pi}_{\mathcal{A}})(\mathrm{BD})),$$

den Quotienten von (C,BD) bezüglich der Attribute in $\mathcal{A}$, als den *topologischen group-by-Operator*. C / $\mathcal{A}$ sind dabei die Urbilder (oder Fasern) von $\boldsymbol{\pi}_{\mathcal{A}}$.

9.4 Verkleben von topologischen Datenbanken.

Für zwei topologische Datenbanken (C,BD) und (K,RB) und eine stetige Abbildung $f : C_0 \to K$ mit $C_0 \subseteq C$ definieren wir die Verklebung durch:

$$(K,\mathrm{RD}) \cup_f (C,\mathrm{BD}) := (C+K,\mathrm{BD}+\mathrm{RD}) / \sim\, = (\boldsymbol{\pi}(C+K),(\boldsymbol{\pi} \otimes \boldsymbol{\pi})(\mathrm{BD}+\mathrm{RD}))$$

Die Konstruktion einer entsprechenden Abfrage in relationaler Algebra ist entsprechend aufwändig aber möglich. Sie verwendet die oben bereits vorgestellten Konstruktionen Summenraum und Quotient.

10 Zusammenfassung

Es wurde ein Konzept vorgestellt, mit dem sich topologische Eigenschaften endlicher Mengen – wie etwa Bauelemente – ohne Einschränkung modellieren lassen. Insbesondere lässt sich jede Datenstruktur für topologische Eigenschaften auf eine der Kategorien DKetKomp oder DTop reduzieren.

Literatur

[1] ALEXANDROFF, Pavel: *Diskrete Räume*. In: Matematiéceskij sbornik 44 (1937) Nr.2, S. 501–519

[2] BRADLEY, Patrick.E., PAUL, Norbert: Using the relational model to capture topological information of spaces. In Vorbereitung.

[3] CODD, Edgar F.: Extending the Database Relational Model to Capture More Meaning. In: *ACM Transactions on Database Systems,* 4 (1979) Nr. 4, S. 397–434

[4] CODD, Edgar F.: *The relational model for database management*: *Version 2.* Reading, Mass. Addison-Wesley, 1990. – XXII

[5] JÄNICH, Klaus: *Topologie.* 7. Auflage, Springer-Lehrbuch. Springer, 2001

[6] MAIER, David: *The Theory of Relational Databases*. Rockville, Maryland. Pitman, 1983

[7] ROTMAN, Joseph J.: *An Introduction to Algebraic Topology.* Springer, 1988