

# Familien von Jacobivarietäten über Origamikurven

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

DOKTORS DER  
NATURWISSENSCHAFTEN

von der Fakultät für Mathematik der  
Universität Karlsruhe (TH)  
genehmigte

DISSERTATION

von

Dipl.-Math. Oliver Bauer  
aus Bruchsal

Tag der mündlichen Prüfung: 11. Februar 2009  
Referent: Prof. Dr. Frank Herrlich  
Korreferent: PD Dr. Martin Möller



# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>3</b>
<b>1 Familien von Kählermannigfaltigkeiten</b>	<b>7</b>
1.1 Der Satz von Ehresmann . . . . .	7
1.2 Lokale Systeme und Monodromie . . . . .	7
1.3 Variationen von Hodge-Strukturen . . . . .	9
1.4 Fixanteile . . . . .	10
1.5 Homologie und Kohomologie . . . . .	12
<b>2 Teichmüllerkurven</b>	<b>15</b>
2.1 Der Teichmüllerraum . . . . .	15
2.2 Teichmüllerkurven . . . . .	16
2.3 Translationsflächen . . . . .	17
2.3.1 Definitionen . . . . .	17
2.3.2 Konstruktion von Teichmüllerkurven . . . . .	18
2.3.3 Klassifikation affiner Diffeomorphismen . . . . .	19
2.3.4 Eine Darstellung der affinen Gruppe . . . . .	21
2.4 Teichmüllerkurven als Familien von Kurven . . . . .	22
2.5 Origamis . . . . .	25
2.5.1 Grundlegendes . . . . .	25
2.5.2 Beispiele . . . . .	27
2.5.3 Die Monodromieaktion . . . . .	29
<b>3 Existenz von Fixanteilen</b>	<b>31</b>
3.1 Ein Kriterium . . . . .	31
3.2 Origamis ohne Fixanteile . . . . .	33
3.2.1 X-Origamis . . . . .	33
3.2.2 L-Origamis . . . . .	36
3.2.3 Stufenorigamis . . . . .	37
3.3 Ein Beispiel mit maximalem Fixanteil . . . . .	39
3.3.1 Erzeuger der Fundamentalgruppe . . . . .	39
3.3.2 Eine Darstellung der Quaternionengruppe . . . . .	41
3.3.3 Zwei Beispiele für zu $\Gamma(4)$ isomorphe Untergruppen . . . . .	41
3.3.4 Die Lifts . . . . .	42
3.4 Das Origami $H_{3,3}$ . . . . .	44

3.5	Das 108er Origami . . . . .	53
<b>4</b>	<b>Ein Exkurs in die algorithmische Gruppentheorie</b>	<b>55</b>
4.1	Erzeuger von Untergruppen endlich erzeugter Gruppen . . . . .	55
4.1.1	Ein Satz von Schreier . . . . .	55
4.1.2	Erzeuger von Fundamentalgruppen von Origamis . . . . .	56
4.2	Konstruktiver Elementtest . . . . .	56
4.2.1	Ein naiver Algorithmus . . . . .	56
4.2.2	Ein Ansatz mit Hilfe endlicher Automaten . . . . .	57
4.3	Vereinfachung von Präsentationen . . . . .	58
<b>A</b>	<b>Rechnungen zum Origami <math>W</math></b>	<b>61</b>
A.1	Lifts der Einheitsmatrix . . . . .	61
A.2	Lifts von $\Gamma(4)$ . . . . .	67
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>78</b>

# Vorwort

Nach einem wohlbekanntem Resultat von Hodge trägt die  $k$ -te deRham Kohomologiegruppe einer kompakten Kähler-Mannigfaltigkeit eine polarisierte Hodge-Struktur vom Gewicht  $k$ .

Hat man eine Familie von kompakten Kähler-Mannigfaltigkeiten über einer zusammenhängenden glatten Basis  $B$ , verkleben sich die  $k$ -ten Kohomologiegruppen zu einem lokalen System auf  $B$ . Die Riemann-Hilbert Korrespondenz besagt, dass dieses lokale System vollständig durch die Monodromieoperation der Fundamentalgruppe  $\pi_1(B, b_0)$  auf der  $k$ -ten Kohomologiegruppe der Faser über  $b_0$  bestimmt ist.

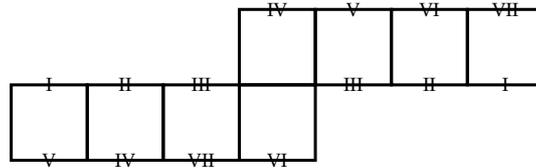
Für eine Familie  $f : \mathfrak{X} \rightarrow B$  kompakter Riemannscher Flächen über einer zusammenhängenden glatten Basis  $B$  verkleben sich die Jacobivarietäten der Fasern von  $f$  zu einer Familie  $h : \text{Jac}(\mathfrak{X}/B) \rightarrow B$  über  $B$ . Eine abelsche Varietät heißt *Fixanteil* von  $h$ , wenn sie in jeder Faser von  $h$  enthalten ist.

Zentral für die vorliegende Arbeit ist der Zusammenhang zwischen Fixanteilen in  $h$  und der Monodromieoperation: Fixanteile in  $h$  entsprechen den Untergruppen von  $H(f^{-1}(b_0), \mathbb{Z})$ , auf denen  $\pi_1(B, b_0)$  trivial operiert.

Das Anliegen der Arbeit ist es, diesen Zusammenhang für spezielle Familien Riemannscher Flächen zu beleuchten, nämlich solcher, die von *Origamis* herkommen. Ein Origami ist eine topologische Fläche vom Geschlecht  $g$ , die entsteht, indem man endlich viele Einheitsquadrate in  $\mathbb{C}$  entlang deren Ränder geeignet verklebt. Ein Origami vom Geschlecht  $g$  definiert eine algebraische Kurve in  $\mathcal{M}_g$ , dem Modulraum kompakter Riemannscher Flächen vom Geschlecht  $g$ . Solch eine Kurve heißt *Origamikurve*.

Origamikurven lassen sich als Familien von Kurven über einer eindimensionalen Basis auffassen, die Quotient der oberen Halbebene  $\mathbb{H}$  nach einer torsionsfreien Untergruppe der *Veechgruppe* des Origamis ist. Das ist eine Untergruppe von endlichem Index in  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ . Die Monodromieoperation für solche Familien ist algorithmisch berechenbar. Diese Tatsache ist der Dissertation [Sch] von Gabriela Schmithüsen zu verdanken, die eine Charakterisierung der Veechgruppen von Origamis angibt mittels gewisser Untergruppen der Automorphismengruppe von  $F_2$ , der freien Gruppe in zwei Erzeugern.

Die Familie, die durch folgendes Origami  $W$  mit acht Quadraten gegeben ist, wurde bereits in den Arbeiten von [HS2] und [Gu] untersucht. Darin wird mit verschiedenen Methoden bewiesen, dass es in der zugehörigen Familie einen Fixanteil der Kodimension 1 gibt. Für dieses Ergebnis wird in Kapitel 3 ein weiterer Beweis angegeben.



*Das Origami W*

In [Ba] wird gezeigt, dass in der Familie, die zu einem speziellen Origami mit 108 Kästchen gehört, ebenfalls ein Fixanteil existiert, ohne dass dessen Dimension angegeben wird. Das wird in Abschnitt 3.5 nachgeholt.

Hauptresultat dieser Arbeit ist Satz 3.1.3, der einen Algorithmus zur Bestimmung einer oberen Schranke für den Fixanteil in Familien von Riemannschen Flächen angibt, die von Origamikurven herkommen. Die Anwendung dieses Algorithmus auf eine ganze Reihe von Origamikurven führt zu der Erkenntnis, dass Fixanteile positiver Dimension offenbar sehr selten sind. Es konnten bislang nur nichttriviale Fixanteile in Familien gefunden werden, die zu *charakteristischen Origamis* gehören. Solche Origamis haben die ganze  $SL_2(\mathbb{Z})$  als Veechgruppe. Wie Schmithüsen [Sch] zeigt, ist das nur eine sehr spezielle Klasse von Origamis.

Auch für Familien, die von solchen charakteristischen Origamis herkommen, gibt es keineswegs immer einen Fixanteil positiver Dimension, was man aufgrund des hohen Maßes an Symmetrie, das diese Origamis besitzen, möglicherweise erwarten könnte. In Kapitel 3 wird ein Gegenbeispiel vorgestellt.

Zur Gliederung dieser Arbeit:

In Kapitel 1 wird der oben erwähnte Zusammenhang zwischen der Monodromieoperation und Fixanteilen in Familien von Jacobivarietäten erläutert, sowie einige grundlegende Methoden für den Rest der Arbeit vorgestellt.

In Kapitel 2 werden Origamikurven als spezielle *Teichmüllerkurven* definiert. Außerdem wird gezeigt, wie man diese als Familien Riemannscher Flächen auffassen kann, und wie man die Monodromieoperation für solche Familien algorithmisch berechnen kann.

Kapitel 3 enthält die Hauptresultate der Arbeit. Es enthält einen Algorithmus, mit dem man eine obere Schranke für die Dimension des Fixanteils in der Familie von Jacobivarietäten über einer Teichmüllerkurve bestimmen kann, sowie eine ganze Reihe von Beispielen, die die volle Macht dieses Algorithmus demonstrieren.

In Kapitel 4 werden Methoden aus der algorithmischen Gruppentheorie vorgestellt, die in den Rechnungen in dieser Arbeit Verwendung finden, meist ohne dass dies an den entsprechenden Stellen kenntlich gemacht wird.

In den Anhang sind die Details einiger Rechnungen ausgelagert um es dem Leser zu erleichtern, den roten Faden im Text nicht zu verlieren.

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die mich bei meinem Promotionsprojekt unterstützt haben.

In erster Linie gilt mein Dank meinem Betreuer Prof. Dr. Frank Herrlich, der mein Promotionsvorhaben erst ermöglicht hat. Seine uneingeschränkte Unterstützung meiner Arbeit und seine ständige Diskussionsbereitschaft weiß ich besonders zu schätzen.

Dr. Martin Möller danke ich für die vielen Diskussionen und die Ideen, die er mir gegeben hat.

Bei Dr. Gabriela Schmithüsen bedanke ich mich dafür, dass sie mir mit ihrem Expertenwissen über Origamis und Translationsflächen stets zur Seite gestanden hat.

Karsten Kremer danke ich für seine Hilfe bei so manchem Programmierproblem.

Ute Wolf, Thomas Willging und Nadine Castellano danke ich dafür, dass sie unfertige Teile dieser Arbeit gründlich Korrektur gelesen haben. Mein Dank geht auch an Fabian Januszewski, der mir die Angst vor der leeren Seite genommen hat.

Allen Teilnehmern an der „Kaffeerunde“ der Arbeitsgruppe Zahlentheorie und Algebraische Geometrie danke ich für die anregenden Diskussionen während meines gesamten Promotionsprojektes.

Mein besonderer Dank gilt meiner Familie, insbesondere meinen Eltern, die mich während meines gesamten Studiums und meiner Promotion stets nach Kräften unterstützt haben.



# Kapitel 1

## Familien von Kählermannigfaltigkeiten

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit Familien  $\mathfrak{X} \rightarrow B$  von kompakten Kählermannigfaltigkeiten über einer eindimensionalen Basis  $B$ . Es wird die zugehörige Familie  $\text{Jac}(\mathfrak{X}/B)$  von Jacobivarietäten über  $B$  betrachtet und ein Zusammenhang zwischen der Monodromieoperation von  $\pi_1(B, 0)$  auf der Homologie der Faser über  $0 \in B$  und Fixanteilen in  $\text{Jac}(\mathfrak{X}/B)$  hergestellt.

### 1.1 Der Satz von Ehresmann

**Definition 1.1.1.** Seien  $\mathfrak{X}$  und  $B$  komplexe Mannigfaltigkeiten. Eine Abbildung  $\phi : \mathfrak{X} \rightarrow B$  heißt *Familie von komplexen Mannigfaltigkeiten*, wenn  $\phi$  eine eigentliche holomorphe Submersion ist.

Zentral ist der folgende

**Satz 1.1.2** (Ehresmann). *Sei  $\phi : \mathfrak{X} \rightarrow B$  eine Familie von komplexen Mannigfaltigkeiten, wobei  $B$  kontrahierbar ist. Weiter seien  $0 \in B$  und  $X_0 := \phi^{-1}(0)$ . Dann existiert ein Diffeomorphismus  $T : \mathfrak{X} \rightarrow X_0 \times B$ , sodass gilt:  $\text{pr}_2 \circ T = \phi$ .*

*Beweis.* Siehe [Vo1, Theorem 9.3]. □

### 1.2 Lokale Systeme und Monodromie

**Definition 1.2.1.** Sei  $X$  ein topologischer Raum. Ein *lokales System* über  $X$  ist eine Garbe abelscher Gruppen  $\mathcal{G}$ , die lokal isomorph zu einer konstanten Garbe mit Halm  $G$  ist, wobei  $G$  eine abelsche Gruppe ist.

**Beispiel 1.2.2.** Sei  $\phi : \mathfrak{X} \rightarrow B$  eine Familie von komplexen Mannigfaltigkeiten und  $A$  eine abelsche Gruppe. Dann ist die Garbe  $R^k \phi_* A_{\mathfrak{X}}$  für jedes  $k \geq 0$  ein lokales System, das in einer Umgebung von  $b \in B$  lokal isomorph zur konstanten Garbe mit Halm  $H^k(X_b, A)$  ist. Dabei bezeichne  $A_{\mathfrak{X}}$  die konstante Garbe mit Halm  $A$  auf  $\mathfrak{X}$ .

**Proposition 1.2.3.** *Sei  $X$  ein zusammenhängender, lokal wegzusammenhängender und lokal einfach zusammenhängender topologischer Raum und  $x \in X$ . Weiter sei  $G$  eine*

abelsche Gruppe. Dann gibt es eine Bijektion zwischen der Menge der Darstellungen  $\pi_1(X, x) \rightarrow \text{Aut}(G)$  und der Menge der Paare  $(\mathcal{G}, \alpha)$ , wo  $\mathcal{G}$  ein lokales System auf  $X$  und  $\alpha$  ein Isomorphismus zwischen  $\mathcal{G}_x$  und  $G$  ist.

*Beweis.* Siehe [Vo2, Remark 3.11]. □

**Proposition 1.2.4.** *Sei  $X$  eine komplexe Mannigfaltigkeit. Dann gibt es eine Bijektion zwischen der Menge der lokalen Systeme auf  $X$  und der Menge der Paare  $(\mathcal{F}, \nabla)$ , wo  $\mathcal{F}$  lokal freie Garbe auf  $X$ , und  $\nabla$  ein flacher Zusammenhang auf  $\mathcal{F}$  ist.*

*Beweis.* Siehe [Vo1, Proposition 9.11]. □

**Definition 1.2.5.** Sei  $X$  ein zusammenhängender, lokal wegzusammenhängender und lokal einfach zusammenhängender topologischer Raum und  $x \in X$ . Weiter sei  $\mathcal{G}$  ein lokales System auf  $X$ . Dann heißt die zugehörige Darstellung  $\rho : \pi_1(X, x) \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{G}_x)$  aus Proposition 1.2.3 *Monodromiedarstellung von  $\pi_1(X, x)$* .

Wir interessieren uns hauptsächlich für lokale Systeme wie in Beispiel 1.2.2. In diesem Fall haben wir:

**Proposition 1.2.6.** *Mit der Notation aus Beispiel 1.2.2 gilt: Die Monodromiedarstellung*

$$\rho : \pi_1(B, b) \rightarrow \text{Aut}(H^k(X_b, A))$$

*wird induziert von einem Homöomorphismus der Faser  $X_b := \phi^{-1}(b)$ .*

*Beweis.* Wir wollen kurz den Beweis von [Vo2, Section 3.1.2] skizzieren.

Sei  $\gamma : [0, 1] \rightarrow B$  ein geschlossener Weg in  $B$  mit Startpunkt  $b$ . Es sei  $\mathfrak{X}_\gamma$  das Faserprodukt

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}_\gamma & \longrightarrow & \mathfrak{X} \\ \downarrow \phi_\gamma & & \downarrow \phi \\ [0, 1] & \xrightarrow{\gamma} & B. \end{array}$$

Nach dem Satz von Ehresmann 1.1.2 ist  $\phi : \mathfrak{X} \rightarrow B$  lokal trivial, wir können also  $\mathfrak{X}_\gamma$  trivialisieren, indem wir die lokalen Trivialisierungen über Segmenten  $[\epsilon_i, \epsilon_{i+1}]$  verkleben. Wir erhalten eine Trivialisierung

$$T = (T_0, \phi_\gamma) : \mathfrak{X}_\gamma \cong \phi_\gamma^{-1}(0) \times [0, 1].$$

Diese induziert einen Homöomorphismus

$$\psi = T_0 : \phi_\gamma^{-1}(0) \cong \phi_\gamma^{-1}(1).$$

Dieser Homöomorphismus induziert die Monodromiedarstellung. □

## 1.3 Variationen von Hodge-Strukturen

Sei  $X$  eine kompakte Kählermannigfaltigkeit,  $A_{\mathbb{C}}^k(X)$  bezeichne den komplexen Vektorraum der komplexen Differentialformen vom Grad  $k$  auf  $X$ . Die  $k$ -te deRham Kohomologiegruppe ist dann definiert als:

$$H^k(X, \mathbb{C}) := \frac{\text{Kern}(d : A_{\mathbb{C}}^k(X) \rightarrow A_{\mathbb{C}}^{k+1}(X))}{\text{Bild}(d : A_{\mathbb{C}}^{k-1}(X) \rightarrow A_{\mathbb{C}}^k(X))},$$

wobei  $d : A_{\mathbb{C}}^k(X) \rightarrow A_{\mathbb{C}}^{k+1}(X)$  das äußere Differential bezeichne.

**Satz 1.3.1.** *Es existiert eine Zerlegung:*

$$H^k(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X).$$

Dabei gilt:

$$H^{p,q}(X) = \overline{H^{q,p}(X)}.$$

*Beweis.* Siehe [Vo1, Section 6.1]. □

Obige Zerlegung heißt *Hodge-Zerlegung*. Das motiviert die folgende

**Definition 1.3.2.** Eine *Hodge-Struktur von Gewicht  $k$*  ist gegeben durch einen endlich erzeugten freien  $\mathbb{Z}$ -Modul  $V_{\mathbb{Z}}$  zusammen mit einer Zerlegung

$$V_{\mathbb{C}} := V_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=k} V^{p,q},$$

wobei  $V^{p,q} = \overline{V^{q,p}}$ .

Zu solch einer Hodge-Struktur definiert man die Hodge-Filtrierung  $F^{\bullet}V$  durch:

$$F^p V_{\mathbb{C}} := \bigoplus_{r \geq p} V^{r, k-r}.$$

**Lemma 1.3.3.** *Es gelten:*

- $\dots \supseteq F^p V_{\mathbb{C}} \supseteq F^{p+1} V_{\mathbb{C}} \supseteq \dots$ ,
- $V_{\mathbb{C}} = F^p V_{\mathbb{C}} \oplus \overline{F^{k-p+1} V_{\mathbb{C}}}$ ,
- $V^{p,q} = F^p V_{\mathbb{C}} \cap \overline{F^q V_{\mathbb{C}}} \subseteq V_{\mathbb{C}}$ .

*Beweis.* Siehe [Vo1, Section 7.1.1] □

**Definition 1.3.4.** Eine *polarisierte Hodge-Struktur* von Gewicht  $k$  ist gegeben durch eine Hodge-Struktur  $(V_{\mathbb{Z}}, F^p V_{\mathbb{C}})$  vom Gewicht  $k$  zusammen mit einer Bilinearform

$$Q : V_{\mathbb{Z}} \times V_{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{Z},$$

die symmetrisch ist, falls  $k$  gerade, und alternierend, falls  $k$  ungerade, und die die folgenden beiden Hodge-Riemann Relationen erfüllt:

- (a)  $Q(V^{p,q}, V^{p',q'}) = 0$  außer wenn  $p' = k - p$  und  $q' = k - q$ ,
- (b)  $i^{p-q}Q(\psi, \bar{\psi}) > 0$  für jedes  $\psi \in V^{p,q} \setminus \{0\}$ .

**Definition 1.3.5.** Sei  $S$  eine komplexe Mannigfaltigkeit. Eine *Variation von Hodge-Strukturen vom Gewicht  $k$  auf  $S$*  besteht aus:

- (a) einem lokalen System  $\mathbb{V}_{\mathbb{Z}}$  endlich erzeugter freier abelscher Gruppen auf  $S$ ,
- (b) einer endlichen absteigenden Filtrierung  $\{\mathcal{F}^p\}$  des holomorphen Vektorbündels  $\mathcal{V} := \mathbb{V}_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_S$  durch holomorphe Unterbündel.

Diese Daten müssen die folgenden Eigenschaften erfüllen:

- (a) Für jedes  $s \in S$  definiert die Filtrierung  $\{\mathcal{F}^p\}$  von  $\mathbb{V}(s) \cong \mathbb{V}_{\mathbb{Z},s} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$  eine Hodge-Struktur vom Gewicht  $k$  auf der endlich erzeugten abelschen Gruppe  $\mathbb{V}_{\mathbb{Z},s}$ .
- (b) Der Gauß-Manin Zusammenhang  $\nabla : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V} \otimes_{\mathcal{O}_S} \Omega_S^1$ , definiert wie in [Vo1, Section 9.2], erfüllt die Transversalitätsbedingung von Griffiths

$$\nabla(\mathcal{F}^p) \subseteq \mathcal{F}^{p-1} \otimes \Omega_S^1.$$

**Satz 1.3.6.** Sei  $(\mathbb{V}_{\mathbb{Z}}, \{\mathcal{F}^p\})$  eine Variation von Hodge-Strukturen über einer algebraischen Kurve  $C$ . Das lokale System  $\mathbb{V}_{\mathbb{C}}$  zerfällt als

$$\mathbb{V}_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{i=0}^n (\mathbb{L}_i \otimes W_i),$$

wobei  $\mathbb{L}_i$  paarweise nicht isomorphe irreduzible lokale Systeme auf  $C$  sind und  $W_i$  komplexe Vektorräume der Dimension  $> 0$ . Darüber hinaus tragen die  $\mathbb{L}_i$  und die  $W_i$  polarisierte Variationen von Hodge-Strukturen, deren Tensorprodukt und Summe die Hodge-Struktur auf  $\mathbb{V}_{\mathbb{C}}$  liefert. Die Hodge-Strukturen auf den  $\mathbb{L}_i$  und den  $W_i$  sind eindeutig bis auf einen Shift der Bigraduierungen.

*Beweis.* Siehe [De2, Proposition 1.13] bzw. [Moe, Theorem 2.1]. □

**Beispiel 1.3.7.** Sei  $f : \mathfrak{X} \rightarrow B$  eine Familie von Kählermannigfaltigkeiten, dann verkleben sich nach Beispiel 1.2.2 die  $H^k(X_b, A)$  zu einem lokalen System auf  $B$ . Nach einem fundamentalen Resultat von Griffiths liefert dieses lokale System eine Variation von Hodge-Strukturen auf  $B$ , so dass die Hodge-Struktur bei  $b$  gerade die Hodge-Struktur auf  $H^k(X_b, A)$  aus Satz 1.3.1 ist.

## 1.4 Fixanteile

Es sei  $f : \mathfrak{X} \rightarrow C$  eine Familie glatter Kurven vom Geschlecht  $g$  über einer algebraischen Kurve  $C$ .

**Satz 1.4.1.** *Es existiert eine Familie  $h : \text{Jac}(\mathfrak{X}/C) \rightarrow C$  über  $C$ , sodass für die Jacobische  $\text{Jac}(X_t)$  der Faser  $f^{-1}(t) =: X_t$  über  $t \in C$  gilt:*

$$h^{-1}(t) \cong \text{Jac}(X_t) \cong H^1(X_t, \mathcal{O}_{X_t})/H^1(X_t, \mathbb{Z}),$$

und die Garbe der holomorphen Schnitte von  $h$  ist  $R^1 f_* \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/R^1 f_* \mathbb{Z}$ .

*Beweis.* Wir wollen hier nur eine kurze Beweisskizze geben, der Beweis geht auf Kodaira (siehe [Ko]) zurück.

Aus der Exponentialsequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}^* \longrightarrow 0$$

erhalten wir eine Einbettung  $R^1 f_* \mathbb{Z} \hookrightarrow R^1 f_* \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ .

Es gilt:  $R^1 f_* \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  ist lokal frei vom Rang  $g$ . Also entspricht  $R^1 f_* \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  einem Vektorbündel  $L$  auf  $C$ .

Wir definieren  $\text{Jac}(\mathfrak{X}/C) := L/E$ , wobei  $E$  das Gitter in  $L$  bezeichne, das  $R^1 f_* \mathbb{Z}$  entspricht. Das ist die gesuchte Familie. □

**Definition 1.4.2.** Eine abelsche Varietät  $A$  heißt *Fixanteil* von  $h$ , wenn eine Einbettung  $i : A \times C \hookrightarrow \text{Jac}(\mathfrak{X}/C)$  existiert.

**Satz 1.4.3.** *Fixanteile in  $\text{Jac}(\mathfrak{X}/C)$  entsprechen trivialen Untersystemen von  $R^1 f_* \mathbb{Z}$ .*

*Beweis.* Sei  $A$  Fixanteil in  $\text{Jac}(\mathfrak{X}/C)$  und  $A = V/\Lambda$  eine Uniformisierung (d.h.  $V$  ist ein komplexer Vektorraum und  $\Lambda$  Gitter in  $V$ ).

Es seien  $V_C$  und  $\Lambda_C$  die konstanten Garben zu  $V$  bzw.  $\Lambda$  auf  $C$ .

Dann ist  $V_C/\Lambda_C$  die Garbe der holomorphen Schnitte von  $A \times C$ .

Wir erhalten das kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} V_C & \hookrightarrow & R^1 f_* \mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \Lambda_C & \hookrightarrow & R^1 f_* \mathbb{Z} \end{array}$$

Also hat  $R^1 f_* \mathbb{Z}$  ein triviales Untersystem vom Rang  $2 \dim(A)$ .

Sei umgekehrt  $\Lambda_C \hookrightarrow R^1 f_* \mathbb{Z}$  triviales Untersystem.

Wir suchen eine konstante Garbe  $V_C$  über  $C$ , so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} V_C & \hookrightarrow & R^1 f_* \mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \Lambda_C & \hookrightarrow & R^1 f_* \mathbb{Z} \end{array}$$

Dann ist  $A := V/\Lambda$  ein Fixanteil in  $\text{Jac}(\mathfrak{X}/C)$ .

Die Existenz solch einer Garbe liefert Satz 1.3.6. Tensoriert man nämlich  $R^1 f_* \mathbb{Z}$  mit  $\mathbb{C}$ , so erhält man nach Satz 1.3.6 eine Zerlegung

$$R^1 f_* \mathbb{C} = R^1 f_* \mathbb{Z} \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{i=0}^n (\mathbb{L}_i \otimes W_i).$$

Da  $R^1 f_* \mathbb{Z}$  irreduzibel ist, muss es ein  $i \in \{1, \dots, n\}$  geben, sodass das Bild von  $R^1 f_* \mathbb{Z}$  in  $\mathbb{L}_i$  enthalten ist. Setzen wir  $V_C := \mathbb{L}_i$ , ist das die gesuchte Garbe.  $\square$

## 1.5 Homologie und Kohomologie

In diesem Abschnitt bezeichne stets  $X$  ein zusammenhängender simplizialer Komplex, und  $H_k(X, \mathbb{Z})$  die  $k$ -te singuläre Homologiegruppe von  $X$ .

**Satz 1.5.1.** *Ist  $X$  wegzusammenhängend, so gilt*

$$H_1(X, \mathbb{Z}) \cong \pi_1(X) / [\pi_1(X), \pi_1(X)].$$

*Beweis.* Siehe [Ha, Theorem 2A.1].  $\square$

**Satz 1.5.2.** *Es sei  $\mathbb{Z}_X$  die konstante Garbe mit Halm  $\mathbb{Z}$  auf  $X$  und  $H^k(X, \mathbb{Z})$  die  $k$ -te singuläre Kohomologiegruppe mit Koeffizienten in  $\mathbb{Z}$ . Ist  $X$  kompakt und lokal zusammenziehbar, so gilt*

$$H^k(X, \mathbb{Z}) \cong H^k(X, \mathbb{Z}_X).$$

*Beweis.* Siehe [Har, Chapter III].  $\square$

**Satz 1.5.3.** *Es gilt*

$$H^1(X, \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(H_1(X, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}).$$

*Beweis.* Siehe [Ha, Section 3.1].  $\square$

**Satz 1.5.4.** *Seien  $X$  und  $Y$  simpliziale Komplexe. Dann induziert eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  das folgende kommutative Diagramm*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^1(X, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\sim} & \text{Hom}(H_1(X, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow f^* & & \uparrow (f_*)^* & & \\ 0 & \longrightarrow & H^1(Y, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\sim} & \text{Hom}(H_1(Y, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

*Es gilt also*

$$h \circ f^* = (f_*)^* \circ h.$$

*Kurz gesagt,  $f_*$  ist die duale Abbildung zu  $f^*$ .*

*Beweis.* Siehe [Ha, Section 3.1].  $\square$

Ist  $X = Y$  in Satz 1.5.4 und setzt man  $f_*$  und  $(f_*)^*$  auf  $H^1(X, \mathbb{C})$  bzw.  $\text{Hom}(H_1(X, \mathbb{C}), \mathbb{C})$  fort, so gilt:

- $\text{Spek}(f_*) = \text{Spek}((f_*)^*)$  und
- $\forall \lambda \in \text{Spek}(f_*) : \dim(\text{Eig}(f_*, \lambda)) = \dim(\text{Eig}((f_*)^*), \lambda)$ .

Wir werden daher nicht weiter zwischen  $H^1$  und  $H_1$  unterscheiden.

**Satz 1.5.5.** *Sei  $f : X \rightarrow X$  eine stetige Abbildung. Die Lefschetzzahl  $\Lambda_f$  sei definiert als*

$$\Lambda_f := \sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^k \text{Spur}(f_* : H_k(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H_k(X, \mathbb{Z})).$$

Dann gilt:

- (a) *Ist  $\Lambda_f \neq 0$ , so hat  $f$  mindestens einen Fixpunkt.*
- (b) *Wenn  $f$  nur endlich viele Fixpunkte hat, so gilt*

$$\Lambda_f = \sum_{x \in \text{Fix}(f)} i(f, x),$$

*wobei  $\text{Fix}(f)$  die Menge der Fixpunkte von  $f$  und  $i(f, x)$  den Fixpunktindex von  $x$  bezeichne.*

*Beweis.* Siehe [GD, Chapter 5, §16].

□



# Kapitel 2

## Teichmüllerkurven

In diesem Kapitel werden Origamikurven als spezielle Teichmüllerkurven eingeführt und erklärt, wie man diese als Familien von glatten Kurven über einer eindimensionalen Basis auffassen kann, und wie man für diese Familien die Monodromieaktion aus Proposition 2.5.3 algorithmisch berechnen kann.

### 2.1 Der Teichmüllerraum

Es gibt mehr als eine Möglichkeit, den Teichmüllerraum  $\mathcal{T}_g$  zu definieren. In diesem Abschnitt wollen wir daher die in der Folge gebrauchte Sichtweise darstellen. Einen guten Einstieg in die Teichmüllertheorie bietet [IT]. Soweit nicht anders angegeben, finden sich dort auch die Beweise für die zitierten Aussagen.

Sei  $S$  eine fest gewählte kompakte Fläche vom Geschlecht  $g$ . Wir betrachten Paare  $(X, f)$ , wo  $X$  eine geschlossene Riemannsche Fläche und  $f : S \rightarrow X$  ein orientierungstreuer Diffeomorphismus ist. Das Paar  $(X, f)$  heißt *markierte Riemannsche Fläche*. Zwei solche Paare  $(X, f)$  und  $(X', g)$  heißen *äquivalent*, falls  $g \circ f^{-1} : X \rightarrow X'$  homotop zu einer biholomorphen Abbildung  $h : X \rightarrow X'$  ist.

**Definition 2.1.1.** Die Menge

$$\mathcal{T}(S) := \{(X, f) \mid X \text{ Riemannsche Fläche, } f : S \rightarrow X \text{ wie oben}\} / \sim$$

heißt *Teichmüllerraum von  $S$*  oder *Teichmüllerraum mit Referenzfläche  $S$* .

**Bemerkung und Definition 2.1.2.** *Es gilt:*

- (a) *Der Teichmüllerraum  $\mathcal{T}(S)$  trägt eine Struktur als komplexe Mannigfaltigkeit. Hat  $S$  Geschlecht  $g \geq 2$ , so ist  $\dim(\mathcal{T}(S)) = 3g - 3$ .*
- (b) *Es sei  $S'$  eine weitere kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht  $g$ . Dann sind die Teichmüllerräume  $\mathcal{T}(S)$  und  $\mathcal{T}(S')$  isomorph als komplexe Mannigfaltigkeiten.*
- (c) *Wir definieren  $\mathcal{T}_g := \mathcal{T}(S)$ . Man nennt  $\mathcal{T}_g$  den Teichmüllerraum von Riemannschen Flächen vom Geschlecht  $g$ .*

- (d) Ist  $g \geq 1$ , kann man den Teichmüllerraum  $\mathcal{T}_g$  mit der sogenannten Teichmüllermetrik versehen, mit der  $\mathcal{T}_g$  zu einem vollständigen metrischen Raum wird.

*Beweis.* Siehe [IT, Theorem 6.18]. □

Analog definiert man den Teichmüllerraum  $\mathcal{T}_{g,n}$  von Riemannschen Flächen vom Geschlecht  $g$  mit  $n$  markierten Punkten.

**Definition 2.1.3.** Sei  $S$  kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht  $g$  mit  $n$  markierten Punkten. Weiter seien  $\text{Diff}^+(S)$  die Gruppe der orientierungserhaltenden Diffeomorphismen auf  $S$ , die die markierten Punkte festlassen, und  $\text{Diff}^0(S)$  die Untergruppe der Diffeomorphismen, die homotop zur Identität auf  $S$  sind. Dann ist  $\text{Diff}^0(S)$  ein Normalteiler von  $\text{Diff}^+(S)$  und

$$\Gamma_{g,n} := \Gamma(S) := \text{Diff}^+(S) / \text{Diff}^0(S)$$

heißt *Abbildungsklassengruppe* oder *Teichmüller-Modulgruppe*.

$\Gamma(S)$  operiert auf  $\mathcal{T}(S)$  folgendermaßen: Ist  $[X, f] \in \mathcal{T}(S)$  und  $g \in \Gamma(S)$ , dann ist

$$g \cdot [X, f] := [X, f \circ g^{-1}].$$

Es gelten:

**Satz 2.1.4.** Die Aktion von  $\Gamma(S)$  auf  $\mathcal{T}(S)$  ist eigentlich diskontinuierlich, und es gilt

$$\mathcal{M}_{g,n} = \mathcal{T}(S) / \Gamma(S).$$

Dabei bezeichne  $\mathcal{M}_{g,n}$  den Modulraum der  $n$ -fach punktierten Kurven vom Geschlecht  $g$ .

*Beweis.* Siehe [IT, Theorem 6.18]. □

**Satz 2.1.5.**  $\Gamma(S)$  operiert auf  $\mathcal{T}(S)$  durch Isometrien bezüglich der Teichmüllermetrik.

*Beweis.* Siehe [IT, Theorem 6.18]. □

## 2.2 Teichmüllerkurven

In diesem Abschnitt werden Teichmüllereinbettungen und Teichmüllerkurven definiert und erste Eigenschaften vorgestellt.

**Definition 2.2.1.** Sei  $3g - 3 + n > 0$ .

- (a) Es sei  $\iota : \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{T}_{g,n}$  holomorphe isometrische Einbettung bezüglich der hyperbolischen Metrik auf  $\mathbb{H}$  und der Teichmüllermetrik auf  $\mathcal{T}_{g,n}$ . Dann heißt  $\iota : \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{T}_{g,n}$  *Teichmüllereinbettung* und  $\Delta := \iota(\mathbb{H})$  *Teichmüllerkreisscheibe*.
- (b) Es sei  $\Delta$  eine Teichmüllerkreisscheibe und  $C$  das Bild von  $\Delta$  unter der natürlichen Projektion  $\mathcal{T}_{g,n} \rightarrow \mathcal{M}_{g,n}$ . Ist  $C$  eine algebraische Kurve in  $\mathcal{M}_{g,n}$ , so heißt  $C$  *Teichmüllerkurve*.

Sei  $\Delta$  eine Teichmüllerkreisscheibe. Seien weiter

$$S(\Delta) := \text{Stab}_{\Gamma(S)}(\Delta) := \{\phi \in \Gamma(S) \mid \phi(\Delta) = \Delta\} \subseteq \Gamma_{g,n}$$

der Stabilisator von  $\Delta$  und  $H(\Delta)$  der punktweise Stabilisator, es gilt also  $H(\Delta) \leq S(\Delta)$ . Wir setzen  $\Gamma(\Delta) := S(\Delta)/H(\Delta)$  und erhalten die exakte Sequenz

$$1 \longrightarrow H(\Delta) \longrightarrow S(\Delta) \longrightarrow \Gamma(\Delta) \longrightarrow 1.$$

**Proposition 2.2.2.** *Es existiert eine kanonische Einbettung*

$$\mu : \Gamma(\Delta) \hookrightarrow \text{PSL}_2(\mathbb{R}).$$

Das Bild  $\mu(\Gamma(\Delta))$  von  $\Gamma(\Delta)$  ist eine diskrete Untergruppe von  $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ .

*Beweis.* Siehe [Lo, Proposition 2.8]. □

In der Folge identifizieren wir  $\mu(\Gamma(\Delta))$  mit  $\Gamma(\Delta)$ . Sind Verwechslungen ausgeschlossen, schreiben wir oft auch einfach  $\Gamma$  statt  $\Gamma(\Delta)$ .

**Satz 2.2.3.** *Es gilt*

- (a) *Die kanonische Projektion  $\pi : \Delta \rightarrow \mathcal{M}_g$  in den Modulraum der Kurven vom Geschlecht  $g$  faktorisiert über  $\Delta/\Gamma(\Delta) \cong \mathbb{H}/\Gamma = \mathbb{H}/\mu(\Gamma(\Delta))$ .*
- (b)  *$C := \pi(\Delta)$  ist genau dann eine algebraische Kurve, wenn  $\Gamma(\Delta)$  ein Gitter in  $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$  ist, d.h. eine diskrete Untergruppe von endlichem Kovolumen. In diesem Fall ist  $\Delta/\Gamma(\Delta)$  die Normalisierung von  $C$ .*

*Beweis.* Siehe [Lo, S. 9]. □

## 2.3 Translationsflächen

In diesem Abschnitt wird die Konstruktion von Teichmüllerkurven über die Deformation der Translationsstruktur von Translationsflächen beschrieben. Danach beschreiben wir die Nielsen-Thurston Klassifikation von affinen Diffeomorphismen von Translationsflächen.

### 2.3.1 Definitionen

**Definition 2.3.1.**

- (a) Sei  $X$  eine topologische Fläche. Eine *Translationsstruktur*  $\mu$  auf  $X$  ist festgelegt durch einen Atlas  $(V, \phi)$ , wobei  $V = (V_i)_{i \in I}$  eine offene Überdeckung von  $X$  ist, und für die Karten  $\phi_i : V_i \rightarrow \mathbb{R}^2$  gilt, dass die Übergangsfunktionen

$$\phi_{ij} = \phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(V_i \cap V_j) \longrightarrow \phi_j(V_i \cap V_j)$$

von der Form  $\phi_{ij}(z_i) = z_i + c_{ij}$  mit Konstanten  $c_{ij}$  sind. Das Paar  $(X, \mu)$  heißt *Translationsfläche*.

- (b) Seien  $(X, \mu)$  und  $(Y, \nu)$  Translationsflächen und  $f : X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung. Dann heißt  $f$  *affin bezüglich  $\mu$  und  $\nu$* , wenn  $f$  lokal eine affine Abbildung des  $\mathbb{R}^2$  ist. Das heißt genauer: Seien  $(U, \phi) \in \mu$  und  $(V, \psi) \in \nu$ , mit  $f(U) \subseteq V$ , dann existiert für jedes  $z_0 \in \phi(U)$  eine offene Umgebung  $W \subseteq \phi(U)$  von  $z_0$  und eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , sodass  $\psi \circ f \circ \phi^{-1}|_W$  eine Abbildung der Form  $z \mapsto Az + b$  ist.

**Definition und Bemerkung 2.3.2.**

- (a) Sei  $X$  eine Riemannsche Fläche und  $\mu$  eine Translationsstruktur auf  $X^* := X \setminus M$  mit einer endlichen Teilmenge  $M \subseteq X$ . Dann heißt

$$\text{Aff}^+(X, \mu) := \{f \in \text{Diff}^+(X) \mid f|_{X^*} \text{ affin bezüglich } \mu\}$$

affine Gruppe von  $X$  bezüglich  $\mu$ . Dabei bezeichne  $\text{Diff}^+(X)$  die Menge der orientierungstreuen Diffeomorphismen auf  $X$ . Lokal auf  $X^*$  ist also jedes  $f \in \text{Aff}^+(X, \mu)$  gegeben durch  $z \mapsto Az + b$  mit  $A \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$  und  $b \in \mathbb{R}^2$ .

- (b) Die Matrix  $A$  aus (a) hängt nur von  $f$  ab und ist auf allen lokalen Karten dieselbe. Wir erhalten also eine wohldefinierte Abbildung

$$\begin{aligned} \text{der} : \text{Aff}^+(X, \mu) &\longrightarrow \text{SL}_2(\mathbb{R}) \\ f &\longmapsto A \end{aligned}$$

- (c) Die Abbildung  $\text{der}$  ist ein Gruppenhomomorphismus.

- (d) Das Bild  $\Gamma(X, \mu)$  von  $\text{Aff}^+(X, \mu)$  unter  $\text{der}$  heißt Veechgruppe von  $(X, \mu)$ .

*Beweis.* Siehe [Ve, S.557]. □

**Proposition 2.3.3.** *Es bezeichne  $\text{Trans}(X, \mu)$  den Kern der Abbildung  $\text{der}$ . Dann ist  $\text{Trans}(X, \mu)$  endlich.*

*Beweis.* Siehe [Ve, Proposition 2.2]. □

**Definition 2.3.4.** Die Elemente von  $\text{Trans}(X, \mu)$  heißen *Translationen*.

### 2.3.2 Konstruktion von Teichmüllerkurven

Es sei  $(X, \mu)$  eine Translationsfläche. Dabei sei  $X$  eine kompakte Fläche vom Geschlecht  $g$ .

Wir definieren eine Operation von  $\text{SL}_2(\mathbb{R})$  auf der Menge der Translationsstrukturen auf  $X$  indem wir für jedes  $B \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$  die Kartenabbildungen mit der Abbildung  $z \mapsto Bz$  verketten. So erhalten wir für  $B \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$  die Translationsfläche  $(X, \mu_B)$ , wobei  $\mu_B := B \cdot \mu$ . Das liefert den Punkt  $P_B := [(X, \mu_B), \text{id} : (X, \mu) \rightarrow (X, \mu_B)] \in \mathcal{T}(X)$ . Wir definieren nun die Abbildung  $\hat{i}$  durch

$$\begin{aligned} \hat{i} : \text{SL}_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{T}(X) \\ B &\longmapsto P_B. \end{aligned}$$

Ist  $B \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ , so sind  $(X, B \cdot \mu)$  und  $(X, \mu)$  konform äquivalent. Das liefert die Abbildung

$$\begin{aligned} \iota : \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{T}(X) \\ B \cdot \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) &\longmapsto P_B. \end{aligned}$$

Wegen  $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{H}$  haben wir eine Abbildung  $\iota : \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{T}(X)$  konstruiert.

Es gilt

**Proposition 2.3.5.** *Die Abbildung  $\iota : \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{T}(X)$  ist eine Teichmüllereinbettung.*

*Beweis.* Siehe [HS1, Proposition 2.8]. □

### 2.3.3 Klassifikation affiner Diffeomorphismen

Es sei  $S$  eine kompakte Riemannsche Fläche und  $\Gamma(S)$  die zugehörige Abbildungsklassengruppe. Wir erinnern zunächst an die berühmte Klassifikation der Elemente aus  $\Gamma(S)$ . Dazu beschreiben wir drei Typen von Elementen aus  $\Gamma(S)$  und zitieren den Satz von Nielsen-Thurston, der besagt, dass jedes  $f \in \Gamma(S)$  einem dieser Typen zugeordnet werden kann.

**Definition 2.3.6.** Ein Element  $\phi \in \Gamma(S)$  heißt *periodisch*, wenn es endliche Ordnung hat.

Nach Satz 2.1.4 ist klar:

**Bemerkung 2.3.7.** *Sei  $\phi \in \Gamma(S)$  und  $[X, f] \in \mathcal{T}(S)$ . Ist  $\phi \cdot [X, f] = [X, f]$ , so ist  $\phi$  periodisch.*

**Definition 2.3.8.** Ein Element  $\phi \in \Gamma(S)$  heißt *reduzibel*, wenn es eine nichtleere Menge von disjunkten Isotopieklassen einfach geschlossener Kurven auf  $S$  fixiert.

**Definition 2.3.9.** Sei  $A := [0, 1] \times S^1$  und  $T : A \rightarrow A$  gegeben durch

$$T(r, \theta) := (r, \theta + 2\pi r).$$

Sei  $\alpha$  eine einfach geschlossene Kurve auf  $S$  und  $N$  eine reguläre Umgebung von  $\alpha$ . Wir wählen eine orientierungserhaltende Einbettung  $\phi : A \rightarrow S$  mit  $\phi(A) = N$ . Der Homöomorphismus  $T_\alpha : S \rightarrow S$  gegeben durch

$$T_\alpha(x) := \begin{cases} x & \text{falls } x \in S \setminus N \\ \phi \circ T \circ \phi^{-1}(x) & \text{falls } x \in N \end{cases}$$

heißt *Dehn-Twist* längs  $\alpha$ .

**Bemerkung und Definition 2.3.10.** *Sei  $T_\alpha$  definiert wie in 2.3.9. Dann gelten folgende Aussagen.*

- (a) Die Isotopieklasse von  $T_\alpha$  hängt weder von der Wahl von  $\phi$  noch von der Wahl von  $N$  noch von der Orientierung von  $\alpha$  ab.
- (b) Sind  $\alpha$  und  $\beta$  isotope einfach geschlossene Kurven auf  $S$ , dann ist  $T_\alpha$  isotop zu  $T_\beta$ .
- (c) Sei  $a$  die Isotopieklasse von  $\alpha$ , dann ist  $T_a$  nach (b) ein wohldefiniertes Element aus  $\Gamma(S)$  und heißt Dehn-Twist längs  $a$ .
- (d) Sei  $a$  die Isotopieklasse einer nichttrennenden einfach geschlossenen Kurve auf  $S$ . Dann ist  $T_a$  ein nichttriviales reduzibles Element der Abbildungsklassengruppe.

*Beweis.* Siehe [FM, Proposition 2.1]. □

**Proposition 2.3.11.** Seien  $a$  und  $b$  Isotopieklassen von einfach geschlossenen Kurven und  $k \in \mathbb{Z}$ . Dann gilt

$$i(T_a^k(b), b) = |k|i(a, b)^2,$$

wobei  $i$  die algebraische Schnittzahl auf  $H^1(S, \mathbb{Z})$  ist.

*Beweis.* Siehe [FM, Proposition 2.2]. □

**Definition 2.3.12.** Ein Element  $\phi \in \Gamma(S)$  heißt *pseudo-Anosov*, wenn es einen Vertreter  $f$  von  $\phi$  gibt, sodass

$$f \cdot (\mathcal{F}^u, \mu_u) = (\mathcal{F}^u, \lambda \mu_u), \quad f \cdot (\mathcal{F}^s, \mu_s) = (\mathcal{F}^s, \lambda^{-1} \mu_s)$$

für eine reelle Zahl  $\lambda > 1$  und ein Paar transversaler messbarer Blätterungen  $(\mathcal{F}^u, \mu_u)$  und  $(\mathcal{F}^s, \mu_s)$ .

**Satz 2.3.13** (Nielsen-Thurston Klassifikation). Sei  $S$  eine kompakte Riemannsche Fläche und  $\Gamma(S)$  die zugehörige Abbildungsklassengruppe. Jedes  $f \in \Gamma(S)$  ist entweder

- (a) periodisch,
- (b) reduzibel,
- (c) pseudo-Anosov.

*Beweis.* Siehe [Th, Theorem 4]. □

**Satz 2.3.14.** Sei  $(X, \mu)$  eine Translationsfläche und  $\iota : \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{T}_{g,n}$  die zugehörige Teichmüllereinbettung.

- (a) Ist  $\text{id} \neq \phi \in \text{Aff}^+(X, \mu)$ , so ist  $\phi$  nicht isotop zur Identität. Man kann  $\text{Aff}^+(X, \mu)$  demnach als Untergruppe der Abbildungsklassengruppe auffassen.
- (b) Für  $\Delta := \iota(\mathbb{H})$  gilt:  $\text{Aff}^+(X, \mu) = \text{Stab}_{\Gamma_g}(\Delta)$ .

*Beweis.*

- (a) Siehe [EG, Lemma 5.2].

(b) Siehe [EG, Theorem 1]. □

**Satz 2.3.15.** *Ist  $A \in \Gamma(X, \mu)$  elliptisch (bzw. parabolisch, bzw. hyperbolisch), so ist jeder zugehörige Lift  $\phi_A \in \text{Aff}^+(X)$  mit  $\text{der}(\phi_A) = A$  periodisch (bzw. reduzibel, bzw. pseudo-Anosov).*

*Beweis.* Siehe [HL, S. 338]. □

**Satz 2.3.16.** *Gegeben seien eine parabolische Matrix  $A \in \Gamma(X, \mu)$  und ein  $\phi_A$  in  $\text{Aff}^+(X)$  mit  $\text{der}(\phi_A) = A$ . Dann existiert eine Zylinderzerlegung von  $X$  und ein  $k \in \mathbb{N}$ , so dass  $\phi_A^k$  ein simultaner Dehn-Twist längs aller Zylindermitten ist.*

*Beweis.* Siehe [Ve, Proposition 2.4]. □

### 2.3.4 Eine Darstellung der affinen Gruppe

Es sei  $(X, \mu)$  eine Translationsfläche vom Geschlecht  $g \geq 2$ . Ein  $f \in \text{Aff}^+(X, \mu)$  induziert einen Automorphismus von  $\pi_1(X, x)$  via

$$[\gamma] \mapsto [\alpha] \star [f \circ \gamma] \star [\alpha]^{-1},$$

wobei  $\alpha$  ein Weg von  $x$  nach  $f(x)$  und  $\gamma$  ein geschlossener Weg in  $X$  mit Anfangspunkt  $x$  ist. Wegen

$$H_1(X, \mathbb{Z}) \cong \pi_1(X, x) / [\pi_1(X, x), \pi_1(X, x)]$$

induziert  $f$  daher einen Automorphismus  $f_*$  von  $H_1(X, \mathbb{Z})$ , der unabhängig ist von der Wahl von  $\alpha$ . Wir haben also eine Darstellung

$$\rho : \text{Aff}^+(X, \mu) \rightarrow \text{Aut}(H^1(X, \mathbb{Z})).$$

Wir behaupten:

**Lemma 2.3.17.** *Die Darstellung  $\rho : \text{Aff}^+(X, \mu) \rightarrow \text{Aut}(H^1(X, \mathbb{Z}))$  ist treu.*

*Beweis.* Es seien  $\text{id} \neq \phi \in \text{Aff}^+(X, \mu)$  und  $A := \text{der}(\phi) \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ . Wir unterscheiden drei Fälle:

- (a)  $A$  ist elliptisch  $\Leftrightarrow \phi$  ist periodisch.
- (b)  $A$  ist parabolisch  $\Leftrightarrow \phi$  ist reduzibel.
- (c)  $A$  ist hyperbolisch  $\Leftrightarrow \phi$  ist pseudo-Anosov.

Im Fall (a) operiert  $\phi$  nichttrivial auf  $H^1(X, \mathbb{Z})$ . Das folgt aus Tatsache, dass ein periodisches Element  $\phi \in \text{Aff}^+(X, \mu)$  nur isolierte Fixpunkte hat. Ein periodisches Element  $\phi \in \text{Aff}^+(X, \mu)$  hat nämlich nach [FM, Sec. 6.1.5] Fixpunktordnung 1, daher ist nach Satz 1.5.5 die Lefschetz-Zahl  $\Lambda_\phi$  gleich der Anzahl der Fixpunkte von  $\phi$ , ist also nichtnegativ.

Daraus folgt, dass  $\phi_* \neq \text{id}$  ist, denn sonst wäre  $\Lambda_\phi < 0$ . Ein allgemeinerer Beweis steht in [FM].

Im Fall (b) existiert eine Zylinderzerlegung von  $X$ , sodass  $\phi^n$  simultaner Dehn-Twist längs aller Zylindermitten ist (siehe Satz 2.3.16). Solche Zylindermitten sind nichttrennende Kurven. Wäre eine dieser Zylindermitten nämlich eine trennende Kurve, so enthielte der Schnittgraph einer der Randpunkte der Teichmüllerkurve in  $\overline{\mathcal{M}}_g$  eine Brücke. Das ist nicht möglich. Für einen Spezialfall wird das in [Mai] gezeigt. Also operiert  $\phi^n$  nichttrivial auf  $H^1(X, \mathbb{Z})$ .

Im Fall (c) ist der Spektralradius von  $\rho(\phi) > 1$ , da der Spektralradius von  $\rho(\phi)$  nach [Mc, Thm. 5.4] gleich dem von  $A$  ist, und da  $A$  hyperbolisch ist, ist der Spektralradius von  $A$  größer als 1. Folglich operiert  $\phi$  auch in diesem Fall nichttrivial auf  $H^1(X, \mathbb{Z})$ .

Insgesamt gilt also:

$$\text{Kern}(\rho) = \{\text{id}\},$$

was behauptet war. □

## 2.4 Teichmüllerkurven als Familien von Kurven

Es sei  $\iota : \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{T}_g \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}_g$  eine Teichmüllereinbettung,  $\Gamma_g$  die Abbildungsklassengruppe.

Ziel dieses Abschnitts ist es, zu einer gegebenen torsionsfreien Untergruppe  $\Gamma$  von endlichem Index in  $\text{Stab}_{\Gamma_g}(\Delta)$  eine Familie von Kurven vom Geschlecht  $g$  über  $C := \Delta/\Gamma$  zu konstruieren.

Sei  $S$  eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht  $g$ . Es bezeichne  $\pi_g$  die Fundamentalgruppe von  $S$ .

Die Gruppe  $\Gamma$  operiert auf  $\pi_g$  via  $h \cdot \gamma := h_*(\gamma)$ . Wir haben also ein semidirektes Produkt  $\Gamma \ltimes \pi_g$  gegeben durch:

$$(h, \gamma) \cdot (\tilde{h}, \tilde{\gamma}) := (h \circ \tilde{h}, \gamma h_*(\tilde{\gamma})).$$

**Lemma 2.4.1.** *Das semidirekte Produkt  $\Gamma \ltimes \pi_g$  operiert auf  $\Delta \times \mathbb{H}$  via*

$$(h, \gamma) \bullet ([X, f], \tau) := ([X, f \circ h^{-1}], f_* \circ h_*^{-1}(\gamma)(\tau)).$$

*Beweis.* Sei  $(h, \gamma) \in \Gamma \ltimes \pi_g$ . Wegen  $h \in \text{Stab}_{\Gamma_g}(\Delta)$  ist  $[X, f \circ h^{-1}] \in \Delta$ , also gilt:

$$(h, \gamma) \bullet ([X, f], \tau) \in \Delta \times \mathbb{H}.$$

Wir müssen also nur noch nachrechnen, dass für alle  $(h, \gamma), (\tilde{h}, \tilde{\gamma}) \in \Gamma \ltimes \pi_g$  gilt:

$$((h, \gamma) \cdot (\tilde{h}, \tilde{\gamma})) \bullet ([X, f], \tau) = (h, \gamma) \bullet ((\tilde{h}, \tilde{\gamma}) \bullet ([X, f], \tau)).$$

Es gilt einerseits:

$$\begin{aligned}
& ((h, \gamma) \cdot (\tilde{h}, \tilde{\gamma})) \bullet ([X, f], \tau) \\
= & (h \circ \tilde{h}, \gamma h_*(\tilde{\gamma})) \bullet ([X, f], \tau) \\
= & \left( [X, f \circ \tilde{h}^{-1} \circ h^{-1}], f_* \circ \tilde{h}_*^{-1} \circ h_*^{-1}(\gamma h_*(\tilde{\gamma}))(\tau) \right) \\
= & \left( [X, f \circ \tilde{h}^{-1} \circ h^{-1}], \underbrace{(f_* \circ \tilde{h}_*^{-1} \circ h_*^{-1}(\gamma))}_{\in \text{Deck}(\mathbb{H}/X)} \underbrace{(f_* \circ \tilde{h}_*^{-1}(\tilde{\gamma}))(\tau)}_{\in \text{Deck}(\mathbb{H}/X)} \right) \\
= & (*).
\end{aligned}$$

Andererseits gilt:

$$\begin{aligned}
& (h, \gamma) \bullet ((\tilde{h}, \tilde{\gamma}) \bullet ([X, f], \tau)) \\
= & (h, \gamma) \bullet ([X, f \circ \tilde{h}^{-1}], f_* \circ \tilde{h}_*^{-1}(\tilde{\gamma})(\tau)) \\
= & \left( [X, f \circ \tilde{h}^{-1} \circ h^{-1}], (f_* \circ \tilde{h}_*^{-1} \circ h_*^{-1}(\gamma))(f_* \circ \tilde{h}_*^{-1}(\tilde{\gamma}))(\tau) \right) \\
= & (*).
\end{aligned}$$

Das zeigt die Behauptung. □

Wir haben eine wohldefinierte Projektion

$$\begin{aligned}
p : \mathfrak{X} := (\Delta \times \mathbb{H})/(\Gamma \ltimes \pi_g) & \longrightarrow \Delta/\Gamma \\
\overline{([X, f], \tau)} & \longmapsto \overline{[X, f]}.
\end{aligned}$$

**Lemma 2.4.2.** *Die Faser von  $p$  über  $\overline{[X, f]} \in \Delta/\Gamma$  ist isomorph zu  $X$ .*

*Beweis.* Die Faser von  $p$  über  $\overline{([X, f])}$  ist

$$\begin{aligned}
& p^{-1}(\overline{([X, f])}) \\
= & \{ \overline{([X, f], \tau)} \mid \tau \in \mathbb{H} \} \\
= & \{ ([X, f \circ h^{-1}], f_* \circ h_*^{-1}(\gamma)(\tau)) \mid \tau \in \mathbb{H}, h \in \Gamma, \gamma \in \pi_g \}.
\end{aligned}$$

Daran sieht man, dass die Faser von  $p$  über  $\overline{([X, f])} \cong [X] \in \Delta/\Gamma$  isomorph ist zu  $X/\text{Stab}_\Gamma([X, f])$ . Da  $\Gamma$  als torsionsfrei vorausgesetzt war, ist  $\text{Stab}_\Gamma([X, f])$  aber trivial, da  $\text{Stab}_\Gamma([X, f])$  nur Elemente endliche Ordnung enthält. Damit folgt die Behauptung. □

Wir haben also eine Familie  $\phi := p : \mathfrak{X} \rightarrow C$  von Riemannschen Flächen vom Geschlecht  $g$  konstruiert. Dabei ist  $\Delta$  einfach zusammenhängend, also ist  $\Gamma$  die Fundamentalgruppe von  $C = \Delta/\Gamma$ .

Als Untergruppe der affinen Gruppe operiert  $\Gamma$  auf  $H^1(X, \mathbb{Z})$ , wobei  $X := \phi^{-1}(0)$ ,  $0 \in \Delta/\Gamma$ .

Nach Proposition 1.2.3 gehört dazu ein lokales System  $\mathcal{G}$  auf  $\Delta/\Gamma$ .

**Lemma 2.4.3.** *Es gilt:  $\mathcal{G} \cong R^1 p_* \mathbb{Z}$ .*

*Beweis.* Die Gruppe  $\pi_g$  operiert auf  $\Delta \times \mathbb{H}$  via

$$\gamma \cdot ([X, f], \tau) := ([X, f], f_*(\gamma)(\tau)).$$

Das liefert eine Familie  $\mathcal{C}_g := (\Delta \times \mathbb{H})/\pi_g \rightarrow \Delta$  von Riemannschen Flächen vom Geschlecht  $g$ , deren Faser über  $[X, f] \in \Delta$  isomorph zu  $X$  ist.

Diese Familie ist global trivial über  $\Delta$ . Als Trivialisierung dient:

$$\begin{aligned} \Phi : \quad \mathcal{C}_g &\longrightarrow \Delta \times S \\ \overline{([X, f], \tau)} &\longmapsto ([X, f], f^{-1}(p_S(\tau))). \end{aligned}$$

Dabei sei  $p_S : \mathbb{H} \rightarrow S$  die Überlagerungsabbildung.

Die Umkehrabbildung ist

$$\begin{aligned} \Phi^{-1} : \quad \Delta \times S &\longrightarrow \mathcal{C}_g \\ ([X, f], z) &\longmapsto \overline{([X, f], \tau)}, \end{aligned}$$

wobei  $\tau \in p_X^{-1}(f(z))$ .

Dabei sei  $p_X : \mathbb{H} \rightarrow X$  die Überlagerungsabbildung.

Die Abbildungen  $\Phi$  und  $\Phi^{-1}$  sind wohldefinierte Diffeomorphismen.

Sei  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Delta$  ein Weg von  $[X, f]$  nach  $[Y, g]$ , und seien  $X \cong p^{-1}(\gamma(0))$  und  $Y \cong p^{-1}(\gamma(1))$ .

Wir erhalten einen Diffeomorphismus  $\psi : p^{-1}(\gamma(1)) \rightarrow p^{-1}(\gamma(0))$  via

$$\{\gamma(1)\} \times Y \xrightarrow{\Phi} \{\gamma(1)\} \times S \xrightarrow{\text{id}} \{\gamma(0)\} \times S \xrightarrow{\Phi^{-1}} \{\gamma(0)\} \times X.$$

Dabei gilt:  $\psi = f \circ g^{-1}$ .

Ist  $\gamma$  Weg von  $[S, \text{id}]$  nach  $h \cdot [S, \text{id}] = [S, h^{-1}]$ , ist  $\psi = h$ .

Da die Familie  $\mathfrak{X} \rightarrow \Delta/\Gamma$  lokal isomorph ist zu  $\mathcal{C}_g$  und ein geschlossener Weg  $\gamma$  in  $\Delta/\Gamma$  mit Fußpunkt  $[S, \text{id}]$  einem Element  $h \in \Gamma$  entspricht, sieht man damit, dass die Aktion von  $\gamma$  auf  $H^1(S, \mathbb{Z})$  von dem Diffeomorphismus  $h : S \rightarrow S$  herkommt. Diese Aktion entspricht genau der aus Proposition 1.2.6. Das zeigt die Behauptung. □

**Definition 2.4.4.** Die Familie  $p : \mathfrak{X} \rightarrow \Delta/\Gamma := \tilde{C}$  nennen wir *Modell* der Teichmüllerkurve  $C := \pi \circ \iota(\mathbb{H}) \subseteq \mathcal{M}_g$ . Ein Fixanteil in  $\text{Jac}(\mathfrak{X}/\tilde{C})$  heißt *Fixanteil von  $C$  über  $\Gamma$* . Sind keine Verwechslungen zu befürchten, nennen wir einen Fixanteil von  $C$  über  $\Gamma$  auch *Fixanteil in  $\text{Jac}(C)$* .

**Bemerkung und Definition 2.4.5.** Die Menge der Fixanteile von  $C$  ist per Inklusion geordnet und enthält ein eindeutig bestimmtes maximales Element bezüglich dieser Ordnung. Dieses maximale Element heißt *Fixanteil von  $C$* .

*Beweis.* Ist  $\Gamma$  wie oben gegeben, so erhält man den Fixanteil  $A$  von  $C$  über  $\Gamma$  nach Satz 1.4.3 und Proposition 1.2.3, indem man die Operation von  $\Gamma$  auf einer Faser von  $\mathfrak{X}$  betrachtet. Ist  $\Gamma_1$  eine Untergruppe von  $\Gamma$ , so ist klar, dass  $A$  eine Teilmenge des Fixanteils  $A_1$  von  $C$  über  $\Gamma_1$  ist. Abelsche Varietäten sind irreduzibel, also ist  $\dim(A) < \dim(A_1)$  oder  $A = A_1$ . Da die Fixanteile, die zu Untergruppen von  $\Gamma$  gehören, durch die Dimension von  $\text{Jac}(X)$  nach oben beschränkt sind, muss es eine Untergruppe  $\tilde{\Gamma}$  geben, sodass die Fixanteile, die zu Untergruppen von  $\tilde{\Gamma}$  gehören, die gleiche Dimension haben wie der zu  $\tilde{\Gamma}$  gehörende Fixanteil  $\tilde{A}$ . Demnach ist  $\tilde{A}$  das gesuchte maximale Element. □

## 2.5 Origamis

Origamikurven sind Teichmüllerkurven, die von *Origamis* herkommen. Das sind Translationsflächen, die man erhält, indem man eine endliche Menge von Blättern Papier, den „Kästchen“, entlang den Rändern so verklebt, dass jede rechte Seite eines Blattes mit einer linken und jede untere Seite mit einer oberen verklebt ist und man eine kompakte zusammenhängende (topologische) Fläche erhält. Mehr über Origamis und ihre Veechgruppen kann man zum Beispiel in [Sch] oder [He] nachlesen, an deren Darstellung wir uns hier orientieren.

Nach 2.4 können wir Origamikurven auffassen als Familien Riemannscher Flächen vom Geschlecht  $g$ . Das Schöne an diesen Familien ist, dass wir die Berechnung ihrer Monodromie auf das Rechnen in freien Gruppen zurückführen können.

In 2.5.1 geben wir zunächst eine präzise Definition von Origamis und stellen einige wichtige Aussagen über diese zusammen. Danach geben wir einige Beispiele. In 2.5.3 geben wir schließlich einen Algorithmus zur Berechnung der Operation der affinen Gruppe von Origamis auf der Homologie an, also nach 2.4.3 einen Algorithmus zur Berechnung der Monodromie.

### 2.5.1 Grundlegendes

**Definition 2.5.1.** Es sei  $E$  ein Torus, d.h. eine topologische Fläche vom Geschlecht 1. Ein *Origami*  $O$  ist eine endliche Überlagerung  $p : X \rightarrow E$ , die nur über einem Punkt  $P$  verzweigt.

Setzen wir  $E^* := E \setminus \{P\}$  und  $X^* := X \setminus p^{-1}(P)$ , dann ist  $p : X^* \rightarrow E^*$  eine unverzweigte Überlagerung.

Sei  $\Lambda$  ein Gitter in  $\mathbb{C}$ . Dann ist  $\mathbb{C} \setminus \Lambda$  homöomorph zu  $E$ , also induziert  $\Lambda$  eine Translationsstruktur  $\nu$  auf  $E^*$ . Liften wir  $\nu$  nach  $X^*$  mittels  $p$ , erhalten wir eine Translationsstruktur auf  $X^*$ .

Die zur Translationsfläche  $X^*$  gehörende Teichmüllerkurve heißt *Origamikurve*.

**Definition 2.5.2.** Sei  $O = (p : X \rightarrow E)$  ein Origami und  $\mu_0$  die Translationsstruktur auf  $X^*$ , die vom Einheitsquadrat-Gitter  $\Lambda_0 := \mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z}$  induziert wird. Die Veechgruppe von  $(X^*, \mu_0)$  heißt *Veechgruppe* von  $O$ . Wir bezeichnen diese mit  $\Gamma(O)$ .

**Satz 2.5.3.** Sei  $O = (p : X \rightarrow E)$  ein Origami und  $\pi : \mathbb{H} \rightarrow X^*$  die universelle Überlagerung von  $X^*$ . Liftet man die Translationsstruktur auf  $X^*$  nach  $\mathbb{H}$  mittels  $\pi$ , dann gelten:

- $\Gamma(O)$  ist eine Untergruppe von  $\Gamma(\mathbb{H})$ .
- $\Gamma(E^*) = \Gamma(\mathbb{H}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ .

*Beweis.* Siehe [Sch, Proposition 6]. □

**Folgerung 2.5.4.**  $\Gamma(O)$  ist immer eine Untergruppe von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ .

Präziser wird  $\Gamma(O)$  durch folgenden Satz beschrieben:

**Satz 2.5.5.** Gegeben sei  $U := \mathrm{Deck}(\mathbb{H}/X^*) \subseteq \mathrm{Deck}(\mathbb{H}/E^*) \cong F_2$ , wobei  $F_2 = \langle x, y \rangle$  die freie Gruppe mit zwei Erzeugern bezeichne. Seien weiter

$$\mathrm{Stab}(U) := \{\gamma \in \mathrm{Aut}^+(F_2) \mid \gamma(U) = U\}$$

und

$$\hat{\beta} : \mathrm{Aut}^+(F_2) \rightarrow \mathrm{Out}^+(F_2) = \mathrm{Aut}^+(F_2)/\mathrm{Inn}(F_2) \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$$

die natürliche Projektion. Dann gilt:

$$\Gamma(O) = \hat{\beta}(\mathrm{Stab}(U)).$$

*Beweis.* Siehe [Sch, Proposition 1]. □

**Folgerung 2.5.6.**  $\Gamma(O)$  hat endlichen Index in  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ .

**Definition 2.5.7.** Ein Origami  $O = (p : X \rightarrow E)$ , für das  $U := \mathrm{Deck}(\mathbb{H}/X^*)$  eine charakteristische Untergruppe von  $F_2$  ist, also  $\Phi(U) = U$  für alle  $\Phi \in \mathrm{Aut}(F_2)$ , heißt *charakteristisch*.

**Folgerung 2.5.8.** Die Veechgruppe eines charakteristischen Origamis ist  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ .

## 2.5.2 Beispiele

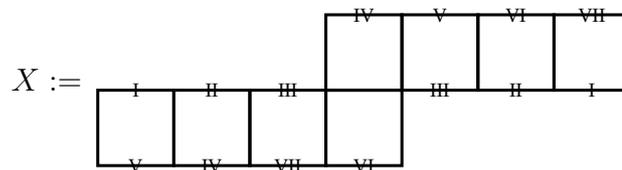
### Das Origami $W$

Sei

$$\mathcal{Q} := \langle \pm 1, \pm i, \pm j, \pm k \mid i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = -ji = k \rangle$$

die Quaternionengruppe. Es reichen  $i$  und  $j$  als Erzeuger von  $\mathcal{Q}$ . Daraus erhalten wir das Origami  $W$ , indem wir acht Kästchen mit den Elementen aus  $\mathcal{Q}$  beschriften. Der rechte Nachbar eines Kästchens, das mit Element  $g$  beschriftet ist, soll  $g \cdot i$  sein, der obere Nachbar  $g \cdot j$ .

Das Origami  $W$  ist also die Überlagerung  $p : X \rightarrow E$ , wobei



Dieses Origami heißt aufgrund seiner herausragenden Eigenschaften *eierlegende Wollmilchsau*. Mehr über dieses Origami kann man in [HS2] erfahren.

Wir entnehmen die folgenden Eigenschaften von  $W$  aus [HS2]:

- $W$  ist ein charakteristisches Origami.
- $W$  hat Geschlecht 3.
- Sei  $Z$  das Zentrum der Automorphismengruppe von  $W$ . Dann ist  $Z$  zyklisch und  $W/Z$  hat Geschlecht 0, wir haben also eine zyklische Überlagerung  $X \rightarrow \mathbb{P}^1$ . Daraus kann man eine Gleichung für eine 1-Parameter-Familie  $f : \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$  herleiten, die die Origamikurve  $C(W)$  in  $\mathcal{M}_3$  beschreibt, nämlich:

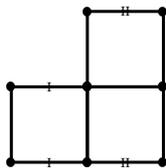
$$y^4 = x(x-1)(x-\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}.$$

In [HS2] wird gezeigt, dass gilt:

**Bemerkung 2.5.9.** *Es gibt einen Fixanteil von  $C(O)$  der (komplexen) Dimension 2. Dieser ist isogen zu  $E_{1728} \times E_{1728}$ , wobei  $E_{1728}$  die elliptische Kurve mit  $j$ -Invariante 1728 ist.*

### Das 108er Origami

**Definition 2.5.10.** Sei  $O_{108}$  das charakteristische Origami, das das Origami  $L_{2,2}$  dominiert, bei dem jeweils gegenüberliegende Seiten miteinander verklebt werden, und  $C(O_{108})$  die zugehörige Origamikurve. Für eine genaue Konstruktionsvorschrift siehe [He].



Das Origami  $L_{2,2}$

**Bemerkung 2.5.11.** *Es gilt:*

- $O_{108}$  hat 108 Kästchen.
- $O_{108}$  hat Geschlecht 37.
- $X_\infty = \overline{C(O_{108})} \setminus C(O_{108})$  hat geometrisches Geschlecht 24.

*Beweis.* Siehe [Ba]. □

In [Ba] wird gezeigt:

**Proposition 2.5.12.** *Für jedes  $[X] \in C(O_{108})$  existiert ein Morphismus von  $X$  auf die elliptische Kurve mit  $j$ -Invariante 0.*

Der Schlüssel zum Beweis ist, einen Automorphismus  $\tau$  von  $X$  zu finden, sodass  $X/\langle\tau\rangle$  eine elliptische Kurve ist.

Setzt man  $\tau$  zu einem Automorphismus  $\tilde{\tau}$  des Randpunktes  $X_\infty$  fort, stellt man fest, dass der Quotient  $X_\infty/\langle\tilde{\tau}\rangle$  ebenfalls eine elliptische Kurve ist. Daraus folgt, dass  $X/\langle\tau\rangle$  für alle Fasern  $X$  die gleiche elliptische Kurve ist. Außerdem kann man zeigen, dass diese Kurve einen Automorphismus der Ordnung 3 hat, das legt die  $j$ -Invariante fest.

Daraus folgt, dass es einen Fixanteil von  $C(O_{108})$  gibt, der mindestens Dimension 1 hat. Wir nennen einen Fixanteil von  $C(O_{108})$  auch Fixanteil des Origamis.

Im nächsten Kapitel werden wir sehen, dass gilt:

**Satz 2.5.13.** *Es gibt einen Fixanteil von  $C(O_{108})$  der Dimension 12.*

### Die Heisenberg Origamis

Eine weitere Klasse charakteristischer Origamis sind die sogenannten Heisenberg Origamis. Diese werden ebenfalls in [He] ausführlich untersucht. Dort sind auch die Beweise der unten stehenden Aussagen nachzulesen.

**Definition 2.5.14.** Seien  $n \geq 2$  und  $l$  ein Teiler von  $n$ .

(a) Wir definieren:

$$G_{n,l} := \langle a, b \mid a^n = b^n = c^l = 1, c = aba^{-1}b^{-1}, ac = ca, bc = cb \rangle.$$

$G_{n,l}$  heißt Gruppe vom *Heisenberg-Typ*.

(b) Wir definieren das Origami  $H_{n,l}$  folgendermaßen: Die Kästchen von  $H_{n,l}$  beschriften wir mit den Elementen von  $G_{n,l}$  und verkleben nach rechts gemäß der Rechtsmultiplikation mit  $a$ , nach oben gemäß der Rechtsmultiplikation mit  $b$ .

Es gilt

**Proposition 2.5.15.**

(a)  $H_{n,l}$  hat Geschlecht  $g_{n,l} = \frac{1}{2}n^2(l-1) + 1$ .

(b) Der Randpunkt von  $C(H_{n,l})$  in  $\overline{\mathcal{M}}_{g_{n,l}}$  besitzt  $n$  irreduziblen Komponenten  $C_1, \dots, C_n$ , die jeweils Geschlecht  $\frac{1}{2}(l-1)(n-2)$  haben. Dabei gilt:

$$C_i \text{ schneidet } C_j \text{ in } l \text{ Punkten} \Leftrightarrow i - j \equiv \pm 1 \pmod{n}.$$

Andernfalls sind  $C_i$  und  $C_j$  disjunkt.

Im nächsten Kapitel werden auch die Fixanteile dieser Origamis untersucht werden.

### 2.5.3 Die Monodromieaktion

Sei  $O := (X \rightarrow E)$  ein Origami und  $\text{Aff}^+(\mathbb{H}/X^*)$  die Gruppe der affinen Diffeomorphismen auf  $\mathbb{H}$ , die mit der Überlagerungsabbildung  $u : \mathbb{H} \rightarrow X^*$  absteigen zu affinen Diffeomorphismen von  $X^*$ . Wir definieren eine Aktion  $\rho_1$  von  $\text{Aff}^+(\mathbb{H}/X^*)$  auf  $\pi_1(X^*, x)$  durch

$$\tilde{f} \mapsto ([\gamma] \mapsto [\alpha_{\tilde{f}}] \star [f \circ \gamma] \star [\alpha_{\tilde{f}}]^{-1}).$$

Dabei sei ein Punkt  $\tilde{x}$  in  $\mathbb{H}$  mit  $u(\tilde{x}) = x$  gewählt,  $\alpha_{\tilde{f}}$  der Abstieg des bis auf Homotopie eindeutig bestimmten Wegs von  $\tilde{x}$  nach  $\tilde{f}(\tilde{x})$  und  $f$  der Abstieg von  $\tilde{f}$  auf  $X$ .

Weiter definieren wir eine Operation  $\rho_2$  von  $\text{Aff}^+(\mathbb{H}/X^*)$  auf  $\text{Deck}(\mathbb{H}/X^*)$  durch

$$\tilde{f} \mapsto (\sigma \mapsto \tilde{f} \circ \sigma \circ \tilde{f}^{-1}).$$

Wegen  $\tilde{f} \in \text{Aff}^+(\mathbb{H}/X^*)$  ist  $\tilde{f} \circ \sigma \circ \tilde{f}^{-1}$  ein Element aus  $\text{Deck}(\mathbb{H}/X^*)$ . Das ist also ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus.

Durch direktes Nachrechnen erhält man folgende Lemmata.

**Lemma 2.5.16.** *Die Aktionen  $\rho_1$  und  $\rho_2$  sind verträglich, d.h. für alle  $\tilde{f} \in \text{Aff}^+(\mathbb{H}/X^*)$  kommutiert folgendes Diagramm:*

$$\begin{array}{ccc} \text{Deck}(\mathbb{H}/X^*) & \xrightarrow{\rho_2(\tilde{f})} & \text{Deck}(\mathbb{H}/X^*) \\ \downarrow \text{kan} & & \downarrow \text{kan} \\ \pi_1(X^*, x) & \xrightarrow{\rho_1(\tilde{f})} & \pi_1(X^*, x). \end{array}$$

**Lemma 2.5.17.** *Die Aktionen  $\rho_1$  und  $\rho_2$  steigen ab zu äußeren Aktionen von  $\text{Aff}^+(O)$ .*

**Lemma 2.5.18.** *Die von  $\rho_1$  und  $\rho_2$  induzierten äußeren Aktionen von  $\text{Aff}^+(O)$  kommutieren.*

Das liefert uns mit [Sch, Proposition 3.5] folgenden algorithmischen Ansatz zur Berechnung der Operation von  $\text{Aff}^+(O)$  auf  $H^1(X^*, \mathbb{Z})$ :

- Berechne Erzeuger von  $\Gamma(O)$ .
- Bestimme  $H := \text{Deck}(\mathbb{H}/X^*) \cong \pi_1(X^*)$  als Untergruppe von  $F_2$  und freie Erzeuger  $v_1, \dots, v_k$  von  $H$ .
- Bestimme für jeden Erzeuger  $A$  von  $\Gamma(O)$  die Menge

$$\mathcal{A} := \{\sigma \in \text{Aut}(F_2) \mid \sigma(H) = H \text{ und } \hat{\beta}(\sigma) = A\}.$$

- Berechne für alle  $\sigma \in \mathcal{A}$  die Bilder  $\sigma(v_1), \dots, \sigma(v_k)$  und stelle diese dar als Wort in  $v_1, \dots, v_k$ .
- Interpretiere die Ergebnisse als Elemente in  $H/[H, H]$ .

Bestimmt man die Erzeuger  $v_1, \dots, v_k$  von  $H$  so, dass  $v_1, \dots, v_r$  Erzeuger von  $\pi_1(X)$  sind und  $v_{r+1}, \dots, v_k$  Relationen in  $\pi_1(X)$ , dann kann man auf diese Weise auch die Operation von  $\text{Aff}^+(O)$  auf  $H^1(X, \mathbb{Z})$  berechnen.

# Kapitel 3

## Existenz von Fixanteilen

In diesem Kapitel beweisen wir ein Kriterium, das eine obere Schranke für die Dimension des Fixanteils in der Familie von Jakobivarietäten über einer Teichmüllerkurve angibt. Anschließend zeigen wir mit diesem Kriterium für einige große Klassen von Origamikurven, dass diese keine Fixanteile positiver Dimension besitzen. Danach stellen wir Beispiele für Origamikurven mit Fixanteilen positiver Dimension vor.

### 3.1 Ein Kriterium

**Satz 3.1.1.** *Seien  $C_1, \dots, C_r$  einfach geschlossene paarweise disjunkte Kurven auf einer kompakten Riemannschen Fläche  $X$  und  $\phi : X \rightarrow X$  ein Dehn-Twist längs all dieser Kurven. Weiter sei  $\phi^*$  der von  $\phi$  induzierte Automorphismus von  $H^1(X, \mathbb{Z})$ . Dann gilt:  $\text{Spek}(\phi^*) = \{1\}$ .*

*Weiter gilt: Ist  $\psi$  eine Potenz von  $\phi^*$ , so gilt:  $\text{Eig}(\psi, 1) = \text{Eig}(\phi^*, 1)$ .*

*Beweis.* Ist  $C$  eine geschlossene Kurve auf  $X$  mit  $i([C], [C_l]) = 0$  für  $l = 1, \dots, r$ , so gilt  $\phi^*(C) = C$  ( $i$  = algebraische Schnittzahl bzw. Schnittform auf der Homologie). Ist  $C$  eine geschlossene Kurve auf  $X$  mit  $i(C, C_l) \neq 0$  für ein  $l \in \{1, \dots, r\}$ , so gilt

$$\phi^*([C]) = [C] + \sum_{l=1}^r i([C], [C_l]) \cdot [C_l].$$

Ist  $[C]$  ein Eigenvektor von  $\phi^*$ , so muss gelten:

$$\sum_{l=1}^r i([C], [C_l]) \cdot [C_l] = \lambda \cdot [C].$$

Damit folgt:

$$0 = i([C], \lambda[C]) = i([C], \sum_{l=1}^r i([C], [C_l]) \cdot [C_l]) = \sum_{l=1}^r i([C], [C_l])^2.$$

Das bedeutet aber, dass für  $l = 1, \dots, r$  gilt:  $i([C], [C_l]) = 0$ . Das ist ein Widerspruch zur Annahme  $i([C], [C_l]) \neq 0$  für ein  $i \in \{1, \dots, r\}$ .

Für  $\psi = (\phi^*)^k$  gilt

$$\psi([C]) = [C] + k \cdot \sum_{l=1}^r i([C], [C_l]) \cdot [C_l].$$

Damit folgt die Aussage über  $\psi$  analog. □

Ein elementares Lemma aus der Gruppentheorie ist

**Lemma 3.1.2.** *Sei  $G$  eine Gruppe,  $U \leq G$  eine Untergruppe von endlichem Index und  $x \in G$  ein Element unendlicher Ordnung. Dann gibt es ein  $k \in \mathbb{N}$ , sodass  $x^k \in U$ .*

Das Hauptresultat dieses Abschnitts ist

**Satz 3.1.3.** *Es sei  $\iota : \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{T}_g$  eine Teichmüllereinbettung,  $C := \pi \circ \iota(\mathbb{H})$  eine Teichmüllerkurve und  $\phi_1, \dots, \phi_k$  Elemente von  $\text{Stab}_{\Gamma_g}(\Delta)$ , sodass  $A_1 := \text{der}(\phi_1), \dots, A_k := \text{der}(\phi_k)$  parabolisch sind. Es seien weiter  $m_1, \dots, m_k$  so gewählt, dass  $\phi_i^{m_i}$  ( $i = 1, \dots, k$ ) Dehn-Twists längs aller Zylindermitten der zu  $\phi_i$  gehörenden Zylinderzerlegung ist. Dann ist die Dimension des Fixanteils von  $C$  höchstens so groß wie die Dimension von*

$$\bigcap_{i=1}^k \text{Eig}((\phi_i^{m_i})^*, 1),$$

wobei  $(\phi_i^{m_i})^*$  der von  $\phi_i^{m_i}$  induzierte Automorphismus von  $H^1(X, \mathbb{Z})$  ist für alle  $i \in \{1, \dots, k\}$ .

*Beweis.* Sei  $f : \mathfrak{X} \rightarrow \Delta/\Gamma$  ein Modell von  $\iota$ , d.h.  $\Gamma$  ist torsionsfreie Untergruppe von  $\text{Stab}_{\Gamma_g}(\Delta)$ . Nach obigem Lemma gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$ , sodass für  $i = 1, \dots, k$  die  $\phi_i^{nm_i}$  in  $\Gamma$  liegen. Nach 3.1.1 gilt dann:

$$\bigcap_{i=1}^k \text{Eig}((\phi_i^{m_i})^*, 1) = \bigcap_{i=1}^k \text{Eig}((\phi_i^{nm_i})^*, 1).$$

Alle  $\phi_i^{nm_i}$  liegen aber in  $\Gamma$ , also kann  $\Gamma$  höchstens auf einem Teilraum von  $H^1(X, \mathbb{Z})$  trivial operieren, der in  $\bigcap_{i=1}^k \text{Eig}((\phi_i^{m_i})^*, 1)$  enthalten ist. Mit Satz 1.4.3 folgt die Aussage über den Fixanteil in  $\text{Jac}(\mathfrak{X}/C)$  aus der Riemann-Hilbert-Korrespondenz. □

Dies liefert einen algorithmischen Ansatz zum Abschätzen der Dimension von Fixanteilen in  $\text{Jac}(\mathfrak{X}/C)$ :

- Bestimme für parabolische Elemente  $A_i$  ( $i = 1, \dots, r$ ) der Veechgruppe von  $X$  Lifts  $\phi_{A_i}$ , sodass  $\text{der}(\phi_{A_i}) = A_i$  gilt.
- Bestimme ein  $m \in \mathbb{N}$ , sodass  $\phi_{A_i}^m$  Dehn-Twists sind für  $i = 1, \dots, r$  und berechne Abbildungsmatrizen  $M_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) der von den  $\phi_{A_i}^m$  induzierten Automorphismen von  $H^1(X, \mathbb{Z})$ .
- Bestimme  $d := \dim \left( \bigcap_{i=1}^r \text{Eig}(M_i, 1) \right)$ .

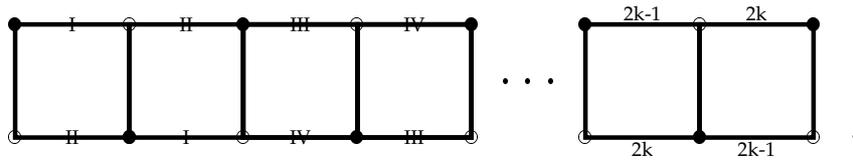
Nach Satz 3.1.3 ist die Dimension von Fixanteilen in  $C(O)$  höchstens  $d$ .

## 3.2 Origamis ohne Fixanteile

In diesem Abschnitt wird mit Hilfe von Satz 3.1.3 für eine ganze Reihe von Origamis gezeigt, dass diese keinen Fixanteil positiver Dimension besitzen.

### 3.2.1 X-Origamis

**Definition 3.2.1.** Für jedes  $k \in \mathbb{N}$  sei das Origami  $O_k$  gegeben durch die Überlagerung  $p : X_k \rightarrow E$ , wobei  $X_k$  die folgende Fläche bezeichne:



**Bemerkung 3.2.2.** Das Origami  $O_k$  hat für jedes  $k \in \mathbb{N}$  genau zwei Verzweigungspunkte (nämlich  $\circ$  und  $\bullet$ ). Damit hat nach Riemann-Hurwitz die Fläche  $X_k$  Geschlecht  $g = k$ .

*Beweis.* Siehe [Sch, Section 5.2] □

**Proposition 3.2.3.** Für jedes  $k \in \mathbb{N}$  hat die Veechgruppe  $\Gamma(O_k)$  die Gestalt:

$$\Gamma(O_k) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid 2b \equiv 0, a + b \equiv -1 \pmod{2k}, a + c \equiv b + d \equiv 1 \pmod{2} \right\}.$$

*Beweis.* Siehe [Sch, Prop. 5.2] □

**Folgerung 3.2.4.** Es gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 - k & k \\ -k & k + 1 \end{pmatrix} \in \Gamma(O_k).$$

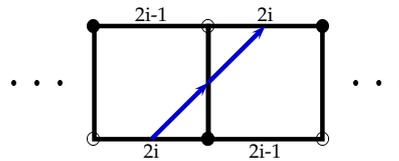
**Proposition 3.2.5.** Für kein  $k \in \mathbb{N}$  existiert in  $\mathrm{Jac}(C(O_k))$  ein Fixanteil positiver Dimension.

*Beweis.* Wir betrachten die Basis  $\mathcal{B}$  von  $H^1(X_k, \mathbb{Z})$  gegeben durch die Homologieklassen der folgenden Wege (aufgefasst als Elemente von  $F_2$ ):

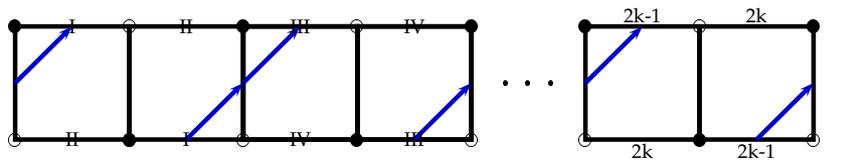
$$\begin{aligned} v_1 &:= xy^{-1}, & v_2 &:= y^2, \\ v_3 &:= x^3y^{-1}x^{-2}, & v_4 &:= x^2y^2x^{-2}, \\ v_5 &:= x^5y^{-1}x^{-4}, & v_6 &:= x^4y^2x^{-4}, \\ &\vdots & &\vdots \\ v_{2k-1} &:= x^{2k-1}y^{-1}x^{2-2k}, & v_{2k} &:= x^{2k-2}y^2x^{2-2k}. \end{aligned}$$



Die Wege  $w_1, \dots, w_k$ :



Der Weg  $w$ :



Mit Hilfe der Formel für Dehn-Twists aus dem Beweis von 3.1.1 folgt, dass  $\Phi_B$  dieselbe Jordansche Normalform hat wie  $\Phi_A$ .

Man rechnet leicht nach, dass gilt:

$$\begin{aligned} [w_1] &= [v_1] + [v_2], \\ [w_2] &= [v_3] + [v_4], \\ &\vdots \\ [w_k] &= [v_{2k-1}] + [v_{2k}]. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\text{Eig}(\Phi_B, 1) = \langle [w_1], \dots, [w_k] \rangle.$$

Es gilt  $\dim(\text{Eig}(\Phi_B, 1)) = k = \dim(\text{Eig}(\Phi_A, 1))$ . Außerdem sieht man, dass gilt

$$\text{Eig}(\Phi_A, 1) + \text{Eig}(\Phi_B, 1) = H^1(X_k, \mathbb{Z}).$$

Die Dimensionsformel liefert

$$\begin{aligned} \dim(\text{Eig}(\Phi_A, 1) \cap \text{Eig}(\Phi_B, 1)) &= \dim(\text{Eig}(\Phi_A, 1)) + \dim(\text{Eig}(\Phi_B, 1)) \\ &\quad - \dim(\text{Eig}(\Phi_A, 1) + \text{Eig}(\Phi_B, 1)). \end{aligned}$$

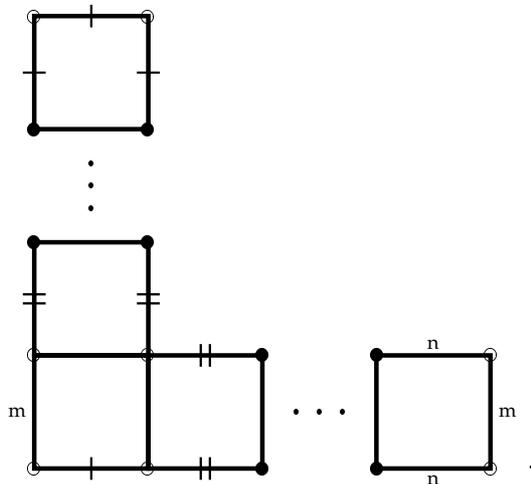
Daraus folgt nun

$$\dim(\text{Eig}(\Phi_A, 1) \cap \text{Eig}(\Phi_B, 1)) = 0,$$

und damit ist die Proposition nach Satz 3.1.3 bewiesen. □

### 3.2.2 L-Origamis

**Definition 3.2.6.** Für jedes Paar  $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  definieren wir das Origami  $L_{m,n}$  als die Überlagerung  $p : X_{m,n} \rightarrow E$ , wobei  $X_{m,n}$  die folgende Fläche bezeichne:



**Bemerkung 3.2.7.** Die Fläche  $X_{m,n}$  hat für jedes  $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  mit  $m, n \geq 2$  Geschlecht  $g = 2$ .

*Beweis.* Der Beweis erfolgt mittels vollständiger Induktion und Anwenden der Riemann-Hurwitz-Formel. Man beachte, dass  $p$  genau einen Verzweigungspunkt hat (nämlich  $\circ$ ).  $\square$

**Bemerkung 3.2.8.** Für  $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  mit  $m, n \geq 2$  enthält die Veechgruppe  $\Gamma(L_{m,n})$  die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{pmatrix}.$$

*Beweis.* Das kleinste gemeinsame Vielfache der horizontalen Zylinderlängen ist  $n$ , und das der vertikalen Zylinderlängen ist  $m$ . Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

**Proposition 3.2.9.** Ist  $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  mit  $m, n \geq 2$ , so hat  $\text{Jac}(C(L_{m,n}))$  keinen Fixanteil positiver Dimension.

*Beweis.* Eine Basis von  $H^1(X_{m,n}, \mathbb{Z})$  ist gegeben durch die Homologieklassen der Wege

$$v_1 := x, \quad v_2 := y^m, \quad v_3 := yx^n y^{-1}, \quad v_4 := yxyx^{-1}y^{-1}.$$

Wir betrachten nun einen Lift  $\Phi_A$  von  $A$ , der Dehn-Twist längs aller Zylindermitten der zu  $A$  gehörenden Zylinderzerlegung von  $X_{m,n}$  ist.

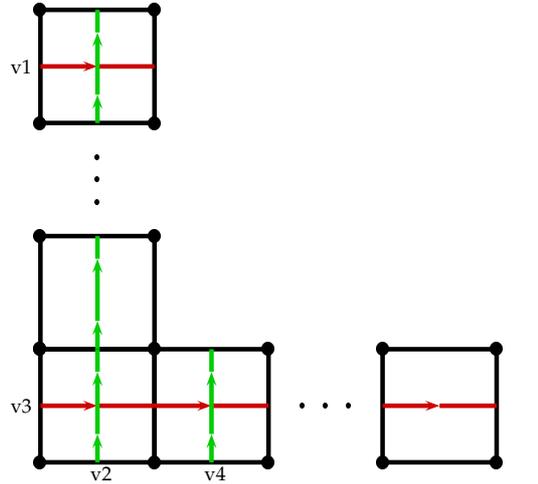
Die Wege  $v_1$  und  $v_3$  sind homolog zu Zylindermitten obiger Zylinderzerlegung, es gilt also

$$\text{Eig}(\Phi_A, 1) = \langle [v_1], [v_3] \rangle.$$

Wir betrachten weiter einen Lift  $\Phi_B$  der Matrix  $B$  mit obigen Eigenschaften. Die Wege  $v_2$  und  $v_3$  sind wieder homolog zu Zylindermitten, also gilt

$$\text{Eig}(\Phi_B, 1) = \langle [v_2], [v_4] \rangle.$$

Die Wege  $v_1, \dots, v_4$ :



Damit haben wir

$$\dim(\text{Eig}(\Phi_A, 1) \cap \text{Eig}(\Phi_B, 1)) = 0,$$

und damit die Behauptung gezeigt. □

### 3.2.3 Stufenorigamis

**Definition 3.2.10.** Es sei  $k \in \mathbb{N}$ .

- (a) Das Origami  $G_k$  sei gegeben als Überlagerung  $X_{G_k} \rightarrow E$  vom Grad  $2k$  mit Monodromie

$$\begin{aligned} x &\mapsto (1\ 2)(3\ 4)\dots(2k-1\ 2k) \\ y &\mapsto (2\ 3)(4\ 5)\dots(2k-2\ 2k-1). \end{aligned}$$

- (b) Das Origami  $St_k$  sei gegeben als Überlagerung  $X_{St_k} \rightarrow E$  vom Grad  $2k-1$  mit Monodromie

$$\begin{aligned} x &\mapsto (1\ 2)(3\ 4)\dots(2k-3\ 2k-2) \\ y &\mapsto (2\ 3)(4\ 5)\dots(2k-2\ 2k-1). \end{aligned}$$

**Bemerkung 3.2.11.** Für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt:

- (a) Das Origami  $G_k$  hat zwei Verzweigungspunkte, also hat die Fläche  $X_{G_k}$  Geschlecht  $k$ .

- (b) Das Origami  $St_k$  hat einen Verzweigungspunkt, also hat die Fläche  $X_{St_k}$  ebenfalls Geschlecht  $k$ .

*Beweis.* Siehe [Sch, Sec 5.3]. □

**Proposition 3.2.12.** Sei  $k \in \mathbb{N}$  mit  $k \geq 2$ .

- (a) Die Veechgruppe  $\Gamma(G_k)$  von  $G_k$  ist die Hauptkongruenzgruppe  $\Gamma(2)$ .  
 (b) Die Veechgruppe  $\Gamma(St_k)$  von  $St_k$  hat die Gestalt

$$\Gamma(St_k) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid a+c \text{ und } b+d \text{ sind ungerade} \right\}.$$

*Beweis.*

- (a) Siehe [Sch, Prop.5.9].  
 (b) Siehe [Sch, Prop.5.11]. □

**Folgerung 3.2.13.** Für  $k \geq 2$  sind die Matrizen

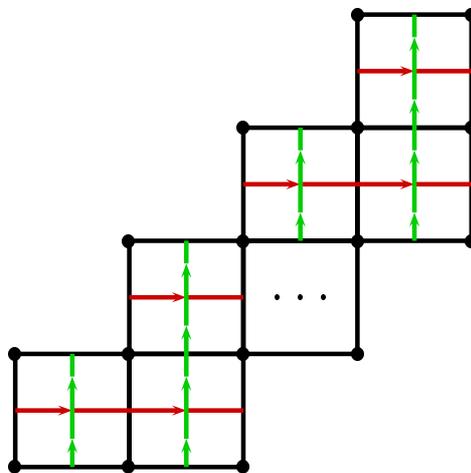
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

in  $\Gamma(G_k)$  und  $\Gamma(St_k)$  enthalten.

**Proposition 3.2.14.** Es existiert weder in  $\mathrm{Jac}(C(G_k))$  noch in  $\mathrm{Jac}(C(St_k))$  ein Fixanteil positiver Dimension.

*Beweis.* Wie beim vorangegangenen Beispiel liegt der Schlüssel zum Beweis darin, eine Basis von  $H^1(X_{G_k}, \mathbb{Z})$  bzw. von  $H^1(X_{St_k}, \mathbb{Z})$  auszuwählen, die von horizontalen und vertikalen Zylindermitten repräsentiert werden.

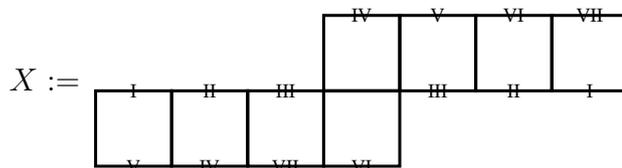
In folgendem Bild sind diese Zylindermitten zu sehen. Man erkennt am Bild auch, dass diese paarweise nicht homolog sind.



Da  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  in den jeweiligen Veechgruppen liegen und deren Zylinderrichtungen die horizontalen bzw. vertikalen Richtungen sind, kann man den Beweis in völliger Analogie zum vorigen Beispiel führen. □

### 3.3 Ein Beispiel mit maximalem Fixanteil

Wir betrachten das Origami  $W$  aus Beispiel 2.5.2, das gegeben ist durch die Überlagerung  $p : X \rightarrow E$ . Dabei bezeichne  $X$  die folgende Fläche:



#### 3.3.1 Erzeuger der Fundamentalgruppe

Wir wählen Erzeuger  $u_1, \dots, u_9$  der Fundamentalgruppe von  $X^*$  (i.e.  $X$  ohne die Eckpunkte der Kästchen). Das ist eine freie Gruppe vom Rang 9. Mit dem in Abschnitt 4.1 beschriebenen Algorithmus erhalten wir folgenden Erzeuger, aufgefasst als Elemente der  $F_2$ :

$$\begin{aligned} u_1 &:= x^{-4}, & u_2 &:= y^{-2}x^{-2}, & u_3 &:= xy^{-1}x^{-1}y^{-1}, \\ u_4 &:= x^2y^{-2}, & u_5 &:= x^3yx^{-1}y^{-1}, & u_6 &:= x^2yx^{-2}y^{-1}, \\ u_7 &:= yx^{-1}y^{-1}x^{-1}, & u_8 &:= x^3y^{-2}x^{-1}, & u_9 &:= x^2yxy^{-1}x^{-1}. \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir eine Präsentation von  $\pi_1(X)$ :

$$\begin{aligned} \pi_1(X) = \langle u_1, \dots, u_9 \mid & 1 = u_7u_6u_5^{-1}u_1^{-1}, \\ & 1 = u_9^{-1}u_5, \\ & 1 = u_4^{-1}u_3u_6^{-1}u_2^{-1}u_1u_8u_7^{-1}, \\ & 1 = u_8^{-1}u_4u_3^{-1}u_2u_9 \rangle. \end{aligned}$$

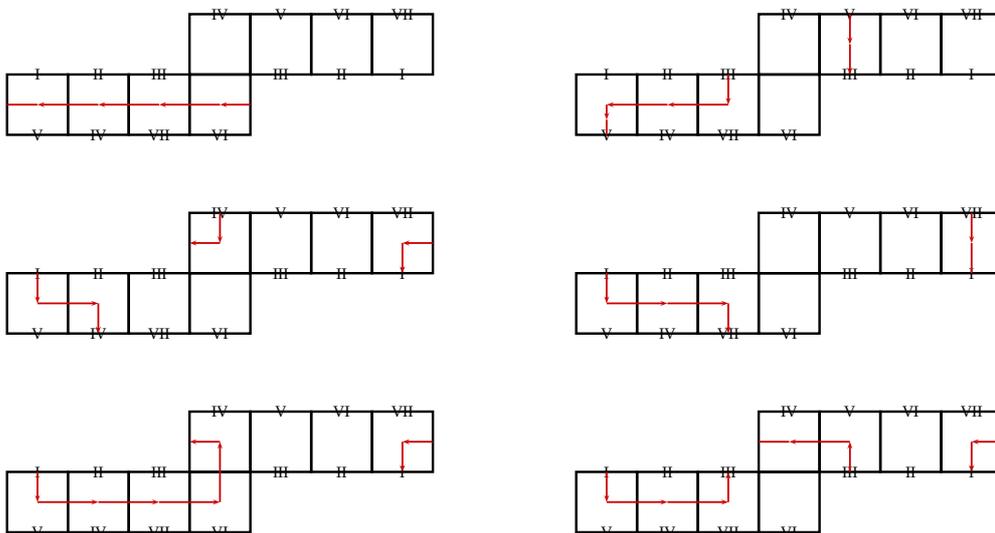
Die Wege

$$\begin{aligned}
 w_1 &:= u_7 u_6 u_5^{-1} u_1^{-1} = y x^{-1} y^{-1} x y x^{-1} y^{-1} x, \\
 w_2 &:= u_9^{-1} u_5 = x y x^{-1} y^{-1} x y x^{-1} y^{-1}, \\
 w_3 &:= u_4^{-1} u_3 u_6^{-1} u_2^{-1} u_1 u_8 u_7^{-1} = y^2 x^{-1} y^{-1} x y x^{-1} y^{-1} x y^{-1} \text{ und} \\
 w_4 &:= u_8^{-1} u_4 u_3^{-1} u_2 u_9 = x y^2 x^{-1} y^{-1} x y x^{-1} y^{-1} x y^{-1} x^{-1}
 \end{aligned}$$

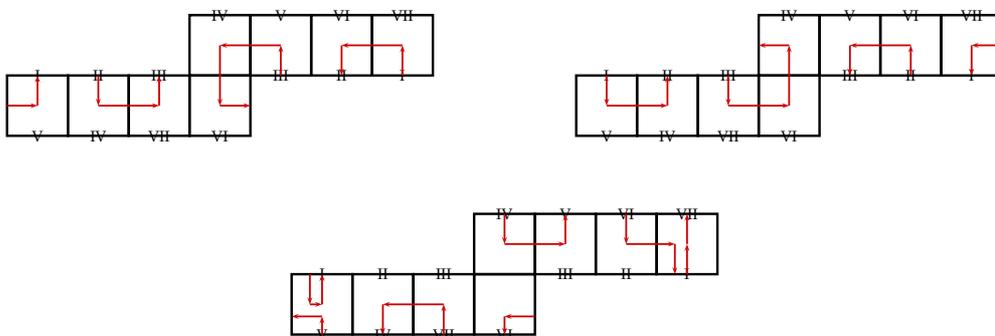
laufen nämlich jeweils um eine Ecke von  $X$ , sind also  $= 1$  in  $\pi_1(X)$ . Das liefert die Relationen.

Durch Anwendung einer Folge von Tietze-Transformationen wie in Abschnitt 4.3 sieht man, dass  $u_1, \dots, u_6$  Erzeuger von  $\pi_1(X)$  sind.

Hier die Visualisierung der Wege  $u_1, \dots, u_6$  und der Wege  $w_1, \dots, w_3$ :



Die Erzeuger der Fundamentalgruppe.



Relationen in der Fundamentalgruppe.

### 3.3.2 Eine Darstellung der Quaternionengruppe

Wir betrachten folgende Matrizen:

$$M_1 := \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad M_2 := \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$M_3 := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_4 := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Gruppe, die von  $M_1, \dots, M_4$  erzeugt wird, ist isomorph zur Quaternionengruppe.

Im Anhang A.1 berechnen wir die Bilder aller 8 Translationen von  $X$  unter  $\rho$  und berechnen deren Abbildungsmatrizen  $T_1, \dots, T_8$  bezüglich der Basis

$$([u_1], [u_2] + [u_4], [u_2] - 2[u_3] + [u_4], [u_1] - 2[u_2] + 2[u_3], [u_2] - [u_3] + [u_5], [u_6]).$$

Diese sind dann gerade die Matrizen

$$\begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & \pm M_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & \pm M_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & \pm M_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & \pm M_4 \end{pmatrix} \quad (\text{wobei } I_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}).$$

Da die Gruppe der Translationen von  $X$  isomorph zur Quaternionengruppe ist, liefert das eine treue Darstellung der Quaternionengruppe.

### 3.3.3 Zwei Beispiele für zu $\Gamma(4)$ isomorphe Untergruppen

Sei

$$\Gamma(4) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid a \equiv d \equiv 1 \pmod{4}, b \equiv c \equiv 0 \pmod{4} \right\}.$$

$\Gamma(4)$  ist eine Untergruppe von endlichem Index in  $\Gamma(W) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ .

Es gilt:

$$\Gamma(4) = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} -7 & 4 \\ -16 & 9 \end{pmatrix}}_{=:A_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}}_{=:A_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} -11 & 4 \\ -36 & 13 \end{pmatrix}}_{=:A_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}}_{=:A_4}, \underbrace{\begin{pmatrix} -11 & 8 \\ -40 & 29 \end{pmatrix}}_{=:A_5} \right\rangle.$$

### 3.3.4 Die Lifts

Im Anhang A.2 berechnen wir alle Lifts von  $A_1, \dots, A_5$  nach  $\text{Aut}(H^1(X, \mathbb{Z}))$ , deren Abbildungsmatrizen bezüglich obiger Basis und die Eigenräume dieser Matrizen zum Eigenwert 1. Wir erhalten die folgenden Ergebnisse.

Lifts von  $A_1$ :

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & \pm M_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & \pm M_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & \pm M_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & \pm M_4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Eig}\left(\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & M_4 \end{pmatrix}, 1\right) = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$\text{Eig}\left(\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & -M_4 \end{pmatrix}, 1\right) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Lifts von  $A_2$ :

$$\begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & \pm M_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & \pm M_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & \pm M_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & \pm M_4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Eig}\left(\begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & M_4 \end{pmatrix}, 1\right) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$\text{Eig}\left(\begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & -M_4 \end{pmatrix}, 1\right) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Lifts von  $A_3$ :

$$\begin{pmatrix} A_3 & 0 \\ 0 & \pm M_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_3 & 0 \\ 0 & \pm M_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_3 & 0 \\ 0 & \pm M_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_3 & 0 \\ 0 & \pm M_4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Eig}\left(\begin{pmatrix} A_3 & 0 \\ 0 & M_4 \end{pmatrix}, 1\right) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$\text{Eig}\left(\begin{pmatrix} A_3 & 0 \\ 0 & -M_4 \end{pmatrix}, 1\right) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Lifts von  $A_4$ :

$$\begin{pmatrix} A_4 & 0 \\ 0 & \pm M_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_4 & 0 \\ 0 & \pm M_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_4 & 0 \\ 0 & \pm M_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_4 & 0 \\ 0 & \pm M_4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Eig}\left(\begin{pmatrix} A_4 & 0 \\ 0 & M_4 \end{pmatrix}, 1\right) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$\text{Eig}\left(\begin{pmatrix} A_4 & 0 \\ 0 & -M_4 \end{pmatrix}, 1\right) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Lifts von  $A_5$ :

$$\begin{pmatrix} A_5 & 0 \\ 0 & \pm M_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_5 & 0 \\ 0 & \pm M_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_5 & 0 \\ 0 & \pm M_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_5 & 0 \\ 0 & \pm M_4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Eig}\left(\begin{pmatrix} A_5 & 0 \\ 0 & M_4 \end{pmatrix}, 1\right) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$\text{Eig}\left(\begin{pmatrix} A_5 & 0 \\ 0 & -M_4 \end{pmatrix}, 1\right) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Wir wählen folgende Untergruppen von  $\text{Aut}(H^1(X, \mathbb{Z}))$ :

$$\Gamma_1 := \left\langle \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & -M_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & -M_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_3 & 0 \\ 0 & -M_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_4 & 0 \\ 0 & -M_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_5 & 0 \\ 0 & -M_1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

und

$$\Gamma_2 := \left\langle \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_3 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_4 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_5 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Beide Untergruppen enthalten keine Bilder von Translationen in  $\text{Aff}(X)$ , sind also isomorph zu  $\Gamma(4)$ .

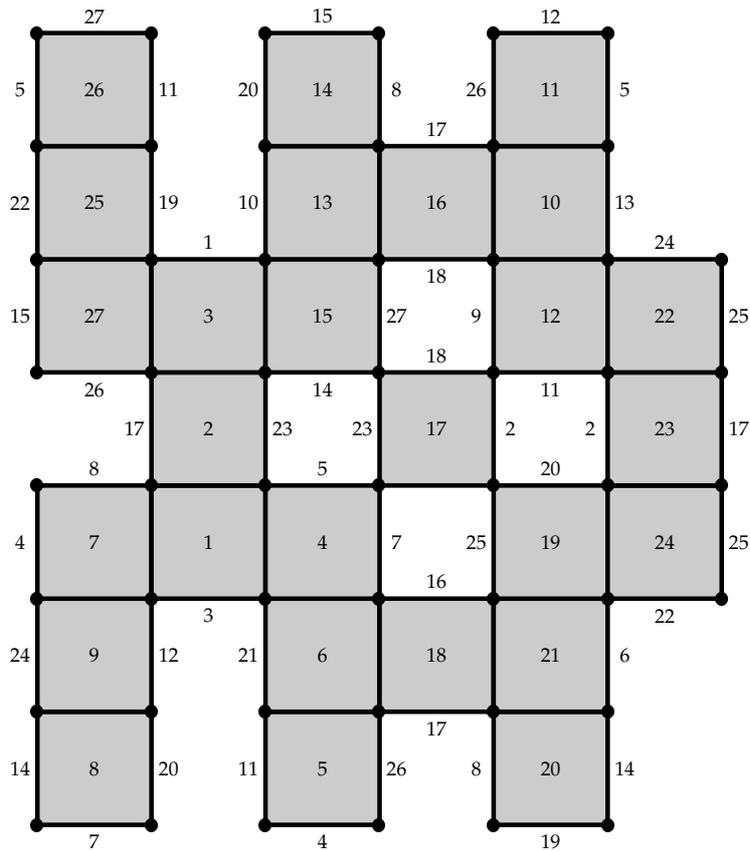
Die Gruppen  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  operieren auf  $H^1(X, \mathbb{Z})$ , wobei  $\Gamma_1$  trivial auf einem vierdimensionalen Unterraum operiert, während  $\Gamma_2$  nur auf dem Nullraum trivial operiert.

Es gibt also über  $\Gamma_1$  einen Fixanteil der Dimension 2, über  $\Gamma_2$  keinen Fixanteil.

### 3.4 Das Origami $H_{3,3}$

Das Origami  $H_{3,3}$  ist uns bereits im letzten Kapitel begegnet, es ist ein charakteristisches Origami. Nach Beispiel 2.5.2 hat  $H_{3,3}$  Geschlecht  $g = 10$ . Das geometrische Geschlecht des Randpunktes von  $C(H_{3,3})$  in  $\overline{\mathcal{M}}_{10}$  ist 3. Auch für dieses gilt:

**Proposition 3.4.1.** *Das Origami  $H_{3,3}$  hat keinen Fixanteil positiver Dimension.*

Das Origami  $H_{3,3}$ 

*Beweis.* Bei diesem Origami ist es unabdingbar, explizit die Lifts einiger Elemente seiner Veechgruppe nach  $\text{Aut}(H^1(X, \mathbb{Z}))$  zu berechnen und deren Eigenräume zu schneiden.

Analog zum vorhergehenden Beispiel berechnen wir Erzeuger von  $\pi_1(X)$ :

$$\begin{aligned}
 v_1 &:= x^{-3}, & v_2 &:= y^{-3}, \\
 v_3 &:= xy^{-3}x^{-1}, & v_4 &:= x^2y^{-3}x^{-2}, \\
 v_5 &:= y^2x^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1}x^{-1}, & v_6 &:= xy^2x^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1}x^{-2}, \\
 v_7 &:= x^2y^2x^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1}, & v_8 &:= yx^{-3}y^{-1}, \\
 v_9 &:= xyx^{-3}y^{-1}x^{-1}, & v_{10} &:= x^2yx^{-3}y^{-1}x^{-2}, \\
 v_{11} &:= x^2yxy^2xy^{-2}x^{-1}y^{-1}, & v_{12} &:= x^2yxy^3x^{-1}y^{-1}x^{-2}, \\
 v_{13} &:= x^2yxy^2x^{-1}y^{-2}x^{-1}y^{-1}x^{-1}, & v_{14} &:= yxy^2xy^{-2}x^{-1}y^{-1}x^{-1}, \\
 v_{15} &:= yxy^3x^{-1}y^{-1}, & v_{16} &:= xyxy^3x^{-1}y^{-1}x^{-1}, \\
 v_{17} &:= x^2yxyx^{-2}y^{-2}x^{-1}, & v_{18} &:= yxyx^{-2}y^{-2}x^{-2}, \\
 v_{19} &:= x^2y^2xy^2x^{-2}y^{-1}x^{-1}, & v_{20} &:= x^2y^2xy^{-1}x^{-2}y^{-1}x^{-1},
 \end{aligned}$$

Wir ergänzen diese mit  $v_{21}, \dots, v_{28}$  zu einem System von Erzeugern von  $\pi_1(X^*)$ . Dabei sind  $v_{21}, \dots, v_{28}$  Relationen in  $\pi_1(X)$ .

$$\begin{aligned}
v_{21} &:= yx^{-1}y^{-1}xyx^{-1}y^{-1}xyx^{-1}y^{-1}x, \\
v_{22} &:= y^2x^{-1}y^{-1}xyx^{-1}y^{-1}xyx^{-1}y^{-1}xy^{-1}, \\
v_{23} &:= x^{-1}y^{-1}xyx^{-1}y^{-1}xyx^{-1}y^{-1}xy, \\
v_{24} &:= xyx^{-1}y^{-1}xyx^{-1}y^{-1}xyx^{-1}y^{-1}, \\
v_{25} &:= xy^2x^{-1}y^{-1}xyx^{-1}y^{-1}xyx^{-1}y^{-1}xy^{-1}x^{-1}, \\
v_{26} &:= y^{-1}xyx^{-1}y^{-1}xyx^{-1}y^{-1}xyx^{-1}, \\
v_{27} &:= x^{-1}yx^{-1}y^{-1}xyx^{-1}y^{-1}xyx^{-1}y^{-1}x^2, \\
v_{28} &:= x^{-1}y^2x^{-1}y^{-1}xyx^{-1}y^{-1}xyx^{-1}y^{-1}xy^{-1}x.
\end{aligned}$$

Im Folgenden betrachten wir Lifts der Matrizen

$$T_1 := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, T_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } T_3 := \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

nach  $\text{Stab}_{\text{Aut}^+(F_2)}(U)$  mit  $U := \pi_1(X^*)$ , die wir mit dem in [Sch, Sec. 4.1] beschriebenen Algorithmus berechnet haben, und daraus Lifts nach  $\text{Aut}(H^1(X, \mathbb{Z}))$ . Die Matrizen  $T_1, T_2, T_3$  sind Elemente der Veechgruppe des Heisenberg-Origamis.

Wir betrachten

$$\begin{aligned}
\phi_1 : F_2 &\longrightarrow F_2 \\
x &\longmapsto x \\
y &\longmapsto x^3y.
\end{aligned}$$

Es gilt:

$$\text{der}(\phi_1) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = T_1.$$

Wir stellen die Bilder der Erzeuger  $v_1, \dots, v_{20}$  wieder als Worte in  $v_1, \dots, v_{20}$  dar. Der dazu verwendete Algorithmus wird in Abschnitt 4.2 beschrieben.





$$\phi_2(v_{14}) = v_{15}v_{14}v_3,$$

$$\phi_2(v_{15}) = v_{15},$$

$$\phi_2(v_{16}) = v_3^{-1}v_{16}v_3,$$

$$\phi_2(v_{17}) = v_3^{-1}v_4^{-1}v_{20}v_5^{-1}v_{22}v_{21}v_1v_{12}^{-1}v_{13}v_{16}v_{19}^{-1}v_4^{-1}v_1^{-1}v_{23}v_2v_5v_{13}^{-1}v_{17}v_3,$$

$$\phi_2(v_{18}) = v_{18}v_{20}v_{19}^{-1}v_4v_3,$$

$$\phi_2(v_{19}) = v_3^{-1}v_4^{-1}v_{19}v_{16}^{-1}v_3,$$

$$\phi_2(v_{20}) = v_3^{-1}v_4^{-1}v_{20}v_{16}^{-1}v_3.$$

Bezüglich der Basis  $([v_1], \dots, [v_{20}])$  von  $H^1(X, \mathbb{Z})$  hat die Abbildungsmatrix  $B$  von  $\phi_2$  die Form

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt:

$$\text{Eig}(B, 1) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Wir betrachten nun

$$\begin{aligned} \phi_3 : F_2 &\longrightarrow F_2 \\ x &\longmapsto (xy)^4x \\ y &\longmapsto (yx)^{-3}x^{-1}. \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\text{der}(\phi_3) = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = T_3.$$

Für die Bilder der Erzeuger  $v_1, \dots, v_{20}$  gilt:

$$\begin{aligned}
\phi_3(v_1) &= v_1 v_4 v_7 v_1 v_4 v_7 v_{18} v_{20} v_{16}^{-1} v_{14}^{-1} v_{18} v_{20} v_2 v_5, \\
\phi_3(v_2) &= v_5^{-1} v_2^{-1} v_6^{-1} v_3^{-1} v_1^{-1} v_7^{-1} v_4^{-1} v_1^{-1}, \\
\phi_3(v_3) &= v_5^{-1} v_2^{-1} v_{20}^{-1} v_{18}^{-1} v_{14} v_{16} v_9^{-1} v_{17}^{-1} v_{13} v_5^{-1} v_2^{-1} v_{23}^{-1} v_1 v_4 v_{19} v_9^{-1}, \\
\phi_3(v_4) &= v_5^{-1} v_2^{-1} v_{20}^{-1} v_{18}^{-1} v_{14} v_{16} v_{20}^{-1} v_{18}^{-1} v_7^{-1} v_4^{-1} v_1^{-1} \\
&\quad * v_7^{-1} v_{19} v_9^{-1} v_{24} v_{15}^{-1} v_{11}^{-1} v_{12} v_{10}^{-1} v_{20} v_2 v_5, \\
\phi_3(v_5) &= v_1 v_4 v_7 v_1 v_3 v_6 v_2 v_5 v_2 v_5, \\
\phi_3(v_6) &= v_9 v_{19}^{-1} v_4^{-1} v_1^{-1} v_{23} v_2 v_5 v_{13}^{-1} v_{17} v_9 v_{16}^{-1} v_{14}^{-1} v_{18} v_{20} v_{16}^{-1} v_{14}^{-1} v_{18} v_{20} v_2 v_5, \\
\phi_3(v_7) &= v_5^{-1} v_2^{-1} v_{20}^{-1} v_{10} v_{12}^{-1} v_{11} v_{15} v_{24}^{-1} v_9 v_{19}^{-1} v_7, \\
\phi_3(v_8) &= v_1 v_4 v_7 v_1 v_3 v_6 v_3 v_6 v_{20} v_5^{-1} v_{22} v_8 v_{15}^{-1} v_{11}^{-1} v_{20} v_5^{-1} v_{22} v_8, \\
\phi_3(v_9) &= v_9 v_{19}^{-1} v_4^{-1} v_1^{-1} v_{23} v_2 v_5 v_{13}^{-1} v_{17} v_9 v_{16}^{-1} v_{13}^{-1} v_{12} v_1^{-1} \\
&\quad * v_{21}^{-1} v_8 v_{15}^{-1} v_{14} v_{16} v_1^{-1} v_{27}^{-1} v_1 v_{10} v_{12}^{-1} v_{11} v_{15} v_{24}^{-1} v_9 v_{19}^{-1} \\
&\quad * v_{18}^{-1} v_{11}^{-1} v_6^{-1} v_3^{-1} v_{26}^{-1} v_2 v_8 v_{15}^{-1} v_{14} v_{16} v_1^{-1} v_{27}^{-1} v_1 v_{10} \\
&\quad * v_{12}^{-1} v_{11} v_{15} v_{24}^{-1} v_9 v_{19}^{-1} v_{18}^{-1} v_{11}^{-1} v_6^{-1} v_3^{-1} v_{26}^{-1} v_2 v_5 v_2 v_5 \\
\phi_3(v_{10}) &= v_5^{-1} v_2^{-1} v_{20}^{-1} v_{10} v_{12}^{-1} v_{11} v_{15} v_{24}^{-1} v_9 v_{19}^{-1} v_{10} v_{12}^{-1} v_{13} v_{17}^{-1} v_{20} \\
&\quad * v_5^{-1} v_{22} v_8 v_7^{-1} v_1^{-1} v_{28} v_1 v_{10} v_{12}^{-1} v_{13} v_{14}^{-1} v_{18} v_{20} v_{16}^{-1} v_{14}^{-1} v_{18} v_{20} v_2 v_5, \\
\phi_3(v_{11}) &= v_5^{-1} v_2^{-1} v_{20}^{-1} v_{18}^{-1} v_{15} v_8^{-1} v_2^{-1} v_{26} v_3 v_6 v_{11} v_{18} v_{19} \\
&\quad * v_9^{-1} v_{24} v_{15}^{-1} v_{11}^{-1} v_{12} v_{10}^{-1} v_1^{-1} v_{27} v_1 v_{16}^{-1} v_{14}^{-1} v_{15} v_8^{-1} v_7^{-1} v_4^{-1} v_1^{-1}, \\
\phi_3(v_{12}) &= v_5^{-1} v_2^{-1} v_{20}^{-1} v_{18}^{-1} v_{11}^{-1} v_{20} v_5^{-1} v_{22} v_8 v_{15}^{-1} \\
&\quad * v_{11}^{-1} v_{13} v_{17}^{-1} v_{20} v_5^{-1} v_{22} v_8 v_7^{-1} v_1^{-1} v_{28} v_1 v_{10} v_{12}^{-1} v_{13} v_{14}^{-1} \\
&\quad * v_{18} v_{20} v_{16}^{-1} v_{14}^{-1} v_{18} v_{20} v_2 v_5, \\
\phi_3(v_{13}) &= v_5^{-1} v_2^{-1} v_{20}^{-1} v_{18}^{-1} v_{11}^{-1} v_{20} v_5^{-1} v_{22} v_8 v_{15}^{-1} v_{11}^{-1} v_{13}, \\
\phi_3(v_{14}) &= v_1 v_4 v_7 v_{18} v_{20} v_9^{-1} v_{25}^{-1} v_6 v_{10}^{-1} v_1^{-1} v_{28}^{-1} v_1 v_7 v_8^{-1} v_{22}^{-1} v_5 \\
&\quad * v_{20}^{-1} v_{17} v_{13}^{-1} v_{12} v_{10}^{-1} v_1^{-1} v_{28}^{-1} v_1 v_7 v_8^{-1} v_{22}^{-1} v_5 v_{20}^{-1} v_{17}, \\
\phi_3(v_{15}) &= v_1 v_4 v_7 v_8 v_{15}^{-1} v_{14} v_{16} v_1^{-1} v_{27}^{-1} v_1 v_{10} v_{12}^{-1} v_{11} v_{15} v_{24}^{-1} v_9 v_{19}^{-1} \\
&\quad * v_{18}^{-1} v_{11}^{-1} v_6^{-1} v_3^{-1} v_{26}^{-1} v_2 v_8 v_{15}^{-1} v_{11}^{-1} v_{20} v_5^{-1} v_{22} v_8, \\
\phi_3(v_{16}) &= v_{17}^{-1} v_{20} v_5^{-1} v_{22} v_8 v_7^{-1} v_1^{-1} v_{28} v_1 v_{10} v_{12}^{-1} v_{13} v_{17}^{-1} v_{20} v_5^{-1} v_{22} \\
&\quad * v_8 v_7^{-1} v_1^{-1} v_{28} v_1 v_{10} v_6^{-1} v_{25} v_9 v_{20}^{-1} v_{18}^{-1} v_8 v_{15}^{-1} v_{14} v_{16} v_1^{-1} v_{27}^{-1} \\
&\quad * v_1 v_{10} v_{12}^{-1} v_{11} v_{15} v_{24}^{-1} v_9 v_{19}^{-1} v_{18}^{-1} v_{11}^{-1} v_6^{-1} v_3^{-1} v_{26}^{-1} v_2 v_5 v_2 v_5, \\
\phi_3(v_{17}) &= v_5^{-1} v_2^{-1} v_{20}^{-1} v_{18}^{-1} v_{11}^{-1} v_{20} v_5^{-1} v_{22} v_8 v_{15}^{-1} v_{11}^{-1} v_{17}, \\
\phi_3(v_{18}) &= v_1 v_4 v_7 v_8 v_{15}^{-1} v_{14} v_{16} v_1^{-1} v_{27}^{-1} v_1 v_{10} v_{12}^{-1} v_{11} v_{15} v_{24}^{-1} v_9 \\
&\quad * v_{19}^{-1} v_{18}^{-1} v_{11}^{-1} v_6^{-1} v_3^{-1} v_{26}^{-1} v_2 v_8 v_{15}^{-1} v_{14} v_{16} v_1^{-1} v_{27}^{-1} v_1 v_{10} \\
&\quad * v_{12}^{-1} v_{11} v_{15} v_{24}^{-1} v_9 v_{19}^{-1} v_{20} v_2 v_5,
\end{aligned}$$





$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -2 & -2 & 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & -3 & 0 & -1 & -3 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -3 & 2 & -2 & 0 & -3 & -2 & 2 & -2 & -1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -2 & -3 & 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -2 & 1 & -1 & -2 & -3 & 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & -3 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & -2 & 2 & 1 & -2 & 3 & 3 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 4 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & -1 & 1 & 0 & -2 & 1 & 3 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 3 & -1 & -2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -2 & 0 & 0 & -2 & -4 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & -1 & -2 & -1 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 3 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Auf  $U$  operieren  $\phi_1, \phi_2$  und  $\phi_3$  also wie  $T_1, T_2$  und  $T_3$ .

### 3.5 Das 108er Origami

Wir betrachten das  $O_{108} : (X \rightarrow E)$  aus Beispiel 2.5.2.

**Satz 3.5.1.** *In  $\text{Jac}(C(O_{108}))$  gibt es einen Fixanteil der (komplexen) Dimension 12.*

*Beweis.* Hier soll lediglich die Beweisidee dargestellt werden.

Die Hauptkongruenzgruppe

$$\Gamma(6) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid a \equiv d \equiv 1 \pmod{6}, b \equiv c \equiv 0 \pmod{6} \right\}$$

operiert trivial auf einem 24-dimensionalen Unterraum von  $H^1(X, \mathbb{Z})$ .

Um das zu sehen, muss man analog zu obigem Beispiel die Lifts eines Systems von Erzeugern von  $\Gamma(6)$  nach  $\text{Aut}(H^1(X, \mathbb{Z}))$  berechnen und deren Eigenräume zu schneiden. Das soll hier mangels Platz nicht weiter ausgeführt werden.

□



# Kapitel 4

## Ein Exkurs in die algorithmische Gruppentheorie

Die meisten Rechnungen in dieser Arbeit sind Berechnungen in endlich präsentierten und in freien Gruppen. In diesem Kapitel wollen wir einige Techniken vorstellen, die dabei zumeist stillschweigend verwendet werden.

### 4.1 Erzeuger von Untergruppen endlich erzeugter Gruppen

Folgendes Problem ist zu lösen: Gegeben sei eine Untergruppe  $H$  einer endlich erzeugten Gruppe  $G$  sowie ein System von Nebenklassenvertretern. Gesucht ist eine möglichst kleine Menge von Erzeugern von  $H$ .

#### 4.1.1 Ein Satz von Schreier

Eine Lösung des obigen Problems liefert der folgende Satz.

**Satz 4.1.1** (Schreier). *Gegeben seien eine endlich erzeugte Gruppe  $G$  und eine Untergruppe  $H \leq G$ . Es sei  $A := \{x_1, \dots, x_k\}$  ein System von Erzeugern von  $G$  und  $T := H \backslash G$ . Weiter sei für jedes  $p \in T$  ein Vertreter  $u_p$  gewählt. Dabei sei  $u_H := 1$ . Für  $p \in T$  und  $x \in A$  sei  $\sigma(p, x)$  gegeben durch:*

$$\sigma(p, x) := u_p \cdot x \cdot u_q^{-1},$$

wobei  $q = p \cdot x$ . Dann ist

$$\{\sigma(p, x) \mid x \in A, p \in T\}$$

ein System von Erzeugern von  $H$ .

*Beweis.* [MKS, Theorem 2.7]

□

### 4.1.2 Erzeuger von Fundamentalgruppen von Origamis

Im Allgemeinen ist das Erzeugendensystem aus Satz 4.1.1 nicht minimal, es ist oft deutlich größer als der Rang von  $H$ . Anders liegt der Fall, wenn  $G = F_2$  und  $H := \pi_1(X^*, P)$  die Fundamentalgruppe eines Origamis  $O := (p : X \rightarrow E)$  ist, wobei  $P$  als der Mittelpunkt eines der Kästchen von  $O$  gewählt sei.

Wir setzen voraus, dass die Kästchen des Origamis bereits so weit verklebt sind, dass sie eine zusammenhängende und einfach zusammenhängende Teilmenge von  $\mathbb{C}$  bilden. Wir erhalten ein System von Erzeugern von  $H$  mit dem folgenden Algorithmus:

- Suche einen Weg  $\gamma_1$ , der  $P$  mit dem Mittelpunkt eines anderen Kästchens verbindet.
- Suche einen Weg  $\gamma_2$ , der über eine Kante des mit  $\gamma_1$  erreichten Kästchens zum Mittelpunkt seines Nachbarn geht und in  $P$  endet.
- Die Homologiekategorie des Wegs  $\gamma_1 * \gamma_2$  ist ein Erzeuger von  $H$ .
- Wiederhole das mit allen Kästchen und allen Kanten, das liefert ein System von Erzeugern von  $H$ .

Interpretiert man die Wege als Worte in  $F_2$ , so liefert obiger Algorithmus genau das Erzeugendensystem aus Satz 4.1.1. Ein Weg, der  $P$  mit dem Mittelpunkt des Kästchens  $j$  verbindet ist nämlich gerade ein Vertreter der zu  $j$  gehörenden Nebenklasse von  $H \setminus F_2$ .

Man muss hierbei aber nur Wege  $\gamma_2$  betrachten, die vom Mittelpunkt des mit  $\gamma_1$  erreichten Kästchens über eine äußere Kante laufen, ansonsten ist  $\gamma_2 * \gamma_1 \simeq \text{id}$ . Man erhält also eine wesentlich kleinere Menge von Erzeugern als im allgemeinen Fall.

## 4.2 Konstruktiver Elementtest

In diesem Abschnitt wollen wir das folgende Problem besprechen. Gegeben sei eine Untergruppe  $U = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$  von  $F_2 = \langle x, y \rangle$  und ein Wort  $w$  in  $U$ . Gesucht ist eine Darstellung von  $w$  als Wort in  $v_1, \dots, v_n$ .

### 4.2.1 Ein naiver Algorithmus

Wir wollen zunächst einen elementaren Algorithmus vorstellen, der das Problem für Untergruppen von  $F_2$  löst:

- Bestimme den Erzeuger  $v$ , der auf den meisten Stellen von vorne gelesen mit  $w$  übereinstimmt.
- Streiche diese Stellen aus  $w$  und aus  $v$ .
- Füge das Inverse der übrigen Stellen von  $v$  von vorne an den Rest von  $w$  an.
- Schreibe  $v$  in eine Liste.

- Wiederhole das mit dem so aus  $w$  entstandenen Wort, solange, bis nur noch das leere Wort übrig bleibt.
- Aus der Liste liest man die gesuchte Darstellung von  $w$  ab.

Dieser Algorithmus terminiert und liefert das korrekte Ergebnis für jedes  $w \in U$ .

### 4.2.2 Ein Ansatz mit Hilfe endlicher Automaten

Mit Hilfe der Theorie endlicher Automaten kann man Algorithmen zur Lösung unseres Problems konstruieren, deren Aufwand linear in der Länge des Wortes  $w$  wächst, sofern man ein System von Nebenklassenvertretern von  $U \setminus F_2$  kennt. In diesem Abschnitt wollen wir einen solchen vorstellen.

#### Definition 4.2.1.

- Ein *endlicher Automat*  $\mathcal{A}$  ist ein Tupel  $\mathcal{A} = (Q, X, \delta, q_0, T)$ . Dabei seien  $Q$  und  $X$  endliche Mengen,  $\delta : Q \times X \rightarrow Q$  eine Abbildung, sowie  $q_0$  ein Element von  $Q$  und  $T$  eine Teilmenge von  $Q$ . Man nennt  $Q$  die *Zustandsmenge* des Automaten,  $X$  sein *Alphabet*,  $\delta$  die *Übergangsfunktion*,  $q_0$  den *Startzustand* und  $T$  die Menge der *Terminalzustände* von  $\mathcal{A}$ . Für  $\delta(p, x) = q$  schreiben wir auch  $p \xrightarrow{x} q$ .
- Die Abbildung  $\delta$  induziert eine Abbildung  $X \rightarrow \text{Abb}(Q, Q)$ , die eindeutig fortgesetzt werden kann zu einer Abbildung  $\delta^* : X^* \rightarrow \text{Abb}(Q, Q)$ , wo  $X^*$  das freie Monoid mit Basis  $X$  bezeichne. Ein Automat akzeptiert ein Wort  $w \in X^*$ , wenn  $\delta^*(w)(q_0) \in T$ . Die Menge aller vom Automaten  $\mathcal{A}$  akzeptierten Wörter heißt die von  $\mathcal{A}$  *akzeptierte Sprache* und wird mit  $\mathcal{L}(\mathcal{A})$  bezeichnet.
- Es sei  $X$  eine endliche Menge,  $F(X)$  die freie Gruppe über  $X$  und  $H \leq F(X)$  mit  $(F(X) : H) < \infty$ . Der Automat

$$\mathcal{A}_S(H) := (H \setminus F(X), X^\pm, \delta, H, \{H\}),$$

wobei  $\delta$  gegeben ist durch

$$\delta(Hr, x) := Hrx,$$

heißt *Schreier-Automat* von  $H$ .

Mit dem Schreier-Automaten kann man leicht prüfen, ob ein Wort  $w \in F(X)$  in  $H$  liegt oder nicht. Es ist nämlich genau dann  $w \in H$ , wenn  $\delta^*(w)(H) = H$  gilt.

Für jeden Zustand  $p$  von  $\mathcal{A}_S(H)$  sei ein Vertreter  $\bar{p}$  der zugehörigen Nebenklasse gewählt, als Vertreter von  $H$  wählen wir das leere Wort. Ist nun  $\delta(p, x) = q$ , gilt nach Definition von  $\mathcal{A}_S(H)$  also  $H\bar{p}x = H\bar{q}$  und somit  $\bar{p}x\bar{q}^{-1} \in H$ .

Wir definieren  $W(p, x) := \bar{p}x\bar{q}^{-1}$  für jedes  $p \in Q$  und jedes  $x \in X$ . Hat man jetzt ein Wort  $w = \sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_k \in F(X)$  mit  $\sigma_i \in X^\pm$  und eine zugehörige Folge von Zustandsübergängen

$$p_0 \xrightarrow{\sigma_1} p_1 \xrightarrow{\sigma_2} p_2 \xrightarrow{\sigma_3} \cdots \xrightarrow{\sigma_k} p_k,$$

so gilt

$$\begin{aligned} \bar{p}_0 \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_k &= W(p_0, \sigma_1) \cdot \bar{p}_1 \sigma_2 \cdots \sigma_k &&= \cdots = \\ &= W(p_0, \sigma_1) W(p_1, \sigma_2) \cdots W(p_{k-1}, \sigma_k) \cdot \bar{p}_k. \end{aligned}$$

Ist  $w$  ein von  $\mathcal{A}_S(H)$  akzeptiertes Wort und  $p_0 = H = p_k$  so gilt demnach

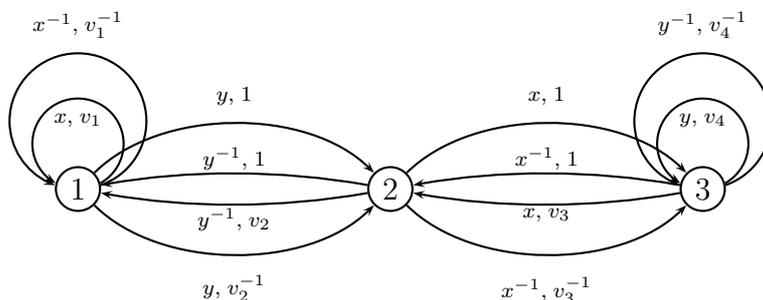
$$w = W(p_0, \sigma_1) \cdots W(p_{k-1}, \sigma_k). \quad (*)$$

Hat man noch für jedes  $p \in Q$  und jedes  $x \in X$  eine Darstellung von  $W(p, x)$  in Erzeugern von  $H$ , so liefert  $(*)$  eine Darstellung von  $w$  in diesen Erzeugern.

Erweitert man den Automaten  $\mathcal{A}_S(H)$ , indem man einem Tripel  $(p, x, q) \in Q \times X \times Q$  mit  $\delta(p, x) = q$  eine Darstellung  $\varepsilon$  von  $W(p, x)$  in gewählten Erzeugern von  $H$  zuordnet, so löst dieser erweiterte Automat unser Problem. Man nennt diese Erweiterung von  $\mathcal{A}_S(H)$  *erweiterten Schreier-Automaten* von  $H$  und notiert dessen Zustandsübergänge mit  $p \xrightarrow{x, \varepsilon} q$ .

### Beispiel: Ein erweiterter Schreier-Automat zum Origami $L_{2,2}$

Wir betrachten als Beispiel den erweiterten Schreier-Automaten zur Untergruppe  $H \leq F_2$ , die zum Origami  $L_{2,2}$  gehört, wobei  $H$  von  $v_1, \dots, v_4$  mit  $v_1 := x$ ,  $v_2 := y^{-2}$ ,  $v_3 := yx^{-2}y^{-1}$  und  $v_4 := yxyx^{-1}y^{-1}$  erzeugt wird. Ein System von Nebenklassenvertretern von  $H \setminus F_2$  ist  $\{1, x, yx\}$ . Der Automat hat dann die Form:



Für Algorithmen, um zu gegebenem  $H$  und zu einer gegebenen Menge von Erzeugern von  $H$  den erweiterten Schreier-Automaten zu konstruieren, sei auf [Si] und [Sv] verwiesen.

## 4.3 Vereinfachung von Präsentationen

Es sei  $G$  eine endlich präsentierte Gruppe. Hat man sich eine Präsentation  $G = \langle X \mid R \rangle$  von  $G$  beschafft, wo  $X$  und  $R$  endlich sind, hat man oft mehr Erzeuger und Relationen, als notwendig sind. Es gibt mehrere Strategien um eine gegebene Präsentation zu vereinfachen, wir wollen hier die Benutzung von *Tietze-Transformationen* vorführen.

**Definition 4.3.1.** Sei  $\overline{R}$  der Normalabschluss von  $R$  in  $F(X)$ . Die Operationen

- (a)  $\langle X \mid R \rangle \rightarrow \langle X \mid R, r \rangle$  mit  $r \in \overline{R}$ , und
- (b)  $\langle X \mid R \rangle \rightarrow \langle X, a \mid R, a = w \rangle$  mit  $w \in F(X)$

sowie deren Inverse heißen *Tietze-Transformationen*.

**Satz 4.3.2.** *Zwei Präsentationen präsentieren genau dann dieselbe Gruppe, wenn sie durch eine Folge von Tietze-Transformationen ineinander übergehen.*

*Beweis.* Siehe [MKS, Theorem 1.5]. □

**Korollar 4.3.3.** *Zwei endliche Präsentationen präsentieren genau dann dieselbe Gruppe, wenn sie durch eine endliche Folge von Tietze-Transformationen ineinander übergehen.*

**Beispiel 4.3.4.** Für die Fundamentalgruppe  $G$  des Origamis  $W$  aus Abschnitt 3.3 haben wir die Präsentation

$$G = \langle v_1, \dots, v_9 \mid r_1, r_2, r_3, r_4 \rangle,$$

wobei

$$\begin{aligned} r_1 &:= v_7 v_6 v_5^{-1} v_1^{-1}, & r_2 &:= v_9^{-1} v_5, \\ r_3 &:= v_4^{-1} v_3 v_6^{-1} v_2^{-1} v_1 v_8 v_7^{-1}, & r_4 &:= v_8^{-1} v_4 v_3^{-1} v_2 v_9. \end{aligned}$$

Aus der Relation  $r_2$  erhalten wir  $v_9 = v_5$ , wir können also den Erzeuger  $v_9$  und die Relation  $r_2$  streichen und in jeder der anderen Relationen  $v_9$  durch  $v_5$  ersetzen. Mit  $r_1$  sehen wir  $v_7 = v_1 v_5 v_6^{-1}$  und von  $r_4$  bekommen wir  $v_8 = v_4 v_3^{-1} v_2 v_5$ . Wir können somit auch die Erzeuger  $v_7$  und  $v_8$  sowie die Relationen  $r_1$  und  $r_4$  streichen und erhalten als Präsentation für unsere Gruppe dann

$$G = \langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 \mid v_4^{-1} v_3 v_6^{-1} v_2^{-1} v_1 v_4 v_3^{-1} v_2 v_5 v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} \rangle.$$



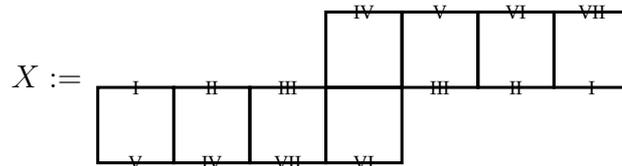
# Anhang A

## Rechnungen zum Origami $W$

Hier werden ausführlich alle Rechnungen vorgeführt, die in den Abschnitten 3.3.2 und 3.3.3 der besseren Lesbarkeit halber weggelassen wurden.

### A.1 Lifts der Einheitsmatrix

Wir betrachten wieder das Origami  $W : X^* \rightarrow E^*$  mit den Erzeugern  $u_1, \dots, u_9$  von  $\pi_1(X^*)$  und den Wegen  $w_1, \dots, w_4$  aus Abschnitt 3.3. Für die weiteren Berechnungen benutzen wir das System von Erzeugern  $\{v_1, \dots, v_9\}$  gegeben durch  $v_i := u_i$  für  $i = 1, \dots, 6$  und  $v_7 := w_1, v_8 := w_2, v_9 := w_3$ .



Wir betrachten im Folgenden die Lifts  $\phi_1, \dots, \phi_8$  der  $(2 \times 2)$ -Einheitsmatrix  $I \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$  nach  $\text{Stab}_{\text{Aut}^+(\mathbb{F}_2)}(U)$  mit  $U := \pi_1(X^*)$  und berechnen die Abbildungsmatrizen  $g_1, \dots, g_8$  von  $\tilde{\rho}(\phi_1), \dots, \tilde{\rho}(\phi_8)$  bezüglich der Basis  $([v_1], \dots, [v_6])$  von  $H^1(X, \mathbb{Z})$ .

Wir setzen  $\phi_1 := \text{id}_{\mathbb{F}_2}$  und erhalten

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jetzt definieren wir  $\phi_2, \dots, \phi_8$  der Reihe nach durch Angabe der Bilder der Erzeuger  $x$  und  $y$  von  $F_2$ .

Jetzt betrachten wir

$$\begin{aligned} \phi_2 : F_2 &\longrightarrow F_2 \\ x &\longmapsto x \\ y &\longmapsto xyx^{-1}. \end{aligned}$$

Es gilt:  $\phi_2 = \text{inn}_x \circ \phi_1$ . Für die Bilder der Erzeuger  $v_1, \dots, v_6$  haben wir damit

$$\begin{aligned} \phi_2(v_1) &= v_1, & \phi_2(v_2) &= v_3v_5^{-1}, \\ \phi_2(v_3) &= v_4v_7v_1v_5v_6^{-1}, & \phi_2(v_4) &= v_1^{-1}v_2v_6v_3^{-1}v_4v_9v_7v_1v_5v_6^{-1}, \\ \phi_2(v_5) &= v_1^{-1}v_7v_1v_5v_6^{-1}, & \phi_2(v_6) &= v_5v_7v_1v_5v_6^{-1}. \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Jetzt betrachten wir

$$\begin{aligned}\phi_3 : F_2 &\longrightarrow F_2 \\ x &\longmapsto x \\ y &\longmapsto x^2yx^{-2}.\end{aligned}$$

Es gilt:  $\phi_3 = \text{inn}_{x^2} \circ \phi_1$ . Für die Bilder der Erzeuger  $v_1, \dots, v_6$  haben wir damit

$$\begin{aligned}\phi_3(v_1) &= v_1, & \phi_3(v_2) &= v_4v_1, \\ \phi_3(v_3) &= v_1^{-1}v_2v_6v_3^{-1}v_4v_9v_7v_1v_5v_6^{-1}v_8v_5^{-1}, & \phi_3(v_4) &= v_1^{-1}v_2, \\ \phi_3(v_5) &= v_1^{-1}v_8v_5^{-1}, & \phi_3(v_6) &= v_1^{-1}v_7v_1v_5v_6^{-1}v_8v_5^{-1}.\end{aligned}$$

Wir erhalten

$$g_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Jetzt betrachten wir

$$\begin{aligned}\phi_4 : F_2 &\longrightarrow F_2 \\ x &\longmapsto x \\ y &\longmapsto x^3yx^{-3}.\end{aligned}$$

Es gilt:  $\phi_4 = \text{inn}_{x^3} \circ \phi_1$ . Für die Bilder der Erzeuger  $v_1, \dots, v_6$  haben wir damit

$$\begin{aligned}\phi_4(v_1) &= v_1, & \phi_4(v_2) &= v_1^{-1}v_2v_6v_3^{-1}v_4v_9v_7v_1v_5v_6^{-1}v_1, \\ \phi_4(v_3) &= v_1^{-1}v_2v_6v_5^{-1}, & \phi_4(v_4) &= v_1^{-1}v_3v_5^{-1}, \\ \phi_4(v_5) &= v_1^{-1}v_6v_5^{-1}, & \phi_4(v_6) &= v_1^{-1}v_8v_5^{-1}v_6v_5^{-1}.\end{aligned}$$

Wir erhalten

$$g_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jetzt betrachten wir

$$\begin{aligned}\phi_5 : F_2 &\longrightarrow F_2 \\ x &\longmapsto x^2 y x y^{-1} x^{-2} \\ y &\longmapsto x^2 y x^{-2}.\end{aligned}$$

Es gilt:  $\phi_5 = \text{inn}_{x^2 y} \circ \phi_1$ . Für die Bilder der Erzeuger  $v_1, \dots, v_6$  haben wir damit

$$\begin{aligned}\phi_5(v_1) &= v_6 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_8 v_5^{-1}, & \phi_5(v_2) &= v_4 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_8 v_5^{-1}, \\ \phi_5(v_3) &= v_5 v_8^{-1} v_2, & \phi_5(v_4) &= v_5 v_8^{-1} v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_7^{-1} v_2, \\ \phi_5(v_5) &= v_5 v_8^{-1} v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_7^{-1} v_3^{-1} v_2, & \phi_5(v_6) &= v_5 v_8^{-1} v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_7^{-1} v_4^{-1} v_2.\end{aligned}$$

Wir erhalten

$$g_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jetzt betrachten wir

$$\begin{aligned}\phi_6 : F_2 &\longrightarrow F_2 \\ x &\longmapsto y x y^{-1} \\ y &\longmapsto y.\end{aligned}$$

Es gilt:  $\phi_6 = \text{inn}_y \circ \phi_1$ . Für die Bilder der Erzeuger  $v_1, \dots, v_6$  haben wir damit

$$\begin{aligned}\phi_6(v_1) &= v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_8 v_5^{-1} v_6, & \phi_6(v_2) &= v_2 v_6, \\ \phi_6(v_3) &= v_5^{-1} v_4, & \phi_6(v_4) &= v_6^{-1} v_4, \\ \phi_6(v_5) &= v_6^{-1} v_5 v_8^{-1} v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_7^{-1} v_9^{-1} v_4^{-1} v_3 v_6^{-1} v_2^{-1} v_1 v_4, & \phi_6(v_6) &= v_6^{-1} v_2^{-1} v_1 v_4.\end{aligned}$$

Wir erhalten

$$g_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Jetzt betrachten wir

$$\begin{aligned}\phi_7 : F_2 &\longrightarrow F_2 \\ x &\longmapsto xyxy^{-1}x^{-1} \\ y &\longmapsto xyx^{-1}.\end{aligned}$$

Es gilt:  $\phi_7 = \text{inn}_{xy} \circ \phi_1$ . Für die Bilder der Erzeuger  $v_1, \dots, v_6$  haben wir damit

$$\begin{aligned}\phi_7(v_1) &= v_8v_5^{-1}v_6v_7v_1v_5v_6^{-1}, \\ \phi_7(v_2) &= v_3v_7v_1v_5v_6^{-1}, \\ \phi_7(v_3) &= v_6v_5^{-1}v_1^{-1}v_7^{-1}v_2v_6v_3^{-1}v_4v_9v_7v_1v_5v_6^{-1}, \\ \phi_7(v_4) &= v_6v_5^{-1}v_1^{-1}v_7^{-1}v_5^{-1}v_1^{-1}v_2v_6v_3^{-1}v_4v_9v_7v_1v_5v_6^{-1}, \\ \phi_7(v_5) &= v_6v_5^{-1}v_1^{-1}v_7^{-1}v_3^{-1}v_4v_9v_7v_1v_5v_6^{-1}, \\ \phi_7(v_6) &= v_6v_5^{-1}v_1^{-1}v_7^{-1}v_3^{-1}v_2v_6v_3^{-1}v_4v_9v_7v_1v_5v_6^{-1}.\end{aligned}$$

Wir erhalten

$$g_7 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jetzt betrachten wir

$$\begin{aligned}\phi_8 : F_2 &\longrightarrow F_2 \\ x &\longmapsto yxy^{-1} \\ y &\longmapsto yxyx^{-1}y^{-1}.\end{aligned}$$

Es gilt:  $\phi_8 = \text{inn}_{yx} \circ \phi_1$ . Für die Bilder der Erzeuger  $v_1, \dots, v_6$  haben wir damit

$$\begin{aligned}\phi_8(v_1) &= v_7v_1v_5v_6^{-1}v_8v_5^{-1}v_6, \\ \phi_8(v_2) &= v_5^{-1}v_1^{-1}v_2v_6v_3^{-1}v_4v_9v_7v_1v_5v_6^{-1}v_8v_5^{-1}v_6, \\ \phi_8(v_3) &= v_6^{-1}v_3, \\ \phi_8(v_4) &= v_6^{-1}v_5v_8^{-1}v_3, \\ \phi_8(v_5) &= v_6^{-1}v_5v_8^{-1}v_6v_5^{-1}v_1^{-1}v_7^{-1}v_4^{-1}v_3, \\ \phi_8(v_6) &= v_6^{-1}v_5v_8^{-1}v_6v_5^{-1}v_1^{-1}v_7^{-1}v_9^{-1}v_4^{-1}v_3v_6^{-1}v_2^{-1}v_1v_3.\end{aligned}$$

Wir erhalten

$$g_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Damit haben wir acht Lifts von  $I$  gefunden, die sich auf  $H^1(X, \mathbb{Z})$  unterscheiden. Die von  $g_1, \dots, g_8$  erzeugte Gruppe muss also isomorph zur Gruppe der Translationen von  $X$  sein. Das ist aber gerade die Quaternionengruppe. Damit liefert  $\tilde{\rho}$  eine Darstellung der Quaternionengruppe nach  $\text{Aut}(H^1(X, \mathbb{Z}))$ . Diese Darstellung ist treu nach Abschnitt 2.3.4.

Es sei  $S$  die Matrix des Basiswechsels  $[v_1] \mapsto [v_1], [v_2] \mapsto [v_2] + [v_4], [v_3] \mapsto [v_2] - 2[v_3] + [v_4], [v_4] \mapsto [v_2] - [v_3] + [v_5], [v_5] \mapsto [v_1] - 2[v_2] + 2[v_3], [v_6] \mapsto [v_6]$ .

Dann gilt:

$$\begin{aligned} S^{-1}g_1S &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & M_1 \end{pmatrix}, & S^{-1}g_2S &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}, & S^{-1}g_3S &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -M_1 \end{pmatrix}, \\ S^{-1}g_4S &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -M_2 \end{pmatrix}, & S^{-1}g_5S &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & M_3 \end{pmatrix}, & S^{-1}g_6S &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -M_3 \end{pmatrix}, \\ S^{-1}g_7S &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & M_4 \end{pmatrix}, & S^{-1}g_8S &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -M_4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dabei bezeichne

$$\begin{aligned} M_1 &:= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, & M_2 &:= \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \\ M_3 &:= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, & M_4 &:= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

## A.2 Lifts von $\Gamma(4)$

In diesem Abschnitt bestimmen wir jeweils einen Lift nach  $\text{Stab}_{\text{Aut}^+(F_2)}(U)$  mit  $U := \pi_1(X^*)$  der Matrizen

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -7 & 4 \\ -16 & 9 \end{pmatrix}}{=:A_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}}{=:A_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} -11 & 4 \\ -36 & 13 \end{pmatrix}}{=:A_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}}{=:A_4}, \underbrace{\begin{pmatrix} -11 & 8 \\ -40 & 29 \end{pmatrix}}{=:A_5}$$

und berechnen deren Abbildungsmatrizen  $B_1, \dots, B_5$  bezüglich der Basis  $([v_1], \dots, [v_6])$  von  $H^1(X, \mathbb{Z})$ .

Es seien

$$w_1 := x^{-1}y^{-2}x^{-1}y^{-2}x^{-1}y^{-3}x^{-1}y^{-2}x^{-1}y^{-2}x^{-1}y^{-3}x^{-1}y^{-2}$$

und

$$w_2 := y^2xy^2yxy^2xy^2x.$$

Wir definieren

$$\begin{aligned} \phi_1 : F_2 &\longrightarrow F_2 \\ x &\longmapsto w_1 \\ y &\longmapsto w_2. \end{aligned}$$

Dann ist  $\beta(\phi_1) = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ -16 & 9 \end{pmatrix}$ .

Für die Bilder der Erzeuger  $v_1, \dots, v_6$  haben wir damit

$$\begin{aligned} \phi_1(v_1) &= v_6v_5^{-1}v_1^{-1}v_7^{-1}v_9^{-1}v_4^{-1}v_3v_6^{-1}v_2^{-1}v_1v_5v_6^{-1}v_2^{-1}v_4^{-1}v_5v_3^{-1}v_2^{-1}v_6v_5^{-1}v_1^{-1} \\ &* v_7^{-1}v_9^{-1}v_4^{-1}v_3v_6^{-1}v_2^{-1}v_1v_5v_6^{-1}v_2^{-1}v_3^{-1}v_6v_5^{-1}v_1^{-1}v_7^{-1}v_4^{-1}v_5v_8^{-1}v_6 \\ &* v_5^{-1}v_1^{-1}v_7^{-1}v_9^{-1}v_4^{-1}v_3v_6^{-1}v_2^{-1}v_1v_5v_3^{-1}v_2^{-1}v_6v_5^{-1}v_1^{-1}v_7^{-1}v_9^{-1}v_4^{-1}v_3 \\ &* v_6^{-1}v_2^{-1}v_4^{-1}v_5v_8^{-1}v_6v_5^{-1}v_1^{-1}v_7^{-1}v_9^{-1}v_4^{-1}v_3v_6^{-1}v_2^{-1}v_1v_5v_6^{-1}v_2^{-1}v_3^{-1} \\ &* v_6v_5^{-1}v_1^{-1}v_7^{-1}v_4^{-1}v_2^{-1}v_6v_5^{-1}v_1^{-1}v_7^{-1}v_9^{-1}v_4^{-1}v_3v_6^{-1}v_2^{-1}v_4^{-1}v_5v_3^{-1}v_6 \\ &* v_5^{-1}v_1^{-1}v_7^{-1}v_4^{-1}v_5v_8^{-1}v_6v_5^{-1}v_1^{-1}v_7^{-1}v_9^{-1}v_4^{-1}v_3v_6^{-1}v_2^{-1}v_1v_5v_6^{-1}v_2^{-1} \\ &* v_3^{-1}v_6v_5^{-1}v_1^{-1}v_7^{-1}v_9^{-1}v_4^{-1}v_3v_6^{-1}v_2^{-1}v_4^{-1}v_5v_3^{-1}v_2^{-1}v_3^{-1}v_6v_5^{-1}v_1^{-1} \\ &* v_7^{-1}v_4^{-1}v_5v_8^{-1}, \\ \phi_1(v_2) &= v_8v_5^{-1}v_4v_7v_1v_5v_6^{-1}v_3v_2v_6v_5^{-1}v_1^{-1}v_7^{-1}v_4^{-1}v_5v_8^{-1}v_6v_5^{-1}v_1^{-1}v_7^{-1}v_9^{-1} \\ &* v_4^{-1}v_3v_6^{-1}v_2^{-1}v_1v_5v_6^{-1}v_2^{-1}v_3^{-1}v_6v_5^{-1}v_1^{-1}v_7^{-1}v_9^{-1}v_4^{-1}v_3v_6^{-1}v_2^{-1}v_4^{-1} \\ &* v_5v_3^{-1}v_2^{-1}v_3^{-1}v_6v_5^{-1}v_1^{-1}v_7^{-1}v_4^{-1}v_5v_8^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_1(v_3) &= v_8 v_5^{-1} v_4 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_3 v_2 v_3 v_5^{-1} v_4 v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_3 v_2 v_6 v_5^{-1} \\
&\quad * v_1^{-1} v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1}, \\
\phi_1(v_4) &= v_8 v_5^{-1} v_4 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_3 v_2 v_3 v_5^{-1} v_4 v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_3 v_2 v_6 v_5^{-1} \\
&\quad * v_1^{-1} v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_8 v_5^{-1} v_4 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_3 v_5^{-1} v_4 v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 \\
&\quad * v_9 v_7 v_1 v_5 v_4 v_6^{-1} v_2 v_4 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_3 v_2 v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_2 v_6 v_3^{-1} v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} \\
&\quad * v_8 v_5^{-1} v_4 v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_2 v_3 v_5^{-1} v_4 v_2 v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 \\
&\quad * v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1}, \\
\phi_1(v_5) &= v_8 v_5^{-1} v_4 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_3 v_2 v_3 v_5^{-1} v_4 v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_3 v_2 v_6 v_5^{-1} \\
&\quad * v_1^{-1} v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_8 v_5^{-1} v_4 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_3 v_5^{-1} v_4 v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 \\
&\quad * v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_2 v_4 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_3 v_2 v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} \\
&\quad * v_8 v_3^{-1} v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_7^{-1} v_4^{-1} v_5 v_8^{-1} \\
\phi_1(v_6) &= v_8 v_5^{-1} v_4 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_3 v_2 v_3 v_5^{-1} v_4 v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_3 v_2 v_6 v_5^{-1} \\
&\quad * v_1^{-1} v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_8 v_5^{-1} v_4 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_2^{-1} v_3^{-1} v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_7^{-1} \\
&\quad * v_4^{-1} v_5 v_8^{-1} v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_7^{-1} v_9^{-1} v_4^{-1} v_3 v_6^{-1} v_2^{-1} v_1 v_5 v_3^{-1} v_2^{-1} v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_7^{-1} \\
&\quad * v_9^{-1} v_4^{-1} v_3 v_6^{-1} v_2^{-1} v_4^{-1} v_5 v_3^{-1} v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_7^{-1} v_4^{-1} v_5 v_8^{-1}.
\end{aligned}$$

Wir erhalten

$$B_1 = \begin{pmatrix} -7 & -2 & 2 & 6 & 4 & 0 \\ -16 & -3 & 4 & 12 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -16 & -4 & 4 & 13 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es sei

$$\begin{aligned}
\phi_2 : F_2 &\longrightarrow F_2 \\
x &\longmapsto xy^{-4} \\
y &\longmapsto y
\end{aligned}$$

$$\text{Dann ist } \beta(\phi_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für die Bilder der Erzeuger  $v_1, \dots, v_6$  haben wir damit

$$\begin{aligned}
\phi_2(v_1) &= v_4^{-1} v_2^{-1} v_1 v_5 v_3^{-1} v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_7^{-1} v_9^{-1} v_4^{-1} v_3 v_6^{-1} v_2^{-1} v_1 v_2^{-1} v_4^{-1} \\
&\quad * v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_7^{-1} v_9^{-1} v_4^{-1} v_3 v_6^{-1} v_2^{-1} v_1 v_5 v_3^{-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_2(v_2) &= v_4^{-1}v_6v_5^{-1}v_1^{-1}v_7^{-1}v_9^{-1}v_4^{-1}v_3v_6^{-1}v_2^{-1}v_1v_5v_3^{-1}, \\
\phi_2(v_3) &= v_3, \\
\phi_2(v_4) &= v_3v_5^{-1}v_1^{-1}v_2v_6v_3^{-1}v_4v_9v_7v_1v_5v_6^{-1}v_4v_2v_4, \\
\phi_2(v_5) &= v_3v_5^{-1}v_1^{-1}v_2v_6v_3^{-1}v_4v_9v_7v_1v_5v_6^{-1}v_4v_2v_5, \\
\phi_2(v_6) &= v_3v_5^{-1}v_1^{-1}v_2v_6v_3^{-1}v_4v_9v_7v_1v_5v_3^{-1}v_6v_5^{-1}v_1^{-1}v_7^{-1}v_9^{-1}v_4^{-1}v_3 \\
&\quad * v_6^{-1}v_2^{-1}v_1v_5.
\end{aligned}$$

Wir erhalten

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es seien

$$w_1 := x^{-1}y^{-3}x^{-1}y^{-3}x^{-1}y^{-4}x^{-1}y^{-3}x^{-1}y^{-3}x^{-1}y^{-4}x^{-1}y^{-3}x^{-1}y^{-3}x^{-1}y^{-3}x^{-1}y^{-4}x^{-1}y^{-3}$$

und

$$w_2 := y^3xy^3yxy^3xy^3x.$$

Wir definieren

$$\begin{aligned}
\phi_3 : F_2 &\longrightarrow F_2 \\
x &\longmapsto w_1 \\
y &\longmapsto w_2.
\end{aligned}$$

$$\text{Dann ist } \beta(\phi_3) = \begin{pmatrix} -11 & 4 \\ -36 & 13 \end{pmatrix}.$$

Für die Bilder der Erzeuger  $v_1, \dots, v_6$  haben wir damit

$$\begin{aligned}
\phi_3(v_1) &= v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_7^{-1} v_9^{-1} v_4^{-1} v_3 v_6^{-1} v_2^{-1} v_1 v_5 v_3^{-1} v_2^{-1} v_4^{-1} v_5 \\
&* v_3^{-1} v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_7^{-1} v_4^{-1} v_2^{-1} v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_7^{-1} v_9^{-1} v_4^{-1} v_3 v_6^{-1} v_2^{-1} v_1 \\
&* v_5 v_6^{-1} v_2^{-1} v_4^{-1} v_5 v_8^{-1} v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_7^{-1} v_9^{-1} v_4^{-1} v_3 v_6^{-1} v_2^{-1} v_1 v_5 v_3^{-1} \\
&* v_2^{-1} v_3^{-1} v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_7^{-1} v_9^{-1} v_4^{-1} v_3 v_6^{-1} v_2^{-1} v_1 v_5 v_6^{-1} v_2^{-1} v_4^{-1} v_5 v_3^{-1} \\
&* v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_7^{-1} v_4^{-1} v_2^{-1} v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_7^{-1} v_9^{-1} v_4^{-1} v_3 v_6^{-1} v_2^{-1} v_1 v_5 v_3^{-1} \\
&* v_2^{-1} v_3^{-1} v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_7^{-1} v_9^{-1} v_4^{-1} v_3 v_6^{-1} v_2^{-1} v_4^{-1} v_5 v_8^{-1} v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} \\
&* v_7^{-1} v_9^{-1} v_4^{-1} v_3 v_6^{-1} v_2^{-1} v_1 v_5 v_3^{-1} v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_7^{-1} v_4^{-1} v_2^{-1} v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} \\
&* v_7^{-1} v_9^{-1} v_4^{-1} v_3 v_6^{-1} v_2^{-1} v_1 v_5 v_6^{-1} v_2^{-1} v_4^{-1} v_5 v_8^{-1} v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_7^{-1} v_9^{-1} \\
&* v_4^{-1} v_3 v_6^{-1} v_2^{-1} v_1 v_5 v_3^{-1} v_2^{-1} v_3^{-1} v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_7^{-1} v_9^{-1} v_4^{-1} v_3 v_6^{-1} v_2^{-1} \\
&* v_4^{-1} v_2^{-1} v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_7^{-1} v_9^{-1} v_4^{-1} v_3 v_6^{-1} v_2^{-1} v_1 v_5 v_6^{-1} v_2^{-1} v_4^{-1} v_5 v_3^{-1} \\
&* v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_7^{-1} v_4^{-1} v_2^{-1} v_3^{-1} v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_7^{-1} v_9^{-1} v_4^{-1} v_3 v_6^{-1} v_2^{-1} v_4^{-1} \\
&* v_5 v_8^{-1} v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_7^{-1} v_9^{-1} v_4^{-1} v_3 v_6^{-1} v_2^{-1} v_1 v_5 v_3^{-1} v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_7^{-1} v_4^{-1} \\
&* v_2^{-1} v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_7^{-1} v_9^{-1} v_4^{-1} v_3 v_6^{-1} v_2^{-1} v_1 v_5 v_6^{-1} v_2^{-1} v_4^{-1} v_5 v_3^{-1} v_6 v_5^{-1} \\
&* v_1^{-1} v_7^{-1} v_9^{-1} v_4^{-1} v_3 v_6^{-1} v_2^{-1} v_4^{-1} v_5 v_8^{-1} v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_7^{-1} v_9^{-1} v_4^{-1} v_3 v_6^{-1} \\
&* v_2^{-1} v_1 v_5 v_3^{-1} v_2^{-1} v_3^{-1} v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_7^{-1} v_9^{-1} v_4^{-1} v_3 v_6^{-1} v_2^{-1} v_1 v_5 v_6^{-1} v_2^{-1} \\
&* v_4^{-1} v_5 v_3^{-1} v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_7^{-1} v_4^{-1} v_2^{-1} v_3^{-1} v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_7^{-1} v_9^{-1} v_4^{-1} v_3 v_6^{-1} \\
&* v_2^{-1} v_4^{-1} v_5 v_8^{-1}, \\
\phi_3(v_2) &= v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_7^{-1} v_9^{-1} v_4^{-1} v_3 v_6^{-1} v_2^{-1} v_1 v_5 v_3^{-1} v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_7^{-1} v_4^{-1} \\
&* v_2^{-1} v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_7^{-1} v_9^{-1} v_4^{-1} v_3 v_6^{-1} v_2^{-1} v_1 v_5 v_6^{-1} v_2^{-1} v_4^{-1} v_5 v_3^{-1} v_6 v_5^{-1} \\
&* v_1^{-1} v_7^{-1} v_9^{-1} v_4^{-1} v_3 v_6^{-1} v_2^{-1} v_4^{-1} v_5 v_8^{-1} v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_7^{-1} v_9^{-1} v_4^{-1} v_3 \\
&* v_6^{-1} v_2^{-1} v_1 v_5 v_3^{-1} v_2^{-1} v_3^{-1} v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_7^{-1} v_9^{-1} v_4^{-1} v_3 v_6^{-1} v_2^{-1} v_1 v_5 v_6^{-1} \\
&* v_2^{-1} v_4^{-1} v_5 v_3^{-1} v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_7^{-1} v_4^{-1} v_2^{-1} v_3^{-1} v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_7^{-1} v_9^{-1} v_4^{-1} \\
&* v_3 v_6^{-1} v_2^{-1} v_4^{-1} v_5 v_8^{-1}, \\
\phi_3(v_3) &= v_8 v_5^{-1} v_4 v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_3 v_2 v_4 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_3 v_5^{-1} v_4 v_2 v_6 v_5^{-1} \\
&* v_1^{-1} v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_3 v_2 v_3 v_5^{-1} v_1^{-1} v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_3(v_4) &= v_8 v_5^{-1} v_4 v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_3 v_2 v_4 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_3 v_5^{-1} v_4 v_2 v_6 v_5^{-1} \\
&* v_1^{-1} v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_3 v_2 v_3 v_5^{-1} v_1^{-1} v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} \\
&* v_8 v_5^{-1} v_4 v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_3 v_5^{-1} v_4 v_2 v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 \\
&* v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_2 v_4 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_3 v_5^{-1} v_1^{-1} v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_8 v_5^{-1} \\
&* v_4 v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_3 v_2 v_4 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_3 v_5^{-1} v_4 v_2 v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_2 \\
&* v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_2 v_4 v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_3 v_2 v_3 v_5^{-1} v_1^{-1} v_2 \\
&* v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_8 v_5^{-1} v_4 v_2 v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_2 \\
&* v_4 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_3 v_5^{-1} v_4 v_2 v_3 v_5^{-1} v_1^{-1} v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1}, \\
\phi_3(v_5) &= v_8 v_5^{-1} v_4 v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_3 v_2 v_4 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_3 v_5^{-1} v_4 v_2 v_6 v_5^{-1} \\
&* v_1^{-1} v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_3 v_2 v_3 v_5^{-1} v_1^{-1} v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} \\
&* v_8 v_5^{-1} v_4 v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_3 v_5^{-1} v_4 v_2 v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 \\
&* v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_3 v_5^{-1} v_1^{-1} v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_8 v_5^{-1} v_4 v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 \\
&* v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_5 v_6^{-1} v_2 v_4 v_7 v_1 v_3 v_2 v_4 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_3 v_5^{-1} v_4 v_2 v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_2 \\
&* v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_2 v_4 v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_3 v_2 v_3 v_5^{-1} v_1^{-1} v_2 \\
&* v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_8 v_3^{-1} v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_7^{-1} v_9^{-1} v_4^{-1} v_3 v_6^{-1} v_2^{-1} v_4^{-1} v_5 v_8^{-1}, \\
\phi_3(v_6) &= v_8 v_5^{-1} v_4 v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_3 v_2 v_4 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_3 v_5^{-1} v_4 v_2 v_6 v_5^{-1} \\
&* v_1^{-1} v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_3 v_2 v_3 v_5^{-1} v_1^{-1} v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_8 \\
&* v_5^{-1} v_4 v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_3 v_5^{-1} v_4 v_2 v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 \\
&* v_5 v_6^{-1} v_2 v_4 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_2^{-1} v_4^{-1} v_5 v_3^{-1} v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_7^{-1} v_4^{-1} v_2^{-1} v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} \\
&* v_7^{-1} v_9^{-1} v_4^{-1} v_3 v_6^{-1} v_2^{-1} v_1 v_5 v_3^{-1} v_2^{-1} v_3^{-1} v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_7^{-1} v_9^{-1} v_4^{-1} v_3 v_6^{-1} \\
&* v_2^{-1} v_4^{-1} v_5 v_8^{-1} v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_7^{-1} v_9^{-1} v_4^{-1} v_3 v_6^{-1} v_2^{-1} v_1 v_5 v_3^{-1} v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} \\
&* v_7^{-1} v_4^{-1} v_2^{-1} v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_7^{-1} v_9^{-1} v_4^{-1} v_3 v_6^{-1} v_2^{-1} v_1 v_5 v_6^{-1} v_2^{-1} v_4^{-1} v_5 \\
&* v_3^{-1} v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_7^{-1} v_9^{-1} v_4^{-1} v_3 v_6^{-1} v_2^{-1} v_4^{-1} v_5 v_8^{-1}.
\end{aligned}$$

Wir erhalten

$$B_3 = \begin{pmatrix} -11 & -4 & 2 & 8 & 6 & 0 \\ -36 & -11 & 6 & 24 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -36 & -12 & 6 & 25 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es sei

$$\begin{aligned}\phi_4 : F_2 &\longrightarrow F_2 \\ x &\longmapsto (xy)^4 x \\ y &\longmapsto (x^{-1}y^{-1})^3 x^{-1}.\end{aligned}$$

$$\text{Dann ist } \beta(\phi_4) = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Für die Bilder der Erzeuger  $v_1, \dots, v_6$  haben wir damit

$$\begin{aligned}\phi_4(v_1) &= v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_8 v_5^{-1} v_3 v_1 v_4 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_2 v_6 v_5^{-1}, \\ &\quad * v_3 v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_8 v_5^{-1} v_2 v_6 v_5^{-1} v_4 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1}, \\ \phi_4(v_2) &= v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_7^{-1} v_4^{-1} v_5 v_6^{-1} v_2 v_6 v_5^{-1} v_4 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1}, \\ \phi_4(v_3) &= v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_7^{-1} v_4^{-1} v_5 v_6^{-1} v_2^{-1} v_5 v_8^{-1} v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_7^{-1} v_9^{-1} v_4^{-1} v_3 v_6^{-1} v_2^{-1} \\ \phi_4(v_4) &= v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_7^{-1} v_4^{-1} v_5 v_6^{-1} v_2^{-1} v_5 v_8^{-1} v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} \\ &\quad * v_7^{-1} v_9^{-1} v_4^{-1} v_3 v_6^{-1} v_2^{-1} v_3^{-1} v_5 v_6^{-1} v_2^{-1} v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_7^{-1} v_3^{-1} \\ &\quad * v_5 v_8^{-1} v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_7^{-1} v_9^{-1} v_4^{-1} v_3 v_6^{-1} v_2^{-1}, \\ \phi_4(v_5) &= v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_7^{-1} v_4^{-1} v_5 v_6^{-1} v_2^{-1} v_5 v_8^{-1} v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_7^{-1} \\ &\quad * v_9^{-1} v_4^{-1} v_3 v_6^{-1} v_2^{-1} v_3^{-1} v_5, \\ \phi_4(v_6) &= v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_7^{-1} v_4^{-1} v_5 v_6^{-1} v_2^{-1} v_6 v_5^{-1} v_4 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_2 v_6.\end{aligned}$$

Wir erhalten

$$B_4 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 & -4 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es sei

$$w_1 := y^{-3} x^{-1} y^{-4} x^{-1} y^{-4} x^{-1} y^{-3} x^{-1} y^{-4} x^{-1} y^{-4} x^{-1} y^{-3} x^{-1} y^{-4} x^{-1} y^{-4} x^{-1} y^{-3} x^{-1} y^{-4} x^{-1}.$$

und

$$w_2 := xy^4 xy^3 xy^4 xy^4 xy^3 xy^4 xy^4 xy^3.$$

Wir definieren

$$\begin{aligned}\phi_5 : F_2 &\longrightarrow F_2 \\ x &\longmapsto w_1 \\ y &\longmapsto w_2.\end{aligned}$$

$$\text{Dann ist } \beta(\phi_5) = \begin{pmatrix} -11 & 8 \\ -40 & 29 \end{pmatrix}.$$

Für die Bilder der Erzeuger  $v_1, \dots, v_6$  haben wir damit

$$\begin{aligned} \phi_5(v_1) = & v_2^{-1}v_4^{-1}v_5v_3^{-1}v_6v_5^{-1}v_1^{-1}v_7^{-1}v_4^{-1}v_2^{-1}v_3^{-1}v_6v_5^{-1}v_1^{-1}v_7^{-1}v_9^{-1} \\ & * v_4^{-1}v_3v_6^{-1}v_2^{-1}v_1v_5v_6^{-1}v_2^{-1}v_4^{-1}v_5v_3^{-1}v_6v_5^{-1}v_1^{-1}v_7^{-1}v_9^{-1}v_4^{-1}v_3v_6^{-1} \\ & * v_2^{-1}v_4^{-1}v_2^{-1}v_6v_5^{-1}v_1^{-1}v_7^{-1}v_9^{-1}v_4^{-1}v_3v_6^{-1}v_2^{-1}v_1v_5v_6^{-1}v_2^{-1}v_4^{-1} \\ & * v_5v_8^{-1}v_6v_5^{-1}v_1^{-1}v_7^{-1}v_9^{-1}v_4^{-1}v_3v_6^{-1}v_2^{-1}v_1v_5v_3^{-1}v_6v_5^{-1}v_1^{-1}v_7^{-1} \\ & * v_4^{-1}v_2^{-1}v_6v_5^{-1}v_1^{-1}v_7^{-1}v_9^{-1}v_4^{-1}v_3v_6^{-1}v_2^{-1}v_1v_5v_3^{-1}v_2^{-1}v_3^{-1}v_6v_5^{-1} \\ & * v_1^{-1}v_7^{-1}v_9^{-1}v_4^{-1}v_3v_6^{-1}v_2^{-1}v_1v_5v_6^{-1}v_2^{-1}v_4^{-1}v_5v_8^{-1}v_6v_5^{-1}v_1^{-1}v_7^{-1} \\ & * v_9^{-1}v_4^{-1}v_3v_6^{-1}v_2^{-1}v_1v_5v_3^{-1}v_2^{-1}v_4^{-1}v_5v_3^{-1}v_6v_5^{-1}v_1^{-1}v_7^{-1}v_9^{-1}v_4^{-1} \\ & * v_3v_6^{-1}v_2^{-1}v_4^{-1}v_5v_8^{-1}v_6v_5^{-1}v_1^{-1}v_7^{-1}v_9^{-1}v_4^{-1}v_3v_6^{-1}v_2^{-1}v_1v_5v_3^{-1}v_6 \\ & * v_5^{-1}v_1^{-1}v_7^{-1}v_4^{-1}v_2^{-1}v_3^{-1}v_6v_5^{-1}v_1^{-1}v_7^{-1}v_9^{-1}v_4^{-1}v_3v_6^{-1}v_2^{-1}v_4^{-1} \\ & * v_2^{-1}v_6v_5^{-1}v_1^{-1}v_7^{-1}v_9^{-1}v_4^{-1}v_3v_6^{-1}v_2^{-1}v_1v_5v_6^{-1}v_2^{-1}v_4^{-1}v_5v_8^{-1}v_6v_5^{-1} \\ & * v_1^{-1}v_7^{-1}v_9^{-1}v_4^{-1}v_3v_6^{-1}v_2^{-1}v_1v_5v_3^{-1}v_6v_5^{-1}v_1^{-1}v_7^{-1}v_4^{-1}v_2^{-1}v_6v_5^{-1} \\ & * v_1^{-1}v_7^{-1}v_9^{-1}v_4^{-1}v_3v_6^{-1}v_2^{-1}v_1v_5v_3^{-1}v_2^{-1}v_4^{-1}v_5v_3^{-1}v_6v_5^{-1}v_1^{-1}v_7^{-1} \\ & * v_4^{-1}v_2^{-1}v_3^{-1}v_6v_5^{-1}v_1^{-1}v_7^{-1}v_9^{-1}v_4^{-1}v_3v_6^{-1}v_2^{-1}v_1v_5v_6^{-1}v_2^{-1}v_4^{-1}v_5 \\ & * v_3^{-1}v_6v_5^{-1}v_1^{-1}v_7^{-1}v_9^{-1}v_4^{-1}v_3v_6^{-1}v_2^{-1}v_4^{-1}v_5v_8^{-1}v_6v_5^{-1}v_1^{-1}v_7^{-1} \\ & * v_9^{-1}v_4^{-1}v_3v_6^{-1}v_2^{-1}v_1v_5v_3^{-1}v_6v_5^{-1}v_1^{-1}v_7^{-1}v_4^{-1}v_2^{-1}v_3^{-1}v_6v_5^{-1}v_1^{-1} \\ & * v_7^{-1}v_9^{-1}v_4^{-1}v_3v_6^{-1}v_2^{-1}v_4^{-1}v_2^{-1}v_6v_5^{-1}v_1^{-1}v_7^{-1}v_9^{-1}v_4^{-1}v_3v_6^{-1}v_2^{-1} \\ & * v_1v_5v_3^{-1}v_2^{-1}v_3^{-1}v_6v_5^{-1}v_1^{-1}v_7^{-1}v_9^{-1}v_4^{-1}v_3v_6^{-1}v_2^{-1}v_1v_5v_6^{-1}v_2^{-1} \\ & * v_4^{-1}v_5v_8^{-1}v_6v_5^{-1}v_1^{-1}v_7^{-1}v_9^{-1}v_4^{-1}v_3v_6^{-1}v_2^{-1}v_1v_5v_3^{-1}, \\ \\ \phi_5(v_2) = & v_3v_5^{-1}v_1^{-1}v_2v_6v_3^{-1}v_4v_9v_7v_1v_5v_6^{-1}v_8v_5^{-1}v_4v_2v_6v_5^{-1}v_1^{-1}v_2v_6 \\ & * v_3^{-1}v_4v_9v_7v_1v_5v_6^{-1}v_3v_2v_3v_5^{-1}v_1^{-1}v_2v_6v_3^{-1}v_4v_9v_7v_1v_5v_6^{-1}v_2v_4v_1v_5 \\ & * v_6^{-1}v_2^{-1}v_4^{-1}v_5v_3^{-1}v_6v_5^{-1}v_1^{-1}v_7^{-1}v_9^{-1}v_4^{-1}v_3v_6^{-1}v_2^{-1}v_4^{-1}v_5 \\ & * v_8^{-1}v_6v_5^{-1}v_1^{-1}v_7^{-1}v_9^{-1}v_4^{-1}v_3v_6^{-1}v_2^{-1}v_1v_5v_3^{-1}v_6v_5^{-1}v_1^{-1}v_7^{-1} \\ & * v_4^{-1}v_2^{-1}v_3^{-1}v_6v_5^{-1}v_1^{-1}v_7^{-1}v_9^{-1}v_4^{-1}v_3v_6^{-1}v_2^{-1}v_4^{-1}v_2^{-1}v_6 \\ & * v_5^{-1}v_1^{-1}v_7^{-1}v_9^{-1}v_4^{-1}v_3v_6^{-1}v_2^{-1}v_1v_5v_3^{-1}v_2^{-1}v_3^{-1}v_6v_5^{-1}v_1^{-1} \\ & * v_7^{-1}v_9^{-1}v_4^{-1}v_3v_6^{-1}v_2^{-1}v_1v_5v_6^{-1}v_2^{-1}v_4^{-1}v_5v_8^{-1}v_6v_5^{-1}v_1^{-1} \\ & * v_7^{-1}v_9^{-1}v_4^{-1}v_3v_6^{-1}v_2^{-1}v_1v_5v_3^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_5(v_3) = & v_3 v_5^{-1} v_1^{-1} v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_8 v_5^{-1} v_4 v_2 v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_2 v_6 \\
& * v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_3 v_2 v_3 v_5^{-1} v_1^{-1} v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_2 v_4 v_2 v_6 \\
& * v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_3 v_2 v_4 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_3 v_5^{-1} v_1^{-1} v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 \\
& * v_6^{-1} v_8 v_5^{-1} v_4 v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_3 v_5^{-1} v_4 v_2 v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_2 v_6 \\
& * v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_3 v_2 v_4 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_3 v_5^{-1} v_4 v_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_5(v_4) = & v_3 v_5^{-1} v_1^{-1} v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_8 v_5^{-1} v_4 v_2 v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_2 v_6 \\
& * v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_3 v_2 v_3 v_5^{-1} v_1^{-1} v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_2 v_4 v_2 v_6 \\
& * v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_3 v_2 v_4 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_3 v_5^{-1} v_1^{-1} v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 \\
& * v_6^{-1} v_8 v_5^{-1} v_4 v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_3 v_5^{-1} v_4 v_2 v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_2 v_6 v_3^{-1} \\
& * v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_3 v_2 v_4 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_3 v_5^{-1} v_4 v_2 v_3 v_5^{-1} v_1^{-1} v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 \\
& * v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_2 v_4 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_3 v_5^{-1} v_1^{-1} v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_8 v_5^{-1} \\
& * v_4 v_2 v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_2 v_4 v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} \\
& * v_3 v_2 v_4 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_3 v_5^{-1} v_1^{-1} v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_8 v_5^{-1} v_4 v_2 v_6 \\
& * v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_3 v_5^{-1} v_4 v_2 v_3 v_5^{-1} v_1^{-1} v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 \\
& * v_6^{-1} v_8 v_5^{-1} v_4 v_2 v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_2 v_4 v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 \\
& * v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_3 v_5^{-1} v_4 v_2 v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_3 v_2 v_4 v_7 v_1 \\
& * v_5 v_6^{-1} v_3 v_5^{-1} v_4 v_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_5(v_5) = & v_3 v_5^{-1} v_1^{-1} v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_8 v_5^{-1} v_4 v_2 v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_2 v_6 v_3^{-1} \\
& * v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_3 v_2 v_3 v_5^{-1} v_1^{-1} v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_2 v_4 v_2 v_6 v_3^{-1} \\
& * v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_3 v_2 v_4 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_3 v_5^{-1} v_1^{-1} v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} \\
& * v_8 v_5^{-1} v_4 v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_3 v_5^{-1} v_4 v_2 v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 \\
& * v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_3 v_2 v_4 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_3 v_5^{-1} v_4 v_2 v_3 v_5^{-1} v_1^{-1} v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 \\
& * v_5 v_6^{-1} v_2 v_4 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_3 v_5^{-1} v_1^{-1} v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_8 v_5^{-1} v_4 v_2 \\
& * v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_2 v_4 v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_3 v_6 \\
& * v_5^{-1} v_1^{-1} v_7^{-1} v_9^{-1} v_4^{-1} v_3 v_6^{-1} v_2^{-1} v_1 v_5 v_3^{-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_5(v_6) = & v_3 v_5^{-1} v_1^{-1} v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_8 v_5^{-1} v_4 v_2 v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_2 v_6 v_3^{-1} \\
& * v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_3 v_2 v_3 v_5^{-1} v_1^{-1} v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_2 v_4 v_2 v_6 v_3^{-1} \\
& * v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_3 v_2 v_4 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_3 v_5^{-1} v_1^{-1} v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} \\
& * v_8 v_5^{-1} v_4 v_2 v_6 v_3^{-1} v_4 v_9 v_7 v_1 v_5 v_6^{-1} v_3 v_5^{-1} v_4 v_2 v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_4^{-1} v_2^{-1} v_6 \\
& * v_5^{-1} v_1^{-1} v_7^{-1} v_9^{-1} v_4^{-1} v_3 v_6^{-1} v_2^{-1} v_1 v_5 v_3^{-1} v_2^{-1} v_3^{-1} v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_7^{-1} v_9^{-1} \\
& * v_4^{-1} v_3 v_6^{-1} v_2^{-1} v_1 v_5 v_6^{-1} v_2^{-1} v_4^{-1} v_5 v_8^{-1} v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_7^{-1} v_9^{-1} v_4^{-1} v_3 v_6^{-1} \\
& * v_2^{-1} v_1 v_5 v_3^{-1} v_2^{-1} v_4^{-1} v_5 v_3^{-1} v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_7^{-1} v_9^{-1} v_4^{-1} v_3 v_6^{-1} v_2^{-1} v_8^{-1} v_6 \\
& * v_5^{-1} v_1^{-1} v_7^{-1} v_9^{-1} v_4^{-1} v_3 v_6^{-1} v_2^{-1} v_1 v_5 v_3^{-1} v_6 v_5^{-1} v_4^{-1} v_5 v_1^{-1} v_7^{-1} v_4^{-1} v_2^{-1} \\
& * v_6 v_5^{-1} v_1^{-1} v_7^{-1} v_9^{-1} v_4^{-1} v_3 v_6^{-1} v_2^{-1} v_1 v_5 v_3^{-1}.
\end{aligned}$$

Wir erhalten

$$B_5 = \begin{pmatrix} -11 & -2 & 4 & 10 & 6 & 0 \\ -40 & -5 & 14 & 34 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -40 & -6 & 14 & 35 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit können wir jetzt alle Lifts der Matrizen  $A_1, \dots, A_5$  nach  $\text{Aut}(H^1(X, \mathbb{Z}))$  berechnen.

Mit  $\mathcal{Q} := \langle g_1, \dots, g_8 \rangle$  gilt nämlich:

$$S^{-1}(\mathcal{Q} \cdot B_1)S = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & \pm M_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & \pm M_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & \pm M_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & \pm M_4 \end{pmatrix} \right\},$$

$$S^{-1}(\mathcal{Q} \cdot B_2)S = \left\{ \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & \pm M_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & \pm M_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & \pm M_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & \pm M_4 \end{pmatrix} \right\},$$

$$S^{-1}(\mathcal{Q} \cdot B_3)S = \left\{ \begin{pmatrix} A_3 & 0 \\ 0 & \pm M_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_3 & 0 \\ 0 & \pm M_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_3 & 0 \\ 0 & \pm M_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_3 & 0 \\ 0 & \pm M_4 \end{pmatrix} \right\},$$

$$S^{-1}(\mathcal{Q} \cdot B_4)S = \left\{ \begin{pmatrix} A_4 & 0 \\ 0 & \pm M_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_4 & 0 \\ 0 & \pm M_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_4 & 0 \\ 0 & \pm M_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_4 & 0 \\ 0 & \pm M_4 \end{pmatrix} \right\},$$

$$S^{-1}(\mathcal{Q} \cdot B_5)S = \left\{ \begin{pmatrix} A_5 & 0 \\ 0 & \pm M_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_5 & 0 \\ 0 & \pm M_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_5 & 0 \\ 0 & \pm M_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_5 & 0 \\ 0 & \pm M_4 \end{pmatrix} \right\}.$$

Wir berechnen noch die Eigenräume all dieser Matrizen.



$$\text{Eig}\left(\begin{pmatrix} A_4 & 0 \\ 0 & \pm M_2 \end{pmatrix}, 1\right) = \text{Eig}\left(\begin{pmatrix} A_4 & 0 \\ 0 & \pm M_3 \end{pmatrix}, 1\right) = \text{Eig}\left(\begin{pmatrix} A_4 & 0 \\ 0 & \pm M_4 \end{pmatrix}, 1\right) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$\text{Eig}\left(\begin{pmatrix} A_5 & 0 \\ 0 & M_1 \end{pmatrix}, 1\right) = \text{Eig}\left(\begin{pmatrix} A_5 & 0 \\ 0 & -M_1 \end{pmatrix}, -1\right) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$\text{Eig}\left(\begin{pmatrix} A_5 & 0 \\ 0 & \pm M_2 \end{pmatrix}, 1\right) = \text{Eig}\left(\begin{pmatrix} A_5 & 0 \\ 0 & \pm M_3 \end{pmatrix}, 1\right) = \text{Eig}\left(\begin{pmatrix} A_5 & 0 \\ 0 & \pm M_4 \end{pmatrix}, 1\right) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$



# Literaturverzeichnis

- [Ba] Oliver Bauer. *Stabile Reduktion und Origamis*. Diplomarbeit, Karlsruhe 2005.
- [De] Pierre Deligne. *Equations Différentielles à Points Singuliers Réguliers*. Lecture Notes in Mathematics 163. Springer Verlag, Berlin, 1970.
- [De2] Pierre Deligne. *Un théorème de finitude pour la monodromie*. Discrete groups in Geometry and Analysis, Birkhäuser, Progress in Math. 67 (1987), S. 1-19.
- [EG] Clifford J. Earle, Frederick P. Gardiner. *Teichmüller Disks and Veech's  $\mathcal{F}$ -Structures*. Contemporary Math. 201 (1997).
- [FM] Benson Farb, Dan Margalit. *A Primer on Mapping Class Groups*. Preprint, 2007.
- [GD] Andrzej Granas, James Dugundij. *Fixed Point Theory*. Springer-Verlag, New York, 2003.
- [Gu] J. Guàrdia. *Explicit geometry on a family of curves of genus 3*. J. London Math. Soc. (2) 64 (2001), S. 299 - 310.
- [Ha] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [Har] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics 52. Springer-Verlag, Berlin, 3. überarb. und erg. Auflage, 1977
- [He] Frank Herrlich. *Teichmüller curves defined by characteristic origamis*. Contemporary Mathematics 397 (2006), S. 133 - 144.
- [HS1] Frank Herrlich, Gabriela Schmithüsen. *On the boundary of Teichmüller disks in Teichmüller and Schottky space*. Handbook of Teichmüller Theory (ed. A. Papadopoulos) EMS 2007, pp. 293-349.
- [HS2] Frank Herrlich, Gabriela Schmithüsen. *An extraordinary Origami curve*. Mathematische Nachrichten 281, No.2 (2008), S. 219-237.
- [HL] Pascal Hubert, Erwan Laneeau. *Veech groups without parabolic elements*. Duke Math. J. 133 (2006), S. 335-346.
- [IT] Yoichi Imaoyshi, Masahioko Taniguchi. *An Introduction to Teichmüller spaces*. Springer-Verlag, Berlin, 1992.

- [Ko] Kodaira. *On compact complex analytic surfaces II*. Ann. Math. 71 (1969), S.563-626.
- [Lo] Pierre Lochak. *On arithmetic curves in the moduli space of curves*. Journal of the Math. Inst. of Jussieu 4, No. 3 (2005), S. 443-508.
- [Mai] Michael Maier. *Schnittgraphen von stabilen Kurven, die als Randpunkte von Origamikurven vorkommen*. Diplomarbeit, Karlsruhe, 2005.
- [Mc] Curtis T. McMullen. *Billiards and Teichmüller curves on Hilbert modular surfaces*. J.Amer. Math. Soc. 16 (2003), S. 857-885.
- [Moe] Martin Möller. *Variations of Hodge Structures of a Teichmüller Curve*. J. Amer. Math. Soc. 19 (2006), S. 327-344.
- [MKS] Wilhelm Magnus, Abraham Karrass, Donald Solitar. *Combinatorial group theory*. Wiley Interscience, 1966.
- [Sch] Gabriela Schmithüsen. *Veech Groups of Origamis*. Dissertation, Karlsruhe, 2005.
- [Si] Charles C. Sims. *Computation with finitely presented groups*. Cambridge University Press, 1994.
- [Sv] Christian Sievers. *Algorithmen für freie Gruppen*. Diplomarbeit, Braunschweig 2003.
- [Th] William P. Thurston. *On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces*. Bulletin of the AMS 19 (1988) S. 417-431.
- [Ve] William A. Veech. *Teichmüller curves in moduli space, Eisenstein series and an application to triangular billiards*. Invent. Math. 97 (1998) S. 553-583.
- [Vo1] Claire Voisin. *Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry 1*. Cambridge University Press, New York, 2002.
- [Vo2] Claire Voisin. *Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry 2*. Cambridge University Press, New York, 2003.