

# $p$ -adische Rankin-Selberg-Faltungen

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

DOKTORS DER  
NATURWISSENSCHAFTEN

der Fakultät für Mathematik  
der Universität Karlsruhe (TH) genehmigte

DISSERTATION

von

Dipl.-Inform. Fabian Januszewski  
aus Karlsruhe

Tag der mündlichen Prüfung:  
17. April 2009

Referent:	Prof. Dr. Claus-Günther Schmidt	(Univ. Karlsruhe (TH))
Korreferent:	Prof. Dr. Jacques Tilouine	(Univ. Paris 13, CNRS)
Korreferent:	Priv. Doz. Dr. Stefan Kühnlein	(Univ. Karlsruhe (TH))



# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>iii</b>
<b>Notationen und Konventionen</b>	<b>1</b>
<b>1 Ein allgemeines Birch-Lemma</b>	<b>9</b>
1.1 Ein allgemeines lokales Birch-Lemma . . . . .	9
1.2 Ein allgemeines globales Birch-Lemma . . . . .	20
<b>2 Heckeoperatoren und Distributionen</b>	<b>27</b>
2.1 Hecke-Paare und Erweiterungen von Hecke-Algebren . . . . .	27
2.2 Die modifizierte Hecke-Algebra . . . . .	28
2.3 Konstruktion der Distribution . . . . .	32
<b>3 Algebraizität und Beschränktheit der Distribution</b>	<b>39</b>
3.1 Topologische Modulare Symbole . . . . .	39
3.2 Kohomologie Arithmetischer Quotienten . . . . .	40
3.3 Die Beschränktheit der Distribution . . . . .	48
3.4 Kritikalität . . . . .	55
<b>4 Das letzte Kapitel</b>	<b>57</b>
4.1 $\lambda$ -adische Darstellungen . . . . .	57
4.2 Noch mehr Motivisches . . . . .	58
4.3 Automorphes . . . . .	61
4.4 Modularität . . . . .	63
4.5 Iwasawa-Theorie . . . . .	63
4.6 Ausblick . . . . .	67
<b>A Gauß'sche Summen</b>	<b>69</b>
<b>B Zur Maßrelation</b>	<b>71</b>
<b>C Indizes unipotenter Gruppen</b>	<b>73</b>
<b>D Zur Beschränktheit der Distribution</b>	<b>75</b>
<b>E Modifizierte Whittakerfunktionen</b>	<b>81</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>85</b>



# Vorwort

Das Studium spezieller Werte von  $L$ -Funktionen hat eine lange Geschichte in der Zahlentheorie, welche bis zu Leonhard Euler zurückgeht. Der von Kummer entdeckte Zusammenhang zwischen den speziellen Werten der Riemannschen  $\zeta$ -Funktion und Klassenzahlen von Kreisteilungskörpern war der erste Schritt zu den heute als *Main-Conjectures* bekannten [MW84, Kol90, Rub90, Rub91] beziehungsweise vermuteten [Col99, section 3, conjecture 3.3] Zusammenhängen zwischen  $p$ -adischen  $L$ -Funktionen analytischen Ursprungs einerseits und arithmetischen Daten (Selmer-Gruppen, Selmer-Komplexen, ...) andererseits.

Im Rahmen der äquivarianten Tamagawa-Zahl-Vermutung [BF01, BF03] erscheint beispielsweise die Vermutung von Birch und Swinnerton-Dyer (BSD) [Tat66] in einem anderen Licht: Es besteht ein enger Zusammenhang zwischen der Gesamtheit der BSD-Vermutungen in einem Körperturm und einer entsprechenden (ggf. nicht-kommutativen [CFK<sup>+</sup>05]) Iwasawa-Main-Conjecture. Daher erscheint es natürlich, globale Fragestellungen, wie beispielsweise die Vermutung von Birch und Swinnerton-Dyer, in  $p$ -adische Pendanten [MTT86, Col03] zu verwandeln.

Auf der Grundlage der Vermutungen von Deligne, Beilinson, Bloch-Kato, Coates, Fontaine und Perrin-Riou [Del79, Bei85, Nek94, BK90, Coa89, CPR89, Coa91, Fon92, FPR94, PR95] kennen wir den vermutlichen Zusammenhang zwischen den (vermuteten) komplexen  $L$ -Funktionen von Motiven und ihren (zyklotomischen)  $p$ -adischen Pendanten, zumindest über  $\mathbf{Q}$ . Bereits die Konstruktion letzterer ist im Allgemeinen noch ein offenes Problem.

Gegenstand dieser Arbeit ist das Studium spezieller Werte von Rankin-Selberg-Faltungen kohomologischer automorpher Darstellungen  $\pi$  und  $\sigma$  von  $\mathrm{GL}_n(\mathbf{A}_k)$  beziehungsweise  $\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbf{A}_k)$  über einem beliebigen Zahlkörper  $k$  und eine hieraus abgeleitete Konstruktion eines  $\mathfrak{p}$ -adischen Maßes, welches im Sinne Mazurs einer  $\mathfrak{p}$ -adischen  $L$ -Funktion entspricht.

Die hier verwendete Methode ist eine Verallgemeinerung der Arbeiten [Sch93, KMS00, Sch01]. Ausgangspunkt ist eine Integraldarstellung

$$P(s) \cdot \prod_{\mathfrak{p}|f} w_{\mathfrak{p}}(\mathbf{1}_n) \cdot v_{\mathfrak{p}}(\mathbf{1}_{n-1}) \cdot \prod_{\mathfrak{p}|f} (1 - \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{-i})^{-1} \cdot G(\chi)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot L(s, (\pi \otimes \chi) \times \sigma) =$$

$$\mathfrak{N}(f)^{\sum_{k=1}^{n-1} k(n-k)} \cdot \sum_{\iota} \int_{\mathrm{GL}_{n-1}(k) \backslash \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbf{A}_k)} \phi_{\iota} \left( j(g) \cdot h^{(f)} \right) \cdot \varphi_{\iota}(g) \cdot \chi(\det(g)) \cdot \|\det(g)\|^{s-\frac{1}{2}} dg,$$

welche in Anlehnung an die Ursprünge [Bir71, Man72, Maz72, MSD74] als *globales Birch-Lemma* bezeichnet wird. Hierbei bezeichnet  $j : \mathrm{GL}_{n-1} \rightarrow \mathrm{GL}_n$  die kanonische Einbettung,  $\chi : k^{\times} \backslash \mathbf{A}_k^{\times} \rightarrow \mathbf{C}^{\times}$  ist ein Charakter endlicher Ordnung mit nichttrivialem Führer  $f$  und einem lokalen Erzeuger  $f \in \mathcal{O}_k \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}_p$

(wir nehmen vereinfachend an, daß  $f$  eine  $p$ -Potenz teilt), sowie

$$h^{(f)} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & f^{2-n} & f^{1-n} \\ \vdots & & \ddots & f^{4-n} & 0 & f^{2-n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & f^{n-4} & \ddots & & \vdots & f^{-2} \\ f^{n-2} & \ddots & & & \vdots & f^{-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diese globale Integraldarstellung basiert auf einem *lokalen Birch-Lemma*, welches den Wert eines lokalen Zeta-Integrals

$$\int_{U_{n-1}(F) \backslash GL_{n-1}(F)} w(j(g) \cdot h^{(f)}) \cdot v(g) \cdot \chi(\det(g)) \cdot \|\det(g)\|^{s-\frac{1}{2}} dg = \prod_{\nu=1}^{n-1} (1 - \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{-\nu})^{-1} \cdot \mathfrak{N}(f)^{-\sum_{k=1}^n k(n-k)} \cdot G(\chi)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot w(\mathbf{1}_n) \cdot v(\mathbf{1}_{n-1})$$

angibt. Die Auswertung letzteren Integrals war bisher nur unter der Einschränkung bekannt, daß die Charaktere  $\chi, \chi^2, \dots, \chi^{n-1}$  sämtlich den gleichen Führer  $f$  haben [KMS00, Sch01] beziehungsweise für allgemeines  $\chi$  in den Fällen  $n = 2, 3, 4$  [Utz04]. Unser erstes Hauptresultat ist der Beweis eines allgemeinen lokalen Birch-Lemmas, welches den Wert des obigen lokalen Zeta-Integrales ohne Einschränkung an  $\chi$  und  $n$  angibt. Hieraus leiten wir daraufhin ein entsprechend allgemeines globales Birch-Lemma ab. Dies geschieht im ersten Kapitel.

Aus dem globalen Birch-Lemma ergibt sich eine Zerlegung in Summen von Periodenintegralen, welche klassisch partiellen  $\zeta$ -Funktionen entsprechen und bereits an eine Distributionenrelation im Sinne Mazurs erinnern. Die tatsächliche Distributionenrelation leitet sich dann wie in [Sch93, KMS00, Sch01] aus der Operation einer modifizierten Hecke-Algebra ab. Dies geschieht in Kapitel 2. Das Ergebnis ist eine  $\mathbf{C}$ -wertige Distribution  $\mu$  mit der Interpolationseigenschaft

$$\int_{\Theta} \chi d\mu = P\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \delta(\pi, \sigma) \cdot \kappa(f) \cdot G(\chi)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot L\left(\frac{1}{2}, (\pi \otimes \chi) \times \sigma\right),$$

wobei

$$\Theta := k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times / \prod_{v \neq \mathfrak{p}} U_v \cong \varprojlim_f k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times / (1 + f) \prod_{v \neq \mathfrak{f}} U_v,$$

und  $\chi$  beliebig mit nichttrivialem  $\mathfrak{p}$ -Potenzführer ist. Letztere Einschränkung an den Träger des Führers ist auf mangelnde Erkenntnisse über lokale Zeta-Integrale zurückzuführen, welche die Integration unverzweigter Charaktere beschreiben.

Als Hauptresultat dieser Arbeit beweisen wir schließlich im dritten Kapitel die Algebraizität und Beschränktheit der Distribution im ordinären Fall über beliebigen Zahlkörpern  $k$ . Dieses Ergebnis ergibt sich analog zu [Sch01, KMS00, KS08] mittels modularer Symbole aus einer kohomologischen Interpretation der Integraldarstellung des globalen Birch-Lemmas. Diesbezüglich zentral ist Abschnitt 3.2, in welchem wir gewisse topologische modulare Symbole für eine allgemeine Klasse von Morphismen  $s : H \rightarrow G$  reductiver algebraischer Gruppen definieren. Die angestrebte Algebraizitäts- und Beschränktheitsaussage für unsere Distribution ergibt sich dann aus der Spezialisierung  $s = \text{Res}_{k/\mathbf{Q}}(\text{ad} \circ j)$  für den Morphismus  $\text{ad} \circ j : GL_{n-1} \rightarrow PGL_n$ . Wir beschränken uns auf den Fall

trivialer zentraler Charaktere. Zweifellos ließen sich die Methoden aus [KS08] auch hier anwenden, um den Fall beliebiger Koeffizientensysteme abzuhandeln.

Da ein Maß bereits durch die Interpolationseigenschaft für fast alle Charaktere eindeutig bestimmt ist, dürfen wir vermuten, daß die Interpolationseigenschaft auch für Charaktere mit trivialem Führer gilt.

Die Frage, ob  $P(\frac{1}{2}) \neq 0$  gilt, sofern  $s = \frac{1}{2}$  für  $L(\pi \times \sigma, s)$  im Sinne Delignes [Del79, Clo90] kritisch ist, können wir nur für  $n \in \{2, 3\}$  und total reelles  $k$  beantworten, indem wir auf die Arbeiten [Sch93, KS08] zurückgreifen. Hierauf gehen wir im Abschnitt 3.4 ein.

Im letzten Kapitel diskutieren wir Anwendungsbeispiele. Dort konstruieren wir insbesondere für jede abelsche total reelle Erweiterung  $k/\mathbf{Q}$  und jede über  $\mathbf{Q}$  definierte elliptische Kurve  $E$  (ohne CM) mit guter ordinärer Reduktion bei  $(p) = \mathbf{Z} \cap \mathfrak{p}$  eine  $\mathfrak{p}$ -adischen  $L$ -Funktion zur dritten symmetrischen Potenz  $\text{Sym}^3 E/k$  von  $E$  über  $k$ .

Da mit dem in dieser Arbeit erreichten Grad an Allgemeinheit ein gewisser Abschluß erreicht worden ist, hielt ich es für sinnvoll, eine vollständige Abhandlung obiger Methoden darzulegen. Einige Beweise aus dem in den vorgenannten Arbeiten ausschließlich behandelten Fall  $k = \mathbf{Q}$  gelten wortwörtlich auch in dieser allgemeinen Situation. Der Vollständigkeit zuliebe habe ich die entsprechenden Beweise erneut ausgeführt. Teilweise wurden diese jedoch in den Anhang verbannt, selbst wenn manche durch neue Argumente ersetzt wurden.

An dieser Stelle möchte ich meinen Dank aussprechen. Ich freue mich, daß die Referenten und Korreferenten meiner Arbeit diese Aufgabe übernommen haben und bin ihnen hierfür sehr dankbar. Insbesondere danke ich Prof. Claus-Günther Schmidt für lehrreiche Diskussionen, Prof. Jacques Tilouine für seine mathematische Weitsicht und seine Gastfreundschaft während meines einjährigen Forschungsaufenthaltes in Paris, dem DAAD für seine Finanzierung desselbigen und Stefan Kühnlein und Moritz Minzlaff, ohne die ich möglicherweise nie zur Mathematik gefunden hätte. Desweiteren gilt mein Dank Olivier Brinon, Paul Richard Buckingham, Kazim Buyukboduk, Gaëtan Chenevier, Olivier Fouquet, Andrzej Neugebauer, Shu Sasaki, und natürlich der gesamten „Karlsruher Kaffee-Runde“ für ihre Einzigartigkeit.

Mein ganz besonderer Dank gilt Jingwei Zhao. Schließlich danke ich meinen Eltern und Geschwistern, welche mir nie die Frage stellten „und wo kann man das anwenden?“





# Notationen und Konventionen

Es bezeichne  $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$  die natürlichen Zahlen<sup>1</sup>, die ganzen Zahlen, die rationalen Zahlen, die reellen Zahlen, sowie die komplexen Zahlen. Für  $n \geq 0$  bezeichne  $\mu_n \subseteq \mathbf{C}^\times$  die Gruppe der  $n$ -ten Einheitswurzeln.

Für eine Menge  $M$  bezeichne  $\#M$  die *Kardinalität* von  $M$  [Bou70, chapitre III, §3, no. 1, Définition 2]. Es sei  $I$  eine Menge und  $(M_i)_{i \in I}$  eine Familie von Mengen. Dann bezeichnen wir mit

$$\bigsqcup_{i \in I} M_i$$

die *disjunkte Vereinigung* der  $M_i, i \in I$  [Bou70, chapitre II, §4, no. 8, Proposition 9 et Définition 8].

Sofern nicht explizit anders erwähnt, werden Faserprodukte (Pullbacks) stets über Terminalobjekten der entsprechenden Kategorien gebildet und Pushouts stets über entsprechenden Initialobjekten. Insbesondere für Tensorprodukte vereinbaren wir für einen  $\mathbf{Q}$ -Vektorraum  $M$  und eine  $\mathbf{Q}$ -Algebra  $A$  die Konvention  $M_A := M \otimes A = M \otimes_{\mathbf{Q}} A$ . Ist  $V$  ein Modul über einem Ring  $R$ , so bezeichnet  $V^* = \text{Hom}_R(M, R)$  sein *algebraisches Dual* über  $R$ . Die Begriffe *kompakt* und *lokal-kompakt* verstehen wir im Sinne Bourbakis [Bou74]. Das heißt, daß ein (lokal)kompakter Raum  $X$  insbesondere hausdorff'sch ist. Mit  $\pi_0(X)$  bezeichnen wir die Menge der topologischen *Zusammenhangskomponenten* eines topologischen Raumes  $X$ . Eine Teilmenge  $Y$  eines topologischen Raumes heißt *diskret*, falls die induzierte Topologie auf  $Y$  die diskrete Topologie ist. Wir nennen eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  zweier topologischer Räume *eigentlich*, wenn für jeden topologischen Raum  $Z$  die induzierte Abbildung  $f \times \text{id}_Z : X \times Z \rightarrow Y \times Z$  abgeschlossen ist [Bou74, chapitre I, §10, no. 1, Définition 1]. Ist  $X$  hausdorff'sch und  $Y$  lokal-kompakt, so ist  $f$  genau dann eigentlich, wenn das Urbild eines beliebigen Kompaktums unter  $f$  kompakt ist [Bou74, chapitre I, §10, no. 1, Proposition 7].

Ist  $S$  ein Schema über einem kommutativen Ring  $R$  und ist  $A$  eine kommutative  $R$ -Algebra, so bezeichne  $S(A) = \text{Hom}_{\text{Spec } R}(\text{Spec } A, S)$  die  $A$ -wertigen Punkte von  $S$ .

## Gruppen

Ist  $G$  eine Gruppe und ist  $f : A \rightarrow B$  eine Abbildung zweier  $G$ -Mengen (nicht notwendigerweise  $G$ -invariant), so schreiben wir  $f^\sigma$  für  $\sigma \circ f \circ \sigma^{-1}$ . Dies definiert eine links- $G$ -Mengenstruktur auf der Menge  $B^A$  aller Abbildungen  $A \rightarrow B$ , insbesondere gilt  $f^{\sigma\tau} = (f^\tau)^\sigma$  für  $\sigma, \tau \in G$ .

*Charaktere* von Gruppen seien stets unitär. *Darstellungen* (und damit auch *Quasicharaktere*) topologischer Gruppen werden stets als stetig vorausgesetzt. Es sei darauf hingewiesen, daß daher eine eindimensionale komplexe Darstellung einer proendlichen Gruppe stets ein Charakter von endlicher Ordnung ist [Wei67, chapter VII, §3, Lemma 4]. Es bezeichne  $\widehat{G}$  die *proendliche Komplettierung* einer Gruppe  $G$ . Ist  $\chi$  eine Darstellung (oder ein Charakter einer solchen) einer Untergruppe  $H$  einer Gruppe  $G$ , so bezeichnen wir mit  $\text{Ind}_G^H \chi$  die auf  $G$  *induzierte Darstellung* (beziehungsweise deren Charakter).

---

<sup>1</sup>beginnend bei 1

Mit  $G^{\text{ab}}$  bezeichnen wir die *topologische Abelisierung* einer topologischen Gruppe  $G$ . Endliche Gruppen seien stets mit der diskreten Topologie versehen und Gruppenhomomorphismen in diesem Sinne stets stetig.

Ist  $G$  eine topologische Gruppe, so bezeichne  $G^0$  die *Zusammenhangskomponente* des Neutralelementes  $1 \in G$ . Diese ist stets eine abgeschlossene normale Untergruppe von  $G$  [Bou74, chapitre I, §11, no. 5, Proposition 9; chapitre III, §2, no. 2, Proposition 7].

Eine *algebraische Gruppe*  $G$  über einem Körper  $k$  ist ein geometrisch reduziertes Gruppenschema  $G$  von endlichem Typ über  $k$ . Wir fordern, daß  $G$  glatt ist, sofern  $\text{char } k > 0$ . Dann ist  $G$  stets separiert [DG70, Exposé VI<sub>B</sub>, 5.1] und nach Cartier in Charakteristik 0 ebenfalls stets glatt [DG70, Exposé VI<sub>B</sub>, 1.6.1]. Nach Barsotti [Bar53, Che56] ist daher jede algebraische Gruppe quasiprojektiv. Eine algebraische Gruppe nennen wir *linear*, falls das zugrundeliegende Gruppenschema affin ist.

Ist  $k/l$  eine endliche Körpererweiterung, so bezeichne  $\text{Res}_{k/l}G$  die *Restriktion der Skalare* von  $k$  nach  $l$  im Sinne von [Wei61]. Das bedeutet, daß für jede kommutative  $l$ -Algebra  $A$  eine funktorielle Identität  $(\text{Res}_{k/l}G)(A) = G(A \otimes_l k)$  gelte. Da nach Barsotti jede algebraische Gruppe quasiprojektiv ist, ist  $\text{Res}_{k/l}G$  nach Weil stets eine algebraische Gruppe über  $l$  [Wei61].

Eine *Isogenie* algebraischer Gruppen ist ein Epimorphismus mit endlichem Kern. Ist  $G$  eine algebraische Gruppe über einem Körper  $k$ , so bezeichne  $G^0$  die *Zusammenhangskomponente* des Neutralelementes  $1 \in G$  in der Zariski-Topologie. Diese ist als abgeschlossene Untergruppe wieder eine algebraische Gruppe über  $k$ , normal in  $G$ . Desweiteren ist  $G^0$  eine irreduzible Komponente von  $G$  und hat somit endlichen Index in  $G$  [Bor56, section 2.4, Proposition], [Che05, section 3.1, Théorème 1]. Mit  $G^{\text{der}}$  bezeichnen wir die *Kommutatorgruppe* einer algebraischen Gruppe  $G$  und mit  $G^{\text{ad}}$  die zu  $G$  *adjungierte Gruppe*. Das heißt, daß  $G^{\text{ad}}$  das Bild von  $G$  unter der adjungierten Darstellung  $\text{Ad} : G \rightarrow \text{Lie}(G)$  ist. Ist  $G$  zusammenhängend und die Charakteristik 0, so ist der Kern des kanonischen Morphismus  $G \rightarrow G^{\text{ad}}$  gerade das *Zentrum*  $\mathcal{C}(G)$  von  $G$ . Eine lineare algebraische Gruppe nennen wir *reduktiv*, wenn die Zusammenhangskomponente  $G^0$  reduktiv ist, was bedeutet, daß das *unipotente Radikal*  $\mathcal{R}_u(G^0)$  von  $G^0$  trivial ist. Dies ist gleichbedeutend damit, daß das *Radikal*  $\mathcal{R}(G^0)$  von  $G^0$  ein Torus ist. Der  *$k$ -Rang* einer reduktiven algebraischen Gruppe  $G$  über einem Körper  $k$  ist die Dimension eines maximalen über  $k$  zerfallenden Torus in  $G^0$ . Dieser ist wohldefiniert, da sämtliche maximale  $k$ -Tori über  $k$  konjugiert sind [BT65, Théorème 4.21] und Bilder zerfallender Tori wieder zerfallen [BHC62, Proposition 13.2]. Schließlich ist jeder  $k$ -Torus  $T$  in  $G^0$  in einem maximalen Torus von  $G^0$  enthalten, welcher über  $k$  definiert ist [BT65, 2.15 d)]. Eine *parabolische* Untergruppe einer zusammenhängenden linearen algebraischen Gruppe  $G$  ist eine abgeschlossene Untergruppe  $P$ , so daß  $G/P$  projektiv ist. Eine *Borel-Untergruppe* von  $G$  ist eine minimale parabolische Untergruppe. Letzteres ist äquivalent dazu, daß es sich um eine maximale zusammenhängende auflösbare Untergruppe handelt [Bor56, Théorème 16.5]. Eine *Levi-Untergruppe* von  $G$  ist eine maximale reduktive abgeschlossene Untergruppe  $L$  von  $G$ . In Charakteristik 0 existieren Levi-Untergruppen, insbesondere bereits über  $k$ , und diese sind (ggf. über  $k$ ) zueinander konjugiert. Weiterhin ist  $G = \mathcal{R}_u \rtimes L$  ein *semidirektes* Produkt seines unipotenten Radikals  $\mathcal{R}_u$  mit  $L$  [BS64, Proposition 5.1].

Ein Morphismus  $f : G \rightarrow H$  algebraischer Gruppen heißt *zentral*, falls der Kommutator  $[\cdot, \cdot] : G \times G \rightarrow G$  als Morphismus (und als Abbildung) über  $f(G) \times f(G)$  faktorisiert.

Es sei darauf hingewiesen, daß im Allgemeinen weder das Zentrum von  $G$ , noch der Kern eines Homomorphismus  $f : G \rightarrow H$  algebraischer Gruppen über  $k$  noch über  $k$  definiert ist, selbst wenn  $f$  über  $k$  definiert ist. Ist  $f$  (quasi-)zentral, so ist Kern  $f$  über  $k$  definiert [BT72, Corollaire 2.12] und ist  $G$  reduktiv, so ist das Zentrum von  $G$  und damit auch der Kern von  $\text{ad} : G \rightarrow G^{\text{ad}}$  über  $k$  definiert [BT65, 2.15, a)]. Schließlich sei darauf hingewiesen, daß  $\text{ad}$  zentral ist [BT72, Proposition 2.26, (ii)].

Für  $n \geq 0$  bezeichne  $\text{GL}_n$ ,  $\text{SL}_n$ ,  $\mathbf{G}_m$  und  $\mathbf{G}_a$  die üblichen linearen algebraischen Gruppen über  $\mathbf{Q}$  (beziehungsweise die entsprechenden Gruppenschemata über  $\mathbf{Z}$ ). Desweiteren sei  $U_n$  das unipotente Radikal der *Standard-Borel-Untergruppe*  $B_n$  von  $\text{GL}_n$ . Das heißt, daß  $B_n$  die Gruppe der oberen

Dreiecksmatrizen bezeichnet und  $U_n$  ist die (maximale) *unipotente Untergruppe* letzterer, bestehend aus den Dreiecksmatrizen mit dem einzigen Eigenwert 1.

$X_k(G)$  bezeichnet den  $\mathbf{Z}$ -Modul der über  $k$  definierten Charaktere  $G \rightarrow \mathbf{G}_m$ . Eine *arithmetische* Untergruppe einer linearen algebraischen Gruppe  $G/\mathbf{Q}$  ist eine Untergruppe von  $G(\mathbf{Q})$ , deren Bild unter einem (beliebigen und damit unter jedem [BHC62, section 6], [Bor69, 7.13]) Morphismus  $G \rightarrow \mathrm{GL}_n$  algebraischer Gruppen über  $\mathbf{Q}$  mit endlichem Kern mit  $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$  kommensurabel ist.

Für jeden kommutativen Ring  $R$  bezeichne  $\mathbf{1}_n \in \mathrm{GL}_n(R)$  das Neutralelement der Gruppe  $\mathrm{GL}_n(R)$ . Ist  $\chi : R^\times \rightarrow \mathbf{C}^\times$  eine eindimensionale Darstellung, so schreiben wir auch etwas ungenau  $\chi(g) = \chi(\det(g))$  für beliebiges  $g \in \mathrm{GL}_n(R)$ . Für  $A \in \mathrm{GL}_n(R)$  bezeichne  $A^t$  die *transponierte Matrix*.

Mit  $O(n)$  bezeichnen wir die *orthogonale Gruppe*. Diese ist die Untergruppe der  $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$  von  $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$  mit  $AA^t = \mathbf{1}_n$ . Weiterhin schreiben wir  $\mathrm{SO}(n) := O(n) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbf{R}) = O(n)^0$ . Entsprechend bezeichnen  $U(n)$  beziehungsweise  $SU(n)$  die Untergruppen der *hermite'schen Matrizen* von  $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$  beziehungsweise  $\mathrm{SL}_n(\mathbf{C})$ . Diese kompakten Untergruppen bezeichnen wir auch als *standard maximale kompakte Untergruppen* der entsprechenden reductiven Lie-Gruppen.

*Lie-Gruppen* und *Lie-Algebren* sind stets endlichdimensional. Mit  $\mathrm{Lie}(G)$  bezeichnen wir die *Lie-Algebra* einer reellen Lie-Gruppe  $G$ . Fraktur  $\mathfrak{gl}_n, \mathfrak{sl}_n, \mathfrak{o}_n, \mathfrak{u}_n$  bezeichnen die Lie-Algebren der reellen Lie-Gruppen  $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R}), \mathrm{SL}_n(\mathbf{R}), O(n), U(n)$ . Mit  $L$  bezeichnen wir das *Differential*, mit  $\exp$  die *Exponentialabbildung*,  $\mathrm{ad}$  und  $\mathrm{Ad}$  bezeichnen die *adjungierten Darstellungen*. Ist  $G$  eine Lie-Gruppe mit Zentrum  $Z$ , so bezeichnen wir mit  $G^{\mathrm{ad}} = G/Z$  und  $G^{\mathrm{der}}$  die *adjungierte* und die *Kommutatorgruppe* zu  $G$ . Hat eine reelle Lie-Gruppe  $G$  nur endlich viele Zusammenhangskomponenten, so ist jede kompakte Untergruppe in  $G$  in einer maximalen kompakten Untergruppe enthalten und alle maximalen kompakten Untergruppen sind konjugiert via innerer Automorphismen; weiterhin gilt  $G = G^0 K$  mit einer kompakten Untergruppe  $K$  [Mos55, Theorem 3.1]. An dieser Stelle sei angemerkt, daß für eine reelle algebraische Gruppe  $G$  über  $\mathbf{R}$  die reelle Lie-Gruppe  $G(\mathbf{R})$  nur endlich viele Zusammenhangskomponenten hat [Whi57, Theorem 3]. Desweiteren existiert im reductiven Fall (und nur in diesem Fall) eine *Cartan-Involution* auf  $\mathrm{Lie}(G(\mathbf{R}))$  und  $G(\mathbf{R})$  und alle Cartan-Involutionen sind konjugiert [BHC62, Lemmata 1.5, 1.6, 1.7, 1.8]. Weiterhin ist die Fixgruppe einer Cartan-Involution eine maximale kompakte Untergruppe  $K$  von  $G(\mathbf{R})$  und jede solche ist von dieser Form. Cartan-Involutionen sind im Sinne von [BS73, Proposition 1.6, Definition 1.7] *algebraisch* und durch  $K$  jeweils eindeutig bestimmt.

## Lokale und globale Körper

Für eine Primpotenz  $q$  bezeichne  $\mathbf{F}_q$  einen *endlichen Körper* mit  $q$  Elementen, wobei wir uns für alle nichttrivialen Teiler  $d \mid q$  den Körper  $\mathbf{F}_d$  als Teilkörper von  $\mathbf{F}_q$  denken. Insbesondere sei mit  $\overline{\mathbf{F}}_p = \varinjlim \mathbf{F}_{p^r}$  ein fester algebraischer Abschluß von  $\mathbf{F}_p$  gewählt. Ein *Zahlkörper* ist für uns eine endliche algebraische Erweiterung von  $\mathbf{Q}$ . Ein *lokaler Körper* ist stets ein nichtdiskret topologisierter lokalkompakter Körper. Nach [Wei67, chapter I] ist daher jeder lokale Körper isomorph zu  $\mathbf{R}, \mathbf{C}$  oder zu einer endlichen algebraischen Erweiterung von  $\mathbf{Q}_p$  oder  $\mathbf{F}_p((T))$  für eine Primzahl  $p$ . Mit  $\mathfrak{N}(\mathfrak{a})$  bezeichnen wir die Absolutnorm eines gebrochenen Ideals  $\mathfrak{a} \neq 0$  eines lokalen oder globalen Körpers.

Für einen Zahlkörper  $k$  bezeichne  $\mathcal{O}_k$  den *Ganzheitsring*, sowie  $\mathbf{A}_k$  den Ring der *Adele* von  $k$  und  $\mathbf{A}_k^\times$  die Gruppe der *Idele*. Letztere versehen wir nicht mit der von  $\mathbf{A}_k$  induzierten Topologie, sondern mit der gröbsten feineren Topologie, für welche  $\mathbf{A}_k^\times \rightarrow \mathbf{A}_k \times \mathbf{A}_k, \alpha \mapsto (\alpha, \alpha^{-1})$  stetig ist, so daß  $\mathbf{A}_k^\times$  insbesondere eine lokalkompakte topologische Gruppe ist. Dies entspricht der *Adelisierung* der algebraischen Gruppe  $\mathbf{G}_m$  über  $k$ . Entsprechend bezeichnen wir mit  $G(\mathbf{A}_k)$  die Adelisierung einer beliebigen linearen algebraischen Gruppe  $G$  über  $k$ . Es bezeichne  $\mathbf{A}_k^f$  die endlichen Adele und entsprechend sei  $G(\mathbf{A}_k^f)$  verstanden. Für ein  $g \in G(\mathbf{A}_k)$  bezeichne  $g_f \in G(\mathbf{A}_k^f)$  den endlichen Anteil, so daß  $g = g_\infty g_f$  mit einem eindeutig bestimmten  $g_\infty \in G(k_{\mathbf{R}})$ .

Weiterhin bezeichne  $M_k$  die Menge der Primstellen von  $k$ . Mit  $k_v$  sei eine Komplettierung von  $k$  an der Stelle  $v \in M_k$  gewählt. Wir wählen ein für allemal für jedes  $v$  einen algebraischen Abschluß  $\bar{k}_v$  von  $k_v$  und einen algebraischen Isomorphismus

$$\bar{k}_v \cong \mathbf{C}.$$

Entsprechend fassen wir den algebraischen Abschluß  $\bar{k} \subseteq \bar{k}_v$  von  $k$  in  $\bar{k}_v$  ebenfalls als Teilkörper von  $\mathbf{C}$  auf.

Die Norm  $\|a\|$  eines Adels  $a = (a_v)_v \in \mathbf{A}_k$  ist gegeben durch

$$\|a\| = \prod_{v \in M_k} \|a_v\|_v,$$

wobei lokal  $\mu_v(a_v M) = \|a_v\|_v \cdot \mu_v(M)$  für jedes Haar'sche Maß auf  $(k_v, +)$  und jede meßbare Menge  $M \subseteq k_v$ . Im nichtarchimedischen Fall haben wir daher  $\|\pi_v\|_v = q_v^{-1}$  für jedes Primelement  $\pi_v \in k_v$  mit der Restklassenkörperkardinalität  $q_v$  von  $k_v$ . Im archimedischen Fall liegt für reelles  $v$  der euklidische Absolutbetrag vor, für komplexes  $v$  das Quadrat des komplexen Absolutbetrages. Adelsch gilt dann analog  $\mu(aM) = \|a\| \cdot \mu(M)$  für jedes Haar'sche Maß  $\mu$  auf  $\mathbf{A}_k$  und entsprechendes meßbares  $M$ .

In diesem Sinne bezeichne  $\omega_s : \mathbf{A}_k^\times \rightarrow \mathbf{C}^\times$  den Quasicharakter  $a \mapsto \|a\|^s$ . Es sei darauf hingewiesen, daß ein Idelklassengruppencharakter  $\chi : k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times \rightarrow \mathbf{C}^\times$ , welcher bei  $\infty$  endliche Ordnung hat, selbst von endlicher Ordnung ist [Wei67, chapter VII, §3, Lemma 4].

Den *Reziprozitätsmorphismus* der globalen Klassenkörpertheorie

$$r_k : k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times \rightarrow G(\bar{k}/k)^{\text{ab}}$$

normieren wir, indem wir lokal

$$r_{k_v} : k_v^\times \rightarrow G(\bar{k}_v/k_v)^{\text{ab}}$$

durch

$$r_{k_v}(a) \equiv a^{\|a\|_v} \pmod{\pi_v}$$

für ganzes  $a \in k_v$  festlegen. In diesem Sinne entsprechen Primelemente den *geometrischen Frobenius-elementen*, also den inversen *arithmetischen Frobenius-elementen*. Mit anderen Worten verwenden wir die gleichen Konventionen wie [Tat79, Del73b].

## Maße, Führer und Gauß'sche Summen

$p$ -adische Maße verstehen wir im Sinne von [MSD74, section II, §7].

Es sei  $F$  ein nichtarchimedisch bewerteter lokaler Körper mit *maximalem kompaktem Teilring*  $\mathcal{O}_F$ ,  $\psi : F \rightarrow \mathbf{C}^\times$  ein additiver Charakter mit *Führer*  $\mathcal{O}_F$ , was bedeutet, daß  $\mathcal{O}_F$  der Kern von  $\psi$  ist. Für einen beliebigen Quasicharakter  $\chi : F^\times \rightarrow \mathbf{C}^\times$  mit Führer  $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}\mathcal{O}_F$  definieren wir die *Gauß'sche Summe* zu  $\chi$  (bezüglich  $\psi$ ) als

$$G_\psi(\chi) := \sum_{x + \mathfrak{f} \in (\mathcal{O}_F/\mathfrak{f})^\times} \chi(x) \psi\left(\frac{x}{\mathfrak{f}}\right).$$

Für einen weiteren additiven Charakter  $\psi'$  mit Kern  $\mathcal{O}_F$  existiert nach [Wei67, chapter II, §5, Corollary of Theorem 3] ein  $a \in F^\times$  mit

$$\forall t \in F : \quad \psi'(t) = \psi(at).$$

Da  $\psi$  und  $\psi'$  den gleichen Führer haben, gilt sogar  $a \in \mathcal{O}_F^\times$ . Wir erhalten insbesondere

$$G_{\psi'}(\chi) = \bar{\chi}(a) G_\psi(\chi).$$

Analog wirkt sich die Wahl des Erzeugers  $f$  von  $\mathfrak{f}$  aus. Wir schreiben daher im Folgenden par abus de notation  $G(\chi)$  statt  $G_\psi(\chi)$  und vernachlässigen (sofern offensichtlich möglich) ebenfalls den Einfluß von  $f$ .

Falls  $0 \neq g \in \mathcal{O}_F$ , so gilt mit  $\mathfrak{h} := \mathfrak{f} \cap g\mathcal{O}_F$ , daß

$$\sum_{x+\mathfrak{h} \in (\mathcal{O}_F/\mathfrak{h})^\times} \chi(x)\psi\left(\frac{x}{g}\right) = \begin{cases} \chi(g/f) \cdot G(\chi), & \text{falls } \mathfrak{f} = g\mathcal{O}_F, \\ 0, & \text{andernfalls.} \end{cases} \quad (0.0.1)$$

Ein Beweis dieser Formel findet sich im Anhang A, Proposition A.0.1.

Es sei  $k$  ein Zahlkörper und  $\chi : k^\times \setminus \mathbf{A}_k^\times \rightarrow \mathbf{C}^\times$  ein Charakter mit Führer  $\mathfrak{f}$ . Wir definieren die *Gaußsche Summe* zu  $\chi$  als

$$G(\chi) := \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{f}} G(\chi_{\mathfrak{p}}),$$

wobei  $G(\chi_{\mathfrak{p}})$  die Gaußsche Summe des auf der Komplettierung zu  $\mathfrak{p}$  induzierten Charakters  $\chi_{\mathfrak{p}}$  ist und die dortigen additiven Charaktere ein für allemal fest gewählt wurden. Offensichtlich unterscheiden sich die Gaußschen Summen zu verschiedenen additiven Charakteren lediglich um eine Multiplikation mit einer  $\mathfrak{N}(\mathfrak{f})$ -ten Einheitswurzel. Wir bemerken hier schließlich noch, daß

$$|G(\chi)| = \sqrt{\mathfrak{N}(\mathfrak{f})},$$

sowie

$$G(\chi)G(\bar{\chi}) = \mathfrak{N}(\mathfrak{f})\chi(-1), \quad (0.0.2)$$

siehe beispielsweise [Neu92, Kapitel VII, §6, Theorem (6.4)].

## Whittakermodelle

Es sei  $F$  ein nichtarchimedisch bewerteter lokaler Körper und es sei  $\psi : F \rightarrow \mathbf{C}^\times$  ein additiver Charakter mit Kern  $\mathcal{O}_F$ . Wir setzen  $\psi$  auf die Gruppe  $U_n(F)$  fort, indem wir für  $u = (u_{ij}) \in U_n(F)$

$$\psi(u) := \prod_{i=1}^{n-1} \psi(u_{i,i+1})$$

definieren. Dann ist eine ( $\psi$ -)Whittakerfunktion auf  $\mathrm{GL}_n(F)$  bekanntlich eine Abbildung  $w : \mathrm{GL}_n(F) \rightarrow \mathbf{C}$ , welche den folgenden beiden Bedingungen genügt.

(a)  $w(ug) = \psi(u) \cdot w(g)$  für alle  $u \in U_n(F)$  und  $g \in \mathrm{GL}_n(F)$ ,

(b) es existiert eine kompaktoffene Untergruppe  $K \leq \mathrm{GL}_n(F)$  mit  $w(gk) = w(g)$  für alle  $k \in K$ .

Jede Whittakerfunktion ist nach (b) gleichmäßig stetig im Sinne der linksuniformen Struktur von  $\mathrm{GL}_n(F)$  und insbesondere sogar lokalkonstant. Es bezeichne nun  $\mathscr{W}(\psi)$  den Raum aller  $\psi$ -Whittakerfunktionen auf  $\mathrm{GL}_n(F)$  bezüglich  $\psi$ . Wie üblich operiert  $\mathrm{GL}_n(F)$  via Rechtstranslation  $(g, w) \mapsto (h \mapsto w(hg))$  auf  $\mathscr{W}(\psi)$ . Dies definiert eine Darstellung von  $\mathrm{GL}_n(F)$  und die Bedingungen (a) und (b) besagen nichts anderes, als daß es sich hierbei im Sinne von [Car79, section 1.8] um die (glatte) induzierte Darstellung  $\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_n(F)}^{U_n(F)}(\psi)$  handelt. Die irreduziblen zulässigen<sup>2</sup> Unterdarstellungen dieser Darstellung werden als *generisch*<sup>3</sup> bezeichnet. Nach [Sha74] sind die lokalen Komponenten einer cuspidalen automorphen Darstellungen von  $\mathrm{GL}_n$  stets generisch. Sei nun  $\pi$  eine solche generische Darstellung, welche

<sup>2</sup>admissiblen

<sup>3</sup>in [GK71, JS81a] auch als *nondegenerate*.

wir mit dem eindeutigen<sup>4</sup> irreduziblen Unterraum  $\mathscr{W}(\pi, \psi) \subseteq \mathscr{W}(\psi)$  identifizieren. Letzterer ist der  $(\psi)$ -Whittakerraum zu  $\pi$ .

Der (globale)  $(\psi)$ -Whittakerraum  $\mathscr{W}_0(\pi, \psi)$  einer cuspidalen automorphen Darstellung  $\pi$  von  $\mathrm{GL}_n(\mathbf{A}_k)$  über einem Zahlkörper  $k$  zu einem additiven Charakter  $\psi = \otimes_v \psi_v$  von  $\mathbf{A}_k$  ist bekanntlich der von den Abbildungen  $w : \mathrm{GL}_n(\mathbf{A}_k) \rightarrow \mathbf{C}$  erzeugte Vektorraum, welche eine Faktorisierung  $w = \otimes_v w_v$  in lokale Whittakerfunktionen haben, wobei fast alle lokalen Komponenten unverzweigt sind. Dabei gilt für archimedische Stellen  $v \in S_\infty \subseteq M_k$ , daß  $w_v \in \mathscr{W}_0(\pi_v, \psi_v)$ , wobei letzterer Raum wie in [JPSS79b, section 8] definiert ist. Die Räume  $\mathscr{W}_0(\pi, \psi)$  und  $\mathscr{W}_0(\pi_v, \psi_v)$  lassen sich durch analoge Bedingungen wie  $\mathscr{W}(\pi_{\mathfrak{q}}, \psi_{\mathfrak{q}})$  für endliches  $\mathfrak{q} \in M_k$  charakterisieren.

## Kohomologie Arithmetischer Quotienten

Für die de-Rham-Kohomologie, sowie für die Grundbegriffe differenzierbarer Mannigfaltigkeiten, verweisen wir auf [Rha60]. Zum Zusammenhang mit Borel-Moore-Homologie verweisen wir auf [God64, Ive86], insbesondere sei das de-Rham-Theorem 7.12 in [Ive86] genannt. Sofern nicht explizit anders erwähnt, wird *Kohomologie* synonym für Garben-Kohomologie verwandt. Für die Kohomologie von Lie-Algebren verwenden wir die gleichen Konventionen wie [BW80].

Es sei  $k$  ein Zahlkörper,  $G := G_n := \mathrm{Res}_{k/\mathbf{Q}} \mathrm{GL}_n$ ,  $K_\infty \leq G(\mathbf{R}) = \mathrm{GL}_n(k_{\mathbf{R}})$  eine maximale kompakte Untergruppe und  $K \leq G(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^f) = \mathrm{GL}_n(\mathbf{A}_k^f)$  eine kompaktoffene Untergruppe. Dann zerfällt dank starker Approximation für  $\mathrm{SL}_n$  [Pra77, Theorem A] die (topologische) Mannigfaltigkeit

$$\mathscr{X}_n(K) := \mathrm{GL}_n(k) \backslash \mathrm{GL}_n(\mathbf{A}_k) / (K_\infty \times K)$$

in eine endliche Vereinigung von Zusammenhangskomponenten entsprechend den Fasern von

$$\det : \mathrm{GL}_n(\mathbf{A}_k) \rightarrow k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times / ((k_{\mathbf{R}})^\times \times \det(K)).$$

Dabei identifiziert sich der *symmetrische Raum*  $\mathscr{X}_n := G(\mathbf{R})/K_\infty$  auf natürliche Weise mit  $G(\mathbf{R})^0/K_\infty^0$ , wobei  $K_\infty^0 \leq G(\mathbf{R})^0$  eine maximale kompakte Untergruppe ist [Mos55, Theorem 3.1, (1)]. Dies führt entsprechend obiger Fasern zu der Zerlegung

$$\mathscr{X}_n(K) = \bigsqcup_{\alpha} \Gamma_{\alpha} \backslash \mathscr{X}_n$$

von  $\mathscr{X}_n(K)$  in eine endliche disjunkte Vereinigung mit arithmetischen Untergruppen  $\Gamma_{\alpha} \leq G(\mathbf{Q})$ . Dabei durchläuft  $\alpha \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{A}_k^f)$  ein Repräsentantensystem der Fasern der obigen Determinantenabbildung und wir haben

$$\Gamma_{\alpha} := \{\gamma \in \mathrm{GL}_n(k) \mid \gamma_f \in \alpha \cdot K \cdot \alpha^{-1}\}$$

und

$$i_{\alpha} : \Gamma_{\alpha} \backslash \mathscr{X}_n \rightarrow \mathscr{X}_n(K),$$

$$\Gamma_{\alpha} x_{\infty} K_{\infty} \mapsto G(\mathbf{Q})(x_{\infty}, \alpha)(K_{\infty} \times K)$$

induziert einen Diffeomorphismus<sup>5</sup> auf die  $\alpha$  enthaltende Faser. Es sei angemerkt, daß  $\alpha$  und damit  $\Gamma_{\alpha}$  keineswegs eindeutig bestimmt ist. An dieser Stelle bemerken wir, daß wir eine analoge Zerlegung erhalten, wenn wir zu einer abgeschlossenen Untergruppe von  $K_{\infty}$  von endlichem Index übergehen<sup>6</sup>.

<sup>4</sup>siehe [GK71]. Diese Beobachtung ist zentral für den Nachweis des *Multiplicity One Theorems* für  $\mathrm{GL}_n$  von Piatetski-Shapiro und Shalika [Sha74, Theorem 5.5], [PS79].

<sup>5</sup>falls  $\Gamma_{\alpha}$  torsionsfrei ist, was für „ausreichend kleine“  $K$  stets der Fall ist

<sup>6</sup>eine solche Untergruppe enthält zwangsläufig  $K_{\infty} \cap G(\mathbf{R})^0$

Wir definieren

$$\mathcal{X}_n^1(K) := \mathcal{X}_n(K)/\mathcal{C}(\mathrm{GL}_n)(k_{\mathbf{R}})^0$$

und damit

$$\tilde{\mathcal{X}}_n^1 := \varprojlim_K \mathcal{X}_n^1(K)$$

via der natürlichen Projektionen und entsprechend die *Kohomologie* von  $\tilde{\mathcal{X}}_n^1$  mit *konstanten Koeffizienten* in einem Teilring  $A \subseteq \mathbf{C}$  als

$$H^q(\tilde{\mathcal{X}}_n^1, A) := \varinjlim_K H^q(\mathcal{X}_n^1(K), A),$$

analog für die *Kohomologie* mit *kompaktem Träger*

$$H_c^q(\tilde{\mathcal{X}}_n^1, A) := \varinjlim_K H_c^q(\mathcal{X}_n^1(K), A),$$

und schließlich für die *cuspidale Kohomologie* analog

$$H_{\mathrm{cusp}}^q(\tilde{\mathcal{X}}_n^1, \mathbf{C}) := \varinjlim_K H_{\mathrm{cusp}}^q(\mathcal{X}_n^1(K), \mathbf{C}).$$

Um cuspidale Kohomologie mit Koeffizienten in  $A$  zu erhalten, identifizieren wir nach Borel [Bor83] die cuspidale Kohomologie mit ihrem Bild unter der Einbettung

$$H_{\mathrm{cusp}}^q(\mathcal{X}_n^1(K), \mathbf{C}) \rightarrow H_c^q(\mathcal{X}_n^1(K), \mathbf{C}),$$

womit wir

$$H_{\mathrm{cusp}}^q(\mathcal{X}_n^1(K), A) := \mathrm{Bild}(H_{\mathrm{cusp}}^q(\mathcal{X}_n^1(K), \mathbf{C}) \rightarrow H_c^q(\mathcal{X}_n^1(K), \mathbf{C})) \cap H_c^q(\mathcal{X}_n^1(K), A)$$

definieren können. Letzteres macht Sinn, da nach [Clo90, Théorème 3.19] das Bild obiger Einbettung über  $\mathbf{Q}$  definiert ist<sup>7</sup>. Nach Borel-Serre [BS73] ist die *innere Kohomologie*

$$H_!^q(\tilde{\mathcal{X}}_n, \mathbf{C}) \subseteq H^q(\tilde{\mathcal{X}}_n, \mathbf{C})$$

als Bild von  $H_c^q(\tilde{\mathcal{X}}_n, \mathbf{C})$  ebenfalls über  $\mathbf{Q}$  definiert und wir erhalten analog eine rationale Struktur auf dieser Kohomologie, welche mit obiger Definition verträglich ist. Es sei daran erinnert, daß  $H_{\mathrm{cusp}}^q(\mathcal{X}_n^1(K), \mathbf{C})$  die Kohomologie des Komplexes

$$\left( \bigwedge^{\bullet} \mathfrak{p}^* \otimes_{\mathbf{R}} L_0^2(\mathrm{GL}_n(k) \backslash \mathrm{GL}_n(\mathbf{A}_k) / \mathcal{C}(\mathrm{GL}_n)(k_{\mathbf{R}})^0 K_{\infty} K) \right)^{\mathcal{C}(\mathrm{GL}_n)(k_{\mathbf{R}})^0 K_{\infty}}$$

ist, wobei  $\mathfrak{p}$  der  $(-1)$ -Eigenraum der Cartan-Involution  $\theta \in \mathrm{Lie}(\mathrm{GL}_n(k_{\mathbf{R}}))$  zu  $K_{\infty}$  ist<sup>8</sup>. Es sei weiterhin daran erinnert [BW80, chapter II, §3, Corollary 3.2], daß die de Rham Kohomologie via des Isomorphismus

$$\Omega^{\bullet}(\mathrm{GL}_n(k) \backslash \mathrm{GL}_n(\mathbf{A}_k) / \mathcal{C}(\mathrm{GL}_n)(k_{\mathbf{R}})^0 K_{\infty} K) \cong$$

<sup>7</sup>bezüglich der  $\mathbf{Q}$ -Struktur, welche durch die *Betti-Kohomologie* mit kompaktem Träger gegeben ist. Letztere ist in unserer Sichtweise die (Garben-)Kohomologie mit kompaktem Träger und konstanten Koeffizienten  $\mathbf{Z}$ .

<sup>8</sup>bei der Standardwahl  $K_{\infty} = \prod_{v \text{ reell}} \mathrm{O}(n) \times \prod_{v \text{ komplex}} \mathrm{U}(n)$  besteht  $\mathfrak{p} \leq (k_{\mathbf{R}})^{n \times n}$  aus den Matrizen, welche an den reellen Stellen symmetrisch und an den komplexen Stellen hermite'sch sind.

$$\left( \dot{\bigwedge} \mathfrak{p}^* \otimes_{\mathbf{R}} \mathcal{C}^\infty(\mathrm{GL}_n(k) \backslash \mathrm{GL}_n(\mathbf{A}_k) / \mathcal{C}(\mathrm{GL}_n)(k_{\mathbf{R}})^0 K_\infty K) \right)^{\mathcal{C}(\mathrm{GL}_n)(k_{\mathbf{R}})^0 K_\infty}$$

mit der Lie-Algebren-Kohomologie verträglich ist.

Durch Rechtstranslation induziert jedes

$$(x_\infty, x_f) \in \pi_0(G(\mathbf{R})) \times \mathrm{GL}_n(\mathbf{A}_k^f),$$

wobei o.E. der Repräsentant  $x_\infty \in G(\mathbf{R})$  die Gruppe  $K_\infty$  normalisiert, einen topologischen Isomorphismus

$$\mathcal{X}_n^1(K) \rightarrow \mathcal{X}_n^1(x_f^{-1} K x_f),$$

welcher als solcher insbesondere eigentlich ist, und daher auf den Limites  $H^q$ ,  $H_c^q$ ,  $H_!^q$  und  $H_{\mathrm{cusp}}^q$  eine Operation von  $\pi_0(G(\mathbf{R})) \times \mathrm{GL}_n(\mathbf{A}_k^f)$  induziert. Nach [Clo90, Théorème 3.13 et Proposition 3.16] ist jeder irreduzible Quotient  $\pi_f$  der Darstellung von  $\mathrm{GL}_n(\mathbf{A}_k^f)$  auf  $H_{\mathrm{cusp}}^q(\tilde{\mathcal{X}}_n^1, \mathbf{C})$  bereits über einem Zahlkörper  $E$  definiert und die Aktion von  $\mathrm{GL}_n(\mathbf{A}_k^f)$  respektiert die  $E$ -Struktur auf der Kohomologie. Desweiteren trägt der endliche Whittakerraum  $\mathcal{W}(\pi_f, \psi_f)$  eine natürliche  $E$ -Struktur.



# Kapitel 1

## Ein allgemeines Birch-Lemma

In [KMS00] studieren Kazhdan, Mazur und Schmidt zu irreduziblen cuspidalen zulässigen automorphen Darstellungen  $\pi'$  und  $\sigma'$  von  $\mathrm{GL}_n(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}})$  beziehungsweise  $\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}})$  und zu einem nicht-trivialen Dirichlet-Charakter  $\chi$  mit  $p$ -Potenz-Führer den zentralen kritischen Wert der  $L$ -Funktion  $L(s, (\pi' \otimes \chi) \times \sigma')$  im Sinne von [JPSS83, CPS04]. Das diesbezügliche Hauptresultat ist das *generalized global Birch-Lemma* aus [KMS00], welches auf dem dortigen *generalized local Birch-Lemma* beruht. Aus diesem generalized global Birch-Lemma konnte die Existenz einer  $p$ -adischen Distribution gefolgert werden, welche die speziellen Werte unter Variation von  $\chi$  interpoliert.

In [Sch93, Sch01] leitete Schmidt aus obigem Birch-Lemma ein verbessertes Birch-Lemma ab, um hiermit die Existenz eines  $p$ -adischen Maßes nachzuweisen.

Alle diese Birch-Lemmata haben gemein, daß sie nur unter der Bedingung bewiesen worden waren, daß  $\chi, \chi^2, \dots, \chi^{n-1}$  sämtlich den gleichen Führer haben. In [Utz04] wurde diese Einschränkung des lokalen Birch-Lemmas in den Fällen<sup>1</sup>  $n = 2, 3, 4$  aufgehoben.

In diesem Kapitel beweisen wir ein allgemeines Birch-Lemma im Sinne von Schmidt, welches ohne Einschränkung an  $\chi$  und  $n$  gilt. Desweiteren arbeiten wir mit irreduziblen cuspidalen automorphen Darstellungen  $\pi$  und  $\sigma$  von  $\mathrm{GL}_n(\mathbf{A}_k)$  beziehungsweise  $\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbf{A}_k)$ , wobei  $k/\mathbf{Q}$  ein beliebiger Zahlkörper ist. Dieses Vorgehen wird es uns in den Kapiteln 2 und 3 erlauben, in dieser allgemeinen Situation ein  $\mathfrak{p}$ -adisches Maß zu konstruieren, welches die Werte  $L(\frac{1}{2}, (\pi \otimes \chi) \times \sigma)$  interpoliert, sofern  $\pi$  und  $\sigma$  bei  $\mathfrak{p}$  ordinär und kohomologischen Ursprungs sind.

### 1.1 Ein allgemeines lokales Birch-Lemma

In diesem Abschnitt verallgemeinern wir zunächst das verallgemeinerte lokale Birch-Lemma aus [KMS00, section 2] und leiten im nächsten Abschnitt hieraus ein globales Birch-Lemma ab. Im Gegensatz zu [KMS00, Utz04] beruht unser Ansatz nicht auf der Bruhat-Zerlegung, sondern auf der Iwasawa-Zerlegung. Dies erlaubt es, sich der Einschränkung an die Führer von  $\chi, \chi^2, \dots, \chi^{n-1}$  für beliebige  $n$  zu entledigen.

Es sei  $F$  ein nichtarchimedisch bewerteter lokaler Körper (beliebiger Charakteristik) mit Restklassenkörpercharakteristik  $p$ . Mit  $\mathfrak{p}$  bezeichnen wir das maximale Ideal des Bewertungsringes  $\mathcal{O}_F$  von  $F$ . Es sei  $\pi \in F$  ein Erzeuger desselben und  $\psi : F \rightarrow \mathbf{C}^\times$  ein additiver Charakter mit Kern  $\mathcal{O}_F$ .

Es sei nun weiterhin  $\chi : F^\times \rightarrow \mathbf{C}^\times$  ein Quasicharakter, dessen Führerideal  $\mathfrak{f}$  von  $f \in \mathcal{O}_F$  erzeugt wird. Wir definieren

$$t := \mathrm{diag}(f^n, f^{n-1}, \dots, f, 1) \in \mathrm{GL}_{n+1}(F).$$

---

<sup>1</sup>formuliert nur über  $\mathbf{Q}_p$ ; die Methode funktioniert jedoch für allgemeine nichtarchimedisch bewertete lokale Körper.

Dann gilt für  $g = (g_{ij}) \in \mathrm{GL}_{n+1}(F)$

$$t^{-1} \cdot g \cdot t = (f^{i-j} \cdot g_{ij})_{ij}.$$

Wir haben die Einbettungen

$$j : \mathrm{GL}_n(F) \rightarrow \mathrm{GL}_{n+1}(F), \quad g \mapsto \begin{pmatrix} g & \\ & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.1.1)$$

und

$$\tilde{j} : \mathrm{GL}_{n-1}(F) \rightarrow \mathrm{GL}_n(F), \quad \tilde{g} \mapsto \begin{pmatrix} \tilde{g} & \\ & 1 \end{pmatrix},$$

sowie die Projektion

$$p : F^{n \times n} \rightarrow F^{n-1 \times n-1}, \quad (g_{ij}) \mapsto (g_{ij})_{1 \leq i, j \leq n-1}.$$

Bei Bedarf identifizieren wir  $\mathrm{GL}_n(F)$  mit ihrem Bild unter der Einbettung  $j$ . Gleiches verabreden wir für beliebige Untergruppen  $H$  von  $\mathrm{GL}_n(F)$ , welche wir entsprechend mit  $j(H)$  identifizieren können.

Schließlich bezeichne  $I_n$  die *Iwahori-Untergruppe* von  $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)$ . Dies ist die Gruppe der  $g \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)$ , welche modulo  $\mathfrak{p}$  obere Dreiecksmatrizen sind.

Es bezeichne  $W_n$  die Weylgruppe der  $\mathrm{GL}_n$ . Wir denken sie uns als Permutationsmatrizen als Untergruppe der  $\mathrm{GL}_n$  realisiert. Weiterhin assoziieren wir zu  $\omega \in W_n$  eine Permutation  $\sigma \in S_n$  via

$$\omega \cdot e_k = e_{\sigma^{-1}(k)}$$

für  $1 \leq k \leq n$ . Hierbei bezeichne  $e_k$  den  $k$ -ten Standardbasisvektor im Standardraum  $F^n$ . Für ein  $a = (a_i)_{1 \leq i \leq n} \in F^n$  gilt dann  $\omega a = (a_{\sigma(i)})_{1 \leq i \leq n}$ . Die Abbildung  $\omega \mapsto \sigma^{-1}$  ist ein Isomorphismus  $W_n \rightarrow S_n$ . Es bezeichne  $w_n \in W_n$  das lange Weylelement. Das bedeutet, daß  $w_n$  das längste Element in  $W_n$  ist. Dann hat  $w_n$  die Gestalt

$$w_n = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & \cdot & \\ & & \cdot & \\ 1 & & & \end{pmatrix}.$$

Für  $e = (e_1, \dots, e_n) \in \mathbf{Z}^n$  definieren wir die Matrix

$$\pi^e := \mathrm{diag}(\pi^{e_1}, \dots, \pi^{e_n}).$$

Nach Iwahori-Matsumoto [IM65, Proposition 2.33] beziehungsweise Satake [Sat63, Section 8.2] gilt damit

$$\mathrm{GL}_n(F) = \bigsqcup_{\substack{\omega \in W_n \\ e \in \mathbf{Z}^n}} U_n(F) \pi^e \omega I_n.$$

Zu jedem  $g \in \mathrm{GL}_n(F)$  existieren also  $a \in U_n(F)$ ,  $e \in \mathbf{Z}^n$ ,  $\omega \in W_n$ ,  $s \in I_n$  mit

$$g = a \cdot \pi^e \cdot \omega \cdot s.$$

Dann sind  $e$  und  $\omega$  nach Iwahori-Matsumoto durch  $g$  eindeutig bestimmt,  $a$  und  $s$  jedoch nicht.

Schließlich definieren wir

$$h := \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & \vdots & \\ & w_n & \vdots & \\ & & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbf{Z}),$$

und

$$h^{(f)} := t^{-1} \cdot h \cdot t.$$

Ziel dieses Abschnittes ist der Beweis des folgenden Lemmas.

**Allgemeines lokales Birch-Lemma.** *Es seien  $n \geq 0$  und  $\chi : F^\times \rightarrow \mathbf{C}^\times$  ein Quasicharakter mit nichttrivialem Führer  $\mathfrak{f}$ . Weiterhin seien  $w$  und  $v$  Iwahori-invariante  $\psi$ - beziehungsweise  $\psi^{-1}$ -Whittakerfunktionen auf  $\mathrm{GL}_{n+1}(F)$  beziehungsweise  $\mathrm{GL}_n(F)$ . Dann gilt*

$$\int_{U_n(F) \backslash \mathrm{GL}_n(F)} w \left( j(g) \cdot h^{(f)} \right) \cdot v(g) \cdot \chi(\det(g)) \cdot \|\det(g)\|^{s-\frac{1}{2}} dg = \prod_{\nu=1}^n (1 - \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{-\nu})^{-1} \cdot \mathfrak{N}(\mathfrak{f})^{-\sum_{k=1}^n k(n+1-k)} \cdot G(\chi)^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot w(\mathbf{1}_{n+1}) \cdot v(\mathbf{1}_n).$$

Dieses Lemma wird sich als Korollar des zentralen Lemma 1.1.6 ergeben. Der Übersichtlichkeit zuliebe beweisen wir auf dem Weg zum zentralen Lemma eine handvoll technische Aussagen. Zunächst müssen wir jedoch einige Notationen einführen.

Wir definieren

$$D_n := \mathrm{diag}(f^{-(n-1)}, f^{-(n-3)}, \dots, f^{n-3}, f^{n-1}) \in \mathrm{GL}_n(F).$$

Es bezeichne desweiteren

$$J_{m,n} := \mathrm{Kern}(\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F) \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F/\mathfrak{f}^m)).$$

Im Folgenden sei  $m \geq 2n$ . Dann gilt

$$J_{m,n} \subseteq I_n \cap w_n D_n^{-1} I_n D_n w_n. \quad (1.1.2)$$

Es sei  $R_k$  ein Repräsentantensystem von  $\mathcal{O}_F/\mathfrak{f}^k$  und  $R_k^\times \subseteq R_k$  eines von  $(\mathcal{O}_F/\mathfrak{f}^k)^\times$ . Hiermit definieren wir

$$\mathfrak{R}_{m,n} := \{(r_{ij}) \in I_n \mid r_{ij} \in R_m\}.$$

Dann ist  $\mathfrak{R}_{m,n}$  ein Repräsentantensystem von  $I_n/J_{m,n}$  und trägt als solches eine natürliche Gruppenstruktur, welche durch die Matrizenmultiplikation modulo  $\mathfrak{f}^m$  induziert wird. Wir dürfen annehmen, daß

$$0, \pm 1, \pm f, \dots, \pm f^{k-1} \in R_k \quad (1.1.3)$$

gilt, was uns einige Formulierungen vereinfachen wird. Insbesondere erlaubt es uns für  $\omega \in W_n$  mit assoziiertem  $\sigma \in S_n$  die Definition

$$\mathfrak{R}_{m,n}^\omega := \{(r_{ij}) \in \mathfrak{R}_{m,n} \mid \forall i, j : i < j \Rightarrow r_{\sigma(i)\sigma(j)} = 0\}.$$

Wir bemerken, daß für  $r = (r_{ij})_{ij}$

$$\omega r \omega^{-1} = (r_{\sigma(i)\sigma(j)})_{ij}$$

gilt. Die definierende Bedingung von  $\mathfrak{R}_{m,n}^\omega$  ist daher äquivalent dazu, daß dies eine untere Dreiecksmatrix ist. Es bezeichne  $B_n^-$  die algebraische Untergruppe der  $\mathrm{GL}_n$  der unteren Dreiecksmatrizen. Damit gilt

$$\mathfrak{R}_{m,n}^\omega = \mathfrak{R}_{m,n} \cap \omega^{-1} B_n^-(\mathcal{O}_F) \omega.$$

Das zeigt einerseits, daß für  $r \in \mathfrak{R}_{m,n}^\omega$

$$\det(r) = \prod_{k=1}^n r_{kk} \quad (1.1.4)$$

gilt und daß desweiteren  $\mathfrak{R}_{m,n}^\omega$  eine Untergruppe von  $\mathfrak{R}_{m,n}$  ist. Unser Interesse an  $\mathfrak{R}_{m,n}^\omega$  wird durch die folgende Proposition begründet.

**Proposition 1.1.1.** *Die Menge  $\pi^e \omega \mathfrak{R}_{m,n}^\omega$  ist ein Repräsentantensystem der Doppelnebenklassen*

$$U_n(F) \pi^e \omega s J_{m,n}, \quad s \in I_n$$

in  $U_n(F) \pi^e \omega I_n$ . Für jedes  $e \in \mathbf{Z}^n$  sei ein  $m(e) \geq 2n$  geben. Dann haben wir insbesondere die Zerlegung

$$\mathrm{GL}_n(F) = \bigsqcup_{\substack{e \in \mathbf{Z}^n \\ \omega \in W_n \\ r \in \mathfrak{R}_{m(e),n}^\omega}} U_n(F) \pi^e \omega r J_{m(e),n}.$$

*Beweis.* Wegen  $\pi^e U_n(F) \pi^{-e} = U_n(F)$  dürfen wir  $e = 0$  annehmen. Es sei

$$U^\omega := U_n(F) \cap \omega I_n \omega^{-1}.$$

Als Repräsentantensystem von  $\omega I_n / J_{m,n}$  enthält  $\omega \mathfrak{R}_n$  ein Repräsentantensystem der Doppelnebenklassen

$$U^\omega \omega s J_{m,n}, \quad s \in I_n$$

in  $U^\omega \omega I_n$  und es genügt der Nachweis, daß  $\omega \mathfrak{R}_{m,n}^\omega$  ein Repräsentantensystem dieser Doppelnebenklassen ist.

Hierzu sei zunächst  $r = (r_{ij}) \in I_n$  beliebig. Wir haben

$$\omega \cdot r \cdot \omega^{-1} = (r_{\sigma(i)\sigma(j)})_{ij}.$$

Die Operation von  $U_n(F)$  von links erlaubt es uns, ein beliebiges Vielfaches einer Zeile  $i$  mit den Einträgen  $r_{\sigma(i)\sigma(j)}$  auf eine beliebige Zeile  $k < i$  mit den Einträgen  $r_{\sigma(k)\sigma(j)}$  zu addieren. Da es sich bei  $r_{\sigma(i)\sigma(i)}$  um Einheiten handelt, können wir mit diesen sämtliche Einträge  $r_{\sigma(k)\sigma(i)}$  der gleichen Spalte mit  $k < i$  annullieren. Führen wir dies induktiv durch, beginnend bei  $i = n$ , so entspricht dies der Multiplikation mit einer Matrix

$$u = (u_{ij}) \in U_n(F).$$

Wir zeigen nun induktiv, daß  $u \in U^\omega$  und

$$u \cdot \omega r \omega^{-1} \in \omega I_n \omega^{-1} \cap B_n^-(\mathcal{O}_F).$$

Hierzu definieren wir iterativ die Matrizen  $u^{(\nu)} = (u_{ij}^{(\nu)}) \in U^\omega$ ,  $r^{(\nu)} \in I_n$  wie folgt. Es seien  $u^{(0)} := \mathbf{1}_n$  und  $r^{(0)} := r$ . Für  $\nu \geq 0$  sei  $u^{(\nu+1)} = (u_{ij}^{(\nu+1)}) \in U_n(F)$  gegeben durch  $u_{ij}^{(\nu+1)} := \delta_{ij}$  (Kronecker-Delta) falls  $j \neq n - \nu$  oder  $i \geq j$ . Für  $j = n - \nu$  und  $i < j$  sei

$$u_{i,n-\nu}^{(\nu+1)} := -\frac{r_{\sigma(i)\sigma(n-\nu)}^{(\nu)}}{r_{\sigma(n-\nu)\sigma(n-\nu)}^{(\nu)}}.$$

Schließlich definieren wir

$$r^{(\nu+1)} := \omega^{-1} u^{(\nu+1)} \omega \cdot r^{(\nu)}.$$

Wir sehen nun induktiv, daß  $r_{\sigma(i)\sigma(j)}^{(\nu)} = 0$  falls  $j > n - \nu$  und  $i < j$ . Desweiteren zeigen wir, daß aus  $u^{(\nu)} \in U^\omega$ , stets  $u^{(\nu+1)} \in U^\omega$  folgt. Ersteres impliziert zunächst  $r^{(\nu)} \in I_n$ . Betrachten wir die Definition von  $u^{(\nu+1)}$ , so sind zwei Fälle zu unterscheiden. Wenn  $\sigma(i) < \sigma(n - \nu)$ , so ist  $r_{\sigma(i)\sigma(n-\nu)}^{(\nu)} \in \mathcal{O}_F$ , falls  $\sigma(i) > \sigma(n - \nu)$ , so ist  $r_{\sigma(i)\sigma(n-\nu)}^{(\nu)} \in \mathfrak{p}$ . Das zeigt, daß

$$u_{i,n-\nu}^{(\nu+1)} \in \begin{cases} \mathcal{O}_F, & \text{falls } \sigma(i) < \sigma(n - \nu), \\ \mathfrak{p}, & \text{falls } \sigma(i) > \sigma(n - \nu), \end{cases}$$

also  $u^{(\nu+1)} \in U^\omega$ .

Mit

$$u := u^{(n-1)} \cdot u^{(n-2)} \dots u^{(1)} \in U^\omega$$

gilt daher

$$u \cdot \omega r \omega^{-1} \in \omega \cdot I_n \cdot \omega^{-1} \cap B_n^-(\mathcal{O}_F).$$

Sei nun  $s \in \mathfrak{A}_{m,n}$  der Repräsentant der Nebenklasse

$$\omega^{-1} u \omega \cdot r \cdot J_{m,n}.$$

Dann repräsentiert  $\omega s$  die gleiche Doppelnebenklasse wie  $\omega r$  und wegen

$$\omega s \omega^{-1} \in u \cdot \omega r \omega^{-1} \cdot J_{m,n} \subseteq B_n^-(\mathcal{O}_F) J_{m,n},$$

schließen wir mittels (1.1.3), daß

$$s \in \mathfrak{A}_{m,n}^\omega.$$

Ergo enthält  $\omega \mathfrak{A}_{m,n}^\omega$  ein Repräsentantensystem der Doppelnebenklassen.

Sei nun

$$u \cdot \omega r \in \omega s \cdot J_{m,n}$$

für  $u \in U^\omega$ ,  $r, s \in \mathfrak{A}_{m,n}^\omega$ . Aufgrund der Normalität von  $J_{m,n}$  in  $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)$  ist dies äquivalent zu

$$u \in \omega s \omega^{-1} \cdot \omega r^{-1} \omega^{-1} \cdot J_{m,n}.$$

Nun sind  $\omega s \omega^{-1} = (s_{\sigma(i)\sigma(j)})_{ij}$  und  $\omega r^{-1} \omega^{-1}$  untere Dreiecksmatrizen, mithin folgt

$$u \in U_n^-(\mathcal{O}_F) J_{m,n}.$$

Das bedeutet, daß

$$u \equiv \mathbf{1}_n \pmod{J_{m,n}},$$

was zu zeigen war. □

**Proposition 1.1.2.** *Bezüglich des rechtsinvarianten Haar'schen Maßes auf  $\mathrm{GL}_n(F)$ , welches der maximalen kompakten Untergruppe  $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)$  das Maß 1 zuweist, hat für jedes  $e \in \mathbf{Z}^n$ ,  $\omega \in W_n$  und  $r \in \mathfrak{A}_{m,n}^\omega$  die Menge*

$$U_n(\mathcal{O}_F) \pi^e \omega r J_{m,n}$$

*ein von  $\omega$  und  $r$  unabhängiges Maß. Im Fall  $e = 0$ ,  $m = 2n$  haben wir*

$$\int_{U_n(\mathcal{O}_F) \omega r J_{2n,n}} dg = \prod_{\nu=1}^n (1 - \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{-\nu})^{-1} \cdot \mathfrak{N}(\mathfrak{f})^{-n^3 - n^2}.$$

*Beweis.* Aufgrund der Normalität von  $J_{m,n}$  in  $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)$  haben wir für jedes  $r \in \mathfrak{A}_{m,n}^\omega$

$$U_n(\mathcal{O}_F) \pi^e \omega r J_{m,n} = U_n(\mathcal{O}_F) \pi^e J_{m,n} \omega r.$$

Da wir es mit einem rechtsinvarianten Maß zu tun haben, besitzen all diese Mengen also ein von  $r$  und  $\omega$  unabhängiges Maß.

Wir haben bekanntlich

$$(\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F) : J_{m,n}) = \# \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F / \mathfrak{f}^m) = \mathfrak{N}(\mathfrak{f})^{mn^2} \cdot \prod_{\nu=1}^n (1 - \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{-\nu}).$$

Weiterhin ist  $U_n(\mathcal{O}_F)J_{m,n}$  eine Gruppe und es gilt

$$(U_n(\mathcal{O}_F)J_{2n,n} : J_{2n,n}) = (U_n(\mathcal{O}_F) : U_n(\mathcal{O}_F) \cap J_{2n,n}) = \\ \#U_n(\mathcal{O}_F/\mathfrak{f}^{2n}) = \mathfrak{N}(\mathfrak{f})^{2n \cdot \frac{n(n-1)}{2}} = \mathfrak{N}(\mathfrak{f})^{n^3 - n^2}.$$

Hieraus schließen wir, daß

$$(\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F) : U_n(\mathcal{O}_F)J_{2n,n}) = \prod_{\nu=1}^n (1 - \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{-\nu}) \cdot \mathfrak{N}(\mathfrak{f})^{n^3 + n^2},$$

was zu zeigen war. □

Wir betrachten nun die Operation des kompakten Torus

$$T_n := (\mathcal{O}_F^\times)^n$$

auf  $\mathrm{GL}_n(F)$ , welche für  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in T_n$  durch

$$\gamma \cdot : \mathrm{GL}_n(F) \rightarrow \mathrm{GL}_n(F), \quad g \mapsto \gamma g := g \cdot \mathrm{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$$

gegeben ist.  $T_n$  operiert in natürlicher Weise auf  $\mathfrak{R}_{m,n}^\omega$ , indem wir einem  $r \in \mathfrak{R}_{m,n}^\omega$  den Repräsentanten von  $\gamma r$  zuordnen. Diese Operation faktorisiert über

$$\bar{T}_{m,n} := T_n / (1 + \mathfrak{f}^m)^n$$

und  $\bar{T}_{m,n}$  operiert treu auf der Bahn eines jeden  $r \in \mathfrak{R}_{m,n}^\omega$ .

Unter der Voraussetzung, daß  $\sigma(n) = n$  definieren wir desweiteren die für unseren späteren Induktionsbeweis relevante Menge

$$\tilde{\mathfrak{R}}_{m,n}^\omega := \{(r_{ij}) \in \mathfrak{R}_{m,n}^\omega \mid r_{n1} = f^{n-1}, r_{nj} = -f^{n-j}, 2 \leq j \leq n\}.$$

**Proposition 1.1.3.** Falls<sup>2</sup>  $\sigma(n) = n$ , so gilt für jedes  $r \in \tilde{\mathfrak{R}}_{m,n}^\omega$

$$\# \left( \bar{T}_{m,n} \cdot r \cap \tilde{\mathfrak{R}}_{m,n}^\omega \right) = \mathfrak{N}(\mathfrak{f})^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Das bedeutet, daß die Bahn von  $r$  unter der Operation von  $T_n$  auf  $\mathfrak{R}_{m,n}^\omega$  genau  $\mathfrak{N}(\mathfrak{f})^{\frac{n(n-1)}{2}}$  Elemente aus  $\tilde{\mathfrak{R}}_{m,n}^\omega$  enthält.

*Beweis.* Der Stabilisator von

$$(f^{n-1} + \mathfrak{f}^m, -f^{n-2} + \mathfrak{f}^m, \dots, -1 + \mathfrak{f}^m) \in \mathcal{O}_F^n / (\mathfrak{f}^m)^n$$

unter der Operation  $s \mapsto s \cdot \gamma \mathbf{1}_n$  von  $T_n$  auf  $\mathcal{O}_F^n / (\mathfrak{f}^m)^n$  ist

$$(1 + \mathfrak{f}^{m-n+1}) \times (1 + \mathfrak{f}^{m-n+2}) \times \dots \times (1 + \mathfrak{f}^{m+1}) \times (1 + \mathfrak{f}^m).$$

Die Projektion desselbigen auf  $\bar{T}_{m,n}$  hat die Kardinalität

$$\prod_{j=1}^n \mathfrak{N}(\mathfrak{f})^{n-j} = \mathfrak{N}(\mathfrak{f})^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

□

---

<sup>2</sup> $\sigma(n) = n$  impliziert  $n \geq 1$ .

Wir definieren nun die ebenfalls für den Induktionsschritt relevante Matrix

$$C_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ f^{n-1} & -f^{n-2} & \cdots & -f & -1 \end{pmatrix}.$$

**Proposition 1.1.4.** *Unter der Annahme  $\sigma(n) = n$  gilt mit  $\tilde{\omega} := p(\omega)$ ,  $\tilde{r} := p(r)$ ,*

$$\#\tilde{\mathfrak{R}}_{m,n}^{\omega} = \#\tilde{\mathfrak{R}}_{m,n-1}^{\tilde{\omega}}.$$

*Genauer induziert die Projektion  $p$  eine Bijektion*

$$p : \tilde{\mathfrak{R}}_{m,n}^{\omega} \rightarrow \tilde{\mathfrak{R}}_{m,n-1}^{\tilde{\omega}}.$$

*Weiterhin induziert*

$$\mathrm{GL}_{n-1}(F) \rightarrow \mathrm{GL}_n(F), \quad \tilde{g} \mapsto \tilde{j}(\tilde{g}) \cdot C_n$$

*die Umkehrabbildung von  $p$ .*

*Beweis.* Wir betrachten die von der Projektion  $p : F^{n \times n} \rightarrow F^{n-1 \times n-1}$  induzierte Abbildung

$$p : \omega \tilde{\mathfrak{R}}_{m,n}^{\omega} \omega^{-1} \rightarrow \tilde{\omega} \tilde{\mathfrak{R}}_{m,n-1}^{\tilde{\omega}} \tilde{\omega}^{-1}.$$

Bei  $\omega \tilde{\mathfrak{R}}_{m,n}^{\omega} \omega^{-1}$  als auch bei  $\tilde{\omega} \tilde{\mathfrak{R}}_{m,n-1}^{\tilde{\omega}} \tilde{\omega}^{-1}$  handelt es sich um untere Dreiecksmatrizen, so daß  $p$  wohldefiniert ist. Desweiteren ist  $p$  wegen Definition von  $\tilde{\mathfrak{R}}_{m,n}^{\omega}$  bijektiv mit der angegebenen Umkehrabbildung.  $\square$

Wir haben eine Linearform

$$\lambda_n : F^{n \times n} \rightarrow F, \quad g \mapsto e_n^t \cdot g \cdot \phi_n,$$

wobei

$$\phi_n := (f^{-n}, f^{-(n-1)}, \dots, f^{-1})^t.$$

Wir definieren nun die Matrizen

$$A_n := \begin{pmatrix} 1 & f^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -f^{-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & -f^{-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(F),$$

$$\tilde{A}_n := \begin{pmatrix} f^{-1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & -f^{-1} & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & -f^{-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -f^{-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(F),$$

und

$$B_n := f \cdot \tilde{A}_n \in I_n.$$

Es gelte  $B_1 = C_1 = \mathbf{1}_1$  und  $B_0 := \mathbf{1}_0$ . Das garantiert uns, daß für alle  $n \geq 0$

$$\det(B_{n+1}C_{n+1}) = \det(B_n). \quad (1.1.5)$$

**Lemma 1.1.5.** *Für  $n \geq 0$  und  $g \in \mathrm{GL}_n(F)$  gilt*

$$w(j(g)C_{n+1} \cdot D_{n+1}w_{n+1}) \cdot v(g) = \psi(\lambda_n(gB_n)) \cdot w(j(gB_n \cdot D_nw_n)) \cdot v(gB_n).$$

*Beweis.* Wegen  $B_n \in I_n$  genügt es,

$$\psi(\lambda_n(gB_n)) \cdot w(j(gB_n \cdot D_nw_n)) = w(j(g)C_{n+1} \cdot D_{n+1}w_{n+1})$$

nachzuweisen. Hierzu betrachten wir die Matrix

$$u = (u_{ij}) \in U_{n+1}(F),$$

welche für  $j \leq n$  und  $1 \leq i \leq n+1$  durch

$$u_{ij} := \delta_{ij} \quad (\text{Kronecker-Delta})$$

gegeben ist und für  $1 \leq i \leq n$  durch

$$u_{in+1} := -g_{i1} \cdot f^{-n}.$$

Dann gilt wegen  $\tilde{A}_n = ((A_{n+1})_{ij+1})_{1 \leq i, j \leq n}$

$$u \cdot j(g)C_{n+1} \cdot A_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & g \cdot \tilde{A}_n & \\ 0 & & & \\ f^n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Schließlich haben wir

$$u \cdot j(g)C_{n+1} \cdot A_{n+1} \cdot D_{n+1}w_{n+1} = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & & & \vdots \\ & \tilde{g} & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit

$$\tilde{g} = g \cdot \tilde{A}_n f \cdot D_nw_n.$$

Wir erhalten also zusammenfassend

$$u \cdot j(g)C_{n+1} \cdot A_{n+1} \cdot D_{n+1}w_{n+1} = j(gB_n \cdot D_nw_n).$$

Wir bemerken nun, daß

$$w_{n+1}D_{n+1}^{-1} \cdot A_{n+1} \cdot D_{n+1}w_{n+1} \in I_{n+1},$$

was

$$j(g)C_{n+1} \cdot A_{n+1} \cdot D_{n+1}w_{n+1} \in j(g)C_{n+1} \cdot D_{n+1}w_{n+1}I_{n+1}$$

impliziert. Für unsere Iwahori-invariante  $\psi$ -Whittakerfunktion bedeutet das

$$\psi(f^{-n} \cdot g_{n1}) \cdot w(j(gB_n \cdot D_nw_n)) = w(j(g)C_{n+1} \cdot D_{n+1}w_{n+1}).$$

Wegen

$$B_n \phi_n = (f^{-n}, 0, \dots, 0)^t$$

folgt die Behauptung. □



**Lemma 1.1.6** (Zentrales Lemma). *Für beliebige  $n \geq 0$ ,  $e \in \mathbf{Z}^n$ ,  $\omega \in W_n$  und  $m \geq \max\{2n, n - e_1/\nu_{\mathfrak{p}}(f), \dots, n - e_n/\nu_{\mathfrak{p}}(f)\}$  gilt*

$$\sum_{g \in \pi^e \omega \mathfrak{R}_{m,n}^\omega} \psi(\lambda_n(g)) \cdot w(j(g \cdot D_n w_n)) \cdot v(g) \cdot \chi(\det(g)) \cdot \|\det(g)\|^{s-\frac{1}{2}} = \begin{cases} \mathfrak{N}(\mathfrak{f})^{\frac{(m-2n)n(n+1)}{2} + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^n 5\nu^2 - 3\nu} \cdot G(\chi)^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot w(\mathbf{1}_{n+1}) \cdot v(\mathbf{1}_n), & \text{falls } \omega = \mathbf{1}_n \text{ und } e = 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

*Beweis.* Wir beweisen dieses Lemma durch Induktion nach  $n$ . Falls  $n = 0$ , so gilt  $W_0 = \mathrm{GL}_0(\mathcal{O}_F) = \{\mathbf{1}_0\}$ ,  $\mathfrak{R}_0^\omega = \{\mathbf{1}_0\}$ ,  $\mathbf{Z}^0 = \{0\}$ . Der Fall  $\omega \neq \mathbf{1}_0$  oder  $e \neq 0$  tritt hier niemals ein. Das zeigt den Induktionsanfang. Sei also  $n \geq 1$  und die Aussage des Lemmas für  $n - 1$  wahr.

Wir erinnern daran, daß  $\bar{T}_{m,n}$  treu auf den Bahnen unter der Operation von  $T_n$  auf  $\mathfrak{R}_{m,n}^\omega$  operiert. Es sei  $S \subseteq T_n$  ein Repräsentantensystem von  $\bar{T}_{m,n}$ . Die Zerlegung von  $\mathfrak{R}_{m,n}^\omega$  in Bahnen unter dieser Operation führt in natürlicher Weise zu Teilsommen

$$Z(r) := \sum_{\gamma \in S} \psi(\lambda_n(\pi^e \omega^\gamma r)) \cdot w(j(\pi^e \omega^\gamma r \cdot D_n w_n)) \cdot v(\pi^e \omega^\gamma r) \cdot \chi(\pi^e \omega^\gamma r) \cdot \|\det(\pi^e \omega^\gamma r)\|^{s-\frac{1}{2}},$$

wobei  $r \in \mathfrak{R}_{m,n}^\omega$ . Da die Summanden aufgrund unserer Voraussetzung an  $m$  unabhängig von der Wahl von  $S$  sind, ist  $Z(r)$  per Definitionem konstant auf den Bahnen der Operation von  $T_n$ . Insbesondere verschwindet  $Z(r)$  genau dann, wenn es auf der gesamten Bahn von  $r$  verschwindet.

Unsere Beweisstrategie besteht nun darin, zunächst einzusehen, in welchen Fällen  $Z(r)$  verschwindet und hiermit die Gleichung (1.1.9) abzuleiten. Es wird sich zeigen, daß dies uns bereits erlauben wird, mittels des Lemmas 1.1.5 induktiv das Lemma zu beweisen.

Es gilt

$$\begin{aligned} \pi^e \omega^\gamma r \cdot D_n w_n &= \\ \pi^e \omega r \cdot {}^\gamma \mathbf{1}_n \cdot D_n w_n &= \\ \pi^e \omega r \cdot D_n w_n \cdot (w_n {}^\gamma \mathbf{1}_n w_n) &\in \\ \pi^e \omega r \cdot D_n w_n \cdot I_n, & \end{aligned}$$

denn  $w_n {}^\gamma \mathbf{1}_n w_n \in I_n$ . Aus dieser Relation ergibt sich, daß

$$Z(r) = \|\det(\pi^e)\|^{s-\frac{1}{2}} \cdot \chi(\pi^e \omega) \cdot w(j(\pi^e \omega r \cdot D_n w_n)) \cdot v(\pi^e \omega) \cdot \chi(r) \cdot \sum_{\gamma \in S} \chi({}^\gamma \mathbf{1}_n) \cdot \psi(\lambda_n(\pi^e \omega^\gamma r)).$$

Nun haben wir

$$\psi(\lambda_n(\pi^e \omega^\gamma r)) = \prod_{\nu=1}^n \psi(\pi^{e_n} f^{\nu-n-1} r_{\sigma(n)\nu} \cdot \gamma_\nu),$$

was uns

$$\sum_{\gamma \in S} \chi({}^\gamma \mathbf{1}_n) \cdot \psi(\lambda_n(\pi^e \omega^\gamma r)) = \prod_{\nu=1}^n \sum_{\gamma_\nu \in (\mathcal{O}_F/\mathfrak{f}^m)^\times} \chi(\gamma_\nu) \cdot \psi(\pi^{e_n} f^{\nu-n-1} r_{\sigma(n)\nu} \cdot \gamma_\nu)$$

beschert. Aus  $r_{\sigma(n)\sigma(n)} \in \mathcal{O}_F^\times$  und  $m\nu_{\mathfrak{p}}(f) \geq n\nu_{\mathfrak{p}}(f) - e_n$  ergibt sich daher mittels Gleichung (0.0.1) die Implikation

$$e_n \neq (n - \sigma(n)) \cdot \nu_{\mathfrak{p}}(f) \Rightarrow Z(r) = 0. \quad (1.1.6)$$

Sei also  $e_n = (n - \sigma(n)) \cdot \nu_p(f)$ . Falls  $\sigma(n) \neq n$ , so gilt  $e_n > 0$  und mithin

$$\|\pi^{e_n} f^{n-n-1} r_{\sigma(n)n} \cdot \gamma_n\| < \|f^{-1}\|,$$

was wiederum

$$Z(r) = 0$$

zur Folge hat. Also dürfen wir weiterhin  $\sigma(n) = n$  annehmen, was uns zugleich  $e_n = 0$  beschert. Schließlich haben wir für jedes  $\nu < n$  nach Gleichung (0.0.1) die Implikation

$$\|r_{n\nu}\| \neq \|f^{n-\nu}\| \Rightarrow Z(r) = 0, \quad (1.1.7)$$

womit wir uns wegen (1.1.3) auf den Fall  $r_{n1} = f^{n-1}$  und

$$r_{n\nu} = -f^{n-\nu}, \quad 2 \leq \nu \leq n,$$

zurückziehen können<sup>3</sup>, denn  $Z(r)$  ist konstant auf den Bahnen und in jeder Bahn mit  $Z(r) \neq 0$  existiert ein Repräsentant mit dieser Eigenschaft. Unter diesen Voraussetzungen gilt

$$\sum_{\gamma \in S} \chi(\gamma \mathbf{1}_n) \cdot \psi(\lambda_n(\pi^e \omega^\gamma r)) = \chi(B_n) \cdot G(\chi)^n \cdot \mathfrak{N}(f)^{m \cdot n - n}. \quad (1.1.8)$$

Da desweiteren  $Z(r)$  konstant auf den Bahnen ist, folgt aus Proposition 1.1.3, daß

$$\sum_{g \in \pi^e \omega \mathfrak{A}_{m,n}^\omega} \psi(\lambda_n(g)) w(j(g \cdot D_n w_n)) v(g) \chi(g) \|\det(g)\|^{s-\frac{1}{2}} = \mathfrak{N}(f)^{-\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \sum_{r \in \tilde{\mathfrak{A}}_{m,n}^\omega} Z(r). \quad (1.1.9)$$

Wir haben in (1.1.6) bereits eingesehen, daß

$$\sum_{g \in \pi^e \omega \mathfrak{A}_{m,n}^\omega} \psi(\lambda_n(g)) w(j(g \cdot D_n w_n)) v(g) \chi(g) \|\det(g)\|^{s-\frac{1}{2}} = 0$$

falls  $\sigma(n) \neq n$  oder  $e_n \neq 0$ . Wir dürfen also  $\sigma(n) = n$  und  $e_n = 0$  annehmen. Daher definieren wir mit Blick auf den Induktionsschritt  $\tilde{e} := (e_\nu)_{1 \leq \nu \leq n-1}$ ,  $\tilde{\omega} := p(\omega)$  und  $\tilde{r} := p(r)$ . Dank der Gleichungen (1.1.5), (1.1.8), Proposition 1.1.4 und Lemma 1.1.5 ergibt sich, daß

$$\sum_{r \in \tilde{\mathfrak{A}}_{m,n}^\omega} Z(r) = \chi(B_n) \cdot G(\chi)^n \cdot \mathfrak{N}(f)^{m \cdot n - n} \cdot \frac{\#\tilde{\mathfrak{A}}_{m,n}^\omega}{\#\mathfrak{A}_{m,n-1}^\omega}.$$

$$\sum_{\tilde{r} \in \tilde{\mathfrak{A}}_{m,n-1}^\omega} \|\det(\pi^{\tilde{e}})\|^{s-\frac{1}{2}} \cdot \chi(\tilde{j}(\pi^{\tilde{e}} \tilde{\omega} \tilde{r}) C_n) \cdot w(j(\tilde{j}(\pi^{\tilde{e}} \tilde{\omega} \cdot \tilde{r}) C_n \cdot D_n w_n)) \cdot v(\tilde{j}(\pi^{\tilde{e}} \tilde{\omega})) = G(\chi)^n \mathfrak{N}(f)^{m \cdot n - n}.$$

$$\sum_{\tilde{r} \in \tilde{\mathfrak{A}}_{m,n-1}^\omega} \|\det(\pi^{\tilde{e}})\|^{s-\frac{1}{2}} \cdot \chi(\pi^{\tilde{e}} \tilde{\omega} \tilde{r} B_{n-1}) \cdot \psi(\lambda_{n-1}(\pi^{\tilde{e}} \tilde{\omega} \cdot \tilde{r} B_{n-1})) \cdot w(j(\tilde{j}(\pi^{\tilde{e}} \tilde{\omega} \cdot \tilde{r} B_{n-1} \cdot D_{n-1} w_{n-1}))) \cdot v(\tilde{j}(\pi^{\tilde{e}} \tilde{\omega})).$$

Da  $B_{n-1} \in I_{n-1}$  permutiert die Multiplikation mit  $B_{n-1}$  lediglich die zu repräsentierenden Doppelnebenklassen, was

$$\sum_{r \in \tilde{\mathfrak{A}}_{m,n}^\omega} Z(r) = \mathfrak{N}(f)^{m \cdot n - n} \cdot G(\chi)^n.$$

<sup>3</sup>im Fall  $n = 1$  gilt also  $r_{nn} = 1$ .

$$\sum_{\tilde{r} \in \mathfrak{R}_{m,n-1}^{\tilde{\omega}}} \|\det(\pi^{\tilde{e}})\|^{s-\frac{1}{2}} \cdot \chi(\pi^{\tilde{e}}\tilde{\omega}) \cdot \psi(\lambda_{n-1}(\pi^{\tilde{e}}\tilde{\omega}\tilde{r})) \cdot w(j(\tilde{j}(\pi^{\tilde{e}}\tilde{\omega}\tilde{r}) \cdot D_{n-1}w_{n-1})) \cdot v(\tilde{j}(\pi^{\tilde{e}}\tilde{\omega}))$$

zur Folge hat. Aus der Induktionshypothese folgt daher, daß

$$\sum_{r \in \mathfrak{R}_{m,n}^{\omega}} Z(r) = 0,$$

sofern  $e \neq 0$  oder  $\omega \neq \mathbf{1}_n$ . Für  $e = 0$  und  $\omega = \mathbf{1}_n$  ergibt sich aus selbiger

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}(f)^{-\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \sum_{r \in \mathfrak{R}_{m,n}^{\omega}} Z(r) &= \\ G(\chi)^n \cdot G(\chi)^{\frac{(n-1)n}{2}} \cdot \mathfrak{N}(f)^{m \cdot n - \frac{n(n+1)}{2}} \cdot \mathfrak{N}(f)^{\frac{(m-2(n-1))n(n-1)}{2} + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{n-1} 5\nu^2 - 3\nu} \cdot w(\mathbf{1}_{n+1}) \cdot v(\mathbf{1}_n) &= \\ \mathfrak{N}(f)^{\frac{(m-2n)n(n+1)}{2} + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^n 5\nu^2 - 3\nu} \cdot G(\chi)^{\frac{(n+1)n}{2}} \cdot w(\mathbf{1}_{n+1}) \cdot v(\mathbf{1}_n), \end{aligned}$$

was zu zeigen war. □

Schließlich können wir das lokale Birch-Lemma beweisen.

*Beweis des lokalen Birch-Lemmas.* Wir erinnern an die Definition der Matrix  $B_n$  und definieren weiterhin

$$E_n := \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & f \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & f & \dots & f^{n-2} \\ 1 & -f & -f^2 & \dots & -f^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$E_n^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & f & 1 \\ \vdots & \ddots & -f & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -f & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

sowie

$$B_n^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ f & -1 & \ddots & & \vdots \\ f^2 & -f & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ f^{n-1} & -f^{n-2} & \dots & -f & -1 \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich sind  $B_n$  und  $E_n^{-1}$  eng miteinander verwandt<sup>4</sup>. Wir interessieren uns für diese Matrizen, da

$$B_{n+1}h^{(f)}E_{n+1} = \text{diag}\left(f^{-n}, f^{-(n-2)}, \dots, f^{n-2}, f^n\right) = D_{n+1}.$$

Es sei angemerkt, daß Konjugation mit  $D_{n+1}$  mit der Konjugation mit  $t^{-2}$  identisch ist. Mit dieser Notation gilt nun

$$j(B_n) \cdot B_{n+1}^{-1} = C_{n+1}.$$

Für das lokale Zeta-Integral aus dem lokalen Birch-Lemma ergibt sich wegen

$$B_n \in I_n, E_{n+1}w_{n+1} \in I_{n+1}$$

und der Rechtsinvarianz des Maßes mit der Substitution  $g \mapsto gB_n$

$$\begin{aligned} & \int_{U_n(F) \backslash \text{GL}_n(F)} w\left(j(g) \cdot h^{(f)}\right) \cdot v(g) \cdot \chi(g) \cdot \|\det(g)\|^{s-\frac{1}{2}} dg = \\ & \chi(\det(B_n)) \cdot \int_{U_n(F) \backslash \text{GL}_n(F)} w(j(g)C_{n+1} \cdot D_{n+1}w_{n+1}) \cdot v(g) \cdot \chi(g) \cdot \|\det(g)\|^{s-\frac{1}{2}} dg. \end{aligned}$$

Nach Lemma 1.1.5 ist dies gleich

$$\int_{U_n(F) \backslash \text{GL}_n(F)} \psi(\lambda_n(gB_n)) \cdot w(j(gB_n \cdot D_n w_n)) \cdot v(gB_n) \cdot \chi(gB_n) \cdot \|\det(g)\|^{s-\frac{1}{2}} dg.$$

Die erneute Substitution  $g \mapsto gB_n^{-1}$  transformiert letzteres Integral in die Form

$$\int_{U_n(F) \backslash \text{GL}_n(F)} \psi(\lambda_n(g)) \cdot w(j(g \cdot D_n w_n)) \cdot v(g) \cdot \chi(g) \cdot \|\det(g)\|^{s-\frac{1}{2}} dg.$$

Die Propositionen 1.1.1 und 1.1.2 zeigen, daß dieses Integral als endliche Summe im Sinne des Lemma 1.1.6 ausgewertet werden kann. Wählen wir  $m(0) = 2n$ , so schließt Formel (C.0.4) aus Anhang C schließlich den Beweis der Behauptung ab.  $\square$

## 1.2 Ein allgemeines globales Birch-Lemma

In diesem Abschnitt sei  $k$  ein beliebiger Zahlkörper. Es seien nun  $\pi$  und  $\sigma$  irreduzible cuspidale automorphe Darstellungen von  $\text{GL}_n(\mathbf{A}_k)$  beziehungsweise  $\text{GL}_{n-1}(\mathbf{A}_k)$ . Mit  $S_\infty \subset M_k$  bezeichnen wir die Menge der unendlichen Primstellen von  $k$ . Es sei  $S \subset M_k$  die endliche Menge der endlichen Primstellen, an welchen  $\pi$  oder  $\sigma$  verzweigt sind. Desweiteren sei  $p$  eine feste Primzahl.

Wir möchten die Variation der Rankin-Selberg-Faltung von  $\pi$  und  $\sigma$  unter Twists mit Charakteren studieren, deren Führer  $\mathfrak{f}$  eine  $p$ -Potenz teilt und welche durch keine der Primideale in  $S$  teilbar sind.

<sup>4</sup>Es bezeichne  $d_i$  die  $n \times n$ -Diagonalmatrix, welche sich von der Einheitsmatrix nur an der Stelle  $(i, i)$  unterscheidet und dort den Eintrag  $-1$  hat. Dann haben wir die Relation

$$d_1 B_n d_n E_n d_1 = -w_n.$$

## Rankin-Selberg-Faltungen

Für jede endliche Primstelle  $\mathfrak{q}$  von  $k$  wählen wir einen festen additiven Charakter  $\psi_{\mathfrak{q}} : k_{\mathfrak{q}} \rightarrow \mathbf{C}^{\times}$  mit Kern  $\mathcal{O}_{k_{\mathfrak{q}}}$ . Wir wählen weiterhin auch an den unendlichen Primstellen von  $k$  nichttriviale additive Charaktere der Komplettierungen, so daß  $\psi := \otimes_{v \in M_k} \psi_v$  ein additiver Charakter von  $k \backslash \mathbf{A}_k$  ist (siehe beispielsweise [Wei67, chapter IV, §1]).

Zu einer endlichen Primstelle  $\mathfrak{q} \in M_k$  mit Restklassenkörperkardinalität  $q$  haben wir für ein beliebiges Paar

$$(w_{\mathfrak{q}}, v_{\mathfrak{q}}) \in \mathscr{W}(\pi_{\mathfrak{q}}, \psi_{\mathfrak{q}}) \times \mathscr{W}(\sigma_{\mathfrak{q}}, \psi_{\mathfrak{q}}^{-1})$$

von Whittakerfunktionen im Sinne von [JPSS83] das Zetaintegral

$$\Psi(w_{\mathfrak{q}}, v_{\mathfrak{q}}, s) := \int_{U_{n-1}(k_{\mathfrak{q}}) \backslash \mathrm{GL}_{n-1}(k_{\mathfrak{q}})} w_{\mathfrak{q}} \left( \begin{pmatrix} g & \\ & 1 \end{pmatrix} \right) v_{\mathfrak{q}}(g) \|\det(g)\|_{\mathfrak{q}}^{s-\frac{1}{2}} dg. \quad (1.2.1)$$

Nach [JPSS79a, JPSS79b, JPSS83] konvergiert dieses Integral absolut für  $\mathrm{Re}(s)$  ausreichend groß. Desweiteren ist dieses Integral eine von Null verschiedene rationale Funktion in  $q^{-s}$  und setzt sich insbesondere meromorph auf ganz  $\mathbf{C}$  fort. Schließlich spannt die Gesamtheit dieser Integrale ein gebrochenes Ideal in  $\mathbf{C}(q^s)$  bezüglich des Teilringes  $\mathbf{C}[q^{-s}, q^s]$  auf. Jeder Erzeuger  $T(s)$  dieses Ideals ist von der Gestalt

$$T(s) = P(q^{-s})^{-1}$$

mit einem Polynom  $P(X) \in \mathbf{C}[X]$ . Nun ist die lokale  $L$ -Funktion  $L(s, \pi_{\mathfrak{q}} \times \sigma_{\mathfrak{q}})$  als derjenige Erzeuger definiert, für welchen  $P(0) = 1$  gilt [JPSS83]. Die Funktion  $L(s, \pi_{\mathfrak{q}} \times \sigma_{\mathfrak{q}})$  ist unabhängig von der Wahl des additiven Charakters  $\psi_{\mathfrak{q}}$ . Im Allgemeinen ist  $L(s, \pi_{\mathfrak{q}} \times \sigma_{\mathfrak{q}})$  selbst kein Integral  $\Psi(w_{\mathfrak{q}}, v_{\mathfrak{q}}, s)$  der Form (1.2.1), sondern lediglich eine endliche Summe solcher Integrale. Um diesem Sachverhalt Rechnung zu tragen, definieren wir mittels der Bilinearität von  $\Psi(w_{\mathfrak{q}}, v_{\mathfrak{q}}, s)$  die Abbildung

$$\Psi : \mathscr{W}(\pi_{\mathfrak{q}}, \psi_{\mathfrak{q}}) \otimes \mathscr{W}(\sigma_{\mathfrak{q}}, \psi_{\mathfrak{q}}^{-1}) \rightarrow \mathbf{C}(q^s), \quad w_{\mathfrak{q}} \otimes v_{\mathfrak{q}} \mapsto \Psi(w_{\mathfrak{q}}, v_{\mathfrak{q}}, s).$$

Dann existiert stets ein *guter Tensor*  $t_{\mathfrak{q}}^0 \in \mathscr{W}(\pi_{\mathfrak{q}}, \psi_{\mathfrak{q}}) \otimes \mathscr{W}(\sigma_{\mathfrak{q}}, \psi_{\mathfrak{q}}^{-1})$  mit

$$L(s, \pi_{\mathfrak{q}} \times \sigma_{\mathfrak{q}}) = \Psi(t_{\mathfrak{q}}^0, s).$$

Falls  $\pi_{\mathfrak{q}}$  und  $\sigma_{\mathfrak{q}}$  unverzweigt sind, können wir  $t_{\mathfrak{q}}^0 = w_{\mathfrak{q}}^0 \otimes v_{\mathfrak{q}}^0$  mit den entsprechenden Neuvektoren<sup>5</sup>  $w_{\mathfrak{q}}^0$  und  $v_{\mathfrak{q}}^0$  von  $\pi_{\mathfrak{q}}$  beziehungsweise  $\sigma_{\mathfrak{q}}$  wählen. Das bedeutet, daß für  $\mathfrak{q} \notin S$  die lokale  $L$ -Funktion tatsächlich selbst ein Integral der Form (1.2.1) ist. Nach Shintanis expliziten Formeln [Shi76b] (siehe auch [JS81a, Section 2]) gilt daher insbesondere

$$L(s, \pi_{\mathfrak{q}} \times \sigma_{\mathfrak{q}}) = \det(\mathbf{1}_{n(n-1)} - \mathfrak{N}(\mathfrak{q})^{-s} A_{\pi_{\mathfrak{q}}} \otimes A_{\sigma_{\mathfrak{q}}})^{-1},$$

für alle  $\mathfrak{q} \notin S \cup S_{\infty}$ , wobei  $A_{\pi_{\mathfrak{q}}}$  und  $A_{\sigma_{\mathfrak{q}}}$  die entsprechenden Satakeparameter sind<sup>6</sup>.

Es sei nun  $(w, v) \in \mathscr{W}_0(\pi, \psi) \times \mathscr{W}_0(\sigma, \psi^{-1})$  ein Paar globaler Whittakerfunktionen mit Faktorisierungen  $w = \otimes_v w_v$ ,  $v = \otimes_v v_v$ . Es bezeichne

$$\phi(g) = \sum_{\gamma \in U_{n-1}(k) \backslash \mathrm{GL}_{n-1}(k)} w \left( \begin{pmatrix} \gamma & \\ & 1 \end{pmatrix} g \right) \quad (1.2.2)$$

<sup>5</sup>dies sind die eindeutigen durch  $w_{\mathfrak{q}}^0(\mathbf{1}_n) = 1$  ( $v_{\mathfrak{q}}^0(\mathbf{1}_{n-1}) = 1$ ) normalisierten  $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_{k_{\mathfrak{q}}})$ -Fixvektoren (beziehungsweise  $\mathrm{GL}_{n-1}(\mathcal{O}_{k_{\mathfrak{q}}})$ -Fixvektoren). Jacquet und Shalika nennen sie *essential elements* [JS81a, Section 2.2], Shintani [Shi76b] nennt sie *class-1*.

<sup>6</sup>Mit anderen Worten: da  $\pi_{\mathfrak{q}}$  unverzweigt und generisch ist, gilt  $\pi_{\mathfrak{q}} \cong \mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_n(k_{\mathfrak{q}})}^{B_n(k_{\mathfrak{q}})}(\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n)$  mit unverzweigten Charakteren  $\mu_1, \dots, \mu_n$  von  $k^{\times}$ , [Zel80]. Dann gilt  $A_{\mathfrak{q}} = \mathrm{diag}(\mu_1(\varpi), \dots, \mu_n(\varpi))$  mit einem beliebigen Erzeuger  $\varpi$  von  $\mathfrak{q}$ . Analoges gilt für  $\sigma_{\mathfrak{q}}$ .

die zu  $w$  assoziierte automorphe Form auf  $\mathrm{GL}_n(\mathbf{A}_k)$  und entsprechend  $\varphi$  die zu  $v$  assoziierte automorphe Form auf  $\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbf{A}_k)$  (siehe bspw. [CPS04]). Dann konvergiert für  $\mathrm{Re}(s)$  ausreichend groß das Produkt

$$\prod_{v \in M_k} \Psi(w_v, v_v, s) = \int_{\mathrm{GL}_{n-1}(k) \backslash \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbf{A}_k)} \phi \left( \begin{pmatrix} g & \\ & 1 \end{pmatrix} \right) \varphi(g) \|\det(g)\|^{s-\frac{1}{2}} dg$$

der lokalen Zetaintegrale absolut und dieses setzt sich auf ganz  $\mathbf{C}$  analytisch fort, denn durch das globale Rankin-Selberg-Integral ist eine analytische Fortsetzung auf ganz  $\mathbf{C}$  gegeben [CPS94, Proposition 6.1], [JS81b, Section 3.3].

Durch lineare Fortsetzung erhalten wir mittels der Zuordnung

$$\left( \otimes_v w_v \right) \otimes \left( \otimes_v v_v \right) \mapsto [s \mapsto \prod_{v \in M_k} \Psi(w_v, v_v, s)]$$

eine  $\mathbf{C}$ -lineare Abbildung auf dem algebraischen Tensorprodukt  $\mathscr{W}_0(\pi, \psi) \otimes \mathscr{W}_0(\sigma, \psi^{-1})$ . Im Bild dieser Abbildung liegt die globale  $L$ -Funktion

$$L(s, \pi \times \sigma) = \prod_v L(s, \pi_v \times \sigma_v),$$

modulo der Gammafaktoren. Genauer existiert nach [JS90] für jede Wahl von  $(w_v, v_v)$  für  $v \in S_\infty$  eine ganze Funktion  $P$ , so daß

$$P(s) \cdot L(s, \pi \times \sigma) = \prod_{v \in S_\infty} \Psi(w_v, v_v, s) \cdot \prod_{\mathfrak{q} \in M_k - S_\infty} \Psi(t_{\mathfrak{q}}^0, s).$$

Über  $P(s)$  wissen wir, daß es ein Produkt lokaler Integrale ist, welche von den Whittakerfunktionen  $(w_v, v_v)$  für archimedisches  $v \in S_\infty$  abhängen. Variieren wir diese Whittakerfunktionen, so können wir hiermit  $P(s)$  beeinflussen. Nach [CPS04, Theorem 1.2, (ii)] existiert zu jedem  $s_0$  eine Wahl von  $(w_v, v_v)$  für  $v \in S_\infty$ , so daß  $P(s_0) \neq 0$  ist. Als Konsequenz hieraus ergibt sich, daß die lokalen  $L$ -Funktionen an den archimedischen Stellen ebenfalls endliche Summen von Rankin-Selberg-Integralen sind [CPS04, Theorem 1.3].

Wir werden jedoch die Whittakerfunktionen an den archimedischen Stellen für unsere Zwecke nicht beliebig wählen können. Daher wird uns die Frage, ob  $P(\frac{1}{2}) \neq 0$  später noch beschäftigen.

Da wir an den Stellen  $v \in S$  nicht davon ausgehen können, daß die entsprechenden guten Tensoren  $t_v^0$  reine Tensoren sind, liefert die Darstellung dieser Tensoren als Summe reiner Tensoren eine Darstellung

$$\otimes_{v \in S_\infty} (w_v \otimes v_v) \otimes \otimes_{\mathfrak{q}} t_{\mathfrak{q}}^0 = \sum_{\iota} w_{\iota} \otimes v_{\iota},$$

wobei jedes  $w_{\iota} \otimes v_{\iota}$  ein Produkt aus reinen Tensoren ist. Bezüglich der assoziierten automorphen Formen  $(\phi_{\iota}, \varphi_{\iota})$  erhalten wir daher die Integraldarstellung

$$P(s) \cdot L(s, \pi \times \sigma) = \sum_{\iota} \int_{\mathrm{GL}_{n-1}(k) \backslash \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbf{A}_k)} \phi_{\iota}(j(g)) \varphi_{\iota}(g) \|\det(g)\|^{s-\frac{1}{2}} dg.$$

## Ein allgemeines globales Birch-Lemma

Es sei  $\mathfrak{f} \neq 1$  ein Ideal im Ganzheitsring  $\mathcal{O}_k$  von  $k$ , welches eine  $p$ -Potenz teilt und welches durch keines der Primideale in  $S$  teilbar ist. Für einen beliebigen Erzeuger  $f$  von  $\mathfrak{f} \subseteq \mathcal{O}_k \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}_p$  definieren

<sup>7</sup> mit  $\bar{\mathfrak{f}}$  bezeichnen wir den Abschluß von  $\mathfrak{f}$  in dem mit der Produkttopologie versehenen Raum  $\prod_{p|p} \mathcal{O}_k \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}_p$ .

wir  $h^{(f)} \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{A}_k)$  analog zum vorigen Abschnitt, wobei  $h^{(f)}$  an sämtlichen Stellen  $v \nmid \mathfrak{f}$  trivial<sup>8</sup> sei und an den übrigen Stellen dem Element  $h^{(f)}$  des Abschnittes 1.1 entspricht. Mit  $j : \mathrm{GL}_{n-1} \rightarrow \mathrm{GL}_n$  bezeichnen wir analog die kanonische Einbettung.

**Allgemeines globales Birch-Lemma.** *Es sei  $\chi = \otimes_v \chi_v$  ein Quasicharakter der Idealklassengruppe von  $k$  mit nichttrivalem Führer  $\mathfrak{f}$ , welcher eine  $p$ -Potenz teilt und durch keines der Primideale in  $S$  teilbar ist. Weiterhin nehmen wir an, daß  $\chi_v$  für alle  $v \mid \infty$  trivial ist.*

*Für jede Wahl von  $(w_v, v_v)$  für archimedisches  $v \in S_\infty$  und für jede Stelle  $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{f}$  und jedes unter der entsprechenden Iwahorigruppe rechtsinvariante Paar  $(w_{\mathfrak{p}}, v_{\mathfrak{p}})$  gilt dann mit der entsprechenden ganzen Funktion  $P$ ,*

$$P(s) \cdot \prod_{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{f}} w_{\mathfrak{p}}(\mathbf{1}_n) \cdot v_{\mathfrak{p}}(\mathbf{1}_{n-1}) \cdot \prod_{i=1}^{n-1} (1 - \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{-i})^{-1} \cdot G(\chi)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot L(s, (\pi \otimes \chi) \times \sigma) = \\ \mathfrak{N}(\mathfrak{f})^{\sum_{k=1}^{n-1} k(n-k)} \cdot \sum_{\iota} \int_{\mathrm{GL}_{n-1}(k) \backslash \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbf{A}_k)} \phi_{\iota}(j(g) \cdot h^{(f)}) \cdot \varphi_{\iota}(g) \cdot \chi(\det(g)) \cdot \|\det(g)\|^{s-\frac{1}{2}} dg.$$

Es sei erwähnt, daß die Voraussetzung an die reellen archimedischen Komponenten von  $\chi$  gewiß erfüllt sind, falls  $\chi$  an selbigen Stellen trivial ist. Dies ist jedoch nicht zwangsläufig für jedes  $\pi$  notwendig.

*Beweis.* Sei  $\mathfrak{q} \nmid \mathfrak{f}$  eine endliche Primstelle. Für jeden guten Tensor  $t_{\mathfrak{q}}^0$  für  $(\pi_{\mathfrak{q}}, \sigma_{\mathfrak{q}})$  ist  $\chi_{\mathfrak{q}}(\det) \cdot t_{\mathfrak{q}}^0$  ein guter Tensor für  $(\pi_{\mathfrak{q}} \otimes \chi_{\mathfrak{q}}, \sigma_{\mathfrak{q}})$ . Wir haben also

$$L(s, (\pi_{\mathfrak{q}} \otimes \chi_{\mathfrak{q}}) \times \sigma_{\mathfrak{q}}) = \Psi(\chi_{\mathfrak{q}}(\det) \cdot t_{\mathfrak{q}}^0, s).$$

Für  $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{f}$  ergibt sich

$$L(s, (\pi_{\mathfrak{p}} \otimes \chi_{\mathfrak{p}}) \times \sigma_{\mathfrak{p}}) = 1,$$

denn  $\pi_{\mathfrak{p}}$  und  $\sigma_{\mathfrak{p}}$  sind unverzweigt,  $\chi_{\mathfrak{p}}$  jedoch nicht. Für die spezielle Whittakerfunktion  $w_{\mathfrak{p}, \chi_{\mathfrak{p}}} \in \mathscr{W}(\pi_{\mathfrak{p}} \otimes \chi_{\mathfrak{p}}, \psi_{\mathfrak{p}})$ , welche durch

$$g \mapsto \chi_{\mathfrak{p}}(\det(g)) \cdot w_{\mathfrak{p}}(g \cdot h^{(f_{\mathfrak{p}})})$$

gegeben ist, haben wir aufgrund des allgemeinen lokalen Birch-Lemmas

$$\Psi(w_{\mathfrak{p}, \chi}, v_{\mathfrak{p}}, s) = w_{\mathfrak{p}}(\mathbf{1}_n) \cdot v_{\mathfrak{p}}(\mathbf{1}_{n-1}) \cdot \prod_{i=1}^{n-1} (1 - \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{-i})^{-1} \cdot \mathfrak{N}(\mathfrak{f})^{-\sum_{k=1}^{n-1} k(n-k)} \cdot G(\chi_{\mathfrak{p}})^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Wir stöpseln nun die lokalen Whittakerfunktionen zu einer globalen Whittakerfunktion

$$w_{\iota, \chi} := \otimes_{v \in S_\infty} w_v \otimes \left( \otimes_{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{f}} w_{\mathfrak{p}, \chi_{\mathfrak{p}}} \right) \otimes \left( \otimes_{\mathfrak{q} \nmid \mathfrak{f}} \chi_{\mathfrak{q}}(\det) \cdot w_{\iota, \mathfrak{q}} \right)$$

zusammen und erhalten, wegen unserer Voraussetzung an den reellen Stellen, sowie aufgrund der Definition von  $w_{\mathfrak{p}, \chi}$ ,

$$w_{\iota, \chi}(g) = \chi(\det(g)) \cdot w_{\iota}(g \cdot h^{(f)}).$$

Nach (1.2.2) gilt daher für die zu  $w_{\iota, \chi}$  assoziierte automorphe Form  $\phi_{\iota, \chi}$  die Formel

$$\phi_{\iota, \chi}(g) = \chi(\det(g)) \cdot \phi_{\iota}(g \cdot h^{(f)}).$$

---

<sup>8</sup>das bedeutet die Einheitsmatrix

Das zeigt, daß auf der rechten Seite der Formel unseres Lemmas nichts anderes als die Rankin-Selberg-Faltung von  $\phi_{\iota, \chi}$  und  $\varphi_{\iota}$  auftritt.

Dank

$$\prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{f}} G(\chi_{\mathfrak{p}}) = G(\chi)$$

steht auf der linken Seite das der Summe dieser Faltungen entsprechende Eulerprodukt, welches in einer rechten Halbebene absolut konvergiert und dort mit der rechten Seite der Gleichung übereinstimmt<sup>9</sup>. Damit gilt unsere Gleichung aufgrund der analytischen Fortsetzbarkeit beider Seiten auch auf ganz  $\mathbf{C}$ , was zu zeigen war.  $\square$

An diesem Beweis ist ersichtlich, daß die Voraussetzung, daß die Primteiler von  $\mathfrak{f}$  die gleiche Restklassenkörpercharakteristik  $p$  haben, eine Annahme ist, welche lediglich die Formulierung vereinfacht. Es wäre zweifellos möglich, auf die gleiche Weise eine allgemeinere Aussage für allgemeine Ideale  $\mathfrak{f} \neq 0$  zu erhalten. Dies trifft ebenfalls auf alle anderen Aussagen dieses Abschnittes zu.

Es seien  $U_{\mathfrak{q}} := \mathbf{G}_m(\mathcal{O}_{F_{\mathfrak{q}}})$  für nichtarchimedische Stellen  $\mathfrak{q} \in M_k$ ,  $U_v := \mathbf{G}_m(k_v)^0$  für archimedische Stellen  $v \in S_{\infty}$  definiert. Für ein Idel  $\alpha \in \mathbf{A}_k^{\times}$  bezeichne mit dieser Notation  $C_{\alpha, \mathfrak{f}}$  das Urbild von

$$k^{\times} \backslash k^{\times} \cdot \alpha \cdot (1 + \mathfrak{f}) \cdot \prod_{v \nmid \mathfrak{f}} U_v,$$

unter der Determinantenabbildung

$$\det : \mathrm{GL}_{n-1}(k) \backslash \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbf{A}_k) \rightarrow k^{\times} \backslash \mathbf{A}_k^{\times}.$$

Schließlich führen wir die Notation  $\varepsilon_x := \mathrm{diag}(x, 1, \dots, 1) \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{A}_k)$  für  $x \in \mathbf{A}_k^{\times}$  ein. Wir haben folgendes

**Korollar 1.2.1.** *Für jedes  $\chi$  von endlicher Ordnung gilt*

$$P\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{f}} w_{\mathfrak{p}}(\mathbf{1}_n) \cdot v_{\mathfrak{p}}(\mathbf{1}_{n-1}) \cdot \prod_{i=1}^{n-1} (1 - \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{-i})^{-1} \cdot G(\chi)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot L\left(\frac{1}{2}, (\pi \otimes \chi) \times \sigma\right) =$$

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{f})^{\sum_{k=1}^{n-1} k(n-k)} \cdot \sum_{\iota, \alpha} \chi(\alpha) \cdot \sum_x \chi(x) \cdot \int_{C_{\alpha, \mathfrak{f}}} \phi_{\iota}(j(g) \cdot \varepsilon_x \cdot h^{(f)}) \cdot \varphi_{\iota}(g) dg.$$

Dabei durchläuft  $\alpha$  ein Repräsentantensystem der Klassengruppe  $k^{\times} \backslash \mathbf{A}_k^{\times} / \prod_v U_v$  und  $x \in (\mathcal{O}_k \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}_p)^{\times}$  ein Repräsentantensystem von  $((\mathcal{O}_k \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}_p) / \bar{\mathfrak{f}})^{\times}$ .

Es sei angemerkt, daß  $k^{\times} \backslash \mathbf{A}_k^{\times} / \prod_v U_v$  nicht nur die klassische Idealklassengruppe von  $k$  als Faktorgruppe besitzt, sondern als Kern dieses Epimorphismus auch die Gruppe

$$\left(\mathcal{O}_k^{\times} / \mathcal{O}_{k,+}^{\times}\right) \backslash \left(\mathbf{G}_m(k_{\mathbf{R}}) / \mathbf{G}_m(k_{\mathbf{R}})^0\right) \cong \left(\mathcal{O}_k^{\times} / \mathcal{O}_{k,+}^{\times}\right) \backslash \prod_{v \text{ reell}} (\mathbf{R}^{\times} / (\mathbf{R}^{\times})^0)$$

enthält. Hierbei bezeichnet  $\mathcal{O}_{k,+}^{\times} = \mathcal{O}_k^{\times} \cap \mathbf{G}_m(k_{\mathbf{R}})^0$  die Untergruppe der total positiven Elemente in  $\mathcal{O}_k^{\times}$ .

<sup>9</sup>Hier geht ein weiteres mal unsere Voraussetzung an den reellen Stellen ein, denn  $P$  bleibt aufgrund dieser invariant.



*Beweis.* Der Beweis beruht auf der disjunkten Zerlegung

$$\mathrm{GL}_{n-1}(k) \backslash \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbf{A}_k) = \bigsqcup_{x, \alpha} C_{\alpha, \mathfrak{f}} \cdot \varepsilon_x,$$

wobei  $x$  ein Repräsentantensystem von  $((\mathcal{O}_k \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}_p) / \bar{\mathfrak{f}})^\times$  durchläuft und wir die Diagonalmatrix wie im globalen Birch-Lemma als Element von  $\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbf{A}_k)$  verstehen. Insbesondere betrifft diese Zerlegung bezüglich  $x$  lediglich die  $\mathfrak{p}$ -Komponenten für  $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{f}$ .

Es gilt für jedes  $g \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbf{A}_k)$  zunächst nach (1.2.2)

$$\varphi_\iota(g \cdot \varepsilon_x) = \sum_{\gamma \in U_{n-2}(k) \backslash \mathrm{GL}_{n-2}(k)} v_\iota \left( \begin{pmatrix} \gamma & \\ & 1 \end{pmatrix} g \cdot \varepsilon_x \right) = \sum_{\gamma \in U_{n-2}(k) \backslash \mathrm{GL}_{n-2}(k)} v_\iota \left( \begin{pmatrix} \gamma & \\ & 1 \end{pmatrix} g \right) = \varphi_\iota(g).$$

Nun nimmt  $\chi(\det \cdot)$  auf jeder Nebenklasse konstant den Wert  $\chi(\alpha x)$  an. Daher erhalten wir

$$\begin{aligned} & \int_{(C_{\alpha, \mathfrak{f}}) \cdot \varepsilon_x} \phi_\iota(j(g) \cdot h^{(f)}) \cdot \varphi_\iota(g) \cdot \chi(\det(g)) dg = \\ & \chi(\alpha \cdot x) \cdot \int_{C_{\alpha, \mathfrak{f}}} \phi_\iota(j(g \cdot \varepsilon_x) \cdot h^{(f)}) \cdot \varphi_\iota(g) dg = \\ & \chi(\alpha \cdot x) \cdot \int_{C_{\alpha, \mathfrak{f}}} \phi_\iota(j(g) \cdot \varepsilon_x \cdot h^{(f)}) \cdot \varphi_\iota(g) dg. \end{aligned}$$

Mehr ist nicht zu zeigen. □



# Kapitel 2

## Heckeoperatoren und Distributionen

In diesem Kapitel konstruieren wir mittels der Periodenintegrale des globalen Birch-Lemmas eine  $\mathbf{C}$ -wertige Distribution, welche die speziellen Werte der Rankin-Selberg- $L$ -Funktion interpoliert. Die Distributionenrelation wird sich aus der Aktion einer modifizierten Hecke-Algebra ergeben, welche in natürlicher Weise eine Erweiterung der Standard-Hecke-Algebra ist. Unser Vorgehen ist eine Synthese aus [KMS00, section 4] und [Sch01, section 3].

### 2.1 Hecke-Paare und Erweiterungen von Hecke-Algebren

Für elementare Grundlagen von Heckeoperatoren sei auf [Shi71, chapter 3] und [Miy89, chapter 2, §7] verwiesen. Es sei  $G$  eine Gruppe. Ein *Hecke-Paar*  $(R, S)$  (in  $G$ ) besteht aus einer Untergruppe  $R \leq G$  und einer Unterhalbgruppe  $S \subseteq G$  mit  $RS = SR = S$  und der weiteren Eigenschaft, daß jede Doppelnebenklasse  $RsR$  für  $s \in S$  eine endliche Vereinigung von Rechts- oder Linksnebenklassen modulo  $R$  ist.

Die Bedingung  $RS = SR$  ist stets erfüllt, wenn  $S = G$ . Die zweite Bedingung ist stets erfüllt, wenn  $G$  eine topologische Gruppe und  $R$  eine kompaktoffene Untergruppe ist.

Ist  $(R, S)$  ein Hecke-Paar, so läßt sich der freie  $\mathbf{Z}$ -Modul  $\mathcal{H}_{\mathbf{Z}}(R, S)$  über der Menge aller Doppelnebenklassen  $RsR$  in den freien  $\mathbf{Z}$ -Modul  $\mathcal{R}_{\mathbf{Z}}(R, S)$  über allen Rechtsnebenklassen  $sR$ ,  $s \in S$ , einbetten, wobei

$$RsR = \bigsqcup_i s_i R \mapsto \sum_i s_i R.$$

Identifizieren wir  $\mathcal{H}_{\mathbf{Z}}(R, S)$  mit seinem Bild, so entspricht  $\mathcal{H}_{\mathbf{Z}}(R, S)$  den  $R$ -Invarianten unter der Aktion

$$R \times \mathcal{R}_{\mathbf{Z}}(R, S) \rightarrow \mathcal{R}_{\mathbf{Z}}(R, S), \quad (r, sR) \mapsto rsR.$$

Schließlich wird  $\mathcal{H}_{\mathbf{Z}}(R, S)$  eine assoziative  $\mathbf{Z}$ -Algebra vermöge der Multiplikation

$$\left( \sum_i s_i R \right) \cdot \left( \sum_j t_j R \right) := \sum_{i,j} s_i t_j R.$$

Diese Algebra ist genau dann unitär<sup>1</sup>, wenn  $R \cap S \neq \emptyset$ . Für einen beliebigen kommutativen Ring  $A$  setzen wir

$$\mathcal{H}_A(R, S) := \mathcal{H}_{\mathbf{Z}}(R, S) \otimes_{\mathbf{Z}} A.$$

---

<sup>1</sup>besitzt ein Einselement

Dies ist eine assoziative Algebra über  $A$ . Die Elemente sind formale Linearkombinationen von Doppelnebenklassen mit Koeffizienten aus  $A$ . Wir definieren  $\mathcal{H}(R, S) := \mathcal{H}_{\mathbf{C}}(R, S)$  und nennen dies schlicht die *Hecke-Algebra* zum Paar  $(R, S)$ .

Ist  $G$  eine lokalkompakte Gruppe und  $K \leq G$  eine kompaktoffene Untergruppe, so ist  $(K, G)$  ein Hecke-Paar. In diesem Fall entspricht  $\mathcal{B}_{\mathbf{Z}}(K, G)$  dem  $\mathbf{Z}$ -Modul der lokalkonstanten rechts- $K$ -invarianten Abbildungen  $f : G \rightarrow \mathbf{Z}$  mit kompaktem Träger und  $\mathcal{H}_{\mathbf{Z}}(K, G)$  ist der Untermodul der ebenfalls links- $K$ -invarianten Abbildungen. Die Algebrenverknüpfung entspricht dann der Faltung

$$\alpha * \beta : x \mapsto \int_G \alpha(g)\beta(xg^{-1})dg,$$

wobei  $dg$  das rechts-invariante Haar'sche Maß auf  $G$  bezeichnet, welches  $K$  das Maß 1 zuweist. Diese Interpretation ist im Übrigen auf jede Hecke-Algebra  $\mathcal{H}_A(R, S)$  über einem beliebigen Teilring  $A \subseteq \mathbf{C}$  anwendbar.

Da die uns interessierenden Hecke-Algebren stets diesen topologischen Ursprung haben, formulieren wir die elementare

**Proposition 2.1.1.** *Es sei  $G$  eine lokalkompakte Gruppe,  $H \leq G$  eine abgeschlossene Untergruppe,  $K \leq G$  eine kompaktoffene Untergruppe,  $L = H \cap K$  und  $HK = G$ . Dann ist durch die Einschränkung*

$$\alpha \mapsto \alpha|_H$$

ein  $A$ -Algebrenmonomorphismus  $\mathcal{H}_A(K, G) \rightarrow \mathcal{H}_A(L, H)$  gegeben.

*Beweis.* Die Wohldefiniertheit als Abbildung, die  $A$ -Linearität, als auch die Injektivität sind klar. Es bleibt die Verträglichkeit der Multiplikation einzusehen. Hierzu bezeichne  $dg$  das rechts-invariante Haar'sche Maß auf  $G$ , welches  $K$  das Maß 1 zuweist und entsprechend  $dh$  das rechts-invariante Maß auf  $H$ , welches  $L$  das Maß 1 zuweist. Für  $x \in H$  ist die Identität

$$\int_G \alpha(g)\beta(xg^{-1})dg = \int_H \alpha(h)\beta(xh^{-1})dh,$$

zu zeigen. Um dies einzusehen, dürfen wir uns auf den Fall  $\alpha = 1_{KaK}$ ,  $\beta = 1_{KbK}$  zurückziehen, wobei aufgrund unserer Voraussetzung  $HK = G$  sogar  $a, b \in H$  angenommen werden kann. Nun induziert die Inklusion  $H \rightarrow G$  eine Bijektion

$$L \backslash LaL \cap Lb^{-1}Lx \cong K \backslash KaK \cap Kb^{-1}Kx,$$

was aufgrund der Rechtsinvarianz und der Normierung der Maße die Behauptung beweist.  $\square$

## 2.2 Die modifizierte Hecke-Algebra

Es sei  $\mathfrak{p}$  eine beliebige endliche Stelle eines Zahlkörpers  $k$ . Die Hecke-Algebra zum Paar  $(K, G)$  mit  $K = \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_{k_{\mathfrak{p}}})$  und  $G = \mathrm{GL}_n(k_{\mathfrak{p}})$  ist die *Standard-Hecke-Algebra* zu  $\mathfrak{p}$ . Sie ist kanonisch isomorph zur Algebra der  $K$ -bi-invarianten Abbildungen  $G \rightarrow \mathbf{C}$  mit kompaktem Träger. Nach Tamagawa [Tam63] (siehe auch [Sat63, Theorem 6], [Car79, section 4.2, Theorem 4.1]) haben wir den Isomorphismus (die sogenannte *Satake-Abbildung*)

$$\begin{aligned} \mathcal{S} : \mathcal{H}(K, G) &\rightarrow \mathbf{C}[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]^{S_n}, \\ T_{\nu} &\mapsto \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{\frac{\nu(\nu+1)}{2}} \cdot \sigma_{\nu}(X_1, \dots, X_n), \quad (0 \leq \nu \leq n) \end{aligned}$$

wobei die symmetrische Gruppe  $S_n$  wie üblich durch Permutation der  $X_i$  operiert,

$$T_\nu := K \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{n-\nu} & 0 \\ 0 & \varpi \cdot \mathbf{1}_\nu \end{pmatrix} K$$

unabhängig vom Primelement  $\varpi$  ist und  $\sigma_\nu$  das elementarsymmetrische Polynom vom Grad  $\nu$  in den Variablen  $X_1, \dots, X_n$  bezeichnet [Bou98, chapitre IV, §6, no. 1]. Insbesondere sind die Hecke-Operatoren  $T_\nu$  algebraisch unabhängig.

Wie zuvor bezeichne  $B_n(k_{\mathfrak{p}})$  die Standard-Boreluntergruppe von  $\mathrm{GL}_n(k_{\mathfrak{p}})$ . Wir definieren  $K_{B_{\mathfrak{p}}} := B_n(k_{\mathfrak{p}}) \cap K = B_n(\mathcal{O}_{k_{\mathfrak{p}}})$ . Die *parabolische Hecke-Algebra* ist definiert als  $\mathcal{H}_{B_{\mathfrak{p}}} := \mathcal{H}(K_{B_{\mathfrak{p}}}, B_n(k_{\mathfrak{p}}))$ . Die Iwasawazerlegung [IM65, Proposition 2.33], [Sat63, Section 8.2] zeigt, daß die Voraussetzungen von Proposition 2.1.1 erfüllt sind. Daher ist  $\mathcal{H}_{B_{\mathfrak{p}}}$  eine Ringerweiterung von  $\mathcal{H}_{\mathfrak{p}} := \mathcal{H}(K, G)$ , vermöge der Einbettung  $\epsilon : \mathcal{H}_{\mathfrak{p}} \rightarrow \mathcal{H}_{B_{\mathfrak{p}}}$ , welche explizit durch

$$\sum_i a_i \cdot g_i K \mapsto \sum_i a_i \cdot g_i K_{B_{\mathfrak{p}}}$$

gegeben ist, wobei  $g_i \in B_n(k_{\mathfrak{p}})$ , was dank Iwasawazerlegung angenommen werden darf.

In  $\mathcal{H}_{B_{\mathfrak{p}}}$  haben wir die Hecke-Operatoren

$$U_i := K_{B_{\mathfrak{p}}} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{i-1} & 0 & 0 \\ 0 & \varpi & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1}_{n-i} \end{pmatrix} K_{B_{\mathfrak{p}}},$$

welche paarweise kommutieren [Gri92, Lemma 2]. Über  $\mathcal{H}_{B_{\mathfrak{p}}}$  zerfällt nach [Gri92, Theorem 2] das Hecke-Polynom<sup>2</sup>

$$H_{\mathfrak{p}}(X) := \sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{\frac{(\nu-1)\nu}{2}} T_\nu X^{n-\nu} \in \mathcal{H}_{\mathfrak{p}}(X)$$

in Linearfaktoren

$$H_{\mathfrak{p}}(X) = \prod_{i=1}^n (X - U_i).$$

Wir definieren wie in [KMS00, section 4] für  $1 \leq \nu \leq n$  die Operatoren

$$V_{\mathfrak{p},\nu} := \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{-\frac{(\nu-1)\nu}{2}} \cdot U_1 U_2 \cdots U_\nu \in \mathcal{H}_{B_{\mathfrak{p}}},$$

sowie

$$t_{(\mathfrak{p})} := \mathrm{diag}(\varpi^{n-1}, \varpi^{n-2}, \dots, 1).$$

In vollständiger Analogie zu [KMS00, Lemma 4.1] haben wir das folgende

**Lemma 2.2.1.** *Es gilt*

$$V_{\mathfrak{p},\nu} = K_{B_{\mathfrak{p}}} \begin{pmatrix} \varpi \cdot \mathbf{1}_\nu & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_{n-\nu} \end{pmatrix} K_{B_{\mathfrak{p}}} = \bigsqcup_A \begin{pmatrix} \varpi \cdot \mathbf{1}_\nu & A \\ 0 & \mathbf{1}_{n-\nu} \end{pmatrix} K_{B_{\mathfrak{p}}},$$

wobei  $A \in \mathcal{O}_{k_{\mathfrak{p}}}^{\nu \times n-\nu}$  ein Repräsentantensystem modulo  $\mathfrak{p}$  durchläuft. Desweiteren kommutieren die Hecke-Operatoren  $V_{\mathfrak{p},\nu}$  und es gilt

$$K_{B_{\mathfrak{p}}} t_{(\mathfrak{p})} K_{B_{\mathfrak{p}}} = \prod_{\nu=1}^{n-1} V_{\mathfrak{p},\nu} = \bigsqcup_u ut_{(\mathfrak{p})} K_{B_{\mathfrak{p}}},$$

wobei  $u$  ein Repräsentantensystem von  $U_n(\mathcal{O}_{k_{\mathfrak{p}}})/t_{(\mathfrak{p})}U_n(\mathcal{O}_{k_{\mathfrak{p}}})t_{(\mathfrak{p})}^{-1}$  durchläuft.

<sup>2</sup>Gritsenko betrachtet  $Q_n(t) = t^n H_{\mathfrak{p}}(t^{-1})$ .

*Beweis.* Für jedes

$$B = \begin{pmatrix} B_{\nu,\nu} & B'_{\nu,n-\nu} \\ 0 & B''_{n-\nu,n-\nu} \end{pmatrix} \in K_{B_{\mathfrak{p}}}$$

gilt

$$B \cdot \begin{pmatrix} \varpi \cdot \mathbf{1}_{\nu} & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_{n-\nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varpi \cdot B_{\nu,\nu} & B'_{\nu,n-\nu} \\ 0 & B''_{n-\nu,n-\nu} \end{pmatrix}$$

sowie

$$\begin{pmatrix} \varpi \cdot \mathbf{1}_{\nu} & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_{n-\nu} \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} \varpi \cdot B_{\nu,\nu} & \varpi \cdot B'_{\nu,n-\nu} \\ 0 & B''_{n-\nu,n-\nu} \end{pmatrix},$$

was die zweite Identität der ersten Behauptung zeigt. Analog ergibt sich

$$U_i = \bigsqcup_{\underline{a}} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{i-1} & 0 & 0 \\ 0 & \varpi & a_1, \dots, a_{n-i} \\ 0 & 0 & \mathbf{1}_{n-i} \end{pmatrix} K_{B_{\mathfrak{p}}},$$

wobei

$$\underline{a} = (a_1, \dots, a_{n-i}) \in \mathcal{O}_{k_{\mathfrak{p}}}^{n-i}$$

ein Repräsentantensystem modulo  $\mathfrak{p}$  durchläuft. Hieraus folgt induktiv die behauptete erste Identität.

Die Operatoren  $V_{\mathfrak{p},\nu}$  liegen in dem Teilring von  $\mathcal{H}_{B_{\mathfrak{p}}}$ , welcher als  $\mathbf{C}$ -Vektorraum von der Gesamtheit der Operatoren

$$U_1^{i_1} \cdot U_2^{i_2} \dots U_n^{i_n}$$

mit  $0 \leq i_n \leq i_{n-1} \leq \dots \leq i_1$  erzeugt wird. Dieser ist, wie bereits angemerkt, kommutativ<sup>3</sup>, weswegen die  $V_{\mathfrak{p},\nu}$  kommutieren.

Die zweite Behauptung ergibt sich induktiv durch ein ganz analoges Argument, wenn wir die Notation

$$t_{(\mathfrak{p})}^{(\nu)} := \text{diag}(\varpi^{\nu-1}, \varpi^{\nu-2}, \dots, \varpi^1, 1) \in \text{GL}_{\nu}(k_{\mathfrak{p}})$$

einführen. Mit

$$u(A_1, \dots, A_{n-1}) := \begin{pmatrix} 1 & t_{(\mathfrak{p})}^{(1)} A_1 \\ 0 & \mathbf{1}_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & t_{(\mathfrak{p})}^{(2)} A_2 \\ 0 & \mathbf{1}_{n-2} \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{n-1} & t_{(\mathfrak{p})}^{(n-1)} A_{n-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt dann

$$\prod_{\nu=1}^{n-1} V_{\mathfrak{p},\nu} = \sum_{A_1, \dots, A_{n-1}} u(A_1, \dots, A_{n-1}) \cdot t_{(\mathfrak{p})} \cdot K_{B_{\mathfrak{p}}},$$

sofern  $A_i$  ein Repräsentantensystem von  $\mathcal{O}_{k_{\mathfrak{p}}}^{\nu \times n-\nu}$  modulo  $\mathfrak{p}$  durchläuft. Induktiv ergibt sich, daß hierbei  $u(A_1, \dots, A_{n-1})$  ein Repräsentantensystem von  $U_n(\mathcal{O}_{k_{\mathfrak{p}}})/t_{(\mathfrak{p})} U_n(\mathcal{O}_{k_{\mathfrak{p}}}) t_{(\mathfrak{p})}^{-1}$  durchläuft, was zu zeigen war.  $\square$

Es bezeichne  $\mathcal{M}_{\mathfrak{p}}$  den  $\mathbf{C}$ -Vektorraum der  $\mathbf{C}$ -wertigen rechts- $K_{B_{\mathfrak{p}}}$ -invarianten Abbildungen auf  $\text{GL}_n(k_{\mathfrak{p}})$ . Die Hecke-Algebra  $\mathcal{H}_{B_{\mathfrak{p}}}$  operiert von links auf  $\mathcal{M}_{\mathfrak{p}}$  vermöge

$$\mathcal{H}_{B_{\mathfrak{p}}} \times \mathcal{M}_{\mathfrak{p}} \rightarrow \mathcal{M}_{\mathfrak{p}}$$

$$\left( \sum_i a_i \cdot g_i K_{B_{\mathfrak{p}}}, \psi \right) \mapsto \sum_i a_i \cdot [g \mapsto \psi(gg_i)].$$

<sup>3</sup>Was sich unmittelbar aus der expliziten Beschreibung der Operatoren  $U_i$  ergibt.

Es bezeichne

$$V_{\mathfrak{p},0} := K_{B_{\mathfrak{p}}} \mathbf{1}_n K_{B_{\mathfrak{p}}}$$

das Neutralelement von  $\mathcal{H}_{B_{\mathfrak{p}}}$ . Wir haben wie [KMS00, Lemma 4.3] das

**Lemma 2.2.2.** *Für jedes  $\lambda \in \mathbf{C}$  gilt*

$$\prod_{\nu=1}^n (\lambda \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{1-\nu} V_{\mathfrak{p},\nu-1} - V_{\mathfrak{p},\nu}) = \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{-\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{\nu=0}^{n-1} V_{\mathfrak{p},\nu} \cdot H_{\mathfrak{p}}(\lambda).$$

*Beweis.* Für  $1 \leq \nu \leq n$  gilt nach Definition

$$V_{\mathfrak{p},\nu} = \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{1-\nu} V_{\mathfrak{p},\nu-1} U_{\nu}.$$

Daher erhalten wir

$$\lambda \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{1-\nu} V_{\mathfrak{p},\nu-1} - V_{\mathfrak{p},\nu} = \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{1-\nu} \cdot V_{\mathfrak{p},\nu-1} \cdot (\lambda - U_{\nu}).$$

Nach Lemma 2.2.1 kommutiert  $V_{\mathfrak{p},\nu}$  mit diesem Ausdruck, weswegen wir durch Umsortieren die Identität

$$\prod_{\nu=1}^n (\lambda \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{1-\nu} V_{\mathfrak{p},\nu-1} - V_{\mathfrak{p},\nu}) = \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{-\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{\nu=0}^{n-1} V_{\mathfrak{p},\nu} \cdot \prod_{\nu=1}^n (\lambda - U_{\nu})$$

erhalten, was zu zeigen war. □

In vollständiger Analogie zu [KMS00, Proposition 4.2] gilt schließlich die

**Proposition 2.2.3.** *Es seien  $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbf{C}^{n-1}$  und  $\psi \in \mathcal{M}_{\mathfrak{p}}$  so daß*

$$\forall \nu = 1, 2, \dots, n-1 : \quad H_{\mathfrak{p}}(\lambda_{\nu}) \cdot \psi = 0.$$

*Dann ist*

$$\psi_{\underline{\lambda}} := \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\lambda_i \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{1-j} V_{\mathfrak{p},j-1} - V_{\mathfrak{p},j}) \cdot \psi$$

*eine simultane Eigenfunktion von  $V_{\mathfrak{p},1}, \dots, V_{\mathfrak{p},n-1}$ . Genauer gilt mit*

$$\eta_{\nu} := \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{-\frac{\nu(\nu-1)}{2}} \prod_{i=1}^{\nu} \lambda_i$$

*für  $1 \leq \nu \leq n-1$  die Relation*

$$V_{\mathfrak{p},\nu} \cdot \psi_{\underline{\lambda}} = \eta_{\nu} \cdot \psi_{\underline{\lambda}}.$$

*Beweis.* Nach Lemma 2.2.2 impliziert unsere Voraussetzung, daß

$$\prod_{j=1}^n (\lambda_i \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{1-j} V_{\mathfrak{p},j-1} - V_{\mathfrak{p},j}) \cdot \psi = 0.$$

für  $1 \leq i \leq n-1$ . Wir beweisen die Behauptung durch Induktion über  $\nu$ . Es gilt  $\eta_1 = \lambda_1$ , weswegen nach obiger Beobachtung

$$(\eta_1 - V_{\mathfrak{p},1}) \cdot \psi_{\underline{\lambda}} = (\lambda_1 - V_{\mathfrak{p},1}) \cdot \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\lambda_i \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{1-j} V_{\mathfrak{p},j-1} - V_{\mathfrak{p},j}) \cdot \psi =$$

$$\prod_{i=2}^{n-1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\lambda_i \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{1-j} V_{\mathfrak{p},j-1} - V_{\mathfrak{p},j}) \cdot \prod_{\mu=1}^n (\lambda_1 \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{1-\mu} V_{\mu-1} - V_{\mathfrak{p},\mu}) \cdot \psi = 0.$$

Das zeigt den Induktionsanfang  $\mu = 1$ . Unter der Annahme, daß für  $1 \leq \mu \leq \nu - 1$

$$(\eta_\mu - V_{\mathfrak{p},\mu}) \cdot \psi_\lambda = 0$$

gilt, erhalten wir wegen

$$\eta_\nu = \eta_{\nu-1} \cdot \lambda_\nu \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{1-\nu}$$

die Relation

$$\eta_\nu \psi_\lambda = \lambda_\nu \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{1-\nu} \cdot \eta_{\nu-1} \cdot \psi_\lambda = \lambda_\nu \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{1-\nu} V_{\mathfrak{p},\nu-1} \cdot \psi_\lambda.$$

Damit ergibt sich schließlich

$$(\eta_\nu - V_{\mathfrak{p},\nu}) \cdot \psi_\lambda = (\lambda_\nu \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{1-\nu} V_{\mathfrak{p},\nu-1} - V_{\mathfrak{p},\nu}) \cdot \psi_\lambda = 0$$

aus dem gleichen Grund wie im Fall  $\nu = 1$ . □

## 2.3 Konstruktion der Distribution

Wir nehmen an, daß die automorphen Darstellungen  $\pi$  und  $\sigma$  bei  $\mathfrak{p}$  unverzweigt und kohomologisch sind. Das impliziert, daß sowohl  $\pi_{\mathfrak{p}}$  als auch  $\sigma_{\mathfrak{p}}$  bereits über einem Zahlkörper definiert sind [Clo90, Théorème 3.13 beziehungsweise Proposition 3.16]. Daher sind die Nullstellen

$$\lambda_{\mathfrak{p},1}, \dots, \lambda_{\mathfrak{p},n} \in \overline{\mathbf{Q}}$$

beziehungsweise

$$\alpha_{\mathfrak{p},1}, \dots, \alpha_{\mathfrak{p},n-1} \in \overline{\mathbf{Q}}$$

der entsprechenden Heckepolynome  $H_{\mathfrak{p}}$  von  $\pi_{\mathfrak{p}}$  beziehungsweise  $\sigma_{\mathfrak{p}}$  bei  $\mathfrak{p}$  algebraisch. Wir nennen  $\pi$  beziehungsweise  $\sigma$  bei  $\mathfrak{p}$  *ordinär*, wenn (bei geeigneter Nummerierung) für  $1 \leq i \leq n - 1$

$$\|\lambda_{\mathfrak{p},i}\|_{\mathfrak{p}} = \|\mathfrak{N}(\mathfrak{p})\|_{\mathfrak{p}}^{i-1}$$

beziehungsweise für  $1 \leq j \leq n - 2$

$$\|\alpha_{\mathfrak{p},j}\|_{\mathfrak{p}} = \|\mathfrak{N}(\mathfrak{p})\|_{\mathfrak{p}}^{j-1}$$

gilt. Wir schreiben

$$\underline{\lambda}(\mathfrak{p}) := (\lambda_{\mathfrak{p},1}, \dots, \lambda_{\mathfrak{p},n-1}) \in \overline{\mathbf{Q}}^{n-1},$$

sowie

$$\underline{\alpha}(\mathfrak{p}) := (\alpha_{\mathfrak{p},1}, \dots, \alpha_{\mathfrak{p},n-2}) \in \overline{\mathbf{Q}}^{n-2},$$

und weiterhin

$$\begin{aligned} \kappa_{\underline{\lambda}(\mathfrak{p})} &:= \prod_{\nu=1}^{n-1} \lambda_{\mathfrak{p},\nu}^{n-\nu}, \\ \kappa_{\underline{\alpha}(\mathfrak{p})} &:= \prod_{\nu=1}^{n-2} \alpha_{\mathfrak{p},\nu}^{n-1-\nu}, \\ \hat{\kappa}_{\underline{\lambda}(\mathfrak{p})} &:= \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{-\frac{n(n-1)(n-2)}{6}} \cdot \kappa_{\underline{\lambda}(\mathfrak{p})}, \end{aligned}$$



$$\hat{\kappa}_{\underline{\alpha}(\mathfrak{p})} := \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{-\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}} \cdot \kappa_{\underline{\alpha}(\mathfrak{p})}.$$

Bei  $\hat{\kappa}_{\underline{\lambda}(\mathfrak{p})}$  und  $\hat{\kappa}_{\underline{\alpha}(\mathfrak{p})}$  handelt es sich im Fall der Ordinartät gemäß Gleichung (C.0.3) aus Anhang C um  $\mathfrak{p}$ -adische Einheiten. Wir nehmen im Folgenden an, daß die Eigenwerte nicht verschwinden, womit auch  $\hat{\kappa}_{\underline{\lambda}(\mathfrak{p})}$  und  $\hat{\kappa}_{\underline{\alpha}(\mathfrak{p})}$  nicht verschwinden.

Wir dürfen annehmen, daß die automorphen Formen  $\phi_\ell$  beziehungsweise  $\varphi_\ell$  aus der Integraldarstellung des globalen Birchlemmas, nach Fouriertransformation bei  $\mathfrak{p}$  jeweils class-1-Whittakerfunktionen im Sinne Shintanis entsprechen. Dann sind  $\phi_\ell$  und  $\varphi_\ell$  normalisierte Eigenvektoren der entsprechenden Hecke-Algebren  $\mathcal{H}_\mathfrak{p}$  bei  $\mathfrak{p}$  zu den obigen Eigenwerten. Wir betrachten nun die im Sinne von Proposition 2.2.3 modifizierten automorphen Formen  $\tilde{\phi}_\ell$  beziehungsweise  $\tilde{\varphi}_\ell$ . Dann ist  $\tilde{\phi}_\ell$  ein Eigenvektor des Operators

$$V_\mathfrak{p} := V_{\mathfrak{p},1} \cdots V_{\mathfrak{p},n-1}$$

mit Eigenwert  $\hat{\kappa}_{\underline{\lambda}(\mathfrak{p})}$ . Entsprechend ist  $\tilde{\varphi}_\ell$  eine Eigenvektor zum Eigenwert  $\hat{\kappa}_{\underline{\alpha}(\mathfrak{p})}$ .

Für eine nichttriviale  $\mathfrak{p}$ -Potenz  $\mathfrak{f}$  definieren wir

$$\kappa(\mathfrak{f}) := \frac{\mathfrak{N}(\mathfrak{f})^{\frac{(n+1)n(n-1)+n(n-1)(n-2)}{6}}}{(\hat{\kappa}_{\underline{\lambda}(\mathfrak{p})} \cdot \hat{\kappa}_{\underline{\alpha}(\mathfrak{p})})^{\nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{f})}},$$

sowie für jedes Idel  $\alpha \in \mathbf{A}_k^\times$  und jedes  $x \in \mathcal{O}_k^\times$

$$\mu_\alpha(x + \mathfrak{f}) := \kappa(\mathfrak{f}) \cdot \sum_\ell P_{\alpha,\ell}(\varepsilon_x \cdot h^{(\mathfrak{f})}, \mathfrak{f}),$$

wobei

$$P_{\alpha,\ell}(u, \mathfrak{f}) := \int_{C_{\alpha,\mathfrak{f}}} \tilde{\phi}_\ell(j(g) \cdot u) \cdot \tilde{\varphi}_\ell(g) dg.$$

Dabei verstehen wir  $h^{(\mathfrak{f})}$  als Element von  $\mathrm{GL}_n(k_\mathfrak{p})$ . Desweiteren seien

$$\Theta := k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times / \prod_{v \nmid \mathfrak{p}} U_v \cong \varprojlim_{\mathfrak{f}} k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times / (1 + \mathfrak{f}) \prod_{v \nmid \mathfrak{f}} U_v,$$

sowie

$$\Theta(\alpha) := k^\times \backslash k^\times \cdot \alpha \cdot \prod_v U_v / \prod_{v \nmid \mathfrak{p}} U_v \cong \varprojlim_{\mathfrak{f}} k^\times \backslash k^\times \cdot \alpha \cdot \prod_v U_v / (1 + \mathfrak{f}) \prod_{v \nmid \mathfrak{p}} U_v.$$

Dann ist  $\Theta$  die disjunkte Vereinigung kompaktoffener Teilmengen  $\Theta(\alpha_1), \dots, \Theta(\alpha_h)$ . Wir dürfen annehmen, daß die Repräsentanten  $\alpha_1, \dots, \alpha_h$  jeweils bei  $\mathfrak{p}$  trivial sind.

**Satz 2.3.1.** *Ist  $\mathfrak{p}^{\frac{n(n-1)}{2}}$  ein Hauptideal, so sind  $\mu_{\alpha_1}, \dots, \mu_{\alpha_h}$  jeweils Distributionen auf  $\Theta(\alpha_i)$ , welche sich zu einer  $\mathbf{C}$ -wertigen Distribution  $\mu$  auf  $\Theta$  zusammensetzen. Für jeden Charakter  $\chi : k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times \rightarrow \mathbf{C}^\times$  endlicher Ordnung mit nichttrivalem  $\mathfrak{p}$ -Potenz Führer  $\mathfrak{f}$ , trivial bei  $\infty$ , gilt*

$$\int_{\Theta} \chi d\mu = P\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \delta(\pi, \sigma) \cdot \hat{\kappa}(\mathfrak{f}) \cdot G(\chi)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot L\left(\frac{1}{2}, (\pi \otimes \chi) \times \sigma\right).$$

Dabei sind  $\hat{\kappa}(\mathfrak{f})$  und  $\delta(\pi, \sigma)$  explizit durch

$$\hat{\kappa}(\mathfrak{f}) := \kappa(\mathfrak{f}) \cdot \mathfrak{N}(\mathfrak{f})^{-\frac{(n+1)n(n-1)}{6}} = \mathfrak{N}(\mathfrak{f})^{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}} \cdot (\hat{\kappa}_{\underline{\lambda}(\mathfrak{p})} \hat{\kappa}_{\underline{\alpha}(\mathfrak{p})})^{-\nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{f})},$$

und

$$\delta(\pi, \sigma) := \tilde{w}_{\mathfrak{p}}(\mathbf{1}_n) \cdot \tilde{v}_{\mathfrak{p}}(\mathbf{1}_{n-1}) \cdot \prod_{\nu=1}^{n-1} (1 - \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{-\nu})^{-1},$$

gegeben<sup>4</sup>. Hierbei bezeichnen  $\tilde{w}_{\mathfrak{p}}$  und  $\tilde{v}_{\mathfrak{p}}$  die lokalen Whittakerfunktionen bei  $\mathfrak{p}$ , welche in der Faktorisierung der via Fouriertransformation zu  $\tilde{\phi}_{\iota}$  und  $\tilde{\varphi}_{\iota}$  entsprechenden globalen Whittakerfunktionen auftreten<sup>5</sup>.

Der genaue Wert von  $\delta(\pi, \sigma)$  läßt sich mittels Proposition E.0.1 aus Anhang E explizit angeben.

*Beweis.* Wir folgen den Beweisen zu [KMS00, Proposition 4.9] und [Sch01, Theorem 3.1]. Wir schreiben

$$U_n := U_n(\mathcal{O}_{k_{\mathfrak{p}}}),$$

sowie

$$U_n^{(\varpi)} := t_{(\mathfrak{p})} U_n t_{(\mathfrak{p})}^{-1}.$$

Im Sinne der Proposition 2.2.3 und des Lemmas 2.2.1 haben die automorphen Formen  $\tilde{\phi}_{\iota}$  als Eigenformen von  $V_{\mathfrak{p}}$  die Eigenschaft

$$\forall g \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{A}_k) : \sum_{uU_n^{(\varpi)} \in U_n/U_n^{(\varpi)}} \tilde{\phi}_{\iota}(gut_{(\mathfrak{p})}) = \hat{\kappa}_{\underline{\lambda}(\mathfrak{p})} \cdot \tilde{\phi}_{\iota}(g)$$

und analog

$$\forall g \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbf{A}_k) : \sum_{uU_{n-1}^{(\varpi)} \in U_{n-1}/U_{n-1}^{(\varpi)}} \tilde{\varphi}_{\iota}(gut_{(\mathfrak{p})}) = \hat{\kappa}_{\underline{\alpha}(\mathfrak{p})} \cdot \tilde{\varphi}_{\iota}(g).$$

Hieraus ergibt sich, daß

$$\begin{aligned} & \hat{\kappa}_{\underline{\lambda}(\mathfrak{p})} \cdot \hat{\kappa}_{\underline{\alpha}(\mathfrak{p})} \cdot P_{\alpha, \iota}(\varepsilon_x \cdot h^{(f)}, \mathfrak{f}) = \\ & \sum_{uU_n^{(\varpi)} \in U_n/U_n^{(\varpi)}} \sum_{wU_{n-1} \in U_{n-1}/U_{n-1}^{(\varpi)}} \int_{C_{\alpha, \mathfrak{f}}} \tilde{\phi}_{\iota}(j(g) \cdot \varepsilon_x \cdot h^{(f)} ut_{(\mathfrak{p})}) \cdot \tilde{\varphi}_{\iota}(gwt_{(\mathfrak{p})}) dg = \\ & \sum_u \sum_w \int_{C_{\alpha, \mathfrak{f}}} \tilde{\phi}_{\iota}(j(g) \cdot \varepsilon_x \cdot t_{(\mathfrak{p})}^{-1} j(w)^{-1} h^{(f)} ut_{(\mathfrak{p})}) \cdot \tilde{\varphi}_{\iota}(g) dg, \end{aligned}$$

aufgrund der Tatsache, daß  $\det(t_{\mathfrak{p}})$  ein Hauptideal repräsentiert, in Verbindung mit der Rechtsinvarianz des Haar'schen Maßes und der Trivialität des zentralen Charakters von  $\sigma$ . Das zeigt, daß

$$P_{\alpha, \iota}(\varepsilon_x \cdot h^{(f)}, \mathfrak{f}) = \hat{\kappa}_{\underline{\lambda}(\mathfrak{p})}^{-1} \cdot \hat{\kappa}_{\underline{\alpha}(\mathfrak{p})}^{-1} \cdot \sum_u \sum_w P_{\alpha, \iota}(\varepsilon_x \cdot t_{(\mathfrak{p})}^{-1} t j(w)^{-1} h^{(f)} ut^{-1} t t_{(\mathfrak{p})}, \mathfrak{f}). \quad (2.3.1)$$

Nun können wir Lemma B.0.1 anwenden, denn in  $\mathcal{O}_{k_{\mathfrak{p}}}^{n \times n}$  gilt

$$tj(w)^{-1} h^{(f)} ut^{-1} = tj(w)^{-1} t^{-1} h^{(1)} t ut^{-1} \equiv h^{(1)} \pmod{\mathfrak{f}},$$

da

$$tj(w)^{-1} t^{-1} \equiv t ut^{-1} \equiv \mathbf{1}_n \pmod{\mathfrak{f}}.$$

<sup>4</sup>Alternativ könnten wir unsere Whittakerfunktionen derart normieren, daß  $\delta(\pi, \sigma) = 1$ .

<sup>5</sup>diese hängen nicht von  $\iota$  ab, denn die unmodifizierten Whittakerfunktionen sind bei  $\mathfrak{p}$  class 1.

Das beschert uns dank Proposition C.0.1, daß

$$P_{\alpha,\iota}(\varepsilon_x h^{(f)}, \mathfrak{f}) = \hat{\kappa}_{\underline{\lambda}(\mathfrak{p})}^{-1} \cdot \hat{\kappa}_{\underline{\alpha}(\mathfrak{p})}^{-1} \cdot \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{\frac{(n+1)n(n-1)+n(n-1)(n-2)}{6}} \cdot P_{\alpha,\iota}(\varepsilon_x h^{(f\varpi)}, \mathfrak{f}).$$

Mit

$$\begin{aligned} & (n+1)n(n-1) + n(n-1)(n-2) = \\ & 3n(n-1) + n(n-1)(n-2) + 3(n-1)(n-2) + (n-1)(n-2)(n-3) = \\ & 6(n-1)^2 + n(n-1)(n-2) + (n-1)(n-2)(n-3) \end{aligned}$$

erhalten wir wegen der Relation

$$P_{\alpha,\iota}(\varepsilon_x h^{(f\varpi)}, \mathfrak{f}) = \sum_{a \pmod{\mathfrak{p}}} P_{\alpha,\iota}(\varepsilon_{x+af} h^{(f\varpi)}, \mathfrak{f}\mathfrak{p})$$

hieraus schließlich

$$\mu_{\alpha}(x + \mathfrak{f}) = \sum_{a \pmod{\mathfrak{p}}} \mu_{\alpha}(x + af + \mathfrak{f}\mathfrak{p}).$$

Das zeigt die Distributionenrelation. Die Interpolationsformel folgt unmittelbar aus dem Korollar 1.2.1 des globalen Birch-Lemmas.  $\square$

Die Einschränkung an  $\mathfrak{p}$  kann durch eine modifizierte Konstruktion abgeschwächt werden, indem statt  $\mu_{\alpha_i}$  direkt die Summe

$$\mu' := \sum_{i=1}^h \mu_{\alpha_i}$$

betrachtet wird, denn diese ist invariant unter Translation. Das hat jedoch zur Folge, daß zunächst nur Charaktere integriert werden können, welche auf  $\alpha_1, \dots, \alpha_h$  konstant<sup>6</sup> sind. Sofern es zu jedem uns interessierenden Charakter  $\chi$  einen unverzweigten Charakter  $\chi_{\text{nr}}$  gibt, so daß  $\chi_{\text{nr}}\chi$  trivial auf  $\alpha_1, \dots, \alpha_h$  ist, so lassen sich durch Übergang von  $\pi$  zum Twist  $\pi \otimes \chi_{\text{nr}}^{-1}$  auf obige Weise Distributionen  $\mu'_{\chi_{\text{nr}}}$  konstruieren, welche zusammen wiederum zu einer Distribution  $\mu$  auf  $\Theta$  Anlaß geben, denn die Menge  $\{\chi_1, \dots, \chi_h\}$  der unverzweigten Charaktere hat Kardinalität  $h$  und ist  $\mathbf{C}$ -linear unabhängig [Bou98, chapitre V, §5, no. 2, Théorème 2]. Genauer ist in diesem Fall die Klassengruppe  $\mathcal{C}_k$  von  $k$  ein direkter Faktor von  $\Theta = \Theta' \times \mathcal{C}_k$  und die Iwasawa-Algebra

$$\mathbf{C}[[\Theta]] = \varprojlim \mathbf{C}[k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times / (1 + \mathfrak{f}) \prod_{v \nmid \mathfrak{f}} U_v]$$

der  $\mathbf{C}$ -wertigen Distributionen auf  $\Theta$  zerfällt kanonisch in ein Tensorprodukt  $\mathbf{C}[\mathcal{C}_k] \otimes_{\mathbf{C}} \mathbf{C}[[\Theta']]$ , [MSD74, section (7.3)]. Aufgrund der oben angesprochenen linearen Unabhängigkeit der Menge der unverzweigten Charaktere existieren Maße  $\mu_{\chi_{\text{nr}}}$  auf  $\mathcal{C}_k$  mit

$$\int_{\mathcal{C}_k} \chi_i^{-1} d\mu_{\chi_j} = \delta_{ij} \quad (\text{Kronecker-Delta}).$$

Die Distribution

$$\mu := \sum_{i=1}^h \mu_{\chi_i} \otimes \mu'_{\chi_i} \in \mathbf{C}[[\Theta]]$$

---

<sup>6</sup>und damit konstant 1

hat dann die Interpolationseigenschaft aus Satz 2.3.1 für *alle* dort betrachteten Idelklassencharaktere.

Wir verweisen jedoch auf die Tatsache, daß auf diese Weise im Allgemeinen nicht alle endlichen Primstellen behandelt werden können. Der Grund hierfür ist, daß die kurze exakte Sequenz

$$1 \rightarrow \overline{\mathcal{O}_{k,+}^\times} \backslash \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^\times \times \pi_0(k_{\mathbf{R}}^\times) \rightarrow \Theta \rightarrow \mathcal{C}_k \rightarrow 1, \quad (2.3.2)$$

im Allgemeinen nicht zerfällt. Ein einfaches Gegenbeispiel ist durch  $k = \mathbf{Q}(\sqrt{-15})$  gegeben. Hier gilt  $\mathcal{C}_k \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$  und die Strahlklassengruppe  $\mathcal{C}^p$  ist zyklisch von Ordnung 4 im Fall  $\mathfrak{p} \mid 5$  und zyklisch von Ordnung 16 im Fall  $\mathfrak{p} \mid 17$ . In letzterem Fall gilt  $\varprojlim \mathcal{C}^{p^n} = \mathbf{Z}_{17}^\times$ .

Für fast alle Primstellen stellt dies eine moderate Einschränkung dar. Schließlich enthält die Gruppe  $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^\times$  stets eine offene pro- $p$ -Gruppe  $H$  [Ser62, chapitre IV, §2, Proposition 6], wobei  $p$  die Restklassenkörpercharakteristik von  $\mathfrak{p}$  bezeichnet. Im Fall  $(p, \#\mathcal{C}_k) = 1$  besitzt daher jeder Charakter von  $H$  eine Fortsetzung auf  $\Theta$ , welche auf den Repräsentanten  $\alpha_1, \dots, \alpha_h$  als trivial angenommen werden darf. Auf diese Weise erhalten wir aufgrund der Endlichkeit von  $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^\times/H$  die Interpolationseigenschaft noch für alle Charaktere aus einer Untergruppe von endlichem Index der Charaktere mit  $\mathfrak{p}$ -Potenzführer. Damit gilt der folgende

**Satz 2.3.2.** *Sofern  $\mathfrak{p}$  die Ordnung der Klassengruppe von  $k$  nicht teilt, existiert eine Distribution  $\mu$  auf  $\theta$ , so daß die Interpolationseigenschaft aus Satz 2.3.1 für alle nichttrivialen  $\chi$  aus einer Untergruppe von endlichem Index der dort betrachteten Idelklassencharaktere gilt.*

Wie bereits bemerkt, ist der betreffende Index 1, falls die Sequenz (2.3.2) zerfällt. Andernfalls müssen wir uns auf die Untergruppe der Charaktere einschränken, welche auf den Repräsentanten  $\alpha_1, \dots, \alpha_h$  trivial sind und diese ist, unter der Voraussetzung  $\mathfrak{p} \nmid \#\mathcal{C}_k$ , stets von endlichem Index in der Gruppe aller uns interessierenden Charaktere.

Daß sich der Fall  $p \mid \#\mathcal{C}_k$  im Allgemeinen nicht mit dieser Methode behandeln läßt, zeigt das Beispiel  $k = \mathbf{Q}(\sqrt{-23})$ . Dieser imaginärquadratische Zahlkörper hat die Klassengruppe  $\mathcal{C}_k \cong \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$  und für die Strahlklassengruppen gilt  $\mathcal{C}^{p^r} \cong \mathbf{Z}/3^r\mathbf{Z}$  für alle  $r \geq 1$  falls  $\mathfrak{p} \mid 3$ . Das zeigt, daß hier  $\varprojlim \mathcal{C}^{p^r} = \mathbf{Z}_3$  gilt, weswegen  $\Theta/\pi_0(k_{\mathbf{R}}^\times)$  pro-zyklisch ist. Dieses Beispiel zeigt insbesondere, daß es möglich ist, daß *kein* nichttrivialer Charakter von  $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^\times$  einen Lift auf  $\Theta$  hat, welcher auf den Repräsentanten  $\alpha_1, \dots, \alpha_h$  trivial ist.

Schließlich sei darauf hingewiesen, daß im Grunde sämtliche bisher bekannte Konstruktionen im Sinne Mazurs unter diesem Makel leiden. Dieses Phänomen tritt beispielsweise bereits in [Man76] auf, in welcher Hilbert'sche Modulformen über total reellen Zahlkörpern diskutiert werden. Manins Konstruktion gleicht im Wesentlichen unserer. Manin argumentiert, daß die Auswirkung der Einschränkung eines Idelklassengruppencharakters  $\chi$  auf  $\mathcal{O}_{k_{\mathfrak{p}}}^\times$  eine kontrollierbare Veränderung in den jeweils getwisteten  $L$ -Funktionen bewirken würde, weswegen er unsere konstruierte Distribution  $\mu$ , welche unabhängig von der Klassengruppe existiert, als  $\mathfrak{p}$ -adisches Analogon von  $L(s, \pi \times \sigma)$  ansehen würde.

Ash und Ginzburg ignorierten in ihrer Arbeit [AG94] diese Problematik und machten im dortigen Abschnitt 2.2 implizit die Annahme, daß sich jeder Charakter von  $\mathcal{O}_{k_{\mathfrak{p}}}^\times$  auf die Idelklassengruppe fortsetzen läßt und zugleich Trivialität auf den Repräsentanten der Klassengruppe erreicht werden kann. Wie bereits bemerkt, genügt diese Annahme jedoch nicht zum Nachweis der Existenz einer Distribution mit der dort behaupteten Interpolationseigenschaft im allgemeinen Fall.

Eine weitere Analogie zwischen Manins und unserer Konstruktion ist, daß wir, ebenso wie er, statt  $\mathfrak{p}$ -Potenz-Führer allgemeiner Führer  $\mathfrak{f}$  betrachten können, deren Primteiler in einer fest gewählten endlichen Primstellenmenge  $S$  liegen. Mit unserem allgemeinen globalen Birch-Lemma und der in diesem Kapitel diskutierten Konstruktion einer Distribution  $\mu$  könnten wir analog eine Distribution konstruieren, welche Twists mit Charakteren interpoliert, die in Manins Sprechweise  $S$ -vollständig sind. Letzteres bedeutet, daß nicht nur die Führer  $\mathfrak{f}$  nur Primteiler aus  $S$  enthalten, sondern diese

Primteiler auch tatsächlich alle Teiler von  $f$  sind. In unserer Formulierung des globalen Birch-Lemmas hatten wir diese Verallgemeinerung bereits angedeutet. Der Übersichtlichkeit zuliebe haben wir uns in diesem Kapitel darauf beschränkt, den Fall  $S = \{\mathfrak{p}\}$  abzuhandeln.



# Kapitel 3

## Algebraizität und Beschränktheit der Distribution

### 3.1 Topologische Modulare Symbole

Die klassische Theorie der modularen Symbole geht auf Birch und Manin zurück. Sie studierten modulare Symbole im Kontext der Vermutung von Birch- und Swinnerton-Dyer modularer Elliptischer Kurven [Bir71, Man72, Maz72]. Mazur und Swinnerton-Dyer nutzen modulare Symbole als erste zur Konstruktion  $p$ -adischer  $L$ -Funktionen [MSD74].

Die Grundidee ist folgende. Es bezeichne  $\mathbf{H}$  die obere Halbebene, sowie  $\overline{\mathbf{H}} = \mathbf{H} \cup \mathbf{Q} \cup \{i\infty\}$ . Für  $N \geq 1$  sei  $X_0(N) = \Gamma_0(N) \backslash \overline{\mathbf{H}}$ . Für beliebige  $a, b \in \overline{\mathbf{H}}$  finden wir einen Weg  $\gamma(a, b)$  (bspw. eine Geodätische), dessen Inneres in  $\mathbf{H}$  liegt. Wir dürfen desweiteren annehmen, daß  $\gamma(a, b)$  so gutartig ist, daß für jedes holomorphe Differential  $\omega \in H^0(X, \Omega_{X/\mathbf{Q}})$  das Integral

$$\int_{\gamma(a,b)} \omega$$

konvergiert. Die Zuordnung

$$(a, b) \mapsto \left[ \omega \mapsto \int_{\gamma(a,b)} \omega \right]$$

beschert uns eine stetige Abbildung

$$\overline{\mathbf{H}}^2 \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{C}}(H^0(X_0(N), \Omega_{X/\mathbf{C}}), \mathbf{C}) \cong H_1(X_0(N), \mathbf{R}).$$

Das Bild von  $(0, a)$  unter dieser Abbildung bezeichnen wir mit  $\{a\}$  und nennen  $\{\cdot\}$  das (topologische) modulare Symbol zu  $\Gamma_0(N)$ .

Ist  $E/\mathbf{Q}$  eine elliptische Kurve und  $\varphi : X_0(N) \rightarrow E$  eine Weil'sche Parametrisierung, so erhalten wir durch Komposition mit  $\{\cdot\}$  eine Abbildung  $\varphi : \overline{\mathbf{H}} \rightarrow H_1(E, \mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{C}$ , wobei letzterer Pfeil durch Integration über ein Néron-Differential von  $E$  gegeben ist. Damit gilt die schöne Formel [Bir71, Man72, Maz72]

$$c \cdot L(E, 1) = \varphi(i\infty)$$

mit der Manin-Konstanten  $c \in \mathbf{Q}^\times$ . Für jeden nichttrivialen Dirichletcharakter  $\chi$  mit Führer  $f_\chi$  haben wir

$$c \cdot L(E, \chi, 1) = f_\chi^{-1} \chi(-1) G(\chi) \cdot \sum_{a=1}^m \overline{\chi}(a) \varphi(a),$$

wobei  $G(\chi)$  wie üblich die Gaußsumme bezeichnet. Diese Beobachtung begründet die Bedeutung modularer Symbole beim Studium spezieller Werte von  $L$ -Funktionen. Der folgende Abschnitt stellt eine Verallgemeinerung dieses Sachverhaltes dar.

### 3.2 Kohomologie Arithmetischer Quotienten

Es ist möglich, die Methoden von [KMS00, Section 3] nahezu wortwörtlich auf unseren Fall zu übertragen. Um die Darstellung möglichst klar zu halten, beginnen wir daher mit einer allgemeinen Behandlung der Situation für beliebige reductive Gruppen.

#### Allgemeine Faserzerlegung symmetrischer Räume

Zunächst sei  $G$  eine zusammenhängende lineare algebraische Gruppe über einem Körper  $k$ . Es bezeichne  $X_k(G)$  den  $\mathbf{Z}$ -Modul der Charaktere  $\alpha : G \rightarrow \mathbf{G}_m$ , welche über  $k$  definiert sind. Wir definieren die Gruppe

$${}^0G := \bigcap_{\alpha \in X_k(G)} \text{Kern } \alpha^2.$$

Das Quadrieren findet seine Motivation in der Tatsache, daß  $\mathbf{R}^\times$  zwei Zusammenhangskomponenten besitzt. Die Gruppe  ${}^0G$  ist normal in  $G$  und über  $k$  definiert. Die Einschränkung eines jeden  $\alpha \in X_k(G)$  auf  ${}^0G$  ist höchstens von Ordnung 2, mithin auf  $({}^0G)^0$  trivial. Daher gilt

$$({}^0G)^0 = \left( \bigcap_{\alpha \in X_k(G)} \text{Kern } \alpha \right)^0. \quad (3.2.1)$$

Es sei  $L$  eine Levi-Untergruppe von  $G$  über  $k$ . Dann gilt

$$G = \mathcal{R}_u G \rtimes L,$$

weswegen

$${}^0G = \mathcal{R}_u G \rtimes {}^0L,$$

denn jeder Charakter von  $G$  verschwindet auf dem unipotenten Radikal von  $G$ .

Der Grund für unser Interesse an  ${}^0G$  liegt in der folgenden

**Proposition 3.2.1.** *Es sei  $G$  eine zusammenhängende lineare algebraische Gruppe über  $\mathbf{Q}$ . Es bezeichne  $S$  einen maximalen über  $\mathbf{Q}$  zerfallenden Torus im Radikal von  $G$ . Dann gilt*

$$G(\mathbf{R}) = {}^0G(\mathbf{R}) \rtimes S(\mathbf{R})^0.$$

Die Gruppe  ${}^0G(\mathbf{R})$  enthält jede kompakte Untergruppe als auch jede arithmetische Untergruppe von  $G(\mathbf{R})$ .

*Beweis.* [BS73, Proposition 1.2]. □

Es sei darauf hingewiesen, daß es nicht notwendig erscheint, mehr Fasern abzuspalten, sofern wir arithmetische Quotienten betrachten wollen. Dies kann sich der interessierte Leser am Beispiel  $G = \text{Res}_{\mathbf{Q}(\sqrt{d})/\mathbf{Q}} \mathbf{G}_m$  überlegen, wobei  $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$  ein reeller quadratischer Zahlkörper ist.

Nun sei  $G$  zusammenhängend und reduktiv, definiert über  $\mathbf{Q}$ . Es bezeichne  $Z := \mathcal{C}(G)^0$  die Zusammenhangskomponente der 1 des Zentrums von  $G$ . Dieses ist bereits über  $\mathbf{Q}$  definiert [BT65, 2.15,



a)]. Es gilt  $G = G^{\text{der}} \cdot Z$  und  $Z \cap G^{\text{der}}$  ist endlich [BT65, Proposition 2.2]. Desweiteren ist  $Z \cap G^{\text{der}} = Z^1$  das Zentrum von  $G^{\text{der}}$  [Che05, Section 4.4, Corollaire de la Proposition 2]. Wir haben daher folgendes kommutatives Diagramm algebraischer Gruppen über  $\mathbf{Q}$  mit exakten Zeilen und Spalten

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & Z & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & G & & \\
 1 & \longrightarrow & G^{\text{der}} & \xrightarrow{i} & G & \xrightarrow{p} & T \longrightarrow 1 \\
 & & \parallel & & \downarrow \text{ad} & & \\
 1 & \longrightarrow & Z^1 & \longrightarrow & G^{\text{der}} & \xrightarrow{\text{ad}^1} & G^{\text{ad}} \longrightarrow 1 \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & 1 & & 
 \end{array}$$

mit einem  $\mathbf{Q}$ -Torus  $T$ , welcher ein isogenes Bild von  $Z$  unter  $p$  ist. Der Torus  $S$  aus der Proposition ist der maximale über  $\mathbf{Q}$  zerfallende Torus in  $Z$  und damit unter  $p$  isogen zum maximalen über  $\mathbf{Q}$  zerfallenden Torus in  $T$  [BHC62, Proposition 13.2].

**Proposition 3.2.2.** *Es sei  $G$  eine zusammenhängende reductive algebraische Gruppe über  $\mathbf{Q}$ . Dann ist  ${}^0G$  reaktiv und es gilt*

$$X_{\mathbf{Q}}({}^0G) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} = 0.$$

*Beweis.* Aus obigem Diagramm ergibt sich, daß  ${}^0G$  von der halbeinfachen Gruppe  $G^{\text{der}}$  und einem zentralen Torus erzeugt wird, weswegen es reaktiv ist [BT65, Proposition 2.2].

Um die zweite Behauptung zu beweisen, betrachten wir das folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen.

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \longrightarrow & G^{\text{der}} & \xrightarrow{i} & G & \xrightarrow{p} & T \longrightarrow 1 \\
 & & \parallel & & \uparrow i & & \uparrow j \\
 1 & \longrightarrow & G^{\text{der}} & \longrightarrow & ({}^0G)^0 & \xrightarrow{{}^0p} & A \longrightarrow 1
 \end{array}$$

Dabei bezeichnen  $i$  und  $j$  die kanonischen Monomorphismen und  $A$  ist ein  $\mathbf{Q}$ -Torus. Das Zurückziehen via  $p$  und  ${}^0p$  induziert kanonische Isomorphismen

$$X_{\mathbf{Q}}(T) \cong X_{\mathbf{Q}}(G)$$

und

$$X_{\mathbf{Q}}(A) \cong X_{\mathbf{Q}}\left({}^0G\right)^0.$$

Andererseits induziert  $j$  einen Morphismus

$$j^* : X_{\mathbf{Q}}(T) \rightarrow X_{\mathbf{Q}}(A)$$

mit endlichem Kokern [BHC62, Lemma 8.4, Proposition 13.2]. Nun ist jedes  $\alpha \in X_{\mathbf{Q}}(G)$  auf  $({}^0G)^0$  trivial (vgl. Gleichung (3.2.1)). Daher ist auch das Bild von  $j^*$  trivial, mithin ist  $X_{\mathbf{Q}}(A)$  trivial, was zu zeigen war.  $\square$

Nun sei  $K$  eine maximale kompakte Untergruppe von  $G(\mathbf{R})$  und  $\mathcal{X} = G(\mathbf{R})/K$  der hierzu assoziierte symmetrische Raum. Die Inklusionen  ${}^0G(\mathbf{R})^0 \rightarrow ({}^0G)^0(\mathbf{R})$ ,  $({}^0G)^0(\mathbf{R}) \rightarrow {}^0G(\mathbf{R})$  und  ${}^0G(\mathbf{R}) \rightarrow G(\mathbf{R})$  induzieren Inklusionen

$${}^0G(\mathbf{R})^0/{}^0G(\mathbf{R})^0 \cap K \longrightarrow ({}^0G)^0(\mathbf{R})/({}^0G)^0(\mathbf{R}) \cap K \longrightarrow {}^0G(\mathbf{R})/K =: {}^0\mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$$

der assoziierten symmetrischen Räume. Nach [Mos55, Theorem 3.1, (1)] existiert eine kompakte Untergruppe  $H$  von  $G(\mathbf{R})$  mit  $G(\mathbf{R}) = G(\mathbf{R})^0H$  weswegen die ersten beiden Inklusionen in der Tat Diffeomorphismen sind [Mos55, Theorem 3.1, (2)].

### Siegel-Bereiche und Wachstumsbedingungen

Es sei  $G$  eine zusammenhängende isotrope Gruppe über  $\mathbf{Q}$  mit  $X_{\mathbf{Q}}(G) = 1$ . Es bezeichne  $P$  eine minimale parabolische  $\mathbf{Q}$ -Untergruppe von  $G$  und  $U$  ihr unipotentes Radikal. Weiterhin sei  $K$  eine maximale kompakte Untergruppe von  $G(\mathbf{R})$  und  $\theta$  die Cartan-Involution zu  $K$  im Sinne von [BS73, Proposition 1.6, Definition 1.7]. Dann existiert über  $\mathbf{Q}$  eine eindeutig bestimmte  $\theta$ -invariante Levi-Untergruppe  $M$  in  $P$  [BS73, Corollary 1.9]. Es bezeichne weiterhin  $S := M \cap \mathcal{R}_d(P)$  den maximalen über  $\mathbf{Q}$  zerfallenden Torus im Radikal von  $P$ , welcher invariant unter  $\theta$  ist.

Schließlich bezeichne  $\Phi_{\mathbf{Q}}(S, P) \subseteq X_{\mathbf{Q}}(S)$  die relativen Wurzeln von  $P$  bezüglich  $S$ . Hierbei sei  $X_{\mathbf{Q}}(S)$  die Charaktergruppe von  $S$  über  $\mathbf{Q}$ . Mit  $\Delta \subseteq \Phi_{\mathbf{Q}}(S, P)$  bezeichnen wir die Menge der einfachen Wurzeln<sup>1</sup> in  $\Phi_{\mathbf{Q}}(S, P)$ . Dann ist  $\Delta$  eine Basis des relativen Wurzelsystems  $\Phi_{\mathbf{Q}}(S, G)$  und definiert als solche eine Ordnung  $\geq$  auf letzterem, bezüglich welcher  $\Phi_{\mathbf{Q}}(S, P)$  gerade die positiven Wurzeln sind.

Es sei  $\Gamma \subseteq G(\mathbf{R})$  eine arithmetische Untergruppe und es bezeichne  $\mathcal{X} = G(\mathbf{R})/K$  den zu  $K$  assoziierten symmetrischen Raum. Als reduktive Gruppe besitzt  $G(\mathbf{R})$  eine Iwasawa-Zerlegung im Sinne von [BHC62, Section 1.11]. Diese modifizieren wir wie in [HC68, BS73, Bor74], um arithmetische Quotienten studieren zu können. Es sei darauf hingewiesen, daß wir von einer mit der links- $G(\mathbf{R})$ -Operation auf  $\mathcal{X}$  kompatiblen Zerlegung ausgehen, im Gegensatz zur in obigen Arbeiten studierten rechts-Operation.

Es sei  $A := S(\mathbf{R})^0$ , dann ist  $A$  unter  $\theta$  invariant. Wir fassen die Charaktere  $\alpha \in X_{\mathbf{Q}}(S)$  auch als Homomorphismen  $\alpha : A \rightarrow \mathbf{R}_{>0}$  auf. Wir definieren damit für  $t > 0$

$$A_t := \{a \in A \mid \forall \alpha \in \Delta : \alpha(a) \geq t\}.$$

Nach [BS73, Proposition 1.2] haben wir wie in [Bor74, Section 4.2]

$$P(\mathbf{R}) = {}^0P(\mathbf{R}) \rtimes A.$$

Weiterhin gilt

$${}^0P = U \rtimes {}^0M,$$

so daß wir damit die Zerlegung

$$U(\mathbf{R}) ({}^0M(\mathbf{R})) AK = G(\mathbf{R}) \tag{3.2.2}$$

erhalten. In dieser ist  $a \in A$  durch  $g \in G(\mathbf{R})$  eindeutig bestimmt und die Zuordnung  $g \mapsto a$  ist reellanalytisch [BS73, Proposition 1.5]. Mit der maximalen kompakten Untergruppe

$$K_P := K \cap P(\mathbf{R}) = K \cap {}^0M(\mathbf{R})$$

in  $P(\mathbf{R})$  und  ${}^0M(\mathbf{R})$  definieren wir weiterhin

$$Z := {}^0M(\mathbf{R})/K_P$$

<sup>1</sup>das bedeutet, daß jedes  $\alpha \in \Phi_{\mathbf{Q}}(S, P)$  eine eindeutige Darstellung  $\alpha = \sum_{\beta \in \Delta} n_{\beta} \beta$  mit ganzzahligen  $n_{\beta} \geq 0$  hat.

und erhalten einen kanonischen Diffeomorphismus

$${}^0P(\mathbf{R})/K_P \cong U(\mathbf{R}) \times Z.$$

Nun definiert  $K$  einen Punkt  $o$  in  $\mathcal{X}$  (wir können einen beliebigen Fixpunkt von  $K$  wählen) und wir erhalten einen Isomorphismus

$$\begin{aligned} \mu_o : Y := U(\mathbf{R}) \times Z \times A &\rightarrow \mathcal{X}, \\ (u, z, a) &\mapsto uza \cdot o. \end{aligned}$$

Wir identifizieren im Folgenden  $U(\mathbf{R}) \times Z \times A$  mit seinem Bild unter  $\mu_o$ . Im Sinne von [Bor81, section 3.2] haben wir die

**Definition 3.2.3.** Wir nennen ein  $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{X})$  von *moderatem Wachstum*, falls es zu jedem Kompaktum  $\omega \subseteq U(\mathbf{R}) \times Z$  und jedem  $t > 0$  ein  $C > 0$  und ein  $\lambda \geq 0$  gibt mit

$$\forall (x, a) \in \omega \times A_t : |\phi(xa)| \leq C \cdot \lambda(a). \quad (3.2.3)$$

Falls es zu beliebigen  $\omega, t$  und  $\lambda \in X_{\mathbf{Q}}(S)$  ein  $C > 0$  gibt, so daß Gleichung (3.2.3) gilt, so heißt  $\phi$  *schnell fallend*.

Es sei  $\mathfrak{g} := \text{Lie}(G(\mathbf{R}))$  und

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$$

die Cartan-Zerlegung von  $\mathfrak{g}$  bezüglich  $\theta$ . Das bedeutet, daß  $\mathfrak{p}$  der  $(-1)$ -Eigenraum der Operation von  $\theta$  auf  $\mathfrak{g}$  ist. Wir schreiben  $d := \dim_{\mathbf{R}} \mathfrak{p} = \dim_{\mathbf{R}} \mathcal{X}$  und wählen eine Basis  $\omega_1, \dots, \omega_d$  der invarianten 1-Formen  $\mathfrak{p}^*$  bestehend aus Maurer-Cartan-Formen. Desweiteren definieren wir für jede  $r$ -elementige Teilmenge

$$I = \{i_1, \dots, i_r\} \subseteq \{1, \dots, d\}$$

die  $r$ -Form

$$\omega_I := \omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_r},$$

wobei  $i_1 < i_2 < \dots < i_r$ . Eine Differentialform

$$\eta = \sum_I \omega_I \otimes \phi_I \in \Omega^r(\mathcal{X})$$

nennen wir *von moderatem Wachstum* beziehungsweise *schnell fallend*, falls alle  $\phi_I$  diese Eigenschaft haben.

Wie Borel bezeichnen wir mit  $\Omega_{\text{mg}}^\bullet(\Gamma \backslash \mathcal{X})$  (beziehungsweise  $\Omega_{\text{fd}}^\bullet(\Gamma \backslash \mathcal{X})$ ) den Unterkomplex von  $\Omega^\bullet(\Gamma \backslash \mathcal{X})$  der Formen  $\eta$ , welche gemeinsam mit ihrem äußeren Differential  $d\eta$  von moderatem Wachstum (beziehungsweise schnell fallend) sind.

Wir bezeichnen eine Funktion  $\phi$  auf  $G(\mathbf{R})$  als *schnell fallend* (beziehungsweise *von moderatem Wachstum*), falls es einen  $\mathbf{Q}$ -Morphismus  $\rho : G \rightarrow \text{GL}_n$  mit endlichem Kern gibt, so daß es für alle  $\mu \in \mathbf{Z}$  (beziehungsweise ein  $\mu \geq 0$ ) ein  $C > 0$  gibt, so daß für jedes  $x \in G(\mathbf{R})$

$$|\phi(x)| \leq C \cdot \|x\|^\mu$$

mit

$$\|x\| := \text{tr}(\rho(x)^t \cdot \rho(x))^{1/2}$$

gilt. Nach [Bor81, Proposition 3.10, (ii)] und [HC68, §3, Lemmas 5 and 6] ist ein  $\phi$  auf  $\Gamma \backslash \mathcal{X}$  genau dann von moderatem Wachstum (beziehungsweise schnell fallend), wenn dies auf seinen Pullback auf  $G(\mathbf{R})$  zutrifft.

Insbesondere sehen wir, daß diese Wachstumsbegriffe intrinsisch definiert sind und nicht von den speziellen Wahlen abhängen. Desweiteren erhalten wir aus

$$\forall x, y \in G(\mathbf{R}) : \|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

die Tatsache, daß mit  $\phi$  auch links- und rechts-Translate von moderatem Wachstum beziehungsweise schnell fallend sind.

### Modulare Symbole

Es sei  $H$  nun eine beliebige reductive Gruppe. Es bezeichne  $T$  den maximalen über  $\mathbf{Q}$  zerfallenden zentralen Torus in  $H$ . Nach Proposition 1.2 in [BS73] gilt damit

$$H(\mathbf{R}) = {}^0H(\mathbf{R}) \times T(\mathbf{R})^0.$$

Ist  $\mathcal{Y}$  ein symmetrischer Raum zu  $H(\mathbf{R})$  zur maximalen kompakten Untergruppe  $K'$ , so erhalten wir eine kanonische Zerlegung

$$\mathcal{Y} = {}^0\mathcal{Y} \times T(\mathbf{R})^0,$$

wobei

$${}^0\mathcal{Y} := {}^0H(\mathbf{R})/K',$$

denn  $K'$  ist in  ${}^0H(\mathbf{R})$  enthalten [BS73, Proposition 1.2]. Letztere Gruppe enthält auch alle arithmetischen Untergruppen  $\Gamma'$  von  $H(\mathbf{R})$ , weswegen wir eine kanonische Zerlegung

$$\Gamma' \backslash \mathcal{Y} = \Gamma' \backslash {}^0\mathcal{Y} \times \mathbf{R}^r$$

erhalten, wobei die Identifikation  $T(\mathbf{R})^0 \cong \mathbf{R}^r$  via des natürlichen Logarithmus  $\log : \mathbf{R}_{>0} \rightarrow \mathbf{R}$  immer noch von der Wahl einer Basis von  $\text{Lie}(T(\mathbf{R}))^*$  abhängt.

**Proposition 3.2.4.** *Es seien  $G$  und  $H$  zusammenhängende reductive algebraische Gruppen über  $\mathbf{Q}$ ,  $X_{\mathbf{Q}}(G) = 1$ ,  $\Gamma$  und  $\Gamma'$  arithmetische Untergruppen von  $G(\mathbf{R})$  und  $H(\mathbf{R})$  und  $s : H \rightarrow G$  ein zentraler<sup>2</sup> Morphismus mit  $\mathbf{R}$ -anisotropem Kern. Seien weiterhin  $\mathcal{X}$  und  $\mathcal{Y}$  assoziierte symmetrische Räume und  $g \in G(\mathbf{Q})$ , so daß  $s$  einen Morphismus*

$$\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}, \quad y \mapsto s(y)$$

*symmetrischer Räume induziert, welcher seinerseits auf den arithmetischen Quotienten eine Abbildung*

$$s_g : \Gamma' \backslash \mathcal{Y} \rightarrow \Gamma \backslash \mathcal{X}, \quad \Gamma' y \mapsto \Gamma g \cdot s(y)$$

*induziert.*

*Für jedes  $\eta \in \Omega_{\text{fd}}^q(\Gamma \backslash \mathcal{X})$  läßt sich  $\delta(s_g)(\eta)$  entlang der Fasern von*

$$\Gamma' \backslash \mathcal{Y} = \Gamma' \backslash {}^0\mathcal{Y} \times \mathbf{R}^r$$

*integrieren, wobei  $r = \text{rang}_{\mathbf{Q}} \mathcal{C}(Y)$ . Insbesondere erhalten wir durch diese Integration eine Form*

$$s_{g,*}(\eta) \in \Omega_{\text{mg}}^{q-r}(\Gamma' \backslash {}^0\mathcal{Y}).$$

*Die Abbildung  $s_{g,*}$  ist ein Morphismus von Kettenkomplexen und induziert insbesondere einen Morphismus der Kohomologien.*

---

<sup>2</sup>Diese Voraussetzung dient nur der Formulierung, da sie erzwingt, daß der Kern bereits über  $\mathbf{Q}$  definiert ist. Sie umfaßt unsere spätere Anwendung. Die Proposition, ebenso wie ihr Beweis, gilt unverändert genauso unter der allgemeineren Voraussetzung, daß der Kern von  $s$  über  $\mathbf{R}$  definiert und  $\mathbf{R}$ -anisotrop ist.

*Beweis.* Wir übernehmen die Notation des vorangehenden Abschnitts. Da mit  $f$  auch  $h \mapsto f(gh)$  schnell fallend ist und die 1-Formen  $\omega_1, \dots, \omega_d$  links-invariant sind, dürfen wir  $g = 1$  annehmen<sup>3</sup>.

Es bezeichne  $\theta$  und  $\theta'$  die entsprechenden Cartan-Involutionen zu  $\mathcal{X}$  und  $\mathcal{Y}$ , sowie  $K$  und  $K'$  die entsprechenden maximalen kompakten Untergruppen. Dann ist  $K \cap s(H(\mathbf{R}))$  eine maximale kompakte Untergruppe von  $s(H(\mathbf{R}))$ , denn dieser Schnitt enthält nach Voraussetzung die kompakte Gruppe  $s(K')$  und desweiteren ist  $s$  aufgrund seines  $\mathbf{R}$ -anisotropen und damit über  $\mathbf{R}$  kompakten Kernes [BT65, Corollaire 9.4] eigentlich. Wir schließen hieraus, daß  $\theta$  und  $\theta'$  auf dem Bild von  $s$  jeweils Cartan-Involutionen induzieren, welche gemäß [BS73, Proposition 1.6] übereinstimmen. Daher ist  $s$  mit den Cartan-Involutionen verträglich, das heißt, daß  $\theta \circ s = s \circ \theta'$  gilt.

Es bezeichne  $T$  den maximalen zentralen über  $\mathbf{Q}$  zerfallenden Torus in  $H$ . Dann ist  $s(T)$  ein zu  $T$  isogener Torus [Bor56, Théorème 9.3], welcher ebenfalls zerfällt [BHC62, Proposition 13.2]. Daher ist  $s(T)$  in einem maximalen über  $\mathbf{Q}$  zerfallenden Torus  $T'$  von  $H$  enthalten. Dann ist  $T'$  und damit auch  $s(T)$  in einer minimalen parabolischen  $\mathbf{Q}$ -Untergruppe  $P$  von  $G$  enthalten [BT65, Théorème 4.15, (a) et Théorème 4.21]. Aufgrund der  $\theta'$ -Invarianz von  $T(\mathbf{R})$  ist  $s(T(\mathbf{R}))$  nach obiger Diskussion  $\theta$ -invariant und insbesondere in der eindeutig bestimmten  $\theta$ -invarianten Levi-Untergruppe  $M/\mathbf{Q}$  von  $P$  enthalten. Wir erhalten mit  $S := M \cap \mathcal{R}_d(P)$  einen maximalen über  $\mathbf{Q}$  zerfallenden  $\theta$ -invarianten Torus im Radikal von  $P$ , welcher  $s(T)$  enthält.

Es seien

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p},$$

und

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{q},$$

die Cartan-Zerlegungen der Liegruppen von  $G(\mathbf{R})$  und  $H(\mathbf{R})$ . Dabei bezeichne  $\mathfrak{k}$  und  $\mathfrak{l}$  die 1-Eigenräume von  $L(\theta)$  und  $L(\theta')$ , entsprechend sind  $\mathfrak{p}$  und  $\mathfrak{q}$  die  $(-1)$ -Eigenräume. Wie zuvor sei

$$\omega_1, \dots, \omega_d$$

eine Basis aus Maurer-Cartan-Formen von  $\mathfrak{p}^*$  und entsprechend

$$\omega'_1, \dots, \omega'_{d'}$$

eine Basis aus Maurer-Cartan-Formen von  $\mathfrak{q}^*$ . Wir dürfen annehmen, daß für  $1 \leq i \leq d'$

$$\delta(s)(\omega_i) = L(s)^*(\omega_i) = \omega'_i$$

und für  $d' < j \leq d$

$$\delta(s)(\omega_j) = L(s)^*(\omega_j) = 0,$$

denn  $L(s)$  ist injektiv.

Nun sei

$$\eta = \sum_I \omega_I \otimes f_I \in \Omega_{\text{fd}}^q(\Gamma \backslash \mathcal{X}).$$

Dann gilt

$$\delta(s)(\eta) = \sum_{I'} \omega_{I'} \otimes (\phi_{I'} \circ s),$$

wobei  $I'$  die selben Teilmengen von  $\{1, \dots, d'\}$  wie  $I$  durchläuft, denn im Fall  $I \not\subseteq \{1, \dots, d'\}$  gilt aufgrund unserer Basiswahl  $\delta(s)(\omega_I) = 0$ .

<sup>3</sup>genau genommen ersetzen wir hierbei  $\Gamma$  durch  $g^{-1}\Gamma g$ .

Entsprechend unserer Wahl der Maurer-Cartan-Formen wählen wir Integrationsparameter  $a_1^{-1}da_1, \dots, a_r^{-1}da_r$ , welche  $\omega_{d-r+1}, \dots, \omega_d$  und zugleich den einzelnen zu integrierenden Fasern entsprechen. Dabei seien die Fasern mittels einer dualen Basis  $\Delta^{!*} \subseteq \Phi_{\mathbf{Q}}(T, H)^*$  parametrisiert.

Integration von  $\delta(s)(\eta)$  entlang der Fasern bedeutet, daß wir sämtliche  $\phi_{I'} \circ s$  mit  $\{d' - r + 1, \dots, d'\} \subseteq I'$  zu integrieren haben. Alle anderen Summanden werden per definitionem auf 0 abgebildet.

Sei nun ein solches  $I'$  gegeben. Wir haben für jedes  $h \in H(\mathbf{R})$  das Integral

$$\int_{\mathbf{R}_{>0}^r} \phi_{I'}(s(h)s(\lambda_1^{!*}(a_1) \cdots \lambda_r^{!*}(a_r))) \frac{da_1}{a_1} \cdots \frac{da_r}{a_r}$$

zu betrachten, wobei  $\lambda_1^{!*}, \dots, \lambda_r^{!*} \in \Delta^{!*}$  die entsprechende Basis der Kocharaktere von  $T$  durchläuft. Aufgrund der Wahl von  $S$  gilt

$$s(\lambda_1^{!*}(a_1) \cdots \lambda_r^{!*}(a_r)) \in S(\mathbf{R})^0$$

und da  $s$  eine Isogenie von  $T$  auf einen Untertorus  $S'$  von  $S$  induziert, dürfen wir, modulo Orientierung und Multiplikation mit der Kardinalität des endlichen Kernes dieser Isogenie, direkt das Integral

$$\int_{\mathbf{R}_{>0}^r} \phi_{I'}(s(h)\lambda_1^{*}(a_1) \cdots \lambda_r^{*}(a_r)) \frac{da_1}{a_1} \cdots \frac{da_r}{a_r}$$

auswerten, wobei  $\mathbf{R}_{>0}^r$  hier  $S'(\mathbf{R})^0$  via der dualen einfachen Wurzeln  $\lambda_1^*, \dots, \lambda_r^* \in (\Phi_{\mathbf{Q}}(S', P) \cap \Delta)^*$  parametrisiert.

Es sei

$$a(h) := \mu_o^{-1}(s(h)K) \in S(\mathbf{R})^0$$

die Projektion von  $s(h)$  auf den Faktor  $A = S(\mathbf{R})^0$  der Zerlegung (3.2.2). Dann ist  $h \mapsto a(h)$  eine glatte Abbildung  $H(\mathbf{R}) \rightarrow A$  (bspw. [BS73, Proposition 1.5]).

Nach Voraussetzung ist  $\phi_{I'}$  schnell fallend, weswegen es gemäß (3.2.3) für alle  $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbf{Z}$  und jedes  $t > 0$  ein  $C > 0$  gibt mit

$$\forall a_1, \dots, a_r \geq t : |\phi_{I'}(s(h)\lambda_1^{*}(a_1) \cdots \lambda_r^{*}(a_r))| \leq C \cdot a_1^{\alpha_1} \cdots a_r^{\alpha_r} \cdot \lambda_1(a(h))^{\alpha_1} \cdots \lambda_r(a(h))^{\alpha_r}.$$

Dabei ist  $C$  ohne Einschränkung in einer (kompakten) Umgebung von  $h$  konstant. Dies zeigt unmittelbar die absolute Konvergenz, als auch die Beschränktheit des Integrals auf den  $2^r$  Segmenten  $X_1 \times \cdots \times X_r$  mit  $X_i \in \{(0; \lambda_i(a(h))^{-1}], (\lambda_i(a(h))^{-1}; \infty)\}$ . Die resultierende Funktion  $\check{\phi}_{I'}$  ist also insbesondere selbst beschränkt und daher von moderatem Wachstum. Wir erhalten damit eine Differentialform

$$s_{g,*}(\eta) := \sum_{\#\check{I}=q-r} \omega'_{\check{I}} \otimes \check{\phi}_{\check{I} \cup \{1, \dots, r\}} \in \Omega_{\text{mg}}^{q-r}(\Gamma' \setminus \mathcal{Y}),$$

wobei die Summe über diejenigen Indizes läuft, so daß  $\{1, \dots, r\} \cap \check{I} = \emptyset$ . Dann ist  $\omega'_{\check{I}}$  die Form, welche entsteht, wenn wir in  $\omega'_{\check{I} \cup \{1, \dots, r\}}$  sämtliche  $a_1^{-1}da_1, \dots, a_r^{-1}da_r$  streichen.

Aufgrund der absoluten Konvergenz unseres Integrals läßt sich  $s_{g,*}$  als Komposition der sukzessiven Integrationen über die einzelnen invarianten Differentiale  $a_1^{-1}da_1, \dots, a_r^{-1}da_r$  verstehen. Jede einzelne solche Integration liefert analog zum klassischen Poincaré'schen Lemma einen Morphismus von Komplexen vom Grad  $-1$ . Hierzu bleibt lediglich zu bemerken, daß

$$d(s_{g,*}(\eta)) = s_{g,*}(d\eta),$$

von moderatem Wachstum ist, da  $d\eta$  nach Definition schnell fallend ist. Das schließt den Beweis des Lemmas ab.  $\square$

Für spätere Zwecke beweisen wir noch folgendes

**Lemma 3.2.5.** *Es sei  $G$  eine zusammenhängende reductive algebraische Gruppe über  $\mathbf{Q}$  mit  $X_{\mathbf{Q}}(G) = 1$ . Es seien weiterhin  $\Gamma$  eine arithmetische und  $K$  eine maximale kompakte Untergruppe von  $G(\mathbf{R})$ , sowie  $\Gamma^1$  eine arithmetische und  $K^1$  eine maximale kompakte Untergruppe von  $G^{\text{ad}}(\mathbf{R})$  mit  $\text{ad}(\Gamma) \subseteq \Gamma^1$  und  $\text{ad}(K) \subseteq K^1$ . Dann ist die von  $\text{ad}$  induzierte Abbildung*

$$p : \Gamma \backslash \mathcal{X} \rightarrow \Gamma^1 \backslash \mathcal{X}^1$$

auf den assoziierten arithmetischen Quotienten der symmetrischen Räume eigentlich.

*Beweis.* Wir bemerken zunächst, daß  $\text{ad}(\Gamma)$  von endlichem Index in  $\Gamma^1$  ist, denn  $\text{ad}(\Gamma)$  ist eine arithmetische Untergruppe von  $G^{\text{ad}}(\mathbf{R})$  [Bor66, §5, Theorem 6]. Da  $G$  reaktiv ist, ist  $G$  isogenes Bild von  $G^{\text{der}} \times Z$  mit  $Z := \mathcal{C}(G)^0$  [BT65, Proposition 2.2]. Andererseits ist  $G^{\text{ad}}$  ein isogenes Bild von  $G^{\text{der}}$ . Wir erhalten mit  $\Gamma_1 := \Gamma \cap G^{\text{der}}(\mathbf{R})$ ,  $K_1 := K \cap G^{\text{der}}(\mathbf{R})$ ,  $\Gamma_2 := \Gamma \cap Z(\mathbf{R})$ ,  $K_2 := K \cap Z(\mathbf{R})$  also eine kanonische Abbildung

$$p' : \Gamma_1 \backslash G^{\text{der}}(\mathbf{R}) / K_1 \times \Gamma_2 \backslash Z(\mathbf{R}) / K_2 \rightarrow \Gamma^1 \backslash \mathcal{X}^1, \\ (\Gamma_1 x K_1, \Gamma_2 y K_2) \mapsto \Gamma^1 \text{ad}(xy) K^1.$$

Diese faktorisiert in natürlicher Weise über  $\Gamma \backslash \mathcal{X}$ , genauer gilt  $p' = p \circ p''$ , wobei  $p''$  analog definiert ist. Dabei ist  $p''$  surjektiv, denn es wird von einem Epimorphismus  $(G^{\text{der}} \times Z)(\mathbf{R})^0 \rightarrow G(\mathbf{R})^0$  induziert<sup>4</sup>.

Nun ist  $\Gamma_1 \times \Gamma_2$  eine arithmetische Untergruppe von  $G^{\text{der}} \times Z$ , weswegen  $p''$  eigentlich ist [Bor66, §5, Theorem 6]. Nach [Bou74, chapitre I, §10, section 1, Proposition 5] genügt es daher, zu zeigen, daß  $p'$  eigentlich ist. Hierzu bemerken wir zunächst, daß die kanonische Abbildung

$$p'_1 : \Gamma_1 \backslash G^{\text{der}}(\mathbf{R}) / K_1 \rightarrow \Gamma^1 \backslash \mathcal{X}^1$$

eigentlich ist. Wir zeigen schließlich, daß

$$\Gamma_2 \backslash Z(\mathbf{R})$$

kompakt ist, was den Beweis abschließen wird. Unser Argument ist nichts anderes als eine Verallgemeinerung des klassischen Dirichlet'schen Einheitensatzes<sup>5</sup> [Wei67, chapter V, §4]. Über  $\mathbf{R}$  zerfällt  $Z$  in ein (fast-)Produkt eines  $\mathbf{R}$ -zerfallenden Torus  $T_{\text{d}}$  und eines  $\mathbf{R}$ -anisotropen Torus  $T_{\text{a}}$  [BHC62, Proposition 13.2]. Es ist  $T_{\text{a}}(\mathbf{R})$  kompakt [BT65, Corollaire 9.4] und  $\Gamma_{\text{d}} := \Gamma_2 \cap T_{\text{d}}(\mathbf{R})$  ist eine diskrete Untergruppe in  $T_{\text{d}}(\mathbf{R})$ . Aufgrund der Voraussetzung  $X_{\mathbf{Q}}(G) = 1$  gilt auch  $X_{\mathbf{Q}}(Z) = 1$ , weswegen  $\Gamma_2 \backslash Z(\mathbf{R})$  insbesondere endliches invariantes Maß hat [BHC62, Theorem 9.4]. Daher hat auch  $\Gamma_{\text{d}} \backslash T_{\text{d}}(\mathbf{R})$  endliches invariantes Maß, was zeigt, daß  $\Gamma_{\text{d}}$  ein *vollständiges Gitter* in  $T_{\text{d}}(\mathbf{R})$  ist. Daher ist  $\Gamma_{\text{d}} \backslash T_{\text{d}}(\mathbf{R})$  insbesondere kompakt, was zu zeigen war.  $\square$

Es sei darauf hingewiesen, daß sich als unmittelbares Korollar eine analoge Aussage ergibt, sofern wir  $G^{\text{ad}}(\mathbf{R})^0$  durch eine beliebige reelle Lie-Gruppe  $G'$  ersetzen, so daß  $G(\mathbf{R})^0 \rightarrow G^{\text{ad}}(\mathbf{R})^0$  über  $G'$  faktorisiert und  $G(\mathbf{R})^0 \rightarrow G'$  ein Epimorphismus ist [Bou74, Chapitre I, §10, Section 1, Proposition 5].

Wir fassen den arithmetischen Quotienten  $\Gamma \backslash {}^0\mathcal{X}$  als arithmetischen Quotienten von  $({}^0G)^0$  auf. Daher hat dieser nach Proposition 3.2.2 und [BHC62, Theorem 9.4] endliches invariantes Maß und nach [Bor81, Theorem 5.2] induziert die kanonische Inklusion  $\Omega_{\mathbf{c}}^{\bullet} \rightarrow \Omega_{\text{fd}}^{\bullet}$  einen Isomorphismus der

<sup>4</sup>denn dieser wird wiederum von der Isogenie  $G^{\text{der}} \times Z \rightarrow G$  induziert. Diese Isogenie induziert Epimorphismen auf den Tangentialräumen der Neutralelemente der reellwertigen Gruppen. Weiterhin ist ein Verweis auf [Mos55, Theorem 3.1] angebracht.

<sup>5</sup>Man wende unsere Argumentation auf  $Z := \text{Res}_{k/\mathbf{Q}} \mathbf{G}_m$  an.

Kohomologien. Mittels Proposition 3.2.4 und Lemma 3.2.4 lassen sich eine Vielzahl modularer Symbole definieren. Mit der Notation des Lemmas und der Proposition schreiben wir  $p : {}^0\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}^1$ , wobei  $\mathcal{Y}^1$  der zu  $H^{\text{ad}}(\mathbf{R})$  assoziierte symmetrische Raum ist. Für unsere Zwecke beschränken wir uns auf folgendes *modulares Symbol*

$$\mathcal{P}_{s,g}^q : H_c^q(\Gamma \backslash \mathcal{X}, \mathbf{C}) \times H_c^{\dim \mathcal{Y} - q}(\Gamma^1 \backslash \mathcal{Y}^1, \mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{C},$$

$$([\eta], [\eta']) \mapsto \int_{\Gamma' \backslash {}^0\mathcal{Y}} s_{g,*}(\eta) \wedge p^*(\eta').$$

Aufgrund seiner topologischen Konstruktion respektiert diese Paarung die natürliche  $\mathbf{Z}$ -Struktur auf der Kohomologie.

### 3.3 Die Beschränktheit der Distribution

Die die Distribution definierenden Periodenintegrale treten in natürlicher Weise als Bilder unserer modularer Symbole auf, was neben der Algebraizität auch unmittelbar die  $\mathfrak{p}$ -adische Beschränktheit der Distribution zur Folge hat. Um dies einzusehen, interpretieren wir zunächst  $\text{GL}_n/k$  als algebraische Gruppe über  $\mathbf{Q}$ .

#### Restriktion der Skalare

Es sei  $G$  eine lineare algebraische Gruppe über einem Körper  $l$  und  $l/k$  endlich separabel. Es bezeichne  $\sigma_1, \dots, \sigma_r : l \rightarrow \bar{k}$  die möglichen Einbettungen von  $l$  in den algebraischen (oder separablen) Abschluß  $\bar{k}$  von  $k$ . Die Restriktion der Skalare (à la Weil) von  $G$  in  $l/k$  ist eine algebraische Gruppe  $\text{Res}_{l/k}G$  über  $k$ , gemeinsam mit einem  $l$ -Morphismus  $\mu : \text{Res}_{l/k}G \rightarrow G$  algebraischer Gruppen, so daß  $\mu$  über  $\bar{k}$  einen Isomorphismus

$$\bar{\mu} := (\mu^{\sigma_1}, \dots, \mu^{\sigma_r}),$$

$$\text{Res}_{l/k}G \xrightarrow{\bar{\mu}} \prod_{i=1}^r \sigma_i(G)$$

induziert. Dadurch ist das Paar  $(\text{Res}_{l/k}G, \mu)$  bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt, denn es hat folgende universelle Eigenschaft: zu jeder algebraischen Gruppe  $H/k$  und zu jedem  $l$ -Morphismus  $f : H \rightarrow G$  existiert ein eindeutig bestimmter  $k$ -Morphismus  $g : H \rightarrow \text{Res}_{l/k}G$  mit  $f = \mu \circ g$ .

Identifizieren wir  $l \subseteq \bar{k}$  und  $\sigma_1$  als diese Inklusion, so können wir  $G$  mit  $\sigma_1(G)$  identifizieren. Betrachten wir in  $\text{Res}_{l/k}G$  den Schnitt  $G'$  der Kerne von  $\mu^{\sigma_2}, \dots, \mu^{\sigma_r}$ , so ist dieser  $\text{Gal}(\bar{k}/l)$ -invariant und insbesondere über  $l$  definiert.  $G'$  wird unter  $\bar{\mu}$  isomorph auf  $\sigma_1(G)$  abgebildet. Bezeichnet  $\nu : G \rightarrow \text{Res}_{l/k}G$  das Kompositum des Inversen der Einschränkung von  $\bar{\mu}$  auf  $G'$  mit der Inklusion  $G' \rightarrow \text{Res}_{l/k}G$ , so ist  $\nu$  über  $l$  definiert und

$$\bar{\nu} := (\nu^{\sigma_1}, \dots, \nu^{\sigma_r})$$

induziert über  $\bar{k}$  den zu  $\bar{\mu}$  inversen Isomorphismus

$$\prod_{i=1}^r \sigma_i(G) \xrightarrow{\bar{\mu}^{-1}} \text{Res}_{l/k}G.$$

Es sei nun  $k/\mathbf{Q}$  ein beliebiger Zahlkörper mit  $r_1$  reellen und  $r_2$  komplexen Stellen. Wir schreiben  $S_\infty$  für die Menge der unendlichen Primstellen von  $k$ . Es sei weiterhin  $G_n = \text{Res}_{k/\mathbf{Q}} \text{GL}_n$ , wobei wir par abus de notation mit  $\det : G_n \rightarrow G_1$  die Restriktion der Skalare von  $\det : \text{GL}_n \rightarrow \text{GL}_1$  bezeichnen.



Dann haben wir aufgrund der universellen Eigenschaft  $\mathcal{C}(G_n)^0 = \text{Res}_{k/\mathbf{Q}} \mathcal{C}(\text{GL}_n)^0$  und nach [Ono61, section 1.4] gilt

$$\text{rang}_{\mathbf{Q}}(\mathcal{C}(G_n)) = 1.$$

Andererseits gilt

$$\text{rang}_{\overline{\mathbf{Q}}}(\mathcal{C}(G_n)) = [k : \mathbf{Q}]$$

und genauer haben wir über  $\mathbf{C}$

$$\mathcal{C}(G_n)^0 \cong \prod_{\sigma:k \rightarrow \mathbf{C}} T_\sigma, \quad (3.3.1)$$

wobei  $T_\sigma \cong \mathbf{G}_m$ . Die nichtreellen Einbettungen  $\sigma : k \rightarrow \mathbf{C}$  treten in komplex konjugierten Paaren auf. Bezeichne  $\sigma_1, \dots, \sigma_{r_1}$  die reellen Einbettungen und  $\tau_1, \dots, \tau_{r_2}$  ein Vertretersystem der komplexen Paare. Dann ergibt sich aus (3.3.1) über  $\mathbf{R}$ , daß

$$\mathcal{C}(G_n)^0 \cong \mathbf{G}_m^{r_1} \times (\text{Res}_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} \mathbf{G}_m)^{r_2}. \quad (3.3.2)$$

Wegen der topologischen Zerlegung

$$\text{Res}_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} \mathbf{G}_m(\mathbf{R}) = \mathbf{C}^\times = \mathbf{R}_{>0} \times \mathbf{R}/\mathbf{Z}$$

schließen wir mittels [Che51, chapitre VI, §5, no. 2, Proposition 2] hieraus, daß es einen  $\mathbf{R}$ -anisotropen Torus  $S$  in  $\text{Res}_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} \mathbf{G}_m(\mathbf{R})$  der Dimension 1 mit  $S(\mathbf{R}) = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$  gibt. Dieser besitzt ein (fast-)Komplement  $S'$  [BHC62, Lemma 8.4 (a)] der Dimension 1 und dieses ist  $\mathbf{R}$ -isotrop [BT65, Corollaire 9.4]. Wir folgern hieraus schlußendlich, daß

$$\text{rang}_{\mathbf{R}} \mathcal{C}(G_n) = r_1 + r_2.$$

Wir dürfen annehmen, daß

$$\begin{aligned} \text{GL}_n(\mathcal{O}) &= G_n(\mathbf{Z}), \\ \text{GL}_n(k) &= G_n(\mathbf{Q}), \\ \text{GL}_n(k_{\mathbf{R}}) &= G_n(\mathbf{R}), \end{aligned}$$

und

$$\text{GL}_n(\mathbf{A}_k) = G_n(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}).$$

### Archimedische Integraldarstellung

Seien nun  $\pi, \sigma$  irreduzible kohomologische cuspidale automorphe Darstellungen von  $\text{GL}_n(\mathbf{A}_k)$  beziehungsweise  $\text{GL}_{n-1}(\mathbf{A}_k)$  bezüglich der Kohomologie konstanter komplexer Koeffizienten, das bedeutet, daß  $\pi$  und  $\sigma$  trivialen zentralen Charakter haben. Es seien  $K \leq \text{GL}_n(\mathbf{A}_k)$  und  $K' \leq \text{GL}_{n-1}(\mathbf{A}_k)$  kompaktoffene Untergruppen, so daß

$$\det(K) = \det(K') = \widehat{\mathcal{O}}_k^\times.$$

Daher dürfen wir annehmen, daß es unter  $K$  beziehungsweise  $K'$  rechtsinvariante Neuvektoren  $w_{\mathfrak{f}}$  und  $v_{\mathfrak{f}}$  der endlichen Komponenten  $\pi_{\mathfrak{f}}$  beziehungsweise  $\sigma_{\mathfrak{f}}$  gibt. Wir dürfen nach [JPSS81, Section (4.1), Théorème] annehmen, daß  $K$  das Bild von  $K'$  unter der Einbettung

$$j : \text{GL}_{n-1} \rightarrow \text{GL}_n, \quad g \mapsto \begin{pmatrix} g & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

enthält. Insbesondere dürfen wir annehmen, daß die modifizierten automorphen Formen  $\tilde{\phi}_l$  und  $\tilde{\varphi}_l$  rechts- $K$ - beziehungsweise rechts- $K'$ -invariant sind,  $K$  und  $K'$  faktorierbar sind und bei  $\mathfrak{p}$  jeweils

Iwahori-Gruppen  $K_{\mathfrak{p}} = I_n(\mathcal{O}_{k_{\mathfrak{p}}})$  sowie  $K'_{\mathfrak{p}} = I_{n-1}(\mathcal{O}_{k_{\mathfrak{p}}})$  vorliegen. Es seien  $K$  und  $K'$  so klein gewählt, daß die im Folgenden definierten arithmetischen Untergruppen stets torsionsfrei sind.

Wir erinnern an die Zerlegung

$$\mathrm{GL}_n(\mathbf{A}_k) = \bigsqcup_i \mathrm{GL}_n(k) \cdot \varepsilon_{\alpha_i} \cdot (\mathrm{GL}_n(k_{\mathbf{R}})^0 \times K),$$

mit endlich vielen Idelen  $\alpha_1, \dots, \alpha_h$ . Diese gilt mit den gleichen Idelen wortwörtlich auch im Fall  $n-1$ . Das bedeutet, daß

$$\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbf{A}_k) = \bigsqcup_i \mathrm{GL}_{n-1}(k) \cdot \varepsilon_{\alpha_i} \cdot (\mathrm{GL}_{n-1}(k_{\mathbf{R}})^0 \times K').$$

Dabei durchlaufen die  $\alpha_1, \dots, \alpha_h$  Repräsentanten der Idelklassengruppe, welche den Fasern unter der Determinantenabbildung entsprechen.

Für  $x \in \mathcal{O}_{k_{\mathfrak{p}}}^{\times}$ , ein Idel  $\alpha$  und eine von  $f \in \mathcal{O}_{k_{\mathfrak{p}}}$  erzeugte nichttriviale  $\mathfrak{p}$ -Potenz  $\mathfrak{f}$  wollen wir das Integral

$$P_{\alpha, \iota}(\varepsilon_x h^{(f)}, \mathfrak{f}) = \int_{C_{\alpha, \mathfrak{f}}} \tilde{\phi}_{\iota} \left( j(g) \varepsilon_x h^{(f)} \right) \cdot \tilde{\varphi}_{\iota}(g) dg$$

kohomologisch interpretieren. Zunächst erhalten wir dank der  $\pi_0(\mathrm{GL}_n(k_{\mathbf{R}})) \times \mathrm{GL}_n(\mathbf{A}_k^{\mathfrak{f}})$ - beziehungsweise  $\pi_0(\mathrm{GL}_{n-1}(k_{\mathbf{R}})) \times \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbf{A}_k^{\mathfrak{f}})$ -Aktionen durch Rechtstranslation auf dem Raum der automorphen Formen in Verbindung mit der Rechtsinvarianz des Haar'schen Maßes die Umformulierung

$$P_{\alpha, \iota}(\varepsilon_x h^{(f)}, \mathfrak{f}) = \int_{C_{1, \mathfrak{f}}} \tilde{\phi}_{\iota}^{\alpha} \left( j(g) \varepsilon_x h^{(f)} \right) \cdot \tilde{\varphi}_{\iota}^{\alpha}(g) dg,$$

wobei  $\tilde{\phi}_{\iota}^{\alpha}$  das Bild von  $\tilde{\phi}_{\iota}$  unter der Aktion von  $\varepsilon_{\alpha}$  als Element von  $\pi_0(G_n(\mathbf{R})) \times \mathrm{GL}_n(\mathbf{A}_k^{\mathfrak{f}})$  bezeichnet, analoges gilt für  $\tilde{\varphi}_{\iota}$ . Wir schreiben

$$K^{\alpha} := \varepsilon_{\alpha} K \varepsilon_{\alpha}^{-1}$$

und haben die korrespondierenden arithmetische Gruppe

$$\Gamma_{\alpha} := \{\gamma \in \mathrm{GL}_n^+(k) \mid \gamma_{\mathfrak{f}} \in K^{\alpha}\},$$

mit der Notation  $\mathrm{GL}_n^+(k) = \mathrm{GL}_n(k) \cap \mathrm{GL}_n(k_{\mathbf{R}})^0$ .

Da  $\det(K^{\alpha}) = \det(K) = \hat{\mathcal{O}}_k^{\times}$ , haben wir aufgrund starker Approximation für  $\mathrm{SL}_n$  [Pra77, Theorem A] die disjunkte Zerlegung

$$\mathrm{GL}_n(\mathbf{A}_k) = \bigsqcup_i \mathrm{GL}_n(k) \cdot \varepsilon_{\alpha_i} \cdot (\mathrm{GL}_n(k_{\mathbf{R}})^0 \times K^{\alpha})$$

entsprechend der Fasern unter der Determinantenabbildung. Wegen  $\det(\varepsilon_x \cdot h^{(f)}) \in \hat{\mathcal{O}}_k^{\times}$  existieren daher  $\gamma_{x, \mathfrak{f}} \in \mathrm{GL}_n(k)$ ,  $\gamma_{x, \mathfrak{f}, \infty} \in \mathrm{GL}_n(k_{\mathbf{R}})^0$ ,  $g_{\mathfrak{f}} \in K^{\alpha}$  und ohne Einschränkung  $1 = \alpha(\mathfrak{f}) \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_h\}$  mit

$$\varepsilon_x \cdot h^{(f)} = \gamma_{x, \mathfrak{f}}^{-1} \cdot (\gamma_{x, \mathfrak{f}, \infty}, \varepsilon_{\alpha(\mathfrak{f})} \cdot g_{\mathfrak{f}}) = \gamma_{x, \mathfrak{f}}^{-1} \cdot (\gamma_{x, \mathfrak{f}, \infty}, g_{\mathfrak{f}}).$$

Wir definieren die Gruppe

$$K'_{\alpha, x, \mathfrak{f}} := j^{-1} \left( j \left( (K')^{\alpha} \right) \cap \varepsilon_x h^{(f)} K^{\alpha} h^{(f)-1} \varepsilon_x^{-1} \right).$$

Dann operiert  $K'_{\alpha, x, \mathfrak{f}}$  aufgrund von Lemma D.0.1 auf  $C_{\alpha, x, \mathfrak{f}}$  via Rechtstranslation und wir haben die korrespondierenden arithmetischen Gruppen

$$\Gamma'_{\alpha} := \{\gamma \in \mathrm{GL}_{n-1}^+(k) \mid \gamma_{\mathfrak{f}} \in (K')^{\alpha}\},$$

$$\Gamma'_{\alpha,x,f} := \{\gamma \in \mathrm{GL}_{n-1}^+(k) \mid \gamma_f \in K'_{\alpha,x,f}\}.$$

Dann gilt

$$\Gamma'_{\alpha,x,f} = \{\gamma \in \Gamma'_\alpha \mid j(\gamma)_f \in \varepsilon_x h^{(f)} K^\alpha h^{(f)-1} \varepsilon_x^{-1}\} \subseteq \Gamma'_\alpha,$$

und wir haben den Diffeomorphismus

$$\begin{aligned} i_{\alpha,x,f} : \Gamma'_{\alpha,x,f} \backslash \mathrm{GL}_{n-1}(k_{\mathbf{R}})^0 &\rightarrow C_{\alpha,x,f}/K'_{\alpha,x,f}, \\ \Gamma'_{\alpha,x,f} \cdot g_\infty &\mapsto \mathrm{GL}_{n-1}(k) \cdot (g_\infty, \varepsilon_x) \cdot K'_{\alpha,x,f}. \end{aligned}$$

Wegen

$$\mathrm{GL}_n(k) \cdot (g_\infty, \varepsilon_x \cdot h^{(f)}) \cdot K^\alpha = \mathrm{GL}_n(k) \cdot (\gamma_{x,f,\infty} g_\infty, 1_f) \cdot K^\alpha$$

haben wir zusammenfassend

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}(K'_{\alpha,x,f})^{-1} \cdot P_{\alpha,\iota}(\varepsilon_x h^{(f)}, f) &= \int_{\Gamma'_{\alpha,x,f} \backslash G_{n-1}(\mathbf{R})^0} \tilde{\phi}_\iota^\alpha(j(g_\infty) \varepsilon_x h^{(f)}) \cdot \tilde{\varphi}_\iota^\alpha(g_\infty) dg_\infty = \\ &= \int_{\Gamma'_{\alpha,x,f} \backslash G_{n-1}(\mathbf{R})^0} \tilde{\phi}_\iota^\alpha(\gamma_{x,f,\infty} j(g_\infty)) \cdot \tilde{\varphi}_\iota^\alpha(g_\infty) dg_\infty = \\ &= \int_{\Gamma'_{\alpha,x,f} \backslash G_{n-1}(\mathbf{R})^0} \tilde{\phi}_\iota^\alpha(\gamma_{x,f,\infty} j(g_\infty)) \cdot \tilde{\varphi}_\iota^\alpha(g_\infty) dg_\infty. \end{aligned}$$

Insbesondere sei auf

$$\Gamma'_{\alpha,x,f} = \{\gamma \in \Gamma'_\alpha \mid j(\gamma)_f \in \gamma_{x,f,f}^{-1} K^\alpha \gamma_{x,f,f}\} =: \Gamma'_{\alpha,\gamma_{x,f}}$$

hingewiesen.

### Kohomologische Interpretation

Es bezeichne  $\mathcal{X}_n$  den symmetrischen Raum von  $G_n(\mathbf{R})$  bezüglich der standard maximalen kompakten Untergruppe  $K_\infty$ . Dies ist nichts anderes als

$$\mathcal{X}_n = \prod_{v \in S_\infty \text{ reell}} \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})/\mathrm{O}(n) \times \prod_{v \in S_\infty \text{ komplex}} \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})/\mathrm{U}(n).$$

Entsprechend bezeichne  $\mathcal{X}_n^1$  den assoziierten symmetrischen Raum zu der standard maximalen kompakten Untergruppe von  $G_n^{\mathrm{ad}}(\mathbf{R})$ . Aufgrund der kanonischen Isogenie  $G_n^{\mathrm{der}} \rightarrow G_n^{\mathrm{ad}}$  ist  $\mathcal{X}_n^1$  ebenfalls ein symmetrischer Raum der Gruppe  $G_n^{\mathrm{der}}(\mathbf{R})$ .

Wir schreiben

$$\begin{aligned} b_n &:= \frac{n^2 - n + 2 \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{4}, \\ \tilde{b}_n &:= \frac{n(n-1)}{2}, \end{aligned}$$

$$c_n := \dim(\mathfrak{gl}_n) - \dim(\mathfrak{o}_n) = n^2 - \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n^2 + n}{2},$$

$$\tilde{c}_n := \dim_{\mathbf{R}}(\mathfrak{gl}_n \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}) - \dim_{\mathbf{R}}(\mathrm{U}(n)) = 2n^2 - n^2 = n^2,$$

Dann haben wir

$$\begin{aligned} b_n + b_{n-1} &= c_{n-1}, \\ \tilde{b}_n + \tilde{b}_{n-1} &= \tilde{c}_{n-1}, \end{aligned}$$

und

$$r_1 c_n + r_2 \tilde{c}_n = \dim \mathcal{X}_n = \dim \mathcal{X}_n^1 + r_1 + r_2.$$

Es bezeichne  $\tilde{\mathfrak{g}}_n$  die Unteralgebra der Lie-Algebra

$$\mathfrak{g}_n := \text{Lie}(G_n(\mathbf{R})) = \bigoplus_{v \in S_\infty \text{ reell}} \mathfrak{gl}_n \oplus \bigoplus_{v \in S_\infty \text{ komplex}} \mathfrak{gl}_n \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$$

der Matrizen mit komponentenweise rein imaginärer Spur. Wir schreiben  $\tilde{\mathfrak{sl}}_n$  für die Lie-Unteralgebra von  $\mathfrak{gl}_n \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$  der Matrizen mit rein imaginärer Spur.

Wir dürfen annehmen, daß  $\pi$  und  $\sigma$  in der  $(r_1 b_n + r_2 \tilde{b}_n)$ -ten beziehungsweise der  $(r_1 b_{n-1} + r_2 \tilde{b}_{n-1})$ -ten Kohomologie dieser Lie-Algebra mit konstanten Koeffizienten auftreten. Dann treten  $\pi$  und  $\sigma$  jeweils mit Multiplizität 1 auf. Genauer gilt

$$H^{r_1 b_n + r_2 \tilde{b}_n}(\tilde{\mathfrak{g}}_n, K_\infty; H_{\pi_\infty}^{(K_\infty)}) \cong \mathbf{C},$$

wobei

$$\pi_\infty = \bigotimes_{v|\infty} \pi_v$$

und  $H_{\pi_\infty}^{(K_\infty)}$  den Raum der  $K_\infty$ -endlichen Elemente des Darstellungsraumes  $H_{\pi_\infty}$  von  $\pi_\infty$  bezeichnet. Hier geht ein, daß  $\pi_\infty$  trivialen zentralen Charakter hat und damit durch seine Restriktion auf die Lie-Gruppe

$$G_n^\pm := \{g \in \text{GL}_n(k_{\mathbf{R}}) \mid \forall v \in S_\infty : \|\det(g_v)\|_v = 1\}$$

eindeutig bestimmt ist. Die Lie-Algebra dieser Gruppe ist  $\tilde{\mathfrak{g}}_n$ . Entsprechendes gilt für  $\sigma$ .

Desweiteren ergibt sich die behauptete Multiplizität 1 aus [Clo90, Lemme 3.14] via der Künnethregeln [BW80, chapter I, §1.3 and §5, (4)], welche in unserem Fall garantieren, daß

$$\begin{aligned} & H^{r_1 b_n + r_2 \tilde{b}_n}(\tilde{\mathfrak{g}}, K_\infty, H_{\pi_\infty}^{(K_\infty)}) \cong \\ & \bigotimes_{v \text{ reell}} H^{b_n}(\mathfrak{sl}_n, \text{O}(n), H_{\pi_v}^{(\text{O}(n))}) \otimes \bigotimes_{v \text{ komplex}} H^{\tilde{b}_n}(\tilde{\mathfrak{sl}}_n, \text{U}(n), H_{\pi_v}^{(\text{U}(n))}), \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

denn für  $r < b_n$  beziehungsweise  $s < \tilde{b}_n$  gilt

$$H^r(\mathfrak{sl}_n, \text{O}(n), H_{\pi_v}^{(\text{O}(n))}) = 0,$$

beziehungsweise

$$H^s(\tilde{\mathfrak{sl}}_n, \text{U}(n), H_{\pi_v}^{(\text{U}(n))}) = 0.$$

Wir haben nun den  $(\tilde{\mathfrak{g}}_n, K_\infty)$ -Modul

$$\mathcal{W}_0(\pi_\infty, \psi_\infty) := \bigotimes_{v|\infty} \mathcal{W}_0(\pi_v, \psi_v).$$

Nach [BW80, chapter II, §3, Corollary 3.2] gilt

$$H^{r_1 b_n + r_2 \tilde{b}_n}(\tilde{\mathfrak{g}}_n, K_\infty, H_{\pi_\infty}^{(K_\infty)}) \cong \left( \bigwedge^{r_1 b_n + r_2 \tilde{b}_n} \tilde{\mathfrak{h}}_n^* \otimes \mathcal{W}_0(\pi_\infty, \psi_\infty) \right)^{K_\infty},$$

wobei  $\tilde{\mathfrak{h}}_n$  der  $(-1)$ -Eigenraum der Cartan-Involution in  $\tilde{\mathfrak{g}}$  ist, denn via Künneth reduziert sich dies auf

$$H^{b_n}(\mathfrak{sl}_n, \mathbf{O}(n), H_{\pi_v}^{\mathbf{O}(n)}) \cong \left( \bigwedge^{b_n} \mathfrak{p}_n^* \otimes \mathscr{W}_0(\pi_v, \psi_v) \right)^{\mathbf{O}(n)}$$

für reelles  $v \in S_\infty$  beziehungsweise für komplexes  $v \in S_\infty$

$$H^{\tilde{b}_n}(\tilde{\mathfrak{sl}}_n, \mathbf{U}(n), H_{\pi_v}^{\mathbf{U}(n)}) \cong \left( \bigwedge^{\tilde{b}_n} \tilde{\mathfrak{p}}_n^* \otimes \mathscr{W}_0(\pi_v, \psi_v) \right)^{\mathbf{U}(n)}$$

mit den entsprechenden Eigenräumen  $\mathfrak{p}_n$  und  $\tilde{\mathfrak{p}}_n$  der lokalen Cartan-Involutionen.

Es sei nun

$$0 \neq \eta_\infty \in \left( \bigwedge^{r_1 b_n + r_2 \tilde{b}_n} \tilde{\mathfrak{h}}_n^* \otimes \mathscr{W}_0(\pi_\infty, \psi_\infty) \right)^{K_\infty}.$$

Wir schreiben

$$\eta_\infty = \sum_{\#I=r_1 b_n + r_2 \tilde{b}_n} \omega_I \otimes w_{I,\infty}$$

mit  $w_{I,\infty} \in \mathscr{W}_0(\pi_\infty, \psi_\infty)$ . Wir tun das Gleiche mit  $\sigma$  und erhalten eine Form

$$\eta'_\infty = \sum_{\#I'=r_1 b_{n-1} + r_2 \tilde{b}_{n-1}} \omega'_{I'} \otimes v_{I',\infty}$$

vom Grad  $r_1 b_{n-1} + r_2 \tilde{b}_{n-1}$  mit  $v_{I',\infty} \in \mathscr{W}_0(\sigma_\infty, \bar{\psi}_\infty)$ . Aufgrund der von uns getroffenen Wahl erhalten wir für das zu  $(\phi_\iota, \bar{\varphi}_\iota)$  korrespondierende Paar  $(w_{\iota,f}, v_{\iota,f})$  endlicher Whittakerfunktionen Elemente

$$\eta_{\iota,0} := w_{\iota,f} \otimes \eta_\infty \in \left( \bigwedge^{r_1 b_n + r_2 \tilde{b}_n} \tilde{\mathfrak{h}}_n^* \otimes \mathscr{W}_0(\pi, \psi) \right)^{K_\infty},$$

sowie

$$\eta'_{\iota,0} := v_{\iota,f} \otimes \eta'_\infty \in \left( \bigwedge^{r_1 b_{n-1} + r_2 \tilde{b}_{n-1}} \tilde{\mathfrak{h}}_{n-1}^* \otimes \mathscr{W}_0(\sigma, \bar{\psi}) \right)^{K'_\infty},$$

welche via koeffizientenweiser Fouriertransformation zu einem

$$\eta_\iota \in \left( \bigwedge^{r_1 b_n + r_2 \tilde{b}_n} \tilde{\mathfrak{h}}_n^* \otimes L_0^2(\mathrm{GL}_n(k) \backslash \mathrm{GL}_n(\mathbf{A}_k) / (\mathscr{C}(\mathrm{GL}_n)(k_{\mathbf{R}})^0 K_\infty K)) \right)^{K_\infty},$$

und analog zu einem entsprechenden  $\eta'_\iota$  Anlaß geben. Insbesondere beschert uns dies Kohomologieklassen

$$[\eta_{\alpha,\iota}] \in H_{\mathrm{cusp}}^{r_1 b_n + r_2 \tilde{b}_n}(\Gamma_\alpha \backslash \mathscr{X}_n^1, \mathbf{C}) \subseteq H_c^{r_1 b_n + r_2 \tilde{b}_n}(\Gamma_\alpha \backslash \mathscr{X}_n^1, \mathbf{C}),$$

$$[\eta'_{\alpha,\iota}] \in H_{\mathrm{cusp}}^{r_1 b_{n-1} + r_2 \tilde{b}_{n-1}}(\Gamma'_\alpha \backslash \mathscr{X}_{n-1}^1, \mathbf{C}) \subseteq H_c^{r_1 b_{n-1} + r_2 \tilde{b}_{n-1}}(\Gamma'_\alpha \backslash \mathscr{X}_{n-1}^1, \mathbf{C}),$$

dabei operieren die arithmetischen Untergruppen via der Projektion  $\text{ad}$  auf den symmetrischen Räumen<sup>6</sup>. Bezeichnet  $\phi_{\iota,I}$  die Fouriertransformierte von  $w_{I,\infty} \otimes w_{\iota,f}$ , so haben wir genauer

$$\eta_{\iota} = \sum_{\#I=r_1b_n+r_2\tilde{b}_n} \omega_I \otimes \phi_{\iota,I}$$

und entsprechend

$$\eta'_{\iota} = \sum_{\#I'=r_1b_{n-1}+r_2\tilde{b}_{n-1}} \omega'_{I'} \otimes \varphi_{\iota,I'}.$$

Analog zum Lemma 3.2.5 betrachten wir die eigentliche Projektion

$$p : {}^0\mathcal{X}_{n-1} \rightarrow \mathcal{X}_{n-1}^1,$$

welche von  $\text{ad}$  induziert wird. Wir haben nun weiterhin den zentralen Morphismus [BT72, Proposition 2.26, (ii)]

$$\text{ad} \circ j : \text{GL}_{n-1} \rightarrow \text{PGL}_n,$$

beziehungsweise dessen Restriktion der Skalare

$$s := \text{Res}_{k/\mathbf{Q}} \text{ad} \circ j = \text{ad} \circ \text{Res}_{k/\mathbf{Q}} j : G_{n-1} \rightarrow G_n^{\text{ad}}.$$

Damit erhalten wir

$$\text{vol}(K'_{\alpha,x,f})^{-1} \cdot P_{\alpha,\iota}(\varepsilon_x h^{(f)}, f) = \int_{\Gamma_{\alpha,\gamma_x,f} \backslash {}^0\mathcal{X}_{n-1}} s_{\alpha,\gamma_x,f,*}(\eta_{\alpha,\iota}) \wedge p^*(\eta'_{\alpha,\iota}) = \mathcal{P}_{s_{\alpha,\gamma_x,f}}^{r_1b_n+r_2\tilde{b}_n}([\eta_{\alpha,\iota}], [\eta'_{\alpha,\iota}]).$$

## Die Beschränktheit

Wir können nun die Beschränktheit der Distribution beweisen.

**Satz 3.3.1.** *Sind  $\pi$  und  $\sigma$  ordinär bei  $\mathfrak{p}$ , so nehmen bei geeigneter kohomologischer Wahl der Whittakerfunktionen bei  $\infty$  die in den Sätzen 2.3.1 und 2.3.2 konstruierten Distributionen Werte in einem Ganzheitsring  $\mathcal{O}_E$  eines Zahlkörpers  $E$  an und sind insbesondere  $\mathfrak{p}$ -adisch beschränkt.*

Unter einer geeigneten kohomologischen Wahl verstehen wir die Wahl der Whittakerfunktionen, wie sie im vorigen Abschnitt beschrieben wurde. Günstig bezieht sich auf die Wahl „ganzer“ Kohomologieklassen, wie sie im folgenden Beweis beschrieben wird.

*Beweis.* Wir dürfen nun aufgrund der Multiplizität 1 annehmen, daß jeweils eine und damit alle Klassen bereits in der cuspidalen Kohomologie

$$[\eta_{\alpha,\iota}] \in H_{\text{cusp}}^{r_1b_n+r_2\tilde{b}_n}(\Gamma_{\alpha} \backslash \mathcal{X}_n^1, \mathcal{O}_{\mathbf{Q}(\pi,\sigma)}),$$

$$[\eta'_{\alpha,\iota}] \in H_{\text{cusp}}^{r_1b_{n-1}+r_2\tilde{b}_{n-1}}(\Gamma'_{\alpha} \backslash \mathcal{X}_{n-1}^1, \mathcal{O}_{\mathbf{Q}(\pi,\sigma)})$$

mit *ganzen* Koeffizienten auftreten. Dann folgt hieraus unmittelbar

$$\text{vol}(K'_{\alpha,x,f})^{-1} \cdot P_{\alpha,\iota}(\varepsilon_x h^{(f)}, f) \in \mathcal{O}_{\mathbf{Q}(\pi,\sigma)}.$$

<sup>6</sup>das ist sinnvoll im Sinne von [Bor66, §5, Theorem 6].

Um die Beschränktheit der Distribution  $\mu$  aus den Sätzen 2.3.1 und 2.3.2 nachzuweisen, müssen wir also aufgrund der Annahme der Ordinarität zeigen, daß

$$|\kappa(\mathfrak{f}) \cdot \text{vol}(K'_{\alpha,x,\mathfrak{f}})|_{\mathfrak{p}} = \left| \mathfrak{N}(\mathfrak{f})^{\frac{(n+1)n(n-1)+n(n-1)(n-2)}{6}} \cdot \text{vol}(K'_{\alpha,x,\mathfrak{f}}) \right|_{\mathfrak{p}}$$

für alle nichttrivialen  $\mathfrak{p}$ -Potenzen  $\mathfrak{f}$  beschränkt ist. Da  $\alpha$  und  $x$  kommutieren, normalisiert  $\varepsilon_x$  die Gruppe  $(K')^\alpha$ , denn es normalisiert offensichtlich  $K'$ . Daher haben wir

$$K'_{\alpha,x,\mathfrak{f}} = \varepsilon_x \cdot K'_{\alpha,1,\mathfrak{f}} \cdot \varepsilon_x^{-1}.$$

Da die Konjugation mit  $h^{(f)}$  lediglich die Komponente bei  $\mathfrak{p}$  betrifft, haben wir für  $v \nmid \mathfrak{f}$  stets

$$(K'_{\alpha,x,\mathfrak{f}})_v = j(K'_v)^\alpha.$$

Wir haben also

$$(K'_{\alpha,x,\mathfrak{f}})_{\mathfrak{p}} = j(I_{n-1})^\alpha \cap h^{(f)} I_n^\alpha h^{(f)^{-1}}$$

zu betrachten. Wir dürfen annehmen, daß  $\alpha$  eine triviale  $\mathfrak{p}$ -Komponente hat. Dann ergibt sich die Beschränktheit der Distribution unmittelbar aus dem Lemma D.0.1.  $\square$

### 3.4 Kritikalität

Wie bisher sei  $k$  ein Zahlkörper und  $\pi$  beziehungsweise  $\sigma$  seien irreduzible cuspidale automorphe Darstellungen von  $\text{GL}_n(\mathbf{A}_k)$  und  $\text{GL}_{n-1}(\mathbf{A}_k)$  von kohomologischem Typ mit trivialem zentralem Charakter. Ist  $k$  total reell, so ist letzteres gleichbedeutend damit, daß für jede unendliche Stelle  $v \in S_\infty$  von  $k$

$$H^\bullet(\mathfrak{gl}_n, \text{SO}(n)\mathcal{C}(\text{GL}_n)(\mathbf{R})^0; H_{\pi_v}^{(O(n))}) \neq 0$$

und entsprechendes für  $\sigma$ .

Die Frage nach  $P(\frac{1}{2}) \neq 0$  ist im Wesentlichen ein lokales Problem. Um dies einzusehen, beobachten wir, daß im Sinne des Künneth-Formalismus zunächst kanonisch

$$\left( \bigwedge^{r_1 b_n} \tilde{\mathfrak{h}}_n^* \otimes \mathscr{W}_0(\pi_\infty, \psi_\infty) \right)^{K_\infty} \cong \bigotimes_{v \in S_\infty} \left( \bigwedge^{b_n} \mathfrak{p}_n^* \otimes \mathscr{W}_0(\pi_v, \psi_v) \right)^{K_v}$$

gilt, weswegen unsere spezielle Wahl der Whittakerfunktionen  $\eta_\infty$  und  $\eta'_\infty$  Faktorisierungen

$$\eta_\infty = \bigotimes_{v|\infty} \eta_v$$

und

$$\eta'_\infty = \bigotimes_{v|\infty} \eta'_v$$

besitzen, wobei die Komponenten jeweils den lokalen Bedingungen

$$\eta_v \in \left( \bigwedge^{b_n} \mathfrak{p}_n^* \otimes \mathscr{W}_0(\pi_v, \psi_v) \right)^{K_v}$$

und

$$\eta'_v \in \left( \bigwedge^{b_{n-1}} \mathfrak{p}_{n-1}^* \otimes \mathscr{W}_0(\sigma_v, \bar{\psi}_v) \right)^{K'_v}$$

genügen. Entsprechend zerfällt auch die Indexmenge  $I$  in lokale Indexmengen  $I_v$ , so daß wir eine natürliche Bijektion

$$\prod_{v \in S_\infty} I_v \rightarrow I$$

erhalten. Wir haben per definitionem

$$P(s) = \sum_{\#I=r_1 b_n + r_2 \bar{b}_n} \varepsilon_I P_I(s),$$

wobei

$$\Psi(w_{I,\infty} \otimes v_{I,\infty}, s) = P_I(s) \cdot L(s, \pi_\infty \times \sigma_\infty). \quad (3.4.1)$$

Gleichung (3.4.1) nimmt nun schließlich die Form

$$P_I(s) = \prod_{v|\infty} \frac{\Psi(w_{I_v,v}, v_{I_v,v}, s)}{L(s, \pi_v \times \sigma_v)}$$

an, mit entsprechenden lokalen Whittakerfunktionen. Die Frage, ob

$$P_v\left(\frac{1}{2}\right) := \frac{\Psi(w_{I_v,v}, v_{I_v,v}, \frac{1}{2})}{L(\frac{1}{2}, \pi_v \times \sigma_v)} \neq 0$$

ist für  $n = 2$  klassisch und im Fall  $n = 3$  wurde sie in [Sch93, Theorem 3.8] beziehungsweise allgemeiner in [KS08, Theorem B] bereits beantwortet.

Das zeigt die

**Proposition 3.4.1.** *Ist  $k$  total reell,  $n \in \{2, 3\}$  und sind  $\pi$  und  $\sigma$  irreduzible cuspidale automorphe Darstellungen von  $\mathrm{GL}_n(\mathbf{A}_k)$  beziehungsweise  $\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbf{A}_k)$  von kohomologischem Typ mit trivialem zentralem Charakter, ist  $s = \frac{1}{2}$  kritisch für  $L(s, \pi \times \sigma)$  und sind  $\pi$  und  $\sigma$  ordinär bei  $\mathfrak{p}$ , so gilt die Interpolationsformel aus Satz 2.3.1 (beziehungsweise Satz 2.3.2) mit einem  $P(\frac{1}{2}) \neq 0$ , wobei angenommen werden kann, daß es sich bei  $\mu$  um ein Maß handelt, welches Werte in einem Ganzheitsring  $\mathcal{O}_E$  eines Zahlkörpers  $E$  annimmt.*



# Kapitel 4

## Das letzte Kapitel

In diesem Kapitel geben wir mit der Konstruktion einer  $p$ -adischen  $L$ -Funktion zur dritten symmetrischen Potenz  $\text{Sym}^3 E$  einer modularen elliptischen Kurve  $E$  über einem total reellen Zahlkörper  $k$  ein nichttriviales Anwendungsbeispiel der in den ersten drei Kapiteln entwickelten Theorie an.

### 4.1 $\lambda$ -adische Darstellungen

Es sei  $F$  ein Zahlkörper,  $\lambda \mid \ell$  eine endliche Primstelle. Wir haben bereits ein für allemal algebraische Abschlüsse  $\overline{\mathbf{Q}} \subseteq \mathbf{C}$ ,  $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$  (beziehungsweise  $\overline{F}_\lambda$ ) und (algebraische) Isomorphismen  $\overline{\mathbf{Q}}_\ell \rightarrow \mathbf{C}$  gewählt, so daß das Bild von  $F_\lambda$  den Körper  $F$  enthält. Wir identifizieren im Folgenden Hecke-Charaktere endlicher Ordnung via unserer Normierung der Klassenkörpertheorie mit den entsprechenden eindimensionalen Artin'schen Darstellungen. Wir normieren diese Identifikation durch die Konvention, daß lokal Primelemente *geometrischen* Frobeniuselementen entsprechen sollen.

#### Twists

Es seien  $\sigma = (\sigma^{(\lambda)})_\lambda$  und  $\rho = (\rho^{(\lambda)})_\lambda$  kompatible Systeme  $\lambda$ -adischer Darstellungen (im Sinne von [Ser68]) der Weil-Gruppe  $W_k$  eines Zahlkörpers  $k$ . Es bezeichne  $V_\lambda$  beziehungsweise  $W_\lambda$  den mit der  $W_k$ -Operation versehenen  $F_\lambda$ -Vektorraum zu  $\sigma^{(\lambda)}$  beziehungsweise  $\rho^{(\lambda)}$ , so daß

$$\sigma^{(\lambda)} : W_k \rightarrow \text{Aut}(V_\lambda)$$

und analog für  $\rho$ . Wir betrachten den Twist

$$\begin{aligned} \sigma^{(\lambda)} \otimes \rho^{(\lambda)} : W_{\mathbf{Q}} &\rightarrow \text{Aut}(V_\lambda \otimes_{F_\lambda} W_\lambda), \\ w &\mapsto \left[ \alpha \otimes \beta \mapsto \sigma^{(\lambda)}(w)(\alpha) \otimes \rho^{(\lambda)}(w)(\beta) \right]. \end{aligned}$$

Entsprechend haben wir das kompatible getwistete System  $\sigma \otimes \rho = (\sigma^{(\lambda)} \otimes \rho^{(\lambda)})_\lambda$ .

Leben  $\sigma$  und  $\rho$  über verschiedenen Zahlkörpern  $F$  und  $F'$ , so twisten wir beide zunächst mit der jeweils trivialen Darstellung auf dem Kompositum  $FF'$ , um kompatible Systeme über  $FF'$  zu erhalten, welche wir wie gehabt twisten können.

#### Beispiele

Ist  $\psi$  ein algebraischer Hecke-Charakter von  $k$ , so ist  $\psi$  über einem Zahlkörper  $F$  definiert und wir haben ein assoziiertes kompatibles System  $\lambda$ -adischer Darstellungen

$$\psi_\lambda : W_k \rightarrow F_\lambda^\times.$$

Sei  $S$  ein kommutatives Gruppenschema über einem Zahlkörper  $k$ . Dann haben wir eine exakte Sequenz

$$1 \longrightarrow S[n] \longrightarrow S \xrightarrow{n} S,$$

wobei  $S[n]$  den Kern der Multiplikation mit  $n$  auf  $S$  bezeichnet. Dieser ist ebenfalls ein Gruppenschema über  $k$ . Wir definieren nun für jede rationale Primzahl  $\ell$  den  $\ell$ -adischen Tate-Modul<sup>1</sup> zu  $S$  durch

$$T_\ell(S) := \varprojlim S[\ell^n](\overline{\mathbf{Q}}) = \text{Hom}(\mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell, S(\overline{\mathbf{Q}})).$$

Dieser ist mit einer natürlichen  $G(\overline{\mathbf{Q}}/k)$ -Aktion versehen, ebenso wie

$$V_\ell(S) := T_\ell(S) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell.$$

Im Allgemeinen ist dies gewiß kein kompatibles System  $\ell$ -adischer Darstellungen. Doch selbst wenn  $V_\ell(S)$  endlichdimensional ist, ist nicht klar, ob es sich hierbei um ein System *kompatibler*  $\ell$ -adischer Darstellungen handelt.

Ein wichtiges Beispiel ist das Gruppenschema  $S = \mu = \varinjlim \mu_n$  der Einheitswurzeln. Dieses stellt den Funktor

$$X \mapsto (\Gamma(X, \mathcal{O}_X)^\times)_{\text{tor}}$$

dar. Hier ist der  $\ell$ -adische Tate-Modul durch

$$T_\ell(\mu) = \varprojlim \mu_{\ell^n}(\overline{\mathbf{Q}}),$$

gegeben und

$$V_\ell(\mu) = T_\ell(\mu) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell$$

ist in diesem Fall tatsächlich ein kompatibles System  $\ell$ -adischer Darstellungen<sup>2</sup>.

Analog definiert jede abelsche Varietät  $A/k$  ein abelsches Gruppenschema, so daß wir analog

$$T_\ell(A) = \varprojlim A[\ell^n](\overline{\mathbf{Q}}),$$

$$V_\ell(A) = T_\ell(A) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell$$

erhalten. In diesem Fall interessieren wir uns für das nach [ST68, Theorem 3] kompatible System  $\ell$ -adischer Darstellungen

$$H_{\text{ét}}^1(A, \mathbf{Q}_\ell) = \text{Hom}_{\mathbf{Q}_\ell}(V_\ell(A), \mathbf{Q}_\ell).$$

Dies sind die  $\ell$ -adischen Realisierungen des  $H^1(A)$  entsprechenden Motives, welches wir schlicht mit  $M(A)$  bezeichnen.

## 4.2 Noch mehr Motivisches

Es sei  $N \geq 3$ ,  $\psi : (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times \rightarrow \mathbf{C}^\times$  ein Dirichletcharakter und  $f \in S_k(N, \psi)$  eine primitive normalisierte Spitzenform vom Gewicht  $k \geq 1$  zur Kongruenzuntergruppe  $\Gamma_0(N)$  und Nebentyp  $\psi$ . Die Form  $f$  habe die Fourierentwicklung

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n, \quad q = e^{2\pi iz}.$$

<sup>1</sup>Genau genommen erhalten wir allgemeiner mit  $T_\ell(S) := \varprojlim S[\ell^n]$  ein  $\ell$ -adisches Gruppenschema.

<sup>2</sup>im Fall  $S = \mathbf{G}_m$  erhalten wir die gleichen Tate-Moduln.

Für jede Primzahl  $\ell$  schreiben wir

$$1 - a_\ell X + \psi(\ell)\ell^{k-1}X^2 = (1 - \alpha_\ell X)(1 - \beta_\ell X) \quad (4.2.1)$$

und betrachten die  $L$ -Funktion

$$L(s, f) := \sum_{i=1}^{\infty} a_n n^{-s} = \prod_{\ell} [(1 - \alpha_\ell \ell^{-s})(1 - \beta_\ell \ell^{-s})]^{-1},$$

welche sich, ebenso wie die Twists

$$L(s, f, \chi) := \sum_{i=1}^{\infty} \chi(n) a_n n^{-s}$$

mit Dirichletcharakteren  $\chi$  mit zu  $N$  teilerfremdem Führer  $f_\chi$ , analytisch auf ganz  $\mathbf{C}$  fortsetzt und folgender Funktionalgleichung genügt [Shi71, Theorem 3.66]:

$$\Lambda(s, f, \chi) = i^k \psi(f_\chi) \chi(N) G(\chi)^2 (f_\chi)^{-1} \Lambda(k - s, \check{f}, \bar{\chi}),$$

wobei

$$\Lambda(s, f, \chi) := ((f_\chi)^2 N)^{s/2} 2(2\pi)^{-s} \Gamma(s) L(s, f, \chi), \quad (4.2.2)$$

$$\check{f}(s) := N^{-k/2} s^{-k} f\left(-\frac{1}{Ns}\right). \quad (4.2.3)$$

Mit  $\pi = \otimes \pi_\ell$  bezeichnen wir die  $f$  entsprechende irreduzible cuspidale automorphe Darstellung von  $\mathrm{GL}_2(\mathbf{A}_\mathbf{Q})$  und normalisieren die lokalen  $L$ -Funktionen, so daß

$$L(s, \pi_\ell) = [(1 - \alpha_\ell \ell^{-s - \frac{k-1}{2}})(1 - \beta_\ell \ell^{-s - \frac{k-1}{2}})]^{-1}, \quad (4.2.4)$$

sowie

$$L(s, \pi) := \prod_{\ell} L(s, \pi_\ell).$$

Dann gilt

$$L(s, \pi) = L\left(s + \frac{k-1}{2}, f\right). \quad (4.2.5)$$

Diese Normalisierung führt im Sinne der Funktionalgleichung dazu, daß  $L(s, \pi)$  auf  $L(1-s, \check{\pi})$  bezogen wird, wobei  $\check{\pi}$  die zu  $\pi$  kontragrediente Darstellung bezeichnet. Sie fügt sich desweiteren in die von Deligne [Del69, DS74, Del74, Del80] bewiesene Ramanujan-Peterssonvermutung, nach welcher für  $\ell \nmid N$

$$|\alpha_\ell \ell^{-\frac{k-1}{2}}| = |\beta_\ell \ell^{-\frac{k-1}{2}}| = 1 \quad (4.2.6)$$

gilt. Wegen  $\alpha_\ell, \beta_\ell \in \overline{\mathbf{Q}}$  ergibt sich aus (4.2.6), daß  $\alpha_\ell$  und  $\beta_\ell$  komplex konjugiert sind.

Nach Eichler und Shimura im Fall  $k = 2$ , Deligne [Del69] im Fall  $k \geq 2$  beziehungsweise Deligne-Serre [DS74] für  $k = 1$ , existiert ein kompatibles System  $\sigma = (\sigma^{(\lambda)})_\lambda$  zweidimensionaler  $\lambda$ -adischer Darstellungen der Weilgruppe  $W_\mathbf{Q}$ , wobei  $\lambda$  die endlichen Primstellen des von den Fourierkoeffizienten  $\{a_n \mid n > 1\}$  von  $f$  erzeugten Zahlkörpers<sup>3</sup>  $F/\mathbf{Q}$  durchläuft, so daß für alle Primzahlen  $\ell$  die Einschränkung  $(\sigma_\ell^{(\lambda)})_\lambda$  dieses Systems auf die lokale Weilgruppe  $W_{\mathbf{Q}_\ell}$  im Sinne der lokalen Langlands-korrespondenz [Del73a, Bor79] der Darstellung  $\pi_\ell$  entspricht, denn nach Kutzko [Kut80] im Fall  $\mathrm{GL}_2$

<sup>3</sup>[Shi71, Theorem 3.48], falls  $k = 2$  gilt sogar  $F = \mathbf{Q}$ .

und Henniart und Harris-Taylor [Hen88, HT01] für  $GL_n$  ist die lokale Langlandskorrespondenz in Charakteristik 0 bewiesen. Insbesondere gilt für jedes  $\ell$  mit  $\lambda \nmid \ell$ , daß die Darstellung

$$\sigma_\ell^{(\lambda)} : W_{\mathbf{Q}_\ell} \rightarrow GL_2(F_\lambda) = \text{Aut}(V_\lambda)$$

ebenfalls (bis auf Normierung) zu den gleichen Eulerfaktoren führt:

$$L_\ell(s, V_\lambda) := \det(1 - \phi_\ell \ell^{-s}; V_\lambda^{I_\ell})^{-1} = L(s, \pi_\ell). \quad (4.2.7)$$

Hier bezeichnen wir mit  $\phi_\ell$  den geometrischen<sup>4</sup> Frobenius beziehungsweise dessen Bild unter der Darstellung. Die lokale Langlandskorrespondenz garantiert uns, daß desweiteren die entsprechenden  $\varepsilon$ -Faktoren und Führer übereinstimmen. Das so konstruierte „Motiv“ über  $\mathbf{Q}$  vom Rang 2 bezeichnen wir mit  $M(f)$ . Es sei darauf hingewiesen, daß Scholl [Sch90] eine algebraische Konstruktion von  $M(f)$  im Sinne Grothendiecks gab.

### Nichtarchimedisches

Bezeichnet  $V_\lambda^*$  den Dualraum von  $V_\lambda$ , so ist die zu  $\sigma^{(\lambda)} : W_{\mathbf{Q}} \rightarrow V_\lambda$  *kontragrediente* Darstellung  $\check{\sigma}^{(\lambda)} : W_{\mathbf{Q}} \rightarrow V_\lambda^*$ , gegeben durch die Vorschrift

$$\forall w \in W_{\mathbf{Q}} : \langle \check{\sigma}^{(\lambda)}(w)v^*, v \rangle = \langle v^*, \sigma^{(\lambda)}(w^{-1})v \rangle,$$

wobei wir mit  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V_\lambda^* \times V_\lambda \rightarrow F_\lambda$  die natürliche Paarung  $\langle v^*, v \rangle \mapsto v^*(v)$  bezeichnen. Diese Paarung setzt sich dank ihrer Bilinearität zu einem nichttrivialen  $W_{\mathbf{Q}}$ -Homomorphismus  $V_\lambda^* \otimes_{F_\lambda} V_\lambda \rightarrow F_\lambda$  fort, wobei  $F_\lambda$  als trivialer  $W_{\mathbf{Q}}$ -Modul aufgefaßt wird. Der Kern  $U_\lambda$  dieses Homomorphismus gibt schließlich zu einer dreidimensionalen Darstellung

$$\Sigma^{(\lambda)} : W_{\mathbf{Q}} \rightarrow \text{Aut}(U_\lambda)$$

Anlaß. Die Gesamtheit dieser Darstellungen stellt ein kompatibles System  $\Sigma := (\Sigma^{(\lambda)})_\lambda$  von  $\lambda$ -adischen Darstellungen dar.

Schließlich sei bemerkt, daß wir die Zerlegung

$$V_\lambda^* \otimes_{F_\lambda} V_\lambda \cong U_\lambda \oplus F_\lambda \quad (4.2.8)$$

haben.

Die Darstellung  $\det \sigma^{(\lambda)} := \det \circ \sigma^{(\lambda)} : W_{\mathbf{Q}} \rightarrow F_\lambda$  faktorisiert über  $W_{\mathbf{Q}}^{\text{ab}} \cong \mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^\times / \mathbf{Q}^\times \cong \mathbf{R}_+^\times \times \hat{\mathbf{Z}}^\times$ . Aufgrund der Konstruktion von  $\sigma$  ausgehend von  $f$  sehen wir ((4.2.1), (4.2.4) und (4.2.7)), daß  $\det \sigma^{(\lambda)}$  auf  $\mathbf{R}_+^\times$  trivial ist, die Einschränkung auf  $\hat{\mathbf{Z}}^\times$  über  $(\mathbf{Z}/f_\psi \mathbf{Z})^\times$  faktorisiert und

$$(\det \sigma^{(\lambda)})|_{(\mathbf{Z}/f_\psi \mathbf{Z})^\times} = \psi^{-1}.$$

Desweiteren gilt<sup>5</sup>

$$\check{\sigma}^{(\lambda)} \cong \sigma^{(\lambda)} \otimes (\det \sigma^{(\lambda)})^{-1} \cong \sigma^{(\lambda)} \otimes \psi. \quad (4.2.9)$$

<sup>4</sup>ein lokal uniformisierendes Element  $\varpi$  entspricht via Klassenkörpertheorie dem *inversen* eines Frobeniuselementes, was mit unserer Normierung der Klassenkörpertheorie konform ist.

<sup>5</sup>hat  $\sigma(w)$  bezüglich der Standardbasis  $(e_1, e_2)$  die Darstellungsmatrix  $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , so hat  $\check{\sigma}^{(\lambda)} \otimes (\det \sigma^{(\lambda)})$  bezüglich der Dualbasis  $(e_1^*, e_2^*)$  die Abbildungsmatrix  $\tilde{A} := \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$ . Mit  $T := \begin{pmatrix} 0 & c \\ ad - bc & -a \end{pmatrix}$  gilt dann  $TAT^{-1} = \tilde{A}$ .

### Das Symmetrische Quadrat

Wir haben analog zu (4.2.8) die Zerlegung

$$V_\lambda \otimes_{F_\lambda} V_\lambda = \text{Sym}^2(\sigma)^{(\lambda)} \oplus \text{Alt}^2(\sigma)^{(\lambda)}$$

und fassen wir  $\psi$  als Größencharakter auf und identifizieren wir den Vektorraum  $\text{Sym}^2(\sigma)^{(\lambda)}$  mit der Darstellung  $W_{\mathbf{Q}} \rightarrow \text{Aut}(\text{Sym}^2(\sigma)^{(\lambda)})$ , zu welcher er Anlaß gibt, so haben wir

$$\text{Sym}^2(\sigma)^{(\lambda)} \cong \Sigma^{(\lambda)} \otimes \psi^{-1}. \quad (4.2.10)$$

Desweiteren gilt bekanntlich [Bou98, chapitre III, section §8, no. 1, Définition 1]

$$\text{Alt}^2(\sigma)^{(\lambda)} \cong \det \sigma^{(\lambda)} \cong F_\lambda \otimes \psi^{-1}$$

mit dem trivialen  $W_{\mathbf{Q}}$ -Modul  $F_\lambda$ .

### Archimedisches

Aufgrund von (4.2.5) ist die Komponente  $\pi_\infty$  der automorphen Darstellung  $\pi$  ein Twist einer *discrete series* Darstellung mit *minimalem Gewicht*<sup>6</sup>  $k$ . Die entsprechende zweidimensionale Darstellung  $\sigma_\infty$  der lokalen Weilgruppe  $W_{\mathbf{R}}$  ist die irreduzible induzierte Darstellung

$$\sigma_\infty = \text{Ind}_{W_{\mathbf{R}}}^{W_{\mathbf{C}}} \theta, \quad (4.2.11)$$

wobei  $\theta : W_{\mathbf{C}} \rightarrow \mathbf{C}^\times$  den Quasicharakter

$$\theta(z) = \left( \frac{z}{|z|} \right)^{k-1}$$

bezeichnet. Dann gilt  $\det \sigma_\infty = \text{sgn}^k$  und  $\check{\sigma}_\infty \cong \sigma_\infty$ . Schließlich ist  $\Sigma_\infty$  wegen (4.2.9) durch

$$\Sigma_\infty = \text{Sym}^2(\sigma_\infty) : W_{\mathbf{R}} \rightarrow \text{GL}_3(\mathbf{C})$$

gegeben<sup>7</sup>, womit wegen (4.2.11)

$$\Sigma_\infty = (\text{Ind}_{W_{\mathbf{R}}}^{W_{\mathbf{C}}} \theta^2) \oplus \text{sgn}. \quad (4.2.12)$$

## 4.3 Automorphes

Für eine Einführung in die Langlandsvermutungen und Langlandsfunktorialität sei auf Borels Corvallisartikel [Bor79] und Cogdells Lecture [BCG<sup>+</sup>04, chapter 11] hingewiesen. Zum Zusammenhang mit der motivischen Situation ist Clozels Artikel [Clo90] die Hauptreferenz.

Für einen lokalen Körper  $k$  bezeichne  $W'_k$  die Weil-Deligne-Gruppe von  $k$ , sofern  $k$  nichtarchimedisch bewertet ist, andernfalls sei  $W'_k = W_k$  die Weilgruppe von  $k$ . Die lokale Langlandskorrespondenz für  $\text{GL}_n$  liest sich dann wie folgt: es existiert eine Bijektion  $\sigma$  zwischen der Menge der irreduziblen admissiblen automorphen (komplexen) Darstellungen  $\pi$  von  $\text{GL}_n(k')$  und der Menge der admissiblen Homomorphismen<sup>8</sup>  $\phi : W'_k \rightarrow {}^L\text{GL}_n$ , so daß

$$L(s, \pi) = L(s, r \circ \sigma(\Pi_\phi))$$

gilt, wobei  $r : {}^L\text{GL}_n \rightarrow \text{GL}_n(\mathbf{C})$  die kanonische Darstellung bezeichnet. Desweiteren stimmen die entsprechenden lokalen  $\varepsilon$ -Faktoren, eindimensionalen Twists, (zentralen) Charaktere und Führer überein.

<sup>6</sup>vergleiche [Gel75, §4A, Theorem 4.4 and §6C, Theorem 6.16], erwähnenswert ist auch [Gel75, §6D, Proposition 6.22].

<sup>7</sup>die Einschränkung von  $\psi$  auf  $W_{\mathbf{R}}$  ist entweder trivial oder  $\text{sgn}$ , je nachdem ob  $\psi$  gerade oder ungerade ist. Das symmetrische Quadrat absorbiert jedoch Twists mit quadratischen Charakteren.

<sup>8</sup>auch Langlandsparameter genannt. Diese parametrisieren sogenannte  $L$ -Pakete, welche im Fall der  $\text{GL}_n$  jedoch sämtlich einelementig sind.

## Symmetrische Potenzen

Es sei  $k$  nun ein globaler Körper,  $v$  eine Stelle von  $k$  und  $k_v$  die Kompletterung von  $k$  bei  $v$ . In [GJ78] betrachteten Gelbart und Jacquet den Morphismus  $\text{Ad} : {}^L\text{GL}_2 \rightarrow {}^L\text{GL}_3$  von  $L$ -Gruppen, welcher durch Verkettung des kanonischen Morphismus  $\text{GL}_2 \rightarrow \text{PGL}_2$  und der adjungierten Darstellung  $\text{Ad} : \text{PGL}_2 \rightarrow \text{Aut}(\text{Lie}(\text{PGL}_2))$  gegeben ist<sup>9</sup>. In [GJ78, Theorem 9.3] zeigten sie, daß diesem Morphismus von  $L$ -Gruppen ein starker Lift im Sinne der Langlandsfunktorialität entspricht: zu jeder irreduziblen admissiblen cuspidalen automorphen Darstellung  $\pi = \otimes_v \pi_v$  von  $\text{GL}_2$  mit der Eigenschaft, daß  $\pi \otimes \chi \not\cong \pi$  für jeden nichttrivialen Idelklassencharakter  $\chi$ , existiert eine (bis auf Äquivalenz eindeutige) irreduzible admissible cuspidale automorphe Darstellung  $\Pi = \otimes_v \Pi_v$  von  $\text{GL}_3$  mit trivialem zentralen Charakter,  $\check{\Pi} \cong \Pi$  und

$$L(s, \Pi_v) = L(s, r \circ \text{Ad} \circ \sigma(\pi_v))$$

für alle Stellen  $v$  von  $k$ , entsprechendes gilt für die  $\varepsilon$ -Faktoren und eindimensionalen Twists. Desweiteren ist die  $L$ -Funktion

$$\prod_v L(s, r \circ \text{Ad} \circ \sigma(\pi_v)) = L(s, \Pi)$$

ganz. Dies gilt ebenfalls für alle Twists von  $\Pi$  mit Idelklassencharakteren<sup>10</sup>.

Das symmetrische Quadrat der Darstellung  $\text{id} : \text{GL}_2(\mathbf{C}) \rightarrow \text{GL}_2(\mathbf{C})$  gibt nun Anlaß zu einer dreidimensionalen Darstellung

$$\text{Sym}^2 \text{id} : \text{GL}_2(\mathbf{C}) \rightarrow \text{GL}_3(\mathbf{C}).$$

Dieser entspricht ein Morphismus

$$\rho_3 : {}^L\text{GL}_2 \rightarrow {}^L\text{GL}_3$$

von  $L$ -Gruppen über  $k_v$ , indem wir  $\text{Sym}^2 \text{id}$  durch die Identität auf die Galoisgruppe fortsetzen. Das Resultat von Gelbart und Jacquet bedeutet, daß zu diesem Morphismus von  $L$ -Gruppen ein *Lift* im Sinne der Langlandsfunktorialität entspricht, denn  $\rho_3$  und  $\text{Ad}$  unterscheiden sich lediglich um einen Twist mit  $\det : \text{GL}_2 \rightarrow \text{GL}_1$ . Dies steht in vollständiger Analogie zur motivischen Situation, wobei  $\Sigma$  und  $\text{Sym}^2 M(f)$  via (4.2.10) verglichen werden<sup>11</sup>.

Kim und Shahidi [KS02b, Theorem 10.2(a)] zeigten, daß es sich bei der Rankin-Selberg-Faltung  $L(s, \Pi' \otimes \pi')$  um die  $L$ -Funktion einer automorphen Darstellung auf  $\text{GL}_6(\mathbf{A}_k)$  handelt.

Allgemeiner zeigten sie [KS02b, Theorem 5.1] die durch

$$\cdot \otimes \cdot : \text{GL}_2(\mathbf{C}) \times \text{GL}_3(\mathbf{C}) \rightarrow \text{GL}_6(\mathbf{C})$$

gegebene Funktorialität  $\text{GL}_2 \times \text{GL}_3 \rightarrow \text{GL}_6$ . In diesem Sinne sprechen wir bei  $L(s, \Pi' \times \pi')$  von der  $L$ -Funktion  $L(s, \Omega)$  einer automorphen Darstellung  $\Omega$  von  $\text{GL}_6(\mathbf{A}_k)$ .

Kim und Shahidi [KS02b, Theorem 10.1] zeigten ebenfalls die Funktorialität von  $\text{Sym}^3 : \text{GL}_2 \rightarrow \text{GL}_4$ , sowie in [Kim03, KS02a] ebenfalls der funktorielle Lift  $\text{Sym}^4 : \text{GL}_2 \rightarrow \text{GL}_5$ , wobei diese höheren symmetrischen Potenzen wie im Fall des symmetrischen Quadrates den  $L$ -Gruppenmorphismen  ${}^L\text{GL}_2 \rightarrow {}^L\text{GL}_{n+1}$  entsprechen, welche zu

$$\text{Sym}^n \text{id} : \text{GL}_2(\mathbf{C}) \rightarrow \text{GL}_{n+1}(\mathbf{C})$$

korrespondieren.

<sup>9</sup>bezüglich der Identität auf der Galoisgruppe.

<sup>10</sup>im Fall  $\pi \otimes \chi \cong \pi$  für nichttriviales  $\chi$  ist  $\Pi$  nicht mehr cuspidal und es treten einfache Pole auf, vgl. [GJ78, Sec. 3.7 and Remark 9.9].

<sup>11</sup>Im Sinne eines Satakeparameters  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$  führt  $\text{Ad}$  zu  $\begin{pmatrix} ab^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^{-1}b \end{pmatrix}$ ,  $\rho_3$  hingegen zu  $\begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & ab & 0 \\ 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix}$ . Analoges

gilt für  $\Sigma$  und  $\text{Sym}^2 M(f)$ . Diese Analogie setzt sich selbstverständlich auch auf die Komplemente in  $\check{\sigma} \otimes \sigma$  und  $\sigma \otimes \sigma$  fort.

### Base Change

Um nichttriviale Beispiele zu konstruieren, erweist sich base change<sup>12</sup> [Lan80, AC89] für  $GL_n$  als nützlich. Für  $\Sigma$  haben wir über  $\mathbf{Q}$  eine entsprechende irreduzible admissible cuspidale automorphe Darstellung  $\Pi$  von  $GL_3$ . Dieser entspricht dank des base change Lifts für beliebige auflösbare Erweiterungen  $k/\mathbf{Q}$  eine automorphe Darstellung  $\Pi'$  von  $GL_3$  über  $k$ , welche wiederum dem Motiv  $\Sigma/k$  entspricht. Analog existiert zur Darstellung  $\pi$  von  $GL_2(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}})$  ein Lift  $\pi'$  auf  $GL_2(\mathbf{A}_k)$ .

Es sei darauf hingewiesen, daß im Allgemeinen der Lift einer kohomologischen Darstellung nicht kohomologisch sein muß. Ist  $k/\mathbf{Q}$  auflösbar und total reell, so ist der base change Lift einer kohomologischen Darstellung in einer solchen Erweiterung stets kohomologisch.

## 4.4 Modularität

Nach [Wil95, TW95, BCDT01] existiert zu jeder elliptischen Kurve  $E/\mathbf{Q}$  (ohne komplexe Multiplikation) eine Spitzenform  $f$  vom Gewicht 2 mit trivialem Nebentyp und  $L(s, M(E)_{/\mathbf{Q}}) = L(s, M(f)_{/\mathbf{Q}})$ . In diesem Sinne umfaßt obige Diskussion also sämtliche elliptische Kurven über  $\mathbf{Q}$  (ohne CM).

## 4.5 Iwasawa-Theorie

Es sei  $k/\mathbf{Q}$  auflösbar und total reell,  $f$  eine primitive normalisierte Spitzenform vom Gewicht 2 und Nebentyp  $\psi$  zu  $\Gamma_0(N)$ ,  $g$  eine primitive normalisierte Spitzenform vom Gewicht 2 auf  $\Gamma_0(N')$  mit trivialem Nebentyp und es bezeichne  $M(f)$  sowie  $M(g)$  die assoziierten Motive. Desweiteren sei  $\Sigma$  das Motiv von Rang 3 zu  $M(f)$  wie in Abschnitt 4.2 und  $\Pi$  sei die im Sinne des Jacquet-Gelbart-Lifts hierzu assoziierte cuspidale automorphe Darstellung von  $GL_3(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}})$ . Diese hat trivialen zentralen Charakter und ist in unserem Sinne kohomologisch. Das gleiche trifft auf den base change Lift  $\Pi'$  von  $\Pi$  auf  $GL_3(\mathbf{A}_k)$  zu. Es sei  $\pi$  die zu  $g$  assoziierte automorphe Darstellung. Diese ist ebenfalls kohomologisch mit trivialem zentralem Charakter, wie auch der base change Lift  $\pi'$  von  $\pi$  auf  $GL_2(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}})$ .

Sei nun  $\mathfrak{p}$  eine endliche Primstelle von  $k$ , welche  $NN'$  nicht teilt und es seien  $\Pi'$  als auch  $\pi'$  bei  $\mathfrak{p}$  ordinär im Sinne von Abschnitt 2.3. Dies ist beispielsweise der Fall, wenn  $M(f)/k$  und  $M(g)/k$  zu elliptischen Kurven korrespondieren, welche bei  $\mathfrak{p}$  gute ordinäre Reduktion haben. Unsere Konstruktion produziert in diesem Fall ein  $\mathfrak{p}$ -adisches Maß  $\mu$  mit Werten in  $\overline{\mathbf{Q}}$ , so daß

$$\int_{\Theta} \chi d\mu = P\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \delta(\pi, \sigma) \cdot \kappa(f) \cdot G(\chi)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot L\left(\frac{1}{2}, \Pi' \otimes \pi' \otimes \chi\right),$$

für alle Idelklassencharaktere  $\chi : k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times \rightarrow \mathbf{C}^\times$  endlicher Ordnung mit nichttrivialem Führer  $\mathfrak{f} = \mathfrak{p}'$ . Bezeichnet  $K/k$  die maximale abelsche Erweiterung von  $k$ , welche außerhalb von  $\mathfrak{p}$  unverzweigt ist, so erhalten wir nach Klassenkörpertheorie einen kanonischen Isomorphismus

$$\Gamma := \text{Gal}(K/k) \cong k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times / (k_\infty^\times)^0 \prod_{\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}} \mathcal{O}_{k,\mathfrak{q}}^\times = \Theta.$$

Insbesondere haben wir eine exakte Sequenz

$$1 \rightarrow \overline{\mathcal{O}_{k,+}^\times} \rightarrow \prod_{\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}} \mathcal{O}_{k,\mathfrak{q}}^\times \rightarrow \Gamma \rightarrow \mathcal{C}^{\mathfrak{p}^\infty} \rightarrow 1,$$

<sup>12</sup>auch dieser läßt sich im Rahmen des allgemeinen Funktorialitätsprinzips der Langlandsphilosophie beschreiben.

wobei  $\mathcal{C}^{\mathfrak{p}\infty}$  die Strahlklassengruppe zu  $K/k$  bezeichnet. In diesem Sinne entspricht  $\mu$  einem Maß  $\mu$  auf  $\Gamma$  mit der Interpolationseigenschaft

$$\int_{\Gamma} \chi d\mu = P\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \delta(\pi, \sigma) \cdot \kappa(\mathfrak{f}) \cdot G(\chi)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot L(2, (\Sigma \otimes M(g)_{/k}) \otimes \chi). \quad (4.5.1)$$

Da  $k$  total reell ist, so wissen wir aus Proposition 3.4.1, daß  $P(\frac{1}{2}) \neq 0$ , so daß wir mittels (4.5.1) tatsächlich eine  $\mathfrak{p}$ -adische  $L$ -Funktion  $L_{\mathfrak{p}}(s, \Sigma \otimes M(g)_{/k})$  erhalten.

### Symmetrische Potenzen Elliptischer Kurven

Ein Spezialfall dieser Konstruktion ist die Situation zweier über  $\mathbf{Q}$  definierter elliptischer Kurven  $E_1$  sowie  $E_2$  ohne CM, in welchem wir

$$\int_{\Gamma} \chi d\mu = P\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \delta(\pi, \sigma) \cdot \hat{\kappa}(\mathfrak{f}) \cdot G(\chi)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot L(2, (\text{Sym}^2 E_1 \otimes E_2)_{/k} \otimes \chi) \quad (4.5.2)$$

erhalten.

Gilt desweiteren  $E = E_1 = E_2$ , so erhalten wir

$$\text{Sym}^2 E \otimes E = \text{Sym}^3 E \oplus E(-1),$$

was uns

$$L(s, \text{Sym}^2 E \otimes E_{/k} \otimes \chi) = L(s, \text{Sym}^3 E_{/k} \otimes \chi) \cdot L(s-1, E_{/k} \otimes \chi) \quad (4.5.3)$$

beschert. Manin [Man76] konstruierte die  $\mathfrak{p}$ -adische  $L$ -Funktion  $L_{\mathfrak{p}}(s, E_{/k})$ . Sofern

$$L_{\mathfrak{p}}(s, E_{/k}) \neq 0, \quad (4.5.4)$$

können wir

$$L_{\mathfrak{p}}(s, \text{Sym}^3 E_{/k}) := \frac{L_{\mathfrak{p}}(s, \text{Sym}^2 E \otimes E_{/k})}{L_{\mathfrak{p}}(s, E_{/k})}$$

definieren.

Die Bedingung (4.5.4) ist äquivalent zur Frage, ob es eine Artin'sche Darstellung  $\chi : \text{Gal}(k^{\text{ab}}/k) \rightarrow \mathbf{C}^{\times}$  gibt, welche außerhalb von  $S := \{\mathfrak{p}\} \cup S_{\infty}$  unverzweigt ist und für welche

$$L(1, E_{/k} \otimes \chi) \neq 0. \quad (4.5.5)$$

In [Roh89] zeigt Rohrlich die Existenz eines Hecke-Charakters endlicher Ordnung, welcher *innerhalb* einer vorgegebenen *endlichen* Primstellenmenge unverzweigt ist und für welchen via Klassenkörpertheorie (4.5.5) gilt. Leider ist dieses Resultat für unsere Zwecke zu unscharf. Im Fall  $k = \mathbf{Q}$  gilt (4.5.5) nach [Roh84] für fast alle  $\chi$ , welche außerhalb von  $S$  unverzweigt sind, sofern keine der Primstellen  $v \in S$  das Level  $N$  teilt. Dies läßt sich verallgemeinern.

**Proposition 4.5.1.** *Es sei  $K/\mathbf{Q}$  abelsch<sup>13</sup>, die Diskriminante  $d_{K/\mathbf{Q}}$  von  $K$  sei zu  $N$  teilerfremd und es sei weiterhin  $S \supseteq S_{\infty}$  eine endliche Primstellenmenge, so daß  $v \in S \Rightarrow v \nmid N$ . Dann gilt*

$$L(1, E_{/K} \otimes \chi) \neq 0 \quad (4.5.6)$$

für fast alle Artin'schen Darstellungen  $\chi$  von  $\text{Gal}(\mathbf{Q}^{\text{ab}}/K)$ , welche außerhalb von  $S$  unverzweigt sind.

<sup>13</sup>nicht notwendigerweise total reell.



*Beweis.* Für  $\chi$  wie in der Proposition bezeichne  $K(\chi) = \overline{\mathbf{Q}}^{\ker \chi} \subseteq \overline{\mathbf{Q}}^{\text{ab}}$ . Damit haben wir

$$L(s, E/K \otimes \chi) = L(s, E/\mathbf{Q} \otimes \text{Ind}_{\text{Gal}(K(\chi)/\mathbf{Q})}^{\text{Gal}(K(\chi)/K)} \chi) = \prod_i L(s, E/\mathbf{Q} \otimes \tau_i),$$

wobei

$$\text{Ind}_{\text{Gal}(K(\chi)/\mathbf{Q})}^{\text{Gal}(K(\chi)/K)} \chi = \bigoplus_i \tau_i$$

mit Artin'schen Darstellungen  $\tau_i$  von  $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}^{\text{ab}}/\mathbf{Q})$ , unverzweigt bei allen Stellen  $v$  von  $\mathbf{Q}$  mit  $v \notin S'$ , wobei  $S'$  die endliche Primstellenmenge

$$S' := \{v \in M_{\mathbf{Q}} \mid \text{es gilt } v \mid d_{K/\mathbf{Q}} \text{ oder } \exists w \in S : w \mid v\}$$

bezeichnet. Dank Klassenkörpertheorie und Rohrlichs Resultat [Roh84] existieren nur endlich viele solche  $\tau_i$  mit

$$L(1, E/\mathbf{Q} \otimes \tau_i) = 0.$$

Andererseits gibt es dank Frobenius-Reziprozität nur endlich viele  $\chi$ , welche durch Induktion zu einem solchen  $\tau_i$  Anlaß geben. Das zeigt die Behauptung.  $\square$

Wir erhalten das

**Korollar 4.5.2.** *Falls  $k/\mathbf{Q}$  abelsch und total reell,  $p$  in  $k/\mathbf{Q}$  unzerlegt<sup>14</sup> ist, und  $(d_{k/\mathbf{Q}}, N) = 1$ , so gilt (4.5.4). Insbesondere existiert in diesem Fall  $L_{\mathfrak{p}}(s, \text{Sym}^3 E/k)$ .*

Nach Kim und Shahidi [KS02b] korrespondiert zu  $\text{Sym}^3 \pi'$  eine cupsidale automorphe Darstellung  $\Delta$  von  $\text{GL}_4(\mathbf{A}_k)$ . Insbesondere sind die getwisteten  $L$ -Funktionen  $L(s, \Delta \otimes \chi)$  für jeden Hecke-Charakter  $\chi$  von  $k$  ganz [KS02b, Theorem 10.1].

Die so konstruierte  $\mathfrak{p}$ -adische  $L$ -Funktion hat gemäß Gleichung (4.5.3) daher die Interpolationseigenschaft

$$L_{\mathfrak{p}}(\chi, \text{Sym}^3 E/k) = Q_{\infty} \cdot G(\chi)^4 \cdot \frac{\mathfrak{N}(f)}{(\alpha_{\mathfrak{p}}^3 \beta_{\mathfrak{p}})^{\nu_{\mathfrak{p}}(f)}} \cdot L\left(\frac{1}{2}, \Delta \otimes \chi\right) \quad (4.5.7)$$

für alle Hecke-Charaktere  $\chi$  endlicher Ordnung mit nichttrivalem  $\mathfrak{p}$ -Potenzführer und vereinfachend<sup>15</sup>  $\chi_{\infty} = 1_{\infty}$ , sofern  $L_{\mathfrak{p}}(\chi, E/k)$  nicht verschwindet, denn es gilt

$$L_{\mathfrak{p}}(\chi, E/k) = \Omega_{\infty} \cdot \frac{\mathfrak{N}(f)}{G(\chi) \alpha_{\mathfrak{p}}^{\nu_{\mathfrak{p}}(f)}} \cdot L(1, E/k \otimes \chi),$$

wobei  $\alpha_{\mathfrak{p}}$  die Wurzel des Hecke-Polynoms von  $E$  bei  $\mathfrak{p}$  mit  $\|\alpha_{\mathfrak{p}}\|_{\mathfrak{p}} = 1$  bezeichnet und  $\beta_{\mathfrak{p}}$  die andere Wurzel ist.

Es stellt sich die Frage, ob  $L_{\mathfrak{p}}(s, \text{Sym}^3 E/k)$  für alle  $\chi$  definiert ist und falls dies zutrifft, ob  $L_{\mathfrak{p}}(s, \text{Sym}^3 E/k) \neq 0$ . Es wird allgemein angenommen, daß beides der Fall ist.

Kim und Shahidi zeigten, daß beim zentralen kritischen Wert der ungetwisteten  $L$ -Funktion kein Pol vorliegt [KS00, Proposition 3.9] und Harris hat ein Nicht-Verschwindungsresultat für das Tripelprodukt von  $\text{GL}_2$  [Har94, Proposition 6.1]. Dies beantwortet zwar unsere beiden Fragen nicht, gibt aber Hoffnung, daß wir richtig liegen.

<sup>14</sup> $p \mid d_{k/\mathbf{Q}}$  ist zulässig,  $p \mid N$  hingegen nicht.

<sup>15</sup>Diese Hypothese vereinfacht lediglich die Formulierung; das getwistete Rankin-Selberg-Produkt ist in unserem Fall von  $\chi_{\infty}$  unabhängig, da das symmetrische Quadrat Twists mit quadratischen Charakteren absorbiert. Der Einfluß von  $\chi_{\infty}$  auf  $L_{\mathfrak{p}}(\chi, E/k)$  ist bekannt und ließe sich dazu verwenden, die Interpolationseigenschaft von  $L_{\mathfrak{p}}(\chi, \text{Sym}^3 E/k)$  für beliebige  $\chi_{\infty}$  zu formulieren.

Es stellt sich selbstverständlich die Frage, ob das auf diese Weise erhaltene Algebraizitätsresultat für  $L(\frac{1}{2}, \text{Sym}^3 E/k)$  mit der Vermutung von Deligne [Del79] verträglich ist. Da  $\text{Sym}^3 E_{\mathbf{Q}}$  die Hodge-Zahlen  $h^{3,0} = h^{2,1} = h^{1,2} = h^{0,3} = 1$  hat, ist der zentrale Wert  $s = 2$  der einzige kritische Wert von  $\text{Sym}^3 E_{\mathbf{Q}}$  und dies gilt daher ebenfalls über den von uns betrachteten total reellen Zahlkörpern  $k/\mathbf{Q}$ .

Bezüglich der Deligne-Perioden sind die Arbeiten [Gar87, PSR87, Pra90, HK91, GH93, KS00] zum Rankin-Tripel-Produkt automorpher Darstellungen von  $\text{GL}_2$  von Bedeutung. Auf der Grundlage von Garretts Integraldarstellung [Gar87] studieren Garrett und Harris in [GH93] die speziellen Werte von  $L$ -Funktionen des Tripel-Produktes gewisser automorpher Darstellungen von  $\text{GL}_2$ , welche insbesondere grundsätzlich die uns interessierenden Hilbert'schen Modulformen umfassen. Im Fall von parallelem Gewicht 2 unterliegen sie jedoch einer Einschränkung, was die kritischen Werte betrifft, was auf mangelnde Kenntnisse über gewisse Eisensteinreihen außerhalb des absoluten Konvergenzbereiches zurückzuführen ist. Es ist anzunehmen, daß ihre Aussagen auch in dem uns interessierenden Fall gelten, selbst wenn dieser dort formal ausgeschlossen wurde [GH93, vgl. 3.4.8 and Remark 4.6.3].

Garrett und Harris' diesbezügliche Resultat [GH93, Theorem 6.2] basiert auf der Kombination ihres [GH93, Theorem 4.6] und Shimuras Resultat [Shi78, Theorem 4.3], welches in der dortigen Formulierung den Fall des parallelen Gewichts 2 nicht umfaßt. Nach [Roh89] existiert jedoch ein  $\eta$ , so daß  $A(m', \mathfrak{f}, \eta) \neq 0$ , wie es in Shimuras Beweis von Theorem 4.3 auf Seite 674 benötigt wird. Daher gilt Shimuras Theorem 4.3 auch in unserem Fall (beziehungsweise historisch zuerst [Shi77, Theorem 2] für  $k = \mathbf{Q}$ ).

Glauben wir an die Gültigkeit von Garrett-Harris' Resultat auch in unserem Fall, so gilt im Sinne von [GH93, section 6] aufgrund der von Kim und Shahidi [KS00, Proposition 3.9] gezeigten Endlichkeit des zentralen kritischen Wertes der betreffenden Tripel-Produkt- $L$ -Funktion, daß

$$\frac{L(2, \text{Sym}^3 E/k)}{(2\pi i)^{3[k:\mathbf{Q}]} \prod_{\tau} c^{\pm}(\tau)^3 c^{\mp}(\tau)} = \frac{L(\frac{1}{2}, \text{Sym}^3 \pi')}{(2\pi i)^{3[k:\mathbf{Q}]} \prod_{\tau} c^{\pm}(\tau)^3 c^{\mp}(\tau)} \in \mathbf{Q}(\pi'),$$

wobei  $c^{\pm}(\tau)$  gerade die (automorphen) Perioden der Hilbert'schen Modulform zu  $\pi'$  sind (im Sinne von [Yos94]), so daß nach obigem durch Rohrlich augmentierten Satz von Shimura

$$\frac{L(1, E/k \otimes \chi)}{(2\pi i)^{[k:\mathbf{Q}]} \prod_{\tau} c^{\pm}(\tau) G(\chi)} = \frac{L(\frac{1}{2}, \pi' \otimes \chi)}{(2\pi i)^{[k:\mathbf{Q}]} \prod_{\tau} c^{\pm}(\tau) G(\chi)} \in \mathbf{Q}(\pi', \chi)$$

gilt. Nach [Shi76a] und [Shi77, Theorem 3] gilt andererseits für jeden Dirichlet-Charakter  $\psi$

$$\frac{L(1, E/\mathbf{Q} \otimes \psi)}{\Omega^{\pm}(\psi) \Omega^{\mp}(\psi) G(\psi)} = \frac{L(\frac{1}{2}, \pi \otimes \psi)}{\Omega^{\pm}(\psi) \Omega^{\mp}(\psi) G(\psi)} \in \mathbf{Q}(\psi)$$

mit (motivischen) Perioden  $\Omega^{\pm}(\psi)$  von  $E$  im Sinne Delignes. Ist  $k/\mathbf{Q}$  abelsch, so ergäbe sich hieraus insbesondere, daß unsere Periode  $Q_{\infty}$  tatsächlich motivisch ist, sofern sich unser Algebraizitätsresultat auf die ungetwistete  $L$ -Funktion fortsetzt.

Ash und Ginzburg konstruieren in [AG94], [Sch93] verallgemeinernd, mit analogen Techniken  $p$ -adische  $L$ -Funktionen auf  $\text{GL}_{2n}$  über einem beliebigen Zahlkörper  $k$ . Da  $\text{Sym}^3 \pi'$  eine cuspidale automorphe Darstellung von  $\text{GL}_4$  ist, ergibt sich aus obiger Arbeit ebenfalls die Existenz der zugehörigen  $p$ -adischen  $L$ -Funktion, modulo folgender Hypothesen:  $\text{Sym}^3 \pi'$  ist kohomologisch und besitzt ein  $H$ -Modell im Sinne von Ash-Ginzburg. Die Existenz von letzterem ergibt sich nach [AG94, Section 5] aus dem folgenden Analogon von (4.5.5): es existiert ein Hecke-Charakter  $\chi$  endlicher Ordnung mit nichttrivialem Führer  $\mathfrak{f} = \mathfrak{p}^r$ , welcher bei  $v \mid \infty$  trivial ist mit

$$L(\frac{1}{2}, \text{Sym}^3 \pi' \otimes \chi) \neq 0.$$

Die Existenz nach Ash-Ginzburg ist also äquivalent zum Nichtverschwinden der von uns konstruierten  $\mathfrak{p}$ -adischen  $L$ -Funktion. Die Ergebnisse von Ash-Ginzburg würden implizieren, daß  $L_{\mathfrak{p}}(s, \text{Sym}^3 E/k)$  tatsächlich *ganz* im  $\mathfrak{p}$ -adisch analytischen Sinne ist und die Interpolationsformel (4.5.7) ohne die Einschränkung  $L_{\mathfrak{p}}(\chi, E/k) \neq 0$  gilt.

### Weitere Anwendungen

Neben der unbeantworteten Frage, ob  $P(\frac{1}{2}) \neq 0$  für  $n \geq 4$  oder nicht total reelles  $k$ , sind wir aufgrund der mangelnden nachgewiesenen Funktorialität im Sinne Langlands in der Konstruktion unserer Beispiele beschränkt, zumal sich bei jedem Lift stets die Frage stellt, ob dieser Kohomologizität erhält. Gaëtan Chenevier hat mich darauf aufmerksam gemacht, daß sich auf analoge Weise sämtliche ungeraden  $\mathfrak{p}$ -adischen symmetrische Potenzen elliptischer Kurven konstruieren lassen, sofern wir an die Funktorialität und das  $\mathfrak{p}$ -adische Nichtverschwinden höherer symmetrischer Potenzen glauben.

Zuguterletzt hätte eine entsprechende Verallgemeinerung von Rohrlichs Nichtverschwindungsergebnis [Roh84] zumindest die Gültigkeit unserer Konstruktion der dritten Symmetrischen Potenz für auflösbares und nicht notwendigerweise abelsches total reelles  $k/\mathbf{Q}$  zur Folge.

## 4.6 Ausblick

Zu der offen gebliebenen Frage, ob im kritischen Fall unsere „Periode“  $P(\frac{1}{2})$  im Allgemeinen nicht verschwindet und ob sie der Vermutung von Deligne [Del79, Clo90] genügt, gesellt sich die Frage, ob sich die Methode aus [KS08] zur Behandlung beliebiger Koeffizientensysteme auch auf unseren allgemeinen Fall übertragen lassen. Insbesondere stellt sich in diesem Kontext die Frage nach der analogen Behandlung der komplexen Stellen. In dieser Arbeit wurde lediglich der zentrale kritische Wert studiert. Im Allgemeinen ist  $s = \frac{1}{2}$  gewiß nicht der einzige kritische Wert der Rankin-Selberg-Faltung, sofern dieser Wert überhaupt kritisch ist. Die Behandlung beliebiger kritischer Werte sollte sich im Rahmen beliebiger Koeffizientensysteme analog zu [KS08] behandeln lassen.

### Funktionenkörper

Wie bereits bemerkt, gilt das allgemeine lokale Birch-Lemma aus dem ersten Kapitel für beliebige nichtarchimedisch bewertete lokale Körper. Daher läßt sich analog ein allgemeines globales Birch-Lemma für Funktionenkörper zeigen. Die Distributionenrelation überträgt sich ob ihres lokalen Ursprunges ebenfalls auf den Funktionenkörperfall, so daß hier noch die Frage nach der Algebraizität und Beschränktheit zu beantworten bleibt.

### Allgemeinere Rankin-Selberg-Faltungen

In natürlicher Weise stellt sich die Frage nach der Verallgemeinerung auf Rankin-Selberg-Faltungen auf  $\text{GL}_n \times \text{GL}_m$  für beliebige  $m$  und  $n$ . Der Beweis des zentralen Lemmas 1.1.6 aus dem ersten Kapitel zeigt mit der dortigen Notation die allgemeine Integralformel

$$\int_{U_m(F) \backslash \text{GL}_m(F)} \psi(\lambda_m(g)) \cdot w(j(g \cdot D_m w_m)) \cdot v(g) \|\det(g)\|^{s - \frac{n-m}{2}} dg =$$

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{f})^{\frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^m 5\nu^2 - 3\nu} \cdot G(\chi)^{\frac{m(m+1)}{2}} \cdot w(\mathbf{1}_n) \cdot v(\mathbf{1}_m)$$

für die Einbettung  $j : \text{GL}_m \rightarrow \text{GL}_n$ ,

$$g \mapsto \begin{pmatrix} g & \\ & \mathbf{1}_{n-m} \end{pmatrix}$$

und beliebige Iwahori-invariante Whittakerfunktionen  $w$  und  $v$  auf  $GL_n(F)$  und  $GL_m(F)$ . Diese Integralformel gilt für beliebige  $n \geq m$ . Das suggeriert, daß anstatt des Translates  $g \mapsto w(j(g)h^{(f)})$  von  $w$  möglicherweise die Whittakerfunktion  $g \mapsto \psi(\lambda_m(g)) \cdot w(j(g \cdot D_m w_m))$  einen Ansatz zur Behandlung allgemeiner Rankin-Selberg-Faltungen bietet.

### Hida-Familien

Eine weiterführende Frage ist die Variation einer (oder beider) automorphen Darstellungen  $\pi$  und  $\sigma$ . Im Fall  $n = 3$  könnten wir beispielsweise die Variation von  $\sigma$  in einer Hida-Familie studieren. Jacques Tilouine machte mich darauf aufmerksam, daß als Motivation für ein derartiges Studium der klassische Satz von Greenberg-Stevens [GS93, Theorem 7.1] dienen könnte, welcher eine Aussage über die trivialen Nullstellen  $p$ -adischer  $L$ -Funktionen elliptischer Kurven macht. Dies ist dort insbesondere im Rahmen der  $p$ -adischen BSD-Vermutung von Interesse [MTT86, Col03], was die potentielle arithmetische Signifikanz einer derartigen Aussage unterstreicht.

# Anhang A

## Gauß'sche Summen

In diesem Abschnitt beweisen wir die Formel (0.0.1). Genauer zeigen wir die

**Proposition A.0.1.** *Es sei  $\chi : F^\times \rightarrow \mathbf{C}^\times$  ein Quasicharakter mit Führer  $\mathfrak{f}$  und  $0 \neq \mathfrak{g} \trianglelefteq \mathcal{O}_F$  sei ein ganzes Ideal mit Erzeuger  $g \in \mathcal{O}_F$ . Es sei weiterhin  $\mathfrak{h} := \mathfrak{f} \cap \mathfrak{g}$ . Dann gilt*

$$\sum_{x+\mathfrak{h} \in (\mathcal{O}_F/\mathfrak{h})^\times} \chi(x) \psi\left(\frac{x}{g}\right) = \begin{cases} \chi(g/\mathfrak{f}) \cdot G(\chi), & \text{falls } \mathfrak{f} = \mathfrak{g}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

*Beweis.* Der Fall  $\mathfrak{f} = \mathfrak{g}$  ist klar. Wir müssen also die beiden Fälle  $\mathfrak{f} \subsetneq \mathfrak{g}$  und  $\mathfrak{g} \subsetneq \mathfrak{f}$  betrachten.

Im ersten Fall haben wir  $\mathfrak{f} = \mathfrak{h}$  und der Gruppenhomomorphismus

$$\mathcal{O}_F \rightarrow \mathbf{C}^\times, \quad x \mapsto \psi\left(\frac{x}{g}\right)$$

hat den Kern  $\mathfrak{g}$ . Insbesondere ist diese Abbildung konstant auf den Nebenklassen  $x + \mathfrak{g}$  für jedes  $x \in \mathcal{O}_F$ . Wir erhalten

$$\begin{aligned} \sum_{x+\mathfrak{h} \in (\mathcal{O}_F/\mathfrak{h})^\times} \chi(x) \psi\left(\frac{x}{g}\right) &= \sum_{y+\mathfrak{g} \in (\mathcal{O}_F/\mathfrak{g})^\times} \sum_{x+\mathfrak{f} \in (1+\mathfrak{g})/(1+\mathfrak{f})} \chi(yx) \psi\left(\frac{xy}{g}\right) = \\ &= \sum_{y+\mathfrak{g} \in (\mathcal{O}_F/\mathfrak{g})^\times} \chi(y) \psi\left(\frac{y}{g}\right) \cdot \sum_{x+\mathfrak{f} \in (1+\mathfrak{g})/(1+\mathfrak{f})} \chi(x). \end{aligned}$$

Daher ergibt sich die Behauptung in diesem Fall aus der bekannten Tatsache, daß

$$\sum_{x+\mathfrak{f} \in (1+\mathfrak{g})/(1+\mathfrak{f})} \chi(x) = 0,$$

denn der Gruppenhomomorphismus

$$(1 + \mathfrak{g})/(1 + \mathfrak{f}) \rightarrow \mathbf{C}^\times, \quad x + \mathfrak{f} \mapsto \chi(x)$$

ist nach Voraussetzung nichttrivial.

Im zweiten Fall gilt  $\mathfrak{h} = \mathfrak{g} \subsetneq \mathfrak{f}$ . Der Charakter

$$\mathcal{O}_F^\times \rightarrow \mathbf{C}^\times, \quad x \mapsto \chi(x)$$

ist konstant auf den Nebenklassen  $a + \mathfrak{f}$  mit  $a \in \mathcal{O}_F^\times$ . Nun gilt analog

$$\sum_{y+\mathfrak{g} \in \mathfrak{f}/\mathfrak{g}} \psi\left(\frac{y}{\mathfrak{g}}\right) = 0,$$

denn

$$\mathfrak{f}/\mathfrak{g} \rightarrow \mathbf{C}^\times, \quad y + \mathfrak{g} \mapsto \psi\left(\frac{y}{\mathfrak{g}}\right)$$

ist ein nichttrivialer Gruppenhomomorphismus. Wir erhalten also

$$\begin{aligned} \sum_{x+\mathfrak{h} \in (\mathcal{O}_F/\mathfrak{h})^\times} \chi(x) \psi\left(\frac{x}{\mathfrak{g}}\right) &= \sum_{x+\mathfrak{f} \in (\mathcal{O}_F/\mathfrak{f})^\times} \sum_{y+\mathfrak{g} \in \mathfrak{f}/\mathfrak{g}} \chi(x+y) \psi\left(\frac{x+y}{\mathfrak{g}}\right) = \\ &= \sum_{x+\mathfrak{f} \in (\mathcal{O}_F/\mathfrak{f})^\times} \chi(x) \psi\left(\frac{x}{\mathfrak{g}}\right) \cdot \sum_{y+\mathfrak{g} \in \mathfrak{f}/\mathfrak{g}} \psi\left(\frac{y}{\mathfrak{g}}\right) = 0, \end{aligned}$$

was zu zeigen war. □

# Anhang B

## Zur Maßrelation

Analog zu [Sch01, Lemma 3.2] haben wir das

**Lemma B.0.1.** *Es seien  $\mathfrak{f} = \mathfrak{p}^{\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{f})} \neq 1$  und  $t = \text{diag}(f^{n-1}, f^{n-2}, \dots, f, 1)$  mit einem Erzeuger  $f \in \mathcal{O}_{k_{\mathfrak{p}}}$  von  $\mathfrak{f}$ ,  $\varpi \in k_{\mathfrak{p}}$  ein Primelement,  $t_{(\mathfrak{p})} = \text{diag}(\varpi^{n-1}, \varpi^{n-2}, \dots, \varpi, 1)$ , sowie  $h \in \text{GL}_n(\mathcal{O}_{k_{\mathfrak{p}}})$  der Gestalt*

$$h = \begin{pmatrix} g & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit  $g \in \text{GL}_{n-1}(\mathcal{O}_{k_{\mathfrak{p}}})$  und  $b \in \mathcal{O}_{k_{\mathfrak{p}}}^{n-1}$ . Wenn

$$h \equiv h^{(1)} \pmod{\mathfrak{f}},$$

dann gilt für alle  $x \in \mathcal{O}_{k_{\mathfrak{p}}}^{\times}$

$$P_{\alpha, \iota}(\varepsilon_x \cdot t_{(\mathfrak{p})}^{-1} t^{-1} h t t_{(\mathfrak{p})}, \mathfrak{f}) = P_{\alpha, \iota}(\varepsilon_x \cdot h^{(f\varpi)}, \mathfrak{f}).$$

*Beweis.* Es bezeichne

$$\mathcal{I}_{n-1} \subseteq j(I_{n-1})$$

die Untergruppe der Matrizen aus  $j(I_{n-1})$ , deren Determinanten kongruent 1 modulo  $\mathfrak{f}$  sind. Dann können wir  $P_{\alpha, \iota}(\cdot, \mathfrak{f})$  aufgrund der Rechtsinvarianz des Haar'schen Maßes als Abbildung auf der Menge der Doppelnebenklassen der Form

$$\mathcal{I}_{n-1} \cdot g \cdot I_n$$

mit  $g \in \text{GL}_n(k_{\mathfrak{p}})$  auffassen. Es genügt daher, zu zeigen, daß die Doppelnebenklassen von  $\varepsilon_x \cdot t_{(\mathfrak{p})}^{-1} t^{-1} h t t_{(\mathfrak{p})}$  und  $\varepsilon_x \cdot h^{(f\varpi)}$  übereinstimmen.

Hierzu schreiben wir  $h = (h_{ij})_{ij}$ . Dann gilt

$$\text{diag}(h_{1,n}, h_{2,n}, \dots, h_{n-1,n}, 1) \cdot h^{(1)} \cdot \text{diag}(h_{n-1,n}^{-1} h_{n-1,1}, h_{n-2,n}^{-1} h_{n-2,2}, \dots, h_{1,n}^{-1} h_{1,n-1}, 1) =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & h_{1,n-1} & h_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ h_{n-1,1} & \ddots & & \vdots & h_{n-1,n} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} =: h'.$$

Da diese Diagonalmatrizen mit  $t_{(\mathfrak{p})}$  und  $t$  kommutieren, genügt es wegen  $h^{(f\varpi)} = t_{(\mathfrak{p})}^{-1}t^{-1}h^{(1)}tt_{(\mathfrak{p})}$  also zu zeigen, daß es Matrizen

$$u^-, v^- \in U_{n-1}^-(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}) = w_{n-1}U_{n-1}(\mathcal{O}_{k_{\mathfrak{p}}})w_{n-1}$$

gibt mit

$$u^-hv^- = h'.$$

Denn wir haben

$$t_{(\mathfrak{p})}^{-1}j(U_{n-1}^-(\mathcal{O}_{k_{\mathfrak{p}}}))t_{(\mathfrak{p})} \subseteq \mathcal{I}_{n-1}$$

was schließlich

$$t_{(\mathfrak{p})}^{-1}t^{-1}htt_{(\mathfrak{p})} \in \mathcal{I}_{n-1}h^{(f\varpi)}I_n$$

impliziert, was letztendlich zu zeigen ist.

Die Existenz von  $u^-$  und  $v^-$  ergibt sich schließlich aus der einfachen Tatsache, daß wir mittels Elementaroperationen sämtliche Einträge von  $h$  eliminieren können, welche modulo  $\mathfrak{f}$  keine Einheiten sind. Dies ist möglich, da wir in  $h$  ausreichend viele Einträge vorfinden, welche modulo  $\mathfrak{f}$  Einheiten sind und welche sich an *günstigen* Positionen befinden.  $\square$



# Anhang C

## Indizes unipotenter Gruppen

Es seien  $n \geq 0$  und  $F$  ein lokaler Körper mit Bewertungsring  $\mathcal{O}_F$ . Für  $0 \neq f \in \mathcal{O}_F$  bezeichne  $\mathfrak{f}$  das von  $f$  erzeugte Ideal,

$$t = \text{diag}(f^{n-1}, f^{n-2}, \dots, f, 1) \in \text{GL}_n(F),$$

sowie

$$U_n(\mathcal{O}_F)^{(f)} = tU_n(\mathcal{O}_F)t^{-1}.$$

**Proposition C.0.1.** *Es gilt*

$$\left( U_n(\mathcal{O}_F) : U_n(\mathcal{O}_F)^{(f)} \right) = \mathfrak{N}(\mathfrak{f})^{\frac{(n+1)n(n-1)}{6}}. \quad (\text{C.0.1})$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} \frac{(n+2)(n+1)n}{6} &= \\ \sum_{\nu=1}^n \nu(n+1-\nu) &= \end{aligned} \quad (\text{C.0.2})$$

$$\frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^n (\nu+1)\nu = \quad (\text{C.0.3})$$

$$n^3 + n^2 - \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^n (5\nu^2 - 3\nu). \quad (\text{C.0.4})$$

*Beweis.* Wir definieren zunächst für  $1 \leq j \leq n-1$

$$\overline{\text{pr}}^{(j)} : U_n(\mathcal{O}_F) \rightarrow (\mathcal{O}_F/\mathfrak{f})^{n-j},$$

$$u \mapsto (u_{1,j+1} + \mathfrak{f}^j, u_{2,j+2} + \mathfrak{f}^j, \dots, u_{n-j,n} + \mathfrak{f}^j),$$

Für  $j > 1$  ist hierdurch zwar kein Homomorphismus gegeben, wir erhalten jedoch durch Einschränkung auf Kern  $\text{pr}^{(j)}$  mittels  $\text{pr}^{(1)} := \overline{\text{pr}}^{(1)}$  induktiv Homomorphismen<sup>1</sup>

$$\text{pr}^{(j)} : \text{Kern pr}^{(j-1)} \rightarrow (\mathcal{O}_F/\mathfrak{f})^{n-j}, u \mapsto \overline{\text{pr}}^j(u) + \text{Kern pr}^{(j-1)}.$$

---

<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \text{pr}^{(r)}(u \cdot v) &= \text{pr}^{(r)} \left( \sum_{l=i}^j (u_{il} + \mathfrak{f}^{i-l}) \cdot (v_{lj} + \mathfrak{f}^{l-j}) \right) = (\dots, \sum_{l=i}^{r+i} (u_{il} + \mathfrak{f}^{i-l}) \cdot (v_{l,r+i} + \mathfrak{f}^{l-r-i}) + \mathfrak{f}^r, \dots) = \\ &(\dots, u_{i,r+i} + v_{i,r+i} + \mathfrak{f}^r, \dots) = \text{pr}^{(r)}(u) + \text{pr}^{(r)}(v). \end{aligned}$$

Wegen

$$\text{Kern}(\text{pr}^{(n-1)}) = U_n(\mathcal{O}_F)^{(f)}$$

ergibt sich induktiv aus der Formel

$$\left( \text{Kern pr}^{(j)} : \text{Kern pr}^{(j+1)} \right) = \mathfrak{N}(f)^{n-j}$$

zunächst

$$\left( \text{Kern pr}^{(1)} : U_n(\mathcal{O}_F)^{(f)} \right) = \mathfrak{N}(f)^{\sum_{j=2}^{n-1} j(n-j)}.$$

Wegen

$$\left( U_n(\mathcal{O}_F) : \text{Kern pr}^{(1)} \right) = \mathfrak{N}(f)^{n-1}$$

erhalten wir schließlich

$$\left( U_n(\mathcal{O}_F) : U_n(\mathcal{O}_F)^{(f)} \right) = \mathfrak{N}(f)^{\sum_{j=1}^{n-1} j(n-j)}.$$

Die Gleichungen (C.0.1), (C.0.2), (C.0.3) und (C.0.4) ergeben sich hieraus durch vollständige Induktion. Dabei genügt es, die letzten drei Gleichungen einzusehen. Der Fall  $n = 0$  ist klar, denn dort stimmen die Ausdrücke sämtlich überein, denn sie haben den Wert 0. Es ist zu zeigen, daß in allen drei Fällen die Differenz der Ausdrücke für  $n + 1$  statt  $n$  mit dem entsprechenden Ausdruck für  $n$  identisch

$$\frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

ist. In den einzelnen Fällen gilt

$$\begin{aligned} & \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6} - \frac{(n+2)(n+1)n}{6} = \\ & \frac{3(n+2)(n+1) + n(n+2)(n+1) - (n+2)(n+1)n}{6} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & \sum_{\nu=1}^{n+1} \nu(n+2-\nu) - \sum_{\nu=1}^n \nu(n+1-\nu) = \\ & (n+1) + \sum_{\nu=1}^n \nu(n+2-\nu) - \sum_{\nu=1}^n \nu(n+1-\nu) = \\ & (n+1) + \sum_{\nu=1}^n \nu + \sum_{\nu=1}^n \nu(n+1-\nu) - \sum_{\nu=1}^n \nu(n+1-\nu) = \frac{(n+2)(n+1)}{2}, \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} & (n+1)^3 + (n+1)^2 - \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{n+1} (5\nu^2 - 3\nu) - n^3 - n^2 + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^n (5\nu^2 - 3\nu) = \\ & (n+1)^3 - n^3 - n^2 + (n+1)^2 - \frac{5(n+1)^2 - 3(n+1)}{2} = 2n^2 + 3n + 1 - \frac{3(n+1)^2 - 3(n+1)}{2} = \\ & 2(n+1)^2 - (n+1) - 3 \frac{(n+1)^2 - (n+1)}{2} = \frac{(n+1)^2 + (n+1)}{2}, \end{aligned}$$

was zu zeigen war.  $\square$

## Anhang D

# Zur Beschränktheit der Distribution

Es sei  $F$  ein lokaler Körper mit Bewertungsring  $\mathcal{O}_F$  und maximalem Ideal  $\mathfrak{p}$ . Wir bezeichnen mit  $I_n$  die Iwahorigruppe in  $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)$ .

**Lemma D.0.1.** *Für alle nichttrivialen  $\mathfrak{p}$ -Potenzen  $\mathfrak{f}$  mit Erzeuger  $f$  gilt mit*

$$\mathfrak{I}_{\mathfrak{f}} := j(I_{n-1}) \cap h^{(f)} I_n h^{(f)^{-1}},$$

daß  $\det \mathfrak{I}_{\mathfrak{f}} = 1 + \mathfrak{f}$  und es gilt

$$(j(\mathrm{GL}_{n-1}(\mathcal{O}_F)) : \mathfrak{I}_{\mathfrak{f}}) = \prod_{\nu=1}^{n-1} (1 - \mathfrak{p}^{-\nu}) \cdot \mathfrak{N}(f)^{\frac{(n+1)n(n-1)+n(n-1)(n-2)}{6}}.$$

*Beweis.* Die Aussage des Lemmas geht auf [Sch01] zurück. Dort wurde sie auf die Propositionen 3.3, 3.4 und die Lemmata 3.6 und 3.7 verteilt formuliert und bewiesen. Wir führen hier einen direkten Beweis.

Wir erinnern an die  $n \times n$ -Matrizen

$$B_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ f & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & f & -1 \end{pmatrix},$$

$$E_n = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & f \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & f & \dots & f^{n-2} \\ 1 & -f & -f^2 & \dots & -f^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$B_n^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ f & -1 & \ddots & & \vdots \\ f^2 & -f & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ f^{n-1} & -f^{n-2} & \dots & -f & -1 \end{pmatrix},$$

sowie

$$E_n^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & f & 1 \\ \vdots & \ddots & -f & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -f & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Es bezeichne  $d_i$  die  $n \times n$ -Diagonalmatrix, welche sich von der Einheitsmatrix nur an der Stelle  $(i, i)$  unterscheidet und dort den Eintrag  $-1$  hat. Dann haben wir die Relation

$$d_1 A_n d_n E_n d_1 = -w_n.$$

Wir interessieren uns für diese Matrizen, denn eine leichte Induktion zeigt

$$B_n h^{(f)} E_n = \text{diag}(f^{-(n-1)}, f^{-(n-3)}, \dots, f^{n-3}, f^{n-1}) = D_n.$$

Es sei angemerkt, daß Konjugation mit  $D_n$  mit der Konjugation mit  $t^{-2}$  identisch ist, wobei wie üblich  $t = \text{diag}(f^{n-1}, f^{n-2}, \dots, f, 1)$ . Es sei für eine Untergruppe  $U \leq \text{GL}_n(F)$

$$U^- := w_n U w_n.$$

Der Übersichtlichkeit zuliebe definieren wir schließlich für beliebiges  $a \in \mathcal{O}_F$  die Matrix

$$C_n(a) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ a^{n-1} & -a^{n-2} & \dots & -a & -1 \end{pmatrix}.$$

Es sei auf  $C_n(a)^2 = 1$  und  $C_n(f) = C_n$  hingewiesen. Desweiteren sei  $C'_n := C_n(f^{-1})$ . Mit dieser Notation gilt nun

$$B_n j(B_{n-1})^{-1} = C_n$$

und desweiteren

$$D_n^{-1} C_n D_n = C'_n.$$

Daher ergibt sich aus

$$B_{n-1}^{-1} I_{n-1} B_{n-1} = I_{n-1},$$

was modulo  $\mathfrak{p}$  eingesehen werden kann, die Relation

$$B_n j(I_{n-1}) B_n^{-1} = C_n j(I_{n-1}) C_n.$$

Analog sehen wir durch Reduktion die bedeutsame Relation

$$E_n^{-1} I_n E_n = I_n^-.$$

Diese beiden Relationen sind für uns von Interesse, denn wir haben

$$(\text{GL}_{n-1}(\mathcal{O}_F) : \mathfrak{J}_f) = (B_n \text{GL}_{n-1}(\mathcal{O}_F) B_n^{-1} : D_n E_n^{-1} I_n E_n D_n^{-1} \cap B_n I_{n-1} B_n^{-1}),$$

wobei wir  $\mathrm{GL}_{n-1}$  mit ihrem Bild unter  $j$  identifizieren. Aufgrund obiger Relationen ergibt sich hieraus

$$\begin{aligned} (\mathrm{GL}_{n-1}(\mathcal{O}_F) : \mathfrak{J}_f) &= (\mathrm{GL}_{n-1}(\mathcal{O}_F) : C_n D_n I_n^- D_n^{-1} C_n \cap I_{n-1}) = \\ &= (\mathrm{GL}_{n-1}(\mathcal{O}_F) : D_n C_n' I_n^- C_n' D_n^{-1} \cap I_{n-1}). \end{aligned}$$

Also

$$(\mathrm{GL}_{n-1}(\mathcal{O}_F) : \mathfrak{J}_f) = (D_{n-1}^{-1} \mathrm{GL}_{n-1}(\mathcal{O}_F) D_{n-1} : C_n' I_n^- C_n' \cap D_{n-1}^{-1} I_{n-1} D_{n-1}). \quad (\text{D.0.1})$$

Es sei

$$c := \left( -f^{-(n-1)}, -f^{-(n-2)}, \dots, -f^{-1}, -1 \right) d_1.$$

Mit dieser Notation haben wir für eine beliebige Matrix  $X = (a_{ij}) = (\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n) \in I_n^-$  die Relation

$$C_n' X d_1 C_n' = (b_{ij}) d_1$$

mit

$$\begin{aligned} 1 \leq i, j < n : \quad b_{ij} &= a_{ij} - f^{-(n-j)} a_{in}, \\ 1 \leq j < n : \quad b_{nj} &= c \cdot \underline{a}_j - f^{-(n-j)} \cdot c \cdot \underline{a}_n, \\ 1 \leq i < n : \quad b_{in} &= -a_{in}, \\ b_{nn} &= -c \cdot \underline{a}_n. \end{aligned}$$

Diese Matrix liegt also genau dann im Bild von  $j : \mathrm{GL}_{n-1} \rightarrow \mathrm{GL}_n$ , wenn

$$\begin{aligned} 1 \leq j < n : \quad c \cdot \underline{a}_j - f^{-(n-j)} \cdot c \cdot \underline{a}_n &= 0, \\ 1 \leq i < n : \quad a_{in} &= 0, \end{aligned} \quad (\text{D.0.2})$$

und

$$c \cdot \underline{a}_n = -1.$$

Das bedeutet, daß in diesem Fall insbesondere

$$\begin{aligned} 1 \leq i, j < n : \quad b_{ij} &= a_{ij}, \\ 1 \leq j < n : \quad c \cdot \underline{a}_j + f^{-(n-j)} &= 0, \end{aligned} \quad (\text{D.0.3})$$

und

$$a_{nn} = 1.$$

Wir schließen, daß in Verbindung mit Gleichung (D.0.2) und entsprechender Translation mit  $d_1$  die letzten beiden Gleichungen äquivalent dazu sind, daß  $C_n' X C_n' =: Y$  im Bild von  $j$  liegt und in diesem Fall

$$C_n' X C_n' = j((a_{ij}))$$

gilt. Gleichung (D.0.3) ist in diesem Sinne<sup>1</sup> äquivalent zu

$$1 \leq j < n : \quad \sum_{i=1}^n a_{ij} f^i = f^j. \quad (\text{D.0.4})$$

---

<sup>1</sup>unter Berücksichtigung der Rechtsmultiplikationen mit  $d_1$ .

Die Bedingung  $Y \in D_{n-1}^{-1}I_{n-1}D_{n-1}$  ist gleichbedeutend damit, daß  $\alpha_{ij} \in \mathcal{O}_F$  existieren mit

$$1 \leq i < j < n : \quad a_{ij} = \alpha_{ij} \cdot \mathfrak{f}^{2(j-i)}.$$

Daher liest sich (D.0.4) unter dieser verschärfenden Bedingung als

$$\sum_{i=1}^{j-1} \alpha_{ij} \mathfrak{f}^{j+(j-i)} + (a_{jj} - 1) \cdot \mathfrak{f}^j + \sum_{i=j+1}^n a_{ij} \mathfrak{f}^i = 0. \quad (\text{D.0.5})$$

Das zeigt insbesondere, daß

$$a_{jj} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}, \quad (\text{D.0.6})$$

und damit bereits die erste Behauptung  $\det \mathfrak{J}_{\mathfrak{f}} = 1 + \mathfrak{f}$ , denn die Determinante ist invariant unter Konjugation. Da wir an  $a_{n1}, \dots, a_{n,n-1}$  nicht interessiert sind, gehen wir von Gleichung (D.0.5) zur äquivalenten Formulierung

$$\sum_{i=1}^{j-1} \alpha_{ij} \mathfrak{f}^{j-i} + a_{jj} + \sum_{i=j+1}^{n-1} a_{ij} \mathfrak{f}^{i-j} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}^{n-j}} \quad (\text{D.0.7})$$

über. Wir bemerken, daß für alle  $\alpha_{ij}, a_{ij} \in \mathcal{O}_F$  für  $i, j < n, i \neq j$ , ein modulo  $\mathfrak{f}^{n-j}$  eindeutiges  $a_{jj} \in \mathcal{O}_F$  existiert, so daß die Kongruenz (D.0.7) erfüllt ist. Dieses  $a_{jj}$  ist insbesondere eine Einheit.

Um den betreffenden Index gemäß (D.0.1) schließlich zu berechnen, betrachten wir

$$D_n C'_n X C'_n D_n^{-1} = (m_{ij})$$

mit

$$m_{ij} = \begin{cases} a_{ij} \mathfrak{f}^{2(i-j)}, & \text{falls } i \geq j, \\ \alpha_{ij}, & \text{falls } i < j. \end{cases}$$

Diese Matrizen leben in der Iwahorigruppe  $I_{n-1} \subseteq \text{GL}_{n-1}(\mathcal{O}_F)$ . Wir betrachten den Kern  $J_n$  der Reduktionsabbildung

$$\text{GL}_{n-1}(\mathcal{O}_F) \rightarrow \text{GL}_{n-1}(\mathcal{O}_F/\mathfrak{f}^{2n}).$$

Dieser hat in  $\text{GL}_{n-1}(\mathcal{O}_F)$  den Index

$$(\text{GL}_{n-1}(\mathcal{O}_F) : J_n) = \mathfrak{N}(\mathfrak{f})^{2n(n-1)^2} \cdot \prod_{\nu=1}^{n-1} (1 - \mathfrak{p}^{-\nu}).$$

Wir zählen nun die Lösungen von (D.0.7) modulo  $J_n$ . Wie bereits bemerkt existiert zu jeder Wahl von  $\alpha_{ij} \in \mathcal{O}_F$  und  $a_{ij} \in \mathcal{O}_F$  mit  $i \neq j$  modulo  $\mathfrak{f}^{n-j}$  eindeutige  $a_{jj} \in \mathcal{O}_F$ . Modulo  $J_n$  ist daher  $\alpha_{ij}$  modulo  $\mathfrak{f}^{2n}$ ,  $a_{ij}$  modulo  $\mathfrak{f}^{2n+2(j-i)}$  für  $i \neq j$  zu betrachten. Insgesamt zählen wir also

$$(\mathfrak{J}_{\mathfrak{f}} : J_n) = \mathfrak{N}(\mathfrak{f})^{2n \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} (n+j) + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^{n-1} 2n+2j-2i}.$$

Für den Exponenten ergibt sich mit Gleichung (C.0.3)

$$\begin{aligned} n(n-1)^2 + \frac{n(n-1)}{2} + 2n \frac{(n-1)(n-2)}{2} - 2 \sum_{j=1}^{n-2} \sum_{k=1}^j k = \\ 2n(n-1)^2 - \frac{n(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{3}. \end{aligned}$$

Zusammenfassend erhalten wir also mittels (C.0.3)

$$(\mathrm{GL}_{n-1}(\mathcal{O}_F) : \mathfrak{I}_f) = \prod_{\nu=1}^{n-1} (1 - \mathfrak{p}^{-\nu}) \cdot \mathfrak{N}(f)^{\frac{(n+1)n(n-1)+n(n-1)(n-2)}{6}},$$

was zu beweisen war. □





# Anhang E

## Modifizierte Whittakerfunktionen

In diesem Abschnitt folgen wir direkt [KMS00, section 4.5]. Es sei  $\mathfrak{p}$  eine endliche Primstelle von  $k$  und  $\tilde{w}_{\mathfrak{p}}$  die lokale Whittakerfunktion der modifizierten Eigenform  $\tilde{\phi}_\ell$  bei  $\mathfrak{p}$ . Bezeichnet  $w_{\mathfrak{p}}$  die class 1 Whittakerfunktion der Eigenform  $\phi_\ell$ , so gilt gemäß Proposition 2.2.3

$$\tilde{w}_{\mathfrak{p}} = \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\lambda_{\mathfrak{p},i} \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{1-j} V_{\mathfrak{p},j-1} - V_{\mathfrak{p},j}) \cdot w_{\mathfrak{p}}.$$

Unser Ziel ist es,  $\tilde{w}_{\mathfrak{p}}(\mathbf{1}_n)$  explizit zu berechnen.

**Proposition E.0.1.** *Es gilt*

$$\tilde{w}_{\mathfrak{p}}(\mathbf{1}_n) = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{A_n} \cdot \prod_{\nu=1}^{n-1} \lambda_{\mathfrak{p},\nu}^{1+(n-1)(n-\nu)} \cdot \prod_{i=2}^{n-1} \prod_{j<i} (\lambda_{\mathfrak{p},j} - \lambda_{\mathfrak{p},i})$$

mit

$$A_n := (n-2) \sum_{\nu=1}^n \frac{\nu(1-\nu)}{2} + \frac{n(n-1)}{2}.$$

Für  $\underline{r} \in \mathbf{N}_0^n$  sei

$$V(\underline{r}) := \prod_{\nu=1}^n V_{\mathfrak{p},\nu}^{r_\nu}.$$

Wir zeigen zunächst das folgende

**Lemma E.0.2.** *Mit einem beliebigen Primelement  $\varpi \in k_{\mathfrak{p}}$  gilt*

$$[V(\underline{r})w_{\mathfrak{p}}](\mathbf{1}_n) = \prod_{\nu=1}^n \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{\nu(n-\nu)r_\nu} \cdot w_{\mathfrak{p}} \left( \prod_{\nu=1}^n \begin{pmatrix} \varpi \cdot \mathbf{1}_\nu & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_{n-\nu} \end{pmatrix}^{r_\nu} \right).$$

*Beweis.* Nach Lemma 2.2.1 gilt für jede rechts- $K_{B_{\mathfrak{p}}}$ -invariante Whittakerfunktion  $w$

$$[V_{\mathfrak{p},\nu} w](g) = \sum_A w \left( g \begin{pmatrix} \varpi \cdot \mathbf{1}_\nu & A \\ 0 & \mathbf{1}_{n-\nu} \end{pmatrix} \right),$$

wobei  $A \in \mathcal{O}_{k_{\mathfrak{p}}}^{\nu \times n-\nu}$  ein Repräsentantensystem modulo  $\mathfrak{p}$  durchläuft. Induktiv ergibt sich hieraus, daß

$$[V_{\mathfrak{p},\nu}^k w](g) = \sum_A w \left( g \begin{pmatrix} \varpi^k \cdot \mathbf{1}_\nu & A \\ 0 & \mathbf{1}_{n-\nu} \end{pmatrix} \right),$$

wobei  $A \in \mathcal{O}_{k_p}^{\nu \times n - \nu}$  ein Repräsentantensystem modulo  $\mathfrak{p}^k$  durchläuft. Das zeigt, daß

$$[V(\underline{r})w](g) = \sum_{A_1} \cdots \sum_{A_{n-1}} w \left( g \begin{pmatrix} \varpi^{r_1} \cdot \mathbf{1}_1 & A_1 \\ 0 & \mathbf{1}_{n-1} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \varpi^{r_{n-1}} \cdot \mathbf{1}_{n-1} & A_{n-1} \\ 0 & \mathbf{1}_{n-\nu} \end{pmatrix} \cdot \varpi^{r_n} \cdot \mathbf{1}_n \right),$$

wobei  $A_\nu \in \mathcal{O}_{k_p}^{\nu \times n - \nu}$  ein Repräsentantensystem modulo  $\mathfrak{p}^{r_\nu}$  durchläuft. Für feste solche  $A_1, \dots, A_{n-1}$  gibt es offensichtlich ein  $B \in U_n(\mathcal{O}_{k_p})$  mit

$$\begin{pmatrix} \varpi^{r_1} \cdot \mathbf{1}_1 & A_1 \\ 0 & \mathbf{1}_{n-1} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \varpi^{r_{n-1}} \cdot \mathbf{1}_{n-1} & A_{n-1} \\ 0 & \mathbf{1}_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \varpi^{r_n} \cdot \mathbf{1}_n = B \cdot \prod_{\nu=1}^n \begin{pmatrix} \varpi \cdot \mathbf{1}_\nu & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_{n-\nu} \end{pmatrix}^{r_\nu}.$$

Da  $w$  links- $U_n(\mathcal{O}_{k_p})$ -invariant ist, erhalten wir

$$[V(\underline{r})w](\mathbf{1}_n) = w \left( \prod_{\nu=1}^n \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{\nu(n-\nu)r_\nu} \cdot \begin{pmatrix} \varpi \cdot \mathbf{1}_\nu & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_{n-\nu} \end{pmatrix}^{r_\nu} \right),$$

was zu zeigen war.  $\square$

Es bezeichne  $\chi_M$  die charakteristische Funktion einer Teilmenge  $M \subseteq N_i$ . Es bezeichne  $W \cong S_n$  die Weyl-Gruppe der  $GL_n$ .

**Lemma E.0.3.** *Es sei  $J_i \subseteq N_i$  für  $1 \leq i \leq n-1$  und damit*

$$r_\nu := \sum_{i=1}^{n-1} \chi_{J_i}(\nu+1) + \chi_{N_i - J_i}(\nu).$$

*Es gilt*

$$[V(\underline{r})w_{\mathfrak{p}}](1) = \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{\frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^n \nu(1-\nu)r_\nu} \cdot \det \left( (\lambda_{\mathfrak{p},i}^{n-j})_{1 \leq i, j \leq n} \right)^{-1} \cdot \sum_{w \in W} \operatorname{sgn}(w) \cdot \prod_{j=1}^{n-1} \lambda_{\mathfrak{p},w(j)}^{1+(n-1)(n-j) + \sum_{\nu=1}^{n-1} \chi_{N_\nu - J_\nu}(j)}.$$

*Beweis.* Es sei

$$d := \operatorname{diag}(\varpi^{s_1}, \dots, \varpi^{s_n}) = \prod_{\nu=1}^n \begin{pmatrix} \varpi \cdot \mathbf{1}_\nu & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_{n-\nu} \end{pmatrix}^{r_\nu},$$

was bedeutet, daß  $s_i = \sum_{\nu=i}^n r_\nu$ . Aus der Formel für  $r_\nu$  als Summe der  $\chi_{J_i}$ ,  $\chi_{N_i - J_i}$  ergibt sich

$$s_j = \sum_{\nu=j}^n \sum_{i=1}^{n-1} (\chi_{J_i}(\nu+1) + \chi_{N_i - J_i}(\nu)) = \sum_{i=1}^{n-1} \left( \chi_{N_i - J_i}(j) + \sum_{\nu=j+1}^n \chi_{N_i}(\nu) \right).$$

Desweiteren gilt für  $j < n$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{\nu=j+1}^n \chi_{N_i}(\nu) = (n-1) + (n-2)(n-j-1) = 1 + (n-2)(n-j),$$

denn  $\sum_{i=1}^{n-1} \chi_{N_i}(\nu)$  ist die Anzahl der  $i \in \{1, \dots, n-1\} - \{v\}$ . Daher haben wir

$$s_j = 1 - \delta_{n,j} + (n-2)(n-j) + \sum_{i=1}^{n-1} \chi_{N_i - J_i}(j).$$

Nach Shintani [Shi76b] gilt

$$w_{\mathbf{p}}(d) = \mathfrak{N}(\mathbf{p})^{\sum_{i=1}^n (i-n)s_i} \frac{\det \left( (\lambda_{\mathbf{p},i}^{s_j+n-j})_{1 \leq i,j \leq n} \right)}{\det \left( (\lambda_{\mathbf{p},i}^{n-j})_{1 \leq i,j \leq n} \right)}.$$

Wegen

$$\sum_{i=1}^n (i-n)s_i + i(n-i)r_i = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^n \nu(1-\nu)r_{\nu}$$

erhalten wir

$$[V(\underline{r})w_{\mathbf{p}}](1) = \mathfrak{N}(\mathbf{p})^{\frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^n \nu(1-\nu)r_{\nu}} \frac{\det \left( (\lambda_{\mathbf{p},i}^{s_j+n-j})_{1 \leq i,j \leq n} \right)}{\det \left( (\lambda_{\mathbf{p},i}^{n-j})_{1 \leq i,j \leq n} \right)}.$$

Die Leibniz'sche Determinantenformel belegt nun die Behauptung. □

Wir haben

**Lemma E.0.4.** *Es sei  $J_i \subseteq N_i$  für  $1 \leq i \leq n-1$  und damit wie im vorigen Lemma*

$$r_{\nu} = \sum_{i=1}^{n-1} \chi_{J_i}(\nu+1) + \chi_{N_i-J_i}(\nu).$$

Es gilt

$$\frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^n \nu(1-\nu)r_{\nu} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k \in J_j} 1 - k = A_n.$$

Die linke Seite der Formel ist also insbesondere eine ganze Zahl, welche nur von  $n$  abhängt.

*Beweis.* Setzen wir die Formel für  $r_{\nu}$  ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^n \nu(1-\nu)r_{\nu} &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{\nu=1}^n (\chi_{J_i}(\nu+1) + \chi_{N_i-J_i}(\nu)) \nu(1-\nu) = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \left( \sum_{\nu=2}^{n+1} \chi_{J_i}(\nu+1)(\nu-1)(2-\nu) + \sum_{\nu=1}^n \chi_{N_i-J_i}(\nu)\nu(1-\nu) \right) = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \left( \sum_{\nu=1}^n \chi_{J_i}(\nu+1)(\nu-1)(2-\nu) + \sum_{\nu=1}^n \chi_{N_i-J_i}(\nu)\nu(1-\nu) \right). \end{aligned}$$

Mit  $\chi_{J_i} + \chi_{N_i-J_i} = \chi_{N_i}$  ergibt das

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^n \nu(1-\nu)r_{\nu} &= \sum_{i=1}^{n-1} \left( \sum_{\nu \neq i} \nu(1-\nu) + 2 \sum_{\nu \in J_i} (\nu-1) \right) = \\ &= (n-1) \sum_{\nu=1}^n n\nu(1-\nu) - \sum_{i=1}^{n-1} i(1-i) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{\nu \in J_i} (\nu-1), \end{aligned}$$

woraus sich die Aussage des Lemmas ergibt. □

*Beweis.* [von Proposition E.0.1] Mit der Notation  $N_i := \{1, 2, \dots, n\} - \{i\}$  haben wir

$$\begin{aligned} & \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\lambda_{\mathbf{p},i} \mathfrak{N}(\mathbf{p})^{1-j} V_{\mathbf{p},j-1} - V_{\mathbf{p},j}) = \\ & \prod_{i=1}^{n-1} \left( \sum_{J_i \subseteq N_i} \lambda_{\mathbf{p},i}^{\#J_i} (-1)^{n-1-\#J_i} \cdot \prod_{k \in J_i} \mathfrak{N}(\mathbf{p})^{1-k} V_{\mathbf{p},k-1} \cdot \prod_{l \in N_i - J_i} V_{\mathbf{p},l} \right) = \\ & (-1)^{n-1} \cdot \sum_{J_1 \subseteq N_1} \dots \sum_{J_{n-1} \subseteq N_{n-1}} \prod_{i=1}^{n-1} (-\lambda_{\mathbf{p},i})^{\#J_i} \cdot \left( \prod_{k \in J_i} \mathfrak{N}(\mathbf{p})^{1-k} V_{\mathbf{p},k-1} \cdot \prod_{l \in N_i - J_i} V_{\mathbf{p},l} \right). \end{aligned}$$

Mit  $\underline{r} = (r_1, \dots, r_n)$  wie in den vorangegangenen Lemmata gilt

$$V(\underline{r}) = \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{k \in J_i} V_{\mathbf{p},k-1} \prod_{l \in N_i - J_i} V_{\mathbf{p},l}.$$

Deshalb bescheren uns dieselbigen

$$\begin{aligned} & \tilde{w}_{\mathbf{p}}(\mathbf{1}_n) = \\ & (-1)^{n-1} \mathfrak{N}(\mathbf{p})^{A_n} \cdot \det \left( (\lambda_{\mathbf{p},i}^{n-j})_{1 \leq i, j \leq n} \right)^{-1} \cdot \sum_{\underline{J}} \prod_{i=1}^{n-1} (-\lambda_{\mathbf{p},i})^{\#J_i} \sum_{w \in W} \operatorname{sgn}(w) \cdot \prod_{j=1}^{n-1} \lambda_{\mathbf{p},w(j)}^{1+(n-1)(n-j) + \sum_{\nu=1}^{n-1} \chi_{N_{\nu} - J_{\nu}}(j)}, \end{aligned}$$

wobei  $\underline{J} = (J_1, \dots, J_{n-1})$  alle Kombinationen  $J_i \subseteq N_i$ ,  $1 \leq i \leq n-1$  durchläuft. Wir erhalten durch Umsortieren

$$(-1)^{n-1} \mathfrak{N}(\mathbf{p})^{A_n} \cdot \det \left( (\lambda_{\mathbf{p},i}^{n-j})_{1 \leq i, j \leq n} \right)^{-1} \cdot \sum_{w \in W} \operatorname{sgn}(w) \cdot \prod_{j=1}^{n-1} \lambda_{\mathbf{p},w(j)}^{1+(n-1)(n-j)} \cdot \sum_{\underline{J}} \prod_{i=1}^{n-1} (-\lambda_{\mathbf{p},i})^{\#J_i} \prod_{\nu=1}^n \prod_{j=1}^{n-1} \lambda_{\mathbf{p},w(j)}^{\chi_{N_{\nu} - J_{\nu}}(j)}.$$

Wir haben das

$$\begin{aligned} & \prod_{i=1}^{n-1} (-\lambda_{\mathbf{p},i})^{\#J_i} \prod_{\nu=1}^n \prod_{j=1}^{n-1} \lambda_{\mathbf{p},w(j)}^{\chi_{N_{\nu} - J_{\nu}}(j)} = \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\lambda_{\mathbf{p},w(j)} - \lambda_{\mathbf{p},i}) = \\ & \begin{cases} 0, & w \neq \operatorname{id}, \\ \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\lambda_{\mathbf{p},j} - \lambda_{\mathbf{p},i}), & w = \operatorname{id}. \end{cases} \end{aligned}$$

Dies führt zu einer Vereinfachung unserer Formel, wir erhalten

$$\tilde{w}_{\mathbf{p}}(\mathbf{1}_n) = (-1)^{n-1} \mathfrak{N}(\mathbf{p})^{A_n} \cdot \det \left( (\lambda_{\mathbf{p},i}^{n-j})_{1 \leq i, j \leq n} \right)^{-1} \cdot \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\lambda_{\mathbf{p},j} - \lambda_{\mathbf{p},i}) \cdot \prod_{\nu=1}^{n-1} \lambda_{\mathbf{p},\nu}^{1+(n-1)(n-\nu)}.$$

Nach Vandermonde gilt

$$\det \left( (\lambda_{\mathbf{p},i}^{n-j})_{1 \leq i, j \leq n} \right) = \prod_{j < i} (\lambda_{\mathbf{p},j} - \lambda_{\mathbf{p},i}),$$

was den Beweis der Proposition abschließt.  $\square$

# Literaturverzeichnis

- [AC89] ARTHUR, J. ; CLOZEL, L.: *Simple algebras, base change and the advanced theory of the trace formula*. Princeton University Press, 1989 (Annals of Mathematics Studies **120**)
- [AG94] ASH, A. ; GINZBURG, D.:  $p$ -adic  $L$ -functions for  $GL(2n)$ . In: *Inventiones mathematicae* **116** (1994), S. 27–73
- [Bar53] BARSOTTI, I.: A note on abelian varieties. In: *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* **2** (1953), S. 236–257
- [BCDT01] BREUIL, C. ; CONRAD, B. ; DIAMOND, F. ; TAYLOR, R.: On the modularity of elliptic curves over  $\mathbb{Q}$ : Wild 3-adic exercises. In: *Journal of the American Mathematical Society* **14** (2001), S. 843–939
- [BCG<sup>+</sup>04] BUMP, D. ; COGDELL, J.W. ; GAITSGORY, D. ; DE SHALIT, E. ; KOWALSKI, E. ; KUDLA, S. S. ; BERNSTEIN, J. (Hrsg.) ; GELBART, S. (Hrsg.): *An introduction to the Langlands program*. Birkhäuser, 2004
- [Bei85] BEILINSON, A.: Higher regulators and values of  $L$ -functions. In: *J. Soviet Math.* **30** (1985), S. 2036–2070
- [BF01] BURNS, D. ; FLACH, M.: Tamagawa numbers for motives with (non-commutative) coefficients. In: *Documenta Mathematica* **6** (2001), S. 501–570
- [BF03] BURNS, D. ; FLACH, M.: Tamagawa numbers for motives with (non-commutative) coefficients II. In: *American Journal of Mathematics* **125** (2003), S. 475–512
- [BHC62] BOREL, A. ; HARISH-CHANDRA: Arithmetic subgroups of algebraic groups. In: *Annals of Mathematics* **72** (1962), S. 485–535
- [Bir71] BIRCH, B.J.: Elliptic curves, a progress report. In: *Proceedings of the 1969 Summer institute on Number Theory, Stony Brook, New York*. Providence RI : American Mathematical Society, 1971, S. 396–400
- [BK90] Kap.  $L$  functions and Tamagawa numbers of motives In: BLOCH, S. ; KATO, K.: *Die Grothendieck Festschrift I*. Birkhäuser, 1990 (Progress in Mathematics **86**), S. 333–400
- [Bor56] BOREL, A.: Groupes linéaires algébriques. In: *Annals of Mathematics* **64** (1956), S. 20–82
- [Bor66] BOREL, A.: Density and maximality of arithmetic subgroups. In: *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* **224** (1966), S. 78–89
- [Bor69] BOREL, A.: *Introduction aux groupes arithmétiques*. Paris : Hermann, 1969 (Actualités scientifiques et industrielles **1341**)

- [Bor74] BOREL, A.: Stable real cohomology of arithmetic groups. In: *Annales scientifiques de l'É.N.S.*, 4<sup>e</sup> série, tome **7** (1974), S. 235–272
- [Bor79] BOREL, A.: Automorphic  $L$ -Functions. In: BOREL, A. (Hrsg.) ; CASSELMAN, W. (Hrsg.): *Automorphic forms, representations and  $L$ -functions*. Providence RI : American Mathematical Society, 1979 (Proceedings of the Symposium in Pure Mathematics **33**(2)), S. 27–62
- [Bor81] BOREL, A.: Stable real cohomology of arithmetic groups II. In: *Progress in Mathematics* **14** (1981), S. 21–55
- [Bor83] BOREL, A.: Regularization theorems in Lie algebra cohomology. In: *Duke Mathematical Journal* **50** (1983), S. 605–623
- [Bou70] BOURBAKI, N.: *Théorie des ensembles*. Paris : Hermann, 1970
- [Bou74] BOURBAKI, N.: *Topologie générale*. Paris : Hermann, 1971-1974
- [Bou98] BOURBAKI, N.: *Algèbre*. Paris : Hermann, 1964-1998
- [BS64] BOREL, A. ; SERRE, J.-P.: Théorèmes de finitude en cohomologie galoisienne. In: *Commentarii Mathematici Helvetici* **39** (1964), S. 111–169
- [BS73] BOREL, A. ; SERRE, J.-P.: Corners and arithmetic groups. In: *Commentarii Mathematici Helvetici* **48** (1973), S. 436–491
- [BT65] BOREL, A. ; TITS, J.: Groupes réductifs. In: *Publications Mathématiques de l'I.H.É.S.* **27** (1965), S. 55–151
- [BT72] BOREL, A. ; TITS, J.: Compléments à l'article: Groupes réductifs. In: *Publications Mathématiques de l'I.H.É.S.* **41** (1972), S. 253–276
- [BW80] BOREL, A. ; WALLACH, N.: *Continuous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups*. Princeton University Press, 1980
- [Car79] CARTIER, P.: Representations of  $\mathfrak{p}$ -adic groups: a survey. In: BOREL, A. (Hrsg.) ; CASSELMAN, W. (Hrsg.): *Automorphic forms, representations and  $L$ -functions*. Providence RI : American Mathematical Society, 1979 (Proceedings of the Symposium in Pure Mathematics **33**(2)), S. 111–155
- [CFK<sup>+</sup>05] COATES, J. ; FUKAYA, T. ; KATO, K. ; SUJATHA, R. ; VENJAKOB, O.: The  $GL_2$  main conjecture for elliptic curves without complex multiplication. In: *Publications Mathématiques de l'I.H.É.S.* **101** (2005), S. 163–208
- [Che51] CHEVALLEY, C.: *Théorie des groupes de Lie*, tome II. Paris : Hermann, 1951 (Actualités scientifiques et industrielles **1226**)
- [Che56] CHEVALLEY, C.: Plongement projectif d'une variété de groupe. In: *Proceedings of the international symposium on algebraic number theory, Tokyo and Nikko, 1955, 1956*, S. 131–138
- [Che05] CHEVALLEY, C. ; CARTIER, P. (Hrsg.): *Classification des groupes algébriques semi-simples*. Springer, 2005 (Collected Works **3**)

- [Clo90] CLOZEL, L.: Motifs et formes automorphes. In: CLOZEL, L. (Hrsg.) ; MILNE, J. S. (Hrsg.): *Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions I*, Academic Press, 1990 (Perspectives in Mathematics **10**), S. 77–159
- [Coa89] COATES, J.: On  $p$ -adic  $L$ -functions. In: *Séminaire Bourbaki exposé 701* (1989)
- [Coa91] COATES, J.: Motivic  $p$ -adic  $L$ -functions. In: COATES, J. (Hrsg.) ; TAYLOR, M. J. (Hrsg.): *Proceedings of the Durham Symposium on L-functions and arithmetic 1989*, London Mathematical Society, 1991 (London Mathematical Society Lecture Notes **191**), S. 141–172
- [Col03] COLMEZ, P.: La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer  $p$ -adique. In: *Séminaire Bourbaki exposé 919* (2003)
- [Col99] COLMEZ, P.: Fonctions  $L$   $p$ -adiques. In: *Séminaire Bourbaki exposé 851* (1998/99)
- [CPR89] COATES, J. ; PERRIN-RIOU, B.: On  $p$ -adic  $L$ -functions attached to motives over  $\mathbb{Q}$ . In: *Advanced Studies in Pure Mathematics 17* (1989), S. 23–54
- [CPS94] COGDELL, J. W. ; PIATETSKI-SHAPIRO, I. I.: Converse theorems for  $GL_n$ . In: *Publications Mathématiques de l'I.H.É.S.* **79** (1994), S. 157–214
- [CPS04] Kap. Remarks on Rankin-Selberg convolutions In: COGDELL, J. W. ; PIATETSKI-SHAPIRO, I. I.: *Contributions to automorphic forms, geometry and number theory*. John Hopkins University Press, 2004, S. 255–278
- [Del69] DELIGNE, P.: Formes modulaires et représentations  $l$ -adiques. In: *Séminaire Bourbaki exposé 355* (1969)
- [Del73a] DELIGNE, P.: Formes modulaires et représentations de  $GL(2)$ . In: DOLD, A. (Hrsg.) ; ECKMANN, B. (Hrsg.): *Modular Functions of One Variable II*, Springer, 1973 (Lecture Notes in Mathematics **349**), S. 55–105
- [Del73b] DELIGNE, P.: Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions  $L$ . In: DOLD, A. (Hrsg.) ; ECKMANN, B. (Hrsg.): *Modular Functions of One Variable II*, Springer, 1973 (Lecture Notes in Mathematics **349**), S. 501–595
- [Del74] DELIGNE, P.: Les conjectures de Weil I. In: *Publications Mathématiques de l'I.H.É.S.* **43** (1974), S. 273–300
- [Del79] DELIGNE, P.: Valeurs de fonctions  $L$  et périodes d'intégrales. In: BOREL, A. (Hrsg.) ; CASSELMAN, W. (Hrsg.): *Automorphic forms, representations and L-functions*. Providence RI : American Mathematical Society, 1979 (Proceedings of the Symposium in Pure Mathematics **33**(2)), S. 313–346
- [Del80] DELIGNE, P.: Les conjectures de Weil II. In: *Publications Mathématiques de l'I.H.É.S.* **52** (1980), S. 137–252
- [DG70] DEMAZURE, M. ; GROTHENDIECK, A.: *Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1962-1964 - Schémas en groupes (SGA3) 1*. Springer, 1970 (Lecture Notes in Mathematics **151**)
- [DS74] DELIGNE, P. ; SERRE, J.-P.: Formes modulaires de poids 1. In: *Annales scientifiques de l'É.N.S., 4<sup>e</sup> série, tome 7* (1974), S. 507–530

- [Fon92] FONTAINE, J.-M.: Valeurs spéciales de fonctions  $L$  des motifs. In: *Séminaire Bourbaki exposé* **751** (1992)
- [FPR94] FONTAINE, J.-M. ; PERRIN-RIOU, B.: Autour des conjectures de Bloch et Kato: cohomologie galoisienne et valeurs de fonctions  $L$ . In: JANNSEN, U. (Hrsg.) ; KLEIMAN, S. (Hrsg.) ; SERRE, J.-P. (Hrsg.): *Motives*. Providence RI : American Mathematical Society, 1994 (Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **55**(1)), S. 599–706
- [Gar87] GARRETT, P. B.: Decomposition of Eisenstein series: Rankin triple products. In: *Annals of Mathematics* **125** (1987), S. 209–235
- [Gel75] GELBART, S. G.: *Automorphic forms on adèle groups*. Princeton, 1975 (Annals of Mathematics Studies **83**)
- [GH93] GARRETT, P. B. ; HARRIS, M.: Special values of triple product  $L$ -functions. In: *American Journal of Mathematics* **115** (1993), S. 159–238
- [GJ78] GELBART, S. ; JACQUET, H.: A relation between automorphic representations of  $GL(2)$  and  $GL(3)$ . In: *Annales scientifiques de l'É.N.S. 4<sup>e</sup> série, tome 11* (1978), S. 471–542
- [GK71] GELFAND, I. M. ; KAZHDAN, D. A.: Representations of the group  $GL(n, K)$  where  $K$  is a local field. In: *Lie groups and their representations*, John Wiley and Sons, 1971 (A Halsted Press Book), S. 95–118
- [God64] GODEMENT, R.: *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*. Paris : Hermann, 1964 (Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg)
- [Gri92] GRITSENKO, V. A.: Parabolic extensions of the Hecke ring of the general linear group II. In: *Journal Soviet Math.* **62** (1992), S. 2869–2882
- [GS93] GREENBERG, R. ; STEVENS, G.:  $p$ -adic  $L$ -functions and  $p$ -adic periods of modular forms. In: *Inventiones mathematicae* **111** (1993), S. 407–447
- [Har94] HARRIS, M.: Period invariants of Hilbert modular forms II. In: *Compositio Mathematica* **94** (1994), S. 201–226
- [HC68] HARISH-CHANDRA: *Automorphic forms on semisimple Lie groups*. Springer, 1968 (Lecture Notes in Mathematics **62**)
- [Hen88] HENNIART, G.: La conjecture de Langlands numérique pour  $GL(n)$ . In: *Annales scientifiques de l'É.N.S. 4<sup>e</sup> série, tome 21* (1988), S. 497–544
- [HK91] HARRIS, M. ; KUDLA, S. S.: The central critical value of a triple product  $L$ -function. In: *Annals of Mathematics* **133** (1991), S. 605–672
- [HT01] HARRIS, M. ; TAYLOR, R.: *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*. Princeton, Ney Jersey : Princeton University Press, 2001 (Annals of Mathematics Studies **151**)
- [IM65] IWAHORI, N. ; MATSUMOTO, H.: On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke rings of  $p$ -adic Chevalley groups. In: *Publications Mathématiques de l'I.H.É.S.* **25** (1965), S. 5–48
- [Ive86] IVERSEN, B.: *Cohomology of sheaves*. Springer, 1986 (Mathematical Monographs **118**)



- [JPSS79a] JACQUET, H. ; PIATETSKI-SHAPIRO, I. I. ; SHALIKA, J. A.: Automorphic forms on  $GL(3)$  I. In: *Annals of Mathematics* **109** (1979), S. 169–212
- [JPSS79b] JACQUET, H. ; PIATETSKI-SHAPIRO, I. I. ; SHALIKA, J. A.: Automorphic forms on  $GL(3)$  II. In: *Annals of Mathematics* **109** (1979), S. 213–258
- [JPSS81] JACQUET, H. ; PIATETSKI-SHAPIRO, I. I. ; SHALIKA, J. A.: Conducteur des représentations du groupe linéaire. In: *Mathematische Annalen* **256** (1981), S. 199–214
- [JPSS83] JACQUET, H. ; PIATETSKI-SHAPIRO, I. I. ; SHALIKA, J. A.: Rankin-Selberg convolutions. In: *American Journal of Mathematics* **105** (1983), S. 367–464
- [JS81a] JACQUET, H. ; SHALIKA, J. A.: On Euler products and the classification of automorphic representations I. In: *American Journal of Mathematics* **103** (1981), S. 499–558
- [JS81b] JACQUET, H. ; SHALIKA, J. A.: On Euler products and the classification of automorphic representations II. In: *American Journal of Mathematics* **103** (1981), S. 777–815
- [JS90] Kap. Rankin-Selberg convolutions: Archimedean theory In: JACQUET, H. ; SHALIKA, J. A.: *Festschrift in Honor of I. I. Piatetski-Shapiro on the occasion of his 60th birthday I*. Jerusalem : Weizmann Science Press, 1990 (Israel Math. Conf. Proc. **2**), S. 125–207
- [Kim03] KIM, H. H.: Functoriality for the exterior square of  $GL_4$  and the symmetric fourth of  $GL_2$ . In: *Journal of the American Mathematical Society* **16** (2003), S. 139–183
- [KMS00] KAZHDAN, D. ; MAZUR, B. ; SCHMIDT, C.-G.: Relative modular symbols and Rankin-Selberg convolutions. In: *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* **512** (2000), S. 97–141
- [Kol90] Kap. Euler systems In: KOLYVAGIN, V.: *Die Grothendieck Festschrift II*. Birkhäuser, 1990 (Progress in Mathematics **87**), S. 436–483
- [KS00] KIM, H. H. ; SHAHIDI, F.: Holomorphy of Rankin triple  $L$ -functions; special values and root numbers for symmetric cube  $L$ -functions. In: *Israel Journal of Mathematics* **120** (2000), S. 449–466
- [KS02a] KIM, H. H. ; SHAHIDI, F.: Cuspidality of Symmetric Powers with Applications. In: *Duke Mathematical Journal* **112** (2002), S. 177–197
- [KS02b] KIM, H. H. ; SHAHIDI, F.: Functorial products for  $GL_2 \times GL_3$  and functorial symmetric cube for  $GL_2$  (with an appendix by C. J. Bushnell and G. Henniart). In: *Annals of Mathematics* *bf 155* (2002), S. 837–893
- [KS08] KASTEN, H. ; SCHMIDT, C.-G.: On critical values of Rankin-Selberg convolutions. In: *to appear* (2008), S. 1–34
- [Kut80] KUTZKO, P. C.: The Langlands conjecture for  $GL_2$  of a local field. In: *Annals of Mathematics* **112** (1980), S. 381–412
- [Lan80] LANGLANDS, R. P.: *Base change for  $GL(2)$* . Princeton, New Jersey : Princeton University Press, 1980 (Annals of Mathematics Studies **96**)
- [Man72] MANIN, Y.T.: Parabolic points and zeta functions of modular forms. (russian). In: *Isv. Acad. Nauk.* (1972), S. 19–65

- [Man76] MANIN, Y. T.: Non-archimedean integration and Jacquet-Langlands  $p$ -adic  $L$ -functions. In: *Russian Mathematical Surveys* **31** (1976), S. 5–57
- [Maz72] MAZUR, B.: Courbes elliptiques et symboles modulaires. In: *Séminaire Bourbaki exposé* **414** (1972), S. 1–18
- [Miy89] MIYAKE, T.: *Modular forms*. Springer, 1989 (Monographs in Mathematics)
- [Mos55] MOSTOW, G. D.: Self-adjoint groups. In: *Annals of Mathematics* **62** (1955), S. 44–55
- [MSD74] MAZUR, B. ; SWINNERTON-DYER, P.: Arithmetic of Weil curves. In: *Inventiones mathematicae* **25** (1974), S. 1–61
- [MTT86] MAZUR, B. ; TATE, J. ; TEITELBAUM, J.: On  $p$ -adic analogues of the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer. In: *Inventiones mathematicae* **84** (1986), S. 1–68
- [MW84] MAZUR, B. ; WILES, A.: Class fields of abelian extensions of  $\mathbf{Q}$ . In: *Inventiones mathematicae* **76** (1984), S. 179–330
- [Nek94] NEKOVÁŘ, J.: Beilinson's conjectures. In: JANNSEN, U. (Hrsg.) ; KLEIMAN, S. (Hrsg.) ; SERRE, J.-P. (Hrsg.): *Motives*. Providence RI : American Mathematical Society, 1994 (Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **55**(1)), S. 537–570
- [Neu92] NEUKIRCH, J.: *Algebraische Zahlentheorie*. Springer, 1992
- [Ono61] ONO, T.: Arithmetic of algebraic tori. In: *Annals of Mathematics* **74** (1961), S. 101–139
- [PR95] PERRIN-RIOU, B.: *Fonctions  $L$   $p$ -adiques des représentations  $p$ -adiques*. Paris : Société Mathématique de France, 1995 (Astérisque **229**)
- [Pra77] PRASAD, G.: Strong approximation for semi-simple groups over function fields. In: *Annals of Mathematics* **105** (2nd series) (1977), S. 553–572
- [Pra90] PRASAD, D.: Trilinear forms for representations of  $GL(2)$  and local (epsilon)-factors. In: *Compositio Mathematica* **75** (1990), S. 1–46
- [PS79] PIATETSKI-SHAPIRO, I. I.: Multiplicity one theorems. In: BOREL, A. (Hrsg.) ; CASSELMAN, W. (Hrsg.): *Automorphic forms, representations and  $L$ -functions*. Providence RI : American Mathematical Society, 1979 (Proceedings of the Symposium in Pure Mathematics **33**(2)), S. 209–212
- [PSR87] PIATETSKI-SHAPIRO, I. I. ; RALLIS, S.: Rankin triple  $L$ -functions. In: *Compositio Mathematica* **64** (1987), S. 31–115
- [Rha60] DE RHAM, G.: *Variétés différentiables*. Paris : Hermann, 1960 (Actualités scientifiques et industrielles **1222**)
- [Roh84] ROHRLICH, D. E.: On  $L$ -functions of elliptic curves and cyclotomic towers. In: *Inventiones mathematicae* **75** (1984), S. 409–423
- [Roh89] ROHRLICH, D. E.: Nonvanishing of  $L$ -functions for  $GL(2)$ . In: *Inventiones mathematicae* **97** (1989), S. 381–403
- [Rub90] Kap. Appendix: The main conjecture In: RUBIN, K.: *S. Lang, Cyclotomic fields (2nd edition)*. Springer, 1990 (Graduate Texts in Mathematics **121**)

- [Rub91] RUBIN, K.: The “main conjectures” of Iwasawa theory for imaginary quadratic fields. In: *Inventiones mathematicae* **103** (1991), S. 25–68
- [Sat63] SATAKE, I.: Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over  $p$ -adic fields. In: *Publications Mathématiques de l’I.H.É.S.* **18** (1963), S. 1–69
- [Sch90] SCHOLL, A. J.: Motives for modular forms. In: *Inventiones mathematicae* **100** (1990), S. 419–430
- [Sch93] SCHMIDT, C.-G.: Relative modular symbols and  $p$ -adic Rankin-Selberg convolutions. In: *Inventiones mathematicae* **112** (1993), S. 31–76
- [Sch01] SCHMIDT, C.-G.: Period relations and  $p$ -adic measures. In: *manuscripta mathematica* **106** (2001), S. 177–201
- [Ser62] SERRE, J.-P.: *Corps locaux*. Paris : Hermann, 1962
- [Ser68] SERRE, J.-P.: *Abelian  $l$ -adic representations and elliptic curves*. Benjamin, 1968
- [Sha74] SHALIKA, J. A.: The multiplicity one theorem for  $GL(n)$ . In: *Annals of Mathematics* **100** (1974), S. 273–330
- [Shi71] SHIMURA, G.: *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*. Princeton, New Jersey : Princeton University Press, 1971
- [Shi76a] SHIMURA, G.: The special values of the zeta functions associated with cusp forms. In: *Communications on Pure and Applied Mathematics* **XXIX** (1976), S. 783–804
- [Shi76b] SHINTANI, T.: On an explicit formula for class-1 “Whittaker functions” on  $GL_n$  over  $\mathfrak{P}$ -adic fields. In: *Proceedings of the Japan Academy* **52** (1976), S. 180–182
- [Shi77] SHIMURA, G.: On the periods of modular forms. In: *Annals of Mathematics* **229** (1977), S. 211–221
- [Shi78] SHIMURA, G.: The special values of the zeta functions associated with Hilbert modular forms. In: *Duke Mathematical Journal* **45** (1978), S. 637–679
- [ST68] SERRE, J.-P. ; TATE, J.: Good reduction of abelian varieties. In: *Annals of Mathematics* **68** (1968), S. 492–517
- [Tam63] TAMAGAWA, T.: On the  $\zeta$ -functions of a division algebra. In: *Annals of Mathematics* **77** (1963), S. 387–405
- [Tat66] TATE, J.: On the conjecture of Birch and Swinnerton-Dyer and a geometric analogue. In: *Séminaire Bourbaki exposé* **306** (1966)
- [Tat79] TATE, J.: Number theoretic background. In: BOREL, A. (Hrsg.) ; CASSELMAN, W. (Hrsg.): *Automorphic forms, representations and  $L$ -functions*. Providence RI : American Mathematical Society, 1979 (Proceedings of the Symposium in Pure Mathematics **33**(2)), S. 3–26
- [TW95] TAYLOR, R. ; WILES, A.: Ring theoretic properties of certain Hecke algebras. In: *Annals of Mathematics* **141** (1995), S. 553–572

- [Utz04] UTZ, H.: *Getwistete L-Reihen*, Universität Karlsruhe, Dissertation, 2004
- [Wei61] WEIL, A.: *Adeles and algebraic groups*. Princeton : Institute for Advanced Study, 1961
- [Wei67] WEIL, A.: *Basic Number Theory*. Springer, 1967
- [Whi57] WHITNEY, H.: Elementary structure of algebraic varieties. In: *Annals of Mathematics* **66** (1957), S. 545–556
- [Wil95] WILES, A.: Modular elliptic curves and Fermat's last theorem. In: *Annals of Mathematics* **141** (1995), S. 443–551
- [Yos94] YOSHIDA, H.: On the zeta functions of Shimura varieties and periods of Hilbert modular forms. In: *Duke Mathematical Journal* **75** (1994), S. 121–191
- [Zel80] ZELEVINSKY, A.: Induced representations of reductive  $\mathfrak{p}$ -adic groups, II. Irreducible representations of  $\mathrm{GL}(n)$ . In: *Annales scientifiques de l'É.N.S. 4<sup>e</sup> série, tome* **13** (1980), S. 165–210