

Die Aktion der Abbildungsklassengruppe auf dem Hosenkomplex

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

DOKTORS DER
NATURWISSENSCHAFTEN

von der Fakultät für Mathematik
der Universität Karlsruhe (TH) genehmigte

DISSERTATION

von

Dipl.-Math. Ute Wolf
aus Leimersheim

Tag der mündlichen Prüfung: 8. Juli 2009

Referent: Prof. Dr. Frank Herrlich

Korreferent: Prof. Dr. Enrico Leuzinger

Vorwort

Die Abbildungsklassengruppe $\text{Mod}(S)$ einer kompakten oder punktierten, orientierbaren Fläche S ist in vielen Bereichen der Mathematik von großem Interesse. Sie operiert eigentlich diskontinuierlich auf dem Teichmüllerraum $\mathcal{T}(S)$, und der Quotient unter dieser Aktion ist der Modulraum von S .

Desweiteren wirkt $\text{Mod}(S)$ auf dem Teichmüllerraum $\mathcal{T}(S)$ durch Isometrien. Sie ist sogar die volle Isometriegruppe von $\mathcal{T}(S)$, und zwar sowohl für die Teichmüllermetrik als auch für die Weil-Petersson-Metrik.

Schließlich respektiert obige Aktion auch die holomorphe Struktur des Teichmüllerraums $\mathcal{T}(S)$, und $\text{Mod}(S)$ ist die holomorphe Automorphismengruppe von $\mathcal{T}(S)$.

Über die Abbildungsklassengruppe $\text{Mod}(S)$ sind schon einige Aussagen bekannt. Sie kann für Flächen mit höchstens einer Randkomponente von zwei Elementen erzeugt werden und ist stets endlich präsentierbar. Sie ist eine Untergruppe der äußeren Automorphismengruppe der Fundamentalgruppe von S . Eine gute Referenz zu Abbildungsklassengruppen stellt das sich noch im Aufbau befindende Buch „A primer on mapping class groups“ von Benson Farb und Dan Margalit dar, vgl. [FM].

Dennoch weiß man über die algebraische Struktur von $\text{Mod}(S)$ noch recht wenig. Eine Möglichkeit, Erkenntnisse über diese Gruppe zu gewinnen, besteht darin, sie auf geeigneten CW-Komplexen operieren zu lassen.

Ein beliebtes Objekt, auf dem $\text{Mod}(S)$ operiert, ist der *Kurvenkomplex* $\mathcal{C}(S)$. Das ist ein simplizialer Komplex, dessen Ecken alle Isotopieklassen von unorientierten, nicht nullhomotopen und nicht zu einer Randkomponente von S homotopen Wegen in S sind. Die Ecken $\gamma_0, \dots, \gamma_k$ von $\mathcal{C}(S)$ spannen genau dann ein Simplex auf, wenn es paarweise disjunkte Vertreter gibt. Der Kurvenkomplex wurde 1977 von Harvey in dem Artikel „Geometric structure of surface mapping class groups“, vgl. [H], definiert. Die Abbildungsklassengruppe operiert auf kanonische Weise auf $\mathcal{C}(S)$. Es ist bekannt, daß alle Automorphismen von $\mathcal{C}(S)$ von Abbildungsklassen induziert werden, vgl. [I], [K], [L].

Ein viel schönerer, in der Literatur aber sträflich vernachlässigter Komplex ist der *Hosenkomplex*. Erstmals wurden Hosenzerlegungen 1980 in dem Artikel „A presentation for the mapping class group of a closed orientable surface“ von Allen Hatcher und William Thurston [HT] erwähnt und gesagt, daß je zwei Hosenzerlegungen durch eine endliche Folge gewisser Übergänge ineinander überführt werden können. Diese Definition wurde 2000 von Allen Hatcher, Pierre Lochak und Leila Schneps in dem Artikel „On the

Teichmüller tower of mapping class groups“ aufgegriffen, vgl. [HLS]. Die Autoren definieren den Hosengraphen $\mathcal{P}^1(S)$, dessen Ecken alle Hosenzerlegungen von S und dessen Kanten alle Übergänge zweier Hosenzerlegungen sind. Sie fügen geeignete 2-Zellen ein, um einen einfach zusammenhängenden CW-Komplex, den sogenannten *Hosenkomplex* $\mathcal{P}(S)$, zu erhalten. Die Abbildungsklassengruppe $\text{Mod}(S)$ operiert auch auf $\mathcal{P}(S)$ auf natürliche Art, und auch für diese Aktion gilt $\text{Aut}(\mathcal{P}(S)) \cong \text{Mod}^*(S)$, vgl. [M].

Ziel dieser Arbeit ist es, diese Aktion der Abbildungsklassengruppe auf dem Hosenkomplex genauer zu untersuchen.

Für jede Zelle des Hosenkomplexes wird in Kapitel 3 der Stabilisator bestimmt, das sind alle Abbildungsklassen, die die Zelle auf sich abbilden. Bei den Kanten des Hosenkomplexes wird dabei unterschieden, ob die Abbildungsklassen die Zelle invertieren oder nicht. Analog dazu wird untersucht, welche Abbildungsklassen eine 2-Zelle drehen oder spiegeln.

In Kapitel 4 werden die Bahnen der Aktion untersucht. Dabei zeigt sich, daß es ein sehr einfaches Kriterium dafür gibt, ob zwei Hosenzerlegungen in derselben Bahn liegen. Auch für Kanten und 2-Zellen werden leicht nachzuprüfende Charakterisierungen für die Äquivalenz modulo $\text{Mod}(S)$ angegeben. Als Folgerung erhalten wir, daß der Quotient des Hosenkomplexes nach der Abbildungsklassengruppe ein endlicher CW-Komplex ist, d.h. die Abbildungsklassengruppe operiert kokompakt auf dem Hosenkomplex.

Nachdem Stabilisatoren und Bahnen bestimmt wurden, liegt es nahe, mit Hilfe dieser Daten eine Präsentation der Abbildungsklassengruppe herzuleiten. Dazu wird in Kapitel 5 zunächst der Satz von Brown dargelegt, wie ihn Kenneth Brown 1984 in dem Artikel „Presentations for groups acting on simply connected complexes“ [Br] bewiesen hat. Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung der wohlbekannten Bass-Serre-Theorie, bei der Gruppenaktionen auf Graphen untersucht werden, vgl. zum Beispiel das Buch „Trees“ von Jean-Pierre Serre [S]. Der Satz von Brown ermöglicht es direkt, aus der Kenntnis der Stabilisatoren und Bahnen eine Präsentation der Abbildungsklassengruppe zu bestimmen.

Die in dieser Arbeit gewonnene Präsentation von $\text{Mod}(S)$ unterscheidet sich wesentlich von den bisher bekannten Präsentationen. Zum Beispiel benutzt die Präsentation von Hatcher und Thurston aus [HT] Zopfgruppen, deren Elemente als Erzeuger von $\text{Mod}(S)$ dienen. Auch die Wajnryb-Präsentation aus [Wa], die sich heute als Standard-Präsentation etabliert hat, baut auf Zopfgruppen auf.

Die vorliegende Arbeit ist mit vielen Beispielen angereichert. Für den punktierten Torus und die vierfach punktierte Kugel werden in Kapitel 2 alle Daten anhand einer Parametrisierung der Fläche explizit angegeben. Die Ergebnisse werden als Grundlage für alle anderen Flächen benötigt. Dieses Phänomen spiegelt das Prinzip von Grothendieck wider, welches besagt, daß die unteren Ebenen des Teichmüllerturms die Grundlage bilden, aus der der gesamte Turm zusammengebaut werden kann, vgl. [G].

Als weiteres Beispiel wird die Fläche $\Sigma_{1,3}$ vom Geschlecht 1 mit 3 Randkomponenten gewählt. Diese Fläche steht einerseits im Teichmüllerturm so weit unten, daß die zugehörigen Rechnungen überschaubar sind, ist aber andererseits hinreichend komplex, um

allgemeine Prinzipien erkennen zu lassen. Es werden für diese Fläche alle Stabilisatoren und Bahnen bestimmt und schließlich eine Präsentation der Abbildungsklassengruppe von $\Sigma_{1,3}$ angegeben.

An dieser Stelle möchte ich die Gelegenheit nutzen, mich bei allen zu bedanken, die mich bei meinem Promotionsprojekt unterstützt haben. Allen voran gilt mein Dank meinem Betreuer Prof. Dr. Frank Herrlich, der mich in die Welt der Hosen eingeführt und so den Grundstein für meine Liebe zu den Hosenzerlegungen gelegt hat. Er hatte stets ein offenes Ohr für meine Fragen und gab mir unzählige Anregungen und Hinweise.

Danken möchte ich auch Prof. Dr. Enrico Leuzinger für die Bereitschaft, das Amt des Korreferenten zu übernehmen. Sein Interesse am Thema hat meine Motivation hochgehalten.

Schließlich danke ich Alexander Heß, Stefan Kühnlein, Ekehardt Luhm und Gabriela Schmithüsen, die Teile der Arbeit gründlich gelesen und mit vielen Ideen und Tips zu ihrem Gelingen beigetragen haben.

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlagen	1
1.1	Die Abbildungsklassengruppe $\text{Mod}(S)$	1
1.2	Der Hosenkomplex $\mathcal{P}(S)$	11
2	Die Flächen $\Sigma_{1,1}$ und $\Sigma_{0,4}$	17
2.1	Die Fläche $\Sigma_{1,1}$	17
2.2	Die Fläche $\Sigma_{0,4}$	22
3	Stabilisatoren	27
3.1	Stabilisatoren von Ecken	27
3.2	Stabilisatoren von Kanten	31
3.3	Stabilisatoren von 2-Zellen	39
3.4	Sonderfälle	41
3.4.1	Die Fläche $\Sigma_{1,2}$	42
3.4.2	Die Fläche $\Sigma_{2,0}$	48
4	Bahnen und Quotienten	51
4.1	Bahnen von Ecken	51
4.2	Bahnen von Kanten	52
4.3	Bahnen von 2-Zellen	63
4.4	Der Quotientenkomplex $\mathcal{Q}(S)$	67
4.5	Ein Beispiel: Der Quotientenkomplex von $\Sigma_{1,3}$	68
5	Präsentationen	73
5.1	Präsentationen und kurze exakte Sequenzen	73
5.2	Der Satz von Brown	78
	Literaturverzeichnis	91

Kapitel 1

Grundlagen

Eine *Fläche* ist in dieser Arbeit eine zusammenhängende, orientierbare, 2-dimensionale Mannigfaltigkeit, die möglicherweise berandet ist. Die Flächenklassifikation besagt, daß jede kompakte Fläche durch ihr Geschlecht und die Anzahl ihrer Randkomponenten bis auf Homöomorphie eindeutig bestimmt ist. Wir können also von „der“ Fläche $\Sigma_{g,b}$ vom Geschlecht g mit b Randkomponenten sprechen.

Sind $\Sigma_{g,0}$ eine geschlossene Fläche (d.h. eine kompakte Fläche ohne Rand) vom Geschlecht g und $P_1, \dots, P_b \in \Sigma_{g,0}$ paarweise verschieden, so sei $\Sigma_{g,b}^{nc} := \Sigma_{g,0} \setminus \{P_1, \dots, P_b\}$. Auch hier ist die Schreibweise gerechtfertigt, da alle Flächen, die durch das Entfernen von b Punkten aus einer geschlossenen Fläche vom Geschlecht g entstehen, homöomorph sind. Beachte: Für $b \geq 1$ ist $\Sigma_{g,b}^{nc}$ nicht kompakt.

In diesem Kapitel sei stets S eine Fläche. Ziel dieser Arbeit ist es, die Aktion der Abbildungsklassengruppe $\text{Mod}(S)$ von S auf dem zu S gehörigen Hosensystem $\mathcal{P}(S)$ zu studieren. Dazu ist es nötig, die beiden Objekte *Abbildungsklassengruppe* und *Hosensystem* einzuführen und grundlegende Eigenschaften bereitzustellen.

1.1 Die Abbildungsklassengruppe $\text{Mod}(S)$

Wir werden in diesem Abschnitt die Abbildungsklassengruppe $\text{Mod}(S)$ und einige Varianten definieren. Mit Hilfe spezieller Abbildungsklassen werden wir ein Erzeugendensystem von $\text{Mod}(S)$ bestimmen und damit für gewisse Flächen die Gruppe $\text{Mod}(S)$ explizit angeben.

Definition und Bemerkung 1.1:

- a) Es seien $\text{Homöo}(S)$ die Gruppe aller orientierungserhaltenden Homöomorphismen $f : S \rightarrow S$ und $\text{Homöo}_0(S)$ die Untergruppe derjenigen Homöomorphismen, die zur Identität isotop sind (schreibe $f \simeq \text{id}_S$). $\text{Homöo}_0(S)$ ist ein Normalteiler von $\text{Homöo}(S)$. Die Faktorgruppe

$$\text{Mod}(S) := \text{Homöo}(S) / \text{Homöo}_0(S)$$

heißt *Abbildungsklassengruppe* von S .

- b) Man erhält $\text{Mod}(S)$, indem man aus $\text{Hom}\ddot{o}(S)$ die Äquivalenzrelation \simeq der Isotopie herausfaktorisiert.

Beweis:

- a) Es ist $\text{id}_S \in \text{Hom}\ddot{o}_0(S)$, und für $f, g \in \text{Hom}\ddot{o}_0(S)$ ist auch $f \circ g^{-1} \in \text{Hom}\ddot{o}_0(S)$, da $f \circ g^{-1} \simeq \text{id}_S \circ \text{id}_S^{-1} = \text{id}_S$. Sind $f \in \text{Hom}\ddot{o}_0(S)$ und $g \in \text{Hom}\ddot{o}(S)$, so gilt $g \circ f \circ g^{-1} \simeq g \circ \text{id}_S \circ g^{-1} = \text{id}_S$, also $g \circ f \circ g^{-1} \in \text{Hom}\ddot{o}_0(S)$. Daher ist $\text{Hom}\ddot{o}_0(S)$ ein Normalteiler in $\text{Hom}\ddot{o}(S)$.

Beachte: In diesem Beweis haben wir benutzt, daß für $f_1 \simeq f_2$ und $g_1 \simeq g_2$ auch stets $f_1 \circ g_1 \simeq f_2 \circ g_2$ gilt.

- b) Es gilt $f \simeq g \Leftrightarrow f \circ g^{-1} \simeq \text{id}_S \Leftrightarrow f \circ g^{-1} \in \text{Hom}\ddot{o}_0(S) \Leftrightarrow [f] = [g]$. □

Beispiele 1.2:

Bekannte Resultate sind:

- a) $\text{Mod}(\Sigma_{0,0}) \cong \{1\}$
 $\text{Mod}(\Sigma_{0,1}) \cong \{1\}$
 $\text{Mod}(\Sigma_{0,2}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
 $\text{Mod}(\Sigma_{0,3}) \cong S_3$
 $\text{Mod}(\Sigma_{0,4}) \cong V_4 \rtimes \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$
- b) $\text{Mod}(\Sigma_{1,0}) \cong \text{Mod}(\Sigma_{1,1}) \cong \text{SL}_2(\mathbb{Z})$

Beweis:

- Die Aussage $\text{Mod}(\Sigma_{0,1}) \cong \{1\}$ folgt direkt aus Lemma 1.3b).
- Jeder Homöomorphismus $f : \Sigma_{0,0} \rightarrow \Sigma_{0,0}$ ist isotop zu einem Homöomorphismus g , der einen Punkt $P \in \Sigma_{0,0}$ festläßt. $g|_{\Sigma_{0,0} \setminus \{P\}}$ ist ein Homöomorphismus von $\Sigma_{0,0} \setminus \{P\}$. Nach folgender Proposition 1.4 gilt $\text{Mod}(\Sigma_{0,0} \setminus \{P\}) = \text{Mod}(\Sigma_{0,1}^{nc}) \cong \text{Mod}(\Sigma_{0,1}) \cong \{1\}$, daher ist $g|_{\Sigma_{0,0} \setminus \{P\}}$ isotop zu $\text{id}_{\Sigma_{0,0} \setminus \{P\}}$. Diese Isotopie kann fortgesetzt werden zu einer Isotopie zwischen g und $\text{id}_{\Sigma_{0,0}}$.
- Für $b \geq 2$ hat $\text{Mod}(\Sigma_{0,b})$ folgende Präsentation, vgl. [Bi, S. 164]:

$$\begin{aligned} \text{Mod}(\Sigma_{0,b}) = \langle x_1, \dots, x_{b-1} \mid & x_i x_j = x_j x_i \ (|i - j| \geq 2), \\ & x_i x_{i+1} x_i = x_{i+1} x_i x_{i+1} \ (i = 1, \dots, b-2), \\ & (x_1 \dots x_{b-1})^b = x_1 \dots x_{b-1} x_{b-1} \dots x_1 = 1 \rangle \end{aligned}$$

Damit gelten $\text{Mod}(\Sigma_{0,2}) = \langle x \mid x^2 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $\text{Mod}(\Sigma_{0,3}) = \langle x, y \mid x^2 = y^2 = 1, xyx = yxy \rangle \cong S_3$.

- Nach [FM, S. 69] gilt $\text{Mod}(\Sigma_{1,0}) \cong \text{SL}_2(\mathbb{Z})$.
- Die restlichen beiden Aussagen werden wir in Kapitel 2 beweisen. □

Lemma 1.3:

- a) Jeder Homöomorphismus $f : S^1 \rightarrow S^1$ der 1-Sphäre kann fortgesetzt werden zu einem Homöomorphismus $F : E \rightarrow E$ der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe. F kann so gewählt werden, daß $F(0) = 0$ gilt.
- b) Je zwei (orientierungserhaltende) Homöomorphismen $f, g : E \rightarrow E$ der Einheitskreisscheibe sind isotop. Gilt $f|_{S^1} = g|_{S^1}$, so kann die Isotopie $A : E \times [0, 1] \rightarrow E$ so gewählt werden, daß $A(x, t) = f(x) = g(x)$ für jedes $x \in S^1$ und jedes $t \in [0, 1]$ gilt.

Beweis:

- a) Definiere $F : E \rightarrow E$ durch $F(0) := 0$ und $F(x) := |x| \cdot f(\frac{x}{|x|})$ ($x \neq 0$). F ist ein Homöomorphismus mit Umkehrabbildung $F^{-1} : E \rightarrow E$, $F^{-1}(0) = 0$, $F^{-1}(x) = |x| \cdot f^{-1}(\frac{x}{|x|})$ ($x \neq 0$). F ist eine Fortsetzung von f .
- b) • Wir zeigen zunächst, daß jedes $f \in \text{Homöo}(E)$ isotop zu einem Homöomorphismus ist, welcher auf S^1 die Identität ist. Dazu sei $\psi : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow S^1$, $x + \mathbb{Z} \mapsto e^{2\pi i x}$ der kanonische Homöomorphismus. Wir definieren $A : E \times [0, 1] \rightarrow E$ folgendermaßen:

$$A(x, t) := \begin{cases} (1 - \frac{t}{2}) \cdot f(\frac{x}{1 - \frac{t}{2}}) & , |x| \leq 1 - \frac{t}{2} \\ |x| \cdot \psi((2|x| + t - 2) \cdot \psi^{-1}(\frac{x}{|x|}) + (3 - 2|x| - t) \cdot \psi^{-1}(f(\frac{x}{|x|}))) & , |x| \geq 1 - \frac{t}{2} \end{cases}$$

A ist wohldefiniert und stetig, und für jedes $t \in [0, 1]$ ist $A(\cdot, t)$ ein Homöomorphismus. Es ist $A(\cdot, 0) = f$. Für $|x| = 1$ gilt $A(x, 1) = \psi(1 \cdot \psi^{-1}(x) + 0 \cdot \psi^{-1}(f(x))) = x$, also $A(\cdot, 1)|_{S^1} = \text{id}_{S^1}$.

- Wir zeigen, daß jedes $f \in \text{Homöo}(E)$ mit $f|_{S^1} = \text{id}_{S^1}$ isotop zur Identität id_E ist. Mit obiger Aussage folgt daraus, daß jeder Homöomorphismus isotop zu id_E ist und somit je zwei Homöomorphismen isotop sind.

Definiere $B : E \times [0, 1] \rightarrow E$ durch

$$B(x, t) := \begin{cases} t \cdot f(\frac{x}{t}) & , |x| < t \\ x & , |x| \geq t \end{cases} .$$

B ist wohldefiniert und stetig, und für jedes $t \in [0, 1]$ ist $B(\cdot, t)$ ein Homöomorphismus. Es ist $B(\cdot, 0) = \text{id}_E$ und $B(\cdot, 1) = f$. Für jedes $t \in [0, 1]$ gilt $B(\cdot, t)|_{S^1} = \text{id}_{S^1}$.

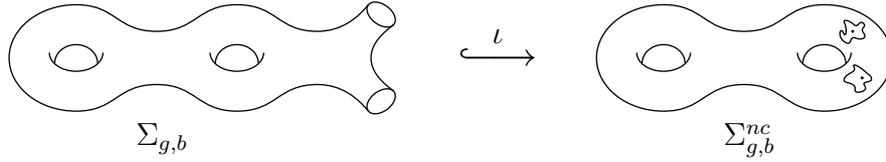
- Sind schließlich $f, g \in \text{Homöo}(E)$ mit $f|_{S^1} = g|_{S^1}$, so ist $f \circ g^{-1}|_{S^1} = \text{id}_{S^1}$, d.h. es gibt eine Isotopie $B : E \times [0, 1] \rightarrow E$ von id_E nach $f \circ g^{-1}$ mit $B(\cdot, t)|_{S^1} = \text{id}_{S^1}$ für alle $t \in [0, 1]$. Daher ist $\tilde{B} : E \times [0, 1] \rightarrow E$, $(x, t) \mapsto B(g(x), t)$ eine Isotopie von g nach f mit $\tilde{B}(\cdot, t)|_{S^1} = f|_{S^1} = g|_{S^1}$ für alle $t \in [0, 1]$. \square

Proposition 1.4:

Für alle $g, b \geq 0$ gilt $\text{Mod}(\Sigma_{g,b}) \cong \text{Mod}(\Sigma_{g,b}^{nc})$.

Beweis:

Sei $\Sigma_{g,b}^{nc} = \Sigma_{g,0} \setminus \{P_1, \dots, P_b\}$. Wähle um jedes P_i eine abgeschlossene Kreisscheibe D_i , wobei alle D_i paarweise disjunkt sind. Sind $\partial_1, \dots, \partial_b$ die Randkomponenten von $\Sigma_{g,b}$, so gibt es eine Einbettung $\iota : \Sigma_{g,b} \hookrightarrow \Sigma_{g,b}^{nc}$ mit $\iota(\partial_i) = \partial D_i$ ($i = 1, \dots, b$) und $\text{Bild}(\iota) = \Sigma_{g,b}^{nc} \setminus (D_1^\circ \cup \dots \cup D_b^\circ)$.



Sei $f \in \text{Homöo}(\Sigma_{g,b})$. Dann ist $\iota \circ f \circ \iota^{-1}$ ein Homöomorphismus von $\Sigma_{g,b}^{nc} \setminus (D_1^\circ \cup \dots \cup D_b^\circ)$ auf sich. Nach Lemma 1.3 kann $\iota \circ f \circ \iota^{-1}$ zu einem Homöomorphismus $f' : \Sigma_{g,b}^{nc} \rightarrow \Sigma_{g,b}^{nc}$ fortgesetzt werden, und alle solchen Fortsetzungen sind isotop. Wir haben also eine wohldefinierte Abbildung $\Phi : \text{Homöo}(\Sigma_{g,b}) \rightarrow \text{Mod}(\Sigma_{g,b}^{nc})$, $f \mapsto [f']$.

- Φ ist ein Gruppenhomomorphismus:

Sind $f, g \in \text{Homöo}(\Sigma_{g,b})$ und $f', g' \in \text{Homöo}(\Sigma_{g,b}^{nc})$ Fortsetzungen von f bzw. g , so ist $g' \circ f'$ eine Fortsetzung von $g \circ f$.

$$\Rightarrow \Phi(g \circ f) = [g' \circ f'] = [g'] \circ [f'] = \Phi(g) \circ \Phi(f)$$

- Φ ist surjektiv:

Sei $\tilde{f} \in \text{Homöo}(\Sigma_{g,b}^{nc})$. Es gibt einen zu \tilde{f} isotopen Homöomorphismus \tilde{g} mit $\tilde{g}(D_1 \cup \dots \cup D_b) = D_1 \cup \dots \cup D_b$. \tilde{g} schränkt sich also ein zu einem Homöomorphismus $\tilde{g}|_{\text{Bild}(\iota)} : \text{Bild}(\iota) \rightarrow \text{Bild}(\iota)$. Damit ist $f := \iota^{-1} \circ \tilde{g}|_{\text{Bild}(\iota)} \circ \iota$ ein Homöomorphismus von $\Sigma_{g,b}$. \tilde{g} ist eine Fortsetzung von $\tilde{g}|_{\text{Bild}(\iota)} = \iota \circ f \circ \iota^{-1}$, weshalb $\Phi(f) = [\tilde{g}] = [\tilde{f}]$ gilt.

- $\text{Kern}(\Phi) = \text{Homöo}_0(\Sigma_{g,b})$:

„ \subseteq “: Sei $f \in \text{Kern}(\Phi)$. Dann ist die Fortsetzung f' von $\iota \circ f \circ \iota^{-1}$ isotop zur Identität. Wir suchen eine Isotopie¹ $A : \Sigma_{g,0} \times [0, 1] \rightarrow \Sigma_{g,0}$ von f' nach $\text{id}_{\Sigma_{g,0}}$ derart, daß für alle $t \in [0, 1]$ die Gleichheit $A(D_1 \cup \dots \cup D_b, t) = D_1 \cup \dots \cup D_b$ gilt. Dann nämlich induziert A eine Isotopie $B : \Sigma_{g,b} \times [0, 1] \rightarrow \Sigma_{g,b}$ von f nach $\text{id}_{\Sigma_{g,b}}$.

Wir nehmen o.E. an, daß $b = 1$ gilt, und setzen $P := P_1$, $D := D_1$. Wir starten mit einer beliebigen Isotopie $A : \Sigma_{g,0} \times [0, 1] \rightarrow \Sigma_{g,0}$ von f' nach $\text{id}_{\Sigma_{g,0}}$.

Für jedes $t \in [0, 1]$ ist $A(D, t) =: D_t$ eine Kreisscheibe in $\Sigma_{g,0}$. Es gibt eine offene Kartenumgebung $U_t \subseteq \Sigma_{g,0}$ von D_t und eine Karte $\varphi_t : U_t \xrightarrow{\sim}$

¹ Alle Abbildungen können auf die unpunktete Fläche $\Sigma_{g,0}$ fortgesetzt werden.

$W_t \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $\varphi_t(P) = 0$, $\varphi_t(D_t) = B(0, 1)$ und $B(0, 3) \subseteq W_t$. Da A stetig ist, gibt es ein $\varepsilon_t > 0$, so daß für alle $s \in (t - \varepsilon_t, t + \varepsilon_t) \cap [0, 1] =: I_t$ die Menge D_s in $\varphi_t^{-1}(\overline{B(0, 2)})$ enthalten ist.

$[0, 1]$ ist kompakt, wird also von endlich vielen I_{t_1}, \dots, I_{t_m} überdeckt. Somit gibt es eine kleine Kreisumgebung \tilde{D} um P mit $\tilde{D} \subseteq D_{t_1} \cap \dots \cap D_{t_m} \cap D$.

Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß $I_{t_i} = (a_i, b_i)$ ($i = 1, \dots, m$) und $a_{i+1} < b_i$ ($i = 1, \dots, m - 1$) gilt. Für $i = 1, \dots, m - 1$ wählen wir $c_i, d_i, e_i \in [0, 1]$ mit $a_{i+1} < c_i < d_i < e_i < b_i$. Damit können wir für festes i die Isotopie A auf $[c_{i-1}, e_i]$ so abändern, daß für jedes $s \in [d_{i-1}, d_i]$ die Inklusion $D_s \subseteq \tilde{D}$ gilt.

Nachdem wir das für alle i gemacht haben, gilt $A(D, [0, 1]) \subseteq \tilde{D} \subseteq D$. Eine weitere leichte Änderung der Isotopie liefert $A(D, t) = D$ für alle $t \in [0, 1]$.

„ \supseteq “: Seien $f \in \text{Homöo}_0(\Sigma_{g,b})$ und $A : \Sigma_{g,b} \times [0, 1] \rightarrow \Sigma_{g,b}$ eine Isotopie von f nach $\text{id}_{\Sigma_{g,b}}$. Da A stetig ist, bildet f jede Randkomponente ∂_i von $\Sigma_{g,b}$ auf sich ab. $\tilde{A} : \text{Bild}(\iota) \times [0, 1] \rightarrow \text{Bild}(\iota)$, $(x, t) \mapsto \iota(A(\iota^{-1}(x), t))$ ist eine Isotopie auf $\text{Bild}(\iota)$ von $\iota \circ f \circ \iota^{-1}$ nach $\text{id}_{\text{Bild}(\iota)}$. Diese läßt sich fortsetzen zu einer Isotopie $\hat{A} : \Sigma_{g,b}^{nc} \times [0, 1] \rightarrow \Sigma_{g,b}^{nc}$. $\hat{A}(\cdot, 0)$ ist eine Fortsetzung von $\iota \circ f \circ \iota^{-1}$. \hat{A} kann so gewählt werden, daß $\hat{A}(\cdot, 1)$ die Identität auf $\Sigma_{g,b}^{nc}$ ist.

$\Rightarrow \Phi(f) = [\hat{A}(\cdot, 0)] = [\hat{A}(\cdot, 1)] = [\text{id}]$
 $\Rightarrow f \in \text{Kern}(\Phi)$

Aus diesen drei Eigenschaften folgt die Behauptung, denn Φ faktorisiert zu einem Isomorphismus $\overline{\Phi} : \text{Mod}(\Sigma_{g,b}) \rightarrow \text{Mod}(\Sigma_{g,b}^{nc})$, $[f] \mapsto [f']$. \square

Wir wenden uns nun der Betrachtung von Kurven auf S zu. Mit deren Hilfe werden wir spezielle Abbildungsklassen von S definieren.

Definition 1.5:

- a) Ein (*geschlossener*) Weg in S ist eine stetige Funktion $a : S^1 \rightarrow S$. Auf der Menge aller Wege in S definieren wir eine Äquivalenzrelation \sim durch

$$a_1 \sim a_2 \quad :\Leftrightarrow \quad a_1 \simeq a_2 \quad \text{oder} \quad a_1 \simeq a_2^-.$$

Damit sei

$$\mathcal{S}(S) := \{[a]_{\sim} : a \text{ Weg in } S\}$$

die Menge aller Isotopieklassen von nichtorientierten Wegen in S . Die Elemente von $\mathcal{S}(S)$ heißen *Kurven* in S .

- b) Eine Kurve α heißt *einfach*, wenn sie einen injektiven Vertreter hat. Sie heißt *separierend*, wenn sie einen injektiven Vertreter hat, der S in zwei Zusammenhangskomponenten zerteilt.

- c) Sei $k \in \mathbb{N}$. Eine Kurve α heißt *Geschlecht- k -separierend* bzw. *k -separierend*, wenn sie einen injektiven, separierenden Vertreter a hat, so daß eine der Zusammenhangskomponenten von $(S \setminus a)^{\text{comp}}$ zu $\Sigma_{k,1}$ bzw. zu $\Sigma_{0,k+1}$ homöomorph ist. Sprechweise: „ α schneidet k Henkel bzw. k Randkomponenten von S ab.“
- d) Im folgenden unterscheiden wir nicht zwischen Kurven und ihren Vertretern, d.h. wir bezeichnen sowohl einen Weg als auch seine Äquivalenzklasse als Kurve und benennen beide mit demselben Symbol.

Bemerkung 1.6:

Sind $f_1, f_2 \in \text{Homöo}(S)$ isotope Homöomorphismen auf S und a_1, a_2 isotope Wege in S , so sind auch $f_1(a_1)$ und $f_2(a_2)$ isotop. Wir haben also eine Aktion von $\text{Mod}(S)$ auf $\mathcal{S}(S)$, die gegeben ist durch $[f] \cdot [a]_{\sim} := [f(a)]_{\sim}$.

Bemerkung 1.7:

Die im Beweis von 1.4 definierte Einbettung $\iota : \Sigma_{g,b} \hookrightarrow \Sigma_{g,b}^{nc}$ induziert eine Bijektion $\bar{\iota} : \mathcal{S}(\Sigma_{g,b}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}(\Sigma_{g,b}^{nc})$. Für jede Abbildungsklasse $f \in \text{Mod}(\Sigma_{g,b})$ und jede Kurve $\alpha \in \mathcal{S}(\Sigma_{g,b})$ gilt $\bar{\iota}(f \cdot \alpha) = \Phi(f) \cdot \bar{\iota}(\alpha)$, wobei $\Phi : \text{Mod}(\Sigma_{g,b}) \rightarrow \text{Mod}(\Sigma_{g,b}^{nc})$ der Isomorphismus aus 1.4 sei. Somit gelten alle Ergebnisse, die wir für die Fläche $\Sigma_{g,b}$ erzielen, auch für $\Sigma_{g,b}^{nc}$ und umgekehrt.

Definition und Bemerkung 1.8:

- a) Zu jedem einfachen Weg a gibt es den (*linken*) *Dehntwist* $t_a \in \text{Mod}(S)$, vgl. [FM, S. 55]. t_a ist unabhängig von der Orientierung von a , hängt aber von der Orientierung von S ab. Isotope Wege liefern denselben Dehntwist. Daher können wir auch jeder Kurve $\alpha \in \mathcal{S}(S)$ auf wohlbestimmte Art den (*linken*) Dehntwist $t_\alpha \in \text{Mod}(S)$ zuordnen. Analog zur Sprechweise in 1.5d) bezeichnen wir für eine Kurve $\alpha \in \mathcal{S}(S)$ mit t_α je nach Kontext die Abbildungsklasse oder einen kanonischen Vertreter.
- b) Dehntwists erfüllen folgende Eigenschaften:
- Ist $\alpha \in \mathcal{S}(S)$ nullisotop oder zu einer Randkomponente von S isotop, so gilt $t_\alpha = [\text{id}]$.
 - Für jedes $f \in \text{Mod}(S)$ und jedes $\alpha \in \mathcal{S}(S)$ gilt $f \circ t_\alpha \circ f^{-1} = t_{f(\alpha)}$.
 - Für disjunkte Kurven $\alpha, \beta \in \mathcal{S}(S)$ gilt $t_\alpha \circ t_\beta = t_\beta \circ t_\alpha$.
 - Für alle $\alpha, \beta \in \mathcal{S}(S)$ gilt $t_\alpha = t_\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$.

Der Beweis dieser Aussagen ist in [FM, S. 55/60-62] zu finden.

Definition und Bemerkung 1.9:

- a) Seien α eine Geschlecht-1-separierende Kurve und $\Sigma_{1,1} \subseteq S$ eine zu $\Sigma_{1,1}$ homöomorphe Zusammenhangskomponente von $(S \setminus \alpha)^{\text{comp}}$. Dann gibt es genau eine Abbildungsklasse $\sigma_\alpha \in \text{Mod}(S)$ mit den folgenden Eigenschaften:

Diese Aussage ist in [KM, S. 40/41] zu finden.

Definition und Bemerkung 1.11:

a) Das Zentrum von $\text{Mod}(\Sigma_{g,b})$ ist gegeben durch:

$$\mathcal{Z}(\text{Mod}(\Sigma_{g,b})) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & , (g, b) \in \{(0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0)\} \\ \{1\} & , \text{sonst} \end{cases}$$

b) Für die Flächen $\Sigma_{1,2}$ und $\Sigma_{2,0}$ gibt es jeweils eine spezielle Abbildungsklasse ι , die *hyperelliptische Involution*. ι wird jeweils durch eine Drehung der Fläche um 180° realisiert:

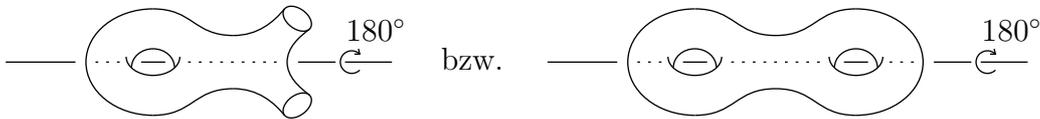


Abbildung 1.2: Hyperelliptische Involutionen

Die Abbildungsklasse ι ist unabhängig von der Parametrisierung der Fläche. Sie bildet jede einfache Kurve der Fläche auf sich ab und ist somit im Zentrum der Abbildungsklassengruppe enthalten.

Beweis:

a) Für $(g, b) \in \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 0), (1, 1)\}$ ist die Aussage klar, da wir in diesen Fällen die Abbildungsklassengruppe kennen (vgl. 1.2). Im folgenden seien diese Fälle ausgeschlossen.

Gegeben seien die Kurven $T := \{\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_{g-1}, \gamma_1, \dots, \gamma_g, \delta_1, \dots, \delta_{b-1}\}$ sowie $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{b-1}$ aus Abbildung 1.1. Dann gilt $\text{Mod}(\Sigma_{g,b}) = \langle \{t_\alpha : \alpha \in T\} \cup \{\sigma_{\varepsilon_1}, \dots, \sigma_{\varepsilon_{b-1}}\} \rangle$.

Sei $f \in \mathcal{Z}(\text{Mod}(\Sigma_{g,b}))$. Für jede einfache Kurve $\alpha \in \mathcal{S}(\Sigma_{g,b})$ gilt $t_{f(\alpha)} = f \circ t_\alpha \circ f^{-1} = t_\alpha \circ f \circ f^{-1} = t_\alpha$, also $f(\alpha) = \alpha$. Die Kurven aus T schneiden sich paarweise höchstens einmal, und ihre Vereinigung ist zusammenhängend. Daher bleibt unter f entweder die Orientierung jeder Kurve aus T erhalten, oder alle Orientierungen ändern sich. Außerdem ist $S \setminus \bigcup_{\alpha \in T} \alpha$ eine Vereinigung endlich vieler, offener, disjunkter Kreisscheiben oder Kreisringe D_1, \dots, D_N .

- Sei zunächst $g \geq 1$ und $(g, b) \notin \{(1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0)\}$. Da f alle einfachen Kurven auf sich abbildet und verschiedene D_i von unterschiedlichen Kurven berandet werden, wird jedes D_i auf sich abgebildet. Da f orientierungserhaltend ist, werden die Orientierungen der Ränder aller D_i und somit

die Orientierungen aller Kurven aus T erhalten. Daher kann o.E. davon ausgegangen werden, daß f alle Kurven aus T punktweise festläßt. Nach Lemma 1.3 ist f isotop zur Identität.

$$\Rightarrow \mathcal{Z}(\text{Mod}(\Sigma_{g,b})) = \{\text{id}\}$$

- Sei $(g, b) \in \{(1, 2), (2, 0)\}$. Dann ist $S \setminus \bigcup_{\alpha \in T} \alpha = D_1 \cup D_2$ die Vereinigung zweier Kreisscheiben. Falls f die Orientierungen der Kurven aus T erhält, bildet f jedes D_i auf sich ab, und nach Lemma 1.3 ist f isotop zur Identität. Im anderen Fall wenden wir diese Argumentation auf $f \circ \iota$ an und erhalten $f = \iota$. (Beachte hierbei, daß wir nicht benutzen, daß ι die Eigenschaften aus b) erfüllt. Wir denken uns ι in derjenigen Parametrisierung, die zu den Kurven aus Abbildung 1.1 paßt.)

$$\Rightarrow \mathcal{Z}(\text{Mod}(\Sigma_{g,b})) \subseteq \{\text{id}, \iota\}$$

Die umgekehrte Inklusion werden wir im Beweis von b) nachholen.

- Seien $g = 0$ und $b \geq 5$. $\text{Mod}(\Sigma_{0,b})$ wird von den Halbtwists $\sigma_{\varepsilon_1}, \dots, \sigma_{\varepsilon_{b-1}}$ erzeugt, und die Kurven $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{b-1}$ zerlegen $\Sigma_{0,b}$ in $2b-2$ Teile D_1, \dots, D_{2b-2} . Mit derselben Argumentation wie oben bildet f jedes D_i auf sich und jede der Kurven $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{b-1}$ orientierungserhaltend auf sich ab. Daher können wir wieder o.E. davon ausgehen, daß f die Kurven punktweise festläßt und somit isotop zur Identität ist.

$$\Rightarrow \mathcal{Z}(\text{Mod}(\Sigma_{0,b})) = \{\text{id}\}$$

- Sei schließlich $(g, b) = (0, 4)$.

$$\Rightarrow \text{Mod}(\Sigma_{0,4}) \cong V_4 \rtimes \text{PSL}_2(\mathbb{Z}), \text{ vgl. 1.2 und 2.10.}$$

$$\text{Sei } \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) \in \mathcal{Z}(V_4 \rtimes \text{PSL}_2(\mathbb{Z})).$$

$$\begin{aligned} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} \right) &= \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

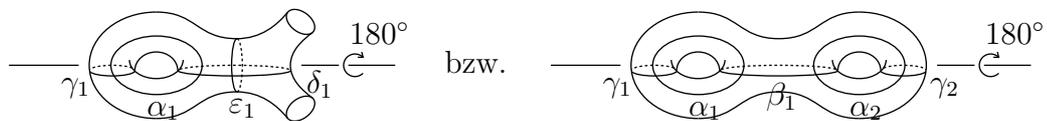
$$\Rightarrow y = 0 \text{ und } c = 0 \text{ und } a = d = \pm 1$$

Ersetzen wir $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ durch $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$, so erhalten wir $x = 0$ und $b = 0$.

$$\Rightarrow \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\Rightarrow \mathcal{Z}(\text{Mod}(\Sigma_{0,4})) \cong \mathcal{Z}(V_4 \rtimes \text{PSL}_2(\mathbb{Z})) \cong \{1\}$$

- b) Sei $S = \Sigma_{1,2}$ oder $S = \Sigma_{2,0}$. Zunächst sei ι diejenige hyperelliptische Involution, die der zu den Kurven aus Abbildung 1.1 gehörigen Parametrisierung angepaßt ist:



Offensichtlich bildet ι alle obigen Kurven auf sich ab. Daher gilt $\iota \circ t_\alpha = \iota \circ t_\alpha \circ \iota^{-1} \circ \iota = t_{\iota(\alpha)} \circ \iota = t_\alpha \circ \iota$ für jedes $\alpha \in T$ und $\iota \circ \sigma_{\varepsilon_1} = \iota \circ \sigma_{\varepsilon_1} \circ \iota^{-1} \circ \iota = \sigma_{\iota(\varepsilon_1)} \circ \iota = \sigma_{\varepsilon_1} \circ \iota$ im Fall $S = \Sigma_{1,2}$.

$\Rightarrow \iota$ kommutiert mit jedem Erzeuger von $\text{Mod}(S)$.

$\Rightarrow \iota \in \mathcal{Z}(\text{Mod}(S))$

Da ι die Orientierungen aller Kurven aus T umkehrt, gilt $\iota \neq [\text{id}]$.

Für jede einfache Kurve $\alpha \in \mathcal{S}(S)$ gilt $t_{\iota(\alpha)} = \iota \circ t_\alpha \circ \iota^{-1} = t_\alpha$ und somit $\iota(\alpha) = \alpha$.

Ist nun j eine weitere hyperelliptische Involution, die einer anderen Parametrisierung der Fläche angepaßt ist, so ist auch j ein nichttriviales Element von $\mathcal{Z}(\text{Mod}(S))$, also $j = \iota$. \square

Abbildungsklassengruppen werden in der Literatur unterschiedlich definiert. Zum Abschluß dieses Abschnitts wollen wir einige andere Varianten vorstellen. Dazu sei $S = \Sigma_{g,b}$ eine kompakte Fläche.

Definition 1.12:

- a) Die *erweiterte Abbildungsklassengruppe* $\text{Mod}^*(S)$ ist die Menge aller (orientierungserhaltenden und orientierungsumkehrenden) Homöomorphismen $f : S \rightarrow S$ modulo Isotopie. $\text{Mod}(S)$ ist ein Normalteiler vom Index 2 in $\text{Mod}^*(S)$. Zu beachten ist hierbei, daß Isotopie stets den Orientierbarkeitstyp erhält.
- b) Die *reine Abbildungsklassengruppe* $\text{PMod}(S)$ bzw. *reine erweiterte Abbildungsklassengruppe* $\text{PMod}^*(S)$ besteht aus allen Abbildungsklassen von $\text{Mod}(S)$ bzw. $\text{Mod}^*(S)$, die jede Randkomponente von S auf sich abbilden. $\text{PMod}(S)$ bzw. $\text{PMod}^*(S)$ sind Normalteiler in $\text{Mod}(S)$ bzw. $\text{Mod}^*(S)$ von endlichem Index; es gilt $[\text{Mod}(S) : \text{PMod}(S)] = [\text{Mod}^*(S) : \text{PMod}^*(S)] = b!$.
- c) Die *punktweise Abbildungsklassengruppe* $\text{Mod}^1(S)$ besteht aus allen orientierungserhaltenden Homöomorphismen $f : S \rightarrow S$, die auf ∂S die Identität sind, modulo Isotopie, die auf ∂S die Identität ist. (Beachte: Für $b \geq 1$ sind alle Homöomorphismen $f : S \rightarrow S$ mit $f|_{\partial S} = \text{id}_{\partial S}$ orientierungserhaltend.)

Bemerkung 1.13:

- a) Für alle $g \in \mathbb{N}$ ist $\text{Mod}^1(\Sigma_{g,0}) = \text{PMod}(\Sigma_{g,0}) = \text{Mod}(\Sigma_{g,0})$, da die Isotopiebegriffe übereinstimmen.
- b) Es gibt einen Gruppenhomomorphismus $\varphi : \text{Mod}(S) \rightarrow S_b$ in die symmetrische Gruppe S_b , der jede Abbildungsklasse $f \in \text{Mod}(S)$ auf die von f induzierte Permutation der Randkomponenten von S abbildet. φ ist surjektiv mit $\text{Kern}(\varphi) = \text{PMod}(S)$. Daher haben wir folgende kurze exakte Sequenz:

$$1 \longrightarrow \text{PMod}(S) \longrightarrow \text{Mod}(S) \xrightarrow{\varphi} S_b \longrightarrow 1$$

c) Da der Isotopiebegriff aus 1.12c) stärker ist als der von 1.12b), gibt es einen kanonischen Homomorphismus $\psi : \text{Mod}^!(S) \rightarrow \text{PMod}(S) \subseteq \text{Mod}(S)$. ψ ist stets surjektiv. Weiter gilt:

- Für $(g, b) = (0, 1)$ ist $\text{Mod}^!(S) \cong \text{PMod}(S) = \text{Mod}(S) \cong \{1\}$. Für $(g, b) = (0, 2)$ gilt $\text{Mod}(S) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $\text{PMod}(S) \cong \{1\}$ und $\text{Mod}^!(S) \cong \mathbb{Z}$.
- Seien nun $b \geq 1$ und $(g, b) \notin \{(0, 1), (0, 2)\}$. Dann ist der Kern von ψ isomorph zur freien abelschen Gruppe \mathbb{Z}^b und wird erzeugt von den Dehntwists um diejenige Kurven, die zu den Randkomponenten von S isotop sind. Wir haben also eine kurze exakte Sequenz

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}^b \longrightarrow \text{Mod}^!(S) \xrightarrow{\psi} \text{PMod}(S) \longrightarrow 1.$$

Beispiel 1.14:

Für $S = \Sigma_{0,3}$ gilt:

$$\begin{aligned} \text{Mod}^*(\Sigma_{0,3}) &\cong S_3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ \text{Mod}(\Sigma_{0,3}) &\cong S_3 \\ \text{PMod}^*(\Sigma_{0,3}) &\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ \text{PMod}(\Sigma_{0,3}) &\cong \{1\} \\ \text{Mod}^!(\Sigma_{0,3}) &\cong \mathbb{Z}^3 \end{aligned}$$

Beweis:

Jede Abbildungsklasse $f \in \text{Mod}(\Sigma_{0,3})$ ist durch die Permutation der Randkomponenten schon eindeutig bestimmt. Bildet f die Randkomponenten alle auf sich ab, so ist f isotop zur Identität. Die punktweise Abbildungsklassengruppe wird von den Dehntwists um die Ränder erzeugt.

Es gibt eine orientierungsumkehrende Abbildungsklasse $\tau \in \text{Mod}^*(\Sigma_{0,3})$, welche die Ränder von $\Sigma_{0,3}$ auf sich abbildet. Da $\text{PMod}(\Sigma_{0,3})$ trivial und von Index 2 in $\text{PMod}^*(\Sigma_{0,3})$ ist, gilt $\text{PMod}^*(\Sigma_{0,3}) = \{\text{id}, \tau\}$. Für jedes $f \in \text{Mod}(\Sigma_{0,3})$ läßt $f \circ \tau \circ f^{-1} \circ \tau^{-1}$ die Ränder von $\Sigma_{0,3}$ invariant, d.h. $f \circ \tau \circ f^{-1} \circ \tau^{-1}$ ist die Identität bzw. $f \circ \tau = \tau \circ f$. Somit gilt $\text{Mod}^*(\Sigma_{0,3}) = \text{Mod}(\Sigma_{0,3}) \oplus \text{PMod}^*(\Sigma_{0,3})$. \square

1.2 Der Hosenkomplex $\mathcal{P}(S)$

In diesem Abschnitt werden wir für die meisten Flächen einen 2-dimensionalen polygonalen Komplex $\mathcal{P}(S)$, den sogenannten *Hosenkomplex*, definieren und einige Eigenschaften zitieren. Außerdem werden wir erklären, wie die Abbildungsklassengruppe $\text{Mod}(S)$ auf diesem Komplex operiert.

Definition und Bemerkung 1.15:

Sei $S = \Sigma_{g,b}$ eine kompakte Fläche vom Geschlecht g mit b Randkomponenten.

- a) Eine *Hosenzerlegung* von S ist eine Menge $\mathcal{P} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ von einfachen, paarweise disjunkten Kurven in S , so daß jede Zusammenhangskomponente von $(S \setminus (\alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_n))^{\text{comp}}$ eine *Hose*, d.h. homöomorph zu $\Sigma_{0,3}$, ist.
- b) Die Flächen $\Sigma_{0,0}, \Sigma_{0,1}, \Sigma_{0,2}, \Sigma_{1,0}$ haben keine Hosenzerlegung. Das sind genau die Flächen, deren *Eulercharakteristik* $\chi(\Sigma_{g,b}) = 2 - 2g - b$ nichtnegativ ist.
- c) Jede in b) nicht genannte Fläche hat eine Hosenzerlegung. Die Fläche $\Sigma_{0,3}$ hat genau eine Hosenzerlegung, nämlich \emptyset . Es ist $\chi(\Sigma_{0,3}) = -1$.
- d) Sei $\mathcal{P} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ eine Hosenzerlegung einer Fläche $\Sigma_{g,b}$.
- $\Sigma_{g,b}$ entsteht durch Verkleben der Hosen von \mathcal{P} . Daher gilt:

$$2 - 2g - b = \chi(\Sigma_{g,b}) = \sum_{H \text{ Hose von } \mathcal{P}} \chi(H) \stackrel{c)}{=} \sum_{H \text{ Hose von } \mathcal{P}} -1$$
 \Rightarrow Jede Hosenzerlegung zerlegt S in $2g - 2 + b$ Hosen.
 - Da jede Kurve aus \mathcal{P} an zwei (nicht notwendig verschiedene) Hosen grenzt und jede Hose von drei Kurven aus \mathcal{P} oder ∂S berandet wird, gilt:

$$2n + b = 3 \cdot (\text{Anzahl der Hosen von } \mathcal{P}) = 6g - 6 + 3b$$
 $\Rightarrow n = 3g - 3 + b$
 \Rightarrow Jede Hosenzerlegung von S besteht aus $3g - 3 + b$ Kurven.

Von nun an sei S stets eine kompakte oder punktierte Fläche, d.h. $S \cong \Sigma_{g,b}$ oder $S \cong \Sigma_{g,b}^{nc}$, von negativer Eulercharakteristik und mit $(g, b) \neq (0, 3)$.

Definition 1.16:

Sei $\mathcal{P} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ eine Hosenzerlegung von S . Entfernt man ein α_i aus \mathcal{P} , so enthält $(S \setminus \bigcup_{j \neq i} \alpha_j)^{\text{comp}}$ eine Komponente, die keine Hose, sondern zu $\Sigma_{1,1}$ oder $\Sigma_{0,4}$ homöomorph ist. Sei α'_i eine andere Kurve in dieser Teilfläche, die α_i minimal schneidet, d.h. genau einmal im Fall $\Sigma_{1,1}$ und genau zweimal im Fall $\Sigma_{0,4}$. Dann ist auch $\mathcal{P}' := (\mathcal{P} \setminus \{\alpha_i\}) \cup \{\alpha'_i\}$ eine Hosenzerlegung von S . Der Übergang $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$ heißt *S-Move (simple move)* im Fall $\Sigma_{1,1}$ und *A-Move (associativity move)* im Fall $\Sigma_{0,4}$. Beispiele für Moves sind in Abbildung 1.3 dargestellt.

Beachte: Ist $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$ ein Move, dann ist auch $\mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{P}$ ein Move.

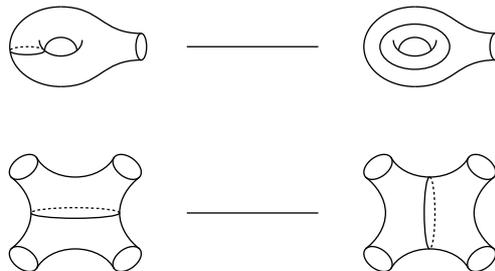


Abbildung 1.3: Ein *S-Move* (oben) und ein *A-Move* (unten)

Definition 1.17:

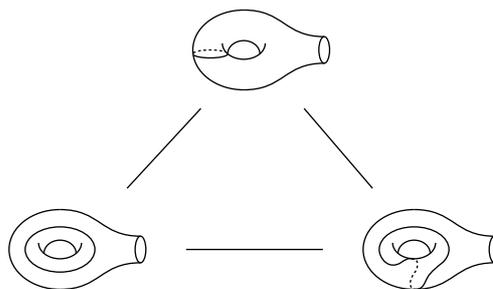
Der *Hosengraph* $\mathcal{P}^1(S)$ ist ein ungerichteter Graph, dessen Ecken alle möglichen Hosenserlegungen von S sind. Zwei Ecken $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$ werden genau dann durch eine Kante verbunden, wenn sie durch einen Move auseinander hervorgehen.

$\mathcal{P}^1(S)$ hat stets unendlich viele Ecken, und von jeder Ecke gehen unendlich viele Kanten weg.

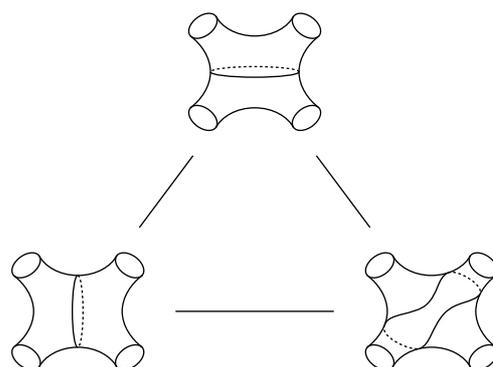
Definition 1.18:

Wir machen $\mathcal{P}^1(S)$ zu einem 2-dimensionalen Polygonalkomplex $\mathcal{P}(S)$, dem *Hosenkomplex* von S , indem wir entlang der folgenden Wege 2-Zellen einkleben:

- (3S) Ein Dreieck, dessen Kanten aus S -Moves innerhalb derselben Teilfläche $\Sigma_{1,1} \subseteq S$ bestehen:

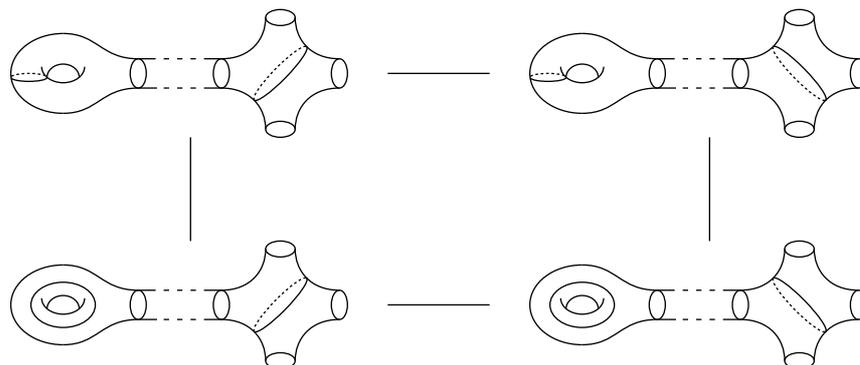


- (3A) Ein Dreieck, dessen Kanten aus A -Moves innerhalb derselben Teilfläche $\Sigma_{0,4} \subseteq S$ bestehen:

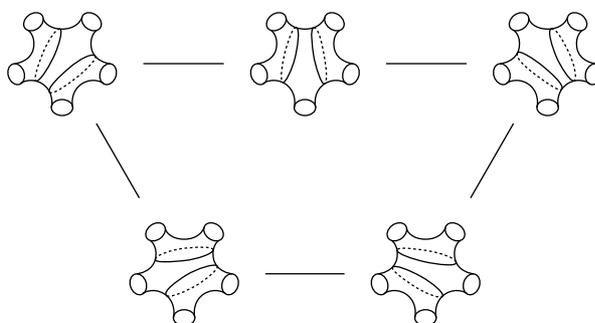


Beachte: (3S) und (3A) zusammen besagen, daß in *jedes* in $\mathcal{P}^1(S)$ vorkommende Dreieck eine 2-Zelle eingeklebt wird.

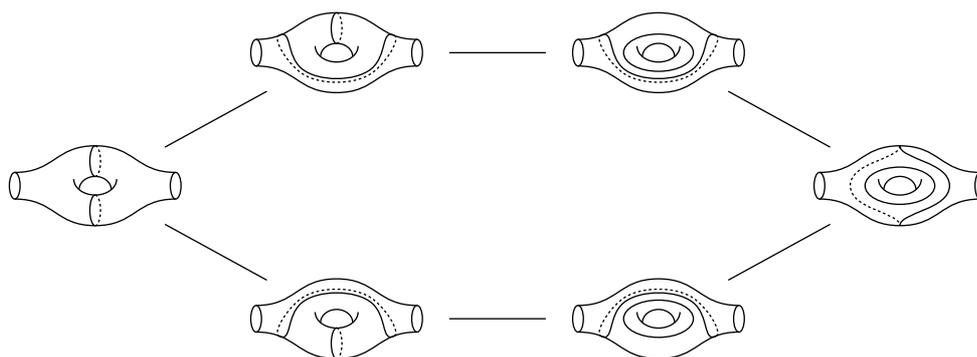
- (4C) Ein Viereck, dessen Kanten aus kommutierenden Moves in unterschiedlichen Teilflächen bestehen:



- (5A) Ein Fünfeck, dessen Kanten aus A -Moves innerhalb derselben Teilfläche $\Sigma_{0,5} \subseteq S$ bestehen, so daß jede Kurve, die in $\Sigma_{0,5}$ liegt, in genau zwei der Hosengerlegungen vorkommt:



- (6AS) Ein Sechseck der Form $\{\gamma_1, \gamma_2\} - \{\gamma_1, \gamma_3\} - \{\gamma_3, \gamma_4\} - \{\gamma_4, \gamma_5\} - \{\gamma_4, \gamma_6\} - \{\gamma_2, \gamma_6\}$, wobei $\gamma_1, \dots, \gamma_6$ in einer Teilfläche $\Sigma_{1,2} \subseteq S$ liegen, die Moves $\gamma_1 - \gamma_4$ sowie $\gamma_2 - \gamma_4$ S -Moves sind und die übrigen Moves A -Moves sind:



Beachte: γ_3, γ_6 sind separierend und $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_4, \gamma_5$ sind nichtseparierend.

Satz 1.19:

$\mathcal{P}^1(S)$ ist zusammenhängend. $\mathcal{P}(S)$ ist einfach zusammenhängend.

Das wurde in dem Artikel [HLS] bewiesen. Für die erste Aussage sind die Einzelheiten in [Wo] ausgeführt.

Definition und Bemerkung 1.20:

In 1.6 wurde eine Aktion von $\text{Mod}(S)$ auf der Menge $\mathcal{S}(S)$ aller Kurven in S definiert. Diese induziert eine Aktion von $\text{Mod}(S)$ auf der Menge $\mathcal{P}^0(S)$ aller Hosenzerlegungen von S durch $f \cdot \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} := \{f(\alpha_1), \dots, f(\alpha_n)\}$.

Sind zwei Hosenzerlegungen $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$ von S durch einen Move verbunden, so auch die Bilder $f \cdot \mathcal{P}$ und $f \cdot \mathcal{P}'$ für jedes $f \in \text{Mod}(S)$. Ist ein Weg $\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2 - \dots - \mathcal{P}_k - \mathcal{P}_1$ der Rand einer 2-Zelle in $\mathcal{P}(S)$, so auch der Bildweg $f \cdot \mathcal{P}_1 - f \cdot \mathcal{P}_2 - \dots - f \cdot \mathcal{P}_k - f \cdot \mathcal{P}_1$. Daher operiert $\text{Mod}(S)$ auch auf $\mathcal{P}(S)$.

In Bemerkung 4.5 werden wir lernen, daß diese Aktion niemals inversionsfrei ist.

Definition 1.21:

Sei \mathcal{P} eine Hosenzerlegung von S . Der zu \mathcal{P} assoziierte Graph $\Gamma(\mathcal{P})$ ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} V_3(\Gamma(\mathcal{P})) &:= \text{Menge der Hosen von } \mathcal{P} \\ V_1(\Gamma(\mathcal{P})) &:= \text{Menge der Randkomponenten}^2 \text{ von } S \\ V(\Gamma(\mathcal{P})) &:= V_3(\Gamma(\mathcal{P})) \cup V_1(\Gamma(\mathcal{P})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_i(\Gamma(\mathcal{P})) &:= \text{Menge der Kurven von } \mathcal{P} \\ K_r(\Gamma(\mathcal{P})) &:= \text{Menge der Randkomponenten}^2 \text{ von } S \\ K(\Gamma(\mathcal{P})) &:= K_i(\Gamma(\mathcal{P})) \cup K_r(\Gamma(\mathcal{P})) \end{aligned}$$

Grenzt eine Kurve $\alpha \in \mathcal{P}$ in S an die Hosen H_1 und H_2 an (es ist $H_1 = H_2$ möglich), so ist α in $\Gamma(\mathcal{P})$ eine geometrische Kante, die die Ecken H_1 und H_2 verbindet. Grenzt eine Randkomponente $\partial \subseteq \partial S$ in S an die Hose H an, so ist ∂ in $\Gamma(\mathcal{P})$ eine geometrische Kante, die die Ecken H und ∂ verbindet. Damit sind Elemente aus $V_3(\Gamma(\mathcal{P}))$ Ecken der Valenz 3 und Elemente aus $V_1(\Gamma(\mathcal{P}))$ Ecken der Valenz 1. In $\Gamma(\mathcal{P})$ gibt es $2g - 2 + b$ Ecken der Valenz 3, b Ecken der Valenz 1 und $3g - 3 + 2b$ Kanten.

**Definition und Bemerkung 1.22:**

Ein endlicher, zusammenhängender, ungerichteter Graph Γ heißt *hosenzulässig*, wenn er nur Ecken der Valenz 1 und 3 hat. Für jede Hosenzerlegung \mathcal{P} ist $\Gamma(\mathcal{P})$ hosenzulässig, und umgekehrt gibt es zu jedem hosenzulässigen Graphen Γ eine Fläche S und eine Hosenzerlegung \mathcal{P} von S mit $\Gamma \cong \Gamma(\mathcal{P})$.

²Die Mengen $V(\Gamma(\mathcal{P}))$ und $K(\Gamma(\mathcal{P}))$ sind abstrakt gegeben, d.h. wir kümmern uns nicht darum, daß $V(\Gamma(\mathcal{P})) \cap K(\Gamma(\mathcal{P})) \neq \emptyset$ gilt.

Bemerkung 1.23:

Die Konstruktion von 1.21 kann verallgemeinert werden (vgl. den Artikel [V]): Ein *Reduktionssystem* $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ auf S ist eine Menge von einfachen, paarweise disjunkten, nicht nullisotopen und nicht zu einer Randkomponente von S isotopen Kurven, d.h. $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ kann zu einer Hosenzerlegung von S ergänzt werden.

Jedes Reduktionssystem $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ auf S definiert einen Graphen $\Gamma(\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\})$ analog zu Definition 1.21, und jeder endliche, zusammenhängende Graph entsteht durch ein geeignetes Reduktionssystem auf einer geeigneten Fläche.

Kapitel 2

Die Flächen $\Sigma_{1,1}$ und $\Sigma_{0,4}$

In diesem Kapitel wollen wir für die Flächen $S = \Sigma_{1,1}$ und $S = \Sigma_{0,4}$ die Aktion der Abbildungsklassengruppe $\text{Mod}(S)$ auf dem Hosenkomplex $\mathcal{P}(S)$ untersuchen. Diese beiden Flächen bilden die Grundlage für die Bearbeitung des allgemeinen Falls.

2.1 Die Fläche $\Sigma_{1,1}$

Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2$ definieren wir eine Äquivalenzrelation \sim durch $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}^2$. Der Quotient $(\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2)/\sim$ zusammen mit der Quotiententopologie ist eine nichtkompakte Fläche, die homöomorph zu $\Sigma_{1,1}^{nc}$ ist, schreibe also $\Sigma_{1,1}^{nc} = (\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2)/\sim$. Die kanonische Projektion $p : \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2 \rightarrow \Sigma_{1,1}^{nc}$ ist eine unverzweigte Überlagerung.

Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2$ operiert die Gruppe \mathcal{A} aller orientierungserhaltenden, invertierbaren, affinen Abbildungen $\Phi : x \mapsto Ax + b$ ($A \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$, $b \in \mathbb{Z}^2$). \mathcal{A} ist isomorph zu $\mathbb{Z}^2 \rtimes \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ durch den kanonischen Isomorphismus $(b, A) \mapsto (\Phi : x \mapsto Ax + b)$. Zur Erinnerung: $\mathbb{Z}^2 \rtimes \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ erhält die Struktur eines semidirekten Produkts durch $\varphi : \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}^2)$, $A \mapsto (b \mapsto Ab)$. Die Verknüpfung in $\mathbb{Z}^2 \rtimes \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ ist $(b, A) * (b', A') = (Ab' + b, AA')$. Neutrales Element ist $(0, \mathcal{E})$, wobei \mathcal{E} die Einheitsmatrix in $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ ist, und das zu einem Element $(b, A) \in \mathbb{Z}^2 \rtimes \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ inverse Element ist $(b, A)^{-1} = (-A^{-1}b, A^{-1})$.

Jedes $\Phi \in \mathcal{A}$ ist ein Homöomorphismus auf $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2$. Je zwei verschiedene solche Homöomorphismen sind nicht isotop. Jeder weitere Homöomorphismus $f : \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2$ ist zu einem $\Phi \in \mathcal{A}$ isotop. Daher gilt $\text{Mod}(\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2) \cong \mathcal{A} \cong \mathbb{Z}^2 \rtimes \text{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Bemerkung 2.1:

- a) Jedes $\Phi = (b, A) \in \mathbb{Z}^2 \rtimes \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ ist verträglich mit der Äquivalenzrelation \sim , induziert also eine Abbildung $\Phi' : \Sigma_{1,1}^{nc} \rightarrow \Sigma_{1,1}^{nc}$. Auch Φ' ist ein Homöomorphismus.
- b) Für $\Phi_1 = (b_1, A_1), \Phi_2 = (b_2, A_2) \in \mathbb{Z}^2 \rtimes \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ gilt $\Phi'_1 = \Phi'_2 \Leftrightarrow A_1 = A_2$.

Beweis:

- a) Seien $x, y \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2$ mit $x \sim y$.
 $\Rightarrow x - y \in \mathbb{Z}^2$
 $\Rightarrow \Phi(x) - \Phi(y) = (Ax + b) - (Ay + b) = A(x - y) \in \mathbb{Z}^2$
 $\Rightarrow \Phi(x) \sim \Phi(y)$

Damit folgt die erste Behauptung. Da sowohl Φ' als auch $(\Phi')^{-1} = (\Phi^{-1})'$ stetig sind, ist Φ' ein Homöomorphismus.

- b) $\Phi'_1 = \Phi'_2 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2 : \Phi_1(x) \sim \Phi_2(x)$
 $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2 : \Phi_1(x) - \Phi_2(x) = (A_1x + b_1) - (A_2x + b_2) \in \mathbb{Z}^2$
 $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2 : (A_1 - A_2)x \in \mathbb{Z}^2$
 $\Leftrightarrow A_1 = A_2$ □

Sind $\Phi_1 = (b_1, A_1), \Phi_2 = (b_2, A_2) \in \mathbb{Z}^2 \rtimes \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $A_1 \neq A_2$, so sind Φ'_1, Φ'_2 nicht isotop. Umgekehrt ist jeder Homöomorphismus $f : \Sigma_{1,1}^{nc} \rightarrow \Sigma_{1,1}^{nc}$ zu einem Φ' für ein geeignetes $\Phi = (b, A) \in \mathbb{Z}^2 \rtimes \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ isotop. Daher ist die Zuordnung $\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathrm{Mod}(\Sigma_{1,1}^{nc}), \Phi \mapsto \Phi'$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit Kern $\mathbb{Z}^2 \rtimes \{\mathcal{E}\}$, und wir erhalten:

Bemerkung 2.2:

$$\mathrm{Mod}(\Sigma_{1,1}^{nc}) \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$$

Die einfachen Kurven in $\Sigma_{1,1}^{nc}$ werden durch die Bilder von Geraden in $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2$ mit rationaler Steigung repräsentiert.¹ Zwei einfache Kurven in $\Sigma_{1,1}^{nc}$ sind genau dann isotop, wenn die zugehörigen Geraden dieselbe Steigung haben. Daher geben wir die Isotopieklasse einer einfachen Kurve mit $[p, q]$ an, wobei $p, q \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(p, q) = 1$ ist. Da wir nur unorientierte Kurven betrachten, gilt stets $[p, q] = [-p, -q]$.

Zwei Kurven² $[p, q]$ und $[x, y]$ schneiden sich genau dann minimal, d.h. in genau einem Punkt, wenn

$$\det \begin{pmatrix} p & q \\ x & y \end{pmatrix} = py - qx = \pm 1$$

gilt. Sind $[p, q], [x, y], [s, t]$ drei Kurven, die sich paarweise minimal schneiden, so gilt $[s, t] = [p + x, q + y]$ oder $[s, t] = [p - x, q - y]$ (vgl. [Wo]). Der Hosengraph $\mathcal{P}^1(\Sigma_{1,1}^{nc})$ von $\Sigma_{1,1}^{nc}$ ist der Fareygraph (vgl. Abbildung 2.1), dessen Ecken alle Kurven $[p, q]$ sind und in dem zwei Ecken genau dann durch eine Kante verbunden sind, wenn sie minimalen Schnitt haben. Der Hosenkomples $\mathcal{P}(\Sigma_{1,1}^{nc})$ entsteht aus $\mathcal{P}^1(\Sigma_{1,1}^{nc})$, indem in jedes in $\mathcal{P}^1(\Sigma_{1,1}^{nc})$ vorkommende Dreieck eine 2-Zelle eingeklebt wird.

¹ Die Bilder von Geraden in $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2$ mit irrationaler Steigung unter der Überlagerung p sind nicht geschlossene, unendlich lange, in $\Sigma_{1,1}^{nc}$ dichte Geodätische.

² Von nun an schreiben wir nur „Kurve“ statt „einfache Kurve“.

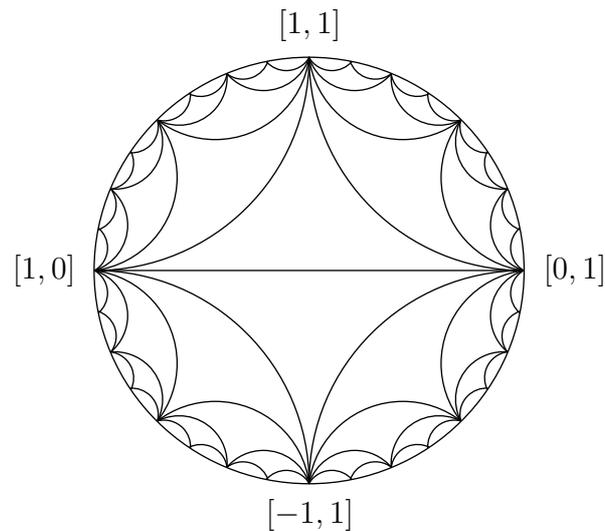


Abbildung 2.1: Der Fareygraph

Bemerkung 2.3:

Die Abbildungsklassengruppe $\text{Mod}(\Sigma_{1,1}^{nc})$ operiert auf $\mathcal{P}^0(\Sigma_{1,1}^{nc})$ durch Matrixmultiplikation:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot [p, q] = [ap + bq, cp + dq]$$

Wir können nun die Stabilisatoren und den Quotienten unter der Aktion von $\text{Mod}(\Sigma_{1,1}^{nc})$ auf $\mathcal{P}(\Sigma_{1,1}^{nc})$ bestimmen.

Bemerkung 2.4:

- $\text{Stab}([1, 0]) = \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon & b \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} : \varepsilon \in \{1, -1\}, b \in \mathbb{Z} \right\} \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
- Ist $[p, q]$ eine beliebige Kurve in $\Sigma_{1,1}^{nc}$ und sind $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $px + qy = 1$, so gilt $\begin{pmatrix} p & -y \\ q & x \end{pmatrix} \cdot [1, 0] = [p, q]$ und $\text{Stab}([p, q]) = \begin{pmatrix} p & -y \\ q & x \end{pmatrix} \cdot \text{Stab}([1, 0]) \cdot \begin{pmatrix} p & -y \\ q & x \end{pmatrix}^{-1}$.
- $\text{Mod}(\Sigma_{1,1}^{nc})$ operiert transitiv auf $\mathcal{P}^0(\Sigma_{1,1}^{nc})$.

Beweis:

- Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{Stab}([1, 0])$.
 $\Rightarrow [1, 0] = A \cdot [1, 0] = [a, c] \Rightarrow a = \pm 1$ und $c = 0$
Wegen $A \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ gilt $1 = ad - bc = ad$ und somit $a = d = \pm 1$.
- ist offensichtlich, und c) folgt aus b). □

Bemerkung 2.5:

Seien $\mathcal{K} := ([1, 0] \rightarrow [0, 1])$ die orientierte Kante von $[1, 0]$ nach $[0, 1]$ und $\overline{\mathcal{K}}$ die zu \mathcal{K} entgegengesetzt orientierte Kante.

$$\text{a) } \text{Stab}_{or}^+(\mathcal{K}) := \text{Stab}([1, 0]) \cap \text{Stab}([0, 1]) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$$\text{Stab}_{or}^-(\mathcal{K}) := \{A \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}) : A \cdot \mathcal{K} = \overline{\mathcal{K}}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{Stab}_{nor}(\mathcal{K}) &:= \text{Stab}_{or}^+(\mathcal{K}) \cup \text{Stab}_{or}^-(\mathcal{K}) \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \end{aligned}$$

b) $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ operiert transitiv auf allen Kanten. Insbesondere wird jede Kante unter dieser Aktion invertiert.

Beweis:

a) Das beweist man genau wie in 2.4.

b) Sei $\mathcal{K}' = ([p, q] \rightarrow [x, y])$ eine Kante mit $py - qx = 1$.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} p & x \\ q & y \end{pmatrix} \cdot [1, 0] = [p, q] \text{ und } \begin{pmatrix} p & x \\ q & y \end{pmatrix} \cdot [0, 1] = [x, y] \Rightarrow \begin{pmatrix} p & x \\ q & y \end{pmatrix} \cdot \mathcal{K} = \mathcal{K}' \quad \square$$

Bemerkung 2.6:

Seien $\Delta = ([1, 0] \rightarrow [0, 1] \rightarrow [1, 1])$ das orientierte Dreieck mit den Ecken $[1, 0]$, $[0, 1]$ und $[1, 1]$ und $\overline{\Delta} = ([1, 0] \rightarrow [1, 1] \rightarrow [0, 1])$ das zu Δ entgegengesetzt orientierte Dreieck.

$$\text{a) } \text{Stab}_{pw}(\Delta) := \text{Stab}([1, 0]) \cap \text{Stab}([0, 1]) \cap \text{Stab}([1, 1])$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$$\text{Stab}_{or}(\Delta) := \{A \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}) : A \cdot \Delta = \Delta\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$$

$$\text{Stab}_{nor}(\Delta) := \{A \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}) : A \cdot \{\Delta, \overline{\Delta}\} = \{\Delta, \overline{\Delta}\}\} = \text{Stab}_{or}(\Delta)$$

b) Es gibt kein $A \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$, aber ein $A \in \text{GL}_2(\mathbb{Z}) \cong \text{Mod}^*(\Sigma_{1,1}^{nc})$ mit $A \cdot \Delta = \overline{\Delta}$.

c) Unter der Aktion von $\text{Mod}(\Sigma_{1,1}^{nc})$ auf den Dreiecken von $\mathcal{P}(\Sigma_{1,1}^{nc})$ gibt es zwei Bahnen.

Beweis:

a),b) Das beweist man genau wie in 2.4.

c) Sei $\Delta' = ([p, q] \rightarrow [x, y] \rightarrow [s, t])$ ein Dreieck in $\mathcal{P}(\Sigma_{1,1}^{nc})$ mit $py - qx = 1$. Es ist

$$[s, t] = [p + x, q + y] \text{ oder } [s, t] = [p - x, q - y]. \text{ Im ersten Fall gilt } \begin{pmatrix} p & x \\ q & y \end{pmatrix} \cdot \Delta = \Delta',$$

im zweiten Fall gilt $\begin{pmatrix} p & x-p \\ q & y-q \end{pmatrix} \cdot \overline{\Delta} = \Delta'$. Da Δ und $\overline{\Delta}$ nicht in derselben Bahn liegen, folgt die Behauptung. \square

Wir haben nun alle Stabilisatoren und Bahnen bestimmt und können den Quotienten aufstellen. Da $\text{Mod}(\Sigma_{1,1}^{nc})$ weder inversionsfrei auf den Kanten noch dreifrei auf den 2-Zellen operiert, müssen wir dazu $\mathcal{P}(\Sigma_{1,1}^{nc})$ baryzentrisch unterteilen:

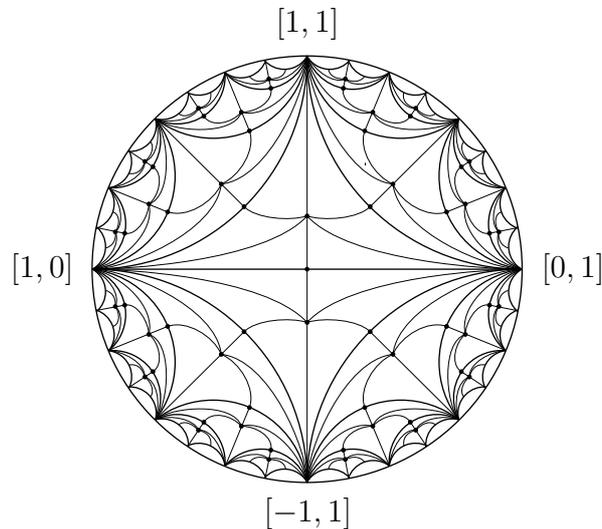


Abbildung 2.2: Der baryzentrisch unterteilte Fareygraph

Proposition 2.7:

Der Quotientenkomplex $\mathcal{Q}(\Sigma_{1,1}^{nc})$ ist ein Dreieck, in welches zwei 2-Zellen eingeklebt sind. Er ist also zur Sphäre S^2 homöomorph.

Sei nun $\Sigma_{1,1}$ eine kompakte Fläche vom Geschlecht 1 mit einer Randkomponente. Nach 1.4 und 2.2 gilt $\text{Mod}(\Sigma_{1,1}) \cong \text{Mod}(\Sigma_{1,1}^{nc}) \cong \text{SL}_2(\mathbb{Z})$. Wir wählen eine Einbettung $\Sigma_{1,1} \hookrightarrow \Sigma_{1,1}^{nc}$ und identifizieren die Kurven auf $\Sigma_{1,1}$ mit den Kurven $[p, q]$ auf $\Sigma_{1,1}^{nc}$ (vgl. 1.7) und somit den Hosenkomplex $\mathcal{P}(\Sigma_{1,1})$ mit $\mathcal{P}(\Sigma_{1,1}^{nc})$. $\text{Mod}(\Sigma_{1,1}) \cong \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ operiert auf $\mathcal{P}(\Sigma_{1,1})$ ebenfalls durch Matrixmultiplikation.

Bemerkung 2.8:

Sei $\iota : \Sigma_{1,1} \hookrightarrow S$ eine Einbettung von $\Sigma_{1,1}$ in eine Fläche S . Jede Abbildungsklasse $\hat{f} \in \text{Mod}(\Sigma_{1,1})$ hat einen Vertreter $\hat{F} : \Sigma_{1,1} \rightarrow \Sigma_{1,1}$ mit $\hat{F}|_{\partial\Sigma_{1,1}} = \text{id}$. Daher gibt es einen Homöomorphismus $F : S \rightarrow S$ mit $F|_{S \setminus \Sigma_{1,1}} = \text{id}$ und $F|_{\Sigma_{1,1}} = \hat{F}$. Wir sagen, daß zu jedem $A \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ eine Abbildungsklasse $f \in \text{Mod}(S)$ existiert mit $f|_{S \setminus \Sigma_{1,1}} = \text{id}$ und $f|_{\Sigma_{1,1}} = A$. Beachte: f ist in der Regel nur bis auf einen Dehntwist um $\partial\Sigma_{1,1}$ eindeutig durch A bestimmt.

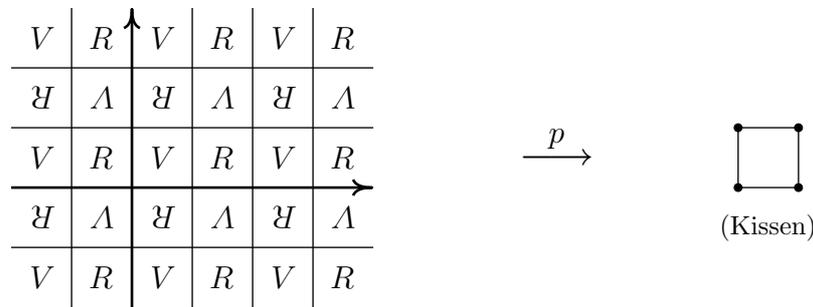
2.2 Die Fläche $\Sigma_{0,4}$

In Abschnitt 2.1 haben wir eine Äquivalenzrelation aus $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2$ herausfaktoriert, um $\Sigma_{1,1}^{nc}$ zu erhalten. Wir gehen nun ähnlich vor.

Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2$ definieren wir eine Äquivalenzrelation \approx durch

$$x \approx y \iff \exists z \in \mathbb{Z}^2, \varepsilon \in \{1, -1\} : x = \varepsilon y + 2z$$

(vgl. Abbildung 2.3). Der Quotient $(\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2)/\approx$ zusammen mit der Quotiententopologie ist eine nichtkompakte Fläche, die homöomorph zu $\Sigma_{0,4}^{nc}$ ist, schreibe also $\Sigma_{0,4}^{nc} = (\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2)/\approx$. Die kanonische Projektion $p : \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2 \rightarrow \Sigma_{0,4}^{nc}$ ist eine unverzweigte Überlagerung.



(V = Vorderseite, R = Rückseite)

Abbildung 2.3: Die Äquivalenzrelation \approx auf $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2$

Bemerkung 2.9:

- a) Jedes $\Phi = (b, A) \in \mathbb{Z}^2 \rtimes \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ist verträglich mit der Äquivalenzrelation \approx , induziert also eine Abbildung $\Phi' : \Sigma_{0,4}^{nc} \rightarrow \Sigma_{0,4}^{nc}$. Auch Φ' ist ein Homöomorphismus.
- b) Für $\Phi_1 = (b_1, A_1), \Phi_2 = (b_2, A_2) \in \mathbb{Z}^2 \rtimes \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ gilt:
 $\Phi'_1 = \Phi'_2 \iff A_1 = \pm A_2$ und $b_1 - b_2 \in (2\mathbb{Z})^2$.

Beweis:

- a) Seien $x, y \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2$ mit $x \approx y$.
 $\Rightarrow \exists z \in \mathbb{Z}^2, \varepsilon \in \{1, -1\} : x = \varepsilon y + 2z$
 $\Rightarrow \Phi(x) = Ax + b = \varepsilon \cdot \Phi(y) + 2 \cdot Az + \underbrace{(1 - \varepsilon)}_{\in \{0, 2\}} \cdot b$
 $\Rightarrow \Phi(x) \approx \Phi(y)$

Damit folgt die erste Behauptung. Da sowohl Φ' als auch $(\Phi')^{-1} = (\Phi^{-1})'$ stetig sind, ist Φ' ein Homöomorphismus.

b) „ \Rightarrow “: Sei $\Phi'_1 = \Phi'_2$.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2 : \Phi_1(x) \approx \Phi_2(x) \\ &\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2 \exists \varepsilon_x \in \{1, -1\}, z_x \in \mathbb{Z}^2 : A_1x + b_1 = \varepsilon_x \cdot (A_2x + b_2) + 2z_x \\ &\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2 \exists \varepsilon_x \in \{1, -1\}, z_x \in \mathbb{Z}^2 : (A_1 - \varepsilon_x A_2)x = b_2 - b_1 + 2z_x \\ &\Rightarrow \exists \varepsilon \in \{1, -1\}, z \in \mathbb{Z}^2 : (A_1 - \varepsilon A_2) \cdot \begin{pmatrix} \pi \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = b_2 - b_1 + 2z \in \mathbb{Z}^2 \\ &\Rightarrow A_1 - \varepsilon A_2 = 0 \text{ und somit auch } b_2 - b_1 + 2z = 0 \\ &\Rightarrow A_1 = \varepsilon A_2 \text{ und } b_2 - b_1 = 2z \in (2\mathbb{Z})^2 \end{aligned}$$

„ \Leftarrow “: Seien $\varepsilon \in \{1, -1\}$ und $z \in \mathbb{Z}^2$ mit $A_1 = \varepsilon A_2$ und $b_1 = b_2 + 2z$.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2 : \Phi_1(x) = A_1x + b_1 = \varepsilon A_2x + b_2 + 2z \\ &\quad = \varepsilon \cdot \Phi_2(x) + (1 - \varepsilon)b_2 + z \\ &\quad \approx \Phi_2(x) \end{aligned} \quad \square$$

Sind $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathbb{Z}^2 \rtimes \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $\Phi'_1 \neq \Phi'_2$, so sind Φ'_1, Φ'_2 auch nicht isotop. Umgekehrt ist jeder Homöomorphismus $f : \Sigma_{0,4}^{nc} \rightarrow \Sigma_{0,4}^{nc}$ zu einem Φ' für ein geeignetes $\Phi \in \mathbb{Z}^2 \rtimes \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ isotop. Daher ist die Zuordnung $\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathrm{Mod}(\Sigma_{0,4}^{nc}), \Phi \mapsto \Phi'$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit Kern $(2\mathbb{Z})^2 \rtimes \{\mathcal{E}, -\mathcal{E}\}$, und wir erhalten:

Bemerkung 2.10:

$$\mathrm{Mod}(\Sigma_{0,4}^{nc}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \rtimes \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) =: V_4 \rtimes \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$$

Wie in Abschnitt 2.1 sind auch hier die (einfachen) Kurven auf $\Sigma_{0,4}^{nc}$ durch Geradensteigungen $[p, q]$ mit $p, q \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{ggT}(p, q) = 1$, $[p, q] = [-p, -q]$ gegeben, und zwei Kurven $[p, q], [x, y]$ schneiden sich genau dann minimal, d.h. in genau zwei Punkten, wenn

$$\det \begin{pmatrix} p & q \\ x & y \end{pmatrix} = py - qx = \pm 1$$

gilt. Es ist $\mathcal{P}(\Sigma_{0,4}^{nc}) = \mathcal{P}(\Sigma_{1,1}^{nc})$ der mit Dreiecken ausgefüllte Fareygraph (vgl. Abbildung 2.1).

Bemerkung 2.11:

Die Abbildungsklassengruppe $\mathrm{Mod}(\Sigma_{0,4}^{nc})$ operiert auf $\mathcal{P}^0(\Sigma_{0,4}^{nc})$ durch Matrixmultiplikation:

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) \cdot [p, q] = [ap + bq, cp + dq]$$

Auch die Berechnung der Stabilisatoren und des Quotienten erfolgt analog zu Abschnitt 2.1. Wir lassen die Beweise aus.

Bemerkung 2.12:

a) $\mathrm{Stab}([1, 0]) = \left\{ \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) : x, y \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \right\} \cong V_4 \rtimes \mathbb{Z}$

b) $\mathrm{Mod}(\Sigma_{0,4}^{nc})$ operiert transitiv auf $\mathcal{P}^0(\Sigma_{0,4}^{nc})$.

Bemerkung 2.13:

Seien $\mathcal{K} := ([1, 0] \text{ --- } [0, 1])$ die orientierte Kante von $[1, 0]$ nach $[0, 1]$ und $\overline{\mathcal{K}}$ die zu \mathcal{K} entgegengesetzt orientierte Kante.

- a) $\text{Stab}_{or}^+(\mathcal{K}) := \text{Stab}([1, 0]) \cap \text{Stab}([0, 1]) = V_4 \rtimes \{\pm \mathcal{E}\} \cong V_4$
 $\text{Stab}_{or}^-(\mathcal{K}) := \{f \in \text{Mod}(\Sigma_{0,4}^{nc}) : f(\mathcal{K}) = \overline{\mathcal{K}}\} = V_4 \rtimes \left\{ \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$
 $\text{Stab}_{nor}(\mathcal{K}) := \text{Stab}_{or}^+(\mathcal{K}) \cup \text{Stab}_{or}^-(\mathcal{K})$
 $= V_4 \rtimes \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \cong V_4 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
 $\text{Stab}_{nor}(\mathcal{K})$ ist somit isomorph zur *Diedergruppe* D_4 .

- b) $\text{Mod}(\Sigma_{0,4}^{nc})$ operiert transitiv auf allen Kanten. Insbesondere wird jede Kante unter dieser Aktion invertiert.

Bemerkung 2.14:

Seien $\Delta = ([1, 0] \text{ --- } [0, 1] \text{ --- } [1, 1])$ das orientierte Dreieck mit den Ecken $[1, 0]$, $[0, 1]$ und $[1, 1]$ und $\overline{\Delta} = ([1, 0] \text{ --- } [1, 1] \text{ --- } [0, 1])$ das zu Δ entgegengesetzt orientierte Dreieck.

- a) $\text{Stab}_{pw}(\Delta) := \text{Stab}([1, 0]) \cap \text{Stab}([0, 1]) \cap \text{Stab}([1, 1]) \cong V_4 \rtimes \{\pm \mathcal{E}\} \cong V_4$
 $\text{Stab}_{or}(\Delta) := \{f \in \text{Mod}(\Sigma_{0,4}^{nc}) : f(\Delta) = \Delta\}$
 $= V_4 \rtimes \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \cong V_4 \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
 $\text{Stab}_{nor}(\Delta) := \{f \in \text{Mod}(\Sigma_{0,4}^{nc}) : f(\{\Delta, \overline{\Delta}\}) = \{\Delta, \overline{\Delta}\}\} = \text{Stab}_{or}(\Delta)$
 $\text{Stab}_{or}(\Delta)$ und $\text{Stab}_{nor}(\Delta)$ sind somit isomorph zur *alternierenden Gruppe* A_4 .

- b) Es gibt kein $f \in \text{Mod}(\Sigma_{0,4}^{nc})$, aber ein $f \in \text{Mod}^*(\Sigma_{0,4}^{nc})$ mit $f(\Delta) = \overline{\Delta}$.
c) Unter der Aktion von $\text{Mod}(\Sigma_{0,4}^{nc})$ auf den Dreiecken von $\mathcal{P}(\Sigma_{0,4}^{nc})$ gibt es zwei Bahnen.

Proposition 2.15:

$\text{Mod}(\Sigma_{0,4}^{nc})$ operiert weder inversionsfrei auf den Kanten noch drehfrei auf den 2-Zellen, d.h. wir gehen zur baryzentrischen Unterteilung von $\mathcal{P}(\Sigma_{0,4}^{nc})$ über, vgl. Abbildung 2.2. Der Quotientenkomplex $\mathcal{Q}(\Sigma_{0,4}^{nc})$ stimmt mit $\mathcal{Q}(\Sigma_{1,1}^{nc})$ überein.

Sei nun $\Sigma_{0,4}$ eine kompakte Fläche vom Geschlecht 0 mit 4 Randkomponenten. Nach 1.4 und 2.10 gilt $\text{Mod}(\Sigma_{0,4}) \cong \text{Mod}(\Sigma_{0,4}^{nc}) \cong V_4 \rtimes \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$. Wir wählen eine Einbettung $\Sigma_{0,4} \hookrightarrow \Sigma_{0,4}^{nc}$ wie im Beweis von 1.4 und identifizieren die Kurven auf $\Sigma_{0,4}$ mit den Kurven $[p, q]$ auf $\Sigma_{0,4}^{nc}$ und somit den Hosenkomplex $\mathcal{P}(\Sigma_{0,4})$ mit $\mathcal{P}(\Sigma_{0,4}^{nc})$. $\text{Mod}(\Sigma_{0,4}) \cong V_4 \rtimes \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ operiert auf $\mathcal{P}(\Sigma_{0,4})$ ebenfalls durch Matrixmultiplikation.

Weiterhin identifizieren wir die Randkomponenten von $\Sigma_{0,4}$ mit den Punktierungen $p \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, p \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, p \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ von $\Sigma_{0,4}^{nc}$, das sind die Vektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in V_4$. Bzgl. dieser Identifikation operiert $\text{Mod}(\Sigma_{0,4}) \cong V_4 \rtimes \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ auf den Randkomponenten durch

$$(b, \pm A) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b.$$

Bemerkung 2.16:

a) Nach 1.13b) haben wir die exakte Sequenz

$$1 \longrightarrow \text{PMod}(\Sigma_{0,4}) \longrightarrow \text{Mod}(\Sigma_{0,4}) \longrightarrow S_4 \longrightarrow 1.$$

b) Unter der Isomorphie $\text{Mod}(\Sigma_{0,4}) \cong V_4 \rtimes \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ gilt:

$$\begin{aligned} \text{PMod}(\Sigma_{0,4}) &= \{(b, \pm A) \in V_4 \rtimes \text{PSL}_2(\mathbb{Z}) : (b, \pm A) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ für alle } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in V_4\} \\ &= \left\{ \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) \in V_4 \rtimes \text{PSL}_2(\mathbb{Z}) : a, d \text{ ungerade, } b, c \text{ gerade} \right\} \end{aligned}$$

Bemerkung 2.17:

Sei $\iota : \Sigma_{0,4} \hookrightarrow S$ eine Einbettung von $\Sigma_{0,4}$ in eine Fläche S . Jede Abbildungsklasse $\hat{f} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) \in \text{PMod}(\Sigma_{0,4})$ (mit a, d ungerade und b, c gerade) bildet die Randkomponenten von $\Sigma_{0,4}$ jeweils auf sich ab, d.h. sie hat einen Vertreter $\hat{F} : \Sigma_{0,4} \rightarrow \Sigma_{0,4}$ mit $\hat{F}|_{\partial\Sigma_{0,4}} = \text{id}$. Daher gibt es einen Homöomorphismus $F : S \rightarrow S$ mit $F|_{S \setminus \Sigma_{0,4}} = \text{id}$ und $F|_{\Sigma_{0,4}} = \hat{F}$. Wir sagen, daß zu jedem $(b, \pm A) \in \text{PMod}(\Sigma_{0,4})$ eine Abbildungsklasse $f \in \text{Mod}(S)$ existiert mit $f|_{S \setminus \Sigma_{0,4}} = \text{id}$ und $f|_{\Sigma_{0,4}} = (b, \pm A)$.

Kapitel 3

Stabilisatoren

Es sei stets $S = \Sigma_{g,b}$ eine kompakte, orientierbare, zusammenhängende Fläche vom Geschlecht g mit b Randkomponenten $\partial_1, \dots, \partial_b$ und negativer Eulercharakteristik $\chi(S) = 2 - 2g - b$. Die Abbildungsklassengruppe $\text{Mod}(S)$ operiert auf dem Hosenkomplex $\mathcal{P}(S)$ durch $f \cdot \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} := \{f(\alpha_1), \dots, f(\alpha_n)\}$, vgl. 1.20. Wir wollen die Stabilisatoren unter dieser Aktion studieren.

Zunächst seien die Flächen $\Sigma_{0,3}, \Sigma_{0,4}, \Sigma_{1,1}, \Sigma_{1,2}, \Sigma_{2,0}$ ausgeschlossen. Diese Flächen werden wir in Abschnitt 3.4 separat untersuchen.

3.1 Stabilisatoren von Ecken

Sei $\mathcal{P} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ eine Hosenerlegung von S (mit $n = 3g - 3 + b$). Nach Voraussetzung gilt $S \notin \{\Sigma_{0,3}, \Sigma_{0,4}, \Sigma_{1,1}, \Sigma_{1,2}, \Sigma_{2,0}\}$, deshalb können wir die Kurven von \mathcal{P} so anordnen, daß $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ die Geschlecht-1-separierenden und $\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_s$ die 2-separierenden Kurven von \mathcal{P} sind, vgl. 1.5c). Zu jedem dieser α_i ($i = 1, \dots, s$) haben wir in 1.9 den linken Halbtwist σ_{α_i} definiert.

Definition 3.1:

$$\text{Stab}(\mathcal{P}) := \{f \in \text{Mod}(S) : f \cdot \mathcal{P} = \mathcal{P}\}$$

$$\text{Stab}_{pw}(\mathcal{P}) := \{f \in \text{Mod}(S) : f(\alpha_i) = \alpha_i \text{ für alle } i = 1, \dots, n\}$$

$$\text{Stab}_{pw}^*(\mathcal{P}) := \{f \in \text{Mod}(S) : f(\beta) = \beta \text{ für alle } \beta \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \partial_1, \dots, \partial_b\}\}$$

$$\text{Stab}_T(\mathcal{P}) := \langle \sigma_{\alpha_1}, \dots, \sigma_{\alpha_r}, \sigma_{\alpha_{r+1}}, \dots, \sigma_{\alpha_s}, t_{\alpha_{s+1}}, \dots, t_{\alpha_n} \rangle$$

$$\text{Stab}_T^*(\mathcal{P}) := \langle \sigma_{\alpha_1}, \dots, \sigma_{\alpha_r}, t_{\alpha_{r+1}}, \dots, t_{\alpha_s}, t_{\alpha_{s+1}}, \dots, t_{\alpha_n} \rangle$$

Es gilt $\text{Stab}_T^*(\mathcal{P}) \subseteq \text{Stab}_T(\mathcal{P}) \subseteq \text{Stab}_{pw}(\mathcal{P})$ und $\text{Stab}_T^*(\mathcal{P}) \subseteq \text{Stab}_{pw}^*(\mathcal{P}) \subseteq \text{Stab}_{pw}(\mathcal{P})$. Alle angegebenen Gruppen sind Normalteiler von $\text{Stab}(\mathcal{P})$. $\text{Stab}_T(\mathcal{P})$ und $\text{Stab}_T^*(\mathcal{P})$ sind freie abelsche Gruppen vom Rang n . Der Index von $\text{Stab}_T^*(\mathcal{P})$ in $\text{Stab}_T(\mathcal{P})$ ist 2^{s-r} , und es gilt $\text{Stab}_T(\mathcal{P})/\text{Stab}_T^*(\mathcal{P}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{s-r}$.

Proposition 3.2:

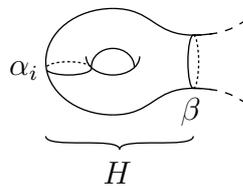
$$\text{Stab}_{pw}(\mathcal{P}) = \text{Stab}_T(\mathcal{P})$$

$$\text{Stab}_{pw}^*(\mathcal{P}) = \text{Stab}_T^*(\mathcal{P})$$

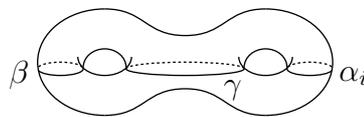
Beweis:

Die Inklusion „ \supseteq “ ist jeweils klar. Sei also $f \in \text{Stab}_{pw}(\mathcal{P})$. Wir nehmen zunächst an, daß es eine Kurve $\alpha_i \in \mathcal{P}$ gibt, die von f auf die entgegengesetzt orientierte Kurve abgebildet wird. Insbesondere vertauscht f die an α_i angrenzenden Hosen (sofern es zwei verschiedene Hosen sind). Wir unterscheiden folgende Fälle:

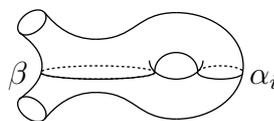
1. Fall: α_i grenzt an genau eine Hose H an. Dann gibt es eine Kurve β mit $\partial H = \alpha_i \cup \beta$. Wegen $S \neq \Sigma_{1,1}$ ist β eine Kurve aus \mathcal{P} . Daher ist $\sigma_\beta \in \text{Stab}_T^*(\mathcal{P})$ und $f \circ \sigma_\beta$ eine Abbildungsklasse, die die Orientierung von α_i erhält.
 \Rightarrow O.E. wird die Orientierung von α_i erhalten.



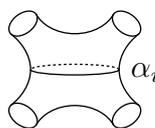
2. Fall: α_i grenzt an zwei verschiedene Hosen H_1, H_2 an, und es gibt zwei weitere Kurven $\beta, \gamma \in \mathcal{P}$, die an H_1 und H_2 angrenzen. Dann ist $S = \Sigma_{2,0}$, was wir ausgeschlossen haben, d.h. dieser Fall kommt nicht vor.



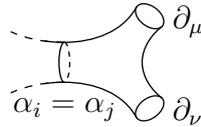
3. Fall: α_i grenzt an zwei verschiedene Hosen H_1, H_2 an, und es gibt genau eine weitere Kurve β , die an H_1 und H_2 angrenzt. Da H_1 und H_2 vertauscht werden, andererseits aber jedes $\alpha_j \in \mathcal{P}$ von f auf sich abgebildet wird, kann es außer β und α_i keine weitere Kurve in \mathcal{P} geben. Somit ist $S = \Sigma_{1,2}$. Auch diesen Fall haben wir ausgeschlossen.



4. Fall: α_i grenzt an zwei verschiedene Hosen H_1, H_2 an, und es gibt keine weitere Kurve, die an H_1 und H_2 angrenzt. Dann gibt es in \mathcal{P} keine weitere Kurve, und H_1, H_2 sind die einzigen Hosen der Hosenzerlegung \mathcal{P} . Es ist also $S = \Sigma_{0,4}$, was ebenfalls nicht zulässig ist.



Insgesamt dürfen wir annehmen, daß jede Kurve aus \mathcal{P} orientierungserhaltend auf sich abgebildet wird. Als nächstes zeigen wir, daß wir auch o.E. annehmen können, daß jede Randkomponente auf sich abgebildet wird. Für $f \in \text{Stab}_{pw}^*(\mathcal{P})$ ist das nach Voraussetzung gegeben. Ist $f \in \text{Stab}_{pw}(\mathcal{P})$, so seien $\partial_\mu, \partial_\nu \subseteq \partial S$ verschiedene Randkomponenten mit $f(\partial_\mu) = \partial_\nu$ und H_1, H_2 diejenigen Hosen mit $\partial_\mu \subseteq \partial H_1$ und $\partial_\nu \subseteq \partial H_2$. Dann gibt es (wegen $S \neq \Sigma_{0,3}$) Kurven $\alpha_i, \alpha_j \in \mathcal{P}$ mit $\alpha_i \subseteq \partial H_1$ und $\alpha_j \subseteq \partial H_2$ und $f(\alpha_i) = \alpha_j$. Somit ist $\alpha_i = \alpha_j$ und, da α_i von f orientierungserhaltend auf sich abgebildet wird, auch $H_1 = H_2$.
 $\Rightarrow \sigma_{\alpha_i} \in \text{Stab}_T(\mathcal{P})$ und $f \circ \sigma_{\alpha_i}$ bildet $\partial_\mu, \partial_\nu$ jeweils auf sich ab.



Da f alle Kurven aus \mathcal{P} und alle Kurven aus ∂S orientierungserhaltend auf sich abbildet, finden wir einen Vertreter $F : S \rightarrow S$, der all diese Kurven *punktweise* festläßt. Dieses F kann zerlegt werden in $F = \prod_{H \text{ Hose von } \mathcal{P}} F|_H$, wobei

$$F|_H(x) = \begin{cases} F(x) & , x \in H \\ x & , x \notin H \end{cases} .$$

Nach 1.14 ist $\text{Mod}^1(\Sigma_{0,3})$ eine freie abelsche Gruppe vom Rang 3, die von den Dehntwists um die Randkomponenten von $\Sigma_{0,3}$ erzeugt wird. Somit ist jedes $F|_H$ isotop zu einer Verkettung von Dehntwists um die Kurven von ∂H (modulo Isotopie, welche auf $S \setminus H$ die Identität ist), d.h. f ist eine Verkettung von Dehntwists um die Kurven von $\mathcal{P} \cup \partial S$. Da die Dehntwists um die Randkurven $\partial_1, \dots, \partial_b$ trivial sind, ist f eine Verkettung von Dehntwists um die Kurven von \mathcal{P} und somit ein Element von $\text{Stab}_T^*(\mathcal{P})$. \square

Folgerung 3.3:

$$\text{Stab}_{pw}(\mathcal{P}) / \text{Stab}_{pw}^*(\mathcal{P}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{s-r}$$

Zu jeder Hosengerlegung \mathcal{P} von S sei $\Gamma(\mathcal{P})$ der assoziierte Graph, vgl. Definition 1.21. Es gibt einen kanonischen Gruppenhomomorphismus $\hat{\gamma}_{\mathcal{P}} : \text{Stab}(\mathcal{P}) \rightarrow \text{Aut}(\Gamma(\mathcal{P}))$, der jeder Abbildungsklasse $f \in \text{Stab}(\mathcal{P})$ den von ihr induzierten Graphenautomorphismus zuordnet.

Bemerkung 3.4:

- a) $\hat{\gamma}_{\mathcal{P}}$ ist surjektiv.
- b) $\text{Kern}(\hat{\gamma}_{\mathcal{P}}) = \langle t_{\alpha_1}, \dots, t_{\alpha_n} \rangle$

Beweis:

- a) Sei $\varphi : \Gamma(\mathcal{P}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{P})$ ein Graphenautomorphismus. Wir definieren einen Homöomorphismus \tilde{F} auf der Menge $\alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_n \cup \partial S$, indem wir jede Kurve

$\beta \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \partial_1, \dots, \partial_b\}$ homöomorph auf die Bildkurve $\varphi(\beta)$ abbilden und dabei die Orientierung beachten. \tilde{F} kann ins Innere jeder Hose fortgesetzt werden zu einem Homöomorphismus $F : S \rightarrow S$, da für jede Hose H die an H angrenzenden Kurven auf die an $\varphi(H)$ angrenzenden Kurven abgebildet werden. Für die zugehörige Abbildungsklasse $f = [F]$ gilt $\hat{\gamma}_{\mathcal{P}}(f) = \varphi$.

- b) Offensichtlich ist $\langle t_{\alpha_1}, \dots, t_{\alpha_n} \rangle \subseteq \text{Kern}(\hat{\gamma}_{\mathcal{P}})$. Sei umgekehrt $f \in \text{Kern}(\hat{\gamma}_{\mathcal{P}})$. Wegen $\text{Kern}(\hat{\gamma}_{\mathcal{P}}) \subseteq \text{Stab}_{pw}^*(\mathcal{P}) \stackrel{3.2}{=} \text{Stab}_T^*(\mathcal{P})$ gibt es $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}$ mit $f = \sigma_{\alpha_1}^{m_1} \circ \dots \circ \sigma_{\alpha_r}^{m_r} \circ t_{\alpha_{r+1}}^{m_{r+1}} \circ \dots \circ t_{\alpha_n}^{m_n}$. m_1, \dots, m_r sind gerade, denn sonst würde eine der Schleifen in $\Gamma(\mathcal{P})$ invertiert im Widerspruch zu $\hat{\gamma}_{\mathcal{P}}(f) = \text{id}$.
- $\Rightarrow f = t_{\alpha_1}^{m_1/2} \circ \dots \circ t_{\alpha_r}^{m_r/2} \circ t_{\alpha_{r+1}}^{m_{r+1}} \circ \dots \circ t_{\alpha_n}^{m_n} \in \langle t_{\alpha_1}, \dots, t_{\alpha_n} \rangle$ □

Es gibt (wie zu jedem Graphen) einen Homomorphismus $p_{\mathcal{P}} : \text{Aut}(\Gamma(\mathcal{P})) \rightarrow S_{3g-3+2b}$, der jedem Automorphismus die von ihm induzierte Permutation der Kanten¹ zuordnet. Setze $\gamma_{\mathcal{P}} := p_{\mathcal{P}} \circ \hat{\gamma}_{\mathcal{P}} : \text{Stab}(\mathcal{P}) \rightarrow S_{3g-3+2b}$.

Bemerkung 3.5:

Es gilt $\text{Kern}(\gamma_{\mathcal{P}}) = \text{Stab}_{pw}^*(\mathcal{P}) = \text{Stab}_T^*(\mathcal{P})$. Für $T_{\mathcal{P}} := \text{Bild}(\gamma_{\mathcal{P}})$ haben wir also die kurze exakte Sequenz

$$1 \longrightarrow \text{Stab}_T^*(\mathcal{P}) \longrightarrow \text{Stab}(\mathcal{P}) \xrightarrow{\gamma_{\mathcal{P}}} T_{\mathcal{P}} \longrightarrow 1.$$

Beweis:

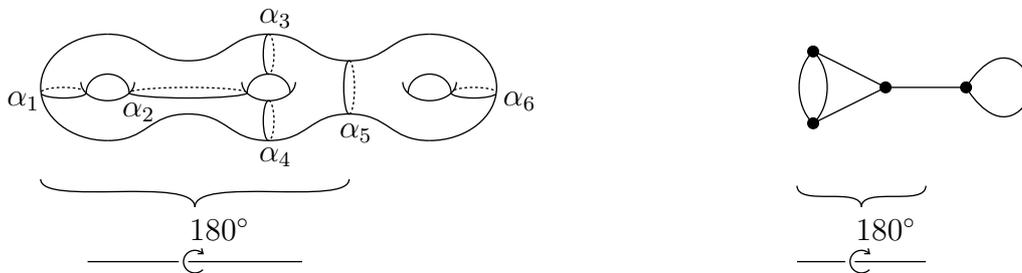
$$\begin{aligned} f \in \text{Kern}(\gamma_{\mathcal{P}}) &\Leftrightarrow p_{\mathcal{P}} \circ \hat{\gamma}_{\mathcal{P}}(f) = \text{id} \\ &\Leftrightarrow \forall k \in K(\Gamma(\mathcal{P})) : \hat{\gamma}_{\mathcal{P}}(f)(k) = k \text{ oder } \hat{\gamma}_{\mathcal{P}}(f)(k) = \bar{k} \\ &\Leftrightarrow \forall \alpha_i \in \mathcal{P} : f(\alpha_i) = \alpha_i \text{ und } \forall \partial_i : f(\partial_i) = \partial_i \\ &\Leftrightarrow f \in \text{Stab}_{pw}^*(\mathcal{P}) \end{aligned}$$

□

Obige kurze exakte Sequenz spaltet im allgemeinen nicht, wie wir an folgendem Beispiel sehen werden.

Beispiel 3.6:

Auf der Fläche $S = \Sigma_{3,0}$ betrachten wir folgende Hosenerlegung \mathcal{P} :



¹ Alternativ könnte man auch die Permutation der Ecken betrachten.

Annahme: Es gibt einen Schnitt $s_{\mathcal{P}} : T_{\mathcal{P}} \rightarrow \text{Stab}(\mathcal{P})$.

Seien $\pi \in \text{Aut}(\Gamma(\mathcal{P}))$ der Automorphismus, der den oben skizzierten Teil von $\Gamma(\mathcal{P})$ um 180° dreht, und $f := s_{\mathcal{P}}(\pi)$. Sei $\sigma \in \text{Stab}(\mathcal{P})$ der Halbtwist um α_5 , der die ganze linke Seite von S um 180° dreht. Es gilt $\gamma_{\mathcal{P}}(f) = \gamma_{\mathcal{P}}(\sigma) = \pi$, also $f \circ \sigma^{-1} \in \text{Kern}(\gamma_{\mathcal{P}}) \stackrel{3.5}{=} \text{Stab}_T^*(\mathcal{P})$.

\Rightarrow Es gibt $m_1, \dots, m_6 \in \mathbb{Z}$ mit $f = t_{\alpha_1}^{m_1} \circ \dots \circ t_{\alpha_6}^{m_6} \circ \sigma$.

$\Rightarrow \text{id} = s_{\mathcal{P}}(\text{id}) = s_{\mathcal{P}}(\pi^2) = (s_{\mathcal{P}}(\pi))^2 = f^2 = t_{\alpha_1}^{m_1} \circ \dots \circ t_{\alpha_6}^{m_6} \circ \sigma \circ t_{\alpha_1}^{m_1} \circ \dots \circ t_{\alpha_6}^{m_6} \circ \sigma$

Es gilt $t_{\alpha_3} \circ \sigma = \sigma \circ t_{\alpha_4}$ und $t_{\alpha_4} \circ \sigma = \sigma \circ t_{\alpha_3}$. Für alle anderen i gilt $t_{\alpha_i} \circ \sigma = \sigma \circ t_{\alpha_i}$. Außerdem ist $\sigma^2 = t_{\alpha_5}$. Daher erhalten wir:

$$\begin{aligned} \text{id} &= f^2 = t_{\alpha_1}^{m_1} \circ \dots \circ t_{\alpha_6}^{m_6} \circ t_{\alpha_1}^{m_1} \circ t_{\alpha_2}^{m_2} \circ t_{\alpha_4}^{m_3} \circ t_{\alpha_3}^{m_4} \circ t_{\alpha_5}^{m_5} \circ t_{\alpha_6}^{m_6} \circ \sigma^2 \\ &= t_{\alpha_1}^{2m_1} \circ t_{\alpha_2}^{2m_2} \circ t_{\alpha_3}^{m_3+m_4} \circ t_{\alpha_4}^{m_3+m_4} \circ t_{\alpha_5}^{2m_5+1} \circ t_{\alpha_6}^{2m_6} \end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch, da $2m_5 + 1$ niemals 0 werden kann. Somit spaltet die zu \mathcal{P} gehörige kurze exakte Sequenz nicht.

3.2 Stabilisatoren von Kanten

In diesem Abschnitt sei $\mathcal{K} = (\mathcal{P} - \mathcal{Q})$ eine gerichtete Kante im Hosenkomplex $\mathcal{P}(S)$ mit $\mathcal{P} = \{\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ und $\mathcal{Q} = \{\beta, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$. Wir unterscheiden zwischen dem Stabilisator der gerichteten Kante und dem Stabilisator der geometrischen Kante.

Definition 3.7:

- a) $\text{Stab}_{or}^+(\mathcal{K}) := \{f \in \text{Mod}(S) : f \cdot \mathcal{K} = \mathcal{K}\} = \text{Stab}(\mathcal{P}) \cap \text{Stab}(\mathcal{Q})$
 $\text{Stab}_{or}^-(\mathcal{K}) := \{f \in \text{Mod}(S) : f \cdot \mathcal{K} = \overline{\mathcal{K}}\}$
 $\text{Stab}_{nor}(\mathcal{K}) := \{f \in \text{Mod}(S) : f \cdot \{\mathcal{K}, \overline{\mathcal{K}}\} = \{\mathcal{K}, \overline{\mathcal{K}}\}\} = \text{Stab}_{or}^+(\mathcal{K}) \cup \text{Stab}_{or}^-(\mathcal{K})$
- b) $F_{\alpha, \beta}^+ := \{f \in \text{Mod}(S) \mid f(\alpha) = \alpha \text{ und } f(\beta) = \beta\}$
 $F_{\alpha, \beta}^- := \{f \in \text{Mod}(S) \mid f(\alpha) = \beta \text{ und } f(\beta) = \alpha\}$

Bemerkung 3.8:

$$\begin{aligned} \text{Stab}_{or}^+(\mathcal{K}) &= F_{\alpha, \beta}^+ \cap \text{Stab}(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}) \\ \text{Stab}_{or}^-(\mathcal{K}) &= F_{\alpha, \beta}^- \cap \text{Stab}(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}) \\ \text{Stab}_{nor}(\mathcal{K}) &= \text{Stab}(\{\alpha, \beta\}) \cap \text{Stab}(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}) \end{aligned}$$

Beweis:

Die Inklusion „ \supseteq “ ist jeweils klar.

- Sei $f \in \text{Stab}_{or}^+(\mathcal{K})$. Wäre $f(\alpha) \neq \alpha$, so wäre $f(\alpha) \in \{\alpha_2, \dots, \alpha_n\} \subseteq \mathcal{Q}$ und somit $\alpha = f^{-1}(f(\alpha)) \in f^{-1}(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}$, ein Widerspruch. Genauso zeigt man $f(\beta) = \beta$. Wegen $f(\alpha) = \alpha$ und $f(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$ gilt auch $f(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}) = \{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}$.

- Sei $f \in \text{Stab}_{or}^-(\mathcal{K})$. Wäre $\beta \neq f(\alpha)$, so wäre $\beta = f(\alpha_i)$ für ein $i \in \{2, \dots, n\}$ und somit $\beta = f(\alpha_i) \in f(\mathcal{Q}) = \mathcal{P}$, ein Widerspruch. Genauso zeigt man $f(\beta) = \alpha$. Wegen $f(\alpha) = \beta$ und $f(\mathcal{P}) = \mathcal{Q}$ gilt auch $f(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}) = \{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}$.
- $\text{Stab}_{nor}(\mathcal{K}) = \text{Stab}_{or}^+(\mathcal{K}) \cup \text{Stab}_{or}^-(\mathcal{K}) = (F_{\alpha,\beta}^+ \cup F_{\alpha,\beta}^-) \cap \text{Stab}(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\})$
 $= \text{Stab}(\{\alpha, \beta\}) \cap \text{Stab}(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\})$ □

Um die Stabilisatoren von \mathcal{K} besser verstehen zu können, untersuchen wir nun die Gruppe $\text{Stab}(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\})$. Dazu gehen wir wie in Abschnitt 3.1 vor, d.h. wir definieren punktweise Stabilisatoren und Twist-Stabilisatoren und arrangieren alle Gruppen in einer kurzen exakten Sequenz.

Definition 3.9:

- a) $\text{Stab}_{pw}(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}) := \{f \in \text{Mod}(S) : f(\alpha_i) = \alpha_i \text{ für alle } i = 2, \dots, n\}$
 $\text{Stab}_{pw}^*(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}) := \{f \in \text{Mod}(S) : f(\gamma) = \gamma \text{ für alle } \gamma \in \{\alpha_2, \dots, \alpha_n, \partial_1, \dots, \partial_b\}\}$
- b) Ist $\alpha_i \in \{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ eine Geschlecht-1-separierende Kurve, so setze $\tau_i := \varrho_i := \sigma_{\alpha_i}$. Ist α_i eine 2-separierende Kurve, so setze $\tau_i := \sigma_{\alpha_i}$ und $\varrho_i := t_{\alpha_i}$. Andernfalls sei $\tau_i := \varrho_i := t_{\alpha_i}$. Damit seien

$$\begin{aligned} \text{Stab}_T(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}) &:= \langle \tau_2, \dots, \tau_n \rangle, \\ \text{Stab}_T^*(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}) &:= \langle \varrho_2, \dots, \varrho_n \rangle. \end{aligned}$$

Beides sind freie abelsche Gruppen vom Rang $n - 1$. Ist k die Anzahl der 2-separierenden Kurven in $\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}$, so ist 2^k der Index von $\text{Stab}_T^*(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\})$ in $\text{Stab}_T(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\})$, und es gilt $\text{Stab}_T(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}) / \text{Stab}_T^*(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k$.

Proposition 3.10:

$$\begin{aligned} \text{Stab}_{pw}(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}) \cap F_{\alpha,\beta}^+ &= \text{Stab}_T(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}) \\ \text{Stab}_{pw}^*(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}) \cap F_{\alpha,\beta}^+ &= \text{Stab}_T^*(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}) \end{aligned}$$

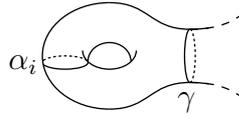
Beweis:

Wir imitieren den Beweis von Proposition 3.2. Die Inklusion „ \supseteq “ ist jeweils klar. Für die umgekehrte Inklusion sei $f \in \text{Stab}_{pw}(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}) \cap F_{\alpha,\beta}^+$. Sei zunächst α_i eine Kurve, die von f auf die entgegengesetzt orientierte Kurve abgebildet wird.

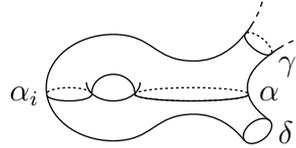
1. Fall: α_i grenzt (in $S \setminus (\alpha_2 \cup \dots \cup \alpha_n)$) an genau eine Teilfläche H an, und H ist eine Hose.

$$\Rightarrow \text{Es gibt eine Kurve } \gamma \in \{\alpha_2, \dots, \alpha_n\} \text{ mit } \partial H = \alpha_i \cup \gamma.$$

$$\Rightarrow \sigma_\gamma \in \text{Stab}_T^*(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}) \text{ und } f \circ \sigma_\gamma \text{ erhält die Orientierung von } \alpha_i.$$



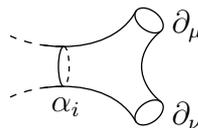
2. Fall: α_i grenzt an genau eine Teilfläche H an, und H ist keine Hose.
 Dann gilt $H = \Sigma_{0,4}$, und zwei der Randkomponenten von H sind durch α_i gegeben. Die anderen beiden Randkomponenten γ, δ von H sind wegen $S \neq \Sigma_{2,0}$ verschieden und wegen $S \neq \Sigma_{1,2}$ nicht beide in ∂S enthalten. Sei o.E. $\gamma \not\subseteq \partial S$. $H \cup \alpha_i \cup \gamma \cup \delta$ ist homöomorph zu $\Sigma_{1,2}$, und $\alpha - \beta$ ist in dieser Teilfläche ein A -Move. Deshalb ist α oder β , o.E. α , nichtseparierend, und $\Sigma_{1,2}$ ist die Vereinigung zweier Hosen H_1, H_2 mit $\partial H_1 = \alpha_i \cup \alpha \cup \gamma$ und $\partial H_2 = \alpha_i \cup \alpha \cup \delta$. Wegen $f(\alpha_i) = \alpha_i, f(\alpha) = \alpha, f(\gamma) = \gamma$ gilt auch $f(H_1) = H_1$ und $f(H_2) = H_2$. Daher wird α_i von f orientierungserhaltend auf sich abgebildet im Gegensatz zur Annahme. Dieser Fall kommt also nicht vor.



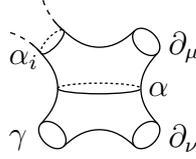
3. Fall: α_j grenzt an zwei verschiedene Teilflächen H_1, H_2 an. H_1 und H_2 sind (da sie von f vertauscht werden) homöomorph und somit beides Hosen. Wir verfahren wie in 3.2 und können auch diesen Fall ausschließen.

Insgesamt dürfen wir also annehmen, daß jedes α_i orientierungserhaltend auf sich abgebildet wird. Als nächstes zeigen wir, daß wir auch o.E. annehmen können, daß jede Randkomponente auf sich abgebildet wird. Für $f \in \text{Stab}_{pw}^*(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\})$ ist das nach Voraussetzung gegeben. Ist $f \in \text{Stab}_{pw}(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\})$, so seien $\partial_\mu, \partial_\nu \subseteq \partial S$ verschiedene Randkomponenten mit $f(\partial_\mu) = \partial_\nu$ und H_1, H_2 diejenigen Teilflächen von $S \setminus (\alpha_2 \cup \dots \cup \alpha_n)$ mit $\partial_\mu \subseteq \partial H_1$ und $\partial_\nu \subseteq \partial H_2$. Dann gibt es (wegen $S \neq \Sigma_{0,3}$) Kurven $\alpha_i, \alpha_j \in \{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ mit $\alpha_i \subseteq \partial H_1$ und $\alpha_j \subseteq \partial H_2$ und $f(\alpha_i) = \alpha_j$. Somit ist $\alpha_i = \alpha_j$ und, da α_i von f orientierungserhaltend auf sich abgebildet wird, auch $H_1 = H_2$.

1. Fall: H_1 ist eine Hose.
 $\Rightarrow \sigma_{\alpha_i} \in \text{Stab}_T(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\})$ und $f \circ \sigma_{\alpha_i}$ bildet $\partial_\mu, \partial_\nu$ jeweils auf sich ab.



2. Fall: H_1 ist homöomorph zu $\Sigma_{0,4}$.
 Es gibt ein $\gamma \in \{\alpha_2, \dots, \alpha_n, \partial_1, \dots, \partial_b\} \setminus \{\alpha_i, \partial_\mu, \partial_\nu\}$ mit $\partial H_1 = \partial_\mu \cup \partial_\nu \cup \gamma \cup \alpha_i$. Da α und β die vier Randkomponenten von H_1 unterschiedlich gruppieren, liegen o.E. ∂_μ und α_i in einer Zusammenhangskomponente von $H_1 \setminus \alpha$.



Wegen $f(\alpha_i) = \alpha_i$ und $f(\alpha) = \alpha$ gilt auch $f(\partial_\mu) = \partial_\mu \neq \partial_\nu$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Dieser Fall kommt also nicht vor.

Da f alle Kurven aus $\{\alpha_2, \dots, \alpha_n, \partial_1, \dots, \partial_b\}$ orientierungserhaltend auf sich abbildet, finden wir einen Vertreter $F : S \rightarrow S$, der all diese Kurven *punktweise* festläßt. Wie in 3.2 kann F zerlegt werden in

$$F = F|_\Sigma \circ \prod_{H \text{ Hose von } \mathcal{P} \setminus \{\alpha\}} F|_H,$$

wobei Σ diejenige Teilfläche in $S \setminus (\alpha_2 \cup \dots \cup \alpha_n)$ ist, die keine Hose ist. Nach 1.14 ist jedes $F|_H$ eine Verkettung von Dehntwists um die Kurven von ∂H , also $[\prod_{H \text{ Hose von } \mathcal{P} \setminus \{\alpha\}} F|_H] \in$

$\text{Stab}_T^*(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\})$.

- Seien $\mathcal{P} - \mathcal{Q}$ ein S -Move in $\Sigma = \Sigma_{1,1}$ und $\alpha_i = \partial\Sigma$. Schreibe $\alpha = [1, 0]$, $\beta = [0, 1]$ in $\Sigma_{1,1}$. Es gibt genau zwei $\hat{f} \in \text{Mod}(\Sigma_{1,1}) \cong \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $\hat{f}([1, 0]) = [1, 0]$ und $\hat{f}([0, 1]) = [0, 1]$, nämlich $\hat{f} \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$. Somit gibt es ein $m \in \mathbb{Z}$ mit $[F|_\Sigma] = \sigma_{\alpha_i}^m \in \text{Stab}_T^*(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\})$, vgl. 2.8.
- Sei $\mathcal{P} - \mathcal{Q}$ ein A -Move in $\Sigma = \Sigma_{0,4}$. Schreibe $\alpha = [1, 0]$, $\beta = [0, 1]$ in $\Sigma_{0,4}$. Es gibt genau ein $\hat{f} \in \text{Mod}(\Sigma_{0,4}) \cong V_4 \rtimes \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ mit $\hat{f}([1, 0]) = [1, 0]$ und $\hat{f}([0, 1]) = [0, 1]$, nämlich $\hat{f} = (0, \pm\mathcal{E})$. Somit ist $[F|_\Sigma] \in \text{Stab}_T^*(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\})$.

In beiden Fällen ist $f = [F|_\Sigma] \circ [\prod_{H \text{ Hose von } \mathcal{P} \setminus \{\alpha\}} F|_H] \in \text{Stab}_T^*(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\})$. \square

Proposition 3.11:

- a) Sei $\mathcal{P} - \mathcal{Q}$ ein S -Move. Dann ist $\text{Stab}_{pw}^*(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}) \cap F_{\alpha,\beta}^- \neq \emptyset$, und für jedes $f_{\alpha,\beta} \in \text{Stab}_{pw}^*(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}) \cap F_{\alpha,\beta}^-$ gilt:

$$\begin{aligned} \text{Stab}_{pw}(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}) \cap F_{\alpha,\beta}^- &= f_{\alpha,\beta} \circ \text{Stab}_T(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}) \\ \text{Stab}_{pw}^*(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}) \cap F_{\alpha,\beta}^- &= f_{\alpha,\beta} \circ \text{Stab}_T^*(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}) \end{aligned}$$

- b) Seien $\mathcal{P} - \mathcal{Q}$ ein A -Move und α, β nichtseparierend. Es gebe eine Teilfläche $\Sigma_{1,2} \subseteq S$ und eine Kurve $\alpha_i \in \{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ mit $\alpha_i \cup \alpha \cup \beta \subseteq \Sigma_{1,2}$. Dann ist $\text{Stab}_{pw}^*(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}) \cap F_{\alpha,\beta}^- \neq \emptyset$, und für jedes $f_{\alpha,\beta} \in \text{Stab}_{pw}^*(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}) \cap F_{\alpha,\beta}^-$ gilt:

$$\begin{aligned} \text{Stab}_{pw}(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}) \cap F_{\alpha,\beta}^- &= f_{\alpha,\beta} \circ \text{Stab}_T(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}) \\ \text{Stab}_{pw}^*(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}) \cap F_{\alpha,\beta}^- &= f_{\alpha,\beta} \circ \text{Stab}_T^*(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}) \end{aligned}$$

c) Seien $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ ein A -Move und $\Sigma_{0,4} \subseteq S$ diejenige Zusammenhangskomponente von $S \setminus (\alpha_2 \cup \dots \cup \alpha_n)$, die α und β enthält. Weiter sei eine der folgenden Situationen gegeben:

- Genau zwei der Randkomponenten von $\Sigma_{0,4}$ sind in ∂S enthalten, und diese werden in $\Sigma_{0,4}$ weder von α noch von β zusammengruppiert.
- Genau drei der Randkomponenten von $\Sigma_{0,4}$ sind in ∂S enthalten.

Dann ist $\text{Stab}_{pw}(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}) \cap F_{\alpha,\beta}^- \neq \emptyset$, und für jedes $f_{\alpha,\beta} \in \text{Stab}_{pw}(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}) \cap F_{\alpha,\beta}^-$ gilt:

$$\begin{aligned} \text{Stab}_{pw}(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}) \cap F_{\alpha,\beta}^- &= f_{\alpha,\beta} \circ \text{Stab}_T(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}) \\ \text{Stab}_{pw}^*(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}) \cap F_{\alpha,\beta}^- &= \emptyset \end{aligned}$$

d) In allen anderen Fällen gilt:

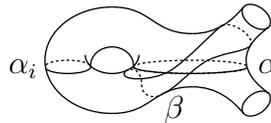
$$\begin{aligned} \text{Stab}_{pw}(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}) \cap F_{\alpha,\beta}^- &= \emptyset \\ \text{Stab}_{pw}^*(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}) \cap F_{\alpha,\beta}^- &= \emptyset \end{aligned}$$

Beweis:

a) Sei $\Sigma_{1,1} \subseteq S$ diejenige Zusammenhangskomponente von $S \setminus (\alpha_2 \cup \dots \cup \alpha_n)$, die α und β enthält. Schreibe $\alpha = [1, 0]$, $\beta = [0, 1]$ in $\Sigma_{1,1}$. Es gibt ein $\hat{f} \in \text{Mod}(\Sigma_{1,1}) \cong \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $\hat{f}([1, 0]) = [0, 1]$ und $\hat{f}([0, 1]) = [1, 0]$, nämlich $\hat{f} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, und somit nach 2.8 ein $f_{\alpha,\beta} \in \text{Mod}(S)$ mit $f_{\alpha,\beta}|_{S \setminus \Sigma_{1,1}} = \text{id}$, $f_{\alpha,\beta}(\alpha) = \beta$ und $f_{\alpha,\beta}(\beta) = \alpha$.
 $\Rightarrow f_{\alpha,\beta} \in \text{Stab}_{pw}^*(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}) \cap F_{\alpha,\beta}^-$

Sei nun $f_{\alpha,\beta} \in \text{Stab}_{pw}^*(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}) \cap F_{\alpha,\beta}^-$ gegeben. Offensichtlich gilt $f_{\alpha,\beta} \circ \text{Stab}_T(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}) \subseteq \text{Stab}_{pw}(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}) \cap F_{\alpha,\beta}^-$. Für die umgekehrte Inklusion sei $f \in \text{Stab}_{pw}(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}) \cap F_{\alpha,\beta}^-$. Dann ist $f_{\alpha,\beta}^{-1} \circ f \in \text{Stab}_{pw}(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}) \cap F_{\alpha,\beta}^+$ ^{3.10} $\stackrel{3.10}{=} \text{Stab}_T(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\})$, also $f \in f_{\alpha,\beta} \circ \text{Stab}_T(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\})$. Die zweite Gleichung folgt analog.

b) $\Sigma_{1,2} \setminus \alpha_i$ ist homöomorph zu $\Sigma_{0,4}$. Da α, β nichtseparierend sind und $\alpha - \beta$ ein Move ist, kann $\Sigma_{0,4}$ so parametrisiert werden, daß $\alpha = [1, 0]$, $\beta = [1, 1]$ gilt und daß die zu α_i gehörigen Randkomponenten von $\Sigma_{0,4}$ durch die Vektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in V_4$ gegeben sind.

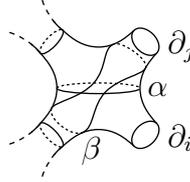


Es gibt ein $\hat{f} \in \text{Mod}(\Sigma_{0,4}) \cong V_4 \rtimes \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ mit $\hat{f}([1, 0]) = [1, 1]$, $\hat{f}([1, 1]) = [1, 0]$, $\hat{f}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\hat{f}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, nämlich $\hat{f} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right)$, und somit ein

$f_{\alpha,\beta} \in \text{Mod}(S)$ mit $f_{\alpha,\beta}|_{S \setminus \Sigma_{1,2}} = \text{id}$, $f_{\alpha,\beta}(\alpha) = \beta$, $f_{\alpha,\beta}(\beta) = \alpha$ und $f_{\alpha,\beta}(\alpha_i) = \alpha_i$.
Es ist $f_{\alpha,\beta} \in \text{Stab}_{pw}^*(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}) \cap F_{\alpha,\beta}^-$.

Die Gültigkeit der beiden Gleichungen zeigt man wie in a).

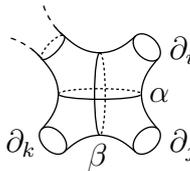
- c) • Zunächst gebe es genau zwei Randkomponenten $\partial_i, \partial_j \subseteq S$ mit $\partial_i, \partial_j \subseteq \partial\Sigma_{0,4}$. Da ∂_i, ∂_j nach Voraussetzung weder von α noch von β zusammengruppiert werden, kann $\Sigma_{0,4}$ so parametrisiert werden, daß $\alpha = [1, 0]$, $\beta = [1, 1]$ gilt und daß ∂_i, ∂_j durch die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in V_4$ gegeben sind.



Es gibt ein $\hat{f} \in \text{Mod}(\Sigma_{0,4}) \cong V_4 \rtimes \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ mit $\hat{f}([1, 0]) = [1, 1]$, $\hat{f}([1, 1]) = [1, 0]$, $\hat{f}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\hat{f}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, nämlich $\hat{f} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right)$, und somit ein $f_{\alpha,\beta} \in \text{Mod}(S)$ mit $f_{\alpha,\beta}|_{S \setminus \Sigma_{0,4}} = \text{id}$, $f_{\alpha,\beta}(\alpha) = \beta$ und $f_{\alpha,\beta}(\beta) = \alpha$. Wegen $\hat{f}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\hat{f}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist $f_{\alpha,\beta}(\partial_i) = \partial_j$ und $f_{\alpha,\beta}(\partial_j) = \partial_i$.
 $\Rightarrow f_{\alpha,\beta} \in \text{Stab}_{pw}(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}) \cap F_{\alpha,\beta}^-$, aber $f_{\alpha,\beta} \notin \text{Stab}_{pw}^*(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\})$.

Die Gleichheit $\text{Stab}_{pw}(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}) \cap F_{\alpha,\beta}^- = f_{\alpha,\beta} \circ \text{Stab}_T(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\})$ zeigt man wie in a). Wir nehmen an, daß es ein $f \in \text{Stab}_{pw}^*(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}) \cap F_{\alpha,\beta}^-$ gibt. Die Einschränkung $g := f|_{\Sigma_{0,4}}$ von f auf $\Sigma_{0,4}$ ist ein Element von $\text{Mod}(\Sigma_{0,4})$, schreibe also $g = \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right)$ für geeignete $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in V_4$, $\pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$. Wegen $f \in F_{\alpha,\beta}^-$ gilt $g([1, 0]) = [1, 1]$ und $g([1, 1]) = [1, 0]$, also $g = \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right)$. Wegen $f \in \text{Stab}_{pw}^*(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\})$ gilt zusätzlich $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = g\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = g\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 \\ y \end{pmatrix}$, ein Widerspruch.
 $\Rightarrow \text{Stab}_{pw}^*(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}) \cap F_{\alpha,\beta}^- = \emptyset$

- Seien nun $\partial_i, \partial_j, \partial_k \subseteq \partial S$ drei verschiedene, in $\partial\Sigma_{0,4}$ enthaltene Randkomponenten von S . Durch Umbenennung dürfen wir annehmen, daß ∂_j, ∂_k von α und ∂_i, ∂_j von β zusammengruppiert werden. $\Sigma_{0,4}$ kann daher so parametrisiert werden, daß $\alpha = [1, 0]$, $\beta = [0, 1]$ gilt und $\partial_i, \partial_j, \partial_k$ durch die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in V_4$ gegeben sind.



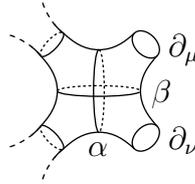
Es gibt ein $\hat{f} \in \text{Mod}(\Sigma_{0,4}) \cong V_4 \rtimes \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ mit $\hat{f}([1, 0]) = [0, 1]$, $\hat{f}([0, 1]) = [1, 0]$ und $\hat{f}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, nämlich $\hat{f} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$, und somit ein $f_{\alpha,\beta} \in \text{Mod}(S)$ mit $f_{\alpha,\beta}|_{S \setminus \Sigma_{0,4}} = \text{id}$, $f_{\alpha,\beta}(\alpha) = \beta$ und $f_{\alpha,\beta}(\beta) = \alpha$. Wegen $\hat{f}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\hat{f}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\hat{f}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist $f_{\alpha,\beta}(\partial_i) = \partial_k$, $f_{\alpha,\beta}(\partial_j) = \partial_j$, $f_{\alpha,\beta}(\partial_k) = \partial_i$.
 $\Rightarrow f_{\alpha,\beta} \in \text{Stab}_{pw}(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}) \cap F_{\alpha,\beta}^-$, aber $f_{\alpha,\beta} \notin \text{Stab}_{pw}^*(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\})$.

Die Gültigkeit der beiden Gleichungen zeigt man genau wie oben.

d) Annahme: Es gibt ein $f \in \text{Stab}_{pw}(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}) \cap F_{\alpha,\beta}^-$.

$\mathcal{P} - \mathcal{Q}$ ist ein A -Move in einer Teilfläche $\Sigma_{0,4} \subseteq S$. Sei d die Anzahl der Randkomponenten von $\Sigma_{0,4}$, die in ∂S enthalten sind. Wegen $S \neq \Sigma_{0,4}$ ist $d \neq 4$. Außerdem ist $d \neq 3$, denn sonst befänden wir uns in der Situation von c).

- Sei $d = 2$. Die beiden in ∂S enthaltenen Randkomponenten von $\Sigma_{0,4}$ werden o.E. von α zusammengruppiert, da wir uns sonst in der Situation von c) befänden.



Da α 2-separierend und $f(\alpha) = \beta$ ist, ist auch β 2-separierend, ein Widerspruch.

- Sei $d \in \{0, 1\}$. Die Randkomponenten von $\Sigma_{0,4}$ sind paarweise verschieden, denn sonst wären wir in der Situation von b). Jede Randkomponente von $\Sigma_{0,4}$ wird von f auf sich abgebildet. Das kann jedoch nicht sein, da $f(\alpha) = \beta$ ist und f somit die Ränder umgruppiert. \square

Bemerkung 3.12:

\mathcal{K} wird unter der Aktion von $\text{Mod}(S)$ auf $\mathcal{P}(S)$ genau dann invertiert, wenn $\text{Stab}_{or}^-(\mathcal{K}) = F_{\alpha,\beta}^- \cap \text{Stab}(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}) \neq \emptyset$ ist. Die Menge $F_{\alpha,\beta}^- \cap \text{Stab}_{pw}(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\})$ hingegen liefert kein Indiz für die Invertierbarkeit von \mathcal{K} : Ist \mathcal{K} die in Abbildung 3.1 skizzierte Kante, so gilt $F_{\alpha,\beta}^- \cap \text{Stab}_{pw}(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}) = \emptyset$, aber \mathcal{K} wird dennoch invertiert, zum Beispiel von einer Drehung der Fläche um 90° .

Die Stabilisatorgruppen von \mathcal{K} sind eng mit der Invertierbarkeit von \mathcal{K} verbunden: Es gilt genau dann $\text{Stab}_{or}^+(\mathcal{K}) \subsetneq \text{Stab}_{nor}(\mathcal{K})$, wenn \mathcal{K} unter der Aktion von $\text{Mod}(S)$ invertiert wird, also genau dann, wenn \mathcal{K} und $\overline{\mathcal{K}}$ in derselben Bahn liegen. Wir werden die Bahnen in $\mathcal{P}(S)$ erst in Kapitel 4 bestimmen, leihen uns aber hier schon das Vokabular. So sind zu jedem Move $\mathcal{K} = (\mathcal{P} - \mathcal{Q})$ der Graph $\Gamma(\mathcal{P} \cap \mathcal{Q})$ und eine ausgezeichnete Ecke $v_* = v_*(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ gegeben, vgl. 4.7 und 4.8. Außerdem ist $\text{Aut}^*(\Gamma(\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}))$ die Gruppe derjenigen Automorphismen, die v_* auf sich abbilden.

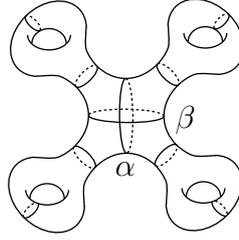


Abbildung 3.1: Eine Kante, die invertiert wird

Sei $\hat{\gamma}_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}} : \text{Stab}_{\text{nor}}(\mathcal{K}) \rightarrow \text{Aut}(\Gamma(\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}))$ der Homomorphismus, der jedes $f \in \text{Stab}_{\text{nor}}(\mathcal{K})$ auf den von f induzierten Graphenautomorphismus abbildet. Verketteten wir $\hat{\gamma}_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}$ mit dem kanonischen Homomorphismus $p_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}} : \text{Aut}(\Gamma(\mathcal{P} \cap \mathcal{Q})) \rightarrow S_{3g-4+2b}$, der jedem Automorphismus die von ihm induzierte Permutation der Kanten zuordnet, so erhalten wir einen Gruppenhomomorphismus $\gamma_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}} := p_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}} \circ \hat{\gamma}_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}} : \text{Stab}_{\text{nor}}(\mathcal{K}) \rightarrow S_{3g-4+2b}$. Wir setzen $T_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}^{\text{nor}} := \text{Bild}(\gamma_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}})$ und $T_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}^{\text{or}} := \text{Bild}(\gamma_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}|_{\text{Stab}_{\text{or}}^+(\mathcal{K})})$.

Bemerkung 3.13:

$\text{Bild}(\hat{\gamma}_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}) = \text{Aut}^*(\Gamma(\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}))$

Beweis:

Die Inklusion „ \subseteq “ ist klar. Die Umkehrung zeigt man genau wie in Bemerkung 3.4. \square

Bemerkung 3.14:

- a) $\text{Kern}(\gamma_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}) = \text{Stab}(\{\alpha, \beta\}) \cap \text{Stab}_{pw}^*(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\})$
In der Situation von 3.11c),d) gilt also $\text{Kern}(\gamma_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}) = \text{Stab}_T^*(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\})$.
- b) $\text{Kern}(\gamma_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}|_{F_{\alpha, \beta}^+ \cap \text{Stab}(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\})}) = \text{Stab}_T^*(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\})$
- c) Wir haben folgende kurze exakte Sequenzen:

$$\begin{aligned} 1 &\longrightarrow \text{Stab}(\{\alpha, \beta\}) \cap \text{Stab}_{pw}^*(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}) \longrightarrow \text{Stab}_{\text{nor}}(\mathcal{K}) \longrightarrow T_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}^{\text{nor}} \longrightarrow 1 \\ 1 &\longrightarrow \text{Stab}_T^*(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}) \longrightarrow \text{Stab}_{\text{or}}^+(\mathcal{K}) \longrightarrow T_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}^{\text{or}} \longrightarrow 1 \end{aligned}$$

In der Situation von 3.11c),d) sieht die erste Sequenz folgendermaßen aus:

$$1 \longrightarrow \text{Stab}_T^*(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}) \longrightarrow \text{Stab}_{\text{nor}}(\mathcal{K}) \longrightarrow T_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}^{\text{nor}} \longrightarrow 1$$

Beweis:

- a) Der Beweis der ersten Gleichung erfolgt analog zu 3.5. Ist man in der Situation von 3.11c),d), so gilt:
 $\text{Kern}(\gamma_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}) = \text{Stab}(\{\alpha, \beta\}) \cap \text{Stab}_{pw}^*(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\})$
 $= (F_{\alpha, \beta}^* \cup F_{\alpha, \beta}^-) \cap \text{Stab}_{pw}^*(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\})$

$$\begin{aligned}
&= (F_{\alpha,\beta}^* \cap \text{Stab}_{pw}^*(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\})) \cup (F_{\alpha,\beta}^- \cap \text{Stab}_{pw}^*(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\})) \\
&\stackrel{3.10 \text{ und } 3.11c,d)}{=} \text{Stab}_T^*(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}) \cup \emptyset
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b) } \text{Kern}(\gamma_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}|_{F_{\alpha,\beta}^+ \cap \text{Stab}(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\})}) &= \text{Kern}(\gamma_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}) \cap F_{\alpha,\beta}^+ \cap \text{Stab}(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}) \\
&\stackrel{\text{a)}}{=} \text{Stab}(\{\alpha, \beta\}) \cap \text{Stab}_{pw}^*(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}) \cap F_{\alpha,\beta}^+ \cap \text{Stab}(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}) \\
&= \text{Stab}_{pw}^*(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}) \cap F_{\alpha,\beta}^+ \\
&\stackrel{3.10}{=} \text{Stab}_T^*(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\})
\end{aligned}$$

c) folgt direkt aus a) und b). □

3.3 Stabilisatoren von 2-Zellen

Es seien stets \mathcal{F} eine 2-Zelle in $\mathcal{P}(S)$ und $\overline{\mathcal{F}}$ die zu \mathcal{F} entgegengesetzt orientierte 2-Zelle. Die Moves von \mathcal{F} spielen sich alle in derselben Teilfläche Σ von S ab. Alle Hosenerlegungen von \mathcal{F} beinhalten dieselben $n-1$ oder $n-2$ Kurven $\{\alpha_r, \dots, \alpha_n\}$ in $S \setminus \Sigma$ (mit $r=2$ oder $r=3$) sowie eine oder zwei variable Kurven. Insgesamt gibt es in \mathcal{F} drei, vier, fünf oder sechs variable Kurven, die wir mit $\gamma_1, \dots, \gamma_i$ bezeichnen.

Definition 3.15:

$$\text{Stab}_{pw}(\mathcal{F}) := \bigcap_{\mathcal{P} \in \mathcal{F}} \text{Stab}(\mathcal{P})$$

$$\text{Stab}_{or}(\mathcal{F}) := \{f \in \text{Mod}(S) : f \cdot \mathcal{F} = \mathcal{F}\}$$

$$\text{Stab}_{nor}(\mathcal{F}) := \{f \in \text{Mod}(S) : f \cdot \{\mathcal{F}, \overline{\mathcal{F}}\} = \{\mathcal{F}, \overline{\mathcal{F}}\}\}$$

Bemerkung 3.16:

$$\text{Stab}_{pw}(\mathcal{F}) = \text{Stab}_{pw}(\{\gamma_1, \dots, \gamma_i\}) \cap \text{Stab}(\{\alpha_r, \dots, \alpha_n\})$$

$$\text{Stab}_{nor}(\mathcal{F}) = \text{Stab}(\{\gamma_1, \dots, \gamma_i\}) \cap \text{Stab}(\{\alpha_r, \dots, \alpha_n\})$$

Der Beweis dieser Aussage erfolgt analog zu Bemerkung 3.8.

Wir wollen nun die verschiedenen Typen von 2-Zellen getrennt untersuchen und so bessere Ergebnisse gewinnen.

Proposition 3.17:

a) Sei \mathcal{F} vom Typ (3S). Dann gilt:

$$\text{Stab}_{pw}(\mathcal{F}) \subsetneq \text{Stab}_{or}(\mathcal{F}) = \text{Stab}_{nor}(\mathcal{F})$$

b) Sei \mathcal{F} vom Typ (3A). Dann gilt:

$$\text{Stab}_{pw}(\mathcal{F}) \subseteq \text{Stab}_{or}(\mathcal{F}) = \text{Stab}_{nor}(\mathcal{F})$$

Bei der linksseitigen Inklusion sind sowohl „ \subseteq “ als auch „ \subsetneq “ möglich.

- c) Ist \mathcal{F} vom Typ (4C) oder (5A), so ist keine allgemeine Aussage möglich, d.h. zu jeder der folgenden Inklusionsketten gibt es Beispiele von 2-Zellen \mathcal{F} , die sie erfüllen:

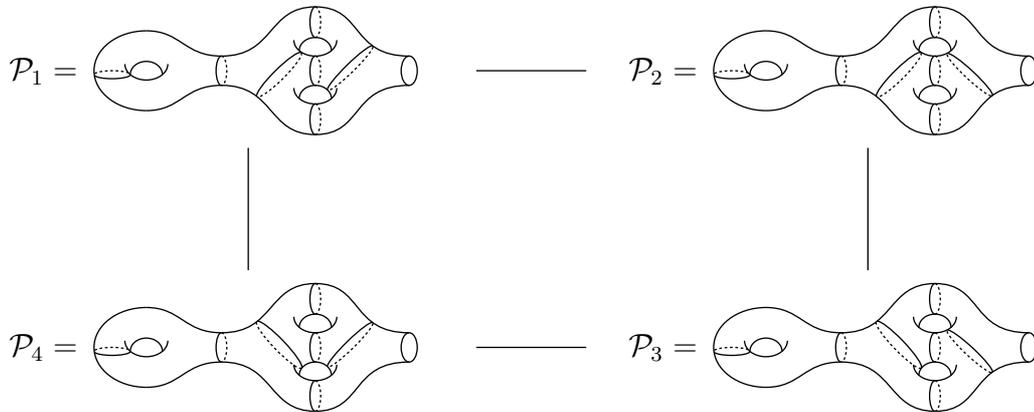
$$\begin{aligned} \text{Stab}_{pw}(\mathcal{F}) &= \text{Stab}_{or}(\mathcal{F}) = \text{Stab}_{nor}(\mathcal{F}) \\ \text{Stab}_{pw}(\mathcal{F}) &= \text{Stab}_{or}(\mathcal{F}) \subsetneq \text{Stab}_{nor}(\mathcal{F}) \\ \text{Stab}_{pw}(\mathcal{F}) &\subsetneq \text{Stab}_{or}(\mathcal{F}) \subsetneq \text{Stab}_{nor}(\mathcal{F}) \\ \text{Stab}_{pw}(\mathcal{F}) &\subsetneq \text{Stab}_{or}(\mathcal{F}) = \text{Stab}_{nor}(\mathcal{F}) \end{aligned}$$

- d) Für jede 2-Zelle \mathcal{F} vom Typ (6AS) gilt:

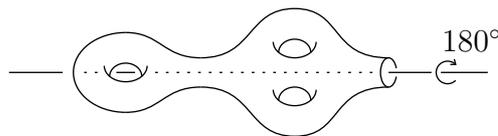
$$\text{Stab}_{pw}(\mathcal{F}) = \text{Stab}_{or}(\mathcal{F}) = \text{Stab}_{nor}(\mathcal{F})$$

Beweis:

- a) Das folgt direkt aus 2.6.
- b) Die Gleichheit $\text{Stab}_{or}(\mathcal{F}) = \text{Stab}_{nor}(\mathcal{F})$ folgt direkt aus 2.14. Die Aussage über die linksseitige Inklusion beweisen wir hier nicht (es ist aber sehr leicht, in beiden Fällen Beispiele zu finden).
- c) Diese Aussage werden wir nicht vollständig beweisen. Stattdessen zeigen wir exemplarisch, daß folgende 2-Zelle \mathcal{F} die Inklusionen $\text{Stab}_{pw}(\mathcal{F}) \subsetneq \text{Stab}_{or}(\mathcal{F}) = \text{Stab}_{nor}(\mathcal{F})$ erfüllt:

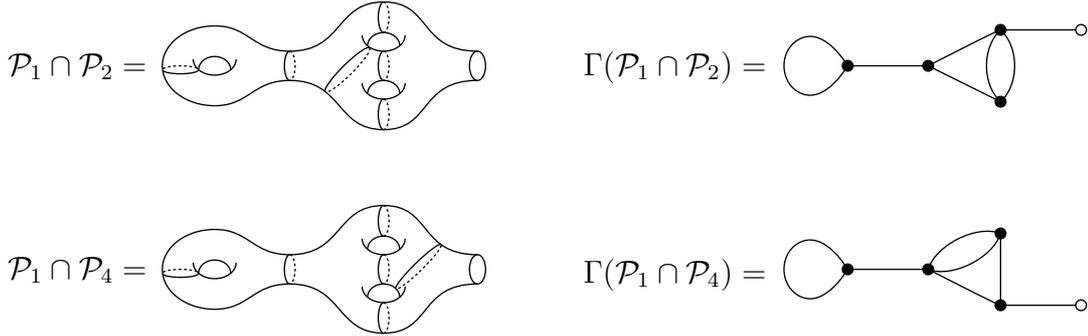


Sei $\sigma \in \text{Mod}(\Sigma_{3,1})$ die folgende Drehung um 180° :



Offensichtlich gilt $\sigma(\mathcal{P}_1) = \mathcal{P}_3$, $\sigma(\mathcal{P}_2) = \mathcal{P}_4$, $\sigma(\mathcal{P}_3) = \mathcal{P}_1$, $\sigma(\mathcal{P}_4) = \mathcal{P}_2$ und somit $\sigma \in \text{Stab}_{or}(\mathcal{F}) \setminus \text{Stab}_{pw}(\mathcal{F})$.

Wir nehmen an, daß es ein $f \in \text{Stab}_{nor}(\mathcal{F}) \setminus \text{Stab}_{or}(\mathcal{F})$ gibt. Wegen $\Gamma(\mathcal{P}_1) \cong \Gamma(\mathcal{P}_3) \not\cong \Gamma(\mathcal{P}_2) \cong \Gamma(\mathcal{P}_4)$ gilt $f(\mathcal{P}_1) = \mathcal{P}_1$ oder $f(\mathcal{P}_1) = \mathcal{P}_3$. (Das werden wir in Kapitel 4, Bemerkung 4.1 lernen.) Im Falle $f(\mathcal{P}_1) = \mathcal{P}_1$ gilt auch $f(\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2) = (\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_4)$ und somit $\Gamma(\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2) \cong \Gamma(\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_4)$. Ist hingegen $f(\mathcal{P}_1) = \mathcal{P}_3$, so erhalten wir $f(\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2) = (\mathcal{P}_3 - \mathcal{P}_2) = \sigma(\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_4)$, und auch in diesem Fall gilt $\Gamma(\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2) = \Gamma(\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_4)$. Diese beiden Graphen sind jedoch nicht isomorph:



Daher haben wir die Annahme zu einem Widerspruch geführt, d.h. so ein f kann es nicht geben.

$$\Rightarrow \text{Stab}_{or}(\mathcal{F}) = \text{Stab}_{nor}(\mathcal{F})$$

- d) Für jedes $f \in \text{Stab}_{nor}(\mathcal{F})$ ist $f|_{\Sigma_{1,2}} \in \text{Stab}_{nor}(\mathcal{F}|_{\Sigma_{1,2}})$. Wie wir in Abschnitt 3.4, Bemerkung 3.23 sehen werden, gilt dann sogar $f|_{\Sigma_{1,2}} \in \text{Stab}_{pw}(\mathcal{F}|_{\Sigma_{1,2}})$.

$$\Rightarrow f(\gamma_i) = \gamma_i \text{ für alle } i = 1, \dots, 6.$$

$$\Rightarrow f \in \text{Stab}_{pw}(\mathcal{F}) \quad \square$$

Wie in Abschnitt 3.2 für Kanten geschehen, können wir auch die verschiedenen Stabilisatorgruppen für 2-Zellen in kurzen exakten Sequenzen arrangieren. Das funktioniert im wesentlichen genauso, daher verzichten wir auf eine detaillierte Ausführung.

3.4 Sonderfälle

Zu Beginn des Kapitels haben wir die Flächen $\Sigma_{0,3}$, $\Sigma_{0,4}$, $\Sigma_{1,1}$, $\Sigma_{1,2}$ und $\Sigma_{2,0}$ ausgeschlossen. Für unsere Theorie ist die Fläche $\Sigma_{0,3}$ uninteressant, da es nur eine Hose gibt und somit der Hosenkomples ein einziger Punkt ist. Die Flächen $\Sigma_{1,1}$ und $\Sigma_{0,4}$ wurden in Kapitel 2 vollständig behandelt. Wir werden in diesem Abschnitt die Stabilisatoren für die Flächen $\Sigma_{1,2}$ und $\Sigma_{2,0}$ erarbeiten. Die in den obigen Abschnitten vorgestellten Methoden sind hier nicht anwendbar: Im Fall $\Sigma_{1,2}$ kann eine Kurve sowohl Geschlecht-1-separierend als auch 2-separierend sein; im Fall $\Sigma_{2,0}$ können wir einer Geschlecht-1-separierenden Kurve nicht eindeutig einen Halbtwist zuordnen.

3.4.1 Die Fläche $\Sigma_{1,2}$

Sei $S = \Sigma_{1,2}$. Es gibt genau zwei Graphen, die zwei Ecken der Valenz 3, zwei Ecken der Valenz 1 und vier Kanten haben, vgl. Abbildung 3.2, und somit nach 4.1 in $\mathcal{P}^0(S)$ genau zwei Bahnen.

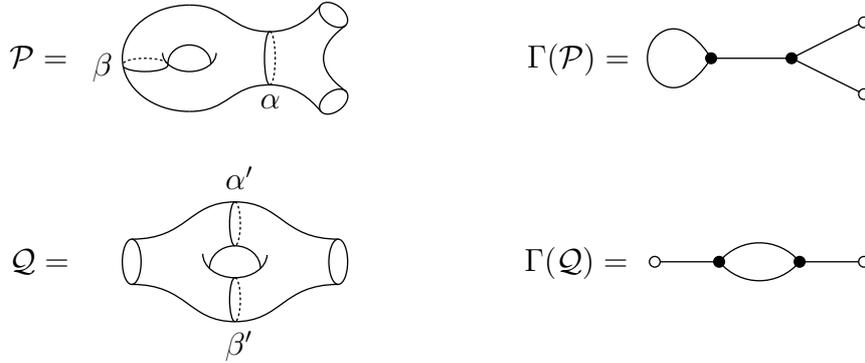


Abbildung 3.2: Hosenzerlegungen von $\Sigma_{1,2}$

In jeder Hosenzerlegung von $\Sigma_{1,2}$ gibt es höchstens eine separierende Kurve, denn diese teilt $\Sigma_{1,2}$ in ein $\Sigma_{1,1}$ und ein $\Sigma_{0,3}$, und die andere Kurve der Hosenzerlegung ist in $\Sigma_{1,1}$ enthalten und somit nichtseparierend. Seien also $\mathcal{P} = \{\alpha, \beta\}$ eine Hosenzerlegung von $\Sigma_{1,2}$, wobei α separierend ist, und $\mathcal{Q} = \{\alpha', \beta'\}$ eine Hosenzerlegung von $\Sigma_{1,2}$ mit nichtseparierenden Kurven.

Definition und Bemerkung 3.18:

- a) α teilt $\Sigma_{1,2}$ in ein $\Sigma_{1,1}$ und ein $\Sigma_{0,3}$. Sei σ_1 der Halbtwist um α , der in $\Sigma_{1,1}$ passiert und auf $\Sigma_{0,3}$ die Identität ist, d.h. α wird als Geschlecht-1-separierende Kurve aufgefaßt. Außerdem sei σ_2 der Halbtwist um α , der von α als 2-separierende Kurve herkommt. Es gilt $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = t_\alpha$, und $\iota = \sigma_1 \circ \sigma_2^{-1}$ ist die hyperelliptische Involution in $\Sigma_{1,2}$, vgl. 1.11.

- b) Es gilt:

$$\begin{aligned} \text{Stab}(\mathcal{P}) &= \text{Stab}_{pw}(\mathcal{P}) = \langle \sigma_1, t_\beta \rangle \oplus \langle \iota \rangle \cong \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ \text{Stab}_{pw}^*(\mathcal{P}) &= \langle \sigma_1, t_\beta \rangle \cong \mathbb{Z}^2 \end{aligned}$$

Beweis von b):

Da α separierend und β nichtseparierend ist, gilt $\text{Stab}(\mathcal{P}) = \text{Stab}_{pw}(\mathcal{P})$. Mit denselben Argumenten wie in Proposition 3.2 gilt $\text{Stab}_{pw}(\mathcal{P}) = \langle \sigma_1, t_\beta, \iota \rangle$ und $\text{Stab}_{pw}^*(\mathcal{P}) = \langle \sigma_1, t_\beta \rangle$. Da $\langle \sigma_1, t_\beta \rangle$ frei abelsch und $\langle \iota \rangle$ endlich ist, ist die Summe $\langle \sigma_1, t_\beta \rangle \oplus \langle \iota \rangle$ direkt. \square

Bemerkung 3.19:

Die Abbildung $\hat{\gamma}_{\mathcal{P}} : \text{Stab}(\mathcal{P}) \rightarrow \text{Aut}(\Gamma(\mathcal{P}))$ ist surjektiv mit $\text{Kern}(\hat{\gamma}_{\mathcal{P}}) = \langle t_\alpha, t_\beta \rangle$. Ist $p_{\mathcal{P}} : \text{Aut}(\Gamma(\mathcal{P})) \rightarrow S_4$ derjenige Gruppenhomomorphismus, der jedem $\Phi \in \text{Aut}(\Gamma(\mathcal{P}))$

die zugehörige Permutation der Kanten von $\Gamma(\mathcal{P})$ zuordnet, so sei $\gamma_{\mathcal{P}} := p_{\mathcal{P}} \circ \hat{\gamma}_{\mathcal{P}}$. Es gilt $\text{Kern}(\gamma_{\mathcal{P}}) = \text{Stab}_{pw}^*(\mathcal{P})$ und $\text{Bild}(\gamma_{\mathcal{P}}) =: T_{\mathcal{P}} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (der Erzeuger von $\text{Bild}(\gamma_{\mathcal{P}})$ ist eine Transposition). Die Abbildung $s_{\mathcal{P}} : T_{\mathcal{P}} \rightarrow \text{Stab}(\mathcal{P})$, die dem Erzeuger von $T_{\mathcal{P}}$ die hyperelliptische Involution ι zuordnet, ist ein Schnitt von $\gamma_{\mathcal{P}}$. Wir haben also folgende spaltende kurze exakte Sequenz:

$$1 \longrightarrow \langle \sigma_1, t_{\beta} \rangle \longrightarrow \text{Stab}(\mathcal{P}) \xrightarrow{\gamma_{\mathcal{P}}} T_{\mathcal{P}} \longrightarrow 1$$

Das Verfahren in 5.4 liefert abermals die Gleichheit $\text{Stab}(\mathcal{P}) = \langle \sigma_1, t_{\beta} \rangle \oplus \langle \iota \rangle$.

Bemerkung 3.20:

Es gilt:

$$\begin{aligned} \text{Stab}_{pw}^*(\mathcal{Q}) &= \langle t_{\alpha'}, t_{\beta'} \rangle \\ \text{Stab}_{pw}(\mathcal{Q}) &= \langle t_{\alpha'}, t_{\beta'} \rangle \oplus \langle \iota \rangle \end{aligned}$$

Beweis:

Die erste Gleichung beweist man wie Proposition 3.2. Beachte: Für die zweite Gleichung können wir dieses Resultat nicht heranziehen, denn dort hatten wir die Fläche $\Sigma_{1,2}$ explizit ausgeschlossen.

Die Inklusion „ \supseteq “ in der zweiten Gleichung ist klar, ebenso die Direktheit der Summe. Sei umgekehrt $f \in \text{Stab}_{pw}(\mathcal{Q})$. Bildet f die Randkomponenten von $\Sigma_{1,2}$ auf sich ab, so kann f wie im Beweis von 3.2 zerlegt werden in $f = f_1 \circ f_2$, wobei f_1 und f_2 nur jeweils in einer Hose von \mathcal{Q} nichttrivial operieren. Jedes f_i ist eine Verkettung von Dehntwists um die Kurven aus \mathcal{Q} und die Randkomponenten von S , und somit ist f eine Verkettung der Dehntwists $t_{\alpha'}$ und $t_{\beta'}$.

Vertauscht f die Randkomponenten von $\Sigma_{1,2}$, so wenden wir obige Argumentation auf $f \circ \iota$ an und erhalten $f \in \langle t_{\alpha'}, t_{\beta'}, \iota \rangle$. \square

Bemerkung 3.21:

- a) Die Abbildung $\hat{\gamma}_{\mathcal{Q}} : \text{Stab}(\mathcal{Q}) \rightarrow \text{Aut}(\Gamma(\mathcal{Q}))$ ist surjektiv, und es gilt $\text{Kern}(\hat{\gamma}_{\mathcal{Q}}) = \text{Stab}_T(\mathcal{Q})$. Weiter haben wir wie üblich $p_{\mathcal{Q}} : \text{Aut}(\Gamma(\mathcal{Q})) \rightarrow S_4$ und $\gamma_{\mathcal{Q}} := p_{\mathcal{Q}} \circ \hat{\gamma}_{\mathcal{Q}}$. Es ist $\text{Kern}(\gamma_{\mathcal{Q}}) = \text{Stab}_{pw}^*(\mathcal{Q})$ und $\text{Bild}(\gamma_{\mathcal{Q}}) =: T_{\mathcal{Q}} \cong V_4$ (die Erzeuger sind zwei disjunkte Transpositionen). Das liefert folgende kurze exakte Sequenz:

$$1 \longrightarrow \langle t_{\alpha'}, t_{\beta'} \rangle \longrightarrow \text{Stab}(\mathcal{Q}) \longrightarrow T_{\mathcal{Q}} \longrightarrow 1$$

- b) Die Sequenz aus a) spaltet und liefert die folgende Präsentation für $\text{Stab}(\mathcal{Q})$:

$$\begin{aligned} \text{Stab}(\mathcal{Q}) = \langle t_{\alpha'}, t_{\beta'}, \iota, j \mid t_{\alpha'} t_{\beta'} = t_{\beta'} t_{\alpha'}, \iota^2 = j^2 = 1, \iota j = j \iota, \\ t_{\alpha'} \iota = \iota t_{\alpha'}, t_{\beta'} \iota = \iota t_{\beta'}, t_{\alpha'} j = j t_{\beta'}, t_{\beta'} j = j t_{\alpha'} \rangle \end{aligned}$$

Beweis:

- a) Es ist $\text{Aut}(\Gamma(\mathcal{Q})) \cong V_4$. Für jedes $f \in \text{Stab}(\mathcal{Q})$ gilt:

$$\begin{aligned}
f \in \text{Kern}(\hat{\gamma}_{\mathcal{Q}}) &\Leftrightarrow \hat{\gamma}_{\mathcal{Q}}(f) = \text{id} \\
&\Leftrightarrow \hat{\gamma}_{\mathcal{Q}}(f) \text{ bildet alle Kanten von } \Gamma(\mathcal{Q}) \text{ auf sich ab} \\
&\Leftrightarrow f \text{ bildet alle Kurven aus } \mathcal{Q} \text{ und } \partial\Sigma_{1,2} \text{ auf sich ab} \\
&\Leftrightarrow f \in \text{Stab}_{pw}^*(\mathcal{Q})
\end{aligned}$$

Da $p_{\mathcal{Q}}$ injektiv ist, gilt $\text{Kern}(\gamma_{\mathcal{Q}}) = \text{Kern}(\hat{\gamma}_{\mathcal{Q}}) = \text{Stab}_{pw}^*(\mathcal{Q})$ und $\text{Bild}(\gamma_{\mathcal{Q}}) \cong \text{Aut}(\Gamma(\mathcal{Q})) \cong V_4$.

- b) Gegeben sei die Abbildungsklasse² j in Abbildung 3.3, welche $\Sigma_{1,2}$ um 180° dreht. $\gamma_{\mathcal{Q}}(\iota)$ und $\gamma_{\mathcal{Q}}(j)$ sind zwei Transpositionen in $T_{\mathcal{Q}}$. Die Zuordnung $\gamma_{\mathcal{Q}}(\iota) \mapsto \iota$, $\gamma_{\mathcal{Q}}(j) \mapsto j$ liefert einen Schnitt $s_{\mathcal{Q}} : T_{\mathcal{Q}} \rightarrow \text{Stab}(\mathcal{Q})$.

Der Schnitt $s_{\mathcal{Q}}$ induziert den Homomorphismus $\varphi : T_{\mathcal{Q}} \rightarrow \text{Aut}(\langle t_{\alpha'}, t_{\beta'} \rangle)$, $x \mapsto (f \mapsto s_{\mathcal{Q}}(x)fs_{\mathcal{Q}}(x)^{-1})$. φ ist durch die Gleichungen $\varphi(\tau_i) = \text{id}$ und $\varphi(\tau_j)(t_{\alpha'}) = t_{\beta'}$ und $\varphi(\tau_j)(t_{\beta'}) = t_{\alpha'}$ charakterisiert. Der zugehörige Isomorphismus $\Phi : \langle t_{\alpha'}, t_{\beta'} \rangle \rtimes_{\varphi} T_{\mathcal{Q}} \rightarrow \text{Stab}(\mathcal{Q})$ liefert die gewünschte Präsentation, vgl. 5.4. \square

Proposition 3.22:

Sei $\mathcal{K} = (\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2)$ eine Kante in $\mathcal{P}(\Sigma_{1,2})$ mit $\mathcal{P}_1 = \{\alpha_1, \gamma_1\}$ und $\mathcal{P}_2 = \{\alpha_1, \gamma_2\}$.

- a) Ist $\Gamma(\mathcal{P}_1) \cong \Gamma(\mathcal{P}_2) \cong \Gamma(\mathcal{P})$, so ist α_1 separierend und \mathcal{K} ein S -Move, und es gilt:

$$\begin{aligned}
\text{Stab}_{or}^+(\mathcal{K}) &\cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\
\text{Stab}_{nor}(\mathcal{K}) &\cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\
[\text{Stab}_{nor}(\mathcal{K}) : \text{Stab}_{or}^+(\mathcal{K})] &= 2
\end{aligned}$$

- b) Ist $\Gamma(\mathcal{P}_1) \cong \Gamma(\mathcal{P})$ und $\Gamma(\mathcal{P}_2) \cong \Gamma(\mathcal{Q})$, so ist \mathcal{K} ein A -Move, und es gilt:

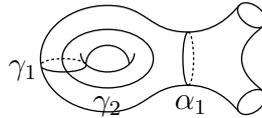
$$\text{Stab}_{or}^+(\mathcal{K}) = \text{Stab}_{nor}(\mathcal{K}) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

- c) Ist $\Gamma(\mathcal{P}_1) \cong \Gamma(\mathcal{P}_2) \cong \Gamma(\mathcal{Q})$, so ist \mathcal{K} ein A -Move, und es gilt:

$$\begin{aligned}
\text{Stab}_{or}^+(\mathcal{K}) &\cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\
\text{Stab}_{nor}(\mathcal{K}) &\cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\
[\text{Stab}_{nor}(\mathcal{K}) : \text{Stab}_{or}^+(\mathcal{K})] &= 2
\end{aligned}$$

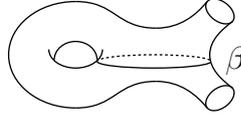
Beweis:

- a) Wegen $\Gamma(\mathcal{P}_1) \cong \Gamma(\mathcal{P})$ enthält \mathcal{P}_1 eine separierende Kurve. Wäre γ_1 separierend, so wäre γ_2 nichtseparierend und somit $\Gamma(\mathcal{P}_2) \cong \Gamma(\mathcal{Q})$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Daher ist α_1 separierend und \mathcal{K} ein S -Move. Wie in 3.18a) seien zwei Halbtwists σ_1 und σ_2 zu α_1 definiert.



² Beachte: Im Gegensatz zur hyperelliptischen Involution ι hängt j von der Parametrisierung der Fläche ab.

Bezüglich der in obiger Skizze gewählten Parametrisierung sei zusätzlich folgende Kurve β gegeben:



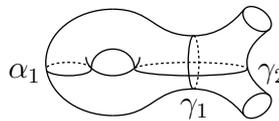
- Wir zeigen $\text{Stab}_{or}^+(\mathcal{K}) = \langle \sigma_1 \rangle \oplus \langle \iota \rangle$:
 Die Inklusion „ \supseteq “ ist klar, ebenso die Direktheit der Summe. Jedes $f \in \text{Stab}_{or}^+(\mathcal{K})$ bildet α_1 orientierungserhaltend, also o.E. punktweise, auf sich ab und kann daher dargestellt werden als $f = f|_{\Sigma_{1,1}} \circ f|_{\Sigma_{0,3}}$. Wegen $f(\gamma_1) = \gamma_1$ und $f(\gamma_2) = \gamma_2$ ist $f|_{\Sigma_{1,1}}$ von der Form $f|_{\Sigma_{1,1}} = \sigma_1^n$ für ein $n \in \mathbb{Z}$. $f|_{\Sigma_{0,3}}$ ist stets von der Form $f|_{\Sigma_{0,3}} = \sigma_2^m = \iota^m \circ \sigma_1^m$ für ein $m \in \mathbb{Z}$.
 $\Rightarrow f = \sigma_1^n \circ \iota^m \circ \sigma_1^m \in \langle \sigma_1, \iota \rangle$

Definiere nun $f_0 := t_{\gamma_1} \circ t_{\gamma_2} \circ t_{\gamma_1} \in \text{Mod}(\Sigma_{1,2})$. Es gilt $f_0(\gamma_1) = \gamma_2$, $f_0(\gamma_2) = \gamma_1$, $f_0(\alpha_1) = \alpha_1$ und $f_0|_{\partial\Sigma_{1,2}} = \text{id}$. Insbesondere ist $f_0^2 \in \text{Stab}_{or}^+(\mathcal{K})$ mit $f_0^2|_{\partial\Sigma_{1,2}} = \text{id}$, also $f_0^2 \in \langle \sigma_1 \rangle$. Wegen $f_0^2(\beta) = \sigma_1(\beta)$ gilt $f_0^2 = \sigma_1$.

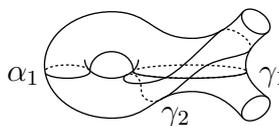
- Wir zeigen $\text{Stab}_{nor}(\mathcal{K}) = \langle f_0 \rangle \oplus \langle \iota \rangle$:
 Die Inklusion „ \supseteq “ und die Direktheit der Summe sind klar. Für jedes $f \in \text{Stab}_{nor}(\mathcal{K})$ ist $f \in \text{Stab}_{or}^+(\mathcal{K})$ oder $f \circ f_0^{-1} \in \text{Stab}_{or}^+(\mathcal{K})$, d.h. es gibt $n, m, l \in \mathbb{Z}$ mit $f = f_0^n \circ \sigma_1^m \circ \iota^l = f_0^{n+2m} \circ \iota^l \in \langle f_0, \iota \rangle$.

Der Index $[\text{Stab}_{nor}(\mathcal{K}) : \text{Stab}_{or}^+(\mathcal{K})]$ ist mindestens 2 wegen $f_0 \in \text{Stab}_{nor}(\mathcal{K}) \setminus \text{Stab}_{or}^+(\mathcal{K})$. Andererseits gilt $f^2 \in \text{Stab}_{or}^+(\mathcal{K})$ für jedes $f \in \text{Stab}_{nor}(\mathcal{K})$ und somit $[\text{Stab}_{nor}(\mathcal{K}) : \text{Stab}_{or}^+(\mathcal{K})] \leq 2$.

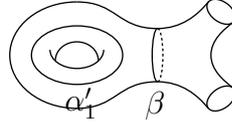
- b) Wegen $\Gamma(\mathcal{P}_1) \not\cong \Gamma(\mathcal{P}_2)$ ist $\text{Stab}_{or}^-(\mathcal{K}) = \emptyset$ und $\text{Stab}_{or}^+(\mathcal{K}) = \text{Stab}_{nor}(\mathcal{K})$. Wir zeigen $\text{Stab}_{or}^+(\mathcal{K}) = \langle t_{\alpha_1} \rangle \oplus \langle \iota \rangle$. Die Inklusion „ \supseteq “ und die Direktheit der Summe sind klar. Sei also $f \in \text{Stab}_{or}^+(\mathcal{K})$. Dann gilt $f(\alpha_1) = \alpha_1$ und $f(\gamma_1) = \gamma_1$ und $f(\gamma_2) = \gamma_2$. Es gibt ein $n \in \mathbb{Z}$, so daß $f \circ \iota^n$ die Hosen von \mathcal{P}_2 auf sich und die Kurven α_1, γ_2 punktweise auf sich abbildet, d.h. $f \circ \iota^n$ ist eine Verkettung von Dehntwists $f \circ \iota^n = t_{\alpha_1}^m \circ t_{\gamma_2}^l$ mit $m, l \in \mathbb{Z}$. Wegen $f(\gamma_1) = \gamma_1$ ist $l = 0$ und somit $f = \iota^n \circ t_{\alpha_1}^m \in \langle t_{\alpha_1}, \iota \rangle$.



- c) α_1 ist nichtseparierend und $\Sigma_{1,2} \setminus \alpha_1 \cong \Sigma_{0,4}$. Wir finden eine Parametrisierung von $\Sigma_{0,4}$ mit $\gamma_1 = [1, 0]$ und $\gamma_2 = [1, 1]$ und $\partial\Sigma_{1,2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.



Bezüglich dieser Parametrisierung und der Verklebung der Ränder $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ von $\Sigma_{0,4}$ zu α_1 seien folgende Kurven α'_1 und β gegeben:



β zerlegt $\Sigma_{1,2}$ in ein $\Sigma_{1,1}$ und ein $\Sigma_{0,3}$. Wie in 3.18a) sei σ_β derjenige Halbtwist um β , der in $\Sigma_{1,1}$ passiert und auf $\Sigma_{0,3}$ die Identität ist.

Setze $f_0 := t_{\alpha_1}^{-1} \circ \sigma_\beta \circ t_{\gamma_1}$. Es gilt $f_0(\gamma_1) = \gamma_2$, $f_0(\gamma_2) = \gamma_1$ und $f_0(\alpha_1) = \alpha_1$, also $f_0 \in \text{Stab}_{\text{nor}}(\mathcal{K})$. Weiter gilt $f_0^2 \in \text{Stab}_{\text{pw}}^*(\mathcal{P}_1) \stackrel{3.20}{=} \langle t_{\alpha_1}, t_{\gamma_1} \rangle$. Wegen $f_0^2(\gamma_2) = \gamma_2$ ist f_0^2 von der Form $f_0^2 = t_{\alpha_1}^m$ für ein $m \in \mathbb{Z}$. Die Untersuchung von $f_0^2(\alpha'_1)$ ergibt $f_0^2(\alpha'_1) = \alpha'_1$ und somit $f_0^2 = \text{id}$.

Wie in b) zeigt man $\text{Stab}_{\text{or}}^+(\mathcal{K}) = \langle t_{\alpha_1} \rangle \oplus \langle \iota \rangle$. Wir zeigen $\text{Stab}_{\text{nor}}(\mathcal{K}) = \langle t_{\alpha_1} \rangle \oplus \langle f_0 \rangle \oplus \langle \iota \rangle$. Die Inklusion „ \supseteq “ und die Direktheit der Summe sind klar. Sei also $f \in \text{Stab}_{\text{nor}}(\mathcal{K})$. Es gibt ein $n \in \mathbb{Z}$, so daß $f \circ \iota^n$ die Randkurven von $\Sigma_{1,2}$ auf sich abbildet. Weiter gibt es ein $m \in \mathbb{Z}$, so daß $f \circ \iota^n \circ f_0^m$ zusätzlich die Kurve α_1 orientierungserhaltend und o.E. punktweise auf sich abbildet. $f \circ \iota^n \circ f_0^m$ hat also eine Darstellung der Form $f \circ \iota^n \circ f_0^m = t_{\alpha_1}^l \circ f|_{\Sigma_{0,4}}$ für ein $l \in \mathbb{Z}$. Wegen $f|_{\Sigma_{0,4}}(\{\gamma_1, \gamma_2\}) = \{\gamma_1, \gamma_2\}$ gibt es schließlich ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $f|_{\Sigma_{0,4}} = f_0^k$.
 $\Rightarrow f = t_{\alpha_1}^l \circ f_0^{k-m} \circ \iota^n \in \langle t_{\alpha_1}, f_0, \iota \rangle$

Die Aussage über den Index folgt wie in a). □

Bemerkung 3.23:

a) Für jede 2-Zelle \mathcal{F} vom Typ (3S) gilt:

$$\begin{aligned} \text{Stab}_{\text{pw}}(\mathcal{F}) &\cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ \text{Stab}_{\text{or}}(\mathcal{F}) &= \text{Stab}_{\text{nor}}(\mathcal{F}) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ [\text{Stab}_{\text{or}}(\mathcal{F}) : \text{Stab}_{\text{pw}}(\mathcal{F})] &= 3 \end{aligned}$$

b) Für jede 2-Zelle \mathcal{F} vom Typ (3A) gilt:

$$\text{Stab}_{\text{pw}}(\mathcal{F}) = \text{Stab}_{\text{or}}(\mathcal{F}) = \text{Stab}_{\text{nor}}(\mathcal{F}) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

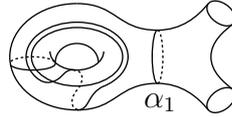
c) 2-Zellen vom Typ (4C) und (5A) kommen nicht vor.

d) Für jede 2-Zelle \mathcal{F} vom Typ (6AS) gilt:

$$\text{Stab}_{\text{pw}}(\mathcal{F}) = \text{Stab}_{\text{or}}(\mathcal{F}) = \text{Stab}_{\text{nor}}(\mathcal{F}) = \langle \iota \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

Beweis:

- a) Sei $\mathcal{F} = (\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_3)$ eine 2-Zelle vom Typ (3S) mit $\mathcal{P}_i = \{\alpha_i, \gamma_i\}$ ($i = 1, 2, 3$). Wie im Beweis von 3.22a) zeigt man $\text{Stab}_{pw}(\mathcal{F}) = \langle \sigma_1 \rangle \oplus \langle \iota \rangle$, wobei σ_1 wie in 3.18a) definiert sei. Die Aussage $\text{Stab}_{or}(\mathcal{F}) = \text{Stab}_{nor}(\mathcal{F})$ folgt aus 3.17. (Beachte: Dort wurde nicht benötigt, daß $S \neq \Sigma_{1,2}$ gilt.)



α_1 teilt $\Sigma_{1,2}$ in ein $\Sigma_{1,1}$ und ein $\Sigma_{0,3}$. Wie in 3.18a) seien die Halbtwists σ_1, σ_2 zu α_1 definiert. Wir finden eine Parametrisierung von $\Sigma_{1,1}$ mit $\gamma_1 = [1, 0]$ und $\gamma_2 = [0, 1]$. In dieser Parametrisierung gilt $\gamma_3 = [1, 1]$ oder $\gamma_3 = [-1, 1]$. Im ersten Fall setzen wir $f_0 := t_{\gamma_1} \circ t_{\gamma_2}$. Es ist $f_0 \in \text{Stab}_{or}(\mathcal{F})$ mit $f_0(\gamma_1) = \gamma_2, f_0(\gamma_2) = \gamma_3, f_0(\gamma_3) = \gamma_1$. Im zweiten Fall setzen wir $f_0 := t_{\gamma_1}^{-1} \circ t_{\gamma_2}^{-1}$. Auch hier gilt $f_0 \in \text{Stab}_{or}(\mathcal{F})$ mit $f_0(\gamma_1) = \gamma_2, f_0(\gamma_2) = \gamma_3, f_0(\gamma_3) = \gamma_1$. Wie im Beweis von 3.22a) zeigt man $f_0^3 = \sigma_1$ (im ersten Fall) bzw. $f_0^3 = \sigma_1^{-1}$ (im zweiten Fall), d.h. es gibt ein $\varepsilon \in \{1, -1\}$ mit $f_0^3 = \sigma_1^\varepsilon$.

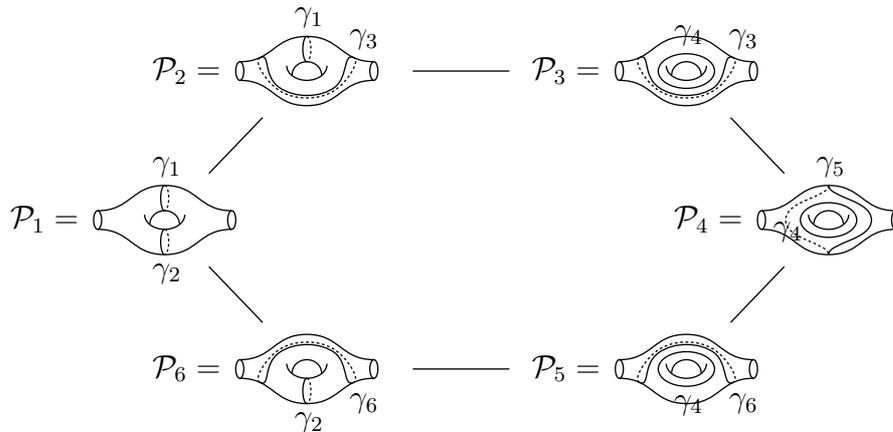
Sei nun $f \in \text{Stab}_{or}(\mathcal{F})$. Dann gilt $f(\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}) = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ und $f(\alpha_1) = \alpha_1$. Es gibt ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $f \circ f_0^n \in \text{Stab}_{pw}(\mathcal{F}) = \langle \sigma_1 \rangle \oplus \langle \iota \rangle$, d.h. $f \circ f_0^n$ ist von der Form $f \circ f_0^n = \sigma_1^m \circ \iota^l$ für geeignete $m, l \in \mathbb{Z}$.

$$\Rightarrow f = \sigma_1^m \circ \iota^l \circ f_0^{-n} = f_0^{3\varepsilon m} \circ \iota^l \circ f_0^{-n} \in \langle f_0, \iota \rangle$$

Wie in 3.22a) zeigt man $\text{Stab}_{or}(\mathcal{F}) = \langle f_0 \rangle \oplus \langle \iota \rangle$ und $[\text{Stab}_{or}(\mathcal{F}) : \text{Stab}_{pw}(\mathcal{F})] = 3$.

- b) Sei $\mathcal{F} = (\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_3)$ vom Typ (3A) mit $\mathcal{P}_i = \{\alpha_i, \gamma_i\}$ ($i = 1, 2, 3$). Genau eines der \mathcal{P}_i hat eine separierende Kurve, o.E. sei γ_1 separierend. Daher gilt $\text{Stab}_{or}(\mathcal{F}) = \text{Stab}_{pw}(\mathcal{F})$. Die Aussage $\text{Stab}_{or}(\mathcal{F}) = \text{Stab}_{nor}(\mathcal{F})$ folgt aus 3.17. Schließlich ist $\text{Stab}_{pw}(\mathcal{F}) \subseteq \text{Stab}_{or}^+(\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2) \stackrel{3.22b)}{=} \langle t_{\alpha_1} \rangle \oplus \langle \iota \rangle \subseteq \text{Stab}_{pw}(\mathcal{F})$.

- d) \mathcal{F} ist folgendermaßen gegeben:



j sei diejenige Abbildungsklasse³, welche $\Sigma_{1,2}$ um 180° dreht, vgl. Abbildung 3.3.

³ Auch dieses j ist von der Parametrisierung der Fläche abhängig.

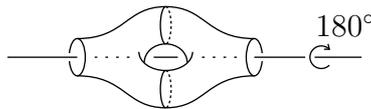


Abbildung 3.3: Eine spezielle Abbildungsklasse in $\Sigma_{1,2}$

Sei $f \in \text{Stab}_{\text{nor}}(\mathcal{F})$. Da γ_5 die einzige Kurve ist, die in nur einer Hosenerlegung von \mathcal{F} vorkommt, ist $f(\gamma_5) = \gamma_5$ und $f(\mathcal{P}_4) = \mathcal{P}_4$. (Beachte: Hieraus folgt schon $\text{Stab}_{\text{or}}(\mathcal{F}) = \text{Stab}_{\text{pw}}(\mathcal{F})$.) Wegen $f(\gamma_5) = \gamma_5$ gilt auch $f(\gamma_4) = \gamma_4$ und $f(\{\gamma_3, \gamma_6\}) = \{\gamma_3, \gamma_6\}$ und $f(\{\gamma_1, \gamma_2\}) = \{\gamma_1, \gamma_2\}$.

Es gibt ein $n \in \mathbb{Z}$, so daß $f \circ i^n$ die Randkomponenten von $\Sigma_{1,2}$ und somit auch die Hosen von \mathcal{P}_1 auf sich abbildet. Weiterhin gibt es ein $m \in \mathbb{Z}$, so daß $f \circ i^n \circ j^m$ die Kurven γ_1, γ_2 auf sich abbildet.

$$\begin{aligned} \Rightarrow f \circ i^n \circ j^m &\in \text{Stab}_{\text{pw}}^*(\mathcal{P}_1) \stackrel{3.20}{=} \langle t_{\gamma_1}, t_{\gamma_2} \rangle \\ \Rightarrow \text{Es gibt } l_1, l_2 \in \mathbb{Z} &\text{ mit } f \circ i^n \circ j^m = t_{\gamma_1}^{l_1} \circ t_{\gamma_2}^{l_2}. \end{aligned}$$

Ferner gilt:

$$t_{\gamma_2}^{l_2}(\gamma_3) = t_{\gamma_1}^{l_1} \circ t_{\gamma_2}^{l_2}(\gamma_3) = f \circ i^n \circ j^m(\gamma_3) \in \{\gamma_3, \gamma_6\} \Rightarrow l_2 = 0$$

$$t_{\gamma_1}^{l_1}(\gamma_6) = t_{\gamma_1}^{l_1} \circ t_{\gamma_2}^{l_2}(\gamma_6) = f \circ i^n \circ j^m(\gamma_6) \in \{\gamma_3, \gamma_6\} \Rightarrow l_1 = 0$$

$$\Rightarrow j^m = f \circ i^n \in \text{Stab}_{\text{nor}}(\mathcal{F})$$

$$\Rightarrow j^m(\gamma_5) = \gamma_5$$

$$\Rightarrow m \text{ ist gerade, da } j(\gamma_5) \neq \gamma_5.$$

$$\Rightarrow f = i^n$$

$$\text{Insgesamt erhalten wir } \text{Stab}_{\text{nor}}(\mathcal{F}) \subseteq \langle i \rangle \subseteq \text{Stab}_{\text{pw}}(\mathcal{F}). \quad \square$$

3.4.2 Die Fläche $\Sigma_{2,0}$

Auch für $S = \Sigma_{2,0}$ gibt es genau zwei Graphen, die zwei Ecken der Valenz 3 und drei Kanten haben, vgl. Abbildung 3.4.

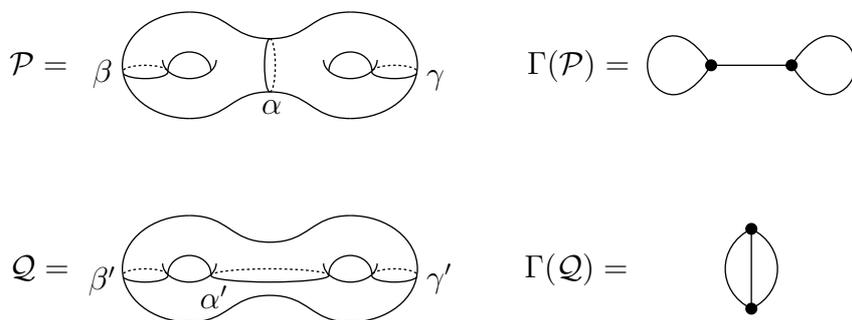


Abbildung 3.4: Hosenerlegungen von $\Sigma_{2,0}$

Seien $\mathcal{P} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ eine Hosenerlegung von $\Sigma_{2,0}$, wobei α separierend ist, und $\mathcal{Q} = \{\alpha', \beta', \gamma'\}$ eine Hosenerlegung von $\Sigma_{2,0}$ mit nichtseparierenden Kurven. Zu α sind zwei

(linke) Halbtwists σ_1, σ_2 assoziiert, da α der Rand von zwei Teilflächen der Form $\Sigma_{1,1}$ ist. Es gilt $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = t_\alpha$, und $\iota = \sigma_1 \circ \sigma_2^{-1}$ ist die hyperelliptische Involution in $\Sigma_{2,0}$, vgl. 1.11.

Man zeigt die folgenden Aussagen analog zu denen in Abschnitt 3.4.1. Wir lassen die Beweise aus.

Bemerkung 3.24:

Gegeben sei die Abbildungsklasse⁴ j aus Abbildung 3.5, die $\Sigma_{2,0}$ um 180° dreht. Es gilt:

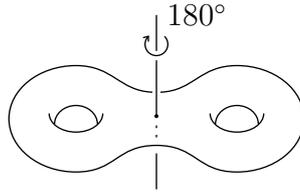


Abbildung 3.5: Eine spezielle Abbildungsklasse in $\Sigma_{2,0}$

$$\begin{aligned} \text{Stab}_{pw}(\mathcal{P}) &= \langle \sigma_1, t_\beta, t_\gamma, \iota \rangle \cong \mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ \text{Stab}(\mathcal{P}) &= \langle \sigma_1, t_\beta, t_\gamma, \iota, j \rangle \end{aligned}$$

Definiert man $T_{\mathcal{P}}$ wie in Bemerkung 3.5, so gilt $T_{\mathcal{P}} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Die Sequenz

$$1 \longrightarrow \text{Stab}_{pw}(\mathcal{P}) \longrightarrow \text{Stab}(\mathcal{P}) \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 1$$

ist exakt und spaltet mit dem Schnitt $s_{\mathcal{P}} : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \text{Stab}(\mathcal{P})$, welcher den Erzeuger von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ auf j abbildet. Sie liefert eine Darstellung von $\text{Stab}(\mathcal{P})$ als semidirektes Produkt $\text{Stab}(\mathcal{P}) \cong \langle \sigma_1, t_\beta, t_\gamma, \iota \rangle \rtimes_{\varphi} \langle j \rangle$ mit $\varphi(j)(\sigma_1) = \iota \circ \sigma_1$, $\varphi(j)(t_\beta) = t_\gamma$, $\varphi(j)(t_\gamma) = t_\beta$, $\varphi(j)(\iota) = \iota$, vgl. 5.6.

Bemerkung 3.25:

Es gilt $\text{Stab}_{pw}(\mathcal{Q}) = \langle t_{\alpha'}, t_{\beta'}, t_{\gamma'}, \iota \rangle \cong \mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, und die Sequenz

$$1 \longrightarrow \text{Stab}_{pw}(\mathcal{Q}) \longrightarrow \text{Stab}(\mathcal{Q}) \longrightarrow S_3 \longrightarrow 1$$

ist exakt.

Bemerkung 3.26:

Sei $\mathcal{K} = (\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2)$ eine Kante in $\mathcal{P}(\Sigma_{2,0})$ mit $\mathcal{P}_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \gamma_1\}$ und $\mathcal{P}_2 = \{\alpha_1, \alpha_2, \gamma_2\}$.

- a) Ist $\Gamma(\mathcal{P}_1) \cong \Gamma(\mathcal{P}_2) \cong \Gamma(\mathcal{P})$, so ist eine der beiden Kurven α_1, α_2 , o.E. α_1 , separierend und \mathcal{K} ein S -Move. Die Teilfläche von $\Sigma_{2,0} \setminus \alpha_1$, die γ_1, γ_2 enthält, sei mit $\Sigma_{1,1}$ bezeichnet. Wie im Beweis von 3.22a) gibt es ein $f_0 \in \text{Mod}(\Sigma_{2,0})$ mit $f_0|_{S \setminus \Sigma_{1,1}} = \text{id}$, $f_0(\gamma_1) = \gamma_2$, $f_0(\gamma_2) = \gamma_1$ und $f_0^2 = \sigma_1$. Damit gilt:

⁴ Auch dieses j ist von der Parametrisierung der Fläche abhängig.

$$\begin{aligned}\text{Stab}_{or}^+(\mathcal{K}) &= \langle \sigma_1, t_{\alpha_2}, \iota \rangle \cong \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ \text{Stab}_{nor}(\mathcal{K}) &= \langle f_0, t_{\alpha_2}, \iota \rangle \cong \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ [\text{Stab}_{nor}(\mathcal{K}) : \text{Stab}_{or}^+(\mathcal{K})] &= 2\end{aligned}$$

- b) Sei $\Gamma(\mathcal{P}_1) \cong \Gamma(\mathcal{P})$ und $\Gamma(\mathcal{P}_2) \cong \Gamma(\mathcal{Q})$. Wie üblich sei j die zu \mathcal{P}_1 und \mathcal{P}_2 assoziierte Drehung um 180° , vgl. Abbildung 3.5. Dann gilt:

$$\text{Stab}_{or}^+(\mathcal{K}) = \text{Stab}_{nor}(\mathcal{K}) = \langle t_{\alpha_1}, t_{\alpha_2}, \iota, j \rangle \cong (\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

- c) Seien $\Gamma(\mathcal{P}_1) \cong \Gamma(\mathcal{P}_2) \cong \Gamma(\mathcal{Q})$ und j eine zu \mathcal{P}_1 und \mathcal{P}_2 assoziierte Drehung um 180° . Wie im Beweis von 3.22c) gibt es ein $f_0 \in \text{Mod}(\Sigma_{2,0})$ mit $f_0(\alpha_1) = \alpha_1$, $f_0(\alpha_2) = \alpha_2$, $f_0(\gamma_1) = \gamma_2$, $f_0(\gamma_2) = \gamma_1$ und $f_0^2 = \text{id}$. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}\text{Stab}_{or}^+(\mathcal{K}) &= \langle t_{\alpha_1}, t_{\alpha_2}, \iota, j \rangle \\ \text{Stab}_{nor}(\mathcal{K}) &= \langle t_{\alpha_1}, t_{\alpha_2}, \iota, j, f_0 \rangle \\ [\text{Stab}_{nor}(\mathcal{K}) : \text{Stab}_{or}^+(\mathcal{K})] &= 2\end{aligned}$$

Bemerkung 3.27:

Die nachfolgend auftretenden Bezeichnungen sind, der jeweiligen Situation angepaßt, wie in den vorherigen Bemerkungen zu verstehen, d.h. j ist eine Drehung der Fläche um 180° , σ_1 ist ein Halbtwist entlang einer separierenden Kurve, und f_0 ist eine Abbildungsklasse in einem $\Sigma_{1,1} \subseteq \Sigma_{2,0}$, die zwei bzw. drei Kurven vertauscht und für die $f_0^2 = \sigma_1$ bzw. $f_0^3 = \sigma_1^{\pm 1}$ gilt.

- a) Für jede 2-Zelle \mathcal{F} vom Typ (3S) gilt:

$$\begin{aligned}\text{Stab}_{pw}(\mathcal{F}) &= \langle \sigma_1, t_{\alpha_2}, \iota \rangle \\ \text{Stab}_{or}(\mathcal{F}) &= \text{Stab}_{nor}(\mathcal{F}) = \langle f_0, t_{\alpha_2}, \iota \rangle \\ [\text{Stab}_{or}(\mathcal{F}) : \text{Stab}_{pw}(\mathcal{F})] &= 3\end{aligned}$$

- b) Für jede 2-Zelle vom Typ (3A) gilt:

$$\text{Stab}_{pw}(\mathcal{F}) = \text{Stab}_{or}(\mathcal{F}) = \text{Stab}_{nor}(\mathcal{F}) = \langle t_{\alpha_1}, t_{\alpha_2}, \iota, j \rangle$$

- c) Jede 2-Zelle \mathcal{F} vom Typ (4C) besteht aus S -Moves, und es gilt:

$$\begin{aligned}\text{Stab}_{pw}(\mathcal{F}) &= \langle \sigma_1, \iota \rangle \\ \text{Stab}_{or}(\mathcal{F}) &= \langle \sigma_1, \iota, j \circ f_0 \rangle \\ \text{Stab}_{nor}(\mathcal{F}) &= \langle \sigma_1, \iota, j, f_0 \rangle\end{aligned}$$

- d) 2-Zellen vom Typ (5A) kommen nicht vor.

- e) Für jede 2-Zelle vom Typ (6AS) gilt:

$$\text{Stab}_{pw}(\mathcal{F}) = \text{Stab}_{or}(\mathcal{F}) = \text{Stab}_{nor}(\mathcal{F}) = \langle t_{\alpha_1}, \iota \rangle$$

Kapitel 4

Bahnen und Quotienten

Es sei stets $S = \Sigma_{g,b}$ eine kompakte, orientierbare, zusammenhängende Fläche vom Geschlecht g mit b Randkomponenten. Gemäß der Konvention in Abschnitt 1.2, S. 12, nehmen wir an, daß S negative Eulercharakteristik $\chi(S) = 2 - 2g - b$ hat und keine Hose ist. Wir wollen in diesem Kapitel für jede Zelle von $\mathcal{P}(S)$ die Bahn unter der Aktion der Abbildungsklassengruppe $\text{Mod}(S)$ bestimmen und damit den Quotientenkomplex $\mathcal{Q}(S)$ aufstellen.

4.1 Bahnen von Ecken

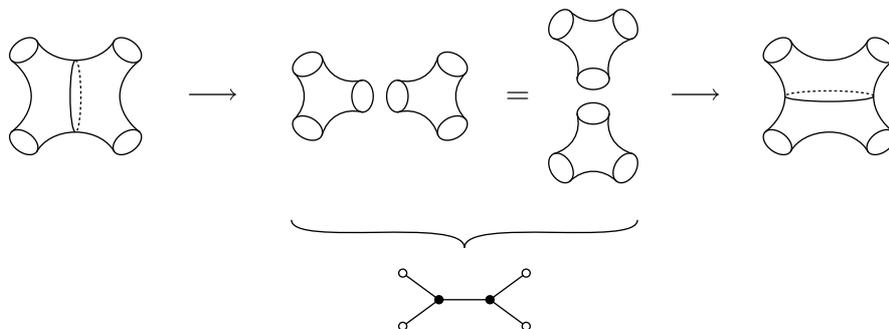
Zu einer Hosenzerlegung \mathcal{P} von S haben wir in Definition 1.21 einen Graphen $\Gamma(\mathcal{P})$ definiert. Dieser hilft uns, die Bahnen der Ecken von $\mathcal{P}(S)$ zu bestimmen.

Bemerkung 4.1:

Für zwei Hosenzerlegungen \mathcal{P}, \mathcal{Q} von S gibt es genau dann ein $f \in \text{Mod}(S)$ mit $f(\mathcal{P}) = \mathcal{Q}$, wenn $\Gamma(\mathcal{P}) \cong \Gamma(\mathcal{Q})$ gilt.

Beweis:

Die Richtung „ \Rightarrow “ ist nach Konstruktion der Graphen klar. Die Rückrichtung folgt aus dem Koordinatenwechselprinzip: Die Fläche S wird von \mathcal{P} in Hosen zerlegt, welche bijektiv auf die Hosen von \mathcal{Q} abgebildet und wieder zu S verklebt werden.



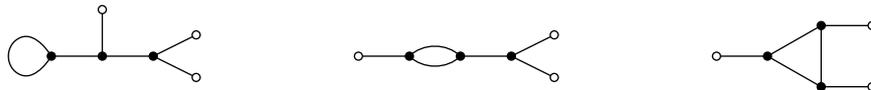
□

Folgerung 4.2:

Die Bahnen der Hosenzerlegungen von S unter der Aktion von $\text{Mod}(S)$ auf $\mathcal{P}(S)$ entsprechen den Isomorphieklassen von Graphen mit $2g - 2 + b$ Ecken der Valenz 3, b Ecken der Valenz 1 und $3g - 3 + 2b$ Kanten. Insbesondere hat $\mathcal{Q}(S)$ nur endlich viele Ecken.

Beispiele 4.3:

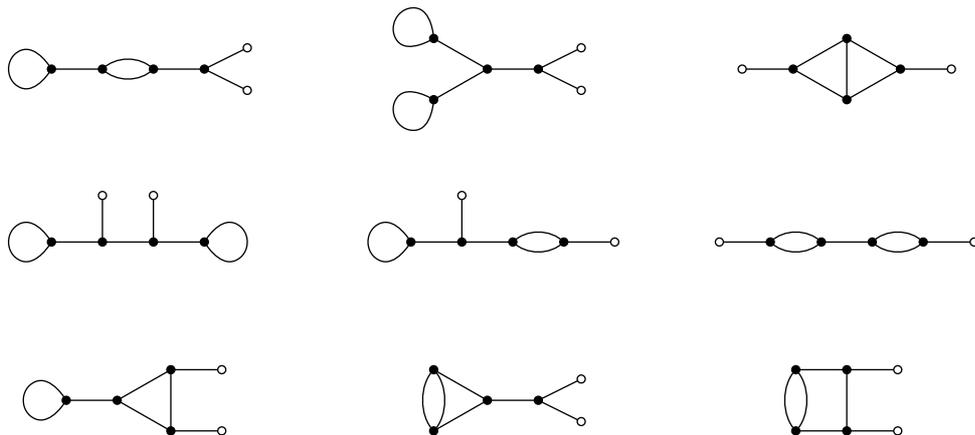
a) Ist $S = \Sigma_{1,3}$, so gibt es in $\mathcal{P}^0(S)$ drei Bahnen. Die zugehörigen Graphen sind:



b) Ist $S = \Sigma_{2,0}$, so gibt es in $\mathcal{P}^0(S)$ zwei Bahnen. Die zugehörigen Graphen sind:



c) Ist $S = \Sigma_{2,2}$, so gibt es in $\mathcal{P}^0(S)$ neun Bahnen. Die zugehörigen Graphen sind:

**Bemerkung 4.4:**

Es ist keine Formel bekannt, wie man aus der Kenntnis von g und b die Anzahl der Bahnen von $\mathcal{P}^0(S)$ berechnen kann.

4.2 Bahnen von Kanten

In Kapitel 2 haben wir die Bahnen und den Quotientenkomplex für die Flächen $\Sigma_{1,1}$ und $\Sigma_{0,4}$ bestimmt. Dabei haben wir gesehen, daß in diesen Fällen $\text{Mod}(S)$ nicht invertionsfrei auf $\mathcal{P}(S)$ operiert und $\mathcal{P}(S)$ deshalb baryzentrisch unterteilt werden muß, um den Quotienten $\mathcal{Q}(S)$ aufzustellen. Wir zeigen nun, daß diese Aussage für alle Flächen gilt.

Bemerkung 4.5:

Die Aktion von $\text{Mod}(S)$ auf $\mathcal{P}(S)$ ist niemals inversionsfrei. Für $g \geq 1$ wird jede Kante, die durch einen S -Move gegeben ist, invertiert. (In 4.11 werden wir lernen, welche A -Moves invertiert werden.)

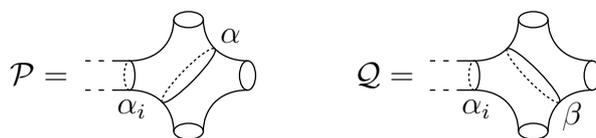
Beweis:

Seien zunächst $g \geq 1$ und $\mathcal{K} = (\mathcal{P} - \mathcal{Q})$ ein S -Move mit $\mathcal{P} = \{\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ und $\mathcal{Q} = \{\beta, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$. Mit der Notation aus Abschnitt 3.2 gilt $F_{\alpha, \beta}^- \cap \text{Stab}(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\})$

$$\supseteq F_{\alpha, \beta}^- \cap \text{Stab}_{pw}(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}) \stackrel{3.11a)}{\neq} \emptyset.$$

$\stackrel{3.12}{\Rightarrow} \mathcal{K}$ wird invertiert.

Sei nun $g = 0$. Gemäß den Voraussetzungen an S ist dann $b \geq 4$. Daher gibt es Hosenerlegungen \mathcal{P}, \mathcal{Q} der folgenden Form:

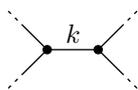


\mathcal{P} und \mathcal{Q} sind in $\mathcal{P}(S)$ durch einen A -Move $\mathcal{K} = (\mathcal{P} - \mathcal{Q})$ verbunden. Es gibt ein $f \in \text{Mod}(S)$ mit $f(\mathcal{P}) = \mathcal{Q}$ und $f(\mathcal{Q}) = \mathcal{P}$, zum Beispiel einen geeigneten Halbtwist¹ um α_i . \square

Im folgenden wollen wir untersuchen, welche Kanten von $\mathcal{P}(S)$ durch ein $f \in \text{Mod}(S)$ aufeinander abgebildet werden können. Wir werden sehen, daß das ein kombinatorisches Problem ist, welches auf die Untersuchung der zu Hosenerlegungen und Reduktionssystemen assoziierten Graphen und deren Automorphismen zurückgeführt werden kann.

Definition und Bemerkung 4.6:

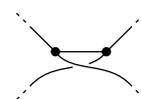
- a) Seien Γ_1, Γ_2 hosenzulässige Graphen, vgl. 1.22. Wenn Γ_2 aus Γ_1 entsteht, indem man eine Kante k der Form



durch eine Kante der Form



oder



¹ Beachte, daß Halbtwists um α_i von der Parametrisierung der Fläche abhängen.

ersetzt (d.h. die vier Ausgänge der Kante werden neu gruppiert), so sagen wir, daß Γ_2 aus Γ_1 durch einen Move an k hervorgeht.

- b) Jeder A -Move $\mathcal{K} = (\mathcal{P} - \mathcal{Q})$ induziert einen Move der assoziierten Graphen $\Gamma(\mathcal{P}) - \Gamma(\mathcal{Q})$. Umgekehrt wird jeder Move zweier hosenzulässiger Graphen Γ_1, Γ_2 durch einen A -Move zwischen zwei Hosenerlegungen \mathcal{P}, \mathcal{Q} auf einer geeigneten Fläche S realisiert.

Von nun an seien stets $\mathcal{K} = (\mathcal{P} - \mathcal{Q}), \mathcal{K}' = (\mathcal{P}' - \mathcal{Q}')$ Kanten in $\mathcal{P}(S)$ mit $\mathcal{P} = \{\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}, \mathcal{Q} = \{\beta, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}, \mathcal{P}' = \{\alpha', \alpha'_2, \dots, \alpha'_n\}, \mathcal{Q}' = \{\beta', \alpha'_2, \dots, \alpha'_n\}$.

Definition und Bemerkung 4.7:

- a) Zusätzlich zu den Graphen $\Gamma(\mathcal{P})$ und $\Gamma(\mathcal{Q})$ liefert auch das Reduktionssystem $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = \{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}$, wie in 1.23 beschrieben, einen Graphen $\Gamma(\mathcal{P} \cap \mathcal{Q})$.
- b) Ist \mathcal{K} ein S -Move, so entsteht $\Gamma(\mathcal{P} \cap \mathcal{Q})$ aus $\Gamma(\mathcal{P})$ bzw. $\Gamma(\mathcal{Q})$, indem die zu α bzw. β gehörige Schleife entfernt wird, vgl. Abbildung 4.1. Die an α bzw. β angrenzende Ecke $v_* = v_*(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ hat in $\Gamma(\mathcal{P} \cap \mathcal{Q})$ nur noch Valenz 1.

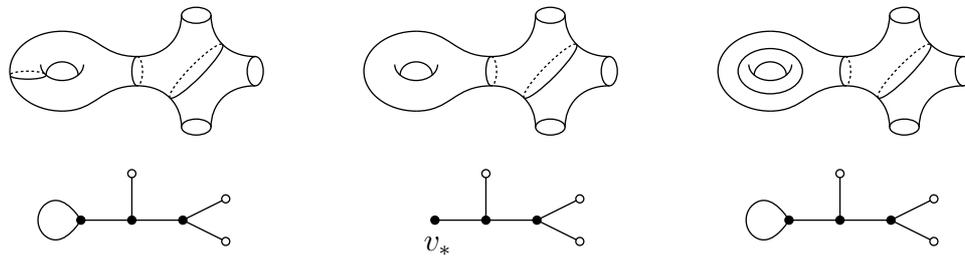


Abbildung 4.1: $\Gamma(\mathcal{P} \cap \mathcal{Q})$ bei einem S -Move

- c) Ist \mathcal{K} ein A -Move, so entsteht $\Gamma(\mathcal{P} \cap \mathcal{Q})$ aus $\Gamma(\mathcal{P})$ bzw. $\Gamma(\mathcal{Q})$, indem die zu α bzw. β gehörige Kante zu einer Ecke $v_* = v_*(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ kontrahiert wird, vgl. Abbildung 4.2. v_* hat Valenz 4.

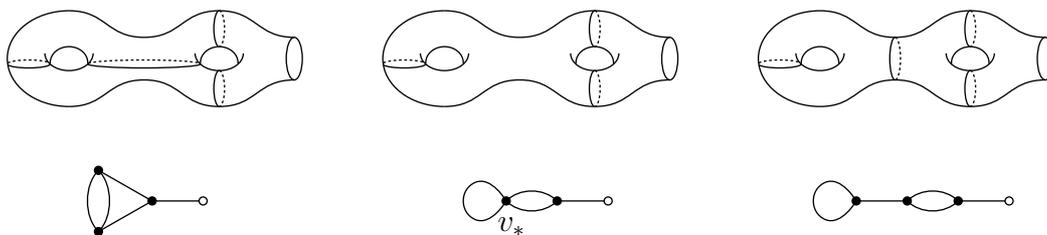
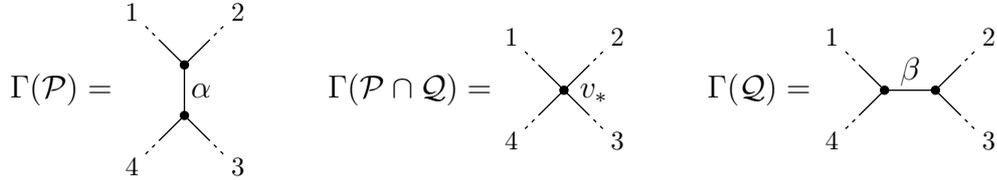


Abbildung 4.2: $\Gamma(\mathcal{P} \cap \mathcal{Q})$ bei einem A -Move

Jeder Automorphismus $\psi \in \text{Aut}(\Gamma(\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}))$ bildet v_* auf sich ab und induziert somit eine Permutation $\psi_* \in S_4$ der an v_* angrenzenden Kanten k_1, \dots, k_4 . Wir wählen die Numerierung von k_1, \dots, k_4 so, daß in $\Gamma(\mathcal{P})$ die Kanten k_1, k_2 und in $\Gamma(\mathcal{Q})$ die Kanten k_1, k_4 benachbart sind.



Definition und Bemerkung 4.8:

- a) Mit $\text{Iso}^*(\Gamma(\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}), \Gamma(\mathcal{P}' \cap \mathcal{Q}'))$ bezeichnen wir die Menge derjenigen Isomorphismen $\Gamma(\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{P}' \cap \mathcal{Q}')$, die $v_*(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ auf $v_*(\mathcal{P}', \mathcal{Q}')$ abbilden. Analog dazu ist die Gruppe $\text{Aut}^*(\Gamma(\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}))$ gegeben.

Sind $\mathcal{K}, \mathcal{K}'$ A -Moves, so gilt stets $\text{Iso}^*(\Gamma(\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}), \Gamma(\mathcal{P}' \cap \mathcal{Q}')) = \text{Iso}(\Gamma(\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}), \Gamma(\mathcal{P}' \cap \mathcal{Q}'))$, da $v_*(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ bzw. $v_*(\mathcal{P}', \mathcal{Q}')$ jeweils die einzigen Ecken in $\Gamma(\mathcal{P} \cap \mathcal{Q})$ bzw. $\Gamma(\mathcal{P}' \cap \mathcal{Q}')$ der Valenz 4 sind. Im Falle von S -Moves ist es möglich, daß $\text{Iso}^*(\Gamma(\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}), \Gamma(\mathcal{P}' \cap \mathcal{Q}')) \subsetneq \text{Iso}(\Gamma(\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}), \Gamma(\mathcal{P}' \cap \mathcal{Q}'))$ gilt. (Sind $\mathcal{K}, \mathcal{K}'$ Moves von unterschiedlichem Typ, so sind alle obigen Mengen leer.)

- b) Jeder Graphenisomorphismus $\varphi : \Gamma(\mathcal{P}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{P}')$ mit $\varphi(\alpha) = \alpha'$ induziert einen Isomorphismus $\hat{\varphi} \in \text{Iso}^*(\Gamma(\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}), \Gamma(\mathcal{P}' \cap \mathcal{Q}'))$, analog für \mathcal{Q} und \mathcal{Q}' .

Wir sind nun in der Lage, die Bahnen der Kanten von $\mathcal{P}(S)$ zu charakterisieren.

Satz 4.9:

Zwei Kanten $\mathcal{K}, \mathcal{K}'$ liegen genau dann in derselben Bahn unter der Aktion von $\text{Mod}(S)$ auf $\mathcal{P}(S)$, wenn es Isomorphismen $\varphi : \Gamma(\mathcal{P}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{P}')$ und $\psi : \Gamma(\mathcal{Q}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{Q}')$ gibt mit $\varphi(\alpha) = \alpha'$, $\psi(\beta) = \beta'$ und $\hat{\varphi} = \hat{\psi}$.

Satz 4.9 besagt, daß die Frage nach den Bahnen ein rein kombinatorisches Problem ist. Allein die Kenntnis aller hosenzulässiger Graphen genügt, um dieses Problem zu lösen.

Beweis von Satz 4.9:

„ \Rightarrow “: Sei $f \in \text{Mod}(S)$ mit $f(\mathcal{P}) = \mathcal{P}'$ und $f(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}'$. Dann gilt $f(\alpha) = \alpha'$ und $f(\beta) = \beta'$ und $f(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}) = \{\alpha'_2, \dots, \alpha'_n\}$, d.h. f induziert Isomorphismen $\varphi_f : \Gamma(\mathcal{P}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{P}')$ mit $\varphi_f(\alpha) = \alpha'$ und $\psi_f : \Gamma(\mathcal{Q}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{Q}')$ mit $\psi_f(\beta) = \beta'$. Für die induzierten Isomorphismen $\hat{\varphi}_f, \hat{\psi}_f$ gilt $\hat{\varphi}_f = \hat{\psi}_f$, da beide durch die Abbildungsklasse f gegeben sind.

„ \Leftarrow “: Seien $\varphi : \Gamma(\mathcal{P}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{P}')$ und $\psi : \Gamma(\mathcal{Q}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{Q}')$ wie verlangt. Offensichtlich sind $\mathcal{K}, \mathcal{K}'$ vom selben Typ, sonst hätten $\Gamma(\mathcal{P} \cap \mathcal{Q})$ und $\Gamma(\mathcal{P}' \cap \mathcal{Q}')$ unterschiedlich viele Ecken der Valenz 4 und wären nicht isomorph.

1. Fall: $\mathcal{K}, \mathcal{K}'$ sind S -Moves.

Sei $\Sigma'_{1,1} \subseteq S$ mit $\alpha', \beta' \subseteq \Sigma'_{1,1}$. Es gibt eine Parametrisierung von $\Sigma'_{1,1}$ mit $\alpha' = [1, 0]$ und $\beta' = [0, 1]$.

Sei $g \in \text{Mod}(S)$ eine Realisierung von φ mit $g(\mathcal{P}) = \mathcal{P}'$ und $g(\alpha) = \alpha'$. Es gilt $g(\beta) \subseteq \Sigma'_{1,1}$. Da $(\alpha' - g(\beta)) = (g(\alpha) - g(\beta)) = g(\alpha - \beta)$ ein Move ist, ist $g(\beta)$ von der Form $g(\beta) = [t, 1]$ für ein $t \in \mathbb{Z}$. Es gibt ein $\hat{h} \in \text{Mod}(\Sigma'_{1,1}) \cong \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $\hat{h}([1, 0]) = [1, 0]$ und $\hat{h}([t, 1]) = [0, 1]$, nämlich $\hat{h} = \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, und somit ein $h \in \text{Mod}(S)$ mit $h|_{S \setminus \Sigma'_{1,1}} = \text{id}$, $h(\alpha') = \alpha'$ und $h(g(\beta)) = \beta'$. Für $f := h \circ g$ gilt somit $f(\alpha) = \alpha'$ und $f(\beta) = \beta'$ und $f(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}) = \{\alpha'_2, \dots, \alpha'_n\}$, also $f(\mathcal{P}) = \mathcal{P}'$ und $f(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}'$.

2. Fall: $\mathcal{K}, \mathcal{K}'$ sind A -Moves.

Seien $\Sigma_{0,4} \subseteq S$ mit $\alpha, \beta \subseteq \Sigma_{0,4}$ und $\Sigma'_{0,4} \subseteq S$ mit $\alpha', \beta' \subseteq \Sigma'_{0,4}$. Es gibt eine Parametrisierung von $\Sigma'_{0,4}$ mit $\alpha' = [1, 0]$.

Sei $g \in \text{Mod}(S)$ eine Realisierung von φ mit $g(\mathcal{P}) = \mathcal{P}'$ und $g(\alpha) = \alpha'$. Es gilt $g(\Sigma_{0,4}) = \Sigma'_{0,4}$. Da $\alpha' - \beta'$ und $\alpha' - g(\beta)$ Moves sind, gibt es $s, t \in \mathbb{Z}$ mit $\beta' = [s, 1]$ und $g(\beta) = [t, 1]$.

g induziert Isomorphismen $\varphi_g : \Gamma(\mathcal{P}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{P}')$ und $\psi_g : \Gamma(\mathcal{Q}) \rightarrow \Gamma(g(\mathcal{Q}))$ mit $\varphi_g(\alpha) = \alpha'$ und $\psi_g(\beta) = g(\beta)$ und $\hat{\varphi}_g = \hat{\psi}_g : \Gamma(\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{P}' \cap g(\mathcal{Q}))$. Es gilt $\varphi_g = \varphi$, da g eine Realisierung von φ ist. Beachte die Gleichheit $\Gamma(\mathcal{P}' \cap g(\mathcal{Q})) = \Gamma(\mathcal{P}' \cap \mathcal{Q}')$.

Für den Isomorphismus $\hat{\psi} \circ \hat{\psi}_g^{-1} : \Gamma(\mathcal{P}' \cap g(\mathcal{Q})) \rightarrow \Gamma(\mathcal{P}' \cap \mathcal{Q}')$ gilt $\hat{\psi} \circ \hat{\psi}_g^{-1} = \hat{\varphi} \circ \hat{\varphi}_g^{-1} = \text{id}$. Daher werden die Randkurven von $\Sigma'_{0,4}$ von $\psi \circ \psi_g^{-1}$ jeweils auf sich abgebildet, und $g(\beta)$ und $\psi \circ \psi_g^{-1}(g(\beta)) = \psi(\beta) = \beta'$ gruppieren die Randkurven von $\Sigma'_{0,4}$ auf dieselbe Art.

$\Rightarrow s$ und t haben dieselbe Parität, d.h. $s - t$ ist gerade.

Daher gibt es nach 2.16 eine Abbildungsklasse $\hat{h} \in \text{Mod}(\Sigma'_{0,4}) \cong V_4 \rtimes \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ mit $\hat{h}|_{\partial \Sigma'_{0,4}} = \text{id}$, $\hat{h}([1, 0]) = [1, 0]$ und $\hat{h}([t, 1]) = [s, 1]$, nämlich $\hat{h} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 1 & s-t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$, und somit ein $h \in \text{Mod}(S)$ mit $h|_{S \setminus \Sigma'_{0,4}} = \text{id}$, $h(\alpha') = \alpha'$ und $h(g(\beta)) = \beta'$. Für $f := h \circ g$ gilt somit $f(\alpha) = \alpha'$ und $f(\beta) = \beta'$ und $f(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}) = \{\alpha'_2, \dots, \alpha'_n\}$, also $f(\mathcal{P}) = \mathcal{P}'$ und $f(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}'$. \square

Die Aussage von Satz 4.9 ist noch sehr allgemein. Im folgenden betrachten wir einige Spezialfälle, in denen wir bessere Charakterisierungen erreichen können.

Bemerkung 4.10:

Zwei S -Moves $\mathcal{K}, \mathcal{K}'$ liegen genau dann in derselben Bahn, wenn $\text{Iso}^*(\Gamma(\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}), \Gamma(\mathcal{P}' \cap \mathcal{Q}')) \neq \emptyset$ ist.

Beweis:

Jeder Isomorphismus $\chi \in \text{Iso}^*(\Gamma(\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}), \Gamma(\mathcal{P}' \cap \mathcal{Q}'))$ kann eindeutig fortgesetzt werden zu Isomorphismen $\varphi : \Gamma(\mathcal{P}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{P}')$, $\psi : \Gamma(\mathcal{Q}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{Q}')$, indem die zusätzlichen Schleifen jeweils aufeinander abgebildet werden. Nach Konstruktion gilt $\varphi(\alpha) = \alpha'$ und $\psi(\beta) = \beta'$ und $\hat{\varphi} = \hat{\psi} = \chi$. Sind umgekehrt φ und ψ wie oben gegeben, so ist $\hat{\varphi} = \hat{\psi} \in \text{Iso}^*(\Gamma(\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}), \Gamma(\mathcal{P}' \cap \mathcal{Q}'))$. Nach Satz 4.9 folgt die Behauptung. \square

Bemerkung 4.11:

Ein A -Move \mathcal{K} wird genau dann invertiert, wenn es einen Isomorphismus $\varphi : \Gamma(\mathcal{P}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{Q})$ mit $\varphi(\alpha) = \beta$ gibt, dessen zugehörige Permutation $\hat{\varphi}_* \in S_4$ ungerade, d.h. entweder eine Transposition oder ein 4-Zykel ist.

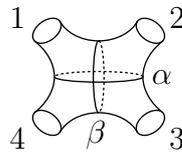
Beweis:

„ \Rightarrow “: Sei $f \in \text{Mod}(S)$ mit $f(\mathcal{P}) = \mathcal{Q}$ und $f(\mathcal{Q}) = \mathcal{P}$. f induziert Isomorphismen $\varphi : \Gamma(\mathcal{P}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{Q})$ und $\psi : \Gamma(\mathcal{Q}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{P})$ mit $\hat{\varphi} = \hat{\psi} \in \text{Aut}(\Gamma(\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}))$ und $\hat{\varphi}_* = \hat{\psi}_* \in S_4$.

Nach der Konvention in 4.7c) sind in $\Gamma(\mathcal{P})$ die Kanten k_1, k_2 und in $\Gamma(\mathcal{Q})$ die Kanten k_1, k_4 benachbart. Da φ und ψ benachbarte Kanten auf benachbarte Kanten abbilden, gilt $\hat{\varphi}_*(\{1, 2\}) = \{1, 4\}$ oder $\hat{\varphi}_*(\{1, 2\}) = \{2, 3\}$ sowie $\hat{\psi}_*(\{1, 4\}) = \{1, 2\}$ oder $\hat{\psi}_*(\{1, 4\}) = \{3, 4\}$. In allen Fällen ist $\hat{\varphi}_* = \hat{\psi}_*$ weder die Identität noch eine Verkettung zweier disjunkter Transpositionen noch ein 3-Zykel.

$\Rightarrow \hat{\varphi}_*$ ist eine Transposition oder ein 4-Zykel.

„ \Leftarrow “: Sei $\Sigma_{0,4} \subseteq S$ diejenige Teilfläche, die α und β enthält. $\Sigma_{0,4}$ kann so parametrisiert werden, daß $\alpha = [1, 0]$ und $\beta = [0, 1]$ gilt und daß die Kanten k_1, \dots, k_4 den Randkomponenten $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in V_4$ in dieser Reihenfolge entsprechen.



Sei nun $\varphi : \Gamma(\mathcal{P}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{Q})$ ein Isomorphismus wie verlangt. Es gibt eine Realisierung $g \in \text{Mod}(S)$ mit $g(\mathcal{P}) = \mathcal{Q}$ und $g(\alpha) = \beta$. g schränkt sich ein zu einem Element $g|_{\Sigma_{0,4}} \in \text{Mod}(\Sigma_{0,4}) \cong V_4 \rtimes \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$. Wegen $g(\alpha) = \beta$ ist $g|_{\Sigma_{0,4}}$ von der Form $g|_{\Sigma_{0,4}} = \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & d \end{pmatrix} \right)$ für geeignete $x, y \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $d \in \mathbb{Z}$. Es gilt $g|_{\Sigma_{0,4}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 \\ y+d \end{pmatrix}$, $g|_{\Sigma_{0,4}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 \\ y+d+1 \end{pmatrix}$, $g|_{\Sigma_{0,4}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y+1 \end{pmatrix}$, $g|_{\Sigma_{0,4}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Da diese Aktion von g auf den Randkomponenten von $\Sigma_{0,4}$ mit $\hat{\varphi}_*$ übereinstimmt, ist $\hat{\varphi}_*$ durch die Werte von x, y und die Parität von d bestimmt:

	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
d gerade	$\hat{\varphi}_* = (13)$	$\hat{\varphi}_* = (1234)$	$\hat{\varphi}_* = (1432)$	$\hat{\varphi}_* = (24)$
d ungerade	$\hat{\varphi}_* = (123)$	$\hat{\varphi}_* = (134)$	$\hat{\varphi}_* = (243)$	$\hat{\varphi}_* = (142)$

Nach Voraussetzung ist $\hat{\varphi}_*$ eine Transposition oder ein 4-Zykel, also ist d gerade. Daher gibt es nach 2.16 ein $\hat{h} \in \text{Mod}(\Sigma_{0,4}) \cong V_4 \rtimes \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ mit $\hat{h}|_{\partial\Sigma_{0,4}} = \text{id}$, $\hat{h}([0, 1]) = [0, 1]$ und $\hat{h}([1, d]) = [1, 0]$, nämlich $\hat{h} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -d \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -d & 1 \end{pmatrix}$, und somit ein $h \in \text{Mod}(S)$ mit $h|_{S \setminus \Sigma_{0,4}} = \text{id}$, $h(\beta) = \beta$ und $h([1, d]) = \alpha$.
 $\Rightarrow h \circ g(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}) = \{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ und $h \circ g(\alpha) = \beta$ und $h \circ g(\beta) = \alpha$
 $\Rightarrow f := h \circ g$ invertiert \mathcal{K} . □

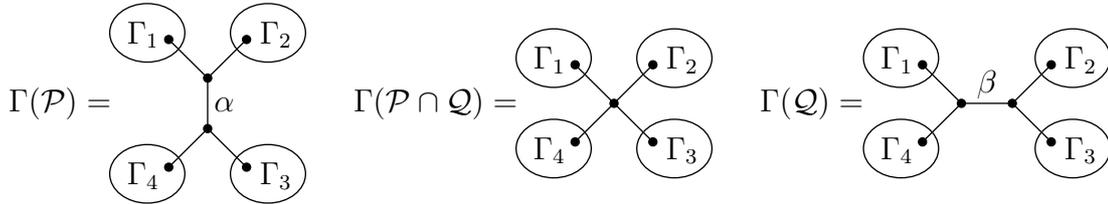
Folgerung 4.12:

Seien \mathcal{K} ein A -Move, $\Gamma(\mathcal{P}) \cong \Gamma(\mathcal{Q})$ und $\varphi : \Gamma(\mathcal{P}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{Q})$ ein Isomorphismus mit $\varphi(\alpha) = \beta$. Wir geben zwei hinreichende Kriterien dafür an, daß \mathcal{K} invertiert wird.

- a) Sind α, β separierend², so wird \mathcal{K} invertiert.
- b) Sind α, β nichtseparierend² und gibt es einen Move $\Gamma(\mathcal{P}) \rightarrow \Gamma'$ an α mit $\Gamma(\mathcal{P}) \not\cong \Gamma'$, so wird \mathcal{K} invertiert.

Beweis:

- a) $\Gamma(\mathcal{P}), \Gamma(\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}), \Gamma(\mathcal{Q})$ haben folgende Form:



φ induziert $\hat{\varphi} \in \text{Aut}(\Gamma(\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}))$ und $\hat{\varphi}_* \in S_4$. Wegen $\varphi(\alpha) = \beta$ gilt $\hat{\varphi}_*({1, 2}) = {1, 4}$ oder $\hat{\varphi}_*({1, 2}) = {2, 3}$, in beiden Fällen ist $\hat{\varphi}_*$ weder die Identität noch eine Verkettung zweier disjunkter Transpositionen. Ist $\hat{\varphi}_*$ eine Transposition oder ein 4-Zykel, so folgt die Aussage aus Bemerkung 4.11.

Sei also $\hat{\varphi}_*$ ein 3-Zykel, und o.E. sei $\hat{\varphi}_*(1) = 1$.
 $\Rightarrow \hat{\varphi}_*(2) = 4 \Rightarrow \hat{\varphi}_* = (243)$
 $\Rightarrow \varphi(\Gamma_2) = \Gamma_4$ und $\varphi(\Gamma_4) = \Gamma_3$ und $\varphi(\Gamma_3) = \Gamma_2$
 $\Rightarrow \Gamma_2 \cong \Gamma_3 \cong \Gamma_4$

Daher gibt es einen Isomorphismus $\psi : \Gamma(\mathcal{P}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{Q})$ mit $\psi(\alpha) = \beta$ sowie $\psi(\Gamma_1) = \Gamma_1, \psi(\Gamma_2) = \Gamma_4, \psi(\Gamma_3) = \Gamma_3, \psi(\Gamma_4) = \Gamma_2$. Für dieses ψ gilt $\hat{\psi}_* = (24)$, weshalb \mathcal{K} nach Bemerkung 4.11 invertiert wird.

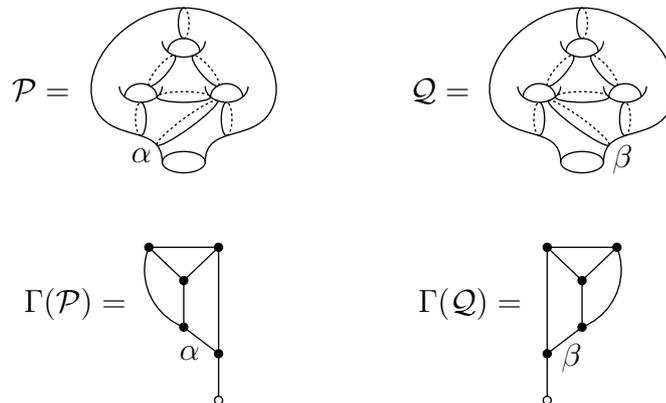
² Wegen $\varphi(\alpha) = \beta$ ist α genau dann separierend, wenn β separierend ist.

- b) Sei $f \in \text{Mod}(S)$ eine Realisierung von φ mit $f(\mathcal{P}) = \mathcal{Q}$ und $f(\alpha) = \beta$. Da $(\mathcal{Q} - f(\mathcal{Q})) = (f(\mathcal{P}) - f(\mathcal{Q})) = f(\mathcal{P} - \mathcal{Q})$ ein A -Move ist, geht $\Gamma(f(\mathcal{Q}))$ durch einen Move an β aus $\Gamma(\mathcal{Q})$ hervor. Somit ist $\Gamma(f(\mathcal{Q}))$ isomorph zu $\Gamma(\mathcal{P})$ oder Γ' und gruppiert die Kanten k_1, \dots, k_4 auf dieselbe Art wie dieser. Wegen $\Gamma(f(\mathcal{Q})) \cong \Gamma(\mathcal{Q}) \cong \Gamma(\mathcal{P}) \not\cong \Gamma'$ gibt es demnach einen Isomorphismus $\psi : \Gamma(\mathcal{Q}) \rightarrow \Gamma(f(\mathcal{Q})) \xrightarrow{\sim} \Gamma(\mathcal{P})$ mit $\psi(\beta) = \alpha$, der auf $\Gamma(\mathcal{Q}) \setminus \{\beta\}$ durch f gegeben ist. Da φ und ψ beide von f induziert werden, gilt $\hat{\varphi} = \hat{\psi}$. Nach Satz 4.9 folgt die Behauptung. \square

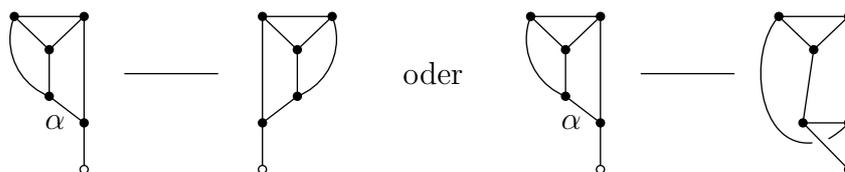
Beispiele 4.13:

Wir geben zwei Beispiele von A -Moves $\mathcal{K} = (\mathcal{P} - \mathcal{Q})$ an, für die $\Gamma(\mathcal{P}) \cong \Gamma(\mathcal{Q})$ gilt mit einem Isomorphismus $\varphi : \Gamma(\mathcal{P}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{Q})$, der α auf β abbildet. Beide Beispiele werden nicht durch die Aussagen in 4.12 abgedeckt. Im ersten Beispiel wird \mathcal{K} invertiert, im zweiten nicht.

- a) Gegeben seien folgende Hosenzerlegungen \mathcal{P}, \mathcal{Q} mit zugehörigen Graphen:



α, β sind nichtseparierend. Es gibt einen Isomorphismus $\varphi : \Gamma(\mathcal{P}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{Q})$ mit $\varphi(\alpha) = \beta$. Jeder Move $\Gamma(\mathcal{P}) - \Gamma'$ an α ist von der Form

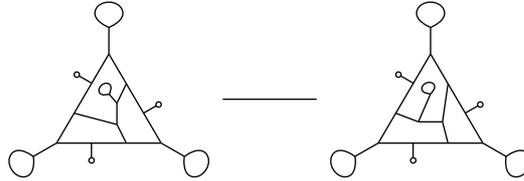


In beiden Fällen ist $\Gamma' \cong \Gamma(\mathcal{Q})$. Somit sind die Voraussetzungen von 4.12 nicht erfüllt. Es gibt aber trotzdem ein $f \in \text{Mod}(S)$ mit $f(\mathcal{P}) = \mathcal{Q}$ und $f(\mathcal{Q}) = \mathcal{P}$, zum Beispiel eine geeignete Drehung der Fläche um 180° .

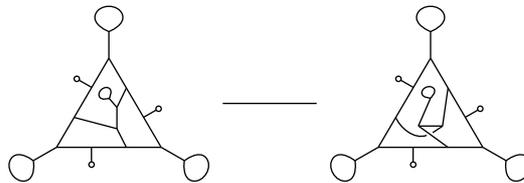
- b) Gegeben sei folgender Graphenmove:



Sei $\mathcal{P} \sim \mathcal{Q}$ eine Realisierung von $\Gamma_1 \sim \Gamma_2$ auf einer geeigneten Fläche S . α, β sind nichtseparierend. Es gibt einen Isomorphismus $\varphi : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ mit $\varphi(\alpha) = \beta$. Jeder Move $\Gamma_1 \sim \Gamma'$ an α ist von der Form

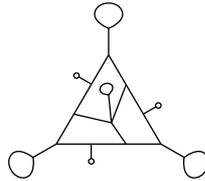


oder



In beiden Fällen ist $\Gamma' \cong \Gamma_2$. Somit sind die Voraussetzungen von 4.12 nicht erfüllt.

$\Gamma(\mathcal{P} \cap \mathcal{Q})$ sieht folgendermaßen aus:



Es ist leicht zu sehen, daß jeder Automorphismus $\psi \in \Gamma(\mathcal{P} \cap \mathcal{Q})$ bis auf Schleifeninversionen entweder die Identität oder von Ordnung 3 ist. Nach Bemerkung 4.11 wird \mathcal{K} also nicht invertiert.

Bemerkung 4.14:

Seien $\mathcal{K}_1 = (\mathcal{P} \sim \mathcal{Q}_1)$, $\mathcal{K}_2 = (\mathcal{P} \sim \mathcal{Q}_2)$ A -Moves mit $\mathcal{P} = \{\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$, $\mathcal{Q}_1 = \{\beta, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$, $\mathcal{Q}_2 = \{\gamma, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$. Weiter sei $\Sigma_{0,4} \subseteq S$ mit $\alpha, \beta, \gamma \subseteq \Sigma_{0,4}$. $\Sigma_{0,4}$ kann so parametrisiert werden, daß $\alpha = [1, 0]$, $\beta = [0, 1]$ und $\gamma = [t, 1]$ für ein geeignetes $t \in \mathbb{Z}$ gilt.

Beachte, daß stets $\Gamma(\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}_1) = \Gamma(\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}_2) = \Gamma(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\})$ gilt. Die an v_* angrenzenden Kanten k_1, \dots, k_4 in $\Gamma(\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}_1)$ entsprechen den Randkomponenten von $\Sigma_{0,4}$. Sie seien o.E. so numeriert, daß in \mathcal{P} die Kanten k_1, k_2 und in \mathcal{Q}_1 die Kanten k_1, k_4 benachbart sind.

- Ist t gerade, so liegen $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ genau dann in derselben Bahn, wenn es einen Isomorphismus $\chi : \Gamma(\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}_1) \rightarrow \Gamma(\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}_2)$ gibt mit $\chi_* \in \{\text{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$.
- Ist t ungerade, so liegen $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ genau dann in derselben Bahn, wenn es einen Isomorphismus $\chi : \Gamma(\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}_1) \rightarrow \Gamma(\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}_2)$ gibt mit $\chi_* \in \{(12), (34), (1324), (1423)\}$.

Beweis:

„ \Rightarrow “: Sei $f \in \text{Mod}(S)$ mit $f(\mathcal{K}_1) = \mathcal{K}_2$.

$\Rightarrow f(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$ und $f(\mathcal{Q}_1) = \mathcal{Q}_2$.

$\Rightarrow f(\alpha) = \alpha$ und $f(\beta) = \gamma$.

f induziert Isomorphismen $\varphi : \Gamma(\mathcal{P}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{P})$ und $\psi : \Gamma(\mathcal{Q}_1) \rightarrow \Gamma(\mathcal{Q}_2)$ mit $\varphi(\alpha) = \alpha$ und $\psi(\beta) = \gamma$. Es gilt $\hat{\varphi} = \hat{\psi}$ und $\hat{\varphi}_* = \hat{\psi}_*$. Außerdem gilt immer $\hat{\varphi}_*(\{1, 2\}) = \{1, 2\}$ oder $\hat{\varphi}_*(\{1, 2\}) = \{3, 4\}$.

a) Sei t gerade.

\Rightarrow In $\Gamma(\mathcal{Q}_2)$ sind ebenfalls k_1, k_4 benachbart.

$\Rightarrow \hat{\varphi}_*(\{1, 4\}) = \{1, 4\}$ oder $\hat{\varphi}_*(\{1, 4\}) = \{2, 3\}$.

$\hat{\varphi}_*(1) = 1 \Rightarrow \hat{\varphi}_*(2) = 2$ und $\hat{\varphi}_*(4) = 4 \Rightarrow \hat{\varphi}_* = \text{id}$

$\hat{\varphi}_*(1) = 2 \Rightarrow \hat{\varphi}_*(2) = 1$ und $\hat{\varphi}_*(4) = 3 \Rightarrow \hat{\varphi}_* = (12)(34)$

$\hat{\varphi}_*(1) = 3 \Rightarrow \hat{\varphi}_*(2) = 4$ und $\hat{\varphi}_*(4) = 2 \Rightarrow \hat{\varphi}_* = (13)(24)$

$\hat{\varphi}_*(1) = 4 \Rightarrow \hat{\varphi}_*(2) = 3$ und $\hat{\varphi}_*(4) = 1 \Rightarrow \hat{\varphi}_* = (14)(23)$

b) Sei t ungerade.

\Rightarrow In $\Gamma(\mathcal{Q}_2)$ sind k_1, k_3 benachbart.

$\Rightarrow \hat{\varphi}_*(\{1, 4\}) = \{1, 3\}$ oder $\hat{\varphi}_*(\{1, 4\}) = \{2, 4\}$.

$\hat{\varphi}_*(1) = 1 \Rightarrow \hat{\varphi}_*(2) = 2$ und $\hat{\varphi}_*(4) = 3 \Rightarrow \hat{\varphi}_* = (34)$

$\hat{\varphi}_*(1) = 2 \Rightarrow \hat{\varphi}_*(2) = 1$ und $\hat{\varphi}_*(4) = 4 \Rightarrow \hat{\varphi}_* = (12)$

$\hat{\varphi}_*(1) = 3 \Rightarrow \hat{\varphi}_*(2) = 4$ und $\hat{\varphi}_*(4) = 1 \Rightarrow \hat{\varphi}_* = (1324)$

$\hat{\varphi}_*(1) = 4 \Rightarrow \hat{\varphi}_*(2) = 3$ und $\hat{\varphi}_*(4) = 2 \Rightarrow \hat{\varphi}_* = (1423)$

„ \Leftarrow “: Sei $\chi : \Gamma(\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}_1) \rightarrow \Gamma(\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}_2)$ ein Isomorphismus wie verlangt. In allen acht Fällen aus a) und b) gibt es eine Fortsetzung $\varphi : \Gamma(\mathcal{P}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{P})$ mit $\varphi(\alpha) = \alpha$ und $\hat{\varphi} = \chi$. Sei $g \in \text{Mod}(S)$ eine Realisierung von φ mit $g(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$ und $g(\alpha) = \alpha$. g schränkt sich ein zu einem Element $g|_{\Sigma_{0,4}} \in \text{Mod}(\Sigma_{0,4}) \cong V_4 \rtimes \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$. Wegen $g(\alpha) = \alpha$ ist $g|_{\Sigma_{0,4}}$ von der Form $g|_{\Sigma_{0,4}} = \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ für geeignete $x, y \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{Z}$. Wie im Beweis von Bemerkung 4.11 ist $\hat{\varphi}_* = \chi_*$ durch die Werte von x, y und die Parität von b bestimmt:

	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
b gerade	$\chi_* = \text{id}$	$\chi_* = (14)(23)$	$\chi_* = (12)(34)$	$\chi_* = (13)(24)$
b ungerade	$\chi_* = (12)$	$\chi_* = (1324)$	$\chi_* = (34)$	$\chi_* = (1423)$

Nach den Voraussetzungen an χ haben t und b stets dieselbe Parität, d.h. $t - b$ ist gerade. Daher gibt es nach 2.16 ein $\hat{h} \in \text{Mod}(\Sigma_{0,4}) \cong V_4 \rtimes \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ mit $\hat{h}|_{\partial\Sigma_{0,4}} = \text{id}$, $\hat{h}([1, 0]) = [1, 0]$ und $\hat{h}([b, 1]) = [t, 1]$, nämlich $\hat{h} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 1 & t-b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$, und somit ein $h \in \text{Mod}(S)$ mit $h|_{S \setminus \Sigma_{0,4}} = \text{id}$, $h(\alpha) = \alpha$ und $h([b, 1]) = \gamma$.

$\Rightarrow h \circ g(\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}) = \{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ und $h \circ g(\alpha) = \alpha$ und $h \circ g(\beta) = \gamma$

\Rightarrow Für $f := h \circ g$ gilt $f(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$ und $f(\mathcal{Q}_1) = \mathcal{Q}_2$. □

Bemerkung 4.15:

Seien $\mathcal{K}_1 = (\mathcal{P} - \mathcal{Q}_1)$, $\mathcal{K}_2 = (\mathcal{P} - \mathcal{Q}_2)$ A -Moves mit $\mathcal{P} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n\}$, $\mathcal{Q}_1 = \{\beta, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n\}$, $\mathcal{Q}_2 = \{\alpha_1, \gamma, \alpha_3, \dots, \alpha_n\}$. Weiter sei $\Sigma_{1,2} \subseteq S$ mit $\alpha_1, \alpha_2, \beta, \gamma \subseteq \Sigma_{1,2}$. $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ liegen genau dann in derselben Bahn, wenn $\Gamma(\mathcal{Q}_1) \cong \Gamma(\mathcal{Q}_2)$ gilt.

Beweis:

„ \Rightarrow “: Sei $f \in \text{Mod}(S)$ mit $f(\mathcal{K}_1) = \mathcal{K}_2$.

$$\Rightarrow f(\mathcal{P}) = \mathcal{P} \text{ und } f(\mathcal{Q}_1) = \mathcal{Q}_2$$

$$\stackrel{4.1}{\Rightarrow} \Gamma(\mathcal{Q}_1) \cong \Gamma(\mathcal{Q}_2)$$

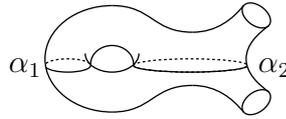
„ \Leftarrow “: Sei $\Gamma(\mathcal{Q}_1) \cong \Gamma(\mathcal{Q}_2)$.

Annahme: Eine der Kurven α_1, α_2 , o.E. α_1 , ist separierend.

Da jede Hosenzerlegung von $\Sigma_{1,2}$ höchstens eine separierende Kurve enthält, sind α_2, γ nichtseparierend. Da jeder Move in $\Sigma_{1,2}$ eine separierende Kurve in eine nichtseparierende Kurve überführt, ist auch β nichtseparierend. (Beachte: Eine Kurve in $\Sigma_{1,2} \subseteq S$ ist genau dann separierend in S , wenn sie separierend in $\Sigma_{1,2}$ ist.) Somit enthält \mathcal{Q}_2 eine separierende Kurve mehr als \mathcal{Q}_1 im Widerspruch zu $\Gamma(\mathcal{Q}_1) \cong \Gamma(\mathcal{Q}_2)$.

α_1, α_2 sind also beides nichtseparierende Kurven. Wegen $\Gamma(\mathcal{Q}_1) \cong \Gamma(\mathcal{Q}_2)$ sind auch β, γ beide separierend oder beide nichtseparierend.

Es gibt eine Abbildungsklasse $j \in \text{Mod}(S)$ mit $j|_{S \setminus \Sigma_{1,2}} = \text{id}$, $j(\alpha_1) = \alpha_2$ und $j(\alpha_2) = \alpha_1$, vgl. Abbildung 3.3 auf S. 48. Sei $\Sigma_{0,4} \subseteq \Sigma_{1,2}$ diejenige Teilfläche mit $\alpha_2, \gamma, j(\beta) \subseteq \Sigma_{0,4}$ und $\partial \Sigma_{0,4} = \partial \Sigma_{1,2} \cup \alpha_1$. Es gibt eine Parametrisierung von $\Sigma_{0,4}$, so daß $\alpha_2 = [1, 0]$, $j(\beta) = [s, 1]$ und $\gamma = [t, 1]$ für geeignete $s, t \in \mathbb{Z}$ gilt und daß die zu α_i gehörigen Randkomponenten von $\Sigma_{0,4}$ durch die Vektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in V_4$ gegeben sind.



Eine Kurve $[x, 1]$ in $\Sigma_{0,4}$ ist genau dann separierend bzw. nichtseparierend in S , wenn x gerade bzw. ungerade ist. Da β, γ und somit auch $j(\beta), \gamma$ beide separierend oder beide nichtseparierend sind, haben s, t dieselbe Parität und $t - s$ ist stets gerade. Daher gibt es ein $\hat{h} \in \text{Mod}(\Sigma_{0,4}) \cong V_4 \times \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ mit $\hat{h}([1, 0]) = [1, 0]$, $\hat{h}([s, 1]) = [t, 1]$, $\hat{h}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\hat{h}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, nämlich $\hat{h} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 1 & t-s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$, und somit ein $h \in \text{Mod}(S)$ mit $h|_{S \setminus \Sigma_{1,2}} = \text{id}$, $h(\alpha_1) = \alpha_1$, $h(\alpha_2) = \alpha_2$ und $h(j(\beta)) = \gamma$.

Für $f := h \circ j$ gilt $f(\mathcal{P} \setminus \{\alpha_1, \alpha_2\}) = \mathcal{P} \setminus \{\alpha_1, \alpha_2\}$, $f(\alpha_1) = \alpha_2$, $f(\alpha_2) = \alpha_1$, $f(\beta) = \gamma$, also $f(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$ und $f(\mathcal{Q}_1) = \mathcal{Q}_2$. \square

4.3 Bahnen von 2-Zellen

In diesem Abschnitt wollen wir für je zwei 2-Zellen vom gleichen Typ eine Charakterisierung dafür finden, daß sie in derselben Bahn liegen. Wir unterscheiden dazu, von welchem Typ die 2-Zellen sind.

Für eine 2-Zelle $\mathcal{F} = (\mathcal{P}_1 - \dots - \mathcal{P}_k)$ sei stets $\Gamma(\mathcal{F}) := \Gamma(\mathcal{P}_1 \cap \dots \cap \mathcal{P}_k)$. Für zwei 2-Zellen $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$, die nicht vom Typ (4C) sind, werden analog zu 4.7 und 4.8 die Ecken $v_*(\mathcal{F}) \in V(\Gamma(\mathcal{F}))$, $v_*(\mathcal{F}') \in V(\Gamma(\mathcal{F}'))$ und die Menge $\text{Iso}^*(\Gamma(\mathcal{F}), \Gamma(\mathcal{F}'))$ definiert.³

Bemerkung 4.16:

- a) Seien $\mathcal{F} = (\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_3)$ eine 2-Zelle vom Typ (3S) und

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{120} &:= (\mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_3 - \mathcal{P}_1), \\ \mathcal{F}_{240} &:= (\mathcal{P}_3 - \mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2), \\ \overline{\mathcal{F}} &:= (\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_3 - \mathcal{P}_2).\end{aligned}$$

Dann gibt es $f, g \in \text{Mod}(S)$ mit $f(\mathcal{F}) = \mathcal{F}_{120}$ und $g(\mathcal{F}) = \mathcal{F}_{240}$, aber kein $h \in \text{Mod}(S)$ mit $h(\mathcal{F}) = \overline{\mathcal{F}}$.

- b) Seien $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ 2-Zellen vom Typ (3S). Es gibt genau dann ein $f \in \text{Mod}(S)$ mit $f(\mathcal{F}) = \mathcal{F}'$ oder $f(\mathcal{F}) = \overline{\mathcal{F}'}$, wenn $\text{Iso}^*(\Gamma(\mathcal{F}), \Gamma(\mathcal{F}')) \neq \emptyset$ gilt.

Beweis:

- a) Das folgt direkt aus 3.17a).

- b) Die Richtung „ \Rightarrow “ ist klar, denn jedes $f \in \text{Mod}(S)$ mit $f(\mathcal{F}) = \mathcal{F}'$ oder $f(\mathcal{F}) = \overline{\mathcal{F}'}$ induziert einen Isomorphismus $\varphi_f : \Gamma(\mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{F}')$ mit $\varphi_f(v_*(\mathcal{F})) = v_*(\mathcal{F}')$.

Es gibt genau zwei Hosengerlegungen \mathcal{P}'_1 und \mathcal{P}''_1 , die $\mathcal{P}'_2 - \mathcal{P}'_3$ zu einem Dreieck ergänzen. Nach 4.5 gibt es eine Abbildungsklasse $g_0 \in \text{Mod}(S)$ mit $g_0(\mathcal{P}'_2 - \mathcal{P}'_3) = \mathcal{P}'_3 - \mathcal{P}'_2$. Dieses g_0 bildet \mathcal{P}'_1 auf \mathcal{P}''_1 und \mathcal{P}''_1 auf \mathcal{P}'_1 ab.

Sei nun $\text{Iso}^*(\Gamma(\mathcal{F}), \Gamma(\mathcal{F}')) \neq \emptyset$. Nach 4.10 liegen die Kanten $\mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_3$ und $\mathcal{P}'_2 - \mathcal{P}'_3$ in derselben Bahn, d.h. es gibt ein $f \in \text{Mod}(S)$ mit $f(\mathcal{P}_2) = \mathcal{P}'_2$ und $f(\mathcal{P}_3) = \mathcal{P}'_3$. Da f Dreiecke auf Dreiecke abbildet, gilt $f(\mathcal{P}_1) = \mathcal{P}'_1$ oder $f(\mathcal{P}_1) = \mathcal{P}''_1$. Im ersten Fall folgt $f(\mathcal{F}) = \mathcal{F}'$, im zweiten Fall folgt $g_0 \circ f(\mathcal{F}) = \overline{\mathcal{F}'}$. \square

Bemerkung 4.17:

- a) Sei $\mathcal{F} = (\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_3)$ eine 2-Zelle vom Typ (3A). Es gibt genau eine weitere Hosengerlegung $\tilde{\mathcal{P}}_3 \neq \mathcal{P}_3$, so daß $\tilde{\mathcal{F}} := (\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2 - \tilde{\mathcal{P}}_3)$ eine 2-Zelle vom Typ (3A) ist. Es gibt kein $f \in \text{Mod}(S)$ mit $f(\mathcal{F}) = \tilde{\mathcal{F}}$.

³Für 2-Zellen vom Typ (4C) holen wir eine entsprechende Definition in Bemerkung 4.18 nach.

- b) Seien $\mathcal{F} = (\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_3)$, $\mathcal{F}' = (\mathcal{P}'_1 - \mathcal{P}'_2 - \mathcal{P}'_3)$ 2-Zellen vom Typ (3A). Schreibe $\mathcal{P}_i = \mathcal{Q} \cup \{\gamma_i\}$ und $\mathcal{P}'_i = \mathcal{Q}' \cup \{\gamma'_i\}$ ($i = 1, 2, 3$). Es gibt genau dann ein $f \in \text{Mod}(S)$ mit $f(\mathcal{F}) = \mathcal{F}'$ oder $f(\tilde{\mathcal{F}}) = \mathcal{F}'$, wenn es Isomorphismen $\varphi_i : \Gamma(\mathcal{P}_i) \rightarrow \Gamma(\mathcal{P}'_i)$ ($i = 1, 2, 3$) gibt mit $\varphi_i(\gamma_i) = \gamma'_i$ ($i = 1, 2, 3$) und $\hat{\varphi}_1 = \hat{\varphi}_2 = \hat{\varphi}_3$. Die Existenz von φ_3 folgt dabei schon aus der Existenz von φ_1 und φ_2 .

Beweis:

- a) Schreibe $\mathcal{P}_i = \mathcal{Q} \cup \{\gamma_i\}$ ($i = 1, 2, 3$). Sei $\Sigma_{0,4} \subseteq S$ mit $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \subseteq \Sigma_{0,4}$. Es gibt eine Parametrisierung von $\Sigma_{0,4}$ mit $\gamma_1 = [1, 0]$ und $\gamma_2 = [0, 1]$. In $\Sigma_{0,4}$ sind $[1, 1]$ und $[-1, 1]$ die einzigen Kurven, die mit γ_1 und γ_2 minimalen Schnitt haben. Eine der beiden Kurven ist γ_3 , die andere sei mit $\tilde{\gamma}_3$ bezeichnet. Somit gibt es genau zwei Hosenzerlegungen $\mathcal{P}_3 = \mathcal{Q} \cup \{\gamma_3\}$ und $\tilde{\mathcal{P}}_3 = \mathcal{Q} \cup \{\tilde{\gamma}_3\}$, die $\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2$ zu einem Dreieck ergänzen.

Für jedes $f \in \text{Mod}(S)$ mit $f(\mathcal{F}) = \tilde{\mathcal{F}}$ gilt $f(\Sigma_{0,4}) = \Sigma_{0,4}$. Daher ist $f|_{\Sigma_{0,4}}$ ein Element aus $\text{Mod}(\Sigma_{0,4}) \cong V_4 \rtimes \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$, das wegen $f(\gamma_1) = \gamma_1$ und $f(\gamma_2) = \gamma_2$ von der Form $f|_{\Sigma_{0,4}} = \left(\begin{pmatrix} x & \\ & y \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ ist.

$$\Rightarrow f|_{\Sigma_{0,4}}([1, 1]) = [1, 1] \text{ und } f|_{\Sigma_{0,4}}([-1, 1]) = [-1, 1]$$

$$\Rightarrow f(\mathcal{P}_3) = \mathcal{P}_3 \text{ und } f(\tilde{\mathcal{P}}_3) = \tilde{\mathcal{P}}_3, \text{ ein Widerspruch zu } f(\mathcal{F}) = \tilde{\mathcal{F}}.$$

- b) Die Richtung „ \Rightarrow “ ist klar. Sind umgekehrt $\varphi_1 : \Gamma(\mathcal{P}_1) \rightarrow \Gamma(\mathcal{P}'_1)$ und $\varphi_2 : \Gamma(\mathcal{P}_2) \rightarrow \Gamma(\mathcal{P}'_2)$ wie verlangt, so gibt es nach Satz 4.9 ein $f \in \text{Mod}(S)$ mit $f(\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2) = \mathcal{P}'_1 - \mathcal{P}'_2$. Da jede Abbildungsklasse Dreiecke auf Dreiecke abbildet, gilt $f^{-1}(\mathcal{F}') \in \{\mathcal{F}, \tilde{\mathcal{F}}\}$, also $\mathcal{F}' \in \{f(\mathcal{F}), f(\tilde{\mathcal{F}})\}$. \square

Bemerkung 4.18:

- a) Nach 3.17c) ist keine allgemeine Aussage darüber möglich, ob eine 2-Zelle vom Typ (4C) gedreht oder gespiegelt wird.
- b) Sei $\mathcal{F} = (\mathcal{P}_1 - \dots - \mathcal{P}_4)$ eine 2-Zelle vom Typ (4C). In $\Gamma(\mathcal{F})$ gibt es zwei ausgezeichnete Ecken $v_*(\mathcal{F})$ und $w_*(\mathcal{F})$, die wie in 4.7 aus den Kanten $\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2$ bzw. $\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_4$ entstehen. Für zwei 2-Zellen $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ sei analog zu 4.8 $\text{Iso}^*(\Gamma(\mathcal{F}), \Gamma(\mathcal{F}'))$ die Menge derjenigen Isomorphismen $\Gamma(\mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{F}')$, die $v_*(\mathcal{F})$ auf $v_*(\mathcal{F}')$ und $w_*(\mathcal{F})$ auf $w_*(\mathcal{F}')$ abbilden.

Schreibe $\mathcal{P}_1 = \mathcal{Q} \cup \{\gamma_1, \gamma_2\}$, $\mathcal{P}_2 = \mathcal{Q} \cup \{\gamma_2, \gamma_3\}$, $\mathcal{P}_3 = \mathcal{Q} \cup \{\gamma_3, \gamma_4\}$, $\mathcal{P}_4 = \mathcal{Q} \cup \{\gamma_1, \gamma_4\}$, analog für \mathcal{F}' . Isomorphismen $\varphi_i : \Gamma(\mathcal{P}_i) \rightarrow \Gamma(\mathcal{P}'_i)$ ($i = 1, \dots, 4$) mit $\varphi_i(\gamma_j) = \gamma'_j$ für alle möglichen i, j induzieren Isomorphismen $\bar{\varphi}_i : \Gamma(\mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{F}')$ ($i = 1, \dots, 4$).

- c) Seien $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ 2-Zellen vom Typ (4C) wie in b). Es gibt genau dann ein $f \in \text{Mod}(S)$ mit $f(\mathcal{F}) = \mathcal{F}'$, wenn es Isomorphismen $\varphi_i : \Gamma(\mathcal{P}_i) \rightarrow \Gamma(\mathcal{P}'_i)$ ($i = 1, \dots, 4$) gibt mit $\varphi_i(\gamma_j) = \gamma'_j$ für alle möglichen i, j und mit $\bar{\varphi}_1 = \bar{\varphi}_2 = \bar{\varphi}_3 = \bar{\varphi}_4$.

Beweis von c):

Die Richtung „ \Rightarrow “ ist klar. Seien umgekehrt $\varphi_i : \Gamma(\mathcal{P}_i) \rightarrow \Gamma(\mathcal{P}'_i)$ ($i = 1, \dots, 4$) wie verlangt. Neben $\bar{\varphi}_1 = \bar{\varphi}_2 = \bar{\varphi}_3 = \bar{\varphi}_4$ gilt auch $\hat{\varphi}_1 = \hat{\varphi}_2 : \Gamma(\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2) \rightarrow \Gamma(\mathcal{P}'_1 \cap \mathcal{P}'_2)$ und $\hat{\varphi}_1 = \hat{\varphi}_4 : \Gamma(\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_4) \rightarrow \Gamma(\mathcal{P}'_1 \cap \mathcal{P}'_4)$. Nach Satz 4.9 und seinem Beweis gibt es eine Abbildungsklasse $g \in \text{Mod}(S)$ mit $g(\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2) = (\mathcal{P}'_1 - \mathcal{P}'_2)$, welche die Isomorphismen φ_1 und φ_2 realisiert. Es gilt $g(\gamma_1) = \gamma'_1$, $g(\gamma_2) = \gamma'_2$, $g(\gamma_3) = \gamma'_3$ und $g(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}'$.

Im folgenden unterscheiden wir, ob $\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_4$ und $\mathcal{P}'_1 - \mathcal{P}'_4$ S -Moves oder A -Moves sind. In beiden Fällen führen wir den Beweis analog zu Satz 4.9.

1. Fall: $\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_4$ und $\mathcal{P}'_1 - \mathcal{P}'_4$ sind S -Moves in $\Sigma_{1,1} \subseteq S$ bzw. $\Sigma'_{1,1} \subseteq S$.

Wie im Beweis von 4.9 gibt es ein $h \in \text{Mod}(S)$ mit $h|_{S \setminus \Sigma'_{1,1}} = \text{id}$, $h(\gamma'_2) = \gamma'_2$ und $h(g(\gamma_4)) = \gamma'_4$. Für $f := h \circ g$ gilt somit $f(\gamma_i) = \gamma'_i$ ($i = 1, \dots, 4$) und $f(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}'$, also $f(\mathcal{F}) = \mathcal{F}'$.

2. Fall: $\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_4$ und $\mathcal{P}'_1 - \mathcal{P}'_4$ sind A -Moves in $\Sigma_{0,4} \subseteq S$ bzw. $\Sigma'_{0,4} \subseteq S$.

Wie im Beweis von 4.9 gibt es ein $h \in \text{Mod}(S)$ mit $h|_{S \setminus \Sigma'_{0,4}} = \text{id}$, $h(\gamma'_2) = \gamma'_2$ und $h(g(\gamma_4)) = \gamma'_4$. Für $f := h \circ g$ gilt somit $f(\gamma_i) = \gamma'_i$ ($i = 1, \dots, 4$) und $f(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}'$, also $f(\mathcal{F}) = \mathcal{F}'$. \square

Bemerkung 4.19:

Seien $\mathcal{F} = (\mathcal{P}_1 - \dots - \mathcal{P}_5)$, $\mathcal{F}' = (\mathcal{P}'_1 - \dots - \mathcal{P}'_5)$ 2-Zellen vom Typ (5A). Schreibe $\mathcal{P}_1 = \mathcal{Q} \cup \{\gamma_1, \gamma_2\}$, $\mathcal{P}_2 = \mathcal{Q} \cup \{\gamma_2, \gamma_3\}$, $\mathcal{P}_3 = \mathcal{Q} \cup \{\gamma_3, \gamma_4\}$, $\mathcal{P}_4 = \mathcal{Q} \cup \{\gamma_4, \gamma_5\}$, $\mathcal{P}_5 = \mathcal{Q} \cup \{\gamma_1, \gamma_5\}$, analog für \mathcal{F}' .

- a) Nach 3.17c) ist keine allgemeine Aussage darüber möglich, ob eine 2-Zelle vom Typ (5A) gedreht oder gespiegelt wird.
- b) Es gibt genau dann ein $f \in \text{Mod}(S)$ mit $f(\mathcal{F}) = \mathcal{F}'$, wenn es Isomorphismen $\varphi_i : \Gamma(\mathcal{P}_i) \rightarrow \Gamma(\mathcal{P}'_i)$ ($i = 1, \dots, 5$) gibt mit $\varphi_i(\gamma_j) = \gamma'_j$ für alle möglichen i, j und mit $\bar{\varphi}_1 = \dots = \bar{\varphi}_5$. Dabei seien $\bar{\varphi}_1 = \dots = \bar{\varphi}_5 : \Gamma(\mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{F}')$ die von $\varphi_1, \dots, \varphi_5$ induzierten Isomorphismen.

Beweis von b):

Die Richtung „ \Rightarrow “ ist klar. Seien umgekehrt $\varphi_i : \Gamma(\mathcal{P}_i) \rightarrow \Gamma(\mathcal{P}'_i)$ ($i = 1, \dots, 5$) wie verlangt. Wie im Beweis von 4.18 gibt es eine Abbildungsklasse $g \in \text{Mod}(S)$ mit $g(\gamma_1) = \gamma'_1$, $g(\gamma_2) = \gamma'_2$, $g(\gamma_3) = \gamma'_3$ und $g(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}'$.

Sei $\Sigma'_{0,4}$ diejenige Teilfläche von S , die γ'_2, γ'_5 und $g(\gamma_5)$ enthält. Wie im Beweis von 4.9 gibt es ein $h \in \text{Mod}(S)$ mit $h|_{S \setminus \Sigma'_{0,4}} = \text{id}$, $h(\gamma'_2) = \gamma'_2$ und $h(g(\gamma_5)) = \gamma'_5$. γ'_4 ist die einzige Kurve in S , die disjunkt zu γ'_3 und γ'_5 und nicht isotop zu einer anderen Kurve aus einem der \mathcal{P}_i ist. Da $h(g(\gamma_4))$ auch diese Eigenschaften hat, gilt $h(g(\gamma_4)) = \gamma'_4$.

Für $f := h \circ g$ gilt somit $f(\gamma_i) = \gamma'_i$ ($i = 1, \dots, 5$) und $f(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}'$, also $f(\mathcal{F}) = \mathcal{F}'$. \square

Bemerkung 4.20:

a) Für eine 2-Zelle $\mathcal{F} = (\mathcal{P}_1 - \dots - \mathcal{P}_6)$ vom Typ (6AS) seien

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{60} &:= (\mathcal{P}_2 - \dots - \mathcal{P}_6 - \mathcal{P}_1), \\ \mathcal{F}_{120} &:= (\mathcal{P}_3 - \dots - \mathcal{P}_6 - \mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2), \\ &\vdots \\ \mathcal{F}_{300} &:= (\mathcal{P}_6 - \mathcal{P}_1 - \dots - \mathcal{P}_5), \\ \overline{\mathcal{F}} &:= (\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_6 - \dots - \mathcal{P}_2).\end{aligned}$$

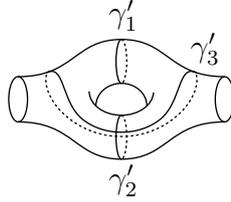
Nach 3.17d) gilt $\text{Stab}_{pw}(\mathcal{F}) = \text{Stab}_{or}(\mathcal{F}) = \text{Stab}_{nor}(\mathcal{F})$.

b) Seien $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ 2-Zellen vom Typ (6AS). Es gibt genau dann ein $f \in \text{Mod}(S)$ mit $f(\mathcal{F}) \in \{\mathcal{F}', \mathcal{F}'_{60}, \dots, \mathcal{F}'_{300}, \overline{\mathcal{F}'}, \overline{\mathcal{F}'}_{60}, \dots, \overline{\mathcal{F}'}_{300}\}$, wenn $\Gamma(\mathcal{F}) \cong \Gamma(\mathcal{F}')$ gilt.

Beweis von b):

Die Richtung „ \Rightarrow “ ist klar, denn jedes $f \in \text{Mod}(S)$ mit $f(\mathcal{F}) \in \{\mathcal{F}', \mathcal{F}'_{60}, \dots, \mathcal{F}'_{300}, \overline{\mathcal{F}'}, \overline{\mathcal{F}'}_{60}, \dots, \overline{\mathcal{F}'}_{300}\}$ induziert einen Isomorphismus $\varphi_f : \Gamma(\mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{F}')$.

Für die Rückrichtung sei die Notation dem Beweis von 3.23d) entnommen, wobei in \mathcal{F}' alle Kurven γ_i durch γ'_i ersetzt werden. Sei $\Sigma'_{1,2}$ diejenige Teilfläche von S mit $\gamma'_1, \dots, \gamma'_6 \subseteq \Sigma'_{1,2}$. Sei $\Sigma'_{0,4} \subseteq \Sigma'_{1,2}$ diejenige Teilfläche von $\Sigma'_{1,2}$ mit $\partial\Sigma'_{0,4} = \partial\Sigma'_{1,2} \cup \gamma'_1$. Es gibt eine Parametrisierung von $\Sigma'_{0,4}$ mit $\partial\Sigma'_{1,2} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ und $\gamma'_2 = [0, 1]$ und $\gamma'_3 = [1, 0]$.



Sei nun $\varphi \in \text{Iso}(\Gamma(\mathcal{F}), \Gamma(\mathcal{F}')) = \text{Iso}^*(\Gamma(\mathcal{F}), \Gamma(\mathcal{F}'))$. Realisiere φ durch ein $g \in \text{Mod}(S)$ mit $g(\mathcal{P}_1) = \mathcal{P}'_1$ und $g(\gamma_1) = \gamma'_1$ und $g(\gamma_2) = \gamma'_2$. Es ist $g(\gamma_3) \subseteq \Sigma'_{0,4}$. Da $g(\gamma_3)$ separierend ist und minimalen Schnitt mit γ'_2 hat, ist $g(\gamma_3)$ von der Form $g(\gamma_3) = [1, t]$ mit $t \in \mathbb{Z}$ gerade. Der Dehntwist $h_2 := t_{\gamma'_2}^{-t/2}$ bildet $g(\gamma_3)$ auf γ'_3 ab und erhält die Kurven $\gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_6, g(\gamma_6)$. Analog dazu gibt es einen Dehntwist h_1 mit $h_1(g(\gamma_6)) = \gamma'_6$ und $h_1(\gamma'_i) = \gamma'_i$ ($i = 1, 2, 3$).

γ'_4 ist die einzige Kurve in $\Sigma'_{1,2}$, die nicht nullisotop und nicht zu einer Randkomponente von $\Sigma'_{1,2}$ isotop ist und die disjunkt zu γ'_3 und γ'_6 ist. Da $h_1 \circ h_2 \circ g(\gamma_4)$ auch diese Eigenschaften hat, gilt $h_1 \circ h_2 \circ g(\gamma_4) = \gamma'_4$. Schließlich gibt es genau zwei Kurven γ'_5 und γ''_5 in $\Sigma'_{1,2}$, die zu γ'_4 disjunkt sind und minimalen Schnitt mit γ'_3 und γ'_6 haben. Somit gilt $h_1 \circ h_2 \circ g(\gamma_5) = \gamma'_5$ oder $h_1 \circ h_2 \circ g(\gamma_5) = \gamma''_5$.

1. Fall: $h_1 \circ h_2 \circ g(\gamma_5) = \gamma'_5$
 \Rightarrow Für $f := h_1 \circ h_2 \circ g$ gilt $f(\mathcal{F}) = \mathcal{F}'$.

2. Fall: $h_1 \circ h_2 \circ g(\gamma_5) = \gamma_5''$

Es gibt eine Abbildungsklasse $j \in \text{Mod}(S)$ mit $j|_{S \setminus \Sigma'_{1,2}} = \text{id}$, $j(\gamma'_1) = \gamma'_2$ und $j(\gamma'_2) = \gamma'_1$, $j(\gamma'_3) = \gamma'_6$ und $j(\gamma'_6) = \gamma'_3$, $j(\gamma'_4) = \gamma'_4$, $j(\gamma'_5) = \gamma_5''$ und $j(\gamma_5'') = \gamma'_5$, vgl. Abbildung 3.3 auf S. 48.

\Rightarrow Für $f := j \circ h_1 \circ h_2 \circ g$ gilt $f(\mathcal{F}) = \overline{\mathcal{F}'}$. \square

4.4 Der Quotientenkomplex $\mathcal{Q}(S)$

In den vorangegangenen Abschnitten wurden viele Charakterisierungen dafür angegeben, daß zwei Zellen von $\mathcal{P}(S)$ in derselben Bahn unter der Aktion von $\text{Mod}(S)$ liegen. Von zentraler Bedeutung sind dabei Bemerkung 4.1 in Abschnitt 4.1, Satz 4.9 in Abschnitt 4.2 und die Bemerkungen 4.16 bis 4.20 in Abschnitt 4.3. Diese Aussagen zeigen, daß die Bahnen allein aus der Kenntnis aller hosenzulässiger Graphen und ihrer Isomorphismen erkennbar sind.

Desweiteren legen unsere Erkenntnisse nahe, daß es in jeder Bahn sehr viele Zellen gibt. Mit dem folgenden Satz wird dieser Verdacht bestätigt.

Satz 4.21:

$\mathcal{Q}(S)$ ist endlich.

Beweis:

Die Endlichkeit von $\mathcal{Q}(S)$ wird in drei Schritten nachgewiesen.

- a) Nach Folgerung 4.2 gibt es in $\mathcal{Q}(S)$ nur endlich viele Ecken.
- b) Wir zeigen, daß es in $\mathcal{Q}(S)$ nur endlich viele Kanten gibt und somit der Quotientengraph $\mathcal{Q}^1(S)$ endlich ist.

Annahme: Es gibt unendlich viele Kanten in $\mathcal{Q}(S)$.

Da $\mathcal{Q}(S)$ nur endlich viele Ecken hat, gibt es eine Ecke, von der unendlich viele Kanten weggehen. Daher gibt es in $\mathcal{P}(S)$ unendlich viele, paarweise nicht in derselben Bahn liegende Kanten $\tilde{\mathcal{K}}_i = (\tilde{\mathcal{P}}_i - \tilde{\mathcal{Q}}_i)$ ($i \in \mathbb{N}$), so daß alle $\tilde{\mathcal{P}}_i$ ($i \in \mathbb{N}$) in derselben Bahn liegen. Zu jedem $i \in \mathbb{N}$ sei $f_i \in \text{Mod}(S)$ mit $f_i(\tilde{\mathcal{P}}_i) = \tilde{\mathcal{P}}_0 =: \mathcal{P}$. Setze $\mathcal{Q}_i := f_i(\tilde{\mathcal{Q}}_i)$ und $\mathcal{K}_i := f_i(\tilde{\mathcal{K}}_i) = (\mathcal{P} - \mathcal{Q}_i)$ ($i \in \mathbb{N}$). Die \mathcal{K}_i ($i \in \mathbb{N}$) sind unendlich viele, paarweise nicht in derselben Bahn liegende Kanten. Jede dieser Kanten ist durch einen Move an einer der Kurven aus \mathcal{P} gegeben. Da \mathcal{P} nur endlich viele Kurven enthält, gibt es eine Kurve $\alpha \in \mathcal{P}$ und unendlich viele Kanten \mathcal{K}_{i_j} ($j \in \mathbb{N}$), die durch einen Move an α gegeben sind.

Ist α eine Schleife in $\Gamma(\mathcal{P})$, so sind alle \mathcal{K}_{i_j} ($j \in \mathbb{N}$) durch S -Moves an α gegeben und liegen nach Bemerkung 4.10 in derselben Bahn. Ist α keine Schleife in $\Gamma(\mathcal{P})$, so sind alle \mathcal{K}_{i_j} ($j \in \mathbb{N}$) durch A -Moves gegeben. Jedem \mathcal{K}_{i_j} entspricht ein Graphenmove $\Gamma(\mathcal{P}) - \Gamma'$ an α . Zwei Kanten, die denselben Graphenmove induzieren, liegen nach Satz 4.9 stets in derselben Bahn. Da es nur zwei verschiedene

Graphenmoves $\Gamma(\mathcal{P}) \sim \Gamma'$ an α gibt, liegen alle \mathcal{K}_{i_j} ($j \in \mathbb{N}$) in höchstens zwei Bahnen.

In beiden obigen Fällen liegen die \mathcal{K}_{i_j} ($j \in \mathbb{N}$) in nur endlich vielen Bahnen, ein Widerspruch zur Annahme.

- c) Schließlich zeigen wir, daß es in $\mathcal{Q}(S)$ von jedem Typ nur endlich viele 2-Zellen gibt.
- Nach 4.16 sind alle 2-Zellen \mathcal{F} vom Typ (3S) mit isomorphen Graphen $\Gamma(\mathcal{F})$ in zwei Bahnen enthalten. Da es nur endlich viele solcher Isomorphieklassen gibt, ist auch die Menge aller Bahnen von 2-Zellen vom Typ (3S) endlich.
 - Für 2-Zellen vom Typ (3A), (4C) und (5A) wird die Aussage analog zu b) bewiesen, denn auch hier ist die Zugehörigkeit zur selben Bahn durch kombinatorische Daten charakterisiert. Wir lassen die Details aus.
 - Es gibt nur endlich viele Isomorphieklassen von Graphen der Form $\Gamma(\mathcal{F})$, wobei \mathcal{F} eine 2-Zelle vom Typ (6AS) ist, und somit nach 4.20 nur endlich viele Bahnen solcher 2-Zellen. \square

4.5 Ein Beispiel: Der Quotientenkomplex von $\Sigma_{1,3}$

Wir wollen nun für die Fläche $\Sigma_{1,3}$ den Quotientenkomplex $\mathcal{Q}(\Sigma_{1,3})$ explizit bestimmen.

Bemerkung 4.22:

$\mathcal{Q}(\Sigma_{1,3})$ hat drei Ecken, die den Graphen $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ aus Abbildung 4.3 entsprechen, vgl. Beispiel 4.3a).

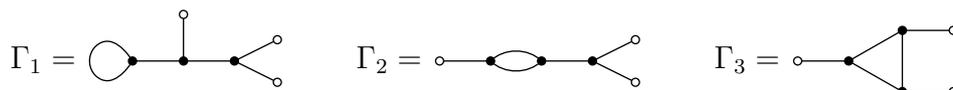


Abbildung 4.3: Graphen zu $\Sigma_{1,3}$

Bemerkung 4.23:

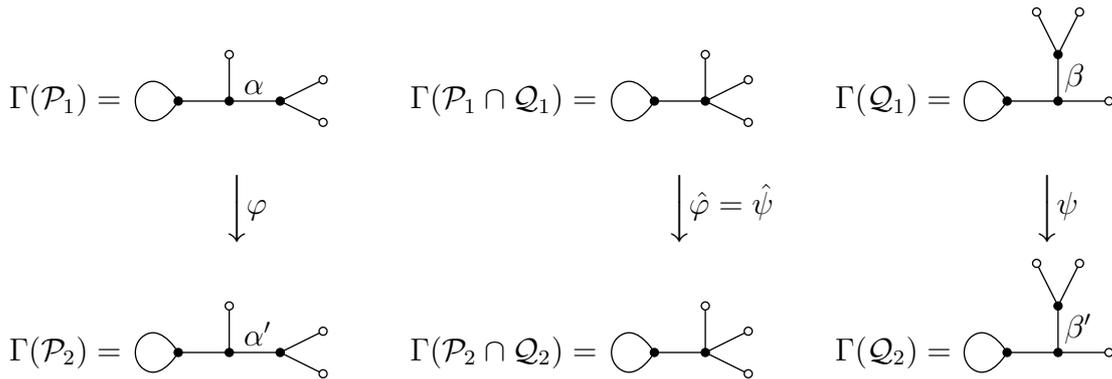
Zwei Kanten $\mathcal{K}_1 = (\mathcal{P}_1 - \mathcal{Q}_1)$ und $\mathcal{K}_2 = (\mathcal{P}_2 - \mathcal{Q}_2)$ liegen genau dann in derselben Bahn, wenn $\Gamma(\mathcal{P}_1) \cong \Gamma(\mathcal{P}_2)$ und $\Gamma(\mathcal{Q}_1) \cong \Gamma(\mathcal{Q}_2)$ gilt. Insbesondere wird jede Kante $\mathcal{K} = (\mathcal{P} - \mathcal{Q})$ mit $\Gamma(\mathcal{P}) \cong \Gamma(\mathcal{Q})$ invertiert.

Beweis:

Die Richtung „ \Rightarrow “ folgt direkt aus Bemerkung 4.1. Seien umgekehrt $\Gamma(\mathcal{P}_1) \cong \Gamma(\mathcal{P}_2)$ und $\Gamma(\mathcal{Q}_1) \cong \Gamma(\mathcal{Q}_2)$. Sind $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ S -Moves, dann gilt sogar $\Gamma(\mathcal{P}_1) \cong \Gamma(\mathcal{Q}_1) \cong \Gamma_1$, und aus Bemerkung 4.10 folgt, daß $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ in derselben Bahn liegen.

Von nun an seien $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ A -Moves. Wir unterscheiden, zu welchen der Graphen $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ die Graphen $\Gamma(\mathcal{P}_1), \Gamma(\mathcal{Q}_1)$ isomorph sind. Der Fall $\Gamma(\mathcal{P}_1) \cong \Gamma_1$ und $\Gamma(\mathcal{Q}_1) \cong \Gamma_3$ kommt nicht vor, da Γ_1 zwei separierende Kurven mehr hat als Γ_3 und es daher keinen Move $\Gamma_1 - \Gamma_3$ gibt. Da alle anderen Fälle auf dieselbe Art bewiesen werden, führen wir nur den Fall $\Gamma(\mathcal{P}_1) \cong \Gamma(\mathcal{Q}_1) \cong \Gamma_1$ aus.

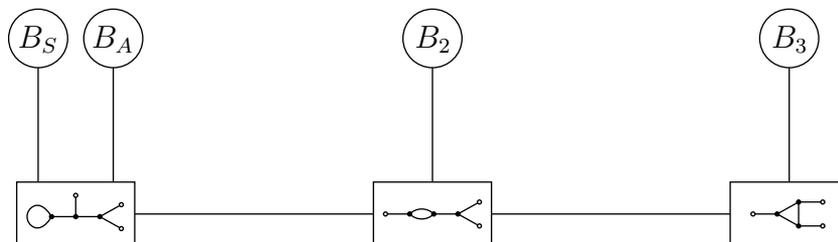
Sei also $\Gamma(\mathcal{P}_1) \cong \Gamma(\mathcal{Q}_1) \cong \Gamma_1$. Es gibt Isomorphismen $\varphi : \Gamma(\mathcal{P}_1) \rightarrow \Gamma(\mathcal{P}_2)$ und $\psi : \Gamma(\mathcal{Q}_1) \rightarrow \Gamma(\mathcal{Q}_2)$ mit $\hat{\varphi} = \hat{\psi}$. Nach Satz 4.9 liegen $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ in derselben Bahn.



Beachte: Mit der Notation aus Satz 4.9 gilt $\varphi(\alpha) = \alpha'$ und $\psi(\beta) = \beta'$ für alle Isomorphismen $\varphi : \Gamma(\mathcal{P}_1) \rightarrow \Gamma(\mathcal{P}_2)$ und $\psi : \Gamma(\mathcal{Q}_1) \rightarrow \Gamma(\mathcal{Q}_2)$. □

Folgerung 4.24:

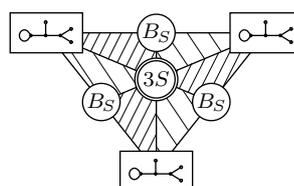
Der Quotientengraph $\mathcal{Q}^1(\Sigma_{1,3})$ hat folgende Form:



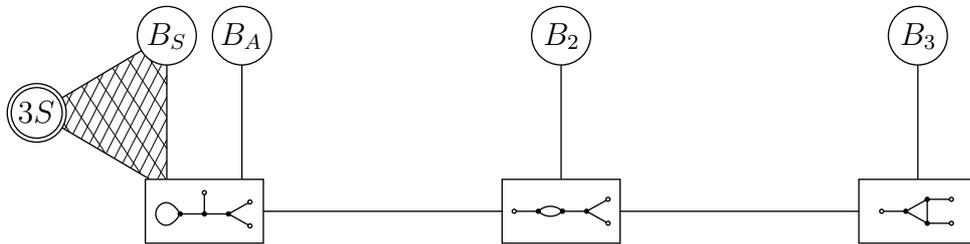
Die Ecken B_S, B_A, B_2, B_3 entsprechen dabei den baryzentrischen Unterteilungen der invertierten Kanten.

Bemerkung 4.25:

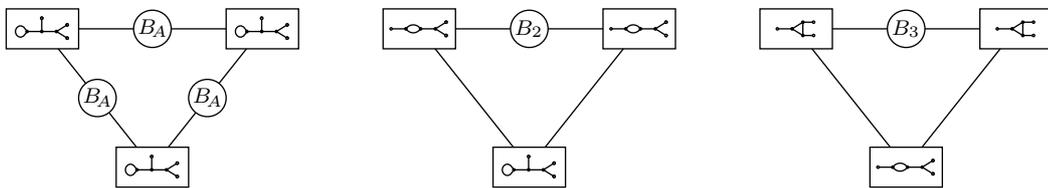
- a) Sei \mathcal{F} eine 2-Zelle vom Typ (3S) in $\mathcal{P}(\Sigma_{1,3})$. \mathcal{F} und $\overline{\mathcal{F}}$ liegen nicht in derselben Bahn. Jede weitere 2-Zelle \mathcal{F}' vom Typ (3S) liegt in derselben Bahn wie \mathcal{F} oder $\overline{\mathcal{F}}$. Insbesondere müssen alle derartigen 2-Zellen baryzentrisch unterteilt werden.



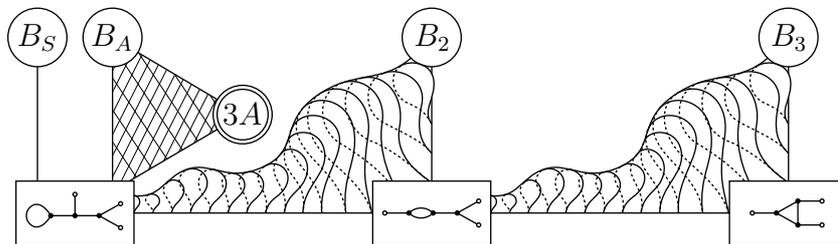
In $\mathcal{Q}(\Sigma_{1,3})$ gibt es also zwei 2-Zellen vom Typ (3S):



b) Es gibt genau vier Bahnen von 2-Zellen vom Typ (3A). Jede 2-Zelle \mathcal{F} vom Typ (3A) wird von einem der folgenden Wege berandet:



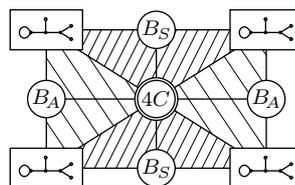
Davon muß die erste 2-Zelle baryzentrisch unterteilt werden; es gibt Abbildungsklassen, die diese drehen, aber keine, die sie spiegeln. Das liefert folgende 2-Zellen vom Typ (3A) in $\mathcal{Q}(\Sigma_{1,3})$:



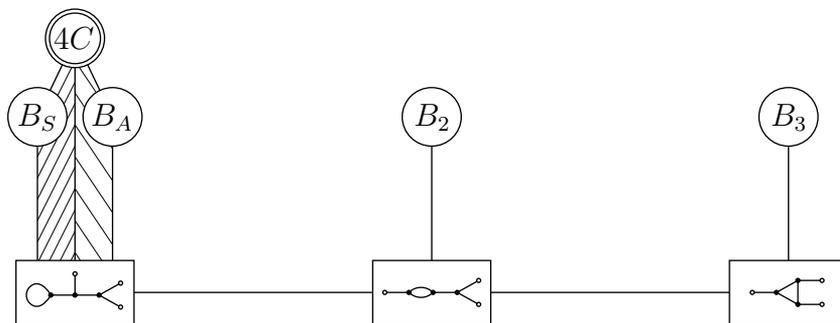
c) Seien $\mathcal{F} = (\mathcal{P}_1 - \dots - \mathcal{P}_4)$ eine 2-Zelle vom Typ (4C) und

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{90} &:= (\mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_3 - \mathcal{P}_4 - \mathcal{P}_1), \\ \mathcal{F}_{180} &:= (\mathcal{P}_3 - \mathcal{P}_4 - \mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2), \\ \mathcal{F}_{270} &:= (\mathcal{P}_4 - \mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_3), \\ \overline{\mathcal{F}} &:= (\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_4 - \mathcal{P}_3 - \mathcal{P}_2). \end{aligned}$$

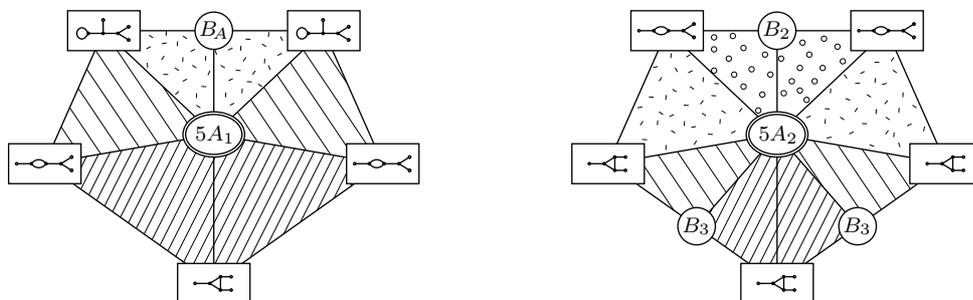
Dann liegen $\mathcal{F}, \mathcal{F}_{180}, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mathcal{F}}_{180}$ in derselben Bahn, aber \mathcal{F}_{90} in einer anderen Bahn. Jede weitere 2-Zelle \mathcal{F}' vom Typ (4C) liegt in derselben Bahn wie \mathcal{F} oder \mathcal{F}_{90} .



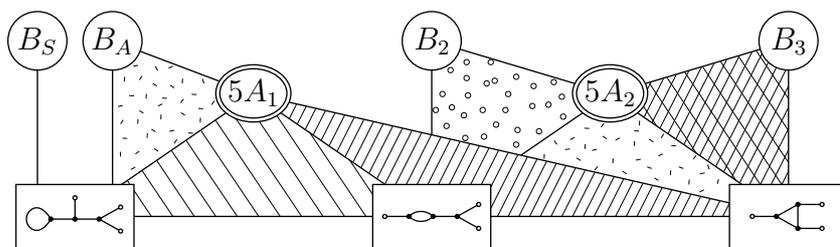
In $\mathcal{Q}(\Sigma_{1,3})$ erhalten wir folgende 2-Zellen vom Typ (4C):



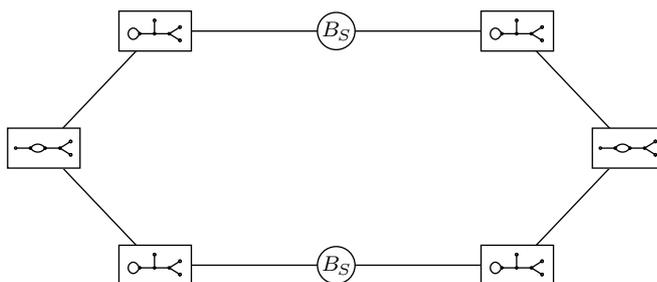
d) Jede 2-Zelle \mathcal{F} vom Typ (5A) wird von einem der folgenden Wege berandet:



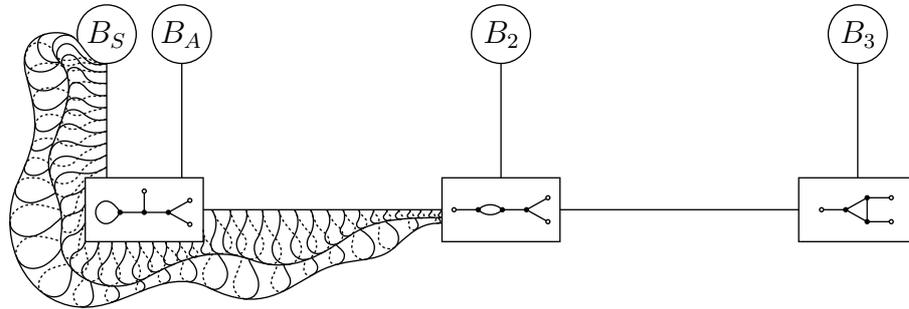
Beide 2-Zellen müssen baryzentrisch unterteilt werden; es gibt Abbildungsklassen, die sie spiegeln, aber keine, die sie drehen. Dadurch erhalten wir in $\mathcal{Q}(\Sigma_{1,3})$ sieben 2-Zellen vom Typ (5A):



e) Es gibt genau eine Bahn von 2-Zellen vom Typ (6AS), denn für je zwei solche 2-Zellen $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ sind die Graphen $\Gamma(\mathcal{F})$ und $\Gamma(\mathcal{F}')$ isomorph. Jede 2-Zelle vom Typ (6AS) wird von dem folgenden Weg berandet:



In $\mathcal{Q}(\Sigma_{1,3})$ sieht die 2-Zelle vom Typ (6AS) folgendermaßen aus:



Damit haben wir alle 2-Zellen von $\mathcal{Q}(\Sigma_{1,3})$ bestimmt. Wir verzichten aus Gründen der Übersichtlichkeit darauf, eine Skizze von $\mathcal{Q}(\Sigma_{1,3})$ anzugeben, in der alle 2-Zellen enthalten sind.

Kapitel 5

Präsentationen

In den vorigen beiden Kapiteln haben wir die Aktion der Abbildungsklassengruppe $\text{Mod}(S)$ auf dem Hosenkomplex $\mathcal{P}(S)$ untersucht, indem wir Stabilisatoren und Bahnen berechnet haben. Mit Hilfe dieser Daten können wir eine Präsentation von $\text{Mod}(S)$ konstruieren. Wie das geht, werden wir in diesem Kapitel lernen.

5.1 Präsentationen und kurze exakte Sequenzen

Ist $1 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 1$ eine kurze exakte Sequenz von Gruppen und sind Präsentationen von A und C gegeben, so können wir daraus eine Präsentation von B herleiten, vgl. [CGKZ, I.6.1.1, S. 127]. Diese Konstruktion zeigt, daß B endlich präsentierbar ist, falls A und C endlich präsentierbar sind.

Definition 5.1:

Seien $1 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 1$ eine kurze exakte Sequenz von Gruppen, $\alpha : C \rightarrow B$ eine beliebige Abbildung mit $g \circ \alpha = \text{id}_C$ und $A = \langle S \mid R \rangle$, $C = \langle T \mid Q \rangle$ Präsentationen von A und C .

- a) Zu jedem $s \in S$ bzw. $t \in T$ sei \hat{s} bzw. \hat{t} ein Symbol. Setze $\hat{U} := \{\hat{s} : s \in S\} \cup \{\hat{t} : t \in T\}$. Da B von der Menge $f(S) \cup \alpha(T)$ erzeugt wird, kann \hat{U} als abstraktes Erzeugendensystem von B aufgefaßt werden.
- b) Wir bestimmen im folgenden vier Typen von Relationen in \hat{U} , die eine Präsentation von B liefern werden.

- (1) Jedes Element $r \in R$ ist ein Wort $r = s_1^{\delta_1} \cdot \dots \cdot s_m^{\delta_m}$ für geeignete $m \in \mathbb{N}$, $s_i \in S$, $\delta_i \in \{1, -1\}$. Als Element von A ist r trivial, somit gilt $1 = f(r) = f(s_1)^{\delta_1} \cdot \dots \cdot f(s_m)^{\delta_m}$. Definiere

$$\hat{r} := \hat{s}_1^{\delta_1} \cdot \dots \cdot \hat{s}_m^{\delta_m}.$$

\hat{r} ist ein Wort in \hat{U} .

- (2) Jedes Element $q \in Q$ ist ein Wort $q = t_1^{\varepsilon_1} \cdot \dots \cdot t_n^{\varepsilon_n}$ für geeignete $n \in \mathbb{N}$, $t_i \in T$, $\varepsilon_i \in \{1, -1\}$. Wegen $g(\alpha(t_1)^{\varepsilon_1} \cdot \dots \cdot \alpha(t_n)^{\varepsilon_n}) = t_1^{\varepsilon_1} \cdot \dots \cdot t_n^{\varepsilon_n} = q = 1$ ist $\alpha(t_1)^{\varepsilon_1} \cdot \dots \cdot \alpha(t_n)^{\varepsilon_n} \in \text{Kern}(g) = \text{Bild}(f)$, d.h. es gibt $s_1, \dots, s_m \in S$ und $\delta_1, \dots, \delta_m \in \{1, -1\}$ mit $\alpha(t_1)^{\varepsilon_1} \cdot \dots \cdot \alpha(t_n)^{\varepsilon_n} = f(s_1)^{\delta_1} \cdot \dots \cdot f(s_m)^{\delta_m}$. Definiere

$$\hat{q} := \hat{s}_m^{-\delta_m} \cdot \dots \cdot \hat{s}_1^{-\delta_1} \cdot \hat{t}_1^{\varepsilon_1} \cdot \dots \cdot \hat{t}_n^{\varepsilon_n}.$$

Auch \hat{q} ist ein Wort in \hat{U} .

- (3) Für alle $s \in S$, $t \in T$ ist $\alpha(t)^{-1} \cdot f(s) \cdot \alpha(t) \in \text{Bild}(f)$ wegen $g(\alpha(t)^{-1} \cdot f(s) \cdot \alpha(t)) = t^{-1} \cdot 1 \cdot t = 1$, d.h. es gibt $s_1, \dots, s_m \in S$ und $\delta_1, \dots, \delta_m \in \{1, -1\}$ mit $\alpha(t)^{-1} \cdot f(s) \cdot \alpha(t) = f(s_1)^{\delta_1} \cdot \dots \cdot f(s_m)^{\delta_m}$. Definiere

$$\hat{x}_{s,t} := \hat{s}_m^{-\delta_m} \cdot \dots \cdot \hat{s}_1^{-\delta_1} \cdot \hat{t}^{-1} \cdot \hat{s} \cdot \hat{t}.$$

$\hat{x}_{s,t}$ ist ein Wort in \hat{U} .

- (4) Analog zu (3) ist auch $\alpha(t) \cdot f(s) \cdot \alpha(t)^{-1} \in \text{Bild}(f)$ für alle $s \in S$, $t \in T$, und es gibt $u_1, \dots, u_k \in S$, $\delta_1, \dots, \delta_k \in \{1, -1\}$ mit $\alpha(t) \cdot f(s) \cdot \alpha(t)^{-1} = f(u_1)^{\delta_1} \cdot \dots \cdot f(u_k)^{\delta_k}$. Definiere

$$\hat{y}_{s,t} := \hat{u}_k^{-\delta_k} \cdot \dots \cdot \hat{u}_1^{-\delta_1} \cdot \hat{t} \cdot \hat{s} \cdot \hat{t}^{-1}.$$

$\hat{y}_{s,t}$ ist ebenfalls ein Wort in \hat{U} .

Wir fassen alle Relationen in eine Menge zusammen und definieren

$$\hat{P} := \{\hat{r} : r \in R\} \cup \{\hat{q} : q \in Q\} \cup \bigcup_{s \in S, t \in T} \{\hat{x}_{s,t}, \hat{y}_{s,t}\}.$$

Proposition 5.2:

Mit der Notation aus Definition 5.1 ist $\langle \hat{U} \mid \hat{P} \rangle$ eine Präsentation von B .

Beweis:

Sei \hat{B} diejenige Gruppe, die durch die Präsentation $\langle \hat{U} \mid \hat{P} \rangle$ gegeben ist. Nach Konstruktion von \hat{P} ist die Zuordnung $\Phi : \hat{B} \rightarrow B$, $\hat{s} \mapsto f(s)$ ($s \in S$), $\hat{t} \mapsto \alpha(t)$ ($t \in T$) ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus. Da B von $f(S) \cup \alpha(T)$ erzeugt wird, ist Φ surjektiv.

- (*) Für alle $s \in S$, $t \in T$ und $\varepsilon_s, \varepsilon_t \in \{1, -1\}$ gibt es $m \in \mathbb{N}$, $s_1, \dots, s_m \in S$ und $\delta_1, \dots, \delta_m \in \{1, -1\}$ mit $\hat{t}^{\varepsilon_t} \cdot \hat{s}^{\varepsilon_s} = \hat{s}_1^{\delta_1} \cdot \dots \cdot \hat{s}_m^{\delta_m} \cdot \hat{t}^{\varepsilon_t}$ in \hat{B} .

Wir beweisen das für $\varepsilon_s = \varepsilon_t = 1$. In diesem Fall ist nämlich $\hat{t} \cdot \hat{s} = \hat{u}_1^{\delta_1} \cdot \dots \cdot \hat{u}_k^{\delta_k} \cdot \hat{y}_{s,t} \cdot \hat{t} = \hat{u}_1^{\delta_1} \cdot \dots \cdot \hat{u}_k^{\delta_k} \cdot \hat{t}$, wobei die u_i und δ_i aus Definition 5.1 gegeben sind.

Sei nun $\hat{b} \in \hat{B}$ mit $\Phi(\hat{b}) = 1$. Nach (*) gibt es $s_1, \dots, s_m \in S$, $t_1, \dots, t_n \in T$ und $\delta_1, \dots, \delta_m, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{1, -1\}$ mit $\hat{b} = \hat{s}_1^{\delta_1} \cdot \dots \cdot \hat{s}_m^{\delta_m} \cdot \hat{t}_1^{\varepsilon_1} \cdot \dots \cdot \hat{t}_n^{\varepsilon_n}$. Wegen $\Phi(\hat{b}) = 1$ gilt auch $1 = g(1) = g \circ f(s_1^{\delta_1} \cdot \dots \cdot s_m^{\delta_m}) \cdot g \circ \alpha(t_1)^{\varepsilon_1} \cdot \dots \cdot g \circ \alpha(t_n)^{\varepsilon_n} = t_1^{\varepsilon_1} \cdot \dots \cdot t_n^{\varepsilon_n}$. Somit gibt es Worte w_1, \dots, w_k in T , Relationen $q_1, \dots, q_k \in Q$ und $\gamma_1, \dots, \gamma_k \in \{1, -1\}$

mit $t_1^{\varepsilon_1} \cdot \dots \cdot t_n^{\varepsilon_n} = \prod_{i=1}^k (w_i q_i w_i^{-1})^{\gamma_i}$. Ist $w_i = t_{i1}^{\varepsilon_{i1}} \cdot \dots \cdot t_{il}^{\varepsilon_{il}}$, so sei $\hat{w}_i := \hat{t}_{i1}^{\varepsilon_{i1}} \cdot \dots \cdot \hat{t}_{il}^{\varepsilon_{il}}$. Ist

$q_i = t_{i1}^{\varepsilon_{i1}} \cdot \dots \cdot t_{il}^{\varepsilon_{il}}$, so ist $\hat{q}_i = \hat{s}_{im}^{-\delta_{im}} \cdot \dots \cdot \hat{s}_{i1}^{-\delta_{i1}} \cdot \hat{t}_{i1}^{\varepsilon_{i1}} \cdot \dots \cdot \hat{t}_{il}^{\varepsilon_{il}}$ wie in 5.1.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \hat{t}_1^{\varepsilon_1} \cdot \dots \cdot \hat{t}_n^{\varepsilon_n} &= \prod_{i=1}^k (\hat{w}_i \cdot \hat{t}_{i1}^{\varepsilon_{i1}} \cdot \dots \cdot \hat{t}_{il}^{\varepsilon_{il}} \cdot \hat{w}_i^{-1})^{\gamma_i} \\ &= \prod_{i=1}^k (\hat{w}_i \cdot \hat{s}_{i1}^{\delta_{i1}} \cdot \dots \cdot \hat{s}_{im}^{\delta_{im}} \cdot \hat{q}_i \cdot \hat{w}_i^{-1})^{\gamma_i} \\ &\stackrel{(*)}{=} \prod_{i=1}^k (\hat{\sigma}_i \cdot \hat{w}_i \cdot \hat{q}_i \cdot \hat{w}_i^{-1})^{\gamma_i} \quad (\hat{\sigma}_i \text{ geeignetes Wort in } \{\hat{s} : s \in S\}) \\ &= \prod_{i=1}^k (\hat{\sigma}_i \cdot \hat{w}_i \cdot 1 \cdot \hat{w}_i^{-1})^{\gamma_i} \\ &= \prod_{i=1}^k \hat{\sigma}_i^{\gamma_i} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \hat{b}$ ist ein Wort in $\{\hat{s} : s \in S\}$, schreibe $\hat{b} = \hat{s}_1^{\delta_1} \cdot \dots \cdot \hat{s}_l^{\delta_l}$.

$\Rightarrow 1 = \Phi(\hat{b}) = f(s_1^{\delta_1} \cdot \dots \cdot s_l^{\delta_l})$

$\Rightarrow s_1^{\delta_1} \cdot \dots \cdot s_l^{\delta_l} = 1$, da f injektiv ist.

\Rightarrow Es gibt Worte w_1, \dots, w_k in S , Relationen $r_1, \dots, r_k \in R$ und $\gamma_1, \dots, \gamma_k \in \{1, -1\}$

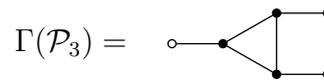
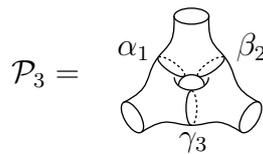
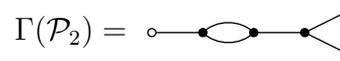
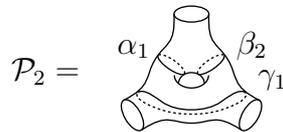
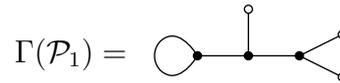
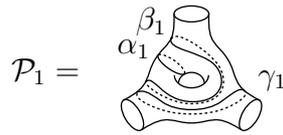
$$\text{mit } s_1^{\delta_1} \cdot \dots \cdot s_l^{\delta_l} = \prod_{i=1}^k (w_i r_i w_i^{-1})^{\gamma_i}.$$

$$\Rightarrow \hat{b} = \hat{s}_1^{\delta_1} \cdot \dots \cdot \hat{s}_l^{\delta_l} = \prod_{i=1}^k (\hat{w}_i \cdot \hat{r}_i \cdot \hat{w}_i^{-1})^{\gamma_i} = \prod_{i=1}^k (\hat{w}_i \cdot 1 \cdot \hat{w}_i^{-1})^{\gamma_i} = 1$$

$\Rightarrow \Phi$ ist injektiv. □

Beispiel 5.3:

In der Fläche $S = \Sigma_{1,3}$ seien folgende Hosenerlegungen gegeben:

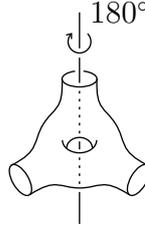


Wir wenden Proposition 5.2 und Bemerkung 3.5 an, um die Stabilisatorgruppen von $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$ zu berechnen.

a) Für die Hosenzerlegung \mathcal{P}_1 gilt

$$\text{Stab}(\mathcal{P}_1) = \text{Stab}_{pw}(\mathcal{P}_1) \stackrel{3.2}{\cong} \text{Stab}_T(\mathcal{P}_1) = \langle t_{\alpha_1}, \sigma_{\beta_1}, \sigma_{\gamma_1} \rangle \cong \mathbb{Z}^3.$$

b) Sei $j \in \text{Mod}(\Sigma_{1,3})$ eine geeignete Drehung der Fläche um 180° :



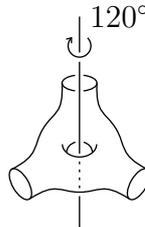
Nach 3.5 haben wir die kurze exakte Sequenz

$$1 \longrightarrow \langle t_{\alpha_1}, t_{\beta_2}, t_{\gamma_1} \rangle \longrightarrow \text{Stab}(\mathcal{P}_2) \longrightarrow V_4 \longrightarrow 1.$$

Eine Präsentation von V_4 ist $V_4 = \langle x, y \mid x^2 = y^2 = (xy)^2 = 1 \rangle$. Wir definieren $\alpha : V_4 \rightarrow \text{Stab}(\mathcal{P}_2)$ durch $\alpha(1) := \text{id}$, $\alpha(x) := j$, $\alpha(y) := \sigma_{\gamma_1}$, $\alpha(xy) := j \circ \sigma_{\gamma_1}$. Das liefert mit 5.2 folgende Präsentation:

$$\begin{aligned} \text{Stab}(\mathcal{P}_2) &= \langle t_{\alpha_1}, t_{\beta_2}, t_{\gamma_1}, j, \sigma_{\gamma_1} \mid t_{\alpha_1}, t_{\beta_2}, t_{\gamma_1}, \sigma_{\gamma_1} \text{ kommutieren}, j^2 = 1, \sigma_{\gamma_1}^2 = t_{\gamma_1}, \\ &\quad j\sigma_{\gamma_1}j\sigma_{\gamma_1} = t_{\gamma_1}, jt_{\alpha_1} = t_{\beta_2}j, jt_{\beta_2} = t_{\alpha_1}j, jt_{\gamma_1} = t_{\gamma_1}j \rangle \\ &= \langle t_{\alpha_1}, t_{\beta_2}, \sigma_{\gamma_1}, j \mid t_{\alpha_1}, t_{\beta_2}, \sigma_{\gamma_1} \text{ kommutieren}, j^2 = 1, jt_{\alpha_1} = t_{\beta_2}j, \\ &\quad jt_{\beta_2} = t_{\alpha_1}j, j\sigma_{\gamma_1} = \sigma_{\gamma_1}j \rangle \\ &= \langle t_{\alpha_1}, t_{\beta_2}, \sigma_{\gamma_1} \rangle \rtimes \langle j \rangle \\ &\cong \mathbb{Z}^3 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \end{aligned}$$

c) Zusätzlich zur Abbildungsklasse j aus b) definieren wir eine Drehung δ von $\Sigma_{1,3}$ um 120° :



Die zu \mathcal{P}_3 gehörige kurze exakte Sequenz aus 3.5 lautet

$$1 \longrightarrow \langle t_{\alpha_1}, t_{\beta_2}, t_{\gamma_3} \rangle \longrightarrow \text{Stab}(\mathcal{P}_3) \longrightarrow S_3 \longrightarrow 1.$$

Dabei habe S_3 die Präsentation $S_3 = \langle x, y \mid x^2 = y^3 = (xy)^2 = 1 \rangle$. Wegen $j^2 = \delta^3 = j\delta j\delta = \text{id}$ liefert die Zuordnung $x \mapsto j$, $y \mapsto \delta$ einen Gruppenhomomorphismus $\alpha : S_3 \rightarrow \text{Stab}(\mathcal{P}_3)$. α ist ein Schnitt der obigen kurzen exakten Sequenz. Wir erhalten folgende Präsentation von $\text{Stab}(\mathcal{P}_3)$:

$$\begin{aligned}
\text{Stab}(\mathcal{P}_3) &= \langle t_{\alpha_1}, t_{\beta_2}, t_{\gamma_3}, j, \delta \mid t_{\alpha_1}, t_{\beta_2}, t_{\gamma_3} \text{ kommutieren, } j^2 = \delta^3 = j\delta j\delta = 1, \\
&\quad jt_{\alpha_1} = t_{\beta_2}j, jt_{\beta_2} = t_{\alpha_1}j, jt_{\gamma_3} = t_{\gamma_3}j, \delta t_{\alpha_1} = t_{\beta_2}\delta, \\
&\quad \delta t_{\beta_2} = t_{\gamma_3}\delta, \delta t_{\gamma_3} = t_{\alpha_1}\delta \rangle \\
&= \langle t_{\alpha_1}, t_{\beta_2}, t_{\gamma_3} \rangle \rtimes \langle j, \delta \rangle \\
&\cong \mathbb{Z}^3 \rtimes S_3
\end{aligned}$$

Bemerkung 5.4:

Falls die kurze exakte Sequenz $1 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 1$ spaltet und $\alpha : C \rightarrow B$ ein Schnitt ist (d.h. ein Homomorphismus mit $g \circ \alpha = \text{id}_C$), so vereinfacht sich die Präsentation: Für jedes Element $q = t_1^{\varepsilon_1} \cdot \dots \cdot t_n^{\varepsilon_n} \in Q$ ersetzen wir die Relation

$$\hat{q} := \hat{s}_m^{-\delta_m} \cdot \dots \cdot \hat{s}_1^{-\delta_1} \cdot \hat{t}_1^{\varepsilon_1} \cdot \dots \cdot \hat{t}_n^{\varepsilon_n}$$

vom Typ (2) durch die Relation

$$\hat{q} := \hat{t}_1^{\varepsilon_1} \cdot \dots \cdot \hat{t}_n^{\varepsilon_n},$$

d.h. wir übertragen lediglich die Relationen aus C . Das ist möglich, da in obiger Relation vom Typ (2) die Gleichung $\alpha(t_1)^{\varepsilon_1} \cdot \dots \cdot \alpha(t_n)^{\varepsilon_n} = \alpha(t_1^{\varepsilon_1} \cdot \dots \cdot t_n^{\varepsilon_n}) = \alpha(q) = \alpha(1) = 1$ gilt.

Erinnerung 5.5:

Seien N, H Gruppen und $\varphi : H \rightarrow \text{Aut}(N)$ ein Gruppenhomomorphismus. Das *semidirekte Produkt* $N \rtimes_{\varphi} H := \{(n, h) : n \in N, h \in H\}$ ist durch die Verknüpfung

$$(n_1, h_1) \cdot (n_2, h_2) := (n_1 \cdot \varphi(h_1)(n_2), h_1 h_2)$$

definiert. Es gibt kanonische Homomorphismen $\iota_N : N \rightarrow N \rtimes_{\varphi} H$ und $\pi_H : N \rtimes_{\varphi} H \rightarrow H$.

Erinnerung 5.6:

Eine kurze exakte Sequenz $1 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 1$ von Gruppen spaltet genau dann, wenn es einen Homomorphismus $\varphi : C \rightarrow \text{Aut}(A)$ und einen Isomorphismus $\Phi : A \rtimes_{\varphi} C \rightarrow B$ mit $f = \Phi \circ \iota_A$ und $g = \pi_C \circ \Phi^{-1}$ gibt.

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & A \rtimes_{\varphi} C & & & \\
& & \nearrow & \downarrow \Phi & \searrow & & \\
1 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \longrightarrow 1
\end{array}$$

Sind φ und Φ gegeben, so ist ein Schnitt $\alpha : C \rightarrow B$ definiert durch $\alpha(c) := \Phi(1, c)$, denn es gilt $g \circ \alpha(c) = g \circ \Phi(1, c) = \pi_C(1, c) = c$. Ist umgekehrt $\alpha : C \rightarrow B$ ein Schnitt, so definiert man

$$\begin{aligned}
\varphi : C &\rightarrow \text{Aut}(A), \quad c \mapsto (a \mapsto f^{-1}(\alpha(c) \cdot f(a) \cdot \alpha(c)^{-1})), \\
\Phi : A \rtimes_{\varphi} C &\rightarrow B, \quad (a, c) \mapsto f(a) \cdot \alpha(c).
\end{aligned}$$

5.2 Der Satz von Brown

Der Satz von Brown (vgl. [Br]) liefert eine Präsentation für eine Gruppe, die auf einem einfach zusammenhängenden CW-Komplex operiert. Wir werden in diesem Abschnitt den Satz von Brown formulieren und ihn auf die Aktion der Abbildungsklassengruppe auf dem einfach zusammenhängenden Hosenkomplex anwenden.

Seien X ein einfach zusammenhängender CW-Komplex und G eine Gruppe, die auf X durch Permutation der Zellen operiert. In diesem Abschnitt unterscheiden wir gerichtete und ungerichtete/geometrische Kanten von X , d.h. zu jeder Kante k von X gibt es eine von k verschiedene Gegenkante \bar{k} , und das Paar $\{k, \bar{k}\}$ ist eine geometrische Kante.

Definition 5.7:

Ein *Vertreterbaum* von $X \bmod G$ ist ein Baum $T \subseteq X$ derart, daß die Ecken von T ein Vertretersystem der Ecken von X unter der Aktion von G sind.

Aus dem Lemma von Zorn folgt, daß es stets einen Vertreterbaum T von $X \bmod G$ gibt. Die Kanten von T sind paarweise nicht äquivalent mod G , denn mod G äquivalente Kanten haben stets denselben Anfangs- und Endpunkt und sind somit, da T ein Baum ist, gleich. Insbesondere werden die Kanten von T nicht invertiert.

Definition 5.8:

Seien I_X die Menge aller Kanten von X , die unter G invertiert werden, und N_X die Menge derjenigen Kanten von X , die unter G nicht invertiert werden. N_X kann in zwei disjunkte Mengen $N_X = N_X^+ \dot{\cup} N_X^-$ zerlegt werden, für die gilt:

- Für jede Kante $k \in N_X^+$ ist $\bar{k} \in N_X^-$ und umgekehrt.
- Für jede Kante $k \in N_X^+$ und jedes $g \in G$ ist auch $gk \in N_X^+$.

N_X^+ heißt *Orientierung* von X .

Definition 5.9:

Von nun an seien stets T ein Vertreterbaum von $X \bmod G$ und P eine Orientierung von X . In P können wir ein Vertretersystem $E^+ \bmod G$ so wählen, daß $P \cap T \subseteq E^+$ gilt und daß für jede Kante $k \in E^+$ auch $i(k) \in T$ gilt, wobei $i(k)$ der Anfangspunkt von k ist. Unter allen Kanten aus I_X können wir ein Vertretersystem $E^- \bmod G$ derart wählen, daß für jede Kante $k \in E^-$ auch $i(k) \in T$ gilt.

Definition und Bemerkung 5.10:

Für jedes $k \in E^+$ gibt es genau eine Ecke $w = w(k) \in T$, die zum Endpunkt $t(k)$ von k mod G äquivalent ist. Es gibt ein $g_k \in G$ mit $t(k) = g_k \cdot w(k)$. Ist $t(k) = w(k)$, so wähle $g_k = 1$. Wie bei jeder Gruppenaktion haben wir die Konjugation

$$c_k : G_{t(k)} \xrightarrow{\sim} G_{w(k)}, \quad x \mapsto g_k^{-1} x g_k.$$

Definition 5.11:

Für jedes $k \in E^+$ gibt es die kanonischen Gruppenhomomorphismen

$$\begin{aligned} \iota_k &: G_k \hookrightarrow G_{i(k)}, \\ \jmath_k &: G_k \hookrightarrow G_{t(k)}. \end{aligned}$$

Für jedes $k \in E^-$ gibt es den kanonischen Gruppenhomomorphismus

$$z_k : G_k \hookrightarrow G_{\{k, \bar{k}\}}.$$

Definition 5.12:

a) Für jedes $k \in E^+$ sei \hat{k} ein Symbol. Damit definieren wir

$$\hat{G} := \left(\underset{v \in V(T)}{*} G_v \right) * \left(\underset{k \in E^-}{*} G_{\{k, \bar{k}\}} \right) * F(\{\hat{k} : k \in E^+\}).$$

Zur besseren Unterscheidung der Elemente von G und \hat{G} schreiben wir für $g \in G_v$ bzw. $g \in G_{\{k, \bar{k}\}}$ auch \hat{g} , wenn es als Element von \hat{G} aufgefaßt wird.

b) Wir definieren einen Gruppenhomomorphismus $\Phi : \hat{G} \rightarrow G$ durch

$$\begin{aligned} \hat{g} \in G_v &\mapsto g, \\ \hat{g} \in G_{\{k, \bar{k}\}} &\mapsto g, \\ \hat{k} &\mapsto g_k. \end{aligned}$$

Definition und Bemerkung 5.13:

Sei $k \in X$ eine Kante von X mit Anfangspunkt $i(k) \in T$. Wir unterscheiden drei Fälle:

1. Fall: Es gibt eine zu k äquivalente Kante $e \in E^+$.

Dann existiert ein $x \in G$ mit $k = xe$. Wegen $i(k) = i(xe) = x \cdot i(e)$ und $i(k), i(e) \in T$ gilt $i(k) = i(e)$ und $x \in G_{i(k)}$. Setze

$$\begin{aligned} \tilde{g}(k) &:= xg_e \in G, \\ \hat{g}(k) &:= \hat{x}\hat{e} \in \hat{G}. \end{aligned}$$

Es gilt $\Phi(\hat{g}(k)) = \tilde{g}(k)$ und $t(k) = \tilde{g}(k) \cdot w(e) \in \tilde{g}(k) \cdot T$.

2. Fall: Es gibt eine Kante $e \in E^+$, so daß k zu \bar{e} äquivalent ist.

Dann existiert ein $x' \in G$ mit $k = x'\bar{e}$. Wegen $i(k) = i(x'\bar{e}) = x' \cdot i(\bar{e}) = x' \cdot t(e) = x'g_e \cdot w(e)$ und $i(k), w(e) \in T$ gilt $i(k) = w(e)$ und $x := x'g_e \in G_{i(k)}$. Setze

$$\begin{aligned} \tilde{g}(k) &:= x' = xg_e^{-1} \in G, \\ \hat{g}(k) &:= \hat{x}\hat{e}^{-1} \in \hat{G}. \end{aligned}$$

Es gilt $\Phi(\hat{g}(k)) = \tilde{g}(k)$ und $t(k) = \tilde{g}(k) \cdot i(e) \in \tilde{g}(k) \cdot T$.

3. Fall: Es gibt eine zu k äquivalente Kante $e \in E^-$.

Dann existieren $x \in G$, $y \in G_{\{e, \bar{e}\}}$ mit $k = xe$ und $\bar{e} = ye$. Wegen $i(k) = i(xe) = x \cdot i(e)$ und $i(k), i(e) \in T$ gilt $i(k) = i(e)$ und $x \in G_{i(k)}$. Setze

$$\begin{aligned}\tilde{g}(k) &:= xy \in G, \\ \hat{g}(k) &:= \hat{x}\hat{y} \in \hat{G}.\end{aligned}$$

Es gilt $\Phi(\hat{g}(k)) = \tilde{g}(k)$ und $t(k) = \tilde{g}(k) \cdot i(e) \in \tilde{g}(k) \cdot T$.

Bemerkung 5.14:

Sei $\alpha = v_0 \xrightarrow{k_1} v_1 \xrightarrow{k_2} v_2 \text{ --- } \dots \text{ --- } v_{n-1} \xrightarrow{k_n} v_n$ ein Kantenweg in X mit $v_0 \in T$. Dann gibt es $g_i \in G$ und $\hat{g}_i \in \hat{G}$ ($i = 1, \dots, n$) mit $\Phi(\hat{g}_i) = g_i$ und $v_i \in g_1 \dots g_i \cdot T$ für alle $i = 1, \dots, n$. Ist α geschlossen, so gilt außerdem $g_1 \dots g_n \in G_{v_0}$.

Beweis:

Sei zunächst $i = 1$. Es gilt $i(k_1) = v_0 \in T$. Setze $g_1 := \tilde{g}(k_1)$ und $\hat{g}_1 := \hat{g}(k_1)$. Damit gilt $\Phi(\hat{g}_1) = g_1$ und $v_1 = t(k_1) \in \tilde{g}(k_1) \cdot T = g_1 \cdot T$.

Sei nun $i \in \{1, \dots, n\}$ beliebig, und die Aussage gelte für alle $j = 1, \dots, i-1$. Für $k'_i := g_{i-1}^{-1} \dots g_1^{-1} k_i$ gilt $i(k'_i) = g_{i-1}^{-1} \dots g_1^{-1} \cdot i(k_i) = g_{i-1}^{-1} \dots g_1^{-1} v_{i-1} \in g_{i-1}^{-1} \dots g_1^{-1} g_1 \dots g_{i-1} \cdot T = T$. Setze $g_i := \tilde{g}(k'_i)$ und $\hat{g}_i := \hat{g}(k'_i)$. Damit gilt $\Phi(\hat{g}_i) = g_i$ und $v_i = t(k_i) = t(g_1 \dots g_{i-1} k'_i) = g_1 \dots g_{i-1} \cdot t(k'_i) \in g_1 \dots g_{i-1} \tilde{g}(k'_i) \cdot T = g_1 \dots g_i \cdot T$.

Ist α geschlossen, dann gilt $v_0 = v_n \in g_1 \dots g_n \cdot T$. Da T ein Vertreterbaum von X mod G ist, erhalten wir $v_0 = g_1 \dots g_n v_0$ und $g_1 \dots g_n \in G_{v_0}$. \square

Definition 5.15:

Sei F ein Vertretersystem der 2-Zellen von X . Für jedes $\tau \in F$ sei $\alpha_\tau = v_0 \text{ --- } v_1 \text{ --- } \dots \text{ --- } v_n$ ein Weg entlang des Randes von τ mit $v_0 \in T$. Mit der Bezeichnungsweise aus 5.14 definieren wir

$$\hat{\tau} := \hat{g}_1 \cdot \dots \cdot \hat{g}_n \cdot (\widehat{g_1 \dots g_n})^{-1} \in \hat{G}.$$

Endlich sind wir in der Lage, den Satz von Brown zu formulieren.

Satz 5.16:

Der Gruppenhomomorphismus $\Phi : \hat{G} \rightarrow G$ aus 5.12b) ist surjektiv, und der Kern ist folgendermaßen gegeben:

$$\begin{aligned}\text{Kern}(\Phi) = \langle & \{\hat{k} : k \in E^+ \cap T\} \\ & \cup \{\hat{k}^{-1} \cdot \iota_k(g) \cdot \hat{k} \cdot (c_k \circ j_k(g))^{-1} : k \in E^+, g \in G_k\} \\ & \cup \{\iota_k(g) \cdot z_k(g)^{-1} : k \in E^-, g \in G_k\} \\ & \cup \{\hat{\tau} : \tau \in F\} \rangle_{\text{normal}}\end{aligned}$$

Es genügen natürlich diejenigen der oben angegebenen Erzeuger, für die $g \in G_k$ aus einem Erzeugendensystem von G_k stammt.

Folgerung 5.17:

In der Situation von 5.16 seien für jedes $v \in V(T)$ eine Präsentation $G_v = \langle S_v \mid R_v \rangle$ und für jedes $k \in E^-$ eine Präsentation $G_{\{k, \bar{k}\}} = \langle S_k \mid R_k \rangle$ gegeben. Dann ist

$$\hat{G} = \left\langle \bigcup_{v \in V(T)} S_v \cup \bigcup_{k \in E^-} S_k \cup \{\hat{k} : k \in E^+\} \mid \bigcup_{v \in V(T)} R_v \cup \bigcup_{k \in E^-} R_k \right\rangle$$

eine Präsentation von \hat{G} . Daraus erhalten wir eine Präsentation von G , indem wir die in 5.16 gegebenen Erzeuger von $\text{Kern}(\Phi)$ zu den Relationen mit aufnehmen.

Das oben angegebene Verfahren, eine Präsentation zu finden, funktioniert auch in dem Fall, daß die Gruppe nicht inversionsfrei auf dem CW-Komplex operiert. Somit können wir es in unserer Situation anwenden, ohne $\mathcal{P}(S)$ baryzentrisch unterteilen zu müssen. (Wenn der Hosenkomples baryzentrisch unterteilt wird, dann erhält man auf dieselbe Weise eine Präsentation, aber die wird dann um ein Vielfaches länger.)

Mit dem Satz von Brown sind wir nun in der Lage, eine Präsentation der Abbildungsklassengruppe anzugeben, da wir aus Kapitel 3 alle Stabilisatorgruppen und aus Kapitel 4 einen Vertreterbaum und alle Bahnen kennen. Wir werden das Verfahren an drei Beispielen erläutern.

Beispiel 5.18:

Es sei $S = \Sigma_{1,1}$. In $\mathcal{P}(\Sigma_{1,1})$ sind alle Ecken äquivalent, d.h. die Ecke $[1, 0]$ ist ein Vertreterbaum von $\mathcal{P}(\Sigma_{1,1}) \bmod \text{SL}_2(\mathbb{Z})$. Ihr Stabilisator ist

$$\begin{aligned} \text{Stab}([1, 0]) &= \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon & b \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} : \varepsilon \in \{1, -1\}, b \in \mathbb{Z} \right\} \\ &\cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ &\cong \langle \varepsilon, b \mid \varepsilon^2 = 1, \varepsilon b = b\varepsilon \rangle. \end{aligned}$$

Da alle Kanten von $\mathcal{P}(\Sigma_{1,1})$ invertiert werden, ist die Orientierung gegeben durch $P = \emptyset$. Die Kante $k := ([1, 0] - [0, 1])$ liefert ein Vertretersystem aller Kanten. Ihr Anfangspunkt liegt in T , und ihr Stabilisator ist

$$\begin{aligned} \text{Stab}_{\text{nor}}(k) &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &\cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \\ &\cong \langle v \mid v^4 = 1 \rangle. \end{aligned}$$

Schließlich ist $\tau := ([1, 0] - [0, 1] - [1, 1])$ ein Vertretersystem aller (unorientierten) 2-Zellen. Mit Hilfe dieser Daten erhalten wir:

- a) $\hat{G} = \text{Stab}([1, 0]) * \text{Stab}_{\text{nor}}(k) = \langle \varepsilon, b, v \mid \varepsilon^2 = v^4 = 1, \varepsilon b = b\varepsilon \rangle$
- b) $\text{Stab}_{\text{or}}^+(k) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$
 $v_k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot z_k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = 1$ und $v_k \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot z_k \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \varepsilon v^{-2}$

- c) Ein Weg entlang des Randes von τ ist $\alpha_\tau = [1, 0] \xrightarrow{-k} [0, 1] \xrightarrow{-k_2} [1, 1] \xrightarrow{-k_3} [1, 0]$.
Es ist

$$\begin{aligned} g_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, & \hat{g}_1 &= v, \\ g_2 &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, & \hat{g}_2 &= b^{-1}v, \\ g_3 &= g_2, & \hat{g}_3 &= \hat{g}_2, \\ g_1 g_2 g_3 &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, & \widehat{g_1 g_2 g_3} &= \varepsilon b. \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\hat{\tau} = vb^{-1}vb^{-1}vb^{-1}\varepsilon.$$

Insgesamt ist das folgende eine Präsentation von $\text{Mod}(\Sigma_{1,1}) \cong \text{SL}_2(\mathbb{Z})$:

$$\begin{aligned} \text{SL}_2(\mathbb{Z}) &\cong \hat{G} / \text{Kern}(\Phi) \\ &\cong \langle \varepsilon, b, v \mid \varepsilon^2 = v^4 = 1, \varepsilon b = b\varepsilon \rangle / \langle \varepsilon v^{-2}, vb^{-1}vb^{-1}vb^{-1}\varepsilon \rangle_{\text{normal}} \\ &\cong \langle \varepsilon, b, v \mid \varepsilon^2 = v^4 = 1, \varepsilon b = b\varepsilon, \varepsilon = v^2, (vb^{-1})^3 = \varepsilon \rangle \end{aligned}$$

Aus dieser Präsentation erhalten wir die bekannte Darstellung von $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ als Amalgam:

$$\begin{aligned} \text{SL}_2(\mathbb{Z}) &\cong \langle \varepsilon, b, v \mid \varepsilon^2 = v^4 = 1, \varepsilon b = b\varepsilon, \varepsilon = v^2, (vb^{-1})^3 = \varepsilon \rangle \\ &\cong \langle \varepsilon, b, v, a \mid \varepsilon^2 = v^4 = 1, \varepsilon b = b\varepsilon, \varepsilon = v^2, (vb^{-1})^3 = \varepsilon, a = vb^{-1} \rangle \\ &\cong \langle \varepsilon, b, v, a \mid v^4 = \varepsilon^2 = a^6 = 1, v^2 = \varepsilon = a^3, b = a^{-1}v \rangle \\ &\cong \langle \varepsilon, v, a \mid v^4 = \varepsilon^2 = a^6 = 1, v^2 = \varepsilon = a^3 \rangle \\ &\cong \langle v \mid v^4 \rangle *_{\langle \varepsilon \mid \varepsilon^2 \rangle} \langle a \mid a^6 \rangle \\ &\cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \end{aligned}$$

Beispiel 5.19:

Für die Fläche $S = \Sigma_{0,4}$ gehen wir ähnlich vor. Wir wählen dieselben Vertretersysteme $T = [1, 0]$, $k = ([1, 0] - [0, 1])$, $\tau = ([1, 0] - [0, 1] - [1, 1])$ und erhalten:

$$\begin{aligned} \text{a) Stab}([1, 0]) &= \left\{ \begin{pmatrix} x & \\ & y \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} : x, y \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \\ &\cong V_4 \rtimes \mathbb{Z} \\ &\cong \langle x, y, b \mid x^2 = y^2 = 1, xy = yx, b^{-1}xb = x, b^{-1}yb = xy \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Stab}_{\text{nor}}(k) &= V_4 \rtimes \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &\cong V_4 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ &\cong \langle \xi, \eta, v \mid \xi^2 = \eta^2 = 1, \xi\eta = \eta\xi, v^2 = 1, v^{-1}\xi v = \eta \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{G} &= \text{Stab}([1, 0]) * \text{Stab}_{\text{nor}}(k) \\ &= \langle x, y, b, \xi, \eta, v \mid x^2 = y^2 = 1, xy = yx, b^{-1}xb = x, b^{-1}yb = xy, \xi^2 = \eta^2 = 1, \\ &\quad \xi\eta = \eta\xi, v^2 = 1, v^{-1}\xi v = \eta, v^{-1}\eta v = \xi \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b) } \text{Stab}_{or}^+(k) &= V_4 \rtimes \{\pm \mathcal{E}\} \\
\iota_k \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \pm \mathcal{E} \right) \cdot z_k \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \pm \mathcal{E} \right)^{-1} &= 1 \\
\iota_k \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \pm \mathcal{E} \right) \cdot z_k \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \pm \mathcal{E} \right)^{-1} &= x\xi^{-1} \\
\iota_k \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \pm \mathcal{E} \right) \cdot z_k \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \pm \mathcal{E} \right)^{-1} &= y\eta^{-1} \\
\iota_k \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \pm \mathcal{E} \right) \cdot z_k \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \pm \mathcal{E} \right)^{-1} &= xy\xi^{-1}\eta^{-1}
\end{aligned}$$

c) Der Weg $\alpha_\tau = [1, 0] \xrightarrow{k} [0, 1] \xrightarrow{k_2} [1, 1] \xrightarrow{k_3} [1, 0]$ liefert:

$$\begin{aligned}
g_1 &= \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right), & \hat{g}_1 &= v, \\
g_2 &= \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right), & \hat{g}_2 &= b^{-1}v, \\
g_3 &= g_2, & \hat{g}_3 &= \hat{g}_2, \\
g_1 g_2 g_3 &= \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right), & \widehat{g_1 g_2 g_3} &= b, \\
\hat{\tau} &= vb^{-1}vb^{-1}vb^{-1}.
\end{aligned}$$

Das liefert folgende Präsentation von $\text{Mod}(\Sigma_{0,4}) \cong V_4 \rtimes \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$:

$$\begin{aligned}
V_4 \rtimes \text{PSL}_2(\mathbb{Z}) &\cong \langle x, y, b, \xi, \eta, v \mid x^2 = y^2 = 1, xy = yx, b^{-1}xb = x, b^{-1}yb = xy, \\
&\quad \xi^2 = \eta^2 = 1, \xi\eta = \eta\xi, v^2 = 1, v^{-1}\xi v = \eta, v^{-1}\eta v = \xi, \\
&\quad x = \xi, y = \eta, xy = \xi\eta, (vb^{-1})^3 = 1 \rangle \\
&\cong \langle x, y, b, v \mid x^2 = y^2 = 1, xy = yx, b^{-1}xb = x, b^{-1}yb = xy, \\
&\quad v^2 = 1, v^{-1}xv = y, v^{-1}yv = x, (vb^{-1})^3 = 1 \rangle
\end{aligned}$$

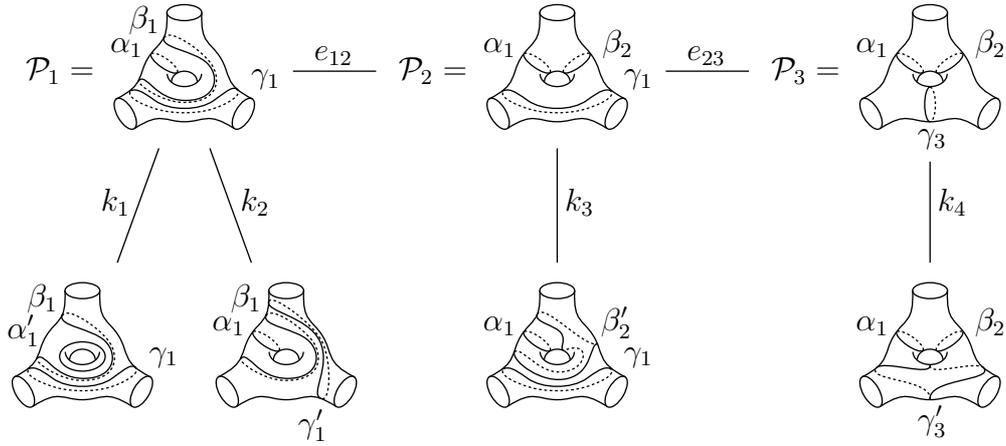
Auch in diesem Beispiel sind die Struktur von $V_4 \rtimes \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ als semidirektes Produkt und die Struktur von $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ als freies Produkt zu erkennen:

$$\begin{aligned}
V_4 \rtimes \text{PSL}_2(\mathbb{Z}) &\cong \langle x, y, b, v \mid x^2 = y^2 = 1, xy = yx, b^{-1}xb = x, b^{-1}yb = xy, \\
&\quad v^2 = 1, v^{-1}xv = y, v^{-1}yv = x, (vb^{-1})^3 = 1 \rangle \\
&\cong \langle x, y, v, a \mid x^2 = y^2 = 1, xy = yx, v^2 = a^3 = 1, a^{-1}xa = x^{-1}y, \\
&\quad a^{-1}ya = x, v^{-1}xv = y, v^{-1}yv = x \rangle \\
&\cong \langle x, y \mid x^2 = y^2 = 1, xy = yx \rangle \rtimes \langle v, a \mid v^2 = a^3 = 1 \rangle \\
&\cong \langle x, y \mid x^2 = y^2 = 1, xy = yx \rangle \rtimes (\langle v \mid v^2 \rangle * \langle a \mid a^3 \rangle) \\
&\cong V_4 \rtimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})
\end{aligned}$$

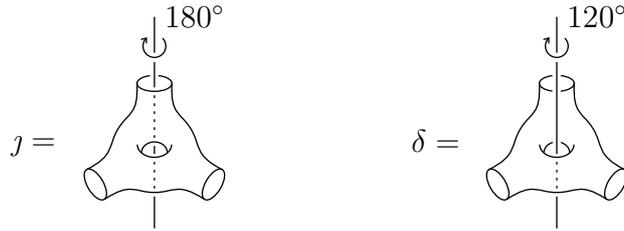
Beispiel 5.20:

Sei schließlich $S = \Sigma_{1,3}$. Bezüglich einer festen Parametrisierung von S seien die in Abbildung 5.1 skizzierten Hosenerlegungen und Moves gegeben. Der Baum $T = (\mathcal{P}_1 \xrightarrow{e_{12}} \mathcal{P}_2 \xrightarrow{e_{23}} \mathcal{P}_3) \subseteq \mathcal{P}(\Sigma_{1,3})$ ist ein Vertreterbaum von $\mathcal{P}(\Sigma_{1,3})$ mod $\text{Mod}(\Sigma_{1,3})$, vgl. Bemerkung 4.22. Gemäß Folgerung 4.24 bilden die Kanten $\{e_{12}, e_{23}\}$ bzw. $\{k_1, \dots, k_4\}$ Vertretersysteme aller nichtinvertierten bzw. aller invertierten Kanten. Daher gilt

$$\hat{G} = \left(\begin{matrix} 3 \\ * \\ \text{Stab}(\mathcal{P}_i) \end{matrix} \right) * \left(\begin{matrix} 4 \\ * \\ \text{Stab}_{nor}(k_i) \end{matrix} \right) * F(\{\hat{e}_{12}, \hat{e}_{23}\}).$$

Abbildung 5.1: Vertreter der Aktion von $\text{Mod}(\Sigma_{1,3})$ auf $\mathcal{P}(\Sigma_{1,3})$

Bezüglich der oben angegebenen Parametrisierung seien folgende Abbildungsklassen j und δ gegeben:



Dann haben die Stabilisatorgruppen von $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$ folgende Präsentationen, vgl. Beispiel 5.3:

$$\begin{aligned} \text{Stab}(\mathcal{P}_1) &= \langle t_{\alpha_1}, \sigma_{\beta_1}, \sigma_{\gamma_1} \mid \text{alles kommutiert} \rangle \\ \text{Stab}(\mathcal{P}_2) &= \langle t_{\alpha_1}, t_{\beta_2}, \sigma_{\gamma_1}, j \mid t_{\alpha_1}, t_{\beta_2}, \sigma_{\gamma_1} \text{ kommutieren, } j^2 = 1, jt_{\alpha_1} = t_{\beta_2}j, j\sigma_{\gamma_1} = \sigma_{\gamma_1}j \rangle \\ \text{Stab}(\mathcal{P}_3) &= \langle t_{\alpha_1}, t_{\beta_2}, t_{\gamma_3}, j, \delta \mid t_{\alpha_1}, t_{\beta_2}, t_{\gamma_3} \text{ kommutieren, } j^2 = \delta^3 = j\delta j\delta = 1, jt_{\alpha_1} = t_{\beta_2}j, \\ &\quad jt_{\gamma_3} = t_{\gamma_3}j, \delta t_{\alpha_1} = t_{\beta_2}\delta, \delta t_{\beta_2} = t_{\gamma_3}\delta, \delta t_{\gamma_3} = t_{\alpha_1}\delta \rangle \end{aligned}$$

Im Beweis von Proposition 3.22a) wurde eine Abbildungsklasse $a \in \text{Mod}(\Sigma_{1,3})$ konstruiert mit $a(\alpha_1) = \alpha'_1$, $a(\alpha'_1) = \alpha_1$ und $a^2 = \sigma_{\beta_1}$, nämlich $a := t_{\alpha_1} \circ t_{\alpha'_1} \circ t_{\alpha_1}$. Die Abbildungsklasse $b := \sigma_{\gamma_1}^{-1} \circ t_{\alpha_1}^{-1} \circ \sigma_{\beta_1} \circ t_{\beta_2} \in \text{Mod}(\Sigma_{1,3})$ erfüllt $b(\beta_2) = \beta'_2$, $b(\beta'_2) = \beta_2$ und $b^2 = \text{id}$, vgl. den Beweis von Proposition 3.22c). Ein geeigneter (von unserer Parametrisierung abhängiger) Halbtwist c_1 um β_1 erfüllt $c_1(\gamma_1) = \gamma'_1$, $c_1(\gamma'_1) = \gamma_1$ und $c_1^2 = t_{\beta_1}$. Schließlich gibt es, analog zum Beweis von Bemerkung 3.26c), eine Abbildungsklasse $c_3 \in \text{Mod}(\Sigma_{1,3})$ mit $c_3(\gamma_3) = \gamma'_3$, $c_3(\gamma'_3) = \gamma_3$ und $c_3^2 = t_{\alpha_1} \circ t_{\beta_2}$, nämlich $c_3 := t_{\alpha_1} \circ t_{\beta_2} \circ \sigma_{\gamma_1}^{-1} \circ t_{\gamma_3}^{-1}$. Mit Hilfe dieser Abbildungsklassen erhalten wir Präsentationen der Kantenstabilisatoren:

$$\begin{aligned}\text{Stab}_{nor}(k_1) &= \langle a, \sigma_{\gamma_1} \mid \text{alles kommutiert} \rangle \\ \text{Stab}_{or}^+(k_1) &= \langle \sigma_{\beta_1}, \sigma_{\gamma_1} \mid \text{alles kommutiert} \rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Stab}_{nor}(k_2) &= \langle t_{\alpha_1}, \sigma_{\beta_1}, c_1 \mid \text{alles kommutiert}, \sigma_{\beta_1}^2 = c_1^2 \rangle \\ \text{Stab}_{or}^+(k_2) &= \langle t_{\alpha_1}, \sigma_{\beta_1} \mid \text{alles kommutiert} \rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Stab}_{nor}(k_3) &= \langle t_{\alpha_1}, \sigma_{\gamma_1}, b \mid \text{alles kommutiert}, b^2 = 1 \rangle \\ \text{Stab}_{or}^+(k_3) &= \langle t_{\alpha_1}, \sigma_{\gamma_1} \mid \text{alles kommutiert} \rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Stab}_{nor}(k_4) &= \langle t_{\alpha_1}, t_{\beta_2}, j, c_3 \mid t_{\alpha_1}, t_{\beta_2}, c_3 \text{ kommutieren}, c_3^2 = t_{\alpha_1} t_{\beta_2}, j^2 = 1, \\ &\quad jc_3 = c_3 j, jt_{\alpha_1} = t_{\beta_2} j \rangle \\ \text{Stab}_{or}^+(k_4) &= \langle t_{\alpha_1}, t_{\beta_2}, j \mid t_{\alpha_1}, t_{\beta_2} \text{ kommutieren}, j^2 = 1, jt_{\alpha_1} = t_{\beta_2} j \rangle\end{aligned}$$

Wir nehmen gemäß Satz 5.16 folgende Relationen auf, um eine Präsentation der Abbildungsklassengruppe $\text{Mod}(\Sigma_{1,3})$ zu erhalten.

- a) Die Kanten e_{12} und e_{23} liegen in T , daher gilt $\hat{e}_{12} = 1$ und $\hat{e}_{23} = 1$.
- b) Die Kantenstabilisatoren von e_{12} und e_{23} haben folgende Präsentation:

$$\begin{aligned}\text{Stab}_{or}^+(e_{12}) &= \langle t_{\alpha_1}, \sigma_{\gamma_1} \mid \text{alles kommutiert} \rangle \\ \text{Stab}_{or}^+(e_{23}) &= \langle t_{\alpha_1}, t_{\beta_2}, j \mid t_{\alpha_1}, t_{\beta_2} \text{ kommutieren}, j^2 = 1, jt_{\alpha_1} = t_{\beta_2} j \rangle\end{aligned}$$

Für jeden Erzeuger dieser beiden Gruppen identifizieren wir die zugehörigen Elemente in den entsprechenden, in \hat{G} vorkommenden Stabilisatorgruppen:

$$\begin{aligned}\text{Stab}(\mathcal{P}_1) \ni t_{\alpha_1} &= t_{\alpha_1} \in \text{Stab}(\mathcal{P}_2) \\ \text{Stab}(\mathcal{P}_1) \ni \sigma_{\gamma_1} &= \sigma_{\gamma_1} \in \text{Stab}(\mathcal{P}_2) \\ \text{Stab}(\mathcal{P}_2) \ni t_{\alpha_1} &= t_{\alpha_1} \in \text{Stab}(\mathcal{P}_3) \\ \text{Stab}(\mathcal{P}_2) \ni t_{\beta_2} &= t_{\beta_2} \in \text{Stab}(\mathcal{P}_3) \\ \text{Stab}(\mathcal{P}_2) \ni j &= j \in \text{Stab}(\mathcal{P}_3)\end{aligned}$$

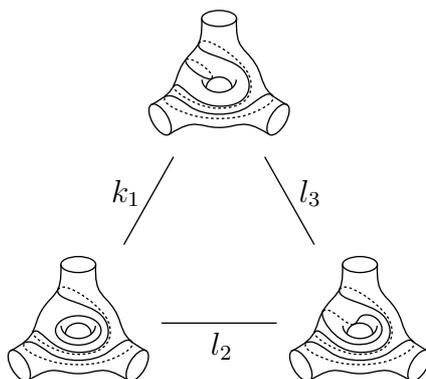
- c) Für jede Kante k_i und jeden Erzeuger von $\text{Stab}_{or}^+(k_i)$ ($i = 1, \dots, 4$) identifizieren wir die zugehörigen Elemente in $\text{Stab}(i(k_i))$ und $\text{Stab}_{nor}(k_i)$:

$$\begin{aligned}\text{Stab}(\mathcal{P}_1) \ni \sigma_{\beta_1} &= a^2 \in \text{Stab}_{nor}(k_1) \\ \text{Stab}(\mathcal{P}_1) \ni \sigma_{\gamma_1} &= \sigma_{\gamma_1} \in \text{Stab}_{nor}(k_1) \\ \text{Stab}(\mathcal{P}_1) \ni t_{\alpha_1} &= t_{\alpha_1} \in \text{Stab}_{nor}(k_2) \\ \text{Stab}(\mathcal{P}_1) \ni \sigma_{\beta_1} &= \sigma_{\beta_1} \in \text{Stab}_{nor}(k_2) \\ \text{Stab}(\mathcal{P}_2) \ni t_{\alpha_1} &= t_{\alpha_1} \in \text{Stab}_{nor}(k_3) \\ \text{Stab}(\mathcal{P}_2) \ni \sigma_{\gamma_1} &= \sigma_{\gamma_1} \in \text{Stab}_{nor}(k_3) \\ \text{Stab}(\mathcal{P}_3) \ni t_{\alpha_1} &= t_{\alpha_1} \in \text{Stab}_{nor}(k_4) \\ \text{Stab}(\mathcal{P}_3) \ni t_{\beta_2} &= t_{\beta_2} \in \text{Stab}_{nor}(k_4) \\ \text{Stab}(\mathcal{P}_3) \ni j &= j \in \text{Stab}_{nor}(k_4)\end{aligned}$$

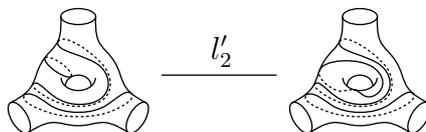
- d) Nach Bemerkung 4.25 gibt es acht Bahnen von nichtorientierten 2-Zellen, nämlich drei vom Typ (3A), zwei vom Typ (5A) und jeweils eine von den Typen (3S),

(4C), (6AS). Wir werden für jede Bahn einen Vertreter skizzieren und eine Relation bestimmen. Dabei behandeln wir die Relation, die zur 2-Zelle vom Typ (3S) gehört, ausführlich und beschränken uns in den anderen Fällen darauf, eine Skizze der 2-Zelle sowie die Elemente g_i und die Relation $\hat{\tau}$ anzugeben.

- Gegeben sei folgende 2-Zelle vom Typ (3S):



Die Abbildungsklasse a invertiert k_1 . Da k_1 in dem oben gewählten Vertretersystem der invertierten Kanten enthalten ist, definieren wir $g_1 := 1 \cdot a = a$ gemäß dem 3. Fall in 5.13. Die Kante $l'_2 := g_1^{-1}l_2$ ist folgendermaßen gegeben:

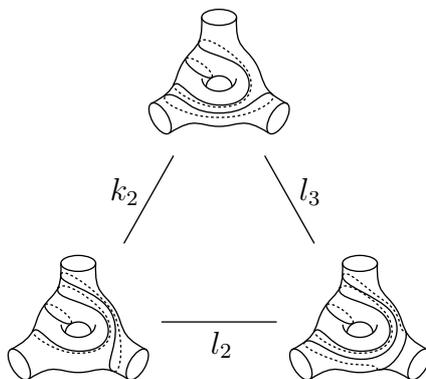


Modulo $\text{Mod}(\Sigma_{1,3})$ ist k'_2 zu k_1 äquivalent. Es gilt $t_{\alpha_1}^{-1}k_1 = l'_2$ und $ak_1 = \bar{k}_1$, daher definieren wir $g_2 := t_{\alpha_1}^{-1} \circ a$. Schließlich sei $l'_3 := g_2^{-1}g_1^{-1}l_3$. Es ist $l'_3 = l'_2$, also $g_3 := g_2 = t_{\alpha_1}^{-1} \circ a$.

Für die Abbildungsklasse $g := g_1g_2g_3 = a \circ t_{\alpha_1}^{-1} \circ a \circ t_{\alpha_1}^{-1} \circ a$ gilt $g(\alpha_1) = \alpha_1$ und $g(\alpha'_1) = t_{\alpha_1}(\alpha'_1)$. Somit gibt es ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $g = \sigma_{\beta_1}^n \circ t_{\alpha_1}$. Wegen $g(\beta_2) = \sigma_{\beta_1}(\beta_2)$ gilt $n = 1$.

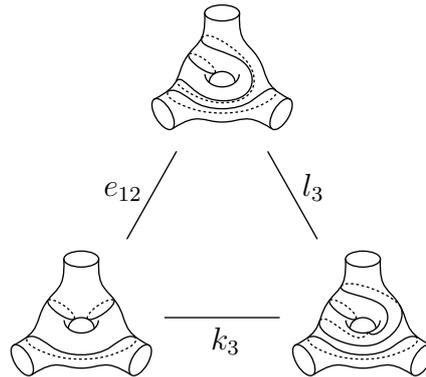
\Rightarrow Die zu obiger 2-Zelle gehörige Relation ist $\hat{\tau}_{(3S)} = at_{\alpha_1}^{-1}at_{\alpha_1}^{-1}at_{\alpha_1}^{-1}\sigma_{\beta_1}^{-1}$.

- Gegeben sei folgende 2-Zelle vom Typ (3A):



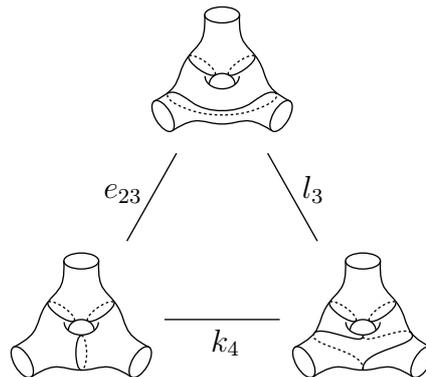
$$\begin{aligned}
g_1 &= c_1 \\
g_2 &= \sigma_{\gamma_1} \circ c_1 \\
g_3 &= \sigma_{\gamma_1} \circ c_1 \\
g_1 g_2 g_3 &= c_1 \circ \sigma_{\gamma_1} \circ c_1 \circ \sigma_{\gamma_1} \circ c_1 = \sigma_{\beta_1}^4 \circ \sigma_{\gamma_1}^{-1} \\
\Rightarrow \hat{\tau}_{(3A,1)} &= c_1 \sigma_{\gamma_1} c_1 \sigma_{\gamma_1} c_1 \sigma_{\gamma_1} \sigma_{\beta_1}^{-4}
\end{aligned}$$

- Gegeben sei folgende 2-Zelle vom Typ (3A):



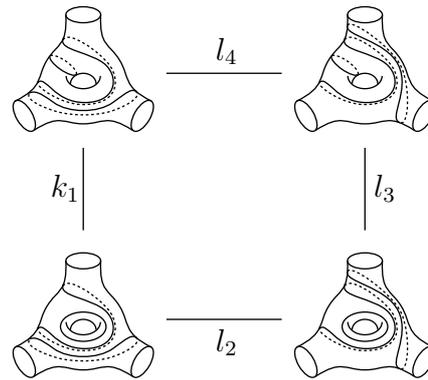
$$\begin{aligned}
g_1 &= 1 \\
g_2 &= b \\
g_3 &= t_{\beta_2}^{-1} \\
g_1 g_2 g_3 &= b \circ t_{\beta_2}^{-1} = \sigma_{\gamma_1}^{-1} \circ t_{\alpha_1}^{-1} \circ \sigma_{\beta_1} \\
\Rightarrow \hat{\tau}_{(3A,2)} &= b t_{\beta_2}^{-1} \sigma_{\beta_1}^{-1} t_{\alpha_1} \sigma_{\gamma_1}
\end{aligned}$$

- Gegeben sei folgende 2-Zelle vom Typ (3A):



$$\begin{aligned}
g_1 &= 1 \\
g_2 &= c_3 \\
g_3 &= t_{\gamma_3} \\
g_1 g_2 g_3 &= c_3 \circ t_{\gamma_3} = t_{\alpha_1} \circ t_{\beta_2} \circ \sigma_{\gamma_1}^{-1} \\
\Rightarrow \hat{\tau}_{(3A,3)} &= c_3 t_{\gamma_3} \sigma_{\gamma_1} t_{\beta_2}^{-1} t_{\alpha_1}^{-1}
\end{aligned}$$

- Gegeben sei folgende 2-Zelle vom Typ (4C):



$$g_1 = a$$

$$g_2 = c_1$$

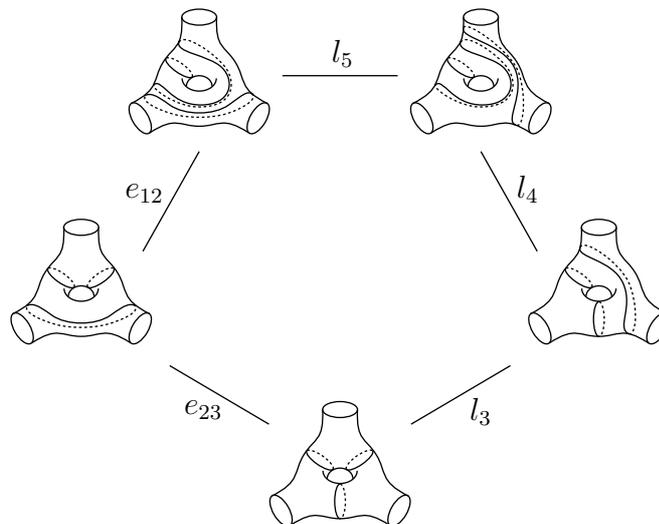
$$g_3 = a$$

$$g_4 = c_1$$

$$g_1 g_2 g_3 g_4 = a \circ c_1 \circ a \circ c_1 = a^2 \circ c_1^2 = \sigma_{\beta_1} \circ t_{\beta_1} = \sigma_{\beta_1}^3$$

$$\Rightarrow \hat{\tau}_{(4C)} = ac_1ac_1\sigma_{\beta_1}^{-3}$$

- Gegeben sei folgende 2-Zelle vom Typ (5A):



$$g_1 = 1$$

$$g_2 = 1$$

$$g_3 = \delta^{-1}$$

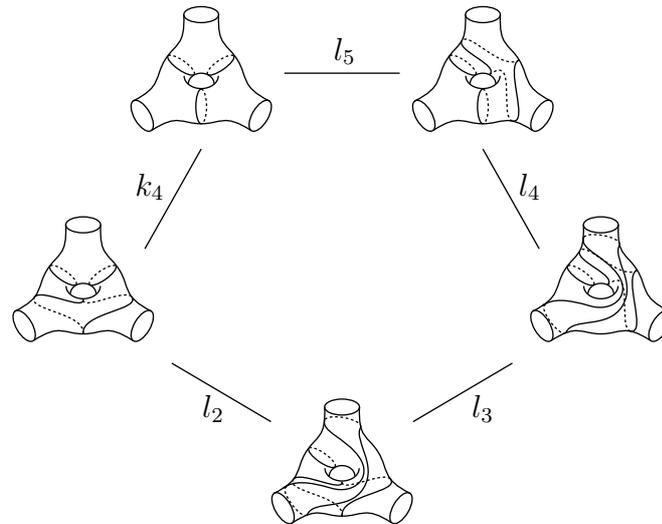
$$g_4 = j$$

$$g_5 = c_1$$

$$g_1 g_2 g_3 g_4 g_5 = \delta^{-1} \circ j \circ c_1 = \sigma_{\beta_1}$$

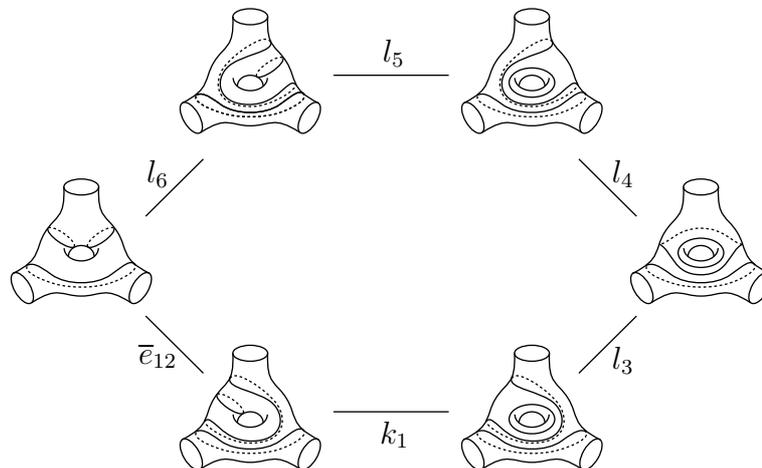
$$\Rightarrow \hat{\tau}_{(5A,1)} = \delta^{-1} j c_1 \sigma_{\beta_1}^{-1}$$

- Gegeben sei folgende 2-Zelle vom Typ (5A):



$$\begin{aligned}
 g_1 &= c_3 \\
 g_2 &= t_{\beta_2}^{-1} \circ \delta^{-1} \\
 g_3 &= j \circ t_{\beta_2} \circ b \\
 g_4 &= 1 \\
 g_5 &= \delta^{-1} t_{\gamma_3}^{-1} c_3 \\
 g_1 g_2 g_3 g_4 g_5 &= c_3 \circ t_{\beta_2}^{-1} \circ \delta^{-1} \circ j \circ t_{\beta_2} \circ b \circ \delta^{-1} \circ t_{\gamma_3}^{-1} \circ c_3 = \delta^{-1} \circ t_{\alpha_1} \circ t_{\beta_2} \circ t_{\gamma_3}^{-1} \\
 \Rightarrow \hat{\tau}_{(5A,2)} &= c_3 t_{\beta_2}^{-1} \delta^{-1} j t_{\beta_2} b \delta^{-1} t_{\gamma_3}^{-1} c_3 t_{\gamma_3} t_{\beta_2}^{-1} t_{\alpha_1}^{-1} \delta
 \end{aligned}$$

- Gegeben sei folgende 2-Zelle vom Typ (6AS):



$$\begin{aligned}
 g_1 &= 1 \\
 g_2 &= a \\
 g_3 &= 1 \\
 g_4 &= t_{\beta_2} \\
 g_5 &= t_{\alpha_1}^{-1} \circ a \\
 g_6 &= 1 \\
 g_1 g_2 g_3 g_4 g_5 g_6 &= a \circ t_{\beta_2} \circ t_{\alpha_1}^{-1} \circ a = j \circ \sigma_{\gamma_1}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \hat{\tau}_{(6AS)} = at_{\beta_2}t_{\alpha_1}^{-1}a\sigma_{\gamma_1}^{-1}j$$

Wir schließen die Arbeit ab mit der Angabe der Präsentation, die wir aus den obigen Daten erhalten.

Satz 5.21:

Die Abbildungsklassengruppe $\text{Mod}(\Sigma_{1,3})$ hat folgende Präsentation:

$$\begin{aligned} \text{Mod}(\Sigma_{1,3}) &\cong \langle t_{\alpha_1}, t_{\beta_2}, t_{\gamma_3}, \sigma_{\beta_1}, \sigma_{\gamma_1}, j, \delta, a, b, c_1, c_3 \mid \\ &\quad t_{\alpha_1}t_{\beta_2} = t_{\beta_2}t_{\alpha_1}, t_{\alpha_1}t_{\gamma_3} = t_{\gamma_3}t_{\alpha_1}, t_{\beta_2}t_{\gamma_3} = t_{\gamma_3}t_{\beta_2}, t_{\alpha_1}\sigma_{\beta_1} = \sigma_{\beta_1}t_{\alpha_1}, \\ &\quad t_{\alpha_1}\sigma_{\gamma_1} = \sigma_{\gamma_1}t_{\alpha_1}, t_{\beta_2}\sigma_{\gamma_1} = \sigma_{\gamma_1}t_{\beta_2}, \sigma_{\beta_1}\sigma_{\gamma_1} = \sigma_{\gamma_1}\sigma_{\beta_1}, j^2 = \delta^3 = j\delta j\delta = 1, \\ &\quad jt_{\alpha_1} = t_{\beta_2}j, jt_{\gamma_3} = t_{\gamma_3}j, j\sigma_{\gamma_1} = \sigma_{\gamma_1}j, \delta t_{\alpha_1} = t_{\beta_2}\delta, \delta t_{\beta_2} = t_{\gamma_3}\delta, \\ &\quad a\sigma_{\gamma_1} = \sigma_{\gamma_1}a, a^2 = \sigma_{\beta_1}, bt_{\alpha_1} = t_{\alpha_1}b, b\sigma_{\gamma_1} = \sigma_{\gamma_1}b, b^2 = 1, \\ &\quad c_1t_{\alpha_1} = t_{\alpha_1}c_1, c_1\sigma_{\beta_1} = \sigma_{\beta_1}c_1, c_1^2 = \sigma_{\beta_1}^2, \\ &\quad c_3t_{\alpha_1} = t_{\alpha_1}c_3, c_3t_{\beta_2} = t_{\beta_2}c_3, c_3j = jc_3, c_3^2 = t_{\alpha_1}t_{\beta_2}, \\ &\quad (at_{\alpha_1}^{-1})^3 = \sigma_{\beta_1}, (c_1\sigma_{\gamma_1})^3 = \sigma_{\beta_1}^4, t_{\alpha_1}\sigma_{\gamma_1}b = \sigma_{\beta_1}t_{\beta_2}, c_3t_{\gamma_3}\sigma_{\gamma_1} = t_{\alpha_1}t_{\beta_2}, \\ &\quad (ac_1)^2 = \sigma_{\beta_1}^3, jc_1 = \delta\sigma_{\beta_1}, c_3t_{\beta_2}^{-1}\delta^{-1}jt_{\beta_2}b\delta^{-1}t_{\gamma_3}^{-1}c_3t_{\gamma_3}t_{\beta_2}^{-1}t_{\alpha_1}^{-1}\delta = 1, \\ &\quad at_{\beta_2}t_{\alpha_1}^{-1}a\sigma_{\gamma_1}^{-1}j = 1 \rangle \\ &\cong \langle t_{\alpha_1}, t_{\beta_2}, t_{\gamma_3}, \sigma_{\gamma_1}, j, \delta, a, b \mid \\ &\quad t_{\alpha_1}t_{\beta_2} = t_{\beta_2}t_{\alpha_1}, t_{\alpha_1}t_{\gamma_3} = t_{\gamma_3}t_{\alpha_1}, t_{\beta_2}t_{\gamma_3} = t_{\gamma_3}t_{\beta_2}, \\ &\quad t_{\alpha_1}\sigma_{\gamma_1} = \sigma_{\gamma_1}t_{\alpha_1}, t_{\beta_2}\sigma_{\gamma_1} = \sigma_{\gamma_1}t_{\beta_2}, j^2 = \delta^3 = j\delta j\delta = 1, \\ &\quad jt_{\alpha_1} = t_{\beta_2}j, jt_{\gamma_3} = t_{\gamma_3}j, j\sigma_{\gamma_1} = \sigma_{\gamma_1}j, \delta t_{\alpha_1} = t_{\beta_2}\delta, \delta t_{\beta_2} = t_{\gamma_3}\delta, \\ &\quad a\sigma_{\gamma_1} = \sigma_{\gamma_1}a, a^2t_{\alpha_1} = t_{\alpha_1}a^2, aj\delta = j\delta a, bt_{\alpha_1} = t_{\alpha_1}b, b\sigma_{\gamma_1} = \sigma_{\gamma_1}b, b^2 = 1, \\ &\quad at_{\alpha_1}^{-1}a = t_{\alpha_1}at_{\alpha_1}, (j\delta\sigma_{\gamma_1})^3 = a^2, t_{\alpha_1}\sigma_{\gamma_1}b = a^2t_{\beta_2}, (t_{\gamma_3}\sigma_{\gamma_1})^2 = t_{\alpha_1}t_{\beta_2}, \\ &\quad t_{\gamma_3}\sigma_{\gamma_1}t_{\beta_2}^{-1}\delta^{-1}jt_{\beta_2}b\delta^{-1}\sigma_{\gamma_1}t_{\gamma_3}t_{\beta_2}^{-1}t_{\alpha_1}^{-1}\delta = 1, at_{\beta_2}t_{\alpha_1}^{-1}a = j\sigma_{\gamma_1} \rangle \end{aligned}$$

Literaturverzeichnis

- [Bi] Joan Birman: *Braids, links, and mapping class groups*. Annals of Mathematics Studies 82, Princeton university press, 1975.
- [Br] Kenneth Brown: *Presentations for groups acting on simply-connected complexes*. Journal of Pure and Applied Algebra 32 (1984), S. 1-10.
- [CGKZ] Donald J. Collins/Rostislav I. Grigorchuk/Pavel F. Kurchanov/Heiner Zieschang: *Combinatorial Group Theory and Applications to Geometry*. Springer 1998.
- [FM] Benson Farb/Dan Margalit: *A primer on mapping class groups*. working draft, version 3.0, Dezember 2008,
<http://www.math.uchicago.edu/~margalit/mcg/mcgv30.pdf>.
- [G] Alexandre Grothendieck: *Esquisse d'un programme*. 1984, in *Geometric Galois Actions*, London Math. Soc. Lecture Note Series 242 (1997), Cambridge Univ. Press, S. 5-48.
- [H] William Harvey: *Geometric structure of surface mapping class groups*. Homological group theory, London Math. Soc. Lecture Note Series 36 (1979), Cambridge Univ. Press, S. 255-269.
- [HLS] Allen Hatcher/Pierre Lochak/Leila Schneps: *On the Teichmüller tower of mapping class groups*. Journal für die reine und angewandte Mathematik 521 (2000), S. 1-24.
- [HT] Allen Hatcher/William Thurston: *A presentation for the mapping class group of a closed orientable surface*. Topology 19 (1980), S. 221-237.
- [I] Nikolai Ivanov: *Automorphisms of complexes of curves and of Teichmüller spaces*. Progress in knot theory and related topics, Paris, 1997.
- [K] Mustafa Korkmaz: *Automorphisms of complexes of curves on punctured spheres and on punctured tori*. Topology Appl. 95 (1999), S. 85-111.
- [KM] Mustafa Korkmaz/John McCarthy: *Surface mapping class groups are ultrahopfian*. Mathematical Proceedings of Cambridge Philosophical Society 129 (2000), S. 35-53.

- [L] Feng Luo: *Automorphisms of the complex of curves*. *Topology* 39 (2000), S. 283-298.
- [M] Dan Margalit: *Automorphisms of the pants complex*. März 2003,
<http://www.math.utah.edu/~margalit/papers/pants.pdf>
- [S] Jean-Pierre Serre: *Trees*. Springer 2003.
- [V] William Vautaw: *Abelian Subgroups of the Torelli Group*. *Algebraic and Geometric Topology* 2 (2002), S. 157-170.
- [Wa] Bronislaw Wajnryb: *A simple presentation for the mapping class group of an orientable surface*. *Israel J. Math.* 45 (1983), S. 157-174.
- [Wo] Ute Wolf: *Der Komplex der Hosengerlegungen*. Diplomarbeit, Karlsruhe 2004.