

Andreas Mitschele

# Intelligente Methoden im Integrierten Risikomanagement



---

universitätsverlag karlsruhe



Andreas Mitschele

## **Intelligente Methoden im Integrierten Risikomanagement**



# Intelligente Methoden im Integrierten Risikomanagement

von  
Andreas Mitschele



---

universitätsverlag karlsruhe

Dissertation, Universität Karlsruhe (TH)  
Fakultät für Wirtschaftswissenschaften,  
Tag der mündlichen Prüfung: 21.05.2008  
Referenten: Prof. Dr. Detlef Seese, Prof. Dr. Svetlozar Rachev

## Impressum

Universitätsverlag Karlsruhe  
c/o Universitätsbibliothek  
Straße am Forum 2  
D-76131 Karlsruhe  
www.uvka.de



Dieses Werk ist unter folgender Creative Commons-Lizenz  
lizenziiert: <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/de/>

Universitätsverlag Karlsruhe 2009  
Print on Demand

ISBN: 978-3-86644-404-1







## Danksagung

Diese Arbeit entstand während meiner Zeit als externer Doktorand am Institut für Angewandte Informatik und Formale Beschreibungsverfahren der Universität Karlsruhe (TH) und wurde durch die Unterstützung und den Rat vieler Beteiligter möglich gemacht. In erster Linie danke ich der Firma GILLARDON AG financial software und stellvertretend dem Vorstand Herrn Dipl.-Inform. Karl-Martin Klein sehr herzlich für das mir entgegengebrachte Vertrauen, den Freiraum für die Promotion und die finanzielle Unterstützung.

Von Seiten der Universität Karlsruhe (TH) danke ich Herrn Prof. Dr. Detlef Seese für die Bereitschaft zur Betreuung meiner Arbeit, Herrn Prof. Dr. Svetlozar Rachev für die Übernahme des Korreferats und Herrn Prof. Dr. Karl-Heinz Waldmann für seine Tätigkeit als Prüfer. Weiterhin danke ich Frau Prof. Dr. Marliese Uhrig-Homburg und ihrer Forschungsgruppe für konstruktive Hinweise zu meiner Arbeit. Meinen Kollegen verdanke ich ein stets angenehmes Arbeitsklima an der Universität. Ein besonderer Dank gilt Herrn Dipl.-Wi.-Ing. Tobias Dietrich für vielfache angeregte Diskussionen zum Thema. Frau Dr. Sanaz Mostaghim danke ich für hilfreiche Hinweise zur verbesserten Visualisierung meiner Ergebnisse. Außerdem danke ich zahlreichen Diplomanden für ihren engagierten Einsatz.

Meinem Vorgesetzten Herrn Dr. Frank Schlottmann gebührt ein außerordentlich großer Dank für seine fachliche wie auch persönliche Unterstützung während meiner Promotion. Weiterhin danke ich Herrn Dr. Andreas Beck, ehemaliger Vorstand der GILLARDON AG financial software, und meinem ehemaligen Vorgesetzten Herrn Dr. Michael Lesko für das Vertrauen, das sie mir entgegengebracht haben, sowie für ihre wertvolle Unterstützung.

Ein großer Dank gilt meinen Eltern Veronika und Jürgen Mitschele, die durch ihre intensive Förderung den Grundstein für mein Studium und die sich anschließende Promotion gelegt haben. Meiner Schwester Stefanie Mitschele danke ich für das professionelle Korrekturlesen. Mein innigster Dank für ihre motivierende und umfassende Unterstützung bei der Erstellung meiner Dissertation gebührt meiner Frau Tamara. Ihr widme ich diese Arbeit.

Sulzfeld,  
im Juli 2009

*Dr. Andreas Mitschele*  
*Universität Karlsruhe (TH)*



# Inhaltsverzeichnis

<b>Danksagung</b>	<b>5</b>
<b>Abkürzungsverzeichnis</b>	<b>11</b>
<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>16</b>
<b>1 Einleitung und Überblick</b>	<b>1</b>
1.1 Motivation . . . . .	1
1.2 Zielsetzung und Beitrag . . . . .	2
1.3 Aufbau . . . . .	5
<b>2 Risiken im Bankgeschäft</b>	<b>9</b>
2.1 Einordnung und Typisierung von Banken . . . . .	9
2.2 Kritische Diskussion des Begriffs ‚Risiko‘ . . . . .	10
2.3 Taxonomie der Bankrisiken . . . . .	12
2.3.1 Kreditrisiken . . . . .	13
2.3.2 Marktrisiken . . . . .	15
2.3.3 Operationelle Risiken . . . . .	17
2.3.4 Weitere Risikoarten . . . . .	19
2.3.5 Synopse . . . . .	20
2.4 Kennzahlen für Rendite und Risiko . . . . .	22
2.4.1 Rendite . . . . .	23
2.4.2 Risiko . . . . .	24
2.4.3 Kritische Würdigung und Bankpraxis . . . . .	27
<b>3 Integriertes Risikomanagement in Banken</b>	<b>29</b>
3.1 Finanzielles Risikomanagement . . . . .	29
3.1.1 Perspektiven und zentrale Zielsetzungen . . . . .	30
3.1.2 Risikomanagementprozess . . . . .	32
3.2 Integration des Risikomanagements . . . . .	33
3.2.1 Begriffsabgrenzung und Vorgaben der Bankenaufsicht . . . . .	34
3.2.2 Motivation und Nutzen . . . . .	36
3.2.3 Herausforderungen bei der Umsetzung . . . . .	37

3.3	Integration des Portfoliomanagements . . . . .	40
3.3.1	Portfolio-Selektion nach Markowitz und Weiterentwicklungen . . .	40
3.3.2	Asset Allokation auf Gesamtbankebene . . . . .	43
3.4	Kritischer Review von Forschungsansätzen . . . . .	43
3.4.1	Risikoaggregation (Top-down) . . . . .	44
3.4.2	Integrierte Risikomodellierung (Bottom-up) . . . . .	49
3.4.3	Integriertes Portfoliomanagement . . . . .	51
3.4.4	Zusammenfassende Würdigung . . . . .	51
<b>4</b>	<b>Aspekte der Komplexität</b>	<b>55</b>
4.1	Komplexität im Kontext der Arbeit . . . . .	55
4.2	Algorithmische Komplexitätstheorie . . . . .	56
4.2.1	Berechenbarkeit und Turing-Maschinen . . . . .	56
4.2.2	Landau-Symbolik und Funktionswachstum . . . . .	57
4.2.3	Komplexitätsklassen . . . . .	58
4.2.4	Das P-NP-Problem . . . . .	59
4.2.5	NP-Vollständigkeit . . . . .	60
4.3	Komplexität im Portfoliomanagement . . . . .	61
4.3.1	Relevante Probleme aus der Klasse NP . . . . .	61
4.3.2	Diskretes Portfolioproblem . . . . .	63
4.3.3	Portfolioproblem unter Verwendung des Value-at-Risk . . . . .	65
<b>5</b>	<b>Multikriterielle evolutionäre Algorithmen (MOEAs)</b>	<b>67</b>
5.1	Grundlagen evolutionärer Algorithmen . . . . .	67
5.1.1	Analogie zur Natur und historische Einordnung . . . . .	68
5.1.2	Ablauf und evolutionäre Operatoren . . . . .	69
5.1.3	Anmerkungen zur Parametrisierung . . . . .	75
5.2	Multikriterielle Optimierungsprobleme . . . . .	76
5.2.1	Definitionen . . . . .	76
5.2.2	Klassische Lösungsansätze . . . . .	79
5.3	Multikriterielle evolutionäre Algorithmen . . . . .	81
5.3.1	Überblick MOEAs und Anwendungen . . . . .	81
5.3.2	Ablauf eines MOEAs . . . . .	82
5.3.3	NSGA-II . . . . .	83
5.3.4	$\epsilon$ -MOEA . . . . .	90
5.3.5	Performance-Messung . . . . .	93
<b>6</b>	<b>Anwendung von MOEAs in der Rückversicherungsoptimierung</b>	<b>95</b>
6.1	Rückversicherungsgeschäft und -technik . . . . .	95

6.1.1	Vertragstypen . . . . .	96
6.1.2	Rückversicherungsprogramme . . . . .	98
6.1.3	Pricing und Risikomessung . . . . .	99
6.2	MOEA-Ansatz zur Optimierung von Rückversicherungsprogrammen . . .	100
6.2.1	Forschungsüberblick und Motivation . . . . .	101
6.2.2	Multikriterielles Modell . . . . .	102
6.2.3	Gründe für den heuristischen Optimierungsansatz . . . . .	104
6.3	Implementierung des Modells . . . . .	104
6.3.1	Standardproblem als Benchmark . . . . .	105
6.3.2	Analyse der Performance . . . . .	106
6.3.3	Kombination nicht-proportionaler Rückversicherungsformen . . .	107
6.3.4	Moderne Risikomaße . . . . .	108
6.4	Resultate und Implikationen für das Rückversicherungsgeschäft . . . . .	109
6.5	Kritische Würdigung und Ausblick . . . . .	112
<b>7</b>	<b>Modell zum Integrierten Portfoliomanagement</b>	<b>115</b>
7.1	Motivation für den Ansatz . . . . .	115
7.2	Zielfunktionen und Optimierungsproblem . . . . .	116
7.2.1	Gesamtrendite $ret(x)$ . . . . .	117
7.2.2	Marktrisiko $mr(x)$ . . . . .	117
7.2.3	Kreditrisiko $cr(x)$ . . . . .	118
7.2.4	Operationelles Risiko $or(x)$ . . . . .	118
7.2.5	Multikriterielles Optimierungsproblem . . . . .	119
7.3	Modellannahmen und weitere Anmerkungen . . . . .	120
7.3.1	Dominierte Portfolios . . . . .	120
7.3.2	Zielsetzung des Investors . . . . .	121
7.3.3	Kreditfinanzierung und Leerverkäufe . . . . .	121
7.3.4	Begründung für den Einsatz heuristischer Verfahren . . . . .	122
7.4	Multidimensionale Visualisierung der Ergebnisse . . . . .	124
7.4.1	3D-Streudiagramm . . . . .	125
7.4.2	Streudiagramm-Matrix . . . . .	126
7.4.3	Parallelkoordinatenplot . . . . .	128
7.4.4	Heatmap . . . . .	130
7.4.5	Würdigung der Visualisierungstechniken und Ausblick . . . . .	132
7.5	Typische Beschränkungen in der Praxis . . . . .	133
<b>8</b>	<b>Approximation der Lösungen mit MOEAs und Performance</b>	<b>135</b>
8.1	Generelle Eignung von MOEAs . . . . .	136

8.1.1	Vollständige Enumeration als Benchmark . . . . .	136
8.1.2	Lösung mit MOEAs . . . . .	138
8.2	Parametrisierung und Erweiterungen . . . . .	140
8.2.1	Gezielte Initialisierung . . . . .	140
8.2.2	Reparatur-Operator . . . . .	141
8.3	Anpassungen bei Einführung von Beschränkungen . . . . .	141
8.4	Analyse der Performance . . . . .	141
8.4.1	Konvergenz . . . . .	142
8.4.2	Diversität . . . . .	143
<b>9</b>	<b>Anwendung des Modells in der Strategischen Asset Allokation</b>	<b>145</b>
9.1	Benchmarks für Asset-Klassen als Datengrundlage . . . . .	145
9.1.1	Marktrisiken . . . . .	145
9.1.2	Kreditrisiken . . . . .	146
9.1.3	Inputdaten für das Modell . . . . .	147
9.2	Modellimplementierung ohne Beschränkungen . . . . .	149
9.2.1	Parametrisierung und Annahmen . . . . .	149
9.2.2	Optimierungsproblem mit $ret(x)$ , $mr_1(x)$ , $mr_2(x)$ und $cr(x)$ . . . . .	150
9.2.3	Visualisierung und Diskussion der Resultate . . . . .	150
9.3	Modellimplementierung mit Beschränkungen . . . . .	157
9.3.1	Parametrisierung und Annahmen . . . . .	157
9.3.2	Optimierungsproblem mit $ret(x)$ , $mr_1(x)$ , $mr_2(x)$ und $cr(x)$ . . . . .	158
9.3.3	Visualisierung und Diskussion der Resultate . . . . .	158
9.4	Zusammenfassung . . . . .	163
<b>10</b>	<b>Anwendung des Modells in der Taktischen Asset Allokation</b>	<b>165</b>
10.1	Datengrundlage . . . . .	165
10.2	Modellimplementierung . . . . .	166
10.2.1	Parametrisierung und Annahmen . . . . .	166
10.2.2	Optimierungsproblem mit $ret(x)$ , $mr(x)$ , $cr(x)$ und $or(x)$ . . . . .	167
10.3	Resultate . . . . .	168
10.3.1	Analyse der Konvergenz . . . . .	168
10.3.2	Visualisierung und Diskussion . . . . .	169
10.4	Zusammenfassung . . . . .	176
<b>11</b>	<b>Fazit und Ausblick</b>	<b>179</b>
11.1	Fazit . . . . .	179
11.2	Ausblick . . . . .	180

<b>A</b>	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>183</b>
<b>B</b>	<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>187</b>
<b>C</b>	<b>Algorithmenverzeichnis</b>	<b>189</b>
<b>D</b>	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>191</b>
<b>E</b>	<b>Index</b>	<b>205</b>





# Symbolverzeichnis

## Kapitel 2

$W_t$	Wertpapierkurs zum Zeitpunkt $t$
$R$	Diskrete Rendite
$r$	Stetige Rendite
$\bar{R}$	Arithmetische Gesamrendite
$R_D$	Geometrische Gesamrendite
$V(\cdot)$	Varianz der Einzelrenditen
$X, Y$	Portfolios
$\rho(\cdot)$	Risikomaß
$r$	Rendite eines Referenzinstruments
$X$	Endvermögen
$\mathbb{P}$	Verteilung des Endvermögens
$\alpha$	Konfidenzniveau
$\text{VaR}_\alpha$	Value-at-Risk zum Konfidenzniveau $\alpha$
$\text{CondVaR}_\alpha$	Conditional Value-at-Risk zum Konfidenzniveau $\alpha$

## Kapitel 3

$\mu$	Erwartungswert
$\sigma$	Standardabweichung
$x_i$	Asset-Gewicht für Asset $i$
$\mu_i$	Erwartete Rendite des Assets $i$
$\mu_P$	Erwartete Rendite des Portfolios $P$
$\sigma_P$	Standardabweichung des Portfolios $P$
$\text{cov}_{ij}$	Kovarianzmatrix der Assets

## Kapitel 4

$\Theta(g(n))$	Scharfe asymptotische Schranke für Wachstum einer Funktion $g(n)$
$\mathcal{O}(g(n))$	Scharfe obere asymptotische Schranke für Wachstum einer Funktion $g(n)$
$\Omega(g(n))$	Scharfe untere asymptotische Schranke für Wachstum einer Funktion $g(n)$

$L, L', P_1, P_2$	Instanzen eines Problems
$a_n, H, K$	Ganze Zahlen
$S$	Menge ganzer Zahlen
$P$	Teilmenge einer Menge ganzer Zahlen
$N$	Anzahl der Gegenstände beim Rucksackproblem
$r$	Schrittzahl für die Asset-Gewichte bei der Portfolio-Optimierung
$a$	Schrittweite der Asset-Gewichte bei der Portfolio-Optimierung
$k$	Anzahl der Assets

## Kapitel 5

### *Generelles Optimierungsproblem*

$\Omega$	Suchraum
$f$	Bewertungsfunktion $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$
$X$	Menge der globalen Optima $X \subseteq \Omega$
$F$	Fitnessfunktion

### *Evolutionäre Algorithmen*

$\mu$	Populationsgröße eines EA
$\lambda$	Anzahl der Nachkommen eines EA
$t_{\max}$	Maximale Anzahl von Generationsläufen
$P$	Elternpopulation
$Q$	Nachkommenpopulation
$p_c$	Rekombinationswahrscheinlichkeit
$p_m$	Mutationswahrscheinlichkeit

### *Multikriterielle Optimierungsprobleme*

$X$	Entscheidungsraum
$Y$	Zielfunktionsraum
$k$	Anzahl Zielfunktionen
$f(x)$	Zielfunktionen $f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)$
$m$	Anzahl Nebenbedingungen
$e(x)$	Nebenbedingungen $e_1(x), e_2(x), \dots, e_m(x)$
$X_f$	Menge der zulässigen Lösungen
$w$	Gewichtungsvektor (Gewichtungsmethode)

### *Multikriterielle evolutionäre Algorithmen*

$M$	Anzahl von Zielfunktionen eines MOEAs
-----	---------------------------------------

$N$	Populationsgröße des MOEAs
$P_t$	Elternpopulation zum Zeitpunkt $t$
$Q_t$	Nachkommenpopulation zum Zeitpunkt $t$
$R_t$	Vereinigungsmenge von $P_t$ und $Q_t$ ( $P_t \cup Q_t$ )
$u_i$	Gleichverteilte Zufallszahl auf $[0; 1]$
$\beta_i$	Spezifischer Faktor beim SBX-Operator
$\eta_c$	Index für Verteilung von $\beta_i$ beim SBX-Operator
$\bar{\delta}_i$	Spezifischer Faktor beim polynomialen Mutationsoperator
$\eta_m$	Index für Verteilung von $\bar{\delta}_i$ beim polynomialen Mutationsoperator
$n_p$	Domination Count beim NSGA-II
$S_p$	Domination Set beim NSGA-II
$P(t)$	Population 1 des $\varepsilon$ -MOEA zum Zeitpunkt $t$
$E(t)$	Archivpopulation des $\varepsilon$ -MOEA zum Zeitpunkt $t$

## Kapitel 6

$a$	Abgabequote bei der Quotenversicherung
$Z$	Zufälliger Schadenaufwand
$\bar{Z}$	Zession des zufälligen Schadenaufwands $Z$
$\underline{Z}$	Selbstbehalt des zufälligen Schadenaufwands $Z$
$R$	Priorität beim Schadenexzedent (XL)
$L$	Priorität beim Jahresüberschadenexzedent (SL)
$S$	Gesamtschadenaufwand
$\bar{S}$	Zession des Gesamtschadenaufwand $S$
$\underline{S}$	Selbstbehalt des Gesamtschadenaufwand $S$
$\pi$	Rückversicherungsprämie
$\lambda$	Sicherheitszuschlagsfaktor
$E(\cdot)$	Erwartungswert
$V(\cdot)$	Varianz

## Kapitel 7

$n$	Anzahl von Investitionsmöglichkeiten der Bank
$x$	$n$ -dimensionaler Vektor mit Portfoliogewichten
$r_i$	Erwartete Rendite des Investments $i$
$ret(x)$	Gesamtrendite aller Investments $i$ im Portfolio $X$
$mr(x)$	Marktrisiko des Portfolios $x$
$cr(x)$	Kreditrisiko des Portfolios $x$ ( <i>credit risk</i> )

$or(x)$	Operationelles Risiko des Portfolios $x$
$k$	Geschäftsfeld einer Bank nach Basel-II-Standardansatz
$\beta_k$	Gewichtsfaktor für Geschäftsfeld $k$

## Kapitel 9

$n$	Anzahl strategischer Investitionsmöglichkeiten der Bank
$x$	$n$ -dimensionaler Vektor mit Portfoliogewichten
$y$	$n$ -dimensionaler Vektor mit aktuellem Portfoliostatus
$ret(x)$	Gesamtrendite aller Investments $i$ im Portfolio $x$
$mr_1(x)$	Kursänderungsrisiko (Marktrisiko 1) des Portfolios $x$
$mr_2(x)$	Zinsänderungsrisiko (Marktrisiko 2) des Portfolios $x$
$cr(x)$	Kreditrisiko des Portfolios $x$ ( <i>credit risk</i> )
$S_i^{\text{unten}}$	Untere Schranke für Gewicht eines Assets $i$
$S_i^{\text{oben}}$	Obere Schranke für Gewicht eines Assets $i$

## Kapitel 10

$n$	Anzahl taktischer Investitionsmöglichkeiten der Bank
$x$	$n$ -dimensionaler Vektor mit Portfoliogewichten
$ret(x)$	Gesamtrendite aller Investments $i$ im Portfolio $x$
$mr^{\text{Hist. Simulation, 99\%, 1d}}(x)$	Marktrisiko
$cr^{\text{CreditMetrics}^{\text{®}}, 99.9\%, 1y}(x)$	Kreditrisiko
$or^{\text{Funktion auf Basis B-II-STA}}(x)$	Operationelles Risiko
$k$	Geschäftsfeld einer Bank nach Basel-II-Standardansatz
$\beta_k$	Gewichtsfaktor für Geschäftsfeld $k$

DAX<sup>®</sup>, REX<sup>®</sup>, iBoxx<sup>®</sup> und XETRA<sup>®</sup> sind eingetragene Marken der Deutsche Börse AG.

CreditPortfolioView<sup>™</sup> ist ein registriertes Warenzeichen von McKinsey & Company.

CreditMetrics<sup>™</sup> ist ein registriertes Warenzeichen von RiskMetrics Inc.

AMD Athlon<sup>™</sup> ist ein registriertes Warenzeichen von Advanced Micro Devices Inc.

Intel<sup>®</sup> Core<sup>™</sup> Duo ist ein registriertes Warenzeichen von Intel Inc.

Bloomberg<sup>™</sup> ist ein registriertes Warenzeichen von Bloomberg Finance L.P.

Reuters<sup>™</sup> ist ein registriertes Warenzeichen von Reuters Inc.

# 1. Einleitung und Überblick

## 1.1. Motivation

Krisen prägen die Finanzmärkte seit ihrer Entstehung. Diese Tatsache wurde den Marktteilnehmern durch das jüngste Beispiel der US-amerikanischen Subprime-Krise vom Sommer 2007 wiederum schmerzhaft in Erinnerung gerufen. Auch in Deutschland sahen sich viele renommierte Banken aufgrund erheblicher Investitionen in den Markt für Kredite schlechter Bonität (*Subprime Loans*) gezwungen, hohe Abschreibungen auf ihre Kreditportfolios vorzunehmen. Bei einzelnen Instituten führten diese sogar zu kurzfristiger Zahlungsunfähigkeit, weshalb sie im Interesse der Finanzmarktstabilität durch Rettungsmaßnahmen anderer Marktteilnehmer vor der Insolvenz bewahrt werden mussten. Ein Rückblick auf weitere internationale Krisen der vergangenen zehn Jahre, wie z. B. auf die Asienkrise 1997 oder den Anschlag auf das World-Trade-Center 2001, macht deutlich, dass lokale Probleme aufgrund zunehmender internationaler Verflechtungen oftmals globale Auswirkungen nach sich ziehen. Im Gleichschritt mit der Liberalisierung des Welthandels wachsen somit auch die Risiken auf den weltweiten Finanzmärkten. Zusätzlich zu den steigenden Risiken sehen sich Unternehmen der Finanzbranche heutzutage in Folge der Globalisierung einem Spannungsfeld ausgesetzt, das durch einen sich verschärfenden nationalen sowie internationalen Konkurrenzkampf und gleichzeitig durch hohe Renditeforderungen der Investoren geprägt ist. Neue Vertriebswege, insbesondere das Internet, machen Finanzdienstleistungen über Grenzen hinweg vergleichbar und eröffnen Mitbewerbern somit die Möglichkeit, in bereits erschlossene Märkte einzusteigen. Die beständige Suche nach ertragreichen Anlagemöglichkeiten zur Verbesserung der Investorenrendite hat in den letzten Jahren viele Unternehmen weltweit auch zu überhöhten Investments in die augenscheinlich hochrentablen Subprime-Kreditmärkte verleitet.

Wenngleich das Management finanzieller Risiken eine Kernkompetenz von Finanzunternehmen repräsentiert, wurden die zugrunde liegenden, zum Teil erheblichen Risiken der Subprime-Kredite massiv unterschätzt oder auch ignoriert. Die aktuelle Krise offenbart damit ein Problem, das die häufig eingesetzten Risikomanagementsysteme betrifft. Diese Systeme bewerten, steuern und überwachen unterschiedliche Risiken meist unabhängig voneinander. Interdependenzen zwischen den einzelnen Risikoarten werden von diesem sogenannten *Silo-Ansatz* folglich nicht adäquat berücksichtigt. Sowohl potenzielle positive Effekte durch die Diversifikation zwischen

einzelnen Asset-Klassen als auch mögliche negative Auswirkungen, z. B. aufgrund kaskadierender Effekte wie bei der Kreditkrise in den USA, werden somit vernachlässigt.

Die Vergangenheit hat gezeigt, dass eine fehlende ganzheitliche Perspektive zu massiven Fehlentscheidungen bei der strategischen Ausrichtung führen kann und infolgedessen eine Gefahr für die Wettbewerbsfähigkeit und im schlimmsten Fall auch für die Zahlungsfähigkeit eines Finanzunternehmens darstellt. Ziel des Integrierten Risikomanagements ist, die positiven wie auch negativen Abhängigkeiten der Risikoarten untereinander adäquat abzubilden, um damit eine ökonomisch möglichst treffende Einschätzung der wesentlichen Risiken *und* Chancen des Unternehmensportfolios in gesamtheitlicher Sicht zu erhalten.

### 1.2. Zielsetzung und Beitrag

Diese Arbeit beschäftigt sich mit dem Integrierten Risikomanagement in Kreditinstituten bzw. Banken und legt besonderen Fokus auf Möglichkeiten zur *Integration des Portfoliomanagements* [192, 20, 65]. Dieses bringt unter Berücksichtigung der wesentlichen Risikoarten die zentrale Zielsetzung mit sich, Vermögensallokationen des Bankportfolios mit optimalem Risiko-Rendite-Verhältnis aufzufinden. Entsprechend der Vorgaben der Neuen Baseler Eigenkapitalverordnung (Basel II) werden Kredit-, Markt- und operationelle Risiken berücksichtigt [12].

Aktuelle Forschungsarbeiten im Bereich des finanziellen Risikomanagements konzentrieren sich auf eine möglichst genaue Bewertung individueller Markt- und Kreditrisiken, die untereinander hohe Heterogenität aufweisen [3]. So sind für die Modellierung der entsprechenden Renditeverteilungen grundlegend verschiedene Verteilungsannahmen notwendig. Auch der Zeithorizont und das Konfidenzniveau zur Risikoquantifizierung sowie verfügbare Datenqualität und -quantität weichen stark voneinander ab [44]. Dennoch wird im Rahmen der *Risikoaggregation* versucht, die heterogenen Einzelrisiken zu einer Gesamtrisikokennzahl zusammenzuführen.

Der *Korrelationsansatz*, der beispielsweise von Kuritzkes et al. [124] vorgeschlagen wird, stellt eine Variante zur Aggregation dar. Den verwendeten Korrelationen zwischen den unterschiedlichen Risikofaktoren bzw. -kennzahlen kommt dabei entscheidende Bedeutung zu. Aufgrund von Instabilitäten im Zeitablauf sind sie schwer schätzbar und beeinflussen gleichzeitig die Ergebnisse in wesentlichem Maße. Alexander & Pétzier [4] empfehlen daher einen ergänzenden Ansatz für kritische Marktphasen, in denen Korrelationen häufig versagen. Alternativ konzipieren Ward & Lee [202], Dimakos & Aas [63] sowie Rosenberg & Schuermann [168] *Copula-basierte Ansätze*. Als verallgemeinertes Abhängigkeitskonzept können Copulas [146] nahezu beliebige Verteilungen für die einzelnen Risikofaktoren zugrunde legen und dienen somit als wichtiges Werkzeug zur Zusammenführung der Risiken [70, 136]. Als Nachteil erweist sich die aufwändige Modellparametrisierung, insbesondere aufgrund häufig mangelhafter Datenverfügbarkeit [171, 141]. Weitere Aggregationsansätze, die eine *echte* integrierte Messung der Risiken durch Modellierung anhand gemeinsamer Faktoren anstreben, stammen wiederum

von Alexander & Pézier [4, 5] sowie Aas et al. [1]. Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass alle diese Ansätze trotz intensiver Forschungen noch beträchtliche Unsicherheiten bergen. Alexander [3] weist in diesem Zusammenhang auf das erhebliche *Aggregationsrisiko* hin, das als Modellrisiko beispielsweise durch fehlerhafte Annahmen hinsichtlich Verteilungen oder Abhängigkeiten entsteht. Auch weitere Risikoarten, wie z. B. das operationelle Risiko, sowie Probleme durch Datenunvollständigkeit werden oftmals vernachlässigt. Das Ziel einer *tatsächlichen* Integration der Risikomessung auf Basis eines „Universalmodells“, das alle Risiken mit konsistenten Prinzipien bewertet, erscheint hingegen momentan noch als reine Vision [3].

Wenngleich eine Integration in hohem Maße empfehlenswert ist [139, 113] und zudem von Aufsichtsinstanzen weltweit unterstützt wird [18, 24], verfolgen viele Banken auch heute noch Silo-basierte Ansätze in ihrem Risikomanagement [124]. Neben den beschriebenen methodischen Hürden bei der Aggregation liegt dies auch an historisch gewachsenen Organisationsstrukturen und den damit verbundenen Systembrüchen, die nur mit erheblichem technischen wie auch finanziellen Aufwand verändert werden können [44, 41]. In dieser Arbeit wird daher ein innovativer Integrationsansatz entwickelt, der die genannten Einschränkungen berücksichtigt und auf den bereits bestehenden Gegebenheiten aufsetzen kann.

Das konzipierte Modell behandelt die Optimierung der erwähnten heterogenen Risiken sowie der Rendite erstmals als *echtes* multikriterielles Problem. Die Zielfunktionen werden dabei simultan optimiert, während klassische Portfoliomanagement-Ansätze Zielfunktionen regelmäßig zusammenfassen [192, 65] oder in Nebenbedingungen transformieren [133]. Die neue multikriterielle Sichtweise bringt eine Reihe von Vorteilen mit sich. Bei Berücksichtigung der unterschiedlichen Risikoarten als separate Zielfunktionen im Optimierungsproblem müssen a priori keine Annahmen über gegenseitige Abhängigkeiten, z. B. durch Korrelationsschätzungen, getroffen werden. Zusätzlich entfällt hierdurch die Notwendigkeit zur Spezifikation individueller Nutzenfunktionen, die sich in der Praxis schwierig gestaltet und dennoch eine Optimierung bei anderen Ansätzen erst ermöglicht [65]. Stattdessen liefert der Optimierungslauf beim multikriteriellen Modell eine Auswahl objektiver Portfolio-Allokationen, die jeweils in Bezug auf ihre erwartete Rendite und die einzelnen Risiken Pareto-optimal sind. Der Entscheidungsträger der Bank kann somit auf Basis dieser optimalen Lösungsvorschläge und unter Berücksichtigung seiner eigenen Risikopräferenz sowie möglicher Risikolimits der Bank eine passende Allokation für das Gesamtbank-Portfolio wählen. Da die Optimierung *vor* einer Aggregation der Risiken durchgeführt wird, können als Risikozielfunktionen in der Praxis gebräuchliche Risikomessmethoden mit den unterschiedlichen Annahmen, beispielsweise hinsichtlich Verteilungen oder Konfidenzniveaus, eingesetzt werden. Das Modell ermöglicht also ein direktes Aufsetzen auf dem weit verbreiteten Silo-basierten Risikomanagement, ohne kostenintensive Anpassungen von Methodik und Technik zu erfordern. Der flexible Modellrahmen lässt auch die Einbindung zukünftig weiterentwickelter Ansätze zur Risikomessung zu.

Bekanntermaßen stellt die Lösung vieler Optimierungsprobleme aus dem Portfoliomanagement vor allem in Bezug auf die benötigte Rechenzeit hohe Anforderungen an die verwendeten Computersysteme [178]. Dies gilt speziell auch für das *Integrierte* Portfoliomanagement, bei dem weitere Risikodimensionen ins Kalkül mit einzubeziehen sind. Resultate aus der algorithmischen Komplexitätstheorie [153, 80] ordnen Probleme aus der Portfolio-Optimierung der Klasse der schwer lösbaren NP-vollständigen Probleme zu. Hierzu gehört insbesondere das für diese Arbeit besonders relevante Portfolio-Problem bei Verwendung des Value-at-Risk (VaR) [113] als Risikomaß [116, 209, 45]. Im vorgeschlagenen Modell kommt der VaR, der einen etablierten Standard in der Risikomessung von Banken darstellt [112], ebenfalls zum Einsatz. Somit erfordert die Lösung des beschriebenen Optimierungsproblems aus dem Integrierten Portfoliomanagement einen effizienten Lösungsansatz.

Die Approximation der Lösungen erfolgt anhand multikriterieller evolutionärer Algorithmen (MOEAs), die heuristische Verfahren aus dem Bereich der Künstlichen Intelligenz [170] darstellen. Sie werden daher auch als *Intelligente Methoden* bezeichnet [87]. Evolutionäre Ansätze verwenden u. a. Chang et al. [30], Schlottmann & Seese [178] sowie Streichert & Tanaka-Yamawaki [195] bei verschiedenen Anwendungen im Kontext der Portfolio-Optimierung. Im Kernteil dieser Arbeit werden MOEAs erstmals im Integrierten Risikomanagement eingesetzt und zusätzlich relevante Praxisbeschränkungen, wie z. B. Volumenlimits für individuelle Portfolio-Positionen, berücksichtigt. Das konzipierte multikriterielle Optimierungsmodell basiert auf den insgesamt vier Zielfunktionen für Kredit-, Markt- und operationelles Risiko sowie für die erwartete Rendite. Als Algorithmen werden die beiden MOEAs NSGA-II sowie  $\epsilon$ -MOEA verwendet, für die jeweils verschiedene Anpassungen notwendig sind. Zur Unterstützung der qualifizierten Entscheidungsfindung des Bankmanagements werden die vierdimensionalen Ergebnisse durch Streudiagramme, Streudiagramm-Matrizen, Parallele-Koordinaten und Heatmaps visuell aufbereitet. Als besonders geeignet zur Analyse der approximierten Lösungsallokationen im Integrierten Portfoliomanagement erweisen sich Heatmaps, indem sie auf einen Blick die intuitive Auswertung aller Parameter und Zielfunktionswerte des Optimierungsproblems ermöglichen.

Als weiteres Anwendungsfeld von MOEAs wird eine Studie aus dem Bereich der Rückversicherungsoptimierung vorgestellt. Dabei handelt es sich, ähnlich dem klassischen Portfoliomanagement mit zwei Zielfunktionen, um die für den Erstversicherer optimale Gestaltung unterschiedlicher Rückversicherungsverträge aus Risiko/Kosten-Gesichtspunkten. Als Zielfunktionen des Optimierungsproblems dienen folglich die erwarteten Kosten und das Risiko nach Abschluss der Rückversicherung. Aufgrund der Flexibilität der MOEAs können somit optimale Vertragskombinationen untersucht werden, die bisher aufgrund fehlender Lösungsansätze nicht betrachtet wurden. Die Ergebnisse lassen durch gesteigerte Attraktivität einzelner Vertragstypen implizit Rückschlüsse auf die zukünftige Bepreisung von Rückversicherungsverträgen zu.



### 1.3. Aufbau

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in drei Hauptteile. In **Teil 1** werden Grundlagen des Risikomanagements und seiner Integration in Kreditinstituten dargelegt. **Teil 2** erörtert relevante Aspekte der Komplexität, führt die verwendeten Heuristiken ein und stellt eine Anwendung im Bereich der Rückversicherungsoptimierung vor. Das konzipierte Modell zur Integration des Portfoliomanagements wird zusammen mit Anwendungen in der Strategischen und Taktischen Asset Allokation in **Teil 3** präsentiert. Abbildung 1.1 vermittelt einen strukturierten Überblick der einzelnen Teile mit den zugehörigen Kapiteln und inhaltlichen Schwerpunkten.

Nach diesem einführenden **Kapitel 1** folgt zunächst ein Überblick der Unternehmen in der Finanzbranche und eine kritische Diskussion des Begriffs Risiko in **Kapitel 2**. Daraufhin werden die wesentlichen Risikoarten im Geschäft von Banken typisiert und Kredit-, Markt- und operationelle Risiken einander detailliert gegenübergestellt. Im Anschluss findet eine Erläuterung praxisrelevanter Kennzahlen für Rendite und Risiko statt. In **Kapitel 3** werden zu Beginn die zentralen Zielsetzungen und prozessualen Abläufe des Risikomanagements beschrieben. Nach der Einführung grundlegender Begriffe und der Betrachtung aufsichtsrechtlicher Vorgaben aus dem Bereich des Integrierten Risikomanagements wird der Nutzen einer Integration motiviert und eine Charakterisierung zentraler Herausforderungen bei der Umsetzung vorgenommen. Das Kapitel gibt weiterhin einen Überblick über das Integrierte Portfoliomanagement, das eine wichtige Grundlage für das Modell und die Anwendungen in Teil 3 darstellt, und diskutiert abschließend verschiedene aktuelle Forschungsarbeiten aus vorliegendem Kontext.

Teil 2 beschäftigt sich in **Kapitel 4** zunächst mit Grundlagen der algorithmischen Komplexitätstheorie sowie mit ausgewählten Komplexitätsresultaten im Risikomanagement. Diese Ergebnisse begründen die Anwendung heuristischer Verfahren zur Lösung der Optimierungsprobleme in Kapitel 6 sowie in Teil 3. **Kapitel 5** stellt multikriterielle evolutionäre Algorithmen (MOEAs) vor, anhand derer die Lösungsapproximation der Optimierungsprobleme erfolgt. Hierzu werden grundlegende Eigenschaften evolutionärer Algorithmen erklärt, Besonderheiten multikriterieller Optimierungsprobleme charakterisiert und klassische Lösungsansätze im Überblick dargestellt. Nach der Einführung von MOEAs folgt eine Beschreibung der beiden MOEA-Algorithmen NSGA-II und  $\epsilon$ -MOEA. Das folgende **Kapitel 6** beinhaltet eine Studie aus dem Bereich der Rückversicherungsoptimierung, die unter Anwendung von MOEAs durchgeführt wurde. Nach der Einführung elementarer Grundlagen des Rückversicherungsgeschäfts wird das zugrunde gelegte ebenfalls multikriterielle Optimierungsmodell erläutert. Hieran schließen sich die Darstellung der Resultate und eine Diskussion möglicher Auswirkungen auf die zukünftige Gestaltung von Rückversicherungsprogrammen an.

In Teil 3 der Arbeit wird in **Kapitel 7** das unterbreitete allgemeine Modell zum Integrierten Portfoliomanagement eingeführt. Neben der Definition des Optimierungsproblems werden zentrale Annahmen herausgearbeitet und verschiedene Anmerkungen ergänzt. Da einer anspre-

chenden Visualisierung der Modellergebnisse eine hohe Bedeutung zukommt, wird weiterhin eine Auswahl fortgeschrittener Visualisierungstechniken beschrieben. Das Kapitel schließt mit einer Diskussion relevanter, sich aus typischen Praxisanwendungen ergebenden Beschränkungen des generellen Modells. Die Eignung von MOEAs zur Approximation der Lösungen des betrachteten Optimierungsproblems untersucht **Kapitel 8**. Dabei werden die Ergebnisse einer exemplarischen Portfolio-Optimierung mittels vollständiger Enumeration der Portfolios mit den Ergebnissen der beiden betrachteten Algorithmen verglichen. Darüber hinaus findet eine Erörterung verschiedener Erweiterungen der Implementierung zur Anpassung an die Problemstellung und eine Performance-Analyse der verwendeten Verfahren in Bezug auf Konvergenz und Diversität statt. In den beiden folgenden Kapiteln werden konkrete Anwendungsfälle für das multikriterielle Modell betrachtet. Entsprechend dem üblichen Vorgehen bei Banken erfolgt in **Kapitel 9** zunächst eine Optimierung der Strategischen Asset Allokation für eine Beispielbank. Nach der Beschreibung der verwendeten Asset-Klassen und der Inputdaten wird die konkrete Implementierung des allgemeinen Modells aus Kapitel 7 dargelegt. Bei der vierdimensionalen Illustration der Ergebnisse aus den MOEA-Durchläufen finden die vorher ausgeführten Visualisierungstechniken Anwendung. Auf Basis dieser Darstellungen lassen sich Implikationen der Ergebnisse für das Risikomanagement der Bank ableiten und diskutieren. Um die Flexibilität der verwendeten Verfahren aufzuzeigen, werden zusätzlich Volumenlimits der einzelnen Asset-Klassen als relevante Praxisbeschränkung für das Optimierungsproblem eingeführt und die Effekte auf die Lösungs-Allokationen analysiert. In **Kapitel 10** kommt schließlich eine Optimierung der Taktischen Asset Allokation einer exemplarischen Bank zur Durchführung. Analog zum vorhergehenden Kapitel werden die verwendeten Daten sowie die konkrete Implementierung geschildert. Auch an dieser Stelle werden die Lösungs-Allokationen ausführlich illustriert und Auswirkungen für den Risikomanager der Bank kommentiert. Die Arbeit schließt mit einem Fazit und einem Ausblick hinsichtlich weiteren Forschungspotenzials im Kontext des Risikomanagements mit Intelligenten Methoden in **Kapitel 11**.

<b>Intelligente Methoden im Integrierten Risikomanagement</b>		
<b>TEIL I: GRUNDLAGEN UND INTEGRIERTES RISIKOMANAGEMENT</b>		
Kapitel 1: Einleitung und Überblick		
Kapitel 2: Risiken im Bankgeschäft		
Begriff Risiko	Taxonomie Bankrisiken	Kennzahlen für Rendite und Risiko
Kapitel 3: Integriertes Risikomanagement in Banken		
Nutzen und Herausforderungen	Integriertes Portfoliomanagement	Kritischer Review von Forschungsansätzen
<b>TEIL II: KOMPLEXITÄT, METHODEN UND ANWENDUNGEN</b>		
Kapitel 4: Aspekte der Komplexität		
Algorithmische Komplexitätstheorie	Relevante Probleme aus NP	Komplexität im Risiko- und Portfoliomanagement
Kapitel 5: Multikriterielle evolutionäre Algorithmen (MOEAs)		
Evolutionäre Algorithmen als Grundlage	Multikriterielle Optimierung	Multikriterielle evolutionäre Algorithmen
Kapitel 6: Anwendung von MOEAs in der Rückversicherungsoptimierung		
Rückversicherungsgeschäft und Rückversicherungstechnik	Multikriterieller Optimierungsansatz	Resultate und Implikationen für das Rückversicherungsgeschäft
<b>TEIL III: MODELL UND ANWENDUNGEN</b>		
Kapitel 7: Modell zum Integrierten Portfoliomanagement		
Multikriterielles Modell	Visualisierungsmethoden	Praxisbeschränkungen
Kapitel 8: Approximation der Lösungen mit MOEAs und Performance		
Generelle Eignung von MOEAs	Implementierung und Parametrisierung	Performance-Analyse
Kapitel 9: Anwendung des Modells in der Strategischen Asset Allokation		Kapitel 10: Anwendung des Modells in der Taktischen Asset Allokation
Daten und Implementierung	Beschränkungen	Resultate
Daten und Implementierung		Resultate
Kapitel 11: Fazit und Ausblick		

Abb. 1.1.: Aufbau der Arbeit



## 2. Risiken im Bankgeschäft

Das Management von Risiken stellt eine Kernkompetenz der Unternehmen in der Finanzbranche dar.<sup>1</sup> In diesem Kapitel werden zunächst Banken als Bestandteil dieser Branche und als Hauptfokus der Arbeit typisiert. Nach einer kritischen Auseinandersetzung mit dem allgemeinen Risikobegriff folgt eine Darstellung der Risiken, denen Banken und andere Unternehmen der Finanzbranche ausgesetzt sind. Anschließend werden wesentliche Kennzahlen zur Abschätzung von Rendite und Risiko analysiert. Das Kapitel bildet somit die Basis für die Ausführungen zur Integration des Risikomanagements in Kapitel 3 und für das vorgeschlagene Modell zur Integration des Portfoliomanagements in Kapitel 7.

### 2.1. Einordnung und Typisierung von Banken

Die Aufgabe von **Banken** bzw. **Kreditinstituten** besteht in erster Linie in der *Finanzintermediation*, d. h. sie fungieren als Mittler zwischen Kapitalangebot und -nachfrage. Im Folgenden werden beide Bezeichnungen synonym verwendet.

Nach dem Gesetz über das Kreditwesen (KWG) sind Kreditinstitute „[...] Unternehmen, die Bankgeschäfte gewerbsmäßig oder in einem Umfang betreiben, der einen in kaufmännischer Weise eingerichteten Geschäftsbetrieb erfordert.“<sup>2</sup> Das Betreiben von Bankgeschäften ist also wesentlich für die Einordnung eines Unternehmens als Kreditinstitut. Das KWG subsumiert hier Geschäfte aus den Bereichen Zahlung und Kreditverkehr und nennt in KWG § 1(1) Ziffer 1.-12. u. a. Einlagen, Kredit-, Depot- und Girogeschäfte. Demgegenüber werden **Finanzdienstleistungsinstitute** (auch Finanzinstitute) nach KWG § 1 (1a) klar abgegrenzt von den Kreditinstituten als „[...] Unternehmen, die Finanzdienstleistungen für andere gewerbsmäßig oder in einem Umfang erbringen, der einen in kaufmännischer Weise eingerichteten Geschäftsbetrieb erfordert, und die keine Kreditinstitute sind.“ Im Unterschied zu Bankgeschäften werden unter Finanzdienstleistungen nach KWG § 1 (1a) Ziffer 1.-8. u. a. die Anlagevermittlung, Finanzportfolioverwaltung oder das Kreditkartengeschäft verstanden. Sowohl Kreditinstitute als auch Finanzdienstleistungsinstitute fallen unter die Bestimmungen des KWG und werden somit in Deutschland von der Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht (BaFin) kontrolliert. Beide Institutsgruppen wiederum gehören als Bestandteil der Banken- und Wertpapierdienst-

<sup>1</sup>S. beispielsweise Fischer [74] oder Working Group on Economic Capital Models [203].

<sup>2</sup>Quelle: Gesetz über das Kreditwesen, online verfügbar bei der Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht (BaFin), <http://www.bafin.de/gesetze/kwg.htm> (Abruf am 05.10.2007), § 1 Begriffsbestimmungen.

leistungsbranche zur **Finanzbranche** im Sinne des KWG. Zu letzterer zählen weiterhin die Versicherungsbranche<sup>3</sup> sowie gemischte Finanzholding-Gesellschaften.<sup>4</sup>

Das Bankensystem in Deutschland wird in die drei Säulen **Privatbanken**<sup>5</sup>, **Genossenschaftsbanken** und **öffentlich rechtliche Banken** eingeteilt [82]. Zu den Privatbanken zählen insbesondere die großen deutschen Bankinstitute, wie Deutsche Bank AG und Commerzbank AG, aber auch kleinere Banken, wie z. B. Privatbankhäuser. Der genossenschaftliche Sektor ist unter den beiden Dachinstituten DZ BANK AG und WGZ BANK AG organisiert, die als Zentralinstitute für deutschlandweit insgesamt ca. 1.250 Genossenschaftsbanken fungieren. Als mehrstufiges Verbundsystem sind auch die öffentlich rechtlichen Banken gruppiert, zu denen auch die ca. 500 Sparkassen in Deutschland zählen. Jeder lokal ansässigen Sparkasse ist eine spezifische Landesbank/Girozentrale als Zentralinstitut zugeordnet. Unter Einbezug ihrer jeweiligen Zentralinstitute beträgt der Marktanteil von Genossenschaftsbanken und öffentlich rechtlichen Banken in Deutschland, gemessen an ihrer Bilanzsumme, in Summe ca. 58%.<sup>6</sup>

Für den weiteren Gang der Untersuchung sind besonders kleinere Institute, wie Genossenschaftsbanken oder Sparkassen, von Interesse, da diese nicht im gleichen Umfang Investitionen in ausgefeilte Risikomanagementsysteme vornehmen können wie große Privatbanken. Der in Kapitel 7 vorgestellte Ansatz ermöglicht beispielsweise einer typischen Volksbank oder Sparkasse eine Integration des Risikomanagements basierend auf bereits bestehenden Systemen.

### 2.2. Kritische Diskussion des Begriffs ‚Risiko‘

Im alltäglichen Sprachgebrauch löst das Wort **Risiko**<sup>7</sup> vornehmlich negative Assoziationen aus. Es werden damit Begriffe wie *Gefahr*, *Bedrohung*, *Wagnis* oder auch *Verlust(gefahr)* verbunden. Wenngleich der Volksmund dem Wort Risiko auch die Möglichkeit von Gewinnen zubilligt („*Wer nicht wagt, der nicht gewinnt*“), ist die allgemeine Auffassung von Risiko eher negativ geprägt. Zusätzlich wird sie stark durch die subjektive Wahrnehmung beeinflusst, d. h. das Ausmaß eines Risikos wird von einzelnen Personen potenziell sehr unterschiedlich bewertet [117]. Selbst in der Brockhaus-Studienausgabe (2001) findet sich nur folgende Definition:

„*Risiko [...], die Möglichkeit, dass eine Handlung oder Aktivität einen körperlichen oder materiellen Schaden oder Verlust zur Folge hat oder mit anderen Nachteilen verbunden ist, im Unterschied zur Gefahr, die eine eher unmittelbare Bedrohung bezeichnet.*“

---

<sup>3</sup>Versicherungen sind für die Studie zur Rückversicherungsoptimierung in Kapitel 6 relevant.

<sup>4</sup>Quelle: KWG § 1 (19), Ziffer 1.-3.

<sup>5</sup>Auch bezeichnet als *Private Kreditbanken*.

<sup>6</sup>Quelle: *Marktanteile der Bankengruppen* unter <http://www.bankenverband.de> (Abruf 30.12.2007).

<sup>7</sup>Die etymologische Herkunft des Wortes Risiko ist nicht endgültig geklärt. Der Duden führt es auf das altgriechische Wort *ρίζα* (*rhiza*: Wurzel, Klippe, neugriechisch *ρίζικον*, *rhizikon*) zurück, aus dem sich im Lateinischen *resicare* (auch *risicare*, ‚Gefahr laufen, wagen‘) gebildet hat.

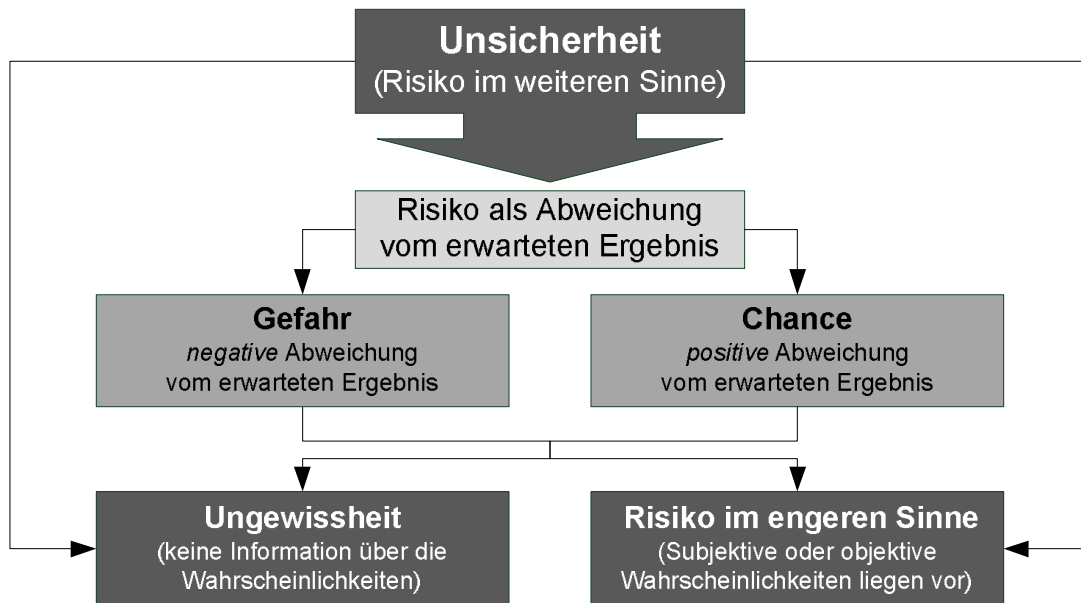


Abb. 2.1.: Risikobegriff der Entscheidungstheorie in Anlehnung an [105]

In der Betriebswissenschaft gibt es keine einheitliche Definition des häufig verwendeten Begriffs Risiko. Es lassen sich hier jedoch zwei Grundrichtungen zur Erklärung von Risiko identifizieren: *Ursachenbezogene* Ansätze und *wirkungsbezogene* Ansätze.<sup>8</sup> Erstere stammen aus der Entscheidungstheorie und zielen auf die Unsicherheit der Zukunft und auf unvollständige Informationen ab. Dabei wird versucht, dem Eintritt bestimmter (unsicherer) Ereignisse Wahrscheinlichkeiten zuzuordnen, die entweder objektiv messbar (z. B. mittels statistischer Berechnungen) oder auf Basis von Erfahrungen subjektiv schätzbar sind. Die Entscheidungstheorie gliedert weiterhin den Zustand der Unsicherheit<sup>9</sup> in die beiden Unterkategorien **Ungewissheit** und **Risiko im engeren Sinne** (s. Abbildung 2.1). Bei wirkungsbezogenen Ansätzen stehen die Risikofolgen im Vordergrund. Dabei differenziert man zwischen der **Gefahr** als Möglichkeit einer negativen Zielverfehlung und der **Chance** als positive Zielverfehlung [186].

Risiko im Sinne der Finanzbranche ist nicht als grundsätzlich negativ zu interpretieren. Finanzinstitutionen erzielen Erträge durch das i. d. R. gezielte Eingehen finanzieller Risiken oder durch die Übernahme von Risiken ihrer Kunden im Rahmen einer Dienstleistung. Durch das Pooling der Risiken im Portfolio der Bank können negative Auswirkungen einzelner Risikopositionen durch positive Entwicklungen bei anderen Positionen ausgeglichen werden. Neben weiteren Funktionen (z. B. Cash-Flow-Matching) stellt das Management von Risiken eine wesentliche Kernaktivität und -kompetenz von Banken und Finanzdienstleistern dar [203]. In diesem Zusammenhang werden unter Risiko üblicherweise „*mögliche Abweichungen der Ergebnisse von ihrem erwarteten Wert*“ verstanden (*Ergebnisvolatilität*) [82, 122]. Der finanzwirtschaftliche

<sup>8</sup>Keuper et al. [119] schlagen eine alternative Klassifizierung vor. Sie unterteilen in einen *informationsorientierten*, *entscheidungsorientierten* und *zielorientierten* Risikobegriff.

<sup>9</sup>Auch bezeichnet als *Zustand nicht vollständiger Information*.

Risikobegriff kann daher auch als **Risiko im weiteren Sinne** bezeichnet werden. Wie aus Abbildung 2.1 ersichtlich, umfasst dieser Risikobegriff die beiden Unterarten *Gefahr* und *Chance*. Während unter der Chance die Möglichkeit zu einer vorteilhaften Abweichung vom Referenzwert verstanden wird, umschreibt die Gefahr die Möglichkeit einer unvorteilhaften Abweichung vom Referenzwert [191]. In dieser Arbeit werden Abweichungen in beide Richtungen ins Kalkül gezogen (Risiko im weiteren Sinne). Der folgende Abschnitt gibt einen Überblick der Risiken im Bankgeschäft.

### 2.3. Taxonomie der Bankrisiken

In der Literatur hat sich bisher keine einheitliche Klassifikation der Risiken im Geschäft von Kreditinstituten herausgebildet.<sup>10</sup> Sinnvoll erscheint gemäß Kuritzkes & Schuermann [122] eine grundsätzliche Einteilung in **finanzielle** und **nichtfinanzielle Risiken** (s. Abbildung 2.2). Finanzielle Risiken können weiter unterteilt werden in **Kredit-** und **Marktrisiko** (auch bezeichnet als *Erfolgsrisiken*<sup>11</sup>) sowie **Liquiditätsrisiken**.<sup>12</sup> Bei den nichtfinanziellen Risiken sind **operationelle Risiken** besonders hervorzuheben. Alle bisher genannten Risiken lassen sich bei entsprechend guter Datenverfügbarkeit mit den in Abschnitt 2.4.2 vorgestellten Methoden quantifizieren. Weitere, allerdings nur schwer abschätzbare Risikoarten, aus dem Betriebsbereich sind das **Geschäftsrisiko**, das **Strategierisiko**, das **Reputationsrisiko**, das **Rechtsrisiko** und das **Aufsichtsrechtsrisiko** [41]. Als umspannende Risikoarten sind die **Systemrisiken** und die **Modellrisiken** zu verstehen. Mit der Baseler Eigenkapitalverordnung von 1988 [10] hat der Baseler Ausschuss für Bankenaufsicht (BCBS<sup>13</sup>) Kreditrisiken als größte Risikoquelle des Bankgeschäfts unter gesonderte Aufsicht gestellt. Erst 1996 [11] wurden mit dem „*Market Risk Amendment*“ auch Marktrisiken in den Fokus mit aufgenommen. Mit der Neuen Eigenkapitalvereinbarung (*Basel II*) [12] rücken auch operationelle Risiken in den Fokus der Betrachtung.

Bezogen auf die *Mindestanforderungen an das Risikomanagement (MaRisk)*, deren Umsetzung für deutsche Banken verpflichtend ist, stellt die BaFin im Abschnitt BTR<sup>14</sup> für folgende Risikoarten besondere Anforderungen an die Ausgestaltung des Risikomanagements: Adressenausfallrisiken<sup>15</sup> (BTR 1), Marktpreisrisiken (BTR 2), Liquiditätsrisiken (BTR 3) und operationelle Risiken (BTR 4). Da Liquiditätsrisiken im Sinne der MaRisk in erster Linie die jederzeitige Zahlungsfähigkeit einer Bank betreffen sind sie für das in 7 vorgestellte Modell zur Integration des Portfoliomanagements eher als Nebenbedingung relevant. Dementsprechend finden

---

<sup>10</sup>S. beispielsweise [82, 148, 191, 186, 160, 41, 31].

<sup>11</sup>Kredit- und Marktrisiko werden alternativ auch als (Eigenkapital-)Verlustrisiken bezeichnet, da sie direkte Auswirkungen auf den Gewinn und damit das Eigenkapital eines Kreditinstituts haben [Schierenbeck1999].

<sup>12</sup>[122] unterscheidet bei finanziellen Risiken weiterhin das Aktiv-Passiv-Risiko (engl. *asset-liability risk*). Dieses wird in der vorliegenden Arbeit als Unterkategorie des Marktrisikos eingeordnet.

<sup>13</sup>Engl. *Basel Committee on Banking Supervision*.

<sup>14</sup>*Besonderer Teil* der MaRisk mit Anforderungen an die Risikosteuerungs- und Controllingprozesse.

<sup>15</sup>Adressenausfallrisiken werden in dieser Arbeit als *Kreditrisiken* bezeichnet.





Abb. 2.2.: Taxonomie der Risiken im Bankgeschäft

in Kapitel 7 die drei Risikoarten Marktrisiko, Kreditrisiko und operationelles Risiko als Risikozielfunktionen Berücksichtigung im Modell. Sie werden nachfolgend detailliert dargestellt, alle weiteren Risiken in Abschnitt 2.3.4 im Überblick.

Es bleibt anzumerken, dass eine gute Klassifikation der Risiken sehr ratsam ist, jedoch auch erhebliche Gefahren birgt. Der Anwender wiegt sich dadurch möglicherweise in der Sicherheit, alle Risiken erfasst und beachtet zu haben. Dennoch können Risiken übersehen worden sein, die später schlagend werden. Weiterhin ist hervorzuheben, dass der Versuch einer Taxonomie der Risikoarten nicht von den starken Interdependenzen der Risikoarten untereinander ablenken darf. Dieser Aspekt wird in Abschnitt 3.2.3 untersucht.

### 2.3.1. Kreditrisiken

Eine zentrale Bedeutung beim Geschäft von Banken kommt seit jeher den Kreditrisiken<sup>16</sup> zu, die üblicherweise auch dessen Hauptrisikowerte darstellen.<sup>17</sup> Allgemein gesprochen umfassen sie das Risiko, dass ein Vermögenswert durch Änderungen der Zahlungsfähigkeit des Vertragspartners an Wert verliert [41]. Entsprechend Abbildung 2.2 lassen sich Kreditrisiken weiter klassifizieren in Ausfallrisiko, Spreadrisiko, Länderrisiko und Konzentrationsrisiko, die im Folgenden näher erläutert werden.

<sup>16</sup>Auch bezeichnet als *Kreditausfallrisiken*.

<sup>17</sup>In verschiedenen Untersuchungen liegt der Risikobeitrag für das Kreditrisiko, gemessen durch den Anteil am ökonomischen Risikokapital bei ca. 50%: Kuritzkes et al. [124] (48-53%), Kuritzkes & Schuermann [122] (46%), Rosenberg & Schuermann [168] (53,1%).

Das **Ausfallrisiko**<sup>18</sup> als originäres Kreditrisiko bezeichnet die Gefahr, dass ein Schuldner, beispielsweise wegen Insolvenz, seinen Zahlungsverpflichtungen nicht rechtzeitig oder nicht in vollem Umfang nachkommen kann oder will [82]. Eine spezielle Form stellt das *Settlement-Risiko* dar, das durch einseitige Insolvenz bei derivativen Finanzmarktverträgen entsteht. Die Besonderheit solcher Instrumente liegt darin, dass ihr Marktwert sowohl positiv wie auch negativ sein kann. Nur im Falle eines positiven Marktwerts besteht überhaupt ein Kreditrisiko, das zudem üblicherweise weit unter dem eigentlichen Nominalbetrag liegt [41].

Gegenüber dem Ausfallrisiko, bei dem es tatsächlich zu Störungen bei den Kreditzahlungen kommt, steht das **Spreadrisiko**, das negative Änderungen des Credit-Spreads eines Kreditnehmers betrifft. Meist ist dieses eng verbunden mit dem *Bonitätsänderungsrisiko*<sup>19</sup>, das eine Verschlechterung der Kreditwürdigkeit (*Bonität*) eines Kreditkunden mit sich bringt. Die Bonität wird dabei anhand eines Ratings (für größere Unternehmen) oder eines Scorings (für kleinere Unternehmen und Privatkunden) bemessen. Eine Abstufung manifestiert sich bei liquide gehandelten Vermögenswerten (z. B. Unternehmensanleihen) in einem erhöhten individuellen Credit-Spread des Schuldners und führt damit zu einem Marktwertverlust der Bankforderung.

Zu den **Länderrisiken** gehört das *Länderausfallrisiko*, das eintritt, wenn ein Staat zahlungsunfähig wird und seine Schulden nicht in vollem Umfang zurückbezahlen kann. In engem Zusammenhang steht auch das *politische Länderrisiko*, das die Möglichkeit beinhaltet, dass ein Staat, z. B. durch einen plötzlichen Regime-Wechsel, seine Zahlungsmoral gegenüber Schuldnern ändert. Dies führt i. d. R. auch zu einer Verschlechterung des Landesratings.

Kreditinstitute teilen ihre Kreditnehmer - nicht zuletzt aufgrund der Anforderungen der Neuen Eigenkapitalverordnung Basel II - in unterschiedliche Ausfallklassen ein und berücksichtigen bereits bei der Konditionengestaltung jeweils eine bestimmte Anzahl von Kreditausfällen. Bei Eintreten der Erwartungen sollten die gezahlten Risikoprämien der Kunden die tatsächlichen Ausfälle decken. Das **Konzentrationsrisiko** im Portfolio eines Kreditinstituts wird schlagend, wenn ein wesentlicher Kunde unerwartet ausfällt oder auch wenn eine bestimmte Branche (z. B. die Baubranche) aufgrund konjunktureller Probleme eine steigende Zahl von Ausfällen verzeichnet. Dann können die entstehenden Verluste die vereinnahmten Prämien übersteigen und das Eigenkapital des Instituts aufzehren.

Da die Auswirkungen von Kreditrisiken eine Bank in der Gesamtsicht betreffen, werden ihr Management zunehmend auf Portfolioebene durchgeführt [74]. Zur Modellierung dienen die sogenannten **Portfoliomodelle**, die eine Reihe von Parametern verwenden. Die Wahrscheinlichkeit eines Ausfalls wird dabei *Probability of Default (PD)* genannt und der tatsächlich eingetretene prozentuale Verlust bei Ausfall wird als *Loss Given Default (LGD)* bezeichnet.<sup>20</sup> In den vergangenen zehn Jahren wurde sehr intensiv im Bereich Kreditportfoliomodelle ge-

---

<sup>18</sup>Auch bezeichnet als *Adressenrisiko* oder *Adressenausfallrisiko*. Diese Begriffe werden synonym verwendet.

<sup>19</sup>Dieses wird auch *Ratingänderungsrisiko* genannt.

<sup>20</sup>Entsprechend wird der Wert  $100\% - LGD$  als *Recovery Rate (RR)* bezeichnet.

forscht und zwischenzeitlich haben die Modelle CreditMetrics<sup>®</sup> [96], CreditRisk+<sup>®</sup><sup>21</sup> und CreditPortfolioView<sup>®</sup> [207, 208] weite Verbreitung gefunden.<sup>22</sup> Zwischen den Methoden liegen allerdings fundamentale konzeptionelle Unterschiede, und bis heute konnte sich kein Ansatz als „Best-Practice“ etablieren [3]. Die Datenqualität im Bereich Kreditrisiko hat sich in den vergangenen Jahren verbessert. Allerdings steht sie im Vergleich zu Marktrisiken (s. folgender Abschnitt 2.3.2), u. a. wegen seltener Ereignisse (z. B. Ausfall oder Ratingänderung), noch weit zurück. Im Zusammenhang mit Portfoliomodellen kommen weitere spezifische Risiken hinzu, die man auch als übergreifende **Modellrisiken** bezeichnen kann.

Auch die Möglichkeiten zum Management von Kreditrisiken haben sich in der letzten Zeit stark verbessert. Zur Absicherung von Klumpenrisiken durch hohe Forderungen gegenüber einzelnen Schuldern können beispielsweise *Credit Default Swaps* dienen. Zum Verkauf von Forderungen eignen sich Verbriefungsinstrumente, die allerdings auch erhebliche Risiken mit sich bringen, wie die Subprime-Kreditkrise in den USA gezeigt hat. Einen ausführlichen Überblick zum Thema geben Bluhm [17], Felsenheimer [73] und Crouhy et al. [42].

### 2.3.2. Marktrisiken

Das *Market Risk Amendment* des Baseler Ausschusses [11] bezeichnet als Marktrisiko „*das Risiko von Verlusten aus bilanziellen und außerbilanziellen Positionen, das durch Bewegungen der Marktpreise hervorgerufen wird*“.<sup>23</sup> Die unterbreitete Eingrenzung auf Zins- und Aktienrisiken im Handelsbuch einer Bank sowie Währungs- und Rohstoffrisiken der Gesamtbank greift aus heutiger Sicht jedoch zu kurz. Stattdessen wird eine Einteilung der Marktrisiken entsprechend Abbildung 2.3 in die folgenden fünf Kategorien von Marktrisikotreibern in der Gesamtbank vorgeschlagen: Zinsen und Aktiv-Passiv-Zusammenhang, Aktien/Beteiligungen, Währungen sowie Rohstoffe.

**Zinsrisiken** prägen einen Großteil der Bankbilanz. Auf der Aktivseite bewirkt ein allgemeiner Anstieg des Marktzinsniveaus einen Barwertverlust bei Festzinsgeschäften, die typisch für diese Bilanzseite sind und zudem oftmals lange Zinsfestschreibungen aufweisen.<sup>24</sup> Gleichzeitig verteuert ein Zinsanstieg die i. d. R. variablen bzw. kurzfristigen Verbindlichkeiten eines Kreditinstituts auf der Passivseite.<sup>25</sup> Das Wechselspiel dieser Risiken auf den Bilanzseiten wird daher auch als **Aktiv-Passivrisiko** bezeichnet. Banken steuern dieses Risiko im Rahmen der *Aktiv-Passiv-Steuerung* vornehmlich durch derivative Zinsinstrumente, insbesondere Zinsswaps. Diese ermöglichen den Tausch variabler in fixe Zahlungen und umgekehrt. Dadurch kann

<sup>21</sup>CreditRisk+ wurde von Credit Suisse entwickelt und 1997 veröffentlicht. Gundlach & Lehrbass [95] geben einen aktuellen Stand des Modells und der Praxisumsetzung.

<sup>22</sup>Gordy [89] gibt einen vergleichenden Überblick der beiden Modelle CreditMetrics<sup>®</sup> und CreditRisk+<sup>®</sup>.

<sup>23</sup>Aus diesem Grund auch bezeichnet als *Marktpreisrisiko* [7] oder *Marktpreisänderungsrisiko*.

<sup>24</sup>Der Barwerteffekt nimmt mit der Laufzeit eines Festzinsgeschäfts zu.

<sup>25</sup>Kreditinstitute refinanzieren sich meistens kurzfristig, z. B. über Spareinlagen von Kunden oder Geldmarktkredite, und legen ihr Geld langfristig an, z. B. in Hypothekendarlehen.

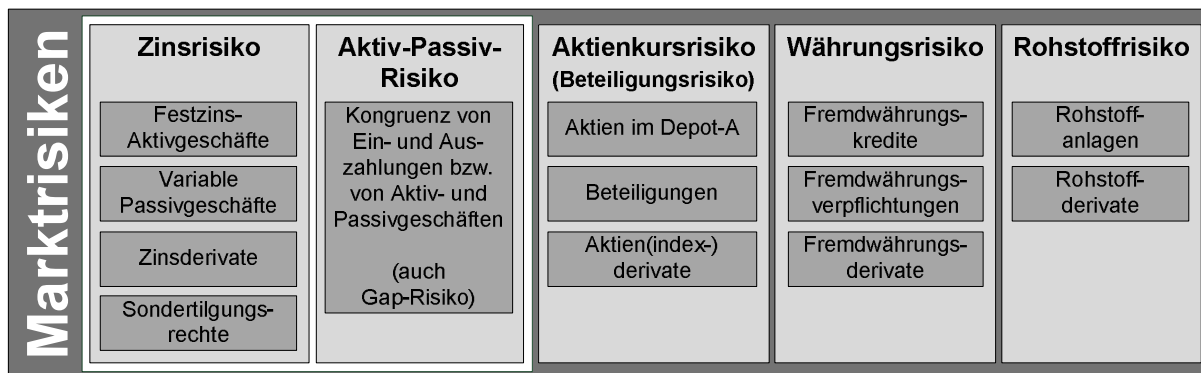


Abb. 2.3.: Taxonomie von Marktrisiken anhand wesentlichen Risikotreiber und ausgewählter Instrumente

ein risikomindernder Ausgleich der Zahlungsströme erreicht werden oder das Risiko sogar erhöht (*gehebelt*) werden. Neben diesen klassischen Zinsrisiken<sup>26</sup> sind in vielen Bankbüchern noch weitere Risiken versteckt, sogenannte *implizite Optionen*. Diese betreffen beispielsweise Sondertilgungs- oder Sonderkündigungsrechte, die bei vielen Darlehensverträgen implizit bestehen. Bei starken Schwankungen des Marktzinsniveaus besteht die Gefahr, dass diese Risiken schlagend werden. Beispielsweise führen stark fallende Zinsen i. d. R. dazu, dass viele Kunden ihre Kredite bei Bestehen entsprechender Sondertilgungsrechte unplanmäßig schnell tilgen und auf günstigere Finanzierungen umsteigen.<sup>27</sup>

Für das Handelsbuch einer Bank besonders relevant sind die **Aktienkursrisiken**, zu denen auch die **Beteiligungsrisiken** gehören. Im Handelsbuch<sup>28</sup> werden neben klassischen Zinspapieren und derivativen Instrumenten auch Unternehmensbeteiligungen geführt, mit denen Händler gezielt versuchen, kurz- bis mittelfristige Handelsgewinne zu generieren. Diese Instrumente unterliegen sowohl dem spezifischen Risiko der entsprechenden Unternehmen<sup>29</sup> bzw. Märkte (bei Index-Papieren) als auch dem unspezifischen Risiko des gesamten Aktienmarkts, das entsprechend der Portfolio-Theorie (s. Abschnitt 3.3.1) nicht diversifiziert werden kann.

Die zunehmende Verflechtung der Finanzmärkte erhöht die Bedeutung von **Währungsrisiken**. Diese treten bei jeglichen Transaktionen, bei denen fremde Währungen involviert sind, auf und bergen besonders bei exotischen Vertretern (z. B. bei thailändischem Baht oder südafrikanischem Rand) erhebliche Risiken in sich. Ein klassisches Beispiel sind Refinanzierungen in Währungen mit niedrigem Zinsniveau (z. B. in japanischen Yen), jedoch erheblichem Währungsrisiko, bei denen zudem Zins- und Währungsrisiken miteinander konfundiert werden. Da der US-Dollar auf Rohstoffmärkten nach wie vor eine sehr prominente Rolle spielt, sind die

<sup>26</sup>Crouhy et al. [41] geben einen umfassenden Überblick verschiedener weiterer Varianten des Zinsrisikos.

<sup>27</sup>Diese Risiken lassen sich auf Portfolioebene beispielsweise durch Swaptions absichern. Die Bewertung und Risikomessung impliziter Optionen erfordert häufig den Einsatz von Zinsstrukturmodellen [16].

<sup>28</sup>Langfristige Anlagen in solchen Instrumenten werden im Anlagebuch geführt.

<sup>29</sup>Hierzu zählen u. a. die Qualität des Managements, das individuelle Geschäftsfeld oder Risiken des Geschäftsbetriebs [41].

se Risiken auch mit den **Rohstoffrisiken** verbunden. Durch die weltweite Rohstoffknappheit hat in den letzten Jahren die Handelstätigkeit in rohstoffbezogenen Finanzinstrumenten stark zugenommen. Häufig gehandelte Rohstoffe sind beispielsweise Gold, Erdöl oder Strom. Im Rahmen spekulativer Positionen engagieren sich auch Finanzinstitutionen an diesen zum Teil von wenigen Lieferanten geprägten und dadurch extrem schwankungsanfälligen Märkten [41].

Im Vergleich zu anderen Risikoarten sind die Ansätze zur Messung und Steuerung von Marktrisiken sehr weit entwickelt.<sup>30</sup> Für die meisten marktrisikobehafteten Instrumente sind lange Zeitreihen verfügbar, z. B. Aktienkurse oder Zinssätze, die als Basis für die Bewertung verwendet werden können. Dies gilt allerdings nicht für neu eingeführte Finanzinstrumente (z. B. durch ein IPO<sup>31</sup> oder für Vermögenswerte ohne aktiv gehandelten Markt (z. B. Immobilien). Bei Aktienneuemissionen werden daher oft vergleichbare Firmen als Referenz herangezogen oder Kurse basierend auf statistischen Annahmen simuliert. Bei Immobilien wird in der Praxis Abhilfe durch die seit einigen Jahren berechneten Immobilienpreisindizes oder auch durch Liegenschaftszinsmodelle geschaffen. Für Renditeverteilungen von Marktrisiko-Instrumenten wird häufig die Normalverteilung angenommen, die das Handling bei der Risikomessung und Bepreisung dieser Instrumente erheblich erleichtert. Allerdings zeigen empirische Renditeverteilungen, dass diese Annahme in der Realität nicht zutrifft, da sie **Fat Tails** vernachlässigt. Diese besagen, dass die äußeren Quantile einer beobachteten Verteilung eine höhere Wahrscheinlichkeitsdichte aufweisen als von der Normalverteilung angenommen. Einen umfassenden Überblick zur Problematik dieser in der Praxis äußerst relevanten *Heavy-tailed Distributions* geben Rachev [163] sowie Rachev et al. [164]. Extreme Marktbewegungen werden zudem häufig anhand von **Stresstests** analysiert, bei denen szenario-basiert das gesamte Marktrisiko-Portfolio, aber auch unter Umständen die Gesamtbank mit allen Risikoarten, bewertet wird [74].<sup>32</sup>

### 2.3.3. Operationelle Risiken

Nach der Definition des Basler Ausschusses für Bankenaufsicht [12] bezeichnen operationelle Risiken „*die Gefahr von Verlusten, die infolge einer Unzulänglichkeit oder des Versagens von internen Verfahren, Menschen und Systemen oder infolge externer Ereignisse eintreten. Diese Definition schließt Rechtsrisiken ein, nicht jedoch strategische Risiken oder Reputationsrisiken.*“ Durch Basel II, aber auch durch spektakuläre Betrugsfälle bei Banken, sind operationelle Risiken in den letzten Jahren verstärkt in den Fokus gerückt. Diese Risiken lassen sich grob in **interne** und **externe Risiken** unterteilen (s. Abbildung 2.4).

<sup>30</sup>S. Cumming & Hirtle [44], Priermeier [160] sowie Kuritzkes & Schuermann [122].

<sup>31</sup>*Initial Public Offering (IPO)* (engl.) bezeichnet den Börsengang einer nicht gelisteten Aktiengesellschaft.

<sup>32</sup>Die Konzeption von Stresstests in Kreditinstituten beschreiben die Studie des *Committee on the Global Financial System* der Bank für internationalen Zahlungsausgleich [28] sowie Klauck [120].

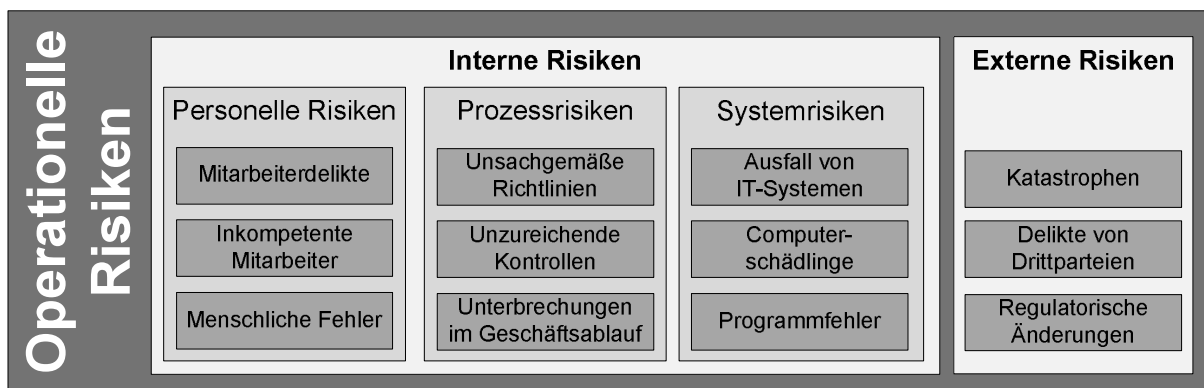


Abb. 2.4.: Taxonomie operationeller Risiken mit Risikotreibern

Die Vergangenheit hat gezeigt<sup>33</sup>, dass der gezielte Betrug einzelner Personen das größte Risiko im unternehmensinternen Bereich darstellt. Zu den *personellen Risiken* zählen weiterhin Fehler durch menschliches Versagen und durch Inkompetenz. Auch Prozesse und Systeme werden von Menschen implementiert und bergen somit *Prozess-* bzw. *Systemrisiken*. Zu letztgenannten zählen insbesondere auch Gefahren durch den Ausfall von IT-Systemen (z. B. durch Stromausfall) oder Bedrohungen durch Computerschädlinge. Externe Risiken werden vor allem bedingt durch die Auswirkungen von Katastrophen, wie Erdbeben oder Überflutung. Die Definition des Basler Ausschusses schließt Rechtsrisiken, z. B. aufsichtsrechtliche Anforderungen, explizit ein.

Trotz intensivierter Forschungsbemühungen und keinerlei Zweifel an ihrer Relevanz, bestehen hinsichtlich der Quantifizierung operationeller Risiken erhebliche Unsicherheiten und manche Banken stellen nach wie vor eine vernünftige Beurteilungsmöglichkeit in Frage [112]. Im Gegensatz zu Markt- oder Kreditrisiken bringen sie i. d. R. keine Chancen mit sich, sondern ausschließlich Verlustrisiken [113]. Die zugrunde liegenden Verteilungen weisen daher eine erhebliche Schiefe auf und sind durch zwei Typen von Verlusten geprägt: Verluste mit großer Häufigkeit und geringen Auswirkungen (engl. *high frequency, low impact*) sowie Verluste mit geringer Häufigkeit, jedoch großen Auswirkungen (engl. *low frequency, high impact*). Auch Daten, die für eine fundierte statistische Auswertung bei der Messung operationeller Risiken unabdingbar sind, stehen bis heute nur in unzureichendem Maße zur Verfügung [48, 104]. Daher behelfen sich viele Quantifizierungsansätze mit Simulationen unter bestimmten Verteilungsannahmen. Von aufsichtsrechtlicher Seite wird eine Unterlegung operationeller Risiken explizit gefordert. Basel II [12] stellt hierzu verschiedene Ansätze zur Auswahl, die allerdings nur einen ersten Schritt in Richtung einer adäquaten Risikomessung darstellen.<sup>34</sup>

<sup>33</sup>Im Jahr 1995 setzte ein einzelner Händler gezielt die Kontrollmechanismen der Barings Bank außer Kraft und verursachte durch seine heimlich kumulierten Verluste in Höhe von 1,4 Mrd. US-Dollar den Bankrott der Bank. Ähnliche Aktivitäten eines Händlers führten im Januar 2008 bei der französischen Bank Société Générale zu einem Verlust von 4,9 Mrd. Euro.

<sup>34</sup>Im multikriteriellen Modell in Kapitel 7 wird der Basel-Standardansatz dargestellt und verwendet.

### 2.3.4. Weitere Risikoarten

Kredit-, Markt- und operationelle Risiken stehen im aktuellen Fokus aufsichtsrechtlicher Vorgaben und internationaler Forschung. Allerdings finden inzwischen weitere Risikoarten zunehmend Beachtung, da auch sie einen erheblichen Anteil zum Gesamtrisiko von Finanzunternehmen beitragen [3, 122]<sup>35</sup>. Da diese Risikoarten - mit Ausnahme des Liquiditätsrisikos - aus heutiger Sicht praktisch nicht quantifizierbar sind, werden sie bei dem in 7 konzipierten Modell jedoch nicht berücksichtigt [113].<sup>36</sup> Die Flexibilität des Frameworks erlaubt allerdings eine zukünftige Integration, wenn geeignete Modellierungen für sie gefunden werden.

Unter **Liquiditätsrisiko** versteht man in erster Linie die Gefahr, dass eine Bank ihre Zahlungsfähigkeit nicht aufrecht erhalten kann. Die Ursache für dieses Risiko liegt vor allem in den unterschiedlichen Fristigkeiten begründet, die auf der Passivseite eher kurz laufend und auf der Aktivseite eher lang laufend sind.<sup>37</sup> Wenn zu viele Kunden ihre kurzfristigen Einlagen zurückfordern<sup>38</sup> (*Abrufisiko*) und zudem Anlagen nicht schnell genug liquidierbar sind (*Marktliquiditätsrisiko*), kann eine Bank plötzlich zahlungsunfähig werden [125]. Bei Verschlechterung der Konditionen für die Kreditaufnahme am Interbankenmarkt, beispielsweise durch eine Rating-Abstufung, spricht man speziell auch von *Refinanzierungsrisiko*. In diesem Fall wird auch die starke Abhängigkeit der Risiken untereinander deutlich, da ein schlagendes Kreditrisiko (Rating-Abstufung) zu einem Liquiditätsrisiko (Refinanzierung) führt.

Zu den omnipräsenten Risiken gehören die **Geschäftsrisiken**, die spezifische Risiken der Geschäftstätigkeit sowie mittel- und langfristige Strategierisiken umfassen. Beispielsweise kann durch massiven Kundenverlust infolge falscher Entscheidungen hinsichtlich der Geschäftsausrichtung das Unternehmensfortbestehen gefährdet werden. Ähnliches gilt auch bei **Reputationsrisiken**, wie z. B. bei unseriösen Geschäftspraktiken einer Bank.

Die Modelle zur Bewertung der unterschiedlichen Risiken, z. B. für Kredit- oder Marktrisiko, haben allesamt eine ähnliche Struktur: Sie verwenden Annahmen über das Verhalten identifizierter Risikofaktoren und vorhandenes Datenmaterial hinsichtlich dieser Faktoren. Hierauf basierend wird eine Gewinn- und Verlustverteilung über den Risikohorizont des Modells erzeugt, aus der sich das Risikomaß i. d. R. als Quantil ergibt. Somit enthalten alle Risikomessmethoden inhärent **Modellrisiken**, die bei ungeeigneten Annahmen (*Methodikrisiko*) sowie bei Fehlern in Inputdaten oder Software (*Umsetzungsrisiko*) entstehen [3, 41]. Zur Kategorie der Modellrisiken gehört weiterhin das *Aggregationsrisiko*, das im Kontext des Integrierten Risikomanagements in Abschnitt 3.2 näher erläutert wird. **Systemrisiken** sind zum Teil eng verknüpft mit Modellrisiken und bezeichnen die Gefahr eines „Dominoeffekts“ aus einem idiosynkratischen

<sup>35</sup>S. Überblick Bankrisiken in Abb. 2.2.

<sup>36</sup>Das Liquiditätsrisiko wird auch in anderen Studien nicht einbezogen, da eine mit den übrigen Risikoarten konsistente Modellierung sich als schwierig erweist [1].

<sup>37</sup>S. auch Aktiv-Passiv-Risiko in Abschnitt 2.3.2.

<sup>38</sup>Ein Beispiel hierfür ist ein *Bank run* aufgrund negativer Berichterstattung über ein einzelnes Institut.

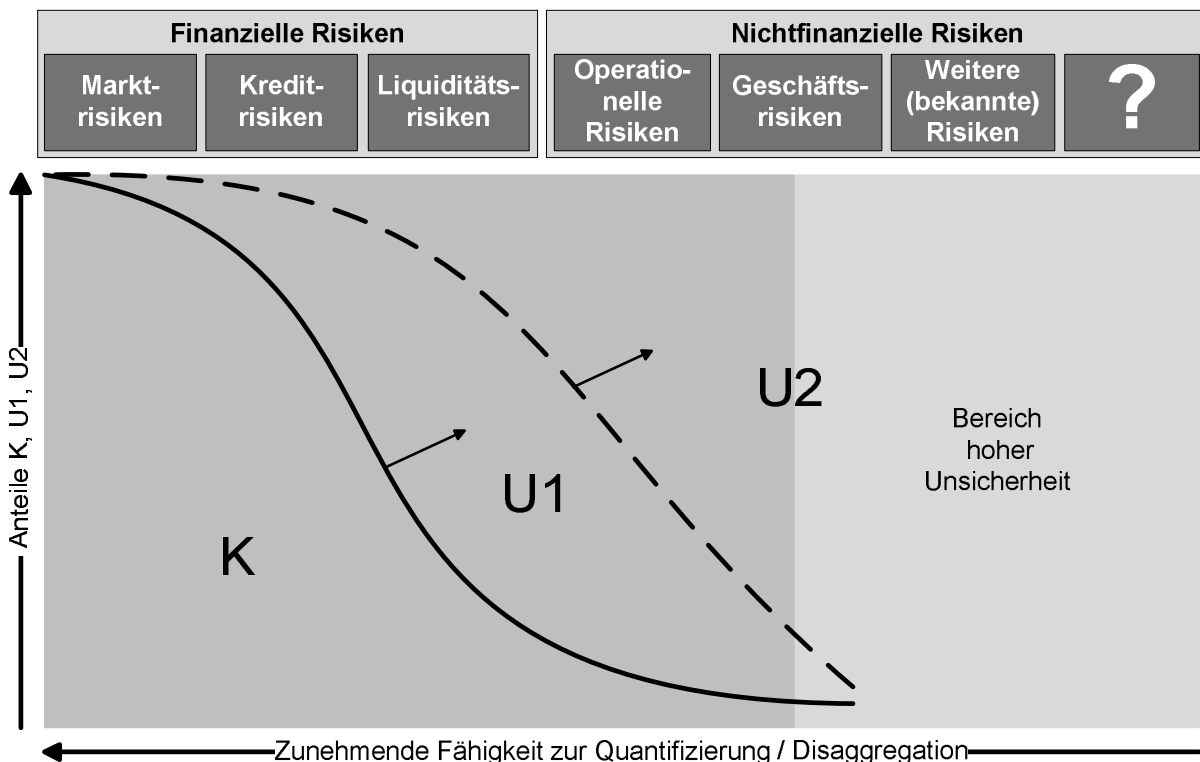


Abb. 2.5.: Framework für K, U1 und U2 für Bankrisiken in Anlehnung an [122]

Schock heraus. Eine starke Homogenität der Risikomanagement-Systeme von Finanzunternehmen kann bei einem solchen Schock kaskadierende Effekte auslösen (*Homogenitätsrisiko*). Die Vorgabe von „Best Practices“ seitens der Bankenaufsicht kann auf diese Risiken noch weiter verstärkend wirken. Alexander [3] proklamiert daher, dass die Führungskräfte von Finanzunternehmen eine gewisse Heterogenität der Systeme zum internen Risikocontrolling fördern sollten.

### 2.3.5. Synopse

In einer aktuellen Studie stellen Kuritzkes & Schuermann [122] anhand der Analyse von Bankdaten über einen langen Zeithorizont fest, dass Kredit- (46%), Markt- (24%) und operationelle Risiken (12%) insgesamt etwa 80% der tatsächlichen Bankrisiken erfassen.<sup>39</sup> Bemerkenswert ist der Beitrag von 18% durch das Geschäftsrisiko, das jedoch, wie bereits angemerkt, praktisch nicht quantifizierbar ist. Die Autoren teilen das gesamte Risikospektrum ein in die drei Bereiche *K* (Known) für Risiken, die gut bekannt sind, *U1* (Unknown) für Risiken, die noch nicht eingehend erforscht sind und daher auch nicht einfach quantifiziert werden können, und *U2* (Unknowable) für Risiken, die auch zukünftig als praktisch nicht quantifizierbar gelten. Abbildung 2.5 stellt die Ergebnisse der Studie, erweitert um Liquiditätsrisiken, dar. Dabei ist der

<sup>39</sup>Das Asset-Liability-Risiko mit einem Beitrag von 18% zum Gesamtrisiko in ihrer Studie wird in dieser Arbeit als Subkategorie der Marktstrisiken aufgefasst. Es ist jedoch anzumerken, dass dieses im Kontext von Basel II genauso wie das Geschäftsrisiko bisher unberücksichtigt bleibt.



<b>Kriterium</b>	<i>Kreditrisiko</i>	<i>Marktrisiko</i>	<i>Operationelles Risiko</i>
<b>Risikomessmethoden</b>	Aktueller Forschungsfokus Bildung State-of-the-Art	State-of-the-Art etabliert	Neues Forschungsfeld Hohe Unsicherheiten
<b>Steuerung</b>	Gute Möglichkeiten Verbriefung/Kreditderivat	Sehr gute Möglichkeiten	Begrenzte Möglichkeiten Versicherung/Derivate
<b>Verteilungsannahmen</b>	Schiefe Verteilungen, z. B. Lognormalverteilung	Normalverteilung (Fat Tails)	Große Häufigkeit, geringe Schäden und umgekehrt
<b>Zeithorizont</b>	1 Jahr (Modellannahme) Tatsächlich >> 1 Jahr	1-10 Tage <sup>40</sup>	1 Tag - viele Jahre
<b>Datenverfügbarkeit</b>	Begrenzt (Seltene Ereignisse)	Gut bis sehr gut	Schlecht bzgl. Qualität und Quantität

Tab. 2.1.: Wesentliche Bankrisiken im vergleichenden Überblick

Bereich, in dem besonders hohe Unsicherheit bezüglich Quantifizierbarkeit und Disaggregierbarkeit vorherrscht, hellgrau markiert.

Die Risikoarten zeichnen sich durch hohe Heterogenität aus, die aufgrund verschiedener Kriterien deutlich wird. Tabelle 2.1 gibt für die drei detailliert betrachteten Typen Kredit-, Markt- und operationelles Risiko einen Überblick entsprechend der Merkmale Risikomessmethoden, Möglichkeiten zur Steuerung, Verteilungsannahmen, Zeithorizont und Datenverfügbarkeit. Marktrisiken gelten als am eingehendsten erforscht und die gute Verfügbarkeit von Marktdaten ermöglicht den direkten Einsatz fortgeschrittener Risikomessmethoden (s. Abschnitt 2.4.2). Auch im Bereich der Kreditrisiken kommen inzwischen verschiedene etablierte Risikomessmodelle zum Einsatz, allerdings mangelt es bei vielen Banken noch an der Qualität der Parameter. Am schwierigsten gestaltet sich die Handhabung operationeller Risiken, da Daten noch nicht in ausreichender Qualität und Quantität als Input für Modelle in Anlehnung an Markt- oder Kreditrisiko vorliegen.<sup>41</sup> Die Dichtefunktionen in Abbildung 2.6 typisieren schließlich exemplarisch übliche Verteilungen dieser Risikoarten und verdeutlichen, dass ein Modell mit einheitlicher Verteilungsannahme in der Risikomessung nicht umsetzbar ist. Diese starken Unterschiede der Risikoarten haben in der Vergangenheit dazu geführt, dass Unternehmen der Finanzbranche ihre Risiken organisatorisch separat überwachen und steuern. So haben sich historisch getrennte Abteilungen entwickelt, die in einer Bank beispielsweise unabhängig voneinander Markt- bzw. Kreditrisiken analysieren. Dieser sogenannte **Silo-Ansatz** [124] ist auch heute noch weit verbreitet. Ein weiteres Problem bringt die Bildung von „Kompetenz-Silos“ durch räumliche und personelle Trennung der Risikomanagementfunktionen mit sich [41]. Die Integration des Risi-

<sup>41</sup>Fontnouvelle et al. [48] untersuchen öffentlich verfügbare Datenbanken mit operationellen Verlusten. Operationelle Risiken übersteigen in ihrer Studie zum Teil die Marktrisiken, unterliegen allerdings aufgrund eines Reporting-Bias erheblichen Verzerrungen hinsichtlich der Verlusthöhen.

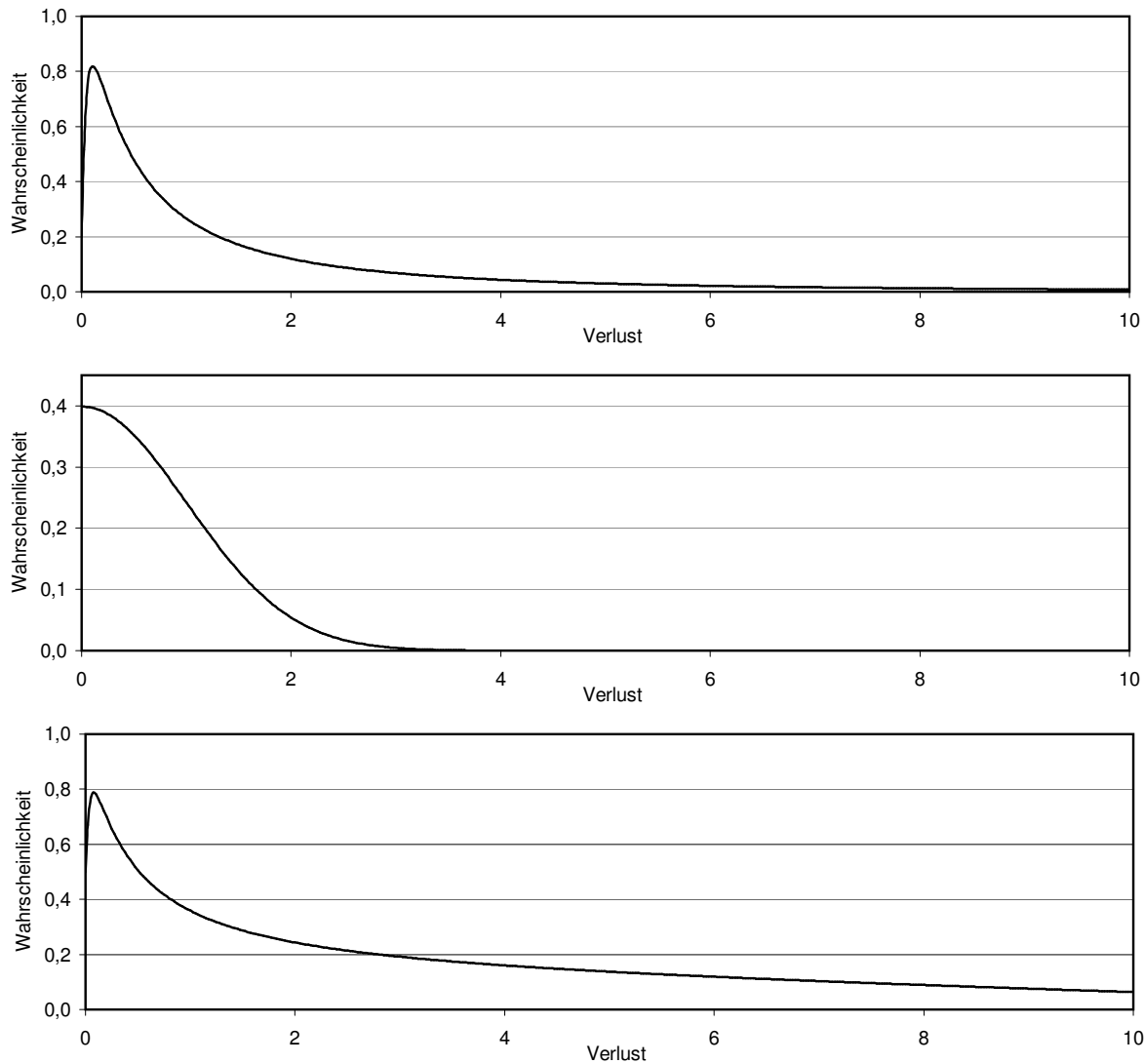


Abb. 2.6.: Typische Dichtefunktionen für *Kreditrisiken* (Lognormalverteilung), *Marktrisiken* (Normalverteilung) und *Operationelle Risiken* (Gemischte Verteilung)

komanagements (s. Kapitel 3) versucht solche Grenzen aufzuheben und einen ganzheitlichen Blick auf die Gesamtrisikoverteilung eines Instituts zu vermitteln.

### 2.4. Kennzahlen für Rendite und Risiko

Zentrale Bedeutung beim zielgerichteten Umgang mit den beschriebenen Bankrisiken, beispielsweise bei der Vergabe von Risiko-Limits, Performance-basierter Vergütung, der modernen Portfolio-Optimierung<sup>42</sup> und bei der Berechnung des ökonomischen Kapitals<sup>43</sup>, kommt einer möglichst treffenden Risikobewertung zu [100]. Wie bereits in Abschnitt 2.2 motiviert, stellt das Risiko im modernen Risikomanagement jedoch nur eine Komponente dar. Auch die zuge-

<sup>42</sup>Die Portfolio-Optimierung ist für diese Arbeit von besonderer Bedeutung (s. Abschnitt 3.3).

<sup>43</sup>Ökonomisches Kapital bezeichnet das zur Unterlegung der eingegangenen Risiken notwendige Eigenkapital.

hörigen Chancen sollten in einem adäquaten Verhältnis zu den eingegangenen Risiken stehen. In dem in 7 konzipierten Modell zur Integration des Portfoliomanagements wird daher zusätzlich die (erwartete) Rendite berücksichtigt. Erstrebenswert sind nur solche Allokationen des Bankportfolios, die Effizienz hinsichtlich des Trade-offs zwischen Risiko und Rendite aufweisen.

### 2.4.1. Rendite

Die Rendite beschreibt das Verhältnis eines eingesetzten Betrags zum Anlageergebnis [192]. Es gibt verschiedene Varianten zur Ermittlung der Rendite, über die nachfolgend ein Überblick gegeben wird.

Es seien zwei Kurswerte  $W_T$  und  $W_{T+1}$  eines Wertpapiers für unterschiedliche Zeitpunkte gegeben. Entsprechend lässt sich die *diskrete* Rendite  $R$  vom Zeitpunkt  $T$  nach  $(T + 1)$  unter der Annahme, dass keine weiteren Zahlungen in der betrachteten Periode geflossen sind, wie folgt berechnen [192]:

**Definition 2.1 (Diskrete Rendite<sup>44</sup>):**

$$R = \frac{W_{T+1}}{W_T} - 1 \quad [2.1]$$

Da zur Ermittlung der diskreten Rendite allein die Werte zu den beiden Zeitpunkten  $T$  und  $T + 1$  relevant sind, beschreibt sie die *zeitpunktbezogene Veränderung* eines Basiswertes [129]. Die historische Rendite (Gesamtrendite) kann aus den vorliegenden diskreten Einzelrenditen entweder *arithmetisch* ( $\bar{R}$ ) oder *geometrisch* ( $R_D$ ) ermittelt werden:

**Definition 2.2 (Arithmetische Gesamtrendite):**

$$\bar{R} = \frac{1}{T} \cdot (R_1 + R_2 + \dots + R_T) = \frac{1}{T} \cdot \sum_{t=1}^T R_t \quad [2.2]$$

**Definition 2.3 (Geometrische Gesamtrendite):**

$$R_D = \sqrt[T]{(1 + R_1) \cdot (1 + R_2) \cdot \dots \cdot (1 + R_T)} - 1 = \left( \prod_{t=1}^T (1 + R_t) \right)^{\frac{1}{T}} - 1 \quad [2.3]$$

Beide Methoden zur Ermittlung der Gesamtrendite unterscheiden sich entsprechend der *Sheppardschen Korrektur* näherungsweise durch die Hälfte der Varianz  $V(\cdot)$  der Renditezeitreihe.<sup>45</sup> Je höher die Schwankungsbreite einer Zeitreihe, desto größer wird folglich der Unterschied

<sup>44</sup>Auch bezeichnet als *einfache* Rendite (engl. *holding-period return*).

<sup>45</sup>Eine Herleitung dieses Zusammenhangs findet sich in Spremann [192].

zwischen arithmetischer und geometrischer Durchschnittsrendite:

$$\bar{R} \approx R_D + \frac{1}{2} \cdot V(R_1, \dots, R_T) \quad [2.4]$$

Bei der Betrachtung mehrjähriger Renditeentwicklungen wird in der Forschung normalerweise auf die *stetige* Rendite zurückgegriffen [129]. Diese leitet sich aus der diskreten Rendite [2.1] ab, indem man die Annahme einer einmaligen Preisänderung zwischen den beiden Zeitpunkten  $T$  und  $T + 1$  durch die Annahme von schrittweisen Änderungen ersetzt. Wenn diese Schrittweise beliebig klein wird, berechnet sich die stetige Rendite aus  $W_T$  und  $W_{T+1}$  wie folgt:

**Definition 2.4 (Stetige Rendite):**

$$r = \ln W_{T+1} - \ln W_T = \ln \left( \frac{W_{T+1}}{W_T} \right) \quad [2.5]$$

Zwischen der diskreten Rendite  $R$  [2.1] und der stetigen Rendite  $r$  besteht der Zusammenhang:

$$r = \ln(1 + R_t) \quad [2.6]$$

Da der natürliche Logarithmus im Bereich kleiner Änderungen um 1 herum nahezu die Steigung 1 aufweist, unterscheiden sich stetige und diskrete Renditen über sehr kurze Zeiträume nur marginal. Die stetige Rendite hat jedoch zusätzlich den Vorteil, dass aufgrund der Logarithmierung die Summe der stetigen Einzelrenditen gerade der Gesamtrendite einer Zeitreihe entspricht. Aufgrund der *Portfolioeigenschaft*<sup>46</sup> kann die Rendite eines Portfolios verschiedener Wertpapiere weiterhin als Skalarprodukt der einzelnen Wertpapierrenditen (stetig oder diskret) und der Portfoliogewichte der entsprechenden Wertpapiere ermittelt werden. Für die Durchführung des Portfoliomanagements ist es von besonderer Bedeutung, ein konsistentes Renditemaß zu wählen. Im Modell in Teil 3 der Arbeit wurden sowohl die Gesamtrenditen als auch die Risikokennzahlen auf Basis stetiger Renditen ermittelt.

### 2.4.2. Risiko

Für die in Abschnitt 2.3 vorgestellten wesentlichen Bankrisiken wird eine Bewertungskennzahl benötigt, die das tatsächliche Risiko eines Instruments oder auch eines Portfolios möglichst treffend abbildet. Da diese von den Mitarbeitern der Controlling-Abteilung ermittelten Risikokennzahlen zusätzlich auch dem Bankmanagement sowie weiteren Stakeholdern der Bank (s. Abschnitt 3.1.1) vorgelegt werden, sollten sie ohne umfangreiche Zusatzerklärungen gut nachvollziehbar sein [192]. Zur Beurteilung der Güte von Risikomaßen haben Artzner et al. [6] den vielbeachteten Begriff der **Kohärenz** eingeführt, der aus ihrer Sicht ein ausgereiftes Risikomaß

---

<sup>46</sup>S. Spremann [192].

auszeichnet. Damit ein Risikomaß als kohärent gilt, muss es die folgenden Axiome 2.5 -2.8 erfüllen. Gegeben seien hierzu zwei Portfolios  $X$  und  $Y$ , das zu beurteilende Risikomaß  $\rho(\cdot)$  und der stets positive Preis  $r$  eines Referenzinstruments<sup>47</sup>:

**Axiom 2.5 (Monotonität):**  $\rho(Y) \leq \rho(X)$  immer wenn  $X \leq Y$

**Axiom 2.6 (Translationsinvarianz):**  $\forall a \in \mathbb{R} : \rho(X + a \cdot r) = \rho(X) - a$

**Axiom 2.7 (Positive Homogenität):**  $\forall \lambda \geq 0 : \rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$

**Axiom 2.8 (Subadditivität):**  $\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2)$

Die Eigenschaft der *Monotonität* besagt, dass ein Portfolio mit mehr Risiko auch mehr Risikokapital erfordert. Nach der Vorgabe der *Translationsinvarianz* sollte das Risiko eines Portfolios nach Hinzufügen einer sicheren Anlage um genau diesen Betrag fallen. Wenn ein Portfolio  $X$  mit einem Faktor  $\lambda$  skaliert wird, sollte dies zur Änderung des Risikomaßes mit demselben Faktor  $\lambda$  führen (*Positive Homogenität*). Die *Subadditivität* schließlich fordert, dass das Risiko von zwei kombinierten Portfolios niemals größer ist als die Summe ihrer Einzelrisiken [104].

**Varianz und Standardabweichung**<sup>48</sup> als klassische Risikokennzahlen in verschiedenen Bereichen des Finance<sup>49</sup> gehören nicht zur Klasse kohärenter Risikomaße. Da sie zusätzlich schwer intuitiv verständlich sind, betrachten moderne Risikokennzahlen nicht allein die Schwankungsbreite, sondern die konkret möglichen Verluste ausgedrückt als Währungseinheiten. Nachfolgend werden der Value-at-Risk und der Conditional Value-at-Risk als Vertreter solcher moderner Risikomaße vorgestellt.

## Value-at-Risk

Die Methodik des Value-at-Risk (VaR) wurde Anfang der 1990er Jahre entwickelt und stellt heute die wohl am weitesten verbreitete Methode zur Quantifizierung von Kredit-, Markt- und operationellen Risiken dar.<sup>50</sup> Artzner et al. [6] definieren den VaR, der aufgrund der fehlenden Subadditivitätseigenschaft nicht kohärent ist, wie folgt:

### Definition 2.9 Value-at-Risk (VaR):

Gegeben seien  $\alpha \in (0; 1)$  und ein Referenzinstrument  $r$ . Dann bezeichnet der Value-at-Risk

<sup>47</sup>Dieses Instrument hat einen Startpreis von  $r = 1$ . Die Definition der nachfolgend zugrunde gelegten Ordnungsrelation wird in Artzner et al. [6] gegeben.

<sup>48</sup>Diese bemessen anhand der Streuung von Renditen um ihren Erwartungswert sowohl positive wie auch negative Abweichungen als Gesamtrisikomaß [82].

<sup>49</sup>Beispielsweise in der Portfolio-Theorie (s. Abschnitt 3.3.1).

<sup>50</sup>Eine umfassende Einführung gibt [113].

$\text{VaR}_\alpha$  zum Konfidenzniveau  $\alpha$  des Endvermögens  $X$  mit der Verteilung  $\mathbb{P}$  das mit  $(-1)$  multiplizierte Quantil  $q_\alpha^+$  von  $X/r$ :

$$\text{VaR}_\alpha = -\inf\{x \mid \mathbb{P}[X \leq r] > \alpha\}$$

*Beispiel.* Gegeben sei ein VaR von 1 Mio. EUR für das Handelsportfolio einer Beispielbank mit einem Risikohorizont von einem Tag und eine Konfidenzniveau von 99%. Dann wird in den nächsten 100 Tagen höchstens ein Tag erwartet, an dem die Verluste aus den aktuellen Portfolio-Positionen die Marke von 1 Mio. EUR überschreiten. Die Kennzahl VaR gibt allerdings keine Auskunft darüber, wie hoch die Verluste oberhalb des festgelegten Konfidenzniveaus sind.

Die Methoden zur Ermittlung des VaR lassen sich in parametrische und nichtparametrische Ansätze unterteilen. Das **Varianz-Kovarianz-Modell** basiert auf statistischen Parametern der zu betrachtenden Risikofaktoren, die durch die Varianz-Kovarianz-Matrix beschrieben werden. Als problematisch bei diesem Ansatz erweist sich oftmals die Normalverteilungsannahme, die dem Modell zugrunde liegt. Demgegenüber werden bei der **Historischen Simulation** durch Verwendung der tatsächlich realisierten historischen Kurse bzw. Renditen die empirisch beobachteten Verteilungen verwendet. Aus diesem Grund wird dieser Ansatz in der Praxis von vielen Banken und auch für die Risikomessung bei Instrumenten mit verfügbaren Zeitreihen in Teil 3 der Arbeit verfolgt. Insbesondere zur Risikomessung bei exotischen und derivativen Finanzinstrumenten wird die **Monte-Carlo-Simulation** eingesetzt, bei der entsprechend bestimmter Verteilungsannahmen die Risikofaktoren zufällig simuliert werden. Einen umfassenden Überblick der Methoden gibt Jorion [113].

### Conditional-Value-at-Risk

Der Conditional Value-at-Risk (CondVaR)<sup>51</sup> bezeichnet den Erwartungswert des Risikos oberhalb des VaR. Entsprechend Artzner et al. [6] stellt der CondVaR ein kohärentes Risikomaß dar und seine Definition lautet wie folgt:

#### Definition 2.10 Conditional Value-at-Risk (CondVaR):

Gegeben seien wiederum das Quantil  $\alpha \in (0; 1)$  und ein Referenzinstrument  $r$ . Dann bezeichnet der Conditional Value-at-Risk  $\text{CondVaR}_\alpha$  zum Konfidenzniveau  $\alpha$  des Werts  $X$  mit Verteilung  $\mathbb{P}$  das mit  $(-1)$  multiplizierte Quantil  $q_\alpha^+$  von  $X/r$ :

$$\text{CondVaR}_\alpha = -\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[X/r \mid X/r \leq -\text{VaR}_\alpha(X)]$$

Die Ermittlung des CondVaR wird erschwert, da sich aufgrund der Tatsache, dass häufig durch unzureichende Datenverfügbarkeit die Risiken oberhalb des VaR nur schwer abschätzbar sind.

<sup>51</sup>Oft auch *Tail-VaR* oder *Expected Shortfall* genannt.

### 2.4.3. Kritische Würdigung und Bankpraxis

Obwohl der VaR aus theoretischer Sicht kein ideales (kohärentes) Risikomaß repräsentiert, da entsprechend der Vorgaben von Artzner et al. [6] die Eigenschaft der Subadditivität verletzt wird, konnte er sich etwa in den letzten zehn Jahren in der Praxis als Standard-Risikomaß [74, 168] für Markt- und Kreditrisiken etablieren. Dies belegt z. B. eine Studie des Joint Forum des BCBS [112] mit 31 international tätigen Banken. Eine weitere aktuelle Studie von Rosenberg & Schuermann [168] kommt zu dem Schluss, dass Ergebnisse auf Basis des alternativen Risikomaßes CondVaR keine bemerkenswerten Abweichungen gegenüber den Ergebnissen mittels VaR aufweisen.

Folglich stellt der VaR trotz fehlender Subadditivitätseigenschaft durch seine praktische Anwendbarkeit und gleichzeitig theoretische Robustheit einen guten Kompromiss für die Risikomessung in Finanzunternehmen dar [204] und hat sich entsprechend in der Praxis bewährt. Auch die einfache Verständlichkeit der Kennzahl und die Tatsache, dass er relativ problemlos für alle Risikoarten ermittelt werden kann, tragen zu seiner weiten Verbreitung bei. Dagegen kämpft das aus theoretischer Sicht überlegene Risikomaß CondVaR mit Widerständen im Management vieler Banken und zugleich aufgrund von Datenproblemen mit beträchtlichen Herausforderungen bei der Umsetzung für alle Risikoarten.

In der jüngeren Vergangenheit hat sich bei Bankmanagern ein eingehendes Verständnis für die Kennzahl VaR gebildet und zugleich hat sich der VaR als gemeinsamer Nenner für das Risikomanagement durchgesetzt. Allgemein werden die Nachteile des VaR als vertretbar aufgefasst, solange bei der Einschätzung extremer Risiken zusätzliche Techniken, wie z. B. das *Stress Testing*<sup>52</sup> zum Einsatz kommen [204]. Im Modell zur Integration des Portfoliomanagements in Kapitel 7 können auch solche extremen Risiken als Nebenbedingung Eingang finden. Da der dort konzipierte Ansatz zur Lösung praxisrelevanter Problemstellungen geeignet sein soll, kommt zudem das weithin akzeptierte und bewährte Risikomaß VaR zum Einsatz.

---

<sup>52</sup>S. *Committee on the Global Financial System* der BIS [28] sowie Klauck [120].





### 3. Integriertes Risikomanagement in Banken

Dieses Kapitel beschäftigt sich zunächst mit den grundlegenden Perspektiven sowie dem generellen Prozess des Risikomanagements. Anschließend erfolgt eine Charakterisierung der Integration des Risikomanagements und eine Erörterung ihres Nutzens. Nach Darstellung wesentlicher Herausforderungen bei der Umsetzung werden Forschungsansätze zur Integration der Risikomessung typisiert und kritisch betrachtet. Anschließend richtet sich der Fokus auf das Integrierte Portfoliomanagement, das für Teil 3 der Arbeit besonders relevant ist. Neben der klassischen Portfolio-Optimierung nach Markowitz und ausgewählten Erweiterungen werden die Strategische und Taktische Asset Allokation bei Banken beschrieben. Das Kapitel schließt mit einem Überblick aktueller Arbeiten, die sich mit der Integration des Portfoliomanagements beschäftigen.

#### 3.1. Finanzielles Risikomanagement

Als **Risikomanagement** bezeichnet man in allgemeiner Weise die Unternehmensführung unter Berücksichtigung von Unsicherheit [191]. Da das Management letztendlich darüber entscheidet, welche Risiken eingegangen und welche vermieden werden sollen, konstatiert Tschoegl [198]: „*Risk management is a management problem*“. Risikomanagement unterstützt Unternehmen dabei, Risiken bewusst und zielorientiert einzugehen. Dazu werden im Rahmen des Risikomanagementprozesses (s. Abschnitt 3.1.2) die eingegangenen Risiken identifiziert, bewertet, kontrolliert, gesteuert und limitiert. Die Begriffe Risikomanagement, Risk Management, aber auch Risikopolitik werden oft synonym verwendet [186]. In der Literatur findet sich allerdings auch die Unterscheidung in *Risikomanagement im weiteren Sinne* als umfassender Begriff für den gesamten Risikomanagementprozess und *Risikomanagement im engeren Sinne* stellvertretend für die Risikosteuerung.

Übertragen auf Banken umfasst Risikomanagement, das hier unter dem Begriff **finanzielles Risikomanagement**<sup>1</sup> zusammengefasst wird, die „*Gesamtheit aller Handlungen, die sich mit der Identifikation, Messung und Steuerung bankbetrieblicher Risiken befassen*“ [173]. Fischer [74] merkt an, dass sich bei Umsetzung einer risikoadjustierten Gesamtbanksteuerung „*der Aufgabenhorizont des Risikomanagements von der reinen Risikosteuerung zur risikoadjustierten Ressourcen-Allokation*“ erweitert. Hierzu stellt die Führung einer Bank den Unternehmensbe-

---

<sup>1</sup>Finanzielles Risikomanagement bezeichnet häufig auch das Risikomanagement von Finanzinstrumenten bei Industrie- und Handelsunternehmen.

reichen, die optimale Erträge pro Risikoeinheit erwirtschaften, Risikokapital zur Verfügung. Wie bereits in Abschnitt 2.2 beschrieben, erfolgt die Definition von Risiko hierbei als potenzielle Abweichung der tatsächlichen von der erwarteten Entwicklung und schließt somit Risiko *und* Chance mit ins Kalkül ein. Das **Risikocontrolling** bei Kreditinstituten beschäftigt sich mit den Methoden und Risiken sowie der Informationsversorgung für das Risikomanagement bzw. die Risikomanagementfunktion [64]. Die *Risikokontrolle* stellt dabei eine Teilfunktion des Controllings dar. Auf Basis der Arbeit des Risikocontrollings entscheidet das Management über die dem *Risikoappetit*<sup>2</sup> der Bank gerecht werdende Risikopolitik.

#### 3.1.1. Perspektiven und zentrale Zielsetzungen

Es gibt sehr unterschiedliche Perspektiven auf die Zielsetzungen einer Unternehmung und damit auch auf die Umsetzung des Risikomanagements. Dabei lassen sich die verschiedenen **Stakeholder** (dt. *Interessengruppen*) eines Kreditinstituts unterscheiden. Stakeholder sind alle natürlichen Personen oder auch Körperschaften, die auf irgendeine Weise mit einer Firma im Zusammenhang stehen. Abbildung 3.1 zeigt die vier Hauptgruppen der Bank-Stakeholder auf. Dies sind zum einen die *Shareholder* (dt. *Aktionäre/Inhaber*) und das *Management* der Bank, die beide einen starken Fokus auf die **Profitabilität** des Unternehmens haben.<sup>3</sup> Die *Shareholder* formulieren bestimmte Renditeforderungen und fungieren somit als Auftraggeber für das Management. *Aufsicht* und *Gläubiger* dagegen legen größeren Wert auf die dauerhafte Zahlungsfähigkeit, d. h. die **Solvabilität** der Bank. Zum nachhaltigen Schutz der Gläubiger werden durch die Bankenaufsicht regulatorische Rahmenbedingungen vorgegeben, die das Risiko im Vergleich zum Deckungskapital begrenzen. Als Gläubiger können andere Banken, Privat- und Firmenkunden der Bank oder auch öffentliche Einrichtungen auftreten [204].

Neben diesen Haupt-Stakeholdern gibt es noch eine Reihe weiterer Gruppen, die im Zusammenhang mit einem Kreditinstitut zu sehen sind (s. Abbildung 3.1). Hierzu gehören *Analysten*, die öffentliche Wertungen über die Performance von Unternehmen abgeben und dadurch z. T. erheblichen Druck auf das Management ausüben können. Gleiches gilt auch für die *Rating-Agenturen*, die Aussagen über die Kreditwürdigkeit eines Unternehmens veröffentlichen und somit indirekt über die Konditionen für die Refinanzierung eines Instituts entscheiden.<sup>4</sup> Weiterhin ist die *Öffentlichkeit* in gewisser Hinsicht ein Stakeholder, da die Aufsicht in deren Interesse durch regulatorische Auflagen die Stabilität des Finanzsystems kontrolliert.<sup>5</sup> Insbesondere ge-

---

<sup>2</sup>*Risikoappetit* bezeichnet die Akzeptanz von Risiko eines Individuums oder auch eines Kreditinstituts.

<sup>3</sup>Da das Bankmanagement hinsichtlich der Profitabilität eine eher kurzfristige Sichtweise einnimmt, ist hierbei weiterhin die *Prinzipal-Agent-Theorie* zu beachten. Demgegenüber sind die Aktionäre am nachhaltigen und langfristigen Erfolg interessiert. Weitere Ausführungen zu dieser von Jensen & Heckling [108] begründeten Theorie finden sich in Perridon & Steiner [158].

<sup>4</sup>Eine Bank mit verschlechtertem Rating muss aufgrund ihres erhöhten Kreditrisikos (s. Abschnitt 2.3.1) mitunter erhebliche Aufschläge bei der Refinanzierung über den Kapital- oder Interbankenmarkt bezahlen.

<sup>5</sup>Der Ausfall eines Kreditinstituts kann einen 'Dominoeffekt' auslösen, der auch Auswirkungen auf weitere

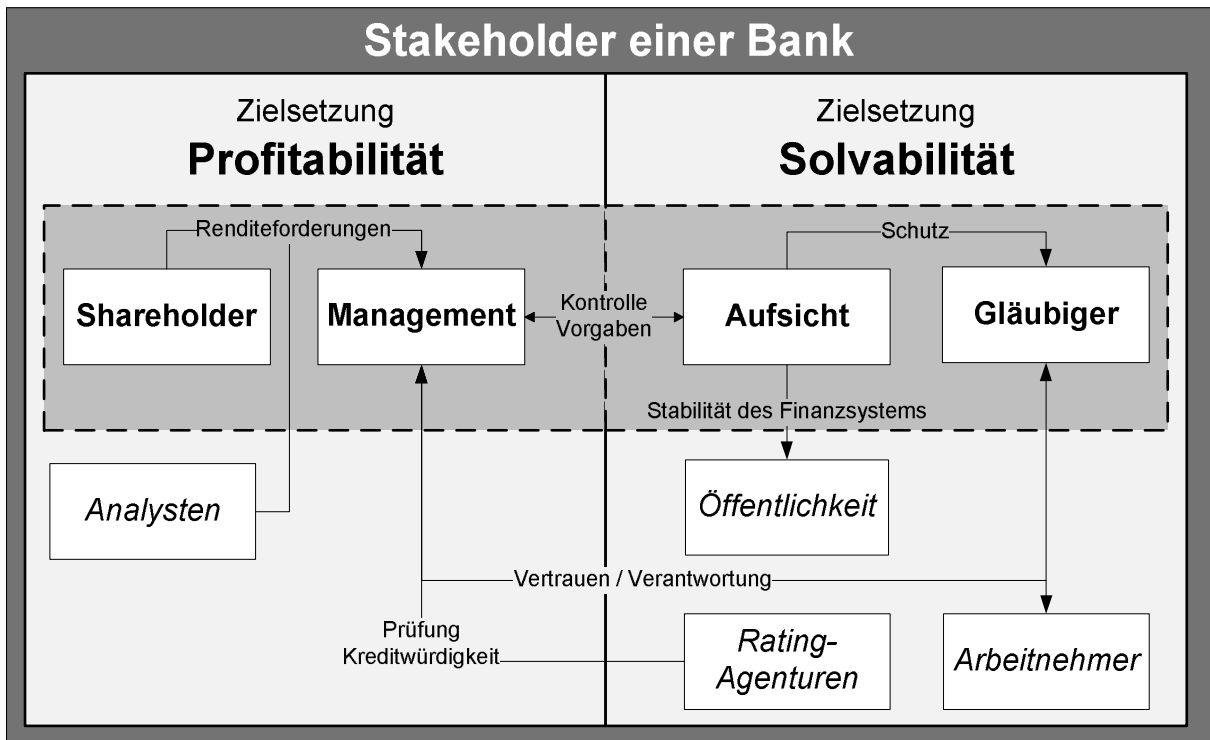


Abb. 3.1.: Stakeholder eines Finanzinstituts und zentrale Zielsetzungen des Geschäftsbetriebs

genüber den *Arbeitnehmern* hat die Bankführung die große Verantwortung, deren Arbeitsplätze nicht durch unsolide Geschäftspraktiken zu gefährden. Letztlich stellen auch Lieferanten (z. B. Software-Hersteller) oder verbundene Unternehmen (z. B. Beteiligungen oder Tochterunternehmen) im weitesten Sinne Stakeholder eines Finanzinstituts dar.<sup>6</sup>

Cumming & Hirtle [44] argumentieren, dass die Vertreter der beiden kontroversen Zielsetzungen (Profitabilität gegenüber Solvabilität) dennoch eine Motivation gemein haben: Sie möchten eine möglichst gute Einschätzung aller eingegangenen Risiken erhalten und sind somit auch an derselben adäquaten Gesamtverteilung der Risiken interessiert. Allerdings liegt der Fokus bei dieser idealisierten Verteilung auf unterschiedlichen Quantilen. Das Augenmerk der Solvabilitätsperspektive liegt bei den extremen Risiken, die für die Zahlungsfähigkeit eines Instituts bedrohlich sein können. Für die Einschätzung der Profitabilität sind jedoch zusätzlich mittlere Erwartungen, d. h. insbesondere die erwartete Performance wichtig. Im Portfoliomanagement<sup>7</sup>, das die Zielsetzung der Profitabilität in den Mittelpunkt rückt, muss ein adäquater Trade-off zwischen Rendite und Risiko erfüllt werden. Diese Vorgehensweise mit dem verbreiteten Quantilsmaß VaR als Risikofunktion stellt auch die Grundlage des in Kapitel 7 konzi-

Institute hat.

<sup>6</sup>Eine Person oder Körperschaft kann auch mehrere der beschriebenen Rollen innehaben. Beispielsweise kann der Mitarbeiter einer Privatbank durch Anlage einer Spareinlage bei seinem Arbeitgeber (Rolle des Gläubigers) und durch Kauf von Mitarbeiteraktien (Rolle des Shareholders) zugleich drei Rollen in seiner Person vereinen.

<sup>7</sup>S. Abschnitt 3.3.

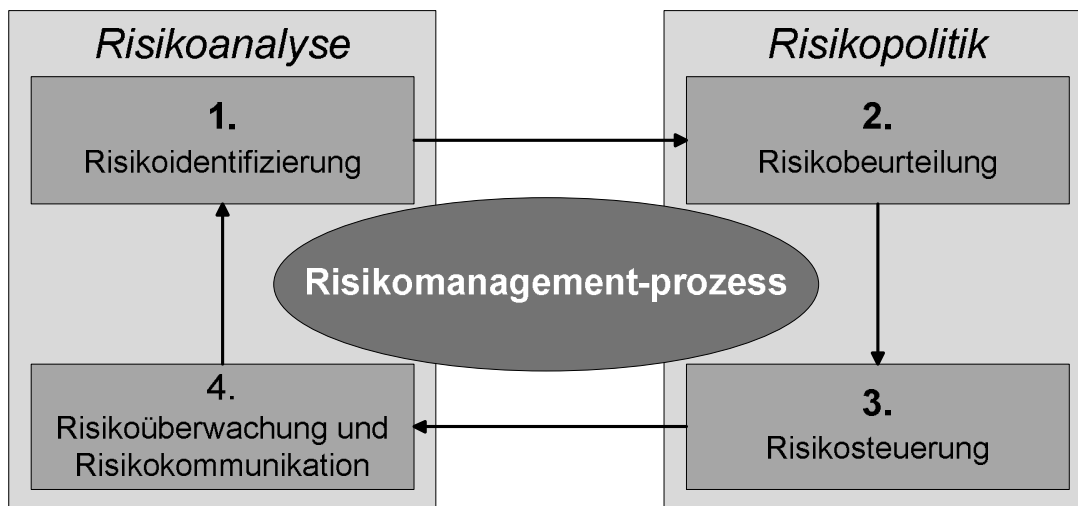


Abb. 3.2.: Überblick Risikomanagementprozess

pierten Modells dar. Weitere regulatorische Anforderungen können als strenge Nebenbedingungen des generellen Bankportfolio-Optimierungsproblems aufgefasst werden. In diesem Kontext wird eine **Bank als Portfolio (von Risiken)** bezeichnet [44].

### 3.1.2. Risikomanagementprozess

In der Forschungsliteratur hat sich keine einheitliche Einteilung des Risikomanagementprozesses in verschiedene Phasen etabliert [186].<sup>8</sup> Sinnvoll erscheint die Gliederung der MaRisk (AT 4.3.2) gemäß Abbildung 3.2 in die Prozessschritte *Identifizierung*, *Beurteilung*, *Steuerung* sowie *Überwachung und Kommunikation* [7].<sup>9</sup> Oehler & Unser [148] schlagen vor, Identifizierung und Überwachung<sup>10</sup> unter **Risikoanalyse** zu subsumieren. Die Schritte Risikobeurteilung<sup>11</sup> und -steuerung werden von ihnen als **Risikopolitik** zusammengefasst.

Die **Risikoidentifizierung** ist der Ausgangspunkt des Risikomanagementprozesses [203]. Ihr Ziel besteht darin, die für ein bestimmtes Kreditinstitut wesentlichen Risiken festzustellen und zu klassifizieren. Hierbei muss die spezifische Situation, d. h. insbesondere das Geschäft des Instituts detailliert untersucht werden. Die Risiken werden zunächst in unterschiedliche Risikokategorien (s. hierzu Abschnitt 2.3) eingeordnet. Außerdem wird für jedes Geschäftsfeld (gegebenenfalls auch je Produkt) eine *Risikoinventur* durchgeführt, bei der die Risiken übersichtlich zusammengestellt werden. Die Instrumente einer solchen Inventur können Checklisten, Portfolioanalysen, Sensitivitätsanalysen, Simulationen und Brainstormings sein [82]. Eine syste-

<sup>8</sup>Verschiedene Vorschläge finden sich u. a. in [148, 43, 191, 186, 160].

<sup>9</sup>Die MaRisk fordern eine strikte Trennung der Zuständigkeiten für Risikoübernahme und Risikomessung/-steuerung, da in der Vergangenheit durch Personalunion bei diesen Funktionen (z. B. Leeson/Barings Bank) operationelle Risiken schlagend wurden [74].

<sup>10</sup>In Oehler & Unser [148] bezeichnet als *Risikoidentifikation und -messung* sowie *Risikokontrolle*.

<sup>11</sup>Oehler & Unser [148] nennen diese *Risikobewertung*.

matische und strukturierte Erfassung aller bedeutenden Risiken ist essentiell für die folgenden Schritte in der Risikomanagement-Prozesskette.

Nach der Zuordnung von Risikoindikatoren zu den einzelnen Risiken erfolgt die **Risiko-beurteilung** zur Quantifizierung der wesentlichen Risiken. Diese wird oftmals auch als *Risikomessung* bezeichnet. Alexander & Pézier [4] merken jedoch an, dass der Begriff *Messung* eher bei exakter Quantifizierbarkeit verwendet wird und daher im Kontext von Risiken aufgrund erheblicher Unsicherheiten nicht geeignet ist. Verschiedene Methoden zur Abschätzung der Risiken werden in Abschnitt 2.4.2 vorgestellt.

Im Anschluss an die Identifikation und Beurteilung der vorhandenen Risiken ergeben sich für Unternehmen unterschiedliche Handlungsoptionen zur **Risikosteuerung**. Für Kreditinstitute kommt eine vollkommene *Eliminierung* der Risiken normalerweise nicht in Frage. Stattdessen erfolgt entweder eine gezielte Risikoverminderung oder ein Transfer von Risiken (*Überwälzung*), wie er beispielsweise durch die Verbriefung von Krediten möglich ist.<sup>12</sup> Weiterhin steht das *Absorbieren* zur Auswahl, bei der die Risiken im eigenen Portfolio gestreut und selbst getragen werden. Eine ausführliche Diskussion der Varianten findet sich bei Schroeck [185] sowie Frenkel et al. [78].

Zur dauerhaften Kontrolle wird der Risikomanagementprozess von der **Risikoüberwachung** sowie von der **Risikokommunikation** begleitet. Im Rahmen der Überwachung werden beispielsweise Limits für einzelne Risikoarten (und das Gesamtrisiko) festgelegt, die regelmäßig überprüft werden sollten. Gegenüber den Inhabern der Bank, dem Kapitalmarkt und insbesondere auch gegenüber der Finanzmarktaufsicht muss das Ausmaß der Risiken in regelmäßigen Abständen berichtet werden. Dieser Vorgang dient der Interessenwahrung der unterschiedlichen Stakeholder (s. Abschnitt 3.1.1) und fördert überdies die Kontrolle der Finanzinstitute.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Risikoidentifikation sowie -klassifizierung in Abschnitt 2.3 und mit der Risikobeurteilung in Abschnitt 2.4. Das in Kapitel 7 konzipierte Modell dient hauptsächlich den beiden letzten Schritten im Risikomanagement-Prozess, nämlich der Steuerung und Überwachung/Kommunikation. Es unterstützt die Führung der Bank dabei, im Rahmen eines Integrierten Portfoliomanagements Risiken gezielt einzugehen und zu überwachen. Fortgeschrittene Visualisierungstechniken, die in Abschnitt 7.4 vorgestellt werden, helfen zusätzlich bei der Kommunikation der Risiken.

## 3.2. Integration des Risikomanagements

Viele Finanzinstitutionen verfolgen einen segmentierten Ansatz für das Management ihrer Risiken [44]. Dabei werden unterschiedliche Risikoarten (z. B. Markt- und Kreditrisiken) in den Abteilungen, in denen entsprechende risikobehaftete Positionen vorhanden sind, separat gemes-

<sup>12</sup>Bei einer Verbriefungstransaktion werden ausgewählte Kredite der Bank in ein Portfolio eingebracht und als Gesamtpaket verkauft. Somit kann das Institut sein Kreditrisiko-Exposure vermindern.

sen und gesteuert. Da normalerweise unterschiedliche Methoden und Parameter für die Risikomessmodelle verwendet werden, kann eine integrierte Gesamtbetrachtung hierdurch erschwert oder sogar verhindert werden.<sup>13</sup> Trotz der Anreize zur verstärkten Integration des Risikomanagements (s. Abschnitt 3.2.2) ist es von vielen Instituten noch nicht durchgehend umgesetzt worden. Hierzu zählen insbesondere kleinere Banken, wie Volksbanken oder Sparkassen, die das Kapital für notwendige Investitionen in neue Methoden und IT-Systeme nicht aufbringen können. Jorion [113] merkt jedoch an, dass in Zukunft Banken ohne integrierte Sicht auf ihr Risiko-Portfolio einen erheblichen Wettbewerbsnachteil gegenüber fortgeschritteneren Instituten haben werden.

#### 3.2.1. Begriffsabgrenzung und Vorgaben der Bankenaufsicht

Meulbroek [139] beschreibt **Integriertes Risikomanagement (IRM)** als „*die Identifikation und Bewertung kollektiver Risiken, die den Unternehmenswert beeinträchtigen, und die Umsetzung einer unternehmensweiten Strategie zum Management dieser Risiken.*“ Die Definition des Joint Forums des BCBS [112] betont zusätzlich das Vorhandensein von Bewusstsein und Verantwortlichkeit für die übernommenen Risiken innerhalb des gesamten Finanzunternehmens. Entsprechend Cumming & Hirtle [44] werden die Begriffe *Unternehmensweites Risikomanagement*<sup>14</sup> und *Konsolidiertes (finanzielles) Risikomanagement* synonym verwendet, obwohl diese oft auch nichtfinanzielle Ziele einschließen. Als oberste Zielsetzung gilt die Erhöhung des *Shareholder Values*, d. h. die nachhaltige Steigerung des Unternehmenswertes [59].

Zusammengefasst zielen Ansätze zur Integration darauf ab, einen umfassenden und systematischen Prozess hinsichtlich risikobezogener Entscheidungen im gesamten Unternehmen zu gewährleisten, d. h. über Risikoarten, Lokationen und Geschäftsfelder hinweg. Hierzu gehören die Messung, das Controlling und das Management des Gesamtbankrisikos [113]. Im weiteren Verlauf der Arbeit umfasst der Begriff „Integriertes Risikomanagement“ daher als Oberbegriff auch die im Folgenden beschriebenen Bereiche *Integrierte Risikomessung* bzw. *Risikoaggregation* und *Integriertes Portfoliomanagement*.

Als Kern eines IRM-Systems wird häufig die **Integrierte Risikomessung** genannt, die Methoden zur übergreifenden Bewertung der Risiken umschreibt. Eine *wirkliche* Integrierte Risikomessung simuliert und bewertet alle Risiken simultan in einem „Generalmodell“. Aufgrund der in Kapitel 2 dargelegten Heterogenität der Risikoarten stellen Cumming & Hirtle [44] die Notwendigkeit einer solchen Risikomessmethodik jedoch grundlegend in Frage. Bis heute ist folglich offen, ob ihre Umsetzung überhaupt sinnvoll möglich ist.<sup>15</sup> Eng verbunden mit der inte-

---

<sup>13</sup>Zur Heterogenität der Risikoarten s. Abschnitt 2.3.5.

<sup>14</sup>Engl. *enterprise-wide risk management (ERM)* [39].

<sup>15</sup>Alexander [3] bezeichnet bereits die Umsetzung einer vollintegrierten Methodik, die beispielsweise anhand vieler Szenarien allein den globalen Effekt einer 1%-Zinsänderung überwachen kann, als eine der großen Herausforderungen im Risikomanagement von Finanzkonglomeraten.

grierten Messung ist die **Risikoaggregation**, die nach Alexander [3] trotz ähnlicher Zielrichtung separat zu betrachten ist.<sup>16</sup> Auch hierbei geht es um die Zusammenfassung unterschiedlicher Risikoarten in einem Gesamtrisikomaß. Allerdings erfolgt die Aggregation beispielsweise mittels korrelierter Addition oder über Copula-Funktionen<sup>17</sup>.

Eine zentrale Bedeutung bei der Messung des Gesamtrisikos kommt dem **Ökonomischen Kapital**<sup>18</sup> zu. Es wird i. d. R. auf Basis des VaR (s. Abschnitt 2.2) ermittelt und bezeichnet entsprechend den höchsten Verlust in jeder spezifischen Risikokategorie über einen festgelegten Zeithorizont von meist einem Jahr und unter einem hohen Konfidenzniveau<sup>19</sup>. Die Einzelbeiträge werden schließlich im Rahmen der Risikoaggregation zusammengefasst [74].

Mit dem Begriff **Integriertes Portfoliomanagement** wird nachfolgend das Management des Gesamtbank-Portfolios unter Berücksichtigung der Rendite und zugleich aller wesentlichen Risikoarten bezeichnet (s. Abschnitt 3.3).<sup>20</sup> Bei der historischen Evolution des Risikomanagements zur Steigerung des Shareholder Values wurde zunächst auf eine möglichst passende Quantifizierung und oft auch Prävention der Risiken Wert gelegt [174]. Als nächster Evolutionschritt rückte neben den Risiken auch die Rendite ins Blickfeld. Beim vollständig integrierten Risikomanagement bilden *Kapitalallokation*, *Portfoliomanagement* und *Strategische Steuerung* eine Einheit. Das Modell in Kapitel 7 unterstützt insbesondere die letzten beiden Komponenten.

Auch von aufsichtsrechtlicher Seite wird die Integration des Risikomanagements untersucht und zunehmend vorangetrieben. In der Studie *Trends in risk integration and aggregation* identifiziert das Joint Forum des BCBS [112] zwei Haupttrends im Risikomanagement von 31 Finanzinstitutionen weltweit. Zum einen erhält die Integration auf unternehmensweiter Basis immer mehr Gewicht und zum anderen wird versucht, die mathematischen Ansätze zur Risikoaggregation zu verbessern. Letztendlich sind nicht nur die Aufsichtsinstanzen sondern auch die Banken selbst sehr daran interessiert, ihr als Schutz gegen unerwartete Verluste notwendiges Risikokapital (*Ökonomisches Kapital*) möglichst genau zu bemessen [122]. Die konservativeren Anforderungen der Aufsicht bezeichnet man als *Regulatorisches Kapital*.

Als Beispiel aktueller aufsichtsrechtlicher Vorgaben verlangen die MaRisk für die Risikosteuerungsprozesse: „*Diese Prozesse sollten in ein integriertes System zur Ertrags- und Risikosteuerung („Gesamtbanksteuerung“) eingebunden werden.*“ Auch im Rahmen des Aufsichtlichen Überprüfungsverfahrens von Basel II ([12]) wird gefordert: „*Institutionen sollten einen Prozess umsetzen, um die Angemessenheit ihres Gesamtrisikokapitals in Relation zu ihrem Risikoprofil zu bewerten, und eine Strategie zur Einhaltung ihrer Risikokapitallimits.*“ In Richtlinien zur Umsetzung des Aufsichtlichen Überprüfungsverfahrens in Europa gibt das Com-

<sup>16</sup>Einen Überblick des Umsetzungsstands der Risikoaggregation bei europäischen Unternehmen gibt [61].

<sup>17</sup>Diese Methoden werden in Abschnitt 3.4 beschrieben.

<sup>18</sup>Engl. *Economic Capital (EC)*.

<sup>19</sup>Die Deutsche Bank AG verwendet beispielsweise ein Konfidenzniveau von 99,98% und genügt somit den Forderungen an eine Bank mit AAA-Rating[74].

<sup>20</sup>Schierenbeck [173] nennt dies auch *Integrierte Risiko-/Renditestuerung*.

mittee of European Banking Supervisors (CEBS) den Banken weiterhin vor, „gut fundierte Risikomanagement-Prozesse zu entwickeln, die ihre Risiken angemessen identifizieren, messen, aggregieren und überwachen.“ ([24]).

#### 3.2.2. Motivation und Nutzen

Entsprechend der unterschiedlichen Perspektiven auf ein Unternehmen und sein Risikomanagement (s. Abschnitt 3.1.1) lassen sich auch bei dessen Integration zwei wesentliche Zielsetzungen unterscheiden. In ihrem „Sicherheits- und Zuverlässigkeitsdenken“<sup>21</sup> unterstützt die Aufsicht ein unternehmensweites Risikomanagement grundsätzlich, beharrt jedoch auf einem vergleichsweise konservativen Ansatz. Aus ihrer Sicht kann das IRM vor allem dabei helfen, dass keine signifikanten Risiken übersehen oder unterschätzt werden, die möglicherweise die Stabilität des Finanzunternehmens bedrohen könnten [110]. Im Gegensatz dazu strebt eine Bank selbst mit Hilfe der integrierten Sichtweise nach einer verbesserten Abbildung des Trade-offs zwischen Risiko und Rendite, um die einzelnen Geschäftseinheiten im Sinne der Eigentümer zur Maximierung des Ertrags optimal steuern zu können [44]. Insbesondere aus dieser ökonomischen Sicht heraus bringt die Integration des Risikomanagements Nutzenaspekte mit sich.

Im Kern der Motivation steht die **adäquate Abbildung von Interdependenzen** zwischen den einzelnen Risikoarten, sowohl positiver Art in Form von Diversifikationseffekten als auch negativer Art durch potentielle Überlaufeffekte<sup>22</sup> im Portfolio eines Finanzunternehmens. Bei vollkommen getrennter Betrachtung und anschließender Summation der Einzelrisiken bleiben solche Verbundeffekte unberücksichtigt. Während diese Vorgehensweise aus dem konservativen Blickwinkel der Aufsicht vertretbar ist, kann sie für die ökonomisch sinnvolle Steuerung von Risiko und Rendite einer Bank fehlerhafte Anreize für das Management liefern. In der Praxis sind die unterschiedlichen Risikoarten im Portfolio nämlich i. d. R. nie perfekt miteinander korreliert. Hierdurch ergeben sich bei Gesamtportfolio-Betrachtung *Diversifikationseffekte*, d. h. für die Risikounterlegung reserviertes ökonomisches Kapital wird eingespart bzw. steht zur anderweitigen Allokation zur Verfügung.<sup>23</sup> Beispielsweise kann ein Geschäftsfeld, das bei Einzelbetrachtung mit hohem Risiko behaftet ist, in der Gesamtrisikobetrachtung durch entgegengesetzte Positionen sogar risikomindernd auf das Gesamtunternehmen wirken (*natürlicher Hedge*). Die strategische Entscheidung zur Schließung eines solchen Geschäftsbereichs durch einen rein Silo-basierten Ansatz würde somit negative ökonomische Konsequenzen nach sich ziehen. Eine generelle Vernachlässigung solcher ausgleichender Risikoeffekte führt tendenziell zu überflüssigen Absicherungen mit entsprechender Verschwendung von Ressourcen oder sogar zu unbeabsichtigter Risikoerhöhung. Bei segmentierter Risikobetrachtung besteht zudem die Gefahr, dass bedeutende Risiken übersehen werden, die sich aufgrund kaskadierender Ef-

---

<sup>21</sup>Engl. *safety-and-soundness concern* [44].

<sup>22</sup>Engl. *spillover effects*, s. beispielsweise Cumming & Hirtle [44].

<sup>23</sup>Eine Zusammenstellung der Diversifikationseffekte verschiedener Studien findet sich in Abschnitt 3.4.4.



fekte gegenseitig verstärken. Als Beispiel dienen zwei ähnliche Marktrisikopositionen lokal getrennter Einheiten einer Großbank. Falls durch einen Kurssturz dieser Instrumente jeweils Risikolimits überschritten werden, können die zugehörigen Stop-Loss-Orders Verluste auslösen, die weit über den bei getrennter Analyse antizipierten Risiken liegen [110, 44].

Eng verbunden mit der besseren Abbildung von Diversifikationseffekten ist die **effizientere Allokation** der Ressource Eigenkapital. Nur wenn der Beitrag zum Gesamtrisiko ökonomisch sinnvoll abgebildet wird, werden zielgerichtete Anreize geschaffen und den einzelnen Geschäftsfeldern kann ein zutreffender Anteil am Eigenkapital zugeordnet werden. Cumming & Hirtle [44] betonen auch die Vorteile des IRM bei der Analyse potenzieller Fusionspartner. Die ganzheitliche Sicht macht dabei Synergien erst wirklich sichtbar. Insgesamt bleibt festzuhalten, dass Institute mit integrierter Perspektive ihres Risikomanagements einen Wettbewerbsvorteil gegenüber den übrigen Unternehmen haben [147]. Daher berücksichtigen auch Rating-Gesellschaften den Einsatz von IRM-Systemen zunehmend positiv bei ihren Ratings. Geringe Rating-Verbesserungen führen jedoch bei Banken bereits zu erheblichen Ersparnissen bei der Refinanzierung. Langfristig ist sogar anzunehmen, dass Banken ohne IRM-System Rating-Abstufungen hinnehmen müssen [113] und zudem von anderen Unternehmen mit fortgeschritteneren Risikomanagementsystemen ausarbitriert werden [42].

### 3.2.3. Herausforderungen bei der Umsetzung

Die Umsetzung eines integrierten Risikomanagementsystems begleitet eine Reihe von Herausforderungen, die sich in konzeptionelle, organisatorische und technische sowie extern vorgegebene Fragestellungen unterteilen lassen.

#### Konzeptionelle Hürden

Eine bedeutende Hürde für die Integration der Risikomessung stellt die **Heterogenität der Risikoarten und Risikomodelle** dar, die in Kapitel 2 ausführlich beschrieben wurde. Die Risikoarten können aus diesem Grund nur entweder unter Inkaufnahme von Ungenauigkeiten in einem universellen Modellierungsansatz integriert oder nach Anpassungen der individuellen Risikomaße aggregiert werden. Einen Überblick verschiedener Forschungsansätze aus diesem Kontext vermittelt der folgende Abschnitt 3.4. Fragestellungen der Methodik ergeben sich insbesondere aufgrund unterschiedlicher Verteilungsannahmen für die Risikoverteilungen<sup>24</sup> sowie durch abweichende Zeithorizonte<sup>25</sup> und Konfidenzniveaus<sup>26</sup> (s. auch Abschnitt 2.3.5), die in einem integrativen Ansatz allesamt übereinstimmen müssen [112, 171].

<sup>24</sup>Beispielsweise durch die Annahme *normalverteilter* Marktrisikooänderungen gegenüber *lognormalverteilten* Änderungen im Kreditrisiko.

<sup>25</sup>Im Bereich Marktrisiken werden i. d. R. Haltedauern von ein bis zehn Tagen angenommen, während Kreditrisikomodelle standardmäßig ein Jahr als Zeithorizont einsetzen.

<sup>26</sup>Bei der Risikomessung von Marktrisiken werden niedrigere Konfidenzniveaus als bei Kreditrisiken verwendet.

Durch die Risikoaggregation, bei der die verschiedenen Risikomodelle vereinheitlicht werden müssen, ergibt sich mit dem **Aggregationsrisiko** eine neuartige Herausforderung für Banken [3]. Es entsteht als Modellrisiko durch ungeeignete Annahmen, z. B. hinsichtlich Skalierung der Zeithorizonte<sup>27</sup> oder Konfidenzniveaus [204]. Auch weitere Parameter, insbesondere die nachfolgend beschriebenen Korrelationen, bedeuten ein Modellrisiko. Die Existenz dieses Risikos stellt eine zentrale Motivation des in Kapitel 7 vorgestellten Ansatzes dar.

Eine Schlüsselrolle bei der adäquaten Abbildung von Diversifikationseffekten durch die Zusammenführung von Risikoarten, Geschäftsfeldern und organisatorischen Einheiten eines Kreditinstituts kommt der **Abhängigkeitsmodellierung** zu, die i. d. R. über Korrelationen durchgeführt wird.<sup>28</sup> Aufgrund unzureichender Datenverfügbarkeit gestaltet sich eine statistisch fundierte Ermittlung in vielen Bereichen in der Praxis jedoch sehr schwierig und trägt somit ebenso zum Aggregationsrisiko bei. Auch bei guter Datenqualität und -quantität, wie z. B. im Zusammenhang mit Marktrisiken, erweisen sich Korrelationen als problematisch, da sie meist instabil sind [70, 112]. Besonders in kritischen Marktphasen erhöhen sich die Korrelationen über alle Risikoarten hinweg zum Teil drastisch und vermindern dadurch auch erwartete Diversifikationseffekte. Entsprechend Alexander & Pézier [4] haben die zunehmenden internationalen Verflechtungen infolge der Globalisierung in den letzten Jahren zu einem generellen Anstieg der Korrelationen geführt.<sup>29</sup> Diese Beobachtungen verbunden mit der Instabilität der Korrelations-schätzungen stellen einen Hauptgrund für die zurückhaltende Meinung der Finanzmarktaufsicht gegenüber der Berücksichtigung von Diversifikation bei der Bemessung des regulatorischen Eigenkapitals dar [111]. Die Aufsicht favorisiert die Annahme einer perfekten Korrelation bis die Institute ausreichend Erfahrungen gesammelt haben.

Aufgrund der Tatsache, dass Risiko-/Renditekennzahlen auf integrierter Basis häufig für die Bewertung der Profitabilität von Unternehmensbereichen und damit auch für die Ableitung von Bonuszahlungen an das Management und die Mitarbeiter verwendet werden, spricht sich Saita [171] gegen eine Aggregation der Risiken in eine einzelne Kennzahl aus. Er kritisiert, dass unter erheblicher Modell- und Parameterunsicherheit anhand komplizierter Modelle Entscheidungen über Gehaltszahlungen getroffen werden. Aus diesem Grund empfiehlt er zumindest für den Beginn einfache und nachvollziehbare Modelle, die stabilere Ergebnisse liefern.

---

<sup>27</sup>Ein klassische, jedoch kritisch gewertete [62, 46] Annahme zur Skalierung von Risiken repräsentiert das „Wurzelgesetz“, bei dem Risiken durch die Multiplikation mit der Wurzel aus dem gewünschten Zeithorizontfaktor skaliert werden. Beispielsweise erfolgt die Skalierung eines VaR mit Haltedauer von einem Tag auf zehn Tage, indem dieser mit  $\sqrt{10}$  multipliziert wird [104, 68].

<sup>28</sup>*Copula-Funktionen* als fortgeschrittenes Konzept zur Modellierung von Abhängigkeiten werden im folgenden Abschnitt 3.4 vorgestellt.

<sup>29</sup>Alexander & Pézier [4] vergleichen das Wechseln der Abhängigkeitsannahmen zwischen Risikoarten sogar mit dem „Blick durch ein Kaleidoskop“.

## Technische und organisatorische Rahmenbedingungen

Als technische Herausforderung im weiteren Sinne kann die **Verfügbarkeit und Qualität der Input-Parameter** gelten, die in direktem Zusammenhang mit Unsicherheiten in der Modellierung stehen. Alexander & Pézier bezeichnen die generelle Unvollständigkeit von Daten sogar als „größte Unsicherheitsquelle für globale Risikopositionen“. In diesem Zusammenhang konstatiert Alexander [3], dass alle Daten aufgrund der Subjektivität bei ihrer Auswahl unvollständig sind. Somit ruht die Verantwortung, adäquate Inputdaten für die Risikomodelle auszuwählen, allein beim Risikomanager der Bank. In den meisten Projekten zur Implementierung eines IRM-Systems stellen Daten das größte Problem dar, auch noch nach der erfolgten Einführung [84]. Generell zu berücksichtigen ist die ständige Verfügbarkeit und Aktualität der Daten bei gleichzeitiger Beachtung der unterschiedlichen Zeitzonen [174].

Das IRM benötigt umfangreiche Daten aus den Systemen einer Bank und auch einen entsprechenden Datenaustausch, beispielsweise zwischen nationalen und internationalen Vertretungen. Durch das Wachstum oder durch Zusammenschlüsse von einzelnen Instituten in der Vergangenheit steht jedoch normalerweise kein durchgängiges IT-System zur Verfügung und die Konsolidierung muss daher über ein weiteres zentrales System erfolgen.<sup>30</sup> Obgleich allen Beteiligten die herausragende Bedeutung eines integrierten Systems zu Sammlung, Analyse und Reporting von Informationen bewusst ist, verhindern hohe Implementierungskosten seine schnelle Umsetzung [112]. Cumming & Hirtle [44] bezeichnen diese Aufwendungen auch als *Informationskosten*.

Bereits angesprochen wurde die in vielen Kreditinstituten verbreitete Silo-basierte Organisation des Risikomanagements in vielen Kreditinstituten. Diese hat sich durch die historische Einteilung des Bankgeschäfts in einzelne Segmente ohne übergreifende Risikomanagement-Funktion entwickelt. Nicht nur aus technischer Sicht durch getrennte Systeme, sondern auch aus organisatorischer und insbesondere personeller Sicht haben sich dadurch in Unternehmen schwer zu überwindende Barrieren gebildet. Die Gesamtheit der Mitarbeiter spielt eine wichtige Rolle bei der Umsetzung des IRM. Es ist durch fachliche Schulungen und zielgerichtete Anreize sicherzustellen, dass die Umstellung der Prozesse auch tatsächlich bankweit gelebt wird [174].

Weitere reale sowie kalkulatorische Kosten entstehen durch umfangreiche **Anforderungen von Seiten der Aufsicht und der Rechnungslegung**.<sup>31</sup> Beispielsweise können regulatorische Barrieren hinsichtlich der Verrechnung oder Übertragung von Kapital zwischen Tochtergesellschaften in verschiedenen Ländern die Umsetzung eines grenzüberschreitenden IRMs behindern [44].

<sup>30</sup>Gleason [84] vergleicht die Systeme und Verfahren in Finanzunternehmen mit einer „Schüssel Spaghetti“.

<sup>31</sup>Von Cumming & Hirtle [44] *Regulatorische Kosten* genannt.

### 3.3. Integration des Portfoliomanagements

Wie bereits eingangs erwähnt, wird unter dem Begriff *Integriertes Portfoliomanagement* das klassische Portfoliomanagement unter Einbezug aller wesentlichen Bankrisiken entsprechend Kapitel 2 verstanden. Eine zentrale Rolle im Rahmen des Portfoliomanagements einer Bank kommt der **Asset Allokation**<sup>32</sup> zu, die sich wiederum in Strategische und Taktische Asset Allokation (s. Abschnitt 3.3.2) unterteilen lässt.<sup>33</sup> Nachfolgend werden zunächst Grundlagen der Portfolio-Optimierung nach Markowitz und ausgewählte Erweiterungen dargelegt. Sodann erfolgt die Einordnung der bankweiten Asset Allokation in den Kontext dieser Arbeit.

#### 3.3.1. Portfolio-Selektion nach Markowitz und Weiterentwicklungen

Mit seinen Arbeiten zur „*Portfolio Selection*“ [133, 134] legte Markowitz den Grundstein für die moderne Portfolio-Theorie. Auf der Suche nach einer normativen Theorie zur Entwicklung von Handlungsempfehlungen für Investoren stellte er fest, dass ein Portfolio durch die Hinzunahme von Investitionsmöglichkeiten diversifiziert werden kann.<sup>34</sup>

#### Markowitz-Ansatz

Die Beobachtungen von Markowitz führten zu dem Schluss, dass es Portfolios gibt, die andere Portfolios mit gleichem Risiko und geringerer Rendite oder mit gleicher Rendite und geringerem Risiko dominieren - die sogenannten *Markowitz-effizienten Portfolios*. Um ein Optimierungsproblem zu formulieren, das mit quadratischer Programmierung in adäquater Rechenzeit lösbar ist, musste Markowitz jedoch eine Reihe einschränkender Annahmen treffen. Diese modellspezifischen Annahmen betreffen zum einen das Anlegerverhalten und zum anderen die Eigenschaften des Marktes. Für das Verhalten der Anleger am Markt gelten folgende Annahmen, die u. a. auf Axiomen der Neumann-Morgenstern-Nutzentheorie [200] aufbauen [94, 82]:

- *Risikoaversion*: Alle Investoren sind risikoavers, d. h. bei gleicher erwarteter Rendite wird eine Position mit niedrigem einer Position mit hohem Risiko vorgezogen.
- *Nonsatiation*: Alle Investoren streben danach, ihr Vermögen zu vermehren.
- *Nutzenmaximierung*: Anleger maximieren den erwarteten Einperioden-Nutzen ihres Vermögens.<sup>35</sup> Sie orientieren sich an den erwarteten Renditen und deren Schwankungen.
- *Vollkommener Kapitalmarkt*: Auf diesem Markt existieren u. a. weder Transaktionskosten noch Steuern und sämtliche Anlagen sind beliebig teilbar.

---

<sup>32</sup>Auch *Integrierte Asset Allokation*.

<sup>33</sup>Spremann [192] versteht unter *Asset Allokation* eine bessere Bezeichnung für *Portfolio-Selektion*.

<sup>34</sup>Grundlage hierfür bildete die explizite Abbildung der *Substitutionsbeziehung Rendite/Risiko* [82].

<sup>35</sup>Am Ende einer Periode wird das Ergebnis der Investition zur Planung der Folgeperiode geprüft.

Weitere Restriktionen betreffen das vollständige Investment des zur Verfügung stehenden Kapitals und den Ausschluss von Leerverkäufen<sup>36</sup>. Es existiert keine risikolose Anlage und zudem gibt es keine Anlagen, die perfekt negativ korreliert sind. Zumindest zwei Anlagen weisen als Grundlage für die Optimierung eine unterschiedliche Rendite auf. Außerdem entspricht die Verteilung der Anlagerenditen entweder einer (multivariaten) Normalverteilung oder die Investoren verfolgen eine quadratische Nutzenfunktion.

Unter den genannten Annahmen ziehen Investoren „Markowitz-effiziente“ Anlagen vor. Diese bezeichnen Anlagen, die für ein bestimmtes Risiko die höchste erwartete Rendite aufweisen. In Praxisproblemen gelten die beschriebenen Annahmen allerdings i. d. R. nicht und die zugrunde liegenden Optimierungsprobleme sind wesentlich schwerer zu lösen [30, 132]. Weiterentwicklungen des klassischen Ansatzes werden daher nachfolgend betrachtet.

Nach Markowitz [133] gliedern sich die von Investoren durchzuführenden Überlegungen im Rahmen der Portfolio-Selektion in zwei Schritte. Zum einen werden ausgehend von historischen Daten die Verteilungsparameter der Anlagen geschätzt, zum anderen erfolgt aufgrund der erstellten Prognosen die Zusammenstellung eines optimalen Portfolios. Markowitz [133] beschäftigt sich zunächst lediglich mit dem zweiten Schritt, der Portfolio-Optimierung. Zur Durchführung schlägt er die Handlungsmaxime „*Expected returns-variance of returns (E-V) rule*“ vor. Diese wird als Erwartungswert-Varianz-Prinzip bzw.  $\mu$ - $\sigma$ -Prinzip bezeichnet. Entsprechend wertet ein Anleger einen höheren Erwartungswert der Rendite als wünschenswerte und eine höhere Varianz als nicht wünschenswerte Eigenschaft einer Anlage.

Im Markowitz-Ansatz wird die erwartete Rendite  $\mu_P$  eines Portfolios betrachtet, die sich als aus dem Vektor der Asset-Gewichte  $x_i$  und der erwarteten Rendite  $\mu_i$  der insgesamt  $n$  spezifischen Assets  $i$  mit  $i = 1, \dots, n$  wie folgt ergibt [133, 158]:

$$\mu_P = \sum_{i=1}^n x_i \mu_i \quad [3.1]$$

Als zweite Komponente zieht Markowitz die Standardabweichung  $\sigma_P$  der Asset-Rendite ins Kalkül, die anhand der Asset-Gewichte und der Kovarianzmatrix  $cov_{ij}$  ermittelt wird:

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n w_i w_j cov_{ij} \quad [3.2]$$

Für ein Portfolio gilt weiterhin entsprechend der Annahme einer Vollinvestition des Kapitals:

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1 \quad [3.3]$$

Optimiert werden nun Rendite [3.1] und Risiko [3.2] unter der Nebenbedingung [3.3].

<sup>36</sup>Hierunter werden kreditfinanzierte Käufe von Assets verstanden.

## Problematik Nutzenfunktionen

Im klassischen Markowitz-Ansatz lassen sich die Renditen der betrachteten Assets und damit das Optimierungsproblem in zwei Sonderfällen durch Erwartungswert und Varianz komplett beschreiben: Bei Vorliegen einer multivariaten Normalverteilung der Asset-Renditen oder bei Anwendung einer quadratischen Nutzenfunktion. Diese Nutzenfunktion lautet wie folgt:

$$u(x) = x - \frac{b}{2}x^2, b > 0 \quad [3.4]$$

Problematisch bei [3.4] gestaltet sich jedoch, dass die erste Ableitung nur im Fall  $x < \frac{1}{b}$  größer als Null ist. Daher existieren Zustände, in denen der Investor weniger Wohlstand gegenüber mehr Wohlstand vorziehen würde [71]. Auch die multivariate Normalverteilung als Alternative gestaltet sich in der Praxis als schwer zu haltende Annahme [163, 164].

Wenn das klassische Framework von Markowitz erweitert wird in Probleme zur Maximierung des erwarteten Nutzens, können auch andere Nutzenfunktion verwendet werden. Die Bestimmung solcher spezifischer Nutzenfunktionen erweist sich in der Praxis jedoch als sehr schwierig [65].<sup>37</sup>

Das in Kapitel 7 vorgestellte multikriterielle Modell benötigt keine Nutzenfunktion vor dem Optimierungsdurchlauf, da die unterschiedlichen Risikozielfunktionen getrennt optimiert werden. Nach der Optimierung wählt der Risikomanager aus der Menge von Pareto-optimalen Allokationen entsprechend seinem individuellen Risikoappetit eine Allokation aus.

## Weiterentwicklungen

Die Anwendung des Markowitz-Ansatzes in der Praxis wird durch seine restriktiven Annahmen eingeschränkt. Aus rechentechnischer Sicht ist hierbei insbesondere die hohe Anzahl von  $\frac{n^2+3n}{2}$  notwendigen Parametern bei  $n$  Wertpapieren hervorzuheben [158].<sup>38</sup> Sharpe [190] entwickelte vor diesem Hintergrund das **Indexmodell**, das eine Reduktion der erforderlichen Inputdaten als wesentliches Ziel hat. Dabei wird die Rendite einer Aktie in zwei Komponenten unterteilt: Eine erste Komponente, die von der Gesamtentwicklung des Marktes abhängt, und eine zweite Komponente, die allein unternehmensspezifischen Einflüssen unterliegt.<sup>39</sup> Da auch die Standardabweichung als Risikomaß wiederholt in der Kritik steht, setzen aktuelle Ansätze auf fortgeschrittene Risikomaße, wie VaR oder Conditional VaR [166, 167].

---

<sup>37</sup>Im Allgemeinen genügen solche Nutzenfunktionen folgenden Annahmen:  $u' > 0$  und  $u'' \leq 0$ . Damit präferiert ein Investor immer einen höheren gegenüber einem geringeren Nutzen. Gleichzeitig nimmt jedoch der Grenznutzen mit zunehmendem Wohlstand ab. Einen Überblick solcher Funktionen gib Fabozzi [71].

<sup>38</sup>Es sind  $\frac{n^2-n}{2}$  Kovarianzen,  $n$  erwartete Renditen und  $n$  Varianzen zu ermitteln.

<sup>39</sup>Die Markt Komponente wird auch als *unsystematisches Risiko* und der Beitrag des Unternehmens als *systematisches Risiko* bezeichnet.

### 3.3.2. Asset Allokation auf Gesamtbankebene

Die Asset Allokation bezeichnet die erste Stufe im modernen Portfoliomanagement. Spremann [192] definiert sie wie folgt:

**Definition 3.1 (Asset Allokation):**

Unter Asset Allokation versteht man sowohl den Entscheidungsprozeß, der zur Gewichtung der Komponenten eines Portfolios führt, als auch das Ergebnis der Entscheidung in Form der betragsmäßigen Zusammensetzung des Portfolios.

Asset Allokation lässt sich in die beiden Teilbereiche **Strategische Asset Allokation** und **Taktische Asset Allokation** unterteilen. Im Rahmen der strategischen Variante wird zunächst für das Gesamtbank-Portfolio entschieden, welche prinzipiellen Asset-Klassen für den Risikoappetit der Bank erstrebenswert sind. Ein solche Entscheidung könnte beispielsweise festlegen, dass 70% des Bankvermögens in festverzinsliche Wertpapiere mit geringem Ausfallrisiko angelegt werden, 20% in riskantere Unternehmensanleihen und 10% in Aktien. Für den Aktienanteil könnten in einem Folgeschritt durch eine Taktische Asset Allokation konkrete Einzelaktien festgelegt werden, die mit eher kurzfristiger Sichtweise ein gutes Risiko-Rendite-Verhältnis aufweisen. Als Ergebnis dieser Analyse würden sich also konkrete Aktien, z. B. aus dem deutschen DAX<sup>®</sup>-Index, oder auch ein konkretes Anlageland, z. B. Russland, als Anlageziel herausbilden.

Für die Strategische Asset Allokation kommt den Benchmarks als Vertreter der einzelnen Asset-Klassen zentrale Bedeutung zu. In Abschnitt 9.1 werden einzelne Benchmarks betrachtet und die bei der Optimierung eingesetzten Repräsentanten detailliert beschrieben. Weiterhin wird in Kapitel 9 die Strategische Asset Allokation einer Beispielbank anhand des konzipierten Modells beschrieben.

## 3.4. Kritischer Review von Forschungsansätzen

In den letzten Jahren wurde im Bereich der Integrierten Risikomessung (s. Abschnitt 3.2.1) besonders intensiv geforscht, um die verbreitete Annahme perfekt korrelierter Risiken abzulösen [111, 63]. Unter dieser Annahme werden die einzelnen, separat ermittelten Risikokennziffern einfach addiert. Verschiedene Untersuchungen belegen jedoch, dass diese Vorgehensweise eine ökonomisch fehlerhafte Einschätzung des Gesamtrisikos liefert, da Diversifikationseffekte zwischen Risiken, Produkten und Geschäftsfeldern vernachlässigt werden [124, 63, 168].

Nachfolgender Überblick teilt zunächst die verschiedenen Studien zur Integration der Risikomessung in zwei grundlegende Varianten ein und analysiert diese kritisch. Basierend auf den bestehenden, infolge der Heterogenität der Risiken (s. Kapitel 2) separaten Systemen (*Silo-Ansatz*) werden Risiken bzw. Risikokennzahlen häufig auf höherer Ebene aggregiert. Da ein solcher Ansatz die Aggregation „von oben nach unten“ durchführt, wird dieser als **Top-down** bezeichnet. Zumindest aus theoretischer Sicht optimal für ein *echtes* Integriertes Risikoman-

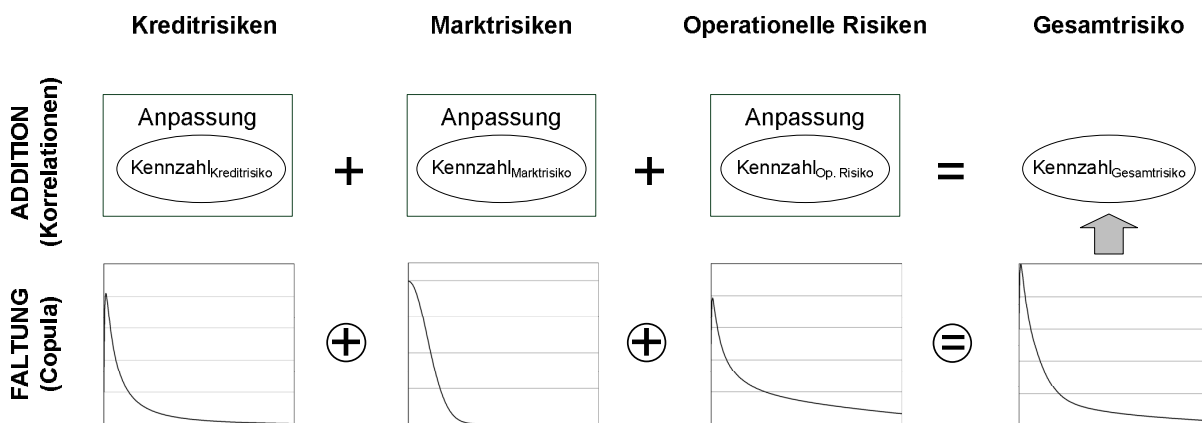


Abb. 3.3.: Risikoaggregation über korrelierte Addition und Verteilungsfaltung

gemenet erscheint ein Ansatz, der genau umgekehrt vorgeht, d. h. der Risiken „von unten nach oben“ (**Bottom-up**) in einem universalen Ansatz anhand gemeinsamer Risikofaktoren modelliert.<sup>40</sup> Beim Vergleich der Studien muss die jeweilige Perspektive des Verfassers besonders beachtet werden. Die konservative Sichtweise der Aufsicht neigt eher zu einer Überschätzung der Risiken, während die auf Risiko und Rendite fokussierten Bankeigentümer ein ökonomisch sinnvolles Verhältnis dieses Trade-offs anstreben (s. Abschnitt 3.1.1).<sup>41</sup>

Zudem erfolgt eine Darstellung verschiedener Ansätze zur Integration des Portfoliomanagements, das auf der Integrierten Risikomessung aufsetzen kann. Das Kapitel schließt mit einer kritischen Würdigung der bestehenden Ansätze im Integrierten Risikomanagement von Banken und einer Motivation für das in Kapitel 7 konzipierte Modell.

### 3.4.1. Risikoaggregation (Top-down)

Die Heterogenität der Risikoarten, die im vorhergehenden Kapitel 2 aufgezeigt wurde, hat dazu geführt, dass Banken für unterschiedliche Risiken jeweils spezifische Risikomodelle als Grundlage für die Risikoquantifizierung einsetzen [111]. Beispielsweise ermitteln sie im Bereich Marktpreisrisiken (Aktienkurs- und Zinsänderungsrisiko) häufig die Kennzahl VaR mit Haltedauer von einem Tag und Konfidenzniveau 95% oder 99% und im Bereich Kreditrisiken (z. B. Kundengeschäft) mit einem Jahr und 99,97%.

<sup>40</sup>Einen Überblick zu beiden Ansätzen gibt Grundke [91]. Die Bezeichnungen *Top-down* und *Bottom-up* werden allerdings nicht einheitlich verwendet. Alexander [3] benennt diese genau umgekehrt mit der Begründung, dass bei einem Bottom-up-Ansatz die Risiken „von unten herauf“ aggregiert werden. Die Unterscheidung betrifft folglich die Frage, ob die grundsätzliche Methodik der Modellierung oder das Vorgehen bei der Zusammenfassung von Kennzahlen gemeint ist. Aas [1] spricht zur Verdeutlichung von *Aggregation auf höchster (Top-down) und auf niedrigster Ebene (Bottom-up)*.

<sup>41</sup>Nach der Bestimmung einer möglichst genauen Gesamtrisikokennzahl stellt sich die Frage nach der korrekten Verteilung der Diversifikationseffekte auf die einzelnen Teilkomponenten. Diese Fragestellung wird beispielsweise von Denault [60] erörtert.



Nach der getrennten Risikomodellierung auf Instrument- oder Ereignisebene erfolgt die Aggregation der Risiken über einen sogenannten **Top-down-Ansatz** [157, 91]. Dabei lassen sich entsprechend Abbildung 3.3 zwei Vorgehensweisen differenzieren. Entweder werden im Rahmen einer *Kennzahlaggregation* die individuell ermittelten Risikokennzahlen oder durch eine *Verteilungsaggregation* die zugrunde liegenden Risikoverteilungen zusammengefasst. Die folgenden Abschnitten diskutieren diese Varianten und ausgewählte Forschungsansätze im Detail. Die Zusammenführung wird somit zunächst in Portfolios ähnlicher Instrumente oder Aktivitäten durchgeführt und anschließend über Geschäftseinheiten und über bedeutende Risikoklassen hinweg. Auf diese Weise erhält man eine globale Einschätzung des unternehmensweiten Risikos. Dieses Vorgehen setzt auf dem *Silo-basierten Risikomanagement*<sup>42</sup> auf und wird auch als **Building-Block-Ansatz**<sup>43</sup> bezeichnet, da die Modellierung und das Management der Risiken in getrennten „Silos“ stattfindet. Anschließend werden sie „blockweise“, d. h. etwas nach Instrumenten oder Risikoarten aufgeteilt, zusammengeführt.

### Aggregation von Kennzahlen

Einen in der Praxis sehr verbreiteten Ansatz zur Zusammenführung der bankweiten Risiken stellt die **Kennzahlaggregation** dar, bei der für die korrelierte Addition auf eine der folgenden Annahmen zurückgegriffen wird:

1. Perfekte Korrelation (Korrelation=1)
2. Unkorreliertheit (Korrelation=0)
3. Spezifische Korrelation

Alle drei Varianten bergen allerdings Probleme. Nachfolgend beschriebene Untersuchungen<sup>44</sup> zeigen, dass unter Annahme 1 das Gesamtrisiko aufgrund von Diversifikationseffekten erheblich überschätzt wird, während es unter Annahme 2 eher unterschätzt wird. Zumindest aus theoretischer Sicht stellt Variante 3 einen erfolgsversprechenden Ansatz zur Messung des Gesamtrisikos dar. Korrelationsschätzungen sind jedoch im Zeitablauf instabil und insbesondere bei kritischem Marktumfeld neigen verschiedenste Risikofaktoren zu hoher Korrelation. Somit können im „Normal-case“ ermittelte Korrelationen die tatsächlichen Risiken unter Stress-Szenarien erheblich unterschätzen. Weiterhin bestehen bei einigen Risikoarten Schwierigkeiten, ausreichendes Datenmaterial für eine statistisch fundierte Korrelationsschätzung zu erhalten.

Wenngleich zumindest aus konservativer Sicht<sup>45</sup> eine Überschätzung des Gesamtrisikos nicht schwerwiegend erscheint, so ist dennoch anzumerken, dass jede Art von fehlerhafter Aggregation eine adäquate Steuerung des Gesamtportfolios beeinträchtigt. Durch die Vernachlässigung

<sup>42</sup>S. Barton2002, Frenkel2005.

<sup>43</sup>S. [82].

<sup>44</sup>Beispielsweise [124, 63, 168].

<sup>45</sup>Aus der Perspektive der Finanzmarktaufsicht oder der Bankgläubiger (s. Abschnitt 3.1.1) [111].

von Diversifikationseffekten wird das Risikokapital nicht adäquat auf die verursachenden Einheiten verteilt und schafft somit falsche Anreize für die einzelnen Einheiten.<sup>46</sup>

**Lister** [129] konzipiert in seiner Arbeit ein bankinternes Risikomodell, das verschiedene Marktrisiken<sup>47</sup> über einen Korrelationsansatz zusammenführt. Kreditrisiken können ebenfalls über standardisierte Anrechnungsfaktoren ins Modell integriert werden. Bei Vorlage der notwendigen Parameter, insbesondere Risikobeiträge und Korrelationen, ist es möglich, weitere Risikoarten zu berücksichtigen. Der Fokus dieses Modells liegt allerdings auf Marktrisiken und Kreditrisiken bilden keinen integralen Bestandteil. Darüber hinaus kritisch anzumerken ist die Annahme der Normalverteilung für die Renditen und die Notwendigkeit, zahlreiche Parameter, insbesondere Korrelationen und Risikobeiträge, für alle Instrumente zu schätzen.

Mit einer stark aufsichtsrechtlich geprägten Sicht untersuchen **Kuritzkes et al.** [124] Diversifikationseffekte hinsichtlich der Mindestkapitalanforderungen von Finanzkonglomeraten. Sie beschreiben einen *Building-Block*-Ansatz, bei dem die Aggregation mittels Korrelationen auf den folgenden drei Ebenen erfolgt:

- Ebene I : Einzelner Risikofaktor innerhalb eines einzelnen Geschäftsfeldes
- Ebene II : Verschiedene Risikofaktoren innerhalb eines einzelnen Geschäftsfeldes
- Ebene III : Alle Risiken über alle Geschäftsfelder

Zur Ermittlung der Gesamtrisiken auf der jeweiligen Ebene treffen sie die Annahme einer multivariaten Normalverteilung. Standardmäßig berechnen sie den Diversifikationsbeitrag als Verhältnis des diversifizierten Risikokapitals zur Summe der Einzelrisiken. Dabei identifizieren sie für ein exemplarisches international tätiges Finanzunternehmen das größte Diversifikationspotenzial auf der Ebene I mit einer Reduktion des ökonomischen Kapitals um bis zu 50% im Bereich von Kreditrisiken. Auf Ebene II beträgt das Einsparpotenzial aufgrund der Diversifikation zwischen Kredit-, Markt- und operationellen Risiken 15% bis 28%. Mit 5% bis 10% am geringsten ist der Effekt auf der Ebene III.

Ein aktuelle Untersuchung der Österreichischen Nationalbank [149] kommt allerdings zu dem Schluss, dass ein Korrelationsansatz nicht für die Aggregation der Risiken geeignet ist. Ein zentraler Kritikpunkt ist die Annahme der Normalverteilung, die für Kredit- und operationelle Risiken nicht haltbar erscheint (s. auch Kapitel 2). Weiterhin werden die Schwächen der linearen Korrelation angesprochen<sup>48</sup>, mit deren Hilfe Abhängigkeiten folglich nicht optimal abgebildet werden können. Als Alternative schlagen die Autoren den Einsatz von Copula-Methoden vor, die im Rahmen der Verteilungsaggregation im nächsten Abschnitt beschrieben werden.

---

<sup>46</sup>S. Abschnitt 3.2.3.

<sup>47</sup>Es werden Aktien-, Zins- und Fremdwährungsrisiken genannt.

<sup>48</sup>S. auch [70].

## Aggregation von Verteilungen

Entgegen dem vorhergehenden Ansatz, bei dem die finalen Kennzahlen der einzelnen Risikoarten korreliert addiert werden, führt die **Verteilungsaggregation** zunächst die unterschiedlichen Risikoverteilungen zusammen. Dieses als *Faltung* bezeichnete, fortgeschrittene Vorgehen erfolgt über Copula-Funktionen. Aus mathematischer Sicht stellen Copulas einen funktionalen Zusammenhang zwischen den Randverteilungsfunktionen verschiedener Zufallsvariablen und ihrer gemeinsamen Verteilungsfunktion her. Eine umfassende Einführung in das Thema gibt Nelsen [146]; Cherubini et al. [32] beschreiben Copula-Funktionen mit speziellem Fokus auf Finance. Die Vorreiterrolle bei der Einführung von Copulas im Risikomanagement spielen Embrechts et al. [70, 66, 69], die Copulas in verschiedensten Bereichen des Finance einführen<sup>49</sup>. McNeil et al. [136] fassen schließlich verschiedene Anwendungen von Copulas, insbesondere im Kontext Risikoaggregation, zusammen.

Copula-Funktionen können praktisch jede theoretische oder empirische Verteilung als Grundlage verwenden. Anhand der aus der Faltung resultierenden Gesamtverteilung der Risiken lässt sich die Kennzahl für das Gesamtrisiko direkt ermitteln. Copula-Ansätze besitzen insgesamt wesentlich mehr Flexibilität bei der Modellierung von Abhängigkeiten als das allgemeine Korrelationskonzept, erfordern jedoch gleichzeitig auch eine umfangreiche Parametrisierung. In einem aktuellen Beitrag weist Mikosch [141] auf eine Reihe von Problemen beim Einsatz von Copula-Funktionen hin und warnt vor dem unkritischen Umgang mit diesen Werkzeugen.

Eine der ersten Anwendungen von Copulas zur Integration von Risiken stammt von **Ward & Lee** [202], die für ein international tätiges Versicherungsunternehmen aggregierte Risikokennzahlen auf Basis aufwändig parametrisierter Normal-Copula-Funktionen ermitteln. Bei ihrem Ansatz berechnen sie das Risikomaß für einige Risikoarten (z. B. Kreditrisiko) analytisch, während beispielsweise das Sterblichkeitsrisiko in der Lebensversicherung simuliert wird.

**Dimakos & Aas** [63] aggregieren das Risikokapital für Kredit-, Markt- und operationelle Risiken der norwegischen Finanzgruppe DnB ebenfalls mit Hilfe eines Copula-Ansatzes. Für die einzelnen Risikoarten verwenden sie unterschiedliche Modellierungsansätze, die jedoch zur Ermöglichung der Aggregation einen 1-Jahreshorizont und das Konfidenzniveau von 99.97%<sup>50</sup> gemeinsam haben. Die Autoren treffen weiterhin einige Annahmen, um die Umsetzung zu vereinfachen: Als dominierendes Risiko der DnB wird das Kreditrisiko als „Basisrisiko“ definiert, mit dem die beiden anderen Risikoarten jeweils verbunden sind. Aufgrund unzureichender Datenqualität und -quantität im Bereich operationeller Risiken kommt an dieser Stelle ein „Expertenansatz“ ergänzt um weitere subjektive Entscheidungen zum Einsatz. Gegenüber der Annahme einer perfekten Korrelation der Risikoarten ergibt ihre empirische Untersuchung eine Reduktion des gesamten Risikokapitals der DnB um ca. 20% bei einem Konfidenzniveau von

<sup>49</sup>Embrechts [67] veröffentlicht eine aktuelle Meinung zum Forschungsstand bei Copulas.

<sup>50</sup>Dieses entspricht dem Ziel-Rating „AA“ von DnB.

99.97%<sup>51</sup>. Zusammenfassend kann der Beitrag von Dimakos & Aas als pragmatischer Ansatz zur Ermittlung einer Gesamtbankrisikokennzahl gelten, der stark vereinfachende Annahmen und eine einfache Modellierung einsetzt. Eine Rückverteilung der Diversifikationseffekte auf die einzelnen Risikoarten wird von den Autoren im Anschluss allerdings nicht durchgeführt. Ein erweiterter Top-down-Ansatz von Aas et al. [1] wird im Abschnitt 3.4.2 beschrieben.

Beck & Lesko [13] sowie Beck et al. [14] unterscheiden hinsichtlich der Aggregation von Verteilungen mittels Copulas u. a. die Ermittlung des Gesamtbankrisikos sowie die Ermittlung des Gesamtbankrisikoprofils im Rahmen der Asset Allokation. Beide Varianten stimmen methodisch überein. Letztere erweitert nur den Fokus. Anhand einer einfachen Beispielbank wird die Faltung demonstriert und die Normal-Copula als pragmatischer Startansatz empfohlen.

In einer umfassenden Studie führen **Rosenberg & Schuermann** [168] die Verteilungen von Kredit-, Markt- und operationellem Risiko für eine internationale Großbank mit Hilfe von Copula-Funktionen zusammen. Dabei berücksichtigen sie auch die wesentlichen, empirisch beobachtbaren Eigenschaften der Risikoverteilungen, zu denen insbesondere Schiefe und Fat Tails gehören. Die Verteilungen für Markt- und Kreditrisiken werden aufgrund ihrer Zeitvariabilität über dynamische Modelle geschätzt und anschließend mit dem operationellen Risiko kombiniert. Die empirische Untersuchung gründet sich auf öffentlich verfügbaren Informationen aus Berichten für die Aufsicht sowie Markt- und Anwenderdaten. Überdies untersuchen die Autoren umfassend die Sensitivität der Risikoschätzungen hinsichtlich Business-Mix, Abhängigkeitsstruktur, Risikomaß und Schätzmethode. Folgende Ansätze zur Aggregation werden verglichen:

1. *Additive VaR*: Annahme perfekter Korrelation zwischen den Risiken
2. *Normal VaR*: Annahme multivariater Normalverteilung für die Gesamtrisikoverteilung
3. *Hybrid VaR*: Ohne weitere Annahmen
4. *Copula VaR*: Modellierung der Abhängigkeiten über Gauss'sche Copula bzw. t-Copula

Erwartungsgemäß überschätzt die Annahme einer perfekten Korrelation zwischen den Risiken das Gesamtrisiko erheblich um über 40% (Modell 1). Die Annahme einer multivariaten Normalverteilung entsprechend Modell 2 unterschätzt dagegen das ökonomische Kapital in ähnlicher Dimension. Interessanterweise liefert das ebenfalls untersuchte hybride Modell, das die marginalen Risiken über eine Formel für den Spezialfall einer elliptischen Verteilung berechnet, erstaunlich gute Ergebnisse im Vergleich zum dedizierten Copula-Ansatz. Rosenberg & Schuermann verwenden in ihrer Studie den VaR als dominierendes Risikomaß im Bankensektor, führen jedoch Vergleiche mit dem Conditional-VaR durch. Dabei stellen sie fest, dass die Aussagen des VaR als aus theoretischer Sicht unterlegenem Risikomaß (s. Abschnitt 2.4.2) keine bedeutenden Unterschiede gegenüber dem Conditional-VaR liefern.

---

<sup>51</sup>Die Diversifikationseffekte liegen für 99% bei 12% und für 95% bei 11%.

Für die empirische Untersuchung verwenden Rosenberg & Schuermann quartalsweise Daten von 1994-2002 für 17 Bankholdings, die aus regulatorischen Reports stammen.<sup>52</sup> Die Autoren führen umfassende Parametrisierungen ihrer Ansätze durch und verwenden hierzu noch Marktdaten. Die resultierenden Risikobeiträge (ex post) sind für das Marktrisiko 8,5%, für das Kreditrisiko 53,1% und für das operationelles Risiko 38,4%.<sup>53</sup> Insgesamt erweist sich die Korrelation zwischen Markt- und Kreditrisiko als besonders bedeutsam. Durch den Einbezug des operationellen Risikos verkompliziert sich die Betrachtung erheblich, da dieses sehr spezifische Eigenschaften im Vergleich zu den beiden anderen Risikoarten mit sich bringt.<sup>54</sup>

### 3.4.2. Integrierte Risikomodellierung (Bottom-up)

Bei Finanzinstituten sind Silo-basierte Ansätze noch vorherrschend. Vereinzelt wird jedoch versucht, die Sichtweise umzukehren und eine unternehmensweite Perspektive durch einen Ansatz „Bottom-up“ zu erlangen. Idealerweise werden die Diversifikationseffekte zwischen verschiedenen Geschäftsbereichen somit adäquat erfasst und berücksichtigt.

Alexander [3] proklamiert, dass ein gemeinsames Risikobewertungs-Rahmenwerk für alle Risikoarten wünschenswert ist. Ein einfaches Faktormodell<sup>55</sup> als Basis für die Risikoaggregation von Kredit- und Marktrisiken präsentieren **Alexander & Pézier** [4, 5]. Hierzu identifizieren sie zunächst einige bankweit relevante Risikofaktoren aus den Bereichen Zinsänderungs-, Aktienkursänderungs- und Kreditrisiko. Unter Verwendung von Korrelationsannahmen zwischen den Risikoarten aggregieren sie die Risiken zu Gesamtrisikokennzahlen und vergleichen die Ergebnisse mit den tatsächlichen Schätzungen verschiedener Banken. Darüber hinaus zeigen sie dem Management einer Beispielbank das Optimierungspotenzial der Ressourcen-Allokation in einzelnen Bereichen auf. Ein wesentlicher Vorteil ihres Ansatzes besteht darin, dass Risiko und Rendite über ein einheitliches, die Geschäftsfelder überspannendes Rahmenwerk modelliert werden. Mit dieser integrierten Methodik kann auch die integrierte bankweite Risiko-Rendite-Optimierung unterstützt werden. Ein wesentlicher Kritikpunkt des Ansatzes besteht allerdings hinsichtlich der Korrelationsschätzungen, die auf historische Daten sowie auf Expertenmeinungen gründen.

**Saita** [171] schlägt einen gemischten Multifaktor-Ansatz auf Basis der Arbeit von Alexander & Pézier [4] vor. Dabei wird der dominierende Risikofaktor (i. d. R. das Kreditrisiko) mit einem Standard-Portfoliomodell simuliert und die übrigen Risikoarten werden in einem Faktor-

<sup>52</sup>Es handelt sich hierbei um die US-amerikanischen Y-9C-Reports, mit denen von amerikanischen Bankholdings konsolidierte Informationen zu Bilanz, GuV und weiteren Angaben an die Aufsicht berichtet werden.

<sup>53</sup>Diese Beiträge weichen erheblich von den Risikobeiträgen (ex ante) ab: Marktrisiko 3,1%, Kreditrisiko 29,1% und operationelles Risiko 67,8%. Den vergleichsweise geringen Beitrag des Marktrisikos begründen Rosenberg & Schuermann damit, dass sie das erhebliche [124] Asset-Liability-Risiko nicht in die Gewichte einbeziehen.

<sup>54</sup>Diese Resultate untermauern die Aussage von Alexander [3], die vor erheblichen Modellrisiken bei der Aggregation der Risikoarten warnt.

<sup>55</sup>Einen Überblick zu Faktormodellen gibt der Beitrag von Stan Beckers in [2].

modell entsprechend Alexander & Pézier erfasst. Er gründet seinen Ansatz auf der Aussage von Kuritzkes et al. [124], dass im Falle eines einzelnen dominierenden Risikofaktors die Diversifikationseffekte beim Gesamtrisiko kleiner werden.

**Aas et al.** [1] präsentieren eine Weiterentwicklung des Vorschlags von Dimakos & Aas [63] für die norwegische Bank DnB aus Abschnitt 3.4.1 zum partiellen Bottom-up-Ansatz. Die Autoren orientieren sich weiterhin an Alexander & Pézier [4], berücksichtigen jedoch zusätzlich zu Kredit- und Marktrisiko auch das operationelle Risiko, das Geschäftsrisiko sowie ein Anteilsrisiko, das durch die Beteiligung der DnB an einer Lebensversicherung entsteht. Das Top-down-Vorgehen beschränkt sich dabei allerdings auf Kredit-, Markt- und Anteilsrisiko, für die insgesamt 24 Risikofaktoren als Modellinput gewählt wurden. Hierzu zählen typische norwegische Kreditverlustanteile für das Kreditrisiko, zahlreiche Referenzinstrumente aus den Bereichen Aktien, Wechselkurse sowie Zinsen im Zusammenhang mit Marktrisiko und verschiedene norwegische Indizes (Aktien, Bonds, Immobilien, Hedgefonds) für das Anteilsrisiko. Im Zusammenhang mit dem operationellen Risiko und dem Geschäftsrisiko stehen hingegen keine geeigneten Daten zur Verfügung. Daher werden diese beiden Risikoarten über einen klassischen Bottom-up-Ansatz ins Modell integriert.

Mit dem Modell ist es möglich, das ökonomische Kapital für jedes Geschäftsfeld sowohl separat als auch aggregiert für das Gesamtunternehmen zu berechnen. In der Praxis erfolgt der Einsatz bei der DnB für die Profitabilitätsmessung sowie als Entscheidungsgrundlage für die Risikomanagement-Funktion. Über einen Zeitraum von sieben Quartalen (04/2003-02/2005) betragen die Diversifikationseffekte ungefähr 30% gegenüber der Summe der Einzelrisiken.

Die hohe Anzahl von Input-Parametern, die für die Umsetzung dieses integrierten Ansatzes notwendig ist, erscheint aus Sicht der Nachvollziehbarkeit der tatsächlichen Zusammenhänge als problematisch. Zudem verwenden die Autoren aufgrund unzureichender Datenverfügbarkeit an verschiedenen Stellen Expertenschätzungen, wie z. B. bei der Schätzung der Renditen der Risikofaktoren oder bei den Korrelationen zwischen den verschiedenen Risikoklassen. Hierdurch wird das Modell anfällig für Willkür und gleichzeitig erhöht sich in erheblichem Maße das von Alexander [3] thematisierte Aggregationsrisiko (s. Abschnitt 3.2.3). Für das operationelle Risiko kommt der Basel-II-Standardansatz zum Einsatz, der auch in dieser Arbeit im Modell zur Integration des Portfoliomanagements in Kapitel 7 verwendet wird. Das Liquiditätsrisiko findet bei Aas et al. ebenfalls keine Anwendung, da es sich als schwierig erwiesen hat, diese Risikoart auf konsistente Art gegenüber den übrigen Risiken zu modellieren.

Ein weiterer Ansatz zur Integration der Risikomessung besteht darin, die Modellierung einer bestimmten Risikoart (meist des Kreditrisikos) durch zusätzliche Komponenten in Bezug auf eine oder mehrere weitere Risikoarten (Marktrisiken und evtl. andere) zu erweitern. Ansätze dieser Art stammen beispielsweise von Iscoe et al. [107], Barnhill & Maxwell [8], Marsala et al. [135], Medova & Smith [138] und Grundke [90, 92, 93].

Risikoarten	Kredit	Markt	Operationell (& andere)	Studie
Kredit	1,00	0,80	0,40	[123]
		0,30	0,20	[202]
		0,30	0,44	[63]
		0,50	0,20	[168]
Markt	-		0,40	[123]
		1,00	0,20	[202]
			0,13	[63]
			0,20	[168]

Tab. 3.1.: Korrelationsannahmen für Kredit-, Markt- und operationelle Risiken in Studien

### 3.4.3. Integriertes Portfoliomanagement

In der modernen Gesamtbanksteuerung versteht sich die **Bank als ein Portfolio von Risiken**. Die Zielsetzung besteht nun darin, diese Risiken zur Sicherstellung der Überlebensfähigkeit zu steuern. Um den Renditeanspruch der Eigentümer zu erfüllen, werden nur Risiko-Renditeeffiziente Risikopositionen eingegangen.

Aufbauend auf diesem Grundgedanken konzipiert **Theiler** [197] ein integriertes Risiko-Rendite-Steuerungsverfahren, das effiziente Portfolios ermittelt. Das Verfahren beginnt mit der Optimierung des Gesamtbank>Returns unter internen und aufsichtsrechtlichen Nebenbedingungen und verwendet den Conditional VaR<sup>56</sup> als Risikomaß. Im zweiten Schritt werden die Risiko-Rendite-Kennzahlen auf Ebene der dezentralen Steuerungseinheiten berechnet.

**Sièvi & Crecelius** [40] verwenden ebenfalls Korrelationen in ihrem dualen Ansatz zur Integration der Risiken und Chancen für eine deutsche Universalbank. Ihr Ansatz stützt sich allerdings auf eine Reihe von starken Annahmen, u. a. auf die Skalierung mittels „Wurzelgesetz“<sup>57</sup> und die Verwendung von Korrelationen via „Expertenurteil“.

**Becker** [15] beschäftigt sich mit der Integration von Kreditrisiken in die Asset Allokation. Dabei werden verschiedene Möglichkeiten untersucht und letztendlich verfügbare Kreditrisiko-Indizes als Basis vorgeschlagen. Anhand einer Beispielbank illustriert der Autor die Umsetzung des Ansatzes.

### 3.4.4. Zusammenfassende Würdigung

Dieser kritische Review zeigt, dass die Methoden zur Risikoaggregation noch mit erheblichen Unsicherheiten behaftet sind, die wohl auch in den nächsten Jahren noch bestehen dürften. Aus diesem Grund wird für die Integration des Portfoliomanagements beim Modell in Kapitel

<sup>56</sup>S. Abschnitt 2.4.2.

<sup>57</sup>S. Abschnitt 3.2.3.

7 der Arbeit keine Aggregation durchgeführt, sondern die Risikoarten werden durch separate Zielfunktionen getrennt voneinander betrachtet und optimiert.

Tabelle 3.1 gibt Korrelationsannahmen aus verschiedenen Studien zur Risikoaggregation wieder. Im Falle der relativ konservativen Annahmen von Kuritzkes et al. [123], die auch von Seiten des BCBS [111] zitiert werden, ergeben sich Diversifikationseffekte in der Größenordnung von ca. 15%. Hierbei wird entsprechend einer Studie mit neun international tätigen Großbanken aus Europa und Nordamerika [123] eine Aufteilung der Risikobeiträge in Höhe von 55% für Kreditrisiken, 20% für Marktrisiken und 25% für operationelle Risiken zugrunde gelegt. In weiteren Ansätzen fallen diese mit 22% bei Ward & Lee [202], 28% bei Dimakos & Aas [63] und 40% bei Rosenberg & Schuermann sogar wesentlich umfangreicher aus. Da letztgenannte Beiträge im Vergleich zu Kuritzkes et al. einen weniger aufsichtsrechtlich geprägten Fokus haben, belegen sie die positiven Effekte einer Integrierten Risikomessung besonders deutlich.



Ansatz	Beschreibung	Risikoarten & Diversifikation	Vorteile	Nachteile
<b>Ward &amp; Lee</b> [202]	Copula-Ansatz (Top-down)	Kredit, Markt, Operationell <b>22%</b>	Gesamtrisikoansatz für ein Versicherungsunternehmen auf Basis von Copulas mit dedizierter Modellierung aller wesentlichen Risiken	Aggregations- und Modellrisiko, Datenproblematik
<b>Kuritzkes et al.</b> [124]	Korrelationsansatz (Top-down)	Kredit, Markt, Operationell <b>5-50%</b>	Pragmatischer Ansatz zur Aggregation des Risikokapitals in den Ebenen (1) Einzelner Risikofaktor, (2) Verschiedene Faktoren je Gesch.feld und (3) über alle Gesch.felder	Annahme multivariater Normalverteilung, „Expertenschätzung“ der benötigten Korrelationen und generelle Kritik am Korrelationsansatz
<b>Dimakos &amp; Aas</b> [63]	Copula-Ansatz (Top-down)	Kredit, Markt, Operationell <b>11-20%</b>	Pragmatischer Ansatz zur Aggregation der Risiken für die norwegische Bank DnB mit einfacher Modellierung auf Basis von Copula-Funktionen	Kreditrisiko als „Basisrisiko“, Expertenansatz mit subjektiven Einschätzungen für operationelle Risiken, Unsicherheiten bei der Parameterschätzung
<b>Rosenberg &amp; Schuermann</b> [168]	Copula-Ansatz (Top-down)	Kredit, Markt, Operationell <b>40%</b>	Dedizierter Ansatz auf Basis umfassender Markt- und Anwenderdaten für amerikanische Banken; Vorschlag eines einfachen Hybrid-Ansatzes mit guter Näherung an Gesamtrisiko	Parametrisierung der Copula-Funktionen über Extrapolation der verfügbaren Zeitreihen; Modellrisiko
<b>Alexander &amp; Pézier</b> [4]	Multifaktormodell (Bottom-up)	Kredit, Markt <b>&lt;35%</b>	Nach Identifikation bankweiter Risikofaktoren Modellierung des Gesamtrisikos mit Möglichkeit zum Nachvollziehen der Interdependenzen	Beschränkung auf Kredit- und Markttrisiko, Schwierigkeiten bei der geeigneten Schätzung von Parametern Skalierungsfaktoren
<b>Aas et al.</b> [1]	Multifaktormodell (Bottom-up) in Kombination mit Top-down-Ansatz	Kredit, Markt, Operationell, Geschäft, Anteil <b>30%</b>	Umfassender Einbezug aller wesentlichen Risiken in einem Bottom-up-Ansatz für eine Bank, Kombination von integrierter Modellierung mit Copula-Ansatz	Notwendigkeit zu umfangreicher Schätzung der Parameter, Unsicherheit bei den verwendeten Referenzen für die Risikofaktoren

Tab. 3.2.: Gegenüberstellung von Verfahren zur Risikoaggregation mit Vor- und Nachteilen



## 4. Aspekte der Komplexität

In diesem Kapitel werden ausgewählte Aspekte der algorithmischen Komplexitätstheorie mit einem anwendungsorientierten Schwerpunkt dargestellt, die für Teil 3 der Arbeit von Bedeutung sind. Dabei werden insbesondere die beiden Komplexitätsklassen **P** und **NP** eingeführt. Hierauf basierend werden verschiedene Anwendungen und Resultate vorgestellt, die im Kontext dieser Arbeit relevant sind. Diese unterstreichen den hohen rechentechnischen Aufwand der betrachteten Optimierungsprobleme in Teil 3 der Arbeit und begründen somit den Einsatz heuristischer Verfahren zu deren Lösung.

### 4.1. Komplexität im Kontext der Arbeit

Der Begriff **Komplexität** leitet sich von dem lateinischen Verb *complectari*: umfassen/umarmen ab. Je nach wissenschaftlicher Disziplin wird der Begriff unterschiedlich definiert. Reither [165] führt hierzu an, dass es mindestens 30 „erstzunehmende“ Definitionsansätze für Komplexität gibt. Er schlägt folgende weit gefasste Definition vor:

*„Eigenschaft von Systemen oder Realitätsbereichen, die sowohl unüberschaubar, vernetzt, eigendynamisch und undurchsichtig als auch wahrscheinlichkeitsabhängig und instabil sind.“*

Im alltäglichen Sprachgebrauch wird der Begriff Komplexität mit Begriffen wie *schwierig*, *vielschichtig*, *unberechenbar*, *aufwändig* oder *verwirrend* in Zusammenhang gebracht [188]. Komplexität prägt auch das Risikomanagement in Banken, das in Teil 1 der Arbeit dargestellt wurde. Viele Fragestellungen, beispielsweise aus dem modernen Portfoliomanagement, müssen wegen der Vielzahl an notwendigen Rechenschritten mittels maschineller Datenverarbeitung umgesetzt werden. Eine wesentliche praktische Anforderung ist dabei, dass eine Problemlösung mit der vorhandenen Rechenkapazität dennoch in adäquater Zeit durchführbar ist.

Die algorithmische Komplexitätstheorie stellt Konzepte zur Verfügung, um solche Praxisprobleme modellhaft abzubilden. Da in dieser Arbeit algorithmische Problemstellungen betrachtet werden, bezieht sich der Begriff Komplexität im Weiteren ausschließlich auf die Definition aus der algorithmischen Komplexitätstheorie. Nachfolgend werden ausgewählte Grundlagen dieser Theorie eingeführt und einige konkrete Anwendungen im Risikomanagement vorgestellt. Für einen umfassenden Einstieg in die Komplexitäts- und Berechenbarkeitstheorie (engl. *Theory of Computation*) wird an dieser Stelle auf Lewis & Papadimitriou [127] verwiesen.

## 4.2. Algorithmische Komplexitätstheorie

Für die Beschreibung der Komplexität von Rechenverfahren wurde die **algorithmische Komplexitätstheorie** (engl. *Complexity Theory*) entwickelt. Neben der Untersuchung der Lösbarkeit von Problemen (**Berechenbarkeitstheorie**) wird mit Hilfe ihrer Modelle analysiert, wie effizient Probleme gelöst werden können.

Die Komplexität wird anhand des Ressourcenverbrauchs bestimmt, der zur Lösung eines bestimmten Problems benötigt wird. Dieser kann durch den Bedarf an Rechenzeit (**Zeitkomplexität**) und/oder Speicherkapazität (**Speicherkomplexität**) gemessen werden. Da die betrachteten praxisrelevanten Problemstellungen insbesondere Rechenzeitrestriktionen mit sich bringen, wird Komplexität im Folgenden ausschließlich unter dem Gesichtspunkt der Rechenzeit betrachtet.

Probleme werden dabei in verschiedene *Komplexitätsklassen* eingeteilt, um zwischen in adäquater Zeit lösbaren und schwierig lösbaren Problemen zu differenzieren. Alle Probleme einer bestimmten Klasse werden durch untere und obere Schranken charakterisiert und zeichnen sich somit der Größenordnung nach durch die gleiche Komplexität aus. Die Einteilung stützt sich auf hypothetische Rechnermodelle. Ein in der Theorie häufig verwendetes Modell ist die Turing-Maschine (s. Abschnitt 4.2.1).

### 4.2.1. Berechenbarkeit und Turing-Maschinen

Die Berechenbarkeitstheorie (engl. *Computability Theory*) beschäftigt sich ausschließlich damit, ob Probleme überhaupt algorithmisch lösbar sind.<sup>1</sup> Die Church'sche These konstatiert, dass die Menge der Funktionen, die mit einer Turing-Maschine berechenbar sind (*Turing-berechenbar*), genau der Menge der überhaupt berechenbaren Funktionen entspricht. Diese These ist in der Informatik allgemein anerkannt.

Die **Turing-Maschine**<sup>2</sup> wurde 1936 von Alan Turing als einfaches Modell einer Rechenanlage mit nur drei Operationen (*Lesen, Schreiben, Kopfbewegen*) vorgeschlagen. Unterschieden werden **deterministische** (DTM) und **nichtdeterministische** (NTM) Turing-Maschinen. Als Erweiterung gegenüber einer DTM sind die Abläufe einer NTM nicht von vorneherein festgelegt. Zu jedem Zeitpunkt gibt es also mehrere Möglichkeiten, wie die Berechnung fortgesetzt werden kann. Eine NTM stellt ein rein theoretisches Maschinenmodell dar, das im Folgenden zur Beschreibung der Komplexitätsklasse **NP** verwendet wird.<sup>3</sup>

---

<sup>1</sup>Das bekannteste, algorithmisch unlösbare Problem ist das *Halteproblem* für Turing-Maschinen [127].

<sup>2</sup>Die formale Definition einer Turing-Maschine findet sich in Lewis & Papadimitriou [127, S.181].

<sup>3</sup>Die Definition einer nichtdeterministischen Turing-Maschine findet sich in Lewis & Papadimitriou [127, S.221]. Weitere Erläuterungen zu Turing-Maschinen finden sich zudem in [19].

### 4.2.2. Landau-Symbolik und Funktionswachstum

Bevor auf die einzelnen Komplexitätsklassen eingegangen wird, erfolgt ein Exkurs zur **Landau-Symbolik**, die durch Paul Bachmann im Jahre 1894 eingeführt wurde.<sup>4</sup> Sie wird verwendet, um das asymptotische Verhalten von Funktionen und Folgen zu charakterisieren. Aus diesem Grund wird sie auch als *asymptotische Notation* bezeichnet [38]. Anschaulich wird durch die Symbolik das Wachstum einer Funktion  $f$  mit dem einer Funktion  $g$  verglichen. Die Funktion  $g$  stellt dabei den einfachsten Repräsentanten einer bestimmten Klasse gleich schnell wachsender Funktionen dar.

Eine scharfe asymptotische Schranke für das Wachstum einer Funktion  $f$  wird durch die  $\Theta$ -Notation festgelegt. Das Wachstum von  $f$  entspricht in diesem Fall exakt dem Wachstum der Funktion  $g$ . Entsprechend gilt dann  $f \in \Theta(g)$ . Die formale Beschreibung lautet wie folgt:

**Definition 4.1 ( $\Theta$ -Notation):**

Für eine gegebene Funktion  $g$  wird mit  $\Theta(g(n))$  folgende Menge von Funktionen bezeichnet

$$\Theta(g(n)) = \{f(n) : \exists c_1 > 0, \exists c_2 > 0, \exists n_0 > 0 \wedge \forall n \geq n_0 : 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)\}$$

Wenn keine asymptotische untere Schranke angegeben werden soll oder kann, wird die verbreitete  $\mathcal{O}$ -Notation verwendet, die Funktionen nach oben hin beschränkt:

**Definition 4.2 ( $\mathcal{O}$ -Notation):**

Für eine gegebene Funktion  $g$  wird mit  $\mathcal{O}(g(n))$  folgende Menge von Funktionen bezeichnet

$$\mathcal{O}(g(n)) = \{f(n) : \exists c > 0, \exists n_0 \geq 0 \wedge \forall n \geq n_0 : 0 \leq f(n) \leq c g(n)\}$$

Die  $\Omega$ -Notation wird schließlich im umgekehrten Fall eingesetzt, d.h. wenn nur eine untere Wachstumsschranke bekannt ist:

**Definition 4.3 ( $\Omega$ -Notation):**

Für eine gegebene Funktion  $g$  wird mit  $\Omega(g(n))$  folgende Menge von Funktionen bezeichnet

$$\Omega(g) = \{f(n) : \exists c > 0, n_0 > 0 \wedge \forall n \geq n_0 : 0 \leq c g(n) \leq f(n)\}$$

Von den vorgestellten Notationen wird die  $\mathcal{O}$ -Notation<sup>5</sup> besonders häufig verwendet. Beispielsweise verdeutlicht die Darstellung  $f \in \mathcal{O}(x^2)$ , dass die Funktion  $f$  asymptotisch höchstens quadratisch wächst. Aus Sicht der Komplexitätstheorie gehört ein solches Problem zur Klasse

<sup>4</sup>Da der Zahlentheoretiker Edmund Landau diese Notation später ebenfalls verwendete und bekannt machte, wird sie im deutschen Sprachraum oft als Landau-Symbolik bezeichnet.

<sup>5</sup>' $\mathcal{O}$ ' steht für *Ordnung*. Diese Darstellung wird in Kapitel 5 zur Beschreibung der Zeitkomplexität der vorgestellten heuristischen Verfahren verwendet.

$n$	$\log_2 n$	$n$	$n \log n$	$n^2$	$2^n$
10	0,000003s	0,00001s	0,00003s	0,0001s	0,001s
$10^2$	0,000007s	0,0001s	0,0006s	0,01s	$10^{16}$ Jahre
$10^3$	0,000010s	0,001s	0,01s	1s	astronomisch
$10^4$	0,000013s	0,01s	0,13s	1,7min	astronomisch
$10^5$	0,000017s	0,1s	1,67s	2,8h	astronomisch

Tab. 4.1.: Wachstum verschiedener Funktionen (aus [19, S.112])

**P** der in polynomieller Zeit berechenbaren Probleme (s. Abschnitt 4.2.3). Falls  $f \in \Theta(2^x)$  weist die Funktion  $f$  exponentielles Wachstum auf und ein solches Problem gehört zur Komplexitätsklasse **EXP** (s. Abschnitt 4.2.3).

In Tabelle 4.1 wird unter Verwendung der Landau-Symbolik exemplarisch verdeutlicht, wie viel Zeit zur Lösung eines Problems der Größe  $n$  notwendig ist, wenn unterschiedliche Funktionen für das Wachstum des Eingaberaumes angenommen werden. Die Ausführung des Lösungsalgorithmus benötige dabei  $\mathcal{O}(f(n))$  Mikrosekunden [19].<sup>6</sup> In der letzten Spalte (Problem der Größe  $2^n$ ) fällt auf, dass die Rechenzeit in Abhängigkeit von der Problemgröße sehr stark ansteigt. Während bei  $n = 1000$  das quadratische Problem noch in einer Sekunde lösbar ist, überschreitet die Problemgröße bei  $2^n$  bereits bei weitem die Grenze, bis zu der eine Lösung des Problems - auch unter Einbezug von erheblichen zukünftigen Fortschritten hinsichtlich möglicher Rechengeschwindigkeit - noch vorstellbar ist. Allgemein gelten Probleme, für die lediglich Lösungen in Exponentialzeit existieren, als schwierig. Die Einteilung der Probleme in Komplexitätsklassen gibt eine Hilfestellung bei der Beurteilung der Komplexität von Problemen.

### 4.2.3. Komplexitätsklassen

#### Definition 4.4 (Komplexitätsklasse **P**):

Die Klasse **P** ist die Klasse aller Probleme, die durch einen deterministischen Algorithmus in polynomieller Zeit lösbar sind.

Ein bekanntes Problem aus dieser Klasse ist das *allgemeine Sortierproblem*, für das effiziente Algorithmen mit Laufzeiten in der Größenordnung von  $\mathcal{O}(n \log n)$  existieren [38]. Es bleibt anzumerken, dass für die Durchführbarkeit der Berechnung in praktischen Anwendungen vor allem Polynome mit „kleinem“  $k$  wünschenswert sind.<sup>7</sup>

#### Definition 4.5 (Komplexitätsklasse **NP**):

Die Klasse **NP** wird durch die Menge aller Probleme gebildet, die von nichtdeterministischen Turingmaschinen in Polynomialzeit gelöst werden können.

<sup>6</sup>Ein elementarer Rechenschritt benötige dabei 1 Mikrosekunde. Dies entspricht  $10^{-6}$  Sekunden.

<sup>7</sup>Falls  $k$  groß ist, steigt die Rechenzeit stark an.

Das Handlungsreisendenproblem stellt ein bekanntes Problem aus der Klasse **NP** dar. Hierbei geht es um die Fragestellung der Routenplanung eines Handlungsreisenden zwischen  $n$  verschiedenen zu besuchenden Städten. Für die exakte Lösung dieses Problem sind, ebenso wie für alle weiteren Vertreter der Klasse **NP**, nur Algorithmen in Exponentialzeit bekannt. Weitere Probleme der Klasse **NP**, die zudem eine hohe Relevanz für die Optimierungsprobleme aus dem Integrierten Portfoliomanagement haben, sind das Partitionierungsproblem sowie das Rucksackproblem (s. Abschnitt 4.3.1).

**Anmerkung:** Eine weitere Klasse, die sowohl **P** als auch **NP** als Untermengen umfasst, stellt **EXP** dar (s. Abbildung 4.1). Hierin enthalten sind Probleme, die sich mit einer deterministischen Turing-Maschine in der Zeit  $2^{n^k}$  in Abhängigkeit von der Eingabelänge  $n$  lösen lassen.

Für die drei vorgestellten Komplexitätsklassen **P**, **NP** und **EXP** gelten zusammengefasst folgende Beziehungen:  $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{NP} \subseteq \mathbf{EXP}$ . Da nachgewiesen ist [127], dass  $\mathbf{P} \neq \mathbf{EXP}$  bzw.  $\mathbf{P} \subset \mathbf{EXP}$ , stellt mindestens ein Symbol im Ausdruck  $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{NP} \subseteq \mathbf{EXP}$  ein echtes Teilmengensymbol dar. Diese Fragestellung ist jedoch bis heute ungeklärt und äußert sich im **P-NP**-Problem, das im nächsten Abschnitt beschrieben wird.

#### 4.2.4. Das P-NP-Problem

Das **P-NP**-Problem<sup>8</sup> stellt eines der wichtigsten ungelösten Probleme der Informatik dar.<sup>9</sup> Es umschreibt die zentrale Frage, ob gilt  $\mathbf{P}=\mathbf{NP}$ . In diesem Fall würde für alle Probleme aus der Klasse **NP** ein Algorithmus existieren, der Lösungen in Polynomialzeit auffindet. Aufgrund der Definition von **NP**<sup>10</sup> würde es ausreichen, die Existenz eines solchen Algorithmus für ein einziges **NP**-vollständiges Problem nachzuweisen. Jedes weitere Problem aus **NP** ließe sich dann in Polynomialzeit auf eben dieses reduzieren. Falls die Gleichung nicht erfüllt ist ( $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$ ), gibt es Probleme, für die eine gegebene Lösung einfach überprüft werden kann, während das Auffinden einer solchen Lösung sehr schwierig ist.

Es wird allgemein vermutet, dass gilt:  $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$  (s. Abbildung 4.1). Diese Vermutung wiederum könnte durch den Beweis belegt werden, dass für die Lösung eines einzigen Problems aus **NP** kein deterministischer Polynomialzeitalgorithmus existiert. Da sehr viele Praxisprobleme in der Klasse **NP** liegen, hat die mögliche Lösung des **P-NP**-Problems eine erhebliche Tragweite. Nach momentanem Konsens in der Forschung werden die meisten dieser Probleme, genauso wie Probleme der größeren Klasse **EXP**, trotz technischer Fortschritte schwierig lösbar bleiben.

<sup>8</sup>Das **P-NP**-Problem wurde Anfang der 1970er Jahre unabhängig voneinander von Stephen Cook [37] und Leonid Levin formuliert.

<sup>9</sup>Es wurde vom Clay Mathematics Institute in die Liste der Millennium-Probleme aufgenommen.

<sup>10</sup>S. auch Ausführungen zu **NP-Vollständigkeit** im nächsten Abschnitt.

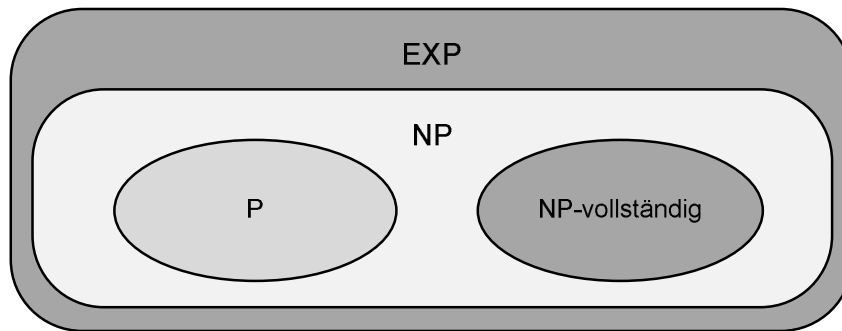


Abb. 4.1.: Komplexitätsklassen **EXP**, **NP** und **P** unter der Annahme  $P \neq NP$  [201]

#### 4.2.5. NP-Vollständigkeit

Zur Differenzierung der Komplexität der Probleme in **NP** spielt der von Cook [37] eingeführte Begriff der **NP-Vollständigkeit** eine zentrale Rolle.

##### **Definition 4.6 (NP-vollständig):**

Ein Problem  $L$  wird dann als **NP-vollständig** bezeichnet, wenn gilt:

1.  $L \in \mathbf{NP}$
2.  $\forall L' \in \mathbf{NP} : L' \preceq_p L$

Die zweite Eigenschaft besagt, dass für jedes  $L' \in \mathbf{NP}$  eine Polynomialzeitreduktion ( $\preceq_p$ ) von  $L'$  auf das Problem  $L$  existiert. Somit ist  $L$  mindestens so schwer wie jedes beliebige weitere Problem aus **NP**. Alle Probleme, die zumindest Eigenschaft 2 erfüllen, werden **NP-schwer** (engl. *non-deterministic polynomial-time hard*) genannt. Man kann sie als die schwierigsten Probleme aus der Klasse **NP** betrachten.

Cook [37] erbrachte den Nachweis, dass ein solches Problem überhaupt existiert. Es handelt sich um das Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik, das auch **SAT**, von engl. satisfiability (Erfüllbarkeit) genannt wird. Das Problem besteht darin, ob eine aussagenlogische Formel (Boolescher Ausdruck) erfüllt werden kann [101]. Bis heute wurden mehr als 1000 **NP-vollständige** Probleme identifiziert. Eine gute Referenz zum Überblick über solche Probleme findet sich in Garey & Johnson [80] sowie in Cormen et al. [38].

Zur Herleitung des **NP-Vollständigkeitsbeweises** wird die Technik der **Polynomialzeitreduktion** verwendet [80]. Dabei wird durch eine Umformung in Polynomialzeit versucht, ein komplexitätstheoretisch zu untersuchendes Problem auf ein bereits bekanntes **NP-vollständiges** Problem zurückzuführen. Diese Technik wird in den Abschnitten 4.3.1 sowie 4.3 angewandt.



### 4.3. Komplexität im Portfoliomanagement

Die algorithmische Komplexitätstheorie findet in verschiedenen Bereichen des Integrierten Risikomanagements Anwendungen. Cai & Deng [22] weisen beispielsweise für Devisenmärkte nach, dass die Identifikation von Arbitrage **NP-vollständig** ist, falls die Anzahl der Währungen nicht nach oben beschränkt ist. Mit einem ähnlichen Beweis belegen Cai et al. [23], dass dies auch für Anleihenmärkte gilt. Im Folgenden werden zwei relevante Probleme aus der Menge der **NP-vollständigen** Probleme eingeführt. Weiterhin werden zwei wesentliche Resultate beschrieben, die für bestimmte Portfolioprobleme den Nachweis der **NP-Vollständigkeit** erbringen.

#### 4.3.1. Relevante Probleme aus der Klasse NP

Die folgenden beiden Probleme aus der Klasse **NP** sind im Kontext des Integrierten Risikomanagements von besonderer Bedeutung, da sie zur Herleitung von Komplexitätsresultaten verwendet werden: **PARTITION** und **KNAPSACK**.

##### **PARTITION**

Das Partitionierungsproblem (engl. **PARTITION**) stellt ein Entscheidungsproblem dar, das wie folgt definiert wird [80]:

##### **Definition 4.7 (PARTITION):**

Es sei eine Menge nichtnegativer ganzer Zahlen  $a_1, \dots, a_n$  in binärer Darstellung gegeben. Existiert eine Teilmenge  $P \subseteq \{1, \dots, n\}$  so dass gilt:  $\sum_{i \in P} a_i = \sum_{i \notin P} a_i$  ?

Gesucht ist folglich die Zerlegung einer Menge von ganzen Zahlen in zwei Teilmengen, so dass die Summen beider Mengen gleich sind. Weiterhin müssen alle Elemente durch die beiden Teilmengen abgedeckt werden. Als einfaches Beispiel, das entsprechend der Anforderung zerlegbar ist, sei die Menge  $\{3, 4, 11, 19, 21, 28\}$  gegeben. Es gilt:  $3 + 19 + 21 = 4 + 11 + 28 = 43$ .

Das Partitionierungsproblem ist **NP-vollständig**. Die Herleitung kann beispielsweise über eine Polynomialzeitreduktion des „0-1 KNAPSACKs“ erfolgen und wird in Garey & Johnson [80, S.60] oder Papadimitriou [154, S.375] dargestellt.

##### **KNAPSACK**

Auch das Rucksackproblem (engl. **KNAPSACK**) ist ein Entscheidungsproblem und gehört zur Klasse der **NP-vollständigen** Probleme [80]:

##### **Definition 4.8 (0-1 KNAPSACK):**

Gegeben sei eine Menge nichtnegativer ganzer Zahlen  $S = \{a_1, \dots, a_n\}$  und eine ganze Zahl  $K$ , jeweils in binärer Darstellung. Existiert eine Teilmenge  $P \subseteq S$  so dass gilt:  $\sum_{a_i \in P} a_i = K$  ?

Anschaulich lässt sich das Rucksackproblem durch das Auffüllen eines Rucksacks darstellen. Dieser soll mit  $N$  Gegenständen beladen werden, die in Summe exakt  $K$  wiegen. Jeder Gegenstand  $n$  ( $n = 1 \dots N$ ) hat dabei ein Gewicht von  $a_n$ . Exemplarisch ergibt sich mit den Zahlen  $\{3, 4, 11, 19, 21, 28\}$  als Gewichte der Gegenstände und  $K = 62$  die Lösung  $\{4, 11, 19, 28\}$ .

Der **NP**-Vollständigkeitsbeweis erfolgt beispielsweise durch Reduktion des Problems auf **PARTITION** (s. vorhergehender Abschnitt) [154, 80].

Das Rucksackproblem findet sich in einer Vielzahl von praktischen Problemen wieder und steht daher im Fokus ständiger Forschungsbemühungen.<sup>11</sup> Insbesondere im Kontext des Integrierten Portfoliomanagements ist das nachfolgend definierte Problem **KNAPSACK** relevant, das eine allgemeinere Variante des einfachen 0-1-KNAPSACK darstellt. Im Rahmen der Portfolio-Optimierung (s. Abschnitt 3.3) möchte ein Investor (Person oder Institution) ein gegebenes Budget (Budgetrestriktion  $c$ ) in eine vorgegebene Auswahl verschiedener Assets  $j$  (mit  $j = 1, \dots, N$ ) investieren. Die Assets haben bestimmte Gewichte  $w_j$  (engl.: *weight*) und jeweils eine erwartete Rendite  $p_j$  (engl.: *profit*) über einen festgelegten Zeitraum. Das Problem **KNAPSACK**<sup>12</sup> für den Fall ganzzahliger Assetgewichte lautet entsprechend Kellerer et al. [118]:

**Definition 4.9 (KNAPSACK):**

Eine **KNAPSACK**-Instanz sei gegeben durch eine Menge  $N$  von Assets  $j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) mit erwarteter Rendite  $p_j$  und Gewicht  $w_j$ . Mit der Budgetrestriktion  $c$  lautet das lineare Ganzzahligkeitsproblem wie folgt:

$$\begin{aligned} \text{Max. } & \sum_{j=1}^n p_j x_j \\ \text{u. d. N. } & \sum_{j=1}^n w_j x_j \leq c, \\ & x_j \in \{0, 1\}, j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad [4.1]$$

Aufgrund der Integer-Restriktion  $x_j \in \{0, 1\}$  gehört auch **KNAPSACK** zu den **NP**-vollständigen Problemen [118]. Es ist weiterhin anzumerken, dass in dieser einfachen Variante des Portfolioproblems das Risiko einer Portfoliokombination nicht berücksichtigt wird. Durch die Hinzunahme einer Risikozielfunktion oder -nebenbedingung wird das Problem zusätzlich erschwert (s. Abschnitt 4.3.2).

<sup>11</sup>Einen Überblick von Varianten des Rucksackproblems sowie aktuelle Lösungsansätze stellen Kellerer et al. [118] dar.

<sup>12</sup>Die Herleitung des **NP**-Vollständigkeitsbeweises findet sich z. B. in Kellerer et al. [118].

Schrittweite $a$	Anzahl Assets für Portfolio-Optimierung				
	2	3	4	5	6
10,000%	11	66	286	1.001	3.003
5,000%	21	231	1.771	10.626	53.130
2,000%	51	1.326	23.426	316.251	3.478.761
1,000%	101	5.151	176.851	4.598.126	96.560.646
0,500%	201	20.301	1.373.701	70.058.751	2.872.408.791
0,250%	401	80.601	10.827.401	1.093.567.501	88.578.967.581
0,100%	1.001	501.501	167.668.501	42.084.793.751	8.459.043.543.951
0,050%	2.001	2.003.001	1.337.337.001	670.005.837.501	268.672.340.837.901
0,025%	4.001	8.006.001	10.682.674.001	10.693.356.675.001	8.565.378.696.675.800

Tab. 4.2.: Anzahl der möglichen Portfolio-Allokationen in Abhängigkeit von der Anzahl der Assets und der Schrittweite  $a$

### 4.3.2. Diskretes Portfolioproblem

Vor der komplexitätstheoretischen Betrachtung des diskreten Portfolioproblems wird zunächst quantitativ untersucht, wie sich die Anzahl der notwendigen Rechenschritte in Abhängigkeit von der *Schrittzahl*  $r$  (bzw. der *Schrittweite*  $a$ ) bei drei zur Verfügung stehenden Assets und vollständiger Enumeration der möglichen Portfolio-Kombinationen entwickelt (s. auch Abschnitt 8.1.1).<sup>13</sup> Bei gegebener Schrittzahl  $r$  (mit  $r = \frac{1}{a}$ ) der Portfolio-Gewichte ergibt sich die Anzahl der möglichen Portfoliokombinationen bei  $k$  Assets mittels einer  $k$ -Komposition von  $r$ :

$$\# \text{ Portfolios} = \binom{r+k-1}{k-1} = \frac{(r+k-1)!}{(k-1)!r!} \quad [4.2]$$

In Tabelle 4.2 wurde mit Hilfe von Formel 4.2 für verschiedene  $k$  die Zahl der möglichen Portfoliokombinationen errechnet. Dabei wird ersichtlich, dass diese Zahl bereits für Portfolios mit mehr als drei Assets abhängig von der Schrittweite  $a$  sehr stark ansteigt. Zusätzlich zeigt Abbildung 4.2 dieses Wachstum in *logarithmischer* Skala für bis zu  $k = 20$  Assets. Wenn man die Laufzeitentwicklung aus Tabelle 8.1 im Kapitel 8 auf die möglichen Portfolio-Allokationen in Tabelle 4.2 überträgt, würde der für diese Untersuchungen verwendete Testrechner mit Intel<sup>®</sup> Core<sup>™</sup> Duo T2400 Prozessor (1830Mhz) und 1GB RAM-Speicher hochgerechnet ca. 182.444 Jahre benötigen, um mittels vollständiger Enumeration und mit 0,025%-Schritten die optimalen Allokationen für sechs Assets zu ermitteln. Das Beispiel zur Taktischen Asset Allokation mit  $k = 20$  Assets würde auf demselben Rechner bereits 1.166.926.033 Jahre<sup>14</sup> benötigen, um eine

<sup>13</sup>Bei einer Schrittzahl von  $r = 100$  wird beispielsweise jedes Asset mit einer Schrittweite von  $a = 1\%$  variiert.

Somit erfolgt eine verschachtelte Iteration, bei der ein Asset 0%, 1%, ..., 100% Anteil am Portfolio erhält.

<sup>14</sup>Dies entspricht in etwa  $\frac{1}{12}$  des geschätzten Alters des Universums.

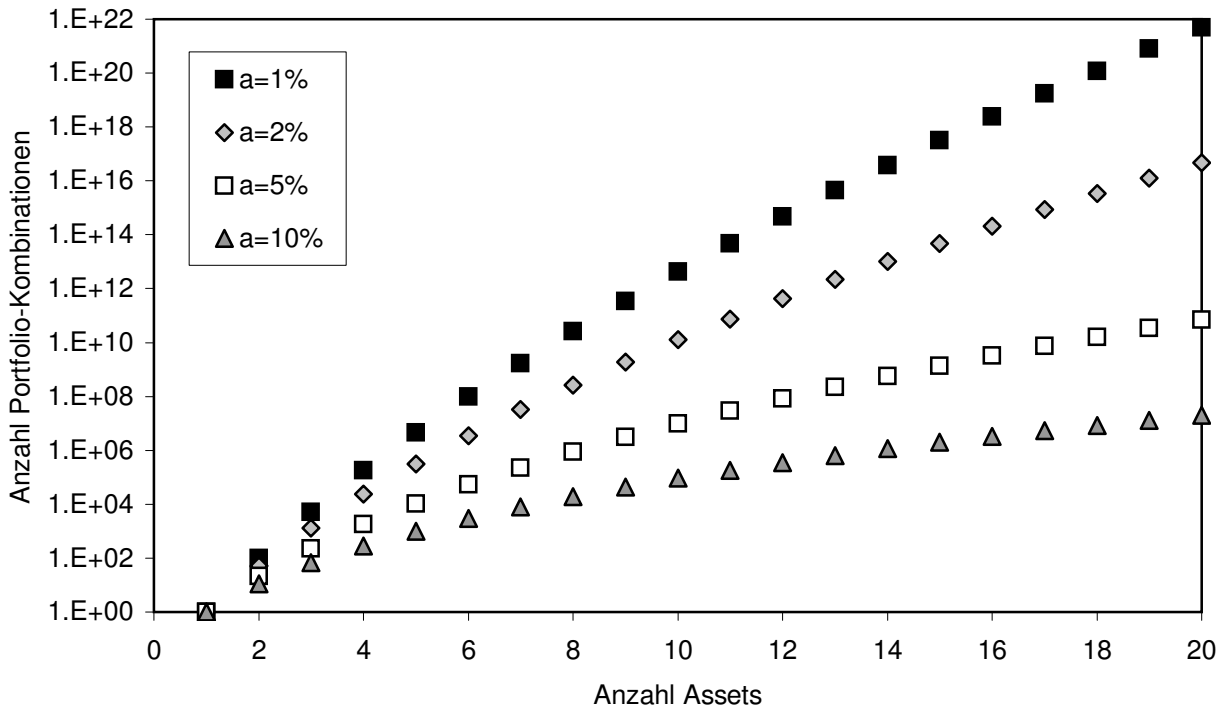


Abb. 4.2.: Wachstum möglicher Portfolios abhängig von der Anzahl der Assets und der Schrittweite  $a$  (logarithmische Skala)

Optimierung mit 1%-Schritten durchzuführen (s. Kapitel 10).<sup>15</sup> Unter Einbezug des Risikos lässt sich das gegenüber Definition 4.1 erweiterte 2-dimensionale KNAPSACK-Problem wie folgt darstellen [118]:

**Definition 4.10 (2-KNAPSACK):**

Eine Instanz eines erweiterten KNAPSACK-Problems mit Einbezug des Risikos sei gegeben durch eine Menge von  $j$  Assets ( $j = 1, \dots, N$ ) mit erwarteter Rendite  $p_j$ , Risikofunktion  $g_j$  sowie dem Gewicht  $w_j$ . Mit der Budgetrestriktion  $C$ , der minimalen Gesamtrendite  $P$ , dem individuellen Volumen  $c_j$  und Risikograd  $g_j$  lautet das Problem wie folgt:

$$\begin{aligned}
 & \text{Min. } \sum_{j=1}^{n+1} \frac{c_j}{g_j} x_j \\
 & \text{u. d. N. } \sum_{j=1}^{n+1} p_j x_j \geq P, \\
 & \sum_{j=1}^{n+1} c_j x_j = C, \\
 & x_j \in \{0, 1\}, j = 1, \dots, n, x_{n+1} \in \mathbb{N}_0
 \end{aligned}
 \tag{4.3}$$

<sup>15</sup>Zusätzlich steigt auch die benötigte Speicherkapazität bei der vollständigen Enumeration stark an.

Dieses stellt eine einfache Version des klassischen Markowitz-Modells (s. Abschnitt 3.3.1) dar, bei dem das Risiko minimiert wird und die Rendite als Nebenbedingung einfließt. Auch diese Problemform lässt sich auf das einfache KNAPSACK-Problem zurückführen und gehört somit zur Klasse der **NP**-vollständigen Probleme [118].

Weiterhin analysiert Schlottmann [175] ein vergleichbares Kreditportfolio-Optimierungsproblem und zeigt durch Rückführung auf das Rucksackproblem seine **NP**-Vollständigkeit. Dementsprechend stellt bereits das Auffinden eines einzelnen nichtdominierten Punkts im Rahmen der Portfolio-Optimierung ein **NP**-vollständiges Problem dar, wenn die Entscheidungsvariablen auf ganzzahlige Werte beschränkt sind. Es bleibt anzumerken, dass diese Einschränkung in der Praxis nicht immer eintritt. Ein Nachweis der **NP**-Vollständigkeit im stetigen Fall wurde bisher noch nicht erbracht.

In den Anwendungsfällen der Integrierten Asset Allokation in Teil 3 der Arbeit wird der Fall ganzzahliger Gewichte als Sonderfall betrachtet. Wesentlich schwerwiegender für die Komplexität der dort betrachteten Probleme ist der Einsatz des in der Bankpraxis weit verbreiteten Value-at-Risk als Risikozielfunktion. Im nächsten Abschnitt wird ein Beweis der **NP**-Vollständigkeit des Portfolioproblems in diesem Fall beschrieben.<sup>16</sup>

#### 4.3.3. Portfolioproblem unter Verwendung des Value-at-Risk

Das Portfolioproblem bei Verwendung des Value-at-Risk (VaR) kann auf das in Abschnitt 4.3.1 beschriebene PARTITION-Problem zurückgeführt werden [45]. Somit ist bei Anwendung des VaR das Portfolioproblem **NP**-schwer.

Danielsson et al. [45] betrachten hierzu eine einzelne Zeitperiode mit  $n$  Wertpapieren. Der Investor hat ein anfängliches Vermögen von  $W$  und kann zum Preis  $p_i$  zu jedem Zustand  $i = 1, \dots, n$  Forderungen<sup>17</sup> erwerben, die im Zustand  $i$  genau eine Währungseinheit am Investitionshorizont auszahlen und andernfalls keine Auszahlung leisten. Der Zustand  $i$  tritt mit Wahrscheinlichkeit  $\pi_i$  ein. Das Problem des Investors besteht darin, ein Portfolio  $\{x_i\}_{i=1}^n$  auszuwählen, mit  $x_i$  als Anzahl der Wertpapiere  $i$ . Weiterhin wird die VaR-Beschränkung des Portfolioproblems mit dem VaR-Level  $\delta \in [0, 1]$  wie folgt definiert:

**Definition 4.11 (VaR-Beschränkung):**

Für eine beliebige diskrete Verteilung lautet die VaR-Nebenbedingung mit  $K$  als Vermögensunterschranke und einer Indikatorfunktion in Bezug auf den Zustand  $i$ :

$$\sum_{i=1}^n 1_{\{x_i \leq K\}} \pi_i \leq \delta$$

<sup>16</sup>Maringer [132] legt weiterhin dar, dass das Portfolioproblem bei Einführung von Kardinalitätsbeschränkungen (s. Abschnitt 7.5) ebenfalls auf das KNAPSACK-Problem rückführbar ist.

<sup>17</sup>Engl. *contingent claims*.

Mit dieser Nebenbedingung lässt sich das Investorenproblem formal beschreiben:

$$\begin{aligned}
 & \text{Max.}_{\{x_i\}_{i=1}^n} \sum_{i=1}^n \pi_i u(x_i) \\
 & \text{u. d. N. } \sum_{i=1}^n p_i x_i \leq W \\
 & \sum_{i=1}^n 1_{\{x_i \leq K\}} \pi_i \leq \delta \\
 & x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Zur Herleitung des Beweises wird folgende leicht modifizierte Definition des Problems PARTITION (s. Abschnitt 4.3.1) verwendet:

**Definition 4.12 (PARTITION 2):**

Seien  $\{a_1, a_2, \dots, a_n, b\}$   $n+1$  positive Zahlen, so dass gilt  $\sum_{i=1}^n a_i = 2b$ . Existiert eine Teilmenge  $S \subset \{1, 2, \dots, n\}$  so dass gilt,  $\sum_{i \in S} a_i = b$ ?

**Satz 4.13** Das Portfolioproblem mit VaR ist **NP**-vollständig.

**Beweis 4.14** Zum Nachweis der **NP**-Vollständigkeit wird das Problem auf PARTITION 2 polynomial reduziert. Hierzu wird aus einer gegebenen Instanz von PARTITION 2 das Portfolioproblem konstruiert [45]:

Sei  $\pi_i = \frac{a_i}{b}$ ,  $p_i = a_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  und  $K = b$ ,  $W = b^2$  und  $\delta = \frac{1}{2}$ . Es wird angenommen, dass PARTITION 2 genau dann eine gültige Lösung hat, wenn auch das Portfolioproblem eine solche hat. Wenn PARTITION 2 eine gültige Lösung  $S$  hat, wenn also gilt:  $\sum_{i \in S} a_i = b$ , wird  $x_i = b$  gesetzt falls  $i \in S$  und  $x_i = 0$  andernfalls. Daraus folgt  $\sum_{i=1}^n p_i x_i = b^2$ ,  $\sum_{x_i \geq K} \pi_i = \frac{1}{2}$ . Also ist  $x$  eine gültige Lösung für das Portfolioproblem.

Andernfalls wird angenommen,  $x$  ist eine gültige Lösung des Portfolioproblems. Dann gilt  $\sum_{i=1}^n p_i x_i = b^2$ ,  $\sum_{x_i \geq K} \pi_i \geq \frac{1}{2}$ . Bezeichne  $S = \{1 \leq i \leq n \mid x_i \geq K\}$ . Daraus folgt  $b^2 = \sum_{i=1}^n p_i x_i \geq \sum_{i \in S} p_i b$  und  $\sum_{i \in S} \pi_i = \sum_{x_i \geq K} \pi_i \geq \frac{1}{2}$

Durch Einsetzen von  $p_i = a_i$  und  $\pi_i = \frac{a_i}{2b}$  erhält man  $b \geq \sum_{i \in S} a_i$  und  $\sum_{i \in S} a_i \geq b$ .

Daraus ergibt sich  $\sum_{i \in S} a_i = b$ , was bedeutet, dass  $S$  eine gültige Lösung von PARTITION ist.

□

Somit ist das Auffinden einer Lösung im VaR-beschränkten Portfolioproblem **NP**-vollständig und gehört zu den Problemen mit besonders hohen Rechenaufwänden. Im Allgemeinen nähert sich die Anzahl lokaler Maxima mit steigender Anzahl von Zuständen  $n!$  [45].

## 5. Multikriterielle evolutionäre Algorithmen

Dieses Kapitel bietet zunächst einen Überblick über evolutionäre Algorithmen, die als Basis für multikriterielle evolutionäre Verfahren dienen.<sup>1</sup> Dabei werden insbesondere die drei evolutionären Operatoren Selektion, Rekombination und Mutation dargestellt. Nach einer Vorstellung klassischer Verfahren zur Lösung multikriterieller Optimierungsprobleme erfolgt die Einführung multikriterieller evolutionärer Algorithmen. Hierbei werden der NSGA-II und der  $\varepsilon$ -MOEA beschrieben sowie Erweiterungen der Implementierungen diskutiert. Die beiden genannten Algorithmen werden in den Kapiteln 8, 9 und 10 zur Lösung der Optimierungsprobleme aus dem Integrierten Portfoliomanagement eingesetzt.

### 5.1. Grundlagen evolutionärer Algorithmen

Als prominente Vertreter intelligenter Methoden aus der Informatik basieren evolutionäre Algorithmen (EAs) auf in der Natur vorkommenden Prozessen und werden zur Lösung von Optimierungsproblemen eingesetzt. Ein generelles Optimierungsproblem wird hierzu wie folgt definiert<sup>2</sup>:

**Definition 5.1 (Optimierungsproblem):**

Ein Optimierungsproblem ist gegeben durch einen Suchraum  $\Omega$ , eine Bewertungsfunktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , die jedem Lösungskandidaten einen Gütewert zuweist, sowie eine Vergleichsrelation  $'\succ'$   $\in \{<, >\}$ . Die Menge der globalen Optima  $X \subseteq \Omega$  ist definiert als  $X = \{x \in \Omega \mid \forall_{x' \in \Omega} f(x) \succeq f(x')\}$ .

Es kann sich folglich entweder um ein Minimierungs- (Vergleichsrelation  $'<'$ ) oder um ein Maximierungsproblem (Vergleichsrelation  $'>'$ ) handeln. Zur Wahrung der Übersichtlichkeit lösen die im weiteren Verlauf dieser Arbeit betrachteten Algorithmen ausschließlich Minimierungsprobleme. Falls eine Zielfunktion  $f(x)$  zu maximieren ist, so kann analog auch  $-f(x)$  minimiert werden.

---

<sup>1</sup>Evolutionäre Algorithmen lassen sich in der Informatik dem Bereich der *Künstlichen Intelligenz* [130, 170] zuordnen und werden daher auch als *Intelligente Methoden* [87] bezeichnet. Weitere Methoden aus diesem Bereich stellen beispielsweise Neuronale Netze [156] oder Kernelmethoden [183] dar, die ebenfalls vielfältige Anwendungen im Kontext Finance finden [137, 29].

<sup>2</sup>S. Weicker [206, S.39].

### 5.1.1. Analogie zur Natur und historische Einordnung

Evolutionäre Algorithmen basieren auf dem Abgleich in der Natur beobachtbarer evolutionärer Prozesse. Die Theorie zur Erklärung dieser Abläufe, die *Evolutionstheorie*, wurde von Charles Darwin entwickelt und im Jahre 1859 veröffentlicht [47].<sup>3</sup> Sie beruht auf der folgenden grundlegenden Annahme: Die Reproduktion der Organismen zieht zufällige Mutationen nach sich. Es ergeben sich dadurch Variationen im Erbgut, die in folgenden Generationen beibehalten werden, falls sie sich als für das Überleben sinnvoll erweisen [206, 170]. Diese natürliche Evolution ermöglicht den Lebewesen auf der Erde im Laufe der Zeit eine Anpassung an unterschiedlichste und sich zudem verändernde Umweltbedingungen. Die Evolution löst somit mittels Selektion und Variation der Arten ein sehr schwieriges Optimierungsproblem.

In der Natur bezeichnet ein **Gen** als Abschnitt auf einem *Chromosom* die kleinste Informationseinheit des Erbguts. In Analogie hierzu bezeichnen in Optimierungsproblemen Gene die einzelnen Lösungsvariablen (z. B. die Gewichtung eines Assets im Portfolio). Alle Gene eines natürlichen Organismus in ihrer Einheit werden **Individuum** (auch *Genom*) genannt. Bei EAs bezeichnet ein Individuum eine konkrete Lösung des Problems. Die unterschiedlichen Ausprägungen eines Gens werden *Allele* genannt. Bezogen auf die Optimierung beschreiben Allele die Wertebereiche der Variablen (z. B. 10%, 20%, usw. für ein Asset-Gewicht). Der *Genotyp* bezeichnet in der Natur die Gesamtheit des Erbguts eines Individuums, d. h. die vollständige Kombination aller Allele.<sup>4</sup> Dagegen beschreibt der *Phänotyp* das tatsächliche Erscheinungsbild des Individuums, das durch seinen Genotyp determiniert wird. Bei evolutionären Verfahren steht der Genotyp stellvertretend für die Struktur eines Individuums, während der Phänotyp konkrete Ausprägungen dieser Struktur bezeichnet [85]. In der Biologie wird eine Gruppe von Individuen, die hinsichtlich ihrer Entstehung miteinander verbunden sind und die eine Fortpflanzungsgemeinschaft in einer bestimmten Gegend darstellen, **Population** genannt. Entsprechend bilden die Individuen eines EAs seine im Zeitablauf evolvierende Population.

Bevor ein EA durchgeführt werden kann, ist zunächst der Suchraum des Optimierungsproblems entsprechend zu kodieren. Hierzu wird für die Individuen eine geeignete **Repräsentation** gewählt. Außerdem wird die *Ziel- oder Bewertungsfunktion* festgelegt, die zum Vergleich der Individuen in der Population dient. Diese wird auch als **Fitness-Funktion** bezeichnet. Der 'Wert' eines einzelnen Lösungsindividuums heißt somit **Fitness**.<sup>5</sup>

Historisch gesehen wurden bereits in den 1950er Jahren erste Versuche unternommen, evolutionäre Prinzipien zur Lösung praktischer Optimierungsproblemen einzusetzen. Friedman

---

<sup>3</sup>Der britische Naturforscher Darwin veröffentlichte die Beobachtungen seiner mehrjährigen Forschungsreise, die ihn u. a. auf die Galapagosinseln führte, in fünf Bänden zwischen 1839 und 1859. Seine Theorie wurde am 24. November 1859 in seinem berühmtem Buch 'The Origin of Species' [47] publiziert. Eine ähnliche Theorie mit dem Namen 'Survival of the Fittest' wurde zeitgleich, jedoch unabhängig von Darwin, von Alfred Russel Wallace entwickelt.

<sup>4</sup>Auch bezeichnet als *Genetische Ausstattung*.

<sup>5</sup>Eine ausführliche Einführung zu EAs geben Weicker [206] sowie [103, 140, 144].



(1956) greift zur Lösung von Ingenieursproblemen auf die natürliche Selektion zurück. Friedberg (1958) sowie Friedberg, Dunham und North (1959) setzen eine evolutionäre Programmgenerierung ein, um die Zuordnung von Eingaben und Ausgaben zu optimieren. Box (1957) nutzte evolutionäre Ansätze für das Design und die Analyse industrieller Experimente [206].

Im folgenden Jahrzehnt entwickelten sich drei Hauptforschungslinien: Die *Evolutionsstrategien* von Bieri, Rechenberg und Schwefel (1964), das *Evolutionäre Programmieren* von Fogel, Owens und Walsh (1965) sowie die *Genetischen Algorithmen* von Holland (1969). Diese drei Linien existierten synchron bis sie im Jahre 1990 durch den Workshop „Parallel Problem Solving from Nature (PPSN)“ unter dem Begriff „Evolutionary Computation“ (Evolutionäres Berechnen) zusammengeführt wurden. Durch die Etablierung von Zeitschriften wie „Evolutionary Computation“ oder „IEEE Transactions on Evolutionary Computation“ gewann das Forschungsgebiet an Bedeutung. Unter diesen günstigen Bedingungen konnten zum einen Verbesserungen in bereits existierenden Verfahren erzielt und zum anderen neue Methoden, wie z. B. die Partikelschwärme (engl. Particle Swarms), entwickelt werden.<sup>6</sup>

### 5.1.2. Ablauf und evolutionäre Operatoren

Nach der passenden Kodierung eines Problems wird bei evolutionären Algorithmen im Allgemeinen der Kreislauf in Abbildung 5.1 durchlaufen. Beim Start werden zunächst alle Individuen zufällig initialisiert<sup>7</sup> und mit der festgelegten Fitness-Funktion bewertet. Hierauf basierend erfolgt die Auswahl (**Paarungsselektion**) und Paarung (**Rekombination**) der Elternindividuen.<sup>8</sup> Analog zur Biologie werden die Gene der erzeugten Nachkommen nun noch zufällig leicht verändert (**Mutation**). Anschließend werden sie ebenfalls bewertet. Im Rahmen der **Umweltselektion** werden die „fittesten“ Individuen, die als zukünftige Eltern in die nächste Generation übernommen werden, ausgewählt. Diese Abfolge wird wiederholt, bis eine vordefinierte Abbruchbedingung erfüllt ist. Als Abbruchbedingung kann beispielsweise eine bestimmte Güte bzw. Fitness der Lösung vorgegeben werden. Auch eine maximale Anzahl von Generationsdurchläufen ist denkbar, um den Algorithmus sicher terminieren zu lassen. Ein vollständiger Durchlauf des Verfahrens wird schließlich als **Generation** bezeichnet. Jede Generation erzeugt eine Menge von einzelnen Lösungsindividuen. In diesem Kreislauf wird das vorgegebene Optimierungsproblem an zwei Stellen herangezogen, um die Individuen mit Hilfe der Zielfunktion zu bewerten. Zum einen bei der einmaligen Initialisierung und zum anderen bei der Berechnung der Fitness der erzeugten Nachkommen nach der Mutation.

<sup>6</sup>Umfassende historische Hintergründe zur Entwicklung evolutionärer Verfahren beschreiben Weicker [206] sowie Fogel [76].

<sup>7</sup>Fortgeschrittene Ansätze zur Individuen-Initialisierung werden in Abschnitt 8.2.1 betrachtet.

<sup>8</sup>*Elternindividuen* bezeichnen Individuen die aus der anfänglichen Initialisierung oder aus einer vorhergehenden Generation stammen. Ihr Genmaterial wird zur Erzeugung (Rekombination) neuer Individuen (*Nachkommen*) verwendet.

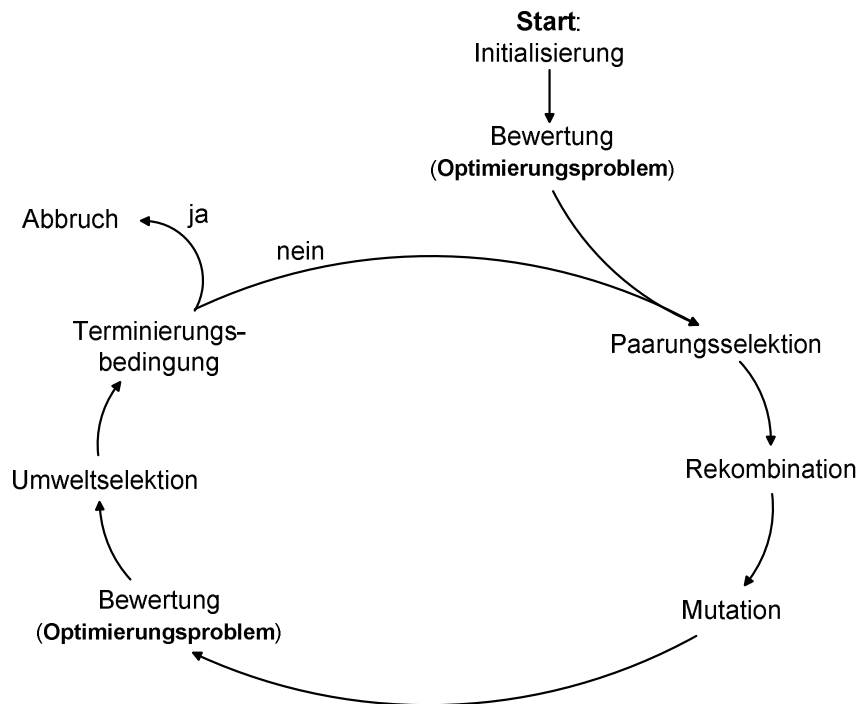


Abb. 5.1.: Klassischer Ablauf eines evolutionären Algorithmus (Darstellung in Anlehnung an [206])

Algorithmus 5.1 stellt den in Abbildung 5.1 illustrierten Ablauf zusätzlich in Pseudocode-Notation dar. Hier bezeichnet  $P$  die Eltern- und  $Q$  die Nachkommenpopulation in jeder Generation. Die festzulegenden Parameter des Algorithmus sind die Fitnessfunktion  $F$ , die Populationsgröße  $\mu$ , die Anzahl der Nachkommen  $\lambda$  sowie die Wahrscheinlichkeiten für Rekombination ( $p_c$ ) und Mutation ( $p_m$ ). Falls gewünscht kann als Abbruchkriterium noch  $t_{max}$  als maximale Anzahl von Generationen festgelegt werden. Insgesamt lässt sich festhalten, dass sich EAs anhand relativ weniger Parameter beschreiben lassen.

In Analogie zum natürlichen Evolutionsprozess (vgl. Abschnitt 5.1.1) verwenden evolutionäre Algorithmen die bereits genannten drei evolutionären Operatoren Selektion, Rekombination und Mutation. Da diese gleichermaßen die Basis der multikriteriellen Verfahren in Abschnitt 5.3 darstellen und sich ihre Parametrisierung wesentlich auf die Lösungsgeschwindigkeit sowie auf die Lösungsgüte eines EAs auswirkt, werden sie im Folgenden ausführlich beschrieben.

## Selektion

Analog zur natürlichen Selektion im Darwinschen Evolutionsprozess ist die Selektion auch für den EA richtungsweisend. Dabei wird zwischen Eltern- und Umweltselektion unterschieden. Mit der **Elternselektion** (auch: *Paarungsselektion*) werden Individuen ausgewählt, auf deren Basis neue Individuen (Nachkommen) gebildet werden. Die **Umweltselektion** bestimmt dagegen, welche Individuen aus der Menge von Eltern und Nachkommen in die nächste Generation übernommen werden sollen. Wenngleich in manchen Algorithmen dasselbe Verfahren für beide

**Algorithmus 5.1** : Evolutionärer Algorithmus in Pseudocode-Notation

---

EINGABE: Zielfunktion  $F$ ;  
 PARAMETER: Populationsgröße  $\mu$ , Anzahl der Nachkommen  $\lambda$ ;  
 $t := 0$ ;  
 Initialisierung Startpopulation  $P$ ;  
 Fitnessberechnung( $P$ );  
 $Q := \emptyset$ ;  
**while** *Abbruchbedingung nicht erfüllt* **do**  
   Paarungsselektion( $P$ );  
   Rekombination auf selektierten Eltern mit  $p_c$ ;  
   Mutation auf Nachkommen mit  $p_m$ ;  
   Aufnahme mutierter Nachkommen in  $Q$ ;  
   Berechne Fitness( $Q$ );  
   Umweltselektion( $P, Q$ );  
    $t = t + 1$ ;  
**end**  
 AUSGABE: Bestes Individuum aus  $P(t)$ ;

---

Selektionsarten verwendet wird, sollte aufgrund der unterschiedlichen Zielsetzungen differenziert werden. Die *Selektionsintensität*<sup>9</sup> dient zur Beschreibung, wie stark ein Selektionsverfahren fitter Individuen gegenüber weniger fitten Individuen auswählt. Sie liefert eine Maßzahl für den Selektionsdruck eines bestimmten Verfahrens. Bei eindeutiger Auswahl der fittesten Individuen liegt eine hohe Selektionsintensität vor, was als *deterministisches* Verfahren bezeichnet wird. Demgegenüber stehen *probabilistische* Selektionsoperatoren, die durch Einbezug von Zufallskomponenten auch schwächere Individuen auswählen können und dadurch relativ gesehen eine geringere Intensität aufweisen.

Bei der Elternselektion sollen möglichst fitter Individuen für die Erzeugung der Nachkommen ausgewählt werden. Zugleich ist jedoch auch zu verhindern, dass der Algorithmus durch zu schnelle Konvergenz in einem lokalen Optimum stagniert. Daher wird für die Auswahl der Elternindividuen eine *probabilistische* Selektion, wie z. B. der **binäre Turnieroperator**, bevorzugt. Goldberg & Deb [86] haben verschiedene Selektionsoperatoren verglichen. Bei diesem Vergleich lieferte der Turnieroperator, was Konvergenz und Zeitkomplexität betrifft, die besten Ergebnisse. Zum einen verhindert die Zufallskomponente eine zu schnelle (lokale) Konvergenz, und zum anderen sind nur wenige Fitnessbewertungen nötig. Da in den beiden, in den Abschnitten 5.3.3 bzw. 5.3.4 vorgestellten Algorithmen NSGA-II und  $\epsilon$ -MOEA eine Variante des binären Turnieroperators zum Einsatz kommt, wird dieser nachfolgend beschrieben.

Aus einer Population von  $n$  Individuen  $x_1, \dots, x_n$  sucht der binäre Turnieroperator mit Hilfe zweier diskreter, auf der Menge  $\{1, \dots, n\}$  gleichverteilter Zufallszahlen zwei mögliche Individuen für die Rekombination aus. Für beide Individuen wird die Fitness berechnet, wobei

---

<sup>9</sup>Definition s. [206, S.69].

das Individuum mit der größeren Fitness als Elternindividuum ausgewählt wird.<sup>10</sup> Das zweite Elternindividuum wird nach demselben Verfahren ausgewählt. Für die in dieser Arbeit betrachteten multikriteriellen Probleme muss der binäre Turnieroperator modifiziert werden, da mehr als ein Zielfunktionswert im Vergleich betrachtet wird. Das konkrete Vorgehen wird in den Abschnitten 5.3.3 bzw 5.3.4 für die beiden verwendeten Algorithmen erläutert.

Während der binäre Turnieroperator bei der Elternselektion zufallsgesteuert auch schlechtere Individuen mit einbezieht, sollte bei der Umweltselektion in jedem Fall sichergestellt werden, dass nur die besten Individuen in die nächste Generation übernommen werden. Hierfür bieten sich also eher *deterministische* Verfahren mit hoher Selektionsintensität an. Diese werden unterschieden in  $(\lambda, \mu)$ -Selektion und  $(\lambda + \mu)$ -Selektion [49].

Die Anzahl der Individuen in der Nachkommenpopulation sei durch  $\lambda$  beschrieben und die in der Elternpopulation mit  $\mu$ . Bei der  $(\lambda, \mu)$ -**Selektion** werden allein die  $\mu$  besten Individuen der Nachkommenpopulation für die nächste Generation ausgewählt. Alle Individuen der Elternpopulation gehen also unabhängig von ihren Fitnesswerten verloren. Bei der  $(\lambda + \mu)$ -**Selektion** werden dagegen die  $\mu$  besten Individuen aus der Gesamtheit von Eltern- und Nachkommenpopulation ausgewählt. Dieses Prinzip wird auch als **Elitismus** bezeichnet, da die besten Individuen auf diesem Wege dauerhaft erhalten bleiben.<sup>11</sup> Aus diesem Grund stagniert die  $(\lambda + \mu)$ -Selektion i. d. R. allerdings auch mit einer höheren Wahrscheinlichkeit an einem lokalen Optimum. Sowohl der NSGA-II als auch der  $\varepsilon$ -MOEA greifen auf das Prinzip des Elitismus zurück. Die konkreten Implementierungen werden in Abschnitt 5.3.3 bzw. 5.3.4 dargestellt.

## Rekombination

Die Rekombination erzeugt Nachkommen aus den gewählten Elternindividuen. Hierzu werden die in den Genen kodierte Eigenschaften der beiden Eltern mit der Wahrscheinlichkeit  $p_c$  gekreuzt.<sup>12</sup> Abhängig davon, ob binäre oder reelle Zahlen rekombiniert werden sollen, werden bei EAs unterschiedliche Rekombinationsverfahren verwendet.

Einen klassischen Rekombinationsoperator für binär kodierte Variablen stellt der *Ein-Punkt-Kreuzungsoperator* (engl. *one point crossover*) dar. Er kreuzt zwei gegebene Elternindividuen  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$  und  $y = (y_1, \dots, y_n)^T$  an einer zufälligen Stelle  $i \in \{1, \dots, n - 1\}$  unter Vertauschung der entsprechenden Bits. Somit ergeben sich die beiden Nachkommen [49]:

$$x' = (x_1, \dots, x_i, y_{i+1}, \dots, y_n)^T \text{ und } y' = (y_1, \dots, y_i, x_{i+1}, \dots, x_n)^T$$

Werden die Individuen an  $n$  zufälligen Stellen gekreuzt, so spricht man allgemein von einem *n-Punkt-Kreuzungsoperator*. Die beiden später verwendeten Algorithmen (NSGA-II und  $\varepsilon$ -MOEA) verwenden für binäre Variablen einen *Zwei-Punkt-Kreuzungsoperator*.

<sup>10</sup>Im Fall gleicher Fitnesswerte wird zufällig eines der beiden Individuum selektiert.

<sup>11</sup>Zitzler et al. [212] zeigen, dass Elitismus eine verbesserte Konvergenz von multikriteriellen Verfahren, die im folgenden Abschnitt 5.3 vorgestellt werden, mit sich bringt.

<sup>12</sup>Somit werden  $(1 - p_c)$  Elternpaare **nicht** gekreuzt.

Derartige Rekombinationsoperatoren sind für reelle Variablen, die im Kontext dieser Arbeit besonders relevant sind, allerdings nicht gut geeignet. Hier werden stattdessen Linearkombinationen verwendet. Mit zwei unabhängigen und identisch auf  $[0; 1]$  gleichverteilten Zufallszahlen  $Z_1$  und  $Z_2$  erhält man somit  $x' = Z_1x + (1 - Z_1)y$  und  $y' = Z_2y + (1 - Z_2)x$ .

Um auch bei reell-kodierten Variablen die Eigenschaften des binären Kreuzungsoperators nachzubilden, entwickelte Deb [50] den *Simulated Binary Crossover* (SBX). Dieser findet ferner im NSGA-II sowie  $\varepsilon$ -MOEA Einsatz. Dabei wird für jede Variable  $x_j, y_j$  mit  $j = 1, \dots, n$  der Nachkommenvektor wie folgt einzeln ermittelt:

$$\begin{aligned} x'_i &= \frac{1}{2}[(1 + \beta_i)x'_i + (1 - \beta_i)y'_i] \\ y'_i &= \frac{1}{2}[(1 - \beta_i)x'_i + (1 + \beta_i)y'_i] \end{aligned} \quad [5.1]$$

Der Faktor  $\beta_i$  folgt einer Verteilung in Abhängigkeit von dem Index  $\eta_c > 0$ . Mit einer auf  $[0; 1]$  gleichverteilten Zufallsvariablen  $u_i$  wird dieser Faktor wie folgt ermittelt:

$$\beta_i = \begin{cases} (2u_i)^{\frac{1}{\eta_c+1}} & \text{für } u_i \leq \frac{1}{2} \\ \left(\frac{1}{2(1-u_i)}\right)^{\frac{1}{\eta_c+1}} & \text{sonst} \end{cases} \quad [5.2]$$

Für die beiden Individuen  $x$  und  $y$  erhält man die Nachkommen  $x'$  und  $y'$ , wenn für jede Stelle  $i = 1, \dots, n$  folgende Schritte durchgeführt werden:

1. Erzeugung einer Zufallszahl  $u_i \sim U[0; 1]$ .
2. Berechnung von  $\beta_i$  mittels [5.2].
3. Berechnung von  $x'_i$  und  $y'_i$  mittels [5.1].

Um einer Tendenz in Richtung eines bestimmten Elternindividuums vorzubeugen, sind die zwei Nachkommen beim SBX-Operator immer symmetrisch um ihre Eltern angeordnet. Zusätzlich wurde der Operator so konstruiert, dass für ein festes  $\eta_c$  der Abstand der beiden Nachkommen proportional zu dem der Eltern ist. Folglich gilt:

$$(x'_i - y'_i) = \beta_i(x_i - y_i) \quad [5.3]$$

Die Verteilung von  $\beta_i$  impliziert weiter, dass Nachkommen nahe den Eltern mit höherer Wahrscheinlichkeit generiert werden als weiter entfernt liegende. Diese Verteilung hängt letztlich vom Parameter  $\eta_c$  ab. In Abbildung 5.2 ist die Verteilung der Nachkommen nach 1000 Simulationen für die beiden Individuen  $x = 0,3$  und  $y = 0,7$  mit unterschiedlichen Parametern für  $\eta_c$  dargestellt. Dabei wird ersichtlich, dass die Nachkommen bei einem höheren Wert für  $\eta_c$  weiter von ihren Elternindividuen entfernt liegen.

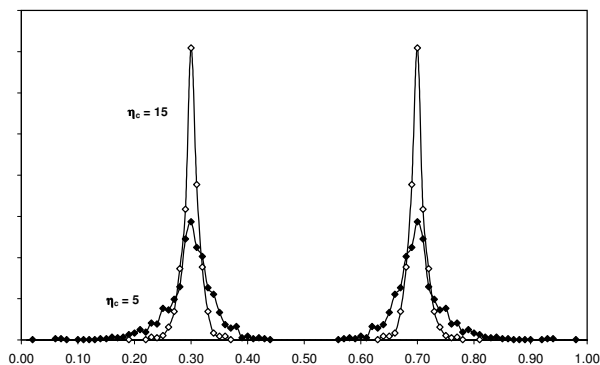


Abb. 5.2.: Empirische Verteilung der Nachkommen von  $x = 0,3$  und  $y = 0,7$  bei 1000 Simulationen des SBX-Operators mit variierendem  $\eta_c$

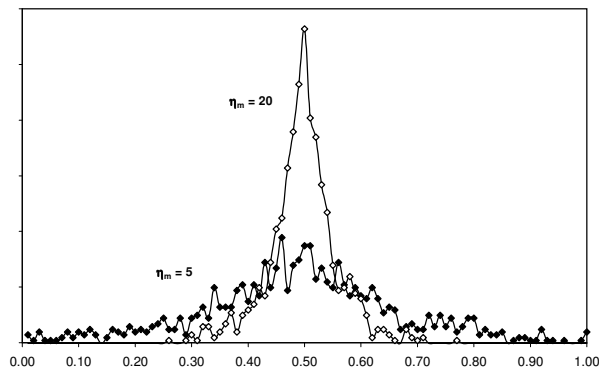


Abb. 5.3.: Empirische Verteilung des mutierten Individuums  $x' = 0,5$  bei 1.000 Simulationen des polynomialen Mutationsoperators mit variierendem  $\eta_m$

## Mutation

Der Mutationsoperator stellt eine wichtige Zufallskomponente eines evolutionären Algorithmus dar. Er stellt sicher, dass die Suche nach einer Lösung über bereits bekannte Lösungen oder deren Kombinationen hinausreicht. Eine hohe Mutationswahrscheinlichkeit  $p_m$  sorgt für eine breit gestreute Suche im Lösungsraum, kann allerdings gleichzeitig die Konvergenz des Algorithmus negativ beeinträchtigen. Folglich sollte ein relativ niedriger Wert für  $p_m$  gewählt werden, um zufällige Änderungen grundsätzlich zuzulassen und dennoch gute Konvergenz zu erhalten. Die Mutation wird üblicherweise nur bei neuen Individuen angewendet. Auch hier gibt es unterschiedliche Operatoren für binäre bzw. reelle Zahlen. Bei binären Variablen wird mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit  $p_m$  für jede Bitstelle der Variable entschieden, ob ein Bit mutiert werden soll. Dies geschieht durch einen *Bit-Flip* mit 0-1-Tausch.

Dahingegen wird bei einer reellen Variablen  $x_i$  eine Zufallszahl addiert, die einer bestimmten Verteilung folgt:  $x'_i = x_i + Z$ . Für  $Z$  wird beispielsweise eine symmetrische Gleichverteilung  $Z \sim U[-\Delta; \Delta]$  oder eine Normalverteilung  $Z \sim N(0; \sigma_i)$  angenommen. Bei der Normalverteilung sinkt die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein mutiertes Individuum stark gegenüber dem Ausgangsindividuum ändert. Wie auch bei weiteren Parametern evolutionärer Verfahren sollte über die Mutationsweite  $\Delta$  bzw. die mittlere Abweichung  $\sigma_i$  vom Ursprungswert in Abhängigkeit vom vorliegenden Problem entschieden werden.<sup>13</sup>

NSGA-II und  $\varepsilon$ -MOEA verwenden beide den *polynomialen Mutationsoperator*<sup>14</sup>, der von Deb & Goyal [53] speziell für die Mutation reeller Variablen entwickelt wurde. Die potenziell

<sup>13</sup>Eine ausführliche Darstellung der Parameterwahl für die betrachteten Optimierungsprobleme in dieser Arbeit findet sich in 8.2.

<sup>14</sup>Für die Mutation binärer Variablen wird der klassische Bit-Flip durchgeführt.

zu mutierende Variable  $x_i$  ergibt sich wie folgt:

$$x'_i = x_i + (\max x_i - \min x_i) \bar{\delta}_i \quad [5.4]$$

Dabei bezeichnen  $\min x_i$  und  $\max x_i$  die Ränder des Definitionsbereichs von  $x_i$ . Ähnlich  $\beta_i$  beim SBX-Operator hängt auch  $\bar{\delta}_i$  von einem Index  $\eta_m > 0$  sowie einer Zufallszahl  $u_i \sim U[0; 1]$  ab.

$$\bar{\delta}_i = \begin{cases} (2u_i)^{\frac{1}{\eta_m+1}} - 1 & \text{für } u_i \leq \frac{1}{2} \\ 1 - (2(1-u_i))^{\frac{1}{\eta_m+1}} & \text{sonst} \end{cases} \quad [5.5]$$

In Abbildung 5.3 findet sich wiederum die Simulation zweier Verteilungen. Dabei wird ersichtlich, dass bei großem Wert für  $\eta_m$  der Variablenwert durch die Mutation vergleichsweise eng begrenzt nach oben bzw. unten schwankt. Bei kleinem  $\eta_m$  sind dagegen beinahe alle Werte im Definitionsbereich möglich.

### 5.1.3. Anmerkungen zur Parametrisierung

Die Wirkungsweisen der vorgestellten evolutionären Operatoren auf das Konvergenzverhalten und die Diversität einer EA-Population lassen sich wie folgt charakterisieren:

- Selektion vermindert die Diversität je nach Selektionsintensität mehr oder weniger stark: Starke Selektionsintensität bzw. starker Selektionsdruck führen entsprechend zu einer starken Verringerung der Diversität.
- Mutation erhöht die Diversität je nach Mutationswahrscheinlichkeit  $p_m$ : Hohe Werte von  $p_m$  wirken also tendenziell diversitätserhöhend. Allerdings führt eine hohe Mutationswahrscheinlichkeit auch zu einer stark zufallsbasierten Suche.
- Rekombination unterstützt das Konvergenzverhalten eines EAs. Abhängig von der vorhandenen Diversität in der Population, der gewählten genetischen Kodierung des Problems und vom gewählten Rekombinationsoperator kann sie sich sehr unterschiedlich auf die Diversität auswirken.

Bei evolutionären Verfahren ist das Zusammenspiel der verschiedenen Operatoren von herausragender Bedeutung. Durch problemabhängige Parameterwahl kann der Algorithmus die Vorzüge jedes einzelnen Operators optimal ausnutzen und konvergiert schnell in Richtung optimaler Lösungen bei gleichzeitig hoher Diversität. Dabei ist problemspezifisch zu verhindern, dass der Algorithmus, z. B. aufgrund eines zu hohen Selektionsdrucks, in potenziell vorhandenen lokalen Optima stagniert. Eine ausreichend große Mutationswahrscheinlichkeit erlaubt dem Verfahren auch weiter entfernte Lösungen des Problems aufzufinden.

## 5.2. Multikriterielle Optimierungsprobleme

Die Methoden in der Optimierungsforschung konzentrieren sich üblicherweise auf die Lösung von Optimierungsproblemen mit nur einer Zielfunktion. In der praktischen Anwendung treten jedoch häufig Probleme mit mehreren zu optimierenden Zielfunktionen auf, deren Ziele zudem in reziprotem Verhältnis zueinander stehen. Dabei müssen beispielsweise Kosten und Nutzen verschiedener Handlungsoptionen gegeneinander abgewogen werden. Im Kontext des Integrierten Portfoliomanagements besteht das Ziel darin, einen Trade-off zwischen der Renditezielfunktion sowie einer oder mehrerer Risikozielfunktionen des Portfolios zu finden.

Klassische Methoden der monokriteriellen Optimierung lassen sich grundsätzlich erweitern, um auch Mehrzielprobleme lösen zu können. Bevor im folgenden Abschnitt ein Überblick solcher Anpassungen gegeben wird, werden zunächst wesentliche Definitionen aus dem Bereich der multikriteriellen Optimierung eingeführt.

### 5.2.1. Definitionen

Ein multikriterielles Optimierungsproblem (MOP)<sup>15</sup> wird wie folgt definiert [211]<sup>16</sup>:

**Definition 5.2 (Multikriterielles Optimierungsproblem (MOP)):**

Ein allgemeines MOP besteht aus einer Menge von  $n$  Parametern (Entscheidungsvariablen), einer Menge von  $k$  Zielfunktionen und einer Menge von  $m$  Nebenbedingungen. Sowohl die Zielfunktionen als auch die Nebenbedingungen hängen von den Entscheidungsvariablen ab:

$$\begin{aligned} \text{Min. } y &= f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)) \\ \text{u. d. N. } e(x) &= (e_1(x), e_2(x), \dots, e_m(x)) \leq 0 \\ x &= (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X \\ y &= (y_1, y_2, \dots, y_k) \in Y \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet  $x$  den Entscheidungsvektor aus dem Entscheidungsraum  $X$  und  $y$  den Zielfunktionsvektor aus dem Zielfunktionsraum  $Y$ . Die Nebenbedingungen  $e(x) \leq 0$  legen die zulässigen Lösungen fest.

**Definition 5.3 (Zulässige Lösungen):**

Die Menge der zulässigen Lösungen  $X_f$  setzt sich aus allen Entscheidungsvariablen  $x$  zusammen.

---

<sup>15</sup>Engl.: *multi-objective* oder *multicriteria optimization problem* [85].

<sup>16</sup>Wie bereits eingangs erwähnt, werden ausschließlich Minimierungsprobleme betrachtet. Maximierungsprobleme lassen sich durch Multiplikation mit  $(-1)$  ebenfalls in Minimierungsprobleme umwandeln.



men, die die Nebenbedingungen  $e(x)$  erfüllen:

$$X_f = \{x \in X \mid e(x) \leq 0\} \quad [5.6]$$

Weiterhin wird die Abbildung von  $X_f$  in den Zielfunktionsraum als zulässiger Bereich  $Y_f = f(X_f) = \bigcup_{x \in X_f} f(x)$  bezeichnet.

Die konfliktären Zielfunktionen bei der Mehrziel-Optimierung erfordern Trade-offs der Lösungen in den verschiedenen Zielfunktionsdimensionen. Anders als bei der Ein-Ziel-Optimierung kann somit bei multikriteriellen Optimierungsproblemen in den meisten Fällen nicht eindeutig über die Optimalität einer Lösung entschieden werden. Zur Beurteilung der Güte einzelner Lösungen dient der Begriff der Pareto-Dominanz<sup>17</sup>:

**Definition 5.4 (Pareto-Dominanz):**

Ein Lösungsvektor  $\vec{u} = (u_1, \dots, u_k)$  dominiert den Vektor  $\vec{v} = (v_1, \dots, v_k)$  (bezeichnet mit  $\vec{u} \prec \vec{v}$ ) genau dann, wenn  $u$  kleiner ist als  $v$ , d. h. wenn gilt<sup>18</sup>:

- $\forall i \in 1, \dots, k : u_i \leq v_i$
- $\exists i \in 1, \dots, k : u_i < v_i$

In Abbildung 5.4 ist der von den vier exemplarischen Lösungen  $P_1$ - $P_4$  eines Portfolioproblems dominierte Bereich grau hinterlegt. Dabei steht Zielfunktion 1 für die zu minimierende Risikozielfunktion und Zielfunktion 2 für die zu maximierende erwartete Rendite eines Portfolios. Vor der Optimierung muss Zielfunktion 2 hier also noch mit  $(-1)$  multipliziert werden, damit sich entsprechend der Vorgaben ein Minimierungsproblem ergibt.

Bei Prüfung auf Pareto-Dominanz können drei verschiedene Fälle auftreten:

- $\vec{u}$  dominiert  $\vec{v}$  ( $\vec{u} \prec \vec{v}$ )
- $\vec{v}$  dominiert  $\vec{u}$  ( $\vec{v} \prec \vec{u}$ )
- $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  stehen in keinem Dominanzverhältnis zueinander ( $\vec{u} \not\prec \vec{v} \wedge \vec{v} \not\prec \vec{u}$ )

Zielfunktionsvektoren, die in keinem gegenseitigen Dominanzverhältnis mit einem beliebigen anderen Vektor aus dem Zielfunktionsraum stehen, repräsentieren optimale Lösungen eines MOPs. Basierend auf 5.4 lässt sich somit der Begriff der Pareto-Optimalität einführen [35]:

<sup>17</sup>Diese Bezeichnung geht auf Vilfredo Pareto [155] zurück, der diese Konzepte 1896 verallgemeinerte.

<sup>18</sup>Von *schwacher* Pareto-Dominanz („ $\preceq$ “) spricht man genau dann, wenn die zweite Bedingung nicht erfüllt ist.

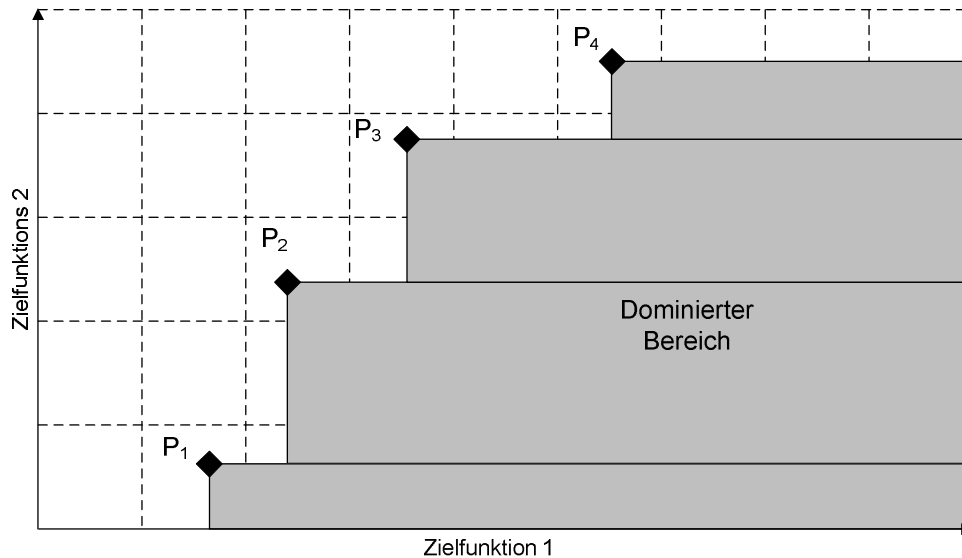


Abb. 5.4.: Dominiertes Bereich bzgl. des gewöhnlichen Dominanzprinzips

**Definition 5.5 (Pareto-Optimalität):**

Eine Lösung  $x \in X$  heißt genau dann *Pareto-optimal* in Bezug auf  $X$ , wenn gilt:

$$\nexists x' \in X : \vec{v} = f'(x') = (f_1(x'), \dots, f_k(x')) \preceq \vec{u} = f(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x))$$

Die Pareto-Optimalität bezieht sich auf den gesamten Entscheidungsraum, falls dies nicht anders spezifiziert wurde. Alle Pareto-optimalen Lösungen eines MOP bilden zusammen die Pareto-optimale Menge.

**Definition 5.6 (Pareto-optimale Menge):**

Für ein gegebenes MOP  $f(x)$  wird die *Pareto-optimale Menge*<sup>19</sup> ( $P^*$ ) definiert als:

$$P^* := \{x \in X \mid \nexists x' \in X f(x') \preceq f(x)\}$$

Die Pareto-optimale Menge repräsentiert folglich alle Lösungen aus dem Entscheidungsraum  $X$ , deren zugehörige Zielfunktionswerte (**Pareto-Front**) nicht gleichzeitig verbessert werden können. Da diese Lösungen von keiner anderen aus  $P^*$  dominiert werden, bezeichnet man sie auch als **effizient**.

**Definition 5.7 (Pareto-Front):**

Für ein gegebenes MOP  $f(x)$  und eine Pareto-optimale Menge  $P^*$  wird die *Pareto-Front* ( $PF^*$ ) definiert als:

$$PF^* := \{\vec{u} = f(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x)) \mid x \in P^*\}$$

<sup>19</sup>Auch: *Nicht-dominierte Menge*.

Bei komplizierten Optimierungsproblemen wird die tatsächliche Pareto-optimale Menge bzw. Pareto-Front aus Definition 5.6 bzw. 5.7 normalerweise nur angenähert. Die nichtdominierten Lösungen eines solchen Problems werden **Qualitätsmenge**<sup>20</sup> genannt [144]. Weiterhin existieren die Bezeichnungen **lokal Pareto-optimale Menge** bzw. **Front**.

### 5.2.2. Klassische Lösungsansätze

Lösungsverfahren für multikriterielle Probleme können nach Horn [102] in die folgenden drei Kategorien klassifiziert werden:

1. Multikriterielle Entscheidungsfindung *vor* der Suche
2. Multikriterielle Entscheidungsfindung *nach* der Suche
3. Integration von Suche und multikriterieller Entscheidungsfindung

zu 1.) Die Optimierungstheorie beschäftigt sich i. d. R. mit dem Auffinden von optimalen Lösungen für Probleme mit einer Zielfunktion, die maximiert oder minimiert und durch verschiedene Nebenbedingungen beschränkt wird.<sup>21</sup> In Abhängigkeit von der zu optimierenden Funktion (z. B. linear oder quadratisch) und den Nebenbedingungen (z. B. linear) existiert hierfür eine Vielzahl von Verfahren. Aus diesem Grund werden multikriterielle Probleme bei Anwendung von „klassischen“<sup>22</sup> Verfahren zur Lösung in monokriterielle, d. h. Probleme mit nur einer Zielfunktion, transformiert [211]. Entsprechend Horn [102] erfolgt in diesem Fall also die Entscheidungsfindung *vor* der Suche.

zu 2.) Multikriterielle evolutionäre Algorithmen, die im nächsten Abschnitt 5.3 vorgestellt werden, ermöglichen die Suche nach Pareto-optimalen Lösungen *vor* der Entscheidungsfindung. Folglich ist a priori kein Wissen über die relative Bedeutung der einzelnen Zielfunktionen notwendig und der Entscheidungsträger erhält eine Menge unvoreingenommener Lösungen zur Auswahl.

zu 3.) In diesem Fall wird die Suche nach Pareto-effizienten Lösungen und die Eingrenzung des Lösungsraums durch den Entscheidungsträger kombiniert. Dieses Verfahren wird hier nicht weiter verfolgt. Einen Überblick gibt Horn [102].

Bei Ansätzen mit klassischen Methoden ist folglich a priori Wissen über die Priorität bezüglich einzelner Ziele in den Optimierungslauf zu integrieren. Somit sind die erhaltenen Lösungen nicht mehr unvoreingenommen. Im Folgenden werden zwei klassische Verfahren zur Mehrzieloptimierung vorgestellt und diskutiert.

<sup>20</sup>Engl.: *quality set*.

<sup>21</sup>Vgl. Definition 5.2 mit  $k = 1$ .

<sup>22</sup>Diese Verfahren werden als „klassisch“ bezeichnet, um sie von den später in Abschnitt 5.3 vorgestellten Methoden auf Basis evolutionärer Algorithmen zu unterscheiden.

Die einfachste und am weitesten verbreitete Methode ist die **Gewichtungsmethode**.<sup>23</sup> Hier werden die einzelnen Zielfunktionen des MOP mittels einer Linearkombination in ein monokriterielles Optimierungsproblem transformiert:

$$\begin{aligned} \text{Min. } y = f(x) &= w_1 \cdot f_1(x) + w_2 \cdot f_2(x) + \dots + w_k \cdot f_k(x) \\ \text{u. d. N. } x &\in X_f \end{aligned}$$

Der vorgegebene Gewichtsvektor  $w_i$  wird dabei ohne Verlust der Allgemeinheit zunächst normalisiert, so dass gilt  $\sum w_i = 1$ . Bei Variation der Gewichte erhält man in jedem Optimierungsdurchlauf eine weitere Lösung des Optimierungsproblems. Es kann gezeigt werden, dass diese Methode Pareto-optimale Lösungen findet, wenn ein exakter Optimierungsalgorithmus für das Ein-Ziel-Problem verwendet wird. Allerdings gilt dies nur für konvexe Zielfunktionsräume [211].

Obwohl der Ansatz zunächst durch seine Einfachheit besticht, stellt sich die Frage, welche Gewichtungen für die Optimierung sinnvoll sind. Naturgemäß sollten die Zielfunktionen entsprechend ihrer Bedeutung gewichtet werden. Dabei muss jedoch zusätzlich noch die potenziell unterschiedliche Skalierung der einzelnen Funktionen berücksichtigt werden.<sup>24</sup>

Beim **Ansatz über Nebenbedingungen**<sup>25</sup> werden im MOP in Definition 5.2  $(k - 1)$  Zielfunktionen in Nebenbedingungen transformiert und für diese die Schranken  $\varepsilon_i$  verwendet. Nur eine (beliebig wählbare) Funktion wird für die monokriterielle Optimierung beibehalten:

$$\begin{aligned} \text{Min. } f_h(x), \\ \text{u. d. N. } e_i(x) = f_i(x) &\leq \varepsilon_i, \quad (1 \leq i \leq k, i \neq h) \\ x &\in X_f \end{aligned} \quad [5.7]$$

Die Schranken  $\varepsilon_i$  werden in jedem Durchlauf variiert und somit wird schrittweise eine Lösung des mehrdimensionalen Problems gefunden. Ein Vorteil dieses Ansatzes gegenüber der Gewichtungsmethode besteht darin, dass auch für nichtkonvexe Probleme Pareto-optimale Lösungen gefunden werden können. Allerdings hängt ein gutes Optimierungsverhalten wesentlich von der passenden Wahl des Vektors  $\varepsilon_i$  ab.

Der Vorteil der präsentierten klassischen Methoden<sup>26</sup> besteht darin, dass nach Transformation des multikriteriellen Optimierungsproblems in ein monokriterielles Optimierungsproblem bewährte Ein-Ziel-Optimierungsverfahren angewendet werden können. Allerdings ergeben sich Probleme der Verfahren mit der Beschaffenheit der Pareto-optimalen Front (Gewichtungsmethode) oder es ist spezifisches Wissen über das betrachtete Problem notwendig (Ansatz über

<sup>23</sup>Engl.: *weighting method* (auch: *weighted sum method*).

<sup>24</sup>Weitere Einschränkungen dieses Ansatzes finden sich in Deb [49].

<sup>25</sup>Engl.: *constraint method* oder  *$\varepsilon$ -constraint method* [49].

<sup>26</sup>Einen umfassenden Überblick weiterer klassischer Methoden geben Deb [49] sowie Horn [102].

Nebenbedingungen). Allen klassischen Verfahren gemein ist zudem die Eigenschaft, dass in jedem Durchlauf nur eine Trade-off-Lösung eines MOPs ermittelt werden kann [211, 49].

### 5.3. Multikriterielle evolutionäre Algorithmen

Im folgenden Abschnitt werden zunächst die bedeutendsten Ansätze aus dem Bereich der multikriteriellen evolutionären Algorithmen (MOEAs<sup>27</sup>) sowie einige Anwendungen im Finanzbereich vorgestellt. Anschließend werden die beiden gewählten Algorithmen NSGA-II und  $\epsilon$ -MOEA im Detail vorgestellt.

#### 5.3.1. Überblick MOEAs und Anwendungen

Bereits 1967 wies Rosenberg [169] auf das Potenzial genetischer Algorithmen zur Lösung multikriterieller Probleme hin. Allerdings implementierte erst Schaffer [172] im Jahre 1985 mit dem *Vector Evaluated GA (VEGA)* einen ersten entsprechenden Algorithmus. Verstärkte Forschungsbemühungen sind schließlich seit etwa 15 Jahren zu beobachten. Seitdem hat die Zahl der Veröffentlichungen in diesem Bereich sehr stark zugenommen.

Die bisher vorgeschlagenen Ansätze für multikriterielle Algorithmen können nach verschiedenen Kriterien kategorisiert werden. Das vielleicht einfachste Kriterium unterscheidet nach der Art des Selektionsmechanismus folgende drei Typen von MOEAs:

- Ansätze mit Zielfunktionsaggregation
- Populationsbasierte Ansätze
- Pareto-basierte Ansätze

Bei **Ansätzen mit Zielfunktionsaggregation**<sup>28</sup> werden multikriterielle Probleme beispielsweise mittels gewichteter Addition in einen einzelnen Zielfunktionswert aggregiert. Die Aggregation kann dabei linear oder nichtlinear erfolgen. Es ist allerdings anzumerken, dass lineare Verfahren (analog zu den klassischen Methoden) nichtkonvexe Abschnitte einer Pareto-Front nicht annähern können.

**Populationsbasierte Ansätze** machen sich die Gesamtheit der Individuen einer Population zunutze, um die Suche im Suchraum besser zu verteilen. Der VEGA-Algorithmus von Schaffer [172] ist ein klassisches Beispiel dieser Kategorie. Da bei diesen Ansätzen vom Konzept der Pareto-Dominanz kein direkter Gebrauch gemacht wird, erreichen sie bei Vergleichen i. d. R. wenig zufriedenstellende Ergebnisse. Diese Verfahren werden daher ebenfalls nicht weiter betrachtet.

<sup>27</sup>Engl.: *multi-objective evolutionary algorithms*.

<sup>28</sup>Diese Verfahren ähneln dem klassischen Ansatz der Gewichtungsmethode (s. Abschnitt 5.2.2).

Dem aktuellen Stand der Forschung entsprechen die **Pareto-basierten Ansätze**, bei denen die Pareto-Dominanz eine zentrale Rolle spielt [35]. Folgende Algorithmen stellen eine Auswahl erfolgreicher Pareto-basierter Ansätze dar<sup>29</sup>:

- *Multi-objective Genetic Algorithm (MOGA)* von Fonseca und Fleming [77]
- *Nondominated Sorting Genetic Algorithm (NSGA)* von Srinivas und Deb [193]
- *Pareto Archived Evolution Strategy (PAES)* von Knowles und Corne [121]
- *Strength Pareto Evolutionary Algorithm (SPEA)* [214]

### 5.3.2. Ablauf eines MOEAs

MOEAs stellen Erweiterungen evolutionärer Algorithmen hinsichtlich folgender Hauptaspekte [35] dar:

- Auswahl von Individuen mit Präferenz für nichtdominierte Lösungen gegenüber dominierten Lösungen
- Erhaltung der Diversität der Lösungsmenge durch möglichst viele Individuen aus der (lokal) optimalen Pareto-Menge

Diese Gesichtspunkte ermöglichen es dem Anwender, bereits in einem einzigen Durchlauf eine Anzahl von Lösungen für ein Optimierungsproblem ausfindig zu machen. Dies wird durch das Populationskonzept evolutionärer Verfahren (s. Abschnitt 5.1) erreicht. Die Population von Lösungen evolviert bei (multikriteriellen) Optimierungsproblemen über die Generationen hinweg in Richtung der optimalen Lösung(en).

Das erklärte Ziel eines MOEA besteht darin, zunächst eine Menge von objektiv optimalen Lösungen möglichst nah an der tatsächlichen Pareto-Front (s. Definition 5.7) zu finden, die gleichzeitig gut über den Lösungsraum verteilt sind. In einem zweiten Schritt bringt der Entscheidungsträger seine subjektiven Präferenzen ein und trifft auf Basis der erhaltenen Pareto-optimalen Lösungen eine Entscheidung.<sup>30</sup>

Ein wesentlicher Vorteil gegenüber den klassischen Verfahren aus dem vorgehenden Abschnitt 5.2.2 besteht damit darin, dass a priori keine Annahmen bzw. Vorkenntnisse über das Optimierungsproblem notwendig sind. Insbesondere muss der Entscheidungsträger vor dem Optimierungslauf keine individuelle Nutzenfunktion festlegen. Er muss also beispielsweise keine Gewichte für die einzelnen Zielfunktionswerte festlegen, wie dies bei der verbreiteten Gewichtungsmethode (s. Abschnitt 5.2.2) der Fall ist.

---

<sup>29</sup>Ein ausführlicher Überblick dieser Verfahren findet sich in [35].

<sup>30</sup>Eine ausführliche Darstellung des konkreten Ablaufs von MOEAs findet sich in Deb [49].

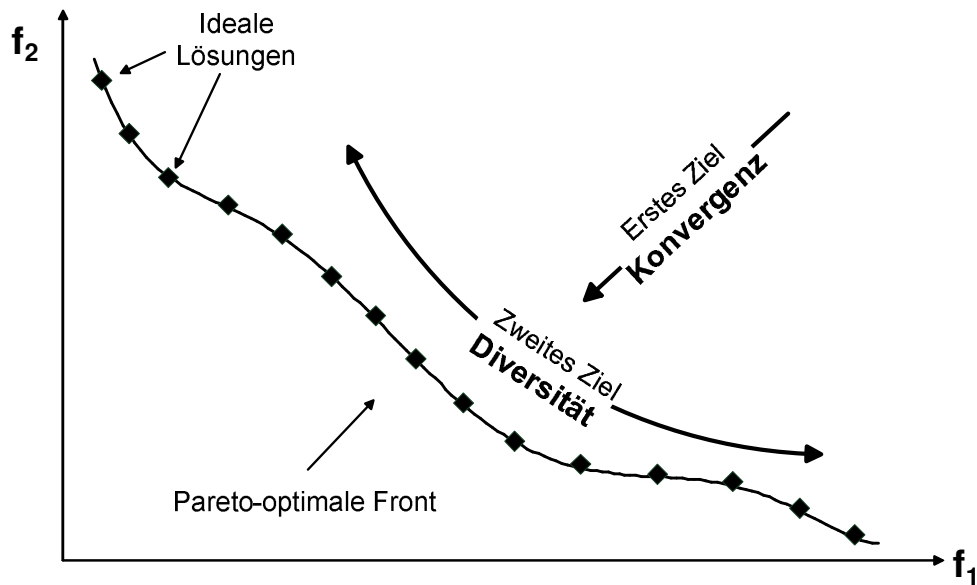


Abb. 5.5.: Zentrale Zielsetzungen und ideale Lösungen eines multikriteriellen evolutionären Algorithmus

Ein weiterer Vorteil von MOEAs liegt darin, dass keine Kenntnis von der Struktur der Lösungsmenge notwendig ist. Zudem kann der Algorithmus Zusammenhänge zwischen Parametern und Lösungen des Optimierungsproblems erschließen, die aufgrund der Komplexität von vielen Praxisproblemen über bekannte klassische Verfahren nicht ermittelt werden können.

Moderne MOEAs sind algorithmisch sehr effizient implementiert. Insbesondere „zieht“ eine Lösung nahe der Pareto-optimalen Front auch weitere Individuen in Richtung dieser Front [54].

In Abbildung 5.5 sind die beiden zentralen Zielsetzungen eines MOEAs visualisiert. Idealerweise soll der MOEA eine rasche und gute **Konvergenz** in Richtung der wahren Pareto-Front besitzen (Ziel 1). Gleichzeitig ist jedoch für den Entscheidungsfinder auch eine gute Verteilung der Lösungsindividuen über den Zielfunktionsraum wünschenswert. Dieses zweite Ziel wird als **Diversität** des Algorithmus bezeichnet. In Abbildung 5.5 sind zusätzlich „ideale“ Lösungen markiert, die perfekt auf die wahre Front konvergieren und in konstanten Abständen den Lösungsraum abdecken. Als „suboptimal“ gelten sowohl Lösungen auf der Pareto-Front mit unregelmäßigen Abständen untereinander als auch gut verteilte Lösungen mit weitem Abstand von der tatsächlichen Front [49].

### 5.3.3. NSGA-II

Der *NSGA-II* stellt eine indirekte Weiterentwicklung des NSGA (Non-dominated sorting genetic algorithm) [193] dar und wurde von Deb et al. [51] vorgeschlagen. Die wesentlichen Kritikpunkte bisheriger Ansätze, die Non-dominated Sorting sowie Sharing<sup>31</sup> benutzten, waren folgende [57]:

<sup>31</sup>Sharing dient zur Erhaltung der Diversität der Lösungen.

1. Hohe Komplexität von  $\mathcal{O}(MN^3)$  des Non-dominated Sorting<sup>32</sup>
2. Kein Einsatz von Elitismus<sup>33</sup>
3. Notwendigkeit zur Festlegung eines Sharing-Parameters

Alle diese Kritikpunkte werden durch den NSGA-II hinfällig. Der Algorithmus basiert dabei, wie schon der NSGA [193], auf verschiedenen Klassifikationsschichten für die Individuen. Vor der Selektion wird die gesamte Population mittels des Nichtdominanzprinzips schichtenweise geordnet. Zusätzlich verwendet der NSGA-II Elitismus und den Crowded-Comparison-Operator. Dennoch beträgt die Komplexität des Verfahrens nur  $\mathcal{O}(MN^2)$ .<sup>34</sup> Im Weiteren werden die wesentlichen Implementierungsmerkmale des NSGA-II erläutert.

Der NSGA-II wurde auf verschiedene bekannte Testfunktionen angewendet und zeigte im direkten Vergleich mit weiteren bekannten MOEAs, u. a. SPEA [214] und PAES [121], eine sehr gute Performance [51, 56, 57]. Auch in Praxisanwendungen sticht der NSGA-II durch hohe Geschwindigkeit bei gleichzeitig sehr guter Lösungsqualität hervor und qualifiziert sich damit grundsätzlich auch für das vierdimensionale Optimierungsproblem des Integrierten Portfoliomanagements.

### Non-dominated Sorting

Der Kerngedanke des *Non-dominated Sorting* besteht darin, die Individuen einer Population in verschiedene Schichten (Pareto-Fronten) einzuteilen, in denen jeweils ausschließlich sich gegenseitig nichtdominierende Individuen enthalten sind. Zur Erstellung dieses Rankings wird zunächst anhand des Pareto-Dominanzprinzips<sup>35</sup> die erste Pareto-Front sich nichtdominierender Lösungen aus der Vereinigung  $R_t = P_t \cup Q_t$  der Elternpopulation  $P_t$  und der Nachkommenpopulation  $Q_t$  bestimmt. Diese Front wird  $F_1$  genannt und anschließend für den nächsten Schritt ausgeblendet. Im zweiten Schritt werden aus  $R_t - F_1$  die nichtdominierten Individuen der nächsten Schicht  $F_2$  bestimmt. Das Verfahren läuft solange bis keine Individuen mehr vorhanden sind und die Menge  $R_t$  komplett in  $l$  Pareto-Fronten  $\{F_1, \dots, F_l\}$  aufgeteilt ist. Dieses Verfahren wird in der Mitte von Abbildung 5.6 illustriert.

Beim naiven Ansatz erfordert das Auffinden der Individuen in der ersten Pareto-Front  $F_1$  dabei den Vergleich jedes Individuums der Population mit jedem anderen Individuum. Hierzu sind  $\mathcal{O}(MN)$ <sup>36</sup> Vergleiche für jedes Individuum notwendig. Folglich beträgt die Komplexität zum Auffinden der ersten Schicht  $\mathcal{O}(MN^2)$ . Für den Fall, in dem jede Front aus nur einer

---

<sup>32</sup> $M$  für die Anzahl der Zielfunktionen und  $N$  für die Populationsgröße.

<sup>33</sup>Die Untersuchung von [212] hat gezeigt, dass Elitismus das Konvergenzverhalten von MOEAs deutlich verbessert.

<sup>34</sup>S. nachfolgender Abschnitt.

<sup>35</sup>S. Definition 5.4.

<sup>36</sup> $M$  für die Anzahl der Zielfunktionen und  $N$  für die Populationsgröße.



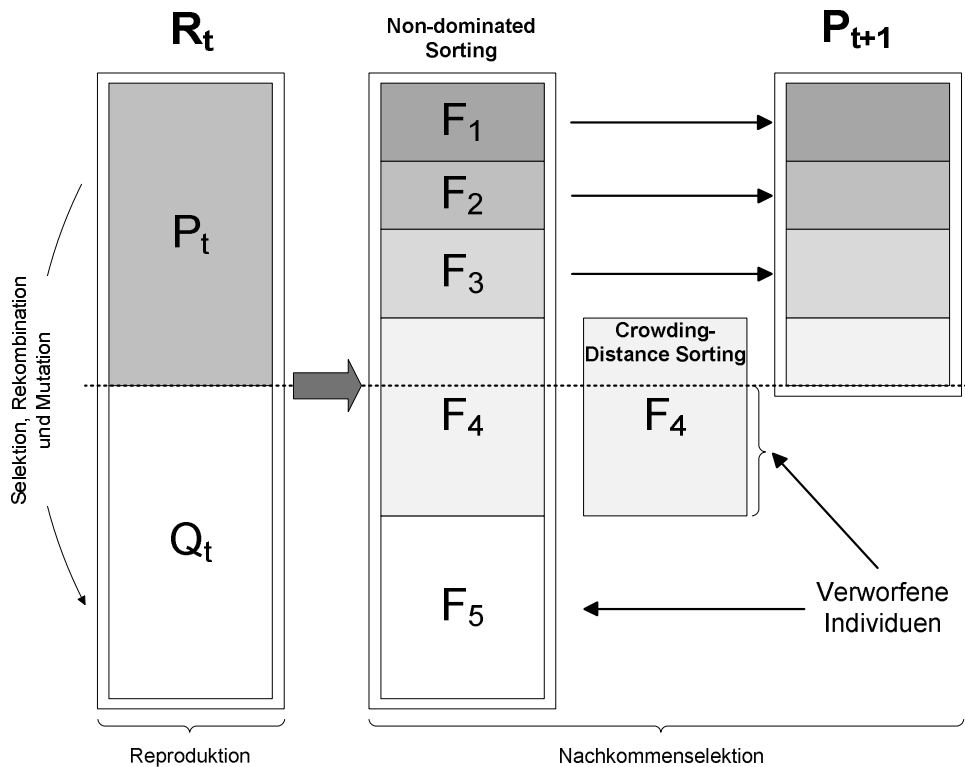


Abb. 5.6.: Non-dominated Sorting und Crowding Distance Sorting

Lösung besteht, kann die Komplexität dieses Verfahrens bei Durchführung für alle weiteren  $l$  Pareto-Fronten  $\mathcal{O}(MN^3)$  betragen [57].<sup>37</sup>

Zur Verbesserung des einfachen Ansatzes haben Deb et al. [56] ein Verfahren entwickelt, mit dem die Komplexität der Sortierung auf  $\mathcal{O}(MN^2)$  reduziert wird (s. Algorithmus 5.2 bzw. 5.3). Dieses verwendet eine intelligente *Book-keeping-Strategie*, die in ähnlicher Weise bereits von anderen Autoren vorgeschlagen wurde [121]. Zunächst werden mit Komplexität  $\mathcal{O}(MN^2)$  für alle Individuen der Population  $R_t = P_t \cup Q_t$  die folgenden beiden Parameter (s. Algorithmus 5.2) berechnet:

- Anzahl  $n_r$  aller Lösungen, die die Lösung  $r$  dominieren (*Domination Count*)
- Menge  $S_r$  mit allen Lösungen, die von Lösung  $r$  dominiert werden (*Domination Set*)

Alle Lösungen der ersten Front haben danach einen Domination Count von  $n_r = 0$ . Nun erfolgt ein neuer Durchlauf gemäß Algorithmus 5.3, bei dem für jede dieser Lösungen im zugehörigen Domination Set der Domination Count aller übrigen Lösungen um 1 reduziert wird. Ergibt sich dadurch ein  $n_r = 0$ , wird die entsprechende Lösung in eine separate Menge  $U$  eingestellt. Dies ist die Menge aller Lösungen aus der zweiten Pareto-Front  $F_2$ . Das Verfahren wird mit allen Lösungen der Menge  $U$  wiederholt bis letztendlich alle Fronten identifiziert worden sind. Im

<sup>37</sup>Für dieses Vorgehen ist eine zusätzliche Speicherkapazität in Höhe von  $\mathcal{O}(N)$  notwendig.

---

**Algorithmus 5.2** : NSGA-II, Non-dominated Sorting: Initialisierung der Parameter  $n_r$  und  $S_r$  sowie Auffinden von  $F_1$  in Pseudocode-Notation

---

```

forall  $r \in R$  do
   $T_r = \emptyset$ ;
   $n_r = 0$ ;
  forall  $s \in R$  do
    if  $(r \prec s)$  then  $T_r = T_r \cup \{s\}$ ;
    else if  $(s \prec r)$  then  $n_r = n_r + 1$ ;
  end
  if  $n_r = 0$  then
     $r_{rank} = 1$ ;
     $F_1 = F_1 \cup \{r\}$ ;
  end
end

```

---

Vergleich zum naiven Ansatz sinkt die Komplexität auf  $\mathcal{O}(MN^2)$ , allerdings bei gleichzeitigem Anstieg der benötigten Speicherkapazität von  $\mathcal{O}(N)$  auf  $\mathcal{O}(N^2)$ . Von den sortierten Fronten  $F_1, \dots, F_l$  werden die ersten  $k$  Fronten in die neue Population  $P_{t+1}$  aufgenommen, wenn formal für sie gilt (s. auch Abbildung 5.6):

$$\left| \bigcup_{i=1}^k F_i \right| \leq \mu \quad \text{und} \quad \left| \bigcup_{i=1}^{k+1} F_i \right| > \mu \quad [5.8]$$

Die Anzahl der Individuen in  $P_{t+1}$  darf also entsprechend Vorgabe höchstens  $\mu$  (Größe der Nachkommenpopulation) betragen. Da diese Anzahl in der Regel nicht exakt erreicht wird, ist es erforderlich, zusätzlich ausgewählte Individuen aus der Schicht  $F_{k+1}$  aufzunehmen. Dies geschieht mit Hilfe des nachfolgend beschriebenen Crowding-Distance Sorting.

### Crowding-Distance Sorting

Wie bereits erwähnt, ist die Diversität der Lösungspopulation neben dem Konvergenzverhalten ein wesentliches Gütekriterium eines Algorithmus. In früheren Verfahren wurde das *Sharing* verwendet, das bei geeigneter Wahl des Sharing-Parameters eine gute Diversität sicherstellt. Um hohe Parameterabhängigkeit und die Komplexität von  $\mathcal{O}(N^2)$  zu vermeiden, wird beim NSGA-II ein Crowding-Distance-Ansatz verwendet, der ohne aufwändige Parameterwahl auskommt.

Für das Sortieren der Lösungen der betreffenden Front wird zunächst ein Maß benötigt, das die Dichte von weiteren Lösungen um eine bestimmte Lösung  $i$  herum beschreibt. Hierzu wird um  $i$  für alle Zielfunktionen ein fiktives Rechteck gelegt, in dem keine weiteren Lösungen liegen (s. Abbildung 5.7). Die *Crowding Distance* dieser  $i$ -ten Lösung wird als durchschnittliche Seitenlänge des entsprechenden Rechtecks festgelegt.

---

**Algorithmus 5.3** : NSGA-II, Non-dominated Sorting: Auffinden von  $F_2$  bis  $F_l$  in Pseudocode-Notation

---

```

i = 1;
while  $F_i \neq \emptyset$  do
     $U = \emptyset$ ;
    forall  $r \in F_i$  do
        forall  $s \in T_r$  do
             $n_s = n_s - 1$ ;
            if  $n_s = 0$  then
                 $s_{rank} = i + 1$ ;
                 $U = U \cup \{s\}$ ;
            end
        end
    end
     $i = i + 1$ ;
     $F_i = U$ ;
end

```

---

**Algorithmus 5.4** : NSGA-II: Zuordnung des Crowding-Distance in Pseudocode-Notation

---

```

 $l = |I|$ ;
forall  $i$  do
    set  $I[i]_{Abstand} = 0$ ;
end
forall Zielfunktionen  $m$  do
     $I = \text{sortiere}(I, m)$ ;
     $I[1]_{Abstand} = I[l]_{Abstand} = \infty$ ;
    for  $i = 2$  to  $(l - 1)$  do
         $I[i]_{Abstand} = I[i]_{Abstand} + (I[i + 1].m - I[i - 1].m) / (f_m^{max} - f_m^{min})$ ;
    end
end

```

---

Bevor diese Maßzahl ermittelt werden kann, muss die Population der entsprechenden Front  $F_{k+1}$  nach jeder Zielfunktion aufsteigend sortiert werden. Die beiden Randlösungen erhalten dabei ein unendliches Distanzmaß, damit sie in jedem Fall ausgewählt werden. Alle anderen Lösungen erhalten die absolute Differenz der Funktionswerte der zwei nächstgelegenen Lösungen als Wert. Die Gesamt-Crowding-Distance ergibt sich als Summe aller Crowding-Distances je Zielfunktion. In Algorithmus 5.4 wird  $F_{k+1}$  mit  $I$  bezeichnet.  $I[i].m$  bezieht sich hier auf die  $m$ -te Zielfunktion des  $i$ -ten Individuums. Die Komplexität dieses Verfahrens wird vom Suchalgorithmus bestimmt und beträgt daher  $\mathcal{O}(MN \log N)$ . Damit ist diese Nischenstrategie deutlich schneller als andere bekannte Verfahren, die eine hohe Komplexität von  $\mathcal{O}(MN^2)$  aufweisen.

Eine hohe Crowding-Distance einer Lösung kennzeichnet eine gute Verteilung im Lösungsraum. Zur Vervollständigung der zukünftigen Elternpopulation  $P_{t+1}$  bis  $\mu$  Individuen erreicht sind, werden aus Front  $F_{k+1}$  die Individuen mit der jeweils größten Crowding-Distance gewählt.

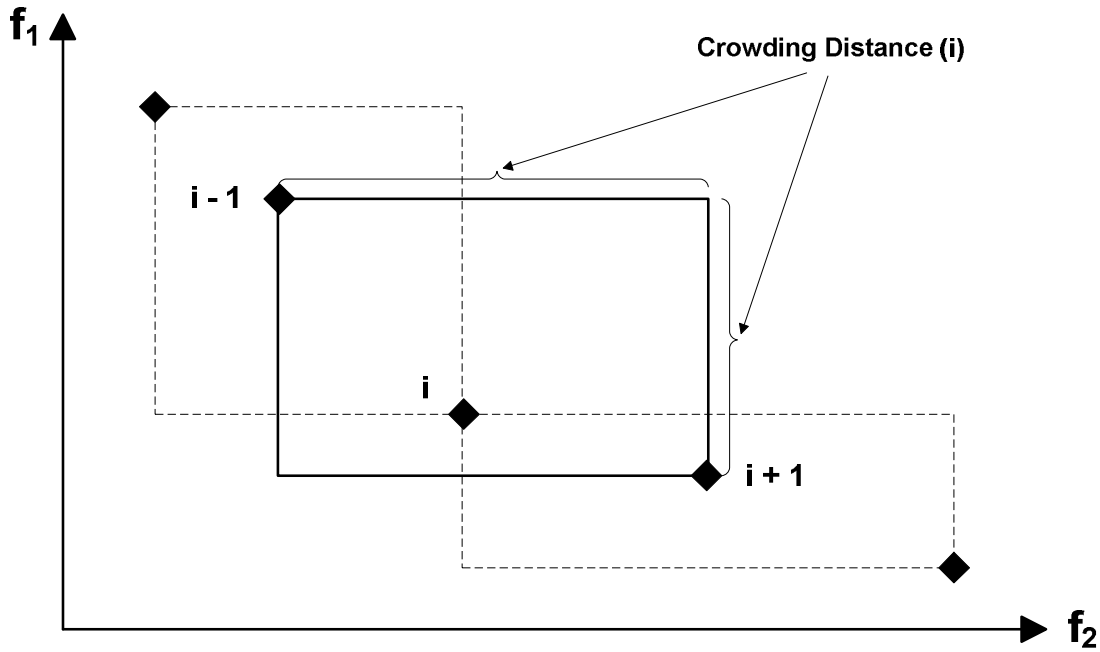


Abb. 5.7.: Rechteck um die Lösung  $i$  zur Ermittlung der Crowding Distance

Die Selektion im NSGA-II wird schließlich durch den *Crowded-Comparison-Operator* ( $\prec_n$ ) durchgeführt, der die Bildung einer gut verteilten Pareto-Front unterstützt. Unter der Annahme, dass jedes Individuum  $i$  einer Population die beiden Attribute Non-Domination-Rang  $i_{Rang}$  sowie Crowding-Distance  $i_{Distanz}$  hat, sei die partielle Ordnung  $\prec_n$  wie folgt definiert:

**Definition 5.8 (Partielle Ordnung  $\prec_n$ ):**

$i \prec_n j$  wenn  $(i_{Rang} < j_{Rang})$  oder  $((i_{Rang} = j_{Rang})$  und  $(i_{Distanz} > j_{Distanz}))$

Von zwei Lösungen mit unterschiedlichem Non-Domination-Rang wird also diejenige mit dem niedrigeren (besseren) Rang gewählt. Falls beide Lösungen zur selben Pareto-Front gehören, wird die Lösung aus dem weniger dicht besetzten Teil des Lösungsraums vorgezogen.

**Definition 5.9 (Crowding Distance):**

Sei  $x_i^{(m)}$  die bzgl. Zielfunktion  $f_m$  aufsteigend sortierte  $i$ -te Lösung einer Pareto-Front und  $h$  die Anzahl der Lösungen in dieser Front. Es ergibt sich die Crowding Distance  $d_i$  von Lösung  $i$  zu  $d_1 = d_h = \infty$  und für  $i = 2, \dots, h - 1$  wie folgt:

$$d_i = \frac{1}{m} \sum_{m=1}^M \frac{f_m(x_{i+1}^{(m)}) - f_m(x_{i-1}^{(m)})}{\max f_m - \min f_m} \quad [5.9]$$

**Algorithmus 5.5** : NSGA-II: Generationsdurchlauf in Pseudocode-Notation

---

```

 $R_t = P_t \cup Q_t;$ 
 $F = \text{fast-nondominated-sort}(R_t);$ 
 $P_{t+1} = \emptyset$  and  $i = 1;$ 
while  $|P_{t+1}| + |F_i| \leq N$  do
    crowding-distance-assignment( $F_i$ );
     $P_{t+1} = P_{t+1} \cup F_i;$ 
     $i = i + 1;$ 
end
Sort( $F_i, \prec_n$ );
 $P_{t+1} = P_{t+1} \cup F_i[1 : (N - |P_{t+1}|)];$ 
 $Q_{t+1} = \text{make-new-pop}(P_{t+1});$ 
 $t = t + 1;$ 

```

---

**Algorithmus und Rechenzeitabschätzung**

Nach der Beschreibung der drei wesentlichen Komponenten Nondominated-Sorting, Crowding-Distance-Sorting sowie Crowded-Comparison-Operator wird nun der Algorithmus zusammengesetzt.

Zunächst wird eine zufällige Startpopulation  $P_0$  erzeugt und gemäß Nichtdominanz sortiert.<sup>38</sup> Nun werden die bekannten Operatoren (Binäre Turniersélection, Rekombination mittels 2-Punkt-Kreuzung bzw. SBX und klassische binäre bzw. polynomiale Mutation)<sup>39</sup> verwendet, um die Nachkommenpopulation  $Q_0$  der Größe  $N$  zu generieren. Nach dieser Initialisierung wird Algorithmus 5.5 wiederholt durchlaufen.

Zunächst wird dabei die Menge  $R_t = P_t \cup Q_t$  sortiert und anschließend die zukünftige Population  $P_{t+1}$  angefüllt bis zur letzten Front  $F_k$ , die noch komplett in  $P_{t+1}$  aufgenommen werden kann. Die fehlenden Individuen werden aus der nächsten Front  $F_{k+1}$  mittels Crowding-Comparison-Operator ausgesucht.<sup>40</sup>

Abschließend erfolgt eine Diskussion der Komplexität des NSGA-II. Viele Non-dominated-Sorting-Algorithmen weisen eine Komplexität von  $\mathcal{O}(MN^3)$  auf. Für die Komplexitätsanalyse des NSGA-II werden die einzelnen Bausteine des Algorithmus je Durchgang des Verfahrens nochmals im Überblick analysiert. Die Komplexität beträgt jeweils im ungünstigsten Fall:

1.  $\mathcal{O}(M(2N)^2)$  für das Non-dominated Sorting
2.  $\mathcal{O}(M(2N) \log(2n))$  für die Zuordnung des Crowding-Distance
3.  $\mathcal{O}(2N \log(2n))$  für das Sortieren

---

<sup>38</sup>Alternative Ansätze zur gezielten Initialisierung einer MOEA-Startpopulation werden in Abschnitt 8.2.1 vorgestellt.

<sup>39</sup>S. auch Abbildung 5.6.

<sup>40</sup>Dieses Verfahren wird in der Mitte von Abbildung 5.6 skizziert.

Somit liegt die Gesamtkomplexität des NSGA-II, bestimmt durch das Non-dominated Sorting, bei  $\mathcal{O}(MN^2)$ . Zusätzlich kann im Normalfall darauf verzichtet werden, die gesamte Population der Größe  $2N$  entsprechend der Nichtdominanz zu sortieren. Sobald eine ausreichende Anzahl von Fronten gefunden wurde, um die Individuen in  $P_{t+1}$  aufzufüllen, kann das Sortieren beendet werden [56]. Der NSGA-II sticht also durch hervorragende Laufzeiteigenschaften hervor.

### 5.3.4. $\varepsilon$ -MOEA

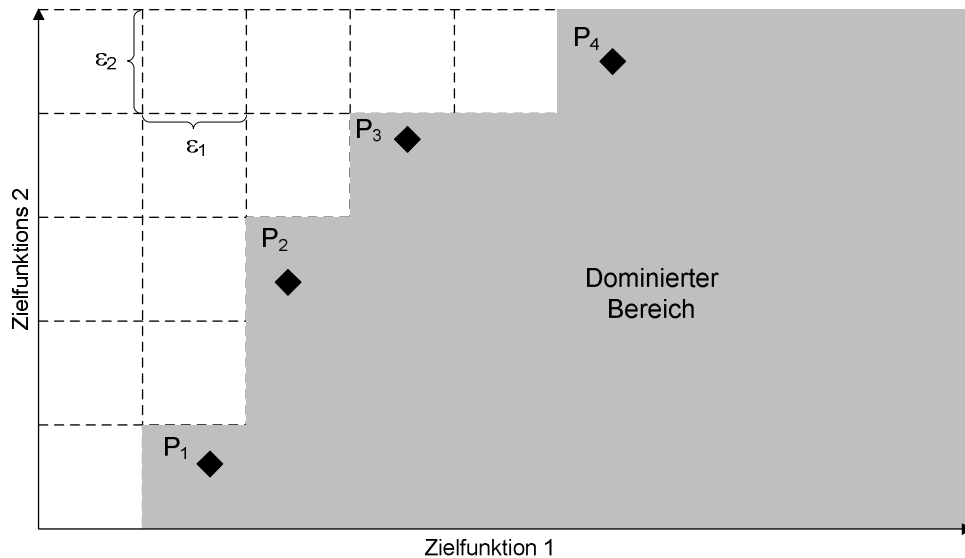
Zu Beginn des Abschnitts über multikriterielle evolutionäre Verfahren wurden die schnelle Konvergenz in Richtung der tatsächlichen Lösung sowie gleichzeitig eine hohe Diversität der erhaltenen Lösungen als Hauptkriterien für die Güte eines MOEAs genannt (s. auch Abbildung 5.5). Viele der in der Vergangenheit vorgeschlagenen Algorithmen können diese beiden Eigenschaften jedoch nicht vereinen, d. h. die schnelle Konvergenz eines Verfahrens geht meist auf Kosten der Diversität und umgekehrt. Eine sehr gute Diversität, auch bei mehr als zwei Zielfunktionsdimensionen, erreicht beispielsweise der von Zitzler [214] vorgeschlagene SPEA-Algorithmus. Dieser Vorteil wird allerdings durch einen Clustering-Ansatz erkauft, der eine Komplexität von  $\mathcal{O}(N^3)$  aufweist. Demgegenüber erreicht der sehr schnell konvergierende NSGA-II [57] aus dem vorherigen Abschnitt bei zweidimensionalen Problemen über den Crowding-Ansatz (mit relativ niedriger Komplexität von  $\mathcal{O}(N \log N)$ ) ebenfalls eine vergleichsweise gute Diversität [54].

Mit dem  $\varepsilon$ -MOEA haben Deb et al. [54] einen neuen Algorithmus vorgeschlagen, der beide Kriterien (Konvergenz und Diversität) in einem sehr guten Trade-off vereint. Das Verfahren konnte bisher insbesondere bei höher-dimensionalen Problemen in Praxisanwendungen gute Ergebnisse erzielen [58, 55] und kommt auch in dieser Arbeit mit einigen Erweiterungen zum Einsatz.

Ein wesentlicher Unterschied zum NSGA-II (Abschnitt 5.3.3) besteht darin, dass der  $\varepsilon$ -MOEA besonderen Wert auf eine sehr hohe Diversität der erhaltenen Lösungen legt. Dies wird im Algorithmus durch das modifizierte  $\varepsilon$ -Dominanz-Prinzip, das nachfolgend vorgestellt wird, gewährleistet. Eine dennoch hohe Geschwindigkeit des  $\varepsilon$ -MOEA wird nicht zuletzt dadurch sichergestellt, dass zusätzlich effiziente Strategien zur Aktualisierung der Elternpopulation und des verwendeten Archivs implementiert worden sind.

### $\varepsilon$ -Dominanz

Im  $\varepsilon$ -MOEA werden gleichzeitig zwei voneinander unabhängige Populationen entwickelt: Die 'normale' EA-Population  $P(t)$  und das sogenannte **Archiv**  $E(t)$ . Durch Verwendung jeweils einer Lösung aus beiden Populationen werden zwei Nachkommen generiert, die dann separat zur Aktualisierung beider Populationen herangezogen werden. Hierbei wird für die normale Population das Standard-Dominanz-Prinzip (s. Definition 5.4) herangezogen und für das Archiv

Abb. 5.8.: Dominiertes Bereich bzgl. des  $\varepsilon$ -Dominanzprinzips

das sogenannte  **$\varepsilon$ -Dominanz-Prinzip**, das von Laumanns et al. [126] entwickelt wurde und eine Erweiterung des herkömmlichen Dominanzprinzips darstellt.

Mittels des  $\varepsilon$ -Dominanz-Prinzips wird der Suchraum des Optimierungsproblems durch eine Gitterstruktur (engl. *Hyper-Boxes*) aufgeteilt. Eine solche Gitterstruktur im 2-dimensionalen Fall wird in Abbildung 5.8 illustriert. Die Diversität der Lösungsmenge wird nun dadurch aufrecht erhalten, dass jedes Feld des Gitters nur eine Lösung enthalten darf. Das Verfahren wird im Folgenden detailliert vorgestellt. Die Kantenlängen der Hyper-Boxes werden durch die Parameter  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_M$  festgelegt. Aus diesem Grund spricht man von  $\varepsilon$ -Dominanz. Häufig werden die Hyper-Boxes entsprechend auch als  $\varepsilon$ -Boxes bezeichnet.

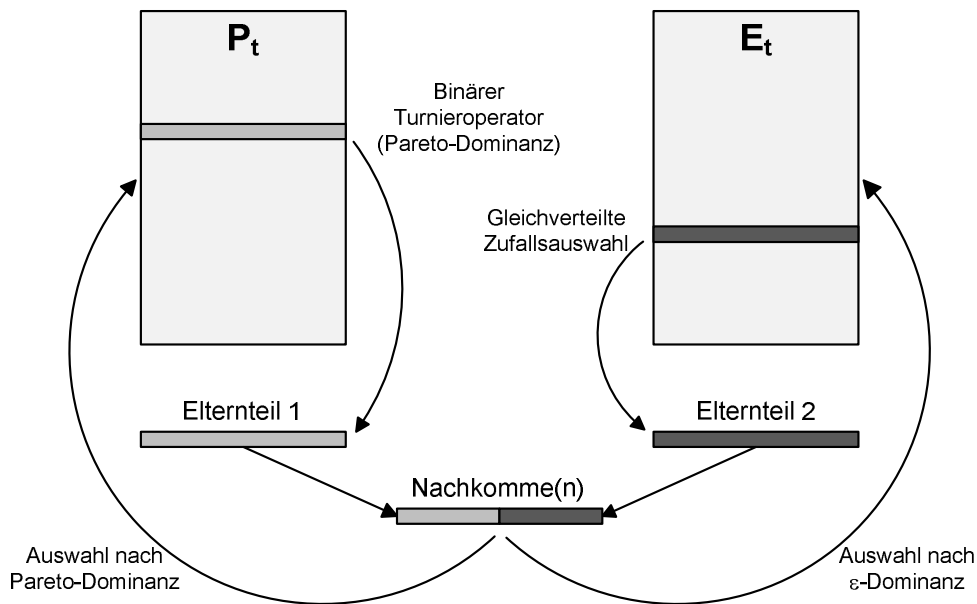
### Algorithmus und Rechenzeitabschätzung

Der  $\varepsilon$ -MOEA startet mit einer Population  $P(0)$ , die beispielsweise zufällig initialisiert wird.<sup>41</sup> Der Archivpopulation  $E(0)$  werden alle nicht  $\varepsilon$ -dominierten Individuen aus  $P(0)$  zugeordnet. Anschließend wird von zwei zufälligen Individuen aus  $P(0)$  anhand des bereits aus Definition 5.4 bekannten Pareto-Dominanzprinzips das nach Fitness bessere Individuum  $p$  ausgewählt.<sup>42</sup> Dieses Vorgehen entspricht der klassischen binären Turniers Selektion. Es gibt verschiedene Strategien, um ein gut geeignetes Individuum  $e$  aus dem Archiv  $E(0)$  auszuwählen. Hier wird zunächst ein zufälliges Individuum gewählt.

Die beiden Individuen  $e$  und  $p$  werden gepaart und  $\lambda$  (hier:  $\lambda = 1$ ) Nachkommen erzeugt. Diese Nachkommen werden mit den Lösungen in  $P(0)$  und  $E(0)$  verglichen und gegeben-

<sup>41</sup>Alternative Ansätze zur gezielten Initialisierung einer MOEA-Startpopulation werden in Abschnitt 8.2.1 vorgestellt.

<sup>42</sup>Bei gleichen Fitnesswerten wird zufällig ein Individuum ausgewählt.

Abb. 5.9.: Schematischer Ablauf des  $\epsilon$ -MOEA**Algorithmus 5.6** :  $\epsilon$ -MOEA: Hauptaufruf in Pseudocode-Notation

---

Zufällige Initialisierung von  $P_0$ ;  
 $E(0) = \emptyset$ ;  
 Kopiere nichtdominierte Lösungen von  $P_0$  in  $E_0$ ;  
 $t = 0$ ;  
**while** Abbruchkriterium nicht erfüllt **do**  
   Wähle  $p \in P_t$  und  $e \in E_0$ ;  
   Generiere Nachkomme  $c$  aus  $p$  und  $e$ ;  
   Aufnahme von  $c$  in  $P_t$  und  $E_t$ ;  
    $t = t + 1$   
**end**  
 Ausgabe von  $E(t)$ ;

---

falls aufgenommen. Zur Aufnahme ins Archiv wird ein Individuum bezüglich  $\epsilon$ -Dominanz untersucht. Für die Aufnahme in die EA-Population genügt dagegen das Pareto-Dominanz-Kriterium. Diese Abfolge wird in Abbildung 5.9 illustriert, in der mit  $\lambda = 1$  ein Nachkomme je Elternpaar erzeugt wird. Zudem stellt Algorithmus 5.6 den Ablauf des  $\epsilon$ -MOEA in Pseudocode dar.



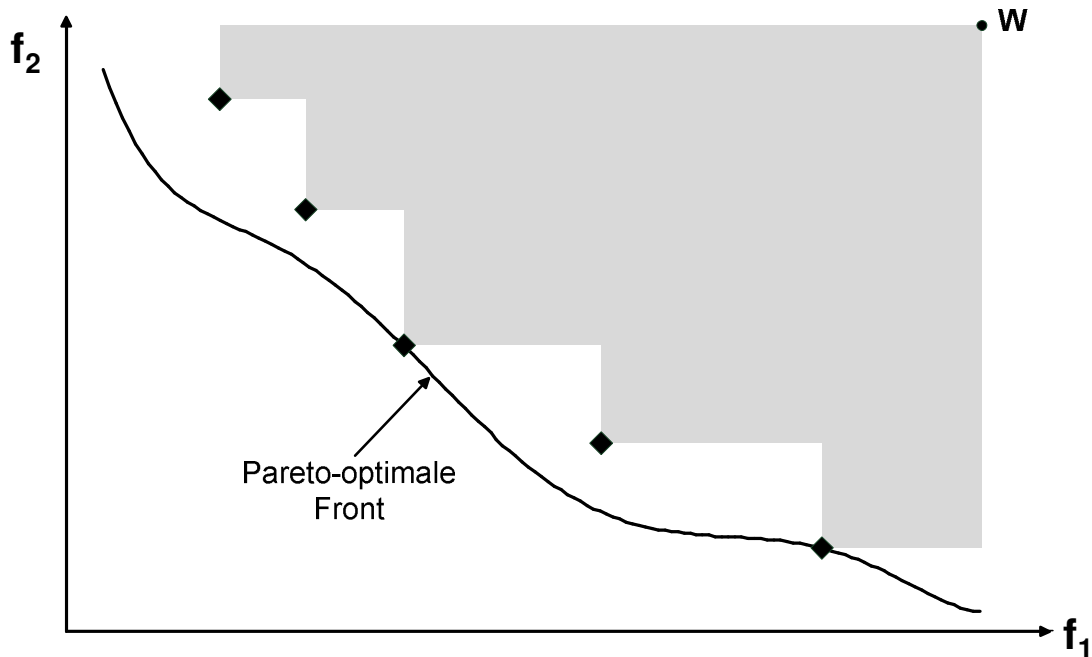


Abb. 5.10.: Hypervolume

### 5.3.5. Performance-Messung

Abschließend werden ausgewählte Methoden zur Bewertung der Performance multikriterieller Verfahren vorgestellt.<sup>43</sup> Hierbei lassen sich die Messung der Konvergenz und die Messung der Diversität als wichtigste Zielsetzungen unterscheiden.

**Konvergenzmaße** bewerten, wie nah ein bestimmter Algorithmus der wahren Pareto-optimalen Front kommt. Das *Hypervolume* [213] misst die von den Individuen des MOEAs erschlossene Fläche, die zur Berechnung zusätzlich von einer Seite her zu beschränken ist. Ein großer Hypervolume-Wert kennzeichnet folglich eine gute Konvergenz des Algorithmus und ermöglicht auch den Vergleich zwischen verschiedenen Verfahren. Das Vorgehen zur Ermittlung des Hypervolumens wird durch Abbildung 5.10 dargestellt, in der die entsprechende Fläche grau markiert ist und der Referenzpunkt *W* die Begrenzung darstellt.

Neben der Konvergenz spielt bei multikriteriellen Problemen auch die Diversität der erhaltenen Lösungen in der Pareto-optimalen Menge eine große Rolle, da nur gleichmäßig über den gesamten Zielfunktionsraum verteilte Lösungen eine gute Entscheidungsgrundlage für das Management darstellen. Da diese Lösungsmengen in der Praxis beispielsweise konvex, nicht-konvex, nicht verbunden oder stückweise stetig sein können, ist es nicht leicht, ein sinnvolles und allgemein passendes **Diversitätsmaß** zu definieren [52].<sup>44</sup> Aus den verschiedenen Alternativen<sup>45</sup> wurde zur Bewertung der Ergebnisse in der vorliegenden Arbeit das von Schott [184]

<sup>43</sup>Einen umfassenden Überblick geben Deb [49] und Zitzler et al. [215].

<sup>44</sup>Über diese Fragestellung wird ein kontroverser Diskurs geführt [54].

<sup>45</sup>S. Zitzler [214], Srinivas & Deb [193] sowie Deb [54].

vorgeschlagene *Spacing* ausgewählt, das für eine Population  $P$  wie folgt berechnet wird [49]:

$$S = \sqrt{\frac{1}{|P|} \sum_{i=1}^{|P|} (d_i - \bar{d})^2}$$
$$\text{mit } d_i = \min_{k \in P, k \neq i} \sum_{m=1}^M |f_m(x_i) - f_m(x_k)| \quad [5.10]$$
$$\text{und } \bar{d} = \sum_{i=1}^{|P|} \frac{d_i}{|P|}$$

Mit dem Spacing  $S$  wird näherungsweise die Standardabweichung der Abstände zwischen einem Individuum und seinen direkten Nachbarn ermittelt. Bei einem vergleichsweise niedrigen Spacing-Wert sind somit die Individuen gleichmäßiger über die Pareto-Front verteilt.

## 6. Anwendung von MOEAs in der Rückversicherungsoptimierung

Dieses Kapitel gibt zunächst einen Überblick über das Rückversicherungsgeschäft, indem ausgewählte Typen von Rückversicherungsverträgen erläutert werden. Dabei liegt der Fokus auf für diese Studie relevanten Aspekten, eine umfassende Einführung zum Thema geben Liebwein [128] oder Schwepcke & Arndt [187]. Im Anschluss wird ein Modell auf Basis von MOEAs konzipiert, das die Ermittlung optimaler Zusammenstellungen von Rückversicherungsverträgen erlaubt. Das Kapitel schließt mit einer empirischen Untersuchung sowie einer Analyse der Ergebnisse und Implikationen für das Rückversicherungsgeschäft.

### 6.1. Rückversicherungsgeschäft und -technik

Das Versicherungsgeschäft<sup>1</sup> ist wie auch das Bankgeschäft einer Vielzahl von Risiken ausgesetzt. Die in Abschnitt 2.3 beschriebenen Risiken für Banken sind dabei auch für Versicherungsunternehmen relevant. Übertragen auf den Versicherungskontext betreffen sie vornehmlich die Aktivseite der Bilanz, d. h. die Anlage der von den Kunden erhaltenen Versicherungsprämien. Zum Risikomanagement ihrer Aktiva können Versicherer also auf in der Banksteuerung bewährte Methoden zurückgreifen. Ein zentraler Unterschied des Versicherungsgeschäfts im Vergleich zum Bankgeschäft bezieht sich jedoch auf die Passivseite der Bilanz. Während Banken hier vor allem Liquiditätsrisiken ausgesetzt sind, kommt für Versicherer an dieser Stelle das **versicherungstechnische Risiko** zum Tragen.<sup>2</sup> Dieses gründet auf der Tatsache, dass die Übernahme vieler einzelner Schadenverteilungen durch den Versicherer lediglich zu einer Wahrscheinlichkeitsverteilung des Gesamtschadens führt und nicht zu einem mit Sicherheit bestimmbar effektiven Gesamtschaden. Wenn folglich der kollektive Effektivwert vom kollektiven Erwartungswert des Gesamtschadens abweicht, besteht für ein Versicherungsunternehmen die Gefahr, dass der Gesamtschaden des versicherten Bestands in einem bestimmten Zeitraum die Summe aus den vereinnahmten Risikoprämien und dem vorhandenen Sicherheitskapital (*Risikoreserve*) übersteigt [159]. Um dieses Risiko besser steuerbar zu machen, wurde das Prinzip der Rückversicherung entwickelt.

Dabei kann ein **Erstversicherer** (EV) bestimmte Schäden, z. B. extrem hohe oder extrem seltene Sachschäden, aus seinem Versicherungsportfolio an einen **Rückversicherer** (RV) abtre-

<sup>1</sup>Versicherungen zählen genau wie Banken zur Finanzbranche und werden von der BaFin im Rahmen der *Versicherungsaufsicht* überwacht (s. Abschnitt 2.1).

<sup>2</sup>Farny [72] zerlegt das versicherungstechnische Risiko entsprechend der Ursachen weiterhin in die drei Komponenten *Zufallsrisiko*, *Änderungsrisiko* und *Irrtumsrisiko*.

ten. Der vom EV zurückbehaltene Risikoanteil wird dabei *Eigenbehalt* genannt, der abgetretene Anteil *Abgabe* oder auch *Zession*<sup>3</sup>. Entsprechend kann man bei einer Rückversicherung auch von einer „Versicherung für Versicherer“ sprechen [159]. Das Rückversicherungsunternehmen schließt mit vielen Einzelversicherungsunternehmen Verträge ab und führt auf diese Weise ein Pooling der selbst übernommenen Risiken durch [9].<sup>4</sup>

Das starke Wachstum des Versicherungsgeschäfts in der Vergangenheit ist in hohem Maße auf die Existenz von Rückversicherungen zurückzuführen. Diese ermöglichen es Versicherungen, ihren Versicherungsnehmern auch für bislang unbekannte Risiken Versicherungsschutz anzubieten und gleichzeitig ihre Existenz als Versicherung gewahrt zu wissen [159, 196]. Neben dieser Sicherstellung der Solvabilität einer Versicherung<sup>5</sup> gewinnt zunehmend auch die effiziente Allokation der verschiedenen Rückversicherungsverträge bei Erstversicherern an Bedeutung.<sup>6</sup> Eine optimale Zusammenstellung solcher Verträge steht im Fokus dieser Untersuchung.

### 6.1.1. Vertragstypen

Rückversicherungsverträge sind ein wichtiges Werkzeug zur Steuerung des Risiko-Portfolios von Versicherungsunternehmen. Im Allgemeinen werden diese Verträge eingesetzt, wenn ein EV entweder nicht bereit oder nicht fähig ist, bestimmte Risikopositionen in vollem Umfang allein zu tragen. Durch Zession von Risiken an den RV kann der EV auch sein Geschäftsvolumen steigern, da freigewordene Risikoreserven wieder für Neuverträge zur Verfügung stehen. Vertragstypen existieren in den unterschiedlichsten Ausprägungen. Von den spezifischen Anforderungen der Versicherungssparten ist es abhängig, welche Ausprägung relevant ist [159]. An dieser Stelle werden ausgewählte Verträge beschrieben, die beispielsweise in der Haftpflicht- und Kraftfahrtversicherung verbreitet sind. Entsprechende Verträge finden auch bei dem konzipierten multikriteriellen Ansatz zur Rückversicherungsoptimierung in Abschnitt 6.2 Verwendung. Einen umfassenden Überblick zu Rückversicherungsverträgen in den unterschiedlichen Versicherungssparten geben Liebwein [128] sowie Schwepcke [187].

Durch eine **proportionale Rückversicherung** (auch *Summenrückversicherung*) wird ein prozentualer Anteil der Schadenaufwendungen vom EV auf den RV übertragen. Ein häufig eingesetzter proportionaler Typ ist die **Quotenrückversicherung (QS)**<sup>7</sup> [21]. Hier zediert der EV unabhängig vom jeweiligen Einzelrisiko und der zugehörigen Schadenhöhe einen festen Anteil  $1 - a$  mit  $a \in [0; 1]$  seiner Schadenforderungen und der entsprechenden Prämieinnahmen an

---

<sup>3</sup>Abgeleitet von lat. *cedere*, abgeben. Der EV wird daher auch als *Zedent* und der RV als *Zessionar* bezeichnet.

<sup>4</sup>Häufig schließen Rückversicherer auf ihr Versicherungsportfolio wiederum Rückversicherungsverträge mit weiteren Unternehmen, z. B. anderen Rückversicherungen oder auch Hedge-Fonds, ab.

<sup>5</sup>Diese steht im Mittelpunkt der neuen aufsichtsrechtlichen Vorgaben (Solvency II), die momentan erarbeitet werden. Nähere Informationen finden sich auf der Webseite der Europäischen Kommission [http://ec.europa.eu/internal\\_market/insurance/solvency/index\\_de.htm](http://ec.europa.eu/internal_market/insurance/solvency/index_de.htm) (Abruf am 15.01.2008).

<sup>6</sup>Entsprechend dem Portfoliomanagement bei Banken (s. Abschnitt 3.3).

<sup>7</sup>Engl. *Quota Share*.

den RV. Bezeichne  $Z$  einen nicht näher bestimmten zufälligen Schadenaufwand, dann beträgt der an den RV zedierte Anteil des Schadens formal  $\bar{Z} = (1 - a)Z$ . Beim EV verbleibt somit  $\underline{Z} = aZ$  [199]. Anhand exemplarischer Schadenfälle werden die Anteile des EV und des RV bei einer (Selbstbehalts-)Quote von  $a = 0,70$  in Abbildung 6.1 illustriert.<sup>8</sup>

Die Quotenrückversicherung bietet dem EV eine einfache Möglichkeit, seine Aufwände zu senken, ohne Versicherungsverträge aus dem Bestand zu verkaufen. Auch organisatorisch gestaltet sich der Umgang mit dieser Rückversicherungsform transparent. Bei proportionalen Verträgen wird i. d. R. vereinbart, dass dem RV die Prämieinnahmen des EV anteilig entsprechend der vereinbarten Quote vergütet werden.<sup>9</sup> Zusätzlich gibt es die sogenannte *Rückversicherungsprovision*, die als prozentualer Anteil wiederum vom RV an den EV gezahlt wird. Sie dient als Ausgleich für Vertriebs- und Verwaltungskosten des EV, die beim RV nicht in gleichem Maße entstehen. Im Weiteren wird von *Rückversicherungskosten* gesprochen, die sich bei Abzug der Rückversicherungsprovision von der Rückversicherungsprämie ergeben.

Bei **nicht-proportionalen Rückversicherungsverträgen** (auch *Schadenrückversicherung*) hat der RV nur bei Überschreitung einer bestimmten Schadenhöhe, der sogenannten *Priorität*, Kosten zu tragen.<sup>10</sup> Wenn wiederum  $Z$  formal einen allgemeinen Schadenaufwand darstellt, dann bezeichnet  $\underline{Z} = \min(Z, \text{Priorität})$  den Anteil des EV und  $\bar{Z} = \max(Z - \text{Priorität}, 0)$  den Anteil des RV im unlimitierten Fall. Das Intervall  $[\text{Priorität}; \infty)$  nennt man *unbeschränkten Layer*. Beim **(Einzel-)Schadenexzedent (XL)**<sup>11</sup> gilt die Priorität  $R$  für jeden einzelnen Schadenfall (s. Abbildung 6.3), beim **Jahresüberschadenexzedent (SL)**<sup>12</sup> gilt die Priorität  $L$  für die Summe aller Schadenfälle im Verlauf eines Jahres (s. Abbildung 6.2).

Diese Art von Verträgen wird oftmals mit einem Limit versehen, das die maximale Schadenübernahme durch den RV kennzeichnet. Da alle darüber hinaus gehenden Schäden wiederum vom EV zu tragen sind, steigt dessen Motivation, hohe Schadenpotenziale in seinem Portfolio von Versicherungsverträgen zu vermeiden. Formal gilt dann für den Selbstbehalt des EV  $\underline{Z} = \min(Z, \text{Priorität}) + \max(Z - \text{Priorität} - \text{Limit}, 0)$  und für die Zession an den RV  $\bar{Z} = \min(\max(Z - \text{Priorität}, 0), \text{Limit})$ . Das Intervall  $[\text{Priorität}; \text{Limit}]$  der an den RV zedierte Schäden wird als *beschränkter Layer* bezeichnet. In den beiden Abbildungen 6.3 und 6.4 wird die Aufteilung der Schäden bei einem unlimitierten und einem limitierten Schadenexzedenten exemplarisch gegenübergestellt. Während der XL vor allem gegen das Zufallsrisiko sehr hoher Einzelschäden absichert, wirkt der SL gegen das Frequenzrisiko, das bei sehr hoher Schadenzahl oft auch eine entsprechend erhöhte Schadenssumme nach sich zieht.

<sup>8</sup>Häufig wird auch die Zessionsquote angegeben, die sich zu  $1 - a$  ergibt.

<sup>9</sup>Verschiedene Variationen und Ergänzungen dieses Vorgehens werden von Pfeiffer [159] erläutert.

<sup>10</sup>Neben proportionaler und nicht-proportionaler Rückversicherung (auch *obligatorische* Rückversicherungen) gibt es die *fakultative* Rückversicherung, bei der für individuelle Versicherungsverträge über die Leistungen entschieden wird. Einen Überblick gibt beispielsweise Pfeiffer [159].

<sup>11</sup>Engl. *Excess of Loss*.

<sup>12</sup>Engl. *Stop Loss*.

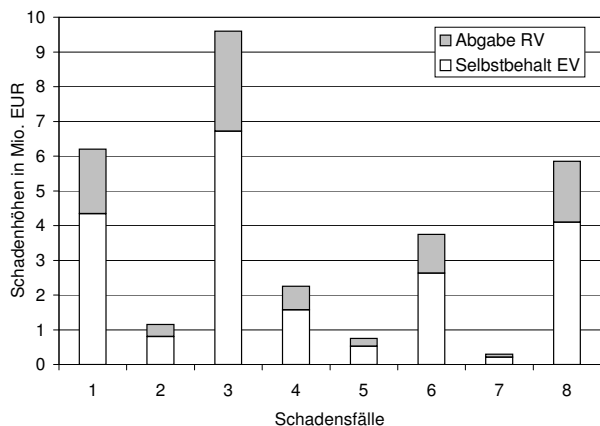


Abb. 6.1.: Schaden aufteilung bei Quotenrückversicherung mit EV-Quote  $a = 0,70$

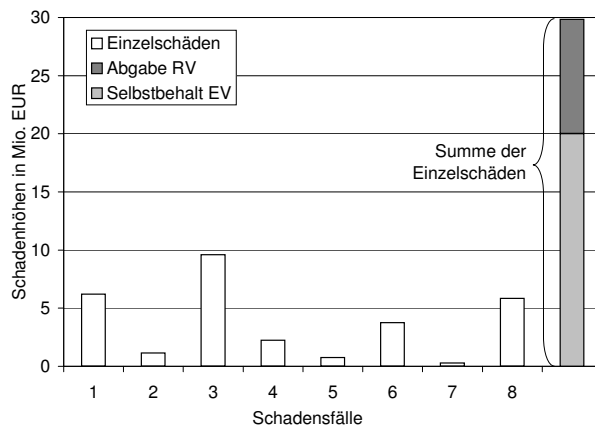


Abb. 6.2.: Schaden aufteilung bei (unlimitiertem) Stop Loss mit Priorität 20 Mio. EUR

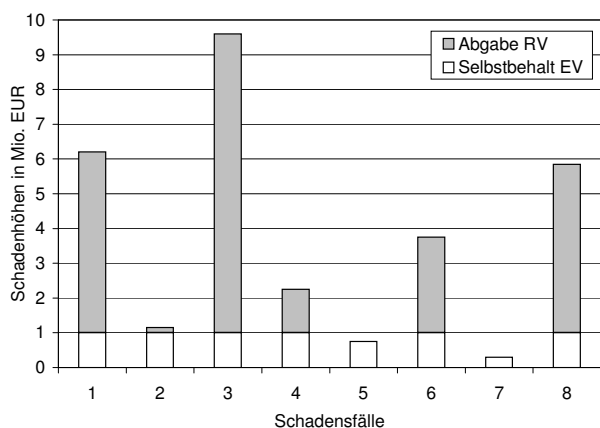


Abb. 6.3.: Schaden aufteilung bei (unlimitiertem) Schadenexzedent mit Priorität 1 Mio. EUR

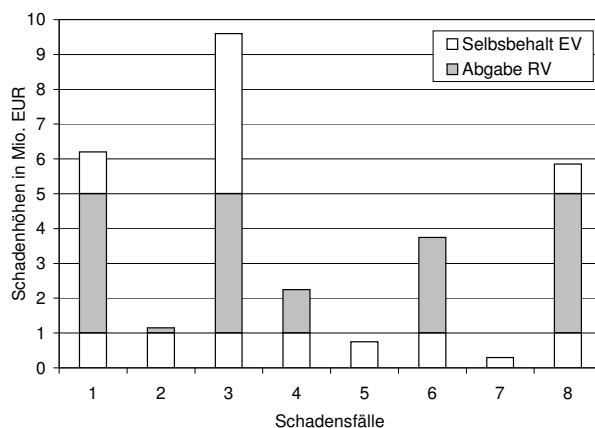


Abb. 6.4.: Schaden aufteilung bei (limitiertem) Schadenexzedent mit Priorität 1 Mio. EUR und Limit 5 Mio. EUR

### 6.1.2. Rückversicherungsprogramme

Die verschiedenen Vertragstypen schützen EVs auf unterschiedliche und teilweise komplementäre Weise vor unerwarteten Abweichungen der Schadenhäufigkeit und -höhe. Aus diesem Grund schließen Versicherungsunternehmen in der Praxis üblicherweise eine Reihe von Rückversicherungsverträgen ab, das sogenannte **Rückversicherungsprogramm**.

Abbildung 6.5 zeigt exemplarisch eine Kombination der vorgestellten Vertragsvarianten Quotenrückversicherung, Schadenexzedent und Stop Loss. Der effektive Selbstbehalt des EV ergibt sich durch schrittweise Verrechnung der einzelnen Rückversicherungsverträge. In diesem Beispiel wirkt zunächst eine (Selbstbehalts-)Quote von 70%, die folglich die obersten 30% der exemplarischen Schadenfälle 1-8 abdeckt. Zusätzlich wurde ein Schadenexzedent abgeschlossen, der alle Einzelschäden nach Quotenrückversicherung bei einer Priorität von 1 Mio. EUR kappt. Damit verbleiben beim EV zunächst die weißen Anteile an den Schadenfällen, die zu-

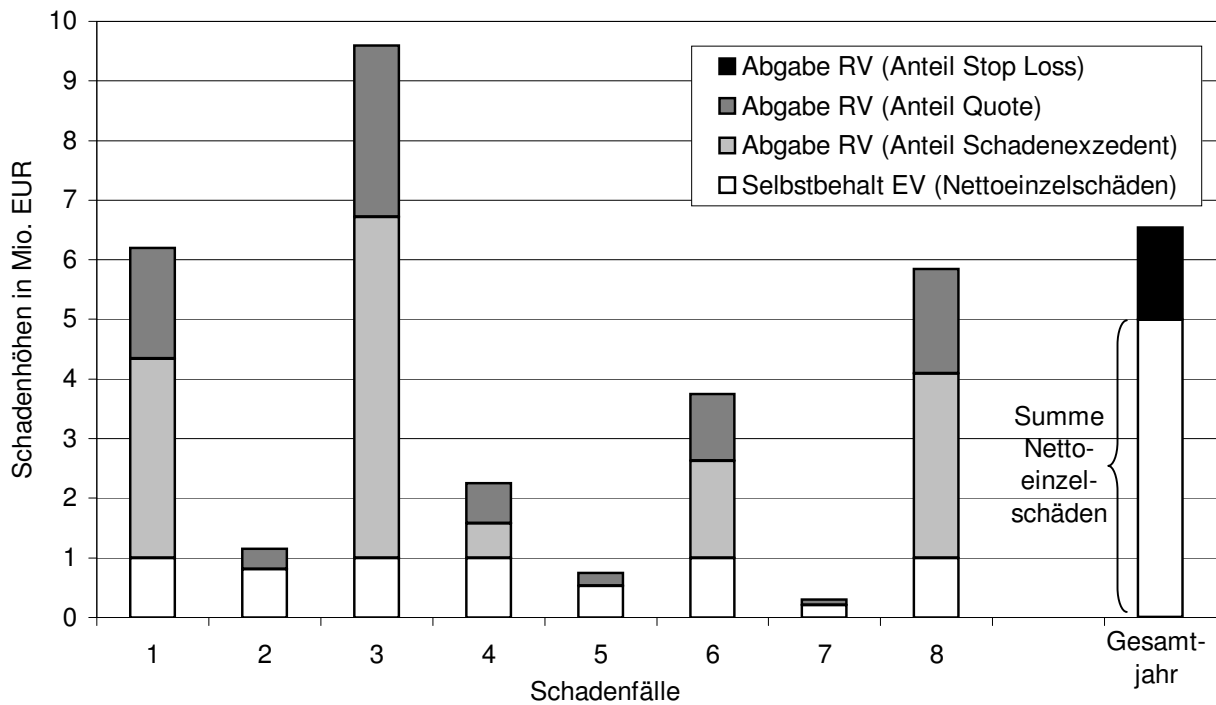


Abb. 6.5.: Schadenaufteilung bei einer Kombination aus Quotenrückversicherung ( $a = 0,70$ ), (unlimitiertem) Schadenexzedent mit Priorität 1 Mio. EUR und (unlimitiertem) Stop Loss mit Priorität 5 Mio. EUR

sätzlich als Jahressumme über einen Stop Loss mit Priorität 5 Mio. EUR limitiert wurden. Da die Summe der Einzelschäden nach Quote und Schadenexzedent die Stop-Loss-Priorität übersteigt, ergibt sich insgesamt für den EV eine Jahresschadensumme in Höhe von 5 Mio. EUR. Im weiteren Verlauf werden Vertragsallokationen von zwei und drei dieser Rückversicherungsarten betrachtet, die mittels des multikriteriellen Modells in Abschnitt 6.2 optimiert werden.

### 6.1.3. Pricing und Risikomessung

Die Prämien für Rückversicherungsverträge, die der EV an den RV zu entrichten hat, werden analog zu den Erstversicherungsprämien berechnet. Dabei dient der erwartete Schadenaufwand des EV (*Nettorisikoprämie*) als Basis. Da sich der Gesamtschaden  $S$  in den Selbstbehalt  $\underline{S}$  des EV und die Zession  $\bar{S}$  an den RV zerlegen lässt, gilt  $S = \underline{S} + \bar{S}$ . Für die Rückversicherungsprämie  $\pi$  gilt entsprechend der Annahme  $\pi = E(\bar{S})$ . Als Ausgleich für die Schwankungsbreite der Schadenverteilung wird ein Sicherheitszuschlag addiert, der durch einen Zuschlagfaktor  $\lambda > 0$  abgebildet wird. Folgende Prämienprinzipien werden unterschieden:

- Erwartungswertprinzip:  $\pi = E(\bar{S}) + \lambda E(\bar{S})$
- Standardabweichungsprinzip:  $\pi = E(\bar{S}) + \lambda \sqrt{V(\bar{S})}$
- Varianzprinzip:  $\pi = E(\bar{S}) + \lambda V(\bar{S})$

Rückversicherungsform	Notation	Intervall	Mittelwert
Quotenrückversicherung	$\lambda_q$	[0,1 ; 0,15]	0,125
Schadenexzedent	$\lambda_x$	[0,2 ; 0,4]	0,3
Stop Loss	$\lambda_s$	[0,4 ; 0,6]	0,5

Tab. 6.1.: Sicherheitszuschlagsfaktoren beim Erwartungswertprinzip (Quelle: [199])

Goovaerts et al. [88] geben einen ausführlichen Überblick zu den unterschiedlichen Prämienprinzipien. Für diese Studie wird das *Erwartungswertprinzip* zugrunde gelegt, d. h. die Prämie basiert direkt auf dem Erwartungswert der an den RV zedierten Schäden  $\bar{S}$ . Der verwendete Zuschlagfaktor hängt neben dem gewählten Prämienprinzip auch vom Typ der gewählten Rückversicherung ab. Verlaak & Beirlant [199] schlagen typische Werte für diese Faktoren  $\lambda_i$  in Abhängigkeit von der gewählten Rückversicherungsform  $i$  vor, die in Tabelle 6.1 dargestellt sind. Entsprechend wird  $\lambda$  bei nicht-proportionalen Rückversicherungsverträgen größer gewählt als bei proportionalen, da bei erstgenannten die Schwankungsbreite des zedierten Anteils höher ist. Der gewählte Zuschlagfaktor kann zusätzlich noch von weiteren Charakteristika abhängen, wie z. B. von der Versicherungssparte oder dem Versicherungsland. Als Preis für die Rückversicherung ergibt sich somit  $(1 + \lambda_i)E(\bar{S})$ .<sup>13</sup>

Zur Ermittlung des Trade-offs bei optimalen Allokationen von Rückversicherungsverträgen stellt neben den Kosten das Risiko den zweiten entscheidenden Faktor dar. Die bereits in Abschnitt 2.4.2 im Zusammenhang mit Kreditinstituten erläuterten Kennzahlen werden auch in Versicherungsunternehmen zur Risikomessung eingesetzt. Nachfolgend wurden die Varianz als klassisches und der VaR und CondVaR als moderne Risikomaße gewählt. Über die Verteilung des zurückgehaltenen Schadenanteils  $\underline{S}$  lässt sich das Risiko einer Vertragskombination ermitteln.

## 6.2. MOEA-Ansatz zur Optimierung von Rückversicherungsprogrammen

Die Forschung beschäftigte sich bisher bereits umfangreich mit der separaten Optimierung von Bedingungen und Konditionen individueller Rückversicherungsverträge [99, 98, 199]. Die gleichzeitige Optimierung unterschiedlicher Rückversicherungstypen im Rahmen eines Rückversicherungsprogramms (s. Abschnitt 6.1.2) wurde jedoch bis heute kaum untersucht, weshalb nur wenige Resultate hierzu existieren.

<sup>13</sup>Alle weiteren Berechnungen verwenden die Mittelwerte der individuellen  $\lambda$ -Intervalle aus Tabelle 6.1.



### 6.2.1. Forschungsüberblick und Motivation

Centeno [25, 26, 27] untersucht die optimale Ausgestaltung reiner Quoten- bzw. Schadenexzedentenrückversicherungen. Zudem betrachtet sie Kombinationen dieser beiden Rückversicherungstypen und verschiedene Prämienprinzipien sowie Risikomaße. Optimale Vertragskombinationen hinsichtlich Erwartungswert und Varianz leitet Kaluska [114, 115] unter dem Standardabweichungs- und Varianzprämienprinzip ab. Entsprechend Centeno werden jedoch ebenfalls ausschließlich Quote bzw. Schadenexzedent sowie Kombinationen berücksichtigt. Auch Schmitter [181] stellt nach der Herleitung optimaler Selbstbehalte für Quoten- und Schadenexzedent nur Kombinationen der beiden anhand gut nachvollziehbarer Zahlenbeispiele dar. Gleiches gilt für den Beitrag von Zhang et al. [210], die die Ruinwahrscheinlichkeit des EVs in ihrem Ansatz minimieren.

Verlaak & Beirlant [199] geben zunächst einen Überblick des aktuellen Stands der Forschung und diskutieren sinnvolle Zusammenstellungen proportionaler und nichtproportionaler Vertragstypen. Dabei gehen sie auch explizit auf die Reihenfolge ein, in der einzelne Verträge im Rahmen eines Rückversicherungsprogramms üblicherweise berücksichtigt werden. Diese Reihenfolge kann die Optimalität von Programmen beeinflussen. Für die Optimierung verwenden sie eine Modifikation des verbreiteten Erwartungswert-Varianz-Kriteriums<sup>14</sup>, bei dem klassischerweise entweder der erwartete Gewinn unter der Nebenbedingung einer fest vorgegebenen Varianz maximiert oder umgekehrt die Varianz unter Vorgabe des Gewinns minimiert wird. Verlaak & Beirlant minimieren anstelle des Gewinns die Rückversicherungskosten. Bei ihrer Analyse beschränken sich die Autoren jedoch ebenfalls auf Kombinationen aus jeweils zwei Vertragstypen, u. a. Quotenrückversicherung und Schadenexzedent. Zusätzlich merken sie allerdings an, dass Kombinationen von mehr als zwei Verträgen aus Forschungssicht sehr interessant sind. Weiterhin gehört die optimale Zusammenstellung der beiden nichtproportionalen Rückversicherungsvarianten Schadenexzedent und Stop Loss zu den aus theoretischer Sicht nach wie vor offenen Problemen.

Neben Ansätzen auf Basis des Varianzmodells [131] kann auch mit Hilfe der Kontrolltheorie<sup>15</sup> das multikriterielle Problem betrachtet werden. Die Rückversicherungskosten fließen dabei direkt in den Risikoreserveprozess ein, von dem ausgehend die Ruinwahrscheinlichkeit berechnet wird. Bei hohen Kosten steigt die Ruinwahrscheinlichkeit, weshalb diese für den optimalen Trade-Off zwischen Risikoreduktion und Kosten zu minimieren ist. Wie im Varianzmodell wird somit also ein *monokriterielles* Optimierungsproblem betrachtet.

Tabelle 6.2 fasst die wesentlichen Unterschiede zwischen den bestehenden Verfahren (Kontrolltheorie und Varianzmodell) und dem im Rahmen dieser Studie entwickelten heuristischen Ansatz nach verschiedenen Kriterien im Überblick zusammen. Im Folgenden werden u. a. ba-

<sup>14</sup>Engl. *mean-variance-criterion*.

<sup>15</sup>Eine Einführung geben Fleming & Rishel [75].

Kriterium	Kontrolltheorie	Varianzmodell	MOEA-Ansatz
Max. Anzahl RV-Verträge	1	2	3 (und mehr)
Exaktheit	math. exakt	math. exakt	heuristische Suche
Lösungsgüte	approximativ	implizit	teilw. approximativ
Modellraum	stetig	stetig	stetig oder diskret
Multikriteriell	implizit	Methode der Nb.	unmodifiziert
Flexibilität	gering	mittel	sehr hoch
Referenzen	[180], [98]	[131], [199]	[151, 142]

Tab. 6.2.: Gegenüberstellung von Verfahren zur Rückversicherungsoptimierung [150]

sierend auf den dargestellten Forschungsergebnissen zwei Hauptziele verfolgt: Zum einen sollen Rückversicherungsprobleme, die bisher kaum thematisierte bzw. offene Probleme in der Forschung darstellen, näherungsweise gelöst werden. Hierzu gehört insbesondere das von Verlaak & Beirlant [199] zitierte Problem der Kombination nichtproportionaler Verträge, wie z. B. Schadenexzedent und Stop Loss. Zum anderen soll mit Hilfe der MOEAs eine gut konvergierte und gleichzeitig dichte Front Pareto-optimaler Lösungen identifiziert werden, die es dem Entscheidungsträger des EVs ermöglicht, einen bestimmten Trade-off zwischen Risiko und Rückversicherungskosten zu realisieren. Die hohe Dichte der Lösungen wird weiterhin verwendet, um Informationen über die Struktur der approximierten Lösungen und der zugrunde liegenden Rückversicherungsparameter bei optimalen Allokationen abzuleiten.

### 6.2.2. Multikriterielles Modell

Im empirischen Teil wird eine Auswahl möglicher Kombinationen von Rückversicherungsverträgen untersucht. Als Basis dienen die in Abschnitt 6.1.1 vorgestellten proportionalen und nicht-proportionalen Vertragstypen Quoten-, Schadenexzedent- und Jahresüberschadenexzedent-Rückversicherung. Neben dem klassischen Risikomaß Varianz kommen im Optimierungsproblem auch die beiden moderneren Maße Value-at-Risk und Conditional Value-at-Risk zum Einsatz.

Zunächst wird die Kombination aus Quoten- (QS) und Schadenexzedentrückversicherung (XL) betrachtet, die beispielsweise häufig in der Kfz-Haftpflichtversicherung verwendet wird. Der Schadenexzedent wirkt dabei, wie allgemein üblich, erst nach der Quotenrückversicherung. Bei Verwendung der Varianz als Risikomaß lassen sich zu dieser Kombination theoretische Erkenntnisse ableiten. Ergänzung findet dieses Programm anschließend durch einen Jahresüberschadenexzedent (SL) als dritter Vertragstyp.

Für beide Kombinationen gilt  $\underline{X} = \min(aX, R)$  und  $\bar{X} = \max(aX - R, 0)$ . Bei der ersten Vertragskombination gilt für den Gesamtschaden  $\underline{S} = \sum_{i=1}^N \underline{X}_i$  sowie  $\bar{S} = \sum_{i=1}^N \bar{X}_i$  und im zweiten Fall

$\underline{S} = \min(\sum_{i=1}^N \underline{X}_i, L)$  und  $\bar{S} = \sum_{i=1}^N \bar{X}_i + \max(\sum_{i=1}^N \underline{X}_i - L, 0)$ . Die exakte analytische Lösung der zweiten Kombination mit den beiden nicht-proportionalen Rückversicherungstypen (XL und SL) gehört nach Verlaak & Beirlant [199] zu den offenen Problemen in der Rückversicherungsoptimierung und begründet somit den Einsatz von MOEAs zur Lösungsapproximation.

Entsprechend dem modifizierten Erwartungswert-Varianz-Kriterium von Verlaak & Beirlant [199] werden die Zielfunktionen Risiko und Kosten nach Rückversicherung betrachtet. Vor Darstellung der Problemmodellierung im Einzelnen wird die zweite Zielfunktion [6.4] näher betrachtet und hergeleitet [150]. Die Gewinnzielfunktion entsprechend dem klassischen Erwartungswert-Varianz-Kriterium ergibt sich aus den festen Prämieineahmen  $\pi$ , vermindert um den erwarteten Schaden nach Rückversicherung  $E(\underline{S})$  und um die Kosten der  $k$  abgeschlossenen Rückversicherungsverträge  $(1 + \lambda_i)E(\bar{S}^{(i)})$  in Summe:

$$\text{Max. } \pi - E(\underline{S}) - \sum_{i=1}^k (1 + \lambda_i)E(\bar{S}^{(i)}) \quad [6.1]$$

Da sich der Gesamtschaden aus dem Selbstbehalt  $\underline{S}$  und den zedierten Schäden aus den einzelnen Rückversicherungsverträgen ergibt, lässt sich zur Vereinfachung der Darstellung folgender Zusammenhang verwenden:

$$S = \underline{S} + \sum_{i=1}^k \bar{S}^{(i)} \quad [6.2]$$

Aufgrund der Linearität des Erwartungswerts ergibt sich nach Auflösen von [6.2] nach  $\underline{S}$  und Einsetzen in [6.1]:

$$\text{Max. } \pi - E(S) - \sum_{i=1}^k \lambda_i E(\bar{S}^{(i)}) \quad [6.3]$$

Da die beiden Terme  $\pi$  und  $E(S)$  unabhängig von den zu optimierenden Rückversicherungsparametern sind, können diese ausgelassen werden. Unter Verwendung des Dualitätsprinzips wird der verbleibende Term mit negativem Vorzeichen durch Multiplikation mit  $(-1)$  in ein Minimierungsproblem umgeformt. Eine Maximierung des Nettogewinns entspricht damit einer Minimierung der Rückversicherungskosten:

$$\text{Min. } \sum_{i=1}^k \lambda_i E(\bar{S}^{(i)}) \quad [6.4]$$

Im Abschnitt 6.3 wird die konkrete Implementierung der untersuchten Optimierungsprobleme erläutert. Die Indizes  $i$  der Sicherheitszuschläge und Rückversicherungsschadenanteile werden für die Quotenrückversicherung mit  $q$ , für den Schadenexzedenten mit  $x$  und für den Stop Loss mit  $s$  bezeichnet. Zu optimieren sind jeweils die Rückversicherungsparameter Quote  $a$ , Schadenexzedentpriorität  $R$  und Stop-Loss-Priorität  $L$ .

### 6.2.3. Gründe für den heuristischen Optimierungsansatz

Die meisten Forschungsansätze, die in Abschnitt 6.2.1 vorgestellt wurden, gründen auf dem Varianzmodell. Obwohl dabei durch die Abwägung zwischen Gewinn (bzw. Kosten) und Risiko nach Rückversicherung grundsätzlich ein zweidimensionales Problem betrachtet wird, erfolgt die Lösung als monokriterielles Problem.<sup>16</sup> In dieser Studie wird das Problem der Optimierung von Rückversicherungsprogrammen erstmals als *echtes* multikriterielles Problem behandelt.<sup>17</sup>

Obwohl aus praktischer Sicht höchst relevant, verhindert eine Reihe von Gründen die *integrierte* Optimierung von Rückversicherungsprogrammen. Für mehr als zwei Vertragstypen fehlen grundlegende analytische Resultate [199] und eine hohe algorithmische Komplexität<sup>18</sup> erschwert eine Lösung zusätzlich. Diese Komplexität wird bei der Kombination zweier nicht-proportionaler Vertragstypen unter Verwendung eines Quantilsrisikomaßes wesentlich bedingt durch die Tatsache, dass die Verteilung der beiden Summen  $\underline{S}$  und  $\bar{S}$  für jede Kombination der Rückversicherungsparameter  $R$  und  $L$  numerisch berechnet wird. Hierzu wird der sogenannte *Panjer-Algorithmus* [152] verwendet, der eine effiziente Methode zur Ermittlung der Gesamtschadenverteilung darstellt. Außerdem erweist sich die Nichtkonvexität der verwendeten Zielfunktionen als problematisch. Durch Einsatz der MOEAs ist es zudem möglich, diskrete Schrittweiten bei den Rückversicherungsparametern einzusetzen, die sich wesentlich näher an der Praxis orientieren als stetige. Centeno [26] führt zudem den Nachweis, dass bereits bei einfachen Instanzen des Optimierungsproblems der Suchraum nicht mehr in jedem Fall konvex ist. Verlaak & Beirlant [199] treffen zudem die bereits zitierte Aussage, dass die rechnerische Ermittlung optimaler Kombinationen aus Schadenexzedent- und Jahresüberschadenexzedent-Verträgen ein offenes Problem darstellt.

### 6.3. Implementierung des Modells

Auf Basis des multikriteriellen Optimierungsansatzes aus dem vorherigen Abschnitt werden im Weiteren verschiedene relevante Praxisfragestellungen modelliert und implementiert. Den Ausgangspunkt bildet das Standardproblem mit dem klassischen Varianzmodell, für das eine geschlossene Lösung existiert. Da die verwendeten MOEAs (s. Kapitel 5) die optimale Front sowie die Parameter der tatsächlichen Lösung gut annähern, wird der MOEA-Ansatz auch auf weitere Probleme angewandt, die bisher nicht über geschlossene Formeln gelöst werden konnten. Über den heuristischen Ansatz erfolgt somit eine approximative Lösung komplizierter Kombinationen von Verträgen.

---

<sup>16</sup>Dies gilt ebenfalls für die beschriebenen Ansätze aus der Kontrolltheorie.

<sup>17</sup>Die wesentlichen Referenzen sind [150, 151, 142].

<sup>18</sup>S. Abschnitt 4.

Zur Durchführung der Optimierung findet ein modifiziertes *Erwartungswert-Varianz-Kriterium*<sup>19</sup>, ähnlich dem von Verlaak & Beirlant [199], Verwendung. Als Zielfunktionen dienen die Kosten der Rückversicherung für den zedierten Anteil der Schäden  $\bar{S}$  und das Risiko des zurückbehaltenen Versicherungsanteils  $\underline{S}$ , die beide simultan zu minimieren sind.<sup>20</sup> Damit wird das Problem erstmals als *echtes* multikriterielles Optimierungsproblem betrachtet und ist nicht entsprechend dem bisher üblichen Vorgehen in eine Einzielloptimierung zu transformieren.

### 6.3.1. Standardproblem als Benchmark

Das klassische Varianzmodell repräsentiert in dieser Studie das Referenzproblem (**Problem 1**) für den Einsatz heuristischer Verfahren, da hierfür entsprechend Verlaak & Beirlant [199] eine analytische Lösung existiert. Als Risikomaß dient die Varianz und als Rückversicherungsverträge stehen die Quotenrückversicherung sowie der Einzelschadenexzedent zur Verfügung. Das Optimierungsproblem lautet wie folgt:

$$\text{Problem 1 (XL-V)} \begin{cases} \text{Min. } \lambda_q E(\bar{S}^{(q)}) + \lambda_x E(\bar{S}^{(x)}) \\ \text{Min. } V(\underline{S}) \end{cases} \quad [6.5]$$

Im Gegensatz zu den weiteren betrachteten Problemen können in diesem Standardfall noch einfache Formeln in die Zielfunktionen eingesetzt werden. Dadurch werden die Momente von  $\underline{S}$  bzw.  $\bar{S}$  in die Elemente Schadenzahlverteilung  $N$  und Schadenhöhenverteilung  $X$  des kollektiven Modells aufgeteilt. Problem 1 in Abhängigkeit von den Rückversicherungsparametern sieht entsprechend wie folgt aus [151]:

$$\begin{aligned} &\text{Min. } \lambda_q (1 - a) E(N) E(X) + \lambda_x E(N) E(\max(X/a - R, 0)) \\ &\text{Min. } E(N) V(\min(aX, R)) + V(N) E((\min(aX, R))^2) \end{aligned} \quad [6.6]$$

Beim Vergleich der analytisch berechneten Lösungen [199] von Problem 1 mit den approximierten Lösungen des NSGA-II und des  $\varepsilon$ -MOEA (s. Kapitel 5) in Abbildung 6.6 wird ersichtlich, dass die eingesetzten MOEAs die analytischen Lösungen sehr gut annähern. Darüber hinaus sind die einzelnen Lösungsallokationen bereits sehr gut über den Zielfunktionsraum verteilt. Die beiden Abbildungen 6.7 und 6.8, in denen die beiden verwendeten Parameter ‚Anteil Quote‘ und ‚Anteil Schadenexzedent‘ visualisiert werden, erlauben einen detaillierten Einblick in den Trade-off und damit in die Struktur der heuristisch ermittelten Lösungen. Hier wird ebenfalls die gute Konvergenz des MOEAs in Richtung der tatsächlichen Parameterwerte der rechnerischen Lösung bestätigt. Als bemerkenswert am Verlauf der Quotenrückversicherung in Abbildung 6.7 zeigt sich hier, dass sie ab einem bestimmten Punkt bei 100% verläuft. Dies bedeu-

<sup>19</sup>S. [192].

<sup>20</sup>Die Schadenverteilung basiert auf anonymisierten Echtdateen eines deutschen Versicherungsunternehmens.

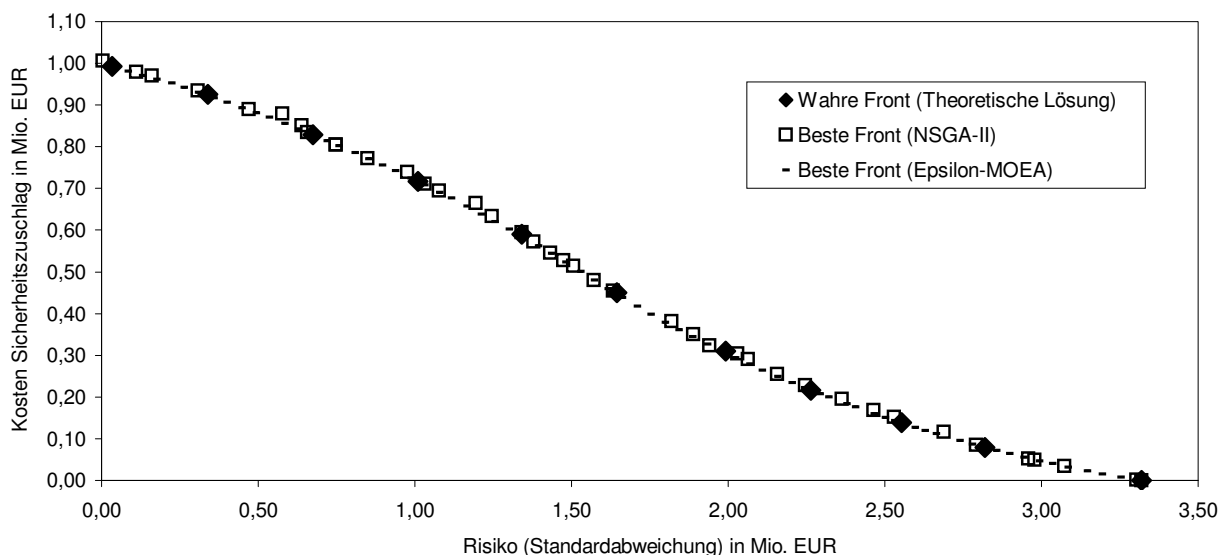


Abb. 6.6.: Pareto-optimale Front mit QS- und XL-Vertrag (Problem 1)

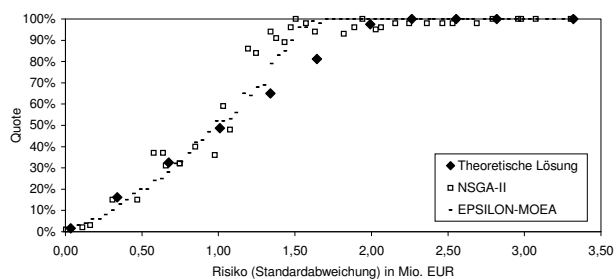


Abb. 6.7.: Anteil QS (Problem 1)

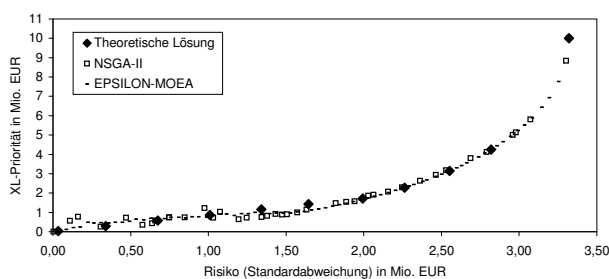


Abb. 6.8.: Anteil XL (Problem 1)

tet, dass für risikoreichere Lösungen oberhalb dieser Bruchstelle keine QS-Rückversicherung mehr abgeschlossen wird (Selbstbehalt=100%). Zugleich bestätigt Abbildung 6.8 ein bekanntes Theorem von Borch et al. [131], nach dem der Einsatz einer XL-Rückversicherung für das betrachtete Problem in jedem Fall optimal ist. Basierend auf den MOEA-Ergebnissen, die konsistent zur analytischen Lösung von Problem 1 sind, werden die heuristischen Verfahren in Abschnitt 6.3.3 und 6.3.4 für bisher nicht gelöste Problemstellungen eingesetzt.

### 6.3.2. Analyse der Performance

Je Problemstellung erfolgten zehn unabhängige Durchläufe.<sup>21</sup> Das Benchmarkproblem **XL\_V** sowie weitere Probleme wurden anhand umfangreicher Performance-Tests hinsichtlich der verwendeten Heuristiken analysiert. Dabei wurden jeweils für beide MOEAs die Performance-Maße *Spacing* und *Coverage* berechnet (s. Abschnitt 5.3.5). Die Ergebnisse für **XL\_V** sowie **XL\_Var**<sup>22</sup> finden sich in Tabelle 6.3.

<sup>21</sup>Alle Berechnungen wurden mit einem AMD Athlon™ XP 2000+ mit 512MB RAM durchgeführt.

<sup>22</sup>S. Abschnitt 6.3.4.

Problem	MOEA	Laufzeit Mittelw.	Laufzeit Std.Abw.	Spacing Mittelw.	Spacing Std.Abw.	Hypervol. Mittelw.	Hypervol. Std.Abw.
XL_V	NSGA-II	21,185s	0,0095	0,0278	0,0026	0,000	0,000
XL_V	$\varepsilon$ -MOEA	21,332s	0,0053	0,0054	0,0003	0,263	0,067
XL_VaR	NSGA-II	52,770s	0,2031	0,0280	0,0021	0,037	0,020
XL_VaR	$\varepsilon$ -MOEA	53,057s	0,6950	0,0063	0,0007	0,265	0,099

Tab. 6.3.: Performance-Vergleich der MOEAs (Quelle: [151])

Für den NSGA-II beträgt der Spacing-Mittelwert ca. 0,028 und für den  $\varepsilon$ -MOEA ca. 0,006. Der NSGA-II dominiert nur 0% bis 4% der Individuen des  $\varepsilon$ -MOEA, während dieser ca. 26% der NSGA-II-Individuen dominiert. Zusätzlich profitiert der  $\varepsilon$ -MOEA von seinem wachsenden Archiv (**XL\_V**:71,9 und **XL\_VaR**:104,5), das eine dichtere Pareto-Front erzeugt als der NSGA-II.<sup>23</sup> Vom Laufzeitverhalten her unterscheiden sich der NSGA-II und der  $\varepsilon$ -MOEA nur marginal. Für das Problem **XL\_VaR**, bei dem das Risikomaß als Quantil zu berechnen ist, steigt die Laufzeit jedoch bereits bemerkenswert an.<sup>24</sup>

Entsprechend der durchgeführten Analyse zeigt sich, dass der  $\varepsilon$ -MOEA für die zweidimensionale Optimierung im Kontext der Rückversicherungsoptimierung besser geeignet ist. Dies wird durch die qualitative Betrachtung der Ergebnisse in den Abbildungen 6.6 bis 6.8 bestätigt. Aus diesem Grund werden im weiteren Verlauf überwiegend Ergebnisse auf Basis des  $\varepsilon$ -MOEA dargestellt.

### 6.3.3. Kombination nicht-proportionaler Rückversicherungsformen

Problem 1 aus [6.5] wird nun um den Stop Loss als zweite nicht-proportionale Rückversicherungsart ergänzt. Da die Varianz als Risikomaß zunächst erhalten bleibt, lautet das erweiterte Optimierungsproblem:

$$\text{Problem 2 (SL_V)} \begin{cases} \text{Min.} & \lambda_q E(\bar{S}^{(q)}) + \lambda_x E(\bar{S}^{(x)}) + \lambda_s E(\bar{S}^{(s)}) \\ \text{Min.} & V(\underline{S}) \end{cases} \quad [6.7]$$

Für dieses Problem ist aufgrund der beiden nicht-proportionalen Rückversicherungsvertrags-typen keine analytische Lösung mehr bekannt [199]. Stattdessen müssen  $\underline{S}$ ,  $\bar{S}^{(q)}$ ,  $\bar{S}^{(x)}$  und  $\bar{S}^{(s)}$  aufwändig numerisch berechnet werden. Hierzu ist zunächst die Verteilung von  $S$  auf numerischem Wege zu bestimmen. Für das nachfolgend betrachtete Optimierungsproblem bezeichnet  $S_{a,R}$  die Nettoschadensumme für den Erstversicherer nach Einsatz von Quotenrückversicherung und Schadenexzedent. Problem 2 (SL\_V) in Abhängigkeit von den Rückversicherungsvariablen

<sup>23</sup>S. hierzu insbesondere Abbildung 6.6.

<sup>24</sup>Für diese Problemstellungen gibt es nach aktuellem Stand der Forschung keine geschlossene Lösung.

lautet entsprechend:

$$\begin{aligned} \text{Min. } & \lambda_q(1-a)E(N)E(X) + \lambda_x E(N)E(\max(X/a - R, 0)) + \lambda_s E(\max(S_{a,R} - L, 0)) \\ \text{Min. } & V(\min(S_{a,R}, L)) \end{aligned} \quad [6.8]$$

### 6.3.4. Moderne Risikomaße

Bisher fand ausschließlich die Varianz als Risikomaß Verwendung. In Abschnitt 2.4.2 wurden jedoch modernere Risikomaße vorgestellt, die heute oft den Vorzug gegenüber der Varianz erhalten. Wie bei Banken kommt auch bei Versicherungen der Value-at-Risk (VaR) zum Einsatz (s. Abschnitt 2.4.2). Da im Versicherungsgeschäft besonders die äußersten Quantile der Schadenverteilung interessant sind, kommt neben dem VaR auch dem Conditional VaR (CondVaR) eine zunehmende Bedeutung zu. Die Varianz als jeweils zweite Zielfunktion in **XL\_V** und **SL\_V** wird entsprechend ersetzt durch das Risikomaß VaR. Damit ergeben sich die folgenden beiden Probleme 3 und 4:

$$\text{Problem 3 (XL\_VaR)} \begin{cases} \text{Min. } \lambda_q E(\bar{S}^{(q)}) + \lambda_x E(\bar{S}^{(x)}) \\ \text{Min. } \text{VaR}(\underline{S}) \end{cases} \quad [6.9]$$

$$\text{Problem 4 (SL\_VaR)} \begin{cases} \text{Min. } \lambda_q E(\bar{S}^{(q)}) + \lambda_x E(\bar{S}^{(x)}) + \lambda_s E(\bar{S}^{(s)}) \\ \text{Min. } \text{VaR}(\underline{S}) \end{cases} \quad [6.10]$$

Wenn alternativ der Conditional VaR als Risikomaß zur Verwendung kommt, lauten die entsprechenden Optimierungsprobleme wie folgt:

$$\text{Problem 5 (XL\_CondVaR)} \begin{cases} \text{Min. } \lambda_q E(\bar{S}^{(q)}) + \lambda_x E(\bar{S}^{(x)}) \\ \text{Min. } \text{CondVaR}(\underline{S}) \end{cases} \quad [6.11]$$

$$\text{Problem 6 (SL\_CondVaR)} \begin{cases} \text{Min. } \lambda_q E(\bar{S}^{(q)}) + \lambda_x E(\bar{S}^{(x)}) + \lambda_s E(\bar{S}^{(s)}) \\ \text{Min. } \text{CondVaR}(\underline{S}) \end{cases} \quad [6.12]$$

Bei den Problemen 3 bis 6 muss die Verteilung von  $S$  numerisch berechnet werden, da die Risikomaße nun über Quantile ermittelt werden. In Tabelle 6.4 sind alle betrachteten Probleme mit den jeweils verfügbaren Typen von Rückversicherungsverträgen und dem verwendeten Risikomaß nochmals zur Übersicht dargestellt.



Problem	Bezeichnung	Rückversicherungstypen	Risikomaß
1	<b>XL_V</b>	Quotenrückversicherung, Schadenexzedent	Varianz
2	<b>SL_V</b>	Quotenrückversicherung, Schadenexzedent, Stop Loss	Varianz
3	<b>XL_VaR</b>	Quotenrückversicherung, Schadenexzedent	Value-at-Risk
4	<b>SL_VaR</b>	Quotenrückversicherung, Schadenexzedent, Stop Loss	Value-at-Risk
5	<b>XL_CondVaR</b>	Quotenrückversicherung, Schadenexzedent	Conditional Value-at-Risk
6	<b>SL_CondVaR</b>	Quotenrückversicherung, Schadenexzedent, Stop Loss	Conditional Value-at-Risk

Tab. 6.4.: Übersicht der betrachteten Probleme

#### 6.4. Resultate und Implikationen für das Rückversicherungsgeschäft

Wenn im klassischen Varianzmodell **XL\_V** zusätzlich eine Stop-Loss-Rückversicherung zugelassen wird (**SL\_V**) ergibt sich mittels  $\varepsilon$ -MOEA die Pareto-Front in Abbildung 6.9. Aufgrund der Hinzunahme einer Stop-Loss-Rückversicherung verläuft diese im Vergleich zur Front beim Standardproblem (vgl. Abbildung 6.6) nicht mehr konvex. Neben dem Parameter QS (s. Abbildung 6.10), der bereits bei Problem 1 eine Bruchstelle aufwies, ist dies nun auch bei XL (s. Abbildung 6.11) der Fall. Abgesehen von den streuenden Parameterwerten, die zu Beginn während des parallelen Einsatzes von QS, XL und SL auftreten, zeigt SL im Weiteren einen relativ stetigen Verlauf und kommt im Rahmen des Rückversicherungsprogramms immer zum Einsatz. Daraus lässt sich folgende Beobachtung ableiten:

**Beobachtung 6.1** Unter dem Erwartungswertprinzip im Varianzmodell ist eine Stop-Loss-Rückversicherung (SL) immer optimal für den EV, insofern QS, XL und SL als Vertragstypen erlaubt sind. Zudem ist der Abschluss von QS oder XL nicht in jedem Fall optimal.

Diese Beobachtung ist besonders vor dem Hintergrund des bereits erwähnten Theorems von Borch et al. [131] bemerkenswert: Ohne die zusätzliche Möglichkeit zum Abschluss einer SL-Rückversicherung wäre nämlich XL immer optimal für den EV. Hieraus lässt sich folgern, dass SL die beiden anderen Vertragsarten QS und XL im Varianzmodell dominiert.

Im nächsten Schritt finden der VaR und der CondVaR als moderne Risikomaße bei der Optimierung Verwendung. An dieser Stelle werden allerdings nur Ergebnisse anhand des VaR dargestellt, da die CondVaR-Ergebnisse ähnlich verlaufen und keine neuen Erkenntnisse mit sich bringen.<sup>25</sup> Gleichzeitig werden entsprechend dem Standardproblem **XL\_V** zunächst die

<sup>25</sup>Ausführliche Darstellungen finden sich bei Österreicher [150].

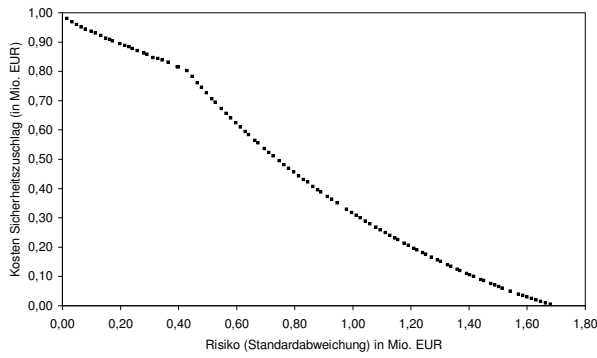


Abb. 6.9.: Pareto-optimale Front für Problem 2 (QS, XL und SL)

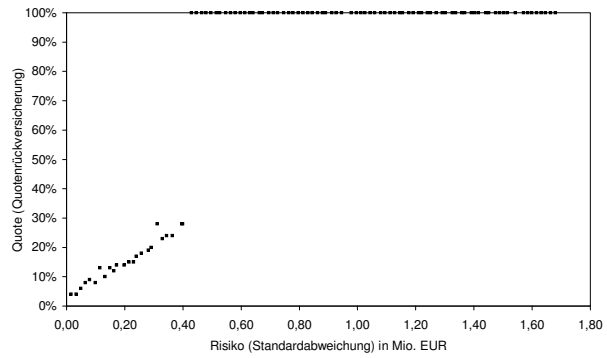


Abb. 6.10.: Quote  $a$  (Problem 2)

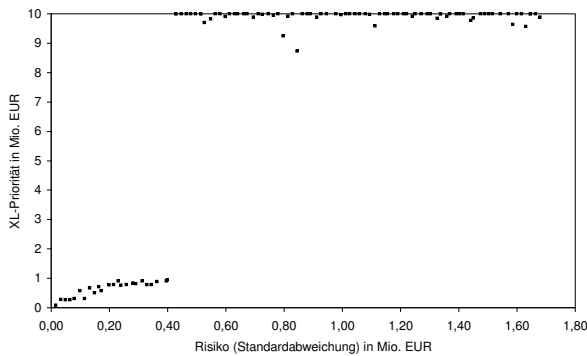


Abb. 6.11.: Excess of Loss  $R$  (Problem 2)

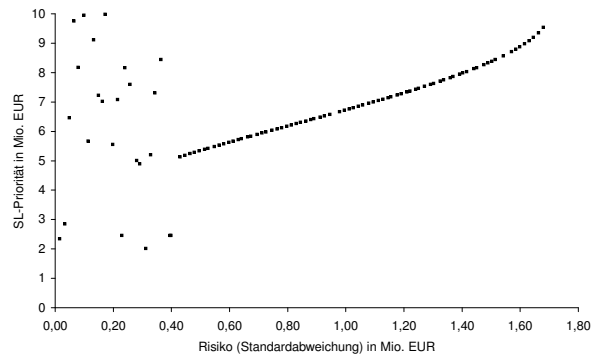


Abb. 6.12.: Stop Loss  $L$  (Problem 2)

beiden Rückversicherungsarten QS und XL ins Kalkül gezogen, woraus sich wiederum Pareto-optimale Fronten der Rückversicherungsprogramme ergeben. Aus Abbildung 6.13 mit dem VaR als Risikomaß wird ersichtlich, dass die Fronten mit modernen Risikomaßen keine Sprünge aufweisen. Somit weichen sie deutlich von der Form beim Standardproblem mit Varianz als Risikomaß ab (s. Abbildung 6.6). Bei der Analyse der Parameter in den beiden Abbildungen 6.14 (QS) und 6.15 (XL) kann folgende bisher noch nicht beobachtete Abweichung vom bereits zitierten Theorem von Borch et al. beim Varianzmodell festgehalten werden:

**Beobachtung 6.2** Unter dem Erwartungswertprinzip sind bei Verwendung des VaR oder CondVaR als Risikomaß und mit QS und XL als verfügbare Rückversicherungstypen nur Kombinationen aus QS und XL optimal für den EV.

Abschließend wird das nach Verlaak & Beirlant [199] besonders schwierige Problem der Kombination aus QS, XL, und SL mit dem VaR bzw. CondVaR als Risikomaß betrachtet. Die besten Pareto-optimale Fronten des Problems nach einem typischen Durchlauf der beiden verwendeten MOEAs (NSGA-II und  $\epsilon$ -MOEA) sind in Abbildung 6.16 zu sehen. Ergänzend werden die zugehörigen Rückversicherungsparameterwerte in den Abbildungen 6.17 bis 6.19 dargestellt. Aus diesen Ergebnissen lassen sich erstmals folgende Beobachtungen ableiten:

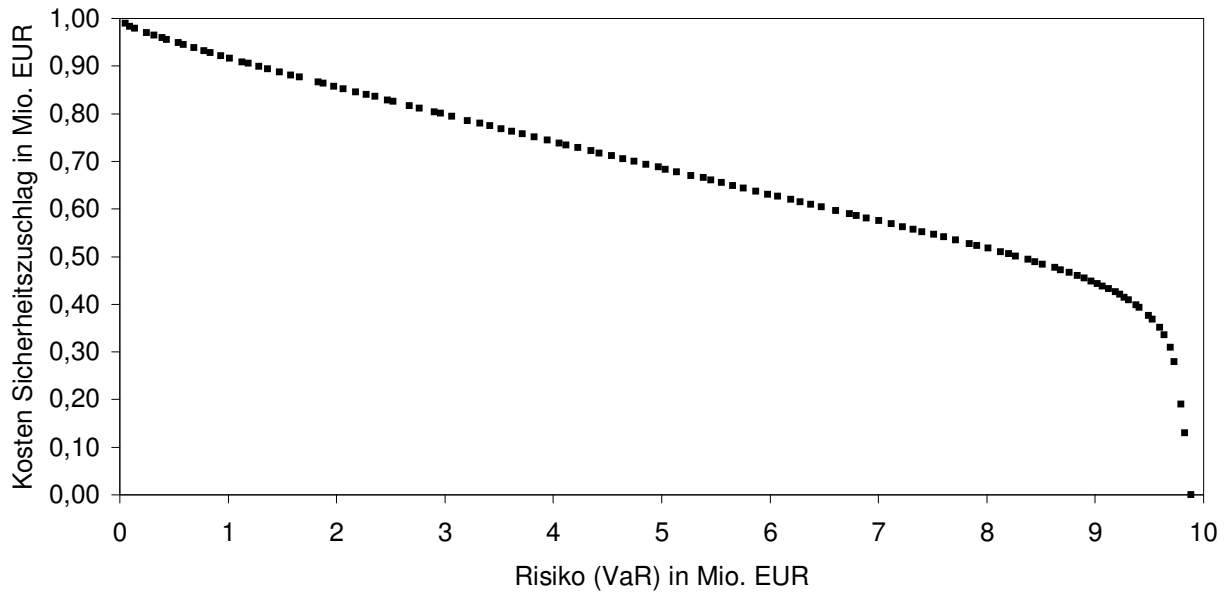


Abb. 6.13.: Pareto-optimale Front mit QS- und XL-Vertrag (Problem 3)

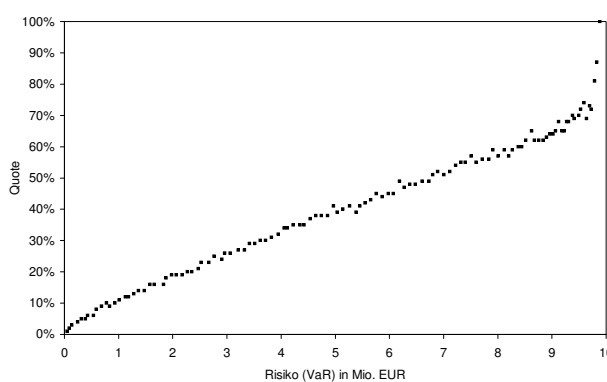


Abb. 6.14.: Anteil QS (Problem 3)

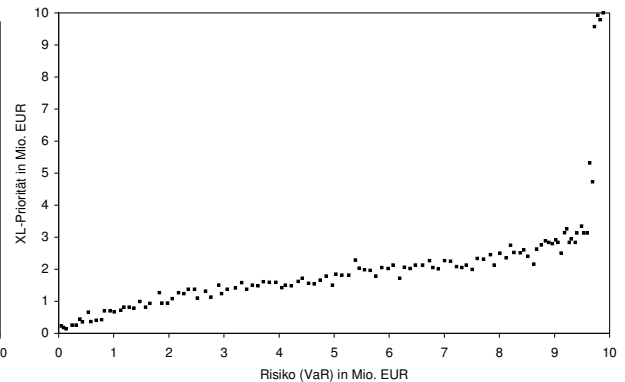


Abb. 6.15.: Anteil XL (Problem 3)

**Beobachtung 6.3** Unter dem Erwartungswertprinzip ist bei Verwendung des VaR oder Cond-VaR als Risikomaß und mit QS, XL und SL als verfügbare Rückversicherungstypen SL immer optimal für den EV, während QS und XL nicht immer optimal sind.

Eine SL-Rückversicherung ist also unter den getroffenen Annahmen QS XL analog Beobachtung 6.1 (SL\_V) überlegen. Den Auswertungen zufolge ist QS dem XL dabei in bestimmten Anwendungsfällen ebenfalls leicht überlegen. Aus den Abbildungen 6.17 bis 6.19 wird weiterhin ersichtlich, dass alle drei Rückversicherungstypen bis zur Mitte des Risikoprofils eingesetzt werden, woraus die letzte Beobachtung folgt:

**Beobachtung 6.4** Wenn die Priorität des Stop Loss bei einem bestimmten Wert für den VaR oder CondVaR fixiert und nur der Stop Loss verwendet wird, ist es für den EV in einigen Fällen vorteilhaft, eine QS- und XL-Sicherung zusätzlich abzuschließen.

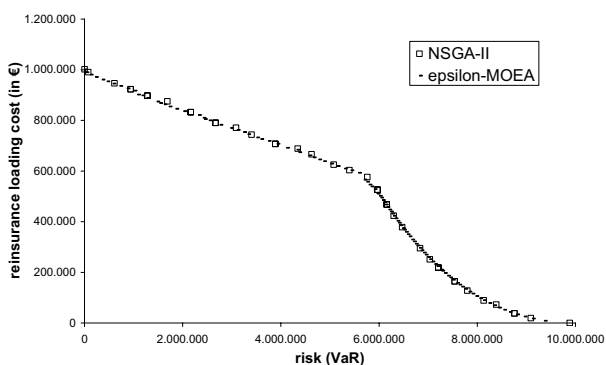


Abb. 6.16.: Pareto-optimale Front für Problem 4 (QS, XL, SL)

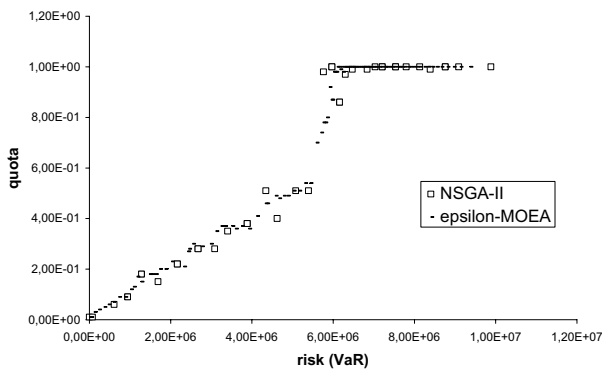


Abb. 6.17.: Quote  $a$  (Problem 4)

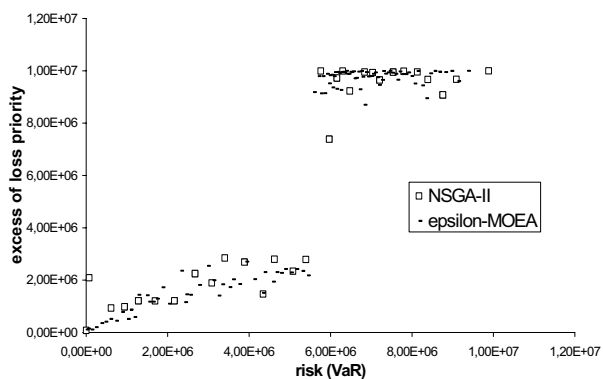


Abb. 6.18.: Excess of loss  $R$  (Problem 4)

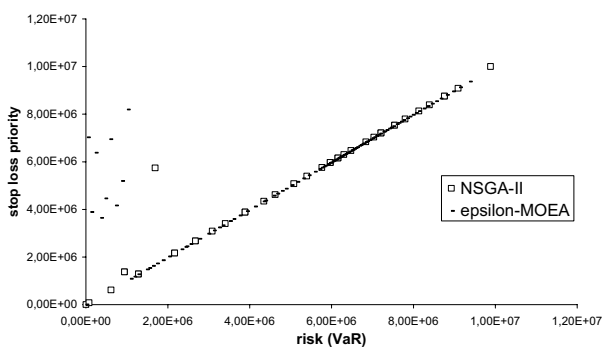


Abb. 6.19.: Stop loss  $L$  (Problem 4)

### 6.5. Kritische Würdigung und Ausblick

Die Studie zur Optimierung von Rückversicherungsprogrammen lieferte eine Reihe von Erkenntnissen, die in der Theorie aufgrund fehlender analytischer Lösungsmöglichkeiten bisher nicht in vergleichbarer Weise bekannt waren. Diese Ergebnisse können in Zukunft einen wichtigen Beitrag zur Gestaltung von Rückversicherungsverträgen leisten. Die detaillierten Analysen von effizienten Allokationen unter Berücksichtigung von Kosten und Risiko legen offen, welche Vertragskombinationen nicht zielführend und welche sehr attraktiv sind. Mittel- bis langfristig ist für relativ gesehen „attraktivere“ Vertragsarten, wie z. B. die Stop-Loss-Rückversicherung, ein nachfragebedingter Preisanstieg zu erwarten.

Untersuchungen dieser Art sind sowohl für den EV als auch für den RV von Interesse. Der EV strebt nach optimalen risiko-/kosteneffizienten Vertragskonstellationen für seinen Rückversicherungsschutz. Zugleich bieten heutzutage viele RVs ihren Kunden eine umfassende Beratung, um individuelle Verträge zusammenzustellen. Von dieser fortschrittlichen Art der Vertragsoptimierung können somit beide Vertragspartner gleichermaßen profitieren [9].

Auf diesem Gebiet bleibt noch viel Raum für zukünftige Forschung. Das vorgestellte multikriterielle Optimierungsmodell bietet einen sehr flexiblen Lösungsrahmen und kann entspre-

chend ergänzt werden. Potenzielle Erweiterungen betreffen beispielsweise die Risikomessmethoden und die verwendeten Prämienprinzipien. An dieser Stelle wurde eine Auswahl verbreiteter Rückversicherungsformen in der Versicherung von Kleinschäden ins Kalkül gezogen. Es gibt jedoch eine Vielzahl weiterer Vertragstypen und spartenspezifischer Besonderheiten, die ebenfalls zu untersuchen sind. Verlaak & Beirlant [199] weisen zusätzlich darauf hin, dass die Reihenfolge der Berücksichtigung einzelner Vertragstypen eine Rolle spielen kann. Auch diese Variationen und ihre Auswirkungen auf die Ergebnisse sind zu analysieren.

Bisher wurden keine Nebenbedingungen des Optimierungsmodells berücksichtigt. Hierzu können beispielsweise zusätzliche Anforderungen an die Unterlegung der Risiken des Versicherten mit ausreichendem Eigenkapital zählen. Insbesondere die zukünftig neuen aufsichtsrechtlichen Vorgaben für Versicherungen nach *Solvency II*<sup>26</sup> werden weitere Restriktionen für das Versicherungsgeschäft mit sich bringen. Der heuristische Ansatz auf Basis von MOEAs erlaubt eine Berücksichtigung entsprechender neuer Nebenbedingungen und gewährleistet gleichzeitig die approximative Lösbarkeit der Optimierungsprobleme.

---

<sup>26</sup>Der aktuelle Stand des Umsetzungsprojekts wird auf der Internetseite der Europäischen Kommission unter [http://ec.europa.eu/internal\\_market/insurance/solvency/index\\_de.htm](http://ec.europa.eu/internal_market/insurance/solvency/index_de.htm) (Abruf am 27.02.2008) beschrieben.



## 7. Modell zum Integrierten Portfoliomanagement

In diesem Kapitel erfolgt die Einführung des multikriteriellen Modells zur integrierten Betrachtung der Risikoarten in Erweiterung des klassischen Portfoliomanagements (s. Abschnitt 3.3). Dieses Modell dient als Basis für die Anwendungen in Kapitel 9 und 10 der Arbeit. Zunächst werden die Investitionsmöglichkeiten und die einzelnen Zielfunktionen für die erwartete Rendite sowie für Markt-, Kredit- und operationelles Risiko betrachtet. Im Anschluss werden grundlegende Annahmen des Modells dargelegt und zudem weitere Anmerkungen zum Modell ergänzt. Da die vierdimensionalen Ergebnisse nicht mehr intuitiv in einem kartesischen Koordinatensystem darstellbar sind, werden weiterhin verschiedene Visualisierungstechniken beschrieben, die eine anschauliche Darstellung der Ergebnisse in den beiden Anwendungskapiteln 9 und 10 ermöglichen. Abschließend werden typische Praxisbeschränkungen diskutiert, die eine Lösung des Problems aus Komplexitätssicht (s. Kapitel 4) zusätzlich erschweren.

### 7.1. Motivation für den Ansatz

Bei der klassischen Portfolio-Optimierung (s. Abschnitt 3.3) liegen die beiden Zielfunktionen **Risiko** und **Rendite** im Fokus der Betrachtung. Diese beiden Funktionen stehen in reziprokem Verhältnis zueinander, da bei optimalen Portfolio-Allokationen eine wünschenswerte höhere Rendite nur durch einen unerwünschten Risikoanstieg erreichbar ist. Steuer et al. [194] diskutieren die Erweiterung der klassischen Portfolio-Optimierung durch einen multikriteriellen Ansatz, der zusätzliche Komponenten in die Optimierung mit einbezieht. Zur Lösung derartiger Probleme kommen geeignete Werkzeuge aus dem Bereich der multikriteriellen Optimierung zum Einsatz.

Für die Optimierung der Asset Allokation werden in dieser Arbeit dementsprechend multikriterielle evolutionäre Algorithmen (s. Kapitel 5) verwendet, die bereits in vielen Anwendungsfeldern und insbesondere im Kontext Portfolio-Optimierung (s. Abschnitt 5.3.1) erfolgreich eingesetzt worden sind. Als Basis-Algorithmen kommen der NSGA-II (s. Abschnitt 5.3.3) sowie der  $\varepsilon$ -MOEA (s. Abschnitt 5.3.4) von Kalyanmoy Deb zum Einsatz. Aufgrund ihrer hohen Flexibilität und guten Konvergenz in Richtung der optimalen Lösungen eignen sich evolutionäre Verfahren sehr gut für diese Problemstellung.

Ihre Vorzüge zeigen sich besonders deutlich bei beschränkten Optimierungsproblemen, die eine hohe Praxisrelevanz besitzen und aufgrund ihrer Komplexität mit klassischen Verfahren nicht mehr einfach gelöst werden können. Solche Erweiterungen des Portfolioproblems betref-

fen beispielsweise die Verwendung des Value-at-Risk als Risikomaß oder die Einführung von Praxisbeschränkungen verschiedenster Art.<sup>1</sup>

Ziel des vorgestellten multikriteriellen Modells ist es, das Bankmanagement bei der Integration des Risikomanagements zu unterstützen. Hierzu wird die Zielfunktion Risiko nachfolgend in die Unterkategorien *Marktrisiko*, *Kreditrisiko* und *operationelles Risiko* unterteilt.<sup>2</sup> Weitere Risikoarten bzw. Risikozielfunktionen können aufgrund seiner Flexibilität in das Modell integriert werden. Eine Diskussion hierüber erfolgt im Ausblick der Arbeit. In dieser Arbeit werden sowohl Anwendungen in der Strategischen (SAA) als auch in der Taktischen Asset Allokation (TAA)<sup>3</sup> betrachtet (s. Kapitel 9 und 10). Vor der Darstellung spezifischer Anwendungen wird nachfolgend zunächst der allgemeine Aufbau des Modells beschrieben.

### 7.2. Zielfunktionen und Optimierungsproblem

Wie in Abschnitt 3.1.1 dargestellt, lassen sich die **optimale Kapitalallokation** und die **Solvabilität** als Hauptzielsetzungen für das Risikomanagement eines Unternehmens identifizieren.<sup>4</sup> Im Fokus des hier präsentierten Modells steht die optimale Verteilung der verfügbaren Mittel einer Bank auf die  $n$  Investitionsmöglichkeiten. Die Forderung der Solvabilität kann jedoch beispielsweise als Nebenbedingung in das Optimierungsproblem aufgenommen werden.

Unabhängig davon, ob nun eine Optimierung der SAA oder der TAA durchgeführt wird, sei der Bank jeweils eine feste Anzahl  $n \in \mathbb{N}$  von **Investitionsmöglichkeiten** vorgegeben. Bei der TAA bezeichnen die einzelnen Investments  $n \in \mathbb{N}$  normalerweise bestimmte Assets, z. B. Aktien der Daimler AG oder einen konkreter Bond<sup>5</sup> der Deutsche Bank AG. Für die SAA kommen dagegen eher Asset-Klassen in Betracht. Hierzu eignen sich insbesondere Indizes, die als Repräsentanten bestimmter Anlagen bzw. Anlageklassen gelten können. Für Investments in deutsche Aktien kann beispielsweise der DAX<sup>®</sup> Performance-Index gewählt werden, für Anlagen in Rentenpapiere der REX<sup>®</sup> Performance-Index (REXP). Ausgewählte Performance-Datensätze zur Durchführung einer SAA finden sich in Abschnitt 9.1.

Ein bestimmtes Portfolio aus Einzel-Assets (TAA) bzw. Asset-Klassen (SAA) wird im Folgenden bezeichnet durch den  $n$ -dimensionalen Vektor:

$$x = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

Jedes  $x_i$  gibt an, welcher prozentuale Anteil des Gesamtvermögens in der Investitionsmöglichkeit  $i$  angelegt wird. Da jedes betrachtete Portfolio zu 100% investiert ist und Leerverkäufe

---

<sup>1</sup>S. Abschnitt 7.5 - Eine Betrachtung aus komplexitätstheoretischer Sicht findet sich in Kapitel 4.

<sup>2</sup>Wie in Abschnitt 2.3 dargelegt, tragen diese Risikoarten wesentlich zum Gesamtrisiko einer Bank bei.

<sup>3</sup>S. Abschnitt 3.3.2.

<sup>4</sup>S. auch Abschnitt 3.1.1.

<sup>5</sup>Bonds (auch *Anleihen*) sind verzinsliche Wertpapiere, die von Schuldner zur langfristigen Kreditfinanzierung emittiert werden.



(*Short Selling*) sowie Kreditfinanzierung nicht zugelassen sind, erfüllt der Vektor  $X$  zusätzlich folgende Bedingungen<sup>6</sup>:

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1 \quad [7.1]$$

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : x_i \in [0, 1] \quad [7.2]$$

Folgende Zielfunktionen charakterisieren nun im Modell die üblichen Zielsetzungen des klassischen Silo-basierten Ansatzes zum Integrierten Management von Risiko und Rendite einer Bank (s. Abschnitt 3.4.1) [176].

### 7.2.1. Gesamtrendite $ret(x)$

Die erste Zielfunktion bezeichnet die erwartete **Gesamtrendite**<sup>7</sup> des jeweiligen Portfolios:

$$ret(x) := \sum_{i=1}^n x_i r_i \quad [7.3]$$

Hier kennzeichnet  $r_i$  die erwartete Rendite der Investitionsmöglichkeit  $i$ . Diese Einzelrenditen werden i. d. R. aus historischen Kurszeitreihen der Assets oder mittels *Expertenurteil* geschätzt. Ein Expertenurteil kann dann erforderlich werden, wenn nicht genügend historische Daten für eine verlässliche Schätzung vorliegen oder wenn das Bankmanagement die Meinung vertritt, dass die vorliegenden Daten keine verlässliche Grundlage zur Schätzung darstellen. Die Gesamtrendite  $ret(x)$  ergibt sich als Skalarprodukt aus dem Portfoliogewichtsvektor  $x$  und den erwarteten Einzelrenditen  $r_i$ . Diese Zielfunktion wird bei der Optimierung maximiert.

### 7.2.2. Marktrisiko $mr(x)$

Die zweite Zielfunktion beschreibt das **Marktrisiko** (s. Abschnitt 2.3.2) des Portfolios, das entsprechend gängiger Praxis bei Kreditinstituten mit Hilfe der Kennzahl Value-at-Risk (VaR)<sup>8</sup> ermittelt wird:

$$mr(x) := VaR_{Marktrisiko}(x) \quad [7.4]$$

Zur Ermittlung des VaR kommt eine der bekannten Methoden (Historische Simulation, Varianz-Kovarianz-Ansatz oder Monte-Carlo-Simulation) in Frage, die in Abschnitt 2.4.2 im Überblick vorgestellt wurden. Entsprechend der kurzfristigen Liquidierbarkeit von Marktrisikopositionen (s. Abschnitt 2.3.2) hat auch die Zielfunktion  $mr(x)$  einen eher kurzfristigen Horizont von üblicherweise ein bis zehn Handelstagen. Da sie ein Risiko darstellt, wird diese Zielfunktion minimiert.

<sup>6</sup>Diese Annahmen werden in Abschnitt 7.3 diskutiert und begründet.

<sup>7</sup>Für einen ausführlichen Überblick zur adäquaten Ermittlung der Rendite s. Abschnitt 2.4.1.

<sup>8</sup>S. Abschnitt 2.4.2

*Anmerkung.* In Abschnitt 2.4.2 wurde bereits erörtert, dass der VaR kein *kohärentes* Risikomaß im Sinne von Artzner et. al [6] darstellt. In der Praxis hat er sich bei Banken jedoch - trotz der beschriebenen Mängel aus theoretischer Sicht - fest etabliert und wird von Kreditinstituten bei ihren Risikoanalysen sehr häufig zugrunde gelegt. Da es erklärtes Ziel dieser Arbeit ist, ein Modell mit hoher Praxisrelevanz umzusetzen, wird bei der späteren Optimierung ebenfalls der VaR als Risikomaß verwendet. Falls sich zukünftig andere Risikomaße, z. B. der Conditional VaR, s. Abschnitt 2.4.2, durchsetzen, können die entsprechenden Zielfunktionen angepasst werden. Das Modell oder die Durchführung der Optimierung sind davon unabhängig.

### 7.2.3. Kreditrisiko $cr(x)$

Das **Kreditrisiko** des Portfolios (s. Abschnitt 2.3.1) wird durch die dritte Zielfunktion beschrieben und ebenfalls durch eine VaR-Kennzahl bemessen:

$$cr(x) := VaR_{Kreditrisiko}(x) \quad [7.5]$$

Wie bereits in Kapitel 2 erläutert, kann der Credit VaR z. B. mittels eines der bekannten Portfoliomodelle CreditMetrics, CreditRisk+ oder CreditPortfolioView<sup>9</sup> ermittelt werden. Im Gegensatz zum kurzen Horizont beim Marktrisiko wird im Kontext Kreditrisiko üblicherweise ein Horizont von einem Jahr angenommen. Auch diese Zielfunktion wird minimiert.

### 7.2.4. Operationelles Risiko $or(x)$

Die vierte und letzte relevante Zielfunktion steht für das **operationelle Risiko** (s. Abschnitt 2.3.3). Prinzipiell kann auch hier ein Ansatz auf Basis des VaR analog zu Markt- und Kreditrisiken verwendet werden. Allerdings sind Daten zu operationellen Risiken bei vielen Instituten, insbesondere bei kleineren Banken, in der Praxis noch nicht in ausreichender Qualität und/oder Quantität verfügbar. Daher ist die Ermittlung einer VaR-Kennzahl für operationelle Risiken oftmals noch mit erheblichen Unsicherheiten verbunden. Für das multikriterielle Modell wird daher, im Einklang mit anderen Studien<sup>10</sup>, eine Risikomaßzahl auf Basis des Standardansatzes für operationelle Risiken des Baseler Ausschusses für Bankenaufsicht verwendet [12]. Die Zielfunktion  $or(x)$  wird wie folgt festgelegt:

$$or(x) := \sum_{i=1}^n x_i \beta_k \quad [7.6]$$

---

<sup>9</sup>Einen Überblick der Modelle gibt beispielsweise [17].

<sup>10</sup>Aufgrund unzureichender Datenqualität und -quantität verwenden beispielsweise Aas et al. [1] ebenfalls den Basel-II-Standardansatz in ihrem Modell zur Risikoaggregation (s. auch Abschnitt 3.4.2).

k	Geschäftsfeld	Business line (engl.)	$\beta_k$
1	Corporate Finance	Corporate Finance	18%
2	Handel	Trading & Sales	18%
3	Privatkundengeschäft	Retail Banking	12%
4	Firmenkundengeschäft	Commercial Banking	15%
5	Zahlungsverkehr und Wertpapierabwicklung	Payment & Settlement	18%
6	Depot- und Treuhandgeschäfte	Agency Services	15%
7	Vermögensverwaltung	Asset Management	12%
8	Wertpapierprovisionsgeschäft	Retail Brokerage	12%

Tab. 7.1.: Faktor  $\beta_k$  im Basel-II-Standardansatz

Dabei bezeichnet  $\beta_k$  einen spezifischen Gewichtungsfaktor, der vom Geschäftsfeld  $k$  einer Bank abhängt. Auf Basis verschiedener Studien mit Banken (*Quantitative Impact Studies*) hat der Baseler Ausschuss acht Geschäftsfelder für Banken und die entsprechenden Faktoren je Feld entsprechend Tabelle 7.1 einheitlich festgelegt. Nach Vorgabe des Baseler Ausschusses wird für jedes Geschäftsfeld  $k$  das Produkt aus dem jeweiligen Bruttoeinkommen mit dem entsprechenden Faktor  $\beta_k$  ermittelt. Das für operationelle Risiken letztendlich zu unterlegende Eigenkapital ergibt sich als durchschnittliche Gesamtsumme dieser Kennzahlen über die letzten drei Jahre.<sup>11</sup> Die Zuverlässigkeit dieser Kennzahl wurde bereits des Öfteren in Frage gestellt. Ein Hauptkritikpunkt besteht darin, dass Verluste in einzelnen Geschäftsbereichen die regulatorische Eigenkapitalunterlegung reduzieren.<sup>12</sup>

Aufgrund der generellen Kritik am Standardansatz wird der Faktor  $\beta_k$  in der Zielfunktion  $or(x_i)$ <sup>13</sup> mit den Asset-Gewichten  $x_i > 0$  aller Assets, die dem Geschäftsbereich  $k$  zugeordnet sind, gewichtet. Die somit ermittelte Risikokennzahl ist also proportional zum Volumen der Investitionen in Geschäftsfeld  $k$  und dient im Modell als Näherungsmaß für das operationelle Risiko der Bank. Analog zum Markt- bzw. Kreditrisiko wird auch diese Zielfunktion minimiert.

### 7.2.5. Multikriterielles Optimierungsproblem

Zusammenfassend ergibt sich aus allen vorhergehend beschriebenen Zielfunktionen (7.3)-(7.6) sowie mit den Nebenbedingungen (7.1) und (7.2) das folgende generelle Optimierungsproblem (OP) im Kontext des Integrierten Risiko-Rendite-Managements einer Bank. Um für alle Zielfunktionen ein *Minimierungsproblem* zu erhalten, wurde die Zielfunktion (7.3) zur Maximierung der Portfoliorendite zuvor mit  $-1$  multipliziert.

<sup>11</sup>Weitere Hinweise zur Umsetzung des Basel-II-Standardansatzes finden sich in [12].

<sup>12</sup>Wenn eine Bank ihre operationellen Risiken mit einem fortgeschrittenen Ansatz ermittelt (*Advanced Measurement Approaches, AMA*) kann die Zielfunktion  $or(x)$  durch diesen ersetzt werden. Vorschriften zur Umsetzung eines solchen Ansatzes finden sich ebenfalls in [12].

<sup>13</sup>Vgl. [7.6].

**Definition 7.1 (OP Integriertes Risiko-Rendite-Management):**

Das generelle multikriterielle Optimierungsproblem (Minimierungsproblem) des Integrierten Risiko- und Rendite-Managements wird durch folgende vier Zielfunktionen und die beiden Nebenbedingungen beschrieben:

$$\begin{aligned} \text{Min. } f_1(x) &:= -ret(x) \\ f_2(x) &:= mr(x) \\ f_3(x) &:= cr(x) \\ f_4(x) &:= or(x) \\ x &= (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \\ \text{u. d. N. } \forall i \in \{1, \dots, n\} : x_i &\in [0, 1] \\ \sum_{i=1}^n x_i &= 1 \end{aligned} \tag{7.7}$$

### 7.3. Modellannahmen und weitere Anmerkungen

Zur Implementierung des beschriebenen Optimierungsproblems wurde eine Reihe von Annahmen getroffen, die mit klassischen Annahmen aus der Theorie der Portfolio-Optimierung konsistent sind. Gekoppelt mit zusätzlichen Anmerkungen zum Modell und den eingesetzten Verfahren werden diese im Folgenden beschrieben.

#### 7.3.1. Dominierte Portfolios

Zur Herleitung effizienter Portfolios beim generellen Optimierungsproblem (7.7) und den später beschriebenen Spezialfällen kommt folgende Definition dominierter Portfolios zum Einsatz [35]:

**Definition 7.2 (Dominierte Portfolios):**

Ein Portfolio  $x_2$  wird von einem Portfolio  $x_1$  **dominiert**, wenn folgende Bedingung zutrifft:

$$\forall j \in \{1, \dots, 4\} : f_j(x_1) \leq f_j(x_2) \wedge \exists k \in \{1, \dots, 4\} : f_k(x_1) < f_k(x_2) \tag{7.8}$$

Diese Charakterisierung ist sowohl zur gebräuchlichen Definition aus dem Finanzbereich als auch zu der aus dem multikriteriellen Optimierungskontext konsistent. Sie ist dargestellt für den in dieser Arbeit ausschließlich relevanten Fall von vier Zielfunktionen, lässt sich jedoch auch für mehr Dimensionen leicht anpassen.

### 7.3.2. Zielsetzung des Investors

Entsprechend der üblichen Annahme im Kontext der Portfolio-Optimierung wird davon ausgegangen, dass der Investor bzw. das Kreditinstitut **rational** handelt, d. h. es wird nicht in dominierte Portfolios investiert.<sup>14</sup> Überdies möchte das Bankmanagement aus einer Menge von individuell optimalen Portfolios auswählen. Hierbei trifft es eine subjektive Einschätzung bzgl. des Trade-offs zwischen gewünschter Rendite und dem Risiko, das bei Wahl eines bestimmten Portfolios eingegangen werden muss.

Folglich besteht das Ziel der Portfolio-Optimierung darin, eine ausreichend große Anzahl nichtdominierter Portfolios im vierdimensionalen Lösungsraum zu finden. Diese werden zunächst nur durch die beiden Bedingungen im generellen Optimierungsproblem (7.7) eingeschränkt. Um dem Entscheidungsträger eine möglichst vielfältige Auswahl an Optionen zu bieten, ist eine gute Verteilung der Portfolios über den durch (7.3)-(7.6) beschriebenen Zielfunktionsraum wünschenswert.

### 7.3.3. Kreditfinanzierung und Leerverkäufe

Wie in Abschnitt 7.2 festgelegt, sind bei dem betrachteten generellen Optimierungsproblem in (7.7) entsprechend Restriktion (7.2) weder kreditfinanzierte Anlagepositionen noch Leerverkäufe (*Short Selling*) erlaubt. Diese Einschränkungen wurden bewusst gewählt und haben folgende Hintergründe: Unter der Annahme, dass die Bank in hohem Maße liquide ist, kann sich das Institut praktisch jederzeit in ausreichender Menge mit kostengünstigen Refinanzierungsmitteln über den Interbankenmarkt eindecken. Folglich kann das Management der Bank eine gewünschte optimale Bankportfolio-Allokation, die unter Ausschluss der Möglichkeit zur Kreditfinanzierung ermittelt wurde, durch Interbankenkredite „hochhebeln“. Durch diesen Hebeleffekt wird sowohl die erwartete Rendite des Portfolios als auch das Portfolio-Risiko erhöht.

Während für große Kreditinstitute Risiken aus Leerverkäufen, z. B. von Aktien, durchaus akzeptabel sind, können bzw. sollten insbesondere kleinere Institute derartige Investments nur bedingt durchführen. Daher wird für das multikriterielle Modell die Annahme zugrunde gelegt, dass das konservative Bankmanagement zunächst gänzlich auf diese Möglichkeit zur Hebelung des Portfolios verzichtet. Die für eine Investition zulässigen Assets bzw. Asset-Klassen sind also auf Long-Positionen beschränkt, was eine übliche Annahme für institutionelle Anleger repräsentiert [71].

Dennoch besteht die Möglichkeit, auf einfache Art auch Leerverkäufe im hier dargestellten Modellrahmen abzubilden. Zum einen können durch den Einbezug von Hedge-Fonds-Zertifikaten<sup>15</sup> im Rahmen der Asset-Optimierung auch Anlageklassen im Short-Selling-Bereich berücksichtigt werden. Zum anderen ist es möglich, die Performance-Zeitreihen, die als Eingabe für

<sup>14</sup>S. [133].

<sup>15</sup>Klassischerweise halten Hedge-Fonds große Positionen im Short-Selling-Bereich.

die Optimierung im Modell dienen, einfach mit  $-1$  zu multiplizieren, um eine Short-Position in einem Anlageinstrument zu simulieren. Analog zum möglichen Vorgehen bei kreditfinanzierten Anlagepositionen können also auch im Leerverkaufsbereich Rendite (und Risiko) bei entsprechend höherem Risikoappetit nach oben gehebelt werden. Der Einbezug von Leerverkaufpositionen kann somit zu einer erhöhten Renditeerwartung beitragen. Gleichzeitig können die oft schwach oder sogar negativ zum übrigen Portfolio korrelierten Positionen aus Hedge-Fonds bzw. aus Leerkäufen zusätzlich noch positiv zur Diversifizierung der Gesamtposition beitragen.

*Anmerkung.* Unter diesen Annahmen ermittelte optimale Portfolio-Allokationen können von Allokationen mit direktem Einbezug von Kreditfinanzierung und Short-Selling abweichen. In einem weiteren Schritt bestünde die Möglichkeit, den Modellrahmen hierfür zu erweitern.

### 7.3.4. Begründung für den Einsatz heuristischer Verfahren

Probleme der klassischen Portfolio-Optimierung lassen sich mit effizienten Verfahren in vergleichsweise kurzer Zeit exakt lösen (s. Abschnitt 3.3). Das hier vorgestellte Problem beinhaltet jedoch relevante Praxiserweiterungen, die eine Lösung in vertretbarer Zeit unmöglich machen.<sup>16</sup> Nachfolgend wird der Einsatz heuristischer Verfahren zur Lösung des vorgestellten Modells [7.7] aus verschiedenen Perspektiven motiviert.

### Komplexität

In Kapitel 4 wurde die Komplexität praxisrelevanter Fragestellungen aus dem Portfoliomanagement aus Sicht der algorithmischen Komplexitätstheorie untersucht. Basierend auf diesen Ausführungen lässt sich auch für das Portfolioproblem des Integrierten Risiko- und Renditemanagements aus Komplexitätssicht der Einsatz heuristischer Verfahren begründen.

Von Seese & Schlottmann [189] wurde gezeigt, dass bereits das Auffinden einer einzelnen gültigen nichtdominierten Lösung **NP-schwer** ist, wenn die Entscheidungsvariablen auf die Menge  $\mathbb{Z}$  der ganzen Zahlen beschränkt sind. In diesem Fall kann das als **NP-vollständig** bekannte Rucksackproblem (s. Abschnitt 4.7) auf eine diskrete Version des Problems der Portfolio-Optimierung zurückgeführt werden. Unter der Ganzzahligkeitsrestriktion ist somit auch das Portfolioproblem als **NP-schwer** einzustufen. Eine Analyse der Komplexität des Portfolioproblems mit zwei Zielfunktionen findet sich z. B. in Seese & Schlottmann [189]. Diese kann auf mehr als zwei Zielfunktionen verallgemeinert werden. Folglich gilt unter der Ganzzahligkeitsannahme auch das hier betrachtete Problem mit vier Zielfunktionen als **NP-schwer**.

Ohne Beschränkung auf die Menge  $\mathbb{Z}$  ist die Komplexität des Portfolioproblems allerdings noch ungeklärt. Da im Optimierungsproblem (7.7) zunächst keine Einschränkung dieser Art

---

<sup>16</sup>Die Hintergründe hierfür wurden in Kapitel 4 erläutert.

vorgegeben wird, dienen die mathematischen Eigenschaften der Zielfunktionen als Begründung für seine hohe Komplexität.

Nach Artzner et al. [6] sowie Gaivoronski & Pflug [79] stellt die Value-at-Risk-Kennzahl eine nichtlineare und nichtkonvexe Funktion mit vielen lokalen Minima dar. Im vorgestellten allgemeinen Modell (7.7) gilt diese Vorgabe für die Zielfunktionen (7.4) und (7.5).<sup>17</sup> Wenn für das operationelle Risiko eine VaR-Kennziffer berechnet wird, trifft dies auch für die letzte Zielfunktion (7.6) zu. Klassische Optimierungsverfahren können diese genannten Eigenschaften des VaR nicht verarbeiten.

### Praxisrestriktionen

Zusätzliche praxisübliche Restriktionen, wie z. B. Minimum-/Maximum-Limits für Portfolio-positionen oder Kardinalitätsbeschränkungen, können die Optimierung mit klassischen Methoden praktisch unmöglich machen. Zur Illustration der Flexibilität der gewählten multikriteriellen Algorithmen als Lösungsverfahren im Kontext der Arbeit werden daher in Abschnitt 9.3 exemplarisch praxisrelevante Restriktionen eingeführt [132, 71].

### Menge Pareto-effizienter Lösungen

Aus der Zielsetzung des Investors (s. vorhergehender Abschnitt 7.3.2) geht weiterhin hervor, dass eine diverse Auswahl nichtdominierter Lösungsallokationen im gesamten Zielfunktionsraum wünschenswert ist. Durch die simultane Approximation der Pareto-optimalen Zielfunktionen sowie durch das Populationskonzept evolutionärer Verfahren (s. Kapitel 5) liefert ein MOEA bereits im ersten Durchlauf eine Menge möglicher Lösungen. Bei entsprechender Parameterwahl verteilen sich diese bereits gut über den Lösungsraum.<sup>18</sup> Bei weiteren Durchläufen rücken diese Lösungen immer weiter in Richtung des tatsächlichen effizienten Randes.

### Nutzenfunktion

Beim Einsatz von MOEAs muss a priori keine Nutzenfunktion (vgl. Abschnitt 3.3.1) für die Risikopräferenz des Entscheiders (i. d. R. vertreten durch das Management der Bank) festgelegt werden, damit die Optimierung durchgeführt werden kann. Stattdessen erhält das Management eine Auswahl noch unbeeinflusster optimaler Allokationen. Für die Entscheidungsfindung ist es nun möglich, bestimmte Präferenzen bezüglich des individuellen Risikoappetits in die Allokationen mit einzubeziehen. In der Praxis ist es sehr schwierig, Nutzenfunktionen von Investoren festzulegen. Nicht zuletzt aus diesem Grund stellt die fehlende Möglichkeit, diesen

<sup>17</sup>Im Beispiel zur Strategischen Asset Allokation, das in Kapitel 9 vorgestellt wird, verwenden alle drei Risikozielfunktionen  $f_2(x)$ - $f_4(x)$  den VaR als Risikomaß.

<sup>18</sup>Die Erschließung des Lösungsraums ist auch bei fortgeschrittenen evolutionären Verfahren noch maßgeblich von der Parameterwahl abhängig. Daher wird hierauf in Abschnitt 8.2 vertieft eingegangen.

Portfolio	$x_1$	$x_2$	$x_3$	mr(x)	cr(x)	or(x)	ret(x)	Normierte Zielfunktionswerte			
								mr(x)	cr(x)	or(x)	ret(x)
1	0,00	0,75	0,25	1,00	4,00	1,50	1,00	0,00	1,00	0,25	0,00
2	0,25	0,50	0,25	1,50	3,00	1,00	1,85	0,17	0,67	0,00	0,28
3	0,50	0,25	0,25	2,00	2,00	2,00	2,85	0,33	0,33	0,50	0,62
4	0,75	0,00	0,25	3,00	1,00	2,50	3,30	0,67	0,00	0,75	0,77
5	1,00	0,00	0,00	4,00	1,50	3,00	4,00	1,00	0,17	1,00	1,00

Tab. 7.2.: Beispielhafte Ergebnisdaten für ein Portfolioproblem entsprechend [7.7]

Schritt erst nach der Optimierung durchzuführen, eine wesentliche Einschränkung klassischer (nicht-multikriterieller) Ansätze dar.

Zusammenfassend ist festzuhalten, dass die spezifischen Eigenschaften multikriterieller evolutionärer Verfahren sich sehr gut für Optimierungsprobleme aus dem Integrierten Portfoliomanagement eignen. Die durchgeführten Anpassungen der Verfahren für das generelle Problem der Portfolio-Optimierung aus [7.7] sowie für Erweiterungen dieses Problems werden im folgenden Kapitel 8 dargestellt. In Kapitel 9 und 10 werden Anwendungen des Modells für eine Beispielbank aufgezeigt.

#### 7.4. Multidimensionale Visualisierung der Ergebnisse

Als Entscheidungstool für die obere Führungsebene einer Bank müssen Risikomanagementsysteme gut nachvollziehbare Entscheidungsvorlagen liefern, auch wenn sie im Kern eine komplexe Methodik besitzen. Hierbei spielt die ansprechende Visualisierung der Resultate eine entscheidende Rolle.

Multikriterielle Verfahren werden durch die geeignete Darstellung der multidimensionalen Ergebnisse vor besondere Herausforderungen gestellt.<sup>19</sup> Während die Abbildung von bis zu drei Dimensionen über ein kartesisches Koordinatensystem leicht zu bewerkstelligen ist und dabei auch die Intuition des Betrachters noch gut bedient wird, sind Probleme mit über drei Dimensionen wesentlich schwerer darstellbar.

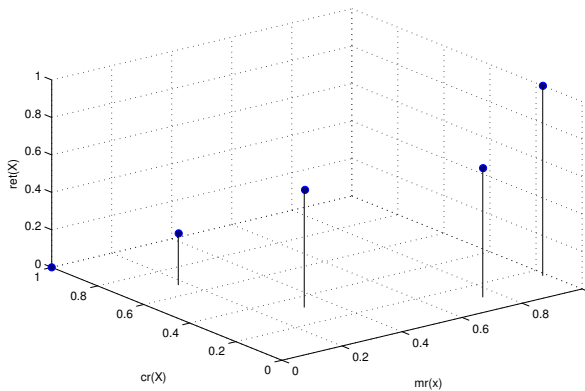
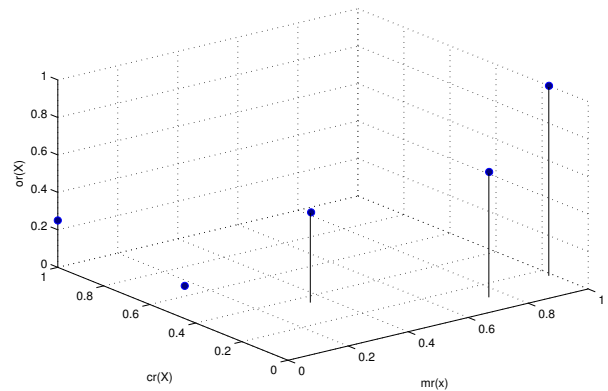
Es gibt jedoch eine Reihe von multidimensionalen Visualisierungstechniken, die sich gut für die Darstellung höherdimensionaler Probleme eignen.<sup>20</sup> Im Folgenden werden *3D-Streudiagramm*, *Streudiagramm-Matrix*, *Parallelkoordinatenplot* und *Heatmap* im Detail vorgestellt. Diese Techniken werden später zur Veranschaulichung der Ergebnisse des multikriteriellen Modells in den Anwendungskapiteln 9 und 10 eingesetzt.

Zur exemplarischen Illustration der Visualisierungsmethoden wird ein einfaches Leitbeispiel

<sup>19</sup>Deb [49] gibt einen Überblick von Visualisierungsverfahren im Kontext multikriterieller Optimierung.

<sup>20</sup>Als Standardreferenz zur Datenvisualisierung gilt Cleveland [33]. Umfassende Darstellungen weiterer aktueller Visualisierungsmethoden finden sich in Schnell [182] und Nagel [145].



Abb. 7.1.: 3D-Streudiagramm für  $mr(x)$ ,  $cr(x)$  und  $ret(x)$  (Beispieldaten aus Tab. 7.2)Abb. 7.2.: 3D-Streudiagramm für  $mr(x)$ ,  $cr(x)$  und  $or(x)$  (Beispieldaten aus Tab. 7.2)

verwendet, das stellvertretend für die einzelnen Lösungen eines Portfolioproblems entsprechend dem vorgestellten allgemeinen Modell [7.7] dienen kann. Die zugehörigen Parameter und Zielfunktionswerte finden sich in Tabelle 7.2. Dort bezeichnen  $x_1$  bis  $x_3$  fiktive Asset-Gewichte für drei Investitionsmöglichkeiten. Die Zielfunktionen lauten  $mr(x)$  (Marktisiko),  $cr(x)$  (Kreditrisiko),  $or(x)$  (operationelles Risiko) und  $ret(x)$  (erwartete Rendite). Insgesamt liegen fünf verschiedene Allokationen vor, in denen Trade-offs zwischen den einzelnen Risiken und der Rendite zum Tragen kommen. In der Tabelle sind zusätzlich die auf das Intervall  $[0, 1]$  normierten Zielfunktionswerte dargestellt, die für die Visualisierung verwendet wurden. Bei Vorliegen verschiedener Größenordnungen der Parameter verbessert die Normierung die Nachvollziehbarkeit.

### 7.4.1. 3D-Streudiagramm

Das **Streudiagramm** (engl. *Scatterplot*) ist eine der am häufigsten angewandten grafischen Darstellungsformen für Daten. In der bivariaten Datenanalyse wird es verwendet, um die Zusammenhänge zwischen zwei Variablen  $x_i$  und  $y_i$  zu untersuchen. Hierzu werden die Wertepaare  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  als Punkte in einem kartesischen Koordinatensystem abgebildet [145]. Entsprechend werden bei einem **3D-Streudiagramm** drei Variablen in ein dreidimensionales Koordinatensystem eingetragen [83].

Ein 3D-Streudiagramm stellt somit die wohl einfachste Möglichkeit dar, um Ergebnisdaten mit mehr als drei Dimensionen darzustellen. Dazu werden die Ergebnisse auf drei Dimensionen projiziert, indem jeweils eine Zielfunktion weggelassen wird. Für den vierdimensionalen Ergebnisraum des in dieser Arbeit vorgestellten multikriteriellen Modells<sup>21</sup> ergeben sich also die folgenden vier möglichen 3D-Darstellungen, wobei jeweils eine Dimension ausgeblendet wird<sup>22</sup>:

<sup>21</sup>S. Abschnitt 7.2.

<sup>22</sup>Gleiches gilt für die Beispieldaten aus Tabelle 7.2.

1.  $ret(x), mr(x), cr(x)$
2.  $ret(x), cr(x), or(x)$
3.  $ret(x), mr(x), or(x)$
4.  $mr(x), cr(x), or(x)$

Um einen Überblick des Zusammenspiels zwischen den einzelnen Risikoarten zu bekommen, muss der Entscheidungsträger der Bank allerdings mindestens zwei verschiedene Projektionen betrachten, z. B.  $[ret(x), mr(x), cr(x)]$  und  $[mr(x), cr(x), or(x)]$ , so dass jede Zielfunktion mindestens einmal vertreten ist. Für die Beispieldaten aus Tabelle 7.2 verdeutlichen dies die beiden Abbildungen 7.1 und 7.2, bei denen zu jedem Datenpunkt zur besseren Übersichtlichkeit eine Verbindungsgerade auf die untere Ebene eingezeichnet ist [83, 145]. Zur Darstellung auf Bildschirm oder Papier müssen diese dreidimensionalen Zeichnungen wiederum auf zwei Dimensionen projiziert werden. Dadurch kann sich die Interpretation der Ergebnisse im Vergleich zur 3D-Rotationsmöglichkeit am PC erschweren.

Es lässt sich also festhalten, dass 3D-Streudiagramme bereits für die Veranschaulichung von vier Dimensionen nur bedingt geeignet sind. Mehr als vier Dimensionen sind ohnehin nicht mehr übersichtlich darstellbar, da die Anzahl der möglichen Kombinationen von unterschiedlichen 3D-Darstellungen stark ansteigt.<sup>23</sup> Dadurch wird es für den Entscheidungsträger schwierig, den Trade-off zwischen Risiken und Rendite noch visuell zu erfassen, sollte spätestens ab fünf Dimensionen in jedem Fall auf eine der im Folgenden vorgestellten Visualisierungstechniken ausgewichen werden.

### 7.4.2. Streudiagramm-Matrix

Die **Streudiagramm-Matrix** (engl. *Scatterplot Matrix*) basiert auf klassischen zweidimensionalen Streudiagrammen und wird bei multikriteriellen Optimierungsproblemen sehr häufig verwendet [49]. Zur Erstellung einer Streudiagramm-Matrix für eine gegebene Menge  $n$ -dimensionaler Lösungsallokationen wird jede Zielfunktion mit jeder anderen Zielfunktion kombiniert und jeweils in ein eigenes Streudiagramm mit zwei Dimensionen eingetragen. Da die Kombination einer Zielfunktion mit sich selbst nicht sinnvoll ist, ergeben sich somit  $\binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$  einzelne Diagramme [145]. Zur besseren Anschaulichkeit werden meist auch die symmetrischen Diagramme unterhalb der Diagonalen dargestellt. Somit erhält man eine  $n \times n$ -Matrix mit  $n \cdot (n - 1)$  Plots, die nach Zielfunktionen aufsteigend sortiert werden. Für das vierdimensionale Modell dieser Arbeit werden also  $4 \cdot 3 = 12$  verschiedene Plots benötigt. Abbildung 7.3 zeigt eine Streudiagramm-Matrix der Beispieldaten aus Tabelle 7.2.

---

<sup>23</sup>Bei fünf Dimensionen sind bereits zehn verschiedene Kombinationen von Zielfunktionen möglich.

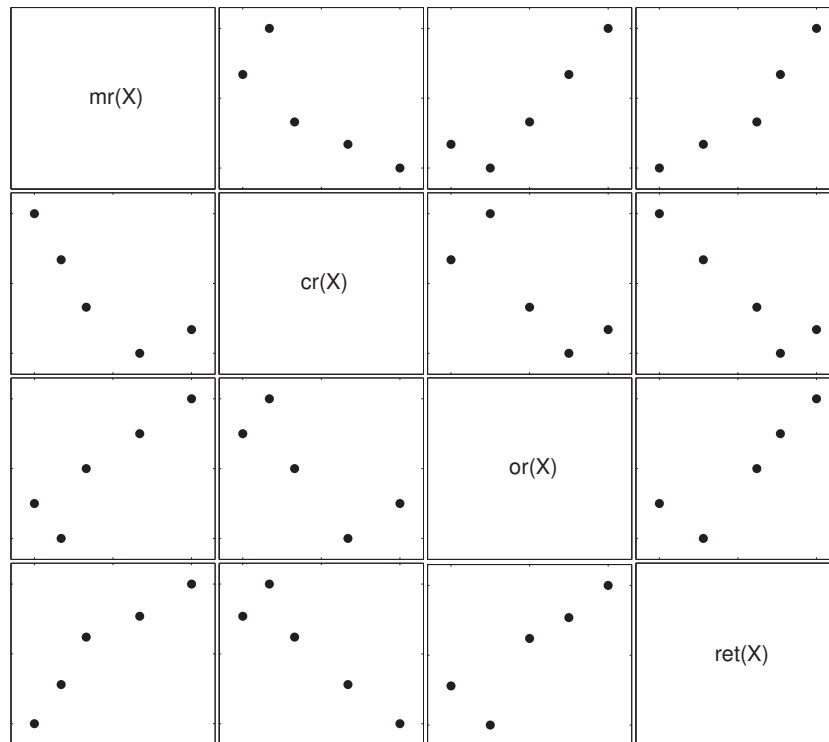


Abb. 7.3.: Streudiagramm-Matrix (mit Beispieldaten aus Tabelle 7.2)

Da jeder Datenpunkt in einer Streudiagramm-Matrix in allen Diagrammen einer Spalte bzw. Zeile immer an der gleichen X- bzw. Y-Koordinate liegt, kann er über alle Diagramme hinweg beobachtet werden [182]<sup>24</sup>. Es ist somit auf einen Blick möglich, Zusammenhänge zwischen den Zielfunktionswerten zu identifizieren und zu analysieren. Im Einzelnen sichtbar werden beispielsweise lineare und nichtlineare Zusammenhänge, Clustering sowie Ausreißer. Bei konfliktären Zielfunktionen, die bei der Asset Allokation i. d. R. vorliegen, finden sich in den einzelnen Plots Punktwolken, die effizienten Portfoliolinien ähneln. Die Punkte im Plot  $ret(x)/mr(x)$  (links unten in Abbildung 7.3) deuten beispielsweise eine solche Linie an.<sup>25</sup>

Am Beispiel in Abbildung 7.3 wird weiterhin ersichtlich, dass  $mr(x)$ ,  $or(x)$  sowie  $ret(x)$  deutlich positiv miteinander korreliert sind, während sich  $cr(x)$  eher gegenläufig entwickelt und damit negativ korreliert ist. Zur Untersuchung bestimmter Allokationen lassen sich die zugehörigen Zielfunktionswerte einer Allokation in jedem Einzelstreudiagramm optisch hervorheben. Dadurch wird ein Vergleich mit den übrigen Werten erleichtert. Für den Entscheidungsträger der Bank ergibt sich somit eine praktische Möglichkeit, beispielsweise die eigene Allokation den Allokationen aus einem Optimierungsdurchlauf gegenüberzustellen. Streudiagramm-Matrizen unterstützen nach übereinstimmender Meinung verschiedener Autoren das visuelle Erfassen für

<sup>24</sup>Von Cleveland [33] bezeichnet als *visual linking*.

<sup>25</sup>Im vierdimensionalen Fall des Portfolioproblems geht das klassische Aussehen der Portfoliolinie durch die komplizierten Zusammenhänge der Zielfunktionen nicht mehr in jedem Fall aus den Abbildungen hervor (s. hierzu beispielsweise die Visualisierungen in den Abschnitten 9.2.3, 9.3.3 sowie 10.3.2).

Probleme mit maximal acht bis neun Dimensionen. Ab dann werden die einzelnen Diagramme jedoch zu klein und Zusammenhänge können nicht mehr sinnvoll nachvollzogen werden [182, 145]. Für das vierdimensionale Modell in Teil 3 sind sie dementsprechend gut geeignet.

### 7.4.3. Parallelkoordinatenplot

Eine Darstellung ähnlich dem **Parallelkoordinatenplot**<sup>26</sup> wurde bereits 1972 von Geoffrion et al. [81] beschrieben.<sup>27</sup> Inselberg [106] hat die Parallele Koordinatendarstellung schließlich in die Computergeometrie eingeführt und damit wesentliche Entwicklungen in diesem Bereich geprägt. Seine Vorschläge wurden von Wegman [205] weiterentwickelt und durch theoretische Betrachtungen untermauert.

Im Kontext multikriterieller evolutionärer Algorithmen wurde die Methodik der Parallelen Koordinaten beispielsweise von Fonseca & Fleming [77] verwendet, um Trade-offs von Zielfunktionen zu visualisieren. Weiterhin diskutieren Purshouse & Fleming [162] die Anwendung zur Identifizierung von konfliktären Zielfunktionen bei multikriteriellen Optimierungsproblemen. Schlottmann et al. [177] verwenden Parallelkoordinatenplots erstmals zur Visualisierung im Kontext des Integrierten Portfoliomanagements.

Durch Parallele Koordinaten wird eine Abbildung von Teilmengen des  $\mathbb{R}^p$  auf Teilmengen des  $\mathbb{R}^2$  definiert. Somit lassen sich  $p$ -dimensionale Daten in nur zwei Dimensionen darstellen. Die Darstellungsform stellt eine Alternative zu den bisher beschriebenen Projektionsverfahren mit Hilfe von Streudiagrammen dar [145].

Basis des Parallelkoordinatenplots ist ein zweidimensionales kartesisches Koordinatensystem. Für alle  $p$  Zielfunktionen (bzw. Dimensionen des Lösungsraumes)<sup>28</sup> wird nun äquidistant eine eigene Achse orthogonal zur Abszisse eingezeichnet. Als Ergebnis erhält man ein *Parallelkoordinatensystem* mit  $p$  senkrechten Achsen, die als  $c_1, \dots, c_p$  bezeichnet werden [145]. Die Reihenfolge der Zielfunktionen spielt hierbei eine untergeordnete Rolle, die Funktionen können jedoch z. B. nach Bedeutung geordnet werden. Nun werden die konkreten Zielfunktionsausprägungen einer einzelnen Lösung auf den zugehörigen senkrechten Achsen eingetragen und anschließend durch eine durchgezogene Linie miteinander verbunden. Jeder Lösungsvektor  $x$  wird folglich durch einen Polygonzug mit Knoten auf den Achsen  $c_1, \dots, c_p$  repräsentiert. Zur besseren Interpretation der Ergebnisse schlagen Purshouse & Fleming [162] zusätzlich vor, die einzelnen Zielfunktionswerte jeweils auf das Intervall  $[0; 1]$  zu normieren.<sup>29</sup> Diese Normierung wurde für die Beispieldaten in Tabelle 7.2 bereits durchgeführt und kommt im Folgenden für alle Abbildungen zum Einsatz.

---

<sup>26</sup>Deb [49] nennt die Methode auch *Value-Path-Methode*.

<sup>27</sup>Einen Überblick geben Wegman [205] sowie Deb [49].

<sup>28</sup>Für das in dieser Arbeit beschriebene Optimierungsproblem [7.7] gilt entsprechend  $p = 4$ .

<sup>29</sup>Nagel [145] hält eine Normierung in jedem Fall für notwendig.

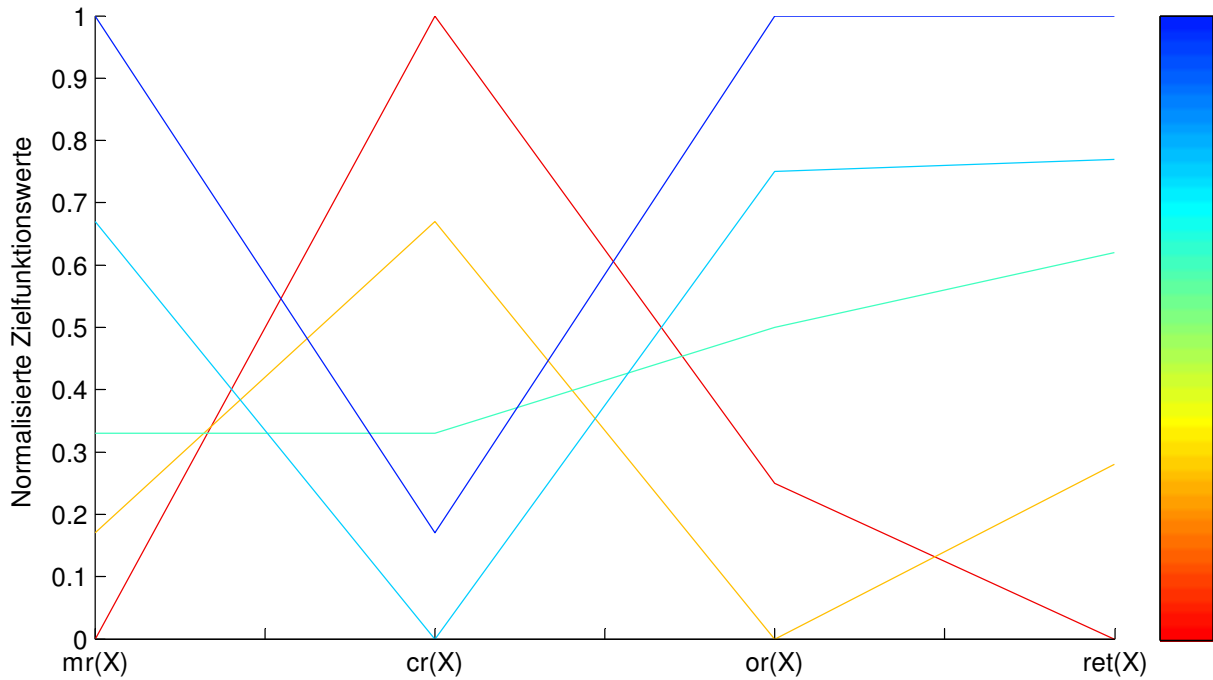


Abb. 7.4.: Parallelkoordinatenplot (mit Beispieldaten aus Tabelle 7.2)

In Abbildung 7.4 wird mit den Daten des Leitbeispiels aus Tabelle 7.2 jede Lösung durch eine einfarbige, geknickte Linie repräsentiert. Wenn alle Lösungen nach diesem Muster eingetragen sind, kann man anhand der Struktur des Schaubildes deutlich erkennen, wie die einzelnen Lösungen in den Zielfunktionswerten zusammenhängen [182]. Das Schaubild wurde ergänzt um ein Farbspektrum, das bei einer Vielzahl von Lösungsallokationen die optische Erfassung zusätzlich unterstützt. Im Beispiel wurde die Linienfarbe einer Allokation in Abhängigkeit von  $ret(x)$  gewählt. Nach Normierung auf  $[0; 1]$  kennzeichnet der unterste *Rot*-Wert die niedrigste Rendite  $(0, 0)$  und der oberste *Blau*-Wert die höchste Rendite  $(1, 0)$ . Dazwischen finden sich verschiedene Farbtonabstufungen für Renditen innerhalb dieser beiden Extremwerte.

Der Vorteil der Parallelen Koordinatendarstellung liegt darin, dass auch höherdimensionale Räume in der zweidimensionalen Darstellung übersichtlich veranschaulicht werden können. Durch die farbliche Kennzeichnung (oder alternativ durch Graustufen) wird die Visualisierung noch weiter verbessert. In Parallelkoordinatenplots (s. auch Abbildung 7.4) kennzeichnen eher parallele Linien eine hohe Korrelation<sup>30</sup> und kreuzende Linien eine geringe bzw. negative Korrelation der Zielfunktionen [182].

Weiterhin ermöglichen die Plots eine qualitative Bewertung der Güte eines verwendeten MOEAs [49]. Wenn ein Algorithmus die Zielfunktionswerte der Lösungen gleichmäßig über die einzelnen Zielfunktionsachsen verteilt, gelingt es ihm, eine hohe Diversität der Lösungen sicherzustellen. Durch eine hohe Zahl kreuzender Linien wird ferner verdeutlicht, dass die Lösungen erhebliche Trade-offs beinhalten. Wenn große Steigungswechsel zwischen aufeinander

<sup>30</sup>Bei Korrelation 1 sind die Linien exakt parallel.

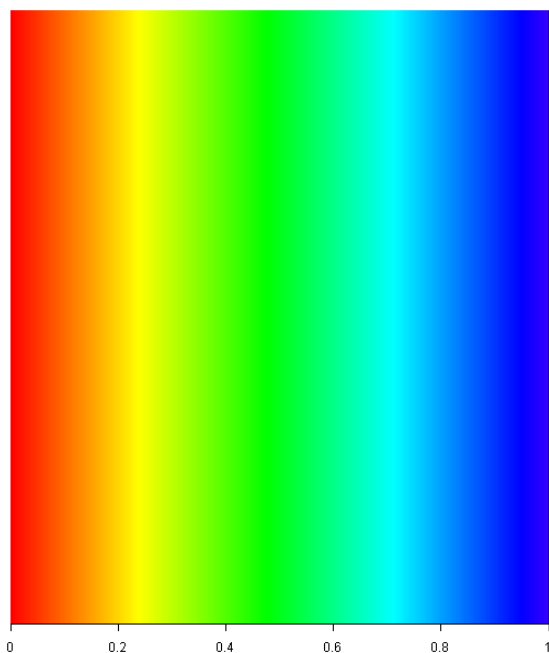


Abb. 7.5.: Farbspektrum Heatmap

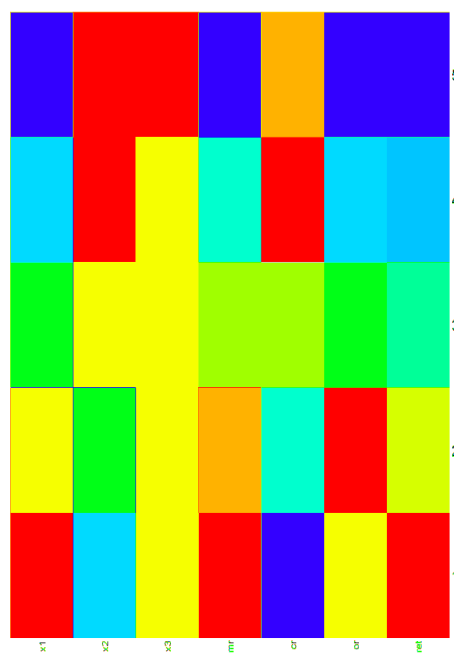


Abb. 7.6.: Heatmap (mit Beispieldaten aus Tabelle 7.2)

folgenden Zielfunktionen zu beobachten sind, ermittelt der Algorithmus zudem gute nichtdominierte Trade-off-Lösungen. Diese Beobachtungen werden später in den Kapiteln 9 und 10 überprüft.

Entsprechend der Vorgehensweise bei Heatmaps, die im nächsten Abschnitt beschrieben werden, können auch bei der Parallelen Koordinatendarstellung alle bzw. ausgewählte Parameter in die Darstellung einbezogen werden.<sup>31</sup> Es ist dabei ebenfalls zu empfehlen, die Parameter analog zu den Zielfunktionswerten auf das Intervall  $[0; 1]$  zu normieren.

#### 7.4.4. Heatmap

**Heatmaps** stellen eine Möglichkeit dar, um Zusammenhänge der einzelnen Zielfunktionen und insbesondere auch aller Parameter auf einen Blick sehr anschaulich darzustellen. Im Umfeld der multikriteriellen evolutionären Optimierung wurden Heatmaps, die vornehmlich der Visualisierung von Daten in der Molekularbiologie dienen, von Pryke et. al. [161] eingeführt.

Analog zu anderen Visualisierungstechniken, z. B. Parallele Koordinaten, werden alle Zielfunktionswerte und Parameter zunächst auf das Intervall  $[0; 1]$  normiert. Bei der Portfolio-Optimierung gibt es für die Normierung der Parameterwerte (Asset-Gewichte) verschiedene Varianten. Zum einen kann als Normierungsbasis fix das Intervall  $[0; 1]$  vorgegeben werden, da jedes Asset beim betrachteten Optimierungsproblem<sup>32</sup> prinzipiell zwischen einem Anteil von

<sup>31</sup>Bei einer großen Anzahl von Parametern empfiehlt es sich, nur besonders relevante Parameter in die Visualisierung einzubeziehen.

<sup>32</sup>S. allgemeines multikriterielles Modell in [7.7].

0% (kein Investment) und 100% (voll investiert) schwanken kann. Wenn für einzelne Asset-Gewichte Beschränkungen vorgegeben werden, kann auch das maximale und/oder minimale Gewicht jedes individuellen Assets als Ober-/Untergrenze für die Normierung herangezogen werden. Alternativ verwendbar ist die Spanne der beim Optimierungsprozess tatsächlich gefundenen Gewichte. In der exemplarischen Abbildung 7.6 mit den Daten aus Tabelle 7.2 wurde das fest vorgegebene Intervall  $[0; 1]$  zur Normierung der Asset-Gewichte verwendet.

Weiterhin wird ein Farbspektrum zur Verdeutlichung der konkreten Ausprägung jedes einzelnen Wertes im Intervall  $[0; 1]$  festgelegt. Wenn nur eine Schwarz-Weiß-Darstellung möglich ist, kann hierzu auch ein Grauspektrum verwendet werden. Im weiteren Verlauf wurde, analog zur Darstellung der Parallelen Koordinaten im vorhergehenden Abschnitt, der Wert 0,0 mit *Rot* und der Wert 1,0 mit *Blau* belegt. Die Abstufungen dazwischen ergeben sich durch das Farbspektrum entsprechend Abbildung 7.5.

Für die Darstellung werden nun alle Parameter und Zielfunktionswerte, z. B. entsprechend einer bestimmten Zielfunktion, sortiert. Im Leitbeispiel aus Tabelle 7.2 wurden die Allokationen 1-5 nach der Zielfunktion  $ret(x)$  aufsteigend geordnet. Anschließend wird jede einzelne Allokation zusammen mit ihren Zielfunktionswerten zeilenweise durch farbige Rechtecke abgebildet. Beim Leitbeispiel stehen also in jeder Zeile sieben Rechtecke, drei für die Parameter (Asset-Gewichte) und vier für die zugehörigen Zielfunktionswerte (Risikofunktionen). In Abbildung 7.6 sind die sortierten Allokation von unten nach oben abgetragen.

Jedes Rechteck einer Zeile repräsentiert durch seine Einfärbung<sup>33</sup> die Ausprägung des entsprechenden Parameters bzw. Zielfunktionswertes. Es ergibt sich somit ein ganzheitliches Abbild aller Werte eines Optimierungsprozesses, in dem Zusammenhänge sehr deutlich erkennbar sind. Beispielsweise verdeutlicht der nahezu identische Farbverlauf in den entsprechenden Spalten in Abbildung 7.6, dass der Parameter  $x_1$  (Spalte 1) mit dem Zielfunktionswert  $ret$  (Spalte 7) sehr stark korreliert ist. Diese Darstellung eignet sich besonders gut, wenn sehr viele Allokationen und eine große Anzahl von Parametern vorhanden sind [161]. Dann werden die Effekte durch das Farb- bzw. Grauspektrum noch deutlicher sichtbar (s. beispielsweise die Abbildungen 9.9 und 10.9).

In dem R-Package<sup>34</sup>, das von Pryke et al. [161] zur Verfügung gestellt wird, können zahlreiche Anpassungen der Ausgaben vorgenommen werden. Neben der Sortierung der Allokationen nach vorgegebenen Kriterien können diese auch nach Parametern oder Zielfunktionen geclustert werden.

<sup>33</sup>Bzw. alternativ dem zugehörigen Grauton bei Graustufendarstellung.

<sup>34</sup>R Project ist eine unter <http://www.r-project.org> frei verfügbare Statistik-Software.

### 7.4.5. Würdigung der Visualisierungstechniken und Ausblick

Die Eignung der einzelnen vorgestellten Visualisierungstechniken hängt vom betrachteten Problem ab. Heatmaps helfen vor allem bei Problemen mit einer hohen Anzahl von Parametern, auch komplexe Zusammenhänge schnell zu erfassen. Auch Parallele Koordinaten ermöglichen eine gute Beurteilung der Interdependenzen, bei zusätzlichem Einbezug von Parameterwerten werden diese jedoch schnell unübersichtlich. Streudiagramm-Matrizen sollten allein als Übersicht für die Zielfunktionen verwendet werden. Eine Untersuchung der Parameter erscheint hier nicht sinnvoll. Vor allem die beiden letztgenannten Techniken (Parallele Koordinaten und Streudiagramm-Matrizen) eignen sich gut, um die Lage einer bestimmten Portfolio-Allokation im Vergleich zu anderen (optimalen) Allokationen zu beurteilen. Somit kann ein Entscheidungsträger potenziell auch die aktuelle (suboptimale) Allokation im Raum der optimalen Lösungen evaluieren.

Ergänzende Möglichkeiten im Fall hochdimensionaler Probleme bringen die Methoden der **Dimensionsreduktion**, mittels derer versucht wird, den wesentlichen Informationsgehalt aus zu präsentierendem Datenmaterial zu extrahieren [145]. Falls beispielsweise mehr als vier Zielfunktionen in das generelle Modell [7.7] einbezogen werden sollen, könnte mit Hilfe der Dimensionsreduktion geprüft werden, ob einzelne Zielfunktionen verdichtet werden können. Das Bankmanagement interessiert sich im betrachteten vierdimensionalen Problem, das in Kapitel 7 der Arbeit präsentiert wird, allerdings für die spezifischen Ausprägungen jeder einzelnen Risikozielfunktion. Daher wurde in dieser Arbeit keine weitere Verdichtung der Daten vorgenommen.

Bei der Visualisierung von Daten kann zusätzlich die dreidimensionale Wahrnehmungsfähigkeit des Anwenders und die zweidimensionale Beschränkung des Computermonitors berücksichtigt werden. **Dynamische Grafik**, z. B. durch 3D-Rotation oder das interaktive Bearbeiten von Elementen der grafischen Darstellung in der Parallelkoordinatendarstellung, kann die Visualisierung potenziell noch intuitiver gestalten. Es gibt bei der dynamischen Grafik folgende vier elementare Techniken, die weitere Verbesserungen der Darstellung liefern können [145]:

- 3D-Rotation
- Interaktive Manipulation
- Animation
- Linking

Für eine ausführliche Beschreibung dieser Darstellungsformen wird auf Gessler [83] sowie Nagel [145] verwiesen.



## 7.5. Typische Beschränkungen in der Praxis

In der Praxis ist eine Reihe von Einschränkungen des Portfolioproblems relevant, die eine Optimierung wesentlich beeinflussen und insbesondere erschweren können. Fabozzi et al. [71] geben einen umfassenden Überblick und führen eine Unterteilung in lineare, quadratische, nicht-lineare und kombinatorische Beschränkungen durch.

Zu den **linearen** Einschränkungen gehört insbesondere der in der Praxis häufig vorkommende *Ausschluss von Leerverkäufen*.<sup>35</sup> Im konzipierten Modell [7.7] wird dies durch die Bedingung  $x_i \geq 0$  berücksichtigt. Weiterhin gibt es *Umsatzlimitierungen* für ein bestimmtes Asset, eine Asset-Klasse oder das gesamte Portfolio. Entsprechend definierter Limits dürfen in der Folge maximal Umschichtungen bzw. Käufe/Verkäufe in der genannten Höhe über einen festgelegten Zeithorizont durchgeführt werden. *Haltelimits* regeln demgegenüber die maximale oder minimale Höhe von Investments in einem Asset bzw. einer Asset-Klasse.<sup>36</sup>

**Quadratische** und **nichtlineare** Einschränkungen entstehen beispielsweise durch *Limitierung des Risikos* in bestimmten Risikokategorien bei Verwendung des Value-at-Risk als Risikokennzahl und stellen besonders hohe Anforderungen an die eingesetzten Optimierungsverfahren. Zusätzlich werden auch die Portfolios von Kreditinstituten häufig an Benchmarks gemessen und eine maximale Abweichung (*Tracking Error*) von diesen Benchmarks vorgegeben.

Ebenfalls schwierige Nebenbedingungen entstehen durch **kombinatorische** Vorgaben, die üblicherweise als Ganzzahligkeitsrestriktionen<sup>37</sup> bezeichnet werden. Wenn sehr viele verschiedene Investitionsmöglichkeiten zur Auswahl stehen, erscheint es sinnvoll, die Anzahl der tatsächlich gewählten Assets auf einen bestimmten Wert zu begrenzen (*Kardinalitätsbeschränkung*). Da aus Sicht der Transaktionskosten überdies extrem kleine Positionen nicht wünschenswert sind, werden in der Praxis minimale Haltevolumina und Beschränkungen des Transaktionsvolumens vorgegeben. Letztendlich besteht ebenso die Möglichkeit, dass nur bestimmte *gerundete Einheiten* eines Wertpapiers handelbar sind.<sup>38</sup>

Die beschriebenen Beschränkungen relaxieren Annahmen aus der klassischen Portfolio-Theorie (s. Abschnitt 3.3.1), die beispielsweise davon ausgeht, dass ein Asset beliebig teilbar sei. Auch eine Berücksichtigung von Volumenbeschränkungen und eine Limitierung der Anzahl von Assets im Portfolio kann mit Standardmodellen nicht erfolgen. Obwohl die Einführung solcher Beschränkungen erheblich zu ihrer Praxisnähe beiträgt, führt sie gleichzeitig zu einer stark erhöhten Komplexität der zugehörigen Optimierungsprobleme.

<sup>35</sup>Viele Unternehmen, z. B. Fonds oder andere institutionelle Anleger, dürfen aufgrund gesetzlicher Vorschriften keine Leerverkäufe tätigen.

<sup>36</sup>Haltelimits werden in Kapitel 9 im Rahmen der Strategischen Asset Allokation im restringierten Fall des Optimierungsproblems vorgegeben.

<sup>37</sup>Engl. *integer constraint*.

<sup>38</sup>Engl. *round lot constraint*.

Verschiedene Autoren haben sich mit solchen praxisrelevanten Nebenbedingungen der Portfolio-Optimierung bei Beschränkung auf höchstens zwei Zielfunktionen auseinandergesetzt. Chang et al. [30] fokussieren auf Kardinalitätsbeschränkungen im klassischen Erwartungswert-Varianz-Portfolioproblem und verwenden verschiedene Heuristiken zur Approximation der Lösungen. Jobst et al. [109] untersuchen zusätzlich die Einschränkung runder Einheiten sowie von Mindestkauforders und belegen zudem die Zugehörigkeit des entsprechend erweiterten Standardproblems zu den **NP**-schweren Problem.<sup>39</sup> Auch Maringer [132] und Streichert & Tanaka-Yamawaki [195] führen ausgewählte Beschränkungen ein und verwenden Heuristiken zur Problemlösung.

---

<sup>39</sup>S. Kapitel 4.

## 8. Approximation der Lösungen mit MOEAs und Performance

Zur Lösung des Optimierungsproblems (7.7) werden multikriterielle evolutionäre Algorithmen (MOEAs) verwendet (s. Kapitel 5). Ziel ist dabei, gut verteilte Näherungslösungen im beschränkten vierdimensionalen Lösungsraum zu finden. Ein wesentlicher Vorteil des MOEA-Ansatzes besteht darin, dass der gesamte effiziente Rand in einem einzelnen Schritt des Algorithmus berechnet wird. Dieser Rand wird durch die beste Population des EA repräsentiert.

In der Literatur werden unterschiedliche Algorithmen diskutiert, die bestimmte MOEA-Schemata implementieren.<sup>1</sup> Zudem gibt es eine Vielzahl von theoretischen und empirischen Vergleichen zwischen den verschiedenen Ansätze zur multikriteriellen Optimierung. Im Allgemeinen sollten die meisten dieser MOEAs für den Problemkontext dieser Arbeit geeignet sein.<sup>2</sup> Ziel ist die Bereitstellung geeigneter Werkzeuge, um das Optimierungsproblem des Integrierten Portfoliomanagements zu lösen. Im Folgenden werden zwei verschiedene Verfahren miteinander verglichen und die Vor- und Nachteile herausgestellt.

Zum einen wurde der NSGA-II<sup>3</sup> von Deb et al. [51] ausgewählt, der bereits in vielen Anwendungsbereichen erfolgreich getestet wurde. Insbesondere bei Problemen der Portfolio-Optimierung mit weniger als vier Zielfunktionen hat sich der NSGA-II im Einsatz vielfach bewährt.<sup>4</sup> Wie in Kapitel 5 erläutert, spielen bei der Auswahl optimaler Allokationen jedoch zwei Kriterien eine tragende Rolle. Neben der guten und schnellen Konvergenz in Richtung einer optimalen Lösung ist auch die gleichmäßige Verteilung der Lösungen über den Lösungsraum von herausragender Bedeutung. Insbesondere in der Strategischen Asset Allokation, bei der dem Entscheider der Bank eine übersichtliche und gleichzeitig möglichst umfassende Menge von Pareto-optimalen Allokationen präsentiert werden soll, muss auf hohe Diversität Wert gelegt werden. Aus diesem Grund wurde für die Studie zur Optimierung der Strategischen Asset Allokation im folgenden Kapitel 9 zusätzlich zum NSGA-II der in jüngerer Zeit veröffentlichte  $\epsilon$ -MOEA von Deb et al. [54] ausgewählt. Durch Einsatz des  $\epsilon$ -Dominanzprinzips (s. Abschnitt 5.3.4) wird bei diesem Algorithmus erreicht, dass die erhaltenen Lösungen eine hohe Diversität besitzen. Die effiziente Implementierung sorgt dennoch dafür, dass eine gute und schnelle Konvergenz in Richtung der optimalen Lösung erfolgt.<sup>5</sup>

<sup>1</sup>Für einen Überblick zu den Verfahren s. Deb [49] sowie Coello et al. [36].

<sup>2</sup>Coello [34] gibt einen Überblick spezifischer Anwendungen von MOEAs im Bereich Finance.

<sup>3</sup>S. Abschnitt 5.3.3.

<sup>4</sup>Einen allgemeinen Überblick verschiedener Studien im Finance gibt hierzu [179] und einen mehr auf die Portfolio-Optimierung ausgerichteten [175].

<sup>5</sup>S. Abschnitt 5.3.4.

Die Implementierungen des NSGA-II und des  $\varepsilon$ -MOEA werden von Kalyanmoy Deb zur Verfügung gestellt.<sup>6</sup> Es wurden zudem Anpassungen durchgeführt, um die Algorithmen für das Optimierungsproblem anwendbar zu machen bzw. um die Performance der Algorithmen noch weiter zu steigern (s. folgender Abschnitt 8.2).

### 8.1. Generelle Eignung von MOEAs

Zur Prüfung der generellen Eignung von MOEAs im Problemkontext wird in diesem Abschnitt eine Portfolio-Optimierung mit nur zwei Zielfunktionen, nämlich *Rendite* und *Risiko* durchgeführt. Wie auch in den Anwendungsfällen in den Kapiteln 9 und 10, wird die Risikokennzahl hierbei über den Value-at-Risk (s. Abschnitt 2.4.2) ermittelt. Als exemplarische Eingabedaten dienen die Performance-Zeitreihen der drei Aktienindizes S&P 500, ATX und RTX<sup>7</sup>, die später auch bei der Optimierung der Strategischen Asset Allokation in Kapitel 9 eingesetzt werden.

#### 8.1.1. Vollständige Enumeration als Benchmark

Für dieses Optimierungsproblem wurde als Benchmark eine vollständige Auswertung (*Enumeration*) aller möglichen Portfoliokombinationen auf Basis von **0,025%**-Schritten für die individuellen Asset-Gewichte im Portfolio durchgeführt. Durch Vorgabe der Schrittweite wird die Zahl der möglichen Portfolio-Kombinationen entsprechend Formel 4.2<sup>8</sup> festgelegt. Es ergeben sich also bei drei vorgegeben Assets genau 8.006.001 mögliche Portfolio-Kombinationen mit 0,025% Schrittweite. Für die beiden betrachteten Zielfunktionen benötigt diese Berechnung 89.63 Minuten auf einem System mit Intel<sup>®</sup> Core<sup>™</sup> Duo T2400 Prozessor (1830Mhz) mit 1GB RAM-Speicher. Dabei werden 6.098 Pareto-optimale Lösungen identifiziert, die in Abbildung 8.1 als schwarzer unterbrochener Rand der Portfolios ersichtlich sind. Diese Linie dient als Annäherung an die tatsächliche Pareto-optimale Front des Problems und wird im weiteren Verlauf des Kapitels als Benchmark für die Ergebnisse der beiden MOEAs herangezogen. In Abbildung 8.1 sind zur Veranschaulichung zusätzlich die 5.151 Portfolios<sup>9</sup>, die sich bei **1%**-Schritten für die individuellen Asset-Gewichte ergeben, durch graue Rauten visualisiert. Die Berechnung dauert in diesem Fall auf dem Testsystem 3,42 Sekunden und es ergeben sich insgesamt 148 Lösungen als Pareto-optimale Front.

In Tabelle 8.1 wird dargestellt, wie sich die Laufzeit der Portfolio-Optimierung mittels vollständiger Enumeration bei drei Assets und verschiedenen Schrittweiten  $a$  entwickelt. Im stark vergrößerten Ausschnitt in Abbildung 8.2 wird zudem ersichtlich, dass die effizienten Lösungen

---

<sup>6</sup>Verschiedene Implementierungen der Algorithmen in den Programmiersprachen C und C++ finden sich unter <http://www.iitk.ac.in/kangal/codes.shtml>.

<sup>7</sup>Eine detaillierte Betrachtung dieser Aktienindizes findet sich in Abschnitt 9.1.

<sup>8</sup>Hier:  $r = 4000$ . Herleitung s. Kapitel 4.

<sup>9</sup>Diese Zahl ergibt sich ebenfalls aus Formel 4.2 mit  $r = 100$  (bzw.  $a = 1\%$ ).

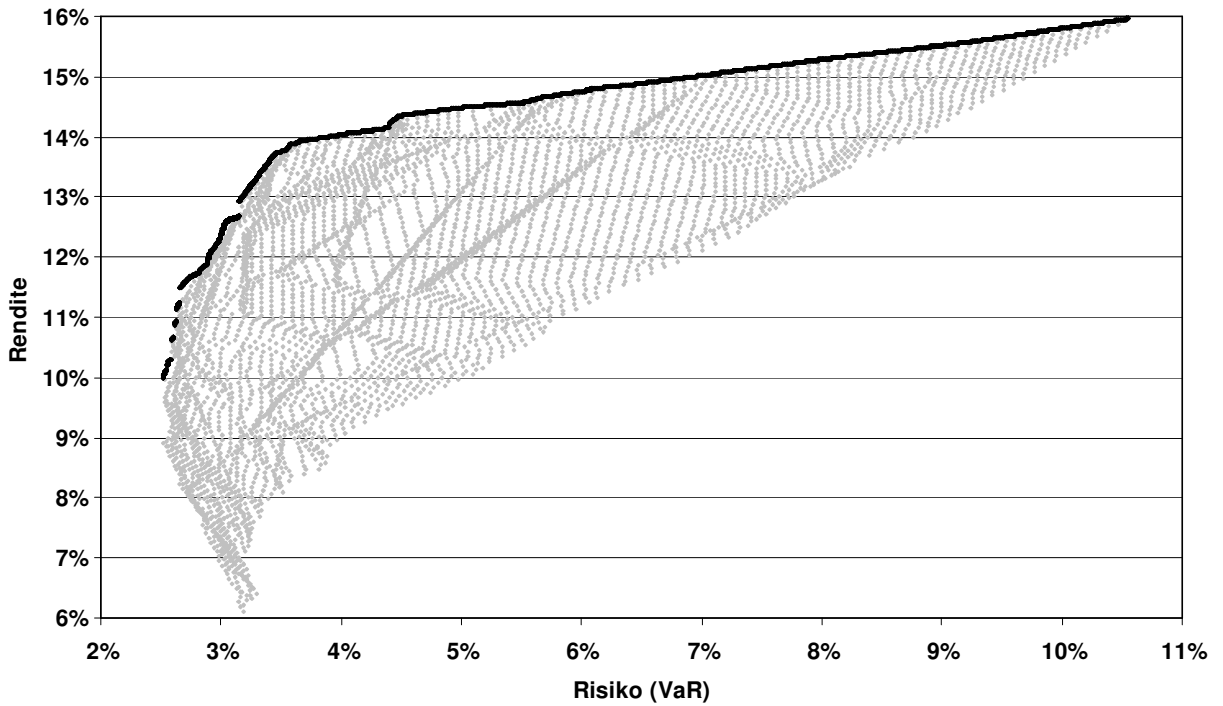


Abb. 8.1.: Mögliche Portfolioallokationen mit drei Assets bei Optimierung mit den beiden Zielfunktionen Risiko und Rendite bei 1%-Schritten sowie effiziente Portfolios bei 0,025%-Schritten (mittels vollständiger Enumeration)

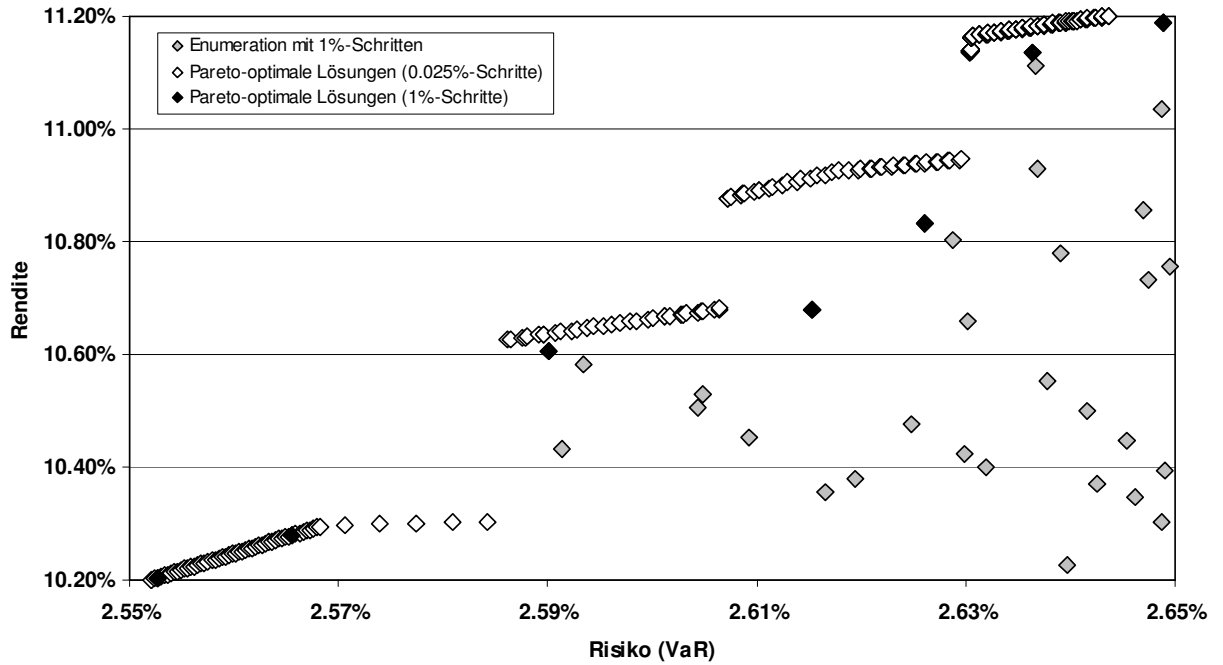


Abb. 8.2.: Vergrößerte Darstellung eines Ausschnitts des Zielfunktionsraums bei Portfolios mit drei Assets (mittels vollständiger Enumeration mit 1%-Schritten) sowie entsprechender effizienter Portfolios (anhand von 0,025%- und 1%-Schritten)

Schrittweite $a$	Anzahl Kombinationen	Pareto-Optima	Laufzeit
10,000%	66	16	0,047s
5,000%	231	34	0,16s
2,000%	1.326	72	0,88s
1,000%	5.151	148	3,42s
0,500%	20.301	288	13,48s
0,250%	80.601	585	53,42s
0,100%	501.501	1.485	332,17s
0,025%	8.006.001	6.098	5.377,80s

Tab. 8.1.: Laufzeitentwicklung der Portfolio-Optimierung mit 3 Assets und vollständiger Enumeration (Schrittweite  $a$ )

bei der Ermittlung mit 1%-Schritten in der Regel nicht mit denen bei 0,025%-Schritten übereinstimmen. Die Unterschiede in der Rendite liegen in diesem Ausschnitt bei gleichem Risiko sogar bei über 0,20%. Weiterhin geht aus Abbildung 8.1 sowie 8.2 deutlich hervor, dass die tatsächliche Pareto-Front des Optimierungsproblems, genähert durch die Pareto-optimalen Allokationen der Enumeration mit 0,025%-Schritten, nicht stetig verläuft, sondern größere Sprünge aufweist. Diese Eigenschaft ist eine direkte Folge des verwendeten Risikomaßes VaR und stellt für klassische Optimierungsverfahren ein Problem dar.

### 8.1.2. Lösung mit MOEAs

Für das zweikriterielle Optimierungsproblem aus 8.1 werden nun in Abbildung 8.3 die Ergebnisse einer heuristischen Optimierung anhand des NSGA-II und des  $\varepsilon$ -MOEA dargestellt. Für die Parameter der beiden Verfahren wurden die Standardannahmen verwendet, d. h. Rekombination mit  $p_c = 0,8$ , Mutation mit  $p_m = \frac{1}{n} = 0,025$ . Weiterhin wurde für die beiden Algorithmen eine Population von  $n = 40$  Individuen zugrunde gelegt. Die Laufzeiten für 50.000 Fitnessfunktionsbewertungen sind mit 6,78 Sekunden ( $\varepsilon$ -MOEA) und 7,03 Sekunden (NSGA-II) für beide Algorithmen beinahe gleich. Die  $\varepsilon$ -Parameter des  $\varepsilon$ -MOEA wurden angepasst, so dass das finale Archiv nach den Durchläufen 41 Pareto-optimale Individuen enthält.

Im direkten Vergleich zur vollständigen Enumeration mit 0,025%-Schritten aus dem vorhergehenden Abschnitt als Näherung der tatsächlichen Pareto-Front ist erkennbar, dass sich der  $\varepsilon$ -MOEA der Pareto-Front besser nähert als der NSGA-II. Im vergrößerten Ausschnitt (s. Abbildung 8.4) wird dies noch deutlicher. Alle vom  $\varepsilon$ -MOEA gefundenen Portfolios liegen direkt auf der ermittelten Pareto-Front aus der vollständigen Enumeration. Weiterhin fällt auf, dass die Portfolioallokationen beim  $\varepsilon$ -MOEA gleichmäßiger über den Zielfunktionsraum verteilt sind. An dieser Stelle bewährt sich die Verwendung des  $\varepsilon$ -Dominanzkriteriums bei der Optimierung. Zumindest aus Sicht dieser qualitativen Betrachtung erscheint der  $\varepsilon$ -MOEA dem NSGA-II in

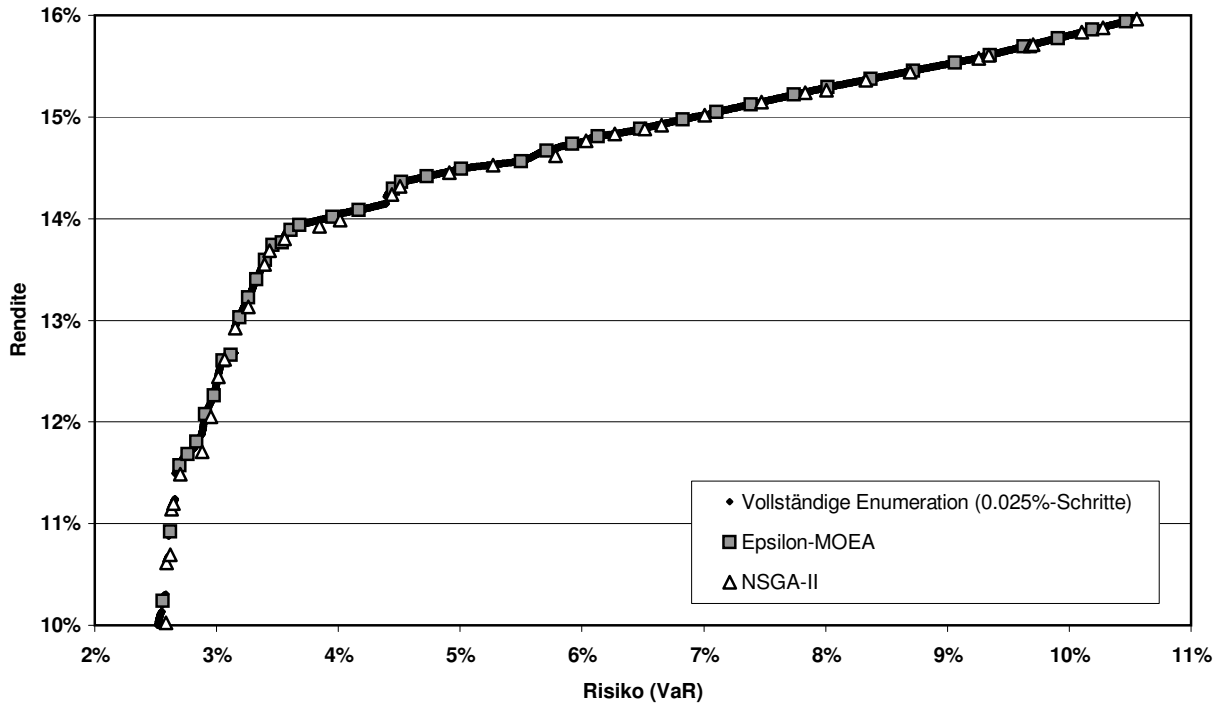


Abb. 8.3.: Effiziente Portfolioallokationen mit drei Assets bei Optimierung mit den beiden Zielfunktionen Rendite und Risiko ermittelt über vollständiger Enumeration mit 0,025%-Schritten sowie mit NSGA-II und  $\epsilon$ -MOEA

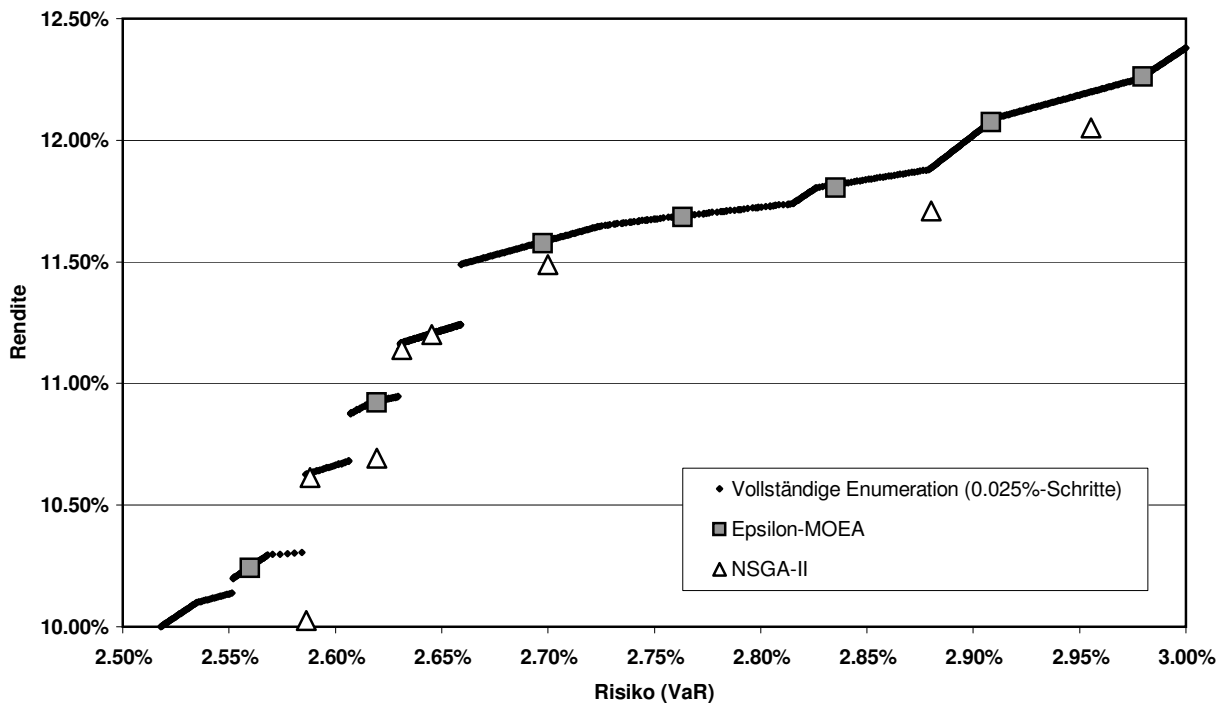


Abb. 8.4.: Vergrößerte Darstellung eines Abschnitts der Pareto-effizienten Portfolios bei drei Assets (ermittelt über vollständige Enumeration mit 0,025%-Schritten sowie mit NSGA-II und  $\epsilon$ -MOEA

verschiedener Hinsicht überlegen. Er besticht durch bessere Laufzeit, schnellere Konvergenz und höhere Diversität der Lösungen. Im folgenden Abschnitt 8.4 werden diese Beobachtungen durch konkrete Performance-Messungen überprüft.

### 8.2. Parametrisierung und Erweiterungen

Die Parametrisierung der verwendeten evolutionären Verfahren trägt wesentlich zur Güte und Geschwindigkeit der Lösungsfindung bei. In dieser Arbeit wurde die Parameterwahl auf Basis von Literaturempfehlungen sowie aufgrund von umfangreichen Erfahrungen beim Einsatz der Algorithmen durchgeführt. Es werden die genetischen Variationsoperatoren aus den jeweiligen Implementierungen verwendet (Simulated Binary Crossover und der korrespondierende Mutationsoperator für reell-kodierte Gene). Zudem wird die Crossover-Wahrscheinlichkeit mit 0,8 festgelegt und die Mutationsrate wie allgemein üblich als  $\frac{1}{n}$ .

In Kapitel 5 wurden die Grundlagen evolutionärer Verfahren vorgestellt. Nachfolgend werden die konkret umgesetzten und teilweise selbst entwickelten Ansätze zur Beschleunigung und Verbesserung der Lösungsfindung beschrieben. Eine Hybridisierung, die in verschiedenen Anwendungsbereichen bereits erfolgreich zum Einsatz gekommen ist, wurde nicht implementiert. Hier ergeben sich Möglichkeiten zur weiteren Forschung.

#### 8.2.1. Gezielte Initialisierung

Da über den Zielfunktionsraum eines Optimierungsproblems oft nur wenig bekannt ist, verwenden viele evolutionäre Algorithmen zufällige Lösungen als Startpunkt für die Optimierung. Falls jedoch Informationen über das Problem gegeben sind, kann durch gezielte Wahl von Startlösungen das Konvergenzverhalten des Algorithmus positiv beeinflusst werden. Aufgrund von Analysen zum Konvergenzverhalten erweist es sich bei der Portfolio-Optimierung als sinnvoll, durch die Wahl von Extrempunkten im Suchraum die Auswahl der Startlösungen gezielt zu initialisieren.

Im Anwendungsfall der Strategischen Asset Allokation in Kapitel 9 wird folgendes spezielle Initialisierungsverfahren verwendet: Für jedes Asset wird ein Vektor festgelegt, der das spezifische Asset mit 100% in einem Portfolio gewichtet. Durch diese Wahl der Extremwerte wird sichergestellt, dass der Zielfunktionsraum durch den EA besser erfasst wird.<sup>10</sup> Bei der zweidimensionalen Portfolio-Optimierung (mit Risiko/Rendite) wird das äußerste Portfolio mit der höchsten Rendite und dem höchsten Risiko immer durch ein einzelnes Asset repräsentiert. Beim Integrierten Risiko-Rendite-Management mit mehr als zwei Zielfunktionen tritt dieses Phänomen allerdings nicht in jedem Fall auf.

---

<sup>10</sup>Weitere Vorschläge zur gezielten Initialisierung finden sich z. B. in Haubelt et al. [97].



Alle übrigen Startlösungen werden entsprechend der üblichen Vorgehensweise zufällig über den Suchraum verteilt. Das Verfahren konvergiert entsprechend Analysen, die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführt wurden, bereits nach einer geringeren Anzahl von Iterationen in Richtung der wahren Pareto-Front.

### 8.2.2. Reparatur-Operator

Da sowohl Kreditfinanzierung als auch Short-Selling beim Optimierungsproblem ausgeschlossen wurden<sup>11</sup>, sind für jedes reell-kodierte Gen der Entscheidungsvariablen in Gleichung (7.2) die Grenzen entsprechend auf das Intervall  $[0, 1]$  festgelegt. Daneben muss sichergestellt werden, dass jedes Portfolio  $x$  die Bedingung  $\sum_{i=1}^n x_i = 1$  aus Gleichung (7.1) erfüllt. Hierzu ist es erforderlich, ungültige Individuen entweder zu bestrafen oder zu reparieren.

Bei Aufnahme einer *Strafffunktion* für ungültige Individuen in die Zielfunktionen wurde im Einklang mit Ergebnissen anderer Studien in verschiedensten Anwendungsgebieten eine schlechtere empirische Konvergenz der Algorithmen beobachtet. Aus diesem Grund wird ein Reparatur-Operator eingesetzt, der direkt nach der Durchführung von Crossover und Mutation jeden Allelwert  $x_j$  eines Nachkommens wie folgt renormiert:

$$\tilde{x}_j = \frac{x_j}{\sum_{i=1}^n x_i} \quad [8.1]$$

In den nachfolgenden Schritten des NSGA-II bzw.  $\varepsilon$ -MOEA werden nur renormierte Individuen  $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$  verwendet.

## 8.3. Anpassungen bei Einführung von Beschränkungen

Um das in (7.7) eingeführte generelle Optimierungsproblem zu lösen, wurden spezielle Anpassungen der in Kapitel 5 vorgestellten Verfahren vorgenommen (s. Abschnitt 8.2). Bei Einführung spezifischer Beschränkungen sind gegebenenfalls weitere Anpassungen der Verfahren notwendig. Im Fall beschränkter Parameter in Abschnitt 9.3 wurde der Reparatur-Operator (s. Abschnitt 8.2.2) folgendermaßen angepasst. In jedem Optimierungsdurchlauf werden die Schranken jedes Individuums überprüft und entsprechend dem einfachen Reparatur-Operator angeglichen. Somit bleiben trotz Einführung der Schranken die Laufzeiteigenschaften des Algorithmus nahezu unverändert im Vergleich zum Fall ohne Volumenrestriktionen.

## 8.4. Analyse der Performance

Anhand der in Abschnitt 5.3.5 beschriebenen Methoden wird nachfolgend die Performance der beiden Algorithmen  $\varepsilon$ -MOEA und NSGA-II für das Beispiel zur Portfolio-Optimierung mit

<sup>11</sup>Zur Begründung s. Abschnitt 7.3.3.

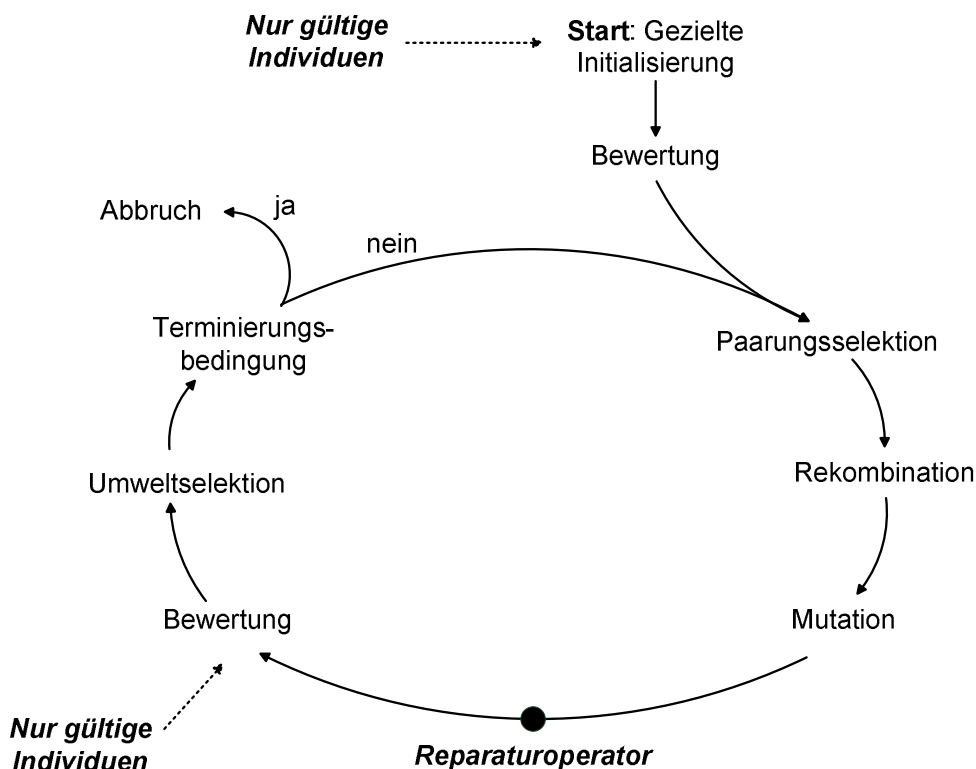


Abb. 8.5.: Anpassungen des generellen GA-Ablaufs in Abbildung 5.1 für Problemstellungen aus dem Integrierten Portfoliomanagement

zwei Zielfunktionen in Abschnitt 8.1 durchgeführt. Die Abbildungen 8.3 und 8.4 dienen dabei zum qualitativen Vergleich der Performance-Ergebnisse.

### 8.4.1. Konvergenz

Als Maß für die Konvergenz der beiden Verfahren wurde das Hypervolume [214] gewählt. Als Referenzpunkte  $W$  zur Eingrenzung der zu bemessenden Fläche (s. Abschnitt 5.3.5) und als Grundlage zur Normierung der Werte dienten dabei die maximalen und minimalen Werte von 10,5520% und 2,5168% beim Risiko (VaR) sowie 15,9648% und 9,9942% bei der Rendite. Die errechneten Werte sind in Tabelle 8.2 zu finden und bestätigen die qualitativen Beobachtungen aus den beiden Abbildungen 8.3 und 8.4. Dem  $\epsilon$ -MOEA gelingt es aufgrund des höheren Anteils an der ENUM-Fläche von 98,8909% bei nahezu gleicher Laufzeit, sich der *wahren* Pareto-optimalen Front des Portfolioproblems<sup>12</sup> wesentlich besser anzunähern.

<sup>12</sup>Als *wahre* Front wird das Ergebnis der vollständigen Enumeration mit 0,025%-Schritten bezeichnet.

Verfahren	Hypervolume	Anteil ENUM
ENUM	0,7825	100,0000%
$\varepsilon$ -MOEA	0,7738	98,8909%
NSGA-II	0,7687	98,2326%

Tab. 8.2.: Hypervolume-Maß für Benchmark-Portfolioproblem im Vergleich zur vollständigen Enumeration (ENUM) mit Schrittweite 0,025%

Verfahren	Spacing (Risiko)	Anteil ENUM	Spacing (Rendite)	Anteil ENUM
ENUM	2,4747%	100,0000%	1,4383%	100,0000%
$\varepsilon$ -MOEA	2,5217%	101,8974%	1,4480%	100,6783%
NSGA-II	2,7137%	109,6554%	1,7951%	124,8105%

Tab. 8.3.: Spacing-Maß für Benchmark-Portfolioproblem hinsichtlich Risiko bzw. Rendite im Vergleich zur vollständigen Enumeration (ENUM) mit Schrittweite 0,025%

#### 8.4.2. Diversität

Die anhand des in Abschnitt 5.3.5 beschriebenen Spacing-Maßes bemessene Diversität wird in Tabelle 8.3 dargestellt. Wiederum erzielt der  $\varepsilon$ -MOEA im Vergleich zu den Ergebnissen des NSGA-II eine bessere Näherung an die vollständige Enumeration. Dabei wurde bei der Berechnung der Standardabweichung zwischen Risiko- und Renditefunktion unterschieden.

Ein Vergleich zwischen den in Optimierungsläufen ermittelten Allokationen der beiden MOEAs zeigte zudem, dass insgesamt neun Individuen des  $\varepsilon$ -MOEAs entsprechende Individuen des NSGA-II dominieren. Umgekehrt dominiert der NSGA-II jedoch keine Individuen des  $\varepsilon$ -MOEAs.



## 9. Anwendung des Modells in der Strategischen Asset Allokation

Das in Kapitel 7 vorgestellte multikriterielle Modell zur Integration des Portfoliomanagements wird im Folgenden bei der Strategischen Asset Allokation (SAA) einer Bank eingesetzt. Wie in Abschnitt 3.3.2 beschrieben, spielen einzelne Assets hier nur eine untergeordnete Rolle. Vielmehr geht es bei der SAA um die generelle strategische Ausrichtung der Asset-Klassen im Gesamtportfolio eines Kreditinstituts.<sup>1</sup>

### 9.1. Benchmarks für Asset-Klassen als Datengrundlage

**Benchmarks**<sup>2</sup> spielen eine zentrale Rolle bei der SAA und dienen als Vertreter von Investments in bestimmten Märkte bzw. Asset-Klassen. Je nach Risikoart werden Benchmarks normalerweise durch Indizes repräsentiert, die sich in *Kurs-* und *Performance-Indizes*<sup>3</sup> unterscheiden lassen. Während Kursindizes die reine Kursentwicklung von Aktien oder Anleihen nachbilden, sind Performance-Indizes zusätzlich bereinigt um Dividenden und Kapitalveränderungen bzw. Zinszahlungen und qualifizieren sich somit am besten für die SAA.<sup>4</sup> Für Marktrisiken und neuerdings auch für Kreditrisiken sind solche Indizes in gutem Umfang vorhanden und können infolgedessen Eingang in die Optimierung finden. Aufgrund der speziellen Charakteristika operationeller Risiken (s. Abschnitt 2.3.3) existieren hierzu derzeit noch keine repräsentativen Indizes. Daher werden diese Risiken erst im Anwendungsfall der Taktischen Asset Allokation in Kapitel 10 berücksichtigt.

#### 9.1.1. Marktrisiken

Wie bereits in Kapitel 2 angemerkt, sind Marktdaten im Allgemeinen sehr gut verfügbar. Insbesondere für Aktien-, Währungs-, und Zinsrisiken existieren umfassende Historien, teilweise über mehrere Jahrzehnte hinweg. Diese Datenreihen können für Forschungszwecke über Anbieter im Internet<sup>5</sup> oder kommerzielle Anbieter wie Reuters<sup>TM</sup> oder Bloomberg<sup>TM</sup> bezogen werden.

Es gibt jedoch auch im Bereich der Marktrisiken Instrumente, für die keine Daten oder allenfalls Daten über kurze Zeithorizonte verfügbar sind. Hierzu zählen beispielsweise Immobilien oder Beteiligungen, die nicht auf einem liquiden Markt gehandelt werden. Da solche

<sup>1</sup>S. Mitschele et al. [143].

<sup>2</sup>Dt. *Maßstab*, *Bezugswert* und auch *Marktindex*.

<sup>3</sup>Auch bezeichnet als *Total-Return-Indizes*.

<sup>4</sup>Die wichtigsten deutschen Aktien- und Rentenindizes stehen in beiden Varianten zur Verfügung.

<sup>5</sup>Gute Quellen sind beispielsweise <http://de.finance.yahoo.com> oder <http://www.handelsblatt.com>.

Asset-Klassen dennoch häufig in den Portfolios von Kreditinstituten auftreten und somit in die Optimierung der SAA einzubeziehen sind, müssen die entsprechenden Daten entweder aus verfügbaren Daten hergeleitet<sup>6</sup>, über vergleichbare Indizes genähert<sup>7</sup> oder unter spezifischen Verteilungsannahmen modelliert<sup>8</sup> werden.

Für die SAA sind vornehmlich Indizes als Benchmark-Vertreter bestimmter Asset-Klassen von Interesse. Die beste Datenverfügbarkeit besteht hier für Aktienrisiken, da es eine Vielzahl von Index-Anbietern gibt. Diese Unternehmen berechnen ständig aktuelle Indizes für nationale und internationale Märkte sowie für spezielle Marktsektoren. Zu den bekanntesten Anbietern zählt für deutsche Aktien die Deutsche Börse AG und für internationale Aktien zusätzlich MSCI Barra sowie Dow Jones Inc.

Als Benchmark für das Kursänderungsrisiko deutscher Aktien eignet sich der **DAX® Performance-Index**, der sich aus den 30 umsatzstärksten deutschen Aktien (*Bluechips*) zusammensetzt. Er repräsentiert damit ca. 75% des gesamten Grundkapitals inländischer börsennotierter Aktiengesellschaften und etwa 85% der in deutschen Beteiligungspapieren getätigten Börsenumsätze. Der DAX® wird als Kurs- und Performance-Index von der Deutsche Börse AG aus Kursen des elektronischen Handelssystems Xetra® tagsüber sekundlich berechnet und aktualisiert. Weitere Aktienindizes für internationale Aktien werden in Abschnitt 9.1.3 kurz vorgestellt.

Zur Abbildung des Zinsänderungsrisikos aus ausfallrisikofreien Anleihen eignet sich der **REX® Performance-Index**. Dieser stellt die Performance-Variante des REX® (Rentenindex) dar, der einen repräsentativen Ausschnitt des Marktes deutscher Staatsanleihen abbildet. Beide Indizes werden einmal täglich von der Deutsche Börse AG auf Basis der Kassakurse von 30 idealtypischen Anleihen an der Frankfurter Wertpapierbörse berechnet.

### 9.1.2. Kreditrisiken

Für Kreditrisiken gestaltet es sich ungleich schwerer, Performance-Indizes oder auch nur Marktdaten mit langer Historie zu erhalten. Allerdings haben verschiedene Indexanbieter in den letzten Jahren damit begonnen, verschiedene Kreditrisikoindizes zu initiieren, die Anleihen oder Kreditderivate als Basis für die Berechnung heranziehen.<sup>9</sup> Als gute Näherung für kreditrisikobehaftete Investments kann die iBoxx®-Indexfamilie der Deutsche Börse AG gelten. Als Benchmark für das Kreditrisiko einer europaweit tätigen Bank bietet sich hieraus der iBoxx® EUR Corporates Overall (Total Return) Index an, der die Performance von Unternehmen mit unterschiedlichen Ratings in der Eurozone misst [15].

---

<sup>6</sup>Für Immobilien kann eine fiktive Preisentwicklung aus Liegenschaftszinsen ermittelt werden.

<sup>7</sup>Dieses Vorgehen wird häufig bei Beteiligungen angewandt. Das deutsche Beteiligungsportfolio könnte demnach durch einen deutschen Aktienindex mit Unternehmen ähnlicher Größe abgebildet werden.

<sup>8</sup>Falls keinerlei Daten zur Verfügung stehen, kann eine Modellierung beispielsweise anhand stochastischer Prozesse erfolgen.

<sup>9</sup>Einen Überblick verschiedener Indizes geben Felsenheimer [73] sowie Becker [15].

#	Index	Gattung	Indextyp	Land	Währung	Startdatum
1	DAX <sup>®</sup>	Aktien	Performance	Deutschland	-	03.03.1997
2	ATX	Aktien	Kurs	Österreich	EUR	03.03.1997
3	S&P 500	Aktien	Kurs	USA	USD	03.03.1997
4	RTX	Aktien	Kurs	Russland	USD	03.03.1997
5	REXP <sup>®</sup>	Bonds	Performance	Deutschland	-	06.05.1992
6	iBoxx <sup>®</sup> overall	Bonds	Performance	Europa	-	10.05.2001

Tab. 9.1.: Investitionsmöglichkeiten für die Beispielbank (SAA)

Zur Abbildung des Kundengeschäfts einer Bank gibt es derzeit noch keine geeigneten Indizes [15]. Ein alternativer Ansatz zur Erzeugung von Kreditrisiko-Performance-Daten kann jedoch darin bestehen, anhand eines Portfoliomodells eine Kreditrisikoverteilung simulativ zu generieren und diese als Basis für Risiko-Rendite-Erwägungen heranzuziehen. Bei der Anwendung zur Taktischen Asset Allokation in Kapitel 10 wurde ein solcher Ansatz gewählt.

### 9.1.3. Inputdaten für das Modell

Für die Beispielbank, deren SAA zu optimieren ist, sind  $n = 6$  Investitionsmöglichkeiten vorgegeben, die in Tabelle 9.1 beschrieben werden. Die ausgewählten Indizes dienen als Näherungen für Investments in den entsprechenden Märkten. Der ATX (*Austrian Traded Index*) stellt den wichtigsten Index der österreichischen Börse dar und der RTX (*Russian Traded Index*) einen entsprechenden Index für die russische Börse. Eine Vielzahl unterschiedlicher Indizes existiert für amerikanische Börsen. Für das Beispiel wurde der S&P 500 (*Standard&Poor's*) ausgewählt, der die größten 500 börsennotierten US-Unternehmen abbildet, und somit als gute Näherung für den Markt gelten kann. Verzerrungen durch Unterschiede zwischen Kurs- und Performance-Indizes sowie durch Währungseffekte werden an dieser Stelle in Kauf genommen. Der dargestellte Beispielfall soll exemplarisch die Anwendung des multikriteriellen Optimierungsmodells im Kontext der SAA illustrieren und dabei auf tatsächlichen Marktdaten basieren. Es soll hiermit keine tatsächliche Empfehlung für die Allokation einer konkreten Bank abgeleitet werden.

Alle verwendeten historischen Zeitreihen enden am 28.02.2007. Aufgrund unterschiedlicher Datenverfügbarkeit haben sie jedoch abweichende Startzeitpunkte (s. Tabelle 9.1). Die Aktienindizes umfassen allesamt einen zehnjährigen Zeitraum vom 03.03.1997 bis zum 28.02.2007. Somit sind auch verschiedene Finanzmarktkrisen in der Zeitreihe enthalten, wie z. B. die Russische Krise (1998) und das Platzen der Internetblase (2000). Die Zeitreihe des iBoxx<sup>®</sup> Corporates als Stellvertreter für kreditrisikobehaftete Investments in Unternehmenskredite wird erst seit 2001 erhoben. Beim REXP<sup>®</sup>, der Anlagen in sichere deutsche Staatsanleihen repräsentiert, wurde das Startjahr 1992 gewählt.

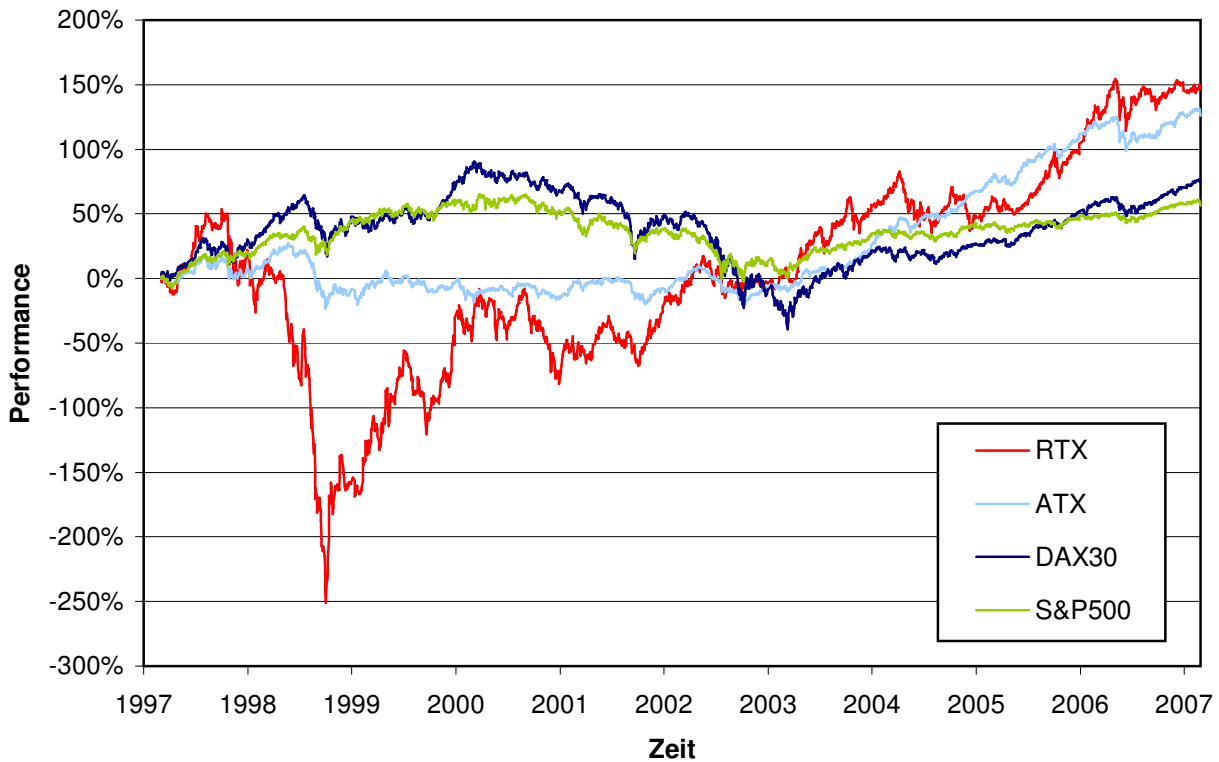


Abb. 9.1.: Performance der Aktienindizes DAX<sup>®</sup>, ATX, S&P 500, RTX vom 03.03.1997 bis 28.02.2007

Das Problem unterschiedlicher Datenverfügbarkeit ist omnipräsent im Risikomanagement und trägt wesentlich zur Heterogenität der Risikoarten (s. auch Abschnitt 2.3.5) bei. Das multikriterielle Modell kann diese Unterschiede jedoch durch die simultane Optimierung der verschiedenen Zielfunktionen verarbeiten.

Das Management der Beispielbank nimmt an, dass die Zeitreihen in Tabelle 9.1 repräsentativ für die entsprechenden Märkte sind. Somit wird auch die erwartete Rendite  $ret(x)$  jedes Portfolios  $x$  aus den historischen Zeitreihen der Indizes geschätzt. Alternativ können jedoch auch 'Expertenmeinungen' in das Modell einfließen. In Abbildung 9.1 sind die kumulierten logarithmischen Renditen der vier Aktienindizes aufgezeichnet. Offensichtlich hat der RTX die beste Performance über den zehnjährigen Zeithorizont. Allerdings bringt dieser auch die mit Abstand höchste Schwankungsbreite mit sich.

Die Optimierung der SAA mit Hilfe des multikriteriellen Modells wird zur Unterstützung der Allokationsentscheidung des Integrierten Risikomanagers der Bank per 28.02.2007 durchgeführt.



## 9.2. Modellimplementierung ohne Beschränkungen

### 9.2.1. Parametrisierung und Annahmen

Abweichend vom vorgeschlagenen generellen Modell in [7.7] sowie von der Beispielanwendung aus dem Bereich der Taktischen Asset Allokation in Kapitel 10 wird die Kreditrisiko-Zielfunktion  $cr(x)$  sowie die Kreditrisikorendite allein auf Basis der historischen iBoxx<sup>®</sup>-Zeitreihe ermittelt. Dies geschieht nicht mit Hilfe eines Portfoliomodells, da ausschließlich Markt-Benchmarks für die Festlegung der strategischen Ausrichtung verwendet werden sollen.

Weiterhin wird an dieser Stelle das operationelle Risiko<sup>10</sup> ausgeschlossen, um das Marktrisiko in die beiden Zielfunktionen  $mr_1(x)$  als aggregiertes Maß für das Kursänderungsrisiko aus den vier Aktienindizes und  $mr_2(x)$  für das durch den REXP<sup>®</sup>-Index repräsentierte kreditrisikolose Zinsänderungsrisiko zu zerlegen.<sup>11</sup> Diese Aufteilung in zwei Marktrisikozielfunktionen bildet ein häufig praktiziertes Vorgehen in Banken ab, die einen Silo-basierten Ansatz für das Risikomanagement einsetzen. Es wird dabei das Portfolio mit Handelsinstrumenten, wie z. B. Aktien, Optionen und Unternehmensanleihen, unabhängig vom zinstragenden Kundengeschäft gesteuert. Durch die Aufteilung wird deutlich, dass der vorgeschlagene Ansatz gut in die bestehende Organisation des Risikomanagements vieler Institute integriert werden kann, ohne dass methodische Anpassungen entsprechend der Vorgaben eines vollständig Integrierten Risikomanagements (s. Kapitel 3) notwendig sind.

Die Beispielbank verwendet die historische Simulation (s. Abschnitt 2.4.2) zur Bewertung der Risiken in den Zielfunktionen  $mr_1(x)$ ,  $mr_2(x)$  und  $cr(x)$ , jeweils mit einem Konfidenzniveau von 99% und einem Zeithorizont von einem Handelstag in den einzelnen Asset-Klassen.<sup>12</sup>

Da die Zeitreihen der Risikoarten unterschiedlich lang sind, wurden die Renditen der Indizes jeweils annualisiert, um die Vergleichbarkeit der Portfolios untereinander zu gewährleisten. Somit wird sichergestellt, dass die Beiträge jedes einzelnen Index zur Gesamtrendite des Portfolios richtig bemessen sind. Die Ermittlung logarithmischer Renditen hat dabei den Vorteil, dass die Summe der Einzelrenditen gerade der Gesamtrendite entspricht.<sup>13</sup>

<sup>10</sup>S. allgemeines Optimierungsproblem [7.7].

<sup>11</sup>Das operationelle Risiko wird in der Anwendung zur Taktischen Asset Allokation im folgenden Kapitel 10 berücksichtigt. Falls gewünscht, kann auch hier durch eine weitere Zielfunktion das operationelle Risiko in die Optimierung mit einbezogen werden.

<sup>12</sup>Üblicherweise wird das Kreditrisiko auf einen Horizont von einem Jahr gemessen (s. Abschnitt 2.3.1). Da der iBoxx<sup>®</sup> tägliche Kurse zur Verfügung stellt und sich die Möglichkeiten zur Liquidierung von Kreditrisikobehafteten Portfolios in den letzten Jahren stark verbessert haben, wurde für die Zielfunktion  $cr(x)$  ebenfalls ein Zeithorizont von einem Tag gewählt. Entsprechend wurde auch das Konfidenzniveau wie bei den Marktrisiken auf 99% festgelegt.

<sup>13</sup>Für einen Überblick der unterschiedlichen Varianten zur Berechnung der Rendite s. Abschnitt 2.4.1

### 9.2.2. Optimierungsproblem mit $ret(x)$ , $mr_1(x)$ , $mr_2(x)$ und $cr(x)$

Das generelle Problem der Portfolio-Optimierung aus [7.7] wird entsprechend der Vorbemerkungen für die SAA angepasst und lautet nach Einsetzen der beiden Marktisikoziefunktionen  $f_2(x)$  und  $f_3(x)$  für den unbeschränkten Fall wie folgt:

**Definition 9.1 (OP für die Strategische Asset Allokation):**

$$\begin{aligned} \text{Min. } f_1(x) &:= -ret(x) \\ f_2(x) &:= mr_1(x) \\ f_3(x) &:= mr_2(x) \\ f_4(x) &:= cr(x) \\ x &= (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \\ \text{u. d. N. } \forall i \in \{1, \dots, n\} : x_i &\in [0, 1] \\ \sum_{i=1}^n x_i &= 1 \end{aligned} \tag{9.1}$$

Bis auf die Vorgaben des allgemeinen Modells in [7.7], die festlegen, dass das Portfolio voll investiert sein muss und keine Leerverkäufe/Kreditfinanzierungen zulässig sind, werden zunächst keine weiteren Nebenbedingungen berücksichtigt. Die Betrachtung und Analyse von Positionseinschränkungen einzelner Asset-Klassen im Portfolio erfolgt in Abschnitt 9.3.

### 9.2.3. Visualisierung und Diskussion der Resultate

Die vierdimensionalen Optimierungsergebnisse der SAA stellen Standard-Visualisierungstechniken vor erhebliche Herausforderungen. Im Folgenden wird daher auf die in Abschnitt 7.4 vorgestellten Methoden *3D-Streudiagramm*, *Streudiagramm-Matrix*, *Parallele Koordinaten* und *Heatmaps* zurückgegriffen.

#### 3D-Streudiagramm

Beim 3D-Streudiagramm wird jeweils eine Dimension der Lösungsallokationen ausgeblendet. In Abbildung 9.2 ist eine solche Projektion der drei Zielfunktionen  $mr_1(x)$  für das Risiko aus Aktienanlagen,  $mr_2(x)$  für Zinsrisikoanlagen und  $ret(x)$  für die erwartete Rendite des betreffenden approximierten Portfolios  $x$  illustriert. Die Lösungen wurden durch den NSGA-II in 1.000 Generationsschritten mit 100 Individuen pro Population ermittelt. Für den  $\varepsilon$ -MOEA zeigt Abbildung 9.3 mit demselben Parameter-Setting und mit einem finalen Archiv von 103 Individuen die Pareto-optimalen Lösungen. In beiden Fällen wurde also das Kreditrisiko  $cr(x)$  als vierte Zielfunktion ausgeblendet.

Es wird ersichtlich, dass der  $\varepsilon$ -MOEA aufgrund des in Abschnitt 5.3.4 beschriebenen  $\varepsilon$ -Dominanzprinzips eine besser über den Zielfunktionsraum verteilte Lösungsmenge auffindet als der NSGA-II. Allein die Linie im rechten oberen Bereich wird durch den NSGA-II dichter mit Portfolios befüllt. Dies liegt allerdings an der Einstellung der  $\varepsilon$ -Boxes beim Durchlauf des  $\varepsilon$ -MOEA und ist im Rahmen des Verfahrens berechtigt. Insbesondere vor dem Hintergrund, dass dem Management der Bank eine möglichst gut strukturierte Entscheidungsvorlage gegeben werde sollte, eignet sich der  $\varepsilon$ -MOEA daher sehr gut für die SAA. Im weiteren Verlauf werden daher nur noch die Ergebnisse auf Basis des  $\varepsilon$ -MOEA dargestellt.

Die Ausreißer-Punkte, jeweils rechts in den Abbildungen, werden durch Portfolios mit hohen Investments in den russischen RTX-Index repräsentiert. Diese Portfolios zeigen die bei weitem höchsten Werte für die Zielfunktion  $mr_1(x)$ , die das Risiko aus Aktienanlagen beschreibt. Mit den aus Abschnitt 9.1.3 vorliegenden Investitionsalternativen hat das Bankmanagement nun verschiedene Handlungsoptionen für die strategische Ausrichtung der Bank. Es kann beispielsweise (s. Abbildung 9.3) ein Portfolio mit hohem Aktienmarktrisiko  $mr_1(x)$  auswählen. Solche Portfolios, die in der oberen rechten Ecke der Abbildung zu finden sind, weisen zugleich sehr niedrige Zinsrisiken  $mr_2(x)$  auf und bringen die Erwartung einer hohen Rendite mit sich. Bei geringerem Risikoappetit oder bei restriktiven Limits für den Handel mit Aktien/Aktienindizes sind Portfolios im linken Bereich der Abbildung besser geeignet. Hier finden sich Allokationen mit vergleichsweise hohen Zinsrisiken, die allerdings auch eine niedrigere erwartete Rendite haben. Der Risikomanager der Bank kann diese Informationen ebenfalls nutzen, um die aktuelle Allokation des Bankportfolios im Lösungsraum der effizienten Allokationen zu überprüfen. Er berechnet hierfür die Zielfunktionswerte für alle Risikoarten und überprüft, wie sich die Position der Bank im Verhältnis zum effizienten Bereich verhält. Bei der Darstellung mit 3D-Streudiagrammen ist allerdings noch ein weiteres Streudiagramm parallel zu berücksichtigen, das z. B.  $mr_1(x)$ ,  $cr(x)$  und  $ret(x)$  visualisiert.

### Streudiagramm-Matrix

Anhand der Streudiagramm-Matrix in Abbildung 9.4 wird die Wirkung des bereits erwähnten  $\varepsilon$ -Dominanzprinzips im  $\varepsilon$ -MOEA besonders klar ersichtlich, da die einzelnen Zielfunktionswerte in einem sehr regelmäßigen Raster vorliegen. Interessanterweise lassen sich bei dieser Anwendung im Kontext der SAA „klassische“ effiziente Portfoliolinien nicht beobachten. Allein das Aktienrisiko  $mr_1(x)$  mit der erwarteten Rendite  $ret(x)$  bildet eine Punktekurve mit einer gewissen Ähnlichkeit. Alle anderen Quadrate gleichen in ihrer Form mit Punkten gefüllten Dreiecken. Diese besonderen Darstellungen werden von der Vierdimensionalität des Optimierungsproblems verursacht. Überdies verdeutlichen die Streudiagramme die erheblichen Trade-offs zwischen den einzelnen Zielfunktionen. Im Übrigen sind alle Portfolios, die hohe Investments in den RTX tätigen, als isoliert liegende Punkte in den verschiedenen Schaubildern ersichtlich.

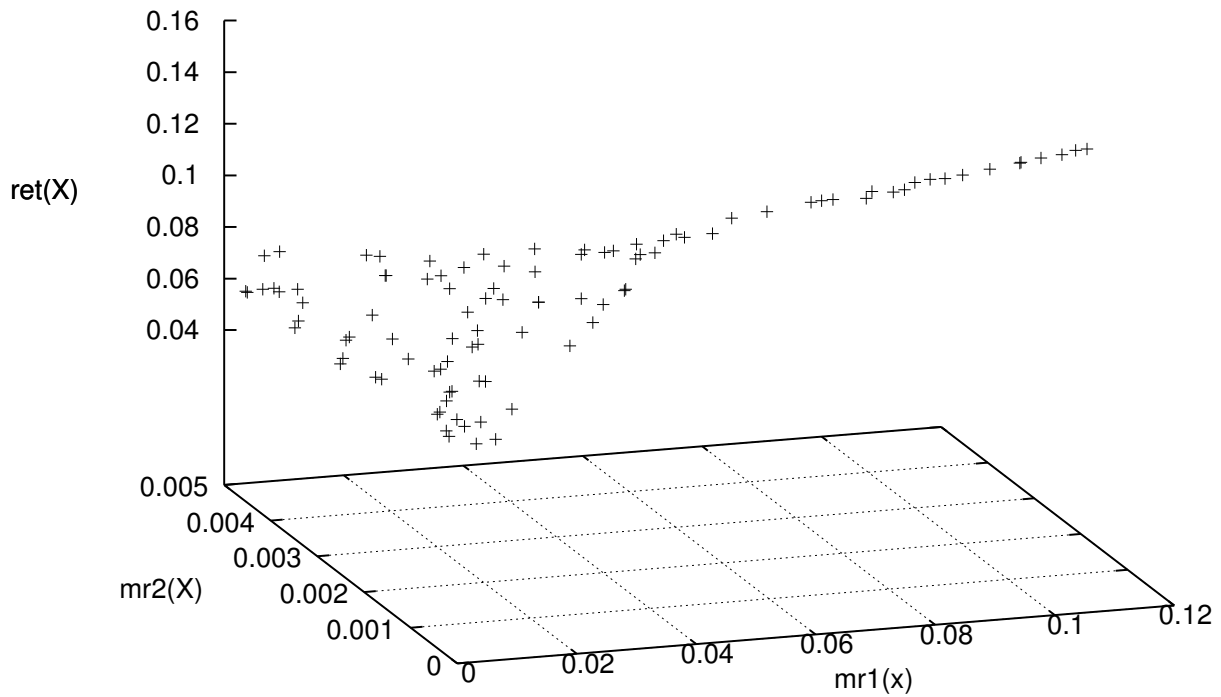


Abb. 9.2.: 3D-Streudiagramm für  $mr_1(x)$ ,  $mr_2(x)$  und  $ret(x)$  mit dem NSGA-II

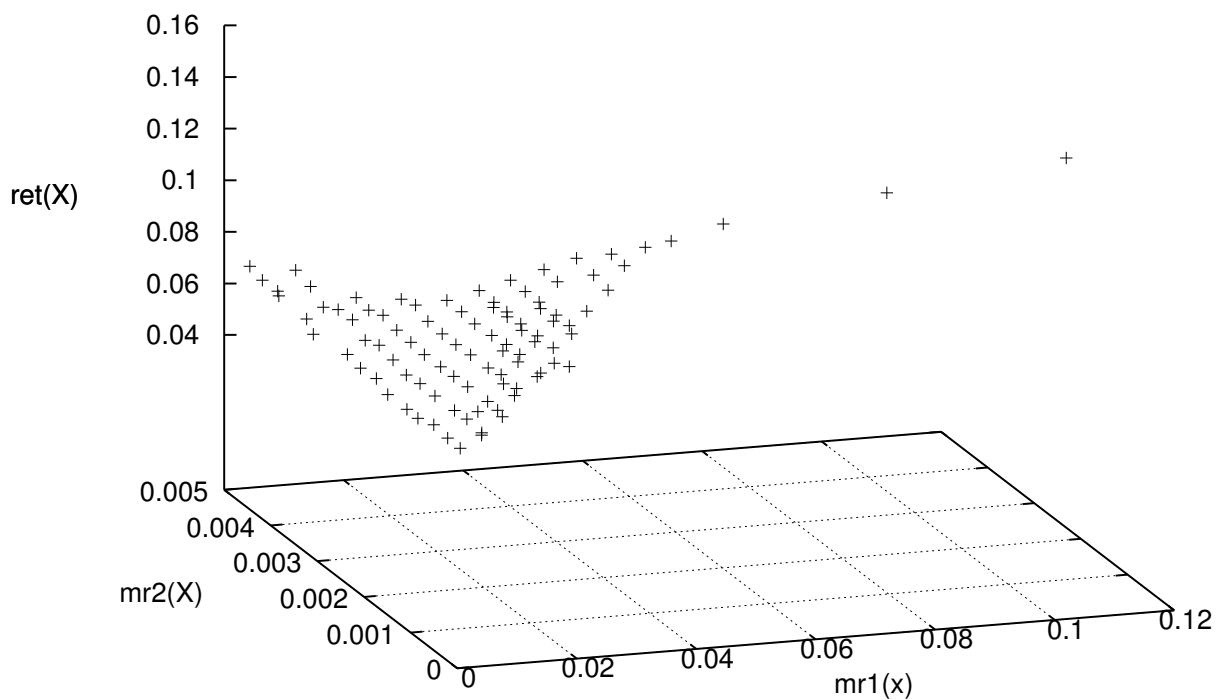


Abb. 9.3.: 3D-Streudiagramm für  $mr_1(x)$ ,  $mr_2(x)$  und  $ret(x)$  mit dem  $\epsilon$ -MOEA

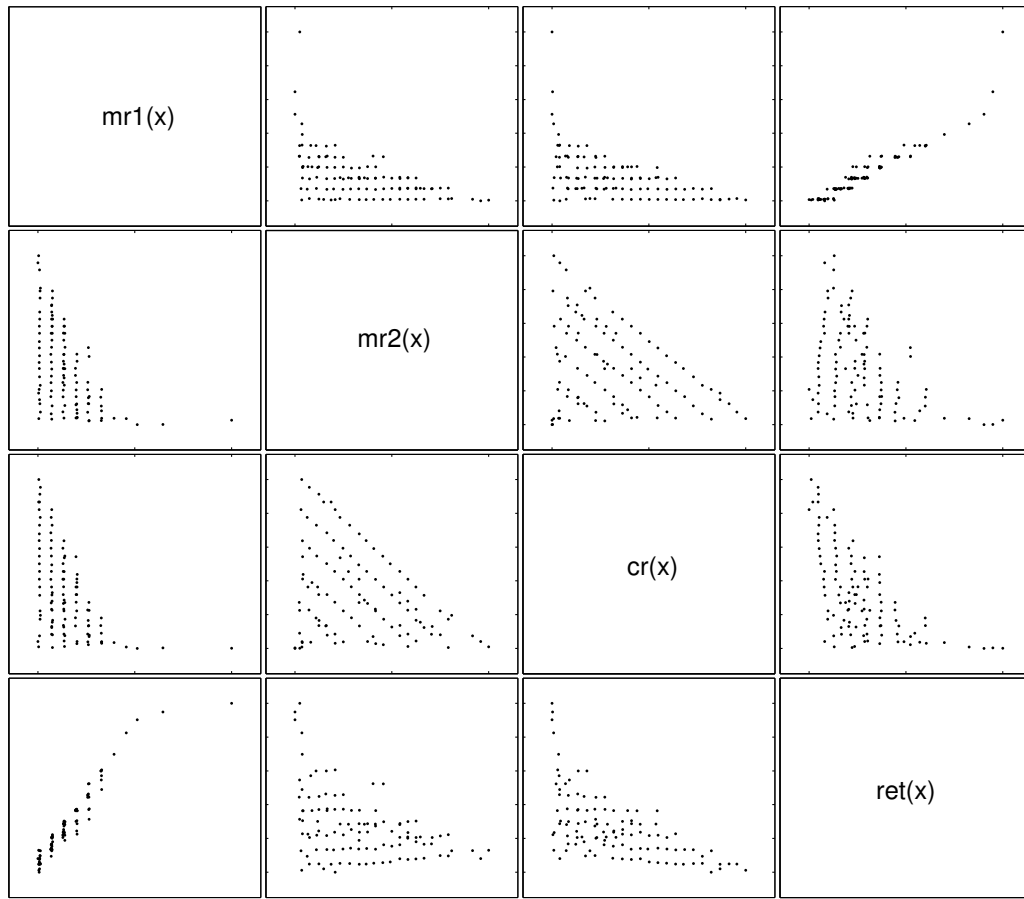


Abb. 9.4.: Streudiagramm-Matrix für  $mr_1(x)$ ,  $mr_2(x)$ ,  $cr(x)$  und  $ret(x)$

### Parallelkoordinatenplot

Als nächste Visualisierungsmethode kommt in Abbildung 9.5 ein Parallelkoordinatenplot zum Einsatz. Da alle Zielfunktionswerte ebenfalls individuell auf das Intervall  $[0; 1]$  normiert wurden, lassen sich die wenigen Allokationen mit hoher erwarteter Rendite besonders gut beobachten. Diese werden durch blaue Linien markiert und weisen bei  $mr_1(x)$  sehr hohe Werte auf, während die beiden anderen Zielfunktionen für diese Allokationen beinahe minimal sind. In der Abbildung fällt die große Anzahl roter Linien auf, die durchweg Allokationen mit relativ niedrigen Renditeerwartungen symbolisieren. Diese werden durch eine Vielzahl verschiedener Kombinationen aus Investments im Bereich der Staatsanleihen ( $mr_2(x)$ ) und/oder der Unternehmenskredite ( $cr(x)$ ) besetzt.

Entsprechend der Anmerkungen von Purshouse & Fleming [162] lassen sich alle drei Risikozielfunktionen als stark gegensätzliche Zielsetzungen identifizieren.<sup>14</sup> Allein  $mr_1(x)$  und  $ret(x)$  zeigen eine hohe Korrelation. Aus qualitativer Sicht kann der  $\varepsilon$ -MOEA den Zielfunktionsraum

<sup>14</sup>Eine grundlegende Beschreibung von Parallelkoordinatenplots und eine Anleitung zu ihrer Interpretation gibt Abschnitt 7.4.3.

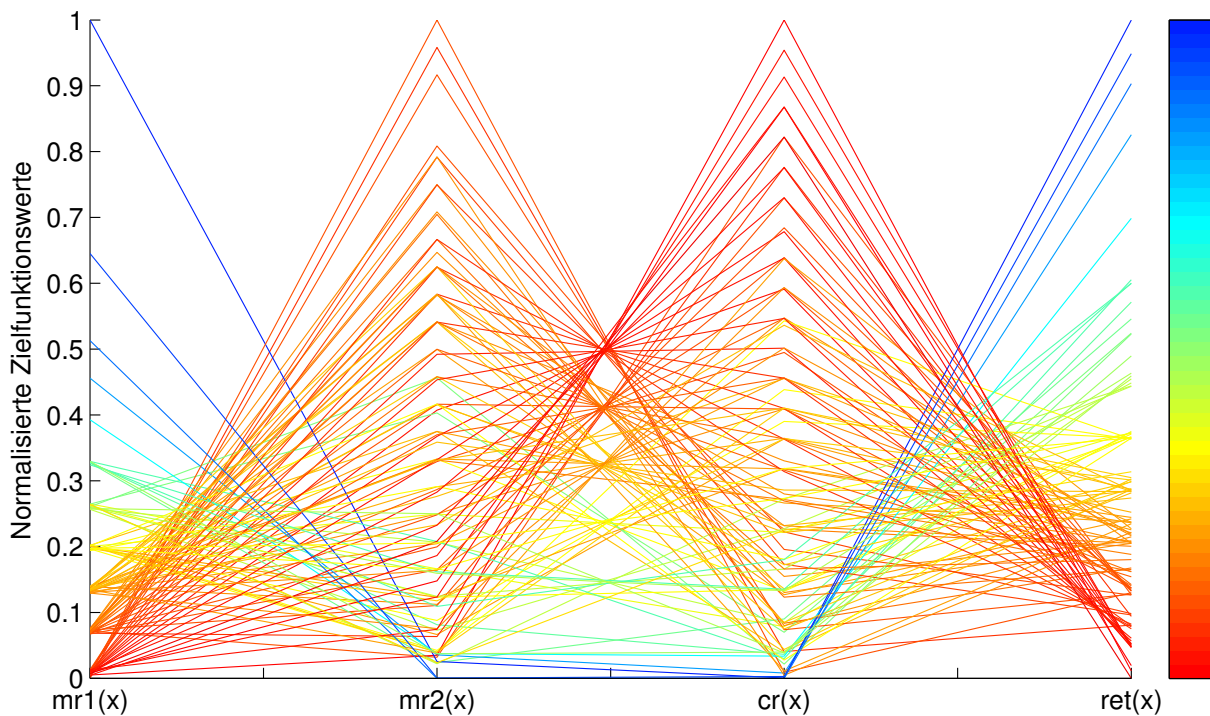


Abb. 9.5.: Parallelkoordinatenplot des unbeschränkten Problems ( $\varepsilon$ -MOEA)

gut erschließen, da die Allokationen gleichmäßig über die Zielfunktionsintervalle verteilt sind. Da der  $\varepsilon$ -MOEA mit  $\varepsilon$ -Boxes arbeitet, treffen sich die Allokationslinien bei den einzelnen Zielfunktionen jeweils in äquidistanten Punkten.

## Heatmap

In Abbildung 9.6 werden die Parameter und Zielfunktionswerte der effizienten Portfolio-Allokationen des unbeschränkten Problems als Heatmap dargestellt. Für jedes einzelne Portfolio (Zeilen) wird der Wert aller Parameter  $x_i$ , d. h. aller Gewichte der einzelnen Asset-Klassen in einem Portfolio, sowie aller Zielfunktionswerte  $ret(x)$ ,  $mr_1(x)$ ,  $mr_2(x)$  und  $cr(x)$  im Farbspektrum dargestellt. Das Spektrum (s. Abschnitt 7.4.4) reicht von Rot (0,0) bis Blau (1,0). Zudem wurden die Parameter- und Zielfunktionswerte wie üblich auf das Intervall  $[0; 1]$  normiert. Aus dem Farbspektrum oberhalb von  $ret(x)$  wird überdies ersichtlich, dass dabei alle Allokationen entsprechend dieser Zielfunktion sortiert wurden.

Analog zu den vorherigen Darstellungen fällt auch in der Heatmap auf, dass nur sehr wenige Allokationen im Bereich besonders hoher Renditen (blaue Färbung) vorliegen. Der Grund hierfür liegt im Einbezug des RTX, der überragende Renditeeigenschaften im betrachteten Zeitraum besitzt. Wie an der Spalte „RTX“ zu erkennen ist, werden erwähnenswerte Investments in diesen Index jedoch nur bei den letzten drei Portfolios getätigt. Oberhalb ist der Balken komplett rot, weshalb das RTX-Portfoliogewicht entsprechend ungefähr bei Null liegt. Offensichtlich werden

an diesen Stellen Investitionen in den ATX vorgezogen, der ebenfalls mit einer hohen Rendite, allerdings bei geringerer Schwankungsbreite, aufwartet. Am ähnlichen Farbverlauf sehr gut ablesbar ist in diesem Schaubild zudem die starke Korrelation zwischen  $ret(x)$  und  $mr_1(x)$ , die bereits vorher identifiziert worden ist. Durch Einbezug der Portfolioparameter wird hier zusätzlich offensichtlich, dass auch das Portfoliogewicht des ATX mit diesen beiden Zielfunktionen annähernd im Gleichschritt geht.

Besonders Allokationen mit niedriger und sehr niedriger Rendite sind durch Investitionen im Bereich der reinen Zinsrisiken, die durch  $mr_2(x)$  vertreten werden, und der Kreditrisiken  $cr(x)$  geprägt. Dennoch finden iBoxx<sup>®</sup> und REXP<sup>®</sup> auch in den meisten Portfolios mit höherer Rendite Verwendung. Hieraus lässt sich ein erheblicher Beitrag zur Diversifikation der Portfolios durch Beimischung von Zins- und Kreditrisikobestandteilen ableiten. Nur die letzten vier (REXP<sup>®</sup>) bzw. fünf (iBoxx<sup>®</sup>) Portfolios sind rein aktienbasiert mit starkem Fokus auf ATX und RTX. Auffallend bei den Aktieninvestments ist überdies, dass der S&P-Index sehr wechselhaft für effiziente Allokationen nahezu über das gesamte Renditespektrum hinweg gewählt wird, während deutsche Aktien mit dem DAX<sup>®</sup> nur sehr selten einbezogen werden. Zudem werden ATX sowie RTX zumindest bei Portfolios mit niedriger Rendite ebenfalls nicht berücksichtigt.

An diesem überschaubaren Beispiel mit sechs Assets bzw. Asset-Klassen und vier Zielfunktionen wird bereits ersichtlich, dass Heatmaps einen umfassenden Einblick in die Struktur und die Trade-offs der optimalen Portfolio-Allokationen geben können. Besonders vorteilhaft zeigt sich die Möglichkeit, auch die Verläufe der Portfolio-Parameter übersichtlich in einem einzigen Schaubild darstellen zu können.

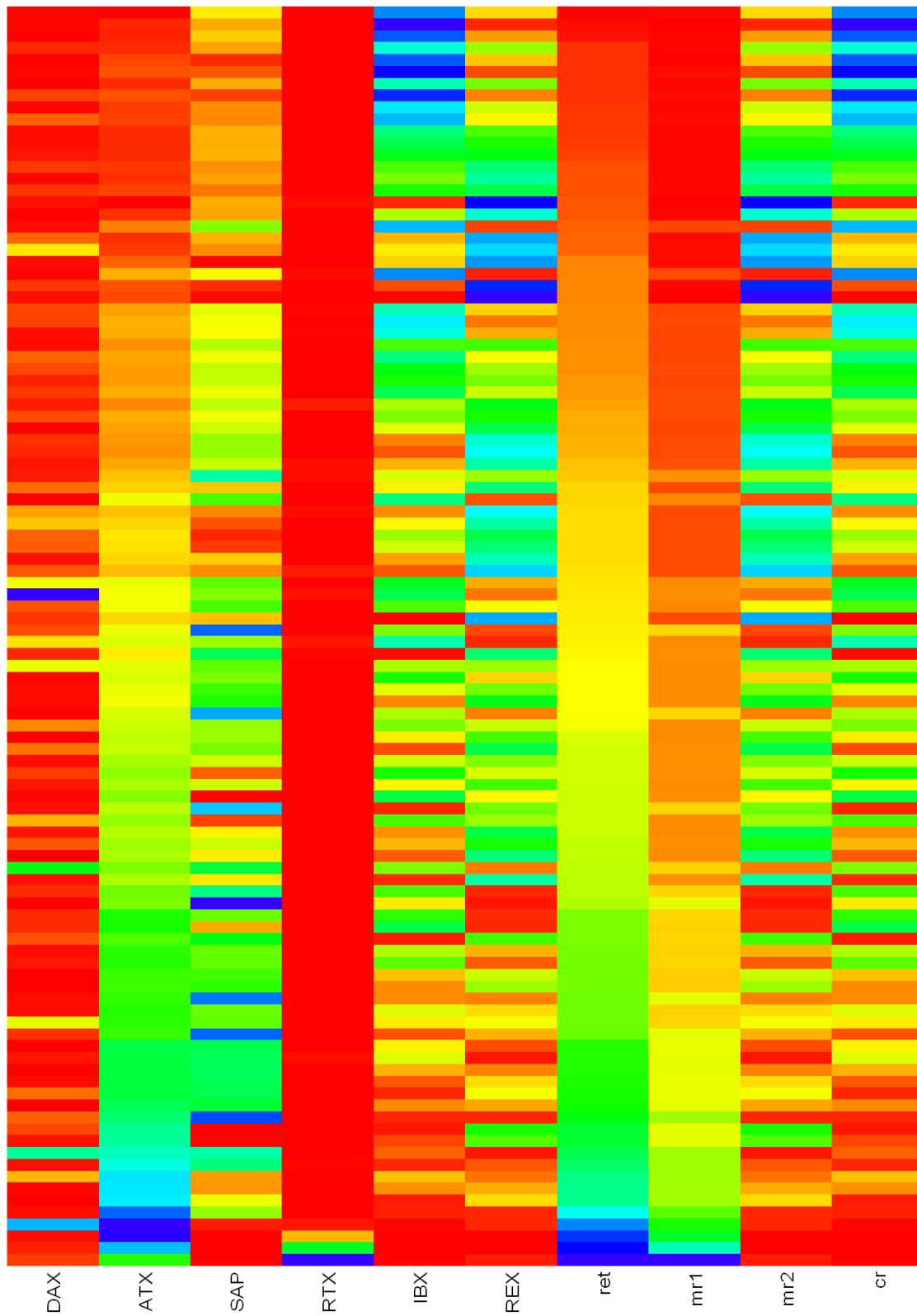


Abb. 9.6.: Veranschaulichung der Parameter- und Zielfunktionswerte des unbeschränkten Portfolioproblems mit einer Heatmap (Ergebnisse  $\epsilon$ -MOEA)



#	Index	<i>Positionslimits</i>		<i>Optimierungsergebnisse</i>	
		Minimum	Maximum	Minimum	Maximum
1	DAX <sup>®</sup>	0,05	0,50	<b>0,05</b>	0,20
2	ATX	0,00	0,30	0,01	<b>0,30</b>
3	S& P500	0,05	0,50	<b>0,05</b>	0,31
4	RTX	0,00	0,10	0,00	<b>0,10</b>
5	REXP <sup>®</sup>	0,20	1,00	<b>0,20</b>	0,77
6	iBoxx overall <sup>®</sup>	0,10	0,80	<b>0,10</b>	0,66

Tab. 9.2.: Volumenbeschränkungen der Beispielbank bei der Optimierung der SAA

### 9.3. Modellimplementierung mit Beschränkungen

Durch Einführung typischer Praxisbeschränkungen wird im Folgenden die hohe Flexibilität der MOEAs und damit ihre gute Eignung im Kontext des Integrierten Risiko- und Rendite-Managements demonstriert.

#### 9.3.1. Parametrisierung und Annahmen

In der Praxis werden häufig sowohl obere als auch untere Positionsgrenzen für Investitionen in bestimmte Asset-Klassen festgelegt. Die konkreten Limits, die für die in Abschnitt 9.2 vorgestellte Beispielbank festgelegt wurden, sind in Tabelle 9.2 unter *Positionslimits* im Überblick dargestellt.

Der Vorstand hat an dieser Stelle fiktiv festgelegt, dass Investitionen in den DAX (5%), S&P (5%), REXP (20%) und iBoxx<sup>®</sup> (10%) in jedem Fall zu tätigen sind. Gründe hierfür können beispielsweise sein, dass das Kreditgeschäft mit Unternehmen auch durch Kreditportfolioverkäufe nicht unter 10% reduzierbar ist. Auch die persönliche Einschätzung bzw. der Risikoappetit des Managements können so bereits vor der Optimierung einbezogen werden. Im Beispiel soll auf jeden Fall ein Fünftel des Vermögens in ausfallsicheren Bundesanleihen investiert bleiben.

Durch obere Limits können demgegenüber Portfolios ausgeschlossen werden, die sowieso aufgrund des erhöhten Risikos oder der Portfoliozusammensetzung nicht wünschenswert sind. Für Aktienpositionen, insbesondere auf dem russischen Markt, wurden daher strengere Obergrenzen festgelegt als für die zinsrisikobehafteten (Obergrenze: 100%) und kreditrisikobehafteten Positionen (Obergrenze: 80%).

Bei den effizienten Ergebnisallokationen sind diese unteren und oberen Positionslimits jederzeit zu berücksichtigen. Alle weiteren Annahmen und Datengrundlagen entsprechen den in Abschnitt 9.2.1 beschriebenen.

### 9.3.2. Optimierungsproblem mit $ret(x)$ , $mr_1(x)$ , $mr_2(x)$ und $cr(x)$

Das Optimierungsproblem der SAA aus Definition (9.1) wird nun noch um spezifische Schranken für die minimale ( $S_i^{\text{unten}}$ ) und maximale ( $S_i^{\text{oben}}$ ) Positionsgröße jeder einzelnen Asset-Klasse erweitert:

**Definition 9.2 (Beschränktes OP für die Strategische Asset Allokation):**

$$\begin{aligned}
 \text{Min. } f_1(x) &:= -ret(x) \\
 f_2(x) &:= mr_1(x) \\
 f_3(x) &:= mr_2(x) \\
 f_4(x) &:= cr(x) \\
 x &= (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) && [9.2] \\
 \text{u. d. N. } \forall i \in \{1, \dots, n\} &: S_i^{\text{unten}} \leq x_i \leq S_i^{\text{oben}} \\
 x_i, S_i^{\text{unten}}, S_i^{\text{oben}} &\in [0, 1] \\
 \sum_{i=1}^n x_i &= 1
 \end{aligned}$$

Die effizienten Portfolios wurden nachfolgend mit dem  $\varepsilon$ -MOEA approximiert. Dieser Algorithmus lieferte beim unbeschränkten Problem (s. Abschnitt 9.2.3) die für eine SAA am besten geeigneten Portfolio-Allokationen, da sie sehr gleichmäßig über den Zielfunktionsraum verteilt waren. Somit erhält das Management eine optimal strukturierte Entscheidungsvorlage für die strategische Ausrichtung der Bank.

### 9.3.3. Visualisierung und Diskussion der Resultate

In Tabelle 9.2 wurden die Positionslimits, die harte Restriktionen für das Optimierungsproblem bedeuten, in **Fettdruck** dargestellt (s. Spalte *Optimierungsergebnisse*). Die maximalen Positionslimits beim ATX (30%) und RTX (10%) wurden folglich im Rahmen der Optimierung ausgenutzt, ebenso wie die minimalen Schranken für DAX<sup>®</sup> (5%), S&P 500 (5%), REXP<sup>®</sup> (20%) und iBoxx<sup>®</sup> (10%).

Beide Arten von Schranken haben somit die Optimierung davon abgehalten, weitere Portfolios mit noch besserem Risiko-Rendite-Verhältnis aufzufinden. Diese Portfolios wurden jedoch zum Vergleich bei der Optimierung *ohne* Beschränkung ermittelt (s. Abschnitt 9.2.3). Nachstehend erfolgt die Darstellung der Ergebnisse des beschränkten Problems anhand eines *3D-Streudiagramms*, eines *Parallelkoordinatenplots* und einer *Heatmap*.

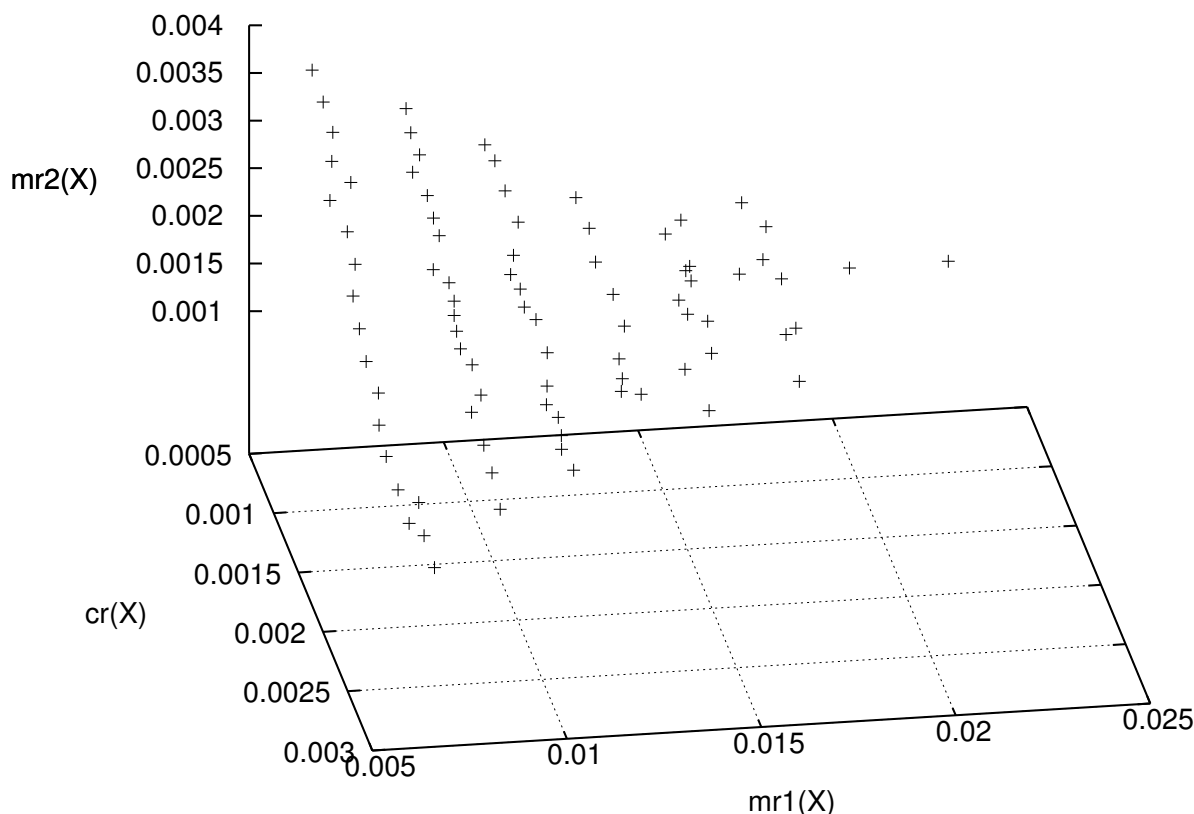
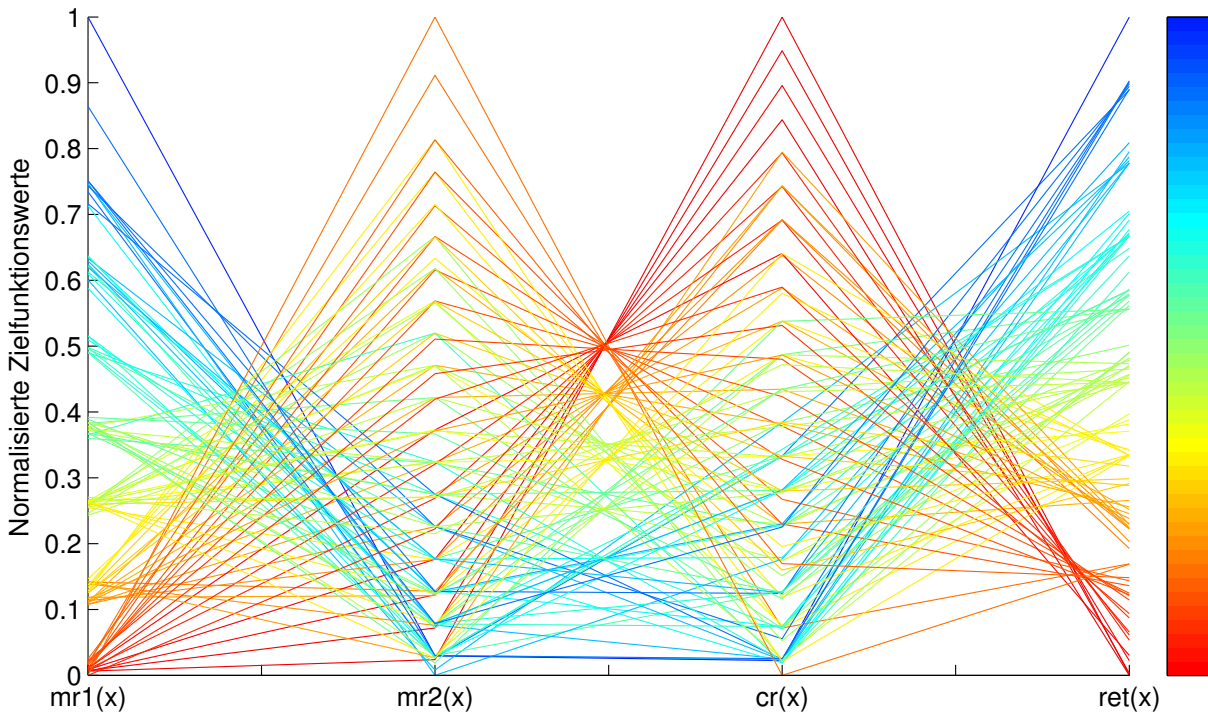


Abb. 9.7.: 3D-Streudiagramm für  $mr_1(x)$ ,  $mr_2(x)$ ,  $cr(x)$  mit Beschränkungen ( $\epsilon$ -MOEA)

### 3D-Streudiagramm

Abbildung 9.7 gibt in 3D-Streudiagrammdarstellung eine interessante Beispielansicht des Trade-offs zwischen den verschiedenen Risikoquellen im beschränkten Optimierungsproblem wieder. Es lässt sich beobachten, dass auch Investments mit hohem Risikowert für die Zielfunktion  $mr_1(x)$  (Aktienanlagen) von entsprechenden Investments im Bondmarkt bzw. Kreditmarkt begleitet werden, die durch  $mr_2(x)$  bzw.  $cr(x)$  bezeichnet sind. Dies ist die Auswirkung der neu definierten Mindestlimits für die beiden Risikoklassen.

Zudem wird eine Vielzahl verschiedener effizienter Kombinationen mit Investitionen in alle drei Risikoarten  $mr_1(x)$ ,  $mr_2(x)$  und  $cr(x)$  ersichtlich. Eine derartige Darstellung des Trade-offs zwischen den Risikoarten lässt sich in sonst üblichen Praxisanwendungen nicht in dieser Weise erfassen. Durch die Beschränkungen wird allerdings auch die erwartete Rendite vermindert, was im Folgenden in der Parallelen Koordinatendarstellung und in der Heatmap nachvollziehbar wird.

Abb. 9.8.: Parallelkoordinatenplot des beschränkten Problems ( $\varepsilon$ -MOEA)

## Parallelkoordinatenplot

Alle vier Zielfunktionen  $mr_1(x)$ ,  $mr_2(x)$ ,  $cr(x)$  und  $ret(x)$  im Überblick zeigt Abbildung 9.8 in Paralleler Koordinatendarstellung. Durch die an den Verlauf der Rendite angepassten Farbstufen<sup>15</sup> und die hohe Anzahl sich kreuzender Linien wird ersichtlich, welche erheblichen Trade-offs wiederum zwischen den Risikoarten vorhanden sind. Beispielsweise steht hohen Investitionen im Aktienbereich, vertreten durch die Zielfunktion  $mr_1(x)$ , grundsätzlich auch eine hohe Rendite gegenüber. Dagegen sind Investitionen in zinsrisikobehaftete Anlageklassen ( $mr_2(x)$ ) sowie kreditrisikobehaftete Klassen ( $cr(x)$ ) mit eher niedrigen Renditen verbunden.

Im Vergleich zum unbeschränkten Problem aus Abschnitt 9.2 verteilen sich die einzelnen Allokationen nun deutlich stärker über den Zielfunktionsraum. Dies liegt vor allem an der starken Einschränkung von Investitionen in den RTX und ATX, die das Spektrum durch ihre hohen Renditeerwartungen besonders weit auseinandergezogen haben. Im Vergleich zu Abbildung 9.5 fällt ebenfalls auf, dass deutlich weniger rote Linien, d. h. Portfolios mit vergleichsweise sehr niedriger Rendite vorliegen. Auch diese Beobachtung ist auf die volumenmäßige Einschränkung der Positionen zurückzuführen.

<sup>15</sup>Blau kennzeichnet wiederum die höchste und Rot die niedrigste Rendite.

## Heatmap

Zur aggregierten Darstellung aller Parameter- und Zielfunktionswerte wird abschließend wiederum eine Heatmap eingesetzt. In Abbildung 9.9 werden dabei alle Lösungs-Allokationen des beschränkten Portfolioproblems mit den Portfoliogewichten der Asset-Klassen sowie allen Zielfunktionswerten  $ret(x)$ ,  $mr_1(x)$ ,  $mr_2(x)$  und  $cr(x)$  im Farbspektrum veranschaulicht. Das Spektrum reicht analog zum unbeschränkten Problem von Rot (0,0) bis Blau (1,0), und alle Parameter- und Zielfunktionswerte wurden auf das Intervall  $[0; 1]$  normiert. Die Sortierung der Allokationen erfolgt ebenfalls nach aufsteigender Rendite.<sup>16</sup>

Die Heatmap vermittelt auch hier einen guten Überblick aller im Optimierungsprozess ermittelten Werte und ihrer gegenseitigen Abhängigkeiten. Wiederum wird ersichtlich, dass Portfolios mit hoher Rendite immer auch hohe Investitionen im ATX und RTX aufweisen. Auffällig gegenüber dem unbeschränkten Problem (s. Abbildung 9.6) ist dabei, dass der RTX öfters berücksichtigt wird und dass der ATX in beinahe der Hälfte der Allokationen auftritt. Die Ursache hierfür liegt in der starken Beschränkung des möglichen Volumens für ATX (30%) und RTX (10%). Da beide Indizes eine hohe Performance aufweisen, werden sie dementsprechend oft mit ihrem Maximallimit einbezogen.

Die relativ gesehen schlechteste Rendite ergibt sich wie im unbeschränkten Problem bei hohen Investitionen in den kreditrisikobehafteten iBoxx<sup>®</sup>, gefolgt von hohen Investments in den REXP<sup>®</sup> sowie bei Mischungen zwischen beiden Indizes.

Auch in diesem beschränkten Problem mit einem Mindestanteil von 5% bei allen Allokationen für den DAX<sup>®</sup> spielt dieser weiterhin eine untergeordnete Rolle bei den Asset-Klassen. Die überwiegend rote Färbung des DAX<sup>®</sup>-Balkens verdeutlicht, dass dieser in den meisten Fällen nur beim Minimalvolumenlimit von 5% liegt. In diesem Zusammenhang ist anzumerken, dass bei der Normierung auf das Intervall  $[0; 1]$  ein Minimallimit auf 0,0 umgerechnet wird. Daher finden sich bei DAX<sup>®</sup>, S&P, REXP<sup>®</sup> und iBoxx<sup>®</sup> rote Felder, obwohl die Mindestpositionen oberhalb von Null liegen.

Insgesamt lässt sich bei den Zielfunktionen der deutlich positive Zusammenhang aus dem unbeschränkten Problem zwischen der Rendite  $ret(x)$ , dem Aktienrisiko  $mr_1(x)$  und in gewisser Weise auch dem Portfoliogewicht des ATX bestätigen. Die beiden anderen Risikozielfunktionen  $mr_2(x)$  und  $cr(x)$  sind dagegen eher negativ korreliert.

<sup>16</sup>Prinzipiell kann eine Sortierung nach unterschiedlichsten Kriterien sinnvoll sein.

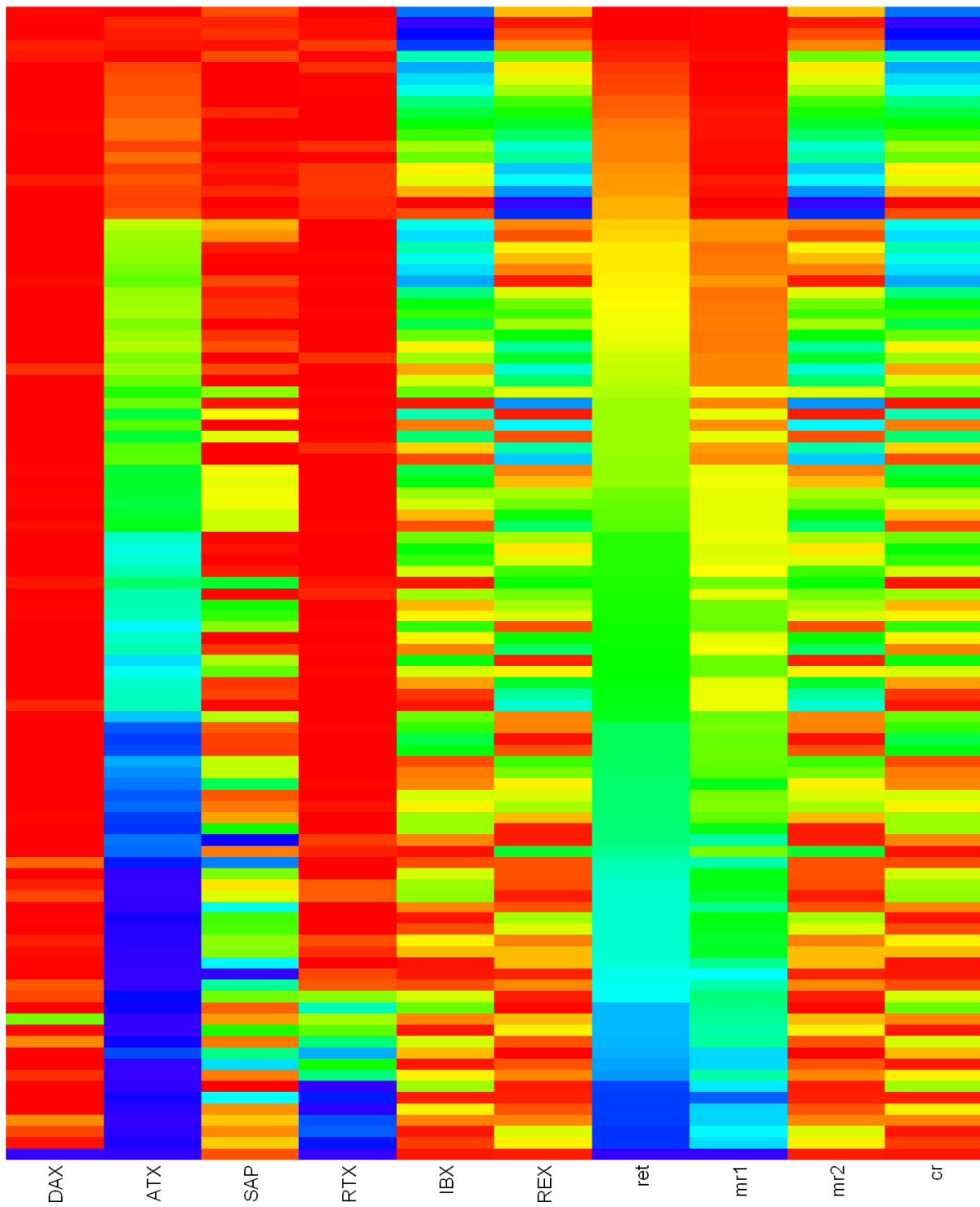


Abb. 9.9.: Veranschaulichung der Parameter- und Zielfunktionswerte des beschränkten Portfolioprob-  
blems mit einer Heatmap (Ergebnisse  $\epsilon$ -MOEA)

## 9.4. Zusammenfassung

Das multikriterielle Modell aus Kapitel 7 konnte in der Optimierung der Strategischen Asset Allokation einer Beispielbank erfolgreich zum Einsatz kommen. Es wurden dabei verschiedene repräsentative Indizes als Benchmarks für Investitionen in Aktien verschiedener Länder, in kreditrisikolose Bundesanleihen und kreditrisikobehaftete Unternehmenskredite berücksichtigt. Mithilfe der fortgeschrittenen Visualisierungstechniken *Streudiagramm*, *Streudiagramm-Matrix*, *Parallelkoordinatenplot* und insbesondere *Heatmap* konnten interessante Einblicke in die Struktur der Pareto-optimalen Allokationen sowie in die Trade-offs zwischen den Risikoarten gewonnen werden.

Zur Demonstration der Flexibilität der verwendeten multikriteriellen evolutionären Verfahren wurden weiterhin typische Praxisbeschränkungen in das Optimierungsproblem integriert. Hierdurch veränderte sich die Struktur der approximierten Lösungen im Vergleich zum unbeschränkten Fall deutlich.

Sowohl die zur Optimierung des Problems mit sechs Asset-Klassen verwendeten Verfahren also auch die beschriebenen Visualisierungstechniken ermöglichen eine Analyse wesentlich umfangreicherer Problemstellungen. Im folgenden Kapitel erfolgt beispielsweise die Optimierung der Taktischen Asset Allokation einer Beispielbank, bei der insgesamt 20 verschiedene Investitionsmöglichkeiten ins Kalkül gezogen werden.





## 10. Anwendung des Modells in der Taktischen Asset Allokation

Nach der Optimierung der Strategischen Asset Allokation, die im vorhergehenden Kapitel 9 durchgeführt wurde, kann eine Bank in einem Folgeschritt ihre Taktische Asset Allokation (TAA) analysieren und optimieren.<sup>1</sup> Wiederum basierend auf dem Modell zum Integrierten Portfoliomanagement aus Kapitel 7 wird im Folgenden die TAA einer Bank mit einer exemplarischen Auswahl konkreter Einzelassets untersucht.<sup>2</sup> Zunächst werden die unterschiedlichen Investitionsmöglichkeiten beschrieben, die für die Optimierung zur Verfügung stehen. Nach einer Bewertung des MOEA-Konvergenzverhaltens bei steigender Generationszahl erfolgen Auswertung und Analyse der Ergebnisse.

### 10.1. Datengrundlage

Der Beispielbank stehen  $n = 20$  Investitionsmöglichkeiten zur Verfügung (s. Tabelle 10.1), die sich in Bonds (**B1-B5**), Aktien (**A6-A10**) und Kredite (**K11-K20**) an Privatkunden kategorisieren lassen. Es wurden drei Anleihen der Bundesrepublik Deutschland (BUND) mit unterschiedlichen Laufzeiten von 2006-2016 ausgewählt. Als konkrete Vertreter von Corporate-Bonds dienen zwei Anleihen der Deutsche Telekom AG und der Volkswagen AG. Unter der Annahme, dass der Bankvorstand ausschließlich Aktieninvestments in großen deutschen DAX<sup>®</sup>-Unternehmen tätigen möchte<sup>3</sup>, stehen hierfür die Aktien der Unternehmen BASF AG, Deutsche Bank AG, DaimlerChrysler AG, SAP AG und Siemens AG zur Auswahl. Stellvertretend für das Kundengeschäft der Bank können an Privatkunden zehn Kredite mit identischer Laufzeit, jedoch variierenden Scoring-Noten von B- bis BB vergeben werden. Weitere Informationen, z. B. exakte Fälligkeitstermine und Geschäftsfeld  $k$  für den Faktor  $\beta_k$  der Zielfunktion des operationellen Risikos, finden sich in Tabelle 10.1.

Aufgrund beschränkter Datenverfügbarkeit erstreckt sich die Historie der Marktdaten für die Untersuchung über den Zeitraum vom 15.05.2003 bis 30.09.2004. Dies betrifft die täglichen Schlusskurse der zehn Handelsinstrumente B1-B5 (Bonds) und A6-A10 (Aktien), für die an insgesamt 338 Tagen ein Kurs für jedes Instrument vorliegt. Diese Kurse wurden für die weiteren Analysen verwendet. Die Performance der Einzelaktien im Betrachtungszeitraum geht aus Abbildung 10.1 hervor. Weiterhin sind die zehn tilgungsfreien Festzinskredite an priva-

<sup>1</sup>Hintergründe zur Bedeutung der TAA im modernen Portfoliomanagement finden sich in Abschnitt 3.3.

<sup>2</sup>Dieser Ansatz wird in Schlottmann et al. [176] dargestellt.

<sup>3</sup>Alternativ könnte dies ein Optimierungsergebnis der Strategischen Asset Allokation darstellen.

#	Kategorie	Emittent/Schuldner	Coupon	Fälligkeit	Rating	Asset	k
1	Bond	Bundesrep. Deutschl.	6,250%	26.04.2006	AAA	B1	2
1	Bond	Bundesrep. Deutschl.	4,500%	04.07.2009	AAA	B2	2
1	Bond	Bundesrep. Deutschl.	5,625%	20.09.2016	AAA	B3	2
1	Bond	Dt. Telekom (Corp.)	8,125%	29.05.2012	BBB+	B4	2
1	Bond	Volkswagen (Corp.)	4,125%	22.05.2009	A-	B5	2
1	Aktie	BASF AG	-	-	-	A6	2
1	Aktie	Deutsche Bank AG	-	-	-	A7	2
1	Aktie	DaimlerChrysler AG	-	-	-	A8	2
1	Aktie	SAP AG	-	-	-	A9	2
1	Aktie	Siemens AG	-	-	-	A10	2
2	Kredit	Privater Schuldner	8,000%	30.09.2005	BB	K11, K12	3
2	Kredit	Privater Schuldner	8,000%	30.09.2005	BB-	K13, K14	3
2	Kredit	Privater Schuldner	8,000%	30.09.2005	B+	K15, K16	3
2	Kredit	Privater Schuldner	8,000%	30.09.2005	B	K17, K18	3
2	Kredit	Privater Schuldner	8,000%	30.09.2005	B-	K19, K20	3

Tab. 10.1.: Investitionsmöglichkeiten für die Beispielbank (TAA)

te Schuldner mit jährlichen Zinszahlungen ausgestattet. Das Zinsänderungsrisiko ist für diese Kredite nicht relevant, da sie entsprechend üblicher Bankpraxis über Zinsswaps unmittelbar nach Vertragsabschluss abgesichert werden.<sup>4</sup>

Das Ziel der Portfolio-Optimierung besteht darin, dem Integrierten Risikomanager der Bank bzw. dem Bankmanagement per 30.09.2004 eine Auswahl effizienter Portfolio-Allokationen als Entscheidungsgrundlage für die zukünftige Ausrichtung der TAA zu liefern.

## 10.2. Modellimplementierung

### 10.2.1. Parametrisierung und Annahmen

Basis für die Optimierung bildet wiederum das in Kapitel 7 eingeführte multikriterielle Modell aus Definition 7.1. Die erwartete Rendite wird für die zehn Handelsinstrumente anhand der historischen Kurszeitreihen geschätzt. Für die Privatkredite ergibt sich die Rendite direkt aus den jährlichen Nettozinszahlungen der jeweiligen Schuldner. Somit kann für jedes Portfolio  $x$  im Optimierungsproblem [10.1] der TAA die erwartete Gesamtrendite  $ret(x)$  des Portfolios ermittelt werden. Die Bank verwendet weiterhin die Historische Simulation (s. Abschnitt 2.4.2) zur Ermittlung der Marktrisiko-Zielfunktion  $mr(x)$  mit einem Konfidenzniveau von 99%

<sup>4</sup>Durch den Ausschluss des Zinsänderungsrisikos kann die Marge eines Geschäft direkt vereinnahmt werden. Trifft ein Kreditinstitut bestimmte Annahmen über die weitere Entwicklung des Zinsniveaus, können aus spekulativen Absichten auch gezielt Zinspositionen offen bleiben.

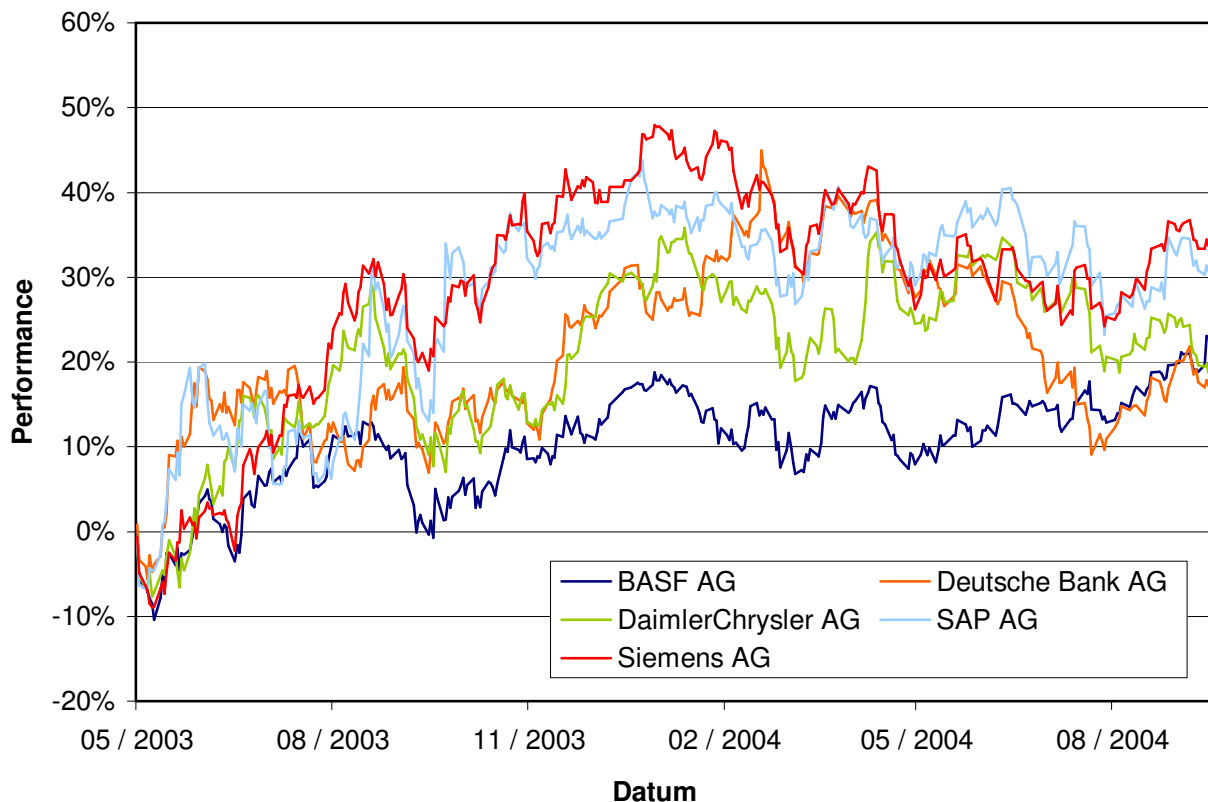


Abb. 10.1.: Performance der DAX<sup>®</sup>-Aktien im Zeitraum vom 15.05.2003 bis 30.09.2004

und einer Haltedauer von einem Handelstag. Die dritte Zielfunktion  $cr(x)$  wird mittels des CreditMetrics<sup>TM</sup>-Modells von [96] in der Variante mit zwei Zuständen berechnet.<sup>5</sup> Das Konfidenzniveau beträgt für das Kreditrisiko 99,9% und die Haltedauer beträgt, wie allgemein üblich, ein Jahr. Für operationelle Risiken in der Zielfunktion  $or(x)$  wird entsprechend Abschnitt 7.2.4 eine Risikofunktion auf Basis des Standardansatzes von Basel II verwendet.

### 10.2.2. Optimierungsproblem mit $ret(x)$ , $mr(x)$ , $cr(x)$ und $or(x)$

Entsprechend der Annahmen lässt sich das spezielle Optimierungsproblem der TAA wie folgt definieren:

#### **Definition 10.1 (OP Taktische Asset Allokation):**

Das multikriterielle Optimierungsproblem (Minimierungsproblem) der TAA im Rahmen eines Integrierten Risiko- und Rendite-Managements wird durch die folgenden vier spezifischen Ziel-

<sup>5</sup>Dieses Modell wird in [89] beschrieben.

funktionen und die beiden Nebenbedingungen beschrieben:

$$\begin{aligned}
 \text{Min. } f_1(x) &:= -ret(x) \\
 f_2(x) &:= mr_{\text{Historische Simulation, 99\%, 1d}}(x) \\
 f_3(x) &:= cr_{\text{CreditMetrics}^{\text{®}}, 99.9\%, 1y}(x) \\
 f_4(x) &:= or_{\text{Funktion auf Basis B-II-STA}}(x) \\
 x &= (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \\
 \text{u. d. N. } \forall i \in \{1, \dots, n\} : x_i &\in [0, 1] \\
 \sum_{i=1}^n x_i &= 1
 \end{aligned}
 \tag{10.1}$$

Aus der beschriebenen Parametrisierung wird wiederum ein wesentlicher Vorteil des multi-kriteriellen Modell-Frameworks ersichtlich. Verschiedene Risikomaße (VaR vs. Funktion auf Basis Basel-Standardansatz), unterschiedliche Konfidenzniveaus (99% vs. 99.9%) und abweichende Zeithorizonte (1 Tag vs. 1 Jahr) können im Modell miteinander kombiniert werden.

Zur Lösung des Optimierungsproblems wird der NSGA-II (s. Abschnitt 5.3.3) entsprechend der Implementierung von Kalyanmoy Deb verwendet (SBX-Rekombinationsoperator und spezieller Mutationsoperator für reell-kodierte Gene). Die Rekombinationswahrscheinlichkeit beträgt 0,8 und die Mutationswahrscheinlichkeit entsprechend der üblichen Praxis  $1/n$  (mit  $n = 100$  als Anzahl der Individuen pro Population). Von den in Abschnitt 8.2 diskutierten Erweiterungen wurde der Reparatur-Operator eingesetzt, um jederzeit gültige Individuen (Portfolio-Allokationen) sicherzustellen. Der Algorithmus liefert, wie im Anwendungsfall des vorherigen Kapitels, nichtdominierte Pareto-effiziente Portfolio-Allokationen bezüglich der 20 Investitionsmöglichkeiten im vierdimensionalen Lösungsraum. Die Visualisierung und Interpretation der Ergebnisse erfolgt im Abschnitt 10.3.2.

### 10.3. Resultate

Vor der Visualisierung und Diskussion wird zunächst die Konvergenz der Resultate analysiert.

#### 10.3.1. Analyse der Konvergenz

Zum qualitativen Vergleich der Konvergenz des Algorithmus wurden 10.000, 20.000 und 50.000 Generationsdurchläufe mit jeweils 100 Individuen durchgeführt. Die Resultate werden in den drei Abbildungen 10.2-10.4 dargestellt. Dabei wurde die Rendite  $ret(x)$  jeweils einer der drei Risikozielfunktionen  $mr(x)$  (Abbildung 10.2),  $cr(x)$  (Abbildung 10.3) bzw.  $or(x)$  (Abbildung 10.4) gegenübergestellt. Es wird ersichtlich, dass bei 50.000 Populationsschritten die Individuen z. T. dichter in Richtung der jeweiligen geradenähnlichen Front im Schaubild konvergieren.

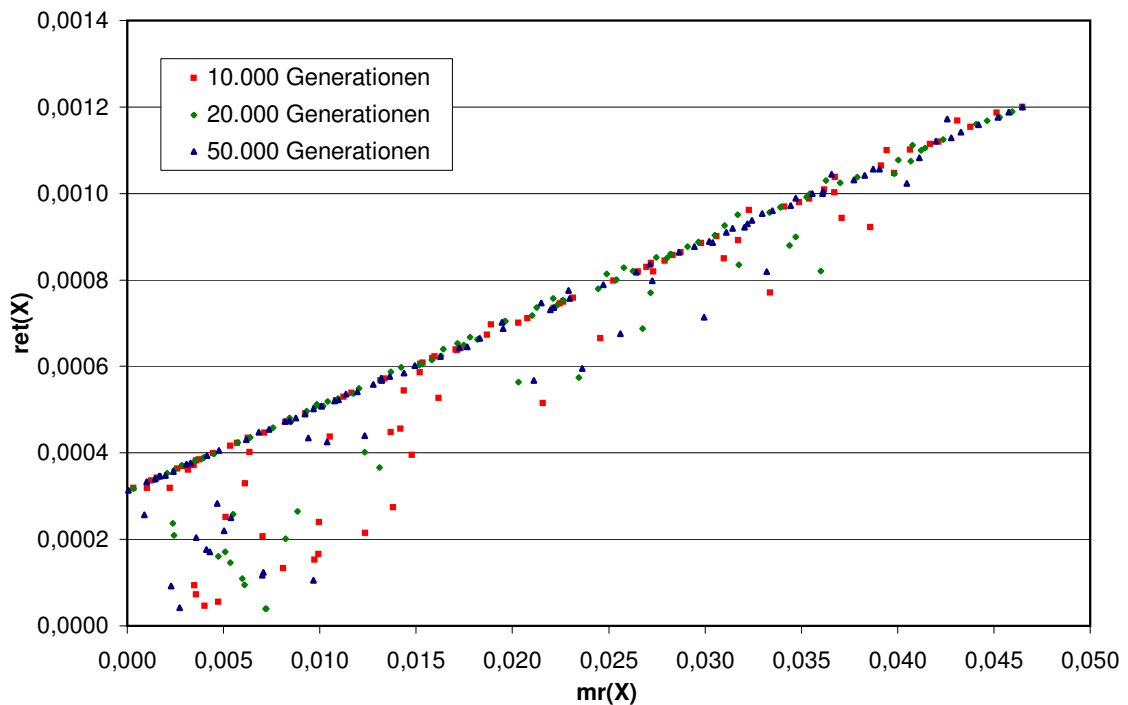


Abb. 10.2.: Konvergenzverhalten bei Optimierung mit 10.000, 20.000 und 50.000 Generationsdurchläufen:  $mr(x)$  und  $ret(x)$

Gleichwohl fällt auf, dass auch nach 50.000 Generationen noch viele effiziente Allokationen relativ weit von dieser Linie entfernt sind. Diese Allokationen kommen durch den vierdimensionalen Lösungsraum zustande, der über zwei Dimensionen nur schwer visualisiert werden kann. Im nächsten Abschnitt 10.3.2 werden daher bereits verwendete Visualisierungstechniken eingesetzt, um die besten Ergebnisse nach 50.000 Durchläufen nachvollziehbarer darzustellen und um Rückschlüsse für die Zusammenstellung optimaler Portfolios ziehen zu können.

### 10.3.2. Visualisierung und Diskussion

Aufgrund der vier Zielfunktionen des Optimierungsproblems können die damit vierdimensionalen Ergebnisse der Optimierung wiederum nicht einfach in einer standardmäßigen Koordinatendarstellung visualisiert werden, da diese auf maximal drei Dimensionen begrenzt ist. Im Folgenden werden daher wie schon bei der Strategischen Asset Allokation in Kapitel 9 Visualisierungstechniken aus Abschnitt 7.4 für die Repräsentation der Lösungen verwendet.

#### 3D-Streudiagramm

Entsprechend Abschnitt 7.4 wird zunächst eine Projektion der Lösungsallokationen in drei Dimensionen durchgeführt. Hierzu wird jeweils eine Dimension ausgelassen. Die Abbildungen 10.5 und 10.6 zeigen solche dreidimensionalen Projektionen der Zielfunktionswerte der finalen Individuen.

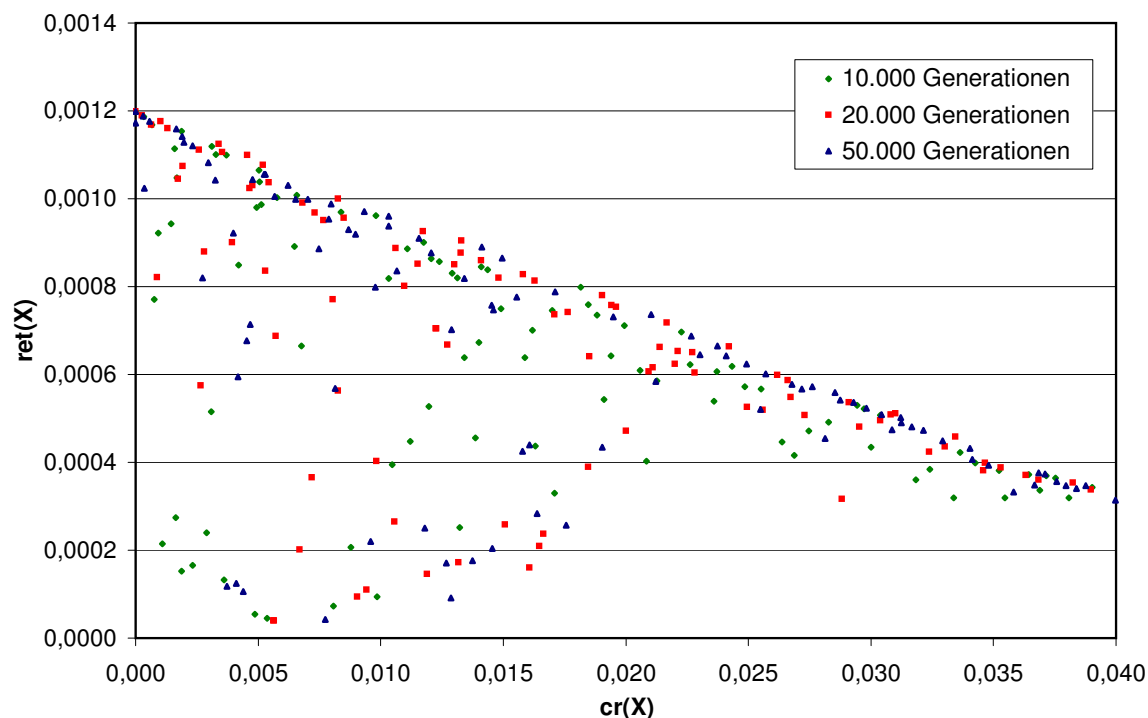


Abb. 10.3.: Konvergenzverhalten bei Optimierung mit 10.000, 20.000 und 50.000 Generationsdurchläufen:  $cr(x)$  und  $ret(x)$

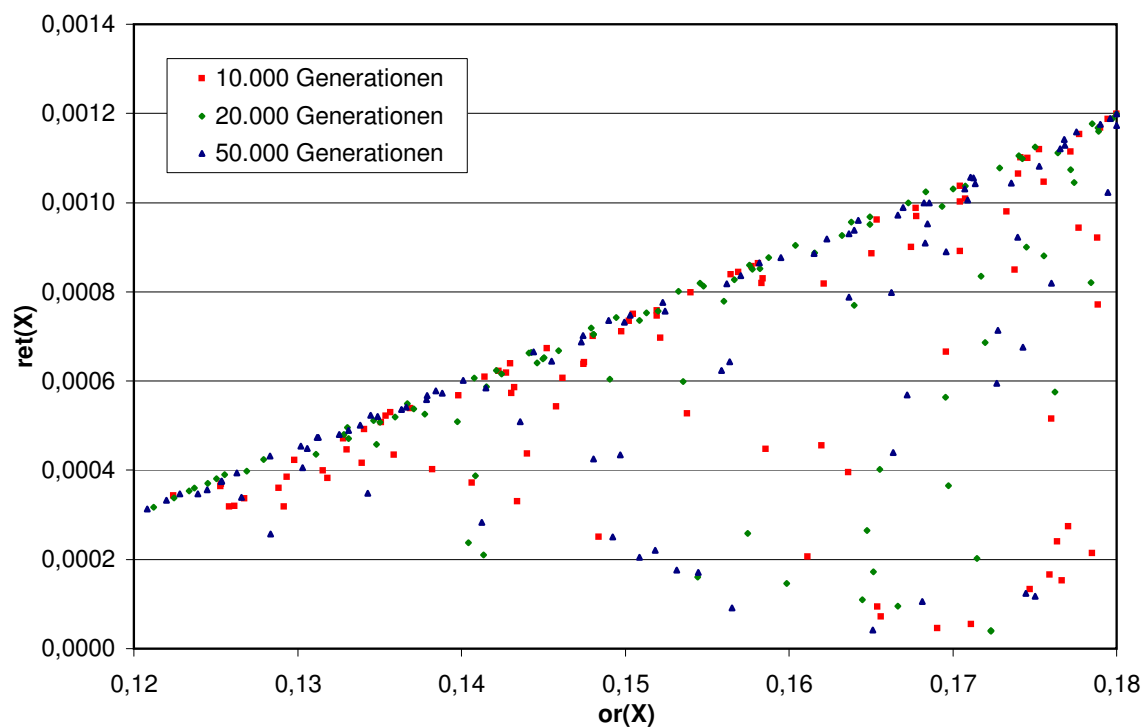


Abb. 10.4.: Konvergenzverhalten bei Optimierung mit 10.000, 20.000 und 50.000 Generationsdurchläufen:  $or(x)$  und  $ret(x)$

In Abbildung 10.5 werden die drei Komponenten Marktrisiko  $mr(x)$ , Kreditrisiko  $cr(x)$  und erwartete Rendite  $ret(x)$  der approximierten Lösungsportfolios gezeigt. Der Risikomanager bzw. das Bankmanagement kann diese Informationen direkt verwenden, um die aktuelle Vermögensallokation der Bank mit den berechneten Pareto-optimalen Portfolios zu vergleichen. Angenommen, die Bank habe einen aktuellen Portfolio-Status  $y$ . Wenn der Risikomanager die entsprechenden Zielfunktionswerte  $f_i(y)$  für  $i = 1, \dots, 4$  berechnet, kann er erkennen, in welchem Bereich sich die Bank momentan innerhalb der dreidimensionalen Zeichnung befindet. Zur Vervollständigung der Analyse ist zudem noch der vierte Zielfunktionswert  $f_4(y)$  in einem weiteren Schaubild zu prüfen, in dem zum Beispiel das operationelle Risiko  $or(x)$ , das Marktrisiko  $mr(x)$  und die erwartete Rendite  $ret(x)$  eingezeichnet sind.<sup>6</sup> Wenn die aktuelle Position  $y$  der Bank von einem Portfolio  $x$  dominiert wird, kann der Entscheidungsträger direkt mögliche Verbesserungen der aktuellen Allokation ableiten. Hierauf basierend können entsprechende Maßnahmen durchgeführt werden, um das Risiko-Rendite-Profil der Bank in eine verbesserte Position zu bringen.

Ein wesentlicher Vorteil der multikriteriellen Perspektive auf das Optimierungsproblem besteht darin, dass der Risikomanager die Auswirkungen unterschiedlichster Entscheidungsalternativen bzgl. heterogener Risikoquellen und erwarteter Rendite gleichzeitig untersuchen kann. Beispielsweise kann er in Abbildung 10.5 ein Portfolio wählen, das aufgrund der Haltedauer von einem Tag bei der Marktrisikoberechnung ein hohes kurzfristiges Risiko mit sich bringt, während das mittelfristige Risiko durch die 1-Jahres-Kreditrisikozielfunktion niedrig ist. Diese Portfolios, die zusätzlich mit einer hohen erwarteten Rendite aufwarten, befinden sich in der oberen linken Ecke der Abbildung. Wenn beispielsweise aufgrund von Handelsrisikolimits ein hohes kurzfristiges Risiko nicht erwünscht ist, sucht er sich Portfolios im unteren rechten Bereich. Diese beinhalten im Gegenzug ein höheres Kreditrisiko durch verstärkte Investments auf der Kreditseite.

In Abbildung 10.6 lässt sich der Trade-off zwischen den drei betrachteten Risikoarten Marktrisiko, Kreditrisiko und operationelles Risiko analysieren. Offensichtlich führt ein Anstieg des Marktrisiko-Exposures ebenfalls zu einer Erhöhung des operationellen Risikos für das Gesamtbankportfolio. Dies gründet in der Tatsache, dass Marktrisiko-Anlagen, wie z. B. Aktien, eine höhere Eigenkapitalunterlegung nach dem Standardansatz von Basel II erfordern (s. Tabelle 7.1). Entsprechend führt eine stärkere Konzentration auf Privatkundenkredite zu einer Reduktion des Zielfunktionswertes bei der auf dem Standardansatz basierenden Zielfunktion  $or(x)$ . Auch das Marktrisiko sinkt in diesem Fall, da das Zinsänderungsrisiko der Kredite annahmegemäß über Swaps von der Bank abgesichert wird. Durch die Erhöhung des Exposures auf der Kreditseite steigt wiederum das Kreditrisiko. Zusätzlich sinken die Renditeaussichten bei diesen Portfolios, die einen stärkeren Fokus auf Kundenkredite haben. Der Entscheidungsträger

<sup>6</sup>Hierfür kann auch Abbildung 10.6 herangezogen werden, in der  $or(x)$  mit den beiden anderen Risikoarten kombiniert wird.

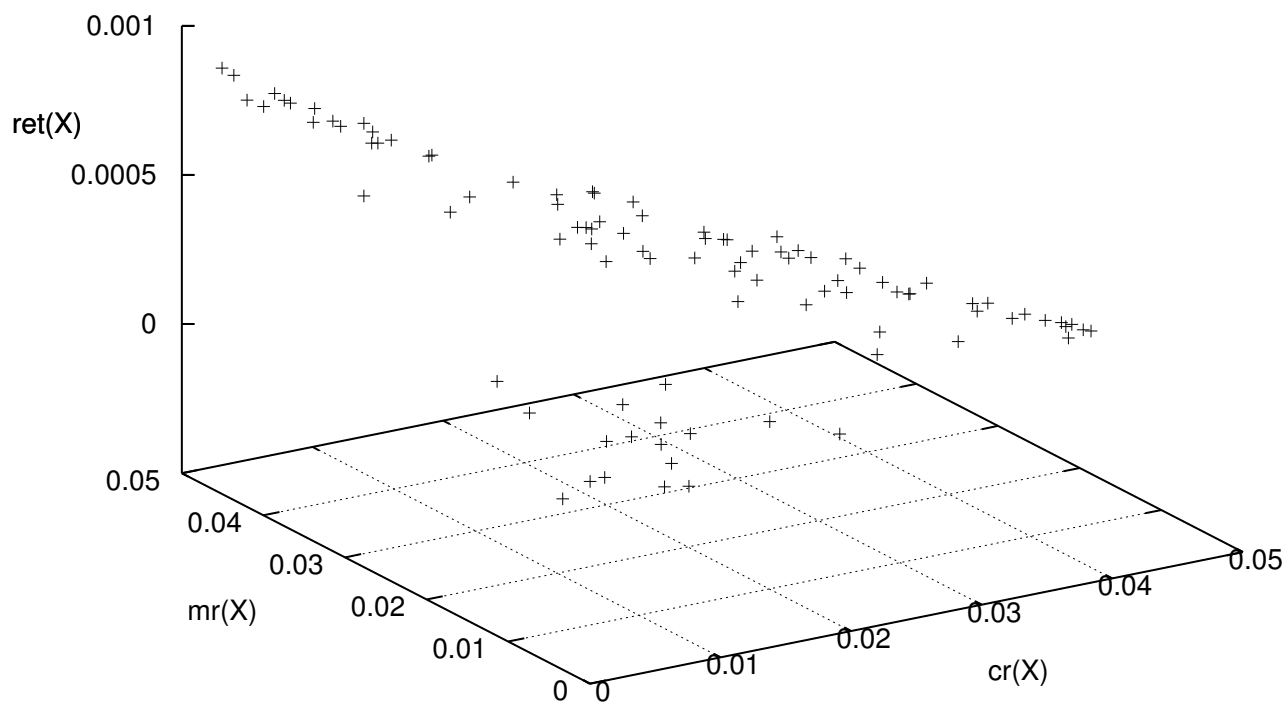


Abb. 10.5.: 3D-Streudiagramm für  $mr(x)$ ,  $cr(x)$  und  $ret(x)$

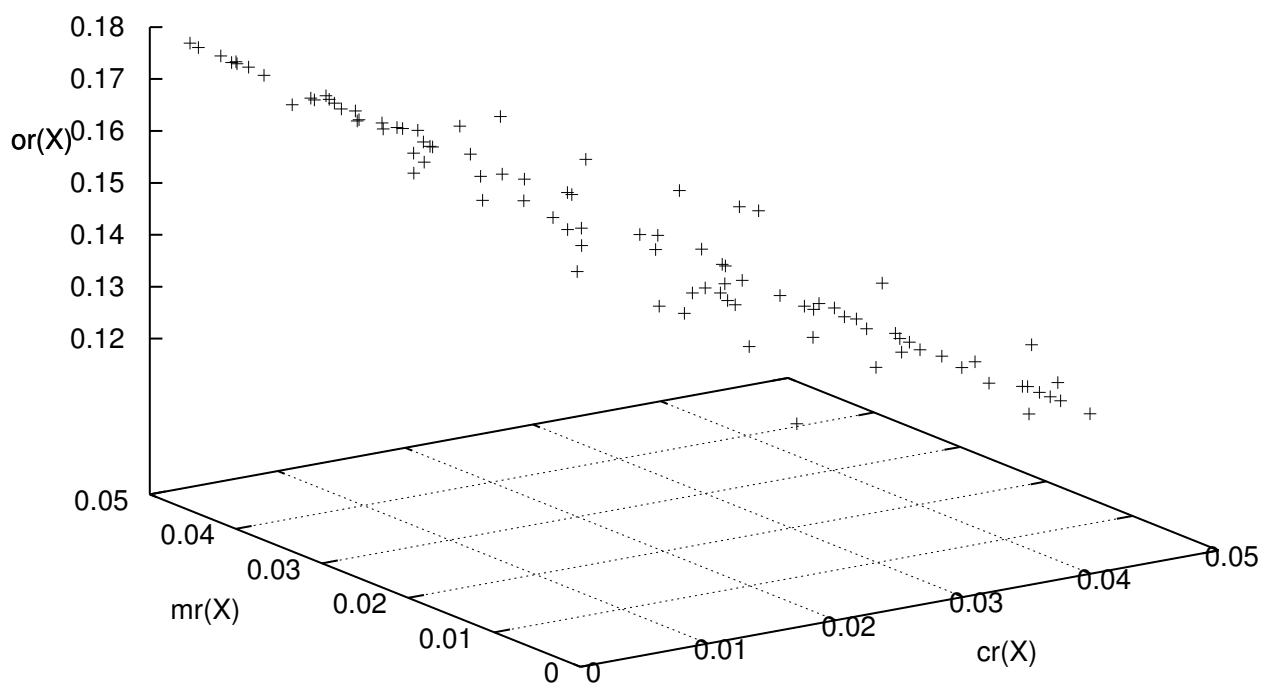


Abb. 10.6.: 3D-Streudiagramm für  $mr(x)$ ,  $cr(x)$  und  $or(x)$



der Bank kann also, entsprechend seinem persönlichen Risikoappetit bzw. dem der Bank, eine effiziente Allokation aus den berechneten Lösungen wählen [176].

Die Visualisierung dieses Trade-offs zwischen den unterschiedlichen Risikotreibern Markt- und Kreditrisiko, Kreditrisiko und operationelles Risiko der Investitionsmöglichkeiten in Abbildung 10.6 wird in diesem Ausmaß in der Praxis normalerweise nicht ersichtlich. Abschließend ist anzumerken, dass sich die stark negative Korrelation zwischen Markt- und Kreditrisiko durch die bereits erwähnte Immunisierung der Kredite gegen das Zinsänderungsrisiko noch weiter erhöht.

### Streudiagramm-Matrix

In Erweiterung der 3D-Streudiagrammdarstellung werden die Optimierungsergebnisse in Abbildung 10.7 durch eine Streudiagramm-Matrix dargestellt.<sup>7</sup> Durch „fallende“ Punktwolken in der zweiten Spalte bzw. Zeile bei allen Schaubildkombinationen mit  $cr(x)$  wird die negative Korrelation des Kreditrisikos mit den übrigen Zielfunktionen deutlich. Alle anderen Zielfunktionskombinationen werden durch eher aufwärts gerichtete Punktemengen beschrieben. Bei allen Schaubildern fällt auf, dass die Zusammenhänge zwischen den einzelnen Zielfunktionen bei weitem nicht als linear beschrieben werden können. Durch die vier Dimensionen der Zielfunktionen finden sich auch unterhalb bzw. oberhalb der Linien, die die Pareto-effizienten Mengen begrenzen, noch eine Vielzahl von Lösungen.

Wenn bestimmte Allokationen miteinander verglichen werden sollen, bieten Streudiagramm-Matrizen eine sehr übersichtliche Darstellungsform. Der Bankmanager kann verschiedene präferierte Allokationen und ggf. die aktuelle Allokation der Bank jeweils durch eine bestimmte Farbe in den Schaubildern hervorheben. Somit lassen sich auf einen Blick die unterschiedlichen Ausprägungen der Zielfunktionswerte sowie die Trade-offs erfassen.

### Parallelkoordinatenplot

Zur weiteren Verbesserung der Visualisierung, insbesondere der einzelnen Trade-offs, und zur Erhöhung der Intuition der Ergebnisse werden die effizienten Allokationen zusätzlich in Parallelkoordinatendarstellung präsentiert [177].<sup>8</sup> Wie von Purshouse & Fleming [162] vorgeschlagen, wurden die Zielfunktionswerte auch hier auf das Intervall  $[0; 1]$  normiert.

Abbildung 10.8 zeigt die vierdimensionalen Lösungen des Optimierungsproblems für die Zielfunktionen  $mr(x)$ ,  $cr(x)$ ,  $or(x)$  und  $ret(x)$ . Das rechts neben der Abbildung aufgefächerte Farbspektrum basiert dabei auf der Rendite und soll die visuelle Erfassung der konfliktären Zielfunktionen noch weiter verbessern. Wie von Purshouse & Fleming [162] angemerkt, lassen sich ausgeprägte Trade-offs im Optimierungsproblem durch eine hohe Anzahl sich gegenseitig

<sup>7</sup>Die Zielfunktionswerte wurden entsprechend der Empfehlung in Abschnitt 7.4 auch hier auf das Intervall  $[0; 1]$  normiert.

<sup>8</sup>Für eine Beschreibung von Parallelkoordinatenplots s. Abschnitt 7.4.3.

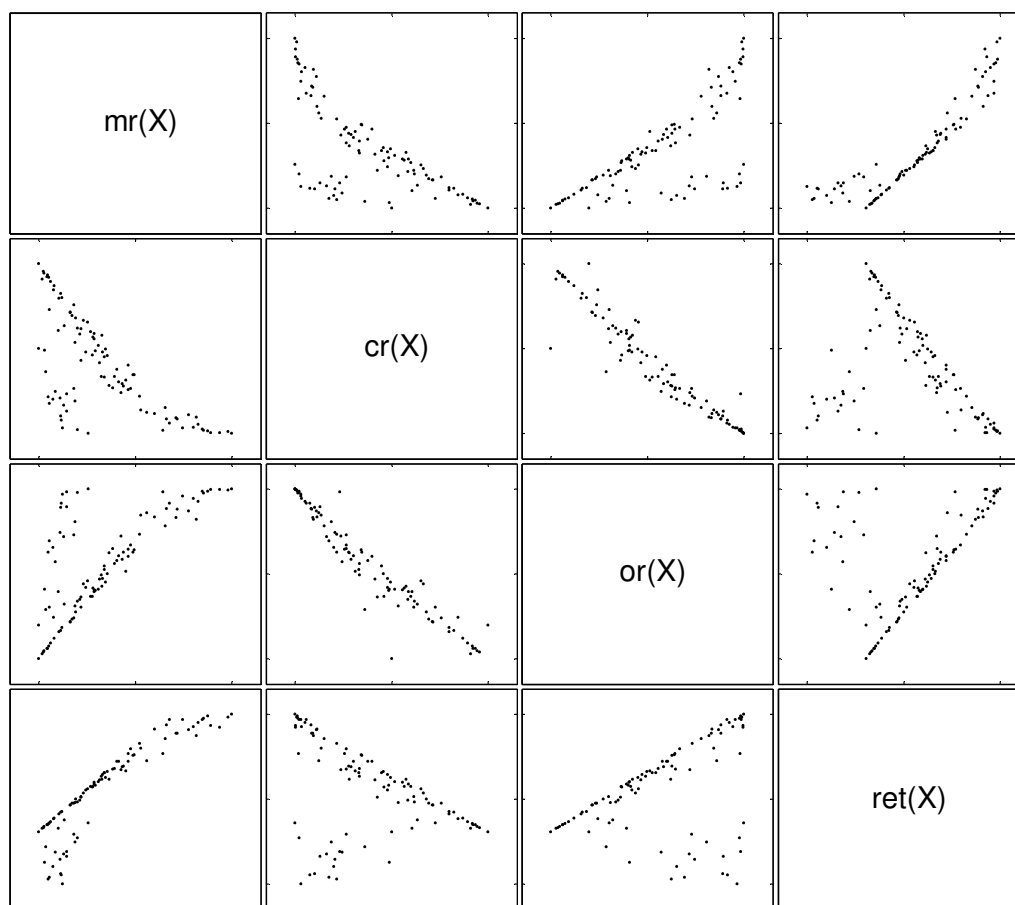


Abb. 10.7.: Streudiagramm-Matrix für  $mr(x)$ ,  $cr(x)$ ,  $or(x)$  und  $ret(x)$

schneidender Linien im Schaubild identifizieren. Entsprechend repräsentiert die Kreditrisikozielfunktion bei dieser Optimierung ein stark konfliktäres Ziel. Demgegenüber verlaufen die Linien bei den übrigen drei Zielfunktionen eher parallel zueinander. Die Entwicklung des Farbspektrums beim Marktrisiko  $mr(x)$  im Vergleich zu dem bei der Rendite  $ret(x)$  verläuft dabei sehr stark synchron. Beim operationellen Risiko wird durch die vom oberen Bereich von  $or(x)$  zum unteren Bereich von  $ret(x)$  verlaufenden roten Linien eine stärkere Abweichung von der Renditezielfunktion ersichtlich.

Dennoch lässt sich aus dem Parallelkoordinatenplot folgern, dass Marktrisiko, operationelles Risiko und Rendite sich zumindest weitestgehend im Gleichlauf verändern. Ein verstärkter Fokus auf mit Kreditrisiko behaftete Positionen bewirkt hingegen eine Bewegung in die jeweils entgegengesetzte Richtung. Diese Beobachtungen sind mit denen des 3D-Streudiagramms bzw. der Streudiagramm-Matrix aus den vorherigen Abschnitten konform. Die Implikation für den Manager der Bank ist, dass ein Wechsel vom eher handelslastigen Geschäft zum Retail- bzw. Privatkundengeschäft mit einer Reduktion der Markt- und operationellen Risiken verbunden ist. Gleichzeitig steigt das Kreditrisiko und die Renditeerwartung sinkt tendenziell.

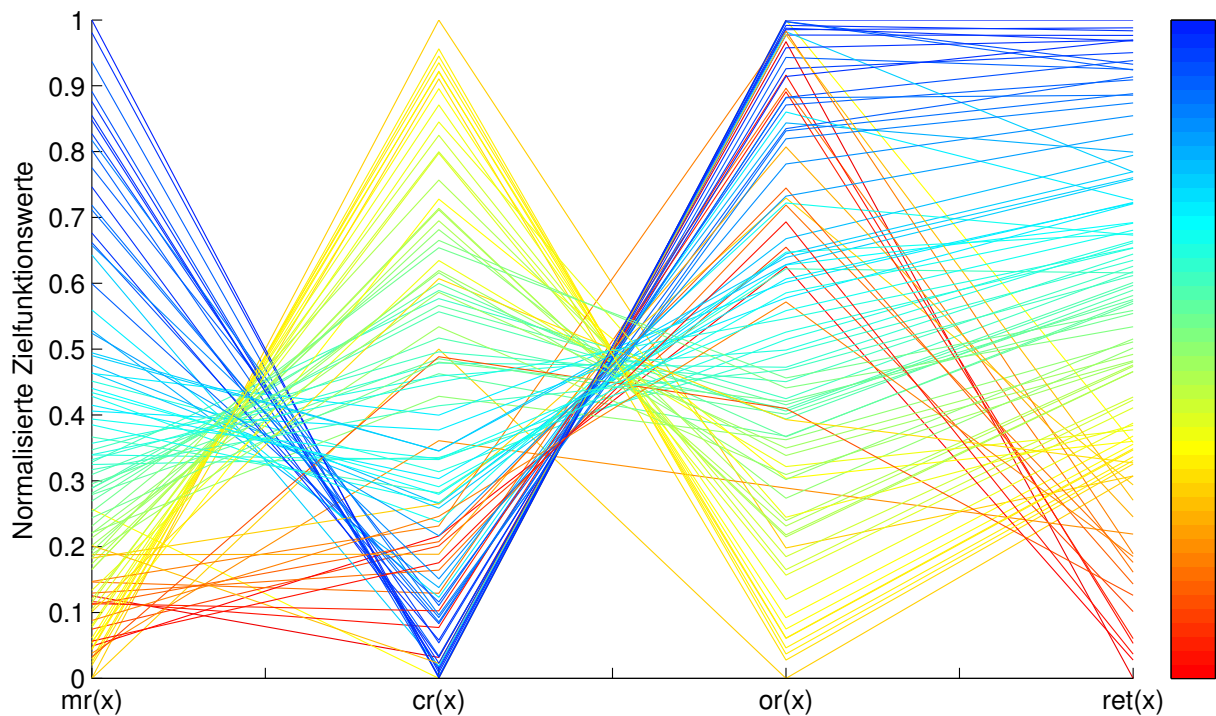


Abb. 10.8.: Parallelkoordinatenplot für  $mr(x)$ ,  $cr(x)$ ,  $or(x)$  und  $ret(x)$  (Das Farbspektrum wurde entsprechend  $ret(x)$  gewählt)

## Heatmap

Als letzte Visualisierungstechnik kommt in Abbildung 10.9 eine Heatmap zum Einsatz. Aufgrund der hohen Anzahl von Parametern (20 Asset-Gewichte für die 20 Investitionsmöglichkeiten) und aufgrund der vier Zielfunktionen bietet eine Heatmap einen sehr guten Überblick über die Struktur der Lösungen. Die Allokationen mit  $[0; 1]$ -normierten Zielfunktionswerten in Abbildung 10.9 wurden entsprechend der erwarteten Rendite  $ret(x)$  sortiert. Daher wird in der Spalte  $ret(x)$  das zugrunde liegende Farbspektrum von Rot (Wert 0,0) über Gelb bis Blau (Wert 1,0) ersichtlich. Die Parameter und Zielfunktionswerte werden jeweils individuell auf das Intervall  $[0; 1]$  normiert, d. h. für die Normierung spielt immer nur das Minimum/Maximum des jeweiligen Wertes eine Rolle. Wenn ein Assetgewicht beispielsweise nur zwischen 0% und 5% schwankt, so entspricht das Gewicht 5% für dieses Asset dem Wert 1,0 auf der normierten Skala.

Aus dem Schaubild lassen sich umfangreiche Informationen ableiten. Zunächst werden die Zielfunktionen separat betrachtet. Erwartungsgemäß steigen die Werte für das Marktrisiko  $mr(x)$  und die Rendite  $ret(x)$  in ähnlicher Weise an. Jedoch wird durch das Farbspektrum ersichtlich, dass dies leicht versetzt erfolgt. Für das Kreditrisiko ergibt sich ein differenzierteres Bild. Die höchsten Werte erreicht  $cr(x)$  im unteren Drittel der Allokationen (Blau), nahezu 50% der Allokationen bewegen sich im mittleren Bereich (Gelb/Grün).

Beim operationellen Risiko ist signifikant, dass auch im Bereich von relativ niedrigem Marktrisiko und niedriger Rendite ein hohes operationelles Risiko (Blau) vorkommen kann. Dies war bereits in der entsprechenden Parallelen Koordinatendarstellung in Abbildung 10.8 zu beobachten. Die detaillierte Darstellung der Heatmap macht ersichtlich, dass diese Kombinationen genau dann auftreten, wenn vergleichsweise hohe Investitionen in einen der Bonds (B1-B5) getätigt werden. Da diese Anleihen im gewählten Betrachtungszeitraum nur niedrige Renditen liefern, fallen diese Allokationen in den oberen Bereich des Schaubilds mit niedrigeren Renditen. Derartige Analysen sind mit keiner anderen der hier vorgestellten Visualisierungstechniken in ähnlich anschaulicher Weise durchführbar. Aus diesem Grund sind Heatmaps besonders bei Problemen mit hoher Parameteranzahl empfehlenswert.

Wenn man den Blick nun ganz den Parameterwerten widmet, fallen große rote Flächen auf. Da die entsprechenden Parameter an diesen Stellen den Wert 0,0 haben, kann hierdurch beispielsweise eine qualitative Analyse durchgeführt werden, welche Assets für das Optimierungsproblem überhaupt eine hohe Relevanz haben. Es wird ersichtlich, dass die fünf Aktien (A6-A10) am häufigsten in effizienten Portfolio-Allokationen vertreten sind. Einzig die Gewichtungen in Relation zur erwarteten Rendite schwanken. Von den Privatkrediten sind nur die mit gutem Scoring (K11) sowie solche mit schlechterem Scoring (ab K16) für die Optimierung von Relevanz. Enttäuschend sind die Resultate für die Bonds. Die kurzfristige Bundesanleihe wird bei Portfolios mit niedriger Rendite häufig ausgewählt. Alle anderen Bonds werden nur sehr selten und in niedriger Gewichtung einbezogen. Derartige Analysen können dazu beitragen, den Parametersuchraum gezielt einzuschränken und in einem zweiten Schritt z. B. die Anzahl der Investitionsmöglichkeiten zu halbieren.

### 10.4. Zusammenfassung

Auch im Rahmen der TAA unterstützt das in Kapitel 7 vorgestellte multikriterielle Modell des Integrierten Portfoliomanagements den Entscheidungsträger der Bank mit einer Auswahl von effizienten Portfolios hinsichtlich der hier betrachteten Risikoarten Markt-, Kredit- und operationelles Risiko.

Für die Beispielbank wurde eine Auswahl von 20 unterschiedlichen Assets für den Optimierungslauf vorgegeben. Das präsentierte Modell kann für weitere Analysen auch erheblich größere Asset-Zahlen verarbeiten. In Kapitel 4 wurde aufgezeigt, dass die Portfolio-Optimierung bereits mit wenigen Assets bei Verwendung der Risikozielfunktion Value-at-Risk ein rechen-technisch sehr aufwändiges Problem darstellt. Wenn analog zum beschriebenen Vorgehen in Kapitel 9 in die SAA weitere praxisrelevante Beschränkungen integriert werden, nimmt die Komplexität weiter zu. Klassische Praxisbeispiele hierfür könnten eine generelle Kardinalitätsbeschränkung für die Anzahl der Instrumente im Portfolio oder auch Handelslimits für bestimmte exotische Wertpapiere sein.

Evolutionäre Verfahren können praxisbedingte Anpassungen gegenüber dem allgemeinen Portfolioproblem nach Markowitz vergleichsweise einfach verarbeiten und gleichzeitig auch weit mehr als 20 Assets verarbeiten. Die im vorhergehenden Abschnitt präsentierte Darstellung mit Heatmaps kann in diesem Zusammenhang dazu dienen, das Spektrum an Investitionsmöglichkeiten in einem zweiten Schritt einzuschränken.

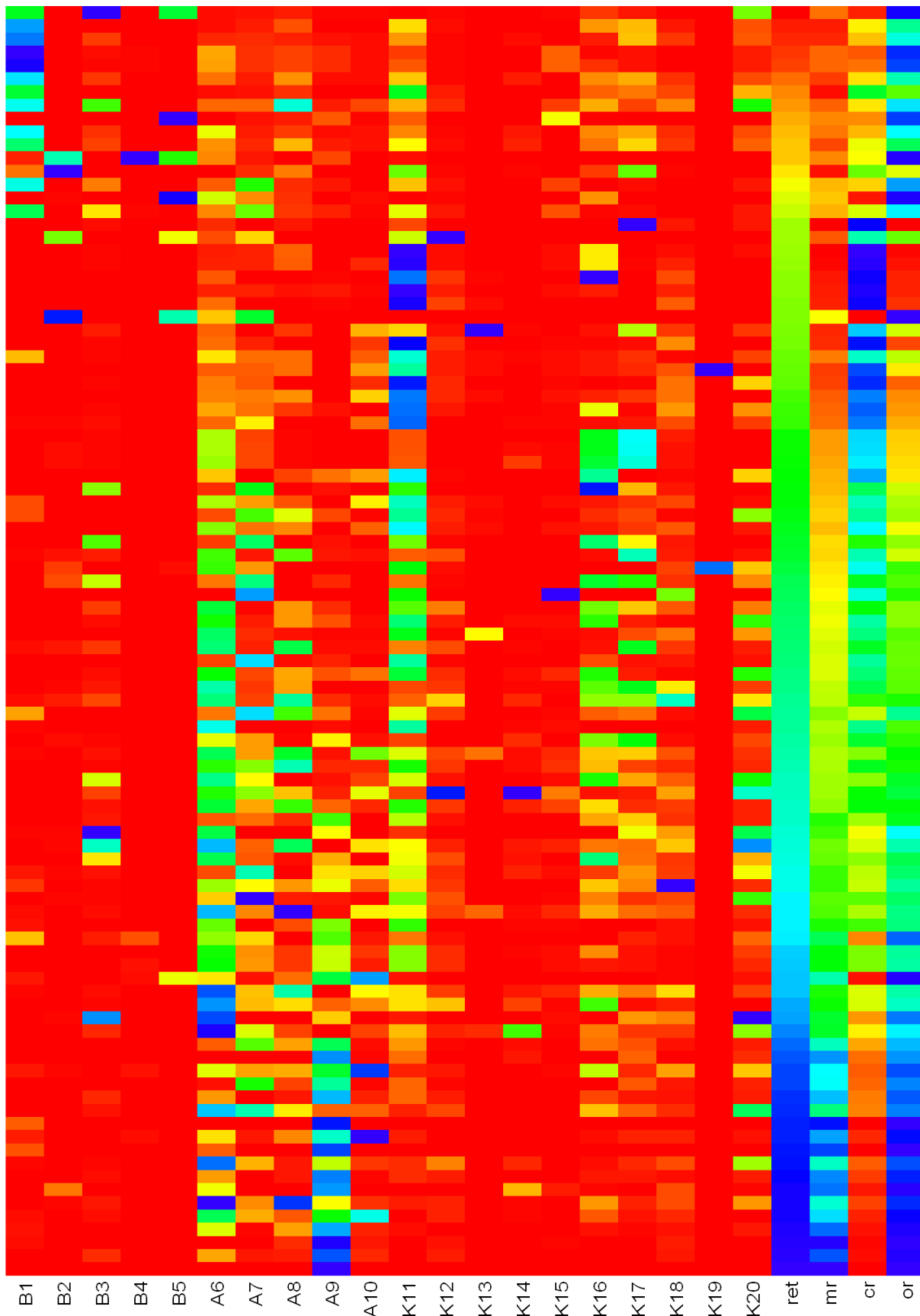


Abb. 10.9.: Heatmap für die Assets 1-20 (Bonds B1-B5, Aktien A6-A10, Kredite K11-K20) sowie die Zielfunktionen  $ret(x)$ ,  $mr(x)$ ,  $cr(x)$  und  $or(x)$  (Sortierung entsprechend  $ret(x)$ )

## 11. Fazit und Ausblick

Dieses Kapitel zieht ein Fazit in Bezug auf wesentliche Inhalte und Ergebnisse der Arbeit. Weiterhin wird ein Ausblick hinsichtlich zukünftiger Forschungsmöglichkeiten bei der Anwendung Intelligenter Methoden im Integrierten Risikomanagement von Unternehmen in der Finanzbranche gegeben.

### 11.1. Fazit

In dieser Arbeit wurde ein Modell zur Integration des Portfoliomanagements von Kreditinstituten konzipiert. Hierzu erfolgte zunächst die Charakterisierung von Kredit-, Markt und operationellem Risiko als den drei wesentlichen Risikoarten im Bankgeschäft. Diese weisen eine hohe Heterogenität auf, die vor allem bei der differierenden Verfügbarkeit von Daten offensichtlich wird und daher die Notwendigkeit unterschiedlicher Risikomessmodelle nach sich zieht. Die Aggregation der Risiken zu einer Gesamtrisikokennzahl bzw. einer Gesamtrisikoverteilung wird hierdurch wesentlich erschwert. Insbesondere die im Zeitablauf sehr instabilen Korrelationen spielen eine entscheidende Rolle bei der Zusammenführung der Risiken und damit auch bei der adäquaten Berücksichtigung von Diversifikationseffekten. Der kritische Review bestehender Ansätze im Integrierten Risikomanagement erläuterte diese teilweise erheblichen Unsicherheiten bei der Modellierung, die in einem zusätzlichen Aggregationsrisiko erheblichen Ausmaßes resultieren.

Der entwickelte Ansatz betrachtete das Integrierte Portfoliomanagement erstmals als *echtes* multikriterielles Problem und ordnete dabei jeder spezifischen Risikoart eine individuelle Zielfunktion zu. Folglich ergaben sich zusammen mit der erwarteten Rendite vier Zielfunktionen. Der hohen Komplexität des Optimierungsproblems wurde durch den Einsatz multikriterieller evolutionärer Algorithmen (MOEAs) begegnet. Somit ließen sich approximativ optimale Allokationen des Bank-Portfolios als Entscheidungsgrundlage für das Bankmanagement ermitteln. Ein wesentlicher Vorteil des Modells liegt darin begründet, dass es direkt auf dem in Banken weit verbreiteten Silo-basierten Risikomanagement aufsetzen kann. Damit können sowohl die bewährte Risikomessmethodik als auch die gegebenen organisatorischen und technischen Rahmenbedingungen direkt als Ausgangspunkt des Modells verwendet werden.

Das Modell kam in zwei Praxisanwendungen der Strategischen und Taktischen Asset Allokation für eine Beispielbank zum Einsatz. In beiden Fällen wurden dabei aktuelle Marktdaten für die einzelnen Assets verwendet. Die Pareto-optimalen Portfolios und ihre zugehörigen

Allokations-Parameter wurden zudem durch fortgeschrittene Visualisierungstechniken aufbereitet, um dem Entscheidungsträger ein intuitives Verständnis der Trade-offs zwischen den unterschiedlichen Risiken und der Rendite zu vermitteln. Zudem erleichterten diese Techniken eine qualitative Analyse der Ergebnisse. Heatmaps, die erstmals im Kontext des Portfoliomanagements eingesetzt wurden, erwiesen sich als besonders geeignet für die Veranschaulichung der komplizierten Zusammenhänge zwischen den einzelnen Portfolioparametern und den vierdimensionalen Zielfunktionswerten.

Zusätzlich zu den beiden Anwendungen im Integrierten Portfoliomanagement wurden die beschriebenen MOEAs zur Optimierung von Rückversicherungsprogrammen bei Versicherungsunternehmen eingesetzt. Ebenfalls auf Basis eines multikriteriellen Ansatzes wurden hier die Kosten und das Risiko optimaler Zusammenstellungen von Rückversicherungsverträgen analysiert. Dabei ist es gelungen, Erkenntnisse über Vertragskombinationen zu gewinnen, die bisher in der Forschung aufgrund fehlender analytischer Resultate noch nicht eingehend untersucht worden sind. Aufgrund der unterschiedlichen Attraktivität der Vertragstypen lassen die Ergebnisse zukünftige Preisanpassungen beim Rückversicherungsschutz erwarten.

### 11.2. Ausblick

Nachdem sich das konzipierte Modell in der vorliegenden Arbeit als praxistauglich erwiesen hat, ergeben sich verschiedene Möglichkeiten zur Ergänzung und Erweiterung des Ansatzes im Rahmen fortführender Forschungsarbeiten.

Das generelle Optimierungsproblem kann durch zusätzliche Zielfunktionen ausgebaut werden, z. B. durch eine Risikofunktion für das Liquiditätsrisiko. Darüber hinaus sind weitere Nebenbedingungen denkbar, z. B. Kardinalitätsbeschränkungen oder maximale Abweichungen von einer vorgegebenen Allokation. Neben der verwendeten Risikomessmethode Value-at-Risk können auch andere Verfahren, wie der Conditional Value-at-Risk, eingesetzt werden. Je nach Verfügbarkeit sind auch längere oder variierende Datenhistorien sowie weitere Investitionsmöglichkeiten von Interesse. Übergreifend bieten sich Sensitivitätsanalysen, beispielsweise hinsichtlich der Stabilität der Portfolioallokationen, an. Weiterhin kann der Einbezug von Short-Positionen sowie von kreditfinanzierten Anlagen untersucht werden.

Die Darstellung der Ergebnisse erfolgte anhand einer Reihe fortgeschrittener Visualisierungstechniken für höherdimensionale Daten. Dynamische Techniken könnten die Intuition noch weiter fördern, indem sie dem Anwender beispielsweise einen interaktiven Wechsel durch die verschiedenen Portfolio-Allokationen ermöglichen. Bei Betrachtung von Problemen mit weiteren Zielfunktionsdimensionen oder Investitionsmöglichkeiten empfiehlt sich überdies die Prüfung einer Dimensionalitätsreduktion. Aus qualitativer Sicht kann hierbei die Methode der Heatmaps unterstützen.



Die exemplarischen Anwendungen des Modells in der Strategischen und Taktischen Asset Allokation einer Beispielbank zeigen die hohe Flexibilität von MOEAs bei der Approximation komplexer Optimierungsprobleme. Neben den in dieser Arbeit präsentierten Anpassungen zur Effizienzsteigerung der Verfahren existieren weitere Überlegungen zum Forschungsbereich multikriterieller evolutionärer Methoden. Im Rahmen einer Feldstudie könnten zudem weitere MOEA-Algorithmen hinsichtlich ihrer Eignung für die betrachteten Probleme untersucht werden. Eine zusätzliche Erhöhung der Konvergenzgeschwindigkeit in Richtung der optimalen Lösungen lassen hybride Ansätze erwarten, die bereits in anderen Anwendungsbereichen erfolgreich erprobt wurden. Diese verknüpfen beispielsweise MOEAs zur groben Eingrenzung der Lösungsmenge mit lokaler Suche zur anschließenden schnelleren Konvergenz in Richtung der optimalen Lösungen. Letztendlich könnte eine konsolidierte Version des Optimierungsmodells für das Integrierte Portfoliomanagement zur Untersuchung ähnlicher Fragestellungen in einen frei verfügbaren Rechenkern implementiert werden.

Beweise aus der algorithmischen Komplexitätstheorie belegen die hohe Komplexität von typischen Portfolioproblemen aus der Praxis, z. B. bei Verwendung des Value-at-Risk, und motivieren somit den Einsatz heuristischer Verfahren. Es besteht jedoch eine Reihe von Fragestellungen, die aus Komplexitätstheoretischer Sicht noch offen sind. Hierzu zählt das Portfolioproblem im stetigen Fall, für das im Gegensatz zum diskreten Portfolioproblem bisher kein Beweis auf NP-Vollständigkeit erbracht werden konnte. Auch Approximationen der Probleme können in vertiefenden Forschungsarbeiten untersucht werden.

Neben der Anwendung des Modells im Risikomanagement von Kreditinstituten wurde in dieser Arbeit auch ein ähnlicher Ansatz bei der Optimierung von Rückversicherungsprogrammen verfolgt. Bei den Analysen ergaben sich Erkenntnisse, die erst mittels der Lösungsapproximation durch die MOEAs beobachtbar waren. Somit kann auch eine weitere Übertragung des präsentierten allgemeinen Modells auf das Risikomanagement anderer Unternehmen, z. B. aus dem Industriesektor, in Erwägung gezogen werden. Auch bei Nicht-Finanzunternehmen halten zunehmend Methoden des finanziellen Risikomanagements Einzug, die individuell auf deren spezielles Geschäft abzustimmen sind. Die wiederum bestehenden Unsicherheiten der Risikomodelle könnten durch einen entsprechenden multikriteriellen Ansatz ebenfalls aus einer neuen Perspektive betrachtet werden.



## A. Abbildungsverzeichnis

1.1	Aufbau der Arbeit . . . . .	7
2.1	Risikobegriff der Entscheidungstheorie in Anlehnung an [105] . . . . .	11
2.2	Taxonomie der Risiken im Bankgeschäft . . . . .	13
2.3	Taxonomie von Marktrisiken anhand wesentlichen Risikotreiber und ausgewählter Instrumente . . . . .	16
2.4	Taxonomie operationeller Risiken mit Risikotreibern . . . . .	18
2.5	Framework für K, U1 und U2 für Bankrisiken in Anlehnung an [122] . . . . .	20
2.6	Typische Dichtefunktionen für <i>Kreditrisiken</i> (Lognormalverteilung), <i>Marktrisiken</i> (Normalverteilung) und <i>Operationelle Risiken</i> (Gemischte Verteilung) . . . . .	22
3.1	Stakeholder eines Finanzinstituts und zentrale Zielsetzungen des Geschäftsbetriebs . . . . .	31
3.2	Überblick Risikomanagementprozess . . . . .	32
3.3	Risikoaggregation über korrelierte Addition und Verteilungsfaltung . . . . .	44
4.1	Komplexitätsklassen <b>EXP</b> , <b>NP</b> und <b>P</b> unter der Annahme <b>P</b> ≠ <b>NP</b> [201] . . . . .	60
4.2	Wachstum möglicher Portfolios abhängig von der Anzahl der Assets und der Schrittweite <i>a</i> ( <i>logarithmische</i> Skala) . . . . .	64
5.1	Klassischer Ablauf eines evolutionären Algorithmus (Darstellung in Anlehnung an [206]) . . . . .	70
5.2	Empirische Verteilung der Nachkommen von $x = 0,3$ und $y = 0,7$ bei 1000 Simulationen des SBX-Operators mit variierendem $\eta_c$ . . . . .	74
5.3	Empirische Verteilung des mutierten Individuums $x' = 0,5$ bei 1.000 Simulationen des polynomialen Mutationsoperators mit variierendem $\eta_m$ . . . . .	74
5.4	Dominierter Bereich bzgl. des gewöhnlichen Dominanzprinzips . . . . .	78
5.5	Zentrale Zielsetzungen und ideale Lösungen eines multikriteriellen evolutionären Algorithmus . . . . .	83
5.6	Non-dominated Sorting und Crowding Distance Sorting . . . . .	85
5.7	Rechteck um die Lösung <i>i</i> zur Ermittlung der Crowding Distance . . . . .	88
5.8	Dominierter Bereich bzgl. des $\varepsilon$ -Dominanzprinzips . . . . .	91
5.9	Schematischer Ablauf des $\varepsilon$ -MOEA . . . . .	92
5.10	Hypervolume . . . . .	93
6.1	Schadenaufteilung bei Quotenrückversicherung mit EV-Quote $a = 0,70$ . . . . .	98
6.2	Schadenaufteilung bei (unlimitiertem) Stop Loss mit Priorität 20 Mio. EUR . . . . .	98
6.3	Schadenaufteilung bei (unlimitiertem) Schadenexzedent mit Priorität 1 Mio. EUR . . . . .	98
6.4	Schadenaufteilung bei (limitiertem) Schadenexzedent mit Priorität 1 Mio. EUR und Limit 5 Mio. EUR . . . . .	98

6.5	Schadenaufteilung bei einer Kombination aus Quotenrückversicherung ( $a = 0,70$ ), (unlimitiertem) Schadenexzedent mit Priorität 1 Mio. EUR und (unlimitiertem) Stop Loss mit Priorität 5 Mio. EUR . . . . .	99
6.6	Pareto-optimale Front mit QS- und XL-Vertrag (Problem 1) . . . . .	106
6.7	Anteil QS (Problem 1) . . . . .	106
6.8	Anteil XL (Problem 1) . . . . .	106
6.9	Pareto-optimale Front für Problem 2 (QS, XL und SL) . . . . .	110
6.10	Quote $a$ (Problem 2) . . . . .	110
6.11	Excess of Loss $R$ (Problem 2) . . . . .	110
6.12	Stop Loss $L$ (Problem 2) . . . . .	110
6.13	Pareto-optimale Front mit QS- und XL-Vertrag (Problem 3) . . . . .	111
6.14	Anteil QS (Problem 3) . . . . .	111
6.15	Anteil XL (Problem 3) . . . . .	111
6.16	Pareto-optimale Front für Problem 4 (QS, XL, SL) . . . . .	112
6.17	Quote $a$ (Problem 4) . . . . .	112
6.18	Excess of loss $R$ (Problem 4) . . . . .	112
6.19	Stop loss $L$ (Problem 4) . . . . .	112
7.1	3D-Streudiagramm für $mr(x)$ , $cr(x)$ und $ret(x)$ (Beispieldaten aus Tab. 7.2) . . . . .	125
7.2	3D-Streudiagramm für $mr(x)$ , $cr(x)$ und $or(x)$ (Beispieldaten aus Tab. 7.2) . . . . .	125
7.3	Streudiagramm-Matrix (mit Beispieldaten aus Tabelle 7.2) . . . . .	127
7.4	Parallelkoordinatenplot (mit Beispieldaten aus Tabelle 7.2) . . . . .	129
7.5	Farbspektrum Heatmap . . . . .	130
7.6	Heatmap (mit Beispieldaten aus Tabelle 7.2) . . . . .	130
8.1	Mögliche Portfolioallokationen mit drei Assets bei Optimierung mit den beiden Zielfunktionen Risiko und Rendite bei 1%-Schritten sowie effiziente Portfolios bei 0,025%-Schritten (mittels vollständiger Enumeration) . . . . .	137
8.2	Vergrößerte Darstellung eines Ausschnitts des Zielfunktionsraums bei Portfolios mit drei Assets (mittels vollständiger Enumeration mit 1%-Schritten) sowie entsprechender effizienter Portfolios (anhand von 0,025%- und 1%-Schritten) . . . . .	137
8.3	Effiziente Portfolioallokationen mit drei Assets bei Optimierung mit den beiden Zielfunktionen Rendite und Risiko ermittelt über vollständiger Enumeration mit 0,025%-Schritten sowie mit NSGA-II und $\varepsilon$ -MOEA . . . . .	139
8.4	Vergrößerte Darstellung eines Abschnitts der Pareto-effizienten Portfolios bei drei Assets (ermittelt über vollständige Enumeration mit 0,025%-Schritten sowie mit NSGA-II und $\varepsilon$ -MOEA . . . . .	139
8.5	Anpassungen des generellen GA-Ablaufs in Abbildung 5.1 für Problemstellungen aus dem Integrierten Portfoliomanagement . . . . .	142
9.1	Performance der Aktienindizes DAX <sup>®</sup> , ATX, S&P 500, RTX vom 03.03.1997 bis 28.02.2007 . . . . .	148
9.2	3D-Streudiagramm für $mr_1(x)$ , $mr_2(x)$ und $ret(x)$ mit dem NSGA-II . . . . .	152
9.3	3D-Streudiagramm für $mr_1(x)$ , $mr_2x$ und $ret(x)$ mit dem $\varepsilon$ -MOEA . . . . .	152
9.4	Streudiagramm-Matrix für $mr_1(x)$ , $mr_2(x)$ , $cr(x)$ und $ret(x)$ . . . . .	153
9.5	Parallelkoordinatenplot des unbeschränkten Problems ( $\varepsilon$ -MOEA) . . . . .	154

9.6	Veranschaulichung der Parameter- und Zielfunktionswerte des unbeschränkten Portfolioproblems mit einer Heatmap (Ergebnisse $\varepsilon$ -MOEA)	156
9.7	3D-Streudiagramm für $mr_1(x)$ , $mr_2(x)$ , $cr(x)$ mit Beschränkungen ( $\varepsilon$ -MOEA)	159
9.8	Parallelkoordinatenplot des beschränkten Problems ( $\varepsilon$ -MOEA)	160
9.9	Veranschaulichung der Parameter- und Zielfunktionswerte des beschränkten Portfolioproblems mit einer Heatmap (Ergebnisse $\varepsilon$ -MOEA)	162
10.1	Performance der DAX <sup>®</sup> -Aktien im Zeitraum vom 15.05.2003 bis 30.09.2004	167
10.2	Konvergenzverhalten bei Optimierung mit 10.000, 20.000 und 50.000 Generationsdurchläufen: $mr(x)$ und $ret(x)$	169
10.3	Konvergenzverhalten bei Optimierung mit 10.000, 20.000 und 50.000 Generationsdurchläufen: $cr(x)$ und $ret(x)$	170
10.4	Konvergenzverhalten bei Optimierung mit 10.000, 20.000 und 50.000 Generationsdurchläufen: $or(x)$ und $ret(x)$	170
10.5	3D-Streudiagramm für $mr(x)$ , $cr(x)$ und $ret(x)$	172
10.6	3D-Streudiagramm für $mr(x)$ , $cr(x)$ und $or(x)$	172
10.7	Streudiagramm-Matrix für $mr(x)$ , $cr(x)$ , $or(x)$ und $ret(x)$	174
10.8	Parallelkoordinatenplot für $mr(x)$ , $cr(x)$ , $or(x)$ und $ret(x)$ (Das Farbspektrum wurde entsprechend $ret(x)$ gewählt)	175
10.9	Heatmap für die Assets 1-20 (Bonds B1-B5, Aktien A6-A10, Kredite K11-K20) sowie die Zielfunktionen $ret(x)$ , $mr(x)$ , $cr(x)$ und $or(x)$ (Sortierung entsprechend $ret(x)$ )	178



## B. Tabellenverzeichnis

2.1	Wesentliche Bankrisiken im vergleichenden Überblick . . . . .	21
3.1	Korrelationsannahmen für Kredit-, Markt- und operationelle Risiken in Studien	51
3.2	Gegenüberstellung von Verfahren zur Risikoaggregation mit Vor- und Nachteilen	53
4.1	Wachstum verschiedener Funktionen (aus [19, S.112]) . . . . .	58
4.2	Anzahl der möglichen Portfolio-Allokationen in Abhängigkeit von der Anzahl der Assets und der Schrittweite $a$ . . . . .	63
6.1	Sicherheitszuschlagsfaktoren beim Erwartungswertprinzip (Quelle: [199]) . . .	100
6.2	Gegenüberstellung von Verfahren zur Rückversicherungsoptimierung [150] . .	102
6.3	Performance-Vergleich der MOEAs (Quelle: [151]) . . . . .	107
6.4	Übersicht der betrachteten Probleme . . . . .	109
7.1	Faktor $\beta_k$ im Basel-II-Standardansatz . . . . .	119
7.2	Beispielhafte Ergebnisdaten für ein Portfolioproblem entsprechend [7.7] . . . .	124
8.1	Laufzeitentwicklung der Portfolio-Optimierung mit 3 Assets und vollständiger Enumeration (Schrittweite $a$ ) . . . . .	138
8.2	Hypervolume-Maß für Benchmark-Portfolioproblem im Vergleich zur vollständigen Enumeration (ENUM) mit Schrittweite 0,025% . . . . .	143
8.3	Spacing-Maß für Benchmark-Portfolioproblem hinsichtlich Risiko bzw. Rendite im Vergleich zur vollständigen Enumeration (ENUM) mit Schrittweite 0,025% . . . . .	143
9.1	Investitionsmöglichkeiten für die Beispielbank (SAA) . . . . .	147
9.2	Volumenbeschränkungen der Beispielbank bei der Optimierung der SAA . . . .	157
10.1	Investitionsmöglichkeiten für die Beispielbank (TAA) . . . . .	166





## Algorithmenverzeichnis

5.1	Evolutionärer Algorithmus in Pseudocode-Notation . . . . .	71
5.2	NSGA-II, Non-dominated Sorting: Initialisierung der Parameter $n_r$ und $S_r$ sowie Auffinden von $F_1$ in Pseudocode-Notation . . . . .	86
5.3	NSGA-II, Non-dominated Sorting: Auffinden von $F_2$ bis $F_l$ in Pseudocode-Notation	87
5.4	NSGA-II: Zuordnung des Crowding-Distance in Pseudocode-Notation . . . . .	87
5.5	NSGA-II: Generationsdurchlauf in Pseudocode-Notation . . . . .	89
5.6	$\varepsilon$ -MOEA: Hauptaufruf in Pseudocode-Notation . . . . .	92



## D. Literaturverzeichnis

- [1] K. Aas, X. K. Dimakos, and A. Øksendal. Risk capital aggregation. *Risk Management*, 9(2):82–107, April 2007.
- [2] C. Alexander, editor. *Measuring and modelling financial risk*, volume Vol. 1 of *Wiley series in financial engineering*. Wiley, Chichester, 1999.
- [3] C. Alexander. The present and future of risk management. *Journal of Financial Econometrics*, 3(1):3–25, 2005.
- [4] C. Alexander and J. Pézier. *Assessment and aggregation of banking risks*. ICMA Centre, University of Reading, UK, Juni 2003. Presented at the 9th Annual Round Table of the International Financial Risk Institute.
- [5] C. Alexander and J. Pézier. On the aggregation of market and credit risks. Discussion Papers in Finance, ISMA Centre, University of Reading, UK, Okt. 2003.
- [6] P. Artzner, F. Delbaen, J. M. Eber, and D. Heath. Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, 7(9):203–228, 1999.
- [7] BaFin (Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht). *Mindestanforderungen an das Risikomanagement (MaRisk)*, März 2007. Rundschreiben 18/2005 (Fassung vom 06.03.2007).
- [8] T. M. Barnhill and W. F. Maxwell. Modeling correlated market and credit risk in fixed income portfolios. *Journal of Banking and Finance*, 26:347–374, 2002.
- [9] P. Baur and A. Breutel-O’Donoghue. Understanding reinsurance: How reinsurers create value and manage risk. Research publication, Swiss Re, 2004.
- [10] BCBS (Basel Committee on Banking Supervision). *Internal convergence of capital measurement and capital standards*, Juli 1988.
- [11] BCBS (Basel Committee on Banking Supervision). *Amendment to the capital accord to incorporate market risks*, 1996.
- [12] BCBS (Basel Committee on Banking Supervision). *Basel II: International convergence of capital measurement and capital standards: A revised framework*, Juli 2006.
- [13] A. Beck and M. Lesko. Zur Modellierung von Abhängigkeiten in der Bankpraxis - Copula-Funktionen zur Ermittlung des Gesamtbankrisikoprofils. *Betriebswirtschaftliche Blätter*, 5, 2006.
- [14] A. Beck, M. Lesko, F. Schlottmann, and K. Wimmer. Copulas im Risikomanagement. *Zeitschrift für das gesamte Kreditwesen*, 14, 2006.

- [15] T. Becker. Integration der Adressrisiken in die Strategische Asset Allokation. Master's thesis, Institut für Angewandte Informatik und Formale Beschreibungsverfahren (AIFB) der Universität Karlsruhe (TH), 2007.
- [16] I. Biller, A. Mitschele, F. Schlottmann, D. Seese, and S. Vorgrimler. Einsatz des LIBOR-Marktmodells in der Zinsänderungsrisikosteuerung. *Zeitschrift für das gesamte Kreditwesen*, 22:37–40, 2004.
- [17] C. Bluhm, L. Overbeck, and C. Wagner. *An introduction to credit risk modeling*. Chapman & Hall/CRC financial mathematics series. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, Fla., 2003.
- [18] BOJ (Bank of Japan). *Advancing integrated risk management*, Sep. 2005.
- [19] M. Broy. *Theoretische Informatik, Algorithmen und Datenstrukturen, Logikprogrammierung, Objektorientierung*, volume Teil 4 of *Springer-Lehrbuch*. Springer, Berlin, 1995.
- [20] C. Bruns and Meyer-Bullerdiek. *Professionelles Portfoliomanagement*. Schäffer-Poeschel, 2007.
- [21] C. Bugmann. Proportionale und nichtproportionale Rückversicherung. Technical publishing, Swiss Re, 1997.
- [22] M.-c. Cai and X. Deng. Approximation and computation of arbitrage in frictional foreign exchange market. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 78:293–302, 2003.
- [23] M.-c. Cai, X. Deng, and Z. Li. Computation of arbitrage in frictional bond markets. *Theoretical Computer Science*, 363(3):248–256, 2006.
- [24] CEBS (Committee of European Banking Supervisors). *Guidelines on the application of the supervisory review process under pillar 2*, Jan. 2006.
- [25] M. Centeno. On combining quota-share and excess of loss. *Astin Bulletin*, 15(1):49–63, 1985.
- [26] M. Centeno. *Some theoretical aspects of combinations of quota-share and non-proportional reinsurance treaties*. The British Library Document Supply Centre, May 1985.
- [27] M. Centeno. Measuring the effects of reinsurance by the adjustment coefficient in the sparre anderson model. *Insurance: Mathematics and Economics*, 30(1):37–49, 2002.
- [28] CGFS (Committee on the Global Financial System of the Bank for International Settlements). *Stress testing at major financial institutions*, Jan. 2005.
- [29] S. K. Chalup and A. Mitschele. Kernel methods in finance. In D. Seese, C. Weinhart, and F. Schlottmann, editors, *Handbook on Information Technology in Finance*, International Handbooks on Information Systems. Springer, 2008.
- [30] T.-J. Chang, N. Meade, J. E. Beasley, and Y. M. Sharaiha. Heuristics for cardinality constrained portfolio optimisation. *Computers and Operations Research*, 27:1271–1302, 2000.

- [31] A. S. Chernobai, S. T. Rachev, and F. J. Fabozzi. *Operational risk*. Wiley finance. Wiley, Hoboken, NJ, 2007.
- [32] U. Cherubini, E. Luciano, and W. Vecchiato. *Copula methods in finance*. Wiley, 2004.
- [33] W. S. Cleveland. *Visualizing data*. AT & T Bell Laboratories, Murray Hill, NJ, 1993.
- [34] C. A. C. Coello. Evolutionary multi-objective optimization in finance. In J.-P. Rennard, editor, *Handbook of Research on Nature Inspired Computing for Economy and Management*, pages 74–88. Idea Group Inc., 2006.
- [35] C. A. Coello Coello and G. B. Lamont. *Applications of multi-objective evolutionary algorithms*, volume 1 of *Advances in natural computation*. World Scientific, Singapore, 2004.
- [36] C. A. Coello Coello, D. Van Veldhuizen, and G. B. Lamont. *Evolutionary algorithms for solving multi-objective problems*. Kluwer, New York, 2002.
- [37] S. A. Cook. The complexity of theorem proving procedures. In *Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC)*, pages 151–158, 1971.
- [38] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, and C. Stein. *Algorithmen - eine Einführung*. Oldenbourg, München, 2., korr. Aufl. edition, 2007.
- [39] COSO (Committee of Sponsoring Organizations of the Treadway Commission), editor. *Enterprise risk management - Integrated framework: Executive summary framework*, Sep. 2004.
- [40] J. Crecelius and C. Sievi. Integration aller Risiken und Chancen zu einem Gesamtbankrisiko-/ Ertragsstatus. *Die Bank*, 4:274–281, 2004.
- [41] M. Crouhy, D. Galai, and R. Mark. *The essentials of risk management*. McGraw-Hill, New York, NY, 2006.
- [42] M. Crouhy, D. Galai, and R. Mark. *Risk management*. McGraw-Hill, New York, 2007.
- [43] C. L. Culp. *The risk management process*. J. Wiley, New York, 2001.
- [44] C. M. Cumming and B. J. Hirtle. The challenges of risk management in diversified financial companies. *FRBNY Economic Policy Review*, 7(1):1–17, März 2001.
- [45] J. Danielsson, B. N. Jorgensen, C. G. de Vries, and X. Yang. Optimal portfolio allocation under the probabilistic var constraint and incentives for financial innovation. *Annals of Finance*, 2007.
- [46] J. Danielsson and J.-P. Zigrand. On time-scaling of risk and the square-root-of-time rule. *Journal of Banking & Finance*, 30(10):2701–2713, 2006.
- [47] C. Darwin. *On the origin of species by means of natural selection*. John Murray, London, 1st edition, 1859.

- [48] P. de Fontnouvelle, V. DeJesus-Rueff, J. Jordan, and E. Rosengren. Using loss data to quantify operational risk. Working Paper, Federal Reserve Bank of Boston, 2003.
- [49] K. Deb. *Multi-objective optimisation using evolutionary algorithms*. John Wiley & Sons, Chichester, 2001.
- [50] K. Deb and R. Agrawal. Simulated binary crossover for continuous search space. *Complex Systems*, 9(2):115–148, 1995.
- [51] K. Deb, S. Agrawal, A. Pratap, and T. Meyarivan. A fast elitist non-dominated sorting genetic algorithm for multi- objective optimisation: NSGA-II. In K. Deb, E. Lutton, G. Rudolph, H. Schwefel, and X. Yao, editors, *Parallel problem solving from nature, LNCS 1917*, pages 849–858. Springer, Berlin, 2000.
- [52] K. Deb and H.-G. Beyer. Self-adaptation in real parameter genetic algorithms with simulated binary crossover. In W. B. et al., editor, *Genetic and Evolutionary Computation Conference (GECCO)*, pages 172–179, Chicago, 1999. Morgan Kaufmann.
- [53] K. Deb and M. Goyal. A combined genetic adaptive search (geneas) for engineering design. *Computer Science and Informatics*, 26(4):30–45, 1996.
- [54] K. Deb, S. Mishra, and M. Mohan. A fast multi-objective evolutionary algorithm for finding well-spread pareto-optimal solutions. Techn. Report, Kanpur Genetic Algorithms Laboratory (KanGAL), Kanpur, India, Feb. 2003.
- [55] K. Deb, M. Mohan, and S. Mishra. Evaluating the epsilon-domination based multi-objective evolutionary algorithm for a quick computation of pareto-optimal solutions. *Evolutionary Computation*, 13(4):501–525, 2005.
- [56] K. Deb, A. Pratap, S. Agrawal, and T. Meyarivan. A fast and elitist multi-objective genetic algorithm: NSGA-II. Kangal report no. 200001, Kanpur Genetic Algorithms Laboratory (KanGAL), 2000.
- [57] K. Deb, A. Pratap, S. Agrawal, and T. Meyarivan. A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 6(2):182–197, 2002.
- [58] K. Deb, L. Thiele, M. Laumanns, and E. Zitzler. Scalable multi-objective optimization test problems. In *Proceedings of the 2002 Congress on Evolutionary Computation (CEC2002)*, pages 825–830, 2002.
- [59] J. W. DeLoach. *Enterprise-wide risk management*. Pearson Education, 2000.
- [60] M. Denault. Coherent allocation of risk capital. *Journal of Risk*, 4(1):1–34, 2001.
- [61] Deutsche Gesellschaft für Risikomanagement e. V., editor. *Risikoaggregation in der Praxis*. Springer, 2008.
- [62] F. X. Diebold, A. Hickman, A. Inoue, and T. Schuermann. Converting 1-day volatility to h-day volatility: Scaling by  $\sqrt{h}$  is worse than you think. Working Paper, Wharton Financial Institutions Center, 1997.

- [63] X. K. Dimakos and K. Aas. Integrated risk modelling. *Statistical Modelling*, 4:265–277, 2004.
- [64] R. Eller, W. Gruber, and M. Reif, editors. *Handbuch des Risikomanagements*. Schäffer-Poeschel, 2002.
- [65] E. J. Elton, M. J. Gruber, S. J. Brown, and W. N. Goetzmann. *Modern portfolio theory and investment analysis*. Wiley, Hoboken, NJ, 7. ed. edition, 2007.
- [66] P. Embrechts, editor. *Extremes and Integrated Risk Management*. RiskBooks, London, 2000.
- [67] P. Embrechts. Copulas: A personal view. In *Encyclopedia of Quantitative Finance*. John Wiley, 2007.
- [68] P. Embrechts, H. Furrer, and R. Kaufmann. Different kinds of risk. In T. Andersen, R. Davis, J.-P. Kreiß, and T. Mikosch, editors, *Handbook of Financial Time Series*. Springer, 2008.
- [69] P. Embrechts, C. Kluppelberg, and T. Mikosch. *Modelling extremal events for insurance and finance*. Springer, Berlin, 2003.
- [70] P. Embrechts, A. McNeil, and D. Straumann. Correlation: Pitfalls and alternatives. *Risk*, 12:69–71, 1999.
- [71] F. J. Fabozzi. *Robust portfolio optimization and management*. Wiley finance. John Wiley, Hoboken, New Jersey, 2007.
- [72] D. Farny. *Versicherungsbetriebslehre*. Verlag Versicherungswirtschaft GmbH Karlsruhe, 2006.
- [73] J. Felsenheimer, P. Gisdakis, and M. Zaiser. *Active credit portfolio management*. WILEY-VCH, Weinheim, 2005.
- [74] T. R. Fischer. Global Risk Management in einem internationalen Bankunternehmen. In K. W. Lange and F. Wall, editors, *Risikomanagement nach dem KonTraG*, pages 354–370. Vahlen, 2001.
- [75] W. H. Fleming and R. W. Rishel. *Deterministic and stochastic optimal control*. Springer, New York, 1982.
- [76] D. B. Fogel and C. J. Robinson. *Computational intelligence*. IEEE Press [u. a.], Piscataway, NJ, 2003.
- [77] C. M. Fonseca and P. J. Fleming. Genetic algorithms for multiobjective optimization: formulation, discussion, generalization. In *Genetic Algorithms: Proceedings of the Fifth International Conference*, pages 416–423. Morgan Kaufmann, Juli 1993.
- [78] M. Frenkel, U. Hommel, and M. Rudolf. *Risk management*. Springer, Berlin, 2., rev. and enlarged ed edition, 2005.

- [79] A. A. Gaivoronski and G. Pflug. Value-at-risk in portfolio optimization: Properties and computational approach. *Journal of Risk*, 7(2):1–31, 2005.
- [80] M. R. Garey and D. S. Johnson. *Computers and intractability*. A series of books in the mathematical sciences. Freeman, New York, NY, 25. print edition, 2005.
- [81] A. Geoffrion, J. Dyer, and A. Feinberg. An interactive approach for multi-criterion optimization, with an application to the operation of an academic department. *Management Science*, 19(4):357–368, 1972.
- [82] W. Gerke. *Handwörterbuch des Bank- und Finanzwesens*, volume Bd. 6 of *Enzyklopädie der Betriebswirtschaftslehre*. Schäffer-Poeschel, Stuttgart, 3., völlig überarb. und erw. aufl edition, 2001.
- [83] J. R. Geßler. *Statistische Graphik*. Birkhäuser, Basel, 1993.
- [84] J. T. Gleason. *Risikomanagement*. Campus, 2001.
- [85] D. E. Goldberg. *Genetic algorithms in search, optimization, and machine learning*. Addison-Wesley, Boston, 27. printing edition, 2005.
- [86] D. E. Goldberg and K. Deb. A comparative analysis of selection schemes used in genetic algorithms. In B. M. Spatz, editor, *Foundations of Genetic Algorithms*, pages 69–93. Morgan Kaufmann Publishers, 1991.
- [87] S. Goonatilake and P. C. Treleaven. *Intelligent systems for finance and business*. Wiley, Chichester, New York, 1995.
- [88] M. J. Goovaerts, F. De Vylder, and J. Haezendonck. *Insurance premiums, theory and applications*. North-Holland, Amsterdam, 1983.
- [89] M. Gordy. A comparative anatomy of credit risk models. *Journal of Banking and Finance*, 24:119–149, 2000.
- [90] P. Grundke. Risk measurement with integrated market and credit portfolio models. *Journal of Risk*, 7(3):63–94, 2005.
- [91] P. Grundke. Integrated risk management: top down or bottom up? Working Paper, Seminar für Allg. BWL und Bankbetriebslehre der Universität Köln, 2006.
- [92] P. Grundke. Computational aspects of integrated market and credit portfolio models. *OR Spectrum*, 29(2):259–294, 2007.
- [93] P. Grundke. *Integrated market and credit portfolio models*. Gabler, 2008.
- [94] P. Gügi. *Einsatz der Portfoliooptimierung im Asset-Allocation-Prozess*. PhD thesis, Universität Zürich, 1996.
- [95] M. Gundlach and F. Lehrbass, editors. *CreditRisk+ in the banking industry*. Springer, 2007.



- [96] G. Gupton, C. Finger, and M. Bhatia. Creditmetrics. Techn. Report, JP Morgan & Co., New York, 1997.
- [97] C. Haubelt, J. Gamenik, and J. Teich. Initial population construction for convergence improvement of moeas. In C. A. C. Coello, A. H. Aguirre, and E. Zitzler, editors, *Evolutionary Multi-Criterion Optimization, Third International Conference*, volume 3410 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 191–205. Springer, 2005.
- [98] C. Hipp and M. Vogt. Optimal dynamic xl reinsurance. Technical Report 193-208, Universität Karlsruhe (TH), 2003.
- [99] B. Hoejgaard and M. Taksar. Optimal proportional reinsurance policies for diffusion models. *Scandinavian Actuarial Journal*, pages 166–180, 1998.
- [100] G. A. Holton. Defining risk. *Financial Analysts Journal*, 60(6):19–25, 2004.
- [101] J. E. Hopcroft, R. Motwani, and J. D. Ullman. *Einführung in die Automatentheorie, formale Sprachen und Komplexitätstheorie*. Pearson Studium Theoretische Informatik. Pearson Studium, München, [neuausg.] 2., überarb. aufl., [nachdr.] edition, 2006.
- [102] J. Horn. F1.9 multicriterion decision making. In T. Bäck, D. B. Fogel, and Z. Michalewicz, editors, *Handbook of Evolutionary Computation*. IOP Publishing and Oxford University Press, 1997.
- [103] J. Hromkovic. *Algorithmics for hard problems*. Texts in theoretical computer science. Springer, Berlin, 2001.
- [104] J. C. Hull. *Risk management and financial institutions*. Pearson/Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2007.
- [105] A. Huther. *Integriertes Chancen- und Risikomanagement*. Gabler Edition Wissenschaft. Dt. Univ.-Verl., Wiesbaden, 1. aufl edition, 2003.
- [106] A. Inselberg. The plane with parallel coordinates. *The Visual Computer*, 1(2):69–91, 1985.
- [107] I. Iscoe, A. Kreinin, and D. Rosen. An integrated market and credit risk portfolio model. *Algo Research Quarterly*, 2(3):21–37, Sep. 1999.
- [108] M. C. Jensen and W. H. Meckling. Theory of the firm: managerial behavior, agency costs and ownership structure. *Journal of Financial Economics*, 3(4):305–360, 1976.
- [109] N. J. Jobst, M. D. Horniman, C. A. Lucas, and G. Mitra. Computational aspects of alternative portfolio selection models in the presence of discrete asset choice constraints. *Quantitative Finance*, 1:489–501, 2001.
- [110] Joint Forum of the Basel Committee on Banking Supervision. *Risk concentrations principles*, Dez. 1999.
- [111] Joint Forum of the Basel Committee on Banking Supervision. *Risk management practices and regulatory capital*, Nov. 2001.

- [112] Joint Forum of the Basel Committee on Banking Supervision. *Trends in risk integration and aggregation*, Aug. 2003.
- [113] P. Jorion. *Value at risk*. McGraw-Hill, New York, NY, 3rd ed. edition, 2007.
- [114] M. Kaluszka. Optimal reinsurance under mean-variance premium principles. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2001(28):61–67, 2001.
- [115] M. Kaluszka. Mean-variance optimal reinsurance arrangements. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2004(1):28–41, 2004.
- [116] M.-Y. Kao, A. Nolte, and S. R. Tate. The risk profile problem for stock portfolio optimization. In E. J. Kontoghiorghes, B. Rustem, and S. Siokos, editors, *Computational Methods in Decision-Making, Economics and Finance*, pages 213–230. Springer, 2002.
- [117] D. Keitsch. *Risikomanagement*. Praxis Creditreform. Schäffer-Poeschel, Stuttgart, 2., überarb. und erw. aufl. edition, 2004.
- [118] H. Kellerer, U. Pferschy, and D. Pisinger. *Knapsack problems*. Springer, 2004.
- [119] F. Keuper, D. Roesing, and M. Schomann, editors. *Integriertes Risiko- und Ertragsmanagement*. Gabler, 2005.
- [120] K.-O. Klauck. *Stresstests in Banken*. Schäffer-Poeschel, Stuttgart, 2006.
- [121] J. Knowles and D. Corne. The pareto archived evolution strategy: A new baseline algorithm for pareto multiobjective optimisation. In P. J. Angeline, Z. Michalewicz, M. Schoenauer, X. Yao, and A. Zalzal, editors, *Proceedings of the Congress on Evolutionary Computation*, volume 1, pages 98–105, Mayflower Hotel, Washington D.C., USA, 6-9 1999. IEEE Press.
- [122] A. Kuritzkes and T. Schuermann. What we know, don't know and can't know about bank risk. In F. X. Diebold and R. J. Herring, editors, *The Known, The Unknown and The Unknowable in Financial Risk Management*. Princeton University Press, Feb. 2006.
- [123] A. Kuritzkes, T. Schuermann, and S. Weiner. Study on the risk profile and capital adequacy of financial conglomerates. Techn. Report, Oliver, Wyman & Company, Feb. 2001.
- [124] A. Kuritzkes, T. Schuermann, and S. Weiner. Risk measurement, risk management and capital adequacy in financial conglomerates. Working Paper, Wharton Financial Institutions Center, 2002.
- [125] A. Lagger. *Risikomanagement bei Banken*, volume 112 of *Publikation der Swiss Banking School 7. Lehrgang 1993 - 95*. Haupt, Bern, Stuttgart, Wien, 1995.
- [126] M. Laumanns, L. Thiele, K. Deb, and E. Zitzler. Combining convergence and diversity in evolutionary multi-objective optimization. *Evolutionary Computation*, 10(3):263–282, 2002.
- [127] H. R. Lewis and C. H. Papadimitriou. *Elements of the theory of computation*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 2nd ed edition, 1998.

- [128] P. Liebwein. *Klassische und moderne Formen der Rückversicherung*. Verlag Versicherungswirtschaft GmbH Karlsruhe, 2000.
- [129] M. Lister. *Risikoadjustierte Ergebnismessung und Risikokapitalallokation*, volume 12 of *Schriftenreihe des Zentrums für Ertragsorientiertes Bankmanagement, Münster*. Knapp, Frankfurt am Main, 1997.
- [130] G. F. Luger. *Künstliche Intelligenz*. Pearson StudienInformatik. Pearson Studium, München, 4. Aufl., [nachdr.] edition, 2003.
- [131] T. Mack. *Schadenversicherungsmathematik*. Versicherungswirtschaft e.V., Karlsruhe, 1997.
- [132] D. Maringer. *Portfolio management with heuristic optimization*, volume 8 of *Advances in Computational Management Science*. Springer, 2005.
- [133] H. M. Markowitz. Portfolio selection. *Journal of Finance*, 7:77–91, 1952.
- [134] H. M. Markowitz. *Portfolio selection: Efficient diversification of investments*. Yale University Press, 1959.
- [135] C. Marsala, M. Pallotta, and R. Zenti. Integrated risk management with a filtered bootstrap approach. *Economic Notes by Banca Monte dei Paschi di Siena SpA*, 33(3):375–398, 2004.
- [136] A. J. McNeil, R. Frey, and P. Embrechts. *Quantitative risk management*. Princeton University Press, Princeton N.J., 2005.
- [137] P. D. McNelis. *Neural networks in finance*. Elsevier Academic Press, 2005.
- [138] E. A. Medova and R. G. Smith. A framework to measure integrated risk. *Quantitative Finance*, 5(1):105–121, Feb. 2005.
- [139] L. Meulbroek. A senior manager’s guide to integrated risk management. *Journal of Applied Corporate Finance*, 14(4):56–70, 2002.
- [140] Z. Michalewicz and D. B. Fogel. *How to solve it modern heuristics*. Springer, Berlin, 2., rev. and extended ed edition, 2004.
- [141] T. Mikosch. Copulas: Tales and facts. *Extremes*, 9(1):3–20, 2006. Discussion, 21-53. Rejoinder 55-62.
- [142] A. Mitschele, I. Österreicher, F. Schlottmann, and D. Seese. Heuristic optimization of reinsurance programs and implications for reinsurance buyers. In K.-H. Waldmann and U. M. Stocker, editors, *Operations Research Proceedings 2006*, 2007.
- [143] A. Mitschele, F. Schlottmann, and D. Seese. Integrated risk management: Risk aggregation and allocation using intelligent systems. In E. Kontoghiorghes, B. Rustem, and P. Winker, editors, *Computational Methods in Financial Engineering*, pages 317–342. Springer, 2008.

- [144] S. Mostaghim. *Multi-objective evolutionary algorithms: data structures, convergence and, diversity*. PhD thesis, Universität Paderborn, 2004.
- [145] M. Nagel. *Grafische Datenanalyse*. Fischer, Stuttgart, 1996.
- [146] R. B. Nelsen. *An introduction to copulas*. Series in Statistics. Springer, 2006.
- [147] B. W. Nocco and R. M. Stulz. Enterprise risk management: Theory and practice. *Journal of Applied Corporate Finance*, 18(4):8–20, 2006.
- [148] A. Oehler and M. Unser. *Finanzwirtschaftliches Risikomanagement*. Springer-Lehrbuch. Springer, Berlin, 2001.
- [149] OeNB (Österreichische Nationalbank). *Neue quantitative Modelle der Bankenaufsicht*. Wien, 2004.
- [150] I. Österreicher. Heuristische Optimierung von Rückversicherungsprogrammen. Diplomarbeit, Institut für Angewandte Informatik und Formale Beschreibungsverfahren (AIFB) der Universität Karlsruhe (TH), April 2006.
- [151] I. Österreicher, A. Mitschele, F. Schlottmann, and D. Seese. Comparison of multi-objective evolutionary algorithms in optimizing combinations of reinsurance contracts. In *Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference (GECCO 2006)*. ACM Press, 2006. Full Paper: <http://www.aifb.uni-karlsruhe.de/CoM/publications/GECCO2006.pdf>.
- [152] H. H. Panjer. Recursive evaluation of a family of compound distributions. *Astin Bulletin*, 12(1):22–26, 1981.
- [153] C. H. Papadimitriou. *Computational complexity*. Addison-Wesley, Reading, Mass., reprinted with corr., [nachdr.] edition, 2005.
- [154] C. H. Papadimitriou and K. Steiglitz. *Combinatorial optimization*. Dover Publ., Mineola, NY, reprint edition, 1998.
- [155] V. Pareto. *Cours d'économie politique*. Rouge, Lausanne, 1896.
- [156] D. W. Patterson. *Künstliche neuronale Netze*. Prentice Hall, Haar bei München, [2. aufl.] edition, 1997.
- [157] S. Paul. *Risikoadjustierte Gesamtbanksteuerung*. Basler Bankenstudien. Haupt, Bern, 2001.
- [158] L. Perridon and M. Steiner. *Finanzwirtschaft der Unternehmung*. Vahlers Handbücher der Wirtschafts- und Sozialwissenschaften. Vahlen, München, 14., überarb. und erw. aufl. edition, 2007.
- [159] C. Pfeiffer and J. v. d. Thüsen. *Einführung in die Rückversicherung*. Gabler Versicherung. Gabler, Wiesbaden, 5. aufl. edition, 1999.
- [160] T. Priermeier. *Finanzrisikomanagement im Unternehmen*. Innovatives Finanzmanagement. Vahlen, München, 2005. ein Praxishandbuch.

- [161] A. Pryke, S. Mostaghim, and A. Nazemi. Heatmap visualization of population based multi objective algorithms. In *Proceedings of the Evolutionary Multi-Criterion Optimization (EMO) 2007 Conference*, volume 4403 of *LNCS*, pages 361–375. Springer, 2007.
- [162] R. C. Purshouse and P. J. Fleming. Conflict, harmony, and independence: Relationships in evolutionary multi-criterion optimisation. In K. Deb, P. J. Fleming, C. M. Fonseca, L. Thiele, and E. Zitzler, editors, *Evolutionary Multi-Criterion Optimization, Second International Conference*, Lecture Notes in Computer Science, pages 16–30, Faro, Portugal, 2003. Springer.
- [163] S. T. Rachev. *Handbook of heavy tailed distributions in finance*, volume 1 of *Handbooks in finance*. Elsevier, Amsterdam, 1. ed. edition, 2003.
- [164] S. T. Rachev, C. Menn, and F. J. Fabozzi. *Fat-tailed and skewed asset return distributions*. The Frank J. Fabozzi series. Wiley, Hoboken, NJ, 2005.
- [165] F. Reither. *Komplexitätsmanagement*. Gerling Akademie Verlag, 1997.
- [166] R. T. Rockafellar and S. Uryasev. Optimization of conditional value-at-risk. *Journal of Risk*, 2(3):21–41, 2000.
- [167] R. T. Rockafellar and S. Uryasev. Conditional value-at-risk for general loss distributions. *Journal of Banking & Finance*, 26(7):1443–1471, 2002.
- [168] J. V. Rosenberg and T. Schuermann. A general approach to integrated risk management with skewed, fat-tailed risks. *Journal of Financial Economics*, 79(3):569–614, 2006.
- [169] R. S. Rosenberg. *Simulation of genetic populations with biochemical properties*. PhD thesis, University of Michigan, 1967.
- [170] S. Russell and P. Norvig. *Künstliche Intelligenz*. Pearson Studium, München, 2. Aufl. edition, 2004.
- [171] F. Saita. Risk capital aggregation: The risk manager’s perspective. In *Proceedings of the European Financial Management Association Conference*. Newfin Research Center and IEMIF, 2004. Version September 2004.
- [172] J. D. Schaffer. Multiple objective optimization with vector evaluated genetic algorithms. In *Proceedings of the 1st International Conference on Genetic Algorithms*, pages 93–100, Mahwah, NJ, USA, 1985. Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- [173] H. Schierenbeck. *Risiko-Controlling und integrierte Rendite-Risikosteuerung*, volume Bd. 2 of *Ertragsorientiertes Bankmanagement / Henner Schierenbeck*. Gabler, Wiesbaden, nachdruck, 8., vollst. überarb. und erw. Aufl. edition, 2003.
- [174] H. Schierenbeck. *Risk Controlling in der Praxis*. Schäffer-Poeschel, Stuttgart, 2., vollst. überarb. Aufl. edition, 2006.
- [175] F. Schlottmann. *Komplexität und hybride quantitativ-evolutionäre Ansätze im Kreditportfoliorisikomanagement*. PhD thesis, Universität Karlsruhe (TH), 2003.

- [176] F. Schlottmann, A. Mitschele, and D. Seese. A multi-objective approach to integrated risk management. In A. H. Aguirre, C. Coello Coello, and E. Zitzler, editors, *Evolutionary Multi-Criterion Optimization (EMO) 2005, Third International Conference*, Lecture Notes in Computer Science, pages 692–706, Guanajuato, Mexico, März 2005. Springer.
- [177] F. Schlottmann, A. Mitschele, and D. Seese. A multi-objective model framework for the integrated management of financial risks. In *Quantitative Methods in Finance Conference (QMF), Sydney (Australien)*, 2005.
- [178] F. Schlottmann and D. Seese. A hybrid heuristic approach to discrete portfolio optimization. *Computational Statistics and Data Analysis*, 47(2):373–399, 2004.
- [179] F. Schlottmann and D. Seese. Financial applications of multi-objective evolutionary algorithms: Recent developments and future research. In C. C. Coello and G. Lamont, editors, *Handbook on Applications of Multi-Objective Evolutionary Algorithms*. World Scientific, Singapore, 2005.
- [180] H. Schmidli. Optimal proportional reinsurance policies in a dynamic setting. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2001(1):55–68, 2001.
- [181] H. Schmitter. Setting optimal reinsurance retentions. Report, Swiss Re, 2003.
- [182] R. Schnell. *Graphisch gestützte Datenanalyse*. Oldenbourg, 1994.
- [183] B. Schölkopf and A. J. Smola. *Learning with kernels*. Adaptive computation and machine learning. MIT Press, Cambridge, Mass., [repr.] edition, 2002.
- [184] J. R. Schott. Fault tolerant design using single and multi-criteria genetic algorithms. Master’s thesis, Department of Aeronautics and Astronautics (MIT), 1995.
- [185] G. Schroeck. *Risk management and value creation in financial institutions*. Wiley, New York, 2002.
- [186] M. Schulte and A. Horsch. *Risikomanagement*, volume 2 of *Serie Kompendium bankbetrieblicher Anwendungsfelder*. Bankakademie-Verlag, Frankfurt am Main, 3 edition, 2004.
- [187] A. Schwepcke and D. Arndt. *Rückversicherung*. Studienmaterial. VVW, Karlsruhe, 2. aufl edition, 2004.
- [188] D. Seese and F. Schlottmann. Large grids and local information flow as a reason for high complexity. In Frizelle, G. Richards, and H. (eds.), editors, *Tackling industrial complexity: the ideas that make a difference, Proceedings of the 2002 Conference of the Manufacturing Complexity Network, University of Cambridge*, pages 193–207, 2002.
- [189] D. Seese and F. Schlottmann. The building blocks of complexity: a unified criterion and selected applications in risk management. In *Complexity 2003: Complex Behaviour in Economics, Aix-en-Provence*, 2003.
- [190] W. F. Sharpe. Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *Journal of Finance*, 19(3):425–442, 1964.

- [191] F. Spellmann. *Gesamtrisiko-Messung von Banken und Unternehmen*. Gabler Edition Wissenschaft. Dt. Univ.-Verl., Wiesbaden, 1. aufl. edition, 2002.
- [192] K. Spremann. *Portfoliomanagement*. International Management and Finance. Oldenbourg, München, 3., überarb. und erg. aufl. edition, 2006.
- [193] N. Srinivas and K. Deb. Multiobjective optimization using nondominated sorting in genetic algorithms. *Evolutionary Computation*, 2(3):221–248, 1994.
- [194] R. E. Steuer, Y. Qi, and M. Hirschberger. Multiple objectives in portfolio selection. *Journal of Financial Decision Making*, 1(1):5–20, 2005.
- [195] F. Streichert and M. Tanaka-Yamawaki. The effect of local search on the constrained portfolio selection problem. In *IEEE International Congress on Evolutionary Computing (CEC 2006)*, 2006.
- [196] Swiss Re. *Einführung in die Rückversicherung*, 2002. Technical Publishing.
- [197] U. Theiler. *Optimierungsverfahren zur Risk-, Return-Steuerung der Gesamtbank*. Gabler-Edition WissenschaftBank- und Finanzwirtschaft. Dt. Univ.-Verl., Wiesbaden, 1. aufl. edition, 2002.
- [198] A. E. Tschoegl. The key to risk management: management. Working Paper Series, Wharton Financial Institutions Center, 1999.
- [199] R. Verlaak and J. Beirlant. Optimal reinsurance programs - an optimal combination of several reinsurance protections on a heterogeneous insurance portfolio. *Insurance: Mathematics and Economics*, 33(2):381–403, 2003.
- [200] J. von Neumann and O. Morgenstern. *Theory of games and economic behavior*. Princeton University Press, 1953.
- [201] C. Wagenknecht. *Algorithmen und Komplexität*. Informatik interaktiv. Fachbuchverl. Leipzig im Carl Hanser-Verl., München, 2003.
- [202] L. S. Ward and D. H. Lee. Practical application of the risk-adjusted return on capital framework. Dynamic Financial Analysis Discussion Papers, CAS Forum, 2002.
- [203] WECM (Working Group on Economic Capital Models). *Risk measurement within financial conglomerates: best practices by risk type*. Amsterdam, Feb. 2003. Research Series Supervision 51.
- [204] WECM (Working Group on Economic Capital Models). *Appropriate risk measures, time horizon and valuation principles in economic capital models*, Mai 2005.
- [205] E. J. Wegman. Hyperdimensional data analysis using parallel coordinates. *Journal of the American Statistical Association*, 85(411):664–657, Sep. 1990.
- [206] K. Weicker. *Evolutionäre Algorithmen*. Leitfäden der Informatik. Teubner, Stuttgart, 1. aufl. edition, 2002.
- [207] T. C. Wilson. Credit portfolio risk (I). *Risk Magazine*, Oktober 1997.

- [208] T. C. Wilson. Credit portfolio risk (II). *Risk Magazine*, November 1997.
- [209] X. Yang, S. Tao, R. Liu, and M. cheng Cai. Complexity of scenario-based portfolio optimization problem with var objective. *Int. J. Found. Comput. Sci.*, 13(5):671–679, 2002.
- [210] X. Zhang, M. Zhou, and J. Guo. Optimal combinational quota-share and excess-of-loss reinsurance policies in a dynamic setting. *Applied Stochastic Models In Business And Industry*, 23(1):63–71, 2007.
- [211] E. Zitzler. *Evolutionary algorithms for multiobjective optimization: methods and applications*. PhD thesis, ETH (Eidgenössische Technische Hochschule Zürich), PhD Thesis, Swiss Federal Institute of Technology (ETH), Zurich, Switzerland, 1999.
- [212] E. Zitzler, K. Deb, and L. Thiele. Comparison of multiobjective evolutionary algorithms: empirical results. *Evolutionary Computation*, 8(2):173–195, 2000.
- [213] E. Zitzler and L. Thiele. Multiobjective optimization using evolutionary algorithms - A comparative case study. In *PPSN V: Proceedings of the 5th International Conference on Parallel Problem Solving from Nature*, pages 292–304. Springer, 1998.
- [214] E. Zitzler and L. Thiele. Multiobjective evolutionary algorithms: a comparative case study and the strength pareto approach. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 3(4):257–271, 1999.
- [215] E. Zitzler, L. Thiele, M. Laumanns, C. M. Fonseca, and V. G. da Fonseca. Performance assessment of multiobjective optimizers: an analysis and review. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 7(2):117–132, 2003.



## E. Index

- $\varepsilon$ -Dominanz, 91
- $\varepsilon$ -MOEA, 90, 135
- Öffentlich rechtliche Banken, 10
- 3D-Streudiagramm, 125, 150, 159, 169
  
- Abhängigkeitsmodellierung, 38
- Aggregationsrisiko, 19, 38
- Aktienkursrisiken, 16
- Aktiv-Passivrisiko, 15
- Algorithmische Komplexitätstheorie, 56
- Allgemeines Optimierungsproblem, 67
- Ansatz über Nebenbedingungen, 80
- Asset Allokation, 43
- Aufsichtsrechtsrisiko, 12
- Ausfallrisiko, 14
  
- BaFin, 12
- Bank, 9
- Bankbetriebliche Risiken, 12
- Bankeigentümer, 30
- Bankenaufsicht, 30, 39
- Bankgläubiger, 30
- Bankmanagement, 30
- Basel II, 12, 35
- Basel-Standardansatz, 118, 171
- Baseler Ausschuss für Bankenaufsicht, 15, 118
- Beteiligungsrisiken, 16
- Bottom-up-Ansatz, 44, 49
  
- Copula-Funktionen, 47
- Crowding-Distance Sorting, 86
  
- Darwinsche Evolutionslehre, 68
- Diversifikation, 36, 38
- Diversitätsmaße, 93
- Drei-Säulen-Modell, 10
  
- Elternselektion, 70
- Erfolgsrisiken, 12
- Erstversicherer, 95
  
- Erwartungswertprinzip, 100
- Evolutionäre Operatoren, 70
- Evolutionärer Algorithmus, 67, 68, 135
- Externe Risiken, 17
  
- Fat Tails, 17
- Finanzielle Risiken, 12
  
- Genetische Algorithmen, 69
- Genossenschaftsbanken, 10
- Geschäftsrisiko, 12, 19
- Gesetz über das Kreditwesen (KWG), 9
  
- Heatmaps, 130, 154, 161, 175
- Historische Simulation, 117, 149
- Hypervolume, 93
  
- Integriertes Portfoliomanagement, 35
- Integriertes Risikomanagement, 34
- Interne Risiken, 17
  
- Jahresüberschadenexzedent (SL), 97
  
- Klassische multikriterielle Verfahren, 79
- KNAPSACK, 61
- Konvergenzmaße, 93
- Konzentrationsrisiko, 14
- Korrelation, 38
- Kreditinstitut, 9
- Kreditrisiken, 12, 13, 171
  
- Länderrisiken, 14
- Liquiditätsrisiken, 12, 19
  
- Markowitz, Harry M., 40
- Marktrisiken, 12, 15, 171
- Methodikrisiko, 19
- Mindestanforderungen an das Risikomanagement (MaRisk), 12, 32
- Modellrisiken, 12, 15, 19
- Multidimensionale Visualisierung, 124
- Multikriterieller EA, 135

Multikriterielles Optimierungsproblem, 76, 105  
 Mutationsoperator, 74  
 Nichtfinanzielle Risiken, 12  
 Nichtproportionale Rückversicherung, 97  
 Non-dominated Sorting, 84  
 NP-vollständig, 60, 65  
 NSGA-II, 83, 135  
 Nutzenfunktion, 42  
 Operationelle Risiken, 12, 17, 171  
 Optimale Portfolio-Allokation, 37  
 P-NP-Problem, 59  
 Parallelkoordinatenplot, 128, 153, 160, 173  
 Pareto-Front, 79  
 Pareto-optimale Menge, 78  
 Pareto-Optimalität, 77  
 Partition, 61  
 Partitionierungsproblem, 61, 65  
 Portfoliomodelle, 14  
 Portfolioproblem, 40  
 Portfolioproblem (Komplexität), 65  
 Portfolioselektion, 40  
 Prämienprinzipien, 99  
 Privatbanken, 10  
 Profitabilität, 30, 31  
 Proportionale Rückversicherung, 96  
 Quotenrückversicherung (QS), 96  
 Rückversicherer, 95  
 Rückversicherungsgeschäft, 95  
 Rückversicherungskosten, 97  
 Rückversicherungsprämie, 99  
 Rückversicherungsprogramm, 98, 100  
 Rückversicherungsprovision, 97  
 Rückversicherungstechnik, 95  
 Rechtsrisiko, 12  
 Rekombinationsoperator, 72  
 Rendite, 23  
 Reparatur-Operator, 141  
 Reputationsrisiko, 12, 19  
 Risiken im Bankgeschäft, 12  
 Risiko, 10, 12  
 Risiko im weiteren Sinne, 12  
 Risikoüberwachung, 33  
 Risikoanalyse, 32  
 Risikoappetit, 30  
 Risikobegriff, 10  
 Risikobeurteilung, 33  
 Risikocontrolling, 30  
 Risikoidentifizierung, 32  
 Risikointerdependenzen, 36  
 Risikokommunikation, 33  
 Risikomanagement, 29  
 Risikomanagementprozess, 32  
 Risikopolitik, 30, 32  
 Risikosteuerung, 33  
 Rohstoffrisiken, 17  
 Rucksackproblem, 61, 122  
 Schadenexzedent (XL), 97  
 Selektionsoperator, 70  
 Shareholder, 30  
 Silo-basiertes Risikomanagement, 21, 45  
 Solvabilität, 30  
 Spacing, 94  
 Speicherkomplexität, 56  
 Spreadrisiko, 14  
 Stakeholder, 30  
 Strategierisiko, 12  
 Strategische Asset Allokation, 43  
 Stresstests, 17  
 Streudiagramm, 125  
 Streudiagramm-Matrix, 151, 173  
 Subprime-Krise, 1  
 Systemrisiken, 12, 19  
 Taktische Asset Allokation, 43  
 Top-down-Ansatz, 43, 45  
 Turing-Machine, 56  
 Umsetzungsrisiko, 19  
 Umweltselektion, 70  
 Value-at-Risk, 25, 27  
 Versicherungstechnisches Risiko, 95  
 Währungsrisiken, 16  
 Zeitkomplexität, 56  
 Zinsrisiken, 15



ISBN: 978-3-86644-404-1

[www.uvka.de](http://www.uvka.de)

