

# Optimierung der Altersvorsorge –

Aufbau eines zeitkontenbasierten  
Dienstleistungsanspruchs

Zur Erlangung des akademischen Grades eines  
Doktors der Wirtschaftswissenschaften  
(Dr. rer. pol.)  
von der  
Fakultät für Wirtschaftswissenschaften  
der Universität Karlsruhe (TH)

genehmigte

DISSERTATION

von

Dipl.-Math. (FH) MCom Bettina Detzel

Tag der mündlichen Prüfung: 30. Juli 2009

Referent: Prof. Dr. Christian Hipp

Korreferenten: Prof. Dr. Karl-Heinz Waldmann

Prof. Dr. Kurt Helmes



# Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand zum größten Teil während meiner Tätigkeit als wissenschaftliche Mitarbeiterin am Lehrstuhl für Versicherungswissenschaft an der Universität Karlsruhe (TH).

Meinem Doktorvater Herrn Prof. Dr. Christian Hipp danke ich sehr herzlich für seine Unterstützung, die Betreuung der Arbeit und die Übernahme des Hauptberichtes. Mein besonderer Dank geht auch an Herrn Prof. Dr. Karl-Heinz Waldmann, Institut für Wirtschaftstheorie und Operations Research an der Universität Karlsruhe (TH) und Herrn Prof. Dr. Kurt Helmes, Institut für Operations Research an der Humboldt-Universität zu Berlin für die Übernahme der Korreferate.

Der Deutschen Gesellschaft für Versicherungs- und Finanzmathematik e.V. gilt mein Dank für die finanzielle Unterstützung des Forschungsprojektes.

Für die Hilfestellung mit den japanischen Dokumenten geht ein großes danke schön an Frau Hideko Hubbard und Hartmut Brand. Bei Ira Sudendey und Nicole Leukart bedanke ich mich recht herzlich für das sorgfältige Korrekturlesen.

Den Kolleginnen und Kollegen am Lehrstuhl danke ich für die gute Zusammenarbeit und den Spass, den wir gemeinsam hatten. Allen Freundinnen und Freunden danke ich für die Unterstützung und Rücksichtnahme während der intensiven Arbeitsphasen.

Last but not least möchte ich meinem Lebensgefährten Jürgen und meiner Schwester Annette danken, ohne die ich die Arbeit bestimmt nicht fertig gestellt hätte und die mich durch alle Höhen und Tiefen mit festem Glauben an meinen Erfolg begleitet haben.



---

# Inhaltsverzeichnis

<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>VII</b>
<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>XI</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>XV</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Problemstellung . . . . .	1
1.2 Investition von Zeit zur besseren Versorgung im Alter . . . . .	2
1.3 Optimale Konsum- und Investmententscheidungen im Überblick	7
1.4 Motivation und Ziel der Arbeit . . . . .	11
1.5 Kapitel-Organisation . . . . .	11
<b>2 Mathematische Modellierung</b>	<b>13</b>
2.1 Grundlagen stochastischer Modellierung . . . . .	14
2.2 Anwendung . . . . .	16
2.2.1 Zustand des Individuums . . . . .	16
2.2.2 Der Einkommensprozess . . . . .	16
2.2.3 Der Vermögensprozess . . . . .	17
2.2.4 Die Nutzenfunktionen . . . . .	20
2.3 Das Kontrollproblem . . . . .	24

<b>3</b>	<b>Grundlagen der Kontrolltheorie</b>	<b>27</b>
3.1	Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung . . . . .	28
3.2	Analytische Lösung des vereinfachten Optimierungsproblems .	30
3.3	Verifikationslemma . . . . .	32
3.4	Analytische Lösung Zustand 2 . . . . .	33
3.5	Optimale Strategien für Zustand 0 und 1 . . . . .	37
<b>4</b>	<b>Diskretes Modell</b>	<b>41</b>
4.1	Konstruktion des diskreten Vermögensprozesses . . . . .	41
4.2	Lösung des diskreten Optimierungsproblems . . . . .	44
4.2.1	Strategie-Iterations-Methode . . . . .	48
4.3	Konvergenz der Wertfunktion . . . . .	49
<b>5</b>	<b>Berechnungen</b>	<b>55</b>
5.1	Programmierung . . . . .	55
5.1.1	Güte der numerischen Lösung für Zustand 2 . . . . .	56
5.2	Konvergenz der diskreten Lösung . . . . .	61
5.3	Parameterwahl . . . . .	61
5.3.1	Zusammenfassung der Parameterbelegungen . . . . .	70
5.4	Ergebnisse . . . . .	72
5.4.1	Ergebnis einer ausgewählten Modellrechnung . . . . .	73
5.4.2	Ergebnisse „junger“ Mensch . . . . .	84
5.4.3	Ergebnisse „alter“ Mensch . . . . .	103
5.4.4	Zusammenfassung der Ergebnisse aus den Parameter- variationen . . . . .	115
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>119</b>
6.1	Zusammenfassung . . . . .	119
6.2	Ausblick . . . . .	123

---

<b>A</b>	<b>Übergangswahrscheinlichkeiten an den Rändern von <math>\bar{S}</math></b>	<b>127</b>
<b>B</b>	<b>Parameterbelegungen</b>	<b>129</b>



# Abbildungsverzeichnis

1.1	Die in den Vereinen am häufigsten angebotenen Aktivitäten . . . . .	5
1.2	Selbstverständnis der ZeitBank e. V. . . . .	6
2.1	Zustandsraum von $Z(t)$ und Übergangsmöglichkeiten . . . . .	16
5.1	Prozentuale Abweichung für den Anteil des riskanten Investments $\theta$ für $h_2 = 0,1$ (links) bzw. $h_2 = 0,025$ (rechts) . . . . .	58
5.2	Prozentuale Abweichung für Konsum $c_2$ . . . . .	58
5.3	Absolute Abweichung für Konsum $c_2$ für $h_2 = 0,0025$ . . . . .	60
5.4	Altersabhängige Sterblichkeit $q_x$ und Restlebenserwartung $e_x$ . . . . .	66
5.5	Arbeitszeit für Zustand 0 in Abhängigkeit von $x_1$ und $x_2$ . . . . .	74
5.6	Investment in Zeitguthaben für Zustand 0 in Abhängigkeit von $x_1$ und $x_2$ . . . . .	75
5.7	Optimaler Geldkonsum für Zustand 0 in Abhängigkeit von $x_1$ und $x_2$ . . . . .	76
5.8	Optimaler Konsum für Zustand 0 in Abhängigkeit von $x_1$ . . . . .	77
5.9	Optimales riskantes Investment für Zustand 0 in Abhängigkeit von $x_1$ und $x_2$ . . . . .	78
5.10	Nutzenfunktion in Zustand 0 in Abhängigkeit von $x_1$ . . . . .	80
5.11	Optimaler Geldkonsum in Zustand 2 in Abhängigkeit von $x_1$ . . . . .	81
5.12	Optimaler Zeitkonsum in Zustand 2 in Abhängigkeit von $x_2$ . . . . .	82
5.13	Optimales riskantes Investment in Zustand 2 in Abhängigkeit von $x_1$ . . . . .	83

5.14	Wertfunktion für Zustand 2 in Abhängigkeit von $x_1$ und $x_2$ . . .	83
5.15	Erwerbstätigkeit in Zustand 0 in Abhängigkeit von $\gamma_{1,i}$ (links) bzw. in Abhängigkeit von $\gamma_{2,i}$ (rechts) . . . . .	85
5.16	Zeitinvestment in Zustand 0 in Abhängigkeit von $\gamma_{1,i}$ (links) bzw. in Abhängigkeit von $\gamma_{2,i}$ (rechts) . . . . .	87
5.17	Zeitinvestment in Zustand 1 in Abhängigkeit von $\gamma_{1,i}$ (links) bzw. in Abhängigkeit von $\gamma_{2,i}$ (rechts) . . . . .	87
5.18	Erwerbstätigkeit in Zustand 0 in Abhängigkeit von $\gamma_{1,i}$ (links) und $\gamma_{2,i}$ (rechts) . . . . .	89
5.19	Zeitinvestment in Zustand 0 in Abhängigkeit von $\gamma_{1,i}$ (links) und $\gamma_{2,i}$ (rechts) . . . . .	91
5.20	Zeitinvestment in Zustand 1 in Abhängigkeit von $\gamma_{1,i}$ (links) und $\gamma_{2,i}$ (rechts) . . . . .	92
5.21	Freizeit $l(0) = 1 - a(0) - b(0)$ in Zustand 0 für $K_b = 1$ . . . . .	93
5.22	Erwerbstätigkeit in Zustand 0 in Abhängigkeit von $K_b$ . . . . .	94
5.23	Zeitinvestment in Zustand 0 in Abhängigkeit von $K_b$ . . . . .	95
5.24	Zeitinvestment in Zustand 1 in Abhängigkeit von $K_b$ . . . . .	96
5.25	Erwerbstätigkeit in Zustand 0 in Abhängigkeit von $\lambda_{01} = 0, 1$ und $\lambda_{10} = 0, 99$ (links) bzw. $\lambda_{01} = 0, 5$ und $\lambda_{10} = 0, 5$ (rechts) .	97
5.26	Zeitinvestment in Zustand 0 in Abhängigkeit von $\lambda_{01} = 0, 1$ und $\lambda_{10} = 0, 99$ (links) bzw. $\lambda_{01} = 0, 5$ und $\lambda_{10} = 0, 5$ (rechts) .	98
5.27	Zeitinvestment in Zustand 1 in Abhängigkeit von $\lambda_{01} = 0, 1$ und $\lambda_{10} = 0, 99$ (links) bzw. $\lambda_{01} = 0, 5$ und $\lambda_{10} = 0, 5$ (rechts) .	100
5.28	Erwerbstätigkeit in Zustand 0 in Abhängigkeit von $\lambda$ und $\beta$ .	100
5.29	Zeitinvestment in Zustand 0 in Abhängigkeit von $\lambda$ und $\beta$ . .	101
5.30	Zeitinvestment in Zustand 1 in Abhängigkeit von $\lambda$ und $\beta$ . .	102
5.31	Zustandsraum von $Z(t)$ und Übergangsmöglichkeiten für „al- tes“ Individuum . . . . .	103
5.32	Zeitinvestment in Zustand 1 in Abhängigkeit von $\gamma_{1,1}$ und $\gamma_{2,1}$	104
5.33	Risikantes Investment in Zustand 1 in Abhängigkeit von $\gamma_{1,1}$ und $\gamma_{2,1}$ . . . . .	106

---

5.34	Zeitinvestment in Zustand 1 in Abhängigkeit von $\gamma_{1,1}$ und $\gamma_{2,1}$	108
5.35	Optimaler Konsum in Zustand 1 in Abhängigkeit von $\gamma_{1,1}$ und $\gamma_{2,1}$	110
5.36	Riskantes Investment in Zustand 1 in Abhängigkeit von $\gamma_{1,1}$ und $\gamma_{2,1}$	111
5.37	Zeitinvestment (links) und riskantes Investment (rechts) in Zustand 1 in Abhängigkeit von $\lambda$ und $\beta$	113
5.38	Riskantes Investment in Zustand 1 in Abhängigkeit von $\mu$ und $\sigma$	114



# Symbolverzeichnis

- $\mathcal{A}(\mathbf{x}, z)$  Menge aller zulässigen Strategien  $\mathbf{C} = (\mathbf{c}, a, b, \theta)$  für  $Z(t) = z$  und Startkapital  $\mathbf{x}$
- $a(\cdot, z)$  Dynamischer Anteil Zeitinvestment in Zustand  $z$
- $B(t)$   $n$ -dimensionale Brownsche Bewegung
- $B_1(t)$  Eindimensionale Brownsche Bewegung zur Modellierung des Aktienpreisprozesses  $S(t)$
- $b(\cdot, z)$  Dynamischer Anteil Arbeitszeit in Zustand  $z$
- $\beta$  Höhe des prozentualen Verlustes im Zeitguthaben
- $\mathbf{C}^*$  Optimales Tupel der Steuervariablen  $(\mathbf{c}^*, a^*, b^*, \theta^*)^T$
- $\mathbf{C}^{h^*}$  Diskretes optimales Tupel der Steuervariablen  $(\mathbf{c}^{h^*}, a^{h^*}, b^{h^*}, \theta^{h^*})^T$
- $\mathbf{C}$  Tupel der Steuervariablen  $(\mathbf{c}, a, b, \theta)^T$
- $\mathbf{c}(\cdot, z)$  Dynamischer Konsum in Zustand  $z$
- $\mathcal{D}^{\mathbf{C}}f(\mathbf{x}, z, t)$  Infinitesimaler Generator
- $E(t)$  Einkommensprozess
- $\mathcal{F}_t$  Filtration auf  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$
- $g(0)$  Konstante Einkommensrate im aktiven Zustand
- $g(1)$  Konstanter Geldzufluss im Zustand 1
- $\gamma_l$  Parameter der Nutzenfunktion  $l = 3, 4, 5, 6$
- $\gamma_{j,i}$  Parameter der Nutzenfunktion für Zustand  $Z(t) = i$ ,  $i = 0, 1, j = 1, 2$
- $\mathbf{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$  Diskretisierungsweite in den beiden Dimensionen von  $\mathcal{S}_{h_1, h_2}$
- $\mathcal{J}$  Zustandsraum von  $Z(t)$  bzw.  $Z_n$

- 
- $K_a(z)$  Obergrenze für  $a$  in Zustand  $z = 0$  oder  $1$   
 $K_b(0)$  Obergrenze für  $b$  in Zustand  $z = 0$   
 $K_{c_2}$  Obergrenze für  $c_2$   
 $\Lambda$  Übergangsmatrix für den Prozess  $Z(t)$   
 $l(\cdot, z)$  Konsumierte Freizeit in Zustand  $z$   
 $\lambda$  Eintrittsintensität für Schockverluste in Zeitguthaben  
 $\lambda_i(t)$  Austrittsintensität aus Zustand  $i$  für den Prozess  $Z(t)$   
 $\lambda_{ij}(t)$  Zeitabhängige Übergangsraten für den Markov-Prozess  $Z(t)$   
 $\mu(t)$  Drift des Aktienpreisprozesses  $S(t)$   
 $N(t)$  Poissonprozess zur Modellierung der Schockverluste im Zeitguthaben  
 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  Wahrscheinlichkeitsraum  
 $R(0)$  Startpreis des risikolosen Wertpapiers  
 $R(t)$  Preisprozess des risikolosen Wertpapiers  
 $r(t)$  Risikoloser Zins  
 $\rho(t)$  Persönliche Diskontierungsrate  
 $S(0)$  Startpreis der Aktie  
 $S(t)$  Aktienpreisprozess  
 $\mathcal{S}$  Zulässiger Zustandsraum von  $\mathbf{X}(t)$   
 $\mathcal{S}_{h_1, h_2}$  Zulässiger Zustandsraum von  $\mathbf{X}_n$   
 $\sigma(t)$  Volatilität des Aktienpreisprozesses  $S(t)$   
 $\tau_d$  Zufälliger Zeitpunkt des Eintritts von Zustand 3  
 $\tau_i$  Zufälliger Zeitpunkt des Eintritts von Zustand 2  
 $\tau_u$  Zufälliger Zeitpunkt des Eintritts von Zustand 1  
 $\theta(\cdot, z)$  Dynamischer Vermögensanteil, der in Zustand  $z$  in die Aktie investiert wird  
 $u(\cdot, i)$  Nutzenfunktion für Zustand  $i$   
 $V(\mathbf{x}, z)^h$  Wertfunktion des diskreten Optimierungsproblems  
 $V(\mathbf{x}, z, t)$  Wertfunktion für Startkapital  $\mathbf{x}$  und Start-Zustand  $z$   
 $\mathbf{X}_n$  Zweidimensionaler diskreter Vermögensprozess

- 
- $\mathbf{X}(t)$  Zweidimensionaler Vermögensprozess  
 $\mathbf{x}$  Startwert von  $\mathbf{X}(t)$  bzw.  $\mathbf{X}_n$   
 $\mathbf{Z}_n$  Zeitdiskreter Zustandsprozess  
 $Z(t)$  Markov-Prozess zur Modellierung der Individuums-Zustände  
 $z$  Startwert von  $Z(t)$  bzw.  $Z_n$



# Tabellenverzeichnis

5.1	Parameterwerte für Beispiel 5.1.1 . . . . .	57
5.2	Abweichungen zwischen analytischer und numerischer Lösung	59
5.3	Supremum der Differenzen von $V^h(\mathbf{x}, \cdot)$ für verschiedene $\mathbf{h}$ . .	62
5.4	Pflegeeintrittsintensitäten für Alter $65 + t$ . . . . .	67
5.5	Konstante Parameter . . . . .	70
5.6	Grundindividuen . . . . .	71
B.1	Varierte Parameterkombinationen „junges“ Individuum . . . .	130
B.2	Fixe Parameterwerte für „junges“ Individuum . . . . .	131
B.3	Varierte Parameterkombinationen „altes“ Individuum . . . . .	131
B.4	Fixe Parameterwerte für „altes“ Individuum . . . . .	131



# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Problemstellung

Die Finanzierung der Altersversorgung im Sinne der Erhaltung des gewohnten Lebensstandards in der Ruhestandsphase ist heutzutage aus verschiedenen Gründen gefährdet, z. B. durch:

- Kürzungen in der staatlichen Rente<sup>1</sup>,
- Unstetigkeiten in den Erwerbsbiographien, die unter anderem Leistungen aus der betrieblichen Altersversorgung vermindern oder
- Turbulenzen an den Finanzmärkten, die eine Gefahr für die Renditen von privaten und betrieblichen Altersvorsorgeprodukten darstellen<sup>2</sup>.

---

<sup>1</sup>Laut einer Studie des IWG Bonn (Ottvad und Wahl, 2005) sinken die realen Renditen aus den Einzahlungen der Rentenbezieher in die staatliche Rentenversicherung für die Geburtsjahrgänge 1930 bis 2040 von 2,55 % auf 0,35 % bei Annahme eines optimistischen allgemeinen Szenarios. Wird ein pessimistisches Szenario unterstellt, fallen die Renditen für die späteren Jahrgänge bei den Männern sogar unter 0 %, d. h. der Rentenbezieher erhält im Durchschnitt weniger Rentenzahlungen zurück, als er Beiträge eingezahlt hat. Weckfort (2007) ermittelt in seinem Artikel einen Renditen-Rückgang von ca. 1,2 % bei Vergleich eines 1964 geborenen Durchschnittsverdieners mit einem 1946 geborenen Durchschnittsverdiener.

<sup>2</sup>Laut einer Studie von Mercer haben die Pensionsrücklagen der dreißig DAX-Konzerne im Jahr 2008 im Schnitt einen Wertverlust von fast 10 % erlitten. Lediglich zwei Unternehmen konnten leichte Zuwächse erzielen (Quelle: Manager Magazin, Ausgabe 05/2009).

Der Großteil der bisher in Deutschland und auch in anderen Märkten existierenden Produkte für die Altersversorgung baut auf eine rein monetäre Versorgungsleistung auf. Vorsorge für das Alter zur Versorgung im Alter geschieht auf finanzieller Basis zum einen durch Einzahlungen in die staatliche Rentenversicherung. Zum anderen werden private Vorsorgeprodukte zum Kauf angeboten, die finanzielle Zahlungsströme im Alter generieren.

Die Altersvorsorgeleistungen der Arbeitgeber sind bisher ebenfalls von überwiegend finanzieller Art. Eine Besonderheit stellen die Lebensarbeitszeitkonten dar. Die Leistung kann hierbei entweder in monetärer Form ausbezahlt (zusätzliche Rente als Abgeltung der geleisteten Überstunden) oder in Form eines vorgezogenen Ruhestands als „Freizeitleistung“ bezogen werden.

Als eine Ausnahme von der rein finanziellen privaten Vorsorge für das Alter können die Versorgungsleistungen innerhalb einer Familie für die ältere Generation angesehen werden. An dieser Stelle findet ein Teil der Versorgung durch Sachleistung im Sinne von direkter Dienstleistung gegenüber der Altersgruppe der Ruheständler statt. Diese Form von Sachleistungen für die Altersversorgung nimmt jedoch ab, da das Leben im Familienverband seltener wird.

Andererseits gibt es eine steigende Zahl kleiner, lokaler Gruppen wie Seniorenverbände oder Generationenprojekte, die eine Erhaltung oder Verbesserung des Lebensstandards zum Ziel haben und in denen nicht-monetäre Formen von Leistungen an Senioren zur Versorgung im Alter erbracht werden. Ein Teil dieser Projekte kann auch als Vorsorge und nicht nur als reine Versorgung für das Alter verstanden werden.

## **1.2 Investition von Zeit zur besseren Versorgung im Alter**

In Japan existieren auf breiter Basis Versorgungsformen, die auf gegenseitige Erbringung von Dienst- und Sachleistungen innerhalb einer lokalen Gruppierung von Freiwilligen beruhen. Diese Gruppen bieten Unterstützung und Hilfe in Notlagen, z. B. durch existenzbedrohende Ereignisse wie Naturkatastrophen, aber auch im Alltag, um Senioren ein möglichst selbständiges Leben zu ermöglichen. Der Austausch der Leistungen wird über eine komplementäre Währung abgewickelt.

Komplementärwährungen existieren in verschiedensten Ausprägungen auf der ganzen Welt. Komplementärwährung bedeutet, dass zur offiziellen Landeswährung eine weitere Währung als Tauschmittel akzeptiert wird, entweder nur ganz eingeschränkt in einer kleinen abgegrenzten Gruppe oder für jedermann zugänglich, der sich am alternativen Tausch beteiligen möchte. Zu Komplementärwährungen im Allgemeinen siehe z. B. Kennedy und Lietaer (2004).

Ein Teil dieser Organisationen entstand nach dem schweren Erdbeben von Kobe in 1995. Durch die beschränkte Kapazität an staatlichen Hilfeleistungen wuchs eine breite Freiwilligenbewegung. Darauf folgend wurde in Japan eine erste Gesetzgebung für gemeinnützige Organisationen verabschiedet, die zu einem zusätzlichen Schub an Neugründungen führte (siehe Lietaer, 2004).

Freiwilligenorganisationen die sich speziell der Versorgung Älterer in der Gesellschaft widmen, werden unter dem Begriff *Fureai Kippu* (englisch: caring relationship tickets, deutsch: Pflegetickets) zusammengefasst (Kennedy, 2005).

Bastian (2001) beschreibt in ihrem Artikel eine der größten bestehenden Organisationen, den so genannten „Nippon Active Life Club (NALC)“. Die Mitglieder dieser Gruppe unterstützen sich gegenseitig bei Dienstleistungen im Haushalt wie z. B. Reinigung und Einkauf. Die Vergütung der Dienstleistungen erfolgt nicht auf monetärer Basis, sondern durch Verrechnung von Zeitpunkten. Die Zeitpunkte werden auf einem Konto angesammelt und können bei Bedarf gegen Leistungen eingetauscht werden.

Die Vereinigung beschränkt sich nicht auf Hilfeleistungen für Senioren, jedoch sind diese eine besondere Zielgruppe der Organisatoren. Bedingt durch die erst bei einem hohen Grad von Hilflosigkeit einsetzenden Leistungen der staatlichen Pflegeversicherung in Japan sind insbesondere Ältere ohne Familienanschluss auf fremde Unterstützung angewiesen, für die jedoch oft die notwendigen finanziellen Mittel fehlen.

Die Mitgliedschaft im NALC ermöglicht diesen Menschen, Unterstützung von anderen anzunehmen, ohne direkte finanzielle Mittel aufzuwenden, sofern sie innerhalb der Gruppe selbst noch Sachleistungen anbieten können oder dies in der Vergangenheit getan haben. In Japan ist diese Form der Nachbarschaftshilfe auch deshalb besonders erfolgreich, da in der japanischen Kultur das Annehmen von Almosen ein beschämender Vorgang ist.

Im Jahr 2000 hat die japanische Wohlfahrts-Stiftung Sawayaka eine Umfrage unter Bürgervereinigungen, Wohlfahrtsverbänden und sonstigen Non-Profit-Organisationen (NPO) durchgeführt, um die Position von Fureai Kippu in Japan zu erörtern. Die Ergebnisse der Umfrage wurden im Oktober 2000 veröffentlicht (Horita, 2000).

Insgesamt wurden an 281 Institutionen Fragebögen versandt. 170 der angeschriebenen Institutionen haben sich an der Umfrage beteiligt. Das entspricht einer Beteiligungsquote von 60 %. Das Gründungsdatum der Vereinigungen variiert sehr stark. Die ältesten Institutionen bestanden zum Zeitpunkt der Umfrage seit 14 Jahren, andere lediglich ein Jahr. Die Mehrheit der Organisationen existierten im Jahr 2000 zwischen drei und acht Jahren.

Innerhalb der Organisationen konnten zum Zeitpunkt der Umfrage die geleisteten Stunden entweder in Geld entlohnt oder als Guthaben auf einem Zeitkonto deponiert werden. 36 % der Vereinigungen verzichteten auf die monetäre Entlohnung und boten ihren Mitgliedern lediglich eine Ansammlung der Stunden an.

Die Anzahl der Mitglieder in 160 der Institutionen ist gleichmässig auf Cluster mit unter 50 bis maximal 300 Mitgliedern verteilt. Acht Vereinigungen hatten bis zu 500 Mitglieder, eine Organisation hatte bis zu 1.300 und eine Organisation sogar 2.500 Mitglieder.

Innerhalb der Vereinigungen gab es eine klare Konzentration an Hilfsleistungen, die nachgefragt und angeboten wurden, siehe Abbildung 1.1. In praktisch allen Organisationen wurde am häufigsten Unterstützung bei der Hausarbeit geleistet. Des Weiteren wurde bevorzugt Hilfe beim Krankenhausbesuch und bei der Pflege verrichtet (vgl. Abbildung 1.1).

Die Anzahl der geleisteten Stunden pro Person und Jahr variierte innerhalb der Institutionen sehr stark. In knapp der Hälfte der Organisationen wurden weniger als 40 Stunden an Dienstleistungen pro Person und Jahr verrichtet. Immerhin wurden aber auch in 28 Vereinigungen bis zu 200 Stunden pro Person und Jahr absolviert, das sind ca. 35 Minuten pro Tag. Die Autoren der Umfrage kommen zum Schluss, dass aus ihrer Sicht die ideale Aktivitätsgröße für eine Vereinigung mindestens 10.000 deponierte Stunden jährlich beträgt. Zum Zeitpunkt der Studie betrug der Schnitt 1.418 Stunden je Vereinigung. Alle Vereinigungen blieben unter 5.000 deponierten Stunden pro Jahr. Als optimalen Pro-Kopf-Umsatz ermitteln die Autoren ca. 200 Stunden pro Jahr. Dieses Optimum wurde in 17 % der Vereine erreicht. Wie bereits erwähnt,

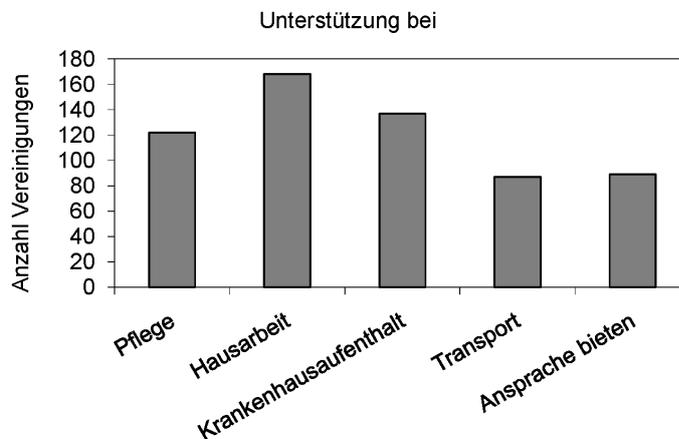


Abbildung 1.1: Die in den Vereinen am häufigsten angebotenen Aktivitäten

wird in einem Drittel der Organisationen die Verrechnung der Dienstleistungen lediglich gegen Ansammlung von Zeitguthaben vorgenommen. Laut Horita (2000) ist mit einer Zunahme solcher Vereine zu rechnen.

Die Autoren weisen obendrein zu Recht darauf hin, dass der dauerhafte Erfolg der Vereinigungen davon abhängen wird, ob es gelingt, den Anspruch auf Leistungen, den die Zeitguthaben darstellen, auf Dauer abzusichern. Dazu wurden zum Zeitpunkt der Umfrage verschiedene Ideen diskutiert, jedoch keine abschließende Empfehlung ausgesprochen. Angeregt wurden unter anderem die weitere Vernetzung der örtlichen Vereine, eine Vergrößerung der Mitgliederzahl sowie die Einrichtung eines Fonds.

Aus der Umfrage ist ersichtlich, dass das Prinzip von Zeitdepots zur besseren Versorgung im Alter in Japan eine gewisse Verbreitung genießt. Die Organisationen existieren über einen ausreichend langen Zeitraum, um schlussfolgern zu können, dass sie langfristig erfolgreich arbeiten können, obwohl sehr viel weniger Aktivitäten innerhalb der Vereinigungen anfallen, als von Horita (2000) gefordert werden.

Auch in Deutschland existieren Ansätze zur besseren Versorgung älterer Personen in der Gesellschaft, die auf Freiwilligenarbeit und gezielten Austausch von Dienstleistungen basieren. Bereits seit 1994 gibt es die Seniorenhilfe Dietzenbach e. V. Ein erklärter Zweck des Vereins ist, „Schwierigkeiten, die u. a. durch das Altern entstehen,“ zu überwinden, „um dadurch alten Menschen die Möglichkeit zu geben, am Leben der Gesellschaft teilzunehmen.“ Im Jahre 2006 hatte der Verein mehr als 1.800 Mitglieder und war damals die

mitgliederstärkste Seniorenvereinigung Deutschlands. Von den 1.800 Mitgliedern waren 200 als Aktive eingetragen, die Hilfsangebote erbrachten oder in Anspruch nahmen. Die Vergütung der Hilfsangebote erfolgt lediglich durch Zeitpunkte, die auf Konten angesammelt werden können. Die erste Senioren-genossenschaft in Deutschland wurde am 9. April 1991 in Riedlingen (Württemberg) gegründet. Sie hatte im Jahr 2006 650 eingetragene Mitglieder. Im Jahr 2004 bekam der Verein den IZT-Zukunftspreis für die Entwicklung eines Modelles, wie ältere Menschen, aktiv und selbstständig in ihrem Stadtteil, in engem Kontakt mit jüngeren Menschen und in ihren vertrauten vier Wänden älter werden können.

Ein noch junges Beispiel für Zeitguthaben als Ergänzung zu den klassischen drei Säulen der Altersvorsorge (vgl. Abbildung 1.2) stellt die ZeitBank e. V. dar<sup>3</sup>.

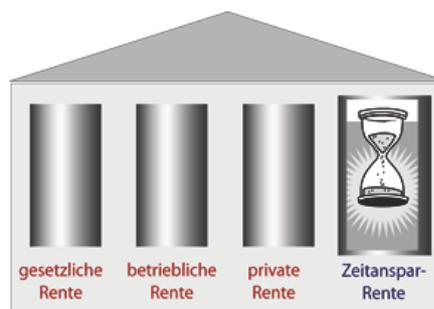


Abbildung 1.2: Selbstverständnis der ZeitBank e. V.

Die ZeitBank e. V. wurde im März 2007 gegründet. Das formulierte Ziel der Organisation ist „eine zusätzliche, gegen Inflation gesicherte Altersvorsorge auf Zeitbasis.“ Die Sicherung des Zeitguthabens soll durch „die enge, nachhaltige Zusammenarbeit der beteiligten sozialen Dienste und – wie im Generationenvertrag – die Anzahl der Menschen, die mitmachen“ gewährleistet werden. Ob die Organisation auf Dauer erfolgreich arbeitet, kann erst in einigen Jahren überprüft werden.

Wie bereits angemerkt, ist das dauerhafte Funktionieren der Organisationen stark davon abhängig, ob es gelingt, eine Absicherung der Ansprüche der

<sup>3</sup>Quelle: <http://www.zeitbank.net/wp-content/themes/zeitbank-10/images/saeulen.gif>; Im inzwischen üblichen Schichten-Modell der Altersvorsorge würde die ZeitBank vermutlich eine zusätzliche Schicht einführen

Mitglieder zu realisieren. Dieser Punkt ist nicht Gegenstand der vorliegenden Arbeit, die sich auf das Individuum und dessen Standpunkt konzentriert. Weiterführende Forschungen zum Themenkomplex der Arbeit sollten die Frage einer Guthaben-Sicherung sowie weitere organisatorische Rahmenbedingungen für eine erfolgreiche Organisation berücksichtigen. Im ungünstigsten Fall sind bei Zusammenbruch einer Organisation alle Ansprüche auf zukünftige Dienstleistungen aus einem angesparten Zeitguthaben verloren.

Im nachfolgenden Abschnitt wird ein Überblick über die bisherige Forschung zum Thema „optimaler Konsum und optimales Investment für ein Individuum“ gegeben.

### 1.3 Optimale Konsum- und Investmententscheidungen im Überblick

Optimierungsprobleme im Bereich von Investitionsentscheidungen eines Individuums zur Nutzenmaximierung haben eine lange Tradition. Yaari (1965) beschrieb als Erster ein optimales Konsumproblem für ein Individuum mit unbekanntem Horizont, konnte jedoch keine explizite Lösung in seinem Modell angeben.

Merton (1969, 1971) formulierte in seinen Arbeiten ein stochastisches Kontrollproblem für die optimale Konsum- und Investmentstrategie eines Individuums in kontinuierlicher Zeit. Durch Mertons bahnbrechende Idee in seinem Modell zeitstetige Prozesse zu verwenden, gelang es ihm, eine geschlossene Lösung herzuleiten. Der Autor betrachtet ein Individuum, dessen Ziel es ist, seinen erwarteten Nutzen durch optimalen Konsum und optimales Investment zu maximieren. Als Investmentoptionen kann zwischen einem risikoreichen Aktienportfolio und einer risikolosen Anlage gewählt werden. Der Planungshorizont des Individuums ist in Mertons Arbeiten deterministisch. Der für das Individuum ermittelte optimale Konsum ist linear zum vorhandenen Vermögen. Darüber hinaus kam der Autor zu dem Ergebnis, dass es für das Individuum optimal ist, einen konstanten Anteil des Vermögens in das Aktienportfolio zu investieren.

Richard (1975) weitete die Arbeiten von Merton durch Einführung einer zusätzlichen Investitionsoption, dem Kauf einer Lebensversicherung, aus. Konsequenterweise modellierte er wie Yaari die zukünftige Lebenszeit des In-

dividuums als Zufallsvariable innerhalb des Optimierungsproblems. Wie in Merton (1971) kommt Richard zu dem Ergebnis, dass optimaler Konsum und optimales riskantes Investment zusätzlich vom Erwartungswert des zukünftigen Einkommens abhängen, wenn im Modell Erwerbseinkommen berücksichtigt wird. Konsum und riskantes Investment steigen mit größer werdendem Einkommen an. Der Einfluss des Barwertes auf das riskante Investment fällt jedoch umso geringer aus, je größer das aktuell vorhandene Vermögen des Individuums ist. Der optimale Betrag, der im Todesfall fällig wird, ist abhängig von der Höhe des aktuellen Geldvermögens entweder positiv oder negativ. Für sehr großes aktuelles Vermögen sichert sich das Individuum dagegen ab, „zu viel“ Vermögen zu hinterlassen (im Sinne von „mehr als sein versäumtes zukünftiges Einkommen“). Es verkauft deshalb Lebensversicherung und die Todesfalleistung ist somit negativ. Bei einem geringen aktuellen Vermögen kauft das Individuum eine Absicherung seines im Falle des Todes nicht mehr realisierten zukünftigen Einkommens.

Bodie et al. (1992) haben Mertons Modell durch die Steuerung von Arbeitszeit erweitert. Die Autoren untersuchten den Einfluss eines sich ändernden Einkommens auf das optimale Konsum- und Investmentverhalten. Der zusätzliche Steuerparameter erhöht die Bereitschaft zu riskantem Investment und stabilisiert gleichzeitig den Konsum, der in Mertons Modell stark durch Schwankungen auf dem Wertpapiermarkt beeinflusst wird.

Eine zusätzliche Erweiterung haben Damgaard et al. (2003) eingeführt. Sie unterscheiden den Konsum nach zwei Gütern, einem verderblichen und einem haltbaren Gut. Unter Vernachlässigung von Transaktionskosten können die Autoren ihr Kontrollproblem analytisch lösen. Die optimalen Strategien für den Konsum beider Güter und den Investitionsanteil in riskantem Wertpapier sind analog zu Mertons Modell zeitunabhängig. Die Strategien lassen sich als konstante Anteile am aktuellen Zustand des Gesamtvermögens formulieren. Für das Modell mit Transaktionskosten können die Autoren nur eine numerische Lösung angeben.

Mit dem optimalen Zeitpunkt für den Kauf einer Rentenversicherung hat sich unter anderem Stabile (2006) beschäftigt. Die Autorin kommt zu dem Ergebnis, dass die Verrentung des vorhandenen Kapitals erst dann optimal ist, wenn das Vermögen im Ruhestand eine gewisse Barriere überschreitet, die abhängig von den wirtschaftlichen Parametern des Modells ist.

Moore und Young (2006) untersuchten das zusätzliche Risiko eines versicher-

baren Verlustes und dem daraus resultierenden optimalen Einsatz von Konsum, Investment und Versicherung als Schutz. Die optimalen Strategien der analytisch lösbaren Modelle sind zeitunabhängig und proportional zum aktuellen Vermögen.

Sennewald (2006) behandelt unter anderem ein optimales Konsum- und Investment-Problem unter Lévy-Unsicherheit. Der Autor gibt keine explizite Lösung, aber eine ausführliche Darstellung des Verhaltens der Kontrollparameter Konsum und Investment mittels Keynes-Ramsey Regeln an. Keynes-Ramsey Regeln erklären nicht den expliziten Verlauf des optimalen Konsums  $C(t)$  über die Zeit, sondern beschreiben die marginale Änderung  $\frac{dc(t)}{c(t)}$  des Konsums über die Zeit in Abhängigkeit der Modellparameter. Für Nutzenfunktionen mit konstanter relativer Risikoaversion (CRRA) zeigt Sennewald z. B., dass umso mehr Konsum in die Zukunft verschoben wird, je höher der Zins auf dem Kapitalmarkt und je niedriger die persönliche Diskontierungsrate eines Individuums ausfallen.

Eine neuere Arbeit von Kraft und Steffensen (2008) behandelt die optimalen Konsum- und Versicherungsinvestment-Entscheidungen eines Individuums. Abgesehen von der dynamischen Steuerung des aktuellen Konsums muss das Individuum über den Kauf von Versicherungsleistungen entscheiden. Diese Leistungen sichern je nach Modell das Risiko der Arbeitslosigkeit, der Invalidität oder auch des Todes ab. Das Modell kann aber auch Rentenleistungen zur Altersversorgung abdecken. Zu jedem Zeitpunkt entscheidet das Individuum über die zukünftigen optimalen Leistungen im Versicherungsfall. Die Autoren modellieren die verschiedenen Lebensphasen, die die Risiken Eintritt von Arbeitslosigkeit, Invalidität und Tod beschreiben, über einen stetigen Markov-Prozess. Die sehr allgemeinen Modellannahmen von Kraft und Steffensen ergeben für den optimalen Konsum das gleiche Muster, das bereits Merton in seinen Arbeiten (1969, 1971) ermittelt hat: Der Konsum ist linear abhängig vom Vermögen zum Zeitpunkt der Entscheidung. Die Entscheidung über die optimale Absicherung der verschiedenen Risiken ist stark von der konkreten Modellierung beeinflusst und lässt sich nicht allgemein beschreiben. Riskantes Investment wird von den Autoren in ihrem Modell nicht betrachtet.

In einer weiteren Arbeit von Nielsen und Steffensen (2008) wird die optimale Höhe einer Risikolebensversicherung mit gleichzeitiger optimaler Steuerung von riskantem Investment untersucht. Das Individuum kann hierbei über die

Anlage seiner Reserve beim Versicherungsunternehmen entscheiden. Für unbeschränkte Versicherungssummen kommen die Autoren zu einem bekannten Ergebniss von Merton (1971): Das optimale Investment ist proportional zum aktuellen Vermögen plus dem Barwert der zukünftigen Einnahmen bzw. in diesem Fall der zukünftigen Prämien. Die optimale Versicherungssumme ist stets die Summe aus aktueller Reserve und dem Barwert der zukünftigen Prämien (gewichtet mit einer Konstante abhängig von Risikoaversion, Kapitalmarktparameter, usw.).

Purcal und Pigott (2008) untersuchen ebenfalls die optimale Kaufentscheidung bezüglich Lebens- und Rentenversicherungen in Kombination mit optimalem Konsum und optimalem riskanten Investment und die tatsächliche geringe Nachfrage nach Versicherungen speziell im japanischen Markt. Sie kommen zu dem Ergebnis, dass ein allgemein vorherrschendes Vererbungsmotiv und die vorhandene Sozialversicherung die Nachfrage nach Rentenversicherungen senken.

Aus vorstehender Übersicht wird deutlich, dass die betrachteten Modelle in den vergangenen 40 Jahren stetig komplexer wurden, beginnend mit einer einfachen Brownschen Bewegung für die Modellierung des Aktienprozesses in Merton (1969) bis zu Sprung- und Markovprozessen, um diverse zusätzliche Aspekte abzubilden. Auf Grund der Komplexität ist es inzwischen nicht mehr für alle Aufgabenstellungen möglich, eine explizite analytische Lösung für die diversen stochastischen Optimierungsprobleme zu finden. Daher werden numerische Methoden zur Lösung herangezogen.

Ein sehr effizientes Verfahren stellt das Markov-Ketten-Approximationsverfahren von Kushner und Dupuis (1992) dar. Dieses Verfahren wird auch in vorliegender Arbeit angewendet, um Aussagen über den Verlauf der optimalen Strategien treffen zu können. Erstmals wurde diese numerische Lösungsmethode im Artikel Kushner (1977) vorgestellt. Moore und Young (2006) verwenden für die Modell-Varianten, die sie nicht analytisch lösen können, ebenfalls das Markov-Ketten-Approximationsverfahren von Kushner und Dupuis.

Auch Purcal und Wang (2005) setzen dieses numerische Verfahren in ihrer Arbeit über optimalen Konsum ein. Sie verwenden ein Modell, in dem abweichend von vorangegangenen Ansätzen der Aktienpreis einem Sprungprozess folgt. Die Autoren können anhand der numerischen Lösung Aussagen über optimales Investment in eine riskante Anlage, optimalen Konsum und

optimale Kaufentscheidungen bezüglich Renten- und Lebensversicherungen treffen.

Munk (2003) hat anhand des Markov-Ketten-Approximationsverfahrens die Ergebnisse von Merton (1969) numerisch bestätigt. Durch den direkten Vergleich der analytischen mit der numerischen Lösung kann Munk auch die Schwächen des numerischen Verfahrens aufzeigen, die unter anderem in der notwendigen Beschränkung des Wertebereiches des Vermögensprozesses begründet liegen.

## 1.4 Motivation und Ziel der Arbeit

In der vorliegenden Arbeit soll untersucht werden, ob und wie durch den gezielten Einsatz von Zeit (im Sinne von Verzicht auf Freizeit) für die Altersvorsorge ein Individuum einen, über seine gesamte Lebenszeit gemessenen, größeren Gesamtnutzen erreichen kann.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist das Aufstellen eines Modells, in das auf Zeitguthaben basierende Versorgungsformen integriert werden können. Es soll untersucht werden, wie sich die Einführung eines Zeitguthabens auf das Konsum- und Anlageverhalten eines Individuums auswirkt. Ein wichtiger Bestandteil des Modells ist die reine Verbuchung der Hilfsleistungen auf einem Zeitkonto, da das Konvertieren der Stunden in Landeswährung das Problem zu einem bereits in der Vergangenheit oft untersuchten Optimierungsproblem mit reinen Konsum- und Investitionsentscheidungen reduziert.

Die Intention ist, in einer Modellumgebung zu testen, unter welchen vereinfachten Rahmenbedingungen ein Individuum sich optimalerweise dafür entscheidet, statt Vorsorge in finanzieller Form zu betreiben (z. B. durch Verzicht auf Konsum), Freizeit für eine aktive Absicherung im Alter aufzugeben. Dies soll alternativen Beschäftigungsformen für Ältere eine positive Motivation geben und zeigen, dass werteschaftendes Engagement auch außerhalb der traditionellen (Kapital-)Märkte möglich ist.

## 1.5 Kapitel-Organisation

Kapitel 2 beschreibt das mathematische Modell, in das das Optimierungsproblem eingebettet wird. Dazu werden die stochastischen Prozesse, die die

Veränderung der Grundgrößen wie Aktienpreis, Entwicklung der Lebenssituation des Individuums usw. beschreiben, definiert. Als Maß für den Erfolg einer Strategie wird der zukünftige Nutzen des Individuums betrachtet. Um die Wirkung der Entscheidungen zu bewerten, wird die Erwartungsnutzentheorie nach Neumann und Morgenstern (von Neumann und Morgenstern, 1953) eingesetzt. Das Optimierungsproblem wird mathematisch über eine Zielfunktion formuliert.

Kapitel 3 beschreibt die Grundsätze der Optimierungstheorie und gibt wichtige formale Voraussetzungen zur Lösung des Problems. Über den Vermögensprozess wird aus dem Optimierungsproblem eine zugehörige Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung (HJB) hergeleitet. Mittels eines Verifikationstheorems wird nachgewiesen, dass die Lösung der HJB eines vereinfachten Ausschnitts des Problems genau die Lösung des Ausschnitts des Optimierungsproblems darstellt. Zusätzlich wird eine analytische Lösung für ein vereinfachtes Modell hergeleitet und gezeigt, dass für das komplette Modell keine geschlossene Lösung bestimmt werden kann.

In Kapitel 4 wird ein diskretes Modell eingeführt und das Optimierungsproblem in diesem diskreten Umfeld neu formuliert, da das System der HJB-Gleichungen aus Kapitel 3 analytisch nicht lösbar ist. Es wird gezeigt, dass das Modell den Voraussetzungen des Markov-Ketten-Approximations-Verfahrens (Kushner und Dupuis, 1992) genügt. Durch die Anwendung des Verfahrens ist gewährleistet, dass die Lösung des diskreten Modells die Lösung des stetigen Modells approximiert.

In Kapitel 5 werden die Ergebnisse der numerischen Berechnungen dargestellt. Zu Beginn des Kapitels werden anhand des Vergleichs der analytischen und numerischen Lösung eines stark vereinfachten Modells die nötigen Wertebereiche und Diskretisierungsweiten für eine akzeptable Näherung der numerischen Lösung ermittelt. Die Ergebnisse werden mit vorliegenden Lösungen älterer Arbeiten verglichen. Für eine Vielzahl von Parameterbelegungen werden die optimalen Strategien berechnet und bewertet.

Kapitel 6 fasst die Erkenntnisse zusammen und gibt einen Ausblick über mögliche zukünftige Erweiterungen des Modells und Ansatzpunkte für weitere Forschungsarbeiten.

## Kapitel 2

# Mathematische Modellierung

In Kapitel 2 werden die Modellannahmen eingeführt, auf denen das Optimierungsproblem aufbaut. Ausgangspunkt ist ein Individuum, dem eine zweidimensionale Ressource zur Verfügung steht, aus der Konsum generiert werden kann. Ziel ist es, den zukünftigen diskontierten, kumulierten Nutzen aus diesem Konsum über die weitere ungewisse Lebenszeit zu maximieren.

Das Individuum ist verschiedenen Risiken ausgesetzt. Abgesehen von der Sterblichkeit besteht die Gefahr von Arbeitslosigkeit und Inaktivität. Der Zustand Inaktivität wird bewusst allgemein gehalten. Jeglicher Status, in dem Unterstützung gemäß Kapitel 1 nötig oder hilfreich sein kann, ist hier denkbar. Passend zu den Beispielen aus Abschnitt 1.2 wäre eine Vorstufe zur Pflegebedürftigkeit bedingt durch körperlichen Verfall im Alter möglich. Inaktivität könnte aber auch Invalidität in Folge von Krankheit oder Unfall bedeuten. Die einzige Einschränkung, die das Modell beinhaltet, ist die Unumkehrbarkeit des Übergangs. Eine Reaktivierung ist somit ausgeschlossen.

Der Zustand des Individuums wird durch einen zeitstetigen Markov-Prozess mit diskretem Zustandsraum dargestellt. Zusätzliche zu modellierende stochastische Vorgänge sind ein Aktienpreisprozess und mögliche schockartige Verluste auf dem Zeitkonto. Außerdem werden die Nutzenfunktionen definiert, die als Maß für die Lebensqualität des Individuums und damit für den Erfolg der Investitions- und Konsumstrategien verwendet werden. Am Ende des Kapitels wird das Optimierungsproblem aufgestellt und die Zielfunktion formuliert.

## 2.1 Grundlagen stochastischer Modellierung

Im Folgenden werden einige wichtige Grundlagen für die Arbeit mit stochastischen Prozessen aufgeführt. Ross (1983) oder Protter (1990, Kap. I) geben zum Beispiel eine ausführliche Einführung in stochastische Prozesse. Speziell für Sprungprozesse ist Øksendal und Sulem (2005) empfehlenswert.

Es existiere ein Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Auf diesem Wahrscheinlichkeitsraum sei eine Filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, \infty)}$  gegeben.  $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, \infty)}$  sei rechtsstetig, d. h.  $\mathcal{F}_t = \bigcap_{u > t} \mathcal{F}_u$ .

**Definition 2.1.1** *Ein stochastischer Prozess ist eine Sammlung von Zufallsvariablen  $\{X(t), 0 \leq t < \infty\}$ . Der Prozess  $X$  wird **adaptiert** genannt, wenn  $X(t) \in \mathcal{F}_t$ , d. h.  $X(t)$  ist  $\mathcal{F}_t$ -messbar für alle  $t$ .*

**Definition 2.1.2** *Ein stochastischer Prozess  $\{Z(t), 0 \leq t < \infty\}$  mit endlichem Zustandsraum ist ein **zeitstetiger regulärer Markov-Prozess**, wenn für alle Zeitpunkte  $s, t \geq 0$  und nicht-negative Zahlen  $z, l, i(u)$  mit  $0 \leq u < s$  gilt*

$$\begin{aligned} P\{Z(t+s) = l | Z(s) = z, Z(u) = i(u), 0 \leq u < s\} \\ = P\{Z(t+s) = l | Z(s) = z\}, \end{aligned}$$

*d. h. die Wahrscheinlichkeit für den Prozess einen zukünftigen Zustand  $l$  zu erreichen, hängt lediglich vom Zustand im aktuellen Zeitpunkt ab und nicht von der Entwicklung in der Vergangenheit.*

Die Übergangsraten  $\lambda_{ij}(t)$ ,  $i, j = 0, 1, 2, 3$  sind zeitabhängig. Für  $\lambda_{ij}(t)$  gilt

$$\lambda_{ij}(t) = \lim_{dt \rightarrow 0} P\{Z(t+dt) = j | Z(t) = i\} / dt.$$

Die sofortige Wahrscheinlichkeit, zum Zeitpunkt  $t$  den Zustand  $i$  zu verlassen, ist

$$\lambda_i(t) = \sum_{j \neq i} \lambda_{ij}(t).$$

**Definition 2.1.3** *Ein Zustand  $i$  wird **absorbierend** genannt, wenn  $\lambda_{ij}(t) = 0 \forall j \neq i$ , d. h.  $\lambda_i(t) = 0$  gilt.*

**Definition 2.1.4** Ein adaptierter Prozess  $B(t)$  ist eine **n-dimensionale Brownsche Bewegung**, wenn gilt:

- (i)  $B(t) - B(s)$  ist für  $0 \leq s < t < \infty$  unabhängig von  $\mathcal{F}_s$  und
- (ii)  $B(t) - B(s)$  ist für  $0 < s < t$  eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert  $\mu = 0$  und Varianzmatrix  $(t - s)\Sigma$ .

Mit  $\Sigma = I$  (Einheitsmatrix) ist  $B(t)$  eine standardisierte Brownsche Bewegung.

**Definition 2.1.5** Ein stochastischer Prozess  $\{N(t), t \geq 0\}$  wird **Zählprozess** genannt, wenn gilt

- (i)  $N(0) = 0$ ,
- (ii)  $N(t) \in \mathbb{N}$  und
- (iii)  $N(s) \leq N(t)$ , für  $s < t$ .

**Definition 2.1.6** Ein Zählprozess ist ein **Poisson-Prozess** mit Intensität  $\lambda$ , wenn zusätzlich gilt

- (i)  $N(0) = 0$ ,
- (ii) der Prozess hat unabhängige Zuwächse und
- (iii) die Anzahl der Ereignisse in einem beliebigen Intervall der Länge  $t$  ist Poisson-verteilt mit Erwartungswert  $\lambda t$ .

Für die heuristische Herleitung der Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung in Kapitel 3 und für die Festlegung der Übergangswahrscheinlichkeiten der diskreten Approximation des Vermögensprozesses  $\mathbf{X}(t)$  und  $Z(t)$  in Kapitel 4 wird der folgende Satz über Eigenschaften von Poisson-Prozessen benötigt. Ein Beweis des Satzes findet sich in Rolski et al. (1999).

**Satz 2.1.7** Sei  $\{N(t), t \geq 0\}$  ein Zählprozess, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent

- (i)  $\{N(t)\}$  ist ein Poisson-Prozess mit Intensität  $\lambda$  und
- (ii)  $\{N(t)\}$  hat stationäre und unabhängige Schrittweiten und erfüllt für  $h \rightarrow 0$

$$P(N(h) = 0) = 1 - \lambda h + o(h) \quad \text{und} \quad P(N(h) = 1) = \lambda h + o(h).$$

## 2.2 Anwendung

Nachfolgend wird der Einsatz der im vorherigen Abschnitt 2.1 definierten stochastischen Prozesse im Modell erläutert. Außerdem werden weitere notwendige Festlegungen vorgenommen.

### 2.2.1 Zustand des Individuums

Auf dem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  existiere der stochastische Prozess  $\{Z(t), 0 \leq t\}$ , der Werte aus der endlichen Menge  $\mathcal{J} = \{0, 1, 2, 3\}$  annimmt. Der Prozess startet zum Zeitpunkt  $t = 0$  in Zustand  $Z(0)$ . Der Prozess  $\{Z(t), 0 \leq t\}$  sei ein Markov-Prozess.

Abbildung 2.1 zeigt die möglichen Zustände, in denen sich das Individuum befinden kann, sowie zulässige Übergänge zwischen diesen Zuständen. Zustand 3 ist absorbierend.

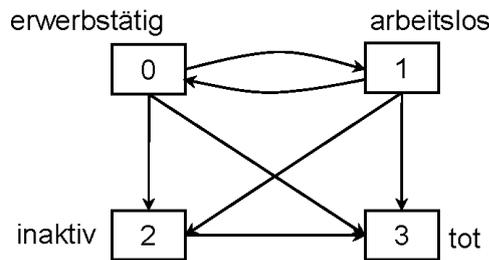


Abbildung 2.1: Zustandsraum von  $Z(t)$  und Übergangsmöglichkeiten

Die Matrix

$$\Lambda(t) = \begin{pmatrix} -\lambda_0(t) & \lambda_{01}(t) & \lambda_{02}(t) & \lambda_{03}(t) \\ \lambda_{10}(t) & -\lambda_1(t) & \lambda_{12}(t) & \lambda_{13}(t) \\ 0 & 0 & -\lambda_2(t) & \lambda_{23}(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

beschreibt die Übergangsintensitäten  $\lambda_{ij}(t)$  des Markov-Prozesses.

### 2.2.2 Der Einkommensprozess

Das Individuum besitzt in Zustand 0 eine konstante Lohnrate  $g(0)$ , die anteilig entsprechend der geleisteten Arbeitszeit gezahlt wird. Die Arbeitszeit wird

durch die dynamische Steuervariable  $b(\cdot)$  dargestellt. In Zustand 1 (arbeitslos) erhält das Individuum einen konstanten, stetigen Geldzufluss in Höhe von  $g(1)$ . Die Anwendung legt nahe, dass  $g(0) > g(1)$  gilt. In Zustand 2 und 3 ist das Einkommen konstant 0.

Zusammengefasst ist der Einkommensprozess beschrieben durch

$$E(Z(t), t) = \begin{cases} g(0)b(\cdot), & Z(t) = 0 \\ g(1), & Z(t) = 1 \\ 0, & Z(t) = 2, 3 \end{cases} .$$

Für  $b(\cdot)$  gilt aus der Anwendung heraus  $0 \leq b(\cdot) \leq 1$ . Bei Vollzeittätigkeit gilt  $b(\cdot) = 1$ . Um im Modell eine vom Markt, also exogen, möglicherweise eingeschränkte Arbeitszeit vorgeben zu können, wird für  $b(\cdot)$  eine obere Schranke  $K_b(0)$  definiert. Die Schranke beschreibt den Teilzeitgrad der verfügbaren Arbeit. Sie kann mit Werten zwischen 0 und 1 belegt werden.

### 2.2.3 Der Vermögensprozess

Als nächstes wird der zweidimensionale Prozess für die Modellierung des Vermögens des Individuums betrachtet.  $\mathbf{X} = \{\mathbf{X}(t), t \leq 0\}$  mit  $\mathbf{X}(t) \in \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^2$  beschreibt das Kapital des Individuums in monetären Einheiten und Zeiteinheiten zu jedem gegebenen Zeitpunkt  $t$ .

Für die Modellierung des Prozesses müssen die bestimmenden Größen für den Geld- und Zeitmarkt festgelegt werden.

Das Geldvermögen, abgebildet in der ersten Dimension von  $\mathbf{X}(t)$ , wird abgesehen durch den Zufluss aus Einkommen und den Abfluss durch Konsum von den Anlagemöglichkeiten des monetären Kapitals beeinflusst. Das Individuum bewegt sich in einem friktionslosen Markt für Wertpapiere. In diesem Markt fallen keine Transaktionskosten an, es kann in beliebiger Stückelung ge- und verkauft werden und Leerverkäufe in unbeschränkter Höhe sind zulässig. Handel ist zu jedem beliebigen Zeitpunkt  $t$  möglich. In diesem Kapitalmarkt werden ein risikobehaftetes Wertpapier (z. B. Aktie) mit Preisprozess  $S(t)$  und ein risikoloses Wertpapier (z. B. deutsche Staatsanleihe) mit Preisprozess  $R(t)$  gehandelt. Für  $R(t)$  gilt

$$dR(t) = r(t)R(t)dt,$$

mit deterministischer Zinsrate  $r(t) > 0$  und Startpreis  $R(0) = R_0$ .

$S(t)$  folgt einer geometrischen Brownschen Bewegung mit Drift  $\mu(t) > r(t)$  und Varianz  $\sigma(t) > 0$ , Startpreis ist  $S(0) = S_0$ . Damit sind die Dynamik von  $S(t)$  durch

$$dS(t) = \mu(t)S(t)dt + \sigma(t)S(t)dB_1(t)$$

und  $S(t)$  selbst durch

$$S(t) = S_0 \exp \left[ \left( \mu(t) - \frac{\sigma(t)^2}{2} \right) t + \sigma(t)B_1(t) \right]$$

beschrieben.  $B_1(t)$  ist eine eindimensionale standardisierte Brownsche Bewegung.

Die zweite Dimension des Prozesses  $\mathbf{X}(t)$  beschreibt das Vermögen in Zeiteinheiten. Das Zeitvermögen wächst durch Akkumulation der investierten Freizeit, es wird jedoch kein Zins erwirtschaftet. Die zugrunde liegende Annahme ist, dass das Zeitvermögen keinem Inflationsrisiko unterliegt (vgl. hierzu Kennedy (2005)). Das Zeitguthaben ist jedoch einem Entwertungsrisiko ausgesetzt. Die Entwertung geschieht schockartig in Sprüngen. Durch das Entwertungsrisiko soll der Tatsache Rechnung getragen werden, dass eine dauerhafte Absicherung der Ansprüche aus dem Zeitguthaben nur schwer realisiert werden kann (vgl. die Ausführungen in Abschnitt 1.2). Mögliche Verluste werden mittels eines Sprung-Prozesses modelliert. Das Auftreten der Sprünge wird durch einen Poisson-Prozess  $N(t)$  mit Intensitätsrate  $\lambda$  abgebildet, die Sprunghöhen sind deterministischer Natur und werden durch  $-\beta X_2(t)$  dargestellt. Im Falle eines Sprungs in  $N(t)$  verliert das Vermögen  $\mathbf{X}(t)$  in der zweiten Dimension somit  $\beta \cdot 100\%$  seines aktuellen Wertes. Der Verlust wird auf  $100\%$  beschränkt, d. h.  $0 \leq \beta \leq 1$ , um negatives Zeitguthaben auszuschließen. Es sei hier auch darauf hingewiesen, dass kein Markt für den Handel des Zeitguthabens existiert. Somit kann das Risiko des Verlustes in Zeit nicht durch Umwandlung des Guthabens in Geldeinheiten eliminiert werden.

Der Zustand des Vermögensprozesses wird durch die Wahl der dynamischen Steuervariablen  $\mathbf{c}(\cdot) : \mathbb{R}^2 \times \mathcal{J} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $a(\cdot)$ ,  $b(\cdot)$ ,  $\theta(\cdot) : \mathbb{R}^2 \times \mathcal{J} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  beeinflusst. Die Kontrollprozesse werden als adaptiert und cadlag angenommen. Zum Zeitpunkt  $t$  sind nur Strategien aus dem konvexen Kontrollraum  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^5$  erlaubt.

Der Vektor  $\mathbf{c}(\cdot) \in \mathbb{R}^2$  beschreibt den Konsum des Individuums in Geld- und Zeiteinheiten. Die erste Dimension  $c_1(\cdot, z)$  gibt den monetären Konsum zum Zeitpunkt  $t$  bei Zustand  $Z(t) = z$  an.  $c_2(\cdot, z)$  drückt den Konsum von Zeiteinheiten zum Zeitpunkt  $t$  aus. Der Konsum von Zeit soll auf den Zustand 2 beschränkt sein, d. h. es wird festgelegt, dass  $c_2(\cdot, z) = 0$  für  $z = 0$  oder 1. In Zustand 2 ist Konsum von Zeit möglich, jedoch ist es bedingt durch die Anwendung zweckmäßig, die Konsumrate auf maximal  $K_{c_2}$  einzuschränken, d. h.  $0 \leq c_2(\cdot, z) \leq K_{c_2}$ . So sollte  $K_{c_2}$  beispielsweise auf keinen Fall größer als 2 sein, da dies eine 100 %-ige Beschäftigung von zwei Personen rund um die Uhr bedeutet. Abgeleitet aus der realen Welt ist es naheliegend, einen Wert kleiner als 1 anzunehmen.

$a(\cdot, z)$  ist der Anteil an freier Zeit, den das Individuum in Zustand  $z = 0$  oder 1 zum Zeitpunkt  $t$  aufgibt oder „investiert“. Da Freizeit nicht geliehen und keine Leerverkäufe darüber abgeschlossen werden können, ist die Investitionsrate auf das Intervall  $[0, 1]$  beschränkt.

Auch für den Steuerparameter  $a(\cdot)$  soll gegebenenfalls eine exogene Beschränkung abgebildet werden können. Die obere Schranke wird mit  $K_a(z)$ ,  $z = 0, 1$  bezeichnet. Für  $K_a(z)$  gilt  $K_a(z) \in [0, 1]$ .  $K_a(z) = 0$  entspricht dem Nicht-Vorhandensein der alternativen Möglichkeit, Zeit zu investieren.

In Zustand  $z = 2$  kann Freizeit wegen der angenommenen körperlichen eingeschränktheit nicht mehr investiert werden, d. h.  $a(\cdot, 2) = 0$ .

Der Steuerparameter  $b(\cdot)$  beschreibt, wie bereits unter Abschnitt 2.2.2 erläutert, den Arbeitszeit-Anteil, den das Individuum wählt. Da nur in Zustand 0 Arbeitszeit geleistet werden kann, ist  $b(\cdot, z) \equiv 0$  für  $z \neq 0$ .

$l(\cdot) = 1 - a(\cdot) - b(\cdot)$  beschreibt somit die verbleibende Freizeit des Individuums unter Berücksichtigung der Arbeitszeit und der geleisteten freiwilligen Arbeit.

Mit  $\theta(\cdot)$  wird der Anteil am Vermögen bezeichnet, den das Individuum in das riskante Wertpapier zum Zeitpunkt  $t$  investiert.  $\theta(\cdot)$  wird keiner Beschränkung unterworfen, d. h. Leerverkäufe des Wertpapiers ( $\theta(\cdot) < 0$ ) und Investment von mehr als 100 % des Geldvermögens in das Wertpapier ( $\theta(\cdot) > 1$ ) sind grundsätzlich erlaubt. Im Falle von  $\theta(\cdot) > 1$  entspricht der Leihzins genau  $r(t)$ .

Das Tupel der Steuervariablen  $\mathbf{c}(\cdot), a(\cdot), b(\cdot), \theta(\cdot)$  soll im Folgenden mit  $\mathbf{C}(\cdot)$  bezeichnet werden.

Im Zustand  $Z(t) = 3$  sind alle Steuervariablen identisch 0, da in Zustand „Tod“ das Kontrollproblem endet.

Die Dynamik von  $\mathbf{X}(t)$  bzw. die Budgetrestriktion stellt sich folgendermaßen dar:

$$d\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} -c_1(\cdot) + E(Z(t), t) + (r(t) + (\mu(t) - r(t))\theta(\cdot)) X_1(t) \\ -c_2(\cdot) + a(\cdot) \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} \theta(\cdot)\sigma(t)X_1(t) \\ 0 \end{pmatrix} dB(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ -\beta X_2(t_-) \end{pmatrix} dN(t) \quad (2.1)$$

$B(t)$  ist eine zweidimensionale Brownsche Bewegung mit unabhängigen Komponenten, wobei für die vorliegende Anwendung  $B_2(t)$  als degeneriert angenommen wird.  $N(t)$  ist ein zweidimensionaler Poisson-Prozess ebenfalls mit unabhängigen Komponenten. Hier soll  $N_1(t)$  degeneriert sein.

Für den weiteren Verlauf der Arbeit werden die folgenden in  $\mathbf{x}$  stetigen Funktionen definiert  $f_i : \mathbb{R}^l \times \mathcal{J} \times [0, \infty) \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^2, i = 1, 2, 3$ .

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{x}, z, t, \mathbf{C}(\cdot)) &= \begin{pmatrix} -c_1(\cdot) + E(z, t) + (r(t) + (\mu(t) - r(t))\theta(\cdot)) x_1 \\ -c_2(\cdot) + a(\cdot) \end{pmatrix} \\ f_2(\mathbf{x}, t, \mathbf{C}(\cdot)) &= \begin{pmatrix} \theta(\cdot)\sigma(t)x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ f_3(\mathbf{x}, t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\beta x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## 2.2.4 Die Nutzenfunktionen

Das Optimierungsproblem wird auf Grundlage der Erwartungsnutzentheorie formuliert. Die Erwartungsnutzentheorie fußt auf der Annahme, dass ein rationaler Entscheider nicht auf der Basis von maximierten reinen Erwartungswerten über den Einsatz verschiedener Optionen entscheidet, sondern den Wert des erwarteten Nutzen aus den Konsequenzen dieser Optionen maximiert.

Diese Hypothese wurde zuerst von Bernoulli (1954) formuliert. Dazu muss vorausgesetzt werden, dass der Entscheider über eine rationale Präferenzenrelation  $\succeq$  auf der Menge der zur Verfügung stehenden Aktionen  $\mathcal{O}$  mit zugehöriger Ergebnismenge  $\mathcal{E}$  verfügt. Diese Präferenzenrelation wird durch eine

Nutzenfunktion  $u : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$  repräsentiert. Für zwei verschiedene Aktionen  $O_1$  und  $O_2$  gilt

$$O_1 \succeq O_2 \Leftrightarrow E[u(O_1)] \geq E[u(O_2)].$$

Von Neumann und Morgenstern (1953) haben die Annahme Bernoullis zur Erwartungsnutzentheorie weiterentwickelt. Sie beweisen die Existenz einer Nutzenfunktion für einen rationalen Entscheider genau dann, wenn die folgenden Axiome zutreffen:

- (i) Vollständigkeit der Ordnung, d. h.  $\forall O_1, O_2 \in \mathcal{O}$  gilt entweder  $O_1 \succeq O_2$  oder  $O_2 \succeq O_1$ ,
- (ii) Transitivität, d. h. wenn  $O_1 \succeq O_2$  und  $O_2 \succeq O_3$ , dann gilt auch  $O_1 \succeq O_3$ ,
- (iii) Kontinuität, d. h. zu jedem Tripel  $(O_1 \succeq O_2 \succeq O_3)$  existiert ein  $0 \leq \alpha \leq 1$ , so dass  $\alpha O_1 + (1 - \alpha)O_3 \sim O_2$ <sup>1</sup> und
- (iv) Unabhängigkeit, d. h.  $\forall O_1, O_2, O_3 \in \mathcal{O}$  und alle  $0 \leq \alpha \leq 1$  gilt  $O_1 \succeq O_2$  genau dann, wenn  $\alpha O_1 + (1 - \alpha)O_3 \succeq \alpha O_2 + (1 - \alpha)O_3$ .

Rationale Entscheider variieren in ihrem Verhalten, das durch wahrgenommenes Risiko gesteuert wird. Unterschiedliches Risikoverhalten kann innerhalb der Erwartungsnutzentheorie mittels der Form der Nutzenfunktion abgebildet werden. Ein risikoaverser Entscheider wird stets den Nutzen aus dem erwarteten Ausgang des Ereignisses dem erwarteten Nutzen eines ungewissen Ereignisses vorziehen. Mit anderen Worten, anstatt eine Lotterie zu spielen, um einen Gewinn zu erzielen, wird er stets den reinen Erwartungswert des Ergebnisses favorisieren. Dies ist gleichbedeutend mit Jensens Ungleichung

$$u[E(X)] \geq E[u(X)]. \quad (2.2)$$

Aus Jensens Ungleichung folgt, dass ein Entscheider genau dann risikoavers ist, wenn seine Nutzenfunktion  $u$  konkav ist. Gilt in (2.2) die Gleichheit, so ist der Entscheider risikoneutral und seine Nutzenfunktion  $u$  linear. Gilt die Ungleichung in entgegengesetzter Richtung, so ist der Entscheider risikofreudig und  $u$  ist konvex.

---

<sup>1</sup> $O_1 \sim O_2$  bedeutet Äquivalenz der beiden Aktionen  $O_1$  und  $O_2$

Im vorliegenden Optimierungsproblem wird Nutzen über die Zeit durch stetigen Konsum generiert. Vorausgesetzt wird dabei, dass Nutzen zeitseparierbar ist, d. h.  $u(\{c(t), t \geq 0\}) = \int_0^\infty u(c(t))dt$ .

In Zustand  $Z(t) = 0$  bzw.  $Z(t) = 1$  ist Konsum nicht der einzige Nutzenstifter. Da gleichzeitig über die zu genießende Freizeit entschieden werden muss, hat die Nutzenfunktion beide Input-Güter, d. h. Geldkonsum und Freizeit, zu berücksichtigen.

Es ist in ökonomischen Modellen allgemein üblich, den simultanen Nutzen aus Freizeit und Konsum über eine Cobb-Douglas-Nutzenfunktion (CDN) zu messen. Beispiele finden sich in Seckin (2001), Eichenbaum et al. (1988) oder auch bei Philips (1978) in der speziellen Form einer Stone-Geary-Nutzenfunktion.

Die multiplikative Form berücksichtigt, dass Nutzen aus Konsum ohne zu Verfügung stehende Freizeit nicht generiert werden kann. Umgekehrt gilt, dass Freizeit ohne die Möglichkeit von Konsum keinen Nutzen herbeiführt. Es gibt unterschiedliche Darstellungen für eine CDN. Hier wird für eine möglichst einfache Umsetzung folgende Form

$$u(\mathbf{c}(\cdot), l(\cdot), z) = \frac{1}{\gamma_{z,1} \gamma_{z,2}} c_1(\cdot)^{\gamma_{z,1}} l(\cdot)^{\gamma_{z,2}}, \quad z \in \{0, 1\} \quad (2.3)$$

mit  $l(\cdot) = 1 - a(\cdot) - b(\cdot)$  verwendet. Dabei bezeichnet  $l(\cdot)$  die verbleibende Freizeit nach Einsatz der Arbeitszeit und Investition von Zeit.

Für  $\gamma_{z,1}, \gamma_{z,2} < 1$  ist das Individuum risikoavers bezüglich der Input-Güter Geld bzw. Zeit. Für  $\gamma_{z,1}, \gamma_{z,2} = 1$  ist das Individuum risikoneutral und die Power-Funktion geht in eine Log-Funktion über. Für Werte  $> 1$  ist das Individuum risikofreudig.

In Zustand  $Z(t) = 2$  ist Nutzen allein vom Konsum abhängig. Freizeit ist kein freier Entscheidungs-Parameter, da sowohl  $a(\cdot)$  als auch  $b(\cdot) = 0$  sind. Freizeit hat also den konstanten Wert 1 und ist somit als Input-Gut für die Nutzenfunktion irrelevant. Konsum wiederum ist additiv zusammengesetzt aus zwei unabhängigen Einheiten.

Bereits in Abschnitt 1.2 wurde festgelegt, dass das Zeitguthaben nicht in Geldeinheiten konvertiert werden kann. Wäre dies der Fall, so wäre die Existenz einer Funktion  $f(c_2(\cdot)) = c_1(\cdot)$ , die Konsum von Zeiteinheiten in Konsum von Geldeinheiten konvertiert, gesichert. Als Konsequenz könnte man ein ein-dimensionales Konsum-Kontrollproblem für das Geldvermögen ableiten. Die

Nutzenfunktion für den Zustand  $Z(t) = 2$  ließe sich somit folgendermaßen formulieren

$$u(\mathbf{c}(\cdot)) = \frac{1}{\gamma_3} (c_1(\cdot) + f(c_2(\cdot)))^{\gamma_3}. \quad (2.4)$$

Die Lösung des Kontrollproblems ergäbe sich dann nach Merton (1969), Merton (1971) bzw. Sennewald (2006).

Da ohne Markt kein messbarer Zusammenhang  $f : c_2(\cdot) \rightarrow f(c_2(\cdot))$  existiert, bleiben lediglich theoretische Annahmen und Überlegungen, um eine geeignete Form der Nutzenfunktion festzulegen. Ein multiplikativer Ansatz analog der Nutzenfunktion für Zustand  $Z(t) = 0$  bzw.  $Z(t) = 1$  impliziert, dass Konsum in Höhe Null in einer der beiden Einheiten automatisch einen Gesamtnutzen ebenfalls in Höhe Null erzeugt. Dies ist von der Anschauung her für das Konsumgut „Zeit“ sicher nicht richtig. Null Konsum aus dem Zeitgut haben sollte nicht zur Folge haben, dass kein Gesamtnutzen mehr generiert wird.

Man könnte eine Form der Nutzenfunktion vertreten, mit der das gegenteilige Verhalten erzwungen wird: Bei Null Geldkonsum kann auch kein Nutzen aus Zeitkonsum generiert werden. Eine mögliche Form der Nutzenfunktion wäre  $u(\mathbf{c}(\cdot), z, t) = v_1(c_1(\cdot)) + v_2(c_1(\cdot)) \cdot v_3(c_2(\cdot))$  mit  $v_i(0) = 0$ . Natürlich sind auch viele andere (beliebig komplizierte) Formen denkbar, beispielsweise auch nicht-stetige Funktionen  $u(\mathbf{c}(\cdot)) = v_1(c_1(\cdot)) + v_2(c_2(\cdot)) \mathbb{1}_{c_1(\cdot) > 0}$  mit  $u((0, c_2(\cdot))^T) \equiv 0 \forall c_2(\cdot) > 0$ , d. h. für  $v_2(c_2(\cdot)) > 0 \forall c_2(\cdot) > 0$  und  $c_1(\cdot) = 0$  ist die Funktion singulär.

Da es in der Nutzentheorie keine vergleichbaren Ansätze gibt und diese bisher empirisch auch nicht hergeleitet wurden, soll hier ein pragmatischer, additiver Ansatz genügen:

$$u(\mathbf{c}(\cdot), 2) = \frac{1}{\gamma_3} c_1(\cdot)^{\gamma_3} + \frac{1}{\gamma_4} c_2(\cdot)^{\gamma_4} \quad (2.5)$$

mit  $\gamma_3$  und  $\gamma_4$  als Koeffizienten für die Risikoaversion bezüglich Geld- und Zeitvermögen.

Im Zustand 3 ist Nutzen lediglich durch Vererbung des vorhandenen Vermögens im Zeitpunkt des Todes  $\tau_d$ , d. h.  $\tau_d = \inf\{t < \infty, Z(t) = 3\}$ , zu generieren. Die Nutzenfunktion in Zustand 3 soll aus ähnlichen Überlegungen wie für die Nutzenfunktion in Zustand 2 folgendermaßen festgelegt werden

$$u(\mathbf{X}(\tau_d), 3) = \frac{X_1(\tau_d)^{\gamma_5}}{\gamma_5} + \frac{X_2(\tau_d)^{\gamma_6}}{\gamma_6}.$$

## 2.3 Das Kontrollproblem

Das Konzept der Kontrolle wird durch die Beeinflussung des Verhaltens eines dynamischen Systems mit der Absicht, ein bestimmtes Ziel zu erreichen, beschrieben. Wenn das Ziel die Optimierung einer erfolgsmessenden Funktion, z. B. einer Nutzenfunktion ist, dann spricht man von einem optimalen Kontrollproblem (Fleming und Soner, 1993).

Bei vorliegendem Kontrollproblem ist das Ziel des Individuums, den Nutzen aus diskontiertem erwarteten Konsum über die restliche Lebenszeit  $\tau_d$  zu maximieren.

Zur Verfügung stehen dem Entscheider dabei zum Zeitpunkt  $t$  ein Startkapital in Zeit- und Geldeinheiten in Höhe von  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ . Das Individuum befindet sich im Start-Zustand  $Z(t) = z$ . Wie im vorigen Abschnitt 2.2.4 beschrieben, wird von einer zeitseparierbaren Nutzenfunktion ausgegangen. Die persönliche Diskontierungsrate wird mit  $\rho(t)$  bezeichnet. Sei mit  $\mathbf{E}_{x,z}$  der Erwartungswert über alle Zufallsvariablen, bedingt durch die zum Zeitpunkt  $t$  verfügbaren Informationen, benannt.

Da die Dynamiken der Prozesse  $\mathbf{X}(t)$  und  $Z(t)$  zeitabhängig sind, muss auch die Wertfunktion zeitabhängig formuliert werden. Zusätzlich sind Nutzenfunktion und Steuerparameter abhängig vom Start-Zustand des Prozesses  $Z(t) = z$  im Zeitpunkt  $t$ . Man erhält die folgende Wertfunktion in Abhängigkeit von Startkapital  $\mathbf{x}$ , Start-Zustand  $z$  und  $t$ :

$$V(\mathbf{x}, z, t) = \sup_{\substack{(\mathbf{c}(\cdot), \theta(\cdot), a(\cdot), b(\cdot)) \\ \in \mathcal{A}(\mathbf{x}, z)}} \mathbf{E}_{x,z} \left[ \int_t^{\tau_d} e^{-\int_t^s \rho(v) dv} u(\mathbf{c}(\cdot, s), l(\cdot, s)) ds + e^{-\int_t^{\tau_d} \rho(v) dv} u(\mathbf{X}(\tau_d), 3) \mid \mathbf{X}(t) = \mathbf{x}, Z(t) = z \right]. \quad (2.6)$$

Für  $z = 3$  ist

$$V(\mathbf{x}, 3, t) = \begin{cases} \mathbf{E}_{x,z} u(\mathbf{X}(\tau_d), 3), & t = \tau_d \\ 0, & t > \tau_d \end{cases}. \quad (2.7)$$

$\mathcal{A}(\mathbf{x}, z)$  ist die Menge der zulässigen Kontrollfunktionen  $\mathbf{C} = (\mathbf{c}(\cdot), a(\cdot), b(\cdot), \theta(\cdot))^T$  für das gegebene Startkapital  $\mathbf{x}$  und  $Z(t) = z$ .

Eine Kontrollstrategie  $\mathbf{C}$  ist zulässig, wenn die durch (2.1) beschriebene Budgetrestriktion für diese Strategie eine eindeutige Lösung  $\mathbf{X}(t) \in \mathcal{S}$  für alle  $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$  besitzt (vgl. Øksendal und Sulem, 2005).

Es existieren verschiedene Arten von Kontrollfunktionen, die in Betracht gezogen werden (vgl. Øksendal, 2003, Sennewald, 2006):

- *Deterministische Strategien*, die nicht von  $\Omega$  abhängen,
- Strategien, die sich auf Basis von eingeschränktem Wissen über den Zustand des Systems ergeben und
- *Markovsche Strategien*, die lediglich vom aktuellen Zustand zum Zeitpunkt  $t$  abhängen. Der zugeordnete Prozess  $\mathbf{X}^{\mathbf{C}}(t)$  ist dann ein Markov Prozess.

Für den Beweis, dass eine existierende optimale Markovsche Strategie gleichzeitig immer die allgemeine optimale Kontrollfunktion aller zulässigen Strategien ist, siehe

- Øksendal (2003, Theorem 11.2.3) für den Fall einer reinen Diffusion mit beschränkter Stoppzeit und
- Sennewald (2006, Theorem 5, Kapitel 1) für den Fall eines Sprungprozesses ohne Diffusionsterm und mit unendlichem Horizont.

Durch Anwendung des in Kapitel 4 beschriebenen numerischen Verfahrens, werden für das numerische Problem stets „feedback“ Kontrollfunktionen ermittelt.

Im folgenden Kapitel werden analytische Werkzeuge zur Bearbeitung des beschriebenen Kontroll- und Optimierungsproblems vorgestellt. Weiterhin wird aufgezeigt, weshalb eine numerische Lösung und keine analytische Lösung ermittelt wird.



## Kapitel 3

# Grundlagen der Kontrolltheorie

Traditionell werden stochastische Kontrollprobleme über die mit dem Problem verbundene Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung (HJB) gelöst. Die HJB ist eine lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung. Sie enthält je nach Problemstellung Terme zur Infimums- oder Supremums-Bestimmung über einer Menge zulässiger Steuervariablen. Werden die optimalen Steuerungen über die unbekannte Wertfunktion ausgedrückt (dies geschieht durch Lösen der Extremwert-Terme), wird die HJB zu einer hochgradig nicht-linearen partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung ohne Extremwert-Terme. Sie ist analytisch nur selten lösbar.

Im Allgemeinen wird in einem weiteren Schritt nach Aufstellen der HJB über ein Verifikationslemma gezeigt, dass bei Existenz einer Lösung für die HJB diese genau die Lösung des ursprünglichen Optimierungsproblems ist. Voraussetzung für die Anwendung des Verifikationslemmas ist somit der Nachweis zumindest der Existenz einer analytischen Lösung der HJB. Für das vorliegende Optimierungsproblem kann keine analytische Lösung berechnet werden. Auch der Existenzbeweis einer Lösung kann nicht geführt werden. Dies ist nicht außergewöhnlich. Der Existenzbeweis scheitert häufig an der nicht vorhandenen Glattheit der Wertfunktion. In einigen Fällen ist es möglich zu zeigen, dass die Wertfunktion eine Viskositäts-Lösung der HJB ist. Für das vorliegende Problem ist dies nicht gelungen.

Auf Grund der Komplexität der HJB wird in Kapitel 4 auf ein numerisches Verfahren zur Lösung des Optimierungsproblems zurückgegriffen.

Für einen Ausschnitt des Optimierungsproblems, die Wertfunktion für Zu-

stand  $Z(t) = 2$ , lässt sich unter vereinfachten Annahmen die zugehörige analytisch HJB lösen. Das reduzierte Kontrollproblem wird behandelt, um einen Vergleich von analytischer und numerischer Lösung durchführen zu können. Anhand dieses Vergleiches lassen sich Rückschlüsse auf die Güte der numerischen Lösung des Gesamtproblems ziehen.

Zunächst wird in Abschnitt 3.1 heuristisch das System der Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichungen für das in Abschnitt 2.3 erläuterte Kontrollproblem hergeleitet. Abschnitt 3.4 beinhaltet die Lösung für einen Ausschnitt des Problems, die Wertfunktion für Zustand  $Z(t) = 2$ . Für die unter vereinfachten Annahmen hergeleitete Lösung der HJB wird in Abschnitt 3.3 ein Verifikationslemma aufgestellt, das zeigt, dass die Lösung der HJB die Wertfunktion des ursprünglichen Optimierungsproblems ist.

Wenn im Folgenden von einer Lösung für die Wertfunktion gesprochen wird, dann ist damit immer ein Tupel von Lösungen aus den Wertfunktionen jedes Zustandes  $Z(t) \in \mathcal{J}$  gemeint:  $\{V(\mathbf{x}, z, t), z \in \mathcal{J}\}$ .

### 3.1 Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung

In diesem Abschnitt wird die heuristische Herleitung der Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung für die Startzustände  $Z(t) = z \in \mathcal{J}$  dargestellt. Es ergibt sich ein Gleichungssystem mit je einer Gleichung für jeden Zustand  $z$ . Die Gleichungen für die verschiedenen Zustände sind interagierend. Für die Darstellung der Herleitung wird  $Z(t) = 0$  angenommen. Die Herleitung in den Zuständen  $Z(t) \in \{1, 2\}$  funktioniert analog und wird deswegen nicht aufgeführt.

Es wird ein kurzes Zeitintervall  $[t, t + dt]$  betrachtet, in dem konstante Strategien  $\mathbf{c}, a, b, \theta$  angewandt werden. In diesem Zeitintervall können verschiedene Ereignisse in den Prozessen  $Z(t)$  und  $N(t)$  auftreten:

- (1) Das Individuum wechselt von Zustand  $Z(t) = z$  nach  $Z(t + dt) = j$ ,  $N(t)$  ist unverändert,
- (2) das Zeitkonto erfährt einen Verlust auf Grund eines Sprunges in  $N(t)$ ,  $Z(t)$  ist unverändert,
- (3)  $Z(t)$  und  $N(t)$  ändern beide ihren Wert und

(4) weder  $Z(t)$  noch  $N(t)$  ändern ihren Wert.

Wegen der Unabhängigkeit von  $N(t)$  und  $Z(t)$  sowie Satz 2.1.7 gelten folgende Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse:

- (1)  $\lambda_{z_j}(t)dt + o(dt) \approx 1 - e^{-\lambda_{z_j}(t)dt} + o(dt)$
- (2)  $\lambda dt + o(dt) \approx 1 - e^{-\lambda dt} + o(dt)$
- (3)  $o(dt)$
- (4)  $1 - \left(\sum_{j \neq z} \lambda_{z_j}(t) + \lambda\right) dt + o(dt) \approx e^{-(\sum_{j \neq z} \lambda_{z_j}(t) + \lambda)dt} + o(dt)$

Zur Herleitung der HJB wird das Integral in (2.6) in die Abschnitte  $[t, t + dt]$  und  $[t + dt, \infty]$  aufgeteilt und approximiert. Ohne Beschränkung der Annahme gelte  $dt < \tau_u - t, \tau_i - t, \tau_d - t$ , mit  $\tau_u := \inf\{s \geq t : Z(s) = 1\}$ ,  $\tau_i := \inf\{s \geq t : Z(s) = 2\}$  und  $\tau_d := \inf\{s \geq t : Z(s) = 3\}$ .

$$\begin{aligned}
V(\mathbf{x}, 0, t) &= \sup_{(\mathbf{c}, \theta, a, b) \in \mathcal{A}(\mathbf{x}, 0)} \mathbf{E}_{\mathbf{x}, z} \left[ \int_t^{t+dt} e^{-\int_t^s \rho(v) dv} u(\mathbf{c}, l, z(s)) ds \right. \\
&\quad + \int_{t+dt}^{\tau_d} e^{-\int_{t+dt}^s \rho(v) dv} u(\mathbf{c}, l, z(s)) ds \\
&\quad \left. + e^{-\int_t^{\tau_d} \rho(v) dv} u(\mathbf{X}(\tau_d), 3) \mid \mathbf{X}(t) = \mathbf{x}, Z(t) = 0 \right] \\
&\approx \sup_{(\mathbf{c}, \theta, a, b) \in \mathcal{A}(\mathbf{x}, 0)} \mathbf{E}_{\mathbf{x}, z} \left[ u(\mathbf{c}, l, 0)dt + o(dt) + e^{-\int_t^{t+dt} \rho(v) dv} \right. \\
&\quad \left( (e^{-(\lambda_{01}(t) + \lambda_{02}(t) + \lambda_{03}(t) + \lambda)dt} + o(dt)) V(\mathbf{x}(t + dt), 0, t + dt) \right. \\
&\quad + (1 - e^{-\lambda_{01}(t)dt} + o(dt)) V(\mathbf{x}(t + dt), 1, t + dt) \\
&\quad + (1 - e^{-\lambda_{02}(t)dt} + o(dt)) V(\mathbf{x}(t + dt), 2, t + dt) \\
&\quad + (1 - e^{-\lambda_{03}(t)dt} + o(dt)) V(\mathbf{x}(t + dt), 3, t + dt) \\
&\quad + (1 - e^{-\lambda dt} + o(dt)) V(f_3(\mathbf{x}(t + dt)), 0, t + dt) \\
&\quad \left. \left. + o(dt) \sum_{i=1,2} V(f_3(\mathbf{x}(t + dt)), i, t + dt) \right) \right]
\end{aligned}$$

Division durch  $dt$ , Neusortierung der Terme und anschließender Grenzüber-

gang  $dt \rightarrow 0$  führen auf die HJB Gleichung für den Zustand  $Z(t) = 0$ :

$$\begin{aligned}
0 = \sup_{\mathbf{c}, \theta, a, b} & \left\{ u(\mathbf{c}, a, b, 0) - (\rho(t) + \lambda_{01}(t) + \lambda_{02}(t) + \lambda_{03}(t) + \lambda) V(\mathbf{x}, 0, t) \right. \\
& + \lambda_{01}(t) V(\mathbf{x}, 1, t) + \lambda_{02}(t) V(\mathbf{x}, 2, t) + \lambda_{03}(t) V(\mathbf{x}, 3, t) \\
& + \lambda V(f_3(\mathbf{x}), 0, t) \\
& + V_{x_1}(\mathbf{x}, 0, t) (-c_1 + b g(0) + (r(t) + \theta(\mu(t) - r(t))) x_1) \\
& \left. + V_{x_1 x_1}(\mathbf{x}, 0, t) \frac{1}{2} \sigma(t)^2 \theta^2 x_1^2 + V_t(\mathbf{x}, 0, t) + V_{x_2}(\mathbf{x}, 0, t) a \right\}
\end{aligned}$$

Für  $Z(t) = j \in \{1, 2\}$  ergeben sich ähnliche Gleichungen. Das Optimierungsproblem ist somit äquivalent zu einem System interagierender HJB Gleichungen, die simultan gelöst werden müssen.

**Definition 3.1.1** Für eine Funktion  $f : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C^2$  wird der infinitesimale Generator  $\mathcal{D}$  auf der stochastischen Differentialgleichung (2.1) definiert

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^{\mathbf{C}} f(\mathbf{x}, z, t) & := f_t(\mathbf{x}, z, t) + f_1(\mathbf{x}, z, t, \mathbf{C}) \cdot f_x(\mathbf{x}, z, t) \\
& + \frac{1}{2} f_2(\mathbf{x}, t, \mathbf{C}) \cdot f_2(\mathbf{x}, t, \mathbf{C})' \cdot f_{xx}(\mathbf{x}, z, t) \\
& + \lambda [f(f_3(\mathbf{x}, t), z, t) - f(\mathbf{x}, z, t)] \\
& + \sum_{j: j \neq z} \lambda_{zj} [f(\mathbf{x}, j, t) - f(\mathbf{x}, z, t)].
\end{aligned}$$

Die HJB Gleichungen in allgemeiner Schreibweise lauten

$$\rho V(\mathbf{x}, z, t) = \sup_{\mathbf{C}} \{ u(\mathbf{C}, z) + \mathcal{D}^{\mathbf{C}} V(\mathbf{x}, z, t) \} \quad (3.1)$$

mit  $\mathcal{D}^{\mathbf{C}} V(\mathbf{x}, z, t)$  gemäß Definition 3.1.1.

## 3.2 Analytische Lösung des vereinfachten Optimierungsproblems

Behandelt man das in Abschnitt 2.3 dargestellte Kontrollproblem in seiner ursprünglichen Form, so entstehen sehr komplizierte Nebenbedingungen für

die partiellen Differentialgleichungen (PDGlen), die sich aus den HJB durch Elimination des Maximierungsterms ergeben. Die PDGlen sind hochgradig nicht-linear und enthalten wiederum Extremwert-Terme. Eine analytische Lösung für das Tupel  $\{V(\mathbf{x}, z, t), z \in \mathcal{J}\}$  und daraus die optimalen Strategien  $\mathbf{C}^* = (\mathbf{c}(\cdot)^*, a(\cdot)^*, b(\cdot)^*, \theta(\cdot)^*)^T$  herzuleiten ist nicht möglich. Um eine numerische Lösung bestimmen zu können, wird das Problem in Kapitel 4 diskretisiert. Da die analytische Lösung unbekannt ist, kann nur indirekt ermittelt werden, welche Güte die numerische Lösung  $\{V(\mathbf{x}, z, t)^h, z \in \mathcal{J}\}$  hat.

Im weiteren Verlauf wird ein Teil des in Abschnitt 2.3 aufgestellten Problems, die Maximierung des zu erwartenden zukünftigen Nutzens für Start-Zustand  $Z(t) = 2$ , so vereinfacht, dass eine analytische Lösung der zugehörigen HJB ermittelt werden kann. Mit Hilfe dieser analytischen Lösung wird die Güte der numerischen Lösung abgeschätzt. Für die analytische Lösung kann über ein Verifikationslemma bewiesen werden, dass sie die Lösung des vereinfachten Optimierungsproblems ist. Die analytische Lösung wird in Kapitel 5 mit der numerischen Lösung verglichen, um Aussagen über die Approximationsgüte der numerischen Lösung des Gesamtpblems treffen zu können. Wie dort argumentiert, erzwingt die Numerik eine Reduktion des Problems von drei auf zwei Dimensionen. Für alle folgenden Kapitel wird deshalb vorausgesetzt, dass die Parameter  $R(t) = r$ ,  $\mu(t) = \mu$ ,  $\sigma(t) = \sigma$ ,  $\lambda_{ij}(t) = \lambda_{ij}$  und  $\rho(t) = \rho$  zeitunabhängig sind.

Zur Bestimmung der analytischen Lösung werden zwei weitere Vereinfachungen vorgenommen.

- Die Nutzenfunktion für Zustand  $Z(t) = 3$  ist identisch 0, d. h.  $u(\mathbf{X}(t), 3) \equiv 0$ . Es wird kein Nutzen aus Vererbung generiert. Damit ist auch  $V(\mathbf{x}, 3) = 0$ .
- Zusätzlich sei die Einschränkung für den Kontrollparameter  $c_2$  aufgehoben, d. h.  $K_{c_2} = \infty$ .

Mit diesen Rahmenbedingungen lässt sich das Kontrollproblem in Zustand  $Z(t) = 2$  lösen. Das Optimierungsproblem lautet mit den vorgenannten Vereinfachungen

$$V(\mathbf{x}, 2) = \sup_{(\mathbf{c}, \theta) \in \mathcal{A}(\mathbf{x}, 2)} \mathbf{E}_{x,z} \left[ \int_0^{\tau_d} e^{-\rho s} u(\mathbf{c}, 2) ds \mid \mathbf{X}(0) = \mathbf{x}, Z(0) = 2 \right] \quad (3.2)$$

Die zugehörige HJB Gleichung für Zustand  $Z(t) = 2$  wird dann zu:

$$\begin{aligned}
& (\rho + \lambda_{23} + \lambda) V(\mathbf{x}, 2) - \lambda V(\mathbf{x} - \beta \mathbf{x}, 2) \\
&= \sup_{(\mathbf{c}, \theta) \in \mathcal{A}(\mathbf{x}, 2)} \left\{ \frac{c_1^{\gamma_3}}{\gamma_3} + \frac{c_2^{\gamma_4}}{\gamma_4} + V_{x_1}(\mathbf{x}, 2) (-c_1 + (r + \theta(\mu - r))x_1) \right. \\
&\quad \left. - V_{x_2}(\mathbf{x}, 2) c_2 + V_{x_1 x_1}(\mathbf{x}, 2) \frac{1}{2} \sigma^2 \theta^2 x_1^2 \right\}. \tag{3.3}
\end{aligned}$$

### 3.3 Verifikationslemma

In diesem Abschnitt wird ein Verifikationslemma präsentiert. Es beweist, dass bei Existenz einer Lösung für die HJB (3.3) diese gleichzeitig die (eindeutige) Lösung für das Optimierungsproblem (3.2) darstellt. Das Verifikationslemma ist eine Kombination aus Theorem 4 und 6 aus Sennewald (2006, Kapitel 1). Die Formulierung ist an die vorliegende Arbeit angepasst. Der Beweis des Satzes findet sich in Kapitel 1 in Sennewald (2006).

**Satz 3.3.1** *Sei  $W : \mathbb{R}^2 \times \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $W(\cdot) \in C^2(\mathbb{R}^2)$  eine Funktion, für die nachfolgende Gleichung erfüllt ist*

$$\begin{aligned}
\rho W(\mathbf{x}, z) &= \sup_{(\mathbf{c}, \theta) \in \mathcal{A}(\mathbf{x}, z)} \left\{ u(\mathbf{c}, a, b, z) + \mathcal{D}^{\mathbf{C}} W(\mathbf{x}, z) \right\} \\
&\quad \forall (\mathbf{x}, z) \in \mathcal{S} \times \mathcal{J} \tag{3.4}
\end{aligned}$$

und sei außerdem für alle  $(\mathbf{x}, z) \in \mathcal{S} \times \mathcal{J}$  und für alle  $\mathbf{C} = (\mathbf{c}, a, b, \theta)^T \in \mathcal{A}(\mathbf{x}, z)$  die Grenzbedingung

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[ e^{-\rho t} W^{\mathbf{x}, z, \mathbf{C}}(\mathbf{X}(t), Z(t)) \right] \geq 0$$

erfüllt.

Existiert zudem für alle  $(\mathbf{x}, z) \in \mathcal{S} \times \mathcal{J}$  ein Steuervariablen-Tupel  $\mathbf{C}^*(\mathbf{x}, z) = (\mathbf{c}^*(\mathbf{x}, z), a^*(\mathbf{x}, z), b^*(\mathbf{x}, z), \theta^*(\mathbf{x}, z))^T \in \mathcal{A}(\mathbf{x}, z)$ , so dass

$$\rho W(\mathbf{x}, z) = u(\mathbf{c}^*(\mathbf{x}, z), a^*(\mathbf{x}, z), b^*(\mathbf{x}, z), z) + \mathcal{D}^{\mathbf{C}^*(\mathbf{x}, z)} W(\mathbf{x}, z),$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[ e^{-\rho t} W^{\mathbf{x}, z, \mathbf{C}^*}(\mathbf{X}(t), Z(t)) \right] = 0,$$

dann ist  $\mathbf{C}^*(\mathbf{x}, z)$  das optimale Steuervariablen-Tupel des Optimierungsproblems und die Lösung  $W(\mathbf{x}, z)$  der HJB (3.4) ist die gesuchte Wertfunktion des Optimierungsproblems

$$W(\mathbf{x}, z) = V(\mathbf{x}, z) \quad \forall (\mathbf{x}, z) \in \mathcal{S} \times \mathcal{J}.$$

Für einen Beweis des Satzes wird auf Sennewald (2006) verwiesen. Der Beweis formuliert einige Voraussetzungen bezüglich der Funktionen  $f_i(\mathbf{x}, 2)$  und der optimalen Strategien  $\mathbf{C}^*(\mathbf{x}, 2)$ . Lemma 3.4.1 zeigt, dass diese erfüllt sind.

### 3.4 Analytische Lösung Zustand 2

Zunächst wird über Bedingungen 1. und 2. Ordnung für die Steuervariablen der Maximierungsterm in der HJB Gleichung eliminiert und die entstehende partielle Differentialgleichung für  $V(\mathbf{x}, 2)$  gelöst. Aus der Lösung für  $V$  kann das optimale Parametertupel  $\mathbf{C}^*(\mathbf{x}, 2)$  über die Bedingungen 1. Ordnung aus dem Maximierungs-Term der HJB berechnet werden.

Sei

$$\begin{aligned} H(c_1(\mathbf{x}, z), c_2(\mathbf{x}, 2), \theta(\mathbf{x}, 2)) \\ = \frac{c_1(\mathbf{x}, 2)^{\gamma_3}}{\gamma_3} + \frac{c_2(\mathbf{x}, 2)^{\gamma_4}}{\gamma_4} + V_{x_1}(\mathbf{x}, 2) (-c_1(\mathbf{x}, 2) + (r + \theta(\mathbf{x}, 2)(\mu - r))x_1) \\ + V_{x_1x_1}(\mathbf{x}, 2) \frac{1}{2} \sigma^2 \theta(\mathbf{x}, 2)^2 x_1^2 - V_{x_2}(\mathbf{x}, 2) c_2(\mathbf{x}, 2). \end{aligned}$$

$H$  wird maximal für  $c_1(\mathbf{x}, 2)$ ,  $c_2(\mathbf{x}, 2)$  und  $\theta(\mathbf{x}, 2)$ , wenn nachfolgende Bedingungen erfüllt sind (Bedingungen 1. und 2. Ordnung):

$$c_1^*(\mathbf{x}, 2) = (V_{x_1}(\mathbf{x}, 2))^{\frac{1}{\gamma_3-1}} \quad (3.5)$$

$$c_2^*(\mathbf{x}, 2) = (V_{x_2}(\mathbf{x}, 2))^{\frac{1}{\gamma_4-1}} \quad (3.6)$$

$$\theta^*(\mathbf{x}, 2) = -\frac{\mu - r}{\sigma^2 x_1} \frac{V_{x_1}(\mathbf{x}, 2)}{V_{x_1x_1}(\mathbf{x}, 2)} \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial H}{\partial c_1(\mathbf{x}, 2)} = (\gamma_3 - 1)c_1(\mathbf{x}, 2)^{\gamma_3-2} < 0 \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial H}{\partial c_2(\mathbf{x}, 2)} = (\gamma_4 - 1)c_2(\mathbf{x}, 2)^{\gamma_4-2} < 0 \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \theta(\mathbf{x}, 2)} = V_{x_1x_1}(\mathbf{x}, 2) \sigma^2 x_1^2 < 0 \quad (3.10)$$

Bedingungen (3.8) und (3.9) sind erfüllt, da für die beiden Steuervariablen  $c_1(\mathbf{x}, 2), c_2(\mathbf{x}, 2) \geq 0$  vorausgesetzt wird und  $\gamma_i < 1, i = 3, 4$  gilt.

Bedingung (3.10) ist erfüllt, sofern die Wertfunktion in  $x_1$  konkav ist ( $V_{x_1 x_1}(\mathbf{x}, 2) < 0$ ). Ein Beweis zur Konvexität von  $V$  findet sich in Fleming und Soner (1993, Kapitel 10, Lemma 10.5 und Lemma 10.6). Mit der umgekehrten Annahme, dass  $u(\cdot)$  (identisch zu  $L(\cdot)$  bei Fleming und Soner (1993)) konkav statt konvex ist, folgt Konkavität für  $V$  in  $x_1$ .

Setzt man (3.5) bis (3.7) in (3.3) erhält man eine partielle Differentialgleichung (PDGL) 2. Ordnung

$$\begin{aligned}
0 = & -(\rho + \lambda)V(\mathbf{x}, 2) + \frac{1 - \gamma_3}{\gamma_3} (V_{x_1}(\mathbf{x}, 2))^{\frac{\gamma_3}{\gamma_3 - 1}} \\
& + V_{x_1}(\mathbf{x}, 2)rx_1 - \frac{1}{2} \frac{(\mu - r)^2}{\sigma^2} \frac{V_{x_1}(\mathbf{x}, 2)^2}{V_{x_1 x_1}(\mathbf{x}, 2)} \\
& + \frac{1 - \gamma_4}{\gamma_4} (V_{x_2}(\mathbf{x}, 2))^{\frac{\gamma_4}{\gamma_4 - 1}} + \lambda V(f_3(\mathbf{x}), 2)
\end{aligned} \tag{3.11}$$

mit der Randbedingung  $V(\mathbf{0}, 2, t) = 0$ .

Das Optimierungsproblem in Zustand 2 ähnelt Beispiel 3.2, Fall  $\nu \neq 0$  in Øksendal und Sulem (2005, Kapitel 3.1). Das vorliegende Problem ist davon abweichend zweidimensional. Außerdem ist im Fall eines Sprungs im Poisson-Prozess die Sprunghöhe deterministisch. Ähnlich zu Øksendal und Sulem (2005) wird angenommen, dass die gesuchte Wertfunktion die Form

$$V(\mathbf{x}, 2) = K_1 x_1^{\gamma_3} + K_2 x_2^{\gamma_4}$$

mit Konstanten  $K_1$  und  $K_2$  unabhängig von  $\mathbf{x}$  besitzt.

Mit diesem Ansatz wird aus (3.11)

$$\begin{aligned}
0 = & x_1^{\gamma_3} K_1 \left( -(\rho + \lambda_{23}) + r\gamma_3 - \frac{1}{2} \frac{(\mu - r)^2}{\sigma^2} \frac{\gamma_3}{1 - \gamma_3} \right. \\
& \left. + (1 - \gamma_3) \gamma_3^{\frac{1}{\gamma_3 - 1}} K_1^{\frac{1}{\gamma_3 - 1}} \right) \\
& + x_2^{\gamma_4} K_2 \left( -(\rho + \lambda_{23} + \lambda) + \lambda(1 - \beta)^{\gamma_4} \right. \\
& \left. + (1 - \gamma_4) \gamma_4^{\frac{1}{\gamma_4 - 1}} K_2^{\frac{1}{\gamma_4 - 1}} \right).
\end{aligned}$$

Für  $K_1$  und  $K_2$  unabhängig von  $x_1$  und  $x_2$  ist die Gleichung nur erfüllt für

$$K_1 = \frac{1}{\gamma_3} \left( \frac{\rho + \lambda_{23} - r\gamma_3}{1 - \gamma_3} + \frac{1}{2} \frac{(\mu - r)^2 \gamma_3}{\sigma^2 (1 - \gamma_3)^2} \right)^{\gamma_3 - 1}$$

und

$$K_2 = \frac{1}{\gamma_4} \left( \frac{\rho + \lambda_{23} + \lambda(1 - (1 - \beta)^{\gamma_4})}{1 - \gamma_4} \right)^{\gamma_4 - 1}.$$

Die Wertfunktion lautet damit

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}, 2) &= \frac{1}{\gamma_3} \left( \frac{\rho + \lambda_{23} - r\gamma_3}{1 - \gamma_3} + \frac{1}{2} \frac{(\mu - r)^2 \gamma_3}{\sigma^2 (1 - \gamma_3)^2} \right)^{\gamma_3 - 1} x_1^{\gamma_3} \\ &\quad + \frac{1}{\gamma_4} \left( \frac{\rho + \lambda_{23} + \lambda(1 + \beta\gamma_4 - (1 - \beta)^{\gamma_4})}{1 - \gamma_4} \right)^{\gamma_4 - 1} x_2^{\gamma_4}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Die optimalen Parameter  $c_1^*(\mathbf{x}, 2)$ ,  $c_2^*(\mathbf{x}, 2)$  und  $\theta^*(\mathbf{x}, 2)$  lassen sich aus (3.5) bis (3.7) berechnen:

$$\begin{aligned} c_1^*(\mathbf{x}, 2) &= x_1 \left( \frac{\rho + \lambda_{23} - r\gamma_3}{1 - \gamma_3} - \frac{1}{2} \frac{(\mu - r)^2}{\sigma^2} \frac{\gamma_3}{(1 - \gamma_3)^2} \right) = A_1 \cdot x_1, \\ c_2^*(\mathbf{x}, 2) &= x_2 \frac{\rho + \lambda_{23} + \lambda(1 - (1 - \beta)^{\gamma_4})}{1 - \gamma_4} = A_2 \cdot x_2 \quad \text{und} \\ \theta^*(\mathbf{x}, 2) &= \frac{\mu - r}{\sigma^2 (1 - \gamma_3)} = A_3. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Damit vorstehende Terme zulässige Kontroll-Strategien im Sinne des zu lösenden Problems darstellen, müssen zusätzliche Bedingungen erfüllt sein, die verhindern, dass der Vermögensprozess negativ wird.

$$\begin{aligned} \text{(B1)} \quad c_2^* \geq 0 \wedge c_2^* < \infty &\Leftrightarrow 1 - \gamma_4 > 0 \wedge \rho + \lambda_{23} + \lambda(1 - (1 - \beta)^{\gamma_4}) > 0 \quad \checkmark \\ \text{(B2)} \quad \theta^* \geq 0 \wedge \theta^* < \infty &\Leftrightarrow 1 - \gamma_3 > 0 \wedge \mu - r > 0 \quad \checkmark \\ \text{(B3)} \quad c_1^* \geq 0 \wedge c_1^* < \infty &\Leftrightarrow \rho + \lambda_{23} > \gamma_3 \left[ r + \frac{(\mu - r)^2}{2\sigma^2(1 - \gamma_3)} \right] \quad \checkmark \end{aligned}$$

(B1), Teil 2 ist erfüllt, da ohne Beschränkung der Allgemeinheit vorausgesetzt werden kann, dass  $\rho \geq 0$  und die Sterblichkeitsrate  $\lambda_{23}$  strikt größer 0 ist. Zusätzlich kann für die Anwendung  $\lambda \geq 0$  und  $\beta \leq 1$  vorausgesetzt werden.

Teil 1 der Bedingungen (B1) und (B2) ist erfüllt, da durch die Wahl der Nutzenfunktion vorausgesetzt wird, dass für die Parameter  $\gamma_i < 1, i = 3, 4$  gilt. Ebenso kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, dass  $\mu$  größer ist als die risikolose Zinsrate  $r$ .

Bedingung (B3) ist immer erfüllt, wenn

$$\begin{aligned} \underbrace{\rho + \lambda_{23}}_{\text{Diskontierungsrate}} &> \gamma_3 \left[ r + \frac{(\mu - r)^2}{\sigma^2(1 - \gamma_3)} \right] \\ &= \gamma_3 \underbrace{\left[ r \left( 1 - \frac{\mu - r}{\sigma^2(1 - \gamma_3)} \right) + \mu \frac{\mu - r}{\sigma^2(1 - \gamma_3)} \right]}_{\text{gewichteter Ertrag}} \end{aligned}$$

gilt. Schon Merton (1969) hat in seinem Artikel auf die vergleichbare Bedingung in deterministischen Konsum- und Wachstumsmodellen mit linearer Produktionsfunktion hingewiesen, die dort generell verlangt wird: Diskontierungsrate  $> \text{Max}(0, \gamma \cdot \text{Zinsertrag})$ . Dem Beispiel von Merton (1969) folgend, wird die Gültigkeit von (3.14) für das vorliegende Modell gefordert.

Obige Lösungen (3.12) für  $V(\mathbf{x}, 2)$  und (3.13) für  $\mathbf{C}^*(\mathbf{x}, 2)$  sind nur dann gleichzeitig die optimalen Lösungen des Problems (3.2), wenn die Bedingungen für das Verifikationslemma 3.3.1 aus Abschnitt 3.3 erfüllt sind. In nachfolgendem Lemma sind die Annahmen für die Gültigkeit von 3.3.1 formuliert. Es wird direkt gezeigt, dass die Bedingungen **A.1** bis **A.5** im vorliegenden Modell erfüllt sind.

**Lemma 3.4.1 A.1** *Die Nutzenfunktionen genügen der linearen Beschränktheitsbedingung*

$$|u(\mathbf{C}, z)| \leq k_1[\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{C}\| + 1].$$

$$\text{Ist erfüllt mit } k_1 = \frac{\gamma_3 + \gamma_4}{\gamma_3 \gamma_4}.$$

**A.2** *Sofern sie existieren, sind die optimalen Strategien linear beschränkt*

$$\|\mathbf{C}^*(\mathbf{x}, z, t)\| \leq k_2[\|\mathbf{x}\| + 1].$$

$$\text{Ist erfüllt mit } k_2 = \max\{A_1, A_2, A_3\}.$$

**A.3** Die Funktionen  $f_i, i = 1, 2, 3$  erfüllen die lineare Wachstumsbedingung

$$\|f_i(\mathbf{x}, z, t, \mathbf{C})\| \leq p_i(t)\|\mathbf{x}\| + \tilde{p}_i(t)\|\mathbf{C}\| + q_i(t).$$

Ist erfüllt mit  $p_1 = r, \tilde{p}_1 = \mu - r, q_1 = 0, p_2 = 0, \tilde{p}_2 = \sigma, q_2 = 0, p_3 = -\beta, \tilde{p}_3 = 0$  und  $q_3 = 0$ .

**A.4** Die Regularitätsbedingung

$$A := \int_0^\infty \exp \left\{ - \left( \frac{1}{t} \int_0^t \rho(s) ds - P_0(t) \right) t \right\} Q_0(t) dt < \infty$$

mit

$$P_0(t) = \frac{1}{t} \int_0^t p_1(s) + \lambda p_3(s) ds$$

und

$$Q_0(t) = \int_0^t \exp \{ -P_0(s)s \} (q_1(s) + \lambda q_3(s)) ds$$

ist erfüllt. Für zeitunabhängige Parameter ist  $A=0$ , d. h. die Regularitätsbedingung ist erfüllt.

Da die Gültigkeit der Voraussetzungen **A.1** bis **A.5** nachgewiesen ist, stellen (3.12) für  $V(\mathbf{x}, 2)$  und (3.13) für  $\mathbf{C}^*(\mathbf{x}, 2)$  tatsächlich die Lösungen des vereinfachten Optimierungsproblems (3.2) für Zustand  $Z(t) = 2$  dar.

Die analytische Lösung für Zustand  $Z(t) = 2$  gilt über den gesamten Wertebereich  $\mathcal{S} = [0, \infty] \times [0, \infty]$ . Mit Hilfe dieser analytischen Lösung wird die Güte des numerischen Verfahrens aus Kapitel 4 getestet und die erforderliche Diskretisierungsweite festgelegt, um eine akzeptable Näherung an die wahre Lösung zu erreichen. Die Ergebnisse werden in Abschnitt 5.1.1 präsentiert.

## 3.5 Optimale Strategien für Zustand 0 und 1

In Abschnitt 3.5 wird kurz darauf eingegangen, dass auch unter der vereinfachten Modellannahme  $c_2 \leq \infty$  und  $u(\mathbf{x}, 3) \equiv 0$  keine analytische Lösung für die Zustände 0 und 1 gefunden werden kann.

Die Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichungen für Zustand 0 und 1 mit zeitunabhängigen Parametern  $\lambda_{ij}, \lambda, \beta, \rho$  lauten

$$\begin{aligned}
0 = \sup_{\mathbf{c}, \theta, a, b, 0} & \left\{ u(\mathbf{c}, a, b) - (\rho + \lambda_{01} + \lambda_{02} + \lambda_{03} + \lambda) V(\mathbf{x}, 0) \right. \\
& + \lambda_{01} V(\mathbf{x}, 1) + \lambda_{02} V(\mathbf{x}, 2) + \lambda V(f_3(\mathbf{x}), 0) \\
& + V_{x_1}(\mathbf{x}, 0) (-c_1 + bg(0) + (r + \theta(\mu - r))x_1) \\
& \left. + V_{x_1 x_1}(\mathbf{x}, 0) \frac{1}{2} \sigma^2 \theta^2 x_1^2 + V_{x_2}(\mathbf{x}, 0) a \right\} \quad (3.14)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
0 = \sup_{\mathbf{c}, \theta, a, 1} & \left\{ u(\mathbf{c}, a) - (\rho + \lambda_{10} + \lambda_{12} + \lambda_{13} + \lambda) V(\mathbf{x}, 1) \right. \\
& + \lambda_{10} V(\mathbf{x}, 0) + \lambda_{12} V(\mathbf{x}, 2) + \lambda V(f_3(\mathbf{x}), 1) \\
& + V_{x_1}(\mathbf{x}, 1) (-c_1 + g(1) + (r + \theta(\mu - r))x_1) \\
& \left. + V_{x_1 x_1}(\mathbf{x}, 1) \frac{1}{2} \sigma^2 \theta^2 x_1^2 + V_{x_2}(\mathbf{x}, 1) a \right\}. \quad (3.15)
\end{aligned}$$

Die Bedingungen 1. Ordnung für die Steuervariablen führen zu folgenden optimalen Strategien für  $Z(t) = 0$ :

$$\begin{aligned}
c_1^* &= \frac{\max\{g(0)V_{x_1}(\mathbf{x}, 0), V_{x_2}(\mathbf{x}, 0)\}^{\frac{\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2 - 1}} \gamma_1^{\frac{\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2 - 1}}}{V_{x_1}(\mathbf{x}, 0)^{\frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_1 + \gamma_2 - 1}} \gamma_2^{\frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_1 + \gamma_2 - 1}}}, \\
\theta^* &= -\frac{V_{x_1}(\mathbf{x}, 0) \mu - r}{V_{x_1 x_1}(\mathbf{x}, 0) \sigma^2 x_1}, \\
a^* &= \begin{cases} \min\{1 - A_1, K_a(0)\} & \text{falls } g(0)V_{x_1} < V_{x_2} \\ \min\left\{ \begin{array}{l} 1 - \min(1 - A_2, K_b(0)), \\ 1 - A_1, K_a(0) \end{array} \right\} & \text{falls } g(0)V_{x_1} \geq V_{x_2} \end{cases}, \\
b^* &= \begin{cases} \min\{1 - A_2, K_b(0)\} & \text{falls } g(0)V_{x_1} \geq V_{x_2} \\ \min\left\{ \begin{array}{l} 1 - \min(1 - A_1, K_a(0)), \\ 1 - A_2, K_b(0) \end{array} \right\} & \text{falls } g(0)V_{x_1} < V_{x_2} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\text{mit } A_1 = \frac{V_{x_1}(\mathbf{x}, 0)^{\frac{\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2 - 1}} \gamma_2^{\frac{\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2 - 1}}}{V_{x_2}(\mathbf{x}, 0)^{\frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1 + \gamma_2 - 1}} \gamma_1^{\frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1 + \gamma_2 - 1}}} \text{ und } A_2 = \frac{V_{x_1}(\mathbf{x}, 0)^{\frac{1}{\gamma_1 + \gamma_2 - 1}} \gamma_2^{\frac{\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2 - 1}}}{g(0)^{\frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1 + \gamma_2 - 1}} \gamma_1^{\frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1 + \gamma_2 - 1}}}.$$

Für  $Z(t) = 1$  gilt:

$$\begin{aligned}
c_1^* &= \frac{V_{x_2}(\mathbf{x}, 1)^{\frac{\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2-1}} \gamma_1^{\frac{\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2-1}}}{V_{x_1}(\mathbf{x}, 1)^{\frac{\gamma_2-1}{\gamma_1+\gamma_2-1}} \gamma_2^{\frac{\gamma_2-1}{\gamma_1+\gamma_2-1}}}, \\
\theta^* &= -\frac{V_{x_1}(\mathbf{x}, 1)}{V_{x_1 x_1}(\mathbf{x}, 1)} \frac{\mu - r}{\sigma^2 x_1} \quad \text{und} \\
a^* &= \min \left\{ 1 - \frac{V_{x_1}(\mathbf{x}, 1)^{\frac{\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2-1}} \gamma_2^{\frac{\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2-1}}}{V_{x_2}(\mathbf{x}, 1)^{\frac{\gamma_1-1}{\gamma_1+\gamma_2-1}} \gamma_1^{\frac{\gamma_1-1}{\gamma_1+\gamma_2-1}}}, K_a(1) \right\}.
\end{aligned}$$

Werden vorstehende Terme in (3.14) bzw. (3.15) eingesetzt, erhält man ein System aus zwei hochgradig nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
0 &= -(\rho + \lambda_{01} + \lambda_{02} + \lambda_{03} + \lambda) V(\mathbf{x}, 0) + \lambda V(f_3(\mathbf{x}), 0) \quad (3.16) \\
&+ \lambda_{01} V(\mathbf{x}, 1) + \lambda_{02} V(\mathbf{x}, 2) + r x_1 V_{x_1}(\mathbf{x}, 1) \\
&+ (g(0) I_{\{g(0)V_{x_1} \geq V_{x_2}\}} \min(1 - A_2, K_b(0))) V_{x_1}(\mathbf{x}, 1) \\
&+ V_{x_2}(\mathbf{x}, 1) I_{\{g(0)V_{x_1} < V_{x_2}\}} \min(1 - A_1, K_a(0)) \\
&- \frac{1}{2} \frac{V_{x_1}(\mathbf{x}, 1)^2 (\mu - r)^2}{V_{x_1 x_1}(\mathbf{x}, 1) \sigma^2} \\
&- (\gamma_1 + \gamma_2 - 1) \gamma_1^{\frac{1-\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2-1}} \gamma_2^{\frac{1-\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2-1}} V_{x_1}(\mathbf{x}, 1)^{\frac{\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2-1}} V_{x_2}(\mathbf{x}, 1)^{\frac{\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2-1}}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
0 &= -(\rho + \lambda_{10} + \lambda_{12} + \lambda_{13} + \lambda) V(\mathbf{x}, 1) + \lambda V(f_3(\mathbf{x}), 1) \quad (3.17) \\
&+ \lambda_{10} V(\mathbf{x}, 0) + \lambda_{12} V(\mathbf{x}, 2) \\
&+ (g(1) + r x_1) V_{x_1}(\mathbf{x}, 1) + V_{x_2}(\mathbf{x}, 1) - \frac{1}{2} \frac{V_{x_1}(\mathbf{x}, 1)^2 (\mu - r)^2}{V_{x_1 x_1}(\mathbf{x}, 1) \sigma^2} \\
&- (\gamma_1 + \gamma_2 - 1) \gamma_1^{\frac{1-\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2-1}} \gamma_2^{\frac{1-\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2-1}} V_{x_1}(\mathbf{x}, 1)^{\frac{\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2-1}} V_{x_2}(\mathbf{x}, 1)^{\frac{\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2-1}}
\end{aligned}$$

mit den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned}
0 &\leq \frac{\max\{g(0)V_{x_1}(\mathbf{x}, 0), V_{x_2}(\mathbf{x}, 0)\}^{\frac{\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2-1}} \gamma_1^{\frac{\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2-1}}}{V_{x_1}(\mathbf{x}, 0)^{\frac{\gamma_2-1}{\gamma_1+\gamma_2-1}} \gamma_2^{\frac{\gamma_2-1}{\gamma_1+\gamma_2-1}}}, \\
0 &\leq \frac{V_{x_2}(\mathbf{x}, 1)^{\frac{\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2-1}} \gamma_1^{\frac{\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2-1}}}{V_{x_1}(\mathbf{x}, 1)^{\frac{\gamma_2-1}{\gamma_1+\gamma_2-1}} \gamma_2^{\frac{\gamma_2-1}{\gamma_1+\gamma_2-1}}}, \\
0 &\leq -\frac{V_{x_1}(\mathbf{x}, 0)}{V_{x_1 x_1}(\mathbf{x}, 0)} \frac{\mu - r}{\sigma^2 x_1}, \\
0 &\leq -\frac{V_{x_1}(\mathbf{x}, 1)}{V_{x_1 x_1}(\mathbf{x}, 1)} \frac{\mu - r}{\sigma^2 x_1} \quad \text{und} \\
0 &\leq \frac{V_{x_1}(\mathbf{x}, 1)^{\frac{\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2-1}} \gamma_2^{\frac{\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2-1}}}{V_{x_2}(\mathbf{x}, 1)^{\frac{\gamma_1-1}{\gamma_1+\gamma_2-1}} \gamma_1^{\frac{\gamma_1-1}{\gamma_1+\gamma_2-1}}} \leq K_a(1).
\end{aligned}$$

Auf Grund der Gestalt der Differentialgleichungen und der vielfältigen Nebenbedingungen kann kein herkömmliches Verfahren zur Bestimmung einer analytischen Lösung von partiellen Differentialgleichungen angewendet werden. Für die Ermittlung der optimalen Steuervariablen und der Wertfunktion wird zunächst das Modell im Diskreten neu formuliert. Über ein numerisches Verfahren wird zum diskreten Modell eine Lösung des Optimierungsproblems bestimmt. Das diskrete Modell und das numerische Lösungsverfahren werden im folgenden Kapitel 4 vorgestellt.

# Kapitel 4

## Diskretes Modell

Das in Abschnitt 3.5 hergeleitete System partieller Differentialgleichungen für die Zustände 0 und 1 ist bereits in der vereinfachten Form nicht analytisch lösbar. Für das System der HJB Gleichungen des komplexeren Modells aus Abschnitt 2.3 ist daher offensichtlich, dass ebenfalls keine analytische Lösung existiert. Um ausführliche Aussagen über die optimalen Steuervariablen  $a$ ,  $b$ ,  $c_i$  und  $\theta$  sowie die Wertfunktion  $V(\mathbf{x}, z)$  treffen zu können, wird das Optimierungsproblem im Diskreten neu formuliert und numerisch gelöst.

Im Folgenden wird der Vermögensprozess  $\{\mathbf{X}(t), t \geq 0\}$  auf einem diskreten Zustandsraum  $\mathcal{S}_{h_1, h_2} \times \mathcal{J} = \left\{ \mathbf{0}, \binom{h_1}{0}, \binom{2h_1}{0}, \dots, \binom{0}{h_2}, \binom{h_1}{h_2}, \dots \right\} \times \{0, 1, 2\} \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{N}$  durch einen diskreten Markov-Prozess approximiert. Mittels der Approximation wird eine diskrete Version des HJB-Gleichungssystems aufgestellt. Das in  $V^h(\mathbf{x}, z)$  lineare Gleichungssystem wird über das Strategie-Iterations-Verfahren für alle diskreten Stellen des Zustandsraumes gelöst. Unter bestimmten Bedingungen konvergiert die diskrete Lösung  $V^h(\mathbf{x}, z)$  für  $\mathbf{h} = (h_1, h_2)^T \rightarrow 0$  gegen die wahre Lösung  $V(\mathbf{x}, z)$  des ursprünglich stetigen Optimierungsproblems.

### 4.1 Konstruktion des diskreten Vermögensprozesses

Der Vermögensprozess  $\mathbf{X}_n^h$  wird als diskrete Markov-Kette mit abzählbar unendlichem Zustandsraum modelliert.

Mit  $p^h(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \mathbf{C}^h, z)$  werden die Übergangswahrscheinlichkeiten des diskreten Prozesses  $\mathbf{X}_n^h$  bezeichnet. Die Übergangswahrscheinlichkeiten müssen in geeigneter Weise sowohl Bewegungen von  $\mathbf{X}(t)$ , die durch die Brownsche Bewegung getrieben sind, als auch Sprünge des Poisson-Prozess-Anteils von  $\mathbf{X}(t)$  nachbilden. Es wird vorausgesetzt, dass  $\mathbf{X}_n^h$  innerhalb eines Zeitintervalls entweder einen Sprung macht oder eine Änderung gemäß der Brownschen Bewegung erfährt. Die Übergangswahrscheinlichkeiten haben daher folgende Form:

$$\begin{aligned} p^h(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \mathbf{C}^h, z) &= (1 - \lambda \Delta t^h) p_D^h(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \mathbf{C}^h, z) + \lambda \Delta t^h \mathbf{1}_{\mathbf{y} = f_3^h(\mathbf{x})}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

In (4.1) stellt  $(1 - \lambda \Delta t^h)$  die Wahrscheinlichkeit einer Bewegung von  $\mathbf{X}_n^h$  gemäß der Brownschen Bewegung dar.  $\lambda \Delta t^h$  ist die Wahrscheinlichkeit, dass  $\mathbf{X}_n^h$  im Zeitintervall  $\Delta t^h$  einen Sprung macht.  $\mathbf{C}^h = (c_1^h, c_2^h, a^h, b^h, \theta^h)^T$  stellt das optimale diskrete Strategietupel dar.

Zur Abbildung eines Sprungs auf dem diskreten Zustandsraum  $\mathcal{S}_{h_1, h_2}$  wird eine diskrete Form für  $f_3(\mathbf{x})$  eingeführt.

Die Funktion  $f_3^h(\mathbf{x}) = (i h_1, [j \beta_2] h_2)^T$  approximiert  $f_3(\mathbf{x})$  für  $\mathbf{x} = (i h_1, j h_2)^T \in \mathcal{S}_{h_1, h_2}$ ,  $i, j \in \mathbb{N}$ . Es gilt<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} |f_3(\mathbf{x}) - f_3^h(\mathbf{x})| &= (0, h_2 j \beta_2 - h_2 [j \beta_2])^T \\ &\leq (0, h_2)^T \rightarrow \mathbf{0} \quad (h_2 \rightarrow 0). \end{aligned}$$

Die  $p_D^h(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \mathbf{C}^h, z)$  bezeichnen geeignete Übergangswahrscheinlichkeiten für eine die reine Diffusion  $\hat{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{X}(t) - \int_0^t \beta dN(t)$  approximierende Markov-Kette  $\hat{\mathbf{X}}_n^h$ . Eine Idee für die Form geeigneter Terme  $p_D^h(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \mathbf{C}^h, z)$  ergibt sich durch Einsetzen von finiten Differenzen für die Ableitungen der Wertfunktion (vgl. (4.2)) in die HJB-Gleichungen (3.1) unter Auslassung der Sprungterme. Sei

$$\begin{aligned} V_{x_i}^+(\mathbf{x}, z) &\rightarrow \frac{V(\mathbf{x} + h_i \mathbf{e}_i, z) - V(\mathbf{x}, z)}{h_i}, \\ V_{x_i}^-(\mathbf{x}, z) &\rightarrow \frac{V(\mathbf{x} - h_i \mathbf{e}_i, z) - V(\mathbf{x}, z)}{h_i} \text{ und} \\ V_{x_i x_i}(\mathbf{x}, z) &\rightarrow \frac{V(\mathbf{x} - h_i \mathbf{e}_i, z) - 2V(\mathbf{x}, z) + V(\mathbf{x} + h_i \mathbf{e}_i, z)}{h_i^2}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

<sup>1</sup>[.] ist die größte Integer-Zahl, die kleiner oder gleich dem Argument ist.

In Abhängigkeit des Vorzeichens der Koeffizienten der Ableitungsterme 1. Ordnung werden in den HJB Gleichungen (3.1) die Vorwärts- oder Rückwärtsdifferenzen aus (4.2) eingesetzt. Anschließend werden die Terme zusammengefasst und die Gleichungen werden nach  $V(\mathbf{x}, z)$  aufgelöst. Die Koeffizienten der Terme  $V(\mathbf{y}, z)$  geben die Zähler der Übertrittswahrscheinlichkeiten  $p_D^h(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \mathbf{C}^h, z)$  vor. Über eine geeignete Normierung (siehe (4.3)) wird sichergestellt, dass  $p_D^h(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \mathbf{C}^h, z) < 1$  und  $\sum_{\mathbf{y} \neq \mathbf{x}} p_D^h(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \mathbf{C}^h, z) < 1$ . Da die  $p_D^h(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \mathbf{C}^h, z)$  für  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$  nicht zu 1 summieren, wird eine zusätzliche Verbleibwahrscheinlichkeit  $p_D^h(\mathbf{x}, \mathbf{x} | \mathbf{C}^h, z)$ ,  $0 < p_D^h(\mathbf{x}, \mathbf{x} | \mathbf{C}^h, z) < 1$  eingeführt. Für die Markov-Kette  $\hat{\mathbf{X}}_n^h$  gelten die folgenden Übergangswahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned} p_D^h(\mathbf{x}, \mathbf{x} \pm \mathbf{e}_1 h_1 | \mathbf{C}^h, z) &= \frac{h_1 h_2 f_{1,1}^\pm(\mathbf{x}, \mathbf{C}^h, z) + h_2 \frac{1}{2} f_{2,1}(\mathbf{x}, \mathbf{C}^h)^2}{Q^h(\mathbf{x}, z)} \\ p_D^h(\mathbf{x}, \mathbf{x} \pm \mathbf{e}_2 h_2 | \mathbf{C}^h, z) &= \frac{h_1^2 f_{1,2}^\pm(\mathbf{x}, \mathbf{C}^h, z)}{Q^h(\mathbf{x}, z)} \\ p_D^h(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \mathbf{C}^h, z) &= 0, \quad \text{for } \mathbf{y} \neq \mathbf{x}, \mathbf{x} \pm \mathbf{e}_i h_i, i = 1, 2 \\ p_D^h(\mathbf{x}, \mathbf{x} | \mathbf{C}^h, z) &= 1 - \sum_{\mathbf{y} \neq \mathbf{x}} p_D^h(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \mathbf{C}^h, z) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} Q^h(\mathbf{x}, z) &= \sup_{0 \leq \mathbf{C}^h \leq \mathbf{K}_C} f_{2,1}(\mathbf{x}, \mathbf{C}^h)^2 + h_1 \sum_{i=1,2} h_{j \in \{1,2\}, j \neq i} f_{1,i}^\pm(\mathbf{x}, \mathbf{C}^h, z) \\ &= h_1 h_2 (K_{c_1} x_1 + K_b g(z) \mathbf{1}_{z=0} + (r + K_\theta (\mu - r)) x_1) \\ &\quad + h_1^2 (K_{c_2} \mathbf{1}_{z=2} + K_a \mathbf{1}_{z=0,1}) + h_2 \sigma^2 K_\theta^2 x_1^2 \end{aligned} \quad (4.3)$$

und

$$\begin{aligned} f_1^-(\mathbf{x}, \mathbf{C}^h, z) &= \begin{pmatrix} -c_1^h \\ -c_2^h \end{pmatrix}, \\ f_1^+(\mathbf{x}, \mathbf{C}^h, z) &= \begin{pmatrix} E(z) + (r + (\mu - r)\theta^h) x_1 \\ a^h \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$Q^h(\mathbf{x}, z)$  wird als Supremum über den Strategien definiert, um den Nenner der Wahrscheinlichkeitsterme unabhängig von  $\mathbf{C}^h$  zu machen. Dies vereinfacht die Berechnung der optimalen Parameter signifikant, wie in Abschnitt 4.2.1

noch deutlich wird.  $\mathbf{K}_C = (K_{c_1}x_1, K_{c_2}, K_a, K_b, K_\theta)^T$  ist eine obere Schranke für das Tupel  $\mathbf{C}^h$  der diskreten Strategien. Für die Strategien  $a, b$  und  $c_2$  wurden bereits in Abschnitt 2.2.3 Obergrenzen festgelegt. Die Strategien  $c_1$  und  $\theta$  haben keine natürliche, aus dem Modell ableitbare Obergrenze.

Als Interpolationsintervall wird  $\Delta t^h(\mathbf{X}_n^h, z) = \frac{h_1^2 h_2}{Q^h(\mathbf{X}_n^h, z)}$  festgelegt. Es gilt  $t_n^h = \sum_{m=0}^{n-1} \Delta t^h(\mathbf{X}_m^h, z)$ .

Damit sind die Übergangswahrscheinlichkeiten  $p^h(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \mathbf{C}^h, z)$  für die Markov-Kette  $\{\mathbf{X}_n^h, n < \infty\}$  vollständig über Gleichung (4.1) bestimmt.

Der stetige Prozess  $Z(t)$  ist bereits auf einem diskreten Zustandsraum  $\mathcal{J} = \{0, 1, 2, 3\}$  definiert. Im diskreten Modell beschreibt der Prozess  $\{Z_n, n < \infty\}$  den Zustand des Individuums. Die Übergangswahrscheinlichkeiten von Zustand  $Z_n$  nach  $Z_{n+1}$  werden mit

$$p_Z^h(z_n, z_{n+1}) = \Delta t^h(\mathbf{X}_n^h, z) \lambda_{z_n, z_{n+1}}$$

festgelegt.

Die Wertfunktion des Optimierungsproblems für die diskreten Prozesse auf dem diskreten Zustandsraum  $\mathcal{S}_{h_1, h_2} \times \mathcal{J}$  lautet

$$V^h(\mathbf{x}, z) = \max_{\mathbf{C}^h \in \mathcal{A}^h(\mathbf{x}, z)} \mathbb{E} \left[ \sum_{t_n^h=0}^{\tau_d-1} e^{-\rho t_n^h} u(\mathbf{C}^h(\mathbf{X}_n^h, Z_n), Z_n) \Delta t_n^h(\mathbf{X}_n^h, Z_n) + e^{-\rho \tau_d} u(\mathbf{X}_{\tau_d}^h) | \mathbf{X}_0^h = \mathbf{x}, Z_0 = z \right]. \quad (4.4)$$

## 4.2 Lösung des diskreten Optimierungsproblems

Das diskrete Optimierungsproblem  $(\mathcal{S}_{h_1, h_2} \times \mathcal{J}, \mathcal{A}^h(\mathbf{x}, z), p^h, u, D)$  mit

- abzählbarem Zustandsraum  $\mathcal{S}_{h_1, h_2} \times \mathcal{J}$ ,
- abzählbarem Aktionenraum  $\mathcal{A}^h$ , wobei  $\mathcal{A}^h(\mathbf{x}, z) \subseteq \mathcal{A}^h$  die nicht-leere endliche Menge aller zulässigen Strategien in Zustand  $(\mathbf{x}, z) \in \mathcal{S}_{h_1, h_2} \times \mathcal{J}$  ist,

- Übergangswahrscheinlichkeiten  $p : \mathcal{S}_{h_1, h_2} \times \mathcal{J} \times \mathcal{A}^h \rightarrow [0, 1]$ ,  $p^h(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \mathbf{C}^h, z)$  Wahrscheinlichkeit bei gegebener Strategie  $\mathbf{C}^h \in \mathcal{A}^h$  von Zustand  $(\mathbf{x}, z)$  in den Zustand  $(\mathbf{y}, z)$  zu wechseln,
- einer einstufigen Nutzenfunktion  $u : \mathcal{S}_{h_1, h_2} \times \mathcal{J} \times \mathcal{A}^h \rightarrow \mathbb{R}$ , die eine Belohnung  $u(\mathbf{C}^h(\mathbf{x}, z), z)$  abhängig von der Wahl der Strategie  $\mathbf{C}^h$  im Zustand  $(\mathbf{x}, z)$  darstellt,  $|u(\mathbf{C}^h(\mathbf{x}, z), z)| \leq \bar{u}$  für ein  $\bar{u} < \infty$  und
- einem einstufigen Diskontierungsfaktor  $D(\mathbf{x}, z)$ , mit  $0 < D(\mathbf{x}, z) \leq 1$

stellt ein Markovsches Entscheidungsproblem mit unendlichem Planungshorizont dar. Es beschreibt ein stochastisches Problem, das zu diskreten Zeitpunkten  $n = 0, 1, \dots$  beobachtet wird. Wenn zum Zeitpunkt  $n$  der Zustand  $(\mathbf{X}_n^h, Z_n)$  beobachtet wird, wählt der Entscheider eine Strategie  $\mathbf{C}^h$  aus dem Aktionenraum  $\mathcal{A}^h(\mathbf{X}_n^h, Z_n)$  der zulässigen Strategien. Diese Strategie hat einen einstufigen Nutzen  $u(\mathbf{X}_n^h, \mathbf{C}^h)$  und einen Übergang in einen neuen Zustand  $(\mathbf{X}_{n+1}^h, Z_n)$  mit Wahrscheinlichkeit  $p^h(\mathbf{X}_n^h, \mathbf{X}_{n+1}^h | \mathbf{C}^h, z)$  zur Folge.

Für die diskrete Wertfunktion  $V^h(\mathbf{x}, z)$  kann analog zur HJB im stetigen Fall eine dynamische Programmiergleichung hergeleitet werden. Auch im Diskreten entsteht, bedingt durch die unterschiedlichen Zustände von  $Z_n$ , ein System von Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 V^h(\mathbf{x}, z) = & \max_{\mathbf{C}^h \in \mathcal{A}^h(\mathbf{x}, z)} \left\{ \Delta t^h(\mathbf{x}, z) u(\mathbf{C}^h(\mathbf{x}, z), z) + D(\mathbf{x}, z) \right. \\
 & \cdot \left[ \sum_{j \neq z} \lambda_{zj} \Delta t^h(\mathbf{x}, z) V^h(\mathbf{x}, j) + \lambda \Delta t^h(\mathbf{x}, z) V^h(f_3^h(\mathbf{x}), z) \right. \\
 & \left. \left. + (1 - F(\mathbf{x}, z)) \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{S}_{h_1, h_2}} p_D^h(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \mathbf{C}^h, z) V^h(\mathbf{y}, z) \right] \right\} \quad (4.5)
 \end{aligned}$$

mit  $D(\mathbf{x}, z) = \frac{1}{1 + \Delta t^h(\mathbf{x}, z) \rho}$  und  $F(\mathbf{x}, z) = \left( \lambda + \sum_{j \neq z} \lambda_{zj} \right) \Delta t^h(\mathbf{x}, z)$ .

Diese Gleichungen werden Bellmannsche Gleichungen genannt. Das System (4.5) ist ein System von Funktionalen. Die Wertfunktion  $V^h(\mathbf{x}, z)$  ist ein Fixpunkt dieses Funktionalsystems.

Für die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung  $V^h(\mathbf{x}, z)$  zu (4.5) müssen gewisse Regularitätsbedingungen gelten, die mit den folgenden Voraussetzungen erfüllt sind:

- (1)  $\mathcal{S}_{h_1, h_2} \times \mathcal{J}$  und  $\mathcal{A}^h$  sind kompakte, metrische Räume,
- (2)  $u(\mathbf{X}_n, \mathbf{C}^h, Z_n)$  ist stetig in  $(\mathbf{X}_n, \mathbf{C}^h, Z_n)$  und
- (3)  $(\mathbf{x}, z) \rightarrow \mathcal{A}^h(\mathbf{x}, z)$  ist eine stetige Zuordnung.

Der Operator  $\Gamma : \mathcal{B}(\mathcal{S}_{h_1, h_2} \times \mathcal{J}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{S}_{h_1, h_2} \times \mathcal{J})$  auf dem Banach-Raum  $\mathcal{B}(\mathcal{S}_{h_1, h_2} \times \mathcal{J})$  aller messbaren, beschränkten Funktionen  $f : \mathcal{S}_{h_1, h_2} \times \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}^k$  mit Supremumnorm  $\|f\| = \sup_{(\mathbf{x}, z)} |f(\mathbf{x}, z)|$  sei definiert durch

$$\Gamma(V^h(\mathbf{x}, z)) = \max_{\mathbf{C}^h \in \mathcal{A}^h(\mathbf{x}, z)} \left\{ \Delta t^h(\mathbf{x}, z) u(\mathbf{C}^h(\mathbf{x}, z), z) + \sum_{(\mathbf{y}, j)} D(\mathbf{y}, j) V^h(\mathbf{y}, j) p^h((\mathbf{x}, z), (\mathbf{y}, j) | \mathbf{C}^h) \right\}.$$

Dann lautet (4.5) in Operator-Schreibweise

$$V^h = \Gamma(V^h).$$

$\Gamma$  ist eine Kontraktion, d. h. für alle  $V^h, W^h \in B \subset \mathcal{B}$  gilt

$$\|\Gamma(V^h(\mathbf{x}, z)) - \Gamma(W^h(\mathbf{x}, z))\| \leq D(\mathbf{x}, z) \|V^h(\mathbf{x}, z) - W^h(\mathbf{x}, z)\|$$

mit Diskontierungsfaktor  $D(\mathbf{x}, z)$ .

Mit Hilfe der Theorie über Kontraktionen lässt sich die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung  $V^h(\mathbf{x}, z)$  beweisen (vgl. Rust (1996)).

#### **Satz 4.2.1** über Kontraktionen

Wenn  $\Gamma$  eine Kontraktion auf einem Banach-Raum  $B$  ist, dann hat  $\Gamma$  einen eindeutigen Fixpunkt  $V^h \in B$ .

#### **Satz 4.2.2** von Blackwell

Die stationäre Markovsche Strategie  $\mathbf{C}^h$  aus (4.5) stellt die optimale Strategie für das Optimierungsproblem (4.4) dar.

Um  $V^h(\mathbf{x}, z)$  numerisch zu bestimmen, muss der Zustandsraum von  $\mathbf{X}_n^h = (X_{n,1}^h, X_{n,2}^h)^T$  begrenzt werden. Auf Grund des Modells gilt bereits  $0 \leq X_{n,i}^h$ . Die Werte  $\max X_{n,1}^h = I h_1$  und  $\max X_{n,2}^h = J h_2$  werden zunächst willkürlich als Obergrenzen festgelegt. Die Markov-Kette wird somit auf den Zustandsraum  $\bar{\mathcal{S}}_{h_1, h_2} = \{0, h_1, 2h_1, \dots, I h_1\} \times \{0, h_2, 2h_2, \dots, J h_2\} \subset \mathcal{S}_{h_1, h_2} \subset \mathbb{R}^2$  eingeschränkt. Für vorgegebene Diskretisierungsweiten  $h_1$  und  $h_2$  sind  $I$  und  $J$  so zu wählen, dass der für das Modell interessante Bereich des Zustandsraumes abgedeckt ist und die Konvergenz über die Menge der Punkte in  $\bar{\mathcal{S}}_{h_1, h_2}$  in akzeptabler Zeit erreicht wird. Einen Hinweis, wie groß der Zustandsraum gewählt werden muss, erhält man durch Vergleich der numerischen mit der analytischen Lösung für das vereinfachte Modell aus Abschnitt 3.4. Die Ergebnisse werden in Abschnitt 5.1.1 präsentiert.

Für den Rand von  $\bar{\mathcal{S}}_{h_1, h_2}$  müssen neue Übergangswahrscheinlichkeiten definiert werden, die die eingeschränkte Bewegungsrichtung von  $\bar{\mathbf{X}}_n^h$  berücksichtigen. Die Übergangswahrscheinlichkeiten  $p_D^h(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \mathbf{C}^h, z)$  für  $\mathbf{x} \in \partial \bar{\mathcal{S}}_{h_1, h_2}$  sind in Anhang A dargestellt.

Mit den vorgenannten Übergangswahrscheinlichkeiten erhält man das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned}
 V^h(\mathbf{x}, z) = & \max_{\mathbf{C}^h \in \mathcal{A}^h(\mathbf{x}, z)} \left\{ \Delta t^h(\mathbf{x}, z) u(\mathbf{C}^h(\mathbf{x}, z), z) + D(\mathbf{x}, z) \right. \\
 & \cdot \left[ \sum_{j \neq z} \lambda_{zj} \Delta t^h(\mathbf{x}, z) V^h(\mathbf{x}, j) + \lambda \Delta t^h(\mathbf{x}, z) V^h(f_3^h(\mathbf{x}), z) \right. \\
 & \left. \left. + (1 - F(\mathbf{x}, z)) \sum_{\mathbf{y} \in \bar{\mathcal{S}}_{h_1, h_2}} p_D^h(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \mathbf{C}^h, z) V^h(\mathbf{y}, z) \right] \right\} \quad (4.6)
 \end{aligned}$$

auf der beschränkten Menge  $\bar{\mathcal{S}}_{h_1, h_2} \times \mathcal{J}$ .

Das Optimierungsproblem kann numerisch über die Strategie-Iterations-Methode gelöst werden. Die daraus resultierenden Folgen von  $V_l^h(\mathbf{x}, z)$  und  $\mathbf{C}_l^{h*}(\mathbf{x}, z)$  konvergieren gegen  $V^h(\mathbf{x}, z)$  bzw.  $\mathbf{C}^{h*}(\mathbf{x}, z)$ . Im Weiteren wird die Lösungsmethode kurz erläutert.

### 4.2.1 Strategie-Iterations-Methode

Die Strategie-Iterations-Methode wurde von Howard (1960) eingeführt. Sie ist neben der dynamischen Programmierung die gebräuchlichste Methode zur Lösung diskreter Markovscher Entscheidungsprobleme (Rust (1996)).

Die Strategie-Iterations-Methode besteht aus zwei sich wiederholenden Schritten. Zunächst wird ein zulässiges Steuervariablen-Tupel als Startwert  $\mathbf{C}_0^h$  gewählt. Mit Hilfe der gewählten Strategie wird eine erste Approximation für  $V_0^h(\mathbf{x}, z)$  aus dem linearen Gleichungssystem (4.6) für alle  $x_1 \in \{0, h_1, \dots, Ih_1\}$ ,  $x_2 \in \{0, h_2, \dots, Jh_2\}$  berechnet.

Im zweiten Schritt wird die Strategie  $\mathbf{C}_{k-1}^h$  über

$$\begin{pmatrix} c_{1,k}^* \\ c_{2,k}^* \\ a_k^* \\ b_k^* \\ \theta_k^* \end{pmatrix} = \arg \max_{\mathbf{C}_k^h \in \mathcal{A}^h(\mathbf{x}, z)} \left\{ \Delta t^h(\mathbf{x}, z) u(\mathbf{C}_k^h, z) + D(\mathbf{x}, z) \right. \quad (4.7)$$

$$\cdot \left[ \sum_{j \neq z} \lambda_{zj} \Delta t^h(\mathbf{x}, z) V_{k-1}^h(\mathbf{x}, j) + \lambda \Delta t^h(\mathbf{x}, z) V_{k-1}^h(f_3^h(\mathbf{x}), z) \right.$$

$$\left. \left. + (1 - F(\mathbf{x}, z)) \sum_{\mathbf{y} \in \bar{\mathcal{S}}_{h_1, h_2}} p_D^h(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \mathbf{C}_k^h, z) V_{k-1}^h(\mathbf{y}, z) \right] \right\}$$

neu berechnet. Durch die geeignete Definition von  $Q^h(\mathbf{x}, z)$  sind die Terme  $p_D^h$  linear in  $\mathbf{C}_k^h$  und somit existieren für das Maximierungsproblem explizit analytisch berechenbare Lösungen  $\mathbf{C}_k^{h*}$ .

Die neue Strategie  $\mathbf{C}_k^{h*}$  ist Ausgangspunkt der Berechnung für eine nächste Näherung der Wertfunktion  $V_k^h(\mathbf{x}, z)$ .

Die Iteration, bestehend aus Berechnung der Wertfunktion für eine konkrete Strategie und anschließender Verbesserung der Strategie, wird angehalten, wenn

$$\|V_{k+1}^h - V_k^h\|_\infty < \epsilon,$$

d. h. die Maximumnorm über die Differenz zweier benachbarter Folgenglieder ist kleiner als eine vorgegebene Toleranz  $\epsilon$ .

Die Strategie-Iterations-Methode erzeugt bei jedem Schritt eine verbesserte Strategie (siehe z. B. Bertsekas (2005)), d. h.  $V_{k+1}^h \geq V_k^h$ .

Die Anzahl der algebraischen Operationen zur Lösung des linearen Gleichungssystems (4.6) ist von Ordnung  $O(|\mathcal{S} \times \mathcal{J}|^3)$ . Die Standard-Strategie-Iterations-Methode ist daher eingeschränkt tauglich für Optimierungsprobleme mit mehreren hunderttausend Elementen. Für die im Rahmen der vorliegenden Arbeit durchgeführten Berechnungen waren die Berechnungszeiten mit dem Standardverfahren akzeptabel.

### 4.3 Konvergenz der Wertfunktion

Das in Abschnitt 4.1 formulierte diskrete Modell inklusive des Optimierungsproblems wurde in Anlehnung an das Markov-Chain-Approximation (MCA) Verfahren (Kushner und Dupuis, 1992) aufgestellt. In Kushner (1990) behandelt der Autor einen kontrollierten Diffusions-Prozess, bei dem sowohl in der Drift als auch in der Varianz Kontrollterme auftreten. Kushner zeigt, dass bei Anwendung des MCA Verfahrens die diskrete Wertfunktion  $V^h(\mathbf{x}, z)$  gegen die stetige Wertfunktion  $V(\mathbf{x}, z)$  des ursprünglichen Problems (2.6) konvergiert. In Kushner und Dupuis (1992) weisen die Autoren für einen kontrollierten Sprungprozess ohne Kontrollterm in der Varianz ebenfalls nach, dass bei Anwendung des MCA Verfahrens die diskrete Wertfunktion  $V^h(\mathbf{x}, z)$  gegen die stetige Wertfunktion  $V(\mathbf{x}, z)$  konvergiert.

Das MCA Verfahren erzeugt eine mit dem stetigen Vermögensprozess  $\mathbf{X}(t)$  lokal konsistente Markov-Kette.

**Definition 4.3.1** *Eine kontrollierte Markov-Kette  $\{\mathbf{X}_n^h, n < \infty\}$  heißt **lokal konsistent** mit einem stochastischen Prozess  $X(t)$ , wenn folgende Annahmen zutreffen, vgl. Kushner und Dupuis (1992):*

- (1) Sei  $\Delta \mathbf{X}_n^h = \mathbf{X}_{n+1}^h - \mathbf{X}_n^h$ , dann existieren Übergangswahrscheinlichkeiten  $p^h(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \mathbf{C}^h, z)$ , so dass

$$E[\Delta \mathbf{X}_n^h] = f_1(\mathbf{x}, \mathbf{C}^h, z) \Delta t^h(\mathbf{x}, \mathbf{C}^h, z) + o(\Delta t^h(\mathbf{x}, \mathbf{C}^h, z))$$

und

$$\begin{aligned} E[\Delta \mathbf{X}_n^h - E[\Delta \mathbf{X}_n^h]][\Delta \mathbf{X}_n^h - E[\Delta \mathbf{X}_n^h]]^T \\ = f_{2,1}^2(\mathbf{x}, \mathbf{C}^h) \Delta t^h(\mathbf{x}, \mathbf{C}^h, z) \\ + O(\mathbf{h}) \Delta t^h(\mathbf{x}, \mathbf{C}^h, z) + O(\Delta t^h(\mathbf{x}, \mathbf{C}^h, z))^2. \end{aligned}$$

(2) Es existiert ein Interpolationsintervall  $\Delta t^h(\mathbf{x}, \mathbf{C}^h, z)$ , das für  $\mathbf{h} \rightarrow 0$  gegen 0 strebt.

(3)  $\sup_n |\mathbf{X}_{n+1}^h - \mathbf{X}_n^h| \xrightarrow{\mathbf{h}} 0$ .

(4) Für die Markov-Kette existiert eine 1-stufige Übergangswahrscheinlichkeit der Form

$$\begin{aligned} p^h(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \mathbf{C}^h, z) \\ = (1 - \lambda \Delta t^h(\mathbf{x}, \mathbf{C}^h, z)) p_D^h(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \mathbf{C}^h, z) + \lambda \Delta t^h(\mathbf{x}, \mathbf{C}^h, z) \mathbb{1}_{\mathbf{y}=f_3^h(\mathbf{x})}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

**Lemma 4.3.2** Mit den definierten Größen  $\Delta t^h(\mathbf{x}, z)$ ,  $p_D^h(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \mathbf{C}^h, z)$  und  $f_3^h(\mathbf{x})$  ist  $\mathbf{X}_n^h$  lokal konsistent mit  $\mathbf{X}(t)$ .

**Beweis** Es wird gezeigt, dass die Annahmen (1)-(4) aus Definition 4.3.1 erfüllt sind.

(1)

$$\begin{aligned} E[\Delta \mathbf{X}_n^h] &= \begin{pmatrix} h_1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{h_1 h_2 f_{1,1}^+(\mathbf{x}, \mathbf{C}^h, z) + h_2 \frac{1}{2} f_{2,1}(\mathbf{x}, \mathbf{C}^h)^2}{Q^h(\mathbf{x}, z)} \\ &\quad - \begin{pmatrix} h_1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{h_1 h_2 f_{1,1}^-(\mathbf{x}, \mathbf{C}^h, z) + h_2 \frac{1}{2} f_{2,1}(\mathbf{x}, \mathbf{C}^h)^2}{Q^h(\mathbf{x}, z)} \\ &\quad + \begin{pmatrix} 0 \\ h_2 \end{pmatrix} \frac{h_1^2 f_{1,2}^+(\mathbf{x}, \mathbf{C}^h, z)}{Q^h(\mathbf{x}, z)} - \begin{pmatrix} 0 \\ h_2 \end{pmatrix} \frac{h_1^2 f_{1,2}^-(\mathbf{x}, \mathbf{C}^h, z)}{Q^h(\mathbf{x}, z)} \\ &= \Delta t^h(\mathbf{x}, z) f_1(\mathbf{x}, \mathbf{C}^h, z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}[\Delta \mathbf{X}_n^h - \mathbb{E}[\Delta \mathbf{X}_n^h]][\Delta \mathbf{X}_n^h - \mathbb{E}[\Delta \mathbf{X}_n^h]]^T \\
&= \frac{h_1^2 h_2}{Q^h(\mathbf{x}, z)} f_{2,1}(\mathbf{x}, \mathbf{C}^h)^2 \\
&\quad - 2\Delta t^h(\mathbf{x}, z) \frac{h_1^2 h_2}{Q^h(\mathbf{x}, z)} (f_{1,1}(\mathbf{x}, \mathbf{C}^h, z)^2 + f_{1,2}(\mathbf{x}, \mathbf{C}^h, z)^2) \\
&\quad + \frac{h_1^2 h_2}{Q^h(\mathbf{x}, z)} h_1 (f_{1,1}^+(\mathbf{x}, \mathbf{C}^h, z) + f_{1,1}^-(\mathbf{x}, \mathbf{C}^h, z)) \\
&\quad + \frac{h_1^2 h_2}{Q^h(\mathbf{x}, z)} h_2 (f_{1,2}^+(\mathbf{x}, \mathbf{C}^h, z) + f_{1,2}^-(\mathbf{x}, \mathbf{C}^h, z)) \\
&\quad + \Delta t^{h^2}(\mathbf{x}, z) (f_{1,1}(\mathbf{x}, \mathbf{C}^h, z)^2 + f_{1,2}(\mathbf{x}, \mathbf{C}^h, z)^2) \\
&= f_{2,1}^2(\mathbf{x}, \mathbf{C}^h) \Delta t^h(\mathbf{x}, z) + \Delta t^h(\mathbf{x}, z) \mathbf{h} f_1(\mathbf{x}, \mathbf{C}^h, z) \\
&\quad - [\Delta t^h(\mathbf{x}, z) f_1(\mathbf{x}, \mathbf{C}^h, z)]^2
\end{aligned}$$

(2) Das Interpolationsintervall strebt für  $\mathbf{h} \rightarrow 0$  gegen 0:

$$\Delta t^h(\mathbf{x}, z) = \frac{h_1^2 h_2}{Q^h(\mathbf{x}, z)} \rightarrow 0 \quad (\mathbf{h} \rightarrow 0)$$

(3)  $\{\mathbf{X}_n^h\}$  konvergiert gleichmässig:

$$\begin{aligned}
\sup_n |\mathbf{X}_{n+1}^h - \mathbf{X}_n^h| &\leq \begin{pmatrix} (l+1)h_1 - lh_1 \\ (k+1)h_2 + h_2[k\beta_2] - kh_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2(1 + [k\beta_2]) \end{pmatrix} \rightarrow 0 \quad (\mathbf{h} \rightarrow 0).
\end{aligned}$$

(4) Die Terme

$$p^h(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \mathbf{C}^h, z) = (1 - \lambda \Delta t^h(\mathbf{x}, z)) p_D^h(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \mathbf{C}^h, z) + \lambda \Delta t^h(\mathbf{x}, z) \mathbf{1}_{\mathbf{y}=f_3^h(\mathbf{x})}$$

sind wohldefinierte Übergangswahrscheinlichkeiten, wenn die Bedingungen  $\sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{S}_{h_1, h_2}} p^h(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \mathbf{C}^h, z) = 1$  und  $0 \leq p^h(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \mathbf{C}^h, z) \leq 1$  erfüllt sind. Dies ist unter den Voraussetzungen  $\lambda \Delta t^h(\mathbf{x}, z) \leq 1$ ,  $h_1, h_2 \leq 1$  und  $\lambda \leq K_b g(0) \mathbf{1}_{z=0} + K_{c_2} \mathbf{1}_{z=2} + K_a \mathbf{1}_{z=0,1}$  gewährleistet.  $\square$

Folglich ist mit  $\mathbf{X}_n^h$  eine Markov-Kette definiert, die lokal konsistent mit  $\mathbf{X}(t)$  ist.

Sei  $\mathbf{X}^h(t)$  die stückweise stetige Interpolation von  $\mathbf{X}_n^h$

$$\mathbf{X}^h(t) = \mathbf{X}_n^h, t \in [t_n^h, t_{n+1}^h)$$

und sei

$$Z^h(t) = Z_n, t \in [t_n^h, t_{n+1}^h).$$

Entsprechend gilt

$$\mathbf{C}^h(\mathbf{X}^h(t), Z^h(t)) = \mathbf{C}^h(\mathbf{X}_n^h, Z_n), t \in [t_n^h, t_{n+1}^h).$$

Die Wertfunktion  $V^h(\mathbf{x}, z)$  lässt sich dann alternativ zu (4.4) auch in der folgenden Form darstellen:

$$\begin{aligned} V^h(\mathbf{x}, z) = & \max_{\mathbf{C}^h \in \mathcal{A}^h(\mathbf{x}, z)} \mathbb{E} \left[ \int_0^{\tau_d} e^{-\rho t} u(\mathbf{C}^h(\mathbf{X}^h(t), Z^h(t)), Z^h(t)) dt \right. \\ & \left. + e^{-\rho \tau_d} u(\mathbf{X}^h(\tau_d), 3) \mid \mathbf{X}^h(0) = \mathbf{x}, Z^h(0) = z \right]. \end{aligned}$$

Voraussetzung für die Konvergenz der diskreten Lösung  $V^h(\mathbf{x}, z)$  gegen die Lösung des stetigen Optimierungsproblems ist die schwache Konvergenz des interpolierten Vermögensprozesses  $\mathbf{X}^h(t)$  gegen den stetigen Vermögensprozess  $\mathbf{X}(t)$ .

**Definition 4.3.3** *Ein Prozess  $\{\mathbf{X}^h(t), t \geq 0\}$  konvergiert schwach gegen einen Prozess  $\{\mathbf{X}(t), t \geq 0\}$ , wenn  $E[f(\mathbf{X}_n^h)] \rightarrow E[f(\mathbf{X}(t))]$ ,  $\forall f \in \mathcal{C}_b(\mathcal{S})$ .  $\mathcal{C}_b(\mathcal{S})$  ist die Menge der stetigen und beschränkten Funktionen auf dem metrischen Raum  $\mathcal{S}$ .*

Theorem 4.1 in Kushner und Dupuis (1992, Kap. 10.4.2) und die Theoreme 4.5 und 4.6 in Kushner (1990) zeigen, dass der Prozess  $\mathbf{X}^h(t)$  schwach gegen den stetigen Prozess  $\mathbf{X}(t)$  konvergiert, da die beiden Prozesse lokal konsistent sind.

Gemäß den Theoremen 5.1 und 5.2 in Kushner und Dupuis (1992, Kap. 10.5) und den Theoremen 8.2 und 8.3 in Kushner (1990) folgt aus der schwachen Konvergenz von  $\mathbf{X}^h(t) \rightarrow \mathbf{X}(t)$  die Konvergenz von  $V^h(\mathbf{x}, z) \rightarrow V(\mathbf{x}, z)$ . Für eine ausführliche Darstellung der Beweise wird auf die erwähnte Literatur verwiesen.

---

Das folgende Kapitel 5 erläutert die numerischen Berechnungen zur Lösung des diskreten Optimierungsproblems und interpretiert das Verhalten der optimalen Strategien und der Wertfunktion in Abhängigkeit unterschiedlicher Parameterbelegungen im Modell.



# Kapitel 5

## Berechnungen

### 5.1 Programmierung

Das in Kapitel 4 beschriebene numerische Verfahren der Strategie-Iteration wurde in Matlab (Version R2008a) implementiert. Matlab leitet sich aus dem Begriff „Matrix Laboratory“ ab. Die besondere Stärke von Matlab ist die numerische Lösung von Problemstellungen, die in Matrix- und Vektorschreibweise formuliert werden können. Matlab verfügt außerdem über umfangreiche, mehrdimensionale und grafische Visualisierungsmöglichkeiten zur Aufbereitung der numerischen Berechnungen.

Die Matrizen, die das lineare Gleichungssystem zur Bestimmung der Funktion  $V_n^h$  beschreiben, sind nur dünn besetzt. Die Transformationsmatrix mit den Übergangswahrscheinlichkeiten für alle Punkte des Zustandsraumes besitzt die Dimension  $2(I + 1)(J + 1) \times 2(I + 1)(J + 1)$ . Da aus jedem Punkt im Zustandsraum  $(\mathbf{x}, z)$  in maximal 6 andere Zustände gewechselt werden kann, sind maximal  $2(I + 1)(J + 1)7$  Stellen der Matrix mit Werten  $\neq 0$  besetzt. Für die effiziente Verarbeitung von dünn besetzten Matrizen werden diese in Matlab als „Sparse Matrices“ angelegt. Somit wird während der Laufzeit des Programms Speicherplatz eingespart und die Rechenzeit der Prozeduren zur Matrizenverarbeitung verkürzt. Insgesamt kann die Diskretisierung des Zustandsraumes für den Vermögensprozess feiner gewählt werden, als dies bei Verwendung herkömmlicher Matrizentypen in Matlab möglich wäre.

Für die Programmläufe wird ein Standard-PC auf Basis eines Intel<sup>®</sup> Dual-Core<sup>™</sup> Prozessors (2,66 GHz) mit 4 GB RAM Arbeitsspeicher und Micro-

soft Windows XP Professional x64 (64-bit Edition) als zugrunde liegendes Betriebssystem verwendet. Die Laufzeit zur Bestimmung von  $V^h$  und  $\mathbf{C}^h$  bei 1.200.000 Gitterpunkten in  $\bar{\mathcal{S}}_h \times \mathcal{J}$  beträgt im Schnitt 8 h und im Mittel sind ca. 15 - 20 Iterationsschritte für die Berechnung von  $V^h(\cdot, 0)$  und  $V^h(\cdot, 1)$  notwendig. Die Berechnung von  $V^h(\cdot)$  wird abgebrochen, wenn  $\|V_n^h - V_{n+1}^h\|_\infty < \epsilon$ .

Eine feinere Diskretisierung wäre für die Genauigkeit der Lösungen wünschenswert (vgl. Ergebnisse in Abschnitt 5.1.1), jedoch stößt das entwickelte Programm bei einer größeren Zahl von Gitterpunkten an die Grenze seiner Anwendbarkeit. Aus diesem Grund wird auch die zeitabhängige Formulierung des Problems mit zeitabhängigen Parametern, die eine zusätzliche Erhöhung der Anzahl der Gitterpunkte des dann gültigen Zustandsraumes  $(\mathbf{x}, z, t)$  nötig gemacht hätte, ausgeschlossen.

Im nachfolgenden Abschnitt 5.1.1 wird die Genauigkeit des numerischen Verfahrens anhand des vereinfachten Optimierungsproblems für das Individuum in Zustand 2 (vgl. Abschnitt 3.4) untersucht.

Sofern aus dem Zusammenhang verständlich ist für welche Werte von  $X_1$ ,  $x_2$  oder  $z$  die Steuerungsvariablen dargestellt sind, wird im gesamten Kapitel 5 auf die Benennung des Wertebereichs verzichtet (statt  $c_1(x_1, x_2, 0)$  wird z. B.  $c_1(0)$  oder auch nur  $c_1$  verwendet).

### 5.1.1 Güte der numerischen Lösung für Zustand 2

Wenn der maximal zulässige Konsum von Zeiteinheiten nicht beschränkt wird ( $K_{c_2} = \infty$ ), existiert eine analytische Lösung des Optimierungsproblems für den Zustand 2. Die analytische Lösung aus Abschnitt 3.4 wird für verschiedene Diskretisierungsweiten mit der numerischen Lösung verglichen. Am Ergebnis lassen sich Aussagen über die Güte der numerischen Lösung in Zustand 2 ableiten. Anhand des Vergleiches wird die nötige Gitterweite  $h_1$ ,  $h_2$  und die Begrenzung des Zustandsraumes  $\mathbf{X}$  für eine zufriedenstellende numerische Lösung ermittelt.

Die Qualität der numerischen Lösung wird vorrangig von der Diskretisierungsweite  $h_i$  und dem Parameter für die persönliche Diskontierungsrate  $\rho$  beeinflusst. Vor allem eine hohe Diskontierungsrate beeinflusst die Näherung beträchtlich. Die Genauigkeit der Näherungslösungen für die Funktionen  $V(2)$ ,  $c_1(2)$ ,  $c_2(2)$ ,  $a(2)$  und  $\theta(2)$  fällt sehr unterschiedlich aus. Die

größten Abweichungen ergeben sich bei  $\theta$  und  $c_2$ . Die Abweichungen in den Näherungslösungen für die Steuerungsvariablen  $c_1$  und  $a$  sind durchgängig geringer als bei  $\theta$  und  $c_2$ . In der nachfolgenden Betrachtung zur Bestimmung der Diskretisierungsweiten  $h_i$  und eines aus numerischer Sicht geeigneten Parameters  $\rho$  wird daher nur auf die optimalen Steuerungsparameter  $\theta^*$  und  $c_2^*$  eingegangen.

**Beispiel 5.1.1** *Abweichung der numerischen von der analytischen Lösung für  $\theta^*$  und  $c_2^*$  in Zustand 2*

*Das Beispiel wurde für die in Tabelle 5.1 gezeigten Parameterbelegungen gerechnet.*

Tabelle 5.1: Parameterwerte für Beispiel 5.1.1

Parameter	Wert	Parameter	Wert	Parameter	Wert
$\bar{x}_1$	100	$\bar{x}_2$	1		
$\lambda_{23}$	0,1	$\lambda$	0	$\beta$	0
$r$	0,03	$\mu$	0,1	$\sigma$	0,25
$K_{c_2}$	99999	$\gamma_i$	0,7	$u(\mathbf{c}, 3)$	$\equiv 0$

Die Abbildungen 5.1 und 5.2 zeigen grafisch die Verbesserung der numerischen Lösungen für  $\theta^*$  und  $c_2^*$  bei steigendem  $\rho$  bzw. kleiner werdenden  $h_i$ . In den Grafiken sind die prozentualen Abweichungen über den Dimensionen Geld- bzw. Zeitvermögen aufgetragen.

Abbildung 5.1 zeigt den deutlichen Einfluss des Parameters  $\rho$  auf die Höhe des prozentualen Fehlers von  $\theta^*$ . Je größer  $\rho$  desto stärker werden die zukünftigen Zahlungen diskontiert und desto besser fällt die Näherung aus. Beim Vergleich der Grafiken von links nach rechts ist ersichtlich, dass nur eine geringe Verbesserung bei feinerer Diskretisierung ( $h_1$  fällt) erreicht werden kann.

Abbildung 5.2 zeigt für den optimalen Konsum von Zeit ein gegenteiliges Verhalten. Mit fallendem Parameter  $h_2$  werden die Fehler für  $c_2$  deutlich kleiner, während der Parameter  $\rho$  keinen sichtbaren Einfluss auf die Genauigkeit hat.

Das Maximum der Abweichung zwischen der numerischen und der analytischen Lösung sagt nur eingeschränkt etwas darüber aus, wie gut die Näherung

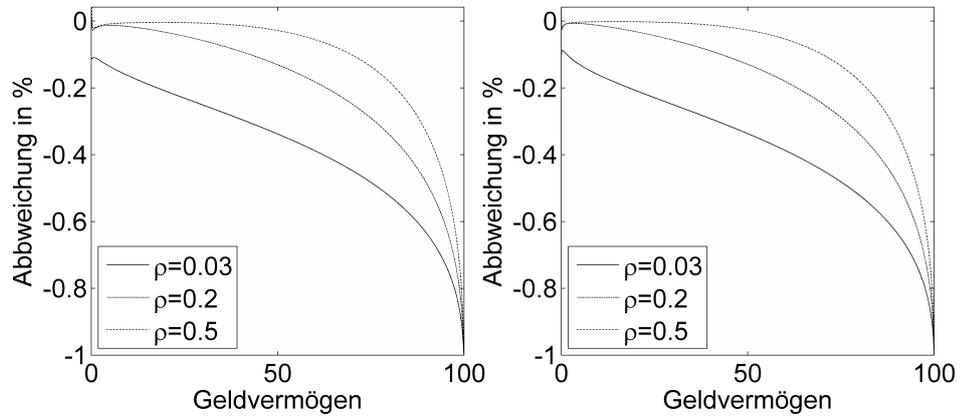


Abbildung 5.1: Prozentuale Abweichung für den Anteil des riskanten Investments  $\theta$  für  $h_2 = 0,1$  (links) bzw.  $h_2 = 0,025$  (rechts)

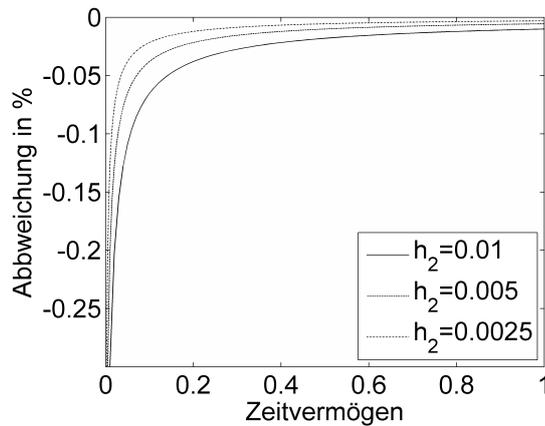


Abbildung 5.2: Prozentuale Abweichung für Konsum  $c_2$

wirklich ist. Bedingt durch die Begrenzung des Zustandsraumes  $\bar{\mathcal{S}}_{h_1, h_2}$  kann an den oberen Rändern  $\bar{x}_i$  die analytische mit der numerischen Lösung nicht in Übereinstimmung gebracht werden. In der numerischen Lösung gilt für das optimale riskante Investment  $\theta^*(\bar{x}_1) = 0$ , da ein Ansteigen von  $x_1$  über  $\bar{x}_1$  nicht möglich ist. Aus demselben Grund strebt der optimale Konsumparameter  $c_1^*(x_1)$  für  $x_1 \rightarrow \bar{x}_1$  gegen  $\infty$ . Selbst bei sehr feiner Diskretisierung bleiben

somit die Abweichungen zwischen numerischer und analytischer Lösung am oberen Rand von  $\bar{\mathcal{S}}_h$  bestehen. Für die Güte der numerischen Lösungen ist die Nähe zu den analytischen Lösungen im Inneren von  $\bar{\mathcal{S}}_{h_1, h_2}$  von entscheidender Bedeutung.

Deshalb wird im Beispiel zusätzlich untersucht, bei wie vielen Datenpunkten die numerische von der analytischen Lösung für die Steuerungsvariablen  $\theta$  und  $c_2$  um mehr als 5 % bzw. mehr als 1 % abweicht.

Tabelle 5.2 zeigt für die optimalen Steuerungsvariablen  $\theta^*$  und  $c_2^*$  das Maximum der Abweichungen zwischen der numerischen und analytischen Lösung über dem für die Anwendung interessanten Zustandsraum  $[0; 50] \times [0; 0, 4] \subset \bar{\mathcal{S}}_{h_1, h_2}$ . Zusätzlich aufgeführt ist der Anteil der Gitterpunkte, für den die Abweichungen für  $\theta^*$  und  $c_2^*$  kleiner 5 % bzw. 1 % sind.

Tabelle 5.2: Abweichungen zwischen analytischer und numerischer Lösung

$\rho$	$h_1$	$h_2$	max	proz. Fehler		max	proz. Fehler	
			$\theta^* - \theta^{h^*}$	< 5%	< 1%	$c_2^* - c_2^{h^*}$	< 5%	< 1%
0,03	0,1	0,01	0,6105	0%	0%	0,0037	63%	0%
0,5	0,1	0,01	0,1568	99%	63%	0,0172	63%	0%
0,03	0,025	0,0025	0,6004	0%	0%	0,0012	91%	37%
0,5	0,025	0,0025	0,1568	100%	91%	0,0054	91%	37%

Für die Steuerungsvariable  $\theta$  ist bei Wahl von  $\rho = 0,03$  und  $h_1 = 0,1$  an keiner Stelle der Fehler kleiner 5 %, vgl. erste und zweite Zeile der Tabelle 5.2. Erst wenn  $\rho$  auf 0,5 erhöht wird, ist bei fast allen Datenpunkten des eingeschränkten Zustandsraumes  $\bar{\mathcal{S}}_{h_1, h_2}$  die Abweichung in  $\theta$  kleiner 5 %, bei beinahe zwei Drittel sogar kleiner 1 %. Für die Steuerungsvariable  $c_2$  stellt sich die Berechnung für kleine  $\rho$  etwas günstiger dar. Für  $\rho = 0,03$  und  $h_2 = 0,01$  ist der numerische Fehler bei 63 % der Datenpunkte kleiner 5 %.

Die Erhöhung von  $\rho$  hat keinen wesentlichen Einfluss auf die Genauigkeit von  $c_2^*$  hinsichtlich der Verbreitung der Fehler unter 5 %. Am Maximum der Abweichung zwischen numerischer und analytischer Lösung für  $c_2^*$  zeigt sich jedoch überraschenderweise, dass mit größerem  $\rho$  der Fehler zunimmt ( $\max(\rho = 0,03) = 0,0037$ ,  $\max(\rho = 0,5) = 0,0172$ ). Die Abbildung 5.3 zeigt das beschriebene Verhalten. Aus Sicht des optimalen Parameters  $c_2^*$  sollte  $\rho$  nicht zu groß gewählt werden.

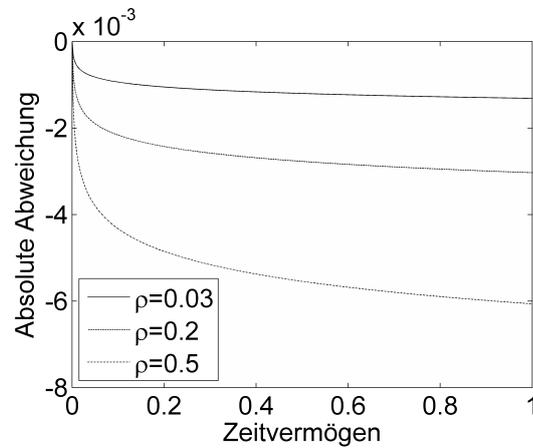


Abbildung 5.3: Absolute Abweichung für Konsum  $c_2$  für  $h_2 = 0,0025$

Eine Verminderung der Diskretisierungsweite wirkt sich deutlich auf die Genauigkeit der numerischen Lösung der beiden Steuerungsvariablen aus, vgl. Zeile drei und vier in Tabelle 5.2. Bei kleinem  $\rho$  erhöht sich der Anteil der Datenpunkte mit einer Fehlerabweichung von weniger als 5 % für  $\theta$  nicht. Für  $\rho = 0,5$  kann bei feiner Diskretisierung der prozentuale Fehler an allen Datenpunkten unter 5 % und bei über 90 % der Datenpunkte unter 1 % gedrückt werden.

Für den Parameter  $c_2$  verbessert sich bei der feineren Diskretisierung die Näherungslösung nicht in gleichem Maße. Für beide Werte von  $\rho$  sinkt der Fehler zwar bei 91 % der Datenpunkte unter 5 %, aber nur bei 37 % kann der Fehler unter 1 % gedrückt werden.

Wie bereits erläutert, ist eine globale Abweichung unter einen vorgegebenen Wert  $\epsilon\%$  nicht erreichbar, da die analytischen Lösungen auf einem unbegrenzten Zustandsraum für  $\mathbf{X}(t)$  basieren und die Näherungslösungen auf einen endlichen Raum begrenzt sind. Dies bestätigen auch die Ergebnisse von Munk (2003), der über die MCA Methode Merton's Originalproblem von 1969 numerisch gelöst und für  $c^*$  und  $\theta^*$  an den Rändern vergleichbare Abweichungen ermittelt hat. Bei reiner Betrachtung der Lösung von  $\theta^*$  wäre der Ansatz eines möglichst hohen Wertes für  $\rho$  erstrebenswert. Der zumindest in geringem Maße gegenteilige Effekt auf die Güte der Lösung für  $c_2^*$  spricht allerdings gegen eine zu große Wahl von  $\rho$ .

Damit die Abweichungen bei  $\bar{x}_1$  keinen zu großen Einfluss auf die gesuchten Lösungen über dem für das zu lösende Optimierungsproblem interessanten Zustandsraum  $\bar{\mathcal{S}}_h$  haben, wird insbesondere der Wertebereich für  $x_1$  deutlich größer gewählt ( $x_1 \in [0, 100]$ ), als der für die Anwendung interessante Bereich von  $x_1 \in [0, 50]$  in Tausend Geldeinheiten (GE).

Eine feinere als die erläuterte Diskretisierung von  $h_1 = 0,025$  und  $h_2 = 0,0025$  wäre insbesondere für die Zeitdimension wünschenswert. Mit dem entwickelten Programm ist durch die verwendete Hardware-Ausstattung eine Berechnung mit deutlich mehr als 1,6 Mio. Datenpunkten nicht möglich. Bei Berechnung der Lösungen für die Zustände  $z = 0$  und  $z = 1$  verdoppelt sich die Anzahl der Datenpunkte, da die Berechnung parallel für beide Zustände erfolgen muss. Unter Beibehaltung der obigen Diskretisierung würden die Berechnungen auf 3,2 Mio. Datenpunkten stattfinden, so dass der Anwendungsbereich des entwickelten Matlab-Programms weit überschritten wäre. Um die Anzahl der Datenpunkte entsprechend zu senken, wird die Diskretisierung für die durchgeführten Berechnungen auf  $h_1 = 0,1$  und  $h_2 = 0,0025$  festgelegt.

## 5.2 Konvergenz der diskreten Lösung

Die Funktion  $V^h(\cdot)$  konvergiert, wie in Abschnitt 4.3 gezeigt, gleichmässig gegen die Funktion  $V(\cdot)$ . Somit muss für beliebige  $h$  und  $h'$  mit  $h > h'$  gelten:

$$\sup_{\mathbf{x}} |V^h(\mathbf{x}, z) - V^{h'}(\mathbf{x}, z)| \rightarrow 0 \text{ für } h \rightarrow h'. \quad (5.1)$$

Tabelle 5.3 zeigt das geforderte Konvergenzverhalten für eine Auswahl von Diskretisierungsweiten.

## 5.3 Parameterwahl

Im Modell sind sehr viele freie Parameter zu belegen, die alle einen stetigen Wertebereich besitzen. Die Wertebereiche sind zum Teil beschränkt (z. B.  $0 < \gamma_i < 1$ ) und teilweise unbeschränkt. Eine komplette Abdeckung sämtlicher Varianten in den Modellrechnungen ist somit unmöglich. Auch

Tabelle 5.3: Supremum der Differenzen von  $V^h(\mathbf{x}, \cdot)$  für verschiedene  $\mathbf{h}$ 

$\mathbf{h}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0,1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,02 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,1333 \\ 0,01333 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,0667 \\ 0,00667 \end{pmatrix}$
$f^h(\mathbf{x}, z)$	$\sup_{\mathbf{x}}  f^h(\mathbf{x}, z) - f^{h'}(\mathbf{x}, z) $			
$V^h(\mathbf{x}, 0)$	1,89	0,36	0,19	0,04
$V^h(\mathbf{x}, 1)$	2,37	0,53	0,26	0,06
$V^h(\mathbf{x}, 2)$	8,23	3,20	2,17	0,88

eine Diskretisierung der Parameterbereiche und eine Einschränkung auf maximal zwei mögliche Belegungen würde mit  $2^{25} = 33,6$  Mio. Kombinationen den Rahmen für die Auswertung der Rechnungen sprengen. Um die Anzahl der Rechnungsläufe sinnvoll einzuschränken, werden die im Folgenden festgelegten und für alle Beispielrechnungen gültigen Vorbelegungen verwendet.

### Rendite $\mu$ und Volatilität $\sigma$ riskantes Investment

Das Verhalten des riskanten Investments wird maßgeblich vom zugrunde liegenden Preisprozess des Wertpapiers und der angenommenen risikolosen Verzinsung bestimmt. Das Ziel ist jedoch nicht die Analyse des Anlageverhaltens bezüglich der Verhältnisse am Kapitalmarkt.

In dieser Arbeit soll repräsentativ aufgezeigt werden, ob durch den Nutzen von Zeitguthaben eine Beeinflussung des riskanten Investments besteht. Zum einen wird daher die relativ simple Modellannahme eines geometrischen Preisprozesses für das Wertpapier getroffen. Zum anderen wird eine repräsentative Parameterkombination mit  $\mu = 0,1$  und Volatilität  $\sigma = 0,25$  verwendet. Diese Werte sind aus einer Zeitreihe der Bundesbank<sup>1</sup> über den DAX-Verlauf von Januar 1988 bis Juni 2008 abgeleitet. Für diesen Zeitraum beträgt die jährliche Durchschnittsrendite 10,5 %. Die Standardabweichung liegt bei 0,25. Für einzelne und im Folgenden herausgehobene Berechnungen wurde ein schwacher Kapitalmarkt mit einer durchschnittlichen Rendite von 5 % und unveränderter Volatilität angenommen.

<sup>1</sup>Download: [http://www.bundesbank.de/statistik/statistik\\_zeitreihen\\_download.php?func=directcsv&from=&until=&filename=bbk\\_SUD101\&csvformat=de&euro=mixed&tr=SUD101](http://www.bundesbank.de/statistik/statistik_zeitreihen_download.php?func=directcsv&from=&until=&filename=bbk_SUD101\&csvformat=de&euro=mixed&tr=SUD101)

### Diskontierungsrate $\rho$

Für die Güte der Lösung von  $\theta$  sollte die Diskontierungsrate  $\rho$  möglichst groß gewählt werden. Gleichzeitig verringert dies die Güte von  $c_2$ . Die Erläuterungen zum Einfluss, den der Parameter  $\rho$  auf die Genauigkeit der numerischen Lösung hat, können dem Abschnitt 5.1.1 entnommen werden. Aus fachlicher Sicht gibt es verschiedene plausible Ansätze für eine Belegung von  $\rho$ .

Fisher (1930) formuliert die Theorie, dass jedes rational handelnde Individuum seine marginale, persönliche Diskontierungsrate mit der verfügbaren risikolosen Kapitalrendite gleichsetzen sollte. Die Anschauung von Fisher bedeutet insbesondere, dass die Diskontierung unabhängig von persönlichen Merkmalen des Individuums ist. Empirische Untersuchungen kommen zu ganz unterschiedlichen Ergebnissen bezüglich der Höhe der persönlichen Diskontierungsrate und den Einflussfaktoren.

Hausman (1979) ermittelt in seiner Untersuchung Diskontierungsraten zwischen 5 % und 90 % mit einem Mittelwert von knapp 30 % sowie eine deutliche Abhängigkeit der Raten vom Einkommen. Auch Kurz et al. (1973) messen in der durchgeführten Studie Diskontierungsraten, die zwischen 36 % und 122 % schwanken und damit alle deutlich über der damals marktüblichen Zinsrate liegen. Die Studien würden eine Modellierung von  $\rho$  in Abhängigkeit der Zeit und des vorhandenen Vermögens  $\mathbf{X}(t)$  nahe legen. Auf eine zeitabhängige Modellierung der Parameter wird aus programmtechnischen Gründen verzichtet, vgl. Abschnitt 5.1, d. h. die Diskontierungsrate ist konstant.

In einer Übersichtsarbeit von Frederick et al. (2002) fassen die Autoren die empirischen Diskontierungsraten verschiedener Studien zusammen und kommen unter anderem zu dem Schluss, dass für Laufzeiten von mehr als einem Jahr keine Abhängigkeit vom Investmenthorizont vorliegt. In den von Frederick et al. betrachteten Studien sind die Diskontierungsraten ebenfalls deutlich größer als jeder marktübliche Zins. Jedoch üben die Autoren Kritik an der Herangehensweise der empirischen Studien und zeigen, dass die überwiegende Zahl der Studien nicht in der Lage ist, die reinen Diskontierungsraten zu isolieren. In den Raten sind Aspekte wie beispielsweise Unsicherheit über zukünftige Entgelte oder Inflation mit abgebildet. Tendenziell erhöhen diese Effekte die Raten.

Dieselbe Kritik üben auch Andersen et al. (2008). In ihrer aktuellen Studie

ermitteln sie daher persönliche Diskontierungsraten und Parameter, die das Risikoverhalten messen. Dabei kommen sie insgesamt zu deutlich niedrigeren Diskontierungsraten als dies bei früheren Studien der Fall ist. Die Autoren ermitteln eine durchschnittliche Diskontierungsrate von  $\rho = 10\%$  pro Jahr in Verbindung mit einer Risikoaversion von  $\gamma \approx 0,25$  und  $\rho = 6,8\%$  für eine Risikoaversion von  $\gamma \approx 0,23$ . Je risikoaverser das Individuum ist, desto kleiner sollte die Diskontierungsrate gewählt werden. Für Risikoneutralität ermitteln Andersen et al. einen Wert von  $\rho = 0,25$ .

Da im Modell der Arbeit die Diskontierungsrate einen maßgeblichen Einfluss auf die Genauigkeit der Berechnungen hat, wird eine relativ hohe Diskontierungsrate von  $\rho = 0,15$  angesetzt. Dieser Ansatz liegt innerhalb der Ergebnisse der empirischen Untersuchungen.

### Risikoloser Zins $r$

Eine angemessene Größe für den risikolosen Zins wird ebenfalls anhand einer Zeitreihe<sup>2</sup> der Bundesbank ermittelt. Betrachtet wird der effektive Jahreszins für Einlagen privater Haushalte mit einer Laufzeit von bis zu 2 Jahren im Zeitraum von 2003 bis 2008. Durchschnittlich lag der Zins bei 2,76 %. Im gleichen Zeitraum lag der durchschnittliche Kreditzins<sup>3</sup> für Konsumentenkredite bei 9,4 %. Der im Modell verwendete risikolose Zins dient zugleich als Kreditzins, d. h. realistischerweise müsste ein um einiges größerer Wert als der Durchschnittszins verwendet werden. Da der Aufbau des Modells eine Unterscheidung der beiden Zinssätze nicht berücksichtigt, wird der risikolose Zins mit  $r = 3\%$  belegt, d. h. knapp höher als der reale Zins auf Einlagen.

### Einkommen $g(0)$ und $g(1)$

Das Einkommen während der Erwerbstätigkeit ist deterministisch modelliert. Für die numerischen Berechnungen wird ein hohes Einkommen und ein niedriges Einkommen als Belegung gewählt. In der Statistik des Instituts der

<sup>2</sup>Download: [http://www.bundesbank.de/statistik/statistik\\\_zeitreihen\\\_download\-.php?func=directcsv&from=\&until=\&filename=bbk\\\_SUD001&csvformat=de&euro=-mixed&tr=SUD001](http://www.bundesbank.de/statistik/statistik\_zeitreihen\_download\-.php?func=directcsv&from=\&until=\&filename=bbk\_SUD001&csvformat=de&euro=-mixed&tr=SUD001)

<sup>3</sup>Download: [http://www.bundesbank.de/statistik/statistik\\\_zeitreihen\\\_download\-.php?func=directcsv&from=\&until=\&filename=bbk\\\_SUD009&csvformat=de&euro=-mixed&tr=SUD009](http://www.bundesbank.de/statistik/statistik\_zeitreihen\_download\-.php?func=directcsv&from=\&until=\&filename=bbk\_SUD009&csvformat=de&euro=-mixed&tr=SUD009)

Deutschen Wirtschaft Köln (Institut der deutschen Wirtschaft Köln, 2007) wird das Nettoeinkommen je Arbeitnehmer für die Jahre 2004 bis 2006 mit jeweils ca. 1.450 Euro pro Monat angegeben. Dies entspricht einem Nettojahresverdienst von ca. 17,5 Tausend Euro.

Da sich die Ergebnisse bei Jahreseinkommen von über 10 Tsd. Euro nicht mehr unterscheiden, wird für die numerische Untersuchung im Sinne der Arbeit „hohes“ Einkommen mit 10 Tsd. Euro und „niedriges“ Einkommen mit 5 Tsd. Euro festgelegt. Diese Größen beziehen sich auf Vollzeitbeschäftigung, d. h. 100 % der verfügbaren Zeit wird für Erwerbsarbeit genutzt.

Für Zeiten der Arbeitslosigkeit wird ein Einkommen, z. B. in Form von Zahlungen der staatlichen Arbeitslosenversicherung, von 50 % des Verdienstes der Vollzeitbeschäftigung angesetzt. Zusätzlich werden Berechnungen ohne staatliche Zuwendungen während der Arbeitslosigkeit durchgeführt.

### Maximal verfügbare Arbeitszeit

Der Parameter  $K_b$  beschreibt den maximal für Erwerbsarbeit zur Verfügung stehenden Anteil der Gesamtzeit über den das Individuum entscheiden kann. Eine Belegung von  $K_b$  mit Werten  $< 1$  bildet einen Arbeitsmarkt ohne Vollzeitstellen ab. Ist  $K_b$  z. B. mit 0,5 belegt, wird auf dem Arbeitsmarkt nur eine Teilzeitbeschäftigung von 50 % angeboten. Der Parameter beschränkt die Steuerungsvariable  $b(\cdot)$  lediglich nach oben. Dem Individuum bleibt stets die Möglichkeit, einen geringeren Anteil seiner zur Verfügung stehenden Zeit für Erwerbstätigkeit zu nutzen.

### Sterblichkeit $\lambda_{i3}$ , $i = 0, 1, 2$

Die Sterblichkeiten sind auf Grund der Komplexität des Modells als zeitunabhängig angenommen, vgl. Abschnitt 3.2. Diese Annahme bildet die Realität nur unzureichend ab. Abbildung 5.4 zeigt die altersabhängige Sterblichkeitsrate und die Restlebenserwartung gemäß Sterbetafel 2005/2007 des statistischen Bundesamtes.<sup>4</sup>

---

<sup>4</sup>Download: <http://www.destatis.de/jetspeed/portal/cms/Sites/destatis/Internet/-/DE/Content/Statistiken/Bevoelkerung/-/GeburtenSterbefaelle/Tabellen/Content100/-/SterbetafelDeutschland,property=file.xls>

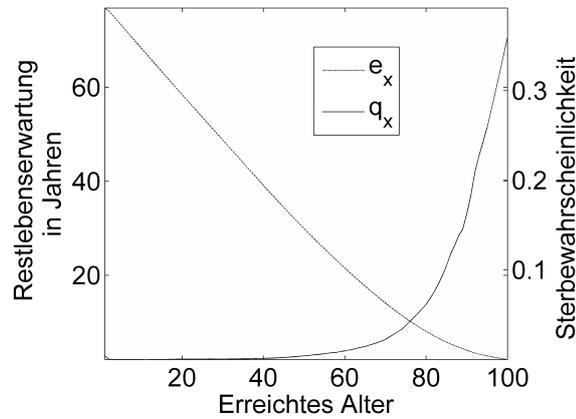


Abbildung 5.4: Altersabhängige Sterblichkeit  $q_x$  und Restlebenserwartung  $e_x$

Um trotz der konstanten Sterblichkeiten die Gegebenheit zu berücksichtigen, dass sowohl das Alter als auch der körperliche Zustand eines Individuums Einfluss auf die Sterblichkeit haben, werden die Intensitätsraten  $\lambda_{i3}$ ,  $i = 0, 1, 2$  differenziert belegt.

Für die Zustände erwerbstätig und arbeitslos wird keine gesonderte Differenzierung bezüglich der Sterblichkeit vorgenommen. Die Festsetzung von  $\lambda_{i3} = 0,02$  für  $i = 0, 1$  ist gleichbedeutend mit einer mittleren Restlebensdauer von 50 Jahren. In der Bevölkerungssterbetafel wird dieser Wert im Alter von ca. 30 Jahren erreicht, d. h. die Festlegung ist für einen noch jungen Menschen bei Start des Optimierungsproblems zutreffend.

Mit  $\lambda_{23} = 0,1$  wird die Restlebenserwartung eines Individuums in Zustand 2 mit 10 Jahren festgelegt. In der Bevölkerungstafel tritt eine 10-jährige Restlebenserwartung im Alter von etwa 75 Jahren auf. Im Modell wird Zustand 2 als „gebrechlicher“ Zustand interpretiert, in dem keine Invalidität vorliegt, aber Unterstützung bei der Verrichtung alltäglicher Tätigkeiten nötig ist. Unter dieser Prämisse ist die Festlegung von  $\lambda_{23}$  tendenziell zu niedrig angesetzt. „Gebrechlichkeit“ im Sinne des Modells tritt im Schnitt vermutlich erst ab einem etwas höheren Alter auf.

**Inaktivierungsintensität**  $\lambda_{i2}$ ,  $i = 0, 1$ 

Die Wahrscheinlichkeiten in den Zustand „inaktiv“ zu wechseln werden ebenso wie die Sterblichkeit zeitunabhängig festgelegt. Diese Annahme ist eine sehr grobe Näherung der Realität. Bei Interpretation des Zustandes 2 als „gebrechlich“ ist die Ermittlung einer sinnvollen Belegung der Größe  $\lambda_{i2}$  problematisch. Allenfalls Vergleiche mit Eintrittswahrscheinlichkeiten für leichte Pflegebedürftigkeit könnten Anhaltspunkte liefern. In einer Arbeit von Olivieri und Pitacco (2001) modellieren die Autoren die zeitabhängige Eintrittsintensität für Pflegebedürftigkeit ab dem Alter 65 gemäß dem Gompertzschen Ansatz  $\lambda_{02}(t) = 8,27 \cdot 10^{-6} \exp 0,095599(65 + t)$ . Tabelle 5.4 zeigt die Übergangsintensitäten eines Individuums für erreichte Alter von 65-90 Jahren.

Tabelle 5.4: Pflegeeintrittsintensitäten für Alter  $65 + t$ 

$t$	0	5	10	15	20	25	30	35
$\lambda_{02}(t)$	0,004	0,007	0,011	0,017	0,028	0,045	0,073	0,117

Die Übergangsintensitäten steigen gemäß dem Ansatz exponentiell an. Erst im Alter von 85 Jahren übersteigt der Ansatz die gewählte konstante Sterberate von  $\lambda_{03} = 0,2$ . Für das jüngere Individuum wäre gemäß dem Ansatz nach Gompertz ein Wert von maximal  $\lambda_{02} = 0,0002$  angemessen. Allerdings ist der Ansatz mit Sicherheit nicht gültig für ein Alter deutlich kleiner als 65. Zudem beschreiben die Raten Pflegebedürftigkeit und nicht die vermutlich viel eher und häufiger eintretende Hilfsbedürftigkeit.

Mangels geeigneter empirischer Vorgaben wird  $\lambda_{02} = 0,02$  für das junge Individuum festgesetzt. Für das ältere Individuum wird mit  $\lambda_{i2} = 0,1$  eine deutlich höhere Übertrittsintensität gewählt. Die Annahmen für  $\lambda_{i2}$  bilden den Sachverhalt ab, dass für einen jüngeren Menschen „Inaktivität“ eher selten auftritt und dass ein älterer Mensch einem deutlich höheren Risiko ausgesetzt ist „inaktiv“ zu werden.

**Wechsel zwischen Erwerbstätigkeit und Arbeitslosigkeit**  $\lambda_{01}$ ,  $\lambda_{10}$ 

Für den Wechsel zwischen Erwerbstätigkeit und Arbeitslosigkeit werden zwei Szenarien gewählt. Das erste Szenario steht für ein geringes Risiko arbeitslos

zu werden ( $\lambda_{01} = 0, 1$ ). Tritt Arbeitslosigkeit ein, besteht diese nur kurz, d. h. nahezu sofort wird wieder in den Zustand Erwerbstätigkeit gewechselt ( $\lambda_{10} = 0, 99$ ). Im zweiten Szenario wird eine extreme Situation abgebildet: Arbeitslosigkeit tritt häufig ein und die zu erwartende Reaktivierungszeit ist genau so lang wie die zu erwartende Erwerbszeit ( $\lambda_{01} = \lambda_{10} = 0, 5$ ).

### Risikoparameter $\lambda$ und $\beta$ für Verluste in Zeitguthaben

Die Höhe eines Verlustes auf dem Zeitguthaben ist deterministisch modelliert, lediglich das Auftreten des Ereignisses „Verlust“ ist stochastisch abgebildet.

Um die Möglichkeit des Verlustes des gesamten oder eines Teils des Zeitguthabens abzubilden, werden verschiedene Szenarien festgelegt:

- Es besteht kein Risiko Zeitguthaben zu verlieren ( $\lambda = \beta = 0$ ).
- Es besteht ein im Vergleich zum Todesfallrisiko geringes Risiko, dass ein Verlust auftritt ( $\lambda = 0, 01$ ). Für ein junges Individuum beträgt die durchschnittliche Wartezeit auf den Übergang von Zustand „aktiv“ in Zustand „verstorben“ 50 Jahre, während ein Verlust auf dem Zeitguthaben durchschnittlich alle 100 Jahre auftritt. Der Verlust ist, wenn er eintritt, deutlich wahrnehmbar ( $\beta = 0, 25$ ).
- Das Risiko des Auftretens eines Verlustes ist groß, durchschnittlich tritt das Ereignis alle 10 Jahre auf ( $\lambda = 0, 1$ ). Tritt ein Schaden ein, entsteht beinahe ein Totalverlust ( $\beta = 0, 9$ ).
- Das Risiko des Auftretens eines Verlustes ist sehr groß, durchschnittlich tritt das Ereignis alle 2 Jahre auf ( $\lambda = 0, 5$ ). Tritt ein Schaden ein, entsteht ein Totalverlust ( $\beta = 1$ ).

### Risikoaversion des Individuums $\gamma_{i,j}$

Abgesehen vom Alter und dem Grad an Gebrechlichkeit wird ein Individuum stark durch sein Risikoverhalten charakterisiert. Viele Studien kommen zu dem Ergebnis, dass das Risikoverhalten durch Geschlecht und Alter sowie diverse sozioökonomische Einflussgrößen geprägt wird. Siehe z. B. Harrison

et al. (2007) für eine breite Einführung in das Thema und Halek und Eisenhauer (2001) für eine neuere Studie des Risikoverhaltens basierend auf dänischen Feldversuchen.

Die in der vorliegenden Arbeit verwendete Form der Nutzenfunktionen setzt grundsätzlich eine konstante Risikoaversion bezüglich des Nutzen stiftenden Gutes voraus. Jedoch wird für die verschiedenen Zustände von  $Z(t)$  eine Variation der Risikoaversion zugelassen. Damit kann im Modell die Risikoaversion des Individuums in vereinfachter Form in Abhängigkeit von Alter und Erwerbssituation differenziert werden, wie die Ergebnisse von Harrison et al. (2007) empfehlen. Gemäß deren Studie impliziert ein höheres Alter eine höhere Risikoaversion und Arbeitslosigkeit eine geringere Risikoaversion. Für die Nutzenfunktion in Zustand 3 wird eine eher hohe Risikoaversion angenommen ( $1 - \gamma_5 = 0,8$ ). Damit wird gleichzeitig ein deutliches Gewicht auf ein Vererbungsmotiv gelegt. Da Zustand 2 im Modell mit höherem Alter einhergeht, wird die Risikoaversion auch für diesen Zustand eher hoch angesetzt ( $1 - \gamma_3 = 0,8$ ).

Die betrachteten Studien zur Risikoaversion berücksichtigen allesamt lediglich das Risikoverhalten bezüglich monetärer Güter. Für die Risikoeinstellung bezüglich Freizeit und Zeitguthaben existiert keine empirische Untersuchung. Der Konsum von Zeit entspricht in Zustand 2 und 3 jedoch strukturell dem Konsum in einer anderen Währungseinheit. Das Risikoverhalten bezüglich Zeit kann ähnlich dem Risikoverhalten bezüglich Geld angenommen werden. Grundsätzlich lässt sich vermuten, dass der eingeschränkte Einsatz des Zeitguthabens sehr wohl Einfluss auf das Risikoverhalten hat. Zum Beispiel wird der sofortige Konsum von Zeitguthaben möglicherweise dem Geldkonsum vorgezogen, da ein höheres Geldguthaben die Chance von zusätzlichem Wachstum beinhaltet. Eventuell wird dem Nutzen aus Zeitguthaben insgesamt auch weniger Gewicht zugesprochen und damit eine neutralere Risikoeinstellung eingenommen. Mangels empirischer Erfahrungswerte werden die entsprechenden Parameter in Zustand 3 und 2 identisch zu den Parametern für das Geldvermögen belegt ( $\gamma_5 = \gamma_6$  bzw.  $\gamma_3 = \gamma_4$ ), d. h. eine Symmetrie im Nutzen aus Geld- und Zeitkonsum wird vorausgesetzt.

Ganz anders wird die Risikoaversion in Zustand 0 und 1 bewertet. Hier sind die zwei Nutzen stiftenden Güter von sehr unterschiedlicher Natur. Prinzipiell kann bei getrennter Betrachtung unendlich großer Nutzen aus Geldkonsum generiert werden. Der marginale Nutzen aus zusätzlichem Konsum wird zwar

geringer, aber der Gesamtnutzen wird für  $c_1 \rightarrow \infty$  unendlich groß. Der Nutzen aus Freizeit ist nach oben beschränkt, da jedem Menschen nicht mehr als 24 h am Tag zur Verfügung stehen. Gleichzeitig ist der Zufluss von Zeit zu jeder Zeit gesichert. Es besteht keine Gefahr, dass heute konsumierte Freizeit die Menge an möglicher Freizeit für morgen mindert, während heute getätigter Geldkonsum durchaus direkten Einfluss auf die Höhe des möglichen morgigen Konsums hat. Tendenziell ist vermutlich für alle Individuen eine höhere Risikobereitschaft bezüglich Freizeit als bezüglich Geldkonsum vorhanden. Empirische Belege dazu gibt es allerdings nicht. In den Berechnungen werden daher die Parameter zur Risikoaversion in Zustand 0 und 1 breit variiert, um den Einfluss des Risikoverhaltens eines Individuums auf die Bereitschaft zu alternativem Investment zu untersuchen.

Im folgenden Abschnitt werden die verschiedenen Parameterfestlegungen zusammengefasst und die berechneten Kombinationen dargestellt.

### 5.3.1 Zusammenfassung der Parameterbelegungen

Tabelle 5.5 zeigt die gewählten Parameterfestlegungen, die rein technisch durch die Numerik bedingt sind und keine fachliche Spezifikation beinhalten. Dies betrifft die Obergrenzen für das zweidimensionale Vermögen  $\bar{x}_1$  und  $\bar{x}_2$  und die Diskretisierungsweiten  $h_i$ . In Abschnitt 4.1 wird die notwendige numerische Beschränkung der Steuerungsvariablen  $c_1$  durch  $c_1 \leq K_{c_1}$ ,  $c_2$  durch  $c_2 \leq K_{c_2}$  und  $\theta$  durch  $\theta \leq K_\theta$  erläutert. Zusätzlich werden die Parameter  $\rho$  und  $r$  bei allen durchgeführten Berechnungen konstant gehalten. Zur Erläuterung der Festlegungen wird auf den jeweiligen Absatz in Abschnitt 5.3 verwiesen. Insgesamt enthält das Modell 6 verschiedene Risikoaversionsparameter ( $\gamma_{j,i}$  mit  $j = 1, 2$  und  $i = 0, 1$  sowie  $\gamma_k$  mit  $k = 3, 4, 5, 6$ ). Insbesondere die Variation von  $\gamma_{j,i}$  hat einen sehr komplexen Einfluss auf die Form der optimalen Steuerungsvariablen. Daher wird auf die zusätzliche Variation von  $\gamma_k$  verzichtet.

Tabelle 5.5: Konstante Parameter

$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$h_1$	$h_2$	$K_{c_1}$	$K_{c_2}$	$K_\theta$	$\rho$	$r$	$\gamma_k$
100	1	0,1	0,0025	500	1	1000	0,15	0,03	0,2

Die verbleibenden Parameterkombinationen werden für die Modellrechnungen in zwei Cluster zusammengefasst. Jedes Cluster steht stellvertretend für ein Modellindividuum, vgl. Tabelle 5.6, das die folgenden drei Hauptmerkmale trägt:

- Die Sterblichkeit (stellvertretend für eine grobe Altersklasse) aus dem aktiven oder arbeitslosen Zustand heraus ( $\lambda_{i3}$ ,  $i = 0, 1$ ),
- die Wahrscheinlichkeit aus den beiden Zuständen heraus invalide zu werden ( $\lambda_{i2}$ ,  $i = 0, 1$ ) und
- die Sterblichkeit aus dem Invalidenzustand heraus ( $\lambda_{23}$ ).

Tabelle 5.6: Grundindividuen

Charakterisierung des Individuums	$\lambda_{i3}$	$\lambda_{i2}$	$\lambda_{23}$
junger Mensch	0,02	0,02	0,1
alter Mensch	0,1	0,2	0,2

Für beide Grundindividuen werden unterschiedliche Parameter zur Modellierung der Risikoaversion  $\gamma_{i,j}$  in den Nutzenfunktionen in Zustand 0 und 1 verwendet. Die Risikoparameter  $\gamma_{j,0}$  und  $\gamma_{j,1}$  mit  $j = 1, 2$  werden im Folgenden parallel variiert, d. h. es gilt stets  $\gamma_{j,0} = \gamma_{j,1}$ . Eine zusätzliche Variation der Risikoparameter in Abhängigkeit des Zustandes „erwerbstätig“ oder „arbeitslos“ erhöht die Komplexität des Einflusses auf die Steuerungsparameter auf ein nicht mehr darstellbares Niveau.

Für den Grundtyp „junger Mensch“ wird das Einkommen während der Erwerbstätigkeit  $g(0)$  und während der Arbeitslosigkeit  $g(1)$  variiert. Ebenso werden die Wahrscheinlichkeiten arbeitslos zu werden  $\lambda_{01}$  bzw. zu bleiben  $\lambda_{10}$  unterschiedlich hoch angesetzt. Zusätzlich wird das Maß der zur Verfügung stehenden Erwerbsarbeit  $K_b$  variiert. Eine weitere Variation stellt das unterschiedlich hohe Risiko für einen Verlust auf dem Zeitkonto dar (Parameter  $\lambda$  und  $\beta$ ).

Die berechneten Parameterbelegungen für das „junge“ Individuum sind in Tabelle B.1 in Anhang B dargestellt.

Für den Grundtyp „alter Mensch“ spielen Größen wie Einkommen und Arbeitslosigkeit keine Rolle, da dieses Individuum das Erwerbsleben bereits beendet hat. Zustand 0 wird daher nicht betrachtet. Zustand 1 ist als Ruhestand und nicht als Arbeitslosigkeit zu verstehen. Aus diesem Zustand gibt es lediglich den Übergang in den Zustand inaktiv oder verstorben. Für den „alten Menschen“ werden die Parameter zur Modellierung des Verlustrisikos für das Zeitguthaben (Parameter  $\lambda$  und  $\beta$ ) und die Parameter zur Modellierung der Performance des Kapitalmarktes (Parameter  $\mu$  und  $\sigma$ ) variiert.

Die berechneten Parameterbelegungen für das „alte“ Individuum sind in Tabelle B.3 in Anhang B dargestellt.

## 5.4 Ergebnisse

Zur Erläuterung und Bewertung der Ergebnisse werden die berechneten optimalen Steuerungsvariablen als Graphen über dem zweidimensionalen Definitionsbereich  $\bar{\mathcal{S}}_h$  des Startvermögens  $\mathbf{x}$  dargestellt. Die erste Dimension beschreibt das Vermögen in Geldeinheiten, die zweite Dimension steht für das vorhandene Vermögen in Zeiteinheiten.

Das Geldvermögen wird in 1.000 Währungseinheiten (WE) gemessen, das Zeitvermögen in „Personen“-Jahren. Ein „Personen“-Jahr steht dabei für die Menge an Stunden, über die ein Individuum für ein volles Jahr zu entscheiden hat. Eine Einheit eines „Personen“-Jahres in Stunden gemessen ist davon abhängig, wie viel Zeit täglich zur Entscheidung steht. Da ein Grundanteil jedes Tages für zwangsweise anfallende Tätigkeiten notwendig ist und somit für die Entscheidung über Freizeit – Arbeitszeit – Freiwilligendienst nicht zur Verfügung steht, umfasst ein Tag weniger als 24 h. In den durchgeführten Rechnungen ist ein „Personen“-Jahr gleichzusetzen mit 5.110 h oder 14 h pro Tag. Dies bedeutet, um 1 „Personen“-Jahr anzusparen, muss ein Individuum z. B. über 14 Jahre jeden Tag 1 h Freiwilligenarbeit leisten. Wenn im Zustand 2 Dienstleistungen für 14 h am Tag in Anspruch genommen werden, wird das Zeitguthaben in einem Jahr um eine Einheit vermindert. Wie bereits in Kapitel 2 ausgeführt, ist es grundsätzlich möglich und der Anwendung angemessen, den Konsum von Zeitguthaben einzuschränken. Die Ergebnisse der Berechnung zeigen jedoch, dass über den für die Anwendung interessanten Bereich die Beschränkung nicht wirksam wird.  $c_2$  bleibt über dem gesamten

Wertebereich von  $x_2$  in allen Beispielrechnungen weit unter 0,5.

Der für die Auswertungen interessante Bereich von  $\mathbf{x}$  liegt in den Grenzen  $[0; 50] \times [0; 0, 4]$ . Außerhalb dieses Bereiches ist für das Individuum kein positiver Zugewinn aus dem möglichen Aufbau von Zeitguthaben zu erkennen. Für großes Geldvermögen (über 20 Tsd. WE) ist sehr wenig zusätzlicher Nutzen aus Zeitvermögen zu generieren. Die interessante Menge an vorhandenem Zeitvermögen ist eingeschränkt, da jedes Individuum nur eine begrenzte Menge an Zeitguthaben über seine Lebenszeit ansammeln kann. Das maximale Zeitguthaben ergibt sich aus der Anzahl der Lebensjahre vor Eintritt der Invalidisierung oder Tod bei 100 % Investition der Zeit und null Freizeit in Zustand 0 und 1. Selbst wenn eine Übertragung von Zeitguthaben, d. h. bei Start bereits vorhandenes Zeitguthaben aus einer „fremden“ Quelle (z. B. Vererbung), berücksichtigt wird, ist es ausreichend, das Guthaben bis 0,4 Einheiten zu betrachten. Darüber hinaus wird in den wenigsten Fällen zusätzliches Guthaben generiert (Zeitinvestment  $a(i), i = 0, 1$  konstant 0).

Zunächst werden an einem ausgewählten Beispiel alle numerisch bestimmten optimalen Steuerungsparameter einzeln anhand von Diagrammen erläutert. Anschließend werden die Berechnungen für die Modellindividuen „junger“ und „alter“ Mensch im Gesamten analysiert.

### 5.4.1 Ergebnis einer ausgewählten Modellrechnung

Für eine beispielhafte Parameterkombination werden die optimalen Steuerungsvariablen in Abhängigkeit des Startvermögens  $\mathbf{x}$  für verschiedene Startzustände in den Abbildungen 5.5 – 5.9 dargestellt. Die Parameterbelegungen beschreiben folgende Modellumgebung:

- Eine lange zu erwartende Lebenszeit für das Individuum, kombiniert mit einer übereinstimmenden Inaktivierungswahrscheinlichkeit:  $\lambda_{03} = 0,02, \lambda_{02} = 0,02$ ;
- Ein geringes Arbeitslosigkeitsrisiko und kurze Arbeitslosigkeitsdauer:  $\lambda_{01} = 0,1, \lambda_{10} = 0,99$ ;
- Ein hohes Einkommen aus Erwerbsarbeit, die lediglich als Teilzeitarbeit mit 50 % Anteil wahrgenommen werden kann:  $g(0) = 10, K_b = 0,5$ ;
- Keine staatlichen Zuwendungen im Falle von Arbeitslosigkeit:  $g(1) = 0$ ;

- Das Zeitguthaben ist einem geringen Verlustrisiko ausgesetzt:  $\lambda = 0,01$ ,  $\beta = 0,25$ ;
- Das Individuum hat in Zustand 0, 1 und 2 dasselbe Risikoverhalten bezüglich Geldkonsum und Freizeitkonsum:  $\gamma_{1,i} = \gamma_{2,i} = \gamma_3 = \gamma_4 = 0,7$ ;
- Für den Nutzen aus Vererbung gelten die Parameter  $\gamma_5 = \gamma_6 = 0,2$ .

Zunächst werden die optimalen Strategien für den Startzustand  $z = 0$  betrachtet. Um den zusätzlichen Nutzen aus der Möglichkeit des Zeitinvestments darzustellen, werden in einigen Grafiken ergänzend die Werte der optimalen Steuerungsvariablen bzw. Nutzenfunktion für ein Modell ohne Zeitinvestment wiedergegeben.

Abbildung 5.5 zeigt den optimalen Zeitanteil, um bezahlter Erwerbsarbeit nachzugehen. Über der schwarzen Fläche gilt  $b(0) = 0,5$ . Über der weißen Fläche ist  $b(0) = 0$ .

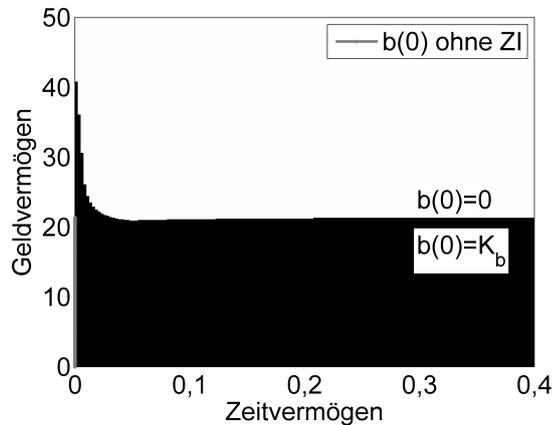


Abbildung 5.5: Arbeitszeit für Zustand 0 in Abhängigkeit von  $x_1$  und  $x_2$

Der optimale Zeitanteil für Erwerbstätigkeit ist vorrangig vom vorhandenen Geldvermögen und nur wenig vom vorhandenen Zeitvermögen abhängig. Sobald das Geldvermögen einen gewissen Wert überschreitet, sinkt die Erwerbstätigkeit für den größten Bereich des Zeitvermögens auf 0. Nur im Bereich von sehr kleinem vorhandenem Zeitvermögen ist Erwerbsarbeit auch bei größerem Geldvermögen optimal.

Die graue Linie am linken Rand der Grafik zeigt den Bereich des Geldvermögens an, für den Erwerbstätigkeit in Höhe von  $b(0)^{\text{ohne ZI}} = 0,5$  nachgegangen wird, wenn kein Zeitinvestment möglich ist. Auch bei fehlendem Zeitinvestment folgt die optimale Erwerbstätigkeit einer „bang-bang“ Strategie. Entweder wählt das Individuum die maximal mögliche Erwerbstätigkeit ( $b(0)^{\text{ohne ZI}} = K_b$ ) oder es geht keiner Erwerbstätigkeit nach ( $b(0)^{\text{ohne ZI}} = 0$ ).

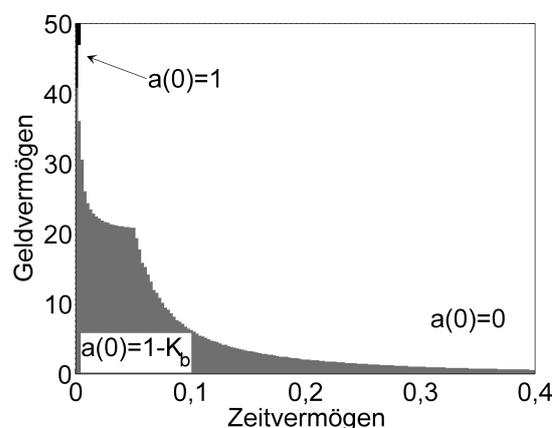


Abbildung 5.6: Investment in Zeitguthaben für Zustand 0 in Abhängigkeit von  $x_1$  und  $x_2$

In Abbildung 5.6 ist zu erkennen, dass der Einsatz von Freiwilligenarbeit für einen eingeschränkten Bereich des Vermögens optimal ist (Schwarz:  $a(0) = 1$ , Grau:  $a(0) = 0,5$ ). Freiwilligenarbeit wird im grauen Bereich ergänzend zu bezahlter Erwerbstätigkeit durchgeführt. Bei geringem Zeitvermögen ( $\lesssim 0,07$  Jahre bzw. 360 Stunden) wird über den gleichen Zustandsbereich zusätzliche Freiwilligenarbeit geleistet, über dem auch bezahlte Erwerbstätigkeit optimal ist. Bei höherem Zeitvermögen ist es nur für ein immer geringeres Geldvermögen optimal, Freiwilligenarbeit zu leisten. In diesem Bereich wird bei ausreichendem Geldvermögen der Konsum von Freizeit dem Zeitinvestment vorgezogen. Bei sehr großem vorhandenem Zeitguthaben ist es lediglich für  $x_1 = 0$  optimal zusätzlich Zeitinvestment zu betreiben.

Wenn das Individuum über null Zeitvermögen verfügt, ist ab einem Geldvermögen von knapp über 40 Tsd. Währungseinheiten eine Investition der

gesamten verfügbaren Zeit (100 %) in Freiwilligenarbeit optimal. Gleichzeitig ist es in diesem Bereich nicht optimal, einer bezahlten Erwerbsarbeit nachzugehen. Insgesamt ist auch die Strategie  $a(0)$  eine „bang-bang“ Strategie.  $a(0)$  wird entweder maximal, d. h. die nach Abzug von  $b(0)$  verbleibende Zeit wird gesamt für Zeitinvestment genutzt, oder  $= 0$  gewählt.

Im Modell ohne Zeitinvestment ist zwangsläufig  $a(0) = 0 \forall x_1$ . Da die Erwerbstätigkeit nicht über  $K_b = 0,5$  hinaus erhöht werden kann, wird also im Modell ohne Zeitinvestment insgesamt mehr Freizeit konsumiert, als im Modell mit Zeitinvestment.

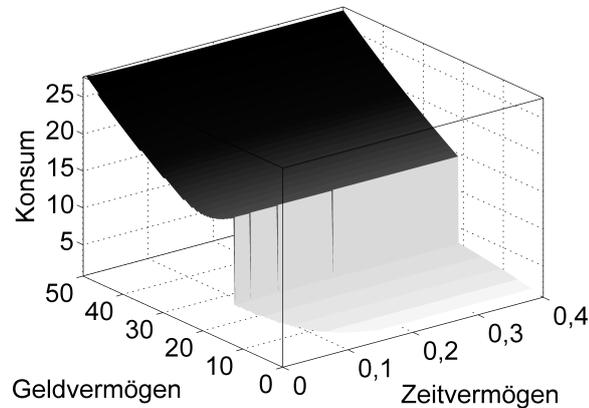


Abbildung 5.7: Optimaler Geldkonsum für Zustand 0 in Abhängigkeit von  $x_1$  und  $x_2$

Abbildung 5.7 zeigt den optimalen Geldkonsum in Zustand 0. Im Bereich von  $\bar{\mathcal{S}}$  über dem die Steuervariablen  $a(0) + b(0) > 0$  sind, sinkt der optimale Konsum signifikant ab (hellgraue Fläche). Im weißen Bereich wird kein Konsum getätigt ( $c_1(0) = 0$ ). Die starke Reduktion im Konsum hängt mit der Form der Nutzenfunktion in Zustand 0 zusammen:  $u((c_1, a, b)^T, 0) = \frac{c_1^{\gamma_{1,0}} (1-a-b)^{\gamma_{2,0}}}{\gamma_{1,0} \gamma_{2,0}}$ . Für  $a(0) + b(0) = 1$  ist der optimale Geldkonsum zwangsläufig 0, da kein Nutzen generiert werden kann. Auch für Punkte im Zustandsraum  $\bar{\mathcal{S}}$  mit  $0 < a(0) + b(0) < 1$  ist es für das Individuum offensichtlich von größerem Vorteil auf eingeschränkten aktuellen Nutzen durch Konsum zu verzichten, um mehr Chancen auf zukünftigen Nutzen aus Erwerbstätigkeit und Zeitinvestment zu haben. Geldkonsum wird also in die Zukunft verschoben, da

dann der optimale Anteil an Freizeit höher ist und somit aus demselben Konsum mehr Nutzen generiert werden kann (insbesondere in Zustand  $Z(t) = 2$ ).

Abbildung 5.8 zeigt den optimalen Konsum in Zustand 0 in Abhängigkeit von  $x_1$  eingeschränkt auf  $x_2 = 0, 4$ . Die durchgezogene Linie stellt den optimalen Geldkonsum bei Vorhandensein der Alternative „Zeitinvestment“ (ZI) im Modell dar. Am Verlauf der Linie ist zu erkennen, dass für sehr kleines Geldvermögen der Konsum zunächst Null ist, da die komplette Zeit für Erwerbstätigkeit und Freiwilligenarbeit genutzt wird. Im Bereich von  $x_1 \approx 0, 5$  bis  $x_1 \approx 22$  ist der Konsum größer Null, jedoch durch die verrichtete Erwerbstätigkeit stark abgesenkt. Der optimale Geldkonsum ist für großes Geldvermögen nä-

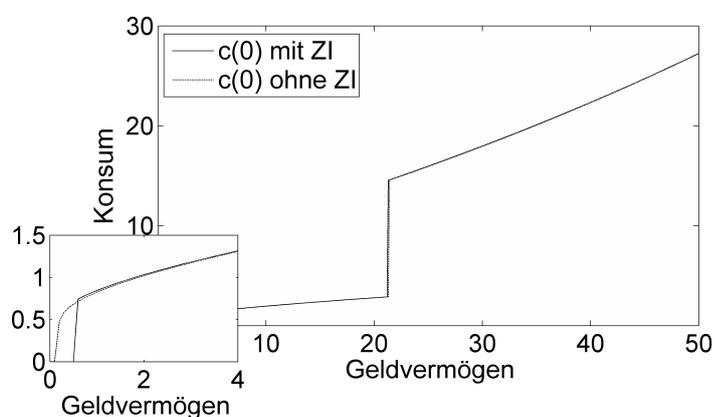


Abbildung 5.8: Optimaler Konsum für Zustand 0 in Abhängigkeit von  $x_1$

herungsweise linear und die beiden Linien sind praktisch deckungsgleich. Der leicht konkave Verlauf wird durch das Verhalten von  $c_1(i)$  am oberen Rand  $\bar{x}_1 = 100$  bestimmt. Da ein Anwachsen des Geldvermögens über  $\bar{x}_1$  im Modell unterbunden wird, strebt  $c_1(x_1, i) \rightarrow \infty$ , für  $x_1 \rightarrow 100$ . Für geringes Geldvermögen (siehe Ausschnitt in 5.8) ist der Geldkonsum, sobald er größer 0 ist, im Modell mit Zeitinvestment minimal höher als der Geldkonsum ohne Zeitinvestment. Weiterhin fällt auf, dass der Konsum für beide Szenarien nahe dem Nullpunkt konkav ist. Das konkave Verhalten stimmt mit den analytischen Ergebnissen von Merton (1971) und Richard (1975) überein. Beide Autoren zeigen, dass der optimale Konsum wie folgt bestimmt wird:

$$c_1^* = K \cdot (x_1 + B),$$

wobei

$K$  = Konstante in Abhängigkeit der Modellparameter und

$B$  = Barwert des zukünftigen Einkommens.

Im Modell der vorliegenden Arbeit wird Einkommen durch Erwerbstätigkeit erzeugt und dynamisch gesteuert. Je höher das vorhandene Vermögen ist, desto weniger Erwerbsarbeit wird betrieben. Für kleines Geldvermögen wird somit der Barwert des zukünftigen Einkommens groß. Für sehr großes Geldvermögen verschwindet der Barwert fast. Daher nimmt der optimale Konsum nahe Null stärker zu. Für großes Geldvermögen besitzt das zukünftige Einkommen praktisch keinen Einfluss mehr auf den Konsum, d. h. der Konsum ist für große  $x_1$  linear zum Vermögen. Dieses Ergebnis untermauert die Gültigkeit der numerischen Berechnungen.

In Abbildung 5.9 ist das optimale Investment in der riskanten Anlageform dargestellt. Die Werte von  $\theta(0) > 1$  zeigen, dass eine Short-Position eingenommen und mehr Geldvermögen investiert wird, als vorhanden ist. Die linke Grafik zeigt  $\theta(0)$  über dem gesamten Zustandsraum  $\bar{\mathcal{S}}_h$ , die rechte Grafik zeigt einen Schnitt parallel der  $x_1$ -Achse auf Höhe von  $x_2 = 0$  und  $x_2 = 0,2$ .

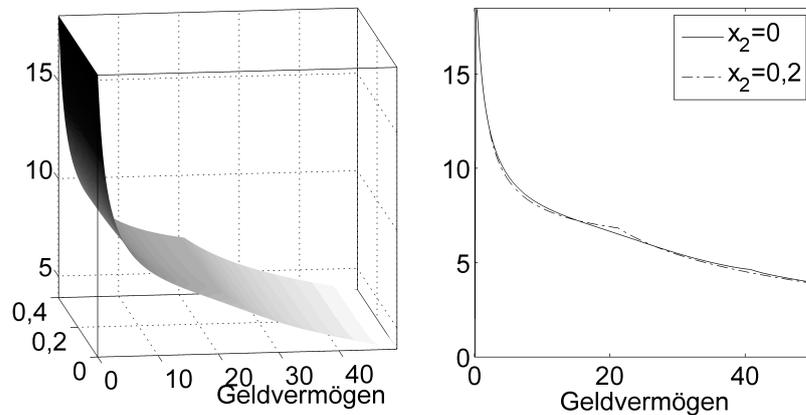


Abbildung 5.9: Optimales riskantes Investment für Zustand 0 in Abhängigkeit von  $x_1$  und  $x_2$

Deutlich sichtbar ist der Einfluss der Erwerbsmöglichkeit auf das riskante Anlageverhalten. Auf Höhe von  $x_1 \approx 21$  sinkt  $\theta(0)$  ab. Oberhalb dieses Ver-

mögenswertes wird keiner Erwerbstätigkeit mehr nachgegangen. Die Möglichkeit, Geldeinnahmen zu erzeugen, erhöht also die Bereitschaft riskant zu investieren. Dieser Sachverhalt stimmt unter anderem mit den Ergebnissen von Bodie et al. (1992) überein und spiegelt die Gelegenheit wieder, Verluste auf dem Kapitalmarkt durch zukünftige Einkünfte auszugleichen. Weniger deutlich, aber dennoch vorhanden, ist der Einfluss des Zeitinvestments auf das optimale Aktieninvestment. Er ist in diesem Beispiel schwer zu interpretieren. Abbildung 5.6 sagt aus, dass für das Zeitinvestment für  $x_2 = 0$  ab einem Wert des Geldvermögens von  $x_1 \approx 40$   $a(0) = 1$  gilt. Zugleich ist abzulesen, dass für  $x_2 = 0, 2$  nur für kleine Geldvermögen ( $x_1 \lesssim 5$ ) Zeitinvestment betrieben wird. Wenn Zeitinvestment die Möglichkeit eröffnet, durch zukünftiges zusätzliches Zeitinvestment ungünstige Bewegungen auf dem Kapitalmarkt zu kompensieren, würde man also einen Anstieg in  $\theta(x_1, 0, 0)$  an der Stelle  $x_1 \approx 40$  erwarten. In Abbildung 5.9 (rechte Grafik) sinkt  $\theta$  hier jedoch ab (vgl. die durchgezogene Linie). Für kleine  $x_1$  erhöht das Zeitinvestment den riskant investierten Anteil ( $\theta(x_1, 0, 0) > \theta(x_1, 0, 2, 0)$ ). Es hat also zusätzlich zur Erwerbstätigkeit einen erhöhenden Einfluss auf  $\theta$ , d. h. Zeitinvestment dient als Hedging-Instrument. Steigt  $x_1$  an ( $\gtrsim 15$ ), wirkt sich der Einfluss von  $a(0) > 0$  jedoch über gewisse Abschnitte negativ aus:  $\theta(x_1, 0, 0)$  sinkt unter  $\theta(x_1, 0, 2, 0)$ . In Abschnitt 5.4.3 wird der Zusammenhang zwischen Zeitinvestment und riskantem Anlageverhalten genauer untersucht.

Für steigendes Geldvermögen ( $x_1 \rightarrow 50$ ) sollte der optimale Anteil des riskant investierten Geldvermögens konstant sein, da sich in diesem Bereich das vorliegende Modell dem Modell von Merton (1969) annähert. Für den betrachteten Zustandsraum ist dies nur eingeschränkt erfüllt. Da das Vermögen nicht über  $\bar{x}_1$  hinauswachsen kann, gilt  $\theta(\bar{x}_1, x_2, z) = 0$ . Dies „zieht“ den optimalen Anteil  $\theta$  bei Annäherung an den Rand  $x_1 = \bar{x}_1$  in Richtung 0 ( $\lim \theta(x_1, x_2, z) = 0$  für  $x_1 \rightarrow \bar{x}_1$ , vgl. auch Abschnitt 5.4.1).

Das starke Ansteigen von  $\theta(0)$  bei  $x_1 = 0$  ist wiederum eine weitere Bestätigung der Ergebnisse von Merton (1971) und Richard (1975). Die Autoren bestimmen das optimale riskante Investment zu

$$\theta^* = K \cdot \left(1 + \frac{B}{x_1}\right).$$

Wie bereits erwähnt, gilt im vorliegenden Modell, dass der Wert der zukünftigen Einnahmen aus Erwerbstätigkeit  $B$  desto größer ist, je kleiner  $x_1$  ist. Somit folgt, dass  $\theta^* \rightarrow \infty$  für  $x_1 \rightarrow 0$ .

Die Wertfunktion  $V(x_1, x_2, 0)$  für Zustand 0 ist in beiden Dimensionen  $x_1$  und  $x_2$  monoton wachsend. Der Anstieg für wachsendes Zeitguthaben ist jedoch sehr gering. In Abbildung 5.10 ist  $V(x_1, x_2, 0)$  in Abhängigkeit von  $x_1$  für verschiedene feste Werte von  $x_2$  dargestellt.

Zur Veranschaulichung des zusätzlichen Nutzens für das Modell mit Zeitinvestment (ZI) ist der akkumulierte Erwartungsnutzen ohne Zeitinvestment (gestrichelte Linie), der akkumulierte Erwartungsnutzen mit Zeitinvestment für  $x_2 = 0$  (strichpunktierte Linie) und der akkumulierte Erwartungsnutzen mit Zeitinvestment für  $x_2 = 0,4$  (durchgezogene Linie) abgebildet.

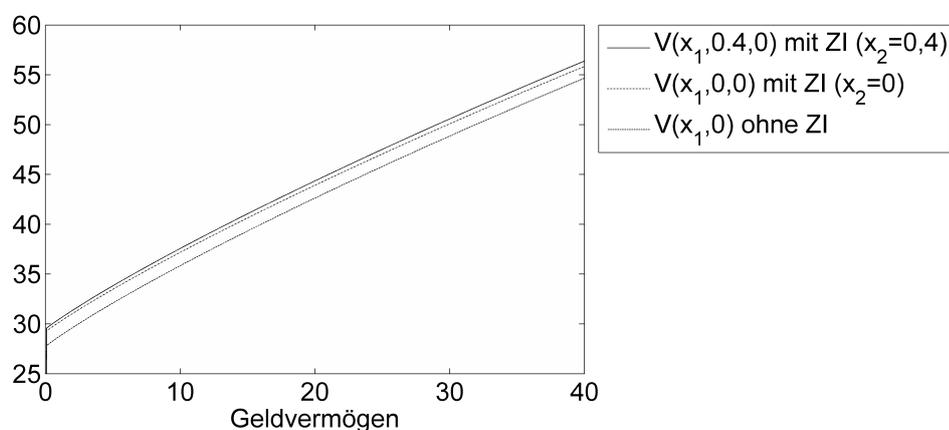


Abbildung 5.10: Nutzenfunktion in Zustand 0 in Abhängigkeit von  $x_1$

Der zusätzliche Nutzen aus der alternativen Vorsorgeform Zeitinvestment ist für alle  $x_1$  klar erkennbar (— und --- liegen oberhalb von --). Der zusätzliche Nutzen bei bereits vorhandenem Zeitguthaben  $x_2 = 0,4$  ist weniger deutlich, aber vorhanden (— liegt über --).

Die optimalen Steuerungsvariablen in Zustand 1 sind ähnlich zu interpretieren wie die optimalen Parameter in Zustand 0. Auf eine separate Darstellung wird deshalb verzichtet.

Für Zustand 2 nehmen die Steuerungsparameter eine vollkommen andere Gestalt als in Zustand 0 und 1 an. Durch die additive Form der Nutzenfunktion in Geld- und Zeitkonsum sind die optimalen Parameter  $c_1(x_1, x_2, 2)$  und  $\theta(x_1, x_2, 2)$  unabhängig vom vorhandenen Zeitvermögen und der optimale Parameter  $c_2(x_1, x_2, 2)$  unabhängig vom Geldvermögen.

Optimaler Konsum ist in beiden Gütern linear, vgl. Abbildung 5.11 und 5.12. Für  $c_1(2)$  sind die Ergebnisse der Arbeit konform mit dem Ergebnis von Merton (1969). Da  $c_1(2)$  und der Nutzen daraus unabhängig von  $x_2$  sind, unterscheidet sich der optimale Konsum im Modell mit Zeitinvestment nicht vom Geldkonsum, wenn kein Zeitinvestment möglich ist.

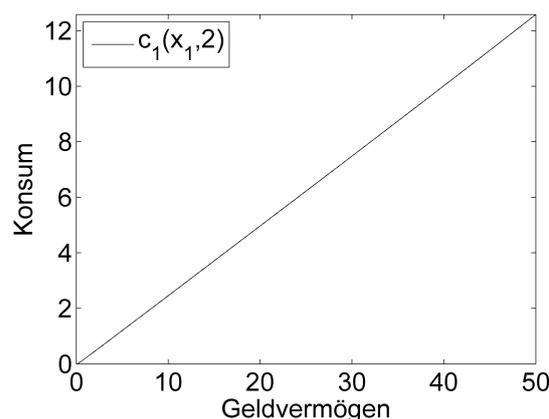


Abbildung 5.11: Optimaler Geldkonsum in Zustand 2 in Abhängigkeit von  $x_1$

Auf Grund der identischen Struktur des Nutzens aus Geld- und Zeitkonsum in Zustand 2 zeigt  $c_2(2)$  ebenfalls ein lineares Verhalten. Im vergrößerten Ausschnitt für den optimalen Zeitkonsum  $c_2(2)$  sind Sprünge im linearen Verlauf sichtbar. Die Sprünge entstehen durch die Modellierung des Verlustrisikos auf dem Zeitguthaben. Im Diskreten wird die deterministische Höhe des Verlustes durch die Funktion  $f_3^h(\mathbf{x}) = (i h_1, [j\beta_2]h_2)^T$  modelliert. Für große  $\beta$  ist das Zeitvermögen nach einem Verlust über weite Strecken konstant, vgl. gestrichelte Linie im Ausschnitt in Abbildung 5.12. Betrachtet man das Zeitvermögen links und rechts von einem Sprung wird ersichtlich, dass der relative Schaden für kleinere Zeitvermögen höher als für größere Zeitvermögen ist. Für Zeitvermögen, bei denen ein Sprung stattfindet, kann es somit einen höheren Nutzen erbringen, wenn an diesen Stellen mehr konsumiert wird als für rechts davon liegende Werte für  $x_2$ . Das verringert den möglichen relativen Verlust nach dem Konsum (vgl. strichpunktierte Linie im Ausschnitt in Abbildung 5.12). Für Zeitvermögen rechts vom Sprung wird weniger konsumiert, da das Risiko eines Verlustes auf dem Zeitguthaben dort

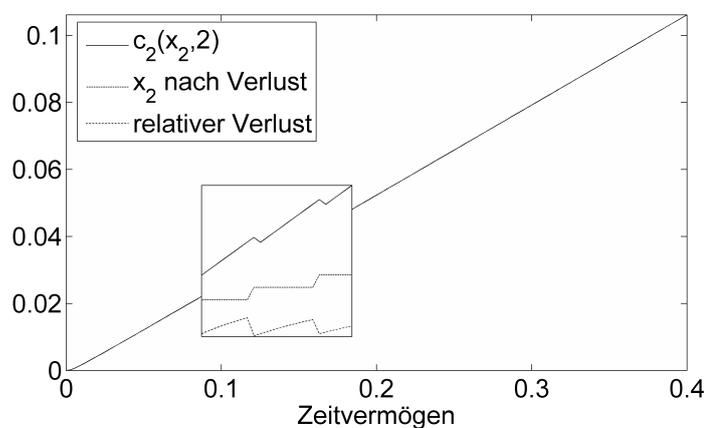


Abbildung 5.12: Optimaler Zeitkonsum in Zustand 2 in Abhängigkeit von  $x_2$

geringer ist.

In Abbildung 5.13 ist das optimale Investment in die riskante Anlageform in Zustand 2 dargestellt. Wie in Zustand 0 und 1 wird auch in Zustand 2 eine Short-Position eingenommen und mehr Geldvermögen investiert als vorhanden ist. Analytisch sollte die Lösung für  $\theta(2)$  in Abhängigkeit des Geldvermögens konstant sein. Für den betrachteten Zustandsraum ist dies nur näherungsweise erfüllt, da auf dem eingeschränkten Zustandsraum  $\bar{\mathcal{S}}_h$   $\theta(i)$  an der unteren und oberen Grenze von  $x_1$  zwangsweise Null wird, vgl. Abschnitt 5.1.1. Wegen der Unabhängigkeit des riskanten Investments vom vorhandenen Zeitvermögen  $x_2$ , stimmt wie für  $c_1(2)$  die optimale Strategie  $\theta(2)$  für das Modell mit und ohne Zeitinvestment überein.

Die Wertfunktion für Zustand 2 ist in Abbildung 5.14 dargestellt. Hat das Individuum Zustand 2 erreicht, kann kein Zeitguthaben mehr aufgebaut werden. Der Gesamtnutzen wird nur noch durch den additiven Einzelnutzen aus Konsum von Geld bzw. Zeit bestimmt. Die Wertfunktion im Modell ohne Zeitinvestment ist deshalb mit der Wertfunktion für  $x_2 = 0$  deckungsgleich (vgl. hellgraue Linie in Abbildung 5.14). Aus der additiven Nutzenfunktion folgert darüber hinaus, dass der akkumulierte Nutzen bei vorhandenem Zeitguthaben stets größer als der akkumulierte Nutzen ohne vorhandenes Zeitguthaben ist.

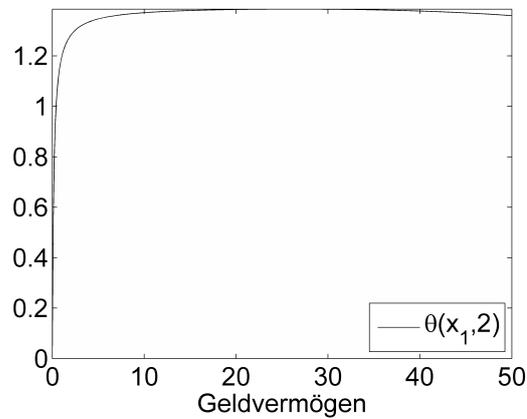


Abbildung 5.13: Optimales riskantes Investment in Zustand 2 in Abhängigkeit von  $x_1$

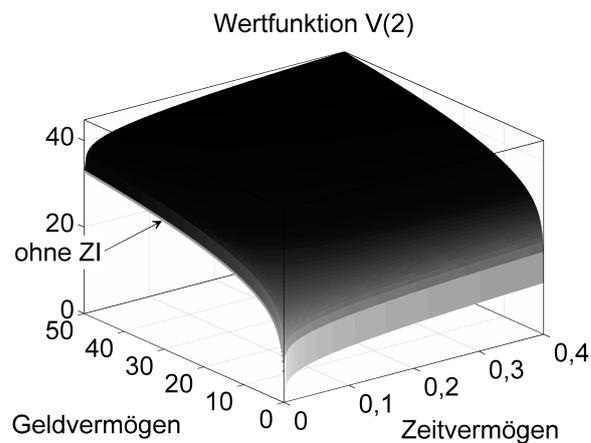


Abbildung 5.14: Wertfunktion für Zustand 2 in Abhängigkeit von  $x_1$  und  $x_2$

Nach der beispielhaften Darstellung und Erläuterung der Ergebnisse für eine ausgewählte Parameterkombination wird im nächsten Abschnitt der Einfluss einzelner Parameter auf die optimalen Steuerungsparameter untersucht. Dabei wird der Einfluss für die beiden Grundindividuen aus Tabelle 5.6 separat dargestellt.

### 5.4.2 Ergebnisse „junger“ Mensch

Bei den Berechnungen für das Parametercluster „junger“ Mensch werden die Ergebnisse von Zustand 0 und 1 zusammen betrachtet. Da sich die Zustände 0 und 1 abwechseln, haben die Parameter für Zustand 1 einen direkten Einfluss auf die optimalen Steuerungen in Zustand 0 und umgekehrt. Prinzipiell gilt dies auch für die Parameter, die die Modellierung von Zustand 2 und 3 beschreiben. Die Einflüsse sind jedoch auf Grund der geringeren Werte für  $\lambda_{i2}$  und  $\lambda_{i3}$  und der Unumkehrbarkeit der Übergänge weniger ausgeprägt.

Im Folgenden wird der Einfluss der verschiedenen variierten Modellparameter auf das Verhalten der optimalen Steuerungsvariablen Zeitinvestment  $a(0)$  und Erwerbsarbeitszeit  $b(0)$  getrennt aufgeführt und bewertet.

Der optimale Konsum  $c_1(i)$ ,  $i = 0, 1$  wird direkt von der optimalen Erwerbstätigkeit und dem optimalen Zeitinvestment geprägt. In Bereichen mit  $b(0)$ ,  $a(0)$  und  $a(1) > 0$  wird der Konsum reduziert, da die eingeschränkte Freizeit direkt den Nutzen aus Geldkonsum verringert, vgl. Erläuterungen in Abschnitt 5.4.1. Außerhalb dieser Bereiche folgen  $c_1(0)$  und  $c_1(1)$  dem bekannten bereits von Merton (1969) hergeleiteten linearen Verhalten. Auf die Steuerungsparameter  $c_1(i)$ ,  $i = 0, 1$  wird daher nicht weiter eingegangen, da neue Erkenntnisse nicht zu gewinnen sind.

Der Einfluss unterschiedlicher Parameter auf die Steuerungsvariable riskantes Investment  $\theta(i)$ ,  $i = 0, 1$  wird in Abschnitt 5.4.3 für den „alten“ Menschen untersucht, da die Vielzahl der möglichen zu variierenden Parameter für den „jungen“ Menschen kein eindeutiges Bild für  $\theta$  ergibt.

In den Abbildungen in Abschnitt 5.4.2 und 5.4.3 werden die optimalen Steuerungsvariablen jeweils durch eine Aufsicht auf die von ihnen über  $\bar{S}_h$  aufgespannte Fläche präsentiert. Unterschiedliche Färbungen indizieren unterschiedlich hohe Werte der dargestellten Strategien.

(a) **Verhalten der optimalen Steuerungsvariablen bezüglich Risikoaversionsparameter  $\gamma_{1,i}$  und  $\gamma_{2,i}$**

Das Verhalten der optimalen Strategien bezüglich Erwerbstätigkeit und Zeitinvestment wird stark von der Risikoaversion des Individuums bezüglich Geld und Zeit geprägt. Dabei ist insbesondere ein struktureller Unterschied zwischen den beiden Fällen  $\gamma_{1,i} + \gamma_{2,i} < 1$  und  $\gamma_{1,i} + \gamma_{2,i} > 1$  zu erkennen.

Für  $\gamma_{1,i} + \gamma_{2,i} > 1$  sind die Strategien  $b(0)$ ,  $a(0)$  und  $a(1)$  so genannte „bang-bang“ Strategien. Das Individuum wird für einen gegebenen Zustand  $(\mathbf{x}, z)$  entweder die gesamte Zeit für die angebotene Erwerbstätigkeit nutzen ( $b(0) = K_b$ ) oder keiner bezahlten Erwerbstätigkeit nachgehen ( $b(0) = 0$ ). Genauso verhält sich die optimale Strategie  $a(1)$  des Zeitinvestments in Zustand 1. Das Individuum nutzt entweder 100 % oder 0 % seiner zur Verfügung stehenden Zeit für Freiwilligenarbeit. Der optimale Anteil an Zeitinvestment  $a(0)$  in Zustand 0 kann als nachrangige „bang-bang“ Strategie verstanden werden. Das Zeitinvestment hat entweder den Wert Null oder die zur Verfügung stehende Zeit wird nach Abzug der optimalen Erwerbstätigkeit voll für Zeitinvestment genutzt. Die folgenden Abbildungen zeigen für verschiedene Werte von  $\gamma_{i,j}$  den Bereich von  $\bar{S}_h$ , über dem die Strategien  $b(0)$ ,  $a(0)$  und  $a(1)$  größer 0 sind. Der Wert der Strategien ist über den bezeichneten Bereichen konstant:  $b(0) = K_b$ ,  $a(0) = 1 - K_b$ ,  $a(1) = 1$ .

Die linke Grafik in Abbildung 5.15 zeigt den Bereich von  $\bar{S}_h$  über dem in Zustand 0 in Abhängigkeit von  $\gamma_{1,i}$  bei festem  $\gamma_{2,i} = 0,4$  einer Erwerbstätigkeit nachgegangen wird.

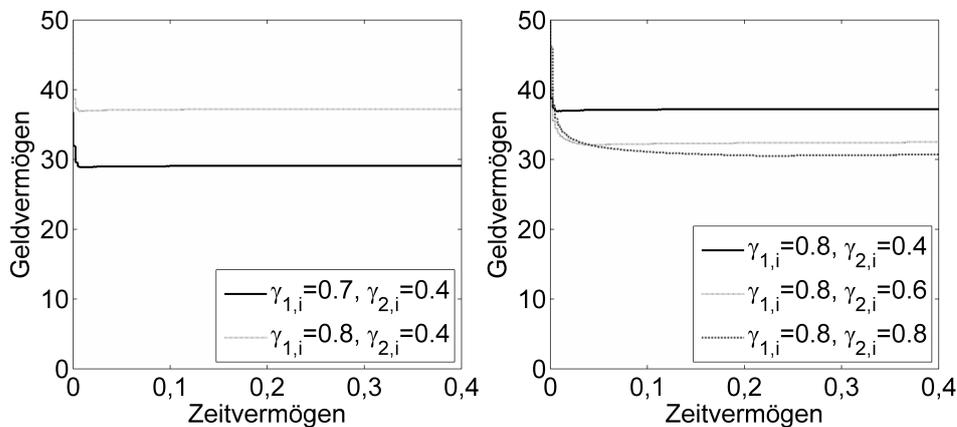


Abbildung 5.15: Erwerbstätigkeit in Zustand 0 in Abhängigkeit von  $\gamma_{1,i}$  (links) bzw. in Abhängigkeit von  $\gamma_{2,i}$  (rechts)

$b(0)$  ist für geringes Geldvermögen prinzipiell größer Null ( $b(0) = K_b$ ). Mit steigendem  $\gamma_{1,i}$  bzw. nachlassender Risikoaversion wird der Bereich,

in dem Erwerbstätigkeit nachgegangen wird, größer. Für  $\gamma_{1,i} = 0,9$  wird über den gesamten Zustandsraum  $[0; 50] \times [0; 0,4]$  der maximal verfügbaren Erwerbstätigkeit nachgegangen. Die Höhe des Zeitvermögens spielt nur eine sehr untergeordnete Rolle für den Wert von  $b(0)$ . Lediglich für sehr kleine Werte von  $x_2$  wird auch bei größerem Geldvermögen zusätzlich Erwerbstätigkeit geleistet. Zunächst verwundert, dass ein risikoaverses Individuum mit großem aktuellen Geldvermögen keiner Erwerbsarbeit nachgeht, während ein eher risikoneutrales Individuum die Erwerbstätigkeit dem Genuss von Freizeit vorzieht. Für ein risikoaverses Individuum ist heutiger Nutzen jedoch von größerem Wert als ungewisser zukünftiger Nutzen aus Geldkonsum, der aus heutigem Einkommen generiert wird. Um den heutigen Nutzen zu maximieren, muss gleichzeitig möglichst viel Freizeit konsumiert werden. Also wird auf Erwerbstätigkeit verzichtet. Daher gilt bei großem Startvermögen  $x_1$  und kleinem  $\gamma_{1,i}$  für die optimale Strategie  $b(0) = 0$ .

In Abbildung 5.15 stellt die rechte Grafik den Wert von  $b(0)$  in Abhängigkeit von  $\gamma_{2,i}$  bei festem Wert  $\gamma_{1,i} = 0,8$  dar. An der Abfolge der Linien von oben nach unten ist zu erkennen, dass für steigendes  $\gamma_{2,i}$  der Bereich, in dem Erwerbstätigkeit nachgegangen wird, abnimmt. Der Einfluss ist jedoch trotz größerer Variation in  $\gamma_{2,0}$  geringer als für steigendes  $\gamma_{1,i}$ . Die Variation von  $\gamma_{2,i}$  zeigt zusätzlich, dass für größere  $\gamma_{2,i}$  bzw. nachlassender Risikoaversion bezüglich Freizeit der Einfluss des Zeitvermögens auf  $b(0)$  größer wird. Für geringes Zeitvermögen wird mehr Erwerbstätigkeit vorgenommen und der Konsum von Freizeit reduziert.

In den Abbildungen 5.16 und 5.17 wird jeweils der Bereich dargestellt, über dem das optimale Zeitinvestment  $a(0)$  in Zustand 0 und  $a(1)$  in Zustand 1 größer 0 ist.

In Zustand 0 gilt  $a(0) > 0$  nur für Bereiche, in denen  $b(0)$  ebenfalls größer 0 ist. Freiwilligenarbeit ergänzt somit lediglich Erwerbstätigkeit, ersetzt diese aber nicht. Es gilt  $a(0) = 1 - b(0)$ . Nur im Bereich von  $x_2 = 0$  wird für sehr großes Geldvermögen auch Zeitinvestment in Form von Freiwilligenarbeit betrieben, ohne dass gleichzeitig Erwerbstätigkeit nachgegangen wird, d. h. bei  $x_2 = 0$  gilt  $a(0) = 1$ . Ist das Individuum bezüglich Geld beinahe risikoneutral, weitet sich der Bereich, über dem Zeitinvestment betrieben wird, stark aus. Für ri-

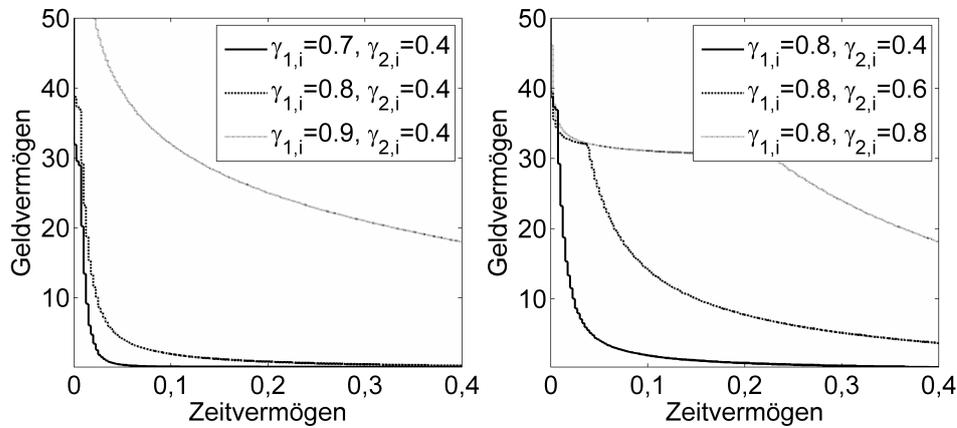


Abbildung 5.16: Zeitinvestment in Zustand 0 in Abhängigkeit von  $\gamma_{1,i}$  (links) bzw. in Abhängigkeit von  $\gamma_{2,i}$  (rechts)

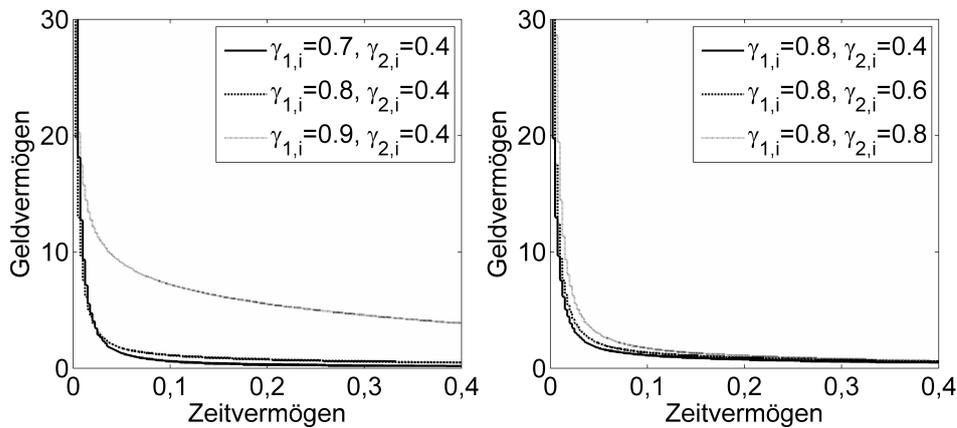


Abbildung 5.17: Zeitinvestment in Zustand 1 in Abhängigkeit von  $\gamma_{1,i}$  (links) bzw. in Abhängigkeit von  $\gamma_{2,i}$  (rechts)

sikoneutrale Individuen hat zukünftiger Nutzen aus eher ungewissem Konsum dasselbe Gewicht wie heutiger sicherer Konsum. Daher wird das Individuum eher bereit sein, heutigen Geldkonsum in die Zukunft zu verschieben und so zu versuchen, den zukünftigen Nutzen so weit es möglich ist durch zusätzliches Zeitinvestment zu steigern. Auch für

steigendes  $\gamma_{2,i}$  weitet sich der Bereich, über dem  $a(0) > 0$  gilt, aus. Dies ist intuitiv zu erwarten, da mit steigendem  $\gamma_{2,i}$  Freizeitkonsum unwichtiger wird, also auch für größere  $x_1$  und  $x_2$  zusätzlicher zukünftiger Zeitkonsum interessant ist.

Der Einsatz von Freiwilligenarbeit in Zustand 1 ist insgesamt eher gering. Ausschließlich für sehr kleines Geld- oder sehr geringes Zeitvermögen wird Zeitinvestment betrieben. Insbesondere in Zustand 1 überrascht, dass  $a(1)$  eine „bang-bang“ Strategie ist. Unter Berücksichtigung des realen Verhaltens von Menschen würde man unabhängig von den Parametern  $\gamma_{i,j}$  eher eine Bereitschaft für anteiliges Zeitinvestment über einem größeren Bereich von  $\bar{S}_h$  erwarten. Sowohl für steigendes  $\gamma_{1,i}$  als auch für  $\gamma_{2,i}$  wächst der Bereich, über dem  $a(1) = 1$  gilt, an. Da grundsätzlich nur über einem sehr eingeschränkten Bereich von  $\bar{S}_h$  Zeitinvestment betrieben wird, ist der Einfluss von  $\gamma_{j,i}$  marginal. Lediglich für  $\gamma_{1,i}$  nahe bei 1 weitet sich der Bereich, über dem Zeitinvestment betrieben wird, deutlich aus. Die Art der Änderung für die variierten Werte von  $\gamma_{j,i}$  ist analog zu Zustand 0 zu erklären.

Die optimalen Strategien für Erwerbstätigkeit  $b(0)$ , Zeitinvestment  $a(0)$  in Zustand 0 und  $a(1)$  in Zustand 1 zeigen für  $\gamma_{1,i} + \gamma_{2,i} < 1$  ein komplexeres Verhalten. Die Strategien sind keine „bang-bang“ Strategien, sondern ändern sich stetig für  $x_1$  und  $x_2$ . Die Abbildungen 5.18 – 5.20 stellen die Strategien dar. Die Grafiken zeigen in Aufsicht die Flächen, die von den optimalen Strategien aufgespannt werden. Eine dunklere Färbung zeigt höhere Werte der Strategien an, Weiß indiziert den Wert 0. Die linken Grafiken zeigen die Änderung bei Variation von  $\gamma_{1,i}$ , die rechten Grafiken bei Variation von  $\gamma_{2,i}$ .

Für kleine Werte von  $\gamma_{1,i} + \gamma_{2,i}$  entscheidet sich das Individuum strikt zwischen Erwerbstätigkeit und Zeitinvestment. Eine Kombination aus beidem tritt nicht auf. Abbildung 5.18 zeigt die optimale Erwerbstätigkeit  $b(0)$  für fallendes  $\gamma_{1,i}$  (linke Spalte) bzw. fallendes  $\gamma_{2,i}$  (rechte Spalte). Für alle Werte von  $\gamma_{j,i}$  gilt, dass die optimale Erwerbstätigkeit  $b(0)$  bei kleinem Geldvermögen ihr Maximum in Höhe  $K_b$  annimmt und bei großem Geldvermögen auf den Wert Null fällt. Je risikoaverser das Individuum bezogen auf Geld ist (d. h. je kleiner  $\gamma_{1,i}$ ), desto schneller fällt die optimale Erwerbstätigkeit ab (vgl. Abbildung 5.18, linke Spalte). Gleichzeitig nimmt die optimale Erwerbstätigkeit umso

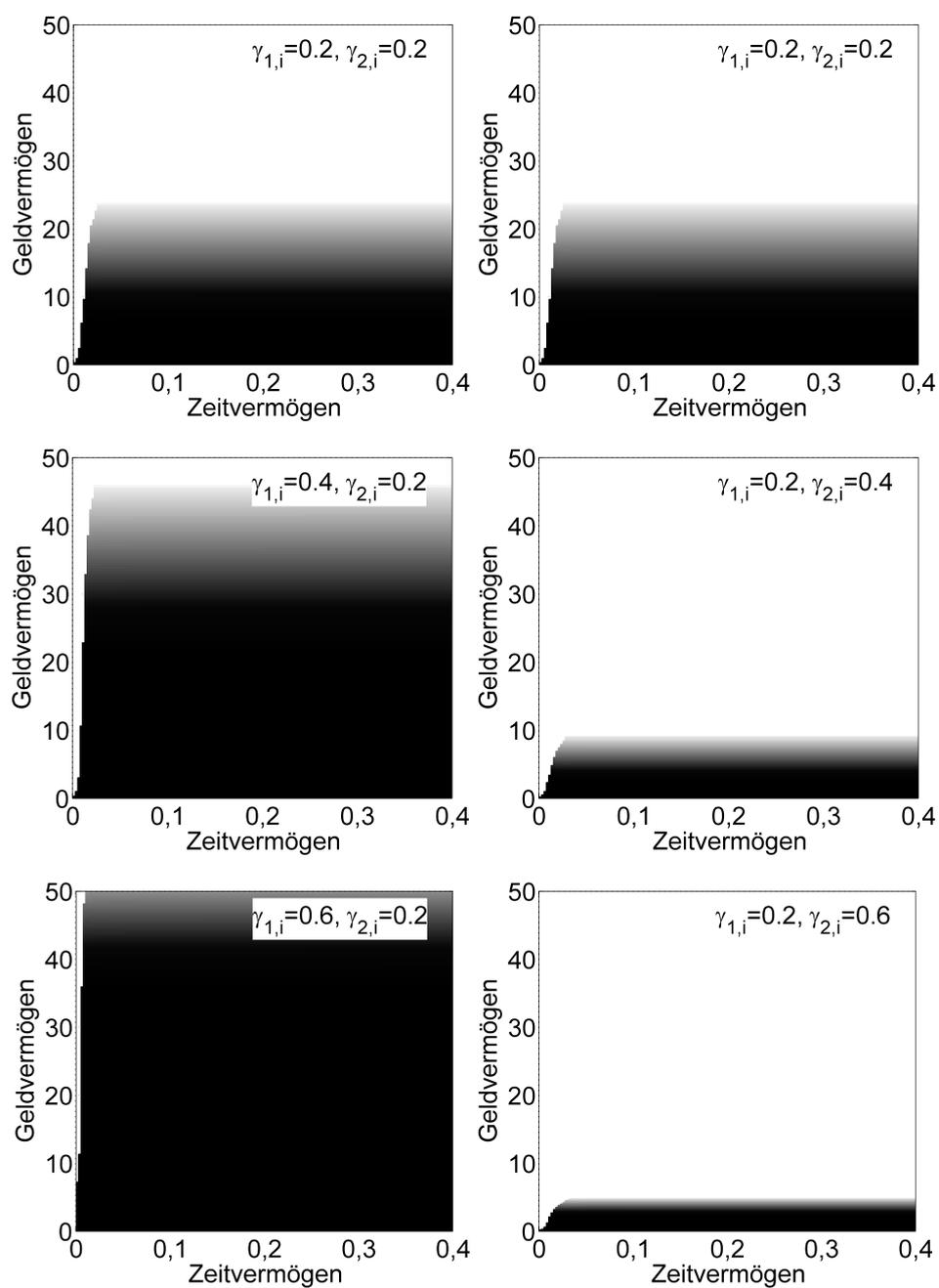


Abbildung 5.18: Erwerbstätigkeit in Zustand 0 in Abhängigkeit von  $\gamma_{1,i}$  (links) und  $\gamma_{2,i}$  (rechts)

schneller ab, je weniger risikoavers das Individuum bezüglich Freizeit ist (d. h. je größer  $\gamma_{2,i}$  ist, vgl. Abbildung 5.18, rechte Spalte). Ein Individuum geht somit bevorzugt dann einer möglichst zeitungfassenden Erwerbstätigkeit nach, je kleiner seine Risikoaversion bezogen auf Geld und je größer seine Risikoaversion bezogen auf Freizeit ist.

Abbildung 5.19 zeigt das optimale Zeitinvestment  $a(0)$  in Zustand 0 für fallendes  $\gamma_{1,i}$  (linke Spalte) bzw. fallendes  $\gamma_{2,i}$  (rechte Spalte).  $a(0)$  ändert sich ebenso wie die optimale Erwerbstätigkeit stetig für zunehmendes Startvermögen  $x_1$ , wenn  $\gamma_{1,i} + \gamma_{2,i} < 1$  gilt. Das Verhalten von  $a(0)$  bezüglich steigendem  $\gamma_{1,i}$  dreht sich im Fall  $\gamma_{1,i} + \gamma_{2,i} < 1$  gegenüber  $\gamma_{1,i} + \gamma_{2,i} > 1$  um (vgl. jeweils die linke Spalte in Abbildung 5.16 und Abbildung 5.19).

Je größer  $\gamma_{1,i}$ , d. h. je risikoneutraler das Individuum, desto kleiner ist der Bereich von  $\bar{S}_h$ , über dem Zeitinvestment betrieben wird. Nur für sehr kleines vorhandenes Zeitvermögen  $x_2$  gilt  $a(0) > 0$ . Je kleiner  $\gamma_{1,i}$  wird (d. h. die Risikoaversion nimmt zu), desto größer ist der Bereich, in dem  $a(0) > 0$ . Gleichzeitig reduziert sich der Wert von  $a(0)$  (hellere Färbung der Fläche) in den Bereichen, in denen bei größerem  $\gamma_{1,i}$  Zeitinvestment betrieben wird. Für nachlassende Risikoaversion bezüglich Freizeit (d. h. steigendes  $\gamma_{2,i}$ ) ist das Verhalten umgekehrt. Je größer  $\gamma_{2,i}$  wird, desto größer ist der Bereich, über dem  $a(0) > 0$  gilt. Auch hier reduziert sich aber gleichzeitig der Wert von  $a(0)$  (hellere Färbung der Fläche) in den Bereichen, in denen bei kleinerem  $\gamma_{1,i}$  ebenfalls Zeitinvestment betrieben wird.

In Abbildung 5.20 sind die Flächen dargestellt, die vom optimalen Zeitinvestment  $a(1)$  in Zustand 1 aufgespannt werden. Genau wie in Zustand 0 gilt auch für das optimale Zeitinvestment  $a(1)$ , dass es sich bei zunehmendem  $\gamma_{1,i}$  auf einen kleineren Bereich des vorhandenen Zeitguthabens zurückzieht. Der absolute Wert von  $a(1)$  steigt an, je kleiner  $\gamma_{1,i}$  wird (vgl. Abbildung 5.20, linke Spalte). Steigendes  $\gamma_{2,i}$  vergrößert den Bereich des Zustandsraumes über dem Zeitinvestment betrieben wird. Gleichzeitig wird der Wert  $a(1)$  des optimalen Zeitinvestments größer (vgl. Abbildung 5.20, rechte Spalte). Damit gilt für  $\gamma_{1,i} + \gamma_{2,i} < 1$  wie für  $\gamma_{1,i} + \gamma_{2,i} > 1$ , dass in Zustand 1 umso weniger Zeitinvestment  $a(1)$  getätigt wird, je risikoaverser das Individuum geprägt ist.

Zur möglichst eindeutigen Darstellung der Parametereinflüsse von  $K_b$ ,  $g(0)$

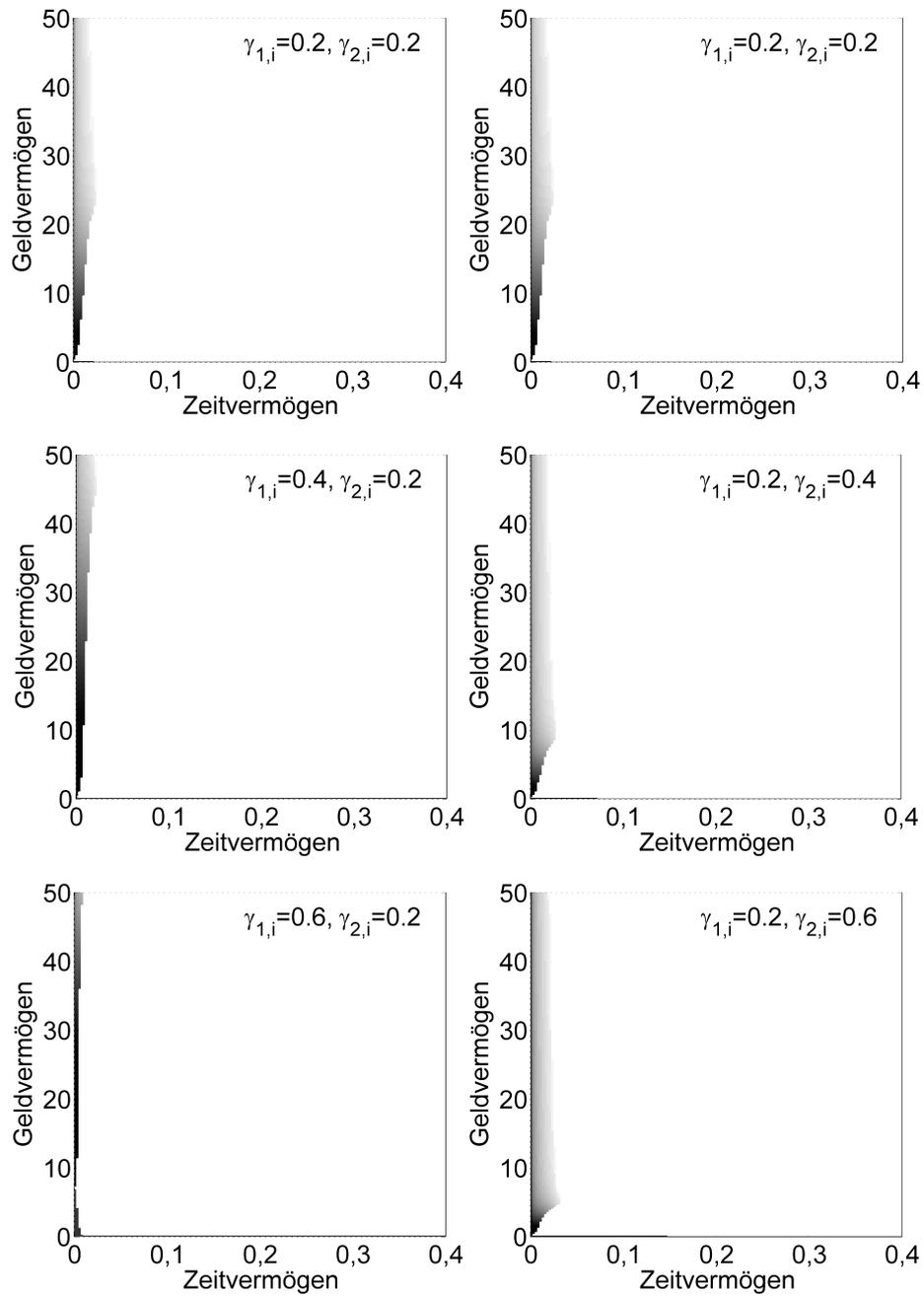


Abbildung 5.19: Zeitinvestment in Zustand 0 in Abhängigkeit von  $\gamma_{1,i}$  (links) und  $\gamma_{2,i}$  (rechts)

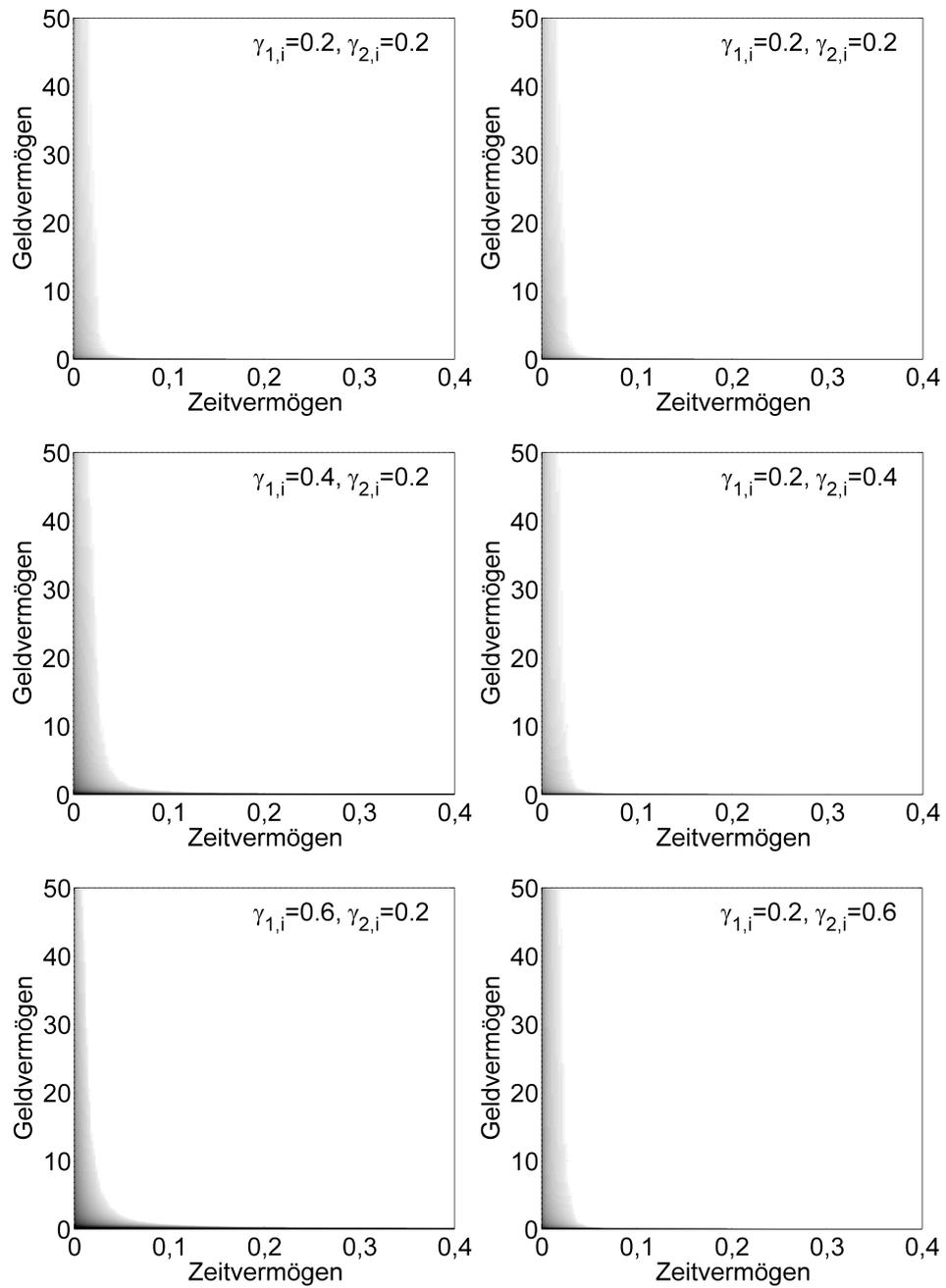


Abbildung 5.20: Zeitinvestment in Zustand 1 in Abhängigkeit von  $\gamma_{1,i}$  (links) und  $\gamma_{2,i}$  (rechts)

und  $g(1)$ ,  $\lambda_{01}$  und  $\lambda_{10}$  sowie  $\lambda$  und  $\beta$  auf die optimalen Steuerungsvariablen  $b(0)$ ,  $a(0)$  und  $a(1)$  werden für die oben aufgeführten Variationen Werte von  $\gamma_{1,i} + \gamma_{2,i} > 1$  zu Grunde gelegt (vgl. auch Tabelle B.1 in Anhang B). Der Einfluss der weiteren variierten Parameter ist für die „bang-bang“ Strategien deutlicher sichtbar. Die grundsätzliche Wirkung ändert sich auch für kleine  $\gamma_{i,j}$  nicht, ist jedoch in den Grafiken schwerer abzulesen.

(b) **Verhalten der optimalen Steuerungsvariablen bezüglich  $K_b$**

Für verschiedene Werte von  $K_b$  sind zwei unterschiedliche Muster für den Bereich, in dem Erwerbstätigkeit nachgegangen wird, erkennbar. Wenn Vollzeitbeschäftigung auf dem Arbeitsmarkt angeboten wird ( $K_b = 1$ ), entscheidet das Individuum in Abhängigkeit des Startvermögens  $(x_1, x_2)$ , ob entweder Erwerbstätigkeit oder Freiwilligenarbeit geleistet wird. Das Individuum kombiniert die beiden Möglichkeiten nicht. Beide Strategien werden jeweils mit dem maximal möglichen Wert umgesetzt ( $b(0) = a(0) = 1$ ). Somit hat die optimale Freizeit  $l(0)$  entweder den Wert 0 oder es gilt  $l(0) = 1$ .

In Abbildung 5.21 sind die beiden sich ergänzenden Bereiche von  $b(0)$  und  $a(0)$  sowie  $l(0)$  für  $K_b = 1$  dargestellt.

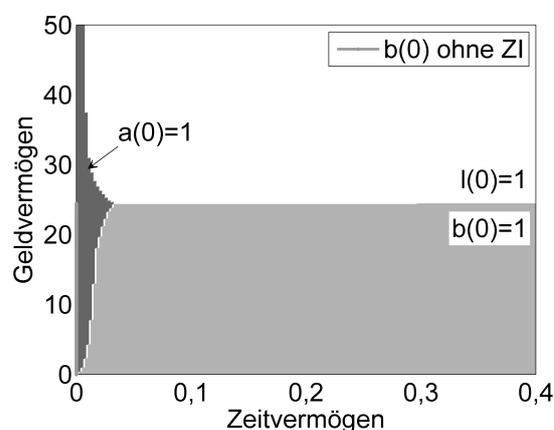


Abbildung 5.21: Freizeit  $l(0) = 1 - a(0) - b(0)$  in Zustand 0 für  $K_b = 1$

Für ein Zeitguthaben von  $x_2 \gtrsim 0,0325$  bzw. 166 Stunden wählt das Individuum Vollzeitbeschäftigung, solange für sein Geldvermögen gleichzeitig  $x_1 \lesssim 24$  Tsd. WE gilt. Ist das Zeitguthaben kleiner, wählt das

Individuum Freiwilligenarbeit statt Erwerbsarbeit, sofern das Geldvermögen nicht zu gering ist. Die graue Linie zeigt den Bereich von  $x_1$  über dem Erwerbstätigkeit nachgegangen wird, wenn im Modell kein Zeitinvestment (ZI) möglich ist. Die optimale Erwerbstätigkeit  $b(x_1, x_2, 0)$  unterscheidet sich für großes Zeitvermögen  $x_2$  nicht von  $b(x_1, 0)^{\text{ohne ZI}}$ . Bei großem Zeitguthaben ist der Konsum von Freizeit somit unabhängig davon, ob Zeitinvestment möglich ist oder nicht.

Bei geringem Zeitguthaben wird im Modell mit Zeitinvestment gegenüber dem Modell ohne Zeitinvestment für großes vorhandenes Geldvermögen auf Freizeit verzichtet. Der mögliche höhere, zukünftige Konsum hat mehr Gewicht als der aktuelle Freizeitkonsum.

Abbildung 5.22 zeigt die Bereiche von  $\bar{S}_h$ , in denen das Individuum der maximal in Betracht kommenden Erwerbstätigkeit für Werte von  $K_b < 1$  nachgeht.

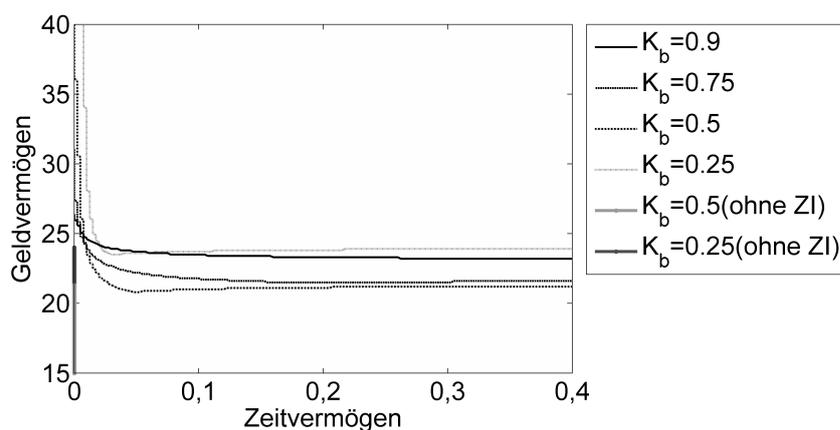


Abbildung 5.22: Erwerbstätigkeit in Zustand 0 in Abhängigkeit von  $K_b$

Auch bei einer Variation von  $K_b$  ist Erwerbstätigkeit für Zeitvermögen  $x_2 > 0,035$  lediglich vom vorhandenen Geldvermögen abhängig. Der Bereich des Zustandsraumes, über dem volle Erwerbstätigkeit optimal ist, wird mit abnehmendem  $K_b$  zunächst kleiner. Sinkt  $K_b$  sehr weit ab ( $\lesssim 0,25$ ), weitet sich der Bereich, über dem  $b(0) > 0$  gilt, erneut stark aus. Der aktuell niedrige Konsum (bedingt durch geringe Werte von  $b(0)$ ) stiftet auch bei großem vorhandenem Geldvermögen so wenig

Nutzen, dass auf Freizeit verzichtet wird, um zusätzlichen, zukünftigen Geldkonsum zu ermöglichen.

Bei sehr geringem Zeitvermögen wird auch über die sonst geltende Grenze von  $x_1$  hinaus Erwerbsarbeit geleistet. Der Bereich wird für abnehmendes  $K_b$  größer. Zum Vergleich ist der Bereich über  $x_1$  dargestellt, für den  $b(0)^{\text{ohne ZI}} > 0$  gilt. Erneut gut zu erkennen ist, dass das Individuum die Erwerbstätigkeit für kleine  $x_2$  gegenüber dem Modell ohne Zeitinvestment stark ausdehnt.

In Abbildung 5.23 ist für verschiedene  $K_b$  der Bereich, über dem Freiwilligenarbeit in Zustand 0 geleistet wird, dargestellt.

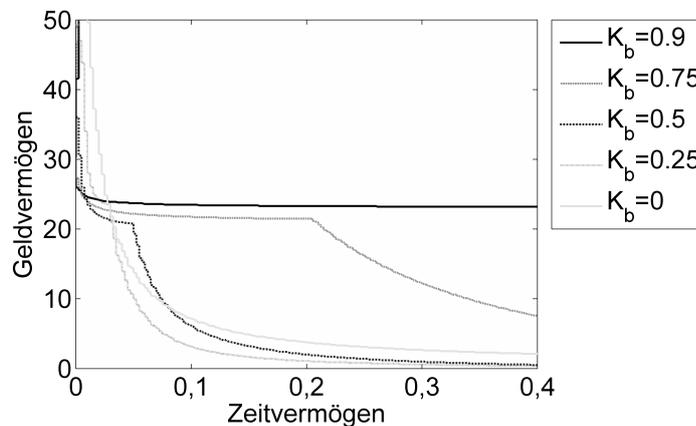


Abbildung 5.23: Zeitinvestment in Zustand 0 in Abhängigkeit von  $K_b$

Wie bereits bei der Variation von  $\gamma_{i,j}$  erkannt, bewirkt eine Beschränkung auf Teilzeiterwerbstätigkeit eine Bereitschaft zu Freiwilligenarbeit in Zustand 0 in den Bereichen, in denen bereits Erwerbstätigkeit nachgegangen wird. Dies liegt nahe, da ein Teil der Zeit, über die zu entscheiden ist, durch die obere Schranke  $K_b$  nicht für Erwerbsarbeit genutzt werden kann. Das Individuum nutzt den Anteil der optimalen Erwerbsarbeit, der durch den beschränkten Arbeitsmarkt verhindert wird, für Freiwilligenarbeit. Interessant ist, dass je kleiner  $K_b$  wird, der Bereich von  $a(0) > 0$  abnimmt, während gleichzeitig der Bereich von  $b(0) > 0$  für sehr kleine  $K_b$  wieder größer wird.

Der kleiner werdende Bereich für Freiwilligenarbeit bei fallendem  $K_b$

bedeutet, dass die nach der Erwerbstätigkeit verbleibende Freizeit desto mehr Gewicht hat, je weniger Einkommen erzielt werden kann. Eine mögliche Erklärung folgt aus dem größeren Nutzen, der durch den zwangsweise geringeren Geldkonsum erzielt werden kann, wenn parallel ausreichend Freizeit zur Verfügung steht.

Eine wichtige Erkenntnis ist, dass für  $K_b < 1$  außerhalb des Bereiches, in dem Erwerbstätigkeit optimal ist, keine Freiwilligenarbeit geleistet wird. Anders als für  $K_b = 1$  ist bei den gewählten Parameterkombinationen der Nutzen durch Freiwilligenarbeit also stets kleiner als der Nutzen aus Erwerbstätigkeit.

Für  $a(0) > 0$  erhöht sich der optimale Anteil des Zeitinvestments mit sinkendem  $K_b$ , da stets  $a(0) = 1 - K_b$  gilt.

Erst wenn  $K_b$  auf 0 sinkt, weitet sich die Fläche, über der Freiwilligenarbeit geleistet wird, wieder aus. Freizeit als Nutzenstifter verliert an Gewicht. Bei fehlendem Einkommen wird es wichtiger, zukünftigen Konsum über aktuelles Zeitinvestment zu generieren, als aktuell aus sehr geringem Geldkonsum durch gleichzeitig möglichst hohen Freizeiteinsatz Nutzen zu ziehen.

Abbildung 5.24 zeigt den Bereich des Zustandsraumes für den in Zustand 1 Freiwilligenarbeit geleistet wird.

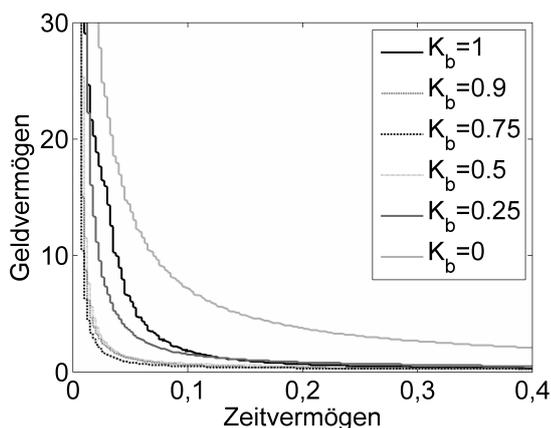


Abbildung 5.24: Zeitinvestment in Zustand 1 in Abhängigkeit von  $K_b$

Für Zustand 1 ist das Verhalten des optimalen Zeitinvestments  $a(1)$

wie für  $b(0)$  mit sinkendem  $K_b$  nicht eindeutig. Zunächst wird mit sinkendem  $K_b$  der Bereich, über den es optimal ist Freiwilligenarbeit zu leisten, kleiner. Ab einem Wert von  $K_b = 0,5$  vergrößert sich der Bereich wieder. Offensichtlich ist bei hoher Erwerbstätigkeit in Zustand 0 der Nutzen aus höherem Geldkonsum so groß, dass in Zustand 1 auch bei relativ geringem Geld- und Zeitguthaben kein zusätzliches Zeitguthaben aufgebaut werden muss. Erst wenn die Erwerbstätigkeit soweit eingeschränkt ist, dass der Geldkonsum vermutlich ebenfalls sehr viel geringer ausfällt, wird in Zustand 1 Zeitinvestment betrieben, um zusätzlichen zukünftigen Nutzen aus Zeitguthaben zu ermöglichen.

(c) **Verhalten der optimalen Steuerungsvariablen bezüglich Einkommen  $g(0)$  und  $g(1)$  und der Wahrscheinlichkeit arbeitslos zu werden bzw. zu bleiben ( $\lambda_{01}, \lambda_{10}$ )**

In Abbildung 5.25 ist für verschiedene Werte von  $g(0)$  und  $g(1)$  der Bereich, über dem  $b(0) > 0$  gilt, dargestellt. In den beiden Grafiken ist zusätzlich die erwartete Häufigkeit und die erwartete Dauer der Arbeitslosigkeit variiert. In der linken Grafik ist Arbeitslosigkeit selten und hält nur kurz an, in der rechten Grafik sind Erwerbstätigkeit und Arbeitslosigkeit gleich häufig.

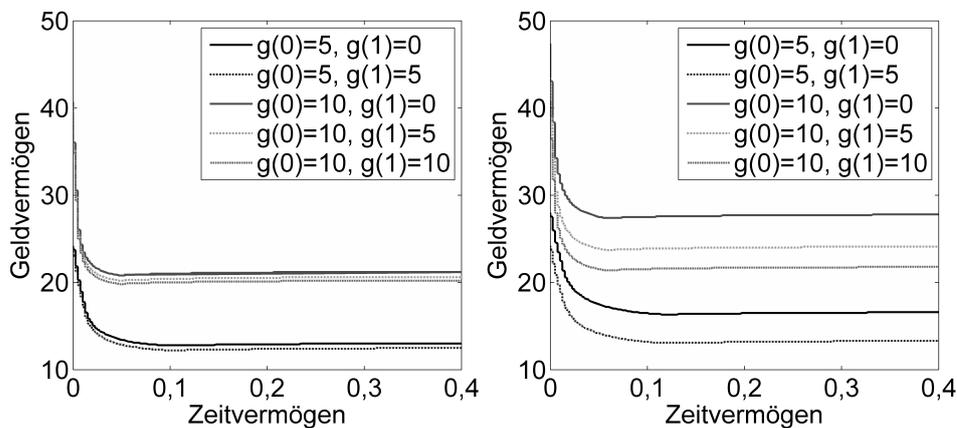


Abbildung 5.25: Erwerbstätigkeit in Zustand 0 in Abhängigkeit von  $\lambda_{01} = 0,1$  und  $\lambda_{10} = 0,99$  (links) bzw.  $\lambda_{01} = 0,5$  und  $\lambda_{10} = 0,5$  (rechts)

Konsequenterweise hat die Variation des Einkommens  $g(1)$  in Zustand

1 eine geringe Auswirkung auf die Erwerbstätigkeit in Zustand 0, wenn Arbeitslosigkeit selten ist. Deutlich sichtbar ist der zunehmende Bereich von  $x_1$ , über dem  $b(0) > 0$  ist, wenn das Einkommen  $g(0)$  größer wird. Mit hohem Einkommen kann potentiell hoher Konsum für die Zukunft generiert werden. Daher hat der Wunsch nach Freizeit für große  $g(0)$  bei geringem Geldvermögen wenig Gewicht. Für kleineres  $g(0)$  ist der Nutzen aus aktueller Freizeit bedeutungsvoller als zukünftiger Geldkonsum, der wegen des niedrigen Einkommens zwangsläufig geringer ausfallen muss. Erwerbstätigkeit wird also eingeschränkt:  $b(0) = 0$ .

Für alle Level von  $g(0)$  und  $g(1)$  mit  $g(0) > g(1)$  wird Erwerbstätigkeit deutlich ausgeweitet, wenn Arbeitslosigkeit häufiger auftritt und lange anhält. Dieses Ergebnis bestätigt die intuitive Erwartung, dass der Wegfall des Einkommens in Zustand 1 durch mehr Erwerbsarbeit in Zustand 0 ausgeglichen wird. Der Bereich, über dem  $b(0) > 0$  ist, ändert sich bei Variation von  $\lambda_{01}$  und  $\lambda_{10}$  nicht, wenn  $g(0) = g(1)$  gilt.

In Abbildung 5.26 ist das Zeitinvestment in Zustand 0 dargestellt. Da die Unterschiede für Variationen von  $g(0)$  und  $g(1)$  gering sind, ist die Grafik auf den Ausschnitt  $x_1 \in [0; 30]$  beschränkt.

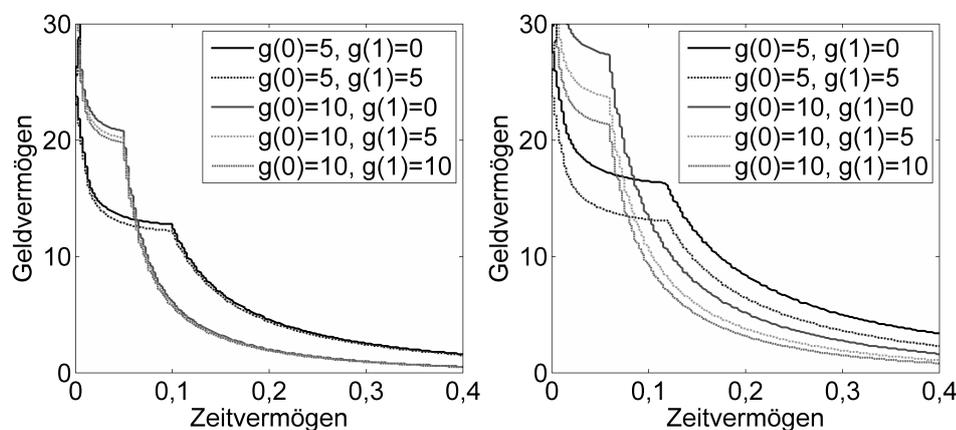


Abbildung 5.26: Zeitinvestment in Zustand 0 in Abhängigkeit von  $\lambda_{01} = 0,1$  und  $\lambda_{10} = 0,99$  (links) bzw.  $\lambda_{01} = 0,5$  und  $\lambda_{10} = 0,5$  (rechts)

An der linken Abbildung lässt sich wie bereits für  $b(0)$  erkennen, dass bei seltener und kurzer Arbeitslosigkeit das Einkommen in Zustand 1

kaum Einfluss auf  $a(0)$  nimmt. Eine Erhöhung von  $g(0)$  verschiebt den Bereich, über dem Zeitinvestment optimal ist. Für kleines  $g(0)$  wird für größere Werte des vorhandenen Zeitguthabens und kleinere Werte des Geldvermögens Zeitinvestment betrieben. Auch bei vorhandenem Zeitguthaben  $x_2 \gtrsim 0,1$  ist es lohnend, über Zeitinvestment zusätzlichen Konsum für die Zukunft zu generieren, der wegen des geringen Einkommens nicht aus dem Geldvermögen generiert werden kann. Für größeres  $g(0)$  ist zukünftiger Konsum aus Zeitinvestment von untergeordneter Bedeutung, d. h. der Nutzen aus aktueller Freizeit tritt für die meisten Werte von  $x_2$  wieder in den Vordergrund. Lediglich bei sehr geringem Zeitvermögen verzichtet das Individuum auf Freizeit und betreibt bei höherem vorhandenem Geldvermögen Zeitinvestment.

Auch bei länger andauernder Arbeitslosigkeit wird für größeres Zeitvermögen ( $x_2 \gtrsim 0,1$ ) in Zustand 0 umso mehr Zeitinvestment betrieben, je weniger Einkommen sowohl in Zustand 0 als auch in Zustand 1 vorhanden ist. Für kleines Zeitvermögen ( $x_2 \lesssim 0,1$ ) wird bei steigendem  $g(0)$  mehr Zeitinvestment betrieben. Bei zunehmendem  $g(1)$  wird über den gesamten Wertebereich von  $x_2$  weniger Zeit investiert (vgl. rechte Grafik in Abbildung 5.26). Auch hier wird die intuitive Erwartung bestätigt, dass der häufigere Wegfall des Einkommens durch mehr Zeitinvestment ausgeglichen wird.

Abbildung 5.27 zeigt das optimale Zeitinvestment  $a(1)$  in Zustand 1. Sowohl für seltene als auch häufige Arbeitslosigkeit wird das Zeitinvestment kaum vom Einkommen beeinflusst. Zur Verdeutlichung der Unterschiede wird der Bereich des Geldvermögens auf  $x_1 \in [0; 10]$  eingeschränkt. Zeitinvestment  $a(1) > 0$  wird über dem größten Bereich von  $\mathcal{S}_h$  getätigt, wenn  $g(1) = 0$  ist und Arbeitslosigkeit häufig auftritt. Für großes  $g(0)$  und  $g(1)$  ist das Zeitinvestment auf den kleinsten Bereich von  $\bar{\mathcal{S}}_h$  eingeschränkt. Dies bestätigt die intuitive Annahme, dass bei vorhandenem großen Einkommen der erwünschte Nutzen über Geldkonsum kombiniert mit Freizeit gedeckt wird und Freiwilligenarbeit keine erstrebenswerte Option ist.

(d) **Verhalten der optimalen Steuerungsvariablen bezüglich Verlustrisiko für das Zeitguthaben (Häufigkeit  $\lambda$  und Schwere  $\beta$ )**

Die Variation im Verlustrisiko für das Zeitguthaben schlägt sich erst bei sehr hohem Risiko in den Ergebnissen zu den optimalen Strategien

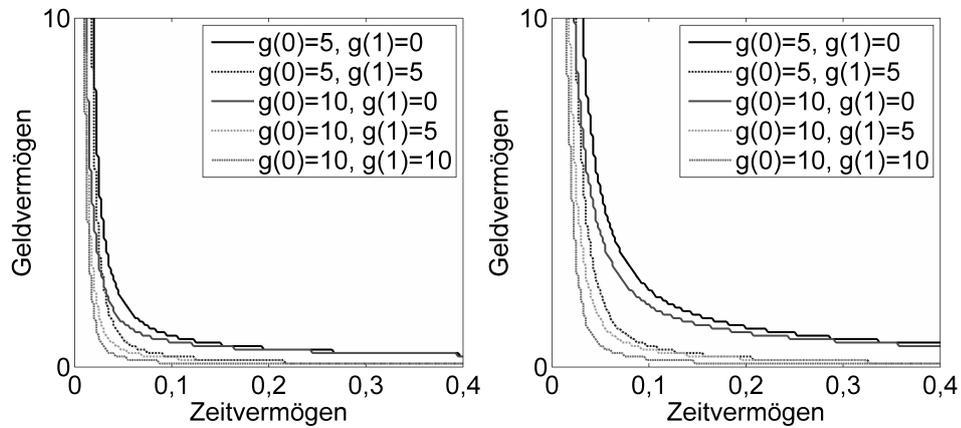


Abbildung 5.27: Zeitinvestment in Zustand 1 in Abhängigkeit von  $\lambda_{01} = 0,1$  und  $\lambda_{10} = 0,99$  (links) bzw.  $\lambda_{01} = 0,5$  und  $\lambda_{10} = 0,5$  (rechts)

$a(0)$ ,  $b(0)$  und  $a(1)$  nieder.

Abbildung 5.28 zeigt die optimale Erwerbstätigkeit in Zustand 0. Dargestellt ist der Bereich, in dem für zunehmendes Risiko auf dem Zeitguthaben  $b(0) = K_b$  gilt.

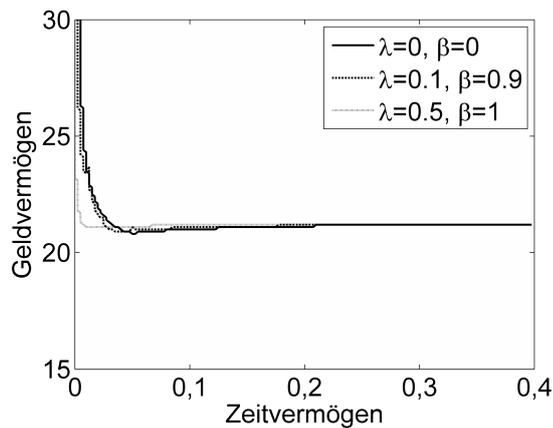


Abbildung 5.28: Erwerbstätigkeit in Zustand 0 in Abhängigkeit von  $\lambda$  und  $\beta$

Nur für sehr hohes Risiko ist eine Verminderung des Bereiches rund

um ein Geldvermögen von über 20 Tsd. WE und einem angesparten Zeitguthaben von weniger als 0,05 Personenjahren erkennbar.

Auch für das optimale Zeitinvestment in Zustand 0, vgl. Abbildung 5.29, ist zwischen den Strategien für null Risiko und sehr geringem Risiko ( $\lambda = 0,01, \beta = 0,25$ ) kaum ein Unterschied erkennbar. Erst bei einem durchschnittlichen Verlust von 90 % mit einer Auftrittshäufigkeit von 1 in 10 Jahren passt das Individuum sein optimales Verhalten an. Der Bereich des Zustandsraumes, über dem Zeitinvestment betrieben wird, verringert sich. Das Investment beschränkt sich sowohl auf ein geringeres Zeit- als auch ein geringeres Geldguthaben.

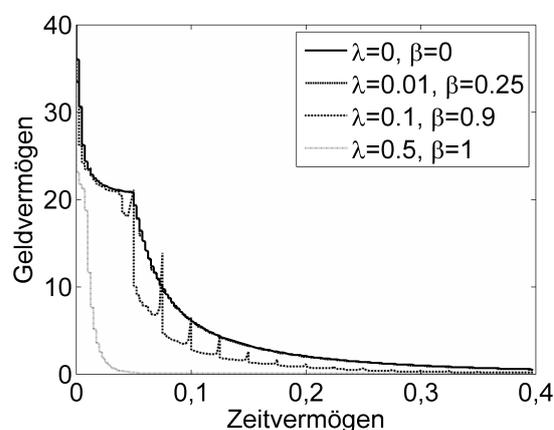


Abbildung 5.29: Zeitinvestment in Zustand 0 in Abhängigkeit von  $\lambda$  und  $\beta$

In der Grafik sind deutliche Ausschläge für bestimmte Zeitguthaben zu beobachten. Die Ausschläge werden, wie bereits für Abbildung 5.12 erläutert, durch die diskrete Version des deterministischen Verlustes auf  $x_2$  hervorgerufen. Bei deutlichem Verlustrisiko auf dem Zeitguthaben schränkt ein risikoaverses Individuums sein Zeitinvestment insbesondere bei vorhandenem Geldvermögen ein. Der relative Verlust auf dem Zeitvermögen ist jedoch nicht stetig (vgl. Abbildung 5.12). Daher verhält sich das Individuum für gewisse Werte von  $x_2$  als ob das Risiko geringer wäre. Dies weitet den Bereich von  $x_1$ , über dem Zeitinvestment betrieben wird, aus.

Abbildung 5.30 zeigt das optimale Zeitinvestment in Zustand 1. Der

Bereich, über dem für vorhandenes Geld- und Zeitvermögen Freiwilligenarbeit geleistet wird, verkleinert sich mit steigendem  $\lambda$  und  $\beta$ . Der Effekt ist minimal und wie bei der optimalen Strategie  $a(0)$  nur bei extremem Risiko sichtbar. Wie in Zustand 0 bevorzugt ein risikoaverses Individuum eher den Konsum von Freizeit als Zeitinvestment zu betreiben, da Zeitinvestment das Risiko beinhaltet, wegen eines auftretenden Verlustes den Nutzen aus Zeitkonsum nicht realisieren zu können. In der Grafik sind keine Sprünge sichtbar, da der Unterschied in  $a(1)$  für differenzierte Risiken auf dem Zeitguthaben insgesamt minimal ist.

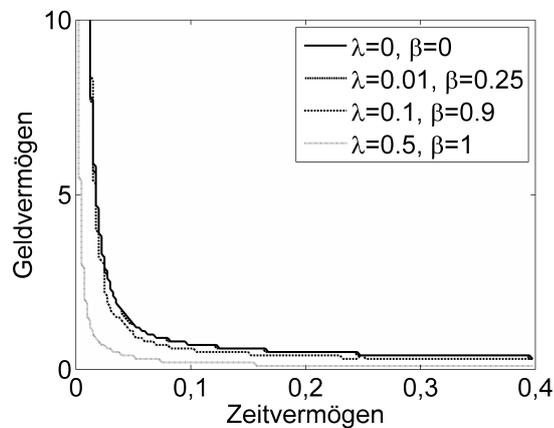


Abbildung 5.30: Zeitinvestment in Zustand 1 in Abhängigkeit von  $\lambda$  und  $\beta$

In den vorangegangenen Abschnitten wurden jeweils nur die Strategien  $b(\cdot)$  und  $a(\cdot)$  in Zustand 0 und 1 betrachtet. Das optimale Verhalten des „jungen“ Menschen wird natürlich auch von seinem optimalen Verhalten in späteren Jahren, also im Alter, beeinflusst. Im Modell findet „das Alter“ wegen der zeitunabhängigen Übergangsraten für das „junge“ Individuum lediglich in Zustand 2 statt. Die Steuervariablen  $c_1(2)$ ,  $c_2(2)$  und  $\theta(2)$  verhalten sich wegen der gewählten additiven Nutzenfunktion in Zustand 2 gemäß dem bereits in Merton (1969) und Merton (1971) entdeckten Zusammenhang:  $c_1(2) = \text{Konstante} \cdot X_1(t)$ ,  $c_2(2) = \text{Konstante} \cdot X_2(t)$  und  $\theta(2) = \text{Konstante}$  (vgl. die Ausführungen in Abschnitt 5.4.1). Weder für den Geld-  $c_1(x_1, 2)$  noch für den Zeitkonsum  $c_2(x_2, 2)$  wird in den ausgewerteten Bereichen von  $x_1 \in [0; 50]$  bzw.  $x_2 \in [0; 0, 4]$  die numerisch notwendige Begrenzung auf  $K_{c_1}$

bzw.  $K_{c_2}$  wirksam. Neue Erkenntnisse können nicht gewonnen werden, die Strategien werden daher nicht weiter dargestellt.

Für das „junge“ Individuum wurden neben den Risikoaversionsparametern schwerpunktmäßig die Parameter, die die Erwerbssituation beschreiben, variiert. Im nächsten Abschnitt sollen für das „alte“ Individuum die Parameter, die die Entwicklung des Vermögensprozesses exogen beeinflussen, genauer untersucht werden.

### 5.4.3 Ergebnisse „alter“ Mensch

Der „alte“ Mensch steht stellvertretend für ein bereits aus dem Erwerbsleben ausgeschiedenes Individuum. Dieses Individuum verfügt über kein Einkommen mehr, sondern kann lediglich von seinem vorhandenen Geld- oder Zeitvermögen zehren.

Im Folgenden werden die optimalen Steuerungsvariablen für verschiedene Parametervariationen in Zustand 1 und 2 verglichen. Zustand 1 steht in diesem Fall für die aktive Zeit während des Ruhestandes. Zustand 2 bezeichnet wieder den inaktiven Zustand, in dem das Individuum auf Hilfe für das tägliche Leben angewiesen ist. Das Modell ist um den Zustand 0 reduziert und es gilt  $\lambda_{10} = 0$ ,  $\lambda_{01} = 0$  und Startzustand  $z = 1$ . Abbildung 5.31 zeigt den reduzierten Zustandsraum für einen „alten“ Menschen und die möglichen Übergänge zwischen den Zuständen.

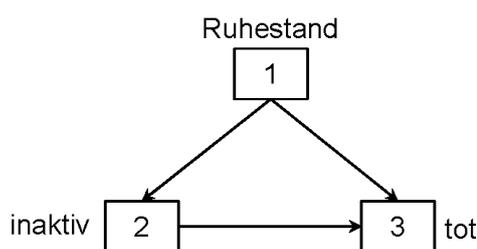


Abbildung 5.31: Zustandsraum von  $Z(t)$  und Übergangsmöglichkeiten für „altes“ Individuum

Zur Untersuchung ihres Einflusses auf die optimalen Steuervariablen werden die Parameter  $\gamma_{i,1}$ ,  $\lambda$  und  $\beta$  sowie  $\mu$  und  $\sigma$  variiert. Die folgenden Abschnitte erläutern die Auswirkungen der Variationen.

(a) **Verhalten der optimalen Steuerungsvariablen bezüglich Risikoaversionsparameter  $\gamma_{1,1}$  und  $\gamma_{2,1}$**

Wie bereits beim „jungen“ Menschen soll zunächst die Wirkung der Risikoparameter auf das optimale Verhalten des „alten“ Individuums untersucht werden. Dazu werden  $\gamma_{1,1}$  und  $\gamma_{2,1}$  variiert. Auch für das „alte“ Individuum zeigt sich abhängig davon, ob  $\gamma_{1,1} + \gamma_{2,1}$  größer oder kleiner 1 ist, ein deutlicher struktureller Unterschied für das optimale Zeitinvestment in Zustand 1. Nachfolgend werden zunächst Werte von  $\gamma_{1,1}$  und  $\gamma_{2,1}$  untersucht, für die  $\gamma_{1,1} + \gamma_{2,1} > 1$  gilt.

Bei  $\gamma_{1,1} + \gamma_{2,1} > 1$  ist  $a(1)$  wie beim „jungen“ Menschen eine „bang-bang“ Strategie. Das Individuum nutzt entweder die komplette zur Verfügung stehende Zeit für Freiwilligenarbeit oder verzichtet völlig auf Zeitinvestment. In Abbildung 5.32 ist die Auswirkung für fallende Risikoaversion hinsichtlich Geld (linke Grafik,  $\gamma_{1,1}$  steigt an) und Freizeit (rechte Grafik,  $\gamma_{2,1}$  steigt an) dargestellt. Die Linien bezeichnen den Rand des Bereiches über dem  $a(1) = 1$  gilt.

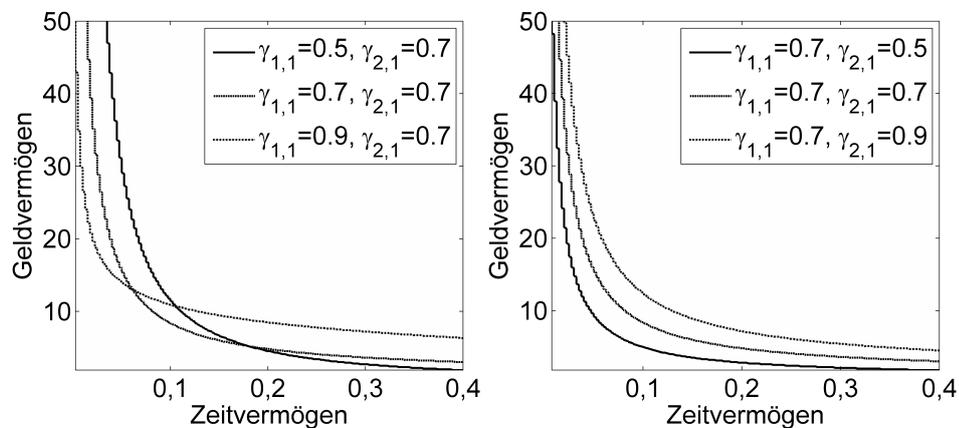


Abbildung 5.32: Zeitinvestment in Zustand 1 in Abhängigkeit von  $\gamma_{1,1}$  und  $\gamma_{2,1}$

Bei geringem vorhandenem Zeitguthaben bedingt ein wachsendes  $\gamma_{1,1}$ , dass das Individuum sein Zeitinvestment auf einen kleineren Bereich von  $x_1$  einschränkt. Mit fallender Risikoaversion ist für das Individuum bereits bei wenig vorhandenem Geldvermögen Freizeitkonsum wich-

tiger, als zukünftiger, über Zeitinvestment generierter Konsum. Für großes vorhandenes Zeitguthaben ist der Effekt umgekehrt. Mit zunehmendem  $\gamma_{1,1}$  dehnt das Individuum sein Zeitinvestment über einen größeren Bereich von  $x_1$  aus. Hier bedingt fallende Risikoaversion, dass aktueller Freizeitkonsum erst bei größerem vorhandenem Geldvermögen mehr Nutzen bringt als Zeitinvestment.  $a(1) = 1$  gilt deshalb über einem größeren Bereich. Die wechselnde Auswirkung von  $\gamma_{1,1}$  auf das Zeitinvestment in Abhängigkeit vom vorhandenem Zeitvermögen ist überraschend und kann so für das „junge“ Individuum nicht beobachtet werden. Dort bewirkt unabhängig von  $x_2$  eine nachlassende Risikoaversion eine Ausweitung der Bereitschaft Zeitinvestment zu betreiben. Da Zeitinvestment aktuellen Geldkonsum reduziert und somit zwar höheren zukünftigen, aber auch ungewissen Konsum in der Zukunft ermöglicht, ist dieser Einfluss von  $\gamma_{1,1}$  naheliegend.

Für abnehmende Risikoaversion bezüglich Freizeit ist das Verhalten des Individuums eindeutig. Das Zeitinvestment breitet sich über einen umso größeren Bereich von  $\bar{\mathcal{S}}_h$  aus, je risikoneutraler das Individuum wird. Dieses Verhalten ist wie für das „junge“ Individuum plausibel. Hohe Risikoaversion bezogen auf Freizeit bedeutet, dass das Individuum einen höheren Nutzen aus aktuellem Freizeitkonsum zieht und für den ungewissen zukünftigen Konsum aus Zeitguthaben nicht darauf verzichten möchte.

Abbildung 5.33 zeigt das Verhalten der Steuerungsvariable  $\theta(1)$  in Zustand 1 für verschiedene Risikoparameter mit  $\gamma_{1,1} + \gamma_{2,1} > 1$ . In den Grafiken ist die Färbung umso dunkler, je höher der Wert ist, den  $\theta(1)$  über diesem Bereich des Zustandsraumes  $\bar{\mathcal{S}}_h$  annimmt. Die weißen Linien zeigen den jeweiligen Rand des Gebietes von  $\bar{\mathcal{S}}_h$ , für das  $a(1) = 1$  gilt.

In den Grafiken der linken Spalte ist der Wert von  $\gamma_{1,1}$  von oben nach unten zunehmend. Der Wert von  $\gamma_{1,1}$  hat erwartungsgemäß einen deutlichen Einfluss auf die Höhe von  $\theta(1)$ . In der oberen linken Grafik erreicht  $\theta(1)$  lediglich Werte von ca. 2. In der unteren linken Grafik liegt  $\theta$  im dunklen Bereich bei über 6. Wie das Individuum aus Abschnitt 5.4.1 investiert auch der „alte“ Mensch mehr in die riskante Kapitalanlage als Geldvermögen vorhanden ist. Die Short-Position wird umso ausgeprägter, je risikoneutraler das Individuum bezüglich Geld ist. Die

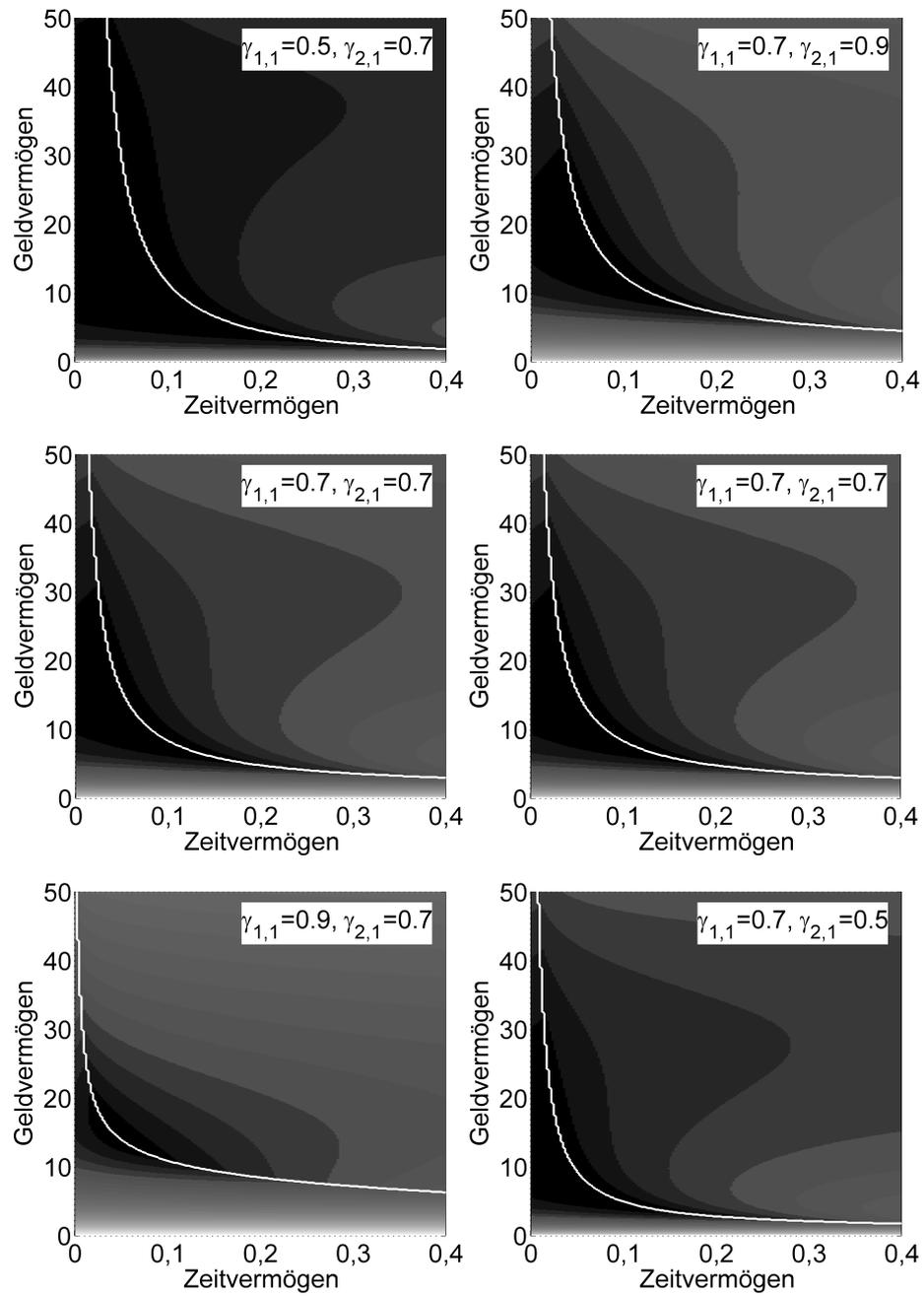


Abbildung 5.33: Riskantes Investment in Zustand 1 in Abhängigkeit von  $\gamma_{1,1}$  und  $\gamma_{2,1}$

Ergebnisse sind konform mit den Erkenntnissen Mertons (1969, 1971) (vgl. auch (3.13) in Kapitel 3).

Der Einfluss der Risikoaversion bezüglich Freizeit ist sehr viel weniger ausgeprägt als der von  $\gamma_{1,1}$ . In der rechten Spalte der Abbildung 5.33 ( $\gamma_{2,1}$  zunehmend von oben nach unten) zeigt der dunkle Bereich Werte für  $\theta(1)$  von ca. 3,3 in der oberen und von ca. 3,2 in der unteren Grafik. Die Präferenz des Individuums riskant zu investieren nimmt also mit steigendem  $\gamma_{2,1}$  nur minimal zu.

Deutlich ist in den Grafiken der grundsätzliche Einfluss des Zeitinvestments auf  $\theta(1)$  zu erkennen. In den Bereichen, in denen das Individuum Zeitinvestment betreibt, ist  $\theta(1)$  höher. Die dunklere Färbung zeigt in den Gebieten mit  $a(1) = 1$  und von dort ausstrahlend darüber hinaus den höheren Anteil an riskantem Investment an. Dies gilt in unterschiedlicher Ausprägung für alle Variationen von  $\gamma_{i,1}$ .

Somit hat mögliches Zeitinvestment eine absichernde Wirkung auf das Kapitalanlagerisiko. Verluste auf dem Kapitalmarkt können durch Zeitinvestment ausgeglichen werden. Für sehr geringes Geldvermögen ( $x_1 \rightarrow 0$ ) ist der numerische Effekt aus  $\theta(0, x_2, 1) \equiv 0$ , der  $\theta$  gegen Null zwingt, sehr stark ausgeprägt. Die erhöhende Wirkung von  $a(1) = 1$  kann sich daher dort nicht durchsetzen.

Für  $\gamma_{1,1} + \gamma_{2,1} < 1$  ist die optimale Strategie  $a(1)$  analog zum Ergebnis für das „junge“ Individuum keine „bang-bang“ Strategie.  $a(1)$  ist hingegen stetig in  $x_1$  und  $x_2$ .

In Abbildung 5.34 ist der Einfluss steigender Risikoaversionsparameter  $\gamma_{i,1}$  dargestellt (für wachsendes  $\gamma_{1,1}$  in der linken Spalte, für wachsendes  $\gamma_{2,1}$  in der rechten Spalte). Je dunkler die Färbung der Fläche, desto höher ist der Wert, den  $a(1)$  über dem entsprechenden Bereich von  $\bar{S}_h$  annimmt. Über den weißen Bereichen gilt  $a(1) = 0$ .

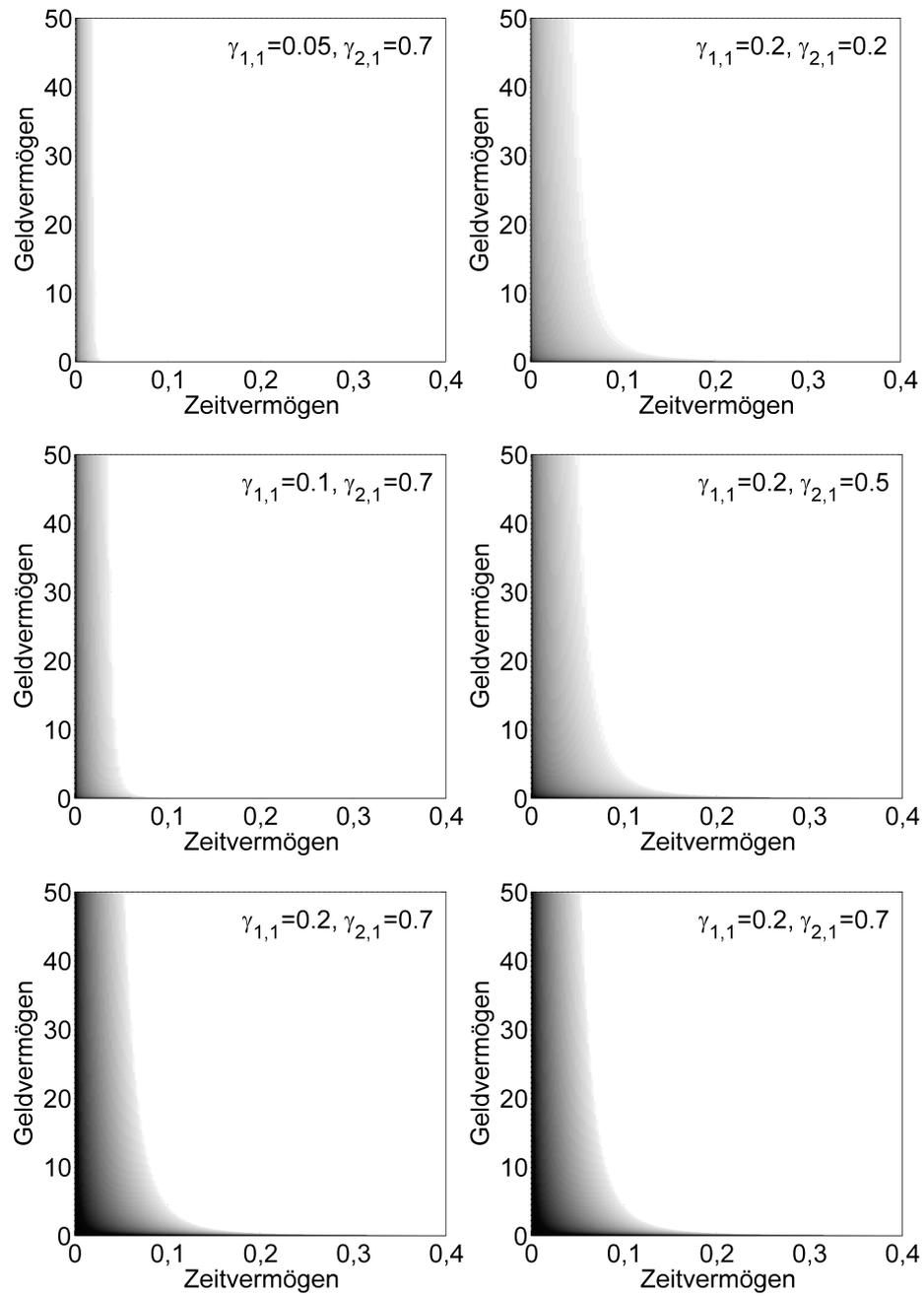


Abbildung 5.34: Zeitinvestment in Zustand 1 in Abhängigkeit von  $\gamma_{1,1}$  und  $\gamma_{2,1}$

Nimmt die Risikoaversion des Individuums bezüglich Geld zu, wird umso weniger Zeitinvestment betrieben. Dies gilt im Gegensatz zu Fall  $\gamma_{1,1} + \gamma_{2,1} > 1$  sowohl für kleine als auch große Werte von  $x_2$ . Von Individuen mit sehr ausgeprägter Risikoaversion wird generell möglichst hoher aktueller Nutzen aus Geldkonsum, d. h. gekoppelt mit hohem Freizeitanteil, dem unsicheren zukünftigen Nutzen aus aufgeschobenem Geld- und zusätzlichem Zeitkonsum generell vorgezogen. Für größere Risikoaversion bezüglich Freizeit zeigt sich das bereits bekannte Verhalten, dass Zeitinvestment umso eingeschränkter betrieben wird.

Abbildung 5.35 zeigt links den optimalen Geldkonsum  $c_1(1)$  in Zustand 1 für steigendes  $\gamma_{1,1}$  und rechts  $c_1(1)$  für steigendes  $\gamma_{2,1}$ . Die dunklen Linien zeigen  $c_1(x_1, 0, 1)$  für  $x_2 = 0$ , d. h. gleichzeitig ist  $a(1) > 0$ . Die hellen Linien zeigen  $c_1(x_1, 0, 4, 1)$  für  $x_2 = 0, 4$ , d. h. gleichzeitig ist  $a(1) = 0$ . Da für  $a(x_1, 0, 1) > 0$  der Konsum von Freizeit eingeschränkt ist und somit weniger Nutzen generiert werden kann, wird der Geldkonsum ebenso reduziert und es gilt  $c_1(x_1, 0, 1) < c_1(x_1, 0, 4, 1)$ .

Für  $x_2 = 0, 4$  steigt der optimale Konsum mit fallender Risikoaversion bezüglich Geld an. Dies stimmt mit den Erkenntnissen von Merton (1969, 1971) überein, auch dort steigt  $c_1^*$  desto stärker an, je größer  $\gamma_{1,1}$  wird. Für  $x_2 = 0$  zeigt  $c_1(x_1, 0, 1)$  ein entgegengesetztes Verhalten.  $c_1(x_1, 0, 1)$  fällt mit steigendem  $\gamma_{1,1}$ . Dies wird durch das gleichzeitige Ansteigen von  $a(1)$  bedingt. Je risikoneutraler das Individuum ist, desto größer ist die Bereitschaft, Freiwilligenarbeit zu betreiben, da zukünftiger unsicherer Konsum nur wenig geringer bewertet wird als heutiger Konsum.

Der zukünftige Konsum aus heutigem Zeitinvestment ist mehr Wert als heutiger Geldkonsum kombiniert mit höherer Freizeit.

Für steigendes  $\gamma_{2,1}$  fällt  $c_1(x_1, x_2, 1)$  unabhängig vom Wert von  $x_2$ . Dies ist für  $x_2 = 0$  plausibel, da bei fallender Risikoaversion in Freizeit gleichzeitig  $a(1)$  ansteigt. Zukünftiger Zeitkonsum hat offensichtlich auch hier einen höheren Wert, als heutiger Geldkonsum kombiniert mit höherer Freizeit.

Abbildung 5.36 zeigt wieder in einer Aufsicht die optimalen Werte für  $\theta(1)$ . Für kleine  $\gamma_{1,1}$  ist der Einfluss der Risikoaversion auf das optimale riskante Investment weniger ausgeprägt als für größere  $\gamma_{1,1}$ . Insgesamt

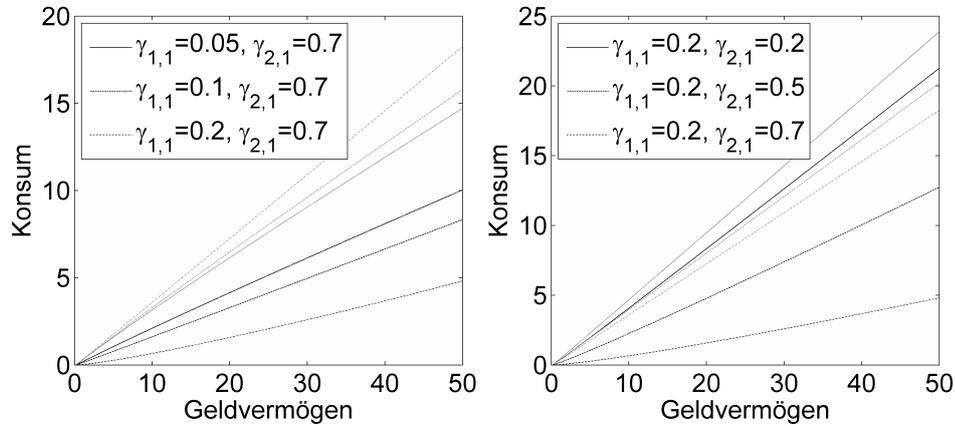


Abbildung 5.35: Optimaler Konsum in Zustand 1 in Abhängigkeit von  $\gamma_{1,1}$  und  $\gamma_{2,1}$

wird wegen der Beschränkung  $\gamma_{1,1} + \gamma_{2,1} < 1$  die Variation in  $\gamma_{1,1}$  kleiner gehalten werden ( $\max \Delta\gamma_{1,1} = 0,15$  gegenüber  $\max \Delta\gamma_{1,1} = 0,4$  in Abbildung 5.33). Aber auch bei Berücksichtigung der geringen Variation von  $\gamma_{1,1}$  ist die Steigerung von  $\theta(1) \approx 1,25$  im dunklen Bereich in der oberen linken Grafik zu  $\theta(1) \approx 1,4$  im dunklen Bereich in der unteren linken Grafik sehr viel geringer als für größere  $\gamma_{1,1}$ . Insgesamt bleibt das riskante Investment eine Short-Position. Die ausgeprägte Risikoaversion bewirkt aber, dass nur noch ein geringer Anteil über das eigene Vermögen hinaus riskant investiert wird.

Für  $\gamma_{2,1}$  ist trotz größerer Variation von  $\gamma_{2,1}$  ( $\max \Delta\gamma_{2,1} = 0,5$  gegenüber  $\max \Delta\gamma_{2,1} = 0,4$  in Abbildung 5.33) kein Einfluss auf die generelle Höhe des riskanten Investmentanteils erkennbar. Insgesamt gilt auch für kleine  $\gamma_{i,1}$ , dass  $\theta(1)$  an den Stellen von  $\bar{\mathcal{S}}_h$  geringfügig höher ist, für die  $a(1) > 1$  gilt. In allen Grafiken deckt sich der dunkler gefärbte Bereich mit den Bereichen in Abbildung 5.34, in denen  $a(1) > 0$  gilt. Somit bestätigt sich auch für  $\gamma_{1,1} + \gamma_{2,1} < 1$ , dass das Individuum das Zeitinvestment und den potentiellen Konsum daraus nutzt, um eine höhere Risikoposition im Geld zu hedgen. Für  $x_1 \rightarrow 0$  und  $x_1 \rightarrow 100$  nähert sich  $\theta(1)$  zwangsweise der Null, so dass der Unterschied für  $a(1) > 0$  und  $a(1) = 0$  dort abnimmt.

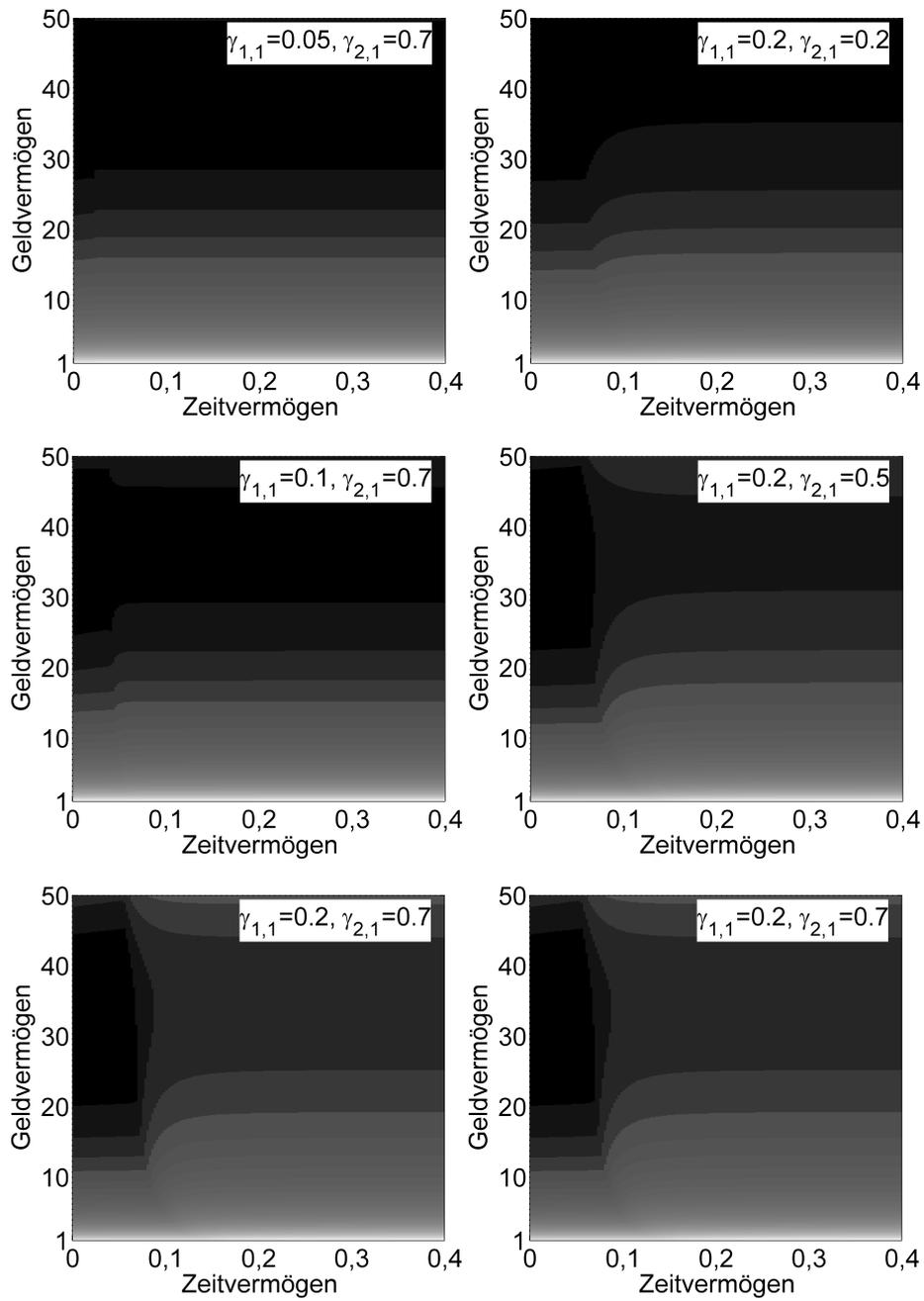


Abbildung 5.36: Riskantes Investment in Zustand 1 in Abhängigkeit von  $\gamma_{1,1}$  und  $\gamma_{2,1}$

(b) **Verhalten der optimalen Steuerungsvariablen bezüglich Verlustrisiko für das Zeitguthaben (Häufigkeit  $\lambda$  und Schwere  $\beta$ )**

Abbildung 5.37 zeigt von oben nach unten die optimalen Steuerungsparameter  $\theta(1)$  (linke Spalte) und  $a(1)$  (rechte Spalte) für zunehmend größeres Verlustrisiko auf dem Zeitguthaben.

An der linken Spalte ist zu erkennen, dass die Ausbreitung des Zeitinvestments umso mehr abnimmt, je größer das Risiko eines Verlustes auf dem Zeitguthaben ist. Der Effekt wird jedoch wie beim „jungen“ Individuum erst bei sehr hohem Risiko deutlich. In der mittleren Grafik ist die Ausbreitung von  $a(1)$  gegenüber der oberen Grafik wenig verändert, obwohl der Verlust, wenn er auftritt (erwartete Häufigkeit: einmal in 10 Jahren), bereits 90 % des Zeitguthabens beträgt. Bei einem im Schnitt alle zwei Jahre drohenden Totalverlust wird das Zeitinvestment deutlich eingeschränkt. Nur für minimales Zeitvermögen wird noch ein kleiner Anteil der zur Verfügung stehenden Zeit für Freiwilligenarbeit genutzt. Dieses Ergebnis entspricht genau wie für das „junge“ Individuum den Erwartungen, da die festgelegten Werte von  $\gamma_{i,j}$  ein risikoaverses Individuum beschreiben.

Die rechte Spalte zeigt das optimale riskante Investment für steigendes Risiko für  $X_{n,2}$ . Dunklere Färbungen zeigen höhere Werte von  $\theta(1)$  an. Auf das generelle Niveau von  $\theta(1)$  hat die Belegung der Parameter  $\lambda$  und  $\beta$  keinen Einfluss, die farbliche Differenzierung zeigt lediglich den Niveauunterschied zum maximalen Wert in derselben Grafik an. Wie auch in den Abbildungen 5.33 und 5.36 ist der Vermögensanteil, der riskant investiert wird, über dem Bereich erhöht, über dem  $a(1) > 0$  gilt.

(c) **Verhalten der optimalen Steuerungsvariablen bezüglich der Performance auf dem Kapitalmarkt ( $\mu$  und  $\sigma$ )**

In Abbildung 5.38 nimmt von oben nach unten die erwartete Rendite ab und die Volatilität zu. Die linke Spalte zeigt die Aufsicht auf die von  $a(1)$  beschriebene Fläche, die rechte Spalte die Aufsicht auf die von  $\theta(1)$  beschriebene Fläche.

Das riskante Investment verhält sich auch bezüglich der Wertentwicklung auf dem Kapitalmarkt konform zu den Ergebnissen von Merton (1969, 1971).

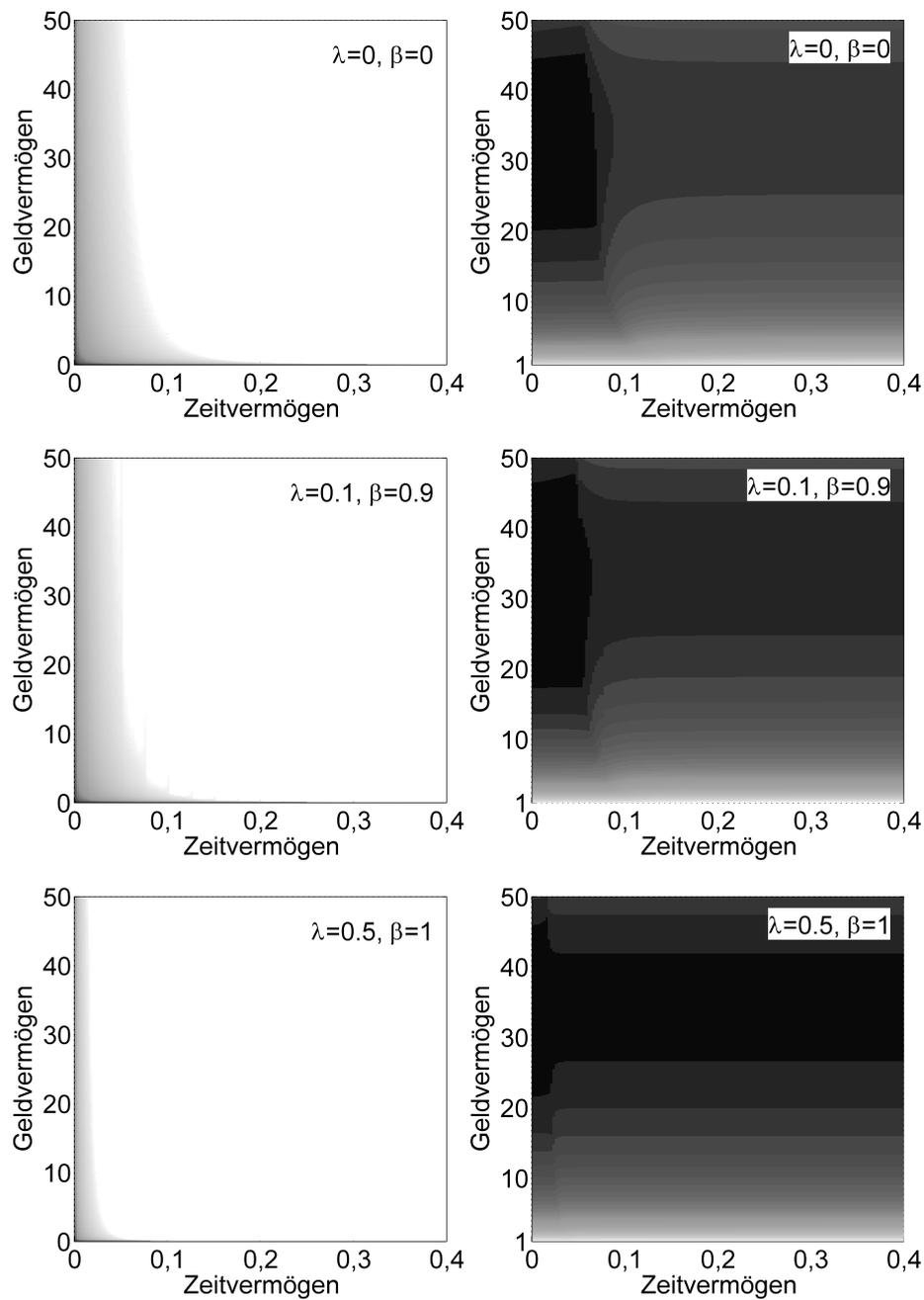


Abbildung 5.37: Zeitinvestment (links) und riskantes Investment (rechts) in Zustand 1 in Abhängigkeit von  $\lambda$  und  $\beta$

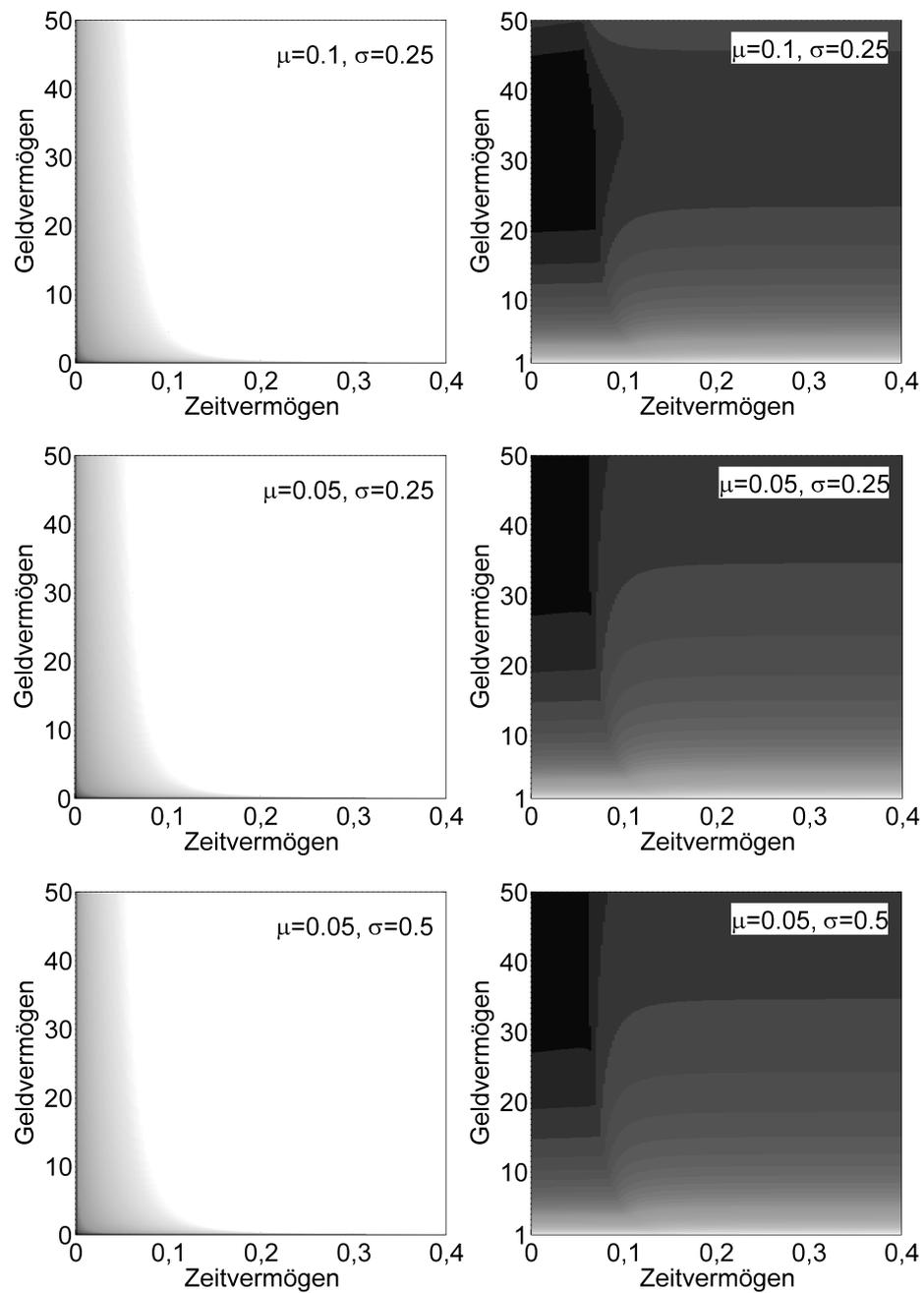


Abbildung 5.38: Riskantes Investment in Zustand 1 in Abhängigkeit von  $\mu$  und  $\sigma$

$\theta$  ist bei größerer erwarteter Rendite höher und bei größerer Volatilität geringer. Das Maximum liegt in der oberen rechten Grafik bei  $\theta(1) \approx 1,4$ . Da das Individuum deutlich risikoavers ist ( $\gamma_{j,i} = 0,2$ ), fällt der riskant investierte Anteil des Geldvermögens für eine nur knapp über dem risikolosen Zins liegende erwartete Rendite (Spread = 2%) in Kombination mit hoher Volatilität auf beinahe Null ( $\theta(1) \approx 0,1$ , rechte untere Grafik).

Bei Vergleich der rechten und linken Spalte ist wie schon in den Abbildungen 5.33 – 5.37 die Wirkung eines möglichen Zeitinvestments auf  $\theta(1)$  zu erkennen. Für Zeitvermögen  $x_2 \lesssim 0,07$  ist an der dunkleren Färbung erkennbar, dass  $\theta(1)$  erhöht ist. Dies deckt sich mit dem Bereich, über dem  $a(1) > 0$ . Das Zeitinvestment selbst wird durch die Performance auf dem Kapitalmarkt nur marginal beeinflusst. Die Ausdehnung und die Höhe verringern sich mit fallender Rendite und steigender Volatilität. Der Effekt ist an den Grafiken jedoch kaum ablesbar.

#### 5.4.4 Zusammenfassung der Ergebnisse aus den Parametervariationen

Die durchgeführten Berechnungen für das „junge“ und auch für das „alte“ Individuum führen zu dem Schluss, dass Zeitinvestment als zusätzliche Altersvorsorge für eher risikoneutrale Individuen interessant ist und weniger von risikoaversen Individuen betrieben wird. Das Ergebnis ist zunächst überraschend, kann aber anhand des aufgestellten Modells erläutert werden.

Bestimmend für die Ergebnisse von  $c_1(i)^*$  und  $a(i)^*$  sind nicht nur die Werte für die beiden Parameter  $\gamma_{1,i}$  und  $\gamma_{2,i}$ . Ausschlaggebender ist die Struktur der Nutzenfunktion in Zustand 0 und 1:

$$u((c_1(i), a(i), b(i))^T, i) = \frac{c_1(i)^{\gamma_{1,i}} (1 - a(i) - b(i))^{\gamma_{2,i}}}{\gamma_{1,i} \gamma_{2,i}} \quad i = 0, 1.$$

Bedingt durch die multiplikative Verknüpfung erzeugt Geldkonsum nur dann merklichen Nutzen, wenn gleichzeitig genug Freizeit konsumiert wird. Ein kleiner Wert für  $\gamma_{1,i}$  bedeutet, dass das Individuum einen heutigen sicheren Konsum dem unsicheren Konsum von morgen vorzieht. Das Individuum wird also versuchen, so viel Nutzen wie möglich sofort zu realisieren. Dies

kann nur gelingen, wenn nicht zu viel Freizeit durch Erwerbstätigkeit und Freiwilligenarbeit aufgegeben wird. Im vorliegenden Modell bedingt somit ein kleiner Wert für  $\gamma_{1,i}$  weniger Engagement in Freiwilligenarbeit und eine Einschränkung der Erwerbstätigkeit.

Aus einer Zunahme der Risikoaversion bezüglich Freizeit folgt eine Verminderung des Zeitinvestments sowohl in Zustand 1 als auch in Zustand 2. Der größere aktuelle Nutzen aus Geldkonsum gepaart mit höherer Freizeit hat einen größeren Wert, als der Nutzen aus Zeitinvestment, der nur bedingt und zeitversetzt realisiert werden kann. Völlig plausibel fällt das Zeitinvestment also umso geringer aus, je kleiner  $\gamma_{2,i}$  wird.

Für die optimale Erwerbstätigkeit trifft diese Argumentation nicht zu. Es wird umso mehr Erwerbstätigkeit nachgegangen, je risikoaverser das Individuum bezüglich Freizeit wird. Hier findet ein Abwägen zwischen möglichst hohem Geldkonsum gepaart mit einem hohen Nutzen aus Freizeit statt. Da Freizeit nach oben begrenzt ist, kann selbst ein sehr kleiner Parameter  $\gamma_{2,i}$  den Nutzen nicht im selben Maß nach oben treiben wie (theoretisch) unbegrenzter Geldkonsum. Aktueller Freizeitkonsum wird also nur erhöht, wenn der sofortige Nutzen höher ausfällt als gesteigerter zukünftiger Nutzen durch das zusätzliche Einkommen.

Das Abwägen zwischen Nutzen aus heutigem Konsum verbunden mit Freizeitkonsum und zukünftigem Konsum aus Einkommen und Zeitinvestment führt auch für die Parameter, die den Umfang der Erwerbstätigkeit, die Höhe der Entlohnung und die Häufigkeit der Arbeitslosigkeit beschreiben, zu einer mehrdeutigen Einflussnahme auf die Steuerungsvariablen. Abhängig vom vorhandenen Geld- und Zeitvermögen wird heutiger Geldkonsum oder zukünftiger Geld- und Zeitkonsum höher bewertet.

Besonders deutlich ist die ineinander greifende Abhängigkeit für den Parameter  $K_b$ . Eine Beschränkung der Erwerbstätigkeit führt zunächst mit fallendem  $K_b$  zu einer geringeren Erwerbstätigkeit. Da mit fallendem  $K_b$  auch der Geldkonsum abnimmt, kann dies nur damit erklärt werden, dass eine Ausweitung der Freizeit den Nutzen stärker erhöht als zusätzliches Einkommen. Der Effekt dreht sich erst um, wenn die eingeschränkte Erwerbsmöglichkeit den Konsum so sehr reduziert, dass höherer Freizeitkonsum diese Reduktion im Gesamtnutzen nicht mehr ausgleichen kann. Dann wird die Erwerbstätigkeit wieder ausgeweitet, um durch zusätzlichen zukünftigen Konsum den Nutzen zu steigern. Der zunächst reduzierende und für kleine  $K_b$  wieder ver-

stärkende Effekt ist auch für das optimale Zeitinvestment  $a(1)$  in Zustand 1 zu beobachten. Auch hier findet ein Abwägen des größeren Zugewinns aus mehr Freizeitkonsum gegenüber zukünftigem Zeitkonsum aus Zeitinvestment statt.

Für eine Änderung der Einkommenshöhe ist das Verhalten der Steuerungsvariablen  $b(0)$  intuitiv plausibel. Je mehr Einkommen erzielt werden kann, desto größer ist der Bereich, über dem Erwerbsarbeit nachgegangen wird. Das größere Einkommen ermöglicht durch einen höheren Konsum deutlich mehr Nutzen, als durch den Verzicht auf Freizeit aufgegeben werden muss. Der Einfluss der Einkommenshöhe  $g(0)$  auf das Zeitinvestment  $a(1)$  in Zustand 1 ist gegenläufig. Der Nutzen aus Zeitinvestment ist gegenüber dem Nutzen aus Geldkonsum sehr viel geringer. Somit wird bei steigendem Einkommen weniger Zeitinvestment betrieben, um den Nutzen durch mehr Freizeitkonsum zu maximieren. Für Zustand 0 ist das Verhalten von  $a(0)$  ambivalent. Wenn das Individuum bereits über ein gewisses Zeitguthaben verfügt, greift dieselbe Argumentation wie für  $a(1)$ . Zukünftiger Zeitkonsum erzeugt weniger Nutzen als eine Erhöhung der aktuell konsumierten Freizeit. Deshalb wird Zeitinvestment eingeschränkt. Ist das Zeitguthaben des Individuums sehr gering, dann fällt der Nutzensgewinn durch den zusätzlichen zukünftigen Zeitkonsum aus Zeitinvestment höher aus als die Nutzenreduktion, die durch die Einschränkung der Freizeit bedingt wird.

Tritt Arbeitslosigkeit häufig und lange auf, bewirkt dies eine Ausweitung aller Steuervariablen  $b(0)$ ,  $a(0)$  und  $a(1)$ . Das Ergebnis ist intuitiv so zu erwarten. Je seltener monetäres Einkommen generiert werden kann, umso mehr Vorteil ergibt sich aus dem zusätzlichen zukünftigen Konsum von Zeit. Daher wird ein Individuum heute umso mehr Zeitinvestment betreiben. Gleichzeitig wird ein Individuum in Zeitabschnitten mit möglicher Erwerbstätigkeit diese soweit wie möglich ausschöpfen, um auch in den Zeiten mit fehlendem Einkommen möglichst hohen Geldkonsum zu generieren.

Der Konsum von Geld wird in Zustand 1 und 2 erwartungsgemäß reduziert, wenn das Einkommen entweder wegen häufigerer Arbeitslosigkeit oder wegen geringerem Entgelt sinkt. Ein analoges Verhalten zeigt das riskante Investment. Wie intuitiv zu vermuten ist, reduziert ein risikoaverses Individuum den Anteil an riskantem Investment in seinem Portfolio, wenn weniger Einkommen generiert werden kann.

Das Risiko eines Verlustes im Zeitguthaben beeinflusst die Steuerungsvaria-

blen  $b(\cdot)$ ,  $c_1(\cdot)$  und  $\theta(\cdot)$  nur marginal. Erwartungsgemäß macht das Individuum aber umso weniger von einem möglichen Zeitinvestment Gebrauch, je höher das Verlustrisiko für das Zeitguthaben ist. Um einen deutlichen Einfluss auf  $a(0)$  und  $a(1)$  zu nehmen, muss das Verlustrisiko im Vergleich zum Risiko den Zustand 3 zu erreichen sehr groß sein.

Umgekehrt beeinflusst das Risiko und die Rendite auf dem Kapitalmarkt die Höhe des Zeitinvestments nur wenig. Der Einfluss der Performance-Parameter auf  $c_1$  und  $\theta$  entspricht dem aus der Literatur bekannten Verhalten. Beide Steuerungsvariablen nehmen an Wert zu, wenn die Rendite steigt, aber werden geringer, wenn die Volatilität zunimmt.

Generell kann das Individuum durch ein mögliches Zeitinvestment eine riskantere Position auf dem Kapitalmarkt einnehmen. Das Zeitinvestment dient wie das Einkommen als Hedging-Instrument gegen mögliche Verluste.

Nach Erläuterung der Berechnungsergebnisse verschiedener Parameterkombinationen zur Erarbeitung optimaler Strategien wird die Arbeit im nächsten Kapitel zusammengefasst. Abschließend sollen weiterführende Forschungsansätze im Ausblick erläutert werden.

# Kapitel 6

## Zusammenfassung und Ausblick

### 6.1 Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit optimalen Investment- und Konsumentscheidungen eines Individuums. Neben monetären Instrumenten, wie z. B. Investitionen auf dem Kapitalmarkt, wird eine alternative, auf Zeitgut-haben basierende Anlageform einbezogen.

Die staatliche und private Altersversorgung erfolgt z. Zt. überwiegend auf rein monetärer Basis. Vereinzelt existieren jedoch alternative Versorgungsformen, die auf gegenseitige Erbringung von Sach- und Dienstleistungen innerhalb einer Freiwilligengruppe beruhen. Der Leistungsaustausch wird über eine sogenannte Komplementärwährung abgewickelt, d. h. neben der offiziellen Landeswährung wird eine weitere Währung als Tauschmittel akzeptiert. Beispiele sind in Japan der „Nippon Active Life Club“, eine der größten bestehenden Organisationen, und in Deutschland die Seniorenhilfe Dietzenbach oder die ZeitBank in München. Bei allen Organisationen findet eine inflations-sichere Altersvorsorge auf Zeitbasis statt.

Die Arbeit greift somit den in der Realität bereits existierenden Gedanken der Altersvorsorge auf Zeitbasis auf. Die Untersuchungen zeigen, wie ein Individuum durch den gezielten Einsatz von Zeit einen, gemessen über seine gesamte Lebenszeit, maximalen Gesamtnutzen erzielen kann.

Das Hauptaugenmerk der Arbeit liegt auf der Betrachtung des Individuums und nicht der möglichen Anbieter zeitbasierter Vorsorgeinstrumente. Eine

zutreffende Abbildung realer Organisationsformen ist aufgrund der Komplexität des Gesamtthemas nicht möglich. Zur Modellierung existierender Organisationen müssten z. B. Aspekte wie die Absicherung der Zeitkonten berücksichtigt werden.

Das Ziel der Arbeit ist, in einer vereinfachten Modellumgebung zu untersuchen, unter welchen Rahmenbedingungen ein Individuum durch optimale Investment- und Konsumstrategien einen maximalen Gesamtnutzen erlangt.

Der Zustand des Individuums wird durch einen zeitstetigen Markov-Prozess mit diskretem Zustandsraum abgebildet. Hierbei werden die vier Zustände erwerbstätig (0), arbeitslos (1), inaktiv (2) und tot (3) erfasst. Das Vermögen des Individuums ist zweidimensional und unterteilt in Geld- und Zeiteinheiten, wobei die Entwicklung des Vermögensprozesses durch einen Sprung-Diffusionsprozess beschrieben wird. Zur Bewertung der Entscheidungen des Individuums wird die Entscheidungsnutzentheorie nach Neumann und Morgenstern herangezogen. Zielfunktion des Optimierungsproblems ist der akkumulierte Erwartungsnutzen. Für das Optimierungsproblem wird heuristisch ein System von Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichungen hergeleitet. Diese HJB lässt sich lediglich für einen Ausschnitt des Optimierungsproblems, d. h. die Wertfunktion für Zustand 2, analytisch lösen. Mit Hilfe des reduzierten Kontrollproblems können Vergleiche zwischen der analytischen Lösung und der numerischen Lösung für das Teilproblem durchgeführt werden, die Rückschlüsse auf die Güte der numerischen Lösung des Gesamtproblems ermöglichen.

Eine analytische Bestimmung der optimalen Konsum- und Investmentstrategien und der dazugehörigen Wertfunktion für das komplette Modell ist auf Grund der Komplexität des HJB Systems und der Nebenbedingungen nicht möglich. Zur numerischen Bestimmung der Lösung wird das Markov-Ketten-Approximationsverfahren angewandt. Das Optimierungsproblem wird innerhalb eines diskreten Modells erneut formuliert und über die Strategie-Iterations-Methode gelöst.

Da das Modell eine Vielzahl zu variierender Parameter enthält, muss eine Eingrenzung der durchzuführenden Rechenläufe vorgenommen werden. Die Berechnungen werden in zwei Grund-Cluster eingeteilt, die eine grobe Festlegung der Charakteristiken eines Individuums darstellen. Es wird ein „junges“ Individuum betrachtet, das sämtliche Zustände des modellierten Markov-Prozesses durchlaufen kann. Das zweite, „ältere“ Individuum befin-

det sich bereits im Ruhestand und kann lediglich die Zustände inaktiv und tot erreichen.

Folgende grundsätzliche Erkenntnisse können gewonnen werden:

- Das optimale Verhalten beider Individuen ist stark von der Wahl der Parameter der diversen Nutzenfunktionen geprägt. Sind die Parameter der Cobb-Douglas-Nutzenfunktion in Zustand 0 und 1 in Summe größer als Eins, stellen sich die optimalen Strategien für den Anteil an Erwerbstätigkeit und Zeitinvestment als „bang-bang“ Strategien dar. Das Individuum wählt entweder den maximal zulässigen Wert für die Steuervariablen oder den Wert Null.

Das Ergebnis ist mit Wahrnehmungen in der Realität nur eingeschränkt in Übereinstimmung zu bringen. Lediglich für den optimalen Anteil der Erwerbstätigkeit stimmt das Resultat mit beobachtbarem Verhalten überein. Ob dies eher an den mangelnden Möglichkeiten flexibel wählbarer Arbeitszeit oder tatsächlich bewusst getroffener Entscheidung liegt, ist schwer zu bewerten. Im Bereich des freiwilligen Engagements in Organisationen wie den Fureai Kippu in Japan folgt das reale Verhalten eindeutig keiner „bang-bang“ Strategie. Menschen engagieren sich anteilig in diesen Organisationen. Dies spricht im Modell dafür, dass Menschen, die Zeitinvestment betreiben, eine Cobb-Douglas-Nutzenfunktion mit Parametern in Summe kleiner 1 besitzen. Diese Individuen sind sehr risikoavers.

- Entgegen der intuitiven Erwartung ist die zusätzliche Vorsorge für das Alter über den Aufbau eines Zeitguthabens weniger attraktiv für risikoaverse Individuen als für eher risikoneutrale Individuen. Dies wird im Modell zum einen durch den Ansatz der Cobb-Douglas-Nutzenfunktion für Zustand 0 und 1 hervorgerufen. Zum anderen bedingt die im Modell eingeschränkte Verwendung des Zeitguthabens auf den Zustand 2 vermutlich eine ungünstige Bewertung des Nutzens von Zeitinvestment.
- Generell wird Zeitinvestment nur betrieben, wenn das Individuum mit insgesamt wenig Vermögen aus Zeit bzw. Geld ausgestattet ist.
- Werden dem Individuum auf dem Arbeitsmarkt nur Beschäftigungsverhältnisse mit stark eingeschränkter Arbeitszeit angeboten, ist das

zusätzliche Engagement in Zeitinvestment in Zustand 1 nutzensteigernd und wird verglichen mit einem mittleren Arbeitszeitangebot vermehrt betrieben. Dieses Ergebnis ist plausibel und leicht nachvollziehbar. Überraschend ist, dass Zeitinvestment im Zustand arbeitslos auch dann vermehrt in Anspruch genommen wird, wenn das Angebot an Arbeitszeit bei Erwerbstätigkeit nahe bei Vollzeit liegt. In Zustand 0 wird das Zeitinvestment auf einen umso kleineren Bereich des Zustandsraumes eingeschränkt, je weniger Arbeitszeit angeboten wird. Gleichzeitig wird aber in den Bereichen, in denen Zeitinvestment nachgegangen wird, dieses umso intensiver betrieben.

- Die Höhe des Einkommens hat einen ambivalenten Einfluss auf das optimale Zeitinvestment in Zustand 0. Ist das Individuum bereits mit einem gewissen Zeitguthaben ausgestattet wird es bei zunehmendem Einkommen auf weiteres Zeitinvestment verzichten. Besitzt es wenig Zeitvermögen ist sein Nutzen aus Zeitinvestment nur in Verbindung mit einem höheren Einkommen gesteigert.

Anschaulich bedeutet dies eine Einstiegshürde in Zeitinvestment. Unter der Annahme, dass ein Individuum ohne Zeitguthaben startet (Übertragung des Guthabens von einem zweiten Individuum sei ausgeschlossen), wird Zeitinvestment vom Individuum bei geringem Einkommen nur dann wahrgenommen, wenn es über sehr geringes Geldvermögen verfügt. Nur mit höherem Einkommen haben auch mit mehr Geldvermögen ausgestattete Individuen ein rationales Interesse Zeitinvestment zu betreiben.

In Zustand 1 ist der Einfluss des Einkommens eindeutig: ein höheres Einkommen bewirkt eine Reduktion von Zeitinvestment.

- Häufige und lange andauernde Arbeitslosigkeit erhöht die Bereitschaft, in Zustand 0 und 1 Zeitinvestment zu betreiben.
- Das Individuum macht umso weniger von einem möglichen Zeitinvestment Gebrauch, je höher das Verlustrisiko für das Zeitguthaben ist. Da im Modell ein risikoaverses Individuum betrachtet wird, ist dieses Ergebnis zu erwarten. Der Effekt ist gering, solange ein Verlust verglichen mit dem Auftreten der Übergänge im Zustandsraum  $Z$  nicht deutlich öfter auftritt. Da die Höhe des Verlustes nicht stochastisch modelliert wurde, ist bei der Bewertung des Einflusses jedoch Vorsicht geboten.

- Das Zeitinvestment wird nur marginal von der Performance auf dem Aktienmarkt beeinflusst. Mögliches Zeitinvestment prägt aber umgekehrt die Höhe des optimalen riskanten Investmentanteils. Da über zusätzliches Zeitinvestment etwaige Verluste auf dem Kapitalmarkt ausgeglichen werden können, dient Zeitinvestment dem Individuum als Hedging-Instrument.

Eine Organisation, die Zeitinvestment anbietet, sollte sich gemäß den Ergebnissen des Modells bevorzugt an eher risikoneutrale Individuen mit geringem Vermögen und hohem Arbeitslosigkeitsrisiko wenden. Die Zielgruppe muss nicht notwendigerweise nur minimal Beschäftigte umfassen, auch Vollzeitbeschäftigte profitieren von der Möglichkeit, Nutzen aus Zeitinvestment zu ziehen. Zusätzlich wird Zeitinvestment gemäß den Ergebnissen des Modells von Individuen mit geringem Einkommen nachgefragt.

## 6.2 Ausblick

Bei der Modellierung des Problems sind vereinfachende und somit restriktive Annahmen getroffen worden. Am schwersten wiegt die Festlegung zeitunabhängiger Parameter. Die konstanten Übergangsraten beschreiben nur unzulänglich die Entwicklung eines Menschen. Weder die zukünftige Lebenszeit, noch die Wartezeiten auf die Zustände arbeitslos oder inaktiv sind exponential verteilt. Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind nicht nur vom aktuellen Zustand sondern auch von der bisher in diesem Zustand zugebrachten Zeit abhängig. Eine zeitabhängige Modellierung würde eine genauere Analyse der Rahmenbedingungen ermöglichen, die die alternative Vorsorgeform für ein Individuum lohnenswert machen.

Auch das Einkommen einer Person ist in der Regel über die Lebensarbeitszeit nicht konstant. Der Verdienst unterliegt gewissen exogen verursachten (z. B. durch allgemeines Wirtschaftswachstum, Inflation) und endogen gesteuerten Veränderungen (z. B. Erhöhung durch zusätzliche Qualifikation, Verhandlungsgeschick). Die exogenen Störungen sollten über einen stochastischen Einkommensprozess modelliert werden. Auch hier könnten durch eine zeitabhängige Modellierung zusätzliche Erkenntnisse darüber gewonnen werden, für welchen Personenkreis Zeitinvestment ein sinnvolles Angebot darstellt.

Im Modell werden sämtliche Transaktionskosten vernachlässigt. Dies betrifft den An- und Verkauf der riskanten Wertanlage ebenso wie die Reduzierung und den Konsum aus dem Zeitguthaben. In allen bekannten Organisationen die Zeitsparen anbieten, werden monatliche oder jährliche Gebühren fällig. Für eine realitätsbezogene Abwägung des Nutzens aus Geld- oder Zeitkonsum sollten diese Transaktionskosten mitberücksichtigt werden.

Die Frage der Besteuerung sowohl des Zeitguthabens als auch des Einkommens und der Kapitalerträge bleibt im Modell ebenfalls unbeachtet. In Deutschland sind die in Kapitel 1 genannten Organisationen als gemeinnützige Vereine organisiert und daher weitgehend von der Steuerpflicht entbunden. Da dies ein Vorteil gegenüber den meisten Kapitalanlagen darstellt, könnte eine Berücksichtigung der Besteuerung das Zeitinvestment begünstigen.

Zusätzlich wird im Modell vorausgesetzt, dass jederzeit eine beliebige Entscheidung über die Höhe der verrichteten Arbeitszeit von Seiten des Individuums getroffen werden kann. Dies ist in der Realität oftmals nur eingeschränkt möglich und mit hohen Kosten in Form von Entgelteinbußen verbunden. Insofern ist das Ergebnis der „bang-bang“ Strategie für die Erwerbstätigkeit dahingehend realitätsgerecht, dass das Individuum nur zwischen Annahme oder Ablehnung der angebotenen Arbeit wählen kann. Die Entscheidung für oder gegen Freiwilligenarbeit kann eher uneingeschränkt vom Individuum gesteuert werden.

Auch wenn im Modell der Einfluss des Verlustrisikos nur gering ist, sollte in einer weitergehenden Untersuchung das Verlustrisiko für das Zeitguthaben genauer betrachtet werden. Je nach den verwendeten Sicherungsmechanismen der Organisationen (wie z. B. Aufbau eines Kapitalstocks zur Überbrückung zukünftiger Engpässe im Leistungsangebot) kann das Verlustrisiko entweder unter Einbeziehung der Kosten der Absicherung vernachlässigt oder komplexer modelliert werden. Zusätzlich sollte bedacht werden, dass das Verlustrisiko nicht objektiv bewertbar ist. Jedes Individuum wird seine eigene subjektive Einschätzung des Risikos vornehmen. Dies führt im Allgemeinen dazu, dass das Risiko überbewertet wird. Tendenziell wird also ein Individuum, auch wenn es sich rational verhält, weniger Zeitinvestment betreiben als optimal wäre, da es von falschen Voraussetzungen ausgeht.

Generell sollen die Ergebnisse der Arbeit aufzeigen, dass werteschaffendes Engagement auch außerhalb der traditionellen Kapitalmärkte sinnvoll und lohnenswert ist. Darüber hinaus sollen ältere Menschen motiviert werden,

Altersvorsorge nicht nur in der mittleren Lebensphase, sondern auf einfache Art und Weise auch im Ruhestand, durch z. B. Betreuung gebrechlicher Personen und dem damit verbundenen Aufbau von Zeitguthaben, zu betreiben. Neben einer im mathematischen Modell nachgewiesenen individuellen Nutzensteigerung wirkt das Engagement in den Organisationen, die Zeitinvestment anbieten, einer zunehmenden Vereinsamung der älteren Bevölkerung entgegen.

Zum Abschluss sei ein Satz von G. E. P. Box und N. R. Draper zitiert: „Remember that all models are wrong; the practical question is how wrong do they have to be to not be useful.“<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>George E. P. Box and Norman R. Draper (1987), *Empirical Model-Building and Response Surfaces*, S.74



## Anhang A

# Übergangswahrscheinlichkeiten an den Rändern von $\bar{\mathcal{S}}$

An den Rändern von  $\bar{\mathcal{S}}$  ist die Bewegung der Markov-Kette eingeschränkt. Für Punkte mit  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_1 = \bar{x}_1$  oder  $x_2 = \bar{x}_2$  müssen somit separate Übertrittswahrscheinlichkeiten festgelegt werden.

Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind wie in Abschnitt 4.1 bereits ausgeführt zweistufig definiert. Nach jedem Zeitintervall ist der neue Zustand der Markov-Kette entweder durch einen schockartigen Verlust oder einer Änderung gemäß der Brownschen Bewegung definiert.

$$p^h(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \mathbf{C}^h, z) = (1 - \lambda \Delta t^h) p_D^h(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \mathbf{C}^h, z) + \lambda \Delta t^h \mathbb{1}_{\mathbf{y} = f_3^h(\mathbf{x})}.$$

Lediglich die Bewegungen auf Grund der Brownschen Bewegung sind eingeschränkt. Für die Wahrscheinlichkeit eines Sprunges wegen eines schockartigen Verlustes müssen keine Korrekturen vorgenommen werden. Insbesondere ist ein Sprung in Höhe Null für  $x_2 = 0$  zulässig.

Folgende Anpassungen werden für die Terme  $p_D^h(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \mathbf{C}^h, z)$  vorgenommen:

- $x_1 = 0$

$$\begin{aligned} p_D^h(\mathbf{x}, \mathbf{x} - \mathbf{e}_1 h_1 | \mathbf{C}^h, z) &= 0 \\ p_D^h(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{e}_1 h_1 | \mathbf{C}^h, z) &= \frac{h_1 h_2 f_{1,1}^+(\mathbf{x}, \mathbf{C}^h, z)}{Q^h(\mathbf{x}, z)} \quad \text{für } z = 0, 1 \\ p_D^h(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{e}_1 h_1 | \mathbf{C}^h, z) &= 0 \quad \text{für } z = 2 \end{aligned}$$

- $x_2 = 0$

$$\begin{aligned} p_D^h(\mathbf{x}, \mathbf{x} - \mathbf{e}_2 h_2 | \mathbf{C}^h, z) &= 0 \\ p_D^h(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{e}_2 h_2 | \mathbf{C}^h, z) &= \frac{h_1^2 f_{1,2}^+(\mathbf{x}, \mathbf{C}^h, z)}{Q^h(\mathbf{x}, z)} \quad \text{für } z = 0, 1 \\ p_D^h(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{e}_2 h_2 | \mathbf{C}^h, z) &= 0 \quad \text{für } z = 2 \end{aligned}$$

- $x_1 = \bar{x}_1$

$$\begin{aligned} p_D^h(\mathbf{x}, \mathbf{x} - \mathbf{e}_1 h_1 | \mathbf{C}^h, z) &= \frac{h_1 h_2 f_{1,1}^-(\mathbf{x}, \mathbf{C}^h, z)}{Q^h(\mathbf{x}, z)} \\ p_D^h(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{e}_1 h_1 | \mathbf{C}^h, z) &= 0 \end{aligned}$$

- $x_2 = \bar{x}_2$

$$\begin{aligned} p_D^h(\mathbf{x}, \mathbf{x} - \mathbf{e}_2 h_2 | \mathbf{C}^h, z) &= 0 \quad \text{für } z = 0, 1 \\ p_D^h(\mathbf{x}, \mathbf{x} - \mathbf{e}_2 h_2 | \mathbf{C}^h, z) &= \frac{h_1^2 f_{1,2}^-(\mathbf{x}, \mathbf{C}^h, z)}{Q^h(\mathbf{x}, z)} \quad \text{für } z = 2 \\ p_D^h(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{e}_2 h_2 | \mathbf{C}^h, z) &= 0 \end{aligned}$$

Die sonstigen Festlegungen aus Abschnitt 4.1 bleiben erhalten:

$$\begin{aligned} p_D^h(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \mathbf{C}^h, z) &= 0, \quad \text{for } \mathbf{y} \neq \mathbf{x}, \mathbf{x} \pm \mathbf{e}_i h_i, i = 1, 2 \\ p_D^h(\mathbf{x}, \mathbf{x} | \mathbf{C}^h, z) &= 1 - \sum_{\mathbf{y} \neq \mathbf{x}} p_D^h(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \mathbf{C}^h, z) \end{aligned}$$

Auch  $Q^h(\mathbf{x}, z)$  bleibt unverändert:

$$\begin{aligned} Q^h(\mathbf{x}, z) &= h_1 h_2 (K_{c_1} x_1 + K_b g(z) \mathbf{1}_{z=0} + (r + K_\theta(\mu - r)) x_1) \\ &\quad + h_1^2 (K_{c_2} \mathbf{1}_{z=2} + K_a \mathbf{1}_{z=0;1}) + h_2 \sigma^2 K_\theta^2 x_1^2. \end{aligned}$$

Mit den vorstehenden Festlegungen ergibt sich für  $z = 2$  ein absorbierender Zustand  $(x_1, x_2)^T = (0, 0)^T$ :

$$\begin{aligned} p^h(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \mathbf{C}^h, 2) &= (1 - \lambda \Delta t^h) \cdot 0 + \lambda \Delta t^h \cdot 0 = 0 \quad \text{für } \mathbf{y} \neq \mathbf{x} \\ p^h(\mathbf{x}, \mathbf{x} | \mathbf{C}^h, 2) &= (1 - \lambda \Delta t^h) \cdot 1 + \lambda \Delta t^h \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

## Anhang B

# Parameterbelegungen

Tabelle B.1: Variierte Parameterkombinationen „junges“ Individuum

Variante	$\gamma_{1,i}$	$\gamma_{2,i}$	$K_b$	$g(0)$	$g(1)$	$\lambda_{01}$	$\lambda_{10}$	$\lambda$	$\beta$
01	0,7	0,4	0,5	10	0	0,1	0,99	0,01	0,25
02	0,8	0,4	0,5	10	0	0,1	0,99	0,01	0,25
03	0,9	0,4	0,5	10	0	0,1	0,99	0,01	0,25
04	0,8	0,6	0,5	10	0	0,1	0,99	0,01	0,25
05	0,8	0,8	0,5	10	0	0,1	0,99	0,01	0,25
06	0,2	0,2	0,5	10	0	0,1	0,99	0,01	0,25
07	0,4	0,2	0,5	10	0	0,1	0,99	0,01	0,25
08	0,6	0,2	0,5	10	0	0,1	0,99	0,01	0,25
09	0,2	0,4	0,5	10	0	0,1	0,99	0,01	0,25
10	0,2	0,6	0,5	10	0	0,1	0,99	0,01	0,25
11	0,7	0,7	1	10	0	0,1	0,99	0,01	0,25
12	0,7	0,7	0,9	10	0	0,1	0,99	0,01	0,25
13	0,7	0,7	0,75	10	0	0,1	0,99	0,01	0,25
14	0,7	0,7	0,5	10	0	0,1	0,99	0,01	0,25
15	0,7	0,7	0,25	10	0	0,1	0,99	0,01	0,25
16	0,7	0,7	0	10	0	0,1	0,99	0,01	0,25
17	0,7	0,7	0,5	5	0	0,1	0,99	0,01	0,25
18	0,7	0,7	0,5	5	5	0,1	0,99	0,01	0,25
19	0,7	0,7	0,5	10	0	0,1	0,99	0,01	0,25
20	0,7	0,7	0,5	10	5	0,1	0,99	0,01	0,25
21	0,7	0,7	0,5	10	10	0,1	0,99	0,01	0,25
22	0,7	0,7	0,5	5	0	0,5	0,5	0,01	0,25
23	0,7	0,7	0,5	5	5	0,5	0,5	0,01	0,25
24	0,7	0,7	0,5	10	0	0,5	0,5	0,01	0,25
25	0,7	0,7	0,5	10	5	0,5	0,5	0,01	0,25
26	0,7	0,7	0,5	10	10	0,5	0,5	0,01	0,25
27	0,7	0,7	0,5	10	0	0,1	0,99	0	0
28	0,7	0,7	0,5	10	0	0,1	0,99	0,01	0,25
29	0,7	0,7	0,5	10	0	0,1	0,99	0,1	0,9
30	0,7	0,7	0,5	10	0	0,1	0,99	0,5	1

Tabelle B.2: Fixe Parameterwerte für „junges“ Individuum

Parameter	Wert	Parameter	Wert	Parameter	Wert
$\lambda_{03}$	0,02	$\lambda_{13}$	0,02	$\lambda_{23}$	0,1
$\lambda_{02}$	0,02	$\lambda_{12}$	0,02	$\rho$	0,15
$r$	0,03	$\mu$	0,1	$\sigma$	0,25
$\gamma_l, l = 3, 4, 5, 6$	0,2				

Tabelle B.3: Variierte Parameterkombinationen „altes“ Individuum

Variante	$\gamma_{1,1}$	$\gamma_{2,1}$	$\lambda$	$\beta$	$\mu$	$\sigma$
01	0,5	0,7	0,01	0,25	0,1	0,25
02	0,7	0,7	0,01	0,25	0,1	0,25
03	0,9	0,7	0,01	0,25	0,1	0,25
04	0,7	0,5	0,01	0,25	0,1	0,25
05	0,7	0,9	0,01	0,25	0,1	0,25
06	0,05	0,7	0,01	0,25	0,1	0,25
07	0,1	0,7	0,01	0,25	0,1	0,25
08	0,2	0,7	0,01	0,25	0,1	0,25
09	0,2	0,2	0,01	0,25	0,1	0,25
10	0,2	0,5	0,01	0,25	0,1	0,25
11	0,2	0,7	0	0	0,1	0,25
12	0,2	0,7	0,1	0,9	0,1	0,25
13	0,2	0,7	0,5	1	0,1	0,25
14	0,2	0,7	0,01	0,25	0,1	0,25
15	0,2	0,7	0,01	0,25	0,05	0,25
16	0,2	0,7	0,01	0,25	0,05	0,5

Tabelle B.4: Fixe Parameterwerte für „altes“ Individuum

Parameter	Wert	Parameter	Wert	Parameter	Wert
$\lambda_{13}$	0,2	$\lambda_{23}$	0,2	$\lambda_{12}$	0,1
$\rho$	0,15	$r$	0,03	$\gamma_l, l = 3, 4, 5, 6$	0,2



---

## Literaturverzeichnis

- Andersen, S., Harrison, G. W., Lau, M. I. und Rutström, E. E. (2008): Eliciting Risk and Time Preferences, *Econometrica*, **76** (3), 583–618.
- Bastian, N. (2001): Wenn Zeit nicht Geld ist – alternative Pflegemodelle in Japan, kontext – Gesellschaft zur Förderung junger Journalisten.  
URL [http://kontext.eon-ruhrgas.com/dateien/scripten5\\_WennZeitNichtGeldIst\\_NicoleBastian\\_web.pdf](http://kontext.eon-ruhrgas.com/dateien/scripten5_WennZeitNichtGeldIst_NicoleBastian_web.pdf)
- Bernoulli, D. (1954): Exposition of a New Theory on the Measurement of Risk, *Econometrica*, **22**, 23–36.
- Bertsekas, D. P. (2005): *Dynamic Programming and Optimal Control*, Bd. 1, 3. Aufl., Athena Scientific, Belmont, Mass.
- Bodie, Z., Merton, R. C. und Samuelson, W. F. (1992): Labor supply flexibility and portfolio choice in a life cycle model, *Journal of Economic Dynamics and Control*, **16**, 427–449.
- Damgaard, A., Fuglsbjerg, B. und Munk, C. (2003): Optimal consumption and investment strategies with a perishable and an indivisible durable consumption good, *Journal of Economic Dynamics and Control*, **28**, 209–253.
- Eichenbaum, M. S., Hansen, L. P. und Singleton, K. J. (1988): A Time Series Analysis of Representative Agent Models of Consumption and Leisure Choice under Uncertainty, *The Quarterly Journal of Economics*, **103** (1), 51–78.
- Fisher, I. (1930): *The theory of interest*, Macmillan, New York.
- Fleming, W. H. und Soner, H. M. (1993): *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*, Springer-Verlag, New York.
- Frederick, S., Loewenstein, G. und O'Donoghue, T. (2002): Time Discounting and Time Preference: A Critical Review, *Journal of Economic Literature*,

- 40 (2), 351–401.
- Halek, M. und Eisenhauer, J. G. (2001): Demography of Risk Aversion, *The Journal of Risk and Insurance*, **68** (1), 1–24.
- Harrison, G. W., Morten I. Lau und Rutström, E. E. (2007): Estimating Risk Attitudes in Denmark: A Field Experiment, *Scandinavian Journal of Economics*, **109** (2), 341–368.
- Hausman, J. A. (1979): Individual Discount Rates and the Purchase and Utilization of Energy-using Durables, *The Bell Journal of Economics*, **10** (1), 33–54.
- Horita, T. (2000): *Fureai Kippu*, Sawayaka Wohlfahrt-Stftung, Tokyo.
- Howard, R. A. (1960): *Dynamic Programming and Markov Process*, MIT Press, Cambridge.
- Institut der deutschen Wirtschaft Köln (2007): *Deutschland in Zahlen 2007*, Deutscher Instituts-Verlag GmbH, Köln.
- Kennedy, M. (2005): Komplementärwährungen zur wirtschaftlichen Lösung sozialer Probleme, *Zeitschrift für Sozialökonomie*, **144**, 20–28.
- Kennedy, M. und Lietaer, B. (2004): *Regionalwährungen. Neue Wege zu nachhaltigem Wohlstand*, Riemann Verlag, München.
- Kraft, H. und Steffensen, M. (2008): Optimal Consumption and Insurance: A Continuous-Time Markov Chain Approach, *ASTIN Bulletin*, **38** (1), 231–257.
- Kurz, M., Spiegelman, R. G. und West, R. W. (1973): The experimental horizon and the rate of time preference for the Seattle and Denver income maintenance experiments: A preliminary study, Bd. No. 21 von *Research Memorandum*, Center for the Study of Welfare Policy, Stanford Research Institute.
- Kushner, H. J. (1977): *Probability Methods for Approximations in Stochastic Control and for Elliptic Equations*, Academic Press, New York.
- Kushner, H. J. (1990): Numerical Methods for Stochastic Control problems in Continuous Time, *SIAM Journal on Control and Optimization*, **28** (5), 999–1048.
- Kushner, H. J. und Dupuis, P. G. (1992): *Numerical Methods for Stochastic Control Problems in Continuous Time*, Springer-Verlag, New York.
- Lietaer, B. (2004): Complementary Currencies in Japan Today: History, Ori-

- ginality and Relevance, *International Journal of Community Currency Research*, **8**, 1-23.  
URL <http://www.le.ac.uk/ulmc/ijccr/vol17-10/IJCCR%208no1.pdf>
- Merton, R. C. (1969): Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: The Continuous-Time Case, *The Review of Economics and Statistics*, **51** (3), 247–257.
- Merton, R. C. (1971): Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model, *Journal of Economic Theory*, **3**, 373–413.
- Moore, K. S. und Young, V. R. (2006): Optimal insurance in a continuous-time model, *Insurance: Mathematics and Economics*, **39**, 47–68.
- Munk, C. (2003): The Markov chain approximation approach for numerical solution of stochastic control problems: experiences from Merton's problem, *Applied Mathematics and Computation*, **136**, 47–77.
- von Neumann, J. und Morgenstern, O. (1953): *Theory of Games and Economic Behavior*, 3. Aufl., Princeton University Press, Princeton.
- Nielsen, P. H. und Steffensen, M. (2008): Optimal investment and life insurance strategies under minimum and maximum constraints, *Insurance: Mathematics and Economics*, **43**, 15–28.
- Øksendal, B. (2003): *Stochastic Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- Øksendal, B. und Sulem, A. (2005): *Applied Stochastic Control of Jump Diffusions*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- Olivieri, A. und Pitacco, E. (2001): Facing LTC risks, *Proceedings of the XXXII International ASTIN Colloquium*.
- Ottnad, A. und Wahl, S. (2005): *Die Renditen der gesetzlichen Rente*, Deutsches Institut für Altersvorsorge, Köln.
- Phlips, L. (1978): The Demand for Leisure and Money, *Econometrica*, **46** (5), 1025–1043.
- Protter, P. (1990): *Stochastic Integration and Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- Purcal, S. und Pigott, J. (2008): Explaining Low Annuity Demand: An Optimal Portfolio Application to Japan, *The Journal of Risk and Insurance*, **75** (2), 493–516.
- Purcal, S. und Wang, T. H. (2005): *Optimal consumer behaviour in a jump-*

- diffusion environment*, Working paper, School of Actuarial Studies, University of New South Wales, Sydney.
- Richard, S. F. (1975): Optimal Consumption, Portfolio and Life Insurance Rules for an Uncertain Lived Individual in a Continuous Time Model, *Journal of Financial Economics*, **2**, 187–203.
- Rolski, T., Schmidli, H., Schmidt, V. und Teugels, J. (1999): *Stochastic Processes for Insurance and Finance*, John Wiley and Sons, Chichester.
- Ross, S. M. (1983): *Stochastic Processes*, John Wiley and Sons, New York.
- Rust, J. (1996): Numerical Dynamic Programming in Economics, in: Amman, H. M., Kendrick, D. A. und Rust, J. (Hrsg.), *Handbook of Computational Economics*, Bd. 1, Kap. 14, Elsevier, Amsterdam, 619–729.
- Seckin, A. (2001): Consumption – leisure choice with habit formation, *Economics Letters*, **70**, 115–120.
- Sennewald, K. (2006): *Stochastic Control, Optimal Saving, and Job Search in Continuous Time*, Dissertationsschrift, Technische Universität Dresden, Fakultät für Volkswirtschaftslehre.
- Stabile, G. (2006): Optimal timing of the annuity purchases: a combined stochastic control and optimal stopping problem, *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, **9**, 151–170.
- Weckfort, F. (2007): Wie rentabel ist die gesetzliche Rentenversicherung?, *Versicherungswirtschaft*, **62** (24), 2077–2080.
- Yaari, M. E. (1965): Uncertain lifetime, life insurance, and the theory of the consumer, *Review of Economic Studies*, **32**, 137–150.