

Higgs-Masse im mSSM und Dimensionale Reduktion in hohen Ordnungen der Störungstheorie

Zur Erlangung des akademischen Grades eines
DOKTORS DER NATURWISSENSCHAFTEN
von der Fakultät für Physik der
Universität Karlsruhe (TH)

genehmigte

DISSERTATION

von

**Dipl.-Phys. Philipp Kant
aus Gießen**

Tag der mündlichen Prüfung: 31.10.2008
Referent: Prof. Dr. Matthias Steinhauser
Korreferent: Prof. Dr. Robert V. Harlander

Higgs-Masse im MSSM und Dimensionale Reduktion in hohen Ordnungen der Störungstheorie

Philipp Kant

Oktober 2008

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit Supersymmetrie als einer möglichen Erweiterung des Standardmodells der Teilchenphysik.

Der erste Teil ist eher technischer Natur und beschäftigt sich mit der Notwendigkeit, die Regularisierung supersymmetrischer und nicht-supersymmetrischer Theorien zusammenzuführen, wenn man letztere als Effektive Theorie bei niedrigen Energien der Ersteren betrachtet. Konkret wird die Dimensionale Reduktion, die in der Regularisierung supersymmetrischer Theorien Verwendung findet, auf eine im Allgemeinen nicht supersymmetrische Eichtheorie angewendet.

Der zweite Teil ist phänomenologisch und untersucht die Masse des leichten neutralen Higgs-Bosons in der minimalen supersymmetrischen Erweiterung des Standardmodells (mSSM). Das mSSM ist eine viel diskutierte Theorie, die das Standardmodell als Effektive Theorie beinhaltet und einige dessen Schwierigkeiten behebt. Die Higgs-Masse ist eine wichtige Beobachtungsgröße, wenn es darum geht, das mSSM zu entdecken, zu widerlegen, oder seine Parameter zu bestimmen. Konkret wurden im Rahmen dieser Arbeit Dreischleifen-Korrekturen zur Higgs-Masse im mSSM berechnet.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	7
1 Regularisierung, Renormierung und die Renormierungsgruppe	11
1.1 Dimensionale Regularisierung	11
1.2 Dimensionale Reduktion	13
1.3 Minimale Subtraktion: $\overline{\text{MS}}$ und $\overline{\text{DR}}$	14
1.4 Renormierungsgruppe	15
1.5 Yang-Mills Theorie mit Fermionen	15
1.5.1 Renormierung der Kopplungen und der Fermionmasse	19
1.5.2 $\overline{\text{MS}}\text{-}\overline{\text{DR}}$ Relationen	22
1.5.3 Anomale Dimensionen der Evaneszenten Kopplungen	25
1.5.4 β_s und γ_m auf Vierschleifen-Niveau	31
1.6 Super-Yang-Mills	42
1.7 QCD	43
1.8 Diskussion	48
2 Die Masse des leichten neutralen Higgs-Bosons im mSSM	51
2.1 Higgs-Mechanismus im mSSM	51
2.2 Der Stop-Sektor des mSSM	53
2.3 Strahlungskorrekturen zur Higgs-Masse	53
2.4 Korrekturen der Ordnung $\alpha_t\alpha_s^2$	56
2.4.1 Vereinfachende Annahmen	57
2.4.2 Regularisierung und Renormierung	58
2.5 Diskussion der Ergebnisse	65
2.5.1 Ergebnisse für degeneriertes Massenspektrum	66
2.5.2 Masselose Gluinos	68
2.5.3 Schwere Squarks	70
2.5.4 Einfluss der Stop-Mischung	74
2.5.5 Der Referenzpunkt SPS1a'	76
2.5.6 Relevanz der A_t Terme	78
2.6 Vergleich mit der Literatur	79

2.7 Diskussion	79
A Techniken	83
A.1 Generierung der Diagramme	83
A.2 Asymptotische Entwicklung	83
A.3 Berechnung der Ein-Skalen-Diagramme	84
B Gruppentheorie	85
B.1 $SU(N)$	86
B.2 $SO(N)$	87
B.3 $Sp(N)$	87
C Feynmanregeln	93
C.1 Propagatoren	93
C.2 Drei-Teilchen Vertizes	93
C.3 Quartische Vertizes	95
D Renormierungskonstanten im on-shell Schema	99

Einleitung

Während diese Zeilen geschrieben werden, wird am CERN mit dem Start des Large Hadron Collider (LHC) eine neue Ära für die Teilchenphysik eingeläutet. Mit seiner Schwerpunktsenergie von 14 TeV wird er in Bereiche vordringen, bei denen damit zu rechnen ist, neue physikalische Phänomene zu entdecken.

Das Standardmodell der Teilchenphysik (SM) [1–3] beschreibt alle bisher im Labor beobachteten Elementarteilchen auf elegante Weise mit hervorragender Präzision. Die Eleganz liegt in der Formulierung als Eichtheorie, in der die Wechselwirkungen zwischen den Teilchen aus der Forderung nach Invarianz der Lagrangedichte unter lokalen Symmetrietransformationen abgeleitet werden können.

Da in einer Eichtheorie die Eichbosonen stets masselos sind, die beobachteten W und Z Bosonen jedoch eine Masse haben, wird im SM auf den Higgs-Mechanismus zurückgegriffen, um durch spontane Symmetriebrechung dynamisch Massen zu erzeugen. Dazu wird ein komplexes $SU(2)$ Dublett aus Skalarfeldern, das Higgs-Feld, eingeführt, dessen Vakuumerwartungswert von Null verschieden ist. Wenn man nun um den Grundzustand der Theorie entwickelt, wird für Teilchen, die an das Higgs koppeln, über den Vakuumerwartungswert ein bilinearer Term, also ein Massenterm, erzeugt. Die der Theorie zugrunde liegende Symmetrie bleibt somit auf dem Niveau der Lagrangedichte erhalten, ohne sich auf den Grundzustand zu übertragen.

Als Konsequenz sagt das SM die Existenz eines neutralen Spin-0 Teilchens, des Higgs-Bosons, vorher. Es ist das einzige Teilchen des SM, für das der direkte experimentelle Nachweis noch aussteht. Indirekte Messungen am LEP ergeben, dass es eine Masse von 129^{+74}_{-49} GeV hat [4], was eine Entdeckung am LHC, sofern der Higgs-Mechanismus in der Natur realisiert ist, sicherstellt.

Auf der anderen Seite gibt es Phänomene, die durch das Standardmodell nicht beschrieben werden. Es gibt beispielsweise starke Indizien dafür, dass nicht mehr als fünf Prozent der gesamten Energiedichte des Universums aus baryonischer Materie besteht, während ca. 22% von nichtbaryonischer dunkler Materie stammt. Das SM enthält kein Teilchen, das als Kandidat für dunkle Materie mit den kosmologischen Beobachtungen kompatibel wäre. Eine Erweiterung des Teilchenspektrums erscheint daher

sinnvoll.

Bei der Erweiterung des Standardmodells sind allerdings durch die gute Übereinstimmung mit den bisherigen Experimenten strenge Grenzen gesetzt. Zum einen müssen die neuen Teilchen so schwer sein oder so schwach mit den Teilchen des SM wechselwirken, dass erklärt wird, warum sie bei bisherigen Experimenten nicht entdeckt wurden. Über Strahlungskorrekturen können aber auch schwere Teilchen zu Prozessen beitragen, die bei Energien ablaufen, die ihre direkte Produktion nicht ermöglichen. Die Vermessung des elektroschwachen Sektors am Beschleuniger LEP mit großer Präzision kann daher einige denkbare Erweiterungen des Standardmodells ausschließen.

Insbesondere die Masse des Higgs-Bosons ist sehr sensitiv auf Strahlungskorrekturen von schweren Teilchen, und viele Erweiterungen des Standardmodells haben Schwierigkeiten, die Higgs-Masse in der Größenordnung von 100 bis 200 GeV zu lassen. Das Problem, neue Physik bei hohen Energien in das Standardmodell einzuführen, ohne die Higgs-Masse zu sehr zu erhöhen, ist als Hierarchieproblem bekannt.

Ein wichtiger Kandidat für eine Erweiterung des Standardmodells, der insbesondere keine Probleme hat, die Anforderungen aus den elektroschwachen Präzisionsexperimenten zu erfüllen [5] und das Hierarchieproblem elegant löst, ist die Supersymmetrie [6–11], und insbesondere die minimale supersymmetrische Erweiterung des Standardmodells (MSSM) [12–14].

Unter Supersymmetrie versteht man eine Symmetrie zwischen Bosonen und Fermionen, die gemeinsam in Supermultipletts unter den Eichtransformationen der Theorie transformieren. Jedes Teilchen des Standardmodells erhält also im MSSM einen Superpartner, ein Teilchen mit identischen Kopplungen aber unterschiedlichem Spin. Da ungebrochene Supersymmetrie auch gleiche Massen erzwingen würde, geht man im MSSM von soft gebrochener Supersymmetrie aus. Soft bedeutet dabei, dass die Brechung nur die Massen, nicht aber die Kopplungen beeinflusst. Der leichteste Superpartner ist im MSSM stabil und ist ein natürlicher Kandidat für Dunkle Materie.

Das Hierarchieproblem wird im MSSM durch systematische Aufhebung der Beiträge der aus dem Standardmodell bekannten Teilchen und ihrer Superpartner automatisch gelöst. In ungebrochener Supersymmetrie ist die Aufhebung exakt, da sowohl Massen als auch Kopplungen übereinstimmen. Sofern die Brechung klein genug ist, d.h. die Massen der Superpartner nicht viel schwerer als einige TeV sind, bleiben die Korrekturen zur Higgs-Masse klein genug, um mit den Beobachtungen im Einklang zu stehen.

Anders als im Standardmodell lassen sich die Parameter des Higgs-Potentials im MSSM nicht unabhängig von den anderen Parametern der Theorie wählen, sondern hängen

von den Eichkopplungen und den Brechungstermen ab. Es ist daher möglich, die Masse des Higgs in Abhängigkeit des restlichen Spektrums zu berechnen. Da die Higgs-Masse große Strahlungskorrekturen erhält, ist es dabei unumgänglich, höhere Ordnungen zu betrachten, um eine stabile Vorhersage machen zu können. In Kapitel 2 wird dazu ein wichtiger Beitrag geleistet.

Falls das m_{SSM} in der Natur realisiert ist, muss es das Standardmodell als Effektive Theorie bei niedrigen Energien beinhalten. Bei Studien zur Phänomenologie des m_{SSM} muss man also sicherstellen, dass die Parameter so gewählt sind, dass beim Ausintegrieren schwerer Freiheitsgrade das Standardmodell mit seinen experimentell bestimmten Parametern wiederhergestellt wird. Dabei hat man das technische Problem, dass die in nicht-supersymmetrischen Theorien gerne verwendete Regularisierungsvorschrift der Dimensionalen Regularisierung ($DREG$) nicht ohne Weiteres auf supersymmetrische Theorien übertragbar ist. In $SUSY$ verwendet man daher meist eine Modifizierung der $DREG$, die Dimensionale Reduktion ($DRED$). Diese bringt aber, wenn man sie auf nicht-supersymmetrische Theorien anwendet, Komplikationen in Form von zusätzlichen Kopplungen mit sich. Dieser Problematik widmet sich Kapitel 1. Dort wird anhand einer expliziten Rechnung gezeigt, dass es praktikabel ist, $DRED$ bis zum Vierschleifen-Niveau auch auf nicht-supersymmetrische Theorien anzuwenden.

1 Regularisierung, Renormierung und die Renormierungsgruppe

In der störungstheoretischen Entwicklung von Quantenfeldtheorien treten divergente Impulsintegrale auf. Mit Hilfe der Techniken der Regularisierung und Renormierung lassen sich dennoch sinnvolle physikalische Aussagen formulieren. Regularisierung bedeutet dabei, dass man die Divergenzen systematisch parametrisiert. Im zweiten Schritt, der Renormierung, werden die ursprünglichen „nackten“ Parameter und Felder der Theorie durch neue, renormierte, ersetzt, und zwar so, dass Vorhersagen der Theorie, ausgedrückt in den renormierten Parametern, endlich sind. Die Differenz aus nackten und renormierten Parametern nennt man Counterterme, das Verhältnis Renormierungskonstante. Nackte Parameter, Counterterme und Renormierungskonstanten sind divergent, während die renormierten Parameter endlich sind. Sobald man die Werte der renormierten Parameter durch Vergleich mit einem Referenzexperiment festgelegt hat, kann man falsifizierbare Vorhersagen für weitere Experimente machen.

Die Bedingung, dass die Vorhersagen der Theorie endlich sein sollen, reicht allerdings nicht aus, um die Counterterme festzulegen: eine endliche Veränderung des Wertes eines Parameters ist für die Beseitigung der Divergenzen unerheblich. Um die renormierten Parameter eindeutig zu definieren, muss man weitere Renormierungsbedingungen stellen, ein Renormierungsschema wählen.

Im Folgenden werden zwei Regularisierungs- und Renormierungsschemata vorgestellt. Anschließend wird die Renormierung einer allgemeinen Eichtheorie mit Fermionen im $\overline{\text{DR}}$ -Schema bis zur vierten Ordnung in der Störungstheorie durchgeführt, was einen wesentlichen Teil der vorliegenden Arbeit darstellt. Veröffentlicht wurden die Ergebnisse dieses Kapitels bereits in [15–17].

1.1 Dimensionale Regularisierung

Eine Regularisierungstechnik, die sich als außerordentlich praktisch erwiesen und im Bereich der Vielschleifen-Rechnungen als Standard durchgesetzt hat, ist es, den Be-

griff des d -dimensionalen Integrals auf komplexe d auszuweiten und das Integral als meromorphe Funktion von $d = 4 - 2\epsilon$ zu berechnen. Im Grenzfall $\epsilon \rightarrow 0$ erhält man das ursprüngliche Integral, und die Singularität manifestiert sich als Pol in ϵ . Man bezeichnet dieses Verfahren als Dimensionale Regularisierung (DREG).

Die Konstruktion eines Integrals $\int d^d k$, wobei d eine beliebige, im Allgemeinen komplexe Zahl ist, ist nicht trivial. In [18] wurde für Funktionen von Skalarprodukten aus Vektoren eines unendlich dimensionalen Vektorraums ein lineares Funktional definiert, das translationsinvariant ist und d -dimensional skaliert, d.h.

$$\int d^d k f(sk) = s^{-d} \int d^d k f(k) \quad (1.1)$$

erfüllt. Mit der Normierungsbedingung

$$\int d^d k e^{-k^2} = \pi^{\frac{d}{2}} \quad (1.2)$$

wird für ganzzahlige d das Lebesgue-Integral reproduziert. Auf dem unendlich dimensionalen Vektorraum definiert man einen metrischen Tensor $g_{\mu\nu}^d$ mit $g_{\mu}^{\mu} = d$ und Dirac Matrizen γ_{μ}^d , die die Algebra

$$\{\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}\} = g_{\mu\nu}^d \quad (1.3)$$

erfüllen. Damit hat man einen formal d -dimensionalen Vektorraum konstruiert, in den sich der 4-dimensionale Vektorraum einbetten lässt.

Die Definition von γ_5 in d Dimensionen bereitet Schwierigkeiten. Fordert man, wie in 4 Dimensionen, die Antivertauschungsrelation

$$\{\gamma_5, \gamma_{\mu}\} = 0 \quad (1.4)$$

für alle μ , so verschwindet, anders als im 4-dimensionalen Fall, die Spur über das Produkt von γ_5 mit einer beliebigen Anzahl von γ -Matrizen. Was sich konsistent formulieren lässt, ist eine Matrix, die nur mit $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ und γ_4 antivertauscht und mit den restlichen γ -Matrizen vertauscht [19, 20]. Dazu setzt man

$$\gamma_5 = \frac{1}{4!} \gamma^{\mu} \gamma^{\nu} \gamma^{\rho} \gamma^{\sigma} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (1.5)$$

wobei $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = 1$ für gerade, -1 für ungerade, und 0 , falls $\mu\nu\rho\sigma$ keine Permutation von 1234 ist.

Ein wesentlicher Vorteil der Dimensionalen Regularisierung besteht darin, dass sich die Eichinvarianz der nackten Lagrangedichte auf die regularisierte überträgt. Dadurch wird sichergestellt, dass von der Eichinvarianz induzierte Ward-Identitäten auch in der regularisierten Theorie erfüllt sind.

Bei der Regularisierung per DREG führt man implizit eine Massenskala ein. Die Notwendigkeit dazu sieht man, wenn man sich vor Augen führt, dass die Wirkung dimensionslos ist. Da $\int d^d x$ Massendimension $-d$ hat, muss sich beim Übergang von $d = 4$ zu $d = 4 - 2\epsilon$ auch die Massendimension der Lagrangedichte von 4 auf $4 - 2\epsilon$ ändern. Will man die Kopplungen in der regularisierten Theorie dimensionslos belassen, muss man diese Massenskala explizit machen und einen neuen Parameter, die Renormierungsskala μ , einführen.

1.2 Dimensionale Reduktion

Wendet man die Dimensionale Regularisierung auf Eichtheorien an, so verändert man mit der Anzahl der Raumdimensionen auch die Anzahl der Freiheitsgrade der Eichfelder. Daraus folgt, dass eine ursprünglich supersymmetrische Lagrangedichte nach der Regularisierung nicht mehr supersymmetrisch ist, da die Anzahl der bosonischen und fermionischen Freiheitsgrade nicht mehr übereinstimmt. Regularisiert man eine supersymmetrische Theorie mittels DREG, so muss man zusätzlich zur Renormierung der Parameter und Felder weitere endliche Counterterme einführen, um diese Brechung der Supersymmetrie zu kompensieren.

Die Dimensionale Reduktion [21] (DRED) ist eine Modifikation der DREG, die mit dem Ziel entworfen wurde, eine Supersymmetrie respektierende Regularisierungsmethode mit allen Vorzügen der DREG zu schaffen.

Grundidee dabei ist, die Impulse, nicht aber die Felder in d Dimensionen zu behandeln. Dadurch werden die Impulsintegrale regularisiert, ohne dass sich an den Freiheitsgraden der Felder etwas ändert. Konkret spaltet man den 4-dimensionalen Raum in einen $d = 4 - 2\epsilon$ dimensionalen und einen dazu orthogonalen 2ϵ -dimensionalen Raum auf und fordert, dass die 2ϵ -Komponenten der partiellen Ableitungen verschwinden. Orthogonal bedeutet hierbei, dass die Kontraktion des metrischen Tensors des d -dimensionalen Raums mit dem des 2ϵ -dimensionalen Raums verschwindet.

Genau genommen sind diese beiden Vektorräume *quasi* d - bzw. 2ϵ -dimensional, d.h. es sind unendlich dimensionale Vektorräume, die mit einem Integralmaß versehen sind, das die jeweilige Dimensionalität simuliert. Die direkte Summe aus beiden ist dann natürlich kein wirklich 4-dimensionaler Raum, sondern ein ebenfalls *quasi* 4-dimensionaler Raum. Eine Konstruktion dieser Räume findet sich in [22].

Auf dem quasi 4-dimensionalen Raum definiert man γ Matrizen, die die übliche Algebra

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu} \quad (1.6)$$

erfüllen. Diese lassen sich in einen d -dimensionalen Anteil γ_μ^d und einen 2ϵ -dimensionalen Anteil $\gamma_\mu^{2\epsilon}$ aufspalten, wobei aus der Orthogonalität der Teilräume

$$\{\gamma_\mu^d, \gamma_\nu^{2\epsilon}\} = 0 \quad (1.7)$$

folgt. Bei der Definition von γ_5 hat man im Wesentlichen dasselbe Problem wie in Dimensionaler Regularisierung.

Es bleibt anzumerken, dass DRED zwar mit dem Ziel entworfen wurde, ein Regularisierungsschema zu entwickeln, das automatisch, d.h. ohne die Notwendigkeit, spezielle Counterterme einzuführen, die Supersymmetrie einer nackten Lagrangedichte erhält, bisher aber kein Beweis erbracht werden konnte, dass dieses Ziel auch tatsächlich erreicht wurde. Es ist allerdings möglich, für konkrete Theorien und Ordnungen in der Störungstheorie nachzuweisen, dass die Verwendung von DRED ausreicht, um die Supersymmetrie zu respektieren [22]. Ein Gegenbeispiel, in dem die Regularisierung durch DRED explizit Supersymmetrie verletzt, konnte bislang nicht gefunden werden¹.

Wie im folgenden Abschnitt gezeigt wird, bringt die Anwendung Dimensionaler Reduktion auf nicht supersymmetrische Theorien technische Komplikationen mit sich. Es gibt aber gute Gründe, sich davon nicht abschrecken zu lassen und zu demonstrieren, dass es technisch machbar ist, nicht supersymmetrische Theorien konsistent in DRED zu behandeln. Will man nämlich das Standardmodell als effektive Theorie des MSSM bei niedrigen Energien betrachten, so braucht man Übergangsformeln, die die Parameter des Standardmodells mit denen des MSSM in Relation setzen.

1.3 Minimale Subtraktion: $\overline{\text{MS}}$ und $\overline{\text{DR}}$

Hat man eine Theorie dimensional regularisiert und somit die Divergenzen als Pole in ϵ in eine handhabbare Form gebracht, kann man Counterterme einführen, um sie zu beseitigen. Dabei ist nur der divergente Anteil durch die Forderung der Endlichkeit fixiert. Eine naheliegende Wahl ist es, den endlichen Anteil der Counterterme zu Null zu setzen, also nur die Pole zu subtrahieren. Diese Renormierungsbedingungen nennt man minimale Subtraktion oder $\overline{\text{MS}}$ Schema [24].

¹In [23] wurde zwar ein solches Beispiel veröffentlicht. Wie in Abschnitt 1.6 gezeigt wird, ist das Resultat in [23] allerdings falsch.

Eine Variation des $\overline{\text{MS}}$ Schemas, das $\overline{\text{MS}}$ Schema [25], bei dem zusätzlich zu den Polen in ϵ noch Terme proportional zu $\ln 4\pi - \gamma_E$ subtrahiert werden, hat sich für Rechnungen höherer Ordnung, besonders in der QCD als Standard durchgesetzt.

Unter dem $\overline{\text{DR}}$ Schema versteht man Renormierung durch modifizierte minimale Subtraktion, wobei zur Regularisierung die Dimensionale Reduktion verwendet wird.

1.4 Renormierungsgruppe

Eine Änderung der Renormierungsbedingungen verändert nicht die Theorie an sich, sondern lediglich deren Parametrisierung in den renormierten Parametern. Die Gesamtheit der Transformationen, die von einer Renormierungsbedingung zur anderen führen, bilden die sog. Renormierungsgruppe.

Die Variation der Renormierungsskala μ , und eine passende Änderung der renormierten Parameter, wird durch die Renormierungsgruppengleichung beschrieben. Die Koeffizienten dieser Differentialgleichung, die Renormierungsgruppenkoeffizienten oder Anomalen Dimensionen, können perturbativ berechnet werden.

Für die Abschätzung des Fehlers in perturbativen Rechnungen ist die Renormierungsgruppengleichung ein wichtiges Werkzeug. Da man weiß, dass die μ -Abhängigkeit physikalischer Größen ein Artefakt der Störungstheorie ist, lässt sich über die Variation von μ eine Abschätzung für die Unsicherheit des Ergebnisses ermitteln.

Bei einer Änderung der Renormierungsbedingungen verschieben sich die Beiträge der Störungsreihe zwischen den Ordnungen. Durch eine geschickte Wahl des Renormierungsschemas und der Renormierungsskala kann man erreichen, dass die größten Beiträge schon in den niedrigsten Ordnungen enthalten sind. Je kleiner die Beiträge höherer Ordnungen sind, desto verlässlicher ist die perturbative Entwicklung.

1.5 Yang-Mills Theorie mit Fermionen

Im Folgenden wird eine nicht-abelsche Eichtheorie mit Eichfeldern W_μ^a , die an n_f Dirac Fermionen ψ^A gekoppelt sind, betrachtet. Die Fermionen befinden sich in einer beliebigen Darstellung R der Eichgruppe \mathcal{G} . Die nackte Lagrangedichte ist gegeben durch

$$L_B = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2(1-\xi)}(\partial^\mu W_\mu^a)^2 + C^{a*}\partial^\mu D_\mu^{ab}C^b + i\bar{\psi}^A\gamma^\mu(D_\mu)_{AB}\psi^B, \quad (1.8)$$

wobei die Summation über die Fermion Flavour der Übersicht halber unterdrückt wird. In (1.8) ist ξ der Eichparameter,

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g f^{abc} W_\mu^b W_\nu^c \quad (1.9)$$

der Feldstärketensor und

$$(D_\mu)_{AB} = \delta_{AB} \partial_\mu - ig(R^a)_{AB} W_\mu^a \quad (1.10)$$

die kovariante Ableitung.

Falls die Forderung nach Eichinvarianz unter der Gruppe G einen Fermion-Massenterm zulässt, hat man $L_B \rightarrow L_B + L_B^m$, wobei

$$L_B^m = -\frac{1}{2} \bar{\psi} m \psi \quad (1.11)$$

ist.

Ein phänomenologisch wichtiger Spezialfall ist die Quantenchromodynamik (QCD). Dabei ist $G = SU(3)$ und die Fermionen befinden sich in der fundamentalen Darstellung.

Dimensionale Reduktion auf (1.8) anzuwenden ist gleichbedeutend damit, zu fordern, dass die Felder nur von $d = 4 - 2\epsilon$ der 4 Dimensionen abhängen. Dazu ist es praktisch, auch die Eichfelder und γ -Matrizen aufzuspalten, also

$$\begin{aligned} W_\mu^a(x^j) &= W_i^a(x^j) \oplus W_\sigma^a(x^j) \\ \gamma_\mu &= \gamma_i \oplus \gamma_\sigma \\ \partial_\mu &= \partial_i \oplus 0_\sigma, \end{aligned} \quad (1.12)$$

wobei hier und im Folgenden 2ϵ -dimensionale Indizes mit i und j , und d -dimensionale mit griechischen Indizes bezeichnet werden, zu setzen. Damit wird aus (1.8)

$$L_B = L_B^d + L_B^\epsilon \quad (1.13)$$

mit

$$L_B^d = -\frac{1}{4} G_{ij}^2 - \frac{1}{2(1-\xi)} (\partial^i W_i)^2 + C^* \partial^i D_i C + i \bar{\psi} \gamma^i D_i \psi \quad (1.14)$$

und

$$L_B^\epsilon = \frac{1}{2} (D_i W_\sigma)^2 - g \bar{\psi} \gamma_\sigma R^a \psi W_\sigma^a - \frac{1}{4} g^2 f^{ace} f^{bde} W_\sigma^a W_{\sigma'}^c W_\sigma^a W_{\sigma'}^d. \quad (1.15)$$

Wollte man Dimensionale Regularisierung verwenden, müsste man lediglich (1.14) behalten und (1.15) streichen.

Wenn man zu renormierten Größen übergeht, muss man beachten, dass jeder Term in (1.15) separat invariant unter den Eichtransformationen für Felder in DRED,

$$\delta W_i^a = \partial_i \Lambda^a + g f^{abc} W_i^b \Lambda^c \quad (1.16)$$

$$\delta W_\sigma^a = g f^{abc} W_\sigma^b \Lambda^c \quad (1.17)$$

$$\delta \psi^A = i g (R^a)^A_B \psi^B \Lambda^a, \quad (1.18)$$

ist, es also keinen Grund gibt, dass die Form der Gleichung unter der Renormierung erhalten sein sollte. Insbesondere wird die Kopplung der Fermionen an die Felder W_σ , die im Folgenden ε -Skalare genannt werden, da sie wie Skalare transformieren, sich anders renormieren als die Kopplung der Fermionen an die Eichfelder W_i . Man wird also in der renormierten Lagrangedichte unterschiedliche Kopplungskonstanten erwarten.

Bei der Selbstkopplung der ε -Skalare wird die Sache noch komplizierter. An Stelle der $f^{ace} f^{bde}$ Tensorstruktur, die durch die Forderung nach Invarianz unter den Eichtransformationen in 4 Dimensionen erzwungen wurde, treten hier allgemein Tensoren vierter Stufe auf, die invariant sowohl unter der Vertauschung von a und b als auch unter der Vertauschung von c und d sind.

Die Lagrangedichte nimmt also, ausgedrückt in renormierten Feldern und Parametern, die Form

$$\begin{aligned} L^d = & -\frac{1}{4} Z^{WW} (\partial_i W_j - \partial_j W_i)^2 - \frac{1}{2(1-\xi)} (\partial^i W_i)^2 \\ & - Z^{WWW} g f^{abc} \partial_i W_j^a W^{bi} W^{cj} - \frac{1}{4} Z^{4W} g^2 f^{abc} f^{ade} W_i^b W_j^c W^{di} W^{ej} \\ & + Z^{CC} \partial^i C^* \partial_i C + Z^{CCW} g f^{abc} \partial^i C^{a*} W_i^b C^c \\ & + Z^{\psi\psi} i \bar{\psi} \gamma^i \partial_i \psi + Z^{\psi\psi W} g \bar{\psi} R^a \gamma^i \psi W_i^a, \end{aligned} \quad (1.19a)$$

$$\begin{aligned} L^\varepsilon = & \frac{1}{2} Z^{\varepsilon\varepsilon} (\partial_i W_\sigma)^2 + Z^{\varepsilon\varepsilon W} g f^{abc} \partial_i W_\sigma^a W^{bi} W_\sigma^c \\ & + Z^{\varepsilon\varepsilon WW} g^2 f^{abc} f^{ade} W_i^b W_\sigma^c W^{di} W_\sigma^e - Z^{\psi\psi\varepsilon} g_e \bar{\psi} R^a \gamma_\sigma \psi W_\sigma^a \\ & - \frac{1}{4} \sum_{r=1}^p Z_r^{4\varepsilon} H_r^{abcd} W_\sigma^a W_{\sigma'}^c W_\sigma^b W_{\sigma'}^d, \end{aligned} \quad (1.19b)$$

$$L^m = -\frac{1}{2} Z_m Z^{\psi\psi} \bar{\psi} m \psi \quad (1.19c)$$

an.

Zusätzlich zur Eichkopplung g treten eine Yukawa-Kopplung g_e zwischen den ε -Skalaren und den Fermionen sowie p verschiedene Selbstkopplungen v_r der ε -Skalare auf. Die Anzahl p hängt dabei davon ab, wie viele linear unabhängige Tensoren vierter Stufe H^{abcd} , die die Bedingung

$$H^{abcd} = H^{bacd} = H^{abdc} \quad (1.20)$$

erfüllen, es in der jeweiligen Eichgruppe \mathcal{G} gibt. Maximal ist $p = 4$, in einigen Gruppen auch kleiner, z.B. gilt für $SU(2)$ $p = 2$ und für $SU(3)$ $p = 3$ [26].

Im Folgenden werden folgende Tensoren verwendet:

$$\begin{aligned} H_1^{abcd} &= \frac{1}{2} \delta^{ab} \delta^{cd} \\ H_2^{abcd} &= \frac{1}{2} (\delta^{ac} \delta^{bd} + \delta^{ad} \delta^{bc}) \\ H_3^{abcd} &= \frac{1}{2} (f^{ace} f^{bde} + f^{ade} f^{bce}) \\ H_4^{abcd} &= \frac{1}{2} (f^{aef} f^{bfg} f^{cgh} f^{dhe} + f^{aef} f^{bfg} f^{dgh} f^{che}) . \end{aligned} \quad (1.21)$$

Die Kopplungen g_e und v_r werden häufig als Evaneszente Kopplungen bezeichnet, da sie ein Artefakt des Regularisierungsschemas sind. Da die Evaneszenten Kopplungen und die Eichkopplung unterschiedliche β -Funktionen haben (s.u.), ist es nicht möglich, sie miteinander zu identifizieren.

Eine weitere Evaneszente Kopplung ist die Masse M_ε der ε -Skalare: anders als der d -dimensionale Anteil des Eichfelds muss der 2ε -dimensionale Anteil nicht masselos sein, um Invarianz unter den Eichtransformationen (1.18) zu gewährleisten. Da die Masse allerdings nicht zu den Anomalen Dimensionen der Ladungen und Fermionmasse, die im Folgenden berechnet werden, beiträgt, kann sie in diesem Kapitel vernachlässigt werden.

Man beachte, dass, falls die ursprüngliche Lagrangedichte (1.8) invariant unter Supersymmetrie-Transformationen ist und man die Invarianz auch für die renormierte Lagrangedichte fordert, keine Evaneszenten Kopplungen auftreten. Auch in soft gebrochener Supersymmetrie ist die einzige Evaneszente Kopplung die ε -Skalar-Masse M_ε .

Die Feynmanregeln, die sich aus (1.19) ergeben, werden in Appendix C aufgeführt.

1.5.1 Renormierung der Kopplungen und der Fermionmasse

Für die Kopplungskonstanten werden die Renormierungskonstanten

$$g_s^0 = \mu^\epsilon Z_s g_s, \quad g_e^0 = \mu^\epsilon Z_e g_e, \quad \sqrt{v_r^0} = \mu^\epsilon Z_{v_r} \sqrt{v_r} \quad (1.22)$$

eingeführt, wobei nackte Größen durch eine hochgestellte Null markiert werden. Z_s , Z_e und die Z_{v_r} stehen mit den Renormierungskonstanten aus (1.19) über

$$Z_s = \frac{Z^{\psi\psi W}}{Z^{\psi\psi} \sqrt{Z^{WW}}} = \frac{Z^{CCW}}{Z^{CC} \sqrt{Z^{WW}}}, \quad Z_e = \frac{Z^{\psi\psi\epsilon}}{Z^{\psi\psi} \sqrt{Z^{\epsilon\epsilon}}}, \quad Z_{v_r} = \frac{\sqrt{Z_r^{4\epsilon}}}{Z^{\epsilon\epsilon}} \quad (1.23)$$

in Relation.

Um beispielsweise die Kopplung g_e der ϵ -Skalare an die Fermionen zu renormieren, betrachtet man in niedrigster Ordnung die Diagramme in Abbildung 1.1. Aus den Korrekturen zum ϵ -Skalar-Fermion-Fermion Vertex $\Gamma_{\bar{\psi}\psi\epsilon}$ erhält man die Renormierungskonstante $Z^{\psi\psi\epsilon}$ in minimaler Subtraktion aus der Gleichung

$$Z^{\psi\psi\epsilon} = 1 - K_\epsilon \left[\Gamma_{\bar{\psi}\psi\epsilon} Z^{\psi\psi\epsilon} \right], \quad (1.24)$$

wobei der Operator K_ϵ die Pole in ϵ extrahiert. Gleichung (1.24) lässt sich iterativ Ordnung für Ordnung in der Störungstheorie lösen. Aus dem nackten Fermionpropagator

$$S_F^0(q) = -\frac{i}{m - \gamma_\mu q^\mu - \Sigma^0(q)} \quad (1.25)$$

$$= -\frac{i}{m(1 - \Sigma_S^0) - \gamma_\mu q^\mu(1 + \Sigma_V^0)} \quad (1.26)$$

erhält man die Wellenfunktionsrenormierung $Z^{\psi\psi}$ der Fermionen als

$$Z^{\psi\psi} = 1 - K_\epsilon \left[Z^{\psi\psi} \Sigma_V^0 \right]. \quad (1.27)$$

Die Wellenfunktionsrenormierung $Z^{\epsilon\epsilon}$ der ϵ -Skalare erhält man als

$$Z^{\epsilon\epsilon} = 1 - K_\epsilon \left[Z^{\epsilon\epsilon} \Pi_\epsilon(0) \right] \quad (1.28)$$

aus deren Propagator

$$\Pi_\epsilon^{ij}(q) = q^2 g^{ij} \Pi_\epsilon(q). \quad (1.29)$$

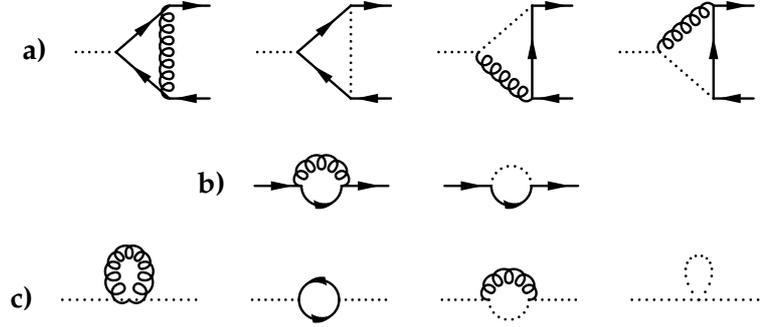


Abbildung 1.1: Renormierung der Evaneszenten Kopplung g_e auf Einschleifen-Niveau. Die Diagramme zeigen Korrekturen zum Vertex $\Gamma_{\bar{\psi}\psi\epsilon}$ (a), zum Fermionpropagator S_F (b) und zum Propagator der ϵ -Skalare $\Pi_\epsilon^{\mu\nu}$ (c).

Durch Einsetzen in (1.23) erhält man Z_e . Man beachte, dass der ϵ -Skalar Propagator im Gegensatz zu dem des Vektoranteils des Eichfelds nur eine Lorentzstruktur hat, da $p^i p^j = 0$ ist.

Analog dazu lassen sich die Z_{v_r} aus den quartischen ϵ -Skalar Vertizes und der ϵ -Skalar Wellenfunktionsrenormierung bestimmen. Die Renormierung der Eichkopplung Z_s lässt sich sowohl aus der Kopplung an die Fermionen als auch aus der an die Geister berechnen, wobei Letzteres deutlich weniger Rechenaufwand erfordert.

Die Renormierung der Fermionmasse schließlich erhält man durch Lösen der Gleichung

$$Z^{\psi\psi} Z_m = 1 - K_\epsilon [Z^{\psi\psi} Z_m \Sigma_S^0]. \quad (1.30)$$

Aus den Renormierungskonstanten der Masse und Ladungen lassen sich deren Anomale Dimensionen, definiert als ($\alpha_s = g_s^2/(4\pi)$, $\alpha_e = g_e^2/(4\pi)$)

$$\begin{aligned} \beta_s(\alpha_s, \alpha_e, \{v_r\}) &:= \mu^2 \frac{d}{d\mu^2} \frac{\alpha_s}{\pi} \\ &=: -\epsilon \frac{\alpha_s}{\pi} - \sum_{i,j,k,l,m,n} \beta_{ijklmn} \left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^i \left(\frac{\alpha_e}{\pi}\right)^j \left(\frac{v_1}{\pi}\right)^k \left(\frac{v_2}{\pi}\right)^l \left(\frac{v_3}{\pi}\right)^m \left(\frac{v_4}{\pi}\right)^n, \end{aligned} \quad (1.31a)$$

$$\begin{aligned} \beta_e(\alpha_s, \alpha_e, \{v_r\}) &:= \mu^2 \frac{d}{d\mu^2} \frac{\alpha_e}{\pi} \\ &=: -\epsilon \frac{\alpha_e}{\pi} - \sum_{i,j,k,l,m,n} \beta_{ijklmn}^e \left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^i \left(\frac{\alpha_e}{\pi}\right)^j \left(\frac{v_1}{\pi}\right)^k \left(\frac{v_2}{\pi}\right)^l \left(\frac{v_3}{\pi}\right)^m \left(\frac{v_4}{\pi}\right)^n, \end{aligned} \quad (1.31b)$$

$$\begin{aligned} \beta_{v_r}(\alpha_s, \alpha_e, \{v_r\}) &:= \mu^2 \frac{d}{d\mu^2} \frac{v_r}{\pi} \\ &=: -\epsilon \frac{v_r}{\pi} - \sum_{i,j,k,l,m,n} \beta_{ijklmn}^{v_r} \left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^i \left(\frac{\alpha_e}{\pi}\right)^j \left(\frac{v_1}{\pi}\right)^k \left(\frac{v_2}{\pi}\right)^l \left(\frac{v_3}{\pi}\right)^m \left(\frac{v_4}{\pi}\right)^n, \end{aligned} \quad (1.31c)$$

$$\begin{aligned} \gamma_m &:= \frac{\mu^2}{m} \frac{d}{d\mu^2} m \\ &=: - \sum_{i,j,k,l,m,n} \gamma_{ijklmn} \left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^i \left(\frac{\alpha_e}{\pi}\right)^j \left(\frac{v_1}{\pi}\right)^k \left(\frac{v_2}{\pi}\right)^l \left(\frac{v_3}{\pi}\right)^m \left(\frac{v_4}{\pi}\right)^n \end{aligned} \quad (1.31d)$$

berechnen. Dazu leitet man (1.22) nach $\ln \mu^2$ ab, wobei zu beachten ist, dass die nackten Größen nicht von der Renormierungsskala abhängen. Man erhält dann

$$\begin{aligned} \beta_s(\alpha_s, \alpha_e, \{v_r\}) &= - \left[\epsilon \frac{\alpha_s}{\pi} + 2 \frac{\alpha_s}{Z_s} \left(\frac{\partial Z_s}{\partial \alpha_e} \beta_e + \sum_r \frac{\partial Z_s}{\partial v_r} \beta_{v_r} \right) \right] \left(1 + 2 \frac{\alpha_s}{Z_s} \frac{\partial Z_s}{\partial \alpha_s} \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (1.32a)$$

$$\beta_e(\alpha_s, \alpha_e, \{v_r\}) = - \left[\epsilon \frac{\alpha_e}{\pi} + 2 \frac{\alpha_e}{Z_e} \left(\frac{\partial Z_e}{\partial \alpha_s} \beta_s + \sum_r \frac{\partial Z_e}{\partial v_r} \beta_{v_r} \right) \right] \left(1 + 2 \frac{\alpha_e}{Z_e} \frac{\partial Z_e}{\partial \alpha_e} \right)^{-1}, \quad (1.32b)$$

$$\begin{aligned} \beta_{v_r}(\alpha_s, \alpha_e, \{v_r\}) &= - \left[\epsilon \frac{v_r}{\pi} + 2 \frac{v_r}{Z_{\lambda_r}} \left(\frac{\partial Z_{\lambda_r}}{\partial \alpha_s} \beta_s + \frac{\partial Z_{\lambda_r}}{\partial \alpha_e} \beta_e + \sum_{r' \neq r} \frac{\partial Z_{\lambda_r}}{\partial v_{r'}} \beta_{v_{r'}} \right) \right] \\ &\quad \left(1 + 2 \frac{v_r}{Z_{\lambda_r}} \frac{\partial Z_{\lambda_r}}{\partial v_r} \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (1.32c)$$

$$\gamma_m(\alpha_s, \alpha_e, \{v_r\}) = -\pi \beta_s \frac{\partial \ln Z_m}{\partial \alpha_s} - \pi \beta_e \frac{\partial \ln Z_m}{\partial \alpha_e} - \pi \sum_r \beta_{v_r} \frac{\partial \ln Z_m}{\partial v_r}. \quad (1.32d)$$

Da die Anomalen Dimensionen der Eichkopplung und Fermionmasse im $\overline{\text{MS}}$ -Schema, $\beta^{\overline{\text{MS}}}$ und $\gamma_m^{\overline{\text{MS}}}$, bereits auf Vierschleifen-Niveau bekannt sind [27–30], bietet sich noch ein zweiter Weg. Dazu drückt man α_s und m durch die $\overline{\text{MS}}$ -Größen $\alpha_s^{\overline{\text{MS}}}$ und $m^{\overline{\text{MS}}}$ sowie durch die Evaneszenten Kopplungen aus. Differenziation dieser Relationen nach der Kettenregel liefert dann

$$\beta_s = \beta_s^{\overline{\text{MS}}} \frac{\partial \alpha_s}{\partial \alpha_s^{\overline{\text{MS}}}} + \beta_e \frac{\partial \alpha_s}{\partial \alpha_e} + \sum_r \beta_{v_r} \frac{\partial \alpha_s}{\partial v_r}, \quad (1.33)$$

$$\gamma_m = \gamma_m^{\overline{\text{MS}}} \frac{\partial \ln m}{\partial \ln m^{\overline{\text{MS}}}} + \frac{\pi \beta_s^{\overline{\text{MS}}}}{m} \frac{\partial m}{\partial \alpha_s^{\overline{\text{MS}}}} + \frac{\pi \beta_e}{m} \frac{\partial m}{\partial \alpha_e} + \sum_r \frac{\pi \beta_{v_r}}{m} \frac{\partial m}{\partial v_r}. \quad (1.34)$$

Im Folgenden sollen β_s und γ_m durch Gln. (1.33, 1.34) auf Vierschleifen-Niveau bestimmt werden. Dazu wird zunächst in Abschnitt 1.5.2 eine Relation hergeleitet, die α_s und m durch die jeweiligen Größen im $\overline{\text{MS}}$ Schema und die Evaneszenten Kopplungen ausdrückt. Dies ist nötig, um die Ableitungen in (1.33, 1.34) ausführen zu können. Da diese noch mit Anomalen Dimensionen multipliziert werden, reicht es aus, auf Dreischleifen-Niveau zu rechnen.

Hat man $\frac{\alpha_s}{\alpha_s^{\overline{\text{MS}}}}$ und $\frac{m}{m^{\overline{\text{MS}}}}$ berechnet, so untersucht man als Nächstes, ab welcher Ordnung die verschiedenen Evaneszenten Kopplungen in diese Relationen eingehen. Davon hängt ab, bis zu welcher Ordnung man ihre Anomalen Dimensionen berechnen muss. Es stellt sich heraus, dass β_e auf Drei- und die β_{v_r} auf Einschleifen-Niveau benötigt werden. Ihre Berechnung erfolgt in Abschnitt 1.5.3.

In Abschnitt 1.5.4 werden die Ergebnisse für β_s und γ_m präsentiert. Im Anschluss werden noch einige interessante Spezialfälle diskutiert. Insbesondere wird gezeigt werden, dass im Falle einer supersymmetrischen Yang-Mills Theorie die β -Funktion von α_e bis zur berechneten Ordnung mit derjenigen von α_s übereinstimmt, was eine Notwendige Bedingung dafür ist, dass die Supersymmetrie in DRED erhalten ist.

Die Berechnung der Diagramme erfolgt durch ein in Anhang A beschriebenes Programmpaket. Die gruppentheoretischen Faktoren werden, den Algorithmen aus [31, 32] folgend, durch die Casimiroperatoren C_A und C_R , Dynkin-Indizes $I_2(A)$ und $I_2(R)$ und die höheren Invarianten D_2 und D_3 ausgedrückt. Näheres hierzu, und insbesondere die Werte der Invarianten für wichtige Gruppen, findet sich in Anhang B. Die Ergebnisse sind dadurch für allgemeine Eichgruppen gültig. Um die Rechnungen zu überprüfen, wurden alle Rechnungen separat für die Gruppen $SU(N)$, $SO(N)$ und $Sp(N)$ durchgeführt und mit dem hier abgedruckten allgemeinen Resultat verglichen.

1.5.2 $\overline{\text{MS}}\text{-}\overline{\text{DR}}$ Relationen

Zur Auswertung von (1.33) und (1.34) benötigt man eine Relation zwischen der Kopplung respektive der Masse im $\overline{\text{DR}}$ und im $\overline{\text{MS}}$ Schema.

Um solche Relationen herzuleiten, benutzt man die Tatsache, dass der Wert der Kopplung α_s^{ph} bei Verwendung physikalischer Renormierungsbedingungen nicht vom verwendeten Regulator abhängt. Bei Verwendung Dimensionaler Reduktion hat man

$$\alpha_s^{0,\text{DRED}} = \left(Z_s^{\text{ph,DRED}} \right)^2 \alpha_s^{\text{ph}} = Z_s^2 \alpha_s, \quad (1.35)$$

und in Dimensionaler Regularisierung

$$\alpha_s^{0,\text{DREG}} = \left(Z_s^{\text{ph,DREG}} \right)^2 \alpha_s^{\text{ph}} = \left(Z_s^{\overline{\text{MS}}} \right)^2 \alpha_s^{\overline{\text{MS}}}, \quad (1.36)$$

wobei in beiden Gleichungen α_s^{ph} den gleichen Wert hat. Insgesamt ergibt sich also

$$\alpha_s = \left(\frac{Z_s^{\text{ph,DREG}} Z_s^{\overline{\text{MS}}}}{Z_s^{\text{ph,DREG}} Z_s} \right)^2 \alpha_s^{\overline{\text{MS}}}. \quad (1.37)$$

Analog gilt für die Fermionmasse

$$m = \frac{Z_m^{\text{ph,DREG}} Z_m^{\overline{\text{MS}}}}{Z_m^{\text{ph,DREG}} Z_m} m^{\overline{\text{MS}}}. \quad (1.38)$$

Bleibt die Wahl eines physikalischen Renormierungsschemas. Das On-Shell Schema wäre ein natürlicher Kandidat. Berechnet man allerdings die Renormierungskonstanten inklusive endlicher Terme und setzt diese in (1.37) und (1.38) ein, so stellt man fest, dass das Ergebnis impulsunabhängig ist. Es ist also nicht notwendig, die Integrale on-shell auszuwerten.

Man erhält, wobei $\zeta_n = \zeta(n)$ die Riemannsche Zeta-Funktion bezeichnet,

$$\begin{aligned} \alpha_s = \alpha_s^{\overline{\text{MS}}} & \left[1 + \frac{\alpha_s^{\overline{\text{MS}}}}{\pi} \frac{1}{12} C_A + \left(\frac{\alpha_s^{\overline{\text{MS}}}}{\pi} \right)^2 \frac{11}{72} C_A^2 - \frac{\alpha_s^{\overline{\text{MS}}}}{\pi} \frac{\alpha_e}{\pi} \frac{1}{8} C_R I_2(R) n_f \right. \\ & + \frac{1}{\pi^3} \left(\frac{1}{96} \alpha_s^{\overline{\text{MS}}} \alpha_e^2 I_2(R) n_f [2C_A^2 - 3C_A C_R + 2C_R^2 - C_A I_2(R) n_f] \right. \\ & + 7C_R I_2(R) n_f - \frac{1}{192} (\alpha_s^{\overline{\text{MS}}})^2 \alpha_e I_2(R) n_f (5C_A^2 + 60C_A C_R + 6C_R^2) \\ & + \frac{1}{9216} \alpha_s^{\overline{\text{MS}}} (-168C_A^3 v_4 v_2 - 72C_A^3 v_4 v_1 + 12v_3 v_4 C_A^4 - 48v_2 v_3 C_A^2 \\ & + 48v_1 v_3 C_A^2 - 48C_A v_1 v_2 - 48C_A N_A v_1 v_2 + 36C_A^3 v_3^2 + C_A^5 v_4^2 - 72C_A v_2^2 \\ & - 24C_A N_A v_2^2 - 24C_A v_1^2) - \frac{1}{96N_A} \alpha_s^{\overline{\text{MS}}} v_4^2 C_A D_2(A) + \frac{1}{48} (\alpha_s^{\overline{\text{MS}}})^2 v_4 D_2(A) \\ & + \frac{1}{4608} (\alpha_s^{\overline{\text{MS}}})^2 (-6C_A^3 v_3 + 84C_A^2 v_2 + 36C_A^2 v_1 - v_4 C_A^4) \\ & \left. + \frac{1}{10368} (\alpha_s^{\overline{\text{MS}}})^3 [3049C_A^3 - 416C_A^2 I_2(R) n_f - 138C_A C_R I_2(R) n_f] \right) \\ & \left. + \mathcal{O}(\{\alpha_s^{\overline{\text{MS}}}, \alpha_e, v_r\}^4) \right], \quad (1.39) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m = m^{\overline{\text{MS}}} & \left[1 - \frac{\alpha_e}{\pi} \frac{1}{4} C_R + \left(\frac{\alpha_s^{\overline{\text{MS}}}}{\pi} \right)^2 \frac{11}{192} C_A C_R - \frac{\alpha_s^{\overline{\text{MS}}}}{\pi} \frac{\alpha_e}{\pi} \frac{1}{32} C_R (3C_A + 8C_R) \right. \\
& + \left(\frac{\alpha_e}{\pi} \right)^2 \frac{1}{32} [3C_R + I_2(R)n_f] \\
& + \frac{1}{\pi^3} \left(-\frac{1}{384} \alpha_e^3 C_R [-10C_A^2 + 14C_A C_R + 27C_R^2 - 7C_A I_2(R)n_f \right. \\
& + 39C_R I_2(R)n_f - 10I_2(R)^2 n_f^2 + 12C_A^2 \zeta_3 - 36C_A C_R \zeta_3 + 24C_R^2 \zeta_3] \\
& - \alpha_e^2 C_R \left(\frac{1}{192} [6C_R v_1 + 12C_R v_2 - 2C_A v_2 - C_A v_1] \right. \\
& + \frac{1}{16I_2(R)N_A} D_2(RA)v_4 + \frac{1}{384} \alpha_s^{\overline{\text{MS}}} [47C_A^2 + 10C_R^2 \\
& - 3I_2(R)C_A n_f - 19I_2(R)C_R n_f - 165C_A C_R + 144C_R^2 \zeta_3 \\
& - 48I_2(R)C_A n_f \zeta_3 + 48I_2(R)C_R n_f \zeta_3 + 72C_A^2 \zeta_3 - 216C_A C_R \zeta_3] \left. \right) \\
& + \alpha_e C_R \left(\frac{1}{12288} [200v_2^2 + 88N_A v_2^2 + 56v_1^2 + 16N_A v_1^2 \right. \\
& + 112N_A v_2 v_1 - C_A^4 v_4^2 - 12C_A^3 v_3 v_4 + 176v_2 v_1 + 48v_3 C_A v_2 \\
& - 36C_A^2 v_3^2 + 488C_A^2 v_4 v_2 + 232C_A^2 v_4 v_1 - 48C_A v_1 v_3] \\
& + \frac{1}{3072} (\alpha_s^{\overline{\text{MS}}})^2 [2880C_R^2 \zeta_3 - 168C_A I_2(R)n_f - 1544C_A C_R - 52C_R^2 \\
& - 128I_2(R)C_R n_f + 1440C_A^2 \zeta_3 - 4320C_A C_R \zeta_3 - 79C_A^2] \left. \right) \\
& + \frac{1}{20736} (\alpha_s^{\overline{\text{MS}}})^3 C_R C_A [4354C_A + 135C_R + 304I_2(R)n_f] \\
& + \left. \frac{3}{128N_A} D_2(A)v_4^2 \right) \\
& + \mathcal{O}(\{\alpha_s^{\overline{\text{MS}}}, \alpha_e, v_r\})^4 \left. \right]. \tag{1.40}
\end{aligned}$$

Schaut man sich die Abhängigkeit von α_s und m von den Evaneszenten Kopplungen an, so stellt man fest, dass die quartischen ε -Skalar-Kopplungen v_r erst auf Dreischleifen-Niveau auftreten, α_e jedoch schon auf Zwei- respektive Einschleifen-Niveau ins Spiel kommt. Man benötigt also zur Auswertung von (1.37) und (1.38) auf Vierschleifen-Niveau die Anomalen Dimensionen von v_r lediglich in erster, die von α_e in dritter Ordnung.

1.5.3 Anomale Dimensionen der Evaneszenten Kopplungen

Die β -Funktionen der ε -Skalar-Selbstkopplungen v_r ergeben sich als

$$\begin{aligned}
 8\pi^2\beta_{v_1} &= -32n_f \frac{5C_A^2 D_2(RA) + (C_A - 6C_R)D_2(A)I_2(R)}{25C_A^4 N_A - 12D_2(A)(2 + N_A)} \alpha_e^2 - 12C_A v_1 \alpha_s \\
 &+ 8I_2(R)n_f v_1 \alpha_e + 8v_1^2 + 12v_2^2 - \frac{192D_2(A) - 80C_A^4 N_A}{9C_A N_A (N_A - 3)} v_3 v_4 \\
 &+ \frac{4}{27N_A} \left\{ 7 \frac{-12D_2(A) + 5C_A^4 N_A}{N_A - 3} \right. \\
 &- 24 \frac{72D_2(A)^2 - 90C_A^2 D_3(A)N_A + 25C_A^4 D_2(A)N_A}{25C_A^4 N_A - 12D_2(A)(2 + N_A)} \left. \right\} v_4^2 \\
 &+ v_1 [4(1 + N_A)v_2 - 4C_A v_3 + 6C_A^2 v_4] + v_2 (8C_A v_3 + 8C_A^2 v_4) \\
 8\pi^2\beta_{v_2} &= -32n_f \frac{5C_A^2 D_2(RA) + (C_A - 6C_R)D_2(A)I_2(R)}{25C_A^4 N_A - 12D_2(A)(2 + N_A)} \alpha_e^2 \\
 &- 12C_A v_2 \alpha_s + 8I_2(R)n_f v_2 \alpha_e + 12v_1 v_2 + 2(4 + N_A)v_2^2 \\
 &+ \frac{96D_2(A) - 40C_A^4 N_A}{9C_A N_A (N_A - 3)} v_3 v_4 + \frac{2}{27N_A} \left\{ 7 \frac{12D_2(A) - 5C_A^4 N_A}{(N_A - 3)} \right. \\
 &- 48 \frac{72D_2(A)^2 - 90C_A^2 D_3(A)N_A + 25C_A^4 D_2(A)N_A}{25C_A^4 N_A - 12D_2(A)(2 + N_A)} \left. \right\} v_4^2 \\
 &+ v_2 (-4C_A v_3 + 6C_A^2 v_4) \\
 8\pi^2\beta_{v_3} &= -\frac{4n_f}{25C_A^4 N_A - 12D_2(A)(2 + N_A)} \left\{ 35C_A^4 I_2(R)N_A - 10C_A^3 C_R I_2(R)N_A \right. \\
 &+ 4C_A D_2(RA)(2 + N_A) - 16D_2(A)I_2(R)(2 + N_A) \left. \right\} \alpha_e^2 \\
 &- 12C_A v_3 \alpha_s + 8I_2(R)n_f v_3 \alpha_e + 12v_1 v_3 + 4C_A v_3^2 \\
 &+ 2 \frac{48D_2(A)(-1 + N_A) + C_A^4 N_A (-61 + 7N_A)}{9C_A^2 N_A (N_A - 3)} v_3 v_4 \\
 &- \frac{4}{27C_A (N_A - 3)N_A [25C_A^4 N_A - 12D_2(A)(2 + N_A)]} \\
 &\left\{ 144D_2(A)^2 (2 + N_A)(1 + 2N_A) \right. \\
 &+ 12C_A^4 D_2(A)N_A [-191 + (-56 + N_A)N_A] \\
 &+ C_A^2 N_A [-216D_3(A)(-3 + N_A)(2 + N_A) + 25C_A^6 N_A (23 + 4N_A)] \left. \right\} v_4^2 \\
 &- v_2 (4v_3 + 4C_A v_4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8\pi^2\beta_{v_4} = & 6\alpha_s^2 + 8n_f \frac{5C_A^2(C_A - 6C_R)I_2(R)N_A + 12D_2(RA)(2 + N_A)}{25C_A^4N_A - 12D_2(A)(2 + N_A)}\alpha_e^2 \\
 & - 2v_3^2 - 12C_A v_4 \alpha_s + 8I_2(R)n_f v_4 \alpha_e + 12v_1 v_4 + 20v_2 v_4 - 2C_A v_3 v_4 \\
 & - \frac{1152D_3(A)(2 + N_A) - 5C_A^2[125C_A^4N_A + 4D_2(A)(98 + N_A)]}{6[25C_A^4N_A - 12D_2(A)(2 + N_A)]}v_4^2. \quad (1.41)
 \end{aligned}$$

Für die Anomale Dimension der ε -Skalar-Fermion-Kopplung erhält man

$$\begin{aligned}
 \beta_{110000}^e &= \frac{3}{2}C_R, \\
 \beta_{210000}^e &= -\frac{7}{64}C_A^2 + \frac{55}{48}C_A C_R + \frac{3}{16}C_R^2 + \frac{1}{8}C_A I_2(R)n_f - \frac{5}{12}C_R I_2(R)n_f, \\
 \beta_{020000}^e &= \frac{1}{2}C_A - C_R - \frac{1}{2}I_2(R)n_f, \\
 \beta_{120000}^e &= -\frac{3}{8}C_A^2 + \frac{5}{2}C_A C_R - \frac{11}{4}C_R^2 - \frac{5}{8}C_R I_2(R)n_f, \\
 \beta_{030000}^e &= \frac{3}{8}C_A^2 - \frac{5}{4}C_A C_R + C_R^2 - \frac{3}{8}C_A I_2(R)n_f + \frac{3}{4}C_R I_2(R)n_f, \\
 \beta_{021000}^e &= -\frac{1}{8}C_A + \frac{1}{4}C_R, \\
 \beta_{012000}^e &= -\frac{1}{32}, \\
 \beta_{020100}^e &= \frac{1}{2}C_R, \\
 \beta_{011100}^e &= -\frac{1}{16} - \frac{1}{16}N_A, \\
 \beta_{010200}^e &= -\frac{3}{32} - \frac{1}{32}N_A, \\
 \beta_{020010}^e &= -\frac{1}{8}C_A^2, \\
 \beta_{011010}^e &= \frac{1}{16}C_A, \\
 \beta_{010110}^e &= -\frac{1}{16}C_A, \\
 \beta_{010020}^e &= \frac{3}{64}C_A^2, \\
 \beta_{020001}^e &= -\frac{1}{48}C_A^3 + \frac{d44[pR1, pA1]}{2I2RN_A}, \\
 \beta_{011001}^e &= -\frac{3}{32}C_A^2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \beta_{010101}^e &= -\frac{7}{32}C_A^2, \\
 \beta_{010011}^e &= \frac{1}{64}C_A^3, \\
 \beta_{010002}^e &= \frac{1}{768}C_A^4 - \frac{d44[pA1, pA2]}{8N_A}, \\
 \beta_{022000}^e &= \frac{1}{256}[-6I_2(R)N_A n_f - 12N_A C_R + 6N_A C_A - 10C_R + 35C_A + 15I_2(R)n_f], \\
 \beta_{010030}^e &= -\frac{63}{1024}C_A^3, \\
 \beta_{030100}^e &= -\frac{3}{32}[C_A^2 + 6I_2(R)C_R n_f - 10C_A C_R + 2C_A I_2(R)n_f + 16C_R^2], \\
 \beta_{020200}^e &= -\frac{1}{256}[25N_A C_A - 3I_2(R)N_A n_f - 30N_A C_R - 5C_A - 33I_2(R)n_f + 118C_R], \\
 \beta_{021010}^e &= \frac{1}{128}[-27I_2(R)n_f + 53C_A - 30C_R]C_A, \\
 \beta_{210010}^e &= -\frac{3}{1024N_A I_2(R)}[5C_A^3 I_2(R)N_A + 128D_2(RA)], \\
 \beta_{110101}^e &= -\frac{17}{64}C_A^3, \\
 \beta_{211000}^e &= -\frac{15}{512}C_A^2, \\
 \beta_{012100}^e &= \frac{3}{64}(N_A - 1), \\
 \beta_{021100}^e &= \frac{1}{128}[3N_A C_A + 15I_2(R)N_A n_f + 6N_A C_R - 9C_A + 3I_2(R)n_f - 50C_R], \\
 \beta_{010003}^e &= \frac{1}{24576N_A}(96D_2(A) - 7C_A^4 N_A)C_A^2, \\
 \beta_{020110}^e &= \frac{1}{128}[35C_A + 27I_2(R)n_f - 18C_R]C_A, \\
 \beta_{110200}^e &= \frac{1}{64}(N_A - 9)C_A, \\
 \beta_{010300}^e &= -\frac{1}{256}(3N_A + 2)(N_A - 1), \\
 \beta_{111001}^e &= -\frac{3}{64}C_A^3, \\
 \beta_{010120}^e &= \frac{3}{512}C_A^2, \\
 \beta_{010021}^e &= -\frac{9}{2048N_A}(32D_2(A) + 7C_A^4 N_A),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{110020}^e &= \frac{33}{128} C_A^3, \\
\beta_{011020}^e &= -\frac{93}{512} C_A^2, \\
\beta_{020020}^e &= \frac{1}{512} [71C_A - 42C_R - 81I_2(R)n_f] C_A^2, \\
\beta_{010012}^e &= -\frac{21}{4096} C_A^5, \\
\beta_{010111}^e &= \frac{81}{512} C_A^3, \\
\beta_{110011}^e &= \frac{11}{128} C_A^4, \\
\beta_{011011}^e &= -\frac{51}{512} C_A^3, \\
\beta_{011200}^e &= \frac{3}{256} (N_A - 1)(N_A - 2), \\
\beta_{020011}^e &= \frac{1}{1536 N_A I_2(R)} \{ -384 C_A D_2(RA) + 768 D_2(A) I_2(R), \\
&\quad + N_A I_2(R) [71 C_A^4 - 42 C_R C_A^3 - 81 I_2(R) n_f C_A^3] \}, \\
\beta_{121000}^e &= -\frac{1}{32} (11 C_A^2 - 8 C_A C_R + 8 C_R^2), \\
\beta_{010210}^e &= \frac{3}{256} (5 N_A - 2) C_A, \\
\beta_{110110}^e &= -\frac{11}{32} C_A^2, \\
\beta_{011110}^e &= -\frac{3}{128} (-10 + N_A) C_A, \\
\beta_{012010}^e &= -\frac{9}{64} C_A, \\
\beta_{111010}^e &= \frac{11}{32} C_A^2, \\
\beta_{120010}^e &= -\frac{1}{32} (14 C_A + 5 C_R) C_A^2, \\
\beta_{030010}^e &= -\frac{3}{64} (C_A - 2 C_R - 9 I_2(R) n_f) C_A^2, \\
\beta_{031000}^e &= -\frac{3}{64} [-12 C_A C_R + 6 I_2(R) C_R n_f - 7 C_A I_2(R) n_f + 2 C_A^2 + 16 C_R^2], \\
\beta_{210100}^e &= -\frac{1}{512} (-192 C_R + 47 C_A) C_A, \\
\beta_{111100}^e &= -\frac{1}{32} (5 N_A - 1) C_A,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \beta_{010102}^e &= \frac{1}{2048N_A}(96D_2(A) - 13C_A^4N_A), \\
 \beta_{013000}^e &= -\frac{1}{64}(-1 + N_A), \\
 \beta_{110002}^e &= -\frac{1}{1536N_A}[-11C_A^4N_A + 192D_2(A)]C_A, \\
 \beta_{112000}^e &= \frac{1}{64}(3N_A - 5)C_A, \\
 \beta_{011002}^e &= -\frac{1}{2048N_A}(96D_2(A) - 43C_A^4N_A), \\
 \beta_{010201}^e &= -\frac{3}{512}(5N_A - 6)C_A^2, \\
 \beta_{011101}^e &= \frac{9}{256}N_AC_A^2, \\
 \beta_{202101}^e &= -\frac{1}{768N_AI_2(R)}\{N_AI_2(R)[185C_A^3 - 207C_A^2I_2(R)n_f - 342C_A^2C_R] \\
 &\quad + 960D_2(RA)\}, \\
 \beta_{210001}^e &= -\frac{1}{2048N_AI_2(R)}[5C_A^4I_2(R)N_A - 384C_AD_2(RA) + 96D_2(A)I_2(R)], \\
 \beta_{012001}^e &= -\frac{3}{128}C_A^2, \\
 \beta_{021001}^e &= -\frac{1}{768N_AI_2(R)}\{N_AI_2(R)[90C_A^2C_R - 143C_A^3 - 63C_A^2I_2(R)n_f] \\
 &\quad + 192D_2(RA)\}, \\
 \beta_{120100}^e &= \frac{1}{16}(3C_A^2 - 8C_R^2 + 13C_AC_R), \\
 \beta_{030001}^e &= -\frac{1}{128N_AI_2(R)}\{(C_A - 2C_R)[-96D_2(RA) + C_A^3I_2(R)N_A] \\
 &\quad - 9I_2(R)[-8D_2(RA) + C_A^3I_2(R)N_A]n_f\}, \\
 \beta_{020002}^e &= -\frac{1}{18432N_AI_2(R)[-25C_A^4N_A + 12D_2(A)(2 + N_A)]} \\
 &\quad \{-3981312D_3(A)D_2(RA) + 1132800C_A^6D_2(RA)N_A \\
 &\quad - 829440C_A^3D_3(A)I_2(R)N_A + 12C_A^5D_2(A)I_2(R)(18058 - 71N_A)N_A \\
 &\quad + 1775C_A^9I_2(R)N_A^2 + 1152C_AD_2(A)^2I_2(R)(586 + 5N_A) \\
 &\quad + 179712D_3(RAA)[-25C_A^4N_A + 12D_2(A)(2 + N_A)] \\
 &\quad + 9216C_A^2[540C_RD_3(A)I_2(R)N_A + D_2(A)D_2(RA)(362 + N_A)] \\
 &\quad - 75C_A^8I_2(R)N_A^2[14C_R + 27I_2(R)n_f]\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 36C_A^4 D_2(A) I_2(R) N_A [2C_R(-16586 + 7N_A) \\
& + 9I_2(R)(206 + 3N_A)n_f] - 1990656D_3(A)D_2(RA)N_A \\
& - 3456D_2(A)^2 I_2(R) [2C_R(602 + 13N_A) + 9I_2(R)(2 + N_A)n_f] \}, \\
\beta_{120001}^e &= -\frac{1}{192} C_A^3 (14C_A + 5C_R) + \frac{1}{8N_A I_2(R)} (5C_A - 4C_R) D_2(RA), \\
\beta_{130000}^e &= -\frac{1}{64N_A I_2(R)} \left(48D_2(RA) + I_2(R)N_A \{ 11C_A^3 - 242C_A^2 C_R \right. \\
& + 640C_A C_R^2 - 416C_R^3 - 28C_A^2 I_2(R)n_f + 144C_A C_R I_2(R)n_f \\
& - 104C_R^2 I_2(R)n_f - 12C_A I_2(R)^2 n_f^2 \\
& \left. + 48(C_A - 2C_R)(C_A - C_R)[2C_R - C_A + I_2(R)n_f] \zeta_3 \right), \\
\beta_{220000}^e &= -\frac{1}{1536N_A I_2(R)} \left[3456D_2(R)n_f + I_2(R)N_A [-335C_A^3 - 642C_A^2 C_R \right. \\
& - 2148C_A C_R^2 + 3336C_R^3 + 3(247C_A^2 + 896C_A C_R - 1180C_R^2) I_2(R)n_f \\
& + 24(C_A - 16C_R) I_2(R)^2 n_f^2] - 384D_2(RA) - 288 \left(24D_2(RA) \right. \\
& + 24D_2(R)n_f + I_2(R)N_A \{ -22C_A^3 + 6C_R^2 [6C_R - I_2(R)n_f] \\
& \left. + 3C_A C_R [-32C_R + I_2(R)n_f] + C_A^2 [81C_R + 2I_2(R)n_f] \} \right) \zeta_3 \left. \right], \\
\beta_{310000}^e &= -\frac{1}{13824N_A I_2(R)} \left(-15552D_2(RA) + I_2(R)N_A \{ 13755C_A^3 \right. \\
& - 4C_A^2 [13819C_R + 1389I_2(R)n_f] \\
& - 8C_R [3483C_R^2 - 280I_2(R)^2 n_f^2 + 108C_R I_2(R)n_f (-23 + 24\zeta_3)] \\
& \left. + 4C_A [12339C_R^2 + 120I_2(R)^2 n_f^2 + 4C_R I_2(R)n_f (157 + 1296\zeta_3)] \right) \}, \\
\beta_{040000}^e &= -\frac{1}{192N_A I_2(R) [12D_2(A)(2 + N_A) - 25C_A^4 N_A]} \\
& \left[8640C_A^3 D_2(RA) I_2(R) N_A n_f - 51840C_A^2 C_R D_2(RA) I_2(R) N_A n_f \right. \\
& + 10368D_2(RA)^2 (2 + N_A)n_f + 100C_A^7 I_2(R) N_A^2 (-4 + 111\zeta_3) \\
& - 150C_A^4 N_A [C_R I_2(R)^3 N_A n_f^2 + 2C_R^2 I_2(R)^2 N_A n_f (23 - 6\zeta_3) \\
& + 24D_2(R)n_f (-7 + 2\zeta_3) + 8C_R^3 I_2(R) N_A (7 + 9\zeta_3) \\
& + 16D_2(RA) (-1 + 12\zeta_3)] + 75C_A^5 I_2(R) N_A^2 [7I_2(R)^2 n_f^2 \\
& - 4C_R I_2(R)n_f (-31 + 9\zeta_3) + 8C_R^2 (17 + 60\zeta_3)] \\
& \left. - 75C_A^6 I_2(R) N_A^2 [I_2(R)n_f (47 - 16\zeta_3) + 4C_R (8 + 117\zeta_3)] \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 12D_2(A) \left(96D_2(RA)(2 + N_A)(-1 + 12\zeta_3) \right. \\
 & - 4C_A^3 I_2(R)N_A(2 + N_A)(-4 + 111\zeta_3) \\
 & + 3C_A^2 I_2(R)N_A \{ 4C_R(2 + N_A)(8 + 117\zeta_3) \\
 & + I_2(R)n_f[118 + 47N_A - 16(2 + N_A)\zeta_3] \} \\
 & - 3C_A I_2(R)N_A \{ 7I_2(R)^2(2 + N_A)n_f^2 + 8C_R^2(2 + N_A)(17 + 60\zeta_3) \\
 & + 4C_R I_2(R)n_f[134 + 31N_A - 9(2 + N_A)\zeta_3] \} \\
 & + 6C_R I_2(R)^3 N_A(2 + N_A)n_f^2 + 144D_2(R)(2 + N_A)n_f(-7 + 2\zeta_3) \\
 & + 48C_R^3 I_2(R)N_A(2 + N_A)(7 + 9\zeta_3) \\
 & \left. + 12C_R^2 I_2(R)^2 N_A n_f [262 + 23N_A - 6(2 + N_A)\zeta_3] \right). \tag{1.42}
 \end{aligned}$$

1.5.4 β_s und γ_m auf Vierschleifen-Niveau

Nun kann man in (1.33) die Relation zwischen α_s und $\alpha_s^{\overline{\text{MS}}}$, (1.39) sowie die Anomalen Dimensionen der Evaneszenten Kopplungen, (1.41) und (1.42), einsetzen und erhält für die β -Funktion der Eichkopplung

$$\begin{aligned}
 \beta_{200000} &= \frac{11}{12}C_A - \frac{1}{3}Tn_f, \\
 \beta_{300000} &= \frac{17}{24}C_A^2 - \frac{5}{12}C_A Tn_f - \frac{1}{4}C_F Tn_f, \\
 \beta_{400000} &= \frac{3115}{3456}C_A^3 - \frac{1439}{1728}C_A^2 Tn_f - \frac{193}{576}C_A C_F Tn_f \\
 & \quad + \frac{1}{32}C_F^2 Tn_f + \frac{79}{864}C_A T^2 n_f^2 + \frac{11}{144}C_F T^2 n_f^2, \\
 \beta_{310000} &= -\frac{3}{16}C_F^2 Tn_f, \\
 \beta_{220000} &= -C_F Tn_f \left(\frac{1}{16}C_A - \frac{1}{8}C_F - \frac{1}{16}Tn_f \right), \\
 \beta_{500000} &= b_3 - \frac{1}{165888N_A} \{ 2592D_2(A) \\
 & \quad + C_A N_A [27648b_2 - C_A(1152b_1 + 85280b_0 C_A + 27C_A^2) \\
 & \quad + 64b_0(208C_A + 69C_R)I_2(R)n_f] \}, \\
 \beta_{203000} &= \frac{1}{192}C_A, \\
 \beta_{302000} &= -\frac{1}{64}C_A^2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \beta_{311000} &= -\frac{1}{128}n_f I_2(R)C_A^2, \\
 \beta_{300002} &= -\frac{1}{663552N_A}[19872C_A^2D_2(A) - 227C_A^6N_A + 27648D_3(A)], \\
 \beta_{400010} &= -\frac{1}{3072}(4b_0 + 9C_A)C_A^3, \\
 \beta_{200030} &= -\frac{11}{3072}C_A^4, \\
 \beta_{310001} &= -\frac{1}{4608N_A}[96D_2(A) - C_A^4N_A]I_2(R)n_f, \\
 \beta_{220100} &= -\frac{1}{48}(C_A + 3C_R)n_f I_2(R)C_R, \\
 \beta_{301100} &= -\frac{1}{256}(5N_A + 12)C_A^2, \\
 \beta_{210011} &= -\frac{1}{1536}(4C_A + 3C_R)n_f C_A^3 I_2(R), \\
 \beta_{400001} &= \frac{1}{18432N_A}(4b_0 + 9C_A)[96D_2(A) - C_A^4N_A], \\
 \beta_{300011} &= \frac{1}{55296N_A}[384D_2(A) + 227C_A^4N_A]C_A, \\
 \beta_{400100} &= \frac{7}{1536}(4b_0 + 9C_A)C_A^2, \\
 \beta_{401000} &= \frac{1}{512}(4b_0 + 9C_A)C_A^2, \\
 \beta_{200120} &= -\frac{3}{512}C_A^3, \\
 \beta_{201020} &= -\frac{7}{512}C_A^3, \\
 \beta_{310100} &= -\frac{7}{384}n_f I_2(R)C_A^2, \\
 \beta_{220001} &= -\frac{1}{1152N_A[-25C_A^4N_A + 12D_2(A)(2 + N_A)]} \\
 &\quad \{C_A^3(C_A + 3C_R)(25C_A^4 - 12D_2(A))I_2(R)N_A^2 \\
 &\quad - 24(C_A + 3C_R)[25C_A^4D_2(RA) - 36D_2(A)D_2(RA) \\
 &\quad + C_A^3D_2(A)I_2(R)]N_A\}, \\
 \beta_{202100} &= \frac{1}{64}(N_A + 1)C_A, \\
 \beta_{410000} &= -\frac{1}{1536}I_2(R)n_f\{8b_0(5C_A^2 + 56C_A C_R + 6C_R^2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + C_R[-192b_1 + 39C_A^2 + 892C_A C_R + 108C_R^2 + 24C_A I_2(R)n_f \\
 & - 80C_R I_2(R)n_f] \}, \\
 \beta_{301001} &= -\frac{1}{3072}[96D_2(A) + 89C_A^4 N_A], \\
 \beta_{220010} &= \frac{1}{192}(C_A + 3C_R)n_f I_2(R)C_A^2, \\
 \beta_{300020} &= \frac{1}{18432N_A}[96D_2(A) + 227C_A^4 N_A], \\
 \beta_{210110} &= \frac{1}{384}(4C_A + 3C_R)n_f I_2(R)C_A, \\
 \beta_{320000} &= -\frac{1}{1152N_A}n_f \left(-24D_2(RA) \right. \\
 & \quad + I_2(R)N_A \{ 16C_A^3 + 6C_A C_R [25C_R - 22I_2(R)n_f] \\
 & \quad \left. + 3C_A^2 [4C_R - 5I_2(R)n_f] - 72C_R^2 [7C_R + 5I_2(R)n_f] \} \right), \\
 \beta_{230000} &= -\frac{1}{192}I_2(R)n_f [-4C_A^3 + 23C_A^2 C_R - 46C_A C_R^2 + 32C_R^3 \\
 & \quad + (6C_A^2 - 33C_A C_R + 50C_R^2)I_2(R)n_f - 2(C_A - 7C_R)I_2(R)^2 n_f^2], \\
 \beta_{300200} &= -\frac{1}{1536}(19N_A + 82)C_A^2, \\
 \beta_{200111} &= -\frac{1}{512}C_A^4, \\
 \beta_{201011} &= -\frac{9}{512}C_A^4, \\
 \beta_{300110} &= -\frac{23}{1536}C_A^3, \\
 \beta_{301010} &= \frac{11}{512}C_A^3, \\
 \beta_{211100} &= \frac{1}{384}(N_A + 1)(4C_A + 3C_R)I_2(R)n_f, \\
 \beta_{300101} &= -\frac{1}{9216N_A}[480D_2(A) + 703C_A^4 N_A], \\
 \beta_{210020} &= -\frac{1}{512}(4C_A + 3C_R)n_f I_2(R)C_A^2, \\
 \beta_{310010} &= \frac{1}{768}I_2(R)C_A^3 n_f, \\
 \beta_{200003} &= -\frac{1}{663552N_A}[864C_A^2 D_2(A) + 11C_A^6 N_A - 27648D_3(A)]C_A, \\
 \beta_{200102} &= \frac{1}{6144N_A}[480D_2(A) + 199C_A^4 N_A]C_A,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{201002} &= \frac{1}{2048N_A} [96D_2(A) + 17C_A^4 N_A] C_A, \\
\beta_{202001} &= \frac{3}{128} C_A^3, \\
\beta_{200300} &= \frac{1}{768} (N_A^2 + 13N_A + 18) C_A, \\
\beta_{201101} &= \frac{3}{256} (8 + N_A) C_A^3, \\
\beta_{200021} &= -\frac{1}{6144N_A} [96D_2(A) + 11C_A^4 N_A] C_A, \\
\beta_{202010} &= -\frac{1}{64} C_A^2, \\
\beta_{210002} &= \frac{1}{18432N_A} (4C_A + 3C_R) [96D_2(A) - C_A^4 N_A] I_2(R) n_f, \\
\beta_{212000} &= \frac{1}{768} (4C_A + 3C_R) I_2(R) n_f, \\
\beta_{211010} &= -\frac{1}{384} (4C_A + 3C_R) n_f I_2(R) C_A, \\
\beta_{201200} &= \frac{1}{256} (N_A^2 + 5N_A + 10) C_A, \\
\beta_{200210} &= \frac{1}{256} (N_A - 2) C_A^2, \\
\beta_{201110} &= -\frac{1}{128} (N_A - 2) C_A^2, \\
\beta_{221000} &= \frac{1}{192} (C_A + 3C_R) (C_A - 2C_R) I_2(R) n_f, \\
\beta_{200201} &= \frac{1}{512} (7N_A + 46) C_A^3, \\
\beta_{211001} &= \frac{1}{256} (4C_A + 3C_R) n_f I_2(R) C_A^2, \\
\beta_{200012} &= -\frac{1}{36864N_A} [384D_2(A) + 11C_A^4 N_A] C_A^2, \\
\beta_{210200} &= \frac{1}{768} (N_A + 3) (4C_A + 3C_R) I_2(R) n_f, \\
\beta_{210101} &= \frac{7}{768} (4C_A + 3C_R) n_f I_2(R) C_A^2,
\end{aligned} \tag{1.43}$$

wobei

$$\begin{aligned}
b_0 &= \frac{1}{4} \left(\frac{11}{3} C_A - \frac{4}{3} I_2(R) n_f \right), \\
b_1 &= \frac{1}{16} \left(\frac{34}{3} C_A^2 - 4C_R I_2(R) n_f - \frac{20}{3} C_A I_2(R) n_f \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_2 &= \frac{1}{64} \left(\frac{2857}{54} C_A^3 + 2C_R^2 I_2(R) n_f - \frac{205}{9} C_R C_A I_2(R) n_f \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1415}{27} C_A^2 I_2(R) n_f + \frac{44}{9} C_R I_2(R)^2 n_f^2 + \frac{158}{27} C_A I_2(R)^2 n_f^2 \right), \\
 b_3 &= \frac{1}{256} \left[\left(\frac{150653}{486} - \frac{44}{9} \zeta_3 \right) C_A^4 + C_A^3 I_2(R) n_f \left(-\frac{39143}{81} + \frac{136}{3} \zeta_3 \right) \right. \\
 &\quad + C_A^2 C_R I_2(R) n_f \left(\frac{7073}{243} - \frac{656}{9} \zeta_3 \right) + C_A C_R^2 I_2(R) n_f \left(-\frac{4204}{27} + \frac{352}{9} \zeta_3 \right) \\
 &\quad + 46 C_R^3 I_2(R) n_f + C_A^2 I_2(R)^2 n_f^2 \left(\frac{7930}{81} + \frac{224}{9} \zeta_3 \right) \\
 &\quad + C_R^2 I_2(R)^2 n_f^2 \left(\frac{1352}{27} - \frac{704}{9} \zeta_3 \right) + C_A C_R I_2(R)^2 n_f^2 \left(\frac{17152}{243} + \frac{448}{9} \zeta_3 \right) \\
 &\quad + \frac{424}{243} C_A I_2(R)^3 n_f^3 + \frac{1232}{243} C_R I_2(R)^3 n_f^3 \\
 &\quad + \frac{D_2(A)}{N_A} \left(-\frac{80}{9} + \frac{704}{3} \zeta_3 \right) + \frac{n_f D_2(RA)}{N_A} \left(\frac{512}{9} - \frac{1664}{3} \zeta_3 \right) \\
 &\quad \left. + \frac{n_f^2 D_2(R)}{N_A} \left(-\frac{704}{9} + \frac{512}{3} \zeta_3 \right) \right], \tag{1.44}
 \end{aligned}$$

die Ein-, Zwei-, Drei- und Vierschleifen Koeffizienten von $\beta^{\overline{\text{MS}}}$ bezeichnet.

Analog erhält man aus (1.34) mit (1.40), (1.41) und (1.42) die Anomale Dimension der Fermionmasse

$$\begin{aligned}
 \gamma_{400000} &= \gamma_3 + \frac{91}{768} C_R^2 C_A^2 - \frac{129}{512} C_A C_R^3 - \frac{3}{16} I_2(R) C_A C_R^2 n_f \zeta_3 \\
 &\quad + \frac{89}{576} I_2(R) C_A C_R^2 n_f + \frac{29}{5184} I_2(R)^2 C_A C_R n_f^2 + \frac{3}{16} I_2(R) C_A^2 C_R n_f \zeta_3 \\
 &\quad - \frac{53}{1296} C_R C_A^2 I_2(R) n_f - \frac{19003}{82944} C_A^3 C_R, \\
 \gamma_{110002} &= \frac{1}{24576 N_A} [2784 C_A D_2(A) + 1632 C_R D_2(A) - 53 C_A^5 N_A \\
 &\quad - 11 C_R C_A^4 N_A] C_R, \\
 \gamma_{110011} &= -\frac{1}{2048} (53 C_A + 11 C_R) C_A^3 C_R, \\
 \gamma_{120010} &= \frac{1}{256} (31 C_A + 18 C_R) C_A^2 C_R, \\
 \gamma_{210010} &= \frac{3}{2048 N_A I_2(R)} [3 C_A^3 I_2(R) N_A + 64 D_2(RA)] C_R, \\
 \gamma_{111001} &= \frac{1}{1024} (53 C_R + 79 C_A) C_A^2 C_R,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_{020110} &= -\frac{1}{256}[17C_A + 17I_2(R)n_f - 6C_R]C_A C_R, \\
 \gamma_{020011} &= -\frac{1}{3072N_A I_2(R)}\{384D_2(A)I_2(R) - 144C_A D_2(RA) \\
 &\quad + N_A I_2(R)[-51C_A^3 I_2(R)n_f - 30C_A^3 C_R + 37C_A^4]\}C_R, \\
 \gamma_{310000} &= -\frac{1}{165888I_2(R)N_A}C_R\left(46656D_2(RA) \right. \\
 &\quad + I_2(R)N_A\{-26505C_A^3 + C_A^2[355107C_R + 23544I_2(R)n_f] \\
 &\quad + 2C_A[11916C_R^2 - 65508C_R I_2(R)n_f - 3744I_2(R)^2 n_f^2] \\
 &\quad + 12C_R[7965C_R^2 - 7212C_R I_2(R)n_f - 224I_2(R)^2 n_f^2] \\
 &\quad + 2592(C_A - C_R)[5(-11C_A - 9C_R)(C_A - 2C_R) \\
 &\quad \left. + 4(5C_A - 16C_R)I_2(R)n_f]\zeta_3\right), \\
 \gamma_{110020} &= -\frac{3}{2048}(53C_A + 11C_R)C_A^2 C_R, \\
 \gamma_{211000} &= -\frac{7}{1024}C_A^2 C_R, \\
 \gamma_{020020} &= -\frac{1}{1024N_A I_2(R)}\{N_A I_2(R)[-51C_A^2 I_2(R)n_f - 30C_A^2 C_R \\
 &\quad + 37C_A^3] + 16D_2(RA)\}C_R, \\
 \gamma_{020101} &= \frac{1}{1536N_A I_2(R)}\{N_A I_2(R)[103C_A^3 - 154C_A^2 C_R \\
 &\quad - 277C_A^2 I_2(R)n_f] + 720D_2(RA)\}C_R, \\
 \gamma_{110200} &= \frac{1}{1024}(19C_R N_A + 21C_A N_A + 95C_A + 49C_R)C_R, \\
 \gamma_{021100} &= -\frac{1}{768}[43I_2(R)N_A n_f + 10C_R N_A + 3C_A N_A + 35I_2(R)n_f - 142C_R \\
 &\quad - 5C_A]C_R, \\
 \gamma_{021010} &= -\frac{1}{768}[-51I_2(R)n_f - 42C_R + 79C_A]C_A C_R, \\
 \gamma_{110101} &= \frac{1}{1024}(117C_R + 211C_A)C_A^2 C_R, \\
 \gamma_{120100} &= -\frac{1}{32}(C_A^2 + 6C_R^2 + 10C_A C_R)C_R, \\
 \gamma_{200011} &= -\frac{1}{1024}C_A^4 C_R, \\
 \gamma_{200101} &= \frac{7}{512}C_A^3 C_R,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_{010003} &= \frac{1}{442368N_A} [-41472D_3(A) + 480C_A^2D_2(A) + 37C_A^6N_A]C_R, \\
 \gamma_{021001} &= \frac{1}{1536N_AI_2(R)} \{N_AI_2(R)[-63C_A^3 - 113C_A^2I_2(R)n_f + 34C_A^2C_R] \\
 &\quad + 240D_2(RA)\}C_R, \\
 \gamma_{120001} &= \frac{1}{1536}C_R[C_A^3(31C_A + 18C_R) - \frac{24}{I_2(R)N_A}(19C_A + 12C_R)D_2(RA)], \\
 \gamma_{010120} &= \frac{29}{3072}C_A^2C_R, \\
 \gamma_{210100} &= -\frac{1}{1024}(96C_R + 7C_A)C_AC_R, \\
 \gamma_{010111} &= -\frac{97}{3072}C_A^3C_R, \\
 \gamma_{300010} &= \frac{1}{1024}C_A^3C_R, \\
 \gamma_{300100} &= -\frac{7}{512}C_A^2C_R, \\
 \gamma_{301000} &= -\frac{3}{512}C_A^2C_R, \\
 \gamma_{011002} &= -\frac{1}{36864N_A}[3360D_2(A) + 1033C_A^4N_A]C_R, \\
 \gamma_{010012} &= \frac{1}{24576N_A}[384D_2(A) + 37C_A^4N_A]C_R C_A, \\
 \gamma_{010300} &= -\frac{1}{1536}(N_A^2 + 57N_A + 86)C_R, \\
 \gamma_{012001} &= -\frac{1}{1536}(3N_A + 74)C_A^2C_R, \\
 \gamma_{011011} &= \frac{49}{1024}C_A^3C_R, \\
 \gamma_{111010} &= -\frac{1}{512}(53C_A + 11C_R)C_AC_R, \\
 \gamma_{200020} &= -\frac{3}{1024}C_A^3C_R, \\
 \gamma_{201010} &= -\frac{1}{256}C_A^2C_R, \\
 \gamma_{200002} &= -\frac{1}{12288N_A}[-96D_2(A) + C_A^4N_A]C_R C_A N_A, \\
 \gamma_{202000} &= \frac{1}{512}C_AC_R, \\
 \gamma_{201001} &= \frac{3}{512}C_A^3C_R,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_{220000} &= \frac{1}{18432I_2(R)N_A} C_R \{-288D_2(RA)(1 + 72\zeta_3) \\
 &\quad + 2C_A^3 I_2(R)N_A(-1295 + 10080\zeta_3) \\
 &\quad + 4[3C_R^3 I_2(R)N_A(1544 - 5760\zeta_3) + 2592D_2(R)n_f(1 - 2\zeta_3) \\
 &\quad + 64C_R I_2(R)^3 N_A n_f^2(-10 + 3\zeta_3) - 2C_R^2 I_2(R)^2 N_A n_f(571 + 1008\zeta_3)] \\
 &\quad + C_A^2 I_2(R)N_A[2354I_2(R)n_f - 2784I_2(R)n_f\zeta_3 - 12C_R(721 + 7704\zeta_3)] \\
 &\quad + 2C_A I_2(R)N_A[24I_2(R)^2 n_f^2(17 - 16\zeta_3) \\
 &\quad + C_R I_2(R)n_f(7444 + 5856\zeta_3) + C_R^2(9428 + 71136\zeta_3)]\}, \\
 \gamma_{011020} &= \frac{181}{3072} C_A^2 C_R, \\
 \gamma_{010021} &= \frac{1}{4096N_A} [224D_2(A) + 37C_A^4 N_A] C_R, \\
 \gamma_{200200} &= \frac{1}{512} (N_A + 3) C_A C_R, \\
 \gamma_{201100} &= \frac{1}{256} (N_A + 1) C_A C_R, \\
 \gamma_{300001} &= \frac{1}{6144N_A} [-96D_2(A) + C_A^4 N_A] C_R, \\
 \gamma_{200110} &= \frac{1}{256} C_A^2 C_R, \\
 \gamma_{111100} &= \frac{1}{512} (37C_A N_A + 15C_R N_A + 19C_R + 21C_A) C_R, \\
 \gamma_{010030} &= \frac{37}{2048} C_A^3 C_R, \\
 \gamma_{020200} &= \frac{1}{1536} [-35I_2(R)N_A n_f + 39C_A N_A - 38C_R N_A + 302C_R \\
 &\quad - 121I_2(R)n_f - 23C_A] C_R, \\
 \gamma_{121000} &= \frac{1}{256} (-24C_R^2 - 22C_A C_R + 27C_A^2) C_R, \\
 \gamma_{040000} &= -\frac{1}{1536I_2(R)N_A [-25C_A^4 N_A + 12D_2(A)(2 + N_A)]} \\
 &\quad C_R \left[-16320C_A^3 D_2(RA) I_2(R) N_A n_f \right. \\
 &\quad + 97920C_A^2 C_R D_2(RA) I_2(R) N_A n_f - 19584D_2(RA)^2 (2 + N_A) n_f \\
 &\quad + 100C_A^5 I_2(R) N_A^2 [-288C_R I_2(R) n_f - 15I_2(R)^2 n_f^2 \\
 &\quad + 2C_R^2 (-126 - 432\zeta_3)] - 100C_A^7 I_2(R) N_A^2 (-23 + 240\zeta_3) \\
 &\quad \left. + 100C_A^6 I_2(R) N_A^2 \{15C_R + 75I_2(R) n_f - 6[-132C_R + I_2(R) n_f] \zeta_3 \} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 25C_A^4 N_A \{ 1344C_R^2 I_2(R)^2 N_A n_f + 180C_R I_2(R)^3 N_A n_f^2 \\
 & - 12n_f [5I_2(R)^4 N_A n_f^2 + 24D_2(R)(7 - 2\zeta_3)] \\
 & + 192D_2(RA)(-1 + 12\zeta_3) + 3C_R^3 I_2(R) N_A (368 + 384\zeta_3) \} \\
 & - 12D_2(A) \left(-4032D_2(R)n_f + N_A \{ 1104C_R^3 I_2(R)(2 + N_A) \right. \\
 & - 6[336D_2(R) - 16C_R^2 I_2(R)^2(79 + 14N_A)]n_f \\
 & + 180C_R I_2(R)^3(2 + N_A)n_f^2 - 60I_2(R)^4(2 + N_A)n_f^3 \} \\
 & + 4C_A I_2(R) N_A [-24C_R I_2(R)(41 + 12N_A)n_f - 15I_2(R)^2(2 + N_A)n_f^2 \\
 & + 2C_R^2(2 + N_A)(-126 - 432\zeta_3)] + 4C_A^3 I_2(R) N_A (2 + N_A)(23 - 240\zeta_3) \\
 & - 96(2 + N_A)[-12C_R^3 I_2(R) N_A - 6D_2(R)n_f] \zeta_3 \\
 & + 192D_2(RA)(2 + N_A)(-1 + 12\zeta_3) \\
 & + 4C_A^2 I_2(R) N_A \{ C_R(2 + N_A)(15 + 792\zeta_3) \\
 & \left. + I_2(R)n_f[184 + 75N_A - 6(2 + N_A)\zeta_3] \} \right] , \\
 \gamma_{010201} & = -\frac{1}{1024}(23N_A + 218)C_A^2 C_R , \\
 \gamma_{010210} & = -\frac{3}{512}(3N_A - 2)C_A C_R , \\
 \gamma_{112000} & = -\frac{1}{1024}(8C_A N_A - 2C_R N_A - 37C_A - 15C_R)C_R , \\
 \gamma_{110110} & = \frac{1}{512}(53C_A + 11C_R)C_A C_R , \\
 \gamma_{130000} & = -\frac{1}{3072I_2(R)N_A} C_R \left(-576D_2(RA) + I_2(R)N_A \{ 352C_A^3 + 616C_A^2 C_R \right. \\
 & - 6040C_A C_R^2 + 6992C_R^3 - 100C_A^2 I_2(R)n_f - 1388C_A C_R I_2(R)n_f \\
 & + 3920C_R^2 I_2(R)n_f + 168C_A I_2(R)^2 n_f^2 - 88C_R I_2(R)^2 n_f^2 \\
 & + 48(C_A - C_R)[3(8C_A - 13C_R)(C_A - 2C_R) \\
 & \left. - 2(16C_A - 32C_R)I_2(R)n_f + 8I_2(R)^2 n_f^2] \zeta_3 \right) , \\
 \gamma_{022000} & = -\frac{1}{1536} [8C_A N_A - 16C_R N_A - 4I_2(R)N_A n_f + 43I_2(R)n_f \\
 & - 50C_R + 57C_A] C_R , \\
 \gamma_{020002} & = \frac{1}{36864I_2(R)N_A [-25C_A^4 N_A + 12D_2(A)(2 + N_A)]} \\
 & C_R \left(-1880064D_3(A)D_2(RA) + 536400C_A^6 D_2(RA)N_A \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 391680C_A^3 D_3(A) I_2(R) N_A + 4C_A^5 D_2(A) I_2(R) (22778 - 111N_A) N_A \\
& + 925C_A^9 I_2(R) N_A^2 + 1152C_A D_2(A)^2 I_2(R) (286 + 7N_A) \\
& + 89856D_3(RAA) [-25C_A^4 N_A + 12D_2(A) (2 + N_A)] \\
& + 192C_A^2 [12240C_R D_3(A) I_2(R) N_A + D_2(A) D_2(RA) (8198 + 19N_A)] \\
& - 75C_A^8 I_2(R) N_A^2 [10C_R + 17I_2(R) n_f] \\
& + 12C_A^4 D_2(A) I_2(R) N_A [-C_R (43540 - 30N_A) \\
& + 3I_2(R) (2634 + 17N_A) n_f] + 3456 \{ -272D_3(A) D_2(RA) N_A \\
& + D_2(A)^2 I_2(R) [-2C_R (290 + 9N_A) - 13I_2(R) (2 + N_A) n_f] \}, \\
\gamma_{030010} &= \frac{1}{256} [3C_A - 10C_R - 30I_2(R) n_f] C_A^2 C_R, \\
\gamma_{011110} &= \frac{1}{768} (11N_A - 50) C_A C_R, \\
\gamma_{012010} &= \frac{1}{768} (N_A + 38) C_A C_R, \\
\gamma_{030001} &= -\frac{1}{1536N_A I_2(R)} \{ 384C_A D_2(RA) - 864C_R D_2(RA) \\
& + N_A I_2(R) [10C_A^3 C_R - 3C_A^4 + 30C_A^3 I_2(R) n_f] \\
& - 528D_2(RA) I_2(R) n_f \} C_R, \\
\gamma_{010102} &= -\frac{1}{36864N_A} [7008D_2(A) + 2537C_A^4 N_A] C_R, \\
\gamma_{030100} &= \frac{1}{384} [13C_A^2 + 8C_A I_2(R) n_f + 216C_R^2 + 132C_R I_2(R) n_f \\
& - 122C_A C_R] C_R, \\
\gamma_{031000} &= \frac{1}{384} [11C_A^2 + 108C_R^2 - 41C_A I_2(R) n_f - 76C_A C_R + 66C_R I_2(R) n_f] C_R, \\
\gamma_{210001} &= -\frac{3}{4096N_A I_2(R)} (64C_A D_2(RA) + 32D_2(A) I_2(R) - C_A^4 I_2(R) N_A) C_R, \\
\gamma_{011101} &= -\frac{1}{1536} (53N_A + 320) C_A^2 C_R, \\
\gamma_{011200} &= -\frac{1}{512} (5N_A^2 + 21N_A + 46) C_R, \\
\gamma_{012100} &= -\frac{1}{768} (N_A^2 + 31N_A + 22) C_R, \\
\gamma_{013000} &= \frac{1}{768} (N_A - 10) C_R, \tag{1.45}
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
 \gamma_3 = & \frac{1}{256} \left[C_R^4 \left(-\frac{1261}{8} - 336\zeta_3 \right) + C_R^3 C_A \left(\frac{15349}{12} + 316\zeta_3 \right) \right. \\
 & + C_R^2 C_A^2 \left(-\frac{34045}{36} - 152\zeta_3 + 440\zeta_5 \right) \\
 & + C_R C_A^3 \left(\frac{70055}{72} + \frac{1418}{9}\zeta_3 - 440\zeta_5 \right) \\
 & + C_R^3 I_2(R) n_f \left(-\frac{280}{3} + 552\zeta_3 - 480\zeta_5 \right) \\
 & + C_R^2 C_A I_2(R) n_f \left(-\frac{8819}{27} + 368\zeta_3 - 264\zeta_4 + 80\zeta_5 \right) \\
 & + C_R C_A^2 I_2(R) n_f \left(-\frac{65459}{162} - \frac{2684}{3}\zeta_3 + 264\zeta_4 + 400\zeta_5 \right) \\
 & + C_R^2 I_2(R)^2 n_f^2 \left(\frac{304}{27} - 160\zeta_3 + 96\zeta_4 \right) \\
 & + C_R I_2(R)^3 n_f^3 \left(-\frac{664}{81} + \frac{128}{9}\zeta_3 \right) + \frac{D_2(RA)}{d_R} \left(-32 + 240\zeta_3 \right) \\
 & \left. + C_R C_A I_2(R)^2 n_f^2 \left(\frac{1342}{81} + 160\zeta_3 - 96\zeta_4 \right) + \frac{n_f D_2(R)}{d_R} \left(64 - 480\zeta_3 \right) \right] \\
 & \tag{1.46}
 \end{aligned}$$

der Vierschleifen-Beitrag von $\gamma^{\overline{\text{MS}}}$ ist.

Da die Berechnung recht umfangreich ist, ist es angemessen, Konsistenztests durchzuführen.

Die Eichparameterunabhängigkeit der Anomalen Dimensionen stellt eine Möglichkeit zur Überprüfung der Rechnung dar. Es wurde konsequent in allgemeiner kovarianter Eichung gerechnet und explizit überprüft, dass das Ergebnis nicht vom Eichparameter abhängt.

Des Weiteren wurden β und γ auf Dreischleifen-Niveau direkt aus den Renormierungskonstanten, gemäß (1.32a), (1.32d) berechnet und mit dem Ergebnis aus der Umrechnung der $\overline{\text{MS}}$ Größen nach (1.33), (1.34) verglichen.

Um die Berechnung der Farbfaktoren zu überprüfen, wurden die gruppentheoretischen Faktoren jedes Diagramms sowohl für eine allgemeine Eichgruppe als auch explizit für die Gruppen $SU(N)$, $SO(N)$ und $Sp(N)$ ermittelt und verglichen (s. Anhang B).

1.6 Super-Yang-Mills

Für den Fall einer Super-Yang-Mills Theorie (SYM), der Theorie eines Eich-Supermultipletts, ist die Anomale Dimension der Kopplung β^{SYM} in der Literatur bekannt [33]. Aus einer allgemeinen Yang-Mills Theorie lässt sich, indem man die Fermionen zu Superpartnern der Eichbosonen macht, eine Super-Yang-Mills Theorie erzeugen. Dazu müssen beide Felder unter der gleichen Darstellung, der adjungierten, transformieren. In obigen Ergebnissen läuft das auf die Ersetzungen

$$\begin{aligned} C_R &\rightarrow C_A, \\ I_2(R) &\rightarrow C_A, \\ D_2(R) &\rightarrow D_2(A), \\ D_2(RA) &\rightarrow D_2(A), \\ D_3(RAA) &\rightarrow D_3(A) \end{aligned} \tag{1.47a}$$

hinaus. Außerdem muss man

$$n_f \rightarrow \frac{1}{2} \tag{1.47b}$$

setzen, um dem Übergang von Dirac- zu Majorana-Spinoren Rechnung zu tragen.

Durch die Identifikation der Evaneszenten Kopplungen mit der Eichkopplung,

$$\alpha_e = v_3 = \alpha_s, \tag{1.47c}$$

$$v_1 = v_2 = v_4 = 0, \tag{1.47d}$$

trägt man der Tatsache Rechnung, dass in supersymmetrischen Theorien die Kopplungen der ε -Skalare mit denen der Eichfelder übereinstimmen.

Die Identifikation (1.47c) lässt sich natürlich nur dann konsequent durchführen, wenn auch die β -Funktionen der Evaneszenten Kopplungen mit der der Eichkopplung übereinstimmen. Andernfalls ließen sich die Kopplungen höchstens für eine bestimmte Wahl μ_0 der Renormierungsskala μ gleichsetzen und würden für $\mu \neq \mu_0$ auseinander laufen, was ein klares Signal für eine Brechung der Supersymmetrie durch das Regularisierungsschema wäre.

Führt man (1.47) in (1.31a) durch, so ergibt sich

$$\beta_s^{\text{SYM}} = - \left(\frac{\alpha_s}{\pi} \right)^2 \left[\frac{3}{4} C_A + \frac{3}{8} C_A^2 \frac{\alpha_s}{\pi} + \frac{21}{64} C_A^3 \left(\frac{\alpha_s}{\pi} \right)^2 + \frac{51}{128} C_A^4 \left(\frac{\alpha_s}{\pi} \right)^3 \right] + \mathcal{O}(\alpha_s^6), \tag{1.48}$$

in Übereinstimmung mit [33], was einen weiteren wertvollen Test an die Korrektheit von (1.31a) darstellt. Darüber hinaus erhält man die ersten drei Terme von (1.48) auch, indem man in der bis zur dritten Ordnung berechnete β -Funktion der Evaneszenten ε -Skalar-Fermion-Kopplung (1.31b) die Ersetzung (1.47) durchführt.

Vor über 20 Jahren wurde in [23] β_e^{SYM} auf Dreischleifen-Niveau berechnet, wobei ein anderes als das hier angegebene Ergebnis gefunden wurde. Dies wurde als explizites Beispiel für die Brechung der Supersymmetrie durch DRED gewertet. Angesichts der vielen Tests, die die hier aufgeführten Ergebnisse durchlaufen haben, gehen wir allerdings davon aus, dass die Rechnung aus [23] falsch – und insbesondere kein Beispiel für die Supersymmetrie-Verletzung von DRED – ist.

In soft gebrochener Supersymmetrie lässt sich die Anomale Dimension γ_m^{SYM} der Gluino-Masse aus β_s^{SYM} berechnen [34]:

$$\gamma_m^{\text{SYM}} = \pi \alpha_s \frac{d}{d\alpha_s} \left[\frac{\beta_s^{\text{SYM}}}{\alpha_s} \right], \quad (1.49)$$

was mit (1.48)

$$\gamma_m^{\text{SYM}} = - \left(\frac{\alpha_s}{\pi} \right) \left[\frac{3}{4} C_A + \frac{3}{4} C_A^2 \frac{\alpha_s}{\pi} + \frac{63}{64} C_A^3 \left(\frac{\alpha_s}{\pi} \right)^2 + \frac{51}{32} C_A^4 \left(\frac{\alpha_s}{\pi} \right)^3 \right] + \mathcal{O}(\alpha_s^5) \quad (1.50)$$

liefert. Dasselbe Resultat erhält man durch Einsetzen von (1.47) in (1.31d).

1.7 QCD

Wegen der besonderen phänomenologischen Relevanz der SU(3) als Eichgruppe der QCD werden im Folgenden die Ergebnisse des letzten Kapitels für diesen Spezialfall angegeben.

Für die Farbstruktur der quartischen ε -Skalar-Kopplungen wird die Basis

$$\begin{aligned} H_1^{abcd} &= \frac{1}{2} \left(f^{ace} f^{bde} + f^{ade} f^{bce} \right), \\ H_2^{abcd} &= \delta^{ab} \delta^{cd} + \delta^{ac} \delta^{bd} + \delta^{ad} \delta^{bc}, \\ H_3^{abcd} &= \frac{1}{2} \left(\delta^{ac} \delta^{bd} + \delta^{ad} \delta^{bc} \right) - \delta^{ab} \delta^{cd} \end{aligned} \quad (1.51)$$

verwendet. Die Anomalen Dimensionen lassen sich entweder aus den allgemeinen Ergebnissen aus Kapitel 1.5 ableiten oder durch eine neue Rechnung mit der Basis (1.51)

gewinnen. Um die Korrektheit der Resultate sicherzustellen, wurde beides getan, und die Ergebnisse stimmen überein.

Für die Anomalen Dimensionen der Evaneszenten Kopplungen ergibt sich für die QCD, in der Notation von (1.31)²

$$\begin{aligned}
 \beta_{04000}^e &= -\frac{55}{432} - \frac{91}{48}\zeta_3 - \left(\frac{725}{1152} - \frac{17}{96}\zeta_3 \right) n_f + \frac{55}{768}n_f^2, \\
 \beta_{13000}^e &= \frac{2423}{1728} + \frac{5}{36}\zeta_3 - \left(\frac{313}{288} + \frac{5}{24}\zeta_3 \right) n_f + \frac{9}{64}n_f^2, \\
 \beta_{22000}^e &= \frac{189157}{13824} - \frac{11}{16}\zeta_3 - \left(\frac{35543}{9216} - \frac{73}{32}\zeta_3 \right) n_f + \frac{55}{768}n_f^2, \\
 \beta_{31000}^e &= \frac{4589}{512} + \left(\frac{1157}{6912} - \frac{5}{3}\zeta_3 \right) n_f - \frac{415}{5184}n_f^2, \\
 \beta_{03100}^e &= -\frac{9}{64} + \frac{243}{128}n_f, & \beta_{03010}^e &= \frac{5}{8} - \frac{45}{64}n_f, & \beta_{03001}^e &= \frac{3}{32} - \frac{81}{64}n_f, \\
 \beta_{12100}^e &= -\frac{219}{16}, & \beta_{12010}^e &= \frac{145}{48}, & \beta_{12001}^e &= \frac{73}{8}, \\
 \beta_{02200}^e &= \frac{1413}{512} - \frac{729}{1024}n_f, & \beta_{02020}^e &= -\frac{115}{32} + \frac{135}{64}n_f, & \beta_{02002}^e &= -\frac{161}{256} - \frac{567}{512}n_f, \\
 \beta_{02110}^e &= \frac{75}{8}, & \beta_{02101}^e &= -\frac{471}{128} + \frac{243}{256}n_f, & \beta_{02011}^e &= -\frac{85}{8}, \\
 \beta_{21100}^e &= -\frac{1125}{1024}, & \beta_{21010}^e &= \frac{105}{128}, & \beta_{21001}^e &= \frac{615}{512}, \\
 \beta_{11200}^e &= \frac{891}{128}, & \beta_{11020}^e &= -\frac{45}{4}, & \beta_{11002}^e &= \frac{693}{64}, \\
 \beta_{11101}^e &= -\frac{297}{32}, & \beta_{01300}^e &= -\frac{1701}{1024}, & \beta_{01003}^e &= \frac{63}{128}, \\
 \beta_{01210}^e &= -\frac{405}{128}, & \beta_{01201}^e &= \frac{1701}{512}, & \beta_{01120}^e &= \frac{135}{32}, \\
 \beta_{01021}^e &= -\frac{315}{32}, & \beta_{01102}^e &= -\frac{81}{128}, & \beta_{01012}^e &= -\frac{315}{32}, \\
 \beta_{01111}^e &= \frac{135}{16}, & \beta_{02000}^e &= \frac{1}{6} - \frac{1}{4}n_f, & \beta_{11000}^e &= 2, \\
 \beta_{03000}^e &= \frac{11}{72} - \frac{1}{16}n_f, & \beta_{21000}^e &= \frac{755}{192} - \frac{13}{144}n_f, & \beta_{12000}^e &= \frac{125}{72} - \frac{5}{12}n_f, \\
 \beta_{02100}^e &= -\frac{9}{8}, & \beta_{02010}^e &= \frac{5}{4}, & \beta_{02001}^e &= \frac{3}{4},
 \end{aligned}$$

²Man beachte, dass die Basis (1.51) nur drei Elemente hat. Entsprechend fällt der letzte Index der Koeffizienten weg

$$\begin{aligned}
\beta_{01200}^e &= \frac{27}{64}, & \beta_{01101}^e &= -\frac{9}{16}, & \beta_{01020}^e &= -\frac{15}{4}, & \beta_{01002}^e &= \frac{21}{32}, & (1.52) \\
\beta_{20000}^{\eta_1} &= -\frac{3}{8}, & \beta_{10100}^{\eta_1} &= \frac{9}{2}, & \beta_{02000}^{\eta_1} &= \frac{1}{3}n_f, & \beta_{01100}^{\eta_1} &= -\frac{1}{2}n_f, \\
\beta_{00200}^{\eta_1} &= -\frac{11}{8}, & \beta_{00110}^{\eta_1} &= -2, & \beta_{00101}^{\eta_1} &= \frac{7}{2}, \\
\beta_{20000}^{\eta_2} &= -\frac{9}{16}, & \beta_{10010}^{\eta_2} &= \frac{9}{2}, & \beta_{02000}^{\eta_2} &= \frac{1}{24}n_f, & \beta_{01010}^{\eta_2} &= -\frac{1}{2}n_f, \\
\beta_{00200}^{\eta_2} &= \frac{3}{16}, & \beta_{00110}^{\eta_2} &= \frac{1}{2}, & \beta_{00101}^{\eta_2} &= -\frac{1}{2}, \\
\beta_{00020}^{\eta_2} &= -\frac{32}{3}, & \beta_{00011}^{\eta_2} &= -\frac{7}{6}, & \beta_{00002}^{\eta_2} &= \frac{7}{12}, \\
\beta_{10001}^{\eta_3} &= \frac{9}{2}, & \beta_{01001}^{\eta_3} &= -\frac{1}{2}n_f, & \beta_{00110}^{\eta_3} &= 2, & \beta_{00101}^{\eta_3} &= \frac{5}{2}, \\
\beta_{00020}^{\eta_3} &= \frac{10}{3}, & \beta_{00011}^{\eta_3} &= -\frac{20}{3}, & \beta_{00002}^{\eta_3} &= -\frac{7}{6}, & & (1.53)
\end{aligned}$$

Die $\overline{\text{MS}}\text{-}\overline{\text{DR}}$ Relationen (1.39, 1.40) lauten für die QCD

$$\begin{aligned}
\alpha_s &= \alpha_s^{\overline{\text{MS}}} \left[1 + \frac{\alpha_s^{\overline{\text{MS}}}}{\pi} \frac{1}{4} + \left(\frac{\alpha_s^{\overline{\text{MS}}}}{\pi} \right)^2 \frac{11}{8} - \frac{\alpha_s^{\overline{\text{MS}}}}{\pi} \frac{\alpha_e}{\pi} \frac{1}{12} n_f \left(\frac{\alpha_s^{\overline{\text{MS}}}}{\pi} \right)^3 \left(\frac{3049}{384} - \frac{179}{864} n_f \right) \right. \\
&\quad + \frac{(\alpha_s^{\overline{\text{MS}}})^2}{\pi^3} \left(-\eta_1 \frac{9}{256} + \eta_2 \frac{15}{32} + \eta_3 \frac{3}{128} - \alpha_e \frac{887}{1152} n_f \right) \\
&\quad + \frac{\alpha_s^{\overline{\text{MS}}}}{\pi^3} \left[\eta_1^2 \frac{27}{256} - \eta_2^2 \frac{15}{16} - \eta_1 \eta_3 \frac{9}{64} + \eta_3^2 \frac{21}{128} + \alpha_e^2 \left(\frac{43}{864} n_f + \frac{19}{1152} n_f^2 \right) \right] \\
&\quad \left. + \mathcal{O}(\{\alpha_s^{\overline{\text{MS}}}, \alpha_e, v_r\}^4) \right], \\
m &= m^{\overline{\text{MS}}} \left[1 - \frac{\alpha_e}{\pi} \frac{1}{3} + \left(\frac{\alpha_s^{\overline{\text{MS}}}}{\pi} \right)^2 \frac{11}{48} - \frac{\alpha_s^{\overline{\text{MS}}}}{\pi} \frac{\alpha_e}{\pi} \frac{59}{72} \right. \\
&\quad + \left(\frac{\alpha_e}{\pi} \right)^2 \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{48} n_f \right) + \left(\frac{\alpha_s^{\overline{\text{MS}}}}{\pi} \right)^3 \left(\frac{2207}{864} + \frac{19}{648} n_f \right) \\
&\quad - \frac{(\alpha_s^{\overline{\text{MS}}})^2}{\pi^3} \alpha_e \left(\frac{62815}{20736} + \frac{253}{1728} n_f - \frac{25}{72} \zeta_3 \right) \\
&\quad + \frac{\alpha_s^{\overline{\text{MS}}}}{\pi^3} \alpha_e^2 \left[\frac{1973}{2592} - \frac{5}{36} \zeta_3 + \left(\frac{103}{1728} + \frac{5}{36} \zeta_3 \right) n_f \right] \\
&\quad \left. - \left(\frac{\alpha_e}{\pi} \right)^3 \left(\frac{7}{144} + \frac{5}{216} \zeta_3 + \frac{31}{576} n_f - \frac{5}{576} n_f^2 \right) - \frac{\alpha_e^2 \eta_2}{\pi^3} \frac{5}{24} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\alpha_e}{\pi^3} \left(\eta_1^2 \frac{9}{256} - \eta_2^2 \frac{15}{16} - \eta_1 \eta_3 \frac{3}{64} + \eta_3^2 \frac{7}{128} \right) \\
 & + \mathcal{O}(\{\alpha_s^{\overline{\text{MS}}}, \alpha_e, v_r\}^4) \Big]. \tag{1.54}
 \end{aligned}$$

Die β -Funktion der QCD Eichkopplung im $\overline{\text{DR}}$ Schema lautet

$$\begin{aligned}
 \beta_{50000} &= \frac{b_3}{256} + \frac{166861}{6144} - \frac{9109}{6912} n_f + \frac{457}{20736} n_f^2, \\
 \beta_{41000} &= -\frac{1667}{512} n_f + \frac{145}{2304} n_f^2, \\
 \beta_{32000} &= -\frac{409}{6912} n_f + \frac{1303}{4608} n_f^2, \\
 \beta_{23000} &= \frac{5}{1296} n_f - \frac{49}{3456} n_f^2 - \frac{19}{2304} n_f^3, \\
 \beta_{40000} &= \frac{3115}{128} - \frac{5057}{1152} n_f + \frac{325}{3456} n_f^2, \\
 \beta_{40100} &= -\frac{171}{512} + \frac{3}{512} n_f, & \beta_{40010} &= \frac{285}{64} - \frac{5}{64} n_f, & \beta_{40001} &= \frac{57}{256} - \frac{1}{256} n_f, \\
 \beta_{31100} &= \frac{9}{512} n_f, & \beta_{31010} &= -\frac{15}{64} n_f, & \beta_{31001} &= -\frac{3}{256} n_f, \\
 \beta_{30200} &= \frac{2223}{2048}, & \beta_{30020} &= -\frac{855}{64}, & \beta_{30002} &= \frac{441}{256}, \\
 \beta_{30110} &= \frac{45}{128}, & \beta_{30101} &= -\frac{801}{512}, & \beta_{30011} &= -\frac{45}{64}, \\
 \beta_{22100} &= \frac{21}{128} n_f, & \beta_{22010} &= -\frac{35}{192} n_f, & \beta_{22001} &= -\frac{7}{64} n_f, \\
 \beta_{21200} &= -\frac{9}{64} n_f, & \beta_{21020} &= \frac{5}{4} n_f, & \beta_{21002} &= -\frac{7}{32} n_f, \\
 \beta_{21101} &= \frac{3}{16} n_f, & \beta_{20300} &= -\frac{297}{1024}, & \beta_{20030} &= 20, \\
 \beta_{20003} &= -\frac{49}{128}, & \beta_{20210} &= -\frac{135}{128}, & \beta_{20201} &= \frac{297}{512}, \\
 \beta_{20120} &= -\frac{45}{32}, & \beta_{20021} &= \frac{105}{32}, & \beta_{20102} &= \frac{63}{128}, \\
 \beta_{20012} &= -\frac{105}{32}, & \beta_{20111} &= \frac{45}{16}, & \beta_{31000} &= -\frac{1}{6} n_f, \\
 \beta_{22000} &= -\frac{1}{72} n_f + \frac{1}{48} n_f^2, & \beta_{30000} &= \frac{51}{8} - \frac{19}{24} n_f, & \beta_{20000} &= \frac{11}{4} - \frac{1}{6} n_f,
 \end{aligned} \tag{1.55}$$

mit

$$\begin{aligned} \frac{b_3}{256} &= \frac{149753}{1536} + \frac{891}{64}\zeta_3 - n_f \left(\frac{1078361}{41472} + \frac{1627}{1728}\zeta_3 \right) \\ &+ n_f^2 \left(\frac{50065}{41472} + \frac{809}{2592}\zeta_3 \right) + n_f^3 \frac{1093}{186624}. \end{aligned} \quad (1.56)$$

Die Anomale Dimension der Masse lautet in der QCD

$$\begin{aligned} \gamma_{40000} &= \gamma_3 - \frac{18763}{2304} + \left(\frac{1}{6} + \frac{5}{8}\zeta_3 \right) n_f + \frac{29}{5184} n_f^2, \\ \gamma_{31000} &= -\frac{147659}{4608} + \frac{125}{48}\zeta_3 + \left(\frac{58253}{31104} + \frac{95}{216}\zeta_3 \right) n_f + \frac{407}{7776} n_f^2, \\ \gamma_{22000} &= -\frac{134147}{62208} - \frac{281}{432}\zeta_3 + \left(\frac{336497}{124416} + \frac{49}{432}\zeta_3 \right) n_f - \left(\frac{181}{10368} + \frac{5}{216}\zeta_3 \right) n_f^2, \\ \gamma_{13000} &= -\frac{595}{7776} - \frac{25}{108}\zeta_3 - \left(\frac{1163}{10368} - \frac{5}{27}\zeta_3 \right) n_f - \left(\frac{145}{3456} + \frac{5}{72}\zeta_3 \right) n_f^2, \\ \gamma_{04000} &= \frac{191}{2592} + \frac{67}{108}\zeta_3 + \left(\frac{301}{1728} - \frac{1}{24}\zeta_3 \right) n_f + \frac{5}{384} n_f^2 - \frac{5}{768} n_f^3, \\ \gamma_{30000} &= +\frac{1115}{64} - \left(\frac{557}{432} + \frac{5}{6}\zeta_3 \right) n_f - \frac{35}{1296} n_f^2, \\ \gamma_{03000} &= -\frac{1}{72} - \frac{1}{36} n_f - \frac{1}{96} n_f^2, \\ \gamma_{30100} &= \frac{9}{256}, & \gamma_{30010} &= -\frac{15}{32}, & \gamma_{30001} &= -\frac{3}{128}, \\ \gamma_{21100} &= \frac{201}{512}, & \gamma_{21010} &= -\frac{85}{64}, & \gamma_{21001} &= -\frac{107}{256}, \\ \gamma_{20200} &= -\frac{27}{256}, & \gamma_{20020} &= \frac{15}{16}, & \gamma_{20002} &= -\frac{21}{128}, \\ \gamma_{20101} &= \frac{9}{64}, & \gamma_{12100} &= \frac{351}{64}, & \gamma_{12010} &= -\frac{365}{96}, \\ \gamma_{12001} &= -\frac{117}{32}, & \gamma_{11200} &= -\frac{1563}{512}, & \gamma_{11020} &= \frac{1645}{96}, \\ \gamma_{11002} &= -\frac{3647}{768}, & \gamma_{11101} &= \frac{521}{128}, & \gamma_{03100} &= -\frac{13}{64} - \frac{45}{64} n_f, \\ \gamma_{03010} &= \frac{55}{96} n_f, & \gamma_{03001} &= \frac{13}{96} + \frac{15}{32} n_f, & \gamma_{02200} &= -\frac{223}{256} + \frac{153}{512} n_f, \\ \gamma_{02020} &= \frac{395}{144} - \frac{65}{32} n_f, & \gamma_{02002} &= \frac{259}{1152} + \frac{119}{256} n_f, & \gamma_{02110} &= -\frac{155}{48}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{02101} &= \frac{233}{192} - \frac{51}{128}n_f, & \gamma_{02011} &= \frac{545}{144}, & \gamma_{01300} &= \frac{333}{512}, \\
\gamma_{01030} &= -20, & \gamma_{01003} &= -\frac{7}{192}, & \gamma_{01210} &= \frac{105}{64}, \\
\gamma_{01201} &= -\frac{333}{256}, & \gamma_{01120} &= -\frac{5}{16}, & \gamma_{01021} &= \frac{35}{48}, \\
\gamma_{01102} &= \frac{3}{64}, & \gamma_{01012} &= \frac{245}{48}, & \gamma_{01111} &= -\frac{35}{8}, \\
\gamma_{21000} &= -\frac{333}{64} + \frac{1}{4}n_f, & \gamma_{12000} &= -\frac{13}{48} + \frac{41}{96}n_f, & \gamma_{02100} &= \frac{3}{8}, \\
\gamma_{02010} &= -\frac{5}{12}, & \gamma_{02001} &= -\frac{1}{4}, & \gamma_{01200} &= -\frac{9}{64}, \\
\gamma_{01020} &= \frac{5}{4}, & \gamma_{01101} &= \frac{3}{16}, & \gamma_{01002} &= -\frac{7}{32}, \\
\gamma_{20000} &= +\frac{95}{24} - \frac{5}{36}n_f, & \gamma_{11000} &= -\frac{2}{3}, & \gamma_{02000} &= -\frac{1}{18} + \frac{1}{12}n_f, \\
\gamma_{10000} &= 1, & & & &
\end{aligned} \tag{1.57}$$

mit

$$\begin{aligned}
\gamma_3 &= \frac{1}{256} \left\{ \frac{4603055}{162} + \frac{135680}{27}\zeta_3 - 8800\zeta_5 \right. \\
&\quad + n_f \left[-\frac{91723}{27} - \frac{34192}{9}\zeta_3 + 880\zeta_4 + \frac{18400}{9}\zeta_5 \right] \\
&\quad \left. + n_f^2 \left[\frac{5242}{243} + \frac{800}{9}\zeta_3 - \frac{160}{3}\zeta_4 \right] + n_f^3 \left[-\frac{332}{243} + \frac{64}{27}\zeta_3 \right] \right\}. \tag{1.58}
\end{aligned}$$

1.8 Diskussion

Im vorliegenden Kapitel wurde die Dimensionale Reduktion (DRED) auf eine allgemeine an Fermionen gekoppelte Eichtheorie angewendet und die Renormierungsgruppenkoeffizienten der Eichkopplung und der Fermionmasse zur vierten Ordnung in der Störungstheorie berechnet.

Es wurde damit demonstriert, dass es praktisch durchführbar ist, nicht-supersymmetrische Theorien durch DRED zu regularisieren, auch wenn es durch das Auftreten von Evaneszenten Kopplungen zu technischen Komplikationen kommt.

Insbesondere wurden Transformationsformeln gefunden, mit denen sich die Eichkopplung und die Fermionmasse vom $\overline{\text{DR}}$ ins $\overline{\text{MS}}$ und umgekehrt übertragen lassen.

Das ist wichtig, wenn man nicht-supersymmetrische Theorien, wie das Standardmodell oder auch das mssm mit einigen ausintegrierten Freiheitsgraden, als Effektive Theorien einer supersymmetrischen Theorie betrachten will: Die supersymmetrische Theorie kann man dann in Dimensionaler Reduktion und die Effektive Theorie in Dimensionaler Regularisierung behandeln.

Ergebnisse aus diesem Kapitel wurden zum Beispiel in [35] verwendet, um aus dem experimentellen Wert von α_s im $\overline{\text{MS}}$ Schema an der Z -Masse in Fünf-Flavour-QCD α_s im $\overline{\text{DR}}$ Schema in SUSY-QCD zu ermitteln und mit Dreischleifen-Präzision bis zur GUT Skala laufen zu lassen. Auch die Masse des Bottom Quarks in SUSY-QCD wurde dort berechnet.

2 Die Masse des leichten neutralen Higgs-Bosons im mSSM

In diesem Kapitel werden Dreischleifen-Korrekturen zur Masse des leichten neutralen Higgs-Bosons im mSSM berechnet. Da auf Ein- und Zweischleifen-Niveau die Beiträge von Top Quarks und Stop Squarks die Korrekturen dominieren, und zu erwarten ist, dass sich dieses Verhalten in der dritten Ordnung fortsetzt, werden nur Beiträge aus dem Top/Stop-Sektor betrachtet.

Da das mSSM eine der am intensivsten untersuchten Erweiterungen des Standardmodells ist, herrscht kein Mangel an guten allgemeinen Einführungen¹. Um die Notation für die Rechnungen zu fixieren, werden hier die wichtigsten Fakten über die relevanten Sektoren, den Higgs- und den Stop-Sektor, wiedergegeben.

2.1 Higgs-Mechanismus im mSSM

Im mSSM besteht der Higgs-Sektor aus zwei komplexen SU(2) Dubletts H_1 und H_2 mit Hyperladungen $Y_1 = -1$, $Y_2 = +1$. Das Higgs-Potential ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
 V = & \left(|\mu_H|^2 + m_1^2 \right) |H_1|^2 + \left(|\mu_H|^2 + m_2^2 \right) |H_2|^2 \\
 & - m_{12}^2 \left(\epsilon_{ab} H_1^a H_2^b + \epsilon_{ab} H_1^{a*} H_2^{b*} \right) \\
 & + \frac{1}{8} (g_1^2 + g_2^2) \left[|H_1|^2 - |H_2|^2 \right]^2 + \frac{1}{2} g_2^2 \left| H_1^\dagger H_2 \right|^2.
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Dabei ist μ_H die bilineare Higgs-Kopplung aus dem Superpotential, m_1 , m_2 und m_{12} sind softe Brechungsparameter, g_1 und g_2 die Eichkopplungen der SU(2) bzw. U(1), und es ist $\epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = -1$, $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 0$. Man beachte, dass die quartischen Terme

¹Ausführliche Werke, die von den Grundlagen der Supersymmetrie bis zur Phänomenologie des mSSM reichen, sind beispielsweise [36, 37].

in (2.1) komplett durch die Eichkopplungen festgelegt sind, was die Vorhersagekraft des Higgs Sektors enorm erhöht.

Das Potential (2.1) führt zur spontanen Brechung der $SU(2)$ und Vakuumerwartungswerten für die elektrisch neutralen Komponenten der Higgs-Felder. Die störungstheoretische Behandlung von Quantenfeldtheorien ist eine Entwicklung um den Grundzustand. Es ist also sinnvoll, die Higgs-Felder durch ihre Vakuumerwartungswerte $v_{1,2}$ und Skalarfelder mit verschwindendem Vakuumerwartungswert zu parametrisieren:

$$\begin{aligned} H_1 &= \begin{pmatrix} v_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\chi_1) \\ -\phi_1^- \end{pmatrix}, \\ H_2 &= \begin{pmatrix} \phi_2^+ \\ v_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_2 + i\chi_2) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Aus dem Potential erhält man die Massenmatrix

$$M_{ij}^2 = \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} \right|_{\langle 0 | \varphi_i | 0 \rangle}, \quad (2.3)$$

wobei φ_i für alle Felder $\phi_{1,2}$, $\phi_{1,2}^\pm$ und $\chi_{1,2}$ steht. Die Matrix M_{ij}^2 ist blockdiagonal. Die Felder $\phi_{1,2}$ mischen zu den Masseneigenzuständen h und H , CP-geraden neutralen Higgs-Bosonen, wobei h per definitionem die kleinere Masse hat. $\chi_{1,2}$ mischen zu G^0 und A , wobei das masselose G^0 in der unitären Eichung als longitudinaler Freiheitsgrad des Z Bosons auftritt und A ein CP-ungerades, neutrales Boson, das pseudoskalare Higgs ist. $\phi_{1,2}^\pm$ mischen zu G^\pm , die den W^\pm ihre Masse geben, und zwei geladenen Higgs Feldern H^\pm . Im Folgenden wird nur der neutrale CP-gerade Sektor betrachtet.

Es ist üblich, die Parameter des Higgs Sektors durch die Größen e , M_W , M_Z , M_A und $\tan \beta \equiv \frac{v_2}{v_1} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ auszudrücken. Damit lautet die Massenmatrix von $\phi_{1,2}$

$$M_{\phi_1 \phi_2}^2 = \frac{\sin 2\beta}{2} \begin{pmatrix} \cot \beta M_Z^2 + \tan \beta M_A^2 & -M_Z^2 - M_A^2 \\ -M_Z^2 - M_A^2 & \cot \beta M_A^2 + \tan \beta M_Z^2 \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

und die Eigenwerte liefern die Massen von h und H :

$$M_{H,h}^2 = \frac{1}{2} \left(M_A^2 + M_Z^2 \pm \sqrt{(M_A^2 + M_Z^2)^2 - 4M_Z^2 M_A^2 \cos^2 2\beta} \right). \quad (2.5)$$

Insbesondere ist – in erster Ordnung

$$M_h \leq M_Z. \quad (2.6)$$

2.2 Der Stop-Sektor des MSSM

Die Superpartner der links- und rechtschiralen Komponenten des Top Quarks werden mit \tilde{t}_L respektive \tilde{t}_R bezeichnet. Ihre Massenmatrix lautet

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\tilde{t}}^2 &= \begin{pmatrix} m_t^2 + M_Z^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \sin^2 \vartheta_W \right) \cos 2\beta + M_{\tilde{Q}}^2 & m_t (A_t - \mu_H \cot \beta) \\ m_t (A_t - \mu_H \cot \beta) & m_t^2 + \frac{2}{3} M_Z^2 \sin^2 \vartheta_W \cos 2\beta + M_{\tilde{U}}^2 \end{pmatrix} \\ &\equiv \begin{pmatrix} m_{\tilde{t}_L}^2 & m_t a_t \\ m_t a_t & m_{\tilde{t}_R}^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Dabei sind $M_{\tilde{Q}}$ und $M_{\tilde{U}}$ susy brechende Massen und A_t eine susy brechende trilineare Skalar-Kopplung zwischen Higgs- und Stop-Feldern. Für $a_t \neq 0$ ist $\mathcal{M}_{\tilde{t}}^2$ nichtdiagonal, und \tilde{t}_L, \tilde{t}_R mischen zu den Masseneigenzuständen \tilde{t}_1, \tilde{t}_2 , mit Massen

$$m_{\tilde{t}_{1,2}}^2 = \frac{1}{2} \left(m_{\tilde{t}_L}^2 + m_{\tilde{t}_R}^2 \mp \sqrt{(m_{\tilde{t}_L}^2 - m_{\tilde{t}_R}^2)^2 + 4m_t^2 a_t^2} \right). \quad (2.8)$$

Der Mischungswinkel wird mit θ_t bezeichnet ist gegeben als

$$\sin 2\theta_t = 2m_t \frac{A_t - \mu_H \cot \beta}{m_{\tilde{t}_1}^2 - m_{\tilde{t}_2}^2}. \quad (2.9)$$

Für $a_t = 0$ verschwindet θ_t . \tilde{t}_L und \tilde{t}_R sind dann die Masseneigenzustände, und es ist

$$\begin{aligned} m_{\tilde{t}_1} &= \min\{m_{\tilde{t}_L}, m_{\tilde{t}_R}\}, \\ m_{\tilde{t}_2} &= \max\{m_{\tilde{t}_L}, m_{\tilde{t}_R}\}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Ist außerdem $m_{\tilde{t}_L} = m_{\tilde{t}_R}$, so ist das Stop-Spektrum entartet.

2.3 Strahlungskorrekturen zur Higgs-Masse

Würde die Ungleichung (2.6) nicht durch Strahlungskorrekturen zerstört, hätte man das MSSM nach der Nichtentdeckung des Higgs-Bosons am LEP zu den Akten legen

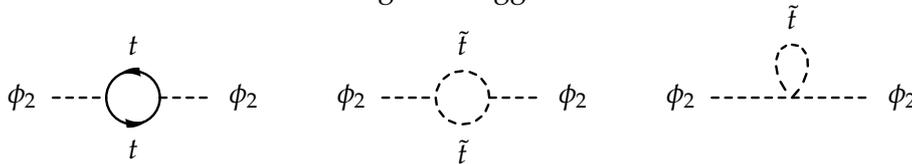


Abbildung 2.1: Einschleifen-Korrekturen zur Higgs Selbstenergie aus dem Top/Stop-Sektor

können. Glücklicherweise sind die Einschleifen-Korrekturen, die M_h im mSSM bekommt, groß [38–46]. Allein die Einschleifen-Korrekturen, die von Top Quarks und ihren Superpartnern induziert werden (Abbildung 2.1), können die obere Schranke (2.6) um über 40 GeV anheben und stellen so sicher, dass das mSSM mit den Messungen am LEP verträglich ist.

Die Untersuchung der Korrekturen zur Higgs-Masse in erster Ordnung zeigt zweierlei:

1. Der dominante Beitrag stammt aus dem Top/Stop Sektor, also von den in Abbildung 2.1 dargestellten Diagrammen. Wegen der großen Top-Yukawa-Kopplung liefern diese einen Beitrag proportional zu $\alpha_t M_t^2 \propto M_t^4$, wobei M_t die Masse des Top Quarks und die Top-Yukawa-Kopplung $\propto \sqrt{\alpha_t}$ ist.
2. Die Näherung des Effektiven Potentials [47–51] oder, äquivalent dazu, die Auswertung der Diagramme für verschwindenden äußeren Impuls, liefert eine gute Approximation an das exakte Ergebnis.

Abbildung 2.2 vergleicht die M_t^4 Korrekturen in der Effektiven Potential Näherung mit den vollen Korrekturen aus allen Sektoren des mSSM ohne diese Näherung.

Motiviert durch die großen Korrekturen auf Einschleifen-Niveau, wurde viel Aufwand betrieben, um auch die nächstführenden Beiträge zu berechnen [52–69]. Dabei wurde die Näherung verschwindenden äußeren Impulses verwendet. Die Impulsabhängigkeit wurde in [70] untersucht, mit dem Ergebnis, dass auch auf Zweischleifen-Niveau das Effektive Potential eine gute Näherung ist.

Auf Zweischleifen-Niveau dominieren die susy-QCD-Korrekturen zu den Schleifen aus Top Quarks und Stop Squarks, also Beiträge $\propto \alpha_t \alpha_s$. Sie sind negativ und verringern die Einschleifen-Korrekturen um etwa ein Drittel. Die Frage, wie groß die Beiträge der nächsten Ordnung sind und ob sich die perturbative Entwicklung stabilisiert, ist also naheliegend und angesichts der Tatsache, dass der Wert der Higgs-Masse ein wichtiger Parameter bei der Entdeckung oder Falsifizierung des mSSM ist, auch wichtig.

Ein erster Schritt in diese Richtung wurde in [71] in Form der Berechnung der führenden und nächstführenden Logarithmen des Verhältnisses aus Top-Masse und der Massenskala der susy-Teilchen vollzogen. Der nächste Schritt, die Berechnung der $\alpha_t \alpha_s^2$ Korrekturen zur Higgs-Masse, ist Gegenstand des folgenden Abschnitts.

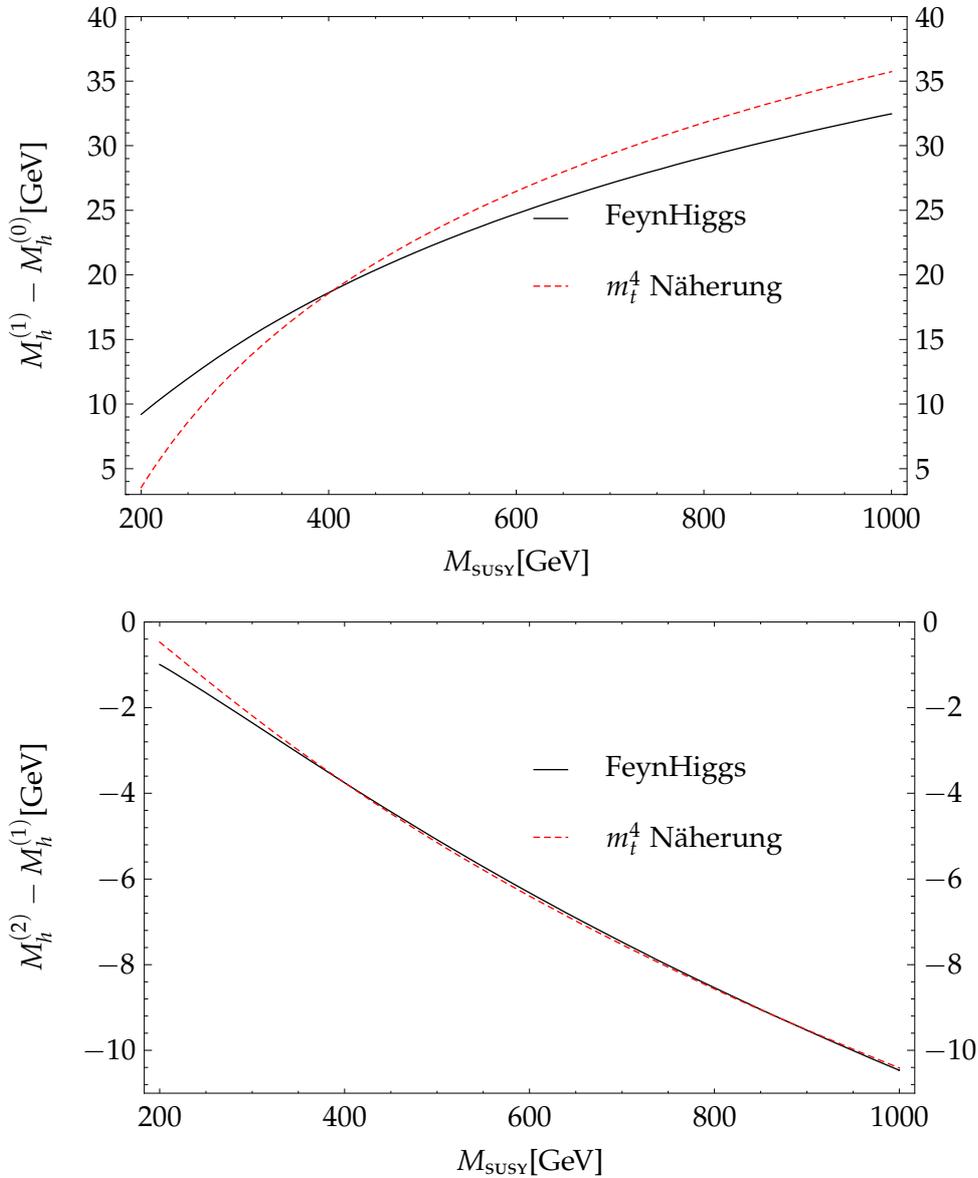


Abbildung 2.2: Ein- und Zweischleifen-Korrekturen zur Masse des leichten neutralen Higgs-Bosons im mSSM. Die mit „FeynHiggs“ gekennzeichneten Kurven wurden mit dem Programm FeynHiggs [66, 72–74] erstellt, wobei Korrekturen aus allen Sektoren des mSSM berücksichtigt wurden. Die „ m_t^4 “ Kurven stellen den führenden m_t^4 Term der Korrekturen aus dem Top/Stop-Sektor in der Näherung des Effektiven Potentials dar. Man erkennt, dass die schon auf Einschleifen-Niveau vorhandene Dominanz dieser Beiträge in der zweiten Ordnung noch deutlicher wird. Für die Abbildungen wurde ein entartetes Spektrum der SUSY-Teilchen angenommen und die Masse M_{SUSY} der Superpartner variiert. Des Weiteren wurde $\tan \beta = 40$ und $M_A = 1 \text{ TeV}$ gesetzt.

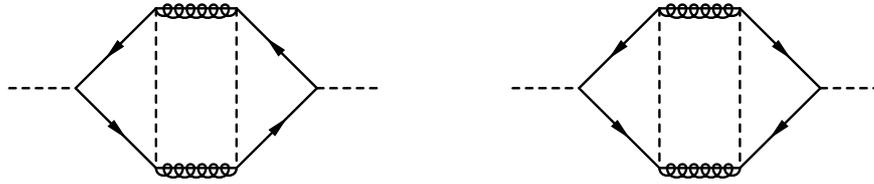


Abbildung 2.3: In Fermionschleifen, in denen Majoranateilchen wie die Gluinos vorkommen, kann sich die Fermionrichtung umdrehen.

2.4 Korrekturen der Ordnung $\alpha_t \alpha_s^2$

Die Berechnung erfolgt diagrammatisch, wobei in der $\{\phi_1, \phi_2\}$ Basis gerechnet wird. Das heißt, es werden die Korrekturen zur Massenmatrix (2.3) bestimmt und diese anschließend diagonalisiert.

Konkret ist

$$M_{\phi_1 \phi_2}^2 = \frac{\sin 2\beta}{2} \begin{pmatrix} \cot \beta M_Z^2 + \tan \beta M_A^2 & -M_Z^2 - M_A^2 \\ -M_Z^2 - M_A^2 & \cot \beta M_A^2 + \tan \beta M_Z^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \hat{\Sigma}_{\phi_1} & \hat{\Sigma}_{\phi_1 \phi_2} \\ \hat{\Sigma}_{\phi_1 \phi_2} & \hat{\Sigma}_{\phi_2} \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

wobei $\hat{\Sigma}_{\phi_1}$ und $\hat{\Sigma}_{\phi_2}$ die renormierten Selbstenergien der Felder ϕ_1 bzw. ϕ_2 und $\hat{\Sigma}_{\phi_1 \phi_2}$ die renormierte ϕ_1 - ϕ_2 Zwei-Punkt Funktion darstellt.

Als virtuelle Teilchen treten dabei auf:

1. Top Quarks t und ihre Superpartner, die Stop Squarks $\tilde{t}_{1,2}$ ab dem Einschleifen-Niveau
2. Gluonen g , ihre Superpartner, die Gluinos \tilde{g} , und ε -Skalare ab dem Zweischleifen-Niveau
3. leichte Quarks q und ihre Superpartner $\tilde{q}_{1,2}$ ab dem Dreischleifen-Niveau

Da die Gluinos Majoranateilchen sind, können Diagramme auftreten, in denen einer geschlossenen Fermionschleife keine Fermionrichtung zugewiesen werden kann (vgl. Abb. 2.4). Diese erfordern besondere Vorsicht bei der Bestimmung der relativen Vorzeichen unterschiedlicher Diagramme. In [75] wurde ein Algorithmus zur Behandlung Fermionzahl verletzender Wechselwirkungen angegeben, der für die vorliegenden Rechnungen verwendet wurde.

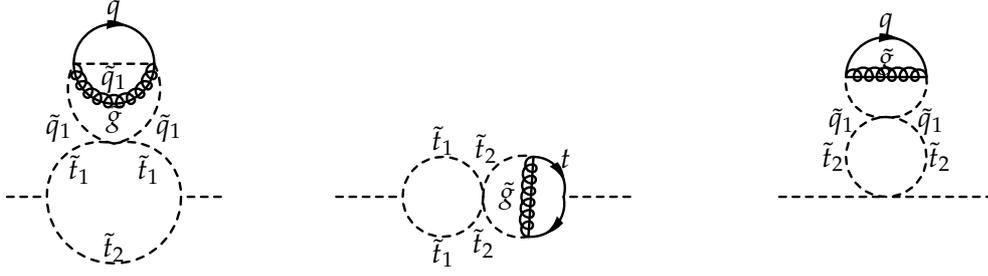


Abbildung 2.4: Beispiele für Diagramme, in denen vier Massen auftreten.

2.4.1 Vereinfachende Annahmen

In den SUSY-QCD Korrekturen zur Higgs-Masse treten eine Vielzahl a priori verschiedener Massen auf: die Masse des Top Quarks m_t und seiner Superpartner $m_{\tilde{t}_{1,2}}$, die Masse der Gluinos $m_{\tilde{g}}$ und die Massen der Superpartner der leichten Quarks, $m_{\tilde{q}}$. Abb. 2.4 zeigt einige Dreischleifen-Diagramme, in denen bis zu vier dieser Massen auftreten.

Da keine analytische Lösung für Dreischleifen-Diagramme mit beliebigen Massen bekannt ist, wird im Folgenden davon ausgegangen, dass die Massen einer strengen Hierarchie unterliegen. Mit Hilfe der Methode der Asymptotischen Entwicklung [76–84] lassen sich die Diagramme als Potenzreihen in den Verhältnissen der Massen und Logarithmen der Massenverhältnisse lösen.

Des Weiteren wird der äußere Impuls in allen Diagrammen auf Null gesetzt, was der Näherung des Effektiven Potentials entspricht. Dies ist durch die Ergebnisse auf Ein- und Zweischleifen-Niveau gerechtfertigt, da die Impulsabhängigkeit der Korrekturen dort klein ist. Um Infrarotdivergenzen zu vermeiden, wurde stets eine Asymptotische Entwicklung im äußeren Impuls durchgeführt.

Da die Massen der Superpartner nicht bekannt sind, ist ab initio nicht klar, welche Hierarchie man anzunehmen hat. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurden folgende Spezialfälle betrachtet:

1. Degeneriertes SUSY-Spektrum

$$m_{\text{SUSY}}^2 \equiv m_{\tilde{g}}^2 = m_{\tilde{q}}^2 = m_{\tilde{t}_{1,2}}^2 \gg m_t^2 \quad (2.12a)$$

2. Masselose Gluinos

$$m_{\tilde{g}}^2 = 0, \quad m_{\text{SUSY}}^2 \equiv m_{\tilde{q}}^2 = m_{\tilde{t}_{1,2}}^2 \gg m_t^2 \quad (2.12b)$$

3. Schwere Squarks

$$m_{\tilde{q}}^2 \gg m_{\text{SUSY}}^2 \equiv m_{\tilde{g}}^2 = m_{\tilde{t}_{1,2}}^2 \gg m_t^2 \quad (2.12c)$$

4. Stop-Mischung

$$m_{\tilde{q}}^2 \gg m_{\tilde{t}_2}^2 \gg m_{\tilde{t}_1}^2 = m_{\tilde{g}}^2 \gg m_t^2 \quad (2.12d)$$

$$m_{\tilde{q}}^2 \gg m_{\tilde{t}_2}^2 = m_{\tilde{g}}^2 \gg m_{\tilde{t}_1}^2 \gg m_t^2 \quad (2.12e)$$

5. Referenzpunkt SPS1a'

Ohne Annahmen über den Mechanismus der susy Brechung enthält das MSSM mehr als hundert Parameter, ein systematisches Durchlaufen des Parameter-raums zur Untersuchung der Phänomenologie des MSSM ist also nicht prakti-kabel. Um die Ergebnisse verschiedener Studien besser vergleichen und bündeln zu können, wurde auf dem „Snowmass Workshop on the Future of Particle Physics“ 2001 ein Satz von Referenzpunkten im und Linien durch den Parame-terraum erarbeitet, die unter dem Namen „Snowmass Points and Slopes“ [85] bekannt sind. In einem der Referenzpunkte, dem Punkt SPS1a', gilt [86]

$$600 \text{ GeV} \approx m_{\tilde{g}}^2 \approx m_{\tilde{q}}^2 \approx m_{\tilde{t}_2}^2 \gg 366.6 \text{ GeV} = m_{\tilde{t}_1}^2 \gg m_t^2. \quad (2.12f)$$

6. Ungebrochene Supersymmetrie

Da bekannt ist, dass die Korrekturen zur Higgs-Masse in ungebrochener susy verschwinden, handelt es sich hierbei um eine nützliche Möglichkeit, die Rah-menbedingungen der Rechnung zu testen. Tatsächlich ergibt die Summe der rund 40.000 beitragenden Diagramme Null.

Die leichten Quarks u, d, s, c und b werden als masselos angenommen.

Für die Rechnungen in der vorliegenden Arbeit wurde ein automatisiertes Programm-paket verwendet, um die Diagramme zu erzeugen, asymptotisch zu entwickeln und zu berechnen. Dieses wird in Appendix A beschrieben.

2.4.2 Regularisierung und Renormierung

Die Regularisierung wurde durchgängig in Dimensionaler Reduktion durchgeführt. Da in den zu berechnenden Feynman Diagrammen keine Fermionlinie mit einer un-geraden Anzahl von γ_5 Matrizen und vier oder mehr Dirac Matrizen auftaucht, konnte mit antikommutierendem γ_5 gerechnet werden.

Soweit möglich wurde multiplikativ renormiert, d.h. die nackten Parameter in den berechneten Diagrammen wurden durch Multiplikation mit den jeweiligen Renormierungskonstanten durch renormierte Parameter ausgedrückt. Nach der Identifikation der Massen verschiedener Teilchen in (2.12) ist dies allerdings nicht mehr möglich. So steht zum Beispiel in einem Diagramm, das gemäß (2.12a) berechnet wurde, dasselbe Symbol für die nackte Masse der Stops und der Gluinos, und es ist nicht nachvollziehbar, welcher Anteil mit $Z_{m_{\bar{t}}}$ und welcher mit $Z_{m_{\bar{g}}}$ multipliziert werden muss. In diesen Fällen wurden explizit Counterterm Diagramme erzeugt und berechnet.

Im Folgenden werden kleine Buchstaben für Massen im $\overline{\text{DR}}$ Schema und große Buchstaben für on-shell Massen verwendet. Nackte Parameter werden durch eine hochgestellte Null gekennzeichnet.

Renormierung des Potentials

Von den Parametern des Potentials müssen für die Rechnung zur Ordnung $\alpha_t \alpha_s^2$ nur M_A und $\tan \beta = \frac{v_2}{v_1}$ renormiert werden, da M_W , M_Z und e auf dieser Ordnung keine Strahlungskorrekturen erfahren.

Die Forderung, dass die v_i auch unter Berücksichtigung von Strahlungskorrekturen die Vakuumenerwartungswerte der Higgs-Felder bleiben, ist äquivalent dazu, dass die renormierten Ein-Punkt Funktionen der Felder ϕ_i verschwinden. Dies fixiert die Renormierungsbedingung für $\tan \beta$.

Die Renormierungsbedingung für M_A erhält man aus der Forderung, dass M_A die physikalische Masse des A Feldes, also der Realteil des Pols des A Propagators sein soll.

Insgesamt erhält man für die renormierten Selbstenergien der Felder $\phi_{1,2}$ [44, 87]:

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}_{\phi_1} &= \Sigma_{\phi_1} - \Sigma_A \sin^2 \beta \\ &+ \frac{e}{2M_W \sin \vartheta_W} t_{\phi_1} \cos \beta (1 + \sin^2 \beta) \\ &- \frac{e}{2M_W \sin \vartheta_W} t_{\phi_2} \cos^2 \beta \sin \beta, \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}_{\phi_2} &= \Sigma_{\phi_2} - \Sigma_A \cos^2 \beta \\ &- \frac{e}{2M_W \sin \vartheta_W} t_{\phi_1} \sin^2 \beta \cos \beta \\ &+ \frac{e}{2M_W \sin \vartheta_W} t_{\phi_2} \sin \beta (1 + \cos^2 \beta), \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned}\hat{\Sigma}_{\phi_1\phi_2} &= \Sigma_{\phi_1\phi_2} + \Sigma_A \sin \beta \cos \beta \\ &+ \frac{e}{2M_W \sin \vartheta_W} t_{\phi_1} \sin^3 \beta \\ &+ \frac{e}{2M_W \sin \vartheta_W} t_{\phi_2} \cos^3 \beta.\end{aligned}\tag{2.15}$$

Σ_A bezeichnet hier die A Selbstenergie, t_{ϕ_1} und t_{ϕ_2} die Ein-Punkt Funktionen von ϕ_1 respektive ϕ_2 .

Renormierung der Top-Masse

Da die Top-Masse m_t bereits in der ersten Schleife auftritt, muss sie zur Ordnung α_s^2 renormiert werden. Die Renormierungskonstante, definiert als

$$m_t^0 = Z_{m_t} m_t,\tag{2.16}$$

ist im $\overline{\text{DR}}$ Schema gegeben als [88]

$$\begin{aligned}Z_{m_t} &= 1 - \frac{\alpha_s}{4\pi} \frac{1}{\epsilon} 2C_R \\ &+ \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2 \left[\frac{1}{\epsilon} \left(-3C_A C_R + 2C_R^2 + 2C_R I_2(R) + 2C_R n_f I_2(R) \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\epsilon^2} \left(3C_A C_R + 2C_R^2 - 2C_R I_2(R) - 2C_R n_f I_2(R) \right) \right].\end{aligned}\tag{2.17}$$

Renormierung der Gluinomasse und α_s

Die Masse der Gluinos $m_{\tilde{g}}$ und die starke Kopplung α_s werden auf Einschleifen-Niveau im $\overline{\text{DR}}$ Schema gemäß

$$\begin{aligned}m_{\tilde{g}}^0 &= Z_{\tilde{g}}^2 m_{\tilde{g}}, \\ \alpha_s^0 &= Z_g^2 \alpha_s, \\ Z_g^2 &= 1 + \frac{\alpha_s}{4\pi} \frac{1}{\epsilon} \left(-3C_A + 2I_2(R) + 2n_f I_2(R) \right)\end{aligned}\tag{2.18}$$

renormiert [88].

Renormierung der ϵ -Skalar-Masse

Im $\overline{\text{DR}}$ Schema ist die Squark-Masse abhängig von der Evaneszenten Masse M_ϵ der ϵ -Skalare. Dies ist unbequem, da M_ϵ ein Artefakt der Dimensionalen Reduktion ist

und keine physikalische Bedeutung hat. In [89] wurde deshalb eine Variante des $\overline{\text{DR}}$ Schemas, das $\overline{\text{DR}}'$ Schema eingeführt. Dieses unterscheidet sich vom $\overline{\text{DR}}$ Schema durch eine endliche Redefinition der Squark-Masse, die die Beiträge von M_ϵ kompensiert. Dadurch erreicht man, dass Observablen im $\overline{\text{DR}}'$ Schema unabhängig von der ϵ -Skalar-Masse sind.

Die Korrekturen zur Higgs-Masse unter Annahme der Massenhierarchie (2.12c) wurden im $\overline{\text{DR}}'$ Schema durchgeführt. Dieselben Ergebnisse erhält man, wenn man M_ϵ on-shell renormiert und auf Null setzt. Dies wurde in den Berechnungen zu den anderen Hierarchien getan.

Die on-shell Renormierungskonstante für die Masse der ϵ -Skalare lautet [88], bis zur Ordnung α_s ,

$$m_\epsilon^{02} = Z_{M_\epsilon} M_\epsilon^2, \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} Z_{M_\epsilon} = 1 + \frac{\alpha_s}{4\pi} \left[& + \frac{1}{\epsilon} \left(2C_A m_{\tilde{g}}^2 - 2m_{\tilde{t}_1}^2 I_2(R) - 2m_{\tilde{t}_2}^2 I_2(R) + 4m_{\tilde{t}}^2 I_2(R) - 4m_{\tilde{q}}^2 n_f I_2(R) \right) \right. \\ & + m_{\tilde{g}}^2 (2C_A + 2C_A \ln \frac{\mu^2}{m_{\tilde{g}}^2}) + m_{\tilde{t}}^2 (4I_2(R) + 4I_2(R) \ln \frac{\mu^2}{m_{\tilde{t}}^2}) \\ & + m_{\tilde{t}_1}^2 (-2I_2(R) - 2I_2(R) \ln \frac{\mu^2}{m_{\tilde{t}_1}^2}) + m_{\tilde{t}_2}^2 (-2I_2(R) - 2I_2(R) \ln \frac{\mu^2}{m_{\tilde{t}_2}^2}) \\ & + m_{\tilde{q}}^2 (-4n_f I_2(R) - 4n_f I_2(R) \ln \frac{\mu^2}{m_{\tilde{q}}^2}) \\ & + \epsilon \left(m_{\tilde{g}}^2 (2C_A + 2C_A \ln \frac{\mu^2}{m_{\tilde{g}}^2} + C_A \ln^2 \frac{\mu^2}{m_{\tilde{g}}^2} + C_A \zeta_2) \right. \\ & + m_{\tilde{t}_1}^2 (-2I_2(R) - 2I_2(R) \ln \frac{\mu^2}{m_{\tilde{t}_1}^2} - I_2(R) \ln^2 \frac{\mu^2}{m_{\tilde{t}_1}^2} - I_2(R) \zeta_2) \\ & + m_{\tilde{t}_2}^2 (-2I_2(R) - 2I_2(R) \ln \frac{\mu^2}{m_{\tilde{t}_2}^2} - I_2(R) \ln^2 \frac{\mu^2}{m_{\tilde{t}_2}^2} - I_2(R) \zeta_2) \\ & + m_{\tilde{t}}^2 (4I_2(R) + 4I_2(R) \ln \frac{\mu^2}{m_{\tilde{t}}^2} + 2I_2(R) \ln^2 \frac{\mu^2}{m_{\tilde{t}}^2} + 2I_2(R) \zeta_2) \\ & + m_{\tilde{q}}^2 (-4n_f I_2(R) - 4n_f I_2(R) \ln \frac{\mu^2}{m_{\tilde{q}}^2} \\ & \left. \left. - 2n_f I_2(R) \ln^2 \frac{\mu^2}{m_{\tilde{q}}^2} - 2n_f I_2(R) \zeta_2) \right) \right]. \quad (2.20) \end{aligned}$$

Renormierung des Stop Sektors

Die Massen der Stop Squarks $m_{\tilde{t}_{1,2}}$ und deren Mischungswinkel θ_t tauchen bereits auf Einschleifen-Niveau auf und muss deshalb zur Ordnung α_s^2 renormiert werden. Es ist

$$\begin{aligned}
 \theta_t^0 &= \theta_t + \delta\theta_t, \\
 \delta\theta_t &= \frac{\alpha_s}{4\pi} \frac{1}{\epsilon(m_{\tilde{t}_1}^2 - m_{\tilde{t}_2}^2)} \left[8 \cos 2\theta_t C_R m_{\tilde{g}} m_t I_2(R) - 2 \cos 2\theta_t C_R m_{\tilde{t}_1}^2 \sin 2\theta_t I_2(R) \right. \\
 &\quad \left. + 2 \cos 2\theta_t C_R m_{\tilde{t}_2}^2 \sin 2\theta_t I_2(R) \right] \\
 &+ \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{\epsilon(m_{\tilde{t}_1}^2 - m_{\tilde{t}_2}^2)} \left[4 \cos 2\theta_t C_R m_{\tilde{g}} m_t \left(3C_A - 2C_R - 2I_2(R) - 2n_f I_2(R) \right) \right. \\
 &\quad - \left(\cos 2\theta_t C_R m_{\tilde{t}_1}^2 \sin 2\theta_t \left(\frac{3}{2} C_A - C_R - I_2(R) - n_f I_2(R) \right) \right) \\
 &\quad \left. + \left(\cos 2\theta_t C_R m_{\tilde{t}_2}^2 \sin 2\theta_t \left(\frac{3}{2} C_A - C_R - I_2(R) - n_f I_2(R) \right) \right) \right] \\
 &+ \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{\epsilon^2(m_{\tilde{t}_1}^2 - m_{\tilde{t}_2}^2)} \left(\right. \\
 &\quad - 4 \cos 2\theta_t C_R m_{\tilde{g}} m_t \left(3C_A + 2C_R - 2I_2(R) - 2n_f I_2(R) \right) \\
 &\quad + \left(\cos 2\theta_t C_R m_{\tilde{t}_1}^2 \sin 2\theta_t \left(\frac{3}{2} C_A + C_R - I_2(R) - n_f I_2(R) \right) \right) \\
 &\quad \left. - \left(\cos 2\theta_t C_R m_{\tilde{t}_2}^2 \sin 2\theta_t \left(\frac{3}{2} C_A + C_R - I_2(R) - n_f I_2(R) \right) \right) \right) \\
 &+ \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{\epsilon^2(m_{\tilde{t}_1}^2 - m_{\tilde{t}_2}^2)^2} \left(8 \cos 2\theta_t \left(-1 + \cos 4\theta_t \right) C_R^2 m_{\tilde{g}} m_{\tilde{t}_2}^2 m_t, \right. \\
 &\quad - 32 \cos 2\theta_t C_R^2 m_{\tilde{g}}^2 m_t^2 \sin 2\theta_t \\
 &\quad + m_{\tilde{t}_1}^2 \left(-8 \cos 2\theta_t \left(-1 + \cos 4\theta_t \right) C_R^2 m_{\tilde{g}} m_t \right. \\
 &\quad \left. + \cos 2\theta_t C_R^2 m_{\tilde{t}_2}^2 \left(3 \sin 2\theta_t - \sin 6\theta_t \right) \right) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \left(\cos 2\theta_t C_R^2 m_{\tilde{t}_1}^4 \left(3 \sin 2\theta_t - \sin 6\theta_t \right) \right) \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \left(\cos 2\theta_t C_R^2 m_{\tilde{t}_2}^4 \left(3 \sin 2\theta_t - \sin 6\theta_t \right) \right) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_{i_1}^{0\ 2} &= Z_{m_{i_1}} m_{i_1}^2, \\
 Z_{m_{i_1}} &= 1 + \frac{\alpha_s}{4\pi} \frac{1}{\epsilon} \left[\frac{1}{2} C_R \left(-1 + \cos 4\theta_t \right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{m_{i_1}^2} \left(\frac{1}{2} C_R m_{i_2}^2 \left(-1 + \cos 4\theta_t \right) + 4C_R \left(m_{\bar{g}}^2 + m_t^2 - m_{\bar{g}} m_t \sin 2\theta_t \right) \right) \right] \\
 &\quad + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{\epsilon} \left[8 \frac{m_{\bar{g}}^2}{m_{i_1}^2} C_R n_f I_2(R) \right. \\
 &\quad \quad + \frac{1}{4} C_R \left(-3C_A + 3 \cos 4\theta_t C_A + 2C_R - 2 \cos 4\theta_t C_R + 18I_2(R) \right. \\
 &\quad \quad \left. - 2 \cos 4\theta_t I_2(R) + 2n_f I_2(R) - 2 \cos 4\theta_t n_f I_2(R) \right) \\
 &\quad \quad - \frac{1}{4m_{i_1}^2} \left(C_R m_{i_2}^2 \left(-3C_A + 3 \cos 4\theta_t C_A + 2C_R - 2 \cos 4\theta_t C_R \right. \right. \\
 &\quad \quad \left. \left. - 14I_2(R) - 2 \cos 4\theta_t I_2(R) \right. \right. \\
 &\quad \quad \left. \left. + 2n_f I_2(R) - 2 \cos 4\theta_t n_f I_2(R) \right) \right. \\
 &\quad \quad \left. - 2C_R \left(11C_A m_{\bar{g}}^2 - 6C_R m_{\bar{g}}^2 + 3C_A m_t^2 - 2C_R m_t^2 \right. \right. \\
 &\quad \quad \left. \left. - 6C_A m_{\bar{g}} m_t \sin 2\theta_t + 4C_R m_{\bar{g}} m_t \sin 2\theta_t \right. \right. \\
 &\quad \quad \left. \left. - 6m_{\bar{g}}^2 I_2(R) + 2m_t^2 I_2(R) - 6m_{\bar{g}}^2 n_f I_2(R) - 2m_t^2 n_f I_2(R) \right. \right. \\
 &\quad \quad \left. \left. + 4m_{\bar{g}} m_t \sin 2\theta_t I_2(R) + 4m_{\bar{g}} m_t n_f \sin 2\theta_t I_2(R) \right) \right) \left. \right] \\
 &\quad + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{\epsilon^2 (m_{i_1}^2 - m_{i_2}^2)} \left[\frac{1}{8} C_R^2 m_{i_1}^2 \left(1 - \cos 8\theta_t \right) \right. \\
 &\quad \quad - \frac{1}{4} C_R^2 m_{i_2}^2 \left(1 - \cos 8\theta_t \right) - 2C_R^2 m_{\bar{g}} m_t \left(\sin 2\theta_t + \sin 6\theta_t \right) \\
 &\quad \quad + \frac{1}{m_{i_1}^2} \left(\frac{1}{8} C_R^2 m_{i_2}^4 \left(1 - \cos 8\theta_t \right) + 8C_R^2 m_{\bar{g}}^2 m_t^2 \left(1 + \cos 4\theta_t \right) \right. \\
 &\quad \quad \left. \left. + 2C_R^2 m_{\bar{g}} m_{i_2}^2 m_t \left(\sin 2\theta_t + \sin 6\theta_t \right) \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{\epsilon^2} \left[\frac{1}{4} C_R \left(1 - \cos 4\theta_t \right) \left(3C_A + 2C_R - 2I_2(R) - 2n_f I_2(R) \right) \right. \\
 & \quad - \frac{1}{m_{\tilde{t}_1}^2} \left(\frac{m_{\tilde{t}_2}^2}{4} C_R \left(1 - \cos 4\theta_t \right) \left(3C_A + 2C_R - 2I_2(R) - 2n_f I_2(R) \right) \right) \\
 & \quad - 2C_R \left(9C_A m_{\tilde{g}}^2 + 3C_A m_t^2 + 4C_R m_t^2 - 6C_A m_{\tilde{g}} m_t \sin 2\theta_t \right. \\
 & \quad - 4C_R m_{\tilde{g}} m_t \sin 2\theta_t - 6m_{\tilde{g}}^2 I_2(R) - 2m_t^2 I_2(R) - 6m_{\tilde{g}}^2 n_f I_2(R) \\
 & \quad \left. \left. - 2m_t^2 n_f I_2(R) + 4m_{\tilde{g}} m_t \sin 2\theta_t I_2(R) + 4m_{\tilde{g}} m_t n_f \sin 2\theta_t I_2(R) \right) \right] , \\
 & \tag{2.21}
 \end{aligned}$$

$$m_{\tilde{t}_2}^{0^2} = Z_{m_{\tilde{t}_2}} m_{\tilde{t}_2}^2 ,$$

$$\begin{aligned}
 Z_{m_{\tilde{t}_2}} & = 1 + \frac{\alpha_s}{4\pi} \frac{1}{\epsilon} \left[\frac{1}{2} C_R \left(-1 + \cos 4\theta_t \right) - \frac{m_{\tilde{t}_1}^2}{2m_{\tilde{t}_2}^2} C_R \left(-1 + \cos 4\theta_t \right) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{4}{m_{\tilde{t}_2}^2} C_R \left(m_{\tilde{g}}^2 + m_t^2 + m_{\tilde{g}} m_t \sin 2\theta_t \right) \right] \\
 & + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{\epsilon} \left[8 \frac{m_{\tilde{g}}^2}{m_{\tilde{t}_2}^2} C_R n_f I_2(R) \right. \\
 & \quad - \frac{1}{4m_{\tilde{t}_2}^2} C_R m_{\tilde{t}_1}^2 \left(-3C_A + 3 \cos 4\theta_t C_A + 2C_R - 2 \cos 4\theta_t C_R \right. \\
 & \quad \left. - 14I_2(R) - 2 \cos 4\theta_t I_2(R) + 2n_f I_2(R) - 2 \cos 4\theta_t n_f I_2(R) \right) \\
 & \quad + \frac{1}{4} C_R \left(-3C_A + 3 \cos 4\theta_t C_A + 2C_R - 2 \cos 4\theta_t C_R \right. \\
 & \quad \left. + 18I_2(R) - 2 \cos 4\theta_t I_2(R) + 2n_f I_2(R) - 2 \cos 4\theta_t n_f I_2(R) \right) \\
 & \quad - \frac{2}{m_{\tilde{t}_2}^2} C_R \left(11C_A m_{\tilde{g}}^2 - 6C_R m_{\tilde{g}}^2 + 3C_A m_t^2 - 2C_R m_t^2 \right. \\
 & \quad + 6C_A m_{\tilde{g}} m_t \sin 2\theta_t - 4C_R m_{\tilde{g}} m_t \sin 2\theta_t - 6m_{\tilde{g}}^2 I_2(R) \\
 & \quad + 2m_t^2 I_2(R) - 6m_{\tilde{g}}^2 n_f I_2(R) - 2m_t^2 n_f I_2(R) \\
 & \quad \left. \left. - 4m_{\tilde{g}} m_t \sin 2\theta_t I_2(R) - 4m_{\tilde{g}} m_t n_f \sin 2\theta_t I_2(R) \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{\epsilon^2 (m_{\tilde{t}_1}^2 - m_{\tilde{t}_2}^2)} \left(\frac{m_{\tilde{t}_1}^4}{8m_{\tilde{t}_2}^2} C_R^2 \left(-1 + \cos 8\theta_t \right) - \frac{m_{\tilde{t}_2}^2}{8} C_R^2 \left(1 - \cos 8\theta_t \right) \right. \\
 & \quad - \frac{m_{\tilde{g}}^2 m_t^2}{m_{\tilde{t}_2}^2} C_R^2 \left(1 + \cos 4\theta_t \right) - 2C_R^2 m_{\tilde{g}} m_t \left(\sin 2\theta_t + \sin 6\theta_t \right) \\
 & \quad \left. + m_{\tilde{t}_1}^2 \left(\frac{1}{4} C_R^2 \left(1 - \cos 8\theta_t \right) + \frac{2m_{\tilde{g}} m_t}{m_{\tilde{t}_2}^2} C_R^2 \left(\sin 2\theta_t + \sin 6\theta_t \right) \right) \right) \\
 & + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{\epsilon^2} \left[\frac{1}{4} \left(1 - \cos 4\theta_t \right) C_R \left(3C_A + 2C_R - 2I_2(R) - 2n_f I_2(R) \right) \right. \\
 & \quad - \frac{m_{\tilde{t}_1}^2}{4m_{\tilde{t}_2}^2} \left(1 - \cos 4\theta_t \right) C_R \left(3C_A + 2C_R - 2I_2(R) - 2n_f I_2(R) \right) \\
 & \quad + \frac{2}{m_{\tilde{t}_2}^2} C_R \left(9C_A m_{\tilde{g}}^2 + 3C_A m_t^2 + 4C_R m_t^2 + 6C_A m_{\tilde{g}} m_t \sin 2\theta_t \right. \\
 & \quad + 4C_R m_{\tilde{g}} m_t \sin 2\theta_t - 6m_{\tilde{g}}^2 I_2(R) - 2m_t^2 I_2(R) - 6m_{\tilde{g}}^2 n_f I_2(R) \\
 & \quad \left. \left. - 2m_t^2 n_f I_2(R) - 4m_{\tilde{g}} m_t \sin 2\theta_t I_2(R) - 4m_{\tilde{g}} m_t n_f \sin 2\theta_t I_2(R) \right) \right] \\
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

Renormierung von A_t

Zur Renormierung der trilinearen Higgs-Stop-Kopplung A_t bietet es sich an, A_t mit Hilfe der Gleichung (2.9) durch die Parameter m_t , $m_{\tilde{t}_{1,2}}$, θ_t , μ_H und β auszudrücken:

$$A_t = \mu_H \cot \beta + \sin 2\theta_t \frac{m_{\tilde{t}_1}^2 - m_{\tilde{t}_2}^2}{2m_t}. \tag{2.23}$$

Die Größen m_t , $m_{\tilde{t}_{1,2}}$ und θ_t treten sowieso in den Diagrammen auf und müssen renormiert werden, und μ_H und β erfahren keine $\mathcal{O}(\alpha_s)$ Korrekturen.

2.5 Diskussion der Ergebnisse

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der Rechnungen präsentiert.

Für die numerische Auswertung muss zunächst der Wert der starken Kopplung $\alpha_s(\mu)$ für die jeweilige Renormierungsskala μ berechnet werden. Dabei wird wie in [35]

vorgegangen: Ausgangspunkt ist $\alpha_s^{\overline{\text{MS}},(5)}(M_Z) = 0.1189$ [90] in der QCD mit fünf aktiven Quarks. Über die Renormierungsgruppengleichung wird daraus $\alpha_s^{\overline{\text{MS}},(5)}(\mu_{\text{dec}})$, der Wert an der Skala μ_{dec} , an der der Übergang zwischen Fünf-Flavour-QCD und dem MSSM vollzogen wird, berechnet. An dieser Skala wird der Übergang ins $\overline{\text{DR}}$ Schema und in die volle Theorie vollzogen, also $\alpha_s(\mu_{\text{dec}}) \equiv \alpha_s^{\overline{\text{DR}},\text{full}}(\mu_{\text{dec}})$ berechnet. Durch erneute Anwendung der Renormierungsgruppengleichung erhält man $\alpha_s(\mu)$.

Die Top-Masse im on-shell Schema beträgt $M_t = 172.4 \pm 1.2 \text{ GeV}$ [91]. Zur Auswertung der Ergebnisse im $\overline{\text{DR}}$ Schema wurde daraus $m_t(m_t)$ im $\overline{\text{DR}}$ Schema auf Zweischleifen-Niveau berechnet. Die Relation zwischen on-shell und $\overline{\text{DR}}$ Masse findet sich in [92]. Die numerische Auswertung erfolgt mit der c Bibliothek TSIL [93]. An dieser Stelle sei Steve Martin für das Bereitstellen einiger Formeln aus [92] in elektronischer Form gedankt.

Weitere Input-Parameter sind $M_Z = 91.1876 \text{ GeV}$ und $G_F = 1.16637 \cdot 10^{-5}$ [94]. Wenn nicht explizit angegeben, werden für M_A und $\tan \beta$ die Werte $M_A = 1 \text{ TeV}$, $\tan \beta = 40$ angenommen und die Renormierungsskala $\mu = m_t$ (bzw. $\mu = M_t$ falls die Top-Masse on-shell renormiert wird) gewählt.

Aufgetragen wird jeweils die Größe $\Delta M_h^{(n)}$, definiert als die Differenz der Masse M_h des leichten Higgs auf n -Schleifen-Niveau und M_h ohne Strahlungskorrekturen (2.5).

2.5.1 Ergebnisse für degeneriertes Massenspektrum

Als Erstes wird ein Szenario untersucht, in dem Stops, Gluinos und Squarks die gleiche Masse, m_{SUSY} , haben (2.12a).

Da insbesondere $m_{\tilde{t}_1}$ und $m_{\tilde{t}_2}$ entartet sind, ist hier $\theta_t = 0$. Da der renormierte Mischungswinkel nicht proportional zum nackten ist, müssen die Diagramme trotzdem mit endlichem Mischungswinkel berechnet werden. Da θ_t nach (2.22) Korrekturen proportional zu $\frac{1}{m_{\tilde{t}_1}^2 - m_{\tilde{t}_2}^2}$ bekommt, dürfen auch die Stop-Massen vor der Renormierung nicht identifiziert werden. Stattdessen wurde der \tilde{t}_2 Propagator nach

$$\frac{1}{m_{\tilde{t}_2}^2 - p^2} = \frac{1}{m_{\tilde{t}_1}^2 - p^2} \frac{1}{1 - \frac{m_{\tilde{t}_1}^2 - m_{\tilde{t}_2}^2}{m_{\tilde{t}_1}^2 - p^2}} = \frac{1}{m_{\tilde{t}_1}^2 - p^2} \sum_{n \geq 0} \left[\left(m_{\tilde{t}_1}^2 - m_{\tilde{t}_2}^2 \right) \frac{1}{m_{\tilde{t}_1}^2 - p^2} \right]^n \quad (2.24)$$

bis $n = 2$ entwickelt. Nach der Renormierung vollzieht man den Limes $m_{\tilde{t}_2} \rightarrow m_{\tilde{t}_1}$, wobei der Mischungswinkel verschwindet.

Für die Korrekturen zur Massenmatrix erhält man

$$\begin{aligned}
 \hat{\Sigma}_{\phi_1} &= \frac{G_F m_t^4 \sqrt{2}}{\cos \beta^2 \pi^2} \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^2 \frac{A_t^2}{m_{\text{SUSY}}^2} \left[-\frac{349}{9} + \frac{32}{9} L_{\mu t} + \frac{32}{9} L_{\mu t}^2 \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{56}{9} + \frac{64}{9} L_{\mu t} \right) L_{tS} + \frac{32}{9} L_{tS}^2 + \frac{94}{3} \zeta_3 \right], \\
 \hat{\Sigma}_{\phi_2} &= \frac{G_F m_t^4 \sqrt{2}}{\pi^2 \sin \beta^2} \left[\frac{3}{2} L_{tS} \right. \\
 &\quad + \frac{\alpha_s}{4\pi} \left(4 + \left(4 + 16 L_{\mu t} \right) L_{tS} + 4 L_{tS}^2 + \frac{A_t}{m_{\text{SUSY}}} \left(4 + 8 L_{\mu t} + 4 L_{tS} \right) \right) \\
 &\quad + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^2 \left(\frac{2492}{27} + \frac{2044}{27} L_{\mu t} - \frac{136}{3} L_{\mu t}^2 + \left(-\frac{884}{9} + \frac{164}{3} L_{\mu t} \right) L_{tS}^2 + \frac{112}{3} L_{tS}^3 \right. \\
 &\quad + L_{tS} \left(\frac{4264}{27} - \frac{644}{9} L_{\mu t} + \frac{328}{3} L_{\mu t}^2 - 16 \zeta_3 \right) + \frac{428}{3} \zeta_3 \\
 &\quad + \frac{A_t}{m_{\text{SUSY}}} \left(\frac{3472}{27} + \frac{728}{27} L_{\mu t} + \frac{200}{3} L_{\mu t}^2 \right. \\
 &\quad \left. + \left(-\frac{664}{27} + \frac{800}{9} L_{\mu t} \right) L_{tS} + \frac{488}{9} L_{tS}^2 - \frac{212}{3} \zeta_3 \right) \\
 &\quad \left. + \frac{A_t^2}{m_{\text{SUSY}}^2} \left(-\frac{349}{9} + \frac{32}{9} L_{\mu t} + \frac{32}{9} L_{\mu t}^2 + \left(\frac{56}{9} + \frac{64}{9} L_{\mu t} \right) L_{tS} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{32}{9} L_{tS}^2 + \frac{94}{3} \zeta_3 \right) \right], \\
 \hat{\Sigma}_{\phi_1 \phi_2} &= \frac{G_F m_t^4 \sqrt{2}}{\cos \beta \pi^2 \sin \beta} \left[\frac{\alpha_s}{4\pi} \frac{A_t}{m_{\text{SUSY}}} \left(-2 - 4 L_{\mu t} - 2 L_{tS} \right) \right. \\
 &\quad + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^2 \left(\frac{A_t}{m_{\text{SUSY}}} \left(-\frac{1736}{27} - \frac{364}{27} L_{\mu t} - \frac{100}{3} L_{\mu t}^2 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \left(\frac{332}{27} - \frac{400}{9} L_{\mu t} \right) L_{tS} - \frac{244}{9} L_{tS}^2 + \frac{106}{3} \zeta_3 \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{A_t^2}{m_{\text{SUSY}}^2} \left(\frac{349}{9} - \frac{32}{9} L_{\mu t} - \frac{32}{9} L_{\mu t}^2 + \left(-\frac{56}{9} - \frac{64}{9} L_{\mu t} \right) L_{tS} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{32}{9} L_{tS}^2 - \frac{94}{3} \zeta_3 \right) \right], \tag{2.25}
 \end{aligned}$$

wobei $L_{\mu t} = \ln \frac{\mu^2}{m_t^2}$, $L_{tS} = \frac{m_t^2}{m_{\text{SUSY}}^2}$ ist und m_t und m_{SUSY} die Massen im $\overline{\text{DR}}$ Schema sind. Um daraus die Korrekturen zu M_h zu bestimmen, setzt man (2.25) in (2.11) ein und diagonalisiert die Massenmatrix numerisch.

Beschränkt man sich auf den Fall $A_t = 0$, so kann man die Renormierung der Parameter auch on-shell durchführen. Für $A_t \neq 0$ scheitert dies an der Renormierung des Mischungswinkels: der $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ Beitrag ist on-shell nicht bekannt, geht aber nur in die A_t -Terme ein. Die benötigten on-shell Renormierungskonstanten befinden sich in Anhang D.

Für $A_t = 0$ verschwinden $\hat{\Sigma}_{\phi_1}$ und $\hat{\Sigma}_{\phi_1\phi_2}$, und man erhält für $\hat{\Sigma}_{\phi_2}$ im on-shell Schema

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}_{\phi_2} = & \frac{G_F M_t^4 \sqrt{2}}{\pi^2 \sin \beta^2} \left[\frac{3}{2} L_{tS} + \frac{\alpha_s}{4\pi} \left(-24 L_{tS} + 12 L_{tS}^2 \right) \right. \\ & + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^2 \left(-\frac{4501}{9} + \left(82 + 36 L_{\mu t} \right) L_{tS}^2 + 44 L_{tS}^3 + \frac{616}{3} \zeta_2 + \frac{428}{3} \zeta_3 \right. \\ & \left. \left. + L_{tS} \left(-248 - 72 L_{\mu t} - 32 \zeta_2 - 64 \ln 2 \zeta_2 \right) \right) \right], \end{aligned} \quad (2.26)$$

wobei hier $L_{\mu t} = \ln \frac{\mu^2}{M_t^2}$ und $L_{tS} = \frac{M_t^2}{M_{\text{susy}}^2}$ ist [95]. Dabei ist anzumerken, dass es nicht konsistent ist, A_t schon vor der Renormierung auf Null zu setzen, da die Renormierung von A_t auch Terme liefert, die nicht proportional zu A_t sind.

In den Abbildungen 2.5 und 2.6 ist die Abhängigkeit vom Renormierungsschema, in dem die Massen des Top Quarks und der SUSY-Teilchen renormiert werden, dargestellt. Abbildung 2.5 zeigt den Vergleich zwischen on-shell und $\overline{\text{DR}}$ Schema. Man erkennt, dass die Abhängigkeit vom gewählten Schema von Ordnung zu Ordnung rapide abnimmt. Außerdem wird deutlich, dass der große Unterschied auf Einschleifen-Niveau fast ausschließlich von der unterschiedlichen Top-Masse verursacht wird.

Die Abhängigkeit von der Renormierungsskala wird in Abbildung 2.6 gezeigt. Bei einer Variation von μ im Bereich von 100 – 1000 GeV ändert sich das Zweischleifen-Ergebnis um mehr als ein GeV. Auf Dreischleifen-Niveau verringert sich die Variation deutlich und liegt unter 60 MeV.

2.5.2 Masselose Gluinos

Im Fall masseloser Gluinos verschwinden $\hat{\Sigma}_{\phi_1}$ und $\hat{\Sigma}_{\phi_1\phi_2}$. Für $\hat{\Sigma}_{\phi_2}$ erhält man im $\overline{\text{DR}}$ Schema

$$\hat{\Sigma}_{\phi_2} = \frac{G_F m_t^4 \sqrt{2}}{\pi^2 \sin \beta^2} \left[\frac{3}{2} L_{tS} + \frac{\alpha_s}{4\pi} \left(8 + 8 L_{\mu t} + \left(8 + 16 L_{\mu t} \right) L_{tS} + 4 L_{tS}^2 \right) \right]$$

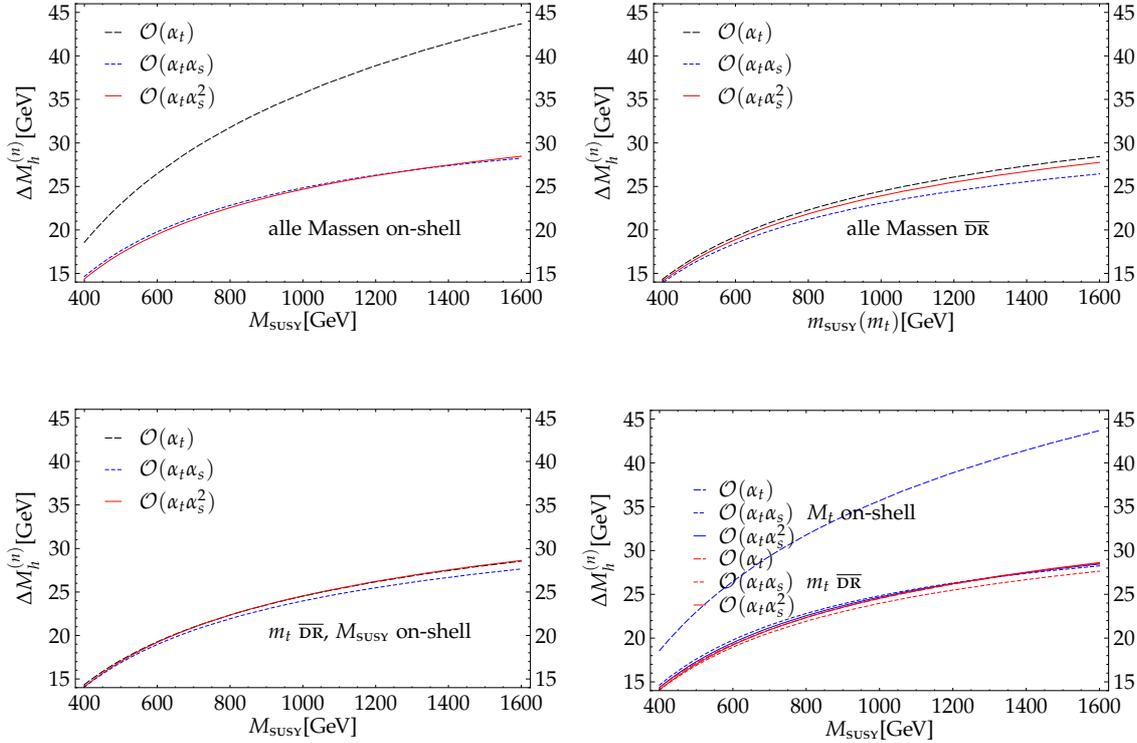


Abbildung 2.5: Schemenabhängigkeit für entartetes susy-Spektrum. Im Schaubild links oben sind die Massen der susy-Teilchen und des Top Quarks on-shell renormiert, rechts daneben im $\overline{\text{DR}}$ Schema. Man erkennt, dass der Sprung von den Ein- zu den Zweischleifen-Korrekturen im on-shell Schema sehr viel größer ist. Ursache dafür ist die Top-Masse, die im $\overline{\text{DR}}$ Schema kleiner ist. Für den Graphen links unten wurde nur m_t im $\overline{\text{DR}}$ Schema renormiert, um zu demonstrieren, daß die Unterschiede zwischen $\overline{\text{DR}}$ und on-shell Renormierung zum Großteil von m_t stammen. Im vierten Schaubild werden die Ergebnisse im on-shell Schema und mit m_t im $\overline{\text{DR}}$ Schema zusammen dargestellt. Dabei wurde für beide Fälle $\alpha_s(\mu)$ bei $\mu = M_t$ ausgewertet. Man erkennt hier sehr schön, wie die Abhängigkeit vom Renormierungsschema von Ordnung zu Ordnung abnimmt.

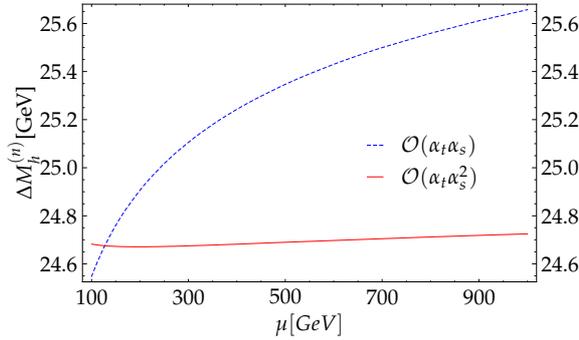


Abbildung 2.6: Abhängigkeit der Korrekturen zur Higgs-Masse von der Renormierungsskala im on-shell Schema. Da α_s die einzige Quelle für die μ -Abhängigkeit ist, sind die $\mathcal{O}(\alpha_t)$ Korrekturen μ unabhängig und werden hier nicht dargestellt. Hier wurde $A_t = 0$, $m_{\text{susy}} = 1$ TeV gewählt.

$$\begin{aligned}
 & + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^2 \left(-\frac{2845}{9} + 208L_{\mu t} + \frac{292}{3}L_{\mu t}^2 + \left(-\frac{148}{3} + \frac{164}{3}L_{\mu t} \right) L_{tS}^2 \right. \\
 & \quad + \frac{88}{3}L_{tS}^3 - \frac{892}{9}\zeta_2 + \frac{1580}{3}\zeta_3 \\
 & \quad \left. + \left(\frac{352}{3} + 72L_{\mu t} + \frac{328}{3}L_{\mu t}^2 - 80\zeta_2 - 16\zeta_3 \right) L_{tS} \right) \Big], \quad (2.27)
 \end{aligned}$$

und im on-shell Schema (für $A_t = 0$) [95]

$$\begin{aligned}
 \hat{\Sigma}_{\phi_2} = & \frac{G_F m_t^4 \sqrt{2}}{\pi^2 \sin^2 \beta^2} \left[\frac{3}{2}L_{tS} + \frac{\alpha_s}{4\pi} \left(-6 - 24L_{tS} + 12L_{tS}^2 \right) \right. \\
 & + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^2 \left(-\frac{4744}{9} - 18L_{\mu t} + \left(6 + 36L_{\mu t} \right) L_{tS}^2 + 60L_{tS}^3 \right. \\
 & \quad + \frac{368}{9}\zeta_2 + \frac{1604}{3}\zeta_3 \\
 & \quad \left. \left. + \left(-282 - 72L_{\mu t} + 64\zeta_2 - 64 \ln 2\zeta_2 \right) L_{tS} \right) \right]. \quad (2.28)
 \end{aligned}$$

In Abbildung 2.7 werden die Ergebnisse im Vergleich zum entarteten susy-Spektrum gezeigt. Es ergeben sich Unterschiede von bis zu 4 GeV, die jedoch hauptsächlich durch die implizite $m_{\tilde{g}}$ -Abhängigkeit von M_h über m_t verursacht werden. Die explizite Abhängigkeit von $m_{\tilde{g}}$ ist winzig, wie man am rechten Schaubild in Abbildung 2.7 sieht.

2.5.3 Schwere Squarks

Nun soll untersucht werden, was es für einen Effekt hat, wenn die Superpartner der leichten Squarks schwer im Vergleich zu den restlichen susy-Teilchen sind (2.12c). Man entwickelt dazu im als klein angenommenen Massenverhältnis $m_{\text{susy}}^2 m_{\tilde{q}}^{-2}$, wobei m_{susy} hier für die Masse der Gluinos und Stops steht.

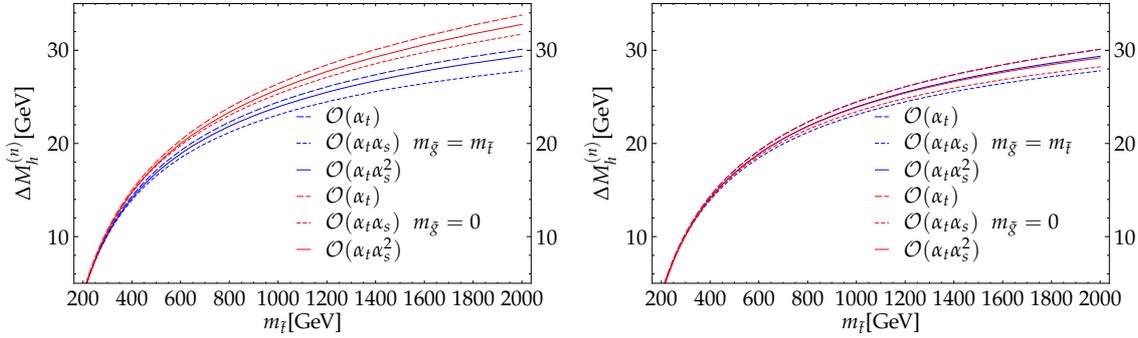


Abbildung 2.7: Vergleich der Ergebnisse für entartetes susy-Spektrum und den Fall $m_{\tilde{g}} = 0$. Der Unterschied in den Einschleifen-Kurven mag auf den ersten Blick überraschen, da Gluinos erst ab der zweiten Schleife auftreten, erklärt sich aber durch die implizite Abhängigkeit über m_t im $\overline{\text{DR}}$ Schema. Zum Vergleich wurde im rechten Graphen für beide Fälle die gleiche Top-Masse benutzt. Die explizite Abhängigkeit von $m_{\tilde{g}}$ ist überraschend gering.

Im $\overline{\text{DR}}$ Schema tritt dabei in den Dreischleifen-Korrekturen ein Term proportional $m_{\tilde{q}}^2 m_{\text{SUSY}}^{-2}$ auf, der dafür sorgt, dass diese in dem Bereich, in dem der Entwicklungsparameter $m_{\text{SUSY}}^2 m_{\tilde{q}}^{-2}$ klein wird, besonders groß werden.

Der entsprechende Beitrag zu $\hat{\Sigma}_{\phi_2}$ lautet

$$\frac{G_F m_t^4}{\sqrt{2} \pi^2 \sin^2 \beta^2} \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^2 \frac{m_{\tilde{q}}^2}{m_{\text{SUSY}}^2} \left(160 \ln \frac{\mu^2}{m_{\tilde{q}}^2} + 160 \zeta_2 - 80 \right) \quad (2.29)$$

und entspringt den Diagrammen aus Abbildung 2.8. Im on-shell Schema wird er durch den endlichen Beitrag der Stop-Massen Counterterme kompensiert, und in der Tat kann man die Beiträge proportional $m_{\tilde{q}}^2 m_{\text{SUSY}}^{-2}$ beseitigen, indem man die entsprechenden Diagramme in den Renormierungskonstanten der Stop-Massen on-shell renormiert. Das entspricht der folgenden endlichen Änderung der Stop-Massen:

$$m_{\tilde{t}_{1,2}}^2 \rightarrow m_{\tilde{t}_{1,2}}^2 + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^2 m_{\tilde{q}}^2 \left(\frac{160}{3} \ln \frac{\mu^2}{m_{\tilde{q}}^2} + \frac{160}{3} \zeta_2 - \frac{80}{3} \right). \quad (2.30)$$

Damit erhält man für die Korrekturen zur Massenmatrix

$$\hat{\Sigma}_{\phi_1} = \frac{G_F m_t^4 \sqrt{2}}{\cos^2 \beta^2 \pi^2} \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^2 \frac{A_t^2}{m_{\text{SUSY}}^2} \left[-\frac{349}{9} + \frac{32}{9} L_{\mu t} + \frac{32}{9} L_{\mu t}^2 + \left(\frac{56}{9} + \frac{64}{9} L_{\mu t} \right) L_{tS} + \frac{32}{9} L_{tS}^2 + \frac{94}{3} \zeta_3 \right],$$

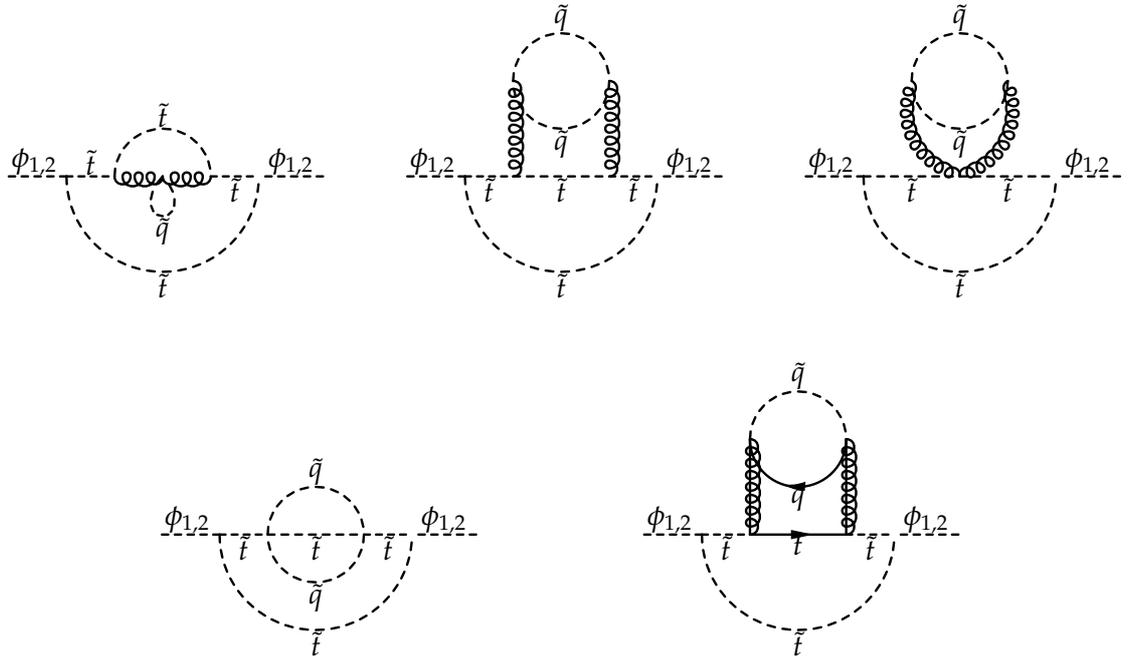


Abbildung 2.8: Dreischleifen-Diagramme, die einen Beitrag zur Higgs-Masse proportional $m_{\tilde{q}}^2 m_{\tilde{t}}^{-2}$ liefern.

$$\hat{\Sigma}_{\phi_2} = \frac{G_F m_t^4 \sqrt{2}}{\pi^2 \sin^2 \beta} \left[\frac{3}{2} L_{tS} + \frac{\alpha_s}{4\pi} \left(4 + (4 + 16L_{\mu t}) L_{tS} + 4L_{tS}^2 + \frac{A_t}{m_{\text{SUSY}}} (4 + 8L_{\mu t} + 4L_{tS}) \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2 \left(\frac{2764}{9} - \frac{116}{27}L_{\mu t} - \frac{136}{3}L_{\mu t}^2 + \left(-\frac{644}{9} + \frac{164}{3}L_{\mu t} \right) L_{tS}^2 \right. \\
 & \quad + 24L_{tS}^3 + \frac{400}{3}L_{t\bar{q}} - \frac{200}{3}L_{t\bar{q}}^2 - \frac{20}{3}L_{t\bar{q}}^3 - 120\zeta_2 - 80L_{t\bar{q}}\zeta_2 + \frac{8}{3}\zeta_3 \\
 & \quad - \left. \left(\frac{2216}{27} + \frac{644}{9}L_{\mu t} - \frac{328}{3}L_{\mu t}^2 - 40L_{t\bar{q}} - 20L_{t\bar{q}}^2 - 40\zeta_2 + 16\zeta_3 \right) L_{tS} \right. \\
 & \quad + \frac{m_{\text{SUSY}}^2}{m_{\bar{q}}^2} \left(\frac{42356}{225} + 8L_{tS}^2 - \frac{2128}{45}L_{t\bar{q}} - \frac{176}{3}L_{t\bar{q}}^2 \right. \\
 & \quad \quad \left. + \left(\frac{3928}{45} + \frac{152}{3}L_{t\bar{q}} \right) L_{tS} - \frac{400}{3}\zeta_2 \right) \\
 & \quad + \frac{A_t m_{\text{SUSY}}}{m_{\bar{q}}^2} \left(-80 + L_{tS} \left(-\frac{320}{9} - \frac{80}{3}L_{t\bar{q}} \right) \right. \\
 & \quad \quad \left. + \frac{320}{9}L_{t\bar{q}} + \frac{80}{3}L_{t\bar{q}}^2 + \frac{160}{3}\zeta_2 \right) \\
 & \quad + \frac{A_t}{m_{\text{SUSY}}} \left(\frac{832}{27} + \frac{728}{27}L_{\mu t} + \frac{200}{3}L_{\mu t}^2 + \frac{608}{9}L_{tS}^2 \right. \\
 & \quad \quad + L_{tS} \left(\frac{1256}{27} + \frac{800}{9}L_{\mu t} - \frac{160}{3}L_{t\bar{q}} \right) \\
 & \quad \quad \left. - \frac{400}{9}L_{t\bar{q}} + 40L_{t\bar{q}}^2 + 80\zeta_2 - \frac{212}{3}\zeta_3 \right) \\
 & \quad + \frac{A_t^2}{m_{\text{SUSY}}^2} \left(-\frac{349}{9} + \frac{32}{9}L_{\mu t} + \frac{32}{9}L_{\mu t}^2 + \left(\frac{56}{9} + \frac{64}{9}L_{\mu t} \right) L_{tS} \right. \\
 & \quad \quad \left. + \frac{32}{9}L_{tS}^2 + \frac{94}{3}\zeta_3 \right) \left. \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{\Sigma}_{\phi_1\phi_2} & = \frac{G_F m_t^4 \sqrt{2}}{\cos \beta \pi^2 \sin \beta} \left[\frac{\alpha_s}{4\pi} \frac{A_t}{m_{\text{SUSY}}} \left(-2 - 4L_{\mu t} - 2L_{tS} \right) \right. \\
 & \quad + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^2 \left(\frac{A_t^2}{m_{\text{SUSY}}^2} \left(\frac{349}{9} - \frac{32}{9}L_{\mu t} - \frac{32}{9}L_{\mu t}^2 + \left(-\frac{56}{9} - \frac{64}{9}L_{\mu t} \right) L_{tS} \right. \right. \\
 & \quad \quad \left. \left. - \frac{32}{9}L_{tS}^2 - \frac{94}{3}\zeta_3 \right) \right. \\
 & \quad + \frac{A_t m_{\text{SUSY}}}{m_{\bar{q}}^2} \left(40 - \frac{160}{9}L_{t\bar{q}} - \frac{40}{3}L_{t\bar{q}}^2 + L_{tS} \left(\frac{160}{9} + \frac{40}{3}L_{t\bar{q}} \right) - \frac{80}{3}\zeta_2 \right) \\
 & \quad + \frac{A_t}{m_{\text{SUSY}}} \left(-\frac{416}{27} - \frac{364}{27}L_{\mu t} - \frac{100}{3}L_{\mu t}^2 - \frac{304}{9}L_{tS}^2 + \frac{200}{9}L_{t\bar{q}} - 20L_{t\bar{q}}^2 \right. \\
 & \quad \left. + L_{tS} \left(-\frac{628}{27} - \frac{400}{9}L_{\mu t} + \frac{80}{3}L_{t\bar{q}} \right) - 40\zeta_2 + \frac{106}{3}\zeta_3 \right) \left. \right],
 \end{aligned}$$

wobei Terme der Ordnung $m_{\text{SUSY}}^4 m_{\tilde{q}}^{-4}$ vernachlässigt werden. Die numerische Auswertung ist in Abbildung 2.9 dargestellt.

2.5.4 Einfluss der Stop-Mischung

In allen bisher diskutierten Ergebnissen wurde von entarteten Stop-Massen ausgegangen. Diese Beschränkung soll nun aufgehoben werden. Es werden die Hierarchien (2.12d, 2.12e) betrachtet: Die Superpartner der leichten Quarks sind die schwersten Teilchen, das Gluino hat die gleiche Masse wie eines der beiden Stops, und das andere Stop ist entweder sehr viel leichter oder sehr viel schwerer. Der üblichen Konvention folgend, wird jeweils das leichtere Stop mit \tilde{t}_1 bezeichnet.

Ähnlich wie in der Rechnung in Abschnitt 2.5.3 treten auch hier Terme auf, die das Massenquadrat eines schweren Teilchens im Zähler haben. Konkret handelt es sich um Terme proportional zu

$$\frac{m_{\tilde{q}}^2}{m_{\tilde{t}_1}^2}, \quad \frac{m_{\tilde{q}}^2}{m_{\tilde{t}_2}^2} \quad \text{und} \quad \frac{m_{\tilde{t}_2}^2}{m_{\tilde{t}_1}^2}. \quad (2.31)$$

Analog zu (2.30) beseitigt man sie durch den Übergang

$$m_{\tilde{t}_1}^2 \rightarrow m_{\tilde{t}_1}^2 + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2 \left[m_{\tilde{t}_2}^2 \left(\frac{16}{3} \ln \frac{\mu^2}{m_{\tilde{t}_2}^2} + \frac{16}{3} \zeta_2 - \frac{8}{3} \right) + m_{\tilde{q}}^2 \left(\frac{160}{3} \ln \frac{\mu^2}{m_{\tilde{q}}^2} + \frac{160}{3} \zeta_2 - \frac{80}{3} \right) \right], \quad (2.32)$$

$$m_{\tilde{t}_2}^2 \rightarrow m_{\tilde{t}_2}^2 + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2 m_{\tilde{q}}^2 \left(\frac{160}{3} \ln \frac{\mu^2}{m_{\tilde{q}}^2} + \frac{160}{3} \zeta_2 - \frac{80}{3} \right). \quad (2.33)$$

Bei der Rechnung mit endlichem Mischungswinkel θ_t ist zu beachten, dass über die Ersetzung von A_t nach (2.23) Terme der Form $\frac{\sin 2\theta_t}{m_t}$, also negative Potenzen von m_t eingeführt werden. Da insgesamt nur bis zur Ordnung m_t^4 konsistent entwickelt wurde, sind Terme proportional $m_t^i \sin^j 2\theta_t$ mit $i + j > 4$ nicht korrekt und müssen verworfen werden. Anders ausgedrückt: $\sin 2\theta_t$ ist proportional zu m_t und muss beim Zählen der Potenzen von m_t berücksichtigt werden. Tut man dies nicht, werden die Ergebnisse für die Korrekturen zur Higgs-Massenmatrix nicht endlich.

Da die Ergebnisse, selbst wenn man sich auf den führenden Term in der Entwicklung beschränkt, sehr lang sind, wird auf das Abdrucken der analytischen Ausdrücke verzichtet. Statt dessen wird auf die Möglichkeit verwiesen, die Ergebnisse auf Anfrage beim Autor in elektronischer Form zu erhalten.

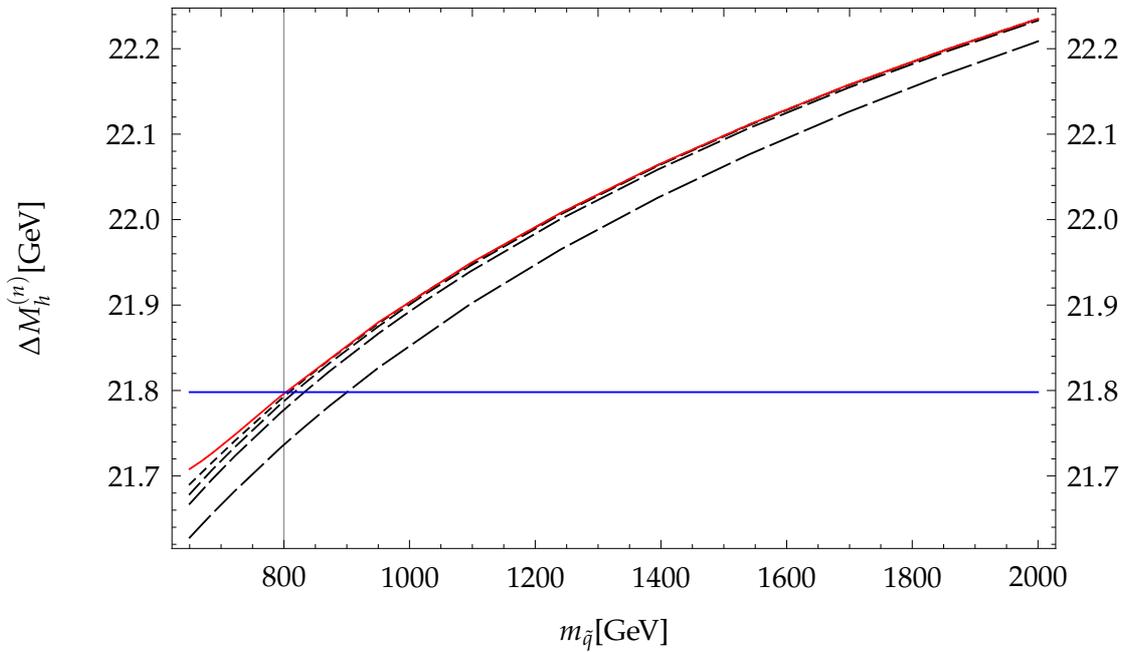


Abbildung 2.9: Abhängigkeit der Dreischleifen-Korrekturen zur Higgs-Masse von der Masse $m_{\tilde{q}}$ der Superpartner der leichten Quarks. Die unterschiedlich lang gestrichelten Linien entsprechen unterschiedlichen Entwicklungstiefen in $m_{\text{SUSY}}^2 m_{\tilde{q}}^{-2}$, wobei m_{SUSY} die Masse der Stops und des Gluinos bezeichnet. Die lang gestrichelte Linie ist der konstante Term, für die durchgezogene rote Linie wurde bis $m_{\text{SUSY}}^8 / m_{\tilde{q}}^{-8}$ entwickelt. Zum Vergleich ist in Blau der Wert eingetragen, der sich für $m_{\tilde{q}} = m_{\text{SUSY}}$ ergibt. Um diesen zu ermitteln, wurde im Ergebnis für entartetes Spektrum (2.25) die Stop-Masse nach (2.30) redefiniert. Das ist nötig, damit $m_{\tilde{t}}$ in beiden Hierarchien im gleichen Renormierungsschema behandelt wird. Es wurde $m_{\text{SUSY}} = 800 \text{ GeV}$ gewählt und $A_t = 0$ gesetzt. Man sieht, dass die Entwicklung in $m_{\text{SUSY}}^2 m_{\tilde{q}}^{-2}$ selbst für $m_{\text{SUSY}}^2 = m_{\tilde{q}}^2$ rasch konvergiert. Des Weiteren erkennt man, dass der Einfluss von $m_{\tilde{q}}$ auf M_h gering ist: eine Variation von $m_{\tilde{q}}$ um 1200 GeV bewirkt eine Änderung von ca. 400 MeV in M_h .

Nun soll zwischen den beiden Hierarchien interpoliert werden, um den Parameterbereich zwischen $m_{\tilde{t}_1} = m_{\tilde{g}} \ll m_{\tilde{t}_2}$ und $m_{\tilde{t}_1} \ll m_{\tilde{g}} = m_{\tilde{t}_2}$ abzudecken. Dabei müssen die Parameter aus der Stop-Massenmatrix (2.7), a_t , $m_{\tilde{t}_L}$ und $m_{\tilde{t}_R}$ so variiert werden, dass auch der Punkt $m_{\tilde{t}_1} = m_{\tilde{g}} = m_{\tilde{t}_2}$ erreicht wird. Zwei Möglichkeiten, dies sicherzustellen, sind:

1. Man setzt den Nebendiagonalterm $m_t a_t = 0$, hält einen der Diagonaleinträge $m_{\tilde{t}_L}$ und $m_{\tilde{t}_R}$ fest und variiert den anderen. In diesem Fall gibt es keine Stop-Mischung, $\tilde{t}_{L,R}$ sind Masseneigenzustände und für $m_{\tilde{t}_L} = m_{\tilde{t}_R}$ ist natürlich auch $m_{\tilde{t}_1} = m_{\tilde{t}_2}$. Für die Abbildungen 2.10 und 2.11 wurde dieser Ansatz gewählt und $\mu_H = 800 \text{ GeV}$, $A_t = 20 \text{ GeV}$, $\tan \beta = 40$ gesetzt, so dass der Nebendiagonaleintrag der Stop-Massenmatrix verschwindet.
2. Alternativ kann man die beiden Diagonaleinträge $m_{\tilde{t}_L}$ und $m_{\tilde{t}_R}$ identifizieren und a_t variieren. Am Punkt $a_t = 0$ verschwindet wieder der Mischungswinkel, und wegen $m_{\tilde{t}_L} = m_{\tilde{t}_R}$ sind auch die Massen von \tilde{t}_1 und \tilde{t}_2 gleich.

2.5.5 Der Referenzpunkt SPS1a'

Um die SUSY-QCD Korrekturen zur Higgs-Masse für den Referenzpunkt SPS1a' zu erhalten, wurden $\hat{\Sigma}_{\phi_1}$, $\hat{\Sigma}_{\phi_2}$ und $\hat{\Sigma}_{\phi_1\phi_2}$ für die Hierarchie

$$m_{\text{SUSY}} \equiv m_{\tilde{g}}^2 = m_{\tilde{q}}^2 = m_{\tilde{t}_2}^2 \gg m_{\tilde{t}_1}^2 \gg m_t^2. \quad (2.34)$$

berechnet. Setzt man

$$\begin{aligned} \tan \beta &= 10, \\ M_A &= 372 \text{ GeV}, \\ m_{\text{SUSY}} &= 600 \text{ GeV}, \\ m_{\tilde{t}_1} &= 366.5 \text{ GeV}, \\ \mu_H &= 396 \text{ GeV}, \\ A_t &= -565.1 \text{ GeV} \end{aligned} \quad (2.35)$$

ein, so erhält man für M_h auf n -Schleifen-Niveau

$$\begin{aligned} M_h^{(0)} &= 89.3 \text{ GeV}, \\ M_h^{(1)} &= 115.0 \text{ GeV}, \\ M_h^{(2)} &= 113.3 \text{ GeV}, \\ M_h^{(3)} &= 114.1 \text{ GeV}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

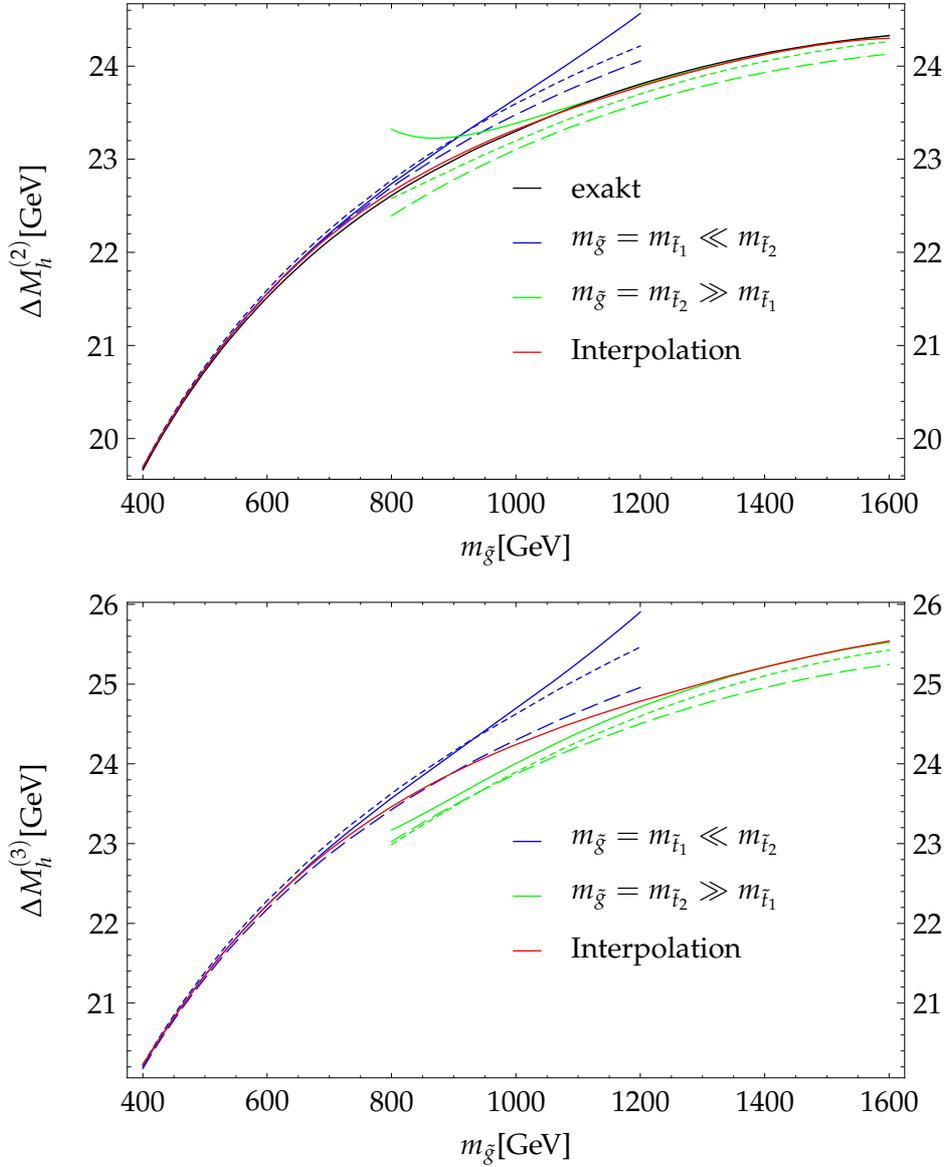


Abbildung 2.10: Interpolation zwischen den Hierarchien (2.12d) und (2.12e). Die Gluino-Masse wird simultan mit der Masse eines Stops variiert, während die Massen des anderen Stops bei 1 TeV festgehalten wird. Die Masse der anderen Squarks ist auf $m_{\tilde{q}} = 2$ TeV gesetzt. Die lang gestrichelten Linien stellen den führenden (konstanten) Term in $m_{\tilde{t}_1}^2 m_{\tilde{t}_2}^{-2}$ dar, die kurz gestrichelten den nächstführenden, und für die durchgezogenen Linien wurde bis zur Ordnung $m_{\tilde{t}_1}^4 m_{\tilde{t}_2}^{-4}$ entwickelt. Zur besseren Übersicht sind die Interpolationen noch einmal in Abbildung 2.11 dargestellt.

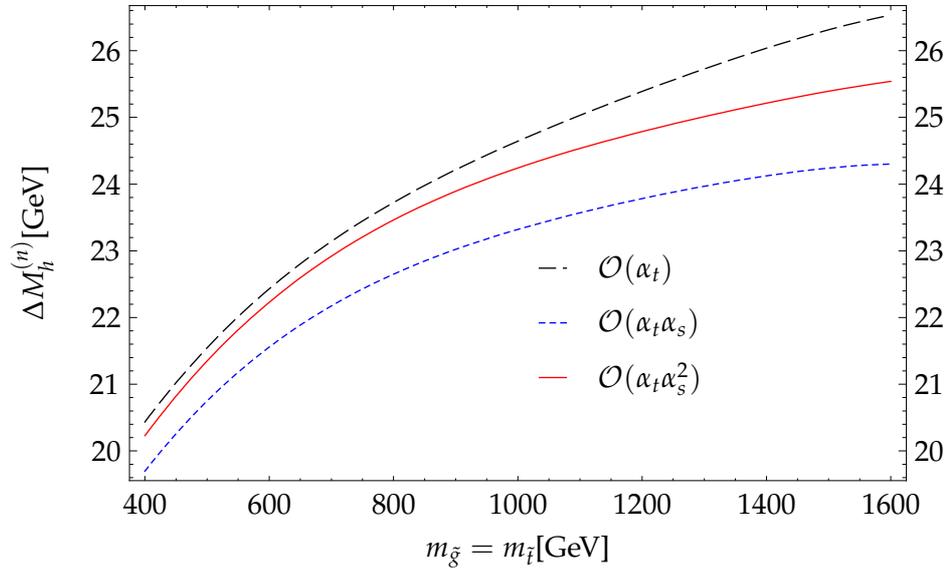


Abbildung 2.11: Ein-, Zwei- und Dreischleifen-Korrekturen zur Higgs-Masse, die sich aus der Interpolation zwischen den Hierarchien (2.12d) und (2.12e) ergeben.

2.5.6 Relevanz der A_t Terme

Nun soll diskutiert werden, wie sensitiv die Ergebnisse auf A_t sind. Dazu ist in Abbildung 2.12 $\Delta M_h^{(n)}$ für die Hierarchien (2.12c) und (2.12d) über A_t aufgetragen. Dazu ist anzumerken, dass die Massen der Stops bei der Variation von A_t festgehalten werden.

Variiert man A_t und hält dabei die anderen Parameter der Stop-Massenmatrix (2.7) μ_H , β , $m_{\tilde{t}_L}$ und $m_{\tilde{t}_R}$ konstant, so verändern sich natürlich die Massen der Stops $m_{\tilde{t}_1}$ und $m_{\tilde{t}_2}$. Dies lässt sich für die Hierarchie (2.12c) nicht durchführen, da insbesondere die Gleichung $m_{\tilde{t}_1} = m_{\tilde{t}_2}$ bei einer Änderung von A_t verletzt wird. Um dies zu verhindern, wird im linken Schaubild in Abbildung 2.12 auch μ_H variiert, so dass $a_t = 0$ ist und das Stop-Spektrum entartet bleibt. Der Effekt auf die Higgs-Masse ist dabei klein: bei einer Variation von A_t von 2 TeV ändert sich die Higgs-Masse um weniger als 150 MeV.

Für das rechte Schaubild wurden $\mu_H =$, $\tan \beta =$, $m_{\tilde{t}_1} =$ und $m_{\tilde{t}_2} =$ konstant gehalten, was eine entsprechende Änderung von $m_{\tilde{t}_L}$ und $m_{\tilde{t}_R}$ erfordert (vgl. (2.8)). Der numerische Effekt ist hier deutlich größer, M_h kann um 15 GeV variieren.

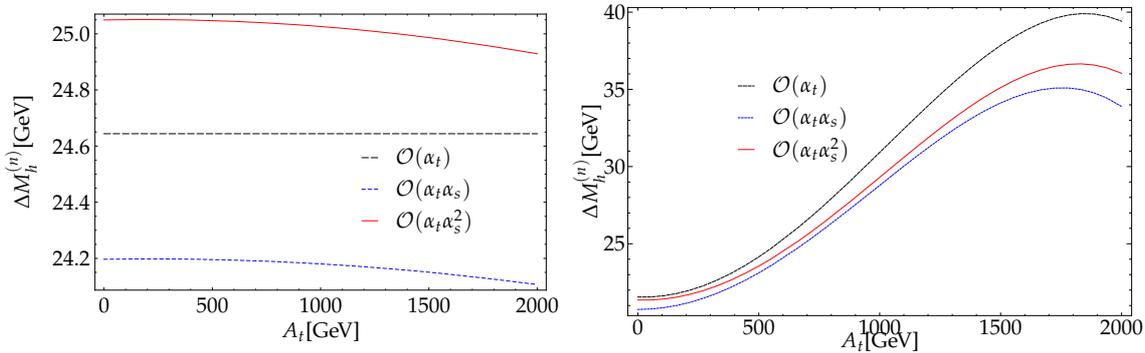


Abbildung 2.12: Abhängigkeit von A_t für die Hierarchie (2.12c) ($m_{\tilde{q}} \gg m_{\tilde{g}} = m_{\tilde{t}_{1,2}}$, links) und (2.12d) ($m_{\tilde{q}} \gg m_{\tilde{t}_2} \gg m_{\tilde{t}_1} = m_{\tilde{g}}$, rechts). Man erkennt, dass die Sensitivität auf A_t im entarteten Fall gering ist. Für den rechten Plot wurden die Massen der susy-Teilchen auf $m_{\tilde{g}} = m_{\tilde{t}_1} = 500$ GeV, $m_{\tilde{t}_2} = 1$ TeV, $m_{\tilde{q}} = 2$ TeV gesetzt. Während der Variation von A_t wurde μ_H bei 800 GeV festgehalten, so dass sich der Mischungswinkel der Stops nach (2.9) ändert. Dass $m_{\tilde{t}_1}$ und $m_{\tilde{t}_2}$ dabei unverändert bleiben wird durch eine entsprechende Änderung der Diagonaleinträge der Stop-Massenmatrix bewirkt.

2.6 Vergleich mit der Literatur

Die Korrekturen zur Higgs-Masse der Ordnung $\alpha_t \alpha_s$ sind in der Literatur verfügbar. Um den Aufbau unserer Rechnungen zu überprüfen, wurde der Zweischleifen-Anteil mit dem Literaturergebnis verglichen. Dabei war es sehr hilfreich, dass Pietro Slavich die Ergebnisse aus [62] in elektronischer Form zur Verfügung gestellt hat.

Des Weiteren konnten im Falle eines entarteten Spektrums der susy-Teilchen die Terme proportional L_{tS}^3 und L_{tS}^2 mit den Ergebnissen aus [71] verglichen werden. Dort wurden diese durch Methoden der Renormierungsgruppe hergeleitet. Die Entwicklung in L_{tS} ist in Abbildung 2.13 dargestellt.

2.7 Diskussion

Die Masse M_h des leichten neutralen Higgs-Bosons ist im mSSM eine wichtige Beobachtungsgröße. Für die experimentelle Unsicherheit bei der Messung von M_h am LHC erwartet man 100 – 200 MeV. Am geplanten internationalen Linearbeschleuniger ILC geht man sogar davon aus, die Unsicherheit auf etwa 50 MeV drücken zu können.

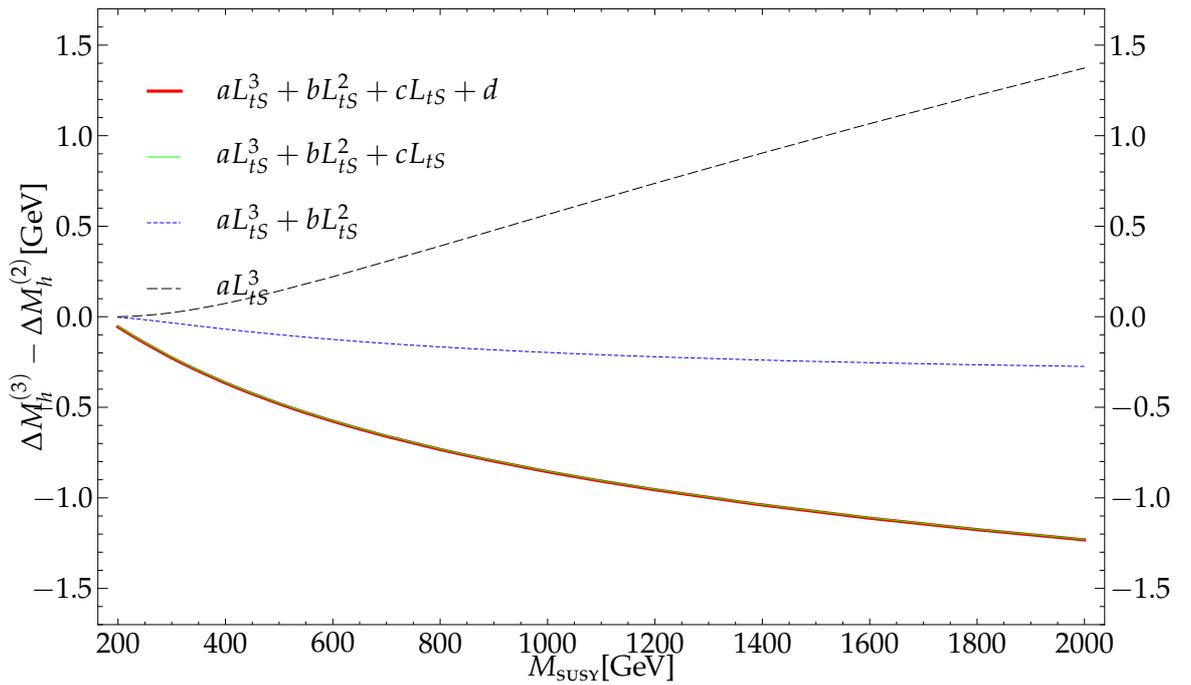


Abbildung 2.13: Entwicklung der Dreischleifen-Korrekturen zur Higgs-Masse in L_{tS} . Dieser Grafik liegt ein entartetes susy-Spektrum zugrunde. Renormiert wurde on-shell, wobei $A_t = 0$ gesetzt wurde (vgl. Gleichung (2.26)). Die Renormierungsskala wurde auf $\mu = M_{\text{SUSY}}$ gesetzt. Der führende Logarithmus L_{tS}^3 ist keine gute Näherung, da die subführenden Terme nur geringfügig kleiner sind und ein anderes Vorzeichen haben.

Da M_h große Strahlungskorrekturen erhält, ist es unabdingbar, Korrekturen höherer Ordnung zu berechnen um die gleiche Präzision in der theoretischen Vorhersage zu erreichen. Da die starke Kopplung α_s erst ab der zweiten Schleifenordnung auftritt, ist die Abhängigkeit der Zweischleifen-Korrekturen von der Renormierungsskala groß, was sich in einer geschätzten Unsicherheit von 3 – 5 GeV niederschlägt.

Durch die hier präsentierten Rechnungen dritter Ordnung konnte die Unsicherheit drastisch reduziert werden: die Variation von M_h mit μ liegt nun unter 100 MeV und ist damit um einen Faktor 10 kleiner als Schwankungen, die sich dadurch ergeben, dass die Top-Masse innerhalb ihrer Fehlerschranken variiert wird. Auch der Unterschied, der sich zwischen der Renormierung der beitragenden Massen im on-shell und $\overline{\text{DR}}$ Schema ergibt, sinkt deutlich.

Die Größe der Korrekturen zur Higgs-Masse ist abhängig vom Massenspektrum des mSSM. Die hier berechneten Beiträge der Ordnung $\alpha_t \alpha_s^2$ sind sensitiv auf die Masse des Top Quarks m_t , der Stops $m_{\tilde{t}_{1,2}}$, der Gluinos $m_{\tilde{g}}$ sowie der Squarks $m_{\tilde{q}}$. Dabei stellt sich heraus, dass in den hier betrachteten Fällen der Einfluss von $m_{\tilde{g}}$ und $m_{\tilde{q}}$ eher gering ist, während Veränderungen im Stop-Sektor sich stark auf die Higgs-Masse auswirken.

A Techniken

In diesem Anhang wird auf die in der Arbeit verwendeten Techniken zum Lösen der Diagramme eingegangen.

Nach der Erzeugung der Diagramme durch das Programm QGRAF werden diese durch Asymptotische Entwicklung durch das Programm Q2E/EXP auf Diagramme, die nur eine Skala haben, reduziert. Die Programme MATAD und MINCER werden eingesetzt, um diese zu lösen.

A.1 Generierung der Diagramme

Die Erzeugung aller Diagramme erfolgt durch das Programm QGRAF [96]. Unter Vorgabe der Propagatoren und Vertizes sowie der ein- und auslaufenden Teilchen und der Schleifenordnung werden alle möglichen Diagramme erzeugt. Ausgegeben werden diese in Form einer ASCII Datei mit flexibel festlegbarer Syntax.

A.2 Asymptotische Entwicklung

Die Diagramme, die zu den Korrekturen zur Higgs Masse (Kapitel 2) beitragen, enthalten viele verschiedene Massen. Die Methode der Asymptotischen Entwicklung [77–84] erlaubt es, solche Diagramme als Produkt von Ein-Skalen-Diagrammen darzustellen¹.

Dazu unterteilt man zunächst die Massen in solche, die man als groß und solche, die man als klein betrachtet. Im nächsten Schritt identifiziert man alle Subgraphen γ , die die folgenden Bedingungen erfüllen: i) γ enthält alle Propagatoren mit großen Massen, ii) γ ist bezüglich seiner Propagatoren mit kleinen Massen Einteilchen-irreduzibel. Dabei muss γ nicht zusammenhängend sein.

¹Genauer gesagt handelt es sich um die *Hard Mass Procedure*, einen Spezialfall der Asymptotischen Entwicklung, in dem als große Skalen lediglich Massen auftreten.

Als Co-Subgraph $\Gamma \setminus \gamma$ bezeichnet man das ursprüngliche Diagramm, in dem die Zusammenhangskomponenten von γ zu einem Punkt kontrahiert wurden.

Die Asymptotische Entwicklung besteht dann darin, den Subgraph γ in allen Massen und Impulsen, die nicht zu den großen Massen gehören, in eine Taylorreihe zu entwickeln. Die Entwicklung von γ wird dann als Effektiver Vertex (oder Effektive Vertizes, falls γ mehr als eine Zusammenhangskomponente hat) in den Co-Subgraphen eingesetzt. Dadurch hat sich die Rechnung erheblich vereinfacht, da im Subgraph nur die großen, im Co-Subgraph nur die kleinen Massen in den Propagatoren auftauchen.

Das Verfahren wird für alle Subgraphen, die i) und ii) erfüllen, wiederholt und die Ergebnisse werden aufsummiert. Das Ergebnis ist eine Reihe in Potenzen und Logarithmen der Massenverhältnisse, die eine Approximation an das ursprüngliche Diagramm darstellt.

Durch iterative Anwendung des Verfahrens lässt sich das ursprüngliche Diagramm als Produkt von Ein-Skalen-Diagrammen darstellen. Das Programm Q2E/EXP [97, 98] akzeptiert als Input eine Liste von Diagrammen, wie sie von QGRAF erzeugt wird, und eine Liste von Diagrammen, deren Lösung bekannt ist, und bildet Erstere durch Anwendung der Asymptotischen Entwicklung auf Letztere ab.

Für die Berechnung der Anomalen Dimensionen in Kapitel 1 entfällt der Schritt der Asymptotischen Entwicklung. Da in minimaler Subtraktion die Renormierung der Ladung und Fermionmasse massenunabhängig ist, kann dort die Fermionmasse auf Null gesetzt werden. Die Selbstenergien sind damit masselose Propagatordiagramme, die von MINCER gelöst werden können. In den Dreiteilchen-Vertizes kann man einen der äußeren Impulse auf Null setzen, ohne Infrarot-Divergenzen zu erzeugen. Beim quartischen ε -Skalar-Vertex kann man Infrarot-Divergenzen vermeiden, indem man eine Masse für alle Teilchen einführt und die äußeren Impulse auf Null setzt.

A.3 Berechnung der Ein-Skalen-Diagramme

Nach der Asymptotischen Entwicklung muss die Berechnung der Ein-Skalen-Diagramme durchgeführt werden. Dazu werden die FORM [99] Programme MATAD [100] und MINCER [101] verwendet. Ersteres berechnet massive Diagramme ohne äußere Impulse, sogenannte Tadpoles, Zweiteres Propagatordiagramme, in denen nur masselose Teilchen vorkommen.

B Gruppentheorie

In diesem Anhang werden die gruppentheoretischen Faktoren zu den Rechnungen in Kapitel 1 erklärt. Betrachtet wird eine Eichgruppe \mathcal{G} . Die Generatoren R^a in der irreduziblen Darstellung R erfüllen die Vertauschungsrelation

$$[R^a, R^b] = if^{abc}R^c, \quad (\text{B.1})$$

wobei f^{abc} die Strukturkonstanten der Gruppe sind. Der quadratische Casimir C_R ist über die Gleichung

$$R^a R^a = C_R \mathbb{1} \quad (\text{B.2})$$

definiert.

Die Generatoren der adjungierten Darstellung erhält man aus den Strukturkonstanten als

$$(F^a)^{bc} = if^{bac}, \quad (\text{B.3})$$

und der Casimiroperator C_A ist definiert als

$$C_A \delta^{ab} = f^{acd} f^{bcd}. \quad (\text{B.4})$$

Die Spur über $R^a R^a$ definiert $I_2(R)$

$$\text{Tr}[R^a R^a] = I_2(R) \delta^{ab}. \quad (\text{B.5})$$

Es gilt

$$C_R d_R = I_2(R) N_A, \quad (\text{B.6})$$

wobei N_A die Anzahl der Generatoren und d_R die Dimension der Repräsentation R ist.

Über die vollkommen symmetrischen Tensoren

$$\begin{aligned} d_R^{abcd} &= \frac{1}{6} \text{Tr}[R^{(a} R^b R^c R^d)], \\ d_A^{abcd} &= \frac{1}{6} \text{Tr}[F^{(a} F^b F^c F^d)], \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

wobei

$$\begin{aligned} R^{(a} R^b R^c R^d) &= R^a R^b R^c R^d + R^a R^b R^d R^c + R^a R^c R^b R^d \\ &\quad + R^a R^c R^d R^b + R^a R^d R^b R^c + R^a R^d R^c R^b, \\ F^{(a} F^b F^c F^d) &= F^a F^b F^c F^d + F^a F^b F^d F^c + F^a F^c F^b F^d \\ &\quad + F^a F^c F^d F^b + F^a F^d F^b F^c + F^a F^d F^c F^b \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

ist, sind die höheren Invarianten, die in den Rechnungen in Kapitel 1 auftreten, definiert:

$$\begin{aligned} D_2(A) &= d_A^{abcd} d_A^{abcd} \\ D_2(RA) &= d_R^{abcd} d_A^{abcd} \\ D_3(A) &= d_A^{abcd} d_A^{cdef} d_A^{abef} \\ D_3(RAA) &= d_R^{abcd} d_A^{cdef} d_A^{abef}. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Für die fundamentalen und adjungierten Darstellungen der Gruppen $SU(N)$, $SO(N)$ und $Sp(N)$ sind ihre Werte in den Tabellen B.1-B.3 aufgelistet. Dabei ist b eine Konstante, die die Normierung der Generatoren festlegt.

B.1 $SU(N)$

Die Gruppe $SU(N)$ wird definiert durch die unitären $N \times N$ Matrizen mit Determinante $+1$, die auf einen N -dimensionalen Vektorraum wirken.

Die Generatoren R^a der fundamentalen Darstellung sind hermitesche Matrizen mit Spur Null. In Tabelle B.1 sind die Werte für die quadratischen Casimiroperatoren, Dynkin Indizes und höhere Invarianten aufgelistet. Dabei wird von der Normierung

$$\text{Tr}[R^a R^b] = \frac{b}{2} \delta^{ab}, \quad (\text{B.10})$$

also $I_2(R) = b/2$ ausgegangen.

B.2 $SO(N)$

Die Gruppe $SO(N)$ besteht aus orthogonalen $N \times N$ Matrizen mit Determinante $+1$.

Die Generatoren der fundamentalen Darstellung sind gegeben durch die Matrizen

$$(M_{[ij]})_{kl} = -i\sqrt{\frac{b}{2}}(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{kj}). \quad (\text{B.11})$$

Diese erfüllen die Algebra

$$\begin{aligned} [M_{[ij]}, M_{[kl]}] &= -i(\delta_{jk}M_{[il]} - \delta_{ik}M_{[jl]} - \delta_{jl}M_{[ik]} + \delta_{il}M_{[jk]}) \\ &\equiv if_{[ij][kl][mn]}M_{[mn]} \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

und definieren damit die Strukturkonstanten $f_{[ij][kl][mn]}$. In Tabelle B.2 sind die Werte der Invarianten für die Gruppe $SO(N)$ zusammengetragen.

Wegen der Isomorphismen

$$\begin{aligned} SO(3) &\triangleq \frac{SU(2)}{Z_2}, \\ SO(6) &\triangleq \frac{SU(4)}{Z_2} \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

haben die Gruppen $SO(3)$ und $SU(2)$ und die Gruppen $SO(6)$ und $SU(4)$ jeweils die selbe Lie Algebra. Insbesondere müssen also die Ergebnisse aus Kapitel 1 für diese Gruppen übereinstimmen, was einen weiteren Test liefert.

B.3 $Sp(N)$

Die Gruppe $Sp(N)$ besteht aus den linearen Transformationen auf einem N -dimensionalen Vektorraum, die eine nichtentartete schersymmetrische Bilinearform (ein Spatprodukt) invariant lassen. Aus der Forderung, dass das Spatprodukt nichtentartet sein soll, folgt, dass N gerade sein muss.

Die Generatoren R^a von $Sp(2n)$ erfüllen

$$JR^aJ = (R^a)^T \quad (\text{B.14})$$

mit

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_n \\ -\mathbb{1}_n & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.15})$$

Sie lassen sich schreiben als Matrizen $L_{\alpha\beta}$. Dabei hat eine infinitesimale Transformation S die Form

$$S = 1 + i \sum_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} L_{\alpha\beta},$$

mit

$$\begin{aligned} a_{\alpha\beta} &= a_{\beta\alpha}^*, \\ L_{\alpha\beta} &= L_{-\beta-\alpha}, \\ \alpha, \beta &= \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n. \end{aligned} \tag{B.16}$$

Die Vertauschungsrelationen lauten damit

$$[L_{\alpha\beta}, L_{\gamma\delta}] = \left(\delta_{\beta\gamma} \delta_{\beta} L_{\alpha\delta} - \delta_{\alpha\delta} \delta_{\alpha} L_{\gamma\beta} + \delta_{\beta\bar{\delta}} \delta_{\beta} L_{\alpha\bar{\gamma}} - \delta_{\alpha\bar{\gamma}} \delta_{\alpha} L_{\bar{\beta}\delta} \right), \tag{B.17}$$

wobei

$$\delta_{\alpha} = -\delta_{-\alpha} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \alpha > 0, \\ -1 & \text{falls } \alpha < 0. \end{cases} \tag{B.18}$$

und $\bar{\alpha} = -\alpha$ ist. Darüber sind die Strukturkonstanten definiert. Die Werte für die Invarianten sind in Tabelle B.3 aufgeführt.

Gruppe	$\text{SU}(N)$
C_A	bN
C_R	$b \frac{N^2-1}{2N}$
$I_2(A)$	bN
$I_2(R)$	$\frac{b}{2}$
N_A	$N^2 - 1$
$D_2(A)$	$\frac{b^4}{24}(N^2 - 1)(N^2 + 36)N^2$
$D_2(RA)$	$\frac{b^4}{48}N(N^2 - 1)(N^2 + 6)$
$D_2(R)$	$\frac{b^4}{96N^2}(N^2 - 1)(18 - 6N^2 + N^4)$
$D_3(A)$	$\frac{b^6}{216}N^2(N^2 - 1)(324 + 135N^2 + N^4)$
$D_3(RAA)$	$\frac{b^6}{432}N^3(N^2 - 1)(51 + N^2)$

Tabelle B.1: $\text{SU}(N)$ Invarianten, wobei mit R die fundamentale Darstellung bezeichnet wird.

Gruppe	$SO(N)$
C_A	$b(N - 2)$
C_R	$\frac{b}{2}(N - 1)$
$I_2(A)$	$b(N - 2)$
$I_2(R)$	b
N_A	$\frac{1}{2}N(N - 1)$
$D_2(A)$	$\frac{b^4}{48}N(N - 1)(N - 2)(-296 + 138N - 15N^2 + N^3)$
$D_2(RA)$	$\frac{b^4}{48}N(N - 1)(N - 2)(22 - 7N + N^2)$
$D_2(R)$	$\frac{b^4}{48}N(N - 1)(4 - N + N^2)$
$D_3(A)$	$\frac{b^6}{864}(N - 2)(N - 1)N(-29440 + 23272N - 7018N^2 + 971N^3 - 47N^4 + 2N^5)$
$D_3(RAA)$	$\frac{b^6}{864}N(N - 2)(N - 1)(2048 - 1582N + 387N^2 - 31N^3 + 2N^4)$

Tabelle B.2: $SO(N)$ Gruppe Invarianten, wobei mit R die fundamentale Darstellung bezeichnet wird.

Gruppe	$\mathrm{Sp}(N)$
C_A	$b(N + 2)$
C_R	$\frac{b}{4}(N + 1)$
$I_2(A)$	$b(N + 2)$
$I_2(R)$	$\frac{b}{2}$
N_A	$\frac{1}{2}N(N + 1)$
$D_2(A)$	$\frac{b^4}{768}N(N + 1)(N + 2)(296 + 138N + 15N^2 + N^3)$
$D_2(RA)$	$\frac{b^4}{768}N(N + 1)(N + 2)(22 + 7N + N^2)$
$D_2(R)$	$\frac{b^4}{768}N(N + 1)(4 + N + N^2)$
$D_3(A)$	$\frac{b^6}{55296}(N + 2)(N + 1)N(29440 + 23272N + 7018N^2 + 971N^3 + 47N^4 + 2N^5)$
$D_3(RAA)$	$\frac{b^6}{55296}N(N + 2)(N + 1)(2048 + 1582N + 387N^2 + 31N^3 + 2N^4)$

Tabelle B.3: $\mathrm{Sp}(N)$ Invarianten, wobei mit R die fundamentale Darstellung bezeichnet wird.

C Feynmanregeln

Im Folgenden werden die Feynmanregeln angegeben, die sich aus der Lagrangedichte (1.19) ergeben. Dabei werden kleine Buchstaben a, b, c, d, e als Farbindizes der adjungierten und Großbuchstaben A, B als Indizes der Darstellung R verwendet. Griechische Buchstaben μ, ν bezeichnen Lorentz-Indizes im d -dimensionalen Raum, Lateinische Buchstaben i, j Lorentz-Indizes im 2ϵ -dimensionalen Raum.

C.1 Propagatoren

Die Propagatoren lauten

Gluon	a, μ b, ν	$\delta^{ab} \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \left(g_{\mu\nu} - (1 - \alpha) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right),$	(C.1)
-------	-------------------	---	-------

ϵ -Skalar	a, i b, j	$\delta^{ab} \frac{1}{k^2 + i\epsilon} g_{ij},$	(C.2)
--------------------	---------------	---	-------

Geist	a b	$\delta^{ab} \frac{-1}{k^2 + i\epsilon},$	(C.3)
-------	---------	---	-------

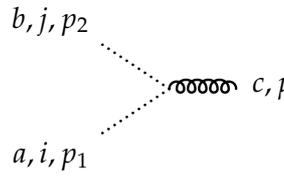
Quark	A B	$\delta^{AB} \frac{-1}{\not{k} - m + i\epsilon}.$	(C.4)
-------	---------	---	-------

C.2 Drei-Teilchen Vertizes

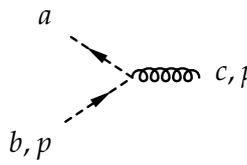
Die Vertizes mit drei Linien lauten, wobei Impulse stets einlaufend sind:

a_2, μ_2, p_2		a_3, μ_3, p_3	$- ig f^{a_1 a_2 a_3} \left[(p_1 - p_2)_{\mu_3} g_{\mu_1 \mu_2} \right.$	(C.5)	
a_1, μ_1, p_1					$+ (p_2 - p_3)_{\mu_1} g_{\mu_2 \mu_3}$
					$+ (p_3 - p_1)_{\mu_2} g_{\mu_3 \mu_1} \left. \right],$

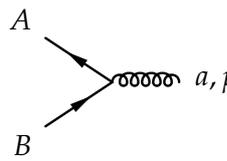
C Feynmanregeln



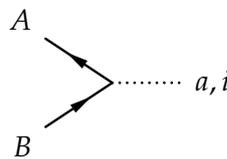
$$-igf^{abc}(p_2 - p_1)_\mu g_{ij}, \quad (\text{C.6})$$



$$-igf^{abc} p_\mu, \quad (\text{C.7})$$



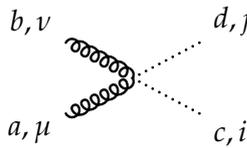
$$g\gamma_\mu R_{AB}^a, \quad (\text{C.8})$$



$$g\gamma_i R_{AB}^a. \quad (\text{C.9})$$

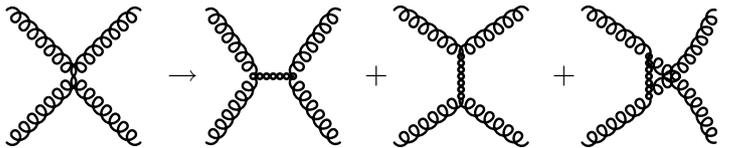
C.3 Quartische Vertizes

Die quartische Kopplung zwischen Gluonen und ε -Skalaren ist gegeben durch



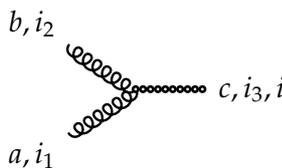
$$-g_{ij}g_{\mu_3\nu_4} [f^{eca} f^{edb} + f^{ecb} f^{eda}]. \quad (\text{C.10})$$

In den restlichen quartischen Vertizes faktorisieren Lorentz- und Farbstruktur nicht. Das ist unbequem, da es praktisch ist, die Farbfaktoren getrennt von den eigentlichen Diagrammen zu berechnen. Durch einen kleinen Trick kann man erreichen, dass die beiden Strukturen faktorisieren. Dazu macht man die Aufspaltung



$$(\text{C.11})$$

wobei ein neues Teilchen mit „trivialem“ Propagator eingeführt wurde. Trivial bedeutet dabei, dass der Propagator impulsunabhängig, im Ortsraum also eine δ -Funktion ist. Der quartische Gluon-Vertex wird damit auf den Vertex



$$-\frac{ig}{\sqrt{2}} f^{abc} (g_{i_3 i_1} g_{i_4 i_2} - g_{i_3 i_2} g_{i_4 i_1}) \quad (\text{C.12})$$

und den Propagator

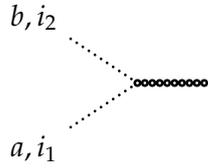


$$\delta^{ab} g_{i_1 i_2} g_{\nu_1 \nu_2} \quad (\text{C.13})$$

zurückgeführt. Ähnlich verfährt man für die quartische ε -Skalar-Kopplungen. Die Basis (1.21) lässt sich wie folgt zerlegen:

C Feynmanregeln

- $H_1^{abcd} = \frac{1}{2} \delta^{ab} \delta^{cd}$

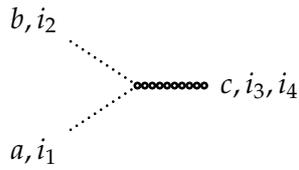


$$g \delta^{ab} g_{i_1 i_2} \quad (\text{C.14})$$



$$-1 \quad (\text{C.15})$$

- $H_2^{abcd} = \frac{1}{2} (\delta^{ac} \delta^{bd} + \delta^{ad} \delta^{bc})$

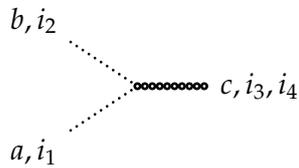


$$g \delta^{ab} g_{i_1 i_3} g_{i_2 i_4} \quad (\text{C.16})$$



$$- (g_{i_1 i_2} g_{j_1 j_2} + g_{i_1 j_2} g_{j_1 i_2}) \quad (\text{C.17})$$

- $H_3^{abcd} = \frac{1}{2} (f^{ace} f^{bde} + f^{ade} f^{bce})$



$$-\frac{ig}{\sqrt{2}} f^{abc} (g_{i_3 i_1} g_{i_4 i_2} - g_{i_3 i_2} g_{i_4 i_1}) \quad (\text{C.18})$$



$$\delta^{ab} g_{i_1 i_2} g_{j_1 j_2} \quad (\text{C.19})$$

D Renormierungskonstanten im on-shell Schema

Hier werden die Renormierungskonstanten angegeben, die benötigt werden, um im Fall des entarteten susy-Spektrums die Parameter in der Berechnung der Korrekturen zur Higgs-Masse on-shell renormieren zu können. Der Counterterm für den Mischungswinkel wird dabei nur auf Einschleifen-Niveau benötigt wenn man sich auf den Fall $A_t = 0$ beschränkt.

Für entartetes susy-Spektrum sind die Renormierungskonstanten der Stop-Massen gleich, und es ist

$$\begin{aligned}
Z_{M_{t_{1,2}}} &= 1 - 4 \frac{\alpha_s}{4\pi} C_R \left[2 + L_{\mu t} + L_{tS} \right] - 4 \frac{\alpha_s}{4\pi} \frac{1}{\epsilon} C_R \\
&\quad - 2 \frac{\alpha_s}{4\pi} \epsilon C_R \left[8 + 4L_{\mu t} + L_{\mu t}^2 + 4L_{tS} + 2L_{\mu t}L_{tS} + L_{tS}^2 + \zeta_2 \right] \\
&\quad + 6 \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{\epsilon^2} C_R \left[3C_A - 2I_2(R) - 2n_f I_2(R) \right] \\
&\quad + 2 \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{\epsilon} C_R \left[9C_A + 6C_R + 12C_A L_{\mu t} + 12C_A L_{tS} + 2I_2(R) \right. \\
&\quad \left. - 8L_{\mu t} I_2(R) - 8L_{tS} I_2(R) + 2n_f I_2(R) - 8L_{\mu t} n_f I_2(R) - 8L_{tS} n_f I_2(R) \right] \\
&\quad + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^2 \frac{C_R}{80} \left[-2880C_A + 6240C_R + 960C_A L_{\mu t} + 1920C_R L_{\mu t} \right. \\
&\quad + 1440C_A L_{\mu t}^2 + 960C_A L_{tS} + 1920C_R L_{tS} + 2880C_A L_{\mu t} L_{tS} + 1440C_A L_{tS}^2 \\
&\quad + 7360I_2(R) + 3200L_{\mu t} I_2(R) - 320L_{\mu t}^2 I_2(R) + 3200L_{tS} I_2(R) \\
&\quad - 640L_{\mu t} L_{tS} I_2(R) - 320L_{tS}^2 I_2(R) + 6080n_f I_2(R) + 1920L_{\mu t} n_f I_2(R) \\
&\quad - 960L_{\mu t}^2 n_f I_2(R) + 1920L_{tS} n_f I_2(R) - 1920L_{\mu t} L_{tS} n_f I_2(R) - 960L_{tS}^2 n_f I_2(R) \\
&\quad + 3840C_A \zeta_2 - 7360C_R \zeta_2 - 3840C_A \ln 2 \zeta_2 + 7680C_R \ln 2 \zeta_2 - 2560I_2(R) \zeta_2 \\
&\quad \left. - 3200n_f I_2(R) \zeta_2 + 54C_A \zeta_2^2 - 108C_R \zeta_2^2 + 960C_A \zeta_3 \right]
\end{aligned}$$

$$- 1920C_R\zeta_3 - 135C_A\zeta_4 + 270C_R\zeta_4 \Big], \quad (\text{D.1})$$

$$\begin{aligned} \delta\theta_t &= \frac{\alpha_s}{4\pi} \cos 2\theta_t \frac{m_{\text{susy}}m_t}{m_{\tilde{t}_1}^2 - m_{\tilde{t}_2}^2} C_R \left[8 + 4L_{\mu t} + 4L_{tS} \right] \\ &+ \frac{\alpha_s}{4\pi} \frac{\cos 2\theta_t}{\epsilon} C_R \left(4 \frac{m_{\text{susy}}m_t}{m_{\tilde{t}_1}^2 - m_{\tilde{t}_2}^2} - \sin 2\theta_t \right), \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

$$\begin{aligned} Z_{M_g} &= 1 - \frac{\alpha_s}{4\pi} \frac{1}{\epsilon} \left[-3C_A + 2I_2(R) + 2n_f I_2(R) \right] \\ &+ \frac{\alpha_s}{4\pi} \left[-5C_A - 3C_A L_{\mu t} - 3C_A L_{tS} + 2I_2(R) + 2L_{\mu t} I_2(R) \right. \\ &\left. + 2L_{tS} I_2(R) + 2n_f I_2(R) + 2L_{\mu t} n_f I_2(R) + 2L_{tS} n_f I_2(R) \right] \\ &+ \frac{\alpha_s}{4\pi} \epsilon^2 I_2(R) \left[2 + 2L_{\mu t} + L_{\mu t}^2 + 2L_{tS} + 2L_{\mu t} L_{tS} + L_{tS}^2 + \zeta_2 \right] \\ &+ \frac{\alpha_s}{4\pi} \frac{\epsilon}{2} \left[-18C_A - 10C_A L_{\mu t} - 3C_A L_{\mu t}^2 - 10C_A L_{tS} - 6C_A L_{\mu t} L_{tS} \right. \\ &- 3C_A L_{tS}^2 + 4n_f I_2(R) + 4L_{\mu t} n_f I_2(R) + 2L_{\mu t}^2 n_f I_2(R) + 4L_{tS} n_f I_2(R) \\ &\left. + 4L_{\mu t} L_{tS} n_f I_2(R) + 2L_{tS}^2 n_f I_2(R) - 3C_A \zeta_2 + 2n_f I_2(R) \zeta_2 \right], \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

$$\begin{aligned} Z_{M_t} &= 1 - \frac{\alpha_s}{4\pi} C_R \left[5 + 2L_{\mu t} - L_{tS} \right] - 2 \frac{\alpha_s}{4\pi} \frac{1}{\epsilon} C_R \\ &- \frac{\alpha_s}{4\pi} \frac{\epsilon}{2} C_R \left[18 + 10L_{\mu t} + 2L_{\mu t}^2 - 2L_{\mu t} L_{tS} - L_{tS}^2 + 2\zeta_2 \right] \\ &+ \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{\epsilon^2} C_R \left[3C_A + 2C_R - 2I_2(R) - 2n_f I_2(R) \right] \\ &+ - \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{\epsilon} C_R \left[3C_A - 12C_R - 4C_R L_{\mu t} + 2C_R L_{tS} - 2I_2(R) - 2n_f I_2(R) \right] \\ &- \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^2 \frac{C_R}{1440} \left[64280C_A - 47160C_R + 30240C_A L_{\mu t} - 34560C_R L_{\mu t} \right. \\ &+ 4320C_A L_{\mu t}^2 - 5760C_R L_{\mu t}^2 - 12720C_A L_{tS} - 720C_R L_{tS} \\ &- 4320C_A L_{\mu t} L_{tS} + 5760C_R L_{\mu t} L_{tS} - 720C_A L_{tS}^2 + 720C_R L_{tS}^2 - 25600I_2(R) \\ &\left. - 20160L_{\mu t} I_2(R) - 2880L_{\mu t}^2 I_2(R) - 7680L_{tS} I_2(R) + 2880L_{\mu t} L_{tS} I_2(R) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2880L_{tS}^2 I_2(R) - 8320n_f I_2(R) - 20160L_{\mu t} n_f I_2(R) - 2880L_{\mu t}^2 n_f I_2(R) \\
& - 7680L_{tS} n_f I_2(R) + 2880L_{\mu t} L_{tS} n_f I_2(R) + 2880L_{tS}^2 n_f I_2(R) - 11520C_A \zeta_2 \\
& + 40320C_R \zeta_2 + 34560C_A \ln 2 \zeta_2 - 69120C_R \ln 2 \zeta_2 + 23040I_2(R) \zeta_2 \\
& - 11520n_f I_2(R) \zeta_2 - 486C_A \zeta_2^2 + 972C_R \zeta_2^2 - 8640C_A \zeta_3 \\
& + 17280C_R \zeta_3 + 1215C_A \zeta_4 - 2430C_R \zeta_4 \Big]. \tag{D.4}
\end{aligned}$$

Die Massen in den Renormierungskonstanten sind dabei auch im on-shell Schema.

Literaturverzeichnis

- [1] S. L. Glashow.
Partial Symmetries of Weak Interactions.
Nucl. Phys., 22:579–588, 1961.
- [2] S. Weinberg.
A Model of Leptons.
Phys. Rev. Lett., 19:1264–1266, 1967.
- [3] A. Salam.
Weak and Electromagnetic Interactions.
Originally printed in Svartholm: Elementary Particle Theory, Proceedings Of The
Nobel Symposium Held 1968 At Lerum, Sweden, Stockholm 1968, 367-377.
- [4] ALEPH Collaboration.
Precision Electroweak Measurements on the Z Resonance.
Phys. Rept., 427:257, 2006, hep-ex/0509008.
- [5] O. Buchmueller et al.
Prediction for the Lightest Higgs Boson Mass in the CMSSM using Indirect Expe-
rimental Constraints.
Phys. Lett., B657:87–94, 2007, 0707.3447.
- [6] P. Ramond.
Dual Theory for Free Fermions.
Phys. Rev., D3:2415–2418, 1971.
- [7] A. Neveu and J. H. Schwarz.
Factorizable Dual Model of Pions.
Nucl. Phys., B31:86–112, 1971.
- [8] J.-L. Gervais and B. Sakita.
Field Theory Interpretation of Supergauges in Dual Models.
Nucl. Phys., B34:632–639, 1971.

- [9] Yu. A. Golfand and E. P. Likhtman.
Extension of the Algebra of Poincare Group Generators and Violation of p Invariance.
JETP Lett., 13:323–326, 1971.
- [10] J. Wess and B. Zumino.
Supergauge Transformations in Four-Dimensions.
Nucl. Phys., B70:39–50, 1974.
- [11] D. V. Volkov and V. P. Akulov.
Is the Neutrino a Goldstone Particle?
Phys. Lett., B46:109–110, 1973.
- [12] H. P. Nilles.
Supersymmetry, Supergravity and Particle Physics.
Phys. Rept., 110:1–162, 1984.
- [13] H. E. Haber and G. L. Kane.
The Search for Supersymmetry: Probing Physics Beyond the Standard Model.
Phys. Rept., 117:75–263, 1985.
- [14] A. B. Lahanas and D. V. Nanopoulos.
The Road to No Scale Supergravity.
Phys. Rept., 145:1, 1987.
- [15] I. Jack, D. R. T. Jones, P. Kant, and L. Mihaila.
The Four-Loop $\overline{\text{DRED}}$ Gauge Beta-Function and Fermion Mass Anomalous Dimension for General Gauge Groups.
JHEP, 09:058, 2007, 0707.3055.
- [16] R. V. Harlander, D. R. T. Jones, P. Kant, L. Mihaila, and M. Steinhauser.
Four-Loop Beta Function and Mass Anomalous Dimension in Dimensional Reduction.
JHEP, 12:024, 2006, hep-ph/0610206.
- [17] R. V. Harlander, P. Kant, L. Mihaila, and M. Steinhauser.
Dimensional Reduction Applied to QCD at Three Loops.
JHEP, 09:053, 2006, hep-ph/0607240.
- [18] K. G. Wilson.
Quantum Field Theory Models in less than Four Dimensions.
Phys. Rev., D7:2911–2926, 1973.

-
- [19] G. 't Hooft and M. J. G. Veltman.
Regularization and Renormalization of Gauge Fields.
Nucl. Phys., B44:189–213, 1972.
- [20] P. Breitenlohner and D. Maison.
Dimensional Renormalization and the Action Principle.
Commun. Math. Phys., 52:11–38, 1977.
- [21] W. Siegel.
Supersymmetric Dimensional Regularization via Dimensional Reduction.
Phys. Lett., B84:193, 1979.
- [22] D. Stöckinger.
Regularization by Dimensional Reduction: Consistency, Quantum Action Principle, and Supersymmetry.
JHEP, 03:076, 2005, hep-ph/0503129.
- [23] L. V. Avdeev.
Noninvariance of Regularization by Dimensional Reduction: An Explicit Example of Supersymmetry Breaking.
Phys. Lett., B117:317, 1982.
- [24] G. 't Hooft.
Dimensional Regularization and the Renormalization Group.
Nucl. Phys., B61:455–468, 1973.
- [25] W. A. Bardeen, A. J. Buras, D. W. Duke, and T. Muta.
Deep Inelastic Scattering Beyond the Leading Order in Asymptotically Free Gauge Theories.
Phys. Rev., D18:3998, 1978.
- [26] I. Jack, D. R. T. Jones, and K. L. Roberts.
Dimensional Reduction in Nonsupersymmetric Theories.
Z. Phys., C62:161–166, 1994, hep-ph/9310301.
- [27] T. van Ritbergen, J. A. M. Vermaseren, and S. A. Larin.
The Four-Loop Beta Function in Quantum Chromodynamics.
Phys. Lett., B400:379–384, 1997, hep-ph/9701390.
- [28] M. Czakon.
The Four-Loop QCD Beta-Function and Anomalous Dimensions.
Nucl. Phys., B710:485–498, 2005, hep-ph/0411261.

- [29] K. G. Chetyrkin.
Quark Mass Anomalous Dimension to $\mathcal{O}(\alpha_s^4)$.
Phys. Lett., B404:161–165, 1997, hep-ph/9703278.
- [30] J. A. M. Vermaseren, S. A. Larin, and T. van Ritbergen.
The Four-Loop Quark Mass Anomalous Dimension and the Invariant Quark Mass.
Phys. Lett., B405:327–333, 1997, hep-ph/9703284.
- [31] T. van Ritbergen, A. N. Schellekens, and J. A. M. Vermaseren.
Group Theory Factors for Feynman Diagrams.
Int. J. Mod. Phys., A14:41–96, 1999, hep-ph/9802376.
- [32] P. Cvitanovic.
Group Theory for Feynman Diagrams in Nonabelian Gauge Theories: Exceptional Groups.
Phys. Rev., D14:1536–1553, 1976.
- [33] I. Jack, D. R. T. Jones, and A. Pickering.
The Connection Between the DRED and NSVZ Renormalisation Schemes.
Phys. Lett., B435:61–66, 1998, hep-ph/9805482.
- [34] I. Jack and D. R. T. Jones.
The Gaugino Beta-Function.
Phys. Lett., B415:383–389, 1997, hep-ph/9709364.
- [35] R. V. Harlander, L. Mihaila, and M. Steinhauser.
Running of α_s and m_b in the MSSM.
Phys. Rev., D76:055002, 2007, 0706.2953.
- [36] S. P. Martin.
A Supersymmetry Primer.
1997, hep-ph/9709356.
- [37] M. Drees.
An Introduction to Supersymmetry.
1996, hep-ph/9611409.
- [38] H. E. Haber and R. Hempfling.
Can the Mass of the Lightest Higgs Boson of the Minimal Supersymmetric Model Be Larger Than M_Z ?
Phys. Rev. Lett., 66:1815–1818, 1991.

-
- [39] J. R. Ellis, G. Ridolfi, and F. Zwirner.
Radiative Corrections to the Masses of Supersymmetric Higgs Bosons.
Phys. Lett., B257:83–91, 1991.
- [40] A. Brignole, J. R. Ellis, G. Ridolfi, and F. Zwirner.
The Supersymmetric Charged Higgs Boson Mass and LEP Phenomenology.
Phys. Lett., B271:123–132, 1991.
- [41] J. R. Ellis, G. Ridolfi, and F. Zwirner.
On Radiative Corrections to Supersymmetric Higgs Boson Masses and Their
Implications for LEP Searches.
Phys. Lett., B262:477–484, 1991.
- [42] Y. Okada, M. Yamaguchi, and T. Yanagida.
Upper Bound of the Lightest Higgs Boson Mass in the Minimal Supersymmetric
Standard Model.
Prog. Theor. Phys., 85:1–6, 1991.
- [43] P. H. Chankowski, S. Pokorski, and J. Rosiek.
Charged and Neutral Supersymmetric Higgs Boson Masses: Complete One Loop
Analysis.
Phys. Lett., B274:191–198, 1992.
- [44] A. Brignole.
Radiative Corrections to the Supersymmetric Neutral Higgs Boson Masses.
Phys. Lett., B281:284–294, 1992.
- [45] A. Dabelstein.
The One Loop Renormalization of the mssm Higgs Sector and its Application to
the Neutral Scalar Higgs Masses.
Z. Phys., C67:495–512, 1995, hep-ph/9409375.
- [46] D. M. Pierce, J. A. Bagger, K. T. Matchev, and R. Zhang.
Precision Corrections in the Minimal Supersymmetric Standard Model.
Nucl. Phys., B491:3–67, 1997, hep-ph/9606211.
- [47] J. S. Schwinger.
On the Green's Functions of Quantized Fields. 1.
Proc. Nat. Acad. Sci., 37:452–455, 1951.
- [48] J. S. Schwinger.
On the Green's Functions of Quantized Fields. 2.
Proc. Nat. Acad. Sci., 37:455–459, 1951.

- [49] G. Jona-Lasinio.
Relativistic Field Theories with Symmetry Breaking Solutions.
Nuovo Cim., 34:1790–1795, 1964.
- [50] J. Goldstone, A. Salam, and S. Weinberg.
Broken Symmetries.
Phys. Rev., 127:965–970, 1962.
- [51] S. R. Coleman and E. Weinberg.
Radiative Corrections as the Origin of Spontaneous Symmetry Breaking.
Phys. Rev., D7:1888–1910, 1973.
- [52] R. Hempfling and A. H. Hoang.
Two Loop Radiative Corrections to the Upper Limit of the Lightest Higgs Boson
Mass in the Minimal Supersymmetric Model.
Phys. Lett., B331:99–106, 1994, hep-ph/9401219.
- [53] H. E. Haber, R. Hempfling, and A. H. Hoang.
Approximating the Radiatively Corrected Higgs Mass in the Minimal Super-
symmetric Model.
Z. Phys., C75:539–554, 1997, hep-ph/9609331.
- [54] S. Heinemeyer, W. Hollik, and G. Weiglein.
QCD Corrections to the Masses of the Neutral CP-even Higgs Bosons in the mSM.
Phys. Rev., D58:091701, 1998, hep-ph/9803277.
- [55] S. Heinemeyer, W. Hollik, and G. Weiglein.
The Mass of the Lightest mSM Higgs Boson: A Compact Analytical Expression
at the Two-Loop Level.
Phys. Lett., B455:179–191, 1999, hep-ph/9903404.
- [56] R. Zhang.
Two-Loop Effective Potential Calculation of the Lightest CP-Even Higgs-Boson
Mass in the mSM.
Phys. Lett., B447:89–97, 1999, hep-ph/9808299.
- [57] J. R. Espinosa and R. Zhang.
MSSM Lightest CP-Even Higgs Boson Mass to $\mathcal{O}(\alpha_s\alpha_t)$: The Effective Potential
Approach.
JHEP, 03:026, 2000, hep-ph/9912236.
- [58] A. Pilaftsis and C. E. M. Wagner.

- Higgs Bosons in the Minimal Supersymmetric Standard Model With Explicit CP Violation.
Nucl. Phys., B553:3–42, 1999, hep-ph/9902371.
- [59] M. S. Carena, J. R. Ellis, A. Pilaftsis, and C. E. M. Wagner.
Renormalization-Group-Improved Effective Potential for the mSSM Higgs Sector with Explicit CP Violation.
Nucl. Phys., B586:92–140, 2000, hep-ph/0003180.
- [60] M. S. Carena et al.
Reconciling the Two-Loop Diagrammatic and Effective Field Theory Computations of the Mass of the Lightest CP-Even Higgs Boson in the mSSM.
Nucl. Phys., B580:29–57, 2000, hep-ph/0001002.
- [61] M. S. Carena, J. R. Ellis, A. Pilaftsis, and C. E. M. Wagner.
Higgs-Boson Pole Masses in the Mssm with Explicit CP Violation.
Nucl. Phys., B625:345–371, 2002, hep-ph/0111245.
- [62] G. Degrassi, P. Slavich, and F. Zwirner.
On the Neutral Higgs Boson Masses in the mSSM for Arbitrary Stop Mixing.
Nucl. Phys., B611:403–422, 2001, hep-ph/0105096.
- [63] J. R. Espinosa and I. Navarro.
Radiative Corrections to the Higgs Boson Mass for a Hierarchical Stop Spectrum.
Nucl. Phys., B615:82–116, 2001, hep-ph/0104047.
- [64] A. Brignole, G. Degrassi, P. Slavich, and F. Zwirner.
On the $\mathcal{O}(\alpha_t^2)$ Two-Loop Corrections to the Neutral Higgs Boson Masses In The mSSM.
Nucl. Phys., B631:195–218, 2002, hep-ph/0112177.
- [65] A. Brignole, G. Degrassi, P. Slavich, and F. Zwirner.
On the Two-Loop Sbottom Corrections to the Neutral Higgs Boson Masses in the Mssm.
Nucl. Phys., B643:79–92, 2002, hep-ph/0206101.
- [66] G. Degrassi, S. Heinemeyer, W. Hollik, P. Slavich, and G. Weiglein.
Towards High-Precision Predictions for the mSSM Higgs Sector.
Eur. Phys. J., C28:133–143, 2003, hep-ph/0212020.
- [67] A. Dedes, G. Degrassi, and P. Slavich.
On the Two-Loop Yukawa Corrections to the mSSM Higgs Boson Masses at Large $\tan\beta$.

- Nucl. Phys.*, B672:144–162, 2003, hep-ph/0305127.
- [68] J. S. Lee et al.
CPsuperH: A Computational Tool For Higgs Phenomenology in the Minimal Supersymmetric Standard Model with Explicit CP Violation.
Comput. Phys. Commun., 156:283–317, 2004, hep-ph/0307377.
- [69] S. P. Martin.
Complete Two-Loop Effective Potential Approximation to the Lightest Higgs Scalar Boson Mass in Supersymmetry.
Phys. Rev., D67:095012, 2003, hep-ph/0211366.
- [70] S. P. Martin.
Two-Loop Effective Potential for the Minimal Supersymmetric Standard Model.
Phys. Rev., D66:096001, 2002, hep-ph/0206136.
- [71] S. P. Martin.
Three-Loop Corrections to the Lightest Higgs Scalar Boson Mass in Supersymmetry.
Phys. Rev., D75:055005, 2007, hep-ph/0701051.
- [72] M. Frank et al.
The Higgs Boson Masses And Mixings Of The Complex mSSM in the Feynman-Diagrammatic Approach.
JHEP, 02:047, 2007, hep-ph/0611326.
- [73] S. Heinemeyer, W. Hollik, and G. Weiglein.
The Masses of the Neutral CP-Even Higgs Bosons in the mSSM: Accurate Analysis at the Two-Loop Level.
Eur. Phys. J., C9:343–366, 1999, hep-ph/9812472.
- [74] S. Heinemeyer, W. Hollik, and G. Weiglein.
FeynHiggs: A Program for the Calculation of The Masses of the Neutral CP-Even Higgs Bosons in the mSSM.
Comput. Phys. Commun., 124:76–89, 2000, hep-ph/9812320.
- [75] A. Denner, H. Eck, O. Hahn, and J. Kublbeck.
Feynman Rules for Fermion Number Violating Interactions.
Nucl. Phys., B387:467–484, 1992.
- [76] G. B. Pivovarov and F. V. Tkachov.
Combinatorics of Euclidean Asymptotics of Green Functions.
IYal-P-0370.

-
- [77] F. V. Tkachov.
Euclidean Asymptotic Expansions of Green Functions of Quantum Fields. 1.
Expansions of Products of Singular Functions.
Int. J. Mod. Phys., A8:2047–2117, 1993, hep-ph/9612284.
- [78] G. B. Pivovarov and F. V. Tkachov.
Euclidean Asymptotic Expansions of Green Functions of Quantum Fields. 2.
Combinatorics of The As Operation.
Int. J. Mod. Phys., A8:2241–2286, 1993, hep-ph/9612287.
- [79] S. G. Gorishnii and S. A. Larin.
Coefficient Functions of Asymptotic Operator Expansions in Minimal Subtraction Scheme.
Nucl. Phys., B283:452, 1987.
- [80] S. G. Gorishnii.
Construction of Operator Expansions and Effective Theories in The \overline{MS} Scheme.
Nucl. Phys., B319:633–666, 1989.
- [81] V. A. Smirnov and K. G. Chetyrkin.
Asymptotic Expansions, Gluing Method and R^* Operation.
In **Alushta 1987, Proceedings, Problems of quantum field theory** 48-53.
- [82] K. G. Chetyrkin.
Combinatorics of R , R^{-1} , and R^* Operations and Asymptotic Expansions of
Feynman Integrals in the Limit of Large Momenta and Masses.
MPI-PH-91-13.
- [83] V. A. Smirnov.
Asymptotic Expansions in Limits of Large Momenta and Masses.
Commun. Math. Phys., 134:109–137, 1990.
- [84] V. A. Smirnov.
Renormalization and Asymptotic Expansions.
Basel, Switzerland: Birkhaeuser (1991) 380 p. (Progress in physics, 14).
- [85] B. C. Allanach et al.
The Snowmass Points and Slopes: Benchmarks for SUSY Searches.
2002, hep-ph/0202233.
- [86] J. A. Aguilar-Saavedra et al.
Supersymmetry Parameter Analysis: SPA Convention and Project.
Eur. Phys. J., C46:43–60, 2006, hep-ph/0511344.

- [87] P. H. Chankowski, S. Pokorski, and J. Rosiek.
Complete on-shell Renormalization Scheme for the Minimal Supersymmetric Higgs sector.
Nucl. Phys., B423:437–496, 1994, hep-ph/9303309.
- [88] A. Bednyakov, A. Onishchenko, V. Velizhanin, and O. Veretin.
Two-loop $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ MSSM Corrections to the Pole Masses of Heavy Quarks.
Eur. Phys. J., C29:87–101, 2003, hep-ph/0210258.
- [89] I. Jack, D. R. T. Jones, S. P. Martin, M. T. Vaughn, and Y. Yamada.
Decoupling of the Epsilon Scalar Mass in Softly Broken Supersymmetry.
Phys. Rev., D50:5481–5483, 1994, hep-ph/9407291.
- [90] S. Bethke.
Experimental Tests of Asymptotic Freedom.
Prog. Part. Nucl. Phys., 58:351–386, 2007, hep-ex/0606035.
- [91] Tevatron Electroweak Working Group.
Combination of CDF and Do Results on the Mass of the Top Quark.
2008, 0808.1089.
- [92] S. P. Martin.
Fermion Self-Energies and Pole Masses at Two-Loop Order in a General Renormalizable Theory with Massless Gauge Bosons.
Phys. Rev., D72:096008, 2005, hep-ph/0509115.
- [93] S. P. Martin and D. G. Robertson.
TSIL: A program for the calculation of Two-Loop Self-Energy Integrals.
Comput. Phys. Commun., 174:133–151, 2006, hep-ph/0501132.
- [94] W. M. Yao et al.
Review of Particle Physics.
J. Phys., G33:1–1232, 2006.
- [95] R. V. Harlander, P. Kant, L. Mihaila, and M. Steinhauser.
Higgs Boson Mass in Supersymmetry to Three Loops.
Phys. Rev. Lett., 100:191602, 2008, 0803.0672.
- [96] P. Nogueira.
Automatic Feynman Graph Generation.
J. Comput. Phys., 105:279–289, 1993.

- [97] T. Seidensticker.
Automatic Application of Successive Asymptotic Expansions of Feynman Diagrams.
1999, hep-ph/9905298.
- [98] R. Harlander, T. Seidensticker, and M. Steinhauser.
Complete Corrections of $\mathcal{O}(\alpha\alpha_s)$ to the Decay of the Z Boson into Bottom Quarks.
Phys. Lett., B426:125–132, 1998, hep-ph/9712228.
- [99] J. A. M. Vermaseren.
New Features of FORM.
2000, math-ph/0010025.
- [100] M. Steinhauser.
MATAD: A Program Package for the Computation of Massive Tadpoles.
Comput. Phys. Commun., 134:335–364, 2001, hep-ph/0009029.
- [101] S. A. Larin, F. V. Tkachov, and J. A. M. Vermaseren.
The FORM Version of MINCER.
NIKHEF-H-91-18.

Danksagung

Es ist mir ein wichtiges Anliegen, mich bei den Menschen, mit denen ich in den letzten Jahren viel und intensiv zusammengearbeitet habe, zu bedanken. Es war ein tolles Erlebnis, in einer angenehm entspannten, gleichzeitig hoch produktiven Atmosphäre einen Beitrag zum wissenschaftlichen Fortschritt leisten zu dürfen.

Ganz besonderer Dank gilt dabei meinem Doktorvater Prof. Dr. Matthias Steinhauser, der meine Doktorarbeit mit viel Elan und Sachverstand unterstützt hat. Das fruchtbare, unkomplizierte Arbeitsverhältnis habe ich sehr genossen. Außerdem haben sein Entgegenkommen und seine Ermutigungen und Ratschläge einen nicht zu vernachlässigenden Beitrag dazu geleistet, dass ich meine neue Rolle als Vater während meiner Promotion in vollen Zügen genießen konnte.

Es freut mich sehr, dass Prof. Dr. Robert Harlander es mir offensichtlich nicht übel genommen hat, dass ich für meine Promotion in Karlsruhe geblieben bin, anstatt ihn nach Wuppertal zu begleiten. Ich hoffe, dass unsere Zusammenarbeit, die mit meiner Diplomarbeit angefangen hat und für mich immer sehr angenehm war, noch lange währt. Auch für die Übernahme des Korreferats sei ihm gedankt.

Bei Frau Dr. Luminita Mihaila möchte ich mich für die zahllosen Stunden, die wir zusammen vor dem Rechner oder der Tafel verbracht haben, bedanken. Sie hat mir viel erklärt, und so manchen meiner Fehler hätte ich ohne sie wohl erst viel später gefunden. Die Zusammenarbeit mit ihr war immer sehr angenehm, hilfreich und erbauend.

Mit keinem Menschen habe ich insgesamt mehr über Physik diskutiert als mit meiner Frau Elisabeth, mit der ich das gesamte Studium geteilt und genossen habe. Ganz herzlicher Dank gilt ihr insbesondere dafür, dass sie in den letzten Wochen neben ihrer eigenen Promotion noch die Kraft aufgebracht hat, mir den Rücken zu stärken. Meine Tochter Silja Marie hat gerade während des Endsprints der Arbeit den Balanceakt vollbracht, mich ohne schlechtes Gewissen, aber auch ohne das Gefühl, überflüssig oder ersetzbar zu sein, sehr viel arbeiten zu lassen. Auch die vielen Babysitter aus der Familie und das Team vom Kinderspielhaus haben ihren Teil dazu beigetragen.

Bei meiner Familie im weiteren Sinne – meinen Eltern, deren Ehepartnern, meinen Großeltern und Geschwistern in Blut und Geist – möchte ich mich für die tatkräftige

ideelle und materielle Unterstützung, die mir in den letzten 27 Jahren in vielfacher Weise zuteil wurde, bedanken.

Bei allen Mitgliedern der Institute für Theoretische Teilchenphysik ITP und Theoretische Physik TP möchte ich mich für die angenehme Atmosphäre in den zwei Stockwerken bedanken. Dabei schließe ich ausdrücklich Herrn Dr. Andreas Scharf ein, der zwar nicht mehr am Institut weilt, dessen Geist aber in Zimmer 11-18 noch zu spüren ist.

Dem DFG Graduiertenkolleg Hochenergiephysik und Teilchenastrophysik und dem KIT -Zentrum Elementarteilchen- und Astroteilchenphysik (KEETA) danke ich für die Finanzierung der Arbeit und diverser Reisen zu Konferenzen.

Für die Zusammenarbeit an den Arbeiten zur Dimensionalen Reduktion möchte ich mich bei Prof. Dr. D. R. Timothy Jones und Prof. Dr. Ian Jack bedanken. Für fruchtbare Diskussionen zum Thema danke ich Prof. Dr. Dominik Stöckinger. Für Diskussionen und die Verbreitung einer gewissen Euphorie zum Thema Supersymmetrie danke ich Prof. Dr. Sven Heinemeyer.

Die Rechnungen für diese Arbeit erforderten den massiven Einsatz moderner Computer. Für die Gewährleistung der Rechner-Infrastruktur möchte ich den Systemadministratoren von ITP und TP im Allgemeinen und Dr. Peter Marquard im Besonderen für die Pflege des Rechenclusters danken.

Ich danke Dr. Franz Kitzka, der in vielen Tutorien meine Hartnäckigkeit und Genauigkeit auf die Probe gestellt und mich damit gut auf mein weiteres Studium und die Arbeit in der Wissenschaft vorbereitet hat.

Für das aufmerksame Lesen und Korrigieren der Arbeit oder Auszügen derselben danke ich: Christa Maria Steubing, Elisabeth Kant, Dr. Luminita Mihaila, Joachim Brod, Dr. Peter Marquard und Dr. Sören Wiesenfeldt, sowie natürlich dem Referenten und Korreferenten. Bei Christian Steubing bedanke ich mich für hilfreiche Hinweise zum Schriftbild.

Lebenslauf

Philipp Kant, geb. Otter

Institut für Theoretische Teilchenphysik
Universität Karlsruhe
Engesser Straße 7
76128 Karlsruhe
Tel. 0721 608 7027

Königsberger Straße 25b
76139 Karlsruhe
philipp.kant@kit.edu

Personendaten

Geburtsdatum	12. September 1981
Geburtsort	Gießen
Staatsangehörigkeit	deutsch
Familienstand	verheiratet
Eltern	Dr. Reinhard Otter, Zahnarzt Christa Maria Otter, geb. Hahn, Oberstudienrätin

Ausbildungsdaten

Schulbesuch:	1988 - 1991 Goetheschule Staufenberg 1991 - 1999 Clemens-Brentano-Schule Lollar 22.06.1999 Abitur, Durchschnittsnote 1,0
Studium:	1999 - 2002 Physikstudium an der Philipps-Universität Marburg 18.09.2001 Vordiplom in Marburg, Note „sehr gut“ 2002 - 2005 Physikstudium an der Universität Karlsruhe
Diplom:	Juni 2005, Note „sehr gut“
Titel der Arbeit:	QCD-Korrekturen zum Higgs-Zerfall in Photonen
Referent:	Prof. Dr. Johann H. Kühn

Promotion: seit Juli 2005 Physik an der Universität Karlsruhe
bis Juni 2008 Stipendiat im Graduiertenkolleg
Hochenergiephysik und Teilchenastrophysik

Mündliche Prüfung: 31.10.2008

Titel der Arbeit: Higgs-Masse im mSSM
und Dimensionale Reduktion
in hohen Ordnungen der Störungstheorie

Referent: Prof. Dr. Matthias Steinhauser

Korreferent: Prof. Dr. Robert V. Harlander