

Das Parallelvolumen und abgeleitete Funktionale

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

DOKTORS DER NATURWISSENSCHAFTEN

von der Fakultät für Mathematik der
Universität Karlsruhe (TH)
genehmigte

DISSERTATION

von

Dipl.-Math. Jürgen Kampf

aus Mainz

Tag der mündlichen Prüfung: 8. Juli 2009

Referent: Prof. Dr. Günter Last
Korreferent: Dr. Daniel Hug

Vorwort

Die vorliegende Dissertation entstand im Rahmen meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Angestellter am Institut für Stochastik der Universität Karlsruhe (TH). Sie befasst sich mit dem Parallelvolumen allgemeiner kompakter Mengen.

Ich möchte mich bei Prof. Dr. Günter Last für die Möglichkeit, hier zu promovieren, und die Betreuung der Dissertation bedanken sowie bei Dr. Daniel Hug für die Übernahme des Korreferats. Weiter möchte ich mich bei Sven Ebert und Daniel Gentner dafür bedanken, dass sie Teile der Dissertation gelesen haben und einige wertvolle Hinweise gegeben haben. Schließlich möchte ich mich bei allen Mitarbeitern des Instituts für Stochastik für das angenehme Institutsklima bedanken.

Jürgen Kampf

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen	5
1.1 Analysis und Maßtheorie	5
1.2 Konvexgeometrie	10
1.3 Minkowski-Räume	15
1.4 Das Parallelvolumen in Minkowski-Räumen	19
1.5 Gemischte Volumina und verwandte Konzepte	23
1.6 Stochastische Geometrie	25
1.7 Das Parallelvolumen in der Literatur	29
1.8 Das Wills-Funktional in der Literatur	32
2 Asymptotik des Parallelvolumens	34
2.1 Die Konvergenzaussage	34
2.2 Konvergenzgeschwindigkeit und höhere Dimensionen	48
2.3 Asymptotik der Ableitung	58
2.4 Körper mit polynomialem Parallelvolumen	77
3 Gewichtete Parallelvolumina	81
3.1 Verallgemeinerungen des Wills-Funktional's	82
3.2 Eigenschaften der gewichteten Parallelvolumina	87
3.3 Ableitungen	99
3.4 Polynomiale gewichtete Parallelvolumina	107
4 Anwendungen	113
4.1 Räume stetiger Funktionale	113
4.2 Boolesche Modelle	116
4.3 Gauß'sche Zufallsvektoren	120
4.4 Zufällige kompakte Mengen	123
A Messbarkeitsfragen	130

Einleitung

Das Parallelvolumen ist ein Funktional mit zahlreichen Anwendungen, z.B. in der stochastischen Geometrie, der Statistik, der diskreten Geometrie oder der geometrischen Funktionalanalysis. Obwohl in vielen dieser Anwendungen auch das Parallelvolumen von nicht-konvexen Körpern von Interesse ist, wurde bisher vor allem der Spezialfall konvexer Körper erforscht. Das Parallelvolumen eines Körpers K des \mathbb{R}^d im Abstand r ist das Volumen der Parallelmengende, d.h. der Menge aller Punkte, deren Abstand von K höchstens r ist.

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in 4 Kapitel.

In Kapitel 1 werden wir zunächst Grundlagen aus verschiedenen Teilgebieten der Mathematik bereitstellen und dann die Geschichte der Erforschung des Parallelvolumens und des Wills-Funktional, eines vom Parallelvolumen abgeleiteten Funktional, zusammenfassen. In Kapitel 2 der vorliegenden Arbeit werden wir das Parallelvolumen eines festen Körpers als Funktion des Abstands betrachten.

Der wahrscheinlich Erste, der diese Sichtweise eingenommen hat, war im Jahr 1840 Steiner [50]. Er stellte fest, dass das Parallelvolumen von bestimmten konvexen Körpern ein Polynom ist. Mittlerweile ist bekannt, dass dies für alle konvexe Körper der Fall ist. Lusternik [35] bewies 1935 die Brunn-Minkowski-Ungleichung, die eine untere Schranke für das Wachstum des Parallelvolumens darstellt, für beliebige Körper. Kneser [32] fand 1951 eine Ungleichung, die in gewisser Weise eine obere Schranke für das Wachstum des Parallelvolumens eines Körpers darstellt. In der Ebene wies Sz.-Nagy [52] 1959 eine weitere obere Schranke für das Wachstum des Parallelvolumens nach. Diese Schranke hängt von der Zahl der Zusammenhangskomponenten des Körpers ab und ist von der Schranke von Kneser unabhängig.

Wir werden die Asymptotik des Parallelvolumens untersuchen, wenn der Abstand gegen unendlich strebt. Wir werden sehen, dass im \mathbb{R}^2 die Differenz des Parallelvolumens der konvexen Hülle eines Körpers und des Parallelvolumens des Körpers selbst gegen 0 konvergiert. Man kann in der Definition des Parallelvolumens die Euklidische Norm durch eine andere ersetzen. Die Normen, für die dieses Resultat gilt, sind genau die, deren Eichkörper – das ist die Menge aller Punkte, die höchstens Norm 1 haben – in gewissem Sinne glatt sind. Die Ordnung der oben beschriebenen Differenz ist im Euklidischen Fall höchstens r^{-1} . In höheren Dimensionen d hat diese Differenz ebenfalls höchstens die Ordnung r^{d-3} . Auch dieses Resultat gilt nicht nur bzgl. der Euklidischen Norm, sondern bzgl. allen Normen, deren Eichkörper eine gewisse Glattheitsvoraussetzung erfüllen, nämlich einen Ball als Summanden haben. Während wir in höheren Dimensionen vermuten, dass es noch weitere Normen gibt, in denen dieses Resultat gilt, werden wir in der Ebene zeigen, dass dies nicht der Fall ist. Ein weiteres Resultat dieses Kapitels wird sein, dass in der Ebene die Ableitung der oben bezeichneten Differenz von der Ordnung r^{-2} gegen 0 konvergiert.

Weiter erhalten wir einige Aussagen über Mengen, deren Parallelvolumen ein Polynom ist, u.a. einen neuen Beweis dafür, dass das Parallelvolumen eines Körpers in einem 2-dimensionalen Minkowski-Raum genau dann ein Polynom ist, wenn der Körper konvex ist. Dieses Resultat haben im Euklidischen Spezialfall Heveling, Hug und Last [25] und im allgemeinen Fall Hug, Last und Weil [28] gefunden.

Kapitel 3 der vorliegenden Arbeit befasst sich mit vom Parallelvolumen abgeleiteten Funktionalen, die das Wills-Funktional verallgemeinern.

Bei der Untersuchung von Gitterpunktzahlen führte Wills [61] dieses Funktional für konvexe Körper als Summe der inneren Volumina ein. Mittlerweile sind Integraldarstellungen des Wills-Funktional bekannt, die es erlauben, das Wills-Funktional auf den Raum aller Körper fortzusetzen. Es spielt eine Schlüsselrolle bei der Untersuchung des Zusammenhangs zwischen Gauß'schen Zufallsvariablen und Größen der Konvexgeometrie (siehe z.B. [56]).

Um das Wills-Funktional zu verallgemeinern, werden wir zwei Klassen von Funktionalen, nämlich die gewichteten Parallelvolumina und die Funktionale f_μ , einführen und untersuchen. Die gewichteten Parallelvolumina bilden von der Menge aller Körper in die reellen Zahlen ab und ordnen einem Körper K die Zahl $\int_{\mathbb{R}_0^+} V_d(K + \lambda B) d\rho(\lambda)$ zu, wobei B ein konvexer Körper ist, ρ ein signiertes Maß auf den nicht-negativen reellen Zahlen \mathbb{R}_0^+ , das schwache Integrabilitätsbedingungen erfüllt, und V_d das Lebesgue-Maß bezeichnet. Die Funktionale f_μ bilden ebenfalls von der Menge aller Körper in die reellen Zahlen ab und ordnen einem Körper K die Zahl $\int_{\mathcal{K}} V_d(K + A) d\mu(A)$ zu, wobei μ ein signiertes Maß auf der Menge aller konvexen Körper \mathcal{K} ist, das wiederum schwache Integrabilitätsbedingungen erfüllt. Nachdem wir diskutiert haben, in wie weit das Wills-Funktional eine Sonderrolle unter den gewichteten Parallelvolumina spielt, werden wir untersuchen, für welche signierten Maße die gewichteten Parallelvolumina und die Funktionale f_μ translations-invariant, stetig, additiv, submodular bzw. monoton sind. Anschließend betrachten wir die Funktionen, die entstehen, indem man einen festen Körper K um einen Faktor, der die Variable der Funktion ist, zentrisch streckt, und dann ein gewichtetes Parallelvolumen oder ein Funktional f_μ auf den gestreckten Körper anwendet. Unter starken Regularitätsvoraussetzungen sind diese Funktionen in allen positiven Zahlen unendlich oft differenzierbar, während sie unter deutlich schwächeren Voraussetzungen in 0 zweimal differenzierbar sind. Wir werden die erste und zweite Ableitung in 0 explizit angeben. In der Ebene sind unter Regularitätsvoraussetzungen auch diese Funktionen genau dann Polynome, wenn K konvex ist. Um ein entsprechendes Resultat in höheren Dimensionen zu erhalten, führen wir lokale Versionen der gewichteten Parallelvolumina ein.

Im vierten Kapitel werden wir zunächst nachweisen, dass ein bestimmter Unterraum dicht im Raum aller stetigen und translations-invarianten Funktionale von der Menge aller Körper in die reellen Zahlen liegt. Genauer gesagt, wird dieser Unterraum von den Funktionalen aufgespannt, die einen Körper auf das Volumen seiner Minkowski-Summe mit einem festen Körper, der gewisse Regularitätsvoraussetzungen erfüllt, abbilden. Dann werden wir an Hand unserer Resultate über das Wills-Funktional aus Kapitel 3 neue Beweise für Beziehungen zwischen Gauß'schen Zufallsvariablen und inneren Volumina geben. Außerdem wenden wir die Resultate der Kapitel 2 und 3 auf verschiedene Modelle der stochastischen Geometrie an, nämlich auf Boole'sche Modelle, Brown'sche Pfade und endliche Vereinigungen zufälliger kompakter Mengen.

Kapitel 1

Grundlagen

In den ersten sechs Abschnitten dieses Kapitels werden wir Definitionen und Resultate, die wir in den späteren Kapiteln benötigen werden, aus verschiedenen Gebieten der Mathematik, insbesondere der Geometrie, bereitstellen.

In den Abschnitten 1.7 und 1.8 werden wir dann einen Überblick über die Geschichte der Erforschung des Parallelvolumens und des Wills-Funktional geben.

1.1 Analysis und Maßtheorie

In diesem Abschnitt wollen wir zunächst das Konzept der signierten Maße einführen und dann zwei Resultate der Funktionalanalysis zitieren. Danach befassen wir uns mit dem Zusammenhang von Differentiation und Integration. Anschließend stellen wir Hilfsmittel aus der geometrischen Maßtheorie bereit und wenden uns der zweimaligen Differenzierbarkeit konvexer Funktionen zu. Wir schließen diesen Abschnitt mit einem Resultat aus der Linearen Algebra ab.

Für Teilmengen der reellen Zahlen wählen wir folgende Symbole: Die Menge der positiven ganzen Zahlen bezeichnen wir mit \mathbb{N}^+ , die Menge der nicht-negativen ganzen Zahlen mit \mathbb{N} , oder, wenn betont werden soll, dass die 0 darin enthalten ist, mit \mathbb{N}_0 . Die Menge der positiven reellen Zahlen bezeichnen wir mit \mathbb{R}^+ und die der nicht-negativen reellen Zahlen mit \mathbb{R}_0^+ .

Wir geben nun eine kurze Einführung in das Konzept der signierten Maße. Eine ausführlichere Einführung findet sich z.B. in [10, §4]. Ein *signiertes Maß* (von endlicher Totalvariation) auf einem Messraum (Ω, \mathcal{A}) ist eine Abbildung $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$, die σ -additiv (mit $\mu(\emptyset) = 0$) ist. Ein signiertes Maß ist also genau dann ein Maß, wenn es jeder messbaren Menge einen nicht-negativen Wert zuweist. Es ist bekannt, dass jedes signierte Maß μ genau eine Zerlegung der Form $\mu = \mu^+ - \mu^-$ mit zwei zueinander singulären Maßen μ^+ und μ^- hat, die sog. *Jordan-Zerlegung*. Für eine messbare Abbildung $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist das Integral von f bzgl. μ definiert durch

$$\int_{\Omega} f(\omega) d\mu(\omega) := \int_{\Omega} f(\omega) d\mu^+(\omega) - \int_{\Omega} f(\omega) d\mu^-(\omega),$$

sofern beide Integrale auf der rechten Seite definiert sind und mindestens eines endlich ist. Ist $\Omega \subseteq \mathbb{R}$, so heißt $\int_{\Omega} t^j d\mu(t)$ das *j-te Moment* von μ .

Das *Variationsmaß* eines signierten Maßes μ ist $|\mu| := \mu^+ + \mu^-$.

Bem. 1.1. Für ein signiertes Maß μ auf einem Messraum Ω und eine messbare Teilmenge $\Omega' \subseteq \Omega$ bezeichne $\mu|_{\Omega'}$ die *Einschränkung* von μ auf Ω' . Nun sieht man leicht $(\mu|_{\Omega})^+ = (\mu^+)|_{\Omega}$ und $(\mu|_{\Omega})^- = (\mu^-)|_{\Omega}$, woraus $|\mu|_{\Omega'} = |\mu|_{\Omega}|_{\Omega'}$ folgt.

Auf Grund der Existenz der Jordan-Zerlegung übertragen sich der Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz und der Satz von Fubini auf signierte Maße. Präzise gilt:

Satz 1.2. *Sei ρ ein signiertes Maß auf einem Messraum Ω und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine punktweise konvergente Folge von messbaren Funktionen $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Existiert nun eine messbare Funktion $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit $\int_{\Omega} h d|\rho| < \infty$ und $|f_n(x)| \leq h(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $|\rho|$ -fast alle $x \in \Omega$, so ist $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ sowohl bzgl. ρ als auch bzgl. $|\rho|$ integrierbar und es gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n d\rho = \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\rho.$$

Satz 1.3. *Seien μ und ν zwei signierte Maße auf Messräumen Ω und Ω' . Sei $f : \Omega \times \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$ eine messbare Funktion mit*

$$\int_{\Omega'} \int_{\Omega} |f(\omega, \omega')| d|\mu|(\omega) d|\nu|(\omega') < \infty.$$

Dann gilt

$$\int_{\Omega'} \int_{\Omega} f(\omega, \omega') d\mu(\omega) d\nu(\omega') = \int_{\Omega} \int_{\Omega'} f(\omega, \omega') d\nu(\omega') d\mu(\omega).$$

Wir wollen nun die Tailfunktion, eine für unsere Zwecke geeignet normierte Version der Verteilungsfunktion, für signierte Maße einführen. Hierzu definieren wir die *Totalvariation* einer Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ durch

$$\sup \left\{ \sum_{j=1}^{N-1} |f(s_{j+1}) - f(s_j)| : N \in \mathbb{N}^+, s_1 < \dots < s_N, s_1, \dots, s_N \in I \right\} \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}.$$

Die Totalvariation einer Funktion misst also, wie stark die Funktion hin- und herpendelt. Folgender Satz ist offensichtlich äquivalent zu [10, Prop. 4.4.3].

Satz 1.4. *Für jedes signierte Maß ρ auf \mathbb{R}_0^+ ist die durch*

$$G(r) = \rho([r, \infty)), \quad r \in \mathbb{R}_0^+, \tag{1.1}$$

definierte Funktion linksstetig, hat endliche Totalvariation und erfüllt $\lim_{r \rightarrow \infty} G(r) = 0$. Umgekehrt gibt es zu jeder linksstetigen Funktion $G : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ von endlicher Totalvariation mit $\lim_{r \rightarrow \infty} G(r) = 0$ genau ein signiertes Maß ρ mit (1.1).

Man nennt die durch (1.1) definierte Funktion G die *Tailfunktion* von ρ .

Lemma 1.5. *Sei ρ ein signiertes Maß auf \mathbb{R}_0^+ mit Tailfunktion G . Dann hat ρ genau dann ein endliches j -tes Moment, $j \in \mathbb{N}^+$, wenn $j \int_0^{\infty} r^{j-1} G(r) dr$ (als Lebesgue-Integral) existiert und endlich ist. In diesem Fall sind die beiden Werte gleich.*

Beweis: Sei $j \in \mathbb{N}^+$. Dann folgt aus dem Satz von Fubini (Satz 1.3), falls eine der beiden Seiten existiert und endlich ist,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_0^+} \lambda^j d\rho(\lambda) &= \int_{\mathbb{R}_0^+} \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{r \leq \lambda\}} j r^{j-1} dr d\rho(\lambda) \\ &= \int_0^\infty j r^{j-1} \int_{\mathbb{R}_0^+} \mathbf{1}_{\{r \leq \lambda\}} d\rho(\lambda) dr \\ &= j \int_0^\infty r^{j-1} G(r) dr. \quad \square \end{aligned}$$

Sei η ein Maß und μ ein signiertes Maß auf dem selbem Messraum (Ω, \mathcal{A}) . Dann heißt μ absolut-stetig bzgl. η , falls für jede Menge $B \in \mathcal{A}$ mit $\eta(B) = 0$ auch $\mu(B) = 0$ gilt. Wie in [10, S. 134 unten] bemerkt wird, ist μ genau dann absolut-stetig bzgl. η , wenn $|\mu|$ absolut-stetig bzgl. η ist, obwohl $\mu(B) = 0$ für eine Menge $B \in \mathcal{A}$ im Allgemeinen nicht $|\mu|(B) = 0$ impliziert. Satz 4.2.3 aus [10] lautet:

Satz 1.6. *Sei η ein σ -endliches Maß und μ ein signiertes Maß auf dem selben Messraum (Ω, \mathcal{A}) . Falls μ absolut-stetig bzgl. η ist, gibt es eine messbare Funktion $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit*

$$\mu(B) = \int_B g(x) d\eta(x), \quad B \in \mathcal{A}. \quad (1.2)$$

Für zwei Funktionen $g_1, g_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, die (1.2) erfüllen, gilt $g_1(x) = g_2(x)$ für η -fast alle $x \in \Omega$.

Eine Funktion $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit (1.2) heißt *Dichte* von μ (bzgl. η).

Als nächstes wollen wir Anwendungen von signierten Maßen in der Funktionalanalysis besprechen.

Für zwei topologische Räume S und T bezeichnen wir die Menge aller stetigen Abbildungen von S nach T mit $C(S, T)$. Falls S kompakt ist und T ein normierter Raum ist, dann betrachten wir $C(S, T)$ mit der Maximumsnorm.

Als *Dualraum* eines topologischen Vektorraums X bezeichnet man den Vektorraum der stetigen und linearen Abbildungen $X \rightarrow \mathbb{R}$.

Für einen kompakten metrischen Raum S bezeichne $M(S)$ die Menge aller signierten Maße (von endlicher Totalvariation) auf S mit der Borel- σ -Algebra $\mathcal{B}(S)$. Offensichtlich sind für $\mu, \nu \in M(S)$ und $c \in \mathbb{R}$ die durch

$$(\mu + \nu)(B) := \mu(B) + \nu(B), \quad B \in \mathcal{B}(S)$$

und

$$(c \cdot \mu)(B) := c \cdot \mu(B), \quad B \in \mathcal{B}(S)$$

definierten Funktionale signierte Maße auf S . Deshalb ist $M(S)$ ein Vektorraum.

Nun lautet der Riesz'sche Darstellungssatz (vgl. z.B. [60, Theorem II.2.5]):

Satz 1.7. *Sei S ein kompakter metrischer Raum. Dann ist $M(S)$ isomorph zum Dualraum von $C(S, \mathbb{R})$ via eines Isomorphismus, der jedes signierte Maß μ auf S auf das Funktional*

$$C(S, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \int_S f(x) d\mu(x)$$

abbildet.

Im Zusammenhang mit dem Riesz'schen Darstellungssatz werden wir auch das Hahn-Banach-Theorem benötigen. Es lautet (siehe z.B. [60, Korollar III.1.9]):

Satz 1.8. *Sei X ein normierter Raum und $U \subseteq X$ ein linearer Unterraum. Dann sind äquivalent:*

- (i) U liegt dicht in X .
- (ii) Ein stetiges und lineares Funktional $X \rightarrow \mathbb{R}$, dessen Einschränkung auf U das Nullfunktional ist, ist das Nullfunktional auf X .

Wir kommen nun zu einer Reihe von Theoremen, die einen Zusammenhang zwischen Ableitungen und Maßtheorie herstellen.

Satz 1.9. (i) *Sei ρ ein signiertes Maß auf einem Messraum Ω , $A \subseteq \mathbb{R}$ und $f : A \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion so, dass $\omega \mapsto f(r, \omega)$ für jedes $r \in A$ bzgl. $|\rho|$ integrierbar ist. Sei $p \in A$. Falls für $|\rho|$ -fast alle $\omega \in \Omega$ die Funktion $r \mapsto f(r, \omega)$ im Punkt $r = p$ stetig differenzierbar ist und eine integrierbare Funktion $L : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ derart existiert, dass für $|\rho|$ -fast alle $\omega \in \Omega$ für alle $r \in A$*

$$|f(r, \omega) - f(p, \omega)| \leq L(\omega)|r - p| \quad (1.3)$$

gilt, dann ist $\frac{\partial}{\partial r} f(r, \omega)|_{r=p}$ bzgl. ρ integrierbar, die Funktion $\int_{\Omega} f(r, \omega) d\rho(\omega)$ in p stetig differenzierbar und es gilt

$$\frac{\partial}{\partial r} \int_{\Omega} f(r, \omega) d\rho(\omega) |_{r=p} = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial r} f(r, \omega) |_{r=p} d\rho(\omega).$$

- (ii) *Falls $r \mapsto f(r, \omega)$ für fast alle $\omega \in \Omega$ auf A differenzierbar ist, genügt es anstelle von (1.3) vorauszusetzen, dass für fast alle $\omega \in \Omega$ die Ungleichung*

$$\left| \frac{\partial}{\partial r} f(r, \omega) \right| \leq L(\omega)$$

für alle $r \in A$ gilt.

Beweis: (i) Die Integrierbarkeit von $\frac{\partial}{\partial r} f(r, \omega)|_{r=p}$ folgt sofort aus der Integrierbarkeit von L .

Sei $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine gegen p konvergente Folge. Dann gilt, da auf Grund von (1.3) die Voraussetzungen von Satz 1.2 erfüllt sind,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial r} f(r, \omega) |_{r=p} d\rho(\omega) &= \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(r_n, \omega) - f(p, \omega)}{r_n - p} d\rho(\omega) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{f(r_n, \omega) - f(p, \omega)}{r_n - p} d\rho(\omega) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_{\Omega} f(r_n, \omega) d\rho(\omega) - \int_{\Omega} f(p, \omega) d\rho(\omega)}{r_n - p}. \end{aligned}$$

Da $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige gegen p konvergente Folge war, folgen die verbleibenden Behauptungen.

Teil (ii) folgt sofort aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung. \square

Die folgende Version des Hauptsatzes der Integralrechnung ist Proposition 4.4.6 und Corollary 6.3.7 aus [10].

Satz 1.10. Sei $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann sind äquivalent:

(i) F ist absolut-stetig.

(ii) Es gibt eine integrierbare Funktion $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = F(a) + \int_a^x g(t) dt, \quad x \in [a, b].$$

(iii) F ist (Lebesgue-) fast überall differenzierbar und

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t) dt, \quad x \in [a, b].$$

Satz 1.11. Sei $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig. Dann ist f (Lebesgue-) fast überall differenzierbar.

Dieser Satz findet sich z.B. in [16, 3.1.6].

Wir kommen nun zur geometrischen Maßtheorie. Es sei

$$\kappa_d := \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2} + 1)}, \quad d \in \mathbb{R}_0^+.$$

Falls $d \in \mathbb{N}$, dann ist κ_d das Volumen der d -dimensionalen Einheitskugel. Weiter bezeichne $\|\cdot\|$ die Euklidische Norm und $\text{diam } S := \sup\{\|x - y\| \mid x, y \in S\}$ den Durchmesser einer Teilmenge $S \subseteq \mathbb{R}^d$.

Def. 1.12. Sei $j \in \mathbb{R}_0^+$ und $A \subseteq \mathbb{R}^d$ eine Teilmenge. Für $\delta > 0$ setzen wir

$$\mathcal{H}_\delta^j(A) := \inf \left\{ \sum_{S \in \mathcal{G}} (\text{diam } S)^j \mid \mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d), \mathcal{G} \text{ abzählbar}, A \subseteq \bigcup_{S \in \mathcal{G}} S, \forall S \in \mathcal{G} : \text{diam } S < \delta \right\}.$$

Die Zahl

$$\mathcal{H}^j(A) := \kappa_j 2^{-j} \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_\delta^j(A) \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$$

heißt j -dimensionales Hausdorff-Maß von A .

Eine ausführlichere Einführung des Hausdorff-Maßes ist z.B. in [14] enthalten. Insbesondere besagt Theorem 1 in Abschnitt 2.1 dieses Buches, dass die Einschränkung des Hausdorff-Maßes auf die Borel- σ -Algebra tatsächlich ein Maß ist, und laut Theorem 2 in Abschnitt 2.2 stimmt dieses Maß im Fall $j = d$ mit dem Lebesgue-Maß überein. Weiter besagt Theorem 1 aus [14, Abschnitt 2.4]:

Lemma 1.13. Sei $A \subseteq \mathbb{R}^d$ eine Menge, $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lipschitz-stetige Funktion mit Lipschitz-Konstante λ und $j \in \mathbb{R}_0^+$. Dann gilt

$$\mathcal{H}^j(f(A)) \leq \lambda^j \mathcal{H}^j(A).$$

Der eindimensionale Spezialfall des Flächensatzes der geometrischen Maßtheorie (Theorem 3.2.3.(2) in [16]) lautet:

Satz 1.14. Seien $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lipschitz-stetige Funktion und $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}} u(x) \|f'(x)\| dx = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{x \in f^{-1}(\{z\})} u(x) d\mathcal{H}^1(z). \quad (1.4)$$

Man beachte, dass f' in (1.4) auf Grund von Satz 1.11 fast überall definiert ist, da wir f als Lipschitz-stetig vorausgesetzt haben.

Nun wollen wir uns mit der zweimaligen Differenzierbarkeit konvexer Funktionen befassen. Hierzu modifizieren wir den Begriff der zweimaligen Differenzierbarkeit, da die Nicht-differenzierbarkeitspunkte konvexer Funktionen dicht liegen können.

Def. 1.15. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und konvex und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ konvex.

- (i) Ein Vektor $\nu \in \mathbb{R}^d$ heißt Subgradient von f in $x \in U$, falls $f(y) \geq f(x) + \langle \nu, y - x \rangle$ für alle $y \in U$.
- (ii) Eine Funktion $\theta : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ heißt eine Wahl von Subgradienten von f , falls $\theta(x)$ für jedes $x \in U$ Subgradient von f in x ist.
- (iii) Falls in einem Punkt $x \in U$ alle Wahlen von Subgradienten von f differenzierbar mit gleicher Ableitung sind, heißt f Alexandroff-zweimal-differenzierbar. Die Ableitung der Wahlen von Subgradienten nennen wir in diesem Fall die Hesse-Matrix von f in x .

Satz 1.16. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und konvex und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ konvex. Dann ist f in fast allen $x \in U$ Alexandroff-zweimal-differenzierbar und die Hesse-Matrix ist symmetrisch.

Für einen Überblick über die verschiedenen bekannten Beweise dieses Satzes und damit zusammenhängende Fragestellungen, siehe z.B. [46, Section 1.5, Fußnote 2].

Nun kommen wir noch zu einem Standardresultat der Linearen Algebra, nämlich der Invertierbarkeit einer Vandermonde-Matrix.

Lemma 1.17. Seien $k_0, \dots, k_n \in \mathbb{R}$ paarweise verschiedene reelle Zahlen. Dann ist die Matrix $(k_i^j)_{i,j=0,\dots,n} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$, wobei k_i^j die j -te Potenz von k_i bezeichnet, regulär.

1.2 Konvexgeometrie

In diesem Abschnitt stellen wir Hilfsmittel aus der elementaren Konvexgeometrie bereit. Nachdem wir uns mit Eigenschaften von Summanden und der Hausdorff-Metrik befasst haben, behandeln wir die Normalenvektoren und den Rand konvexer Körper und wenden uns schließlich dem Umkugelmittelpunkt zu. Gemischte Volumina und lokale Versionen davon werden wir erst in Abschnitt 1.5 einführen.

Wir bezeichnen in dieser Arbeit eine nichtleere, kompakte Teilmenge des \mathbb{R}^d als *Körper*. Die Menge aller Körper bezeichnen wir mit \mathcal{C} und die Menge aller konvexen Körper mit \mathcal{K} . Die Dimension d wird stets klar sein.

Für zwei Körper $K, L \subseteq \mathbb{R}^d$ ist die *Minkowski-Summe* erklärt durch

$$K + L := \{x + y \mid x \in K, y \in L\}$$

und die *Minkowski-Multiplikation* durch

$$rK := \{rx \mid x \in K\}, \quad r \geq 0.$$

Wir bezeichnen mit $\text{int } A$ das Innere einer Menge A , mit $\text{bd } A$ ihren Rand und mit $\text{conv } A$ ihre konvexe Hülle.

Es sei $S^{d-1} := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\| = 1\}$ die *Sphäre*, $B^d := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\| \leq 1\}$ die *Einheitskugel* und $B_r(p) := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x - p\| \leq r\}$ die Kugel mit Mittelpunkt $p \in \mathbb{R}^d$ und Radius $r \geq 0$. Es bezeichne $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Euklidische Skalarprodukt.

Ein Vektor $\nu \in \mathbb{R}^d$ heißt *äußerer Normalenvektor* eines konvexen Körpers $K \subseteq \mathbb{R}^d$ in einem Punkt $q \in K$, falls $\langle q, \nu \rangle \geq \langle x, \nu \rangle$ für alle Punkte $x \in K$ gilt. Hat ν darüberhinaus Länge 1, so heißt ν *Einheitsnormalenvektor*.

Ein konvexer Körper $K \subseteq \mathbb{R}^d$ heißt *strikt konvex*, falls $\lambda x + (1 - \lambda)y \in \text{int } K$ für alle $x, y \in K$ und $\lambda \in (0, 1)$ gilt. Dies ist äquivalent dazu, dass es für jeden Vektor $u \in S^{d-1}$ genau einen Punkt $x \in K$ mit äußerem Normalenvektor u gibt.

Ein konvexer Körper $K \subseteq \mathbb{R}^d$ heißt *glatt*, wenn jeder Randpunkt von K genau einen äußeren Einheitsnormalenvektor hat. Laut [46, S. 104] ist dies äquivalent dazu, dass der Rand von K eine C^1 -Mannigfaltigkeit ist.

Für einen konvexen Körper $K \subseteq \mathbb{R}^d$ ist die Stützfunktion erklärt durch

$$h_K : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, \quad u \mapsto \max\{\langle x, u \rangle \mid x \in K\}.$$

Die Minkowski-Addition konvexer Körper erfüllt folgendes Kürzungsgesetz (vgl. [46, S. 41 unten]):

Lemma 1.18. *Seien K, L und M drei konvexe Körper. Dann gilt*

$$K + M = L + M \iff K = L.$$

Ein konvexer Körper L heißt *Summand* eines konvexen Körpers K , falls es einen konvexen Körper M so gibt, dass K die Minkowski-Summe von L und M ist. Dies ist äquivalent dazu, dass es für jeden Punkt $x \in K$ ein $t \in \mathbb{R}^d$ gibt mit

$$x \in L + t \subseteq K.$$

Weiteres hierzu findet sich in [46, Abschn. 3.2], oder für den im Folgenden interessanten Spezialfall, dass L ein Kreis ist, in [7, §24].

Lemma 1.19. *Sei K ein Körper mit einem Summanden RB^d , $R > 0$, $b \in \text{bd } K$ ein Punkt mit äußerem Einheitsnormalenvektor n und $t \in K$ ein weiterer Punkt. Dann sind äquivalent:*

$$(i) \quad t = b - Rn$$

$$(ii) \quad b \in t + RB^d \subseteq K$$

Beweis: Wir zeigen zunächst „(ii) \Rightarrow (i)“. Aus (ii) folgt $t + Rn \in K$ und somit

$$\langle t, n \rangle + R = \langle t + Rn, n \rangle \leq \langle b, n \rangle,$$

also $\langle b - t, n \rangle \geq R$. Wegen $\|b - t\| \leq R$ folgt $b - t = Rn$ und somit (i).

Da es aber einen Punkt t gibt, der (ii) erfüllt, folgt die Umkehrung. \square

Eine Charakterisierung von Körpern, die einen Ball als Summanden haben, ergibt sich aus Weil [59]. Das *wesentliche Infimum* einer messbaren Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ist

$$\text{ess inf } f := \inf\{t \in \mathbb{R} \mid \mu(f^{-1}((-\infty, t))) > 0\}.$$

Die Stützfunktion h_K eines konvexen Körpers $K \subseteq \mathbb{R}^d$ ist konvex und damit laut Theorem 1.16 fast überall Alexandroff-zweimal-differenzierbar mit symmetrischer Hesse-Matrix. Für einen Vektor $u \in S^{d-1}$ ist der Gradient von h_K in tu unabhängig von $t > 0$ und somit ist u Eigenvektor der Hesse-Matrix von h_K in u zum Eigenwert 0. Daher bildet die Einschränkung der Hesse-Matrix auf u^\perp nach u^\perp ab. Es bezeichne $R_1(K, u)$ den kleinsten Eigenwert der Einschränkung der Hesse-Matrix von h_K in u auf u^\perp . Nun ergibt sich als Spezialfall von [59, Theorem 1] folgender Satz:

Satz 1.20. *Ein konvexer Körper $K \subseteq \mathbb{R}^d$ hat genau dann eine Kugel als Summanden, wenn $\text{ess inf } R_1(K, \cdot) > 0$.*

Die *Hausdorff-Metrik* auf \mathcal{C} (und damit insbesondere auf seiner Teilmenge \mathcal{K}) ist definiert durch

$$d^H(K, L) := \inf\{r > 0 \mid K \subseteq L + rB^d \wedge L \subseteq K + rB^d\}, \quad K, L \in \mathcal{C}.$$

Näheres zur Hausdorff-Metrik, von der man leicht sieht, dass sie tatsächlich eine Metrik ist, findet sich in [47, Abschnitt 1.2] und in [46, Abschnitt 1.8].

Lemma 1.21. *Sei $K \in \mathcal{C}$. Dann gibt es eine Folge $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ endlicher Teilmengen von K , die in der Hausdorff-Metrik gegen K konvergiert.*

Beweis: Sei $i \in \mathbb{N}$ zunächst fest. Dann ist

$$\{\text{int } B_{1/i}(x) \mid x \in K\}$$

eine offene Überdeckung von K , besitzt also eine endliche Teilüberdeckung

$$\{\text{int } B_{1/i}(x) \mid x \in K_i\}.$$

Aus $K_i \subseteq K$ und $K \subseteq K_i + \frac{1}{i}B^d$ folgt $d^H(K, K_i) \leq \frac{1}{i}$.

Die so konstruierte Folge $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ besteht offensichtlich aus endlichen Teilmengen von K und konvergiert gegen K . \square

Lemma 1.22. *Sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es eine stetige Abbildung $T : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ mit folgenden Eigenschaften:*

- (i) *Wenn K einen Summanden der Form RB^d , $R > 0$, hat, dann auch $T(K)$.*
- (ii) *Es gilt $d^H(K, T(K)) < \epsilon S$, falls $K \subseteq SB^d$, $S > 0$.*
- (iii) *Die Stützfunktion $h_{T(K)}$ ist für alle $K \in \mathcal{K}$ auf $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ unendlich oft differenzierbar.*

Beweis: Eine solche Funktion T wird in [46, Theorem 3.3.1] konstruiert und es wird dort auch nachgewiesen, dass sie stetig ist und (ii) und (iii) erfüllt. Weiter wird nachgewiesen, dass $T(K + L) = T(K) + T(L)$ für beliebige $K, L \in \mathcal{K}$ gilt und aus der Konstruktion von T ist offensichtlich, dass für einen konvexen Körper K , dessen Stützfunktion ein skalares Vielfaches der Identität ist, $T(K) = K$ gilt. Aus diesen beiden Aussagen folgt aber (i). \square

Der folgende Satz ist bekannt als *Auswahlsatz von Blaschke*. Näheres befindet sich z.B. in [46, Theorem 1.8.3 bis Theorem 1.8.6].

Satz 1.23. *Jede abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von \mathcal{C} bzw. \mathcal{K} ist kompakt.*

Nun wollen wir eine Aussage über äußere Normalenvektoren herleiten, die damit zusammenhängt, dass die Ableitung einer konvexen Funktion, wenn sie existiert, monoton fallend ist.

Lemma 1.24. *Sei $K \subseteq \mathbb{R}^2$ konvex und kompakt, $q_1, q_2 \in \text{bd } K$ und ν_1 und ν_2 äußere Einheitsnormalenvektoren von K in q_1 bzw. q_2 . Sei weiter (y, n) eine Orthormalbasis. Falls nun $\langle \nu_1, n \rangle > 0$ und $\langle \nu_2, n \rangle > 0$ und $\langle \nu_2, y \rangle > \langle \nu_1, y \rangle$ gilt, dann folgt $\langle q_2, y \rangle \geq \langle q_1, y \rangle$.*

Beweis: Wegen $\langle q_2, \nu_1 \rangle \leq \langle q_1, \nu_1 \rangle$ ist

$$\langle q_2 - q_1, y \rangle \langle \nu_1, y \rangle + \langle q_2 - q_1, n \rangle \langle \nu_1, n \rangle \leq 0. \quad (1.5)$$

Setze

$$h : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, s \mapsto \frac{s}{\sqrt{1-s^2}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{(1/s)^2-1}} & \text{falls } s > 0 \\ 0 & \text{falls } s = 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{(1/s)^2-1}} & \text{falls } s < 0. \end{cases}$$

Wegen der Voraussetzung $\langle \nu_1, n \rangle > 0$ gilt

$$\langle \nu_1, n \rangle = \sqrt{1 - \langle \nu_1, y \rangle^2},$$

also

$$\frac{\langle \nu_1, y \rangle}{\langle \nu_1, n \rangle} = h(\langle \nu_1, y \rangle)$$

und somit folgt aus (1.5)

$$\langle q_2 - q_1, y \rangle h(\langle \nu_1, y \rangle) + \langle q_2 - q_1, n \rangle \leq 0.$$

Analog zeigt man

$$\langle q_2 - q_1, y \rangle h(\langle \nu_2, y \rangle) + \langle q_2 - q_1, n \rangle \geq 0.$$

Durch Subtraktion folgt

$$\langle q_2 - q_1, y \rangle \cdot (h(\langle \nu_2, y \rangle) - h(\langle \nu_1, y \rangle)) \geq 0.$$

Nun ist h für positive s positiv und streng monoton wachsend, $h(0) = 0$ und für negative s ist h negativ und streng monoton wachsend. Also ist h insgesamt streng monoton wachsend. Daher gilt

$$h(\langle \nu_2, y \rangle) - h(\langle \nu_1, y \rangle) > 0$$

und somit

$$\langle q_2, y \rangle \geq \langle q_1, y \rangle. \quad \square$$

Folgender Zusammenhang zwischen den Subgradienten der Stützfunktion und äußeren Normalenvektoren ist [46, Theorem 1.7.4]:

Satz 1.25. *Sei $K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt und konvex, $q \in \text{bd } K$ und $n \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Dann ist n genau dann äußerer Normalenvektor von K in q , wenn q ein Subgradient von h_K in n ist.*

Nun wollen wir uns mit dem Rand von konvexen Körpern befassen.

Eine konvexe Teilmenge F eines konvexen Körpers K heißt *Seite* von F , falls für alle $x, y \in K$ mit $\frac{x+y}{2} \in F$ bereits $x, y \in F$ gilt. Als *Dimension* einer konvexen Menge bezeichnet man die Dimension ihrer affinen Hülle. Das *relative Innere*, $\text{relint } K$, eines konvexen Körpers $K \subseteq \mathbb{R}^d$ ist sein Inneres bzgl. seiner affinen Hülle als umgebenden topologischen Raum.

Lemma 1.26. *Sei $K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt und $x \in (\text{bd } \text{conv } K) \setminus K$. Dann ist x im relativen Inneren einer Seite positiver Dimension enthalten.*

Beweis: Laut [46, Theorem 2.1.2] ist x im relativen Inneren einer Seite F von $\text{conv } K$ enthalten. Also müssen wir nur zeigen, dass F nicht nur aus x besteht. Da aber $(\text{conv } K) \setminus F$ konvex ist, kann wegen der Definition der konvexen Hülle nicht $K \subseteq (\text{conv } K) \setminus F$ gelten. Also muss $K \cap F \neq \emptyset$ sein und daher enthält F außer x noch weitere Punkte. \square

Lemma 2.2.2 aus [46] impliziert folgendes Lemma:

Lemma 1.27. *Sei $K \subseteq \mathbb{R}^d$ ein konvexer Körper, F eine Seite von K und $x, y \in \text{relint } F$. Dann ist ein Vektor genau dann äußerer Normalenvektor von K in x , wenn er äußerer Normalenvektor von K in y ist.*

Eine Seite der Dimension 1 heißt *Kante*.

Lemma 1.28. *Ein konvexer Körper $K \subseteq \mathbb{R}^2$ hat höchstens abzählbar viele Kanten.*

Beweis: Falls K Dimension 2 hat, folgt die Aussage aus [46, Theorem 2.2.5]. Falls K Dimension 0 oder 1 hat, ist die Aussage trivial. \square

Satz 1.29. *Sei $K \in \mathcal{C}$. Dann gibt es eine Kugel $B_r(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, $r \geq 0$, mit $K \subseteq B_r(x)$ so, dass für jede andere Kugel $B_{r'}(x')$, $x' \in \mathbb{R}^d$, $r' \geq 0$, mit $K \subseteq B_{r'}(x')$ und $(x', r') \neq (x, r)$ die Ungleichung $r' > r$ gilt.*

Beweis: Sei

$$r := \inf\{\rho \in \mathbb{R}_0^+ \mid \exists x \in \mathbb{R}^d : K \subseteq B_\rho(x)\}.$$

Wir zeigen, dass es genau ein $x \in \mathbb{R}^d$ gibt mit $K \subseteq B_r(x)$. Daraus folgt dann sofort die Behauptung.

Zum Nachweis der Existenz wählen wir $k_0 \in K$. Es gibt Folgen $(r_i)_{i \in \mathbb{N}}$ im Intervall $[r, r+1]$ und $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R}^d so, dass $(r_i)_{i \in \mathbb{N}}$ gegen r konvergiert und $K \subseteq B_{r_i}(x_i)$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Insbesondere gilt $x_i \in B_{r+1}(k_0)$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und wegen der Kompaktheit von $B_{r+1}(k_0)$ konvergiert eine Teilfolge von $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$, o.B.d.A. die Folge selbst, gegen einen Grenzwert

$x \in \mathbb{R}^d$. Für jedes $k \in K$ gilt $\|k - x_i\| \leq r_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und somit $\|k - x\| \leq r$. Also $K \subseteq B_r(x)$.

Zum Nachweis der Eindeutigkeit seien $x, x' \in \mathbb{R}^d$ mit $K \subseteq B_r(x)$ und $K \subseteq B_r(x')$. Wir setzen $m := \frac{1}{2}(x + x')$ und $l := \frac{1}{2}\|x - x'\| = \|m - x\|$ und beweisen

$$K \subseteq B_{\sqrt{r^2 - l^2}}(m). \tag{1.6}$$

Sei hierzu $y \in K \subseteq B_r(x) \cap B_r(x')$ und o.B.d.A. $\langle y, x' - x \rangle \geq \langle m, x' - x \rangle$. Es gilt

$$\|y - x\|^2 = \|y - m\|^2 + 2\langle y - m, m - x \rangle + \|m - x\|^2.$$

Wegen

$$2\langle y - m, m - x \rangle = \langle y - m, x' - x \rangle \geq 0$$

folgt

$$\|y - m\| \leq \sqrt{\|y - x\|^2 - \|m - x\|^2} \leq \sqrt{r^2 - l^2},$$

was den Nachweis von (1.6) abschließt.

Aus (1.6) und der Wahl von r folgt aber, dass $l = 0$ und somit $x = x'$ gilt. \square

Mit dem Mittelpunkt der kleinsten Kugel, die einen Körper K enthält, seiner sog. *Umkugel*, befasst sich auch Lemma 4.2.1 aus [47]. Die Aussage dieses Lemmas ist:

Satz 1.30. *Die Abbildung $\mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^d$, die jedem Körper seinen Umkugelmittelpunkt zuordnet, ist stetig.*

1.3 Minkowski-Räume

In diesem Abschnitt geben wir eine kurze Einführung in die Theorie der Minkowski-Räume, d.h. im Wesentlichen der endlich-dimensionalen normierten Räume. Man beachte, dass wir uns in der vorliegenden Arbeit für die Normen selbst und nicht nur für die von ihnen induzierte Topologie interessieren. Eine ausführlichere Darstellung findet sich z.B. in [53].

Eine *M-Norm* ist eine Abbildung $|\cdot| : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, mit

$$\begin{aligned} |x| = 0 &\iff x = 0, & x \in \mathbb{R}^d, \\ |\lambda x| &= \lambda \cdot |x|, & \lambda \in \mathbb{R}_0^+, x \in \mathbb{R}^d, \\ |x + y| &\leq |x| + |y|, & x, y \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

Eine M-Norm $|\cdot| : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ ist also genau dann eine Norm, wenn $|x| = |-x|$ für $x \in \mathbb{R}^d$ gilt. Als *Minkowski-Raum* bezeichnen wir einen endlich-dimensionalen Vektorraum \mathbb{R}^d mit einer M-Norm $|\cdot|$. Man zeigt leicht, dass die Einheitskugel $B := \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| \leq 1\}$ konvex ist. Weiter folgt aus der Äquivalenz aller M-Normen des \mathbb{R}^d , dass B bzgl. der Euklidischen Norm kompakt ist und 0 als inneren Punkt hat.

Umgekehrt können wir aber auch einen konvexen Körper $B \subseteq \mathbb{R}^d$ mit $0 \in \text{int } B$, einen sog. *Eichkörper*, vorgeben. Dann definiert man für eine beliebige Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^d$ und einen Punkt $x \in \mathbb{R}^d$ den *B-Abstand* von x zu A durch

$$d_B(A, x) := \inf\{r > 0 \mid x \in A + rB\}.$$

Falls A abgeschlossen ist, ist dieses Infimum ein Minimum. Dann gilt

$$x \in A + rB \iff d_B(A, x) \leq r, \quad x \in \mathbb{R}^d, r \geq 0. \quad (1.7)$$

Für zwei Punkte $y, x \in \mathbb{R}^d$ ist der B -Abstand definiert durch

$$d_B(y, x) := d_B(\{y\}, x).$$

Für eine abgeschlossene Menge $A \subseteq \mathbb{R}^d$ gilt nun

$$d_B(A, x) = \min\{d_B(y, x) \mid y \in A\}.$$

Es lässt sich zeigen, dass die Funktion $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto d_B(0, x)$ eine M-Norm ist. Außerdem ist B die Einheitskugel in dieser M-Norm.

Umgekehrt gilt auch für jede M-Norm $|\cdot|$ mit Einheitskugel B , dass $|x| = d_B(0, x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$.

Wir bezeichnen die Menge aller konvexen Körper, die 0 als inneren Punkt haben, mit \mathcal{K}_{00} . Dann gilt:

Lemma 1.31. *Die Abbildung*

$$\mathcal{K}_{00} \times \mathcal{C} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_0^+, \quad (B, K, x) \mapsto d_B(K, x)$$

ist stetig (wobei \mathcal{K}_{00} und \mathcal{C} mit der Hausdorff-Metrik versehen sind).

Beweis: Sei $(B, K, x) \in \mathcal{K}_{00} \times \mathcal{C} \times \mathbb{R}^d$. Sei $\epsilon \in (0, 1)$. Dann gibt es $\gamma > 0$ mit $\gamma(3 + d_B(K, x))B^d \subseteq \epsilon B$. Sei jetzt $(B', K', x') \in \mathcal{K}_{00} \times \mathcal{C} \times \mathbb{R}^d$ mit $d^H(B, B') < \gamma$, $d^H(K, K') < \gamma$ und $\|x - x'\| < \gamma$. Zum Nachweis von

$$d_B(K, x) \leq d_{B'}(K', x') + \epsilon. \quad (1.8)$$

unterscheiden wir zwei Fälle. Im Fall $d_B(K, x) \leq d_{B'}(K', x')$ ist die Ungleichung trivial. Andernfalls folgt aus $x' \in K' + d_{B'}(K', x')B'$, dass

$$\begin{aligned} x &\in (K + \gamma B^d) + d_{B'}(K', x')(B + \gamma B^d) + \gamma B^d \\ &= K + d_{B'}(K', x')B + (2 + d_{B'}(K', x'))\gamma B^d \\ &\subseteq K + d_{B'}(K', x')B + (3 + d_B(K, x))\gamma B^d \\ &\subseteq K + d_{B'}(K', x')B + \epsilon B \\ &= K + (d_{B'}(K', x') + \epsilon)B. \end{aligned}$$

Also ist (1.8) bewiesen.

Weiter folgt aus $\gamma(3 + d_B(K, x))B^d \subseteq \epsilon B \subseteq \epsilon B' + \epsilon\gamma B^d$ nach Lemma 1.18 wegen $\epsilon < 1$, dass $\gamma(2 + d_B(K, x))B^d \subseteq \epsilon B'$. Hiermit kann man $d_{B'}(K', x') \leq d_B(K, x) + \epsilon$ analog zum Beweis von (1.8) zeigen. Also $|d_B(K, x) - d_{B'}(K', x')| \leq \epsilon$. \square

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^d$ abgeschlossen. Für $x \in \mathbb{R}^d$ setzen wir

$$\Pi_B(A, x) := \{p \in A \mid d_B(A, x) = d_B(p, x)\}.$$

Da A abgeschlossen ist, gibt es für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}^d$ mindestens einen Punkt in $\Pi_B(A, x)$. Falls $\Pi_B(A, x)$ genau einen Punkt enthält, nennen wir diesen die B -metrische

Projektion $p_B(A, x)$ von x auf A . Falls darüberhinaus $x \notin A$ gilt, gibt es einen eindeutig bestimmten Punkt $b \in B$ mit $x = p_B(A, x) + d_B(A, x)b$. Diesen nennen wir $u_B(A, x)$. Falls B in $u_B(A, x)$ genau einen äußeren (Euklidischen) Einheitsnormalenvektor besitzt, bezeichnen wir diesen mit $n_B(A, x)$. Die Menge aller Punkte $x \in \mathbb{R}^d$, für die $\Pi_B(A, x)$ nicht einelementig ist, heißt das B -Exoskelett von A , $\text{exo}_B(A)$. Sei $A \subseteq \mathbb{R}^d$ weiterhin abgeschlossen. Dann bezeichne

$$\mathcal{N}_B(A) := \{(p_B(A, x), u_B(A, x)) \mid x \in \mathbb{R}^d \setminus \text{exo}_B(A) \setminus A\}$$

das *relative Normalenbündel* von A . Falls $(x, u) \in \mathcal{N}_B(A)$, so heißt u (*relativer*) *äußerer (Einheits-)Normalenvektor* von A in x . Im Spezialfall $B = B^d$ spricht man vom Euklidischen Normalenbündel bzw. vom Euklidischen äußeren Normalenvektor und lässt den Index B meist weg. Ist dann zusätzlich noch A konvex, so ist die neue Definition eines Einheitsnormalenvektors mit der zu Beginn des Abschnitts 1.2 gegebenen äquivalent.

Nun untersuchen wir den Zusammenhang zwischen Euklidischen Normalenvektoren und metrischen Projektionen in Minkowski-Räumen.

Lemma 1.32. *Seien $K, B \subseteq \mathbb{R}^d$ konvexe Körper mit $0 \in \text{int } B$. Sei $z \in \mathbb{R}^d \setminus K$, $p \in \Pi_B(K, z)$ und $x = p + \lambda(z - p)$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Dann ist $p \in \Pi_B(K, x)$.*

Beweis: Der Beweis ist vollkommen analog zum Beweis von [46, Lemma 1.2.1].

Lemma 1.33. *Seien $K, B \subseteq \mathbb{R}^d$ konvexe Körper mit $0 \in \text{int } B$. Sei $z \in \mathbb{R}^d \setminus K$ und $r := d_B(K, z)$. Dann gilt:*

- (i) $z \in \text{bd}(K + rB)$
- (ii) Jeder äußere Normalenvektor von $K + rB$ in z ist auch äußerer Normalenvektor von K in jedem Punkt von $\Pi_B(K, z)$ und von B in jedem Punkt von $\frac{1}{r}(z - \Pi_B(K, z))$.
- (iii) Seien $p \in \text{bd } K$, $u \in \text{bd } B$ und $s > 0$. Setze $z := p + su$. Falls K in p und B in u einen gemeinsamen äußeren Normalenvektor n haben, gilt $s = d_B(K, z)$ und $p \in \Pi_B(K, z)$.

Beweis: (i) Da B und K abgeschlossen sind, gilt $z \in K + rB$. Wäre $z \in \text{int}(K + rB)$, so gäbe es $\epsilon > 0$ mit $z + \epsilon B \subseteq K + rB$. Mit Lemma 1.18 folgt $z \in K + (r - \epsilon)B$ und somit $d_B(K, z) < r$, im Widerspruch zur Voraussetzung.

(ii) Sei n äußerer Normalenvektor von $K + rB$ in z , $p \in \Pi_B(K, z)$ und $u := \frac{1}{r}(z - p)$. Dann gilt für alle $k \in K$, dass $k + ru \in K + rB$, also $\langle k + ru, n \rangle \leq \langle p + ru, n \rangle$ und somit $\langle k, n \rangle \leq \langle p, n \rangle$. Also ist n äußerer Normalenvektor von K in p . Analog folgt, dass n äußerer Normalenvektor von B in u ist.

(iii) Klarerweise gilt $d_B(K, z) \leq s$. Angenommen, $d_B(K, z) < s$. Dann gibt es $s' < s$, $b \in B$ und $k \in K$ mit $z = k + s'b$. Wegen $0 \in \text{int } B$ gilt $\langle u, n \rangle > 0$ und somit folgt

$$\langle z, n \rangle = \langle k, n \rangle + s' \langle b, n \rangle < \langle p, n \rangle + s \langle u, n \rangle = \langle z, n \rangle,$$

ein Widerspruch. Also $s = d_B(K, z)$. Hieraus folgt $p \in \Pi_B(K, z)$ sofort. \square

Lemma 1.34. *Seien $K, B \subseteq \mathbb{R}^d$ konvexe Körper mit $0 \in \text{int } B$ und $z \in \mathbb{R}^d \setminus K$. Dann ist $\Pi_B(K, z)$ konvex.*

Beweis: Setze $r := d_B(K, z)$. Seien $p, p' \in \Pi_B(K, z)$ und $\lambda \in [0, 1]$. Dann gibt es $b, b' \in B$ mit $z = p + rb = p' + rb'$. Es gilt $\lambda p + (1 - \lambda)p' \in K$, $\lambda b + (1 - \lambda)b' \in B$ und

$$\lambda p + (1 - \lambda)p' + r(\lambda b + (1 - \lambda)b') = \lambda(p + rb) + (1 - \lambda)(p' + rb') = z.$$

Also $\lambda p + (1 - \lambda)p' \in \Pi_B(K, z)$. □

Für zwei Punkte $x, y \in \mathbb{R}^d$ bezeichne $[x, y]$ die Strecke von x nach y .

Lemma 1.35. *Sei $B \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt und strikt konvex mit $0 \in \text{int } B$ und $x, y, z \in \mathbb{R}^d$. Dann ist*

$$d_B(x, y) + d_B(y, z) = d_B(x, z) \tag{1.9}$$

äquivalent dazu, dass y auf der Strecke $[x, z]$ liegt.

Beweis: Sei $y \in [x, z]$. Dann gibt es $\alpha \in [0, 1]$ so, dass $y - x = \alpha \cdot (z - x)$. Nun gilt $d_B(x, y) = \alpha d_B(x, z)$ und $d_B(y, z) = (1 - \alpha)d_B(x, z)$, woraus (1.9) folgt.

Sei umgekehrt (1.9) erfüllt. Es gibt $b_1, b_2, b_3 \in B$ mit $z - x = d_B(x, z)b_1$, $y - x = d_B(x, y)b_2$ und $z - y = d_B(y, z)b_3$. Hieraus folgt

$$d_B(x, y)b_2 + d_B(y, z)b_3 = d_B(x, z)b_1,$$

und somit, wegen (1.9), $b_1 \in [b_2, b_3]$. Falls $d_B(x, z) = 0$, so gilt $x = y = z$. Sonst liegt b_1 wegen Lemma 1.33(ii) im Rand von B , woraus $b_1 = b_2 = b_3$ folgt, da B als strikt konvex vorausgesetzt ist. Dies zeigt aber $y \in [x, z]$. □

Satz 1.36. *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^d$ abgeschlossen und $B \subseteq \mathbb{R}^d$ ein strikt konvexer Körper mit $0 \in \text{int } B$. Dann gilt*

(i) *Falls A konvex ist, dann ist $\text{exo}_B(A) = \emptyset$.*

(ii) *Falls $\text{exo}_B(A) = \emptyset$ und B glatt ist, dann ist A konvex.*

Beweis: Der Beweis ist analog zum Beweis von [55, Theorem 7.8], wo die Aussage unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass B symmetrisch ist, gezeigt wird. □

Satz 1.37. *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^d$ abgeschlossen und $B \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt und strikt konvex mit $0 \in \text{int } B$.*

(i) *Falls $d_B(A, \cdot)$ in einem Punkt $x \in \mathbb{R}^d \setminus A$ differenzierbar ist, dann gilt $x \notin \text{exo}_B(A)$.*

(ii) *In fast allen Punkten aus $\mathbb{R}^d \setminus A$ ist $d_B(A, \cdot)$ differenzierbar.*

(iii) *Das Exoskelett $\text{exo}_B(A)$ ist eine Nullmenge.*

Beweis: (i) ist [24, Lemma 2.2].

Man sieht leicht, dass $d_B(A, \cdot)$ Lipschitz-stetig ist. Also folgt (ii) aus Satz 1.11.

(iii) folgt sofort aus $\text{exo}_B(A) \subseteq \mathbb{R}^d \setminus A$, (i) und (ii). □

1.4 Das Parallelvolumen in Minkowski-Räumen

In diesem Abschnitt leiten wir Aussagen über die Parallelmengen und das Parallelvolumen beliebiger kompakter Mengen in Minkowski-Räumen her. Mit der speziellen Situation konvexer Körper befasst sich Abschnitt 1.5.

Wegen (1.7) gilt

$$K + rB = \{x \in \mathbb{R}^d \mid d_B(K, x) \leq r\}, \quad r \geq 0,$$

für $K \in \mathcal{C}$ und $B \in \mathcal{K}_{00}$, wobei \mathcal{K}_{00} die Menge aller konvexen Körper, die 0 als inneren Punkt enthalten, ist. Die Menge $K + rB$ heißt (*relative*) *Parallelmenge* von K im B -Abstand r und ihr Volumen heißt *Parallelvolumen*.

Für das zweite Kapitel dieser Arbeit ist folgender Spezialfall von [46, Theorem 1.1.2], der besagt, dass die konvexe Hülle der Parallelmenge gleich der Parallelmenge der konvexen Hülle ist, von fundamentaler Bedeutung.

Satz 1.38. *Sei K ein Körper, B ein konvexer Körper und $r \geq 0$. Dann gilt*

$$\text{conv}(K + rB) = (\text{conv } K) + rB.$$

Lemma 1.39. *Sei $B \subseteq \mathbb{R}^d$ ein konvexer Körper mit $RB^d \subseteq B$, $R > 0$. Sei weiter $K \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Körper, $x \in \mathbb{R}^d$ und $r \in \mathbb{R}^+$.*

(i) *Falls $x \in \text{bd}(K + rB)$, folgt $d_B(K, x) = r$.*

(ii) *Falls $d_B(K, x) = r$ und $rR > \text{diam } K$, dann folgt $x \in \text{bd}(K + rB)$.*

Beweis: (i) Aus $x \in K + rB$ folgt sofort $d_B(K, x) \leq r$. Aus $d_B(K, x) < r$ würde aber folgen, dass es $\rho < r$ gibt mit $x \in K + \rho B$. Wegen $0 \in \text{int } B$ würde $x \in \text{int}(x + (r - \rho)B) \subseteq \text{int}(K + rB)$ folgen.

(ii) Aus $d_B(K, x) = r$ folgt, da K und B abgeschlossen sind, sofort $x \in K + rB$.

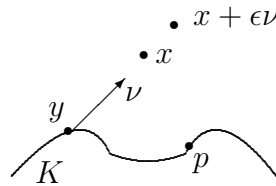


Abbildung 1.1

Es gibt $y \in K$, $\nu \in B$ und $s \geq 0$ mit $x = y + s\nu$. Nun gilt $x + \epsilon\nu \notin K + rB$ für alle $\epsilon > 0$: Angenommen, es gäbe $\epsilon > 0$ mit $x + \epsilon\nu \in K + rB$. Dann gäbe es ein $p \in K$ mit $x + \epsilon\nu - p \in rB$. Aus $\|y - p\| \leq \text{diam } K < rR$ folgt $y - p \in \text{int } rRB^d \subseteq \text{int } rB$. Wegen der Konvexität von B und $y + (\epsilon + s)\nu - p \in rB$ ist nun

$$x - p = y + s\nu - p = \frac{s}{\epsilon + s}(y + (\epsilon + s)\nu - p) + \frac{\epsilon}{\epsilon + s}(y - p) \in \text{int } rB.$$

Daher gibt es $r_1 < r$ mit $x - p \in r_1 B$ und somit $x \in K + r_1 B$. Also $d_B(K, x) < r$, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Aus $x \in K + rB$ und $x + \epsilon\nu \notin K + rB$ für alle $\epsilon > 0$ folgt aber $x \in \text{bd}(K + rB)$. \square

Für ein Beispiel, dass man die Voraussetzung $rR > \text{diam } K$ im vorangegangenen Lemma nicht streichen kann und ein verwandtes Resultat, siehe [28, S. 181].

Wir kommen nun zu einer Verallgemeinerung einer Ungleichung von Kneser [32], der (1.10) im Fall $M = \emptyset$ bewies.

Satz 1.40. *Seien K und M zwei kompakte Mengen mit $M \subseteq K$, $\lambda > 1$ und $r > 0$. Dann gilt*

$$V_d((K + \lambda r B^d) \setminus (M + \lambda r B^d)) \leq \lambda^d V_d((K + r B^d) \setminus (M + r B^d)). \quad (1.10)$$

und

$$\mathcal{H}^{d-1}(\text{bd}(K + \lambda r B^d)) \leq \lambda^{d-1} \mathcal{H}^{d-1}(\text{bd}(K + r B^d)). \quad (1.11)$$

Beweis: Betrachte die Funktion

$$\tilde{f} : \mathbb{R}^d \setminus \text{exo}(K) \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad x \mapsto \lambda x + (1 - \lambda)p(K, x). \quad (1.12)$$

Wir setzen

$$L := \{x \in \mathbb{R}^d \setminus \text{exo}(K) \mid d(K, \tilde{f}(x)) = \|p(K, x) - \tilde{f}(x)\|\}$$

und $f := \tilde{f}|_L$. Im Beweis von [32, Hilfssatz 7] wird gezeigt, dass

$$f((K + r B^d) \cap L) = K + \lambda r B^d \quad (1.13)$$

gilt und dass f Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante λ ist. Weiterhin gilt

$$f((M + r B^d) \cap L) \subseteq M + \lambda r B^d.$$

Sei nämlich $x \in (M + r B^d) \cap L$. Dann ist $\|p(K, x) - x\| = d(K, x) \leq d(M, x) \leq r$, also $\|x - f(x)\| \leq (\lambda - 1)r$ nach (1.12) und somit

$$d(M, f(x)) \leq d(M, x) + \|x - f(x)\| \leq r + (\lambda - 1)r = \lambda r.$$

Also $f(x) \in M + \lambda r B^d$.

Somit gilt

$$(K + \lambda r B^d) \setminus (M + \lambda r B^d) \subseteq f((K + r B^d) \setminus (M + r B^d)),$$

woraus wegen der Lipschitz-Stetigkeit von f die Ungleichung (1.10) folgt.

Jetzt zeigen wir

$$\text{bd}(K + \lambda r B^d) \subseteq f(\text{bd}(K + r B^d) \cap L).$$

Sei hierzu $z \in \text{bd}(K + \lambda r B^d)$. Laut (1.13) gibt es $x \in (K + r B^d) \cap L$ mit $f(x) = z$. Nach Lemma 1.39(i) gilt $\lambda r = d(K, z) \leq \|p(K, x) - f(x)\|$ und mit (1.12) folgt $\|p(K, x) - x\| \geq r$. Da $x \notin \text{exo}(K)$ folgt hieraus $x \in \text{bd}(K + r B^d)$, wie in [25] nach Formel (2.2) gezeigt wird. Nun folgt (1.11) aus Lemma 1.13. \square

Satz 1.41. *Sei $K \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Körper und $B \subseteq \mathbb{R}^d$ ein konvexer Körper mit inneren Punkten. Für $b \geq a \geq 0$ und $\lambda \geq 1$ gilt dann*

$$V_d(K + \lambda b B) - V_d(K + \lambda a B) \leq \lambda^d (V_d(K + b B) - V_d(K + a B)). \quad (1.14)$$

Beweis: Der Beweis ist vollkommen analog zum Beweis von [49, Theorem 4]. Dort wird zusätzlich vorausgesetzt, dass B symmetrisch ist, was allerdings im Beweis nicht benötigt wird. \square

Für einen Körper $K \subseteq \mathbb{R}^d$ und einen strikt konvexen Körper $B \subseteq \mathbb{R}^d$ mit $0 \in \text{int } B$ ist $d_B(K, \cdot)$ laut Satz 1.37(ii) in fast allen Punkten $z \in \mathbb{R}^d \setminus K$ differenzierbar. Für diese ist $p_B(K, z)$ laut Satz 1.37(i) definiert, und somit gilt für $\lambda \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} d_B(K, \lambda p_B(K, z) + (1 - \lambda)z) &\leq d_B(p_B(K, z), \lambda p_B(K, z) + (1 - \lambda)z) \\ &= (1 - \lambda)d_B(p_B(K, z), z) \\ &= (1 - \lambda)d_B(K, z). \end{aligned}$$

Also ist der Gradient $\nabla d_B(K, z)$ von $d_B(K, \cdot)$ in z nicht 0 und wir können

$$\nu_B(K, z) := \frac{\nabla d_B(K, z)}{\|\nabla d_B(K, z)\|}$$

setzen. In Satz 2.28 werden wir sehen, dass der Vektor $\nu_B(K, z)$, sofern er definiert ist und B glatt ist, mit $n_B(K, z)$ übereinstimmt.

Nun besagt Proposition 2.8 in [28]:

Satz 1.42. *Sei $K \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Körper und $B \subseteq \mathbb{R}^d$ ein strikt konvexer Körper mit $0 \in \text{int } B$. Dann gilt*

$$V_d((K + rB) \setminus K) = \int_0^r \int_{\text{bd}(K+sB)} h_B(\nu_B(K, z)) d\mathcal{H}^{d-1}(z) ds.$$

Insbesondere gilt für fast alle $r > 0$, dass $\mathcal{H}^{d-1}(\text{bd}(K + rB)) < \infty$ und

$$\frac{d}{dr} V_d(K + rB) = \int_{\text{bd}(K+rB)} h_B(\nu_B(K, z)) d\mathcal{H}^{d-1}(z).$$

Satz 1.43. *Sei $K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt und $B \subseteq \mathbb{R}^d$ konvex und kompakt mit $0 \in \text{int } B$. Dann gilt für beliebige Zahlen $r_2 > r_1 > 0$, dass*

$$V_d(K + r_2B) - V_d(K + r_1B) \leq \int_{r_1}^{r_2} \frac{d}{s} (V_d(K + sB) - V_d(K)) ds.$$

Beweis: Sei $\epsilon > 0$. Wegen $\frac{d}{dt}(t^d - 1)|_{t=1} = d$ gibt es $\delta > 0$ mit $t^d - 1 \leq (d + \epsilon)(t - 1)$ für $t \in (1, 1 + \delta)$. Sei $n \in \mathbb{N}^+$. Wähle eine Folge von Zahlen $r_1 = s^{(0)} < \dots < s^{(m)} = r_2$, $m \in \mathbb{N}$, mit $s^{(i)}/s^{(i-1)} < 1 + \delta$ und $s^{(i)} - s^{(i-1)} < \frac{1}{n}$ für alle $i = 1, \dots, m$. Setzt man für festes $i \in \{1, \dots, m\}$ in Satz 1.41 nun $a = 0$, $b = s^{(i-1)}$ und $\lambda = \frac{s^{(i)}}{s^{(i-1)}}$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} &V_d(K + s^{(i)}B) - V_d(K + s^{(i-1)}B) \\ &= (V_d(K + s^{(i)}B) - V_d(K)) - (V_d(K + s^{(i-1)}B) - V_d(K)) \\ &\leq \left(\frac{s^{(i)}}{s^{(i-1)}}\right)^d (V_d(K + s^{(i-1)}B) - V_d(K)) - (V_d(K + s^{(i-1)}B) - V_d(K)) \\ &= \left(\left(\frac{s^{(i)}}{s^{(i-1)}}\right)^d - 1\right) (V_d(K + s^{(i-1)}B) - V_d(K)) \\ &\leq (d + \epsilon) \frac{s^{(i)} - s^{(i-1)}}{s^{(i-1)}} (V_d(K + s^{(i-1)}B) - V_d(K)) \\ &= (s^{(i)} - s^{(i-1)}) \frac{d + \epsilon}{s^{(i-1)}} (V_d(K + s^{(i-1)}B) - V_d(K)). \end{aligned}$$

Somit folgt

$$\begin{aligned} V_d(K + r_2 B) - V_d(K + r_1 B) &= \sum_{i=1}^m V_d(K + s^{(i)} B) - V_d(K + s^{(i-1)} B) \\ &\leq \sum_{i=1}^m (s^{(i)} - s^{(i-1)}) \frac{d + \epsilon}{s^{(i-1)}} (V_d(K + s^{(i-1)} B) - V_d(K)) \end{aligned}$$

Im Grenzfall $n \rightarrow \infty$ folgt nun aus der Riemann'schen Integraldefinition

$$V_d(K + r_2 B) - V_d(K + r_1 B) \leq \int_{r_1}^{r_2} \frac{d + \epsilon}{s} (V_d(K + sB) - V_d(K)) ds.$$

Dabei existiert das Riemann-Integral, da $s \mapsto V_d(K + sB)$ monoton wachsend ist und daher auf $[r_1, r_2]$ höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen hat, was impliziert, dass der Integrand höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen hat. Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. \square

Es sei \mathcal{K}_0 die Menge aller konvexen Körper mit inneren Punkten.

Lemma 1.44. *Die Abbildung*

$$\mathcal{C} \times \mathcal{K}_0 \rightarrow \mathbb{R}^+, (K, B) \mapsto V_d(K + B)$$

ist stetig.

Beweis: Sei $B \in \mathcal{K}_0$ und $K \in \mathcal{C}$. Es ist eine Kugel, etwa $B_R(x)$, $R > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, in B enthalten. Nach Satz 1.43 ist

$$\mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+, r \mapsto V_d(K + r(B - x))$$

stetig, da $0 \in \text{int}(B - x)$. Sei $\epsilon > 0$. Wegen $V_d(K + r(B - x)) = V_d(K + rB)$ für alle $r > 0$ gibt es $\delta \in (0, \frac{1}{4})$ mit

$$V_d(K + B) - \epsilon < V_d(K + (1 - 4\delta)B) < V_d(K + (1 + 4\delta)B) < V_d(K + B) + \epsilon.$$

Seien $\tilde{K} \in \mathcal{C}$ und $\tilde{B} \in \mathcal{K}_0$ Körper, deren Hausdorff-Abstand von K bzw. B kleiner als $R\delta$ ist. Insbesondere ist dann $B_{R/2}(x) \subseteq \tilde{B}$. Es folgt

$$\begin{aligned} K + (1 - 4\delta)B &\subseteq \tilde{K} + R\delta B^d + (1 - 4\delta)(\tilde{B} + R\delta B^d) \\ &\subseteq \tilde{K} + (1 - 4\delta)\tilde{B} + 2R\delta B^d \\ &\subseteq \tilde{K} + (1 - 4\delta)\tilde{B} + 4\delta(\tilde{B} - x) \\ &= \tilde{K} + \tilde{B} - 4\delta x. \end{aligned}$$

Analog erhält man $\tilde{K} + \tilde{B} \subseteq K + (1 + 4\delta)B - 4\delta x$ (hier kann man sogar 4 durch 2 ersetzen). Also

$$V_d(K + B) - \epsilon < V_d(K + (1 - 4\delta)B) \leq V_d(\tilde{K} + \tilde{B})$$

und

$$V_d(\tilde{K} + \tilde{B}) \leq V_d(K + (1 + 4\delta)B) < V_d(K + B) + \epsilon. \quad \square$$

1.5 Gemischte Volumina und verwandte Konzepte

In diesem Abschnitt wollen wir die inneren Volumina, die gemischten Volumina und einige Maße, die in gewisser Weise die Verteilung der gemischten Volumina im Raum messen, einführen, und einige Beziehungen zwischen diesen Größen bereitstellen.

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^d$ ein strikt konvexer Körper mit $0 \in \text{int } B$ und $K \subseteq \mathbb{R}^d$ ein konvexer Körper. Laut Satz 1.36 ist dann $\text{exo}_B(K) = \emptyset$. Für $r \geq 0$ und Borel-Mengen $\eta \subseteq \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ setzen wir

$$\mu_r^B(K, \eta) = V_d(\{x \in \mathbb{R}^d \setminus K \mid d_B(K, x) \leq r, (p_B(K, x), u_B(K, x)) \in \eta\}),$$

wobei V_d das d -dimensionale Lebesgue-Maß bezeichnet. Nun gibt es Maße $C_0^B(K, \cdot), \dots, C_{d-1}^B(K, \cdot)$ auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ mit

$$\mu_r^B(K, \eta) = \sum_{j=0}^{d-1} r^{d-j} \kappa_{d-j} C_j^B(K, \eta), \quad r \geq 0, \quad (1.15)$$

für alle Borel-Mengen $\eta \subseteq \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. Diese werden *relative Stützmaße* genannt. Sie sind auf dem relativen Normalenbündel $\mathcal{N}_B(K)$ konzentriert. Eingeführt wurden die relativen Stützmaße in [26], und, davon unabhängig mit einer anderen Normierung, in [31]. Weiter untersucht wurden sie in [24].

Wir werden im Folgenden hauptsächlich ihre Projektionen auf die erste Komponente, die *relativen Krümmungsmaße*

$$\Phi_j^B(K, \beta) := C_j^B(K, \beta \times \mathbb{R}^d), \quad j = 0, \dots, d-1, \quad \beta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad (1.16)$$

betrachten, wobei $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ die Borel- σ -Algebra des \mathbb{R}^d bezeichnet. Diese Maße wurden bereits in [45] eingeführt. Auch die Projektionen der relativen Stützmaße auf die zweite Komponente, die *relativen Flächenmaße*

$$\Psi_j^B(K, \omega) := C_j^B(K, \mathbb{R}^d \times \omega), \quad j = 0, \dots, d-1, \quad \omega \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad (1.17)$$

werden wir benötigen.

Die totalen Massen der relativen Stützmaße sind bis auf Normierung die *gemischten Volumina*. Für unsere Ziele definiert man sie zweckmäßigerweise durch

$$V_d(K + rB) = \sum_{j=0}^d r^{d-j} \binom{d}{j} V(K[j], B[d-j]), \quad r \geq 0 \quad (1.18)$$

für beliebige $K, B \in \mathcal{K}$. Für weitere Informationen, insbesondere die Existenz und die übliche, allgemeinere Definition siehe z.B. [46, Abschn. 5.1]. Man sieht leicht

$$V(K[j], K[d-j]) = V_d(K) \quad (1.19)$$

für $K \in \mathcal{K}$, $j = 0, \dots, d$, und, indem man in (1.18) $r = 0$ setzt, sieht man $V(K[d], B[0]) = V_d(K)$. Weiter weist man ihre Homogenität,

$$\lambda^j \mu^{d-j} V(K[j], B[d-j]) = V(\lambda K[j], \mu B[d-j]) \quad (1.20)$$

für $j \in \{0, \dots, d\}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_0^+$ und $K, B \in \mathcal{K}$, leicht nach. Laut [46, (5.1.23)] sind die gemischten Volumina monoton, d.h. für $K, K', B, B' \in \mathcal{K}$ und $j = 0, \dots, d$ gilt

$$K \subseteq K' \wedge B \subseteq B' \Rightarrow V(K[j], B[d-j]) \leq V(K'[j], B'[d-j]). \quad (1.21)$$

Vergleicht man (1.15) und (1.18), so erhält man unter Berücksichtigung von (1.17) und (1.16)

$$\Phi_j^B(K, \mathbb{R}^d) = \Psi_j^B(K, \mathbb{R}^d) = C_j^B(K, \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d) = \frac{\binom{d}{j}}{\kappa_{d-j}} V(K[j], B[d-j]), \quad (1.22)$$

falls B strikt konvex mit $0 \in \text{int } B$ ist.

Die *inneren Volumina* eines konvexen Körpers $K \subseteq \mathbb{R}^d$ sind definiert durch

$$V_j(K) := \frac{\binom{d}{j}}{\kappa_{d-j}} V(K[j], B^d[d-j]), \quad j = 0, \dots, d. \quad (1.23)$$

Offensichtlich stimmt diese Definition von $V_d(K)$ für einen konvexen Körper K mit der alten Definition, seinem Lebesgue-Maß, überein. Weiter ergibt sich aus (1.18) die sog. Steiner-Formel

$$V_d(K + rB^d) = \sum_{j=0}^d \kappa_{d-j} r^{d-j} V_j(K), \quad r \geq 0, K \in \mathcal{K}. \quad (1.24)$$

Hieraus rechnet man leicht $V_0(K) = 1$ für jede Kugel K nach. Wegen (1.21) folgt $V_0(K) = 1$ für alle $K \in \mathcal{K}$.

Auf Grund der Bewegungsinvarianz des Lebesgue-Maßes und der Rotationsinvarianz von B^d sind die inneren Volumina bewegungsinvariant, d.h. für $K \in \mathcal{K}$, $j \in \{0, \dots, d\}$ und eine Isometrie $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ gilt $V_j(gK) = V_j(K)$, wobei $gK := \{gx | x \in K\}$. In [46, S. 205] wird bemerkt, dass die inneren Volumina (und deren lokale Versionen) dimensionsinvariant sind, d.h. wenn wir \mathbb{R}^m isometrisch in \mathbb{R}^n , $m \leq n$, einbetten, hat $V_j(K)$ in \mathbb{R}^m für konvexe Körper $K \subseteq \mathbb{R}^m$ und $j \in \{0, \dots, m\}$ den selben Wert wie $V_j(K)$ in \mathbb{R}^n . Mehr über die inneren Volumina findet sich in [46, Kapitel 4].

Nun führen wir die gemischten Flächenmaße ein. Hierfür definieren wir das *Oberflächenmaß* eines konvexen Körpers K durch $S_{d-1}(K, \omega) := 2\Psi_{d-1}^{B^d}(K, \omega)$ für alle $\omega \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Dann ist $S_{d-1}(K, \cdot)$ auf S^{d-1} konzentriert. Der Name Oberflächenmaß ist gerechtfertigt, da $S_{d-1}(K, \omega)$ für alle $\omega \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ das $(d-1)$ -dimensionale Hausdorff-Maß aller Randpunkte von K , die einen äußeren Einheitsnormalenvektor aus ω haben, ist (vgl. auch unten stehende Formel (1.27)). Für $K, B \in \mathcal{K}$ sind die *gemischten Flächenmaße* definiert als Maße $S(K[j], B[d-j-1], \cdot)$, $j = 0, \dots, d$, auf \mathbb{R}^d mit

$$S_{d-1}(sK + rB, \omega) = \sum_{j=0}^{d-1} \binom{d-1}{j} s^j r^{d-j-1} S(K[j], B[d-j-1], \omega), \quad r, s \geq 0, \quad (1.25)$$

für alle Borel-Mengen $\omega \subseteq \mathbb{R}^d$. Für weitere Informationen verweisen wir wieder auf [46, Abschn. 5.1]. Indem man in (1.25) $r = 1$ und $s = 0$ setzt, erhält man

$$S_{d-1}(B, \omega) = S(K[0], B[d-1], \omega), \quad (1.26)$$

für alle Borel-Mengen $\omega \subseteq \mathbb{R}^d$. Die gemischten Flächenmaße sind mit den relativen Flächenmaßen verwandt. Um diesen Zusammenhang exakt zu fassen, führen wir die umgekehrte sphärische Bildfunktion ein. Die *umgekehrte sphärische Bildfunktion* $\tau_L : S^{d-1} \rightarrow \text{bd } L$ ist für strikt konvexe Körper $L \subseteq \mathbb{R}^d$ erklärt und ordnet einem Vektor $u \in S^{d-1}$ den eindeutig bestimmten Punkt in $\text{bd } L$ mit äußerem Normalenvektor u zu. Aus Satz 1.25 folgt, dass L genau dann strikt konvex ist, wenn h_L auf $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ differenzierbar ist, und dass dann $\nabla h_L(u) = \tau_L(\frac{u}{\|u\|})$ für $u \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ gilt. Theorem 2.14 in [24] lautet:

Satz 1.45. *Seien $B, K \subseteq \mathbb{R}^d$ konvexe Körper, $0 \in \text{int } B$ und B strikt konvex. Dann gilt für $j \in \{0, \dots, d-1\}$ und Borel-Mengen $\gamma \subseteq \mathbb{R}^d$*

$$\Psi_j^B(K, \gamma) = \frac{\binom{d}{j}}{d\kappa_{d-j}} \int_{S^{d-1}} \mathbf{1}_\gamma(\nabla h_B(u)) h_B(u) S(K[j], B[d-1-j], du).$$

Formel (4.2.24) in [46] besagt, dass

$$S_{d-1}(L, \omega) = \mathcal{H}^{d-1}(\tau'_L(\omega)) \quad (1.27)$$

für einen konvexen Körper $L \subseteq \mathbb{R}^d$ und eine Borel-Menge $\omega \subseteq S^{d-1}$, wobei τ'_L das sog. umgekehrte sphärische Bild bezeichnet. Dieses stimmt für strikt konvexe Körper L mit der von τ_L induzierten mengenwertigen Abbildung überein. Insbesondere folgt für jede Borel-Menge $\gamma \subseteq \text{bd } L$, indem man $\{u \in S^{d-1} | \tau_L(u) \in \gamma\}$ für ω in (1.27) einsetzt, wegen der Surjektivität von τ_L , dass

$$S_{d-1}(L, \{u \in S^{d-1} | \tau_L(u) \in \gamma\}) = \mathcal{H}^{d-1}(\gamma). \quad (1.28)$$

Korollar 1.46. *Seien $B, K \subseteq \mathbb{R}^d$ konvexe Körper, $0 \in \text{int } B$ und B strikt konvex. Dann gilt für $M := \max\{h_B(u) | u \in S^{d-1}\}$ und Borel-Mengen $\gamma \subseteq \text{bd } B$*

$$\Psi_0^B(K, \gamma) \leq \frac{M}{d\kappa_d} \cdot \mathcal{H}^{d-1}(\gamma).$$

Beweis: Aus Satz 1.45 und den Gleichungen (1.26) und (1.28) folgt

$$\begin{aligned} \Psi_0^B(K, \gamma) &= \frac{1}{d\kappa_d} \int_{S^{d-1}} \mathbf{1}_\gamma(\nabla h_B(u)) h_B(u) S_{d-1}(B, du) \\ &\leq \frac{1}{d\kappa_d} \int_{S^{d-1}} \mathbf{1}_\gamma(\tau_B(u)) M S_{d-1}(B, du) \\ &= \frac{M}{d\kappa_d} \cdot S_{d-1}(B, \{u \in S^{d-1} | \tau_B(u) \in \gamma\}) \\ &= \frac{M}{d\kappa_d} \cdot \mathcal{H}^{d-1}(\gamma). \quad \square \end{aligned}$$

1.6 Stochastische Geometrie

In diesem Abschnitt wollen wir vor allem das Konzept der zufälligen abgeschlossenen Menge und ein wichtiges Beispiel, das Boole'sche Modell, einführen. Nähere Informationen zu

den hier eingeführten und weiteren Begriffen der Stochastischen Geometrie finden sich z.B. in [47]. Zum Verständnis technischer Details in diesem Abschnitt sind Grundkenntnisse der Topologie erforderlich. Die wesentlichen Ideen sollten aber auch ohne Topologiekenntnisse verständlich sein.

Wir bezeichnen den Raum der abgeschlossenen Teilmengen von \mathbb{R}^d mit \mathcal{F} . Es sei $\mathcal{F}^A := \{F \in \mathcal{F} | F \cap A = \emptyset\}$ und $\mathcal{F}_A := \{F \in \mathcal{F} | F \cap A \neq \emptyset\}$ für $A \subseteq \mathbb{R}^d$. Dann heißt die von

$$\{\mathcal{F}^C | C \subseteq \mathbb{R}^d \text{ kompakt}\} \cup \{\mathcal{F}_G | G \subseteq \mathbb{R}^d \text{ offen}\}$$

erzeugte Topologie die *Topologie der abgeschlossenen Konvergenz*. Die von der Topologie der abgeschlossenen Konvergenz induzierte Borel- σ -Algebra heißt *Fell-Matheron- σ -Algebra*. Wir lagern alle Messbarkeitsfragen in den Anhang A aus.

Um eine Eindeutigkeitsaussage über Maße auf \mathcal{F} zu erhalten, setzen wir für einen Körper M

$$\mathcal{C}_{+M} := \{K + rM | K \in \mathcal{C}, r > 0\}.$$

Lemma 1.47. *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Körper und μ und η zwei Maße auf \mathcal{F} mit $\mu(\mathcal{F}_C) = \eta(\mathcal{F}_C) < \infty$ für alle $C \in \mathcal{C}_{+M}$. Dann ist $\mu = \eta$.*

Beweis: Wir imitieren den Beweis von [47, Lemma 2.3.2]. Hierzu definieren wir

$$\mathcal{F}_{A_1, \dots, A_k} := \mathcal{F}_{A_1} \cap \dots \cap \mathcal{F}_{A_k}$$

für $A_1, \dots, A_k \subseteq \mathbb{R}^d$. Wie im Beweis von [47, Lemma 2.3.2] gezeigt wird, gilt

$$\nu(\mathcal{F}_{C_1, \dots, C_k}) = \sum_{r=0}^k (-1)^{r-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq k} \nu(\mathcal{F}_{C_{i_1} \cup \dots \cup C_{i_r}})$$

für kompakte Mengen C_1, \dots, C_k , $k \in \mathbb{N}^+$, und ein signiertes Maß ν auf \mathcal{F} mit $\nu(\mathcal{F}_C) < \infty$ für alle $C \in \mathcal{C}$. Da endliche Vereinigungen von Mengen aus \mathcal{C}_{+M} wieder in \mathcal{C}_{+M} liegen, folgt $\mu(B) = \eta(B)$ für alle $B \in \mathcal{E} := \{\mathcal{F}_{C_1, \dots, C_k} | C_1, \dots, C_k \in \mathcal{C}_{+M}, k \in \mathbb{N}^+\}$. Wegen $\mathcal{C}_{+(M+x)} = \mathcal{C}_{+M}$ für $x \in \mathbb{R}^d$ können wir o.B.d.A. $0 \in M$ annehmen. Für $C \in \mathcal{C}$ ist dann

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^C &= \mathcal{F} \setminus \{K \in \mathcal{F} | K \cap C \neq \emptyset\} \\ &= \mathcal{F} \setminus \{K \in \mathcal{F} | \forall n \in \mathbb{N}^+ : K \cap (C + \frac{1}{n}M) \neq \emptyset\} \\ &= \mathcal{F} \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_{C + \frac{1}{n}M}, \end{aligned}$$

weshalb die von $\{\mathcal{F}^C | C \in \mathcal{C}\}$ erzeugte σ -Algebra in der von \mathcal{E} erzeugten enthalten ist. Wegen [47, Lemma 1.3.1] ist \mathcal{E} also ein Erzeugendensystem der Fell-Matheron- σ -Algebra. Da \mathcal{E} durchschnitts-stabil ist, folgt $\mu = \eta$. \square

Eine *zufällige abgeschlossene Menge* ist eine messbare Abbildung von einem Wahrscheinlichkeitsraum nach \mathcal{F} mit der Fell-Matheron- σ -Algebra. Ein zufälliger (konvexer, strikt konvexer, ...) Körper ist eine zufällige abgeschlossene Menge, deren Wert fast sicher in der Menge aller (konvexen, strikt konvexen, ...) Körper liegt.

Für eine zufällige abgeschlossene Menge Z in \mathbb{R}^d heißt

$$T_Z : \mathcal{C} \rightarrow [0, 1], C \mapsto \mathbb{P}(Z \cap C \neq \emptyset)$$

das *Kapazitätsfunktional* von Z . Wenn weiter B ein konvexer Körper mit $0 \in \text{int } B$ ist, dann nennen wir

$$H_B^Z : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow [0, 1], \quad r \mapsto \mathbb{P}(d_B(Z, 0) \leq r | 0 \notin Z)$$

die *Kontaktverteilungsfunktion* von Z bzgl. des Eichkörpers B .

Um das Konzept des Boole'schen Modells zu definieren, führen wir zunächst den Begriff des markierten Punktprozesses ein.

Sei M ein lokalkompakter topologischer Raum mit abzählbarer Basis, z.B. eine abgeschlossene Teilmenge des Raums \mathcal{C} aller Körper, der sog. *Markenraum*. Wir betrachten $\mathbb{R}^d \times M$ mit der von der Produkttopologie erzeugten σ -Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times M)$. Es bezeichne $N(\mathbb{R}^d \times M)$ den Raum aller lokal-endlichen Zählmaße auf \mathbb{R}^d mit Markenraum M , d.h. aller Maße η auf $\mathbb{R}^d \times M$, die nur ganzzahlige Werte annehmen und für die $\eta(K \times M) < \infty$ für alle kompakten $K \subseteq \mathbb{R}^d$ gilt. Wir betrachten diesen Raum mit der von den Abbildungen

$$N(\mathbb{R}^d \times M) \rightarrow \mathbb{R}_0^+, \quad \eta \rightarrow \eta(B), \quad B \in \mathcal{B}_0,$$

erzeugten σ -Algebra, wobei \mathcal{B}_0 die Menge der messbaren Teilmengen von $\mathbb{R}^d \times M$ ist, für die es eine kompakte Menge $K \subseteq \mathbb{R}^d$ mit $B \subseteq K \times M$ gibt. Ein *markierter Punktprozess* ist nun eine messbare Abbildung von einem Wahrscheinlichkeitsraum nach $N(\mathbb{R}^d \times M)$.

Für einen markierten Punktprozess X auf \mathbb{R}^d mit Markenraum M gibt es Folgen $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und $(Z_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von Zufallsvariablen in \mathbb{R}^d bzw. M und eine $\mathbb{N} \cup \{-1, \infty\}$ -wertige Zufallsvariable P mit $X = \sum_{i=0}^P \delta_{(X_i, Z_i)}$, wobei δ das Dirac-Maß bezeichnet.

Ein markierter Punktprozess X auf \mathbb{R}^d mit Markenraum M heißt (stationärer markierter) *Poisson-Prozess*, falls es eine Zahl $\gamma > 0$ und ein Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{Q} auf M gibt, so dass $X(B^1 \times B^2)$ für alle beschränkten messbaren Mengen $B^1 \subseteq \mathbb{R}^d$ und alle messbaren Mengen $B^2 \subseteq M$ poissonverteilt mit Erwartungswert $\gamma V_d(B^1) \mathbb{Q}(B^2)$ ist. Dann heißt γ die *Intensität* von X und \mathbb{Q} die *Markenverteilung*. Laut [47, Satz 3.2.3(a)] folgt aus unserer Definition eines Poisson-Prozesses, dass für einen Poisson-Prozess X die Zufallsvariablen $X(B_1), \dots, X(B_n)$ für paarweise disjunkte Mengen $B_1, \dots, B_n \subseteq \mathbb{R}^d \times M$ unabhängig sind.

Wir wählen nun eine messbare Funktion $c : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^d$ mit $c(K + x) = c(K) + x$ für alle $K \in \mathcal{C}$, $x \in \mathbb{R}^d$, z.B. die Funktion, die jedem Körper K den Mittelpunkt seiner nach Satz 1.29 eindeutig bestimmten Umkugel zuordnet. Es bezeichne

$$\mathcal{C}^* := \{K \in \mathcal{C} | c(K) = 0\}$$

die Menge aller *zentrierten* Körper.

Sei nun $X = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_{(X_i, Z_i)}$ ein markierter Poissonprozess auf \mathbb{R}^d mit Markenraum \mathcal{C}^* . Seine Intensität sei $\gamma > 0$ und seine Markenverteilung \mathbb{Q} . Falls

$$\int_{\mathcal{C}^*} V_d(A + rB^d) d\mathbb{Q}(A) < \infty, \quad r > 0,$$

dann heißt eine zufällige abgeschlossene Menge Z , die die selbe Verteilung wie

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} (X_i + Z_i)$$

hat, *Boolesches Modell* mit *Intensität* γ und *Kornverteilung* \mathbb{Q} . Dass Intensität und Kornverteilung eines Booleschen Modells eindeutig bestimmt sind, wird in [47, S. 151 Mitte]

bemerkt. Eine zufällige zentrierte kompakte Menge Z_0 mit Verteilung \mathbb{Q} heißt *typisches Korn* von Z .

Wir setzen $K^* := \{-x | x \in K\}$ für $K \subseteq \mathbb{R}^d$. Der folgende Satz enthält einige Aussagen aus [47, Satz 4.4.4].

Satz 1.48. *Sei Z ein Boolesches Modell mit Intensität γ und Kornverteilung \mathbb{Q} . Dann gilt*

$$T_Z(K) = 1 - \exp \left(-\gamma \int_{\mathcal{C}^*} V_d(A + K^*) d\mathbb{Q}(A) \right), \quad K \in \mathcal{C}.$$

Für jeden konvexen Körper B mit $0 \in \text{int } B$ gilt

$$H_B^Z(r) = 1 - \exp \left(-\gamma \int_{\mathcal{C}^*} V_d(A + rB^*) - V_d(A) d\mathbb{Q}(A) \right), \quad r \geq 0.$$

Für eine reell-wertige, absolut-stetige Verteilung mit Verteilungsfunktion F und Dichte f ist die Ausfallrate

$$\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+, \quad t \mapsto \begin{cases} \frac{f(t)}{1-F(t)} & \text{falls } F(t) < 1, \\ 0 & \text{falls } F(t) = 1. \end{cases}$$

Als Korollar aus Satz 1.48 erhalten wir:

Korollar 1.49. *Sei Z ein Boolesches Modell mit Intensität γ und Kornverteilung \mathbb{Q} und B ein konvexer Körper mit $0 \in \text{int } B$. Dann ist die Ausfallrate der Kontaktverteilung von Z bzgl. B für fast alle $r \geq 0$ gegeben durch*

$$\lambda(r) = \gamma \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{C}^*} V_d(A + tB^*) d\mathbb{Q}(A)|_{t=r}.$$

Beweis: Zunächst weisen wir nach, dass jede Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit

$$f(r) = \exp \left(-\gamma \int_{\mathcal{C}^*} V_d(A + rB^*) - V_d(A) d\mathbb{Q}(A) \right) \cdot \gamma \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{C}^*} V_d(A + tB^*) d\mathbb{Q}(A)|_{t=r}$$

für alle $r \geq 0$, in denen die Ableitung definiert ist, eine Dichte der Kontaktverteilung ist. Hierfür zeigen wir zunächst, dass diese Ableitung für fast alle $r \geq 0$ definiert ist. Wegen Satz 1.42 und des Satzes von Fubini gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}^*} V_d(A + tB^*) - V_d(A) d\mathbb{Q}(A) &= \int_{\mathcal{C}^*} \int_0^t \int_{\text{bd}(A+sB^*)} h_{B^*}(\nu_{B^*}(A, z)) d\mathcal{H}^{d-1}(z) ds d\mathbb{Q}(A) \\ &= \int_0^t \int_{\mathcal{C}^*} \int_{\text{bd}(A+sB^*)} h_{B^*}(\nu_{B^*}(A, z)) d\mathcal{H}^{d-1}(z) d\mathbb{Q}(A) ds. \end{aligned}$$

Also ist $t \mapsto \int_{\mathcal{C}^*} V_d(A + tB^*) d\mathbb{Q}(A)$ absolut-stetig und deshalb fast überall differenzierbar. Da $t \mapsto e^{-\gamma t}$ auf \mathbb{R}_0^+ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante γ ist, ist auch H_B^Z absolut-stetig und mit Satz 1.10 folgt, dass f Dichte von H_B^Z ist.

Nun folgt die Behauptung aber sofort aus der Definition der Ausfallrate. \square

Ein wichtiges Beispiel einer zufälligen kompakten Menge ist das eines Brown'schen Pfades. Für das Verständnis dieses Modells sind Grundkenntnisse aus der Theorie stochastischer Prozesse erforderlich, für die wir auf [29] verweisen.

Def. 1.50. Eine zufällige abgeschlossene Menge $S \subseteq \mathbb{R}^d$ heißt *Brown'scher Pfad*, wenn $S = W([0, 1])$ f.s. für eine (d -dimensionale) Standard-Brown'sche Bewegung $(W(t))_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ gilt. Eine zufällige abgeschlossene Menge $S_T \subseteq \mathbb{R}^d$ heißt *Brown'scher Pfad bis zum Zeitpunkt T* , $T \geq 0$, wenn $S_T = W([0, T])$ f.s. für eine Standard-Brown'sche Bewegung $(W(t))_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ gilt.

Satz 1.51. Sei $S \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Brown'scher Pfad. Dann gibt es einen zufälligen Würfel Q , dessen Kantenlänge alle Momente hat, mit $S \subseteq Q$ f.s.

Beweis: Es sei $((W_1(t), \dots, W_d(t)))_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ eine Standard-Brown'sche Bewegung mit

$$S = \{(W_1(t), \dots, W_d(t)) | t \in [0, 1]\}.$$

Dann setzen wir

$$L := \max\{\max\{W_j(t) | t \in [0, 1]\}, \max\{-W_j(t) | t \in [0, 1]\} | j = 1, \dots, d\}.$$

Da die stochastischen Prozesse $\pm W_j$, $j = 1, \dots, d$, ein-dimensionale Standard-Brown'sche Bewegungen sind, folgt aus [29, Kapitel 2, (8.3)], dass $\max\{\pm W_j(t) | t \in [0, 1]\}$ für $j = 1, \dots, d$ die Dichte

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \mathbf{1}_{[0, \infty)}(t)$$

hat und somit alle Momente besitzt. Also hat auch L alle Momente. Setzen wir nun $Q := [-L, L]^d$, so gilt $S \subseteq Q$ f.s. und alle Momente der Kantenlänge von Q existieren. \square

Satz 1.52. Sei $S \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Brown'scher Pfad und $c \in \mathbb{R}^+$. Dann ist cS ein Brown'scher Pfad bis zum Zeitpunkt c^2 .

Beweis: Es sei $((W_1(t), \dots, W_d(t)))_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ eine Standard-Brown'sche Bewegung mit

$$S = \{(W_1(t), \dots, W_d(t)) | t \in [0, 1]\}.$$

Auf Grund von [29, Kapitel 2, (9.3)] ist dann

$$\widetilde{W}_j(t) := cW_j\left(\frac{t}{c^2}\right), \quad t \in \mathbb{R},$$

für $j = 1, \dots, d$ eine Standard-Brown'sche Bewegung. Daher ist

$$cS = \{(cW_1(\frac{t}{c^2}), \dots, cW_d(\frac{t}{c^2})) | t \in [0, c^2]\} = \{(\widetilde{W}_1(t), \dots, \widetilde{W}_d(t)) | t \in [0, c^2]\}$$

ein Brown'scher Pfad bis zum Zeitpunkt c^2 . \square

1.7 Das Parallelvolumen in der Literatur

Die Untersuchung des Parallelvolumens begann mit Steiners in [50] überliefertem Vortrag „Über parallele Flächen“ vom 14. Mai 1840. In diesem Vortrag untersuchte Steiner die Fläche bzw. das Volumen von Mengen, von denen man leicht zeigen kann, dass sie mit $(K + rB^d) \setminus \text{int } K$, $r > 0$, $d = 2, 3$, für gewisse konvexe Körper $K \subseteq \mathbb{R}^d$ zusammenfallen. Die Resultate in Dimension 3 waren komplett neu und auch in Dimension 2 war dies das

erste Mal, dass bemerkt wurde, dass das Parallelvolumen ein Polynom ist. Später wurden die Resultate auf alle konvexen Körper in Dimensionen 2 und 3 und beliebige konvexe Eichkörper verallgemeinert, ein Prozess, der spätestens mit Minkowskis 1903 erschienener Arbeit „Volumen und Oberfläche“ [39] über die gemischten Volumina als abgeschlossen betrachtet werden kann. Schließlich wurden diese Aussagen auf beliebige Dimensionen verallgemeinert.

Seither wurde das Parallelvolumen konvexer Körper in verschiedene Richtungen verallgemeinert und intensiv untersucht. Es stand hierbei nicht so sehr das Parallelvolumen selbst, als vielmehr die Koeffizienten des Polynoms, im Mittelpunkt. Einen Eindruck von der Vielzahl der Ergebnisse dieser Forschungslinie vermitteln die Kapitel 4 bis 7 im Buch [46].

Deutlich weniger Arbeiten behandeln das Parallelvolumen allgemeiner kompakter Mengen, das i.a. kein Polynom ist. Ein Teil dieser Literatur versucht, Konzepte, für deren Einführung im konvexen Fall benutzt wird, dass das Parallelvolumen ein Polynom ist, auf nicht-konvexe Mengen zu verallgemeinern. Ein aktuelles Werk dieser Linie ist [27].

Wir wollen nun einen Überblick über die Artikel geben, die sich mit den Eigenschaften des Parallelvolumens beliebiger kompakter Teilmengen des \mathbb{R}^d beschäftigen.

Eine klassische Fragestellung der Mathematik ist das sogenannte isoperimetrische Problem, d.h. die Frage, ob unter allen kompakten Mengen mit festem Volumen die Kugel minimale Oberfläche besitzt. Die ersten korrekten Beweise, in denen die Kugel mit beliebigen kompakten Mengen verglichen wurde, stammen von Groß [18] in Dimension 3 und von Dinghas [12] in beliebigen Dimensionen.

Mit dem isoperimetrischen Problem hängt die Brunn-Minkowski-Ungleichung zusammen. Sie besagt, dass für zwei kompakte Menge $K, B \subseteq \mathbb{R}^d$ und $r \geq 0$ die Ungleichung

$$V_d(K + rB) \geq (\sqrt[d]{V_d(K)} + r \sqrt[d]{V_d(B)})^d$$

gilt. Den Durchbruch bei ihrem Beweis erzielte Lusternik [35]. Die Oberfläche F eines Körpers im Sinne von Minkowski ist die untere Ableitung des Parallelvolumens im Nullpunkt, wobei die untere Ableitung hier den (rechtsseitigen) Limes inferior des Differenzenquotienten bezeichnet. Aus der Brunn-Minkowski-Ungleichung folgt direkt die isoperimetrische Ungleichung

$$F(K) \geq d \sqrt[d]{V_d(K)}^{(d-1)} \sqrt[d]{V_d(B^d)}.$$

Für eine Diskussion der Gleichheitsfälle, einen Beweis der Brunn-Minkowski-Ungleichung und einen Überblick über die Literatur, in der diese Beweise entwickelt wurden, siehe Abschnitt 4.4.1 und Kapitel 5 in [20]. Eine ausführliche Diskussion der Brunn-Minkowski-Ungleichung mit weiteren Verallgemeinerungen findet sich in [13] und in [17].

Behrend [4] zeigte, dass Parallelmengen in positivem Abstand stets einen Jordan-Inhalt besitzen. Dinghas [13, Hilfssatz 2 in Abschnitt 5] bewies diese Aussage für allgemeinere Eichkörper.

Kneser [32] untersuchte den Oberflächeninhalt von Parallelkörpern auf Riemann'schen Mannigfaltigkeiten. Die Arbeit enthält aber auch einige nennenswerte Aussagen über das Parallelvolumen im \mathbb{R}^d . So ist

$$V_d(K + bB^d) - V_d(K + aB^d) \leq 3\kappa_d((b + R)^d - (a + R)^d)$$

für $K \subseteq RB^d$, $R > 0$, und $0 < a < b$. Weiter hat eine Parallelmengende endliche Oberfläche (im Sinne von Minkowski), für die obere Schranken angegeben werden. Auch der Euklidische Spezialfall von (1.14) wurde in [32] bewiesen.

Ohmann [41] untersuchte Ungleichungen zwischen den inneren Volumina von Parallelmengen beliebiger Körper, wobei er das 0-te innere Volumen eines Körpers als 1 definierte, während er für $j > 0$ das j -te innere Volumen durch Induktion über die Dimension des Körpers erklärte. Das j -te innere Volumen eines j -dimensionalen Körpers ist sein Lebesgue-Maß, und für Körper K , deren Dimension d größer als j ist, setzte Ohmann

$$V_j(K) := \frac{d\kappa_{d-j-1}}{(d-j)\kappa_{d-j}\kappa_{d-1}} \int_{B^d \setminus \{0\}} V_j(K_u) du,$$

wobei K_u für $u \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ das $((d-1)$ -dimensionale) Bild von K unter der orthogonalen Projektion auf die zu u senkrechte Hyperebene bezeichnet.

Sz.-Nagy [52] zeigte, dass für eine kompakte Menge $K \subseteq \mathbb{R}^2$, die aus n Zusammenhangskomponenten besteht, die Funktion

$$\mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+, r \mapsto V_2(K + rB^2) - \pi nr^2$$

konkav ist. Ähnliche Resultate hatten bereits zuvor Hadwiger [19, 6. Hilfssatz] und etwa zeitgleich Makai [36] erzielt.

Stachó [49] nannte eine Funktion $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ Kneser-Funktion, wenn

$$f(\lambda b) - f(\lambda a) \leq \lambda^d (f(b) - f(a)), \quad 0 < a < b, \lambda \geq 1.$$

Der Artikel untersucht Eigenschaften von Kneser-Funktionen und zeigt, dass (1.14) gilt, falls B symmetrisch ist. Mit anderen Worten, das Parallelvolumen eines Körpers in einem normierten Raum ist eine Kneser-Funktion. Außerdem wird hier gezeigt, dass das arithmetische Mittel zwischen linksseitiger und rechtsseitiger Ableitung des Parallelvolumens eines Körpers K in $r > 0$ gleich dem $(d-1)$ -dimensionalen Minkowski-Inhalt von $\{x \in \mathbb{R}^d \mid d(K, x) = r\}$ ist, wobei der j -dimensionale Minkowski-Inhalt einer kompakten Menge $A \subseteq \mathbb{R}^d$ definiert ist als

$$\liminf_{\rho \rightarrow 0} \frac{V_d(A + \rho B^d)}{\kappa_{d-j} \rho^{d-j}}.$$

Heveling, Hug und Last [25] zeigten, dass in der Ebene ein Körper, dessen Parallelvolumen ein Polynom ist, konvex sein muss, was in höheren Dimensionen nicht der Fall ist. In [28] wird dieses Resultat für allgemeinere Eichkörper und zufällige Mengen bewiesen und eine Interpretation für Körper höherer Dimension angegeben.

Relativ viele Arbeiten gibt es zur Parallelmengende von Brown'schen Pfaden, der sogenannten Wiener-Wurst; siehe [33] oder [44] und die darin zitierte Literatur.

Eine weitere mit dem Parallelvolumen verwandte Fragestellung ist die nach geometrischen Eigenschaften des Randes von Parallelmengen. Als aktuelle Arbeit auf diesem Gebiet sei [43] genannt.

1.8 Das Wills-Funktional in der Literatur

Wills [61] untersuchte Schranken für die Zahl der Gitterpunkte, die in einem konvexen Körper K enthalten sind, wobei Gitterpunkte Punkte sind, deren Koordinaten alle ganzzahlig sind. Er vermutete, dass eine obere Schranke durch

$$\sum_{i=0}^d V_i(K) \quad (1.29)$$

gegeben ist. Dies war in Dimension 2 bereits von Nosarzewska [40] bewiesen worden. Bald folgten Beweise in Dimension 3 von Overhagen [42] und für Produkte von maximal 6-dimensionalen Rotationskörpern (mit Computerhilfe bis Dimension 20) von Hadwiger und Wills [23]. Aber Hadwiger [22] zeigte, dass die Wills'sche Vermutung falsch ist mit dem Simplex als Gegenbeispiel. Die explizite Angabe einer Dimension, in der die Wills'sche Vermutung falsch ist, nämlich 441, gelang nur mit Computerhilfe. Betke und Gritzmann [5] wiesen die Wills'sche Vermutung für Gitterzonotope, also Minkowski-Summen von Segmenten, deren beide Enden Gitterpunkte sind, nach. Betke und Henk [6] zeigten mit Computerhilfe, dass die Wills'sche Vermutung bereits in Dimension 207 falsch ist, wobei ihnen die konvexe Hülle der Standardbasisvektoren und ihrer Negativen, das sog. Kreuzpolytop, als Gegenbeispiel diente.

Hadwiger [21] fand heraus, dass (1.29) für alle konvexen Körper K gleich

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi d(K,x)^2} dx \quad (1.30)$$

ist und benannte dieses Funktional nach Wills. Eine weitere Darstellung ist

$$\mathbb{E} V_d(K + \Lambda B^d), \quad (1.31)$$

wobei Λ die Weibull-verteilte Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion $1 - e^{-\pi t^2}$, $t \geq 0$, ist. Bereits in [21] ist eine sehr ähnliche Darstellung aufgeführt, aber die Idee, probabilistische Begriffe in diesem Kontext zu benutzen, stammt erst von Vitale [56].

Auch wenn die Vermutung, wegen der das Wills-Funktional eingeführt wurde, falsch ist, so hat das Wills-Funktional doch zahlreiche Anwendungen. McMullen [37] erhielt bei der Untersuchung des Wills-Funktional eine Vielzahl von Ergebnissen, die unabhängig vom Wills-Funktional interessant sind, z.B. die - auch in der vorliegenden Arbeit verwendete - dimensionsunabhängige Normierung der inneren Volumina. Dass die Arbeit [37] durch die Untersuchung des Wills-Funktional motiviert war, folgt überhaupt nur aus einer Bemerkung auf Seite 255.

McMullen [38, Theorem 2] zeigt, dass das Wills-Funktional eines konvexen Körpers K kleiner oder gleich $\exp(V_1(K))$ ist.

Wills [62] schätzt Größen aus der Geometrie der Zahlen mit Hilfe der Nullstellen von $\sum_{j=0}^d (-\mu)^j V_j(K)$ ab.

Vitale [56] benutzt das Wills-Funktional, um zu zeigen, dass für jeden Gauß'schen Prozess (X_t) , dessen Erwartungswert die Nullfunktion ist, die Ungleichungen

$$\mathbb{E} e^{\sup_t (X_t - \frac{\mathbb{E} X_t^2}{2})} \leq e^{\mathbb{E} \sup_t X_t}$$

und

$$\mathbb{P}(\sup_t X_t - \mathbb{E} \sup_t X_t \geq a) \leq e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}, \quad a > 0,$$

gelten, wobei $\sigma^2 := \sup_t \mathbb{E} X_t^2$. Ein weiterer Beweis für die erste Ungleichung, wieder unter Verwendung des Wills-Funktional, findet sich in [57].

Vitale [58] benutzt Gauß'sche Prozesse, um das Wills-Funktional auf dem Raum ℓ^2 aller Folgen $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$ mit $\sum a_j^2 < \infty$ zu definieren und zu untersuchen.

Kapitel 2

Asymptotik des Parallelvolumens

In diesem Kapitel wollen wir einige Aussagen über das Parallelvolumen in großem Abstand vom Grundkörper herleiten. Wir werden zeigen, dass die Differenz des Parallelvolumens der konvexen Hülle eines Körpers und des Parallelvolumens des Körpers selbst in der Ebene gegen 0 konvergiert, wenn der Abstand gegen unendlich strebt. Dieses Resultat gilt auch in Minkowski-Räumen, sofern der Eichkörper glatt ist. Unter der Voraussetzung, dass der Eichkörper einen Ball als Summanden enthält, konvergiert die Differenz von der Ordnung r^{-1} gegen 0. Allgemeiner gilt, dass für einen d -dimensionalen Eichkörper, der einen Ball als Summanden enthält, die oben bezeichnete Differenz höchstens von der Ordnung r^{d-3} wächst. Wir werden die Resultate jeweils für zufällige kompakte Mengen zeigen und eine Interpretation für Körper angeben, deren Dimension größer als die des Minkowski-Raums ist. Außerdem werden wir jeweils zeigen, dass die Resultate in der Ebene nur für die Eichkörper gelten, für die wir sie bewiesen haben.

Im dritten Abschnitt werden wir eine Aussage über die Konvergenzgeschwindigkeit der Ableitung der oben bezeichneten Differenz in der Ebene herleiten mit ähnlichen Verallgemeinerungen wie oben.

In Abschnitt 2.4 geben wir einen neuen Beweis für ein Resultat aus [25] bzw. [28], das besagt, dass das Parallelvolumen eines Körpers in der Ebene genau dann ein Polynom ist, wenn der Körper konvex ist, wobei wieder ähnliche Verallgemeinerungen wie oben gelten. Für das 3-dimensionale Parallelvolumen erhalten wir neue Ergebnisse.

2.1 Die Konvergenzaussage

In diesem Abschnitt wollen wir die 2-dimensionalen Eichkörper charakterisieren, die die Eigenschaft haben, dass die Differenz zwischen dem Parallelvolumen der konvexen Hülle eines Körpers und dem Parallelvolumen des Körpers selbst gegen 0 strebt, wenn der Abstand gegen unendlich strebt. Es wird sich herausstellen, dass eine notwendige und hinreichende Bedingung ist, dass der Eichkörper glatt ist.

Zum Nachweis, dass Glattheit hinreichend ist, werden wir zunächst ein deutlich allgemeineres Resultat beweisen. Zum einen beweisen wir das Resultat auch für zufällige Körper, zum anderen weisen wir eine Verallgemeinerung auf beliebige Dimensionen nach.

Wir nennen einen konvexen Körper $B \subseteq \mathbb{R}^n$ einen *Scheibenkörper*, falls seine affine Hülle 2-dimensional ist, und, in der affinen Hülle betrachtet, 0 innerer Punkt von B ist und B glatt ist.

Für einen konvexen Körper $B \subseteq \mathbb{R}^n$ bezeichne \hat{B} die affine Hülle von B , die, falls $0 \in B$, mit der linearen Hülle zusammenfällt, und

$$B^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle v, x - y \rangle = 0 \forall x, y \in B\}$$

das *affin-orthogonale Komplement* von B . Wir nennen

$$K_B := \bigcup_{y \in B^\perp} \text{conv}(K \cap (y + \hat{B}))$$

die *B-Konvexifikation* des Körpers $K \subseteq \mathbb{R}^n$.

Um Integrabilitätsbedingungen zu formulieren, benötigen wir die δ -Zahl eines konvexen Körpers B mit $0 \in \text{relint } B$, die wir definieren als

$$\delta_B := 1 / \min\{h_B(u) \mid u \in \hat{B}, \|u\| = 1\}.$$

Also ist $1/\delta_B$ der Radius des größten Kreises in \hat{B} mit Mittelpunkt 0, der ganz in B enthalten ist.

Satz 2.1. *Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ein zufälliger Körper und $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ ein zufälliger Scheibenkörper mit (zufälliger) δ -Zahl $\Delta := \delta_Y$ so, dass für ein $r > 0$*

$$\mathbb{E} V_n(X_Y + rY) < \infty \quad \wedge \quad \mathbb{E} V_n((X_Y + Y) \setminus X_Y) \cdot \text{diam } X \cdot \Delta < \infty.$$

Dann gilt

$$\mathbb{E} V_n(X_Y + rY) - \mathbb{E} V_n(X + rY) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0.$$

Bevor wir mit den Vorbereitungen zum Beweis dieses Satzes beginnen, wollen wir die Integrabilitätsbedingungen kommentieren.

Lemma 2.2. *Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ein zufälliger Körper, $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ ein zufälliger konvexer Körper und $r > 0$. Falls nun $\mathbb{E} V_n(X + rY) < \infty$, so gilt $\mathbb{E} V_n(X + sY) < \infty$ für alle $s \geq 0$.*

Beweis: Für $s \leq r$ folgt die Behauptung direkt aus der fast sicheren Beziehung

$$0 \leq V_n(X + sY) \leq V_n(X + rY).$$

Für $s > r$ sei $D := \dim Y$. Für $x \in Y^\perp$ bezeichne $X^x := X \cap (\hat{Y} + x)$. Wegen Satz 1.41 (mit $a = 0$, $b = r$ und $\lambda = \frac{s}{r}$) gilt nun f.s.

$$\begin{aligned} V_n(X + sY) &= \int_{X|Y^\perp} V_D(X^x + sY) dx \\ &\leq \int_{X|Y^\perp} \left(\frac{s}{r}\right)^D V_D(X^x + rY) - \left(\left(\frac{s}{r}\right)^D - 1\right) V_D(X^x) dx \\ &\leq \left(\frac{s}{r}\right)^D V_n(X + rY). \end{aligned}$$

Hieraus folgt aber die Behauptung. □

Bem. 2.3. Ist in Satz 2.1 der Körper Y deterministisch und gilt $\mathbb{E}(\text{diam } X)^n < \infty$, so sind die Integrabilitätsbedingungen erfüllt. Da X_Y nämlich f.s. in einer zufälligen Kugel vom Radius $\text{diam } X$ enthalten ist, gilt

$$\mathbb{E} V_n(X_Y + rY) \leq \mathbb{E} V_n((\text{diam } X + r \text{diam } Y)B^n) = \kappa_n \cdot \mathbb{E}(\text{diam } X + r \text{diam } Y)^n.$$

In der Notation des Beweises von Lemma 2.2 folgt weiter, wobei $\Delta := \delta_Y$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[V_n((X_Y + rY) \setminus X_Y) \cdot \text{diam } X \cdot \Delta] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_{X|Y^\perp} 2rV(\text{conv } X^x, Y) + r^2V_2(Y) dx \cdot \text{diam } X\right] \cdot \Delta \\ &\leq \mathbb{E}[(\text{diam } X)^{n-2} \kappa_{n-2} (2 \text{diam } X \cdot rV(B^2, Y) + r^2V_2(Y)) \cdot \text{diam } X] \cdot \Delta \\ &\leq 2\kappa_{n-2} rV_1(Y)\Delta \cdot \mathbb{E}[(\text{diam } X)^n] + \kappa_{n-2} r^2V_2(Y)\Delta \cdot \mathbb{E}[(\text{diam } X)^{n-1}]. \end{aligned}$$

Der Beweis von Satz 2.1 basiert auf einer Reihe von Lemmata, die sich mit dem Spezialfall befassen, dass $n = 2$ ist und die Körper deterministisch sind. Unsere Strategie beim Beweis dieses Spezialfalls ist es, die Menge $(\text{conv } X + rY) \setminus (X + rY)$ so zu charakterisieren, dass wir ihr Volumen leicht abschätzen können. Dazu führen wir eine Funktion w ein, mit deren Hilfe wir eine untere Schranke des Abstands von Punkten aus $(\text{conv } X + rY) \setminus (X + rY)$ zu $\text{conv } X$ darstellen werden. Wir definieren sie in beliebigen Dimensionen, da wir sie im nächsten Abschnitt in dieser Allgemeinheit benötigen werden. Es sei also ein kompakter und konvexer Eichkörper $B \subseteq \mathbb{R}^d$ mit $0 \in \text{int } B$ gegeben. Dann definieren wir

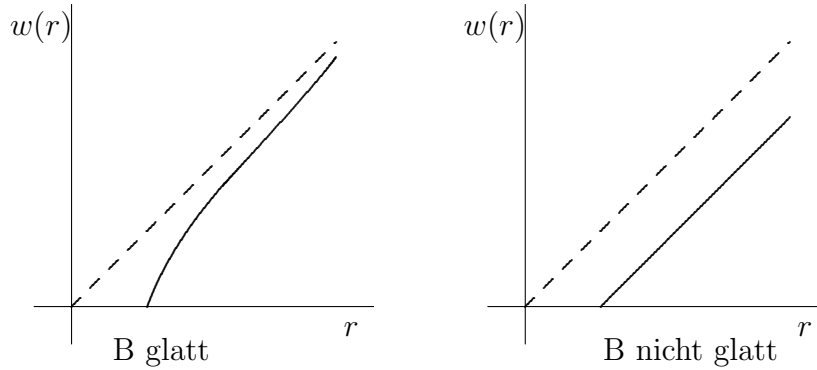
$$\begin{aligned} w = w_B : \mathbb{R}_0^+ &\rightarrow \mathbb{R}_0^+, \\ r &\mapsto \min\{d_B(y, z) \mid y \in B^d, z \in \mathbb{R}^d, y \in \Pi_B(0y, z), d_B(0, z) = r\}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Dabei bezeichnet $xy := \{\lambda x + (1 - \lambda)y \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ im Fall $x \neq y$ die Gerade durch x und y und sonst die Menge $\{x\}$. Wir begründen zunächst, dass in (2.1) das Minimum angenommen wird. Hierfür bemerken wir, dass aus Lemma 1.31 insbesondere die Stetigkeit von $d_B : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ folgt. Für $r \in \mathbb{R}_0^+$ gibt es Folgen $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R}^d und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in B^d mit $y_n \in \Pi_B(0y_n, z_n)$ und $d_B(0, z_n) = r$ für alle $n \in \mathbb{N}$ so, dass $(d_B(y_n, z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen das Infimum der Menge aus (2.1) strebt. Wegen der Kompaktheit von B^d und $\{z \in \mathbb{R}^d \mid d_B(0, z) = r\}$ konvergieren Teilfolgen von $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, o.B.d.A. die Folgen selbst, gegen Grenzwerte y und z . Für jeden Punkt $y' := \lambda y$, $\lambda \in \mathbb{R}$, konvergiert die durch $y'_n := \lambda y_n$, $n \in \mathbb{N}$, definierte Folge gegen y' und es gilt $y'_n \in 0y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere ist $d_B(y_n, z_n) \leq d_B(y'_n, z_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit folgt $d_B(y, z) \leq d_B(y', z)$. Da $y' \in 0y$ beliebig war, folgt $y \in \Pi_B(0y, z)$. Weiter ist $d_B(0, z) = r$ und $d_B(y, z)$ ist gleich dem Infimum der Menge aus (2.1).

Beispiel 2.4. Wir wollen hier die Funktion w im Spezialfall $B = RB^d$ berechnen. Hierbei werden wir mehrfach die Beziehung

$$d_B(x_1, x_2) = \inf\{s > 0 \mid x_2 \in x_1 + sRB^d\} = \inf\{s > 0 \mid \|x_2 - x_1\| \leq sR\} = \frac{\|x_2 - x_1\|}{R}$$

für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$ verwenden.



Das linke Schaubild skizziert den typischen Verlauf der Funktion w bei glattem Eichkörper. Die gestrichelte Linie stellt dabei die Identität dar. Das rechte Schaubild zeigt den Fall, dass der Eichkörper B nicht glatt ist.

Abbildung 2.1: Typischer Verlauf der Funktion w

Sei zunächst $r \leq \frac{1}{R}$. Wähle dann einen Punkt y mit $\|y\| = rR$ und $z := y$. Dann gilt $\|y\| \leq 1$, also $y \in B^d$, $p_B(0y, z) = y$ und $d_B(0, z) = \frac{\|y\|}{R} = r$. Somit folgt aus $d_B(y, z) = 0$, dass $w(r) = 0$.

Sei nun $r \geq \frac{1}{R}$. Seien $y \in B^d$ und $z \in \mathbb{R}^d$ wieder Punkte mit $y = p_B(0y, z)$ und $d_B(0, z) = r$. Die Bedingung $y = p_B(0y, z)$ ist äquivalent dazu, dass die Geraden $0y$ und yz aufeinander senkrecht stehen. Daher können wir mit Hilfe des Satzes von Pythagoras schließen:

$$(rR)^2 = (R \cdot d_B(0, z))^2 = \|z\|^2 = \|y\|^2 + \|z - y\|^2 \leq 1 + (R \cdot d_B(y, z))^2$$

Somit folgt

$$d_B(y, z) \geq \sqrt{r^2 - \left(\frac{1}{R}\right)^2}. \tag{2.2}$$

Da y und z beliebig waren, folgt

$$w(r) \geq \sqrt{r^2 - \left(\frac{1}{R}\right)^2}.$$

Wähle nun $y \in B^d$ mit $\|y\| = 1$ und $z \in \mathbb{R}^d$ mit $\|z\| = rR$, also $d_B(0, z) = r$, so, dass $0y$ und yz senkrecht stehen. Dann zeigt eine zur Herleitung von (2.2) analoge Rechnung

$$d_B(y, z) = \sqrt{r^2 - \left(\frac{1}{R}\right)^2}.$$

Also ist

$$w(r) = \sqrt{r^2 - \left(\frac{1}{R}\right)^2}.$$

Wir kehren wieder zu einem allgemeinen Eichkörper B zurück und zeigen die Ungleichung

$$\frac{d_B(y, x)}{\|y - x_1\|} \geq w\left(\frac{d_B(x_1, x)}{\|y - x_1\|}\right) \tag{2.3}$$

für $x, y, x_1 \in \mathbb{R}^d$ mit $y \in \Pi_B(yx_1, x)$ und $y \neq x_1$. Setze $z := (x - x_1)/\|y - x_1\|$ und $\tilde{y} := (y - x_1)/\|y - x_1\|$. Dann gilt $\tilde{y} \in \Pi_B(0\tilde{y}, z)$ und somit nach (2.1)

$$\begin{aligned} w\left(\frac{d_B(x_1, x)}{\|y - x_1\|}\right) &= w(d_B(0, z)) \\ &\leq d_B(\tilde{y}, z) \\ &= \frac{d_B(y, x)}{\|y - x_1\|}. \end{aligned}$$

Weiter gilt für $r < s$ die Ungleichung

$$w(r) \leq \frac{r}{s} \cdot w(s). \quad (2.4)$$

Es gibt nämlich $z \in \mathbb{R}^d$ und $y \in B^d$ mit $y \in \Pi_B(0y, z)$, $d_B(0, z) = s$ und $d_B(y, z) = w(s)$. Setzt man nun $y' := \frac{r}{s}y$ und $z' := \frac{r}{s}z$, so gilt $y' \in B^d$ und $d_B(0, z') = \frac{r}{s}s = r$. Weiter ist

$$d_B\left(\frac{r}{s}x, z'\right) = \frac{r}{s} \cdot d_B(x, z) \geq \frac{r}{s} \cdot d_B(y, z) = d_B(y', z')$$

für alle $x \in 0y$, woraus $y' \in \Pi_B(0y', z')$ folgt, da jeder Punkt aus $0y'$ eine Darstellung der Form $\frac{r}{s}x$, $x \in 0y$, besitzt. Somit haben wir

$$w(r) \leq d_B(y', z') = \frac{r}{s} \cdot d_B(y, z) = \frac{r}{s}w(s).$$

Lemma 2.5. *In \mathbb{R}^2 ist der Eichkörper B genau dann glatt, wenn $\lim_{r \rightarrow \infty} (r - w(r)) = 0$.*

Beweis: Zunächst zeigen wir, dass B nicht glatt ist, wenn nicht $\lim_{r \rightarrow \infty} (r - w(r)) = 0$ gilt. Wir nehmen also an, es gebe eine Folge $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und eine Zahl $\epsilon \in (0, 1)$ so, dass $r_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$ und $r_n - w(r_n) > 3\epsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es Folgen $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in B^d und $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R}^d mit $d_B(0, z_n) = r_n$, $y_n \in \Pi_B(0y_n, z_n)$ und

$$d_B(0, z_n) > d_B(y_n, z_n) + 3\epsilon. \quad (2.5)$$

Wegen der Kompaktheit von B^d besitzt $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge, o.B.d.A. die Folge selbst. Sei $y := \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$. Es gilt $d_B(0, y_n) > 3\epsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also insbesondere $y_n \neq 0$ für $n \in \mathbb{N}$ und $y \neq 0$. Weiter bezeichnen ν_n und ν die Einheitsvektoren senkrecht auf y_n bzw. y so, dass (y_n, ν_n) und (y, ν) positiv orientiert sind. Wähle Punkte $q_n \in B$, $n \in \mathbb{N}$, mit $z_n = d_B(y_n, z_n)q_n + y_n$. Dann liegt q_n , $n \in \mathbb{N}$, laut Lemma 1.33 im Rand von B mit äußerem Normalenvektor ν_n .

Wegen der Kompaktheit von B hat $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine gegen einen Punkt $q \in B$ konvergente Teilfolge, o.B.d.A. die Folge selbst. Nun zeigen wir, dass ν äußerer Normalenvektor von B in q ist. In der Tat gilt für jeden Punkt $p \in B$, dass $\langle p, \nu_n \rangle \leq \langle q_n, \nu_n \rangle$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und daher $\langle p, \nu \rangle \leq \langle q, \nu \rangle$ wegen der Stetigkeit des Skalarprodukts. Also besitzt B in q den äußeren Normalenvektor ν und somit eine zu $0y$ parallele Stützhyperebene.

Wir wollen nun zeigen, dass B in q zu den Geraden durch 0 und $y - \epsilon q$ und durch 0 und $-y - \epsilon q$ parallele Stützhyperebene hat. Dabei reicht es, dies für $y - \epsilon q$ zu zeigen. Wir nehmen an, dies wäre nicht der Fall. Dann gibt es $\alpha > 0$ so, dass $p := q + \alpha(y - \epsilon q) \in \text{int } B$.

Die durch $p_n := q_n + \alpha(y - \epsilon q)$, $n \in \mathbb{N}$, definierte Folge konvergiert gegen p , also liegen fast alle Folgenglieder in B . Nun sei n so groß, dass

$$p_n \in B, \quad (2.6)$$

$$y_n = \beta_n^{(1,1)}y + \beta_n^{(1,2)}q \text{ und } q_n = \beta_n^{(2,1)}y + \beta_n^{(2,2)}q \text{ mit } \frac{3}{4} \leq \beta_n^{(1,1)} \leq \frac{5}{4}, \quad (2.7)$$

$$|\beta_n^{(1,2)}| \leq \frac{\epsilon}{4}, \quad |\beta_n^{(2,1)}| < \frac{1}{4} \text{ und } \frac{3}{4} \leq \beta_n^{(2,2)} \leq \frac{5}{4} \text{ gilt, und}$$

$$d_B(y_n, z_n) \cdot \frac{\alpha}{4} > 1. \quad (2.8)$$

Dabei ist auch Bedingung (2.7) für alle hinreichend großen n erfüllt, da B innere Punkte hat, also $\langle q, \nu \rangle > 0$ und somit q und y eine Basis des \mathbb{R}^2 bilden. Wegen (2.7) ist $\beta_n^{(1,1)}\beta_n^{(2,2)} - \beta_n^{(2,1)}\beta_n^{(1,2)} \neq 0$ und unter weiterer Verwendung von (2.7) folgt

$$\begin{aligned} y - \epsilon q &= (y - \epsilon q) \cdot \frac{\beta_n^{(1,1)}\beta_n^{(2,2)} - \beta_n^{(2,1)}\beta_n^{(1,2)}}{\beta_n^{(1,1)}\beta_n^{(2,2)} - \beta_n^{(2,1)}\beta_n^{(1,2)}} \\ &= \frac{\beta_n^{(2,2)}(\beta_n^{(1,1)}y + \beta_n^{(1,2)}q) - \beta_n^{(1,2)}(\beta_n^{(2,1)}y + \beta_n^{(2,2)}q)}{\beta_n^{(1,1)}\beta_n^{(2,2)} - \beta_n^{(2,1)}\beta_n^{(1,2)}} \\ &\quad - \epsilon \frac{\beta_n^{(1,1)}(\beta_n^{(2,1)}y + \beta_n^{(2,2)}q) - \beta_n^{(2,1)}(\beta_n^{(1,1)}y + \beta_n^{(1,2)}q)}{\beta_n^{(1,1)}\beta_n^{(2,2)} - \beta_n^{(2,1)}\beta_n^{(1,2)}} \\ &= \frac{[\beta_n^{(2,2)}y_n - \beta_n^{(1,2)}q_n] + \epsilon[\beta_n^{(2,1)}y_n - \beta_n^{(1,1)}q_n]}{\beta_n^{(1,1)}\beta_n^{(2,2)} - \beta_n^{(2,1)}\beta_n^{(1,2)}} \\ &= \frac{\beta_n^{(2,2)} + \epsilon\beta_n^{(2,1)}}{\beta_n^{(1,1)}\beta_n^{(2,2)} - \beta_n^{(2,1)}\beta_n^{(1,2)}} \left(y_n - \frac{\beta_n^{(1,2)} + \epsilon\beta_n^{(1,1)}}{\beta_n^{(2,2)} + \epsilon\beta_n^{(2,1)}} q_n \right). \end{aligned}$$

Daher setzen wir

$$\tilde{\alpha}_n := \alpha \cdot \frac{\beta_n^{(2,2)} + \epsilon\beta_n^{(2,1)}}{\beta_n^{(1,1)}\beta_n^{(2,2)} - \beta_n^{(2,1)}\beta_n^{(1,2)}} \quad \text{und} \quad \tilde{\epsilon}_n := \frac{\beta_n^{(1,2)} + \epsilon\beta_n^{(1,1)}}{\beta_n^{(2,2)} + \epsilon\beta_n^{(2,1)}}.$$

Es gilt $\tilde{\alpha}_n > \frac{1}{4}\alpha$ und $\tilde{\epsilon}_n < 3\epsilon$ und

$$p_n = q_n + \alpha(y - \epsilon q) = q_n + \tilde{\alpha}_n(y_n - \tilde{\epsilon}_n q_n).$$

Nun folgt, wenn $[p_n, q_n]$ die Strecke von p_n nach q_n bezeichnet,

$$\begin{aligned} d_B(0, z_n) &= \inf\{r > 0 \mid z_n \in rB\} \\ &\leq \inf\{r > 0 \mid z_n \in r[p_n, q_n]\} \\ &= \inf\{r > 0 \mid \exists \lambda \in [0, \tilde{\alpha}_n] : z_n = r \cdot (q_n + \lambda(y_n - \tilde{\epsilon}_n q_n))\} \\ &= \inf\{r > 0 \mid \exists \lambda \in [0, \tilde{\alpha}_n] : z_n = r\lambda y_n + r(1 - \lambda\tilde{\epsilon}_n)q_n\} \\ &= \inf\{r > 0 \mid \exists \mu \in [0, r\tilde{\alpha}_n] : z_n = \mu y_n + (r - \mu\tilde{\epsilon}_n)q_n\}. \end{aligned}$$

Wir wollen zeigen, dass $r_0 := d_B(y_n, z_n) + \tilde{\epsilon}_n$ in der Menge enthalten ist, über die in der letzten Zeile das Infimum gebildet wird. Dies folgt aber daraus, dass

$$\mu_0 := 1 \in [0, d_B(y_n, z_n) \frac{\alpha}{4}] \subseteq [0, r_0 \tilde{\alpha}_n]$$

wegen (2.8) und

$$\mu_0 y_n + (r_0 - \mu_0 \tilde{\epsilon}_n) q_n = y_n + d_B(y_n, z_n) q_n = z_n.$$

Somit können wir weiter folgern

$$d_B(0, z_n) \leq d_B(y_n, z_n) + \tilde{\epsilon}_n \leq d_B(y_n, z_n) + 3\epsilon.$$

Dies widerspricht aber (2.5). Also hat B in q mehrere Stützhyperebenen und ist daher nicht glatt.

Nun nehmen wir an, dass B nicht glatt sei. Sei $q \in \text{bd } B$ ein Punkt mit mehr als einer Stützhyperebene. Wähle $y \in S^1$ so, dass B in q zwei zu den Geraden durch 0 und y bzw. durch 0 und $y - \epsilon q$, $\epsilon > 0$, parallele Stützhyperebenen hat.

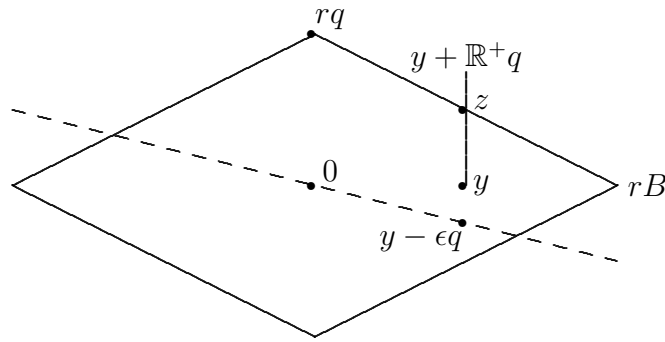


Abbildung 2.2

Sei r so groß, dass $y \in rB$. Nun gibt es eine Zahl s so, dass für $z = y + sq$ gilt $d_B(0, z) = r$. Betrachte nämlich die Funktion

$$f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto d_B(0, y + tq).$$

Diese ist stetig und erfüllt $f(0) \leq r$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \infty$. Also existiert s . Nach Lemma 1.33 (iii) gilt $y \in \Pi_B(0y, z)$ und $d_B(y, z) = s$. Weiter bezeichne ν den zur Gerade durch 0 und $y - \epsilon q$ orthogonalen äußeren Einheitsnormalenvektor in q an B . Dann gilt $\langle y - \epsilon q, \nu \rangle = 0$ und somit

$$\langle z, \nu \rangle = \langle y, \nu \rangle + s \langle q, \nu \rangle = \langle \epsilon q, \nu \rangle + s \langle q, \nu \rangle = (s + \epsilon) \cdot h_B(\nu).$$

Es folgt

$$r = d_B(0, z) \geq \frac{\langle z, \nu \rangle}{h_B(\nu)} = s + \epsilon = d_B(y, z) + \epsilon \geq w(r) + \epsilon.$$

Also konvergiert $r - w(r)$ nicht gegen 0. □

Lemma 2.6. Sei $K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt und $L := \text{conv } K$. Sei γ eine obere Schranke für die Länge eines Segments im Rand von L . Dann gilt

$$(L + rB) \setminus (K + rB) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^d \mid \Pi_B(L, x) \subseteq L \setminus K, d_B(L, x) \in (\gamma \cdot w(\frac{r}{\gamma}), r]\} \cup (L \setminus (K + rB)). \quad (2.9)$$

Beweis: Sei $x \in (L + rB) \setminus (K + rB)$. Falls $x \in L$, folgt $x \in L \setminus (K + rB)$.

Sei nun also $x \notin L$. Die Ungleichung $d_B(L, x) \leq r$ ist trivial. Außerdem folgt aus $d_B(K, x) > d_B(L, x)$ sofort, dass $\Pi_B(L, x) \subseteq L \setminus K$.

Somit bleibt noch $d_B(L, x) > \gamma \cdot w(\frac{r}{\gamma})$ zu zeigen. Hierfür wählen wir $y \in \Pi_B(L, x)$. Laut [46, Theorem 2.1.2] liegt y im relativen Inneren einer Seite F von L . Es gibt einen Punkt $x_1 \in K \cap F$, da $L \setminus F$ konvex ist und daher wegen $L = \text{conv } K$ nicht $K \subseteq L \setminus F$ gelten kann. Wegen $y \in \Pi_B(L, x) \subseteq L \setminus K$ folgt $x_1 \neq y$.

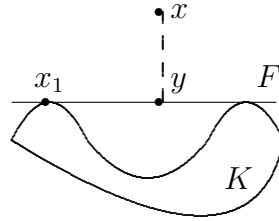


Abbildung 2.3

Wir wollen nun zeigen, dass $y \in \Pi_B(yx_1, x)$ gilt, wobei yx_1 wieder die Gerade durch y und x_1 bezeichnet. Mit anderen Worten, wir wollen zeigen, dass y das Minimum von

$$yx_1 \rightarrow \mathbb{R}, y' \mapsto d_B(y', x)$$

ist. Hierzu setzen wir $\rho := d_B(y, x)$ und nehmen an, $\tilde{y} \in yx_1$ wäre ein Punkt mit $d_B(\tilde{y}, x) < \rho$. Da y im relativen Inneren von F liegt und $\tilde{y} - y$ im zur affinen Hülle von F parallelen linearen Unterraum, gibt es $\lambda > 0$ mit $y + \lambda(\tilde{y} - y) \in F \subseteq L$. Nun ist $x - y \in \rho B$ und $x - \tilde{y} \in \text{int } \rho B$. Wegen der Konvexität von ρB folgt

$$x - (y + \lambda(\tilde{y} - y)) = \lambda(x - \tilde{y}) + (1 - \lambda)(x - y) \in \text{int } \rho B,$$

also $x - (y + \lambda(\tilde{y} - y)) \in \tilde{\rho} B$ für ein $\tilde{\rho} < \rho$ und somit $d_B(y + \lambda(\tilde{y} - y), x) < \rho$, im Widerspruch zu $y \in \Pi_B(L, x)$. Also gilt $y \in \Pi_B(yx_1, x)$.

Nun folgt aber, indem wir zunächst Ungleichung (2.3) anwenden und dann

$$\frac{d_B(x_1, x)}{\|y - x_1\|} > \frac{r}{\gamma}$$

zusammen mit (2.4) benutzen, dass

$$\begin{aligned} d_B(L, x) &= d_B(y, x) \\ &\geq \|y - x_1\| \cdot w\left(\frac{d_B(x_1, x)}{\|y - x_1\|}\right) \\ &\geq \|y - x_1\| \cdot \frac{d_B(x_1, x) \cdot \gamma}{\|y - x_1\| \cdot r} \cdot w\left(\frac{r}{\gamma}\right) \\ &> \gamma \cdot w\left(\frac{r}{\gamma}\right). \end{aligned} \quad \square$$

Das folgende Lemma werden wir zur Berechnung des Volumens der rechten Seite von (2.9) benötigen. Wir erinnern uns, dass für einen konvexen Körper $L \subseteq \mathbb{R}^d$ und einen Vektor $u \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ die Stützfunktion durch $h_L(u) := \max\{\langle u, x \rangle \mid x \in L\}$ definiert ist, und bezeichnen $H_L(u) := \{x \in L \mid \langle u, x \rangle = h_L(u)\}$ als *Stützmenge*. Weiter haben laut Lemma 1.27 alle Punkte im relativen Inneren einer Seite eines konvexen Körpers die selben äußeren Normalenvektoren.

Lemma 2.7. *Sei $K \subseteq \mathbb{R}^2$ ein konvexer Körper. Seien $x_1, x_2 \in K$, $x_1 \neq x_2$ zwei Punkte mit $(x_1, x_2) := \{\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \mid 0 < \lambda < 1\} \subseteq \text{bd } K$. Dann bezeichne ν einen äußeren Einheitsnormalenvektor von K in den Punkten aus (x_1, x_2) und*

$$X_r := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \Pi_B(K, x) \subseteq (x_1, x_2), d_B(K, x) \leq r, \langle x, \nu \rangle \geq \langle x_1, \nu \rangle\}, r \geq 0.$$

Weiter bezeichnen q und q' die Punkte mit $H_B(\nu) = [q, q']$, und zwar im Falle $q \neq q'$ so, dass $q - q'$ ein positives Vielfaches von $x_1 - x_2$ ist. Sei $\Delta(q, q') := \frac{1}{2}h_B(\nu)\|q - q'\|$ der Flächeninhalt des Dreiecks mit Eckpunkten $0, q$ und q' . Dann gilt

$$V_2(X_r) = \begin{cases} \|x_2 - x_1\|h_B(\nu)r - \Delta(q, q')r^2 & \text{falls } \|q - q'\|r \leq \|x_2 - x_1\| \\ \frac{\|x_2 - x_1\|^2 h_B(\nu)}{2\|q - q'\|} & \text{falls } \|q - q'\|r > \|x_2 - x_1\|. \end{cases}$$

Bem. 2.8. In Lemma 2.7 ist, falls K nicht in einer Geraden enthalten ist, der Vektor ν eindeutig bestimmt und die Bedingung $\langle x, \nu \rangle \geq \langle x_1, \nu \rangle$ in der Definition von X_r redundant.

Bem. 2.9. In Lemma 2.7 ist vor allem der Fall $q = q'$ interessant. In diesem Fall gilt

$$V_2(X_r) = \|x_2 - x_1\|h_B(\nu)r.$$

Beweis von Lemma 2.7: Wir werden unten zeigen, dass X_r ein Dreieck oder Trapez ist, das von der Strecke (x_1, x_2) , Teilen der Geraden $x_1 + \mathbb{R}q'$ und $x_2 + \mathbb{R}q$ und im Fall $\|q - q'\|r \leq \|x_2 - x_1\|$ von Teilen der Geraden

$$g := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle x, \nu \rangle = \langle x_1, \nu \rangle + rh_B(\nu)\},$$

berandet wird. Hieraus kann man den Flächeninhalt von X_r berechnen: Im ersten Fall bezeichne Y_r das Parallelogramm, das die selben Seiten wie X_r hat, nur $x_2 + \mathbb{R}q'$ statt $x_2 + \mathbb{R}q$. Dann gilt $V_2(Y_r) = \|x_2 - x_1\|h_B(\nu)r$. Außerdem ist $Y_r \setminus X_r$ ein Dreieck mit Eckpunkten $x_2, x_2 + rq$ und $x_2 + rq'$, woraus $V_2(Y_r \setminus X_r) = \Delta(q, q')r^2$ und somit

$$V_2(X_r) = \|x_2 - x_1\|h_B(\nu)r - \Delta(q, q')r^2$$

folgt. Im zweiten Fall sind die drei X_r begrenzenden Strecken parallel zum Dreieck mit Eckpunkten $0, q$ und q' , weshalb X_r diesem Dreieck ähnlich ist. Da der Streckfaktor offensichtlich $\frac{\|x_2 - x_1\|}{\|q - q'\|}$ ist, folgt

$$V_2(X_r) = \left(\frac{\|x_2 - x_1\|}{\|q - q'\|} \right)^2 \Delta(q, q') = \frac{\|x_2 - x_1\|^2 h_B(\nu)}{2\|q - q'\|}.$$

Nun weisen wir nach, dass die 4 Geraden, wie oben behauptet, X_r beschränken.

Es ist klar, dass (x_1, x_2) Teil des Randes von X_r ist.

Um zu zeigen, dass X_r von $x_1 + \mathbb{R}q'$ und $x_2 + \mathbb{R}q$ beschränkt wird, weisen wir zunächst die Beziehung

$$\Pi_B(K, x) \subseteq (x_1, x_2) \iff \Pi_B(x_1x_2, x) \subseteq (x_1, x_2)$$

für $x \in \mathbb{R}^2$ mit $\langle x, \nu \rangle \geq \langle x_1, \nu \rangle$ nach. Dabei folgt die Richtung „ \Leftarrow “ daraus, dass es für jeden Punkt $p \in K \setminus x_1x_2$ einen Punkt $p' \in x_1x_2$ gibt mit $d_B(p', x) < d_B(p, x)$. Zum Nachweis der Umkehrung betrachten wir die Menge $I := (x + d_B(K, x)B^*) \cap x_1x_2$. Wegen $\Pi_B(K, x) \subseteq (x_1, x_2) \subseteq x_1x_2$ folgt $\Pi_B(K, x) \subseteq I$. Da I außerdem weder x_1 noch x_2 enthält und konvex ist, folgt aus der Voraussetzung $\Pi_B(K, x) \subseteq (x_1, x_2)$, dass auch $I \subseteq (x_1, x_2)$ gilt. Wegen $I \neq \emptyset$ folgt hieraus aber $\Pi_B(x_1x_2, x) \subseteq I \subseteq (x_1, x_2)$.

Nach Lemma 1.33 ist $\Pi_B(x_1x_2, x) = x - d_B(x_1x_2, x)[q, q']$. Somit gilt

$$\Pi_B(K, x) \subseteq (x_1, x_2) \iff x - d_B(x_1x_2, x)[q, q'] \subseteq (x_1, x_2)$$

und die Bedingung auf der rechten Seite ist äquivalent dazu, dass x zwischen den Geraden $x_1 + \mathbb{R}q'$ und $x_2 + \mathbb{R}q$ liegt.

Um zu zeigen, dass X_r durch g beschränkt ist, weisen wir zunächst

$$d_B(x_1x_2, x) \leq r \iff \langle x, \nu \rangle \leq \langle x_1, \nu \rangle + r \cdot h_B(\nu)$$

nach, wobei weiterhin x ein Punkt in \mathbb{R}^2 mit $\langle x, \nu \rangle \geq \langle x_1, \nu \rangle$ ist. Sei $d_B(x_1x_2, x) \leq r$. Dann gilt $x \in x_1x_2 + rB$ und somit gibt es $y \in x_1x_2$ und $b \in B$ mit

$$\langle x, \nu \rangle = \langle y, \nu \rangle + r \langle b, \nu \rangle \leq \langle x_1, \nu \rangle + r \cdot h_B(\nu).$$

Sei nun $\langle x, \nu \rangle = \langle x_1, \nu \rangle + s \cdot h_B(\nu)$ für ein $s \leq r$. Wir setzen $y := x - sq$. Dann gilt $y \in x_1x_2$ und $\frac{s}{r}q \in B$, also

$$x = y + r \cdot \frac{s}{r}q \in x_1x_2 + rB$$

und somit $d_B(x_1x_2, x) \leq r$. Für $x \in \mathbb{R}^2$ mit $\langle x, \nu \rangle \geq \langle x_1, \nu \rangle$ und $\Pi_B(K, x) \subseteq (x_1, x_2)$ gilt $\Pi_B(K, x) \subseteq x_1x_2$ und, wie oben gezeigt, $\Pi_B(x_1x_2, x) \subseteq (x_1, x_2) \subseteq K$ und somit $d_B(K, x) = d_B(x_1x_2, x)$. Hieraus folgt

$$d_B(K, x) \leq r \iff \langle x, \nu \rangle \leq \langle x_1, \nu \rangle + r \cdot h_B(\nu),$$

was den Nachweis, dass X_r durch g beschränkt ist, abschließt. \square

Lemma 2.10. *Sei $K \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt und γ eine obere Schranke für die Länge einer Kante von $L := \text{conv } K$. Dann gilt*

$$V_2((L + rB) \setminus (K + rB)) \leq V_2((L + B) \setminus L) \cdot \gamma \cdot \left(\frac{r}{\gamma} - w_B\left(\frac{r}{\gamma}\right) \right) + V_2(L \setminus (K + rB)).$$

Beweis: Da ein 2-dimensionaler Körper laut Lemma 1.28 höchstens abzählbar viele Kanten hat, können wir die äußeren Einheitsnormalenvektoren von L in den Punkten im relativen Inneren seiner Kanten mit ν_m , $m \in \mathbb{N}$, bezeichnen, wobei wir im Fall, dass L nur $\xi \in \mathbb{N}$ Kanten hat, $\nu_m := 0$ für $m \geq \xi$ setzen. Im Fall $\|\nu_m\| = 1$ bezeichnen wir das relative Innere der zu ν_m gehörenden Kante mit I_m und einen beliebigen Punkt aus I_m mit x_m , und andernfalls setzen wir $I_m = \emptyset$ und $x_m = 0$. Laut Lemma 1.26 ist $(\text{bd } L) \setminus K \subseteq \bigcup_{m=0}^{\infty} I_m$.

Nun ist für $x \in \mathbb{R}^2 \setminus L$ die Menge $\Pi_B(L, x)$ konvex und schneidet das Innere von L nicht. Insbesondere gibt es für $x \in \mathbb{R}^2$ mit $\Pi_B(L, x) \subseteq (\text{bd } L) \setminus K$ ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\Pi_B(L, x) \subseteq I_m$. Somit folgt aus Lemma 2.6

$$(L + rB) \setminus (K + rB) \subseteq \bigcup_{m=0}^{\infty} \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d_B(L, x) \in (s, r], \Pi_B(L, x) \subseteq I_m, \langle x, \nu_m \rangle \geq \langle x_m, \nu_m \rangle\} \cup (L \setminus (K + rB)),$$

wobei $s := \gamma \cdot w_B(\frac{r}{\gamma})$ ist. Für $m \in \mathbb{N}$ und $\rho > 0$ setzen wir

$$T_{\rho, m} := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d_B(L, x) \in (0, \rho], \Pi_B(L, x) \subseteq I_m, \langle x, \nu_m \rangle \geq \langle x_m, \nu_m \rangle\}.$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} V_2((L + rB) \setminus (K + rB)) &\leq \sum_{m=0}^{\infty} V_2(\{x \in \mathbb{R}^2 \mid d_B(L, x) \in (s, r], \Pi_B(L, x) \subseteq I_m, \langle x, \nu_m \rangle \geq \langle x_m, \nu_m \rangle\}) \\ &\quad + V_2(L \setminus (K + rB)) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} V_2(T_{r, m} \setminus T_{s, m}) + V_2(L \setminus (K + rB)). \end{aligned}$$

Für $m \in \mathbb{N}$ sei j_m die Länge von I_m und η_m die Länge der (höchstens 1-dimensionalen) Stützmenge $H_B(\nu_m)$. Wir weisen nun die Beziehung

$$V_2(T_{r, m} \setminus T_{s, m}) \leq j_m h_B(\nu_m)(r - s)$$

durch Fallunterscheidung nach. Falls $\eta_m \cdot r \leq j_m$, dann ist auch $\eta_m \cdot s \leq j_m$ und somit gilt nach Lemma 2.7

$$V_2(T_{r, m} \setminus T_{s, m}) = j_m h_B(\nu_m)r - cr^2 - j_m h_B(\nu_m)s + cs^2 \leq j_m h_B(\nu_m)(r - s),$$

mit $c := \frac{1}{2}\eta_m h_B(\nu_m) \geq 0$. Falls $\eta_m \cdot r > j_m$, aber $\eta_m \cdot s \leq j_m$, dann folgt

$$\begin{aligned} V_2(T_{r, m} \setminus T_{s, m}) &= \frac{(j_m)^2 h_B(\nu_m)}{2\eta_m} - j_m h_B(\nu_m)s + \frac{1}{2}\eta_m s \cdot h_B(\nu_m)s \\ &\leq \frac{1}{2}j_m h_B(\nu_m)r - j_m h_B(\nu_m)s + \frac{1}{2}j_m h_B(\nu_m)s \\ &\leq j_m h_B(\nu_m)(r - s). \end{aligned}$$

Es bleibt der Fall $\eta_m \cdot r > j_m$ und $\eta_m \cdot s > j_m$. Hier gilt

$$V_2(T_{r, m} \setminus T_{s, m}) = \frac{(j_m)^2 h_B(\nu_m)}{2\eta_m} - \frac{(j_m)^2 h_B(\nu_m)}{2\eta_m} = 0 \leq j_m h_B(\nu_m)(r - s).$$

Somit können wir weiter abschätzen

$$\begin{aligned}
V_2((L + rB) \setminus (K + rB)) &\leq \sum_{m=0}^{\infty} h_B(\nu_m) j_m(r - s) + V_2(L \setminus (K + rB)) \\
&\leq \left(\sum_{m=0}^{\infty} h_B(\nu_m) j_m \right) \cdot \left(r - \gamma \cdot w_B\left(\frac{r}{\gamma}\right) \right) + V_2(L \setminus (K + rB)) \\
&\leq V_2((L + B) \setminus L) \cdot \gamma \cdot \left(\frac{r}{\gamma} - w_B\left(\frac{r}{\gamma}\right) \right) + V_2(L \setminus (K + rB)).
\end{aligned}$$

Dabei kann die letzte Abschätzung im allgemeinen nicht mit Lemma 2.7 begründet werden. Statt dessen wählen wir für jedes $m \in \mathbb{N}$ einen Vektor $b_m \in \text{bd } B$ mit äußerer Normalen ν_m . Nun setzen wir $T'_m := \{y + \lambda b_m \mid y \in I_m, \lambda \in (0, 1)\}$, $m \in \mathbb{N}$. Zum Nachweis, dass diese Mengen paarweise disjunkt sind, seien $m, \tilde{m} \in \mathbb{N}$ mit $m \neq \tilde{m}$. Falls $I_m \neq I_{\tilde{m}}$, gilt nach Lemma 1.33 $\Pi_B(Z, x) \subseteq I_m$ für alle $x \in T'_m$ und $\Pi_B(Z, x) \subseteq I_{\tilde{m}}$ für alle $x \in T'_{\tilde{m}}$, woraus $T'_m \cap T'_{\tilde{m}} = \emptyset$ wegen $I_m \cap I_{\tilde{m}} = \emptyset$ folgt. Im Fall $I_m = I_{\tilde{m}}$ sieht man leicht $\langle x, \nu_m \rangle > \langle x_m, \nu_m \rangle$ für $x \in T'_m$ und $\langle x, \nu_m \rangle < \langle x_m, \nu_m \rangle$ für $x \in T'_{\tilde{m}}$, weshalb $T'_m \cap T'_{\tilde{m}} = \emptyset$ gilt. Da die T'_m , $m \in \mathbb{N}$, außerdem Teilmengen von $(L + B) \setminus L$ sind, folgt

$$\sum_{m=0}^{\infty} h_B(\nu_m) j_m = \sum_{m=0}^{\infty} V_2(T'_m) \leq V_2((L + B) \setminus L). \quad \square$$

Als letzte Vorbereitung für den Beweis von Satz 2.1 stellt die folgende Bemerkung einen Zusammenhang zwischen der δ -Zahl, die in der Voraussetzung von Satz 2.1 vorkommt, und der w -Funktion, die in den vorangegangenen Lemmata vorkommt, her.

Bem. 2.11. Für jede Zahl $r > 0$ gibt es $z \in \mathbb{R}^d$ mit $d_B(0, z) = r$ und $y \in B^d$ mit $y \in \Pi_B(0y, z)$ so, dass $d_B(y, z) = w(r)$. Hieraus folgt

$$\begin{aligned}
r - w(r) &= d_B(0, z) - d_B(y, z) \\
&\leq d_B(0, y) \\
&= \inf\{\rho > 0 \mid y \in \rho B\} \\
&\leq \inf\{\rho > 0 \mid y \in \frac{\rho}{\delta_B} B^d\} \\
&\leq \delta_B.
\end{aligned}$$

Beweis von Satz 2.1: Setze $X^x := X \cap (x + \hat{Y})$ und $Z^x := \text{conv } X^x$ für $x \in Y^\perp$. Nun folgt aus Lemma 2.10, da offensichtlich kein Z^x eine Kante, die länger als $\text{diam } X$ ist, haben kann,

$$\begin{aligned}
&\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbb{E} V_n(X_Y + rY) - \mathbb{E} V_n(X + rY) \\
&= \lim_{r \rightarrow \infty} \mathbb{E} V_n((X_Y + rY) \setminus (X + rY)) \\
&= \lim_{r \rightarrow \infty} \mathbb{E} \int_{Y^\perp} V_2((Z^x + rY) \setminus (X^x + rY)) \, dx \\
&\leq \lim_{r \rightarrow \infty} \mathbb{E} \int_{Y^\perp} V_2((Z^x + Y) \setminus Z^x) \cdot \text{diam } X \cdot \left(\frac{r}{\text{diam } X} - w_Y\left(\frac{r}{\text{diam } X}\right) \right) \\
&\quad + V_2(Z^x \setminus (X^x + rY)) \, dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{r \rightarrow \infty} \mathbb{E} V_n((X_Y + Y) \setminus X_Y) \cdot \text{diam } X \cdot \left(\frac{r}{\text{diam } X} - w_Y\left(\frac{r}{\text{diam } X}\right) \right) \\
 &\quad + V_n(X_Y \setminus (X + rY)) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Wir konnten beim letzten Gleichheitszeichen den Satz über die majorisierte Konvergenz anwenden, da $\frac{r}{\text{diam } X} - w_Y\left(\frac{r}{\text{diam } X}\right) < \delta_Y$ laut Bemerkung 2.11 gilt und wir vorausgesetzt haben, dass $\mathbb{E} V_d((X_Y + Y) \setminus X_Y) \cdot \text{diam } X \cdot \Delta < \infty$ und $\mathbb{E} V_d(X_Y + rY) < \infty$. \square

An Hand von 2 Beispielen wollen wir nun zeigen, dass man die Integrabilitätsbedingung $\mathbb{E} V_n((X_Y + rY) \setminus X_Y) \cdot \text{diam } X \cdot \Delta < \infty$ in Satz 2.1 nicht streichen und auch nicht durch eine Integrabilitätsbedingung nur an X bzw. nur an Y ersetzen kann.

Beispiel 2.12. Sei T eine reellwertige Zufallsvariable mit Dichte $\mathbf{1}_{(1,\infty)}(t)(\alpha - 1)\frac{1}{t^\alpha}$, $2 < \alpha < 3$. Wir betrachten nun die zufällige abgeschlossene Menge

$$X := \left\{ \begin{pmatrix} -T \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Es gilt

$$\mathbb{E} V_2(\text{conv } X + rB^2) = \mathbb{E}[2 \cdot r \cdot T + r^2 \cdot V_2(B^2)] < \infty$$

für $r > 0$. Weiter gilt

$$\begin{aligned}
 &\mathbb{E}[V_2(\text{conv } X + rB^2) - V_2(X + rB^2)] \\
 &\geq \mathbb{E}[(V_2(\text{conv } X + rB^2) - V_2(X + rB^2))\mathbf{1}_{\{T > r\}}] \\
 &\geq \mathbb{E}[(2T - 2r)2r\mathbf{1}_{\{T > r\}}] \\
 &= 4 \int_r^\infty (\alpha - 1) \frac{(t - r)r}{t^\alpha} dt \\
 &= 4(\alpha - 1)r \int_r^\infty t^{1-\alpha} dt - 4(\alpha - 1)r^2 \int_r^\infty t^{-\alpha} dt \\
 &= 4r \frac{-(\alpha-1)}{2-\alpha} r^{2-\alpha} - 4r^2 \frac{-(\alpha-1)}{1-\alpha} r^{1-\alpha} \\
 &= r^{3-\alpha} \left(\frac{4(\alpha-1)}{\alpha-2} - 4 \right) \\
 &= r^{3-\alpha} \left(\frac{4}{\alpha-2} \right) \\
 &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} \infty.
 \end{aligned}$$

Beispiel 2.13. Wir betrachten einen zufälligen Scheibenkörper $Y \subseteq \mathbb{R}^2$, der fast sicher $V_2(Y) = 1$ erfüllt, zu beiden Koordinatenachsen symmetrisch ist und für den

$$h_Y(e_1) := \max\{\langle y, e_1 \rangle \mid y \in Y\}$$

eine Dichte der Form $\mathbf{1}_{(0,1)}(t)(1+\alpha)t^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, hat, wobei $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Sei $X = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ fast sicher. Auf Grund der Symmetrie enthält Y die vier Punkte $\begin{pmatrix} \pm h_Y(e_1) \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ \pm h_Y(e_2) \end{pmatrix}$ und daher die von diesen vier Punkte aufgespannte Raute. Somit gilt

$$1 = V_2(Y) \geq 2 \cdot h_Y(e_1) \cdot h_Y(e_2).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} V_2(\text{conv } X + rY) &\leq \mathbb{E}[(4 + 2rh_Y(e_1)) \cdot 2rh_Y(e_2)] \\
&\leq \mathbb{E}[(4 + 2r)r \cdot 2h_Y(e_2)] \\
&\leq (4 + 2r)r \cdot \mathbb{E} \frac{1}{h_Y(e_1)} \\
&= (4 + 2r)r \int_0^1 (1 + \alpha)t^\alpha \frac{1}{t} dt \\
&= (4 + 2r)r \cdot \frac{\alpha + 1}{\alpha} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Nun setzen wir $\tilde{X} := X \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[V_2(\text{conv } X + rY) - V_2(X + rY)] \\
&\geq \mathbb{E}[V_2(\tilde{X} + rY) - V_2(X + rY) | r \cdot h_Y(e_1) < 1] \cdot \mathbb{P}(r \cdot h_Y(e_1) < 1) \\
&= \mathbb{E}[3V_2(rY) - 2V_2(rY) | r \cdot h_Y(e_1) < 1] \cdot \mathbb{P}(h_Y(e_1) < \frac{1}{r}) \\
&= r^2 \cdot \mathbb{E}[V_2(Y) | r \cdot h_Y(e_1) < 1] \cdot \left(\frac{1}{r}\right)^{1+\alpha} \\
&= r^{1-\alpha} \\
&\xrightarrow{r \rightarrow \infty} \infty.
\end{aligned}$$

Wir wollen nun zeigen, dass sich die Glattheitsvoraussetzung in Satz 2.1 nicht abschwächen lässt.

Korollar 2.14. *Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ konvex und kompakt mit $0 \in \text{int } B$. Dann sind äquivalent:*

(i) *Für jeden Körper $K \subseteq \mathbb{R}^2$ gilt*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V_2(\text{conv } K + rB) - V_2(K + rB) = 0.$$

(ii) *Der Eichkörper B ist glatt.*

Beweis: Die Implikation „(ii) \Rightarrow (i)“ ist ein Spezialfall von Satz 2.1.

Zum Nachweis der umgekehrten Implikation nehmen wir an, B sei nicht glatt. Sei q ein Randpunkt von B mit mehr als einer Stützhyperebene und ν_1 und ν_3 zwei verschiedene äußere Einheitsnormalenvektoren in q . Sei ν_2 ein Einheitsvektor aus dem relativen Inneren des von ν_1 und ν_3 aufgespannten konvexen Kegels. Wähle nun zwei Punkte $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$ so, dass $x_1 - x_2$ Länge 1 hat und senkrecht auf ν_2 steht, und setze $K := \{x_1, x_2\}$. Das Skalarprodukt $\langle x_2 - x_1, \nu_1 - \nu_3 \rangle$ sei o.B.d.A. positiv.

Wir wollen zeigen, dass $V_2(\text{conv } K + rB) - V_2(K + rB)$ nicht gegen 0 strebt. Hierzu bezeichne D_r das Dreieck, das durch die Gerade durch $x_1 + rq$ und $x_2 + rq$, die auf ν_1 senkrecht stehende Gerade durch $x_1 + rq$ und die auf ν_3 senkrecht stehende Gerade durch $x_2 + rq$ begrenzt wird. Offensichtlich ist $V_2(D_r)$ von r unabhängig und positiv. Daher reicht es zu zeigen, dass

$$\text{int } D_r \subseteq (\text{conv } K + rB) \setminus (K + rB) \tag{2.10}$$

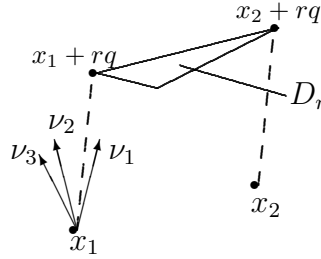


Abbildung 2.4

für alle hinreichend großen r gilt. Es gilt stets $x_1 + rq \in \text{conv } K + rB$ und $x_2 + rq \in \text{conv } K + rB$ und für alle hinreichend großen r liegt auch der dritte Eckpunkt von D_r in $\text{conv } K + rB$, womit $D_r \subseteq \text{conv } K + rB$ folgt. Angenommen, es gäbe $z \in (K + rB) \cap \text{int } D_r$. Dann gibt es $b \in B$ so, dass $z = x_1 + rb$ oder $z = x_2 + rb$, o.B.d.A. ersteres. Da ν_1 äußerer Normalenvektor von B in q ist, folgt

$$\langle z, \nu_1 \rangle = \langle x_1 + rb, \nu_1 \rangle \leq \langle x_1 + rq, \nu_1 \rangle.$$

Insbesondere ist $z \notin \text{int } D_r$, im Widerspruch zur Wahl von z . Damit ist aber (2.10) gezeigt, und somit ist (i) nicht erfüllt. \square

2.2 Konvergenzgeschwindigkeit und höhere Dimensionen

Wir wollen nun die Geschwindigkeit der im letzten Abschnitt bewiesenen Konvergenz ermitteln. Es wird sich herausstellen, dass diese für Eichkörper, die einen Ball als Summanden haben, die Ordnung $\frac{1}{r}$ besitzt. Aber die Aussage über die Konvergenzgeschwindigkeit besitzt eine interessante Verallgemeinerung für den Fall, dass der Eichkörper mehr als 2 Dimensionen hat, weshalb wir sie auch allgemeiner formulieren wollen.

Wir erinnern uns, dass wir für einen konvexen Körper B die affine Hülle von B mit \hat{B} bezeichnen und, wenn darüberhinaus A eine kompakte Menge ist, dass dann $A_B := \bigcup_{x \in B^\perp} \text{conv}(A \cap (\hat{B} + x))$ die B -Konvexifikation von A ist.

Satz 2.15. *Sei $n \geq d > 1$ und seien G und S zwei $[1, \infty)$ -wertige Zufallsvariablen und R eine \mathbb{R}^+ -wertige Zufallsvariable. Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ eine zufällige kompakte Menge, deren Durchmesser fast sicher kleiner oder gleich G ist, und $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ ein zufälliger d -dimensionaler konvexer Körper, der f.s. eine d -dimensionale Kugel vom Radius R als Summanden enthält und $Y \subseteq SB^n$ erfüllt. Weiter sei $\mathbb{E} V_n(X_Y + rY) < \infty$ und*

$$c := d2^{d+2} \kappa_d \kappa_{n-d} \mathbb{E} \left[\frac{S^d \cdot G^{n+1}}{R^3} \right] < \infty.$$

Dann gilt für alle $r > 1$, dass

$$\mathbb{E}[V_n(X_Y + rY) - V_n(X + rY)] < c \cdot r^{d-3}.$$

Die grobe Struktur des Beweises von Satz 2.15 ist zwar die selbe wie die des Beweises von Satz 2.1, aber im Detail ergeben sich doch so große Unterschiede, dass wir im Wesentlichen nur Lemma 2.6 übernehmen können.

Wir leiten nun, unter stärkeren Voraussetzungen, die Geschwindigkeit der in Lemma 2.5 bewiesenen Konvergenz her. Hierzu erinnern wir uns an die Definition (2.1) der Funktion w .

Lemma 2.16. *Sei $B \subseteq \mathbb{R}^d$ ein konvexer Körper mit $0 \in \text{int } B$, der einen Summanden RB^d , $R > 0$, hat und in einer Kugel SB^d , $S > 0$, enthalten ist, mit δ -Zahl $D > 0$. Dann gilt mit $C := \frac{4SD^2}{R} > 0$, dass*

$$r - w_B(r) \leq \frac{C}{r}, \quad r \in \mathbb{R}_0^+.$$

Beweis: Falls $r \leq \frac{4SD}{R}$ folgt aus Bemerkung 2.11, dass

$$r - w_B(r) \leq \delta_B \leq D \cdot \frac{4SD}{rR}.$$

Sei von nun an also $r > \frac{4SD}{R}$. Dann gibt es Punkte $z \in \mathbb{R}^d$ und $y \in B^d$ mit $y \in \Pi_B(0y, z)$, $d_B(0, z) = r$ und $w_B(r) = d_B(y, z) = d_B(0y, z)$. Weiter bezeichne $\nu := (z - y)/d_B(y, z)$.

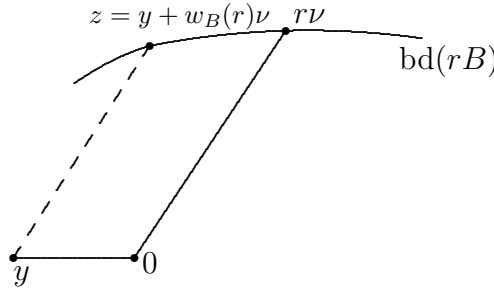


Abbildung 2.5

Wegen Lemma 1.33 gilt $\nu \in \text{bd } B$. Es bezeichne n den äußeren (Euklidischen) Einheitsnormalenvektor von B in ν , der, weil B einen Summanden der Form RB^d hat, eindeutig bestimmt ist, und τ einen beliebigen Einheitsvektor orthogonal zu n . Die Strategie für den weiteren Beweis ist nun folgende: Da $d_B(0y, r\nu) = r$ und $d_B(0y, z) = w_B(r)$, werden wir

$$r - w_B(r) = \frac{\langle r\nu - z, n \rangle}{\langle \nu, n \rangle}$$

zeigen. Weiter ist, falls $\langle r\nu - z, n \rangle$ klein ist, $\langle r\nu - z, \tau \rangle$ nicht viel größer als $|\langle y, \tau \rangle|$, und andererseits folgt daraus, dass B einen Ball als Summanden hat, dass wenn $\langle r\nu - z, \tau \rangle$ klein ist, dass dann $\langle r\nu - z, n \rangle$ sehr klein ist. Wenn wir die Aussagen des letzten Satzes exakt quantifizieren, werden wir sehen, dass daraus in der Tat folgt, dass $\langle r\nu - z, n \rangle$ klein ist.

Sei also $\rho \in [w_B(r), r]$. Im Fall $d \geq 3$ lässt sich über den Winkel zwischen τ und $0y$ nichts aussagen, aber aus Lemma 1.33 folgt $\langle y, n \rangle = 0$. Setze $\sigma := w_B(r)$. Aus $z = y + \sigma\nu$ folgt einerseits, dass

$$\langle \rho\nu - z, n \rangle = \langle \rho\nu - \sigma\nu - y, n \rangle = (\rho - \sigma)\langle \nu, n \rangle,$$

also

$$\rho - \sigma = \frac{\langle \rho\nu - z, n \rangle}{\langle \nu, n \rangle}, \tag{2.11}$$

und andererseits, dass

$$|\langle \rho\nu - z, \tau \rangle| = |(\rho - \sigma)\langle \nu, \tau \rangle - \langle y, \tau \rangle| \leq (\rho - \sigma)|\langle \nu, \tau \rangle| + 1.$$

Aus den letzten beiden Beziehungen folgt

$$|\langle \rho\nu - z, \tau \rangle| \leq \frac{\langle \rho\nu - z, n \rangle}{\langle \nu, n \rangle} |\langle \nu, \tau \rangle| + 1.$$

Wegen $\nu \in B \subseteq SB^d$ gilt $|\langle \nu, \tau \rangle| \leq S$ und wegen $\frac{1}{D}n \in \frac{1}{D}B^d \subseteq B$, und weil n äußerer Normalenvektor von B in ν ist, gilt $\langle \nu, n \rangle \geq \langle \frac{1}{D}n, n \rangle = \frac{1}{D}$. Somit folgt

$$|\langle \rho\nu - z, \tau \rangle| \leq SD\langle \rho\nu - z, n \rangle + 1. \tag{2.12}$$

Wir wollen zeigen, dass

$$\langle \rho\nu - z, n \rangle < \frac{4}{Rr} \tag{2.13}$$

für alle $\rho \in [w_B(r), r]$ gilt. Da die linke Seite dieser Ungleichung für $\rho = w_B(r)$ den Wert 0 hat und stetig von ρ abhängt, genügt es nach dem Zwischenwertsatz zu zeigen, dass für kein $\rho \in [w_B(r), r]$ Gleichheit in (2.13) gilt. Angenommen, es gäbe ein $\rho \in [w_B(r), r]$, für das Gleichheit gilt. Wegen (2.12) folgt dann

$$|\langle \rho\nu - z, \tau \rangle| \leq SD\langle \rho\nu - z, n \rangle + 1 = \frac{4SD}{Rr} + 1.$$

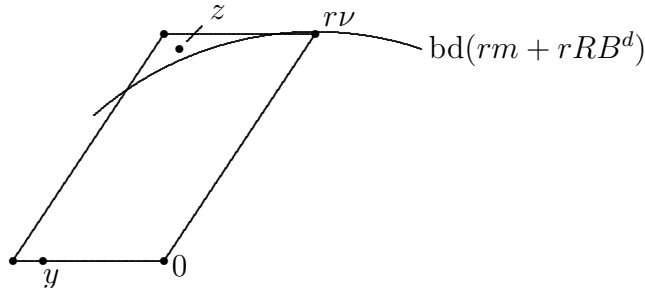


Abbildung 2.6

Wir setzen $m := \nu - Rn$ und bezeichnen mit τ_0 den Einheitsvektor in Richtung der orthogonalen Projektion von $z - \rho m$ auf den zu n senkrechten Unterraum. Weil wir angenommen haben, dass in (2.13) Gleichheit gilt, folgt

$$\begin{aligned} \|z - \rho m\|^2 &= \langle z - \rho m, n \rangle^2 + \langle z - \rho m, \tau_0 \rangle^2 \\ &= \langle z - \rho \nu + \rho Rn, n \rangle^2 + \langle z - \rho m, \tau_0 \rangle^2 \\ &= (\rho R - \langle \rho \nu - z, n \rangle)^2 + \langle \rho \nu - z, \tau_0 \rangle^2 \\ &\leq \left(\rho R - \frac{4}{Rr} \right)^2 + \left(\frac{4SD}{Rr} + 1 \right)^2. \end{aligned}$$

Wegen

$$r > \frac{4SD}{R} \geq \max\{4D, \frac{4}{R}\}$$

und $r - w_B(r) < D$ (Bemerkung 2.11) gilt

$$\frac{\rho}{r} \geq \frac{r - D}{r} = 1 - \frac{D}{r} \geq \frac{3}{4}$$

und somit

$$(\rho R)^2 - \left(\rho R - \frac{4}{Rr} \right)^2 = 8\frac{\rho}{r} - \left(\frac{4}{Rr} \right)^2 \geq 6 - 1 > 2^2 > \left(\frac{4SD}{Rr} + 1 \right)^2.$$

Also

$$\|z - \rho m\|^2 \leq \left(\rho R - \frac{4}{Rr} \right)^2 + \left(\frac{4SD}{Rr} + 1 \right)^2 < (\rho R)^2.$$

Dies bedeutet aber $z \in \text{int}(\rho m + \rho RB^d)$. Wegen $m + RB^d \subseteq B$ (Lemma 1.19) folgt hieraus aber $z \in \text{int} \rho B$, also $z \in \rho' B$ für ein $\rho' < \rho$, und somit $d_B(0, z) < \rho$, was $\rho \in [w_B(r), r]$ widerspricht. Somit ist Ungleichung (2.13) bewiesen.

Wir nützen nun aus, dass die Beziehungen (2.11) und (2.13) auch im Spezialfall $\rho = r$ gelten, benutzen wieder die schon zum Beweis von (2.12) verwendete Abschätzung $\langle \nu, n \rangle \geq \frac{1}{D}$ und erhalten so

$$r - w_B(r) = \frac{\langle r\nu - z, n \rangle}{\langle \nu, n \rangle} \leq \frac{\frac{4}{rR}}{\frac{1}{D}} = \frac{4D}{rR} < \frac{4SD^2}{rR}. \quad \square$$

Das folgende Gegenstück zu Lemma 2.7 lässt sich nicht elementar formulieren, sondern wir benötigen die in Abschnitt 1.5 eingeführten Maße, vor allem die relativen Krümmungsmaße.

Lemma 2.17. *Sei $B \subseteq \mathbb{R}^d$ konvex und kompakt mit $0 \in \text{int} B$ so, dass die Stützfunktion h_B auf $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ zweimal stetig differenzierbar ist, und sei $K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt. Dann ist das relative Krümmungsmaß $\Phi_0^B(L, \cdot)$ von $L := \text{conv} K$ auf K konzentriert.*

Beweis: Wegen Satz 1.25 folgt aus der Differenzierbarkeit von h_B auf $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, dass B strikt konvex ist. Also ist $\Phi_0^B(L, \cdot)$ definiert.

Alle Punkte aus $\text{bd} L \setminus K$ sind wegen Lemma 1.26 im relativen Inneren von Seiten positiver Dimension von L enthalten. Es bezeichne nun ω die Menge aller Euklidischen

äußeren Einheitsvektoren von L in Punkten von $\text{bd } L \setminus K$. Diese sind alle singular. Nach [46, Theorem 2.2.9] ist also $\mathcal{H}^{d-1}(\omega) = 0$. Weiter bezeichne γ die Menge aller relativen äußeren Einheitsvektoren von L in Punkten von $\text{bd } L \setminus K$. Aus Lemma 2.1 in [26] folgt, dass $\gamma = \{\nabla h_B(u) | u \in \omega\}$ (Dabei haben wir \tilde{B} durch B ersetzt, da wir einen anderen Abstandsbegriff verwenden). Nun haben wir h_B als zweimal stetig differenzierbar vorausgesetzt, weshalb ∇h_B auf S^{d-1} Lipschitz-stetig, etwa mit Lipschitz-Konstante L , ist. Wegen Lemma 1.13 folgt

$$\mathcal{H}^{d-1}(\gamma) \leq L^{d-1} \cdot \mathcal{H}^{d-1}(\omega) = 0.$$

Es bezeichne $M := \max\{h_B(u) | u \in S^{d-1}\}$. Dann folgt mit Hilfe der Tatsache, dass das relative Stützmaß $C_0^B(L, \cdot)$ auf dem relativen Normalenbündel $\mathcal{N}_B(L)$ konzentriert ist, und Korollar 1.46, dass

$$\begin{aligned} \Phi_0^B(L, \text{bd } L \setminus K) &= C_0^B(L, (\text{bd } L \setminus K) \times \mathbb{R}^d) \\ &= C_0^B(L, (\text{bd } L \setminus K) \times \gamma) \\ &\leq \Psi_0^B(L, \gamma) \\ &\leq \frac{M}{d\kappa_d} \cdot \mathcal{H}^{d-1}(\gamma) \\ &= 0. \end{aligned} \quad \square$$

Wir kommen nun zu einem Lemma, das bereits die wesentlichen Aussagen von Satz 2.15 enthält. Der Beweis von Satz 2.15 wird dann nur noch darin bestehen, zu argumentieren, wieso wir o.B.d.A. annehmen können, dass die Voraussetzungen von Lemma 2.18 erfüllt sind.

Lemma 2.18. *Sei $K \subseteq \mathbb{R}^d$, $d > 1$, eine kompakte Menge, deren Durchmesser höchstens G , $G \geq 1$, ist, und $B \subseteq \mathbb{R}^d$ ein konvexer Körper, dessen Stützfunktion auf $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ zweimal stetig differenzierbar ist, der in der Kugel SB^d , $S \geq 1$, enthalten ist und der einen Summanden der Form RB^d , $R > 0$, enthält. Dann gilt für die Konstante*

$$C' := d2^{d+2}\kappa_d \frac{S^d \cdot G^{d+1}}{R^3}$$

und alle $r > 1$, dass

$$V_d(\text{conv } K + rB) - V_d(K + rB) < C' \cdot r^{d-3}.$$

Beweis: Da das Volumen translations-invariant ist, können wir o.B.d.A. $RB^d \subseteq B$ annehmen. Weiter ist B strikt konvex, da wir angenommen haben, dass h_B auf $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ differenzierbar ist.

Es bezeichne $L := \text{conv } K$. Dann ergibt Lemma 2.6

$$\begin{aligned} V_d(L+rB) - V_d(K+rB) &= V_d((L+rB) \setminus (K+rB)) \\ &\leq V_d(\{x \in \mathbb{R}^d | p_B(L, x) \in L \setminus K, d_B(L, x) \in (Gw(\frac{r}{G}), r)\} \cup (L \setminus (K+rB))) \\ &= \sum_{i=1}^d \kappa_i \Phi_{d-i}^B(L, L \setminus K) (r^i - (Gw(\frac{r}{G}))^i) + V_d(L \setminus (K+rB)) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Wir wollen nun zunächst den ersten Summanden dieses Ausdrucks abschätzen. Da die δ -Zahl von B kleiner als $\frac{1}{R}$ ist, gilt laut Lemma 2.16 für die Konstante $C := \frac{4S}{R^3}$, dass

$$s - w(s) \leq \frac{C}{s}, \quad s \in \mathbb{R}^+,$$

woraus mit der offensichtlichen Aussage $w(s) \leq s$ für alle $s \in \mathbb{R}^+$ folgt

$$\begin{aligned} r^i - (Gw(\frac{r}{G}))^i &= (r - Gw(\frac{r}{G})) \sum_{j=0}^{i-1} r^j (Gw(\frac{r}{G}))^{i-1-j} \\ &= G \cdot (\frac{r}{G} - w(\frac{r}{G})) \sum_{j=0}^{i-1} r^j (Gw(\frac{r}{G}))^{i-1-j} \\ &\leq G \frac{CG}{r} \sum_{j=0}^{i-1} r^j (G \frac{r}{G})^{i-1-j} \\ &= \frac{CG^2}{r} \sum_{j=0}^{i-1} r^{i-1} \\ &= CG^2 i r^{i-2}. \end{aligned}$$

Weil laut (1.22) die gemischten Volumina bis auf Normierung die totalen Massen der relativen Krümmungsmaße sind, gilt

$$\kappa_i \Phi_{d-i}^B(L, L \setminus K) \leq \binom{d}{i} V(L[d-i], B[i]).$$

Weiter ist L in der Umkugel um K enthalten, deren Radius kleiner als G ist. Aus der Monotonie der gemischten Volumina (1.21), ihrer Homogenität (1.20) und dem Zusammenhang zum gewöhnlichen Volumen (1.19) folgt

$$V(L[d-i], B[i]) \leq V(GB^d[d-i], SB^d[i]) = G^{d-i} S^i \kappa_d.$$

Also

$$\kappa_i \Phi_{d-i}^B(L, L \setminus K) \leq \binom{d}{i} G^{d-i} S^i \kappa_d. \quad (2.15)$$

Nun wenden wir uns dem zweiten Summanden der letzten Zeile von (2.14) zu. Da $L \subseteq K + rB$, falls $rR \geq G$, folgt

$$V_d(L \setminus (K + rB)) \leq V_d(L) \mathbf{1}_{\{rR < G\}} \leq \kappa_d G^d \frac{G}{rR}. \quad (2.16)$$

Nun ergibt sich aus (2.14) mit Hilfe von (2.15), (2.16) und $\Phi_0^B(L, L \setminus K) = 0$ (Lemma

2.17), dass

$$\begin{aligned}
V_d(L + rB^d) - V_d(K + rB^d) &\leq \sum_{i=1}^d \kappa_i \Phi_{d-i}^B(L, L \setminus K) (r^i - (Gw(\frac{r}{G}))^i) + V_d(L \setminus (K + rB)) \\
&\leq \sum_{i=1}^{d-1} \binom{d}{i} G^{d-i} S^i \kappa_d \cdot CG^2 i r^{i-2} + \kappa_d G^d \frac{G}{rR} \\
&\leq \sum_{i=1}^{d-1} (d-1) \binom{d}{i} \kappa_d S^{d-1} CG^{d+1} r^{d-3} + \kappa_d \frac{G^{d+1}}{R} r^{d-3} \\
&< \left((d-1) 2^d \kappa_d S^{d-1} CG^{d+1} + \kappa_d \frac{G^{d+1}}{R} \right) r^{d-3} \\
&< \left(d 2^{d+2} \kappa_d \frac{S^d \cdot G^{d+1}}{R^3} \right) r^{d-3}. \quad \square
\end{aligned}$$

Beweis von Satz 2.15: Sei $r > 1$. Wir wollen die Beziehung

$$\mathbb{E}[V_n(X_Y + rY) - V_n(X + rY)] < c \cdot r^{d-3}$$

nachweisen. Es bezeichne wieder $X^x := X \cap (\hat{Y} + x)$ und $Z^x := \text{conv } X^x$ für $x \in Y^\perp$.

Laut Lemma 1.22 existiert eine Folge von zufälligen abgeschlossenen Mengen $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in \hat{Y} so, dass fast sicher für alle $i \in \mathbb{N}$ der Körper Y_i einen Summanden der Form RB^d enthält, h_{Y_i} auf $\hat{Y} \setminus \{0\}$ zweimal stetig differenzierbar ist, und dass $\lim_{i \rightarrow \infty} Y_i = Y$ fast sicher. Wegen Lemma 1.44 gilt fast sicher für alle $x \in Y^\perp$, dass

$$V_d(Z^x + rY) - V_d(X^x + rY) = \lim_{i \rightarrow \infty} V_d(Z^x + rY_i) - V_d(X^x + rY_i).$$

Setzt man

$$C' := d 2^{d+2} \kappa_d \frac{S^d \cdot G^{d+1}}{R^3},$$

so folgt hieraus und aus Lemma 2.18 fast sicher für alle $x \in Y^\perp$

$$V_d(Z^x + rY) - V_d(X^x + rY) = \lim_{i \rightarrow \infty} V_d(Z^x + rY_i) - V_d(X^x + rY_i) \leq C' \cdot r^{d-3},$$

weil es eine Folge $(S_i)_{i \in \mathbb{N}}$ so gibt, dass $Y_i \subseteq S_i B^d$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und $\limsup_{i \rightarrow \infty} S_i \leq S$. Also

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[V_n(X_Y + rY) - V_n(X + rY)] &= \mathbb{E} \left[\int_{X|Y^\perp} V_d(Z^x + rY) - V_d(X^x + rY) dx \right] \\
&\leq \mathbb{E} \left[\int_{X|Y^\perp} C' \cdot r^{d-3} dx \right] \\
&= \mathbb{E} [V_{n-d}(X|Y^\perp) C'] \cdot r^{d-3} \\
&\leq \mathbb{E} [\kappa_{n-d} G^{n-d} C'] \cdot r^{d-3} \\
&= c \cdot r^{d-3}. \quad \square
\end{aligned}$$

Wir werden folgende Umformulierung von Satz 2.15 benötigen:

Korollar 2.19. *Unter den Voraussetzungen von Satz 2.15 gibt es Konstanten c_0 und c_1 , wobei $c_1 = 0$, falls $d \leq 3$, so, dass*

$$\mathbb{E} V_n(X_Y + rY) - \mathbb{E} V_n(X + rY) < c_0 \cdot r^{d-3} + c_1, \quad r \geq 0.$$

Beweis: Da es eine Konstante c_1 mit

$$\mathbb{E} V_n(X_Y + rY) - \mathbb{E} V_n(X + rY) < c_1, \quad r \in [0, 1],$$

gibt, folgt aus Satz 2.15 die Behauptung im Fall $d > 3$.

Im Fall $d \leq 3$ gilt $r^{d-3} \geq 1$ für $r \in [0, 1]$ und daher

$$\mathbb{E} V_n(X_Y + rY) - \mathbb{E} V_n(X + rY) < c_1 \leq c_1 \cdot r^{d-3}, \quad r \in [0, 1].$$

Wegen Satz 2.15 folgt

$$\mathbb{E} V_n(X_Y + rY) - \mathbb{E} V_n(X + rY) < \max\{c_1, c\} \cdot r^{d-3}, \quad r \geq 0. \quad \square$$

Wir wollen nun als weiteres Korollar eine rein analytische Aussage über Funktionen, die als Parallelvolumen eines festen Körpers auftreten, herleiten.

Korollar 2.20. *Unter den Voraussetzungen von Satz 2.15 sei $d \geq 3$. Dann gibt es zwei Polynome d -ten Grades P_1 und P_2 , deren höchste 3 Koeffizienten gleich sind, mit*

$$P_1(r) \leq \mathbb{E} V_n(X + rY) \leq P_2(r), \quad r \geq 0.$$

Beweis: Das Polynom $P_2(r) := \mathbb{E} V_n(X_Y + rY)$ hat Grad d und erfüllt $\mathbb{E} V_n(X + rY) \leq P_2(r)$ für alle $r \geq 0$. Wenn c_0 und c_1 die Konstanten aus Korollar 2.19 sind, hat $P_1(r) := P_2(r) - c_0 r^{d-3} - c_1$ die selben drei höchsten Koeffizienten wie $P_2(r)$ und erfüllt $P_1(r) < \mathbb{E} V_n(X + rY)$ für alle $r \geq 0$. \square

Bem. 2.21. Korollar 2.20 kann benutzt werden, um die inneren Volumina V_0 , V_1 und V_2 für beliebige Körper zu definieren. Allerdings sind diese Fortsetzungen nicht besonders interessant: Die so definierten inneren Volumina eines Körpers sind gerade die seiner konvexen Hülle.

Wir zeigen nun, dass die Voraussetzungen von Satz 2.15 nicht wesentlich abgeschwächt werden können.

Korollar 2.22. *Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ ein konvexer Körper. Dann sind äquivalent:*

(i) *Für jeden Körper $K \subseteq \mathbb{R}^2$ gibt es eine Konstante c so, dass*

$$V_2(\text{conv } K + rB) - V_2(K + rB) < \frac{c}{r}$$

für $r \in \mathbb{R}_0^+$.

(ii) *B hat einen Summanden RB^2 , $R > 0$.*

Beweis: Die Implikation „(ii) \Rightarrow (i)“ folgt sofort aus Korollar 2.19.

Der Beweis der umgekehrten Implikation macht wesentlich vom Begriff der Alexandroff-zweimal-Differenzierbarkeit (Definition 1.15) Gebrauch. Sei also (i) erfüllt. Angenommen, B habe keine inneren Punkte. Dann ist B in einer Geraden, etwa mit Normalenvektor τ enthalten. Es sei S ein Segment der Länge 1 orthogonal zu τ . Setze $K := S \cup (S + \tau)$. Dann ist

$$V_2(\text{conv } K + rB) - V_2(K + rB) = r(1 + rl),$$

wobei $l \geq 0$ die Länge von B bezeichnet, im Widerspruch zu (i). Also hat B innere Punkte. Die Stützfunktion h_B ist konvex und daher laut Satz 1.16 fast überall Alexandroff-zweimal-differenzierbar. Insbesondere ist die zweite Ableitung $R(B, n)$ von h_B in n in Richtung orthogonal zu n für fast alle $n \in S^{d-1}$ definiert. Um (ii) zu zeigen, genügt es nun nach Satz 1.20 nachzuweisen, dass es eine Schranke $\tilde{c} > 0$ so gibt, dass $R(B, n) \geq \tilde{c}$ gilt, wenn $R(B, n)$ definiert ist.

Sei also $n \in S^1$ ein Punkt, in dem h_B Alexandroff-zweimal-differenzierbar ist, und $\tau \in S^1$ senkrecht zu n . Nun enthält B innere Punkte und daher gibt es $\epsilon > 0, \xi \in \mathbb{R}^2$ mit $B_\epsilon(\xi) \subseteq \text{int } B$. Es bezeichne $b_0 \in \text{bd } B$ einen Punkt mit $\langle b_0 - q, \tau \rangle \leq \frac{\epsilon}{2}$, der einen äußeren Einheitsnormalenvektor u_0 mit $\langle u_0, n \rangle > 0$ besitzt. Seien b_0^* und u_0^* in gleicher Weise mit $q - b_0^*$ statt $b_0 - q$ definiert.

Sei $u \in S^1$ ein Vektor mit $\langle n, u \rangle > 0$ und $0 < \langle n - u, \tau \rangle \leq \min\{\langle -u_0, \tau \rangle, \langle u_0^*, \tau \rangle\}$. Setze $u^* := 2\langle u, n \rangle n - u$. Es sei $\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Wahl von Subgradienten von h_B und $b := \theta(u), b^* := \theta(u^*)$ und $q := \theta(n)$. Dann sind b, b^* und q laut Satz 1.25 Punkte im Rand von B mit äußeren Normalenvektoren u, u^* bzw. n . Wir setzen $K := \{0, 4\tau\}$ und $r := \frac{2}{\langle b - b^*, \tau \rangle}$.

Dann liegt der Punkt $2\tau + r\xi$ sowohl in $\text{int}(rB)$ als auch in $\text{int}(4\tau + rB)$. Es gilt nämlich

$$\langle u_0^*, \tau \rangle \leq \langle u^*, \tau \rangle \leq \langle u, \tau \rangle \leq \langle u_0, \tau \rangle$$

und deshalb folgt aus Lemma 1.24, dass

$$\epsilon r \geq \frac{2\langle b_0 - b_0^*, \tau \rangle}{\langle b - b^*, \tau \rangle} \geq 2.$$

Somit ist $2\tau + r\xi \in rB_\epsilon(\xi) \subseteq \text{int}(rB)$ und $2\tau + r\xi \in 4\tau + rB_\epsilon(\xi) \subseteq \text{int}(4\tau + rB)$.

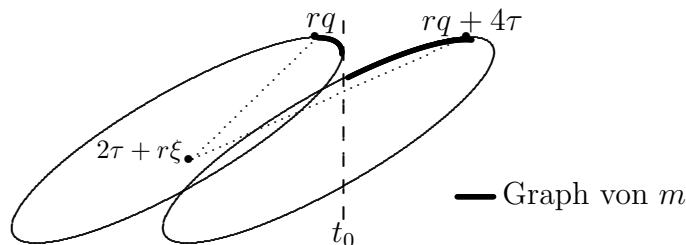


Abbildung 2.7

Nun schneidet jede Gerade $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle x, \tau \rangle = t\}$, $t \in [t_1, t_1 + 4]$, wobei $t_1 := r\langle q, \tau \rangle$, mindestens eine der Strecken von rq nach $2\tau + r\xi$ oder von $2\tau + r\xi$ nach $4\tau + rq$. Also sind die Mengen $\{x \in K + rB \mid \langle x, \tau \rangle = t\}$, $t \in [t_1, t_1 + 4]$, nicht leer und die Funktion

$$m : [t_1, t_1 + 4] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \max\{\langle x, n \rangle \mid x \in K + rB, \langle x, \tau \rangle = t\}$$

ist definiert. Nun gibt es eine Zahl $t_0 \in [t_1, t_1 + 4]$ mit

$$m(t) = \max\{\langle x, n \rangle \mid x \in rB, \langle x, \tau \rangle = t\}, \quad t < t_0$$

und

$$m(t) = \max\{\langle x, n \rangle \mid x \in 4\tau + rB, \langle x, \tau \rangle = t\}, \quad t > t_0.$$

Weiter gilt $\langle (4\tau + rb^*) - rb, \tau \rangle = 2$, also $t_0 - \langle rb, \tau \rangle \geq 1$ oder $\langle (4\tau + rb^*), \tau \rangle - t_0 \geq 1$, o.B.d.A. ersteres.

Wir setzen nun

$$A := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle x - rb, \tau \rangle < 1, \langle x, u \rangle > \langle rb, u \rangle, \langle x, n \rangle \leq \langle rb, n \rangle\}.$$

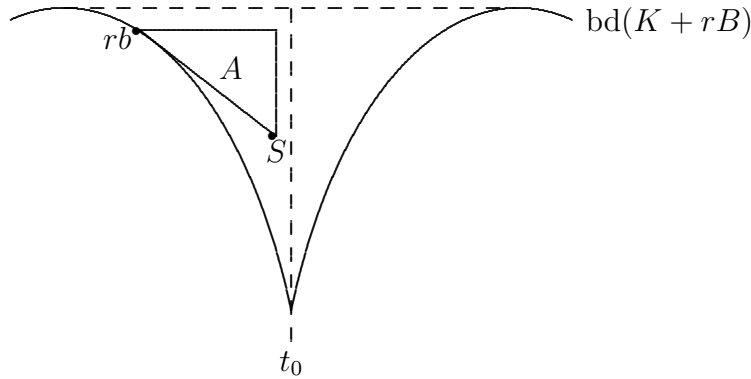


Abbildung 2.8

Man sieht leicht, dass $A \subseteq \text{conv } K + rB$, aber $A \cap (K + rB) = \emptyset$. Nun ist A ein rechtwinkliges Dreieck, dessen eine Kathetenlänge 1 ist. Zur Berechnung der anderen Kathetenlänge bezeichne S den Eckpunkt von A mit $\langle S, u \rangle = \langle rb, u \rangle$ und $\langle S, \tau \rangle = \langle rb, \tau \rangle + 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \langle rb - S, u \rangle \\ &= \langle rb - S, n \rangle \langle u, n \rangle + \langle rb - S, \tau \rangle \langle u, \tau \rangle \\ &= \langle rb - S, n \rangle \langle u, n \rangle - \langle u, \tau \rangle. \end{aligned}$$

Daher ist die gesuchte Kathetenlänge

$$\langle rb, n \rangle - \langle S, n \rangle = \frac{\langle u, \tau \rangle}{\langle u, n \rangle}.$$

Somit folgt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\langle u, \tau \rangle &\leq \frac{\langle u, \tau \rangle}{2\langle u, n \rangle} \\
&= V_2(A) \\
&\leq V_2(\text{conv } K + rB) - V_2(K + rB) \\
&< \frac{c}{r} \\
&= \frac{c}{2}\langle b - b^*, \tau \rangle \\
&= \frac{c}{2}\langle \theta(u) - \theta(u^*), \tau \rangle,
\end{aligned}$$

also

$$\langle \theta(u) - \theta(u^*), \tau \rangle \geq \frac{1}{c}\langle u, \tau \rangle = \frac{1}{2c}\langle u - u^*, \tau \rangle.$$

Da die Differenzierbarkeit von θ vorausgesetzt ist und als u jeder Vektor aus S^1 , der hinreichend nahe bei n liegt, gewählt werden konnte, erhalten wir

$$R(B, n) = \frac{\partial}{\partial \tau} \theta(u)|_{u=n} \geq \frac{1}{2c}$$

entweder aus der Definition der Differenzierbarkeit oder aus der Kettenregel. Nun folgt aus Satz 1.20, dass B einen Summanden der Form RB^2 , $R > 0$, hat. \square

Vermutung 2.23. *Es gibt konvexe Körper $B \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \geq 3$, die keinen Ball als Summanden enthalten, so, dass es für alle kompakten $K \subseteq \mathbb{R}^d$ eine Konstante $c \in \mathbb{R}^+$ mit*

$$V_d(\text{conv } K + rB) - V_d(K + rB) < c \cdot r^{d-3} \quad (2.17)$$

für $r > 1$ gibt.

Begründung: Wähle als B einen konvexen Körper, für den es Zahlen $S > 0$ und $1 \leq \alpha < 2$ (im Falle $d = 3$ allerdings $\alpha > 1$) und einen Körper \tilde{B} , der einen Ball als Summanden hat, so gibt, dass

$$\{(x_1, \dots, x_d) \in B | x_d \geq -S\} = \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d | -S \leq x_d \leq -\|(x_1, \dots, x_{d-1})\|^\alpha\}$$

und

$$\{(x_1, \dots, x_d) \in B | x_d \leq -S\} = \{(x_1, \dots, x_d) \in \tilde{B} | x_d \leq -S\}.$$

Nun gibt es keine Zahl $R > 0$ mit $0 \in RB^d + m \subseteq B$ für ein $m \in B$.

Geometrische Intuition sagt uns nun, dass es reicht, (2.17) für den Fall $K = \{e_1, -e_1\}$ nachzuprüfen, wobei e_1 den ersten Einheitsvektor bezeichnet. Dies ist aber eine einfache Rechnung.

2.3 Asymptotik der Ableitung

Die Aussage von Satz 2.15 deutet darauf hin, dass es unter den Voraussetzungen dieses Satzes eine Konstante \tilde{c} so gibt, dass

$$\frac{d}{dr} \mathbb{E}[V_n(X_Y + rY) - V_d(X_Y + rY)] < \tilde{c} \cdot r^{d-4}$$

für alle hinreichend großen r . Allerdings folgt es nicht aus diesem Satz.

Falls die Dimension d von Y gleich 2 ist, können wir diese Aussage aber unter etwas stärkeren Regularitätsvoraussetzungen beweisen.

Satz 2.24. *Seien G, R und S drei \mathbb{R}^+ -wertige Zufallsvariablen mit $R \leq 1$ und $S, G \geq 1$. Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ eine zufällige kompakte Menge, deren Durchmesser f.s. kleiner oder gleich G ist und $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ ein zufälliger 2-dimensionaler in \hat{Y} strikt konvexer Körper, der f.s. einen Kreis von Radius R als Summanden enthält und in einer Kugel SB^n enthalten ist. Falls*

$$c := 3200\kappa_{n-2}\mathbb{E}\left[\left(\frac{SG}{R^2}\right)^3 G^n S^2\right] < \infty,$$

dann ist $\mathbb{E}[V_n(X + rY) - V_n(X_Y + rY)]$ für fast alle $r > 1$ differenzierbar und für diese gilt

$$\left|\frac{d}{dr}\mathbb{E}[V_n(X + rY) - V_n(X_Y + rY)]\right| < c \cdot r^{-2}.$$

Im Euklidischen Fall ist die Ableitung des Parallelvolumens im Wesentlichen gleich der Oberfläche des Parallelkörpers. Auch in allgemeinen Minkowski-Räumen besteht ein Zusammenhang, der in Lemma 1.42 präzise gefasst wird. Daher werden wir nun in einer Reihe von Lemmata den Rand von $X + rY$ untersuchen und zeigen, dass er nicht zu sehr vom Rand von $\text{conv } X + rY$ abweichen kann. Wir beweisen wieder zunächst den deterministischen Spezialfall mit $n = 2$. Hierzu nehmen wir im Folgenden stets an, dass der Eichkörper B ein strikt konvexer Körper mit einem Summanden der Form RB^2 , $R > 0$, ist und $RB^2 \subseteq B \subseteq SB^2$, $S > 0$, gilt. Das erste Lemma ist mit den Aussagen von [8] verwandt, wo gefolgert wird, dass Parallelmengen in großem Abstand sternförmig sind. Die Funktionale d_B , p_B , u_B und n_B haben wir auf Seite 17 definiert.

Lemma 2.25. *Sei $K \subseteq \mathbb{R}^2$ eine kompakte Menge, $L := \text{conv } K$ und $r > \frac{\text{diam } K}{R}$ eine Zahl. Sei I eine konvexe, abgeschlossene Menge im Rand von L , deren relative Randpunkte zu K gehören. Es bezeichne ν den Punkt von B , der den selben äußeren Einheitsnormalenvektor n wie L in den Punkten im relativen Inneren von I hat, τ ein Einheitsvektor orthogonal zu n und j die Länge von I . Dann hat die Funktion*

$$f_r : I \rightarrow \mathbb{R}^+, y \mapsto \sup\{s > 0 \mid y + s\nu \in K + rB\}$$

folgende Eigenschaften:

$$(i) \{z \in \text{bd}(K + rB) \mid p_B(L, z) \in I\} = \{y + f_r(y)\nu \mid y \in I\}$$

(ii) Falls $\sqrt{(2Rr)^2 - j^2} \langle n, \nu \rangle - j|\langle \nu, \tau \rangle| > 0$, dann ist f_r Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante

$$\frac{j}{\sqrt{(2Rr)^2 - j^2} \langle n, \nu \rangle - j|\langle \nu, \tau \rangle|}.$$

(iii) Es gilt für alle $z \in \text{bd}(K + rB)$ mit $p_B(L, z) \in I$, dass

$$|h_B(n_B(K, z)) - h_B(n) + \langle \nu, n - n_B(K, z) \rangle| \leq \frac{((1 + \frac{\|\nu\|}{4R}) \text{diam } K)^2}{2R} r^{-2},$$

sofern $n_B(K, z)$ definiert ist.

Beweis: Die Wohldefiniertheit von f_r folgt aus

$$L \subseteq K + (\text{diam } K)B^2 \subseteq \text{int}(K + rB).$$

Zu (i). Sei $y \in I$. Nach Definition von f_r ist $z := y + f_r(y)\nu \in K + rB$ wegen der Abgeschlossenheit von $K + rB$, aber $z + \epsilon\nu \notin K + rB$ für alle $\epsilon > 0$. Also ist $z \in \text{bd}(K + rB)$. Nach Lemma 1.33(iii) gilt $p_B(L, z) = y \in I$.

Sei umgekehrt $z \in \text{bd}(K + rB)$ mit $y := p_B(L, z) \in I$. Da ν der eindeutig bestimmte Punkt aus B mit äußerem Normalenvektor n ist, gibt es laut Lemma 1.33 ein s_0 mit $z = y + s_0\nu$. Nun gilt einerseits $y + s_0\nu \in K + rB$. Andererseits gilt für alle $s' > s_0$, dass $y + s'\nu \notin K + rB$: Angenommen, es gäbe $s' > s_0$ mit $y + s'\nu \in K + rB$. Dann gäbe es ein $x \in K$ mit $y + s'\nu - x \in rB$.

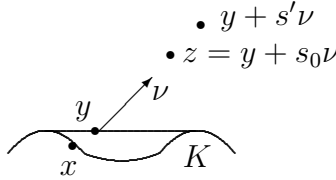


Abbildung 2.9

Weiter ist $\|y - x\| \leq \text{diam } K < rR$, also $y - x \in \text{int } rRB^2 \subseteq \text{int } rB$. Wegen der Konvexität von B ist nun

$$y + s_0\nu - x = \frac{s_0}{s'}(y + s'\nu - x) + \frac{s' - s_0}{s'}(y - x) \in \text{int } rB$$

Also $z \in \text{int}(K + rB)$ im Widerspruch zur Wahl von z .

Somit ist $s_0 = \sup\{s > 0 \mid y + s\nu \in K + rB\} = f_r(y)$ und $z = y + f_r(y)\nu$.

Zu (ii). Wir bemerken, dass τ parallel zu I ist, und führen ein Koordinatensystem ein, indem wir den Endpunkt von I , von dem aus gesehen der andere in Richtung τ liegt, als den Ursprung wählen und (x_1, x_2) mit $x_1\tau + x_2\nu$ identifizieren.

Seien nun $x, y \in \text{bd}(K + rB)$ mit $p_B(L, x) \in I$ und $p_B(L, y) \in I$ und o.B.d.A. $y_2 \geq x_2$. Sei $\epsilon > 0$. Wir nehmen zunächst $|x_1 - y_1| < \epsilon$ und $|\langle x - y, \tau \rangle| < \epsilon$ an (diese Bedingungen sind nicht äquivalent, da τ und ν nicht senkrecht aufeinander stehen). Weiter bezeichnen $p \in K$ und $b \in B$ Punkte mit $y = p + rb$, $m \in B$ den Punkt mit $b \in m + RB^2 \subseteq B$ und $\tilde{p} := p + rm$ (die hier nicht benötigte Eindeutigkeit von m folgt aus Lemma 1.19). Dann folgt aus

$$\tilde{p} + rRB^2 = p + r(m + RB^2) \subseteq K + rB,$$

dass $x \notin \text{int}(\tilde{p} + rRB^2)$ und somit $\|x - \tilde{p}\| \geq Rr = \|y - \tilde{p}\|$. Quadrieren und Ausmultiplizieren liefert

$$\begin{aligned} (x_1 - \tilde{p}_1)^2 + 2(x_1 - \tilde{p}_1)(x_2 - \tilde{p}_2)\langle \tau, \nu \rangle + (x_2 - \tilde{p}_2)^2\|\nu\|^2 \\ \geq (y_1 - \tilde{p}_1)^2 + 2(y_1 - \tilde{p}_1)(y_2 - \tilde{p}_2)\langle \tau, \nu \rangle + (y_2 - \tilde{p}_2)^2\|\nu\|^2, \end{aligned}$$

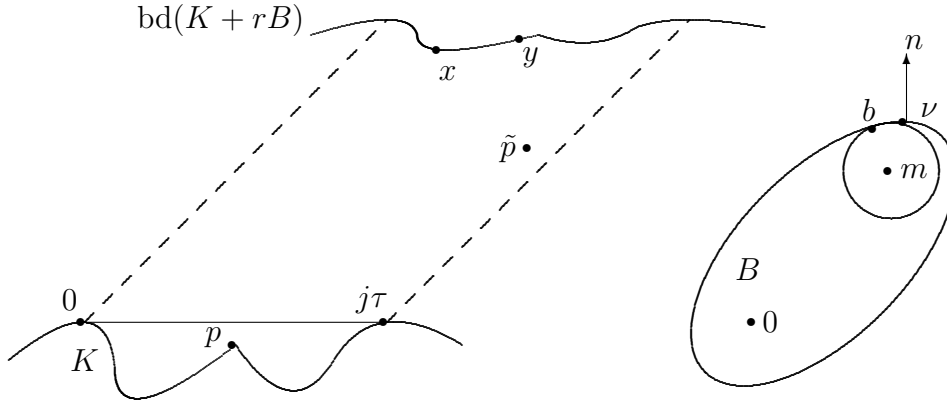


Abbildung 2.10

also

$$\begin{aligned} [(x_1 - \tilde{p}_1)^2 - (y_1 - \tilde{p}_1)^2] + 2[(x_1 - \tilde{p}_1)(x_2 - \tilde{p}_2) - (y_1 - \tilde{p}_1)(y_2 - \tilde{p}_2)] \langle \tau, \nu \rangle \\ \geq [(y_2 - \tilde{p}_2)^2 - (x_2 - \tilde{p}_2)^2] \|\nu\|^2. \end{aligned}$$

Nun gilt für den Koeffizienten von $\langle \tau, \nu \rangle$, dass

$$\begin{aligned} (x_1 - \tilde{p}_1)(x_2 - \tilde{p}_2) - (y_1 - \tilde{p}_1)(y_2 - \tilde{p}_2) \\ = (x_1 - \tilde{p}_1)(x_2 - \tilde{p}_2) - [(y_1 - x_1) + (x_1 - \tilde{p}_1)](y_2 - \tilde{p}_2) \\ = (x_1 - \tilde{p}_1)[(x_2 - \tilde{p}_2) - (y_2 - \tilde{p}_2)] - (y_1 - x_1)(y_2 - \tilde{p}_2) \\ = (x_1 - \tilde{p}_1)(x_2 - y_2) - (y_1 - x_1)(y_2 - \tilde{p}_2) \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned} [x_1^2 - 2x_1\tilde{p}_1 - y_1^2 + 2y_1\tilde{p}_1] + 2[(x_1 - \tilde{p}_1)(x_2 - y_2) - (y_1 - x_1)(y_2 - \tilde{p}_2)] \langle \tau, \nu \rangle \\ \geq [y_2^2 - 2y_2\tilde{p}_2 - x_2^2 + 2x_2\tilde{p}_2] \|\nu\|^2 \\ \Rightarrow (x_1 - y_1)(x_1 + y_1 - 2\tilde{p}_1) + 2[(x_1 - y_1)(y_2 - \tilde{p}_2)] \langle \tau, \nu \rangle \\ \geq (y_2 - x_2)(y_2 + x_2 - 2\tilde{p}_2) \|\nu\|^2 - 2(x_1 - \tilde{p}_1)(x_2 - y_2) \langle \tau, \nu \rangle \\ \Rightarrow (x_1 - y_1)[(x_1 + y_1 - 2\tilde{p}_1) + 2(y_2 - \tilde{p}_2) \langle \tau, \nu \rangle] \\ \geq (y_2 - x_2)[(y_2 + x_2 - 2\tilde{p}_2) \|\nu\|^2 + 2(x_1 - \tilde{p}_1) \langle \tau, \nu \rangle] \quad (2.18) \end{aligned}$$

Um auf beiden Seiten jeweils den zweiten Faktor abzuschätzen, benötigen wir die Ungleichung

$$\langle x - \tilde{p}, n \rangle \geq \sqrt{(rR)^2 - (\frac{j}{2})^2}, \quad (2.19)$$

die wir unten beweisen werden. Wir bemerken, dass die analoge Ungleichung mit y statt x genauso gilt. Da τ und n eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^2 bilden, gilt außerdem (nur für

y , nicht für x):

$$\begin{aligned} |\langle y - \tilde{p}, \tau \rangle| &= \sqrt{\|y - \tilde{p}\|^2 - \langle y - \tilde{p}, n \rangle^2} \\ &\leq \sqrt{(rR)^2 - ((rR)^2 - (\frac{j}{2})^2)} \\ &= \frac{j}{2}. \end{aligned}$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} |(x_1 + y_1 - 2\tilde{p}_1) + 2(y_2 - \tilde{p}_2)\langle \tau, \nu \rangle| &\leq |(2y_1 - 2\tilde{p}_1)\langle \tau, \tau \rangle + 2(y_2 - \tilde{p}_2)\langle \nu, \tau \rangle| + \epsilon \\ &= |\langle (2y_1 - 2\tilde{p}_1)\tau + 2(y_2 - \tilde{p}_2)\nu, \tau \rangle| + \epsilon \\ &= 2|\langle y - \tilde{p}, \tau \rangle| + \epsilon \\ &\leq j + \epsilon \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} (y_2 + x_2 - 2\tilde{p}_2)\|\nu\|^2 + 2(x_1 - \tilde{p}_1)\langle \tau, \nu \rangle &\geq \langle (y_2 + x_2 - 2\tilde{p}_2)\nu + (y_1 + x_1 - 2\tilde{p}_1)\tau, \nu \rangle - \epsilon|\langle \tau, \nu \rangle| \\ &= \langle y + x - 2\tilde{p}, \nu \rangle - \epsilon|\langle \tau, \nu \rangle| \\ &= \langle y + x - 2\tilde{p}, \tau \rangle \langle \nu, \tau \rangle + \langle y + x - 2\tilde{p}, n \rangle \langle \nu, n \rangle - \epsilon|\langle \tau, \nu \rangle| \\ &\geq \langle 2y - 2\tilde{p}, \tau \rangle \langle \nu, \tau \rangle - \epsilon|\langle \nu, \tau \rangle| + \langle y + x - 2\tilde{p}, n \rangle \langle \nu, n \rangle - \epsilon|\langle \tau, \nu \rangle| \\ &\geq -j|\langle \nu, \tau \rangle| + 2\sqrt{(rR)^2 - (\frac{j}{2})^2} \langle \nu, n \rangle - 2\epsilon|\langle \tau, \nu \rangle| \\ &= \sqrt{(2rR)^2 - j^2} \langle \nu, n \rangle - (j + 2\epsilon)|\langle \tau, \nu \rangle|. \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser beiden Abschätzungen und der Annahme $y_2 \geq x_2$ folgt nun aus (2.18), dass

$$\begin{aligned} |x_1 - y_1| \cdot (j + \epsilon) &\geq |x_1 - y_1| \cdot |(x_1 + y_1 - 2\tilde{p}_1) + 2(y_2 - \tilde{p}_2)\langle \tau, \nu \rangle| \\ &\geq (x_1 - y_1)[(x_1 + y_1 - 2\tilde{p}_1) + 2(y_2 - \tilde{p}_2)\langle \tau, \nu \rangle] \\ &\geq (y_2 - x_2)[(y_2 + x_2 - 2\tilde{p}_2)\|\nu\|^2 + 2(x_1 - \tilde{p}_1)\langle \tau, \nu \rangle] \\ &\geq (y_2 - x_2)(\sqrt{(2rR)^2 - j^2} \langle \nu, n \rangle - (j + 2\epsilon)|\langle \tau, \nu \rangle|). \end{aligned}$$

Nun können wir die Restriktionen $|x_1 - y_1| < \epsilon$ und $|\langle x - y, \tau \rangle| < \epsilon$ fallen lassen: Falls z.B. $x_1 < y_1$, betrachten wir eine Kette von Zwischenpunkten $x^{(0)}, \dots, x^{(n)} \in \text{bd}(K + rB)$ mit $x = x^{(0)}, y = x^{(n)}, x_1^{(0)} \leq \dots \leq x_1^{(n)}$ so, dass $|x_1^{(j-1)} - x_1^{(j)}| < \epsilon$ und $|\langle x^{(j-1)} - x^{(j)}, \tau \rangle| < \epsilon$ für $j = 1, \dots, n$ gilt. Dann folgt

$$\begin{aligned} (y_2 - x_2) \cdot (\sqrt{(2Rr)^2 - j^2} \langle n, \nu \rangle - (j + 2\epsilon)|\langle \nu, \tau \rangle|) &= \sum_{j=1}^n (x_2^{(j)} - x_2^{(j-1)}) \cdot (\sqrt{(2Rr)^2 - j^2} \langle n, \nu \rangle - (j + 2\epsilon)|\langle \nu, \tau \rangle|) \\ &\leq \sum_{j=1}^n |x_1^{(j-1)} - x_1^{(j)}| \cdot (j + \epsilon) \\ &= |x_1 - y_1| \cdot (j + \epsilon). \end{aligned}$$

Weil $\epsilon > 0$ beliebig war und wir $\sqrt{(2rR)^2 - j^2\langle \nu, n \rangle - j|\langle \nu, \tau \rangle|} > 0$ vorausgesetzt haben, folgt

$$y_2 - x_2 \leq |x_1 - y_1| \frac{j}{\sqrt{(2rR)^2 - j^2\langle \nu, n \rangle - j|\langle \nu, \tau \rangle|}},$$

was wegen $y_2 - x_2 \geq 0$ die Behauptung zeigt.

Es bleibt, die Ungleichung (2.19) nachzuweisen. Hierzu sei $\bar{m} := \nu - Rn$ und $A := \{0, j\tau\}$. Die Hauptarbeit ist nun der Nachweis von

$$\langle x - r\bar{m}, n \rangle \geq \sqrt{(rR)^2 - \left(\frac{j}{2}\right)^2}.$$

Hierfür sei $\rho_0 := d_B(I, x) \leq r$. Dann gilt $x \in I + \rho_0\nu$. Wegen $I \subseteq A + \frac{j}{2}B^2 \subseteq A + \frac{j}{2R}B$ folgt

$$x \in I + \rho_0B \subseteq A + \left(\rho_0 + \frac{j}{2R}\right)B$$

und somit

$$\rho_0 + \frac{j}{2R} \geq d_B(A, x) \geq d_B(K, x) = r,$$

weil wir $0, j\tau \in K$ vorausgesetzt haben. Hieraus folgt aber $R(r - \rho_0) \leq \frac{j}{2}$ und wegen der Voraussetzung $r > \frac{\text{diam } K}{R}$ folgt

$$\rho_0 R \geq \frac{j}{2}. \quad (2.20)$$

Da B einen Summanden der Form RB^2 enthält und somit $\bar{m} + RB^2 \subseteq B$ nach Lemma 1.19 gilt, folgt aus $x \notin \text{int}(K + rB)$, dass $x \notin \text{int}(A + \rho\bar{m} + \rho RB^2)$ für $\rho \in (\rho_0, r)$. Wegen $x \in I + \rho_0\nu$ gilt außerdem $\langle x, n \rangle < \langle \rho\nu, n \rangle$ für alle $\rho \in (\rho_0, r)$.

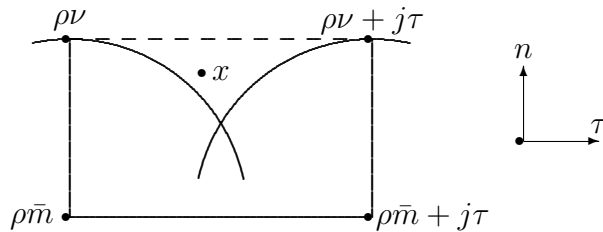


Abbildung 2.11

Wir wollen nun zeigen, dass x für alle $\rho \in (\rho_0, r]$ in dem in der Abbildung eingezeichneten Rechteck liegt. Präzise bedeutet dies, dass die bereits erwähnte Ungleichung $\langle x, n \rangle < \langle \rho\nu, n \rangle$ gilt und die drei Terme $\langle x - \rho\bar{m}, \tau \rangle$, $\langle \rho\bar{m} + j\tau - x, \tau \rangle$ und $\langle x - \rho\bar{m}, n \rangle$ positiv sind. Wir bemerken, dass sie offensichtlich für $\rho = \rho_0$ positiv sind und stetig von ρ abhängen. Aus dem Zwischenwertsatz würde also die Behauptung folgen, wenn wir wüßten, dass sie für kein $\rho \in (\rho_0, r]$ den Wert 0 haben. Um dies nachzuweisen, nehmen wir an, (mindestens) einer der drei Terme hätte eine Nullstelle. Wegen der Stetigkeit der Terme gibt es dann eine kleinste Zahl ρ , für die einer der drei Terme den Wert 0 hat. Dies kann aber nicht der erste sein, den aus

$$0 \leq \langle x - \rho\bar{m}, n \rangle < \langle \rho\nu - \rho\bar{m}, n \rangle = \rho R$$

und $\langle x - \rho\bar{m}, \tau \rangle = 0$ würde $x \in \text{int}(A + \rho\bar{m} + \rho RB^2)$ folgen. Genausowenig kann es der zweite sein. Auch der dritte kann es nicht sein, denn aus $0 \leq \langle x - \rho\bar{m}, \tau \rangle$ und $0 \leq \langle \rho\bar{m} + j\tau - x, \tau \rangle$ folgt, dass $|\langle x - \rho\bar{m}, \tau \rangle| \leq \frac{j}{2}$ oder $|\langle \rho\bar{m} + j\tau - x, \tau \rangle| \leq \frac{j}{2}$. Weil aus (2.20) aber $\frac{j}{2} < \rho R$ folgt, und wegen $\langle x - \rho\bar{m}, n \rangle = 0$ könnten wir hieraus schließen, dass $x \in \text{int}(A + \rho\bar{m} + \rho RB^2)$. Somit sind die drei Terme auch für $\rho = r$ positiv, woraus $|\langle x - r\bar{m}, \tau \rangle| \leq \frac{j}{2}$ oder $|\langle r\bar{m} + j\tau - x, \tau \rangle| \leq \frac{j}{2}$ folgt, o.B.d.A. ersteres. Mit $x \notin \text{int}(A + r\bar{m} + rRB^2)$ ergibt sich nun

$$\langle x - r\bar{m}, n \rangle = \sqrt{\|x - r\bar{m}\|^2 - \langle x - r\bar{m}, \tau \rangle^2} \geq \sqrt{(rR)^2 - \left(\frac{j}{2}\right)^2}. \quad (2.21)$$

Weiter ist $m + Rn \in B$, woraus $\langle \bar{m} + Rn, n \rangle = \langle \nu, n \rangle \geq \langle m + Rn, n \rangle$ und somit $\langle \bar{m}, n \rangle \geq \langle m, n \rangle$ folgt. Wegen $\langle p, n \rangle \leq 0$ folgt

$$\begin{aligned} \langle x - \tilde{p}, n \rangle &= \langle x - p - rm, n \rangle \\ &\geq \langle x - r\bar{m}, n \rangle \\ &\geq \sqrt{(rR)^2 - \left(\frac{j}{2}\right)^2}. \end{aligned}$$

Damit ist (2.19) bewiesen.

Zu (iii). Wir nehmen wieder an, dass der Endpunkt von I , von dem aus der andere in Richtung τ liegt, im Koordinatenursprung liegt. Sei $z \in \text{bd}(K + rB)$ ein Punkt mit $p_B(L, z) \in I$, für den $n_B(K, z)$, also auch $p_B(K, z)$ und $u_B(K, z)$, definiert sind. Es bezeichne wieder $b := u_B(K, z)$. Wir zeigen zunächst

$$\|b - \nu\| \leq \left(1 + \frac{\|\nu\|}{4R}\right) \text{diam } K \cdot r^{-1}. \quad (2.22)$$

Es gilt einerseits $z = p + rb$, wobei $p := p_B(K, z)$, und andererseits $z = y + \rho\nu$ mit $y := p_B(L, z) \in I$ und $\rho := d_B(L, z) \leq r$. Hieraus folgt

$$r \cdot \|b - \nu\| = \|(z - \rho\nu) - (z - rb) - (r - \rho)\nu\| = \|y - p - (r - \rho)\nu\|. \quad (2.23)$$

Um nun $r - \rho$ abzuschätzen, setzen wir wieder $\bar{m} := \nu - Rn$. Wegen Ungleichung (2.21) und $\langle y, n \rangle = 0$ gilt dann

$$\begin{aligned} \sqrt{(rR)^2 - \left(\frac{j}{2}\right)^2} &\leq \langle z - r\bar{m}, n \rangle \\ &= \rho\langle \nu, n \rangle - r\langle \bar{m}, n \rangle \\ &= \rho\langle \nu, n \rangle - r\langle \nu - Rn, n \rangle \\ &= -(r - \rho)\langle \nu, n \rangle + r\langle Rn, n \rangle \\ &\leq -(r - \rho)R + rR \\ &= \rho R, \end{aligned}$$

wobei wir für die zweite Abschätzung ausgenutzt haben, dass $r - \rho \geq 0$ und wegen $Rn \in RB^2 \subseteq B$ gilt, dass $\langle \nu, n \rangle \geq \langle Rn, n \rangle = R$.

Hieraus folgt $(rR)^2 - \left(\frac{j}{2}\right)^2 \leq (\rho R)^2$ und somit

$$(r - \rho)rR^2 \leq (r - \rho)(r + \rho)R^2 = (rR)^2 - (\rho R)^2 \leq \left(\frac{j}{2}\right)^2.$$

Wegen der Voraussetzung $rR \geq \text{diam } K$ und $j \leq \text{diam } K$ ergibt sich

$$(r - \rho)(\text{diam } K)R \leq \frac{j \cdot \text{diam } K}{4}$$

und daher

$$r - \rho \leq \frac{j}{4R}.$$

Hieraus folgt mit Gleichung (2.23)

$$\begin{aligned} r \cdot \|b - \nu\| &= \|y - p - (r - \rho)\nu\| \\ &\leq \|y - p\| + (r - \rho)\|\nu\| \\ &\leq \text{diam } K + \frac{j}{4R}\|\nu\| \\ &\leq \left(1 + \frac{\|\nu\|}{4R}\right) \cdot \text{diam } K. \end{aligned}$$

Damit ist Ungleichung (2.22) bewiesen.

Nun kürzen wir $\tilde{n} := n_B(K, z)$ ab und bezeichnen mit t einen Einheitsvektor orthogonal zu \tilde{n} . Der Kreis mit Radius R um $b - R\tilde{n}$ ist laut Lemma 1.19 in B enthalten und somit liegt ν nicht im Inneren dieses Kreises.

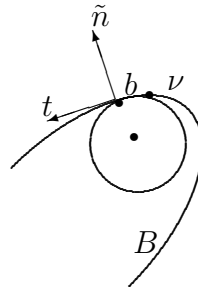


Abbildung 2.12

Daher gilt

$$\begin{aligned} R^2 &\leq \|(b - R\tilde{n}) - \nu\|^2 \\ &= \langle (b - R\tilde{n}) - \nu, \tilde{n} \rangle^2 + \langle (b - R\tilde{n}) - \nu, t \rangle^2 \\ &= (\langle b - \nu, \tilde{n} \rangle - R)^2 + \langle b - \nu, t \rangle^2 \\ &= \langle b - \nu, \tilde{n} \rangle^2 - 2R\langle b - \nu, \tilde{n} \rangle + R^2 + \langle b - \nu, t \rangle^2. \end{aligned}$$

Hieraus folgt mit Ungleichung (2.22)

$$\begin{aligned} 2R\langle b - \nu, \tilde{n} \rangle &\leq \langle b - \nu, \tilde{n} \rangle^2 + \langle b - \nu, t \rangle^2 \\ &= \|b - \nu\|^2 \\ &\leq \left(\left(1 + \frac{\|\nu\|}{4R}\right) \cdot \text{diam } K \cdot r^{-1} \right)^2, \end{aligned}$$

was äquivalent zu

$$\langle b - \nu, \tilde{n} \rangle \leq \frac{(1 + \frac{\|\nu\|}{4R})^2 (\text{diam } K)^2}{2R} \cdot r^{-2}$$

ist. Berücksichtigt man nun, dass $\langle b - \nu, \tilde{n} \rangle \geq 0$ aus der Wahl von \tilde{n} folgt, und dass

$$h_B(\tilde{n}) - h_B(n) + \langle \nu, n - \tilde{n} \rangle = \langle b, \tilde{n} \rangle - \langle \nu, n \rangle + \langle \nu, n - \tilde{n} \rangle = \langle b - \nu, \tilde{n} \rangle$$

gilt, so folgt

$$0 \leq h_B(\tilde{n}) - h_B(n) + \langle \nu, n - \tilde{n} \rangle \leq \frac{(1 + \frac{\|\nu\|}{4R})^2 (\text{diam } K)^2}{2R} \cdot r^{-2}. \quad \square$$

Lemma 2.25 sagt uns, dass eine bestimmte Menge Graph einer Lipschitz-stetigen Funktion bzgl. eines nicht orthonormalen Koordinatensystems ist. Das folgende Lemma sagt uns, dass diese Menge auch Graph einer Lipschitz-stetigen Funktion bzgl. eines orthonormalen Koordinatensystems ist.

Lemma 2.26. *Sei F eine Menge der Form $\{x\tau + f(x)\nu \mid x \in I\}$ für ein Intervall $I = [0, j]$, einen Einheitsvektor τ , einen davon linear unabhängigen Vektor ν und eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(0) = f(j)$, die Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L ist. Falls $L\langle \tau, \nu \rangle < 1$, dann besitzt F eine Darstellung der Form $\{x\tau + \tilde{f}(x)n \mid x \in \tilde{I}\}$, wobei n der Einheitsvektor in Richtung $\nu - \langle \nu, \tau \rangle \tau$, also orthogonal zu τ , ist, \tilde{I} ein Intervall der Länge j und $\tilde{f} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lipschitz-stetige Funktion mit Lipschitz-Konstante*

$$\frac{L\langle n, \nu \rangle}{1 - L\langle \tau, \nu \rangle}.$$

Beweis: Seien $z_1, z_2 \in F$, $z_1 \neq z_2$. Dann gibt es $x_1, x_2 \in I$ mit $z_i = x_i\tau + f(x_i)\nu$, $i = 1, 2$, und o.B.d.A. $x_1 < x_2$. Nun gilt

$$\begin{aligned} \langle z_2 - z_1, \tau \rangle &= \langle x_2\tau + f(x_2)\nu - x_1\tau - f(x_1)\nu, \tau \rangle \\ &= x_2 - x_1 + (f(x_2) - f(x_1))\langle \nu, \tau \rangle \\ &\geq (x_2 - x_1)(1 - L\langle \nu, \tau \rangle) \\ &> 0. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Hieraus folgt, dass F jede zu τ orthogonale Gerade in höchstens einem Punkt schneidet, und es daher eine Funktion $\tilde{f} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}$ auf der Menge $\tilde{I} := \{\langle z, \tau \rangle \mid z \in F\}$ gibt mit $F = \{x\tau + \tilde{f}(x)n \mid x \in \tilde{I}\}$. Jeder Punkt $z \in F$ hat also eine Darstellung der Form $z = x\tau + \tilde{f}(x)n$, $x \in \tilde{I}$. Aus dieser Gleichung folgt $\langle z, \tau \rangle = x$ und $\langle z, n \rangle = \tilde{f}(x)$; insgesamt also

$$\langle z, n \rangle = \tilde{f}(\langle z, \tau \rangle). \tag{2.25}$$

Da f stetig ist, ist F zusammenhängend und \tilde{I} muss ein Intervall sein. Weiter ist die Länge von \tilde{I} gleich

$$\begin{aligned} \max\{\langle z, \tau \rangle \mid z \in F\} - \min\{\langle z, \tau \rangle \mid z \in F\} &= \langle j\tau + f(j)\nu, \tau \rangle - \langle 0 + f(0)\nu, \tau \rangle \\ &= j + (f(j) - f(0))\langle \nu, \tau \rangle \\ &= j. \end{aligned}$$

Zum Nachweis der Lipschitz-Konstante seien wieder $z_1, z_2 \in F$ und x_1, x_2 wie oben. Dann gilt

$$\begin{aligned} |\langle z_2 - z_1, n \rangle| &= |\langle x_2\tau + f(x_2)\nu - x_1\tau - f(x_1)\nu, n \rangle| \\ &= |f(x_2) - f(x_1)| \langle \nu, n \rangle \\ &\leq (x_2 - x_1)L \langle \nu, n \rangle. \end{aligned}$$

Hieraus folgt mit Gleichung (2.25) und Ungleichung (2.24), dass

$$\begin{aligned} |\tilde{f}(\langle z_2, \tau \rangle) - \tilde{f}(\langle z_1, \tau \rangle)| &= |\langle z_2, n \rangle - \langle z_1, n \rangle| \\ &\leq (x_2 - x_1)L \langle \nu, n \rangle \\ &\leq \frac{L \langle \nu, n \rangle}{1 - L \langle \nu, \tau \rangle} (\langle z_2, \tau \rangle - \langle z_1, \tau \rangle). \quad \square \end{aligned}$$

Unser Ziel ist es, wie oben erwähnt, die „Größe“ des Randes von $K + rB$ zu bestimmen. Präzise handelt es sich bei der Größe um das in Definition 1.12 eingeführte Hausdorff-Maß im Euklidischen Fall, bzw. ein gewisses Integral bzgl. des Hausdorff-Maßes im allgemeinen Fall. Weiter werden wir sehen, dass es nur auf die Teile des Randes ankommt, von denen wir oben gezeigt haben, dass sie Graphen von Lipschitz-stetigen Funktionen sind. Aus diesem Grund ist das folgende Lemma für uns von Bedeutung.

Lemma 2.27. *Sei I ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lipschitz-stetige Funktion mit Lipschitz-Konstante L . Sei $F := \{(y, f(y)) | y \in I\} \subseteq \mathbb{R}^2$ der Graph von f und $g : F \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ eine messbare Funktion. Dann gilt*

$$\int_I g(y, f(y)) dy \leq \int_F g(z) d\mathcal{H}^1(z) \leq \sqrt{1 + L^2} \int_I g(y, f(y)) dy.$$

Beweis: Wir werden das Lemma aus dem Flächensatz (Satz 1.14) folgern. Da f Lipschitz-stetig ist, gibt es eine Lipschitz-stetige Funktion $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\tilde{f}(y) = \begin{pmatrix} y \\ f(y) \end{pmatrix}, \quad y \in I.$$

Der Flächensatz, angewendet auf die Funktion

$$u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y \mapsto \begin{cases} g(y, f(y)) & \text{falls } y \in I \\ 0 & \text{falls } y \notin I \end{cases}$$

liefert

$$\int_I g(y, f(y)) \| \tilde{f}'(y) \| dy = \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{y \in \tilde{f}^{-1}(\{z\})} u(y) d\mathcal{H}^1(z).$$

Für $z \in \mathbb{R}^2$ gilt nun

$$\sum_{y \in \tilde{f}^{-1}(\{z\})} u(y) = \sum_{y \in \tilde{f}^{-1}(\{z\}) \cap I} u(y) + \sum_{y \in \tilde{f}^{-1}(\{z\}) \setminus I} u(y) = g(z) \mathbf{1}_{\{z \in F\}} + 0.$$

Somit folgt

$$\int_I g(y, f(y)) \|\tilde{f}'(y)\| dy = \int_F g(z) d\mathcal{H}^1(z). \quad (2.26)$$

Weil f Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L ist, folgt $|f'(y)| < L$ für alle $y \in I$, in denen f differenzierbar ist, und somit

$$1 \leq \|\tilde{f}'(y)\| \leq \sqrt{1 + L^2}.$$

Zusammen mit (2.26) folgt hieraus aber die Behauptung. \square

Der Zusammenhang zwischen der Ableitung von $V_2(K + rB)$ und der Oberfläche von $K + rB$ wird durch Satz 1.42 hergestellt. In diesem Satz kommt der Einheitsvektor $\nu_B(K, z)$ in Richtung des Gradienten von $d_B(K, z)$ vor. Wir wollen nun zeigen, dass der Vektor $\nu_B(K, z)$, sofern $d_B(K, \cdot)$ differenzierbar ist, mit $n_B(K, z)$ übereinstimmt.

Lemma 2.28. *Sei $K \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt. Dann ist der Gradient $\nabla d_B(K, z)$ in allen Punkten $z \in \mathbb{R}^d \setminus K$, in denen $d_B(K, \cdot)$ differenzierbar ist, ein Vielfaches von $n_B(K, z)$.*

Beweis: Sei $z \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt, in dem $d_B(K, \cdot)$ differenzierbar ist. Laut Satz 1.37(i) ist dann $u_B(K, z)$ definiert und wegen der Glattheit von B auch $n_B(K, z)$.

Sei $v \in S^1$ ein Einheitsvektor orthogonal zu $n_B(K, z)$ und $\epsilon > 0$. Wir setzen $\rho := d_B(K, z)$, $m := u_B(K, z) - Rn_B(K, z)$ und $\tilde{p} := p_B(K, z) + \rho m$. Dann gilt $\tilde{p} = z - \rho Rn_B(K, z)$ und wegen Lemma 1.19 gilt $u_B(K, z) \in m + RB^2 \subseteq B$, also

$$z \in \tilde{p} + \rho RB^2 \subseteq K + \rho B.$$

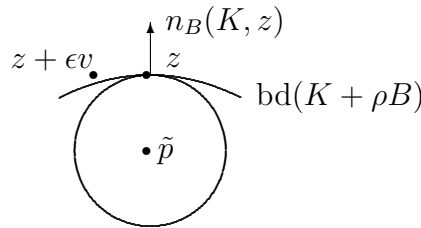


Abbildung 2.13

Von z aus sieht man die Punkte \tilde{p} und $z + \epsilon v$ unter einem rechten Winkel. Somit ergibt der Satz des Pythagoras

$$\|\tilde{p} - (z + \epsilon v)\|^2 = (\rho R)^2 + \epsilon^2.$$

Es gibt einen konvexen Körper $M \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $B = M + RB^2$. Wegen $\tilde{p} \in K + \rho M \subseteq K + (\sqrt{\rho^2 + (\frac{\epsilon}{R})^2})M$ folgt

$$z + \epsilon v \in \tilde{p} + \left(\sqrt{\rho^2 + \left(\frac{\epsilon}{R}\right)^2} \right) RB^2 \subseteq K + \left(\sqrt{\rho^2 + \left(\frac{\epsilon}{R}\right)^2} \right) B.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} d_B(K, z + \epsilon v) &\leq \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{\epsilon}{R}\right)^2} \\ &\leq \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{\epsilon}{R}\right)^2 + \frac{1}{4\rho^2} \left(\frac{\epsilon}{R}\right)^4} \\ &= \rho + \frac{1}{2\rho} \left(\frac{\epsilon}{R}\right)^2. \end{aligned}$$

Hieraus folgt nun, dass die einseitige Richtungsableitung von $d_B(K, \cdot)$ in z in Richtung v nicht positiv ist. Da aber die selbe Überlegung auch für den Einheitsvektor $-v$ gilt und wir angenommen haben, dass $d_B(K, \cdot)$ in z differenzierbar ist, folgt

$$\langle \nabla d_B(K, z), v \rangle = 0.$$

Dies zeigt aber die Behauptung. \square

Im folgenden Lemma schätzen wir einen Integralausdruck ab, der wegen Satz 1.42 im Wesentlichen gleich der Ableitung von $V_d(L + rB) - V_d(K + rB)$ ist. Wir erinnern uns, dass $S \in \mathbb{R}^+$ eine Zahl ist, für die der vor Satz 2.24 definierte Eichkörper B in der Kugel SB^2 enthalten ist.

Lemma 2.29. *Sei $K \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Körper und $L := \text{conv } K$ seine konvexe Hülle. Dann gilt für fast alle $r > 2R^{-2}S \text{diam } K$, dass*

$$\begin{aligned} &\left(-\left(\frac{S}{R} + 4\right) \frac{S(2\pi \text{diam } K)^3}{R^2} \right) \cdot r^{-2} \\ &\leq \int_{\text{bd}(K+rB)} h_B(n_B(K, z)) d\mathcal{H}^1(z) - \int_{\text{bd}(L+rB)} h_B(n_B(L, z)) d\mathcal{H}^1(z) \\ &\leq \left(\left(10 + \frac{S}{R}\right) \frac{S(2\pi \text{diam } K)^3}{R^2} \right) \cdot r^{-2}. \end{aligned}$$

Bem. 2.30. Genau so wie das Lemma kann man die Ungleichung

$$0 \leq \mathcal{H}^1(\text{bd}(K + rB)) - \mathcal{H}^1(\text{bd}(L + rB)) \leq \frac{2(4\pi \cdot \text{diam } K)^3}{(Rr)^2}$$

beweisen. Es fallen sogar einige Teile des Beweises weg.

Beweis von Lemma 2.29: Laut Lemma 1.39 gilt

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid d_B(K, z) = r\} = \text{bd}(K + rB)$$

für alle $r > (\text{diam } K)/R$. Somit gilt laut [28, (2.19)] für fast alle $r > (\text{diam } K)/R$

$$\mathcal{H}^1(\text{exo}_B(K) \cap \text{bd}(K + rB)) = 0.$$

Sei $r > 2R^{-2}S \operatorname{diam} K$ eine Zahl, für die das erfüllt ist. Offensichtlich gilt

$$\begin{aligned} & \int_{\operatorname{bd}(K+rB)} h_B(n_B(K, z)) d\mathcal{H}^1(z) - \int_{\operatorname{bd}(L+rB)} h_B(n_B(L, z)) d\mathcal{H}^1(z) \\ &= \int_{\operatorname{bd}(K+rB) \setminus \operatorname{bd}(L+rB)} h_B(n_B(K, z)) d\mathcal{H}^1(z) \\ & \quad - \int_{\operatorname{bd}(L+rB) \setminus \operatorname{bd}(K+rB)} h_B(n_B(L, z)) d\mathcal{H}^1(z) \\ & \quad + \int_{\operatorname{bd}(K+rB) \cap \operatorname{bd}(L+rB)} h_B(n_B(K, z)) - h_B(n_B(L, z)) d\mathcal{H}^1(z). \end{aligned}$$

Sei $z \in \operatorname{bd}(K+rB) \cap \operatorname{bd}(L+rB)$ ein Punkt und $p := p_B(L, z)$. Dann gilt für alle $k \in K \setminus \{p\} \subseteq L \setminus \{p\}$, dass $d_B(k, z) > d_B(L, z) = r = d_B(K, z)$, weshalb $p_B(K, z) = p$ und $n_B(K, z) = n_B(L, z)$ ist. Da $z \in \operatorname{bd}(K+rB) \cap \operatorname{bd}(L+rB)$ beliebig war, hat das letzte Integral in obiger Gleichung den Wert 0.

Weiter haben alle Punkte aus $\operatorname{bd}(L+rB) \setminus \operatorname{bd}(K+rB)$ und $\operatorname{bd}(K+rB) \setminus \operatorname{bd}(L+rB)$ laut Lemma 1.39 nicht den selben Abstand von K und von L und werden deshalb durch $p_B(L, \cdot)$ in $(\operatorname{bd} L) \setminus K$ projiziert. Laut Lemma 1.26 liegt jeder Punkt von $(\operatorname{bd} L) \setminus K$ im relativen Inneren einer Kante von L , von denen es laut Lemma 1.28 höchstens abzählbar viele gibt. Für jede Kante J von L ist nun $((\operatorname{bd} L) \setminus K) \cap J = J \setminus K$ offen in J . Wegen [3, Lemma 2.2.29] ist aber jede offene Teilmenge von \mathbb{R} Vereinigung abzählbar vieler offener Intervalle und somit ist $((\operatorname{bd} L) \setminus K) \cap J$ die Vereinigung von abzählbar vielen in J offenen konvexen Mengen. Daher ist $(\operatorname{bd} L) \setminus K$ die Vereinigung von abzählbar vielen, paarweise verschiedenen Mengen I_m , $m \in \mathbb{N}$, die leer oder 1-dimensional, konvex und relativ offen sind. Die Länge von I_m sei j_m , der Euklidische äußere Einheitsnormalenvektor von L in den Punkten in I_m sei n_m und der Punkt aus $\operatorname{bd} B$ mit äußerem Normalenvektor n_m heiße ν_m .

Also ist $\operatorname{bd}(L+rB) \setminus \operatorname{bd}(K+rB)$ laut Lemma 1.33 die Vereinigung der Strecken $I_m + r\nu_m$ und $\operatorname{bd}(K+rB) \setminus \operatorname{bd}(L+rB)$ ist die Vereinigung der Graphen

$$F_r^m := \{y + f_r^m(y)\nu_m \mid y \in I_m\},$$

wobei f_r^m , $m \in \mathbb{N}$, die auf dem Abschluss von I_m definierten Funktionen aus Lemma 2.25 bezeichnen. Somit gilt

$$\int_{\operatorname{bd}(L+rB) \setminus \operatorname{bd}(K+rB)} h_B(n_B(L, z)) d\mathcal{H}^1(z) = \sum_{m=0}^{\infty} j_m h_B(n_m)$$

und

$$\int_{\operatorname{bd}(K+rB) \setminus \operatorname{bd}(L+rB)} h_B(n_B(K, z)) d\mathcal{H}^1(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \int_{F_r^m} h_B(n_B(K, z)) d\mathcal{H}^1(z),$$

also

$$\begin{aligned}
 & \int_{\text{bd}(K+rB)} h_B(n_B(K, z)) d\mathcal{H}^1(z) - \int_{\text{bd}(L+rB)} h_B(n_B(L, z)) d\mathcal{H}^1(z) \\
 &= \int_{\text{bd}(K+rB) \setminus \text{bd}(L+rB)} h_B(n_B(K, z)) d\mathcal{H}^1(z) - \int_{\text{bd}(L+rB) \setminus \text{bd}(K+rB)} h_B(n_B(L, z)) d\mathcal{H}^1(z) \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \int_{F_r^m} h_B(n_B(K, z)) d\mathcal{H}^1(z) - j_m h_B(n_m). \tag{2.27}
 \end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass die Voraussetzung $\sqrt{(2Rr)^2 - j_m^2} \langle n_m, \nu_m \rangle - j_m |\langle \nu_m, \tau_m \rangle| > 0$ aus Lemma 2.25(ii) erfüllt ist, wobei τ_m einen Einheitsvektor orthogonal zu n_m bezeichnet. Es gilt $|\langle \tau_m, \nu_m \rangle| \leq \|\tau_m\| \cdot \|\nu_m\| \leq S$. Wegen $Rn_m \in RB^d \subseteq B$ und weil n_m äußerer Normalenvektor von B in ν_m ist, folgt $\langle n_m, \nu_m \rangle \geq \langle n_m, Rn_m \rangle = R$. Aus der Voraussetzung $r > 2R^{-2}S \text{diam } K$ folgt $\text{diam } K < Rr$ und $S \cdot \text{diam } K < \frac{1}{2}R^2r$ und somit

$$\begin{aligned}
 \sqrt{(2Rr)^2 - j_m^2} \langle n_m, \nu_m \rangle - j_m |\langle \tau_m, \nu_m \rangle| &\geq R\sqrt{4(Rr)^2 - (\text{diam } K)^2} - S \cdot \text{diam } K \\
 &\geq R\sqrt{3}(Rr) - S \cdot \text{diam } K \\
 &> R^2r \\
 &> 0.
 \end{aligned}$$

Also ist wegen Lemma 2.25(ii) f_r^m Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante

$$L := \frac{j_m}{\sqrt{(2Rr)^2 - j_m^2} \langle n_m, \nu_m \rangle - j_m |\langle \tau_m, \nu_m \rangle|}.$$

Um die Voraussetzungen von Lemma 2.26 zu überprüfen, stellen wir zunächst

$$|L \langle \tau_m, \nu_m \rangle| \leq \frac{\text{diam } K}{R^2r} S \leq \frac{1}{2}$$

fest. Seien p_m und $p_m + j_m \tau_m$ weiter die beiden Endpunkte von I_m . Nach Definition gilt $f_r^m(y) = \sup\{s > 0 \mid y + s\nu_m \in K + rB\}$ für alle y aus dem Abschluss von I_m . Nun ist $p_m + r\nu_m \in K + rB$, während man, indem man Skalarprodukte mit n_m betrachtet, sofort $p_m + s\nu_m \notin K + rB$ für alle $s > r$ sieht. Also $f_r^m(p_m) = r$ und genauso $f_r^m(p_m + j_m \tau_m) = r$. Somit haben wir

$$f_r^m(p_m) = f_r^m(p_m + j_m \tau_m). \tag{2.28}$$

Daher lässt sich Lemma 2.26 anwenden und F_r^m hat eine Darstellung der Form $\{q_m + x\tau_m + \tilde{f}_r^m(x)n_m \mid x \in \text{int } \tilde{I}\}$, wobei $q_m \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt, \tilde{I} ein abgeschlossenes Intervall der Länge j_m und $\tilde{f}_r^m : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lipschitz-stetige Funktion ist. Ihre Lipschitz-Konstante ist

$$\tilde{L} := \frac{L \langle n_m, \nu_m \rangle}{1 - L \langle \tau_m, \nu_m \rangle},$$

was sich abschätzen lässt durch

$$\begin{aligned}
L \cdot \frac{\langle n_m, \nu_m \rangle}{1 - \frac{1}{2}} &= \frac{j_m}{\sqrt{(2Rr)^2 - j_m^2 \langle n_m, \nu_m \rangle - j_m |\langle \tau_m, \nu_m \rangle|}} \frac{\langle n_m, \nu_m \rangle}{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{2j_m}{\sqrt{(2Rr)^2 - j_m^2 - j_m \frac{|\langle \tau_m, \nu_m \rangle|}{\langle n_m, \nu_m \rangle}}} \\
&\leq \frac{2j_m}{\sqrt{(2Rr)^2 - (\text{diam } K)^2} - \text{diam } K \frac{S}{R}} \\
&\leq \frac{2j_m}{\sqrt{3}(Rr) - \text{diam } K \frac{S}{R}} \\
&\leq \frac{2j_m}{Rr}.
\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\sqrt{1 + \tilde{L}^2} < \sqrt{1 + \tilde{L}^2 + \frac{1}{4}\tilde{L}^4} = 1 + \frac{1}{2}\tilde{L}^2 \leq 1 + 2 \left(\frac{j_m}{Rr} \right)^2 \quad (2.29)$$

und

$$\tilde{L} \leq \frac{2j_m}{Rr} \leq \frac{R}{S} \leq 1. \quad (2.30)$$

Nach Lemma 2.25(iii) ist

$$|h_B(n_B(K, z)) - h_B(n_m) + \langle \nu_m, n_m - n_B(K, z) \rangle| \leq c_m r^{-2}$$

für alle $z \in F_r^m \setminus \text{exo}_B(K)$, wobei

$$c_m := \frac{\left(\left(1 + \frac{\|\nu_m\|}{4R}\right) \text{diam } K \right)^2}{2R}.$$

Wir setzen

$$g_m(x) := q_m + x\tau_m + \tilde{f}_r^m(x)n_m, \quad x \in \tilde{I}. \quad (2.31)$$

Dann ist $F_r^m = \{g_m(x) | x \in \tilde{I}\}$ und aus Lemma 2.27 und (2.29) folgt, dass

$$\begin{aligned}
&\int_{F_r^m} h_B(n_B(K, z)) d\mathcal{H}^1(z) - j_m h_B(n_m) \\
&\leq \sqrt{1 + \tilde{L}^2} \cdot \int_{\tilde{I}} h_B(n_B(K, g_m(x))) dx - j_m h_B(n_m) \\
&\leq \left(1 + 2\left(\frac{j_m}{Rr}\right)^2\right) \cdot \int_{\tilde{I}} (h_B(n_m) - \langle \nu_m, n_m - n_B(K, g_m(x)) \rangle + c_m r^{-2}) dx - j_m h_B(n_m) \\
&= \left(1 + 2\left(\frac{j_m}{Rr}\right)^2\right) \cdot j_m h_B(n_m) - j_m h_B(n_m) + \left(1 + 2\left(\frac{j_m}{Rr}\right)^2\right) \cdot j_m c_m r^{-2} \\
&\quad - \left(1 + 2\left(\frac{j_m}{Rr}\right)^2\right) \cdot \int_{\tilde{I}} \langle \nu_m, n_m - n_B(K, g_m(x)) \rangle dx \\
&= 2\left(\frac{j_m}{Rr}\right)^2 \cdot j_m h_B(n_m) + \left(1 + 2\left(\frac{j_m}{Rr}\right)^2\right) \cdot j_m c_m r^{-2} \\
&\quad - \left(1 + 2\left(\frac{j_m}{Rr}\right)^2\right) \cdot \int_{\tilde{I}} \langle \nu_m, n_m - n_B(K, g_m(x)) \rangle dx. \quad (2.32)
\end{aligned}$$

Um das letzte Integral abzuschätzen, definieren wir eine Kurve. Die Funktion $g_m : \tilde{I} \rightarrow F_r^m$ ist ein Homöomorphismus. Außerdem ist $\mathcal{H}^1(F_r^m) < \infty$ (folgt z.B., indem man in Lemma 2.27 $g \equiv 1$ setzt). Nun folgt aus mehreren Aussagen von [15, S. 28f], dass F_r^m eine Parameterisierung J nach Bogenlänge besitzt, d.h. dass es einen Lipschitz-stetigen Homöomorphismus $J : (0, a) \rightarrow F_r^m$ gibt, wobei $a := \mathcal{H}^1(F_r^m)$, so, dass für alle $t \in (0, a)$ gilt $\mathcal{H}^1(J((0, t))) = t$. Mit Hilfe des Flächensatzes (Satz 1.14) folgt

$$\int_0^t \|J'(s)\| ds = \int_{F_r^m} \sum_{s \in J^{-1}(\{z\})} \mathbf{1}_{(0,t)}(s) d\mathcal{H}^1(z) = \mathcal{H}^1(J((0, t))) = t$$

für alle $t \in (0, a)$, woraus $\|J'(s)\| = 1$ für fast alle $s \in (0, a)$ folgt. Das Vorzeichen von $\langle J'(t), \tau_m \rangle$ ist von t unabhängig, o.B.d.A. positiv. Nun zeigen wir

$$|\langle n_m, J'(t) \rangle| \leq \tilde{L} \langle \tau_m, J'(t) \rangle \quad (2.33)$$

für alle $t \in (0, a)$, in denen J differenzierbar ist. Sei hierzu $t' \in (0, a)$ eine weitere Zahl und $x, x' \in \tilde{I}$ die Zahlen mit $g_m(x) = J(t)$ und $g_m(x') = J(t')$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |\langle n_m, J(t) \rangle - \langle n_m, J(t') \rangle| &= |\langle n_m, g_m(x) \rangle - \langle n_m, g_m(x') \rangle| \\ &= |\tilde{f}_r^m(x) - \tilde{f}_r^m(x')| \\ &\leq \tilde{L} \cdot |x - x'| \\ &= \tilde{L} \cdot |\langle \tau_m, g_m(x) \rangle - \langle \tau_m, g_m(x') \rangle| \\ &= \tilde{L} \cdot |\langle \tau_m, J(t) \rangle - \langle \tau_m, J(t') \rangle|. \end{aligned}$$

Division durch $t - t'$ und Grenzübergang für $t \rightarrow t'$ liefert (2.33), da $\langle \tau_m, J'(t) \rangle > 0$. Weiter definieren wir für jedes $x \in \tilde{I}$ eine Zahl $s_x \in (0, a)$ durch $J(s_x) = g_m(x)$. Wegen Satz 2.27 gilt für $x, x' \in \tilde{I}$, dass

$$s_{x'} - s_x = \mathcal{H}^1(J([s_x, s_{x'}])) = \mathcal{H}^1(\{g_m(\xi) | x \leq \xi < x'\}) \in [x' - x, (x' - x) \cdot \sqrt{1 + L^2}].$$

Also ist $x \mapsto s_x$ für fast alle $x \in \tilde{I}$ differenzierbar mit

$$\frac{d}{dx} s_x \in \left[1, \sqrt{1 + \tilde{L}^2}\right]. \quad (2.34)$$

Weiter ist J für fast alle $x \in \tilde{I}$ in s_x differenzierbar. Für fast alle $x \in \tilde{I}$ folgt aus (2.34) und (2.33), da $\langle \tau_m, J'(s_x) \rangle \leq 1$, dass

$$|\langle n_m, J'(s_x) \rangle| (1 - \frac{d}{dx} s_x) \leq \tilde{L} (\sqrt{1 + \tilde{L}^2} - 1). \quad (2.35)$$

Außerdem folgt aus (2.33) und

$$\langle n_m, J'(s_x) \rangle^2 + \langle \tau_m, J'(s_x) \rangle^2 = \|J'(s_x)\|^2 = 1,$$

dass

$$|\langle \tau_m, J'(s_x) \rangle| \geq \frac{1}{\sqrt{1 + \tilde{L}^2}}. \quad (2.36)$$

Weil $K + rB$ nach [28, Lemma 2.5] sternförmig ist, können wir [28, Lemma 2.3] anwenden und deshalb stehen $n_B(K, g_m(x))$ und $J'(s_x)$ für alle $x \in \tilde{I}$, für die J in s_x differenzierbar

ist, senkrecht aufeinander. O.B.d.A. haben die Orthonormalbasen $(n_B(K, g_m(x)), J'(s_x))$ und (n_m, τ_m) dieselbe Orientierung. Weiter wählen wir einen Vektor v so, dass $(\frac{\nu_m}{\|\nu_m\|}, v)$ eine Orthonormalbasis der selben Orientierung ist. Dann gilt

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\tilde{I}} \left\langle \frac{\nu_m}{\|\nu_m\|}, n_m - n_B(K, g_m(x)) \right\rangle dx \right| \\
&= \left| \int_{\tilde{I}} \langle v, \tau_m - J'(s_x) \rangle dx \right| \\
&= \left| \langle \tau_m, v \rangle \int_{\tilde{I}} \langle \tau_m, \tau_m - J'(s_x) \rangle dx + \langle n_m, v \rangle \int_{\tilde{I}} \langle n_m, \tau_m - J'(s_x) \rangle dx \right| \\
&\leq \left| \int_{\tilde{I}} \langle \tau_m, \tau_m - J'(s_x) \rangle dx \right| + \left| \int_{\tilde{I}} \langle n_m, -J'(s_x) \frac{d}{dx} s_x \rangle dx \right| \\
&\quad + \left| \int_{\tilde{I}} \langle n_m, J'(s_x) - J'(s_x) \frac{d}{dx} s_x \rangle dx \right| \\
&\leq \int_{\tilde{I}} 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \tilde{L}^2}} dx + \left| \int_{\tilde{I}} \frac{d}{dx} \langle n_m, -J(s_x) \rangle dx \right| + \int_{\tilde{I}} \tilde{L}(\sqrt{1 + \tilde{L}^2} - 1) dx,
\end{aligned}$$

wobei wir zuletzt den ersten Integranden mit Hilfe von (2.36) abgeschätzt haben und den dritten mit Hilfe von (2.35). Das zweite Integral lässt sich mit Hilfe des Hauptsatzes der Integralrechnung, Satz 1.10, berechnen, da $x \mapsto \langle n_m, -J(s_x) \rangle = -\tilde{f}_m^r(x)$ Lipschitz-stetig und somit absolut-stetig ist. Wegen (2.28) ist $\lim_{x \rightarrow 0} \langle n_m, J(s_x) \rangle = \lim_{x \rightarrow a} \langle n_m, J(s_x) \rangle$ und daher hat das zweite Integral den Wert 0. Somit ist obige Summe gleich

$$\begin{aligned}
& j_m \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \tilde{L}^2}} \right) + 0 + j_m \tilde{L}(\sqrt{1 + \tilde{L}^2} - 1) \\
&\leq j_m(\sqrt{1 + \tilde{L}^2} - 1) + j_m \tilde{L}(\sqrt{1 + \tilde{L}^2} - 1) \\
&= (1 + \tilde{L})j_m(\sqrt{1 + \tilde{L}^2} - 1) \\
&\leq 2j_m \left(1 + 2\left(\frac{j_m}{Rr}\right)^2 - 1 \right) \\
&= \frac{4j_m^3}{(Rr)^2},
\end{aligned}$$

wobei wir beim letzten Ungleichheitszeichen (2.30) und (2.29) verwendet haben. Somit folgt aus (2.32), dass

$$\begin{aligned}
& \int_{F_r^m} h_B(n_B(K, z)) d\mathcal{H}^1(z) - j_m h_B(n_m) \\
&\leq 2\left(\frac{j_m}{Rr}\right)^2 \cdot j_m h_B(n_m) + \left(1 + 2\left(\frac{j_m}{Rr}\right)^2\right) \cdot j_m c_m r^{-2} \\
&\quad + \left(1 + 2\left(\frac{j_m}{Rr}\right)^2\right) \cdot S \left| \int_{\tilde{I}} \left\langle \frac{\nu_m}{\|\nu_m\|}, n_m - n_B(K, x\tau_m + \tilde{f}_r^m(x)n_m) \right\rangle dx \right| \\
&\leq 2\left(\frac{j_m}{Rr}\right)^2 \cdot j_m h_B(n_m) + \left(1 + 2\left(\frac{j_m}{Rr}\right)^2\right) \cdot j_m \frac{\left(\left(1 + \frac{\|\nu_m\|}{4R}\right) \text{diam } K\right)^2}{2R} r^{-2} \\
&\quad + \left(1 + 2\left(\frac{j_m}{Rr}\right)^2\right) \cdot S \frac{4j_m^3}{(Rr)^2}.
\end{aligned}$$

Also ergibt sich aus (2.27)

$$\begin{aligned}
& \int_{\text{bd}(K+rB)} h_B(n_B(K, z)) d\mathcal{H}^1(z) - \int_{\text{bd}(L+rB)} h_B(n_B(L, z)) d\mathcal{H}^1(z) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \int_{F_r^m} h_B(n_B(K, z)) d\mathcal{H}^1(z) - j_m h_B(n_m) \\
&\leq \sum_{m=0}^{\infty} 2 \left(\frac{j_m}{Rr} \right)^2 \cdot j_m h_B(n_m) + (1 + 2 \left(\frac{j_m}{Rr} \right)^2) \cdot j_m \frac{((1 + \frac{\|\nu_m\|}{4R}) \text{diam } K)^2}{2R} r^{-2} \\
&\qquad\qquad\qquad + (1 + 2 \left(\frac{j_m}{Rr} \right)^2) \cdot \frac{4j_m^3 S}{(Rr)^2}.
\end{aligned}$$

Da man aus der Voraussetzung $r > \frac{2S \text{diam } K}{R^2}$ folgern kann, dass $\frac{j_m}{Rr} < \frac{1}{2}$ und somit $1 + 2 \left(\frac{j_m}{Rr} \right)^2 < 2$ gilt, kann man dies abschätzen durch

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=0}^{\infty} 2 \frac{j_m^3}{(Rr)^2} S + 2j_m \frac{(\frac{5S}{4R} \text{diam } K)^2}{2R} \cdot r^{-2} + 8 \frac{j_m^3 S}{(Rr)^2} \\
&\leq \left(10S \frac{\sum_{m=0}^{\infty} j_m^3}{R^2} + 2 \frac{S^2 (\text{diam } K)^2 \sum_{m=0}^{\infty} j_m}{R^3} \right) \cdot r^{-2} \\
&\leq \left(10S \frac{(\sum_{m=0}^{\infty} j_m)^3}{R^2} + 2 \frac{S^2 (\text{diam } K)^2 \sum_{m=0}^{\infty} j_m}{R^3} \right) \cdot r^{-2} \\
&\leq \left(10 \frac{S(2\pi \text{diam } K)^3}{R^2} + 2 \frac{S^2 (\text{diam } K)^2 \cdot 2\pi \text{diam } K}{R^3} \right) \cdot r^{-2} \\
&\leq \left((10 + \frac{S}{R}) \frac{S(2\pi \text{diam } K)^3}{R^2} \right) \cdot r^{-2},
\end{aligned}$$

wobei man die Ungleichung $\sum_{m=0}^{\infty} j_m \leq 2\pi \cdot \text{diam } K$ wie folgt sieht: Die I_m sind paarweise disjunkte Teilmengen von $\text{bd conv } K$, also $\sum_{m=0}^{\infty} j_m \leq \mathcal{H}^1(\text{bd conv } K)$. Wegen [46, S. 210] folgt $\sum_{m=0}^{\infty} j_m \leq 2V_1(\text{conv } K)$. Da $\text{conv } K$ in einem Kreis vom Radius $\text{diam } K$ enthalten ist und V_1 monoton ist, gilt $\sum_{m=0}^{\infty} j_m \leq 2V_1(\text{conv } K) \leq 2\pi \cdot \text{diam } K$. Somit ist die zweite Ungleichung der Behauptung gezeigt.

Der Beweis der ersten Ungleichung ist weitgehend analog zum Beweis der zweiten Ungleichung. Wir werden Rechnung, die exakt identisch sind, weglassen. Wenn g_m wieder die durch (2.31) definierte Funktion bezeichnet, folgt aus Lemma 2.27, dass für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}
& \int_{F_r^m} h_B(n_B(K, z)) d\mathcal{H}^1(z) - j_m h_B(n_m) \geq \int_{\bar{I}} h_B(n_B(K, g_m(x))) dx - j_m h_B(n_m) \\
&\geq \int_{\bar{I}} h_B(n_m) - \langle \nu_m, n_m - n_B(K, g_m(x)) \rangle - c_m r^{-2} dx - j_m h_B(n_m) \\
&\geq -j_m c_m r^{-2} - \int_{\bar{I}} \langle \nu_m, n_m - n_B(K, g_m(x)) \rangle dx \\
&\geq -j_m \frac{((1 + \frac{\|\nu_m\|}{4R}) \text{diam } K)^2}{2R} r^{-2} - \frac{4j_m^3 S}{(Rr)^2}
\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
& \int_{\text{bd}(K+rB)} h_B(n_B(K, z)) d\mathcal{H}^1(z) - \int_{\text{bd}(L+rB)} h_B(n_B(L, z)) d\mathcal{H}^1(z) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \int_{F_r^m} h_B(n_B(K, z)) d\mathcal{H}^1(z) - j_m h_B(n_m) \\
&\geq - \sum_{m=0}^{\infty} \left(j_m \frac{((1 + \frac{\|\nu_m\|}{4R}) \text{diam } K)^2}{2R} r^{-2} + \frac{4j_m^3 S}{(Rr)^2} \right) \\
&\geq - \left(\sum_{m=0}^{\infty} j_m \right) \frac{((\frac{5S}{4R}) \text{diam } K)^2}{2R} r^{-2} - \frac{4S \cdot \sum_{m=0}^{\infty} j_m^3}{(Rr)^2} \\
&\geq - (2\pi \cdot \text{diam } K) \frac{((\frac{5S}{4R}) \text{diam } K)^2}{2R} r^{-2} - \frac{4S \cdot (2\pi \cdot \text{diam } K)^3}{(Rr)^2} \\
&\geq \left[-\left(\frac{S}{R} + 4\right) \frac{S(2\pi \cdot \text{diam } K)^3}{R^2} \right] \cdot r^{-2} \quad \square
\end{aligned}$$

Wir erhalten nun folgenden Spezialfall von Satz 2.24:

Lemma 2.31. *Sei $K \subseteq \mathbb{R}^2$ eine kompakte Menge und $L := \text{conv } K$. Dann gilt für $b \geq a \geq 2R^{-2}S \text{diam } K$, dass*

$$\begin{aligned}
& |(V_2(K + bB) - V_2(L + bB)) - (V_2(K + aB) - V_2(L + aB))| \\
&\leq \int_a^b \left(\left(10 + \frac{S}{R}\right) \frac{S(2\pi \text{diam } K)^3}{R^2} \right) \cdot s^{-2} ds. \quad (2.37)
\end{aligned}$$

Beweis: Auf Grund von Satz 1.42 und Lemma 2.28 gilt

$$\begin{aligned}
& (V_2(K + bB) - V_2(L + bB)) - (V_2(K + aB) - V_2(L + aB)) \\
&= \int_a^b \left(\int_{\text{bd}(K+sB)} h_B(n_B(K, z)) d\mathcal{H}^1(z) - \int_{\text{bd}(L+sB)} h_B(n_B(L, z)) d\mathcal{H}^1(z) \right) ds
\end{aligned}$$

für $b \geq a \geq 0$. Wegen Lemma 2.29 impliziert dies die Behauptung. \square

Beweis von Satz 2.24: Es bezeichne wieder $X^x := X \cap (x + \hat{Y})$ und $Z^x := \text{conv } X^x$ für $x \in Y^\perp$ und $X|Y^\perp$ das Bild von X unter der orthogonalen Projektion auf Y^\perp .

Sei $b > a \geq 1$. Für jedes $x \in Y^\perp$ können wir auf Grund der Translationsinvarianz des Volumens gleichzeitig \hat{Y} und $x + \hat{Y}$ mit \mathbb{R}^2 identifizieren, und zwar so, dass $RB^2 \subseteq Y$. Durch eine einfache Fallunterscheidung danach, ob $2R^{-2}S \text{diam } X^x$, größer als b ist, in $[a, b]$ liegt, oder kleiner als a ist, folgt aus Lemma 2.31 und Satz 1.43 in jedem der drei Fälle

$$\begin{aligned}
& (V_2(X^x + bY) - V_2(Z^x + bY)) - (V_2(X^x + aY) - V_2(Z^x + aY)) \\
&\leq \int_a^b \mathbf{1}_{\{s > 2R^{-2}S \text{diam } X^x\}} \left(\left(10 + \frac{S}{R}\right) \frac{S(2\pi \text{diam } X^x)^3}{R^2} \right) \cdot s^{-2} ds \\
&\quad + \int_a^b \mathbf{1}_{\{s \leq 2R^{-2}S \text{diam } X^x\}} \frac{2}{s} (V_2(X^x + sY) + V_2(Z^x + sY)) ds.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe des Satzes von Fubini können wir nun schließen

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}[V_d(X + bY) - V_d(X_Y + bY)] - \mathbb{E}[V_d(X + aY) - V_d(X_Y + aY)] \\
&= \mathbb{E} \int_{X|Y^\perp} (V_2(X^x + bY) - V_2(Z^x + bY)) - (V_2(X^x + aY) - V_2(Z^x + aY)) dx \\
&\leq \mathbb{E} \int_{X|Y^\perp} \left(\int_a^b \mathbf{1}_{\{s > 2R^{-2}S \operatorname{diam} X^x\}} \left(\left(10 + \frac{S}{R}\right) \frac{S(2\pi \operatorname{diam} X^x)^3}{R^2} \right) \cdot s^{-2} ds \right. \\
&\quad \left. + \int_a^b \mathbf{1}_{\{s \leq 2R^{-2}S \operatorname{diam} X^x\}} \frac{2}{s} (V_2(X^x + sY) + V_2(Z^x + sY)) ds \right) dx \\
&\leq \mathbb{E} \kappa_{n-2} G^{n-2} \left(\int_a^b \left(\left(10 + \frac{S}{R}\right) \frac{S(2\pi G)^3}{R^2} \right) \cdot s^{-2} ds \right. \\
&\quad \left. + \int_a^b \frac{(2R^{-2}SG)^3}{s^3} \frac{2}{s} 2\pi(G + sS)^2 ds \right) \\
&= \int_a^b \mathbb{E} \kappa_{n-2} G^{n-2} \left(\left(10 + \frac{S}{R}\right) \frac{S(2\pi G)^3}{R^2} \cdot s^{-2} + \frac{(2SG)^3}{R^6 s^4} 4\pi(G + sS)^2 \right) ds.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt, z.B. mit Satz 1.10, dass $r \mapsto \mathbb{E}[V_d(X + rY) - V_d(X_Y + rY)]$ fast überall differenzierbar ist. Weiter folgt für alle $r > 1$, in denen dieser Term differenzierbar ist, unter Verwendung der Voraussetzungen $R \leq 1$, $S, G \geq 1$, dass

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{d}{dr} \mathbb{E}[V_d(X + rY) - V_d(X_Y + rY)] \right| \\
&\leq \mathbb{E} \left[\kappa_{n-2} G^{n-2} \cdot \left(\left(10 + \frac{S}{R}\right) \frac{S(2\pi G)^3}{R^2} \cdot r^{-2} + \frac{(2SG)^3}{R^6 r^4} 4\pi(G + rS)^2 \right) \right] \\
&\leq \mathbb{E} \left[\kappa_{n-2} G^{n-2} \cdot \left(\left(11 \frac{S}{R}\right) \frac{S(2\pi G)^3}{R^2} \cdot r^{-2} + \frac{(2SG)^3}{R^6 r^4} 4\pi(2GrS)^2 \right) \right] \\
&\leq 3200 \kappa_{n-2} \mathbb{E} \left[\left(\frac{SG}{R^2} \right)^3 G^m S^2 \right] \cdot r^{-2}. \quad \square
\end{aligned}$$

2.4 Körper mit polynomialem Parallelvolumen

Heveling, Hug und Last [25] bewiesen, dass das Parallelvolumen eines Körpers im \mathbb{R}^2 genau dann ein Polynom ist, wenn der Körper konvex ist. Dieses Resultat wurde von Hug, Last und Weil [28] auf zufällige Mengen, höhere Dimensionen und verschiedene Eichkörper verallgemeinert.

Wir werden in diesem Abschnitt zunächst einen neuen Beweis für diese Verallgemeinerung geben. Anschließend werden wir uns der Frage zuwenden, wodurch Körper mit polynomialem Parallelvolumen im \mathbb{R}^3 charakterisiert werden können. Wir werden von einigen Körpern nachweisen, dass sie polynomiales Parallelvolumen haben, und dann ein Charakterisierungsergebnis für Körper mit polynomialem Parallelvolumen im \mathbb{R}^3 angeben. Allerdings wird dieses Resultat so stark vom Begriff der Parallelmenge Gebrauch machen,

dass das Problem der Charakterisierung der Körper mit polynomialen Parallelvolumen in \mathbb{R}^3 weiterhin als ungelöst angesehen werden muss.

Wir erinnern uns an die Definition der Begriffe Scheibenkörper und δ -Zahl zu Beginn des Abschnitts 2.1. Wir erhalten nun Theorem 4.4 von [28] unter leicht anderen Voraussetzungen.

Korollar 2.32. *Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ein zufälliger Körper und $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ ein zufälliger Scheibenkörper mit δ -Zahl $\Delta := \delta_Y$. Es gelte für ein $r > 0$*

$$\mathbb{E} V_n(X_Y + rY) < \infty \quad \wedge \quad \mathbb{E} V_n((X_Y + Y) \setminus X_Y) \cdot \text{diam } X \cdot \Delta < \infty.$$

Dann ist $X \cap (x + \hat{Y})$ genau dann f.s. für V_{n-2} -fast alle $x \in Y^\perp$ konvex, wenn $\mathbb{E} V_n(X + rY)$ ein Polynom ist.

Beweis: Wir nehmen zunächst an, dass $X \cap (x + \hat{Y})$ f.s. für V_{n-2} -fast alle $x \in Y^\perp$ konvex ist. Es bezeichne wieder $X|_{Y^\perp}$ die orthogonale Projektion von X auf Y^\perp . Dann folgt aus (1.18), dass

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[V_n(X + rY)] &= \mathbb{E} \left[\int_{X|_{Y^\perp}} V_2((X \cap (x + \hat{Y})) + rY) dx \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_{X|_{Y^\perp}} V_2(X \cap (x + \hat{Y})) + 2rV(X \cap (x + \hat{Y}), Y) + r^2V_2(Y) dx \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_{X|_{Y^\perp}} V_2(X \cap (x + \hat{Y})) dx \right] \\ &\quad + r \cdot 2\mathbb{E} \left[\int_{X|_{Y^\perp}} V(X \cap (x + \hat{Y}), Y) dx \right] + r^2\mathbb{E} \left[\int_{X|_{Y^\perp}} V_2(Y) dx \right]. \end{aligned}$$

Insbesondere ist $\mathbb{E}[V_n(X + rY)]$ ein Polynom.

Nun nehmen wir umgekehrt an, dass $\mathbb{E}[V_n(X + rY)]$ ein Polynom ist. Nach der bereits bewiesenen Richtung des Satzes ist $\mathbb{E}[V_n(X_Y + rY)]$ ebenfalls ein Polynom, also auch

$$\mathbb{E}[V_n(X_Y + rY)] - \mathbb{E}[V_n(X + rY)].$$

Da letzterer Ausdruck nach Satz 2.1 gegen 0 strebt, muss er das Nullpolynom sein. Somit muss aber f.s. für fast alle $x \in Y^\perp$ gelten, dass

$$V_2 \left([\text{conv}(X \cap (x + \hat{Y}))] + \frac{1}{m}Y \right) - V_2 \left((X \cap (x + \hat{Y})) + \frac{1}{m}Y \right) = 0$$

für alle $m \in \mathbb{N}^+$. Weil die Menge $(\text{conv } X \cap (x + \hat{Y})) + \frac{1}{m}Y$ aber der Abschluss ihres Inneren (bzgl. des 2-dimensionalen affinen Raums $x + \hat{Y}$) ist, folgt hieraus

$$[\text{conv}(X \cap (x + \hat{Y}))] + \frac{1}{m}Y = (X \cap (x + \hat{Y})) + \frac{1}{m}Y$$

für alle $m \in \mathbb{N}^+$. Indem man nun den Durchschnitt über alle $m \in \mathbb{N}^+$ bildet, erhält man $\text{conv}(X \cap (x + \hat{Y})) = X \cap (x + \hat{Y})$, was bedeutet, dass $X \cap (x + \hat{Y})$ konvex ist. \square

Natürlich kann man die Folgerungen, die in [28] aus dem dortigen Theorem 4.4 gezogen werden, auch aus unserem Korollar 2.32 ziehen. In [28, Theorem 4.5] kann man die

Voraussetzung, dass X in einer deterministischen Kugel liegen muss, sogar dahin abschwächen, dass $\mathbb{E}(\text{diam } X)^n < \infty$. Wenn Y nämlich wieder wie in Korollar 2.32 ist, und wir $Z^x := \text{conv } X \cap (x + \hat{Y})$ für $x \in Y^\perp$ setzen, dann gilt fast sicher

$$\begin{aligned} V_n((X_Y + Y) \setminus X_Y) &= \int_{X|Y^\perp} V_2((Z^x + Y) \setminus Z^x) dx \\ &= \int_{X|Y^\perp} V_2(Y) + 2V(Z^x, Y) dx \\ &\leq \int_{X|Y^\perp} V_2(Y) + 2(\text{diam } X)(\text{diam } Y)V(B^2, B^2) dx \\ &\leq \kappa_{n-2}(\text{diam } X)^{n-2}(V_2(Y) + 2\pi \cdot \text{diam } X \cdot \text{diam } Y). \end{aligned}$$

Sogar wörtlich erhält man [28, Corollary 4.6]. Zu [28, Theorem 5.3] kommen wir auf Seite 120.

In [25] wird ein Verfahren zur Konstruktion von nicht-konvexen Körpern mit polynomialem Parallelvolumen angegeben. In ungeraden Dimensionen $d \geq 3$ lassen sich so unter anderem Körper erzeugen, die die Vereinigung zweier Kugeln gleichen Radius, die sich schneiden, sind. Haben die Kugeln unterschiedlichen Radius, lassen sich die Körper nicht mit dem dort beschriebenen Verfahren erzeugen. Wir werden aber nun zeigen, dass diese Körper trotzdem polynomiales Parallelvolumen haben.

Beispiel 2.33. Sei also $K \subseteq \mathbb{R}^d$, d ungerade, die Vereinigung der Kugeln $B_a(0)$ und $B_b(l e_1)$, wobei $a, b, l \in \mathbb{R}^+$ Zahlen mit $a + b \geq l$, $a + l > b$ und $b + l > a$ sind und e_1 den ersten Einheitsvektor bezeichnet. Die Kugeln $B_a(0)$ und $B_b(l e_1)$ schneiden sich also, aber keine liegt in der anderen. Um das Volumen von $K + rB^d$, $r \in \mathbb{R}_0^+$, zu berechnen, sind Vorüberlegungen nötig. Für $t < -a - r$ oder $t > b + l + r$ ist $(K + rB^d) \cap \{x \in \mathbb{R}^d | \langle x, e_1 \rangle = t\}$ die leere Menge. Für $t \in [-a - r, b + l + r]$ ist $(K + rB^d) \cap \{x \in \mathbb{R}^d | \langle x, e_1 \rangle = t\}$ ein $(d - 1)$ -dimensionaler Ball vom Radius $\max\{\sqrt{(a + r)^2 - t^2}, \sqrt{(b + r)^2 - (t - l)^2}\}$, also von $(d - 1)$ -dimensionalem Volumen

$$\kappa_{d-1} \left(\max\{\sqrt{(a + r)^2 - t^2}, \sqrt{(b + r)^2 - (t - l)^2}\} \right)^{d-1}.$$

Um zu entscheiden, für welche t die Ungleichung

$$(a + r)^2 - t^2 > (b + r)^2 - (t - l)^2 \tag{2.38}$$

gilt, löst man zunächst die Gleichung $(a + r)^2 - t_0^2 = (b + r)^2 - (t_0 - l)^2$. Da t_0^2 auf beiden Seiten den Koeffizienten -1 hat, besitzt diese Gleichung genau eine Lösung, nämlich

$$t_0 = \frac{(a + r)^2 - (b + r)^2}{2l} + \frac{l}{2}.$$

Wie man mit Hilfe der Ungleichungen $a + l > b$ bzw. $b + l > a$ leicht nachrechnet, ist für $t = -a - r$ Ungleichung (2.38) erfüllt, während für $t = b + l + r$ die umgekehrte Ungleichung erfüllt ist. Wegen dem Zwischenwertsatz gilt für $t \in [-a - r, t_0)$ Ungleichung (2.38) und für $t \in (t_0, b + l + r]$ die umgekehrte Ungleichung.

Aus diesen Überlegungen folgt

$$\begin{aligned}
V_d(K+rB^d) &= \int_{-a-r}^{b+l+r} V_{d-1}((K+rB^d) \cap \{x \in \mathbb{R}^d \mid \langle x, e_1 \rangle = t\}) dt \\
&= \int_{-a-r}^{t_0} \kappa_{d-1} \cdot \sqrt{(a+r)^2 - t^2}^{d-1} dt + \int_{t_0}^{b+l+r} \kappa_{d-1} \cdot \sqrt{(b+r)^2 - (t-l)^2}^{d-1} dt.
\end{aligned}$$

Da wir angenommen haben, dass d ungerade ist, sind die Integranden Polynome in t und r . Also sind die Stammfunktionen bezüglich t ebenfalls Polynome in t und r . Da die Integralgrenzen Polynome in r sind, sind also die Werte der Integrale Polynome in r . Dies zeigt aber, dass K polynomiales Parallelvolumen hat.

Nun kommen wir zum angekündigten Charakterisierungsergebnis für Körper im \mathbb{R}^3 , deren Parallelvolumen ein Polynom ist.

Satz 2.34. *Das Parallelvolumen eines Körpers $K \subseteq \mathbb{R}^3$ ist genau dann ein Polynom, wenn seine Parallelmenge $K + rB^3$ für fast alle $r \in \mathbb{R}_0^+$ die selbe Oberfläche wie ihre konvexe Hülle $\text{conv } K + rB^3$ hat.*

Beweis: Da die Stützfunktion von B^d für jeden Einheitsvektor den Wert 1 hat, folgt aus Satz 1.42

$$V_d((K+rB^d) \setminus K) = \int_0^r \mathcal{H}^{d-1}(\text{bd}(K+sB^d)) ds \quad (2.39)$$

für Körper $K \subseteq \mathbb{R}^d$.

Wenn nun $K+rB^3$ für fast alle $r \in \mathbb{R}_0^+$ die selbe Oberfläche wie $\text{conv } K+rB^3$ hat, folgt hieraus

$$\begin{aligned}
&(V_3(\text{conv } K+rB^3) - V_3(\text{conv } K)) - (V_3(K+rB^3) - V_3(K)) \\
&= \int_0^r \mathcal{H}^2(\text{bd } \text{conv}(K+sB^3)) ds - \int_0^r \mathcal{H}^2(\text{bd}(K+sB^3)) ds = 0.
\end{aligned}$$

Da aber $V_3(\text{conv } K+rB^3)$ ein Polynom ist, muss somit auch $V_3(K+rB^3)$ ein Polynom sein.

Sei umgekehrt $V_3(K+rB^3)$ ein Polynom. Da $V_3(\text{conv } K+rB^3)$ ein Polynom ist, ist auch

$$V_3(\text{conv } K+rB^3) - V_3(K+rB^3)$$

ein Polynom und nach Satz 2.15 beschränkt, also konstant. Wegen (2.39) ist also auch

$$\int_0^r \mathcal{H}^2(\text{bd } \text{conv}(K+tB^3)) dt - \int_0^r \mathcal{H}^2(\text{bd}(K+tB^3)) dt$$

konstant und somit

$$\mathcal{H}^2(\text{bd } \text{conv}(K+rB^3)) = \mathcal{H}^2(\text{bd}(K+rB^3))$$

für fast alle $r \in \mathbb{R}_0^+$. □

Kapitel 3

Gewichtete Parallelvolumina

Ausgangspunkt dieses Kapitels sind die drei Darstellungen (1.29), (1.30) und (1.31) des Wills-Funktional. Für jede der drei Darstellungen werden wir eine Klasse von Funktionalen betrachten, die eine ähnliche Darstellung besitzen. Konkret werden wir einen festen Eichkörper B wählen und als Verallgemeinerungen von (1.29) die Linearkombinationen von gemischten Volumina mit B betrachten. Als zu (1.30) ähnliche Funktionale nehmen wir Terme der Form

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(d_B(K, x)) dx \quad (3.1)$$

mit einer Funktion $g : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$, die schwache Regularitätsbedingungen erfüllt, und die Verallgemeinerungen von (1.31) werden die Ausdrücke der Form

$$\int_{\mathbb{R}_0^+} V_d(K + \lambda B) d\rho(\lambda) \quad (3.2)$$

sein, wobei ρ ein signiertes Maß ist, das schwachen Integrabilitätsbedingungen genügt. Im ersten Abschnitt dieses Kapitels werden wir untersuchen, in wie weit auch diese Verallgemeinerungen nur verschiedene Darstellungen der selben Funktionen $\mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$ sind. Dabei werden wir eine Charakterisierung des Wills-Funktional durch Dimensionsinvarianz erhalten.

Die Terme der Form (3.2) kann man als Funktionale der Form $\mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ betrachten. Wir werden diese *gewichtete Parallelvolumina* nennen. In Abschnitt 3.2 werden wir untersuchen, für welche signierten Maße das gewichtete Parallelvolumen translations-invariant, stetig, additiv, submodular bzw. monoton ist, und feststellen, dass ein signiertes Maß durch sein gewichtetes Parallelvolumen eindeutig bestimmt ist. Häufig werden wir dabei allgemeiner die Funktionale

$$f_\mu : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}, K \mapsto \int_{\mathcal{K}} V_d(K + A) d\mu(A),$$

betrachten, wobei μ ein signiertes Maß auf \mathcal{K} ist.

In den letzten beiden Abschnitten dieses Kapitels werden wir die Funktionen $\mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ untersuchen, die entstehen, indem man ein gewichtetes Parallelvolumen oder ein Funktional f_μ auf das Minkowski-Produkt rK anwendet, wobei K ein fester Körper und r die Variable ist. In Abschnitt 3.3 werden wir die Ableitungen dieser Funktion untersuchen und explizite Formeln für die ersten beiden Ableitungen in $r = 0$ enthalten. In

Abschnitt 3.4 werden wir sehen, dass diese Funktionen Polynome sind, falls K konvex ist, und unter bestimmten Voraussetzungen auch umgekehrt K konvex sein muss, falls diese Funktionen Polynome sind. Um die Voraussetzungen, unter denen diese Umkehrung gilt, abzuschwächen, werden wir lokale Versionen der gewichteten Parallelvolumina einführen.

3.1 Verallgemeinerungen des Wills-Funktional

In diesem Abschnitt wollen wir drei Klassen von Funktionalen betrachten, nämlich die Linearkombinationen von gemischten Volumina mit einem festen Eichkörper, die Funktionale der Form (3.1) und die der Form (3.2). Wir werden sehen, dass ein Funktional auf der Menge der konvexen Körper \mathcal{K} in einer beliebigen, aber festen Dimension, genau dann in einer dieser drei Klassen liegt, wenn es auch in den beiden anderen Klassen liegt. Allerdings ist das Wills-Funktional durch eine Dimensionsinvarianz charakterisiert.

Wir beginnen mit einem analytischen Lemma, das wir benötigen, um zu zeigen, dass die Funktionale der Form (3.2) genau die Linearkombinationen gemischter Volumina sind.

Lemma 3.1. *Seien $\gamma_0, \dots, \gamma_d \in \mathbb{R}$ gegeben. Seien $m_0, \dots, m_d \in \mathbb{R}^+$ paarweise verschieden. Dann gibt es x_0, \dots, x_d so, dass für die durch*

$$g : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \sum_{i=0}^d x_i e^{-m_i t}$$

definierte Funktion gilt

$$\int_0^\infty g(t) t^j dt = \gamma_j, \quad j = 0, \dots, d.$$

Beweis: Seien $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ Matrizen mit $a_{ij} = \int_0^\infty e^{-m_i t} t^j dt$ bzw. $b_{ij} = \left(\frac{1}{m_i}\right)^j$, $i, j = 0, \dots, d$. Dann ist die Matrix B nach Lemma 1.17 invertierbar. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \int_0^\infty e^{-m_i t} t^j dt \\ &= \int_0^\infty e^{-r} \left(\frac{r}{m_i}\right)^j \frac{1}{m_i} dr \\ &= \frac{1}{m_i^{j+1}} \int_0^\infty e^{-r} r^j dr \\ &= \Gamma(j+1) \cdot \frac{1}{m_i} \cdot b_{ij}. \end{aligned}$$

Also geht die Matrix A aus der Matrix B hervor, indem man jede Spalte und jede Zeile mit einem bestimmten, von 0 verschiedenen, Faktor multipliziert, und ist somit regulär. Wähle x_0, \dots, x_d als Lösung des Linearen Gleichungssystems

$$A^T \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \vdots \\ \gamma_d \end{pmatrix}$$

und setze $g(t) := \sum_{i=0}^d x_i e^{-m_i t}$. Dann gilt für $j \in \{0, \dots, d\}$

$$\begin{aligned} \gamma_j &= \sum_{i=0}^d a_{ij} x_i \\ &= \sum_{i=0}^d \int_0^\infty e^{-m_i t} t^j dt \cdot x_i \\ &= \int_0^\infty \sum_{i=0}^d x_i e^{-m_i t} t^j dt \\ &= \int_0^\infty g(t) t^j dt. \quad \square \end{aligned}$$

Da sowohl Positiv- als auch Negativteil (vgl. S. 5) eines signierten Maßes stets endliche Gesamtmasse haben, impliziert die Endlichkeit des d -ten Moments die Endlichkeit des 0-ten bis d -ten Moments.

Satz 3.2. *Sei B ein konvexer Körper. Für ein signiertes Maß ρ , dessen d -tes Moment endlich ist, gibt es Konstanten $c_0, \dots, c_d \in \mathbb{R}$ mit*

$$\int_{\mathbb{R}_0^+} V_d(K + \lambda B) d\rho(\lambda) = \sum_{j=0}^d c_j V(K[j], B[d-j]), \quad K \in \mathcal{K}. \quad (3.3)$$

Umgekehrt gibt es für beliebige Konstanten $c_0, \dots, c_d \in \mathbb{R}$ und paarweise verschiedene positive Zahlen m_0, \dots, m_d reelle Zahlen x_0, \dots, x_d so, dass für das signierte Maß ρ mit Lebesgue-Dichte $t \mapsto \sum_{i=0}^d x_i e^{-m_i t}$, $t \geq 0$, die Gleichung (3.3) erfüllt ist.

Beweis: Sei ρ ein signiertes Maß, für das das 0-te bis d -te Moment μ_0, \dots, μ_d endlich ist. Aus (1.18) folgt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_0^+} V_d(K + \lambda B) d\rho(\lambda) &= \int_{\mathbb{R}_0^+} \sum_{j=0}^d \binom{d}{j} \lambda^{d-j} V(K[j], B[d-j]) d\rho(\lambda) \\ &= \sum_{j=0}^d \binom{d}{j} \int_{\mathbb{R}_0^+} \lambda^{d-j} d\rho(\lambda) V(K[j], B[d-j]) \\ &= \sum_{j=0}^d \binom{d}{j} \mu_{d-j} V(K[j], B[d-j]). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Dies zeigt die erste Behauptung.

Wähle zum Nachweis der Umkehrung m_0, \dots, m_d paarweise verschieden. Wegen Lemma 3.1 gibt es dann $x_0, \dots, x_d \in \mathbb{R}_0^+$ so, dass das durch $\rho(C) := \int_C \sum_{i=0}^d x_i e^{-m_i t} dt$, $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_0^+)$, definierte Maß Momente $\mu_{d-j} = c_j / \binom{d}{j}$ hat. Nun folgt aus (3.4) die zweite Behauptung. \square

Während die rechte Seite von (3.3) nur für konvexe Körper definiert ist, ist die linke Seite für beliebige kompakte Mengen definiert. Da jeder Körper K in einer Kugel enthalten

ist, führt die Annahme, dass das d -te Moment von ρ existiert und endlich ist, dazu, dass $\int V_d(K + \lambda B) d\rho^+(\lambda)$ und $\int V_d(K + \lambda B) d\rho^-(\lambda)$ endlich sind, also dass $\int V_d(K + \lambda B) d\rho(\lambda)$ existiert und endlich ist.

Wir wollen nun auch Hadwigers Darstellung des Wills-Funktional verallgemeinern und verwenden hierzu den nach Satz 1.4 definierten Begriff der Tailfunktion.

Satz 3.3. *Sei ρ ein signiertes Maß auf \mathbb{R}_0^+ mit endlichem d -ten Moment und Tailfunktion $G : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$. Sei $B \subseteq \mathbb{R}^d$ ein konvexer Körper mit $0 \in \text{int } B$. Dann gilt für alle Körper $K \subseteq \mathbb{R}^d$, dass*

$$\int_{\mathbb{R}^d} G(d_B(K, x)) dx = \int_{\mathbb{R}_0^+} V_d(K + \lambda B) d\rho(\lambda).$$

Beweis: Nach dem Satz von Fubini (Satz 1.3) gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} G(d_B(K, x)) dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_0^+} \mathbf{1}_{\{d_B(K, x) \leq \lambda\}} d\rho(\lambda) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}_0^+} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{\{d_B(K, x) \leq \lambda\}} dx d\rho(\lambda) \\ &= \int_{\mathbb{R}_0^+} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{K + \lambda B}(x) dx d\rho(\lambda) \\ &= \int_{\mathbb{R}_0^+} V_d(K + \lambda B) d\rho(\lambda). \quad \square \end{aligned}$$

Bem. 3.4. Auf Grund von Satz 1.4 und Lemma 1.5 wissen wir, dass die Funktionen G , die in Satz 3.3 auftreten, genau die linksstetigen Funktionen von endlicher Totalvariation mit $\lim_{r \rightarrow \infty} G(r) = 0$ und $\int_0^\infty G(r)r^{d-1} dr < \infty$ sind.

Def. 3.5. Sei B ein konvexer Körper und ρ ein signiertes Maß auf \mathbb{R}_0^+ , dessen d -tes Moment existiert und endlich ist. Dann nennen wir das Funktional

$$\mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}, K \mapsto \int_{\mathbb{R}_0^+} V_d(K + \lambda B) d\rho(\lambda)$$

ρ -gewichtetes B -Parallelvolumen.

Wir haben gesehen, dass es im Fall $0 \in \text{int } B$ eine eins-zu-eins-Beziehung zwischen den Verallgemeinerungen von Hadwiger's Darstellung des Wills-Funktional und denen der probabilistischen Darstellung, (3.1) bzw. (3.2), gibt. Die Funktionale, die durch diese Beziehung verbunden sind, stimmen auf ihrem gesamten Definitionsbereich, nämlich \mathcal{C} , überein. Da die Verallgemeinerungen von Hadwiger's Darstellung nicht definiert sind, falls $0 \notin \text{int } B$, müssen wir sie also nicht weiter betrachten.

Allerdings müssen wir weiterhin die Verallgemeinerungen der ursprünglichen Darstellung des Wills-Funktional - nämlich die Linearkombinationen der gemischten Volumina - von den gewichteten Parallelvolumina unterscheiden. Während die gewichteten Parallelvolumina auf \mathcal{C} definiert sind, sind die Linearkombinationen gemischter Volumina nur auf \mathcal{K} definiert. Daher ist es nicht überraschend, dass die durch Satz 3.2 hergestellte Relation nicht eins zu eins ist. Außerdem hängt die dort angegebene Umrechnung von der Dimension d des umgebenden Raums ab. Allerdings ist für das Wills-Funktional selbst ein Maß ρ

auf \mathbb{R}_0^+ bekannt, dessen gewichtetes Euklidisches Parallelvolumen in jeder Dimension das Wills-Funktional darstellt. Dies wirft die Frage auf, ob man auch in anderen Situationen eine dimensionsunabhängige Umrechnung erreichen kann.

Wir behandeln dieses Problem nur im Euklidischen Fall ($B = B^d$), da es keine kanonische Art und Weise gibt, die Fragestellung für beliebige Eichkörper präzise zu fassen. Ein Funktional, das für jede Zahl $d \in \mathbb{N}^+$ auf Teilmengen des \mathbb{R}^d definiert ist, heißt *dimensionsinvariant*, wenn für $n > m$ und eine isometrische Einbettung des \mathbb{R}^m in den \mathbb{R}^n das Funktional auf den Teilmengen des \mathbb{R}^m eine Einschränkung des Funktionals auf den Teilmengen des \mathbb{R}^n ist.

Motiviert durch die probabilistische Darstellung des Wills-Funktionalen bezeichnen wir mit W_d das Funktional, das jeden Körper $K \subseteq \mathbb{R}^d$ auf $\mathbb{E}V_d(K + \Lambda B^d)$ abbildet, wobei Λ eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion $1 - e^{-\pi t^2}$, $t \geq 0$, ist.

Satz 3.6. (i) Sei $d < n$ und $K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt. Dann gilt $W_d(K) = W_n(K)$.

(ii) Seien $d, m \in \mathbb{N}^+$ und sei ρ ein signiertes Maß auf \mathbb{R}_0^+ , dessen $(d + m)$ -tes Moment endlich ist. Weiter gelte

$$\int_{\mathbb{R}_0^+} V_m(K + \lambda B^m) d\rho(\lambda) = \int_{\mathbb{R}_0^+} V_n(K + \lambda B^n) d\rho(\lambda) \quad (3.5)$$

für alle $n \in \{m, \dots, m + d\}$ und alle konvexen Körper $K \subseteq \mathbb{R}^m$. Dann gibt es eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ so, dass für alle konvexen Körper $L \subseteq \mathbb{R}^d$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}_0^+} V_d(L + \lambda B^d) d\rho(\lambda) = c \cdot W_d(L). \quad (3.6)$$

(iii) Sei ρ nun ein (positives) Maß, für das alle Momente existieren. Falls nun (3.5) für eine Zahl m und alle $n > m$ und konvexen Körper $K \subseteq \mathbb{R}^m$ gilt, dann ist ρ bis auf einen skalaren Faktor c das Maß aus der probabilistischen Darstellung des Wills-Funktionalen. Insbesondere ist dann Gleichung (3.6) für beliebige Körper $L \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}^+$, erfüllt.

Vor dem Beweis möchten wir noch bemerken, dass man die Gleichung (3.5) nicht für alle konvexen Körper $K \subseteq \mathbb{R}^d$ voraussetzen muss, sondern dass es reicht, wenn die Beziehung für konvexe Körper K_1, \dots, K_N derart gilt, dass der Vektor $(V_m(K_1), \dots, V_m(K_N))$ keine Linearkombination der Vektoren $(V_j(K_1), \dots, V_j(K_N))$, $j = 0, \dots, m - 1$, ist. Wir möchten an Hand eines Beispiels zeigen, dass es konvexe Körper mit dieser Eigenschaft gibt.

Beispiel 3.7. Wähle $t_1, \dots, t_{m+1} \in \mathbb{R}_0^+$ paarweise verschieden und setze $K_i := t_i B^d$, $i = 1, \dots, m + 1$. Dann ist

$$(V_j(K_1), \dots, V_j(K_{m+1})) = V_j(B^d)(t_1^j, \dots, t_{m+1}^j), \quad j = 0, \dots, m.$$

Auf Grund der Invertierbarkeit der Vandermonde-Matrix (Lemma 1.17), sind diese Vektoren linear unabhängig.

Beweis von Satz 3.6: (i) Da K nicht als konvex vorausgesetzt ist, können wir die Aussage nicht aus der Dimensionsinvarianz der inneren Volumina folgern. Daher geben wir einen Beweis, dessen wesentliche Ideen von Hadwiger [21, (2.1)] stammen. Weil die Zufallsvariable Λ aus der Definition von W_d Tailfunktion $e^{-\pi t^2}$, $t \geq 0$, hat, stimmt nach Satz 3.3 Hadwiger's Darstellung des Wills-Funktional auf ganz \mathcal{C} mit der probabilistischen überein. Also gilt

$$\begin{aligned}
 W_n(K) &= \int_{\mathbb{R}^n} \exp\{-\pi \cdot d(K, x)^2\} dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^{n-d}} \exp\{-\pi \cdot (d(K, y)^2 + \|z\|^2)\} dz dy \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} \exp\{-\pi \cdot d(K, y)^2\} dy \cdot \int_{\mathbb{R}^{n-d}} \exp\{-\pi \cdot \|z\|^2\} dz \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} \exp\{-\pi \cdot d(K, y)^2\} dy \\
 &= W_d(K).
 \end{aligned}$$

(ii) Sei $K \subseteq \mathbb{R}^m$ ein konvexer Körper und $n \in \{m, \dots, m+d\}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}_0^+} V_m(K + \lambda B^m) d\rho(\lambda) &= \int_{\mathbb{R}_0^+} \sum_{j=0}^m \kappa_{m-j} \lambda^{m-j} V_j(K) d\rho(\lambda) \\
 &= \sum_{j=0}^m \kappa_{m-j} \int_{\mathbb{R}_0^+} \lambda^{m-j} d\rho(\lambda) V_j(K)
 \end{aligned}$$

und genauso

$$\int_{\mathbb{R}_0^+} V_n(K + \lambda B^n) d\rho(\lambda) = \sum_{j=0}^n \kappa_{n-j} \int_{\mathbb{R}_0^+} \lambda^{n-j} d\rho(\lambda) V_j(K).$$

Aus (3.5) und der Tatsache, dass $V_j(K) = 0$, $j = m+1, \dots, n$, folgt

$$\sum_{j=0}^m \kappa_{m-j} \int_{\mathbb{R}_0^+} \lambda^{m-j} d\rho(\lambda) V_j(K) = \sum_{j=0}^m \kappa_{n-j} \int_{\mathbb{R}_0^+} \lambda^{n-j} d\rho(\lambda) V_j(K).$$

Da K ein beliebiger konvexer Körper war, können wir auf Grund von Beispiel 3.7 einen Koeffizientenvergleich durchführen und erhalten

$$\kappa_{m-j} \int_{\mathbb{R}_0^+} \lambda^{m-j} d\rho(\lambda) = \kappa_{n-j} \int_{\mathbb{R}_0^+} \lambda^{n-j} d\rho(\lambda)$$

für $j = 0, \dots, m$. Sei $k \in \{0, \dots, d\}$. Indem man $j = m$ und $n = k + m = k + j$ setzt, folgt

$$c := \rho(\mathbb{R}_0^+) = \kappa_k \int_{\mathbb{R}_0^+} \lambda^k d\rho(\lambda).$$

Also

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_0^+} V_d(L + \lambda B^d) d\rho(\lambda) &= \sum_{j=0}^d \kappa_{d-j} \int_{\mathbb{R}_0^+} \lambda^{d-j} d\rho(\lambda) V_j(L) \\ &= \sum_{j=0}^d c V_j(L) \\ &= c \cdot W_d(L). \end{aligned}$$

(iii) Analog wie oben gibt es eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ mit

$$\int_{\mathbb{R}_0^+} \lambda^k d\rho(\lambda) = \frac{c}{\kappa_k}, \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (3.7)$$

Offensichtlich gilt $c \in \mathbb{R}_0^+$. Sei ρ_0 das Wahrscheinlichkeitsmaß mit Verteilungsfunktion $1 - e^{-\pi t^2}$. Eine direkte Rechnung zeigt

$$\int_{\mathbb{R}_0^+} \lambda^k d\rho_0(\lambda) = \frac{1}{\kappa_k}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Also ist (3.7) mit $c \cdot \rho_0$ an Stelle von ρ erfüllt. Um nun $\rho = c \cdot \rho_0$ nachzuweisen, reicht es zu zeigen, dass es nur ein Maß ρ gibt, das Gleichung (3.7) erfüllt. Laut [48, Seite 20] reicht es hierfür nachzuweisen, dass $\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sqrt[2k]{c/\kappa_k} < \infty$. Es gilt aber

$$\kappa_k = \frac{\pi^{k/2}}{\Gamma(\frac{k+2}{2})} > \frac{1}{k^k}, \quad k > 1,$$

und somit

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sqrt[2k]{\frac{c}{\kappa_k}} &\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sqrt[2k]{c \cdot k^k} \\ &\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[2k]{c} \cdot \sqrt{k}}{k} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Also gilt $\rho = c \cdot \rho_0$ und somit

$$\int_{\mathbb{R}_0^+} V_d(L + \lambda B^d) d\rho(\lambda) = c \cdot W_d(L). \quad \square$$

3.2 Eigenschaften der gewichteten Parallelvolumina

In diesem Abschnitt werden wir die signierten Maße charakterisieren, deren gewichtete Parallelvolumina translations-invariant, stetig, additiv bzw. submodular sind. Danach werden wir die Monotonie der gewichteten Parallelvolumina untersuchen und zeigen, dass ein gewichtetes Parallelvolumen das zugehörige signierte Maß eindeutig bestimmt.

Häufig werden wir dabei nicht nur die gewünschten Resultate beweisen, sondern allgemeinere Aussagen zeigen und die gewünschten Aussagen als Korollare erhalten.

Wir betrachten \mathcal{K} wieder mit der Fell-Matheron- σ -Algebra (s. Abschnitt 1.6 und Anhang A). Für ein signiertes Maß μ auf \mathcal{K} mit

$$\int_{\mathcal{K}} V_d(K + A) d|\mu|(A) < \infty, \quad K \in \mathcal{C}, \quad (3.8)$$

definieren wir

$$f_\mu : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}, \quad K \mapsto \int_{\mathcal{K}} V_d(K + A) d\mu(A). \quad (3.9)$$

Ein Funktional $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *translations-invariant*, falls

$$\phi(K + x) = \phi(K)$$

für alle $K \in \mathcal{C}$, $x \in \mathbb{R}^d$, wobei $K + x := \{y + x | y \in K\}$.

Satz 3.8. *Sei μ ein signiertes Maß auf \mathcal{K} mit (3.8). Dann ist f_μ translations-invariant.*

Beweis: Folgt sofort aus der Translationsinvarianz des gewöhnlichen Volumens. \square

Direkt aus diesem Satz folgt:

Korollar 3.9. *Sei ρ ein signiertes Maß auf \mathbb{R}_0^+ mit endlichem d -ten Moment und $B \subseteq \mathbb{R}^d$ ein konvexer Körper. Dann ist das ρ -gewichtete B -Parallelvolumen translations-invariant.*

Wir wenden uns nun der Stetigkeit bzgl. der auf Seite 12 definierten Hausdorff-Metrik d^H zu. Hierzu erinnern wir uns, dass \mathcal{K}_0 die Menge aller konvexen Körper mit inneren Punkten bezeichnet und \mathbb{R}^+ die Menge der positiven reellen Zahlen.

Satz 3.10. *Sei μ ein signiertes Maß auf \mathcal{K} mit (3.8). Dann ist f_μ genau dann stetig, wenn $f_\mu = f_{\tilde{\mu}}$, wobei $\tilde{\mu} := \mu|_{\mathcal{K}_0}$.*

Beweis: Sei zunächst $f_\mu = f_{\tilde{\mu}}$. Seien $K \in \mathcal{C}$ und $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathcal{C} , die gegen K konvergiert. Nach Lemma 1.44 gilt $\lim_{i \rightarrow \infty} V_d(K_i + A) = V_d(K + A)$ für alle $A \in \mathcal{K}_0$. Somit folgt aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz (Satz 1.2), dessen Voraussetzungen wir unten überprüfen, dass

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} f_\mu(K_i) &= \lim_{i \rightarrow \infty} f_{\tilde{\mu}}(K_i) \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{K}_0} V_d(K_i + A) d\tilde{\mu}(A) \\ &= \int_{\mathcal{K}_0} V_d(K + A) d\tilde{\mu}(A) \\ &= f_\mu(K). \end{aligned}$$

Da die Folge $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ konvergiert, gibt es ein $S \in \mathbb{R}^+$ mit $K_i \subseteq SB^d$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Nun gilt $V_d(K_i + A) \leq V_d(SB^d + A)$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathcal{K}_0$ und wegen Bemerkung 1.1 und (3.8) ist

$$\int_{\mathcal{K}_0} V_d(SB^d + A) d|\tilde{\mu}|(A) \leq \int_{\mathcal{K}} V_d(SB^d + A) d|\mu|(A) < \infty.$$

Also durften wir Satz 1.2 anwenden.

Sei umgekehrt f_μ stetig. Wir wiederholen $\tilde{\mu} := \mu|_{\mathcal{K}_0}$ und setzen $\eta := \mu - \tilde{\mu}$. Dann gilt

$$f_\eta = f_\mu - f_{\tilde{\mu}}. \quad (3.10)$$

Weil wir angenommen haben, dass f_μ stetig ist und $f_{\tilde{\mu}}$ nach der bereits bewiesenen Richtung dieses Satzes stetig ist, ist auch f_η stetig. Sei nun $K \subseteq \mathbb{R}^d$ endlich. Dann gilt für jeden konvexen Körper $A \subseteq \mathbb{R}^d$ ohne innere Punkte, dass $V_d(K + A) = 0$, woraus $f_\eta(K) = 0$ folgt. Wegen Lemma 1.21 folgt hieraus $f_\eta = 0$ und somit $f_\mu = f_{\tilde{\mu}}$. \square

Die Bedingung $f_\mu = f_{\tilde{\mu}}$ ist nicht äquivalent zu $\mu = \tilde{\mu}$. Wir werden am Ende dieses Abschnitts, ab Seite 97, genauer darauf eingehen.

Korollar 3.11. *Sei ρ ein signiertes Maß mit endlichem d -ten Moment und $B \subseteq \mathbb{R}^d$ ein konvexer Körper mit inneren Punkten. Dann ist das ρ -gewichtete B -Parallelvolumen genau dann stetig, wenn $\rho(\{0\}) = 0$.*

Beweis: Setze $\tilde{\rho} := \rho|_{\mathbb{R}^+}$. Das ρ -gewichtete B -Parallelvolumen stimmt genau dann mit dem $\tilde{\rho}$ -gewichteten B -Parallelvolumen überein, wenn $\rho(\{0\}) = 0$. Somit folgt aus Satz 3.10 die Behauptung. \square

Der *Konvexring* ist definiert durch

$$\mathcal{R} := \left\{ \bigcup_{i=1}^r K_i \mid K_1, \dots, K_r \in \mathcal{K}, r \in \mathbb{N}^+ \right\}.$$

Ein Funktional $\phi : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *additiv*, falls

$$\phi(K \cup L) + \phi(K \cap L) = \phi(K) + \phi(L)$$

für alle $K, L \in \mathcal{R}$, wobei $\phi(\emptyset) := 0$ gesetzt wird.

Lemma 3.12. *Sei μ ein signiertes Maß auf \mathcal{K} mit (3.8), für das die Einschränkung von f_μ auf den Konvexring additiv ist. Dann ist $f_\mu(K) = 0$ für jedes $K \in \mathcal{R}$, das in der Vereinigung von endlich vielen Hyperebenen enthalten ist.*

Beweis: Sei $K \in \mathcal{R}$ zunächst in einer Hyperebene enthalten. Es bezeichne u einen Einheitsvektor, der orthogonal auf dieser Hyperebene steht. Weiter setzen wir

$$K_i := \bigcup_{l=1}^i (K + \frac{l}{i}u), \quad i \in \mathbb{N}^+,$$

und

$$L := \{x + \lambda u \mid x \in K, \lambda \in [0, 1]\}.$$

Dann ist $K_i \in \mathcal{R}$ für $i \in \mathbb{N}^+$ und $L \in \mathcal{R}$. Da f_μ nach Satz 3.8 translationsinvariant ist, und wir angenommen haben, dass die Einschränkung von f_μ auf den Konvexring additiv ist, folgt für jedes $i \in \mathbb{N}^+$

$$\begin{aligned} i \cdot |f_\mu(K)| &= |f_\mu(K_i)| \\ &\leq \int_{\mathcal{K}} V_d(K_i + A) d|\mu|(A) \\ &\leq \int_{\mathcal{K}} V_d(L + A) d|\mu|(A). \end{aligned}$$

Da $i \in \mathbb{N}^+$ beliebig war und der letzte Term endlich und unabhängig von i ist, folgt $|f_\mu(K)| = 0$.

Nun wollen wir die Voraussetzung, dass K in einer Hyperebene enthalten ist, abschwächen. In der Tat folgt induktiv, dass $f_\mu(K) = 0$ für alle $K \in \mathcal{R}$, die in der Vereinigung von n Hyperebenen enthalten sind, für $n \in \mathbb{N}^+$. Im Induktionsschritt verwendet man hierbei, dass der Schnitt von zwei Elementen im Konvexring, die jeweils in n Hyperebenen enthalten sind, ebenfalls ein Element der Konvexrings und in n Hyperebenen enthalten ist, sowie dass die Einschränkung von f_μ auf den Konvexring additiv ist. \square

Satz 3.13. *Sei μ ein signiertes Maß auf \mathcal{K} mit (3.8). Die Einschränkung von f_μ auf den Konvexring ist genau dann additiv, wenn f_μ ein skalares Vielfaches des Lebesgue-Maßes ist.*

Bevor wir diesen Satz beweisen, ziehen wir daraus das gewünschte Korollar.

Korollar 3.14. *Sei ρ ein signiertes Maß auf \mathbb{R}_0^+ , dessen d -tes Moment endlich ist. Dann ist die Einschränkung des ρ -gewichteten B -Parallelvolumens auf den Konvexring genau dann additiv, wenn das ρ -gewichtete B -Parallelvolumen ein skalares Vielfaches des Lebesgue-Maßes ist.*

Beweis: Dieses Korollar folgt sofort aus Satz 3.13. Alternativ kann man dieses Korollar auch aus unten stehendem Satz 3.16 folgern. \square

Beweis von Satz 3.13: Die eine Richtung des Satzes folgt sofort daraus, dass das Lebesgue-Maß und damit Einschränkungen seiner skalaren Vielfachen additiv sind.

Sei also nun die Einschränkung von f_μ auf den Konvexring additiv. Sei $K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt und $\epsilon > 0$. Dann ist

$$\{\text{int } B_\epsilon(x) \mid x \in K\}$$

eine offene Überdeckung von K . Wegen der Kompaktheit von K gibt es nun eine endliche Teilmenge $A^\epsilon \subseteq K$ so, dass

$$\{\text{int } B_\epsilon(x) \mid x \in A^\epsilon\}$$

eine Überdeckung von K ist. Nun gilt offensichtlich $A^\epsilon + \epsilon B^d \in \mathcal{R}$ und

$$K \subseteq A^\epsilon + \epsilon B^d \subseteq K + \epsilon B^d. \quad (3.11)$$

Für $i \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$K_i^\epsilon := \{(x_1, \dots, x_d) \in A^\epsilon + \epsilon B^d \mid \exists_{s \in \{1, \dots, d\}, j \in \mathbb{Z}} : x_s = j \cdot 2^{-i}\}.$$

Das bedeutet, dass K_i^ϵ der Schnitt der Menge $A^\epsilon + \epsilon B^d$, die geringfügig größer als K ist, mit einer Menge, die aus gitterförmig angeordneten Hyperebenen besteht, ist.

Sei nun $B \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Körper, der aus mehr als einem Punkt besteht. Dann gilt

$$A^\epsilon + \epsilon B^d + B = \bigcup_{i=0}^{\infty} (K_i^\epsilon + B) \cup \{x \in \mathbb{R}^d \mid d(A^\epsilon + B, x) = \epsilon\}. \quad (3.12)$$

Die Menge auf der rechten Seite ist offensichtlich in der Menge auf der linken Seite enthalten. Zum Nachweis der umgekehrten Inklusion sei $x \in A^\epsilon + \epsilon B^d + B$. Dann gilt

$d(A^\epsilon + B, x) \leq \epsilon$. Im Falle $d(A^\epsilon + B, x) = \epsilon$ ist x in der rechten Seite von (3.12) enthalten, so dass wir von nun an $d(A^\epsilon + B, x) < \epsilon$ annehmen können. Dann gibt es $\epsilon' < \epsilon$ mit $x \in A^\epsilon + B + \epsilon' B^d$ und daher eine Zerlegung $x = k + b$ mit $k = (k_1, \dots, k_d) \in \text{int}(A^\epsilon + \epsilon B^d)$ und $b = (b_1, \dots, b_d) \in B$. Nun gibt es $\delta > 0$ mit

$$\{(v_1, \dots, v_d) \in \mathbb{R}^d \mid \forall_{s \in \{1, \dots, d\}} : |k_s - v_s| \leq \delta\} \subseteq A^\epsilon + \epsilon B^d. \quad (3.13)$$

Wähle einen Punkt $b' = (b'_1, \dots, b'_d) \in B \setminus \{b\}$ und eine Zahl $i \in \mathbb{N}$ mit $2^{-i} < \min\{\delta, \frac{1}{\sqrt{d}} \|b - b'\|\}$. Nun gibt es eine Zahl $s_0 \in \{1, \dots, d\}$ mit $|b_{s_0} - b'_{s_0}| > 2^{-i}$, da sonst

$$\|b - b'\|^2 = \sum_{s=1}^d |b_s - b'_s|^2 \leq d \cdot (2^{-i})^2 < \|b - b'\|^2.$$

Also gibt es $\lambda \in [0, 1]$ und $j \in \mathbb{Z}$ mit $k_{s_0} + \lambda(b_{s_0} - b'_{s_0}) = j \cdot 2^{-i}$. Wähle die kleinste Zahl $\lambda \in [0, 1]$ so, dass es $S \in \{1, \dots, d\}$ und $j \in \mathbb{Z}$ gibt mit

$$k_S + \lambda(b_S - b'_S) = j \cdot 2^{-i}.$$

Dann ist

$$|k_s - (k_s + \lambda(b_s - b'_s))| = \lambda \cdot |b_s - b'_s| \leq 2^{-i} < \delta$$

für alle $s \in \{1, \dots, d\}$, da sonst λ verkleinert werden kann. Wegen (3.13) folgt hieraus $k + \lambda(b - b') \in A^\epsilon + \epsilon B^d$. Also ist $k + \lambda(b - b') \in K_i^\epsilon$. Wegen der Konvexität von B ist $\lambda b' + (1 - \lambda)b \in B$ und somit

$$x = k + \lambda(b - b') + \lambda b' + (1 - \lambda)b \in K_i^\epsilon + B.$$

Damit ist (3.12) bewiesen.

Wegen Satz 1.43 gilt

$$V_d(\{x \in \mathbb{R}^d \mid d(A^\epsilon + B, x) = \epsilon\}) = V_d(A^\epsilon + B + \epsilon B^d) - \lim_{n \rightarrow \infty} V_d(A^\epsilon + B + (\epsilon - \frac{1}{n})B^d) = 0.$$

Daher können wir aus (3.12) schließen

$$\lim_{i \rightarrow \infty} V_d(K_i^\epsilon + B) = V_d(A^\epsilon + \epsilon B^d + B). \quad (3.14)$$

Weiter folgt aus Satz 1.42, dass

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} V_d(K + B + \epsilon B^d) - V_d(K + B) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\epsilon \mathcal{H}^{d-1}(\text{bd}(K + B + sB^d)) ds = 0$$

und hieraus mit (3.11), dass

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} V_d(A^\epsilon + B + \epsilon B^d) = V_d(K + B). \quad (3.15)$$

Es bezeichne nun μ' die Einschränkung von μ auf die Menge aller konvexen Körper, die aus mehr als einem Punkt bestehen. Dann ist $\eta := \mu - \mu'$ auf der Menge der einpunktigen Körper konzentriert und somit ist f_η ein skalares Vielfaches des Lebesgue-Maßes und daher additiv. Weil die Einschränkung von f_μ auf den Konvexring als additiv vorausgesetzt ist,

muss auch die Einschränkung von $f_{\mu'} = f_{\mu} - f_{\eta}$ auf den Konvexring additiv sein. Somit folgt aus Lemma 3.12, dass

$$f_{\mu'}(K_i^{\epsilon}) = 0, \quad i \in \mathbb{N}, \epsilon > 0, \quad (3.16)$$

da die Mengen K_i^{ϵ} im Konvexring liegen und in der Vereinigung von endlich vielen Hyperebenen enthalten sind.

Indem wir nun (3.15) zusammen mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz (Satz 1.2), dessen Voraussetzungen wir unten überprüfen, (3.14) zusammen mit diesem Satz, und schließlich (3.16) verwenden, erhalten wir

$$\begin{aligned} f_{\mu'}(K) &= \int_{\mathcal{K}} V_d(K + B) d\mu'(B) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{K}} V_d(A^{\epsilon} + B + \epsilon B^d) d\mu'(B) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{K}} V_d(K_i^{\epsilon} + B) d\mu'(B) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Wir konnten Satz 1.2 anwenden, da für alle $i \in \mathbb{N}$, $\epsilon \in (0, 1)$ und $A \in \mathcal{K}$

$$V_d(A^{\epsilon} + A + \epsilon B^d) \leq V_d(K + A + B^d) \quad \text{bzw.} \quad V_d(K_i^{\epsilon} + A) \leq V_d(K + A + B^d)$$

gilt, und

$$\int_{\mathcal{K}} V_d(K + B^d + A) d|\mu'| (A) \leq \int_{\mathcal{K}} V_d(K + B^d + A) d|\mu| (A) < \infty$$

wegen Bemerkung 1.1 und (3.8).

Also ist $f_{\mu} = f_{\eta}$ und daher ist f_{μ} ein skalares Vielfaches des Lebesgue-Maßes. \square

Eine Abschwächung des Konzepts der Additivität stellt das der Submodularität dar. Ein Funktional $\phi : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bzw. $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *submodular*, falls

$$\phi(K \cup L) + \phi(K \cap L) \leq \phi(K) + \phi(L)$$

für alle $K, L \in \mathcal{R}$ bzw. $K, L \in \mathcal{C}$, wobei $\phi(\emptyset) := 0$. Wir stellen fest, dass wir den Begriff der submodularen Funktion allgemeiner definieren können: Wir benötigen nur, dass es für je zwei Elemente des Definitionsbereichs ein Infimum und ein Supremum gibt, die ebenfalls im Definitionsbereich liegen. Eine solche Struktur heißt Verband. Für Eigenschaften und Anwendungen von submodularen Funktionalen auf beliebigen Verbänden, siehe z.B. [54].

Satz 3.15. *Sei μ ein (nicht-negatives) Maß auf \mathcal{K} mit (3.8). Dann ist f_{μ} submodular.*

Beweis: Für ein signiertes Maß μ ist f_{μ} genau dann submodular, wenn

$$\int_{\mathcal{K}} V_d(K + A) + V_d(L + A) - V_d((K \cup L) + A) - V_d((K \cap L) + A) d\mu(A) \geq 0$$

für alle $K, L \in \mathcal{C}$. Wegen

$$V_d((K \cup L) + A) = V_d((K + A) \cup (L + A)) = V_d(K + A) + V_d(L + A) - V_d((K + A) \cap (L + A))$$

für $K, L \in \mathcal{C}$ und $A \in \mathcal{K}$ ist dies äquivalent zu

$$\int_{\mathcal{K}} V_d((K + A) \cap (L + A)) - V_d((K \cap L) + A) d\mu(A) \geq 0, \quad K, L \in \mathcal{C}. \quad (3.17)$$

Dies ist aber für nicht-negative Maße μ immer erfüllt, da

$$(K \cap L) + A \subseteq (K + A) \cap (L + A), \quad K, L \in \mathcal{C}, A \in \mathcal{K}. \quad \square$$

Satz 3.16. *Sei ρ ein signiertes Maß auf \mathbb{R}_0^+ mit endlichem d -ten Moment und B ein konvexer Körper, der aus mehr als einem Punkt besteht. Dann sind folgende drei Aussagen äquivalent:*

- (i) *Das ρ -gewichtete B -Parallelvolumen ist submodular.*
- (ii) *Die Einschränkung des ρ -gewichteten B -Parallelvolumens auf den Konvexring ist submodular.*
- (iii) *Die Einschränkung von ρ auf \mathbb{R}^+ ist ein Maß.*

Beweis: Die Implikation „(i) \Rightarrow (ii)“ ist trivial.

Sei (iii) erfüllt und $\tilde{\rho} := \rho|_{\mathbb{R}_0^+}$. Dann ist das $\tilde{\rho}$ -gewichtete B -Parallelvolumen nach Satz 3.15 submodular. Die Differenz des ρ -gewichteten und des $\tilde{\rho}$ -gewichteten B -Parallelvolumens ist ein skalares Vielfaches des Lebesgue-Maßes. Also ist auch das ρ -gewichtete Parallelvolumen submodular.

Sei nun (ii) erfüllt. Um (iii) nachzuweisen, setzen wir

$$f_{a,b} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, r \mapsto \begin{cases} r - a & \text{falls } a \leq r < \frac{a+b}{2}, \\ b - r & \text{falls } \frac{a+b}{2} \leq r < b, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad b > a > 0,$$

und zeigen zunächst

$$\int_{\mathbb{R}^+} f_{a,b}(\lambda) d\rho(\lambda) \geq 0, \quad b > a > 0. \quad (3.18)$$

Die Idee bei diesem ersten Beweisschritt ist es, Körper K und L derart zu konstruieren, dass die Funktion

$$r \mapsto V_d((K + rB) \cap (L + rB) \setminus ((K \cap L) + rB))$$

proportional zu $f_{a,b}$ ist, wenn wir gewisse Randeffekte vernachlässigen, und zu begründen, dass wir diese vernachlässigen können. Dann folgt (3.18) aus (3.17).

Sei also $b > a > 0$. Wähle einen Einheitsvektor u aus dem linearen Unterraum, der parallel zur affinen Hülle von B ist. Für $R \geq 0$ bezeichne B_R^u den Euklidischen Ball von Radius R in dem zu u orthogonalen Unterraum. Wegen der Translationsinvarianz des Volumens können wir o.B.d.A. annehmen, dass $\max\{\langle x, u \rangle | x \in B\} = \max\{\langle x, -u \rangle | x \in B\}$. Wir kürzen

$$h := \max\{\langle x, u \rangle | x \in B\} \quad \text{und} \quad h_{\perp} := \max\{\langle x, v \rangle | x \in B, v \in S^{d-1}, v \perp u\}$$

ab. Dann gilt $h > 0$ und $h_\perp \geq 0$. Sei $r \in \mathbb{R}_0^+$ und $R > h_\perp r$. Setze nun

$$K := (\{-hb \cdot u\} \cup [ha \cdot u, hb \cdot u]) + B_R^u \quad \text{und} \quad L := ([-hb \cdot u, -ha \cdot u] \cup \{hb \cdot u\}) + B_R^u,$$

wobei $[x, y]$ wieder die Strecke von x nach y bezeichnet. Nun zeigen wir für $r \in [a, \frac{a+b}{2})$, dass

$$\begin{aligned} & ((K + rB) \cap (L + rB)) \setminus ((K \cap L) + rB) \subseteq \\ & [h(a-r) \cdot u, h(r-a) \cdot u] + (B_{R+h_\perp r}^u \setminus B_{R-h_\perp r}^u) \cup [h(a-r) \cdot u, h(r-a) \cdot u] + B_{R-h_\perp r}^u. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Sei $x \in ((K + rB) \cap (L + rB)) \setminus ((K \cap L) + rB)$. Dann gibt es $k \in K$ und $m \in B$ mit $x = k + rm$. Da $x \notin (K \cap L) + rB$ folgt $k \notin K \cap L$. Also $\langle x, u \rangle = \langle k, u \rangle - r\langle m, -u \rangle \geq ha - rh$. Genauso folgt $\langle x, u \rangle \leq h(r-a)$ und $\langle x, v \rangle \leq R + h_\perp r$ für $v \in S^{d-1}$ mit $v \perp u$. Somit ist $x \in [h(a-r) \cdot u, h(r-a) \cdot u] + B_{R+h_\perp r}^u$ und deshalb ist x in der rechten Seite von (3.19) enthalten.

Andererseits gilt

$$[h(a-r) \cdot u, h(r-a) \cdot u] + B_{R-h_\perp r}^u \subseteq ((K + rB) \cap (L + rB)) \setminus ((K \cap L) + rB). \quad (3.20)$$

In der Tat, sei $x \in [h(a-r) \cdot u, h(r-a) \cdot u] + B_{R-h_\perp r}^u$. Dann ist

$$-h < \frac{1}{r}(h(a-r) + ha) \leq \frac{1}{r}(\langle x, u \rangle + ha) \leq \frac{1}{r}(h(r-a) + ha) = h.$$

Daher gibt es $m \in B$ mit $\langle m, u \rangle = \frac{1}{r}(\langle x, u \rangle + ha)$. Setze $l := x - rm$. Dann gilt

$$\langle l, u \rangle = \langle x, u \rangle - r\langle m, u \rangle = \langle x, u \rangle - r\frac{1}{r}(\langle x, u \rangle + ha) = -ha.$$

Für $v \in S^{d-1}$ mit $v \perp u$ gilt

$$\langle l, v \rangle = \langle x, v \rangle + r\langle m, -v \rangle \leq R - h_\perp r + rh_\perp = R.$$

Somit ist $l \in L$ und $x \in L + rB$. Analog zeigt man $x \in K + rB$. Angenommen, x wäre in $(K \cap L) + rB$. Dann gäbe es $k \in K \cap L$ und $m \in B$ mit $x = k + rm$. Dann gilt $\langle k, u \rangle = -hb$ oder $\langle k, u \rangle = hb$, o.B.d.A. ersteres. Wegen $2r < a + b$ folgt

$$\langle x, u \rangle = \langle k, u \rangle + r\langle m, u \rangle \leq -hb + rh < h(a-r),$$

im Widerspruch zur Wahl von x . Also $x \notin (K \cap L) + rB$, was den Beweis von (3.20) abschließt.

Auf ähnliche Art und Weise zeigt man für $r \in [\frac{a+b}{2}, b)$, dass

$$\begin{aligned} & ((K + rB) \cap (L + rB)) \setminus ((K \cap L) + rB) \subseteq \\ & [h(a-r) \cdot u, h(r-a) \cdot u] + (B_{R+h_\perp r}^u \setminus B_{R-h_\perp r}^u) \cup (h(r-b)u, h(b-r)u) + B_{R-h_\perp r}^u, \end{aligned}$$

und

$$(h(r-b)u, h(b-r)u) + B_{R-h_\perp r}^u \subseteq ((K + rB) \cap (L + rB)) \setminus ((K \cap L) + rB),$$

wobei $(x, y) := [x, y] \setminus \{x, y\}$. Für $r < a$ gilt

$$(K + rB) \cap (L + rB) = (K \cap L) + rB$$

und für $r > b$ folgt

$$((K + rB) \cap (L + rB)) \setminus ((K \cap L) + rB) \subseteq [h(a - r)u, h(r - a)u] + (B_{R+h_\perp r}^u \setminus B_{R-h_\perp r}^u).$$

In jeden Fall gilt also

$$\begin{aligned} 2h \cdot f_{a,b}(r) \kappa_{d-1} (R - h_\perp r)^{d-1} &\leq V_d(((K + rB) \cap (L + rB)) \setminus ((K \cap L) + rB)) \\ &\leq 2h \cdot \max\{0, r - a\} \kappa_{d-1} ((R + h_\perp r)^{d-1} - (R - h_\perp r)^{d-1}) + 2h \cdot f_{a,b}(r) \kappa_{d-1} (R - h_\perp r)^{d-1}. \end{aligned}$$

Wegen des Satzes von der majorisierten Konvergenz (Satz 1.2), dessen Voraussetzungen wir unten überprüfen, und (3.17) folgt hieraus

$$\begin{aligned} 2h \kappa_{d-1} \int_{\mathbb{R}^+} f_{a,b}(\lambda) d\rho(\lambda) &= \int_{\mathbb{R}^+} \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{V_d(((K + \lambda B) \cap (L + \lambda B)) \setminus ((K \cap L) + \lambda B))}{R^{d-1}} d\rho(\lambda) \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R^{d-1}} \int_{\mathbb{R}^+} V_d((K + \lambda B) \cap (L + \lambda B)) - V_d((K \cap L) + \lambda B) d\rho(\lambda) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Für $\lambda \in \mathbb{R}^+$ folgt aus

$$((K + \lambda B) \cap (L + \lambda B)) \setminus ((K \cap L) + \lambda B) \subseteq K + \lambda B,$$

und $V_d(K + \lambda B) \leq 2h(b + \lambda) \cdot \kappa_{d-1} (R + \lambda h_\perp)^{d-1}$, für $R \geq 1$, dass

$$\frac{V_d(((K + \lambda B) \cap (L + \lambda B)) \setminus ((K \cap L) + \lambda B))}{R^{d-1}} \leq 2\kappa_{d-1} h(b + \lambda)(1 + \lambda h_\perp)^{d-1}.$$

Weil wir vorausgesetzt haben, dass das d -te Moment (und damit auch alle niedrigeren Momente) von ρ existieren, konnten wir also oben Satz 1.2 anwenden. Somit ist (3.18) bewiesen.

Nun zeigen wir $\rho((x, y)) \geq 0$ für $y > x > 0$. Hierfür setzen wir $x(n) := x + 2^{-n}(y - x)$ und $y(n) := y - 2^{-n}(y - x)$ für $n \in \mathbb{N}^+$. Dann ergibt der Satz von der majorisierten Konvergenz mit der konstanten Funktion 1 als Majorante, dass

$$\begin{aligned} \rho((x, y)) &= \int_{\mathbb{R}^+} \mathbf{1}_{(x,y)}(\lambda) d\rho(\lambda) \\ &= \frac{2}{y - x} \int_{\mathbb{R}^+} f_{x,y}(\lambda) + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} f_{x,x(n)}(\lambda) + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} f_{y(n),y}(\lambda) d\rho(\lambda) \\ &= \frac{2}{y - x} \left(\int_{\mathbb{R}^+} f_{x,y}(\lambda) d\rho(\lambda) + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \int_{\mathbb{R}^+} f_{x,x(n)}(\lambda) d\rho(\lambda) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \int_{\mathbb{R}^+} f_{y(n),y}(\lambda) d\rho(\lambda) \right) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Nun folgt leicht, dass auch $\rho([x, y]) \geq 0$ für $y > x > 0$, und deshalb ist die Einschränkung von ρ auf \mathbb{R}^+ ein Maß. \square

Eine weitere interessante Frage ist die nach der Monotonie der gewichteten Parallelvolumina. Ein Funktional $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ bzw. $\phi : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *monoton*, falls

$$L \subseteq K \Rightarrow \phi(L) \leq \phi(K)$$

für alle $K, L \in \mathcal{C}$ bzw. $K, L \in \mathcal{K}$.

Wir können die Maße, die monotone gewichtete Parallelvolumina haben, nicht einmal im Euklidischen Fall charakterisieren. Allerdings können wir die Maße charakterisieren, für die die Einschränkung des gewichteten Parallelvolumens auf \mathcal{K} monoton ist.

Satz 3.17. *Sei ρ ein signiertes Maß auf \mathbb{R}_0^+ mit endlichem d -ten Moment. Die Einschränkung des ρ -gewichteten Parallelvolumens auf \mathcal{K} ist genau dann monoton, wenn das 0-te bis $(d-1)$ -te Moment von ρ nicht-negativ sind.*

Beweis: Es bezeichne μ_j das j -te Moment von ρ . Dann folgt aus der Steiner-Formel (1.24), dass

$$\int_{\mathbb{R}_0^+} V_d(K + \lambda B^d) d\rho(\lambda) = \sum_{j=0}^d \kappa_{d-j} \mu_{d-j} V_j(K), \quad K \in \mathcal{K}.$$

Wenn nun also μ_0, \dots, μ_{d-1} nicht-negativ sind, dann folgt die Monotonie der Einschränkung des ρ -gewichteten Parallelvolumens daraus, dass die inneren Volumina monoton sind (folgt direkt aus (1.21)) und $V_0(K) = 1$ für alle $K \in \mathcal{K}$ gilt.

Die Ideen für den Beweis der Umkehrung haben wir vom Ende des Beweises von Hadwiger's Charakterisierungssatz ([20, Abschnitt 6.1.10]) übernommen. Für $i \in \{1, \dots, d\}$ und $R \in \mathbb{R}_0^+$ setzen wir

$$B_R^i := \{(x_1, \dots, x_i, 0, \dots, 0) \mid \|(x_1, \dots, x_i)\| \leq R\}.$$

Wir berechnen nun $V_j(B_R^i)$. Auf Grund der Dimensionsinvarianz der inneren Volumina können wir diese auch in einem Unterraum bestimmen. Für $j > i$ ergibt sich $V_j(B_R^i) = 0$ durch Berechnung im \mathbb{R}^j . Für $j \leq i$ folgt aus

$$V_i(B_R^i + r B_1^i) = (R+r)^i V_i(B_1^i) = \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} R^j r^{i-j} \kappa_i = \sum_{j=0}^i \kappa_{i-j} r^{i-j} \frac{R^j \binom{i}{j} \kappa_i}{\kappa_{i-j}},$$

dass

$$V_j(B_R^i) = \frac{R^j \binom{i}{j} \kappa_i}{\kappa_{i-j}}.$$

Die Funktion

$$\int_{\mathbb{R}_0^+} V_d(B_R^i + \lambda B^d) d\rho(\lambda) = \sum_{j=0}^d \kappa_{d-j} \mu_{d-j} V_j(B_R^i) = \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \frac{\kappa_{d-j} \kappa_i}{\kappa_{i-j}} \mu_{d-j} R^j$$

ist monoton wachsend in R , da das ρ -gewichtete Parallelvolumen monoton ist. Also ist $\mu_{d-i} \geq 0$. \square

Aus Satz 3.17 folgt sofort, dass das 0-te bis $(d-1)$ -te Moment von ρ nicht-negativ sind, wenn das ρ -gewichtete Parallelvolumen monoton ist. Aber es gilt nicht die Umkehrung.

Beispiel 3.18. Wir setzen $\rho := \delta_1 - \delta_0$, wobei hier δ_x , $x \in \mathbb{R}_0^+$, das Dirac-Maß auf \mathbb{R}_0^+ in x bezeichnet. Dann ist

$$\int_{\mathbb{R}_0^+} \lambda^j d\rho(\lambda) = 1^j - 0^j \geq 0, \quad j = 0, \dots, d-1.$$

Aber es gilt

$$\int_{\mathbb{R}_0^+} V_d(B^d + \lambda B^d) d\rho(\lambda) = V_d(2B^d) - V_d(B^d) = (2^d - 1)\kappa_d$$

und

$$\int_{\mathbb{R}_0^+} V_d(S^{d-1} + \lambda B^d) d\rho(\lambda) = V_d(2B^d) - V_d(S^{d-1}) = 2^d \kappa_d,$$

was wegen $S^{d-1} \subseteq B^d$ zeigt, dass das ρ -gewichtete Parallelvolumen nicht monoton ist.

Andererseits ist das ρ -gewichtete Parallelvolumen offensichtlich monoton, wenn ρ ein Maß ist. Auch hier können wir wieder an Hand eines Beispiels zeigen, dass die Umkehrung nicht gilt.

Beispiel 3.19. Wir setzen $\rho := \frac{1}{r^d} \delta_r - \frac{1}{s^d} \delta_s$ für $s > r > 0$. Seien $K, L \subseteq \mathbb{R}^d$ zwei Körper mit $L \subseteq K$. Mit $\alpha := \frac{s}{r}$ gilt nach Satz 1.40

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_0^+} V_d(K + \lambda B^d) d\rho(\lambda) - \int_{\mathbb{R}_0^+} V_d(L + \lambda B^d) d\rho(\lambda) \\ &= \int_{\mathbb{R}_0^+} V_d((K + \lambda B^d) \setminus (L + \lambda B^d)) d\rho(\lambda) \\ &= \frac{1}{r^d} V_d((K + rB^d) \setminus (L + rB^d)) - \frac{1}{s^d} V_d((K + sB^d) \setminus (L + sB^d)) \\ &= \frac{1}{s^d} (\alpha^d V_d((K + rB^d) \setminus (L + rB^d)) - V_d((K + \alpha r B^d) \setminus (L + \alpha r B^d))) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Also ist das ρ -gewichtete Parallelvolumen monoton.

Nun wenden wir uns der Frage zu, ob ein signiertes Maß auf \mathbb{R}_0^+ durch sein gewichtetes Parallelvolumen eindeutig bestimmt ist, oder allgemeiner, ob ein signiertes Maß μ auf \mathcal{K} durch das Funktional f_μ eindeutig bestimmt ist. Wir werden dieses Frage noch allgemeiner beantworten, da wir aus dieser allgemeineren Antwort in Abschnitt 4.1 interessante Folgerungen ziehen können. Dazu betrachten wir signierte Maße auf \mathcal{C} mit der Fell-Matheron- σ -Algebra (siehe Abschnitt 1.6 und Anhang A).

Es ist leicht zu sehen, dass ein signiertes Maß μ auf \mathcal{K} nicht eindeutig durch f_μ bestimmt ist. Wenn μ und η nämlich Dirac-Maße auf zwei konvexen Körpern, die durch Verschiebung auseinander hervorgehen, sind, dann impliziert die Translationsinvarianz des Volumens $f_\mu = f_\eta$. Um solche trivialen Gegenbeispiele auszuschließen, wählen wir wieder eine Zentrumsfunktion. Für $K \in \mathcal{C}$ bezeichne $c(K)$ den Mittelpunkt der Umkugel um K , die nach Satz 1.29 eindeutig bestimmt ist. Wir bemerken, dass die Resultate des aktuellen Abschnitts auch gelten würden, wenn wir an Stelle des Umkugelmittelpunkts eine andere

messbare Funktion $c : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^d$ mit $c(K + x) = c(K) + x$ für $K \in \mathcal{C}$ und $x \in \mathbb{R}^d$ nehmen würden; nur der Beweis von Korollar 3.22 würde etwas aufwendiger werden. Es bezeichne

$$\mathcal{C}^* := \{K \in \mathcal{C} | c(K) = 0\}.$$

Wir erinnern uns, dass

$$\mathcal{C}_{+M} := \{K + rM | K \in \mathcal{C}, r > 0\}, \quad M \in \mathcal{C}.$$

Lemma 3.20. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Körper und μ ein signiertes Maß auf \mathcal{C}^* mit

$$\int_{\mathcal{C}^*} V_d(K + A) d|\mu|(A) < \infty, \quad K \in \mathcal{C},$$

und

$$\int_{\mathcal{C}^*} V_d(K + A) d\mu(A) = 0, \quad K \in \mathcal{C}_{+M}.$$

Dann ist $\mu = 0$.

Beweis: Für ein Maß ρ auf \mathcal{C}^* definieren wir ein Maß M_ρ auf \mathcal{C} durch

$$M_\rho(\mathcal{A}) := \int_{\mathcal{C}^*} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{\mathcal{A}}(A + x) dx d\rho(A)$$

für jede messbare Menge $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$. Weiter haben wir

$$\mathcal{C}_C := \{K \in \mathcal{C} | C \cap K \neq \emptyset\}, \quad C \subseteq \mathbb{R}^d,$$

und $A^* := \{-x | x \in A\}$ für $A \in \mathcal{C}$ gesetzt. Für $C \in \mathcal{C}_{+M^*}$ gilt $C^* \in \mathcal{C}_{+M}$ und somit

$$\begin{aligned} M_{\mu^+}(\mathcal{C}_C) &= \int_{\mathcal{C}^*} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{(A+x) \cap C \neq \emptyset} dx d\mu^+(A) \\ &= \int_{\mathcal{C}^*} V_d(C + A^*) d\mu^+(A) \\ &= \int_{\mathcal{C}^*} V_d(C^* + A) d\mu(A) + \int_{\mathcal{C}^*} V_d(C + A^*) d\mu^-(A) \\ &= \int_{\mathcal{C}^*} V_d(C + A^*) d\mu^-(A) \\ &= M_{\mu^-}(\mathcal{C}_C). \end{aligned}$$

Wegen Lemma 1.47 folgt hieraus $M_{\mu^+} = M_{\mu^-}$.

Sei nun $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}^*$ messbar. Weil $A + x = A' + x'$ für $A, A' \in \mathcal{C}^*$ und $x, x' \in \mathbb{R}^d$ offensichtlich $A = A'$ und $x = x'$ impliziert, folgt

$$M_{\mu^+}(\{A + x | A \in \mathcal{A}, x \in [0, 1]^d\}) = \int_{\mathcal{C}^*} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{\mathcal{A}}(A) \mathbf{1}_{[0,1]^d}(x) dx d\mu^+(A) = \mu^+(\mathcal{A}).$$

Da die selbe Überlegung auch für μ^- anstelle von μ^+ gilt, folgt $\mu^+(\mathcal{A}) = \mu^-(\mathcal{A})$. Also $\mu = 0$. \square

Korollar 3.21. *Seien μ und η zwei signierte Maße auf \mathcal{K}^* mit (3.8). Dann ist $f_\mu = f_\eta$ äquivalent zu $\mu = \eta$.*

Beweis: Wegen Lemma 3.20 ist $f_{\mu-\eta} = 0$ äquivalent zu $\mu - \eta = 0$. Hieraus folgt sofort die Behauptung. \square

Korollar 3.22. *Seien ρ und η zwei signierte Maße auf \mathbb{R}_0^+ mit endlichem d -ten Moment und B ein konvexer Körper, der aus mehr als einem Punkt besteht. Dann stimmen das ρ -gewichtete und das η -gewichtete B -Parallelvolumen genau dann überein, wenn $\rho = \eta$.*

Beweis: Setze $\tilde{B} := B - c(B)$. Da nun die gewichteten B -Parallelvolumina mit den gewichteten \tilde{B} -Parallelvolumina übereinstimmen und $\lambda\tilde{B} \in \mathcal{K}^*$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}_0^+$ gilt, folgt die Behauptung aus Korollar 3.21. \square

3.3 Ableitungen

In diesem Abschnitt betrachten wir die Funktionen, die eine nicht-negative Zahl r auf $f_\mu(rK)$ abbilden, wobei μ ein signiertes Maß auf \mathcal{K} und $K \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Körper ist. Wir zeigen zunächst, dass diese Funktionen in $r > 0$ unendlich oft differenzierbar sind, falls μ sehr starke Regularitätsvoraussetzungen erfüllt, z.B. f_μ das Wills-Funktional ist. Anschließend werden wir unter schwachen Regularitätsvoraussetzungen Formeln für die erste und, sofern sie existiert, die zweite Ableitung in $r = 0$ angeben. Der längste Teil dieses Abschnitts wird dann darin bestehen, hinreichende Bedingungen für die Existenz der zweiten Ableitung anzugeben.

In diesem Abschnitt werden wir manchmal den Spezialfall des Wills-Funktionalis gesondert betrachten. Genauer gesagt, betrachten wir, motiviert durch (1.31), das Funktional

$$W : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}, K \mapsto \mathbb{E}V_d(K + \Lambda B^d),$$

wobei Λ eine \mathbb{R}_0^+ -wertige Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion $1 - e^{-\pi t^2}$ ist.

Satz 3.23. *Sei $B \subseteq \mathbb{R}^d$ ein konvexer Körper und $X \subseteq \mathbb{R}^d$ eine zufällige kompakte Menge mit $\mathbb{E}V_d(\text{conv } X + xB) < \infty$ für alle $x > 0$ und ρ ein signiertes Maß auf \mathbb{R}_0^+ , das absolutstetig bzgl. des Lebesgue-Maßes ist mit einer Dichte der Form $f(\lambda) = \sum_{i=1}^n y_i e^{P_i(\lambda)}$, wobei die $y_i \in \mathbb{R}$ und die P_i auf \mathbb{R}^+ streng monoton fallende Polynome sind für $i = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist die Funktion $r \mapsto \mathbb{E} \int V_d(rX + \lambda B) d\rho(\lambda)$ in jedem Punkt $r > 0$ unendlich oft differenzierbar.*

Insbesondere gilt dies für die Funktion $r \mapsto \mathbb{E}W(rX)$ und wenn ρ ein in Satz 3.2 konstruiertes Maß ist.

Beweis: Aus den Voraussetzungen folgt, dass alle Momente von ρ existieren. Aus $\mathbb{E}V_d(X + xB) < \infty$ für alle $x > 0$ und dem Satz von Fubini (Satz 1.3) schließen wir

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}_0^+} V_d(rX + \lambda B) d\rho(\lambda) &= r^d \int_{\mathbb{R}_0^+} \mathbb{E}V_d(X + \frac{\lambda}{r}B) d\rho(\lambda) \\ &= r^d \int_0^\infty \mathbb{E}V_d(X + \frac{\lambda}{r}B) f(\lambda) d\lambda \\ &= r^d \int_0^\infty \mathbb{E}V_d(X + xB) f(rx) r dx. \end{aligned}$$

Der Integrand des letzten Integrals ist offensichtlich für alle $x \in \mathbb{R}_0^+$ unendlich oft differenzierbar. Wir begründen nun, dass hieraus folgt, dass das Integral unendlich oft differenzierbar ist.

Es gibt für alle $k \in \mathbb{N}$ Zahlen $c_{\alpha\beta;i}^k$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, die fast alle 0 sind, mit

$$\frac{\partial^k}{\partial r^k} f(rx)r = \sum_{\alpha, \beta, i} y_i c_{\alpha\beta;i}^k r^\alpha x^\beta e^{P_i(rx)}.$$

Definiere ein Polynom $P_i^k(s, x) = \sum_{\alpha, \beta} |y_i c_{\alpha\beta;i}^k| s^\alpha x^\beta$. Wähle $R_0 \in (0, r)$ und $R_1 > r$. Dann ist die Funktion

$$h : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \mathbb{E} \sum_i V_d(X + xB) P_i^k(R_1, x) e^{P_i(R_0 x)}$$

Lebesgue-integrierbar, da

$$\mathbb{E} V_d(X + xB) \leq \mathbb{E} V_d(\text{conv } X + xB)$$

und letzterer Term ein Polynom in x ist. Außerdem gilt für alle $s \in (R_0, R_1)$ und alle $x \geq 0$, dass

$$\begin{aligned} h(x) &\geq \mathbb{E} \sum_i V_d(X + xB) P_i^k(s, x) e^{P_i(sx)} \\ &\geq |\mathbb{E} V_d(X + xB)| \sum_{\alpha, \beta, i} y_i c_{\alpha\beta;i}^k s^\alpha x^\beta e^{P_i(sx)}. \end{aligned}$$

Daher lässt sich Satz 1.9 induktiv anwenden, was die Behauptung liefert. \square

Für eine konvexe und kompakte Menge $B \subseteq \mathbb{R}^d$ setzen wir

$$R(B) := \sup\{\rho \in \mathbb{R}_0^+ \mid \rho B^d \text{ ist Summand von } B\}$$

und bezeichnen das Minimum vom Radius der Umkugel und 1 mit $S(B)$.

Satz 3.24. *Sei $X \subseteq \mathbb{R}^d$, $d > 1$, eine zufällige kompakte Menge mit $\mathbb{E}(\text{diam } X)^d < \infty$ und μ ein signiertes Maß auf \mathcal{K} , das $\int_{\mathcal{K}} S(A)^{d-1} d|\mu|(A) < \infty$ erfüllt, der Integrabilitätsbedingung (3.8) genügt und auf der Menge aller konvexen Körper, die einen Ball als Summanden enthalten, konzentriert ist. Dann ist $r \mapsto \mathbb{E} f_\mu(rX)$ in $r = 0$ differenzierbar mit*

$$\frac{d}{dr} \mathbb{E} f_\mu(rX)|_{r=0} = d \int_{\mathcal{K}} \mathbb{E} V(\text{conv } X[1], A[d-1]) d\mu(A). \quad (3.21)$$

Beweis: Wir zeigen die Behauptung zunächst in dem Spezialfall, dass μ das Dirac-Maß in einem konvexen Körper B mit einem Ball als Summanden ist und X deterministisch ist. Auch wenn dies einfach aus [30, Corollary 2(2)] gefolgert werden kann, halten wir es für gerechtfertigt, einen auf Satz 2.15 basierenden Beweis zu geben. Wegen Satz 2.15 gibt es für die Funktion

$$\Delta : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+, s \mapsto V_d(\text{conv } X + sB) - V_d(X + sB),$$

eine Konstante $c \in \mathbb{R}_0^+$ mit $\Delta(s) < c \cdot s^{d-3}$ für $s > 1$. Mit (1.18) folgt

$$\begin{aligned}
 V_d(rX + B) &= r^d \cdot V_d\left(X + \frac{1}{r}B\right) \\
 &= r^d \cdot \left(\sum_{j=0}^d \binom{d}{j} \left(\frac{1}{r}\right)^{d-j} V(\operatorname{conv} X[j], B[d-j]) - \Delta\left(\frac{1}{r}\right) \right) \\
 &= \sum_{j=0}^d \binom{d}{j} r^j V(\operatorname{conv} X[j], B[d-j]) - r^d \cdot \Delta\left(\frac{1}{r}\right)
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Wegen $0 \leq r^d \cdot \Delta\left(\frac{1}{r}\right) \leq c \cdot r^3$ für $r \leq 1$ folgt

$$\frac{d}{dr} V_d(rX + B) = dV(\operatorname{conv} X[1], B[d-1]).$$

Weiter gilt für $r < 1$, dass

$$\begin{aligned}
 \frac{V_d(rX + B) - V_d(B)}{r} &\leq \frac{\sum_{j=0}^d \binom{d}{j} r^j V(\operatorname{conv} X[j], B[d-j]) - V_d(B)}{r} \\
 &= \sum_{j=1}^d \binom{d}{j} r^{j-1} V(\operatorname{conv} X[j], B[d-j]) \\
 &\leq \sum_{j=1}^d \binom{d}{j} V(\operatorname{conv} X[j], B[d-j]) \\
 &\leq \sum_{j=1}^d \binom{d}{j} (\operatorname{diam} X)^j (\operatorname{diam} B)^{d-j} \kappa_d.
 \end{aligned}$$

Wegen der Voraussetzungen $\mathbb{E}(\operatorname{diam} X)^d < \infty$ und $\int_{\mathcal{K}} S(A)^{d-1} d|\mu|(A) < \infty$ folgt mit Hilfe von Satz 1.9 aus dem oben bewiesenen Spezialfall der allgemeine Fall. \square

Satz 3.25. Sei $X \subseteq \mathbb{R}^d$, $d > 1$, eine zufällige kompakte Menge mit $\mathbb{E}(\operatorname{diam} X)^{d+1} < \infty$ und μ ein signiertes Maß auf \mathcal{K} , das der Integrabilitätsbedingung (3.8) genügt und

$$\int_{\mathcal{K}} \frac{S(A)^d}{R(A)^3} d|\mu|(A) < \infty$$

erfüllt. Falls die zweite Ableitung existiert, gilt

$$\frac{d^2}{dr^2} \mathbb{E} f_{\mu}(rX)|_{r=0} = d(d-1) \int_{\mathcal{K}} \mathbb{E} V(\operatorname{conv} X[2], A[d-2]) d\mu(A). \tag{3.23}$$

Beweis: Sei $Z := \operatorname{conv} X$. Nach Satz 2.15 gibt es für jeden konvexen Körper B , der einen Ball als Summanden enthält, eine Funktion $\Delta_B : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit

$$\mathbb{E} V_d(X + sB) = \mathbb{E} V_d(Z + sB) - \Delta_B(s)$$

so, dass

$$0 \leq \Delta_B(s) < c \cdot \frac{S(B)^d}{R(B)^3} s^{d-3} \tag{3.24}$$

für alle $s > 1$ mit einer von B unabhängigen, aber von der Verteilung von X abhängigen, Konstante c . Genau wie in (3.22) folgt hieraus

$$\mathbb{E}f_\mu(rX) = \sum_{j=0}^d \binom{d}{j} r^j \int_{\mathcal{K}} \mathbb{E}V(Z[j], A[d-j]) d\mu(A) - \int_{\mathcal{K}} r^d \Delta_A\left(\frac{1}{r}\right) d\mu(A). \quad (3.25)$$

Weiter folgt für $r < 1$

$$\left| \int_{\mathcal{K}} r^d \Delta_A\left(\frac{1}{r}\right) d\mu(A) \right| \leq \int_{\mathcal{K}} r^d \cdot c \cdot \frac{S(A)^d}{R(A)^3} \left(\frac{1}{r}\right)^{d-3} d|\mu|(A) \leq r^3 \cdot c \cdot \int_{\mathcal{K}} \frac{S(A)^d}{R(A)^3} d|\mu|(A). \quad (3.26)$$

Angenommen, $\mathbb{E}f_\mu(rX)$ ist zweimal differenzierbar mit

$$\frac{d^2}{dr^2} \mathbb{E}f_\mu(rX)|_{r=0} \neq d(d-1) \int_{\mathcal{K}} \mathbb{E}V(\text{conv } X[2], A[d-2]) d\mu(A). \quad (3.27)$$

Wegen (3.25) ist dann $h(r) := \int_{\mathcal{K}} r^d \Delta_A\left(\frac{1}{r}\right) d\mu(A)$ ebenfalls zweimal differenzierbar mit $h''(0) \neq 0$, o.B.d.A. $h''(0) > 0$. Dann konvergiert $h'(r)$ so viel langsamer gegen 0 als r^2 , dass es $\epsilon \in (0, 1)$ gibt mit $h'(r) > 3r^2 c \int_{\mathcal{K}} S(A)^d / R(A)^3 d|\mu|(A)$ für alle $r \in (0, \epsilon)$. Indem man dies über $(0, \epsilon)$ integriert, erhält man $h(\epsilon) > \epsilon^3 c \int_{\mathcal{K}} S(A)^d / R(A)^3 d|\mu|(A)$, im Widerspruch zu (3.26). \square

Wir werden nun die Existenz der zweiten Ableitung in (3.23) untersuchen. Zunächst werden wir zeigen, dass sie in Dimension 2 bei einer geeigneten Modifikation des Ableitungsbegriffs immer existiert. Danach werden wir zeigen, dass sie für den Fall existiert, dass das Funktional f_μ ein gewichtetes Parallelvolumen ist, das zusätzlichen Regularitätsbedingungen genügt.

Wir setzen $R'(B) := \min\{R(B), 1\}$ für $B \in \mathcal{K}$.

Satz 3.26. *Sei $X \subseteq \mathbb{R}^2$ eine zufällige kompakte Menge, deren Durchmesser endliches 5-tes Moment besitzt und μ ein signiertes Maß auf der Menge aller strikt konvexen Körper, das der Integrabilitätsbedingung (3.8) genügt und*

$$\int_{\mathcal{K}} \frac{S(A)^5}{R'(A)^6} d|\mu|(A) < \infty$$

erfüllt. Dann ist $h_1(r) := \frac{d}{dr} \mathbb{E}f_\mu(rX)$ für fast alle $r \in \mathbb{R}^+$ definiert und es gilt

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{h_1(r) - h_1(0)}{r} = 2 \mathbb{E}V_2(\text{conv } X) \cdot \mu(\mathcal{K}).$$

Beweis: Wir setzen wieder $Z := \text{conv } X$. Für einen strikt konvexen Körper $B \subseteq \mathbb{R}^2$ bezeichne wieder $\Delta_B(s) := \mathbb{E}[V_2(Z + sB) - V_2(X + sB)]$ und $\Delta_B^1(s) := \frac{d}{ds} \Delta_B(s)$ für alle s , in denen diese Ableitung existiert. Falls B darüber hinaus einen Ball als Summanden enthält, gibt es nach Satz 2.24 eine von B unabhängige, aber von der Verteilung von X abhängige, Konstante \tilde{c} so, dass

$$|\Delta_B^1(s)| < \tilde{c} \cdot \frac{S(B)^5}{R'(B)^6 s^2} \quad (3.28)$$

für alle $s > 1$, in denen Δ_B^1 definiert ist.

Unsere Strategie ist nun, die Ableitung der rechten Seiten von (3.25) zu berechnen. Für $r < 1$ und einen strikt konvexen Körper $B \subseteq \mathbb{R}^2$ mit einem Ball als Summanden gilt nach (3.24) und (3.28)

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{dr} r^2 \Delta_B\left(\frac{1}{r}\right) \right| &= \left| 2r \Delta_B\left(\frac{1}{r}\right) + r^2 \Delta_B^1\left(\frac{1}{r}\right) \cdot \frac{-1}{r^2} \right| \\ &\leq 2r \cdot c \frac{S(B)^2}{R(B)^3} \left(\frac{1}{r}\right)^{-1} + \tilde{c} \cdot \frac{S(B)^5}{R'(B)^6 (1/r)^2} \\ &= \left(2c \frac{S(B)^2}{R(B)^3} + \tilde{c} \cdot \frac{S(B)^5}{R'(B)^6} \right) \cdot r^2 \\ &\leq (2c + \tilde{c}) \frac{S(B)^5}{R'(B)^6} \cdot r^2. \end{aligned}$$

Somit folgt aus Satz 1.9, dessen Voraussetzungen wegen $\left| \frac{d}{ds} (s^2 \Delta_A(\frac{1}{s})) \right| \leq (2c + \tilde{c}) \frac{S(A)^5}{R'(A)^6}$ für alle $s \in (0, 1)$ und $A \in \mathcal{K}$ erfüllt sind,

$$\left| \frac{d}{dr} \int_{\mathcal{K}} r^2 \Delta_A\left(\frac{1}{r}\right) d\mu(A) \right| = \left| \int_{\mathcal{K}} \frac{d}{dr} (r^2 \Delta_A\left(\frac{1}{r}\right)) d\mu(A) \right| \leq (2c + \tilde{c}) \int_{\mathcal{K}} \frac{S(A)^5}{R'(A)^6} d|\mu|(A) \cdot r^2.$$

Hieraus, aus (3.21) und (3.25) schließen wir

$$\begin{aligned} &\lim_{r \rightarrow 0} \frac{h_1(r) - h_1(0)}{r} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dr} \mathbb{E} \int_{\mathcal{K}} V_d(rX + A) d\mu(A) - 2 \int_{\mathcal{K}} \mathbb{E} V(Z[1], A[1]) d\mu(A)}{r} \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=1}^2 \binom{2}{j} j r^{j-1} \int_{\mathcal{K}} \mathbb{E} V(Z[j], A[2-j]) d\mu(A) - 2 \int_{\mathcal{K}} \mathbb{E} V(Z[1], A[1]) d\mu(A)}{r} \\ &\quad - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dr} \int_{\mathcal{K}} r^2 \Delta_A\left(\frac{1}{r}\right) d\mu(A)}{r} \\ &= 2 \int_{\mathcal{K}} \mathbb{E} V(Z[2], A[0]) d\mu(A) - 0 \\ &= 2 \mathbb{E} V_2(Z) \cdot \mu(\mathcal{K}). \quad \square \end{aligned}$$

Satz 3.27. Sei $X \subseteq \mathbb{R}^d$, $d > 1$, eine zufällige kompakte Menge mit $\mathbb{E}(\text{diam } X)^{d+1} < \infty$ und $B \subseteq \mathbb{R}^d$ ein konvexer Körper mit einem Summanden der Form RB^d , $R > 0$. Sei weiter ρ ein signiertes Maß auf \mathbb{R}_0^+ , dessen d -tes Moment endlich ist und das absolutstetig bzgl. des Lebesgue-Maßes mit einer differenzierbaren Dichte g ist. Angenommen, es gibt eine Konstante $A > 0$ so, dass für alle $x \in \mathbb{R}^+$ gilt

$$|g(x)| \leq \frac{A}{x^{d-1}}, \quad |g(x)| \leq A, \quad |g'(x)| \leq \frac{A}{x^d}, \quad |g'(x)| \leq \frac{A}{x}.$$

Dann ist die Funktion $r \mapsto \mathbb{E} \int V_d(rX + \lambda B) d\rho(\lambda)$ zweimal in $r = 0$ differenzierbar mit

$$\frac{d^2}{dr^2} \mathbb{E} \int V_d(rX + \lambda B) d\rho(\lambda) = d(d-1) \mu_{d-2} \mathbb{E} V(\text{conv } X[2], B[d-2]),$$

wobei μ_{d-2} das $(d-2)$ -te Moment von ρ ist.

Beweis: Wir müssen bezüglich der Dimension eine Fallunterscheidung machen. Zuerst betrachten wir den Fall $d \geq 3$.

Es bezeichne wieder $Z := \text{conv } X$ und $\Delta_A(s) := V_d(Z + sA) - V_d(X + sA)$ für $s > 0$ und kompakte und konvexe Körper A . Für $s, \lambda \in \mathbb{R}^+$ gilt, dass

$$\Delta_{\lambda B}(s) = V_d(Z + s\lambda B) - V_d(X + s\lambda B) = \Delta_B(s\lambda).$$

Wegen Korollar 2.19 gibt es Konstanten c und c_1 mit $\Delta(s) < c \cdot s^{d-3} + c_1$ für alle $s \in \mathbb{R}_0^+$, wobei $\Delta := \Delta_B$ ist.

Wir setzen wieder $h(r) := \int_{\mathbb{R}_0^+} r^d \Delta(\frac{\lambda}{r}) g(\lambda) d\rho(\lambda)$. Nun berechnen wir die Ableitung von h in einem Punkt $r \geq 0$. Es gilt

$$h(r) = \int_0^\infty r^d \Delta(\frac{\lambda}{r}) g(\lambda) d\lambda = \int_0^\infty \Delta(x) g(rx) r^{d+1} dx.$$

Um diesen Ausdruck mit Hilfe von Satz 1.9 ableiten zu können, müssen wir zeigen, dass die Ableitung des Integranden eine integrierbare Majorante besitzt. Sei $R_1 > 1$. Wir kürzen, wie üblich, $a \wedge b := \min\{a, b\}$ ab. Dann gilt für alle $r \in [0, R_1]$, dass

$$\begin{aligned} & \left| \frac{d}{dr} \Delta(x) g(rx) r^{d+1} \right| \\ &= \left| \Delta(x) g'(rx) x r^{d+1} + (d+1) \Delta(x) g(rx) r^d \right| \\ &\leq (cx^{d-3} + c_1) \left[\frac{A}{(rx)^d} \wedge \frac{A}{rx} \right] x r^{d+1} + (d+1)(cx^{d-3} + c_1) \left[\frac{A}{(rx)^{d-1}} \wedge A \right] r^d \\ &= (1+d+1)(cx^{d-3} + c_1) \left[\frac{A}{(rx)^{d-1}} \wedge A \right] r^d \\ &= (d+2) [(cx^{-2} + c_1 x^{1-d}) Ar \wedge (cx^{d-3} + c_1) Ar^d] \\ &\leq (d+2) [(cx^{-2} + c_1 x^{1-d}) AR_1 \wedge (cx^{d-3} + c_1) AR_1^d]. \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty [(cx^{-2} + c_1 x^{1-d}) AR_1 \wedge (cx^{d-3} + c_1) AR_1^d] dx \\ & \leq AR_1^d \int_0^\infty [(cx^{-2} + c_1 x^{1-d}) \wedge (cx^{d-3} + c_1)] dx \\ & < \infty. \end{aligned}$$

Man bemerke den Unterschied zwischen der Situation hier und der Situation von Satz 3.23: In Satz 3.23 wollten wir beim Ausdruck $\frac{d}{dr} \int_0^\infty \mathbb{E} V_d(X + xB) g(rx) r^{d+1} dx$ Ableitung und Integral vertauschen. Die dafür nötige Integrierbarkeitsbedingung war nur für $r > 0$ und nicht für $r = 0$ erfüllt. Jetzt haben wir $\mathbb{E} V_d(X + xB)$ durch das viel kleinere $\Delta(x)$ ersetzt, wodurch jetzt die Integrierbarkeitsbedingung auch für $r = 0$ erfüllt ist.

Für $r \in [0, 1]$ gilt weiter

$$\begin{aligned}
|h'(r)| &= \left| \int_0^\infty \frac{d}{dr} \Delta(x) g(rx) r^{d+1} dx \right| \\
&= \left| \int_0^\infty \Delta(x) (g'(rx) x r^{d+1} + (d+1) g(rx) r^d) dx \right| \\
&\leq \int_0^\infty r^{d-1} \Delta\left(\frac{\lambda}{r}\right) (|g'(\lambda)| \lambda + (d+1) |g(\lambda)|) d\lambda \\
&\leq \int_0^\infty r^{d-1} \Delta\left(\frac{\lambda}{r}\right) \left(\left[\frac{A}{\lambda^d} \wedge \frac{A}{\lambda}\right] \lambda + (d+1) \left[\frac{A}{\lambda^{d-1}} \wedge A\right] \right) d\lambda \\
&= \int_0^\infty r^{d-1} \Delta\left(\frac{\lambda}{r}\right) (d+2) \left[\frac{A}{\lambda^{d-1}} \wedge A\right] d\lambda \\
&\leq \int_0^\infty r^{d-1} (c \left(\frac{\lambda}{r}\right)^{d-3} + c_1) (d+2) \left[\frac{A}{\lambda^{d-1}} \wedge A\right] d\lambda \\
&\leq r^2 \int_0^\infty (c \lambda^{d-3} + c_1) (d+2) \left[\frac{A}{\lambda^{d-1}} \wedge A\right] d\lambda.
\end{aligned}$$

Der Integrand in der letzten Zeile ist für $\lambda \rightarrow 0$ von der Ordnung λ^0 und für $\lambda \rightarrow \infty$ von der Ordnung λ^{1-d} . Wegen $d \geq 3$ ist das Integral also endlich. Damit folgt aber $h''(0) = 0$, was, wie aus dem Beweis von Satz 3.25 hervorgeht, die Behauptung zeigt.

Nun wenden wir uns dem Fall $d = 2$ zu. Seien hier wieder Δ , c und h wie oben. Dann gilt $\Delta(s) < cs^{-1}$ für alle $s > 0$. Mit der lokalen Beschränktheit von Δ folgt, dass es eine Konstante c' gibt mit $\Delta(s) < c'$ für alle $s > 0$.

Auch in diesem Fall lässt sich die Ableitung von h mit Hilfe von Satz 1.9 berechnen. Allerdings geht der Nachweis der Majorante etwas anders. Sei also $R_1 > 1$ und $r \in [0, R_1]$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\left| \frac{d}{dr} \Delta(x) g(rx) r^3 \right| &= |\Delta(x) g'(rx) x r^3 + 3 \Delta(x) g(rx) r^2| \\
&\leq [cx^{-1} \wedge c'] \cdot \left[\frac{A}{(rx)^2} \wedge \frac{A}{rx} \right] x r^3 + 3 [cx^{-1} \wedge c'] \cdot \left[\frac{A}{rx} \wedge A \right] r^2 \\
&= (3+1) [cx^{-1} \wedge c'] \cdot \left[\frac{A}{rx} \wedge A \right] r^2 \\
&\leq 4A [cx^{-1} \wedge c'] \cdot \left[\frac{r}{x} \wedge r^2 \right] \\
&\leq 4A [cx^{-1} \wedge c'] \cdot \left[\frac{R_1}{x} \wedge R_1^2 \right].
\end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\int_0^\infty 4A [cx^{-1} \wedge c'] \cdot \left[\frac{R_1}{x} \wedge R_1^2 \right] dx \leq 4AR_1^2 \int_0^\infty \left[\frac{c}{x^2} \wedge c' \right] dx < \infty.$$

Da die Anwendbarkeit von Satz 1.9 gesichert ist, können wir für $r \in [0, 1]$ wie oben weiter

schließen

$$\begin{aligned}
 |h'(r)| &= \left| \int_0^\infty \frac{d}{dr} \Delta(x) g(rx) r^3 dx \right| \\
 &= \left| \int_0^\infty \Delta(x) (g'(rx) x r^3 + 3g(rx) r^2) dx \right| \\
 &\leq \int_0^\infty r \cdot \Delta\left(\frac{\lambda}{r}\right) (|g'(\lambda)| \lambda + 3|g(\lambda)|) d\lambda \\
 &\leq \int_0^\infty r \cdot \Delta\left(\frac{\lambda}{r}\right) \left(\left[\frac{A}{\lambda^2} \wedge \frac{A}{\lambda} \right] \lambda + 3 \left[\frac{A}{\lambda} \wedge A \right] \right) d\lambda \\
 &\leq \int_0^\infty r \cdot [c\left(\frac{\lambda}{r}\right)^{-1} \wedge c_1] \cdot 4 \left[\frac{A}{\lambda} \wedge A \right] d\lambda \\
 &\leq 4r \int_0^\infty \left[\frac{crA}{\lambda^2} \wedge c_1 A \right] d\lambda \\
 &= 4r \int_0^{\sqrt{\frac{crA}{c_1 A}}} c_1 A d\lambda + 4r \int_{\sqrt{\frac{crA}{c_1 A}}}^\infty \frac{crA}{\lambda^2} d\lambda \\
 &= 4r \sqrt{\frac{cr}{c_1}} \cdot c_1 A + 4r \frac{crA}{\sqrt{cr/c_1}} \\
 &= 8r \sqrt{r} \cdot A \sqrt{c \cdot c_1}.
 \end{aligned}$$

Hieraus folgt wie oben die Behauptung. \square

Korollar 3.28. Sei $X \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, eine zufällige kompakte Menge mit $\mathbb{E}(\text{diam } X)^{d+1} < \infty$. Dann ist $r \mapsto \mathbb{E}W(rX)$ in $r = 0$ zweimal differenzierbar und es gilt

$$\frac{d}{dr} \mathbb{E}W(rX)|_{r=0} = \mathbb{E}V_1(\text{conv } X)$$

und

$$\frac{d^2}{dr^2} \mathbb{E}W(rX)|_{r=0} = 2\mathbb{E}V_2(\text{conv } X).$$

Beweis: Für die Zufallsvariable Λ aus der Definition von W gilt

$$\kappa_{d-1} \mathbb{E} \Lambda^{d-1} = \kappa_{d-2} \mathbb{E} \Lambda^{d-2} = 1.$$

Nun folgt aus Satz 3.24 und (1.23), dass

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dr} \mathbb{E}W(rX)|_{r=0} &= \binom{d}{1} \mathbb{E} \Lambda^{d-1} \cdot \mathbb{E}V(\text{conv } X[1], B^d[d-1]) \\
 &= \kappa_{d-1} \mathbb{E} \Lambda^{d-1} \cdot \mathbb{E}V_1(\text{conv } X) \\
 &= \mathbb{E}V_1(\text{conv } X).
 \end{aligned}$$

Um Satz 3.27 anwenden zu können, müssen wir zeigen, dass die Lebesgue-Dichte $g(x) = 2\pi x \cdot e^{-\pi x^2}$ von Λ die dort genannten Bedingungen erfüllt. Es gilt $g'(x) = 2\pi \cdot e^{-\pi x^2} - 4\pi^2 x^2 \cdot e^{-\pi x^2}$, also $|g'(x)| \leq (2\pi + 4\pi^2 x^2) \cdot e^{-\pi x^2}$.

Auf Grund der Beziehungen

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} 2\pi x \cdot e^{-\pi x^2} &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} 2\pi x \cdot e^{-\pi x^2} \cdot x^{d-1} &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} (2\pi + 4\pi^2 x^2) \cdot e^{-\pi x^2} &= 2\pi \\ \lim_{x \rightarrow \infty} (2\pi + 4\pi^2 x^2) \cdot e^{-\pi x^2} \cdot x^d &= 0\end{aligned}$$

lässt sich Satz 3.27 anwenden, womit die zweite Behauptung genau wie die erste folgt. \square

Wir wollen an Hand eines Beispiels zeigen, dass zu den vorangegangenen Sätzen analoge Aussagen für die dritte Ableitung nicht gelten. Nicht einmal $\frac{d^3}{dr^3} W(rK)|_{r=0} = 6V_3(\text{conv } K)$ gilt allgemein.

Beispiel 3.29. Sei $K \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Menge, deren Parallelvolumen ein Polynom ist, $V_3(K + sB^3) = \sum_{i=0}^3 c_i s^i$. Es sei Λ wieder die Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion $1 - e^{-\pi t^2}$, $t \geq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}W(rK) &= r^3 \mathbb{E} V_3\left(K + \frac{\Lambda}{r} B^3\right) \\ &= r^3 \mathbb{E} \sum_{i=0}^3 c_i \left(\frac{\Lambda}{r}\right)^i \\ &= \sum_{i=0}^3 c_i \mathbb{E} \Lambda^i r^{3-i}\end{aligned}$$

Also ist

$$\frac{d^3}{dr^3} W(rK)|_{r=0} = \frac{d^3}{dr^3} \sum_{i=0}^3 c_i \mathbb{E} \Lambda^i r^{3-i}|_{r=0} = 6c_0 = 6V_3(K + 0B^d) = 6V_3(K).$$

Die Frage, ob aus den Voraussetzungen (insbesondere, dass das Parallelvolumen von K ein Polynom ist) folgt, dass $V_3(K) = V_3(\text{conv } K)$, ist zu verneinen (vgl. Abschnitt 2.4).

3.4 Polynomiale gewichtete Parallelvolumina

Wie im letzten Abschnitt, so betrachten wir auch in diesem die Funktion, die eine nicht-negative reelle Zahl r auf ein gewichtetes Parallelvolumen von rK abbildet, wobei K ein fester Körper ist. Wir werden zeigen, dass diese Funktion ein Polynom ist, wenn K konvex ist, und dass unter bestimmten Voraussetzungen, die eine gewisse 2-Dimensionalität erzwingen, auch die Umkehrung gilt. Anstelle der gewichteten Parallelvolumina können wir dabei häufig allgemeiner die durch (3.9) definierten Funktionale f_μ betrachten. Im zweiten Teil dieses Abschnitts werden wir lokale Versionen der gewichteten Parallelvolumina einführen und so die Konvexität von K ohne die oben angedeuteten 2-Dimensionalitäts-Voraussetzungen charakterisieren.

Satz 3.30. Sei μ ein signiertes Maß auf \mathcal{K} und $X \subseteq \mathbb{R}^d$ ein zufälliger konvexer Körper mit $\mathbb{E}f_{|\mu|}(X) < \infty$. Dann ist

$$\mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+, r \mapsto \mathbb{E}f_\mu(rX)$$

ein Polynom.

Beweis: Sei $r \in \mathbb{R}_0^+$. Für $j = 0, \dots, d$ gilt nach (1.18)

$$\mathbb{E} \int_{\mathcal{K}} V(X[j], A[d-j]) d|\mu|(A) \leq \mathbb{E} \int_{\mathcal{K}} V_d(X+A) d|\mu|(A) < \infty.$$

Aus (1.18) und (1.20) folgt nun, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{E} f_\mu(rX) &= \mathbb{E} \int_{\mathcal{K}} \sum_{j=0}^d \binom{d}{j} V(rX[j], A[d-j]) d\mu(A) \\ &= \sum_{j=0}^d \binom{d}{j} \mathbb{E} \int_{\mathcal{K}} V(X[j], A[d-j]) d\mu(A) \cdot r^j. \quad \square \end{aligned}$$

Die Umkehrung dieses Satzes gilt, falls das signierte Maß μ ein Maß ist und auf den auf Seite 34 definierten Scheibenkörpern konzentriert ist. Die präzise Formulierung verwendet weitere auf Seite 35 definierte Begriffe.

Satz 3.31. Sei $X \subseteq \mathbb{R}^d$ eine zufällige kompakte Menge und μ ein Maß mit (3.8), das auf den Scheibenkörpern konzentriert ist. Wir nehmen

$$\mathbb{E} \int_{\mathcal{K}} V_d(X_A + A) d\mu(A) < \infty \quad \wedge \quad \mathbb{E} \int_{\mathcal{K}} V_d((X_A + A) \setminus X_A) \cdot (\text{diam } X) \cdot \delta_A d\mu(A) < \infty$$

an. Falls nun

$$\mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+, r \mapsto \mathbb{E}f_\mu(rX) \tag{3.29}$$

ein Polynom ist, dann ist $X \cap (x + \hat{A})$ f.s. für μ -fast alle A für V_{d-2} -fast alle $x \in A^\perp$ konvex.

Bevor wir zum Beweis kommen, bemerken wir, dass (3.29) tatsächlich eine Funktion definiert.

Lemma 3.32. Sei $X \subseteq \mathbb{R}^d$ eine zufällige kompakte Menge und μ ein Maß mit (3.8), das auf den Scheibenkörpern konzentriert ist, mit $\mathbb{E} \int_{\mathcal{K}} V_d(X+A) d\mu(A) < \infty$. Dann gilt $\mathbb{E}f_\mu(rX) < \infty$ für $r \in \mathbb{R}_0^+$.

Beweis: Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Lemma 2.2, wobei überraschenderweise nun der Fall $r \leq 1$ der schwierigere ist. \square

Beweis von Satz 3.31: Das Maß $\tilde{\mu} := \frac{\mu}{m}$, wobei $m := \mu(\mathcal{K})$, ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß. Es sei Y eine gemäß $\tilde{\mu}$ verteilte, von X unabhängige Zufallsvariable. Laut Voraussetzung gibt es $c_0, \dots, c_d \in \mathbb{R}$ so, dass für alle $r \in \mathbb{R}^+$ gilt

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^d c_j r^j &= \mathbb{E}f_\mu(rX) \\ &= r^d \mathbb{E} \int_{\mathcal{K}} V_d(X + \frac{1}{r}A) d\mu(A) \\ &= r^d m \cdot \mathbb{E} V_d(X + \frac{1}{r}Y). \end{aligned}$$

Dividiert man durch $r^d m$ und substituiert $s := \frac{1}{r}$, so erhält man

$$\sum_{j=0}^d \frac{c_j}{m} s^{d-j} = \mathbb{E} V_d(X + sY).$$

Nun folgt die Behauptung sofort aus Korollar 2.32. \square

Unmittelbar aus Satz 3.31 folgt dieses Korollar:

Korollar 3.33. *Sei $X \subseteq \mathbb{R}^2$ eine zufällige kompakte Menge und μ ein Maß mit (3.8), das auf den Scheibenkörpern konzentriert ist, aber nicht das Nullmaß ist. Wir nehmen*

$$\mathbb{E} f_\mu(\text{conv } X) < \infty \quad \wedge \quad \mathbb{E} \int_{\mathcal{K}} V_2((\text{conv } X + A) \setminus \text{conv } X) \cdot (\text{diam } X) \cdot \delta_A d\mu(A) < \infty$$

an. Falls nun

$$\mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+, r \mapsto \mathbb{E} f_\mu(rX)$$

ein Polynom ist, dann ist X fast sicher konvex.

Korollar 3.34. *Sei $X \subseteq \mathbb{R}^2$ eine zufällige kompakte Menge mit $\mathbb{E}[(\text{diam } X)^2] < \infty$. Falls nun*

$$\mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+, r \mapsto \mathbb{E} W(rX)$$

ein Polynom ist, dann ist X fast sicher konvex.

Beweis: Die Behauptung folgt sofort aus Korollar 3.33, falls dessen Voraussetzungen erfüllt sind. Um diese zu überprüfen, sei Λ eine von X unabhängige Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion $1 - e^{-\pi t^2}$, $t \geq 0$. Dann gilt

$$\mathbb{E} W(\text{conv } X) = \mathbb{E} V_2(\text{conv } X + \Lambda B^2) \leq \mathbb{E} V_2((\text{diam } X + \Lambda) B^2) = \pi \cdot \mathbb{E} (\text{diam } X + \Lambda)^2 < \infty$$

und

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} V_2((\text{conv } X + \Lambda B^2) \setminus \text{conv } X) \cdot \text{diam } X \cdot \delta_{\Lambda B^2} \\ &= \mathbb{E} \left(\sum_{j=0}^2 \kappa_{2-j} \Lambda^{2-j} V_j(\text{conv } X) - V_2(\text{conv } X) \right) \cdot \text{diam } X \cdot \frac{1}{\Lambda} \\ &= \mathbb{E} (\pi \Lambda^2 + 2\Lambda V_1(\text{conv } X)) \cdot \text{diam } X \cdot \frac{1}{\Lambda} \\ &\leq \mathbb{E} (\pi \Lambda + 2\pi \text{diam } X) \cdot \text{diam } X \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Also sind die Voraussetzungen von Korollar 3.33 erfüllt. \square

Ein weiterer Ansatz zur Charakterisierung der Konvexität eines Körpers durch Polynomialität der gewichteten Parallelvolumina ist, lokale Versionen zu betrachten.

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^d$ ein strikt konvexer Körper mit $0 \in \text{int } B$ und ρ ein signiertes Maß auf \mathbb{R}_0^+ mit endlichem d -ten Moment. Wir definieren als lokale Version des ρ -gewichteten B -Parallelvolumens das Funktional

$$\begin{aligned} W_{\rho, B} : \mathcal{C} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d) &\rightarrow \mathbb{R}, \\ (K, \eta) &\mapsto \int_{\mathbb{R}_0^+} V_d(\{x \in (K + \lambda B) \setminus K \mid \text{exo}_B(K) \mid (p_B(K, x), u_B(K, x)) \in \eta\}) d\rho(\lambda), \end{aligned}$$

wobei $p_B(K, x)$, $u_B(K, x)$ und $\text{exo}_B(K)$ auf Seite 17 definiert sind.

Nun können wir eine Aussage, die für das Parallelvolumen in [25] gezeigt wurde, für die Funktionen, die wir in diesem Abschnitt betrachten, beweisen.

Satz 3.35. *Sei $B \subseteq \mathbb{R}^d$ ein strikt konvexer Körper mit $0 \in \text{int } B$, $K \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Körper und ρ ein signiertes Maß auf \mathbb{R}_0^+ mit endlichem d -ten Moment. Dann gilt:*

(i) *Falls K konvex ist, ist die Funktion*

$$h_\eta : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+, \quad r \mapsto W_{\rho, B}(rK, r\eta)$$

für jede Borel-Menge $\eta \subseteq \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ ein Polynom, wobei wir $r\eta := \{(rx, u) \mid (x, u) \in \eta\}$ setzen.

(ii) *Sei ρ ein Maß, aber nicht auf $\{0\}$ konzentriert. Falls nun h_η für jede Borel-Menge $\eta \subseteq \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ ein Polynom ist und B glatt ist, dann ist K konvex.*

Beweis: (i) Wir verwenden die durch (1.15) definierten relativen Stützmaße C_0^B, \dots, C_d^B . Man sieht leicht, dass diese homogen in dem Sinne sind, dass

$$C_j^B(rK, r\eta) = r^j C_j^B(K, \eta), \quad r > 0, \eta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$$

gilt. Für $r \in \mathbb{R}_0^+$ folgern wir

$$\begin{aligned} W_{\rho, B}(rK, r\eta) &= \int_{\mathbb{R}_0^+} \sum_{j=0}^{d-1} \lambda^{d-j} \kappa_{d-j} C_j^B(rK, r\eta) d\rho(\lambda) \\ &= \sum_{j=0}^{d-1} \int_{\mathbb{R}_0^+} \lambda^{d-j} \kappa_{d-j} C_j^B(K, \eta) d\rho(\lambda) \cdot r^j. \end{aligned}$$

(ii) Es bezeichne

$$\mathcal{N}_B(K) := \{(p_B(K, x), u_B(K, x)) \mid x \in \mathbb{R}^d \setminus K \setminus \text{exo}_B(K)\}$$

das Normalenbündel von K und

$$\beta_B(K, p, u) := \sup\{t \geq 0 \mid d_B(K, p + tu) = d_B(p, p + tu)\}, \quad (p, u) \in \mathcal{N}_B(K)$$

die Reichweitenfunktion von K . Für $\tau > 0$ setzen wir

$$N_\tau^K := \{(p, u) \in \mathcal{N}_B(K) \mid \beta_B(K, p, u) \leq \tau\}.$$

Nun gilt für $x \in \mathbb{R}^d \setminus \text{exo}_B(K) \setminus K$ die Implikation

$$(p_B(K, x), u_B(K, x)) \in N_\tau^K \Rightarrow d_B(K, x) \leq \tau,$$

was für alle $s, \lambda \in \mathbb{R}_0^+$ die Inklusion

$$\{x \in (K + s\lambda B) \setminus K \setminus \text{exo}_B(K) \mid (p_B(K, x), u_B(K, x)) \in N_\tau^K\} \subseteq (K + \tau B) \setminus K \setminus \text{exo}_B(K)$$

nach sich zieht. Hieraus folgt aber

$$\begin{aligned} H(s) &:= \int_{\mathbb{R}_0^+} V_d(\{x \in (K + s\lambda B) \setminus K \setminus \text{exo}_B(K) \mid (p_B(K, x), u_B(K, x)) \in N_\tau^K\}) d\rho(\lambda) \\ &\leq \rho(\mathbb{R}_0^+) V_d((K + \tau B) \setminus K). \end{aligned}$$

Also ist $H(s)$ beschränkt in s . Weiter ist $h_{N_\tau^K}$ als Polynom vorausgesetzt. Wenn S so groß ist, dass $K \subseteq SB$, dann gilt

$$\begin{aligned} h_{N_\tau^K}(r) &= W_{\rho, B}(rK, rN_\tau^K) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}_0^+} V_d(rSB + \lambda B) d\rho(\lambda) \\ &= \sum_{j=0}^d \binom{d}{j} r^j S^j \int_{\mathbb{R}_0^+} \lambda^{d-j} d\rho(\lambda) V_d(B) \end{aligned}$$

für alle $r \in \mathbb{R}_0^+$. Also ist $h_{N_\tau^K}$ ein Polynom von höchstens Grad d . Wegen

$$\begin{aligned} h_{N_\tau^K}(r) &= \int_{\mathbb{R}_0^+} V_d(\{x \in (rK + \lambda B) \setminus rK \setminus \text{exo}_B(rK) \mid (p_B(rK, x), u_B(rK, x)) \in rN_\tau^K\}) d\rho(\lambda) \\ &= r^d \int_{\mathbb{R}_0^+} V_d(\{x \in (K + \frac{\lambda}{r}B) \setminus K \setminus \text{exo}_B(K) \mid (p_B(K, x), u_B(K, x)) \in N_\tau^K\}) d\rho(\lambda) \end{aligned}$$

folgt $H(s) = s^d h_{N_\tau^K}(\frac{1}{s})$ und somit ist auch $H(s)$ ein Polynom. Da $H(s)$ beschränkt ist und $H(0) = 0$ gilt, ist $H(s) = 0$ für alle $s \in \mathbb{R}_0^+$. Für jedes $r \in \mathbb{R}_0^+$ gibt es ein $s \in \mathbb{R}^+$ mit $\rho((\frac{r}{s}, \infty)) > 0$, woraus

$$\begin{aligned} &V_d(\{x \in (K + rB) \setminus K \setminus \text{exo}_B(K) \mid (p_B(K, x), u_B(K, x)) \in N_\tau^K\}) \\ &= \frac{1}{\rho((\frac{r}{s}, \infty))} \int_{(\frac{r}{s}, \infty)} V_d(\{x \in (K + rB) \setminus K \setminus \text{exo}_B(K) \mid \\ &\quad (p_B(K, x), u_B(K, x)) \in N_\tau^K\}) d\rho(\lambda) \\ &\leq \frac{1}{\rho((\frac{r}{s}, \infty))} \int_{\mathbb{R}_0^+} V_d(\{x \in (K + s\lambda B) \setminus K \setminus \text{exo}_B(K) \mid \\ &\quad (p_B(K, x), u_B(K, x)) \in N_\tau^K\}) d\rho(\lambda) \\ &= 0 \end{aligned}$$

folgt. Wir zeigen nun, [25, S. 476] folgend, dass dies die Konvexität von K impliziert: Da r und τ beliebig waren, folgt aus der σ -Additivität des Lebesgue-Maßes, dass

$$V_d(\{x \in \mathbb{R}^d \setminus K \setminus \text{exo}_B(K) \mid \beta_B(K, p_B(K, x), u_B(K, x)) < \infty\}) = 0.$$

Insbesondere liegen die Punkte x mit $\beta_B(K, p_B(K, x), u_B(K, x)) = \infty$ dicht in $\mathbb{R}^d \setminus K$. Um zu zeigen, dass $\text{exo}_B(K) = \emptyset$ ist, sei $x \in \mathbb{R}^d \setminus K$. Dann gibt es eine Folge von Punkten $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$, die gegen x konvergiert mit $\beta_B(K, p_i, u_i) = \infty$, wobei $p_i := p_B(K, x_i)$ und

$u_i := u_B(K, x_i)$, für alle $i \in \mathbb{N}$. Wegen der Kompaktheit von K konvergiert eine Teilfolge von $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$, o.B.d.A. die gesamte Folge, gegen einen Grenzwert, den wir mit p bezeichnen. Nach Lemma 1.31 gilt $\lim_{i \rightarrow \infty} d_B(K, x_i) = d_B(K, x)$, weshalb auch die Folge $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ gegen $u := \frac{x-p}{d_B(K, x)}$ konvergiert. Wähle $r_1 > d_B(K, x)$. Wegen $x = p + d_B(K, x)u$ folgt $x \in [p, p + r_1u]$. Weil $\text{bd } B$ abgeschlossen ist, gilt $u \in \text{bd } B$ und somit $d_B(p, p + r_1u) = r_1$. Für alle $i \in \mathbb{N}$ folgt aus $\beta_B(K, p_i, u_i) = \infty$, dass $d_B(K, p_i + r_1u_i) = r_1$. Also $d_B(K, p + r_1u) = r_1$. Sei $q \in \Pi_B(K, x)$. Dann gilt

$$d_B(q, p + r_1u) \geq r_1 = d_B(p, x) + d_B(x, p + r_1u) \geq d_B(q, x) + d_B(x, p + r_1u).$$

Da aber auch $d_B(q, p + r_1u) \leq d_B(q, x) + d_B(x, p + r_1u)$ gilt, folgt $x \in [q, p + r_1u]$ aus Lemma 1.35. Da außerdem $x \neq p + r_1u$ und $d_B(p, p + r_1u) = d_B(q, p + r_1u)$ gilt, folgt $p = q$. Also $x \notin \text{exo}_B(K)$. Da x beliebig war und B als glatt und strikt konvex vorausgesetzt ist, folgt aus Satz 1.36 die Konvexität von K . \square

Kapitel 4

Anwendungen

In diesem Kapitel wollen wir einige Anwendungen der Resultate der letzten beiden Kapitel diskutieren.

In Abschnitt 4.1 werden wir nachweisen, dass eine bestimmte Menge dicht im Raum der stetigen und translations-invarianten Funktionale auf der Menge aller Körper liegt.

Im zweiten Abschnitt untersuchen wir Boole'sche Modelle, wobei wir dem Kapazitätsfunktional und der Kontaktverteilungsfunktion besondere Aufmerksamkeit schenken.

Im dritten Abschnitt werden wir neue Beweise für Darstellungen des ersten und zweiten inneren Volumens mit Hilfe Gauß'scher Zufallsvariablen erhalten.

In Abschnitt 4.4 werden wir die Resultate der vorangegangenen Kapitel zunächst auf Brown'sche Pfade anwenden. Dann werden wir zeigen, dass unter Regularitätsbedingungen in der Ebene eine Vereinigung zufälliger Körper, deren erwartetes Parallelvolumen ein Polynom ist, f.s. nur aus einem Körper bestehen kann.

4.1 Räume stetiger Funktionale

In diesem Abschnitt wollen wir eine Version der von Alesker [1] bewiesenen Vermutung von McMullen für nicht-additive Funktionale zeigen.

Wir betrachten den Raum \mathcal{C} der nicht-leeren kompakten Teilmengen des \mathbb{R}^d wieder mit der Hausdorff-Metrik. Weiter definieren wir für abgeschlossene Teilmengen $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{C}$ eine Folge von Seminormen auf dem Raum $C(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ aller stetigen Funktionale von \mathcal{M} nach \mathbb{R} : Für $N \in \mathbb{N}$ und ein stetiges Funktional $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ setzen wir

$$\|\phi\|_N := \max\{|\phi(K)| \mid K \subseteq NB^d, K \in \mathcal{M}\}. \quad (4.1)$$

Auf Grund des Auswahlssatzes von Blaschke (Satz 1.23) ist $\{K \in \mathcal{M} \mid K \subseteq NB^d\}$ kompakt, weshalb das Maximum in (4.1) angenommen wird. Wir sagen, eine Folge $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $C(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ konvergiert gegen ein stetiges Funktional $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, falls $\|\phi_n - \phi\|_N \rightarrow 0$ für alle $N \in \mathbb{N}$.

Hadwiger [20, 6.1.10] charakterisierte die Linearkombinationen von inneren Volumina als die einzigen stetigen, additiven und bewegungs-invarianten Funktionale von \mathcal{K} nach \mathbb{R} . Für unsere Zwecke umformuliert lautet dieses Resultat:

Satz 4.1. *Die lineare Hülle von*

$$\{\mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}, A \mapsto V_d(A + rB^d) \mid r \in \mathbb{R}_0^+\}$$

liegt dicht im Raum aller stetigen, bewegungs-invarianten und additiven Funktionale $\mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$.

Man beachte, dass die Vektorräume in Satz 4.1 endlich-dimensional sind und daher ein dichter Unterraum bereits der Gesamtraum ist.

Will man die Bewegungsinvarianz im Charakterisierungssatz von Hadwiger zur Translationsinvarianz abschwächen, so muss man an Stelle der inneren Volumina gemischte Volumina zulassen. Alesker [1] bewies, dass gemischte Volumina einen dichten Unterraum des Raums aller stetigen, additiven und translations-invarianten Funktionale aufspannen. Wir formulieren diese Aussage so:

Satz 4.2. *Die lineare Hülle von*

$$\{\mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}, A \mapsto V_d(A + K) \mid K \in \mathcal{K}\}$$

liegt dicht im Raum aller stetigen, translations-invarianten und additiven Funktionale $\mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$.

Wir wollen nun noch einen Schritt weiter gehen, und auch die Additivität fallen lassen, wozu wir die skalaren Vielfachen des Einheitsballs bzw. die konvexen Körper durch eine noch größere Mengenkategorie ersetzen müssen.

Hierfür erinnern wir uns, dass wir für einen Körper M

$$\mathcal{C}_{+M} := \{K + rM \mid K \in \mathcal{C}, r > 0\}$$

gesetzt haben und die Menge der konvexen Körper mit inneren Punkten im \mathbb{R}^d mit \mathcal{K}_0 bezeichnen. Das Hauptresultat dieses Abschnitts lautet nun:

Satz 4.3. *Für $M \in \mathcal{K}_0$ liegt die lineare Hülle von*

$$\{\mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}, A \mapsto V_d(A + K) \mid K \in \mathcal{C}_{+M}\}$$

dicht im Raum aller stetigen und translations-invarianten Funktionale $\mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$.

Bevor wir zum Beweis des Satzes kommen, wollen wir ein Korollar ziehen.

Korollar 4.4. *Für $M \in \mathcal{K}_0$ liegt die lineare Hülle von*

$$\{\mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}, A \mapsto V_d(A + K) \mid K \in \mathcal{C}_{+M}\}$$

dicht im Raum aller stetigen und translations-invarianten Funktionale $\mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$.

Beweis: Sei $\phi : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Nach [47, Satz 1.2.3] ist $\text{conv} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{K}$ stetig, also auch $\phi \circ \text{conv} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$. Wegen Satz 4.3 gibt es eine Folge von Funktionen der Gestalt

$$\mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}, A \mapsto \sum_{i=1}^s \lambda_i V_d(A + K_i), \quad \lambda_i \in \mathbb{R}, K_i \in \mathcal{C}_{+M},$$

die gegen $\phi \circ \text{conv}$ konvergiert. Nun konvergiert aber auch die Folge der Einschränkungen dieser Funktionen auf \mathcal{K} gegen $\phi \circ \text{conv}|_{\mathcal{K}} = \phi$. \square

Weiterhin bemerken wir, dass die Resultate von Alesker und von uns nicht auf einfache Art und Weise auseinander hervorgehen. Unser Korollar besagt nämlich, dass eine Menge D dicht in einem topologischen Raum T liegt, während laut Alesker eine Menge, die im Wesentlichen $D \cap S$ ist, dicht in einem Unterraum $S \subseteq T$ liegt.

Der Beweis von Satz 4.3 basiert auf zwei weiteren Aussagen. Zunächst zeigen wir, dass der behauptete dichte Unterraum tatsächlich ein Unterraum ist.

Lemma 4.5. *Sei $M \in \mathcal{K}_0$ und $K \in \mathcal{C}_{+M}$. Dann ist*

$$\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}, A \mapsto V_d(A + K)$$

stetig.

Beweis: Es gibt eine kompakte Teilmenge $L \subseteq \mathbb{R}^d$ und $r > 0$ mit $K = L + rM$. Nun ist die Funktion $\alpha : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}, A \mapsto A + L$ stetig nach [47, Satz 1.2.3] und $\beta : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}, B \mapsto V_d(B + rM)$ ist stetig nach Lemma 1.44. Für $A \in \mathcal{C}$ gilt

$$\phi(A) = V_d(A + K) = V_d((A + L) + rM) = \beta \circ \alpha(A).$$

Also ist $\phi = \beta \circ \alpha$ und deshalb ist ϕ stetig. □

Für einen Körper $K \subseteq \mathbb{R}^d$ bezeichne $c(K)$ wieder den Mittelpunkt der nach Satz 1.29 eindeutig bestimmten Umkugel von K . Für $R > 0$ bezeichne \mathcal{C}_R^* die Menge aller Körper $K \subseteq \mathbb{R}^d$ mit $c(K) = 0$ und $K \subseteq RB^d$. Nach Lemma 1.30 ist $c : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^d$ stetig und daher \mathcal{C}_R^* abgeschlossen. Die zu Beginn dieses Abschnitts angegebene Konstruktion einer Topologie ist daher anwendbar auf $C(\mathcal{C}_R^*, \mathbb{R})$. Offensichtlich stimmt die so konstruierte Topologie mit der von der Maximumsnorm induzierten überein.

Satz 4.6. *Sei $R > 0$ und $M \in \mathcal{K}_0$. Dann ist der Spann U von*

$$\{\mathcal{C}_R^* \rightarrow \mathbb{R}, A \mapsto V_d(A + K) \mid K \in \mathcal{C}_{+M}\}$$

dicht in $C(\mathcal{C}_R^, \mathbb{R})$.*

Beweis: Die Menge \mathcal{C}_R^* ist abgeschlossen und beschränkt, also nach dem Auswahlssatz von Blaschke (Satz 1.23) kompakt. Somit folgt aus dem Riesz'schen Darstellungssatz (Satz 1.7), dass der Vektorraum $M(\mathcal{C}_R^*)$ aller signierten Maße (von endlicher Totalvariation) auf \mathcal{C}_R^* isomorph zum Dualraum von $C(\mathcal{C}_R^*, \mathbb{R})$ ist. Genauer ist ein solcher Isomorphismus durch die Abbildung gegeben, die jedes signierte Maß μ auf \mathcal{C}_R^* auf das Funktional

$$C(\mathcal{C}_R^*, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \phi \mapsto \int_{\mathcal{C}_R^*} \phi(A) d\mu(A)$$

abbildet. Nach Lemma 3.20 ist aber ein signiertes Maß auf \mathcal{C}^* , insbesondere also eines auf \mathcal{C}_R^* , bereits dann das Nullmaß, wenn $\int_{\mathcal{C}^*} \phi(A) d\mu(A) = 0$ für alle $\phi \in U$ gilt. Nach dem Hahn-Banach-Theorem (Satz 1.8) ist U also dicht in $C(\mathcal{C}_R^*, \mathbb{R})$. □

Beweis von Satz 4.3: Sei $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ translations-invariant und stetig. Dann gibt es nach Satz 4.6 für jedes $N \in \mathbb{N}$ eine Folge $(\phi_n^N)_{n \in \mathbb{N}}$ in

$$\text{span}\{\mathcal{C}_N^* \rightarrow \mathbb{R}, A \mapsto V_d(A + K) \mid K \in \mathcal{C}_{+M}\},$$

die in $C(\mathcal{C}_N^*, \mathbb{R})$ gegen $\phi|_{\mathcal{C}_N^*}$ konvergiert. Es gibt nun Zahlen $s_n^N \in \mathbb{N}$, $\lambda_{n,1}^N, \dots, \lambda_{n,s_n^N}^N \in \mathbb{R}$ und Mengen $K_{n,1}^N, \dots, K_{n,s_n^N}^N \in \mathcal{C}_{+M}$ mit

$$\phi_n^N(A) = \sum_{i=1}^{s_n^N} \lambda_{n,i}^N V_d(A + K_{n,i}^N)$$

für alle $A \in \mathcal{C}_N^*$.

Nun definieren wir eine Folge $(\psi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Funktionen $\mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ sowie eine Folge $(n(k))_{k \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{N} . Sei $k \in \mathbb{N}$. Wähle $n(k) \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\|\phi_{n(k)}^k - \phi|_{\mathcal{C}_k^*}\|_{\mathcal{C}_k^*} \leq \frac{1}{k}$, wobei $\|\cdot\|_{\mathcal{C}_k^*}$ die Maximumsnorm auf $C(\mathcal{C}_k^*, \mathbb{R})$ bezeichne. Setze nun

$$\psi_k : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}, A \mapsto \sum_{i=1}^{s_{n(k)}^k} \lambda_{n(k),i}^k V_d(A + K_{n(k),i}^k).$$

Um zu zeigen, dass $(\psi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gegen ϕ konvergiert, sei $N \in \mathbb{N}$ und $\epsilon > 0$. Setze $k_0 := \max\{N, \frac{1}{\epsilon}\} \in \mathbb{R}$. Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k > k_0$ und $A \in \mathcal{C}$ mit $A \subseteq NB^d$. Da der Radius der Umkugel von A höchstens N ist, gilt $A - c(A) \subseteq NB^d \subseteq kB^d$. Weil ψ_k und ϕ beide translations-invariant sind, folgt

$$\begin{aligned} |\psi_k(A) - \phi(A)| &= |\psi_k(A - c(A)) - \phi(A - c(A))| \\ &= |\phi_{n(k)}^k(A - c(A)) - \phi(A - c(A))| \\ &\leq \|\phi_{n(k)}^k - \phi|_{\mathcal{C}_k^*}\|_{\mathcal{C}_k^*} \\ &\leq \frac{1}{k} \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Weil A beliebig war, folgt $\|\psi_k - \phi\|_N < \epsilon$. Also $\|\psi_k - \phi\|_N \rightarrow 0$. Da N beliebig war, haben wir $\psi_k \rightarrow \phi$ gezeigt. \square

4.2 Boolesche Modelle

In diesem Abschnitt wollen wir einige Resultate der Kapitel 2 und 3 auf das Kapazitätsfunktional und die Kontaktverteilungsfunktion Boolescher Modelle, wie in Abschnitt 1.6 eingeführt, anwenden.

Wir stellen nun einen Zusammenhang zwischen der Kontaktverteilungsfunktion Boolescher Modelle und den durch (3.9) definierten Funktionalen f_μ her. Dazu bezeichne \log den Logarithmus zur Basis e . Wir wählen wieder eine messbare Zentrumsfunktion $c : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^d$ mit $c(K + x) = c(K) + x$ für $K \in \mathcal{C}$, $x \in \mathbb{R}^d$ und bezeichnen die Menge aller konvexen Körper K , die $c(K) = 0$ erfüllen, mit \mathcal{K}^* .

Satz 4.7. *Sei Z eine zufällige abgeschlossene Menge, \mathbb{Q} ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathcal{K}^* und $\gamma > 0$. Dann ist Z genau dann ein Boolesches Modell mit Intensität γ und Kornverteilung \mathbb{Q} , wenn*

$$T_Z = 1 - \exp(-f_{\gamma \cdot \mathbb{Q}}) \tag{4.2}$$

oder äquivalent

$$f_{\gamma \cdot \mathbb{Q}} = -\log(1 - T_Z) \tag{4.3}$$

gilt.

Beweis: Die Äquivalenz der beiden Gleichungen ist offensichtlich. Ihre Notwendigkeit folgt aus Satz 1.48. Wegen [47, Satz 1.4.2] sind sie also auch hinreichend. \square

Die Menge aller konvexen Körper K , die innere Punkte haben und $c(K) = 0$ erfüllen, bezeichnen wir mit \mathcal{K}_0^* .

Korollar 4.8. *Sei Z ein Boolesches Modell mit Intensität γ und auf \mathcal{K}^* konzentrierter Kornverteilung \mathbb{Q} . Dann ist T_Z genau dann (bzgl. der Hausdorff-Metrik) stetig, wenn \mathbb{Q} auf \mathcal{K}_0^* konzentriert ist.*

Beweis: Sei zunächst T_Z stetig. Laut (4.3) ist dann auch $f_{\gamma, \mathbb{Q}}$ stetig. Mit $\tilde{\mathbb{Q}} := \mathbb{Q}|_{\mathcal{K}_0^*}$ folgt aus Satz 3.10

$$\gamma \cdot \int_{\mathcal{K}^* \setminus \mathcal{K}_0^*} V_d(B^d + A) d\mathbb{Q}(A) = f_{\gamma, \mathbb{Q}}(B^d) - f_{\gamma, \tilde{\mathbb{Q}}}(B^d) = 0.$$

Weil aber $V_d(B^d + A)$ für jedes $A \in \mathcal{K}^* \setminus \mathcal{K}_0^*$ positiv ist und \mathbb{Q} ein Maß ist, folgt hieraus, dass \mathbb{Q} auf \mathcal{K}_0^* konzentriert ist.

Falls umgekehrt \mathbb{Q} auf \mathcal{K}_0^* konzentriert ist, ist $f_{\gamma, \mathbb{Q}}$ nach Satz 3.10 stetig und somit wegen (4.2) auch T_Z . \square

Korollar 4.9. *Sei Z ein Boolesches Modell mit Intensität γ und auf \mathcal{K}^* konzentrierter Kornverteilung \mathbb{Q} . Dann gilt für alle $K, L \in \mathcal{C}$, dass*

$$(1 - T_Z(K \cup L)) \cdot (1 - T_Z(K \cap L)) \geq (1 - T_Z(K)) \cdot (1 - T_Z(L)) \quad (4.4)$$

$$\mathbb{P}(Z \cap (K \setminus L) = \emptyset | Z \cap L = \emptyset) \geq \mathbb{P}(Z \cap (K \setminus L) = \emptyset | Z \cap (K \cap L) = \emptyset). \quad (4.5)$$

Beweis: Wegen Satz 3.15 gilt

$$f_{\gamma, \mathbb{Q}}(K \cup L) + f_{\gamma, \mathbb{Q}}(K \cap L) \leq f_{\gamma, \mathbb{Q}}(K) + f_{\gamma, \mathbb{Q}}(L). \quad (4.6)$$

Aus (4.3) folgt nun (4.4). Wegen

$$1 - T_Z(M) = \mathbb{P}(Z \cap M = \emptyset), \quad M \in \mathcal{C},$$

folgt aus (4.4), dass

$$\frac{\mathbb{P}(Z \cap (K \cup L) = \emptyset)}{\mathbb{P}(Z \cap L = \emptyset)} \geq \frac{\mathbb{P}(Z \cap K = \emptyset)}{\mathbb{P}(Z \cap (K \cap L) = \emptyset)}.$$

Dies aber äquivalent zu (4.5). \square

Es gibt in \mathcal{K}^* nur einen Körper, der aus genau einem Punkt besteht. Wir nehmen nun o.B.d.A. an, dass dieser Körper $\{0\}$ ist.

Für $K \in \mathcal{K}^*$ bezeichne δ_K das Dirac-Maß in K .

Korollar 4.10. *Sei Z ein Boolesches Modell mit Intensität γ und auf \mathcal{K}^* konzentrierter Kornverteilung \mathbb{Q} . Dann gilt Gleichheit in den Ungleichungen (4.4) und (4.5), genau wenn $\mathbb{Q} = \delta_{\{0\}}$.*

Beweis: Wir müssen nur zeigen, dass genau dann Gleichheit in (4.6) gilt, wenn $\mathbb{Q} = \delta_{\{0\}}$, weil von dort an alle Schlüsse im Beweis von Satz 4.9 mit Gleichheit an Stelle von Ungleichheit gelten und die Richtung der Schlüsse umgekehrt werden kann.

Aus Satz 3.13 folgt aber, dass genau dann Gleichheit in (4.6) gilt, wenn $f_{\gamma \cdot \mathbb{Q}}$ ein skalares Vielfaches des Lebesgue-Maßes ist. Wegen $f_{\gamma \cdot \delta_{\{0\}}} = \gamma \cdot V_d$ und Korollar 3.21 ist dies aber äquivalent zu $\mathbb{Q} = \delta_{\{0\}}$. \square

Sei \mathbb{R}^m durch $(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$ in \mathbb{R}^n eingebettet und Z eine zufällige abgeschlossene Menge in \mathbb{R}^n . Dann folgt aus der Definition des Kapazitätsfunktional, dass das Kapazitätsfunktional von $Z \cap \mathbb{R}^m$ die Einschränkung des Kapazitätsfunktional von Z auf die Körper in \mathbb{R}^m ist. Sei Z nun speziell ein Boolesches Modell mit Intensität $\gamma > 0$ und Kornverteilung \mathbb{Q} . Für alle Körper $C \subseteq \mathbb{R}^m$ gilt dann

$$\begin{aligned} T_{Z \cap \mathbb{R}^m}(C) &= T_Z(C) \\ &= 1 - \exp \left(-\gamma \int_{\mathcal{C}} V_n(A + C^*) d\mathbb{Q}(A) \right) \\ &= 1 - \exp \left(-\gamma \int_{\mathcal{C}} \int_{(\mathbb{R}^m)^\perp} V_m((A + C^*) \cap (\mathbb{R}^m + x)) dx d\mathbb{Q}(A) \right) \\ &= 1 - \exp \left(-\gamma \int_{\mathcal{C}} \int_{(\mathbb{R}^m)^\perp} V_m(((A - x) \cap \mathbb{R}^m) + C^*) dx d\mathbb{Q}(A) \right) \\ &= 1 - \exp \left(-\gamma \int_{\mathcal{C}^m} V_m(A' + C^*) d\mu(A') \right) \\ &= 1 - \exp \left(-\gamma' \int_{\mathcal{C}^m} V_m(A' + C^*) d\mathbb{Q}'(A') \right), \end{aligned}$$

wobei für jede Borel-Menge \mathcal{A} im Raum \mathcal{C}^m aller Körper im \mathbb{R}^m

$$\begin{aligned} \mu(\mathcal{A}) &:= \int_{\mathcal{C}} \int_{(\mathbb{R}^m)^\perp} \mathbf{1}_{\mathcal{A}}((A - x) \cap \mathbb{R}^m) dx d\mathbb{Q}(A), \\ \gamma' &:= \gamma \cdot \mu(\mathcal{C}^m) \end{aligned}$$

und

$$\mathbb{Q}'(\mathcal{A}) := \frac{\mu(\mathcal{A})}{\mu(\mathcal{C}^m)}.$$

Also ist $Z \cap \mathbb{R}^m$ nach Satz 4.7 ein Boolesches Modell.

Korollar 4.11. (i) Sei Z ein Boolesches Modell in \mathbb{R}^n mit Körnern, die fast sicher Kugeln sind, und deren Radien die Verteilungsfunktion $1 - e^{-\pi t^2}$ haben. Dann ist $Z' := Z \cap \mathbb{R}^m$ ebenfalls ein Boolesches Modell mit Körnern, die fast sicher Kugeln sind, und deren Radien die Verteilungsfunktion $1 - e^{-\pi t^2}$ haben. Außerdem hat Z' die selbe Intensität wie Z .

(ii) Sei \mathbb{P} ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathbb{R}_0^+ , für das es eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ so gibt, dass für alle Booleschen Modelle Z in \mathbb{R}^n , $n > m$, mit Körnern, die fast sicher Kugeln sind und Radienverteilung \mathbb{P} haben, folgendes gilt: Das Boolesche Modell $Z' := Z \cap \mathbb{R}^m$ hat die selbe Intensität wie Z und Körner, die fast sicher Kugeln sind und Radienverteilung \mathbb{P} haben. Dann hat \mathbb{P} die Verteilungsfunktion $1 - e^{-\pi t^2}$.

Beweis: (i) Die Körner von Z' sind offensichtlich Kugeln. Zur Berechnung der Radienverteilung erinnern wir daran, dass $W(K) = \mathbb{E}V_d(K + \Lambda B^d)$, wobei Λ eine \mathbb{R}_0^+ -wertige Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion $1 - e^{-\pi t^2}$ ist. Wenn γ die Intensität von Z bezeichnet, gilt $\log(1 - T_Z) = -\gamma \cdot W$ nach (4.3). Wegen Satz 3.6(i) folgt $\log(1 - T_{Z'}) = -\gamma \cdot W$. Also hat Z' nach Satz 4.7 Intensität γ und die Radien seiner Körner haben Verteilungsfunktion $1 - e^{-\pi t^2}$.

(ii) Für Z und Z' wie im Satz und beliebige kompakte Mengen $K \subseteq \mathbb{R}^m$ gilt $T_{Z'}(K) = T_Z(K)$, also nach (4.3)

$$\gamma \cdot \int_{\mathbb{R}_0^+} V_m(K + \lambda B^m) d\mathbb{P}(\lambda) = \gamma \cdot \int_{\mathbb{R}_0^+} V_n(K + \lambda B^n) d\mathbb{P}(\lambda),$$

wobei γ die Intensität von Z bezeichnet. Da $n > m$ beliebig war, folgt mit Satz 3.6(iii), dass \mathbb{P} die Verteilungsfunktion $1 - e^{-\pi t^2}$ hat. \square

Wir müssen zugeben, dass Teil (ii) von Korollar 4.11 aus zwei Gründen etwas unbefriedigend ist. Zum einen fixieren wir m und lassen n über alle Zahlen, die größer als m sind, laufen. Es wäre natürlicher, n zu fixieren und dann ein beliebiges $m \in \{1, \dots, n - 1\}$ zu betrachten. Außerdem arbeiten wir in dem Beweis nur mit der Einschränkung von T_Z auf \mathcal{K} und nicht T_Z auf seinem ganzen Definitionsbereich \mathcal{C} . Also gilt die Aussage dieses Teils vermutlich unter schwächeren Voraussetzungen - dann kann sie aber wahrscheinlich nicht mehr so einfach aus Satz 3.6 gefolgert werden.

Als direkte Folgerung aus Satz 2.24 und Korollar 1.49 erhalten wir:

Korollar 4.12. *Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ ein konvexer Körper mit einem Summanden der Form RB^2 , $R > 0$, und $0 \in \text{int } B$. Sei weiter Z ein Boolesches Modell in \mathbb{R}^2 mit zugrundeliegendem markierten Poisson-Prozess $\sum \delta_{(X_i, Z_i)}$, also $Z = \bigcup (X_i + Z_i)$. Das typische Korn Z_0 von Z erfülle*

$$\mathbb{E}(\text{diam } Z_0)^5 < \infty.$$

Dann ist $\bar{Z} := \bigcup \text{conv}(X_i + Z_i)$ ebenfalls ein Boolesches Modell. Seien λ bzw. $\bar{\lambda}$ die Ausfallraten der Kontaktverteilungen von Z und \bar{Z} bezüglich B . Dann gibt es eine Konstante $C > 0$ so, dass für fast alle hinreichend großen r gilt

$$|\lambda(r) - \bar{\lambda}(r)| < C \cdot r^{-2}.$$

Wir leiten nun eine Aussage über die asymptotische Geschwindigkeit einer Verteilungskonvergenz her. Für $B \subseteq \mathbb{R}^d$ haben wir $B^* := \{-x | x \in B\}$ gesetzt.

Satz 4.13. *Seien $Z^{(r)}$, $r \in \mathbb{R}^+$, Boolesche Modelle in \mathbb{R}^d mit Intensität r^d und von r unabhängigem typischem Korn Z_0 , das $\mathbb{E}(\text{diam } Z_0)^{d+1} < \infty$ erfüllt. Sei $B \subseteq \mathbb{R}^d$ ein konvexer Körper mit $0 \in \text{int } B$, der einen Ball als Summanden hat, und D eine \mathbb{R}_0^+ -wertige Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion $1 - \exp(-t^d V_d(B))$. Dann gilt die Konvergenz*

$$r \cdot d_B(Z^{(r)}, 0) \xrightarrow{r \rightarrow 0} D$$

in Verteilung. Genauer gilt für $t \geq 0$, dass

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}(r \cdot d_B(Z^{(r)}, 0) \leq t) - (1 - e^{-t^d V_d(B)})}{r} = e^{-t^d V_d(B)} t^{d-1} \mathbb{E}V(\text{conv } Z_0[1], B^*[d - 1]).$$

Beweis: Für $t \geq 0$ haben wir das Dirac-Maß in tB^* auf \mathcal{K} mit δ_{tB^*} bezeichnet. Aus den Sätzen 1.48 und 3.25 folgt nun

$$\begin{aligned}
 & \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}(r \cdot d_B(Z^{(r)}, 0) \leq t) - (1 - e^{-t^d V_d(B)})}{r} \\
 &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{(1 - e^{-r^d \mathbb{E}V_d(Z_0 + \frac{t}{r} B^*)}) - (1 - e^{-t^d V_d(B)})}{r} \\
 &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{e^{-V_d(tB^*)} - e^{-\mathbb{E}V_d(rZ_0 + tB^*)}}{r} \\
 &= -\frac{d}{dr} e^{-\mathbb{E}V_d(rZ_0 + tB^*)} \Big|_{r=0} \\
 &= -e^{-V_d(tB^*)} \cdot \left(-\frac{d}{dr} \mathbb{E} \int_{\mathcal{K}} V_d(rZ_0 + A) d\delta_{tB^*}(A) \Big|_{r=0} \right) \\
 &= e^{-t^d V_d(B)} \cdot \left(\mathbb{E} \int_{\mathcal{K}} V(\text{conv } Z_0[1], A[d-1]) d\delta_{tB^*}(A) \right) \\
 &= e^{-t^d V_d(B)} t^{d-1} \mathbb{E}V(\text{conv } Z_0[1], B^*[d-1]). \quad \square
 \end{aligned}$$

Wir beenden diesen Abschnitt mit einem Resultat, das die Aussage von [28, Theorem 5.3] unter schwächeren Voraussetzungen macht. Hierfür bezeichne H_B^Z wieder die Kontaktverteilungsfunktion einer zufälligen abgeschlossenen Menge Z bzgl. eines Eichkörpers B .

Satz 4.14. *Sei Z ein Boolesches Modell in \mathbb{R}^d mit typischem Korn Z_0 . Wir nehmen $\mathbb{E}(\text{diam } Z_0)^{d+1} < \infty$ an. Sei B ein Scheibenkörper für den $\log(1 - H_B^Z)$ ein Polynom ist. Dann ist $X \cap (\hat{B} + x)$ fast sicher für fast alle $x \in B^\perp$ konvex.*

Beweis: Nach Satz 1.48 ist

$$\log(1 - H_B^Z(r)) = \mathbb{E}V_d(X + rB^*).$$

Also ist $r \mapsto \mathbb{E}V_d(X + rB^*)$ ein Polynom. Aus Korollar 2.32 folgt nun aber die Behauptung. \square

4.3 Gauß'sche Zufallsvektoren

In diesem Abschnitt werden wir mehrere geometrische Größen mit Hilfe Gauß'scher Zufallsvektoren ausdrücken. Unsere Strategie ist dabei, Darstellungen für die erste und zweite Ableitung von $W(rK)$ nach r zu finden, wobei wir voraussetzen müssen, dass $K \subseteq \mathbb{R}^d$ eine endliche Menge ist. Die Formeln werden sich im Spezialfall, dass wir die Ableitung in 0 betrachten, vereinfachen. Wir können dort durch Approximation zeigen, dass unsere Resultate für beliebige kompakte Mengen $K \subseteq \mathbb{R}^d$ gelten und die neuen Darstellungen der Ableitungen von $W(rK)$ mit denen aus Abschnitt 3.3 vergleichen. Folgende Darstellung des Wills-Funktionalis stammt von Vitale [56, S. 3].

Satz 4.15. *Sei Z ein standard-normalverteilter Zufallsvektor des \mathbb{R}^d und $K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt. Dann gilt*

$$W(K) = \mathbb{E} \exp(\max\{\langle a, Z \rangle - \frac{\|a\|^2}{2} \mid \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \in K\}).$$

Im Folgenden sei A eine endliche feste Menge. Für $r \in \mathbb{R}_0^+$ und $z \in \mathbb{R}^d$ bezeichne $a_z^r \in \sqrt{2\pi}A$ einen Punkt mit

$$\langle a_z^r, z \rangle - \frac{r}{2} \|a_z^r\|^2 = \max\{\langle a, z \rangle - \frac{r}{2} \|a\|^2 \mid \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \in A\}.$$

In Folgenden sei Z stets ein standard-normalverteilter Zufallsvektor im \mathbb{R}^d .

Satz 4.16. *Mit diesen Bezeichnungen gilt*

$$\frac{\partial}{\partial r} W(rA) = \mathbb{E} \exp(\langle ra_Z^r, Z \rangle - \frac{1}{2} \|ra_Z^r\|^2) \cdot (\langle a_Z^r, Z \rangle - r \|a_Z^r\|^2).$$

Beweis: Sei $r \in \mathbb{R}_0^+$. Dann gilt für zwei verschiedene Punkte $a, a' \in \sqrt{2\pi}A$ f.s., dass

$$\langle a, Z \rangle - \frac{r}{2} \|a\|^2 \neq \langle a', Z \rangle - \frac{r}{2} \|a'\|^2,$$

weshalb a_Z^r f.s. eindeutig bestimmt ist. Wenn a_Z^r eindeutig bestimmt ist, gibt es eine Umgebung von r so, dass für alle s aus dieser Umgebung $a_Z^r = a_Z^s$ gilt. Dann folgt

$$\frac{\partial}{\partial r} \exp(\langle ra_Z^r, Z \rangle - \frac{1}{2} \|ra_Z^r\|^2) = \exp(\langle ra_Z^r, Z \rangle - \frac{1}{2} \|ra_Z^r\|^2) \cdot (\langle a_Z^r, Z \rangle - r \|a_Z^r\|^2). \quad (4.7)$$

Wegen Satz 4.15 gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} W(rA) &= \frac{\partial}{\partial r} \mathbb{E} \exp(\max\{\langle ra, Z \rangle - \frac{\|ra\|^2}{2} \mid \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \in K\}) \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \mathbb{E} \exp(\langle ra_Z^r, Z \rangle - \frac{1}{2} \|ra_Z^r\|^2) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Wenn man im letzten Term Differential und Erwartungswert vertauschen kann, folgt mit Gleichung (4.7) die Behauptung. Also müssen wir die Voraussetzungen von Lemma 1.9 überprüfen. Hierzu sei $R > 0$ so groß, dass $A \subseteq RB^d$. Für $s \in [0, r + 1]$ setzen wir $I := [\min\{r, s\}, \max\{r, s\}]$. Da die Funktion $t \mapsto \exp(\langle ta_Z^t, Z \rangle - \frac{1}{2} \|ta_Z^t\|^2)$ f.s. stückweise stetig differenzierbar ist, gilt f.s.

$$\begin{aligned} &|\exp(\langle sa_Z^s, Z \rangle - \frac{1}{2} \|sa_Z^s\|^2) - \exp(\langle ra_Z^r, Z \rangle - \frac{1}{2} \|ra_Z^r\|^2)| \\ &\leq |s - r| \cdot \max\{|\frac{d}{dt} \exp(\langle ta_Z^t, Z \rangle - \frac{1}{2} \|ta_Z^t\|^2)| \mid t \in I\} \\ &\leq |s - r| \cdot \max\{\exp(\langle ta_Z^t, Z \rangle - \frac{1}{2} \|ta_Z^t\|^2) \cdot |\langle a_Z^t, Z \rangle - t \|a_Z^t\|^2| \mid t \in I\} \\ &\leq |s - r| \cdot \exp((r + 1)R \|Z\|) \cdot (R \|Z\| + (r + 1)R^2). \end{aligned}$$

Die Zufallsvariable auf der rechten Seite hat aber endlichen Erwartungswert, weshalb Lemma 1.9 angewendet werden kann. Dies schließt den Beweis dieses Satzes ab. \square

Satz 4.17. *Mit den oben eingeführten Bezeichnungen gilt*

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} W(rA) = \mathbb{E} \exp(\langle ra_Z^r, Z \rangle - \frac{1}{2} \|ra_Z^r\|^2) \cdot [(\langle a_Z^r, Z \rangle - r \|a_Z^r\|^2)^2 - \|a_Z^r\|^2].$$

Beweis: Der Beweis ist bis auf eine Ausnahme der selbe wie der Beweis zu Satz 4.16. An der Stelle, an der dort Satz 4.15 verwendet wurde, muss nun Satz 4.16 benutzt werden. \square

Wir bezeichnen nun für eine kompakte Menge $K \subseteq \mathbb{R}^d$ und einen Vektor $u \in \mathbb{R}^d$

$$h_K(u) := \max\{\langle k, u \rangle \mid k \in K\} = h_{\text{conv } K}(u).$$

Wähle für $K \in \mathcal{C}$ und $u \in \mathbb{R}^d$ einen Punkt $H(K; u) \in K$ mit

$$\langle H(K; u), u \rangle = h_K(u).$$

Im Fall, dass K konvex ist, ist $H(K; u)$ ein beliebiger Punkt der Stützmenge $H_K(u)$. In jedem Fall ist $H(K; Z)$ fast sicher eindeutig bestimmt.

Korollar 4.18. *Mit den oben und soeben eingeführten Bezeichnungen gilt*

- (i) $\frac{\partial}{\partial r} W(rA)|_{r=0} = \sqrt{2\pi} \cdot \mathbb{E} h_A(Z)$
- (ii) $\frac{\partial^2}{\partial r^2} W(rA)|_{r=0} = 2\pi \cdot \mathbb{E} [h_A(Z)^2 - \|H(A; Z)\|^2]$.

Beweis: Aus der Definition von a_z^r folgt sofort, dass

$$\langle a_Z^0, Z \rangle = \max\{\langle a, Z \rangle \mid a \in \sqrt{2\pi}A\} = \sqrt{2\pi} \cdot h_A(Z)$$

und somit wegen $a_Z^0 \in \sqrt{2\pi}A$

$$a_Z^0 = \sqrt{2\pi} \cdot H(A; Z).$$

Also folgen die Behauptungen aus Satz 4.16 und Satz 4.17. □

Durch einen Vergleich der Korollare 3.28 und 4.18 ergibt sich das nächste Korollar.

Korollar 4.19. *Mit den oben eingeführten Bezeichnungen gilt*

- (i) $V_1(\text{conv } A) = \sqrt{2\pi} \cdot \mathbb{E} h_A(Z)$
- (ii) $V_2(\text{conv } A) = \pi \cdot \mathbb{E} [h_A(Z)^2 - \|H(A; Z)\|^2]$.

Wir wollen dieses Korollar nun durch Approximation auf beliebige kompakte Mengen verallgemeinern. Dazu benötigen wir Stetigkeitsargumente. Laut [47, Satz 1.2.3] ist $\text{conv} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{K}$ stetig und die inneren Volumina sowie $h(\cdot, u), u \in S^{d-1}$, sind als Funktionen von \mathcal{K} nach \mathbb{R} laut [46, S. 210 bzw. Lemma 1.8.10] stetig.

Lemma 4.20. *Sei $u \in \mathbb{R}^d$ und $K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt so, dass $H(K; u)$ eindeutig bestimmt ist, und $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine gegen K konvergente Folge. Dann gilt für jede Wahl von $H(K_i; u)$, dass*

$$\lim_{i \rightarrow \infty} H(K_i; u) = H(K; u).$$

Beweis: Es reicht zu zeigen, dass jede Teilfolge $(K_{m(i)})_{i \in \mathbb{N}}$ von $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge $(K_{m(r(i))})_{i \in \mathbb{N}}$ mit

$$\lim_{i \rightarrow \infty} H(K_{m(r(i))}; u) = H(K; u)$$

besitzt.

Sei also $(K_{m(i)})_{i \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Da $(K_{m(i)})_{i \in \mathbb{N}}$ konvergiert, gibt es $R \in \mathbb{R}^+$ so, dass $K_{m(i)} \subseteq RB^d$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und insbesondere

$$H(K_{m(i)}; u) \in RB^d, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Also hat diese Folge eine konvergente Teilfolge $(H(K_{m(r(i))}; u))_{i \in \mathbb{N}}$. Nun gilt

$$\langle \lim_{i \rightarrow \infty} H(K_{m(r(i))}; u), u \rangle = \lim_{i \rightarrow \infty} \langle H(K_{m(r(i))}; u), u \rangle = \lim_{i \rightarrow \infty} h_{K_{m(r(i))}}(u) = h_K(u).$$

Wegen $\lim_{i \rightarrow \infty} H(K_{m(r(i))}; u) \in K$ folgt

$$\lim_{i \rightarrow \infty} H(K_{m(r(i))}; u) = H(K; u). \quad \square$$

Indem wir das bisher Gesagte zusammennehmen, erhalten wir folgenden Satz.

Satz 4.21. Sei $K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt und Z ein standard-normalverteilter Zufallsvektor im \mathbb{R}^d . Dann gilt

$$(i) \quad V_1(\text{conv } K) = \sqrt{2\pi} \cdot \mathbb{E} h_K(Z)$$

$$(ii) \quad V_2(\text{conv } K) = \pi \cdot \mathbb{E} [h_K(Z)^2 - \|H(K; Z)\|^2].$$

Beweis: Wir beweisen nur die zweite Aussage, da die erste analog, nur etwas einfacher, folgt. Laut Lemma 1.21 gibt es eine gegen K konvergente Folge $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ endlicher Teilmengen von K . Dann folgt aus den Stetigkeitsaussagen vor und in Lemma 4.20, Korollar 4.19 und dem Satz von der majorisierten Konvergenz, der angewendet werden kann, weil $A_i \subseteq K$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$\begin{aligned} V_2(\text{conv } K) &= \lim_{i \rightarrow \infty} V_2(\text{conv } A_i) \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \pi \cdot \mathbb{E} [h_{A_i}(Z)^2 - \|H(A_i; Z)\|^2] \\ &= \pi \cdot \mathbb{E} \lim_{i \rightarrow \infty} [h_{A_i}(Z)^2 - \|H(A_i; Z)\|^2] \\ &= \pi \cdot \mathbb{E} [h_K(Z)^2 - \|H(K; Z)\|^2]. \quad \square \end{aligned}$$

Satz 4.21 ist im Wesentlichen kein neues Resultat. Die erste Aussage ist ein Spezialfall von Proposition 14 aus [51], deren Beweis hauptsächlich auf der Unabhängigkeit von $\|Z\|$ und $\frac{Z}{\|Z\|}$ sowie der Projektionsformel der Integralgeometrie beruht. Die zweite Aussage ist zwar in dieser Form neu, allerdings kann man Teil (ii) von Korollar 4.19 aus [9, (3.10.1)] folgern, indem man verwendet, dass die Kovarianz von $\langle a, Z \rangle$ für $a \in \mathbb{R}^d$ gleich $\|a\|^2$ ist.

4.4 Zufällige kompakte Mengen

In diesem Abschnitt wollen wir Beispiele für zufällige kompakte Mengen untersuchen, die die Voraussetzungen der Sätze aus den Kapiteln 2 und 3 erfüllen. Wir werden dabei zwei Modelle betrachten, nämlich die Brown'schen Pfade (vgl. Definition 1.50) und Vereinigungen zufälliger kompakter Mengen.

Beispiel 4.22. Die Voraussetzungen der Sätze 2.1, 2.15 und 2.24 sowie von Korollar 2.32, sind erfüllt, falls X ein Brown'scher Pfad ist und Y eine deterministische Menge ist, die die Glattheitsvoraussetzungen des jeweiligen Satzes erfüllt, z.B. $Y = B^2$. Weiter erfüllt ein Brown'scher Pfad die Voraussetzungen, die in den Sätzen der Abschnitte 3.3 und 3.4 an X gestellt werden. Wegen Satz 1.51 gilt nämlich $\mathbb{E}(\text{diam } X)^j < \infty$ für alle $j \in \mathbb{N}$.

Da ein Brown'scher Pfad die Voraussetzungen von Satz 2.15 erfüllt, erhalten wir folgendes Resultat:

Korollar 4.23. Es sei S ein Brown'scher Pfad in \mathbb{R}^3 . Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E} V_1(\text{conv } S) &= 4\sqrt{\frac{2}{\pi}} \\ \mathbb{E} V_2(\text{conv } S) &= \pi. \end{aligned}$$

Beweis: Es gilt (siehe z.B. [33, (5.1)])

$$\mathbb{E} V_3(S + rB^3) = \frac{4}{3}\pi r^3 + 4\sqrt{2\pi}r^2 + 2\pi r.$$

Andererseits folgt aus (1.24)

$$\mathbb{E} V_3(\text{conv } S + rB^3) = \sum_{j=0}^3 \kappa_{3-j} r^{3-j} \mathbb{E} V_j(\text{conv } S).$$

Wegen $\mathbb{E}(\text{diam } S)^4 < \infty$ ist die Differenz dieser beiden Polynome laut Satz 2.15 beschränkt. Also stimmen ihre Koeffizienten von r^3 , r^2 und r überein. Dies liefert neben der trivialen Aussage $\mathbb{E} V_0(\text{conv } S) = 1$ die Behauptung. \square

Bem. 4.24. Da für das erwartete Parallelvolumen eines Brown'schen Pfades in beliebigen Dimensionen eine Formel bekannt ist (vgl. z.B. [33, (4.17)]), ist es wahrscheinlich möglich, das erwartete erste und zweite innere Volumen eines Brown'schen Pfades in beliebigen Dimensionen mit obigem Ansatz zu berechnen. Da die Formel [33, (4.17)] aber sehr kompliziert ist, wäre dies mit erheblichem Aufwand verbunden, der nicht zu rechtfertigen wäre, da man in direkter Verallgemeinerung von [34]

$$\mathbb{E} V_1(\text{conv } S) = \frac{d\Gamma(\frac{d-1}{2} + 1)\sqrt{2}}{\Gamma(\frac{d}{2} + 1)} \quad (4.9)$$

in \mathbb{R}^d zeigen kann. Nimmt man noch Bemerkung (a) von [11, S. 149] hinzu, folgt

$$\mathbb{E} V_2(\text{conv } S) = (d-1)\frac{\pi}{2}.$$

Als Anwendung von Satz 3.25 erhalten wir ein Resultat über die Wiener-Wurst, das neu zu sein scheint. Es bezeichne S_t , $t \geq 0$, einen Brown'schen Pfad bis zum Zeitpunkt t .

Satz 4.25. Für $r \geq 0$ gilt

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E} V_d(S_t + rB^d) - r^d \kappa_d}{\sqrt{t}} = r^{d-1} \kappa_{d-1} \mathbb{E} V_1(\text{conv } S) = r^{d-1} \frac{d\pi^{\frac{d-1}{2}} \sqrt{2}}{\Gamma(\frac{d}{2} + 1)}.$$

Beweis: Wegen Satz 1.52 und Satz 3.25 gilt

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E} V_d(S_t + rB^d) - r^d \kappa_d}{\sqrt{t}} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E} V_d(S_{t^2} + rB^d) - r^d \kappa_d}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E} V_d(tS + rB^d) - r^d \kappa_d}{t} \\ &= \frac{d}{dt} \mathbb{E} \int_{\mathcal{K}} V_d(tS + A) d\delta_{rB^d}(A)|_{t=0} \\ &= d \cdot \mathbb{E} \int_{\mathcal{K}} V(\text{conv } S[1], A[d-1]) d\delta_{rB^d}(A) \\ &= \mathbb{E}[dr^{d-1} \cdot V(\text{conv } S[1], B^d[d-1])] \\ &= r^{d-1} \kappa_{d-1} \cdot \mathbb{E} V_1(\text{conv } S). \end{aligned}$$

Weiter gilt wegen (4.9)

$$r^{d-1} \kappa_{d-1} \cdot \mathbb{E}V_1(\text{conv } S) = r^{d-1} \frac{\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\Gamma(\frac{d-1}{2} + 1)} \cdot \frac{d\Gamma(\frac{d-1}{2} + 1)\sqrt{2}}{\Gamma(\frac{d}{2} + 1)} = r^{d-1} \frac{d\pi^{\frac{d-1}{2}}\sqrt{2}}{\Gamma(\frac{d}{2} + 1)}. \quad \square$$

Wir wollen nun einen Satz herleiten, mit dessen Hilfe man überprüfen kann, ob eine Vereinigung zufälliger kompakter Mengen die Integrabilitätsbedingungen der Sätze 2.1, 2.15 und 2.24, von Korollar 2.32 und der Resultate aus den Abschnitten 3.3 und 3.4 erfüllt.

Satz 4.26. *Sei N eine \mathbb{N}^+ -wertige Zufallsvariable mit $\mathbb{E}N < \infty$, $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^+}$ eine Folge zufälliger Punkte in \mathbb{R}^d und $(Z_i)_{i \in \mathbb{N}^+}$ eine Folge zufälliger kompakter Teilmengen des \mathbb{R}^d mit $0 \in Z_i$ f.s. für $i \in \mathbb{N}^+$. Sei N unabhängig von $((X_i, Z_i))_{i \in \mathbb{N}^+}$. Setze*

$$Z = \bigcup_{i=1}^N (X_i + Z_i).$$

Sei $j \in \mathbb{N}$ fest.

- (i) Falls es Zahlen S_1 und S_2 so gibt, dass $\mathbb{E}(\text{diam } Z_i)^j < S_1$ und $\mathbb{E}(\|X_i\|)^j < S_2$ für alle $i \in \mathbb{N}^+$, dann gilt $\mathbb{E}(\text{diam } Z)^j < \infty$.
- (ii) Seien zusätzlich die Folgen $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^+}$ und $(Z_i)_{i \in \mathbb{N}^+}$ voneinander unabhängig und jeweils u.i.v., X_1 radialsymmetrisch verteilt und $\mathbb{P}(N \geq 2) > 0$. Falls $\mathbb{E}(\text{diam } Z)^j < \infty$, dann ist $\mathbb{E}(\text{diam } Z_1)^j < \infty$ und $\mathbb{E}(\|X_1\|)^j < \infty$.

Der Grund, wieso wir Teil (ii) hier aufführen, ist, dass wir zeigen wollen, das Teil (i) nicht wesentlich verschärft werden kann. Im Prinzip kann Teil (ii) dazu verwendet werden, nachzuweisen, dass die oben erwähnten Integrabilitätsbedingungen in einer bestimmten Situation nicht erfüllt sind. Dies wird aber im Regelfall uninteressant sein.

Der Beweis von Teil (i) basiert auf folgendem Lemma:

Lemma 4.27. *Sei N eine \mathbb{N}^+ -wertige Zufallsvariable mit $\mathbb{E}N < \infty$ und $(T_i)_{i \in \mathbb{N}^+}$ eine von N unabhängige Folge von \mathbb{R}_0^+ -wertigen Zufallsvariablen, für die es eine Zahl S mit $\mathbb{E}T_i^j < S$ gibt. Dann ist*

$$\mathbb{E} \max\{T_i | i = 1, \dots, N\}^j < \infty.$$

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \max\{T_i | i = 1, \dots, N\}^j &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(N = n) \mathbb{E} \max\{T_i | i = 1, \dots, n\}^j \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(N = n) \mathbb{E} T_1^j + \dots + T_n^j \\ &< \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(N = n) nS \\ &= S \cdot \mathbb{E}N \\ &< \infty. \end{aligned} \quad \square$$

Beweis von Satz 4.26: (i) Es gilt f.s.

$$\begin{aligned} (\text{diam } Z)^j &\leq \left(\max_{i,k \in \{1, \dots, N\}} \text{diam } Z_i + \|X_i\| + \|X_k\| + \text{diam } Z_k \right)^j \\ &\leq \left(4 \max\{\|X_i\|, \text{diam } Z_i \mid i = 1, \dots, N\} \right)^j \\ &\leq 4^j \max\{\|X_i\| \mid i = 1, \dots, N\}^j + 4^j \max\{\text{diam } Z_i \mid i = 1, \dots, N\}^j. \end{aligned}$$

Da nach Lemma 4.27

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \max\{\|X_i\| \mid i = 1, \dots, N\}^j &< \infty \\ \text{und } \mathbb{E} \max\{\text{diam } Z_i \mid i = 1, \dots, N\}^j &< \infty \end{aligned}$$

gilt, folgt $\mathbb{E} (\text{diam } Z)^j < \infty$.

(ii) Trivialerweise gilt

$$\mathbb{E} (\text{diam } Z_1)^j \leq \mathbb{E} (\text{diam } Z)^j < \infty.$$

Falls $N \geq 2$, gilt $X_1, X_2 \in Z$ und, falls darüber hinaus $\langle X_1, X_2 \rangle \leq 0$, folgt

$$\text{diam } Z \geq \|X_1 - X_2\| \geq \|X_1\|.$$

Wegen den Unabhängigkeitsannahmen folgt

$$\mathbb{E}[\|X_1\|^j] \cdot \mathbb{P}(N \geq 2) \mathbb{P}(\langle X_1, X_2 \rangle \leq 0) \leq \mathbb{E} (\text{diam } Z)^j < \infty.$$

Da $\mathbb{P}(N \geq 2) > 0$ und $\mathbb{P}(\langle X_1, X_2 \rangle \leq 0) \geq \frac{1}{2}$ wegen der vorausgesetzten Radialsymmetrie, folgt $\mathbb{E} \|X_1\|^j < \infty$. \square

Satz 4.28. Sei B ein Scheibenkörper. Sei N eine \mathbb{N}^+ -wertige Zufallsvariable mit $\mathbb{E} N < \infty$, $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^+}$ eine u.i.v. Folge von \mathbb{R}^2 -wertigen Zufallsvariablen und $(Z_i)_{i \in \mathbb{N}^+}$ eine u.i.v. Folge von zufälligen Körpern in \mathbb{R}^2 mit $0 \in Z_i$ f.s. für alle $i \in \mathbb{N}^+$. Es seien N , $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^+}$ und $(Z_i)_{i \in \mathbb{N}^+}$ unabhängig. Weiter gelte $\mathbb{E} \|X_1\|^2 < \infty$ und $\mathbb{E} (\text{diam } Z_1)^2 < \infty$ sowie

- (a) die Verteilung von X_1 ist nicht auf einer Lebesgue'schen Nullmenge konzentriert oder
- (b) die Verteilung von X_1 ist nicht auf einem Punkt konzentriert und Z_1 ist mit positiver Wahrscheinlichkeit strikt konvex.

Setze $Z := \bigcup_{i=1}^N (X_i + Z_i)$. Falls nun $\mathbb{E} V_2(Z + rB)$ ein Polynom ist, dann ist $\mathbb{P}(N = 1) = 1$.

Als erste Vorbereitung für den Beweis dieses Satzes definieren wir für $x = (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2$ und $\epsilon > 0$ die Menge

$$W_\epsilon(x) := \{(y^1, y^2) \in \mathbb{R}^2 \mid y^1 \geq x^1 - \epsilon, y^2 \in [x^2 - \epsilon, x^2]\}.$$

Lemma 4.29. Sei $\epsilon > 0$ und $A \subseteq \mathbb{R}^2$ beliebig. Dann gibt es eine abzählbare Teilmenge $\tilde{A} \subseteq A$ mit

$$A \subseteq \bigcup_{p \in \tilde{A}} W_\epsilon(p). \quad (4.10)$$

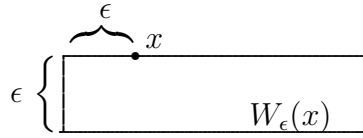


Abbildung 4.1

Beweis: Sei $R \in \mathbb{N}^+$. Wir konstruieren eine abzählbare Menge $A_R \subseteq A \cap [-R, R]^2$ mit

$$A \cap [-R, R]^2 \subseteq \bigcup_{p \in A_R} W_\epsilon(p). \tag{4.11}$$

Hierzu definieren wir rekursiv eine Folge $(A_R^i)_{i \in \mathbb{N}}$ von Teilmengen von $A \cap [-R, R]^2$. Wir setzen $A_R^0 := \emptyset$. Für $i \in \mathbb{N}^+$ betrachten wir die Menge

$$E_R^i := \left\{ y^2 \mid (y^1, y^2) \in A \cap [-R, R]^2 \setminus \bigcup_{p \in A_R^{i-1}} W_\epsilon(p) \right\}.$$

Falls sie leer ist, setzen wir $A_R^i := A_R^{i-1}$. Falls sie ein Maximum besitzt, wählen wir einen Punkt $(q^1, q^2) \in A \cap [-R, R]^2 \setminus \bigcup_{p \in A_R^{i-1}} W_\epsilon(p)$ so, dass q^2 gleich diesem Maximum ist und setzen $A_R^i := A_R^{i-1} \cup \{(q^1, q^2)\}$. Andernfalls wählen wir eine Folge $((q_j^1, q_j^2))_{j \in \mathbb{N}}$ in $A \cap [-R, R]^2 \setminus \bigcup_{p \in A_R^{i-1}} W_\epsilon(p)$ so, dass $(q_j^2)_{j \in \mathbb{N}}$ gegen $\sup E_R^i$ konvergiert, und setzen $A_R^i := A_R^{i-1} \cup \{(q_j^1, q_j^2) \mid j \in \mathbb{N}\}$.

Es sei N die kleinste ganze Zahl, die größer als $\frac{2R}{\epsilon}$ ist. Sei $k \in \mathbb{N}^+$. Wir zeigen

$$\sup E_R^{k+N} \leq \sup E_R^k - \epsilon \quad \vee \quad E_R^{k+N} = \emptyset, \tag{4.12}$$

wobei wir $\sup \emptyset := -R$ setzen. Hierzu betrachten wir für $i \in \mathbb{N}^+$

$$F_R^i := \left\{ y^1 \mid (y^1, y^2) \in A \cap [-R, R]^2 \setminus \bigcup_{p \in A_R^{i-1}} W_\epsilon(p), y^2 \geq \sup E_R^i - \epsilon \right\}.$$

Offensichtlich ist $E_R^i, i \in \mathbb{N}^+$, genau dann leer, wenn F_R^i leer ist. Für $i \in \mathbb{N}^+$ ist auf Grund der Konstruktion von A_R^i ist klar, dass weder im Fall, dass E_R^i ein Maximum hat, noch im Fall, dass E_R^i nicht leer ist und kein Maximum hat, gleichzeitig $\sup E_R^{i+1} > \sup E_R^i - \epsilon$ und $\sup F_R^{i+1} > \sup F_R^i - \epsilon$ gelten können. Also gilt für alle $i \in \mathbb{N}^+$ eine der Beziehungen $\sup E_R^{i+1} \leq \sup E_R^i - \epsilon, \sup F_R^{i+1} \leq \sup F_R^i - \epsilon$ oder $E_R^{i+1} = \emptyset$. Da die Folge $(\sup E_R^i)_{i \in \mathbb{N}}$ monoton fallend ist, folgt induktiv, dass für $j \in \mathbb{N}^+$ eine der Beziehungen $\sup E_R^{k+j} \leq \sup E_R^k - \epsilon, \sup F_R^{k+j} \leq \sup F_R^k - j\epsilon$ oder $E_R^{k+j} = \emptyset$ gelten muss. Wegen $-R \leq \sup F_R^i \leq R$ für alle $i \in \mathbb{N}$, folgt hieraus (4.12). Also ist $E_R^i = \emptyset$ für alle $i > N^2$ und $A_R := A_R^{N^2}$ erfüllt (4.11).

Nun ist $\tilde{A} := \bigcup_{R \in \mathbb{N}^+} A_R$ eine abzählbare Teilmenge von A mit (4.10). □

Lemma 4.30. Sei $X = (X^1, X^2)$ ein Zufallsvektor im \mathbb{R}^2 . Dann ist mit Wahrscheinlichkeit 1 für alle $\epsilon > 0$

$$\mathbb{P}(X^1 - \epsilon \leq Y^1, Y^2 \in [X^2 - \epsilon, X^2] \mid X) > 0,$$

wobei $Y = (Y^1, Y^2)$ ein von X unabhängiger Zufallsvektor mit selber Verteilung ist.

Beweis: Es bezeichne P das Bildmaß von \mathbb{P} unter X bzw. Y . Dann ist zu zeigen, dass

$$P(\{x \in \mathbb{R}^2 | \forall_{\epsilon > 0} : P(W_\epsilon(x)) > 0\}) = 1$$

bzw.

$$P(\{x \in \mathbb{R}^2 | \exists_{\epsilon > 0} : P(W_\epsilon(x)) = 0\}) = 0.$$

Wegen

$$\{x \in \mathbb{R}^2 | \exists_{\epsilon > 0} : P(W_\epsilon(x)) = 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R}^2 | P(W_{1/n}(x)) = 0\}$$

und der σ -Additivität von P reicht es zu zeigen, dass

$$A_n := \{x \in \mathbb{R}^2 | P(W_{1/n}(x)) = 0\}$$

für alle $n \in \mathbb{N}^+$ eine P -Nullmenge ist. Dies folgt aber wegen der σ -Additivität von P aus Lemma 4.29. \square

Beweis von Satz 4.28: Aus Satz 4.26 folgt $\mathbb{E}(\text{diam } X)^2 < \infty$. Wegen Bemerkung 2.3 sind somit die Integrabilitätsbedingungen von Korollar 2.32 erfüllt. Also folgt daraus, dass $\mathbb{E}V_2(Z + rB)$ ein Polynom ist, dass Z f.s. konvex ist.

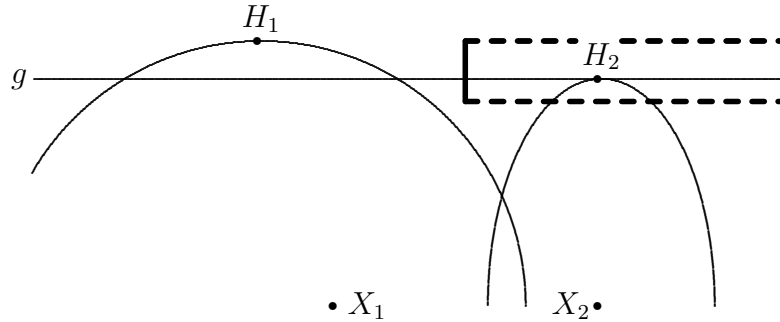
Wir nehmen $\mathbb{P}(N \geq 2) > 0$ an und bedingen auf $N \geq 2$ und N .

Es bezeichne A das Ereignis, dass es $i, k \in \{1, \dots, N\}$ mit $X_i \neq X_k$ gibt und für alle $i, k \in \{1, \dots, N\}$ mit $X_i \neq X_k$ gilt, dass weder $\text{conv } Z_i$ noch $\text{conv } Z_k$ eine zu $X_i - X_k$ parallele Kante haben. Wir zeigen nun, dass A positive Wahrscheinlichkeit hat. Falls Bedingung (a) erfüllt ist, nutzen wir aus, dass die Körper $\text{conv } Z_k$, $k \in \{1, \dots, N\}$, laut Lemma 1.28 f.s. höchstens abzählbar viele Kanten haben. Für $i, k \in \{1, \dots, N\}$ bezeichne $G_{i,k}$ die Vereinigung aller zu einer Kante von $\text{conv } Z_i$ oder $\text{conv } Z_k$ parallelen Geraden durch X_i . Das Ereignis A tritt ein, falls für alle $k \in \{2, \dots, N\}$ der Punkt X_k nicht in die Menge $\bigcup_{i=1}^{k-1} G_{i,k}$ fällt, die eine Vereinigung von abzählbar vielen Geraden und daher eine Lebesgue'sche Nullmenge ist. Da X_k jeweils unabhängig von X_1, \dots, X_{k-1} ist und seine Verteilung nicht auf einer Lebesgue'schen Nullmenge konzentriert ist, ist die Wahrscheinlichkeit von A positiv. Falls Bedingung (b) erfüllt ist, so sind mit positiver Wahrscheinlichkeit Z_1, \dots, Z_N alle strikt konvex und $X_1 \neq X_2$. Also $\mathbb{P}(A) > 0$.

Die Aussagen des folgenden Abschnitts verstehen sich f.s. bedingt auf $N \geq 2$, N und A . Durch Umnummerierung können wir erreichen, dass X_1 und X_2 Endpunkte einer Kante von $\text{conv}\{X_1, \dots, X_N\}$ sind und es somit einen Zufallsvektor $u \in S^1$ gibt mit $\langle X_1, u \rangle = \langle X_2, u \rangle \geq \langle X_k, u \rangle$, $k \in \{3, \dots, N\}$. Beachte, dass die X_1, \dots, X_N nun nicht mehr unabhängig und identisch verteilt sind, die Z_1, \dots, Z_N aber schon. Von nun an bedingen wir zusätzlich auf X_1 und X_2 . Wir setzen $v := \frac{X_2 - X_1}{\|X_2 - X_1\|}$. Es bezeichnen H_1 und H_2 die Punkte aus $X_1 + Z_1$ bzw. $X_2 + Z_2$, die das größte Skalarprodukt mit u haben. Wegen A sind diese eindeutig. Außerdem gibt es deshalb eine Zahl $\epsilon \in (0, \|X_2 - X_1\|)$, für die das Ereignis B , dass $X_1 + Z_1$ die Strecke $[H_1 + (\|X_2 - X_1\| - \epsilon)v, H_1 + (\|X_2 - X_1\| - \epsilon)v - \epsilon u]$ nicht schneidet, positive Wahrscheinlichkeit hat.

Wegen Lemma 4.30 ist aber die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses C , dass

$$\langle H_1, u \rangle - \epsilon \leq \langle H_2, u \rangle \leq \langle H_1, u \rangle \quad \text{und} \quad \langle H_1 - X_1, v \rangle - \epsilon \leq \langle H_2 - X_2, v \rangle,$$



Das Ereignis B ist, dass $X_1 + Z_1$ die dicke Strecke nicht schneidet.
 Das Ereignis C ist, dass H_2 in den dick umrandeten Bereich fällt.

Abbildung 4.2

(zusätzlich) bedingt auf H_1 positiv. Die Ereignisse B und C treten mit positiver Wahrscheinlichkeit gleichzeitig ein. Dann ist aber der Schnitt der Geraden g durch H_2 orthogonal zu u mit $(Z_1 + X_1) \cup (Z_2 + X_2)$ nicht zusammenhängend. Sei $i \in \{3, \dots, N\}$. Da Z_i die Verteilung von Z_2 hat, tritt das Ereignis D_i , dass

$$\max\{\langle x, u \rangle \mid x \in Z_i\} \leq \max\{\langle x, u \rangle \mid x \in Z_2\}$$

mit positiver Wahrscheinlichkeit ein. Weiter gilt $\langle X_i, u \rangle \leq \langle X_2, u \rangle$. Falls Gleichheit gilt, so sind die Vektoren $X_i - X_1$ und $X_i - X_2$, die nicht beide 0 sind, skalare Vielfache von v und wegen A hat $\text{conv } Z_i$ keine zu v parallele Kante. Unter D_i ist somit, falls nicht $\langle X_i, u \rangle < \langle X_2, u \rangle$, die Menge

$$\{x \in Z_i \mid \langle x, u \rangle = \langle H_2 - X_2, u \rangle\}$$

höchstens einelementig. Daher ist unter D_i der Schnitt von g mit $X_i + Z_i$ höchstens einelementig. Wegen der Unabhängigkeit von Z_1, \dots, Z_n treten die Ereignisse B, C, D_3, \dots, D_N mit positiver Wahrscheinlichkeit alle gleichzeitig ein. Dann ist aber der Schnitt von g mit $\bigcup_{i=1}^N (X_i + Z_i)$ nicht zusammenhängend und somit ist Z nicht konvex.

Nun ist aber auch die unbedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass Z nicht konvex ist, positiv. Da dies aber nicht stimmt, ist die Annahme $\mathbb{P}(N \geq 2) > 0$ falsch. \square

Anhang A

Messbarkeitsfragen

Wir wollen hier nachweisen, dass die Mengen und Funktionen, deren Messbarkeit wir in dieser Arbeit verwendet haben, tatsächlich messbar sind.

Dieser Anhang gliedert sich in drei Teile. Zunächst wollen wir Kriterien bereitstellen, um Messbarkeit nachzuweisen. Dann geben wir einen Überblick darüber, woraus die Messbarkeit der einzelnen Mengen und Funktionen folgt. Soweit hierfür im Einzelfall kein kurzes Argument vorhanden ist, lagern wir Teile des Beweises in ein Lemma aus. Diese Lemmata bilden den dritten Teil dieses Anhangs.

Sei T ein topologischer Raum mit seiner Borel- σ -Algebra. Eine Funktion $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *nach oben halbstetig*, wenn $f^{-1}((-\infty, t))$ für alle $t \in \mathbb{R}$ offen ist, und *nach unten halbstetig*, wenn $f^{-1}((t, \infty))$ für alle $t \in \mathbb{R}$ offen ist. Da sowohl $\{(-\infty, t) | t \in \mathbb{R}\}$ als auch $\{(t, \infty) | t \in \mathbb{R}\}$ ein Erzeugendensystem der Borel- σ -Algebra ist, impliziert jede der beiden Eigenschaften die Messbarkeit.

Weiter heißt eine Abbildung $f : T \rightarrow \mathcal{F}$ *nach oben halbstetig*, wenn $f^{-1}(\mathcal{F}^C)$ für alle kompakten Mengen $C \subseteq \mathbb{R}^d$ offen ist, und *nach unten halbstetig*, wenn $f^{-1}(\mathcal{F}_G)$ für alle offenen Mengen $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen ist. Eine Abbildung $f : T \rightarrow \mathcal{F}$, die nach oben oder nach unten halbstetig ist, ist messbar (bzgl. der Borel- σ -Algebra auf T und der Fell-Matheron- σ -Algebra auf \mathcal{F}), wie sofort aus [47, Lemma 1.3.1] folgt.

Die Menge \mathcal{C} der kompakten Teilmengen von \mathbb{R}^d ist messbar und die Spur- σ -Algebra der Fell-Matheron- σ -Algebra auf \mathcal{C} stimmt mit der Borel- σ -Algebra der Hausdorff-Topologie überein ([47, Satz 1.3.2]).

Die Menge \mathcal{K} der konvexen Körper ist laut [47, Satz 1.3.3] messbar. Die Menge \mathcal{K}_{r_0} der konvexen Körper, die 0 im relativen Inneren enthalten, ist nach unten stehendem Lemma A.3 messbar und die Menge der strikt konvexen Körper nach Lemma A.5. Dass der Raum aller Scheibenkörper messbar ist, folgt aus den Lemmata A.1 und A.4.

Die Menge $\{(K, L) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C} | L \subseteq K\}$ ist abgeschlossen und daher messbar. Die Menge $\{(K, L) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K} | \exists M \in \mathcal{K} : L + M = K\}$ ist wegen der Stetigkeit der Minkowski-Addition ([47, Satz 1.2.3]) und dem Auswahlssatz von Blaschke (Satz 1.23) abgeschlossen, also messbar.

Minkowski-Summe und -Multiplikation kompakter Mengen sind laut [47, Satz 1.2.3] stetig bzgl. der Hausdorff-Topologie und daher messbar. Der Durchschnitt ist laut [47, Satz 1.1.6] nach oben halbstetig auf \mathcal{F} und somit messbar.

Da für zwei Körper $K, L \subseteq \mathbb{R}^d$ die Menge $K \setminus L$ i.a. nicht abgeschlossen ist, macht die Frage, ob diese Operation messbar ist, keinen Sinn. An den Stellen in dieser Arbeit, an

denen das Problem auftritt, muss statt dessen $V_d(K \setminus L) = V_d(K) - V_d(L)$ für $L \subseteq K$ verwendet werden.

Der Raum $\mathcal{L}_k^d \subseteq \mathcal{F}$ aller k -dimensionalen linearen Unterräume des \mathbb{R}^d ist kompakt und daher messbar. Die Funktion $\mathcal{C} \times \mathcal{L}_k^d \rightarrow \mathcal{C}$, $(K, L) \mapsto \bigcup_{x \in L^\perp} \text{conv}(K \cap (x + L))$ ist laut [28, Lemma 2.2] messbar. Mit Lemma A.2 folgt hieraus die Messbarkeit von $\mathcal{C} \times \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{C}$, $(K, B) \mapsto K_B$. Wegen [47, Satz 1.1.5 (a)] sieht man, dass die Stützmenge $\mathcal{K} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{K}$ nach oben halbstetig und deshalb messbar ist. Es sei $H : \mathcal{C} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine Funktion mit

$$\langle H(K; u), u \rangle = h_{\text{conv } K}(u) \quad \text{und} \quad H(K; u) \in K, \quad K \in \mathcal{C}, u \in \mathbb{R}^d.$$

Da für festes $K \in \mathcal{C}$ die Stützmenge $H_{\text{conv } K}(u)$ für Lebesgue-fast alle $u \in \mathbb{R}^d$ einelementig ist, folgt aus der Messbarkeit der Stützmenge, dass $H(K, \cdot) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ für jedes feste $K \in \mathcal{C}$ messbar ist, wenn man den Definitionsbereich mit der σ -Algebra aller bzgl. des äußeren Lebesgue-Maßes messbaren Mengen betrachtet. Andererseits ist für festes $u \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ die Menge der Körper, für die die Stützmenge $H_{\text{conv } K}(u)$ einpunktig ist, messbar und die Einschränkung von $H(\cdot, u)$ auf diese Menge stetig und deshalb messbar.

Dass die Umnummerierung der Punkte X_1, \dots, X_N im Beweis von Satz 4.28 auf messbare Art und Weise geschehen kann, folgt aus Lemma A.6.

Die Einschränkung des Volumens auf \mathcal{C} ist laut [47, S. 19] nach oben halbstetig und daher messbar. Dass die gemischten Volumina auf $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$ stetig und daher messbar sind, folgt aus dem Beweis von [46, Theorem 5.1.6].

Die Abbildung

$$\mathcal{K}_{00} \times \mathcal{C} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_0^+, \quad (B, K, x) \mapsto d_B(K, x)$$

ist laut Lemma 1.31 stetig und somit messbar.

Der Durchmesser $\text{diam} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ ist offensichtlich Lipschitz-stetig bzgl. der Hausdorff-Metrik und somit messbar.

Für $K \in \mathcal{K}_{r_0}$ hatten wir die δ -Zahl erklärt durch $\delta_K := 1/\min\{h_K(u) \mid u \in \hat{K}, \|u\| = 1\}$. Ihre Messbarkeit folgt aus Lemma A.7. Die Messbarkeit der durch (2.1) definierten Funktion w folgt aus Lemma A.8.

Die Messbarkeit von

$$R : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}, \quad K \mapsto \sup\{\rho \in \mathbb{R}_0^+ \mid \rho B^d \text{ ist Summand von } K\}$$

folgt aus Lemma A.9. Die Funktion $S : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$, die einem Körper den Radius seiner laut Satz 1.29 eindeutig bestimmten Umkugel zuordnet, ist Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante 1 und daher messbar.

Lemma A.1. *Die Menge aller abgeschlossenen Teilmengen des \mathbb{R}^d , deren lineare Hülle höchstens Dimension k hat, ist (bzgl. der Topologie der abgeschlossenen Konvergenz) abgeschlossen.*

Beweis: Sei $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von abgeschlossenen Teilmengen des \mathbb{R}^d , deren lineare Hülle höchstens Dimension k hat. Wir wählen für jedes $n \in \mathbb{N}$ orthogonale Vektoren $u_n^1, \dots, u_n^k \in S^{d-1}$ mit $F_n \subseteq \text{span}\{u_n^1, \dots, u_n^k\}$. Da S^{d-1} kompakt ist, können wir nach Übergang zu einer Teilfolge o.B.d.A. annehmen, dass die Folgen $(u_n^1)_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (u_n^k)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergieren. Sei $x \in \lim_{n \rightarrow \infty} F_n$. Nach [47, Satz 1.1.2] gibt es dann eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$x_n \in F_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Somit gilt

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sum_{j=1}^k \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, u_n^j \rangle \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} u_n^j \right) \in \text{span} \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} u_n^j \mid j = 1, \dots, k \right\}.$$

Also $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n \subseteq \text{span} \{ \lim_{n \rightarrow \infty} u_n^j \mid j = 1, \dots, k \}$. \square

Lemma A.2. *Die Abbildung $\text{af}^- : \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\} \rightarrow \mathcal{L}_k^d$, die jede Menge auf den zu ihrer affinen Hülle parallelen Unterraum abbildet, ist nach unten halbstetig.*

Beweis: Sei $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von abgeschlossenen Mengen, die gegen $F \in \mathcal{F}$ konvergiert. Wir wählen $x_S \in F$ und eine gegen x_S konvergente Folge $(x_{S,n})_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_{S,n} \in F_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und setzen $E := \text{aff } F - x_S$ und $E_n := \text{aff } F_n - x_{S,n}$. Sei $x \in E$. Dann gibt es Zahlen $\lambda^1, \dots, \lambda^m \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, mit $\sum_{i=1}^m \lambda^i = 1$ und Punkte $x^1, \dots, x^m \in F$ mit $x = \sum_{i=1}^m \lambda^i x^i - x_S$. Wegen [47, Satz 1.1.2] gibt es nun Folgen $(x_n^j)_{n \in \mathbb{N}}$, die gegen x^j konvergieren mit $x_n^j \in F_n$. Setze $x_n := \sum_{i=1}^m \lambda^i x_n^i - x_{S,n}$. Dann ist $x_n \in E_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Nach [47, Satz 1.1.5] ist aff also nach unten halbstetig. \square

Lemma A.3. *Die Menge \mathcal{K}_{r0} aller konvexen Körper K mit $0 \in \text{relint } K$ ist messbar.*

Beweis: Die Funktionen

$$g_i : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}, \quad K \mapsto B_{1/i}(0) \cap \text{af}^- K, \quad i \in \mathbb{N},$$

sind wegen Lemma A.2 messbar, also auch

$$h_i : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K} \times \mathcal{K}, \quad K \mapsto (g_i(K), K), \quad i \in \mathbb{N}.$$

Die Menge

$$\mathcal{I} := \{(L, K) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K} \mid L \subseteq K\}$$

ist abgeschlossen und daher messbar. Also ist auch

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{r0} &= \{K \in \mathcal{K} \mid \exists i \in \mathbb{N} : B_{1/i}(0) \cap \text{af}^- K \subseteq K, 0 \in K\} \\ &= \bigcup_{i=1}^{\infty} \{K \in \mathcal{K} \mid B_{1/i}(0) \cap \text{af}^- K \subseteq K\} \cap \{K \in \mathcal{F} \mid \forall i \in \mathbb{N} : K \cap \text{int } B_{1/i}(0) \neq \emptyset\} \\ &= \bigcup_{i=1}^{\infty} h_i^{-1}(\mathcal{I}) \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_{\text{int } B_{1/i}(0)} \end{aligned}$$

messbar. \square

Es bezeichne nun \mathcal{A}_k , $k \in \mathbb{N}^+$, die Menge aller 2-dimensionalen konvexen Körper, die in ihrer affinen Hülle betrachtet einen Randpunkt mit zwei äußeren Normalenvektoren, deren Winkel größer oder gleich $1/k$ ist, haben. Dann schließen wir in leichter Abwandlung von [47, Theorem 2.6.1]:

Lemma A.4. *Die Mengen \mathcal{A}_k , $k \in \mathbb{N}^+$, sind abgeschlossen.*

Beweis: Sei $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathcal{A}_k mit Grenzwert in $K \in \mathcal{C}$. Da \mathcal{K} abgeschlossen ist (Beweis von [47, Satz 1.3.3]), gilt $K \in \mathcal{K}$ und wegen Lemma A.1 ist die affine Hülle von K höchstens zweidimensional. Weiter gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Punkt $p_n \in \text{bd } K_n$, in dem K_n zwei äußere Einheitsnormalenvektoren u_n und v_n im zu $\text{aff } K_n$ parallelen Unterraum hat, deren Winkel mindestens $1/k$ ist. Aus Kompaktheitsgründen können wir annehmen, dass die Folgen $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen Grenzwerte p , u und v konvergieren. Da es für jeden Punkt $k \in K$ eine gegen diesen konvergente Folge $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $k_n \in K_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt, hat K in p die äußeren Normalenvektoren u und v . Außerdem liegen u und v im zu $\text{aff } K$ parallelen Unterraum und der Winkel zwischen u und v ist größer oder gleich $1/k$. Somit ist $K \in \mathcal{A}_k$. \square

Es bezeichne nun \mathcal{B}_k , $k \in \mathbb{N}^+$, die Menge aller konvexen Körper, die ein Segment der Länge mindestens $1/k$ im Rand enthalten. Dann gilt:

Lemma A.5. *Die Mengen \mathcal{B}_k , $k \in \mathbb{N}^+$, sind abgeschlossen.*

Beweis: Es sei $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen in \mathcal{B}_k mit Grenzwert $K \in \mathcal{C}$. Weil \mathcal{K} abgeschlossen ist, gilt $K \in \mathcal{K}$. Nun besitzt jede Menge K_n zwei Randpunkte p_n und q_n , deren Abstand $1/k$ ist und die einen gemeinsamen äußeren Einheitsnormalenvektor u_n haben. Wir können wieder annehmen, dass die Folgen $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen Grenzwerte p , q und u konvergieren. Dann sind p und q Punkte von K , in denen K den äußeren Normalenvektor u hat. Insbesondere liegt also die Strecke zwischen p und q im Rand von K . Da ihre Länge $1/k$ ist, folgt $K \in \mathcal{B}_k$. \square

Lemma A.6. *Es gibt eine messbare Abbildung $f = (f_1, \dots, f_n) : (\mathbb{R}^2)^n \rightarrow (\mathbb{R}^2)^n$ so, dass es für jedes $\hat{x} = (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^2)^n$ eine Bijektion $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ mit $f_j(\hat{x}) = x_{\sigma(j)}$ für $j = 1, \dots, n$ und einen Vektor $u \in \mathbb{R}^2$ mit*

$$\langle f_1(\hat{x}), u \rangle = \langle f_2(\hat{x}), u \rangle \geq \langle f_j(\hat{x}), u \rangle, \quad j = 3, \dots, n,$$

gibt.

Beweis: Wir wählen $f_1(\hat{x})$ als linken unteren Tangentenpunkt (siehe [47, S. 136]) von $\{x_1, \dots, x_n\}$. Falls $P(\hat{x}) := \{x_1, \dots, x_n\} \setminus \{f_1(\hat{x})\}$ die leere Menge ist, setzen wir $f_j(\hat{x}) := x_1$ für alle $j \in \{2, \dots, n\}$. Andernfalls wählen wir als $f_2(\hat{x})$ denjenigen Punkt $p \in P$, für den $\langle p - f_1(\hat{x}), e_1 \rangle / \|p - f_1(\hat{x})\|$ maximal ist, bei Gleichstand den mit größerem Betrag $\|p - f_1(\hat{x})\|$. Für $j \in \{3, \dots, n\}$ sei $f_j(\hat{x}) := x_{j-k_j}$, wobei

$$k_j := \begin{cases} 2 & \text{falls } f_1(\hat{x}) \notin \{x_1, \dots, x_{j-2}\} \wedge f_2(\hat{x}) \notin \{x_1, \dots, x_{j-2}\} \\ 0 & \text{falls } f_1(\hat{x}) \in \{x_1, \dots, x_{j-1}\} \wedge f_2(\hat{x}) \in \{x_1, \dots, x_{j-1}\} \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Messbarkeit von f_1 folgt aus Halbstetigkeitsargumenten. Um im Fall $n > 1$ die Messbarkeit von f_2 zu zeigen, bemerken wir zunächst, dass die Mengen

$$\begin{aligned} R &:= \{ \hat{x} \in (\mathbb{R}^2)^n \mid P(\hat{x}) = \emptyset \}, \\ R_1 &:= \{ \hat{x} \in (\mathbb{R}^2)^n \setminus R \mid \exists i \in \{1, \dots, n\} : (f_1(\hat{x}) \neq x_i \wedge \langle f_1(\hat{x}), e_2 \rangle = \langle x_i, e_2 \rangle) \} \text{ und} \\ R_2 &:= \{ \hat{x} \in (\mathbb{R}^2)^n \setminus R \mid \forall i \in \{1, \dots, n\} : (f_1(\hat{x}) = x_i \vee \langle f_1(\hat{x}), e_2 \rangle \neq \langle x_i, e_2 \rangle) \} \end{aligned}$$

messbar sind. Weiter betrachten wir die Funktionen

$$\begin{aligned} g_1 : R_1 \cup R_2 &\rightarrow \mathbb{R}, \quad \hat{x} \mapsto \frac{\langle f_2(\hat{x}) - f_1(\hat{x}), e_1 \rangle}{\|f_2(\hat{x}) - f_1(\hat{x})\|} \\ g_2 : R_1 \cup R_2 &\rightarrow \mathbb{R}, \quad \hat{x} \mapsto \|f_2(\hat{x}) - f_1(\hat{x})\|. \end{aligned}$$

Ihre Einschränkungen auf R_1 und R_2 sind jeweils halbstetig und daher sind die beiden Funktionen messbar. Da $f_1(\hat{x}) = f_2(\hat{x})$ für alle $\hat{x} \in R$ gilt, folgt hieraus die Messbarkeit von f_2 .

Die Messbarkeit von f_j , $j \in \{3, \dots, n\}$, ist leicht zu sehen. Offensichtlich hat f auch die übrigen geforderten Eigenschaften. \square

Lemma A.7. *Die Einschränkung von $K \mapsto \frac{1}{\delta_K}$ auf die Menge $\mathcal{K}_{(j),0}$ aller konvexer Körper von Dimension j mit $0 \in \text{relint } K$ ist für jedes $j \in \{0, \dots, d\}$ Lipschitz-stetig.*

Beweis: Sei $\epsilon > 0$ und seien $K, K' \in \mathcal{K}_{(j),0}$ mit $d^H(K, K') < \epsilon$. Es bezeichne \hat{L} wieder die lineare Hülle eines Körpers $L \in \mathcal{K}_{(j),0}$. Falls es $u_0 \in \hat{K}' \cap K^\perp$ mit $\|u_0\| = 1$ gibt, dann gilt

$$\frac{1}{\delta_{K'}} \leq h_{K'}(u_0) \leq h_{K+\epsilon B^d}(u_0) = \epsilon < \frac{1}{\delta_K} + \epsilon.$$

Sonst ist die orthogonale Projektion von \hat{K}' auf \hat{K} bijektiv. Wähle dann $u_1 \in \hat{K}$ mit $\|u_1\| = 1$ und $h_K(u_1) = 1/\delta_K$. Es bezeichne u_0 den Einheitsvektor aus \hat{K}' , dessen orthogonale Projektion auf \hat{K} die selbe Richtung wie u_1 hat. Dann gilt $u_0 = \langle u_0, u_1 \rangle u_1 + u_2$ für ein $u_2 \in K^\perp$ und daher $\langle k, u_0 \rangle = \langle u_0, u_1 \rangle \langle k, u_1 \rangle$ für jedes $k \in K$. Somit folgt

$$\frac{1}{\delta_{K'}} \leq h_{K'}(u_0) \leq h_K(u_0) + \epsilon \leq h_K(u_1) + \epsilon = \frac{1}{\delta_K} + \epsilon.$$

Da genauso $\frac{1}{\delta_K} \leq \frac{1}{\delta_{K'}} + \epsilon$ gilt, ist die Behauptung bewiesen. \square

Lemma A.8. *Die Funktion $w : \mathcal{K}_{00} \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ ist nach unten halbstetig.*

Beweis: Sei $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathcal{K}_{00} , die gegen $B \in \mathcal{K}_{00}$ konvergiert und $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathbb{R}_0^+ , die gegen $r \in \mathbb{R}_0^+$ konvergiert. Angenommen, die Folge $(w_{B_n}(r_n))_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt einen Häufungspunkt, der kleiner als $w_B(r)$ ist. Dann konvergiert eine Teilfolge von $(w_{B_n}(r_n))_{n \in \mathbb{N}}$, o.B.d.A. die Folge selbst, gegen diesen Häufungspunkt. Weiter gibt es Folgen $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in B^d und $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R}^d mit $w_{B_n}(r_n) = d_{B_n}(y_n, z_n)$, $d_{B_n}(0, z_n) = r_n$ und $y_n \in \Pi_{B_n}(0y_n, z_n)$. Weil $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, gibt es $S > 0$ mit $B_n \subseteq SB^d$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und genauso gibt es $s > 0$ mit $r_n < s$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere gilt $z_n \in sSB^d$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen der Kompaktheit von B^d und sSB^d besitzen $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente Teilfolgen, o.B.d.A. die Folgen selbst. Ihre Grenzwerte nennen wir y und z . Nach Lemma 1.31 gilt $r = d_B(0, z)$ und $d_B(y, z) \leq d_B(\lambda y, z)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, also $y \in \Pi_B(0y, z)$. Nun folgt aber

$$w_B(r) \leq d_B(y, z) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_{B_n}(y_n, z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} w_{B_n}(r_n),$$

im Widerspruch zur Annahme. Also ist w nach unten halbstetig. \square

Lemma A.9. *Die Funktion $R : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ ist nach oben halbstetig.*

Beweis: Sei $K \in \mathcal{K}$ und $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine gegen K konvergente Folge in \mathcal{K} . Da $(R(K_i))_{i \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist, besitzt diese Folge eine konvergente Teilfolge, o.B.d.A. die Folge selbst. Nun gibt es eine gegen $\lim_{i \rightarrow \infty} R(K_i)$ konvergente Folge $(\rho_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und eine Folge $(M_i)_{i \in \mathbb{N}}$ konvexer Mengen mit $K_i = M_i + \rho_i B^d$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Wegen dem Auswahlssatz von Blaschke (Satz 1.23) können wir annehmen, dass $(M_i)_{i \in \mathbb{N}}$ gegen einen konvexen Körper M konvergiert. Wegen der Stetigkeit der Minkowski-Addition ([47, Satz 1.2.3]) folgt $K = M + \lim_{i \rightarrow \infty} R(K_i) B^d$. Also $R(K) \geq \lim_{i \rightarrow \infty} R(K_i)$. \square

Literaturverzeichnis

- [1] Alesker, S.: *Description of translation invariant valuations on convex sets with a solution of P. McMullens Conjecture*, Geometric and Functional Analysis 11, 2001, S. 244-272
- [2] Baddeley, A.J., Gill, R.D., Hansen, M.B.: *First contact distributions for spatial patterns: regularity and estimation*, Advances in Applied Probability 31, 1999, S. 15-33
- [3] Bartsch, R.: *Allgemeine Topologie I*, Oldenburg Verlag, München, 2007
- [4] Behrend, F.: *Bemerkung zur Inhaltstheorie*, Mathematische Annalen 111, 1935, S. 289-292
- [5] Betke, U., Gritzmann, P.: *An application of valuation theory to two problems in discrete geometry*, Discrete Mathematics 58, 1986, S. 81-85
- [6] Betke, U., Henk, M.: *Intrinsic volumes and lattice points of crosspolytopes*, Monatshefte für Mathematik 115, 1993, S. 27-33
- [7] Blaschke, W.: *Kreis und Kugel*, De Gruyter, Berlin, 1916/1956
- [8] Brown, M.: *Sets of a constant distance of a planar set*, Michigan Mathematical Journal 19, 1972, S. 321-323
- [9] Chevet, S.: *Processus Gaussiens et volumes mixtes*, Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete 36, 1976, S. 47-65
- [10] Cohn, D.L.: *Measure Theory*, Birkhäuser, Boston, 1980
- [11] Cranston, M., Hsu, P., March, P.: *Smoothness of the convex hull of planar Brownian motion*, The Annals of Probability 17, 1989, S. 144-150
- [12] Dinghas, A.: *Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel für den n-dimensionalen Raum*, Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften in Wien, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse. Abteilung IIa, 1940, S. 399-432
- [13] Dinghas, A.: *Minkowskische Summen und Integrale - Superadditive Mengenfunktionale, Isoperimetrische Ungleichungen*, Gauthier-Villars, Paris, 1961
- [14] Evans, L.C., Gariepy, R.F.: *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, CRC Press, Boca Raton, 1992

- [15] Falconer, K.J.: *The Geometry of Fractal Sets*, Cambridge University Press, 1985
- [16] Federer, H.: *Geometric Measure Theory*, Springer, Berlin, Heidelberg, 1969
- [17] Gardner, R.J.: *The Brunn-Minkowski inequality*, Bulletin of the American Mathematical Society 39, 2002, S. 355-405
- [18] Groß, W.: *Die Minimaleigenschaft der Kugel*, Monatshefte für Mathematik und Physik 28, 1917, S. 77-97
- [19] Hadwiger, H.: *Die erweiterten Steinerschen Formeln für ebene und sphärische Bereiche*, Commentarii Mathematici Helvetici 18, 1945, S. 59-75
- [20] Hadwiger, H.: *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*, Springer, Berlin, Heidelberg, 1957
- [21] Hadwiger, H.: *Das Wills'sche Funktional*. Monatshefte für Mathematik 79, 1975, S. 213-221.
- [22] Hadwiger, H.: *Gitterpunktanzahl im Simplex und die Wills'sche Vermutung*, Mathematische Annalen 239, 1979, S. 271-288
- [23] Hadwiger, H., Wills, J.: *Gitterpunktanzahl konvexer Rotationskörper*, Mathematische Annalen 208, 1974, S. 221-232
- [24] Hug, D.: *Measures, Curvatures and Currents in Convex Geometry*, Habilitationsschrift, Universität Freiburg, 1999
- [25] Heveling, M., Hug, D., Last, G.: *Does polynomial parallel volume imply convexity?*, Mathematische Annalen 328, 2004, S. 469-479
- [26] Hug, D., Last, G.: *On support measures in Minkowski spaces and contact distributions in stochastic geometry*, The Annals of Probability 28, 2000, S. 796-850
- [27] Hug, D., Last, G., Weil, W.: *A local Steiner-type formula for general closed sets and applications*, Mathematische Zeitschrift 246, 2004, S. 237-272
- [28] Hug, D., Last, G., Weil, W.: *Polynomial parallel volume, convexity and contact distributions of random sets*, Probability Theory and Related Fields 135, 2006, S. 169-200
- [29] Karatzas, I., Shreve, S.E.: *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer, New York, Berlin, Heidelberg, 1999
- [30] Kiderlen, M., Rataj, J.: *Volumes of morphological transforms*, Mathematika 53, 2006, S. 103-127
- [31] Kiderlen, M., Weil, W.: *Measure-valued valuations and mixed curvature measures of convex bodies*, Geometriae Dedicata 76, 1999, S. 291-329
- [32] Kneser, M.: *Über den Rand von Parallelkörpern*, Mathematische Nachrichten 5, 1951, S. 241-251

- [33] Last, G.: *On mean curvature functions of Brownian paths*, Stochastic Processes and their Applications 116, 2006, S. 1876-1891
- [34] Letac, G., Takacs, L.: *Expected perimeter length*, The American Mathematical Monthly 87, 1980, S. 142
- [35] Lusternik, L.: *Die Brunn-Minkowskische Ungleichung für beliebige messbare Mengen*, Comptes Rendus (Doklady) de l'Academie des Sciences de l'URSS 3, 1935, S. 55-58
- [36] Makai, E.: *Steiner type inequalities in plane geometry*, Periodica polytechnica. Electrical engineering 3, 1959, S. 345-355
- [37] McMullen, P.: *Non-linear angle-sum relations for polyhedral cones and polytopes*, Mathematical proceedings of the Cambridge Philosophical Society 78, 1975, S. 247-261
- [38] McMullen, P.: *Inequalities between intrinsic volumes*, Monatshefte für Mathematik 111, 1991, S. 47-53
- [39] Minkowski, H.: *Volumen und Oberfläche*, Mathematische Annalen 57, 1903, S. 447-495; abgedruckt in: Hilbert (Hrsg.): *Gesammelte Abhandlungen von Hermann Minkowski*, Chelsea Publishing Company, New York, 1911
- [40] Nosarzewska, M.: *Évaluation de la différence entre l'aire d'une région plane convexe et le nombre des points aux coordonnées entières convertis par elle*, Colloquium Mathematicum 1, 1948, S. 305-311
- [41] Ohmann, D.: *Eine Verallgemeinerung der Steinerschen Formel*, Mathematische Annalen 129, 1955, S. 209-212
- [42] Overhagen, T.: *Zur Gitterpunktzahl konvexer Körper im 3-dimensionalen Euklidischen Raum*, Mathematische Annalen 216, 1975, S. 217-224
- [43] Pikatu, P.: *On sets of constant distance from a planar set*, Topological Methods in Nonlinear Analysis 21, 2003, S. 369-374
- [44] Rataj, J., Schmidt, V., Spodarev, E.: *On the expected surface area of the Wiener sausage*, erscheint in Mathematische Nachrichten
- [45] Schneider, R.: *An extension of the principal kinematic formula of integral geometry*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 35, 1994, S. 275-290
- [46] Schneider, R.: *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*, Cambridge University Press, 1993
- [47] Schneider, R., Weil, W.: *Stochastische Geometrie*, Teubner, Stuttgart, Leipzig, 2000
- [48] Shohat, J.A., Tamarkin, J.D.: *The Problem of Moments*, American Mathematical Society, Rhode Island, 1963
- [49] Stachó, L.L.: *On the volume function of parallel sets*, Acta Scientiarum Mathematicarum 38, 1976, S. 365-374

- [50] Steiner, J.: *Über parallele Flächen*, 1840, abgedruckt in: Weierstrass (Hrsg.): *Jacob Steiner's gesammelte Werke*, Chelsea Publishing Company, Bronx, New York, 1882, Band II, S. 171-176
- [51] Sudakov, V.N.: *Geometric Problems in the Theory of Infinite-Dimensional Probability Distributions*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, American Mathematical Society, 1979
- [52] Sz.-Nagy, B.: *Über Parallelmengen nichtkonvexer ebener Bereiche*, Acta Scientiarum Mathematicarum 20, 1959, S. 36-47
- [53] Thompson, A.C.: *Minkowski Geometry*, Cambridge University Press, 1996
- [54] Topkis, D.M.: *Supermodularity and Complementarity*. Princeton University Press, Princeton, 1998
- [55] Valentine, F.: *Convex Sets*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1964
- [56] Vitale, R.A.: *The Wills functional and Gaussian processes*, The Annals of Probability 24, 1996, S. 2172-2178
- [57] Vitale, R.A.: *A log-concavity proof for a Gaussian exponential bound*, in: Advances in stochastic inequalities. Contemporary Mathematics 234, 1999, S. 209-212
- [58] Vitale, R.A.: *Intrinsic volumes and Gaussian processes*, Advances in Applied Probability 33, 2001, S. 354-364
- [59] Weil, W.: *Inner contact probabilities for convex bodies*, Advances in Applied Probability 14, 1982, S. 582-599
- [60] Werner, D.: *Funktionalanalysis*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2007
- [61] Wills, J.M.: *Zur Gitterpunktanzahl konvexer Mengen*, Elemente der Mathematik 28, 1973, S. 57-63
- [62] Wills, J.M.: *Minkowski's successive minima and the zeros of a convexity-function*, Monatshefte für Mathematik 109, 1990, S. 157-164

Symbolverzeichnis

Elementares:

\mathbb{N}^+	$\{1, 2, 3, \dots\}$	S. 5
\mathbb{N}, \mathbb{N}_0	$\{0, 1, 2, \dots\}$	S. 5
\mathbb{R}^+	$(0, \infty)$	S. 5
\mathbb{R}_0^+	$[0, \infty)$	S. 5
∇	Gradient	S. 21
$C(S, T)$	Menge der stetigen Funktionale $S \rightarrow T$	S. 7

Mengensysteme:

\mathcal{C}	kompakte, nichtleere Teilmengen des \mathbb{R}^d	S. 10
\mathcal{C}_{+M}		S. 26
\mathcal{C}^*	zentrierte Körper	S. 27
\mathcal{K}	konvexe Körper	S. 10
\mathcal{K}_{00}	konvexe Körper mit 0 als innerem Punkt	S. 16
\mathcal{K}_0	konvexe Körper mit inneren Punkten	S. 22
\mathcal{K}^*	zentrierte konvexe Körper	S. 116
\mathcal{K}_0^*	zentrierte konvexe Körper mit inneren Punkten	S. 117
\mathcal{K}_{r0}	konvexe Körper K mit $0 \in \text{relint } K$	S. 130
\mathcal{F}	abgeschlossene Mengen	S. 26
\mathcal{F}^A	abgeschlossene Mengen, die A nicht schneiden	S. 26
\mathcal{F}_A	abgeschlossene Mengen, die A schneiden	S. 26
\mathcal{B}	Borel- σ -Algebra	S. 7

Maßtheorie und Stochastik:

μ^+, μ^-	Positiv-/Negativteil von signierten Maßen	S. 5
$ \mu $	Variationsmaß	S. 5
$\mu _{\Omega'}$	Einschränkung	S. 5
$M(S)$	Menge der signierten Maße auf S	S. 7
T_Z	Kapazitätsfunktional	S. 27
H_B^Z	Kontaktverteilungsfunktion	S. 27
δ	Dirac-Maß	S. 27

Elementargeometrie:

$\ \cdot \ $	Euklidische Norm	S. 9
diam	Durchmesser	S. 9
$B_r(x)$	abgeschlossener Ball	S. 11
B^d	abgeschlossene Einheitskugel	S. 11
S^{d-1}	Sphäre	S. 11
$[x, y]$	Strecke von x nach y	S. 18
xy	Gerade durch x und y	S. 36
int, bd	Inneres, Rand	S. 11
conv	konvexe Hülle	S. 11
relint	relatives Inneres	S. 14
\hat{B}	affine Hülle	S. 35
B^\perp	affin-orthogonales Komplement	S. 35

Konvex- und Minkowskigeometrie:

$K + L, rK$	Minkowski-Summe und -Produkt	S. 11
K^*	Spiegelung von K	S. 28
h_K	Stützfunktion von K	S. 11
H_K	Stützmenge	S. 42
$H(K; u)$		S. 121
d^H	Hausdorff-Metrik	S. 12
d_B	Abstand bzgl. Eichkörper B	S. 15
Π_B	Menge der B -metrischen Projektionen	S. 16
p_B	B -metrische Projektion	S. 17
u_B, n_B		S. 17
ν_B		S. 21
exo	Exoskelett	S. 17
$\mathcal{N}_B(A)$	Normalenbündel	S. 17
τ_K	umgekehrte sphärische Bildfunktion	S. 25

Geometrische Maße und gemischte Volumina:

\mathcal{H}^j	j -dimensionales Hausdorff-Maß	S. 9
V_d	Lebesgue-Maß	S. 23
C_j^B	relatives Stützmaß	S. 23
Φ_j^B	relatives Krümmungsmaß	S. 23
Ψ_j^B	relatives Flächenmaß	S. 23
$V(K[j], B[d-j])$	gemischtes Volumen	S. 23
V_j	inneres Volumen	S. 24
S_{d-1}	Oberflächenmaß	S. 24
$S(K[j], B[d-j-1], \cdot)$	gemischtes Flächenmaß	S. 24

Spezielles:

K_B	B -Konvexifikation	S. 35
δ_K	δ -Zahl	S. 35
w		S. 36
f_μ		S. 88
W	Wills-Funktional (Fortsetzung)	S. 99