

# Informationsfusion für verteilte Systeme

Dietrich Brunn, Felix Sawo, and Uwe D. Hanebeck

Lehrstuhl für Intelligente Sensor-Aktor-Systeme (ISAS),  
Institut für Technische Informatik,  
Universität Karlsruhe (TH)  
WWW Home Page: <http://isas.uka.de>

**Zusammenfassung** Dieser Beitrag befasst sich mit modellbasierten Methoden zur Vermessung verteilter physikalischer Phänomene. Diese Methoden zeichnen sich durch eine systematische Behandlung stochastischer Unsicherheiten aus, so dass neben der Rekonstruktion der vollständigen Wahrscheinlichkeitsdichte der relevanten Größen aus einer geringen Anzahl von zeit-, orts- und wertdiskreten Messungen auch die Generierung optimaler Messsequenzen möglich ist. Es wird dargestellt, wie eine Beschreibung für ein verteilt-parametrisches System in Form einer partiellen Differentialgleichung, welche einen unendlich-dimensionalen Zustandsraum beschreibt, in eine konzentriert-parametrische Form konvertiert wird. Diese kann als Grundlage für den Entwurf klassischer Schätzer, wie z.B. des Kalman Filters, dienen. Ferner wird eine Methode zur Sensoreinsatzplanung vorgestellt, mit der eine optimale Sequenz von Messparametern bestimmt werden kann, um mit einem minimalen Messaufwand die Unsicherheit auf ein gewünschtes Maß zu reduzieren. Die Anwendung dieser Methoden wird an zwei Beispielen, einer Temperaturverteilung und der Verformung einer Führungsschiene, demonstriert. Zusätzlich werden die Herausforderungen bei der Behandlung nichtlinearer Systeme und die Probleme bei der dezentralen Verarbeitung, wie sie typischerweise beim Einsatz von Sensornetzwerken auftreten, diskutiert.

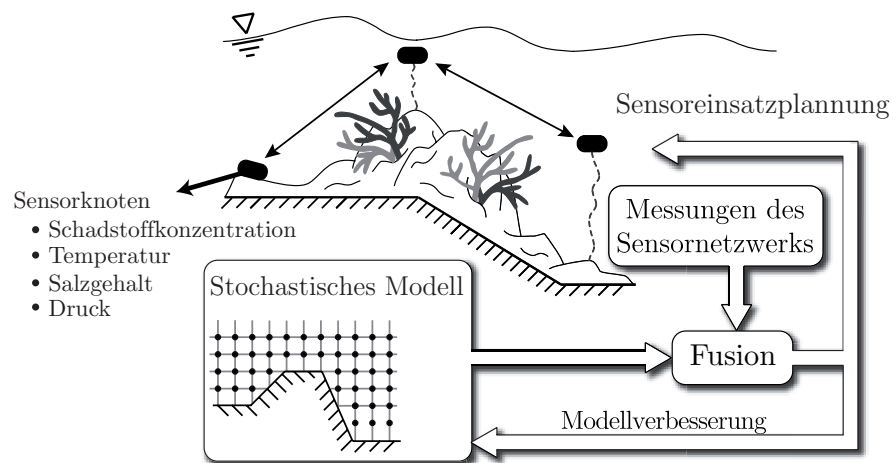
## 1 Einleitung

Räumlich verteilte Systeme zeichnen sich dadurch aus, dass die betrachteten Größen sich mit der Zeit und mit dem Ort ändern. Typische Beispiele sind Temperaturverteilungen in Räumen und Festkörpern, Verteilungen von Schadstoffkonzentrationen in Gewässern oder Verformungen von Maschinenteilen.

Die Beobachtung, Überwachung und Vermessung von räumlich konzentrierten Größen, wie z.B. elektrische Spannungen oder Fahrzeuggeschwindigkeiten sind die klassischen Kernaufgaben der Zustandsschätzung. Dabei wird aus Messungen gewonnene Information mit bereits vorhandener Information fusioniert. Für diese Fusion gibt es eine Vielzahl von Verfahren [15], wie das Kalman Filter [8] und seine Derivate, Partikel Filter [4] und analytische Filter, wie z.B. Filter auf Basis von Gaußmischverteilungen [1, 7]. Eine Voraussetzung für die Anwendung solcher Verfahren ist eine konzentriert-parametrische endlich-dimensionale

Systembeschreibung. Für verteilte Systeme ist diese Annahme allerdings in der Regel nicht erfüllt.

In diesem Beitrag werden deshalb neuartige Verfahren zur modellbasierten Rekonstruktion von physikalischen verteilten Systemen, auch verteilte Phänomene genannt, vorgestellt. Dabei soll aus zeit-, orts- und wertdiskreten Messungen das gesamte Phänomen, welches durch sogenannte Systemzustände charakterisiert wird, effizient rekonstruiert werden. Anhand von zwei anschaulichen Beispielanwendungen, nämlich einer Temperaturverteilung und der Verformung einer Führungsschiene, werden die neu entwickelten Ansätze zur Rekonstruktion verteilter Phänomene dargestellt und diskutiert.



**Abbildung 1.** Mögliches Anwendungsszenario zur Beobachtung und Vermessung eines verteilten Phänomens mit Hilfe von zeit-, orts- und wertdiskreten Messungen.

Eine Anwendung für die Informationsfusion von verteilten Systemen sind Sensornetzwerke. Abb. 1 zeigt schematisch ein Einsatzszenario für ein Sensornetzwerk: Einzelne Sensorknoten, welche die Schadstoffkonzentrationsmessungen durchführen können, werden im Meer ausgebracht. Mit Hilfe dieser Messungen soll eine Schadstoffverteilung im gesamten zu überwachenden Gebiet bestimmt werden. Aus wirtschaftlichen Gründen sollte die Anzahl der Sensorknoten, sowie die Anzahl der Messungen so gering wie möglich gehalten werden. Allgemein gilt, je geringer dabei die Messrate ist, desto länger ist die Lebensdauer eines einzelnen autonomen Knoten. Es muss also ein Kompromiss zwischen Genauigkeit und Realisierungsaufwand gefunden werden.

Es werden Methoden vorgestellt, die es ermöglichen, durch Einbeziehung von (physikalischem) Hintergrundwissen in Form eines physikalischen Modells gute Ergebnisse bei vertretbarem Messaufwand zu erreichen. Durch diese Rekonstruktion ist es möglich, die charakterischen Größen zu bestimmen, welche das ver-

teilte Phänomen an *jedem Ort* und zu *jedem Zeitpunkt* vollständig beschreiben. Somit können also auch Aussagen über das Phänomen an Nichtmesspunkten getroffen werden und außerdem das zukünftige Verhalten präzisiert werden.

Weiterhin zeichnen sich diese Methoden durch eine systematische Behandlung stochastischer Unsicherheiten aus, die natürlicherweise in den Messungen, aber auch bedingt durch die Art der Modellierung, auftreten. Durch diese Betrachtungsweise ist es möglich, neben der Rekonstruktion der vollständigen Wahrscheinlichkeitsdichte der relevanten Größen aus einer geringen Anzahl von zeit-, orts- und wertdiskreten Messungen auch optimale Messsequenzen in Bezug auf die Messorte und die Messzeitpunkte zu generieren. Die prinzipielle Struktur der modellbasierten Rekonstruktion verteilter Phänomene wird anhand eines möglichen Anwendungsszenario in Abb. 1 dargestellt.

Der Beitrag ist wie folgt gegliedert: Im folgenden Abschnitt wird auf die Beschreibung von räumlich verteilten physikalischen Phänomenen durch partielle Differentialgleichungen (PDE<sup>1</sup>) eingegangen. Danach werden in Abschnitt 3 Methoden vorgestellt, welche verteilt-parametrische Systeme in konzentriert-parametrische Systeme konvertieren. Die Methoden zeichnen sich durch eine vernünftige Approximation des auftretenden unendlich-dimensionalen Zustandes durch einen endlich-dimensionalen Zustandsvektor aus. Dadurch können die klassischen Schätzverfahren angewendet werden, wie Abschnitt 4 aufzeigt. Die Methode zur Bestimmung von geeigneten Messparametern wird in Abschnitt 5 vorgestellt. Abschnitt 6 diskutiert Herausforderungen, die bei nichtlinearen Systemen und bei dezentraler Verarbeitung entstehen. Der Beitrag schließt mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick in Abschnitt 7.

## 2 Beschreibung räumlich verteilter physikalischer Phänomene

Es gibt eine Vielzahl von Methoden, um physikalische Phänomene mathematisch zu beschreiben. In diesem Artikel werden physikalische Phänomene als entweder statische oder dynamische Systeme und als entweder konzentriert-parametrische oder verteilt-parametrische Systeme klassifiziert. Ein statisches System verändert sich über die Zeit nicht, aber im Fall eines verteilt-parametrischen Systems sehr wohl über seine Ortsvariablen, währenddessen sich der Zustand eines dynamischen Systems zusätzlich mit der Zeit ändert.

Konzentriert-parametrische Systeme zeichnen sich dadurch aus, dass ihre Parameter in einzelnen Raumpunkten *konzentriert* sind, d.h. die Parameter hängen nur von der Zeit, nicht aber vom Ort ab. Solche physikalischen Systeme lassen sich durch ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen (DGL)

$$\mathbb{L}\left(t, \underline{x}, \dot{\underline{x}}, \dots, \underline{x}^{(i)}\right) = \underline{s}(t)$$

beschreiben.  $\underline{x}$  ist der Zustandsvektor,  $\underline{x}^{(i)}$  dessen  $i$ -te zeitliche Ableitung,  $\underline{s}(t)$  der Eingangsvektor und  $\mathbb{L}(\cdot)$  eine lineare Funktion. Ein Beispiel für ein konzen-

---

<sup>1</sup> engl.: *partial differential equation*

triert-parametrisches System ist das Flugverhalten eines Vogelschwarms. Position und Geschwindigkeit der einzelnen Vögel beschreiben den Zustand dieses Phänomens in erster Näherung vollständig.

Verteilt-parametrische Systeme haben die Eigenschaft, dass ihre Parameter nicht nur alleine von der Zeit abhängen. Vielmehr sind diese zusätzlich räumlich verschmiert, d.h. vom Ort abhängig. Zur Beschreibung eines räumlich verteilten Phänomens  $p(z, t)$ , wobei  $z$  den Ort angibt, werden Systeme von partiellen Differentialgleichungen (PDEs)

$$\mathbb{L}\left(p(z, t), \frac{\partial p(z, t)}{\partial t}, \dots, \frac{\partial^i p(z, t)}{\partial t^i}, \frac{\partial p(z, t)}{\partial z}, \dots, \frac{\partial^j p(z, t)}{\partial z^j}\right) = s(z, t) \quad (1)$$

verwendet. Diese beschreiben die Wechselwirkung zweier zeitlich und räumlich benachbarter Punkte in Abhängigkeit von einer Eingangsfunktion  $s(z, t)$ .

Ein typisches Beispiel für ein verteilt-parametrisches System ist eine Schadstoffwolke. Im Gegensatz zum Vogelschwarm gibt es an jedem kontinuierlichen Raumpunkt eine Schadstoffkonzentration. Die Auswirkungen von Konzentrationsunterschieden wird durch die Diffusions-PDE beschrieben.

Die allgemeine Lösung  $p(z, t, \underline{x}^\infty)$  von (1) in Abhängigkeit vom Parameter- oder Zustandsvektor  $\underline{x}^\infty$  ist im Allgemeinen unendlich-dimensional. Abschnitt 3 stellt Verfahren vor, wie  $\underline{x}^\infty$  durch einen endlich-dimensionalen Vektor approximiert werden kann.

### 3 Modellkonversion

Wie im vorherigen Abschnitt erläutert, führt die Modellierung eines verteilten Phänomens im Allgemeinen auf eine verteilt-parametrische Systembeschreibung. Da allerdings eine direkte Verwendung dieser Systembeschreibung für Rekonstruktionszwecke sehr komplex ist, ist typischerweise eine Konversion in ein endlich-dimensionales Zustandsraummodell zweckmäßig. In diesem Abschnitt wird nun detailliert auf die Konversion eines unendlich-dimensionalen Systems in ein endlich-dimensionales System eingegangen. Für die spätere Rekonstruktion stellt dies ein essentiellen Schritt dar, da sich ein verteilt-parametrisches System im Allgemeinen nicht mit einer endlichen Anzahl von Parametern darstellen lässt.

Die Kernidee des hier vorgestellten Ansatzes basiert darauf, das verteilte Phänomen  $p(z, t)$  durch eine Reihe

$$p(z, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \Psi_i(z) x_i(t) \quad (2)$$

von orstabhängigen Basisfunktionen  $\Psi_i(z)$  und ihren zugehörigen zeitveränderlichen Gewichtsfunktion  $x_i(t)$  darzustellen. Dies ermöglicht eine effiziente Rekonstruktion von  $p(z, t)$ . Um ein endlich-dimensionales System zu erhalten, wird die Reihe bei  $N_{\text{dof}}$  abgebrochen, so dass nur noch der konzentriert-parametrische Zustandsvektor

$$\underline{x}(t) = [x_0(t), \dots, x_{\text{dof}}(t)]^T$$

bestimmt werden muss. Dafür existieren in der klassischen Schätztheorie eine Vielzahl von Verfahren.

Die Bestimmung des Approximationsfehlers für gegebenes  $N_{\text{dof}}$  ist ein noch ungelöstes Problem. Lediglich für den Spezialfall, dass die Randbedingungen das verteilte Phänomen  $p(z, t)$  so einschränken, dass die Reihe (2) an sich endlich ist, können Aussagen über den Approximationsfehler getroffen werden.

Im nächsten Abschnitt wird zunächst der Spezialfall von statischen verteilt-parametrischen Systemen betrachtet. Abschnitt 3.2 widmet sich dann dynamischen verteilt-parametrischen Systemen.

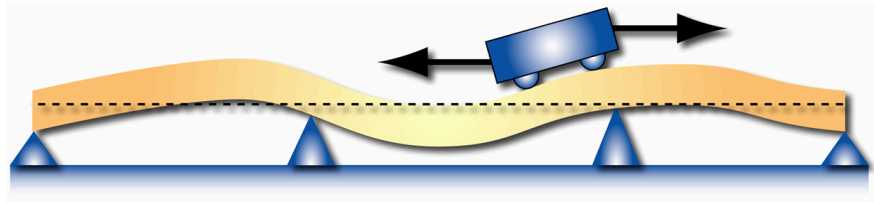
### 3.1 Statische verteilt-parametrische Systeme

Statische verteilt-parametrische Systeme sind bei Kalibrieraufgaben von Werkzeugmaschinen von besonderer Bedeutung. Ein typisches Beispiel für solche Anwendungen ist die effiziente Vermessung einer verformten Führungsschiene in Werkzeugmaschinen, siehe Abb. 2. Für den hier betrachteten statischen Fall verschwinden die zeitlichen Ableitungen und somit vereinfacht sich die PDE (1) zu

$$\mathbb{L}\left(p(z), \frac{\partial p(z)}{\partial z}, \dots, \frac{\partial^j p(z)}{\partial z^j}\right) = s(z)$$

und die Funktionsreihe (2) wird zu

$$\tilde{p}(z) = \sum_{i=0}^{N_{\text{dof}}-1} \Psi_i(z) x_i . \quad (3)$$



**Abbildung 2.** Führungsschiene mit Höhengschlag, welche an diskreten Punkten befestigt ist.

Betrachtet man das Beispiel der verformten Führungsschiene mit diskreten Befestigungspunkten näher, erhält man für kleine Durchbiegungen  $\partial p(z)/\partial z \ll 1$  die eindimensionale PDE

$$EI_0 \frac{\partial^4 p(z)}{\partial z^4} = s(z) , \quad (4)$$

wobei  $E$  das Elastizitätsmodul und  $I_0$  das axiale Flächenmoment 2. Grades ist [5]. Es lässt sich zeigen, dass zwischen zwei Befestigungspunkten  $l$  und  $(l + 1)$

die Lösung von (4)

$$p(z) = a_l + b_l(z - z_0) + c_l(z - z_0)^2 + d_l(z - z_0)^3 \quad (5)$$

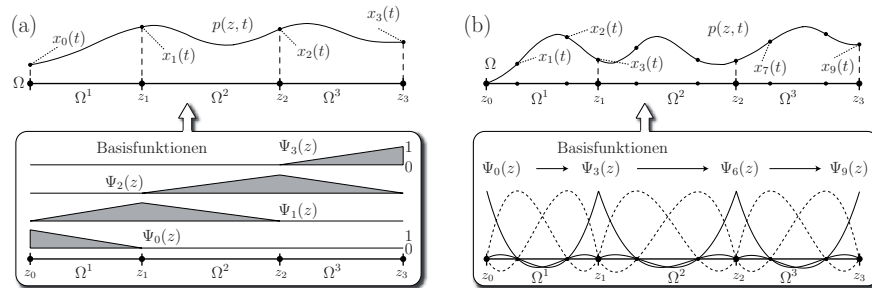
eines kubisches Spline ist. In [3] wird gezeigt, dass sich das kubische Spline (5) in die Form der Funktionsreihe (3) überführen lässt.

### 3.2 Dynamische verteilt-parametrische Systeme

Wie schon erwähnt, kann ein zeitlich veränderliches und räumlich verteiltes physikalisches Phänomen typischerweise durch partielle Differentialgleichungen (PDE) beschrieben werden, die *sowohl räumliche* Abhängigkeiten *als auch zeitliche* Veränderungen berücksichtigen. Zum besseren Verständnis wird in diesem Beitrag exemplarisch eine eindimensionale lineare PDE

$$\mathbb{L} \left( p(z, t), \frac{\partial p(z, t)}{\partial t}, \dots, \frac{\partial^i p(z, t)}{\partial t^i}, \frac{\partial p(z, t)}{\partial z}, \dots, \frac{\partial^j p(z, t)}{\partial z^j} \right) = s(z, t) \quad (6)$$

betrachtet, wobei  $s(z, t)$  die äußere Anregungsfunktion (Wärmequellen, Wärmesenken, äußere Kräfte und Momente) beschreibt. Unter Einbeziehung von Randbedingungen, wie z.B. festen Randtemperaturen  $p(z, t), z \in \partial\Omega$ , und Anfangsbedingungen  $p(z, t = 0)$  kann dann für eine Vielzahl von relevanten Problemen eine Lösung  $p(z, t)$  der PDE gefunden werden, die das Phänomen abhängig vom Ort  $z$  und Zeit  $t$  beschreibt.



**Abbildung 3.** Zerlegung des Lösungsraums  $\Omega$  in Teilräume  $\Omega^i$  und mögliche Basisfunktionen zur Lösungsapproximation, (a) Lineare Funktionen und (b) Legendre-Polynome.

Für die Konversion des *dynamischen* verteilt-parametrischen Systems in ein konzentriert-parametrisches System stehen eine Vielzahl von Methoden zur Verfügung: die Methode der finiten Differenzen (FDM) [2], die Methode der finiten Elemente (FEM) und die Spektral Element Methode (SEM) [9]. Bei diesen Verfahren werden als Basisfunktionen  $\Psi_i(z)$  in der Regel Fourierreihen (Modalanalyse) [16], orthogonale Polynome, Hermite-Polynome oder Tschebyscheff-Polynome verwendet. Diese sind aber nicht über das gesamte Berechnungsgebiet

$\Omega$  definiert, sondern nur über ein oder mehrere nicht überlappende Teilgebiete  $\Omega_i$ . Dadurch wird die Modellierung von komplexen Geometrien von  $\Omega$  und komplexen Randbedingungen  $\partial\Omega$  erleichtert. Ferner ermöglicht dies die Modellierung nichtlinearer PDEs. Damit erhält man die orts- und zeitabhängige Funktionenreihe (2), mit der die PDE (6) in ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem erster Ordnung

$$\dot{\underline{x}}(t) = \mathbb{L}(t, \underline{x}(t), \underline{u}(t)) \quad (7)$$

konvertiert werden kann.

Das entstandene konzentriert-parametrische System (7) kann nun zur Simulation des unterlagerten verteilten Systems verwendet werden, indem die Entwicklung des endlich-dimensionalen Zustands  $\underline{x}(t)$  über der Zeit berechnet wird. Zu diesem Zweck wird ein geeigneter Löser für die kontinuierliche Systemgleichung (7) verwendet. Die gesuchten ortskontinuierlichen Werte  $p(z, t)$  des unterlagerten verteilten Systems werden dann über die Ausgangsgleichung aus dem Zustandsvektor  $\underline{x}(t)$  berechnet.

Unser Ziel ist nun aber nicht die Simulation des verteilten Systems, sondern die Rekonstruktion des gesamten ortskontinuierlichen Phänomens aus indirekt gegebenen zeit-, orts- und wertdiskreten verrauschten Messungen. Dabei werden im Allgemeinen geeignet parametrisierte Wahrscheinlichkeitsdichten zur Beschreibung der Unsicherheit in den geschätzten Zuständen verwendet.

Selbstverständlich kann zur zeitlichen Fortschreibung dieses erweiterten Zustandsvektors die kontinuierliche Systemgleichung (7) verwendet werden. Aus Komplexitätsgründen bietet es sich aber an, zunächst eine Zeitdiskretisierung der Systemgleichung (7) in einer geeigneten Form vorzunehmen und das resultierende Differenzgleichungssystem erster Ordnung schließlich zur Fortschreibung dieses erweiterten Zustandsvektors über diskrete Zeitpunkte zu verwenden. Durch eine Zeitdiskretisierung erhält man also eine klassische zeitdiskrete lineare Zustandsgleichung

$$\underline{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k \underline{x}_k + \mathbf{B}_k \underline{u}_k + \underline{w}_k \quad , \quad (8)$$

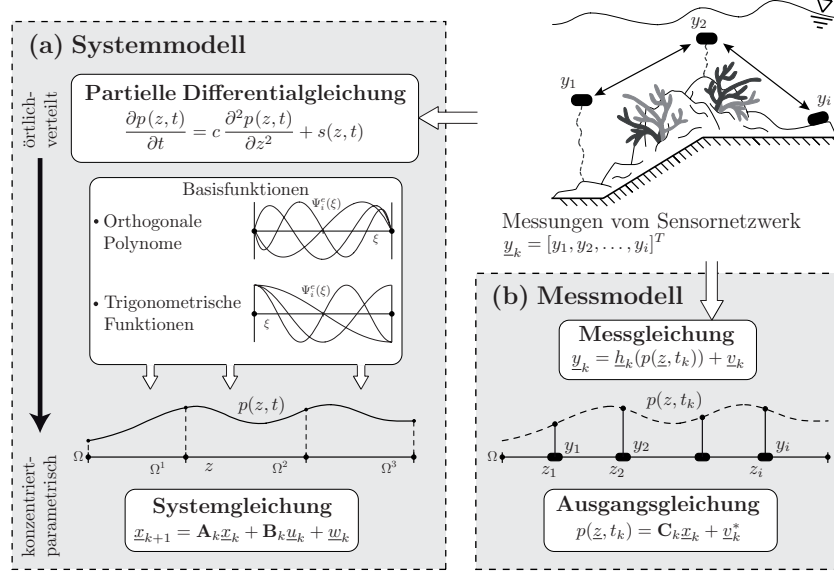
wobei  $\mathbf{A}_k$  die quadratische Systemmatrix,  $\mathbf{B}_k$  die Eingangsmatrix und  $\underline{u}_k$  der Eingangsvektor ist. Der Rauschterm  $\underline{w}_k$  wurde hinzugefügt, um den Modellierungsungenauigkeiten Rechnung zu tragen.

Genau diese Berechnung der Unsicherheitsterme stellt eine der Hauptschwierigkeiten bei der Konversion in ein endlich-dimensionales System dar. Dies betrifft sowohl die exogenen Störungen, also die Umrechnung von verteilten Störungen in konzentrierte Störquellen als auch die endogenen Störquellen, d.h. die Berücksichtigung von Modellierungs- und Approximationsfehlern. Im ersten Fall handelt es sich meistens um stochastische Größen, wobei im zweiten Fall typischerweise eine mengenbasierte Beschreibung angebracht ist.

Im nächsten Abschnitt wird ein Wärmestab als Beispiel für ein dynamisches verteilt-parametrisches System diskutiert. Eine ausführliche Beschreibung zur Konvertierung des dynamischen verteilt-parametrischen Systems in eine zeitdiskrete Zustandsgleichung findet sich in [14].

## 4 Modellbasierte Rekonstruktion verteilter Systeme

Für eine modellbasierte Rekonstruktion eines verteilten Phänomens benötigt man neben der Systemgleichung noch eine Messgleichung, welche die Wirkung des Phänomens auf konkrete Messungen beschreibt (siehe Abb. 4). Mit der im vorherigen Abschnitt aufgezeigten Beschreibung verteilter Phänomene ist es nun möglich, aus zeit-, orts- und wertdiskreten Messungen auf das gesamte Phänomen zu schließen.



**Abbildung 4.** Schema und Bestandteile der modellbasierten Rekonstruktion verteilter Phänomene. **(a)** Systemmodell und **(b)** Messmodell.

Dazu benötigt man zunächst eine Abbildung, welche den Zusammenhang einer Messung  $\hat{y}_k \in \mathbb{R}^n$  und des verteilten Phänomens  $p(z, t_k)$  beschreibt. Die so genannte Messgleichung

$$\hat{y}_k = \underline{h}_k(p(\underline{z}, t_k)) + v_k \quad (9)$$

bildet mit der Funktion  $\underline{h}_k(\cdot)$  das verteilte Phänomen  $p(z, t_k)$  auf die Messung  $\hat{y}_k$  ab.  $v_k$  ist das Messrauschen, welches die Ungenauigkeiten, die bei einer realen Messung entstehen, subsummiert. Selbst für recht einfache in der Praxis vorkommende Messprinzipien ist die Abbildungsfunktion  $\underline{h}_k(\cdot)$  nichtlinear, was folglich die Anwendung von nichtlinearen Schätzverfahren erforderlich macht.

Neben der Messgleichung (9) benötigt man im Rahmen einer Vorwärtsmodellierung noch eine Ausgangsgleichung, welche die punktuell gemessenen Werte des verteilten Phänomens  $p(\underline{z}, t_k)$  direkt auf den endlich-dimensionalen Zustandsvek-



tor  $\underline{x}_k$  der PDE abbildet.

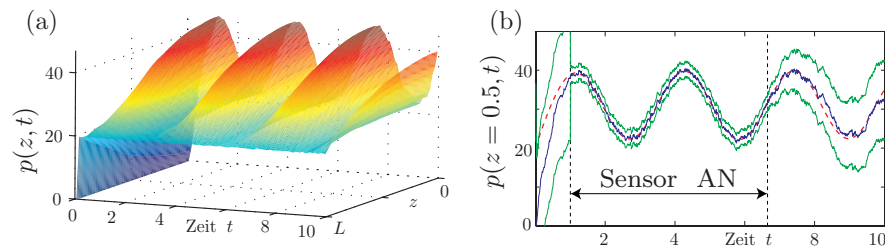
$$p(z, t_k) = \mathbf{C}_k \underline{x}_k + \underline{v}_k^* , \quad (10)$$

wobei  $\underline{v}_k^*$  die Unsicherheiten durch die Messung und durch die Approximation beinhaltet.

Wird die Ausgangsgleichung (10) in die Messgleichung (9) eingesetzt, erhält man das vollständige Messmodell, welches es ermöglicht mit zeit-, orts- und wertdiskreten Messwerten unter Zuhilfenahme klassischer Schätzverfahren eine verbesserte Schätzung des Zustandsvektors  $\underline{x}_k$  zu ermitteln. Für lineare Gleichung liefert das wohlbekannte Kalman Filter [8] exakte Lösungen. Wohingegen für nichtlineare Gleichungen approximative Schätzverfahren, wie Extended Kalman Filter [11] und Partikel Filter, eingesetzt werden müssen. Aufgrund der Eigenschaft eines universellen Approximators, eignen sich Gaußmischverteilungen besonders gut zur Approximation [7].

Am Beispiel des eindimensionalen Wärmeleiters mit der Länge  $L = 1$  wird nun ein verteiltes Phänomen mit Hilfe des geschätzten Zustands eines fortschreitenden Systemmodells rekonstruiert und prädiziert, wobei die äußere Anregung die Form  $s(z, t) = 30 \sin(2t) + 30$  hat. Der geschätzte Zustand des Systemmodells wird mittels aktueller Messungen von Zeit zu Zeit an das wahre System angepasst. Dabei wird angenommen, dass das Sensornetzwerk lediglich aus zwei Sensoren an den Positionen  $z_{s1} = 0.25$  und  $z_{s2} = 0.75$  besteht.

Der auf der Basis der physikalischen Modellierung und der Messungen rekonstruierte Lösungsverlauf  $p(z, t)$  der eindimensionalen Wärmeleitung ist in Abb. 5 (a) dargestellt. In Abb. 5 (b) ist der rekonstruierte Lösungsverlauf für einen Nicht-Messpunkt ( $z = 0.5$ ) dargestellt, dabei ist der rote Funktionsverlauf die analytische Lösung des Wärmeleiters, der blaue Funktionsverlauf der vom Kalman Filter geschätzte Wert und der grüne Funktionsverlauf stellt das  $3\sigma$ -Konfidenzintervall dar. Es ist deutlich, dass durch einen modellbasierten Ansatz bei der Rekonstruktion die Genauigkeit des Schätzergebnisses drastisch verbessert werden kann, insbesondere an Nicht-Messpunkten.



**Abbildung 5.** Ergebnis der modellbasierten Rekonstruktion einer eindimensionalen Wärmeleitung.

## 5 Sensoreinsatzplanung

Ziel der Sensoreinsatzplanung ist es, bestmögliche Messparameter für zukünftige Messungen zu bestimmen. Bestmöglich heißt hier, maximaler Informationsgewinn unter Nebenbedingungen, wie z.B. begrenzter Energieverbrauch. Messparameter können z.B. der zu verwendende Sensorknoten in einem Sensornetz sein oder die Position eines Messkopfes.

Das Prinzip der Sensoreinsatzplanung soll am Beispiel der Vermessung einer verformten Führungsschiene (Abb. 2, Abschnitt 3.1) aus [3] erklärt werden. Es wird der zweidimensionale Fall  $\underline{p}(z, \underline{x}) = [p_x(z, \underline{x}) \ p_y(z, \underline{x})]^T$  für Höhen- und Seitenschlag mit gaußverteilten Unsicherheiten betrachtet. Die Schiene ist an sechs Stellen punktuell befestigt. Somit ist  $\underline{x}$  sechsdimensional und ebenfalls gaußverteilt. Die Verformung der Schiene lässt sich durch den Erwartungswert  $\hat{\underline{x}}$  und die Kovarianzmatrix  $\mathbf{C}$  von  $\underline{x}$  vollständig beschreiben.

Ferner sind Punktmessungen an beliebigen Positionen  $z_M$  mit additivem Gaußrauschen möglich. Abb. 6 zeigt eine initiale Schätzung  $\underline{p}(z, \underline{x}_0)$  für das zweidimensionale Spline mit zugehörigem Unsicherheitsschlauch. Die initiale Schätzung ist hier eine Gerade, welche blau gekennzeichnet ist. Der Unsicherheitsschlauch ist die Verallgemeinerung des  $1\sigma$ -Konfidenzintervalls der eindimensionalen Gaußdichte. Der Schnitt entlang eines Punkts  $z_0$ , welcher immer eine Ellipse ist, ist die minimale Fläche, in welcher der wahre Wert mit einer Wahrscheinlichkeit von 39,5% liegt.

Hier ist das Ziel der Sensoreinsatzplanung, mit einer möglichst geringen Anzahl an Messungen die Schiene mit einer möglichst hohen Genauigkeit zu vermessen. Dazu wird für die  $k$ -te Messung ein Gütemaß

$$J_k = \int_{\Omega} \text{Var}\{p_x(z, \underline{x}_k)\} + \text{Var}\{p_y(z, \underline{x}_k)\} dz$$

definiert, welches die ortskontinuierliche Varianz von  $p_x$  und  $p_y$  über das Spline aufintegriert. Je kleiner das Gütemaß  $J_k$  ist, desto besser ist die Qualität der Schätzung und desto schmaler der Unsicherheitsschlauch.

Das Vorgehen bei der Sensoreinsatzplanung beginnt damit, dass aus der aktuellen Schätzung  $(\hat{\underline{x}}_k, \mathbf{C}_k)$  das Gütemaß  $J_{k+1}(z_M, \hat{\underline{x}}_k, \mathbf{C}_k)$  in Abhängigkeit von der Messposition  $z_M$  prädiziert wird. Abb. 6 zeigt das prädizierte Gütemaß  $J_1(z_M, \hat{\underline{x}}_0, \mathbf{C}_0)$  für ein zweidimensionales Spline.

Dann wird die beste Messposition

$$z_{M,\text{opt}} = \arg \min_{z_M} \{J_{k+1}(z_M, \hat{\underline{x}}_k, \mathbf{C}_k)\}$$

bestimmt, welches dann als Messparameter für die  $k + 1$  Messung verwendet wird. Danach wird die Messung durchgeführt und  $J_{k+2}$  bestimmt. Es können natürlich auch  $l$  zukünftige  $z_{M,\text{opt}}$  berechnet werden und dann  $l$  mal gemessen werden.

Abb. 6 zeigt das Minimum bei  $z_{M,\text{opt}} = 1,5$  und Abb. 7 die Schätzung nach der entsprechenden Messung. Man sieht deutlich, dass sich an der Position  $z_M$

und deren Umgebung die Form der Splineapproximation sowie der Schlauchdurchmesser geändert haben. Außerdem ist in der Abb. 7 das Ergebnis nach sechs Messungen abgebildet.

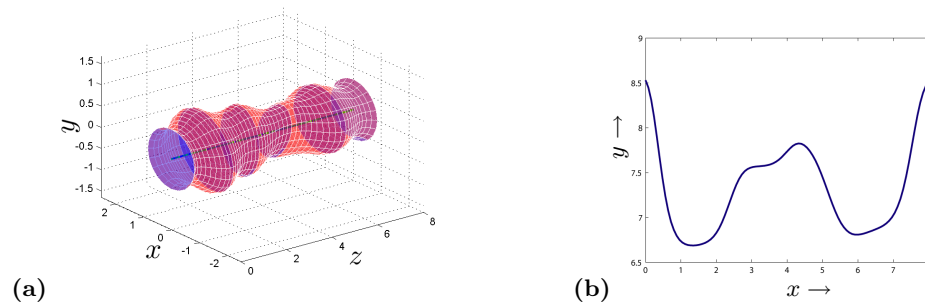


Abbildung 6. (a) Initiale Schätzung, (b) zugehöriges Gütemaß.

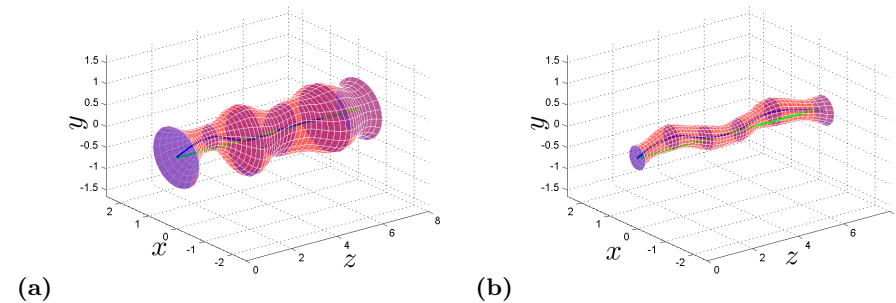


Abbildung 7. (a) Schätzung nach einer Messung, (b) Schätzung nach sechs Messungen.

Im linearen Fall mit Gaußverteilungen ist die Berechnung recht einfach möglich, da das Kalman-Filter die Vorabberechnung der Kovarianzmatrix  $\mathbf{C}_k$  ohne Kenntnis des konkreten Messwerts  $y_k$  erlaubt. Für den Fall kubischer Splines lässt sich zeigen, dass  $J_{k+1}(z_M, \hat{x}_k, \mathbf{C}_k)$  ein stückweise definiertes Polynom zwölfter Ordnung ist [3].

## 6 Dezentrale Verarbeitung und Komplexitätszunahme

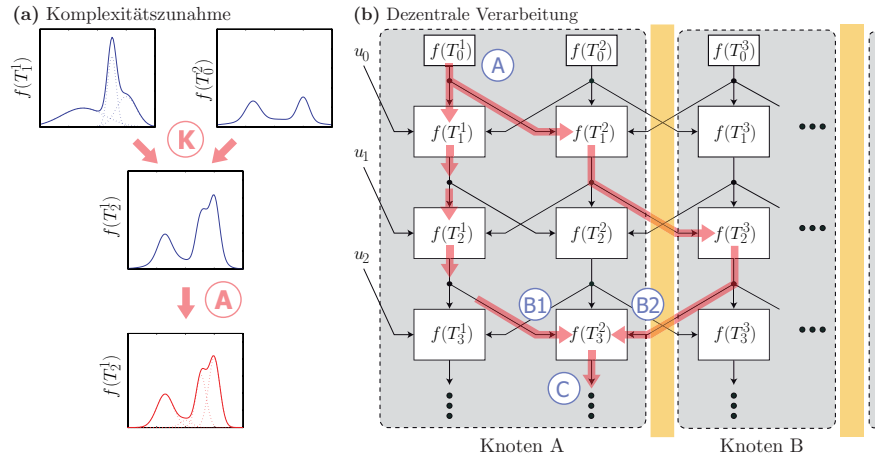
Neben der Ausgangsgleichung benötigt man, wie im Abschnitt 4 gezeigt, im Rahmen einer Vorwärtsmodellierung noch eine Messgleichung, welche die Wirkung

des Phänomens auf konkrete Messungen beschreibt, wobei diese im Allgemeinen nichtlinear mit dem Phänomen verknüpft sind. Damit ergibt sich bei einer rekursiven Verwendung von Messungen zum Zweck der Rekonstruktion selbst für den Fall einer linearen Systemgleichung und einer linearen Ausgangsgleichung bei einer exakten Berechnung ein Anwachsen der Komplexität der Wahrscheinlichkeitsdichten mit einer wachsender Anzahl an Messungen, siehe Abb. 8 (a). Im Allgemeinen ändert sich zudem der Typ der Dichtebeschreibung. Zur Durchführung einer effizienten rekursiven Verarbeitung ist eine Approximation der entstehenden Wahrscheinlichkeitsdichten also unumgänglich (Punkt A in Abb. 8 (a)). Das Ziel ist dabei eine Approximation mit einem generischen parametrischen Dichtetyp für alle Zeitschritte und Positionen, wobei die Anzahl der Parameter in Abhängigkeit von der zur Verfügung stehenden Rechenleistung nach oben begrenzt sein sollte.

Da bekannte parametrische Dichtedarstellungen typischerweise nicht abgeschlossen unter den im Netzwerk auftretenden Operationen sind, bestehen zwei Möglichkeiten zur Approximation. Einerseits könnte man die auftretenden Systeme approximieren, wobei beispielsweise eine Linearisierung in Frage käme. Dann könnten einfache Schätzverfahren, wie beispielsweise das erweiterte Kalman Filter zum Einsatz kommen, was aber bei stark nichtlinearen Systemen nicht zum gewünschten Ergebnis führt. Es ist daher meist besser, das Ergebnis des exakten Verarbeitungsschrittes für das Originalsystem in jedem Schritt zu approximieren. Zu diesem Zweck existiert eine Vielzahl von Schätzverfahren, wie beispielsweise das Partikelfilter [4].

Eine systematische Minimierung eines vorgegebene Abstandsmaßes zwischen der wahren Dichte und einer generischen Dichteapproximation wird in [7] vorgeschlagen, wobei gleichzeitig die Anzahl der Parameter begrenzt wird. Die Berechnung der optimalen Dichteparameter ist ein kompliziertes Optimierungsproblem mit vielen lokalen Minima, so dass Standardoptimierungsverfahren in der Regel nicht zu befriedigenden Ergebnissen führen. Zur Lösung dieses Problems wurde in [7] deshalb ein progressives Schätzverfahren eingeführt, welches die notwendigen Verarbeitungsschritte progressiv durchführt. Am Beispiel der Auffrischung eines gegebenen Schätzwert mit Hilfe einer Messung bedeutet dies konkret, dass die entsprechenden Informationen graduell mit Hilfe einer Homotopie eingebracht werden. Auf der Basis dieser Progression kann dann ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen angegeben werden, welches die Variation der gesuchten Parameter beschreibt. Diese Differentialgleichungen werden nun an Stelle des originalen Optimierungsproblem über einem endlichen Intervall gelöst, woraus sich der gesuchte Parametervektor ergibt.

In einem Sensornetzwerk wird nun aus verschiedenen Gründen eine dezentrale Verarbeitung der Informationen in den einzelnen Knoten einer Verarbeitung in einem Zentralrechner vorgezogen. Aus Gründen einer beschränkten Kommunikationskapazität und begrenzten Speicherressourcen können dabei die Abhängigkeiten zwischen den auf unterschiedlichen Knoten gespeicherten Teilschätzungen nicht aufrechterhalten werden und gehen verloren. Als Beispiel betrachten wir wieder das in Abb. 8 (b) dargestellte Netzwerk, in dem zwei Pfade vom Punkt



**Abbildung 8.** Herausforderungen der Informationsfusion für verteilte System, (a) Komplexitätszunahme und (b) dezentrale Verarbeitung.

A zum Punkt C dargestellt sind. Kombiniert man nun die an den Punkten B1 und B2 vorliegenden Informationen, so ist dazu deren Abhängigkeitsstruktur, also im allgemeinen die Verbundwahrscheinlichkeitsdichte, erforderlich. Da einer der Pfade aber über den Knoten B verläuft, sind diese Abhängigkeiten verloren gegangen.

Typischerweise wird nun in diesem Fall eine konkrete Abhängigkeit der beiden Größen angenommen. Für eine Beschreibung mit den ersten beiden Momenten wird dabei ein konkreter Wert für den Korrelationskoeffizienten zwischen den beiden Größen verwendet, wobei meist von Unkorreliertheit ausgegangen wird. Diese Annahme ergibt aber eine ungerechtfertigt starke Verringerung der Unsicherheit, was beim Propagieren der Informationen durch das Netzwerk zu stark optimistischen Ergebnissen führt.

Für eine korrekte Kombination von mehreren unsicheren Informationen ist es also notwendig, alle möglichen Abhängigkeiten zu berücksichtigen. Für den Fall linearer Systeme mit Gaußschen Unsicherheiten ist dieses Problem weitestgehend gelöst [6].

Werden die vorliegenden Informationen durch beliebige Wahrscheinlichkeitsdichten beschrieben, so entspricht die Berücksichtigung aller möglichen Abhängigkeiten der Berechnung aller Verbunddichten, die diese Wahrscheinlichkeitsdichten als Marginaldichten besitzen. Da eine Verarbeitung aller möglichen Verbunddichten nicht möglich ist, wurde in [12, 13] vorgeschlagen, untere und obere Dichten zu verwenden, welche die Menge aller möglichen Dichten einschließen. Mit einer entsprechenden Modifikation des Verarbeitungsschritts [10] kann dann die Menge aller Ergebnisdichten berechnet werden, die wieder durch untere und obere Dichten dargestellt wird.

## 7 Schlussfolgerung und Ausblick

Dieser Beitrag befasst sich mit der Rekonstruktion von verteilten Phänomenen auf der Basis von gegebenen verteilt-parametrischen Modellen und zeit-, orts- und wertdiskreten Messungen. Neben einem tutoriellen Teil zur Einführung in die Problemstellung werden auch neue Ansätze und Verfahren dargestellt sowie einige Beispielanwendungen diskutiert.

Die Modellierung eines verteilten Phänomens führt im Allgemeinen auf eine verteilt-parametrische Systembeschreibung, welche typischerweise nicht direkt für Rekonstruktionszwecke geeignet ist. Deshalb ist eine Konversion in ein endlich-dimensionales Zustandsraummodell notwendig.

Im Fall eines *statischen* verteilt-parametrischen Systems ergibt sich dadurch ein statisches konzentriert-parametrisches System, welches den endlich-dimensionalen Zustandsvektor auf das ortskontinuierliche Phänomen abbildet. Im Fall der Konversion eines *dynamischen* verteilt-parametrischen Systems ergibt sich zusätzlich zu dieser statischen Abbildung ein konzentriert-parametrisches dynamisches System, welches die zeitliche Entwicklung des unterlagerten verteilt-parametrischen Systems (approximativ) beschreibt. Dieses wird typischerweise in Form eines gewöhnlichen Differentialgleichungssystems erster Ordnung dargestellt. Für den praktisch relevanten Fall zeitdiskreter Messungen ergibt sich bei einem dynamischen verteilt-parametrischen System insgesamt also eine gemischt diskret-kontinuierliche konzentriert-parametrische Systembeschreibung bestehend aus einer zeitdiskreten Ausgangsgleichung und einer zeitkontinuierlichen Systemgleichung.

Aus der zeitlichen Entwicklung des entstandenen konzentriert-parametrischen Systems, welches durch einen endlich-dimensionalen Zustand charakterisiert wird, kann mit Hilfe der Ausgangsgleichung das gesamte unterlagerte verteilte Phänomen berechnet werden. Um nun aus den gegebenen zeit-, orts- und wertdiskreten verrauschten Messungen das Phänomen zu rekonstruieren, werden im Allgemeinen Wahrscheinlichkeitsdichten zur Beschreibung der Unsicherheit in den geschätzten Zuständen verwendet. Zur zeitlichen Fortschreibung dieser Wahrscheinlichkeitsdichten könnte prinzipiell direkt das kontinuierliche Differentialgleichungssystem verwendet werden, wobei dieses zur besseren Handhabbarkeit durch eine Zeitdiskretisierung in ein Differenzgleichungssystem erster Ordnung umgewandelt wird.

Bei der Konversion in ein endlich-dimensionales System ist eine Hauptschwierigkeit die Behandlung der verteilt auf das System einwirkenden Unsicherheiten. Hier steht eine durchgängige systematische Lösung insbesondere der Modellierungs- und Approximationsfehler noch aus und ist Gegenstand aktueller Forschung.

Neben der Ausgangsgleichung benötigt man im Rahmen einer Vorwärtsmodellierung noch eine Messgleichung, welche die Wirkung des Phänomens auf konkrete Messungen beschreibt, die im Allgemeinen nichtlinear mit dem Phänomen verknüpft sind. Damit ergibt sich bei einer rekursiven Verwendung von Messungen zum Zweck der Rekonstruktion selbst für den Fall einer linearen Systemgleichung und einer linearen Ausgangsgleichung bei einer exakten Berechnung ein Anwachsen der Komplexität der Wahrscheinlichkeitsdichten mit einer

wachsender Anzahl an Messungen. Eine Approximation der entstehenden Wahrscheinlichkeitsdichten ist damit unumgänglich, wobei für diesen Zweck in [7] ein effizientes allgemeines Verfahren angegeben ist.

Im Fall der dezentralen Verarbeitung der Informationen in einem Sensornetzwerk können aus Gründen einer beschränkten Kommunikationskapazität und begrenzten Speicherressourcen die Korrelationen und Abhängigkeiten zwischen den einzelnen Zuständen nicht gespeichert werden. Da für eine korrekte Kombination von unsicheren Informationen aber Wissen über deren Abhängigkeitsstruktur beispielsweise in Form einer Verbundwahrscheinlichkeitsdichte unabdingbar ist, wurden Verfahren entwickelt, die eine konsistente Kombination mit unbekanntem Verbundwahrscheinlichkeitsdichten ermöglichen. Dies ist für den Fall linearer Systeme mit Gaußschen Unsicherheiten weitestgehend gelöst [6], erfordert nach ersten vielversprechenden Ergebnissen für komplexere Wahrscheinlichkeitsdichten aber noch weitergehende Untersuchungen [12, 13].

Die in diesem Beitrag vorgestellten Verfahren zur Informationsfusion in verteilten Systemen basieren allesamt auf der approximativen Konversion des verteilten Systems in ein konzentriertes System, dessen Zustand dann mit Hilfe von Schätzverfahren für endlich-dimensionale Systeme rekonstruiert wird. Zukünftige Arbeiten werden sich mit der Entwicklung von Schätzverfahren für unendlich-dimensionale Systeme befassen, welche eine direkte Rekonstruktion des verteilten Systems ermöglichen.

## Literatur

1. ALSPACH, DANIEL L. und HAROLD W. SORENSON: *Nonlinear Bayesian Estimation using Gaussian Sum Approximations*. IEEE Transactions on Automatic Control, 17(4):439–448, August 1972.
2. BAKER, A. J.: *Finite Element Computational Fluid Mechanics*. Taylor and Francis, 1983.
3. BRUNN, DIETRICH und UWE D. HANEBECK: *A Model-Based Framework for Optimal Measurements in Machine Tool Calibration*. IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA'05), 2005.
4. DOUCET, ARNAUD, NANDO DE FREITAS und NEIL GORDON (Herausgeber): *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*, Kapitel 1, Seiten 6–12. Statistics for Engineering and Information Science. Springer-Verlag, 2001.
5. DUBBEL, HEINRICH: *Taschenbuch für den Maschinenbau*. Springer-Verlag Berlin, 20. Auflage, 2001.
6. HANEBECK, UWE D. und KAI BRIECHLE: *New Results for Stochastic Prediction and Filtering with Unknown Correlations*. In: *Proceedings of the IEEE Conference on Multisensor Fusion and Integration for Intelligent Systems (MFI'2001)*, 2001.
7. HANEBECK, UWE D., KAI BRIECHLE und ANDREAS RAUH: *Progressive Bayes: A New Framework for Nonlinear State Estimation*. In: *Proceedings of SPIE*, Band 5099. AeroSense Symposium, 2003.
8. KALMAN, RUDOLF EMIL: *A new Approach to Linear Filtering and Prediction Problems*. Transactions of the ASME Journal of Basic Engineering, 1960.
9. KARNIADAKIS, GEORGE und SPENCER J. SHERWIN: *Spectral/hp Element Methods for Computational Fluid Dynamics*. Oxford University Press, 2005.

10. KLUMPP, VESA, DIETRICH BRUNN und UWE D. HANEBECK: *Approximate Nonlinear Bayesian Estimation Based on Lower and Upper Densities*. In: *9th International Conference on Information (Fusion 2006)*, 2006.
11. PAPOULIS, ATHANASIOS: *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*. McGraw-Hill, 1991.
12. SAWO, FELIX, DIETRICH BRUNN und UWE D. HANEBECK: *Parameterized Joint Densities with Gaussian and Gaussian Mixture Marginals*. In: *9th International Conference on Information (Fusion 2006)*, 2006.
13. SAWO, FELIX, DIETRICH BRUNN und UWE D. HANEBECK: *Parameterized Joint Densities with Gaussian Mixture Marginals and their Potential Use in Nonlinear Robust Estimation*. In: *IEEE International Conference on Control Applications (CCA 2006)*, 2006.
14. SAWO, FELIX, KATHRIN ROBERTS und UWE D. HANEBECK: *Bayesian Estimation of Distributed Phenomena using Discretized Representations of Partial Differential Equations*. In: *3rd International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics (ICINCO'06)*, 2006.
15. TANIZAKI, HISASHI: *Handbook of Statistics 21: Stochastic Processes and Simulation*, Kapitel Nonlinear and Non-Gaussian State-Space Modeling with Monte Carlo Techniques: A Survey and Comparative Study. North-Holland, 2003.
16. TAO, HAI und THOMAS S. HUANG: *Connected Vibrations: A modal Approach for Non-rigid Motion Tracking*. Proceedings of the IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, Seite 735, 1998.