

Thomas Böhlke, Gerrit Risy und Albrecht Bertram:

Eine mikromechanische Interpretation der v. Mises-Hill'schen Fließbedingung

Von Mises schlug 1928 eine im Spannungstensor quadratische Fließbedingung zur Beschreibung des Fließbeginns anisotroper Festkörper vor [21]. Diese Fließbedingung spezifizierte v. Mises für verschiedene Symmetriefälle, unter anderem für den der Orthotropie. Bei Verwendung anisotroper quadratischer Fließbedingungen wird in den meisten Publikationen allerdings Bezug auf Hill genommen, der sich in seiner Publikation auf die Betrachtung des orthotropen Sonderfalls beschränkte [11]. Es ist bekannt, dass quadratische Fließbedingungen das anisotrope mechanische Verhalten von Blechen nicht immer qualitativ richtig beschreiben können [1]. Quadratische Fließbedingungen finden dennoch auf Grund ihrer einfachen mathematischen Struktur und der guten Identifizierbarkeit mittels experimenteller Daten bei theoretischen und numerischen Untersuchungen häufig Anwendung. In dieser Arbeit wird eine mikromechanische Interpretation der v. Mises-Hill'schen Fließbedingung für den Sonderfall einer orthotropen Probensymmetrie und eines ebenen Spannungszustandes unter Zuhilfenahme von Texturkoeffizienten gegeben.

Isotrope Fließbedingungen [10, 15, 19 und 20] können bei der Berechnung des elasto-plastischen Verhaltens von Blechwerkstoffen im Allgemeinen nicht angewendet werden, da die genannten Werkstoffe signifikante Anisotropien aufweisen. Die einfachste für polykristalline metallische Werkstoffe anwendbare anisotrope Fließbedingung ist durch eine quadratische Form in den Spannungen gegeben. Diese wurde von v. Mises 1928 in allgemeiner Form vorgeschlagen [21]. Hill, der 1948 ebenfalls eine quadratische Fließbedingung verwendete, beschränkte sich auf den insbesondere für Blechwerkstoffe relevanten orthotropen Fall [11]. Die Verwendung quadratischer Fließbedingungen erlaubt nur in Sonderfällen eine korrekte Beschreibung des Verlaufs der Fließspannung und des R -Werts in der Blechebene. Das so genannte anormale Verhalten von speziellen Blechwerkstoffen, das sich in bestimmten Relationen der Fließspannungen und der R -Werte in der Blechebene manifestiert, kann nicht korrekt wiedergegeben werden. Trotzdem findet der quadratische Ansatz bedingt durch seine einfache mathematische Struktur und die damit verbundene gute numerische Implementierbarkeit und nicht zuletzt wegen der relativ wenigen einachsigen Versuche, die man zu dessen Identifikation benötigt, häufig Anwendung.

In den letzten 20 Jahren ist eine ganze Reihe neuer phänomenologischer Fließbedingungen vorgeschlagen worden [2, 3, 4, 12, 13, 14]. Diese Ansätze sollen hier nicht diskutiert werden. Es sei aber auf das Buch von Banabic [1] aus dem Jahre 2000 verwiesen, das einen Überblick zu neueren Ansätzen gibt und deren Eigenschaften diskutiert. Die genannten Fließkriterien sind rein phänomenologischer Natur. Eine mikromechanische Interpretation steht nicht zur Verfügung, so dass die Materialparameter allein durch makroskopische Versuche bestimmt werden müssen und nicht durch Mikrostrukturmessungen zugänglich gemacht werden können.

Viele aktuelle Fragestellungen aus dem Bereich Umformtechnik können allerdings nicht ohne Einbeziehung der Mikromechanik erfolgreich bearbeitet werden, da dazu eine werkstoffnahe und mechanismen-basierte kontinuumsmechanische Herangehensweise notwendig ist. Aus diesem

Grund wird in dieser Arbeit das v. Mises-Hill'sche Fließkriterium aus der Sicht der Mikromechanik und Texturanalyse beleuchtet und interpretiert.

Notation. Wird im Text die Indexnotation für Tensoren verwendet, so gilt die Einstein'sche Summationskonvention. Vollständig symmetrische und spurfreie Tensoren werden mit einem Strich, z.B. V' , gekennzeichnet.

Das v. Mises-Hill'sche Fließkriterium

Die von v. Mises vorgeschlagene Fließbedingung kann folgendermaßen dargestellt werden [21]

$$\sigma \cdot \mathbf{H} [\sigma] = \sigma_{ij} H_{ijkl} \sigma_{kl} = 1 \quad (1)$$

\mathbf{H} ist ein Tensor 4. Stufe, der die Hauptsymmetrie und die beiden Untersymmetrien aufweist.

$$H_{ijkl} = H_{klij} = H_{jikl} = H_{ijlk} \quad (2)$$

Die beiden Untersymmetrien können ohne Beschränkung der Allgemeinheit eingeführt werden, da der Cauchy'sche Spannungstensor σ symmetrisch ist. Die Hauptsymmetrie kann ebenfalls ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit eingeführt werden, da nur hauptsymmetrische Anteile des Tensors \mathbf{H} den Wert der quadratischen Form beeinflussen. Der Tensor \mathbf{H} hat bei Beachtung der genannten Indexsymmetrien im Allgemeinen 21 unabhängige Konstanten. Im Falle einer orthotropen Symmetrie reduziert sich diese Zahl auf neun. Neben diesen neun Materialparametern ist allerdings noch die Orientierung der Anisotropieachsen des Materials relativ zum gewählten Laborsystem anzugeben. Insofern sind im orthotropen Fall zwölf Parameter zur vollständigen Kennzeichnung von \mathbf{H} anzugeben. Die Zahl der Materialparameter kann im Falle der Orthotropie weiter reduziert werden, wenn eine plastische Inkompressibilität vorausgesetzt wird, was bei metallischen Werkstoffen in vielen Fällen möglich ist. In diesem Fall ist die quadratische Form nur auf dem Raum der Spannungsdeviatoren σ' zu definieren, was die Zahl der unabhängigen Tensorkomponenten bezüglich der Anisotropieachsen auf sechs reduziert. Die quadratische Form lautet dann unter Verwendung der Tensorkomponenten

$$\begin{aligned} & -H_{1122}(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 \\ & -H_{1133}(\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 \\ & -H_{3322}(\sigma_{33} - \sigma_{22})^2 + \\ & 4H_{1212}\sigma_{12}^2 + 4H_{1313}\sigma_{13}^2 + 4H_{2323}\sigma_{23}^2 = 1 \end{aligned} \quad (3)$$

Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} F &= -H_{2233} & G &= -H_{1133} & H &= -H_{1122} \\ L &= 2H_{2323} & M &= 2H_{1313} & N &= 2H_{1212} \end{aligned} \quad (4)$$

folgt die äquivalente Darstellung

$$F(\sigma_{33} - \sigma_{22})^2 + G(\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + H(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2L\sigma_{23}^2 + 2M\sigma_{13}^2 + 2N\sigma_{12}^2 = 1. \quad (5)$$

Die Konstanten F, G, H, L, M, N können nicht beliebig gewählt werden, da die quadratische Form (1) positiv definit für deviatorische Tensoren sein muss. Die folgenden Ungleichungen stellen notwendige und hinreichende Bedingungen für die positive Definitheit von H dar.

$$L > 0, M > 0, N > 0, \quad (6)$$

$$F + G + H + \sqrt{F^2 + G^2 + H^2 - FG - GH - HF} > 0$$

Positive Werte für F, G , und H sind also hinreichend zur Gewährleistung der positiven Definitheit. Im isotropen Fall gilt für die sechs Konstanten

$$F = G = H \quad L = M = N = 3F. \quad (7)$$

Es ist zu beachten, dass bei einem ebenen Spannungszustand in der x_1 - x_2 -Ebene die Konstanten L und M für den Wert der Fließbedingung nicht relevant sind. Bei einer orthotropen Probensymmetrie, einer plastischen Inkompressibilität und einem ebenen Spannungszustand sind also nur vier der sechs Materialparameter observabel. Die verbleibenden Parameter können beispielsweise durch die Fließspannung in der Walzrichtung σ_0 und die R -Werte unter $0^\circ, 45^\circ$ und 90° zur Walzrichtung bestimmt werden

$$F = \frac{1}{\sigma_0^2} \frac{R_0}{R_{90}(R_0 + 1)} \quad (8)$$

$$G = \frac{1}{\sigma_0^2} \frac{1}{R_0 + 1} \quad (9)$$

$$H = \frac{1}{\sigma_0^2} \frac{R_0}{R_0 + 1} \quad (10)$$

$$N = \frac{1}{\sigma_0^2} \frac{(R_0 + R_{90})(2R_{45} + 1)}{2R_{90}(R_0 + 1)}. \quad (11)$$

Es sei hier kurz auf die Defizite einer quadratischen Fließbedingung hingewiesen, die darin bestehen, dass anormale Fließspannungs- und R -Wert-Verläufe nicht abgebildet werden können [1,18,22].

Tensorielle Darstellung von kristallographischen Texturen

Metallische Werkstoffe sind in den meisten Fällen polykristallin. Makroskopische Anisotropien des elastischen und des plastischen Materialverhaltens können durch kristallographische und morphologische Texturen induziert werden. In vielen Fällen überwiegt der Einfluss der Orientierungsverteilung der Kristalle den der Korngeometrie.

Die Orientierung eines Einkristalls lässt sich durch einen eigentlich orthogonalen Tensor 2. Stufe \mathbf{Q} spezifizieren. Eine einfache statistische Beschreibung der Mikrostruktur eines Polykristalls ist durch die Orientierungsverteilungsfunktion (ODF) $f(\mathbf{Q})$ gegeben. Die ODF gibt die Volumenfraktion der Kristalle mit der Orientierung \mathbf{Q} an

$$f(\mathbf{Q})d\mathbf{Q} = \frac{dV}{V} . \quad (12)$$

Die ODF lässt sich mittels röntgenographischer Methoden oder Einzelorientierungsmessungen bestimmen. Für die ODF wurden verschiedene Parametrisierungen vorgeschlagen [8, 9, 16, 17]. Alle Parametrisierungen sind mathematisch äquivalent. Der Vorteil der von Onat [17] verwendeten Darstellung mittels einer tensoriellen Fourierreihe besteht darin, dass die Texturkoeffizienten Tensorcharakter haben und sich deshalb auf natürliche Weise in kontinuumsmechanischen Modellen berücksichtigen lassen. Für Aggregate kubischer Einkristalle hat die ODF folgende Gestalt [6, 7]

$$f(\mathbf{Q}) = 1 + V'_{\langle 4 \rangle} \cdot \mathbf{F}'_{\langle 4 \rangle}(\mathbf{Q}) + V'_{\langle 6 \rangle} \cdot \mathbf{F}'_{\langle 6 \rangle}(\mathbf{Q}) + \dots \quad (13)$$

Die Größen V' heißen Texturkoeffizienten. Die eckige Klammer gibt die Tensorstufe an. Die $\mathbf{F}'(\mathbf{Q})$ repräsentieren Basisfunktionen, die von der Kristallorientierung abhängen. Die Texturkoeffizienten haben die Eigenschaft, dass sie vollständig symmetrisch und spurfrei sind.

$$\begin{aligned} V'_{ijkl} &= V'_{klij} = V'_{jikt} = V'_{ijtk} = V'_{ikjt} = \dots , \\ V'_{iikl} &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

Diese Eigenschaft hat zur Folge, dass die Anzahl der unabhängigen Tensorkomponenten durch $2r + 1$ gegeben ist. Sie steigt also linear mit dem Tensorrang r an. Der Texturkoeffizient vierter Stufe hat so im Allgemeinen neun unabhängige Komponenten. Die Texturkoeffizienten geben die Probensymmetrie wieder und sind identisch null, wenn eine isotrope Orientierungsverteilung vorliegt. Es handelt sich um mikrostrukturell bestimmte, observable Anisotropietensoren.

Mikromechanische Interpretation der v. Mises-Hill'schen Fließbedingung

Nimmt man an, dass die Symmetrie der makroskopischen Fließfunktion allein durch die ODF bestimmt ist, dann ist die Fließfunktion eine Funktion der Spannung und der tensoriellen Fourierkoeffizienten, die die ODF eindeutig bestimmen. Eine solche Annahme impliziert, dass die Gefügemorphologie keinen Einfluss auf die materielle Symmetrie hat, was nur eine Näherung sein kann, die wir aber im Folgenden einführen wollen. Im einfachsten Fall ist der führende Texturkoeffizient zu berücksichtigen, der im Falle einer kubischen Kristallsymmetrie der Tensor 4. Stufe ist

$$\mathbf{V}' = V'_{\langle 4 \rangle} . \quad (15)$$

Zur vollständigen Angabe der allgemeinen Fließfunktion wären nun die Invarianten und Simultaninvarianten des Spannungstensors und des Texturkoeffizienten \mathbf{V}' als Argumente der Fließfunktion zu berücksichtigen. Ein Darstellungssatz für einen solchen Satz von Invarianten mit Irreduzibilitätsbeweis steht bis heute aus. Daher ist es nahe liegend, zunächst den Sonderfall einer qua-

dratischen Form in den Spannungen zu betrachten. In diesem Fall muss der Tensor \mathbf{H} vom Texturkoeffizienten abhängen. \mathbf{H} kann aber nicht linear in \mathbf{V}' sein, da \mathbf{H} sonst nicht positiv definit wäre. Zulässig ist aber folgende Form [5]

$$\mathbf{H} = \frac{3}{2} \frac{1}{\sigma_F^2} (\mathbf{P}_2 + \eta \mathbf{V}') . \quad (16)$$

\mathbf{P}_2 ist die Identität auf deviatorischen Tensoren 2. Stufe

$$\mathbf{P}_1 = \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}, \quad \mathbf{P}_2 = \mathbf{I}^S - \mathbf{P}_1 \quad (17)$$

\mathbf{I} und \mathbf{I}^S sind die Identitätstensoren 2. bzw. 4. Stufe. Verschwindet der Texturkoeffizient vierter Stufe \mathbf{V} , dann erhält man die von Mises'sche Fließbedingung. Die Materialkonstante η muss der Nebenbedingung der positiven Definitheit von \mathbf{H} genügen. Im Vergleich zur v. Mises-Hill'schen Fließbedingung ist festzustellen, dass der Tensor (16) weniger freie Parameter enthält als der Tensor \mathbf{H} in (1). (15) enthält neun unabhängige Komponenten. Dazu kommen die Konstanten σ_F und η . Es liegen also bei (16) im triklinen Fall insgesamt elf unabhängige Parameter vor. Das phänomenologische Kriterium (1) enthält dagegen im triklinen Fall 15 Konstanten. Der phänomenologische Charakter der Gleichung erlaubt somit eine Berücksichtigung morphologischer Effekte auf die Fließspannung. Der Vorteil der texturbasierten Formulierung ist dadurch gegeben, dass mittels einer Texturmessung neun der elf Parameter bestimmt werden können.

Im orthotropen und plastisch inkompressiblen Fall enthält die v. Mises-Hill'sche Fließbedingung sechs unabhängige Konstanten. Der Texturkoeffizient \mathbf{V}' hat in diesem Fall nur drei unabhängige Konstanten, so dass insgesamt fünf Parameter zu spezifizieren sind. Betrachtet man für die Orthotropie den Sonderfall eines ebenen Spannungszustandes, so sind bei der v. Mises-Hill'schen Fließbedingung vier Parameter observabel, bei der mikromechanischen aber weiterhin fünf.

Die Bestimmung der Konstanten im Ansatz (1) wurde bereits diskutiert. Die Konstanten im texturbasierten Ansatz lassen sich wie folgt bestimmen. Aus einer Texturmessung lässt sich der Texturkoeffizient \mathbf{V}' beispielsweise in Form der Koeffizienten V'_{1122} , V'_{1133} und V'_{2233} bestimmen. Die beiden fehlenden Konstanten η und σ_F können aus einer Messung der Fließspannung und des R -Werts in Walzrichtung berechnet werden. Es folgt für η und σ_F

$$\eta = \frac{1}{3} \frac{R_0 - 1}{R_0 V'_{1133} - V'_{1122}} \quad (18)$$

$$\sigma_F^2 = \frac{\sigma_0^2 (R_0 + 1)}{2} \frac{V'_{1133} - V'_{1122}}{R_0 V'_{1133} - V'_{1122}} . \quad (19)$$

Die Parameter F , G , H und N ergeben sich daraus zu

$$F = \frac{1 - 3\eta V'_{2233}}{2\sigma_F^2} \quad (20)$$

$$G = \frac{1-3\eta V'_{1133}}{2\sigma_F^2} \quad (21)$$

$$H = \frac{1-3\eta V'_{1122}}{2\sigma_F^2} \quad (22)$$

$$N = \frac{3}{2} \frac{1+2\eta V'_{1122}}{\sigma_F^2} \quad (23)$$

Mit diesen Formeln ist eine mikromechanische Interpretation der Materialkonstanten der v. Mises-Hill'schen Fließbedingung gegeben. Zu deren Bestimmung können also alternativ entweder drei R -Werte und eine Fließspannung oder eine Texturmessung und jeweils eine Fließspannungs- und R -Wert verwendet werden. Im Gegensatz zum v. Mises-Hill'schen Fließkriterium wird das texturbasierte Kriterium vollständig identifiziert.

Zusammenfassung

Es ist diskutiert worden, wie die makroskopische Fließbedingung metallischer Werkstoffe unter Verwendung eines phänomenologischen und eines mikromechanischen Arguments als quadratische Form dargestellt werden kann. Der phänomenologische Ansatz enthält im Allgemeinen eine größere Anzahl von Parametern, die dazu dienen können, beispielsweise kristallographische und morphologische Effekte (implizit) zu berücksichtigen. Der mikromechanische Ansatz enthält weniger Parameter, die durch eine Texturmessung ermittelt werden können. In Folge dessen lassen sich die Parameter der v. Mises-Hill'schen Fließbedingung kristallographisch interpretieren und durch eine Texturmessung und jeweils eine Fließspannungs- und eine R -Wert-Messung bestimmen.

Quellen

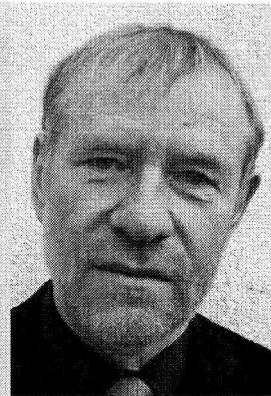
- [1] D. Banabic: Formability of Metallic Materials, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [2] F. Barlat, D. Lege, J. Brem: A six-component yield function for anisotropic materials, Int. J. Plast. 7 (1991), 693-712.
- [3] F. Barlat, R. Becker, Y. Hayashida, Y. Maeda, M. Yanagawa, K. Chung, J. Brem, D. Lege, K. Matsui, S. Murtha, S. Hattori: Yielding description for solution strengthened aluminum alloys, Int. J. Plast. 13 (1997) 4, 385-401.
- [4] F. Barlat, H. Aretz, J. Yoon, M. Karabin, J. Brem, R. Dick: Linear transformation-based anisotropic yield functions, Int. J. Plast. 21 (2005) 4, 1009-1039.
- [5] T. Böhlke: Crystallographic Texture Evolution and Elastic Anisotropy: Simulation, Modeling, and Application, Magdeburg, 2001 (Dr.-Ing.-Diss.).
- [6] T. Böhlke: Application of the maximum entropy method in texture analysis, Comp. Mat. Science 32 (2005), 276-283.
- [7] T. Böhlke: Texture simulation based on tensorial Fourier coefficients, Computers and Structures 84 (2006), 1086-1094.
- [8] H.-J. Bunge: Über die elastischen Konstanten kubischer Materialien mit beliebiger Textur. Kristall u. Technik 3 (1968) 3, 431-438.
- [9] H.-J. Bunge: Texture Analysis in Material Science, Cuviller Verlag, Göttingen, 1993.
- [10] H. Hencky: Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierdurch im Material hervorgerufenen Nachspannungen, Z. angew. Math. Mech. 4 (1924), 323-334.
- [11] R. Hill: A theory of yielding and plastic flow of anisotropic materials, Proc. Phys. Soc. Lond. A (1948) 193, 281-297.
- [12] R. Hill: Theoretical plasticity of textured aggregates, Math. Proc. Cambridge Phi. Soc. 85 (1979), 179-191.
- [13] R. Hill: Constitutive modelling of orthotropic plasticity in sheet metals, J. Mech. Phys. Solids 38 (1990), 405-417.

- [14]R. Hill: A user-friendly theory of orthotropic plasticity in sheet metals, *Int. J. Mech. Sci.* 15 (1993), 19-25.
- [15]M. Huber: The specific strain work as a measure of material effort, *Czasopismo Techniczne* 22 (1904), 81-83.
- [16]U. Kocks, C. Tomé, H. Wenk: *Texture and Anisotropy: Preferred Orientations in Polycrystals and Their Effect on Materials Properties*, Cambridge, Univ. Pr., 1998.
- [17]E. T. Onat: Group theory and representation of microstructure and mechanical behavior of materials, *Modeling the Deformation of Crystalline Solids*, T. C. Lowe, A. D. Rollet, P. S. Follansbee, G. S. Daehn, 1991.
- [18]R. Pearce: Some aspects of anisotropic plasticity in sheet metals, *Int. J. Mech. Sci.* 10 (1968), 995-1005.
- [19]H. Tresca: Mémoire sur l'écoulement des corps solides soumis à de fortes pressions, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris* 59 (1864), 754.
- [20]R. v. Mises: *Mechanik der festen Körper im plastisch-deformablen Zustand*, *Nachr. kgl. Ges. Wiss., Göttingen, Math. Phys. Klasse I* (1913), 582-592.
- [21]R. v. Mises: *Mechanik der plastischen Formänderung bei Kristallen*, *Z. angew. Math. Mech.* 8 (1928) 3, 161-185.
- [22]J. Woodthorpe, R. Pearce: The anomalous behaviour of aluminium sheet under balanced biaxial tension, *Int. J. Mech. Sci.* 12 (1970), 341-347.

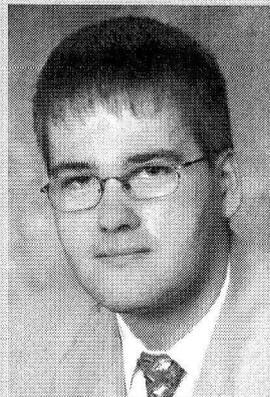
Prof. Dr.-Ing. habil.
Thomas Böhlke, Kontinuumsmechanik im Maschinenbau, Institut für Technische Mechanik, Fakultät für Maschinenbau, Universität Karlsruhe (TH)



Prof. Dr.-Ing. habil.
Albrecht Bertram



Dr.-Ing. **Gerrit Riszy**



Institut für Mechanik, Fakultät für Maschinenbau, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg