

Dynamik und Kontaktvorgänge bei einem hybriden piezoelektrischen Schwingungsmotor

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Ingenieurwissenschaften

von der Fakultät für Maschinenbau
der Universität Karlsruhe (TH),
Karlsruher Institut für Technologie (KIT),

genehmigte

Dissertation

von

M.Eng. Nantawatana Weerayuth

aus Roi Et, Thailand

Tag der mündlichen Prüfung:

Prüfungsvorsitz:

Hauptreferent:

Korreferent:

Korreferent:

09. März 2010

Prof. Dr.-Ing. Martin Gabi

Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Seemann

Prof. Dr.-Ing. Thomas Sattel

Prof. Dr.-Ing. habil. Dr.h.c. Jörg Wauer

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Zeit als Doktorand am Institut für Technische Mechanik, Fakultät für Maschinenbau des Karlsruher Instituts für Technologie (KIT).

Zuerst möchte ich mich ganz herzlich bei Herrn Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Seemann für die wissenschaftliche Betreuung dieser Arbeit sowie die wertvollen Anregungen und Diskussionen bedanken. Stets war ich mir seine Unterstützung in jeglicher Hinsicht sicher und fand jederzeit ein offenes Ohr, um Probleme und angestrebte Lösungen konstruktiv zu diskutieren.

Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Dr. h.c. Jörg Wauer danke ich auch ganz herzlich für die Übernahme des Korreferates sowie für sein großes Interesse an meiner Arbeit und die sehr hilfreichen Anregungen. Weiterhin gilt mein besonderer Dank an Herrn Prof. Dr.-Ing. Thomas Sattel vom Institut für Mikro- und Nanotechnologien, Fachgebiet Mechatronik der Universität Ilmenau für die freundliche Übernahme des Korreferates und das entgegengebrachte Interesse.

Dem Vorsitzenden des Prüfungsausschusses, Herrn Prof. Dr.-Ing. Martin Gabi vom Fachgebiet Strömungsmaschinen, Dekan der Fakultät für Maschinenbau des Karlsruher Instituts für Technologie gilt ebenfalls mein Dank. Daneben bedanke ich mich bei Herrn Prof. Dr.-Ing. Jens Wittenburg und Herrn Prof. Dr.-Ing. Carsten Proppe für die schöne Zeit am Institut sowie für das freundliche Interesse an meiner Arbeit.

Bei allen Mitarbeitern, Kollegen und Kolleginnen am Institut für Technische Mechanik möchte ich mich für die angenehme Arbeitsatmosphäre bedanken. Ein besonders Dank gilt Herrn Dr.-Ing. Günther Stelzner, Herrn Dr.-Ing. Hartmut Hetzler, Herrn Dr.-Ing. Christian Wetzler, Herrn Dr.-Ing. Dipl.-Ing.-Päd. Daniel Schwarzer sowie Herrn Dipl.-Ing. Aydin Boyaci für die zahlreichen wissenschaftlichen Gespräche und Diskussionen, welche die vorliegende Arbeit stark geprägt haben. Insbesondere danke ich auch unseren Sekretärinnen, Frau Volz und Frau Windbiel, für die fröhliche und verlässliche Unterstützung bei allen anfallenden Verwaltungstätigkeiten.

Zuletzt möchte ich mich bei meiner Familie und besonders bei meinen Eltern für die dauerhafte Unterstützung und den Rückhalt bedanken. Auf Euch konnte und kann ich mich immer verlassen. Meiner lieben Tochter Nattanisha (Shompoo) danke ich aus tiefstem Herzen für ihre moralische Unterstützung und Motivation. Ohne die täglichen Telefonate mit Dir hätten mir sowohl die Kraft als auch die Ausdauer gefehlt. Danke.

Karlsruhe, im März 2010
Nantawatana Weerayuth

Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in zwei Teile und leistet einen Beitrag zur Dynamik bzw. zu den Kontaktvorgängen eines hybriden piezoelektrischen Ultraschallschwingungsmotors mit zwei Statoren und einem dazwischen angeordneten Rotor.

Der erste Teil beschäftigt sich mit der Modellbildung. Wesentliches Ziel der Modellbildung ist der Angleich zweier charakteristischer Resonanzfrequenzen des hybriden Schwingungsmotors. Die mathematische Formulierung der charakteristischen Längs- und Torsionsschwingungen der Statoren erfolgt basierend auf einem einfachen Modell gemäß eindimensionaler Stabtheorie über das Prinzip von Hamilton. In einem ersten Schritt wird der für die Funktion des Motors notwendige Angleich der jeweils niedrigsten Resonanzfrequenz der Längs- und Torsionsschwingung im Rahmen dieses Modells analytisch durchgeführt, danach mit FEM-Ergebnissen von ANSYS verbessert und mit experimentellen Messungen verglichen. Die Ergebnisse zeigen allerdings, dass bei der Veränderung der Länge der Bauteile des Stators der Angleich der Resonanzfrequenzen des Motors nicht erfolgen kann. Durch Verändern der Abmessungen und insbesondere der Position des Ausgleichsringes gelingt es aber, den gewünschten Angleich in perfekter Weise zu realisieren. Ein Prototyp des Stators wird gemäß den mittels FEM optimierten Daten gefertigt. Seine Resonanzfrequenzen werden mit einem Precision Impedanz Analyser (Agilent HP 4294A) und einem Laservibrometer gemessen. Die Messergebnisse der beiden Verfahren zeigen eine relativ gute Übereinstimmung zwischen den numerisch optimierten und den gemessenen Werten.

Im zweiten Teil steht die Simulation des Kontaktverhaltens von Stator und Rotor des betrachteten Ultraschallmotors im Mittelpunkt. Der Einfluss der wichtigen Parameter, beispielsweise der Vorspannung, der anregenden elektrischen Spannung und ihrer Frequenz und des Reibschichtmaterials (elastisch und viskoelastisch), auf das dynamische Verhalten des Motors wird ausführlich mit dem Ziel untersucht, ein möglichst großes Drehmoment zu erhalten. Die Ergebnisse zeigen deutlich, dass sich die Kontaktdauer bei einer sich ändernden Amplitude der elektrischen Spannung ebenfalls verändert. Die Kontaktdauer verkürzt sich bei hoher elektrischer Spannung und wird umgekehrt bei niedrigen Werten der elektrischen Spannung verkleinert. Daraus folgt zusammenfassend, dass die Kontaktdauer umgekehrt proportional zur Amplitude der anregenden elektrischen Spannung ist. Bei Verwendung einer elastischen Reibschicht wird die zulässige Vorspannung kleiner als beim Fall ohne Reibschicht. Der Kontaktnormalkraftverlauf führt jedoch im Fall ohne Reibschicht zu Stößen. Sowohl mit elastischer als auch viskoelastischer Reibschicht kann die Wirkung der Stöße auf das Kontaktverhalten vermindert werden; ebenso werden Verschleiß und induzierte Schwingungen des Rotors reduziert. Die Wahl einer optimalen Dicke der Reibschicht ist dabei natürlich stark abhängig von den verwendeten Vorspannungen und der anregenden elektrischen Spannungsamplitude an der in longitudinaler Richtung polarisierten Piezokeramik.

Beim Einsatz einer viskoelastischen Reibschicht lässt sich der Motor ohne Verlust der Separationsphase auch unter hohen Vorspannungen verwenden. Das erreichbare maximale Drehmoment wird dadurch weiter erhöht. Als positiver Nebeneffekt werden die Wirkungsgradverluste wegen der Reverse-Periode des Stators ebenfalls verringert.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation	1
1.2	Bisheriger Kenntnisstand	2
1.3	Zielsetzung	5
1.4	Gliederung der Arbeit	5
2	Grundlagen	7
2.1	Grundlagen der Piezoelektrizität	7
2.1.1	Feldgrößen und Feldgleichungen	7
2.1.2	Prinzip von Hamilton	9
2.1.3	Konstitutive Gleichungen	10
2.2	Grundlagen der Kontaktmechanik	12
2.2.1	Kontaktkinematik	12
2.2.2	Kontaktspannungen und Kuhn-Tucker-Bedingungen	14
2.2.3	Kinetik	16
2.3	Theoretische Grundlagen der Viskoelastizität	19
2.3.1	Eigenschaften viskoelastischer Körper	19
2.3.2	Erweiterte Modelle durch Kombination der Grundmodelle	20
2.3.3	Materialgesetz in integraler Formulierung	23
3	Modellbildung	25
3.1	Physikalisches Modell eines hybriden Ultraschall-Schwingungsmotors	25
3.2	Beschreibendes mathematisches Statormodell	26
3.2.1	Modellierung der Längsschwingungen	26
3.2.1.1	Bewegungsgleichungen der L-PZT	27
3.2.1.2	Gekoppeltes Randwertproblem zur Beschreibung eines kompletten Stators	30
3.2.1.3	Systemgleichungen	34
3.2.2	Modellierung der Torsionsschwingungen	35
3.2.2.1	Bewegungsgleichungen der T-PZT	36
3.2.2.2	Gekoppeltes Randwertproblem zur Beschreibung eines kompletten Stators	38
3.2.2.3	Systemgleichungen	40
3.3	Finite-Elemente-Analyse piezoelektrischer Strukturen	41
3.3.1	Theorie zur FE-Methode piezoelektrischer Materialien	41
3.3.1.1	Piezoelektrische Formulierung	41
3.3.1.2	FE-Formulierung	42
3.3.2	Numerische Modalanalyse	44
3.3.3	Erzwungene Schwingungen bei harmonischer Anregung	45

4	Statoroptimierung mit Ergebnissen	47
4.1	Angleichung der Eigenkreisfrequenzen bei 1-dimensionaler Modellierung	47
4.1.1	Einfluss piezoelektrischer Aktorscheiben	49
4.1.2	Dickeneinfluss der elastischen Scheiben	49
4.1.3	Dickeneinfluss der piezoelektrischen Scheiben	51
4.1.4	Dickeneinfluss des Ausgleichsringes	56
4.1.5	Einfluss des Außenradius des Ausgleichsringes	56
4.1.6	Einfluss der Position des Ausgleichsringes	63
4.2	FE-Modell zur Verfeinerung der 1-dimensionalen Modellierung	70
4.2.1	Modalanalyse	70
4.2.2	Harmonische Analyse	76
4.2.3	Elliptische Trajektorie	77
4.3	Experimentelle Validierung des FE-Modells	78
4.3.1	Gefertigter Stator-Prototyp	79
4.3.2	Prüfstand und Beschreibung der experimentellen Untersuchungen	80
4.3.3	Messergebnisse	81
	4.3.3.1 Admittanzmessung des Stators	81
	4.3.3.2 Laseroptische Vermessung des Stators	82
4.3.4	Bewertung und Diskussion	85
5	FE-Simulation des Kontaktverhaltens von Stator und Rotor	87
5.1	Motivation	87
5.1.1	Kontaktverhalten eines Ultraschallschwingers	87
	5.1.1.1 Messungen der Resonanzfrequenzen	88
	5.1.1.2 Normalkontaktkraft bei Resonanzanregung	89
5.2	Kontaktmodellierung eines Stator(L-PZT)-Rotor-Verbundes in ANSYS	90
5.2.1	Erstellung des Stator-Rotor-Kontaktmodells	90
5.2.2	Elementtypen und Vernetzung	90
5.2.3	Randbedingungen und Belastungen	93
5.2.4	Gleichungslösung	94
5.2.5	Prinzipieller Ablauf der Kontaktberechnung	94
5.2.6	Kontaktalgorithmen	95
5.2.7	Bewegungsgleichungen	96
5.3	Simulationsergebnisse	97
5.3.1	Kontaktmodell Flexibler Stator mit L-PZT-flexibler Rotor . . .	97
	5.3.1.1 Einfluss der Vorspannung	97
	5.3.1.2 Einfluss der Erregerfrequenz	99
	5.3.1.3 Einfluss der elektrischen Erregerspannung	100
5.3.2	Einfluss einer elastischen Reibschicht auf das Kontaktverhalten .	102
5.3.3	Einfluss einer viskoelastischen Reibschicht auf das Kontaktverhalten	103
5.3.4	Stoßinduzierte Schwingungen des Rotors	106
5.3.5	Drehmoment	107
6	Zusammenfassung und Ausblick	113
	Anhang	116

Anhang A: Materialkonstanten der L-PZT	116
Anhang B: Materialkonstanten der T-PZT	117
Literaturverzeichnis	118

1 Einleitung

1.1 Motivation

Elektrische Antriebe sind heutzutage Bestandteil vieler moderner Technologien. Dabei haben die Anforderungen industrieller Anwendungen an elektrische Antriebe in den letzten Jahren stetig zugenommen. Dies ist insbesondere im Automobilbereich deutlich zu erkennen, wo infolge steigender Anforderung an den Komfort moderner Fahrzeuge eine Vielzahl besonderer Ausstattungen, beispielsweise Fensterheber, Schiebedach, Sitzverstellung und Kopfstützen oder sogar Leuchtweitenregulierungen durch elektrische Antriebe betätigt werden. Die verschiedenen Einrichtungen erfordern unterschiedlich antreibende Kräfte und Drehmomente, so dass beim Einsatz von klassischen elektrischen Antrieben in aller Regel Getriebe zur Drehmoment/Drehzahlumsetzung benötigt werden. Die Anforderungen nach kompakter Bauweise und Gewichtseinsparung lassen sich so oft nicht erfüllen. Die Notwendigkeit zur Entwicklung und Auswahl alternativer Antriebe ist also offensichtlich. So sind in den letzten Jahren spezielle Materialeigenschaften, wie z.B. piezoelektrische Eigenschaften, bei der Entwicklung neuartiger elektrischer Antriebe ausgenutzt worden [64]. Die sog. piezoelektrischen Ultraschallmotoren gehören zu dieser Kategorie neuartiger Antriebe. Diese Ultraschallmotoren zeigen einige sehr interessante Eigenschaften, die für spezielle Antriebsaufgaben vorteilhaft erscheinen, beispielsweise ein hohes Drehmoment bei niedrigen Drehzahlen im Vergleich zu herkömmlichen Elektromotoren, die ein niedriges Drehmoment bei hohen Drehzahlen liefern. Sie erzeugen außerdem eine große Drehmomentdichte, besitzen ein hohes Haltemoment im Stillstand auch nach Abschaltung und haben keine elektromagnetische Interferenz [70]. Auch die möglichen Einsatzgebiete für Ultraschallmotoren sind in [70] beschrieben, beispielsweise als Aktoren in der Robotik oder in Konsumgütern, aber auch für hochgenaue Positioniereinrichtungen. Sie sind inzwischen in der Raum- und Luftfahrtindustrie, Schifffahrtstechnik, Kfz-Industrie und beim Bau von Kameras durchaus eingesetzt worden [26]. Die meisten auf dem Markt zur Verfügung stehenden Ultraschallmotoren sind Ultraschall-Wanderwellenmotoren, [43]. Dies ist auch ein Grund dafür, dass genau dieser Typ von Ultraschallmotor mit seinem Arbeitsprinzip in der Fachliteratur meistens im Vordergrund steht [63], [64] sowie [70].

Neben dem genannten Wanderwellenmotor gibt es jedoch als sog. hybride piezoelektrische Schwingungsmotoren alternative Möglichkeiten der Entwicklung neuartiger Antriebe. Sie sind bisher weit seltener diskutiert worden und auch noch nicht in allen Einzelheiten verstanden. Ein derartiger Motor wurde erstmals von Kurosawa et al. [44], [45] vorgestellt. Typisch für seine Funktionsweise ist die getrennte Erregung axialer und tangentialer Verschiebungen, um diese dann in der Statorkontaktfläche zu geeigneten elliptischen Schwingungen zu überlagern, so dass damit eine Mitnahme des Rotors erfolgen kann. Dabei lassen sich die Geschwindigkeit und das Drehmoment separat kontrollieren. Deswegen hat der Motor als Antrieb bei niedriger Arbeitsgeschwindigkeit eine

bessere Regelbarkeit und Stabilität im Vergleich zu Ultraschall-Wanderwellenmotoren [44]. Es sind jedoch noch keine hybriden Ultraschall-Schwingungsmotoren bis zur Serienreife entwickelt worden. Dafür ist generell eine wesentlich bessere Kenntnis der Dynamik solcher Antriebe notwendig und auch weitere Detailfragen sind noch zu klären:

- Wie kann z.B. das gehörige Drehmoment erhöht werden?
- Treten Stöße beim Antreiben des Motors auf?
- Wenn ja, wie verhält sich der Motor dabei?
- Welches Material ist für den Einsatz als Reibschicht geeignet?

Die vorliegende Arbeit möchte einen Beitrag leisten, diesen hybriden Ultraschallschwingungsmotor besser zu verstehen und mindestens einen Teil der aufgeworfenen Fragen zu klären.

1.2 Bisheriger Kenntnisstand

Das erste neuartige piezoelektrische Antriebskonzept wurde in den Fünfziger Jahren des letzten Jahrhunderts von Williams und Brown vorgestellt [77], eine technische Anwendung wurde dabei nicht ins Auge gefasst. 1964 und 1973 wurden von Lavrinenko [48] bzw. Barth [9] ähnliche Überlegungen angestellt, wiederum ohne eine praktische Anwendung zu erwägen. Die erste Motivation zur praktischen Anwendung eines piezoelektrischen Antriebs als Motor ist der Arbeit von Sashida (1982) [58] zu entnehmen. Aber erst die modifizierte Form des Motors durch Kanazawa et al. (1993) [41] führte zum industriellen Massenprodukt in Form des Objektivantriebes bei einer Autofokus-Kamera der Firma Canon [64]. Die schnelle Entwicklung verschiedener piezoelektrischer Ultraschallmotoren in den letzten Jahren, insbesondere in Form des Wanderwellenmotors, war damit eingeleitet. Der Aufbau und das Arbeitsprinzip von Wanderwellenmotoren ist in zahlreichen Veröffentlichungen, beispielsweise [2], [34], umfassend beschrieben. Daneben wird von Hagedorn und Wallaschek in [30] auch die Modellierung des Stators nach der Theorie von Mindlin und Reissner vorgestellt. Die ersten Bücher zur weitgehenden Beschreibung von Ultraschallmotoren sind von Sashida [59] und Ueha [70] erschienen. Einen guten Überblick über die Entwicklung piezoelektrischer Ultraschallmotoren gewinnt man auch aus Beiträgen von Uchino [69] und Wallaschek [75]. Zum Dynamikverhalten piezoelektrischer Ultraschallmotoren existieren zahlreiche Arbeiten in der Fachliteratur, wiederum fast ausschließlich für den Typ des Wanderwellenmotors [18], [23], [26], [63].

Inzwischen wird aber auch der sog. hybride Ultraschallschwingungsmotor diskutiert. Die ersten Prototypen wurden 1988 von Ueha et al. [71] und 1991 von Kurosawa et al. [44] vorgestellt. Der Stator dieses Motors setzt sich aus zwei verschiedenen Piezokeramiken zusammen. Eine ist in longitudinaler Richtung polarisiert und wird als Aktor zur Erzeugung einer Normalkontaktkraft verwendet. Die andere ist in tangentialer Richtung polarisiert und bestimmt das mögliche maximale Drehmoment des Motors. Beide Piezokeramiken werden getrennt erregt. Auch dieses Funktionsprinzip wird in den genannten Arbeiten beschrieben, ebenso Experimente zur Charakterisierung eines solchen

Motors. Die experimentellen Ergebnisse zeigen, dass der maximale Wirkungsgrad des Motors 33 % erreichen kann. Im Vergleich zu anderen Ultraschallmotoren, die in beiden Richtungen angetrieben werden können, ist dieser Wert relativ hoch. Das Ausgangsdrehmoment hängt von der Vorspannung und der erregenden elektrischen Spannung der in tangentialen Richtung polarisierten Piezokeramik ab. Bei dem genannten ersten Prototyp existieren allerdings noch technische Probleme und zwar insbesondere mit der Verklebung und unerwünschten Biegemoden des Aktors.

Um diese Probleme zu vermeiden, wurde eine modifizierte Form des Motors von Nakamura et al. [53] hergestellt und auch experimentell untersucht. Anstelle von drei prismatischen piezoelektrischen Aktoren, vgl.[44], wurde eine zylindrische mehrschichtige Piezokeramik als Aktor eingesetzt. Zur Untersuchung des dynamischen Verhaltens des Motors wurde das sog. Equivalent Circuit Verfahren [7] eingesetzt, um das mögliche maximale Drehmoment zu berechnen. Diese Methode hatten bereits Kurosawa et al. [46] zur numerischen Analyse ihrer Bauart des hybriden Ultraschallschwingungsmotors unter Berücksichtigung des Kontaktes von Stator und Rotor vorgeschlagen. Die numerischen Ergebnisse stimmen bei Beachtung des Kontaktes mit den experimentellen Werten überein, während bei einer Modellbildung ohne Betrachtung des Kontaktes relativ große Abweichungen entstehen.

Den Einfluss des Durchmessers des hybriden Schwingungsmotors auf seine Effizienz wurde von Nakamura et al. in einer Nachfolgearbeit [51] näher untersucht, wobei als wichtige Charakteristik des Motors auch das maximal erreichbare Drehmoment als Funktion der Leerlaufgeschwindigkeit mit dem Statordurchmesser als Parameter erläutert wurde. Es wurde außerdem gezeigt, dass bei einem Stator mit Durchmessern über 50 mm neben den erwünschten Schwingungsmoden noch viele störende Moden auftreten. Kleinere Bauformen dagegen sind in dieser Hinsicht wesentlich unempfindlicher.

Satonobu et al. [60] studierten, wie man das Ausgangsdrehmoment hybrider Ultraschallschwingungsmotoren vergrößern kann. Die Eigenfrequenzen des Stators im Kontakt mit einem Rotor wurden dabei mittels Finite-Elemente-Methode zunächst grob berechnet. Um die Eigenfrequenzen der ausgewählten Statorlängs- und -torsionsschwingung in Übereinstimmung zu bringen, wurde der Statordurchmesser variiert, während die Länge sowohl eines Stators als auch des Rotors konstant gehalten wurden. Die numerischen Untersuchungen zeigen, dass die Eigenfrequenzen der Längsschwingung vom Kontakt zwischen Stator und Rotor beeinflusst wird. Daraus folgt, dass die Eigenschaften der Reibschicht zwischen Stator und Rotor bei der Berechnung der Eigenfrequenzen der Längsschwingung berücksichtigt werden müssen.

Verschiedene Bauarten eines hybriden Schwingungsmotors wurden in der Arbeit von Tomikawa et al [67] vorgestellt und zur Durchführung von Experimenten auch prototypisch gefertigt. Verschiedene Methoden zur Angleichung der Eigenfrequenzen der Längsschwingung und der Torsionsschwingung des Stators wurden vorgeschlagen.

Um eine möglichst große Anpresskraft bei der longitudinalen Schwingung des Stators gegen den Rotor zu erzielen, entwickelten Aoyagi et al. [8] einen symmetrisch aufgebauten Motor mit zwei Rotoren. Auf der Basis eines von Nakamura et al. [54]

vorgeschlagenen Konzepts zur Optimierung hybrider Ultraschallschwingungsmotoren verbesserten Satonobu et al. [61] das longitudinale Schwingungsverhalten eines hybriden Schwingungsmotors mit zwei Rotoren. Aufgrund der experimentell durchgeführten Tests wird offensichtlich, dass das resultierende Drehmoment des Motors um so stärker erhöht wird, je niedriger die angelegte elektrische Spannung ist. Eine numerische Untersuchung des hybriden Motors mit zwei Rotoren findet man in der Arbeit von Satonobu et al [62]. Die Torsionsschwingungen werden darin durch ein eindimensionales Finite-Element-Modell beschrieben, wobei Coulombsche Reibung einbezogen wird. Zur Berechnung des Ausgangsdrehmoments muss allerdings der Schwingungsverlauf der dynamischen Kontaktkraft bei bestimmter konstanter Kontaktdauer vordefiniert und vorgegeben werden.

Ohnishi et al. [56] haben eine eigene Methode zur Angleichung der maßgebenden Eigenfrequenzen vorgestellt. Die Angleichung der ausgewählten Frequenzen der beiden Schwingungsmoden erfolgt durch die Änderung der Länge des Rotors und die Anpassung der Vorspannung. Die Autoren haben außerdem vorgeschlagen, dass die Auswirkungen der Reibschicht in die Rechnung einbezogen werden soll. Die Berechnungen selbst wurden im Rahmen einer vorliegenden Finite-Elemente-Modellierung durchgeführt, wobei auch die Lage der Knoten der entsprechenden Schwingungsmoden zur Verbesserung der Effizienz des Motors bestimmt werden konnte.

Die Verbesserung der Effizienz des hybriden Ultraschallschwingungsmotors ist Thema vieler Arbeiten, z.B. der Arbeit von Endo [20], von Nakamura et al. [52], von Ishii et al. [37] bzw. [38] aber auch der Beitrag [70]. Es wurden die Materialeigenschaften der Reibschicht, eventuell mit zusätzlicher Schmierung, zur Benutzung in Ultraschallmotoren diskutiert, aber auch die Wahl unterschiedlicher Torsionsmoden zur Verringerung von Schlupfverlusten beim Motorbetrieb.

Yi et al. [82] stellte schließlich 2005 einen mit zwei Statoren arbeitenden hybriden piezoelektrischen Schwingungsmotor vor. Der Rotor befindet sich dazwischen in der Mitte. Im Vergleich zu den vorher genannten Bauformen unterscheidet sich dieser Motor in seiner Struktur und in seinen Eigenschaften deutlich von jenen. Insbesondere können aufgrund dieses Aufbaus in sehr einfache Weise hohe dynamische Normalkräfte durch die Längsschwingung in den gegenüber liegenden Statoren erzeugt werden. Ein Prototyp mit 40 mm Durchmesser wurde gefertigt und erste experimentelle Untersuchungen wurden durchgeführt: das maximale gemessene Drehmoment erreicht 0.75 Nm. Weitere Details zum Arbeitsprinzip dieser Bauform findet sich in [83].

Ein Schwachpunkt sämtlicher Untersuchungen hybrider Schwingungsmotoren ist die fehlende Kontaktmodellierung. Sie existiert bisher nur für Ultraschall-Wanderwellenmotoren, ausführlich beschrieben von Wallaschek [76]. Darin werden auch Vorschläge zur Auswahl von Reibmaterialien für Ultraschall-Wanderwellenmotoren gemacht. Ein erstes mathematisches Modell zur Beschreibung des Kraftübertragungsprozesses für den hybriden Ultraschallschwingungsmotor wurde von Gou et al. 2004 [29] beschrieben. Erste Aussagen zur Effizienz der Motors auf der Basis des übertragbaren Moments werden gemacht, der Einfluss der Reibschichtdicke auf die Charakteristik des Motors wird ebenfalls diskutiert.

1.3 Zielsetzung

Weil die Bauform eines hybriden Ultraschallschwingungsmotors mit zwei Statoren bezüglich Leistung und Effizienz besonders erfolgversprechend erscheint, soll diese hier weiter untersucht werden. Es wird allerdings eine kleinere Bauform als in [82] den Überlegungen zugrunde gelegt. Um insbesondere die Effizienz des Stators weiter zu verbessern, sollen seine beiden Resonanzfrequenzen sowohl der Längsschwingung als auch der Torsionsschwingung noch genauer als bisher aneinander angeglichen werden. Dazu wird ein einfaches mathematische Modell zur Beschreibung der Längs- und Torsionsschwingung an den Anfang gestellt und anschließend im Rahmen einer 3-dimensionalen Finite-Elemente-Modellierung verbessert und an die physikalische Realität angepasst. Unterstützend werden experimentelle Messungen ausgeführt, um die Genauigkeit der numerischen Berechnung zu validieren. Ein wesentlicher Schwerpunkt der Arbeit sind numerische Untersuchungen zum Einfluss der Vorspannung bzw. der die Piezokeramiken anregenden elektrischen Spannung und ihrer Frequenz sowie insbesondere zur Kontaktdynamik der Statoren und des Rotors mit der dazwischen angeordneten Reibschicht einschließlich etwaiger Stöße zwischen Statoren und Rotor. Damit kann die Auswahl des Reibschichtmaterials und seiner Dicke getroffen werden, um schließlich ein maximiertes übertragbares Drehmoment zu erhalten bei gleichzeitiger Minimierung der auftretenden Verluste während der Reverse-Periode der Statoren.

1.4 Gliederung der Arbeit

Die Dissertation gliedert sich in sechs Kapitel. Das vorliegende in die Thematik einleitende Kapitel 1 erläutert zunächst den Ausgangspunkt und die Motivation der Forschungsarbeit. Anschließend beschreibt es, ausgehend vom bisherigen Kenntnisstand, den aktuellen Stand der Forschung auf dem betrachteten Gebiet. Auf dieser Basis werden dann abschließend die zu untersuchenden Themenbereiche und somit der Inhalt dieser Arbeit definiert.

Kapitel 2 beschäftigt sich mit der Formulierung der theoretischen Grundlagen, die in den darauf folgenden Kapiteln wesentlich sind und dort wieder aufgegriffen werden. Zunächst befasst sich das Kapitel mit den theoretischen Grundlagen der Piezoelektrizität und den zugehörigen linearen konstitutiven Gleichungen, wobei das Prinzip von Hamilton für elektromechanische Systeme verwendet wird. Danach wird eine Einführung in die theoretischen Grundlagen der Kontaktmechanik gegeben. Abschließend werden gewisse Grundlagen der Viskoelastizität vorgestellt.

Kapitel 3 startet mit der Beschreibung der Bauform des zu untersuchenden hybriden piezoelektrischen Schwingungsmotors. Die Statormodellierung zur Anregung einer möglichst gleichfrequenten Längs- und Torsionsschwingung bildet dann den Kern des Kapitels: Ausgehend von einer einfachen Stabtheorie für den zylindrischen Stator mit elastischen und piezoelektrischen Schichten wird daran anschließend Schritt für Schritt die Modellierungstiefe erweitert. Die beschreibenden Randwertprobleme werden mit Hilfe des Prinzips von Hamilton hergeleitet, womit weitgehend analytisch lösbare mathematische Modellgleichungen für den hybriden Ultraschallmotor zur Verfügung ste-

hen.

Die Ergebnisse der Parameterstudie in Kapitel 4 ermöglichen die Identifizierung der wesentlichen Parameter zur Angleichung der Resonanzfrequenzen des Motors. Die analytischen Ergebnisse werden daran anschließend mit FEM-Ergebnissen verglichen und mittels experimenteller Messungen validiert.

Kapitel 5 als wesentlicher Teil der gesamten Arbeit widmet sich dann ausgewählten FE-Methoden zur Kontaktmechanik der Statoren und des Rotors mit einer entsprechenden Reibschicht dazwischen. Auf diese Weise gelingt es, den Einfluss der Vorspannung, der anregenden elektrischen Spannung und ihrer Frequenz sowie verschiedener Reibschichtmaterialien auf das dynamische Verhalten des betrachteten Stator/Rotor-Kontaktsystems intensiv zu analysieren. Entsprechende Schlussfolgerungen werden gezogen.

Kapitel 6 beschließt die Arbeit mit einer kurzen Zusammenfassung und einem Ausblick auf mögliche weiterführende Arbeiten.

2 Grundlagen

Im vorliegenden Kapitel werden referierend in knapper Form theoretische Grundlagen bereitgestellt, auf die in den folgenden Kapiteln immer wieder zurückgegriffen wird.

2.1 Grundlagen der Piezoelektrizität

Eine lineare Theorie piezoelektrischer Wandler, wie sie für die vorliegende Arbeit benötigt wird, ist vielfach erörtert worden, siehe beispielsweise die Arbeiten von Tiersten [66], Wolf [79], von Wagner [74], Gausmann [24] und Rudolf [17]. Eine Zusammenfassung der wesentlichen Ergebnisse wird in den folgenden Abschnitten dargestellt.

2.1.1 Feldgrößen und Feldgleichungen

Charakteristisch für piezoelektrische Materialien ist die Verknüpfung von mechanischen und elektrischen Feldgrößen. Folgende Feldgrößen werden verwendet:

1. Spannungstensor $\mathbf{T} = T_{ij}$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$ und Verzerrungstensor $\mathbf{S} = S_{ij}$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$ als mechanische sowie
2. die Vektoren der elektrischen Verschiebungsdichte $\vec{D} = D_i$, $i \in \{1, 2, 3\}$ und der elektrischen Feldstärke $\vec{E} = E_i$, $i \in \{1, 2, 3\}$ als elektrische Feldgrößen.

Zusätzlich werden der Verschiebungsvektor $\vec{u} = u_i$, $i \in \{1, 2, 3\}$ eines materiellen - Punktes und das skalare elektrische Potential ϕ definiert.

Diese Feldgrößen sind über Feldgleichungen gekoppelt und zwar den Impulssatz und Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen sowie die Maxwell'schen Gleichungen. Der Impulssatz kann in der Form

$$T_{ij,j} + F_i = \frac{d}{dt}(\rho u_i) \quad (2.1)$$

angegeben werden, worin F_i die Volumenkräfte und ρ die Massendichte darstellen. Der Zusammenhang zwischen Verschiebungen und Verzerrungen kann über

$$S_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.2)$$

beschrieben werden, wobei $(\)_{,i}$ die partielle Ableitung nach der Koordinate i bedeutet. Die dargestellten linearen Beziehungen in Gleichung (2.2) gelten nur, wenn die maximal auftretenden Verzerrungen klein sind.

Die Maxwellschen Gleichungen zur Beschreibung der Zusammenhänge zwischen elektrischen und magnetischen Feldern lauten in differentieller bzw. nach Anwendung der Sätze von Stokes und Gauss auch integraler Schreibweise

$$\nabla \cdot \vec{D} = \operatorname{div} \vec{D} = \bar{\rho} \Leftrightarrow \oint_A \vec{E} \cdot \vec{n} dA = \int_V \frac{1}{\varepsilon_0} \bar{\rho} dV = \frac{q}{\varepsilon_0}, \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \vec{E} = \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Leftrightarrow \oint_\Gamma \vec{E} dr = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{B} \cdot \vec{n} dA, \quad (2.4)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Leftrightarrow c^2 \oint_\Gamma \vec{B} dr = \int_A \left(\frac{1}{\varepsilon_0} \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot \vec{n} dA, \quad (2.5)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = \operatorname{div} \vec{B} = 0 \Leftrightarrow \oint_A \vec{B} \cdot \vec{n} dA = 0. \quad (2.6)$$

Hierin stellen \vec{E} , \vec{H} das elektrische bzw. magnetische Feld dar. Die elektrische und magnetische Flussdichte werden durch \vec{D} bzw. \vec{B} bezeichnet. \vec{j} ist die elektrische Stromdichte und $\bar{\rho}$ die Volumenladungsdichte. Die Größe ε_0 entspricht der Dielektrizitätskonstanten des Vakuums und besitzt den Wert $\varepsilon_0 = 8.8854 \cdot 10^{-12}$ As/Vm.

Bei piezoelektrischen Problemstellungen liegt die materielle Geschwindigkeit unterhalb der Schallgeschwindigkeit und damit weit unterhalb der Geschwindigkeit von Lichtwellen [14]. Damit ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit der mechanischen Wellen in piezoelektrischen Materialien viel kleiner als die Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen [22, 66, 74], so dass die zeitlichen Änderungen des elektrischen Feldes vernachlässigbar sind [50, 55]. Damit reduziert sich die elektromagnetische Theorie zu einem quasi-statischen Problem, in dem das magnetische und das elektrische Feld voneinander entkoppelt sind. Folglich kann das magnetische Feld bei der Behandlung von piezoelektrischen Problemen vernachlässigt werden, d.h. piezoelektrische Materialien sind nicht magnetisierbar. Werden darüber hinaus piezoelektrische Werkstoffe als elektrisch isolierende Dielektrika betrachtet, vereinfachen sich die Maxwellschen Gleichungen (2.3)-(2.6) drastisch auf die beiden Zusammenhänge [24, 39]

$$\vec{E} = -\nabla \phi = -\operatorname{grad} \phi, \quad (2.7)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \operatorname{div} \vec{D} = 0. \quad (2.8)$$

Zur vollständigen Beschreibung des gekoppelten 2-Feldproblems bedarf es noch der jeweiligen Randbedingungen, und zwar der mechanischen und der elektrischen, auf der Oberfläche Γ , die als Vereinigung von Teiloberflächen angenommen wird. Hierbei sollen keine Überschneidungen existieren [1]:

$$\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_f = \Gamma_\phi \cup \Gamma_\sigma. \quad (2.9)$$

Mögliche mechanische Randbedingungen sind dann vorgegebene Verschiebungen

$$u_i = \bar{u}_i \text{ auf } \Gamma_u \quad (2.10)$$

oder gegebene Flächenlasten

$$T_{ij} n_j = \bar{f}_i \text{ auf } \Gamma_f. \quad (2.11)$$

Dabei sind die n_i die Koordinaten des nach außen gerichteten Normaleneinheitsvektors \vec{n} der jeweiligen Oberfläche. Entsprechend können elektrische Randbedingungen durch ein gegebenes Potenzial

$$\phi = \bar{\phi} \text{ auf } \Gamma_\phi \quad (2.12)$$

oder eine gegebene Flächenladungsdichte

$$-D_i n_i = \bar{\sigma} \text{ auf } \Gamma_\sigma \quad (2.13)$$

bestimmt sein. Die jeweils erstgenannten Randbedingungen in beiden Kategorien bezeichnet man als wesentliche (in der Mechanik geometrische), die beiden verbleibenden als restliche oder natürliche (in der Mechanik dynamische) Randbedingungen.

2.1.2 Prinzip von Hamilton

Alternativ zu Feldgleichungen und vollständig formulierten Randbedingungen gemäß vorangehendem Abschnitt kann das allgemeingültige Prinzip von Hamilton

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt + \int_{t_0}^{t_1} \delta W dt = 0, \quad (2.14)$$

das die häufig komplizierten restlichen Randbedingungen einschließt, zusammen mit den stets einfachen wesentlichen Randbedingungen das zu untersuchende Problem vollständig beschreiben. Die Spezifizierung auf piezoelektrische Festkörper durch äquivalente Umformung der Feldgleichungen unter Beachtung der restlichen Randbedingungen ist beispielsweise in den Arbeiten von Tiersten [66], Wolf [79] und von Wagner [74] entweder ohne Kommentar oder ausführlich begründet zu finden, so dass hier nur noch das Endergebnis angegeben werden soll. Sowohl das Lagrange-Funktional L , das in der Mechanik üblicherweise durch die Differenz von kinetischer und potenzieller Energie gegeben ist, als auch die virtuelle Arbeit potenzialloser Wirkungen sind für piezoelektrische Kontinua entsprechend zu modifizieren. Insbesondere eine Variante hat sich eingebürgert, die eine einfache Einbeziehung der (restlichen) Randbedingungen (2.11) und (2.13) erlaubt.

Dabei wird in Verallgemeinerung der potenziellen Energiedichte die elektrische Enthalpiedichte H und ihr totales Differenzial

$$dH = T_{ij} dS_{ij} - D_k dE_k \quad (2.15)$$

als Energieausdruck eingeführt. Hierbei sind die Verzerrung S_{ij} und das elektrische Feld E_k die unabhängigen Variablen. Diese wiederum können als Funktionen der Verschiebungen u_i und des elektrischen Potentials ϕ dargestellt werden. Für die Variation von H gilt entsprechend

$$\delta H = T_{ij} \delta S_{ij} - D_k \delta E_k. \quad (2.16)$$

Damit kann das Prinzip von Hamilton für piezoelektrische Kontinua in der Form

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L(u_i, \phi) dt + \int_{t_0}^{t_1} \delta W(u_i, \phi) dt = 0 \quad (2.17)$$

angegeben werden, worin die Lagrangefunktion L durch

$$L = \int_V \left(\frac{1}{2} \rho \dot{u}_i^2 - H \right) dV = \int_V (T - H) dV \quad (2.18)$$

mit der kinetischen Energiedichte T und die virtuelle Arbeit δW durch

$$\delta W = \int_{\Gamma} (\bar{f}_i \delta u_i - \bar{\sigma} \delta \phi) d\Gamma \quad (2.19)$$

gegeben sind. Dabei sind potenziallose Quellen und Senken im Volumen unberücksichtigt geblieben, so dass tatsächlich nur die an der Oberfläche vorgegebenen Kräfte \bar{f}_i und Ladungsdichte $\bar{\sigma}$ wirksam sind.

Es ist aber auch die Verwendung anderer Energieausdrücke möglich. Wird durch eine entsprechende Legendresche Transformation z.B. die innere Energie

$$U = H + E_k D_k \Rightarrow dU = T_{ij} dS_{ij} + E_k dD_k \quad (2.20)$$

für S_{ij} und D_k als unabhängige Variablen verwendet, geht das Prinzip von Hamilton in eine Form über, deren Lagrangefunktion L durch

$$L = \int_V (T - U) dV \quad (2.21)$$

gegeben ist und die darin auftretende innere Energiedichte U , aber auch die virtuelle Arbeit δW als Funktion der Verzerrungen S_{ij} (und damit der Verschiebungen u_i) und der elektrischen Verschiebung D_i (bzw. der daraus ableitbaren Oberflächen-Ladungsdicht $\sigma = -D_i n_i$) auszudrücken sind.

2.1.3 Konstitutive Gleichungen

Werden die Verzerrungen S_{ij} und das elektrische Feld E_k als unabhängige Variablen angenommen, so können lineare konstitutive Gleichungen für die Spannungen T_{ij} und die elektrische Verschiebungsdichte D_i als Funktion dieser Größen in differenzieller Form

$$dT_{ij} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial S_{kl}} dS_{kl} + \frac{\partial T_{ij}}{\partial E_k} dE_k, \quad dD_i = \frac{\partial D_i}{\partial S_{jk}} dS_{jk} + \frac{\partial D_i}{\partial E_j} dE_j \quad (2.22)$$

angegeben werden. Dabei wird hier vorausgesetzt, dass es sich um reversible Zustandsänderungen handelt, d.h. das Material ist elastisch, piezoelektrisch und dielektrisch verlustfrei, Dämpfungseffekte treten damit nicht auf.

Betrachtet man die differenzielle Form der elektrischen Enthalpiedichte

$$dH = \frac{\partial H}{\partial S_{ij}} dS_{ij} + \frac{\partial H}{\partial E_i} dE_i \quad (2.23)$$

und vergleicht diese mit Gleichung (2.16), so erhält man die Beziehungen

$$T_{ij} = \frac{\partial H}{\partial S_{ij}}, \quad D_i = -\frac{\partial H}{\partial E_i}. \quad (2.24)$$

Um lineare konstitutive Gleichungen zu erhalten, muss die elektrische Enthalpiedichte quadratisch in den Feldgrößen sein (siehe z.B. Ikeda [33], Tiersten [66]). Damit hat die elektrische Enthalpiedichte die Form

$$H = \frac{1}{2}c_{ijkl}^E S_{ij} S_{kl} - e_{ijk} E_i S_{jk} - \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}^S E_i E_j. \quad (2.25)$$

Dabei sind die c_{ijkl}^E elastische, e_{ijk} piezoelektrische und ε_{ij}^S dielektrische Konstanten. Die hochgestellten Indizes geben an, dass diese Größen bei konstantem elektrischem Feld bzw. bei konstanter Verzerrung bestimmt werden müssen. Mit Gleichung (2.24) ergeben sich daraus die linearen konstitutiven Gleichungen

$$T_{ij} = c_{ijkl}^E S_{kl} - e_{kij} E_k, \quad D_i = e_{ikl} S_{kl} + \varepsilon_{ik}^S E_k. \quad (2.26)$$

Werden mechanische Spannung und elektrisches Feld als unabhängige Variablen gewählt, so kann entsprechend die Dichte der inneren Energie

$$U = H + E_i D_i = \frac{1}{2}s_{ijkl}^E T_{ij} T_{kl} + d_{ijk} T_{jk} E_i + \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}^T E_i E_j. \quad (2.27)$$

formuliert werden, wobei s_{ijkl}^E die elastischen, d_{ijk} die piezoelektrischen und ε_{ij}^T die dielektrischen Konstanten sind. Damit sind die zugehörigen konstitutiven Gleichungen bestimmt:

$$S_{ij} = \frac{\partial U}{\partial T_{ij}} = s_{ijkl}^E T_{kl} + d_{kij} E_k, \quad D_i = \frac{\partial U}{\partial E_i} = d_{ikl} T_{kl} + \varepsilon_{ik}^T E_k. \quad (2.28)$$

In den meisten Publikationen über Anwendungen der Piezoelektrizität wird eine ingenieurmäßige Notation (IEEE Standard) verwendet, die die Symmetrieeigenschaften der verwendeten Tensoren berücksichtigt. Damit lassen sich die elastischen bzw. die piezoelektrischen Konstanten durch

$$c_{ijkl} = c_{\lambda\mu} \text{ bzw. } e_{ikl} = e_{i\lambda}. \quad (2.29)$$

beschreiben, wobei die Indizes λ und μ gemäß Tabelle 1 festgelegt sind. Somit lauten

ij oder kl	11	22	33	23	31	12
				32	13	21
λ oder μ	1	2	3	4	5	6

Tabelle 2.1: Voigtsche Notation

die konstitutiven Gleichungen

$$T_\mu = c_{\mu\lambda}^E S_\lambda - e_{\lambda i} E_i, \quad D_k = e_{k\lambda} S_\lambda + \varepsilon_{ki}^S E_i, \quad (2.30)$$

wobei $T_{ij} = T_\lambda$ und $2S_{ij} = (1 + \delta_{ij})S_\lambda$ zu gelten hat. Es ergeben sich also im allgemeinen Fall unter Berücksichtigung der Symmetriebedingungen 21 elastische, 18 piezoelektrische und 6 dielektrische Konstanten. Sehr häufig weisen Piezokeramiken nach der im Herstellungsprozess erfolgten Polarisation in guter Näherung ein orthotropes (planar

isotropes) Verhalten auf. Es existiert eine Vorzugsrichtung, nämlich die Polarisationsrichtung. In der Ebene senkrecht zur Polarisationsrichtung zeigen die Piezokeramiken ein isotropes Verhalten. Die Polarisationsrichtung wird in aller Regel mit der 3- bzw. der z -Achse bezeichnet, eine Konvention, die auch in der vorliegenden Arbeit befolgt wird.

Unter Berücksichtigung des orthotropen Materialverhaltens lässt sich die Zahl der Materialkonstanten weiter reduzieren und zwar auf 5 elastische, 3 piezoelektrische und 2 dielektrische Konstanten. Werden die Verzerrungen und das elektrische Feld als unabhängige Variablen gewählt, sind die konstitutiven Gleichungen demnach mit

$$T_1 = c_{11}^E S_1 + c_{12}^E S_2 + c_{13}^E S_3 - e_{31} E_3, \quad (2.31)$$

$$T_2 = c_{12}^E S_1 + c_{11}^E S_2 + c_{13}^E S_3 - e_{31} E_3, \quad (2.32)$$

$$T_3 = c_{13}^E S_1 + c_{13}^E S_2 + c_{33}^E S_3 - e_{33} E_3, \quad (2.33)$$

$$T_4 = c_{44}^E S_4 - e_{15} E_2, \quad (2.34)$$

$$T_5 = c_{44}^E S_5 - e_{15} E_1, \quad (2.35)$$

$$T_6 = \frac{1}{2}(c_{11}^E - c_{12}^E) S_6, \quad (2.36)$$

$$D_1 = e_{15} S_5 + \varepsilon_{11}^S E_1, \quad (2.37)$$

$$D_2 = e_{15} S_4 + \varepsilon_{11}^S E_2, \quad (2.38)$$

$$D_3 = e_{31}(S_1 + S_2) + e_{33} S_3 + \varepsilon_{33}^S E_3 \quad (2.39)$$

gegeben.

2.2 Grundlagen der Kontaktmechanik

Detaillierte Beschreibungen zur Kontaktmechanik findet man z.B. in Wriggers(2002) [81], Laursen(2002) [47] oder Gee(2004) [25]. Die knappe Darstellung der wesentlichen Zusammenhänge in den folgenden Abschnitten folgt in vielen Punkten [31] und [78].

2.2.1 Kontaktkinematik

In der vorliegenden Arbeit geht es um den Mehrpunktkontakt zweier sich berührender ebener Oberflächen $\Gamma^{(i)}$ und $\Gamma^{(j)}$ der Körper Ω^i bzw. Ω^j (Stator und Rotor).

Die Oberflächen $\Gamma^{(i)} = \partial\Omega^{(i)}$ und $\Gamma^{(j)} = \partial\Omega^{(j)}$ setzen sich aus Bereichen ($\Gamma_u^{(i)}$) bzw. ($\Gamma_u^{(j)}$) mit Dirichlet-Randbedingungen, Bereichen ($\Gamma_\sigma^{(i)}$) bzw. ($\Gamma_\sigma^{(j)}$) mit Neumann-Randbedingungen und möglichen Kontakt-Rändern ($\Gamma_C^{(i)}$) bzw. ($\Gamma_C^{(j)}$) zusammen. Dabei gilt

$$\Gamma^{(i)} = \Gamma_u^{(i)} \cup \Gamma_\sigma^{(i)} \cup \Gamma_C^{(i)}, \quad \Gamma_u^{(i)} \cap \Gamma_\sigma^{(i)} \cap \Gamma_C^{(i)} = \emptyset, \quad (2.40)$$

$$\Gamma^{(j)} = \Gamma_u^{(j)} \cup \Gamma_\sigma^{(j)} \cup \Gamma_C^{(j)}, \quad \Gamma_u^{(j)} \cap \Gamma_\sigma^{(j)} \cap \Gamma_C^{(j)} = \emptyset. \quad (2.41)$$

Der Kontaktbereich Γ_C ist normalerweise nicht a priori bekannt und muss durch die Menge der sich berührenden Punkte bestimmt werden.

In Abbildung 2.1 bezeichnen \hat{r}_i und \hat{r}_j die Ortvektoren beliebiger Punkte auf den Oberflächen der beiden Körper. Zur Identifizierung möglicher Kontaktpunkte wird eine der beiden Oberflächen, hier $\Gamma^{(i)}$, zur Parametrisierung verwendet. Wird ein Kontaktpunkt \hat{r}_i auf der Oberfläche $\Gamma^{(i)}$ des Körpers Ω^i gewählt, dann lässt sich der zugehörige Kon-

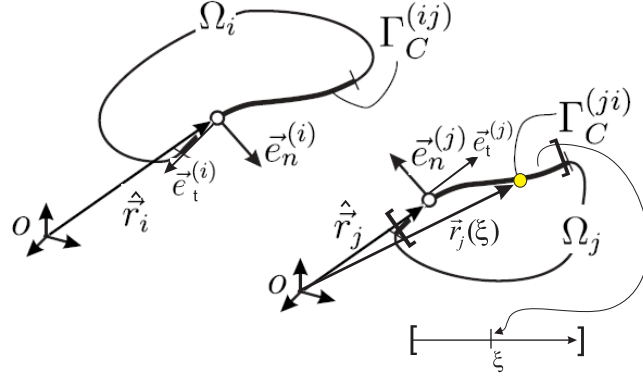


Abbildung 2.1: Kontaktkinematik [31]

taktpunkt auf $\Gamma^{(j)}$ durch die Bedingung

$$\left\| \hat{r}_j - \hat{r}_i \right\| = \min_{\vec{r}_j \in \Gamma^{(j)}} \left\{ \left\| \vec{r}_j(\xi) - \hat{r}_i \right\| \right\} \quad (2.42)$$

festlegen. Zusammen bilden beide Punkte das Kontaktpaar $\{\hat{r}_j, \hat{r}_i\}$. In jedem der beiden Punkte \hat{r}_j, \hat{r}_i lässt sich eine äußere Flächennormale $\vec{e}_n^{(i)}$ und $\vec{e}_n^{(j)}$ errichten und eine Abstandsfunktion

$$g_{ij} = (\hat{r}_j - \hat{r}_i) \cdot \vec{e}_n^{(j)} \quad (2.43)$$

einführen, die den Abstand zwischen dem Kontaktpaar $\{\hat{r}_j, \hat{r}_i\}$ angibt. Damit können folgende Zustände in der Kontaktzone beschrieben werden:

$$\begin{aligned} g_{ij} > 0 &: \text{kein Kontakt,} \\ g_{ij} = 0 &: \text{perfekter Kontakt,} \\ g_{ij} < 0 &: \text{Eindringen.} \end{aligned} \quad (2.44)$$

Wird Eindringen ausgeschlossen, ist die Abstandsfunktion für korrespondierende Kontaktpunkte

$$g_{ij} = (\hat{r}_j - \hat{r}_i) \cdot \vec{e}_n^{(j)} \geq 0. \quad (2.45)$$

Für den in Abbildung 2.1 angedeuteten tatsächlichen Kontakt der Körper Ω^i bzw. Ω^j werden die Kontaktbereiche der Oberflächen $\Gamma^{(i)}$ und $\Gamma^{(j)}$ mit $\Gamma_C^{(ij)}$ und $\Gamma_C^{(ji)}$ bezeichnet. In diesem tatsächlichen Kontaktbereich haben die jeweiligen Oberflächenpunkte einen verschwindenden Abstand, d.h. die Abstandsfunktion g_{ij} ist exakt null. Daraus folgt, dass im Kontakt die räumlichen Positionen der Kontaktpunkte gleich sind [31], so dass

$$\hat{r}_i = \hat{r}_j, \quad \hat{r}_i \in \Gamma_C^{(ij)}, \quad \hat{r}_j \in \Gamma_C^{(ji)} \quad \Rightarrow \quad \Gamma_C^{(ij)} = \Gamma_C^{(ji)} \quad (2.46)$$

folgt. Wenn die Körper nicht in Kontakt sind, tritt kein Kontaktbereich auf, so dass $\Gamma^{(ij)} = \Gamma^{(ji)} = \emptyset$ gilt, weil die Abstandsfunktion g_{ij} größer null ist.

Eine **tangentiale Relativbewegung** zweier Körper entsteht, wenn ein Körper auf der Oberfläche eines anderen Körpers gleitet. Die relative tangentielle Bewegung kann durch die Änderung des minimalen Abstandes am Kontaktpunkt (ξ_0, ξ_1) formuliert werden (siehe [80]). Der Gleitweg des Kontaktpunktes \vec{r}_i auf der deformierten Kontaktfläche $\Gamma_C^{(ji)}$ kann damit durch

$$g_T = \int_{t_0}^{t_1} \left\| \dot{\xi} \vec{e}_t^{(j)} \right\| dt \Leftrightarrow \int_{\xi_0}^{\xi_1} \left\| \dot{\xi} \vec{r}_{j,\xi}(\xi) \right\| d\xi = \int_{\xi_0}^{\xi_1} \sqrt{(\vec{r}_{j,\xi}(\xi) \cdot \vec{r}_{j,\xi}(\xi))} d\xi \quad (2.47)$$

ausgedrückt werden. Hierbei bezeichnet ξ_0 die Stelle des Kontaktbereiches $\Gamma_C^{(ji)}$ des Körpers Ω_j , von dem der Punkt \vec{r}_i des Körpers Ω_i bis zur Position ξ_1 gleiten wird. Die Richtung der Tangente $\vec{e}_t^{(j)} = \vec{r}_{j,\xi}(\xi)$ ändert sich bei einem gekrümmten Rand des Kontaktbereiches $\Gamma_C^{(ji)}$ entlang des Gleitwegs ξ , wie in Abbildung 2.1 anschaulich demonstriert wird.

Die virtuelle Änderung des Gleitens in tangentialer Richtung, die in einer schwachen Form benötigt wird, lässt sich damit als

$$\delta \vec{g}_T = \delta g_T \vec{e}_t^{(j)} = \delta \xi \vec{e}_t^{(j)} \quad (2.48)$$

angeben. Außerdem kann die tangentielle Relativgeschwindigkeit v_{rel} zwischen dem Kontaktpunkt des Körpers Ω_i und des Körpers Ω_j hergeleitet werden. Sie errechnet sich zu ([21])

$$v_{rel} = (\vec{v}^{(i)} - \vec{v}^{(j)}) \cdot \vec{e}_t^{(j)}. \quad (2.49)$$

$\vec{v}^{(i)}$ und $\vec{v}^{(j)}$ sind dabei die Geschwindigkeit des Kontaktpunktes des Körpers Ω_i bzw. des Körpers Ω_j . Damit folgt Gleichung (2.59) direkt aus der tangentialen Komponente der Geschwindigkeitsdifferenz am Kontaktpunkt.

2.2.2 Kontaktspannungen und Kuhn-Tucker-Bedingungen

In der tatsächlichen Kontaktzone $\Gamma_C^{(ij)}$ des Körpers Ω_i und $\Gamma_C^{(ji)}$ des Körper Ω_j werden zunächst die entsprechenden Randspannungsvektoren \vec{s}_{ij} bzw. \vec{s}_{ji} definiert:

$$\vec{s}_{ij} = \sigma^{(ij)} \vec{e}_n^{(ij)} + \tau^{(ij)} \vec{e}_t^{(ij)}, \quad \vec{s}_{ji} = \sigma^{(ji)} \vec{e}_n^{(ji)} + \tau^{(ji)} \vec{e}_t^{(ji)}. \quad (2.50)$$

Hierbei stellen $\sigma^{(ij)}$ bzw. $\sigma^{(ji)}$ die Kontaktnormalspannungen und $\tau^{(ij)}$ bzw. $\tau^{(ji)}$ die Kontaktschubspannungen dar. Die zugehörigen Einheitsvektoren, die in normalen und tangentialen Richtungen des Kontaktbereiches $\Gamma_C^{(ij)}$ ausgerichtet sind, werden durch $\vec{e}_n^{(ij)}$ und $\vec{e}_t^{(ij)}$ bezeichnet. Die in die gegensinnigen Richtungen aufgespannten Einheitsvektoren auf $\Gamma_C^{(ji)}$ heißen entsprechend $\vec{e}_n^{(ji)}$ und $\vec{e}_t^{(ji)}$, siehe Abbildung 2.2.

Aus Abbildung 2.2 lassen sich die Zusammenhänge

$$\vec{e}_n^{(ij)} = -\vec{e}_n^{(ji)}, \quad \vec{e}_t^{(ij)} = -\vec{e}_t^{(ji)} \quad (2.51)$$

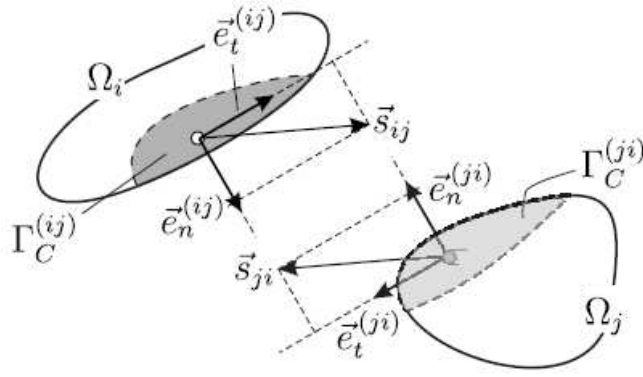


Abbildung 2.2: Kontaktspannungen und zugehörige lokale Einheitsvektoren [31]

ablesen. Daraus folgt $\vec{s}_{ij} + \vec{s}_{ji} = 0$, und die Normal- und die Tangentialkontaktspannung können gemäß

$$\sigma^{(ij)} = \sigma^{(ji)} \quad , \quad \tau^{(ij)} = \tau^{(ji)} \quad (2.52)$$

beschrieben werden.

Mit Hilfe der kinematischen Zwangbedingungen gemäß Gleichung (2.55) und der eingeführten Kontaktnormalspannung können die sog. Kuhn-Tucker-Bedingungen für den Normalkontakt formuliert werden:

$$\begin{aligned} g_{ij} &\geq 0, \\ \sigma^{(ij)} &\leq 0, \\ g_{ij}\sigma^{(ij)} &= 0, \\ \dot{g}_{ij}\sigma^{(ij)} &= 0. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Die erste Beziehung in Gleichung (2.63) beschreibt das Nichteindringen, die zweite das sog. Adhäsionsverbot, dass nämlich im Kontaktbereich nur Druckkräfte übertragen werden können. Beide Bedingungen lassen sich zur dritten Beziehung in Gleichungsform kombinieren. Der letzte Ausdruck bezeichnet eine Konsistenzbedingung über die zeitliche Änderung des Abstandes des Kontaktpaares, wenn die Kontaktkraft ungleich null ist.

Unter Verwendung der elasto-plastischen Theorie kann die tangential Gleitung g_T in einen elastischen Teil, nämlich Haften g_T^{Haften} und einen plastischen oder irreversiblen Anteil $g_T^{Gleiten}$, der mit dem Gleiten verknüpft ist [80], zerlegt werden:

$$g_T = g_T^{Haften} + g_T^{Gleiten}. \quad (2.54)$$

Für die Beschreibung des Haftens dient das elastische konstitutive Gesetz

$$\tau^{(ij)} = \varepsilon_T g_T^{Haften} \quad (2.55)$$

unter der Annahme isotropen Verhaltens [80], worin ε_T eine elastische Konstante bezeichnet.

Zur Beschreibung des plastischen Gleitens $g_T^{Gleiten}$ ist eine konstitutive Evolutionsgleichung erforderlich. Diese Gleichung kann aus Standardkonzepten der Elastoplastizitätstheorie hergeleitet werden [80]. Im Falle Coulombscher Reibung müssen die Tangentialkräfte $\tau^{(ij)}$ nämlich immer kleiner oder gleich dem Produkt aus Reibbeiwert μ und Normalkraft sein:

$$\|\tau^{(ij)}\| \leq \mu\sigma^{(ij)}. \quad (2.56)$$

Die Gleitbedingung oder die sogenannte Schlupffunktion, die auf das Coulombsche Gesetz führt, wird in der Form

$$\Phi(\sigma^{(ij)}, \tau^{(ij)}) = \|\tau^{(ij)}\| - \mu\sigma^{(ij)} \leq 0 \quad (2.57)$$

gewählt. Fasst man dabei die Normalspannung $\sigma^{(ij)}$ als Konstante auf, erhält man aus dem Prinzip der maximalen plastischen Dissipation, siehe auch Anmerkung 3.6 und Gleichung (3.172) in [80], die endgültige konstitutive Evolutionsgleichung

$$\dot{g}_T^{Gleiten} = \dot{\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma^{(ij)}} = \dot{\gamma} \frac{\tau^{(ij)}}{\|\tau^{(ij)}\|} \quad (2.58)$$

für den Gleitvorgang. Mit Hilfe der Schlupffunktion in Gleichung (2.57), der Beziehung (2.58) und der zusätzlichen Schlupfrate $\dot{\gamma}$ lassen sich dann die folgenden Kuhn-Tucker-Bedingungen anschreiben:

$$\begin{aligned} \Phi(\sigma_n^{(ij)}, \tau^{(ij)}) &= \|\tau^{(ij)}\| - \mu\sigma^{(ij)} \leq 0, \\ \dot{g}_T^{Gleiten} - \dot{\gamma} \frac{\tau^{(ij)}}{\|\tau^{(ij)}\|} &= 0, \\ \dot{\gamma} &\geq 0, \\ \dot{\gamma}\Phi(\sigma^{(ij)}, \tau^{(ij)}) &= 0. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Die (ideale) Coulombsche Reibung wird durch die erste Bedingung widergespiegelt. Die mittleren beiden Bedingungen führen aus, dass alle Relativbewegungen in die gleichen Richtungen verlaufen wie die Reibkraft [32]. Die letzte Beziehung in Gleichung (2.59) sagt aus, dass die Tangentialbewegung durch Gleiten $\dot{\gamma} \geq 0$ nur genau dann auftreten kann, wenn $\|\tau^{(ij)}\| = \mu\sigma_n^{(ij)}$ erfüllt ist.

2.2.3 Kinetik

Als mechanisches Prinzip zur Herleitung der kinetischen Grundgleichungen wird das klassische Prinzip von Hamilton

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt + \int_{t_0}^{t_1} \delta W dt = 0 \quad (2.60)$$

mit der Lagrangefunktion $L = T - U$ an den Anfang gestellt, worin T die kinetische und U die potenzielle Energie des Systems bezeichnen. Daneben tritt die virtuelle Arbeit δW aller potentiallosen Kräfte auf. Wird an dieser Stelle angenommen, dass die virtuelle Arbeit nur an der Oberfläche der beteiligten Körper geleistet wird, dann kann sie aus der klassischen virtuellen Arbeit an den Spannungsändern und jener in der Kontaktzone zusammengesetzt werden:

$$\delta W = \delta W_{pl} + \delta W_C. \quad (2.61)$$

Hierbei bezeichnet δW_{pl} die virtuelle Arbeit der potentiallosen Kräfte und δW_C die virtuelle Arbeit der Kontaktkräfte. Gemäß Gleichung (2.60) ist dabei die virtuelle Arbeit der Kontaktrandspannungen

$$\delta W_C = \int_{\Gamma_C^{(ij)}} (\delta \vec{r}_i \cdot \vec{s}_{ij}) da + \int_{\Gamma_C^{(ji)}} (\delta \vec{r}_j \cdot \vec{s}_{ji}) da, \quad (2.62)$$

die mit Hilfe der Gleichungen (2.56), (2.61) bzw. (2.62) in der Form

$$\delta W_C = \int_{\Gamma_C^{(ij)}} (\delta \vec{r}_i - \delta \vec{r}_j) \cdot \vec{s}_{ij} da \quad (2.63)$$

zusammengefasst werden kann. Nach Einsetzen des Spannungsvektors \vec{s}_{ij} , siehe Gleichung (2.50), erhält man

$$\begin{aligned} \delta W_C &= \int_{\Gamma_C^{(ij)}} (\delta \vec{r}_i - \delta \vec{r}_j) \cdot (\sigma^{(ij)} \vec{e}_n^{(ij)} + \tau^{(ij)} \vec{e}_t^{(ij)}) da \\ &= \int_{\Gamma_C^{(ij)}} (\delta \vec{r}_i - \delta \vec{r}_j) \cdot \sigma^{(ij)} \vec{e}_n^{(ij)} da + \int_{\Gamma_C^{(ij)}} (\delta \vec{r}_i - \delta \vec{r}_j) \cdot \tau^{(ij)} \vec{e}_t^{(ij)} da \\ &= \delta W_{C,n}^{(ij)} + \delta W_{C,t}^{(ij)}, \end{aligned} \quad (2.64)$$

d.h. Beiträge $\delta W_{C,n}^{(ij)}$ und $\delta W_{C,t}^{(ij)}$, die von den Kontaktnormal- und Kontaktschubspannungen herrühren.

Das Prinzip von Hamilton (2.60) kann damit unter Berücksichtigung der Kuhn-Tucker-Bedingungen (2.53) bzw. (2.59) in

$$\delta \int_{t_0}^t L dt + \int_{t_0}^t \delta W_{pl} dt = - \int_{t_0}^{t_1} (\delta W_{C,n}^{(ij)} + \delta W_{C,t}^{(ij)}) dt \geq 0 \quad (2.65)$$

umgeschrieben werden, wenn das Lösen des Kontaktes zugelassen wird. Es ist also eine Variationsungleichung entstanden, die für eine numerische Behandlung im Rahmen von FE-Methoden nicht geeignet ist. Als Ausweg kann man zwei Ansätze benutzen, diese Ungleichung wieder in eine Gleichung zu überführen: die sog. Regularisierung und die sog. Active-Set-Strategie [78], die hier vorgestellt werden soll. Weil man dabei die in Kontakt stehenden Gebiete im Allgemeinen von vornherein nicht kennt, erfordert die Methode einen Suchalgorithmus, der das jeweils aktuelle Kontaktgebiet bestimmt. Punkte, die in einem Kontaktgebiet liegen, werden in einem sog. Active Set gesammelt. Man hat damit wieder eine Menge von aktiven Nebenbedingungen in Gleichungsform vorliegen, die man über die virtuelle Arbeit der tatsächlichen Kontaktzone in die resultierenden (diskretisierten) Bewegungsgleichungen einbauen kann. Konkret kann dies im Rahmen Lagrangescher Multiplikatoren, dem Penaltyverfahren oder auch der Augmented Lagrangeschen Formulierung geschehen.

Bei der **Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren** vereinbart man für die im Active Set gesammelten Knoten eine zusätzliche Unbekannte, den Lagrangemultiplikator λ . Der entsprechende Kontaktbeitrag der virtuellen Arbeit ist dann

$$\int_{\Gamma_C^{akt}} (\lambda_N \delta g_N + \vec{\lambda}_T \cdot \vec{\delta} g_T) dA. \quad (2.66)$$

Hierbei ist λ_N der zur kinematischen Zwangsbedingung $g_N = 0$ in Normalenrichtung gehörende Lagrangesche Multiplikator, der als Kontaktnormalspannung σ interpretiert werden kann und über $\lambda_N \delta g_N$ berücksichtigt wird. Die Lagrangeschen Multiplikatoren $\vec{\lambda}_T$ entsprechen den Schubspannungen $\vec{\tau}$; ihre Wirkung wird bei Haften durch $\vec{\lambda}_T \cdot \vec{\delta} g_T$ einbezogen. Im Gleitfall wird der Spannungsvektor in tangentialer Richtung $\vec{\tau}$ durch ein konstitutives Reibgesetz vorgegeben, so dass sie als eingeprägte Größe zu behandeln ist [78]. Die zugehörigen Kontaktbeiträge für diesen Fall sind dann

$$\int_{\Gamma_C^{akt}} (\lambda_N \delta g_N + \vec{\tau} \cdot \vec{\delta} g_T) dA. \quad (2.67)$$

Offensichtlich lässt sich so die Kontaktbedingung exakt erfüllen. Der Nachteil ist jedoch die Einführung der unbekanntenen Kraftgrößen λ_N bzw. $\vec{\lambda}_T$. Daher ist die numerische Umsetzung aufwändig.

Das **Penalty Verfahren** entspricht einer Regularisierung des Beitrages zur virtuellen Arbeit in der Kontaktzone. Man lässt eine Durchdringung zu, die Restriktion des Durchdringungsverbots entfällt. Man hat ebenfalls zwischen Haften und Gleiten zu unterscheiden. Die Zwangsbedingung für den Haftfall wird als Beitrag in der virtuellen Arbeit der Kontaktzone in der Form

$$\int_{\Gamma_C^{akt}} (\varepsilon_N g_N \delta g_N + \varepsilon_T \vec{g}_T \cdot \vec{\delta} g_T) dA, \quad \varepsilon_N > 0, \quad \varepsilon_T > 0 \quad (2.68)$$

festgelegt, d.h. es gilt für die beteiligten Spannungen

$$\sigma = \varepsilon_N g_N = \lambda_N \quad \text{bzw.} \quad \vec{\tau} = \varepsilon_T \vec{g}_T. \quad (2.69)$$

Im Gleitfall sind die Kontaktschubspannungen wieder als eingeprägte Spannungen zu behandeln, die nicht variiert werden. Damit wird die Zwangsbedingung für Gleiten durch einen Beitrag

$$\int_{\Gamma_C^{akt}} (\varepsilon_N g_N \delta g_N + \vec{\tau} \cdot \vec{\delta} g_T) dA, \quad \varepsilon_N > 0 \quad (2.70)$$

realisiert, wobei die Kontaktschubspannungen $\vec{\tau}$ wieder durch geeignete konstitutive Gleichungen bestimmt sind. Der Vorteil dieses Verfahrens liegt darin, dass keine zusätzlichen unbekanntenen Größen im maßgebenden Gleichungssystem auftreten. Damit ist die numerische Umsetzung ein rein verschiebungsbasiertes Verfahren.

Das **Augmented Lagrange Verfahren** ist eine Kombination aus den beiden vorherigen Methoden. Die Idee dieses Vorgehens ist im Wesentlichen eine Iteration zur Verbesserung einer Penaltylösung, bis die exakten Multiplikatoren erreicht sind [32]. Die zugehörigen Kontaktbeiträge für diesen Fall sind

$$\int_{\Gamma_C^{akt}} [(\bar{\lambda}_N + \varepsilon_N g_N^L) \delta g_N + \vec{\tau} \cdot \delta \vec{g}_T] dA. \quad (2.71)$$

Das Penaltyverfahren wird mit den gemäß

$$\bar{\lambda}_{neu} = \bar{\lambda}_{alt} + \varepsilon_N g_{neu} \quad (2.72)$$

vergrößerten Lagrangeschen Multiplikatoren immer wieder durchgeführt, bis die Änderung des Lagrangeschen Multiplikators bzw. der Durchdringung g genügt klein geworden ist.

2.3 Theoretische Grundlagen der Viskoelastizität

2.3.1 Eigenschaften viskoelastischer Körper

Viskoelastische Materialien zeichnen sich dadurch aus, dass die Verformungsantworten auf äußere Lasten zeitabhängig und reversibel sind. Dabei treten keine plastischen Verformungen auf. Die beiden kennzeichnenden Phänomene sind Kriechen und Spannungsrelaxation. Beim Kriechversuch studiert man den zeitlichen Verlauf der Dehnung als Funktion einer sprungförmig aufgebrachten Last σ_0 . Die auf die Last bezogene Dehnung wird durch die Kriechfunktion

$$J(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} \quad (2.73)$$

charakterisiert. Hierbei bezeichnen $J(0)$ und $J(\infty)$ die Anfangsnachgiebigkeit bzw. die

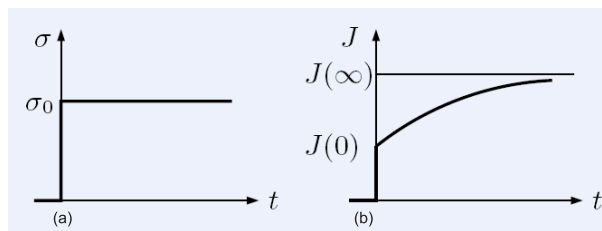


Abbildung 2.3: (a) Sprungförmig aufgebrachte Last σ_0 . (b) Zugehöriger zeitlicher Verlauf der Kriechfunktion $J(t)$ [40].

Gleichgewichtsnachgiebigkeit, vgl. Abbildung 2.3. Zur Untersuchung der Spannungsrelaxation bringt man zum Zeitpunkt $t = 0$ die Dehnung ϵ_0 auf und hält Sie konstant. Damit erhält man die Relaxationsfunktion

$$G(t) = \frac{\sigma(t)}{\epsilon_0} \quad (2.74)$$

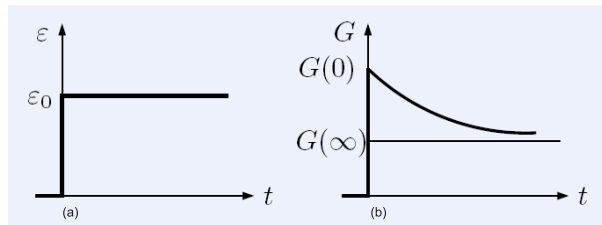


Abbildung 2.4: (a) Konstante Dehnung ϵ_0 . (b) Zugehöriger zeitlicher Verlauf der Relaxationsfunktion $G(t)$ [40].

zur Beschreibung des zeitlichen Spannungsverlaufs. In Abbildung 2.4 ist dieser Sachverhalt dargestellt. Dabei ist $G(0)$ der anfängliche Elastizitätsmodul, während $G(\infty)$ den Gleichgewichts- oder Langzeitelastizitätsmodul bezeichnet.

Viskoelastische Materialien weisen also eine Hysterese des Spannungs-Dehnungs-Verlaufs auf, wenn Sie belastet bzw. entlastet werden, siehe Abbildung 2.5. Beim Durch-

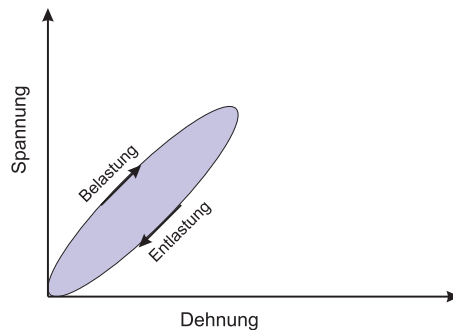


Abbildung 2.5: Hysterese des Spannungs-Dehnungs-Verlaufs viskoelastischer Stoffe

laufen der gesamten Hysteresekurve entspricht die Fläche zwischen Belastungs- und Entlastungskurve dem verloren gegangenen Betrag an Verformungsenergie durch Umwandlung innerer Reibung in Wärme. Wenn das Material zu Schwingungen angeregt wird, geht dann bei jedem Durchlaufen der Hysteresekurve ein solcher Energieteil verloren, die Schwingung verläuft also gedämpft [68].

2.3.2 Erweiterte Modelle durch Kombination der Grundmodelle

Durch Kombination der vorgestellten Hookeschen bzw. Newtonschen Körper (vgl.[40]) entstehen realistischere Modellkörper.

Der sog. **Maxwell-Körper** repräsentiert elasto-plastisches Verhalten und entsteht durch Reihenschaltung eines Hookeschen und eines Newtonschen Körpers, siehe Abbildung 2.5. Die Feder (Hookescher Körper) reagiert spontan elastisch auf eine Belastung, während der Dämpfer (Newtonscher Körper) verzögert-zeitabhängig reagiert, da sich seine Verformung bei Entlastung nicht selbstständig zurückbildet. Die Gesamtdehnung ϵ setzt sich hierbei linear aus der Dehnung des Hookeschen Körpers ϵ_H und der Dehnung des Newtonschen Körpers ϵ_N zusammen:

$$\epsilon = \epsilon_H + \epsilon_N \Rightarrow \dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_H + \dot{\epsilon}_N. \quad (2.75)$$

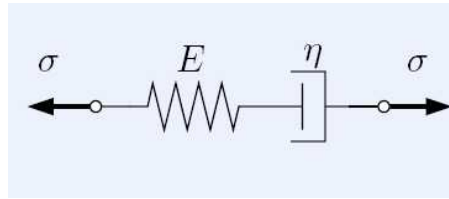


Abbildung 2.6: Maxwell-Körper [40]

Beide Teilkörper erfahren die gleiche Zugspannung

$$\sigma_H = E\varepsilon_H = \sigma, \quad \sigma_N = \eta\dot{\varepsilon}_N = \sigma. \quad (2.76)$$

Durch Zusammenfassen der Beziehungen (2.75) und (2.76) ergibt sich

$$\sigma + \bar{\tau}\dot{\sigma} = \eta\dot{\varepsilon} \quad (2.77)$$

in Form einer Differenzialgleichung zur Charakterisierung viskoelastischen Verhaltens eines Maxwell-Körpers. Hierbei bezeichnet der Quotient $\tau = \eta/E$ die sog. Relaxationszeit. Die Kriechfunktion und die Relaxationsfunktion des Körpers sind

$$J(t) = \frac{1}{E} + \frac{1}{\eta}t, \quad G(t) = Ee^{-t/\tau}. \quad (2.78)$$

Der **Kelvin-Voigt-Körper** mit seinem viskoelastischen Verhalten setzt sich aus der Parallelschaltung eines Hookeschen und eines Newtonschen Körpers zusammen, siehe Abbildung 2.6. Dann ist die Dehnung in jedem Teilkörper identisch und die Gesamt-

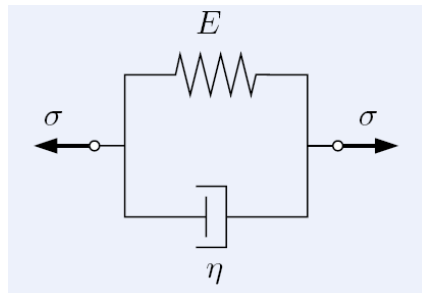


Abbildung 2.7: Kelvin-Voigt-Körper [40]

zugspannung lässt sich durch die Summe der von beiden Körpern aufgenommenen Zugspannungen errechnen:

$$\varepsilon = \varepsilon_H = \varepsilon_N \Rightarrow \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_H = \dot{\varepsilon}_N, \quad (2.79)$$

$$\sigma = \sigma_H + \sigma_N, \quad \sigma_H = E\varepsilon_H, \quad \sigma_N = \eta\dot{\varepsilon}_N. \quad (2.80)$$

Damit erhält man die Differenzialgleichung

$$\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon} = \varepsilon + \bar{\tau}\dot{\varepsilon} \quad (2.81)$$

des Voigt-Kelvin-Körpers. Der Quotient $\bar{\tau} = \eta/E$ wird Relaxationszeit genannt. Kriechfunktion und Relaxationsfunktion sind durch

$$J(t) = \frac{1}{E}(1 - e^{-t/\bar{\tau}}), \quad G(t) = E + \eta\delta(t) \quad (2.82)$$

gegeben, wenn $\delta(t)$ die Diracsche Deltafunktion bezeichnet.

Der **Burgers-Körper** zur Beschreibung viskoplastischen Verhaltens entsteht durch Reihenschaltung eines Maxwell- und eines Kelvin-Voigt-Körpers, siehe Abbildung 2.7. Zur Herleitung der beschreibenden Differentialgleichung dieses Modellkörpers geht man

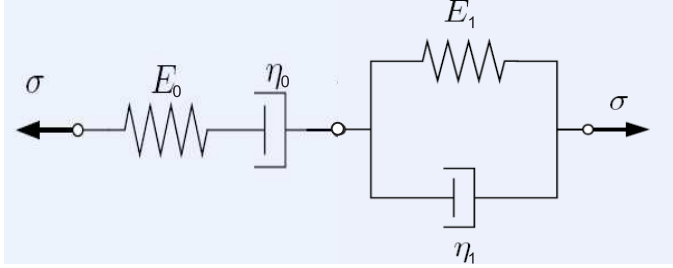


Abbildung 2.8: Burgers-Körper

von den Differentialgleichungen (2.87) und (2.91) des Maxwell- und des Kelvin-Körpers aus. Nach Laplace-Transformation erhält man

$$\left(1 + \frac{\eta_0}{E_0}\right)\hat{\sigma}(s) = \eta_0 s \hat{\epsilon}_{\max}(s), \quad (2.83)$$

$$\hat{\sigma}(s) = (E_1 + \eta_1 s) \hat{\epsilon}_{kelv}(s) \quad (2.84)$$

und nach Multiplikation mit η_0 bzw. $(E_1 + \eta_1 s)$ und Zusammenfassung im Bildbereich

$$\left(1 + \frac{\eta_0}{E_0}\right)(E_1 + \eta_1 s)\hat{\sigma}(s) + \eta_1 s \hat{\sigma}(s) = (E_1 + \eta_1 s) \eta_0 s \overbrace{(\hat{\epsilon}_{\max}(s) + \hat{\epsilon}_{kelv}(s))}^{\hat{\epsilon}(s)}. \quad (2.85)$$

Die Gesamtdehnung des Burgers-Körpers ist dabei $\hat{\epsilon}(s) = \hat{\epsilon}_{\max}(s) + \hat{\epsilon}_{kelv}(s)$. Nach Rücktransformation ergibt sich die resultierende Differentialgleichung

$$p_0 \sigma + p_1 \dot{\sigma} + p_2 \ddot{\sigma} = q_1 \dot{\epsilon} + q_2 \ddot{\epsilon} \quad (2.86)$$

zur Beschreibung viskoelastischen Materialverhaltens des Burgers-Körpers, wobei $p_0 = 1$, $p_1 = \left(\frac{\eta_0}{E_0} + \frac{\eta_1}{E_0} + \frac{\eta_1}{E_1}\right)$, $p_2 = \left(\frac{\eta_0 \eta_1}{E_0 E_1}\right)$, $q_1 = \eta_0$ und $q_2 = \left(\frac{\eta_0 \eta_1}{E_1}\right)$ sind. Kriechfunktion und Relaxationsfunktion lauten

$$J(t) = \frac{1}{q_1} t + \left(\frac{p_1 q_1 - q_2}{q_1^2}\right) (1 - e^{-t/\tau}) + \left(\frac{p_2}{q_1}\right) e^{-t/\tau}, \quad \tau = q_2/q_1, \quad (2.87)$$

$$G(t) = \frac{1}{\sqrt{(p_1^2 - 4p_2)}} [(q_1 - \alpha q_2) e^{-\alpha t} - (q_1 - \beta q_2) e^{-\beta t}]. \quad (2.88)$$

Die auftretenden Konstanten α und β sind durch $\left. \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2p_2} [p_1 \mp \sqrt{(p_1^2 - 4p_2)}]$ erklärt.

Verallgemeinerte Kelvin-Voigt- bzw. Maxwell-Körper entstehen durch Reihenschaltung eines Hookschen Körpers, eines Newtonschen Körpers und n Kelvin-Voigt-Körpern, während die Parallelschaltung eines Hookschen Körpers, eines Newtonschen Körpers und n Maxwell-Körpern einen verallgemeinerten Maxwell-Körper liefert. Das allgemeine Stoffgesetz, das die zeitabhängigen Spannungen und Dehnungen verknüpft, ist durch

$$\sum_{j=0}^N p_j \frac{\partial^j \sigma}{\partial t^j} = \sum_{k=0}^M q_k \frac{\partial^k \varepsilon}{\partial t^k} \quad (2.89)$$

gegeben, wobei p_j und q_k konstante Koeffizienten bezeichnen. Durch Überlagerung der Dehnungen lässt sich die Kriechfunktion

$$J(t) = \frac{1}{E_0} + \frac{1}{\eta_0} t + \sum_{j=0}^N \frac{1}{E_j} (1 - e^{-t/\tau_j}), \quad \tau_j = \frac{\eta_j}{E_j} \quad (2.90)$$

eines verallgemeinerten Kelvin-Voigt-Körper ermitteln, während die Relaxationsfunktion eines verallgemeinerten Maxwell-Körpers durch

$$G(t) = E_0 + \eta_0 \delta(t) + \sum_{j=0}^N E_j e^{-t/\tau_j}, \quad \tau_j = \frac{\eta_j}{E_j} \quad (2.91)$$

gegeben ist, siehe [28].

2.3.3 Materialgesetz in integraler Formulierung

Auf der Basis des Boltzmannschen Superpositionsprinzips lässt sich neben der vorgestellten differenziellen auch eine integrale Schreibweise der konstitutiven Gleichungen der verschiedenen Modellkörper angeben. Das Prinzip besagt, dass sich die zeitabhängigen Wirkungen aufeinander folgender Veränderungen des Beanspruchungszustandes linear zur Gesamtwirkung zusammensetzen [27], d.h. die Belastungen und ihre Wirkungen können ohne Wechselwirkungsterme überlagert werden [49].

Der kontinuierliche Spannungverlauf $\sigma(t)$ wird dabei durch die Summe der sprunghaften Spannungsänderungen $\Delta\sigma_j$ an der Stelle τ_j angenähert:

$$\sigma(t) \approx \sum_j^N \Delta\sigma_j H(t - \tau_j). \quad (2.92)$$

$H(t - \tau)$ ist darin die sog. Heaviside-Funktion. Damit liefert diese Superposition sämtlicher Spannungsprünge eine entsprechende Dehnung

$$\varepsilon(t) \approx \sum_j^N \Delta\sigma_j J(t - \tau_j). \quad (2.93)$$

Durch Übergang zu differenziell kleinen Spannungsänderungen resultiert daraus die Boltzmannsche Superposition

$$\varepsilon(t) = \int_0^t J(t - \tau) \frac{d\sigma}{d\tau} d\tau \quad (2.94)$$

in Integralform. Umgekehrt ergibt sich bei vorgegebener Dehnung und bekannter Relaxationsfunktion $G(t)$ die Spannung

$$\sigma(t) = \int_0^t G(t - \tau) \frac{d\epsilon}{d\tau} d\tau \quad (2.95)$$

in entsprechender Weise. Nach partieller Integration der Gleichung (2.104) erhält man unter Berücksichtigung eines Spannungssprungs $\sigma(0) = \sigma_0$ zum Zeitpunkt $t = 0$ das Materialgesetz bei bekannter Kriechfunktion $J(t)$ in integraler Form

$$\epsilon(t) = \sigma(0)J(t) + \int_0^t J(t - \tau) \frac{d\sigma}{d\tau} d\tau, \quad (2.96)$$

$$\epsilon(t) = \sigma(t)J(0) + \int_0^t \sigma(t - s) \frac{dJ}{ds} ds. \quad (2.97)$$

Bei bekannter Relaxationsfunktion $G(t)$ kann auf ähnliche Weise unter Berücksichtigung eines Dehnungssprungs $\epsilon(0) = \epsilon_0$ zum Zeitpunkt $t = 0$ der Spannungsverlauf in integraler Form

$$\sigma(t) = \epsilon(0)G(t) + \int_0^t G(t - \tau) \frac{d\epsilon}{d\tau} d\tau, \quad (2.98)$$

$$\sigma(t) = \epsilon(t)G(0) + \int_0^t \epsilon(t - s) \frac{dG}{ds} ds \quad (2.99)$$

bestimmt werden.

3 Modellbildung

3.1 Physikalisches Modell eines hybriden Ultraschall-Schwingungsmotors

Das physikalische Modell für einen hybriden piezoelektrischen Ultraschall-Schwingungsmotor mit zwei Statoren und dazwischen angeordnetem Rotor ist in Abbildung 3.1 dargestellt. Der Motor unterscheidet sich von einem gewöhnlichen hybriden Ultraschall-Schwingungsmotor, der aus einem Stator und einem Rotor besteht, deutlich. Die Mo-

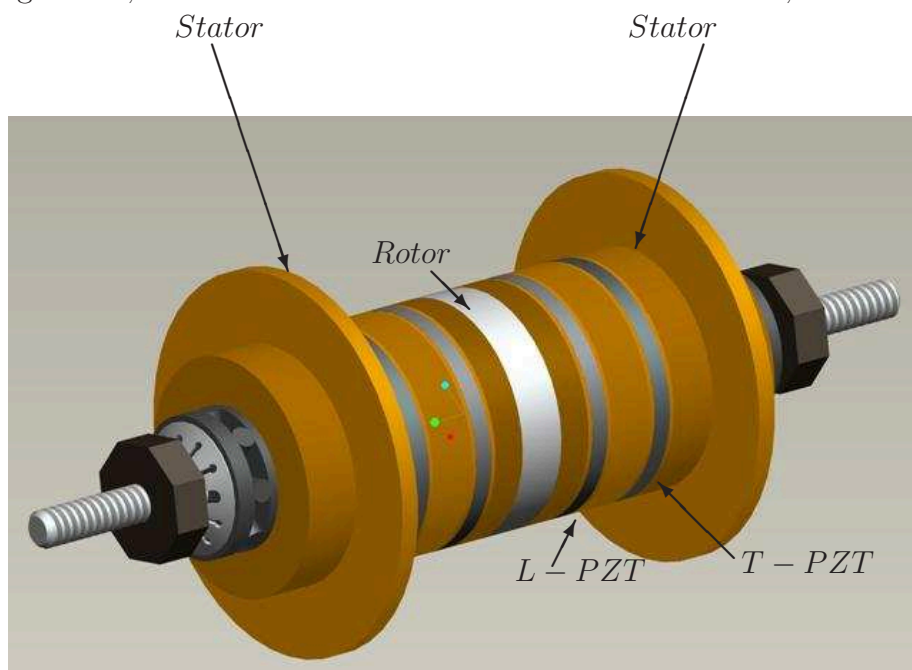


Abbildung 3.1: Aufbau des hybriden piezoelektrischen Schwingungsmotors

torstruktur ist symmetrisch mit außen liegenden Statoren und dem Rotor in der Mitte. Um den Rotor durch Reibwirkung zwischen den Statoren und dem Rotor in Drehung zu versetzen, benötigt der Motor jeweils zwei in die Statoren integrierte piezokeramische Aktoren. Die beiden Keramiken eines Stators sind unterschiedlich polarisiert, nämlich zum Einen in Umfangs- und zum Zweiten in Längsrichtung, die entsprechend als T(tangential)-PZT und L(longitudinal)-PZT bezeichnet werden. Durch eine Synchronisierung der damit unabhängig erzeugten Längs- und Torsionsschwingungen entsteht eine elliptische Trajektorie der materiellen Punkte der beiden schwingenden Statorkontaktflächen, wenn die Phasenverschiebung der beiden Schwingungen 90° beträgt. Optimale Verhältnisse ergeben sich, wenn eine monofrequente elektrische Spannung beide Schwingungstypen beispielsweise als Grundschwingungsmoden gleichzeitig in Resonanz anzuregen vermag.

3.2 Beschreibendes mathematisches Statormodell

Jeder der beiden Statoren besteht aus einem Verbund von zylindrischen gelochten Scheiben (Innenradius r_1 , Außenradius r_2), die durch eine Feder axial vorgespannt sind, siehe Abbildung 3.2. Auf die Vorspannfeder folgt eine elastische Scheibe, auf die

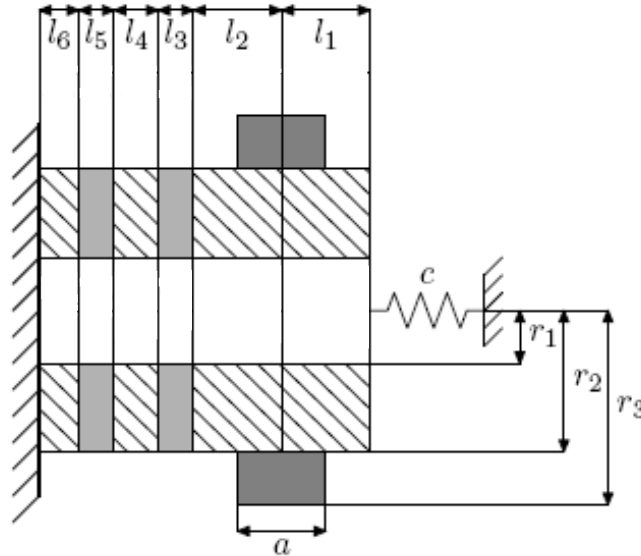


Abbildung 3.2: Geometrie eines Stators [13]

ein Ring lokal konzentriert, spielfrei und unverschiebbar aufgesetzt ist. Die Scheibe der Dicke $l_1 + l_2$ ist homogen, wird aber zur Erfassung der Ausgleichsringdynamik in zwei Bereiche 1 (Dicke l_1) und 2 (Dicke l_2) aufgeteilt, wobei an der Übergangsstelle von 1 nach 2 der starr angenommene Ausgleichsring (Masse m , Außenradius r_3 , Dicke a) angebracht ist. Es folgen die T-PZT 3 (Dicke l_3), eine weitere elastische Schicht 4 (Dicke l_4), die L-PZT 5 (Dicke l_5) und eine abschließende elastische Scheibe 6 (Dicke l_6), deren Stirnseite (eventuell mit einer weiteren Reibschicht) den Kontakt zum Rotor (schraffiert) herstellt. Die Piezokeramiken werden transversal isotrop vorausgesetzt und dass sie im Kleinsignalbereich betrieben werden, so dass eine lineare Beschreibung des Materialverhaltens adäquat ist. Sämtliche Scheiben sind perfekt ohne relative Bewegungsmöglichkeiten miteinander verklebt. Zur Herleitung der Bewegungsgleichungen wird eine 1-dimensionale Stabtheorie zugrunde gelegt, wobei gegebenenfalls auch auf die Querträchtigkeit eingegangen wird.

3.2.1 Modellierung der Längsschwingungen

Die Längsschwingungen u_5 , die in der L-PZT durch eine entsprechende elektrische Spannung angeregt werden, veranlassen den gesamten Verbund zu entsprechend gekoppelten Längsschwingungen u_i , $i = 1, \dots, 6$, siehe Abbildung 3.3. Die oszillierenden Kontaktnormalkraftanteile werden von diesen Längsschwingungen hervorgerufen und überlagern sich der statischen Vorspannung infolge Feder. Die ausführliche Herleitung der maßgebenden Bewegungsgleichung der Scheibe L-PZT samt möglicher Randbedingungen wird an den Anfang gestellt; dann wird zusammenfassend das gekoppelte

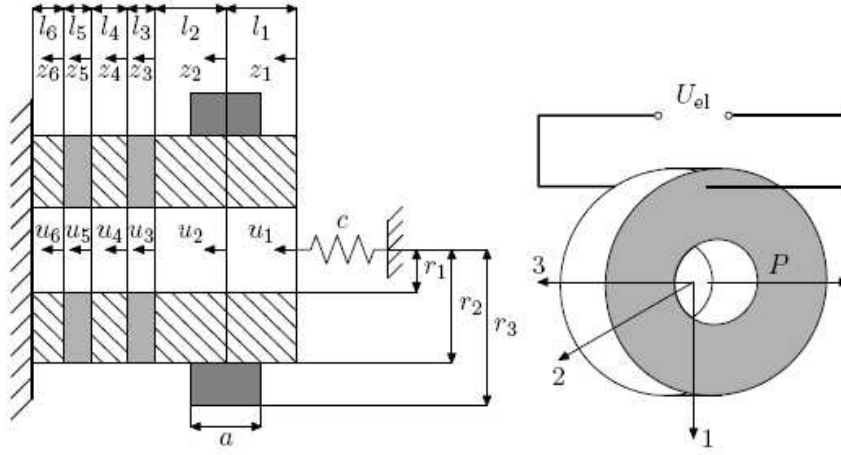


Abbildung 3.3: Physikalisches Modell zur Untersuchung von Längsschwingungen [13]

Randwertproblem für die Längsschwingungen des gesamten Statorverbundes mit konkreten Rand- und Übergangsbedingungen formuliert. Abschließend wird gezeigt, wie das zugehörige Eigenwertproblem zu formulieren ist und wie Zwangsschwingungen unter harmonischer elektrischer Erregung analysiert werden.

3.2.1.1 Bewegungsgleichungen der L-PZT

Die piezoelektrische Scheibe L-PZT ist in Abbildung 3.3 rechts isoliert dargestellt. Zunächst ist ein Bezugssystem zu wählen. Hier wird es derartig festgelegt, dass die z -Achse in Polarisationsrichtung (3-Achse) zeigt. Die Scheibe ist spannungsfrei sowohl in ($x = 1$)- als auch in ($y = 2$)-Richtung. Die axiale Verformung in z -Richtung wird durch $u(z, t)$ gekennzeichnet, d.h. der Index 5 wird hier zur Vereinfachung noch weggelassen. Die beschreibenden linearen konstitutiven Gleichungen sind bereits in Abschnitt 2.1.3 unter Berücksichtigung der Tatsache, dass die 3-Richtung mit der Polarisationsrichtung übereinstimmt, als Gleichungssatz (2.31)–(2.39) angegeben worden.

In der vorliegenden Arbeit wird wie bereits vermerkt angenommen, dass das Modell auf der Basis eines einachsigen Spannungszustandes beschrieben werden kann. Neben den Normalspannungen in Querrichtung werden also auch sämtliche Schubspannungen und mit ihnen auch die Gleitungen vernachlässigt. Normalspannung wirkt nur in axialer ($z = 3$)-Richtung. Auch bezüglich des elektrischen Feldes wird eine analoge Vereinfachung derart vorgenommen, dass ihre Anteile in transversaler Richtung als vernachlässigbar angesehen werden. Man erhält damit ein vereinfachtes Gleichungssystem

$$T_1 = c_{11}^E S_1 + c_{12}^E S_2 + c_{13}^E S_3 - e_{31} E_3, \quad (3.1)$$

$$T_2 = c_{12}^E S_1 + c_{11}^E S_2 + c_{13}^E S_3 - e_{31} E_3, \quad (3.2)$$

$$T_3 = c_{13}^E S_1 + c_{13}^E S_2 + c_{33}^E S_3 - e_{33} E_3, \quad (3.3)$$

$$D_3 = e_{31}(S_1 + S_2) + e_{33} S_3 + \varepsilon_{33}^S E_3 \quad (3.4)$$

mit verschwindenden Normalspannungen und auch elektrischen Verschiebungen in x - und y -Richtung

$$T_1 = T_2 = 0, \quad D_1 = D_2 = 0. \quad (3.5)$$

Daraus folgt für die Dehnungen in transversaler Richtung

$$S_1 = S_2 = \frac{(e_{31}E_3 - c_{13}^E S_3)}{(c_{11}^E + c_{12}^E)}, \quad (3.6)$$

womit sich die Spannung T_3 und die elektrische Verschiebung D_3 in axialer z -Richtung zu

$$T_3 = (c_{33}^E - \frac{2(c_{13}^E)^2}{c_{11}^E + c_{12}^E})S_3 - (e_{33} - \frac{2(c_{13}^E e_{31})}{c_{11}^E + c_{12}^E})E_3, \quad (3.7)$$

$$D_3 = (e_{33} - \frac{2(c_{13}^E e_{31})}{c_{11}^E + c_{12}^E})S_3 + (\varepsilon_{33}^S + \frac{2(e_{31})^2}{c_{11}^E + c_{12}^E})E_3. \quad (3.8)$$

ergeben. Um die Gleichungen (3.7) und (3.8) vereinfacht schreiben zu können, werden die Vorfaktoren auf der rechten Seite der Gleichungen (3.7) und (3.8) als neue Konstanten eingeführt. Damit ergibt sich eine verkürzte Schreibweise

$$T_3 = \bar{c}_{33}S_3 - \bar{e}_{33}E_3, \quad D_3 = \bar{e}_{33}S_3 + \bar{\varepsilon}_{33}E_3. \quad (3.9)$$

Zur Herleitung der Bewegungsgleichungen für die L-PZT mittels des Prinzips von Hamilton sind die verschiedenen Energie- und Arbeitsausdrücke anzugeben. Die kinetische Energie ist einfach durch

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho u_{,t}^2 dV = \frac{\rho A}{2} \int_0^l u_{,t}^2 dz \quad (3.10)$$

gegeben, worin ρ die Materialdichte, A die konstante Querschnittsfläche und $u_{,t} = \frac{\partial u}{\partial t}$ die zur Längsverschiebung $u(z, t)$ gehörende Geschwindigkeit ist. Die Dichte der elektrischen Enthalpie, die allgemein durch Gleichung (2.25) bestimmt ist, vereinfacht sich unter Verwendung der Voigtschen Notation hier auf

$$H = \frac{1}{2}c_{11}^E(S_1^2 + S_2^2) + \frac{1}{2}c_{33}^E S_3^2 + c_{12}^E S_1 S_2 + c_{13}^E(S_1 + S_2)S_3 - e_{31}(S_1 + S_2)E_3 - e_{33}E_3 S_3 - \frac{1}{2}\bar{\varepsilon}_{33}^S E_3^2 \quad (3.11)$$

und kann mit dem Zusammenhang (3.6) und den eingeführten neuen Konstanten in die Kurzform

$$H = \frac{1}{2}\bar{c}_{33}S_3^2 - \bar{e}_{33}E_3 S_3 - \frac{1}{2}\bar{\varepsilon}_{33}E_3^2 \quad (3.12)$$

gebracht werden. Die allgemeine Form der virtuellen Arbeit δW ergibt sich analog Gleichung (2.19) zu

$$\delta W = \int_A (\bar{t}_3 \delta u - \bar{\sigma} \delta \phi) dA = A(\bar{t}_3 \delta u - \bar{\sigma} \delta \phi) \Big|_0^l. \quad (3.13)$$

Die Beziehungen (3.10), (3.35) und (3.13) werden in das Prinzip von Hamilton (2.18) eingesetzt. Unter Berücksichtigung, dass spannungsfreie Ränder vorliegen sollen ($t_3 =$

0), ergibt sich mit dem Dehnungs-Verschiebungs-Zusammenhang $S_3 = \frac{\partial u}{\partial z} = u_{,z}$ nach Variation das Zwischenergebnis

$$A \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_0^l [\rho u_{,t} \delta u_{,t} + (-\bar{c}_{33} S_3 + \bar{e}_{33} E_3) \delta S_3 + (\bar{e}_{33} S_3 + \bar{\epsilon}_{33} E_3) \delta E_3] dz - \bar{\sigma}_A \delta \phi|_0^l \right\} dt = 0. \quad (3.14)$$

Um endgültig die Feldgleichung(en) und die Randbedingungen zu erhalten, wird hier einer Variante von Gausmann [24] gefolgt, die elektrische Variable E_3 bzw. ϕ durch Ausnutzen von konstitutiven Gleichungen weitgehend zu eliminieren, so dass sich keine gekoppelten elektromechanischen Feldgleichungen ergeben, sondern nur noch eine kompliziertere mechanische Feldgleichung in der entsprechenden Verschiebungsordinate u . Unter der bereits getroffenen Annahme, dass die elektrische Verschiebungsdichte nur in Polarisationsrichtung existiert, wird das elektrische Feld und die Ortsableitung nach der Koordinate z aus Gleichung (3.9)₂ (wegen $D_{3,z} \equiv 0$) zu

$$E_3 = -\frac{\bar{e}_{33}}{\bar{\epsilon}_{33}} S_3 + \frac{1}{\bar{\epsilon}_{33}} D_3 \Rightarrow E_{3,z} = -\frac{\bar{e}_{33}}{\bar{\epsilon}_{33}} S_{3,z} \quad (3.15)$$

berechnet. Weil ja auch

$$E_3 = -\text{grad } \phi \quad (3.16)$$

gilt, kann das elektrische Potenzial mit ortsunabhängiger elektrischer Verschiebung in der Form

$$\phi(l) - \phi(0) = - \int_0^l E_3 dz = - \int_0^l \left(-\frac{\bar{e}_{33}}{\bar{\epsilon}_{33}} S_3 + \frac{1}{\bar{\epsilon}_{33}} D_3 \right) dz = \frac{\bar{e}_{33}}{\bar{\epsilon}_{33}} [u(l) - u(0)] - \frac{l}{\bar{\epsilon}_{33}} D_3 \quad (3.17)$$

berechnet werden. Man erhält somit eine Bestimmungsgleichung für die elektrische Verschiebungsdichte

$$D_3 = \frac{\bar{e}_{33}}{l} [u(l) - u(0)] - \frac{\bar{\epsilon}_{33}}{l} [\phi(l) - \phi(0)]. \quad (3.18)$$

Einsetzen in Gleichung (3.15) liefert das elektrische Feld

$$E_3 = -\frac{\bar{e}_{33}}{\bar{\epsilon}_{33}} S_3 + \frac{\bar{e}_{33}}{\bar{\epsilon}_{33} l} [u(l) - u(0)] - \frac{1}{l} [\phi(l) - \phi(0)] \quad (3.19)$$

in Abhängigkeit der elektrischen Potenzialdifferenz. Im Variationsprinzip (3.14) wird noch die Variation des elektrischen Feldes E_3 benötigt:

$$\delta E_3 = -\frac{\bar{e}_{33}}{\bar{\epsilon}_{33}} \delta S_3 + \frac{\bar{e}_{33}}{\bar{\epsilon}_{33} l} [\delta u(l) - \delta u(0)] - \frac{1}{l} [\delta \phi(l) - \delta \phi(0)]. \quad (3.20)$$

Einsetzen aller erhaltenen Zwischenergebnisse, Ordnen und Zusammenfassen sowie schließlich passende Produktintegration (unter Berücksichtigung von $D_{3,z} \equiv 0$) führt auf

$$A \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_0^l \left(\rho u_{,tt} - \left(\bar{c}_{33} + \frac{\bar{e}_{33}^2}{\bar{\epsilon}_{33}} \right) u_{,zz} \right) \delta u dx + \left[\left(\bar{c}_{33} + \frac{\bar{e}_{33}^2}{\bar{\epsilon}_{33}} \right) u_{,z} \delta u \right]_0^l - \frac{\bar{e}_{33}}{\bar{\epsilon}_{33}} D_3 [\delta u(l) - \delta u(0)] + (D_3 + \bar{\sigma}) \delta \phi|_0^l \right\} dt = 0. \quad (3.21)$$

Nach dem Fundamentallema der Variationsrechnung erhält man daraus die Feldgleichung und die Randbedingungen. Im einzelnen ergibt sich zunächst einmal die partielle Differenzialgleichung

$$\rho u_{,tt} - \left(\bar{c}_{33} + \frac{\bar{e}_{33}^2}{\bar{\epsilon}_{33}} \right) u_{,zz} = 0 \quad (3.22)$$

als maßgebende Feldgleichung in der Verschiebungsordinate u . Weiterhin erhält man die dynamischen mechanischen Randbedingungen

$$\left(\bar{c}_{33} + \frac{\bar{e}_{33}^2}{\bar{\epsilon}_{33}} \right) u_{,z} - \frac{\bar{e}_{33}}{\bar{\epsilon}_{33}} D_3 = 0 \quad \text{für } z = 0, l \quad (3.23)$$

und einen Ausdruck

$$(D_3 + \bar{\sigma}) \delta \phi|_0^l = 0, \quad (3.24)$$

der die möglichen elektrischen Randbedingungen repräsentiert. Für den Fall, dass ein elektrisches Potenzial $\phi(z, t)$ an der piezoelektrischen Scheibe vorgegeben wird, verschwindet $\delta \phi$, und das elektrische Feld kann mittels Gleichung (3.15) berechnet werden. Falls kein elektrisches Potenzial vorgegeben wird, ergibt sich

$$D_3 = \bar{\sigma}. \quad (3.25)$$

Damit bestimmt sich das elektrische Feld entweder aus $D_3 = 0$ bei offenen Elektroden,

$$E_3(z, t) = -\frac{\bar{e}_{33}}{\bar{\epsilon}_{33}} u_{,z}(z, t), \quad (3.26)$$

oder aus $\phi = 0$ bei kurzgeschlossenen Elektroden:

$$E_3(z, t) = -\frac{\bar{e}_{33}}{\bar{\epsilon}_{33}} u_{,z}(z, t) + \frac{\bar{e}_{33}}{\bar{\epsilon}_{33} l} [u(l) - u(0)]. \quad (3.27)$$

Mechanische Zwangsschwingungen $u(z, t)$ werden bei elektrischer Anregung durch die dann ebenfalls nicht verschwindende elektrische Verschiebung $D_3(t)$ in den dynamischen Spannungsrandbedingungen (3.23) verursacht.

3.2.1.2 Gekoppeltes Randwertproblem zur Beschreibung eines kompletten Stators

Vorab wird kurz auf den Ausgleichsring und die Längsschwingungen der piezoelektrischen Scheibe T-PZT eingegangen.

Der Ausgleichsring wird in der vorliegenden Arbeit zur Vereinfachung starr angenommen und soll lokal an der Übergangsstelle der elastischen Bereiche 1 und 2 angebracht sein. Seine kinetische Energie ist

$$T_{ar} = \frac{1}{2} m u_{1,t}^2, \quad (3.28)$$

wenn m die Gesamtmasse des Ausgleichsringes bezeichnet. Um später seine Masse zu variieren, kann der Ring mit unterschiedlichen Abmessungen ausgeführt werden. Die Masse kann mit den früher schon bezeichneten Abmessungen durch

$$m = \rho V = \rho \pi (r_3^2 - r_2^2) d \quad (3.29)$$

berechnet werden, worin ρ seine Dichte bezeichnet und 'd' seine Dicke entspricht.

Zur Beschreibung der Längsschwingungen der T-PZT wird zweckmäßig eine Umbenennung der Bezugsachsen derart vorgenommen, dass die tangentielle φ -Richtung, die jetzt die Polarisationsrichtung kennzeichnet, zur 3-Achse und die z -Achse zur 1-Achse wird. Die radiale Transversalrichtung r bleibt dann 2-Achse. Zur Herleitung der Gleichungen für die Längsschwingungen ist der Einfluss der Normalspannung T_1 in Längsrichtung der T-PZT maßgebend,

$$T_1 = c_{11}^E S_1 + c_{12}^E S_2 + c_{13}^E S_3, \quad (3.30)$$

wobei hier angenommen wird, dass neben den transversalen auch der axiale elektrische Feldanteil E_1 und die zugehörige elektrische Verschiebung D_1 vernachlässigbar klein sind. Unter Beachtung, dass erneut keine Normalspannungen in transversaler Richtung vorliegen, $T_2 = T_3 = 0$, werden die zugehörigen Dehnungen in transversaler Richtung

$$S_2 = \frac{c_{12}^E c_{33}^E - (c_{13}^E)^2}{(c_{13}^E)^2 - c_{11}^E c_{33}^E} S_1, \quad S_3 = \frac{c_{11}^E c_{13}^E - (c_{12}^E c_{13}^E)}{(c_{13}^E)^2 - c_{11}^E c_{33}^E} S_1. \quad (3.31)$$

Diese Beziehungen werden in Gleichung (3.30) eingesetzt, woraus sich

$$T_1 = \left[\frac{(c_{12}^E)^2 c_{13}^E - (c_{11}^E)^2 c_{33}^E + 2c_{11}^E (c_{13}^E)^2 - 2c_{12}^E (c_{13}^E)^2}{(c_{13}^E)^2 - (c_{11}^E c_{13}^E)} \right] S_1 \quad (3.32)$$

oder kürzer

$$T_1 = Y S_1 \quad (3.33)$$

mit Y als Elastizitätsmodul der Torsionskeramik T-PZT (in axialer Richtung) ergibt. Bei Längsschwingungen wird also die Torsionskeramik wie ein elastischer Körper mit Elastizitätsmodul modelliert.

Jetzt kann zum mathematischen Gesamtmodell eines Stators, siehe nochmals Abbildung 3.3, übergegangen werden. Für eine Auswertung des Prinzips von Hamilton sind jetzt sämtliche Energie- und Arbeitsanteile bereitzustellen. Die kinetische Gesamtenergie T als Summe aller kinetischen Teilenergien der einzelnen Bereiche l_i , $i = 1, \dots, 6$ und des Ausgleichsringes lautet

$$T = \sum_{i=1}^6 \frac{1}{2} A \rho_i \int_0^{l_i} u_{i,t}^2 dz_i + \frac{1}{2} m u_{1,t}^2(l_1). \quad (3.34)$$

Die elektrische Gesamtenthalpie H ist die Summe der Enthalpie der Piezokeramik L-PZT und der potenziellen Energien der übrigen Bereiche:

$$H = A \int_0^{l_5} \left(\frac{1}{2} \bar{c}_{335} S_{35}^2 - \bar{e}_{335} E_{35} S_{35} - \frac{1}{2} \bar{\epsilon}_{335} E_{35}^2 \right) dz_5 + \sum_{i=1,2,3,4,6} A \int_0^{l_i} \frac{1}{2} Y_i u_{5,z}^2 dz_i. \quad (3.35)$$

Darin sind in den elastischen Bereichen 1,2,4 und 6 die Y_i die klassischen Elastizitätsmoduli, während für die Torsionskeramik 3

$$Y_3 = \left[\frac{(c_{12}^E)^2 c_{13}^E - (c_{11}^E) c_{33}^E + 2c_{11}^E (c_{13}^E)^2 - 2c_{12}^E (c_{13}^E)^2}{(c_{13}^E)^2 - (c_{11}^E) c_{33}^E} \right] \quad (3.36)$$

zu nehmen ist.

Bezüglich der Längsschwingungen wird die Stirnseite des Stators zum Rotor als unverschiebbar eingespannt angesehen, während das andere Ende durch die dort angebrachte Feder mit der Federkonstanten c , die bereits um ein Maß u_0 vorgespannt ist, beeinflusst wird. Folglich tritt ein weiterer Beitrag

$$H_F = \frac{c}{2} (u_0 + u_1(0))^2 \quad (3.37)$$

zur Gesamtenthalpie H gemäß Gleichung (3.35) hinzu. Da, wie bereits vermerkt, die Längsschwingungen aktiv nur durch Anlegen einer elektrischen Spannung an die Oberflächen der Keramik L-PZT der Länge l_5 angeregt werden, sind nur an diesen Übergangsstellen elektrische Randbedingungen zu erwarten und zwar derart, dass dort das elektrische Potenzial ϕ vorgegeben wird. Ein entsprechender Anteil in der virtuellen Arbeit δW tritt demnach im Rahmen der hier vorgeschlagenen Modellierung – wegen der Vernachlässigung dissipativer Effekte – nicht auf.

Damit sind alle Beiträge zur Auswertung des Prinzips von Hamilton zur Beschreibung der gekoppelten Statorlängsschwingungen formuliert. Im weiteren Verlauf werden Zeitableitungen durch hochgestellte Punkte und Ortsableitungen durch hochgestellte Striche bezeichnet. Nach Ausführen der verlangten Variationen und entsprechender Produktintegrationen erhält man dann unter der Voraussetzung, dass sämtliche elastische Bereiche aus gleichem Material mit $\rho_1 = \rho_2 = \rho_4 = \rho_6 = \rho_m$ und $Y_1 = Y_2 = Y_4 = Y_6 = Y_m$ gefertigt werden, den Ausdruck

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_0^{l_1} (\rho_1 \ddot{u}_1 - Y_1 u_1'') \delta u_1 dz_1 + [Y_1 u_1' \delta u_1]_0^{l_1} + \frac{1}{A} m \ddot{u}_1(l_1) \delta u_1(l_1) \right. \\ & + c [u_0 + u_1(0)] \delta u_1(0) \left. \right\} dt + \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_0^{l_2} (\rho_2 \ddot{u}_2 - Y_2 u_2'') \delta u_2 dz_2 + [Y_2 u_2' \delta u_2]_0^{l_2} \right\} dt \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_0^{l_3} (\rho_3 \ddot{u}_3 - Y_3 u_3'') \delta u_3 dz_3 + [Y_3 u_3' \delta u_3]_0^{l_3} \right\} dt \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_0^{l_4} (\rho_4 \ddot{u}_4 - Y_4 u_4'') \delta u_4 dz_4 + [Y_4 u_4' \delta u_4]_0^{l_4} \right\} dt \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_0^{l_5} [\rho_5 \ddot{u}_5 - (\bar{c}_{335} + \frac{\bar{c}_{335}^2}{\bar{\epsilon}_{335}}) u_5''] \delta u_5 dz_5 + [(\bar{c}_{335} + \frac{\bar{c}_{335}^2}{\bar{\epsilon}_{335}}) u_5' \delta u_5]_0^{l_5} \right. \\ & \left. - \frac{\bar{\epsilon}_{335}}{\bar{\epsilon}_{335}} D_{35} [\delta u_5(l_5) - \delta u_5(0)] \right\} dt + \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_0^{l_6} (\rho_6 \ddot{u}_6 - Y_6 u_6'') \delta u_6 dz_6 + [Y_6 u_6' \delta u_6]_0^{l_6} \right\} dt = 0, \end{aligned} \quad (3.38)$$

aus dem die gekoppelten Feldgleichungen mit Rand- und Übergangsbedingungen folgen. Gemäß Gleichung (3.18) wird im Bereich 5 die auftretende elektrische Verschiebungs-

dichte in 3-Richtung durch

$$D_{3_5} = \frac{\bar{e}_{33_5}}{l_5} [u(z_5 = l_5) - u(z_5 = 0)] - \frac{\bar{\varepsilon}_{33_5}}{l_5} [\phi(z_5 = l_5) - \phi(z_5 = 0)] \quad (3.39)$$

beschrieben.

Im einzelnen erhält man sechs **Feldgleichungen**

$$\begin{aligned} \rho_i \ddot{u}_i - Y_i u_i'' &= 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 6, \\ \rho_5 \ddot{u}_5 - \left(\bar{c}_{33_5} + \frac{\bar{e}_{33_5}^2}{\bar{\varepsilon}_{33_5}} \right) u_5'' &= 0 \end{aligned} \quad (3.40)$$

mit den **mechanischen Randbedingungen**

$$Y_1 u_1'(0) = c[u_0 + u_1(0)] \quad (3.41)$$

bei $z_1 = 0$ (dynamisch) und

$$u_6(l_6, t) = 0 \quad (3.42)$$

bei $z_6 = l_6$ (geometrisch), den **mechanischen Übergangsbedingungen**

$$u_i(z_i = l_i) = u_{i+1}(z_{i+1} = 0), \quad i = 1, \dots, 5 \quad (3.43)$$

(geometrisch) und

$$\begin{aligned} Y_1 u_1'(z_1 = l_1) - Y_2 u_2'(z_2 = 0) + \frac{1}{A} m \ddot{u}_1(z_1 = l_1) &= 0, \\ Y_2 u_2'(z_2 = l_2) - Y_3 u_3'(z_3 = 0) &= 0, \\ Y_3 u_3'(z_3 = l_3) - Y_4 u_4'(z_4 = 0) &= 0, \\ Y_4 u_4'(z_4 = l_4) - \left(\bar{c}_{33_5} + \frac{\bar{e}_{33_5}^2}{\bar{\varepsilon}_{33_5}} \right) u_5'(z_5 = 0) + \frac{\bar{e}_{33_5}}{\bar{\varepsilon}_{33_5}} D_{3_5} &= 0, \\ \left(\bar{c}_{33_5} + \frac{\bar{e}_{33_5}^2}{\bar{\varepsilon}_{33_5}} \right) u_5'(z_5 = l_5) - \frac{\bar{e}_{33_5}}{\bar{\varepsilon}_{33_5}} D_{3_5} - Y_6 u_6'(z_6 = 0) &= 0 \end{aligned} \quad (3.44)$$

(dynamisch) sowie schließlich den **elektrische Randbedingungen**, hier in Form einer Vorgabe für das elektrische Potenzial

$$\phi(0) = -\frac{1}{2}U(t), \quad \phi(l_5) = +\frac{1}{2}U(t) \quad (3.45)$$

bei $z_5 = 0$ und $z_5 = l_5$.

Wieder werden bei elektrischer Anregung der aktiven Piezokeramik L-PZT durch die dann nicht verschwindende elektrische Verschiebung $D_{3_5}(t)$ in den dynamischen Übergangsbedingungen (3.44) mechanische Koppelschwingungen $u_1(z, t)$ bis $u_6(z, t)$ hervorgerufen.

3.2.1.3 Systemgleichungen

Für eine zeitharmonische Anregung $U(t) = U_0 e^{j\Omega t}$ mit gegebener Kreisfrequenz Ω wird ein Separationsansatz

$$u_i(z, t) = U_i(z) e^{j\Omega t} \quad (3.46)$$

$$D_{3_5}(t) = D_0 e^{j\Omega t} \quad (3.47)$$

mit $D_0 = \frac{\bar{\epsilon}_{33_5}}{l_5} [U_5(l_5) - U_5(0)] - \frac{\bar{\epsilon}_{33_5}}{l_5} U_0$ in die Gleichungen (3.39)–(3.44) eingeführt. Daraus ergibt sich das zeitfreie Problem

$$\begin{aligned} \rho_i \Omega^2 U_i + Y_i U_i'' &= 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 6, \\ \rho_5 \Omega^2 U_5 + \left(\bar{c}_{33_5} + \frac{\bar{e}_{33_5}^2}{\bar{\epsilon}_{33_5}} \right) U_5'' &= 0 \end{aligned} \quad (3.48)$$

mit

$$Y_m U_1'(0) = c[u_0 + U_1(0)] \quad (3.49)$$

bei $z_1 = 0$,

$$U_6(l_6) = 0 \quad (3.50)$$

bei $z_6 = l_6$ und

$$U_i(z_i = l_i) = U_{i+1}(z_{i+1} = 0), \quad i = 1 \dots 5 \quad (3.51)$$

sowie

$$\begin{aligned} Y_1 U_1'(z_1 = l_1) - Y_2 U_2'(z_2 = 0) - \frac{1}{A} m \Omega^2 U_1(z_1 = l_1) &= 0, \\ Y_2 U_2'(z_2 = l_2) - Y_3 U_3'(z_3 = 0) &= 0, \\ Y_3 U_3'(z_3 = l_3) - Y_4 U_4'(z_4 = 0) &= 0, \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} Y_4 U_4'(z_4 = l_4) - \left(\bar{c}_{33_5} + \frac{\bar{e}_{33_5}^2}{\bar{\epsilon}_{33_5}} \right) U_5'(z_5 = 0) - \frac{\bar{e}_{33_5}}{\bar{\epsilon}_{33_5}} D_0 &= 0, \\ \left(\bar{c}_{33_5} + \frac{\bar{e}_{33_5}^2}{\bar{\epsilon}_{33_5}} \right) U_5'(z_5 = l_5) - \frac{\bar{e}_{33_5}}{\bar{\epsilon}_{33_5}} D_0 - Y_6 U_6'(z_6 = 0) &= 0, \end{aligned} \quad (3.53)$$

wenn an dieser Stelle auf eine statische Vorspannung verzichtet wird. Zur Vereinfachung können alle zeitfreien Bewegungsgleichungen in übereinstimmender Form

$$U_i'' + \kappa_i^2 U_i = 0, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (3.54)$$

mit entsprechenden Abkürzungen für κ_i^2 geschrieben werden. Die allgemeine Lösung der Feldgleichungen (3.54) ist dann

$$U_i(z_i) = C_{1i} \sin(\kappa_i z_i) + C_{2i} \cos(\kappa_i z_i), \quad i = 1 \dots 6, \quad (3.55)$$

wobei C_{1i} und C_{2i} entsprechende Integrationskonstanten sind, die durch Anpassen an die zeitfreien Rand- und Übergangsbedingungen (3.49)–(3.53) bestimmt werden können:

$$\mathbf{Bc} = \mathbf{r}. \quad (3.56)$$

\mathbf{B} ist darin die Koeffizientenmatrix des Systems, $\mathbf{c} = (C_{11}, C_{12}, \dots, C_{16}, C_{21}, C_{22}, \dots, C_{26})^T$ die Spaltenmatrix der gesuchten Integrationskonstanten. Die Spaltenmatrix der Erregung enthält beispielsweise über D_0 die vorgegebene Amplitude U_0 der Erregerspannung.

Zur Berechnung einer nichttrivialen Lösung der freien Schwingungen ist das homogene Problem

$$\mathbf{B}\mathbf{c} = \mathbf{0}, \quad (3.57)$$

zu untersuchen, wobei anstatt der vorgegebenen Erregerkreisfrequenz Ω die gesuchte Eigenkreisfrequenz ω auftritt. Die Bedingung

$$\det(\mathbf{B}(\omega)) = 0 \quad (3.58)$$

ist dann die sog. charakteristische Gleichung zur Berechnung der Eigenkreisfrequenzen (der Eigenwerte) der Statorlängsschwingungen.

3.2.2 Modellierung der Torsionsschwingungen

Auf analoge Weise wie im Fall der Längsschwingungen können auch gekoppelte Torsionsschwingungen $\psi_i(z, t)$ eines Statorverbundes behandelt werden, wenn die tangential polarisierte Scheibe T-PZT 3 zu entsprechenden Schwingungen $\psi_3(z, t)$ angeregt wird, siehe Abbildung 3.4. Wieder wird eine ausführliche Herleitung der maßgebenden

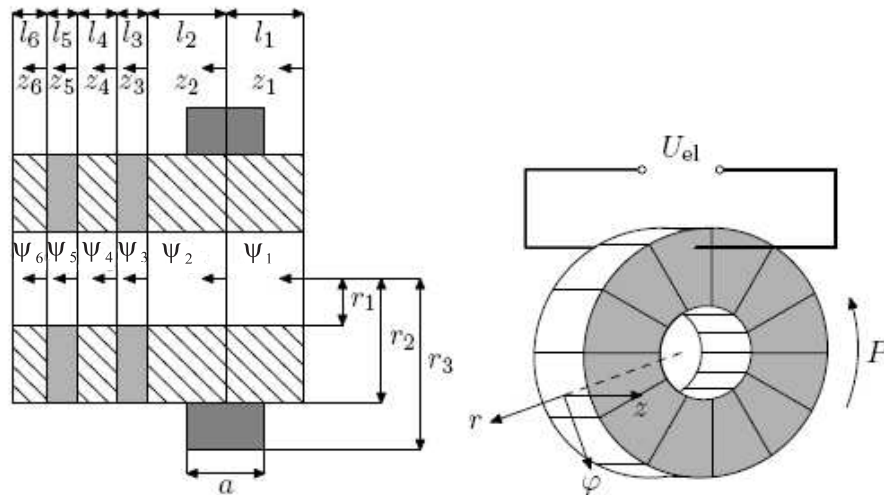


Abbildung 3.4: Physikalisches Modell zur Modellierung der Torsionsschwingung [13]

den Bewegungsgleichung der Scheibe T-PZT samt möglicher Randbedingungen an den Anfang gestellt; dann wird zusammenfassend das gekoppelte Randwertproblem für die Torsionsschwingungen des gesamten Statorverbundes mit konkreten Rand- und Übergangsbedingungen formuliert. Einige Bemerkungen zur konkreten Berechnung freier und erzwungener Schwingungen runden das Thema ab.

3.2.2.1 Bewegungsgleichungen der T-PZT

Die geänderte Bezugsachsenwahl $z = 1$, $r = 2$ und $\varphi = 3$ ist bereits angesprochen worden. Bei Torsionsschwingungen können sämtliche Normalspannungen vernachlässigt werden,

$$T_1 = T_2 = T_3 = 0, \quad (3.59)$$

und von den Schubspannungen und zugehörigen Gleitungen sind bei Torsionsschwingungen einer rotationssymmetrischen Struktur allein die nichtverschwindende Schubspannung T_5 und die korrespondierende Gleitung S_5 relevant. Von den elektrischen Variablen werden als wesentliche Größen allein die axialen Größen E_1 und D_1 angesehen, die restlichen werden vernachlässigt. Die verbleibenden konstitutiven Gleichungen sind dann

$$T_5^P = c_{55}^E S_5 - e_{15} E_1, \quad (3.60)$$

$$D_1 = e_{15} S_5 + \varepsilon_{11}^S E_1. \quad (3.61)$$

Die vereinfachte Schreibweise, Zeit- und Ortableitungen mit hoch gestellten Punkten und Strichen zu bezeichnen, wird bereits an dieser Stelle übernommen.

Die kinetische Energie der Torsionkeramik ist dann

$$T_{PT} = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{s}^2 dV, \quad s = r\psi \Rightarrow T = \frac{1}{2} \int_V \rho (r\dot{\psi})^2 dV, \quad (3.62)$$

die Dichte der elektrischen Enthalpie

$$H = \frac{1}{2} c_{55}^E S_5^2 - e_{15} E_1 S_5 - \frac{1}{2} \varepsilon_{11}^S E_1^2 \quad (3.63)$$

und die virtuelle Arbeit

$$\delta W = - \int_A \bar{\sigma} \delta \phi dA. \quad (3.64)$$

Die Gleichungen (3.62)–(3.64) werden in das Prinzip von Hamilton eingesetzt. Mit der Beziehung $S_5 = r\psi'$ ergibt sich

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \int_V \left[\frac{1}{2} \rho (r\dot{\psi})^2 - \left(\frac{1}{2} c_{55}^E (r\psi')^2 - e_{15} E_1 (r\psi') - \frac{1}{2} \varepsilon_{11}^S E_1^2 \right) \right] dV dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_A (-\bar{\sigma} \delta \phi) dA dt = 0, \quad (3.65)$$

und die Variation führt auf

$$\begin{aligned} & A \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left[(\rho \dot{\psi}) r^2 \delta \dot{\psi} - (c_{55}^E \psi' r^2 \delta \psi' - (e_{15} E_1 r \delta \psi' + e_{15} \psi' r \delta E_1) - \varepsilon_{11}^S E_1 \delta E_1) \right] dz dt \\ & + A \int_{t_0}^{t_1} (-\bar{\sigma}_A \delta \phi) dt = 0. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Hierbei bezeichnet A die Querschnittsfläche der betrachtenden Piezokeramik.

Unter der bereits besprochenen Annahme vernachlässigbarer elektrischer Verschiebungen $D_2 = D_3 = 0$ lässt sich das elektrische Feld und seine Ortsableitung (wegen $D_{1,z} \equiv 0$) nach der Koordinate z aus Gleichung (3.61) zu

$$E_1 = -\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}^S} r \psi' + \frac{1}{\varepsilon_{11}^S} D_1 \Rightarrow E_{1,z} = -\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}^S} r \psi'' \quad (3.67)$$

berechnen. Der bekannte Zusammenhang zwischen dem elektrischen Feld E_1 und dem elektrischen Potenzial ϕ liefert dann

$$\phi(l) - \phi(0) = -\int_0^l E_1 dz = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}^S} r [\psi(l) - \psi(0)] - \frac{l}{\varepsilon_{11}^S} D_1 \quad (3.68)$$

mit ortsunabhängiger elektrischer Verschiebung oder umgekehrt

$$D_1 = \frac{e_{15}}{l} r [\psi(l) - \psi(0)] - \frac{\varepsilon_{11}^S}{l} [\phi(l) - \phi(0)]. \quad (3.69)$$

Das elektrische Feld in Abhängigkeit der Potenzialdifferenz erhält man nach Einsetzen von Gleichung (3.69) in Gleichung (3.67):

$$E_1 = -\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}^S} r \psi' + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}^S l} r [\psi(l) - \psi(0)] - \frac{1}{l} [\phi(l) - \phi(0)]. \quad (3.70)$$

Auch hier wird die Variation von E_1 benötigt:

$$\delta E_1 = -\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}^S} r \delta \psi' + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}^S l} r [\delta \psi(l) - \delta \psi(0)] - \frac{1}{l} [\delta \phi(l) - \delta \phi(0)]. \quad (3.71)$$

Werden sämtliche erhaltenen Ausdrücke in Gleichung (3.66) eingesetzt, lässt sich diese nach Integration über die Querschnittsfläche, Ordnen, Zusammenfassen und Ausführen der entsprechenden Produktintegrationen unter Einführung des polaren Flächenmoments 2. Grades $I_p = \int_A r^2 dA = \int_{r_1}^{r_2} r^2 \pi d(r^2) = \frac{\pi}{2} [r^4]_{r_1}^{r_2} = \frac{\pi}{2} (r_2^4 - r_1^4)$ in die Form

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_0^l (-\rho \ddot{\psi} + (c_{55}^E + \frac{e_{15}^2}{\varepsilon_{11}^S}) \psi'') I_p \delta \psi dz - \left[(c_{55}^E + \frac{e_{15}^2}{\varepsilon_{11}^S}) \psi' I_p \delta \psi \right]_0^l + \frac{\pi}{3} (r_2^3 - r_1^3) \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}^S} D_1 [\delta \psi(l) - \delta \psi(0)] - A (D_1 + \bar{\sigma}) \delta \phi|_0^l \right\} dt = 0 \quad (3.72)$$

bringen, die der Formulierung (3.21) zur Herleitung des Randwertproblems der Längsschwingungen der L-PZT völlig entspricht. Auf analoge Weise wie dort erhält man für die Torsionsschwingungen der einzelnen piezoelektrischen Scheibe T-PZT die Feldgleichung

$$\rho \ddot{\psi} - (c_{55}^E + \frac{e_{15}^2}{\varepsilon_{11}^S}) \psi'' = 0 \quad (3.73)$$

als eigentliche Bewegungsdifferentialgleichung mit entsprechenden Randbedingungen

$$I_p (c_{55}^E + \frac{e_{15}^2}{\varepsilon_{11}^S}) \psi'(0, t) - \frac{2\pi}{3} (r_2^3 - r_1^3) \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}^S} D_1 = 0 \text{ für } z = 0, l \quad (3.74)$$

bei angenommener Spannungsfreiheit. Außerdem tritt noch ein Randterm auf, der die elektrischen Randbedingungen in gleicher Weise repräsentiert wie bei Längsschwingungen. Bei vorgegebener elektrischer Anregung tritt auch hier eine entsprechende elektrische Verschiebung $D_1(t)$ auf, so dass wieder mechanische Zwangsschwingungen die Folge sind.

3.2.2.2 Gekoppeltes Randwertproblem zur Beschreibung eines kompletten Stators

Die Herleitung der Bewegungsgleichungen der gekoppelten Torsionsschwingungen erfolgt völlig analog zu jener der Längsschwingungen. Es ist zu beachten, dass der Ausgleichsring jetzt mit seinem axialen Massenträgheitsmoment

$$J = \int_m r^2 dm = \int_{r_2}^{r_3} \rho \pi r^2 a dr^2 = \frac{\pi}{2} \rho a (r_3^4 - r_2^4) \quad (3.75)$$

zur kinetischen Energie beiträgt und die axial polarisierte Keramik L-PZT bei Torsionsschwingungen wieder wie ein rein elastischer Körper modelliert wird, dessen Schubmodul G_5 wegen $T_{43} = c_{44} S_{43}$ einfach mit c_{44} zu identifizieren ist.

Damit können die Energie- und Arbeitsanteile für den Stator, siehe nochmals Abbildung 3.4, zur Auswertung des Prinzips von Hamilton zusammengestellt werden. Die gesamte kinetische Energie ist

$$T = \sum_{i=1}^6 \frac{1}{2} \int_0^{l_i} \rho_i I_p \dot{\psi}_i^2 dz_i + \frac{1}{2} J \dot{\psi}_1^2(l_1), \quad (3.76)$$

während für die elektrische Gesamtenthalpie

$$H = \int_0^{l_3} \int_A \left(\frac{1}{2} c_{553} (r\psi'_3)^2 - e_{15_i} E_{1_i} (r\psi'_i) - \frac{1}{2} \varepsilon_{11_i} E_{13}^2 \right) dA dz_3 + \sum_{i=1,2,4,5,6} A \int_0^{l_i} \frac{1}{2} G_i I_p \psi'^2 dz_i \quad (3.77)$$

zu nehmen ist.

Weil bezüglich der Torsionsschwingungen die bei Längsschwingungen genannte Feder nicht wirksam ist und ähnlich wie dort die Erregung durch Anlegen einer elektrischen Spannung an den Oberflächen der Keramik T-PZT der Länge l_3 so bewerkstelligt wird, dass dort das elektrische Potenzial vorgegeben wird, gibt es bei Vernachlässigung dissipativer Effekte keine Beiträge zur virtuellen Arbeit. Nach Ausführen der im Prinzip von Hamilton verlangten Variationen und entsprechender Produktintegrationen erhält

man mit den früheren Festlegungen zu Dichte und Material den Ausdruck

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_0^{l_1} (-\rho_1 \ddot{\psi}_1 + G_1 I_p \psi_1'') \delta \psi_1 dz_1 - J \ddot{\psi}_1(l_1) \delta \psi_1(l_1) - [G_1 I_p \psi_1' \delta \psi_1]_0^{l_1} \right\} dt \\
 & + \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_0^{l_2} (-\rho_2 \ddot{\psi}_2 + G_2 I_p \psi_2'') \delta \psi_2 dz_2 - [G_2 I_p \psi_2' \delta \psi_2]_0^{l_2} \right\} dt \\
 & + \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_0^{l_3} (-\rho_3 \ddot{\psi}_3 + (c_{55}^E + \frac{e_{15}^2}{\varepsilon_{11}^S}) \psi_3'') I_p \delta \psi_3 dz_3 - \left[(c_{55}^E + \frac{e_{15}^2}{\varepsilon_{11}^S}) \psi_3' I_p \delta \psi_3 \right]_0^{l_3} \right. \\
 & \left. + \frac{\pi}{3} \frac{e_{15}}{l_3} (r_2^3 - r_1^3) \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}^S} D_1 [\delta \psi(l_3) - \delta \psi(0)] \right\} dt \tag{3.78} \\
 & + \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_0^{l_4} (-\rho_4 \ddot{\psi}_4 + G_4 I_p \psi_4'') \delta \psi_4 dz_4 - [G_4 I_p \psi_4' \delta \psi_4]_0^{l_4} \right\} dt \\
 & + \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_0^{l_5} (-\rho_5 \ddot{\psi}_5 + G_5 I_p \psi_5'') \delta \psi_5 dz_5 - [G_5 I_p \psi_5' \delta \psi_5]_0^{l_5} \right\} dt \\
 & + \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_0^{l_6} (-\rho_6 \ddot{\psi}_6 + G_6 I_p \psi_6'') \delta \psi_6 dz_6 - [G_6 I_p \psi_6' \delta \psi_6]_0^{l_6} \right\} dt = 0,
 \end{aligned}$$

aus dem die Feldgleichungen und Randbedingungen folgen. Gemäß Gleichung (3.69) wird im Bereich 3 die auftretende elektrische Verschiebungsdichte in 1-Richtung durch

$$D_{13} = \frac{e_{15}}{l_3} r [\psi(z_3 = l_3) - \psi(z_3 = 0)] - \frac{\varepsilon_{11}^S}{l_3} [\phi(z_3 = l_3) - \phi(z_3 = 0)] \tag{3.79}$$

beschrieben. Im einzelnen ergeben sich sechs **Feldgleichungen**

$$\begin{aligned}
 \rho_i \ddot{\psi}_i - G_i \psi_i'' &= 0, \quad i = 1, 2, 4, 5, 6, \\
 \rho_3 \ddot{\psi}_3 - (c_{55}^E + \frac{e_{15}^2}{\varepsilon_{11}^S}) \psi_3'' &= 0,
 \end{aligned} \tag{3.80}$$

mit den **mechanischen Randbedingungen**

$$\psi_1'(0) = 0 \tag{3.81}$$

bei $z_1 = 0$ (dynamisch) und

$$\psi_6'(l_6) = 0 \tag{3.82}$$

bei $z_6 = l_6$ (ebenfalls dynamisch), den **mechanischen Übergangsbedingungen**

$$\psi_i(z_i = l_i) = \psi_{i+1}(z_{i+1} = 0), \quad i = 1, \dots, 5 \tag{3.83}$$

(geometrisch) und

$$\begin{aligned}
 G_1 I_p \psi_1'(z_1 = l_1) - G_2 I_p \psi_2'(z_2 = 0) + J \ddot{\psi}_1(z_1 = l_1) &= 0, \\
 G_2 I_p \psi_2'(z_2 = l_2) - (c_{55}^E + \frac{e_{15}^2}{\varepsilon_{11}^S}) I_p \psi_3'(z_3 = 0) + \frac{\pi}{3} (r_2^3 - r_1^3) \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}^S} D_{13} &= 0, \\
 (c_{55}^E + \frac{e_{15}^2}{\varepsilon_{11}^S}) I_p \psi_3'(z_3 = l_3) - \frac{2\pi}{3} (r_2^3 - r_1^3) \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}^S} D_{13} - G_4 I_p \psi_4'(z_4 = 0) &= 0, \\
 G_4 \psi_4'(z_4 = l_4) - G_5 \psi_5'(z_5 = 0) &= 0, \\
 G_5 \psi_5'(z_5 = l_5) - G_6 \psi_6'(z_6 = 0) &= 0
 \end{aligned} \tag{3.84}$$

(dynamisch) sowie schließlich den **elektrischen Randbedingungen**, wieder in Form einer Vorgabe für das elektrische Potenzial

$$\phi(0) = -\frac{1}{2}U(t), \quad \phi(l_3) = +\frac{1}{2}U(t) \quad (3.85)$$

bei $z_3 = 0$ und $z_3 = l_3$. Erzwungene Schwingungen $\psi_1(z, t)$ bis $\psi_6(z, t)$ sind bei elektrischer Anregung wieder die Folge einer entsprechend zeitabhängigen elektrischen Verschiebung $D_{1_3}(t)$ in den dynamischen Übergangsbedingungen (3.84).

3.2.2.3 Systemgleichungen

Die Rechnung verläuft völlig analog zu jener aus Abschnitt 3.2.1.3. Für eine zeitharmonische Anregung $U(t) = U_0 e^{j\Omega t}$ mit gegebener Kreisfrequenz Ω wird ein Separationsansatz

$$\psi_i(z, t) = \Psi_i(z) e^{j\Omega t}, \quad (3.86)$$

$$D_{1_3}(z, t) = D_0 e^{j\Omega t} \quad (3.87)$$

mit $D_0 = \frac{\epsilon_{15}^S}{l_3} r [\Psi(l_3) - \Psi(0)] - \frac{\epsilon_{11}^S}{l_3} U_0$ in die Gleichungen (3.80)-(3.84) eingesetzt. Das resultierende zeitfreie Problem lautet

$$\begin{aligned} \rho_i \Omega^2 \Psi_i + G_i \Psi_i'' &= 0, \quad i = 1, 2, 4, 5, 6, \\ \rho_3 \Omega^2 \Psi_3 + \left(c_{55}^E + \frac{e_{15}^2}{\epsilon_{11}^S} \right) \Psi_3'' &= 0, \end{aligned} \quad (3.88)$$

mit

$$\Psi_1'(0) = 0 \quad (3.89)$$

bei $z_1 = 0$ und

$$\Psi_6'(l_6) = 0 \quad (3.90)$$

bei $z_6 = l_6$ sowie

$$\Psi_i(z_i = l_i) = \Psi_{i+1}(z_{i+1} = 0), \quad i = 1, \dots, 5 \quad (3.91)$$

(geometrisch) und

$$\begin{aligned} G_1 I_p \Psi_1'(z_1 = l_1) - G_2 I_p \Psi_2'(z_2 = 0) - J \Omega^2 \Psi_1(z_1 = l_1) &= 0, \\ G_2 I_p \Psi_2'(z_2 = l_2) - \left(c_{55}^E + \frac{e_{15}^2}{\epsilon_{11}^S} \right) I_p \Psi_3'(z_3 = 0) + \frac{\pi}{3} (r_2^3 - r_1^3) \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}^S} D_0 &= 0, \\ \left(c_{55}^E + \frac{e_{15}^2}{\epsilon_{11}^S} \right) I_p \Psi_3'(z_3 = l_3) - \frac{2\pi}{3} (r_2^3 - r_1^3) \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}^S} D_0 - G_4 I_p \Psi_4'(z_4 = 0) &= 0, \\ G_4 \Psi_4'(z_4 = l_4) - G_5 \Psi_5'(z_5 = 0) &= 0, \\ G_5 \Psi_5'(z_5 = l_5) - G_6 \Psi_6'(z_6 = 0) &= 0. \end{aligned} \quad (3.92)$$

Die restliche Rechnung aus Abschnitt 3.2.1.3 zur Bestimmung der Zwangsschwingungsamplituden und der Eigenkreisfrequenzen bleibt ungeändert, wenn dort überall die Wegamplitude U_i hier durch die Winkelamplitude Ψ_i ersetzt wird.

3.3 Finite-Elemente-Analyse piezoelektrischer Strukturen

In den bisherigen Abschnitten des vorliegenden Kapitels wurde die Formulierung der Längs- und Torsionsschwingungen auf der Basis einer 1-dimensionalen Theorie vorgestellt. Die konkrete Berechnung wurde mit dem Programmsystem Mathematica geleistet. Damit kann eine erste grobe Berechnung der Geometrie der Statoren derart durchgeführt werden, dass eine Übereinstimmung der Grundfrequenzen der Längs- und der Torsionsschwingungen erreicht wird. Für eine genauere Rechnung wird zusätzlich eine Finite-Elemente-Analyse mittels ANSYS verwendet. Im folgenden Abschnitt werden die Grundlagen der Finite-Elemente-Methode zur Modellierung piezoelektrischer Strukturen kurz vorgestellt. Danach wird gezeigt, wie eine Modalanalyse und eine Analyse harmonischer Zwangsschwingungen abläuft.

3.3.1 Theorie zur FE-Methode piezoelektrischer Materialien

Die FE-Methode stellt heute ein Standardverfahren für die dynamische Berechnung auch von piezoelektrischen Strukturen dar und damit auch zur Untersuchung von Statoren piezoelektrischer Ultraschallmotoren. FE-Methoden eröffnen die Möglichkeit, äußerst komplizierte Modelle dynamisch sehr detailliert zu untersuchen. Dadurch ergibt sich die Möglichkeit zur Verbesserung der Modellbildung, die man vorher bei einer idealisierten Berechnung verwendet hat.

Die Anwendung von FE-Methoden auf piezoelektrische Strukturen ist besonders für die Berechnung der Eigenfrequenzen, der Eigenformen und harmonischer Analyse, z.B. im Sinne einer Admittanzermittlung geeignet.

3.3.1.1 Piezoelektrische Formulierung

Ausgangspunkt sind die linearen piezoelektrischen konstitutiven Gleichungen aus Abschnitt 2.1.3 in matrizieller Formulierung

$$\begin{aligned} \{T\} &= [c^E]\{S\} - [e]^T\{E\}, \\ \{D\} &= [e]\{S\} + [\varepsilon^S]\{E\}, \end{aligned} \quad (3.93)$$

wobei $\{T\}$ den Spannungsvektor, $\{S\}$ den Verzerrungsvektor, $\{E\}$ den Vektor der elektrischen Feldstärke und $\{D\}$ den Vektor der elektrischen Verschiebung bezeichnen. Die Größen $[c^E]$ bezeichnen die Matrix der Elastizitätsmoduli, $[\varepsilon^S]$ und $[e]$ sind die Permittivitätskonstanten bei konstanter Verzerrung $\{S\}$ und entsprechende piezoelektrische Kopplungskoeffizienten, siehe [57].

Die benötigte kinetische Energie wird dabei in der Form

$$T = \int_V \frac{1}{2} \rho \{\dot{u}\}^T \{\dot{u}\} dV \quad (3.94)$$

dargestellt. Für die Dichte der elektrischen Enthalpie wird

$$H = \int_V \frac{1}{2} [\{S\}^T \{T\} - \{E\}^T \{D\}] dV \quad (3.95)$$

benutzt. Damit erhält man die Lagrange-Funktion

$$L = \int_V \left[\frac{1}{2} \rho \{\dot{u}\}^T \{\dot{u}\} - \frac{1}{2} [\{S\}^T \{T\} - \{E\}^T \{D\}] \right] dV. \quad (3.96)$$

Analog wird die virtuelle Arbeit

$$\delta W = \int_V \{\delta u\}^T \{F_V\} dV + \int_{\Omega_1} \{\delta u\}^T \{F_\Omega\} d\Omega + \{\delta u\}^T \{F_P\} - \int_{\Omega_2} \delta \phi \sigma d\Omega - \delta \phi Q \quad (3.97)$$

formuliert, worin δu die Variation des Verschiebungsfelds darstellt, $\{F_V\}$ den Vektor einer äußeren Volumenkraft, $\{F_\Omega\}$ eventuelle Oberflächenkräfte und $\{F_P\}$ lokal konzentrierte Punktlasten repräsentieren. σ ist die elektrische Ladungsdichte auf der zugehörigen Oberfläche Ω_2 und Q eine konzentrierte elektrische Ladung [57].

Nach Einsetzen der Gleichungen (3.97) und (3.96) in das Prinzip von Hamilton ist zu variieren und durch Produktintegration umzuformen. Diese Prozedur liefert eine Form

$$\begin{aligned} & \int_V [\rho \{\delta u\}^T \{\ddot{u}\} - \{\delta S\}^T [c^E] \{S\} + \{\delta S\}^T [e]^T \{E\} + \{\delta E\}^T [e] \{S\} + \{\delta E\}^T [\varepsilon]^S \{E\} \\ & + \{\delta u\}^T \{F_V\}] dV + \int_{\Omega_1} \{\delta u\}^T \{F_\Omega\} d\Omega + \{\delta u\}^T \{F_P\} - \int_{\Omega_2} \delta \phi \sigma d\Omega - \delta \phi Q = 0 \end{aligned} \quad (3.98)$$

des Variationsprinzips, die zur Anwendung von FE-Methoden geeignet ist.

3.3.1.2 FE-Formulierung

Verschiebungsfeld $\{u\}$ und elektrisches Potenzial ϕ können mit Hilfe der Ansatzfunktionen $[N_u], [N_\phi]$ und der Knotenfreiheitsgrade $\{u_i\}, \{\phi_i\}$ über die Verknüpfungen

$$\begin{aligned} \{u\} &= [N_u] \{u_i\}, \\ \{\phi\} &= [N_\phi] \{\phi_i\} \end{aligned} \quad (3.99)$$

approximiert werden. Zur Vereinfachung der Darstellung werden ein Ableitungsoperator und ein Gradientenoperator

$$D_u = \begin{bmatrix} \partial/\partial x_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial x_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial x_3 \\ \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_1 & 0 \\ 0 & \partial/\partial x_3 & \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 & 0 & \partial/\partial x_1 \end{bmatrix}, \quad D_\phi = \begin{bmatrix} \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 \end{bmatrix} \quad (3.100)$$

in Matrizenform eingeführt und auf die Ansatzfunktionen angewendet. Daraus ergeben sich in symbolischer Schreibweise die neuen Matrizen

$$[B_u] = D_u N_u, \quad [B_\phi] = D_\phi N_\phi, \quad (3.101)$$

mit denen die Verzerrungen und das elektrische Feld mit den Knotenfreiheitsgraden $\{u_i\}$, $\{\phi_i\}$ in Matrizenform

$$\{S\} = [B_u]\{u_i\} \quad , \quad \{E\} = -[B_\phi]\{\phi_i\} \quad (3.102)$$

verknüpft werden können. Die Gleichungen (3.99) und (3.102) werden in die schwache Form des piezomechanischen Gleichgewichts (3.98) eingesetzt. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} & -\{\delta u_i\}^T \int_V \rho [N_u]^T [N_u] dV \{\ddot{u}_i\} - \{\delta u_i\}^T \int [B_u]^T [c^E] [B_u] dV \{u_i\} \\ & -\{\delta u_i\}^T \int [B_u]^T [e] [B_\phi] dV \{\phi_i\} - \{\delta \phi_i\}^T \int [B_\phi]^T [e]^T [B_u] dV \{u_i\} \\ & +\{\delta \phi_i\}^T \int [B_\phi]^T [\varepsilon^S] [B_\phi] dV \{\phi_i\} + \{\delta u_i\}^T \int [N_u]^T \{F_V\} dV \\ & +\{\delta u_i\}^T \int [N_u]^T \{F_{\Omega_1}\} d\Omega + \{\delta u_i\}^T [N_u]^T \{F_P\} \\ & -\{\delta \phi_i\}^T \int_{\Omega_2} [N_\phi]^T \sigma d\Omega - \{\delta \phi_i\}^T [N_\phi]^T Q = 0 \end{aligned} \quad (3.103)$$

in semidiskreter Matrix-Schreibweise. Die Abkürzungen

$$\begin{aligned} [M] &= \int_V \rho [N_u]^T [N_u] dV \quad , \quad [K_{uu}] = \int [B_u]^T [c^E] [B_u] dV, \\ [K_{u\phi}] &= \int [B_u]^T [e]^T [B_\phi] dV \quad , \quad [K_{\phi\phi}] = -\int [B_\phi]^T [\varepsilon^S] [B_\phi] dV, \\ \{F_i\} &= \int_V [N_u]^T \{F_V\} dV + \int_{\Omega_1} [N_u]^T \{F_{\Omega_1}\} d\Omega + [N_u]^T \{F_P\}, \\ \{G_i\} &= -\int_{\Omega_2} [N_\phi]^T \sigma d\Omega - [N_\phi]^T Q \end{aligned} \quad (3.104)$$

sind dabei die Massenmatrix $[M]$, die Steifigkeitsmatrix $[K_{uu}]$, die piezoelektrische Kopplungsmatrix $[K_{u\phi}]$ und die piezoelektrische Kapazitätsmatrix $[K_{\phi\phi}]$. Die Größen $\{F_i\}$ und $\{G_i\}$ stehen für die Anteile der äußeren Kräfte und der elektrischen Ladung.

Zur Erfüllung des Variationsprinzips (3.103) lassen sich dann folgende gekoppelten Differenzialgleichungen für ein Element ableiten:

$$\begin{aligned} [M]\{\ddot{u}_i\} + [K_{uu}]\{u_i\} + [K_{u\phi}]\{\phi_i\} &= \{F_i\}, \\ [K_{\phi u}]\{u_i\} + [K_{\phi\phi}]\{\phi_i\} &= \{G_i\}. \end{aligned} \quad (3.105)$$

Durch Zusammenfassen der auftretenden Matrizen in einer globalen Matrix doppelter Größe kann das Gleichungssystem durch eine Matrix-Gleichung

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_i \\ \ddot{\phi}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u\phi} \\ K_{\phi u} & K_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ \phi_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_i \\ G_i \end{bmatrix} \quad (3.106)$$

wiedergegeben werden. Das homogene Gleichungssystem (3.106) dient der Modalanalyse, d.h. der Berechnung der Eigenfrequenzen und der Schwingungsmoden der betrachteten piezoelektrischen Struktur. Danach kann eine harmonische Analyse zur Bestimmung einer elektrischen Impedanz oder Admittanz durchgeführt werden. Wichtige Details werden in den beiden folgenden Abschnitt beschrieben.

3.3.2 Numerische Modalanalyse

Eine piezoelektrische Struktur ist häufig mit zwei metallisierten Elektroden versehen, die auf gegenüber liegende Oberflächen geklebt werden. Deswegen ist es sinnvoll, den Vektor $\{\phi_i\}$ des elektrischen Potentials in zwei Gruppen aufzuteilen. Die erste Gruppe ist das elektrische Potential, das auf den Elektroden definiert wird und wird mit $\{\phi_{pi}\}$ für die aktive Elektrode und mit $\{\phi_{gi}\}$ für die geerdete Elektrode bezeichnet. Die zweite Gruppe stellt das elektrische Potential $\{\phi_{Ii}\}$ im Innern des Körpers dar. Damit kann Gleichung 3.106 in der Form

$$\begin{bmatrix} M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_i \\ \ddot{\phi}_{pi} \\ \ddot{\phi}_{Ii} \\ \ddot{\phi}_{gi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{uu} & (K_{u\phi})_{up} & (K_{u\phi})_{uI} & (K_{u\phi})_{ug} \\ (K_{\phi u})_{pu} & (K_{\phi\phi})_{pp} & (K_{\phi\phi})_{pI} & (K_{\phi\phi})_{pg} \\ (K_{\phi u})_{Iu} & (K_{\phi\phi})_{Ip} & (K_{\phi\phi})_{II} & (K_{\phi\phi})_{Ig} \\ (K_{\phi u})_{gu} & (K_{\phi\phi})_{gp} & (K_{\phi\phi})_{gI} & (K_{\phi\phi})_{gg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ \phi_{pi} \\ \phi_{Ii} \\ \phi_{gi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_i \\ G_{pi} \\ G_{Ii} \\ G_{gi} \end{bmatrix} \quad (3.107)$$

geschrieben werden [11].

Für den Fall freier Koppelschwingungen werden der Lastvektor $\{F_i\} = 0$ und die elektrische Ladung $\{G_i\} = 0$ in Gleichung (3.107) null gesetzt. Zwei Spezifikationen sind dann noch zu unterscheiden:

Zum Einen können freie Schwingungen bei **kurzgeschlossenen Elektroden** untersucht werden. Das elektrische Potential verschwindet auf den Elektroden gleichmäßig: $\{\phi_{pi}\} = 0$ und $\{\phi_{gi}\} = 0$. Damit treten die zweite Reihe, die vierte Reihe, die zweite Spalte und die vierte Spalte in Gleichung (3.107) nicht mehr auf. Es verbleiben die Gleichungen

$$[M] \{\ddot{u}_i\} + [K_{uu}]\{u_i\} + ([K_{u\phi}]_{uI})\{\phi_{Ii}\} = 0, \quad (3.108)$$

$$([K_{\phi u}]_{Iu})\{u_i\} + ([K_{\phi\phi}]_{II})\{\phi_{Ii}\} = 0 \Rightarrow \{\phi_{Ii}\} = -([K_{\phi\phi}]_{II})^{-1}([K_{\phi u}]_{Iu})\{u_i\}, \quad (3.109)$$

woraus durch gegenseitiges Einsetzen und mit harmonischem Lösungsansatz das Eigenwertproblem

$$|[K_{uu}] - ([K_{u\phi}]_{uI})([K_{\phi\phi}]^{-1})_{II}([K_{\phi u}]_{Iu}) - \omega^2[M]| = 0 \quad (3.110)$$

entsteht. Die zugehörige charakteristische Gleichung bestimmt die Eigenfrequenzen (als mögliche Resonanzstellen), die Auflösung von Gleichung (3.110) selbst dann auch noch die Moden (bis auf eine Konstante).

Der zweite Fall sind freie Schwingungen bei **offenen Elektroden**. Dann hängt der Unterschied des elektrischen Potentials zwischen den Elektroden vom dynamischen Verhalten der schwingenden Strukturen ab. Das Potential der geerdeten Elektrode ist null. Folglich verschwinden die vierte Reihe und die vierte Spalte des Gleichungssystems (3.107). Außerdem liegt bei offenen Elektroden keine innere elektrische Ladung vor, d.h. es ist $\{G_{Ii}\} = 0$. Damit kann das innere Potential $\{\phi_{Ii}\}$ durch

$$\{\phi_{Ii}\} = -(K_{\phi\phi})_{II}^{-1}(K_{\phi u})_{Iu}\{u_i\} - (K_{\phi\phi})_{II}^{-1}(K_{\phi\phi})_{Ip}\{\phi_{pi}\} \quad (3.111)$$

bestimmt werden. Die Gleichung (3.111) wird danach in die ersten und zweiten Reihen des Gleichungssystems (3.107) eingesetzt. Man erhält

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_i \\ \ddot{\phi}_{pi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{K}_{uu} & \tilde{K}_{u\phi} \\ \tilde{K}_{\phi u} & \tilde{K}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ \phi_{pi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.112)$$

mit den Abkürzungen

$$\tilde{K}_{uu} = [K_{uu}] - ([K_{u\phi}]_{uI}([K_{\phi\phi}]^{-1})_{II}([K_{\phi u}]_{Iu}), \quad (3.113)$$

$$\tilde{K}_{u\phi} = ([K_{u\phi}]_{up} - ([K_{u\phi}]_{uI}([K_{\phi\phi}]^{-1})_{II}([K_{\phi u}]_{Ip}), \quad (3.114)$$

$$\tilde{K}_{\phi u} = ([K_{u\phi}]_{pu} - ([K_{u\phi}]_{pI}([K_{\phi\phi}]^{-1})_{II}([K_{\phi u}]_{Iu}), \quad (3.115)$$

$$\tilde{K}_{\phi\phi} = ([K_{\phi\phi}]_{pp} - ([K_{\phi\phi}]_{pI}([K_{\phi\phi}]^{-1})_{II}([K_{\phi\phi}]_{Ip}). \quad (3.116)$$

Gleichung (3.112) sagt aus, dass darin die erste Gleichung

$$[M]\{\ddot{u}_i\} + [\tilde{K}_{uu}]\{u_i\} + [\tilde{K}_{u\phi}]\{\phi_{pi}\} = 0 \quad (3.117)$$

die Dynamik des Systems bestimmt, wenn der Vektor des elektrischen Potentials $\{\phi_{pi}\}$ über

$$\{\phi_{pi}\} = -\tilde{K}_{\phi\phi}^{-1}\tilde{K}_{\phi u}\{u_i\} \quad (3.118)$$

nur als Funktion des Verschiebungsvektors eingesetzt wird. Analog zum ersten Fall erhält man dann wieder das zugehörige Eigenwertproblem

$$\left| ([\tilde{K}_{uu}] - [\tilde{K}_{u\phi}][\tilde{K}_{\phi\phi}]^{-1}[\tilde{K}_{\phi u}]) - \omega^2[M] \right| = 0 \quad (3.119)$$

zur Bestimmung möglicher Anti-Resonanzfrequenzen.

3.3.3 Erzwungene Schwingungen bei harmonischer Anregung

Bei der Berechnung erzwungener Schwingungen unter harmonischer Anregung durch ein auf die Elektroden aufgebrachtes elektrisches Potenzial wird üblicherweise für einen vorgegeben Frequenzbereich die Systemantwort an verschiedenen Stützstellen berechnet, so dass anschließend der Frequenzgang der gewünschten Ausgangsgröße vorliegt.

Dazu wird Gleichung (3.112) für den Fall betrachtet, dass die äußeren mechanischen Kräfte $\{F_i\}$ und die elektrische Ladung $\{G_{pi}\}$ im Allgemeinen nicht verschwinden:

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_i \\ \ddot{\phi}_{pi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{K}_{uu} & \tilde{K}_{u\phi} \\ \tilde{K}_{\phi u} & \tilde{K}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ \phi_{pi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_i \\ G_{pi} \end{bmatrix}. \quad (3.120)$$

Unter der Annahme, dass alle Anregungen monofrequent sinusförmig (Kreisfrequenz Ω) sind, wird dies auch für die Schwingungsantwort der Vektoren Verschiebung und elektrisches Potenzial gelten. Berücksichtigt man diese Gegebenheiten, geht die Differentialgleichung (3.120) in ein System algebraischer Gleichungen

$$\begin{bmatrix} \tilde{K}_{uu} - \Omega^2 M & \tilde{K}_{u\phi} \\ \tilde{K}_{\phi u} & \tilde{K}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ \frac{1}{j\Omega} I \end{bmatrix} \quad (3.121)$$

über, wenn die Erregergröße $\{G_{pi}\}$ im Frequenzbereich wie häufig üblich durch $\{I\}/(j\Omega)$ mit den entsprechenden Stromamplituden ersetzt wird. Damit kann eine Analyse harmonisch erregter Zwangsschwingungen eines piezoelektrischen Systems geleistet werden.

Um die Resonanz- und die Antiresonanzfrequenz berechnen zu können, wird für den Fall freier Schwingungen das System ohne äußere Kraft ($F = 0$) betrachtet. Deswegen wird die Verschiebung u als Funktion des elektrischen Potentials

$$u = -(\tilde{K}_{uu} - \omega^2 M)^{-1} \tilde{K}_{u\phi} \phi \quad (3.122)$$

beschrieben. Nach Einsetzen von Gleichung (3.120) in die zweite Reihe der Gleichung (3.121) ergibt sich die Gleichung

$$|Y| = \left| \frac{I}{\phi} \right| = \left| j\Omega [\tilde{K}_{\phi\phi} - \tilde{K}_{\phi u} (\tilde{K}_{uu} - \Omega^2 M)^{-1} \tilde{K}_{u\phi}] \right| \quad (3.123)$$

für die elektrische Eingangsadmittanz. Zur Bestimmung der Resonanzfrequenz betrachtet man den Extremwert von Gleichung (3.121), d.h. Ω ist an Stelle von $\left| (\tilde{K}_{uu} - \Omega^2 M) \right| = 0$ die Resonanzfrequenz des piezoelektrischen Systems. Außerdem kann die Anti-Resonanz für den Fall einer nichttrivialen Lösung durch die elektrische Eingangsadmittanz-Analyse berechnet werden. Dazu wird der Mindestwert von Gleichung (3.121) betrachtet. Daraus lässt sich die Anti-Resonanzfrequenz bestimmen.

Das dynamische Verhalten von piezoelektrischen Systemen lässt sich durch die elektrische Eingangsadmittanz-Analyse berechnen. Außerdem können sowohl die mechanische Verschiebung als auch die mechanische Spannung unter hamonischer Anregung im Frequenzbereich bestimmt werden.

4 Statoroptimierung mit Ergebnissen

Zunächst werden Ergebnisse für das analytische Ausgangsmodell der Statoren vorgestellt. Die Anfangswerte der Geometrie des betrachteten hybriden piezoelektrischen Ultraschall-Schwingungsmotors werden durch die Auswahl entsprechender piezokeramischer Bauelemente der Firma PI vorgegeben. Zur Anregung der Längsschwingungen wird eine ringförmige piezoelektrische Keramik PIC 181 als Aktor benutzt. Die Scherplatten PIC 255 dienen zur Anregung der Torsionsschwingungen.

4.1 Angleichung der Eigenkreisfrequenzen bei 1-dimensionaler Modellierung

Wird der vorgestellte piezoelektrische Schwingungsmotor mit übereinstimmenden Eigenkreisfrequenzen entsprechender Statorlängs- und Statortorsionsschwingungen angetrieben, kann mit großem übertragbarem Drehmoment und auch einem hohen Wirkungsgrad beim Betrieb des Motors gerechnet werden. Deshalb ist die Fragestellung, ob und wie beispielsweise die beiden GrundEigenkreisfrequenzen dieser Schwingungen in Übereinstimmung gebracht werden können, eine entscheidende Zielsetzung bei der Auslegung des Motors.

Wie schon in Kapitel 3 dargelegt wurde, besitzt der zu untersuchende hybride Schwingungsmotor eine zylindrische Form. Dabei ist im Allgemeinen im Falle analoger Rand- und Übergangsbedingungen bei den beiden Statoren die jeweils erste Eigenfrequenz der Torsionsschwingung niedriger als die der Längsschwingung, weil die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Longitudinalwellen höher als die der Torsionswellen ist. Insbesondere deswegen wird ein zusätzlicher Ausgleichsring vorgesehen, weil mit seiner Masse und seinem Trägheitsmoment die beiden Eigenkreisfrequenzen unterschiedlich beeinflusst werden können, so dass eine Angleichung möglich erscheint.

In Ergänzung zur perspektivischen Darstellung von Abbildung 3.1 zu Anfang des Kapitels 3 ist der entsprechende Entwurf des gesamten Motors in seiner Ansicht und zwei Schnittbildern in Abbildung 4.1 nochmals im Detail dargestellt. Die PIC181- und die PIC255-Piezokeramik sind die vorherigen Kapitel als L-PZT beziehungsweise T-PZT bezeichneten Aktorscheiben. Der Ausgleichsring wirkt entweder als Zusatzmasse zur Verkleinerung der Eigenfrequenz der Längsschwingung oder als Zusatzträgheitsmoment zur Reduktion der Eigenfrequenz der Torsionsschwingung. Seine Geometrie, nämlich Dicke und Position, werden variiert, um die gewünschte Angleichung zu erzielen. Auch der Einfluss anderer Parameter soll diskutiert werden.

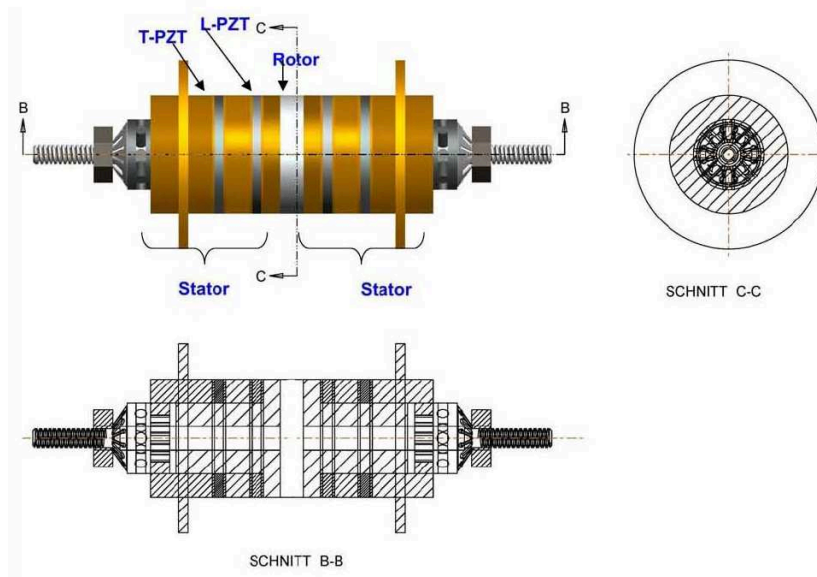


Abbildung 4.1: Motorentwurf

Scheiben 1,2,4 und 6	
Material	Bronze
Dichte (ρ)	8700
Elastizitätsmodul (Y_m)	1.1E+11
Querkontraktionszahl (ν)	0.3
Schubmodul (G)	$\frac{Y_m}{2(1+\nu)}$

Tabelle 4.1: Materialeigenschaften der Scheiben 1,2,4 und 6

Aufgrund der Symmetrie wird nur einer der beiden Statoren des Motors gemäß Abbildung 4.1 in die Berechnung einbezogen. Sämtliche Abmessungen wurden bereits in Abbildung 3.2 des vorherigen Kapitels detailliert erläutert. Die Scheiben 1,2,4 und 6 sowie auch der Ausgleichsring bestehen aus Bronze mit Materialeigenschaften gemäß Tabelle 4.1. Die piezoelektrischen für die L-PZT und die T-PZT unterschiedlichen Materialeigenschaften sind in Anhang A und B dargestellt.

Zur Bestimmung der Eigenkreisfrequenzen ist die homogene Form der Bewegungsgleichungen samt Rand- und Übergangsbedingungen aus Abschnitt 3.2.1 und 3.2.2 zu verwenden, d.h. insbesondere ist in den entsprechenden Übergangsbedingungen (3.44) und (3.84) in $D_{3_5}(t)$ und $D_{1_3}(t)$ mit $U_0 = 0$ festzulegen. Es sind also Eigenwertprobleme der Art (3.57) mit zugehöriger charakteristischer Gleichung (3.58) sowohl für die Längs- als auch die Torsionsschwingungen zu lösen. d.h.

$$\mathbf{B}_L \mathbf{c}_L = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \mathbf{B}_T \mathbf{c}_T = \mathbf{0} \quad (4.1)$$

und

$$\det(\mathbf{B}_L) = 0 \quad \text{und} \quad \det(\mathbf{B}_T) = 0. \quad (4.2)$$

Um eine optimale Angleichung der entsprechenden Eigenkreisfrequenzen zu erzielen, ist eine umfangreiche Parametervariation notwendig.

Materialien	1. Longitudinaleigenfrequenz	1. Torsionaleigenfrequenzen
	(rad/s)	(rad/s)
Mit Piezokeramiken	$1.98 \cdot 10^5$	$2.25 \cdot 10^5$
Ohne Piezokeramiken	$2.14 \cdot 10^5$	$2.66 \cdot 10^5$

Tabelle 4.2: Einfluss piezoelektrischer Aktorscheiben

Geometrie des Stators	Einheit [mm]
Dicke der Bronzescheibe 1 (l_1)	5
Dicke der Bronzescheibe 2 (l_2)	5
Dicke der T-PZT (l_3)	4
Dicke der Bronzescheibe 4 (l_4)	5
Dicke der T-PZT (l_5)	4
Dicke der Bronzescheibe 6 (l_6)	3.5
Innenradius des Stators (r_1)	7.5
Außenradius des Stators (r_2)	12.5
Außenradius des Ausgleichsrings (r_3)	20

Tabelle 4.3: Anfangswerte der Statorgeometrie

4.1.1 Einfluss piezoelektrischer Aktorscheiben

Zunächst wird gezeigt, dass die piezoelektrischen Aktorscheiben PIC181 und PIC255 die Eigenkreisfrequenzen des Stators durchaus beeinflussen. Die Ergebnisse einer entsprechenden Rechnung für die jeweilige Grundfrequenz sind in Tabelle 4.2 aufgeführt. Durch das Anbringen der Piezokeramiken in einer Statorstruktur werden die Eigenkreisfrequenzen abgesenkt. Da die Gesamtsteifigkeit des Stators dann niedriger ist als für den Fall, dass der Stator aus lauter Bronzescheiben besteht, erscheint dieses Ergebnis plausibel. Es zeigt sich außerdem, dass die erste Eigenfrequenz der Torsionsschwingung immer höher als die der Längsschwingung ist. Deswegen ist für eine Frequenzangleichung die Torsioneigenfrequenz zu verkleinern und die Längseigenfrequenz zu erhöhen oder die Torsioneigenfrequenz immer stärker zu verkleinern als die Längseigenfrequenz (wenn eine Parameteränderung beide verkleinert).

4.1.2 Dickeneinfluss der elastischen Scheiben

Im vorliegenden Unterabschnitt wird untersucht, wie sich die Eigenkreisfrequenzen ändern, wenn die Dicke l_1 , l_2 , l_4 und l_6 der Bronzescheiben variiert wird. Ein Ausgleichsring wird hier noch nicht vorgesehen (seine Dicke a wird null gesetzt). Die verwendete Ausgangsgeometrie ist in Tabelle 4.3 aufgelistet. Die Abbildungen 4.2 und 4.3 zeigen die jeweils tiefste Eigenfrequenz von Längs- und Torsionsschwingung des Stators und die zugehörige Frequenzdifferenz bei Variation der Dicke l_1 der Bronzescheibe 1. Deutlich ist zu sehen, dass diese Dickenvariation die beiden Eigenkreisfrequenzen beeinflusst

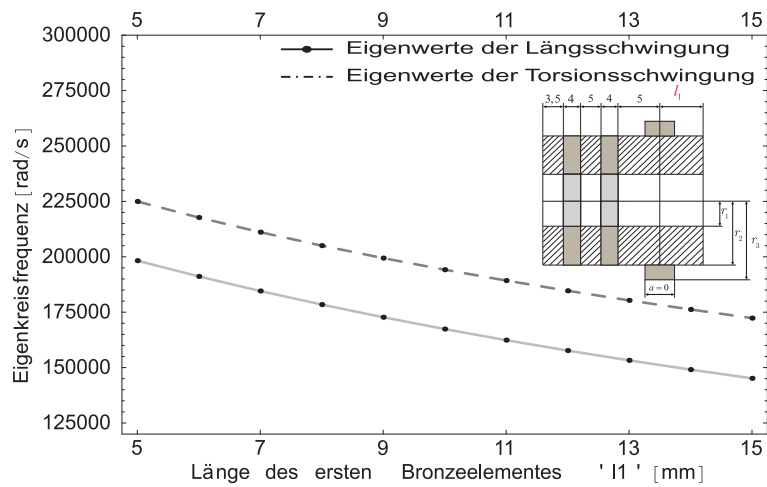


Abbildung 4.2: Eigenkreisfrequenzen bei Variation der Dicke l_1 der Scheibe 1.

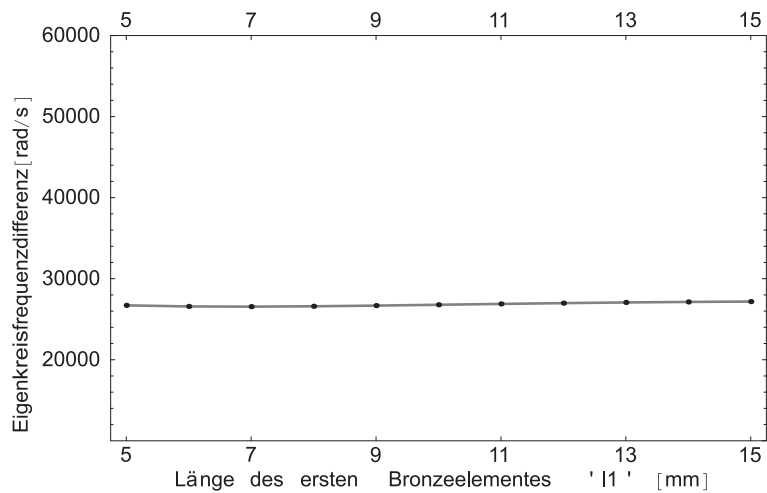


Abbildung 4.3: Differenz der ersten Eigenkreisfrequenzen von Longitudinal- und Torsionsschwingung bei sich ändernder Dicke l_1 der Scheibe 1.

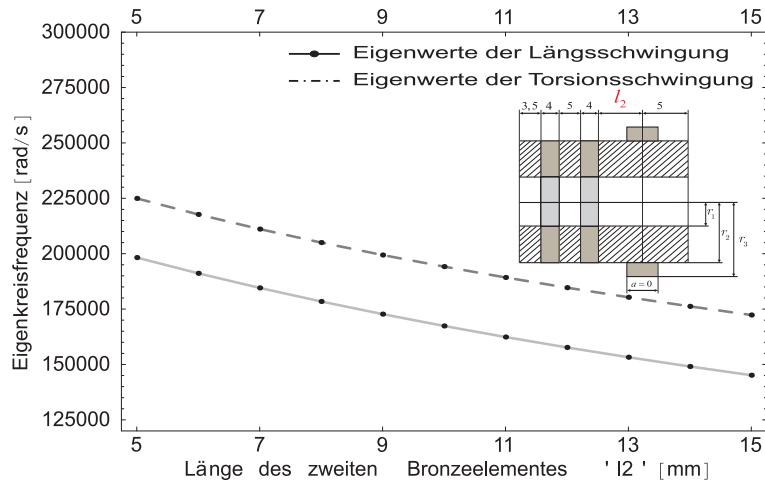


Abbildung 4.4: Eigenkreisfrequenzen bei Variation der Dicke l_2 der Scheibe 2.

und zwar werden beide mit zunehmender Dicke verkleinert. Die Differenz der beiden Eigenfrequenzen bleibt allerdings praktisch unverändert, siehe Abbildung 4.3. Eine Angleichung der Eigenkreisfrequenzen durch Dickenvariation der Bronzescheibe 1 ist nicht möglich.

Auch eine Variation der Dicke des Ringes 2, 4 oder 6 ist nicht erfolgreich, wie die Abbildungen 4.4 – 4.9 eindeutig belegen. In allen Fällen sinken die entsprechenden Eigenkreisfrequenzen mit zunehmender Dicke, die Frequenzdifferenz bleibt jedoch unverändert oder verkleinert sich nur geringfügig (bei Dickenänderung der Scheibe 6). Die Untersuchungen zum Einfluss der Dickenvariation der verschiedenen Bronzescheiben lässt sich derart zusammenfassen, dass dadurch keine effektive Angleichung der betreffenden Eigenkreisfrequenzen möglich ist. Deswegen sollen im Folgenden andere Parameter des Stators variiert werden.

4.1.3 Dickeneinfluss der piezoelektrischen Scheiben

Die Abbildungen 4.10 bis 4.13 zeigen ebenfalls die jeweils tiefste Eigenfrequenz der Längs- und der Torsionsschwingung des Stators und die jeweilige Frequenzdifferenz, nunmehr bei Dickenvariation der beiden Piezokeramiken L-PZT und T-PZT. Es ergibt sich, dass bei Dickenvariation der L-PZT keine gravierenden Änderungen gegenüber der Dickenvariation der Bronzescheiben auftritt, eine Angleichung der Frequenzen ist dadurch nicht möglich.

Allerdings ist in Abbildung 4.12 deutlich zu erkennen, dass bei Vergrößerung der Dicke l_3 der T-PZT die Abnahme der Torsionseigenfrequenz wesentlich steiler verläuft als jene der Longitudinaleigenfrequenz. Es ist offensichtlich, dass eine Angleichung der Eigenkreisfrequenzen mit zunehmender Dicke der in tangentialer Richtung polarisierten Keramik T-PZT machbar ist. Die Herstellung entsprechend großer Dicken einer T-PZT aus den Scherplatten PIC255 ist jedoch schwierig, so dass diese Lösung für eine Frequenzangleichung in der Praxis nicht in Frage kommt.

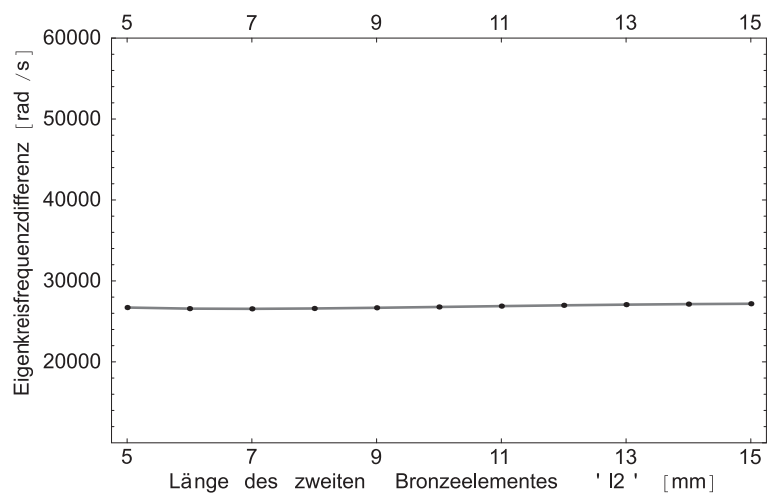


Abbildung 4.5: Differenz der ersten Eigenkreisfrequenzen von Longitudinal- und Torsionsschwingung bei sich ändernder Dicke l_2 der Scheibe 2.

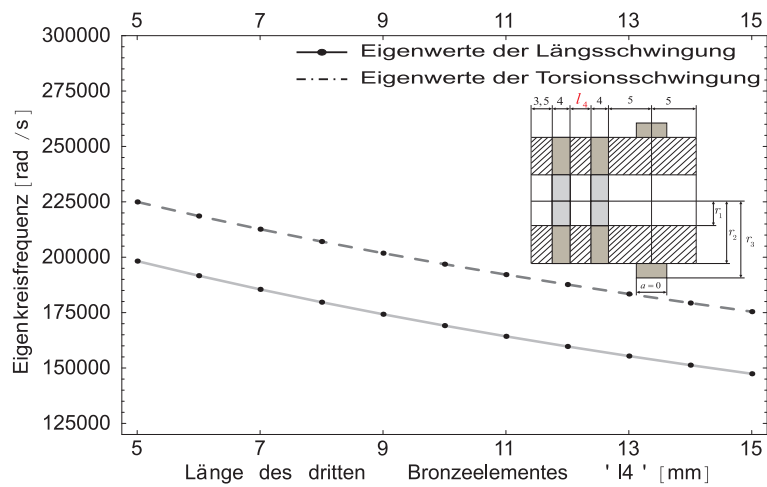


Abbildung 4.6: Eigenkreisfrequenzen bei Variation der Dicke l_4 der Scheibe 4.

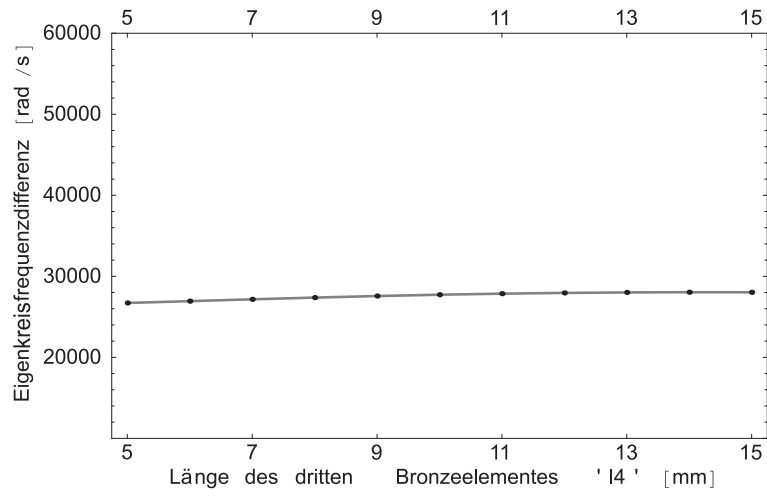


Abbildung 4.7: Differenz der ersten Eigenkreisfrequenzen von Longitudinal- und Torsionsschwingung bei sich ändernder Dicke l_4 der Scheibe 4.

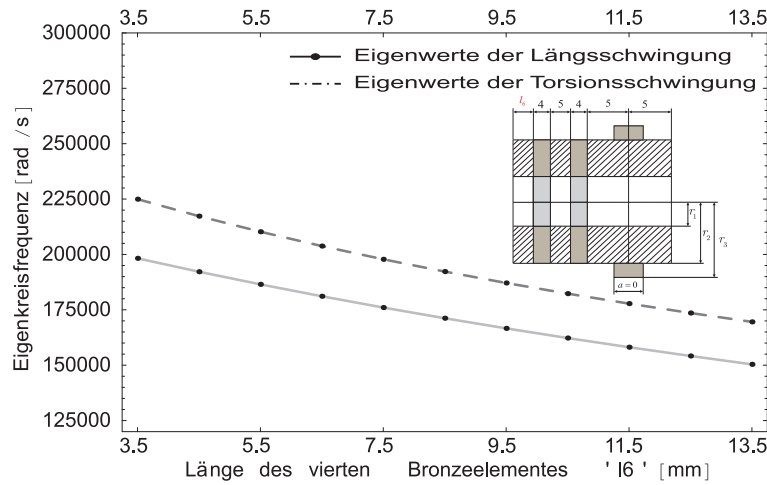


Abbildung 4.8: Eigenkreisfrequenzen bei Variation der Dicke l_6 der Scheibe 6.

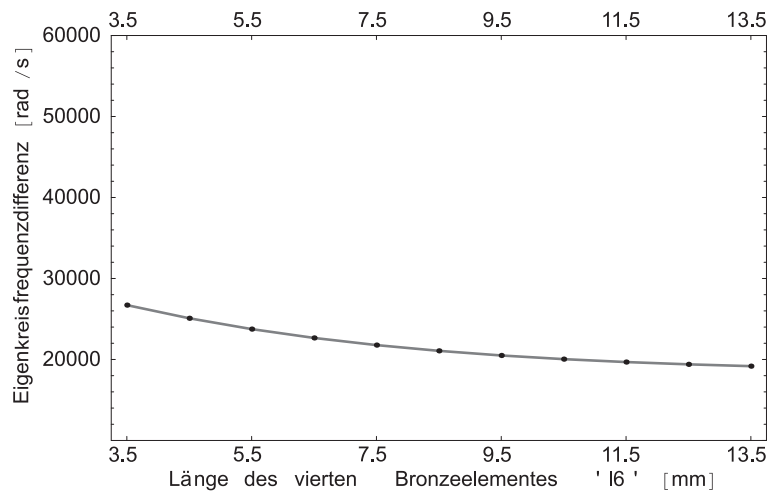


Abbildung 4.9: Differenz der ersten Eigenkreisfrequenzen von Longitudinal- und Torsionsschwingung bei sich ändernder Dicke l_6 der Scheibe 6.

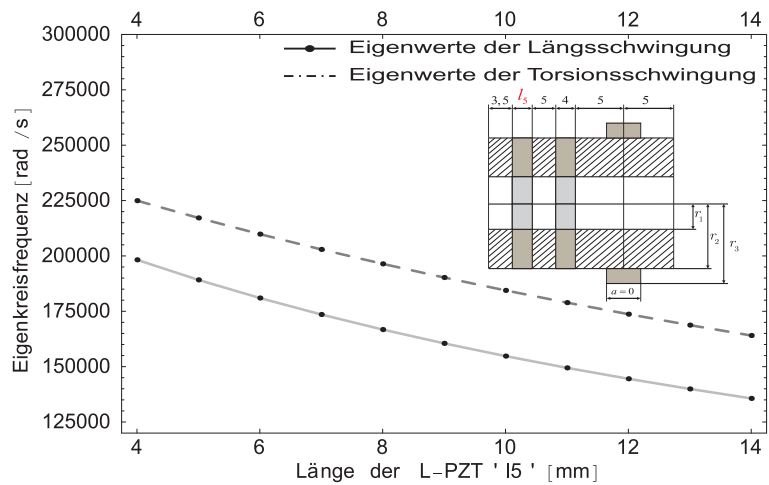


Abbildung 4.10: Eigenkreisfrequenzen bei Variation der Dicke l_5 der in longitudinaler Richtung polarisierten Piezokeramik L-PZT.

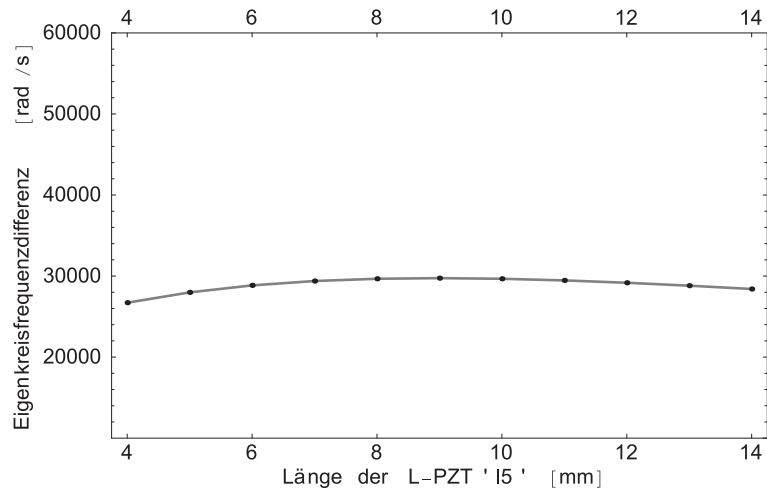


Abbildung 4.11: Differenz der ersten Eigenkreisfrequenzen von Longitudinal- und Torsionsschwingung bei sich ändernder Dicke l_5 der L-PZT.

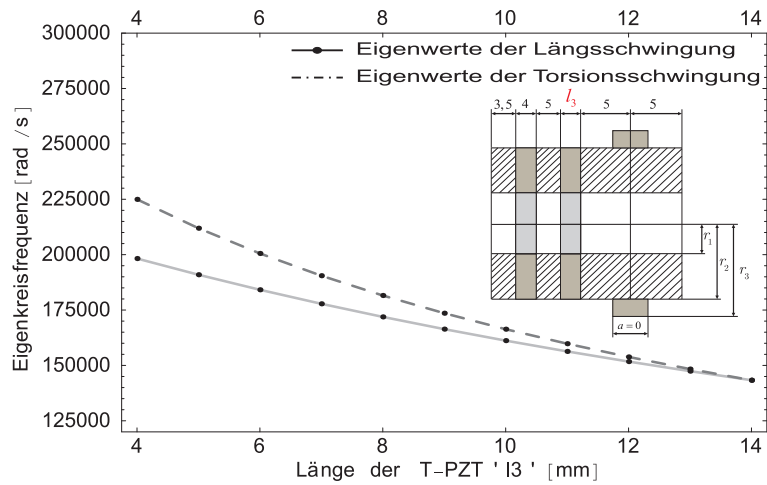


Abbildung 4.12: Eigenkreisfrequenzen bei Variation der Dicke l_3 der in tangentialer Richtung polarisierten Piezokeramik T-PZT.

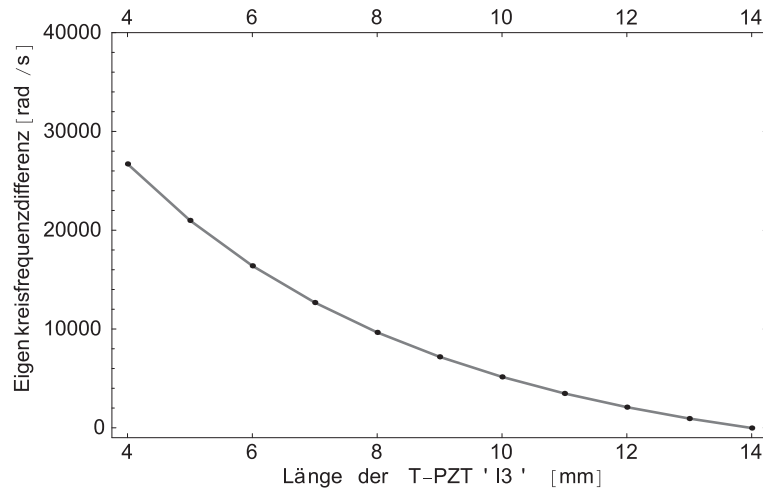


Abbildung 4.13: Differenz der ersten Eigenkreisfrequenzen von Longitudinal- und Torsionsschwingung bei sich ändernder Dicke l_3 der T-PZT.

4.1.4 Dickeneinfluss des Ausgleichsringes

Die jeweils tiefste Eigenfrequenz der Längs- und der Torsionsschwingung und die korrespondierende Frequenzdifferenz bei sich ändernder Dicke des Ausgleichsringes sind in den Abbildungen 4.14 bis 4.18 dargestellt. Die Dicke a des Ausgleichsringes wird dabei im Bereich von 0 bis 10 mm variiert und zwar für drei verschiedene ausgewählte Werte des Außenradius des Ausgleichsringes $r_3 = 17.5, 20.0$ und 22.5 mm. Eine Dickenvariation des Ausgleichsringes ändert seine Masse und sein Massenträgheitsmoment, aber in gleichem Umfang. Zwar ist zu erkennen, dass die Dickenvariation des Ausgleichsringes die Eigenfrequenzdifferenz positiv beeinflussen kann, aber als Alleinmaßnahme ist sie sicherlich nicht ausreichend. Eventuell könnte allerdings eine Kombination der Dickenvariation des Ausgleichsringes mit anderen Maßnahmen erfolgversprechend sein.

4.1.5 Einfluss des Außenradius des Ausgleichsringes

In diesem Abschnitt wird der Außenradius des Ausgleichsringes bei drei unterschiedlichen Dicken des Ausgleichsringes von 1.0, 3.0 und 5.0 mm in einem Bereich von 12.5 bis 22.5 mm variiert. Die Masse und das Trägheitsmoment des Ausgleichsringes werden beim Verändern des Außenradius unterschiedlich verändert. Die Ergebnisse sind in den Abbildungen 4.20 bis 4.25 dargestellt. Sie sind weniger drastisch als man es vielleicht erwartet hätte. Die Werte der tiefsten Eigenfrequenz sowohl der Längsschwingung als auch der Torsionsschwingung sinken natürlich wieder mit zunehmendem Außenradius des Ausgleichsringes. Die Annäherung der Frequenzen ist jedoch deutlich geringer als erhofft. Die Frequenzen in Deckung zu bringen, ist nicht möglich, die Torsionsfrequenz bleibt stets größer als die Longitudinaleigenfrequenz.

Zusammenfassend kann man sagen, dass die Eigenfrequenz der Längsschwingung in aller Regel stärker beeinflusst wird als die der Torsionsschwingung. Obwohl ein zunehmender Außenradius des Ausgleichsringes die Eigenfrequenzdifferenz auch positiv

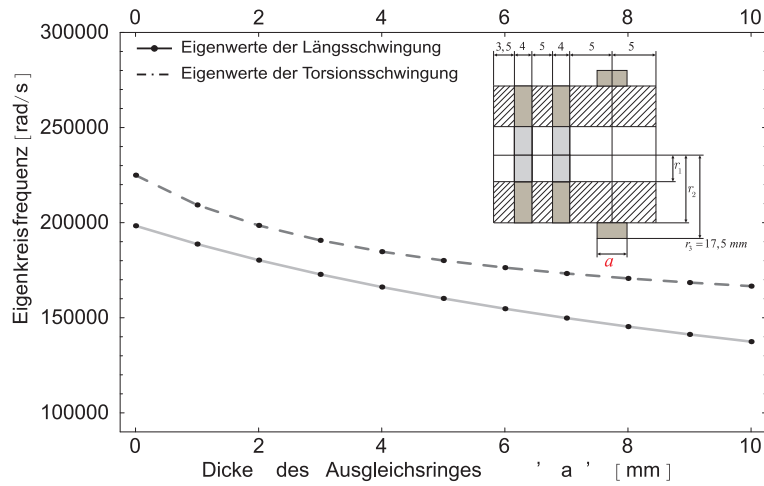


Abbildung 4.14: Eigenkreisfrequenzen bei Variation der Dicke a des Ausgleichsringes bei $r_3 = 17,5$ mm.

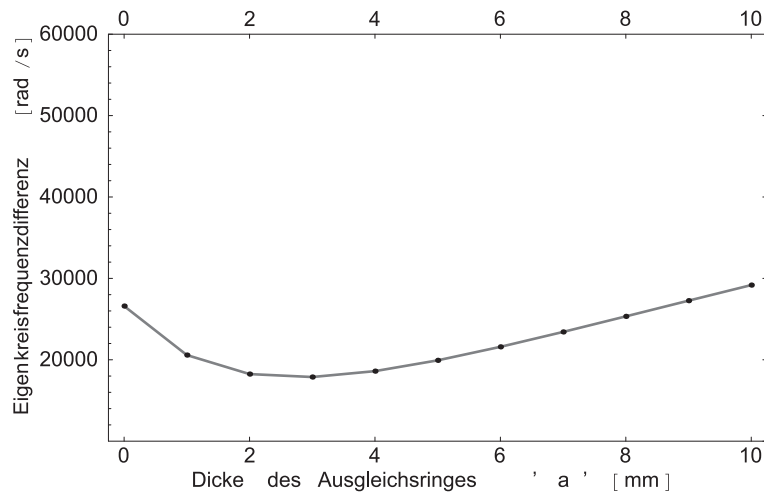


Abbildung 4.15: Differenz der ersten Eigenkreisfrequenzen von Longitudinal- und Torsionsschwingung bei sich ändernder Dicke a des Ausgleichsringes bei $r_3 = 17,5$ mm.

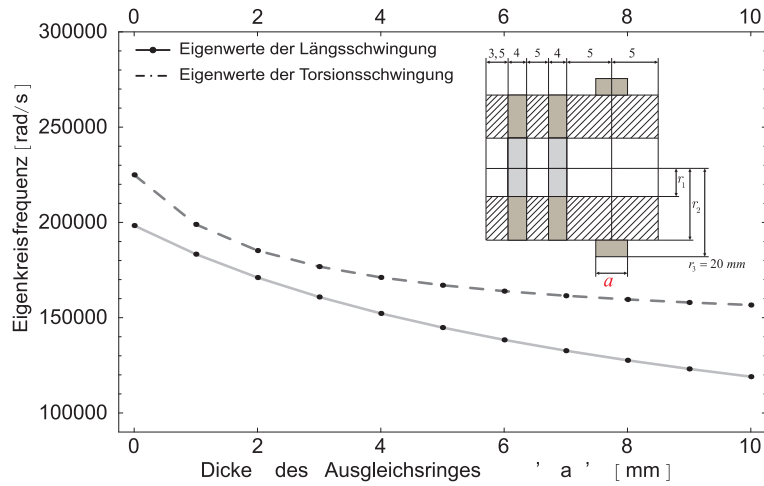


Abbildung 4.16: Eigenkreisfrequenzen bei Variation der Dicke a des Ausgleichsringes bei $r_3 = 20$ mm.

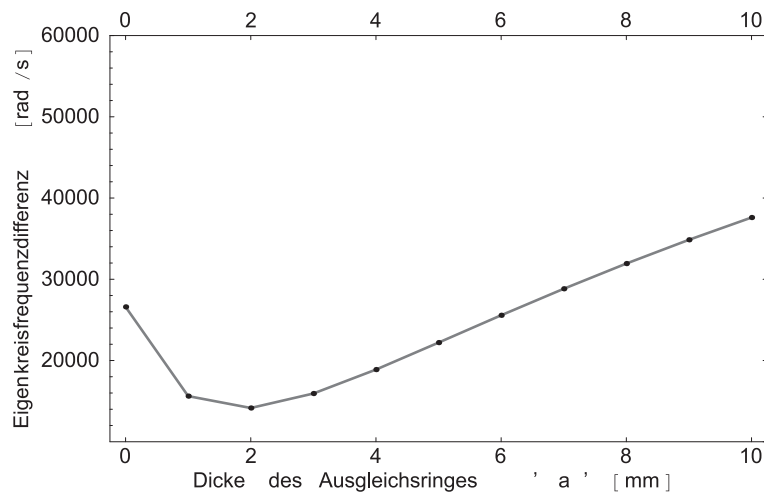


Abbildung 4.17: Differenz der ersten Eigenkreisfrequenzen von Longitudinal- und Torsionsschwingung bei sich ändernder Dicke a des Ausgleichsringes bei $r_3 = 20$ mm.

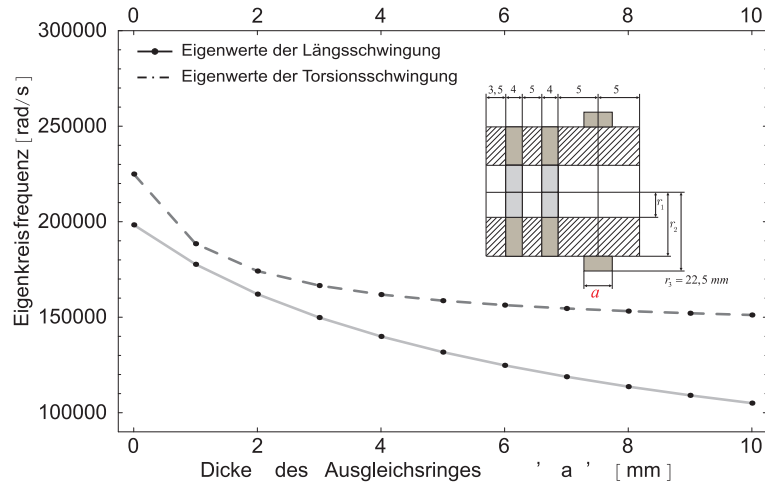


Abbildung 4.18: Eigenkreisfrequenzen bei Variation der Dicke a des Ausgleichsringes bei $r_3 = 22.5$ mm.

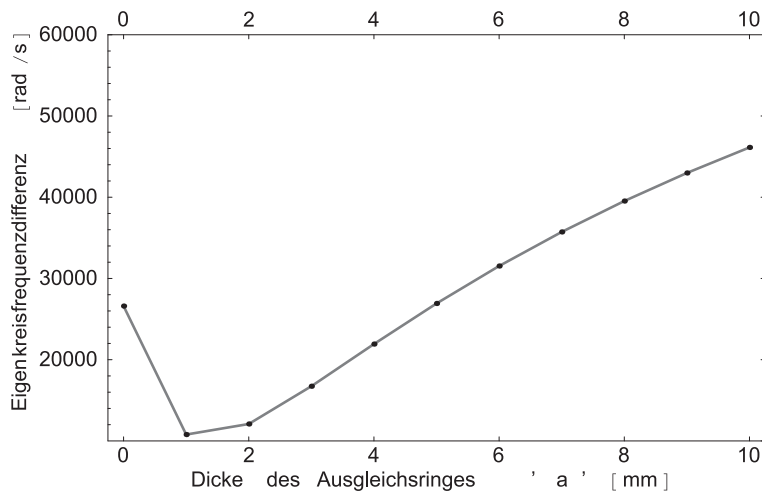


Abbildung 4.19: Differenz der ersten Eigenkreisfrequenzen von Longitudinal- und Torsionsschwingung bei sich ändernder Dicke a des Ausgleichsringes bei $r_3 = 22.5$ mm.

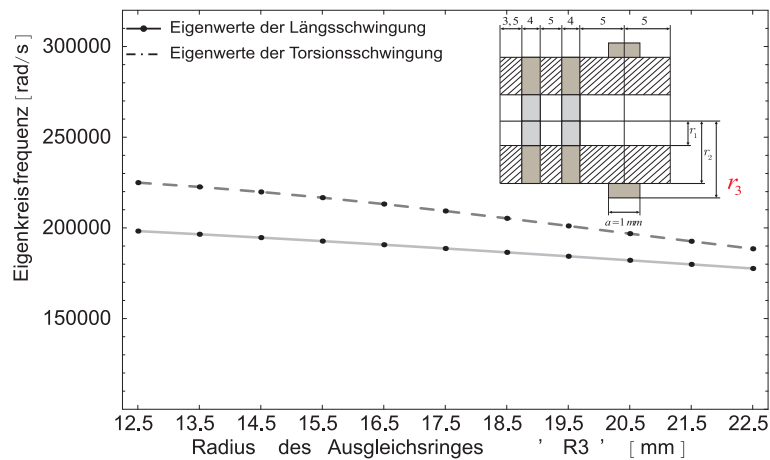


Abbildung 4.20: Eigenkreisfrequenzen bei Variation des Außenradius r_3 des Ausgleichsringes bei $a = 1$ mm.

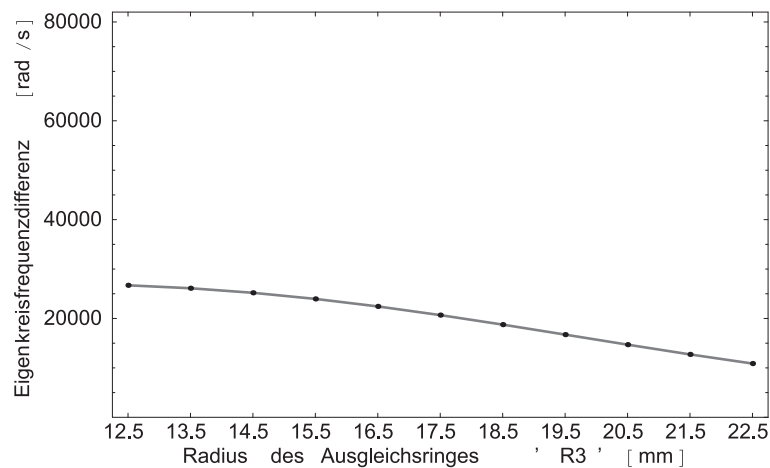


Abbildung 4.21: Differenz der ersten Eigenkreisfrequenzen von Longitudinal- und Torsionsschwingung bei sich änderndem Außenradius r_3 des Ausgleichsringes bei $a = 1$ mm.

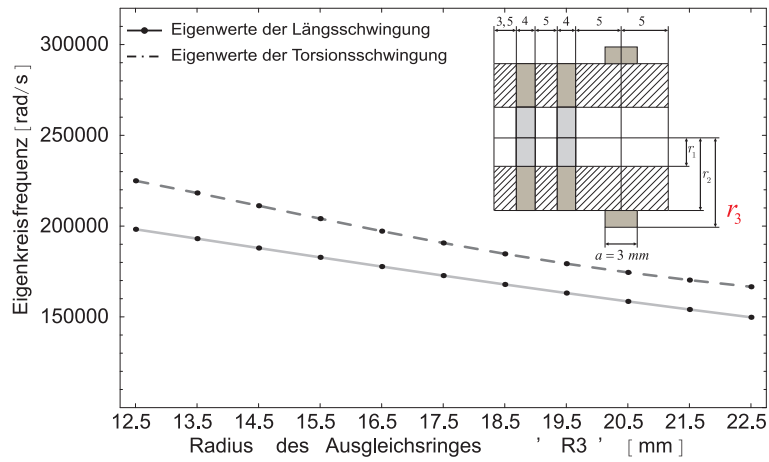


Abbildung 4.22: Eigenkreisfrequenzen bei Variation des Außenradius r_3 des Ausgleichsringes bei $a = 3$ mm.

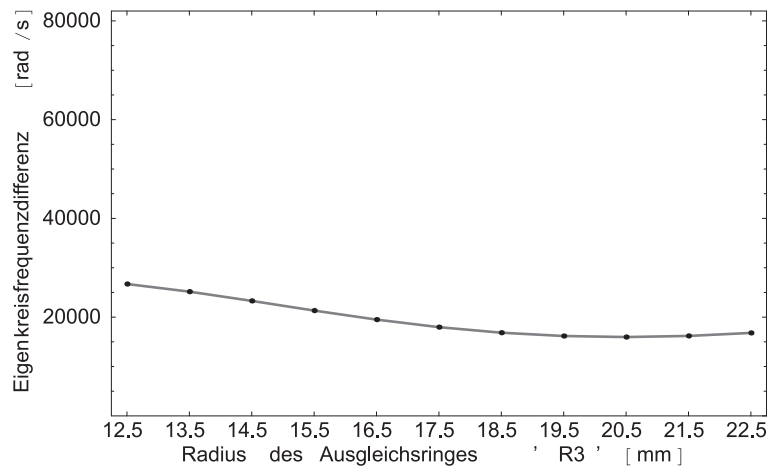


Abbildung 4.23: Differenz der ersten Eigenkreisfrequenzen von Longitudinal- und Torsionsschwingung bei sich änderndem Außenradius r_3 des Ausgleichsringes bei $a = 3$ mm.

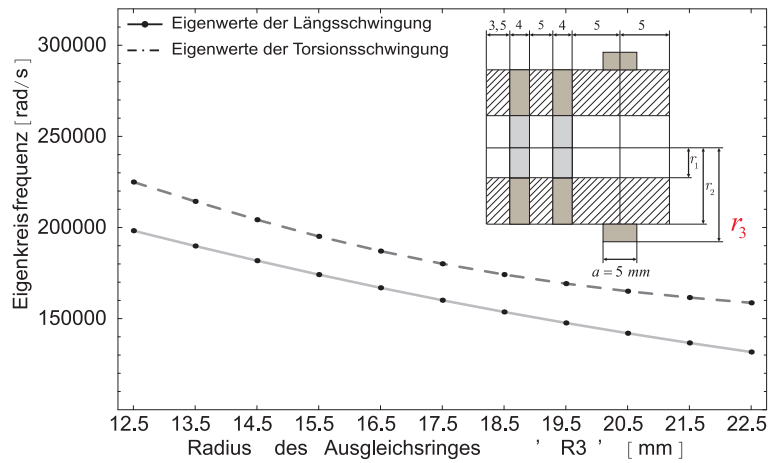


Abbildung 4.24: Änderung der Eigenkreisfrequenzen bei Variation des Außenradius a des Ausgleichsringes bei $a = 5$ mm.

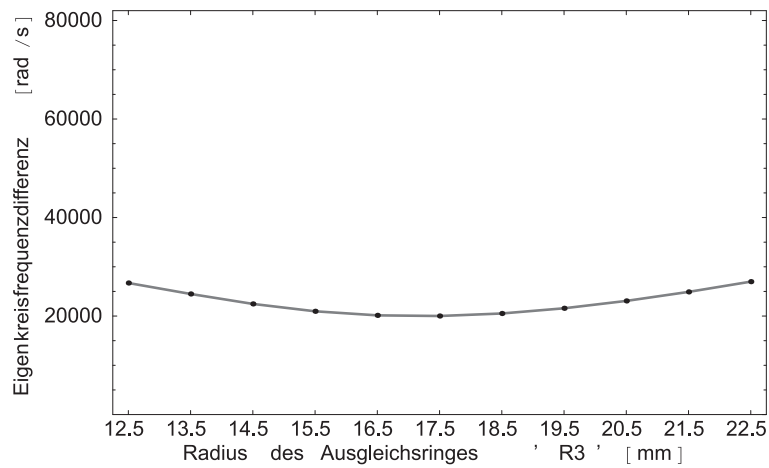


Abbildung 4.25: Differenz der ersten Eigenkreisfrequenzen von Longitudinal- und Torsionsschwingung bei sich änderndem Außenradius r_3 des Ausgleichsringes bei $a = 5$ mm.

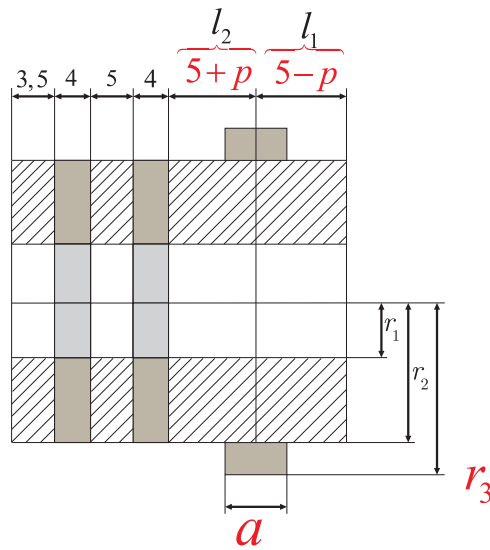


Abbildung 4.26: Statormodell bei Variation der Position p des Ausgleichsringes mit konstanter Summe $l_1 + l_2 = 10$ mm.

beeinflussen kann, gibt es keine Möglichkeit einer perfekten Übereinstimmung durch Veränderung des Außenradius zu erzielen.

4.1.6 Einfluss der Position des Ausgleichsringes

Abschließend wird im vorliegenden Abschnitt der Einfluss der Position des Ausgleichsringes auf die beiden relevanten Eigenkreisfrequenzen des Stators untersucht. Es wird die Position des Ausgleichsringes zwischen $p = 5$ und 10 mm variiert und zwar jeweils für zwei unterschiedliche Dicken $a = 1$ und 3 mm sowie drei verschiedene Außenradien $r_3 = 17.5$, 20 und 22.5 mm. Dabei soll die Summe der Dicken des ersten und zweiten Bereiches mit $l_1 + l_2 = 10$ mm konstant bleiben, so dass die Dicke l_2 sich zwischen 5 und 10 mm verändert, siehe Abbildung 4.26. Sowohl die Longitudinaleigenfrequenz als auch die Torsionseigenfrequenz des Stators nehmen ab, wie man Abbildung 4.27 bis 4.38 entnehmen kann. Während die Abnahme der Längseigenfrequenz marginal ist, sinkt die Torsionseigenfrequenz wesentlich schneller ab. Mit Ausnahme kleiner Außendurchmesser des Ausgleichsringes in Verbindung mit sehr kleinen Dicken gibt es immer eine bestimmte Position p , die zu perfekter Übereinstimmung der beiden genannten Eigenkreisfrequenzen führt, zunächst in der Nähe des Statorendes mit einer Verschiebung hin zur tangential polarisierten Keramikscheibe T-PZT für große r_3 bzw. a . Wählt man beispielsweise einen Ausgleichsring mit der Dicke $a = 3$ mm und dem Außenradius $r_3 = 17.5$ mm, so kann aus Abbildung 4.33 bzw. 4.34 die Position $p \approx 9.1$ mm für Übereinstimmung der Eigenkreisfrequenzen abgelesen werden. Vergrößert man bei unveränderter Dicke a den Außenradius auf $r_3 = 20$ mm, ändert sich die Position für perfekte Übereinstimmung der beiden Eigenkreisfrequenzen auf $p \approx 8.5$ mm, um schließlich für $r_3 = 22.5$ mm bei diesem Wert $p \approx 8.5$ mm in etwa zu bleiben. Zusammenfassend kann man sagen, dass die Position des Ausgleichsringes der entscheidende Parameter ist, der eine perfekte Übereinstimmung der beiden relevanten Eigenkreisfrequenzen in gewissen Grenzen erlaubt, insbesondere dann, wenn man auch noch seine Dicke a und seinen Außenradius r_3 geeignet wählt.

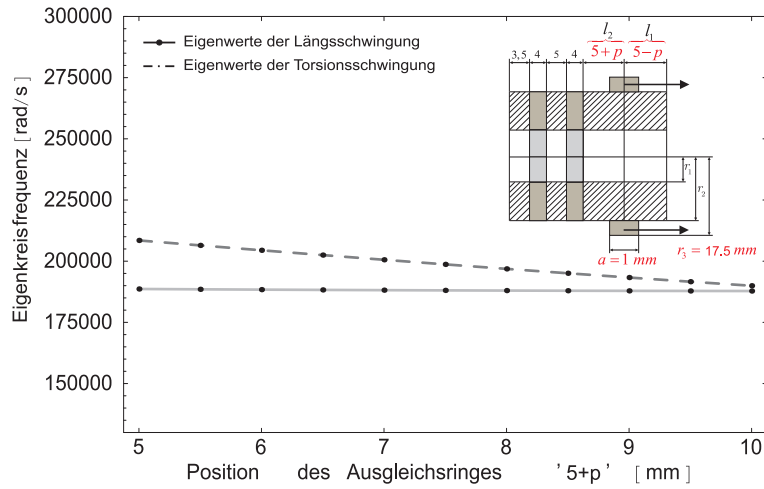


Abbildung 4.27: Eigenkreisfrequenzen bei Variation der Position p des Ausgleichsringes bei $a = 1$ mm und $r_3 = 17.5$ mm.

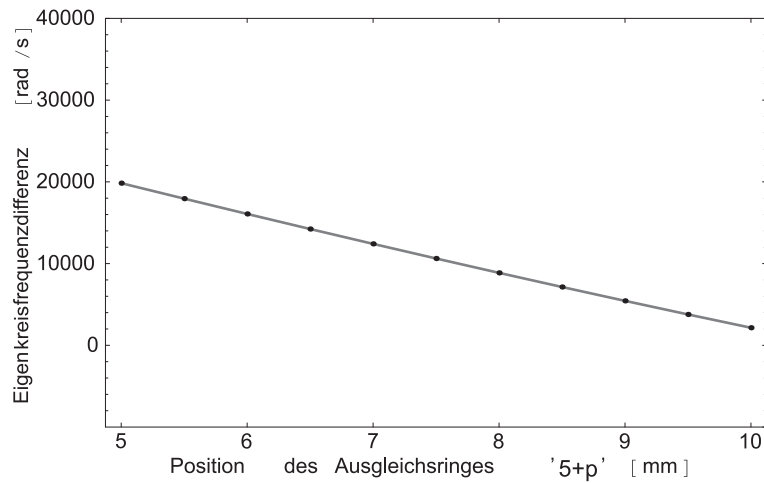


Abbildung 4.28: Differenz der ersten Eigenkreisfrequenzen von Longitudinal- und Torsionsschwingung bei sich ändernder Position p des Ausgleichsringes bei $a = 1$ mm und $r_3 = 17.5$ mm.

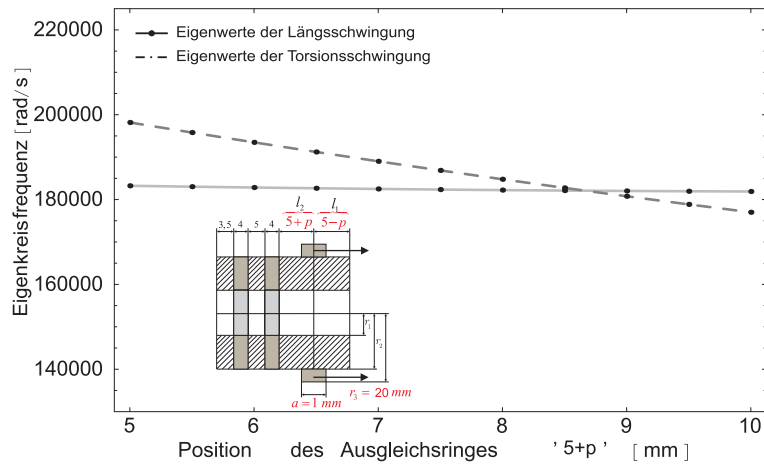


Abbildung 4.29: Eigenkreisfrequenzen bei Variation der Position p des Ausgleichsringes bei $a = 1$ mm und $r_3 = 20$ mm.

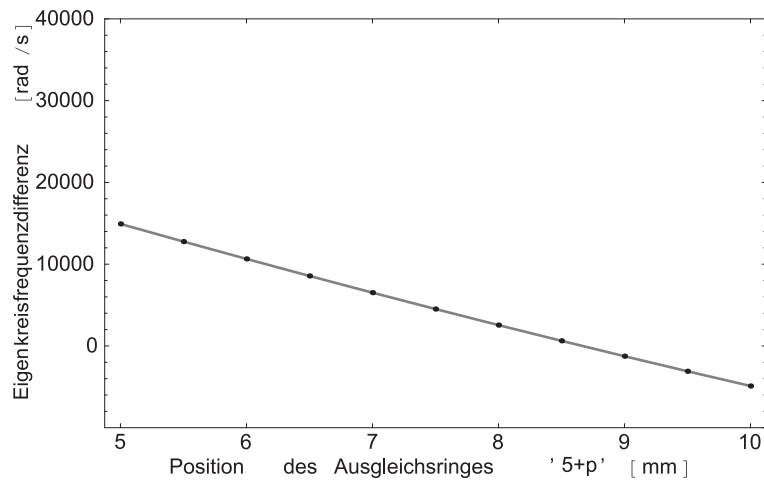


Abbildung 4.30: Differenz der ersten Eigenkreisfrequenzen von Longitudinal- und Torsionsschwingung bei sich ändernder Position p des Ausgleichsringes bei $a = 1$ mm und $r_3 = 20$ mm.

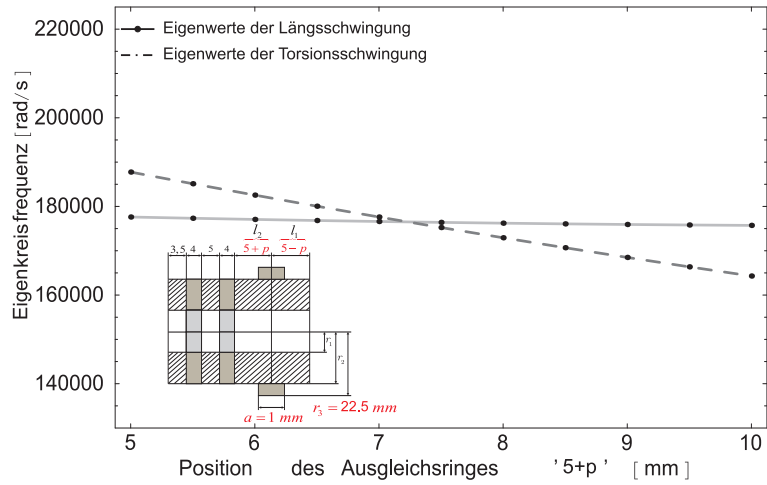


Abbildung 4.31: Eigenkreisfrequenzen bei Variation der Position p des Ausgleichsringes bei $a = 1 \text{ mm}$ und $r_3 = 22.5 \text{ mm}$.

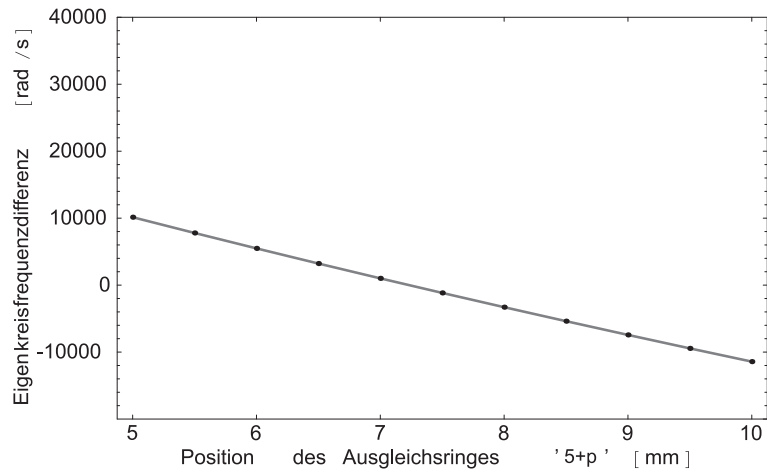


Abbildung 4.32: Differenz der ersten Eigenkreisfrequenzen von Longitudinal- und Torsionsschwingung bei sich ändernder Position p des Ausgleichsringes bei $a = 1 \text{ mm}$ und $r_3 = 22.5 \text{ mm}$.

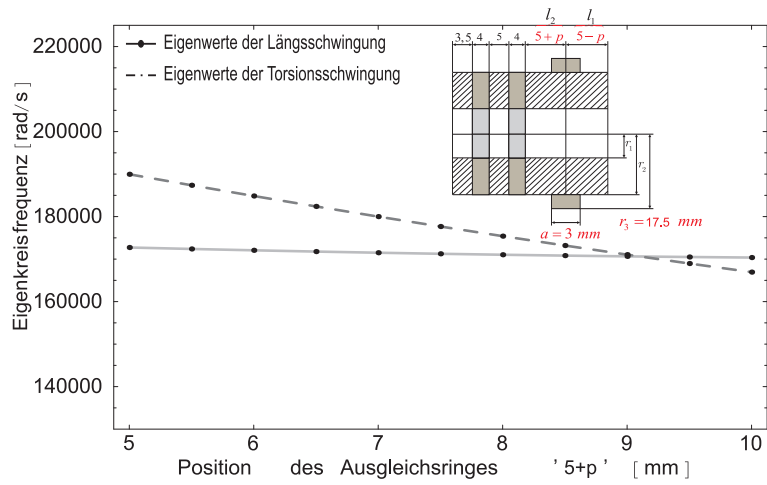


Abbildung 4.33: Eigenkreisfrequenzen bei Variation der Position p des Ausgleichsringes bei $a = 3$ mm und $r_3 = 17.5$ mm.

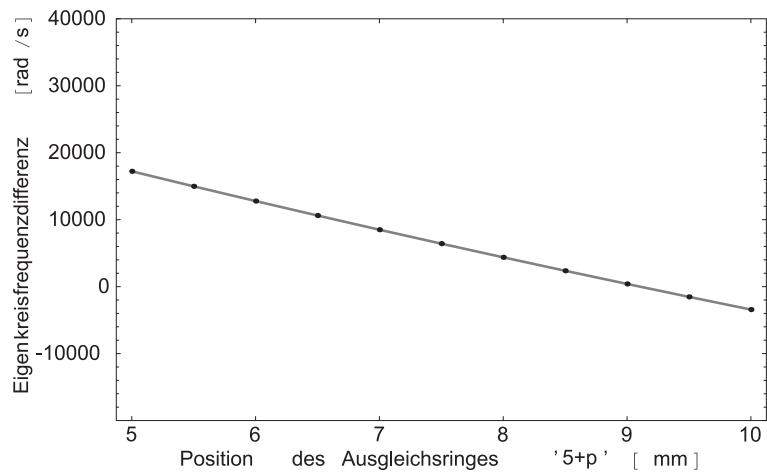


Abbildung 4.34: Differenz der ersten Eigenkreisfrequenzen von Longitudinal- und Torsionsschwingung bei sich ändernder Position p des Ausgleichsringes $a = 3$ mm und $r_3 = 17.5$ mm.

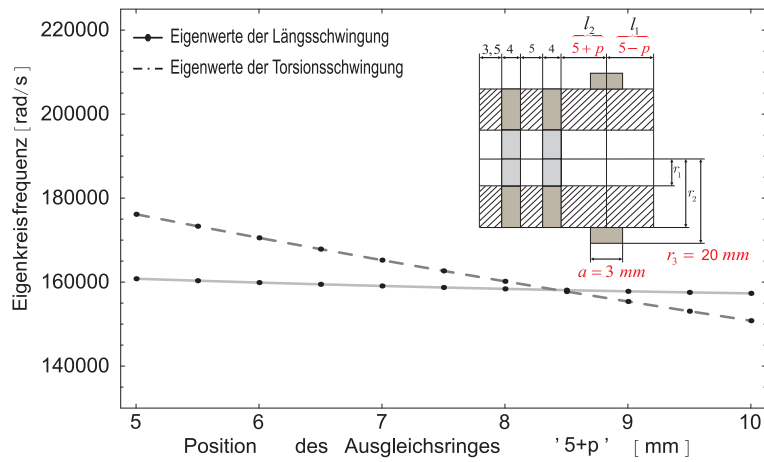


Abbildung 4.35: Eigenkreisfrequenzen bei Variation der Position p des Ausgleichsringes bei $a = 3$ mm und $r_3 = 20$ mm.

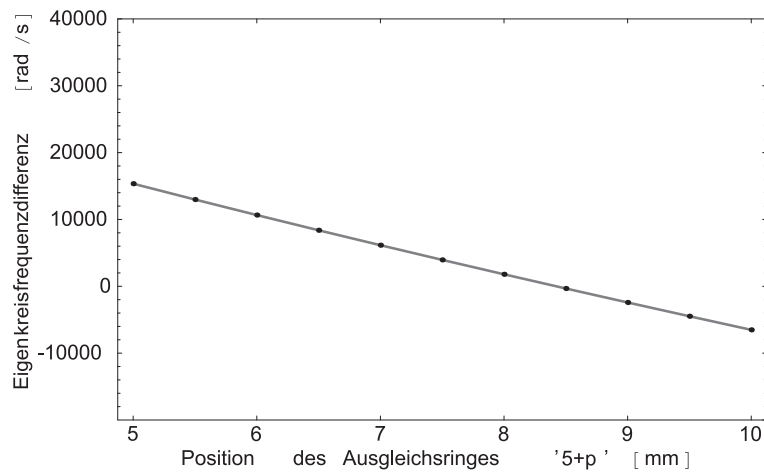


Abbildung 4.36: Differenz der ersten Eigenkreisfrequenzen von Longitudinal- und Torsionsschwingung bei sich ändernder Position p des Ausgleichsringes bei $a = 3$ mm und $r_3 = 20$ mm.

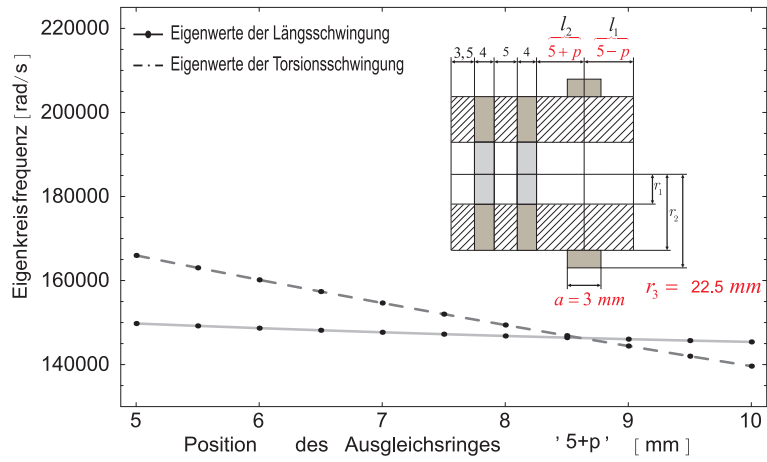


Abbildung 4.37: Eigenkreisfrequenzen bei Variation der Position p des Ausgleichsringes bei $a = 3\text{ mm}$ und $r_3 = 22.5\text{ mm}$.

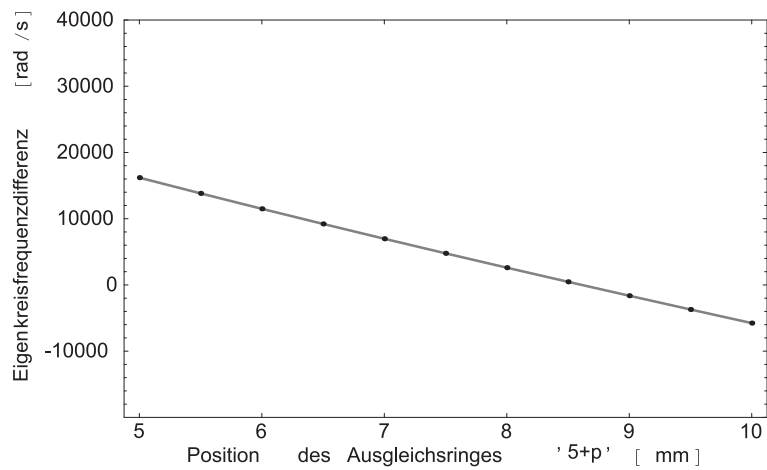


Abbildung 4.38: Differenz der ersten Eigenkreisfrequenzen von Longitudinal- und Torsionsschwingung bei sich ändernder Position p des Ausgleichsringes bei $a = 3\text{ mm}$ und $r_3 = 22.5\text{ mm}$.

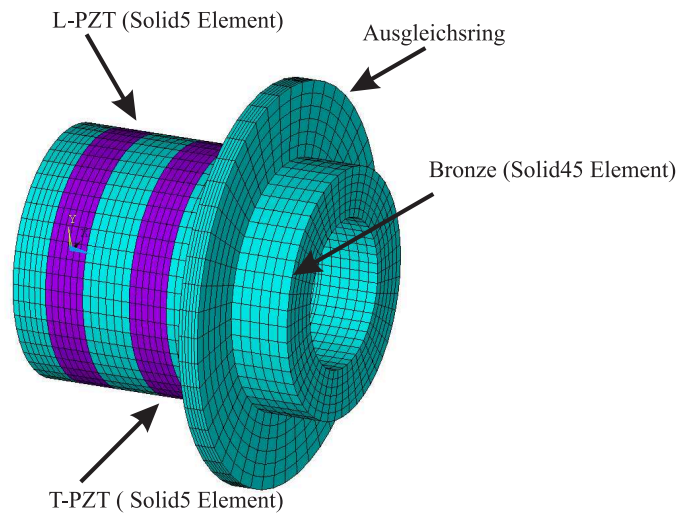


Abbildung 4.39: 3D-FEM Modell des Stators

4.2 FE-Modell zur Verfeinerung der 1-dimensionalen Modellierung

In den bisherigen Abschnitten des vorliegenden Kapitels wurden Ergebnisse auf der Basis einer 1-dimensionalen Stabtheorie präsentiert, die im Folgenden auf der Basis einer 3-dimensionalen FE-Modellierung verfeinert werden sollen. Es wird dazu das kommerzielle FEM-Programmpaket ANSYS 11.0 (Multiphysics) verwendet. Das Finite-Elemente-Modell zur Ermittlung und Anpassung der Eigenkreisfrequenzen (wenn gewünscht auch der Eigenformen des Stators) ist in Abbildung 4.39 dargestellt.

Es werden zwei verschiedene Arten von FEM-Analysen nacheinander ausgeführt. Zur genaueren Bestimmung der Eigenkreisfrequenzen und der möglichen Schwingungsformen jener Ausgangsgeometrie des Stators, die gemäß 1-dimensionaler Stabtheorie zusammenfallende Längs- und Torsionseigenfrequenz besitzt, dient die sog. Modalanalyse. Die Geometrie des Stators kann dann iterativ so angepasst werden, bis die relevanten Eigenfrequenzen der Longitudinal- und Torsionsgrundschiwingung zusammenfallen. Die Systemantwort auf eine elektrische Anregung durch die Piezoaktoren kann anschließend mit der harmonischen Analyse im Frequenzbereich simuliert werden. Damit kann die elliptische Bewegung eines Punktes auf der rotorseitigen Oberfläche des Stators veranschaulicht werden.

4.2.1 Modalanalyse

Die numerische Modalanalyse dient hier zur numerischen Berechnung der Eigenfrequenzen und der Eingschwingungsformen des Stators. Die Geometrie des Stators wird von der vorgeschlagenen Lösung der analytischen Methodik aus Abschnitt 3.1 ausgewählt. Da in der Praxis für den vorliegenden hybriden piezoelektrischen Schwingungsmotor Antriebsfrequenzen zwischen 20 bis 30 kHz adäquat erscheinen, wird eine Statorgeometrie gewählt, die bei ca. 27 kHz zusammenfallende Grundeigenfrequenzen

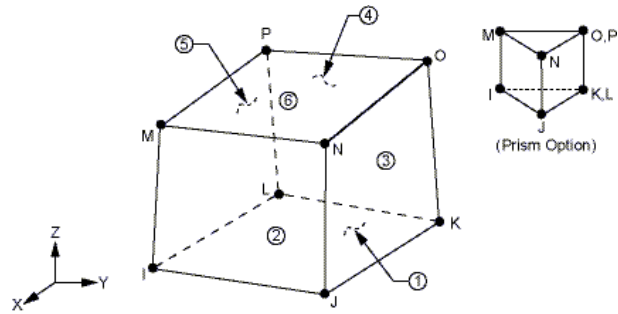


Abbildung 4.40: 3-dimensionales Coupled Field Solid5-Element mit 8 Knoten [3]

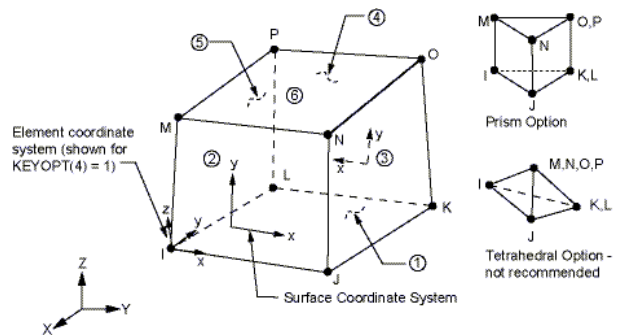


Abbildung 4.41: 3-dimensionales Solid45-Element mit 8 Knoten [3]

der Längs- und der Torsionsschwingung besitzt. Der Ausgleichsring hat dann eine Dicke $a = 2$ mm und einen Außenradius $r_3 = 20$ mm.

Bei der numerischen Rechnung mittels FEM ist die Gestaltung des geometrischen Modells, die Vernetzung und auch die Wahl der Elementtypen wesentlich für die Rechenzeit. Zur Modellierung des piezoelektrischen Materials wird das sog. Coupled-Field Solid Element (Solid5) verwendet. Dieses Element kann 3-dimensionale thermische, elektrische, magnetische, piezoelektrische und strukturelle Felder mit begrenzter Kopplung zwischen den Feldern beschreiben. Von seinen acht Knoten gemäß Abbildung 4.40 besitzt jeder bis zu sechs Freiheitsgrade, die drei mechanische Translationen (in x -, y - und z -Richtung) zulassen und darüber hinaus thermische, magnetische oder auch elektrische Freiheitsgrade besitzen.

Zur Modellierung der Bronzescheiben wird das 3-dimensionale Solid45 Element (Abbildung 4.41) verwendet. Dieses strukturelle Element wird ebenfalls durch acht Knoten definiert, wobei aber jeder einzelne Knoten nur drei mechanische Freiheitsgrade (wieder Translation in x -, y - und z -Richtung) besitzt.

Ausgehend von der Modellierung gemäß Abbildung 4.39 wird die Modalanalyse durchgeführt. Die Materialeigenschaften der beiden Piezokeramiken PI 181 und PI 255 von der Firma PI und von Bronze (für die elastischen Scheiben und den Ausgleichsring)

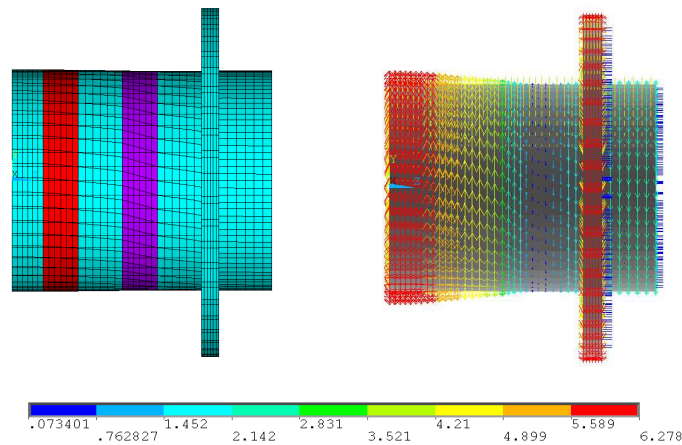


Abbildung 4.42: Berechnete Torsions-Eigenschwingungsform des Stators eines hybriden Schwingungsmotors.

wurden vorgegeben. Die tiefste Longitudinal- und Torsionseigenfrequenz wurden für verschiedene Ausgleichsringpositionen berechnet, um die richtige Position des Ausgleichsringes herauszufinden. Die mechanischen Randbedingungen sind ganz analog zu jenen festgelegt, die bereits der 1-dimensionalen Stabtheorie in Abschnitt 3.1 zugrunde lagen, d.h. die Verschiebung in z -Richtung an der linken Seite des Stators ist zu null festgelegt und die anderen Berandungen können sich frei bewegen. Die elektrische Randbedingung im Kurzschlussfall sagt aus, dass das elektrische Potenzial der Oberflächenpunkte verschwinden muss.

Im Fall eines Stators ohne Ausgleichsring sind die beiden Eigenfrequenzen nicht gleich. Die erste Eigenfrequenz der Torsionschwingung (32.64 kHz) ist deutlich höher als die erste Eigenfrequenz der Längsschwingung (27.78 kHz), der Unterschied beträgt knapp 5 kHz. Es wird nunmehr ein Ausgleichsring verwendet, der die beiden Eigenfrequenzen zur Übereinstimmung bringen soll. Nach dem Anbringen des Ausgleichsringes hat die tiefste Eigenfrequenz der Longitudinalschwingung auf 27.38 kHz abgenommen, während die tiefste Eigenfrequenz der Torsionschwingung deutlich stärker abgenommen hat und zwar auf 27.29 kHz. Die zugehörige Eigenschwingungsform der Torsion ist in Abbildung 4.42 veranschaulicht.

Die in Tangentialrichtung polarisierte Piezokeramik ist genau im Knoten der Torsionschwingung angebracht. Damit ist es möglich, ein großes Drehmoment zu erhalten [13], [83].

Die tangentialen Verschiebungsverteilung der Torsionsschwingung ist in Abbildung 4.43 gezeigt. Aus der Abbildung 4.43 ist zu erkennen, dass die beiden Ränder des Stators tatsächlich – wie vorgegeben – frei beweglich sind. Die Verschiebung erreicht das Maximum am rotorseitigen Ende des Stators. Die longitudinalen Schwingungsmoden wurden ebenso mit der numerischen Modalanalyse berechnet und in Abbildung 4.44 dargestellt. Die Schwingungsform verdeutlicht, dass der Ausgleichsring nicht starr sondern

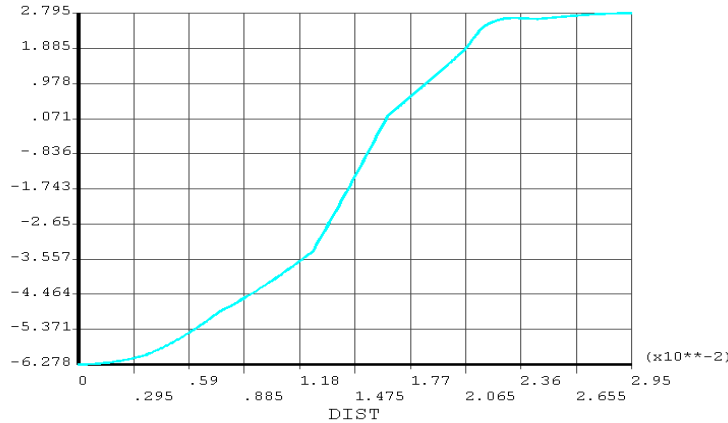


Abbildung 4.43: Berechnete Verschiebungsverteilung der Torsionsschwingung des Stators eines hybriden Schwingungsmotors.

verformbar ist. Solche Bewegungen des Ausgleichsringes konnten nicht durch das einfache 1-dimensionale Modell des vorherigen Abschnitts beschrieben werden, weil dort der Ausgleichsring als starrer Körper angenommen wurde. Die ergänzende Abbildung 4.45 zeigt die longitudinale Verschiebungsverteilung der Längsschwingung entlang der axialen Ausdehnung des Stators. Es wird deutlich, dass der Knoten der longitudinalen Verschiebung am linken rotorseitigen Rand des Stators liegt. Abbildung 4.46 veranschaulicht die eventuell störende Schwingungsform des Ausgleichsringes. Diese Schwingungsform wird während des Betriebes des hybriden Schwingungsmotors auftreten, denn die zugehörige Eigenfrequenz beträgt 26.84 kHz und liegt damit in der Nähe der ersten Längs- und Torsionsschwingung bei ca. 27.3 kHz. Die Störung durch diese unerwünschte Schwingungsform kann u.U. die Ursache von Instabilitäten der Kontaktflächen zwischen Stator und Rotor sein.

Die numerische Modalanalyse hatte auch den Zweck, den Einfluss der piezoelektrischen Aktorscheiben und der elektrischen Randbedingung bei kurzgeschlossenen oder offenen Elektroden zu untersuchen. Die Rechnung wurde für 5 verschiedene Fällen ausgeführt:

1. Stator ohne Piezokeramiken (Anstatt der Piezokeramiken wird ebenfalls Bronze eingesetzt),
2. Stator mit Piezokeramiken bei kurzgeschlossenen Elektroden,
3. Stator mit Piezokeramiken bei offenen Elektroden,
4. Stator mit Piezokeramiken ohne Berücksichtigung der tangentialen Polarisationsrichtung,
5. Zur Untersuchung des Einflusses der Klebeschicht auf das dynamische Verhalten des Stators werden dazwischen alle Bauteile mit Epoxidharzklebstoff (Dicke = 0.27 mm, $\rho = 1160 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 0.38$, $E = 4.25 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$) modelliert.

In dieser Analyse wurde ein Modell des Stators mit Ausgleichsring zugrunde gelegt, das bereits im vorigen Unterabschnitt vorgestellt wurde. Die Ergebnisse sind in der

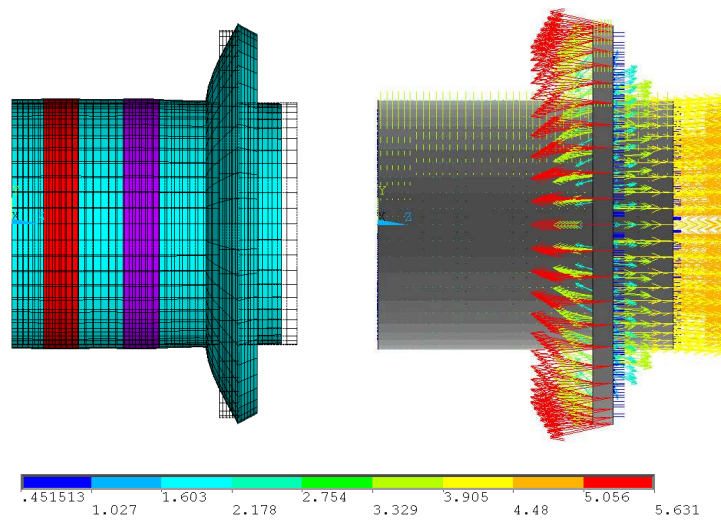


Abbildung 4.44: Berechnete Longitudinal-Eigenschwingungsform des Stators eines hybriden Schwingungsmotors.

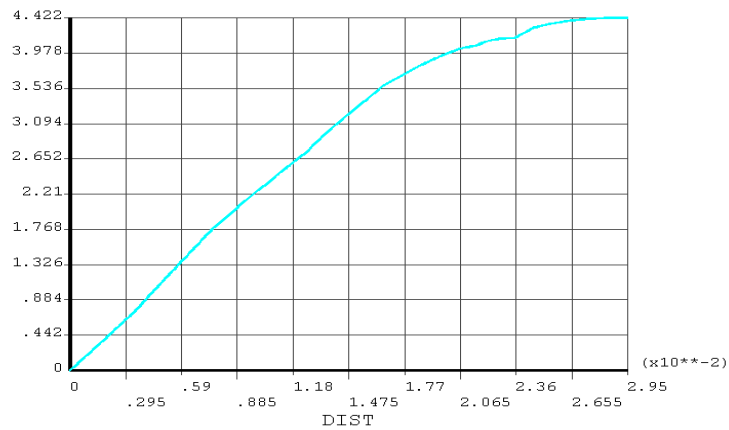


Abbildung 4.45: Berechnete Verschiebungsverteilung der Längsschwingung des Stators eines hybriden Schwingungsmotors.

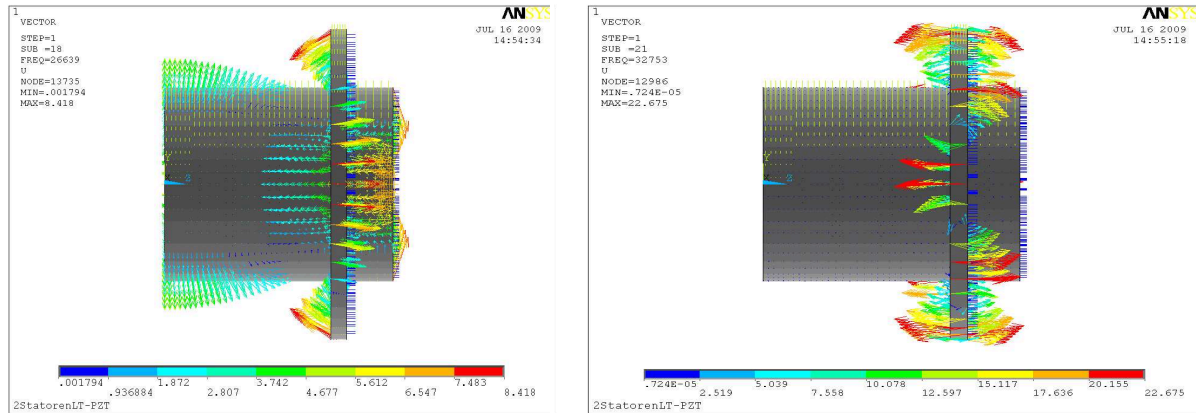


Abbildung 4.46: Unerwünschte Mode des Ausgleichsringes bei schwingendem Stator.

Fälle	Eigenfrequenzen	
	Longitudinal (kHz)	Torsion (kHz)
Fall 1. (ohne Piezokeramiken)	30.23	31.40
Fall 2. (bei kurzgeschlossenen Elektroden)	27.80	27.41
Fall 3. (bei offenen Elektroden)	29.30	30.13
Fall 4. (bei kurzgeschlossenen Elektroden)	27.62	27.40
Fall 4. (bei offenen Elektroden)	30.26	27.40
Fall 5. (bei kurzgeschlossenen Elektroden)	25.68	24.00

Tabelle 4.4: Einfluss der Aktorscheiben und verschiedener elektrischer Randbedingungen auf Eigenfrequenz des Stators eines hybriden Schwingungsmotors.

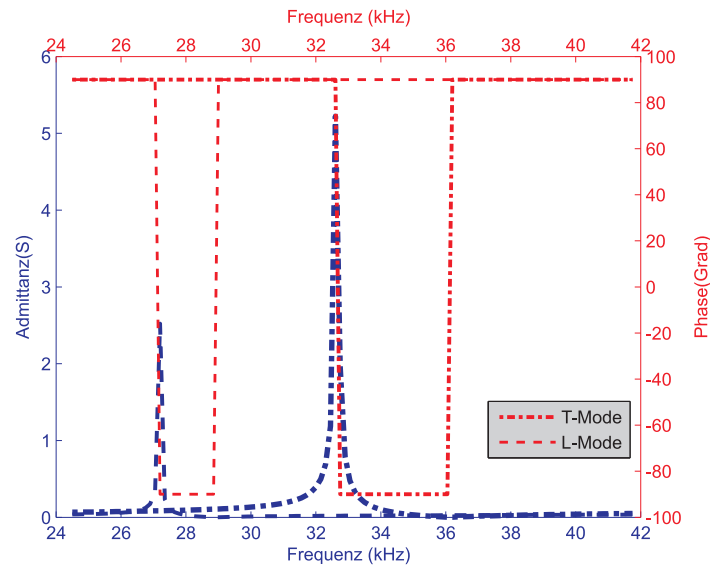


Abbildung 4.47: Kurzschluss-Eingangsadmittanz des Stators vor Frequenzangleichung.

Tabelle 4.4 zusammengestellt.

Die Tabelle stellt die maßgebenden Eigenfrequenzen eines Stators bei der Veränderung der elektrischen Randbedingungen mit unterschiedlicher Kombination der piezoelektrischen Aktorscheiben dar. Es ist deutlich zu erkennen, dass die Eigenkreisfrequenzen eines Stators mit Piezokeramiken niedriger als die ohne Keramiken sind. Bei offenen Elektroden der Piezokeramiken werden die Werte der Steifigkeitsmatrix, die der Modalanalyse zugrunde liegen, geringfügig größer als im Fall der kurzgeschlossenen Elektroden. Daher sind die resultierenden Eigenfrequenzen bei offenen Elektroden höher als im Fall kurzgeschlossener Elektroden. Wie die Ergebnisse zeigen, bleibt der Wert der Torsionseigenfrequenz bei beiden elektrischen Randbedingungen unverändert. Außerdem sind die Eigenwerte der Torsions- und der Längsschwingung von der Polarisationsrichtung der Piezokeramiken stark abhängig. Wenn der Klebstoff im Modell des Stators berücksichtigt wird, nehmen die Werte der beiden Eigenfrequenzen deutlich ab.

4.2.2 Harmonische Analyse

Mit der Frequenzganganalyse lässt sich die Abhängigkeit der Dynamik des Systems von der elektrischen Erregung untersuchen. In diesem Unterabschnitt wird das harmonische Verhalten des Stators eines hybriden piezoelektrischen Schwingungsmotors bei harmonischer elektrischer Erregung analysiert, wie er in Abbildung 4.39 vorgestellt wurde. Aus den Ergebnisdaten wird das Impedanzspektrum berechnet. Die in der Modalanalyse berechneten Eigenfrequenzen werden sich dabei wiederfinden.

Es werden die unveränderten Randbedingungen der Modalanalyse verwendet. Beide piezoelektrische Aktoren werden mit einer sinusförmigen elektrischen Spannung beaufschlagt. Da keine Dämpfung berücksichtigt wird, schwingen alle Punkte der Struktur ohne Phasenverschiebung. Als Ergebnis der Simulation ist in Abbildung 4.47 und 4.48

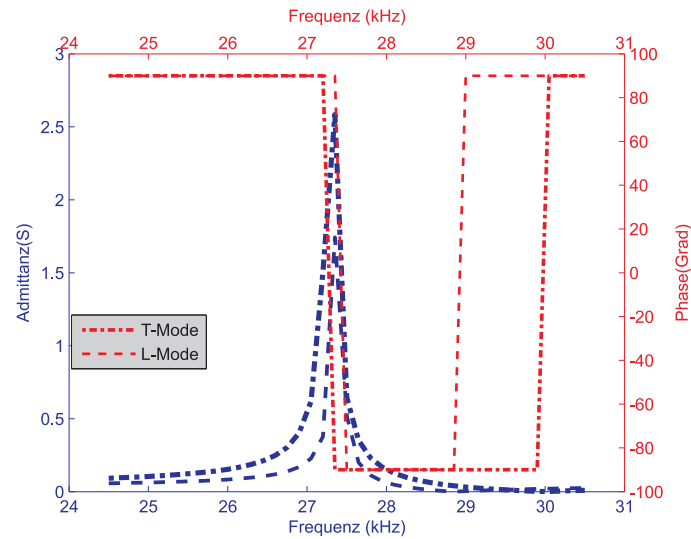


Abbildung 4.48: Kurzschluss-Eingangsadmittanz des Stators bei übereinstimmenden Eigenfrequenzen infolge Ausgleichsring.

die berechnete Admittanz über der Frequenz aufgetragen. Die Abbildungen bestätigen, dass sich die Eigenfrequenzen aus der Modalanalyse als Resonanzstellen mit entsprechend maximalen Werten der Admittanzverläufe wiederfinden, nämlich vor der Frequenzangleichung bei 27.7 und 32.6 kHz, bei übereinstimmenden Frequenzen infolge Ausgleichsring bei etwa 27.3 kHz. Im Resonanzbetrieb darf also ein hoher Wirkungsgrad des Motors erwartet werden [83]. Darüber hinaus ist zu erkennen, dass durch den Ausgleichsring die Torsionsschwingung insgesamt gegenüber der Längsschwingung abgeschwächt wird.

4.2.3 Elliptische Trajektorie

Im vorliegenden Unterabschnitt wird im Rahmen der FEM-Rechnung die elliptische Bewegung von rotorseitigen Oberflächenpunkten des Stators bei harmonischer Anregung nachgewiesen. Die longitudinal polarisierte Piezokeramik L-PZT wird dabei sinusförmig elektrisch erregt, während die tangential polarisierte Piezokeramik T-PZT ebenfalls sinusförmig aber mit einer Phasenverschiebung von 90° elektrisch angetrieben wird. Um möglichst große Amplituden der erzwungenen Schwingungen des Stators zu erreichen, wird eine elektrische Erregung in Resonanz des Stators bei etwa 27.3 kHz vorgesehen. Damit ergibt sich eine resultierende Bewegungen der longitudinalen und tangentialen Anteile, die hier in MATLAB weiter verarbeitet wird.

Um die Ausbildung der stationären Resonanzschwingungen in elliptischer Form zu verdeutlichen, wird ein transienter Betrieb diskutiert, der sich dem stationären Resonanzbetrieb asymptotisch annähert. Die transiente Analyse wurde in ANSYS 11.0 durchgeführt. Eine Newmarksche Zeit-Integrationsmethode [10], [72] wird eingesetzt, wobei die auftretenden Parameter $\alpha = 1/4$ und $\delta = 1/2$ eine konstante mittlere Beschleunigung (anstatt einer konstanten Kreisfrequenz) realisieren, die auch Trapezregel genannt wird [10]. Der Zeitschritt Δt zur Durchführung der transienten Analyse wird so hinreichend klein vorgeschlagen, dass er mindestens $\Delta t = 1/(20f_h)$ mit f_h der höch-

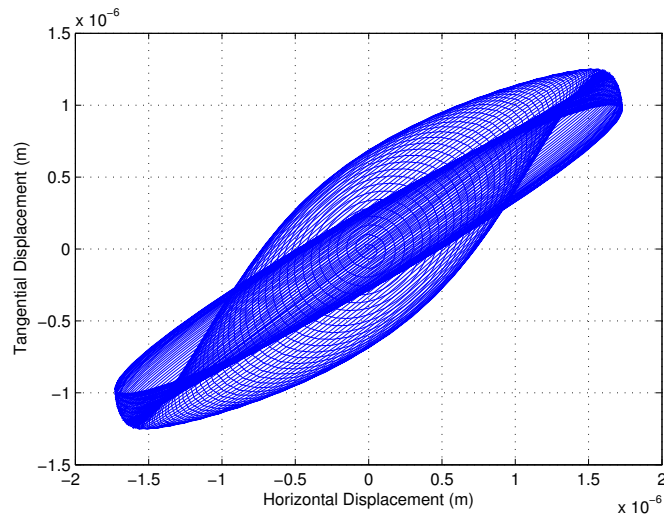


Abbildung 4.49: Elliptische Trajektorie bei resonanter Anregung: von transienten Bewegungen bis zum stationären Zustand

sten auftretenden Frequenz innerhalb der Rechnung gesetzt wird.

Die Trajektorien der Oberflächenpunkte des rotorseitigen Endes des Stators sind in Abbildung 4.49 dargestellt. Die Bewegungsbahn ist deutlich elliptisch mit nahezu gleich großen Werten in tangentialer und axialer Richtung. Bei resonanter Anregung ist in der numerischen Rechnung Dämpfung zu berücksichtigen, damit die Ausschläge begrenzt bleiben. Die transiente Entwicklung der erreichten Resonanzellipse ist deutlich zu erkennen. Werden die erregende elektrische Spannung und die Belastung des Motors konstant gehalten, ändert sich die erreichte Bahnkurve auch nicht mehr. Die Darstellung bestätigt, dass der in dieser Arbeit untersuchte Piezomotor den Anforderungen entsprechend arbeiten kann. Die erreichte Amplitude der beiden Schwingungen (Längs- und Torsionsschwingung) wird durch die Antriebsfrequenz und auch die Amplitude der erregenden elektrischen Spannung bestimmt.

In einer zusätzlichen FE-Simulation wird ergänzend der Einfluss der Strukturdämpfung auf die Amplitude der Schwingung bei resonanter Anregung des Stators abgeschätzt. Eine Dämpfungsrate von 0.3 und 0.5 % wird in der Rechnung berücksichtigt. Das resultierende Ergebnis ist in Abbildung 4.50 dargestellt. Die Bewegungsbahnen verlaufen wie erwartet mit um so kleinerer Amplitude je mehr zusätzliche Strukturdämpfung berücksichtigt wird. Auch die Phasenverschiebung zwischen den beiden Schwingungen verändert sich, wie unmittelbar durch die veränderte Neigung der Ellipse veranschaulicht wird [73].

4.3 Experimentelle Validierung des FE-Modells

Im vorliegenden Abschnitt wird eine experimentelle Überprüfung der im Rahmen der FEM-Rechnung gewonnenen Ergebnisse vorgenommen. Um zu einer Validierung des FE-Modells zu kommen, wurde in enger Anlehnung an die Geometrie des endgülti-

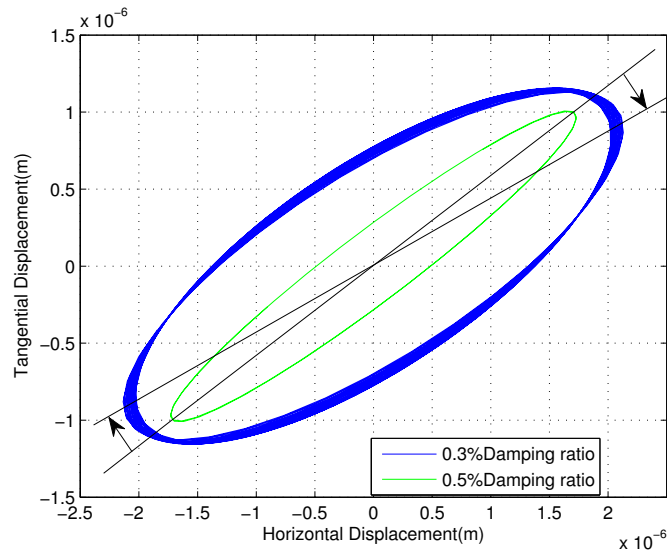


Abbildung 4.50: Elliptische Trajektorien bei unterschiedlichen Dämpfungsraten.

gen FE-Modells ein Prototyp konstruiert. Dann wurde ein Prüfstand zur Messung der Resonanzfrequenz der Statorauslegung aufgebaut. Die Messung der elektrischen und der mechanischen Größen erfolgte mittels Impedanz-Analysator beziehungsweise Laser-Vibrometer. Zum Schluss werden die Messergebnisse ausgewertet und zur Diskussion gestellt.

4.3.1 Gefertigter Stator-Prototyp

Die Konstruktion des Prototyps des Stators lehnt sich in allen Details eng an die Abmessungen des Stators an, die aus den FE-Simulationsergebnissen hervorgehen. Der Stator besteht aus drei wesentlichen Bauteilen, siehe Abbildung 4.51, nämlich der longitudinal

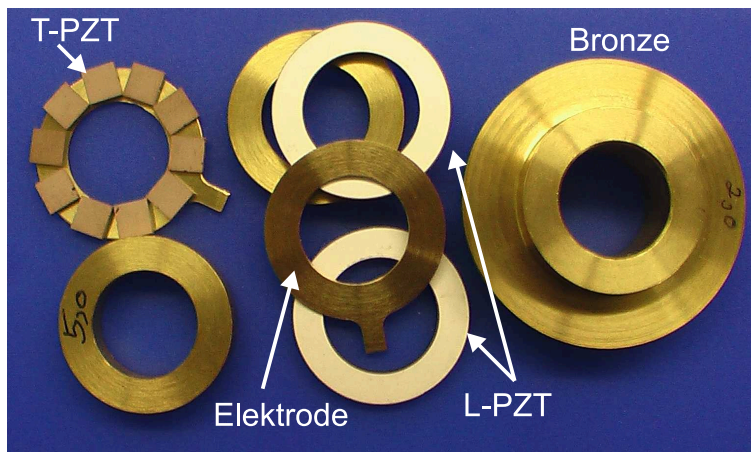


Abbildung 4.51: Die wesentlichen Bauteile des Stators eines hybriden piezoelektrischen Schwingungsmotors

polarisierten Piezokeramik L-PZT, dem elastischen flexiblen Körper aus Bronze samt

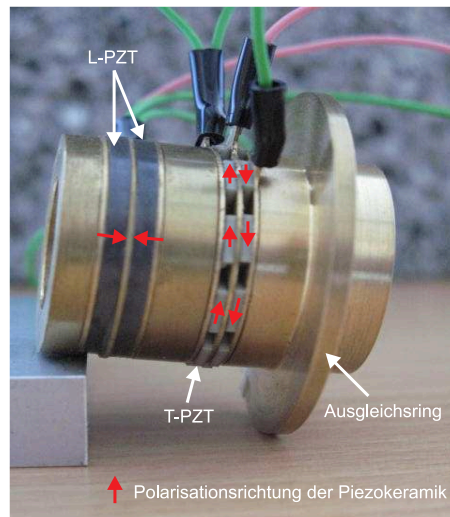


Abbildung 4.52: Prototyp des Stators eines hybriden piezoelektrischen Schwingungsmotors.

Ausgleichsring und der tangential polarisierten Piezokeramik T-PZT. Darüber sind die Piezokeramiken mit entsprechenden aus Bronze gefertigten Elektroden versehen. Der elektrische Strom wird durch diese Elektroden zu den Piezokeramiken geleitet. Um einen möglichst großen Hub von L-PZT und T-PZT durch die angelegte elektrische Spannung zu erhalten, werden die Piezokeramiken hier in zweischichtigem Stapel gefertigt. Zum Schluss werden alle Bauteile mit Epoxidharzklebstoff der Firma 3M (in Form flexibler Klebstofftypen für dynamische und Schock- Belastungen: SW DP 105, SW DP 125, SW DP 190) verbunden. Nach der Verklebung muss die verbundene Struktur ca. 20–24 Stunden aushärten. Bei der Fertigung ist darauf zu achten, dass die Anordnung der Piezokeramiken korrekt mit den entsprechenden Polarisationsrichtungen, siehe Abbildung 4.52, versehen wird. Eine alternierende Polarisationsrichtung sowohl der L-PZT als auch der T-PZT ist notwendig, um eine gleichgerichtete, sich verstärkende Verschiebung der piezoelektrischen Aktoroberflächen zu erzeugen. Wie Abbildung 4.52 verdeutlicht, kann die Keramik T-PZT nicht vollständig als ringförmige Form gefertigt werden. Dies könnte möglicherweise ein Grund für gemessenen Abweichungen von den berechneten Eigenfrequenzen sein.

4.3.2 Prüfstand und Beschreibung der experimentellen Untersuchungen

Nach erfolgter Verkabelung ist der Versuch vorbereitet. Die Untersuchungen erfassen zwei Fälle: die Messung der elektrischen Kurzschluss-Eingangadmittanz und der mechanischen Antwortgröße in Form der Geschwindigkeit des rotorseitigen Statorendes.

Der genutzte Versuchsaufbau zur Messung der Kurzschluss-Eingangadmittanz des Stators mittels Precision Impedance Analyser (Agilent HP 4294A) ist in Abbildung 4.53 dargestellt. Um die Genauigkeit des Impedanz-Analysators zu erhalten, ist das Messgerät nach Verbinden mit einer entsprechenden 16089B-Probe (Medium Kelvin Clip Lead) zu kalibrieren. Zur Untersuchung der Linearität des Gerätes wird der Stator

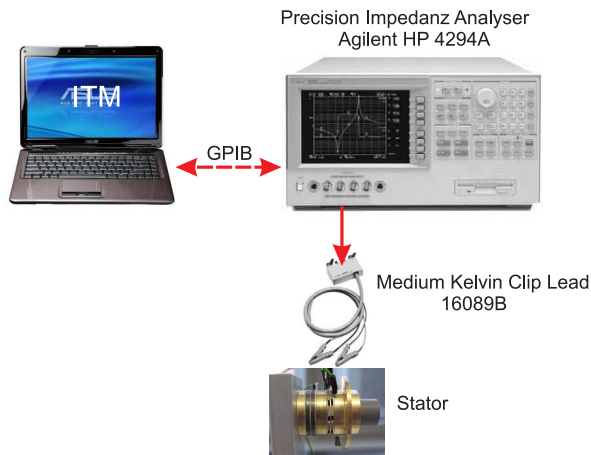


Abbildung 4.53: Messaufbau zur Messung der Kurzschluss-Eingangsadmittanz des Stators.

zunächst mit 1 mVrms - 0.50 Vrms Wechselspannung angesteuert. Der Test bestätigt, dass das gemessene Signal des Impedanz-Analysators nicht von der Amplitude der AC-erregenden Eingangsspannung abhängt. Im Versuch wird deswegen die Amplitude der elektrischen Spannung mit 0.50 Vrms festgelegt. Die Frequenzen werden im Rahmen der Messung der Längsschwingung und der Torsionsschwingung von 23 bis 28 kHz variiert.

Der Messaufbau für die Messung mittels Laser-Vibrometer ist in Abbildung 4.54 zu sehen. Dabei ist zur messtechnischen Erfassung der Geschwindigkeit v von Oberflächenpunkten des Stators mit Längs- und Torsionsschwingungsanteilen ein zusätzlicher starrer Strang anzubringen. Damit wird die Oberfläche des starren Strangs als Messobjekt senkrecht zum Laser-Messstrahl gebracht, so dass dieser besser reflektiert werden kann. Zur Erregung der Schwingung des Stators sind ein Funktions-Generator (Agilent 33220A) und ein elektrischer Spannungsverstärker (Bruel & Kjaer 2713) erforderlich. Die mechanische Schwinggeschwindigkeit infolge Longitudinal- und Torsionsschwingungen des Stators wird mit Hilfe eines Lavervibrometers (PI-Polytec OFV-505) gemessen. Das gemessene Signal wird im Laservibrometer Controller (OFV-5000) weiter verarbeitet.

Für beide Arten der Messung, d.h. die Kurzschluss-Eingangsadmittanz- und die Laser-vibrometermessung, werden die gemessenen Daten mit Hilfe einer GPIB-Schnittstelle (National Instrument) ausgelesen und zur Weiterverarbeitung auf einer Festplatte abgelegt. Weiterhin kommt ein Scanning Vibrometer zur Untersuchung der Querkontraktion des Stators während der Schwingung zum Einsatz. Die Messergebnisse werden im folgenden Abschnitt angegeben und diskutiert.

4.3.3 Messergebnisse

4.3.3.1 Admittanzmessung des Stators

Aus dem Frequenzverlauf der Kurzschluss-Eingangsadmittanz ist zunächst abzulesen, wie groß der aufgenommene Strom der Piezokeramiken des Stators bei vorgegebener

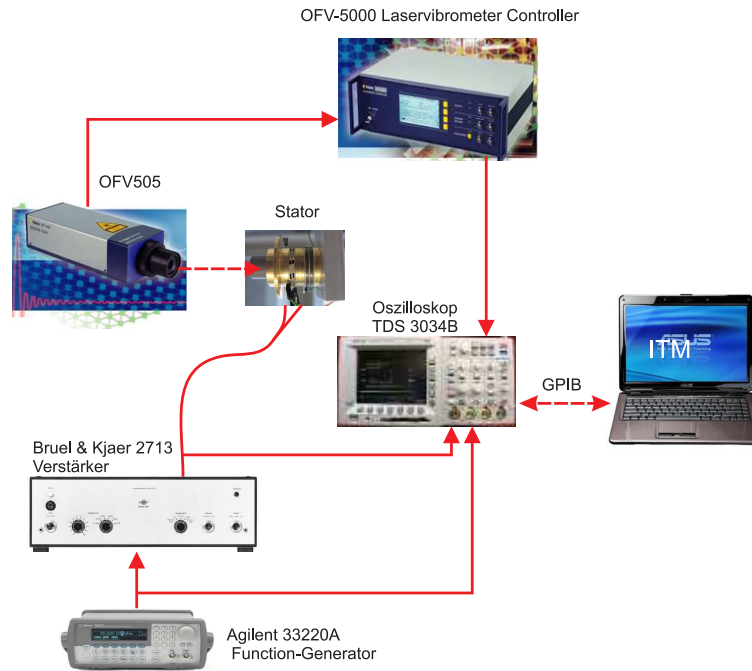


Abbildung 4.54: Messaufbau zur Messung der Schwinggeschwindigkeit des Stators.

Anregungsspannung und -frequenz ist.

Die Kurzschluss-Eingangsadmittanzmessungen des Stators, in Abbildung 4.55 und 4.56 dargestellt, zeigen Betrag und Phase der gemessenen Admittanzen bei Anregung der Längsschwingung bzw. der Torsionsschwingung. Aus Abbildung 4.55 ist zu sehen, dass die Resonanzfrequenz f_r der Längsschwingung des Stators bei ca. 25.70 kHz liegt. Die Kurzschluss-Eingangsadmittanz der Torsionsschwingung zeigt in ähnlicher Weise, dass die korrespondierende Resonanzfrequenz ca. 23.03 kHz beträgt. Außerdem kann man noch die sogenannte Anti-Resonanzfrequenz f_a unmittelbar an der Stelle des Admittanz-Minimums ablesen. Damit kann der elektromechanische Kopplungsfaktor des Stators mit

$$k_{eff} = \sqrt{\frac{f_a^2 - f_r^2}{f_a^2}} \quad (4.3)$$

berechnet werden. Dieser Faktor ist ein Maß für die Umsetzung elektrischer in mechanische Energie und umgekehrt [43].

4.3.3.2 Laseroptische Vermessung des Stators

Die Frequenzgänge der gemessenen Geschwindigkeiten der rotorseitigen Statoroberfläche für Längs- und Torsionsschwingungen sind in Abbildung 4.57 bzw. 4.58 gezeigt. Aus Abbildung 4.57 kann die tiefste Resonanzfrequenz der Längsschwingung f_r mit ca. 26.23 kHz abgelesen werden, während sich aus Abbildung 4.58 die Resonanzfrequenz der Torsionsschwingung zu ca. $f_r = 23.18$ kHz ergibt. Die Werte korrespondieren sehr gut mit jenen aus der Kurzschluss-Admittanz-Messung.

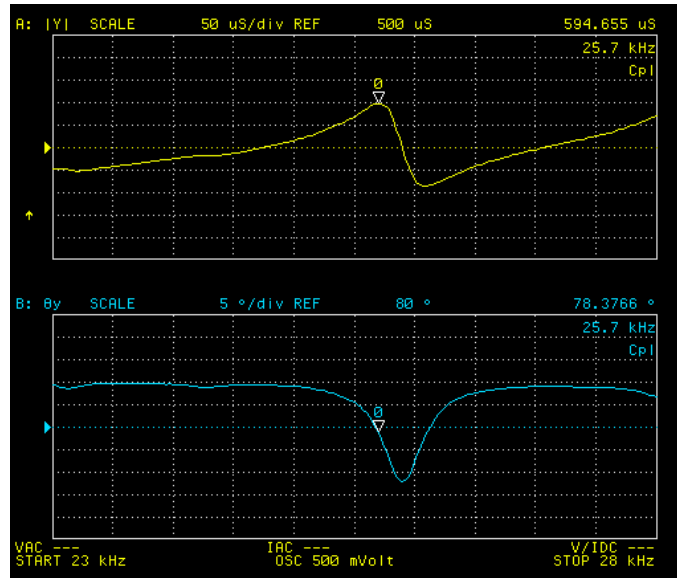


Abbildung 4.55: Gemessene Kurzschluss-Eingangsadmittanz bei Anregung durch eine elektrische Spannung von 0.50 Vrms als Frequenzgang von Betrag und Phase für Längsschwingung.

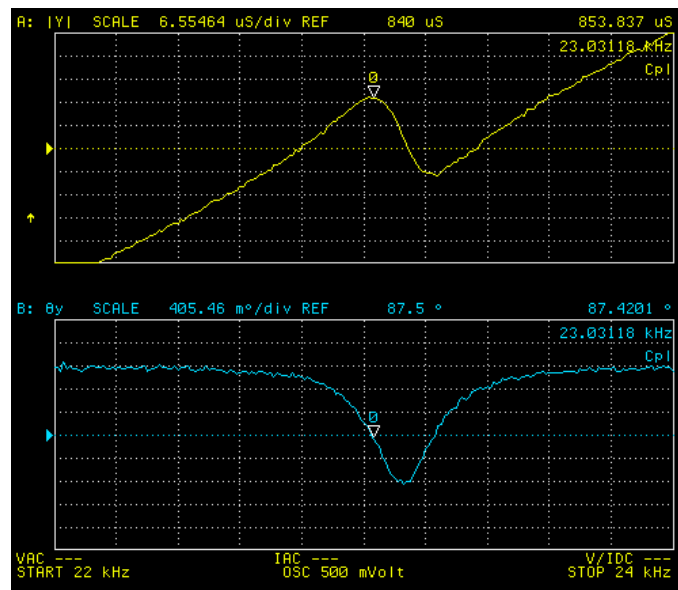


Abbildung 4.56: Gemessene Kurzschluss-Eingangsadmittanz bei Anregung durch eine elektrische Spannung von 0.50 Vrms als Frequenzgang von Betrag und Phase für Torsionsschwingung.

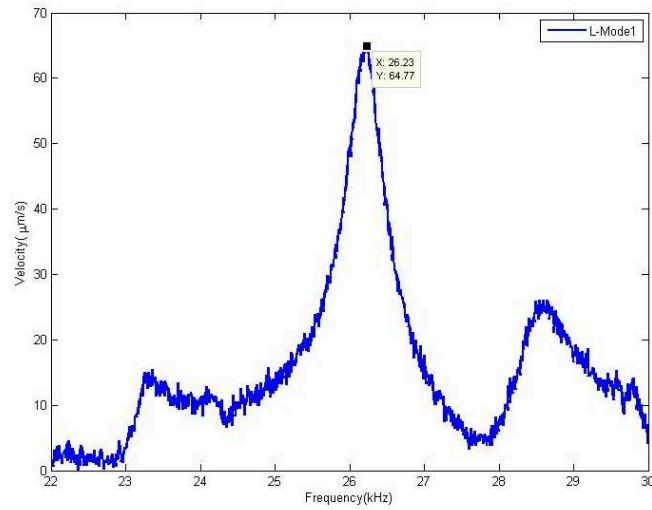


Abbildung 4.57: Gemessene Geschwindigkeit einzelner Statoroberflächenpunkte als Betrags-Frequenzgang für Längsschwingungen.

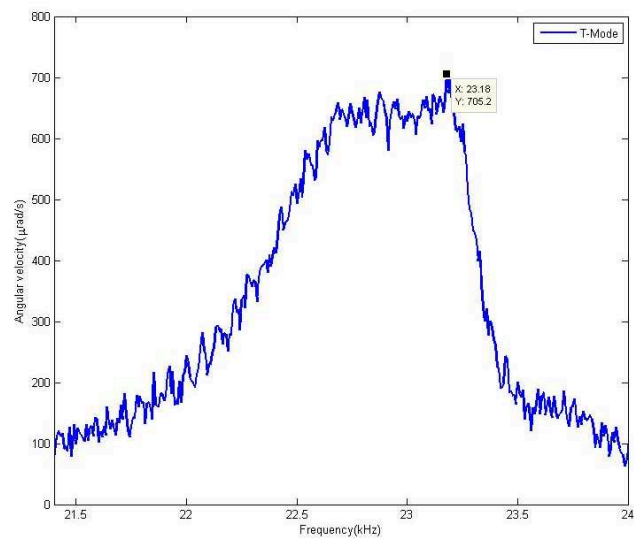


Abbildung 4.58: Gemessene Geschwindigkeit von Statoroberflächenpunkten als Betrags-Frequenzgang für Torsionsschwingung.

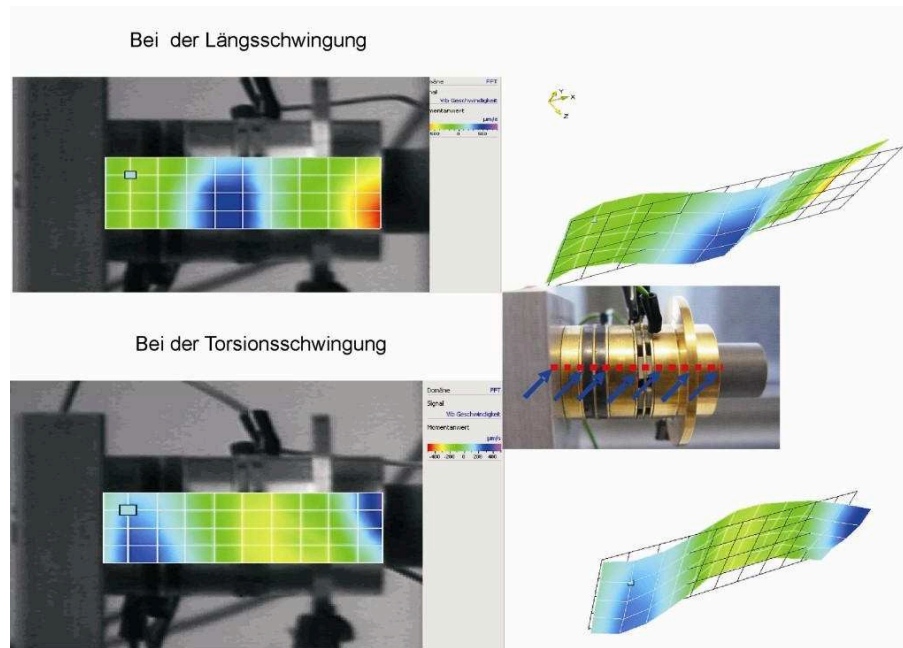


Abbildung 4.59: Amplitudenverteilung der Geschwindigkeit entlang der Längsachse des Stators für Längsschwingung und Torsionsschwingung.

Die laseroptische Vermessung der Schwingungsformen des Stators wurde mit einem PSV 2D-Scanning Laservibrometer gemessen. Die Messergebnisse sind in Abbildung 4.59 und 4.60 dargestellt. Die radiale Geschwindigkeit vordefinierter Punkte auf der Oberfläche, gekennzeichnet in rot, wird nach der eigentlichen Messung eingescannt. Im Einzelnen zeigen die Abbildungen die Werte der Geschwindigkeitsverteilung entlang der Längsachse des Stators und die Amplitudenverteilung der Geschwindigkeit am Umfang des Stators. Aus Abbildung 4.59 ist zu erkennen, dass bei der Längs- und der Torsionsschwingung eine Querkontraktion auftritt. Die Längs- und Torsionsschwingungen aus der Admittanz-Messung werden sehr gut bestätigt. Die longitudinale Schwingungsform wird anhand der gleichmäßigen Geschwindigkeitsverteilung in Abbildung 4.60 ebenfalls verifiziert.

4.3.4 Bewertung und Diskussion

Abschließend sollen sämtliche bisher erzielten Ergebnisse kurz bewertet werden. Die aus der 1-dimensionalen Modellierung erhaltene Geometrie des Stators des vorgestellten hybriden piezoelektrischen Schwingungsmotors wurde zunächst im Rahmen einer 3-dimensionalen FE-Modellierung im Hinblick auf eine möglichst gute Angleichung der tiefsten Eigenfrequenz der Längs- und der Torsionsschwingung des Stators optimiert. Der Einfluss der Piezokeramiken, der Daten des Ausgleichsringes (Dicke, Außenradius und Position) für ein Zusammenfallen der genannten Eigenkreisfrequenzen des Stators wurde sehr detailliert untersucht und klassifiziert.

Die numerischen Ergebnisse der FEM-Rechnung aufgrund der Vorausberechnung im Rahmen einer 1-dimensionalen Theorie bestätigen, dass eine Angleichung der Eigen-

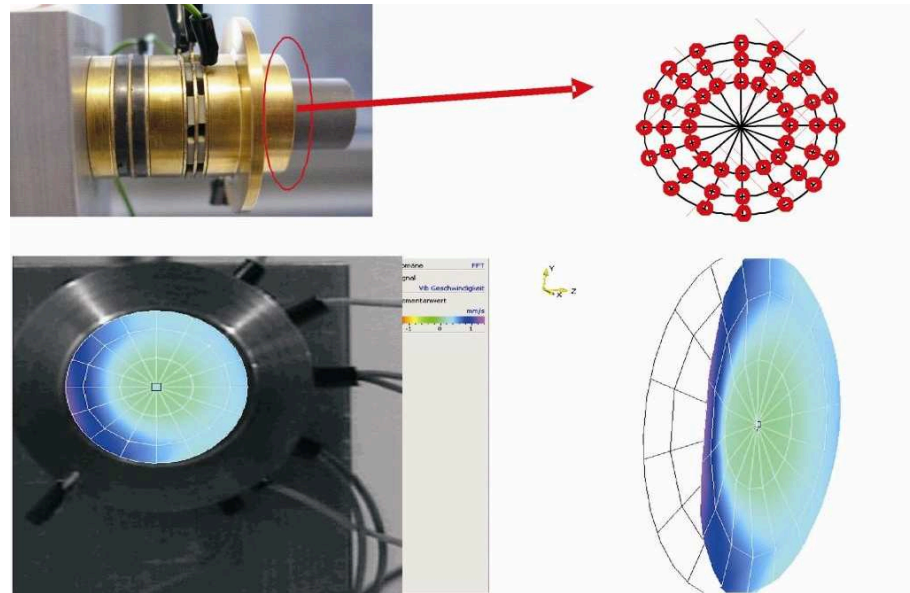


Abbildung 4.60: Amplitudenverteilung der Geschwindigkeit am Umfang des Stators für Längsschwingungen.

frequenzen der Längs- und Torsionsschwingung nahezu perfekt gelingt. Der hergestellte Prototyp nach den Daten des numerisch optimierten Stators zeigt allerdings, dass in der Realität diese perfekten Ergebnisse nicht bestätigt werden können. Die beiden Arten der Messung, eine Admittanzmessung und eine laseroptische Messung, ergeben zwar untereinander eine sehr gute Übereinstimmung, machen aber auch klar, dass es deutliche Abweichungen zum FE-Modell gibt. So besitzt der Prototyp Resonanzfrequenzen der tiefsten Längs- und der tiefsten Torsionsschwingung die um ca. 3 kHz auseinanderfallen. Eine wesentliche Ursache dürften die nicht vollständig ringförmigen Aktorscheiben T-PZT sein. Dadurch wird die Gesamtsteifigkeit des Stators, vor allem die Torsionsteifigkeit, geringer als im FE-Modell. Dennoch ist die Verfeinerung des 1-dimensionalen Modells im Rahmen der FEM-Rechnung mit der resultierenden Optimierung der Statorgeometrie eines hybriden piezoelektrischen Schwingungsmotors von großer Bedeutung.

5 FE-Simulation des Kontaktverhaltens von Stator und Rotor

In diesem Kapitel wird als ein ganz wesentliches Teilproblem für den Betrieb des vorgestellten hybriden Schwingungsmotors eine FE-Modellierung des dynamischen Kontakts zwischen Stator und Rotor des Motors vorgestellt und formuliert. Es werden numerische Kontaktmodelle für den Kontakt sowohl ohne als auch unter Berücksichtigung von geeigneten Reibschichten diskutiert. Insbesondere werden numerische Untersuchungen zum Einfluss von elastischen und viskoelastischen Reibschichten auf Kontaktkräfte, Kontaktdauer und übertragbares mittleres Drehmoment durchgeführt.

5.1 Motivation

Das Arbeitprinzip eines hybriden Schwingungsmotors besitzt vier Phasen, siehe [82], wovon eine besonders wichtig ist, nämlich die Übertragung des antreibenden Drehmoments von den beiden Statoren auf den Rotor durch Synchronisieren einer Normalkraft infolge Vorspannung und Längsschwingungen und einer Tangentialkraft mit konstanter 90° -Phasenverschiebung infolge Torsionsschwingungen der Statoren. Das Drehmoment wird durch Reibkräfte in den Kontaktflächen zwischen Statoren und Rotor übertragen, wodurch letztlich der Rotor angetrieben wird. Deswegen sind die Kontaktflächen und die auftretenden Kontaktvorgänge beim Antreiben des Motors von entscheidender Bedeutung. Um die Gesamtkontaktfläche zu vergrößern, haben Yi et al. [82] einen entsprechenden Motor mit zwei Statoren vorgestellt; auf das Kontaktverhalten wurde jedoch dort noch nicht eingegangen. Es scheint beispielsweise klar, dass beim Antreiben des Rotors in der Kontaktphase Stöße auftreten können. Dadurch sind auf der Kontaktfläche Verschleißerscheinungen zu erwarten, die die Übertragung des antreibenden Drehmoments beeinträchtigen. Die Untersuchung des Kontaktvorganges zwischen Stator und Rotor im Rahmen einer numerischen Simulation in den folgenden Abschnitten des vorliegenden Kapitels soll zum besseren Verstehen der möglichen dynamischen Probleme beitragen.

5.1.1 Kontaktverhalten eines Ultraschallschwingers

Zur Diskussion grundlegender Fragen wurde zunächst ein Prüfstand zum Studium des Kontaktverhaltens eines piezoelektrisch betriebenen Schwingers im Ultraschallbereich aufgebaut, siehe Abbildung 5.1. Ziel war es, den Normalkraftkontakt zwischen Schwinger (Stator) und feststehender Struktur (Rotor) zu veranschaulichen und zu verstehen. Als Aktor des zylindrischen Schwingers aus Bronze wird eine in longitudinaler Richtung

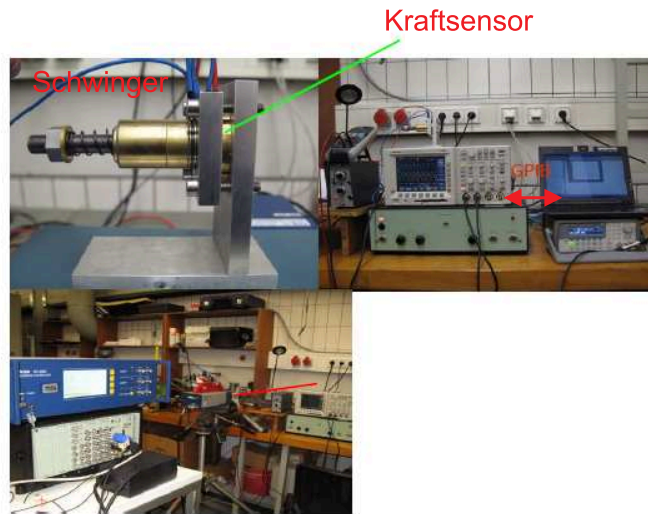


Abbildung 5.1: Prüfstand zum Kontaktverhalten eines Schwingers mit resonanter Anregung.

polarisierte Keramik L-PZT benutzt. Auf einen Ausgleichsring wird zur Vermeidung unerwünschter lokaler Moden des Ausgleichsringes verzichtet, so dass nur die erregte longitudinale Schwingungsform und die auftretenden Kontaktnormalkräfte beobachtet werden.

5.1.1.1 Messungen der Resonanzfrequenzen

Die Messung der Resonanzfrequenz des Schwingers wird mit Hilfe eines HP 4294A - Precision Impedance Analyzer durchgeführt; das entsprechende Messergebnis ist in Abbildung 5.2 aufgeführt. Dem Diagramm (a) ist zu entnehmen, dass ohne Rückwirkung

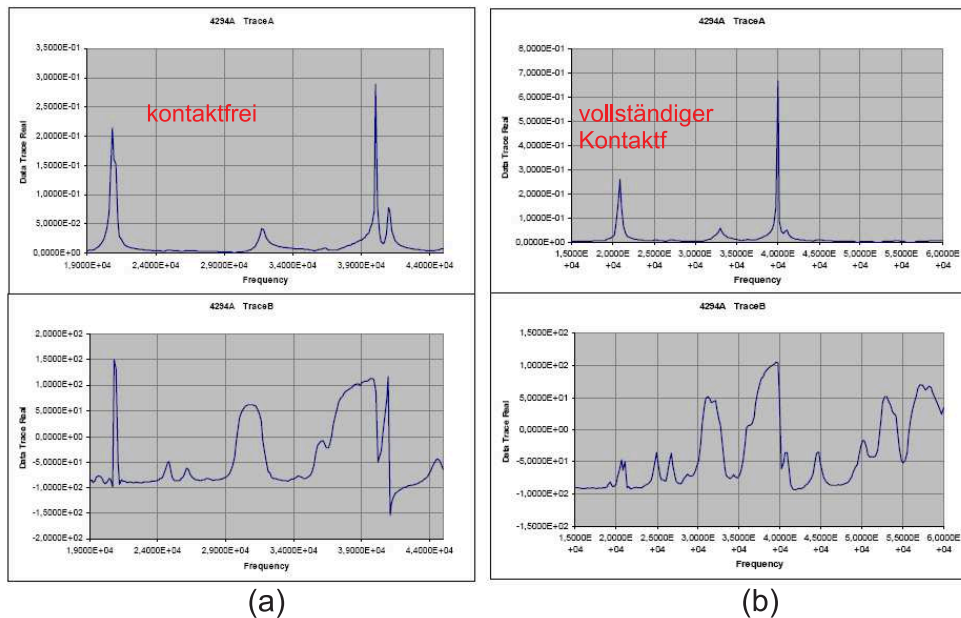


Abbildung 5.2: Frequenzgang des Schwingers: (a) ohne Umgebungskontakt bzw. (b) mit vollständigem Umgebungskontakt.

des Rotors und der Anpresskräfte das Maximum der Admittanz und der zugehörige Phasensprung bei einer Eigenfrequenz des Schwingers hier bei ca. 39.80 kHz auftreten. Durch den Kontakt, vgl. Abbildung 5.2 (b), erhöht sich die Gesamtsteifigkeit des Systems, so dass die Resonanzfrequenz auf ca. 40.20 kHz ansteigt. Mit zunehmender Anpresskraft steigt die Resonanzfrequenz weiter an.

5.1.1.2 Normalkontaktkraft bei Resonanzanregung

Die Resonanzfrequenz des Schwingers ist nach der Messung bekannt. Um das Kontaktverhalten bzw. die Kontaktnormalkräfte zu veranschaulichen, wird der Schwinger im Resonanzbetrieb angeregt. In einem piezoelektrischen Kraftsensor werden die Kontaktnormalkräfte in elektrischen Ladungsgrößen umgewandelt. Das Messergebnis zum Verlauf der Kontaktnormalkraft zusammen mit dem erregenden elektrischen Spannungsverlauf bei der vorliegenden 41.14-kHz-Resonanz ist in Abbildung 5.3 (a) wiedergege-

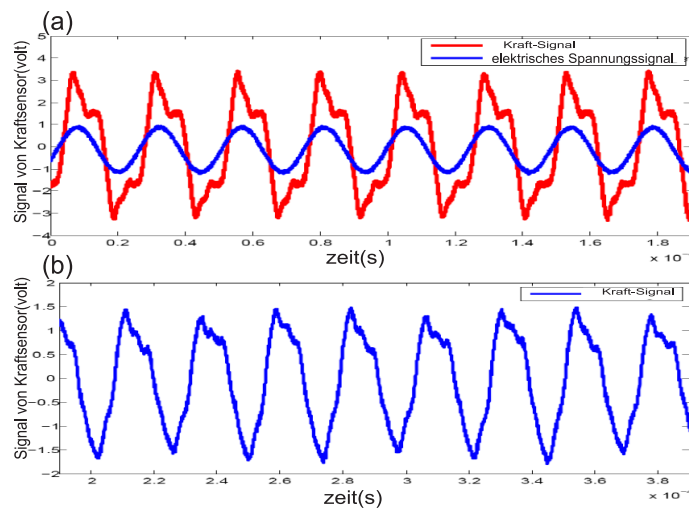


Abbildung 5.3: Gemessene Kontaktnormalkraft: (a) bei 41.14 kHz Resonanzfrequenz bzw. (b) bei 42.78 kHz nahe der Resonanzfrequenz.

ben. Das Maximum des Kraft-Signals ist im Vergleich zum sinusförmigen Spannungssignal infolge der Kontaktvorgänge deutlich gestört. Zum Vergleich wird der Schwinger mit einer Frequenz von 42.78 kHz überkritisch in der Nähe der Resonanz angeregt. Das entsprechende Messergebnis ist in Abbildung 5.3 (b) dargestellt. Die Verzerrung des Signals hat in diesem Fall signifikant gegenüber jener im direkten Resonanzbetrieb abgenommen.

Es kann angenommen werden, dass die auftretende Distorsion des Kraft-Signals ein Kennzeichen des Kontaktverhaltens beim Stoß des Schwingers gegen die ruhende Struktur ist. Daraus folgt, dass die Messung der Kontaktkräfte wichtige Hinweise auch für den hybriden Schwingungsmotor geben könnte, ob Stöße auftreten und wie stark diese sind.

Das Kontaktverhalten des Schwingers bei hoher Frequenz genau zu messen ist allerdings messtechnisch aufwändig; auch eine entsprechende Rechnung ist schwierig, insbesondere dann, wenn nichtlineare Materialeigenschaften z.B für viskoelastische Reibschichten

bei der Modellierung des Kontakts berücksichtigt werden müssen. Deswegen ist es wohl vorteilhaft, Finite-Elemente-Methoden zu verwenden, um das Verständnis für das Kontaktverhalten in derartigen Motoren zu schärfen. Dazu wird im folgenden Abschnitt eine FE-Kontaktmodellierung vorgestellt und entsprechende numerische Untersuchungen zum Kontaktverhalten von Schwinger und Unterlage bei hohen Erregerfrequenzen durchgeführt.

5.2 Kontaktmodellierung eines Stator(L-PZT)-Rotor-Verbundes in ANSYS

Dieser Abschnitt präsentiert ein Kontaktmodell nach der Methode der Finiten Elemente innerhalb des kommerziellen ANSYS 11.0 Programm-Systems. Das verwendete FE-Modell ist 3-dimensional und ist in seiner Anwendung auf den Kontakt zwischen Stator und Rotor eines hybriden piezoelektrischen Schwingungsmotors in Abbildung 5.4 zugeschnitten.

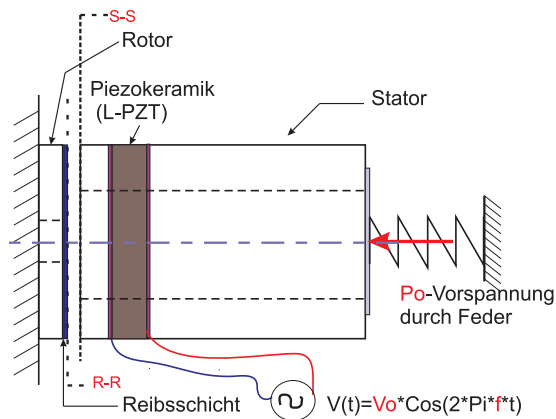


Abbildung 5.4: Skizze des Stator(Schwinger)-Rotor-Kontakt-Systems.

5.2.1 Erstellung des Stator-Rotor-Kontaktmodells

Grundsätzlich setzt sich das Modell aus fünf Hauptkomponenten, wie in Abbildung 5.4 dargestellt, zusammen: Rotor, Piezokeramik L-PZT, Stator, Vorspannfeder und Reibschicht. Das eigentliche FE-Modell in Abbildung 5.5 wird im Preprocessor des Programmsystems erstellt. Mit Hilfe von verschiedenen Modulen werden Geometrie, Vernetzung, Materialeigenschaften, Randbedingungen, Belastung, Kontakteigenschaften und Rechenablauf definiert.

5.2.2 Elementtypen und Vernetzung

Die 3-dimensionalen elastischen Bauteile, d.h. Rotor und Stator als Schwinger, werden mittels 3-dimensionaler sog. Solid45-Elemente modelliert und auch vernetzt, siehe Abbildung 5.6. Das Element wird durch acht Knoten definiert, und pro Knoten existieren drei Freiheitsgrade in Form von Translationen in x -, y - bzw. z -Richtung.

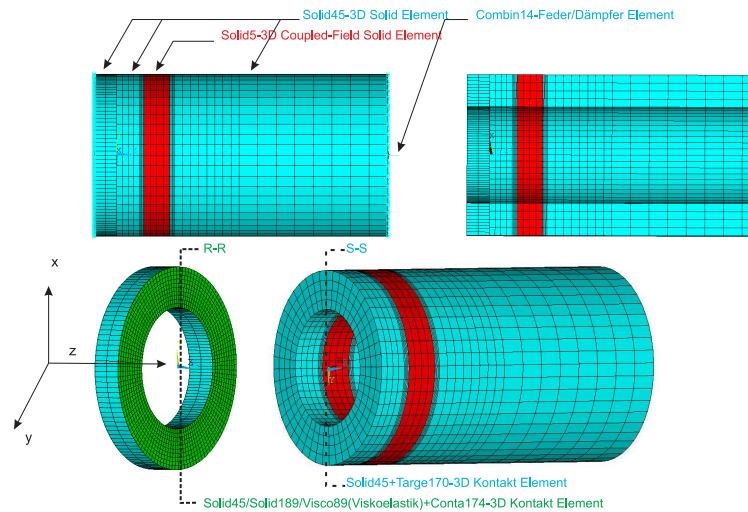


Abbildung 5.5: Aufbau des FE-Stator(Schwinger)-Rotor-Kontakt-Modells.

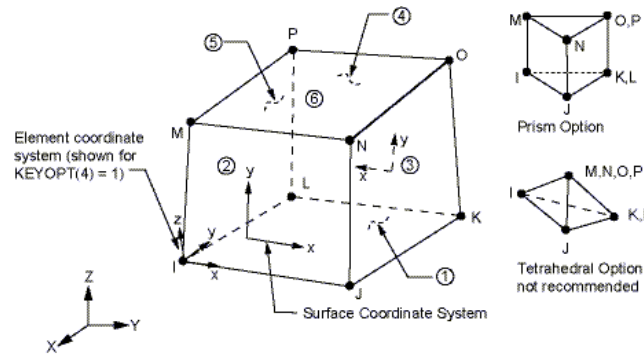


Abbildung 5.6: 3D-8-Knoten solid45-Element [4].

Zur Modellierung der Piezokeramik L-PZT wird das sogenannte Solid5-Coupled-Field-Element verwendet, siehe Abbildung 5.7, das 3-dimensionale thermische, magnetische, elektrische und piezoelektrische sowie strukturelle Felder mit begrenzter Koppelung zwischen den Feldern verarbeiten kann. Das Solid5-Element wird ebenfalls durch acht

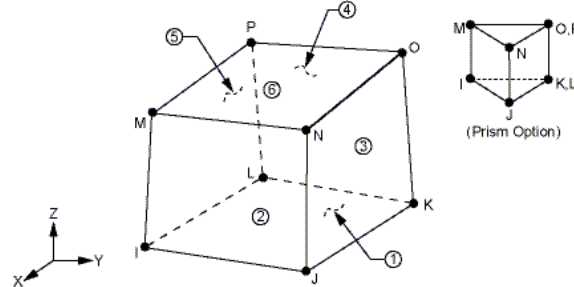


Abbildung 5.7: 3D-8-Knoten Coupled Feld Solid5-Element [4].

Knoten mit bis zu sechs Freiheitsgraden an jedem Knoten definiert, siehe [5].

Beide Elementtypen wurden bereits in Kapitel 3 vorgestellt und auch dort innerhalb der durchgeführten Modalanalyse und harmonischen Analyse verwendet.

Zur FE-Modellierung des eigentlichen Kontaktverhaltens werden das in Abbildung 5.8 dargestellte 3D-Kontakt-Element, das als sogenannte Surface-Surface Conta173 mit

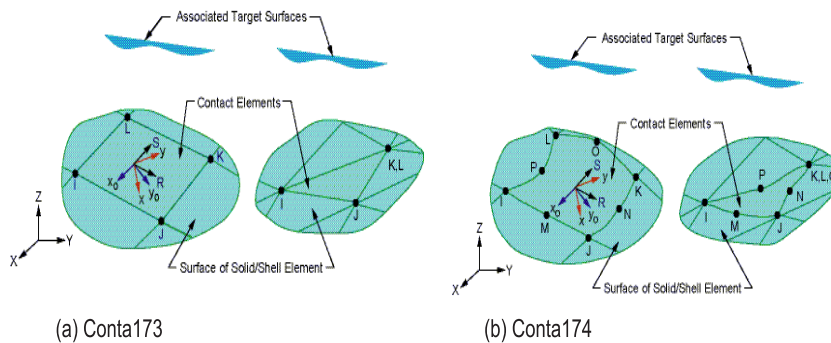


Abbildung 5.8: Surface to Surface-Kontakt mit entsprechendem Target Element [4].

vier Knoten oder Conta174 mit acht Knoten mit entsprechendem 3D-Target-Element Targe170 verwendet. Die beiden Kontakt-Elemente Conta173 und Conta174 werden mit drei Freiheitsgraden (Translation in x -, y - und z -Richtung) definiert. Zur Anpressung des Stators an den Rotor mittels einer Feder wird außerdem das Combin14-Feder-Dämpfer-Element verwendet. Dieses Element wird durch zwei Knoten definiert und kann mit verschiedenen Optionen eingeschaltet werden, um die Wirkungsrichtung einer Feder und eines Dämpfers auszuwählen, je nach Wunsch und Typen von Federn, die man definieren möchte, z.B. Translations- oder Torsionsfeder.

Die viskoelastische Reibschicht wird zunächst durch das 3-dimensionale Visco89-20-Knoten Viscoelastic-Solid-Element definiert und mit den eigentlichen Kontakt-Elementen Conta174 als zusätzliche dünne Schicht abgedeckt, siehe Abbildung 5.10.

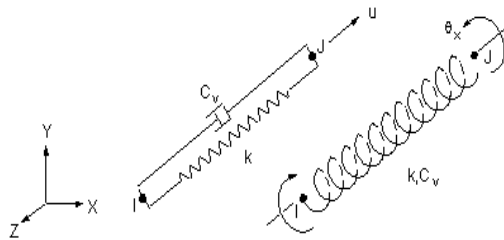


Abbildung 5.9: Combin14: Feder-Dämpfer-Element [4].

Dieses Element wird nur mit drei Freiheitsgraden, d.h. Translationen in x -, y - und z -Richtung, definiert. Die detaillierte Beschreibung der verwendeten Elemente findet man in [3, 6, 35].

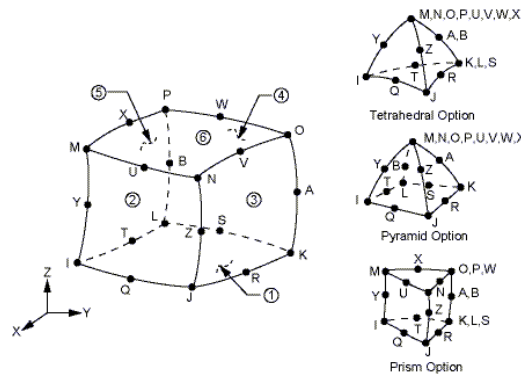


Abbildung 5.10: Visco89 3D-20-Knoten Viscoelastic Solid-Element [4].

Zur **Vernetzung des Geometriemodells** müssen zunächst die Elementattribute festgelegt werden. Die Elementattribute können durch Anwendung der **xATT**-Befehle oder der Kommandos **TYPE**, **MAT**, **REAL** und **ESYS** eingesetzt werden. Danach wird das Modell mit den entsprechenden Elementen und Materialparametern vernetzt. Da in der vorliegenden Arbeit ein 3-dimensionales FE-Modell in der Simulation verwendet werden soll, ist der Befehl **VMESH** zum Generieren von Volumenelementen bei der Vernetzung zu wählen. Damit wird die Gesamtstruktur räumlich diskretisiert, d.h. in Teilbereiche (Elemente) untergliedert.

Zur **Vernetzung der Kontaktflächen** ist zu beachten, dass im Allgemeinen der Kontaktbereich zweier Oberflächen nicht a priori bekannt ist. In einem Kontaktmodell müssen deshalb zuerst die sich berührenden Oberflächen identifiziert werden, wobei eine dieser Flächen als Kontakt- und die andere als Zielfläche bezeichnet wird. Anschließend lässt sich eine Gruppe von Kontaktelementen zwischen diesen beiden Oberflächen mit dem sogenannten **ESURF**-Befehl generieren, wobei die Oberflächen der Strukturteile, die als Komponenten erfasst werden, die Außenflächen von vernetzten Volumina bezeichnen. Die nach außen gerichtete Normale der Kontakt- und Zieloberfläche, die zur Kontaktberechnung erforderlich ist, kann unmittelbar durch das Programm bestimmt werden.

Es ist vorteilhaft, in dem Modell Elemente unterschiedlicher Größe zu verwenden, beispielsweise ist eine feinere Vernetzung in Bereichen komplizierter Geometrie des Modells vorteilhaft oder wenn nichtlineares Verhalten bei großen Verformungen oder in Kontaktbereichen erwartet wird.

5.2.3 Randbedingungen und Belastungen

Kräfte und Verschiebungen können allgemein nur durch Knotenkräfte und Knotenverschiebungen in das FE-Netz eingeleitet werden. Durch das sogenannte Combin14-Feder-Dämpfer-Element erfolgt das Eingeben der Vorspannung am rechten Rand des Stators, da sämtliche Knoten dort mit einem sogenannten Pilot-Knoten gebunden sind. Die Federsteifigkeit wird als eine Konstante gewählt, wobei die Vorspannung durch die vorgegebene Verschiebung eines entsprechenden Knotens des Verbindungselements variiert werden kann.

Die linksseitige Randbedingung des Rotors wird gemäß Abbildung 5.4 eingegeben. Sämtliche Knoten werden dort mit einem Pilot-Knoten verknüpft und ihre Bewegung wird durch diesen Pilot-Knoten vorgegeben. Da diese Seite des Rotor starr eingespannt ist, werden alle möglichen Freiheitsgrade des Pilot-Knotens null gesetzt.

Zur Anregung der Piezokeramik wird die durch den Benutzer zu definierende Zeitfunktion entweder in der Form

$$V(t) = V_0 \sin(2\pi \times f_R \times t) \quad (5.1)$$

oder

$$V(t) = V_0 \cos(2\pi \times f_R \times t) \quad (5.2)$$

im ANSYS-Parameter-Modul > Function > Define/Edit festgelegt, wobei diese Funktion als elektrische Randbedingung für alle Knoten auf den Elektroden der Piezokeramik eingegeben wird. Hierbei sind V_0 die Amplitude der elektrischen Spannung, f_R die Erregerfrequenz und t die Zeit.

5.2.4 Gleichungslösung

Aus den definierten Daten, Elementtypen, Materialeigenschaften, Materialgesetz, Randbedingungen und Belastungen des FE-Modells wird die zugehörige Gesamtsteifigkeitsmatrix erstellt. Die Lösung des entsprechenden Gleichungssystems wird in üblicher Weise bei Verwendung kommerzieller FE-Programme von einem bereit gestellten Lösungsalgorithmus (Solver) übernommen. Die Knotenverschiebungen sowie Dehnungen in jedem bestimmten Zeitschritt beziehungsweise eines bestimmten Zeitpunktes werden vom beschreibenden Differenzialgleichungssystem für das dynamische Knotengleichgewicht mit Hilfe des Newmarkschen Integrationsschemas, siehe [10], berechnet.

Die linearen, algebraischen Gleichungssysteme können mittels einfacher Wavefront-Solver, siehe [36], gelöst werden, während zur Lösung bei Nichtlinearitäten, z.B. in Kontaktproblemen, iterative Lösungsmethoden benötigt werden. Eine iterative Lösungsmethode, die im Programmsystem ANSYS implementiert ist, ist das sogenannte Newton-Raphson-Verfahren. Bei diesem Verfahren werden die inneren Elementlasten bei iterativ aktualisiertem Verschiebungsvektor beziehungsweise einer darauf beruhenden Tangentmatrix gemäß den aufgebrachten Lasten approximiert, bis ein Konvergenzkriterium erfüllt ist [10].

5.2.5 Prinzipieller Ablauf der Kontaktberechnung

Nach diesen Vorbereitungen ist man in der Lage, auf der Basis von FE-Methoden die Vorgänge in der Kontaktzone des Stator/Rotor-Verbundes und deren Einfluss auf das Betriebsverhalten des Motors zu untersuchen. Wie bereits festgestellt, sind Kontaktprobleme grundsätzlich nichtlineare Probleme. Dabei wird bei FE-Methoden ein Kontakt stets über Randbedingungen formuliert. Die entsprechende Randbedingung ist aktiv, wenn ein Kontakt hergestellt ist. Während Kontaktflächen sich separieren, ist die Kontaktbedingung aufgehoben und die Randbedingung wird deaktiviert. Bei der Aktivierung und Deaktivierung von Randbedingungen wird die zugehörige Steifigkeitsmatrix

verändert, woraus sich die Nichtlinearität ergibt. Der Rechenvorgang zur Kontaktberechnung für ein Kontaktknotenpaar wird durch den Ablaufplan gemäß Abbildung 5.11 wiedergegeben. Der Kontaktstatus wird dabei in jedem Iterationsschritt über-

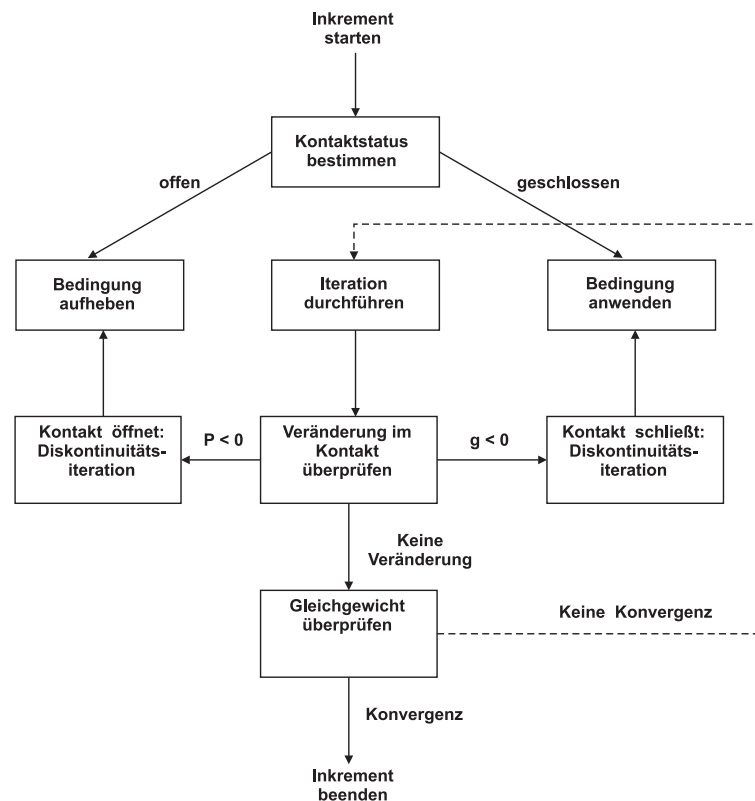


Abbildung 5.11: Ablaufdiagramm der Kontaktberechnung [15].

prüft, damit die Kontaktbedingung für offenen Kontakt deaktiviert beziehungsweise für geschlossenen Kontakt aktiviert wird. Sodann wird – wenn erforderlich – die Änderung des Kontaktstatus vorgenommen. Wenn die Pressung p negativ ist, öffnet sich der Kontakt und die Kontaktbedingung wird aufgehoben. Während die Abstandsfunktion g aus Kapitel 2 kleiner als null ist, schließt sich der Kontakt und die Kontaktbedingung ist aktiv. Die Iteration wird erneut durchlaufen und das Modell für den neuen Kontaktstatus aktualisiert [15].

5.2.6 Kontaktalgorithmen

Kontakt kann in verschiedenen Detailgraden modelliert werden. Jede höhere Stufe erfordert mehr Rechenaufwand und liefert als Gegenleistung tendenziell bessere Genauigkeit der entsprechenden Ergebnisse. Grundsätzlich können implementiert werden:

- Kontaktart Knoten-Knoten (Node-to-Node),
- Kontaktformulierung Knoten-Oberfläche (Node-to-Surface),

- Kontakt zwischen zwei Oberflächen (Surface-to-Surface).

Details sind in [4] zu finden.

ANSYS 11.0 bietet verschiedene Möglichkeiten zur Lösung von Kontaktproblemen. In der vorliegenden Arbeit wird ausschließlich das 3D-mit-20-Knoten- Oberfläche zu Oberfläche (Surface-to-Surface)-Kontaktelement verwendet. Dabei können folgende Kontaktalgorithmen in die Berechnung einbezogen werden:

- Penalty Verfahren, das mit einem Penalty-Parameter arbeitet, der als Feder identifiziert werden kann. Bei dem Verfahren ist Durchdringung erlaubt. Zur Benutzung des Verfahrens ist die Keyoption (KEYOPT(2) = 1) einzuschalten.
- Lagrangesche-Multiplikatoren-Verfahren. Bei ihm werden die Kontaktkräfte als neue zusätzliche Unbekannte in die Systemsteifigkeitsmatrix eingeführt. Zur Aktivierung dieses Verfahrens schaltet man die Keyoption (KEYOPT(2) = 4) ein.
- Augmented Lagrange Verfahren (default) (KEYOPT(2) = 0). Hierbei handelt es sich um eine Kombination aus den beiden vorherigen Verfahren, wobei die Lagrangeschen Multiplikatoren nicht variiert werden, sondern durch Uzawa Algorithmus (siehe [81]) algorithmisch aktualisiert werden.
- MPC Verfahren (KEYOPT(2) = 2). Dieses Verfahren wird nur beim gleichzeitigem Auftreten von Kontakt und weiteren kinematischen Randbedingungen oder Kopplungen an den Kontaktknoten verwendet.

Hier wird ausschließlich das Augmented Lagrange Verfahren verwendet.

5.2.7 Bewegungsgleichungen

Die theoretischen Grundlagen zur Kontaktmodellierung und zur eigentlichen Kontaktdynamik, die hier im Rahmen eines Augmented Lagrange Verfahrens behandelt wird, wurden in Abschnitt 2.4 behandelt. Die Theorie viskoelastischer Körper, die für die Modellierung realitätsnaher Reibschichten von Bedeutung ist, wurde in Abschnitt 2.5 erörtert.

Der konkrete Aufbau der resultierenden Bewegungsgleichungen ist natürlich unter Berücksichtigung des Stator/Rotor-Kontaktes komplizierter als in Kapitel 4 bei der Modalanalyse bzw. harmonischen Analyse des Stator-Verbundes. Unter Berücksichtigung des Kontakts können die maßgebenden Systemgleichungen in Matrix-Schreibweise

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{uu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\varphi} \\ \ddot{\mathbf{F}}_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{\mathbf{F}}_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\varphi} & \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{K}_{\varphi u} & -\mathbf{K}_{\varphi\varphi} & 0 \\ \mathbf{R}_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \varphi \\ \mathbf{F}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{Q} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

angegeben werden [19]. Die auftretenden Matrizen sind aus Kapitel 3 weitgehend bekannt. Der Zusatz \mathbf{P} erfasst die Vorspannkräfte, die Spaltenmatrix \mathbf{F}_C steht für die

Lagrangeschen Multiplikatoren im Sinne entsprechender Kontaktnormal- und Kontaktschubspannungen, während \mathbf{R}_1 und \mathbf{R}_2 die Beiträge der Kontaktnormal- und Kontakttangentialspannung in der globalen Steifigkeitsmatrix sind. Abschließend ist festzuhalten, dass zur numerischen Simulation Dämpfung berücksichtigt werden muss, um den Übergang zu stationären Schwingungszuständen zu beschleunigen. Dazu wird hier die sogenannte Rayleighsche Dämpfung

$$\mathbf{C}_d = \alpha \mathbf{M}_{uu} + \beta \mathbf{K}_{uu} \quad (5.4)$$

in das Gleichungssystem (5.3) eingeführt [19].

5.3 Simulationsergebnisse

5.3.1 Kontaktmodell Flexibler Stator mit L-PZT-flexibler Rotor

Hier wird das Stator-Rotor-Kontaktsystem aus Abbildung 5.5 im Hinblick auf den Einfluss von Vorspannkräften, Erregerspannung und -frequenz auf die resultierende Kontaktnormalkraft, die Kontaktdauer, etc., zwischen Stator und Rotor untersucht.

Zwischen Stator und Rotor existiert in dieser Simulation keine Reibschicht. Der Stator mit integriertem Aktor L-PZT wird durch die Vorspannkraft der Feder direkt gegen den elastischen Körper des Rotors gedrückt. Für die Berechnung des dynamischen Kontaktverhaltens kann eine transiente Simulation durchgeführt werden. Es wird eine Zeitdauer $t_{end} = 800 \mu s$ gewählt. Die Resonanzfrequenz des Schwingers wurde vorher mittels Modalanalyse in ANSYS berechnet und als Frequenz der elektrischen Erregerspannung verwendet.

5.3.1.1 Einfluss der Vorspannung

Abbildung 5.12 zeigt dynamische Kontaktkraftverläufe als Funktion der Vorspannung, ausgehend von der rein statischen Vorspannung zu Beginn bei $t = 0$. Dabei ist die zugehörige Eigenfrequenz von 41.51 kHz – basierend auf Frei-Frei-Randbedingungen des Stators – als Erregerfrequenz verwendet worden. Um im interessierenden Frequenzbereich gleichwertige, konstante Dämpfungsgrade $\xi_1 = \xi_2 = \xi = 0.1-0.5 \%$ zu sichern, müssen die Rayleigh-Dämpfungswerte α und β innerhalb des ANSYS-Programmsystems die Voraussetzungen

$$2\xi_1\omega_1 = \alpha + \beta\omega_1^2, \quad (5.5)$$

$$2\xi_2\omega_2 = \alpha + \beta\omega_2^2 \quad (5.6)$$

erfüllen [12, 16]. Hierbei wirkt der α -Anteil vorwiegend im niedrig-frequenten Bereich und der β -Anteil dämpft primär hohe Frequenzen [12]. Es ist deutlich zu erkennen, dass der Kontaktstatus eine Funktion des Vorspannungsbetrages ist. Wenn die verwendete Vorspannung zu groß ist, tritt kein Abheben zwischen Stator und Rotor mehr auf. Abheben ist für das Arbeitsprinzip eines hybriden piezoelektrischen Schwingungsmotors notwendig, um Verluste während der Übertragung des Drehmoments auf den Rotor zu vermeiden. Andererseits ist eine möglichst große Vorspannung zur Vergrößerung des übertragbaren Drehmoments erforderlich.

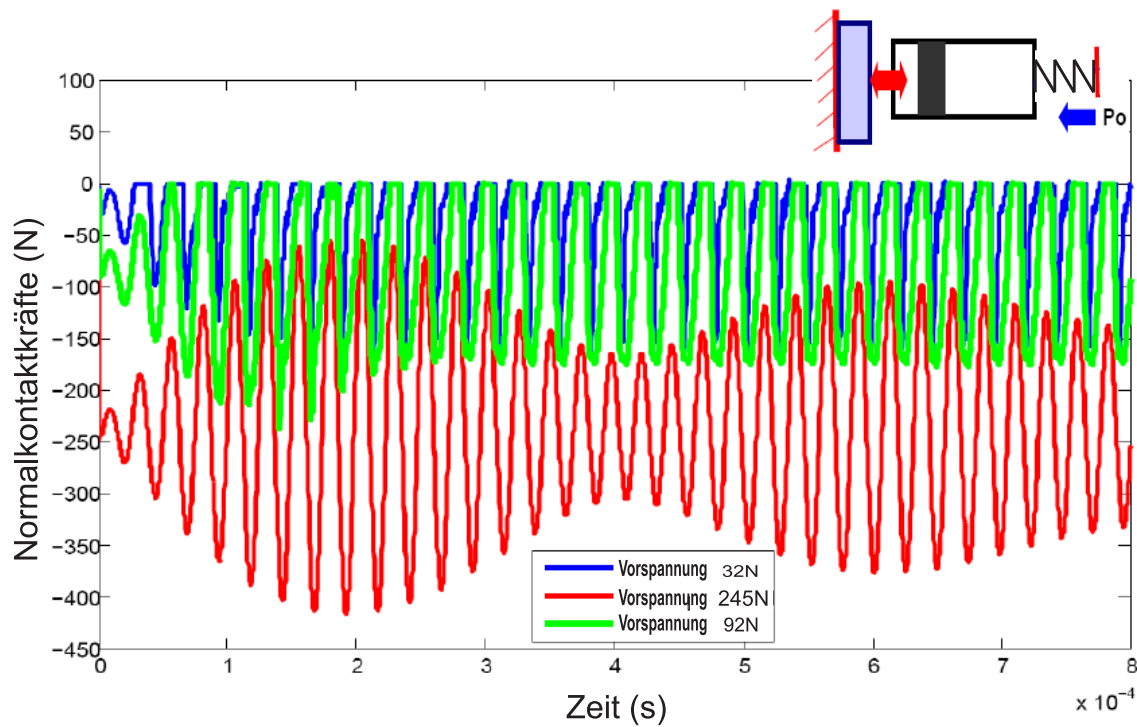


Abbildung 5.12: Kontaktkraft bei unterschiedlichen Vorspannungen.

Die Kontaktdauer wird ebenfalls von der Vorspannung beeinflusst. Abbildung 5.13 stellt die Abhängigkeit der Kontaktdauer von der Anpresskraft dar und weist nach, dass sich

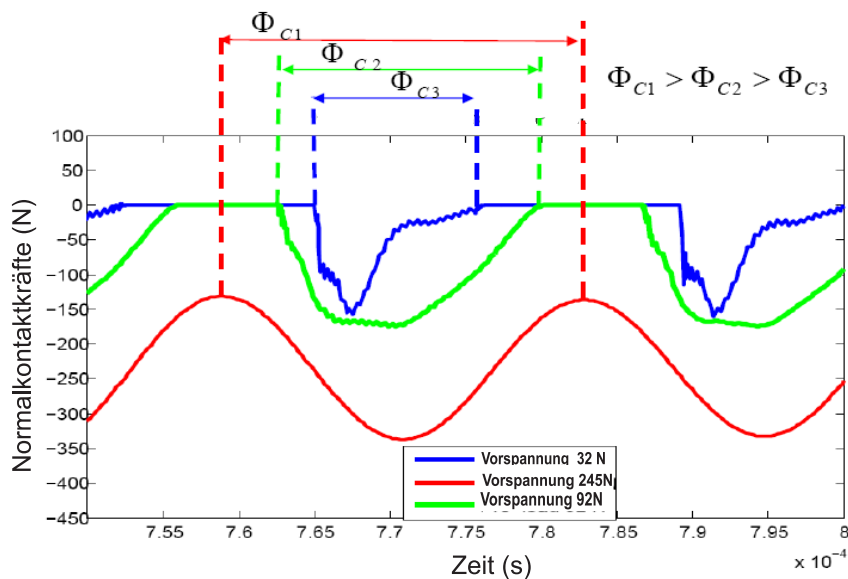


Abbildung 5.13: Kontaktdauer als Funktion der Vorspannung.

mit zunehmender Vorspannung die Kontaktdauer bis zum Maximalwert $\Phi = 2\pi/\omega$ erhöht, ab dem kein Abheben mehr auftritt. Wenn zu wenig Vorspannung verwendet wird, vgl. Abbildung 5.13 mit 32 N Vorspannung, wird die Kontaktdauer sehr kurz.

Ergänzend wird der Vorgang des Abhebens und auch längerer Trennung von Stator und Rotor im Verlauf der Zeit (bei $t = 0$ beginnend) in Abhängigkeit von der Vorspannung in Abbildung 5.14 dokumentiert. Bei großer Vorspannung (hier 245 N) liegt

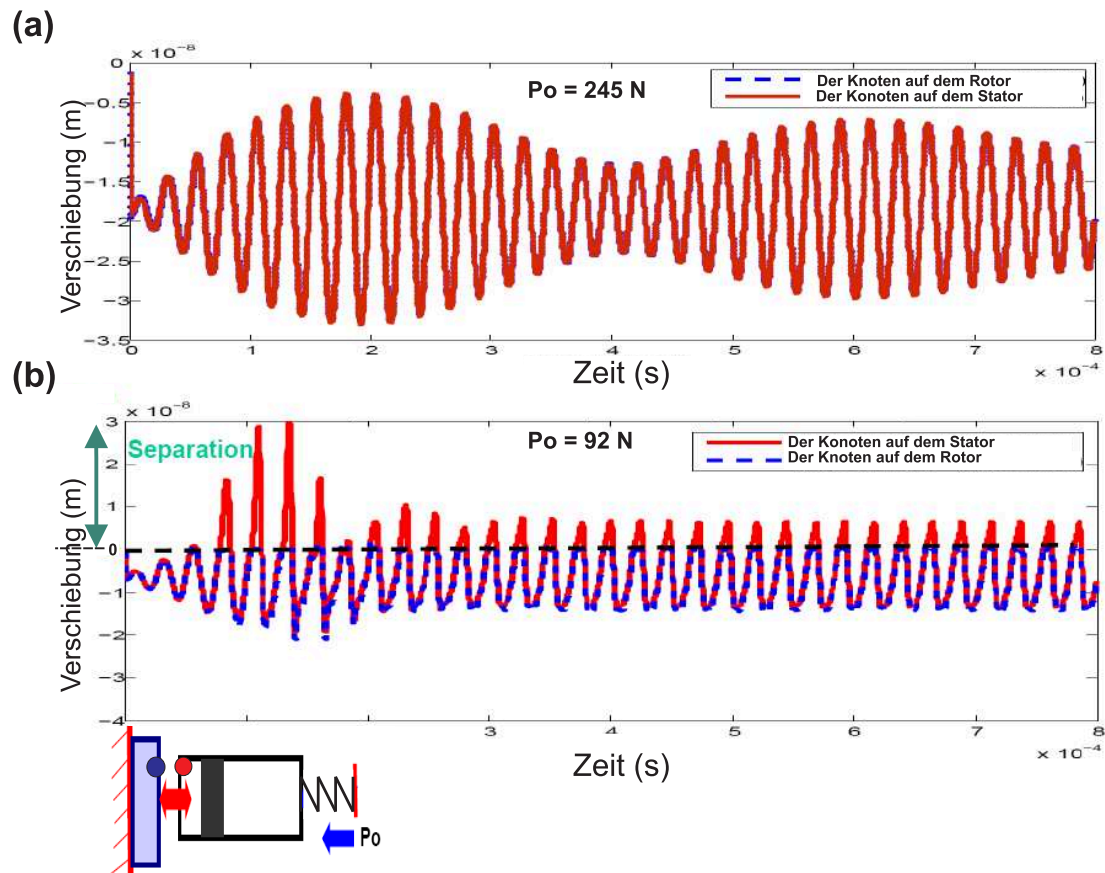


Abbildung 5.14: Separation Stator/Rotor bei unterschiedlicher Vorspannung.

permanenter Kontakt von Stator und Rotor vor: Die Verschiebungen entsprechender Oberflächenpunkte stimmt zu jedem Zeitpunkt überein. Bei kleinerer Vorspannung (hier 92 N) tritt nach kurzer Zeit eine Separation von Stator und Rotor auf.

5.3.1.2 Einfluss der Erregerfrequenz

Hier werden die Vorspannung und die Amplitude der elektrischen Spannung konstant gehalten. Die Erregungsfrequenzen werden von 36 bis 47 kHz variiert, um deren Einfluss auf das Kontaktverhalten, nämlich Kontaktkraft (von Beginn an) und Kontaktdauer (in einem charakteristischen Zeitintervall), zu erkennen, siehe Abbildung 5.15 und 5.16.

Bei Erregung des Stators mit 41.51 kHz, die seiner Eigenfrequenz entspricht, ist die Amplitude der Kontaktnormalkraft deutlich am größten. Im Vergleich zu einer Erregung mit anderen Frequenzen ist die Form der Kontaktkraft bei Resonanzerregung ausgeprägt stoßartig. Die Kontaktdauer ist in etwa umgekehrt proportional zur Erregerfrequenz.

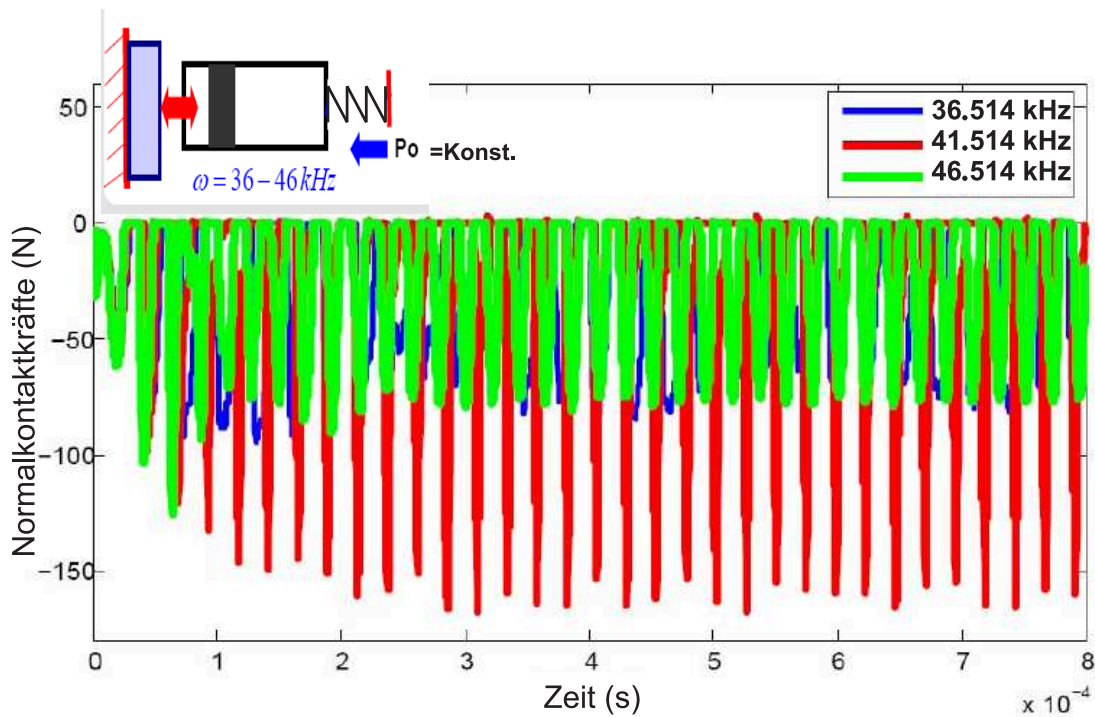


Abbildung 5.15: Kontaktkraft bei verschiedenen Erregerfrequenzen.

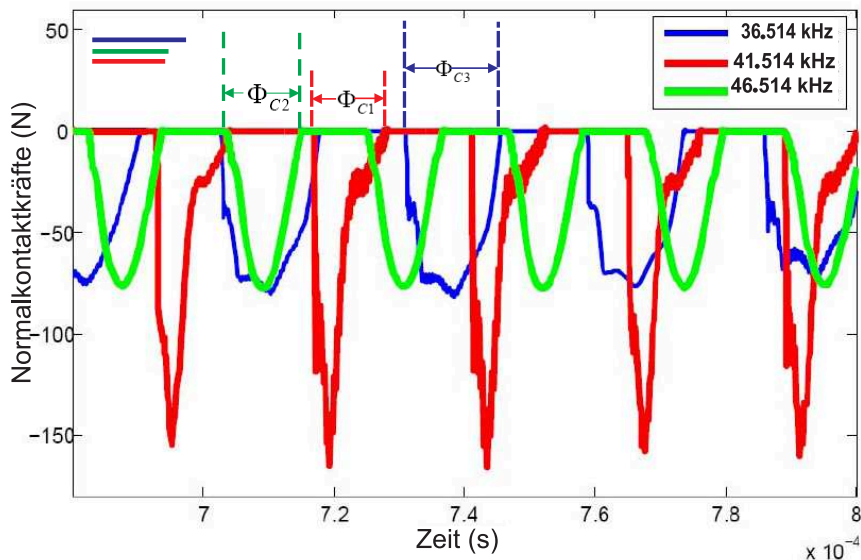


Abbildung 5.16: Veranschaulichung der Kontaktdauer als Funktion der Erregerfrequenz.

5.3.1.3 Einfluss der elektrischen Erregerspannung

Der Stator wird dabei unter konstanter Vorspannung und konstanter Erregerfrequenz – in diesem Falle unter Resonanzbedingungen – betrachtet. Die Ergebnisse sind in Abbildung 5.17 und 5.18 veranschaulicht. Je stärker die elektrischen Erregungen, insbesondere bei einer Größe von 150 und 200 Volt(Peak), um so stärker ausgeprägt sind

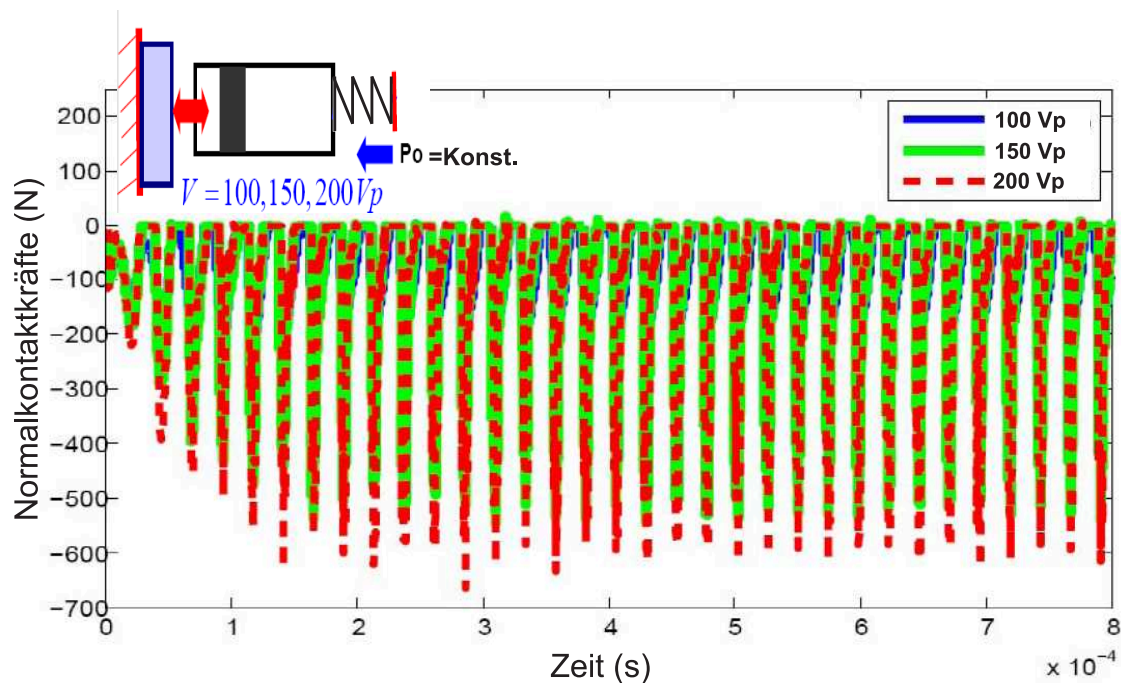


Abbildung 5.17: Kontaktkraft bei unterschiedlicher Spannungsamplitude.

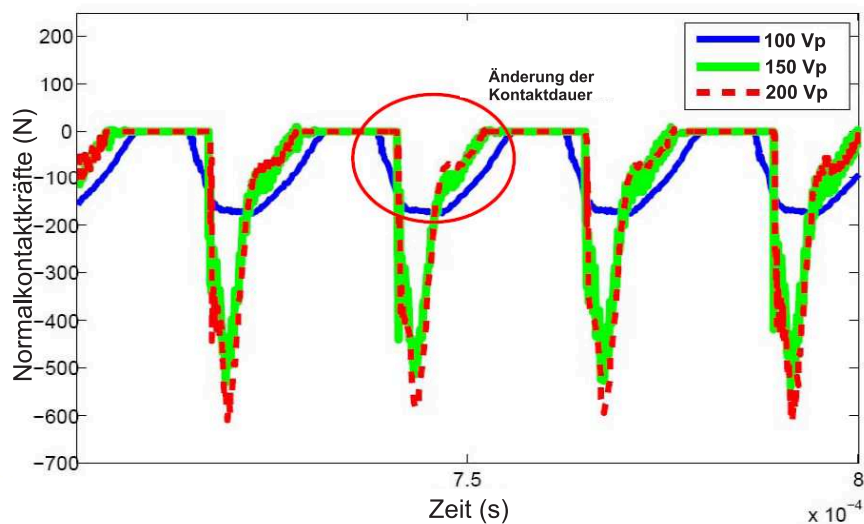


Abbildung 5.18: Kontaktdauer als Funktion der elektrischen Spannungsamplitude.

die zugehörigen Kontaktnormalkraftverläufe wieder stoßartig mit deutlich sichtbaren Peaks.

Die Kontaktdauer ändert sich mit Veränderung der Amplitude der elektrischen Erregerspannung ebenfalls deutlich. Je höher die Spannung ist, um so kürzer wird natürlich die Kontaktdauer. Die Zuordnung von Kontaktdauer und Amplitude der Erregerspannung ist sehr ausgeprägt und kann zur Kontrolle der Kontaktdauer verwendet werden.

5.3.2 Einfluss einer elastischen Reibschicht auf das Kontaktverhalten

In diesem Unterabschnitt wird eine elastische Reibschicht im FE-Kontaktmodell, vgl. Abbildung 5.5, berücksichtigt. Die verwendete elastische Reibschicht besteht aus -Ekonol/PTFE. Die Materialeigenschaften von Ekonol/PTFE ($E = 0.7 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$, $\nu = 0.33$, $\rho = 1950 \text{ kg/m}^3$) werden aus Tabelle 1 in [19] eingelesen. Transiente Simulationen für zwei verschiedene Dicken der Reibschicht werden durchgeführt. Vorspannung, Erregerfrequenz und Amplitude der elektrischen Spannung werden konstant gehalten. Abbildung 5.19 zeigt die Ergebnisse. Man erkennt, dass die elastische Reibschicht aus

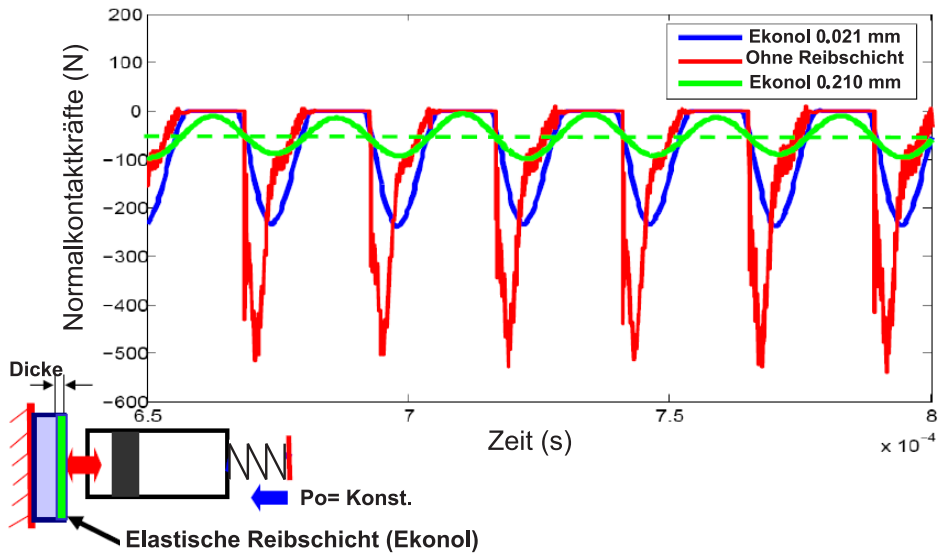


Abbildung 5.19: Einfluss einer elastischen Reibschicht auf die Kontaktnormalkraft.

Ekonol/PTFE sowohl auf die Form der Kontaktkraft als auch auf die Kontaktdauer einwirkt. Im Vergleich zu dem Fall, dass keine Reibschicht vorliegt, ist die Stoßform bei elastischer Reibschicht (0,021 mm Dicke) nicht mehr so ausgeprägt: der Peak wird reduziert. Die Dicke der Reibschicht beeinflusst die Kontaktdauer ganz wesentlich. Wenn sie relativ dick wird (z.B. 0,210 mm), ist die entsprechende Kontaktdauer $\Phi = 2\pi/\omega$ und es tritt kein Abheben mehr auf. Da das völlige Verschwinden des Abhebens beim Betrieb des hybriden Schwingungsmotors unerwünscht ist, kommt der Wahl einer geeigneten Reibschichtdicke eine wichtige Bedeutung zu. Bei Verwendung einer elastischen Reibschicht ist jedoch die Beschränkung der zulässigen Vorspannung zu beachten. Das übertragbare Drehmoment vom Stator auf den Rotor ist ja im Wesentlichen proportional zur Kontaktnormalkraft, die eben von der Vorspannung bestimmt wird. Deswegen soll die zulässige Vorspannung möglichst groß sein, um auch das übertragbare Drehmoment möglichst groß zu machen.

5.3.3 Einfluss einer viskoelastischen Reibschicht auf das Kontaktverhalten

Um die zulässige Vorspannung, die das übertragbare Drehmoment des Motors bestimmt, vergrößern zu können, kann man anstatt elastischer besser viskoelastische Reibschichten einsetzen. Im vorliegenden Unterabschnitt soll deren Einfluss untersucht und verstanden werden.

Die Eigenschaften viskoelastischer Körper und ihre mathematische Beschreibung wurde bereits ausführlich in Abschnitt 2.3 diskutiert. Darauf wird an dieser Stelle verwiesen.

ANSYS 11.0 bietet die Möglichkeit, Materialmodelle der Hyperelastizität, des Kriechens und der Viskoelastizität zu modellieren. In ANSYS wird die Spannungsfunktion zur Charakterisierung viskoelastischer Materialien durch das verallgemeinerte Maxwell-Modell repräsentiert. Diese wird dabei in der integralen Form

$$\sigma = \int_0^t 2G^E(t-\tau) \frac{de}{d\tau} d\tau + \mathbf{I} \int_0^t K(t-\tau) \frac{d\Delta}{d\tau} d\tau \quad (5.7)$$

beschrieben [4]. Hierin bezeichnen σ die Cauchy-Spannung, e die deviatorische Dehnung, Δ die volumetrische Dehnung, $G^E(t)$ die Kernfunktion der Schubrelaxation, $K(t)$ die Kernfunktion der Bulkrelaxation, t die aktuelle Zeit, τ die frühere Zeit und \mathbf{I} den Einheitstensor.

In der vorliegenden Arbeit wird das Visco89-Element, ein 3-dimensionales Viscoelastic Solid-Element, verwendet. Das zugehörige Materialgesetz wird durch Gleichung (5.7) repräsentiert mit den Kernfunktionen (gemäß [4])

$$G^E(\zeta) = G_\infty^E + \sum_{i=1}^{n_G} G_i^E e^{(-\zeta/\lambda_i^G)}, \quad K(\zeta) = K_\infty + \sum_{i=1}^{n_K} K_i e^{(-\zeta/\lambda_i^K)}, \quad (5.8)$$

worin

$$G_i^E = C_i(G_0^E - G_\infty^E), \quad K_i = D_i(K_0 - K_\infty) \quad (5.9)$$

zu nehmen ist.

Zur FE-Modellierung viskoelastischen Materials in ANSYS müssen insgesamt 95 Koeffizienten angegeben werden. Die ersten 45 Koeffizienten beschreiben thermische Effekte und werden in der vorliegenden Arbeit vernachlässigt. Die restlichen 50 Koeffizienten können mit Hilfe der Gleichungen (5.8) im Zusammenhang mit der Relaxationsfunktion des ausgewählten viskoelastischen Modells in Boltzmannscher Integralform bestimmt werden, z.B. hier für ein Kelvin-Voigt-Modell. Die Relaxationsfunktion eines solchen Modells lautet

$$G(t) = E + \eta \delta(t). \quad (5.10)$$

Hierbei bezeichnen E , η und $\delta(t)$ die Federkonstante, die Dämpfungskonstante bzw. die Diracsche Deltafunktion. Der folgende Ausdruck

$$\tilde{G}(t) = E + (E_0 - E)e^{-t/T} \Leftrightarrow E \left(1 + \left(\frac{E_0}{E} - 1\right)e^{-t/T}\right) \quad (5.11)$$

wird verwendet, um die Relaxationsfunktion mit der Diracschen Deltafunktion zu approximieren [4], wobei E_0 ein Anfangswert der Federkonstante ist. Unter der Beziehung

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} G(t)dt &= \int_0^{\infty} \tilde{G}(t), \\ \int_0^{\infty} (E + \eta\delta(t))dt &= \int_0^{\infty} E(1 + (\frac{E_0}{E} - 1))e^{-t/T} dt \end{aligned} \quad (5.12)$$

verschwindet $\delta(t)$ nach der Integration. Damit ergibt sich

$$T_1 = \left(\frac{\eta}{E}\right) = T\left(\frac{E_0}{E} - 1\right). \quad (5.13)$$

Damit wird $T = T_1/(\frac{E_0}{E} - 1)$ in Gleichung (5.11) eingesetzt. Dabei wird in dieser Arbeit $(\frac{E_0}{E} - 1) = 8 \times 10^9$ gewählt (nach [65]), womit sich (die Einzelheiten der Rechnung werden hier nicht ausgeführt) zunächst

$$\tilde{G}(t) = E + ((8.000000001 \times 10^9)E - E)e^{-t/(1.25 \times 10^{-10}T_1)} \quad (5.14)$$

als angenäherte Relaxationsfunktion des Kelvin-Voigt-Modells zur Nutzung in ANSYS im Zusammenhang mit den Gleichungen (5.8) ergibt. Damit sind die Kernfunktion der Schubrelaxation und die Kernfunktion der Bulkrelaxation über

$$\begin{aligned} G^E(t) &= \frac{\tilde{G}(t)}{2(1+\nu)} \\ &= \frac{E}{2(1+\nu)} + \left[\frac{(8.000000001 \times 10^9)E}{2(1+\nu)} - \frac{E}{2(1+\nu)} \right] e^{-t/(1.25 \times 10^{-10}T_1)}, \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} K(t) &= \frac{\tilde{G}(t)}{3(1-2\nu)} \\ &= \frac{E}{3(1-2\nu)} + \left[\frac{(8.000000001 \times 10^9)E}{3(1-2\nu)} - \frac{E}{3(1-2\nu)} \right] e^{-t/(1.25 \times 10^{-10}T_1)} \end{aligned} \quad (5.16)$$

auszudrücken. Die erhaltenen Beziehungen werden mit den Gleichungen (5.8) verglichen, woraus

$$\begin{aligned} G_{\infty}^E &= \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad C_1 = 1, \quad G_0^E = G_1^E = \frac{(8.000000001 \times 10^9)E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda_1^G = 1.25 \times 10^{-10}T_1, \\ K_{\infty} &= \frac{E}{3(1-2\nu)}, \quad D_1 = 1, \quad K_0 = K_1 = \frac{(8.000000001 \times 10^9)E}{3(1-2\nu)}, \quad \lambda_1^K = 1.25 \times 10^{-10}T_1 \end{aligned}$$

mit $n_G = n_K = 1$ (Anzahl der Maxwell-Elemente) und die Retardationszeit $T_1 = \frac{\eta}{E}$ folgt. Alle Konstanten müssen in ANSYS hintergelegt werden, vgl. [4], [65].

Damit steht einer Simulation des Kontaktverhaltens unter Berücksichtigung viskoelastischer Reibschichten nichts mehr im Wege. Der Stator wird mit konstanter Erregerfrequenz und konstanter Amplitude der elektrischen Spannung angetrieben. Die Kontaktnormalkräfte bei unterschiedlichen Dicken bzw. Typen verschiedener Reibschichten sind in Abbildung 5.20 dargestellt. Die Simulationsergebnisse zeigen deutlich, dass bei elastischer und noch mehr bei viskoelastischer Reibschicht die Kontaktkraft nicht mehr ausgeprägt stoßartig ist. Die Peaks bei einem Stator ohne Reibschicht reduzieren sich bei nachgiebigen Reibschichten. Der Verlauf wird deutlich gleichmäßiger. Mit einer viskoelastischen Reibschicht lässt sich die 10-fache Dicke (0.210 mm) benutzen, ohne die Abhebe-Phase zu verlieren. Anders ausgedrückt: mit viskoelastischer Reibschicht wird

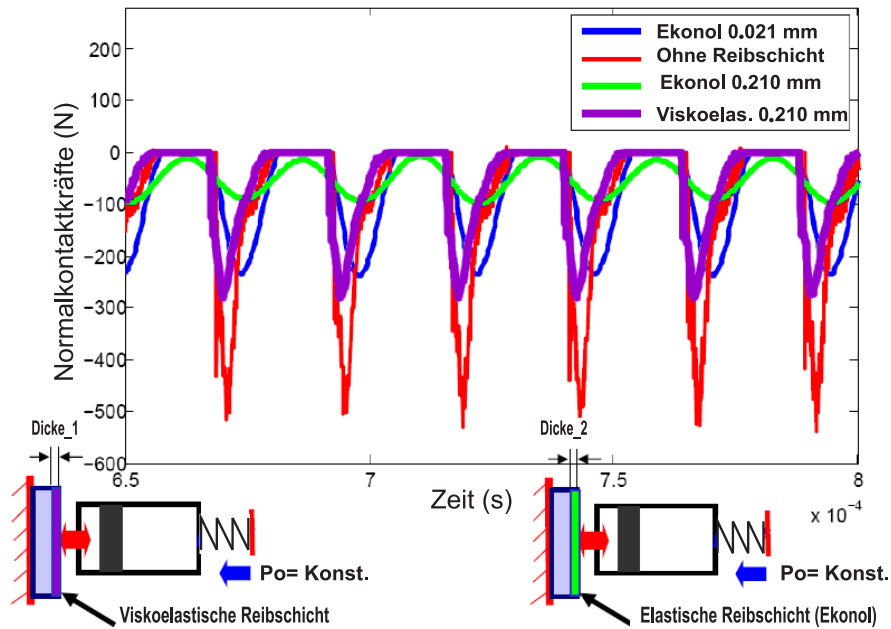


Abbildung 5.20: Kontaktkraftverhalten bei unterschiedlichen Dicken und Typen der Reibschicht.

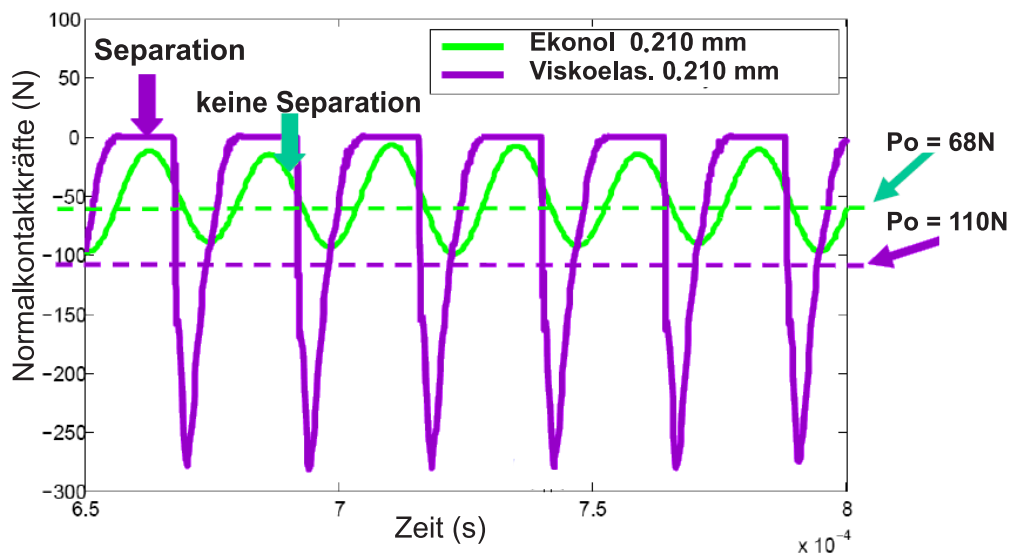


Abbildung 5.21: Normalkontaktkraft bei Variation der Vorspannung und des Materials der Reibschicht.

eine größere Vorspannung für den Stator realisierbar.

Abbildung 5.21 gibt das Kontaktverhalten bei viskoelastischer Reibschicht mit 110 N Vorspannung im Vergleich zu einer elastischen Reibschicht gleicher Dicke aus EkonoI mit 68 N Vorspannung wieder. Obwohl die Vorspannung mit viskoelastischer Reib-

schicht fast doppelt so groß ist wie mit elastischer Reibschicht, existiert noch die Abhebe-Phase (Separation), die bei elastischer Reibschicht nicht mehr auftritt.

Die Separation zwischen Stator und Rotor kann durch die Verschiebungsfunktion zweier zugeordneter Punkte auf Stator- und Rotoroberfläche verdeutlicht werden, siehe Abbildung 5.22. Die Separations-Phase bei Anwendung einer viskoelastischen Reibschicht fängt allerdings früher an als bei einer elastischen Reibschicht und endet in beiden Fällen fast gleichzeitig. Die Steigung des Verschiebungsverlaufs eines Rotoroberflächen-

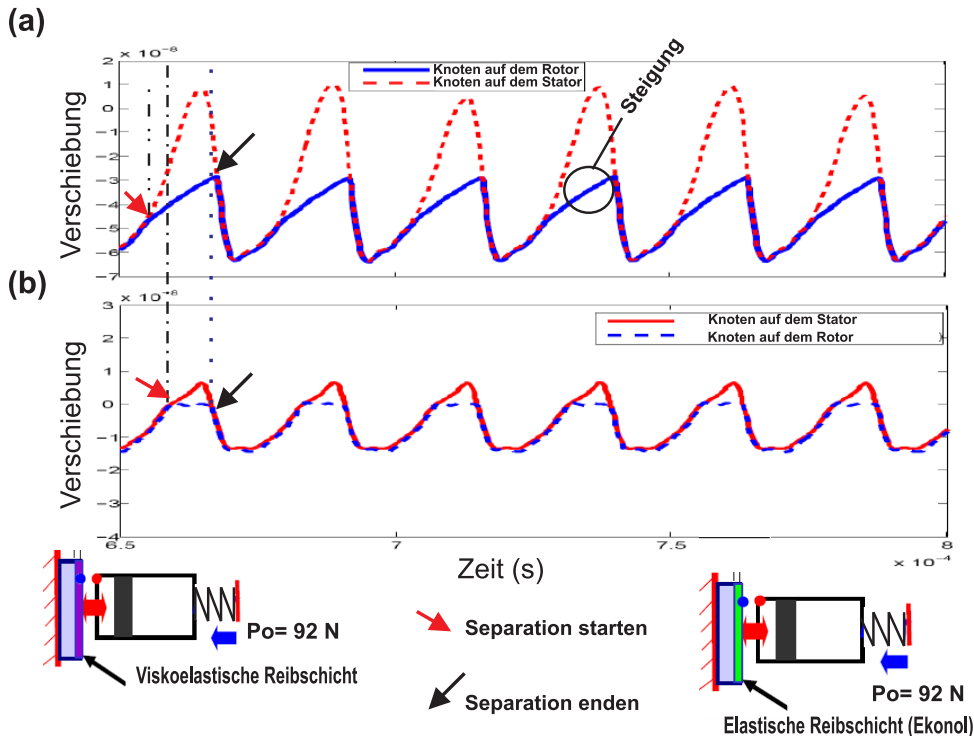


Abbildung 5.22: Vergleich der Verschiebung zwischen zugeordneten Oberflächenpunkten im Kontakt: (a) bei viskoelastischer Reibschicht (b) bei elastischer Reibschicht (Ekonol).

punktes bestimmt bei viskoelastischer Reibschicht die Kontaktdauer zwischen Stator und Rotor. Bei Änderung des Quotienten η/E ändert sich die Steigung des Verschiebungsverlaufs und daraus ergibt sich auch eine Veränderung der Kontaktdauer.

5.3.4 Stoßinduzierte Schwingungen des Rotors

Wenn Stöße beim Betrieb eines hybriden piezoelektrischen Schwingungsmotors auftreten, ergeben sich neben der Schädigung des Materials auch Schwingungen des Rotors (hier reine Längsschwingungen), die stoßinduzierte Schwingungen genannt werden. Wenn der Rotor schwingt, können möglicherweise in der Kontaktfläche zwischen dem Kontaktpaar Stator/Rotor dynamische Instabilitäten auftreten. Dadurch kann die Übertragung des Drehmoments vom Stator zum Rotor möglicherweise ineffektiv werden. Abbildung 5.23 zeigt die im Rotor auftretende oszillierende Stoßreaktion ohne und mit zwei unterschiedlichen Reibschichten über eine größere Zeitdauer von Beginn an

bei unterschiedlicher Dicke der Reibschicht und unterschiedlichen Materialien.

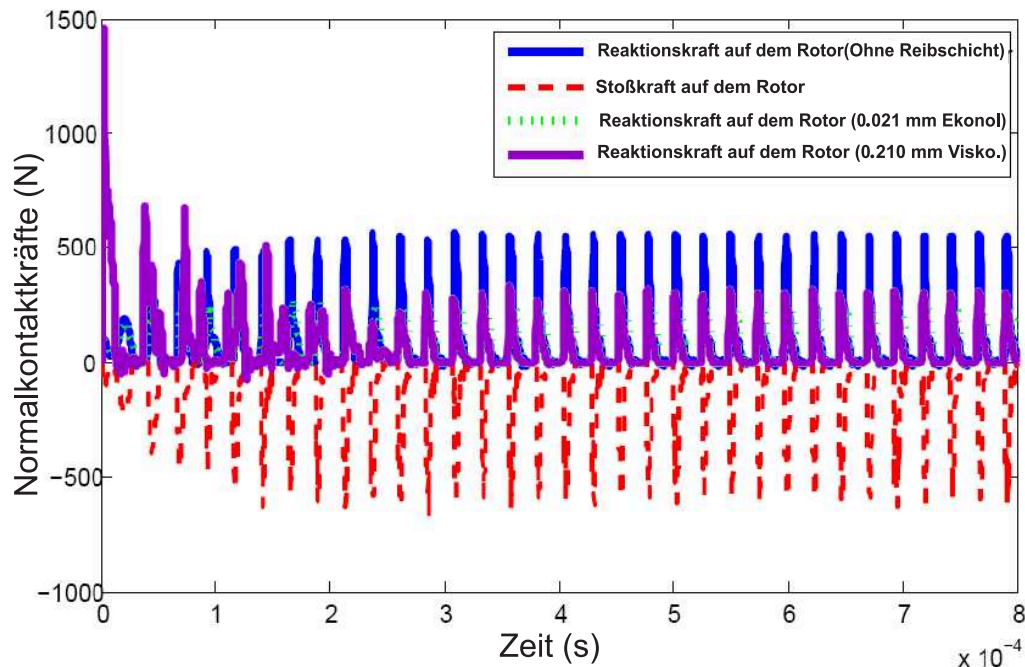


Abbildung 5.23: Kontakt- und Reaktionskraft bei verschiedenen Reibmaterialien.

Abbildung 5.24 stellt den gleichen Sachverhalt in einem kleineren, vergrößert gezeichneten Zeitintervall $t = 7.3 \cdot 10^{-4}$ bis $t = 8.0 \cdot 10^{-4}$ dar. Falls keine Reibschicht auf dem Rotor vorgesehen wird, zeigt sich eine Form der Reaktionskraft, die praktisch mit der Kontaktkraft übereinstimmt. Bei einer vorhandenen Reibschicht wird die Stoßreaktion abgeschwächt und zwar am stärksten bei elastischer, dünner Reibschicht. In jedem Fall wird die Stoßform bei einer Reibschicht mehr abgerundet. In Abbildung 5.25 ist abschließend in einem (noch kleineren) Zeitintervall, das unmittelbar an das Öffnen des Kontakts anschließt, d.h. wenn keine Kontaktkraft mehr auftritt, die Reaktion im Rotor aufgezeichnet. Man erkennt die (freien) Schwingungen des Rotors (in Längsrichtung), die infolge der einbezogenen Dämpfung abklingen. Im Fall ohne Reibschicht auf dem Rotor schwingt dieser etwas stärker und länger als im Falle mit Reibschichten, die beide helfen, die Schwingungen zu unterdrücken. Bei viskoelastischer Reibschicht ist die Unterdrückung der stoßinduzierten Schwingungen des Rotors am effizientesten.

5.3.5 Drehmoment

In diesem Unterabschnitt wird das Maximum des Drehmoments, das vom Stator zum Rotor übertragen werden kann, untersucht. Dazu wird die Torsionskeramik (T-PZT) in dem Stator-Rotor-Kontakt-System, wie in Abbildung 5.26 dargestellt, berücksichtigt. Daraus wird das FE-Modell aus Abbildung 5.5 entsprechend um die Torsionskeramik erweitert. Die Untersuchungen werden für drei verschiedene Fälle durchgeführt und zwar ohne, mit elastischer und mit viskoelastischer Reibschicht. Die Amplitude der

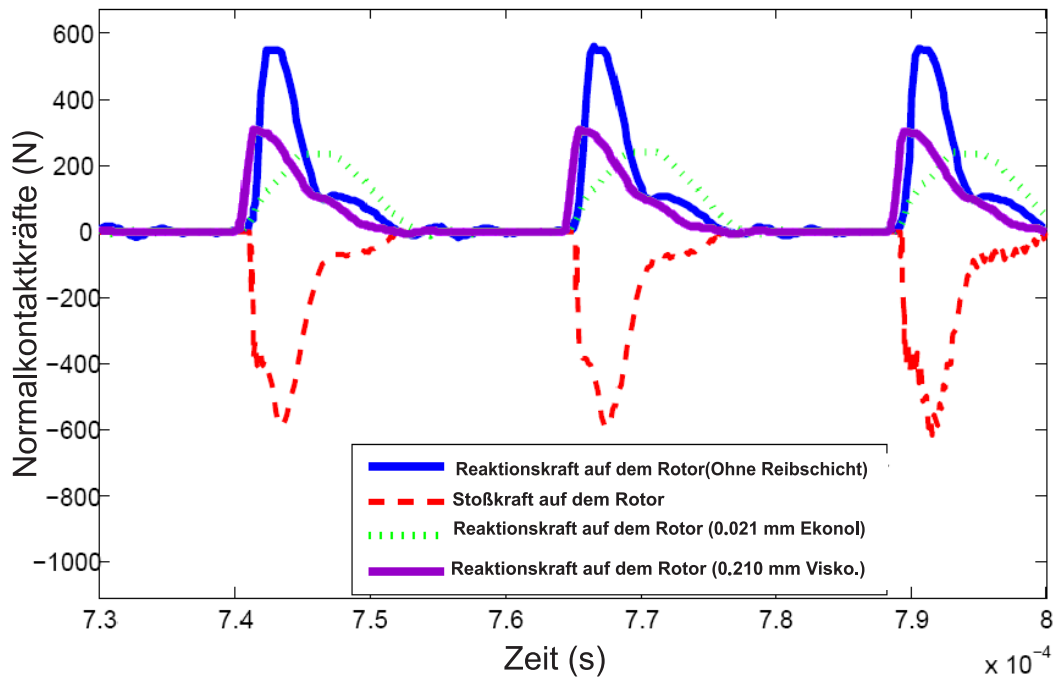


Abbildung 5.24: Kontakt- und Reaktionskraft bei verschiedenen Reibmaterialien (vergrößert).

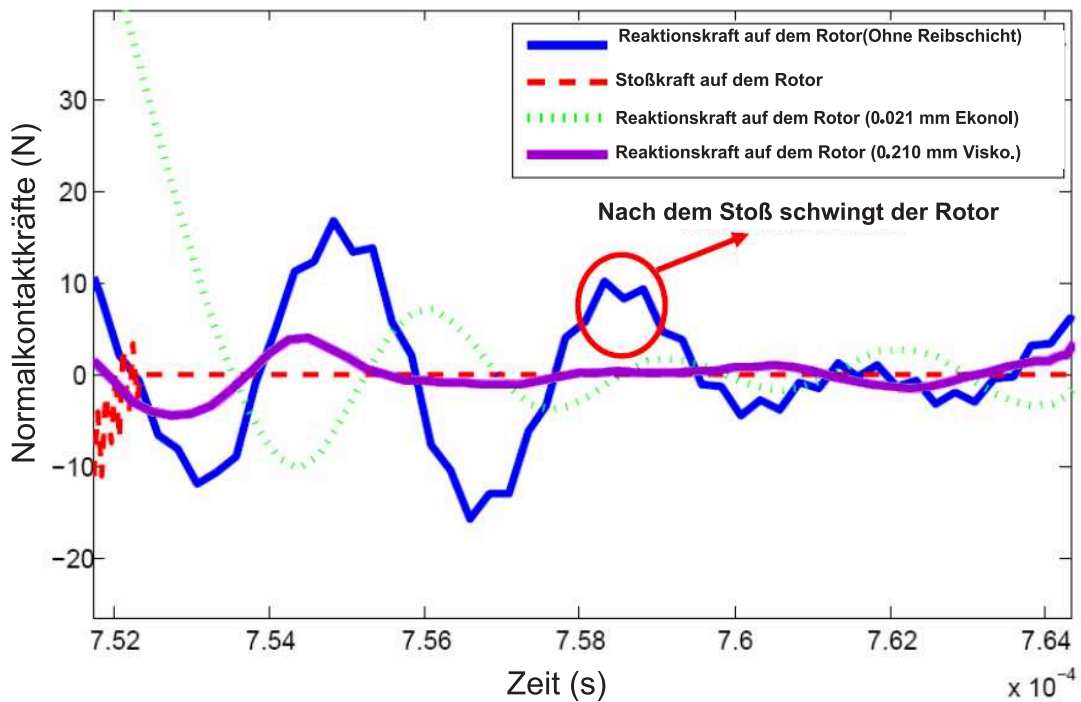


Abbildung 5.25: Stoßinduzierte Rotorschwingungen bei verschiedenen Reibmaterialien.

elektrischen Spannung und die Vorspannung werden konstant gehalten. Der Rotor ist so gelagert, dass er keine Rotations- und keine Translationsfreiheitsgrade aufweist mit dem Ziel, das maximal mögliche übertragbare Drehmoment zu messen. Um alle Simulationen der Kontaktkraftverläufe zur Bestimmung des übertragbaren Drehmoments vergleichen zu können, wird hier angenommen, dass der dynamische Reibkoeffizient $\mu_d = const$ ist. In allen Fällen wird Resonanzbetrieb der Längsschwingungen des Stators zugrunde gelegt.

Zunächst wird der dynamische Kontakt und das dabei übertragbare Drehmoment zwischen Stator und Rotor **ohne Reibschicht** untersucht. Das übertragbare (zeitabhängige) Drehmoment ist in Abbildung 5.27 aufgezeichnet.

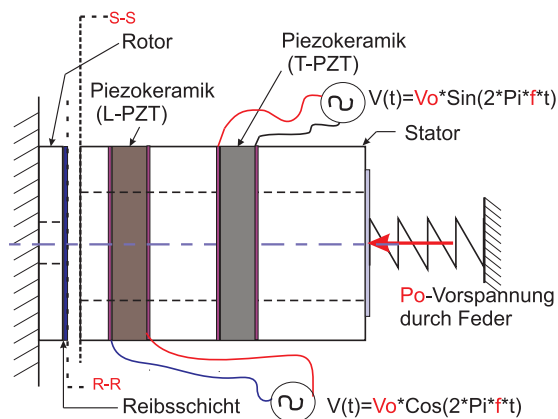


Abbildung 5.26: Skizze des Stator-Rotor-Kontakt-Systems mit Torsionskeramik.

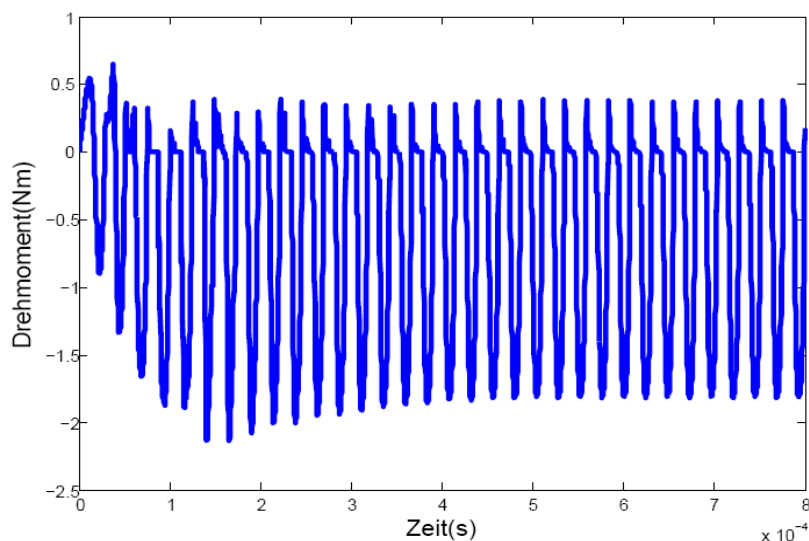


Abbildung 5.27: Übertragbares Drehmoment ohne Reibschicht.

Das resultierende Drehmoment wird in zwei Anteile aufgeteilt. Ein erster Anteil mit positivem Vorzeichen wird als bremsender Anteil definiert, während der Anteil mit negativem Vorzeichen antreibt. Das zeitlich gemittelte, nahezu konstante Drehmoment

\tilde{M}_z kann durch zeitliche Mittelung des Drehmoments(Stall-Drehmoment) $M_z(t)$ in der Form

$$\tilde{M}_z = \frac{1}{\Delta T} \int_{t_0}^{t_0+\Delta T} M_z(t) dt \quad (5.17)$$

über eine Integration über die Zeitspanne ΔT berechnet werden. In Abbildung 5.28, die Abbildung 5.27 entspricht, ist zusätzlich zum Zeitverlauf auch noch dieser Mittelwert

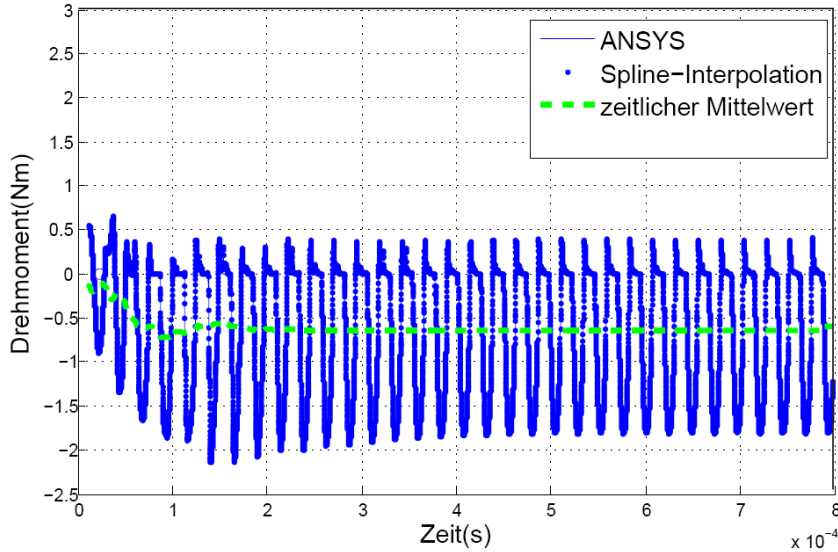


Abbildung 5.28: Mittelwert des übertragbaren Drehmoments ohne Reibschicht.

eingetragen, der ohne Reibschicht in einer Größe von $\tilde{M}_z \approx -0.5$ Nm auftritt.

Ein entsprechendes Ergebnis für den Fall einer **elastischen Reibschicht aus Ekonol** ist in Abbildung 5.29 dargestellt. Das Vorzeichen des Drehmoments ändert sich bei harmonischer Anregung von der in tangentialen Richtung polarisierten Piezokeramik. Die in longitudinalen Richtung polarisierte Piezokeramik kontrolliert die Kontaktdauer der wirkenden Kontaktnormalkraft auf dem Rotor, die hier zu groß gewesen ist. Der zeitliche Mittelwert des Drehmoments ist in der Abbildung 5.30, die Abbildung 5.29 wieder vollständig entspricht, eingetragen. Der berechnete Mittelwert ist ca. $\tilde{M}_z \approx -0.0458$ Nm. Obgleich das Maximum aller Spitzen fast $+0.40$ und -0.50 Nm erreicht, ist der Mittelwert des übertragbaren Drehmoments wegen des Verlustes des bremsenden Anteils sehr gering. Wenn die Abhebe-Phase hinreichend lang existiert, wird der durch den bremsenden Anteil entstehende Verlust des Drehmoment-Verlaufs verkleinert und kann sogar verschwinden.

Abschließend wird der Fall mit **viskoelastischer Reibschicht** diskutiert. Die Relaxationseigenschaft viskoelastischer Materialien ist für die Anpassung der Kontaktdauer vorteilhaft. Bei der Nutzung einer viskoelastischen Reibschicht lässt sich sowohl der Schutz des Rotors vor Stoßkräften realisieren als auch eine größere zulässige Vorspannung. Damit bleibt noch während des Antreibens des Motors die Separation oder

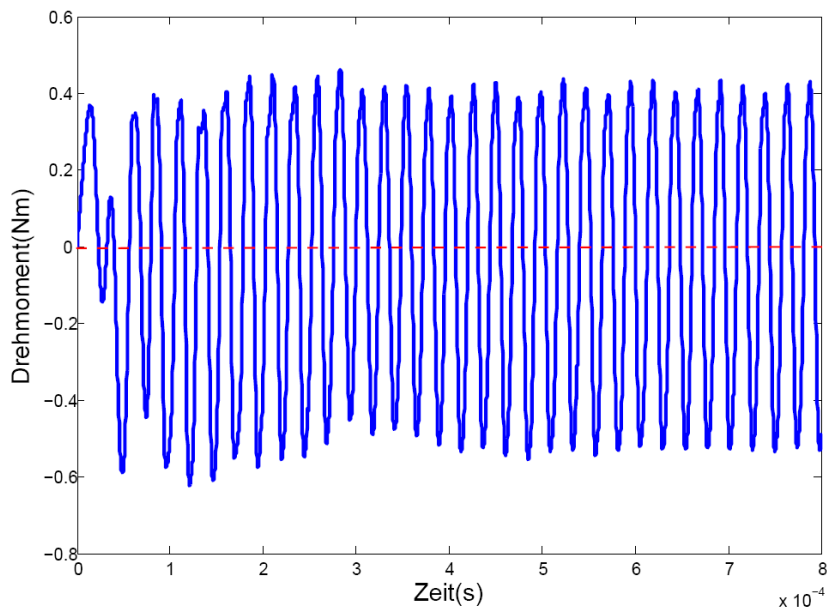


Abbildung 5.29: Übertragbares Drehmoment mit elastischer Reibschicht.

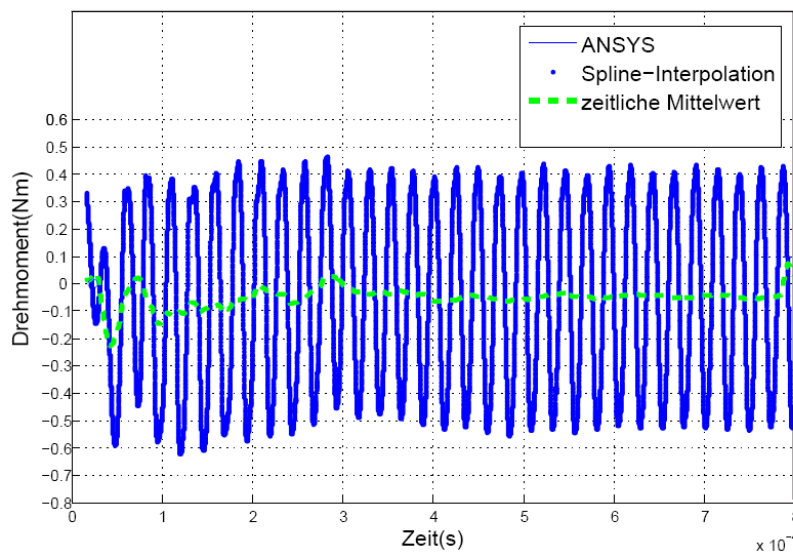


Abbildung 5.30: Mittelwert des übertragbaren Drehmoments mit elastischer Reibschicht.

die sogenannte Abhebe-Phase. Der in Abbildung 5.31 aufgezeigte Drehmomentverlauf zeigt das Auftreten der Separation nach einiger Zeit bevor die Schwingung den stationären Zustand erreicht. Aus Abbildung 5.31 ist zu erkennen, dass der positive Anteil des Drehmomentverlaufs bei viskoelastischer Reibschicht gegenüber dem Fall mit elastischer Reibschicht deutlich verkleinert wird. Der Verlust im stationären Zustand verschwindet bei perfekter Abhebe-Phase. Im Vergleich zu dem in Abbildung 5.30 dargestellten Mittelwert des Drehmoments bei elastischer Reibschicht ist hier im Fall einer viskoelastischen Reibschicht ein hoher Mittelwert des übertragbaren Drehmoments

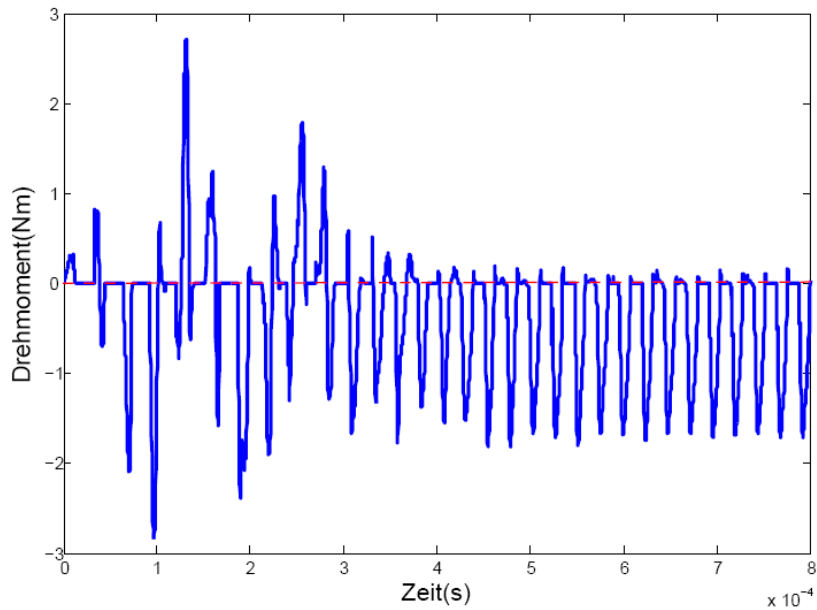


Abbildung 5.31: Übertragbares Drehmoment mit viskoelastischer Reibschicht.

möglich. Der zeitliche Mittelwert des Drehmoments ist in Abbildung 5.32 eingetragen

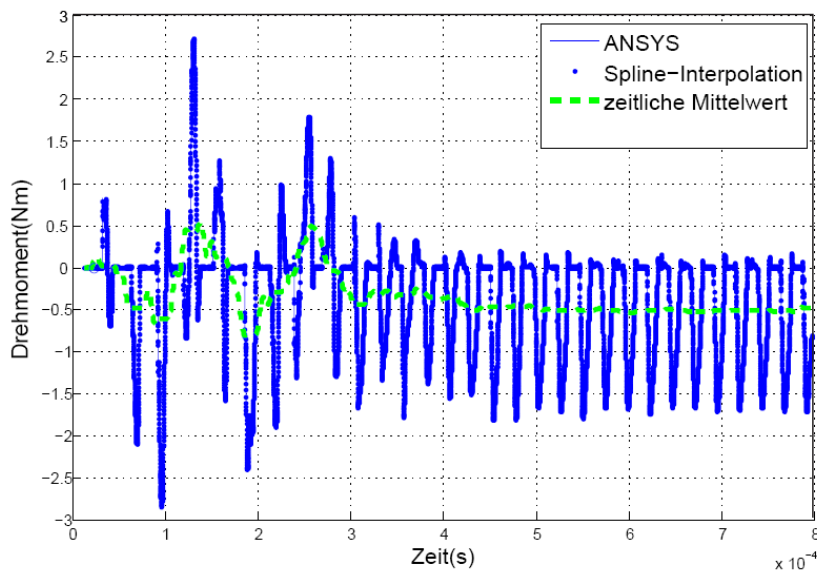


Abbildung 5.32: Mittelwert des übertragbaren Drehmoments mit viskoelastischer Reibschicht.

und beträgt im stationären Zustand $\tilde{M}_z \approx -0.50$ Nm. Dieser Mittelwert ist ca. 10-fach größer als der beim Benutzen einer elastischen Reibschicht, vgl. Abbildung 5.30.

6 Zusammenfassung und Ausblick

Die vorliegende Arbeit, die sich grob in zwei Teile gliedert, leistet einen Beitrag zur Dynamik eines hybriden piezoelektrischen Ultraschallschwingungsmotors mit zwei Statoren und einem dazwischen angeordneten Rotor.

Der erste Teil beschäftigt sich mit der Modellbildung. Basierend auf einem einfachen Modell gemäß eindimensionaler Stabtheorie erfolgt die mathematische Formulierung der charakteristischen Längs- und Torsionsschwingungen der Statoren über das Prinzip von Hamilton. Die für die Funktion des Motors notwendige Angleichung der jeweils niedrigsten Eigenfrequenz der Längs- und Torsionsschwingung wird zunächst im Rahmen dieses Modells analytisch durchgeführt und mit FEM-Ergebnissen von ANSYS verbessert und mit experimentellen Messungen verglichen.

Im zweiten Teil steht die Simulation des Kontaktverhaltens von Stator und Rotor des betrachteten Ultraschallmotors im Mittelpunkt. Der Einfluss der wichtigen Parameter, beispielsweise der Vorspannung, der anregenden elektrischen Spannung und ihrer Frequenz und des Reibschichtmaterials (elastisch und viskoelastisch), auf das dynamische Verhalten des Motors wird ausführlich mit dem Ziel untersucht, ein möglichst großes Drehmoment zu erhalten.

Wesentliches Ziel der Modellbildung ist die Angleichung zweier charakteristischer Eigenfrequenz des hybriden Schwingungsmotors. Dazu werden in einem ersten Schritt der Berechnung für ein eindimensionales Stabmodell die Längs- und Torsionseigenfrequenzen des elastisch/piezoelektrischen Stators als Funktion der wesentlichen Parameter bestimmt. Die Parameter, die die Eigenfrequenzen des Motors beeinflussen, resultieren von der Motorgeometrie und sind die Längen aller wesentlichen Bauteile des Stators sowie deren Durchmesser sowie Position und Außenradius eines Ausgleichsrings. Sie wurden in den möglichen Herstellbereichen feinstufig variiert. Wird die Geometrie des Stators verändert, ändert sich sowohl die Eigenfrequenz der Längs- als auch der Torsionsschwingung. Die Ergebnisse zeigen allerdings, dass bei der Veränderung der Länge der Bauteile des Stators die Angleichung der Eigenfrequenz des Motors nicht erfolgen kann. Durch Verändern der Abmessungen und insbesondere der Position des Ausgleichsrings gelingt es aber, die gewünschte Angleichung in perfekter Weise zu realisieren. Die im Rahmen der eindimensionalen Theorie grob berechneten Ergebnisse sind die Ausgangswerte zur Verfeinerung und Optimierung der Geometrie des Stators, die in einem weiteren Schritt im Rahmen einer dreidimensionalen FE-Berechnung iterativ vorgenommen wird. In einer Frequenzgangsanalyse für das FE-Modell des Stators wurde außerdem bestätigt, dass Oberflächenpunkte des Stators dann tatsächlich eine elliptische Trajektorie durchlaufen, wie sie zum Antrieb des Rotors benötigt wird. Bei der Anregung der Piezokeramiken mit einer $\pi/2$ -Phasenverschiebung ist die harmonische Bewegung des betrachteten Knotens bzw. Punktes präzise die gewünschte elliptische

Bahn. Das heißt, der optimierte Stator des Ultraschallschwingungsmotors arbeitet wie gewünscht und lässt auch beim praktischen Betrieb gute Ergebnisse erwarten. Die Validierung der numerischen Ergebnisse der FE-Berechnung wurde durch experimentelle Messungen der Resonanzfrequenzen eines Prototyps des Stators vorgenommen. Ein Prototyp des Stators wurde gemäß den mittels FEM optimierten Daten gefertigt. Seine Resonanzfrequenzen wurden mit einem Precision Impedanz Analyser (Agilent HP 4294A) und einem Laservibrometer gemessen. Die Messergebnisse der beiden Verfahren zeigen eine relativ gute Übereinstimmung zwischen den numerisch optimierten und den gemessenen Werten. Die Querkontraktion entlang dem Stator während der kombinierten Längs- und Torsionsschwingung wurde mittels Scanning Laservibrometer erfasst. Es ist offensichtlich, dass die Berücksichtigung der Querträgheit in den Bewegungsgleichungen zu noch besserer Übereinstimmung von Rechnung und Messung führen würde.

Die Kontakt-Modellierung zwischen schwingendem Stator und Rotor und entsprechende Untersuchungen zu den Auswirkungen auf die Dynamik des Motors wurde im Rahmen der kommerziellen Software ANSYS durchgeführt. Hierbei wurde in dem FE-Modell der Ausgleichsring wegen der aufwendigen Rechenzeit und den induzierten unerwünschten Schwingungsmoden des Ringes weggelassen. Der Stator wurde in diesem Teil der Arbeit als Schwinger aufgefasst und mit der hohen Frequenz von über 40 kHz durch die angelegte elektrische Spannung erregt. Das dynamische Verhalten des hochfrequent erregten Schwingers beim Kontakt wurde simuliert und beobachtet. Die Vorspannung des Systems wurde variiert. Es zeigte sich, dass eine Veränderung der vorgegebenen Vorspannungen eine entsprechende Änderung der Amplitude der Kontaktnormalkraft zur Folge hat, wenn elektrische Spannungsamplitude und anregende Frequenz konstant gehalten werden. Bei hinreichend großer Amplitude (überkritisch) wird der Kontaktnormalkraftverlauf perfekt sinusförmig. Damit folgt ein kontinuierlicher Kontakt zwischen schwingendem Stator und angetriebenem Rotor. Bei kleiner werdender Amplitude der Vorspannung ändert sich der Kontaktstatus von kontinuierlich zu intermittierend. Ein weiterer Aspekt ist die Kontaktdauer, die ebenfalls durch die Amplitude der Vorspannung beeinflusst wird. Wenn eine große Vorspannung verwendet wird, ist die Kontaktdauer länger als im Falle niedriger aufgeprägter Vorspannungen. Der Einfluss der Amplitude der anregenden elektrischen Spannung der in longitudinaler Richtung polarisierten Piezokeramik auf der Kontaktdauer wurde ebenfalls untersucht. Die Ergebnisse zeigen deutlich, dass sich die Kontaktdauer bei sich ändernder Amplitude der elektrischen Spannung ebenfalls verändert. Die Kontaktdauer verkürzt sich bei hoher elektrischer Spannung und wird umgekehrt bei niedrigen Werten der elektrischen Spannung verkleinert. Daraus folgt zusammenfassend, dass die Kontaktdauer umgekehrt proportional zur Amplitude der anregenden elektrischen Spannung ist. Bei Verwendung einer elastischen Reibschicht wird die zulässige Vorspannung kleiner als beim Fall ohne Reibschicht. Der Kontaktnormalkraftverlauf führt jedoch im Fall ohne Reibschicht zu Stößen. Sowohl mit elastischer als auch viskoelastischer Reibschicht kann die Wirkung der Stöße auf das Kontaktverhalten vermindert werden; ebenso werden Verschleiß und induzierte Schwingungen des Rotors reduziert. Bei dicker Reibschicht wird eine ausreichende Kontaktdauer $2\pi/\omega$ bereits bei schwacher Vorspannung erzielt. Bei dünner Reibschicht dagegen muss eine höhere Vorspannung verwendet werden, bis die Kontaktdauer $2\pi/\omega$ erreicht ist. Das vorgestellte FE-Modell des Stator-Rotor-Kontakts ermöglicht es schließlich, den Einfluss des Reibmaterials und seiner Dicken auf

das möglichst maximale Drehmoment abzuschätzen. Die Wahl einer optimalen Dicke der Reibschicht ist dabei natürlich stark abhängig von den verwendeten Vorspannungen und der anregenden elektrischen Spannungsamplitude an der in longitudinaler Richtung polarisierten Piezokeramik. Beim Einsatz einer viskoelastischen Reibschicht lässt sich der Motor ohne Verlust der Separationsphase auch unter hohen Vorspannungen verwenden. Das erreichbare maximale Drehmoment wird dadurch weiter erhöht. Als positiver Nebeneffekt werden die Wirkungsgradverluste wegen der Reverse-Periode des Stators ebenfalls verringert.

In weiterführenden Arbeiten sollte die Rechenzeit reduziert werden. Damit könnte die Charakteristik des piezoelektrischen Schwingungsmotors unter Berücksichtigung des Kontakts vollständiger als bisher untersucht werden. Daraus folgend ließe sich der Drehmoment-Geschwindigkeit-Verlauf in allen Einzelheiten abbilden. Interessant für Folgeuntersuchungen wäre auch die Analyse des Einflusses von Stößen auf die Ausbreitung mechanischer Spannungswellen im Stator des betrachteten Ultraschallmotors.

Anhang

Anhang A: Materialkonstanten der L-PZT

Tabelle 6.1: Pic 181 Stand 08/99

Größe	Einheit	Wert	Größe	Einheit	Wert
Dichte	Km/m ³	7.85 · 10 ³	N_1	Hzm	1646
Q		220	N_3	Hzm	2004
			N_5	Hzm	1222
ε_{11}^T		1224	N_p	Hzm	2265
ε_{33}^T		1135	N_t	Hzm	2302
ε_{11}^T		740			
ε_{33}^T		624	d_{31}	m/V	-1.08 · 10 ⁻¹⁰
tan		0.003	d_{33}	m/V	2.53 · 10 ⁻¹⁰
			d_{15}	m/V	3.89 · 10 ⁻¹⁰
			e_{31}	N/Vm	-4.5
σ		0.35	e_{33}	N/Vm	14.7
			e_{15}	N/Vm	11.0
S_{11}^E	m ² /N	1.175 · 10 ⁻¹¹	C_{11}^E	N/m ²	1.523 · 10 ¹¹
S_{33}^E	m ² /N	1.411 · 10 ⁻¹¹	C_{33}^E	N/m ²	1.314 · 10 ¹¹
S_{55}^E	m ² /N	3.533 · 10 ⁻¹¹	C_{55}^E	N/m ²	2.830 · 10 ¹⁰
S_{12}^E	m ² /N	-4.070 · 10 ⁻¹²	C_{12}^E	N/m ²	8.909 · 10 ¹⁰
S_{13}^E	m ² /N	-4.996 · 10 ⁻¹²	C_{13}^E	N/m ²	8.547 · 10 ¹⁰
S_{44}^E	m ² /N	3.553 · 10 ⁻¹¹	C_{44}^E	N/m ²	2.830 · 10 ¹⁰
S_{66}^E	m ² /N	3.164 · 10 ⁻¹¹	C_{66}^E	N/m ²	3.161 · 10 ¹⁰
S_{11}^D	m ² /N	1.058 · 10 ⁻¹¹	C_{11}^D	N/m ²	1.550 · 10 ¹¹
S_{33}^D	m ² /N	7.930 · 10 ⁻¹²	C_{33}^D	N/m ²	1.664 · 10 ¹¹
S_{55}^D	m ² /N	2.134 · 10 ⁻¹¹	C_{55}^D	N/m ²	4.686 · 10 ¹⁰
S_{12}^D	m ² /N	-5.235 · 10 ⁻¹²	C_{12}^D	N/m ²	9.182 · 10 ¹⁰
S_{13}^D	m ² /N	-2.268 · 10 ⁻¹²	C_{13}^D	N/m ²	7.601 · 10 ¹⁰
S_{44}^D	m ² /N	2.134 · 10 ⁻¹¹	C_{44}^D	N/m ²	4.686 · 10 ¹⁰
S_{66}^D	m ² /N	3.164 · 10 ⁻¹¹	C_{66}^D	N/m ²	3.161 · 10 ¹⁰

Anhang B: Materialkonstanten der T-PZT

Tabelle 6.2: Pic 255 Stand 08/99

Größe	Einheit	Wert	Größe	Einheit	Wert
Dichte	Km/m ³	7.76 · 10 ³	N_1	Hzm	1412
Q		80	N_3	Hzm	1784
			N_5	Hzm	1028
ε_{11}^T		1498	N_p	Hzm	1998
ε_{33}^T		1350	N_t	Hzm	2154
ε_{11}^T		873			
ε_{33}^T		680	d_{31}	m/V	-1.54 · 10 ⁻¹⁰
tan		18.5	d_{33}	m/V	3.07 · 10 ⁻¹⁰
			d_{15}	m/V	5.39 · 10 ⁻¹⁰
			e_{31}	N/Vm	-5.6
σ		0.30	e_{33}	N/Vm	12.8
			e_{15}	N/Vm	10.3
S_{11}^E	m ² /N	1.617 · 10 ⁻¹¹	C_{11}^E	N/m ²	1.108 · 10 ¹¹
S_{33}^E	m ² /N	1.780 · 10 ⁻¹¹	C_{33}^E	N/m ²	1.108 · 10 ¹¹
S_{55}^E	m ² /N	5.237 · 10 ⁻¹¹	C_{55}^E	N/m ²	1.909 · 10 ¹⁰
S_{12}^E	m ² /N	-4.842 · 10 ⁻¹²	C_{12}^E	N/m ²	6.326 · 10 ¹⁰
S_{13}^E	m ² /N	-7.050 · 10 ⁻¹²	C_{13}^E	N/m ²	6.896 · 10 ¹⁰
S_{44}^E	m ² /N	5.237 · 10 ⁻¹¹	C_{44}^E	N/m ²	1.909 · 10 ¹⁰
S_{66}^E	m ² /N	4.202 · 10 ⁻¹¹	C_{66}^E	N/m ²	2.380 · 10 ¹⁰
S_{11}^D	m ² /N	1.421 · 10 ⁻¹¹	C_{11}^D	N/m ²	1.146 · 10 ¹¹
S_{33}^D	m ² /N	1.010 · 10 ⁻¹²	C_{33}^D	N/m ²	1.440 · 10 ¹¹
S_{55}^D	m ² /N	3.048 · 10 ⁻¹¹	C_{55}^D	N/m ²	3.281 · 10 ¹⁰
S_{12}^D	m ² /N	-6.800 · 10 ⁻¹²	C_{12}^D	N/m ²	6.701 · 10 ¹⁰
S_{13}^D	m ² /N	-3.100 · 10 ⁻¹²	C_{13}^D	N/m ²	5.575 · 10 ¹⁰
S_{44}^D	m ² /N	3.048 · 10 ⁻¹¹	C_{44}^D	N/m ²	3.281 · 10 ¹⁰
S_{66}^D	m ² /N	4.202 · 10 ⁻¹¹	C_{66}^D	N/m ²	2.380 · 10 ¹⁰

Literaturverzeichnis

- [1] A. Görnandt. *Untersuchung des thermopiezoelektrischen Strukturverhaltens mit Hilfe des Methode der Finiten Elemente. Technische Mechanik*, 20/3:227–236, 20000.
- [2] Y. Akiyama. *Present state of ultrasonic motors in Japan. J. Electron. Eng*, Seiten 76–80, 1987.
- [3] I. ANSYS. *ANSYS elements reference. SAS, IP Inc*, 1997.
- [4] I. ANSYS. *ANSYS Release 11.0 Documentation. Chap*, 8:3–12, 2001.
- [5] I. ANSYS und A. Europe. *ANSYS Coupled-Field Analysis Guide. Canonsburg, PA*, 2001.
- [6] M. ANSYS. *Element Library. ANSYS Element Reference*, 5.
- [7] M. Aoyagi und Y. Tomikawa. *Simplified equivalent circuit of ultrasonic motor and its application to estimation of motor characteristics. Jpn. J. Appl. Phys. Vol*, 34: 2752–2755, 1995.
- [8] M. Aoyagi, N. Takahashi, Y. Tomikawa und T. Takano. *Ultrasonic motor using the second longitudinal and the first torsional vibration modes in symmetrical construction. Proc. Spring Mtg. Acoust. Soc. Jpn., Japan*, Seiten 853–854, 1993.
- [9] H. Barth. *Ultrasonic driven motor. IBM technical disclosure bulletin*, 16(7):2263, 1973.
- [10] K. Bathe. *Finite-Elemente-Methoden*. Springer, 2002.
- [11] J. Becker, O. Fein, M. Maess und L. Gaul. *Finite element-based analysis of shunted piezoelectric structures for vibration damping. Computers and Structures*, 84(31-32):2340–2350, 2006.
- [12] B. Lämmel. *ANSYS 8.1 (Mikrosystementwurf)*. electronics, August 2006.
- [13] B. Sauter. *Modellbildung an einem hybriden Ultraschallwandlerwellenmotor*. Master’s thesis, Institut für Technische Mechanik, Universität Karlsruhe(TH), 2005.
- [14] A. Butz. *Nichtlineare Formulierung piezoelektrischer 3D-Stabstrukturen: Theorie und Finite-Element-Modellierung*. Dissertation, Institut für Baustatik, Universität Karlsruhe(TH), 2006.
- [15] D. Schüler. *Zur Berechnung reibungsbehafteter Wälzlagerkontakte mit der Finite-Elemente-Methode*. Master’s thesis, Institut für Technische Mechanik, Universität Karlsruhe(TH), 2008.

- [16] I. Chowdhury und S. Dasgupta. *Computation of Rayleigh damping coefficients for large systems. The Electronic Journal of Geotechnical Engineering*, 8, 2003.
- [17] C. Rudolf. *Piezoelektrische Self-sensing-Aktoren zur Korrektur statischer Verlagerungen*. Dissertation, Institut für Technische Mechanik, Universität Karlsruhe(TH), Karlsruhe, 2008.
- [18] J. Dabney und T. Harman. *Dynamic properties of piezoelectric ultrasonic motors for space robotics applications. Y2003 Annual Report*, Seite 43.
- [19] W. Duan, S. Quek und S. Lim. *Finite element solution for intermittent-contact problem with piezoelectric actuation in ring type USM. Finite Elements in Analysis and Design*, 43(3):193–205, 2007. doi: 10.1016/j.finel.2006.09.004.
- [20] A. Endo und N. Sasaki. *Investigation of friction material for ultrasonic motor. Jpn.J.Appl. Phys.*, 26 Suppl. 26-1,;pp.197–199, 1987.
- [21] T. Erhart. *Strategien zur numerischen Modellierung transienter Impaktvorgänge bei nichtlinearem Materialverhalten*. Institut für Baustatik, 2004.
- [22] R. Feynman, R. Leighton und M. Sands. *Vorlesungen über Physik Band II*, 1987.
- [23] A. Flynn. *Piezoelectric ultrasonic micromotors*. Dissertation, Massachusetts Institute of Technology, Dept. of Electrical Engineering, 1995.
- [24] R. Gausmann. *Nichtlineares dynamisches Verhalten von piezoelektrischen Stabaktoren bei schwachem elektrischen Feld*. Cuvillier Verlag, 2005.
- [25] M. Gee. *Effiziente Lösungsstrategien in der nichtlinearen Schalenmechanik*. 2004.
- [26] N. Ghouti. *Hybrid Modelling of a Traveling Wave Piezoelectric Motor*. Dissertation, Department of Control Engineering, Aalborg University, Denmark, 2000.
- [27] W. Grellmann, V. Altsaedt und S. Seidler. *Kunststoffprüfung*. Hanser, 2005.
- [28] D. Gross, W. Hauger, W. Schnell und P. Wriggers. *Technische Mechanik 4*. Springer, 2004.
- [29] J. Guo, S. Gong, H. Guo, X. Liu und K. Ji. *Force transfer model and characteristics of hybrid transducer type ultrasonic motors. IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, 51(4):387, 2004.
- [30] P. Hagedorn und J. Wallaschek. *Traveling wave ultrasonic motors, part I: working principle and mathematical modeling of the stator. Journal of Sound and Vibration*, 155(1):31–46, 1992.
- [31] H. Hetzler. *Zur Stabilität von Systemen bewegter Kontinua mit Reibkontakten am Beispiel des Bremsenquietschens*. Univ.-Verl. Karlsruhe, 2008.
- [32] D. Hoffmann. *Das Augmented-Lagrange-Verfahren bei Reibkontaktproblemen unter transienter Beanspruchung*. Bauingenieur und Vermessungswesen der Universität Fridericiana zu Karlsruhe (TH), 2003.

- [33] T. Ikeda. *Fundamentals of piezoelectricity*. Oxford University Press Oxford, 1990.
- [34] R. Inaba, A. Tokushima, O. Kawasaki, Y. Ise und H. Yoneno. *Piezoelectric ultrasonic motor*. In *Proceedings of the IEEE ultrasonics 1987 symposium*, Seiten 747–756, 1987.
- [35] A. Inc. *Ansys Elements Reference*, 2000.
- [36] B. Irons. *A frontal solution program for finite element analysis*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2(1), 1970.
- [37] T. Ishii, T. Shinkoda, S. Ueha, K. Nakamura und M. Kurosawa. *Efficiency improvement of an ultrasonic motor driven with rectangular waveform*. *Jpn. J. Appl. Phys. Vol.*, 35(5B Pt 1):3281–3285, 1996.
- [38] T. Ishii, S. Maeno, K. Nakamura und S. Ueha. *Efficiency improvement of the friction drive in the ultrasonic motor using lubricant*. In *2001 IEEE Ultrasonics Symposium*, volume 1, 2001.
- [39] J. Jackson. *Klassische Elektrodynamik*. Walter de Gruyter, 2002.
- [40] D. Gross, W. Hauger, J. Schröder und E. Werner. *Formeln und Aufgaben zur Technischen Mechanik 4: Hydromechanik, Elemente der Hoheren Mechanik, Numerische Methoden*. Springer, 2008.
- [41] H. Kanazawa, T. Tsukimoto, T. Maeno und A. Miyake. *Tribology of ultrasonic motors Japan*. *J. Tribol.*, 38(3):15–24, 1993.
- [42] G. Kandare und J. Wallaschek. *Derivation and validation of a mathematical model for traveling wave ultrasonic motors*. *Smart Materials and Structures*, 11(4):565–574, 2002.
- [43] J. W. Krome. *Modelle zur Untersuchung des Schwingungsverhaltens von Statoren für piezoelektrische Ultraschall-Wanderwellenmotoren*. Dissertation, Universität Paderborn, 1999.
- [44] M. Kurosawa und S. Ueha. *Hybrid transducer type ultrasonic motor*. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 38(2):89–92, 1991.
- [45] M. Kurosawa, H. Yamada und S. Ueha. *Hybrid transducer type ultrasonic linear motor*. *Jpn. J. Appl. Phys.*, 28:158–160, 1989.
- [46] M. Kurosawa, K. Nakamura und S. Ueha. *Numerical analysis of the property of a hybrid transducer type ultrasonic motor*. In *Proc. IEEE Ultrason. Symp*, Seiten 1187–1190, 1990.
- [47] T. Laursen. *Computational contact and impact mechanics: fundamentals of modeling interfacial phenomena in nonlinear finite element analysis*. Springer Verlag, 2002.
- [48] V. Lavrinenko und A. Iarochenko. *Piezoelectric motor*. *Soviet Patent*, 217509, 1964.

- [49] L. Mascia. *Thermoplastics: materials engineering*. Elsevier London, 1989.
- [50] G. Maugin. *Continuum mechanics of electromagnetic solids*. North-Holland Amsterdam, 1988.
- [51] K. Nakamura und S. Ueha. *Performances of a hybrid transducer-type ultrasonic motor as a function of the size*. In *1994 IEEE Ultrasonics Symposium, 1994. Proceedings.*, volume 1, 1994. doi: 10.1109/ULTSYM.1994.401650.
- [52] K. Nakamura, M. Kurosawa, H. Kurebayashi und S. Ueha. *An Estimation of Load Ultrasonic Motor by Measuring Transient*. *IEEE Transactions on ultrasonics, ferroelectrics and frequency control*, 38(5):481, 1991.
- [53] K. Nakamura, M. Kurosawa und S. Ueha. *Characteristics of a hybrid transducer-type ultrasonic motor*. *IEEE Transactions on ultrasonics, ferroelectrics and frequency control*, 38(3):188–193, 1991. doi: 10.1109/58.79602.
- [54] K. Nakamura, J. Satonobu, D. Lee und S. Ueha. *An optimum design for the hybrid transducer ultrasonic motor insymmetrical structure*. In *1998 IEEE Ultrasonics Symposium, 1998. Proceedings.*, 1998.
- [55] D. Nelson und M. Lax. *Linear elasticity and piezoelectricity in pyroelectrics*. *Physical Review B*, 13(4):1785–1796, 1976.
- [56] O. Ohnishi, O. Myohga, T. Uchikawa, M. Tamegai, T. Inoue und S. Takahashi. *Piezoelectric ultrasonic motor using longitudinal-torsional composite resonance vibration*. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, 40(6):687–693, 1993. doi: 10.1109/58.248212.
- [57] V. Piefort. *Finite element modelling of piezoelectric active structures*. 2001.
- [58] T. Sashida. *Trial construction and operation of an ultrasonic vibration driven motor*. *Applied Physics*, 51(6):713–720, 1982.
- [59] T. Sashida und T. Kenjo. *An introduction to ultrasonic motors*. Oxford University Press, USA, 1993.
- [60] J. Satonobu, N. Torii, K. Nakamura und S. Ueha. *Construction of megatorque hybrid transducer type ultrasonic motor*. *Japanese Journal of Applied Physics*, 35 (part 1):5038–5041, 1996. doi: 10.1143/JJAP.35.5038.
- [61] J. Satonobu, D. Lee, K. Nakamura und S. Ueha. *Improvement of the longitudinal vibration system for the hybridtransducer ultrasonic motor*. *IEEE Transactions on ultrasonics, ferroelectrics and frequency control*, 47(1):216–221, 2000. doi: 10.1109/58.818764.
- [62] J. Satonobu, J. Friend, K. Nakamura und S. Ueha. *Numerical analysis of the hybrid transducer ultrasonic motor: comparison of characteristics calculated by transmission-line and lumped-element models*. *Ultrasonics*, 39(8):559–565, 2002. doi: 10.1016/S0041-624X(02)00260-3.

- [63] T. Sattel. *Dynamics of Ultrasonic Motors*. Technische Universität Darmstadt, Dissertation, 2003.
- [64] J. Schmidt. *Ein mechanisches Modell des Stator-Rotor-Kontaktes beim Ultraschall-Wanderwellenmotor*. Technische Universität Darmstadt, Dissertation, 2000.
- [65] L. Sun und F. Luo. *Transient Wave Propagation in Multilayered Viscoelastic Media: Theory, Numerical Computation, and Validation*. *Journal of Applied Mechanics*, 75:031007, 2008.
- [66] H. Tiersten. *Linear piezoelectric plate vibrations*. Plenum Press New York, 1969.
- [67] Y. Tomikawa, K. Adachi, M. Aoyagi, T. Sagae und T. Takano. *Some constructions and characteristics of rod-type piezoelectric ultrasonic motors using longitudinal and torsional vibrations*. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, 39(5):600–608, 1992.
- [68] A. Trautwein, J. Huettermann und U. Kreibig. *Physik fuer Mediziner, Biologen, Pharmazeuten*. Walter de Gruyter, 2004.
- [69] K. Uchino. *Piezoelectric ultrasonic motors: overview*. *Smart materials and structures*, 7(3):273–285, 1998.
- [70] S. Ueha, Y. Tomikawa, M. Kurosawa und N. Nakamura. *Ultrasonic Motors: Theory and Applications*, Clarendon Press, Oxford, 1993.
- [71] S. Ueha, Y. Tomikawa, M. Kurosawa und N. Nakamura. *Ultrasonic motors*. In *IEEE 1988 Ultrasonics Symposium, 1988. Proceedings.*, Seiten 519–522, 1988.
- [72] A. Version. *11.0, ANSYS. Inc. Southpointe*, 275.
- [73] H. Vinhais, R. Ibrahim und E. Silva. *Simulation of a Linear Piezoelectric Motor by Using Finite Element Method*. In *Brazil: Proceedings of 17th International Congress of Mechanical Engineering (COBEM 2003)*, code, volume 291, 2003.
- [74] U. von Wagner. *Nichtlineare Effekte bei Piezokeramiken unter schwachem elektrischem Feld: Experimentelle Untersuchung und Modellbildung*. Habilitation thesis, Technische Universität Darmstadt, GCA-Verlag, Herdecke, 2003.
- [75] J. Wallaschek. *Piezoelectric ultrasonic motors*. In *Proceedings of the Second International Conference on Intelligent Materials*, 1994.
- [76] J. Wallaschek. *Contact mechanics of piezoelectric ultrasonic motors*. *Smart Materials and Structures*, 7:369–381, 1998.
- [77] A. Williams und W. Brown. *Piezoelectric motor: US-Patent, 2:439-499*. electronics, 1948.
- [78] K. Willner. *Kontinuums- und Kontaktmechanik: synthetische und analytische Darstellung*. Springer, 2003.

- [79] K. Wolf. *Electromechanical energy conversion in asymmetric piezoelectric bending actuators*. Dissertation, Hessische Landes- und Hochschulbibliothek Darmstadt, 2000.
- [80] P. Wriggers. *Nichtlineare Finite-Element-Methoden*. Birkhäuser, 2001.
- [81] P. Wriggers. *Computational contact mechanics*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2002.
- [82] Y. Yi, W. Seemann, R. Gausmann und J. Zhong. *Development and analysis of a longitudinal and torsional type ultrasonic motor with two stators*. *Ultrasonics*, 43(8):629–634, 2005.
- [83] Y. Yi, W. Seemann, R. Gausmann und J. Zhong. *A method for matching the eigenfrequencies of longitudinal and torsional vibrations in a hybrid piezoelectric motor*. *Journal of Sound and Vibration*, 295(3-5):856–869, 2006. doi: 10.1016/j.jsv.2006.01.043.

Lebenslauf

Nantawatana Weerayuth

geboren am 02. Dezember 1974 in Khonkhaen, Thailand

Schulische Ausbildung

1981 - 1988 Städtische Grundschule, Roi Et, Thailand

1988 - 1993 Phonthong Pattanawitaya Städtisches Gymnasium, Roi Et, Thailand

Hochschulausbildung

28 Mai 1993 - 27 Mai 1997 Maschinenbau-Studium mit Abschluss als Bachelor of -
Engineering (B.Eng.), Universität Ubonrajthanee, Thailand

Vertiefungsrichtung: Allgemeiner Maschinenbau

März/1996 - Mai/1996 Fachpraktikum: Mitsubishi Electric Consumer Products (Thailand) Co., Ltd.

01 Juni 1998 - 18 Mai 2001 Maschinenbau-Studium mit Abschluss als Master of -
Engineering (M.Eng.), King Mongkut´s Institute of Technology North - Bangkok, Thailand

Vertiefungsrichtung: Maschinenbau (Dynamik / Regelungstechnik)

05/2001 Masterschlussprüfung.

Titel der Masterarbeit: Time-Optimal Control and Path Planning Using a Neuro-
Genetic Based Hybrid Framework

1998 - 2001 Stipendiat der königlichen thailändischen Regierung

2004 - 2010 Stipendiat der königlichen thailändischen Regierung

Berufstätigkeit

seit 08/2004 gastwissenschaftlicher Stipendiat am Institut für Technische Mechanik,
Fakultät für Maschinenbau, Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

seit 06/1997 Dozent, Fakultät für Maschinenbau, Universität Ubonrajthanee, Thailand