



KIT SCIENTIFIC REPORTS 7547

Schriftenreihe des Studiengangs Geodäsie und Geoinformatik 2010,1

Untersuchungen zur effizienten Berechnung topographischer Effekte auf den Gradiententensor am Fallbeispiel der Satelliten- gradiometriemission GOCE

Thomas Grombein
Kurt Seitz
Bernhard Heck

Thomas Grombein, Kurt Seitz, Bernhard Heck

**Untersuchungen zur effizienten Berechnung topographischer
Effekte auf den Gradiententensor am Fallbeispiel der Satelliten-
gradiometriemission GOCE**

Karlsruhe Institute of Technology
KIT SCIENTIFIC REPORTS 7547

Schriftenreihe des Studiengangs Geodäsie und Geoinformatik 2010,1
Karlsruher Institut für Technologie

Untersuchungen zur effizienten Berechnung topographischer Effekte auf den Gradiententensor am Fallbeispiel der Satellitengradiometriemission GOCE

von
Thomas Grombein
Kurt Seitz
Bernhard Heck

Report-Nr. KIT-SR 7547

Impressum

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
KIT Scientific Publishing
Straße am Forum 2
D-76131 Karlsruhe
www.uvka.de

KIT – Universität des Landes Baden-Württemberg und nationales
Forschungszentrum in der Helmholtz-Gemeinschaft



Diese Veröffentlichung ist im Internet unter folgender Creative Commons-Lizenz
publiziert: <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/de/>

KIT Scientific Publishing 2010
Print on Demand

ISSN 1612-9733
ISSN 1869-9669
ISBN 978-3-86644-510-9

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	1
1 Einleitung	3
2 Das Schwerfeld der Erde	4
2.1 Definition, Zusammensetzung und Eigenschaften	4
2.2 Verfahren der Schwerfeldbestimmung	6
2.3 Satellitengradiometrie	8
3 Satellitengradiometriemission GOCE	10
3.1 Ziele und Missionsbeschreibung	10
3.2 Gradientenmessung	11
3.3 Anwendungen	13
4 Topographische Effekte	14
4.1 Motivation und Einsatz	14
4.2 Mathematische Modellierung	15
4.3 Bisherige Arbeiten	16
5 Optimierte Tesseroidformeln	19
5.1 Ausgangslage	19
5.2 Optimierter Ansatz	21
6 Berechnungsverfahren für die Massenmodellierung	25
6.1 Numerische Näherungslösungen	25
6.1.1 Taylor-Reihenentwicklung	25
6.1.2 Gauß-Legendre-Kubatur	27
6.2 Approximationen	28
6.2.1 Quader	29
6.2.2 Punktmasse	31

7	Numerische Untersuchungen	32
7.1	Kugelschalenmodell als Referenzlösung	32
7.2	Aufbau der Untersuchungen	33
7.3	Darstellung und Analyse der Ergebnisse	35
7.3.1	Genauigkeiten der Berechnungsverfahren	36
7.3.2	Rechenzeiten der Berechnungsverfahren	45
7.4	Folgerungen für den effizienten Einsatz der Berechnungsverfahren	48
8	Zusammenfassung und Ausblick	50
8.1	Zusammenfassung	50
8.2	Ausblick	51
	Literaturverzeichnis	53
	Anhang	56
A	Ergebnisse mit verschiedenen Topographieauflösungen	56
A.1	Ergebnisse mit einer Topographieauflösung von 30'	56
A.2	Ergebnisse mit einer Topographieauflösung von 15'	62
A.3	Ergebnisse mit einer Topographieauflösung von 5'	68
B	Ergebnisse mit verschiedenen Berechnungsverfahren	74
B.1	Ergebnisse mit dem Berechnungsverfahren <i>mpoint</i>	74
B.2	Ergebnisse mit dem Berechnungsverfahren <i>tess 3D 1</i>	77
B.3	Ergebnisse mit dem Berechnungsverfahren <i>quad analy</i>	80
B.4	Ergebnisse mit dem Berechnungsverfahren <i>quad taylor</i>	83
B.5	Ergebnisse mit dem Berechnungsverfahren <i>tess taylor</i>	86
B.6	Ergebnisse mit dem Berechnungsverfahren <i>tess 3D 8</i>	89
B.7	Ergebnisse mit dem Berechnungsverfahren <i>tess 3D 27</i>	92

1 Einleitung

Mit der am 17. März 2009 gestarteten Satellitengradiometriemission GOCE (Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer) werden zur Bestimmung des Erdschwerefeldes erstmals Gravitationsgradienten (zweite Ableitungen des Gravitationspotentials) in Satellitenhöhe gemessen. Durch die topographischen Erdmassen werden in den Gradienten hochfrequente Signalanteile, sogenannte topographische Effekte, induziert. Bisherige Untersuchungen haben gezeigt, dass diese Effekte auch in Satellitenhöhe signifikant messbar sind. Eine stabile Fortsetzung der Gradienten nach unten sowie die stochastische Modellbildung werden dadurch erschwert. Zur Glättung des Signals ist es daher sinnvoll, vor der Fortsetzung topographische Reduktionen an die gemessenen Gradienten anzubringen. Ein analoges Vorgehen ist auch für isostatische Reduktionen zu empfehlen, die im Rahmen dieser Arbeit aber nicht betrachtet werden.

Die Bestimmung topographischer Effekte mittels digitalen Geländemodellen beruht auf der Auswertung von Funktionalen des Newton-Integrals, wobei im Fall von GOCE die zweiten Ableitungen des Gravitationspotentials zu bilden sind. Zur numerischen Berechnung ist eine Modellierung und Diskretisierung des gestellten Problems durchzuführen. Die Topographie wird hierzu in endlich große Massenkörper unterteilt und der Gesamteffekt durch die Summe der Beiträge dieser einzelnen Massenelemente berechnet. In ellipsoidischer bzw. sphärischer Approximation eignen sich vor allem Tesseroiden zur Modellierung. Da die auszuwertenden Volumenintegrale für Tesseroiden analytisch nicht lösbar sind, werden hierfür numerische Näherungsverfahren (z.B. Taylor-Reihenentwicklung, Gauß-Legendre-Kubatur) oder weitere Approximationen (z.B. Punktmasse, Quader) verwendet.

Die Berechnung von topographischen Effekten gehört mit zu den rechenzeit-intensivsten Prozessen innerhalb der Schwerefeldmodellierung. Besonders vor dem Hintergrund der Auswertung der GOCE-Gradienten nahezu in Echtzeit stellt sich die Frage nach einer effizienten Berechnungsmöglichkeit. Zielsetzung dieser Arbeit ist es, ausgehend von den bisherigen Untersuchungen in der Dissertation von F. Wild-Pfeiffer (WILD-PFEIFFER, 2007) am Geodätischen Institut der Universität Karlsruhe, eine weitere Optimierung der Modellierung durchzuführen und Untersuchungen gerade im Kontext der Satellitengradiometriemission GOCE anzustellen.

2 Das Schwerfeld der Erde

In Zeiten des fortschreitenden und lange noch nicht vollständig verstandenen Klimawandels benötigt die Wissenschaft kontinuierlich neue Erdbeobachtungsdaten, um diesem Prozess entgegen wirken zu können. Eine genaue Kenntnis des Erdschwerfeldes spielt dabei eine wichtige Rolle. Das Schwerfeld ist ständigen räumlichen und zeitlichen Variationen unterworfen und insbesondere der inhomogene gravitative Anteil spiegelt die ungleichmäßige Massenverteilung sowie den Massentransport im Erdinneren wider. Das Schwerfeld stellt in diesem Kontext eine bedeutende Informationsquelle über den inneren Aufbau, die Entwicklung und Dynamik des komplexen Systems Erde dar.

Darüber hinaus sind in den Geowissenschaften viele Bezugssysteme durch das Schwerfeld definiert. In der Geodäsie dient es u.a. als Grundlage für ein einheitliches Referenzsystem physikalischer Höhen. Die hochgenaue Bestimmung des Erdschwerfeldes und dessen zeitliche Variabilität ist daher von fundamentaler Bedeutung und kann als zentrale Aufgabe der physikalischen Geodäsie angesehen werden (TORGE, 2003). Die momentane Kenntnis des Schwerfeldes der Erde ist allerdings unvollständig und für viele Anwendungen gerade in Bezug auf die räumliche Auflösung noch von unzureichender Qualität.

Im einleitenden Abschnitt [2.1] wird zunächst auf die Zusammensetzung des Schwerfeldes eingegangen sowie grundlegende Begriffe und mathematische Zusammenhänge eingeführt. In Abschnitt [2.2] wird ein kurzer Überblick über verschiedene Verfahren der Schwerfeldbestimmung gegeben, bevor in Abschnitt [2.3] speziell die Satellitengradiometrie behandelt wird.

2.1 Definition, Zusammensetzung und Eigenschaften

Im Schwerfeld der Erde sind Massenkörper der Schwerkraft unterworfen. Diese setzt sich aus einem gravitativen Anteil, hervorgerufen durch die Anziehung der Erdmassen, und einem Zentrifugalanteil infolge der Erdrotation zusammen. Da sowohl Gravitations- als auch Zentrifugalkraft konservative Kräfte sind, kann man bei der mathematischen Darstellung des Schwerfeldes zu skalaren Potentialgrößen übergehen. Das Schwerepotential W resultiert damit aus der Summe des Gravitationspotentials V und des Zentrifugalpotentials Z :

$$W = V + Z. \quad (2-1)$$

Das Gravitationspotential der Erde lässt sich durch das Newton-Integral für die Berechnung der gravitativen Wirkung eines ausgedehnten Körpers Ω beschreiben (TORGE, 2003):

$$V(x, y, z) = G \iiint_{\Omega} \frac{\rho}{\ell} d\Omega. \quad (2-2)$$

Dabei ist $G = 6.672 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ die Newtonsche Gravitationskonstante, ρ die ortsabhängige Dichtefunktion und ℓ der Abstand zwischen dem Berechnungspunkt $P(x, y, z)$ und dem variablen Integrationspunkt $Q(x', y', z')$ des differentiellen Volumenelements $d\Omega$. Die SI-Einheit des Potentials ist $\text{m}^2 \text{ s}^{-2}$.

Im massenfreien Außenraum Ω_a genügt das Gravitationspotential V der Laplaceschen Differentialgleichung. In kartesischen Koordinaten (x, y, z) lautet diese:

$$\Delta V(x, y, z) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = V_{xx} + V_{yy} + V_{zz} = 0, \quad P \in \Omega_a. \quad (2-3)$$

In großer Entfernung von den felderzeugenden Massen klingt das Gravitationspotential radial nach außen ab und verhält sich dabei proportional zu $1/r$, wobei r den geozentrischen Abstand des Berechnungspunktes bezeichnet. Für $r \rightarrow \infty$ geht V gegen Null, ist also regulär im Unendlichen. Durch diese Eigenschaften kann das Gravitationspotential V im Außenraum Ω_a durch eine reguläre harmonische Funktion beschrieben werden.

Das durch die Erdrotation verursachte Zentrifugalpotential Z ist abhängig von der Winkelgeschwindigkeit ω der Erde und dem Abstand $p = \sqrt{x^2 + y^2}$ des Berechnungspunktes P von der Erdrotationsachse (TORGE, 2003):

$$Z(x, y, z) = \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2). \quad (2-4)$$

Z genügt nicht der Laplaceschen Differentialgleichung und ist daher keine harmonische Funktion. Im Gegensatz zum Gravitationsanteil ist der Zentrifugalanteil gering und variiert an verschiedenen Punkten an der Erdoberfläche durch den unterschiedlichen Abstand p von der Rotationsachse.

Während Z durch die geschlossene Form (2-4) direkt für jeden Punkt aus der Winkelgeschwindigkeit der Erde und dem Abstand des Punktes von der Rotationsachse berechnet werden kann, liegt die Hauptaufgabe bei der Schwerfeldbestimmung in der Berechnung des Gravitationspotentials V . Aufgrund der unbekanntenen Massen- bzw. Dichteverteilung im Erdinneren ist eine direkte Auswertung des Volumenintegrals (2-2) für das Gravitationspotentials nicht möglich.

Als harmonische Funktion kann V auch in Form einer Kugelfunktionsentwicklung dargestellt werden, was einer spektralen Zerlegung entspricht. Die Entwicklung gelingt z.B. durch die Lösung der Laplaceschen Differentialgleichung (2-3) über einen Separationsansatz oder durch die Reihenentwicklung des reziproken Abstandes $1/\ell$. In geozentrisch sphärischen Koordinaten (r, φ, λ) lautet die Kugelfunktionsentwicklung des Gravitationspotentials (HEISKANEN und MORITZ, 1967):

$$V(r, \varphi, \lambda) = \frac{GM}{r} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi) \right\}. \quad (2-5)$$

Der Grad der Entwicklung ist mit n , die Ordnung mit m bezeichnet. GM ist die geozentrische Gravitationskonstante, R der mittlere Erdradius, P_{nm} sind die zugeordneten Legendreschen Funktionen 1. Art und C_{nm} und S_{nm} werden als harmonische Koeffizienten der Entwicklung bezeichnet. Der Zentralterm GM/r entspricht dem isotropen Anteil der gravitativen Anziehung der Erde, der z.B. durch eine radial geschichtete Kugel hervorgerufen wird. Die Abweichungen des tatsächlichen Feldes von diesem Modell werden durch die harmonischen Koeffizienten beschrieben, in denen implizit wieder die unbekanntene ortsabhängige Dichte enthalten ist. Durch geeignete Beobachtungsverfahren (siehe Abschnitt [2.2]) können die harmonischen Koeffizienten C_{nm} und S_{nm} z.B. durch aktuelle Satellitenmissionen bestimmt werden. Eine Zusammenstellung dieser Koeffizienten bis zu einem maximalen Entwicklungsgrad N^{\max} wird als Geopotentialmodell bezeichnet. Durch $180^\circ/N^{\max}$ kann näherungsweise die räumliche Auflösung der Entwicklung bezogen auf die Erdoberfläche angegeben werden.

Die Geometrie des Schwerfeldes kann durch ihre Niveau- oder Äquipotentialflächen veranschaulicht werden. Dies sind Flächen, auf denen das Schwerepotential W konstant ist. Eine spezielle Niveaufläche des Schwerfeldes ist das Geoid, dem der Potentialwert $W = W_0$ zugeordnet wird. Das Geoid als Modell für die unter dem Schwerfeld geformte Figur der Erde geht auf C. F. Gauß zurück und ist dadurch charakterisiert, dass es in erster Näherung mit dem mittleren Meeresspiegel der Ozeane zusammenfällt. Genauer betrachtet ist die Geoidfläche als diejenige Niveaufläche definiert, die die Ozeane im Zustand vollkommener Ruhe ausbilden würden, wenn sie als homogene Flüssigkeit nur der Schwerkraft unterworfen und durch ein System kommunizierender Röhren unter den Kontinenten verbunden wären (TORGE, 2003, Seite 68).

Das Geoid ist eine in sich geschlossene und stetig differenzierbare Fläche. Es verläuft in der Regel unterhalb der Kontinente, in ozeanischen Gebieten aber teilweise auch oberhalb der Meeresoberfläche. Im Erdinneren kann seine Krümmung aufgrund sprunghafter Dichteänderungen Unstetigkeiten aufweisen, weshalb das Geoid global betrachtet keine analytische Funktion darstellt.

In der Geodäsie, aber auch in anderen angrenzenden Fachdisziplinen, dient das Geoid als Höhenbezugsfläche und ist somit von grundlegender Bedeutung. Oft wird die Form des Geoids auch direkt als mathematische oder physikalische Erdfigur bezeichnet (HECK, 2003).

2.2 Verfahren der Schwerfeldbestimmung

Die Schwerfeldbestimmung als zentrale Aufgabe der physikalischen Geodäsie umfasst die Bestimmung des äußeren Schwerfeldes der Erde und der physikalischen Erdoberfläche. Die mathematischen Grundlagen werden durch eine geodätische Randwertaufgabe formuliert (HECK, 1989; SEITZ, 1997). Als unbekanntes Randflächenproblem wird entweder das Geoid (Theorie von Stokes) oder die physikalische Erdoberfläche (Theorie von Molodenskii) eingeführt. Für die Bestimmung der notwendigen Randwerte im Erdschwerfeld kommen verschiedene Verfahren zum Einsatz. Sie beruhen auf der Messung von Funktionalen des Schwere- bzw. Gravitationspotentials, die auf oder in der Nähe der Erdoberfläche durchgeführt werden.

Die resultierenden Schwerfelddaten können aufgrund ihrer Genauigkeit, räumlichen bzw. spektralen Auflösung, Homogenität sowie regionalen oder globalen Abdeckung charakterisiert werden. Im weiteren Sinne ist auch eine Unterscheidung aufgrund ihrer zeitlichen Auflösung und Verfügbarkeit möglich. Folgt man RUMMEL (1989), werden in der Regel drei Beobachtungsarten verwendet: Terrestrische Schweremessungen, Altimetriemessungen und satellitengestützte Schwerfeldmissionen.

Terrestrische Schweremessungen beruhen auf dem Prinzip der Gravimetrie. Hierbei wird die Schwere g (Betrag des Gradienten des Schwerepotentials W) als Messgröße mittels Absolut- und Relativgravimetern punktweise auf der Erdoberfläche erfasst. Terrestrische Schweremessungen ermöglichen eine sehr hohe Genauigkeit, allerdings liegen qualitativ hochwertige Daten für große Teile der Erdoberfläche nicht vor. Eine homogene, globale Überdeckung ist nicht gegeben. Daher wird eine Schwerfeldbestimmung allein aus terrestrischen Daten nur in regionalen Problemstellungen angewandt.

Zur Abdeckung der Ozeanbereiche wird die (Satelliten-)Altimetrie eingesetzt. Mittels Radartechnik wird die Höhe der Meeresoberfläche über einem Referenzellipsoid bestimmt. Abweichungen zwischen der gemessenen Ozeanoberfläche und dem Geoid werden als Meeresoberflächentopographie bezeichnet und sind auf Meeresströmungen zurückzuführen.

Globale Schwerfeldbestimmungen mit einer hinreichenden Genauigkeit und räumlichen Auflösung lassen sich nur durch satellitengestützte Verfahren erreichen. Sie ermöglichen es, Beobachtungen

mit einer flächenmäßig großen (nahezu globalen) Überdeckung, bei hoher räumlicher Auflösung und homogener Genauigkeit, zu erhalten. Die Daten fließen zentral zusammen, so dass eine gute Verfügbarkeit gegeben ist und sie zeitnah ausgewertet werden können.

Zur Verbesserung der Kenntnis des globalen Gravitationsfeldes tragen derzeit aktuelle Erdbeobachtungsmissionen wie CHAMP und GRACE bei (RUMMEL ET AL., 2002), die die Erde in einer niedrigen Umlaufbahn umkreisen und daher als Low Earth Orbiter (LEO) bezeichnet werden. Das Messprinzip dieser beiden Missionen ist das Satellite-to-Satellite Tracking (SST). Hierunter versteht man die kontinuierliche Messung des Abstands zwischen zwei Satelliten und dessen Änderungsrate. Diese werden u.a. durch gravitative Störungen verursacht, wodurch man Zugang zu den gesuchten Zielgrößen erhält. Aus der Analyse der resultierenden (gestörten) Satellitenbahnen und dem Vergleich mit einer idealen Satellitenbahn können dann Informationen über Gravitationsfeldgrößen in Form der harmonischen Koeffizienten der Kugelfunktionsentwicklung (vgl. Formel 2-5) abgeleitet werden.

Die Satellitenmission CHAMP (Challenging Mini-Satellite Payload for Geophysical Research and Application) wurde im Jahr 2000 gestartet. Als Beobachtungskonzept wird das Satellite-to-Satellite Tracking im high-low-Modus (SST-hl), mit den GPS-Satelliten als hochfliegendem Teil verwendet. Die Daten von CHAMP liefern eine spektrale Auflösung des Gravitationsfeldes bis zu einem Entwicklungsgrad von $N^{\max} = 70$. Dies entspricht einer räumlichen Auflösung von ca. 300 km.

Die Nachfolgemission von CHAMP, das Satellitenpaar GRACE (Gravity Recovery and Climate Experiment) wurde im Jahr 2002 gestartet. Ergänzend zum SST im high-low-Modus wird das SST im low-low-Modus (SST-ll) durchgeführt. Zu diesem Zweck wird der gegenseitige Abstand zwischen den beiden in gleicher Höhe fliegenden GRACE-Satelliten mittels Mikrowellen μm -genau gemessen. Im Vordergrund dieser Mission steht die Beobachtung des zeitvariablen Anteils des Gravitationsfeldes. Gegenüber CHAMP konnte die spektrale Auflösung beträchtlich erhöht werden und liegt bei $N^{\max} = 150$, woraus sich eine räumliche Auflösung von ca. 150 km ergibt.

Nachteil beim Konzept des SST ist, dass mit zunehmender Bahnhöhe die Feinstrukturen des Feldes stark geglättet werden. Beobachtungen von Satellitenbahnen im Schwerefeld der Erde sind daher hauptsächlich auf den langwelligen Spektralbereich limitiert. Feinere Strukturen aus dem hochfrequenten Bereich bleiben unscharf. Für viele Anwendungen in der Geodäsie und benachbarten Geowissenschaften ist es aber notwendig, die räumliche Auflösung bei der globalen Schwerefeldbestimmung weiter zu steigern. Hier setzt das Messprinzip der Satellitengradiometrie an, auf das im nächsten Abschnitt näher eingegangen wird.

Es sei angemerkt, dass sich die Schwerefelddaten verschiedener Verfahren aufgrund ihrer unterschiedlichen Merkmale gut ergänzen und man bei der Schwerefeldbestimmung heute meist zu Kombinationslösungen übergeht. Eine Kombination verschiedener Datensätze kann z.B. durch die Anwendung der Remove-Compute-Restore-Technik (vgl. FORSBERG und TSCHERNING, 1997) realisiert werden. Bei einer Kombination ist allerdings immer die Frage nach der Genauigkeit und Homogenität der verschiedenen Datenquellen kritisch zu betrachten. Außerdem müssen die verschiedenen Daten vorab in ein einheitliches Datum transformiert werden. Kombinierte globale Modelle stehen heute durch das Geopotentialmodell EGM96 (LEMOINE ET AL., 1998) mit einem maximalen Entwicklungsgrad von $N^{\max} = 360$ oder das 2008 publizierte EGM2008 (PAVLIS ET AL., 2008) mit $N^{\max} = 2190$ zur Verfügung.

2.3 Satellitengradiometrie

Das Konzept der Gradiometrie basiert auf der Bestimmung der zweiten Ableitungen des Gravitationspotentials der Erde, die auch als Gravitationsgradienten bezeichnet werden. Legt man ein orthogonales Koordinatensystem zu Grunde, können im dreidimensionalen Raum prinzipiell neun zweite Ableitungen unterschieden werden.

Differentialgeometrisch interpretiert spiegeln die zweiten Ableitungen die Krümmung der Äquipotentialflächen wider. Im Gegensatz zu den ersten Ableitungen sind sie weitaus sensitiver gegenüber kleinen Massenänderungen. Für Berechnungspunkte in der Nähe der felderzeugenden Massen kann im Allgemeinen angenommen werden, je höher die Ableitung einer harmonischen Funktion ist, umso höher sind auch die zu erwartenden Frequenzen im Spektrum (BAUR, 2007). Die zweiten Ableitungen enthalten daher wesentlich mehr Detailinformationen gerade in Bezug auf den kurzwelligen Spektralbereich des Gravitationsfeldes. Die Forderung nach einer hohen räumlichen Auflösung kann somit durch das Gradiometrie-Konzept verwirklicht werden.

Technisch realisiert wird die Gradiometrie durch die Messung von Beschleunigungsdifferenzen bezüglich kurzer Basislinien. Ein Gradiometer besteht aus Beschleunigungsmessern (Akzelerometern), die den Betrag der aufgewendeten Kraft registrieren, um eine im jeweiligen Zentrum der Beschleunigungsmesser befindliche Testmasse in einer vorab definierten Nulllage zu halten. Mittels der Kombination aus sechs dreidimensionalen Beschleunigungsmessern lassen sich somit alle Gradienten bestimmen. Auf eine genaue Formulierung der Beobachtungsgleichungen der Gradiometrie, welche den Zusammenhang zwischen den Messungen und den gesuchten Größen darstellt, wird an dieser Stelle verzichtet und es sei auf MORITZ (1985) und RUMMEL (1986) verwiesen.

Das Prinzip der Gradiometrie ist schon sehr alt. Es wurde bisher allerdings lediglich für den terrestrischen Fall realisiert. Um global und flächendeckend Gradienten bestimmen zu können, wurde bereits Ende der Fünfziger Jahre vorgeschlagen, auch eine satellitengestützte Gradiometrie umzusetzen (CARROLL und SAVET, 1959). Bei dieser als Satellitengradiometrie (Satellite Gravity Gradiometry, SGG) bezeichneten Variante werden die Gravitationsgradienten entlang der Flugbahn eines niedrig fliegenden Satelliten, der mit einem Gradiometer ausgestattet ist, beobachtet. In der Vergangenheit wurden mehrfach entsprechende Satellitenmissionen geplant, allerdings nicht realisiert. Durch den Start der Satellitengradiometriemission GOCE im März 2009 ist nun der erste operable Satellit im Orbit, mit dem es möglich ist, Gravitationsgradienten global in Satellitenhöhe zu bestimmen. Die Satellitengradiometrie stellt damit die derzeit modernste Technik zur Gravitationsfeldbestimmung der Erde dar.

Da Satelliten nicht an der Erdrotation teilnehmen, entfällt für sie der Einfluss des Zentrifugalpotentials. Nach Gleichung (2-1) ist somit das Schwerepotential formal dem Gravitationspotential gleichgesetzt. In einigen Literaturstellen wird daher von der Messung von Schweregradienten gesprochen. Im Folgenden wird aber ausschließlich der Begriff Gravitationsgradienten (kurz: Gradienten) verwendet, da diese die eigentlichen Beobachtungstypen der Gradiometrie darstellen.

Fasst man die Gradienten zusammen, so bilden sie einen Tensor zweiter Stufe, der als Gradienten- oder Marussi-Tensor bezeichnet wird. In Matrixschreibweise ergibt sich dieser Tensor zu:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{xx} & V_{xy} & V_{xz} \\ V_{yx} & V_{yy} & V_{yz} \\ V_{zx} & V_{zy} & V_{zz} \end{pmatrix}. \quad (2-6)$$

Die verwendeten kartesischen Koordinaten (x, y, z) beziehen sich hierbei auf ein topozentrisches Koordinatensystem, dessen Ursprung im Massenmittelpunkt des Satelliten liegt. Die x -Achse dieses Systems zeigt nach Norden, die y -Achse nach Osten und die z -Achse ergänzt das linkshändige System und weist radial nach außen.

Aufgrund der Wirbelfreiheit des Gravitationsfeldes ist der Tensor symmetrisch und es gilt: $V_{xy} = V_{yx}, V_{xz} = V_{zx}$ sowie $V_{yz} = V_{zy}$. Da im massenfreien Außenraum außerdem die Laplacesche Differentialgleichung (2-3) gilt, verschwindet zudem die Spur des Tensors, wodurch eine lineare Abhängigkeit zwischen den Elementen der Hauptdiagonalen besteht: $V_{xx} + V_{yy} + V_{zz} = 0$. In jedem Raumpunkt $P(x, y, z)$ entlang der Satellitenbahn verbleiben daher insgesamt von den neun Komponenten des Tensors nur fünf unabhängig Elemente. Die SI-Einheit dieser Tensorelemente ist s^{-2} , gebräuchlicher ist hier allerdings weiterhin die Einheit Eötvös ($1\text{E} = 10^{-9} \text{s}^{-2}$).

Die verschiedenen Tensorkomponenten besitzen unterschiedlichen Informationsgehalt über das Gravitationsfeld der Erde. Die Hauptinformationen über die Gestalt des Gravitationsfeldes stecken dabei in den drei Hauptdiagonalkomponenten V_{xx}, V_{yy} und V_{zz} . Während V_{xx} empfindlich für horizontale (Ost-West)-Strukturen ist, zeigt V_{yy} vertikale (Nord-Süd)-Strukturen an. Die radiale Komponente V_{zz} kombiniert beide Informationen, so dass z.B. die Ränder von Kontinentalplatten gut detektierbar sind (siehe MÜLLER, 2001).

3 Satellitengradiometriemission GOCE

Vor dem Hintergrund unübersehbarer Klimaänderungen und ihrer gravierenden Bedeutung für unseren Lebensraum wurde von der europäischen Weltraumorganisation ESA das Erdbeobachtungsprogramm „Living-Planet“ entwickelt, welches auch hilft EU-Maßnahmen in den Bereichen Klima, Umwelt und Forschung umzusetzen. Als erste Kernmission in diesem Programm wurde 1999 die Satellitenmission GOCE ausgewählt und somit die weltweit erste Satellitengradiometriemission genehmigt (ESA, 1999). An der Umsetzung und Realisierung, dem Bau des Satelliten sowie auch der späteren Auswertung der Daten ist Deutschland maßgeblich beteiligt. Nach mehrmaliger Verschiebung des Starttermins wurde GOCE schließlich am 17. März 2009 vom Weltraumbahnhof im russischen Plesetzsk aus gestartet und in den Orbit befördert.

Im folgenden Abschnitt [3.1] wird die Mission und ihre Zielsetzung beschrieben sowie auf die verschiedenen Messsysteme von GOCE eingegangen. Die Messung der Gravitationsgradienten und die dabei erreichbaren Genauigkeiten werden ausführlich in [3.2] behandelt. Abschnitt [3.3] gibt schließlich einen kurzen Einblick in die vielfältigen Anwendungsbereiche von GOCE.

3.1 Ziele und Missionsbeschreibung

Die Zielsetzung der GOCE-Mission ist die Bestimmung des Gravitationsfeldes der Erde mit maximaler räumlicher Auflösung bei möglichst hoher Genauigkeit. Aus der Analyse der Daten sollen bei einer räumlichen Auflösung von mindestens 100 km Schwereanomalien auf besser als 1 mgal bestimmt werden und ein GOCE-Geoid mit einer Genauigkeit von 1-2 cm abgeleitet werden (ESA, 1999, Seite 79).

Im Vordergrund der Mission steht dabei die Beobachtung der bisher noch nicht genau bekannten mittel- bis kurzwelligen Anteile des Gravitationsfeldes. Mit GOCE wird ausschließlich das statische Gravitationsfeld ermittelt, die Analyse des zeitvariablen Anteils ist nicht Gegenstand der Untersuchungen. In diesem Sinne stellt GOCE eine optimale Ergänzung zur GRACE-Mission dar, welche die lang- bis mittelwelligen Anteile des Gravitationsfeldes sowie seine zeitlichen Variationen hochgenau bestimmt.

Aufgrund des schnellen Abklingverhaltens des Gravitationspotentials mit wachsendem Abstand vom Geozentrum ist eine niedrige Umlaufbahn Voraussetzung, um signifikante Beiträge und möglichst detailgetreue Informationen über das Gravitationsfeld erfassen zu können. Für die GOCE-Mission wurde daher eine sehr geringe Flughöhe von etwa 260 km auf einer nahezu kreisförmigen, sonnensynchronen Bahn gewählt. Es ergibt sich eine polnahe Umlaufbahn mit einer Inklination von 96.5° . Die Dauer einer Erdumrundung beträgt etwa 90 Minuten. Die sonnensynchrone Bahn wurde gewählt, um eine ausreichende Energieversorgung zu gewährleisten und thermisch verursachte Messfehler zu vermeiden. Diese können durch die beträchtlichen Temperaturunterschiede in Folge des Ein- bzw. Austreten des Satelliten in bzw. aus dem Erdschatten entstehen. Durch die gewählte Inklination der Satellitenbahn wird der Bereich der Polkappen nicht abgedeckt. Diese Polarlöcher sollen durch terrestrische oder Fluggravimeterdaten aufgefüllt werden.

Die geplante Missionsdauer von GOCE beträgt 20 Monate und beinhaltet dabei zwei sechsmonatige Messzeiträume, welche durch eine Standby-Phase unterbrochen werden, während der sich der Satellit für längere Zeit im Erdschatten befindet. Die erste Messphase hat Anfang Oktober 2009 begonnen und soll bis März 2010 andauern. Die zweite Messphase ist für den Zeitraum von September 2010 bis April 2011 vorgesehen (RUMMEL ET. AL, 2009).

Die Reibungskräfte, die in der niedrigen Umlaufbahn des Satelliten durch die Restatmosphäre entstehen, stellen hohe Anforderungen an die verwendeten Materialien. Um einerseits ein schnelles Sinken des Satelliten bedingt durch Reibungsverluste zu verhindern und andererseits den Satelliten in Flugrichtung drag-free, d.h. frei vom Einfluss nichtgravitativer Kräfte zu halten, werden zur Kompensation zwei Ionen-Triebwerke verwendet.

Zur Messung des Gravitationsfeldes kommen im Rahmen der GOCE-Mission zwei Messinstrumente zum Einsatz. Hauptinstrument ist ein dreiachsiges Gradiometer zur Bestimmung des mittel- und kurzwelligen Spektralanteils des Gravitationsfeldes. Um letztendlich eine vollständige Gravitationsfeldlösung zu erhalten, werden die Gradiometriemessungen durch SST-hl-Beobachtungen zur Auflösung des langwelligen Spektralbereichs ergänzt. Hierzu besitzt GOCE als zweiten Messsensor einen völlig neu entwickelten europäischen GPS-Empfänger, mit dem es möglich ist, die Satellitenbahn mit Zentimetergenauigkeit zu bestimmen. Neben der Auswertung des SST werden die Positionsinformationen des GPS-Empfängers auch benötigt, um die durch die Gradiometrie gemessenen Gradienten georeferenzieren zu können. Neben Gradiometer und GPS-Empfänger werden als sekundäre Messinstrumente Sternsensoren zur Ermittlung der Orientierung des Satelliten im Raum verwendet. Über eine Lageregelung wird mittels Magnetic Torquers die gewünschte Ausrichtung der Instrumente bezüglich der Erde erreicht.

3.2 Gradientenmessung

Das bei GOCE verwendete Gradiometer ist ein dreiachsiges Instrument, dessen Achsen senkrecht aufeinander stehen und einen gemeinsamen Ursprung im Massenzentrum des Satelliten besitzen. Jede Achse setzt sich wiederum aus einem Paar identischer, orthogonal angeordneter Dreiachsbeschleunigungsmesser zusammen. Diese sind symmetrisch angeordnet und durch eine Basislinie von 50 cm voneinander getrennt. In Abb. 3-1 ist die Anordnung der Beschleunigungsmesser A1 bis A6 schematisch dargestellt. Die eigentlichen Gradiometriebeobachtungen werden zunächst in einem instrumenteneigenen Koordinatensystem, dem Gradiometer Reference Frame (GFR) durchgeführt, welches durch die drei Achsen des Gradiometers definiert ist. Die x -Achse verläuft dabei in Flugrichtung (along-track), die y -Achse senkrecht dazu in der Bahnebene (out-of-orbit-plane), die z -Achse schließlich komplettiert das Rechtssystem und weist in radiale Richtung.

Die Gradiometerbeobachtungen werden während des Satellitenumlaufs kontinuierlich durchgeführt und in regelmäßigen Zeitintervallen abgespeichert. Aus diesen Messungen werden die Gravitationsgradienten abgeleitet. Im Fall von GOCE werden die Tensorelemente der Hauptdiagonalen V_{xx} , V_{yy} und V_{zz} sowie die Nebendiagonalelemente V_{xy} , V_{xz} und V_{yz} bestimmt. Um die definierten Ziele der Mission erreichen zu können, werden hohe Genauigkeitsanforderungen an die Bestimmung der Gradienten und somit an die bautechnische Realisierung des Gradiometers gestellt. Die verwendeten Beschleunigungsmesser des Gradiometers nutzen dabei ein kapazitives Messprinzip (siehe MÜLLER, 2001), mit dessen Hilfe man die Gradienten prinzipiell mit einer Genauigkeit im mE-Bereich bestimmen kann.

Da bei der Kalibrierung der dreiachsigen Beschleunigungsmesser auf der Erde aber stets eine Achse unter dem Einfluss der Schwerkraft steht, ist es technisch nicht möglich, für alle Sensoren die maximale Messgenauigkeit zu erreichen. Für jeden der sechs Beschleunigungsmesser ergeben sich daher jeweils zwei hoch sensitive Achsen und eine dritte reduziert sensitive Achse. Übertragen auf die Bestimmung der Gradienten bedeutet dies, dass nicht alle Tensorkomponenten mit der gleichen Genauigkeit abgeleitet werden können. Vor allem unter Berücksichtigung des unterschiedlichen Informationsgehaltes der einzelnen Tensorkomponenten (vgl. [2.3]) ist eine sinnvolle Anordnung der hoch sensitiven Achsen zu wählen.

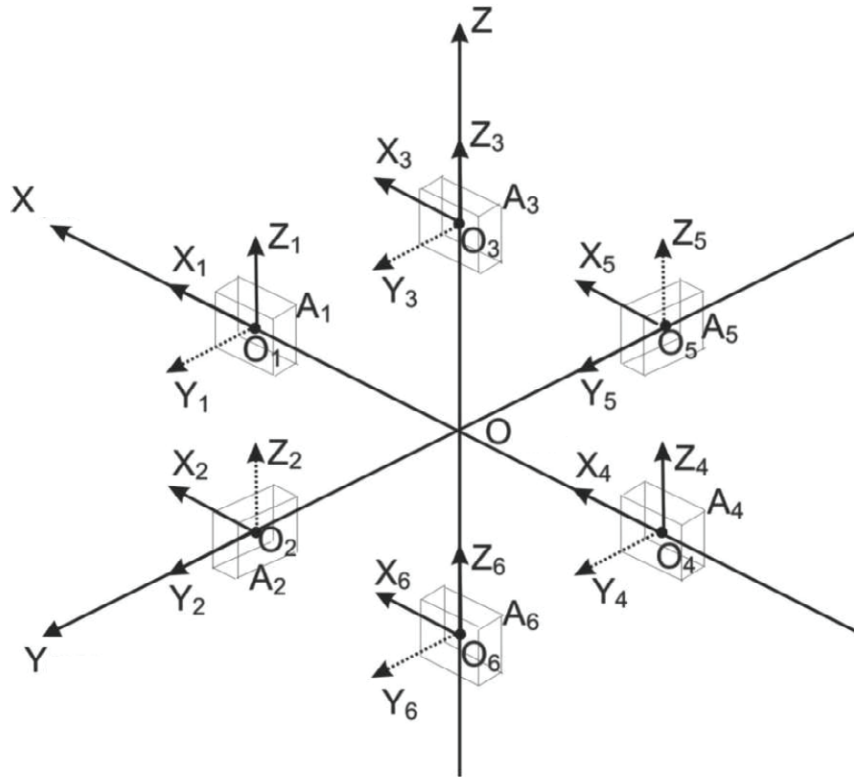


Abb. 3-1: Anordnung der Beschleunigungsmesser des GOCE-Gradiometers (STUMMER, 2006)

Für GOCE wurde die sogenannte Diamantenkonfiguration gewählt. In Abb. 3-1 sind die jeweils hoch sensitiven Achsen eines Beschleunigungsmessers mittels durchgezogener Linien, die weniger sensitive Achse mittels einer gestrichelten Linie gekennzeichnet. Die gewählte Anordnung hat vor allem den Vorteil, dass die wichtigen Hauptdiagonalelemente V_{xx} , V_{yy} und V_{zz} des Gradiententensors mit der maximalen Genauigkeit von 1 mE bestimmt werden können. Zudem wird auch das Nebendiagonalelement V_{xz} mit dieser hohen Präzision abgeleitet. Die beiden anderen Nebendiagonalelemente V_{xy} und V_{yz} werden hingegen nur mit einer geringeren Genauigkeit von 10-100 mE bestimmt (RUMMEL ET. AL., 2009).

Grundsätzlich können die angegebenen Genauigkeiten allerdings nur in einem beschränkten Spektralbereich (Messbandbreite) des Gradiometers erreicht werden. Außerhalb dieses Bereichs sind sie wesentlich schlechter und eignen sich daher nicht zur Bestimmung des Gravitationsfeldes. Die obere Grenze der Messbandbreite liegt bei 100 mHz, was einer räumlichen Auflösung von 80 km auf der Erdoberfläche und einem maximalen Entwicklungsgrad der Kugelfunktionskoeffizienten von ca. $N^{\max} = 250$ entspricht. Die untere Grenze liegt bei 5 mHz. Dies bedeutet, dass das Gradiometer erst ab einem Grad von ca. $n = 13$ der Kugelfunktionsentwicklung verwertbare Beiträge zur Gravitationsfeldbestimmung liefert (ESA, 1999). Aufgrund dieser beschränkten Messbandbreite ist die Gradiometrie auf die Bestimmung des mittel- bis kurzwelligen Bereichs des Gravitationsfeldes ausgelegt und wird durch zusätzliche SST-Beobachtungen ergänzt.

Neben der Kalibrierung der Instrumente auf der Erde finden weitere Kalibrierungsphasen im Orbit statt. Dies ist notwendig, um den absoluten Bezug der gemessenen Gradienten mit dem Gravitationsfeld der Erde herzustellen. Hierbei werden die einzelnen Tensorkomponenten mit Hilfe von unabhängigen externen Daten, z.B. auf der Basis von regional vorliegenden hochauflösenden terrestrischen Daten, verglichen und dementsprechend kalibriert. Ein analoges Vorgehen kann

schließlich auch für die Validierung der gemessenen GOCE-Gradienten verwendet werden (siehe z.B. WOLF und DENKER, 2004).

3.3 Anwendungen

Für die wissenschaftliche Nutzung der GOCE-Daten ergibt sich ein breites Spektrum von Anwendungsgebieten. Diese stammen neben der Geodäsie auch aus vielen angrenzenden Geowissenschaften wie der Geophysik, Ozeanographie, Glaziologie oder Klimatologie. Aufgrund der gesteigerten räumlichen Auflösung des Gravitationsfeldes erschließen sich hierbei ganz neue Nutzungsmöglichkeiten. Nachfolgend soll nur auf zwei ausgewählte Beispiele aus der Geodäsie eingegangen werden. Eine detaillierte Zusammenstellung der verschiedenen Anwendungen von GOCE ist in MÜLLER (2001) zu finden.

In der Geodäsie spielt vor allem die Ableitung des hochgenauen GOCE-Geoids als globale Referenzfläche für Höhensysteme eine große Rolle. Auf Grundlage dieses Geoids sollen die weltweit verschiedenen Höhensysteme auf einem hohen Genauigkeitsniveau miteinander verknüpft werden. Ziel ist die Etablierung eines globalen, einheitlichen und konsistenten Höhensystems.

Durch die gesteigerte räumliche Auflösung soll das GOCE-Geoid zudem einen Beitrag zum GNSS¹-Nivellement leisten. Mittels GNSS-Verfahren gemessene ellipsoidische Höhen können hierbei durch die Kenntnis des Geoids in physikalische Gebrauchshöhen umgerechnet werden. Je nach Genauigkeitsanforderung kann dadurch das klassische Nivellement ersetzt werden.

¹Global Navigation Satellite System

4 Topographische Effekte

Die Massenverteilung im Erdinneren ist die Quelle des Gravitationsfeldes. Die Inhomogenität des Feldes wird dabei vor allem durch die gravitative Anziehung der topographischen Erdmassen verursacht, unter denen man die Massen der Kontinente sowie die ozeanischen Massen versteht. Betrachtet man die Zusammensetzung des Gravitationsfeldes der Erde, so beeinflussen die topographischen Massen vor allem die hochfrequenten Signalanteile und spiegeln sich daher hauptsächlich in den kurzen Wellenlängen des Feldes wider.

Durch die heute auch global zur Verfügung stehenden hochauflösenden digitalen Geländemodelle (DGMs) sowie durch die für die Ozeane ergänzenden bathymetrischen Daten liegen genaue Modelle der Topographie vor. Hierdurch ist es möglich, die gravitative Wirkung topographischer Massen zu modellieren und zu berechnen. Bezüglich der Dichteverteilung innerhalb der Massen müssen dabei entsprechende Hypothesen getroffen bzw. Informationen aus Dichtemodellen entnommen werden.

Durch die a-priori-Kenntnis lassen sich diese topographischen Effekte bei vielen Berechnungsmethoden der Schwerefeldbestimmung als Vor- oder Zusatzinformationen integrieren oder in Form von topographischen Reduktionen direkt an die gemessenen Beobachtungen anbringen. Eine wichtige Anwendung topographischer Reduktionen ist die Glättung von Beobachtungsdaten.

In Abschnitt [4.1] wird zunächst eine Motivation für den Einsatz topographischer Reduktionen in der Satellitengradiometrie gegeben. In [4.2] wird auf die mathematische Modellierung topographischer Effekte eingegangen, bevor in Abschnitt [4.3] auf bisherige Arbeiten in diesem Bereich verwiesen wird.

4.1 Motivation und Einsatz

Um die bei GOCE gemessenen Gradienten zur Schwerefeldbestimmung der Erde innerhalb einer geodätischen Randwertaufgabe (GRWA) verwenden zu können, werden diese zunächst vom Ort der Messung in Satellitenhöhe auf eine entsprechende Randfläche fortgesetzt, wie z.B. auf das Geoid im Fall der Theorie von Stokes oder auf die physikalische Erdoberfläche im Fall der Theorie von Molodenskii.

Die Grundlagen für eine harmonische Fortsetzung von Gravitation- bzw. Schwerefelddaten werden in HEISKANEN und MORITZ (1967) aufgezeigt. Eine praktische Berechnung gelingt z.B. durch die Auswertung des Poisson-Integrals. Es kann prinzipiell zwischen einer Fortsetzung nach oben oder unten (up- oder downward-continuation) unterschieden werden. Insbesondere die in diesem Kontext notwendige Fortsetzung nach unten erweist sich als schwierig.

Betrachtet man die Kugelfunktionsentwicklung des Gravitationsfeldes (2-5), so tritt dort der Dämpfungsfaktor $(R/r)^{n+1}$ auf. Dies bedeutet, dass die Feinstruktur des Gravitationsfeldes mit zunehmendem radialem Abstand r und wachsendem Grad n gedämpft wird. Bei der Fortsetzung der Daten nach unten wirkt man dieser Dämpfung entgegen, es entsteht eine Aufrauhung des ursprünglichen Beobachtungssignals. Schon kleine Änderungen oder Fehler in den Beobachtungsdaten in Satellitenhöhe können somit große Auswirkungen auf die entsprechend harmonisch fortgesetzten Daten haben. Hiervon sind besonders die hochfrequenten Signalanteile betroffen, weshalb die Fortsetzung wie eine Art Hochpassfilter wirkt.

Problematisch wird dieser Umstand dadurch, dass sowohl das Beobachtungsrauschen als auch die Auswirkung von Restfehlern in den Beobachtungsdaten verstärkt werden. Verglichen mit

den Ausgangsdaten erhalten diese somit ein viel größeres Gewicht am Gesamtsignal. Eine numerisch stabile Auswertung wird dadurch erheblich erschwert oder ist gar nicht möglich. Die Fortsetzung nach unten kann daher als ein instabiler Prozess angesehen werden. Innerhalb der Prozessierungskette der GOCE-Daten stellt sie somit einen kritischen Schritt dar, der sich nachhaltig auf die Ableitung von Schwerefeldlösungen auswirkt.

Die hochfrequenten Signalanteile in den Gradienten werden vor allem durch die gravitative Anziehung der topographischen Massen induziert, die insofern die Fortsetzung nach unten erschweren. Es ist daher sinnvoll, an den Gradienten entsprechende topographische Reduktionen anzubringen, um die hochfrequenten Signalanteile aus den Beobachtungen zu eliminieren. Dies trägt zu einer erheblichen Glättung des Signals bei, vereinfacht die Fortsetzung der Daten und sorgt dafür, dass entstehende Fehlereinflüsse möglichst klein gehalten werden.

Eine solche Vorgehensweise zur Stabilisierung kann innerhalb einer Remove-Compute-Restore-Methode eingegliedert werden. Im Remove-Step werden die gemessenen Gradienten um den Einfluss topographischer Massen reduziert. Im Compute-Step findet dann die eigentliche Fortsetzung der geglätteten Daten nach unten statt. Im Restore-Step werden im Anschluss an den Fortsetzungsprozess schließlich wieder konsistente topographische Signalanteile angebracht, um die Feinstruktur des Gravitationsfeldes zu rekonstruieren.

Der Einsatz topographischer Reduktionen kann allerdings nur dann zu einer Stabilisierung beitragen, wenn diese Effekte auch in Satellitenhöhe einen signifikanten Beitrag in den gemessenen Gradienten einnehmen und ihre Größenordnung zudem oberhalb des Beobachtungsrauschens liegt. Frühere Untersuchungen durch WILD-PFEIFFER (2007) sowie MAKHLOOF und Ilk (2008) haben dies für den Fall der Satellitenhöhe von GOCE bestätigt. Bisherige Versuche zur Fortsetzung von topographisch reduzierten Gradienten nach unten auf Meeresebene (u.a. JANÁK ET AL., 2006) haben zudem deutlich den Vorteil dieser Vorgehensweise aufgezeigt.

4.2 Mathematische Modellierung

Die Modellierung topographischer Effekte ist eine zentrale Aufgabe innerhalb der physikalischen Geodäsie. Ziel ist die Bestimmung der gravitativen Anziehung der topographischen Massen, die auf eine Testmasse im Berechnungspunkt P wirken. Um den Einfluss auf den Gradiententensor zu erhalten, müssen im Fall von GOCE hierzu die zweiten Ableitungen des Potentials gebildet werden. Dabei gilt die Vereinfachung, dass der Berechnungspunkt sich in Satellitenhöhe und somit in jedem Fall außerhalb der topographischen Massen befindet.

Da es sich bei der Bestimmung topographischer Effekte um sehr rechenzeit-intensive Prozesse handelt, wurden in der Vergangenheit für unterschiedliche Schwerefeldgrößen viele verschiedene Verfahren entwickelt, um diese möglichst effizient berechnen zu können. Prinzipiell kann bei der Modellierung entsprechend den Darstellungen für das Gravitationspotential (siehe Kapitel 2) zwischen einer Modellierung im Orts- und Frequenzraum unterschieden werden. Die Untersuchungen innerhalb dieser Arbeit beschäftigten sich mit der Modellierung im Ortsbereich, alternative Methoden zur Modellierung im Frequenzraum werden in WILD-PFEIFFER (2007) aufgezeigt.

Im Ortsbereich geht die Berechnung topographischer Effekte auf die Auswertung von Funktionalen des Newton-Integrals (2-2) zurück. Für jeden Berechnungspunkt P müssen daher Volumenintegrale gelöst werden, die sich prinzipiell über die gesamten topographischen Massen der Erde erstrecken.

Eine konkrete Auswertung wird dadurch erschwert, dass die topographische Oberfläche der Erde eine unregelmäßige Geometrie aufweist und somit mathematisch nicht durch eine analytische

Funktion beschrieben werden kann. Stattdessen kann ihr Verlauf nur in diskreten Punkten erfasst und dadurch repräsentiert werden. Eine diskrete Darstellung der Topographie wird durch DGMs realisiert, wobei die Oberfläche der Erde in regelmäßig geformte, endliche Blockflächen unterteilt wird. Auf Grundlage eines einheitlichen Höhensystems liegen die Höhenwerte eines DGMs dabei meist als repräsentative Mittelwerte für eine entsprechende Blockfläche vor (Blockflächenmittelwerte). Die Unterteilungen der Blockflächen ergeben sich dabei durch die Gitternetzlinien eines zugrundeliegenden Koordinatensystems.

Um diesem Umstand Rechnung zu tragen, werden die topographischen Massen zur praktischen Auswertung anhand der Gitternetzlinien in regelmäßige, geometrische Elementarkörper zerlegt. Mittels des Newton-Integrals (2-2) wird dann der gravitative Einfluss der einzelnen Körper berechnet. Die Dichte innerhalb eines Körpers wird dabei in der Regel als konstant angenommen und kann ggf. aus einem digitalen Dichtemodell entnommen werden. Sind keine weiteren Dichteinformationen vorhanden, so wird im Allgemeinen mit einem konstanten Wert von $\rho = 2670 \text{ kg m}^{-3}$ gearbeitet, der einen Mittelwert der an der Erdoberfläche auftretenden Gesteine repräsentiert. Aus der Summation aller Einzeleffekte wird dann schließlich der gravitative Einfluss der Gesamtmasse der Topographie approximiert.

Je nach zugrundeliegendem Koordinatensystem eines DGMs ergeben sich für die Unterteilung der topographischen Massen verschiedene Grundkörper. Aufgrund der globalen Problemstellung wird in dieser Arbeit von einer Modellierung mittels globalen DGMs ausgegangen. Diese liegen in der Regel in Form von geographischen Koordinaten vor. Legt man eine geographische Gitternetzeinteilung bei der Aufteilung der topographischen Massen zu Grunde, so ergeben sich Grundkörper, die nach ANDERSON (1976) als Tesseroiden bezeichnet werden. Im Rahmen dieser Arbeit wird die Modellierung topographischer Effekte mittels Tesseroiden verfolgt. Die Bestimmung der gravitativen Wirkung von Tesseroiden, speziell die Wirkung auf die zweiten Ableitungen, bildet in diesem Kontext somit die Grundlage für die Modellierung.

Für die praktische Berechnung der Wirkung von Tesseroiden geht man von diesen zunächst elliptischen Körpern auf entsprechende sphärische Körper über. Hierbei ist ggf. eine Umrechnung der aus dem DGM stammenden geographischen Koordinaten in sphärische Koordinaten vorzunehmen. Entsprechende Formeln zur Umrechnung werden in HECK (2003) angegeben. Im Folgenden wird von sphärischen Tesseroiden ausgegangen, die geometrischen Beziehungen sind in Abb. 4-1 visualisiert.

Ein sphärisches Tesseroid wird durch zwei Meridianebenen ($\lambda_1 = \text{konst.}$, $\lambda_2 = \text{konst.}$) sowie zwei Kegelmantelflächen, deren erzeugenden Geraden durch den Kugelmittelpunkt O gehen und entlang der Parallelkreise $\varphi_1 = \text{konst.}$, $\varphi_2 = \text{konst.}$ laufen, begrenzt (KUHN, 2000). Als Grundflächen ergeben sich konzentrische Kugeloberflächen mit den Radien r_1 und r_2 .

Die Hauptschwierigkeit bei einer Modellierung mittels Tesseroiden liegt darin, dass die auszuwertenden Volumenintegrale analytisch nicht lösbar sind und daher auf numerische Näherungsverfahren oder Approximationen durch andere Massenelemente zurückgegriffen werden muss.

4.3 Bisherige Arbeiten

Im Rahmen der Dissertation von F. Wild-Pfeiffer (WILD-PFEIFFER, 2007) wurden am Geodätischen Institut der Universität Karlsruhe bereits einige Programmroutinen zur Berechnung topographischer Effekte auf den Gradiententensor entwickelt. Es wurden verschiedene Berechnungsverfahren zur Massenmodellierung mittels Tesseroiden umgesetzt, auf die innerhalb dieser Arbeit aufgebaut werden soll. Hierbei können numerische Näherungsverfahren, die auf eine direkte

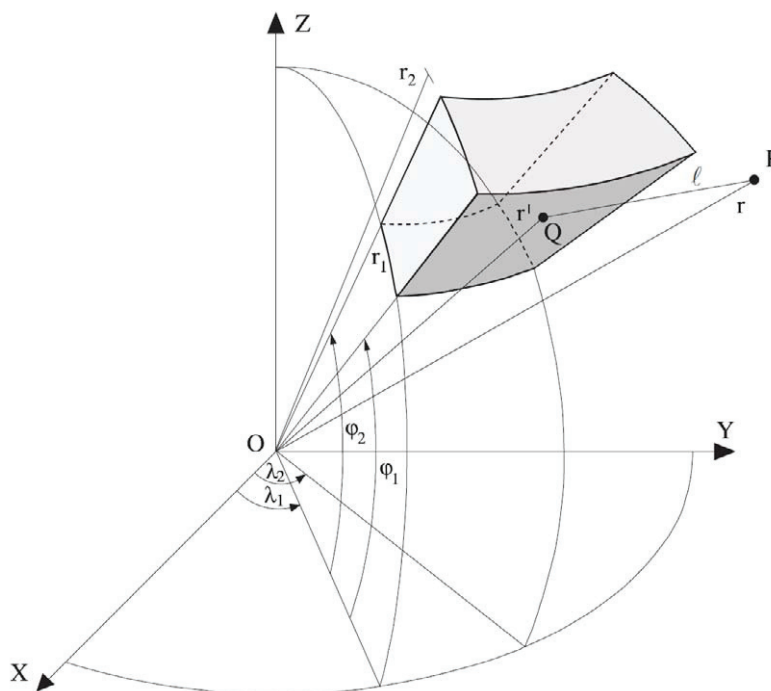


Abb. 4-1: Geometrie eines sphärischen Tesseroids (KUHNS, 2000)

Lösung der Tesseroidformeln ausgelegt sind und Verfahren, die den Effekt von Tesseroiden durch andere Massenkörper approximieren, unterschieden werden. Auf eine ausführliche Darstellung der Verfahren wird an dieser Stelle zunächst verzichtet und auf Kapitel 6 verwiesen.

In einem ersten Schritt wurde zunächst der bisherige Quellcode gesichtet, der in der Programmiersprache C vorlag. Für jedes Berechnungsverfahren wurde eine eigene Programmroutine geschrieben. Der Aufbau jedes Programms besteht dabei aus einem vierfach geschichteten Schleifenkonstrukt. Die beiden äußeren Schleifen werden dabei verwendet, um den Berechnungspunkt variabel zu halten und über ein äquidistantes (φ, λ) -Gitter in Satellitenhöhe laufen zu lassen. Für jeden Berechnungspunkt werden dann in den inneren beiden Schleifen die ebenfalls auf einem äquidistanten (φ', λ') -Gitter liegenden DGM-Punkte durchlaufen. Jeder DGM-Punkt repräsentiert dabei einen Tesseroidkörper. Bei jedem Durchgang durch die innerste Schleife werden für eine Kombination aus Berechnungs- und DGM-Punkt die Tensorelemente für das entsprechende Tesseroid bestimmt und die Ergebnisse anschließend aufsummiert.

Da dieses Grundgerüst für alle Verfahren gleich ist, wurde es zur Steigerung der Übersicht und zur Vermeidung von doppelten Quellcodesequenzen zunächst in ein Hauptprogramm ausgelagert. Eine Auswahl der Berechnungsverfahren wurde dann in eine Klassenstruktur integriert und im Rahmen eines objektorientierten Ansatzes mittels C++ in das Hauptprogramm implementiert. Um keine zusätzliche Rechenzeit dabei zu verbrauchen, wurden hierfür ausschließlich inline-Funktionen verwendet. Die implementierten Berechnungsverfahren können nun alle über eine einzige Programmroutine angesprochen werden.

Im weiteren Verlauf konnte festgestellt werden, dass noch großes Optimierungspotential in der bisherigen Programmierung vorhanden ist und zahlreiche rechentechnische Vereinfachungen zur Reduzierung der Rechenzeit durchgeführt werden können. Im Folgenden sollen exemplarisch einige der durchgeführten Optimierungen am bisherigen Quellcode aufgezeigt werden. Rechenzeit wurde vor allem durch Funktionsaufrufe, wie die Berechnung von trigonometrischen Funktionen verbraucht, die innerhalb der Schleifenstruktur stattfinden. Insbesondere Aufrufe in der innersten

Schleife wirken sich stark auf die Rechenzeit aus. Es wurde daher versucht, Funktionsaufrufe so weit es geht in die äußeren Schleifen zu verlagern oder sogar ganz aus dem Schleifenkonstrukt zu ziehen.

Da die Koordinaten der Berechnungs- und DGM-Punkte schon vor Beginn der eigentlichen Berechnung feststehen, wurde die Programmierung dahingehend geändert, dass die entsprechenden Sinus- und Kosinuswerte dieser Koordinaten bereits außerhalb der Schleifen berechnet und in einem Array abgespeichert werden. An einigen Stellen konnten Sinus- und Kosinusberechnungen durch das Ausnutzen von Additionstheoremen sogar ganz eingespart werden. Da Divisionen rechentechnisch mehr Zeit benötigen als Multiplikationen, wurde weitestgehend auf Divisionen verzichtet und stattdessen eine Multiplikation mit dem reziproken Wert durchgeführt. Dies gilt vor allem für den Abstand ℓ zwischen Berechnungs- und Quellpunkt, der innerhalb der inneren Schleife oft als Divisor benötigt wird. Statt des Abstandes ℓ wurde daher direkt der Reziprokwert in einer Variablen abgespeichert. Hierdurch konnten zahlreiche zeitaufwändige Divisionen eingespart werden. Auf die Verwendung der Funktion *pow* zur Bildung von Potenzen wurde vollständig verzichtet.

Insgesamt haben die durchgeführten Optimierungen dazu beigetragen, dass die Rechenzeit im Vergleich zur ursprünglichen Programmierung je nach Verfahren um bis zu 60 % reduziert werden konnte.

Neben der Durchführung von Optimierungen galt es, die Berechnungsergebnisse der bisherigen Programmerroutinen zu validieren. Hierzu wurde als Referenzlösung ein Kugelschalenmodell verwendet (vgl. Kapitel 7), für das eine analytische Lösung existiert. Dabei konnten für zwei Verfahren Fehler bei der Berechnung einzelner Tensorelemente detektiert werden. Innerhalb der Validierung ist zudem aufgefallen, dass sich für den Fall des Berechnungspunktes auf der Polachse große Abweichungen bei den numerischen Näherungsverfahren ergeben. Durch Betrachtung des Quellcodes konnte erkannt werden, dass dies auf eine Singularität innerhalb der verwendeten Formeln zurückzuführen ist.

Motiviert durch die Frage nach der Hebbarkeit dieser Singularität wurde die Ableitung der verwendeten Tesseroidformeln näher betrachtet und dabei ein alternativer Berechnungsweg für die Bestimmung der Tensorelemente von Tesseroiden entwickelt, der im folgenden Kapitel dargestellt wird.

5 Optimierte Tesseroidformeln

In diesem Kapitel werden Formeln für die Berechnung der gravitativen Wirkung von Tesseroiden bestimmt. Ausgehend von der Potentialwirkung eines Tesseroids wird der Einfluss auf die zweiten Ableitungen des Potentials, wie sie bei GOCE benötigt werden, formelmäßig hergeleitet. Im Gegensatz zur bisherigen Vorgehensweise, wie sie u.a. in WILD-PFEIFFER (2007) und MAKHLOOF (2007) zu finden ist, wird in dieser Arbeit eine alternative Herangehensweise vorgeschlagen. Sie führt zu einem weiter vereinfachten und optimierten Formelapparat und ist frei von Singularitäten in den Polpunkten.

In Abschnitt [5.1] wird zunächst die Ausgangslage durch die bisherige Vorgehensweise in der in dieser Arbeit verwendeten Notation erläutert und die dabei entstehende Problematik erklärt. Der daraus entwickelte optimierte Ansatz ist Gegenstand des Abschnitts [5.2].

5.1 Ausgangslage

Das Gravitationspotential eines Tesseroids mit konstanter Massendichte ρ ergibt sich aus dem Newton-Integral (2-2) zu:

$$V^T(r, \varphi, \lambda) = G\rho \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r'^2 \cos \varphi'}{\ell} dr' d\varphi' d\lambda', \quad (5-1)$$

wobei (r, φ, λ) die sphärischen Koordinaten des Berechnungspunktes P bezeichnen und (r', φ', λ') die des variablen Integrationspunktes Q . In sphärischen Koordinaten lautet das Volumenelement $d\Omega = r'^2 \cos \varphi' dr' d\varphi' d\lambda'$. Der räumliche Abstand ℓ zwischen Berechnungs- und Integrationspunkt ergibt sich zu:

$$\ell = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \psi}, \quad (5-2)$$

wobei ψ die sphärische Distanz zwischen den Radiusvektoren von P und Q ist und mit Hilfe des sphärischen Kosinussatzes berechnet werden kann:

$$\cos \psi = \sin \varphi \sin \varphi' + \cos \varphi \cos \varphi' \cos (\lambda' - \lambda). \quad (5-3)$$

Eine Bestimmung der benötigten zweiten kartesischen Ableitungen des Tesseroidpotentials ist nicht direkt möglich, da das Volumenintegral (5-1) in Abhängigkeit von sphärischen Koordinaten steht. Es ist aber möglich, die ersten und zweiten sphärischen Ableitungen in die zweiten kartesischen Ableitungen zu überführen. Entsprechende Transformationsformeln wurden von TSCHERNING (1976) hergeleitet und beziehen sich auf das unter [2.3] eingeführte topozentrische Koordinatensystem:

$$V_{xx} = \frac{1}{r^2} (V_{\varphi\varphi} + r V_r) \quad (5-4a)$$

$$V_{xy} = \frac{1}{r^2 \cos \varphi} \left(V_{\varphi\lambda} + \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} V_\lambda \right) = V_{yx} \quad (5-4b)$$

$$V_{xz} = \frac{1}{r} \left(V_{r\varphi} - \frac{1}{r} V_\varphi \right) = V_{zx} \quad (5-4c)$$

$$V_{yy} = \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} \left(V_{\lambda\lambda} + r \cos^2 \varphi V_r - \cos \varphi \sin \varphi V_\varphi \right) \quad (5-4d)$$

$$V_{yz} = \frac{1}{r \cos \varphi} \left(V_{r\lambda} - \frac{1}{r} V_{\lambda} \right) = V_{zy} \quad (5-4e)$$

$$V_{zz} = V_{rr}. \quad (5-4f)$$

Ausgehend vom Potential (5-1) ist es daher notwendig, zunächst die ersten und zweiten Ableitungen nach sphärischen Koordinaten zu bilden. Unter der Voraussetzung der Stetigkeit lassen sich Differentiation und Integration vertauschen und man erhält:

$$V_r^T(r, \varphi, \lambda) = G\rho \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{(r' \cos \psi - r)}{\ell^3} \kappa \, dr' d\varphi' d\lambda' \quad (5-5a)$$

$$V_{\varphi}^T(r, \varphi, \lambda) = G\rho \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{rr' K_{\varphi}}{\ell^3} \kappa \, dr' d\varphi' d\lambda' \quad (5-5b)$$

$$V_{\lambda}^T(r, \varphi, \lambda) = G\rho \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{rr' K_{\lambda}}{\ell^3} \kappa \, dr' d\varphi' d\lambda' \quad (5-5c)$$

$$V_{r\lambda}^T(r, \varphi, \lambda) = G\rho \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r' K_{\lambda}}{\ell^3} \left(\frac{3r(r' \cos \psi - r)}{\ell^2} + 1 \right) \kappa \, dr' d\varphi' d\lambda' \quad (5-5d)$$

$$V_{r\varphi}^T(r, \varphi, \lambda) = G\rho \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r' K_{\varphi}}{\ell^3} \left(\frac{3r(r' \cos \psi - r)}{\ell^2} + 1 \right) \kappa \, dr' d\varphi' d\lambda' \quad (5-5e)$$

$$V_{rr}^T(r, \varphi, \lambda) = G\rho \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\ell^3} \left(\frac{3(r' \cos \psi - r)^2}{\ell^2} - 1 \right) \kappa \, dr' d\varphi' d\lambda' \quad (5-5f)$$

$$V_{\varphi\lambda}^T(r, \varphi, \lambda) = G\rho \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{rr' \cos \varphi' \sin(\lambda' - \lambda)}{\ell^3} \left(\frac{3rr' \cos \varphi K_{\varphi}}{\ell^2} - \sin \varphi \right) \kappa \, dr' d\varphi' d\lambda' \quad (5-5g)$$

$$V_{\varphi\varphi}^T(r, \varphi, \lambda) = G\rho \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{rr'}{\ell^3} \left(\frac{3rr' K_{\varphi}^2}{\ell^2} - \cos \psi \right) \kappa \, dr' d\varphi' d\lambda' \quad (5-5h)$$

$$V_{\lambda\lambda}^T(r, \varphi, \lambda) = G\rho \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{rr'}{\ell^3} \left(\frac{3rr' K_{\lambda}^2}{\ell^2} - \cos \varphi' \cos \varphi \cos(\lambda' - \lambda) \right) \kappa \, dr' d\varphi' d\lambda', \quad (5-5i)$$

wobei

$$\kappa = r'^2 \cos \varphi' \quad (5-6)$$

und für die Ableitungen von $\cos \psi$ nach den sphärischen Koordinaten φ und λ die Abkürzungen

$$K_{\varphi} = \cos \psi|_{\varphi} = \cos \varphi \sin \varphi' - \sin \varphi \cos \varphi' \cos(\lambda' - \lambda), \quad (5-7)$$

$$K_{\lambda} = \cos \psi|_{\lambda} = \cos \varphi \cos \varphi' \sin(\lambda' - \lambda) \quad (5-8)$$

verwendet wurden.

Wie schon im vorangehenden Kapitel erwähnt, sind die Volumenintegrale im Fall von Tesseroiden analytisch nicht lösbar. Dies ist durch die Abstandsfunktion (5-2) bedingt, nach der die Volumenintegrale in die Klasse der elliptischen Integrale einzuordnen sind. Zur Lösung muss stattdessen auf numerische Näherungsverfahren zurückgegriffen werden (vgl. Kapitel 6).

Die bisherige Herangehensweise, wie sie u.a. in WILD-PFEIFFER (2007) und MAKHLOOF (2007) verfolgt wird, gliedert sich dabei in zwei Schritte. In einem ersten Schritt werden die Integralformeln (5-5) für die ersten und zweiten sphärischen Ableitungen numerisch gelöst, so dass man Zahlenwerte für diese Ableitungen erhält. Im zweiten Schritt werden diese Werte dann in die Transformationsformeln (5-4) eingesetzt. Hierdurch erhält man schließlich die gesuchten Zahlenwerte für die Komponenten des Gradiententensors.

Ein Nachteil bei dieser Vorgehensweise zeigt sich bei näherer Betrachtung der Transformationsvorschriften für die Elemente V_{xy} , V_{yy} und V_{yz} , bei denen die Vorfaktoren $(\cos \varphi)^{-1}$ bzw. $(\cos \varphi)^{-2}$ auftreten. Für den Fall, dass der Berechnungspunkt die Breite $\varphi = \pm 90^\circ$ annimmt, sich also auf der Polachse befindet, ergeben sich in diesen Elementen Singularitäten. Die entsprechenden Werte für diese Lage des Berechnungspunktes sind daher nicht definiert und können somit nicht berechnet werden.

Um diese Singularitäten zu vermeiden, wurden zunächst einige Versuche mittels Grenzwertbetrachtung sowie dem Übergang auf ein anderes Koordinatensystem unternommen. Diese blieben aber ergebnislos. Es wurde daher eine alternative Vorgehensweise entwickelt, die im folgenden Abschnitt vorgestellt wird.

5.2 Optimierter Ansatz

Ansatzpunkt bei dieser neuen Herangehensweise ist die Reihenfolge des ersten und zweiten Schrittes der bisherigen Variante zu vertauschen. Anstatt die Integralformeln (5-5) direkt numerisch zu lösen, werden diese zunächst in die Transformationsformeln (5-4) eingesetzt.

Dieses Vorgehen soll beispielhaft anhand der V_{yz} -Komponente verdeutlicht werden. Durch Einsetzen der sphärischen Ableitungen $V_{r\lambda}^T$ und V_{λ}^T in die Transformationsvorschrift für V_{yz} ergibt sich:

$$V_{yz}^T(r, \varphi, \lambda) = \frac{1}{r \cos \varphi} \left[G\rho \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r' K_\lambda}{\ell^3} \left(\frac{3r(r' \cos \psi - r)}{\ell^2} + 1 \right) \kappa dr' d\varphi' d\lambda' \right. \\ \left. - \frac{1}{r} G\rho \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{rr' K_\lambda}{\ell^3} \kappa dr' d\varphi' d\lambda' \right]. \quad (5-9)$$

Die beiden Volumenintegrale lassen sich aufgrund der selben Integrationsgrenzen zusammenfassen. Zudem können die Vorfaktoren in die Integrale hineingezogen werden. Dadurch erhält man:

$$V_{yz}^T(r, \varphi, \lambda) = G\rho \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r \cos \varphi} \left[\frac{r' K_\lambda}{\ell^3} \left(\frac{3r(r' \cos \psi - r)}{\ell^2} + 1 \right) - \frac{r' K_\lambda}{\ell^3} \right] \kappa dr' d\varphi' d\lambda'$$

$$\begin{aligned}
&= G\rho \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{3r r' K_\lambda (r' \cos \psi - r)}{\ell^5} \kappa \, dr' d\varphi' d\lambda' \\
&= G\rho \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{3r' \cos \varphi' \sin (\lambda' - \lambda) (r' \cos \psi - r)}{\ell^5} \kappa \, dr' d\varphi' d\lambda'. \tag{5-10}
\end{aligned}$$

Die Singularität in V_{yz} ist somit behoben. Ein analoges Vorgehen ist auch für die übrigen Tensorelemente möglich. Durch Einsetzen der Volumenintegrale (5-5) in die Transformationsgleichungen (5-4) und entsprechende Umformungen ergibt sich die Darstellung:

$$V_{xx}^T(r, \varphi, \lambda) = G\rho \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{3r'^2 K_\varphi^2}{\ell^5} - \frac{1}{\ell^3} \right) \kappa \, dr' d\varphi' d\lambda' \tag{5-11a}$$

$$V_{xy}^T(r, \varphi, \lambda) = G\rho \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{3r'^2 K_\varphi \cos \varphi' \sin (\lambda' - \lambda)}{\ell^5} \kappa \, dr' d\varphi' d\lambda' \tag{5-11b}$$

$$V_{xz}^T(r, \varphi, \lambda) = G\rho \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{3r' K_\varphi (r' \cos \psi - r)}{\ell^5} \kappa \, dr' d\varphi' d\lambda' \tag{5-11c}$$

$$V_{yy}^T(r, \varphi, \lambda) = G\rho \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{3(r' \cos \varphi' \sin (\lambda' - \lambda))^2}{\ell^5} - \frac{1}{\ell^3} \right) \kappa \, dr' d\varphi' d\lambda' \tag{5-11d}$$

$$V_{yz}^T(r, \varphi, \lambda) = G\rho \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{3r' \cos \varphi' \sin (\lambda' - \lambda) (r' \cos \psi - r)}{\ell^5} \kappa \, dr' d\varphi' d\lambda' \tag{5-11e}$$

$$V_{zz}^T(r, \varphi, \lambda) = G\rho \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{3(r' \cos \psi - r)^2}{\ell^5} - \frac{1}{\ell^3} \right) \kappa \, dr' d\varphi' d\lambda'. \tag{5-11f}$$

Es wird deutlich, dass sich die jeweiligen Vorfaktoren kürzen und somit alle Singularitäten beseitigt sind. Eine Berechnung für den Fall $\varphi = \pm 90^\circ$ ist bei dieser Vorgehensweise auch für die Tensorelemente V_{xy} , V_{yy} und V_{yz} gegeben. Insgesamt können auch numerisch stabilere Ergebnisse erzielt werden, wenn die Breite des Berechnungspunktes sich dem Grenzwert $\varphi = \pm 90^\circ$ annähert.

Im Vergleich zur ursprünglichen Herangehensweise erhält man direkte Integralformeln für die gesuchten Komponenten des Gradiententensors in kartesischen Koordinaten. Die Anzahl der numerisch zu lösenden Volumenintegrale reduziert sich bei dieser Herangehensweise dadurch von neun auf sechs, wodurch eine signifikante Verringerung der Rechenzeit erwartet werden kann.

Betrachtet man die Formeln (5-11) genauer, so lassen sich noch weitere Vereinfachungen in der Formelstruktur durchführen. In den einzelnen Tensorelementen lassen sich Systematiken erkennen. Je nach abgeleiteter Koordinate (x , y oder z) ergeben sich gleiche Terme innerhalb der Volumenintegrale. Führt man die Abkürzungen

$$\begin{aligned}
\Delta x &= r' K_\varphi \\
\Delta y &= r' \cos \varphi' \sin (\lambda' - \lambda) \\
\Delta z &= r' \cos \psi - r
\end{aligned} \tag{5-12}$$

ein, so ergibt sich eine weiter vereinfachte Darstellung:

$$V_{xx}^T(r, \varphi, \lambda) = G\rho \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{3\Delta x^2}{\ell^5} - \frac{1}{\ell^3} \right) \kappa \, dr' \, d\varphi' \, d\lambda' \quad (5-13a)$$

$$V_{xy}^T(r, \varphi, \lambda) = G\rho \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{3\Delta x \Delta y}{\ell^5} \kappa \, dr' \, d\varphi' \, d\lambda' \quad (5-13b)$$

$$V_{xz}^T(r, \varphi, \lambda) = G\rho \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{3\Delta x \Delta z}{\ell^5} \kappa \, dr' \, d\varphi' \, d\lambda' \quad (5-13c)$$

$$V_{yy}^T(r, \varphi, \lambda) = G\rho \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{3\Delta y^2}{\ell^5} - \frac{1}{\ell^3} \right) \kappa \, dr' \, d\varphi' \, d\lambda' \quad (5-13d)$$

$$V_{yz}^T(r, \varphi, \lambda) = G\rho \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{3\Delta y \Delta z}{\ell^5} \kappa \, dr' \, d\varphi' \, d\lambda' \quad (5-13e)$$

$$V_{zz}^T(r, \varphi, \lambda) = G\rho \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{3\Delta z^2}{\ell^5} - \frac{1}{\ell^3} \right) \kappa \, dr' \, d\varphi' \, d\lambda'. \quad (5-13f)$$

Die Abkürzungen Δx , Δy und Δz lassen sich hierbei geometrisch interpretieren. Um dies zu verdeutlichen, ist es sinnvoll auf eine Darstellung in Polarkoordinaten überzugehen. Hierzu wird als zusätzliche Größe der auf den Berechnungspunkt bezogene Azimutwinkel α eingeführt. Durch Anwendung der sphärischen Trigonometrie ergeben sich die Zusammenhänge (siehe HEISKANEN und MORITZ 1967, Seite 113):

$$\begin{aligned} \sin \psi \cos \alpha &= \cos \varphi \sin \varphi' - \sin \varphi \cos \varphi' \cos (\lambda' - \lambda) = K_\varphi \\ \sin \psi \sin \alpha &= \cos \varphi' \sin (\lambda' - \lambda). \end{aligned} \quad (5-14)$$

Setzt man diese Beziehungen in die Formeln (5-12) ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \Delta x &= r' \sin \psi \cos \alpha \\ \Delta y &= r' \sin \psi \sin \alpha \\ \Delta z &= r' \cos \psi - r. \end{aligned} \quad (5-15)$$

Dies verdeutlicht, dass sich Δx , Δy und Δz geometrisch als kartesische Koordinatenunterschiede zwischen dem Berechnungspunkt P und dem Integrationspunkt Q im topozentrischen System des Berechnungspunktes interpretieren lassen. Für die rechentechnische Umsetzung ist die Darstellung (5-15) allerdings nicht empfehlenswert, weil eine zusätzliche Berechnung des Azimutwinkels α aus den sphärischen Koordinaten des Berechnungs- und Integrationspunktes notwendig ist.

In einem letzten Schritt sollen die Volumenintegrale (5-13) in einer kompakten Index-Schreibweise angegeben werden. Hierzu wird das Kronecker-Delta

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases} \quad (5-16)$$

eingeführt. Die zweiten kartesischen Ableitungen lassen sich somit als Elemente des Marussi-Tensors durch:

$$M_{ij}^T(r, \varphi, \lambda) = G\rho \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{3\Delta x_i \Delta x_j}{\ell^5} - \frac{\delta_{ij}}{\ell^3} \right) \kappa \, dr' \, d\varphi' \, d\lambda' \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \quad (5-17)$$

mit

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= r' K_\varphi \\ \Delta x_2 &= r' \cos \varphi' \sin(\lambda' - \lambda) \\ \Delta x_3 &= r' \cos \psi - r \end{aligned} \quad (5-18)$$

darstellen. Insbesondere diese Index-Schreibweise zeigt deutlich den Vorteil dieser neuen Vorgehensweise, wodurch die Tesseroidformeln in einer kompakten Struktur angegeben werden können. Hierdurch vereinfachen sich auch die Berechnungsformeln der numerischen Näherungsverfahren zur Lösung der Volumenintegrale, die im nächsten Kapitel vorgestellt werden. Für weitere Betrachtungen wird der Integrand von (5-17) durch die Funktion I_{ij}^T bezeichnet:

$$I_{ij}^T(r', \varphi', \lambda') = \left(\frac{3\Delta x_i \Delta x_j}{\ell^5} - \frac{\delta_{ij}}{\ell^3} \right) \kappa. \quad (5-19)$$

6 Berechnungsverfahren für die Massenmodellierung

In diesem Kapitel wird auf verschiedene Berechnungsverfahren für die Massenmodellierung eingegangen, die im Rahmen dieser Arbeit untersucht wurden. Die Berechnungsformeln für die jeweiligen Verfahren unterscheiden sich dabei von den in WILD-PFEIFFER (2007) angegebenen. Dies ist insbesondere auf die weiterentwickelten Tesseroidformeln zurückzuführen. Die Programmroutinen für die Verfahren wurden entsprechend angepasst bzw. neu geschrieben.

Die Verfahren können in zwei Kategorien eingeteilt werden. In [6.1] werden Näherungsverfahren vorgestellt, die auf die numerische Lösung der Tesseroidformeln (5-17) ausgelegt sind. In [6.2] werden weitere Massenkörper vorgestellt, die eingesetzt werden können, um den Effekt eines Tesseroids zu approximieren.

6.1 Numerische Näherungslösungen

Die numerischen Näherungsverfahren zur Lösung der Volumenintegrale (5-17) für das Tesseroid basieren auf der Auswertung von Funktionalen des Integranden (5-19). In [6.1.1] wird auf die Taylor-Reihenentwicklung des Integranden und anschließende gliedweise Integration eingegangen. Die rein numerische Integration mittels Gauß-Legendre-Kubatur wird in [6.1.2] behandelt. Ein weiterer, hier nicht behandelter Ansatz ist die analytische Integration des Volumenintegrals in radialer Richtung und anschließende numerische Integration des verbleibenden zweidimensionalen Flächenintegrals (siehe WILD-PFEIFFER, 2007; MAKHLOOF und ILK, 2008).

6.1.1 Taylor-Reihenentwicklung

Zur Lösung Riemannscher Integrale kann eine Taylor-Reihenentwicklung des Integranden und anschließende gliedweise Integration durchgeführt werden. Durch eine geschickte Wahl des Reihenentwicklungspunktes kann die Berechnung dabei erheblich vereinfacht werden. Legt man den Entwicklungspunkt in den geometrischen Mittelpunkt des Tesseroids $P_0(r_0, \varphi_0, \lambda_0)$, so werden Terme ungerader Ordnung bzw. gemischte Terme nach der Integration zu Null (vgl. HECK und SEITZ, 2007). Die Komponenten des Marussi-Tensors ergeben sich dadurch zu:

$$M_{ij}^T(r, \varphi, \lambda) = G\rho\Delta r\Delta\varphi\Delta\lambda \times \left[I_{ij}^T(r_0, \varphi_0, \lambda_0) + \frac{1}{24} \left(\left. \frac{\partial^2 I_{ij}^T}{\partial r'^2} \right|_0 \Delta r^2 + \left. \frac{\partial^2 I_{ij}^T}{\partial \varphi'^2} \right|_0 \Delta \varphi^2 + \left. \frac{\partial^2 I_{ij}^T}{\partial \lambda'^2} \right|_0 \Delta \lambda^2 \right) + O(\Delta^4) \right] \quad (6-1)$$

mit

$$\begin{aligned} \Delta r &= r_2 - r_1 & \Delta \varphi &= \varphi_2 - \varphi_1 & \Delta \lambda &= \lambda_2 - \lambda_1 \\ r_0 &= \frac{r_1 + r_2}{2} & \varphi_0 &= \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} & \lambda_0 &= \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}. \end{aligned}$$

Das Landau-Symbol $O(\Delta^4)$ bedeutet, dass bei der praktischen Auswertung Terme ab der vierten Ordnung in Δr , $\Delta \varphi$, $\Delta \lambda$ vernachlässigt werden.

Während die Terme nullter Ordnung durch direkte Auswertung des Integranden bestimmt werden können, müssen für die Berechnung der Terme zweiter Ordnung die zweiten Ableitungen des Integranden nach den Koordinaten (r', φ', λ') bestimmt werden. Wählt man $\xi_1 = r'$, $\xi_2 = \varphi'$, $\xi_3 = \lambda'$, so können die benötigten zweiten Ableitungen allgemein angegeben werden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 I_{ij}^T}{\partial \xi_k^2} = & \kappa'' \left[\frac{3\Delta x_i \Delta x_j}{\ell^5} \right] + \kappa' \left[\frac{6(\Delta x_i \Delta x'_j + \Delta x_j \Delta x'_i)}{\ell^5} + \frac{30\Delta x_i \Delta x_j}{\ell^7} a' \right] \\ & + \kappa \left[\frac{3(\Delta x_i \Delta x''_j + \Delta x_j \Delta x''_i)}{\ell^5} + \frac{6\Delta x'_i \Delta x'_j}{\ell^5} + \frac{15\Delta x_i \Delta x_j}{\ell^7} a'' \right. \\ & \left. + \frac{30(\Delta x_i \Delta x'_j + \Delta x_j \Delta x'_i)}{\ell^7} a' + \frac{105\Delta x_i \Delta x_j}{\ell^9} a'^2 \right] \\ & - \delta_{ij} \left[\kappa'' \frac{1}{\ell^3} + \kappa' \frac{6}{\ell^5} a' + \kappa \left(\frac{3}{\ell^5} a'' + \frac{15}{\ell^7} a'^2 \right) \right] \quad i, j, k \in \{1, 2, 3\} \end{aligned} \quad (6-2)$$

mit

$$\begin{aligned} \kappa' &= \frac{\partial \kappa}{\partial \xi_k}, & \Delta x'_1 &= \frac{\partial \Delta x_1}{\partial \xi_k}, & \Delta x'_2 &= \frac{\partial \Delta x_2}{\partial \xi_k}, & \Delta x'_3 &= \frac{\partial \Delta x_3}{\partial \xi_k} \\ \kappa'' &= \frac{\partial^2 \kappa}{\partial \xi_k^2}, & \Delta x''_1 &= \frac{\partial^2 \Delta x_1}{\partial \xi_k^2}, & \Delta x''_2 &= \frac{\partial^2 \Delta x_2}{\partial \xi_k^2}, & \Delta x''_3 &= \frac{\partial^2 \Delta x_3}{\partial \xi_k^2} \\ a' &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi_k} (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \psi), & a'' &= -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi_k^2} (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \psi). \end{aligned}$$

Speziell für die zweiten Ableitungen nach r' gilt:

$$\begin{aligned} \kappa' &= 2r' \cos \varphi', & \Delta x'_1 &= K_\varphi, & \Delta x'_2 &= \cos \varphi' \sin (\lambda' - \lambda), & \Delta x'_3 &= \cos \psi \\ \kappa'' &= 2 \cos \varphi', & \Delta x''_1 &= 0, & \Delta x''_2 &= 0, & \Delta x''_3 &= 0 \\ & & a' &= r \cos \psi - r', & a'' &= -1. \end{aligned}$$

Hierdurch ergibt sich eine Vereinfachung von (6-2) zu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 I_{ij}^T}{\partial r'^2} = & \kappa'' \left[\frac{3\Delta x_i \Delta x_j}{\ell^5} \right] + \kappa' \left[\frac{6(\Delta x_i \Delta x'_j + \Delta x_j \Delta x'_i)}{\ell^5} + \frac{30\Delta x_i \Delta x_j}{\ell^7} a' \right] \\ & + \kappa \left[\frac{6\Delta x'_i \Delta x'_j}{\ell^5} - \frac{15\Delta x_i \Delta x_j}{\ell^7} + \frac{30(\Delta x_i \Delta x'_j + \Delta x_j \Delta x'_i)}{\ell^7} a' + \frac{105\Delta x_i \Delta x_j}{\ell^9} a'^2 \right] \\ & - \delta_{ij} \left[\kappa'' \frac{1}{\ell^3} + \kappa' \frac{6}{\ell^5} a' + \kappa \left(\frac{15}{\ell^7} a'^2 - \frac{3}{\ell^5} \right) \right]. \end{aligned} \quad (6-3)$$

Speziell für die zweiten Ableitungen nach φ' gilt:

$$\begin{aligned}\kappa' &= -r'^2 \sin \varphi', & \Delta x'_1 &= r' K_{\varphi\varphi'}, & \Delta x'_2 &= -r' \sin \varphi' \sin(\lambda' - \lambda), & \Delta x'_3 &= r' K_{\varphi'} \\ \kappa'' &= -r'^2 \cos \varphi', & \Delta x''_1 &= -\Delta x_1, & \Delta x''_2 &= -\Delta x_2, & \Delta x''_3 &= -r' \cos \psi\end{aligned}$$

$$a' = r \Delta x'_3, \quad a'' = r \Delta x''_3$$

$$\begin{aligned}K_{\varphi'} &= \cos \psi|_{\varphi'} = \sin \varphi \cos \varphi' - \cos \varphi \sin \varphi' \cos(\lambda' - \lambda) \\ K_{\varphi\varphi'} &= \cos \psi|_{\varphi\varphi'} = \cos \varphi \cos \varphi' + \sin \varphi \sin \varphi' \cos(\lambda' - \lambda).\end{aligned}$$

Speziell für die zweiten Ableitungen nach λ' gilt:

$$\begin{aligned}\kappa' &= 0, & \Delta x'_1 &= \Delta x_2 \sin \varphi, & \Delta x'_2 &= r' \cos \varphi' \cos(\lambda' - \lambda), & \Delta x'_3 &= -\Delta x_2 \cos \varphi \\ \kappa'' &= 0, & \Delta x''_1 &= \Delta x'_2 \sin \varphi, & \Delta x''_2 &= -\Delta x_2, & \Delta x''_3 &= -\Delta x'_2 \cos \varphi\end{aligned}$$

$$a' = r \Delta x'_3, \quad a'' = r \Delta x''_3.$$

Hierdurch ergibt sich eine Vereinfachung von (6-2) zu:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 I_{ij}^T}{\partial \lambda'^2} &= \kappa \left[\frac{3(\Delta x_i \Delta x_j'' + \Delta x_j \Delta x_i'')}{\ell^5} + \frac{6\Delta x_i' \Delta x_j'}{\ell^5} + \frac{15\Delta x_i \Delta x_j}{\ell^7} a'' \right. \\ &\quad \left. + \frac{30(\Delta x_i \Delta x_j' + \Delta x_j \Delta x_i')}{\ell^7} a' + \frac{105\Delta x_i \Delta x_j}{\ell^9} a'^2 \right] \\ &\quad - \delta_{ij} \left[\kappa \left(\frac{3}{\ell^5} a'' + \frac{15}{\ell^7} a'^2 \right) \right].\end{aligned}\tag{6-4}$$

Bei der Auswertung der Taylor-Reihenentwicklung (6-1) sind die zweiten Ableitungen dabei jeweils im Punkt $P_0(r_0, \varphi_0, \lambda_0)$ zu berechnen.

6.1.2 Gauß-Legendre-Kubatur

Eine weitere Möglichkeit zur Berechnung der Volumenintegrale (5-17) besteht durch eine rein numerische Auswertung mittels Gauß-Legendre-Kubatur (3D). Hierbei wird pro Integrationsvariable eine Quadraturformel angewandt. Allgemein lässt sich ein Volumenintegral über den Integrationsbereich des Würfels $[-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$ nach der Gauß-Legendre-Produktformel vom Grad n durch

$$H = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 h(x, y, z) dx dy dz \approx \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n \sum_{m=0}^n w_k w_l w_m h(x_k, y_l, z_m)\tag{6-5}$$

approximieren (vgl. SCHWARZ, 1993). Die Auswertepunkte (x_k, y_l, z_m) werden als Stützstellen oder Knoten, die Koeffizienten w_k , w_l und w_m als Gewichte bezeichnet. Die erreichbare Genauigkeit der Approximation wird durch den Grad n bestimmt. Durch eine optimale Wahl der Stützstellen in den Nullstellen der Legendreschen Polynome P_n vom Grad n kann eine maximale Rechenschärfe erreicht werden. Der Exaktheitsgrad der Approximation in jeder Koordinatenrichtung beträgt dann $2n + 1$, d.h. Polynome vom Grad $2n + 1$ werden exakt integriert.

Die Gesamtzahl der Stützstellen steigt mit zunehmenden Grad n und kann durch $(n + 1)^3$ berechnet werden. Die Werte für die Stützstellen und Gewichte bis zum Grad $n = 2$ können Tab. 6-1 entnommen werden. Die Lage der Stützstellen ist für diese Fälle in Abb. 6-1 dargestellt.

Tab. 6-1: Stützstellen und Gewichte der Gauß-Legendre-Kubatur

Grad n	$x_i, i = 0 \dots n$	$w_i, i = 0 \dots n$
0	0	2
1	$-\sqrt{1/3}$ $\sqrt{1/3}$	1 1
2	$-\sqrt{3/5}$ 0 $\sqrt{3/5}$	5/9 8/9 5/9

Durch lineare Transformation lässt sich jedes Volumenintegral mit beliebigen endlichen Integrationsgrenzen auf das normierte Intervall $[-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$ abbilden und kann durch (6-5) gelöst werden:

$$\begin{aligned}
 H &= \int_a^b \int_c^d \int_e^f h(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \\
 &\approx \frac{b-a}{2} \frac{d-c}{2} \frac{f-e}{2} \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n \sum_{m=0}^n w_k w_l w_m h\left(\frac{b-a}{2} x_k + \frac{a+b}{2}, \frac{d-c}{2} y_l + \frac{c+d}{2}, \frac{f-e}{2} z_m + \frac{e+f}{2}\right).
 \end{aligned} \tag{6-6}$$

Übertragen auf die Volumenintegrale (5-17) für das Tesseroid lassen sich die Komponenten des Marussi-Tensors durch

$$\begin{aligned}
 M_{ij}^T(r, \varphi, \lambda) &= G\rho \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} I_{ij}^T(r', \varphi', \lambda') \, dr' \, d\varphi' \, d\lambda' \\
 &\approx \frac{1}{8} G\rho \Delta r \Delta \varphi \Delta \lambda \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n \sum_{m=0}^n w_k w_l w_m I_{ij}^T\left(r_0 + \frac{\Delta r}{2} x_k, \varphi_0 + \frac{\Delta \varphi}{2} y_l, \lambda_0 + \frac{\Delta \lambda}{2} z_m\right)
 \end{aligned} \tag{6-7}$$

berechnen.

6.2 Approximationen

Ein weiterer Ansatz, die Wirkung von Tesseroiden zu bestimmen, besteht darin, Tesseroiden unter Annahme lokaler Massenerhaltung durch andere Massenkörper anzunähern, für die eine

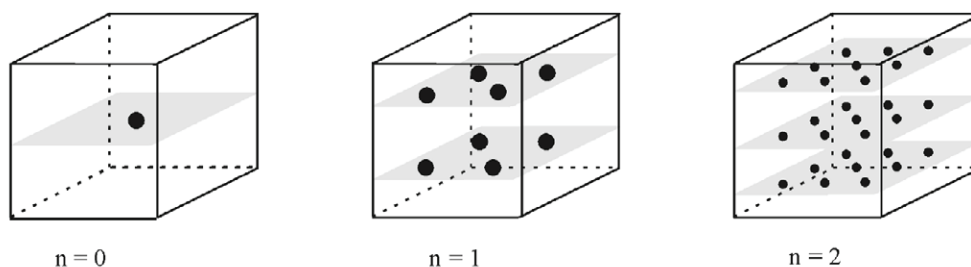


Abb. 6-1: Verteilung der Stützstellen bei der Gauß-Legendre-Kubatur (WILD-PFEIFFER, 2007)

analytische Lösung angegeben werden kann. Hierzu werden die Approximationen durch einen Quader [6.2.1] und eine Punktmasse [6.2.2] betrachtet.

6.2.1 Quader

Ein anderer Massenkörper, der häufig bei der Modellierung topographischer Effekte zum Einsatz kommt, ist der Quader (rechtwinkliges Prisma). Im Gegensatz zu Tesseroiden stellt die Einteilung in Quadern eine planare Approximation der Topographie dar. Quader werden daher vor allem bei der Modellierung mittels lokaler DGMS angewandt, die in der Regel in rechtwinklig-kartesischen Koordinaten gegeben sind. Im hier betrachteten Fall können Quader aber auch eingesetzt werden, um die Wirkung von Tesseroiden zu approximieren.

Unter der Einhaltung der Massengleichheit ist hierfür eine Umrechnung der Tesseroid- in Quaderdimensionen notwendig. Eine strenge Zuordnung zwischen den Dimensionen ist nicht möglich, weshalb weitere Annahmen notwendig sind. Unter der Vernachlässigung von Termen höherer Ordnung lassen sich aus der Forderung der Massengleichheit beider Körper die folgenden Zuordnungen für die Kantenlängen Δx , Δy und Δz des Quaders treffen (siehe HECK und SEITZ, 2007):

$$\begin{aligned}\Delta x &= r_0 \Delta\varphi \\ \Delta y &= r_0 \cos \varphi_0 \Delta\lambda \\ \Delta z &= \Delta r.\end{aligned}\tag{6-8}$$

Ein Vorteil in der Verwendung von Quadern liegt darin, dass das Newton-Integral (2-2) für diesen Körper analytisch gelöst werden kann. Berechnungsformeln für die zweiten kartesischen Ableitungen sind in NAGY ET AL. (2000, 2002) zu finden. Die analytischen Berechnungsformeln erfordern dabei die Auswertung zahlreicher Logarithmus- und Arcus-Tangens Funktionen. Dies wirkt sich nachhaltig auf die Rechenzeit aus, die dadurch erheblich zunimmt.

Neben der Berechnung mittels der analytischen Lösung wird daher als zweite Variante für den Quader ebenfalls eine Taylor-Reihenentwicklung des Integranden und anschließende gliedweise Integration durchgeführt. Diese Berechnungsvariante wird als „MacMillian-Approximation“ bezeichnet (siehe HECK und SEITZ, 2007) und gleicht der in Abschnitt [6.1.1] für das Tesseroid beschriebenen Vorgehensweise. Durch die Wahl des Entwicklungspunktes im geometrischen Mittelpunkt des Quaders heben sich auch hier die Terme ungerader Ordnung bzw. gemischte Terme nach der Integration auf. Entsprechende Berechnungsformeln sind in WILD-PFEIFFER (2007) angegeben.

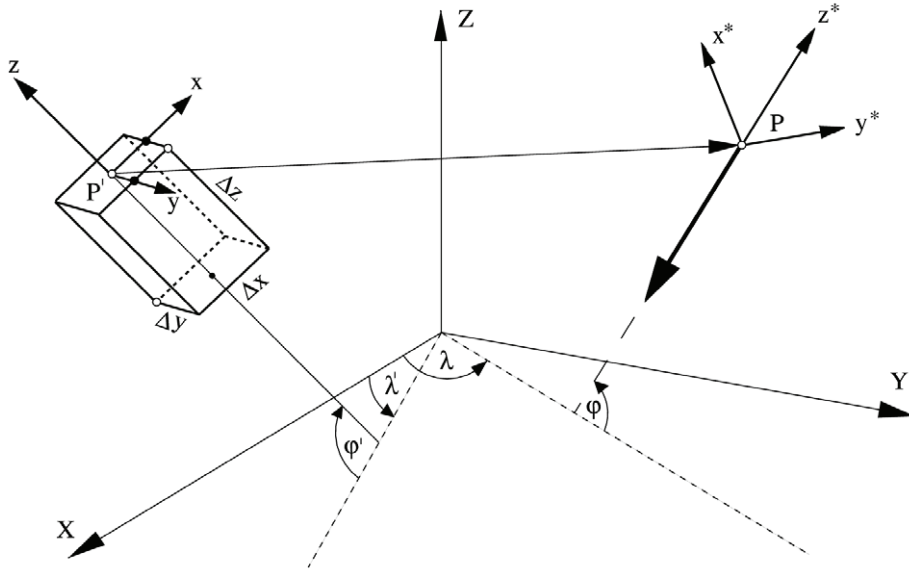


Abb. 6-2: Transformation vom Kantensystem des Quaders in das topozentrische System des Berechnungspunktes P (HECK und SEITZ, 2007)

In beiden Berechnungsfällen findet die Bestimmung der Elemente des Marussi-Tensors zunächst im lokalen Kantensystem des Quaders statt. Es ist daher notwendig für jeden Quader den Marussi-Tensor vom lokalen Kantensystem (x, y, z) in das topozentrische System des Berechnungspunktes (x^*, y^*, z^*) zu transformieren. Dies erfolgt über ein globales terrestrisches Äquatorsystem (X, Y, Z) . Die Beziehungen zwischen diesen Systemen sind in Abb. 6-2 dargestellt. Die Umrechnung wird durch die Matrizenmultiplikation mit einer Transformationsmatrix \mathbf{R} realisiert:

$$\mathbf{M}^* = \mathbf{R} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{R}^T. \quad (6-9)$$

Hierbei bezeichnet \mathbf{M} den Marussi-Tensor im Kantensystem des Quaders. Für die Transformationsmatrix \mathbf{R} gilt nach GRÜNINGER (1990):

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\varphi, \lambda, \varphi', \lambda') &= \left[\mathbf{S}_x \cdot \mathbf{R}_y \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \cdot \mathbf{R}_z(\lambda) \right] \cdot \left[\mathbf{S}_x \cdot \mathbf{R}_y \left(\frac{\pi}{2} - \varphi' \right) \cdot \mathbf{R}_z(\lambda') \right]^T \\ &= \mathbf{S}_x \cdot \mathbf{R}_y \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \cdot \mathbf{R}_z(\lambda - \lambda') \cdot \mathbf{R}_y \left(\varphi' - \frac{\pi}{2} \right) \cdot \mathbf{S}_x. \end{aligned} \quad (6-10)$$

\mathbf{R}_y und \mathbf{R}_z bezeichnen Rotationsmatrizen für die Drehung um die Y - und die Z -Achse; \mathbf{S}_x stellt eine Spiegelung der X -Achse dar. In expliziter Form kann die Transformationsmatrix \mathbf{R} durch

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} c_1 \sin \varphi \sin \varphi' + \cos \varphi \cos \varphi' & c_2 \sin \varphi & -c_1 \sin \varphi \cos \varphi' + \cos \varphi \sin \varphi' \\ -c_2 \sin \varphi' & c_1 & c_2 \cos \varphi' \\ -c_1 \cos \varphi \sin \varphi' + \sin \varphi \cos \varphi' & -c_2 \cos \varphi & c_1 \cos \varphi \cos \varphi' + \sin \varphi \sin \varphi' \end{pmatrix} \quad (6-11)$$

mit

$$\begin{aligned} c_1 &= \cos \lambda \cos \lambda' + \sin \lambda \sin \lambda' = \cos(\lambda - \lambda'), \\ c_2 &= \cos \lambda \sin \lambda' - \sin \lambda \cos \lambda' = \sin(\lambda - \lambda') \end{aligned}$$

angegeben werden. Es sei angemerkt, dass bei der Darstellung dieser Transformationsmatrix in GRÜNINGER (1990), KUHN (2000) sowie in WILD-PFEIFFER (2007, 2008) jeweils Vorzeichenfehler vorhanden sind.

6.2.2 Punktmasse

Der Effekt eines Tesseroids kann des Weiteren durch eine Punktmasse approximiert werden, wobei die Gesamtmasse des Tesseroids in seinen geometrischen Mittelpunkt konzentriert wird. In WILD-PFEIFFER (2007) wird die Punktmasse als weitere Approximation eines Quaders angesehen. In Bezug auf die Rechenzeit hat dies allerdings den Nachteil, dass zunächst eine Umrechnung der Tesseroid- in Quaderdimensionen erfolgen muss und zudem anschließend noch eine Transformation vom lokalen System des Quaders in das System des Berechnungspunktes notwendig ist (vgl. Abschnitt [6.2.1]). Im Rahmen dieser Arbeit soll die Punktmasse daher als unmittelbare Approximation des Tesseroids betrachtet werden.

Für das Gravitationspotential einer Punktmasse gilt:

$$V^P(r, \varphi, \lambda) = \frac{Gm}{\ell}, \quad (6-12)$$

wobei die Masse m der Masse des Tesseroids m^T gleichgesetzt wird. Diese lässt sich streng berechnen, siehe GRÜNINGER (1990), und ergibt sich zu:

$$m^T = \rho \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} r'^2 \cos \varphi' \, dr' d\varphi' d\lambda' = \frac{1}{3} \rho (r_2^3 - r_1^3) (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1) (\lambda_2 - \lambda_1). \quad (6-13)$$

Analog zur Vorgehensweise in Kapitel 5 können durch Differentiation von (6-12) nach sphärischen Koordinaten und Einsetzen in die Transformationsvorschriften (5-4) die Elemente des Marussi-Tensors einer Punktmasse bestimmt werden:

$$M_{ij}^P(r, \varphi, \lambda) = Gm^T \left(\frac{3\Delta x_i \Delta x_j}{\ell^5} - \frac{\delta_{ij}}{\ell^3} \right) \quad i, j \in \{1, 2, 3\}. \quad (6-14)$$

Die Koordinaten (r', φ', λ') sind dabei durch die Koordinaten des geometrischen Mittelpunktes $(r_0, \varphi_0, \lambda_0)$ zu ersetzen.

Der Term nullter Ordnung der Taylor-Reihenentwicklung des Tesseroids und des Quaders sowie die Gauß-Legendre-Kubatur vom Grad $n = 0$ stellen formal gesehen ebenfalls Punktmassen-Approximationen dar. Betrachtet man die entsprechenden Formeln, so wird in diesen Fällen die Masse des Tesseroids durch $m = \rho r_0^2 \cos \varphi' \Delta r \Delta \varphi \Delta \lambda$ angenähert. Dies entspricht dem ersten Term der Reihenentwicklung von (6-13) in P_0 .

7 Numerische Untersuchungen

Ziel der numerischen Untersuchungen dieser Arbeit ist es, für das Fallbeispiel GOCE die im Kapitel 6 vorgestellten Berechnungsverfahren hinsichtlich ihrer erreichbaren Genauigkeit und Rechenzeit bei der Modellierung topographischer Effekte auf den Gradiententensor zu untersuchen. Hierzu werden die Ergebnisse der Modellierungen mit einem synthetischen Erdmodell verglichen, für das es eine strenge analytische Lösung gibt. Des Weiteren sollen die abgeleiteten Rechenformeln überprüft sowie die umgesetzten Programmroutinen für die verschiedenen Berechnungsverfahren validiert werden.

Insgesamt werden sieben Berechnungsverfahren untersucht und miteinander verglichen. In Tab.7-1 wird ein Überblick über die Verfahren mit ihren zugehörigen Parametern gegeben sowie die im Folgenden verwendeten Abkürzungen eingeführt.

Ergänzend zu den Untersuchungen in WILD-PFEIFFER (2007) werden in dieser Arbeit neben der V_{zz} -Komponente auch die übrigen im Rahmen der GOCE-Mission zu bestimmenden Tensorkomponenten V_{xx} , V_{yy} , V_{xy} , V_{xz} und V_{yz} analysiert.

Tab. 7-1: Auswahl der Berechnungsverfahren

Abkürzung	Berechnungsverfahren
<i>tess taylor</i>	Taylor-Reihenentwicklung
<i>tess 3D 1</i>	Gauß-Legendre-Kubatur (n=0, 1 Stützstelle)
<i>tess 3D 8</i>	Gauß-Legendre-Kubatur (n=1, 8 Stützstellen)
<i>tess 3D 27</i>	Gauß-Legendre-Kubatur (n=2, 27 Stützstellen)
<i>quad analy</i>	Quader-Approximation (analytische Lösung)
<i>quad taylor</i>	Quader-Approximation (Taylor-Reihenentwicklung)
<i>mpoint</i>	Punktmassen-Approximation

7.1 Kugelschalenmodell als Referenzlösung

Als synthetisches Erdmodell wird in diesem Abschnitt ein Kugelschalenmodell eingeführt. Die topographischen Massen werden in sphärischer Approximation auf eine Kugel mit einem mittleren Erdradius R aufgesetzt. Zusätzlich wird eine Topographie konstanter Mächtigkeit (Höhe h) und konstanter Dichte ρ angenommen. Der innere Radius der Kugelschale ergibt sich damit zu $R_1 = R$, der äußere Radius zu $R_2 = R + h$.

Das Gravitationspotential einer Kugelschale mit konstanter Dichte ρ ergibt sich aus der Differenz der Potentiale zweier homogener Vollkugeln mit den Radien R_1 und R_2 und kann durch

$$V = \frac{4\pi G\rho}{3r} (R_2^3 - R_1^3) \quad (7-1)$$

angegeben werden (siehe VANÍČEK ET AL., 2001). Das Potential ist damit weder von der Breite φ noch von der Länge λ , sondern nur vom geozentrischen Radius r des Berechnungspunktes abhängig. Das Gravitationsfeld einer Kugelschale ist damit isotrop. Setzt man $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, so können die Elemente des Gradiententensors durch direkte Ableitung des Potentials nach kartesischen Koordinaten berechnet werden. Verwendet man die Abkürzung $c = \frac{4\pi G\rho}{3} (R_2^3 - R_1^3)$, so ergeben sich die ersten Ableitungen zu:

$$V_x = \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{x}{r^3} \cdot c, \quad V_y = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{y}{r^3} \cdot c, \quad V_z = \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{z}{r^3} \cdot c. \quad (7-2)$$

Die gesuchten zweiten Ableitungen erhält man schließlich durch nochmaliges Differenzieren:

$$\begin{aligned} V_{xx} &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \left(\frac{3x^2 - r^2}{r^5} \right) \cdot c, & V_{xy} &= \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \left(\frac{3xy}{r^5} \right) \cdot c \\ V_{yy} &= \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \left(\frac{3y^2 - r^2}{r^5} \right) \cdot c, & V_{xz} &= \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} = \left(\frac{3xz}{r^5} \right) \cdot c \\ V_{zz} &= \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \left(\frac{3z^2 - r^2}{r^5} \right) \cdot c, & V_{yz} &= \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} = \left(\frac{3yz}{r^5} \right) \cdot c. \end{aligned} \quad (7-3)$$

Aufgrund der Isotropie des Gravitationsfeldes der Kugelschale ist die Lage des Berechnungspunktes bei einem festen Wert für r beliebig. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann somit auch der Spezialfall betrachtet werden, dass der Berechnungspunkt auf der Polachse liegt. In diesem Fall gelten für die kartesischen Koordinaten die Bedingungen $x = 0$, $y = 0$, $z = r$. Setzt man diese Bedingungen in (7-3) ein, so erhält man für die zweiten Ableitungen:

$$\begin{aligned} V_{xx} &= -\frac{1}{r^3} \cdot c, & V_{xy} &= 0 \\ V_{yy} &= -\frac{1}{r^3} \cdot c, & V_{xz} &= 0 \\ V_{zz} &= +\frac{2}{r^3} \cdot c, & V_{yz} &= 0. \end{aligned} \quad (7-4)$$

Die Wirkung einer Kugelschale auf den Gradiententensor kann somit schließlich durch die Matrix

$$\mathbf{M} = \frac{4\pi G\rho}{3r^3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} [(R+h)^3 - R^3] \quad (7-5)$$

angegeben werden. Im Fall des Kugelschalenmodells hat der Gradiententensor somit Diagonalform und es gilt zusätzlich die Eigenschaft $V_{xx} = V_{yy} = -\frac{1}{2}V_{zz}$.

7.2 Aufbau der Untersuchungen

Die Untersuchungen in dieser Arbeit sind so aufgebaut, dass ein Vergleich zwischen den Soll-Werten eines Kugelschalenmodells und den entsprechenden Ist-Werten, die aus der Modellierung mit den verschiedenen Berechnungsverfahren resultieren, gezogen wird.

Das Kugelschalenmodell wird hierbei durch die folgenden Parameter festgelegt: Die Gravitationskonstante wird zu $G = 6.672 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ gesetzt, für den mittleren Erdradius wird ein Wert von $R = 6378.137 \text{ km}$ gewählt. Für die topographischen Massen wird die konstante Höhe $h = 1000 \text{ m}$ sowie eine Dichte von $\rho = 2670 \text{ kg m}^{-3}$ festgelegt. Der Berechnungspunkt wird in

einer Höhe von $h_p = 260$ km über der mittleren Erdkugel mit dem Radius R gewählt. Dies entspricht der Satellitenhöhe von GOCE. Durch Einsetzen der Parameter in Formel (7-5) ergeben sich die Sollwerte für die Tensorelemente somit zu: $V_{xx} = V_{yy} = -311.383$ mE, $V_{zz} = 622.765$ mE sowie $V_{xy} = V_{xz} = V_{yz} = 0$ mE.

Die Ist-Werte ergeben sich entsprechend durch die Modellierung der topographischen Massen der Kugelschale. Hierzu wird die Gesamtmasse der Kugelschale diskretisiert und durch sphärische Gitternetzlinien in einzelne Tesseroidkörper aufgeteilt. Die Höhe der Tesseroidkörper entspricht der Mächtigkeit der Kugelschale und wird zu $h = \Delta r = 1000$ m gesetzt. Um hinsichtlich der Approximationsgenauigkeit eine Aussage über die notwendige Auflösung eines DGMs bei einer Modellierung zu erhalten, werden für die Ausdehnung der Grundflächen der Tesseroidkörper die drei Fälle $\Delta\varphi = \Delta\lambda = 30', 15', 5'$ betrachtet. Diese Einflussgröße wird im Folgenden als Topographieauflösung bezeichnet.

Für die Bestimmung des gravitativen Einflusses der einzelnen Tesseroidkörper werden die in Tab. 7-1 spezifizierten Berechnungsverfahren angewandt. Die Anzahl der zu berechnenden Tesseroidkörper wächst dabei mit Verfeinerung der Topographieauflösung quadratisch an. Für die drei betrachteten Auflösungen sind die entsprechenden Werte in Tab. 7-2 zusammengestellt. Das Gesamtergebnis der Modellierung ergibt sich schließlich aus der Summation über die Einzeleinflüsse.

Tab. 7-2: Anzahl der zu lösenden Tesseroidkörper

Auflösung	Anzahl der Tesseroidkörper
30'	$360 \times 720 = 259\,200$
15'	$720 \times 1440 = 1\,036\,800$
5'	$2160 \times 4320 = 9\,331\,200$

Obwohl das Kugelschalenmodell ein isotropes Feld erzeugt und somit die Soll-Werte für den festen radialen Wert von r konstant sind, ist trotzdem zu erwarten, dass die Ist-Werte in Abhängigkeit von der Poldistanz des Berechnungspunktes numerisch unterschiedliche Werte annehmen.

Aufgrund der Wahl eines sphärischen Koordinatensystems bei der Massenunterteilung ergeben sich durch die Meridiankonvergenz unterschiedlich geformte Massenkörper. Tesseroidkörper in der Nähe des Äquators weisen eine nahezu symmetrische Geometrie auf und können annähernd als quaderförmig angesehen werden. Weiter in Richtung eines Pols liegende Körper werden hingegen immer keilförmiger. Die Grundflächen entarten schließlich zu sphärischen Dreiecken.

Aufgrund dieser unterschiedlichen Geometrie der Tesseroidkörper ist zu erwarten, dass auch die Genauigkeit, mit der ihre gravitative Wirkung berechnet werden kann, beeinflusst wird. Der Fehlereinfluss eines einzelnen Tesseroidkörpers hängt damit von seiner Poldistanz θ' ab. Da die Massenkörper aus dem Nahbereich des Berechnungspunktes die größten Beiträge zum Gesamtergebnis liefern, ist zu vermuten, dass auch der Gesamtfehlerbeitrag durch die Poldistanz θ des Berechnungspunktes beeinflusst wird.

Um diesen Effekt zu berücksichtigen, sind die Untersuchungen so aufgebaut, dass der Berechnungspunkt nicht an einer Position festgehalten wird, sondern mit konstanter Schrittweite entlang eines Meridians verläuft. Aufgrund der Unabhängigkeit von der Länge wird hierzu ein beliebiger, aber fester Meridian gewählt. Da der zu untersuchende Fall zudem äquatorsymmetrisch ist, verläuft der Berechnungspunkt nicht entlang des gesamten Meridians, sondern nur innerhalb des Intervalls von $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$. Um auch feinere Effekte sichtbar zu machen, wird die Schrittweite des Berechnungspunktes auf dem Meridian an die jeweilige Topographieauflösung angepasst.

Die sich ergebenden Differenzen zwischen Soll- und Ist-Werten werden als Approximationsfehler

bezeichnet und geben Auskunft über die mit einem Berechnungsverfahren erreichbare Genauigkeit bei der Modellierung topographischer Effekte.

Es ist abzuklären, ob mittels der resultierenden Approximationsfehler eine gesicherte Aussage über auftretende Fehler im Fall unregelmäßiger Topographie gemacht werden kann. Betrachtet man die konstanten topographischen Höhen im Fall des Kugelschalenmodells, so ist es einleuchtend, dass Fehler durch die Modellierung der einzelnen Massenkörper systematisch in eine Richtung zeigen und sich additiv auf den Gesamtfehlereinfluss auswirken. Beim Realfall hingegen ist zu erwarten, dass sich die Fehlereinflüsse einzelner Massenkörper durch unterschiedliche Höhen teilweise eliminieren. Deshalb kann davon ausgegangen werden, dass die sich ergebenden Approximationsfehler maximale Grenzwerte annehmen, die bei einer realen Anwendung unterschritten werden. Insofern ist der hier betrachtete Fall eines Modells mit konstanter Topographie ein Grenzfall in Bezug auf die physikalische Realität einer unregelmäßigen Topographie.

Um ausreichend genaue Ergebnisse bei der Modellierung zu erhalten, ist es sinnvoll, dass der entstehende Approximationsfehler unterhalb der bei GOCE erreichbaren Messgenauigkeit für die Tensorelemente (vgl. Abschnitt [3.2]) liegt. Für die Bewertung der Untersuchungsergebnisse wird daher ein Grenzwert für den Approximationsfehler bei 10^{-2} mE festgelegt. Dieser liegt zwei Größenordnungen unterhalb der maximalen Messgenauigkeit und bietet somit einen ausreichend großen Puffer. Um letztendlich geeignete Verfahren zur effizienten Berechnung topographischer Effekte auf den Gradiententensor zu finden, werden zudem die Rechenzeiten der verschiedenen Berechnungsverfahren miteinander verglichen.

Zusammengefasst sollen die Untersuchungen zeigen, mit welchem Berechnungsverfahren, bei welcher Topographieauflösung und Poldistanz θ des Berechnungspunktes sich welcher Approximationsfehler für die einzelnen Tensorelemente ergibt und welche Rechenzeit dabei für diese Modellierung benötigt wird.

7.3 Darstellung und Analyse der Ergebnisse

In diesem Unterkapitel sollen die Ergebnisse der numerischen Untersuchungen dargestellt, analysiert und miteinander verglichen werden. Dabei wird im Folgenden zwischen den Begriffen Berechnungsverfahren und Berechnungsvariante unterschieden. Als Berechnungsverfahren werden die nach Tab. 7-1 aufgeführten Verfahren bezeichnet. Eine Berechnungsvariante ergibt sich aus der Kombination von Berechnungsverfahren und Topographieauflösung. Aus den sieben Berechnungsverfahren und drei verschiedenen Topographieauflösungen folgen damit 21 untersuchte Berechnungsvarianten.

In [7.3.1] werden die mit den Berechnungsverfahren erreichbaren Genauigkeiten insbesondere vor dem Hintergrund der Einhaltung des festgelegten Grenzwertes analysiert. Hierzu werden die aus den numerischen Berechnungen resultierenden Approximationsfehler für die einzelnen Tensorelemente in Abhängigkeit von der Poldistanz θ des Berechnungspunktes graphisch dargestellt.

Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird im Fließtext dabei nur eine Auswahl der Ergebnisse für die Auflösung von $\Delta\varphi = \Delta\lambda = 15'$ dargestellt und das Verhalten der einzelnen Berechnungsverfahren anhand dieses Falls exemplarisch diskutiert. Alle weiteren Ergebnisse sind im Anhang zusammengestellt. Im Anhang A ab Seite 56 werden die Ergebnisse der einzelnen Berechnungsverfahren dabei in Abhängigkeit von der Topographieauflösung dargestellt. Ergänzend sind im Anhang B ab Seite 74 die Ergebnisse in Abhängigkeit von den jeweiligen Berechnungsverfahren abgebildet.

In [7.3.2] wird auf die benötigten Rechenzeiten für die numerischen Berechnungen eingegangen. Dabei werden sowohl die relativen Laufzeitunterschiede zwischen den Berechnungsverfahren

wie auch die Unterschiede zwischen den einzelnen Berechnungsvarianten diskutiert. Zudem werden die absoluten Laufzeiten mit denen der ursprünglichen Programmroutinen von WILD-PFEIFFER (2007) verglichen und die jeweiligen Rechenzeiterparnisse angegeben.

7.3.1 Genauigkeiten der Berechnungsverfahren

Für die Topographieauflösung von $\Delta\varphi = \Delta\lambda = 15'$ sind die Approximationsfehler für die Hauptdiagonalelemente V_{xx}, V_{yy} und V_{zz} in den Abb. 7-1 bis 7-3, für die Nebendiagonalelemente V_{xy}, V_{xz} und V_{yz} in den Abb. 7-4 bis 7-6 am Ende des Abschnitts graphisch dargestellt. Für die beiden anderen Topographieauflösungen ergeben sich qualitativ ähnliche Kurvenverläufe für die Approximationsfehler, wobei die Fehlerwerte durch eine Steigerung der Topographieauflösung geringer werden.

Bei der Darstellung werden die Berechnungsverfahren entsprechend der sich ergebenden Approximationsfehler in zwei Klassen eingeteilt. Die Verfahren *mpoint*, *tess 3D 1*, *quad analy* und *quad taylor* werden in einer ersten Genauigkeitsklasse zusammengefasst, die drei Verfahren *tess taylor*, *tess 3D 8* und *tess 3D 27* in eine zweite. Die Verfahren der zweiten Klasse weisen dabei für alle Tensorelemente grundsätzlich kleinere Approximationsfehler auf.

Um auch kleinere Unterschiede des Approximationsfehlers sichtbar zu machen, wurde bei den Abbildungen eine logarithmische Darstellung gewählt. Die auf der Hochachse angegebenen Werte für den Approximationsfehler sind daher die Absolutbeträge, die sich aus der Differenz zwischen Soll- und Ist-Werten ergeben. Zur Orientierung wird zusätzlich der festgelegte Grenzwert für den Approximationsfehler bei 10^{-2} mE durch eine schwarze Linie gekennzeichnet.

Betrachtet man die Approximationsfehler in den Abb. 7-1 bis 7-6, so zeigt sich als Kurvenverlauf unabhängig vom Verfahren und der Tensorkomponente grundsätzlich die gleiche Tendenz. Die maximalen Fehlerwerte werden stets im Bereich des Pols erreicht und in Richtung des Äquators um einige Größenordnungen kleiner. Die starke Abhängigkeit des Approximationsfehlers von der Poldistanz des Berechnungspunktes aufgrund der unterschiedlichen Geometrie der einzelnen Massenkörper kann somit bestätigt werden.

Die in den Abb. 7-4 und 7-6 dargestellten Nebendiagonalelemente V_{xy} und V_{yz} weisen bei allen Verfahren die kleinsten Approximationsfehler auf und können somit am genauesten modelliert werden. Die Fehler liegen dabei im Bereich von etwa 10^{-13} bis 10^{-15} mE und somit am Rand der numerischen Rechengenauigkeit. Das Erreichen der numerischen Rechengenauigkeitsgrenze wird dadurch deutlich, dass der glatte Kurvenverlauf bei dieser Größenordnung in ein erhöhtes Rauschverhalten übergeht. Das gleiche Verhalten lässt sich beim Verfahren *tess 3D 27* bei größeren Poldistanzwerten auch für die übrigen Tensorelemente beobachten.

Eine Ausnahme bildet das Verfahren *quad analy*, bei dem die Approximationsfehler für die beiden Tensorelemente V_{xy} und V_{yz} deutlich größere Werte annehmen. Zudem ist auch hier ein extrem großes Rauschverhalten zu erkennen, das bei dieser Größenordnung allerdings auf eine numerische Instabilität bei der Berechnung hinweisen könnte. Obwohl zahlreiche Untersuchungen durchgeführt wurden, konnte nicht abschließend geklärt werden, wodurch dieser Effekt hervorgerufen wird. Es ist zu vermuten, dass er im Zusammenhang mit den bei dieser Berechnung notwendigen Logarithmus-Auswertungen steht. Da die Approximationsfehler in den Elementen V_{xy} und V_{xz} auch für das Verfahren *quad analy* in allen untersuchten Berechnungsvarianten deutlich unterhalb des Grenzwertes von 10^{-2} mE liegen und es sich hierbei um die bei GOCE messtechnisch schlechter erfassbaren Tensorkomponenten handelt, scheint eine ausreichend genaue Modellierung dieser Elemente in jedem Fall gewährleistet zu sein.

Beim Vergleich der Verfahren der ersten Klasse zeigen auf der einen Seite *mpoint* und *tess 3D 1*, auf der anderen Seite *quad analy* und *quad taylor* gleiche Eigenschaften auf.

Die Kurvenverläufe für die Verfahren *mpoint* und *tess 3D 1* liegen im Bereich des Pols stets dicht beieinander und gehen in Richtung des Äquators auseinander. Dabei nimmt das Verfahren *tess 3D 1* kleinere Werte für den Approximationsfehler an. Dieses Verhalten wird insbesondere in der in Abb. 7-1 dargestellten V_{xx} -Komponente deutlich. Bei dieser Komponente wächst der Abstand zwischen den Kurven beider Verfahren in Richtung des Äquators systematisch an.

Betrachtet man die zugrunde liegenden Berechnungsformeln, so wird in beiden Verfahren der Effekt eines Tesseroids durch eine Punktmasse approximiert. Der Unterschied ergibt sich durch die Bestimmung der Masse. Während beim Verfahren *mpoint* eine strenge Berechnung der Gesamtmasse des Tesseroids stattfindet, wird diese beim Verfahren *tess 3D 1* angenähert (vgl. [6.2.2]). Neben der Approximation, dass die Masse des Tesseroids in einem Punkt konzentriert wird, fließt bei *tess 3D 1* somit noch die zusätzlich Approximation bezüglich der Gesamtmasse ein. Es ist zunächst erstaunlich, dass *tess 3D 1* im Bereich des Äquators einen geringen Approximationsfehler aufweist, obwohl *mpoint* scheinbar eine bessere Modellierung der Realität darstellt. Es liegt daher nahe, dass beim Verfahren *tess 3D 1* die Fehlereinflüsse beider Approximationen gegenläufig sind, sich gegeneinander aufheben und somit insgesamt zu einem kleineren Approximationsfehler führen. Dieser Effekt wird vor allem am Äquator deutlich, da dort das Tesseroid maximale Größe besitzt und somit der Unterschied zwischen strenger und approximierter Masse maximal wirkt. Dieses Verhalten lässt sich allerdings nicht verallgemeinern und ist vermutlich durch die hier gewählte Konstellation bedingt.

Beim Vergleich der Berechnungsverfahren der Quader-Approximation (*quad analy* und *quad taylor*) zeigt sich, dass die Kurven der Approximationsfehler quasi deckungsgleich sind. Für den hier betrachteten Fall eines Berechnungspunktes in Satellitenhöhe und der damit verbundenen großen Entfernung zu den topographischen Massen sind die Ergebnisse der Taylor-Reihenentwicklung somit gleichwertig zu den Ergebnissen des analytischen Berechnungsverfahrens. Der Abbruchfehler, der durch die Taylor-Reihenentwicklung gegenüber der strengen Lösung entsteht, ist vernachlässigbar klein.

Grundsätzlich zeigt sich, dass insbesondere für den Bereich $0^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$ mit den Verfahren der Punktmassen-Approximation genauere Ergebnisse erzielt werden können als mit den Quader-Approximationen. Dies ist darauf zurückzuführen, dass im Gegensatz zur Punktmasse beim Quader die einzelnen geometrischen Dimensionen des Körpers in die Berechnung mit einfließen. Betrachtet man den Extremfall eines Tesseroidkörpers in der Nähe des Pols, weicht dieser geometrisch gesehen sehr stark von der Form eines Quaders ab. Eine Umrechnung zwischen den einzelnen Tesseroid- und Quaderdimensionen ist daher schwierig und nur durch eine sehr grobe Approximation möglich. Die Modellierung mittels Quadern liefert daher vor allem im Polbereich größere Approximationsfehler als die Punktmassen-Approximationen.

Im Gegensatz zu den Verfahren der Klasse 1 weisen die Verfahren der Klasse 2 deutlich geringe Approximationsfehler auf. Bei der hier betrachteten Topographieauflösung von $15'$ liegen diese Fehler mit Ausnahme der V_{zz} -Komponente bei allen drei Verfahren der Klasse 2 bereits unterhalb des Grenzwertes von 10^{-2} mE.

Die Kurvenverläufe für die Verfahren *tess taylor* und *tess 3D 8* zeigen für alle Elemente ein nahezu gleiches Verhalten, wobei das Verfahren *tess 3D 8* stets geringfügig kleinere Approximationsfehler hervorruft. Demgegenüber zeigt sich, dass durch die Erhöhung der Anzahl der Stützstellen von 8 auf 27 bei der Gauß-Legendre-Kubatur nochmals eine erhebliche Genauigkeitssteigerung von mehr als zwei Größenordnungen erreicht werden kann. Das Verfahren *tess 3D 27* ist somit das genaueste Verfahren innerhalb dieser Untersuchungen.

Nach der allgemeinen Analyse der Kurvenverläufe soll nun geklärt werden, für welche Fälle der Approximationsfehler Werte unterhalb der festgelegten Genauigkeitsgrenze bei 10^{-2} mE annimmt und somit im Fall von GOCE ausreichend genaue Ergebnisse für die Modellierung liefert. Betrachtet man die Abb. 7-1 bis 7-6 sowie die entsprechenden Abb. A-1 bis A-18 im Anhang A, so zeigt sich, dass bei allen Berechnungsvarianten und allen Tensorelementen ab einem bestimmten Grenzwert für die Poldistanz des Berechnungspunktes die Genauigkeitsgrenze erreicht wird. Für größere Poldistanzen wird die Grenze unterschritten. Die jeweiligen Grenzwerte für die Poldistanzen sind in den Tab. 7-4 bis 7-9 für die einzelnen Tensorelemente in Abhängigkeit vom Berechnungsverfahren und von der Topographieauflösung aufgeführt.

Es wird der Trend deutlich, dass bei jedem Verfahren der Poldistanzwert durch die Steigerung der Topographieauflösung geringer wird. Wie erwartet zeigt sich, dass eine Modellierung mit kleineren Grundelementen genauere Ergebnisse liefert. Die Werte für die Verfahren der ersten Klasse sind dabei jeweils deutlich größer als die entsprechenden Werte für die Verfahren der zweiten Klasse. Die beiden Hauptdiagonalelemente V_{xx} und V_{zz} weisen bei den meisten Verfahren die größten Poldistanzwerte auf. Die Poldistanzen der Elemente V_{yy} und V_{xz} liegt generell dicht beieinander, nehmen tendenziell aber kleinere Werte als die Elemente V_{xx} und V_{zz} an. Für die Nebendiagonalelemente V_{xy} und V_{yz} wird die Genauigkeitsgrenze bei allen Varianten bereits im Polpunkt erreicht.

Rechentechisch gesehen ist es nicht sinnvoll, die verschiedenen Tensorkomponenten mittels unterschiedlicher Berechnungsvarianten zu modellieren. Für die Bewertung einer Berechnungsvariante ist somit der maximale Poldistanzwert, der sich aus den verschiedenen Tensorelementen ergibt, ausschlaggebend. Diese Maximalwerte sind in Tab.7-3 zusammengestellt.

Tab. 7-3: maximale Poldistanzwerte zum Erreichen der Genauigkeitsgrenze

Maximum	30'	15'	5'
<i>mpoint</i>	26.7°	16.4°	7.3°
<i>tess 3D 1</i>	25.8°	16.3°	7.3°
<i>quad analy</i>	35.3°	21.3°	9.6°
<i>quad taylor</i>	35.3°	21.3°	9.6°
<i>tess taylor</i>	2.8°	0.3°	0.0°
<i>tess 3D 8</i>	2.1°	0.0°	0.0°
<i>tess 3D 27</i>	0.0°	0.0°	0.0°

Betrachtet man den maximalen Poldistanzwert als Qualitätsmerkmal für die erreichbare Genauigkeit, so ergibt sich für die Bewertung der Verfahren bei jeder Topographieauflösung die gleiche Rangfolge:

Das genaueste Verfahren ist *tess 3D 27*, bei dem der Approximationsfehler die Genauigkeitsgrenze bei allen Topographieauflösungen bereits im Polpunkt unterschreitet. Dahinter rangieren mit kleinen Abweichungen zunächst das Verfahren *tess 3D 8* und dann *tess taylor*. Das genaueste Verfahren der ersten Klasse ist *tess 3D 1*, welches aber nur geringe Unterschiede zum Verfahren *mpoint* aufweist. Die beiden Quader-Approximationen (*quad taylor* und *quad analy*) liefern exakt die gleichen Poldistanzwerte und bilden gemeinsam das Schlusslicht. Sie können somit als die vermeintlich schlechtesten Modellierungsverfahren in dieser Bewertung angesehen werden. Grundsätzlich lässt sich erkennen, dass durch die Steigerung der Topographieauflösung die Unterschiede zwischen den einzelnen Verfahren immer kleiner werden.

Ergebnisse für die Tensorkomponente V_{xx} :

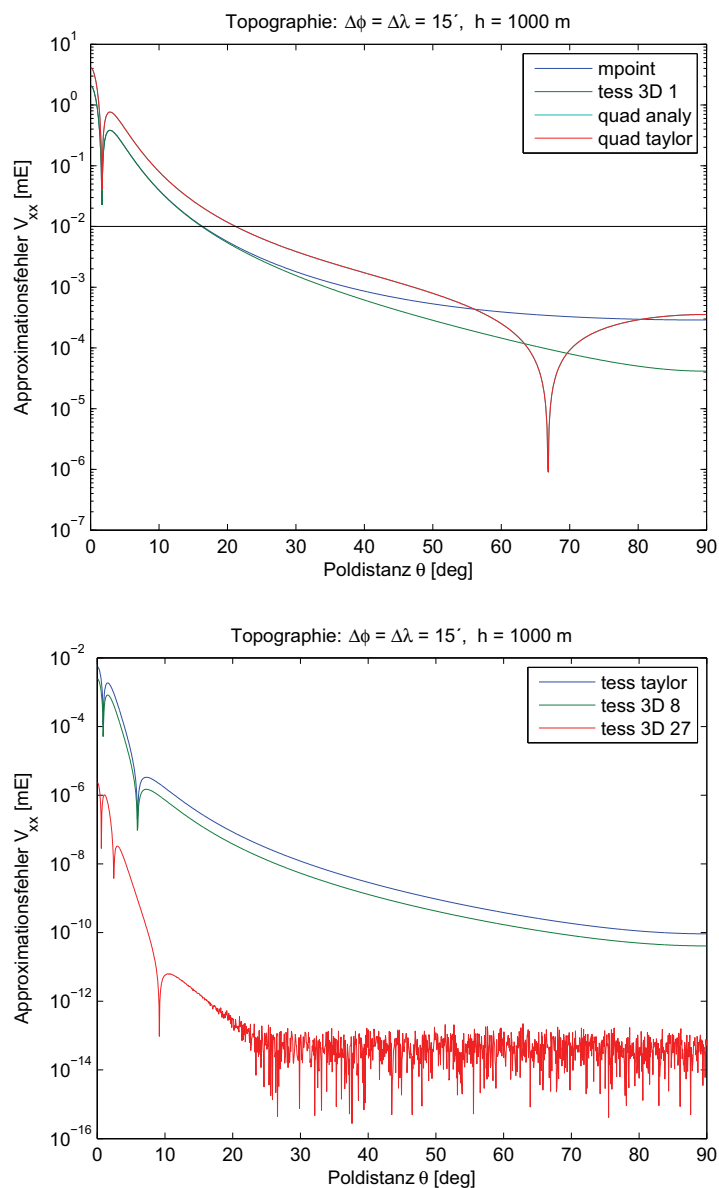


Abb. 7-1: Approximationsfehler der Tensorkomponente V_{xx} bei einer Topographieauflösung von $15'$

Tab. 7-4: Poldistanzwerte zum Erreichen der Genauigkeitsgrenze bei der Tensorkomponente V_{xx}

V_{xx}	$30'$	$15'$	$5'$
<i>mpoint</i>	26.7°	16.4°	7.3°
<i>tess 3D 1</i>	25.8°	16.3°	7.3°
<i>quad analy</i>	35.3°	21.3°	9.6°
<i>quad taylor</i>	35.3°	21.3°	9.6°
<i>tess taylor</i>	2.8°	0.0°	0.0°
<i>tess 3D 8</i>	2.1°	0.0°	0.0°
<i>tess 3D 27</i>	0.0°	0.0°	0.0°

Ergebnisse für die Tensorkomponente V_{yy} :

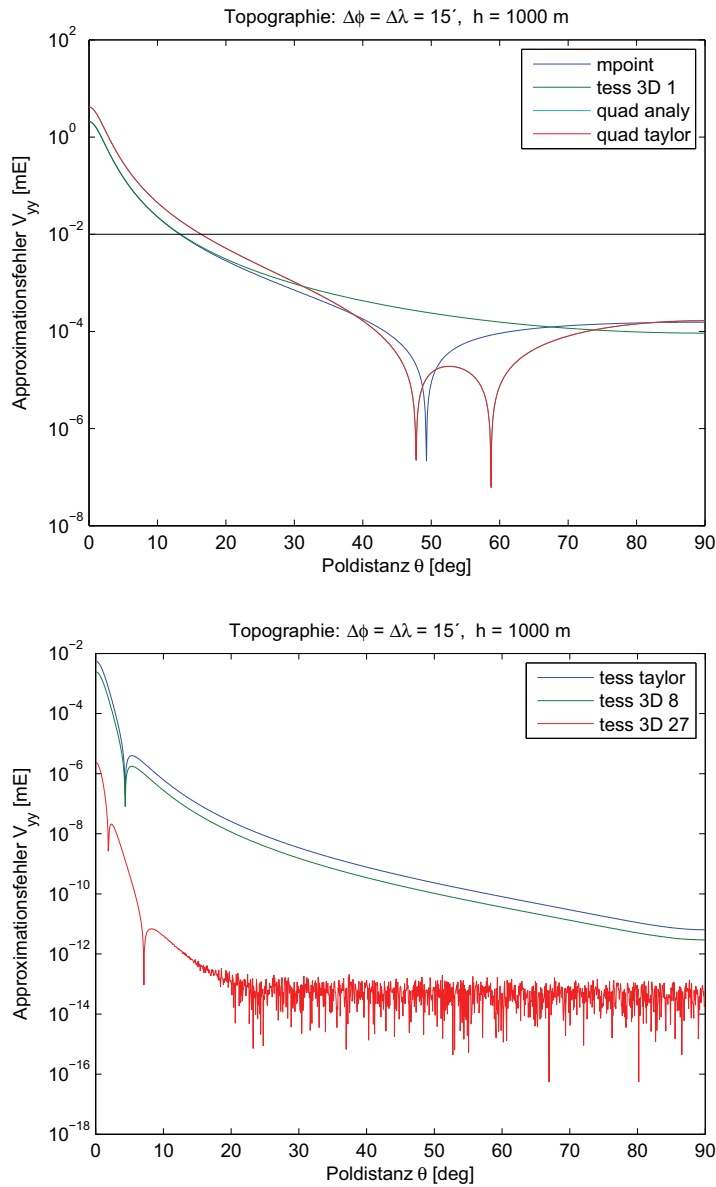


Abb. 7-2: Approximationsfehler der Tensorkomponente V_{yy} bei einer Topographieauflösung von $15'$

Tab. 7-5: Poldistanzwerte zum Erreichen der Genauigkeitsgrenze bei der Tensorkomponente V_{yy}

V_{yy}	$30'$	$15'$	$5'$
<i>mpoint</i>	20.8°	13.3°	6.1°
<i>tess 3D 1</i>	21.5°	13.4°	6.1°
<i>quad analy</i>	24.4°	16.4°	7.8°
<i>quad taylor</i>	24.4°	16.4°	7.8°
<i>tess taylor</i>	2.0°	0.0°	0.0°
<i>tess 3D 8</i>	1.5°	0.0°	0.0°
<i>tess 3D 27</i>	0.0°	0.0°	0.0°

Ergebnisse für die Tensorkomponente V_{zz} :

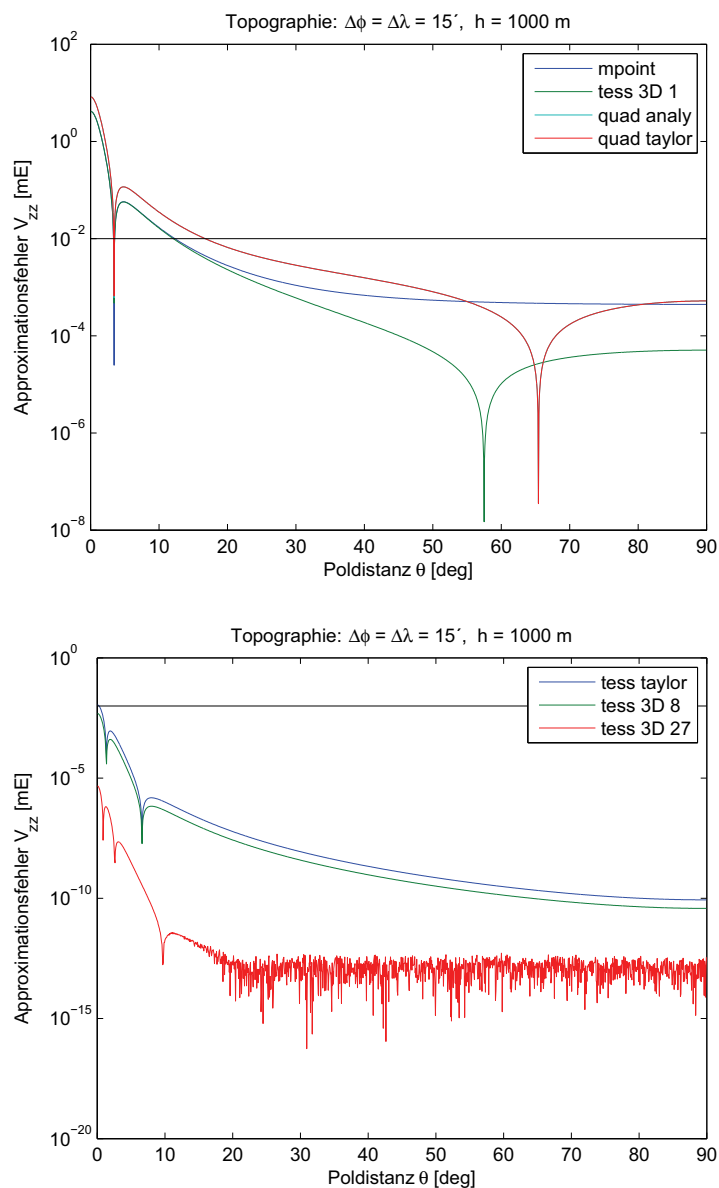


Abb. 7-3: Approximationsfehler der Tensorkomponente V_{zz} bei einer Topographieauflösung von $15'$

Tab. 7-6: Poldistanzwerte zum Erreichen der Genauigkeitsgrenze bei der Tensorkomponente V_{zz}

V_{zz}	$30'$	$15'$	$5'$
<i>mpoint</i>	20.9°	12.3°	3.0°
<i>tess 3D 1</i>	19.5°	12.1°	3.0°
<i>quad analy</i>	32.0°	16.8°	6.4°
<i>quad taylor</i>	32.0°	16.8°	6.4°
<i>tess taylor</i>	2.6°	0.3°	0.0°
<i>tess 3D 8</i>	1.2°	0.0°	0.0°
<i>tess 3D 27</i>	0.0°	0.0°	0.0°

Ergebnisse für die Tensorkomponente V_{xy} :

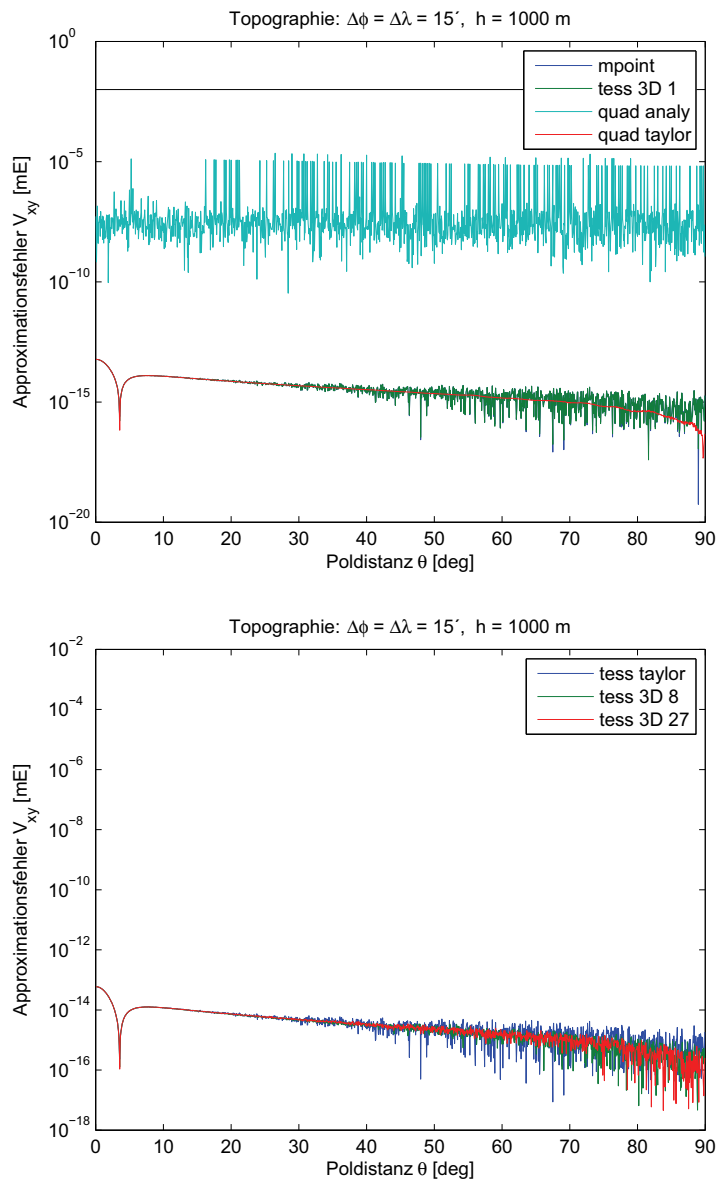


Abb. 7-4: Approximationsfehler der Tensorkomponente V_{xy} bei einer Topographieauflösung von $15'$

Tab. 7-7: Poldistanzwerte zum Erreichen der Genauigkeitsgrenze bei der Tensorkomponente V_{xy}

V_{xy}	$30'$	$15'$	$5'$
<i>mpoint</i>	0.0°	0.0°	0.0°
<i>tess 3D 1</i>	0.0°	0.0°	0.0°
<i>quad analy</i>	0.0°	0.0°	0.0°
<i>quad taylor</i>	0.0°	0.0°	0.0°
<i>tess taylor</i>	0.0°	0.0°	0.0°
<i>tess 3D 8</i>	0.0°	0.0°	0.0°
<i>tess 3D 27</i>	0.0°	0.0°	0.0°

Ergebnisse für die Tensorkomponente V_{xz} :

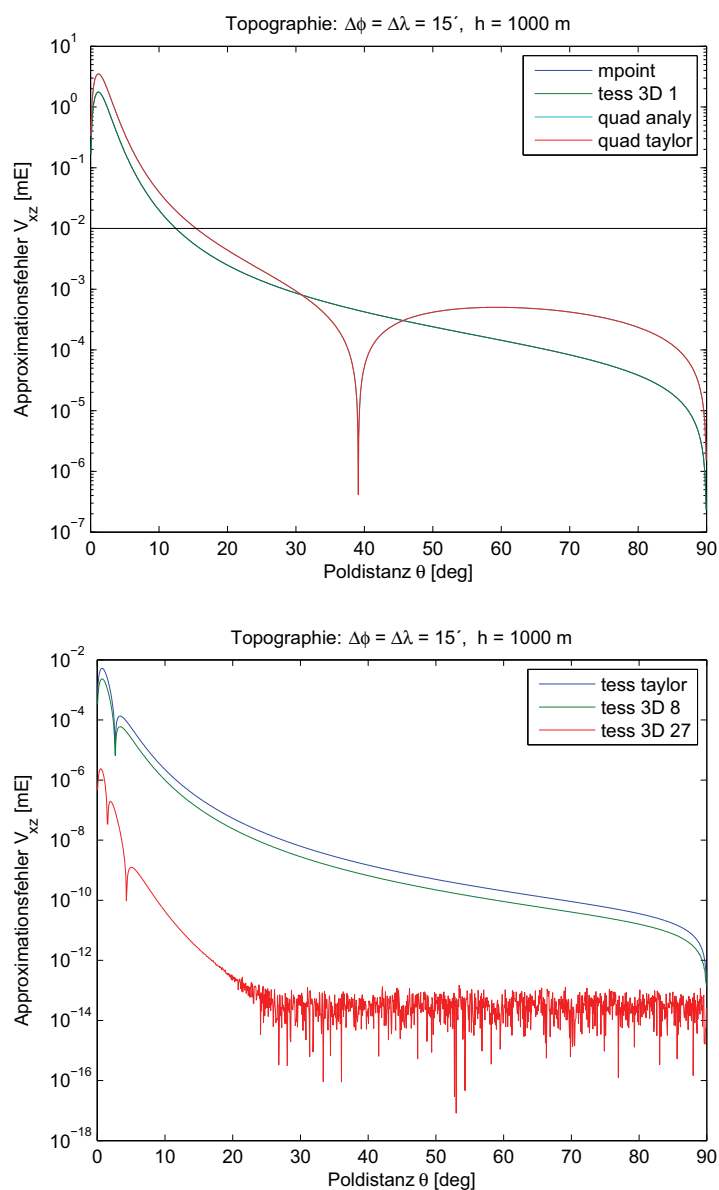


Abb. 7-5: Approximationsfehler der Tensorkomponente V_{xz} bei einer Topographieauflösung von $15'$

Tab. 7-8: Poldistanzwerte zum Erreichen der Genauigkeitsgrenze bei der Tensorkomponente V_{xz}

V_{xz}	$30'$	$15'$	$5'$
<i>mpoint</i>	20.0°	12.5°	6.3°
<i>tess 3D 1</i>	20.0°	12.5°	6.3°
<i>quad analy</i>	23.7°	15.4°	7.8°
<i>quad taylor</i>	23.7°	15.4°	7.8°
<i>tess taylor</i>	2.1°	0.0°	0.0°
<i>tess 3D 8</i>	1.8°	0.0°	0.0°
<i>tess 3D 27</i>	0.0°	0.0°	0.0°

Ergebnisse für die Tensorkomponente V_{yz} :

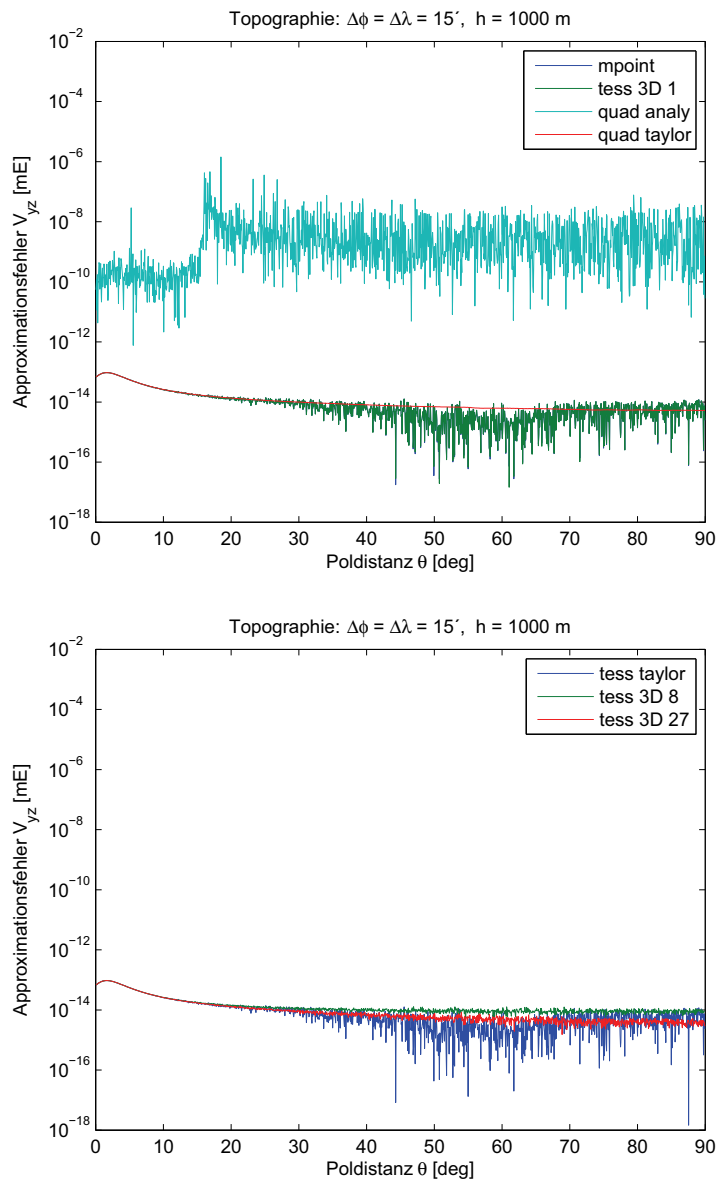


Abb. 7-6: Approximationsfehler der Tensorkomponente V_{yz} bei einer Topographieauflösung von $15'$

Tab. 7-9: Poldistanzwerte zum Erreichen der Genauigkeitsgrenze bei der Tensorkomponente V_{yz}

V_{yz}	$30'$	$15'$	$5'$
<i>mpoint</i>	0.0°	0.0°	0.0°
<i>tess 3D 1</i>	0.0°	0.0°	0.0°
<i>quad analy</i>	0.0°	0.0°	0.0°
<i>quad taylor</i>	0.0°	0.0°	0.0°
<i>tess taylor</i>	0.0°	0.0°	0.0°
<i>tess 3D 8</i>	0.0°	0.0°	0.0°
<i>tess 3D 27</i>	0.0°	0.0°	0.0°

7.3.2 Rechenzeiten der Berechnungsverfahren

In diesem Abschnitt werden die unterschiedlichen Rechenzeiten der Verfahren diskutiert. Die angegebenen Zeiten gelten dabei jeweils für die Berechnung aller sechs Tensorkomponenten.

In Abb. 7-7 sind die Laufzeiten der einzelnen Berechnungsverfahren relativ zueinander dargestellt, die Rechenzeit für das Verfahren *tess 3D 27* wurde dabei zu 100 % gesetzt. Auf eine absolute Angabe der Laufzeiten wird verzichtet, da diese stark plattform- und rechnerabhängig ist. Die angegebenen relativen Laufzeiten sind unabhängig von der Topographieauflösung, das heißt, für verschiedene Auflösungen ergeben sich immer die gleichen relativen Abstände zwischen den Berechnungsverfahren.

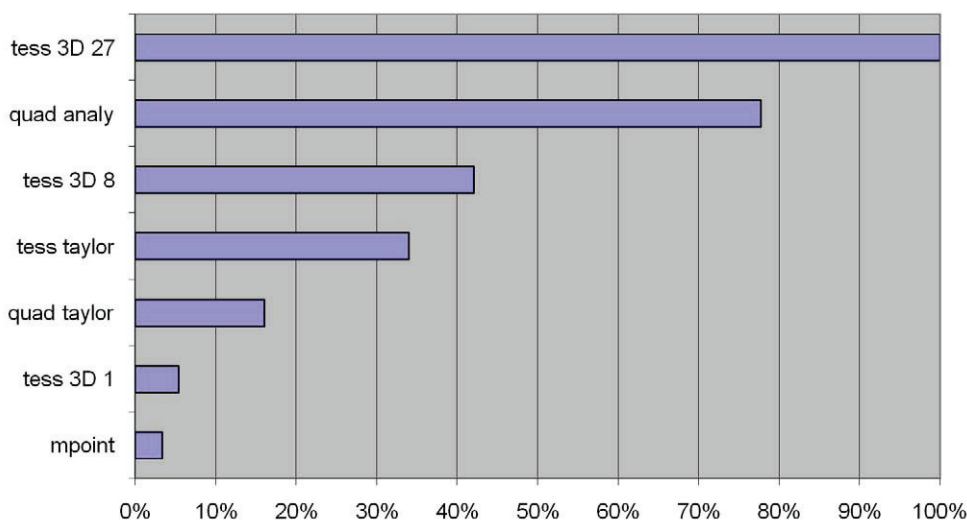


Abb. 7-7: Vergleich der relativen Rechenzeiten

Betrachtet man Abb. 7-7, so wird ein Zusammenhang zwischen den mit einem Verfahren erreichbaren Genauigkeiten und den Rechenzeiten deutlich. Verfahren, die größere Approximationsfehler hervorrufen, weisen tendenziell geringere Laufzeiten auf, Verfahren mit kleineren Approximationsfehlern hingegen haben höhere Rechenzeiten. Entsprechend gehören die Verfahren der Klasse 1 zu den schnelleren, die Verfahren der Klasse 2 zu den langsameren Verfahren.

Mit 3 % bzw. 5 % sind die beiden Verfahren *mpoint* und *tess 3D 1* die schnellsten Verfahren. Stellt man diesen die beiden anderen Verfahren der Genauigkeitsklasse 1 gegenüber, so weisen *quad taylor* und *quad analy* deutlich höhere Rechenzeiten auf. Dies liegt daran, dass bei diesen Verfahren der gravitative Einfluss jedes Körpers nach der Berechnung zunächst vom Kantensystem des Quaders in das topozentrische System des Berechnungspunktes transformiert werden muss. Die Taylor-Reihenentwicklung des Quaders benötigt mit 16 % allerdings nur knapp 1/5 der Rechenzeit des analytischen Verfahrens, welches mit 78 % insgesamt die zweithöchste Rechenzeit aufweist. Dies ist eine deutliche Ausnahme bei den sonst niedrigen Rechenzeiten der Klasse 1 und auf die zahlreichen und zeitaufwändigen Logarithmus- und Arcus-Tangens-Auswertungen in den Berechnungsformeln zurückzuführen.

Mit 34 % ist das Verfahren *tess taylor* das schnellste der Genauigkeitsklasse 2. Das Verfahren *tess 3D 8* ist mit 42 % etwas langsamer. Die längste Rechenzeit benötigt *tess 3D 27*, das etwa die doppelte bis dreifache Laufzeit der beiden anderen Verfahren der Klasse 2 aufweist. Stellt man die Rechenzeiten der Verfahren der Gauß-Legendre-Kubatur gegenüber, so steigen diese annähernd proportional mit zunehmender Anzahl der Stützstellen.

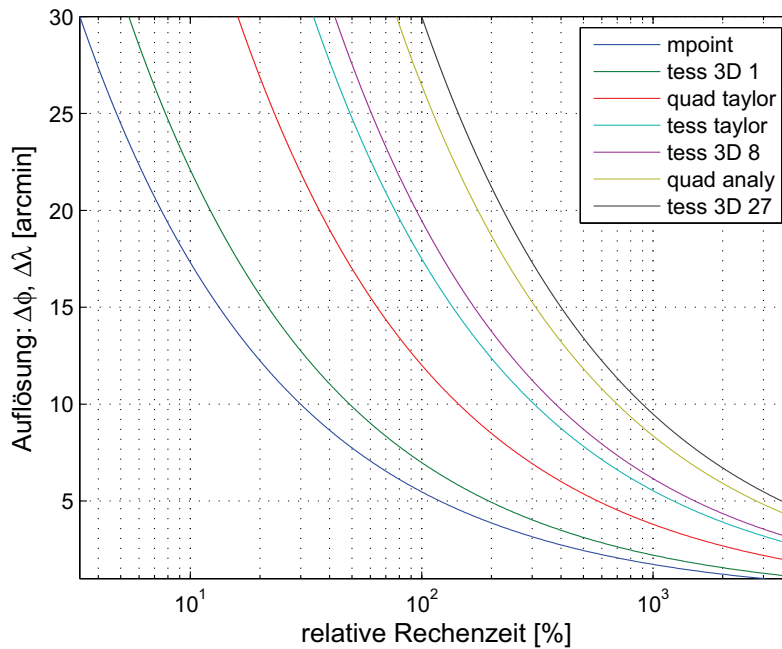


Abb. 7-8: relative Rechenzeiten in Abhängigkeit von der Topographieauflösung

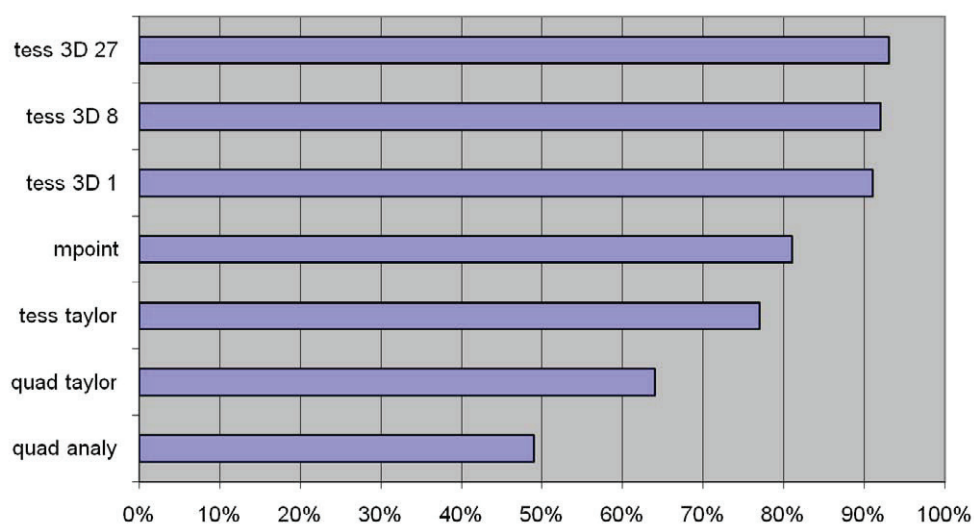
Nach diesem allgemeinen Vergleich der Berechnungsverfahren soll nun in einem weiteren Schritt konkret auf die Laufzeitunterschiede der einzelnen Berechnungsvarianten eingegangen werden und somit der Einfluss der Topographieauflösung berücksichtigt werden. Die Laufzeit hängt dabei von der Anzahl der zu lösenden Tesseroiden (vgl. Tab. 7-2) ab und steigt mit verfeinerter Topographieauflösung quadratisch an. In Abhängigkeit von der Topographieauflösung ergibt sich für jedes Verfahren eine charakteristische Kurve für die Rechenzeit. Die entsprechenden Kurven sind in Abb. 7-8 dargestellt. Hierbei wurde das Berechnungsverfahren *tess 3D 27* mit einer Topographieauflösung von $30'$ zu 100% gesetzt. Betrachtet man die Kurvenverläufe, so wird deutlich, dass die vermeintlich ungenaueren Verfahren in gleicher Laufzeit mit deutlich höherer Topographieauflösung berechnet werden können. Beispielsweise kann in der Laufzeit des Verfahrens *tess 3D 27* mit einer Topographieauflösung von $30'$ das Verfahren *mpoint* schon fast mit einer Topographieauflösung von $5'$ bearbeitet werden. Sortiert man die untersuchten Berechnungsvarianten aufsteigend nach ihrer Laufzeit, so erhält man die in Tab. 7-10 dargestellte Reihenfolge.

Am Schluss dieses Abschnitts soll auf die Rechenzeiterparnisse infolge der durchgeführten Optimierungen eingegangen werden. Vergleicht man die absoluten Laufzeiten der Verfahren mit denen der ursprünglichen Programmroutinen von WILD PFEIFFER (2007), so konnten insgesamt für alle Verfahren deutliche Reduktionen der Rechenzeit bewirkt werden. Diese sind sowohl auf die programmtechnischen Optimierungen als auch auf die Verwendung der optimierten Tesseroidformeln zurückzuführen. In Abb. 7-9 sind für die einzelnen Verfahren die prozentualen Rechenzeiterparnisse, jeweils bezogen auf die ursprüngliche Version, dargestellt.

Die größten Ersparnisse werden bei den Verfahren der Gauß-Legendre-Kubatur erreicht, bei denen die Laufzeit um durchschnittlich 92% verringert werden konnte. Beim Verfahren *mpoint* wurde die Rechenzeit um 81% reduziert, beim Verfahren *tess taylor* um 77% . Für die Verfahren der Quader-Approximation konnten 49% der ursprünglichen Laufzeit bei *quad analy* und 64% bei *quad taylor* eingespart werden. Die Einsparungen bei diesen beiden Verfahren sind geringer, da diese nicht von den optimierten Tesseroidformeln profitieren.

Tab. 7-10: relative Rechenzeiten der Berechnungsvarianten

Verfahren	Auflösung	Rechenzeit
<i>mpoint</i>	30'	3 %
<i>tess 3D 1</i>	30'	5 %
<i>mpoint</i>	15'	13 %
<i>quad taylor</i>	30'	16 %
<i>tess 3D 1</i>	15'	22 %
<i>tess taylor</i>	30'	34 %
<i>tess 3D 8</i>	30'	42 %
<i>quad taylor</i>	15'	64 %
<i>quad analy</i>	30'	78 %
<i>tess 3D 27</i>	30'	100 %
<i>mpoint</i>	5'	120 %
<i>tess taylor</i>	15'	136 %
<i>tess 3D 8</i>	15'	168 %
<i>tess 3D 1</i>	5'	195 %
<i>quad analy</i>	15'	311 %
<i>tess 3D 27</i>	15'	400 %
<i>quad taylor</i>	5'	577 %
<i>tess taylor</i>	5'	1225 %
<i>tess 3D 8</i>	5'	1516 %
<i>quad analy</i>	5'	2798 %
<i>tess 3D 27</i>	5'	3600 %

**Abb. 7-9:** prozentuale Rechenzeiterparnisse

7.4 Folgerungen für den effizienten Einsatz der Berechnungsverfahren

In diesem abschließenden Abschnitt sollen Bedingungen dafür gefunden werden, wann welche Berechnungsvariante bei der Modellierung topographischer Effekte auf den Gradiententensor eingesetzt wird. Dabei soll die festgelegte Genauigkeitsgrenze von 10^{-2} mE bei minimaler Laufzeit gewährleistet werden, um somit eine möglichst effiziente Berechnung durchzuführen. Dies folgt dem Grundprinzip, so genau wie möglich, aber nicht genauer als nötig.

Um Rechenzeit bei der Modellierung topographischer Effekte einzusparen, wird in früheren Untersuchungen (u.a. GRÜNINGER, 1990; KUHN, 2000) vorgeschlagen, die topographischen Massen, ausgehend vom Berechnungspunkt durch die sphärische Distanz ψ in einen Nah- und Fernbereich aufzuteilen. Der abklingende Einfluss entfernter Massen aus dem Fernbereich wird dann mittels größerer Approximationen und damit mit rechentechnisch schnelleren Berechnungsvarianten durchgeführt. Ein solches Vorgehen wird in WILD-PFEIFFER (2007) auch für die Modellierung topographischer Effekte auf den Gradiententensor empfohlen. Bei einer solchen Vorgehensweise ist allerdings zu beachten, dass rechentechnisch für jede Kombination aus Berechnungs- und Quellpunkt in der innersten Schleife jeweils eine zeitaufwändige Abfrage bezüglich der sphärischen Distanz stattfinden muss, um festzustellen, ob ein Quellpunkt im Nah- oder Fernbereich liegt.

Aufbauend auf den Erkenntnissen dieser Arbeit wird alternativ zu dieser Vorgehensweise vorgeschlagen, in Abhängigkeit von der Poldistanz des Berechnungspunktes verschiedene Berechnungsvarianten zu verwenden, um Rechenzeit einzusparen. Die hierfür notwendige Abfrage kann bereits außerhalb der inneren beiden Schleifen durchgeführt werden und benötigt somit pro Berechnungspunkt quasi keine zusätzliche Rechenzeit. Die Bedingungen für eine solche Vorgehensweise sollen nun aus der Kombination der Ergebnisse der Genauigkeits- und Rechenzeitbetrachtung der beiden vorangegangenen Abschnitte abgeleitet werden.

Hierzu wird die nach den Laufzeiten geordnete Liste der Berechnungsvarianten (Tab. 7-10) um die jeweilige Angabe des Grenzwerts der Poldistanz aus Abschnitt [7.3.1] ergänzt. Hieraus ergibt sich Tab. 7-11. Bei Poldistanzen des Berechnungspunktes oberhalb des Grenzwertes wird die Genauigkeitsanforderung von 10^{-2} mE an den Approximationsfehler für alle Tensorkomponenten eingehalten. Die Tabelle endet mit dem Verfahren *tess 3D 27 30'*, da diese Berechnungsvariante in der Rangfolge der Rechenzeiten die Erste darstellt, für welche die Genauigkeitsanforderung für jede Poldistanz des Berechnungspunktes garantiert werden kann. Alle Berechnungsvarianten mit einer größeren Laufzeit, insbesondere auch die Varianten mit einer Topographieauflösung von $5'$, scheiden aus und kommen bei einer effizienten Modellierung nicht zum Einsatz.

Tab. 7-11: relative Rechenzeiten und Grenzwerte für die Poldistanzen der Berechnungsvarianten

Verfahren	Auflösung	Rechenzeit	Poldistanz
<i>mpoint</i>	30'	3 %	26.7°
<i>tess 3D 1</i>	30'	5 %	25.8°
<i>mpoint</i>	15'	13 %	16.4°
<i>quad taylor</i>	30'	16 %	35.3°
<i>tess 3D 1</i>	15'	22 %	16.3°
<i>tess taylor</i>	30'	34 %	2.8°
<i>tess 3D 8</i>	30'	42 %	2.1°
<i>quad taylor</i>	15'	64 %	21.3°
<i>quad analy</i>	30'	78 %	35.3°
<i>tess 3D 27</i>	30'	100 %	0.0°

Betrachtet man Tab. 7-11, so zeigt sich, dass ein großer Abdeckungsbereich bereits mit den schnellen Verfahren der Genauigkeitsklasse 1 modelliert werden kann. Besitzt der Berechnungspunkt eine Poldistanz im Bereich $90^\circ \leq \theta < 26.7^\circ$, so kann die schnellste Berechnungsvariante *mpoint 30'* verwendet werden, ohne dass Genauigkeitsverluste bei der Modellierung hinzunehmen sind. Mit der Berechnungsvariante *tess 3D 1 30'* erweitert sich bei leicht erhöhter Rechenzeit dieser Bereich bis zu einer Poldistanz von 25.8° . Es stellt sich hier allerdings die Frage, ob es sinnvoll ist, bei so einem kleinen Unterschied des Grenzwertes der Poldistanz das Verfahren zu wechseln. Stattdessen bietet sich an, den Bereich $26.7^\circ \leq \theta < 16.4^\circ$ ebenfalls mit dem Verfahren *mpoint*, aber mit einer Topographieauflösung von $15'$ zu modellieren.

Erreicht die Poldistanz des Berechnungspunktes kleinere Werte als 16.4° , so kann eine ausreichend genaue Modellierung nur durch Verfahren der Genauigkeitsklasse 2 realisiert werden. Aufgrund der recht stark ansteigenden Rechenzeiten ist hier ein Wechsel des Verfahrens auch für kleinere Poldistanzabschnitte sinnvoll. Für $16.4^\circ \leq \theta < 2.8^\circ$ kann das Verfahren *tess taylor 30'* verwendet werden. Für den kleinen Bereich $2.8^\circ \leq \theta < 2.1^\circ$ bietet sich die Berechnungsvariante *tess 3D 8 30'* an. Der innerste Bereich um den Polpunkt herum zwischen $2.1^\circ \leq \theta \leq 0^\circ$ kann schließlich nur noch durch die in dieser Aufstellung langsamste Berechnungsvariante *tess 3D 27 30'* ausreichend genau modelliert werden.

Durch Tab. 7-11 wird zudem deutlich, dass die Verfahren *quad taylor* und *quad analy* im Vergleich zu den anderen Verfahren ein ungünstiges Verhältnis zwischen Rechenzeit und erreichbarer Genauigkeit besitzen. Für die effiziente Modellierung topographischer Effekte mittels Tesseroiden bietet die Quader-Approximation unabhängig vom Berechnungsverfahren daher keine Alternative und kann nicht empfohlen werden.

Betrachtet man nun explizit den Fall GOCE, so ist bei der Auswahl der Verfahren eine weitere Vereinfachung möglich. Aufgrund der Inklination des Satelliten von 96.5° werden für die Berechnungspunkte ausschließlich größere Poldistanzen als 6.5° erreicht. Daher ist es möglich, sich auf die drei Berechnungsvarianten *mpoint 30'*, *mpoint 15'* und *tess taylor 30'* bei der Modellierung zu beschränken. Es wird empfohlen, bei der Modellierung den Poldistanzbereich des Berechnungspunktes in drei Intervalle aufzuteilen und diesen den folgenden Berechnungsvarianten zuzuordnen:

<i>mpoint 30'</i>	$90.0^\circ \leq \theta < 26.7^\circ$
<i>mpoint 15'</i>	$26.7^\circ \leq \theta < 16.4^\circ$
<i>tess taylor 30'</i>	$16.4^\circ \leq \theta < 6.5^\circ$.

Diese Einteilung gilt sowohl für den Fall, dass sich der Satellit über der Nord- sowie über der Südhemisphäre befindet. Bei der Modellierung eines Realfalls müssten die topographischen Höhen demnach durch globale DGMs in den beiden Auflösungsstufen $30' \times 30'$ und $15' \times 15'$ vorliegen. Eine höhere Auflösung, wie z.B. die hier untersuchte Variante mit $5' \times 5'$, wäre für den betrachteten Fall des Berechnungspunktes in Satellitenhöhe nicht notwendig. Hierbei muss allerdings beachtet werden, dass sich die in diesem Kapitel durchgeführten theoretischen Überlegungen auf das Kugelschalenmodell mit einer konstanter Topographie beziehen. Zwar stellt dies einen Grenzfall in Bezug auf die physikalische Realität dar, mittels Realdaten sollte dennoch verifiziert werden, inwiefern sich die Aussagen auf einen Anwendungsfall mit realer Topographie übertragen lassen.

8 Zusammenfassung und Ausblick

In diesem abschließenden Kapitel wird eine kurze Zusammenfassung der Ergebnisse dieser Arbeit gegeben und in einem Ausblick auf Folgearbeiten und weitere Optimierungen eingegangen.

8.1 Zusammenfassung

Im Rahmen dieser Arbeit wurden vor dem Hintergrund der Satellitengradiometriemission GOCE verschiedene Untersuchungen zur effizienten Berechnung topographischer Effekte auf den Gradiententensor durchgeführt. Ausgangspunkt waren dabei bestehende ProgrammROUTINEN für die Massenmodellierung mittels Tesseroiden, die durch die Dissertation von F. Wild-Pfeiffer (WILD-PFEIFFER, 2007) am Geodätischen Institut der Universität Karlsruhe vorlagen.

Nach einer Validierung und Optimierung der bestehenden ProgrammROUTINEN wurden zunächst einige theoretische Untersuchungen bezüglich der verwendeten Tesseroidformeln durchgeführt. Hierbei konnte im Gegensatz zur bisherigen Vorgehensweise ein alternativer Weg aufgezeigt werden, der zur Ableitung optimierter Tesseroidformeln geführt hat. Die Anzahl der notwendigen Integrationsauswertungen wird hierdurch von neun auf sechs verringert. Zudem hat sich die Formelstruktur wesentlich vereinfacht und kann in einer kompakten Index-Schreibweise angegeben werden. Eine in den ursprünglichen Formeln vorhandene Singularität konnte beseitigt und somit die numerische Stabilität erhöht werden.

Da die auszuwertenden Integrale für den Fall des Tesseroids analytisch nicht lösbar sind, muss auf numerische Näherungsverfahren oder Approximationen zurückgegriffen werden. Hierzu wurden innerhalb der Arbeit verschiedene Verfahren vorgestellt und ausgehend von den optimierten Tesseroidformeln entsprechende Berechnungsformeln implementiert.

Als Näherungsverfahren wurden die Taylor-Reihenentwicklung des Integranden und anschließende gliedweise Integration sowie die rein numerische Integration mittels Gauß-Legendre-Kubatur angewandt. Für den Fall der Gauß-Legendre-Kubatur wurden dabei drei Varianten mit einer, acht und 27 Stützstellen betrachtet. Unter der Annahme lokaler Massenerhaltung wurde als Approximation für Tesseroiden eine Modellierung mit Quadern und Punktmassen angewandt. Hierbei wurden für den Quader Auswerteverfahren mittels analytischer Berechnungsformeln und mittels Taylor-Reihenansatz umgesetzt.

Im Rahmen numerischer Untersuchungen wurden die Berechnungsverfahren hinsichtlich ihrer erreichbaren Genauigkeit und Rechenzeit bei der Modellierung topographischer Effekte auf den Gradiententensor analysiert. Dies erfolgte für drei verschiedene Topographieauflösungen (5', 15' und 30').

Innerhalb der Genauigkeitsanalyse wurde deutlich, dass der durch die Modellierung entstehende Approximationsfehler stark von der Poldistanz des Berechnungspunktes abhängt. Die maximalen Fehlerwerte werden dabei für jedes Verfahren stets im Bereich des Pols erreicht und in Richtung des Äquators um einige Größenordnungen kleiner. Um eine ausreichende Genauigkeit bei der Modellierung zu gewährleisten, wurde in Abstimmung mit der bei GOCE erreichbaren Messgenauigkeit ein maximal zulässiger Approximationsfehler von 10^{-2} mE festgelegt. Für jedes Verfahren konnte genau ein Poldistanzwert ermittelt werden, ab der diese Genauigkeitsgrenze eingehalten wird.

Durch den Vergleich der Rechenzeiten konnte gezeigt werden, dass Verfahren, die größere Approximationsfehler hervorrufen, tendenziell geringere Laufzeiten aufweisen, dadurch aber

auch mit einer höheren Topographieauflösung berechnet werden können. Im Vergleich zu den ursprünglichen ProgrammROUTINEN konnten aufgrund der durchgeführten Optimierungen für alle Verfahren deutliche Reduktionen der Laufzeiten bewirkt werden. Die Rechenzeitersparnisse liegen dabei zwischen 49% und 93%.

Aus der Kombination von geforderter Genauigkeit, Poldistanz des Berechnungspunktes und Rechenzeit wurden schließlich Bedingungen abgeleitet, wann welches Berechnungsverfahren für eine effiziente Modellierung eingesetzt werden kann. Für den Anwendungsfall GOCE sind die ausgewählten Verfahren die Punktmassen-Approximation mit einer Topographieauflösung von 30' und 15' sowie die Taylor-Reihenentwicklung mit einer Topographieauflösung von 30'.

8.2 Ausblick

In einem weiteren Schritt sollen die in dieser Arbeit durchgeführten theoretischen Überlegungen auf Realdaten angewendet werden. Hierbei soll der Einfluss von verschiedenen globalen DGMS auf die Bestimmung topographischer Effekte analysiert werden. Untersucht werden soll u.a. die Auswirkung des JGP95E (LEMOINE ET AL., 1998), des DTM2006.0 (PAVLIS ET AL., 2007) und des SRTM30_PLUS (BECKER ET AL., 2009). Entsprechend den Ergebnissen der numerischen Untersuchungen in dieser Arbeit ist es sinnvoll, diese DGMS in den zwei Auflösungsstufen von 30'x 30' und 15'x 15' verfügbar zu machen. Soweit diese nicht vorliegen, sollten durch Interpolation bzw. Extrapolation aus den gegebenen Daten eigene DGM-Gitter generiert werden. Dichteinformationen für die jeweiligen Massenkörper können dabei eventuell aus den Geländelayers der DGMS abgeleitet oder globalen Dichtemodellen, wie z.B. dem globalen 2°x 2° Crust2.0 Modell seismischer Geschwindigkeiten und Dichten (BASSIN ET AL., 2000), entnommen werden.

Da sich die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Untersuchungen auf die sphärische Approximation der topographischen Massen beziehen, stellt sich die Frage nach dem Einfluss der vernachlässigten Elliptizität der Erde. Dies schließt sowohl eine ellipsoidische Höhenbezugsfläche, auf welche die Massenkörper aufgesetzt werden, wie auch die Lösung von ellipsoidischen Tesseroiden ein. Approximationsfehler, die durch Vernachlässigung der Elliptizität bei der Berechnung entstehen, sind sehr klein (NOVÁK und GRAFAREND, 2005), so dass für die meisten Anwendungen in erster Näherung die sphärische Approximation ausreicht. Für den konkreten Anwendungsfall von GOCE sollte dies allerdings näher untersucht werden. Im Gegensatz zur sphärischen Approximation, bei der durch das Kugelschalenmodell eine Soll-Lösung zum Vergleich existiert, ist dies bei ellipsoidischer Approximation nicht gegeben.

Eine weitere interessante Folgearbeit ist die genauere Betrachtung und Untersuchung des unter [5.2] eingeführten Integranden (5-19) der optimierten Tesseroidformeln. Hier stellt sich die Frage, wie die Anordnung zwischen Berechnungs- und Quellpunkt sein muss, damit positive bzw. negative Beiträge entstehen oder der Einfluss eines Massenkörpers zu Null wird. Hierzu sind die Nullstellen des Integranden für die verschiedenen Tensorelemente zu bestimmen. Erste durchgeführte Untersuchungen haben ergeben, dass die Lage der Nullstellen für die einzelnen Elemente nicht nur von der sphärischen Distanz ψ , sondern auch vom Azimut α zwischen Berechnungs- und Quellpunkt abhängig ist. Für die vier Tensorelemente V_{xy} , V_{xz} , V_{yz} und V_{zz} können die Bedingungen für die Nullstellen unmittelbar aus den Formeln für den Integranden (5-19) abgeleitet werden. Für die Tensorelemente V_{xx} und V_{yy} ergeben sich partielle Differentialgleichungen, deren Lösungen noch näher zu untersuchen sind.

Um weitere Laufzeit bei der Modellierung topographischer Effekte einzusparen, ist es sinnvoll bei den Berechnungen auf den Einsatz von Parallelrechnern zurückzugreifen. Die entwickelten ProgrammROUTINEN mit vier verschachtelten Schleifen eignen sich dabei sehr gut für eine

Parallelisierung. Hierzu müssen die Quellcodes für die am Steinbuch Centre for Computing (ehemals Rechenzentrum der Universität Karlsruhe) verfügbaren Parallelrechner angepasst werden. Voraussetzung für eine Parallelisierung ist allerdings eine weitestgehende Optimierung des bisherigen sequentiellen Quellcodes. Untersuchungen bezüglich einer Parallelisierung für die gegebene Problemstellung wurden in WILD-PFEIFFER ET AL. (2007) durchgeführt.

Literaturverzeichnis

- ANDERSON E.G. (1976): The effect of topography on solutions of Stokes' problem. Unisurv S-14, Rep, School of Surveying, University of New South Wales, Kensington.
- BASSIN C., LASKE G., MASTERS G. (2000): The current limits of resolution for surface wave tomography in North America. EOS Trans AGU 81(48), F897.
- BAUR O. (2007): Die Invariantendarstellung in der Satellitengradiometrie - Theoretische Betrachtungen und numerische Realisierung anhand der Fallstudie GOCE. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Heft 609, München.
- BECKER J.J., SANDWELL, D.T., SMITH, W.H.F., BRAUD J., BINDER B., DEPNER J., FABRE D., FACTOR J., INGALLS S., KIM S-H., LADNER R., MARKS K., NELSON S., PHARAOH A., TRIMMER R., VON ROSENBERG J., WALLACE G., WEATHERALL P.(2009): Global Bathymetry and Elevation Data at 30 Arc Seconds Resolution: SRTM30_PLUS. Marine Geodesy, 32:4, pp 355-371.
- CARROLL J.J., SAVET P. (1959): Space Navigation and Exploration by Gravity Difference Detection. Aerospace Engineering, Vol. 18, pp 44-47.
- ESA (1999): The four candidate Earth explorer core missions: Gravity Field and steady-state ocean circulation mission. Reports for Mission Selection, ESA Publications Division, SP-1233(1), Noordwijk.
- FORSBERG R., TSCHERNING C.C. (1997): Topographic effects in gravity field modelling for BVP. In: Sansò F., Rummel R. (eds.): Geodetic boundary value problems in view of the one centimetre geoid. Lecture Notes in Earth Sciences, Vol. 65, Springer-Verlag, Berlin, pp 241-272.
- GRÜNINGER W. (1990): Zur topographisch-isostatischen Reduktion der Schwere. Dissertation, Universität Karlsruhe (TH).
- HECK B. (1989): A Contribution to the Scalar Free Boundary Value Problem of Physical Geodesy. *manuscripta geodaetica*, 14, pp 87-99.
- HECK B. (2003): Rechenverfahren und Auswertemodelle der Landesvermessung. Klassische und moderne Methoden. 3. Auflage, Wichmann-Verlag, Heidelberg.
- HECK B., SEITZ K. (2007): A comparison of the tesseroid, prism and point-mass approaches for mass reductions in gravity field modelling. *Journal of Geodesy*, 81, pp 121–136, DOI 10.1007/s00190-006-0094-0.
- HEISKANEN W.A., MORITZ H. (1967): *Physical Geodesy*. W.H. Freeman & Co., San Francisco.
- JANÁK J., MIKULA K., ŠPRLÁK M. (2006): Downward continuation of satellite gradiometry data. Proc. of the third international GOCE user workshop, ESA-ESRIN, Frascati, Italy.
- KUHN M. (2000): Geoidbestimmung unter Verwendung verschiedener Dichtehypothesen. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Heft 520, München.
- LEMOINE F.G., KENYON S.C., FACTOR J.K., TRIMMER R.G., PAVLIS N.K., CHINN D.S., COX C.M., KLOSKO S.M., LUTHCKE S.B., TORRENCE M.H., WANG Y.M. , WILLIAMSON R.G. , PAVLIS E.C. , RAPP R.H. , OLSON T.R. (1998): The Development of the Joint NASA GSFC and the National Imagery and Mapping Agency (NIMA) Geopotential Model EGM96. NASA Goddard Space Flight Center, Greenbelt, Maryland, USA.

- MAKHLOOF A.A. (2007): The use of topographic-isostatic mass information in geodetic applications. Dissertation, D98, Universität Bonn.
- MAKHLOOF A.A., ILK K-H. (2008): Effects of topographic–isostatic masses on gravitational functionals at the Earth’s surface and at airborne and satellite altitudes. *Journal of Geodesy*, 82, pp 93–111, DOI 10.1007/s00190-007-0159-8.
- MORITZ H. (1985): Inertia and Gravitation in Geodesy. In: Schwarz K.P. (ed.): *Inertial Technology for Surveying and Geodesy*, Banff, Canada.
- MÜLLER J. (2001): Die Satellitengradiometriemission GOCE - Theorie, technische Realisierung und wissenschaftliche Nutzung. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Heft 541, München.
- NAGY D., PAPP G., BENEDEK J. (2000): The gravitational potential and its derivatives for the prism. *Journal of Geodesy*, 74, pp 552–560, DOI 10.1007/s00190-006-0094-0.
- NAGY D., PAPP G., BENEDEK J. (2002): Corrections to „The gravitational potential and its derivatives for the prism“. *Journal of Geodesy*, 76, p 475, DOI 10.1007/s00190-002-0264-7.
- NOVÁK P., GRAFAREND E.W. (2005): Ellipsoidal representation of the topographical potential and its vertical gradient. *Journal of Geodesy*, 78, pp 691–706, DOI 10.1007/s00190-005-0435-4.
- PAVLIS N.K., FACTOR J.K., HOLMES S.A. (2007): Terrain-Related Gravimetric Quantities Computed for the Next EGM. In: Kiliçoğlu A., Forsberg R. (eds.): *Proceedings of the 1st International Symposium of the International Gravity Field Service: Gravity Field of the Earth*, General Command of Mapping, pp 318-323.
- PAVLIS N.K., HOLMES S.A., KENYON S.C., FACTOR J.K. (2008): An Earth Gravitational Model to Degree 2160: EGM2008. General Assembly of the European Geosciences Union, Wien.
- RUMMEL R. (1986): Satellite gradiometry. In: Sünkel H. (ed.): *Mathematical and Numerical Techniques in Physical Geodesy. Lecture Notes in Earth Sciences*, Vol. 7, Springer-Verlag, Berlin, pp 317-363.
- RUMMEL R. (1989): Satellitengradiometrie, eine neue geodätische Meßtechnik kurz vor ihrer Realisierung. *ZfV - Zeitschrift für Vermessungswesen*, 114, S. 346-352.
- RUMMEL R., BALMINO G., JOHANNESSEN J., VISSER P., WOODWORTH P. (2002): Dedicated gravity field missions - principles and aims. *Journal of Geodynamics*, 33, pp 3 - 20, DOI 10.1016/S0264-3707(01)00050-3.
- RUMMEL R., GRUBER T., FLURY J., SCHLICHT A. (2009): ESA’s Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer GOCE. *ZfV - Zeitschrift für Geodäsie, Geoinformation und Landmanagement*, 134, S. 125-130.
- SCHWARZ H.R. (1993): *Numerische Mathematik*. 3. Auflage, Teubner-Verlag, Wiesbaden.
- SEITZ K. (1997): Ellipsoidische und topographische Effekte im geodätischen Randwertproblem. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Heft 483, München.
- STUMMER C. (2006): Analyse der Gradiometergleichungen der GOCE Satellitenmission zur Schwerefeldbestimmung. IAPG/FESG-Schriftenreihe, No. 25, Institut für Astronomische und Physikalische Geodäsie, München.

- TORGE W. (2003): Geodäsie. 2. Auflage, Walter-de-Gruyter-Verlag, Berlin.
- TSCHERNING C.C. (1976): Computation of the second-order derivatives of the normal potential based on the representation by a Legendre Series. *manuscripta geodaetica*, 1, pp 71-92.
- VANÍČEK P., NOVÁK P., MARTINEC Z. (2001): Geoid, topography, and the Bouguer plate or shell. *Journal of Geodesy*, 75, pp 210–215, DOI 10.1007/s001900100165.
- WILD-PFEIFFER F. (2007): Auswirkungen topographisch-isostatischer Massen auf die Satelliten-gradiometrie. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Heft 604, München.
- WILD-PFEIFFER F. (2008): A comparison of different mass elements for use in gravity gradiometry. *Journal of Geodesy*, 82, pp 637 - 653, DOI 10.1007/s00190-008-0219-8.
- WILD-PFEIFFER F., AUGUSTIN W., HECK B. (2007): Optimierung der Rechenzeit bei der Berechnung der 2. Ableitung des Gravitationspotentials von Massenelementen. *ZfV - Zeitschrift für Vermessungswesen*, 132, S. 377-384.
- WOLF K.I., DENKER H. (2004): Upward Continuation of Ground Data for GOCE Calibration/Validation Purposes. In: Jekeli C., Bastos L., Fernandes J. (eds.): *Gravity, Geoid and Space Missions*. International Association of Geodesy Symposia, Vol. 129, Springer-Verlag, Berlin, pp 60-65.

A Ergebnisse mit verschiedenen Topographieauflösungen

A.1 Ergebnisse mit einer Topographieauflösung von 30'

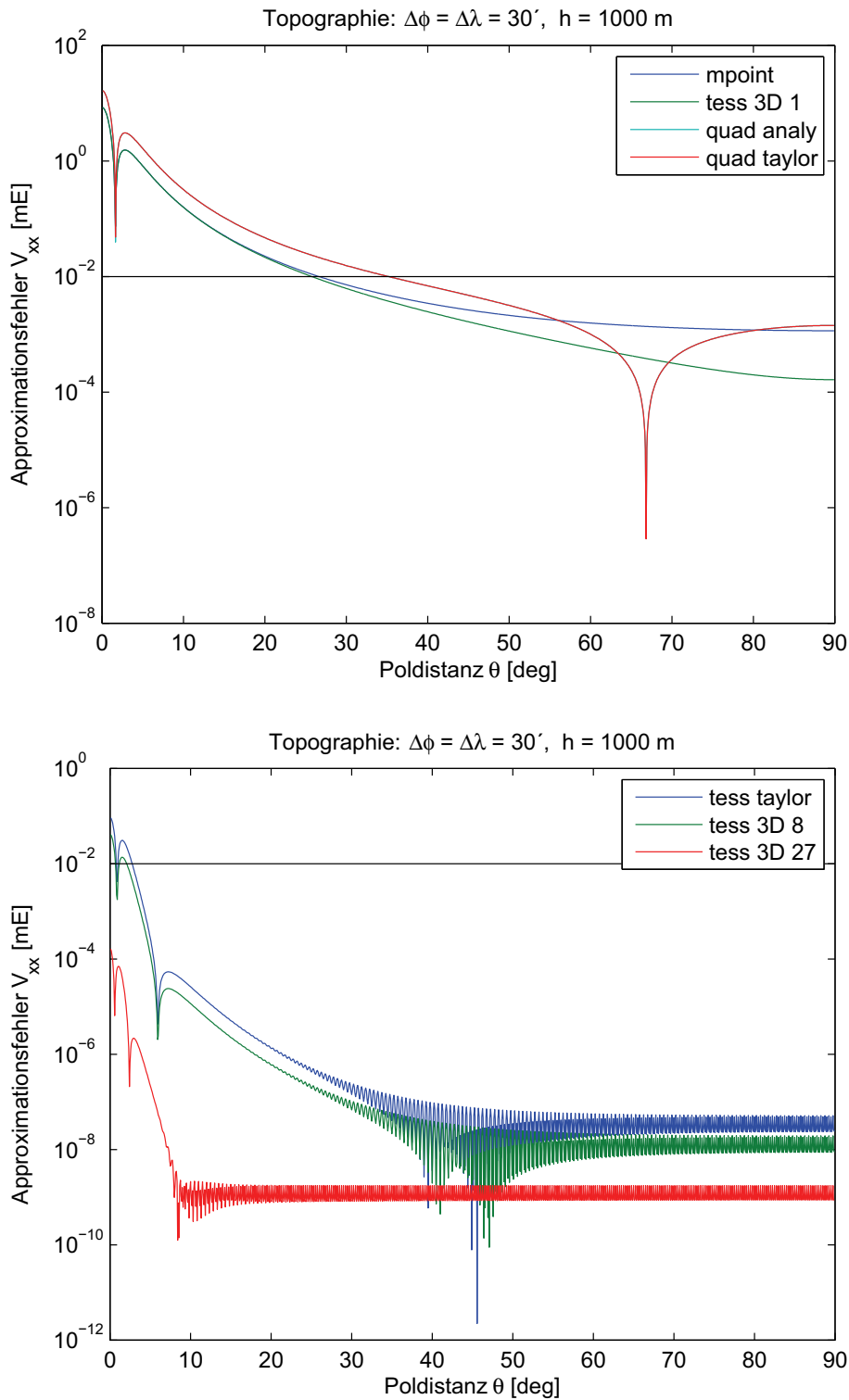


Abb. A-1: Approximationsfehler der Tensorkomponente V_{xx} bei einer Topographieauflösung von 30'

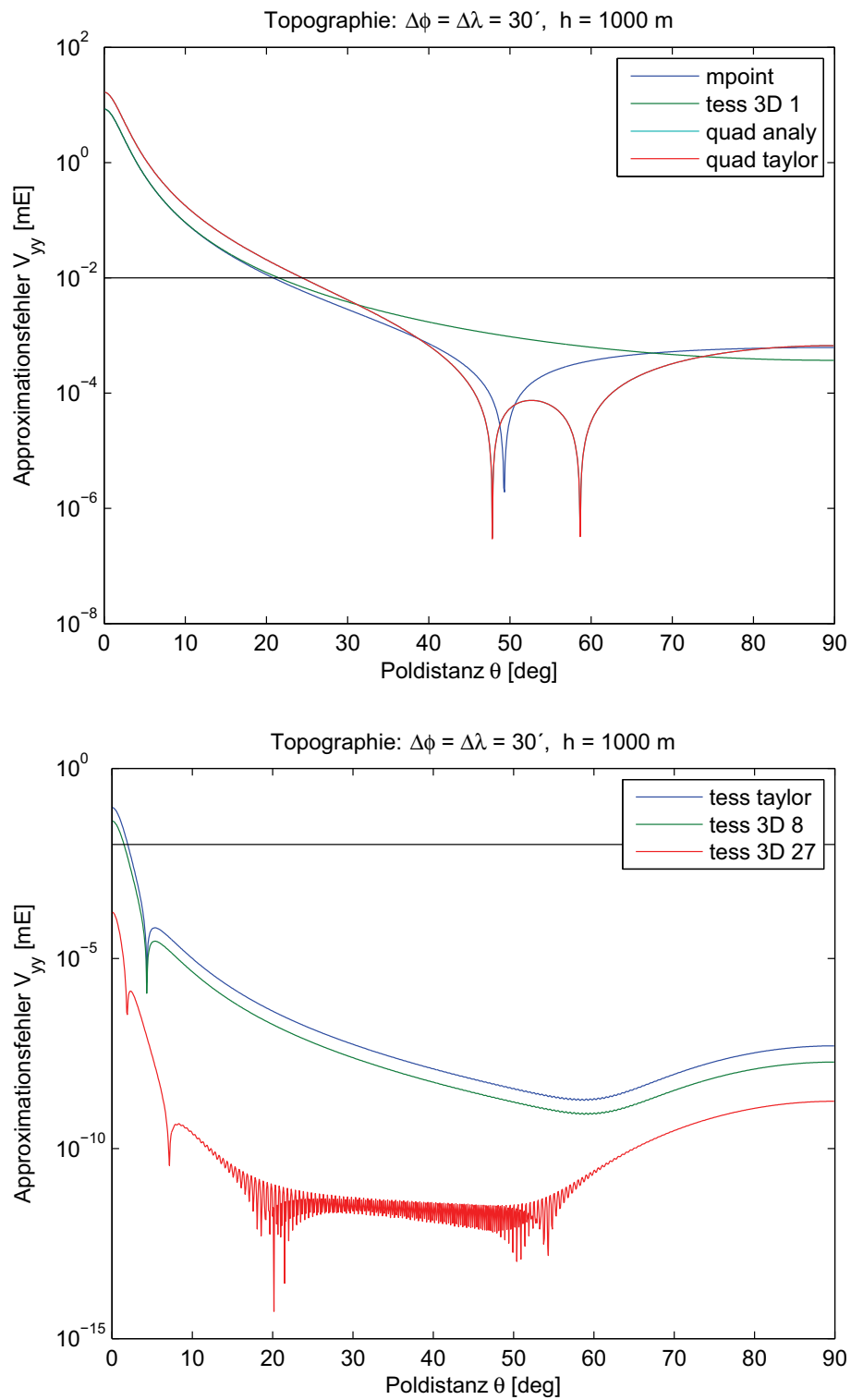


Abb. A-2: Approximationsfehler der Tensorkomponente V_{yy} bei einer Topographieauflösung von 30'

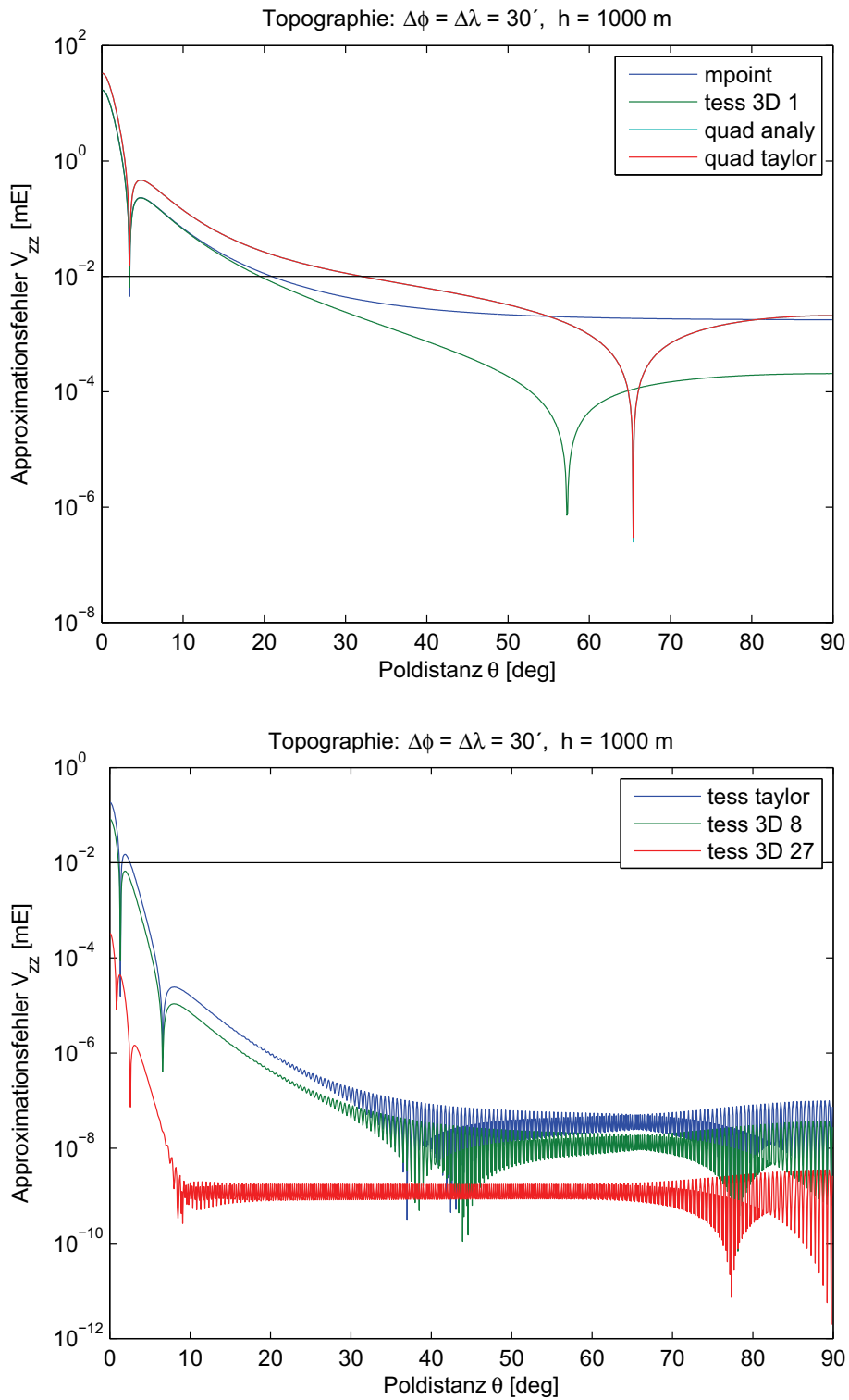


Abb. A-3: Approximationsfehler der Tensorkomponente V_{zz} bei einer Topographieauflösung von $30'$

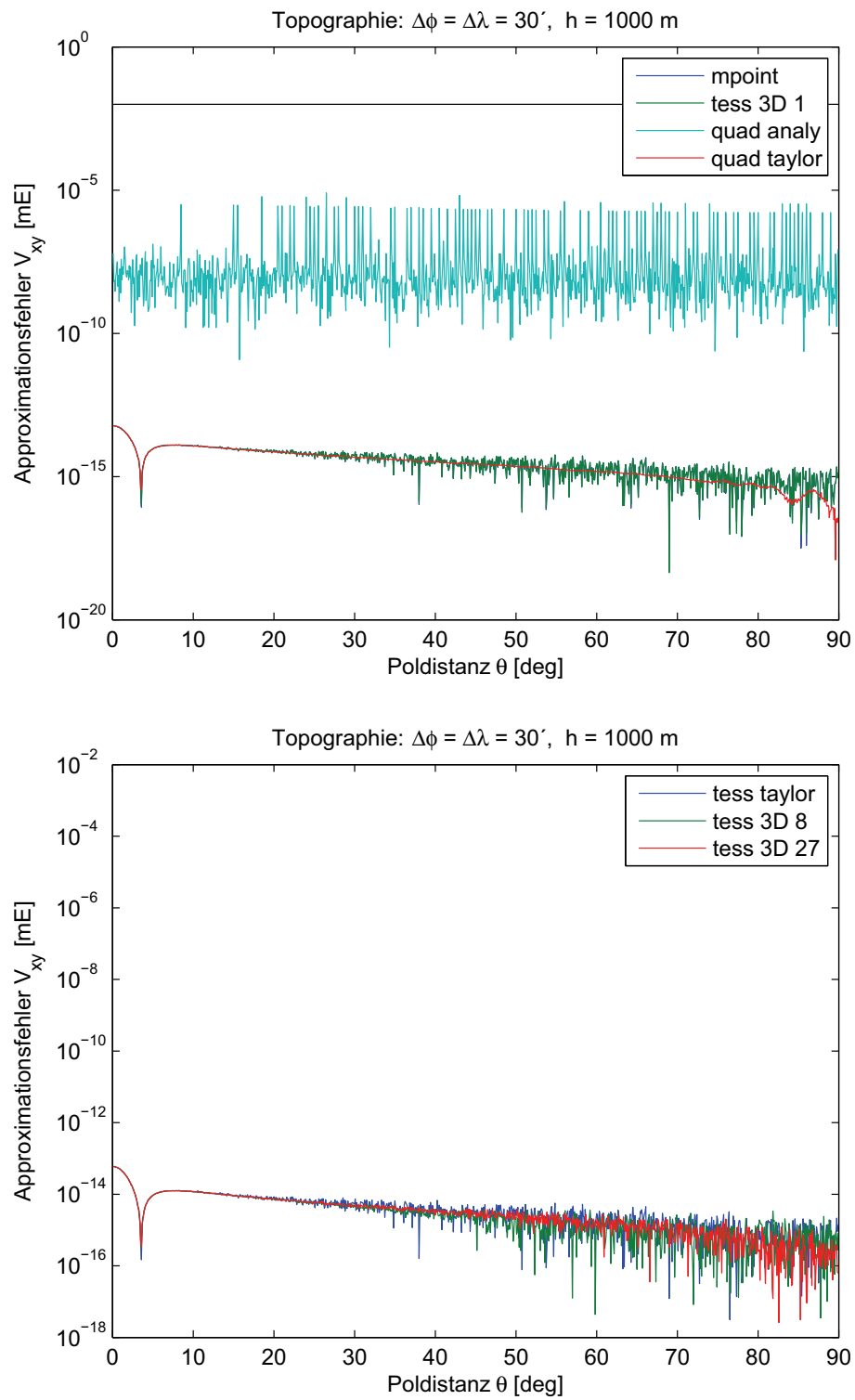


Abb. A-4: Approximationsfehler der Tensorkomponente V_{xy} bei einer Topographieauflösung von 30'

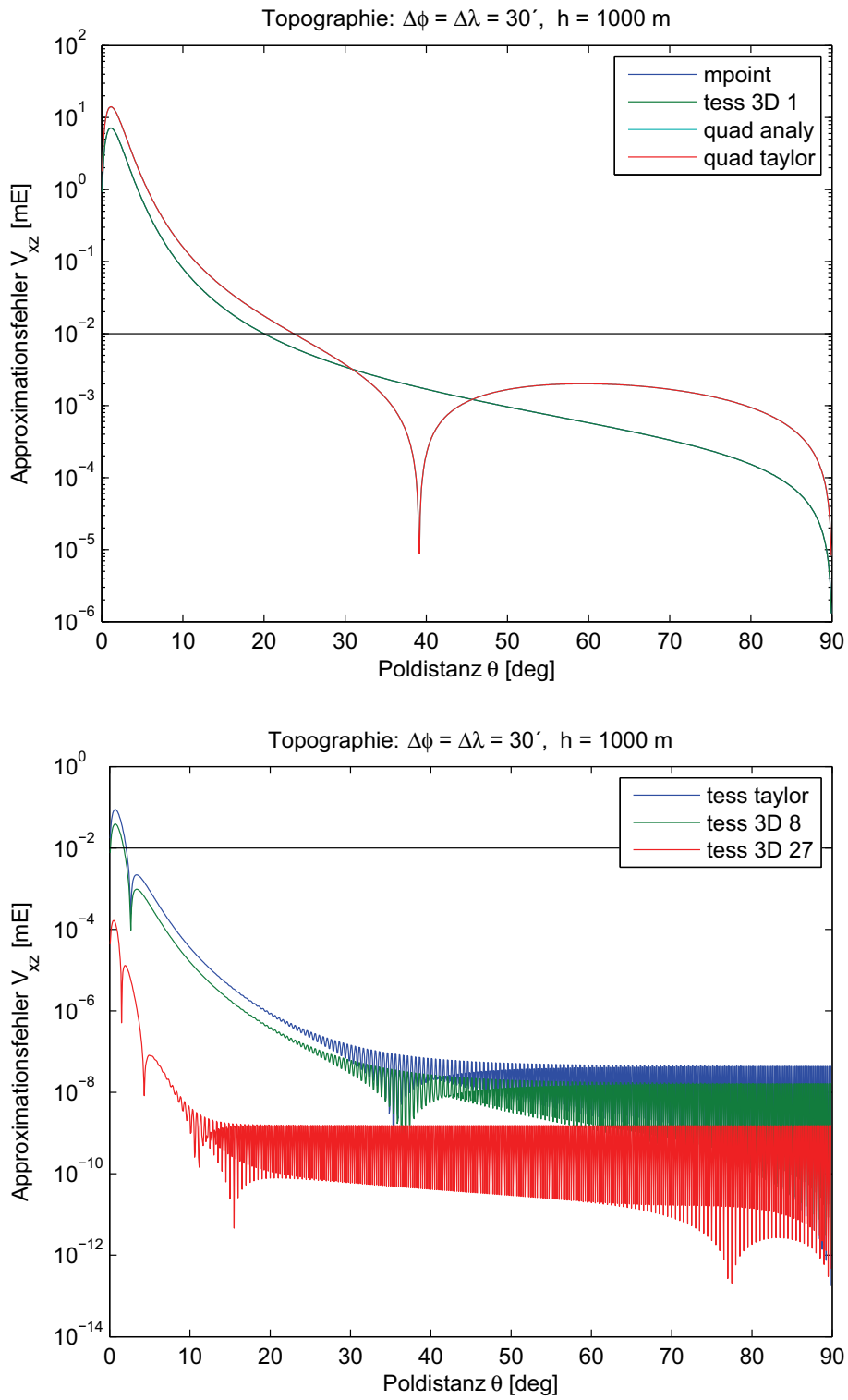


Abb. A-5: Approximationsfehler der Tensorkomponente V_{xz} bei einer Topographieauflösung von $30'$

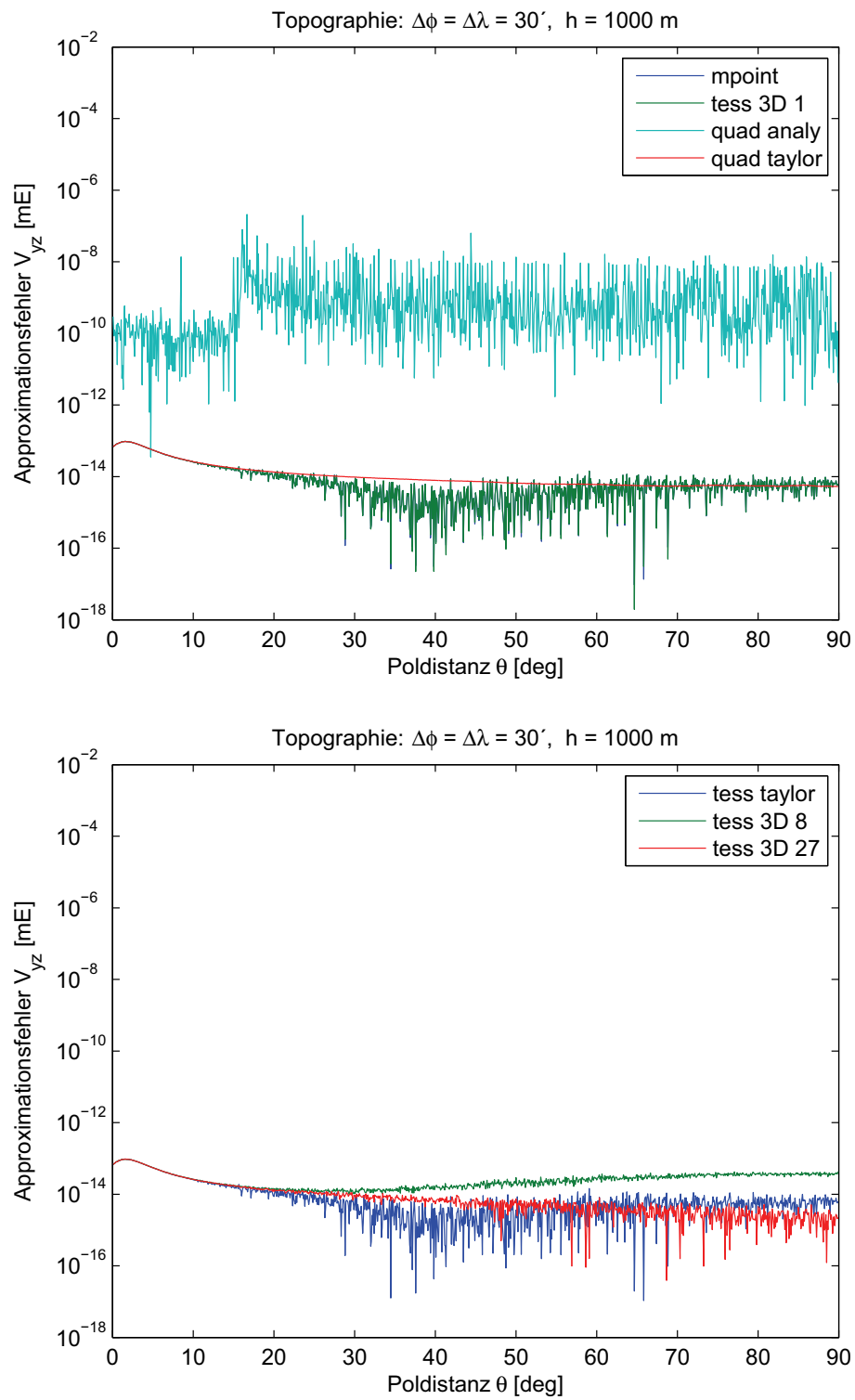


Abb. A-6: Approximationsfehler der Tensorkomponente V_{yz} bei einer Topographieauflösung von 30'

A.2 Ergebnisse mit einer Topographieauflösung von 15'

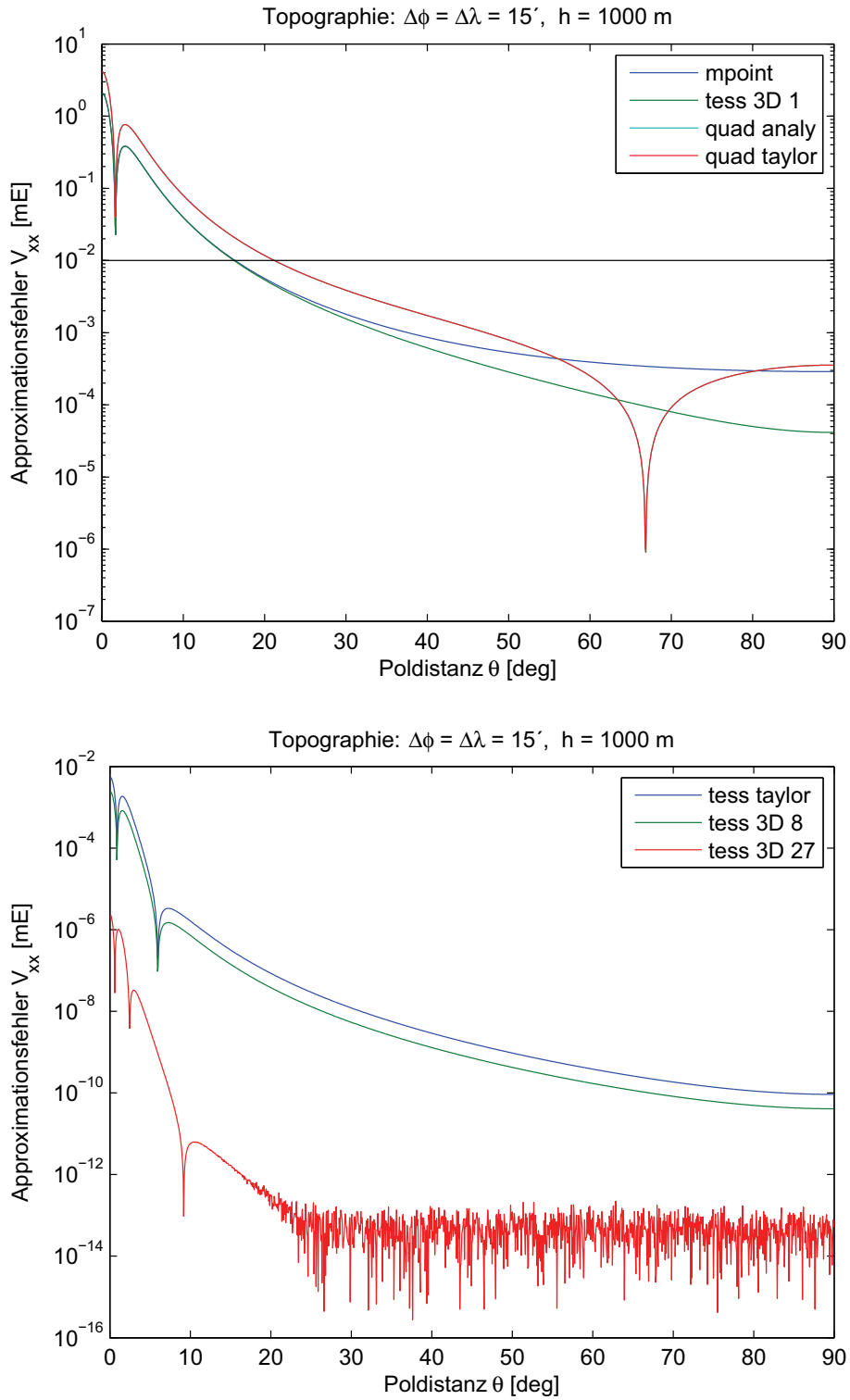


Abb. A-7: Approximationsfehler der Tensorkomponente V_{xx} bei einer Topographieauflösung von 15'

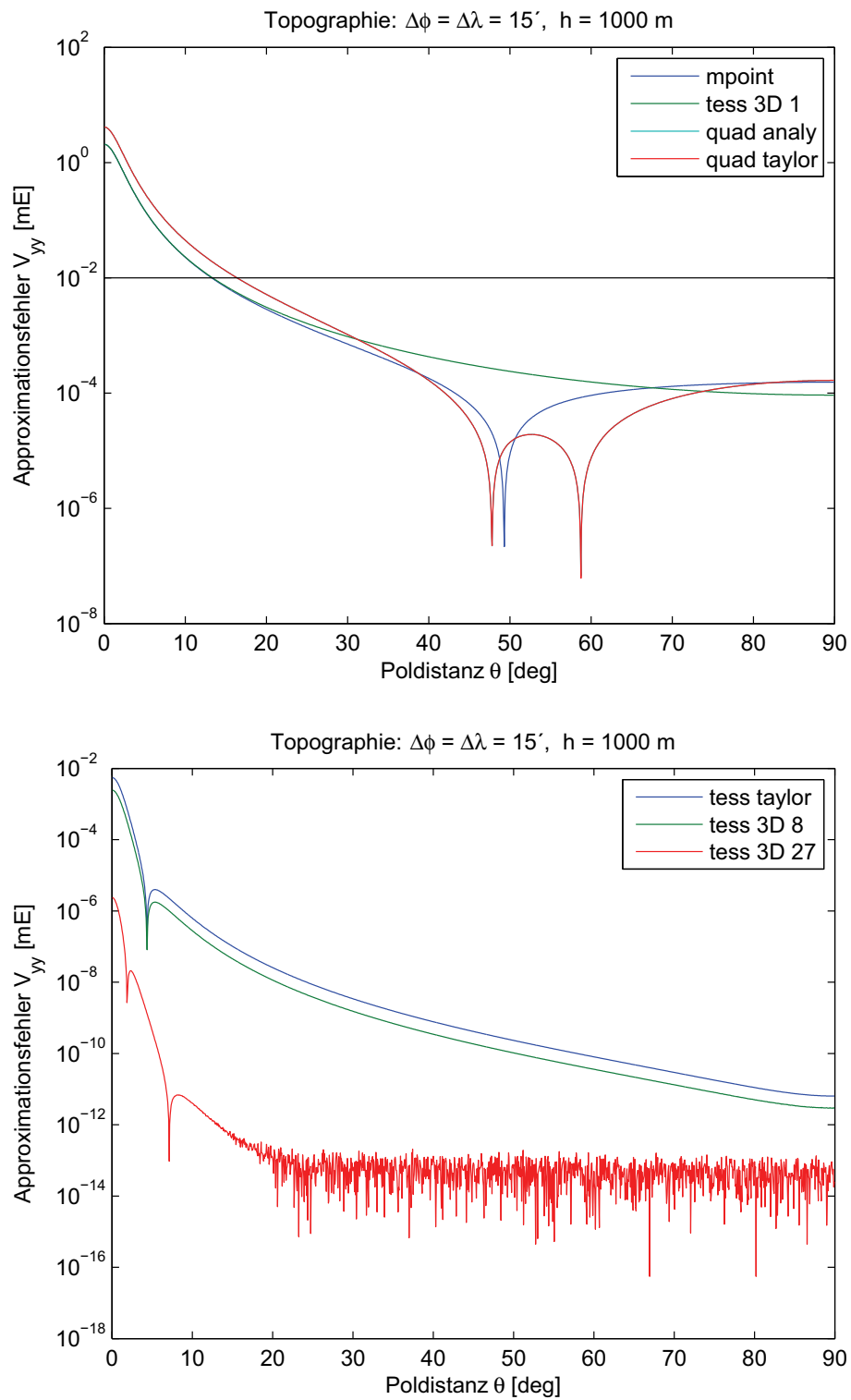


Abb. A-8: Approximationsfehler der Tensorkomponente V_{yy} bei einer Topographieauflösung von 15'

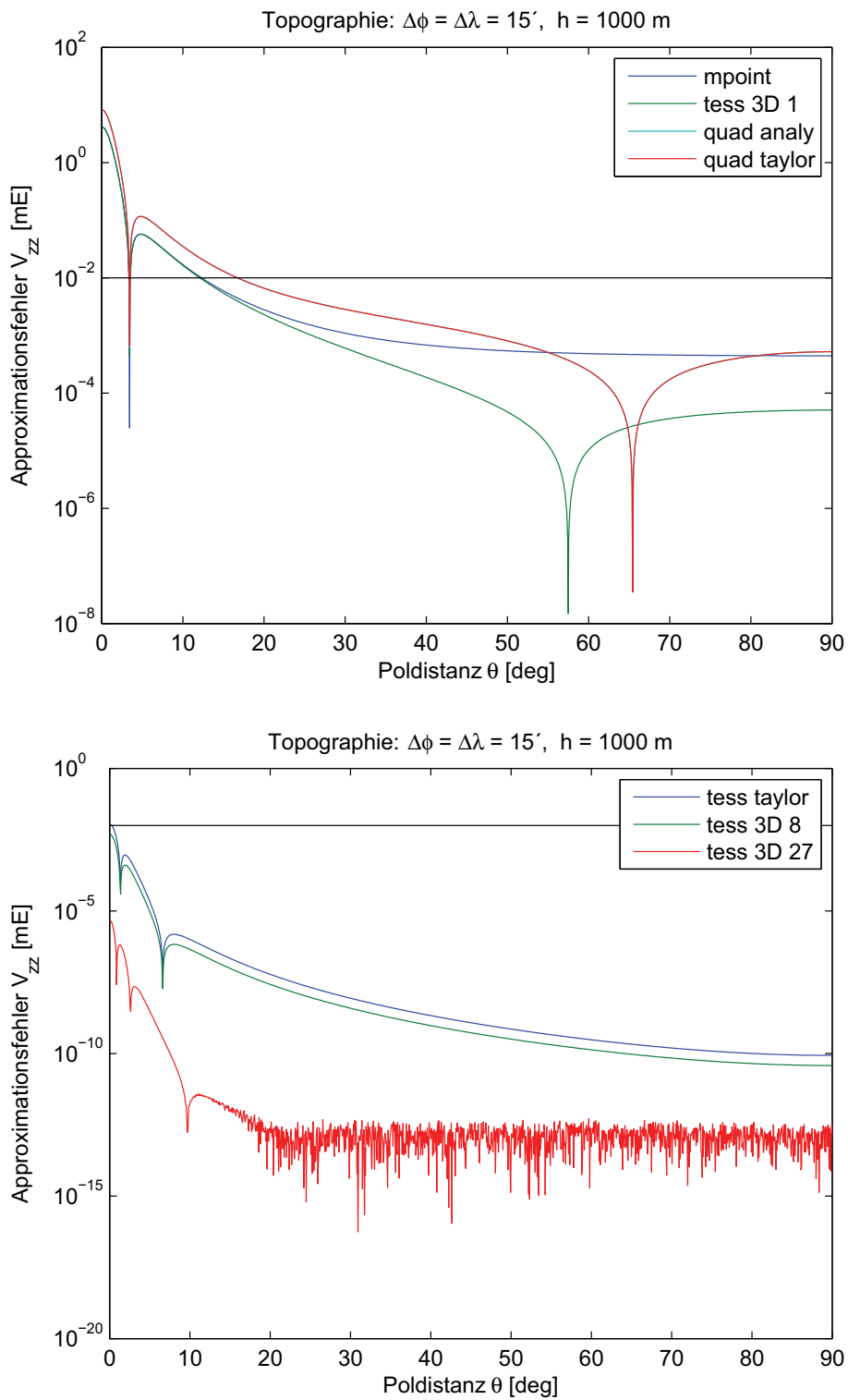


Abb. A-9: Approximationsfehler der Tensorkomponente V_{zz} bei einer Topographieauflösung von $15'$

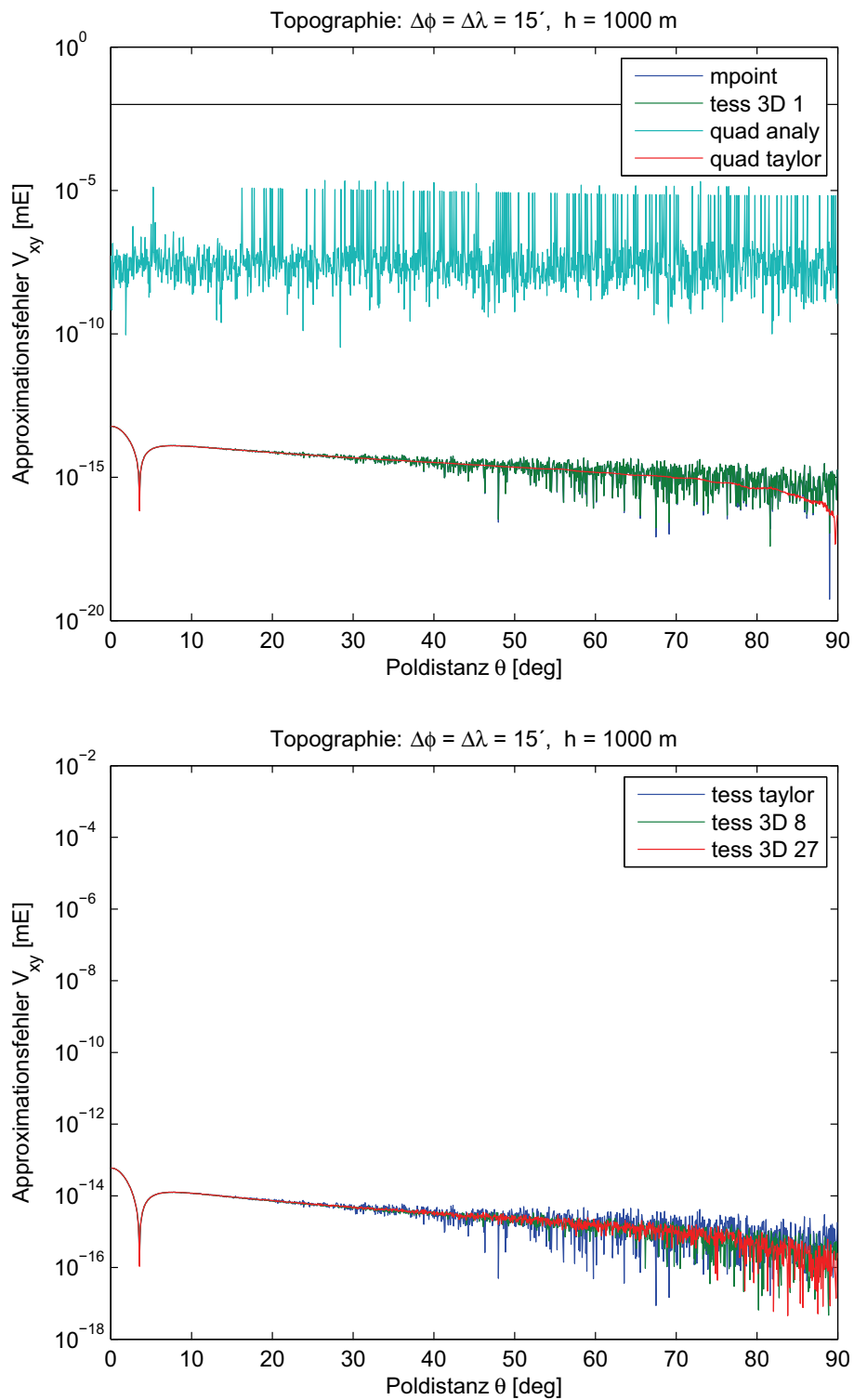


Abb. A-10: Approximationsfehler der Tensorkomponente V_{xy} bei einer Topographieauflösung von 15'

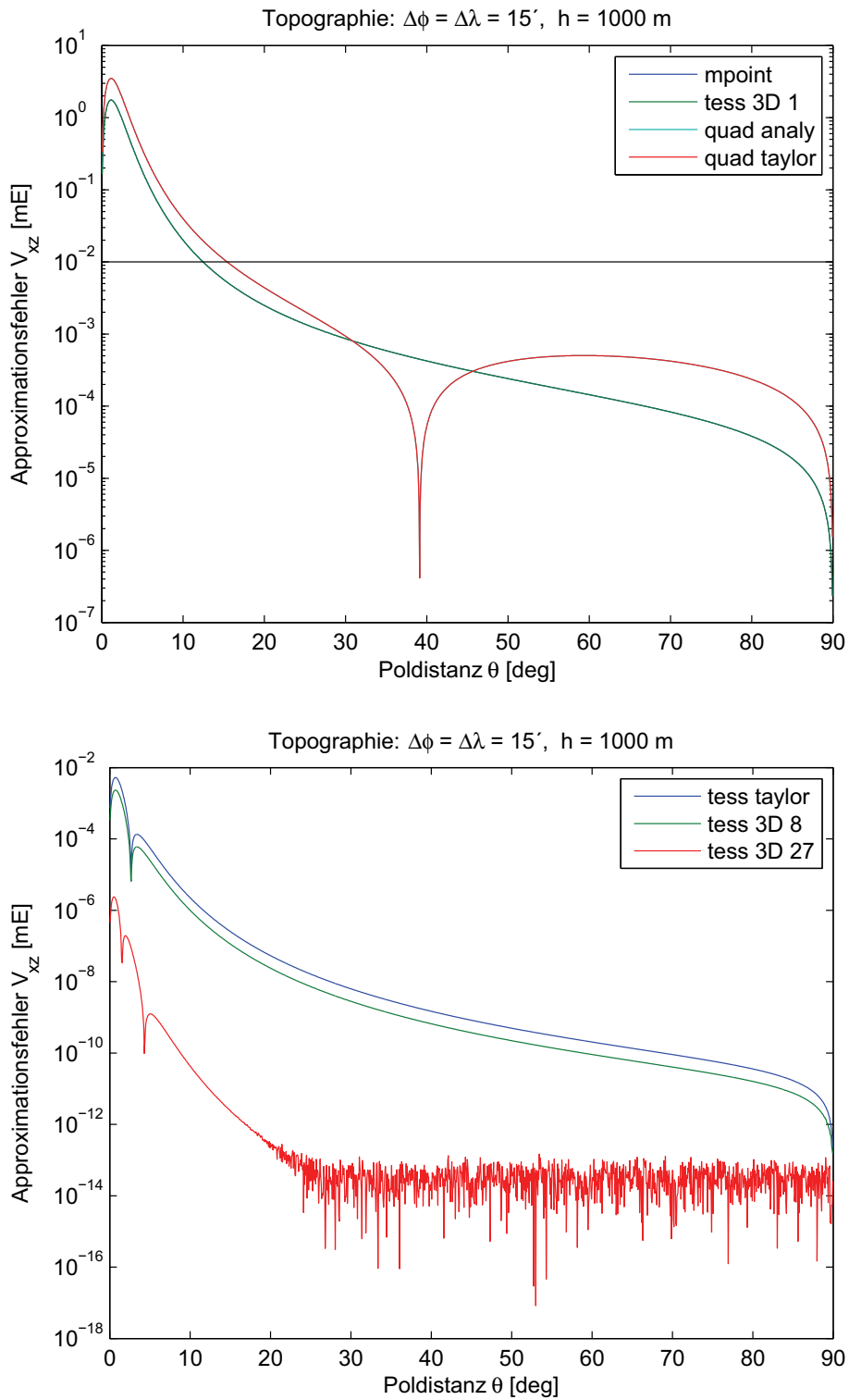


Abb. A-11: Approximationsfehler der Tensorkomponente V_{xz} bei einer Topographieauflösung von $15'$

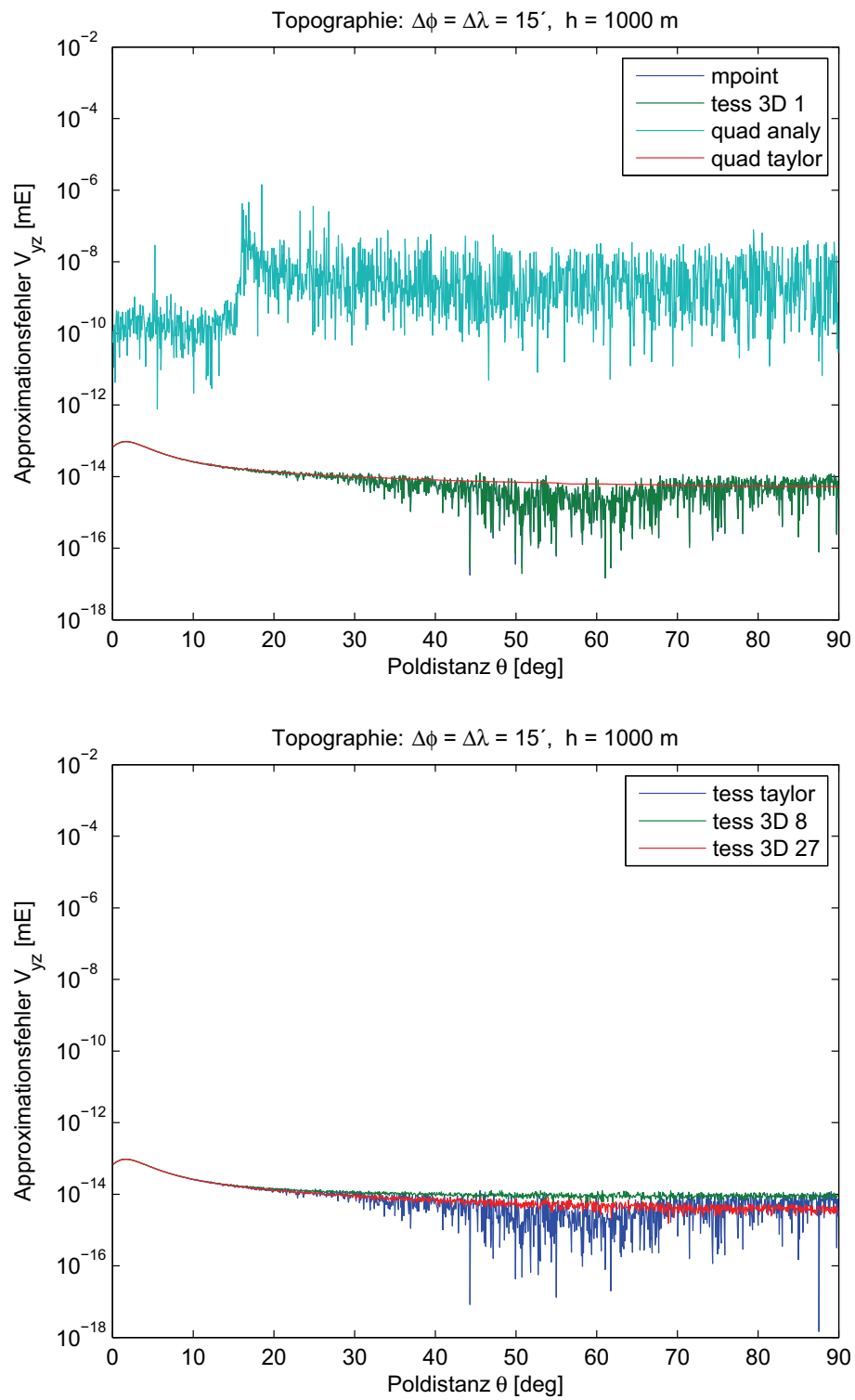


Abb. A-12: Approximationsfehler der Tensorkomponente V_{yz} bei einer Topographieauflösung von 15'

A.3 Ergebnisse mit einer Topographieauflösung von 5'

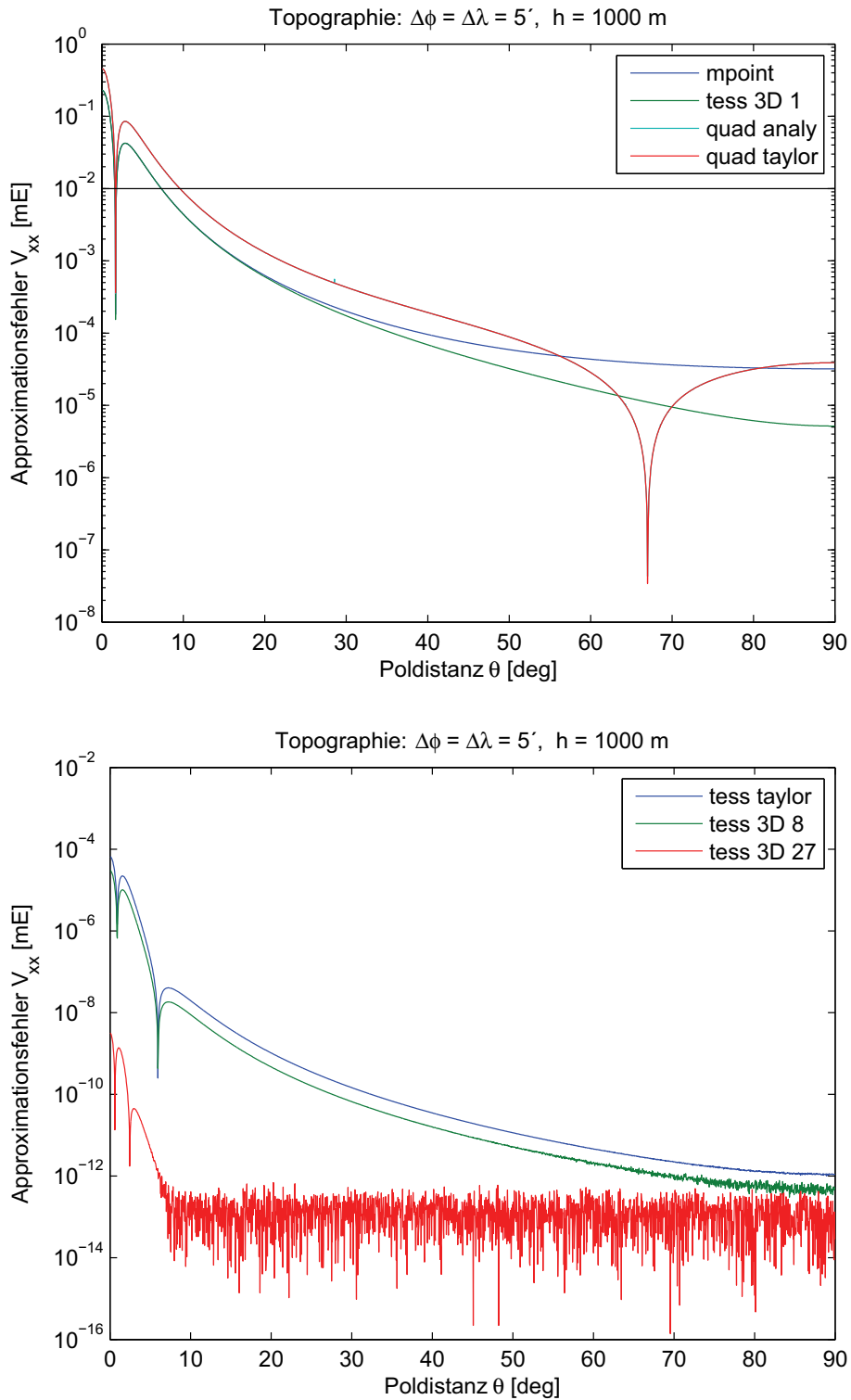


Abb. A-13: Approximationsfehler der Tensorkomponente V_{xx} bei einer Topographieauflösung von 5'

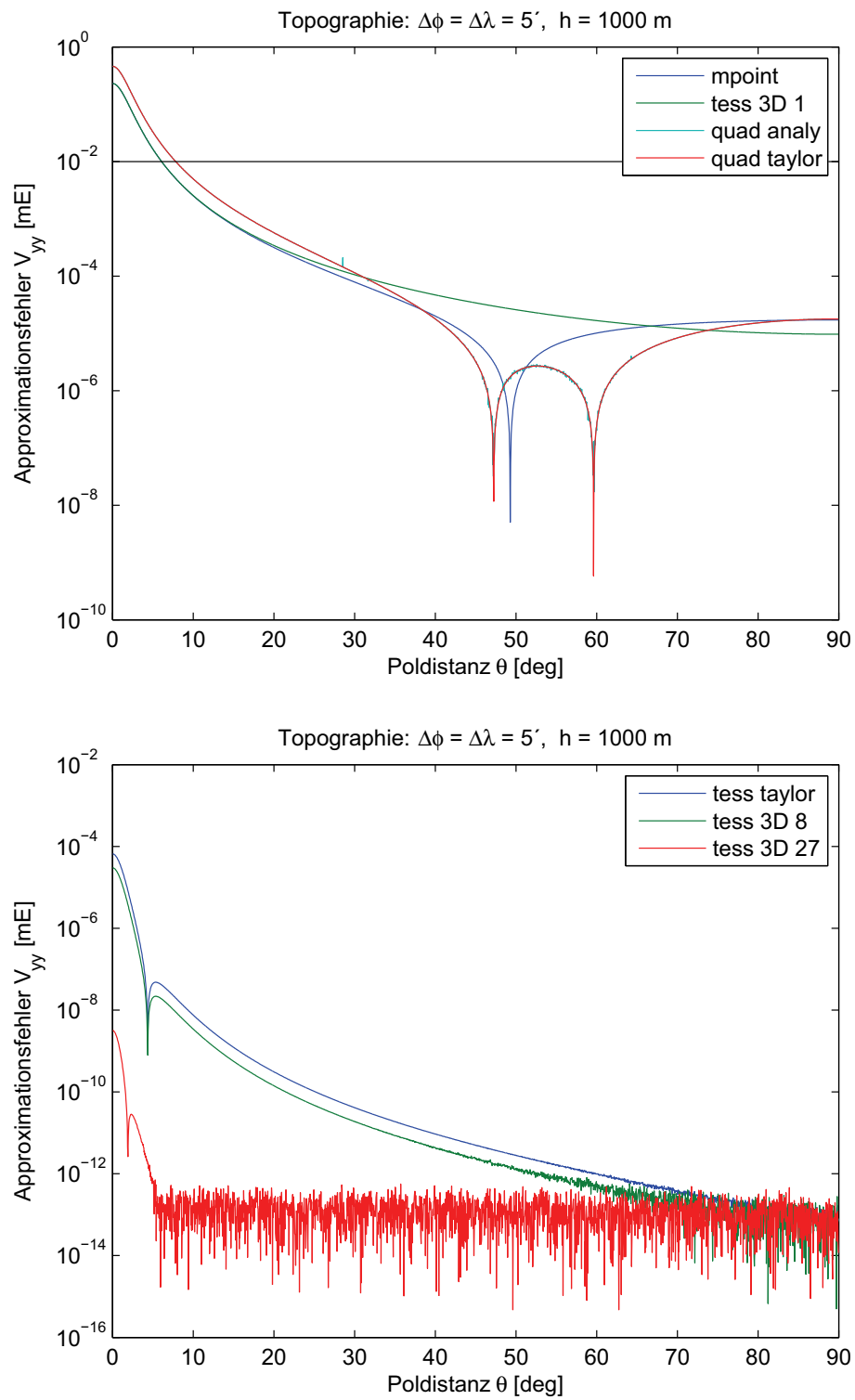


Abb. A-14: Approximationsfehler der Tensorkomponente V_{yy} bei einer Topographieauflösung von 5'

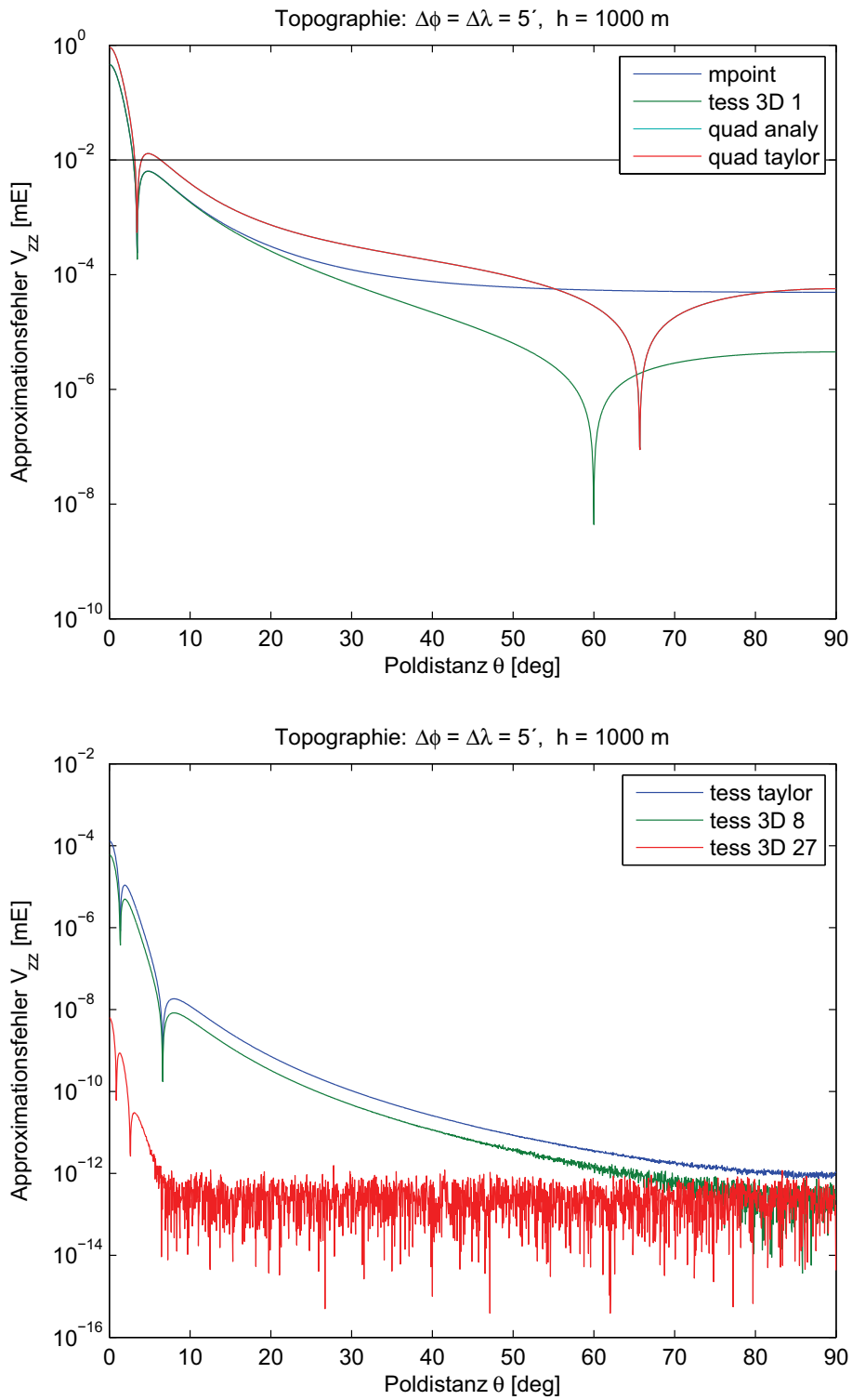


Abb. A-15: Approximationsfehler der Tensorkomponente V_{zz} bei einer Topographieauflösung von $5'$

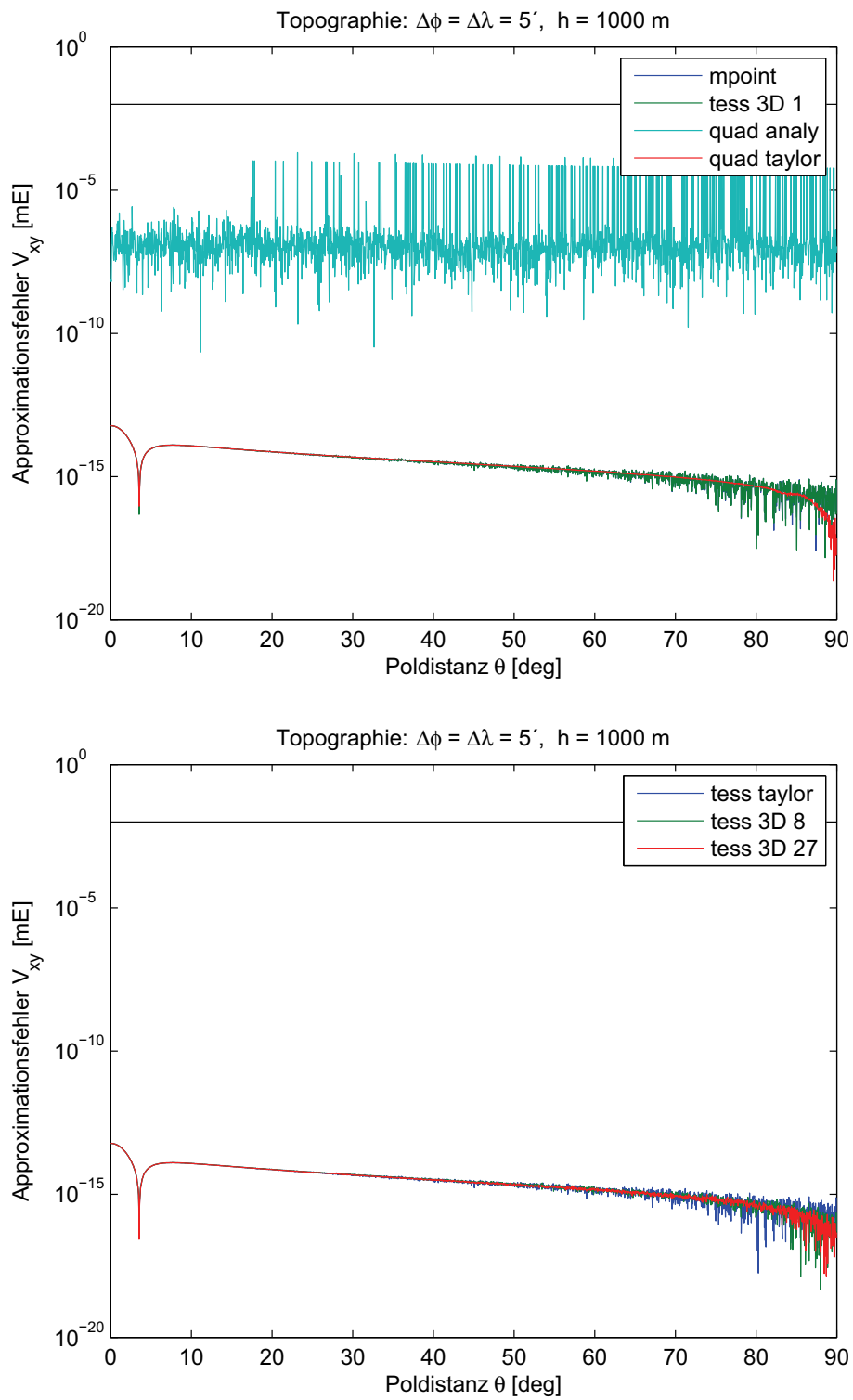


Abb. A-16: Approximationsfehler der Tensorkomponente V_{xy} bei einer Topographieauflösung von 5'

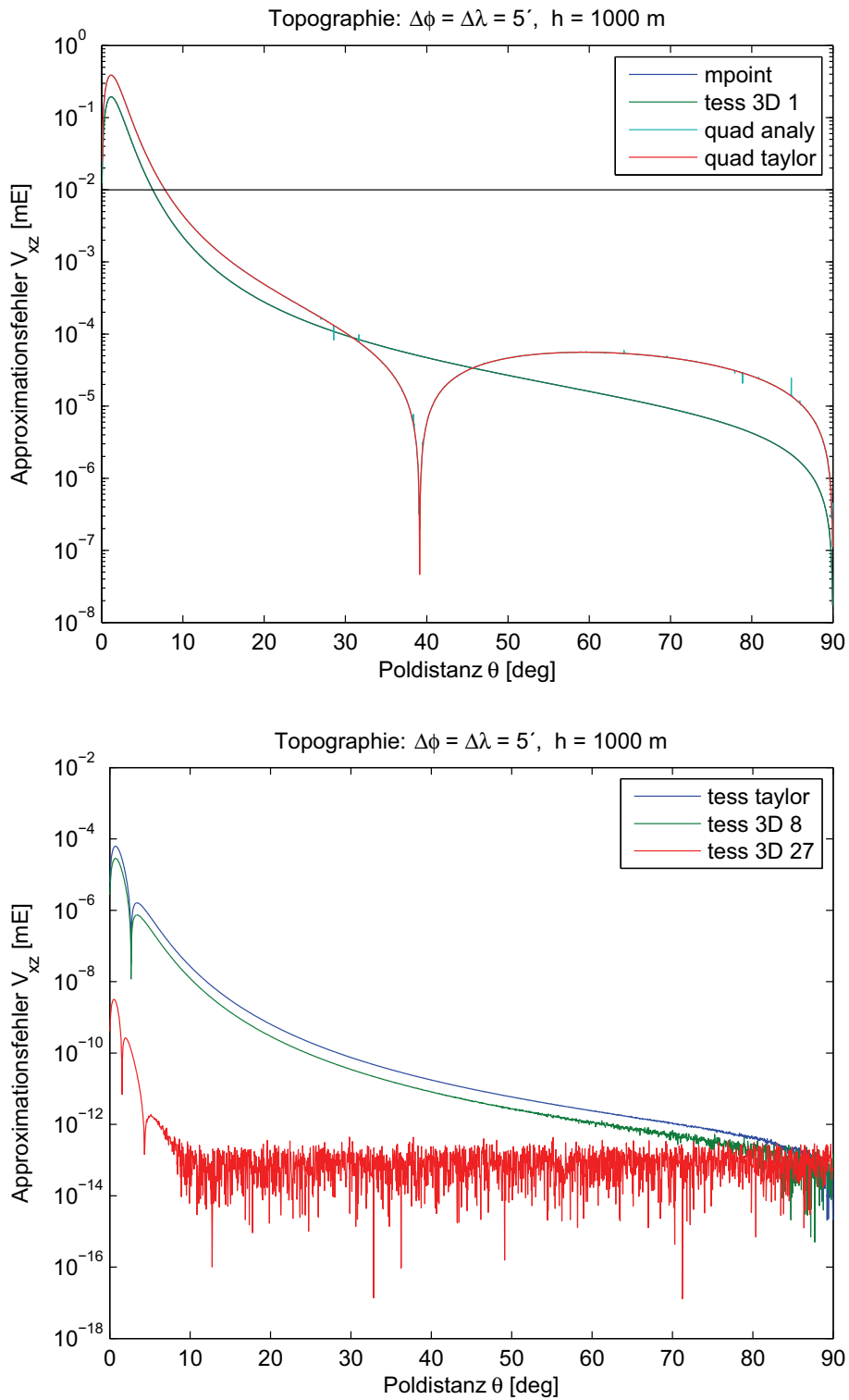


Abb. A-17: Approximationsfehler der Tensorkomponente V_{xz} bei einer Topographieauflösung von $5'$

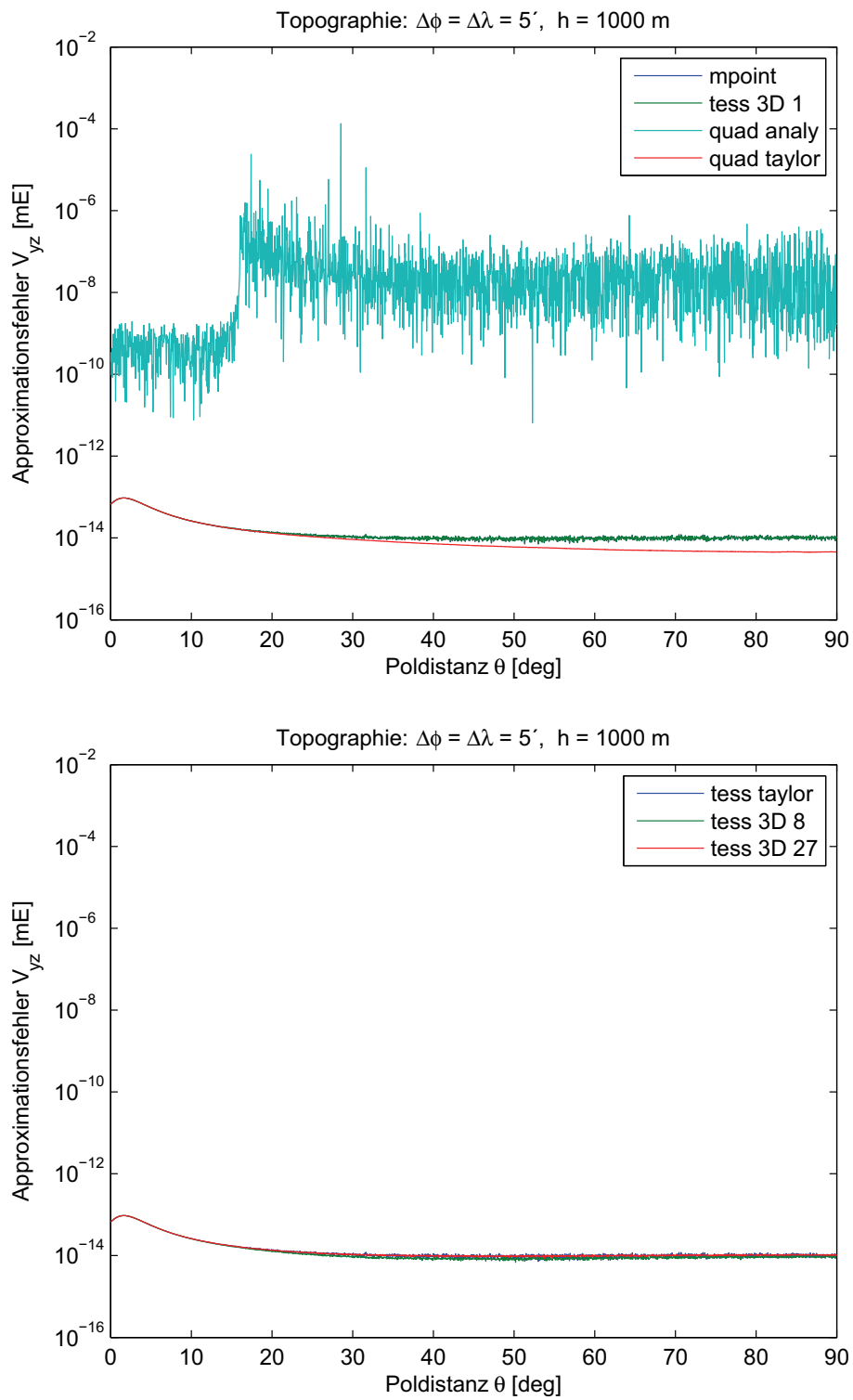


Abb. A-18: Approximationsfehler der Tensorkomponente V_{yz} bei einer Topographieauflösung von 5'

B Ergebnisse mit verschiedenen Berechnungsverfahren

B.1 Ergebnisse mit dem Berechnungsverfahren *mpoint*

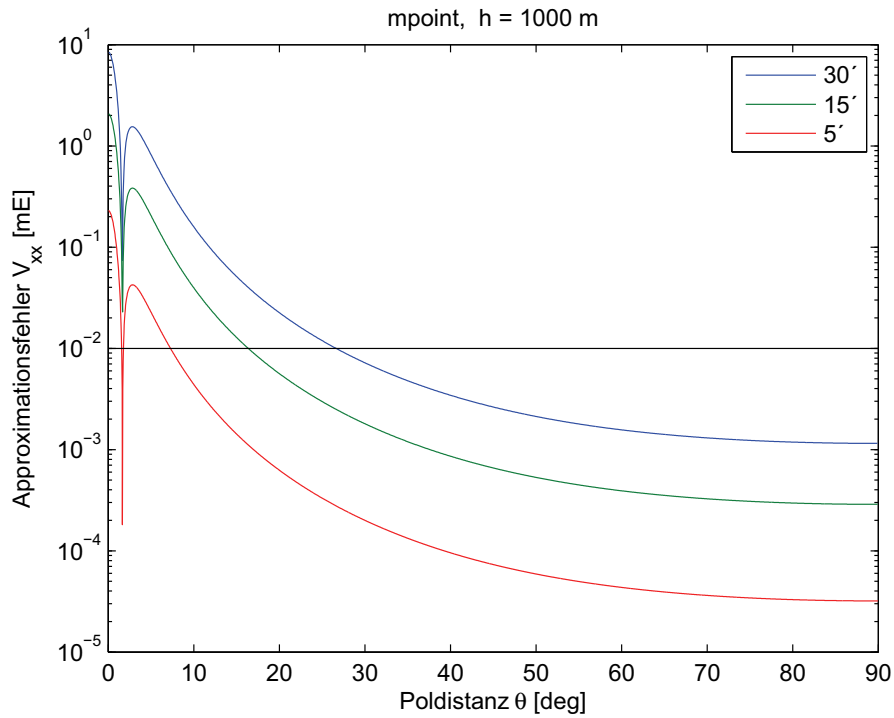


Abb. B-1: Approximationsfehler der Tensorkomponente V_{xx} beim Berechnungsverfahren *mpoint*

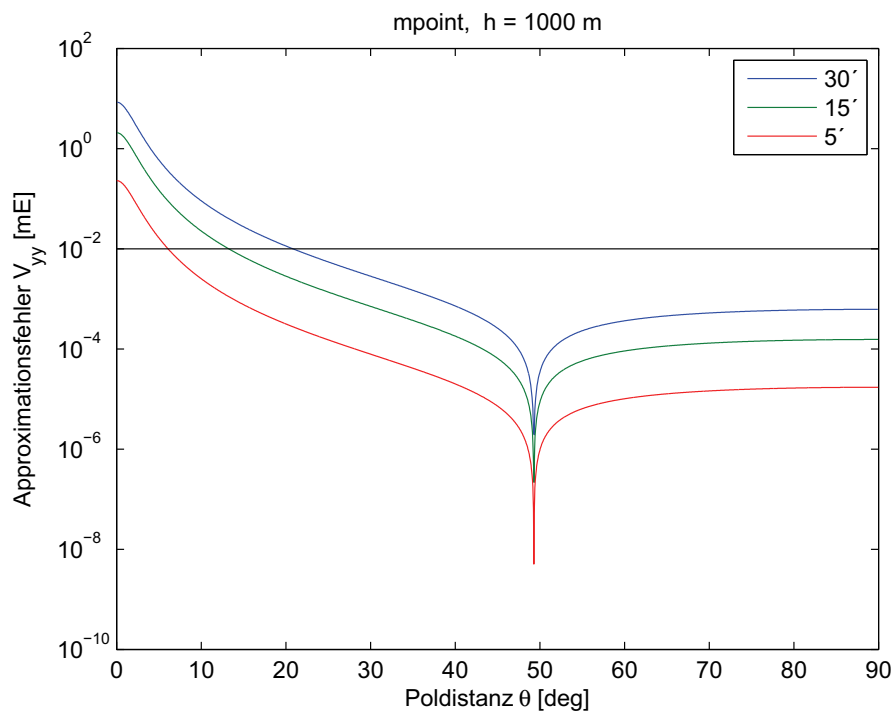


Abb. B-2: Approximationsfehler der Tensorkomponente V_{yy} beim Berechnungsverfahren *mpoint*

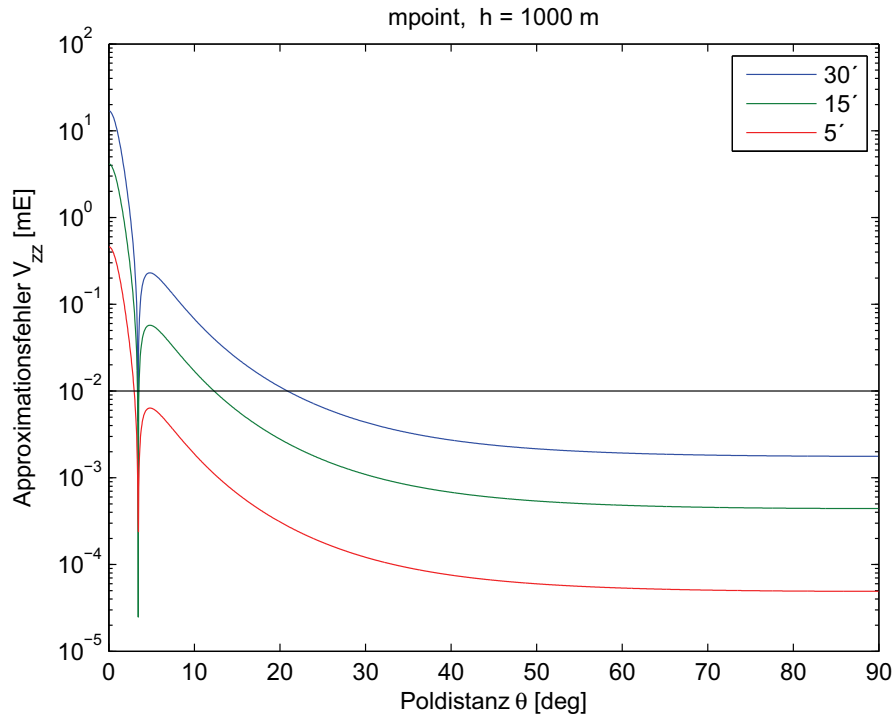


Abb. B-3: Approximationsfehler der Tensorkomponente V_{zz} beim Berechnungsverfahren *mpoint*

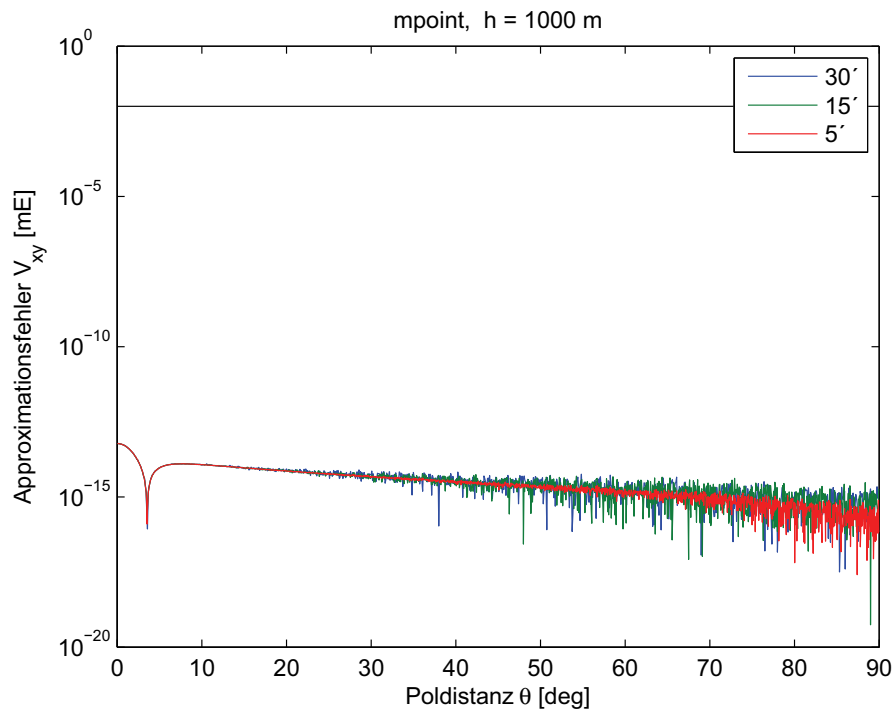


Abb. B-4: Approximationsfehler der Tensorkomponente V_{xy} beim Berechnungsverfahren *mpoint*

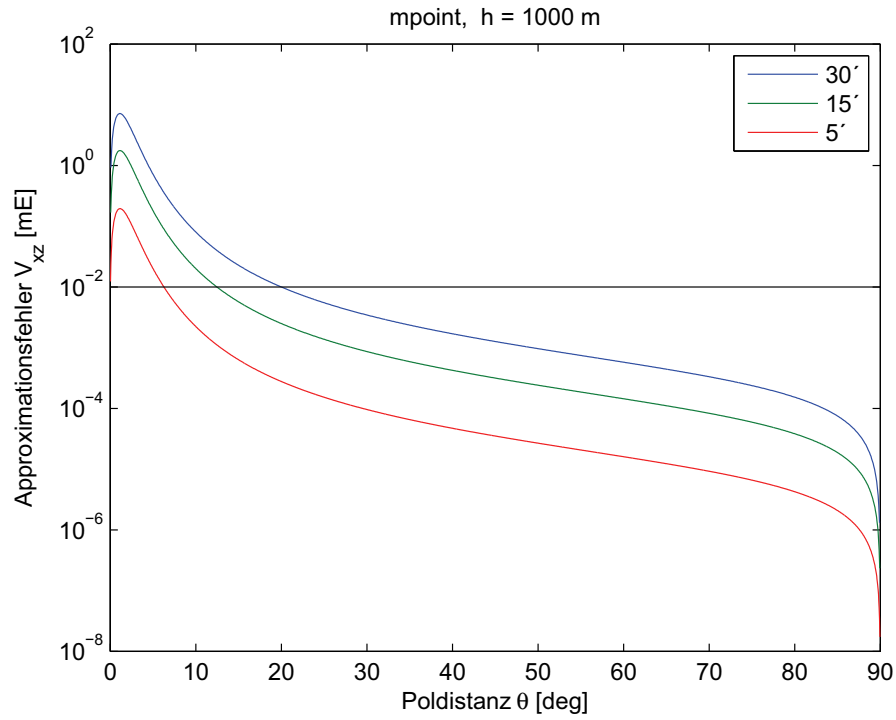


Abb. B-5: Approximationsfehler der Tensorkomponente V_{xz} beim Berechnungsverfahren mpoint

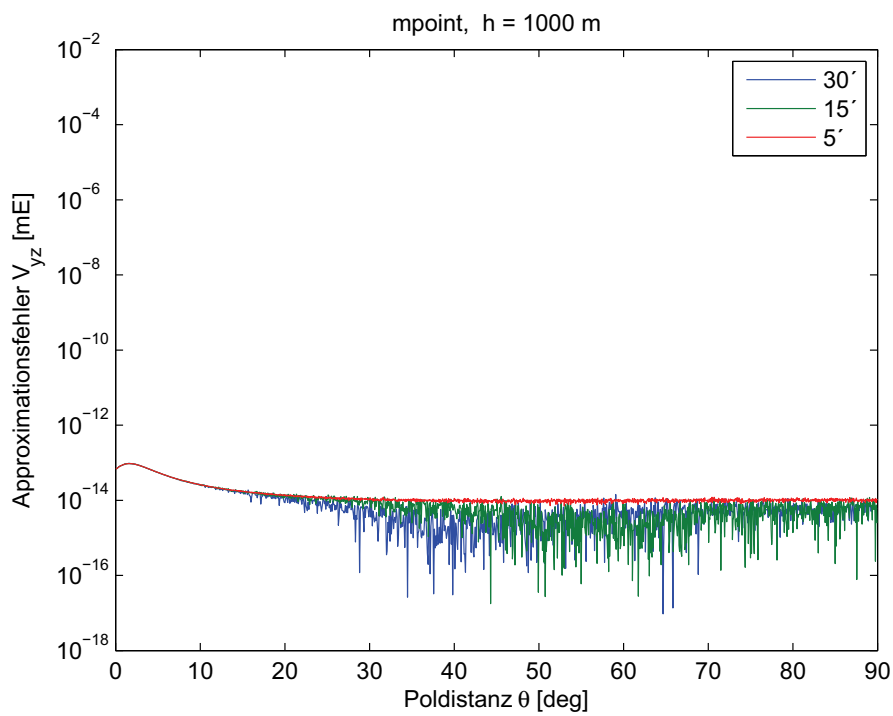


Abb. B-6: Approximationsfehler der Tensorkomponente V_{yz} beim Berechnungsverfahren mpoint

B.2 Ergebnisse mit dem Berechnungsverfahren tess 3D 1

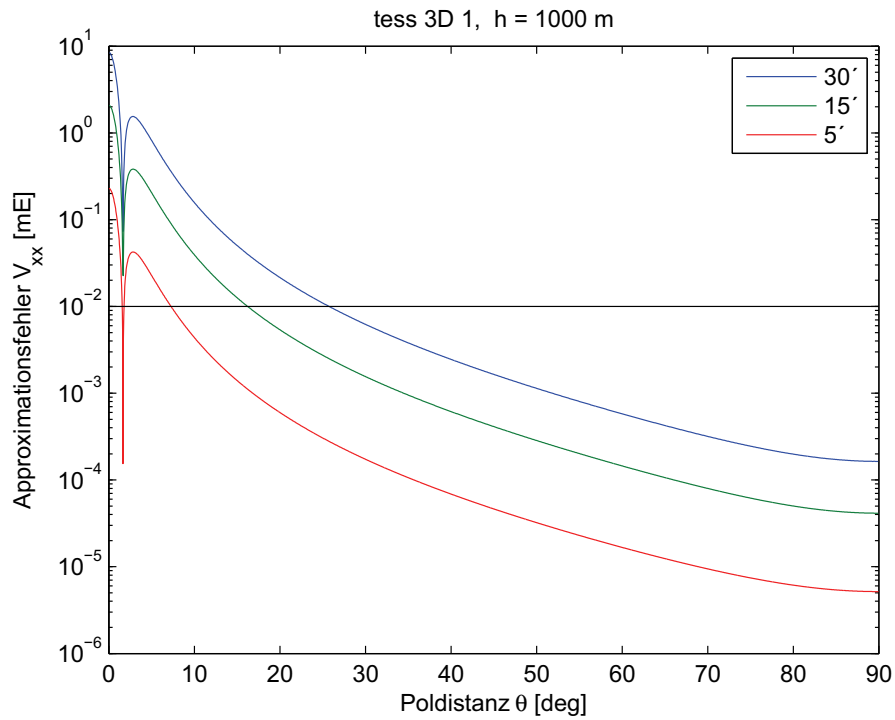


Abb. B-7: Approximationsfehler der Tensorkomponente V_{xx} beim Berechnungsverfahren tess 3D 1

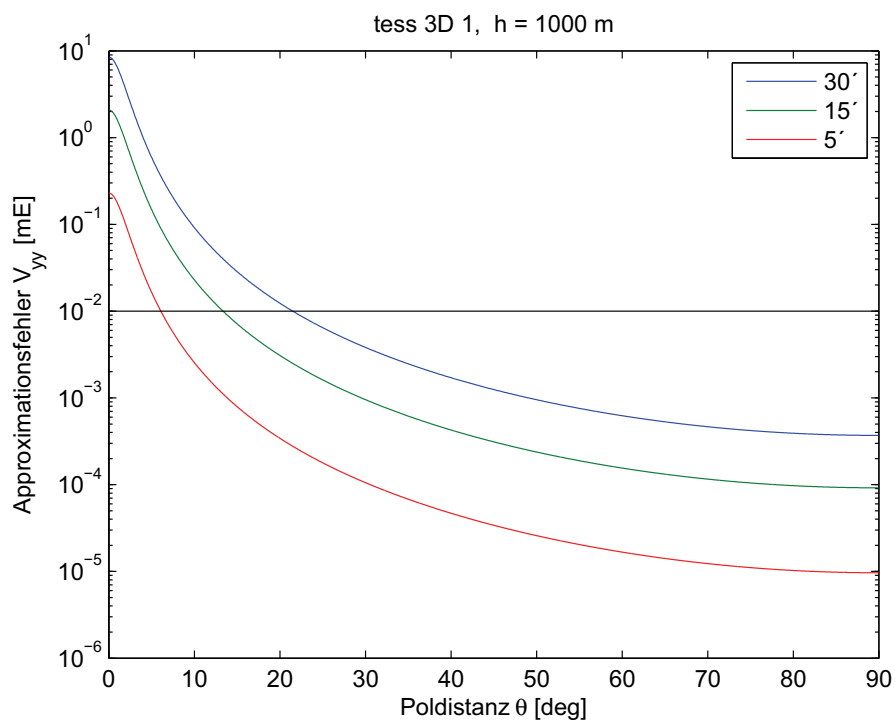


Abb. B-8: Approximationsfehler der Tensorkomponente V_{yy} beim Berechnungsverfahren tess 3D 1

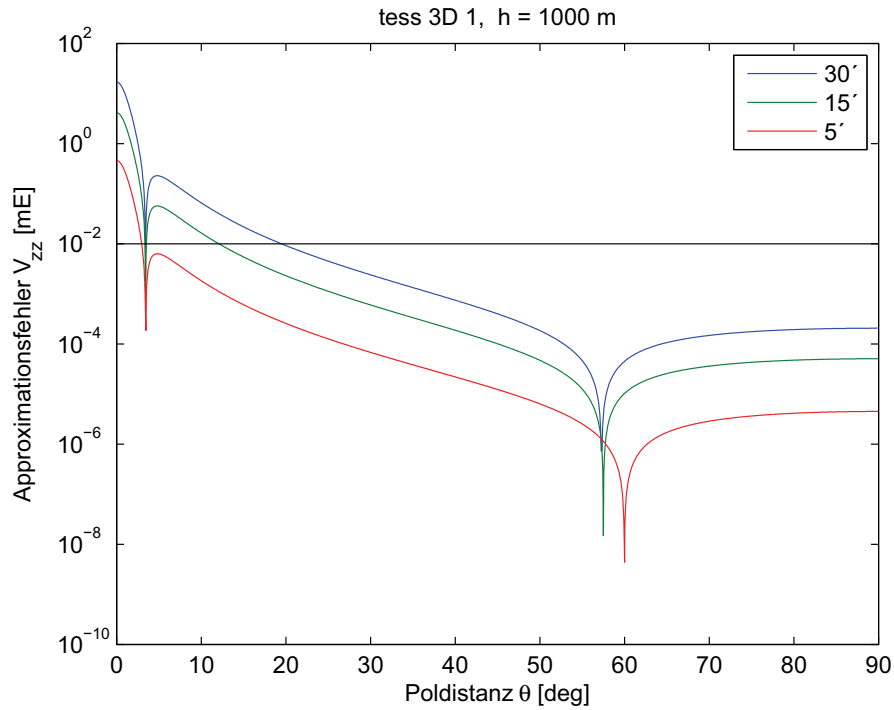


Abb. B-9: Approximationsfehler der Tensorkomponente V_{zz} beim Berechnungsverfahren tess 3D 1

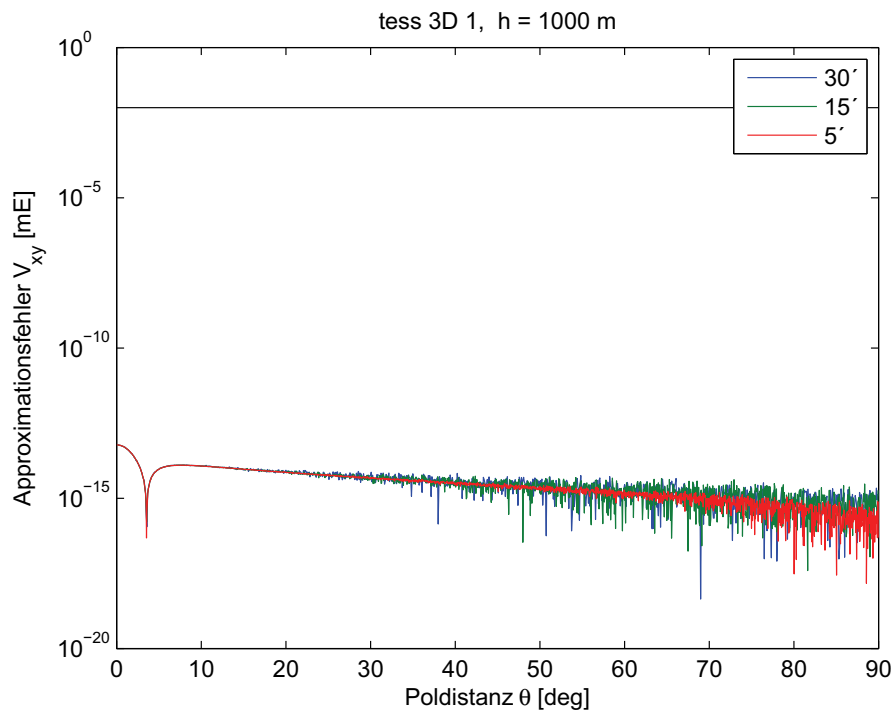


Abb. B-10: Approximationsfehler der Tensorkomponente V_{xy} beim Berechnungsverfahren tess 3D 1

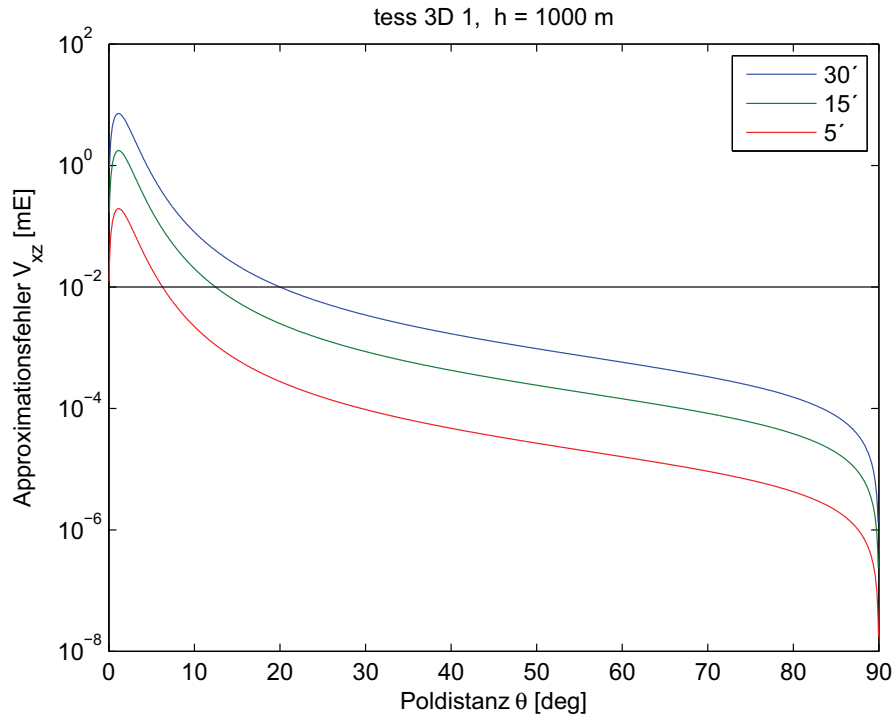


Abb. B-11: Approximationsfehler der Tensorkomponente V_{xz} beim Berechnungsverfahren tess 3D 1

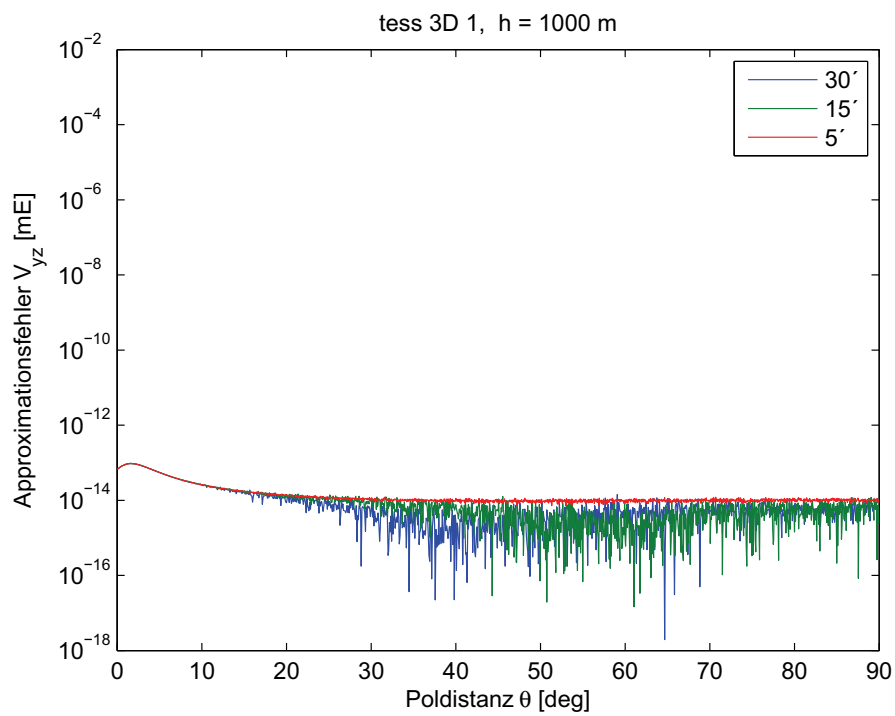


Abb. B-12: Approximationsfehler der Tensorkomponente V_{yz} beim Berechnungsverfahren tess 3D 1

B.3 Ergebnisse mit dem Berechnungsverfahren *quad analy*

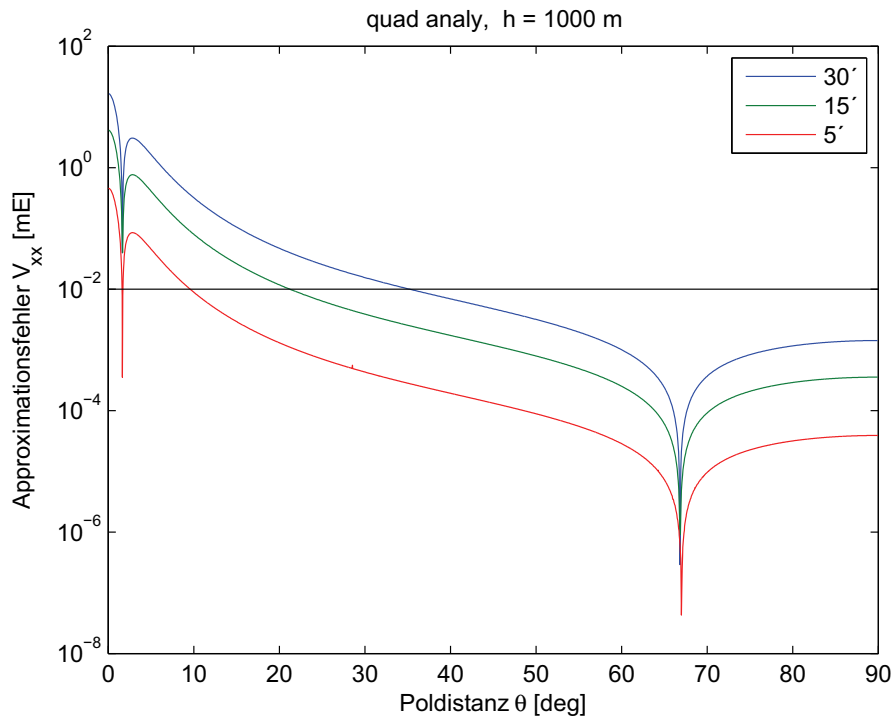


Abb. B-13: Approximationsfehler der Tensorkomponente V_{xx} beim Berechnungsverfahren *quad analy*

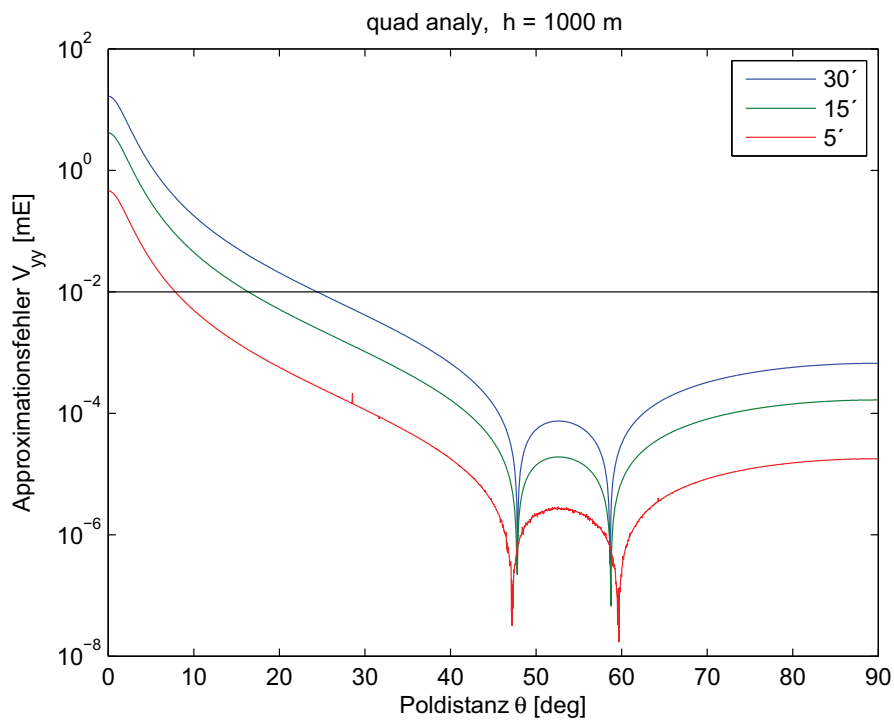


Abb. B-14: Approximationsfehler der Tensorkomponente V_{yy} beim Berechnungsverfahren *quad analy*

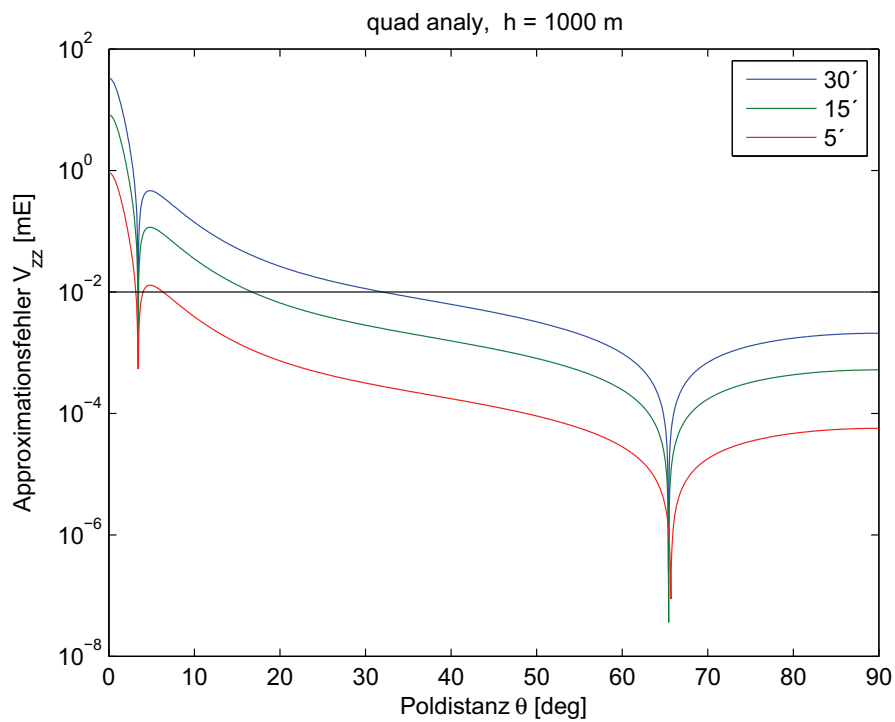


Abb. B-15: Approximationsfehler der Tensorkomponente V_{zz} beim Berechnungsverfahren quad analy

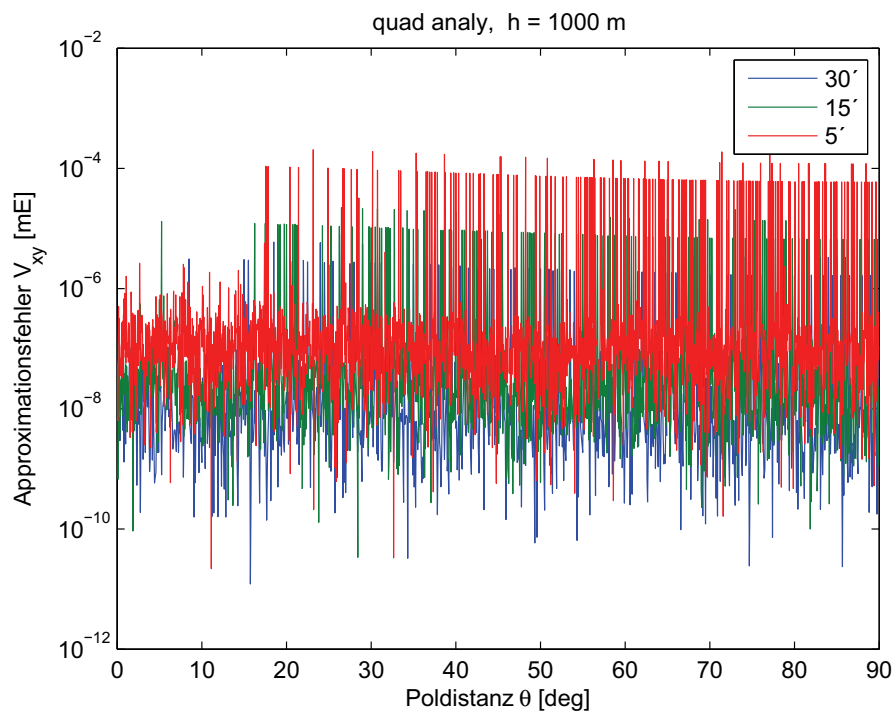


Abb. B-16: Approximationsfehler der Tensorkomponente V_{xy} beim Berechnungsverfahren quad analy

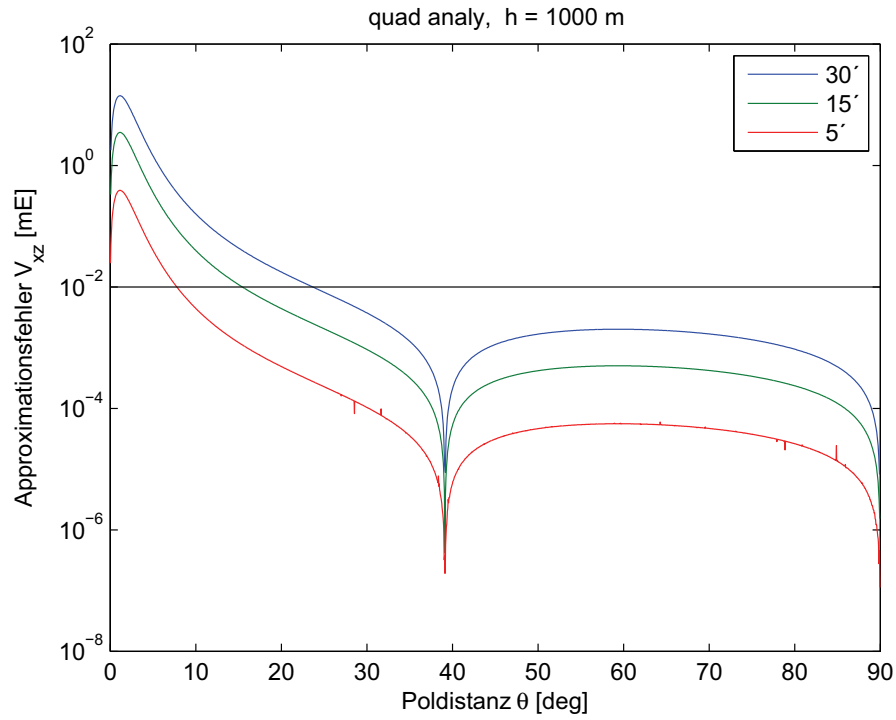


Abb. B-17: Approximationsfehler der Tensorkomponente V_{xz} beim Berechnungsverfahren quad analy

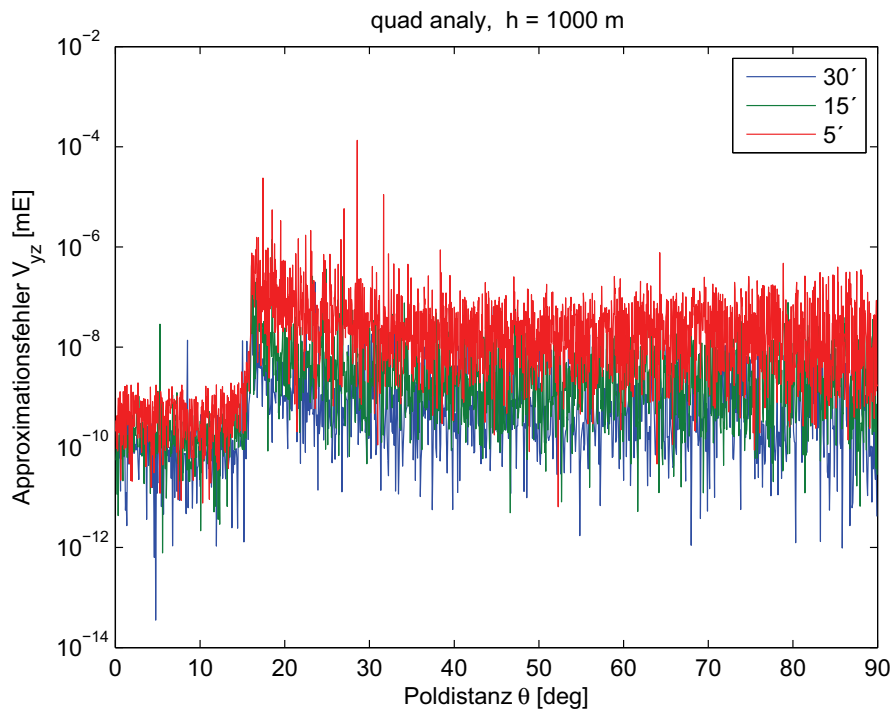


Abb. B-18: Approximationsfehler der Tensorkomponente V_{yz} beim Berechnungsverfahren quad analy

B.4 Ergebnisse mit dem Berechnungsverfahren *quad taylor*

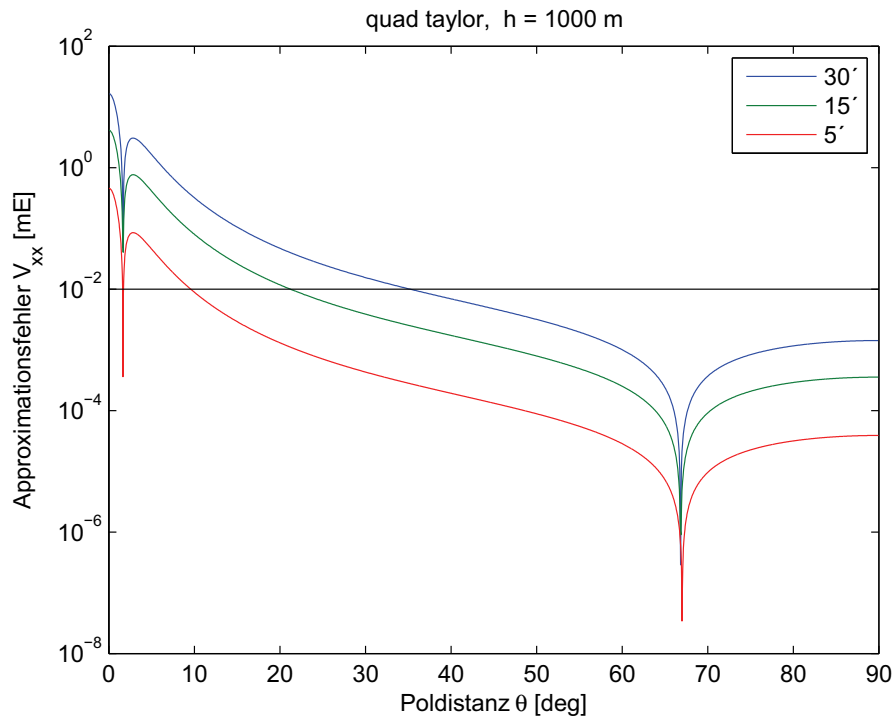


Abb. B-19: Approximationsfehler der Tensorkomponente V_{xx} beim Berechnungsverfahren *quad taylor*

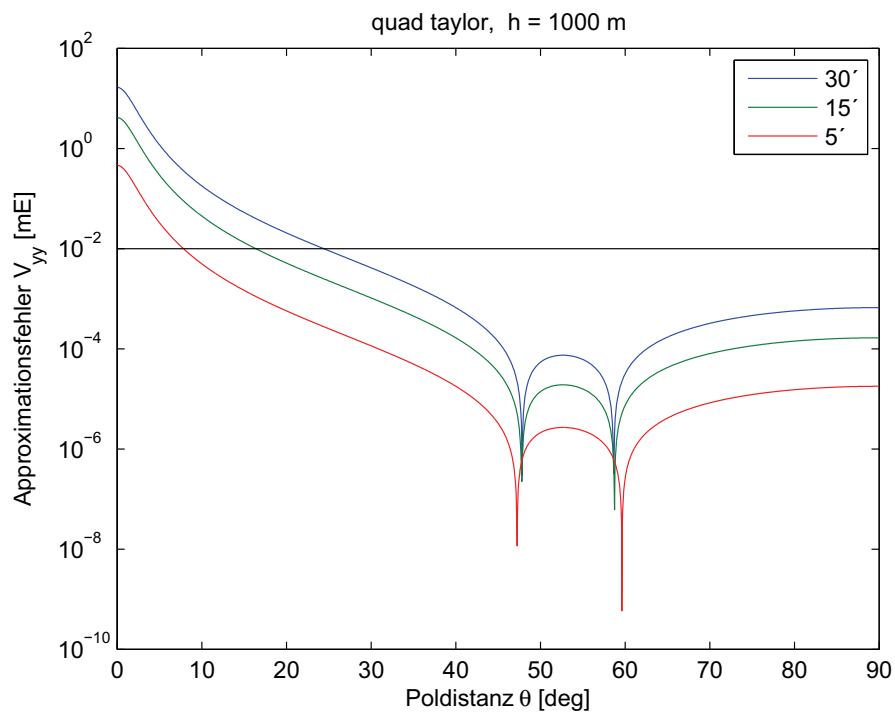


Abb. B-20: Approximationsfehler der Tensorkomponente V_{yy} beim Berechnungsverfahren *quad taylor*

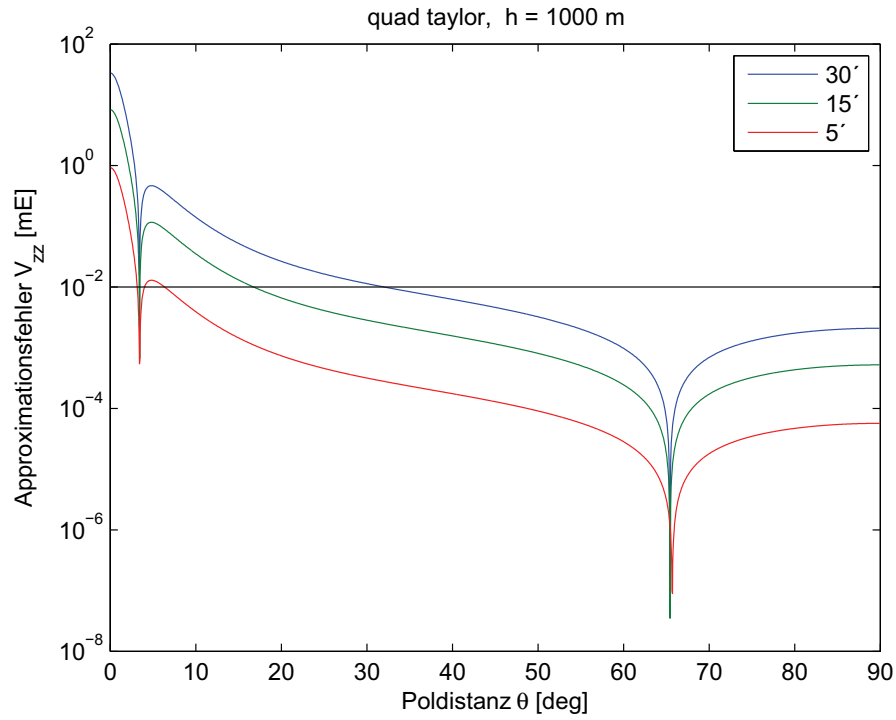


Abb. B-21: Approximationsfehler der Tensorkomponente V_{zz} beim Berechnungsverfahren quad taylor

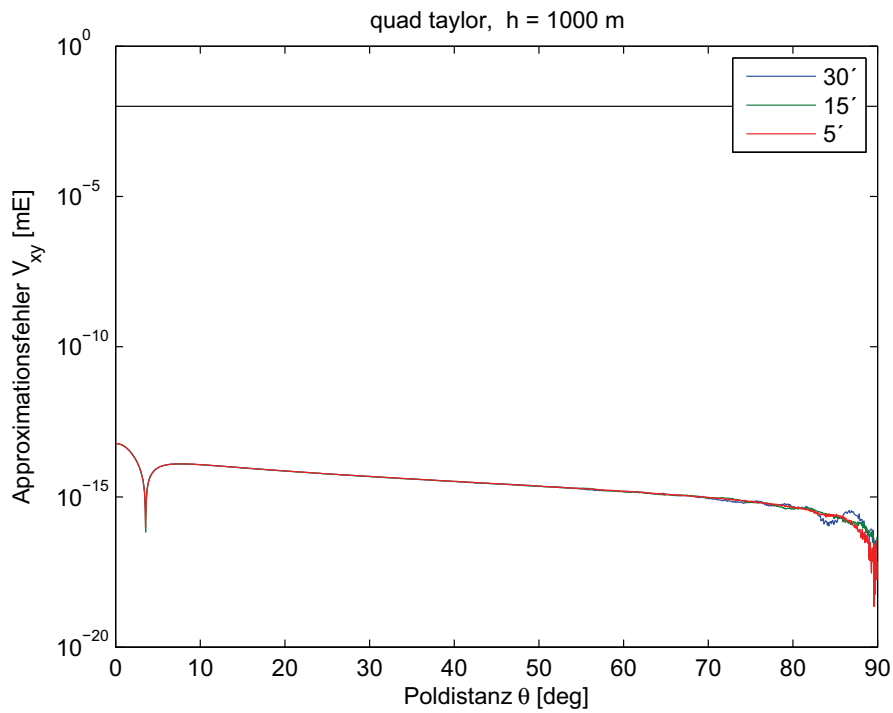


Abb. B-22: Approximationsfehler der Tensorkomponente V_{xy} beim Berechnungsverfahren quad taylor

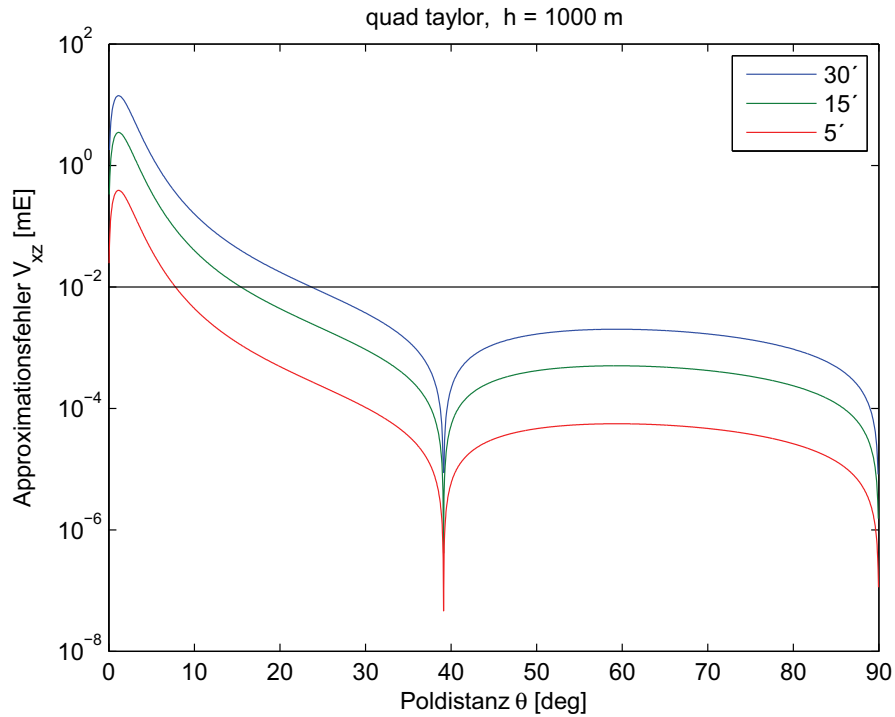


Abb. B-23: Approximationsfehler der Tensorkomponente V_{xz} beim Berechnungsverfahren quad taylor

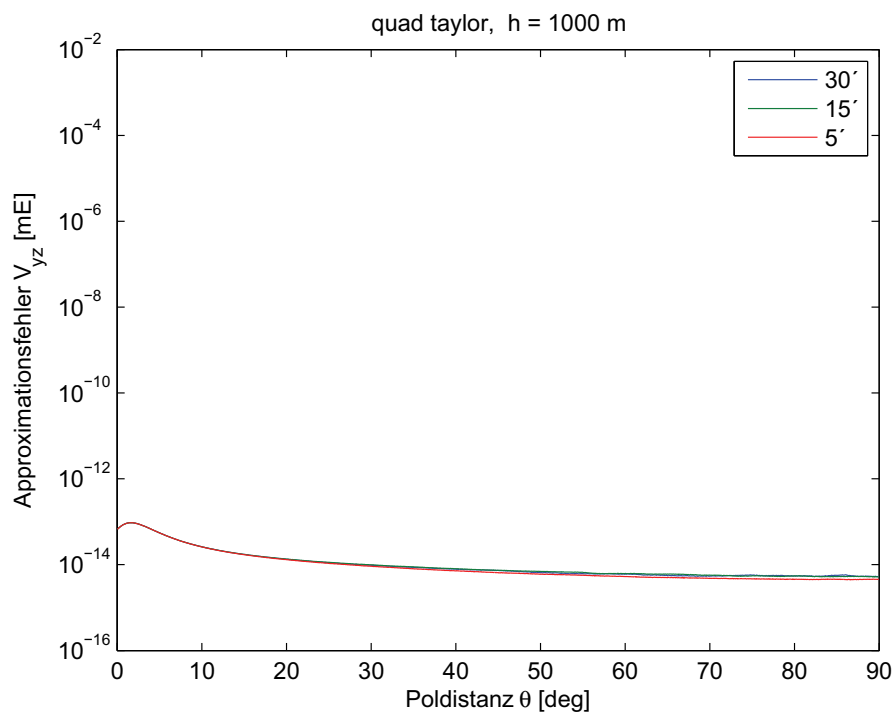


Abb. B-24: Approximationsfehler der Tensorkomponente V_{yz} beim Berechnungsverfahren quad taylor

B.5 Ergebnisse mit dem Berechnungsverfahren *tess taylor*

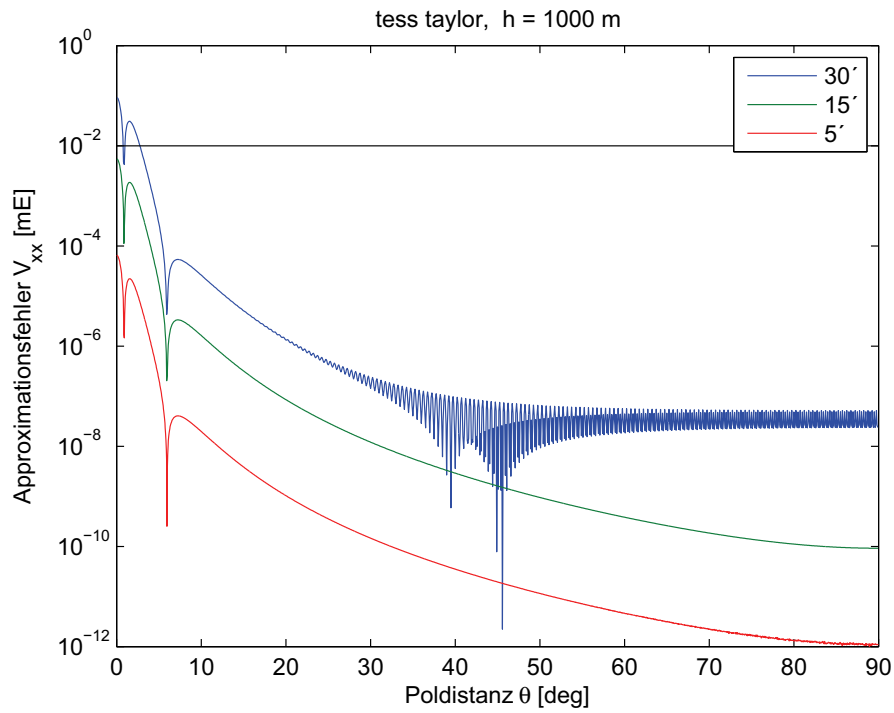


Abb. B-25: Approximationsfehler der Tensorkomponente V_{xx} beim Berechnungsverfahren *tess taylor*

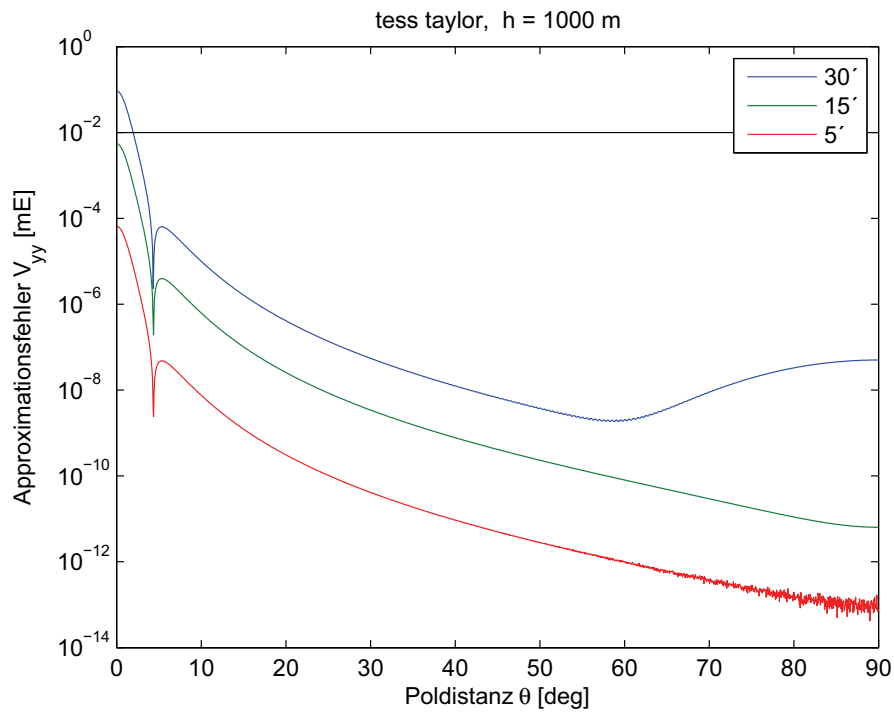


Abb. B-26: Approximationsfehler der Tensorkomponente V_{yy} beim Berechnungsverfahren *tess taylor*

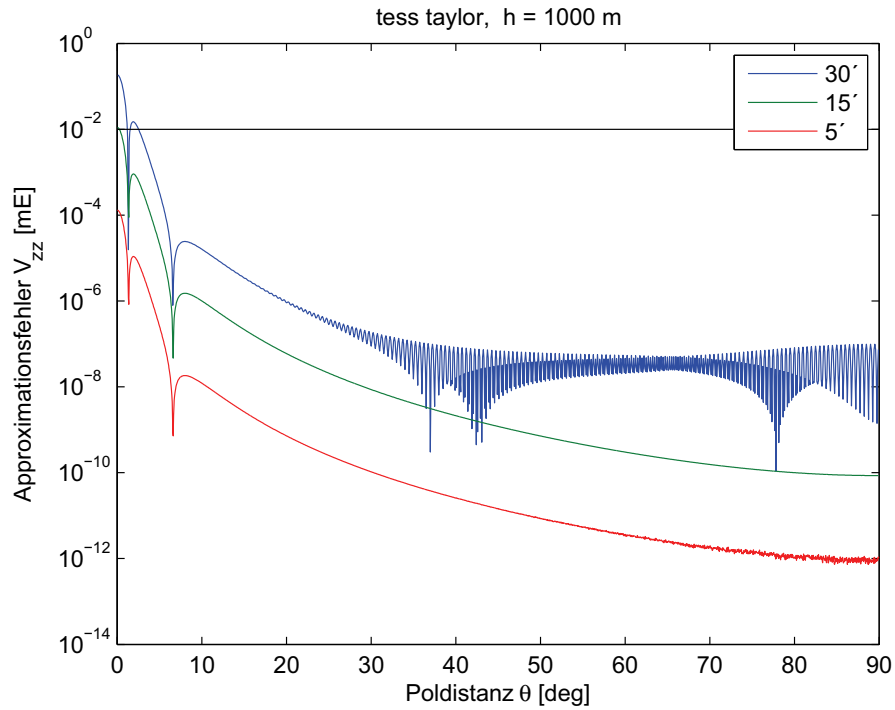


Abb. B-27: Approximationsfehler der Tensorkomponente V_{zz} beim Berechnungsverfahren tess taylor

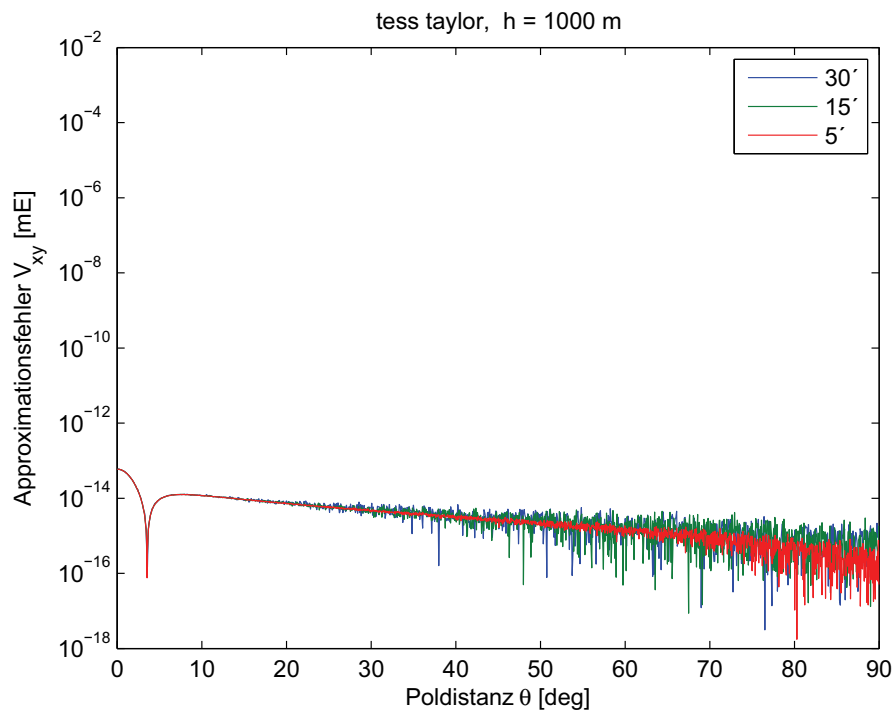


Abb. B-28: Approximationsfehler der Tensorkomponente V_{xy} beim Berechnungsverfahren tess taylor

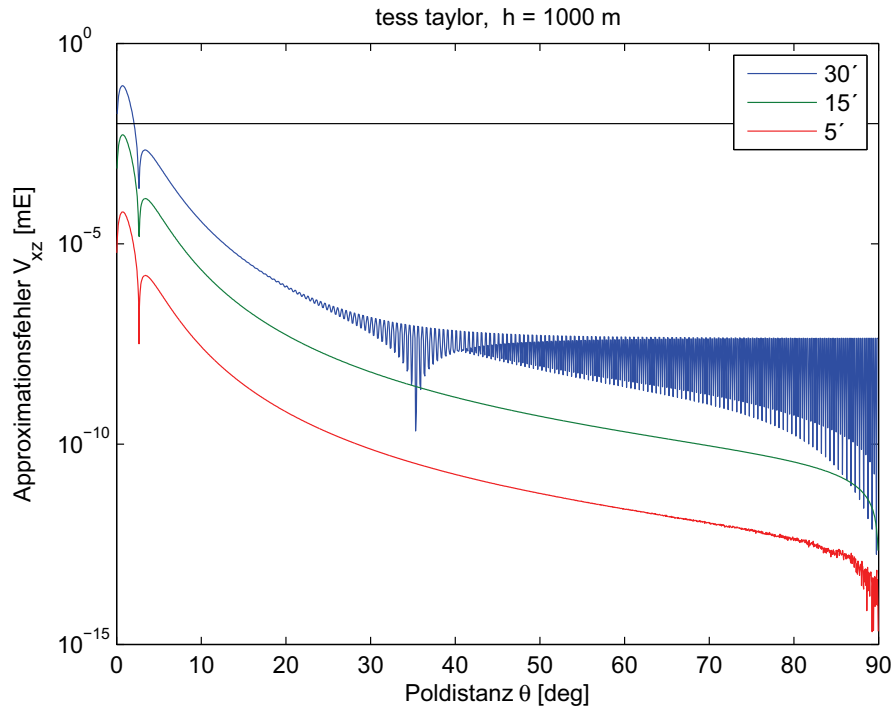


Abb. B-29: Approximationsfehler der Tensorkomponente V_{xz} beim Berechnungsverfahren tess taylor

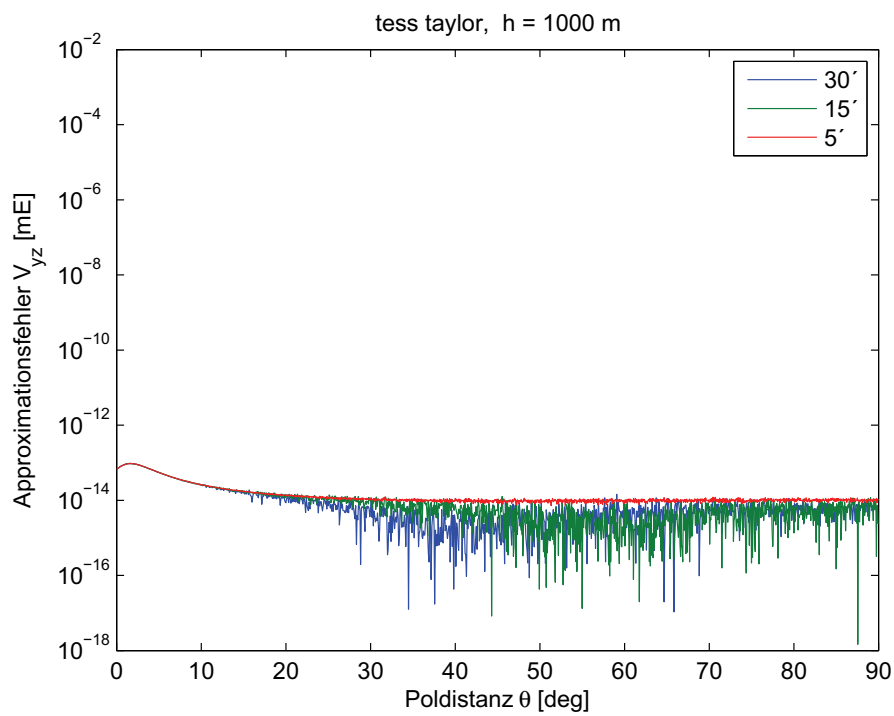


Abb. B-30: Approximationsfehler der Tensorkomponente V_{yz} beim Berechnungsverfahren tess taylor

B.6 Ergebnisse mit dem Berechnungsverfahren tess 3D 8

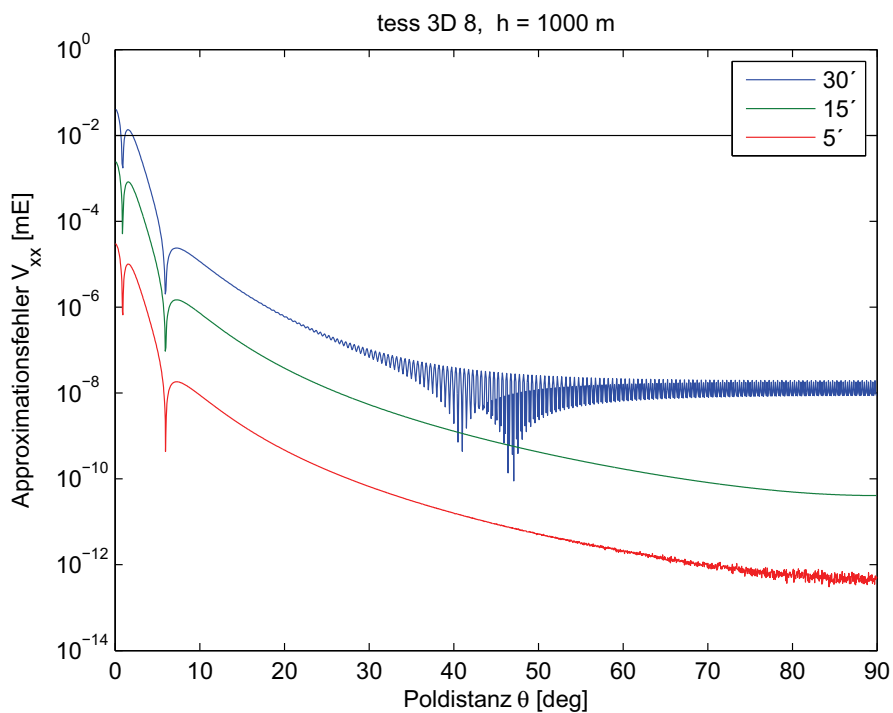


Abb. B-31: Approximationsfehler der Tensorkomponente V_{xx} beim Berechnungsverfahren tess 3D 8

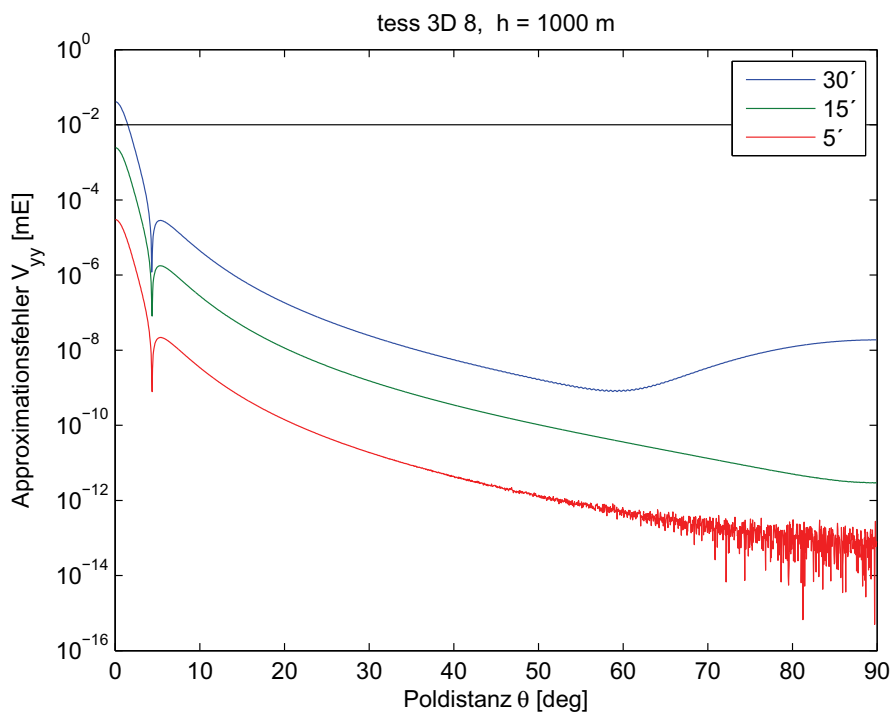


Abb. B-32: Approximationsfehler der Tensorkomponente V_{yy} beim Berechnungsverfahren tess 3D 8

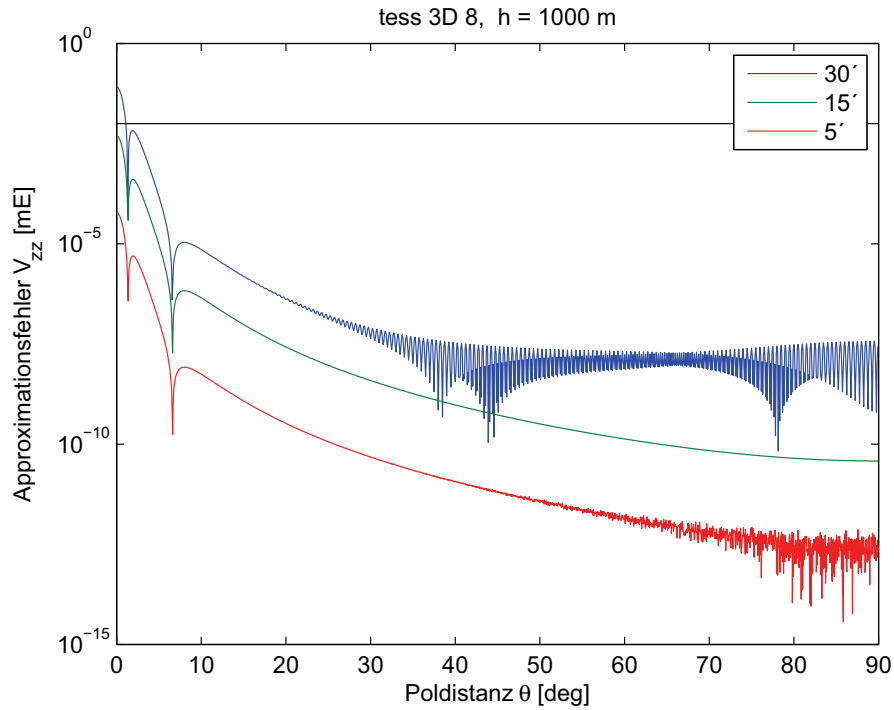


Abb. B-33: Approximationsfehler der Tensorkomponente V_{zz} beim Berechnungsverfahren tess 3D 8

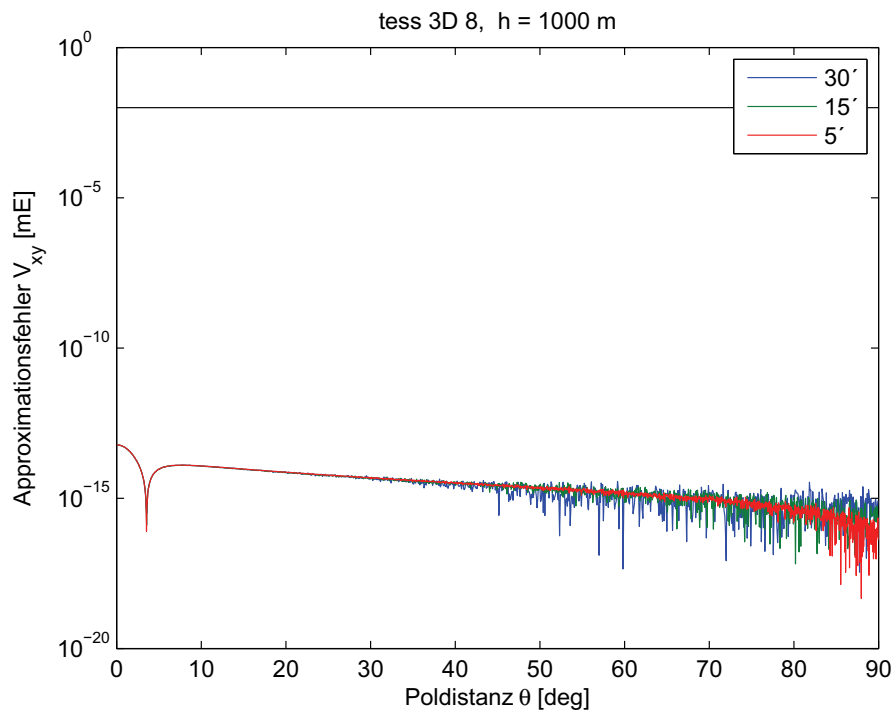


Abb. B-34: Approximationsfehler der Tensorkomponente V_{xy} beim Berechnungsverfahren tess 3D 8

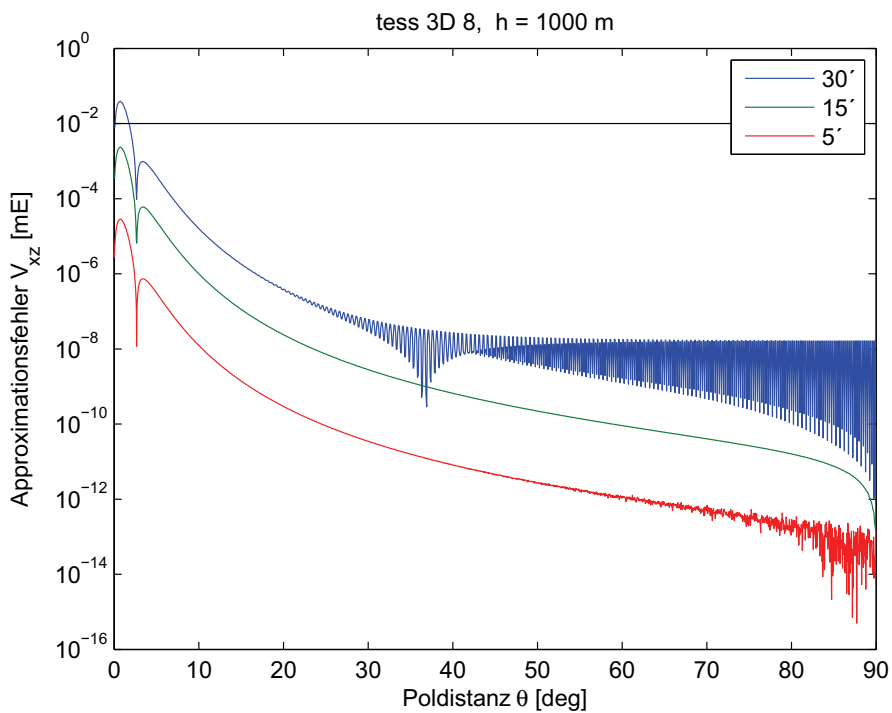


Abb. B-35: Approximationsfehler der Tensorkomponente V_{xz} beim Berechnungsverfahren tess 3D 8

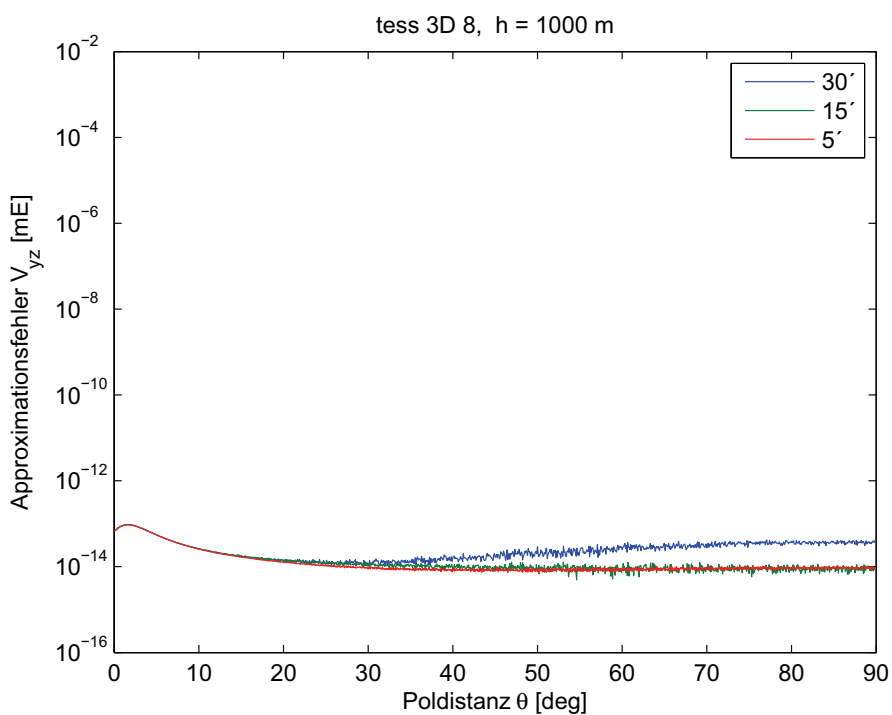


Abb. B-36: Approximationsfehler der Tensorkomponente V_{yz} beim Berechnungsverfahren tess 3D 8

B.7 Ergebnisse mit dem Berechnungsverfahren *tess 3D 27*

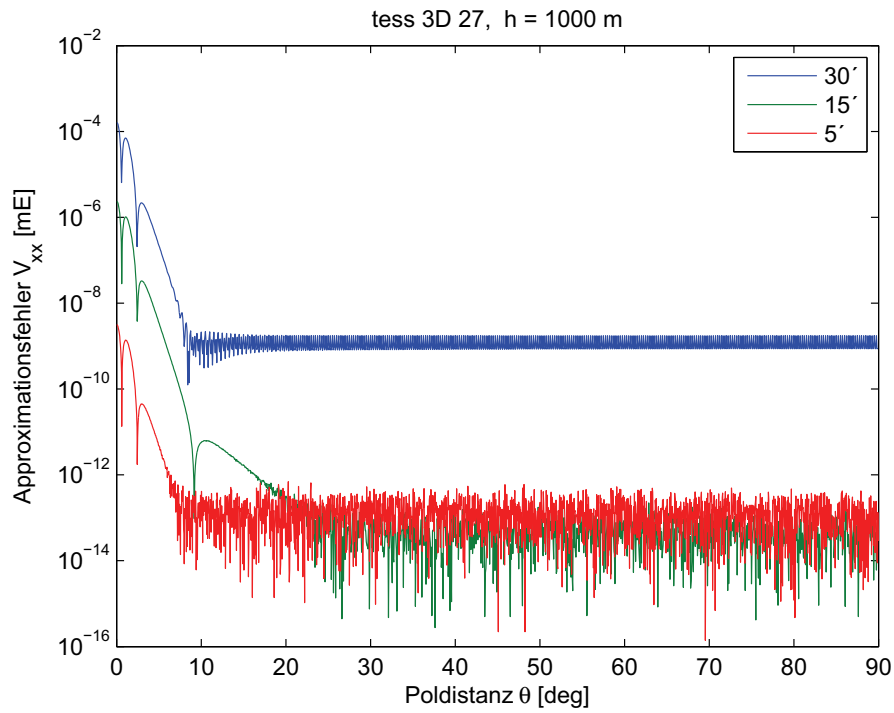


Abb. B-37: Approximationsfehler der Tensorkomponente V_{xx} beim Berechnungsverfahren *tess 3D 27*

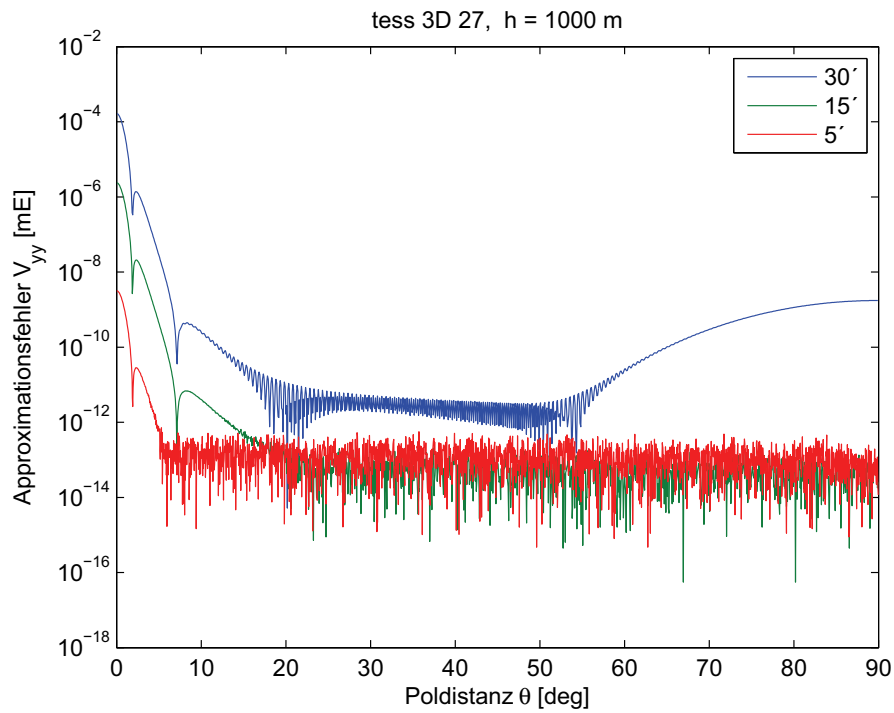


Abb. B-38: Approximationsfehler der Tensorkomponente V_{yy} beim Berechnungsverfahren *tess 3D 27*

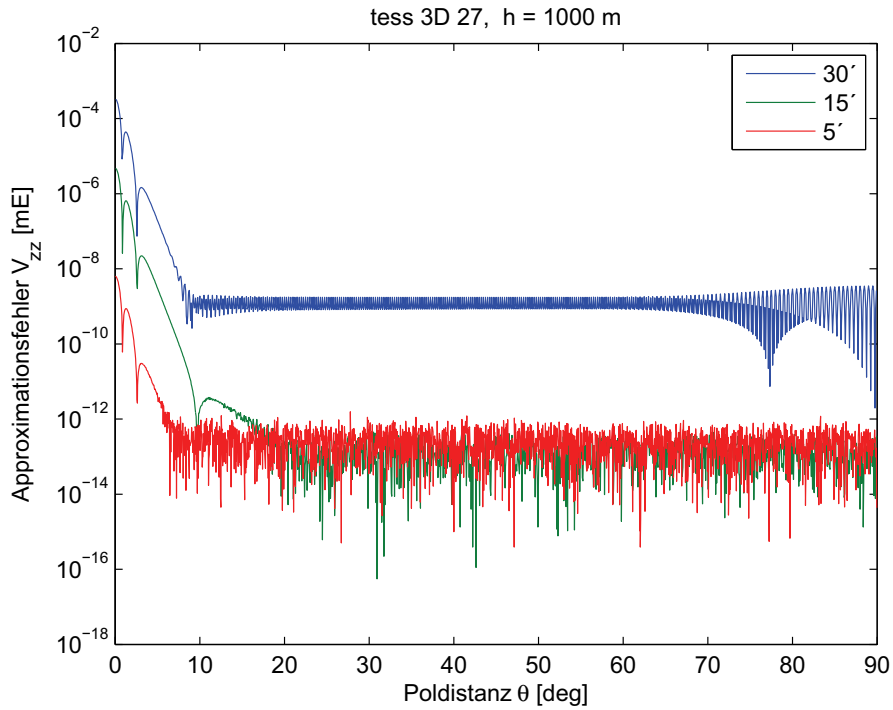


Abb. B-39: Approximationsfehler der Tensorkomponente V_{zz} beim Berechnungsverfahren tess 3D 27

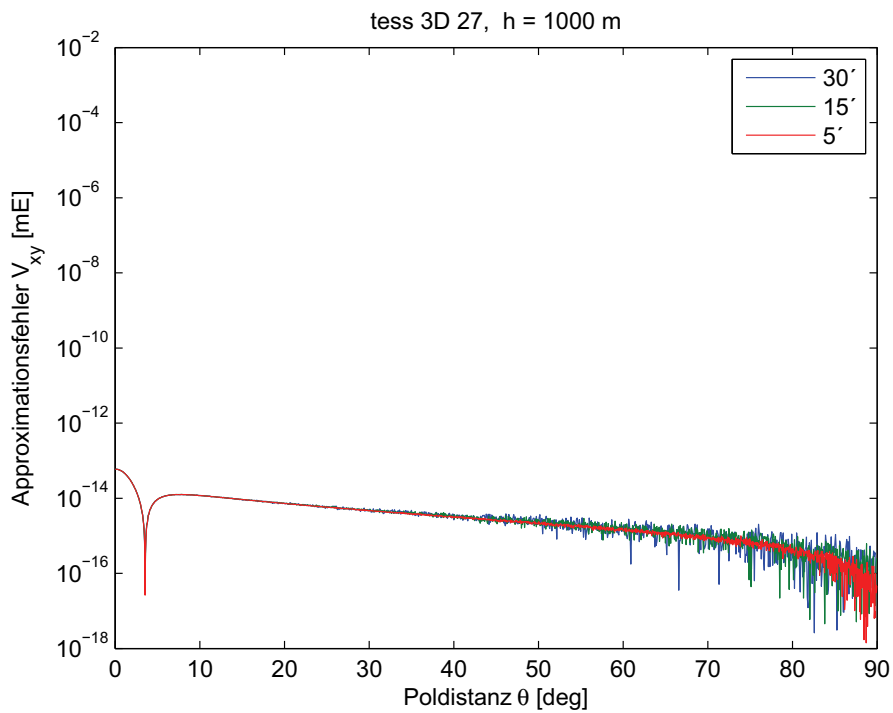


Abb. B-40: Approximationsfehler der Tensorkomponente V_{xy} beim Berechnungsverfahren tess 3D 27

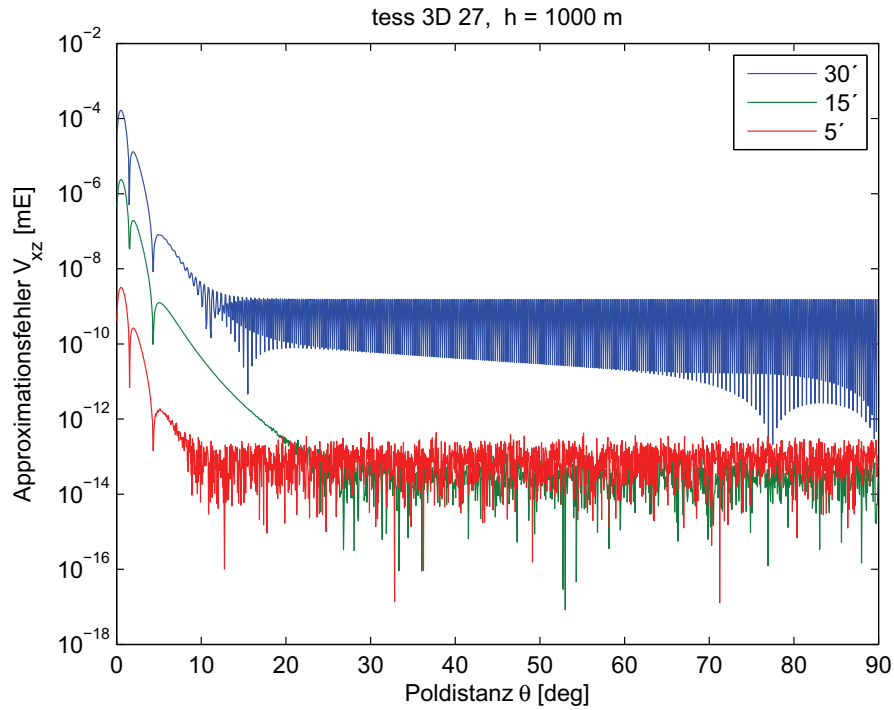


Abb. B-41: Approximationsfehler der Tensorkomponente V_{xz} beim Berechnungsverfahren tess 3D 27

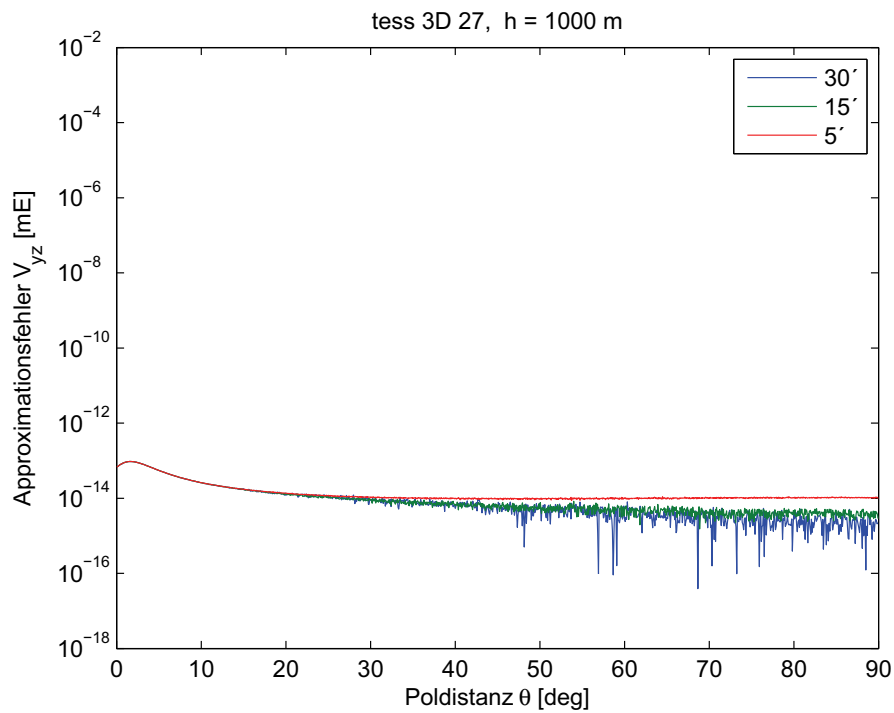



Abb. B-42: Approximationsfehler der Tensorkomponente V_{yz} beim Berechnungsverfahren tess 3D 27



Mit der Satellitengradiometriemission GOCE werden zur Bestimmung des Erdschwerefeldes erstmals Gravitationsgradienten (zweite Ableitungen des Gravitationspotentials) gemessen. Die topographischen Erdmassen induzieren hochfrequente Signalanteile, wodurch eine stabile Fortsetzung der Gradienten nach unten erschwert wird. Zur Glättung des Signals ist es daher sinnvoll, vor der Fortsetzung topographische Reduktionen an die gemessenen Gradienten anzubringen.

Zur Berechnung topographischer Effekte aus digitalen Geländemodellen werden die topographischen Massen zunächst diskretisiert und mittels elementarer Massenkörper modelliert bzw. approximiert. Hierbei können verschiedene geometrische Elementarkörper wie das Tesseroid, der Quader oder die Punktmasse angewendet werden. Da die Bestimmung topographischer Effekte mit zu den rechenzeitintensivsten Prozessen innerhalb der Schwerefeldmodellierung gehört, stellte sich die Frage nach einer numerisch effizienten und stabilen Berechnungsmöglichkeit.

Im Gegensatz zu bisherigen Ansätzen werden im Rahmen dieser Arbeit optimierte Auswerteformeln entwickelt, um mittels Tesseroiden möglichst effizient topographische Effekte in Gravitationsgradienten berechnen zu können. Die Anzahl der notwendigen Integrationsauswertungen wird hierdurch verringert, die Formelstruktur wesentlich vereinfacht und kann in einer kompakten Index-Schreibweise angegeben werden. Eine in den ursprünglichen Formeln vorhandene Singularität kann beseitigt und somit die numerische Stabilität erhöht werden. Im Rahmen numerischer Untersuchungen werden die optimierten Formeln angewendet und hinsichtlich erreichbarer Genauigkeit sowie benötigter Rechenzeit bei der Modellierung topographischer Effekte analysiert.

ISSN 1612-9733
ISSN 1869-9669
ISBN 978-3-86644-510-9

