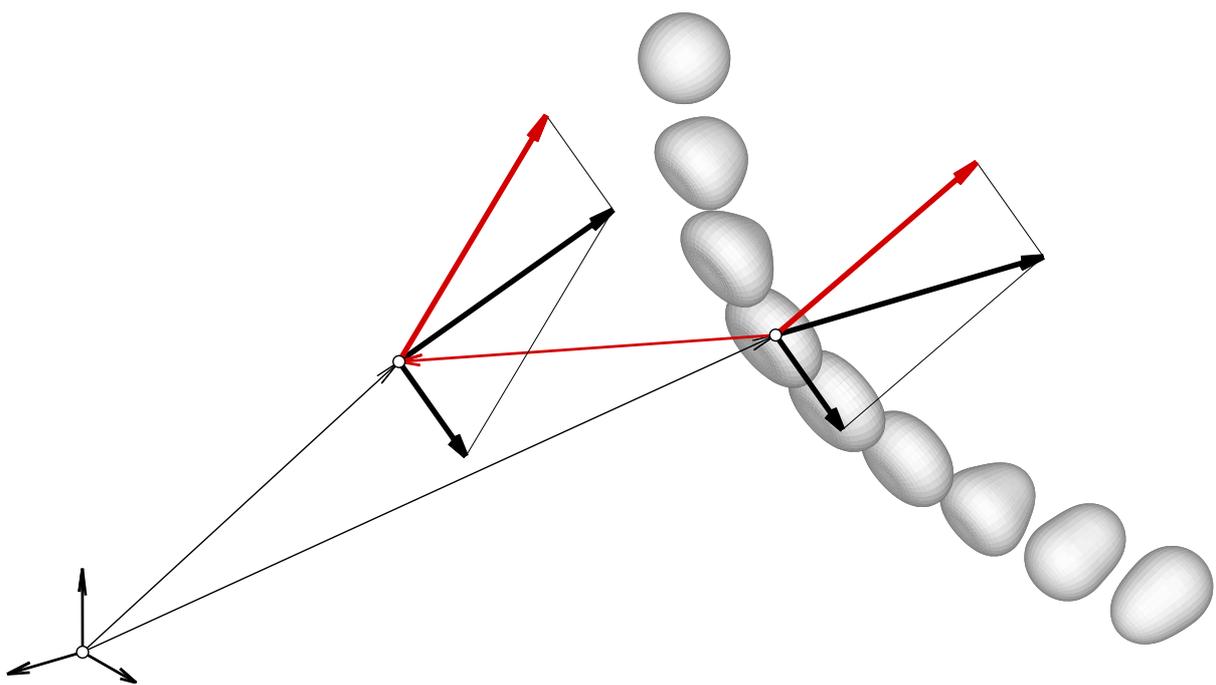


# Tropfendeformation und Nachzerfall bei der technischen Gemischaufbereitung



Roland Schmehl



# Tropfendeformation und Nachzerfall bei der technischen Gemischaufbereitung

Zur Erlangung des akademischen Grades eines  
Doktors der Ingenieurwissenschaften  
von der Fakultät für Maschinenbau der  
Universität Karlsruhe

genehmigte  
Dissertation  
von

Dipl.-Ing. Roland Schmehl  
aus Renchen-Ulm

Tag der mündlichen Prüfung:

13. Oktober 2003

Hauptreferent:

o. Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. Dr. h.c. mult. Sigmar Wittig

Korreferent:

o. Prof. Dr.-Ing. Cameron Tropea

## Vorwort des Herausgebers

Die schnellen technischen Fortschritte im Turbomaschinenbau, die durch extreme Forderungen und starken internationalen Wettbewerb geprägt sind, verlangen einen effizienten Austausch von Fachwissen und Erfahrung zwischen Universitäten und industriellen Partnern. Mit der vorliegenden Reihe haben wir versucht, ein Forum zu schaffen, das neben unseren Publikationen in Fachzeitschriften die aktuellen Forschungsergebnisse des Instituts für Thermische Strömungsmaschinen der Universität Karlsruhe (TH) einem möglichst großen Kreis von Fachkollegen aus der Wissenschaft und vor allem auch der Praxis zugänglich macht und den Wissenstransfer intensiviert und beschleunigt. Flugtriebwerke, stationäre Gasturbinen, Turbolader und Verdichter sind im Verbund mit den zugehörigen Anlagen faszinierende Anwendungsbereiche. Es ist nur natürlich, daß die methodischen Lösungsansätze, die neuen Meßtechniken und die Laboranlagen auch zur Lösung von Problemstellungen in anderen Gebieten – hier denke ich an Otto- und Dieselmotoren, elektrische Antriebe und zahlreiche weitere Anwendungen – genutzt werden. Die effiziente, umweltfreundliche und zuverlässige Umsetzung von Energie führt zu Fragen der ein- und mehrphasigen Strömung, der Verbrennung und der Schadstoffbildung, des Wärmeübergangs sowie des Verhaltens metallischer und keramischer Materialien und Verbundwerkstoffe. Sie stehen im Mittelpunkt ausgedehnter theoretischer und experimenteller Arbeiten, die im Rahmen nationaler und internationaler Forschungsprogramme in Kooperation mit Partnern aus Industrie, Universitäten und anderen Forschungseinrichtungen durchgeführt werden.

Es sollte nicht unerwähnt bleiben, daß alle Arbeiten durch enge Kooperation innerhalb des Instituts geprägt sind. Nicht ohne Grund ist der Beitrag der Werkstätten, der Technik-, der Rechner- und Verwaltungsabteilungen besonders hervorzuheben. Diplomanden und Hilfsassistenten tragen mit ihren Ideen Wesentliches bei, und natürlich ist es der stets freundschaftlich fordernde wissenschaftliche Austausch zwischen den Forschergruppen des Instituts, der zur gleichbleibend hohen Qualität der Arbeiten entscheidend beiträgt. Dabei sind wir für die Unterstützung unserer Förderer außerordentlich dankbar.

Die von Herrn Schmehl in seiner Arbeit beschriebenen Phänomene der Tropfendeformation und des Tropfenzerfalls durch aerodynamische Kräfte waren bereits mehrfach Gegenstand wissenschaftlicher Untersuchungen am Institut. Im vorliegenden Band der Veröffentlichungsreihe stellt Herr Schmehl neben einer grundlegenden theoretischen Aufarbeitung der Thematik detaillierte Modellbeschreibungen der Zweiphasenphänomene vor. Die neu entwickelten und umfassend validierten Ansätze ermöglichen eine realitätsnahe Simulation der gekoppelten Deformations-, Bewegungs- und Zerfallsdynamik von Einzeltropfen, auch unter komplexen Strömungsrandbedingungen, wie sie bei der technischen Gemischaufbereitung auftreten.

Köln, im April 2004

Sigmar Wittig

## Vorwort des Autors

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeiten für das Institut für Thermische Strömungsmaschinen der Universität Karlsruhe (TH) und am Forschungszentrum ESTEC der European Space Agency in Noordwijk, Niederlande.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. Sigmar Wittig, dem Vorstandsvorsitzenden des Deutschen Zentrums für Luft- und Raumfahrt und ehemaligen Leiter des Instituts, für die Förderung und Unterstützung der Arbeit sowie die Übernahme des Hauptreferates.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Cameron Tropea vom Fachgebiet Strömungslehre und Aerodynamik der Technischen Universität Darmstadt danke ich für sein freundliches Interesse an dieser Arbeit und die Übernahme des Korreferates.

Darüber hinaus danke ich den ehemaligen Kollegen des Instituts für ihre Hilfe und Gesprächsbereitschaft, insbesondere Herrn Dipl.-Ing. Matthias Burger für anregende Diskussionen und effektive Kooperation bei der Entwicklung der numerischen Simulationsprogramme, und Herrn Dr.-Ing. Rainer Koch für die fachlichen Anregungen und Durchsicht des Manuskripts.

Für die Bereitstellung experimenteller Daten und Simulationsergebnisse möchte ich mich bedanken bei Herrn Dipl.-Ing. Matthias Hase und Herrn Dr.-Ing. Herbert Wiegand sowie meinen ehemaligen Kollegen Dr.-Ing. Wolfgang Samenfink, Dr.-Ing. Michael Willmann und Dr.-Ing. Georg Maier.

Einen besonderen Dank möchte ich meinen Kollegen bei der European Space Agency für die anregende Arbeitsatmosphäre und interessanten Diskussionen aussprechen, insbesondere den Herren Dr. Johan Steelant, Dr. Richard Schwane und Dipl.-Ing. Robert Lindner.

Nicht zuletzt danke ich Herrn Egon Spindler für das Korrekturlesen dieser Arbeit und meiner Frau Dipl.-Ing. Henriette Bier für ihre Unterstützung.

Amsterdam, im April 2004

Roland Schmehl



## Kurzfassung

Die Phänomene der Tropfendeformation und des Tropfenzerfalls durch aerodynamische Kräfte können einen maßgeblichen Einfluß auf Zerstäubungs- und Gemischbildungsprozesse haben. Ziel dieser Arbeit ist eine physikalische Modellierung im Rahmen der Lagrange-schen Simulation disperser Zweiphasenströmungen. Erste Erkenntnisse über die Wirkung aerodynamischer Kräfte werden auf Basis von Kräfte-, Längenskalen- und Zeitskalenanalysen gewonnen. Diese zeigen, daß die Komplexität der Tropfendynamik in der Überlagerung verschiedenartiger Strömungsmechanismen begründet ist. Zum tiefergehenden Verständnis werden mehrere analytische Theorien der linearen und nichtlinearen Verformungsdynamik aerodynamisch beaufschlagter Tropfen ausgearbeitet. Ein allgemeingültiges und effizientes Gesamtmodell ergibt sich in Verbindung mit Kriterien zur dynamischen Stabilität und zur Klassifizierung der Mechanismen, ergänzt durch detaillierte empirische Beschreibungen der Zerfallsvorgänge.

Lineare Normalmodenanalysen der Verformung unter der Wirkung einer Druckverteilung wurden von Hinze (1948b) wie auch von Isshiki (1959) auf Basis reibungsbehafteter Potentialströmung im Tropfen vorgestellt. Die unterschiedlichen Reibungsterme beider Formulierungen lassen sich auf eine abweichende Behandlung der dynamischen Randbedingung an der Tropfenoberfläche zurückführen. Um den klassischen Normalmodenansatz auch bei zeitlich variierender Beaufschlagung verwenden zu können, werden aus der Literatur 48 Druckverteilungen entnommen und als Korrelationen der Reynolds-Zahl dargestellt. Zur Beschreibung größerer nichtlinearer Verformungen werden neue Modelle entwickelt, die auf einer näherungsweisen Darstellung des Tropfens als Rotationsellipsoid variabler Abmessung aufbauen. Das PTB-Modell (Potential-Theory-Breakup-Modell) stellt eine einheitliche potentialtheoretische Beschreibung der Strömung innerhalb und außerhalb des Tropfens dar. Mittels eines aerodynamischen Wirkungskoeffizienten werden die nichtlinearen Modellgleichungen an empirische Daten angepaßt. Zur systematischen Validierung und Bewertung der analytischen Modelle werden 5 repräsentative Fallstudien betrachtet, wobei das Spektrum der untersuchten Phänomene von freien Formschwingungen bis hin zur Ablenkung und Verformung fallender Tropfen in einer laminaren Horizontalströmung reicht. Der Vergleich mit Literaturdaten unterstreicht das Potential der Normalmodenanalyse zur Beschreibung komplexer Formänderungen. Eine zeitgenaue quantitative Beschreibung bei großen Verformungen wird dagegen mit den nichtlinearen Modellen erreicht.

Die Klassifizierung der Zerfallsformen wird anhand der aerodynamischen Last beim Erreichen einer kritischen Deformation vorgenommen. Mithilfe dieses neuen Konzeptes lassen sich zeitlich variierende Relativströmungsbedingungen während der anfänglichen Deformation berücksichtigen. Die empirische Beschreibung der Zerfallsphase umfaßt – differenziert nach den verschiedenen Mechanismen – die zeitlichen Stadien, die Kinematik, die aerodynamischen Eigenschaften des Tropfens sowie die Eigenschaften der Zerfallsprodukte. Die Leistungsfähigkeit des Gesamtmodells wird anhand einer Modellstudie des Tropfenverhaltens bei Sprungbeaufschlagung gezeigt.

# Abstract

Droplet deformation and droplet breakup by aerodynamic forces can significantly influence atomization and mixture preparation processes. Objective of this study is a physical modeling of the phenomena within the frame of Lagrangian simulation of disperse two-phase flows. First insights into the effect of aerodynamic forces are derived from force, length scale and time scale analyses, indicating that the complexity of droplet dynamics is a consequence of the superposition of various flow mechanisms. To gain a more profound understanding several analytical theories of linear and nonlinear droplet deformation are elaborated. An universal and efficient model framework is accomplished in conjunction with criteria concerning dynamic stability and breakup classification extended by a detailed empirical description of the breakup processes.

Linear normal mode analysis of droplet deformation by a surface pressure distribution was introduced by Hinze (1948b) and Isshiki (1959), both employing potential flow theory to model weakly dissipative flow in the droplet. It is shown that the different viscous terms of the formulations can be attributed to different implementations of the dynamic boundary condition at the droplet surface. In order to apply the classical modal approach to droplets subjected to continuously varying aerodynamic load, 48 pressure distributions are extracted from literature and correlated to cover a complete range of possible relative flow conditions. With respect to larger nonlinear deformations fundamentally new models are developed, approximating the droplet shape by axisymmetric spheroids of variable geometry. The PTB-model (Potential-Theory-Breakup-model) represents a consistent description of the flow within and around the droplet by viscous potential flow theory. The nonlinear model equation is fitted to measured deformation data by means of an aerodynamic coefficient. To systematically validate and assess the analytical theories 5 representative literature testcases are selected, ranging from free shape oscillations to deflection and deformation of droplets in a laminar cross flow. The computed shape evolutions confirm the potential of normal mode analysis to precisely describe complex small-amplitude deformations and of nonlinear models to time-accurately simulate the dynamics of larger deformations.

The breakup mechanisms are classified according to the aerodynamic load at the critical droplet deformation. This new approach can account for variations of relative flow conditions during the initial deformation phase. The empirical description of the subsequent breakup phase comprises—differentiated according to the various mechanisms—temporal stages, kinematics and the aerodynamic properties of the droplet as well as the characteristics of secondary droplets. The efficiency of the model framework is demonstrated by a concluding parametric study of the dynamic response of a droplet to shock wave disturbances.

# Inhalt

<b>Abbildungen</b>	<b>iv</b>
<b>Tabellen</b>	<b>vi</b>
<b>Symbole</b>	<b>vii</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2 Stand der Forschung</b>	<b>5</b>
2.1 Empirische Erkenntnisse . . . . .	6
2.1.1 Deformations- und Zerfallsphänomene . . . . .	6
2.1.2 Klassifizierung der Phänomene . . . . .	10
2.1.3 Einfluß der Beaufschlagungsform . . . . .	13
2.2 Empirische Modelle . . . . .	16
2.3 Einfache mechanistische Modelle . . . . .	17
2.3.1 Tropfendeformation und Zerfall . . . . .	18
2.3.2 Grenzschichtströmung und Ablösung . . . . .	21
2.4 Lineare Normalmodenanalyse . . . . .	22
2.4.1 Tropfenverformung und Zerfall . . . . .	23
2.4.2 Stabilitätsanalyse . . . . .	25
2.5 Direkte numerische Simulation . . . . .	26
2.6 Zielsetzung . . . . .	28
<b>3 Grundlegende Betrachtungen</b>	<b>30</b>
3.1 Fluidmechanische Grundgleichungen . . . . .	30
3.2 Dimensionslose Kennzahlen . . . . .	34
3.3 Charakteristische Größen . . . . .	36
3.4 Tropfengrößenverteilungen . . . . .	42
<b>4 Verformung und Bewegung von Tropfen</b>	<b>46</b>
4.1 Lineare Verformungstheorien . . . . .	46
4.1.1 Normalmodenanalyse über Kräftebetrachtung . . . . .	48

4.1.2	Normalmodenanalyse über Energiebetrachtung . . . . .	52
4.1.3	Modalzerlegung der Druckrandbedingung . . . . .	54
4.1.4	Taylor-Analogie . . . . .	55
4.2	Nichtlineare Verformungsmodelle . . . . .	57
4.2.1	Rückstellterm . . . . .	59
4.2.2	Trägheitsterm . . . . .	60
4.2.3	Aerodynamischer Term . . . . .	63
4.2.4	Reibungsterm . . . . .	67
4.2.5	Modellgleichungen . . . . .	68
4.3	Tropfenbewegungsmodelle . . . . .	69
4.3.1	Kugelförmige Tropfen . . . . .	70
4.3.2	Deformierte Tropfen . . . . .	73
<b>5</b>	<b>Modellvalidierung</b>	<b>77</b>
5.1	Freie Formschwingungen . . . . .	78
5.2	Stationäre Verformung . . . . .	81
5.3	Sprungbeaufschlagung . . . . .	84
5.4	Deformation im freien Fall . . . . .	88
5.5	Durchfallen einer horizontalen Düsenströmung . . . . .	89
<b>6</b>	<b>Tropfenzerfall</b>	<b>94</b>
6.1	Klassifizierung des Tropfenverhaltens . . . . .	95
6.1.1	Lastbasierte Klassifizierung . . . . .	95
6.1.2	Lastbasierte Klassifizierung bei kritischer Deformation . . . . .	96
6.2	Stadien des Tropfenzerfalls . . . . .	100
6.3	Kinematik und Aerodynamik des Zerfalls . . . . .	102
6.4	Eigenschaften der Zerfallsprodukte . . . . .	103
6.4.1	Globale Tropfengrößen-Volumenverteilungen . . . . .	103
6.4.2	Differenzierte Analyse der Sekundärtropfengrößen . . . . .	106
6.4.3	Sekundärtropfengeschwindigkeiten . . . . .	108
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>110</b>

Inhalt	iii
<b>A Reihenentwicklung der Druckverteilungen</b>	<b>113</b>
<b>B Implementierung der Verformungsmodelle</b>	<b>116</b>
<b>Literatur</b>	<b>117</b>

## Abbildungen

1.1	Zerstäubungskonzepte bei der Gemischaufbereitung . . . . .	1
1.2	Kraftstoffeinspritzung in horizontale Kanalströmung . . . . .	2
1.3	Iterative Berechnung der dispersen Zweiphasenströmung . . . . .	3
1.4	Numerische Berechnung des Tropfennachzerfalls . . . . .	4
2.1	Modellmechanismen des Tropfenverhaltens bei sprunghafter Beaufschlagung	5
2.2	Ablenkung und Verformung von Tropfen im laminaren Düsenfreistrah . . .	7
2.3	Blasenzerfall eines Wassertropfens bei $\overline{We}_0 = 10$ . . . . .	8
2.4	Keulenzzerfall eines Wassertropfens bei $\overline{We}_0 = 15$ . . . . .	9
2.5	Scheibenzerfall eines Wassertropfens bei $\overline{We}_0 = 70$ . . . . .	9
2.6	Tropfenzerstörung bei $We_0 = 11700$ . . . . .	10
2.7	On- $We_0$ -Diagramm zur Klassifizierung des Tropfenverhaltens . . . . .	11
2.8	$We$ - $WeRe^{-0.5}$ -Diagramm zur Klassifizierung der Zerfallsmechanismen . . .	12
2.9	Szenarien aerodynamischer Beaufschlagung . . . . .	13
2.10	Mechanische Analogie, Ellipsenmodell und $P_2$ -Mode der linearen Theorie .	18
2.11	Axialsymmetrische Verformungsmoden einer Kugelfläche . . . . .	22
2.12	Numerische Simulation der Tropfenverformung bei Sprungbeaufschlagung .	27
2.13	Numerische Simulation des Blasenzerfalls bei verschiedenen Gasdichten . .	28
3.1	Relativkinematik bei Lagrangescher Betrachtungsweise . . . . .	31
3.2	Gleichförmige Anströmung des Tropfens im Relativsystem . . . . .	32
3.3	Statistische Beschreibung eines Tropfenkollektivs . . . . .	42
3.4	Log-Normalverteilung und Wurzel-Normalverteilung . . . . .	44
3.5	Zusammenhang der Formparameter bei der Wurzel-Normalverteilung . . .	45
3.6	Rosin-Rammler-Verteilung . . . . .	45
4.1	Axialsymmetrische Tropfenverformung . . . . .	47
4.2	Druckverteilungen auf stationär angeströmten Kugeln . . . . .	54
4.3	Entwicklungskoeffizienten von Druckverteilungen auf Kugeln . . . . .	55
4.4	Oberfläche und dimensionslose Geometrie: $P_2$ -Mode . . . . .	56
4.5	Oberfläche und dimensionslose Geometrie: Gedrücktes Ellipsoid . . . . .	58
4.6	Oberfläche und dimensionslose Geometrie: Gestrecktes Ellipsoid . . . . .	58

4.7	Modellierung des Oberflächenterms . . . . .	60
4.8	Charakteristische Massenkoordinaten der Radial- und Axialdeformation . .	61
4.9	Oberflächenkoordinate $s$ und dimensionslose Axialkoordinate $\zeta$ . . . . .	65
4.10	Nichtlinearitäten des aerodynamischen Terms . . . . .	67
4.11	Abhängigkeit des $c_D$ -Wertes von Verformungsgrad und Reynolds-Zahl . . .	75
5.1	Elliptische Formschwingungen eines Tropfens . . . . .	78
5.2	Schwach gedämpfte Formschwingungen im Grundmode . . . . .	79
5.3	Einfluß tropfeninterner Reibung auf den Schwingungsverlauf . . . . .	80
5.4	Nichtlineare Effekte: Frequenzänderung und Periodenasymmetrie . . . . .	81
5.5	Tropfen im vertikalen Luftstrom: Lineare Theorie und Experiment . . . . .	82
5.6	Stationäre Verformung von Wassertropfen im vertikalen Luftstrom . . . . .	83
5.7	Verformung kleiner Tropfen, Beschreibung des aerodynamischen Effektes .	83
5.8	Verformung bei idealer Sprungbeaufschlagung mit $We = 9.83$ . . . . .	85
5.9	Variation der Tropfenoberfläche bei Sprungbeaufschlagung . . . . .	85
5.10	Maximale Querabmessung bei Sprungbeaufschlagung . . . . .	86
5.11	Anfängliche Quer- und Längsdeformation zerfallender Tropfen . . . . .	87
5.12	Endgeschwindigkeit von Wassertropfen im freien Fall . . . . .	88
5.13	Ablenkung und Verformung von Tropfen im Düsenfreistrahle . . . . .	89
5.14	Versuch 7-6W: Fallkurven im Düsenfreistrahle . . . . .	91
5.15	Versuch 10-1W: Fallkurven im Düsenfreistrahle . . . . .	92
5.16	Versuch 17-3W: Fallkurven im Düsenfreistrahle . . . . .	93
6.1	Tropfenquerverformung bei Sprungbeaufschlagung . . . . .	98
6.2	Klassifizierung des Tropfenverhaltens bei Sprungbeaufschlagung . . . . .	99
6.3	Stadien des Tropfenzerfalls ( $On < 0.1$ ) . . . . .	101
6.4	Querausbreitung und $c_D$ -Wert während des Zerfallsvorgangs . . . . .	102
6.5	Tropfengrößen-Volumenverteilungen . . . . .	104
6.6	Globaler Sauter-Durchmesser der Zerfallsprodukte . . . . .	106
6.7	Volumenanteile und Sauter-Durchmesser der Tropfenpopulationen . . . . .	107

## Tabellen

2.1	Kenngößen analytischer Lösungen der Modellgleichungen . . . . .	19
3.1	Stoffdatenkenngößen bei der technischen Gemischaufbereitung . . . . .	37
4.1	Koeffizienten der Näherungsfunktionen nach Gleichung 4.36 . . . . .	55
4.2	Druckabfall entlang Rotationsellipsoiden variabler Geometrie . . . . .	66
4.3	Modellterme der verschiedenen Gleichungsvarianten . . . . .	68
5.1	Parameter der in Abbildung 5.5 dargestellten Tropfen . . . . .	82
5.2	Parameter der in den Abbildungen 5.9 und 5.8 dargestellten Berechnungen	86
5.3	Wirkungskoeffizient $C_2$ , angepaßt an kritische Deformation . . . . .	87
5.4	Parameter der untersuchten Tropfenketten (Wiegand 1987; 1999) . . . . .	90
6.1	Bereichseinteilung nach Krzeczowski (1980) . . . . .	95
6.2	Bereichseinteilung nach Hsiang und Faeth (1995) . . . . .	96
6.3	Klassifizierung für NLTAB3-Modell mit $c_D(Re, y, A_c)$ und $y_c = 1.8$ . . . . .	99
A.1	Modalkoeffizienten für Druckverteilungen auf umströmten Kugeln . . . . .	114
A.2	Modalkoeffizienten für Druckverteilungen auf umströmten Kugeln . . . . .	115

# Symbole

Formelzeichen	Einheit	Bedeutung
$a$	$m$	Ellipsoidhalbachse quer zur Anströmung
$a, \mathbf{a}$	$m/s^2$	Beschleunigung (Skalar, Vektor)
$A_c$	-	Dimensionsloser Beschleunigungsparameter
$c$	$m$	Ellipsoidhalbachse längs der Anströmung
$c_D$	-	Aerodynamischer Widerstandsbeiwert
$c_A, c_H$	-	Beiwerte für virtuelle Masse und Basset-Integral
$C_n$	-	Modalkoeffizient einer Druckverteilung
$C_2$	-	Aerodynamischer Wirkungskoeffizient
$D$	$m$	Tropfendurchmesser
$D_{32}$	$m$	Sauter-Durchmesser
$D_{0.5}$	$m$	Massenmittlerer Durchmesser
$e$	-	Exzentrizität eines Ellipsoids
$e_{ij}$	$1/s$	Deformationsgeschwindigkeitstensor (Komponenten)
$E$	-	Formfaktor eines Tropfens
$\mathbf{E}$	$1/s$	Deformationsgeschwindigkeitstensor
$f$	-	Mathematische Funktion, Frequenz
$F$	-	Integralfunktion von $f(x)$
$F, \mathbf{F}$	$N$	Kraft (Skalar, Vektor)
$g, \mathbf{g}$	$m/s^2$	Erdbeschleunigung (Skalar, Vektor)
$G$	-	Integral der Gaußschen Funktion $g(x)$
$H$	$1/m$	Mittlere Oberflächenkrümmung
$\mathbf{I}$	-	Einheitstensor
$K$	-	Konstante
$l$	$m$	Längenmaß
$m$	$kg$	Masse
$\mathbf{n}$	-	Normalenvektor (zur Gasphase gerichtet)
$N$	-	Anzahl
$p$	$N/m^2$	Druck
$P_n$	-	Legendre-Polynom, Schwingungsmode $n$ -ter Ordnung
$r$	$m$	Radialkoordinate
$\mathbf{r}$	$m$	Ortsvektor
$R$	$m$	Tropfenradius
$s$	$m$	Wegkoordinate
$S$	$m^2$	Tropfenoberfläche
$t$	$s$	Zeit
$\mathbf{t}$	-	Tangentenvektor
$T$	-	Dimensionslose Zeit
$T_{ij}, \mathbf{T}$	$N/m^2$	Spannungstensor (Komponenten, Tensor)
$Tu$	-	Turbulenzgrad
$u, \mathbf{u}$	$m/s$	Geschwindigkeit, absolut (Skalar, Vektor)
$\mathbf{U}$	$m/s$	Geschwindigkeit, absolut, ungestört (Vektor)

<b>Formelzeichen</b>	<b>Einheit</b>	<b>Bedeutung</b>
$v, \mathbf{v}$	$m/s$	Geschwindigkeit, relativ (Skalar, Vektor)
$\mathbf{V}$	$m/s$	Geschwindigkeit, relativ, ungestört (Vektor)
$V$	$m^3$	Tropfenvolumen
$x_i$	$m$	Kartesische Koordinaten
$x$	-	Dimensionslose Tropfengröße (Zerfallsstatistik)
$y$	-	Dimensionslose Tropfenquerabmessung
$z$	-	Dimensionslose Tropfenlängsabmessung
$\alpha$	-	Staupunktsdeformation
$\alpha_n$	-	Modale Staupunktsdeformation
$\beta_n$	-	Modalkoeffizient des Tropfeninnendruckes
$\gamma_0$	-	Geometriegröße
$\delta$	$m$	Grenzschichtdicke, Verschiebung (Skalar)
$\boldsymbol{\delta}$	$m$	Verschiebung (Vektor)
$\delta_{ij}$	-	Komponenten des Einheitstensors
$\varepsilon$	-	Äquatordeformation
$\lambda_0$	-	Geometriegröße, Rotationsellipsoid
$\lambda$	$m$	Wellenlänge
$\mu$	$Ns/m^2$	Dynamische Viskosität
$\nu$	$m^2/s$	Kinematische Viskosität
$\phi$	$rad$	Azimutwinkel
$\psi$	$m^2/s$	Geschwindigkeitspotential
$\Phi$	$N/(m^2s)$	Dissipationsfunktion
$\rho$	$kg/m^3$	Dichte
$\sigma$	$N/m$	Oberflächenspannung
$\tau_{ij}, \boldsymbol{\tau}$	$N/m^2$	Viskoser Spannungstensor (Komponenten, Tensor)
$\tau$	-	Dimensionslose Abklingkonstante
$\tau_n$	-	Modale Abklingkonstante
$\theta$	$rad$	Polarwinkel
$\zeta$	-	Dimensionslose Axialkoordinate
$\zeta, \boldsymbol{\zeta}$	$1/s$	Wirbelstärke (Skalar, Vektor)
$\omega$	-	Dimensionslose Kreisfrequenz

### Dimensionslose Kennzahlen

Bo	$= \rho_d a D_0^2 / \sigma$	Bond-Zahl
Eo	$= (\rho_d - \rho) g D_0^2 / \sigma$	Eötvös-Zahl
On	$= \mu_d / \sqrt{\rho_d D_0 \sigma}$	Ohnesorge-Zahl
On <sub>g</sub>	$= \mu / \sqrt{\rho D_0 \sigma}$	Ohnesorge-Zahl der Gasphase
Re	$= \rho v_{rel} D_0 / \mu$	Reynolds-Zahl der Umströmung
Re <sub>def</sub>	$= \sqrt{\rho \rho_d} v_{rel} D_0 / \mu_d$	Reynolds-Zahl der Deformationströmung
Re <sub>s</sub>	$= \rho_d v_s^* D_0 / \mu_d$	Reynolds-Zahl der Oberflächenströmung
We	$= \rho v_{rel}^2 D_0 / \sigma$	Weber-Zahl
WeRe <sup>-0.5</sup>	$= \sqrt{\rho \mu D_0 v_{rel}^3} / \sigma$	

### Charakteristische Zeiten

$t^*$	$= \sqrt{\rho_d / \rho} D_0 / v_{rel}$	Tropfendeformation, trägheitsdominiert
-------	--	--

$t_{aero}^*$	$= D_0/v_{rel}$	Tropfenumströmung
$t_{\mu}^*$	$= \mu_d/(\rho v_{rel}^2)$	Tropfendeformation, reibungsdominiert
$t_{\sigma}^*$	$= \sqrt{D_0^3 \rho_d / \sigma}$	Formschwingungen, reibungsfrei
$t_{\delta}^*$	$= \sqrt[3]{\rho_d \mu_d / (\rho \mu)} D_0 / v_{rel}$	Grenzschichtaufbau in Flüssigkeit
$t_{\zeta}^*$	$= D_0^2 \rho_d / \mu_d$	Ausbildung Wirbelströmung
$t_a^*$	$= 4/3 \rho_d D_0 / (\rho v_{rel} c_D)$	Tropfenbeschleunigung, $Re \gg 1$
$t_{a,\mu}^*$	$= \rho_d D_0^2 / (18 \mu)$	Tropfenbeschleunigung, $Re \lesssim 1$

**Indizes**

0	Anfangszustand
$c$	Kritischer Zustand
$d$	Tropfen
$g$	Gasphase
$n$	Normalkomponente, Ordnungsgrad
$N$	Anzahl
$p$	Partikel
$r$	Radialkoordinate
$rel$	Relativgröße
$s$	Oberfläche
$t$	Tangentialkomponente
$\phi$	Azimutalkoordinate
$\theta$	Polarkoordinate
$\infty$	Unendlich entfernt, stationär

**Hochgestellte Symbole**

*	Charakteristische Größe, korrigierte Größe
,	Schwankungsgröße, modifizierte Größe
0	Inertialsystem
-1	Inverse Funktion
T	Transponierte Tensorgröße

**Abkürzungen**

CFD	Computational Fluid Dynamics
DDB	Droplet Deformation and Breakup
ITS	Institut für Thermische Strömungsmaschinen
NLTAB	Nonlinear Taylor-Analogy-Breakup
NM	Normalmoden
PTB	Potential-Theory-Breakup
TAB	Taylor-Analogy-Breakup
UWN	Universelle Wurzel-Normalverteilung
VOF	Volume-of-Fluid



# 1 Einleitung

Die Verbrennung flüssiger Kraftstoffe ist für viele technische Anwendungen von Bedeutung. Zu den wichtigsten zählen Wärme- und Stromerzeugung sowie Antriebe für Personen- und Frachtverkehr. Mit der Vorgabe, Primärenergieträger wirtschaftlicher und umweltverträglicher einzusetzen, ist insbesondere das Zusammenspiel von Gemischaufbereitung und Verbrennungsreaktion in das Zentrum des Interesses gerückt. Bei Kolbenmotoren und Gasturbinen ergibt sich jedoch ein grundlegendes Problem. Um den Wirkungsgrad der Maschinen zu optimieren und den Verbrauch zu senken, wird ein immer höheres Druck- und Temperaturniveau der Verbrennung angestrebt. Negative Auswirkung der hohen Temperaturen ist eine drastisch gesteigerte Bildung von Stickoxiden ( $NO_x$ ), deren Emission in der Stratosphäre für den katalytischen Abbau des Ozons und die Vergrößerung der Ozonlöcher verantwortlich gemacht wird, in Bodennähe über Ozonbildung zu einer Verschlechterung der Luftqualität führt. Auf eine unvollständige Verbrennung lassen sich dagegen Schadstoffe wie unverbrannte Kohlenwasserstoffe ( $UHC$ ), Kohlenmonoxid ( $CO$ ) und Ruß zurückführen.

Einen Lösungsansatz bietet die gezielte Abstimmung von Luftführung, Kraftstoffzerstäubung, Mischung und Verbrennung, wobei als Leitgedanke zur Minimierung der Stickoxidbildung die Vermeidung stöchiometrischer Verbrennungsbedingungen zugrunde gelegt wird. Konsequenterweise umgesetzt ist dies in der mageren Vormischverbrennung (LPP: Lean Premix Prevaporize) für Gasturbinen, bei welcher der Kraftstoff in einem durchströmten Vormischmodul zerstäubt und verdampft wird, so daß am Eintritt in die Reaktionszone ein homogenes mageres Gemisch vorliegt (Maier und Wittig 1999). Eine Adaption für herkömmliche Brennkammerbauformen ist die abgelöst stabilisierte Magerverbrennung, bei der eine direkte Sprühstrahlverbrennung mit lokal-stöchiometrischen Bereichen vermieden wird (Meier et al. 1999). Beide Beispiele stellen hohe Anforderungen an die Gemischbildung. Um Selbstzündung und Flammenrückschlag zu vermeiden, muß diese bei hohen Strömungsgeschwindigkeiten stattfinden und innerhalb kürzester Zeiten abgeschlossen sein. Um eine stabile Verbrennung zu gewährleisten, muß zudem ein ausreichender Homogenitätsgrad des Gemisches sichergestellt sein. Von zentraler Bedeutung ist daher eine effektive Zerstäubung des Kraftstoffs, die bei hohen Relativgeschwindigkeiten mithilfe aerodynamischer Kraftwirkungen erreicht werden kann.

Typische Beispiele sind die in Abbildung 1.1 dargestellten Zerstäubungskonzepte. Die bei

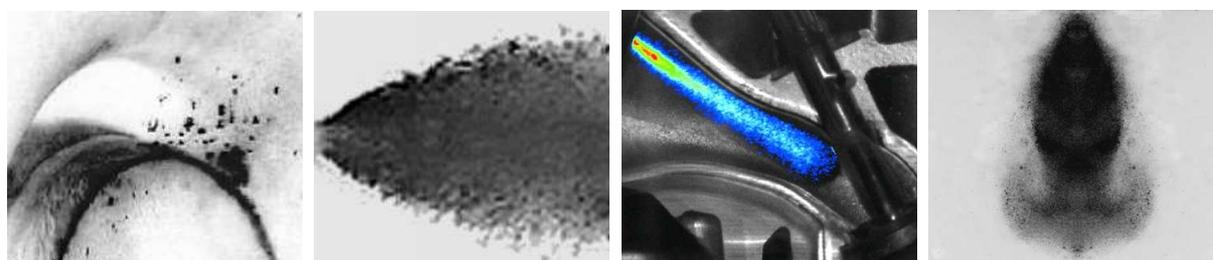


Abbildung 1.1: Air-Blast Zerstäubung (Meier et al. 1999), Luftgestützte Druck-Drall Zerstäubung (Maier und Wittig 1999), Saugrohereinspritzung (Rottenkolber et al. 1998) und Direkteinspritzung (Rottenkolber et al. 1999) – von links nach rechts

Gasturbinen häufig eingesetzte Air-Blast Zerstäubung basiert auf der Überströmung einer Filmlegerlippe - hier in rotationssymmetrischer Ausführung mit coaxialen Luftzuführungen - von welcher die Flüssigkeit unter der Wirkung aerodynamischer Kräfte abgelöst und zerstäubt wird. Bei der luftgestützten Druck-Drall Zerstäubung werden aerodynamische Kräfte beim Zerfall einer hohlkegelförmigen Flüssigkeitslamelle zur Verbesserung der Zerstäubungsgüte eingesetzt. Dagegen kommt es bei der Saugroheinspritzung für Ottomotoren wegen der im Mittel eher niedrigen Relativgeschwindigkeiten erst in der stark beschleunigten Ventilspaltströmung zum Nachzerfall von Tropfen (Burger et al. 2002). Eine zentrale Bedeutung kommt aerodynamischen Zerstäubungsmechanismen bei der Direkteinspritzung zu. In dem kurzen Zeitfenster des Ladungswechsels muß hier mittels Hochdruckeinspritzung ein zündfähiges Gemisch mit gezielt vorgegebenen räumlichen und zeitlichen Eigenschaften erzeugt werden. Die systematische strömungstechnische Auslegung ist jedoch durch die variablen Betriebsbedingungen von Kolbenmotoren erschwert. Problematisch ist bei Ottomotoren insbesondere die Kaltstartphase, in der aufgrund schwacher Kraftstoffverdunstung erhöhte *UHC*-Emissionen auftreten (Rottenkolber 2001).

Wie sich der destruktive Effekt der Strömungskräfte auf einen Einspritzstrahl auswirkt, zeigt der in Abbildung 1.2 dargestellte Modellversuch. Oberhalb einer kritischen Strö-

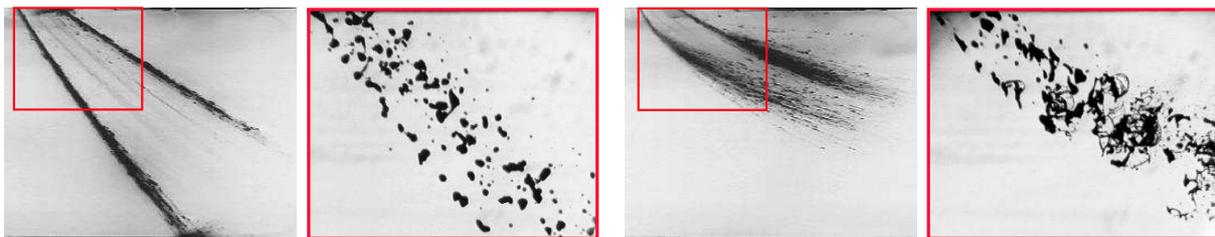


Abbildung 1.2: Kraftstoffeinspritzung in horizontale Kanalströmung mittels Vierloch-Druckzerstäuberdüse (Samenfink et al. 1994; Samenfink 1995) bei  $u_g = 30 \text{ m/s}$  (linkes Bildpaar) und  $u_g = 70 \text{ m/s}$  (rechtes Bildpaar)

mungsgeschwindigkeit kommt es zum Zerfall einzelner Tropfen, was zu einer verstärkten Ablenkung und Auffächerung des Strahls führt. Anhand der Detailvisualisierung lassen sich typische Merkmale identifizieren: Tropfenzerfall ist kein Punktereignis, sondern ein der Bewegung überlagerter Vorgang mit ähnlichem Zeitmaß. Bis zur vollständigen Auflösung der Flüssigkeitsstrukturen können diese eine erhebliche Flugstrecke zurücklegen. Zusätzlich werden den Fragmenten Impulskomponenten quer zur Anströmung aufgeprägt. Als weitere Ursache für die Auffächerung des Strahls ist das breite Größenspektrum und damit ganz unterschiedliche Bewegungsverhalten der Fragmente zu erkennen. Während kleinere Tropfen eher von der Gasströmung mitgerissen werden, bewegen sich größere Tropfen entsprechend ihres Eigenimpulses.

Wichtiges Hilfsmittel bei der Auslegung derart anspruchsvoller Strömungsprozesse ist die numerische Simulation. Diese kann im Gegensatz zu experimentellen Untersuchungen in kurzer Zeit detaillierte Informationen über die Strömungsvorgänge liefern und ermöglicht eine beschleunigte Durchführung von Parameterstudien, so daß sich insgesamt eine Verkürzung der Entwicklungszyklen erzielen läßt. Während sich die Berechnung einphasiger Strömungen, selbst bei komplexen Geometrien, als effizientes und zuverlässiges Auslegungswerkzeug etabliert hat, ist im Hinblick auf Gemischbildungsprozesse ein drastisch

gesteigerter Modellierungsaufwand erforderlich. Entsprechend wirkt sich dies auf die Leistungsfähigkeit und Qualität der Simulationsverfahren aus. Beispielhaft für diese Problematik ist der Zerstäubungsprozeß. Wegen der vielschichtigen, im Detail komplexen Zweiphasenphänomene ist es bisher nicht gelungen, universelle und praktisch anwendbare Modellansätze zu formulieren, dies trotz intensiver Forschung, wie z.B. im Rahmen des DFG-Schwerpunktprogramms *Fluidzerstäubung und Sprühvorgänge* (Walzel und Tropea 2004). Existierende Ansätze sind in ihrer Gültigkeit immer an eine bestimmte Bauart und Betriebsform des Zerstäubungssystems gebunden.

Da bei Zerstäubungsprozessen in der Regel eine Vielzahl von Tropfen unterschiedlicher Größen, Flugrichtungen und Geschwindigkeiten erzeugt werden, bietet sich zur mathematischen Beschreibung der dispersen Zweiphasenströmung ein Euler-Lagrange Modell an. Der prinzipielle Berechnungsgang ist in Abbildung 1.3 am Beispiel der Oxidator-

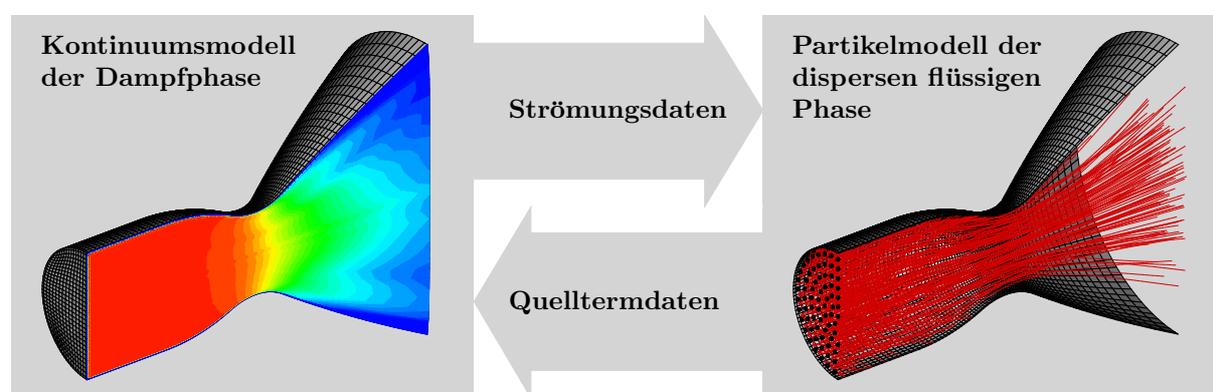


Abbildung 1.3: Iterative Berechnung der dispersen Zweiphasenströmung in der Startphase eines Raketentriebwerks (Schmehl und Steelant 2003)

Flutströmung<sup>1</sup> in der Startphase eines Raketentriebwerks verdeutlicht und zeigt, wie die disperse flüssige Phase als Überlagerung einer großen Anzahl einzelner Tropfenbahnen dargestellt wird. Die Berechnung individuellen Tropfenverhaltens ist ein entscheidender Vorteil des Lagrange-Verfahrens, da in Abhängigkeit von Größe, Geschwindigkeit, Temperatur und Zusammensetzung der Tropfen eine differenzierte Beschreibung der physikalischen Vorgänge, wie z.B. Bewegung, Verdunstung und Deformation vorgenommen werden kann. Mit der Zusammenstellung und Mittelung der Daten auf dem ortsfesten Rechenetz ergeben sich Überlagerungseffekte, wie z.B. die Dispersion des Sprühstrahls infolge Strömungsturbulenz. Entsprechend eignet sich das Lagrange-Verfahren zur Berücksichtigung von Sekundäreffekten, wie z.B. Kollision mit anderen Tropfen und Tropfennachzerfall durch aerodynamische Kräfte. Da diese Phänomene oft die Entstehungsphase eines Sprühstrahls prägen, können sie einen maßgeblichen Einfluß auf die gesamte räumliche Struktur der Zweiphasenströmung haben.

Die in Zusammenhang mit Abbildung 1.2 diskutierte Wirkung aerodynamischer Kräfte ist in Abbildung 1.4 anhand eines  $60\ \mu\text{m}$  großen Kraftstofftropfens bei der luftgestützten Druck-Drall Zerstäubung im Vormischmodul einer LPP Versuchsbrennkammer

<sup>1</sup>Im dargestellten Oberstufentriebwerk wird die Flutströmung zur Gewährleistung einer kontrollierten und stabilen Kontaktzündung der hypergolen Treibstoffkombination eingesetzt

verdeutlicht. Die numerische Berechnung zeigt, wie es nach dem Primärzerfall der hohlke-

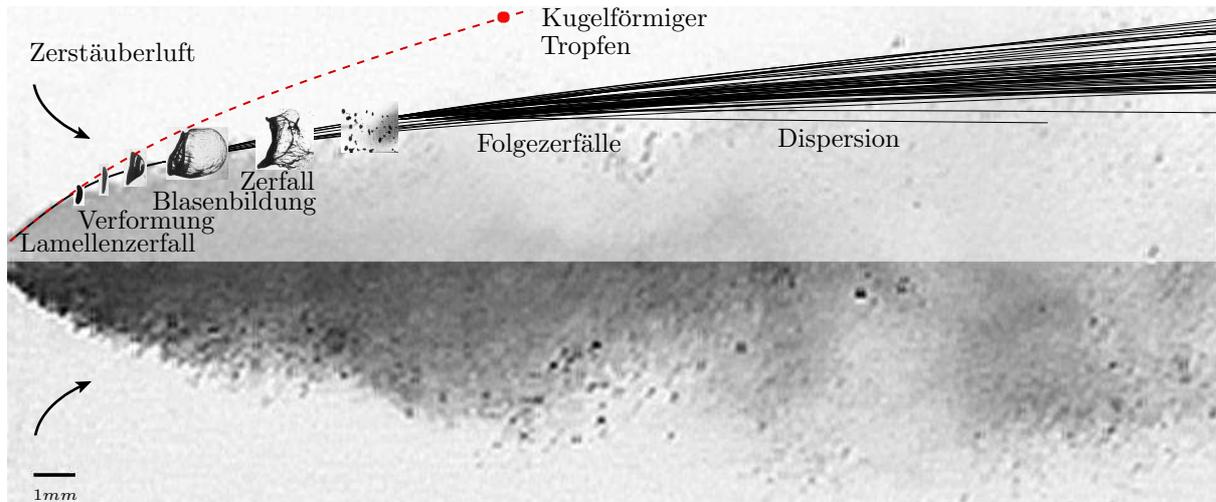


Abbildung 1.4: Numerische Berechnung des Nachzerfalls eines Kraftstofftropfens auf Basis eines empirischen Modells (Schmehl et al. 2000)

gelförmigen Flüssigkeitslamelle infolge Transport und Nachzerfall der Lamellenfragmente in einem ausgedehnten Bereich des Sprühstrahls zur Produktion kleiner Tropfen kommt. Eine derartige Sprühstrahlcharakteristik beeinflusst wegen der schnellen Verdunstung der Sekundärtropfen ganz wesentlich die räumliche Verteilung des Kraftstoffdampfes und damit auf den Ablauf der Verbrennungsreaktion und kann nur durch eine zeitaufgelöste, simultane Betrachtung von Tropfenbewegung, Deformation und Nachzerfall nachgebildet werden.

In diese Thematik gliedert sich die vorliegende Arbeit, deren Ziel eine allgemeingültige und gleichzeitig effiziente Modellbeschreibung der gekoppelten physikalischen Vorgänge ist. Im Anschluß an den empirischen Kenntnisstand zur Deformation und Zerstörung von Tropfen werden in Kapitel 2 die gegenwärtig bekannten Modellbeschreibungen diskutiert. Die in Kapitel 3 aufbereiteten Grundlagen umfassen die Formulierung und Dimensionsanalyse der fluiddynamischen Problemstellung, Längen- und Zeitskalenanalysen der beteiligten Strömungsvorgänge sowie das mathematische Rahmenwerk zur Beschreibung von Tropfengrößenverteilungen. In Kapitel 4 werden analytische Beschreibungen der gekoppelten Bewegungs- und Verformungsdynamik aerodynamisch beaufschlagter Flüssigkeitstropfen ausgearbeitet. Eine umfangreiche Validierung dieser Ansätze, die mathematisch als System gekoppelter gewöhnlicher Differentialgleichungen formuliert werden, ist Inhalt von Kapitel 5. Auf Basis dieses Rahmenmodells werden in Kapitel 6 schließlich halbempirische Stabilitäts- und Klassifizierungskriterien abgeleitet, die durch eine empirische Beschreibung des Zerfallsvorgangs ergänzt werden.

## 2 Stand der Forschung

Die Dynamik von Flüssigkeitstropfen hat bereits früh das Interesse experimenteller und theoretischer Forschung geweckt. So untersuchte Plateau (1873) das Phänomen freier Formschwingungen mit fotografischen Methoden. Rayleigh (1879) gelang die Formulierung einer linearen Theorie reibungsfreier Schwingungen, in welcher allein das periodische Wechselspiel von Trägheitskräften und Oberflächenspannung eingeht und die von Lenard (1886) zur Bestimmung der Oberflächenspannung aus gemessenen Schwingungsdauern eingesetzt werden konnte. Die Erweiterung um schwach dissipative Effekte geht auf Lamb (1881) zurück.

Die Deformation umströmter Tropfen ist erheblich komplexer, da neben der Eigendynamik auch die Wirkung der aufgeprägten aerodynamischen Druck- und Schubspannungen sowie mögliche Oberflächeninstabilitäten berücksichtigt werden müssen. Die grundlegenden Wirkmechanismen einer plötzlich einsetzenden Umströmung sind in Abbildung 2.1

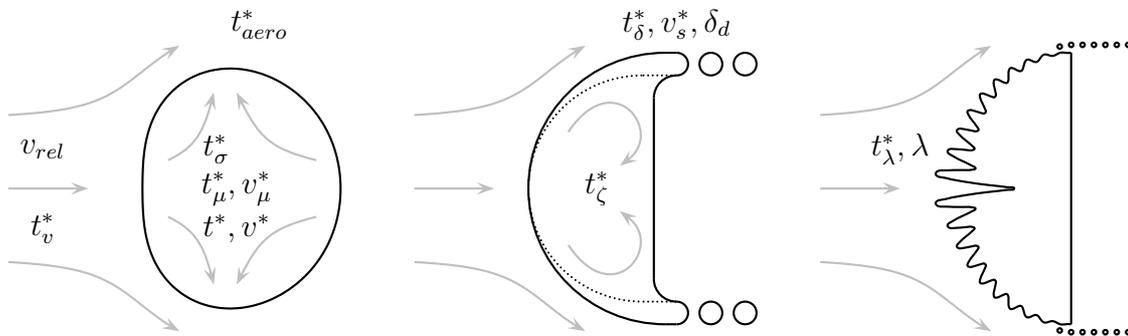


Abbildung 2.1: Querdeformation des Tropfens (links), überlagerte Grenzschichtablösung (mitte) und Oberflächeninstabilitäten (rechts)

skizziert. Bei niedrigen bis mäßigen Anströmgeschwindigkeiten  $v_{rel}$  dominiert der Effekt der aufgeprägten Druckverteilung. Infolge des von den Staupunkten zum Äquator gerichteten Druckabfalls kommt es zur Querdeformation und nachfolgenden Formschwingungen des Tropfens. Bei Überschreiten einer kritischen Intensität der Druckkräfte wird die Deformation irreversibel und leitet in den Blasenzerfall über. Bei höheren Geschwindigkeiten ist der Querdeformation des Tropfens dagegen die Ablösung eines dünnen, rasch zerfallenden Flüssigkeitsfilmes am Tropfenäquator überlagert. Dieser im wesentlichen schubspannungsgetriebene Mechanismus ist ein typisches Merkmal des Scheibenzerfalls. Sehr hohe Geschwindigkeiten rufen dagegen schnell anwachsende Oberflächenwellen auf der angeströmten Seite des Tropfens hervor. Wegen der hohen Scherkräfte kommt es zur Ablösung eines feinen Tröpfchennebels und schließlich zur Fragmentierung des gesamten Flüssigkeitsvolumens. Die Wechselwirkung zwischen aerodynamischen Kräften, Oberflächenspannung und hydrodynamischen Reaktionskräften kann somit ganz verschiedenartige, teilweise überlagerte Strömungsvorgänge im Inneren und an der Oberfläche des Tropfens verursachen. Die Wirkungsbereiche dieser Vorgänge sind in Abbildung 2.1 durch charakteristische Zeit-, Geschwindigkeits- und Längenmaße angedeutet (vgl. auch Abschnitte 3.2 und 3.3). Nach Gelfand (1996) ist gerade der simultane Ablauf der Strömungsvorgänge für die Vielfältigkeit und Komplexität der Zerfallsphänomene verantwortlich.

Der empirische Kenntnisstand zur Deformation und Zerstörung von Tropfen durch aerodynamische Kräfte ist in Abschnitt 2.1 zusammengefaßt. Die theoretischen Arbeiten sind entsprechend abnehmendem Modellierungsgrad bzw. zunehmendem Berechnungsaufwand gegliedert. Abschnitt 2.2 stellt einen repräsentativen Abriß *empirischer Modelle* vor dem Hintergrund der numerischen Simulation technischer Gemischaufbereitung. Weil diese Beschreibungen im wesentlichen auf Korrelationen experimenteller Daten aufbauen, ist ihre praktische Anwendung streng an die implizierte Form der aerodynamischen Beaufschlagung gebunden. Den in Abschnitt 2.3 beschriebenen *einfachen mechanistischen Modellen* liegen dagegen vereinfachte Modelle der Strömungsvorgänge zugrunde. Die mathematische Beschreibung ist jeweils auf eine charakteristische Modellgröße reduziert, wie z.B. die Querdeformation des Tropfens oder die Dicke der Flüssigkeitsgrenzschicht, und ermöglicht eine im Hinblick auf die praktische Anwendung universellere Beschreibung der Phänomene. Die in Abschnitt 2.4 diskutierten *linearen Normalmodenmodelle* basieren auf analytischen Zerlegungen der Oberflächenverformung mithilfe von Reihenansätzen und stellen die Grundlage der Stabilitätsanalyse hydrodynamischer Systeme dar. Neuere Arbeiten zur *direkten numerischen Simulation* der Deformations- und Zerfallsphänomene sind in Abschnitt 2.5 zusammengefaßt. Mittlerweile liefern diese Verfahren wesentliche Beiträge zum tiefergehenden Verständnis, sind in der praktischen Anwendung jedoch durch den extrem hohen Berechnungsaufwand begrenzt.

## 2.1 Empirische Erkenntnisse

Ausgehend von ersten Untersuchungen zur Wirkung aerodynamischer Kräfte auf Flüssigkeitstropfen durch Lenard (1904) und Hochschwender (1919) bietet die Literatur heute eine umfassende experimentelle Darstellung der Thematik. Es zählen hierzu Beiträge von Hsiang und Faeth (1992) und Dai und Faeth (2001) zur Deformation und Zerstörung von Tropfen in Stoßrohrströmungen, Studien von Krzeczkowski (1980) und Schmelz (2002) in Windkanalströmungen sowie Beiträge von Vieille (1998), Zerf (1998) und Previsch (1998) zu speziellen Formen aerodynamischer Beaufschlagung. Da der Großteil der empirischen Erkenntnisse zur sprunghaften Beaufschlagung vorliegt, soll dieser Fall im weiteren mit Schwerpunkt behandelt werden. Anhand von Visualisierungen ist in Abschnitt 2.1.1 qualitativ dargestellt, welche Phänomene mit zunehmender Intensität der Strömungskräfte zu beobachten sind und wie diese im Detail ablaufen. In Abschnitt 2.1.2 sind Konzepte zur Klassifizierung anhand dimensionsloser Kenngrößen beschrieben. Abschließend wird in Abschnitt 2.1.3 auf spezielle Verhältnisse bei der technischen Gemischaufbereitung eingegangen, so z.B. Nieder- und Hochdruckbedingungen wie auch kryogene Bedingungen. Diskutiert werden Abweichungen von der Sprungbeaufschlagung, wie z.B. entlang Düsenströmungen, in oszillierenden oder hochturbulenten Brennkammerströmungen.

### 2.1.1 Deformations- und Zerfallsphänomene

Bei sehr niedrigen Relativgeschwindigkeiten haben aerodynamische Kräfte keinen merklichen Einfluß auf die Form der Tropfen. Es dominiert die Wirkung der Oberflächenspannung, wobei es infolge anfänglicher Deformationen oder mechanischer Einflüsse, wie z.B.

Kollisionen mit Wänden oder anderen Tropfen zu Formschwingungen kommen kann. Aufgrund der Dämpfungswirkung tropfeninterner Reibungskräfte klingen diese im Regelfall ab. Mit steigenden Relativgeschwindigkeiten nimmt der Einfluß der aufgeprägten Strömungskräfte zu. Infolge der inhomogenen Druckbelastung der Tropfenoberfläche kommt es zu der in Abbildung 2.1 skizzierten Querdeformation. Da die maximale Drucküberhöhung am vorderen Staupunkt auftritt, ist die Tropfenvorderseite stärker abgeflacht als die Rückseite. Diese Form ist charakteristisch für stationäre Beaufschlagung (Reinhart 1964; Pruppacher und Beard 1970) und für sprunghafte Beaufschlagung mäßiger Intensität (Temkin und Kim 1980; Hsiang und Faeth 1995). Letztere ist in Abbildung 2.2 anhand der in den horizontalen Düsenfreistrahle eintretenden Tropfen zu erkennen. Ebenfalls

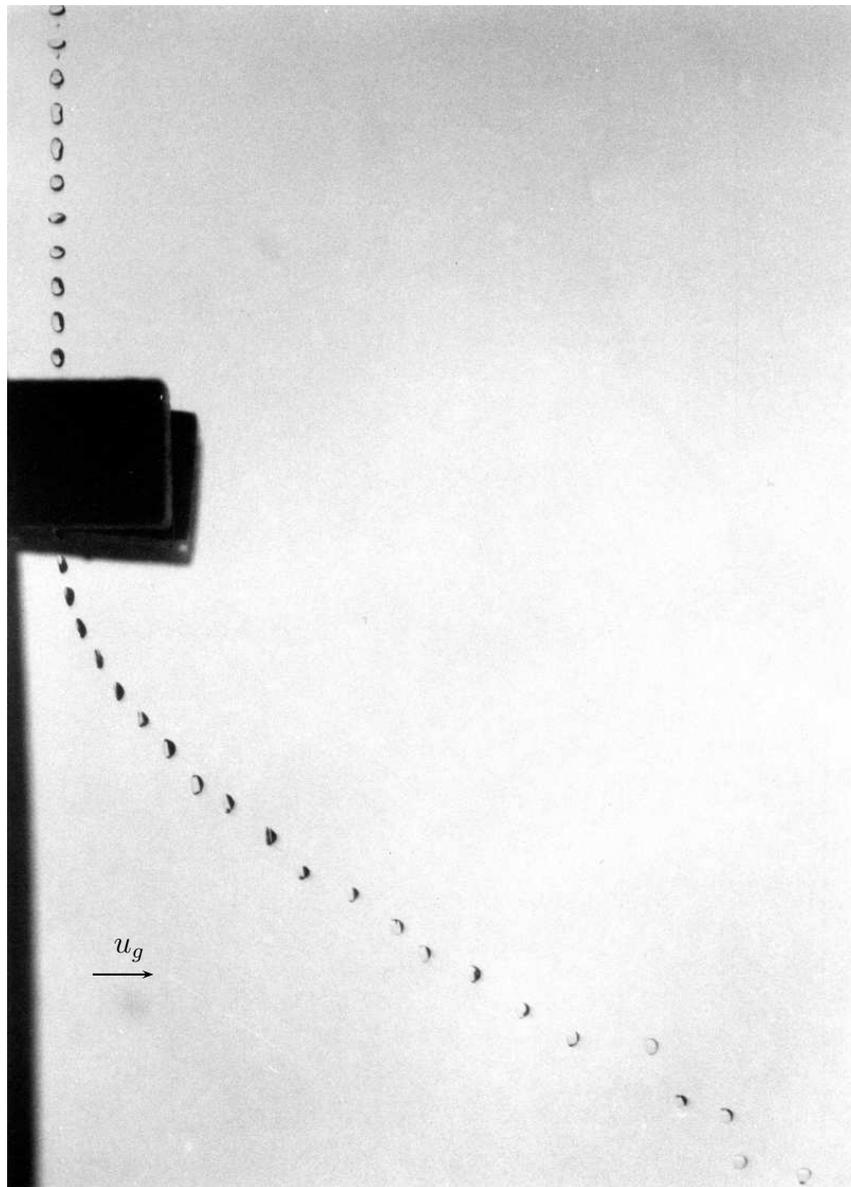


Abbildung 2.2: Ablenkung und Verformung von Wassertropfen im laminaren Düsenfreistrahle bei  $We_0 = 11.8$  (Wiegand 1987, Versuch 17-3W)

ersichtlich sind die von der Erzeugung herrührenden Formschwingungen der frei fallenden Tropfen. Da sich mit der Form auch die aerodynamischen Eigenschaften der Tropfen ändern, muß mit einer rückwirkenden Beeinflussung des Bewegungsverhaltens gerechnet werden. Dies wiederum hat Auswirkungen auf die Umströmung des Tropfens und die Oberflächenkräfte und unterstreicht die Notwendigkeit einer gekoppelten Betrachtung der beteiligten Phänomene.

Um das Verhältnis der aufgetragenen Druckkräfte zur Wirkung der Oberflächenspannung zu quantifizieren, wurde von Hinze (1948a) die Weber-Zahl  $We = \rho v_{rel}^2 D_0 / \sigma$  vorgeschlagen. Mit  $We_0 = 11.8$  liegt der Maximalwert der in Abbildung 2.2 dargestellten, in die Strömung eintretenden Tropfen gerade noch innerhalb des für Sprungbeaufschlagung gültigen Bereichs reversibler Deformationen. Allerdings kann es bei bestimmten Bedingungen, wie z.B. turbulenten Fluktuationen der Relativströmung, zu einer Anregung von Formschwingungen kommen, die im Resonanzfall bis zur Zerteilung der Tropfen führen können. Bei diesem durch periodischen Energieeintrag verursachten Schwingungszerfall (vibrational breakup) entstehen zwei oder drei größere Fragmente neben kleineren Satellitentropfen (Wierzba 1990; Schmelz 2002). Erst bei Überschreiten einer kritischen Intensität der aerodynamischen Last tritt der bereits durch Hochschwender (1919) fotografisch analysierte Blasenzerfall (bag breakup) auf. Erste experimentelle Untersuchungen am ITS wurden von Häbeler (1972) vor dem Hintergrund der Tropfenzerstörung in Naßdampfströmungen von Dampfturbinen durchgeführt. Darüberhinaus haben Samenfink (1995) und Gutknecht (1996) im Rahmen ihrer Arbeiten zur Saugrohreinspritzung in Ottomotoren umfangreiches Videomaterial zusammengestellt, das im folgenden zur qualitativen Beschreibung der Zerfallsphänomene verwendet werden soll. Betrachtet werden Wassertropfen ( $D_0 \approx 3 \text{ mm}$ ), die in eine horizontale Kanalströmung ( $\bar{u}_g = 20\text{--}70 \text{ m/s}$ ) fallen. Zur Nachahmung saugrohrtypischer Strömungsverhältnisse wird über ein Gitter (Maschenweite  $\Delta l = 5 \text{ mm}$ ) eine schwache Turbulenz ( $Tu = 2\text{--}3\%$ ,  $l_e \sim \Delta l$ ) erzeugt, so daß die Tropfen einer gleichförmigen Hauptströmung mit überlagerter isotroper Wirbelstruktur ( $l_e \sim D_0$ ) ausgesetzt sind (vgl. Samenfink et al. 1994). Es wird von einer näherungsweise Sprungbeaufschlagung, beschrieben durch eine mittlere Weber-Zahl  $\overline{We}_0$ , ausgegangen. Einflüsse tropfeninterner Reibungskräfte sind bei der betrachteten Versuchsreihe nicht festzustellen.

Wie aus Abbildung 2.3 hervorgeht, wölbt sich beim Blasenzerfall der zunächst scheibenförmig abgeflachte Tropfen in Strömungsrichtung, um zu einer dünnen Filmtasche aufgeblasen zu werden. Diese zerplatzt schließlich in eine Vielzahl kleiner Tropfen, gefolgt

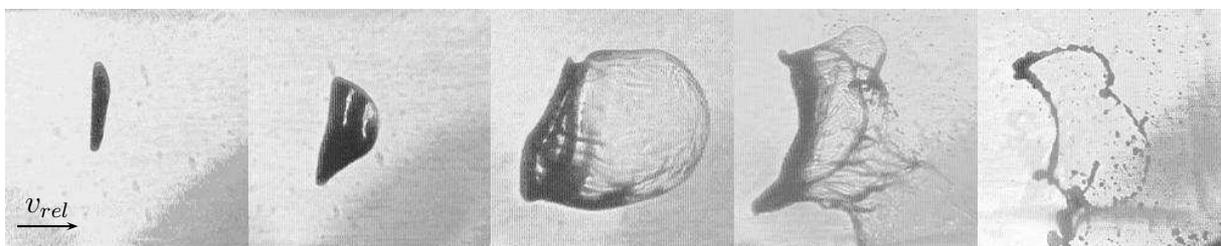


Abbildung 2.3: Blasenzerfall eines Wassertropfens bei  $\overline{We}_0 = 10$

vom Zerfall des expandierenden Flüssigkeitsringes in größere Fragmente (Chou und Faeth 1998). Wie im letzten Teilbild der Sequenz erkennbar, bilden sich zuvor mehrere Knoten entlang des Ringes aus, die aufgrund höherer Massenträgheit langsamer von der

Gasströmung beschleunigt werden. Diese Einschnürung ist ein typisches Merkmal der Rayleigh-Instabilität langgestreckter Flüssigkeitsstrukturen als Folge der Wechselwirkung von Trägheits- und Oberflächenspannungskräften (Wert 1995).

Bei leichter Steigerung der Relativgeschwindigkeit tritt Keulenerfall (bag-jet breakup) auf. Wie aus Abbildung 2.4 hervorgeht, kommt es wie beim Blasenzerfall zunächst zur Abflachung des Tropfens und anschließenden Ausbildung einer Blasenstruktur. Während



Abbildung 2.4: Keulenerfall eines Wassertropfens bei  $\overline{We}_0 = 15$

des Vorgangs bleibt im Zentrum des Tropfens jedoch ein beträchtlicher Teil der Flüssigkeit zurück und wird in Strömungsrichtung zu einem Flüssigkeitsfaden, der sogenannten Keule, auseinandergezogen. Der abschließende Rayleigh-Zerfall von Ring und Keule hinterläßt als größtes Fragment den Kopf der Keule, der oft durch nachfolgenden Blasenzerfall zerstört wird (Gutknecht 1996). In verschiedenen Arbeiten wird dieser auch als Resttropfen bezeichnet.

Höhere Relativgeschwindigkeiten führen schließlich zum Scheibenzerfall (shear breakup), der durch eine Abrundung der Tropfenvorderseite und Ablösung kleinskaliger, schnell zerfallender Filmstrukturen gekennzeichnet ist. Der Mechanismus unterscheidet sich grund-



Abbildung 2.5: Scheibenzerfall eines Wassertropfens bei  $\overline{We}_0 = 70$

legend von den Zerfallsformen bei mäßigen Relativgeschwindigkeiten und kann, wie in Abbildung 2.1 skizziert, mit dem schubspannungsgetriebenen Abriß der Flüssigkeitsgrenzschicht erklärt werden (Ranger und Nicholls 1969; Hsiang und Faeth 1992). Dieser auch als *sheet stripping* bezeichnete Prozeß bewirkt einen kontinuierlichen Massenverlust, bis infolge der Durchmesserabnahme und Beschleunigung des Tropfens eine stabile Größe erreicht ist. Dieser Endzustand ist nach Hsiang und Faeth (1993) durch die Bedingung  $Bo \approx 16$  gekennzeichnet, wobei die Bond-Zahl  $Bo = \rho_d a D_0^2 / \sigma$  das Verhältnis der Beschleunigungskräfte zur Wirkung der Oberflächenspannung charakterisiert.

Bei sehr hohen Relativgeschwindigkeiten kommt es bereits in der Frühphase der Deformation zur Instabilität der angeströmten Phasengrenzfläche. Wie in Abbildung 2.1 skizziert,

führen die schnell anwachsenden kurzwelligen Oberflächenstörungen in Verbindung mit der ausgeprägten Scherwirkung der Gasströmung zur Ablösung eines feinen Tröpfchennebels (wave crest stripping) und schließlich zur schlagartigen Fragmentierung des Tropfens (catastrophic breakup). Verdeutlicht sind diese Vorgänge in Abbildung 2.6 anhand eines



Abbildung 2.6: Tropfenzerstörung bei  $We_0 = 11700$  (Joseph et al. 1999)

Wassertropfens ( $D_0 = 2.6 \text{ mm}$ ), der einer Stoßrohrströmung sehr hoher Geschwindigkeit ( $u_g = 432 \text{ m/s}$ ) ausgesetzt ist. Charakteristisch ist die frontseitige Stauchung und Abrundung sowie rückseitige Abflachung des Tropfens. Die Ausbildung der Linsenform ist nach Taylor (1949) eine Folge der aufgeprägten aerodynamischen Druckverteilung und der beschleunigungsbedingten Druckschichtung im Tropfen.

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß der Einfluß der Oberflächenspannung mit zunehmender Beaufschlagungsintensität in den Hintergrund tritt. Dies gilt für die Deformation des Tropfens, nicht jedoch für kleinskalige Vorgänge, wie z.B. Flüssigkeitsablösung oder kurzwellige Oberflächeninstabilitäten. Als Reaktionskräfte in den Vordergrund treten bei hohen und sehr hohen Beaufschlagungsintensitäten Scherkräfte in den Oberflächenschichten des Tropfens sowie beschleunigungsbedingte Druckkräfte im Tropfeninneren. Grundlegendes Merkmal des Tropfenzerfalls ist eine Ausdehnung der Flüssigkeitsstruktur quer zur Anströmung. Wegen der einhergehenden Zunahme der Strömungskräfte können die Tropfen während des Zerfalls eine beträchtliche Flugstrecke zurücklegen, nach Hsiang und Faeth (1993) bei Scheibenzerfall etwa das fünfzigfache ihres Durchmessers.

### 2.1.2 Klassifizierung der Phänomene

Eine systematische Einteilung und Abgrenzung der Deformations- und Zerfallsphänomene in Abhängigkeit der Problemparameter ist von grundlegender Bedeutung für die empirische Modellbildung. Als dimensionslose Kenngröße zur Charakterisierung des Tropfenverhaltens wurde in Abschnitt 2.1.1 die Weber-Zahl eingeführt. Nach Hsiang und Faeth (1995) werden in Stoßrohrversuchen bei vernachlässigbarer Wirkung tropfeninterner Reibungskräfte mit  $We_0 \approx 0.6, 1.1$  und  $2.3$  maximale Querdeformationen  $(D_{max} - D_0)/D_0 = 5\%, 10\%$  und  $20\%$  erreicht. Infolge der Beschleunigung des Tropfens kommt es jedoch erst für  $We_0 > 3$  zu merklichen Formschwingungen, Blasenzerfall setzt bei Überschreiten der kritischen Weber-Zahl  $We_{0,c} \approx 13$  ein. Nach Zerf (1998) kann bereits für  $We_0 > 5$  unter bestimmten Bedingungen Schwingungszerfall auftreten. Keulenzzerfall ist nach Krzeczkowski (1980) für  $We_0 > 18$  festzustellen, ein Übergangsmechanismus (transitional breakup) für  $We_0 > 30$  und Scheibenzerfall für  $We_0 > 80$ .

Alternative Klassifizierungen der Zerfallsphänomene auf Basis fotografischer Sequenzen

wurden von Hinze (1955), Gelfand et al. (1974), Dai und Faeth (2001) und Schmelz (2002) vorgeschlagen. Auf Zerf (1998) geht eine Zusammenstellung umfangreichen holografischen Materials zurück. Im Hinblick auf diese Arbeiten fällt auf, daß die Bezeichnung und Einteilung der schwer differenzierbaren Erscheinungen beim Übergang vom Blasen- zum Scheibenzerfall keineswegs einheitlich ist. Hsiang und Faeth (1992) bezeichnen die Vorgänge für  $We_0 > 35$  als *multimode breakup*, betrachten Keulenzfall jedoch nicht als eigenständigen Mechanismus, sondern ordnen ihn dem Blasenzerfall zu. Einige Autoren, wie z.B. Liu und Reitz (1997), fassen sämtliche Phänomene mit Blasenbildung, einschließlich der durch periphere Blasenstrukturen gekennzeichneten Übergangsphänomene, unter dem Begriff des Blasenzerfalls zusammen. Andererseits ordnet Samenfink (1995) die Übergangsphänomene dem Scheibenzerfall zu. Aufgrund der langgestreckten Flüssigkeitsstruktur (vgl. Aufnahme 3 und 4 in Abbildung 2.5) hält Zerf (1998) am Begriff des Keulenzfalls fest. Wegen dieses charakteristischen Merkmals bezeichnen Dai und Faeth (2001) die Zerfallserscheinungen für  $We_0 > 40$  als *plume-shear breakup*.

Mit der einsetzenden Wirkung tropfeninterner Reibungskräfte verlagern sich die Übergänge zwischen den Mechanismen zu höheren Werten der Weber-Zahl. Um diesen Effekt zu quantifizieren, hat sich in der Literatur die Ohnesorge-Zahl  $On = \mu_d / \sqrt{\rho_d D_0 \sigma}$  etabliert. Bereits von Hinze (1955) wurde eine grafische Auftragung der Stabilitätsgrenze  $We_{0,c}$  als Funktion der Ohnesorge-Zahl vorgeschlagen, die von Krzeczowski (1980) und Hsiang und Faeth (1992; 1995) zu der in Abbildung 2.7 dargestellten Bereichseinteilung erweitert wurde. Vorteilhaft an dieser Auftragung ist, daß die Einflüsse der Pro-

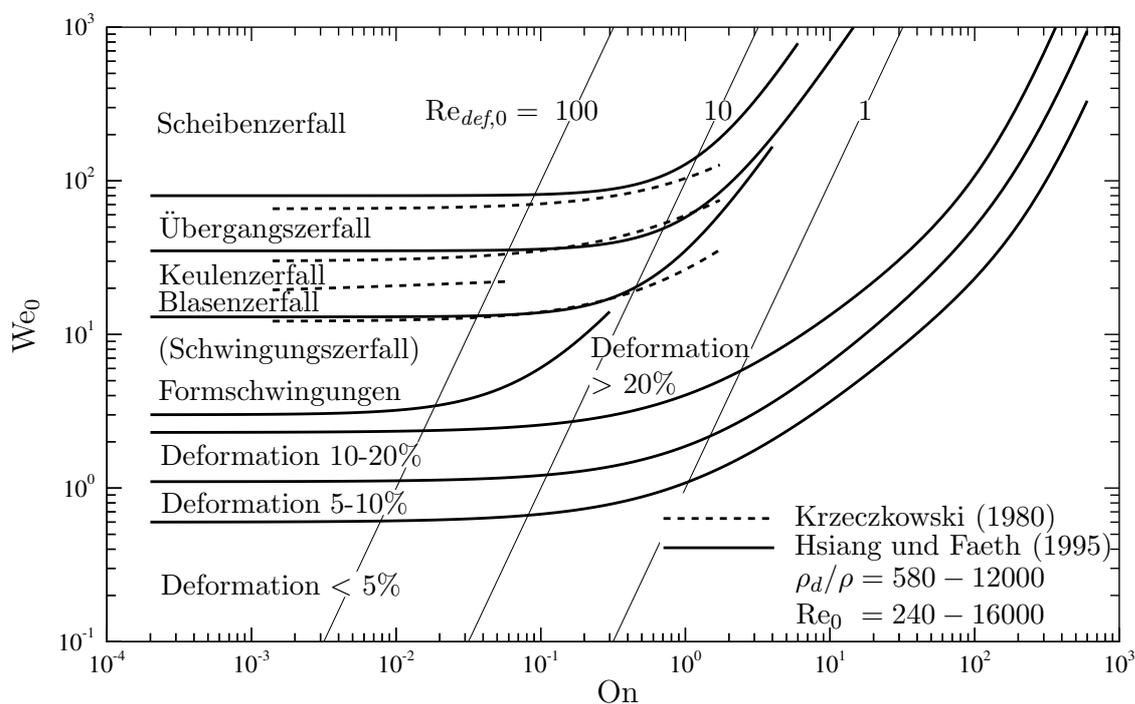


Abbildung 2.7: Tropfenverhalten bei sprunghafter Beaufschlagung als Funktion der Kennzahlen  $On$  und  $We_0$

blemparameter  $v_{rel}$  und  $\mu_d$  getrennt über die Kennzahlen  $We_0$  und  $On$  eingehen. Neben den Kennlinien, welche die verschiedenen Deformations- und Zerfallsformen abgrenzen, enthält das Diagramm die Isolinien der Reynolds-Zahl der Deformationsströmung,

$Re_{def} = \sqrt{\rho_d} v_{rel} D_0 / \mu_d$ , die über den Zusammenhang  $Re_{def} = \sqrt{We}/On$  eine parametrische Abhängigkeit zwischen den Kennzahlen festlegt. Mit Ausnahme des Schwingungsverhaltens, das bereits für  $On > 0.01$  eine deutliche Abhängigkeit zeigt, ist ein Einfluß tropfeninterner Reibungskräfte erst für  $On > 0.1$  zu verzeichnen. Selbst bei niedrigviskosen Flüssigkeiten kann diese Größenordnung mit sehr kleinen Tropfen oder bei Annäherung an den kritischen Punkt ( $\sigma \rightarrow 0$ ) erreicht werden, beides Bedingungen, die bei der Gemischaufbereitung unter Hochdruckbedingungen auftreten. Als grundlegenden Mechanismus erkannte Hinze (1948b) die reibungsbedingte Verzögerung der Deformationsströmung, die aufgrund längerer Einwirkzeit der aerodynamischen Kräfte zu einer verstärkten Abnahme (Relaxation) der Relativgeschwindigkeit führt. In der Folge ist zum Erreichen eines bestimmten Deformationsgrades eine höhere Beaufschlagungsintensität notwendig.

Ein weiteres Klassifizierungskonzept baut auf der Kenngröße  $WeRe^{-0.5} = \sqrt{\rho\mu D_0 v_{rel}^3} / \sigma$  auf. Diese quantifiziert das Verhältnis der aufgeprägten Schubspannungen zur Wirkung der Oberflächenspannung und ist ein Maß für die Tendenz zur Flüssigkeitsablösung. Um die verschiedenartigen Wirkungen der aerodynamischen Druck- und Schubspannungen in einer Darstellung zu charakterisieren, stellen Borisov et al. (1981) eine Bereichseinteilung in Abhängigkeit der Anfangswerte der Kennzahlen  $We$  und  $WeRe^{-0.5}$  vor. Anstelle dieser Einteilung sind in Abbildung 2.8 Versuchsdaten überwiegend neuerer Literaturquellen dargestellt. Die hinterlegte Fläche kennzeichnet die Überlagerung des Be-

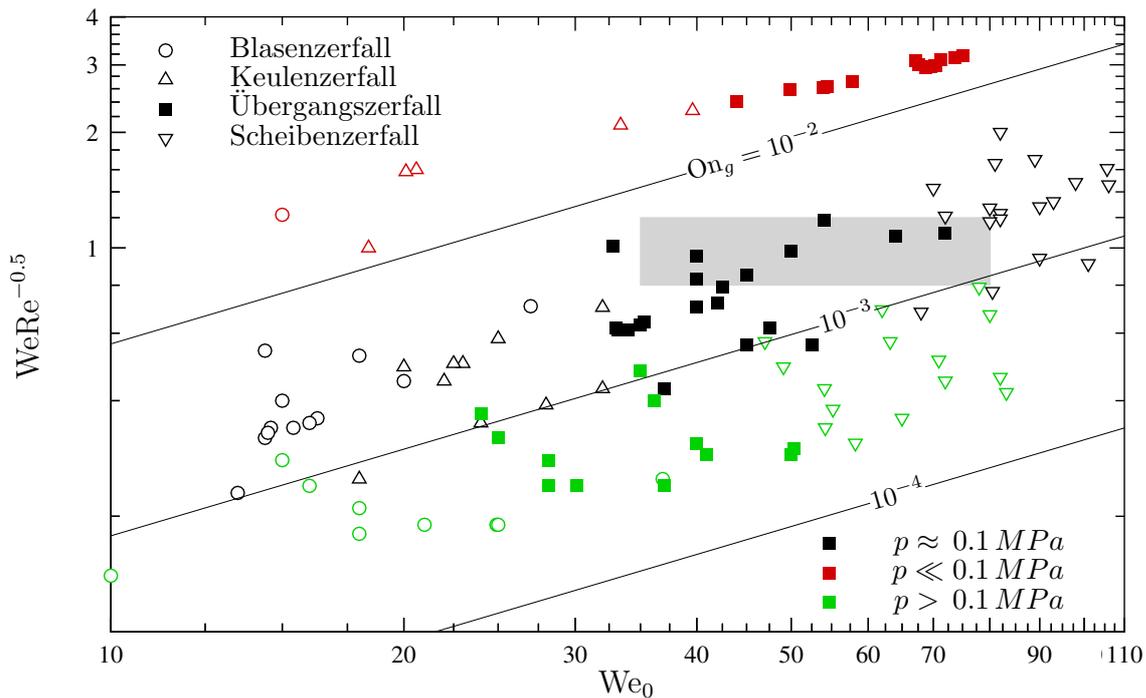


Abbildung 2.8: Zerfallsmechanismen bei sprunghafter Beaufschlagung als Funktion der Kennzahlen  $We_0$  und  $WeRe^{-0.5}$  für  $On < 0.1$ . Atmosphärische Daten: Hinze (1955), Krzeczkowski (1980), Hsiang und Faeth (1995), Vieille (1998), Dai und Faeth (2001) und Schmelz (2002). Niederdruckdaten: Zerf (1998). Hochdruckdaten: Vieille (1998)

reichs  $35 < We_0 < 80$ , in dem nach Hsiang und Faeth (1995) der Übergang vom Keulenzерfall zum Scheibenzерfall stattfindet, mit dem Bereich  $0.8 < WeRe^{-0.5} < 1.2$ , in dem nach

Gelfand (1996) die Flüssigkeitsablösung am Tropfen einsetzt. Bestätigt wird der Übergangsbereich durch die atmosphärischen Daten. Ein grundlegendes Problem wird mit den Nieder- und Hochdruckdaten sowie den Isolinien der Ohnesorge-Zahl  $On_g = \mu/\sqrt{\rho D_0 \sigma}$  deutlich. Weil die Kennzahl über die Beziehung  $WeRe^{-0.5} = We^{0.75} On_g^{0.5}$  eine parametrische Abhängigkeit festlegt, kann ein mittels konstanter Werte  $We_0$  und  $WeRe^{-0.5}$  abgegrenzter Übergangsbereich tatsächlich nur innerhalb eines bestimmten Wertebereichs von  $On_g$  gültig sein. Für atmosphärische Bedingungen ergibt sich mit den Stoffdaten der Gasphase, den praktisch realisierbaren Tropfengrößen und Oberflächenspannungen der in Abbildung 2.8 erkennbare Bereich  $10^{-2} < On_g \lesssim 10^{-3}$ . Die Zerfallsdaten für Nieder- und Hochdruckbedingungen liegen außerhalb dieses Streifens. Wesentlich flexibler wäre in diesem Zusammenhang eine Abgrenzung mithilfe von Kennlinien  $WeRe^{-0.5} = aWe^b$ , die über Konstanten  $a$  und  $b$  angepaßt werden können. Für eine derartige Einteilung fehlt jedoch eine einheitlich aufbereitete, den Bereich niedriger und hoher Drücke umfassende Datenbasis.

Neben den aufgeführten Klassifizierungen finden sich in der Literatur weitere Konzepte, wie z.B. eine Bereichseinteilung in Abhängigkeit von  $We_0$  und  $Re_0$  (Vieille 1998). In der Praxis haben sich diese Ansätze jedoch nicht durchgesetzt.

### 2.1.3 Einfluß der Beaufschlagungsform

Die bisher dargestellten Erkenntnisse beziehen sich auf die dynamische Reaktion von Flüssigkeitstropfen bei sprunghafter aerodynamischer Beaufschlagung, wie sie in Idealform in Stoßrohrströmungen realisiert werden kann. Von Bedeutung ist außerdem der Grenzfall der quasistationären Deformation bei langsam zunehmender Beaufschlagung, z.B. frei fallender Tropfen. Numerische Simulationen beider Beaufschlagungsformen sind in Abbildung 2.9 aufgetragen. Aus experimentellen Studien geht hervor, daß bei gleichem Maximalwert der Weber-Zahl,  $We_0$  bzw.  $We_\infty$ , die Sprungbeaufschlagung zu einer deutlich stärkeren

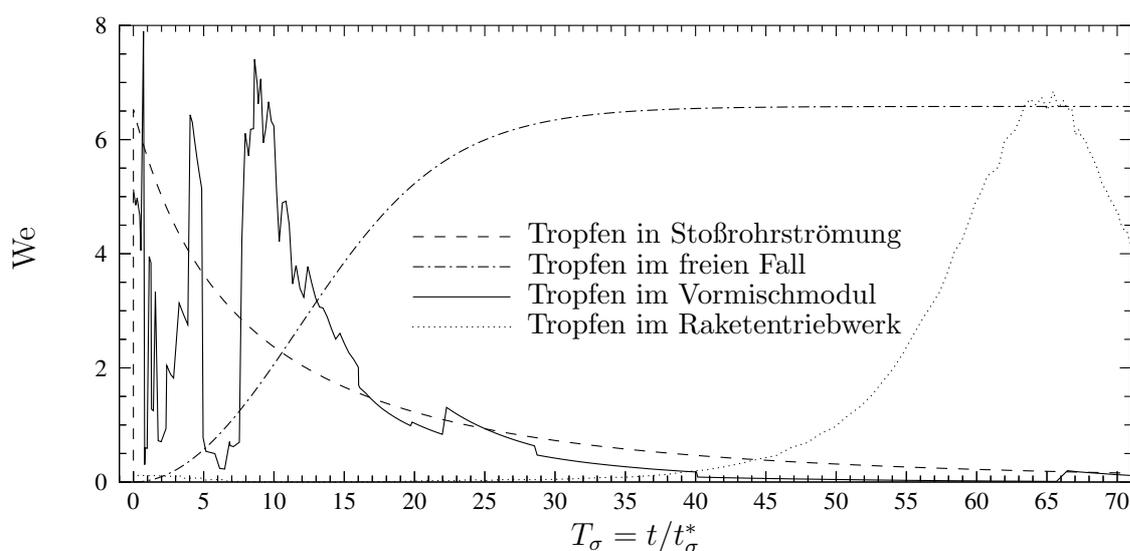


Abbildung 2.9: Szenarien aerodynamischer Beaufschlagung, entdimensioniert mit der charakteristischen Zeit  $t_\sigma^* = \sqrt{D_0^3 \rho_d / \sigma}$  freier Formschwingungen

Verformung führt. Entsprechend wirkt sich dies auch auf den Wert der kritischen Weber-Zahl,  $We_{0,c}$  bzw.  $We_{\infty,c}$  aus, d.h. die quasistationäre Deformation geht erst mit deutlich höherer Intensität der Strömungskräfte in den Blasenzerfall über. Dieser grundlegende Einfluß der Beaufschlagungsform wurde bereits von Lenard (1904) anhand von Tropfen über einer vertikalen Windkanaldüse erkannt.

Komplexere Relativströmungsverhältnisse liegen bei der technischen Gemischaufbereitung vor, da sich die Tropfen in turbulenten, räumlich und zeitlich veränderlichen Strömungsfeldern bewegen. In Abbildung 2.9 ist dies anhand der berechneten Beaufschlagungsverläufe eines  $30\ \mu m$  großen Kraftstofftropfens im Vormischmodul einer LPP Brennkammer (vgl. Abbildung 1.4) und eines  $100\ \mu m$  großen Oxidator tropfens in der Flutströmung eines Raketentriebwerks (vgl. Abbildung 1.3) verdeutlicht. Im Hinblick auf die mit endlichem Zeitmaß ablaufende Deformations- und Zerfallsdynamik der Tropfen ist somit zu erwarten, daß neben Maximalintensität und Einwirkdauer der aerodynamischen Kräfte auch der Gradient des Lastverlaufs von Bedeutung sein wird.

Vor dem Hintergrund dieser Fragestellung werden im folgenden aktuelle Arbeiten zum Einfluß der thermo- und fluiddynamischen Randbedingungen diskutiert. Ziel dieser Arbeiten ist meist die zur Sprungbeaufschlagung vorliegenden Erkenntnisse auf spezielle Verhältnisse bei der Gemischaufbereitung für Verbrennungskraftmaschinen, d.h. hohe Drücke, Temperaturen und Turbulenzgrade, niedrige Drücke sowie pulsierende Strömungen, zu übertragen.

Lee und Reitz (2000) betrachten das Verhalten kleiner Tropfen ( $70\ \mu m < D_0 < 200\ \mu m$ ), die bei angehobenen Drücken ( $p = 1\ MPa$ ) quer in einen Düsenfreistrahlin injiziert werden. Anhand stark vergrößerter Fotografien identifizieren sie die bekannten Formen des Tropfenzerfalls und bestätigen die Bedeutung der Weber-Zahl als maßgebliche Kenngröße. Im Gegensatz zur vorherrschenden Erklärung des Scheibenzerfalls als grundlegend schubspannungsgetriebenes Phänomen, vermuten sie eine durch aufgeprägte Druckspannungen induzierte Instabilität der Tropfenoberfläche im Bereich des Äquators. Als Begründung für diesen Mechanismus, den sie als *sheet thinning and deformation* bezeichnen, führen sie die Unabhängigkeit der eigenen Versuchsdaten von der Reynolds-Zahl der Tropfenumströmung,  $Re_0 = \rho D_0 v_{rel,0} / \mu$ , an. Sie verstehen diese als maßgebliche Kenngröße aerodynamischer Schubspannungseinflüsse. Tatsächlich aber sind die tangentialen Kräfteverhältnisse an der Tropfenoberfläche durch die Größe  $WeRe^{-0.5}$  charakterisiert. Die Reynolds-Zahl selbst hat dabei nur einen untergeordneten Einfluß, was die oben angegebene, empirisch gestützte Begründung abschwächt. Berücksichtigt werden sollten außerdem die erheblichen Unsicherheiten bei der Differenzierung der Zerfallsformen.

Eine ähnliche Versuchsanordnung verwenden Reichelt und Renz (2003) um den Zerfall kleiner Tropfen ( $D_0 = 95\ \mu m$ ) bei Drücken und Temperaturen bis zu  $p = 5\ MPa$  und  $T = 800\ K$  zu untersuchen. Mithilfe laseroptischer Meßtechnik stellen sie fest, daß eine Zunahme der Gasdichte insbesondere bei mäßigen Beaufschlagungsintensitäten ( $We_0 < 50$ ) zu größeren Sekundärtropfen führt. Sie erklären diesen Effekt mit der verstärkten Kopplung von Tropfenzerfall und Beschleunigung, die infolge stärkerer Relaxation der Relativgeschwindigkeit zu einer Abschwächung von Blasenbildungen führt, was letztendlich eine Verringerung des Feinanteils der Zerfallsprodukte bewirkt.

Eine Studie zum Zerfall größerer Tropfen ( $D_0 \sim 1\ mm$ ) im Düsenfreistrahlin bei Drücken

bis zu  $p = 8 \text{ MPa}$  wird von Vieille (1998) vorgestellt. Neben Referenzexperimenten mit Äthanoltröpfchen in Luft führt er Untersuchungen zu Sauerstofftröpfchen in Luft und Helium unter kryogenen Bedingungen durch. Er identifiziert die bekannten Zerfallsformen und bestätigt die Weber-Zahl als maßgebliche Kenngröße, beobachtet mit zunehmendem Druck jedoch eine Verlagerung der Übergänge zu höheren Werten der Weber-Zahl. Trotz breiter Variation der Reynolds-Zahl  $Re_0$  kann er keinen wesentlichen Einfluß der Kenngröße feststellen. Zentraler Beitrag der Studie ist eine empirische Korrelation zur Abgrenzung der Zerfallsmechanismen

$$\text{WeRe}^{-0.5} = K \sqrt{\frac{\mu}{\mu_d} \sqrt{\frac{\rho_d}{\rho}}}. \quad (2.1)$$

Die Untersuchungen zeigen, daß der Wert der Konstanten  $K$  nicht nur vom betrachteten Übergang, sondern auch von der Fluidkombination abhängt. So sind die Übergänge zum Blasen-, Übergangs- und Scheibenzerfall für Sauerstofftröpfchen in Helium durch die Werte  $K = 0.25, 0.7$  und  $0.9$  gekennzeichnet, für Äthanoltröpfchen in Luft dagegen durch die Werte  $K = 0.33, 1.33$  und  $2$ . Inwieweit die Korrelation in einer Zerfallsklassifizierung nach Abbildung 2.8 berücksichtigt werden könnte, wird von Vieille nicht erörtert.

Zerf (1998) analysiert die Dynamik von Wassertropfen ( $40 \mu\text{m} < D_0 < 460 \mu\text{m}$ ) in Stoßrohrströmungen bei niedrigen Drücken ( $100 \text{ Pa} < p < 1000 \text{ Pa}$ ). Neben inerten Trägergasen setzt er als Füllgas auch reinen Wasserdampf ein und untersucht die Auswirkung von Verdunstungs- und Kondensationsvorgängen. Anhand einer umfangreichen Datenbasis zeigt er, daß diese Vorgänge, trotz zum Teil erheblicher Temperatur- und Massenänderungen, einen vernachlässigbaren Einfluß auf die Deformations- und Zerfallsdynamik haben. Ein deutlicher Einfluß zeigt sich dagegen beim Strömungswiderstand der Tropfen.

Schmelz und Walzel (2003) untersuchen größere Tropfen ( $1 \text{ mm} < D_0 < 5 \text{ mm}$ ) beim Fall entlang vertikaler Düsenströmungen, wobei sie mittels variabler Düsengeometrien verschiedene Zeitverläufe der Relativgeschwindigkeit vorgeben. Mit zunehmender Düsenlänge, also abnehmendem Gradient des Geschwindigkeitsanstiegs, stellen sie einen Anstieg der kritischen Weber-Zahl und der Sekundärtropfengrößen fest. Für lange Düsen ergibt sich der von Hinze (1948a) für quasistationäre Tropfendeformation angegebene Wert  $We_{\infty,c} = 20$ . Der Minimalwert der kritischen Weber-Zahl ergibt sich jedoch für eine kurze Düse, nicht wie erwartet für die Blendenströmung mit nahezu sprunghaftem Geschwindigkeitsanstieg. Sie erklären dies mit dem spezifischen Verlauf der Relativgeschwindigkeit, die nach dem Anstieg auf den Maximalwert mit dem Durchqueren der Blende rapide abfällt, und zwar noch in der Anfangsphase des Zerfallsvorgangs. Für die kurze Düse ergibt sich dagegen eine hinsichtlich des Zerfalls optimale Kombination von Gradient, Maximalintensität und Einwirkdauer der aerodynamischen Kräfte. Eine ähnliche Studie zum Einfluß der Beaufschlagungsform stellen Suzuki und Mitachi (2000) vor.

Tropfenzerfall in einer Kanalströmung mit überlagerten Oszillationen ist Gegenstand einer Studie von Bruno (2000). In der Praxis können derartige Strömungsverhältnisse infolge von Verbrennungsinstabilitäten auftreten und einen maßgeblichen Einfluß auf die Gemischaufbereitung ausüben. Die im Modellversuch kontrolliert aufgeprägte akustische Strömungskomponente eignet sich außerdem zur systematischen Untersuchung der Wirkung turbulenter Geschwindigkeitsschwankungen auf die Tropfendynamik. Als maßgeblichen Parameter identifiziert Bruno das Verhältnis akustischer Anregungsfrequenz  $f_a$  zur Eigenfrequenz  $f_\sigma$  des Tropfens. Er stellt fest, daß Tropfen für  $f_a/f_\sigma < 0.2$  mit einer

quasistationären Deformation auf den Momentanwert der Geschwindigkeit reagieren. Für  $0.2 < f_a/f_\sigma \lesssim 1$  kommt es mit der Überschiebung der Zeitmaße zu komplexen Wechselwirkungseffekten, während Tropfen für  $f_a/f_\sigma \gg 1$  nur noch auf den zeitlichen Mittelwert der Strömungsgeschwindigkeit reagieren.

Prevish (1998) faßt die Erkenntnisse zum Tropfenzerfall in turbulenten Strömungen zusammen und ergänzt diese durch eigene Untersuchungen in schwach- bis hochturbulenten Kanalströmungen ( $Tu = 3, 30, 45\%$ ) bei angehobenen Drücken ( $p = 0.5 \text{ MPa}$ ). Als typische Erscheinung beobachtet er bei den höheren Turbulenzgraden ein Zerteilen der Tropfen durch die Einwirkung des hochgradig inhomogenen Strömungsfeldes. Dieser nach Hinze (1955) als *bulgy breakup* bezeichnete Mechanismus kann bereits für  $\overline{We}_0 > 3$  auftreten. Für höhere Beaufschlagungsintensitäten ist mit Ausnahme des Falls  $Tu = 45\%$  auch Blasenzerfall festzustellen. Als Ergebnis einer Zeit- und Längenskalenanalyse kommt Prevish zum Schluß, daß der Zerfall in turbulenter Strömung durch Wirbelstrukturen verursacht wird, deren charakteristische Abmessung eine Größenordnung über dem Tropfendurchmesser liegt.

## 2.2 Empirische Modelle

Eine mathematisch einfache und numerisch effiziente Beschreibung der in Abschnitt 2.1.1 qualitativ dargestellten Phänomene kann auf Basis empirischer Korrelationen vorgenommen werden. Ein tiefergehendes Verständnis der Strömungsvorgänge ist dabei nicht erforderlich. Eine systematische Zusammenstellung und Aufbereitung von Literaturdaten stellen Pilch und Erdman (1987) vor. In der vielzitierten Studie, die auf einer Klassifizierung der Zerfallsformen bei Sprungbeaufschlagung aufbaut, geben sie eine Vorschrift zur Berechnung der Zerfallsdauer  $t_b$  als Funktion der Weber-Zahl  $We_0$  an. Über ein empirisches Bewegungsgesetz bestimmen sie die Relativströmungsbedingungen bei Beendigung des Zerfallsvorgangs und setzen diese mithilfe einer kritischen Weber-Zahl  $We_c = f(On)$  in eine stabile Maximalgröße der Fragmente um. Mayer (1993) diskutiert diesen Berechnungsgang vor dem Hintergrund der Flüssigkeitszerstäubung in Raketentriebwerken, schätzt die stabile Fragmentgröße bei eigenen Simulationsrechnungen jedoch vereinfachend über den Momentanwert der kritischen Weber-Zahl ab.

Eine konsequente Erweiterung des Modellkonzepts stellen Samenfink et al. (1994) und Hallmann (1994) vor. Unter Zugrundelegung eigener experimenteller Untersuchungen geben sie für die Mechanismen des Blasen-, Keulen- und Scheibenzerfalls die Zeitverläufe der Tropfenquerabmessung  $D/D_0$  und des aerodynamischen Widerstandsbeiwertes  $c_D$  an. Das Größenspektrum der Sekundärtropfen beschreiben sie nach Hsiang und Faeth (1992), die eine Korrelation  $D_{32}/D_0 = 6.2 On^{0.5} We_0^{-0.25}$  für den Sauter-Durchmesser mit der von Simmons (1977) postulierten universellen Wurzelnormal-Verteilung kombinieren. Die Querimpulskomponente der Sekundärtropfen leiten sie aus der Querexpansionsgeschwindigkeit zum Zeitpunkt des Zerfalls ab. Das erweiterte Modell setzen sie erfolgreich zur numerischen Simulation der motorischen Gemischbildung in Saugrohrströmungen ein.

Folgeentwicklungen von Willmann (1999) zielen auf eine zunehmende Differenzierung der Zerfallsmechanismen und Auflösung räumlicher und zeitlicher Details der Zerfallsvorgänge hin. Den Einfluß reversibler Deformationen auf das Bewegungsverhalten der Tropfen

berücksichtigen Schmehl et al. (2000) mittels einer auf Wiegand (1987) zurückgehenden quasistationären Korrektur des Widerstandsbeiwertes. Sie fassen sämtliche Korrelationen in einem *sheet spray model* zusammen und verwenden dieses zur numerischen Simulation der luftgestützten Druck-Drall Zerstäubung und Gemischbildung im Vormischmodul einer LPP Brennkammer (vgl. Abbildung 1.4). Eine ähnliche Vorgehensweise verfolgt Hohmann (1999) bei der numerischen Simulation der dieselmotorischen Direkteinspritzung.

Zusammenfassend läßt sich festhalten, daß die Gültigkeit empirischer Modelle immer an die experimentelle Datenbasis und damit auch an eine spezifische Problemstellung geknüpft ist. Zwar ermöglicht die konsequente Verwendung dimensionsloser Kennzahlen eine Erweiterung des Gültigkeitsbereiches auf Klassen physikalisch ähnlicher Problemstellungen, es bleibt jedoch die Bindung an einen bestimmten, implizierten Zeitverlauf der Beaufschlagung. Obwohl bei aerodynamischen Zerstäubungskonzepten wegen der anfangs hohen Relativgeschwindigkeiten meist von einer Sprungbeaufschlagung ausgegangen wird, kann dies in der Praxis zu Problemen führen. Wie der in Abbildung 2.9 dargestellte Beaufschlagungsverlauf im Vormischmodul zeigt, liegt eine näherungsweise Sprungbeaufschlagung des Tropfens tatsächlich nur für kurze Zeiten  $t/t_\sigma^* < 0.5$  vor. Mit der Bewegung im inhomogenen und turbulenten Strömungsfeld der Vormischzone sind auch impulsartige und eher kontinuierliche Änderungen der Relativgeschwindigkeit zu erkennen, so daß Modellbeschreibungen für sprungbeaufschlagte Tropfen zu größeren Fehlern führen können. Im Kontrast hierzu steht die ebenfalls dargestellte Beaufschlagung des Tropfens im Raketentriebwerk. Infolge der vergleichsweise langsamen Änderung der Relativgeschwindigkeit in der Düsenströmung liegt hier eine nahezu quasistationäre Deformation vor.

Eine zentrale Rolle nehmen empirische Modelle bei der Beschreibung der Zerfallsphase ein, da die hochkomplexen Strömungsvorgänge nur begrenzt durch mechanistische Ansätze erfaßt werden können. In vielen Fällen enthalten empirische Modellkonzepte jedoch auch mechanistische Elemente. Beispiele hierfür sind ähnlichkeitsmechanische Zusammenhänge, wie bei der zitierten  $D_{32}$ -Korrelation nach Hsiang und Faeth (1992), die auf einer Größenordnungsabschätzung der Grenzschichtdicke in der Flüssigkeit aufbaut oder theoretisch fundierte Zusammenhänge, wie bei der  $c_D$ -Korrektur nach Wiegand (1987), der ein lineares Normalmodenmodell der Tropfendeformation zugrundeliegt. In der Praxis besteht zwischen empirischen und mechanistischen Ansätzen meist keine klare Trennung.

## 2.3 Einfache mechanistische Modelle

Im Gegensatz zu empirischen Modellen liegen den im folgenden diskutierten Ansätzen einfache Modelle der Strömungsvorgänge zugrunde. Mit dieser Einbindung struktureller Information über das Zweiphasensystem Tropfen-Gas ist es möglich Modellbeschreibungen zu entwickeln, die in gewissen Grenzen auch jenseits der explizit validierten Fälle eingesetzt werden können. Es werden zwei grundlegende Vorgehensweisen unterschieden. Bei der *phänomenologischen* Modellbildung werden die Modellmechanismen gezielt zur Nachbildung der experimentell beobachteten Erscheinungen konstruiert, häufig auf Basis von Analogievorstellungen oder ähnlichkeitsmechanischen Zusammenhängen. Klassisches Beispiel ist die auf Taylor (1949) zurückgehende mechanische Analogie, nach der die Formschwingungen eines Flüssigkeitstropfens mittels eines Feder-Masse Systems be-

geschrieben werden können. Ausgangspunkt der *theoretischen* Modellbildung ist dagegen die kontinuumsmechanische Formulierung der Problemstellung, die mittels Idealisierungen auf geschlossene mathematische Modelle reduziert wird. So geht beispielsweise Körner (1969) von den Navier-Stokes Gleichungen aus und entwickelt für Teilgebiete (Symmetrieachse, Grenzschichten) Modellgleichungen, deren gekoppelte numerische Lösung auf globale Kenngrößen des Zerfalls (Massenverlust, Zerfallszeit) führt. Auch werden analytische Theorien verwandter Problemstellungen auf den aerodynamisch beaufschlagten Tropfen übertragen, so z.B. bei dem ebenfalls auf Taylor (1949) zurückgehenden Grenzschichtmodell. Gemein ist den im folgenden diskutierten Ansätzen die Beschreibung der betrachteten Phänomene mittels einer einzigen Modellgröße, wie z.B. der Querdeformation, der Grenzschichtdicke oder der entsprechende Massenstrom. Ergänzt werden die Ansätze durch empirische Zerfallskriterien.

### 2.3.1 Tropfendehformation und Zerfall

Im Hinblick auf die Verformungsdynamik wird die Wechselwirkung zwischen aerodynamischer Druckverteilung, Oberflächenspannung, Massenträgheit und tropfeninterner Reibung betrachtet. Der Einfluß aerodynamischer Schubspannungen wird nicht berücksichtigt. Eine einfache mechanische Analogie ist das in Abbildung 2.10 skizzierte Feder-Masse-Dämpfer System. Zum Vergleich der diskutierten Modellbeschreibungen werden

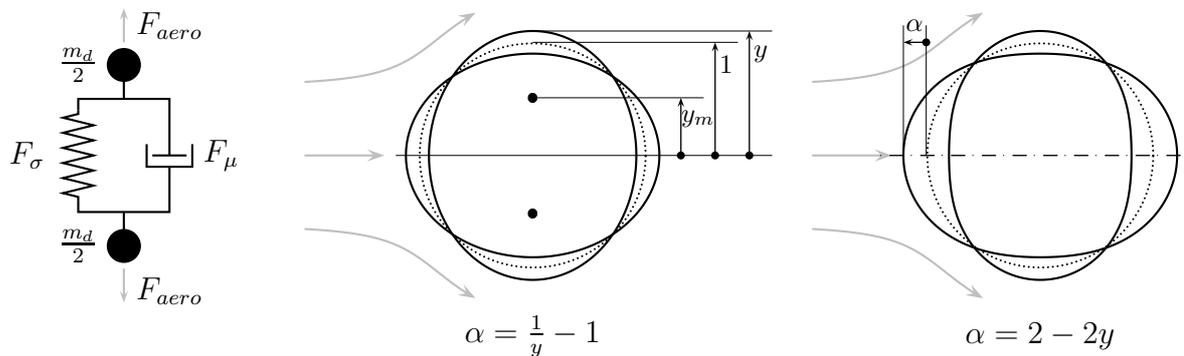


Abbildung 2.10: Mechanische Analogie (links), zweidimensionales Ellipsenmodell (rechts), axialsymmetrischer  $P_2$ -Mode der linearen Theorie (rechts)

diese einheitlich für die dimensionslose Querabmessung  $y = D/D_0$  als Funktion der dimensionslosen Zeit  $T_\sigma = t/t_\sigma^*$  formuliert. Vorausgesetzt ist ein konstantes Zeitmaß freier Formschwingungen  $t_\sigma^* = \sqrt{D_0^3 \rho_d / \sigma}$ . Analytische Ausdrücke für die quasistationäre Deformation  $y_\infty$  der verschiedenen Ansätze sind in Tabelle 2.1 zusammengefaßt, ergänzt durch Ausdrücke für die dimensionslose Eigenkreisfrequenz  $\omega_0$  ungedämpfter Schwingungen und die dimensionslose Zeitkonstante  $\tau$  bei Dämpfung. Aus diesen Größen bestimmt sich die Eigenkreisfrequenz gedämpfter Schwingungen zu  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 1/\tau^2}$ .

Um die Schwingungsdynamik stark deformierter aerodynamisch beaufschlagter Tropfen zu beschreiben, entwickelt Körner (1969; 1972) ein nichtlineares Deformationsmodell. Für den im Tropfen herrschenden Druckgradienten infolge der aufgeprägten Druckverteilung gibt er die Größenordnungsabschätzung  $|\nabla p| \approx -2\rho v_{rel}^2 / (D_0 y)$  an, den durch die Oberflä-

chenspannung verursachten Druckgradienten leitet er aus den lokalen Krümmungsradien an Äquator und Staupunkt ab. Mit der Annahme ellipsenförmiger Tropfenquerschnitte erhält er die für  $y \gg 1$  geltende Näherung  $|\nabla p| \approx -4\sigma y^4/D_0^2$ . Über das Gleichgewicht der Kraftdichten bestimmt er den Zustand quasistationärer Deformation, um welchen er die dynamische Modellgleichung linearisiert und für kleine Schwingungen analytische Lösungen formuliert. Wie aus Tabelle 2.1 hervorgeht, nimmt die Eigenkreisfrequenz dieser Schwingungen ausgehend vom Wert  $\omega_0 = 8$  mit dem Grad der Deformation und der Weber-Zahl zu. Auf Basis der Modellvorstellung kann Körner die experimentell beobachteten Plateaus im Deformationsverlauf als Überlagerungsphänomen deuten.

Modell	$y_\infty$	$\omega_0$	$1/\tau$
Körner	$\left(\frac{\text{We}}{2}\right)^{\frac{1}{5}}, \quad y_\infty \gg 1$	$\sqrt{8\frac{\text{We}}{y_\infty^2} + 64y_\infty^3}$	0
TAB, Gl. 2.2	$1 + \frac{\text{We}}{48}$	8	20 On
Clark, Gl. 2.4	$1 + \frac{\text{We}}{3\pi^2}$	$3\sqrt{2}\pi$	$\frac{9}{2}\pi^2\text{On}$
DBB, Gl. 2.5	$\frac{\text{We}}{12\pi}, \quad \text{We} \gg 6\pi$	–	–

Tabelle 2.1: Kenngrößen analytischer Lösungen der Modellgleichungen

Mit dem *Taylor Analogy Breakup* (TAB) Modell stellen O'Rourke und Amsden (1987) einen Ansatz vor, der sich mittlerweile als Standard in vielen Programmsystemen zur Strömungssimulation etabliert hat. Grundlage ist eine lineare Größenordnungsbeziehung der im Tropfen wirkenden Kräfte, die sie mittels Konstanten an die lineare Theorie schwach gedämpfter Formschwingungen im Grundmode, auch als  $P_2$ -Mode bezeichnet, anpassen. Mit der weitergehenden Annahme eines universellen Zusammenhanges zwischen kritischer Weber-Zahl  $\text{We}_{0,c} = 12$  und Staupunktsdeformation  $\alpha_c = -1$  ergibt sich die Modellgleichung zu<sup>1</sup>

$$\frac{d^2y}{dT_\sigma^2} + 40 \text{On} \frac{dy}{dT_\sigma} + 64(y-1) = \frac{4}{3}\text{We}. \quad (2.2)$$

In Abhängigkeit vorgegebener Zeitverläufe der Beaufschlagung  $\text{We}(T_\sigma)$  lassen sich analytische Lösungen der Differentialgleichung bestimmen. Im Hinblick auf den Einsatz des Modells im Rahmen eines Lagrange-Verfahrens ist dies ein entscheidender Vorteil, da das Zeitmaß der Formschwingungen deutlich kleiner sein kann als die Zeitmaße der Tropfenbewegung und Verdunstung, eine numerische Integration von Gleichung 2.2 entlang der Tropfenbahn in diesen Fällen eine drastische Erhöhung des Berechnungsaufwands zur Folge hätte. Um die Rückwirkung der Deformation auf die Tropfenbewegung zu beschreiben, schlagen Liu et al. (1993) eine Modifikation des aerodynamischen Widerstandsbeiwertes vor. Als Funktion der dimensionslosen Querabmessung lautet diese

$$c_D = c_{D,sphere} [1 + 5.264(y-1)], \quad 1 < y < 1.5 \quad (2.3)$$

und interpoliert zwischen dem Beiwert einer starren Kugel,  $c_{D,sphere}(\text{Re})$ , und dem einer Scheibe,  $c_D = 1.52$ . Sekundärtropfengrößen werden mittels einer Energiebetrachtung bestimmt. Die Entwicklung des TAB-Modells ist eng mit dem Strömungsprogramm KIVA

<sup>1</sup>In der Originalformulierung geben O'Rourke und Amsden (1987) eine Dämpfungskonstante von 20 an. Es ist hier der korrekt an Gleichung 12, Artikel 355 in Lamb (1932) angepaßte Wert von 40 verwendet.

verknüpft (Amsden et al. 1989), dessen wesentliches Einsatzfeld die Gemischaufbereitung für Kolbenmotoren ist.

Auf theoretischem Weg entwickelt Clark (1988) ein zweidimensionales Deformationsmodell um die Schwingungsdynamik von Tropfen in turbulenten Strömungen zu untersuchen. Ausgehend von einer Energiebetrachtung kann er mit der Annahme ellipsenförmiger Deformation analytische Ausdrücke für die Reibungsverluste im Tropfen und die Oberflächenenergie in Abhängigkeit der Schwerpunktskoordinate  $y_m$  des Halbtropfens ableiten. Im Gegensatz zu Körner (1969) ergibt sich für abgeflachte Tropfen eine *regressive* Rückstellwirkung der Oberflächenspannung. Clark linearisiert die Ausdrücke um den kreisförmigen Zustand des Systems, verwendet für den Beitrag der aerodynamischen Kräfte eine Größenordnungsabschätzung und nähert die Massenträgheit des Halbtropfens über die Beschleunigung der Koordinate  $y_m$  an. Empirische Modellkonstanten werden nicht eingeführt. Nach Übergang zur Querabmessung  $y$  lautet die dimensionslose Modellgleichung wie folgt

$$\frac{d^2y}{dT_\sigma^2} + 9\pi^2 \text{On} \frac{dy}{dT_\sigma} + 18\pi^2 (y - 1) = 6 \text{We}. \quad (2.4)$$

Er diskutiert analytisch und numerisch bestimmte Lösungen für konstante und oszillierende Beaufschlagung und stellt fest, daß neben der Maximalintensität auch die Frequenz einen Einfluß auf die Maximaldeformation und – bei Annahme einer kritischen Querdeformation – den Zerfall des Tropfens hat. Aufgrund der zweidimensionalen Betrachtung weicht Gleichung 2.4 erheblich von der Gleichung 2.2 des TAB-Modells und damit auch von der linearen Theorie schwach gedämpfter Formschwingungen sphärischer Tropfen ab. Die entsprechenden Abweichungen der Lösungsfunktionen gehen aus Tabelle 2.1 hervor, so z.B. eine um 67% höhere Eigenkreisfrequenz.

Eine dreidimensionale Erweiterung des Ansatzes wird von Ibrahim et al. (1993) unter der Bezeichnung *Droplet Deformation and Breakup* (DDB) Modell vorgestellt. Sie gehen von der Annahme aus, daß die Tropfen durch die Wirkung der aerodynamischen Kräfte zu gedrückten Rotationsellipsoiden deformiert werden, verzichten bei der Ableitung von Reibungs- und Oberflächenterm jedoch auf eine Linearisierung. Wie auch Clark (1988), beschreiben sie die Massenträgheit über die Beschleunigung des Flächenschwerpunkts  $y_m$  der Halbellipse (vgl. Abbildung 2.10). Die Modellgleichung lautet nach Übergang zur Querabmessung  $y$  wie folgt

$$\frac{d^2y}{dT_\sigma^2} + 9\pi^2 \text{On} \frac{1}{y^2} \frac{dy}{dT_\sigma} + \frac{27\pi^2}{2} y \left(1 - \frac{2}{y^6}\right) = \frac{9\pi}{8} \text{We}. \quad (2.5)$$

Aus einer Energiebetrachtung leiten sie ein Zerfallskriterium auf Basis der kritischen Deformation  $y_c = \text{We}/(12\pi)$  ab. Ein Kritikpunkt dieser Modellbildung ist die hybride Verwendung zwei- und dreidimensionaler Betrachtungen. Aus Gleichung 2.5 läßt sich zudem erkennen, daß die Ruhelage des unbeaufschlagten Systems nicht die Kugelform ist. In der Konsequenz sollte das DDB-Modell daher ausschließlich im Bereich größerer Deformationen ( $y \gg 1$ ) eingesetzt werden, keinesfalls jedoch wenn allgemeine Deformationen auftreten. In praktischen Berechnungsfällen ist diese Forderung kaum zu erfüllen. Aus diesen Gründen und wegen der Notwendigkeit einer numerischen Simulation hat sich das DDB-Modell in der Praxis nicht gegen das TAB-Modell durchgesetzt.

Daidžić et al. (1994) untersuchen nichtlineare Aspekte der Verformungsdynamik bei größeren Deformationsgraden. Auf Basis einer Duffing-Differentialgleichung mit kubischem

Rückstellglied und harmonischer Anregungsfunktion können sie für den Grundschwingungsmodus  $P_2$  wichtige nichtlineare Eigenschaften reproduzieren, wie z.B. das durch diskontinuierliche Änderungen des Verformungszustands gekennzeichnete Sprungphänomen. Die bei größeren Deformationsgraden beobachtete Zunahme der Schwingungsfrequenz begründen sie mit einer *progressiven* Rückstellwirkung der Oberflächenspannung. Wegen der erstaunlichen Übereinstimmung mit experimentellen Daten empfehlen sie die Verwendung der Duffing-Differentialgleichung zur Beschreibung nichtlinearer Phänomene der Schwingungsdynamik.

Zusammenfassend lassen sich die dargestellten Ansätze wie folgt beschreiben. Zentrales Element der Modellbildung ist die Annahme einer idealisierten Verformungskinematik, auf deren Basis die dynamische Modellgleichungen erstellt wird. Betrachtet werden ausschließlich axiale Streck-Stauch-Verformungen des Tropfens, komplexere Formänderungen können nicht berücksichtigt werden. In Ergänzung der Modellgleichung wird meist ein Zerfallskriterium auf Basis einer kritischen Deformation angegeben. Es ist wichtig, diese einfachen, vom Typ her empirisch-phänomenologischen Kriterien von der theoretisch fundierten, linearen Stabilitätsanalyse des Zweiphasensystems zu unterscheiden. Während erstere keine Aussagen über die zum Zerfall führenden Strömungsmechanismen machen, beschreibt letztere, wie sich das System Tropfen-Gas hinsichtlich kleiner Störungen verhält. Zerfallsformen, die auf Basis dieses Modellkonzepts erfaßt werden können, sind Schwingungs- und Blasenzerfall, also Zerfall aufgrund eines periodischen inkrementellen Energieeintrags mit  $We < We_{0,c}$  bzw. eines anhaltenden Energieeintrags mit  $We \approx We_{0,c}$ .

### 2.3.2 Grenzschichtströmung und Ablösung

Um die Ablösung feiner Flüssigkeitsstrukturen bei höheren Relativgeschwindigkeiten zu beschreiben, bietet sich ein Grenzschichtmodell nach Abbildung 2.1 an. Wie skizziert, wird der kontinuierliche Massenverlust des Tropfens dabei als Abstreifen der Flüssigkeitsgrenzschicht erklärt. Dieser Mechanismus, bei dem ausschließlich der Effekt der aerodynamischen Schubspannungen eingeht, wurde bereits von Taylor (1949) als Ausgangspunkt zur theoretischen Beschreibung des Massenverluststroms verwendet. Als maßgebliche Kennzahl der Grenzschichtablösung gilt die Kombinationsgröße  $WeRe^{-0.5}$ , die das Verhältnis der Schubspannungen zur stabilisierenden Wirkung der Oberflächenspannung charakterisiert. In Abschnitt 2.1.2 wurde dargelegt, wie diese zur Klassifizierung der Zerfallsphänomene eingesetzt wird.

Eine Weiterentwicklung wird von Ranger und Nicholls (1969) vorgestellt. Zugrunde liegt dem Ansatz die Annahme ausgebildeter Strömungsgrenzschichten an der Phasengrenze, deren parametrische Geschwindigkeitsprofile mittels Phasenübergangsbeziehungen gekoppelt sind. Unter Verwendung eines Integralverfahrens nach von Kármán und Pohlhausen können sie eine Näherungslösung der zweidimensionalen Grenzschichtgleichungen formulieren, aus der sie einen analytischen Ausdruck für den Flüssigkeitstransport in der Grenzschicht ableiten. Aus dem Maximalwert am Tropfenäquator schließen sie auf den Massenverluststrom, der sich wie folgt darstellen läßt

$$\frac{t^*}{m_{d,0}} \frac{dm_d}{dt} = 3 \sqrt{\frac{6\pi D^3}{Re D_0^3}} \sqrt[3]{\frac{\mu_d}{\mu} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_d}}} . \quad (2.6)$$

Es geht hierbei die charakteristische Zeit  $t^* = \sqrt{\rho_d/\rho} D_0/v_{rel}$  der Tropfenverformung ein. In Ergänzung gibt Ranger (1972) eine charakteristische Zeit für die Ausbildung der Flüssigkeitsgrenzschicht und einen Schätzwert für die Sekundärtropfengrößen an.

Ein Grenzschichtmodell wird ebenfalls von Körner (1972) als Teil einer zonalen Beschreibung des Gesamtsystems Tropfen-Gasumströmung zugrundegelegt. Unter Berücksichtigung der überlagerten Querdeformation des Tropfens gibt er numerische Lösungen für den Massenverluststrom an. Delplanque und Sirignano (1994) erweitern die Betrachtung um die Wirkung eines konvektiven Massen- und Energietransports infolge Verdunstung. Hintergrund der theoretischen Studie ist das Verhalten von Sauerstofftropfen bei der Gemischaufbereitung in Raketentriebwerken. Sie können zeigen, daß die Lebenszeit eines Tropfens unter derartigen Bedingungen infolge des aerodynamischen Flüssigkeitsverlusts um mindestens eine Größenordnung reduziert wird. Hsiang und Faeth (1992) und Chou et al. (1997) verwenden ein Grenzschichtmodell zur Formulierung von Korrelationen für Sekundärtropfengrößen. Chou et al. unterscheiden dabei zwischen einer Anlaufphase, in der ein instationäres Wachstum der Flüssigkeitsgrenzschicht stattfindet (zunehmende Sekundärtropfengrößen) und einer ausgebildeten, stationären Grenzschicht (konstante Tropfengrößen). Sie stellen fest, daß die Grenzschicht bei mäßigen Anströmgeschwindigkeiten ( $We_0 \sim 100$ ) bis in die Größenordnung des Tropfendurchmessers anwachsen kann.

Die Arbeiten zeigen, daß Grenzschichtmodelle zur Beschreibung der Vorgänge bei höheren Relativgeschwindigkeiten geeignet sind. Neben einem quasistationären Verhalten kann dabei auch das transiente Wachstum der Grenzschicht berücksichtigt werden. Auswirkungen der Grenzschichtströmungen auf die Form der Tropfen werden generell nicht berücksichtigt.

## 2.4 Lineare Normalmodenanalyse

In Analogie zur Auslenkung einer gespannten Saite können kleine Verformungen eines Flüssigkeitstropfens als Überlagerung unabhängiger Verformungsmoden, den sogenannten Normalmoden beschrieben werden. Diese sind in Abbildung 2.11 anhand der axial-

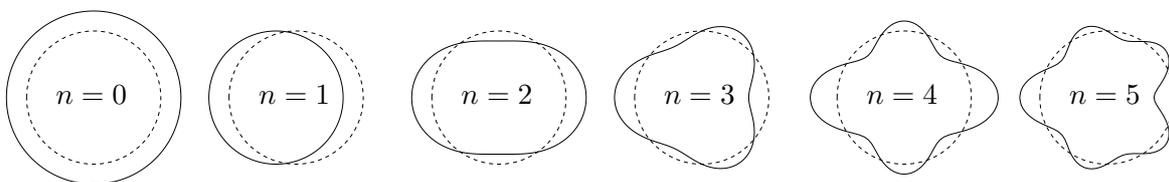


Abbildung 2.11: Axialsymmetrische Verformungsmoden einer Kugelfläche

symmetrischen Verformungsmoden  $P_0$  bis  $P_5$  einer Kugelfläche verdeutlicht. Als wichtige mathematische Methode der theoretischen Hydrodynamik wurde die Normalmodenanalyse von Rayleigh (1879) zur Bestimmung der Eigenfrequenzen freier Formschwingungen eingesetzt und von Lamb (1881) um die Wirkung schwacher Reibungskräfte erweitert. Zugrunde liegt die Lösung der Laplace-Gleichung im Kugelvolumen mittels Separation der Variablen und Reihenentwicklung in Kugelfunktionen. Das Verfahren bietet sich deswei-

teren zur Untersuchung der Dynamik strömungsbeaufschlagter Tropfen an. Im Rahmen der linearen Theorie lassen sich zwei grundlegende Wirkmechanismen berücksichtigen: die Verformung des Tropfens infolge der inhomogenen Druckverteilung sowie das exponentielle Wachstum von Oberflächenwellen (vgl. Abbildung 2.1). Hinsichtlich letzterem werden zwei Formen unterschieden: die *Rayleigh-Taylor* Instabilität aufgrund der senkrecht zur Flüssigkeitsoberfläche wirkenden Beschleunigung sowie die *Kelvin-Helmholtz* Instabilität infolge der Überströmung der Oberfläche. Beide Instabilitätsformen treten erst bei sehr hohen Beaufschlagungsintensitäten auf. Tropfenzerfall im Bereich mäßiger Intensitäten ist dagegen ein nichtlineares Phänomen, bei welchem die Verformung durch Kopplung mit der Umströmung bzw. der aufgeprägten Druckverteilung irreversibel wird (Blasen-, Keulenzzerfall). Eine mechanische Analogie ist das Knicken eines Stabes unter Axiallast. Begrifflich unterschieden werden muß somit zwischen Instabilitäten bei  $We_0 \gg We_{0,c}$ , die bereits bei kleinsten Störungen der sphärischen Tropfenoberfläche zu exponentiell anwachsenden Wellen führen, und Tropfenzerfall bei  $We_0 \gtrsim We_{0,c}$  als typisch nichtlinearem Phänomen.

Eine Zusammenstellung der wichtigsten Beiträge zur Tropfenverformung folgt mit Abschnitt 2.4.1. In einigen dieser Arbeiten ist die Zerfallsgrenze näherungsweise mittels eines kritischen Deformationsgrades beschrieben. Auf Beiträge zur linearen Stabilitätsanalyse wird in Abschnitt 2.4.2 eingegangen.

### 2.4.1 Tropfenverformung und Zerfall

Eine Normalmodenanalyse der Verformungsdynamik umströmter Tropfen wird erstmals von Hinze (1948b;a) vorgestellt. Er geht von den linearisierten Navier-Stokes-Gleichungen aus und entwickelt das Druckfeld im Tropfen als harmonische Funktion. Unter der Annahme reibungsbehafteter Potentialströmung bzw. schleichender Strömung im Tropfen kann er sowohl für schwachen wie auch für starken Reibungseinfluß geschlossene Formulierungen der modalen Verformungsgleichungen angeben. Mithilfe einer vereinfachten aerodynamischen Druckverteilung (Potentialumströmung bis zum Ablösepunkt, ab dort konstanter Druck) bestimmt er Lösungen für sprunghafte wie auch für langsame Zunahme der Relativgeschwindigkeit. Für diese Grenzfälle der Beaufschlagung gelingt ihm mit der Annahme einer universellen kritischen Staupunktsdeformation  $\alpha_c = -1$  die Berechnung der kritischen Weber-Zahl zu  $We_{0,c} = 12$  bzw.  $We_{\infty,c} = 20$ .

Eine alternative Normalmodenanalyse stellt Isshiki (1959) mit einer konsequenten Erweiterung der auf Lamb (1881; 1932) zurückgehenden Theorie schwach dissipativer Formschwingungen vor. Er setzt ebenfalls reibungsbehaftete Potentialströmung im Tropfen voraus, gelangt jedoch über eine Energiebetrachtung zu den modalen Verformungsgleichungen, die bis auf die Reibungsterme identisch mit den von Hinze angegebenen Gleichungen sind. Als Randbedingung an der Tropfenoberfläche verwendet er die theoretischen Druckverteilungen bei schleichender Umströmung und bei Potentialumströmung sowie eine gemessene Druckverteilung bei Umströmung im Bereich mittlerer Reynolds-Zahlen ( $10^4 < Re < 10^5$ ).

Harper et al. (1972) berücksichtigen im Rahmen einer Normalmodenanalyse erstmals sowohl die Verformung infolge der aufgeprägten Druckverteilung als auch die Instabilität der

Oberfläche aufgrund der Beschleunigung. Auf der Grundlage reibungsfreier Strömung im Tropfen geben sie eine Überlagerungsdarstellung (composite representation) beider Effekte in den Normalmoden des Tropfens an. Unter Verwendung einer idealisierten aerodynamischen Druckverteilung (konstanter Druck im Nachlaufbereich des Tropfens) berechnen sie die dynamische Verformungsantwort auf eine Beaufschlagung mit sehr hoher Relativgeschwindigkeit bei  $We \sim Bo \sim 10^5$ , aus welcher deutlich die Wirkung beider Effekte hervorgeht.

Um die aerodynamischen Eigenschaften verformter Tropfen zu beschreiben, kombiniert Wiegand (1987) die stationären Verformungslösungen der Theorie von Hinze mit 8 aerodynamischen Druckverteilungen aus der Literatur. Er erreicht eine kontinuierliche Darstellung der Druckrandbedingung als Funktion der Reynolds-Zahl und kann mit der weitergehenden Annahme einer direkten Proportionalität zwischen Staupunktverformung und Widerstandsüberhöhung die folgende quasistationäre Korrelation formulieren

$$c_D = c_{D,\infty} + We (0.2319 - 0.1579 \log Re + 0.047 \log^2 Re - 0.0042 \log^3 Re) . \quad (2.7)$$

Als Bezugsfläche legt er dabei die Querschnittsfläche des unverformten Tropfens zugrunde, den stationären Widerstandsbeiwert berechnet er nach Kürten et al. (1966)

$$c_{D,\infty} = \begin{cases} 0.28 + \frac{21}{Re} + \frac{6}{\sqrt{Re}} , & 5 \leq Re \leq 4000 , \\ 0.4 , & 2000 \leq Re \leq 10000 . \end{cases} \quad (2.8)$$

Trotz Vernachlässigung der dynamischen Verformungsanteile, gibt Gleichung 2.7 in guter Näherung das gemessene Widerstandsverhalten deformierter Tropfen beim Durchfallen einer horizontalen Düsenströmung wieder.

Papageorgakis und Assanis (1996) berichten von einer Anwendung des Normalmodenmodells von Harper et al. (1972) im Rahmen einer numerischen Simulation der Kraftstoff einspritzung bei atmosphärischen Drücken. Sie berücksichtigen die Tropfenverformung durch die aerodynamische Druckverteilung sowie den Tropfenzerfall mithilfe eines kritischen Deformationsgrades  $\alpha_c = -0.08$ . Auf Basis des Strömungsprogramms KIVA stellen sie Vergleichsrechnungen mit dem TAB-Modell vor und berichten von einer genaueren Wiedergabe der Sprühstrahlcharakteristik.

In einer aktuellen Arbeit untersuchen Bartley et al. (2000) die Bewegung und Verformung von Tropfen in beschleunigten Gasströmungen. Technischer Hintergrund der Studie ist die aerodynamische Partikelgrößenbestimmung. Die von ihnen vorgestellte Normalmodenanalyse berücksichtigt allein die Querverformung des Tropfens im Grundmode  $P_2$ , wobei sie, ausgehend von den linearisierten Navier-Stokes-Gleichungen, das Geschwindigkeitspotential in rotationsfreien und rotationsbehafteten Anteil zerlegen. Wie auch schon Hinze (1948b) betrachten sie bei der weiteren Ausarbeitung des Modellansatzes jedoch nur den rotationsfreien Anteil.

Die diskutierten Arbeiten lassen das Potential der Normalmodenanalyse zur Beschreibung der Verformungs- und Zerfalldynamik aerodynamisch beaufschlagter Tropfen erkennen. Dabei wird die Druckrandbedingung im Rahmen der linearen Theorie an der Oberfläche des unverformten Tropfens vorgegeben, Rückwirkungen der Verformung auf die Umströmung werden vernachlässigt. Beard und Chuang (1987) schlagen eine näherungsweise

Berücksichtigung dieser Rückwirkung mittels parametrischer Verzerrung der aerodynamischen Druckprofile in Abhängigkeit der Querverformung vor Der Ansatz wurde bisher nicht zur Beschreibung dynamischer Verformungen eingesetzt. Von Grund auf nichtlineare Normalmodenanalysen, wie z.B. von Brenn (1990) oder Becker et al. (1994) zur numerischen Berechnung freier Formschwingungen eingesetzt, existieren nicht für aerodynamisch beaufschlagte Tropfen. Dennoch ermöglicht die lineare Analyse eine Beschreibung qualitativer wie auch quantitativer Merkmale der Verformungsdynamik, wie z.B. die frontseitige Abplattung angeströmter Tropfen und die den Blasenzerfall einleitende Einbeulung des vorderen Staupunktes. Die Zerfallsgrenze kann auf Basis eines kritischen Deformationsgrades approximiert werden.

### 2.4.2 Stabilitätsanalyse

Schwerpunkt der im vorigen Abschnitt angesprochenen Studie von Harper et al. (1972) zur dynamischen Reaktion aerodynamisch beschleunigter Tropfen ist die Rayleigh-Taylor Instabilität. Ihre numerischen Berechnungen auf Basis einer linearen Stabilitätsanalyse zeigen, daß der Tropfen bereits für  $Bo > 11.2$  instabil auf kleine Störungen reagiert, die Wachstumsgeschwindigkeit der instabilen Moden allerdings erst für  $Bo > 10^5$  die Größe der Verformungsgeschwindigkeit erreicht. Zusammenfassend geben sie eine Klassifizierung der Sprungantwort in Abhängigkeit der Weber- und der Bond-Zahl an, wobei sie den Bereich  $10^2 < Bo < 10^5$  als *quasistabil* definieren.

Dem von Reitz (1987) vorgeschlagenen wave-breakup Modell liegt die Analogie des umströmten Tropfens zu einem koaxial umströmten zylindrischen Flüssigkeitsstrahl unendlicher Länge zugrunde. Für die dabei wesentliche Kelvin-Helmholtz Instabilität kann Reitz auf Basis einer linearen Theorie eine maximale Wachstumsrate  $\Omega$  und eine zugeordnete Wellenlänge  $\lambda$  bestimmen (vgl. Mayer 1993). Auf das Problem des Tropfenzerfalls übertragen, interpretiert Reitz die Wellenlänge als charakteristische Größe der Sekundärtropfen, leitet aus  $\Omega$  das Zeitmaß des Zerfallsvorgangs ab und aus diesem wiederum die Verformungsgeschwindigkeit. In Ergänzung dieser mechanistischen Modellgrößen verwendet er empirische Korrelationen, wie z.B. für den  $c_D$ -Wert des Tropfens. Neben dem TAB-Modell hat sich das wave-breakup Modell ebenfalls als Standard vieler Strömungsprogramme etabliert und wird aufgrund der Strahlerfallsanalogie gerade auch im Zusammenhang mit der primären Flüssigkeitszerstäubung erfolgreich eingesetzt.

Joseph et al. (1999) untersuchen die Rayleigh-Taylor Instabilität auf der Tropfenvorderseite sowohl experimentell wie auch theoretisch. Beim Vergleich mit den hochaufgelösten Visualisierungen stellen sie eine gute Übereinstimmung zwischen der berechneten Wellenlänge der schnellstwachsenden Störung und dem charakteristischen Längenmaß der Oberflächenstrukturen fest. Eine Überlagerungsdarstellung beider Instabilitätsformen wird von Kitscha und Kocamustafaogullari (1989) angegeben. Als Vergleichsbasis legen sie eine Vielzahl von Meßdaten maximaler Fragmentgrößen schwerkraftgetriebenen Tropfen- bzw. Gasblasenzerfalls zugrunde. Gegenüber den Einzeltheorien können sie eine deutliche Verbesserung feststellen. Hwang et al. (1996) diskutieren die Rayleigh-Taylor und die Kelvin-Helmholtz Instabilität vor dem Hintergrund der aerodynamischen Beaufschlagung mit hoher Relativgeschwindigkeit. Sie schließen, daß bezüglich dem Verständnis der Wirkmechanismen und ihrer Überlagerung noch erhebliche Unsicherheiten bestehen.

## 2.5 Direkte numerische Simulation

Infolge der drastischen Steigerung der Rechnerleistung und maßgeblicher Entwicklungen der numerischen Verfahren hat sich die direkte Simulation als wichtiges Hilfsmittel bei der Untersuchung komplexer Zweiphasenphänomene etabliert. Auf Basis von Simulationsergebnissen lassen sich in Ergänzung experimenteller Studien oft wesentliche Aussagen zur Wirkung beteiligter Kräfte und zum Ablauf der Vorgänge machen. Im folgenden werden repräsentative Beiträge zur Verformung und zum Zerfall von Flüssigkeitstropfen in Gasströmungen umrissen und so der aktuelle Entwicklungsstand der numerischen Simulationsverfahren dargelegt.

Die Verformung und Verdunstung eines zweidimensionalen Kraftstofftropfens in einer Heißgasströmung wird von Jeng und Deng (1996) auf Basis eines Arbitrary Lagrangian Eulerian (ALE) Verfahrens untersucht. Ihre Berechnungen geben näherungsweise die bekannten experimentellen Beobachtungen wieder (Formschwingungen bei  $We_0 = 1.3$ , scheibenförmige Verzerrung bei  $We_0 = 10$  und Wölbung in Strömungsrichtung bei  $We_0 = 298$ ), können jedoch nicht die Feinstrukturen der Zerfallserscheinungen auflösen. Dabei ist kein merklicher Einfluß der Verdunstung auf die Verformung festzustellen, jedoch eine deutlich verstärkte Verdunstung infolge der Deformationen.

Brennkammertypische Bedingungen ( $T = 1000\text{ K}$ ,  $p = 1\text{ MPa}$ ) liegen auch der Studie von Leppinen et al. (1996b) zugrunde. Mithilfe eines Finite-Volumen Verfahrens auf einem mitdeformierten Rechengitter gelingt ihnen die Berechnung der Formschwingungen eines dreidimensionalen Heptantropfens bei  $We_0 = 2$  und  $Re_0 = 100$ . Als wesentliche Neuerung berücksichtigen sie den Transport oberflächenaktiver Substanzen, die in technischen Zweiphasensystemen unvermeidbar sind (Clift et al. 1978). Sie stellen fest, daß der Transport dieser Substanzen in Richtung der Überströmung Schubspannungen verursacht, die entgegen den aufgeprägten Schubspannungen wirken und zu einer deutlichen Verminderung der tangentialen Oberflächengeschwindigkeit führen (Marangoni-Effekt). Weil so die Ausbildung tropfeninterner Wirbelströmung unterdrückt wird, stellen sich im stationären Endzustand abgeflachte (oblate) Tropfen ein. Bei Vernachlässigung des Marangoni-Effektes zeigt sich dagegen eine dominante Wirkung der Wirbelströmung. Es kommt zu einer starken Dämpfung der Formschwingungen, wobei sich im Widerspruch zur experimentellen Beobachtung gestreckte (prolate) Tropfen ausbilden. Bei Berücksichtigung der Tropfenverdunstung kommt es aufgrund der nach außen gerichteten Konvektionsströmung (Stefan-Strömung) zur vollständigen Unterdrückung tangentialer Strömungen. Die Tropfen führen dabei nahezu ungedämpfte Schwingungen aus.

Han und Tryggvason (1999) stellen eine Parameterstudie umströmter Tropfen unter der Wirkung einer konstanten Beschleunigung bei Dichteverhältnissen von  $\rho_d/\rho = 1$  und 10 vor. Ihre Berechnungen basieren auf einer Finite-Differenzen/front-tracking Methode und benötigen 12 bis 240 CPU-Stunden je Deformationsvorgang. Mit zunehmender Eötvös-Zahl  $Eo = \Delta\rho g D_0^2/\sigma$  – diese charakterisiert das Verhältnis der Beschleunigungskräfte zur Wirkung der Oberflächenspannung – erkennen sie eine zunehmende Querdeformation des Tropfens, die Ausbildung eines Ringes und einer Filmblase, Übergangsmechanismen und schließlich eine Deformation infolge der aufgeprägten Schubspannungen. Letztere ist durch die Ablösung einer Filmlamelle mit Ringwulst gekennzeichnet. Sie berichten von einer erstaunlichen Übereinstimmung mit den experimentell beobachteten Flüssigkeits-

strukturen bei größeren Dichteverhältnissen. Sie untersuchen außerdem den Einfluß der Ohnesorge-Zahl und können die bekannten Effekte identifizieren. Mit ihrer Studie steht eine umfangreiche numerische Datenbasis zur Verfügung, die wegen der kleinen Dichteverhältnisse für Hochdruckbedingungen interessant ist und die andererseits detaillierte Einblicke in die Abläufe der Zerfallsvorgänge ermöglicht.

In einer Parameterstudie mit über 3000 Einzelrechnungen untersucht Helenbrook (2001) die stationäre axialsymmetrische Verformung umströmter Tropfen. Er untersucht Dichteverhältnisse von  $\rho_d/\rho = 5$  und 50 bei  $Re < 200$  und berichtet von 3 typischen Tropfenformen: langgestreckt, gedrückt sowie rückseitig eingebault. Diese Formen klassifiziert er anhand der Kenngröße  $\rho_d/\rho(\mu/\mu_d)^2$  und der Kapillarzahl  $We/Re$ . Als zusammenfassendes Ergebnis gibt er einerseits den Verformungsgrad  $E_\infty$  als Funktion der Weber-Zahl an, mit der Ohnesorge-Zahl als Scharparameter, andererseits die Zerfallsgrenze  $We_c$  im On-We-Diagramm. Als Zerfallskriterium legt er das Auftreten einer Schwingungsinstabilität zugrunde.

Im Rahmen des DFG-Schwerpunktprogramms *Fluidzerstäubung und Sprühvorgänge* führt Hase (2001) dreidimensionale Berechnungen der Bewegung stark deformierter Tropfen durch. Ziel der Arbeit ist eine numerische Beschreibung der Vorgänge bei der Primärzerstäubung unmittelbar nach der Entstehung der Fluidfragmente. Unter Verwendung der Volume-of-Fluid (VOF) Methode und eines 500000 Kontrollvolumina umfassenden Rechnetzes gelingt ihm die Simulation abklingender Formschwingungen anfänglich stab- oder scheibenförmiger Tropfen. Er berichtet außerdem von starken Rückwirkungen der Formänderungen auf die Umströmung, die sich insbesondere in einem Verlust der Axialsymmetrie des Gasströmungsfeldes bemerkbar machen.

In einer Folgearbeit untersuchen Hase und Weigand (2004) die Verformungs- und Wärmeübergangsdynamik anfänglich kugelförmiger Tropfen bei sprunghafter aerodynamischer Beaufschlagung. Sie berichten von guter Übereinstimmung mit Literaturdaten. Die in Ab-

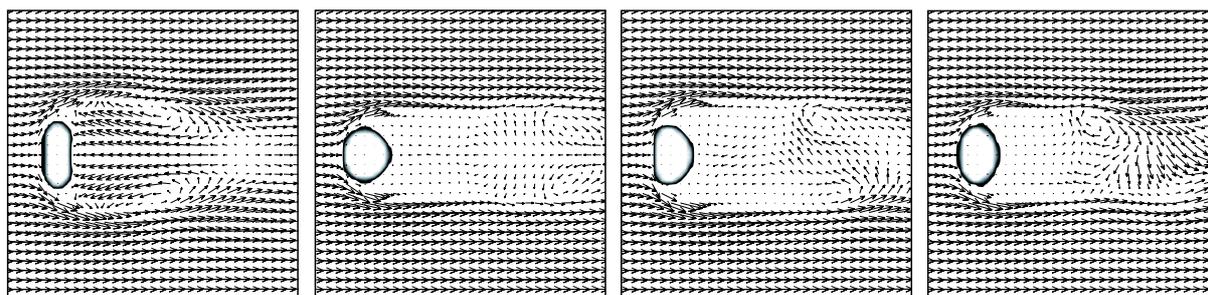


Abbildung 2.12: Berechnete Umströmung und Formschwingungen eines Tropfens bei  $We = 9.83$ ,  $On = 0.071$  und  $Re = 853$  (Hase und Weigand 2004)

bildung 2.12 dargestellte Entwicklung der Tropfenform umfaßt die Zustände maximaler Abflachung (Bild 1) und stationärer Deformation (Bild 4) und läßt außerdem eine ausgeprägte Asymmetrie und Instationarität des Strömungsnachlaufes erkennen.

Reichelt et al. (2002) untersuchen den Einfluß des Dichteverhältnisses auf den Blasenzerfall mithilfe der VOF-Methode. Die in Abbildung 2.13 dargestellten Zerfallssequenzen sind das Ergebnis einer numerischen Simulation auf einem Rechnetze mit 234000 Kontrollvolumina. Es lassen sich deutlich die qualitativen Merkmale des Zerfallsvorgangs er-

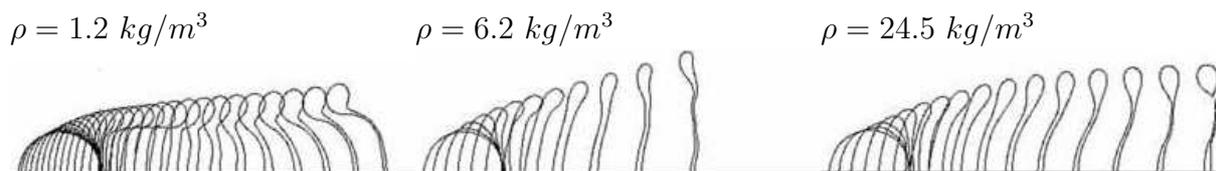


Abbildung 2.13: Numerische Simulation des Blasenzerfalls bei  $We = 21$ ,  $On = 0.013$ ,  $D_0 = 95 \mu m$  und  $\rho_d = 720 kg/m^3$  (Reichelt et al. 2002)

kennen (vgl. Abbildung 2.3). Zwar bleibt der Gesamtcharakter des Zerfallsvorgangs auch für zunehmende Gasdichten erhalten, die Parameterstudie zeigt jedoch einen deutlichen Einfluß des Dichteverhältnisses auf die Ausbildung der Ring- und Blasenstrukturen. Als weiteres Ergebnis der Studie läßt sich ein wesentlicher Einfluß der Turbulenzmodellierung auf die Simulationsergebnisse festhalten.

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß die wesentliche Schwierigkeit in der numerischen Auflösung der beweglichen Phasengrenze liegt. Dabei setzt gerade die Komplexität der Flüssigkeitsstrukturen in der Zerfallsphase den vorgestellten Verfahren eine Grenze. Wird das Rechennetz mitdeformiert, kommt es mit zunehmender Verformung zu stark deformierten Kontrollvolumina, so daß die Gefahr von Singularitäten steigt. Bei festem Rechennetz, wie z.B. bei der VOF-Methode, stellt die Auflösung kleinskaliger Strukturen eine Grenze dar. Aus diesen Gründen kann die schubspannungsgetriebene Ablösung von Flüssigkeit von keinem der Verfahren zuverlässig wiedergegeben werden. Inwieweit Grenzschichtströmungen an der Phasengrenze korrekt berücksichtigt werden, ist ebenfalls ungeklärt. Dabei spielt die Wirkung oberflächenaktiver Substanzen eine wichtige Rolle. Problematisch ist auch der bei  $Re = 200 - 300$  einsetzende Übergang zur voll dreidimensionalen und instationären Tropfenumströmung. Gerade bei technischen Gemischbildungsprozessen ist dieser Bereich mittlerer Reynolds-Zahlen wichtig.

## 2.6 Zielsetzung

Der dargestellte Abriß des Forschungsstandes zeigt, daß in der Vergangenheit sowohl experimentelle Studien wie auch theoretische Untersuchungen auf Basis analytischer Methoden zu einem tiefgehenden Verständnis der Tropfenverformung und des Tropfenzerfalls beigetragen haben. Die direkte numerische Simulation dieser Zweiphasenphänomene hat insbesondere in den letzten 10 bis 15 Jahren eine zunehmende Bedeutung erlangt. Wichtige Antriebe für diese Forschungsaktivitäten waren und sind die Entwicklung effizienter und emissionsarmer Verbrennungskraftmaschinen sowie die Auslegung von Prozessen der chemischen Verfahrenstechnik.

Obwohl die numerische Simulation von Zerstäubungs- und Gemischbildungsprozessen gerade in diesen Anwendungsfeldern stark an Bedeutung gewonnen hat, ist die Modellbeschreibung der Verformungs- und Zerfallsdynamik weitgehend auf dem Stand vor 10 bis 15 Jahren geblieben. Bis auf wenige Ausnahmen (z.B. Bartley et al. 2000) finden sich in der Literatur keine Neuentwicklungen, aus der verfügbaren experimentellen Datenbasis ist zudem nur wenig Material in die Entwicklung fortgeschrittener Modellbeschreibungen eingeflossen.

Es soll daher mit der vorliegenden Arbeit eine grundlegend überarbeitete Modellbeschreibung der Tropfendynamik bei aerodynamischer Beaufschlagung bereitgestellt werden. Zentrale Aspekte, die bei der Modellbildung und Validierung berücksichtigt werden sollen, sind:

- **Relativströmungsbedingungen:** Im Rahmen der Arbeit werden mäßige Geschwindigkeitsverhältnisse mit  $We \lesssim 10^3$  betrachtet. Dabei müssen die Mechanismen des Blasenzerfalls bis einschließlich des Scheibenzerfalls berücksichtigt werden. Tropfenzerfall bei hohen Relativgeschwindigkeiten wird nicht behandelt. Unberücksichtigt bleiben bei der Modellbildung der Einfluß extrem hoher Drücke ( $\rho_d/\rho \rightarrow 1$ ) und Verhältnisse nahe des kritischen Punktes ( $\sigma \rightarrow 0$ ). Da bewegte Tropfen in inhomogenen und turbulenten Strömungsfeldern betrachtet werden, muß von zeitlichen Variationen der Relativströmung während des Verformungs- und Zerfallsvorgangs ausgegangen werden.
- **Zeitverlauf des Zerfallsvorgangs:** Tropfenzerfall ist kein Punktereignis, wie z.B. die Interaktion mit einer Wand, und muß daher als Prozeß mit endlicher Zeitdauer beschrieben werden. Dies gilt für die Deformation sowie die Entstehung der Sekundärtropfen. Wichtig ist eine Auflösung der Zeitskalen des Zerfallsvorgangs, wobei diese mit den Zeitskalen der Tropfenbewegung und -Umströmung in Wechselwirkung treten können.
- **Kontinuierlicher Übergang der Zerfallsmechanismen:** Bei sprunghafter Beaufschlagung mit  $We_{0,c} < We_0 \lesssim 100$  sind verschiedene Zerfallsmechanismen mit deutlich unterschiedlichen zeitlichen und räumlichen Eigenschaften zu beobachten. Eine genaue Modellbeschreibung des Zerfallsvorgangs und der Produkteigenschaften kann nur anhand einer differenzierten Betrachtung der Mechanismen erreicht werden. Berücksichtigt werden soll – nach Möglichkeit – eine Abhängigkeit von den zentralen Kenngrößen  $We$  und  $On$ .
- **Kopplung von Tropfenverformung und Bewegung:** Die Deformation der Tropfen hat eine Modifikation der aerodynamischen Eigenschaften und damit des Bewegungsverhaltens zur Folge. Rückwirkend ist mit der Änderung der Relativgeschwindigkeit das Verformungsverhalten beeinflusst. Vernachlässigt werden kann die Rückwirkung dagegen bei Sprungbeaufschlagung in einem homogenen Strömungsfeld, bei vernachlässigbaren Reibungseinflüssen ( $On \ll 1$ ). In komplexen Strömungsfeldern muß von einer gegenseitigen Beeinflussung der Vorgänge ausgegangen werden.
- **Kopplung von Tropfenzerfall und Bewegung:** Mit der starken Querschnittszunahme während des Zerfallsvorgangs nehmen auch die Strömungskräfte auf den Tropfen stark zu, die Zerfallsprodukte haben nochmals stark geänderte aerodynamische Eigenschaften. Aufgrund der relativ schnellen Änderung der charakteristischen Längenmaße der flüssigen Phase kann es zu einer maßgeblichen Änderung der Struktur und Dynamik des Sprühstrahls kommen (vgl. Abbildung 1.4).

### 3 Grundlegende Betrachtungen

Bei der theoretischen Beschreibung tropfenbeladener Gasströmungen wird oft von kugelförmigen Tropfen ausgegangen. Diese Annahme ist bei geringen Größen und Relativgeschwindigkeiten der Tropfen gerechtfertigt und begründet sich mit der dominierenden Wirkung der Oberflächenspannung. In vielen natürlichen und technischen Prozessen kommt es jedoch mit zunehmender Intensität der Strömungskräfte zur Verformung der Tropfen, die bis zu ihrer Zerstörung führen kann. Wie in Abschnitt 2.1.1 angesprochen, gehen die Phänomene als Überlagerung verschiedener Vorgänge hervor, wie z.B. Verformungsströmungen infolge der aerodynamischen Normalspannungen oder Grenzschichtströmungen infolge der aerodynamischen Schubspannungen. Als Grundlage der Modellentwicklung in Kapitel 4 wird in Abschnitt 3.1 zunächst ein formaler Abriss der kontinuumsmechanischen Problemstellung gegeben. Ergänzt wird dieser in den Abschnitten 3.2 und 3.3 durch Kräfte-, Zeit- und Längenskalenanalysen, deren Ziel es ist mittels Abschätzung und Gegenüberstellung Informationen über die zeitlichen und räumlichen Wirkungsbereiche der Strömungsvorgänge zu gewinnen, um so zentrale Annahmen und Vereinfachungen zu begründen. Schließlich werden in Abschnitt 3.4 statistische Methoden zur Beschreibung der Größenverteilung von Zerfallsprodukten dargestellt.

#### 3.1 Fluidmechanische Grundgleichungen

Zur Beschreibung der Strömungsvorgänge innerhalb und außerhalb des Tropfens bietet sich eine Lagrangesche Betrachtungsweise auf Basis eines mitbewegten Bezugssystems an. Wie in Abbildung 3.1 verdeutlicht, erfolgt der Wechsel zur tropfenfesten Betrachtung mittels einer Translationsvorschrift, deren Zeitableitung eine kinematische Beziehung festlegt

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}^0 - \mathbf{r}_d^0, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{u}(t, \mathbf{r}^0) - \mathbf{u}_d(t). \quad (3.2)$$

Es beschreiben  $\mathbf{r}^0$  und  $\mathbf{u}$  die Position und Geschwindigkeit eines beliebigen Fluidpunktes  $P$  im Absolutsystem,  $\mathbf{r}$  und  $\mathbf{v}$  die Position und Geschwindigkeit relativ zum Bezugspunkt  $O^d$ , dessen Translationsbewegung durch  $\mathbf{r}_d^0$  und  $\mathbf{u}_d = d\mathbf{r}_d^0/dt$  gegeben ist.

Mit der Beschränkung auf mäßige Geschwindigkeiten und vernachlässigbare Dichteänderungen können die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen zugrundegelegt werden. Für die Relativströmung formuliert lauten diese

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{a} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (3.3)$$

wobei die substantielle Ableitung

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \quad (3.4)$$

Änderungen bezüglich des mitbewegten Systems beschreibt und die Erdbeschleunigung mit der Beschleunigung des Bezugspunktes in der Größe

$$\mathbf{a} = \left(1 - \frac{\rho}{\rho_d}\right) \mathbf{g} - \frac{d\mathbf{u}_d}{dt} \quad (3.5)$$

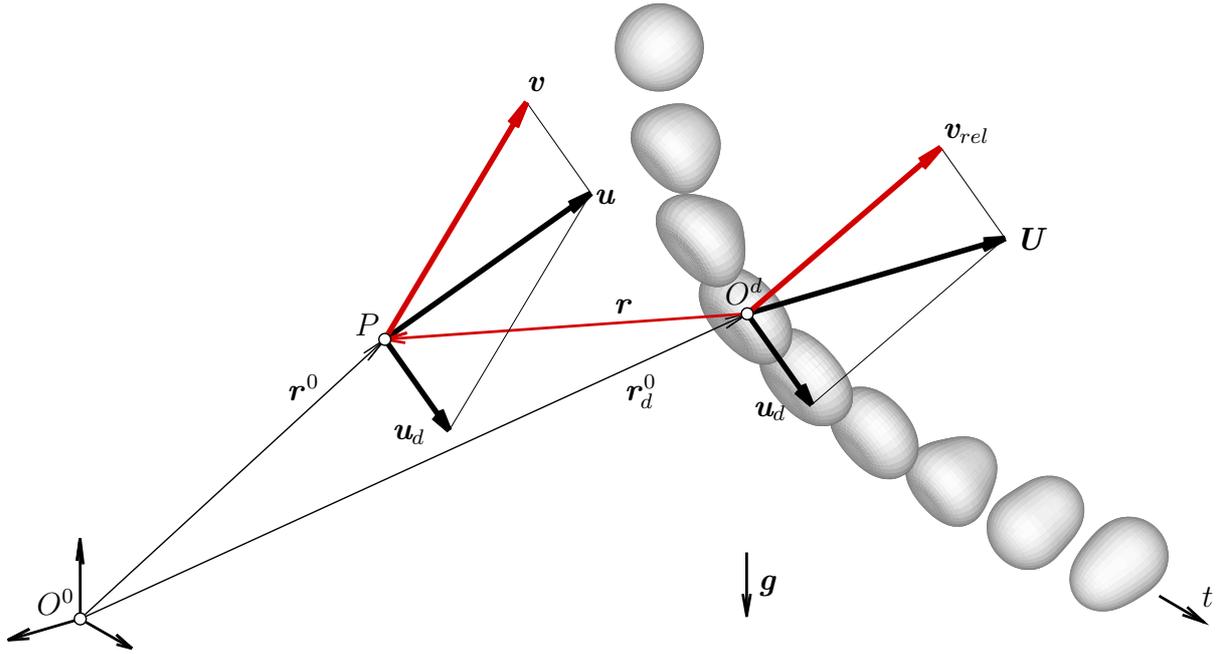


Abbildung 3.1: Relativkinematik bei Lagrangescher Betrachtungsweise, dargestellt am Beispiel eines Tropfens beim Durchfallen einer Querströmung

zusammengefaßt ist. Die Translation des Tropfens wirkt auf die Relativströmung daher wie eine aufgeprägte, zeitabhängige Massenkraft. Außerdem gilt die Kontinuitätsgleichung

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 . \quad (3.6)$$

Gleichungen 3.3 und 3.6 beschreiben die Strömungen außerhalb und innerhalb des Tropfens. Um diese über die als Diskontinuität betrachtete Phasengrenzfläche  $\mathbf{r}_s$  zu verknüpfen, werden kinematische und dynamische Übergangsbedingungen formuliert. Bei verschwindendem Massenübergang lauten diese (Scriven 1959; Richards 1994)

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v})_d , \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_s , \quad (3.7)$$

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n})_d + 2H\sigma\mathbf{n} - \nabla_s \sigma , \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_s , \quad (3.8)$$

wobei der Oberflächengradient  $\nabla_s = (\mathbf{I} - \mathbf{n}\mathbf{n}) \cdot \nabla$  mithilfe des Normalenvektors  $\mathbf{n}$  definiert wird und die mittlere Flächenkrümmung  $H$  über die lokalen Hauptkrümmungsradien  $R_1$  und  $R_2$  berechnet werden kann

$$2H = \nabla_s \cdot \mathbf{n} = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) . \quad (3.9)$$

Zur Unterscheidung ist der flüssige Phasenbereich hier mit dem Index  $d$  gekennzeichnet, ohne Index gilt ein Bezug zur Gasphase. Wenn notwendig, wird diese Konvention auch in den weiteren Ausführungen verwendet. Die Kinematik eines repräsentativen Oberflächenelementes  $dS$  ist in Abbildung 3.2 verdeutlicht. Die beidseitig anliegenden Spannungs-

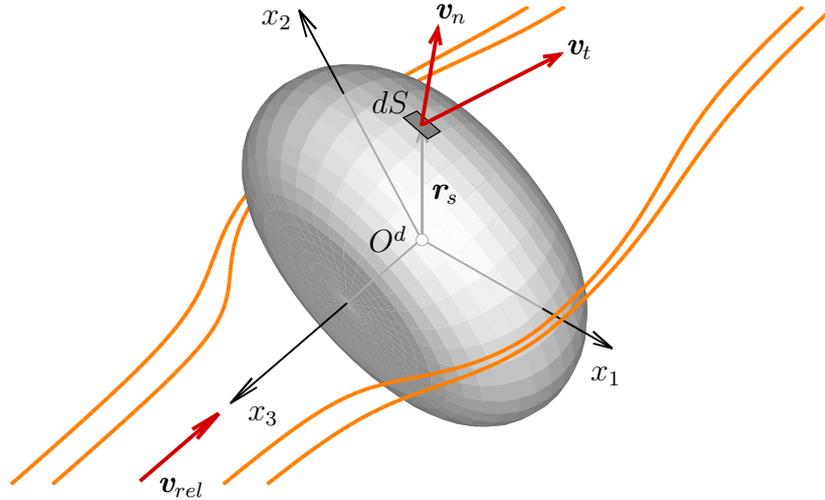


Abbildung 3.2: Gleichförmige Anströmung des Tropfens im Relativsystem

vektoren sind in der Übergangsbedingung 3.8 als Produktgrößen  $\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}$  formuliert, wobei  $\mathbf{T}$  den im jeweiligen Phasenbereich wirkenden Spannungstensor darstellt. Dieser ist mit dem Tensor der Deformationsgeschwindigkeiten

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T] \quad (3.10)$$

über die konstitutive Beziehung inkompressibler Newtonscher Fluide verknüpft

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E} . \quad (3.11)$$

Zusätzlich wirken an der Phasengrenze der flächennormal nach innen gerichtete Beitrag  $2H\sigma\mathbf{n}$  der Oberflächenspannung sowie ein tangentialer Beitrag  $\nabla_s \sigma$  infolge Variationen von  $\sigma$ . Obwohl letzterer von maßgeblicher Bedeutung sein kann - z.B. als Effekt oberflächenaktiver Substanzen (Clift et al. 1978; Stone und Leal 1990) - wird im Rahmen der weiteren analytischen Behandlung von konstantem Wert  $\sigma$  ausgegangen. Die Normalenkomponente der Übergangsbedingung 3.8 lautet

$$p - 2\mu\mathbf{n}\mathbf{n} : \mathbf{E} = (p - 2\mu\mathbf{n}\mathbf{n} : \mathbf{E})_d - 2H\sigma , \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_s . \quad (3.12)$$

Die deviatorischen Normalspannungen  $2\mu\mathbf{n}\mathbf{n} : \mathbf{E}$  (Chen et al. 2000) verschwinden im statischen Fall, womit sich die Bedingung zur bekannten Young-Laplace-Formel reduziert, in welcher die Druckdifferenz  $(p)_d - p$  über die Grenzfläche mit der Spannung  $2H\sigma$  verknüpft ist. Dieser Term, der überhaupt erst eine Erhaltung des Tropfens als geschlossenen Phasenbereich ermöglicht, wirkt bei aerodynamischer Beaufschlagung der auf der linken Seite von Gleichung 3.12 eingehenden aufgeprägten Drucklast entgegen. In Abschnitt 3.2 wird an diese Kräftebetrachtungen im Rahmen der Dimensionsanalyse zur Formulierung von Kennzahlen angeknüpft.

Um die Randbedingungen des Strömungsproblems festzulegen, bietet sich das Konzept der ungestörten Gasströmung an. Es wird hierzu das Geschwindigkeitsfeld betrachtet, welches vorliegen würde, wenn der Tropfen auf einen Massenpunkt ohne Rückwirkung auf die Gasströmung reduziert wäre. Analog zu Gleichung 3.2 gilt

$$\mathbf{V}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{U}(t, \mathbf{r}) - \mathbf{u}_d(t) . \quad (3.13)$$

In weiter Entfernung vom Tropfen ( $r \gg R_0$ ) stellen  $\mathbf{v} = \mathbf{V}$  und  $\mathbf{u} = \mathbf{U}$  die kinematische Randbedingung der Problemstellung dar. Wie aus Abbildung 3.1 hervorgeht, ist mit der Punktbetrachtung des Tropfens auch eine eindeutige Definition der Relativgeschwindigkeit möglich

$$\mathbf{v}_{rel}(t) = \mathbf{U}(t, \mathbf{r}_d^0) - \mathbf{u}_d(t) . \quad (3.14)$$

Diese gilt beispielsweise auch in Geschwindigkeitsfeldern mit Gradienten im Größenbereich des Tropfens. Die theoretischen Betrachtungen der vorliegenden Arbeit beschränken sich jedoch auf Tropfen, die deutlich kleiner sind als das differentielle Längenmaß der ungestörten Gasströmung. In diesem Fall, der in vielen natürlichen und technischen Prozessen von Bedeutung ist, kann von lokal homogenen Strömungsverhältnissen ausgegangen werden, so daß  $\mathbf{v}_{rel}$  für den Tropfen die Bedeutung einer Anströmgeschwindigkeit hat.

Diese Situation ist in Abbildung 3.2 skizziert. Ebenfalls dargestellt ist das tropfenfeste Bezugssystem, das als Grundlage der weiteren Betrachtungen verwendet wird. Bezüglich der Orientierung dieses Systems ist vereinbart, daß die  $x_3$ -Achse stets der Anströmung entgegengerichtet mitgeführt wird, die Drehlage der Achsen  $x_1$  und  $x_2$  wegen der Beschränkung auf rotationssymmetrische Verformungen jedoch beliebig ist. Eine Richtungsänderung von  $\mathbf{v}_{rel}$  ist im allgemeinen daher mit einer Rotationsbewegung des Koordinatensystems verknüpft, womit weitere Beschleunigungswirkungen auf die Relativströmung zu berücksichtigen wären. In der vorliegenden Arbeit wird jedoch vorausgesetzt, daß diese im Vergleich zu den Kraftbeiträgen in den Gleichungen 3.3 und 3.8 vernachlässigt werden können. Diese Idealisierung ist dann gerechtfertigt, wenn die Richtungsänderung von  $\mathbf{v}_{rel}$  auf Zeitskalen beschränkt ist, die deutlich größer sind als die Zeitskalen der Relativströmungsvorgänge. Eine quantitative Bewertung dieser Aussage wird in Abschnitt 3.3 vorgenommen.

Einen alternativen Ausgangspunkt der analytischen Behandlung stellt die aus den allgemeinen Impulsgleichungen  $\rho D\mathbf{v}/Dt = \rho\mathbf{a} + \nabla \cdot \mathbf{T}$  durch skalare Multiplikation mit  $\mathbf{v}$  hervorgehende Bilanzgleichung mechanischer Energien dar

$$\frac{\rho}{2} \frac{Dv^2}{Dt} = \rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{T}) - \mathbf{T} : \nabla \mathbf{v} , \quad (3.15)$$

wobei sich der letzte Term für ein inkompressibles Fluid auf die Dissipation reduziert. Diese berechnet sich zu

$$\Phi = 2\mu \mathbf{E} : \mathbf{E} . \quad (3.16)$$

Entsprechend kann über Gleichungen 3.7 und 3.8 eine Verknüpfung der Leistungsbeiträge *innerer* und *äußerer* Flächenkräfte erreicht werden. Unter Berücksichtigung dieser Beziehung und bei Vernachlässigung des Terms  $\nabla_s \sigma$  führt die Integration von Gleichung 3.15 über das Tropfenvolumen  $V$  auf die Energiebilanz

$$\frac{\rho_d}{2} \frac{d}{dt} \int_V v^2 dV + \sigma \frac{dS}{dt} = \oint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dS - \int_V \Phi dV . \quad (3.17)$$

Deren linke Seite umfaßt die zeitlichen Änderungen der kinetischen Energie der Relativströmung und der potentiellen Energie der Tropfenoberfläche  $S$ , wogegen auf der rechten

Seite die Leistung der aufgeprägten Oberflächenkräfte sowie die gesamte Dissipationsleistung eingehen. Der Integralbeitrag des Terms  $\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}$  entfällt aufgrund der Bewegung des Bezugspunktes  $O^d$  mit dem momentanen Massenschwerpunkt.

Das Bewegungsgesetz des Tropfens kann in gleicher Weise als Integral der allgemeinen Impulsgleichungen formuliert werden

$$m_d \frac{d\mathbf{u}_d}{dt} = \oint_S \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dS + m_d \left(1 - \frac{\rho}{\rho_d}\right) \mathbf{g}, \quad (3.18)$$

wobei das Oberflächenintegral die resultierende Strömungskraft  $\mathbf{F}_D$  auf den Tropfen beschreibt.

### 3.2 Dimensionslose Kennzahlen

Anhand der Betrachtungen in Abschnitt 3.1 wird deutlich, daß das Basisproblem des aerodynamisch beaufschlagten Tropfens von den 8 physikalischen Einflußgrößen  $\rho$ ,  $\rho_d$ ,  $\mu$ ,  $\mu_d$ ,  $v_{rel}$ ,  $a$ ,  $\sigma$  und  $D_0$  abhängt. Nach dem  $\pi$ -Theorem von Buckingham (Zierep 1991) sind daher 5 unabhängige Kennzahlen zu erwarten. Um deren Bedeutung im einzelnen aufzuzeigen, werden sie im folgenden in Anlehnung an Hinze (1955) als Verhältnisse beteiligter Kraftwirkungen eingeführt. Als destabilisierende Effekte sollen dabei die an der Tropfenoberfläche angreifenden Spannungsverteilungen sowie die Beschleunigung der Phasengrenzfläche berücksichtigt werden. Verformung und Zerfall entgegen wirken die Oberflächenspannung und die tropfeninternen Reibungskräfte.

Die Weber-Zahl charakterisiert das Verhältnis der aerodynamischen Druckkräfte zur Wirkung der Oberflächenspannung

$$\text{We} = \frac{\rho v_{rel}^2 D_0}{\sigma} \sim \frac{\Delta p_s^* D_0}{\sigma}. \quad (3.19)$$

Bei dieser Definition wird der aufgeprägte Druckabfall  $\Delta p_s^*$  entlang der Oberfläche mit der Überhöhung des statischen Druckes am vorderen Staupunkt abgeschätzt. Entsprechend läßt sich das Verhältnis der aerodynamischen Schubspannungen zur Wirkung der Oberflächenspannung definieren. Dieses kann bei laminarer Umströmung des Tropfens im Grenzschichtfall auf eine Kombination der Reynolds-Zahl und der Weber-Zahl zurückgeführt werden. Der Zusammenhang

$$\text{WeRe}^{-0.5} = \frac{\sqrt{\rho \mu D_0 v_{rel}^3}}{\sigma} \sim \frac{\tau_s^* D_0}{\sigma}, \quad \text{Re} \gg 1 \quad (3.20)$$

wird deutlich, wenn die aufgeprägte Schubspannung mittels  $\tau_s^* \sim \mu v_{rel}/\delta^*$  und die Dicke der Strömungsgrenzschicht mittels  $\delta^*/D_0 \sim \text{Re}^{-0.5}$  (Zierep 1991) abgeschätzt wird. Die Reynolds-Zahl

$$\text{Re} = \frac{\rho v_{rel} D_0}{\mu} \quad (3.21)$$

beschreibt den Charakter der Tropfenumströmung und bestimmt so die Spannungsverteilung auf der Oberfläche. Für das Verhältnis der aufgeprägten Spannungskomponenten gilt

bei schleichender Umströmung ( $\text{Re} \ll 1$ ) die Beziehung  $\Delta p_s^*/\tau_s^* \sim \text{Re}$ , bei Grenzschichtströmung ( $\text{Re} \gg 1$ ) dagegen  $\Delta p_s^*/\tau_s^* \sim \sqrt{\text{Re}}$ .

Die resultierende Strömungskraft auf den Tropfen ist in dimensionsloser Darstellung durch den aerodynamischen Widerstandsbeiwert gegeben

$$c_D = \frac{F_D}{\frac{\rho}{2} v_{rel}^2 \frac{\pi}{4} D_0^2}, \quad (3.22)$$

wobei als Bezugsfläche oft auch die Querschnittsfläche  $\pi D^2/4$  des verformten Tropfens verwendet wird. Als Bond-Zahl, bzw. Eötvös-Zahl bei frei fallenden Tropfen, wird das Verhältnis der aufgeprägten Beschleunigungskräfte zu den Oberflächenspannungskräften bezeichnet

$$\text{Bo} = \frac{\rho_d a D_0^2}{\sigma}, \quad \text{Eo} = \frac{(\rho_d - \rho) g D_0^2}{\sigma}. \quad (3.23)$$

Die Kennzahlen sind über das Bewegungsgesetz 3.18 und Gleichung 3.22 jeweils auch als Kombinationsgröße  $3/4 c_D \text{We}$  darstellbar, so daß wegen der nur schwachen Variation von  $c_D$  im Bereich  $10^2 < \text{Re} < 10^5$  näherungsweise  $\text{Bo} \sim \text{We}$  bzw.  $\text{Eo} \sim \text{We}$  gilt.

Entgegen einer Formänderung des Tropfens wirken neben der Oberflächenspannung jedoch auch die in der Tropfenflüssigkeit induzierten Reibungskräfte, zu deren Abschätzung näher auf die Dynamik der tropfeninternen Strömung eingegangen werden muß. Es soll hierzu die Abflachung und Querdehnung des Tropfens bei sprunghaft einsetzender Umströmung betrachtet werden, wobei den aufgeprägten Druckkräften im ersten Moment ausschließlich die Massenträgheit der Flüssigkeit entgegenwirkt. Reibungskräfte beschränken sich auf eine dünne Flüssigkeitsgrenzschicht an der Oberfläche, die Oberflächenspannung wirkt aufgrund geringer Deformation noch homogen. In der Flüssigkeit gilt quer zur Anströmung folgende Größenordnungsbeziehung (siehe auch Abbildung 2.1, links)

$$\rho_d \frac{Dv}{Dt} \approx -|\nabla p| \sim \frac{\rho v_{rel}^2}{D_0}. \quad (3.24)$$

Die Integration dieser Beziehung ermöglicht die Definition einer charakteristischen Verformungszeit

$$t^* = \sqrt{\frac{\rho_d}{\rho} \frac{D_0}{v_{rel}}}, \quad (3.25)$$

nach der ein Fluidelement im Tropfen bei konstant gehaltener Beschleunigung  $Dv/Dt$  eine Strecke von der Größe des Tropfendurchmessers zurücklegen würde (vgl. Körner 1972). Aus der Definition folgt weiter eine charakteristische Geschwindigkeit

$$v^* = \int^{t^*} \frac{Dv}{Dt} dt = \sqrt{\frac{\rho}{\rho_d}} v_{rel}. \quad (3.26)$$

Mit zunehmender Geschwindigkeit der Verformungsströmung steigt auch die Intensität der Reibungskräfte in der Flüssigkeit an. Wird deren Größenordnung mithilfe der Beziehung  $\mu_d \nabla^2 v \sim \mu_d v^*/D_0^2$  abgeschätzt, kann die Reynolds-Zahl der Verformungsströmung wie folgt definiert werden (Hallmann 1994; Aalburg et al. 2002)

$$\text{Re}_{def} = \frac{\rho_d v^* D_0}{\mu_d} = \frac{v_{rel} D_0}{\mu_d} \sqrt{\rho \rho_d} = \text{Re} \frac{\mu}{\mu_d} \sqrt{\frac{\rho_d}{\rho}}. \quad (3.27)$$

Zur Charakterisierung des Viskositätseinflusses hat sich in der Praxis jedoch die von Hinze (1955) vorgeschlagene Ohnesorge-Zahl durchgesetzt. Diese ergibt sich bei Eliminierung von  $v_{rel}$  als

$$\text{On} = \frac{\sqrt{\text{We}}}{\text{Re}_{def}} = \frac{\mu_d}{\sqrt{\rho_d D_0 \sigma}} . \quad (3.28)$$

In der Literatur finden sich alternativ auch die Laplace-Zahl  $\text{La} = \text{On}^{-2}$  oder die mit den Stoffdaten der Gasphase gebildete Ohnesorge-Zahl

$$\text{On}_g = \frac{\sqrt{\text{We}}}{\text{Re}} = \frac{\mu}{\sqrt{\rho D_0 \sigma}} = \text{On} \frac{\mu}{\mu_d} \sqrt{\frac{\rho_d}{\rho}} . \quad (3.29)$$

Mit dieser sind die Isolinien im  $\text{We}-\text{WeRe}^{-0.5}$ -Diagramm (Abbildung 2.8) über die folgende Beziehung festgelegt

$$\text{WeRe}^{-0.5} = \text{We}^{0.75} \text{On}_g^{0.5} . \quad (3.30)$$

Wie eingangs des Abschnittes erwähnt, werden zur vollständigen Parametrisierung des Basisproblems 5 unabhängige Kennzahlen ausgewählt. Aufgrund der mit Gleichung 3.28 gegebenen Abhängigkeit können von  $\text{We}$ ,  $\text{Re}_{def}$  und  $\text{On}$  dabei nur zwei der Kennzahlen verwendet werden. Werden beispielsweise  $\text{We}$ ,  $\text{On}$ ,  $\text{Re}$  und  $\text{Bo}$  als Basiskombination festgelegt, so bleibt entweder  $\mu_d/\mu$  oder  $\rho_d/\rho$  als freier Parameter wählbar. Das jeweils andere Stoffdatenverhältnis ist über die Gleichungen 3.27 und 3.28 festgelegt. Bei Erweiterung der Problemstellung, z.B. um Tropfenverdunstung oder instationäre Variationen der Umströmung, ist mit den zusätzlichen physikalischen Einflußgrößen auch eine Erweiterung der dimensionslosen Formulierung notwendig.

Es sei abschließend angemerkt, daß die dargestellte Methode der *Fractional Analysis* eine direkte physikalische Interpretation der Kenngrößen ermöglicht und so wesentliche Vorteile gegenüber der formalen Dimensionsanalyse hat (Zierep 1991). Letztere führt auf Kennzahlen, die im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht verwendet werden, wie z.B. die Reynolds-Zahl  $\text{Re}_d = \rho_d v_{rel} D_0 / \mu_d$  (Häßler 1972) oder die Kapillanzahl  $\text{We}/\text{Re} = \mu v_{rel} / \sigma$  (Clift et al. 1978), deren Nachteil jedoch ist, keinen direkten Bezug zu physikalischen Kraftwirkungen zu haben. So ist  $v_{rel}$  keine charakteristische Strömungsgeschwindigkeit innerhalb des Tropfens. Gleichmaßen ist bei Grenzschichtströmung  $l = D_0/\text{Re}$  kein geeignetes Längenmaß um den Geschwindigkeitsgradient der Außenströmung zur Tropfenoberfläche hin zu beschreiben. Dagegen charakterisieren  $\text{Re}_{def}$  und  $\text{WeRe}^{-0.5}$  im Rahmen der verwendeten Modellvorstellungen tatsächlich wirkende Kräfteverhältnisse und – wie im folgenden Abschnitt angesprochen – Verhältnisse charakteristischer Zeiten.

### 3.3 Charakteristische Größen

Die Betrachtung der Tropfendeformation und des Tropfenzerfalls als Überlagerung verschiedenartiger Strömungsvorgänge wurde bereits in Kapitel 2 angesprochen. Um im folgenden quantitative Aussagen über die räumliche und zeitliche Überlagerung zu ermöglichen, werden die Geschwindigkeits-, Zeit- und Längenmaße der in Abbildung 2.1 skizzierten Modellmechanismen zunächst bestimmt und unter Berücksichtigung der in Tabelle 3.1 zusammengestellten Stoffdatenkenngößen verglichen.

	$\frac{\rho_d}{\rho}$	$\frac{\mu_d}{\mu}$	$\frac{\mu}{\mu_d} \sqrt{\frac{\rho_d}{\rho}}$	$\sqrt[3]{\frac{\mu}{\mu_d} \frac{\rho}{\rho_d}}$
Wasser/Luft, atmosphärisch	850	50	0.6	0.03
Glyzerin/Luft, atmosphärisch	1050	20000	0.002	0.004
Tetradekan/Luft, $T_d=300 - 600 K$ , $p=2 MPa$ , $T=1000 K$	140 - 90	40 - 4	0.3 - 2.4	0.06 - 0.1

Tabelle 3.1: Stoffdatenkenngößen bei der technischen Gemischaufbereitung

Bereits eingeführt wurden mit den Gleichungen 3.25 und 3.26 die charakteristische Zeit  $t^*$  und Geschwindigkeit  $v^*$  der reibungsfreien Verformungsströmung infolge der aerodynamischen Druckverteilung auf der Oberfläche. Aufgrund der großen Dichteverhältnisse ist  $v^*$  um mindestens eine Größenordnung kleiner als die Anströmgeschwindigkeit  $v_{rel}$ . Entsprechend ist  $t^*$  größer als das Zeitmaß der Tropfenströmung

$$t_{aero}^* = \frac{D_0}{v_{rel}} . \quad (3.31)$$

Instationäre Vorgänge bei der Umströmung laufen somit wesentlich schneller ab. Beispiele hierfür sind die Ablösung der Strömungsgrenzschicht bei sprunghaft einsetzender Umströmung mit  $Re \gg 1$ , ein Vorgang der nach Schlichting (1979) bei der Kugelumströmung bereits bei  $t = 0.2 t_{aero}^*$  einsetzt, oder die periodischen Instabilitäten im Nachlauf stationär umströmter Kugeln, die nach Clift et al. (1978) mit Schwingungsdauern zwischen  $0.5 t_{aero}^*$  und  $10 t_{aero}^*$  ablaufen. Wegen  $t_{aero}^* \ll t^*$  können zeitliche Schwankungen der aerodynamischen Spannungen den Verformungsprozeß jedoch nur im zeitlichen Mittel beeinflussen. Es kann daher von einem quasistationären Verhalten und von einer axialsymmetrischen Kraftwirkung der Umströmung ausgegangen werden.

Wird mit zunehmender Geschwindigkeit der Verformungsströmung die Reibung zur dominierenden Kraftwirkung, läßt sich durch Integration der in diesem Fall gültigen Größenordnungsbeziehung

$$\mu_d \nabla^2 v \approx |\nabla p| \sim \frac{\rho v_{rel}^2}{D_0} \quad (3.32)$$

unter Berücksichtigung von  $\nabla^2 v \sim v/D_0^2$  eine weitere charakteristische Zeit und Geschwindigkeit definieren

$$t_\mu^* = \frac{\mu_d}{\rho v_{rel}^2} , \quad (3.33)$$

$$v_\mu^* = \frac{\rho v_{rel}^2 D_0}{\mu_d} . \quad (3.34)$$

Bereits Hinze (1948b) hat die Zeitmaße  $t^*$  und  $t_\mu^*$  zur Charakterisierung der hydrodynamischen Reaktionskräfte Massenträgheit und Reibung verwendet. Verdeutlicht ist dies im Zusammenhang  $t^*/t_\mu^* = Re_{def}$ , nach welchem die Kennzahl als Verhältnis der Zeitmaße zweier konkurrierender Modellprozesse interpretiert werden kann. Für  $Re_{def} \ll 1$  wirken dem aufgeprägten Druckgradienten allein die Reibungskräfte in der Flüssigkeit entgegen, d.h. es liegt eine schleichende Verformungsströmung mit dem Zeitmaß  $t_\mu^*$  vor. Dagegen stehen für  $Re_{def} \gg 1$  die Trägheitskräfte in dynamischem Gleichgewicht mit dem Druckgradienten, wobei eine reibungsfreie Verformungsströmung mit dem Zeitmaß  $t^*$  vorliegt.

Mit Gleichung 3.27 und den in Tabelle 3.1 angegebenen Zahlenwerten wird weiterhin deutlich, daß  $Re$  und  $Re_{def}$  für normalviskose Tropfenfluide etwa von der gleichen Größenordnung sind. In diesem Fall ist für  $Re \gg 1$ , also Umströmung mit ausgebildeter Reibungsgrenzschicht, auch eine Dominanz der Trägheitskräfte in der Verformungsströmung zu erwarten. Reibungskräfte in der Flüssigkeit sind dabei auf eine dünne Oberflächenschicht begrenzt.

Neben den Trägheits- und Reibungskräften muß die an der Phasengrenze wirkende Oberflächenspannung als dritte Reaktionswirkung berücksichtigt werden. Im Zusammenspiel mit den Trägheitskräften ist diese für das Phänomen der Formschwingungen verantwortlich. Bei vernachlässigbaren Reibungskräften läßt sich aus der Größenordnungsbeziehung

$$\rho_d \frac{Dv}{Dt} \sim \frac{\sigma}{D_0^2} \quad (3.35)$$

analog der Vorgehensweise zur Definition von  $t^*$  eine charakteristische Zeit freier Formschwingungen ableiten

$$t_\sigma^* = \sqrt{\frac{D_0^3 \rho_d}{\sigma}}. \quad (3.36)$$

Mit der Verwendung von  $D_0$  als Längenmaß der Oberflächenkrümmung ist allein der Grundmode periodischer Streck-Stauch-Verformungen berücksichtigt. In der Praxis treten jedoch auch höhere Schwingungsmoden mit kleineren Längenmaßen auf (vgl. Abbildung 2.11), die entsprechend durch kleinere Zeitmaße gekennzeichnet sind. Gleichung 3.36 stellt daher eine Obergrenze der Zeitmaße freier Formschwingungen dar.

Die Zeitmaße  $t^*$  und  $t_\sigma^*$  charakterisieren die Wechselwirkung von Oberflächenkräften (aerodynamische Druckkräfte und Oberflächenspannung) mit der Massenträgheit der Flüssigkeit. Die Bedeutung der Weber-Zahl geht aus dem Zusammenhang  $t^*/t_\sigma^* = We^{-0.5}$  hervor. Für  $We \ll 1$  wirkt den Trägheitskräften allein der Rückstelleffekt der Oberflächenspannung entgegen. Der Tropfen führt freie Formschwingungen mit dem Zeitmaß  $t_\sigma^* \ll t^*$  aus, d.h. die Deformation durch aerodynamische Kräfte läuft somit wesentlich langsamer ab. Für  $We \gg 1$  dominiert die Deformation mit dem Zeitmaß  $t^*$ , da der Rückstelleffekt der Oberflächenspannung mit  $t_\sigma^* \gg t^*$  deutlich langsamer einsetzt. Periodische Formänderungen sind für diesen Bereich der Weber-Zahl tatsächlich nicht mehr möglich, da der Tropfen instabil ist und zerfällt.

Im Zusammenhang mit Formschwingungen ist insbesondere auch die Wechselwirkung mit periodischen Instationaritäten der Tropfenumströmung von Interesse. Grundsätzlich wäre zu erwarten, daß eine alternierende Druckverteilung im Bereich  $We \sim 1$  höhere Schwingungsmoden anregt. Dies kann jedoch nur im Rahmen einer Normalmodenanalyse geprüft werden (vgl. Abschnitt 4.1.1). Für den Grundmode ergibt sich der Zusammenhang  $t_\sigma^*/t_{aero}^* = \sqrt{\rho_d/\rho We}$ , womit deutlich wird, daß es im Bereich  $We \ll 1$  trotz großer Dichteverhältnisse zu einer Annäherung der Zeitmaße kommen kann. Da die aerodynamischen Kräfte hierbei jedoch nur sehr schwach im Vergleich zu den Oberflächenspannungskräften auftreten, ist eine Anregung von Formschwingungen und Resonanzerscheinungen unwahrscheinlich.

Es wurde bisher allein die deformierende Wirkung der aufgeprägten Druckverteilung berücksichtigt. Infolge der Schubbelastung kommt es allerdings auch zu einer Tangentialbewegung der Phasengrenze. Bei sprunghaft einsetzender Umströmung sind zwei grundle-

gend unterschiedliche Strömungsformen im Tropfen denkbar: Grenzschichtströmung, die auf den oberflächennahen Bereich der Flüssigkeit begrenzt ist und Wirbelströmung, die das gesamte Innere des Tropfens erfaßt. Unter der Annahme ausgebildeter Grenzschichtströmungen läßt sich eine charakteristische Oberflächengeschwindigkeit  $v_s^*$  über ein vereinfachtes tangenciales Kräftegleichgewicht festlegen

$$\mu \frac{v_{rel}}{\delta} \approx \mu_d \frac{v_s^*}{\delta_d}, \quad v_s^* \ll v_{rel}. \quad (3.37)$$

Mit der Einschränkung auf  $Re \gg 1$  und  $Re_s \gg 1$  werden die Größenordnungsbeziehungen  $\delta \sim D_0 Re^{-0.5}$  und  $\delta_d \sim D_0 Re_s^{-0.5}$  verwendet (Zierep 1991), wobei die Reynolds-Zahl  $Re_s$  der Grenzschichtströmung in der Flüssigkeit mit der charakteristischen Geschwindigkeit  $v_s^*$  gebildet wird. Es ergibt sich folgende Definition

$$v_s^* = \sqrt[3]{\frac{\mu}{\mu_d} \frac{\rho}{\rho_d}} v_{rel} = \sqrt[3]{\frac{\mu}{\mu_d} \sqrt{\frac{\rho_d}{\rho}}} v^*. \quad (3.38)$$

Einen identischen Ausdruck erhalten Taylor (1949) und Ranger und Nicholls (1969) für die Oberflächengeschwindigkeit am Tropfenäquator mit dem Kármánschen Integralverfahren. Die Stoffdatenkenngößen in Gleichung 3.38 haben somit die physikalische Bedeutung dimensionsloser Oberflächengeschwindigkeiten  $v_s^*/v_{rel}$  bzw.  $v_s^*/v^*$ . Mit den in Tabelle 3.1 angegebenen Werten ist erkennbar, daß  $v_s^*$  und  $v^*$  für normalviskose Tropfenfluide von der gleichen Größenordnung sind. Für hochviskose Glycerintropfen ist  $v_s^*$  dagegen um eine Größenordnung kleiner. Es zeigt sich weiter, daß  $v_s^*$  für normalviskose Tropfenfluide um Größenordnungen kleiner ist als  $v_{rel}$ . Ein Vergleich mit numerischen Lösungen (z.B. Clift et al. 1978, S. 128) zeigt, daß Gleichung 3.38 auch für niedrigere Reynolds-Zahlen eine sehr gute Abschätzung der Oberflächengeschwindigkeit darstellt.

Wie in Abschnitt 2.5 angesprochen, haben oberflächenaktive Substanzen, die in technischen Zweiphasensystemen immer vorhanden sind, einen maßgeblichen Einfluß auf die tangentialen Strömungsvorgänge an der Tropfenoberfläche. Dies spiegelt sich in der z.T. beträchtlichen Diskrepanz berechneter und gemessener Oberflächengeschwindigkeiten und  $c_D$ -Werte wider (Clift et al. 1978). Als grundlegende Wirkungsweise gilt der Oberflächentransport dieser Substanzen, der zu einem stromabwärts gerichteten Gefälle der Oberflächenspannung führt. Über den Term  $\nabla_s \sigma$  in Gleichung 3.8 werden Tangentialspannungen induziert, die den aerodynamischen Spannungen entgegenwirken und deren Wirkung abschwächen. Radiale Konvektionsströmungen infolge Verdunstung führen zu einer weiteren Reduktion der aufgeprägten Kraftwirkungen. Beide Mechanismen werden von Leppinen et al. (1996a) systematisch anhand numerischer Simulationen der Tropfenverformung untersucht.

Wie schnell sich die quasistationäre Grenzschicht in der Flüssigkeit nach dem Einsetzen der Umströmung ausbildet, wird durch die charakteristische Zeit  $t_\delta^*$  beschrieben. Unter Verwendung der Größenordnungsbeziehung  $\delta_d(t) \sim \sqrt{\nu_d t}$  für das Dickenwachstum (Zierep 1991) ist der Übergang zur quasistationären Grenzschicht  $\delta_d \sim D_0 Re_s^{-0.5}$  festgelegt durch

$$\sqrt{\nu_d t_\delta^*} = \frac{D_0}{\sqrt{Re_s}}, \quad Re_s \gg 1, \quad (3.39)$$

womit sich folgende Definition ergibt

$$t_\delta^* = \sqrt[3]{\frac{\mu_d \rho_d}{\mu \rho} \frac{D_0}{v_{rel}}} . \quad (3.40)$$

Auf Basis eines verfeinerten Grenzschichtmodells berechnet Ranger (1972) ähnliche Zeitmaße, Borisov et al. (1981) geben ein Zeitmaß  $t_\delta^* = 0.36 t^*$  an. Die Proportionalität  $t_\delta^* \sim t^*$  ergibt sich auch aus Gleichung 3.40 mit den in Tabelle 3.1 für normalviskose Tropfenfluide zusammengestellten Stoffdatenkenngößen. Verformung durch aerodynamische Druckkräfte und Grenzschichtbildung liegen somit ähnliche Zeitskalen zugrunde, für hochviskose Tropfenfluide ist  $t^*$  dagegen eine Größenordnung kleiner als  $t_\delta^*$ .

Die Annahme einer ausgebildeten Flüssigkeitsgrenzschicht mit  $\delta_d \ll D_0$  ist allerdings nur bei hohen Anströmgeschwindigkeiten zulässig. Die von Chou et al. (1997) bei mäßigen Geschwindigkeiten im Bereich  $125 < We < 375$  durchgeführte Studie läßt vermuten, daß die Grenzschicht tatsächlich bis in den Bereich  $\delta_d \approx 0.09 D_0$  anwächst. Im eigentlichen Sinn handelt es sich somit nicht mehr um eine Grenzschicht. Die Untersuchungen, die aus Messungen der mittleren Sekundärtropfengröße des Scheibenzerfalls über den Zusammenhang  $D_{32} \sim \delta_d$  auf die Grenzschichtdicke schließen (vgl. Abbildung 2.1, mitte), bestätigen zwar die Abhängigkeit  $\delta_d(t) \sim \sqrt{\nu_d t}$  für das Dickenwachstum, ermitteln den Übergang zum quasistationären Verhalten jedoch bei einer Zeit  $t_\delta^* = 0.002 t_\zeta^*$ . Das Zeitmaß  $t_\zeta^*$  charakterisiert hierbei die Ausbildung einer Wirbelströmungen im gesamten Tropfen, was gleichbedeutend dem diffusiven Transport von Wirbelstärke  $\zeta = \nabla \times \mathbf{v}$  von der schubspannungsbeaufschlagten Oberfläche ins Tropfeninnere ist. Für diesen Vorgang ergibt sich die Definition

$$t_\zeta^* = \frac{D_0^2 \rho_d}{\mu_d} . \quad (3.41)$$

Die Zusammenhänge  $t^*/t_\zeta^* = Re_{def}^{-1}$  und  $t_\sigma^*/t_\zeta^* = On$  verdeutlichen, daß Tropfenverformung bei vernachlässigbaren Reibungseffekten ( $Re_{def} \ll 1$ ,  $On \ll 1$ ) wesentlich schneller abläuft als die Ausbildung einer internen Wirbelströmung. Wie numerische Simulationen von Haywood et al. (1994) und Helenbrook und Edwards (2002) zeigen, kann eine Wirbelströmung jedoch insbesondere periodische Verformungen (starke Dämpfung) und stationäre Verformungszustände (gestreckte anstelle abgeflachter Tropfen) beeinflussen. Der Zusammenhang  $t_\mu^*/t_\zeta^* = Re_{def}^{-2}$  unterstreicht, daß die Ausbildung der Wirbelströmung wesentlich schneller abläuft als die Tropfenverformung bei dominierenden Reibungseffekten. Die Simulationsrechnungen von Leppinen et al. (1996b) lassen erkennen, daß Wirbelströmungen im Tropfen wegen der bereits angesprochenen Wirkung oberflächenaktiver Verunreinigungen gehemmt werden, bei Verdunstung infolge der radialen Konvektionsströmung sogar vollständig unterbunden werden können.

Schließlich findet aufgrund der resultierenden Kraftwirkung der Strömungskräfte auch eine Beschleunigung des Tropfens statt. Mit der einhergehenden Abnahme der Relativgeschwindigkeit verringern sich auch die aerodynamischen Kräfte auf der Tropfenoberfläche. Das Zeitmaß  $t_v^*$  dieses Abklingvorgangs kann aus einem vereinfachten Bewegungsgesetz abgeleitet werden, welches sich mit der Definition des aerodynamischen Widerstandsbeiwertes nach Gleichung 3.22 wie folgt ergibt

$$m_d \frac{du_d}{dt} = \frac{\pi}{8} D_0^2 \rho c_D v_{rel}^2 . \quad (3.42)$$

Für  $Re \gg 1$  gilt allgemein  $c_D \sim 1$ . Bei geradliniger Bewegung und konstanter Gasgeschwindigkeit ergibt die Integration

$$\frac{1}{v_{rel}} - \frac{1}{v_{rel,0}} = \frac{3}{4} \frac{\rho}{\rho_d} \frac{c_D}{D_0} t \quad (3.43)$$

womit eine charakteristische Zeit

$$t_v^* = \frac{4}{3} \frac{\rho_d}{\rho} \frac{D_0}{c_D v_{rel,0}} \quad (3.44)$$

festgelegt werden kann, nach welcher die Relativgeschwindigkeit auf die Hälfte des Anfangswertes  $v_{rel,0}$  abgefallen ist. Der für  $c_D \sim 1$  gültige Zusammenhang  $t^*/t_v^* \sim \sqrt{\rho/\rho_d}$  verdeutlicht, daß mäßige Tropfenverformungen wesentlich schneller ablaufen als die Tropfenbewegung, beide Vorgänge daher als entkoppelt angesehen werden können. Mit abnehmendem Dichteverhältnis, also für hohe Drücke, kann es dagegen zu einer Annäherung der Zeitmaße und damit zu einer Kopplung von Verformung und Beschleunigung der Tropfen kommen. Beim Tropfenzerfall findet diese Kopplung infolge der starken Querdeformation der Tropfen und dem einhergehenden Anstieg des Strömungswiderstandes statt, nach Hsiang und Faeth (1995) um etwa eine Größenordnung.

Analog zu Gleichung 3.44 kann auch für schleichende Umströmung des Tropfens ein Zeitmaß der Beschleunigung definiert werden. Bei Zugrundelegung des Stokeschen Widerstandsgesetzes (Zierep 1991) folgt

$$t_{v,\mu}^* = \frac{\rho_d D_0^2}{18 \mu}, \quad Re \lesssim 1. \quad (3.45)$$

Diese, in der Literatur auch als Partikelrelaxationszeit bezeichnete Kenngröße (Crowe et al. 1998), legt die Zeit fest, nach welcher der Tropfen auf 63% der Gasgeschwindigkeit beschleunigt ist. Es gilt in diesem Fall der Zusammenhang  $t^*/t_{v,\mu}^* = \sqrt{\rho/\rho_d} 18/Re$ .

Das Verhalten eines Flüssigkeitstropfens bei Bewegung in einer homogenen Gasströmung läßt sich somit wie folgt zusammenfassen. Für  $We \ll 1$  sind bei anfänglicher Deformation der Tropfen Formschwingungen mit dem Zeitmaß  $t_\sigma^*$  bestimmend, für  $We \gg 1$  dagegen die erzwungene Deformation durch aerodynamische Kräfte mit dem Zeitmaß  $t^*$ . Strömungsgeschwindigkeiten im Tropfen sind um Größenordnungen kleiner als in der Gasphase. Bezüglich des Verformungsvorgangs kann die Umströmung des Tropfens als quasistationär betrachtet werden. Bei schwachem Einfluß tropfeninterner Reibungseffekte ( $On \ll 1$ ) hat die Änderung der Relativströmung infolge Beschleunigung des Tropfens bis auf die Endphase des Zerfalls keine Bedeutung. Während des Verformungsvorgangs kann in diesem Fall von konstanter Relativgeschwindigkeit ausgegangen werden. Für normalviskose Tropfenfluide gilt  $Re_{def} \sim Re$ , so daß bei laminarer Umströmung mit  $Re \gg 1$  für die Zeitmaße der beteiligten Prozesse ganz allgemein die Abstufung  $t_\zeta^* \gg t^* \gg t_\mu^*$  angenommen werden kann. Die Ausbildung einer Flüssigkeitsgrenzschicht und Verformungen des Tropfens laufen wegen  $t_\delta^* \sim t^*$  mit ähnlichen Zeitmaßen ab, und zwar wesentlich schneller als die Ausbildung tropfeninterner Wirbelströmungen. Das simultane Auftreten einer Deformationsströmung und Grenzschichtströmungen, die hier idealisiert betrachtet werden, ist ein wesentliches Charakteristikum des Scheibenzerfalls. Bei hochviskosen Tropfenfluiden ( $On \gtrsim 1$ ) kann  $Re_{def}$  trotz  $Re \gg 1$  die Größenordnung von 1 und darunter erreichen.

Der Verformungsvorgang ist in zunehmendem Maße durch tropfeninterne Reibungskräfte geprägt. Auch die Ausbildung von Grenzschichtströmungen in der Flüssigkeit findet im Vergleich zum Zeitmaß  $t_\mu^*$  immer langsamer statt. Schließlich führt die zunehmende Verzögerung des Verformungsvorgangs zu einer verstärkten Kopplung von Verformungs- und Bewegungsverhalten.

### 3.4 Tropfengrößenverteilungen

Wie anhand der Bildsequenzen in Abschnitt 2.1.1 erkennbar, entsteht beim Tropfenzerfall eine große Zahl an Fragmenten unterschiedlicher Größe und Geschwindigkeit. Aufgrund der Komplexität und Nichtlinearität der beteiligten Strömungsvorgänge und der Vielzahl der Einflußfaktoren hat dieser Vorgang einen stochastischen Charakter und wird daher zweckmäßigerweise mit statistischen Methoden beschrieben. Zur diskreten Analyse des Größenspektrums wird eine Klasseneinteilung des Durchmesserspektrums eingeführt. Die klassenweise gesammelten Tropfendaten, wie z.B. Anzahl und Volumen, lassen sich dann als diskrete Verteilungen darstellen. Skizziert ist diese Vorgehensweise in Abbildung 3.3.

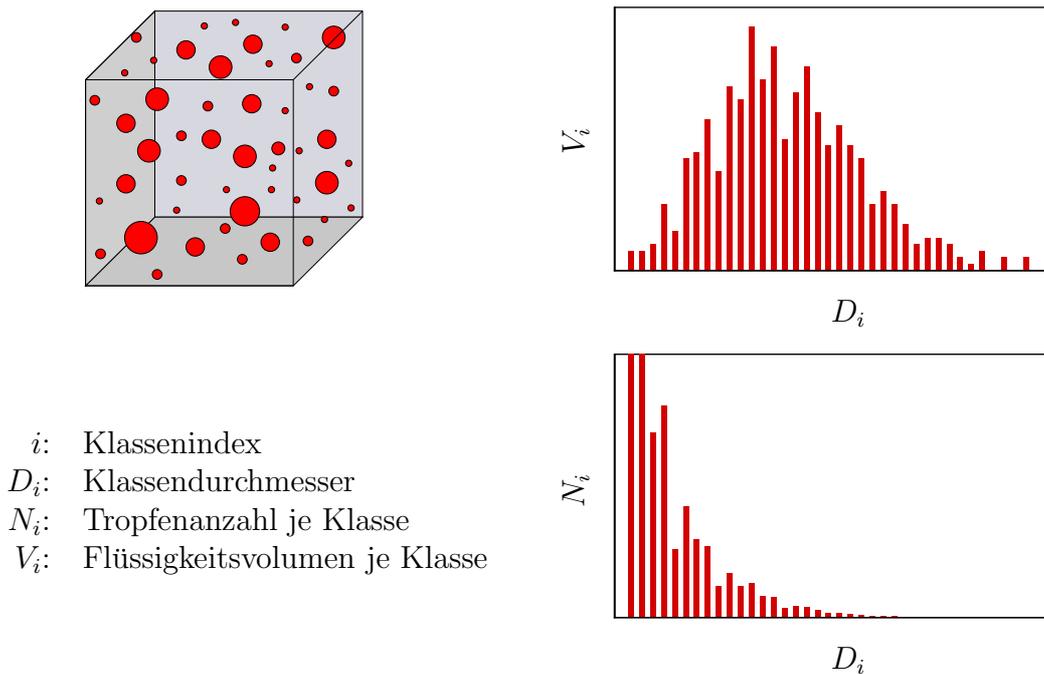


Abbildung 3.3: Statistische Beschreibung eines Tropfenkollektivs: Momentaufnahme (links) und Tropfengrößenverteilungen (rechts)

Für Zerstäubungsprozesse charakteristisch ist die große Anzahl kleiner Tropfen, die jedoch nur einen geringen Anteil des Flüssigkeitsvolumens beitragen. Grundsätzlich kann die Erfassung der Tropfendaten nach zwei Methoden vorgenommen werden. Bei der *räumlichen* Betrachtungsweise wird, wie in Abbildung 3.3 dargestellt, ein statisches Abbild der Tropfen in einem Kontrollvolumen beschrieben, während bei der *zeitlichen* Betrachtungsweise ein Fluß, d.h. die Größen-Geschwindigkeitskorrelation über Anzahl- und Volumenraten beschrieben wird.

In der Praxis werden anstelle der diskreten Verteilung auch die folgenden charakteristischen Durchmesser eingesetzt (Lefebvre 1998)

$$D_{0.1} \quad : D \text{ bei } 10\% \quad \text{kumuliertem Tropfenvolumen,} \quad (3.46)$$

$$D_{0.5} \quad : D \text{ bei } 50\% \quad \text{kumuliertem Tropfenvolumen,} \quad (3.47)$$

$$D_{0.632} \quad : D \text{ bei } 63.2\% \quad \text{kumuliertem Tropfenvolumen,} \quad (3.48)$$

$$D_{0.9} \quad : D \text{ bei } 90\% \quad \text{kumuliertem Tropfenvolumen.} \quad (3.49)$$

Die Größe  $D_{0.5}$  wird auch als massenmittlerer Durchmesser (MMD: Mass Median Diameter) bezeichnet, anstelle  $D_{0.632}$  hat sich die Kurzform  $D_{63}$  eingebürgert. Weitere charakteristische Größen sind der volumetrisch gemittelte Durchmesser  $D_{30}$  und der Sauter-Durchmesser  $D_{32}$  (SMD: Sauter Mean Diameter). Aus den klassenweise erfaßten Tropfendaten errechnen sich diese folgendermaßen

$$D_{30} = \sqrt[3]{\frac{\sum N_i D_i^3}{\sum N_i}}, \quad (3.50)$$

$$D_{32} = \frac{\sum N_i D_i^3}{\sum N_i D_i^2}. \quad (3.51)$$

Zur weiteren theoretischen Behandlung werden die Verteilungsdaten meist durch verschiedene Modellverteilungen abgebildet (Paloposki 1994). Um hierbei eine einheitliche Darstellung zu erreichen, wird durch Wahl eines geeigneten charakteristischen Durchmessers  $D^*$  zu einem dimensionslosen Durchmesserspektrum übergegangen

$$x = \frac{D}{D^*}. \quad (3.52)$$

Aus der Normalverteilung lassen sich die Log-Normal- sowie die Wurzel-Normalverteilung ableiten, die beide eine wichtige Rolle bei der Charakterisierung von Zerstäubungsvorgängen spielen. Ausgangspunkt ist in beiden Fällen das Integral der Gaußschen Funktion

$$G(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u \exp\left[-\frac{1}{2}y^2\right] dy, \quad (3.53)$$

aus welchem sich mithilfe der Variablensubstitutionen

$$u = \frac{\ln x - \mu}{\sigma} \quad \text{bzw.} \quad u = \frac{\sqrt{x} - \mu}{\sigma} \quad (3.54)$$

und den Definitionen  $F(x) = G(u)$  und  $f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$  die folgenden Verteilungsfunktionen ableiten lassen

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2\right], \quad \text{für die Log-Normalverteilung,} \quad (3.55)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\sigma\sqrt{2\pi x}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{x} - \mu}{\sigma}\right)^2\right], \quad \text{für die Wurzel-Normalverteilung.} \quad (3.56)$$

Zu beachten ist hierbei, daß sich in der Literatur auch andere Definitionen der Parameter  $\mu$  und  $\sigma$  finden.

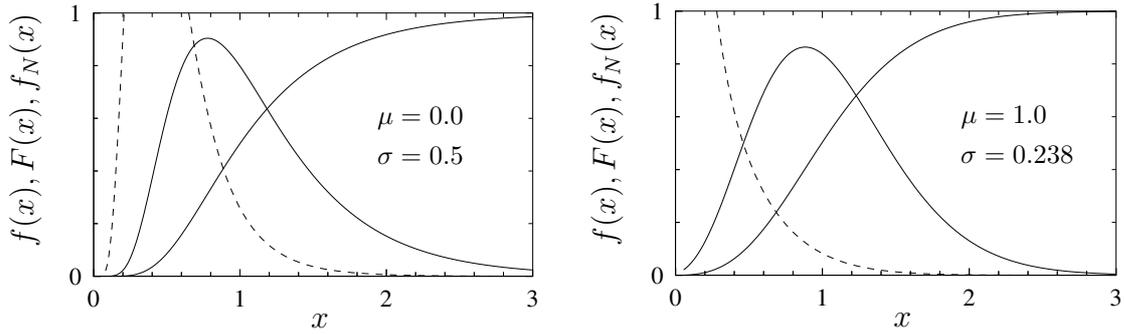


Abbildung 3.4: Log-Normalverteilung (links) und Wurzel-Normalverteilung (rechts). Verteilungsfunktion der Tropfenanzahl gestrichelt.

Die Verwendung als Tropfengrößen-Volumenverteilungen ist in Abbildung 3.4 dargestellt. Ebenfalls dargestellt sind die numerisch ermittelten Summenfunktionen  $F(x)$  sowie die aus den Volumenverteilungen abgeleiteten, normierten Anzahlverteilungen

$$f_N(x) = f(x) \left[ x \int_0^\infty \frac{f(x)}{x} dx \right]^{-1}. \quad (3.57)$$

Als Problematik der Wurzel-Normalverteilung ist mit  $f_N(x) \rightarrow \infty$  für  $x \rightarrow 0$  die unphysikalische Übergewichtung der Tropfenanzahl bei kleinen Durchmesserwerten erkennbar. Dennoch wird die Verteilung vielfach zur Charakterisierung von Zerstäubungsprodukten eingesetzt. Simmons (1977) stellt in einer umfangreichen Studie verschiedener Zerstäuberarten fest, daß Gleichung 3.56 bei Wahl der Parameter

$$D^* = D_{0.5}, \quad \mu = 1, \quad \sigma = 0.238, \quad (3.58)$$

auf eine allgemeingültige Verteilungsfunktion für die Tropfengröße führt. Für diese *universelle Wurzel-Normalverteilung* gibt Simmons folgende empirische Zusammenhänge an

$$\frac{D_{0.5}}{D_{32}} = 1.2, \quad F(x) = \exp(0.06394x - 0.781x^2). \quad (3.59)$$

In der Praxis wird alternativ zur Verteilungsbreite  $\sigma$  auch das Durchmesser Verhältnis  $D_{0.5}/D_{32}$  als Formparameter eingesetzt. Bei Zugrundelegung von Gleichung 3.56 läßt sich der exakte Zusammenhang beider Größen theoretisch bestimmen – das Ergebnis zeigt Abbildung 3.5.

Eine weitere, in der vorliegenden Arbeit verwendete Modellverteilung ist die Rosin-Rammler-Verteilung. Als Spezialfall der  $\chi^2(\nu)$ -Verteilung für  $\nu = 2$  (Paloposki 1994) kann die Verteilung aus der Integraldefinition

$$G(u) = \frac{1}{2} \int_0^u \exp \left[ -\frac{1}{2}y \right] dy \quad (3.60)$$

abgeleitet werden, aus welcher sich mit der Variablensubstitution

$$u = 2bx^n \quad (3.61)$$

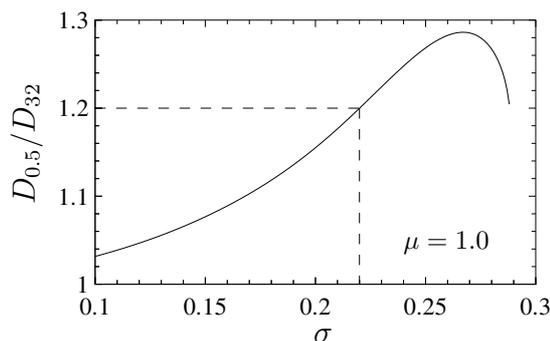


Abbildung 3.5: Zusammenhang der Formparameter bei der Wurzel-Normalverteilung

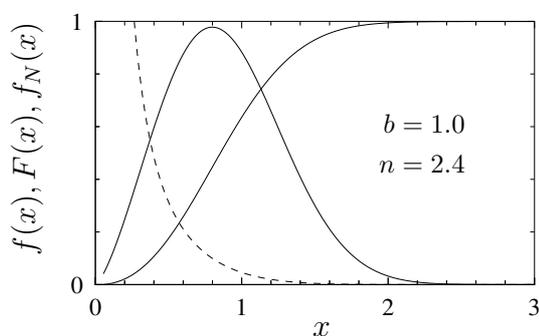


Abbildung 3.6: Rosin-Rammler-Verteilung

die folgende Verteilungsfunktion ergibt

$$f(x) = bnx^{n-1} \exp(-bx^n) . \quad (3.62)$$

Zugrunde liegt der Modellvorstellung eine  $\chi^2(2)$ -Verteilung der Größe  $2bx^n$ . Dabei stellen die Größen  $b$  und  $n$  frei wählbare Parameter dar. In der Praxis wird die Rosin-Rammler-Verteilung meist in Form ihrer Summenfunktion eingesetzt. Wird der Parameter  $b$  mit in die Definition von  $D^*$  aufgenommen, so ergibt sich diese zu

$$F(x) = 1 - \exp(-x^n) , \quad (3.63)$$

wobei  $D^*$  aufgrund von  $F(1) = 0.632$  die physikalische Bedeutung  $D^* = D_{0.632}$  hat. Die Verwendung als Tropfengrößen-Volumenverteilung ist in Abbildung 3.6 dargestellt.

## 4 Verformung und Bewegung von Tropfen

Die in Abschnitt 3.1 umrissene Kontinuumsformulierung der Problemstellung bildet die theoretische Grundlage zur Beschreibung der Strömungsvorgänge innerhalb und außerhalb des Tropfens und – über die resultierende Kraftwirkung – zur Beschreibung der Tropfenbewegung. Ziel dieses Kapitels ist eine analytische Beschreibung der gekoppelten Verformungs- und Bewegungsdynamik, die im Rahmen der Lagrangeschen Beschreibung tropfenbeladener Gasströmungen eingesetzt werden kann.

Hinsichtlich der Verformung wird zwischen linearen und nichtlinearen Theorien unterschieden, wobei im Rahmen der vorliegenden Arbeit allein die Wirkung aerodynamischer Druckspannungen berücksichtigt werden soll. Die in Abschnitt 4.1 dargestellten linearen Theorien beschreiben den Fall kleiner, sonst beliebiger Deformationen. Strömungskräfte beziehen sich stets auf den unverformten Zustand des Tropfens, Rückwirkungen der Deformation auf die Umströmung werden vernachlässigt. Mithilfe der Normalmodenanalyse läßt sich ein System unabhängiger linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung ableiten, in welchem die aerodynamische Druckverteilung in Form modaler Kraftbeiträge eingeht. Zur Beschreibung größerer Deformationen werden in Abschnitt 4.2 nichtlineare Theorien vorgestellt, bei denen die Änderung der Strömungskräfte mit der Verformung des Tropfens berücksichtigt ist. Da eine Normalmodenanalyse der Verformungsdynamik in diesem Fall nicht mehr möglich ist, kann eine analytische Modellbildung nur noch unter der Annahme einer bestimmten Verformungskinematik vorgenommen werden. Die typischen Streck-Stauch-Verformungen aerodynamisch beaufschlagter Tropfen werden daher durch Rotationsellipsoide variabler Geometrie angenähert und durch eine nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung beschrieben.

Zur Beschreibung der beschleunigten Bewegung des Tropfens wird in Abschnitt 4.3 die Basset-Boussinesq-Oseen Gleichung zugrundegelegt. Da diese allein im Grenzfall schleicher Umströmung gilt ( $Re \ll 1$ ), wird eine empirische Erweiterung für den gesamten Bereich praktisch relevanter Relativströmungsverhältnisse eingesetzt. Außerdem wird eine formabhängige Korrektur des Strömungswiderstandes vorgenommen. Die weitere Vereinfachung führt auf eine nichtlineare Differentialgleichung, deren variable Koeffizienten an experimentelle Daten angepaßt werden.

### 4.1 Lineare Verformungstheorien

Die mathematische Beschreibung kleiner Formänderungen eines kugelförmigen Tropfens zählt zu den klassischen Problemstellungen der theoretischen Hydrodynamik (Rayleigh 1879; Lamb 1881). Die Erweiterung um die oberflächennormale Kraftwirkung einer Umströmung geht auf Hinze (1948b), Isshiki (1959) und Harper et al. (1972) zurück. Entsprechend dieser Arbeiten wird auch im folgenden eine axialsymmetrische Belastung und Deformation des Tropfens betrachtet. Wie in Abschnitt 4.1.1 gezeigt wird, erzeugt die Beschleunigung  $\mathbf{a}$  eine Druckschichtung im Tropfen. Weil diese keinen Einfluß auf die Verformung hat, kann der in Abbildung 4.1 skizzierte Spezialfall geradliniger Beschleunigung ohne Einschränkung der Allgemeinheit zugrundegelegt werden. Zur Wahrung der Axialsymmetrie wird vorausgesetzt, daß Richtungsänderungen der Geschwindigkeiten  $\mathbf{u}$

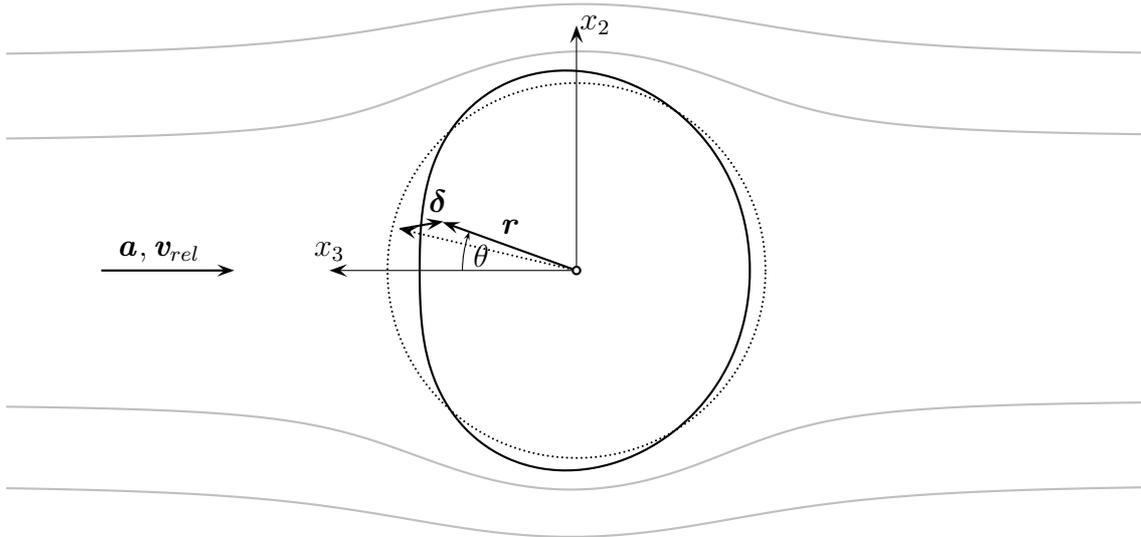


Abbildung 4.1: Axialsymmetrische Tropfenverformung

und  $\mathbf{u}_d$  während des Verformungsvorgangs vernachlässigbar sind. Nach Abschnitt 3.3 gilt dies für Flüssigkeitstropfen in Gasströmungen bei  $\rho_d/\rho \gg 1$  und  $D_0/l^* \ll 1$ , wobei  $l^*$  das Längenmaß differentieller Änderungen des Strömungsfeldes darstellt.

Da Strömungskräfte im Tropfen und an der Oberfläche im Rahmen einer linearen Theorie als näherungsweise unabhängig von den Verformungen betrachtet werden können, ist die Beschränkung auf kleine Verformungen von grundlegender Bedeutung für die mathematische Behandlung des Problems. Mit der Entkopplung von Verformung und Umströmung sowie der Annahme quasistationärer Umströmung ist es möglich, Spannungsverteilungen auf stationär umströmten Kugeloberflächen als Randbedingung vorzugeben. Wie bereits angemerkt wurde, kann im Rahmen einer Normalmodenanalyse jedoch nur der Effekt der aufgeprägten Druckspannungen berücksichtigt werden. Die Vernachlässigung der Schubspannungswirkung ist nach den Ausführungen des Abschnittes 3.3 dann gerechtfertigt, wenn kurze Zeiträume der Größenordnung  $t^*$  bzw.  $t_\sigma^*$  betrachtet werden. In dieser Phase ist die Wirkung tangentialer Oberflächenbewegung auf eine dünne Reibungsgrenzschicht beschränkt. Eine Vernachlässigung ist dagegen unzulässig, wenn periodische oder stationäre Verformungen über längere Zeiträume betrachtet werden. In diesen Fällen ist ein Einfluß tropfeninterner Wirbelströmungen zu erwarten. Aufgrund der Wirkung oberflächenaktiver Substanzen bzw. starker Konvektionsströmungen bei Verdunstung ist dieser Mechanismus in technischen Systemen jedoch abgeschwächt.

Um die Verformungsströmung infolge einer aufgeprägten Druckverteilung zu beschreiben, wird das Konzept reibungsbehafteter Potentialströmungen (Zierep 1984; Joseph 2003) zugrundegelegt, d.h. es gilt

$$\mathbf{v} = \nabla\psi, \quad r < r_s. \quad (4.1)$$

Mit der Annahme eines Geschwindigkeitspotentials  $\psi$  entfallen die Reibungskräfte im Tropfeninneren und treten allein in den Randbedingungen der Problemstellung bzw. in den Oberflächenbeiträgen der integralen Energiebilanz auf (vgl. Funada und Joseph 2002, S. 1461).

Es werden in den Abschnitten 4.1.1 und 4.1.2 zunächst zwei alternative Normalmodenanalysen der Tropfenverformung dargestellt und in Abschnitt 4.1.3 durch eine Modaldarstellung der Druckrandbedingung vervollständigt. Die in Abschnitt 4.1.4 erörterte Taylor-Analogie wird als Grundmode dieser Theorien abgeleitet. Den Abschluß bildet Abschnitt 4.2.5 mit einer Zusammenstellung der Modellgleichungen.

### 4.1.1 Normalmodenanalyse über Kräftebetrachtung

Die im folgenden vorgestellte Normalmodenanalyse geht in ihren Grundzügen auf Hinze (1948b) zurück. Ausgangsbasis ist die axialsymmetrische Formulierung der Gleichungen 3.6 und 3.3 in sphärischen Polarkoordinaten  $(r, \theta, \phi)$ . Bei Vernachlässigung der nichtlinearen Beschleunigungsterme  $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$  lauten diese (Aris 1989, S. 183)

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) = 0, \quad (4.2)$$

$$\rho_d \frac{\partial v_r}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu_d \left[ \nabla^2 v_r - \frac{2}{r^2} v_r - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) \right] + \rho_d a \cos \theta, \quad (4.3)$$

$$\rho_d \frac{\partial v_\theta}{\partial t} = -\frac{\partial p}{r \partial \theta} + \mu_d \left[ \nabla^2 v_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{r \partial \theta} - \frac{1}{r^2 \sin \theta} v_\theta \right] - \rho_d a \sin \theta, \quad (4.4)$$

mit

$$\nabla^2 \equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right). \quad (4.5)$$

Entsprechend ergibt sich bei Vernachlässigung konvektiver Änderungen  $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{\delta}$  der Verschiebung  $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$  eine kinematische Beziehung zwischen Geschwindigkeits- und Verschiebungsfeld

$$\mathbf{v} \approx \frac{\partial \boldsymbol{\delta}}{\partial t}. \quad (4.6)$$

Gleichung 4.3 für den Radialimpuls führt, nach Eliminierung der Geschwindigkeitskomponenten  $v_r$  und  $v_\theta$  mithilfe der Gleichungen 4.2 und 4.6, auf einen Zusammenhang zwischen Druck und Radialverschiebung

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \left\{ -\rho_d \frac{\partial}{\partial t} + \mu_d \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right] \right\} \frac{\partial \delta_r}{\partial t} + \rho_d a \cos \theta. \quad (4.7)$$

Zusätzlich ist der Druck im Tropfen durch die Laplace-Gleichung

$$\nabla^2 p = 0 \quad (4.8)$$

beschrieben, die sich aus der linearisierten Form der Impulsgleichungen 3.3 durch Anwendung des Divergenz-Operators ergibt.

Als Randbedingung wird Gleichung 3.12 für eine aufgeprägte Druckverteilung  $p_s(t, \theta)$  zugrundegelegt. Die axialsymmetrische Formulierung in sphärischen Polarkoordinaten lautet

$$p_s = p - 2\mu_d \frac{\partial v_r}{\partial r} - \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_s, \quad (4.9)$$

wobei die aufgeprägten deviatorische Normalspannungen wegen  $\mu_d/\mu \gg 1$  vernachlässigt werden können. Für kleine Abweichungen von der Kugelform kann die Summe der Hauptkrümmungen in Abhängigkeit der Radialverschiebung  $\delta_{r,s}$  der Tropfenoberfläche ausgedrückt werden

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{2}{R_0} \left( 1 - \frac{\delta_{r,s}}{R_0} \right) - \frac{1}{R_0^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \delta_{r,s}}{\partial \theta} \right). \quad (4.10)$$

Eine detaillierte Herleitung dieser Näherung 1. Ordnung mithilfe einer Variationsformulierung findet sich in Landau und Lifshitz (1987, S. 245 ff) oder in Brenn (1990, S. 34 ff). Unter Berücksichtigung von Gleichung 4.6 ergibt sich aus Gleichung 4.9 schließlich

$$p_s = p - 2 \frac{\sigma}{R_0} - \left\{ 2\mu_d \frac{\partial^2}{\partial r \partial t} - \frac{\sigma}{R_0^2} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + 2 \right] \right\} \delta_r, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_s. \quad (4.11)$$

Zur Lösung der Gleichungen 4.7, 4.8 und 4.11 mittels Separation der Variablen  $t$ ,  $r$  und  $\theta$  werden im nächsten Schritt die folgenden Reihenentwicklungen angesetzt

$$p_s - p_\infty = \frac{\rho v_{rel}^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} C_n(t) P_n(\cos \theta), \quad (4.12)$$

$$p = \frac{\rho_d v_{rel}^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n(t) \left( \frac{r}{R_0} \right)^n P_n(\cos \theta), \quad (4.13)$$

$$\delta_r = R_0 \left[ \alpha_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t) \left( \frac{r}{R_0} \right)^{n-1} P_n(\cos \theta) \right]. \quad (4.14)$$

Gleichung 4.12 stellt die Entwicklung der Druckverteilung  $p_s(t, \theta)$  in Legendre-Polynomen dar. Für die ersten Ordnungen  $n = 0, \dots, 5$  sind diese wie folgt definiert

$$\begin{aligned} P_0(\cos \theta) &= 1, \\ P_1(\cos \theta) &= \cos \theta, \\ P_2(\cos \theta) &= \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1), \\ P_3(\cos \theta) &= \frac{1}{2}(5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta), \\ P_4(\cos \theta) &= \frac{1}{8}(35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta + 3), \\ P_5(\cos \theta) &= \frac{1}{8}(63 \cos^5 \theta - 70 \cos^3 \theta + 15 \cos \theta). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Im Rahmen des Modalansatzes können die Entwicklungskoeffizienten  $C_n$  somit als generalisierte Kräfte interpretiert werden, die in den Normalkoordinaten  $\alpha_n$  des Systems wirken. Die Koeffizienten sind nach Davis (1989) als Integrale über den Winkelbereich definiert

$$C_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi \frac{p_s - p_\infty}{\frac{\rho}{2} v_{rel}^2} P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta. \quad (4.16)$$

Kernelement des Modalansatzes ist Gleichung 4.13, die eine allgemeine, bei  $r = 0$  endliche Lösung der Laplace-Gleichung für den Druck im Tropfen darstellt. Gleichung 4.14 für die Radialverschiebung baut auf der Annahme einer Potentialströmung nach Gleichung 4.1

auf. Als Lösung der Laplace-Gleichung  $\nabla^2\psi = 0$  kann die Potentialfunktion analog zum Druck entwickelt werden

$$\psi = R_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{d\alpha_n}{dt} \left( \frac{r}{R_0} \right)^n P_n(\cos\theta) . \quad (4.17)$$

Der Übergang zu  $\delta_r$  ergibt sich mit  $v_r = \partial\psi/\partial r$  aus dem kinematischen Zusammenhang 4.6. Es sind jedoch für  $\delta_r$  auch allgemeinere Ansätze möglich, die nicht an die Existenz eines Geschwindigkeitsspotentials gebunden sind (Hinze 1948b; Chandrasekhar 1961; Bartley et al. 2000) und somit eine Beschreibung auch stark dissipativer Verformungen ermöglichen.<sup>1</sup> Weil diese Ansätze jedoch nicht mehr geschlossen darstellbar sind, sollen sie im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter verfolgt werden. Die Umfangskomponenten der Vektorfelder  $\boldsymbol{\delta}$  und  $\boldsymbol{v}$  sind mit der Vereinbarung von Gleichung 4.14 über die Kontinuitätsgleichung 4.2 festgelegt.

Die zeitliche Änderung der Tropfenform ist durch die Verschiebung  $\delta_s$  der Tropfenoberfläche bestimmt. Aus Gleichung 4.14 ergibt sich

$$r_s = R_0 + \delta_{r,s} \quad \text{mit} \quad \delta_{r,s} = R_0 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n P_n(\cos\theta) . \quad (4.18)$$

Zur Verdeutlichung ist in Abbildung 2.11 der Effekt der ersten 5 Glieder der Reihenentwicklung dargestellt. Für  $n \geq 2$  ergeben sich die Verformungsmoden des Tropfens. Dagegen beschreibt der  $P_1$ -Mode, d.h. Gleichung 4.18 für  $n = 1$ , über die Verschiebungskomponenten  $\delta_r$  und  $\delta_\theta$  eine reine Translation des Tropfens. Da der Ursprung des mitbewegten Koordinatensystems im Massenschwerpunkt des Tropfens fixiert ist, kann das Vektorfeld  $\boldsymbol{\delta}$  jedoch per Definition keine Translationskomponente enthalten. Zu erfüllen ist dies nur über die Zwangsbedingung  $\alpha_1 = 0$ . Der  $P_0$ -Mode stellt eine sphärische Pulsation der Tropfenform dar. Aus Kontinuitätsgründen kann diese nicht unabhängig von den Verformungsmoden stattfinden, so das  $\alpha_0$  eine Funktion der restlichen Koeffizienten ist (Becker 1991). Im linearen Grenzfall ergibt sich aus der von Rayleigh (1877) angegebenen Schließbedingung die Definitionsgleichung

$$\alpha_0 = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2}{2n+1}} . \quad (4.19)$$

Die Volumenkorrektur über  $\alpha_0$  wird aufgrund der für  $n \geq 2$  geltenden Forderung  $\alpha_n \ll 1$  jedoch meist vernachlässigt.

Zur Bestimmung der unbekanntenen Zeitfunktionen  $\alpha_n$  und  $\beta_n$  werden in einem ersten Schritt die Reihenentwicklungen 4.13 und 4.14 in Gleichung 4.7 verwendet. Da die  $P_n(\cos\theta)$  einen orthogonalen Funktionenraum bilden, führt dies auf eine Modaldarstellung der Impulsgleichungen  $\rho D\boldsymbol{v}/Dt + \nabla p = 0$  bei Potentialströmung

$$\frac{d^2\alpha_n}{dt^2} + \frac{v_{rel}^2}{2R_0^2} n \beta_n = 0 , \quad n \geq 2 . \quad (4.20)$$

---

<sup>1</sup>Die allgemeine Lösung beinhaltet zur Beschreibung der Verschiebung Besselfunktionen, deren Argument jedoch eine unbestimmte Separationsgröße enthält

Die Reibungsterme sind dabei gänzlich entfallen, so daß mit Gleichung 4.20 eine direkte Verknüpfung von Trägheits- und Druckkräften im Tropfen besteht. Eine Sonderstellung nimmt die Funktion  $\beta_1$  ein,

$$\beta_1 = \frac{2R_0}{v_{rel}^2} a , \quad (4.21)$$

die den beschleunigungsinduzierten Druckanteil  $p_1 = \rho_d a x_3$  im Tropfen beschreibt.

In einem zweiten Schritt werden die Reihenentwicklungen 4.12 und 4.14 in Gleichung 4.11 eingesetzt. Nach Eliminierung der Funktionen  $\beta_n$  mithilfe von Gleichung 4.20 ergeben sich für  $n \geq 2$  die Verformungsgleichungen des Tropfens

$$\frac{d^2\alpha_n}{dt^2} + 2\frac{\mu_d}{\rho_d R_0^2} n(n-1) \frac{d\alpha_n}{dt} + \frac{\sigma}{\rho_d R_0^3} n(n-1)(n+2) \alpha_n = -\frac{\rho v_{rel}^2}{2} \frac{n}{\rho_d R_0^2} C_n . \quad (4.22)$$

Wie eingangs angemerkt, gehen die Reibungsterme ( $\sim d\alpha_n/dt$ ) dabei allein als Beitrag der deviatorischen Normalspannungen in der Flüssigkeit an der Oberfläche hervor (vgl. Gleichung 4.9). Als Sonderfälle ergeben sich für  $n = 0$  eine Bestimmungsgleichung für den Innendruck des unverformten Tropfens, für  $n = 1$  dagegen das Bewegungsgesetz des Tropfens

$$a = \frac{du_d}{dt} = \frac{\rho}{\rho_d} \frac{v_{rel}^2}{D_0} C_1 \quad (4.23)$$

und bei Vergleich mit der Formulierung 3.42 der Zusammenhang  $C_1 = 0.75 c_D$ .

Mithilfe der Kombinationen  $We$ ,  $Re_{def}$  und  $t^*$  bzw.  $We$ ,  $On$  und  $t_\sigma^*$  lassen sich die Gleichungen 4.22 umformulieren zu

$$(t^*)^2 \frac{d^2\alpha_n}{dt^2} + \frac{8n(n-1)}{Re_{def}} t^* \frac{d\alpha_n}{dt} + \frac{8n(n-1)(n+2)}{We} \alpha_n = -2n C_n , \quad (4.24)$$

$$(t_\sigma^*)^2 \frac{d^2\alpha_n}{dt^2} + 8n(n-1) On t_\sigma^* \frac{d\alpha_n}{dt} + 8n(n-1)(n+2) \alpha_n = -2n C_n We . \quad (4.25)$$

In der Regel sind  $t^*$  und  $t_\sigma^*$  nach Gleichungen 3.25 und 3.36 veränderliche Größen. Neben Stoffdateneinflüssen geht in  $t^*$  insbesondere auch die Variation der Relativgeschwindigkeit ein. Im Idealfall konstanter charakteristischer Zeiten lassen sich die Verformungsgleichungen für dimensionslose Zeiten  $T = t/t^*$  und  $T_\sigma = t/t_\sigma^*$  wie folgt formulieren

$$\frac{d^2\alpha_n}{dT^2} + \frac{8n(n-1)}{Re_{def}} \frac{d\alpha_n}{dT} + \frac{8n(n-1)(n+2)}{We} \alpha_n = -2n C_n , \quad (4.26)$$

$$\frac{d^2\alpha_n}{dT_\sigma^2} + 8n(n-1) On \frac{d\alpha_n}{dT_\sigma} + 8n(n-1)(n+2) \alpha_n = -2n C_n We . \quad (4.27)$$

Die im weiteren als *Theorie nach Hinze* bezeichneten Systeme entkoppelter Differentialgleichungen lassen erkennen, wie die Dynamik der Normalkoordinaten  $\alpha_n$  durch die Zeitfunktionen  $C_n$  der aufgeprägten Druckverteilung erzwungen werden. Charakteristisch ist der mit steigendem  $n$  stark zunehmende Einfluß der Rückstell- ( $\sim n^3$ ) und Reibungskräfte ( $\sim n^2$ ), so daß der Beitrag höherer Moden an der Tropfenverformung vernachlässigbar wird. Das Gleichungssystem 4.26 bietet sich zur dimensionslosen Untersuchung der Verformungsdynamik bei idealer Sprungbeaufschlagung, d.h. bei nahezu konstanter Relativgeschwindigkeit an, während das Gleichungssystem 4.27 auch im Falle variabler Relativgeschwindigkeit gültig ist.

### 4.1.2 Normalmodenanalyse über Energiebetrachtung

Eine alternative Vorgehensweise zur Ableitung der Verformungsgleichungen geht auf Isshiki (1959) zurück. In konsequenter Erweiterung der klassischen Methode von Rayleigh (1879) und Lamb (1932) baut diese auf der Energiegleichung 3.17 des Tropfens auf, die sich bei reiner Druckbelastung der Oberfläche vereinfacht zu

$$\frac{\rho_d}{2} \frac{d}{dt} \int_V v^2 dV + \sigma \frac{dS}{dt} = - \oint_S p_s \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS - \int_V \Phi dV . \quad (4.28)$$

Die Auswertung der Energiebeiträge wird im folgenden nur skizziert, mit dem Ziel, die Unterschiede zu der in Abschnitt 4.1.1 dargestellten Vorgehensweise zu erörtern. Im Rahmen der linearen Theorie wird die Integrationen dabei grundsätzlich über die sphärische Tropfenoberfläche ausgeführt.

Mit der Annahme eines Geschwindigkeitspotentials kann die kinetische Energie des Tropfens als Oberflächenintegral formuliert werden (Borisenko und Tarapov 1979, S. 238). Unter Verwendung des Separationsansatzes 4.17 ergibt sich

$$\frac{\rho_d}{2} \int_V v^2 dV = \frac{\rho_d}{2} \oint_S \psi(\nabla\psi) \cdot \mathbf{n} dS = 2\pi\rho_d R_0^5 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)n} \left( \frac{d\alpha_n}{dt} \right)^2 . \quad (4.29)$$

Die Oberfläche des deformierten Tropfens läßt sich mithilfe differentialgeometrischer Zusammenhänge und Ansatz 4.18 bestimmen zu (Landau und Lifshitz 1987, S. 244 ff)

$$S = \oint_S \sqrt{r_s^2 + \left( \frac{\partial r_s}{\partial \theta} \right)^2} dS = S_0 + \frac{S_0}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)(n+2)}{2n+1} \alpha_n^2 , \quad (4.30)$$

wobei  $S_0 = 4\pi R_0^2$  die Kugeloberfläche bezeichnet. Die Leistung der aufgeprägten Druckkräfte ergibt sich unter Berücksichtigung der Reihenentwicklungen 4.12 und 4.17 zu

$$\oint_S p_s \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_S p_s (\nabla\psi) \cdot \mathbf{n} dS = 4\pi R_0^3 \frac{\rho v_{rel}^2}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C_n}{2n+1} \frac{d\alpha_n}{dt} . \quad (4.31)$$

Leistungsbeiträge für  $n = 0, 1$  sind hierbei vernachlässigt. Zur Auswertung des Dissipationssterms wird das Volumenintegral zunächst umgeformt zu (Zierep 1984)

$$\begin{aligned} \int_V \Phi dV &= \mu_d \int_V (\nabla \times \mathbf{v})^2 dV - 2\mu_d \oint_S (\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})) \cdot \mathbf{n} dS \\ &\quad + \mu_d \oint_S (\nabla v^2) \cdot \mathbf{n} dS . \end{aligned} \quad (4.32)$$

Da die Rotation  $\nabla \times \mathbf{v}$  für Potentialströmung verschwindet, trägt nur der letzte Integralterm zur Dissipation bei. Unter Berücksichtigung der Entwicklung 4.17 ergibt sich

$$\int_V \Phi dV = 4\pi\mu_d R_0^3 \sum_{n=2}^{\infty} \left[ \underbrace{\frac{2(n-1)}{2n+1}}_{\text{Beitrag } v_r} + \underbrace{\frac{2(n+1)(n-1)}{n(2n+1)}}_{\text{Beitrag } v_\theta} \right] \left( \frac{d\alpha_n}{dt} \right)^2 . \quad (4.33)$$

In dieser Darstellung gehen die Beiträge der Normal- ( $v_r$ ) wie auch der Tangentialgeschwindigkeit ( $v_\theta$ ) an der Tropfenoberfläche ein. Die Verformungsgleichungen ergeben sich als Zusammenstellung der Leistungsterme 4.31 und 4.33 sowie der Zeitableitungen der Ausdrücke 4.29 und 4.30. Sie werden hier analog zu Gleichungen 4.26 und 4.27 für dimensionslose Zeiten  $T = t/t^*$  und  $T_\sigma = t/t_\sigma^*$  formuliert

$$\frac{d^2\alpha_n}{dT^2} + \frac{8(n-1)(2n+1)}{\text{Re}_{def}} \frac{d\alpha_n}{dT} + \frac{8n(n-1)(n+2)}{\text{We}} \alpha_n = -2n C_n, \quad (4.34)$$

$$\frac{d^2\alpha_n}{dT_\sigma^2} + 8(n-1)(2n+1) \text{On} \frac{d\alpha_n}{dT_\sigma} + 8n(n-1)(n+2) \alpha_n = -2n C_n \text{We} \quad (4.35)$$

und im weiteren als *Theorie nach Lamb-Isshiki* bezeichnet. Im Vergleich zur Theorie nach Hinze sind die Reibungsterme etwa doppelt so groß. Als Ursache ist die in Gleichung 4.33 eingehende Verlustleistung der flüssigseitigen Schubspannungen an der Tropfenoberfläche erkennbar (Beitrag  $v_\theta$ ). Dieser Beitrag fehlt bei der Kräfte- und Energiemethode nach Hinze, da über die flächennormale Randbedingung 4.9 nur die flüssigseitigen deviatorischen Normalspannungen eingehen, die tangentialen Randbedingung dagegen unberücksichtigt bleibt.

Die Diskrepanz zwischen Kräfte- und Energiemethode läßt sich weiter zurückführen auf die zugrundeliegende Annahme tropfeninterner Potentialströmung. Im allgemeinen hat eine derartige Modellströmung eine unphysikalische Schubspannungsverteilung an der Tropfenoberfläche zur Folge. Die Erfüllung der tangentialen Randbedingung ist tatsächlich nur auf Basis eines erweiterten Potentialansatzes möglich (vgl. Hinze 1948b; Chandrasekhar 1961). In diesem Fall ist die Leistung der aerodynamischen Schubspannungen identisch der Verlustleistung flüssigseitiger Schubspannungen. In der Konsequenz löschen sich beide Beiträge auf der rechten Seite der Energiegleichung 4.28 aus, so daß Kräfte- und Energiemethode wie erwartet zum gleichen Ergebnis führen, die Verformungsdynamik allein durch die flächennormalen Leistungsbeiträge bestimmt ist.

So betrachtet stellt die Kraftmethode nach Hinze die formal korrekte Vorgehensweise bei Annahme einer tropfeninternen Potentialströmung dar, während die Energiemethode nach Isshiki mit der Vernachlässigung aerodynamischer Schubspannungen eine unphysikalische Erhöhung des Reibungsterms zur Folge hat. Tatsächlich aber führt gerade dieser Effekt zu einer hervorragenden Übereinstimmung mit der gemessenen Dämpfung freier Formschwingungen, während die Kraftmethode diese generell unterbewertet (vgl. Abschnitt 5.1). Eine Erklärung liefert die zwingend notwendige Existenz rotationsbehafteter Strömungsbereiche, die, wie oben angesprochen, nur auf Basis eines erweiterten Potentialansatzes berücksichtigt werden können. Zur Erfüllung der tangentialen Randbedingung können diese Bereiche auf eine dünne Reibungsgrenzschicht beschränkt sein (kurze Zeiten) oder das gesamte Tropfenvolumen einnehmen (längere Zeiten). Anhand von Gleichung 4.32 lassen sich die zusätzlichen Dissipationsbeiträge erkennen. Offensichtlich werden diese in guter Näherung durch den Oberflächenbeitrag der Schubspannungen wiedergegeben, weshalb in der vorliegenden Arbeit die Theorie nach Lamb-Isshiki mit den Gleichungen 4.34 und 4.35 zugrundegelegt werden sollen.

### 4.1.3 Modalzerlegung der Druckrandbedingung

Mit der in Abschnitt 3.3 diskutierten Annahme quasistationärer Umströmung des Tropfens kann auf eine breite Basis von Literaturdaten zur Umströmung starrer Kugeln zurückgegriffen werden. Abbildung 4.2 zeigt repräsentative Druckverteilungen bei verschiedenen Reynolds-Zahlen. Bis auf die experimentellen Daten von Achenbach (1972), die für

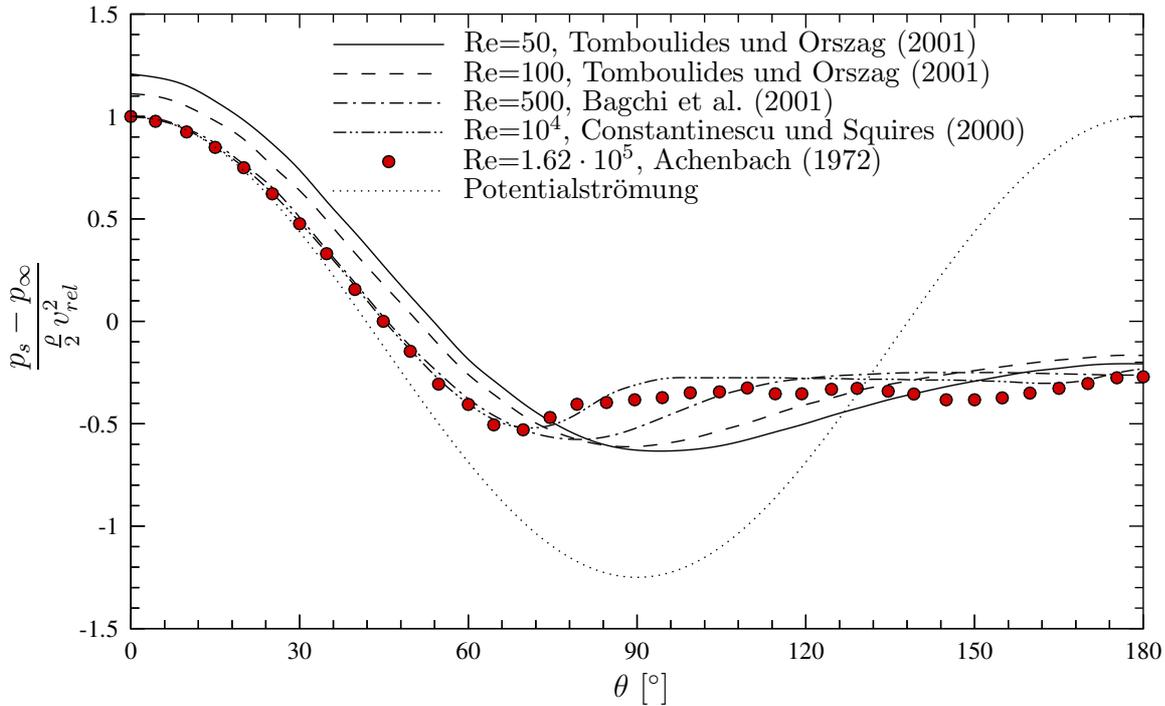


Abbildung 4.2: Druckverteilungen auf stationär angeströmten Kugeln

Umströmung nahe dem laminar-turbulenten Umschlag gelten, handelt es sich um Ergebnisse numerischer Simulationen. Das Verhalten der Strömung spiegelt sich deutlich in den Druckverteilungen wider. Bereits für  $Re > 20$  findet eine Ablösung auf der Rückseite der Kugel statt, für  $Re \gtrsim 100$  verschiebt sich der Ablösepunkt auf die strömungszugewandte Seite, während sich bei weiterer Steigerung ein nahezu konstanter Druck im Nachlauf ausbildet. Eine detaillierte Beschreibung findet sich in Anhang A.

Um die Druckrandbedingung für zeitlich variable Umströmungsverhältnisse zu formulieren, werden die Entwicklungskoeffizienten  $C_n$ , wie in Anhang A beschrieben, für insgesamt 47, der Literatur entnommene Druckverteilungen bestimmt. Abbildung 4.3 zeigt die Werte der an der Verformung maßgeblich beteiligten Koeffizienten  $C_2$  bis  $C_5$  über einen weiten Bereich der Reynolds-Zahl. Koeffizienten gerader Ordnung charakterisieren symmetrische Komponenten der Druckverteilung, während Koeffizienten ungerader Ordnung asymmetrischen Komponenten zugeordnet sind. Der mit zunehmender Reynolds-Zahl erkennbare Anstieg von  $C_3$  auf Kosten von  $C_2$  entspricht somit der zunehmenden Asymmetrie der Druckverteilung infolge Strömungablösung und Ausbildung eines Nachlaufgebietes. Eine Schließbedingung  $\sum C_n = 1$  läßt sich aus Gleichung 4.12 ableiten.

Die Abhängigkeit der modalen Koeffizienten von der Reynolds-Zahl läßt sich durch fol-

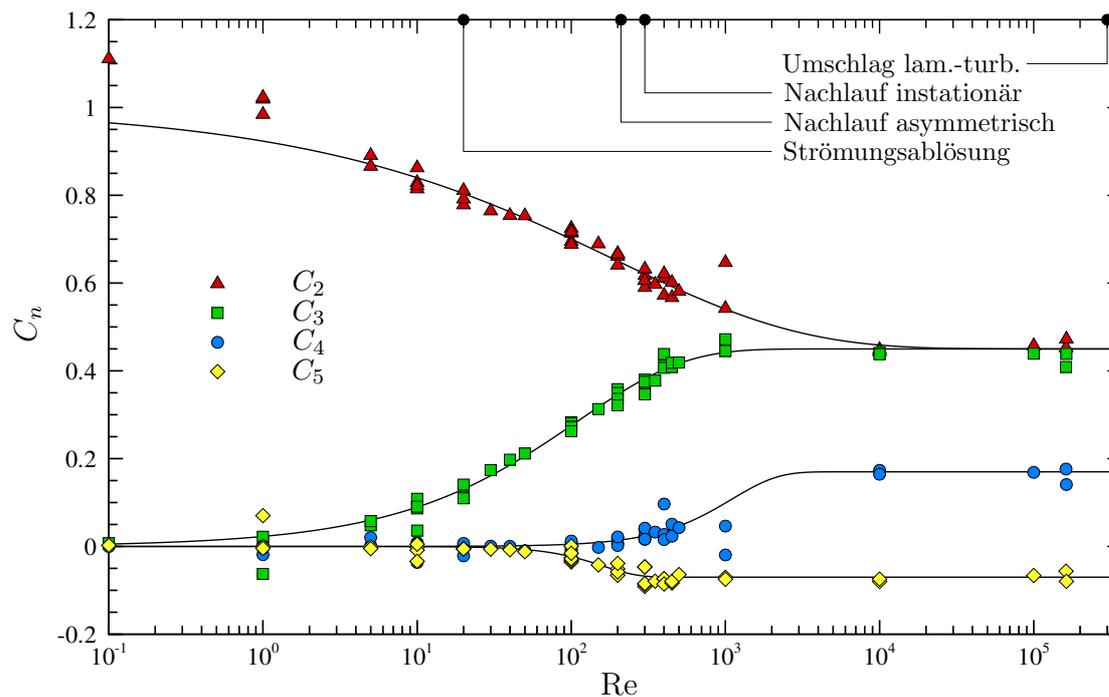


Abbildung 4.3: Entwicklungskoeffizienten von Druckverteilungen auf Kugeln. Numerische Werte für  $C_0$  bis  $C_8$  sind in Anhang A zusammengestellt.

gende Funktionsansätze annähern

$$C_n = a + b \exp(c \operatorname{Re}^d), \quad \operatorname{Re} < 3 \cdot 10^5, \quad (4.36)$$

deren Koeffizienten in Tabelle 4.1 angegeben sind. Für  $\operatorname{Re} \rightarrow 0$  reproduzieren die

$n$	$a$	$b$	$c$	$d$
2	0.45	0.55	-0.15	0.36
3	0.45	-0.45	$-5.2 \cdot 10^{-2}$	0.63
4	0.17	-0.17	$-3.9 \cdot 10^{-5}$	1.45
5	-0.07	0.07	$-5.6 \cdot 10^{-5}$	1.93

Tabelle 4.1: Koeffizienten der Näherungsfunktionen nach Gleichung 4.36

Funktionen die theoretische Lösung der Kugelumströmung nach Oseen, für  $\operatorname{Re} \gtrsim 10^3$  dagegen den Bereich des nahezu konstanten  $c_D$ -Wertes (Newtons Regime).

#### 4.1.4 Taylor-Analogie

Wie bereits in Abschnitt 2.3.1 angesprochen, geht die Analogie der Verformungsdynamik eines Flüssigkeitstropfens und der Schwingungsdynamik eines mechanischen Feder-Masse Systems auf Taylor (1949) zurück und wurde von O'Rourke und Amsden (1987) zum weitverbreiteten Taylor-Analogy-Breakup Modell ausgebaut. Im folgenden ist die

Ableitung dieses Modellansatzes umrissen und dieser in den Rahmen der linearen Verformungstheorie eingeordnet. Ausgangspunkt ist eine lineare Größenordnungsbeziehung der im Tropfen wirkenden Kräfte (siehe Gleichungen 3.25, 3.32 und 3.35)

$$\rho_d \frac{d^2 \delta^*}{dt^2} + K_1 \frac{\mu_d}{D_0^2} \frac{d\delta^*}{dt} + K_2 \frac{\sigma}{D_0^3} \delta^* = K_3 \frac{\rho v_{rel}^2}{D_0}. \quad (4.37)$$

Hierbei stellen  $K_1, K_2$  und  $K_3$  geeignete Konstanten dar. Als Maß der Verformung bezeichnet  $\delta^*$  die Verschiebung eines charakteristischen Fluidelementes im Tropfen. Mit der Querdeformation des Tropfens soll außerdem der proportionale Zusammenhang  $\varepsilon \sim \delta^*/R_0$  bestehen. Zur Bestimmung von  $K_1$  und  $K_2$  passen O'Rourke und Amsden Gleichung 4.37 an die lineare Theorie schwach gedämpfter Formschwingungen des Grundmodes  $P_2$  an. Nach Gleichung 4.18 bestehen für diesen Deformationsmode lineare kinematische Zusammenhänge

$$\alpha = -2\varepsilon, \quad \alpha = 2 - 2y. \quad (4.38)$$

Die Konstante  $K_3$  und der Zusammenhang zwischen  $\delta^*$  und  $\varepsilon$  werden dagegen so festgelegt, daß bei Sprungbeaufschlagung mit  $We_{0,c} = 12$  gerade eine Staupunktsdeformation  $\alpha_c = -1$  bzw. eine Äquatordeformation  $\varepsilon_c = 0.5$  erreicht wird. Auf der Symmetrieachse des Tropfens kommt es somit zu einer Berührung der Staupunkte. Dieser in Abbildung

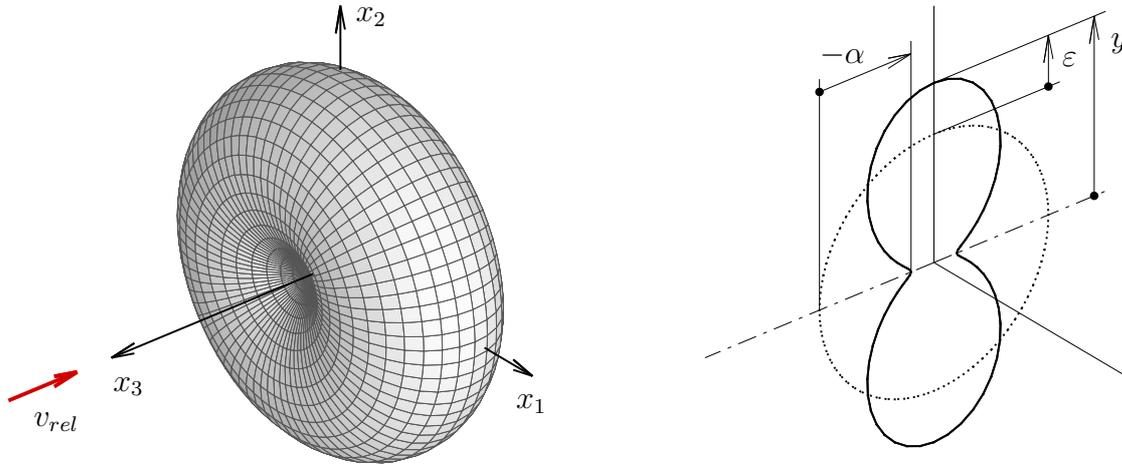


Abbildung 4.4: Oberfläche (links) und dimensionslose Geometrie im Axialschnitt (rechts) bei Darstellung des Tropfens mittels dem  $P_2$ -Mode

4.4 angedeutete Vorgang sollte allerdings nicht mit dem realen Phänomen des Blasenzerfalls verwechselt werden. Wie in Abschnitt 2.4 und Kapitel 6 erläutert, ist dieser eine Folge nichtlinearer Wechselwirkung zwischen Verformung und aerodynamischer Druckverteilung. Mit dem Übergang auf die dimensionslose Zeit  $T_\sigma = t/t_\sigma^*$  und die dimensionslose Querabmessung  $y$  ergibt sich die bereits mit Gleichung 2.2 formulierte Modellgleichung. Diese folgt auch direkt aus den Verformungsgleichungen 4.35 für  $n = 2$  und bei Wahl des Druckkoeffizienten  $C_2 = 2/3$ . Nach Abbildung 4.3 ergibt sich dieser Wert für eine aufgeprägte Druckverteilung etwa bei  $Re = 100$ .

## 4.2 Nichtlineare Verformungsmodelle

Bei größeren Verformungen treten in zunehmendem Maße nichtlineare Effekte auf, so z.B.

- Modenkopplung, die u.a. eine Anregung von Moden höherer Ordnung verursacht. Dieses Phänomen kann nach Becker et al. (1994) auch durch maßgebliche Reibungskräfte in der Verformungsströmung verursacht werden.
- Amplitudenabhängigkeit von Frequenz und Periode bei Formschwingungen.
- Nichtlineare Resonanzphänomene (Daidžić et al. 1994).
- Abhängigkeit der Kräfte in der Verformungsströmung von der Deformation des Tropfens. Dieser Effekt ist bei linearer Betrachtung vernachlässigt.
- Abhängigkeit der Umströmung und damit der auf den Tropfen wirkenden Oberflächenkräfte von der Deformation. Dieser Effekt ist bei linearer Betrachtung ebenfalls vernachlässigt.

Bei größeren Verformungsgraden ist eine Normalmodenanalyse der Verformungsdynamik infolge der Modenkopplung nur noch auf Basis numerischer Methoden möglich (für freie Formschwingungen vgl. Brenn 1990; Becker et al. 1994). Aus diesem Grund schlagen Ibrahim et al. (1993) das bereits mit Gleichung 2.5 formulierte Droplet Deformation and Breakup (DDB) Modell vor, welches von einer näherungsweise Darstellung des deformierten Tropfens als Rotationsellipsoid ausgeht. Im Gegensatz zum TAB-Modell baut dieser Ansatz auf der Energiegleichung des Tropfens auf.

In konsequenter Weiterführung dieser Vorläuferarbeiten werden im folgenden nichtlineare Modelle ausgearbeitet. Die näherungsweise Darstellung der Tropfenform ist dabei mittels Rotationsellipsoiden variabler Querabmessung  $y$  vorgenommen. Diese Vorgehensweise ist zum einen empirisch begründet – im Vergleich zum  $P_2$ -Mode der linearen Theorie eignen sich Rotationsellipsoide besser um die Abflachung und Querdehnung des Tropfens bei größeren Beaufschlagungsintensitäten zu beschreiben –, zum anderen ist mit dieser Näherung überhaupt erst eine analytische Auswertung der integralen Energiebeiträge bei großen Deformationen möglich. Abbildung 4.5 zeigt ein gedrücktes (oblates) Ellipsoid zur Approximation eines abgeflachten Tropfens. Entsprechend ist in Abbildung 4.6 ein gestrecktes (prolates) Ellipsoid zur Approximation eines langgezogenen Tropfens gezeigt. Die Halbachse  $a$  quer zur Anströmung und die Halbachse  $c$  in Richtung der Anströmung sind über die Kontinuität des Tropfenvolumens verknüpft

$$V = \frac{4}{3}\pi R_0^3 = \frac{4}{3}\pi a^2 c, \quad (4.39)$$

die auf folgende nichtlineare kinematische Beziehungen führt

$$\alpha = \frac{1}{(1 + \varepsilon)^2} - 1, \quad \alpha = \frac{1}{y^2} - 1, \quad E = \frac{c}{a} = \frac{1}{y^3}. \quad (4.40)$$

Im Grenzfall  $y \rightarrow 1$  gehen diese in die Zusammenhänge nach Gleichung 4.38 über.

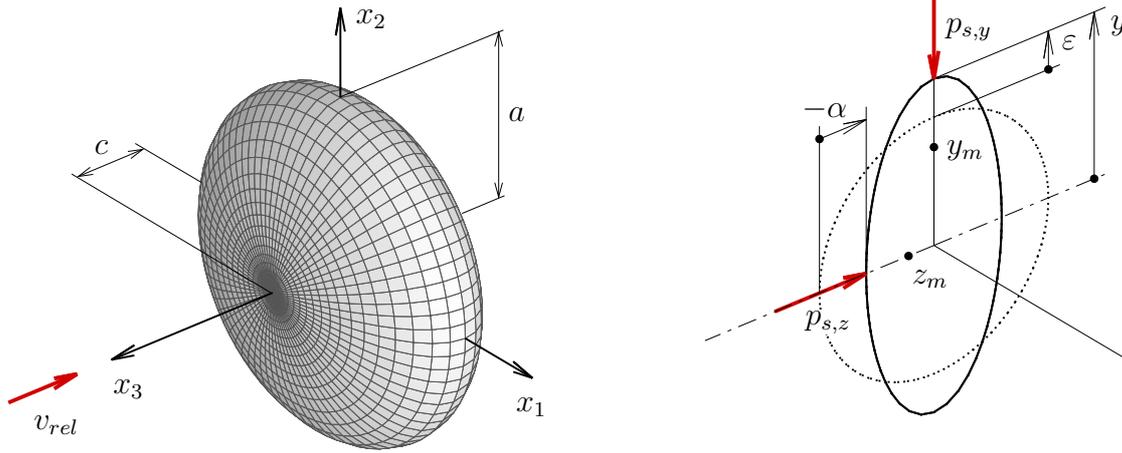


Abbildung 4.5: Oberfläche (links) und dimensionslose Geometrie im Axialschnitt (rechts) bei Darstellung des Tropfens als gedrücktes Ellipsoid

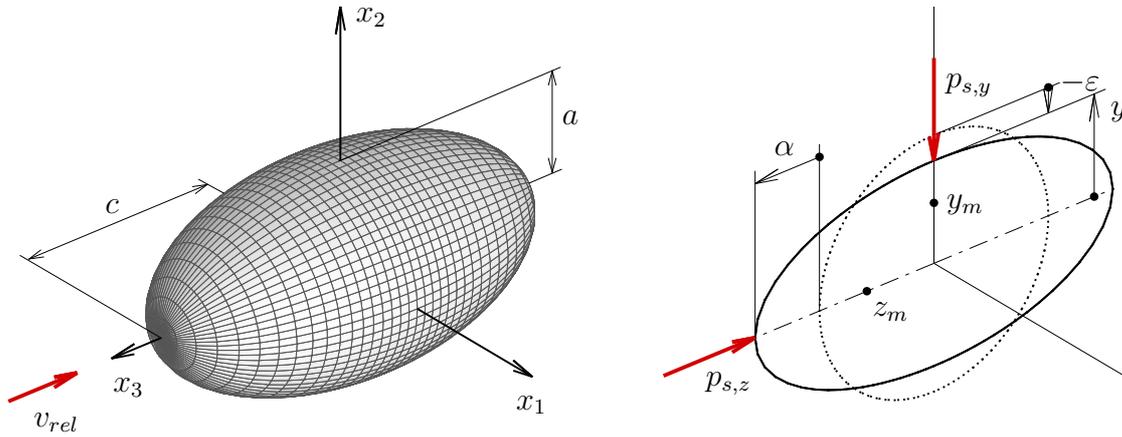


Abbildung 4.6: Oberfläche (links) und dimensionslose Geometrie im Axialschnitt (rechts) bei Darstellung des Tropfens als gestrecktes Ellipsoid

In Erweiterung der Arbeiten von Clark (1988) und Ibrahim et al. (1993) werden die Integralbeiträge der Energiebilanz 4.28 für ein Rotationsellipsoid mit axialsymmetrischer Außen- und Innenströmung ausgewertet. Die einzelnen Modellterme werden ggf. über Proportionalitätskonstanten so angepaßt, daß sie für  $y \rightarrow 1$  asymptotisch in die entsprechenden Terme der linearen Energiegleichung des  $P_2$ -Modes übergehen. Diese ergibt sich aus Gleichung 4.28 bei isolierter Betrachtung des  $P_2$ -Modes

$$\left( \frac{2}{5} \pi \rho_d R_0^5 \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + 4 \pi \mu_d R_0^3 \frac{d \alpha}{dt} + \frac{16}{5} \pi \sigma R_0^2 \alpha + \frac{\rho v_{rel}^2}{2} \frac{4}{5} \pi R_0^3 C_2 \right) \frac{d \alpha}{dt} = 0. \quad (4.41)$$

Anstelle der modalen Staupunktsdeformation  $\alpha_2$  ist hier die allgemeine Bezeichnung  $\alpha$  verwendet. Der Entwicklungskoeffizient  $C_2$  der Druckverteilung wird als Modellparameter zur Anpassung an empirische Daten beibehalten.

### 4.2.1 Rückstellterm

Für die zeitliche Änderung der potentiellen Energie der Tropfenoberfläche gilt ganz allgemein

$$\sigma \frac{dS}{dt} = \sigma \frac{dS}{dy} \frac{dy}{dt} . \quad (4.42)$$

Um die Änderung der Oberfläche  $S$  mit der Querabmessung  $y$  zu bestimmen, wird auf bekannte Zusammenhänge der analytischen Geometrie zurückgegriffen. Mit Einführung der Querabmessung  $y = a/R_0$ , der Exzentrizität  $e$  und der Referenzoberfläche  $S_0 = 4\pi R_0^2$  läßt sich die Oberfläche und deren zeitliche Änderung analytisch beschreiben. Für ein gestrecktes Ellipsoid mit  $y < 1$  ergeben sich

$$e = \sqrt{1 - y^6} , \quad (4.43)$$

$$\frac{S}{S_0} = \frac{1}{2} \left( y^2 + \frac{1}{y} \frac{\arcsin e}{e} \right) , \quad (4.44)$$

$$\frac{1}{S_0} \frac{dS}{dy} = y - \frac{1}{2y^2} \frac{\arcsin e}{e} + \frac{3y^4}{2(y^6 - 1)} \left( \frac{1}{y^3} - \frac{\arcsin e}{e} \right) , \quad (4.45)$$

für ein gedrücktes Ellipsoid mit  $y > 1$  hingegen

$$e = \sqrt{1 - y^{-6}} , \quad (4.46)$$

$$\frac{S}{S_0} = \frac{1}{2} \left( y^2 + \frac{1}{y^4} \frac{\operatorname{artanh} e}{e} \right) , \quad (4.47)$$

$$\frac{1}{S_0} \frac{dS}{dy} = y - \frac{2}{y^5} \frac{\operatorname{artanh} e}{e} + \frac{3}{2y^5(y^6 - 1)} \left( y^6 - \frac{\operatorname{artanh} e}{e} \right) . \quad (4.48)$$

Anstelle der exakten Ausdrücke 4.45 und 4.48 werden im weiteren jedoch numerisch einfacher zu berechnende Polynomapproximationen verwendet

$$\frac{1}{S_0} \frac{dS}{dy} = \begin{cases} 3.2(y-1) - 0.4(y-1)^2 + 9.98(y-1)^3 , & 0.5 < y < 1 , \\ 3.2(y-1) - 2.0(y-1)^2 + 0.67(y-1)^3 , & 1 \leq y < 2.3 . \end{cases} \quad (4.49)$$

Eine kubische Abhängigkeit der Oberflächenkräfte wird auch von Daidžić et al. (1994) in einer Duffing-Gleichung zur Interpretation nichtlinearer Schwingungsphänomene eingesetzt.

Abschließend zeigt Abbildung 4.7 eine vergleichende Darstellung verschiedener Näherungen der Oberflächenänderung. Auffallend ist, daß im DDB-Modell (Gleichung 2.5) bereits für den kugelförmigen Tropfen  $y = 1$  eine deformierende Oberflächenkraft auftritt. Erst bei größeren Verformungsgraden  $y > 1.3$  wird das Rückstellverhalten korrekt wiedergegeben, so daß eine Verwendung des Modells im allgemeinen problematisch ist. Dagegen gibt die in Gleichung 4.41 implizierte, auch dem TAB-Modell zugrundeliegende lineare Oberflächenänderung das Verhalten bei kleinen Abweichungen von der Kugelform korrekt wieder. Für größere Verformungen weicht dieses jedoch zunehmend von der exakten Beschreibung ab.

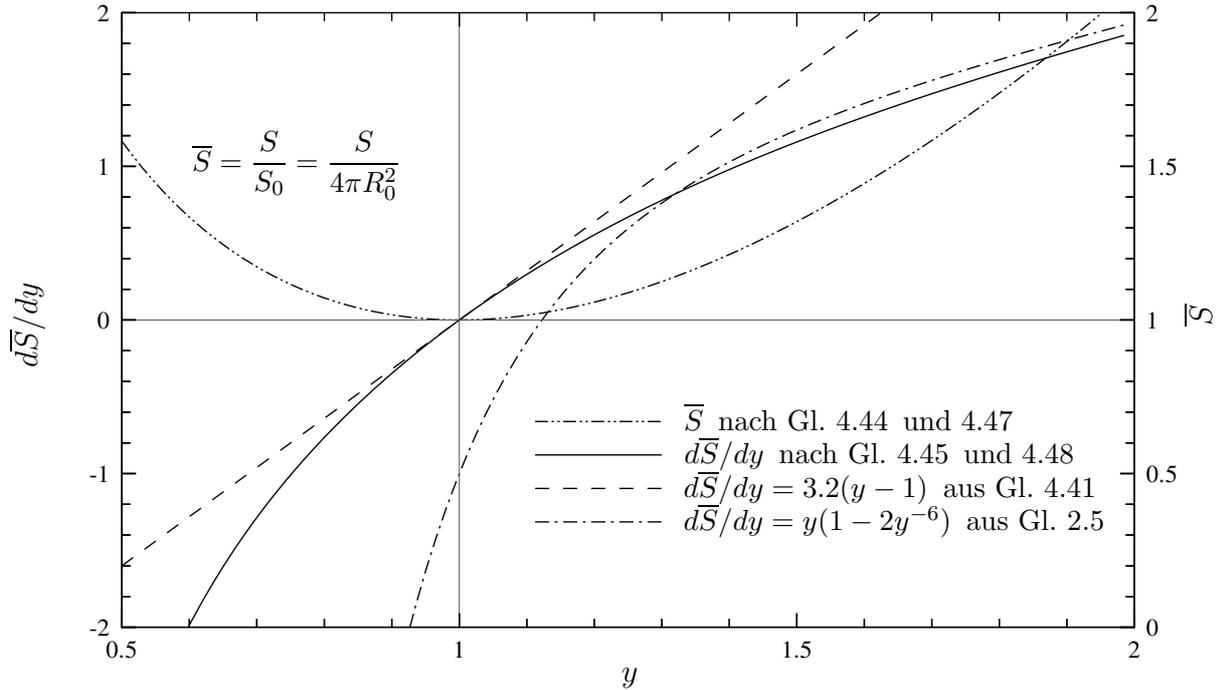


Abbildung 4.7: Modellierung des Oberflächenterms

## 4.2.2 Trägheitsterm

Um die kinetische Energie der Verformungsströmung zu beschreiben, müssen grundlegende Annahmen über die Strömungsform im Tropfeninneren getroffen werden. Es sollen im folgenden zwei unterschiedliche Konzepte ausgearbeitet werden: ein Punktmassenmodell, bei dem die Verformungsströmung über die Bewegung zweier orthogonaler Massenkoordinaten angenähert wird und ein potentialtheoretisches Modell, bei welchem die Innenströmung über ein Geschwindigkeitspotential beschrieben wird.

### Punktmassenmodell

In den bereits diskutierten Modellen TAB und DDB ist die kinetische Energie der Verformungsströmung eine quadratische Funktion der Querdehnungsgeschwindigkeit. Während dies für scheibenförmig gedrückte Tropfen eine gute Näherung darstellt, wird mit dem Übergang zu kugelförmigen und dann langgestreckten Tropfen jedoch ein zunehmender Anteil des tatsächlichen Energieinhalts vernachlässigt. Zurückzuführen ist dies auf den für größere Verformungen nichtlinearen Zusammenhang zwischen Quer- und Längsabmessung des Tropfens. Zur Berücksichtigung dieser Nichtlinearität wird die kinetische Energie mittels zweier orthogonaler Massenkoordinaten  $y_m$  und  $z_m$  in einen axialen und einen radialen Anteil der Verformungsströmung aufgespalten. Wie in Abbildung 4.8 skizziert, beschreibt  $y_m$  als radiale Schwerpunktskoordinate die Querdeformation des Tropfens, während  $z_s$  als axiale Schwerpunktskoordinate die Längsdeformation charakterisiert. Der funktionale Zu-

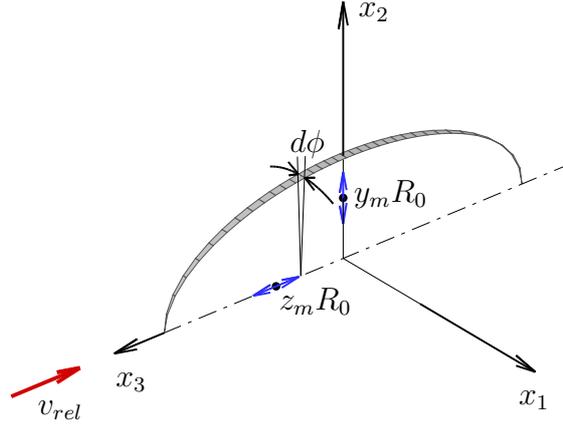


Abbildung 4.8: Charakteristische Massenkoordinaten der Radial- und Axialdeformation, dargestellt für ein infinitesimales Tropfensegment  $d\phi$

sammenhang mit der Querabmessung  $y$  ergibt sich aus den Definitionen

$$y_m = \frac{1}{V} \int_V \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{R_0} dV = \frac{3}{16} \pi y, \quad (4.50)$$

$$z_m = \frac{1}{V} \int_V \frac{x_3}{R_0} dV = \frac{3}{8 y^2}. \quad (4.51)$$

Die zentrale Annahme besteht nun darin, daß die kinetische Energie als proportional der Summe beider Bewegungsanteile dargestellt werden kann

$$\frac{\rho_d}{2} \int_V v^2 dV = K_T V \frac{\rho_d}{2} R_0^2 \left[ \left( \frac{dy_m}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz_m}{dt} \right)^2 \right]. \quad (4.52)$$

Mittels der Konstante  $K_T$  kann dieser Ausdruck an den entsprechenden Energiebeitrag der linearen Theorie nach Gleichung 4.41 angepaßt werden. Unter Berücksichtigung der Koordinaten 4.50 und 4.51 ergibt der Vergleich der kinetischen Energien zunächst eine Bedingung<sup>2</sup>

$$K_T \frac{4}{5} \pi \rho_d R_0^5 \frac{15}{512} \left( \pi^2 + \frac{16}{y^6} \right) \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 = \frac{4}{5} \pi \rho_d R_0^5 \left( \frac{dy}{dt} \right)^2, \quad (4.53)$$

die für  $y \rightarrow 1$  auf folgenden Zahlenwert der Konstanten führt

$$K_T = \frac{512}{15\pi^2 + 240} \approx 1.32. \quad (4.54)$$

Für die Zeitableitung ergibt sich somit

$$\frac{\rho_d}{2} \frac{d}{dt} \int_V v^2 dV = \frac{8}{5} \pi \rho_d R_0^5 \left[ \frac{\pi^2 + \frac{16}{y^6}}{\pi^2 + 16} \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{48}{\pi^2 + 16} \frac{1}{y^7} \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 \right] \frac{dy}{dt}. \quad (4.55)$$

Im Gegensatz zu den bisher vorgestellten Ansätzen ermöglicht der Modellterm 4.55 eine differenzierte Berücksichtigung der Quer- und Längskomponenten der Deformation und damit eine Beschreibung des asymmetrischen Formschwingungsverhaltens bei größeren Amplituden.

<sup>2</sup>Eine direkte Anpassung der durch Gleichung 4.55 formulierten Zeitableitung ist wegen des in der linearen Theorie nicht auftretenden quadratischen Geschwindigkeitsgliedes  $(dy/dt)^2$  unmöglich

### Potentialtheoretisches Modell

Mit der Annahme einer Potentialströmung im Inneren des Ellipsoids ist eine analytische Auswertung des Trägheitsterms ohne weitere Vereinfachungen möglich. Ausgangspunkt ist die Darstellung der Tropfenoberfläche in kartesischen Koordinaten

$$1 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{a^2} + \frac{x_3^2}{c^2}, \quad (4.56)$$

wobei die Halbachsen  $a$  und  $c$  über die Kontinuitätsgleichung 4.39 verknüpft sind. Bei zeitlicher Änderung der Quer- und Längsabmessungen des Ellipsoids kann nach Lamb (1932, S. 147) für die Innenströmung folgendes Geschwindigkeitspotential angegeben werden

$$\psi = \frac{1}{2a} \frac{da}{dt} (x_1^2 + x_2^2) + \frac{1}{2c} \frac{dc}{dt} x_3^2. \quad (4.57)$$

Es ergibt sich eine Strömungsgeschwindigkeit, die linear von den Raumkoordinaten abhängt. Entsprechend ist das Quadrat der Geschwindigkeit eine quadratische Funktion der Raumkoordinaten

$$v^2 = (\nabla\psi)^2 = \left(\frac{1}{a} \frac{da}{dt}\right)^2 (x_1^2 + x_2^2) + \left(\frac{1}{c} \frac{dc}{dt}\right)^2 x_3^2, \quad (4.58)$$

deren Integration über das Volumen des Ellipsoids nach Zurückführen sämtlicher Geometriegrößen auf die Querabmessung  $y$  die kinetische Energie der Tropfenflüssigkeit ergibt

$$\frac{\rho_d}{2} \int_V v^2 dV = \frac{4}{15} \pi \rho_d R_0^5 \left(1 + \frac{2}{y^6}\right) \left(\frac{dy}{dt}\right)^2. \quad (4.59)$$

Dieser Ausdruck geht für  $y \rightarrow 1$  exakt in den Energieterm der linearen Theorie (Gleichung 4.53, rechte Seite) über. Für die Zeitableitung ergibt sich

$$\frac{\rho_d}{2} \frac{d}{dt} \int_V v^2 dV = \frac{8}{5} \pi \rho_d R_0^5 \left[ \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{y^6}\right) \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{2}{y^7} \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \right] \frac{dy}{dt}. \quad (4.60)$$

Dieser Modellterm unterscheidet sich vom Punktmassenmodell durch eine für  $y \neq 1$  verschiedene Aufteilung der Massenträgheit auf die einzelnen Beschleunigungsglieder. Es verdeutlicht dies die Auswertung der eckigen Klammern beider Modellterme

$$\begin{aligned} \text{Aus Gleichung 4.55:} & \quad \left(0.3815 + 0.6185 \frac{1}{y^6}\right) \frac{d^2 y}{dt^2} - 1.855 \frac{1}{y^7} \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \\ \text{Aus Gleichung 4.60:} & \quad \left(0.3333 + 0.6667 \frac{1}{y^6}\right) \frac{d^2 y}{dt^2} - 2 \frac{1}{y^7} \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \end{aligned}$$

Die Ansätze weisen außerdem ein quadratisches, für  $y = 1$  nichtverschwindendes Geschwindigkeitsglied auf, welches selbst bei kugelförmigen Tropfen ein nichtlineares Trägheitsverhalten zur Folge hat.

### 4.2.3 Aerodynamischer Term

Eine ähnliche Problematik ergibt sich bei der Modellierung der Leistung aerodynamischer Kräfte. Zwar ist die Bewegung der Tropfenoberfläche über Gleichung 4.56 an die zeitliche Änderung der Halbachsen geknüpft, zusätzliche Annahmen sind jedoch hinsichtlich der Umströmung zur Formulierung der aufgeprägten Druckverteilung notwendig. Es werden zwei unterschiedliche Konzepte ausgearbeitet: ein Projektionsflächenmodell, bei dem die Leistung über die Bewegung zweier orthogonaler Projektionsflächen approximiert wird und ein potentialtheoretischer Ansatz, bei dem die Leistungsdichte der aufgeprägten Spannungen analytisch über die Oberfläche des Ellipsoids integriert wird.

#### Projektionsflächenmodell

In der Originalformulierung des DDB-Modells wird die Leistung aerodynamischer Kräfte als Produkt der Projektionsfläche des unverformten Tropfens  $S_{z,0} = 2\pi R_0^2$ , der Querdehnungsgeschwindigkeit  $dy/dt$  und dem Staudruck  $p_{s,z} = \rho/2v_{rel}^2$  formuliert. Die Darstellung vernachlässigt *a priori* mögliche Nichtlinearitäten bei größeren Verformungen. Es werden deshalb mit dem Staupunkt und dem Tropfenäquator zwei repräsentative Oberflächenpositionen festgelegt, die in Kombination mit entsprechenden Flächen und diskreten Druckkräften eine näherungsweise nichtlineare Beschreibung des Leistungsbeitrags ermöglichen. Unter Bezug auf Abbildungen 4.5 und 4.6 wird dem Staudruck  $p_{s,z}$  als axiale Projektionsfläche die doppelte Querschnittsfläche  $S_z = 2\pi y^2 R_0^2$  zugeordnet, dem Druckminimum  $p_{s,y} = p_{s,z} - \Delta p_{max}$  am Äquator dagegen als radiale Projektionsfläche die zylindrische Mantelfläche  $S_y = 4\pi R_0^2/y$ . Der hier als Modellparameter eingeführte aerodynamische Druckabfall wird im weiteren in dimensionsloser Form verwendet

$$\Delta \bar{p}_{max} = \frac{\Delta p_{max}}{\frac{\rho}{2} v_{rel}^2}. \quad (4.61)$$

Die zentrale Annahme ist nun, daß die Leistung der aufgeprägten Druckverteilung proportional der Summe der beiden diskreten Leistungsbeiträge ist. Wird die Geschwindigkeit des Staupunktes mittels der kinematischen Beziehung 4.40 mit der Querabmessung  $y$  verknüpft, so folgt

$$\begin{aligned} \oint_S p_s \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS &= K_W R_0 \left[ p_{s,y} S_y \frac{dy}{dt} + p_{s,z} S_z \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{y^2} \right) \right], \\ &= -K_W \frac{\rho v_{rel}^2}{2} 4\pi R_0^3 \Delta \bar{p}_{max} \frac{1}{y} \frac{dy}{dt}. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Die Proportionalitätskonstante wird für  $y \rightarrow 1$  durch Abgleich mit dem entsprechenden linearen Term in Gleichung 4.41 bestimmt

$$K_W = \frac{2}{5} \frac{C_2}{\Delta \bar{p}_{max}}, \quad (4.63)$$

womit sich folgende Leistung ergibt

$$\oint_S p_s \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = -\frac{\rho v_{rel}^2}{2} \frac{8}{5} \pi R_0^3 C_2 \frac{1}{y} \frac{dy}{dt}. \quad (4.64)$$

Der Druckabfall  $\Delta\bar{p}_{max}$  wird bei diesem Abgleich formal durch den Koeffizient  $C_2$  der linearen Theorie ersetzt. Anzumerken ist hierbei, daß die physikalische Bedeutung von  $C_2$  als Modalkoeffizient der Druckverteilung nach Gleichung 4.16 für die betrachteten, deutlich von der Kugelform abweichenden Ellipsoide nicht mehr gegeben ist. Im Rahmen der nichtlinearen Theorie wird  $C_2$  daher als *aerodynamischer Wirkungskoeffizient* bezeichnet und wird später anhand empirischer Deformationsdaten festgelegt.

Ergebnis dieser differenzierten Betrachtung der beiden Leistungsbeiträge in axialer und radialer Richtung ist eine  $y^{-1}$ -Nichtlinearität für große Verformungsgrade.

### Potentialtheoretisches Modell

Die Deformationskinematik eines zylinderförmigen Modelltropfens läßt zwar die grundlegende Nichtlinearität des aerodynamischen Terms erkennen, ist im übrigen jedoch eine grobe Approximation der realen Strömungsverhältnisse an der Tropfenoberfläche. Dies spiegelt sich auch in der Proportionalitätskonstante wieder, die in Vorwegnahme der theoretischen Beziehung 4.75 mit  $K_W = 4/15$  deutlich vom Idealwert 1 verschieden ist.

Näher an der Physik ist eine kontinuumsmechanische Betrachtung der Vorgänge an der bewegten Oberfläche des Ellipsoids. Als zentrale Fragestellung bleibt jedoch die Verteilung aerodynamischer Druckspannungen auf der Oberfläche. In Abschnitt 4.1.1 wurde dargelegt, daß selbst bei idealisierter Betrachtung einer stationär angeströmten Kugel diese entscheidend vom Charakter der Umströmung abhängt und eine Funktion der Reynoldszahl  $Re$  ist. Desweiteren ist mit dem Übergang zu ellipsoidförmigen Tropfen mit der Querabmessung  $y$  eine zusätzliche Parameterdimension des Umströmungsproblems zu berücksichtigen. Die hierzu existierenden experimentellen und numerischen Daten reichen jedoch nicht für eine korrelative Beschreibung der Druckverteilung aus.

Eine geschlossene analytische Beschreibung der Ellipsoidumströmung ist dagegen im Rahmen der Potentialtheorie möglich (Lamb 1932, Artikel 114) und soll im weiteren als Modellgrundlage verwendet werden. Ausgangsbasis ist das Geschwindigkeitspotential  $\psi_s$  unmittelbar über der Oberfläche. Bei stationärer, axialer Anströmung ist dieses nach Munk (1924) eine lineare Funktion der Axialkoordinate und der Anströmgeschwindigkeit

$$\psi_s = \frac{2}{2 - \gamma_0} v_{rel} x_3 . \quad (4.65)$$

Der Vorfaktor hängt alleine von den Abmessungen des Ellipsoids ab. Die Geometriegröße  $\gamma_0$  berechnet sich aus

$$\gamma_0 = \begin{cases} 2 \frac{1 - e^2}{e^2} \left( \frac{\operatorname{artanh} e}{e} - 1 \right) , & y < 1 , \\ \frac{2}{e^2} \left( 1 - \sqrt{1 - e^2} \frac{\arcsin e}{e} \right) , & y > 1 , \end{cases} \quad (4.66)$$

wobei die Exzentrizität  $e$  über die Gleichungen 4.43 und 4.46 angegeben ist. Bei Kugelform gilt der Grenzwert  $\gamma_0 = 2/3$ . Die in Gleichung 4.66 angegebenen Ausdrücke sind

übernommen aus Lamb (1932, Gleichung 13 in Artikel 114 sowie Gleichung 14 in Artikel 373)<sup>3</sup>. Eine alternative Zusammenstellung bietet Tuckerman (1926) an.

Die potentialtheoretische Strömungsgeschwindigkeit an der Oberfläche berechnet sich nach

$$v_s = \frac{\partial \psi_s}{\partial s} = \frac{2}{2 - \gamma_0} v_{rel} \frac{\partial x_3}{\partial s} = v_{s,max} \frac{\partial x_3}{\partial s}, \quad (4.67)$$

wobei die Definition der Koordinate  $s$  aus Abbildung 4.9 hervorgeht. Die Geometriegröße

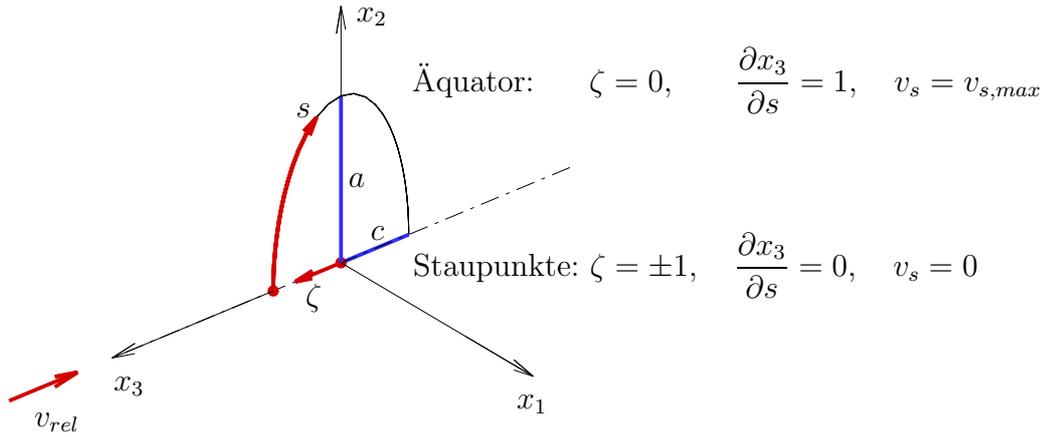


Abbildung 4.9: Definition der Oberflächenkoordinate  $s$  und der dimensionslosen Axialkoordinate  $\zeta = x_3/c$  im Axialschnitt des Tropfens

$\partial x_3/\partial s$  legt die Variation der Geschwindigkeit entlang der Oberfläche fest und kann aus der Differentialgeometrie der Gleichung 4.56 bestimmt werden zu

$$\left(\frac{\partial x_3}{\partial s}\right)^2 = \frac{1 - \zeta^2}{1 - (1 - y^6)\zeta^2}. \quad (4.68)$$

Die physikalische Bedeutung der Größe  $v_{s,max}$  als Maximalgeschwindigkeit folgt aus dem Maximalwert  $\partial x_3/\partial s = 1$  am Tropfenäquator. Entsprechend ergibt sich mit dem Satz von Bernoulli der statische Druckverteilung an der Oberfläche

$$\frac{p_s - p_\infty}{\frac{\rho}{2} v_{rel}^2} = 1 - \left(\frac{v_s}{v_{rel}}\right)^2 = 1 - \left(\frac{2}{2 - \gamma_0}\right)^2 \left(\frac{\partial x_3}{\partial s}\right)^2 = 1 - \Delta \bar{p}_{max} \left(\frac{\partial x_3}{\partial s}\right)^2. \quad (4.69)$$

Eine Anwendung dieser potentialtheoretischen Druckverteilung im Rahmen der Modellentwicklung ist jedoch problematisch, da für  $y \gtrsim 1$ , also bereits für den kugelförmigen Tropfen, erhebliche Abweichungen von der realen Druckverteilung auftreten (vgl. Abbildung 4.2). Hauptursache ist der Reibungseinfluß in der Umströmung für endliche Werte von  $Re$ , insbesondere die Ablösung der Strömungsgrenzschicht im Bereich des Tropfenäquators. Die Diskrepanz zwischen dem theoretischen Wert

$$\Delta \bar{p}_{max} = \left(\frac{2}{2 - \gamma_0}\right)^2 \quad (4.70)$$

und Ergebnissen einer direkten numerischen Simulation der Ellipsoidumströmung ist in Tabelle 4.2 dargestellt. Die in diesem Zusammenhang unerwartet große Abweichung für

<sup>3</sup>Gleichung 14, Artikel 373 in Lamb (1932) enthält einen Druckfehler der hier korrigiert wurde

$y$	0.585	0.794	0.965	1.000	1.036	1.260	1.710
$\Delta\bar{p}_{max}$ Gl. 4.70	1.122	1.465	2.072	2.250	2.457	4.474	16.06
$\Delta\bar{p}_{max}$ Simulation	1.421	1.500	1.666	1.705	1.765	1.975	2.267
$\Delta\bar{p}_{max}$ Fehler [%]	21.0	2.3	24.4	32.0	39.2	126.6	608.6

Tabelle 4.2: Druckabfall entlang Rotationsellipsoiden variabler Geometrie. Simulationsergebnisse aus Masliyah und Epstein (1970) für  $Re = 100$ .

$y = 0.585$  ist auf eine, in der Potentialtheorie nicht berücksichtigte Staudrucküberhöhung infolge endlicher Grenzschichtdicke ( $Re = 100$ ) zurückzuführen. Es ist erkennbar, daß abgesehen von diesem Effekt, der Fehler mit zunehmender Abflachung des Tropfens drastisch ansteigt, so daß Gleichung 4.70 für diese Formen keine praktische Bedeutung hat. Für langgestreckte schlanke Ellipsoide stellt die Theorie im Rahmen der klassischen Aerodynamik dagegen ein wichtiges analytisches Werkzeug dar. Um diese Schwierigkeiten zu umgehen, soll  $\Delta\bar{p}_{max}$  in Gleichung 4.69 im weiteren als Modellparameter interpretiert werden. Nur die Geometriegröße  $\partial x_3/\partial s$  wird nach Gleichung 4.68 in der Formulierung der Druckverteilung beibehalten.

Die Normalengeschwindigkeit der Oberfläche geht aus dem Randwert des Geschwindigkeitspotentials der Innenströmung nach Gleichung 4.57 hervor. Die differentialgeometrische Auswertung von  $\partial\psi/\partial n$  auf der durch Gleichung 4.56 festgelegten Oberfläche führt auf den Ausdruck

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = R_0 \frac{1 - 3\zeta^2}{\sqrt{1 - (1 - y^6)\zeta^2}} \frac{dy}{dt}. \quad (4.71)$$

Schließlich kann die Integration der Leistungsflächendichte unter Ausnutzung der Rotationssymmetrie auf eine gewöhnliche Integration über  $\zeta$  reduziert werden. Mit der Substitution

$$dS = \frac{2\pi R_0^2}{y} \sqrt{1 - (1 - y^6)\zeta^2} d\zeta \quad (4.72)$$

ergibt sich die Gesamtleistung aerodynamischer Druckkräfte zu

$$\oint_S p_s \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = -\frac{\rho v_{rel}^2}{2} 2\pi R_0^3 \Delta\bar{p}_{max} \frac{\lambda_0}{y} \frac{dy}{dt}, \quad (4.73)$$

wobei die Geometriegröße  $\lambda_0$ , unter Beachtung der Definitionen 4.43 und 4.46 für die Exzentrizität  $e$ , wie folgt berechnet werden kann

$$\lambda_0 = \int_{-1}^{+1} \frac{1 - 4\zeta^2 + 3\zeta^4}{1 - (1 - y^6)\zeta^2} d\zeta = \begin{cases} 2 \frac{1 - e^2}{e^4} \left[ (3 - e^2) \frac{\operatorname{artanh} e}{e} - 3 \right], & y < 1, \\ 2 \frac{1 - e^2}{e^4} \left[ \frac{3 - 2e^2}{\sqrt{1 - e^2}} \frac{\arcsin e}{e} - 3 \right], & y > 1. \end{cases} \quad (4.74)$$

Bei Kugelform gilt der Grenzwert  $\lambda_0 = 8/15$ . Da die Kugelform ein Spezialfall dieser potentialtheoretischen Beschreibung ist, muß Gleichung 4.73 für  $y = 1$  äquivalent dem Leistungsterm sein, der sich für Potentialumströmung ( $C_2 = 3/2$ ) aus der linearen Theorie nach Gleichung 4.41 ergibt. Der Abgleich führt auf den Zusammenhang

$$C_2 = \frac{2}{3} \Delta\bar{p}_{max}, \quad (4.75)$$

d.h. der aerodynamische Wirkungskoeffizient kann hier als Maß für die Druckvariation auf der Tropfenoberfläche interpretiert werden. Die Proportionalitätskonstante wird bestätigt durch den Wert  $\Delta\bar{p}_{max} = 9/4$  bei Potentialumströmung (vgl. Abbildung 4.2). Für die numerische Berechnung von  $\lambda_0$  wird anstelle Gleichung 4.74 im weiteren eine im Bereich  $0.5 < y < 2.1$  gültige Polynomapproximation verwendet

$$\lambda_0 = 1.6033 - 9.7173y + 20.941y^2 - 18.595y^3 + 7.4035y^4 - 1.1046y^5 . \quad (4.76)$$

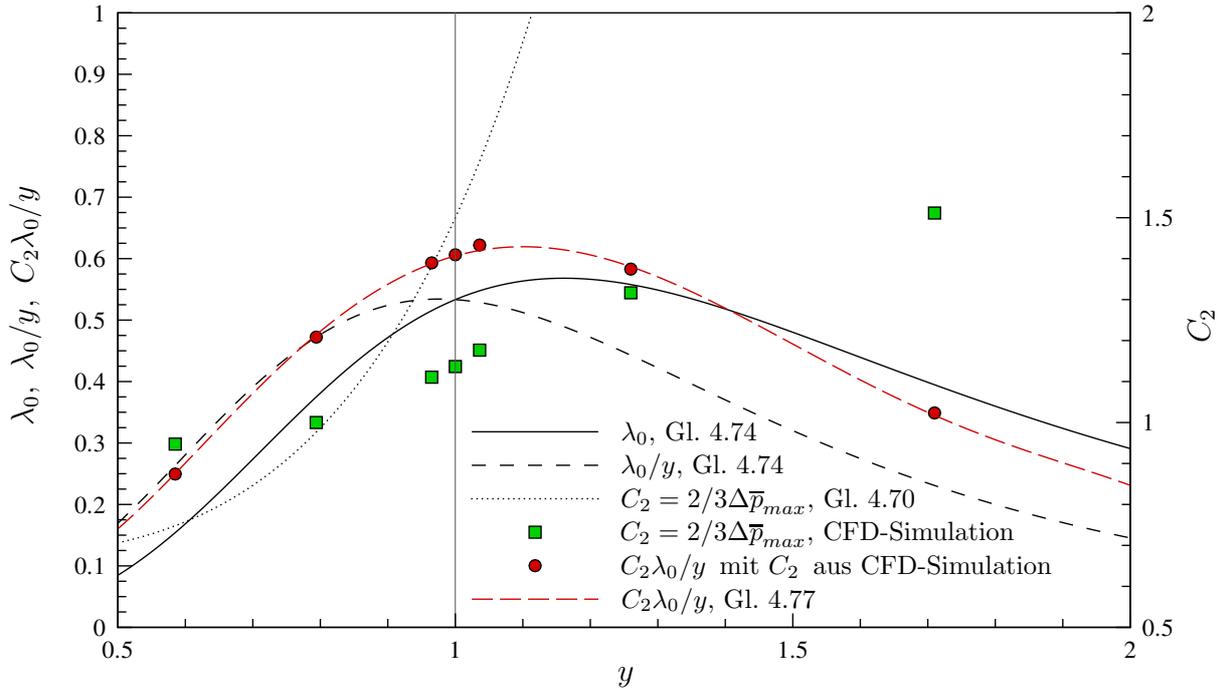


Abbildung 4.10: Nichtlinearitäten des aerodynamischen Terms. Numerisch berechnete Werte  $\Delta\bar{p}_{max}$  bei  $Re = 100$  nach Masliyah und Epstein (1970).

Die im aerodynamischen Term nach Gleichung 4.73 enthaltenen Nichtlinearitäten sind zusammenfassend in Abbildung 4.10 dargestellt. Auf Basis der von Masliyah und Epstein (1970) numerisch berechneten Druckdifferenzen  $\Delta\bar{p}_{max}$  kann für den Faktor  $C_2\lambda_0/y$  eine im Bereich  $0.5 < y < 2.1$  gültige Polynomapproximation angegeben werden

$$\frac{C_2\lambda_0}{y} = 1.0382 - 6.9474y + 16.680y^2 - 15.484y^3 + 6.2453y^4 - 0.92766y^5 . \quad (4.77)$$

Diese soll im weiteren alternativ zum Faktor  $C_2\lambda_0/y$  mit empirisch festgelegtem, konstanten Wert  $C_2$  eingesetzt werden.

#### 4.2.4 Reibungsterm

Die durch Gleichung 3.16 definierte Dissipation  $\Phi$  lautet mit den kartesischen Koordinaten des Tensors der Deformationsgeschwindigkeiten  $\mathbf{E}$  (Aris 1989)

$$\Phi = 2\mu e_{ij}e_{ij} , \quad e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) . \quad (4.78)$$

Da die Koordinatenachsen  $x_i$  nach den Abbildungen 4.5 und 4.6 die Hauptachsen der Verformung darstellen, gilt  $e_{ij} = 0$  für  $i \neq j$ . Unter Ausnutzung der Symmetrie ( $e_{11} = e_{22}$ ) und der Kontinuität ( $e_{33} = -e_{11} - e_{22}$ ) läßt sich der folgende Ausdruck ableiten

$$\Phi = 12\mu_d e_{22}^2 = 12\mu_d \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right)^2. \quad (4.79)$$

Mit der Annahme eines Geschwindigkeitspotentials nach Gleichung 4.57 ergibt sich  $e_{22}$  als konstant über das Tropfenvolumen

$$\frac{\partial v_2}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} = \frac{1}{y} \frac{dy}{dt}, \quad (4.80)$$

womit sich der folgende Ausdruck ergibt

$$\int_V \Phi dV = 16\pi R_0^3 \mu_d \frac{1}{y^2} \left( \frac{dy}{dt} \right)^2. \quad (4.81)$$

Der Vergleich mit dem Reibungsterm der linearen Energiebilanz 4.41 zeigt, daß für größere Verformungen eine  $1/y^2$ -Nichtlinearität zu berücksichtigen ist.

## 4.2.5 Modellgleichungen

Abschließend ist im folgenden eine zusammenfassende Darstellung der verschiedenen Modellgleichungen gegeben. Die Kombination der Modellterme und die Bezeichnung der Modelle ist in Tabelle 4.3 festgelegt. Lineare Terme werden aus der Energiegleichung 4.41

Modell	Aerodynamischer Term	Rückstellterm	Trägheitsterm
TAB	linear	linear	linear
NLTAB1	Ausdruck 4.64	linear	linear
NLTAB2	Ausdruck 4.64	Ausdrücke 4.42, 4.49	linear
NLTAB3	Ausdruck 4.64	Ausdrücke 4.42, 4.49	Ausdruck 4.55
PTB	Ausdrücke 4.73, 4.75, 4.76	Ausdrücke 4.42, 4.49	Ausdruck 4.60

Tabelle 4.3: Modellterme der verschiedenen Gleichungsvarianten. Reibungsterm außer bei TAB-Modell grundsätzlich als nichtlinearer Ausdruck 4.81

übernommen, die mittels der kinematischen Beziehung  $\alpha = 2 - 2y$  auf die Variable  $y$  transformiert werden kann. Als Potential-Theory-Breakup (PTB) Modell wird die einheitliche Verwendung der auf Potentialströmung basierenden Modellterme bezeichnet. Daneben werden 3 nichtlineare Varianten als Nonlinear-Taylor-Analogy-Breakup (NLTAB) Modelle vereinbart. In der Formulierung auf dem Zeitmaß  $T_\sigma = t/t_\sigma^*$  ergeben sich folgende Modellgleichungen

**TAB:**

$$\frac{d^2 y}{dT_\sigma^2} + 40 \text{On} \frac{dy}{dT_\sigma} + 64(y - 1) = 2C_2 \text{We} \quad (4.82)$$

**NLTAB1:**

$$\frac{d^2y}{dT_\sigma^2} + 40 \text{On} \frac{1}{y^2} \frac{dy}{dT_\sigma} + 64(y-1) = \frac{2C_2}{y} \text{We} \quad (4.83)$$

**NLTAB2:**

$$\frac{d^2y}{dT_\sigma^2} + 40 \text{On} \frac{1}{y^2} \frac{dy}{dT_\sigma} + 20 \frac{1}{S_0} \frac{dS}{dy} = \frac{2C_2}{y} \text{We} \quad (4.84)$$

**NLTAB3:**

$$\frac{\pi^2 + \frac{16}{y^6}}{\pi^2 + 16} \frac{d^2y}{dT_\sigma^2} - \frac{48}{\pi^2 + 16} \frac{1}{y^7} \left( \frac{dy}{dT_\sigma} \right)^2 + 40 \text{On} \frac{1}{y^2} \frac{dy}{dT_\sigma} + 20 \frac{1}{S_0} \frac{dS}{dy} = \frac{2C_2}{y} \text{We} \quad (4.85)$$

**PTB:**

$$\frac{1}{3} \left( 1 + \frac{2}{y^6} \right) \frac{d^2y}{dT_\sigma^2} - \frac{2}{y^7} \left( \frac{dy}{dT_\sigma} \right)^2 + 40 \text{On} \frac{1}{y^2} \frac{dy}{dT_\sigma} + 20 \frac{1}{S_0} \frac{dS}{dy} = \frac{15}{4} \frac{C_2 \lambda_0}{y} \text{We} \quad (4.86)$$

Die dimensionslose Oberflächenänderung  $S_0^{-1} dS/dy$  ist entweder durch das Näherungspolynom nach Gleichung 4.49 oder durch die exakte Darstellung entsprechend der Gleichungen 4.45 und 4.48 zu substituieren. Der aerodynamische Wirkungskoeffizient  $C_2$  ist dagegen als freier Parameter beibehalten, um die Modellgleichungen in Kapitel 5 an experimentelle Daten anzupassen. Die mit Gleichung 2.2 gegebene Originalformulierung des TAB-Modells nach O'Rourke und Amsden (1987) ergibt sich durch Wahl von  $C_2 = 2/3$ . Die in Abschnitt 5.3 vorgenommene Anpassung an die bei Sprungbeaufschlagung gemessene kritische Querabmessung des Tropfens  $y \approx 1.8$  führt dagegen auf grundsätzlich höhere Werte. Für das PTB-Modell sind darüberhinaus zwei Varianten möglich. Es kann entweder mit  $C_2$  als freiem Parameter verwendet werden – in diesem Fall ist die Geometriegröße  $\lambda_0$  nach Gleichung 4.76 zu implementieren – oder mit dem halbempirischen Faktor  $C_2 \lambda_0 / y$  nach Gleichung 4.77. Dieser faßt sämtliche Nichtlinearitäten des aerodynamischen Terms zusammen.

Die Verformungsdynamik eines Flüssigkeitstropfens bei reiner Druckbeaufschlagung ist somit im wesentlichen durch die Kennzahlen  $\text{On}$ ,  $\text{We}$  und das dimensionslose Zeitmaß  $T_\sigma$  bestimmt (alternativ:  $\text{Re}_{def}$ ,  $\text{We}$  und  $T = t/t^*$ ). Die in Abschnitt 4.1.3 dargestellte Modalzerlegung der Druckrandbedingung läßt außerdem einen Nebeneinfluß der Reynolds-Zahl erkennen, der ggf. über den Koeffizient  $C_2$  berücksichtigt werden könnte. Weitere Einflüsse, wie z.B. des Dichteverhältnisses  $\rho_d/\rho$  oder des  $c_D$ -Wertes, ergeben sich erst mit der Berücksichtigung des Bewegungsverhaltens.

### 4.3 Tropfenbewegungsmodelle

Die Translationsbewegung eines Tropfens in einem Strömungsfeld ist durch Gleichung 3.18 beschrieben. Eine geschlossene analytische Darstellung läßt sich jedoch nur für den Grenzfall schleichender Umströmung des Tropfens, also bei sehr kleinen Reynolds-Zahlen erreichen. Bei maßgeblichen Trägheitskräften in der Umströmung ist die resultierende Kraft auf

den Tropfen nur noch über empirische Zusammenhänge beschreibbar. Übersichtsdarstellungen der klassischen und aktuellen theoretischen Studien werden von Aggarwal und Peng (1995) und Michaelides (1997) gegeben. In Abschnitt 4.3.1 wird zunächst auf das Bewegungsgesetz einer starren Kugel bei schleichender Umströmung eingegangen und dieses empirisch auf den praktisch bedeutsamen Bereich höherer Reynolds-Zahlen erweitert. Dabei soll insbesondere auf die bei Gemischbildungsprozessen häufig auftretende aerodynamische Sprungbeaufschlagung von Tropfen eingegangen werden. In Abschnitt 4.3.2 wird das Bewegungsgesetz zur Beschreibung deformierter Tropfen modifiziert. Es werden quasistationäre Ansätze vorgestellt, die den zeitgemittelten Einfluß der Verformungsdynamik auf den Strömungswiderstand beschreiben, sowie Ansätze, in denen der Einfluß zeitaufgelöst berücksichtigt wird.

### 4.3.1 Kugelförmige Tropfen

Nach Maxey (1993) kann aus der integralen Impulsgleichung 3.18 bei schleichender Umströmung einer starren Kugel die folgende Bewegungsgleichung abgeleitet werden

$$m_d \frac{d\mathbf{u}_d}{dt} = 3\pi\mu D \mathbf{v}_{rel} + m_d \frac{\rho}{\rho_d} \frac{D\mathbf{U}}{Dt} + \frac{1}{2} m_d \frac{\rho}{\rho_d} \frac{d\mathbf{v}_{rel}}{dt} + \frac{3}{2} D^2 \sqrt{\pi\rho\mu} \left( \int_0^t \frac{d\mathbf{v}_{rel}}{dt'} \frac{dt'}{\sqrt{t-t'}} + \frac{\mathbf{v}_{rel,0}}{\sqrt{t}} \right) + m_d \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_d} \right) \mathbf{g}. \quad (4.87)$$

Die Relativgeschwindigkeit  $\mathbf{v}_{rel} = \mathbf{U} - \mathbf{u}_d$  ist nach Gleichung 3.14 mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{U}(t, \mathbf{r}_d^0)$  der ungestörten Strömung im Zentrum der Kugel gebildet. Bei aus der Ruhe einsetzender Fallbewegung in einem ruhenden Fluid ergibt sich aus Gleichung 4.87 die klassische Basset-Boussinesq-Oseen (BBO) Gleichung. Der erste Kraftbeitrag der rechten Seite geht auf Stokes zurück und gibt den stationären Strömungswiderstand der Kugel an. Der zweite Beitrag beschreibt die Kraftwirkung lokaler Druckgradienten in der ungestörten Strömung, der dritte, auch als virtuelle Masse bezeichnete Beitrag ist an die Massenträgheit des mit der Kugel beschleunigten Fluides geknüpft. Im vierten Beitrag, dem Basset-Term, geht ein zeitlich gewichteter Anteil der gesamten Beschleunigungsgeschichte der Kugel ein. Physikalischer Ursprung dieses Kraftbeitrags ist die mit endlichem Zeitmaß  $D^2\rho/\mu$  ablaufende Wirbeldiffusion von der Kugeloberfläche in die Umströmung. Durch Überströmung der Oberfläche erzeugte Wirbelstärke zieht infolge dieses transienten Vorgangs immer eine mit endlicher Geschwindigkeit abklingende Schubspannungswirkung auf die Kugel nach sich. Formal ist dieser Effekt durch das Faltungsintegral des Basset-Terms erfaßt. Der separate, mit  $t^{-0.5}$  abklingende Beitrag ist eine Folge der bei  $t = 0$  schlagartig einsetzenden Relativströmung (Reeks und McKee 1984).

Nicht berücksichtigt sind aus Gründen der Übersichtlichkeit Kraftwirkungen infolge Stromlinienkrümmung (Faxen-Kräfte), Rotation der Kugel (Magnus-Kraft), Nähe fester Wände und eines gleichförmigen Geschwindigkeitsgradienten quer zur Relativströmung (Saffman-Kraft). Eine umfassende Darstellung dieser Beiträge findet sich in Clift et al. (1978), Astrup (1992) oder Crowe et al. (1998). Zur Gültigkeit von Gleichung 4.87 werden folgende Bedingungen vorausgesetzt

$$\text{Re} \ll 1, \quad \frac{\rho D^2 u^*}{\mu l^*} \ll 1, \quad \frac{D}{l^*} \ll 1, \quad (4.88)$$

wobei  $l^*$  das Längenmaß differentieller Änderungen des ungestörten Strömungsfeldes darstellt und  $u^*$  die entsprechende charakteristische Geschwindigkeit. Mit Ausnahme eines konstanten Quergradienten, der über eine Saffman-Kraft erfaßt werden kann, müssen räumliche Variationen des ungestörten Geschwindigkeitsfeldes somit auf Längenmaße begrenzt sein, die deutlich größer als der Kugeldurchmesser sind. In der Regel gilt dies für die energietragenden Schwankungsanteile in turbulenten Strömungen, die auch den größten Einfluß auf die Bewegung der Kugel haben. Hochfrequente Spektralkomponenten können dagegen Geschwindigkeitsvariationen einführen, deren Längenmaße bis herab in den Größenbereich des Kugeldurchmessers reichen. Weil deren Amplituden jedoch vergleichsweise gering sind, kann ein Einfluß auf das Bewegungsverhalten in vielen Fällen vernachlässigt werden. Eine Diskussion der Fragestellungen, die im Zusammenhang mit der Turbulenz der Strömung aufkommen, findet sich in Hinze (1972).

Um Gleichung 4.87 auf den im Zusammenhang mit der technischen Gemischaufbereitung bedeutsamen Bereich höherer Reynolds-Zahlen zu erweitern, werden empirische Modelle der verschiedenen Kraftbeiträge eingeführt. So wird der stationäre Strömungswiderstand nach Stokes durch einen empirischen Zusammenhang nach Gleichung 3.22 auf Basis eines aerodynamischen Widerstandsbeiwertes  $c_D$  ersetzt, die Beiträge der virtuellen Masse und der Beschleunigungsgeschichte mithilfe empirischer Korrekturfaktoren  $c_A$  und  $c_H$  modifiziert. Aggarwal und Peng (1995) geben eine Bewegungsgleichung an, die im folgenden entsprechend Gleichung 4.87 mit abgespaltenem Initialbeitrag des Basset-Terms dargestellt ist

$$m_d \frac{d\mathbf{u}_d}{dt} = \frac{\pi}{8} D^2 \rho c_D v_{rel} \mathbf{v}_{rel} + m_d \frac{\rho}{\rho_d} \frac{D\mathbf{U}}{Dt} + c_A \frac{1}{2} m_d \frac{\rho}{\rho_d} \frac{d\mathbf{v}_{rel}}{dt} + c_H \frac{3}{2} D^2 \sqrt{\pi \rho \mu} \left( \int_0^t \frac{d\mathbf{v}_{rel}}{dt'} \frac{dt'}{\sqrt{t-t'}} + \frac{\mathbf{v}_{rel,0}}{\sqrt{t}} \right) + m_d \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_d} \right) \mathbf{g} . \quad (4.89)$$

Zum stationären Strömungswiderstand kugelförmiger Tropfen finden sich in der Literatur viele Angaben. Wenn, wie in der vorliegenden Arbeit der Fall, Kompressibilitäts- und Verdunstungseffekte nicht berücksichtigt werden, ist der  $c_D$ -Wert alleine von der Reynolds-Zahl abhängig und kann z.B. durch die Korrelation von Stein (1973) beschrieben werden

$$c_{D,\infty} = 0.36 + 5.48 \operatorname{Re}^{-0.573} + \frac{24}{\operatorname{Re}} , \quad \operatorname{Re} \lesssim 10^4 . \quad (4.90)$$

Eine stückweise, bis in den Bereich überkritischer Umströmung definierte Korrelation hoher Genauigkeit geben Clift et al. (1978) an. Anhand einer experimentellen Studie harmonischer Kugelbewegungen bestimmen Odar und Hamilton (1964) die folgenden Abhängigkeiten zur Beschreibung der instationären Kraftwirkungen

$$c_A = 2.1 - \frac{0.132}{0.12 + A_c^2} , \quad (4.91)$$

$$c_H = 0.48 + \frac{0.52}{(1 + A_c)^3} , \quad (4.92)$$

$$\text{mit} \quad A_c = \left( \frac{D}{v_{rel}^2} \frac{dv_{rel}}{dt} \right)^{-1} . \quad (4.93)$$

Nach Michaelides (1997) wurden diese bereits in zahlreichen Studien erfolgreich eingesetzt und stellen die zum gegenwärtigen Zeitpunkt genauesten Korrekturfaktoren dar.

Da die sprunghafte aerodynamische Beaufschlagung von zentralem Interesse ist, soll das Verhalten der Modellgleichung 4.89 für diesen Grenzfall untersucht werden. Im ersten Moment der Beaufschlagung führt der sprunghafte Anstieg der Relativgeschwindigkeit zu extrem großen Kraftbeiträgen der virtuellen Masse und des Basset-Terms. Von diesen bleibt für  $t > 0$  alleine der mit  $t^{-0.5}$  abklingende Beitrag des Basset-Terms, der in der Anfangsphase der Beaufschlagung um Größenordnungen über dem Integralbeitrag infolge Beschleunigung des Tropfens liegt. Für ideale Sprungbeaufschlagung bei konstanter Relativgeschwindigkeit läßt sich abschätzen, wie schnell der Initialeffekt gegenüber dem stationären Widerstandsterm abfällt und welchen Einfluß der Effekt auf die Beschleunigung des Tropfens hat. Zu diesem Zweck wird die charakteristische Zeit  $t_{v,B}^*$  wie folgt definiert

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{8} D^2 \rho c_D v_{rel}^2 &= c_H \frac{3}{2} D^2 \sqrt{\pi \rho \mu} \frac{v_{rel}}{\sqrt{t_{v,B}^*}} , \\ t_{v,B}^* &= \frac{144}{\pi} \frac{c_H^2}{c_D^2} \frac{\mu}{\rho v_{rel}^2} . \end{aligned} \quad (4.94)$$

Mit der Partikelrelaxationszeit nach Gleichung 3.44 ergibt sich der Zusammenhang

$$\frac{t_{v,B}^*}{t_v^*} = \frac{108}{\pi} \frac{c_H^2}{c_D} \frac{\rho}{\rho_d} \frac{1}{\text{Re}} , \quad (4.95)$$

der für  $\text{Re} \gg 1$  und  $\rho_d/\rho \gg 1$  auf die Beziehung  $t_{v,B}^* \ll t_v^*$  führt. Es läßt sich somit vermuten, daß der Initialbeitrag des Basset-Terms trotz seiner anfänglichen Größe keinen wesentlichen Einfluß auf das Bewegungsverhalten des Tropfens hat. Dieser Schluß wird durch numerische Auswertungen der Gleichung 4.89 sowie durch experimentelle Studien zum Thema Stoß-Partikel Wechselwirkung bestätigt, wie z.B. von Forney et al. (1987) oder Thomas (1991).

Alternativ können die in Gleichung 4.89 auftretenden instationären Kraftwirkungen auch als beschleunigungsabhängige Anteile einer einzigen Strömungskraft  $F_D$  nach Gleichung 3.22 gedeutet werden. Temkin und Kim (1980) haben zu diesem Zweck experimentelle Untersuchungen in Stoßrohrströmungen durchgeführt und für negative Relativbeschleunigungen folgende Modifikation des stationären Widerstandsbeiwertes angegeben

$$c_D = c_{D,\infty} - \left( \frac{\rho_d}{\rho} - 1 \right) \frac{K_A}{A_c} , \quad 3.2 < \text{Re} < 77 . \quad (4.96)$$

Der dimensionslose Beschleunigungsparameter  $A_c$  ist hierbei durch Gleichung 4.93 gegeben und  $K_A \approx 1$  stellt eine nicht weiter spezifizierte Konstante dar. Bezüglich dieser Vorgehensweise ist jedoch grundsätzlich zu beachten, daß der  $c_D$ -Wert tatsächlich von der Beschleunigungsgeschichte des Tropfens abhängt und somit nur für einen bestimmten Bewegungsablauf gültig sein kann. Im allgemeinen Fall ist eine Korrektur nach Gleichung 4.96 daher nicht zu empfehlen. Für eine systematische Darstellung und Bewertung der verschiedenen Ansätze zur Berücksichtigung instationärer Kraftwirkungen sei auf Aggarwal und Peng (1995) verwiesen.

In vielen Fällen können die instationären Kraftwirkungen auf das Bewegungsverhalten jedoch ohne größere Fehler vernachlässigt werden (Hinze 1972; Astrup 1992). Dies gilt insbesondere für die im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Gas-Flüssigkeits-Systeme mit  $\rho_d/\rho \gg 1$ . Es ergibt sich die in der Praxis weit verbreitete Formulierung der Bewegungsgleichung

$$m_d \frac{d\mathbf{u}_d}{dt} = \frac{\pi}{8} D^2 \rho c_D v_{rel} \mathbf{v}_{rel} + \mathbf{g} . \quad (4.97)$$

Für  $We \gtrsim 1$  ändern sich mit der Form des Tropfens auch seine aerodynamischen Eigenschaften, was über das Bewegungsverhalten wiederum auf die Relativströmung und damit auf die deformierenden Strömungskräfte zurückwirkt. Wie bereits angemerkt, ist diese Kopplung von Verformung und Bewegung eine der grundlegenden Ursachen für die Komplexität und Vielfältigkeit der Tropfendynamik bei aerodynamischer Beaufschlagung.

### 4.3.2 Deformierte Tropfen

Das Bewegungsverhalten deformierter Tropfen wird im weiteren auf der Grundlage von Gleichung 4.97 beschrieben. Instationäre Kraftwirkungen, die insbesondere bei sprunghafter Beaufschlagung nicht zu vernachlässigen sind, werden über eine Korrektur nach Gleichung 4.96 berücksichtigt. Der Effekt der Deformation läßt sich somit formal als Änderung zweier Modellgrößen darstellen: der Querschnittsfläche  $\pi D^2/4 = \pi y^2 D_0^2/4$  senkrecht zur Anströmung und des  $c_D$ -Wertes. Wird die Querschnittsfläche des unverformten Tropfens als Bezugsfläche verwendet, dann geht die Deformation alleine über den  $c_D$ -Wert ein. Wie sich dieser infolge Deformation ändert, wird im folgenden erörtert.

Entscheidend ist das Verhältnis der Zeitmaße von Verformung und Bewegung, da dieses den Charakter der Wechselwirkung beider Vorgänge bestimmt. Bei quasistationärer Verformung, wie z.B. beim freien Fall anfänglich kugelförmiger Tropfen, ändert sich die Relativgeschwindigkeit nur sehr langsam, so daß Trägheitskräfte in der Verformungsströmung ohne Bedeutung sind. Grundsätzlich gilt  $t^* \ll t_v^*$ . Mithilfe der Dimensionsanalyse läßt sich in diesem Fall zeigen, daß die Strömungskraft auf den deformierten Tropfen bei Vernachlässigung von Grenzschichtströmungen und tropfeninternen Wirbelströmungen alleine von den Kennzahlen  $Re$  und  $We$  abhängt. Auf Basis der experimentellen Daten von Reinhart (1964) formulieren Schmelz und Walzel (1999) die folgende, im Bereich  $10^3 < Re < 10^4$  gültige Korrelation (Bezugsfläche ist  $\pi D_0^2/4$ )

$$c_{D,\infty} = 0.44 + 0.018 We^{1.5} , \quad We < 9 . \quad (4.98)$$

Hinsichtlich dynamischer Verformungsvorgänge, wie z.B. bei Sprungbeaufschlagung oder anfänglicher Deformation der Tropfen, finden sich in der Literatur zwei unterschiedliche Vorgehensweisen. Eine zeitgemittelte Berücksichtigung der Verformung wird von Wiegand (1987) vorgeschlagen. Auf der Grundlage eines Normalmodenansatzes betrachtet er ausschließlich den stationären Anteil der Verformung, den er in direkte Proportionalität zur Überhöhung des Strömungswiderstandes setzt. Die bereits als Gleichung 2.7 vorgestellte quasistationäre Korrelation  $c_D(Re, We)$  umgeht somit eine explizite Beschreibung der Tropfenverformung. Die Vorgehensweise bietet sich insbesondere dann an, wenn die Verformungsdynamik auf deutlich kleinerem Zeitmaß abläuft als die Bewegung des Tropfens,

wenn also  $\{t^*, t_\sigma^*, t_\mu^*\} \ll t_v^*$  gilt. Im Rahmen einer numerischen Beschreibung lassen sich so erhebliche Einsparungen an Rechenzeit erzielen.

Ist die Entkopplung der Vorgänge nicht mehr gegeben, d.h. überschneiden sich die Zeitmaße, muß die Verformungsdynamik zeitaufgelöst berücksichtigt werden. Dies gilt bei verstärkter Wirkung tropfeninterner Reibungskräfte sowie bei aufgeprägten Fluktuationen der Relativströmung, wie z.B. in Abbildung 2.9 anhand des Tropfens im Vormischmodul erkennbar. Im Hinblick auf die Literatur fällt auf, daß nur wenige systematische Erkenntnisse zum Strömungswiderstand bei dynamischer Verformung existieren. Konkrete Daten finden sich meist nur für stationäre Tropfenformen (Clift et al. 1978). Eine Möglichkeit die aerodynamischen Eigenschaften deformierter Tropfen zwischen den Grenzformen der Kugel und der Scheibe zu beschreiben, besteht mit der Darstellung der Tropfen als gedrückte Rotationsellipsoide. Diese Approximation wurde bereits als Grundlage der in Abschnitt 4.2 vorgestellten nichtlinearen Verformungsmodelle eingesetzt. Die Modellbildung reduziert sich damit auf eine geeignete Interpolation des  $c_D$ -Wertes zwischen den Grenzformen der Kugel und der Scheibe. Als Interpolationsparameter bieten sich die Geometriegrößen  $y$  und  $E$  an, die für Rotationsellipsoide über die kinematische Beziehung  $E = y^{-3}$  verknüpft sind. Zur Verwendung mit dem TAB-Modell schlagen Liu et al. (1993) die bereits mit Gleichung 2.3 eingeführte lineare Interpolation über  $y$  vor. Auf Basis experimenteller Untersuchungen zum aerodynamischen Widerstand deformierter Tropfen in Stoßrohrströmungen geben Hsiang und Faeth (1992) und Dai und Faeth (2001) für den Bereich  $1000 < Re < 3300$  folgende Abhängigkeit an (Bezugsfläche ist  $\pi y^2 D_0^2/4$ )

$$c_D = 0.4 [1 + 2.25(y - 1)] , \quad 1 < y < 2 . \quad (4.99)$$

Die Verwendung des Formfaktors als Interpolationsparameter hat verschiedene Vorteile. Zum einen geht in  $E$  sowohl die Quer- als auch die Längsabmessung des Tropfens ein, womit diese Größe besser geeignet zur Charakterisierung beliebiger, mit dem Normalmodenmodell berechneter Tropfenformen ist. Zum anderen deckt der Bereich  $0 < E \leq 1$  das gesamte Spektrum gedrückter Ellipsoide ab – Gleichung 2.3 liegt dagegen die aus der Kinematik des TAB-Modells abgeleitete Obergrenze  $y_{disk} = 1.5$  zugrunde. Clift et al. (1978) schlagen für den Bereich  $980 < Re < 10^4$  eine quadratische Abhängigkeit des  $c_D$ -Wertes vor

$$c_D = 0.445 [1 + 1.63(1 - E)^2] , \quad 0 < E \leq 1 . \quad (4.100)$$

Im Gegensatz zur linearen Interpolation gibt diese das Verhalten bei Kugelform physikalisch korrekt wieder, d.h. bei infinitesimal kleinen Abweichungen findet keine Änderung des  $c_D$ -Wertes statt, was mathematisch durch  $dc_D/dE \rightarrow 0$  für  $E \rightarrow 1$  beschrieben ist.

Um das Interpolationskonzept auf den gesamten Bereich technischer Reynolds-Zahlen zu erweitern, wird der Widerstandsbeiwert bei Kugelform nach Gleichung 4.90, bei Scheibenform nach

$$c_{D,disk} = 1.1 + \frac{64}{\pi Re} \quad (4.101)$$

zugrundegelegt. Die Reynolds-Zahl ist dabei mit der Querabmessung  $D = y D_0$  zu bilden. Es werden zwei alternative Ansätze definiert: eine lineare Interpolation über  $y$  und eine

quadratische Interpolation über  $E$

$$c_D = f c_{D,disk} + (1 - f) c_{D,sphere} , \quad (4.102)$$

$$\text{mit } f = \frac{y - 1}{y_{disk} - 1} , \quad (4.103)$$

$$\text{mit } f = 1 - E^2 , \quad (4.104)$$

wobei als Bezugsfläche die momentane Querschnittsfläche des Tropfens zu verwenden ist. Als Grenzwert  $y_{disk} = 1.8$  wird die mit Gleichung 6.5 spezifizierte, empirisch bestimmte maximale Querabmessung an der Stabilitätsgrenze des Tropfens gewählt.

Eine zusammenfassende Darstellung der Interpolationsansätze zeigt Abbildung 4.11. Für

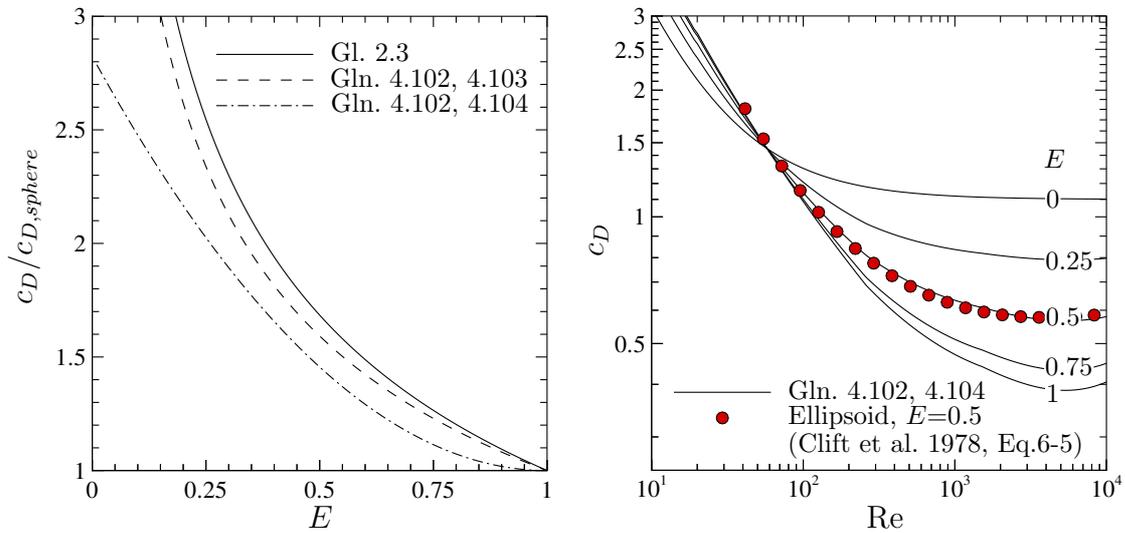


Abbildung 4.11: Abhängigkeit des Widerstandsbeiwertes vom Verformungsgrad (links) und von der Reynolds-Zahl der Umströmung (rechts)

die  $y$ -basierten Ansätze ist die Abszisse über die Beziehung  $E = y^{-3}$  umgerechnet. Es ist zu erkennen, daß die lineare Interpolation über  $y$  zu einer grundsätzlich stärkeren Überhöhung des  $c_D$ -Wertes führt als die quadratische Interpolation über  $E$ . Die größten Unterschiede zwischen den Ansätzen sind im Bereich kleiner Verformungsgrade ( $0.8 < E < 1$ ) zu verzeichnen. Der Einfluß der Reynolds-Zahl ist in Abbildung 4.11 anhand interpolierter Verläufe des  $c_D$ -Wertes dargestellt, ergänzt durch einen experimentell bestimmten Verlauf für ein Rotationsellipsoid mit  $E = 0.5$ . Für diesen Verformungsgrad geben die  $E$ -basierte, wie auch die nicht dargestellte  $y$ -basierte Interpolation nahezu identisch den Verlauf der Meßwerte wieder.

Auf Basis einer umfangreichen numerischen Studie zum Strömungswiderstand von Rotationsellipsoiden im Bereich  $Re < 200$  schlugen O'Donnell und Helenbrook (2003) eine quadratische Interpolation über  $E$  vor. Sie erzielen eine erhöhte Genauigkeit durch Verwendung einer zusätzlichen Stützkorrelation  $c_{D,0.5}(Re)$  bei  $E = 0.5$ , die sie mit Randkorrelationen  $c_{D,sphere}(Re)$  und  $c_{D,disk}(Re)$  über ein Lagrangesches Interpolationspolynom verknüpfen

$$c_D = 2(E - 1)(E - 0.5) c_{D,disk} - 4E(E - 1) c_{D,0.5} + 2E(E - 0.5) c_{D,sphere} . \quad (4.105)$$

Auf der Grundlage numerisch berechneter  $c_D$ -Werte geben sie für die drei Verformungsgrade  $E = 1, 0.5$  und  $0$  folgende Korrelationen an

$$c_{D,sphere} = \begin{cases} \frac{24}{\text{Re}} (1 + 0.1315\text{Re}^{0.82-0.05 \log \text{Re}}), & \text{Re} \leq 20, \\ \frac{24}{\text{Re}} (1 + 0.1935\text{Re}^{0.6305}), & 20 \leq \text{Re} \leq 260, \end{cases} \quad (4.106)$$

$$c_{D,disk} = \begin{cases} \frac{64}{\pi \text{Re}} (1 + 0.1241\text{Re}^{0.8369}), & \text{Re} \leq 20, \\ \frac{64}{\pi \text{Re}} (1 + 10^{-1.1656+1.1885 \log \text{Re}-0.1223 \log^2 \text{Re}}), & 20 \leq \text{Re} \leq 260, \end{cases} \quad (4.107)$$

$$c_{D,0.5} = \begin{cases} \frac{21.7273}{\text{Re}} (1 + 10^{-0.8773+0.8284 \log \text{Re}-0.0435 \log^2 \text{Re}}), & \text{Re} \leq 20, \\ \frac{21.7273}{\text{Re}} (1 + 10^{-0.9212+0.8641 \log \text{Re}-0.047 \log^2 \text{Re}}), & 20 \leq \text{Re} \leq 260. \end{cases} \quad (4.108)$$

## 5 Modellvalidierung

Zur systematischen Validierung der Modellansätze soll das Verformungs- und Bewegungsverhalten von Flüssigkeitstropfen für typische Problemstellungen der technischen Gemischaufbereitung berechnet werden. Dabei wird in den Abschnitten 5.1, 5.2 und 5.3 zunächst auf die Tropfenverformung eingegangen. Die Problemstellungen sind so gewählt, daß ein Kräftepaar jeweils isoliert betrachtet werden kann, im Hinblick auf die Modellgleichungen somit nur zwei Terme aktiv sind. Auf diese Weise können Kräftepaare getrennt von den übrigen Einflüssen validiert werden. Es werden zunächst freie Formschwingungen untersucht, die bei vernachlässigbaren Reibungseinflüssen allein durch das periodische Wechselspiel von Trägheitskräften und Oberflächenspannung geprägt sind. Dagegen ist die stationäre Verformung von Tropfen durch das Gleichgewicht von aerodynamischen Kräften und Oberflächenspannung kontrolliert. Dieses Kräftepaar bestimmt bei der sprunghaften aerodynamischen Beaufschlagung die Maximalverformung des Tropfens, während die Dynamik des Vorgangs bereits als Wechselwirkungsphänomen aller beteiligten Kraftwirkungen, d.h. Trägheitskräften, Oberflächenspannung und aerodynamischen Kräften bestimmt ist.

Für die linearen Modellgleichungen werden im Fall konstanter Relativgeschwindigkeit analytische Lösungen angegeben. Für die nichtlinearen Modellgleichungen, bzw. bei variablen Strömungsrandbedingungen, ist dagegen eine numerische Integration notwendig. Da die zeitgenaue Berechnung periodischer Vorgänge hohe Anforderungen an die Genauigkeit des Verfahrens stellt, wird ein Runge-Kutta Verfahren nach Fehlberg mit adaptiver Schrittweitenregelung gewählt (Schmehl 1992; Weinmann 1996). Bei zusätzlicher Berücksichtigung der Tropfenbewegung kann es, je nach Verhältnis der bestimmenden Zeitmaße, zu einer Wechselwirkung mit der Tropfenverformung kommen. In den Abschnitten 5.4 und 5.5 liegt der Schwerpunkt daher auf der simultanen Betrachtung beider Vorgänge. Aufgrund der Nichtlinearität dieser Kopplung und der zeitlichen Änderung der Relativströmung ist die simultane Lösung der Modellgleichungen in diesen Fällen nur noch durch numerische Integration möglich. Zu diesem Zweck wurden sämtliche, im Rahmen der vorliegenden Arbeit entwickelten Modellgleichungen in das am Institut für Thermische Strömungsmaschinen entwickelte Programmsystem Ladrop2 implementiert. Eine Zusammenstellung der Verformungsgleichungen ist in Anhang B gegeben.

Stark unterschiedliche Zeitmaße der Verformungs- und Bewegungsdynamik können eine maßgebliche Auswirkung auf die Effizienz des numerischen Verfahrens haben. Beispielsweise ist der Integrationszeitschritt in laminaren Strömungsfeldern mit mäßigen Gradienten der Gasgeschwindigkeit durch das Zeitmaß der Tropfenverformung bestimmt. Weil dieses um Größenordnungen unter dem Zeitmaß der Bewegung liegt, ist der Berechnungsaufwand im Vergleich zur reinen Flugbahnermittlung deutlich höher. In kommerziellen Programmen wird daher meist auf eine numerische Integration der Verformungsgleichungen verzichtet und anstelle für jeden Zeitschritt eine analytische Abschätzung des Verformungsverhaltens durchgeführt. Nachteil dieser Vorgehensweise ist der Verlust zeitaufgelöster Information, u.a. über die aerodynamischen Eigenschaften des Tropfens. Viele Problemstellungen der technischen Gemischaufbereitung sind jedoch durch Strömungsfelder geprägt, die aufgrund von Turbulenz, Strömungsinhomogenitäten oder Tropfenverdunstung ohnehin eine wesentliche Reduktion des Integrationszeitschrittes erfordern, die dargestellte Problematik somit an Bedeutung verliert.

## 5.1 Freie Formschwingungen

Bei Gemischbildungsprozessen kommt es nicht nur infolge aerodynamischer Kraftwirkungen zu einer Tropfenverformung, sondern auch beim Zerfall zusammenhängender Flüssigkeitsstrukturen, bei Kollisionen zwischen Tropfen oder bei Wechselwirkungen von Tropfen mit den Berandungen des Strömungsraums. Trotz kleiner Weber-Zahlen können die resultierenden Formschwingungen zu einer maßgeblichen Beeinflussung des Bewegungsverhaltens führen. Eine detaillierte Darstellung dieser Thematik auf Basis numerischer Simulationen ist in Hase (2001) gegeben. Zur Veranschaulichung der axialsymmetrischen Verformungsdynamik eines anfänglich gestreckten Tropfens in ruhender Gasumgebung

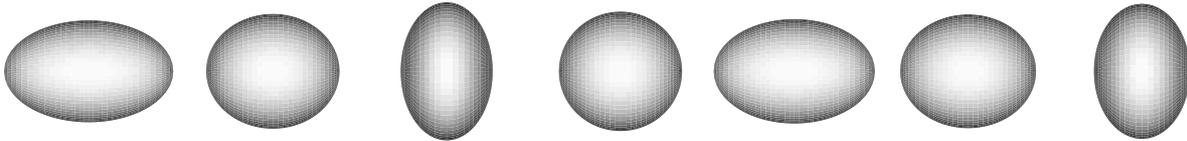


Abbildung 5.1: Formschwingungen eines Tropfens berechnet mit dem NLTAB3-Modell für  $\alpha_{2,0} = 0.3$  in Zeitschritten von  $\Delta T_\sigma = 0.2$

zeigt Abbildung 5.1 das Ergebnis einer numerischen Integration der nichtlinearen Gleichung 4.85 auf dem Zeitmaß  $T_\sigma = t/t_\sigma^*$ .

Grundlegende Aussagen lassen sich auf Basis der linearen Normalmodenanalyse machen. Ausgehend von der Theorie nach Lamb-Isshiki ergeben sich für statische Anfangsverformungen  $\alpha_{n,0}$  die folgenden *speziellen* Lösungen der homogenen Differentialgleichungen 4.35

$$\alpha_n = \alpha_{n,0} \exp\left(-\frac{T_\sigma}{\tau_n}\right) \cos(\omega_n T_\sigma). \quad (5.1)$$

Die dimensionslosen Abklingkonstanten  $\tau_n$  und die Kreisfrequenzen  $\omega_n$  lauten

$$\frac{1}{\tau_n} = 4(n-1)(2n+1) \text{On}, \quad (5.2)$$

$$\omega_{n,0}^2 = 8n(n-1)(n+2), \quad (5.3)$$

$$\omega_n^2 = \omega_{n,0}^2 - \frac{1}{\tau_n^2}. \quad (5.4)$$

Für den  $P_2$ -Mode ergeben sich die in Tabelle 2.1 aufgeführten Werte des TAB-Modells  $\omega_{2,0} = 8$  und  $1/\tau_2 = 20 \text{On}$ . Der Übergang zur aperiodischen Dämpfung, d.h. die schwingungsfreie Annäherung an die Kugelform, findet mit der kritischen Ohnesorge-Zahl statt. Diese ergibt sich aus der Bedingung  $\omega_{n,0}^2 \tau_n^2 = 1$  und berechnet sich für den  $P_2$ -Mode zu

$$\text{On}_c = 0.4. \quad (5.5)$$

Obwohl der Gültigkeitsbereich der linearen Theorie mit der kritischen Dämpfung bereits weit überschritten ist, stellt die kritische Ohnesorge-Zahl eine wichtige Kenngröße zur Bewertung des Reibungseinflusses dar.

Es wird zunächst die Dämpfung von Formschwingungen bei schwachem Reibungseinfluß untersucht. Grundlage der Modellrechnungen ist der  $P_2$ -Mode der linearen Theorie in den Varianten nach Hinze (Gleichung 4.27) bzw. nach Lamb-Isshiki (Gleichung 4.35). In Abbildung 5.2 sind die Ergebnisse der Berechnungen gemeinsam mit einem experimentell ermittelten Schwingungsverlauf dargestellt. Es ist deutlich, daß das Abklingverhalten der

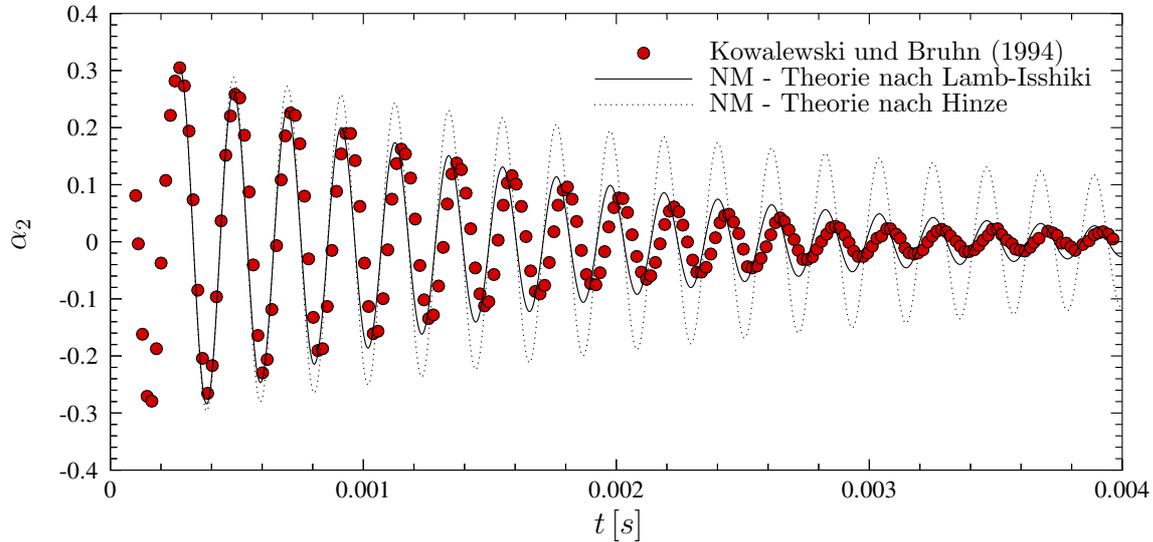


Abbildung 5.2: Schwach gedämpfte Formschwingungen eines Wassertropfens im Grundmode ( $D_0 = 0.174 \text{ mm}$ ,  $\text{On} = 0.0089$ )

Schwingungen nur durch die Theorie nach Lamb-Isshiki korrekt wiedergegeben wird. Allerdings muß hier beachtet werden, daß mit einer Anfangsamplitude  $\alpha_{2,0} = 0.3$  bereits der Bereich größerer Verformungsgrade erreicht ist, so daß Schwingungen in den Normalmoden nicht mehr unabhängig voneinander betrachtet werden können. Infolge Modenkopplung ist eine Anregung höherer Moden, selbst bei isoliert initiiert Grundschwingung unvermeidbar. Die deutlich stärkere Dissipation der auf höhere Moden übertragenen kinetischen Energie trägt zu einem schnelleren Abklingen der Schwingungen bei. Diese verstärkte Dämpfung kann nicht durch die lineare Theorie beschrieben werden.

Von Interesse ist weitergehend, wie sich das modellierte Schwingungsverhalten mit zunehmendem Reibungseinfluß verändert. Zu dieser Fragestellung geben Becker et al. (1994) numerisch berechnete Schwingungsverläufe anfänglich deformierter Tropfen im Grundmode an. Ihre Berechnungen basieren auf einer numerischen Normalmodenanalyse der Verformungsdynamik, die eine akkurate Beschreibung von Verformungen bis zu 80% der Anfangsabmessung sowie größerer Reibungseinflüsse ermöglicht. Abbildung 5.3 zeigt die Referenzlösungen gemeinsam mit Verläufen, die mit dem Normalmodenmodell (ausgehend von  $\alpha_{2,0} = 0.4$ ) und dem NLTAB3-Modell (ausgehend von  $y_0 = 0.83$ ) berechnet wurden. Die Auftragung des Formfaktors  $E$  über der dimensionslosen Zeit  $2\sqrt{2} T_\sigma$  ist von Becker et al. übernommen. Zur Vergleichbarkeit werden folgende kinematische Beziehungen festgelegt

$$E = \frac{1 + \alpha_2}{1 - \frac{1}{2}\alpha_2} \quad (\text{NM}), \quad E = \frac{1}{y^3} \quad (\text{NLTAB3}). \quad (5.6)$$

Zur Charakterisierung des Reibungseinflusses wird anstelle der von Becker et al. vorge-

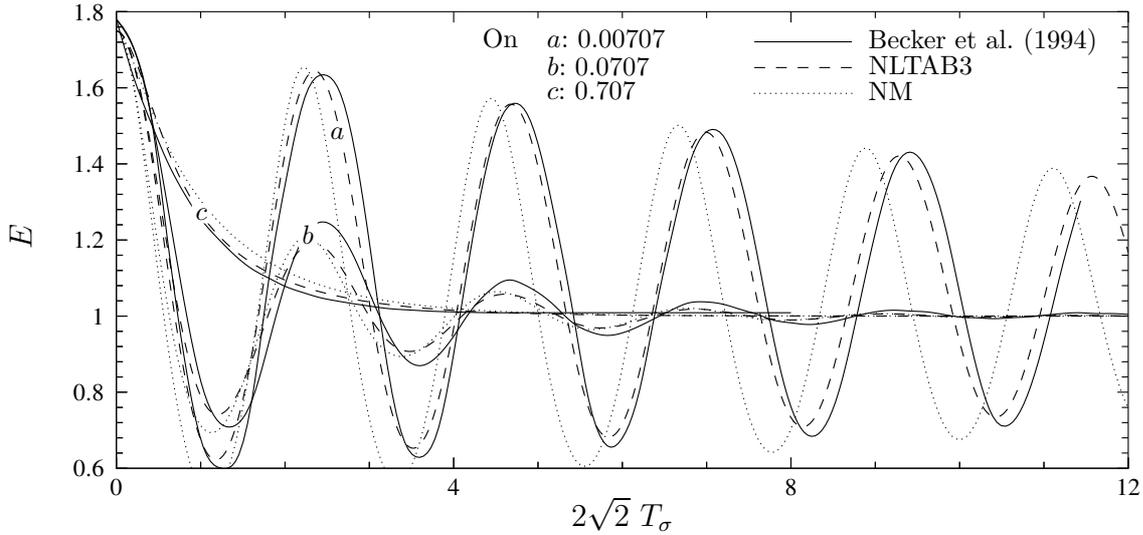


Abbildung 5.3: Einfluß tropfeninterner Reibung auf den Schwingungsverlauf

schlagenen dimensionslosen Viskosität  $\nu'$  hier die Ohnesorge-Zahl  $On = \sqrt{3/2} \nu'$  verwendet. Bei schwacher Dämpfung (Fall  $a$ ) gibt das NLTAB3-Modell nahezu identisch den Verlauf der Referenzlösung wieder. Wie der in Abbildung 5.2 dargestellte Vergleich mit experimentellen Daten bereits gezeigt hat, reproduziert das Normalmodenmodell zwar den Verlauf der abklingenden Amplitude, nicht jedoch die Frequenz der Schwingungen. Bei stärkerer (Fall  $b$ ) und überkritischer Dämpfung (Fall  $c$ ) liegen die Modellrechnungen in einem engeren Toleranzbereich der Referenzlösung, wobei das NLTAB3-Modell tendenziell genauer ist. Untersucht wurde mit diesem Testfall ebenfalls der Einfluß größerer Verformungsgrade auf den durch Gleichung 4.81 gegebenen Reibungsterm. Als Ergebnis läßt sich festhalten, daß die  $y^{-2}$ -Nichtlinearität für  $On \lesssim 0.1$  nur einen untergeordneten Einfluß hat.

Bei größeren Verformungen weicht das Schwingungsverhalten deutlich von der linearen Theorie ab. Wie in Abbildung 5.3 erkennbar, kommt es zu einer Frequenzverringerng sowie zu einer Asymmetrie der Periodenanteile gestreckter und gedrückter Tropfenformen. Die Abhängigkeit dieser nichtlinearen Effekte von der Schwingungsamplitude ist in Abbildung 5.4 anhand einer Gegenüberstellung experimenteller und berechneter Daten dargestellt. Der Vergleich zeigt, daß nur das NLTAB3-Modell eine näherungsweise Wiedergabe der Phänomene bei größeren Amplituden ermöglicht. Die für kleine Anfangsverformungen  $\alpha_{2,0}$  mit zunehmender Ohnesorge-Zahl erkennbare Verringerung der Schwingungsfrequenz ist dagegen ein linearer Dämpfungseffekt. Anhand der Gleichungen 5.4 und 5.3 ergibt sich für den Grundmode die Beziehung

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{2} On\right)^2} \quad (5.7)$$

nach welcher sich für  $On = 0.018$  der Wert  $\omega/\omega_0 = 0.999$  und für  $On = 0.056$  bereits  $\omega/\omega_0 = 0.99$  ergibt. Dieser Bereich des einsetzenden Reibungseinflusses auf die Frequenzverschiebung, korrespondiert mit der von Kowalewski und Bruhn (1994) angegebenen Gültigkeitsgrenze  $On = 0.024$  der linearen Theorie. Wie aus Abbildung 2.7

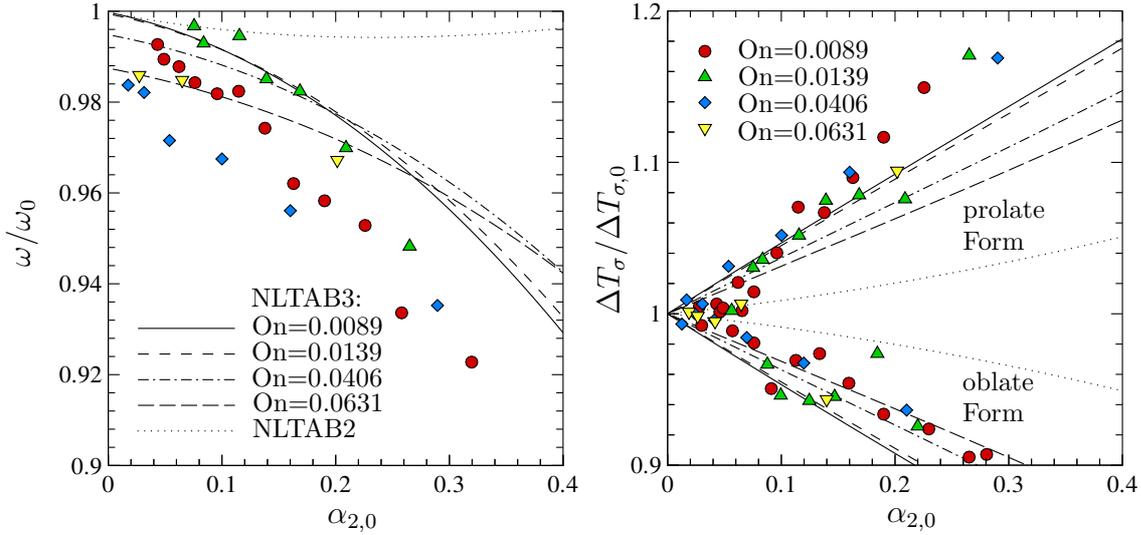


Abbildung 5.4: Nichtlineare Effekte: Frequenzänderung (links) und Periodenasymmetrie (rechts), normiert mit  $\omega_0 = 8$  und  $\Delta T_{\sigma,0} = \pi/8$ . Experimentelle Daten von Kowalewski und Bruhn (1994)

ersichtlich, setzt bei diesen Werten auch eine merkliche Beeinflussung von Formschwingungen bei sprunghafter Strömungsbeaufschlagung ein (Hsiang und Faeth 1992).

Hinsichtlich der Vergleichbarkeit der experimentellen und berechneten Daten muß folgendes angemerkt werden. Die Rechnungen mit dem NLTAB3-Modell basieren auf der Äquatorkoordinate  $y$ . Kowalewski und Bruhn geben Meßwerte für  $\alpha_2$  an, die sie durch Anpassung fotografisch aufgezeichneter Tropfenformen an die durch Gleichung 4.18 gegebene Normalmodendarstellung von  $r_s(\theta)$  ermitteln. Damit stellt  $\alpha_2$  nicht die gesamte Axialdeformation dar, sondern nur den Anteil, der sich aus der Projektion der Tropfenform auf den  $P_2$ -Mode ergibt. Entsprechend sollte  $\alpha_2$  somit auch bei der Modellrechnung mit dem NLTAB3-Modell durch Projektion der Ellipsoidoberfläche auf die Reihenentwicklung 4.18 ermittelt werden. Anhand dieser Rechnungen zeigt sich, daß die lineare Beziehung

$$\alpha_{2,0} = 2 - 2y_0 \quad (5.8)$$

näherungsweise auch bei großen Verformungen eingesetzt werden kann.

## 5.2 Stationäre Verformung

Bei Gemischbildungsprozessen tritt dieser idealisierte Fall dann auf, wenn die Änderung der Relativgeschwindigkeit deutlich langsamer abläuft als die Verformungsvorgänge. Quasistationäres Verhalten kann in weiten Bereichen des Strömungsfeldes vorliegen, außerhalb von Zonen intensivierter aerodynamischer Wechselwirkung und höherer Turbulenz. Experimentell ist die stationäre Verformung anhand von Tropfen in Falltürmen oder in vertikalen Windkanalströmungen untersucht worden. Besonderes Charakteristikum ist die mit der Tropfengröße zunehmende frontseitige Abplattung unter Beibehaltung einer abgerundeten Rückseite, ein Effekt, der auf die Intensität und Form der aufgeprägten Druckverteilung zurückzuführen ist. Qualitativ ist dies in Abbildung 5.5 anhand einer Gegen-

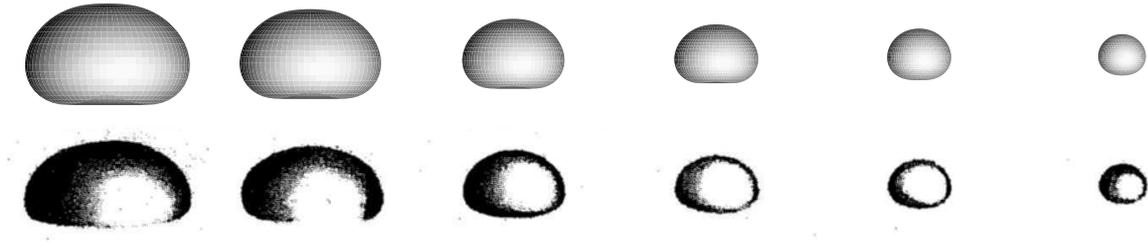


Abbildung 5.5: Tropfen im vertikalen Luftstrom: Lineare Theorie (oben) und Experiment (unten). Fotografien aus Pruppacher und Beard (1970).

überstellung fotografisch festgehaltener und numerisch berechneter Tropfenformen gezeigt. Grundlage der Berechnungen ist das Normalmodenmodell nach den Gleichungen 4.27 oder

$D_0$ [mm]	8.00	7.35	5.80	5.30	3.45	2.70
$v_{rel}$ [m/s]	9.20	9.20	9.17	9.13	8.46	7.70
We	11.1	10.2	8.0	7.3	4.1	2.6
Re	4723	4340	3413	3105	1873	1334

Tabelle 5.1: Parameter der in Abbildung 5.5 dargestellten Tropfen

4.35. Im stationären Fall ergeben sich die folgende analytische Lösungen

$$\alpha_{n,\infty} = -\frac{\text{We}}{4(n-1)(n+2)} C_n, \quad (5.9)$$

wobei hier die ersten Entwicklungsglieder  $n = 2, 3, 4, 5$  mit den Korrelationen 4.36 für die Koeffizienten  $C_n$  verwendet werden.

Die eingangs gemachte Aussage, daß bei der stationären Verformung allein die aerodynamischen Kräfte und die Oberflächenkräfte von Bedeutung sind, ist eine Idealisierung der tatsächlichen Verhältnisse. Infolge der aerodynamischen Schubspannungen bilden sich im Tropfen Wirbelströmungen aus, die sowohl den Strömungswiderstand als auch die Verformung beeinflussen. Nur im Grenzfall schleichender Umströmung bleibt die Kugelform trotz interner Wirbelströmung erhalten (Clift et al. 1978, S. 32). Wie bereits in Abschnitt 2.5 erörtert, ist der Effekt aerodynamischer Schubspannungen in technischen Zweiphasensystemen oft durch die Wirkung oberflächenaktiver Substanzen (Marangoni-Effekt) abgeschwächt und vergleichsweise schwer zu quantifizieren.

In welchem Maße und in welchem Kennzahlenbereich sich dies auswirkt, wird im folgenden anhand eines quantitativen Vergleichs mit den Versuchsdaten von Pruppacher und Beard (1970) untersucht. Das Ergebnis der Berechnungen ist in Abbildung 5.6 dargestellt. Zusätzlich aufgetragen ist die Reynolds-Zahl, die über eine empirische Korrelation der stationären Fallgeschwindigkeit  $v_{rel,\infty} = f(D_0)$  mit dem Tropfendurchmesser verknüpft ist (siehe z.B. Fuchs 1964). Für große Verformungsgrade, d.h. für  $E < 0.9$ , gibt das Normalmodenmodell in guter Näherung die von Pruppacher und Beard beobachtete lineare Abhängigkeit vom Tropfendurchmesser wieder. Im Bereich kleinerer Verformungsgrade weicht die Rechnung dagegen deutlich von den Meßdaten ab. Für diesen Bereich geben

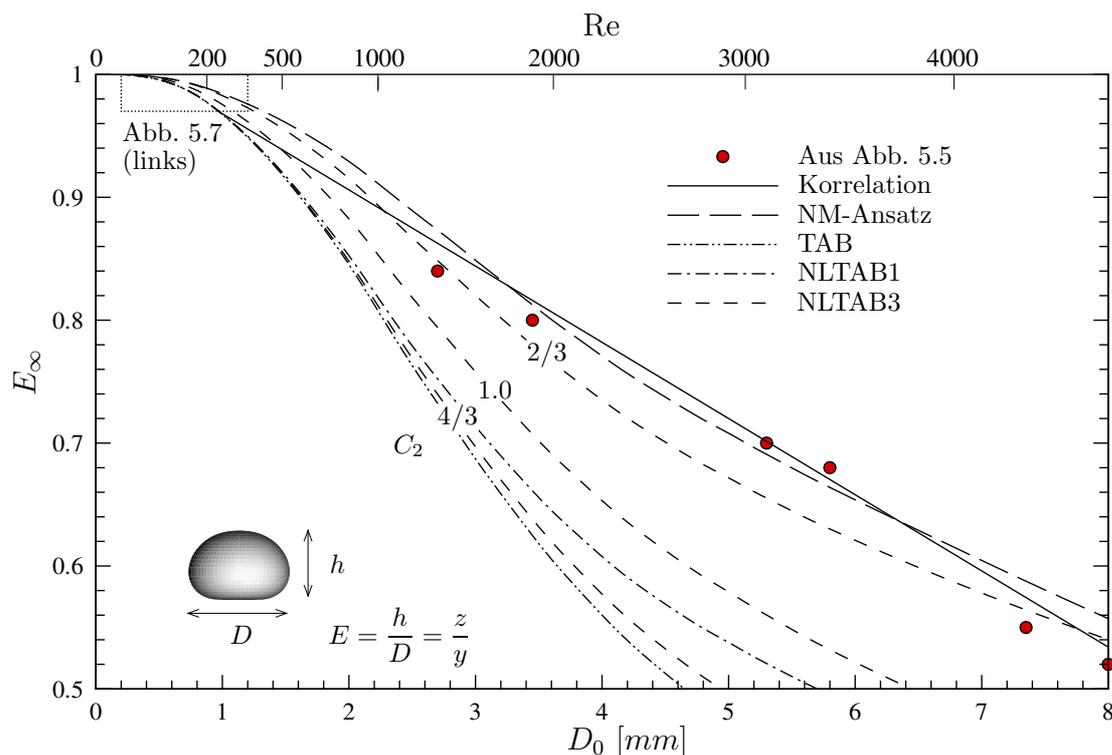


Abbildung 5.6: Stationäre Verformung von Wassertropfen im vertikalen Luftstrom. Korrelation nach Pruppacher und Beard (1970)

sie folgende Korrelation an

$$E = \sqrt{1 - \frac{9}{32} \text{We}}, \quad 240 \mu\text{m} < D_0 < 1000 \mu\text{m}, \quad (5.10)$$

die in Abbildung 5.7 anhand eines Detailausschnitts für kleine Tropfen dargestellt ist. Da gerade kleine Tropfendehformationen zuverlässig durch das Normalmodenmodell beschrie-

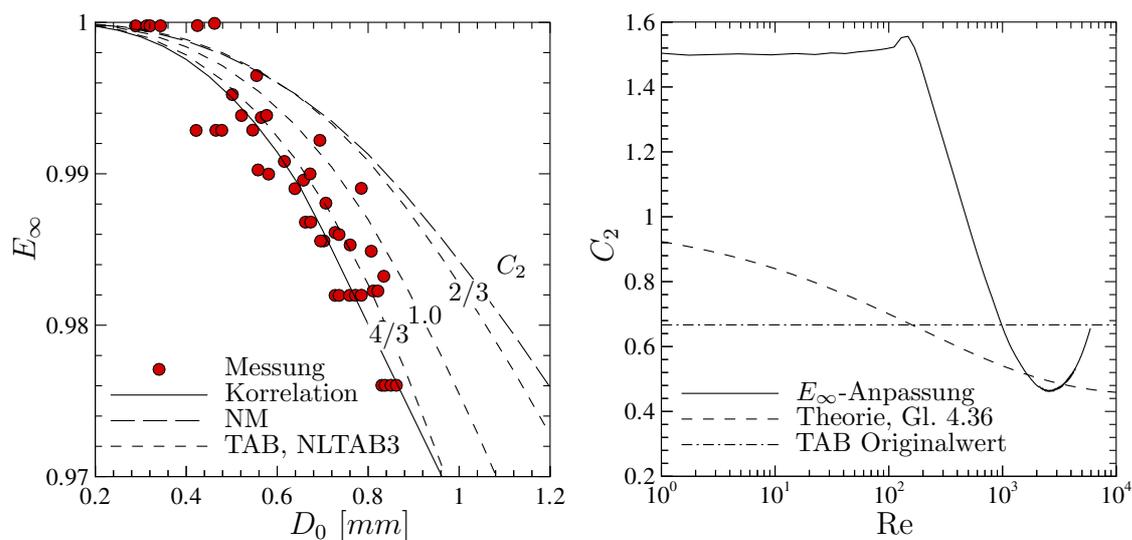


Abbildung 5.7: Verformung kleiner Tropfen (links) und Beschreibung des aerodynamischen Effektes über den Koeffizient  $C_2$  (rechts).

ben werden sollten, liegt der Verdacht nahe, daß eine in der Theorie nicht berücksichtigte *stationäre* Wirkung aerodynamischer Kräfte beteiligt ist. Für den diskutierten Schubspannungseffekt spricht insbesondere die Beschränkung dieser Wirkung auf den Bereich  $Re < 1000$ . Wie nämlich in Abschnitt 3.2 erörtert, tritt die Schubspannungsbelastung der Tropfenoberfläche relativ zur Normalspannungsbelastung mit zunehmender Reynoldszahl, also zunehmender Tropfengröße, in den Hintergrund.

Ein ähnliches Verhalten weisen die Berechnungen mit dem TAB-Modell und seinen nicht-linearen Varianten auf. Um den Einfluß des aerodynamischen Wirkungskoeffizienten zu verdeutlichen, wird dieser im Bereich  $C_2 = 2/3 - 4/3$  variiert. Im Hinblick auf die Abbildungen 5.6 und 5.7 läßt sich erkennen, daß ein niedriger  $C_2$ -Wert zwar das Verhalten für  $E > 0.9$  wiedergibt, bei kleineren Verformungsgraden jedoch zu großen relativen Fehlern führt. Ein hoher  $C_2$ -Wert ermöglicht dagegen eine Wiedergabe des Verhaltens bei kleineren Verformungen, nicht jedoch bei größeren Verformungen. Für kleine Verformungen kann das TAB-Modell über den  $C_2$ -Wert an die linearisierte Formulierung der Gleichung 5.10 angepaßt werden. Es ergibt sich der Grenzwert  $C_2 = 1.5$ . Eine numerische Anpassung des NLTAB3-Modells an die empirische Korrelation von Pruppacher und Beard ist im rechten Teil der Abbildung 5.7 dargestellt. Die Parameterstudie zeigt für  $Re < 1000$  eine deutliche Überhöhung des  $C_2$ -Wertes im Vergleich zum theoretischen Wert bei reiner Druckbelastung der Tropfenoberfläche.

### 5.3 Sprungbeaufschlagung

Die Zerstörung von Flüssigkeitsstrukturen durch plötzliche aerodynamische Beaufschlagung ist ein Grundprinzip aerodynamischer Zerstäubungskonzepte. In welcher Weise ein Tropfen auf eine einsetzende Umströmung reagiert, wurde in Kapitel 2 anhand experimenteller Daten, theoretischer Modellansätze und numerischer Simulationen diskutiert. Im folgenden soll der dynamische Vorgang zunächst für idealisierte Anfangs- und Randbedingungen untersucht werden, d.h. es wird ein kugelförmiger Tropfen in einer sprunghaft einsetzenden, homogenen Gasströmung bei konstanter Relativgeschwindigkeit betrachtet. Mit der Vernachlässigung der Tropfenbewegung ergeben sich auf dem Zeitmaß  $T_\sigma = t/t_\sigma^*$  die folgenden *speziellen* Lösungen der inhomogenen Differentialgleichungen 4.35

$$\alpha_n = \alpha_{n,\infty} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{T_\sigma}{\tau_n}\right) \cos(\omega_n T_\sigma) \right]. \quad (5.11)$$

Die stationären Verformungen  $\alpha_{n,\infty}$  sind durch Gleichung 5.9 gegeben, Dämpfungskonstanten  $\tau_n$  und Eigenkreisfrequenzen  $\omega_n$  berechnen sich nach Gleichungen 5.2 und 5.4. Für die Maximalamplituden ergeben sich folgende Grenzwerte

$$\alpha_{n,max} = \begin{cases} 2 \alpha_{n,\infty}, & \text{On} \ll \text{On}_{c,n} , \\ \alpha_{n,\infty}, & \text{On} \geq \text{On}_{c,n} . \end{cases} \quad (5.12)$$

Bei vernachlässigbaren Reibungseinflüssen sind die Maximalamplituden somit doppelt so groß wie die stationären Amplituden.

Die Dynamik der Verformung ist in Abbildung 5.8 anhand berechneter Deformationssequenzen verdeutlicht. Als Referenzlösung zeigt die obere Bildreihe das Ergebnis einer

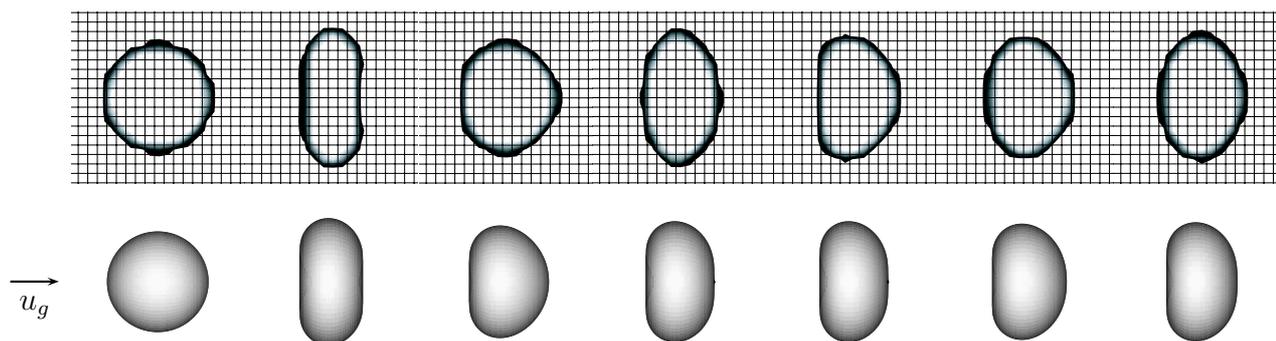


Abbildung 5.8: Verformung bei idealer Sprungbeaufschlagung mit  $We = 9.83$ : berechnet von Hase (2003) mit der VOF-Methode (oben), berechnet mit dem Normalmodenmodell (unten)

direkten numerischen Simulation von Hase (2003) mit der Volume-Of-Fluid (VOF) Methode. Dargestellt ist die Änderung der Tropfenform in äquidistanten Zeitschritten vor einem Ausschnitt des Rechengitters. Die instationäre Gasströmung um den Tropfen wurde bereits mit Abbildung 2.12 vorgestellt. Die untere Bildreihe zeigt Tropfenformen zu ähnlichen Zeiten, berechnet mit dem Normalmodenmodell nach Gleichung 4.35 bzw. den analytischen Lösungen nach Gleichung 5.11.

Ein quantitativer Vergleich von Simulation und Modellrechnungen ist in Abbildung 5.9 anhand von Zeitverläufen der dimensionslosen Tropfenoberfläche dargestellt. Aufgrund

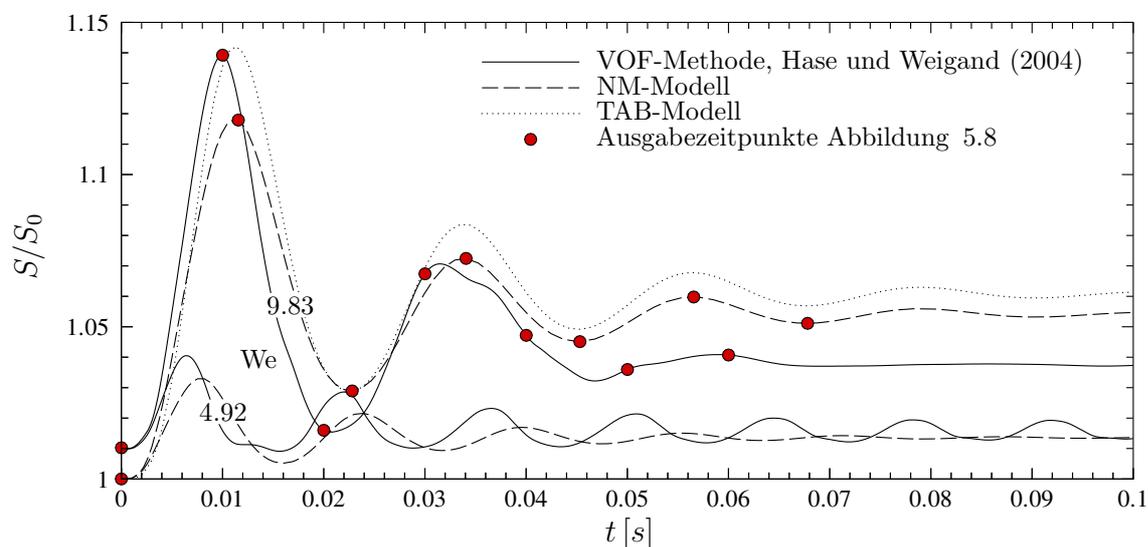


Abbildung 5.9: Variation der Tropfenoberfläche bei Sprungbeaufschlagung

der großen Verformungen ist bei der Berechnung mit dem Normalmodenmodell eine Volumenkorrektur mittels  $\alpha_0$  nach Gleichung 4.19 berücksichtigt. Auf diese Weise kann der bei Maximalverformung auftretende maximale Volumenfehler auf  $\Delta V/V_0 = -2\%$  begrenzt werden, womit dieser in der Größenordnung des anfänglichen Diskretisierungsfehlers  $\Delta S/S_0 = 1\%$  der VOF-Methode liegt. Zur Berechnung der dimensionslosen Oberfläche  $S/S_0$  wird für den Normalmodenmodell die lineare Näherung nach Gleichung 4.30

verwendet, für das TAB-Modell der exakte Ausdruck nach Gleichung 4.47. Die Problemparameter sind in Tabelle 5.2 zusammengestellt, wobei die Größenordnung der Ohnesorge-

We	On	Re	$\sigma$ [N/m]	$D_0$ [mm]	$u_g$ [m/s]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$\rho_d$ [kg/m <sup>3</sup> ]
9.83	0.0707	853	0.01	2	6.4	1.2	1000
4.92	0.05	853	0.02	2	6.4	1.2	1000

Tabelle 5.2: Parameter der in den Abbildungen 5.9 und 5.8 dargestellten Berechnungen:  $\mu_d = 10^{-2}$  kg/(ms),  $\mu = 1.8 \cdot 10^{-5}$  kg/(ms)

Zahl auf einen nicht zu vernachlässigenden Einfluß tropfeninterner Reibungskräfte hinweist. Die Zeitverläufe für  $We = 9.83$  geben sowohl die Maximalverformung, wie auch die Dämpfung der Formschwingungen in guter Näherung wieder. Der stationäre Endwert der Deformation wird dagegen überschätzt. Für  $We = 4.92$  wird zwar die Maximalverformung und die stationäre Deformation korrekt wiedergegeben, jedoch ist die Dämpfung der abklingenden Formschwingungen überbewertet. Generell fällt eine sehr genaue Berechnung der anfänglichen Flächenzunahme zur Maximalverformung auf.

Im Zustand maximaler Deformation erreicht die Oberflächenenergie des Tropfens ein Maximum, während die kinetische Energie der Verformungsströmung im Idealfall reiner Druckbeaufschlagung der Oberfläche verschwindet. Bei vernachlässigbaren Reibungseffekten kann die Maximaldeformation daher zur Charakterisierung der Wechselwirkung der aerodynamischen Kräfte und der Oberflächenspannung eingesetzt werden. Das Ergebnis einer Modellstudie für  $On < 0.1$  ist in Abbildung 5.10 dargestellt. Es ist zu erkennen, daß das Normalmodenmodell die maximale Querabmessung durchgängig um etwa

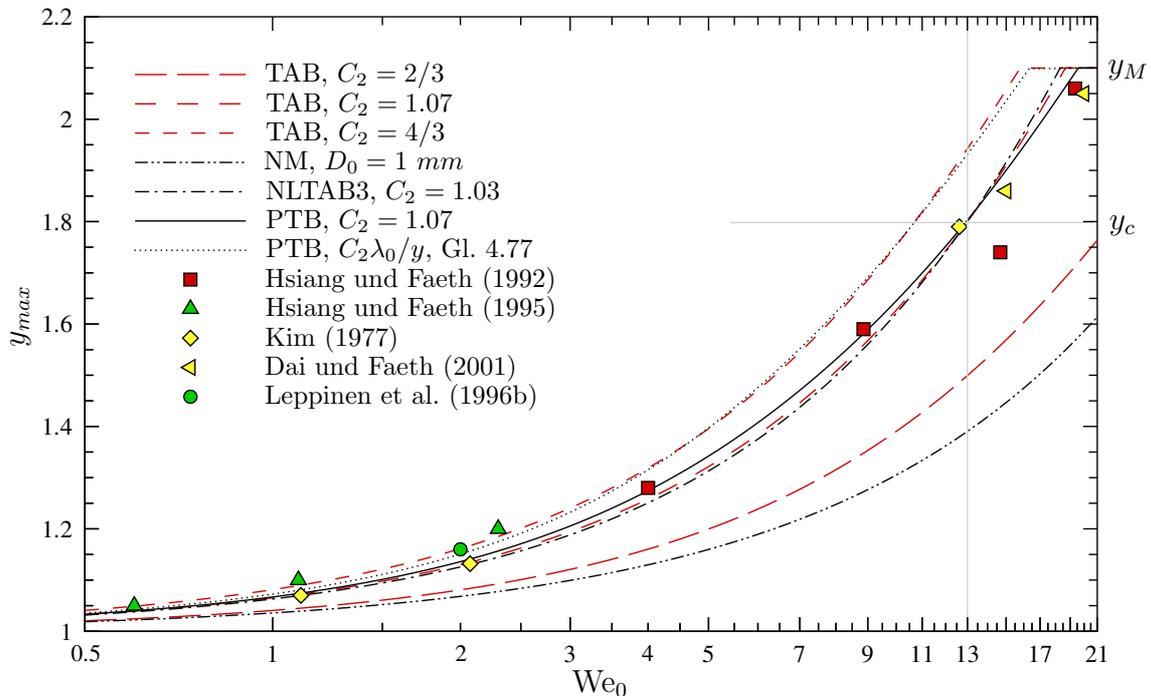


Abbildung 5.10: Maximale Querabmessung bei Sprungbeaufschlagung. Beschleunigung des Tropfens berücksichtigt über  $K_A = 1$  und  $c_D(\text{Re}, y, A_c)$  nach Gleichungen 4.90, 4.96, 4.101, 4.102 und 4.104 konstruiert

50% unterschätzt. Weil dies nicht nur für große ( $We_0 \sim We_{0,c}$ ) sondern auch für kleine ( $We_0 \sim 1$ ) Verformungen gilt, kann ein nichtlinearer Effekt größerer Verformungen ausgeschlossen werden. Als mögliche Ursache wurde in Abschnitt 5.2 eine im Rahmen der Modellbeschreibung vernachlässigte *stationäre* Wirkung aerodynamischer Schubspannungen diskutiert. Da das Zeitmaß  $t_\zeta^*$  der Ausbildung tropfeninterner Wirbelströmung jedoch deutlich größer ist als das Zeitmaß der Tropfenverformung, sollte die Maximalverformung weitgehend unbeeinflusst von diesem Effekt bleiben. Eine weitere mögliche Ursache ist die vernachlässigte Wirkung *instationärer* aerodynamischer Kräfte, die u.a. zu einer maßgeblichen Überhöhung des  $c_D$ -Wertes führen.

Die Modellansätze mit freiem  $C_2$ -Wert werden in einem nächsten Schritt an den empirischen Wert der Maximalverformung  $y_{max} = 1.8$  bei der kritischen Weber-Zahl  $We_{c,0} = 13$  angepaßt. Mit den in Tabelle 5.3 zusammengestellten  $C_2$ -Werten ergeben sich nahezu

Modell	TAB	NLTAB3	PTB
$C_2$	1.07	1.03	1.07

Tabelle 5.3: Wirkungskoeffizient  $C_2$ , angepaßt an  $y_c = 1.8$  bei  $We_{0,c} = 13$

identische Verläufe, die zudem in einem engen Toleranzbereich der Meßdaten liegen. Das PTB-Modell mit Einflußfaktor  $C_2\lambda_0/y$  nach Gleichung 4.77 wird nicht weiter betrachtet.

Abschließend wird die anfängliche Abflachung und Querdehnung zerfallender Tropfen für  $We_0 > We_{0,c}$  untersucht. Wie die Visualisierungen von Dai und Faeth (2001) im Bereich

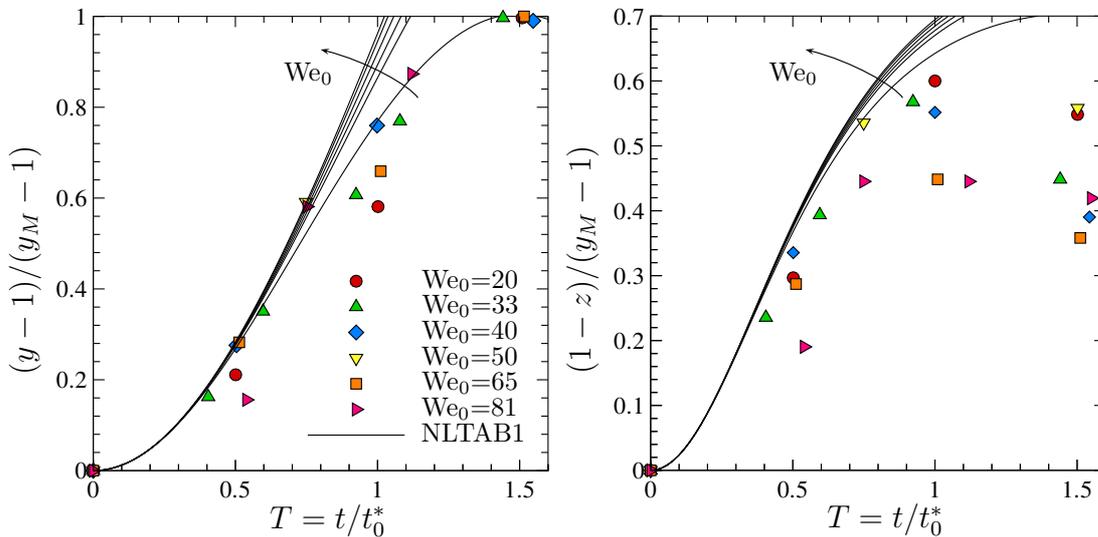


Abbildung 5.11: Anfängliche Quer- (links) und Längsdeformation (rechts) zerfallender Tropfen. Experimentelle Daten von Dai und Faeth (2001)

$15 < We_0 < 100$  zeigen, wird in dieser Anfangsphase nahezu unabhängig von der Beaufschlagungsintensität eine maximale Querabmessung  $y_M = 2.1$  bei der dimensionslosen Zeit  $T = 1.6$  erreicht (vgl. Abbildung 5.10). Abbildung 5.11 zeigt die von ihnen angegebenen Meßwerte der dimensionslosen Quer- und Längsabmessung,  $y$  und  $z$ , bei Normierung

auf den den Maximalwert  $y_M$ . Ebenfalls enthalten sind Zeitverläufe dieser Formparameter, berechnet mit dem NLTAB1-Modell. Deutlich erkennbar ist der nahezu universelle Charakter der Verformung in dieser Anfangsphase des Zerfalls. Von dieser Beobachtung berichten u.a. auch Krzeczowski (1980) und Hsiang und Faeth (1992).

## 5.4 Deformation im freien Fall

Die folgenden Untersuchungen knüpfen an die Ausführungen zur stationären Verformung in Abschnitt 5.2 an. Der stationäre Endwert der Fallgeschwindigkeit  $u_{d,\infty}$  wird nun nicht mehr aus dem Experiment übernommen, sondern ergibt sich aus der simultanen Lösung der Bewegungsgleichungen. Aufgrund der stark unterschiedlichen Zeitmaße kann bei Fallbewegung aus der Ruhe von einer quasistationären Verformung ausgegangen werden. Das Ergebnis der Modellrechnungen ist in Abbildung 5.12 gezeigt. Abweichungen von der

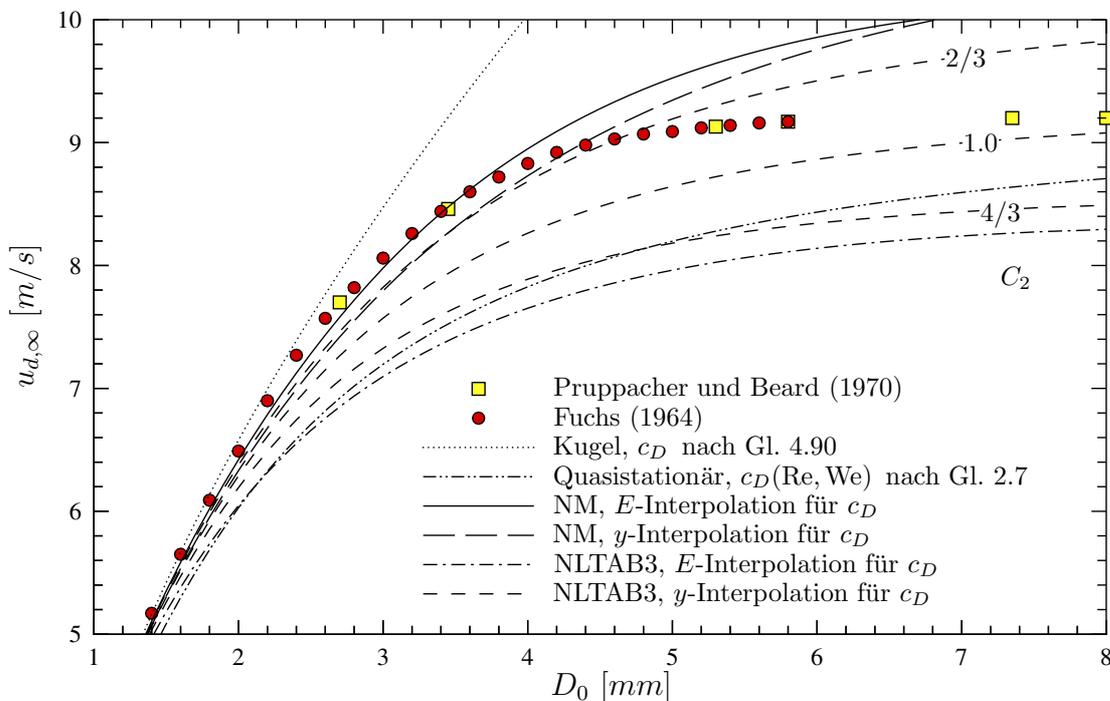


Abbildung 5.12: Endgeschwindigkeit von Wassertropfen im freien Fall

stationären Fallgeschwindigkeit kugelförmiger Tropfen zeigen sich für  $D_0 > 2.4 \text{ mm}$ , also für Verformungsgrade  $E < 0.88$ . Wie nach den Untersuchungen in Abschnitt 5.2 zu erwarten, gibt das Normalmodenmodell die Meßwerte bei mäßiger Verformung am besten wieder. Zur Interpolation des  $c_D$ -Wertes erweist sich der  $E$ -basierte Ansatz am geeignetsten, da dieser eine korrekte Beschreibung bei kleinen Formänderungen ermöglicht. Die Wichtigkeit dieses Modellierungsaspekts wird durch den größeren Fehler bei  $y$ -basierter Interpolation unterstrichen.

Die Rechnungen mit dem NLTAB3-Modell verdeutlichen den Einfluß des aerodynamischen Wirkungskoeffizienten. Mit abnehmendem  $C_2$ -Wert nähert sich der Verlauf der Fallgeschwindigkeit zunehmend dem auf Basis des Normalmodenmodells berechneten Verlauf

an. Im betrachteten Bereich der Reynolds-Zahl ist dieser durch einen Wert  $C_2 = 0.55$  gekennzeichnet (aus Abbildung 4.3). Entsprechend wird der aerodynamische Widerstand des Tropfens mit zunehmendem  $C_2$ -Wert zunehmend überschätzt. Nach Abbildung 5.6 läßt sich dies auf eine Überbewertung der Querverformung zurückführen. Große Abweichungen von den Meßwerten ergeben sich bei Verwendung der quasistationären Korrektur des  $c_D$ -Wertes nach Wiegand (1987). Der über Gleichung 2.7 formulierte Ansatz gilt für Tropfen beim Durchfallen horizontaler Düsenströmungen und impliziert somit dynamische Verformungsanteile. Auf diesen Strömungsfall soll im folgenden eingegangen werden.

## 5.5 Durchfallen einer horizontalen Düsenströmung

Abschließend wird die Ablenkung und Verformung von Tropfen beim Durchfallen einer horizontalen Gasströmung untersucht. Die Problemstellung ist charakteristisch für viele technische Gemischbildungsprozesse, insbesondere die aerodynamische Zerstäubung (vgl. Abbildung 1.1). Als experimentelle Datenbasis dienen die von Wiegand (1987) fotografisch festgehaltenen und analysierten Tropfenketten in der laminaren Kernströmung eines Düsenfreistrahls. Zur Verdeutlichung der Bewegungs- und Verformungsdynamik nahe der

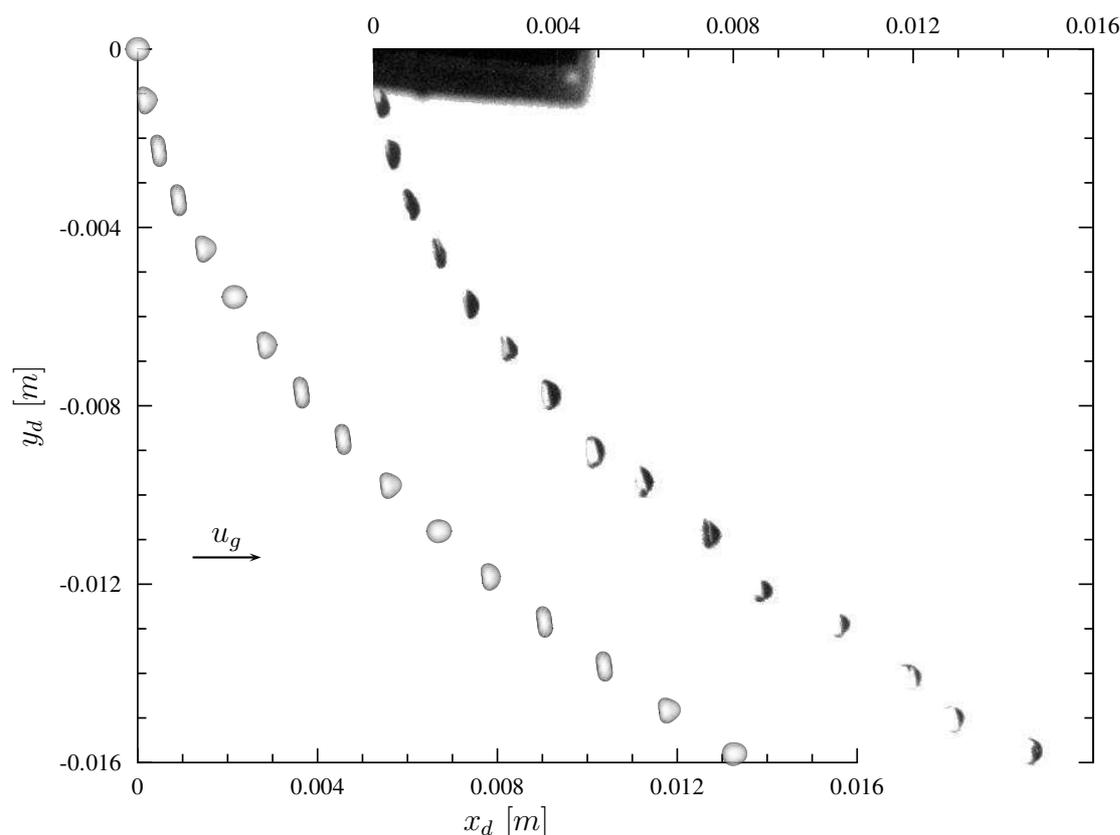


Abbildung 5.13: Ablenkung und Verformung fallender Tropfen berechnet mit dem Normalmodenmodell (links) und fotografisch festgehalten von Wiegand (1987)

Zerfallsgrenze zeigt Abbildung 5.13 das Ergebnis einer Modellrechnung für den Versuch 17-3W. Dargestellt sind Momentaufnahmen eines Tropfens in äquidistanten Zeitschritten sowie ein vergrößerter Ausschnitt der in Abbildung 2.2 gezeigten Tropfenkette. Die Unterschiede in den Verformungsverläufen können im wesentlichen auf die Formschwingungen der Tropfen vor dem Eintritt in den Freistrah zurückgeführt werden. Dieser Effekt, der u.a. auch die beträchtliche Streuung der Fallkurven im Experiment erklärt, ist in dieser Rechnung nicht berücksichtigt.

Für die weiteren Untersuchungen werden zwei zusätzliche Strömungsfälle der Studie von Wiegand ausgewählt. Die wesentlichen Versuchsparameter sind in Tabelle 5.4 zusammengestellt. Versuchsflüssigkeit ist Wasser bei Raumtemperatur. Aufgrund der Größe der

Versuch	$We_0$	$Re_0$	$D_0$ [mm]	$u_x$ [m/s]	$u_{d,x,0}$ [m/s]	$u_{d,y,0}$ [m/s]
7-6W	0.5	392	0.376	8.5	0.062	-3.40
10-1W	3.3	1297	0.542	18.8	0.285	-5.29
17-3W	11.8	2414	0.546	36.6	0.663	-4.76

Tabelle 5.4: Parameter der untersuchten Tropfenketten (Wiegand 1987; 1999)

Tropfen kann von einem vernachlässigbaren Einfluß interner Reibungskräfte ausgegangen werden. Um die laminare Kernströmung zu erreichen, müssen die Tropfen die den Freistrah umgebende Scherschicht durchdringen. Aus diesem Grund liegt mit Beginn der Messung in der Kernströmung bereits eine Horizontalkomponente der Tropfengeschwindigkeit vor. Zum Verformungszustand der Tropfen beim Eintritt in den Freistrah macht Wiegand keine Angaben. Um den Effekt auf die Trajektorienberechnung näherungsweise zu bewerten, werden Tropfen unterschiedlicher Anfangsverformungen  $y_0$  bzw.  $\alpha_{2,0}$  berücksichtigt.<sup>1</sup> Der  $c_D$ -Wert wird auf Basis der Gleichungen 4.90 und 4.101 mittels der  $E$ -basierten Interpolation nach Gleichungen 4.102 und 4.104 beschrieben, der aerodynamische Wirkungskoeffizient wird mit dem Wert  $C_2 = 4/3$  festgelegt. Es werden sowohl Berechnungen mit dem Normalmodenmodell, wie auch mit dem NLTAB3-Modell diskutiert.

Abbildung 5.14 zeigt die Ergebnisse für den Fall  $We_0 = 0.5$ . Es fällt zunächst auf, daß die Ablenkung der Tropfen im Experiment trotz der niedrigen Weber-Zahl deutlich stärker ist als die berechnete Ablenkung kugelförmiger Tropfen. Die Berücksichtigung dynamischer Verformungen infolge der auf den Tropfen einwirkenden Strömungskräfte ändert daran nur wenig. Eine etwas stärkere Ablenkung ergibt sich bei Berücksichtigung zeitgemittelter Verformung mithilfe der von Wiegand vorgeschlagenen Korrelation  $c_D(Re, We)$ . Gute Übereinstimmung mit den experimentellen Fallkurven zeigt sich dagegen für anfänglich deformierte Tropfen, deren Formschwingungen zu einer maßgeblichen Überhöhung der Strömungskräfte während der Fallbewegung führen. Ein Abgleich der berechneten Trajektori-

<sup>1</sup>Tatsächlich findet mit dem Eintritt der Tropfen in den Freistrah ein plötzlicher Wechsel der Symmetrieverhältnisse statt, von der vertikalen Achse der Formschwingungen zu der horizontalen Achse der Tropfenumströmung. Bezüglich der Tropfenumströmung kann somit nicht mehr von axialsymmetrischen Anfangsverformungen ausgegangen werden, weshalb die dargestellte Bewertung nur als qualitativ gelten kann. Zur Berücksichtigung allgemeiner Verformungszustände wäre ein allgemeiner Normalmodenansatz auf Basis von Kugelflächenfunktionen  $Y_l^m(\theta, \phi) = c_l^m P_l^m(\cos \theta) \exp(im\phi)$  notwendig. Auf diese Erweiterung kann im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht eingegangen werden.

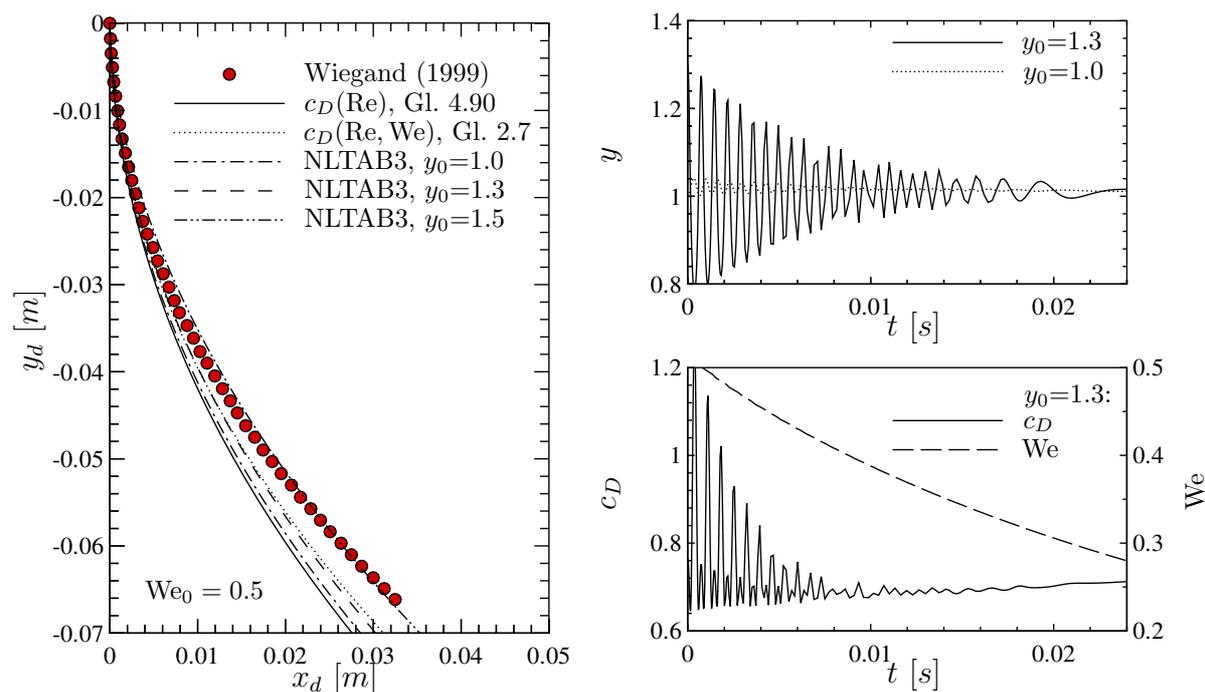


Abbildung 5.14: Versuch 7-6W: Fallkurven im Düsenfreistrah (links) und tropfenfeste Größen berechnet mit dem NLTAB3-Modell (rechts)

en mit den experimentellen Datenpunkten läßt auf Anfangsverformungen  $1.3 < y_0 < 1.5$  schließen. Dieser Bereich ist auch anhand der in Abbildung 2.2 dargestellten Aufnahme erkennbar. Die Zeitverläufe der Tropfenquerabmessung  $y$  und des  $c_D$ -Wertes bestätigen diesen Mechanismus und zeigen, wie die anfänglich starken Formschwingungen bereits nach  $1/3$  der Flugzeit auf einen engen Schwankungsbereich abklingen und einem quasi-stationären Zustand zustreben. Deutlich erkennbar ist der für kleine Weber-Zahlen maßgebliche Unterschied der Zeitmaße von Tropfenbewegung und Verformung.

Die Ergebnisse für den Fall  $We_0 = 3.3$  sind in Abbildung 5.15 dargestellt. Die höhere Anströmgeschwindigkeit wird hier durch das höhere Gewicht der Tropfen nahezu kompensiert, so daß diese insgesamt nur wenig stärker abgelenkt werden. Sowohl die Korrelation  $c_D(\text{Re}, \text{We})$  wie auch das NLTAB3-Modell geben die aerodynamischen Eigenschaften der deformierten Tropfen zuverlässig wieder. Im Gegensatz zum Fall  $We_0 = 0.5$  hat die Anfangsdeformation dabei nur einen untergeordneten Einfluß. Die Erklärung ergibt sich aus dem Zeitverlauf der Querabmessung  $y$ , nach welchem die Vorgabe einer Anfangsverformung  $y_0 = 1.3$  allein eine Phasenverschiebung des Schwingungsverlaufs bewirkt. Der Abklingverlauf der Amplitude bleibt nahezu unverändert und damit auch die zeitgemittelten aerodynamischen Eigenschaften des Tropfens. Es läßt sich somit festhalten, daß der Effekt einer (statischen) Anfangsverformung gerade dann verschwindet, wenn ihr Wert mit der Maximaldeformation des anfangs kugelförmigen Tropfens übereinstimmt, wenn also  $y_0 = y_{max}$  bzw.  $\alpha_{2,0} = \alpha_{2,max}$  gilt. Diese Konstellation ist mit  $y_0 = 1.3$  und den hier vorliegenden Beaufschlagungsverhältnissen bei Verwendung des NLTAB3-Modells gerade gegeben. Da das Normalmodenmodell die Querverformung bei Sprungbeaufschlagung tendenziell unterschätzt (vgl. Abbildung 5.10), lassen diese Rechnungen wieder eine Abhängigkeit von der gewählten Anfangsverformung  $y_0 = 1.3$  (für das Normalmodenmodell

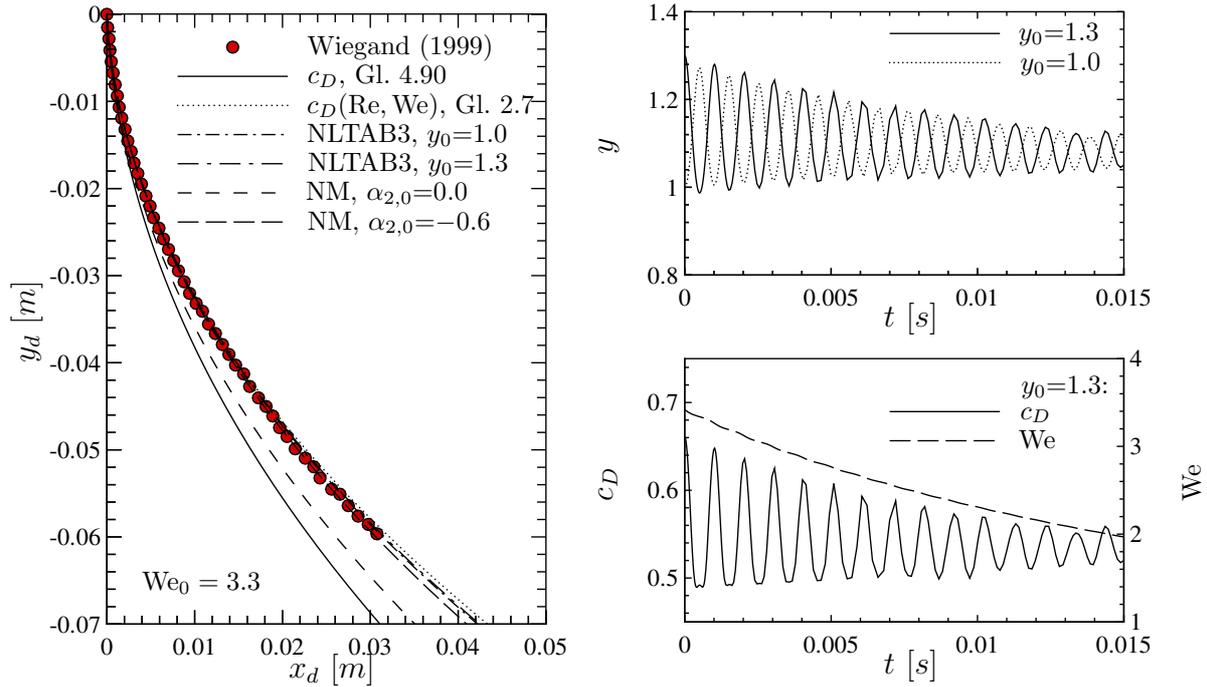


Abbildung 5.15: Versuch 10-1W: Fallkurven im Düsenfreistrah (links) und tropfenfeste Größen berechnet mit dem NLTAB3-Modell (rechts)

als äquivalente Staupunktsverformung  $\alpha_{2,0} = -0.6$  angesetzt) erkennen.

Schließlich sind in Abbildung 5.16 die Berechnungen für  $We_0 = 11.8$  dargestellt. Dieser bereits eingangs diskutierte Fall ist durch eine gesteigerte Horizontalbeschleunigung der Tropfen gekennzeichnet, wobei der Momentanwert der Weber-Zahl bis zum Verlassen des Rechengebietes auf die Hälfte des Anfangswertes abfällt. In der verkürzten Flugzeit können die Tropfen daher nur wenige Formschwingungen ausführen. Rein formal geht dies aus der Abhängigkeit  $t_\sigma^*/t_v^* \sim \sqrt{We} \rho/\rho_d$  mit dem Einfluß der Weber-Zahl hervor.

Von allen Verformungsmodellen gibt das Normalmodenmodell die gemessene Ablenkung der Tropfenkette am genauesten wieder. Dieses Ergebnis wird durch die in Abbildung 5.13 dargestellten Tropfenformen gestützt, die insbesondere hinsichtlich der Querabmessung eine gute Übereinstimmung von Rechnung und Experiment zeigen. Dagegen überschätzt das NLTAB3-Modell den Strömungswiderstand der verformten Tropfen maßgeblich. Wie aus dem Zeitverlauf der Querabmessung hervorgeht, hat eine Anfangsdeformation nun eine Abschwächung der Formschwingungen zur Folge. Ursache ist der bei anfänglicher Verformung verringerte Eintrag kinetischer Energie in den Verformungsvorgang.

Zusammenfassend lassen sich zwei wesentliche Ursachen für die Überhöhung des Strömungswiderstandes der Tropfen identifizieren: Formschwingungen, die mit dem Eintritt in den Freistrah durch die Strömungskräfte aufgeprägt werden sowie Formschwingungen als Folgeerscheinung der Tropfenerzeugung. Die Modellrechnungen zeigen, daß letzterer Effekt bei niedrigen bis mäßigen Weber-Zahlen, insbesondere im Bereich vernachlässigbarer Dämpfungswirkungen einen entscheidenden Einfluß auf das Bewegungsverhalten hat. Trotz der Bedeutung wird der Effekt jedoch in den meisten experimentellen Studien vernachlässigt, wobei die Annahme anfänglich kugelförmiger Tropfen zur Fehlinterpretation

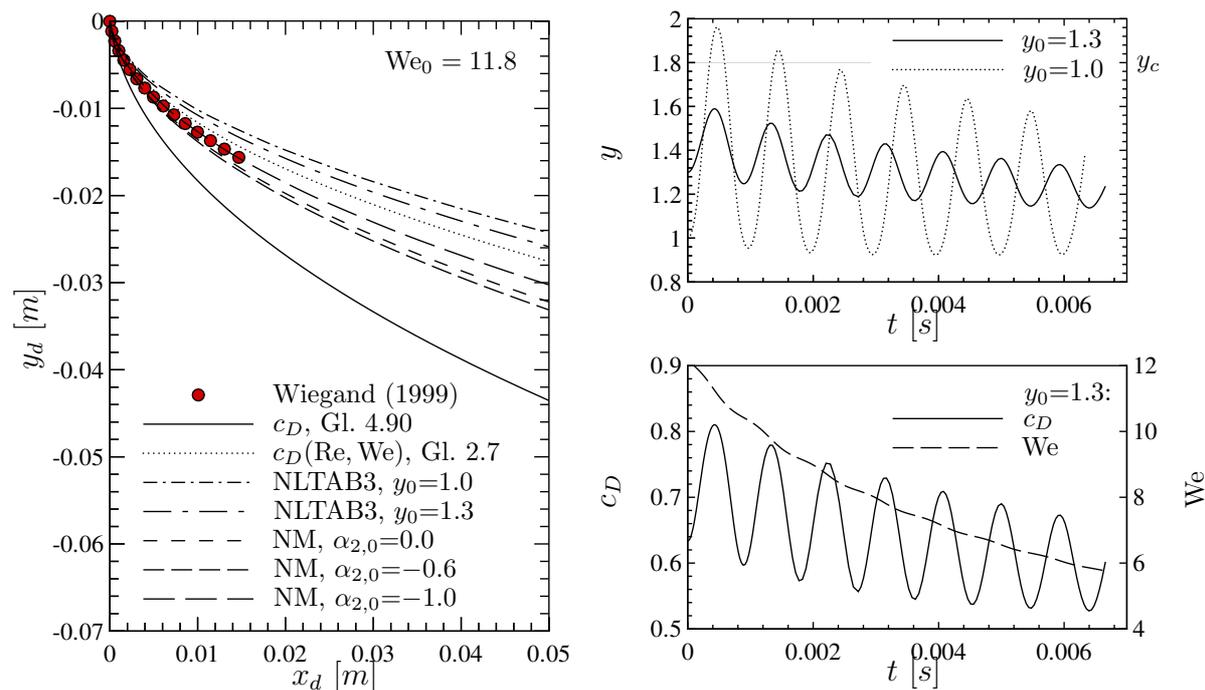


Abbildung 5.16: Versuch 17-3W: Fallkurven im Düsenfreistrah (links) und tropfenste Größen berechnet mit dem NLTAB3-Modell (rechts)

der Meßergebnisse führen kann.

Zur Überlagerung des aerodynamischen Effekts, d.h. zum gekoppelten Einfluß von Weber-Zahl und Anfangsverformung, lassen sich auf Basis der Modellrechnungen folgende Schlüsse ziehen. Während eine zunehmende Strömungsbeaufschlagung bei anfangs kugelförmigen Tropfen einen kontinuierlichen Anstieg von Maximalverformung, Schwingungsamplituden und Strömungswiderstand bewirkt, setzt der aerodynamische Effekt bei anfangs deformierten Tropfen erst oberhalb eines Schwellenwertes von  $We_0$  ein. So läßt sich bei der betrachteten Versuchsreihe für  $y_0 = 1.3$  erst für  $We_0 > 3.5$  eine Zunahme der Amplituden feststellen. Diese ist im Vergleich zu anfangs kugelförmigen Tropfen jedoch deutlich schwächer ausgeprägt.

Abschließend soll auf die Problematik der numerischen Integration der Modellgleichungen vor dem Hintergrund deutlich unterschiedlicher Zeitskalen eingegangen werden. Bei langen Aufenthaltszeiten der Tropfen infolge niedriger Geschwindigkeiten muß während der Trajektorienberechnung eine große Anzahl Formschrwingungen aufgelöst werden. Für den Fall  $We_0 = 0.5$  werden mit der üblichen Zeitschrittweitenregelung auf Basis des lokalen Verfahrensfehlers mit dem NLTAB3-Modell insgesamt 6000 Integrationsschritte benötigt, ohne Berücksichtigung der Verformung nur 80. Dieses extreme Verhältnis nimmt jedoch mit zunehmender Weber-Zahl ab. Dagegen wird mit der Annahme quasistationärer Verformung eine Betrachtung der Verformungsdynamik umgangen. Allerdings ist dabei auch keine Differenzierung mehr zwischen aerodynamischem Effekt und der Wirkung freier Formschrwingungen möglich. Dennoch läßt sich mit der von Wiegand vorgeschlagenen Korrelation  $c_D(Re, We)$  bei den betrachteten Versuchsbedingungen eine vergleichsweise gute Beschreibung des Bewegungsverhaltens verformter Tropfen erzielen.

## 6 Tropfenzerfall

Wie bereits in der Einleitung dargelegt, ist Tropfenzerfall durch aerodynamische Kräfte mit einer drastischen Änderung der Sprühstrahlcharakteristik verbunden. Wesentliches Merkmal ist die infolge Deformation und Sekundärtropfenbildung starke Zunahme der Flüssigkeitsoberfläche, die, wie anhand Abbildungen 1.2 und 1.4 erkennbar, mit einer intensivierten Phasenwechselwirkung verbunden ist. Die grundlegenden Mechanismen des Zerfalls wurden in Abschnitt 2.1.1 beschrieben. Im Bereich der kritischen Weber-Zahl kommt es zu großen Deformationen, die entweder infolge periodischer Energiezufuhr oder aufgrund der nichtlinearen Kopplung von Druckbelastung und Deformation irreversibel werden können und zum Schwingungs- bzw. Blasenzerfall führen. Mechanische Analogien dieser Mechanismen sind die Resonanzkatastrophe eines Feder-Masse Systems bzw. das Knicken eines Stabes unter Axiallast. Mit höheren Intensitäten wird die Ablösung zerfallender Filmstrukturen von der Oberfläche zum dominierenden Vorgang (Scheibenzerfall), bei sehr hohen Intensitäten das instabile Wachstum kleinskaliger Oberflächenwellen (Wellenkammzerfall). Generelle Tendenz ist dabei eine Abnahme der Längen- und Zeitmaße – von den eher großen Fragmenten des Schwingungs- und Blasenzerfalls hin zum feinen Tröpfchennebel des Wellenkammzerfalls.

Die ausgeprägte Nichtlinearität der beteiligten Strömungsvorgänge hat weitreichende Folgen und ist ein wesentlicher Grund für die Komplexität und Vielfältigkeit der Zerfallsphänomene. Im Gegensatz zu linearem Verhalten besteht eine empfindliche Abhängigkeit von den Anfangs- und Randbedingungen, wobei kleinste Änderungen zu völlig unterschiedlichen Abläufen führen können und so entscheidenden Einfluß auf die Produkteigenschaften haben. Da unter realen Bedingungen immer mit gewissen Störeinflüssen zu rechnen ist, erklärt sich so der, obwohl mathematisch wohl definiert und determiniert, chaotische Ablauf vieler Teilvorgänge, wie z.B. die in Abbildung 2.5 dargestellte Ablösung zerfallender Filmstrukturen beim Scheibenzerfall. Sekundärtropfenbildung ist daher – dies belegen die experimentellen Studien – als stochastischer Vorgang zu betrachten. Wegen der gegenseitigen Beeinflussung der beteiligten Strömungsvorgänge können Zerfallsphänomene zudem nicht mehr als Überlagerung unabhängiger Elementarvorgänge dargestellt werden, wie dies noch bei kleinen Deformationen möglich ist. Die nichtlineare Dynamik ist grundsätzlich nur als simultane Entwicklung der gekoppelten Vorgänge zu beschreiben.

In der Konsequenz ergibt sich für die Modellbildung, daß theoretisch fundierte Beschreibungen auf die anfängliche Querdeformation des Tropfens beschränkt sind. Mit dem Übergang auf die Zerfallsphase muß dagegen auf phänomenologische und empirische Beschreibungen zurückgegriffen werden. Ziel dieses Kapitels ist einerseits die verfügbaren empirischen Daten und Korrelationen zum Zerfall sprungbeaufschlagter Tropfen kritisch zu bewerten und andererseits diese in geeigneter Weise an die in Kapitel 4 ausgearbeiteten dynamischen Verformungs- und Bewegungsmodelle anzubinden. Zu diesem Zweck werden in Abschnitt 6.1 numerische Konzepte zur Zerfallsklassifizierung im Rahmen einer Modellbeschreibung vorgestellt. In Abschnitt 6.2 werden diese um eine differenzierte Einteilung der zeitlichen Stadien der Phänomene ergänzt. Eine Zusammenstellung empirischer Daten zur Kinematik der Zerfallsvorgänge und der einhergehenden Änderung der aerodynamischen Eigenschaften wird in Abschnitt 6.3 vorgenommen, während in Abschnitt 6.4 auf die Eigenschaften der Zerfallsprodukte eingegangen wird.

## 6.1 Klassifizierung des Tropfenverhaltens

Die im Rahmen von Modellbeschreibungen eingesetzten Stabilitätskriterien lassen sich zwei grundlegenden Konzepten zuordnen: *lastbasierte* Kriterien, bei denen die Stabilitätsgrenze anhand einer kritischen aerodynamischen Belastung festgelegt ist und *verformungsbasierte* Kriterien, bei denen der Zerfall an eine kritische Deformation des Tropfens geknüpft ist. Wie die in Kapitel 2 diskutierten Studien belegen, ist die kritische aerodynamische Last nicht nur von den Reaktionskräften im Tropfen abhängig, sondern auch entscheidend vom Zeitverlauf der Beaufschlagung geprägt. Ein nahezu universeller Wert ergibt sich dagegen für die kritische Deformation. Dieser empirische Befund wurde bereits von Hinze (1948a) im Rahmen einer theoretischen Beschreibung des Tropfenverhaltens verwendet.

Aufbauend auf diesen Kriterien werden im folgenden zwei Konzepte zur Klassifizierung des Tropfenzerfalls vorgestellt. Bei der lastbasierten Klassifizierung wird von den momentanen Kräfteverhältnissen direkt auf die Zerfallsform geschlossen. Die für Sprungbeaufschlagung gültige Datenbasis ist in Abschnitt 2.1.2 zusammengefaßt und bildet den Ausgangspunkt der in Abschnitt 6.1.1 diskutierten Implementierung. Dagegen wird in Abschnitt 6.1.2 eine Klassifizierung anhand der momentanen Kräfteverhältnisse beim Überschreiten der kritischen Deformation vorgestellt. Das im Rahmen der vorliegenden Arbeit entwickelte Konzept bindet an die in Kapitel 4 ausgearbeiteten dynamischen Verformungs- und Bewegungsmodelle an und wird in einer abschließenden numerischen Studie bewertet.

### 6.1.1 Lastbasierte Klassifizierung

Um die bei Sprungbeaufschlagung am Tropfen auftretenden Kräfteverhältnisse zu quantifizieren, werden im folgenden die dimensionslosen Kennzahlen  $We_0$  und  $On$  verwendet. Empirische Grundlage ist die in Abbildung 2.7 dargestellte Bereichseinteilung, wobei sich zur analytischen Darstellung der Grenzkurven ein Exponentialansatz anbietet

$$We_0 = a(1 + bOn^c + dOn^e). \quad (6.1)$$

Koeffizienten und Gültigkeitsbereiche sind für zwei bekannte experimentelle Studien in den Tabellen 6.1 und 6.2 aufgelistet. Bei der numerischen Integration der Tropfenbe-

Grenzkurve	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$On_{min}$	$On_{max}$
Blasenerfall	12	1.2	0.89	0	0	$1.4 \cdot 10^{-3}$	1.7
Keulenerfall	15	0.7	0.12	0	0	$1.4 \cdot 10^{-3}$	$6 \cdot 10^{-2}$
Übergangszerfall	30	1.0	0.76	0	0	$1.4 \cdot 10^{-3}$	1.7
Scheibenerfall	66	0.6	0.87	0	0	$1.4 \cdot 10^{-3}$	1.7

Tabelle 6.1: Bereichseinteilung nach Krzeczowski (1980)

wegungsgleichung werden die Momentanwerte  $We$  und  $On$  für jeden Zeitschritt geprüft und je nach Lage im  $We_0$ - $On$  Diagramm der entsprechende Zerfallsvorgang eingeleitet. Da auf eine Modellierung der Verformungsdynamik verzichtet werden kann, ist das Konzept vergleichsweise einfach in ein Lagrangesches Berechnungsverfahren zu implementieren

Grenzkurve	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$On_{min}$	$On_{max}$
5%-Deformation	0.6	0.8	0.8	$9 \cdot 10^{-5}$	2.4	$2 \cdot 10^{-4}$	$6 \cdot 10^2$
10%-Deformation	1.1	0.7	0.85	$1.5 \cdot 10^{-4}$	2.4	$2 \cdot 10^{-4}$	$6 \cdot 10^2$
20%-Deformation	2.3	0.75	0.8	$2.5 \cdot 10^{-4}$	2.4	$2 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^2$
Oszillationen	3	15	1.2	0	0	$2 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-1}$
Blasenzerfall	13	1.7	1.4	0	0	$2 \cdot 10^{-4}$	4
Multimodezerfall	35	0.65	1.4	0	0	$2 \cdot 10^{-4}$	15
Scheibenzerfall	80	0.6	1.5	0	0	$2 \cdot 10^{-4}$	6

Tabelle 6.2: Bereichseinteilung nach Hsiang und Faeth (1995)

(Schmehl et al. 2000). Wesentlicher Nachteil ist jedoch die Bindung an eine bestimmte Beaufschlagungsform. Bei Abweichungen, die in komplexen Strömungsfeldern unvermeidbar sind, kann es daher zu größeren Fehlern bei der Klassifizierung kommen.

Das Konzept führt zudem nur dann zu sinnvollen Ergebnissen, wenn die erfaßten Momentanwerte der Weber-Zahl charakteristisch für die Beaufschlagung innerhalb eines gewissen Zeitintervalls sind. Im Fall der hier zugrundegelegten Sprungbeaufschlagung muß beispielsweise gewährleistet sein, daß die Abtastfrequenz der Weber-Zahl, d.h. die Zeitschrittweite des numerischen Integrationsverfahrens, *schnelle* Anstiege ( $t_v^* \lesssim t^*$ ) der Relativgeschwindigkeit nicht auflöst. Ansonsten besteht die Gefahr, daß die Klassifizierung zu früh in der Anstiegsphase vorgenommen wird und Zerfall bei höheren Weber-Zahlen unerkannt bleiben kann. Bei *langsamen* Anstiegen ( $t_v^* \gg t^*$ ) und quasistationärer Deformation des Tropfens führt die dargestellte Klassifizierung generell zu einer Überbewertung der aerodynamischen Kräfte. Andererseits können Geschwindigkeitsimpulse trotz Überschreiten der Stabilitätsgrenze zu kurz sein, um zu einer Zerstörung des Tropfens zu führen. Wichtig ist es daher, neben den Kennzahlen auch die Zeitmaße der Verformungsdynamik,  $t^*$  bzw. bei größerem Reibungseinfluß  $t_\mu^*$ , und das Zeitmaß der Relativgeschwindigkeitsänderung  $t_v^*$  zu prüfen und ggf. eine Korrektur der Klassifizierung vorzunehmen.

Da viele Korrelationen zur Zerfallsphase auf den Bereich vernachlässigbarer Reibungseffekte beschränkt sind, schlägt Willmann (1999) das Konzept einer korrigierten Weber-Zahl vor. Auf Basis der über Gleichung 6.1 und Tabellen 6.1 und 6.2 festgelegten Stabilitätsgrenzen ergeben sich die Definitionen

$$We_0^* = \frac{We_0}{1 + 1.7 On^{1.4}}, \quad \text{nach Hsiang und Faeth (1995),} \quad (6.2)$$

$$We_0^* = \frac{We_0}{1 + 1.2 On^{0.89}}, \quad \text{nach Krzeczowski (1980),} \quad (6.3)$$

mittels derer sich der Einfluß der Ohnesorge-Zahl implizit über die Weber-Zahl berücksichtigen läßt.

### 6.1.2 Lastbasierte Klassifizierung bei kritischer Deformation

Die Modellrechnungen zur Sprungbeaufschlagung in Abschnitt 5.3 zeigen, daß sich dynamische Modelle nicht nur zur Beschreibung reversibler Tropfendehformationen, sondern

auch zur Beschreibung der anfänglichen Abflachung zerfallender Tropfen eignen. Da für reversible Deformationen eine eindeutige Zuordnung von Beaufschlagungsintensität und Maximaldeformation möglich ist, kann die Stabilitätsgrenze auch durch einen kritischen Deformationsgrad festgelegt werden. Bereits Hinze (1948a) konnte feststellen, daß eine derartige Festlegung nahezu unabhängig vom Zeitverlauf der Beaufschlagung und von tropfeninternen Reibungseffekten ist. Auf ihn geht die Annahme einer universellen kritischen Staupunktsdeformation zurück

$$\alpha_c \approx -1 . \quad (6.4)$$

Ausgehend von einem Normalmodenmodell der Tropfenverformung konnte er zeigen, daß dieser Wert bei Sprungbeaufschlagung und vernachlässigbaren Reibungseffekten gerade mit  $We_{0,c} \approx 12$  erreicht wird, bei quasistationärer Beaufschlagung erst mit  $We_{\infty,c} \approx 20$ . Die beiden Extremwerte der kritischen Weber-Zahl decken in der Tat den in der experimentellen Praxis festzustellenden Wertebereich ab, dies, obwohl Tropfenverformungen jenseits des Gültigkeitsbereiches linearer Modelle betrachtet werden. Auch Isshiki (1959) und Voronin (1986) setzen das mit Gleichung 6.4 festgelegte theoretische Stabilitätskriterium im Rahmen ihrer Normalmodenanalysen ein. O'Rourke und Amsden (1987) passen die Konstanten des TAB-Modells so an, daß die kritische Staupunktsdeformation bei Sprungbeaufschlagung gerade mit  $We_{0,c} = 12$  erreicht wird.

Alternativ läßt sich die Stabilitätsgrenze mittels einer kritischen Querdeformation festlegen. So kann aus Gleichung 6.4 unter Zugrundelegung des  $P_2$ -Modes eine kritische Querabmessung  $y_c \approx 1.5$  abgeleitet werden (vgl. Abbildung 2.10). Dieser Wert ergibt sich aus den Untersuchungen von Krzeczowski (1980) zum Tropfenzerfall in horizontalen Kanalströmungen sowie aus den von Schmelz (2002) zusammengestellten Daten zur Tropfendeformation bei unterschiedlichen Geschwindigkeitsanstiegen. Wierzba (1990) berichtet von Werten  $1.5 < y_c < 1.6$  im unmittelbaren Bereich der Stabilitätsgrenze. Die in Abbildung 5.10 zusammengestellten Meßdaten zur Sprungbeaufschlagung in Stoßrohrströmungen zeigen etwas größere Querverformungen. An der Grenze zum Blasenzerfall wird mit  $We_{0,c} = 13$  im Mittel der folgende Wert erreicht

$$y_c \approx 1.8 . \quad (6.5)$$

Diese Querabmessung ist auch anhand der von Lane (1951) veröffentlichten Zerfallssequenz eines Tropfens im vertikalen Windkanal zu erkennen, und zwar vor der Ausbildung der Blase. Die Videoaufnahmen von Gutknecht (1996) zeigen außerdem, daß die Querabmessung scheibenförmig deformierter Tropfen vor der Wölbung und Blasenbildung nahezu unabhängig von Reibungseinflüssen ist. Entsprechend können Aalburg et al. (2003) mithilfe direkter numerischer Simulationen sprungbeaufschlagter Tropfen nachweisen, daß ein universelles Kriterium nach Gleichung 6.5 eine gute Näherung der experimentell ermittelten Stabilitätsgrenze für einen weiten Bereich der Ohnesorge-Zahl ist.

Bei Beaufschlagung mit  $We_0 > We_{0,c}$  kommt es nach Überschreiten von  $y_c$  zu einer weiteren Abflachung und Querdeformation des Tropfens. Wie anhand der Meßdaten von Dai und Faeth (2001) erkennbar, nimmt die dabei erreichte maximale Querabmessung  $y_{max}$  zunächst noch zu und erreicht für  $We_0 > 20$  eine absolute, bis etwa  $t/t_0^* = 1.5$  gültige Obergrenze

$$y_M \approx 2.1 . \quad (6.6)$$

Eine weitere Querausbreitung findet erst in der Zerfallsphase statt, in der sich die charakteristischen Flüssigkeitsstrukturen der verschiedenen Zerfallsformen ausbilden. Die dynamische Modellbeschreibung muß daher mit Erreichen von  $y_{max}$  abgebrochen werden und durch eine empirische Beschreibung weitergeführt werden. Eine mögliche Implementierung dieser Vorgehensweise ist in Abbildung 6.1 dargestellt und mit experimentellen Daten verglichen. Die betrachteten Fälle umfassen reversible Verformungen, Blasenzer-

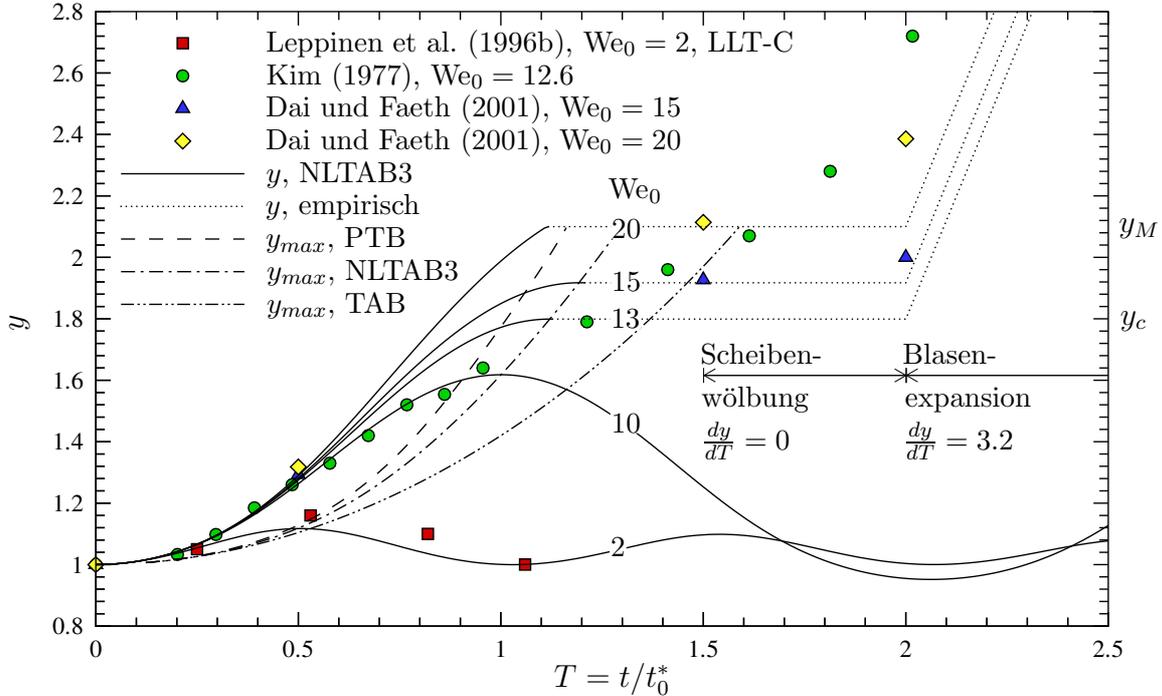


Abbildung 6.1: Tropfenquerverformung bei Sprungbeaufschlagung

fall bei  $We_0 = 12.6, 13$  und  $15$  sowie Keulenzерfall bei  $We_0 = 20$  bei vernachlässigbarem Reibungseinfluß. Entsprechend der Modellstudie in Abschnitt 5.3 ist die Relativgeschwindigkeitsabnahme infolge Beschleunigung des Tropfens über einen deformationsabhängigen  $c_D$ -Wert nach Gleichung 4.102 und eine beschleunigungsabhängige Korrektur nach Gleichung 4.96 mit  $K_A = 1$  berücksichtigt. Der Vergleich der Ortskurven von  $y_{max}$  zeigt, daß die verschiedenen Modellansätze trotz nahezu gleicher Maximaldeformation (vgl. Abbildung 5.10) deutliche Unterschiede in der Dynamik der Deformation aufweisen. Ebenfalls dargestellt ist die empirische Beschreibung nach Erreichen der maximalen Deformation. Während der bis zum Zeitpunkt  $T = 2$  andauernden Wölbung des scheibenförmigen Tropfens wird von einer konstanten Querabmessung ausgegangen, gefolgt von einer Phase schneller Expansion der Blase. Auf die Beschreibung dieser Vorgänge wird in den nachfolgenden Abschnitten 6.2 und 6.3 eingegangen.

Die Differenzierung der verschiedenen Zerfallsformen anhand der am Tropfen wirkenden Kräfteverhältnisse wird zweckmäßigerweise gegen Ende der dynamischen Modellbeschreibung vorgenommen. Auf diese Weise können Änderungen der Relativgeschwindigkeit während der Deformationsphase und somit auch Reibungseffekte implizit berücksichtigt werden. Wie eine umfangreiche Modellstudie gezeigt hat, führt eine Differenzierung anhand der Weber-Zahl  $(We)_{y_c}$  beim Überschreiten der kritischen Deformation zu guter Übereinstimmung mit empirischen Daten. Gestützt wird diese Feststellung durch die experi-

mentellen Untersuchungen von Schmelz (2002), der in vertikalen Düsenströmungen mit abnehmenden Geschwindigkeitsanstiegen zwar zunehmende Werte der kritischen Weber-Zahl beobachtet, zum Zeitpunkt der kritischen Deformation jedoch einen einheitlichen Momentanwert der Weber-Zahl nachweisen kann.

Eine auf Basis des NLTAB3-Modells berechnete Klassifizierung des Tropfenverhaltens ist in Abbildung 6.2 dargestellt. Dabei sind die Einflußgrößen  $D_0$ ,  $\rho$ ,  $\mu$ ,  $\rho_d$  und  $\sigma$  von

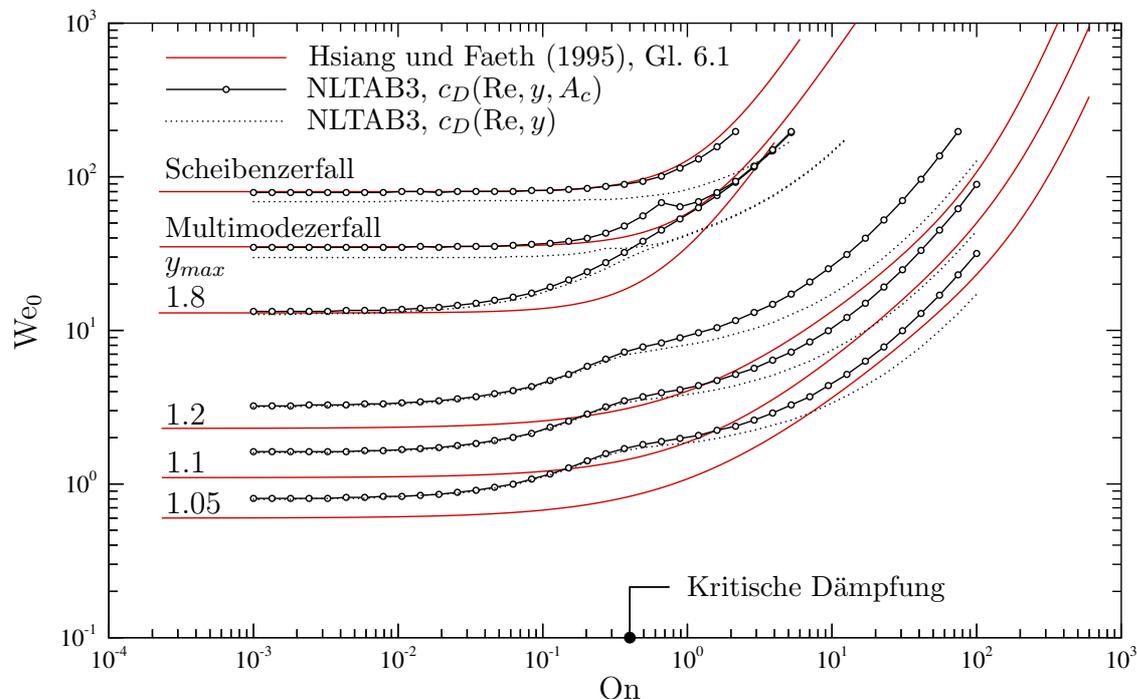


Abbildung 6.2: Klassifizierung des Tropfenverhaltens bei Sprungbeaufschlagung (vgl. Abbildung 2.7),  $c_D(Re, y, A_c)$  berechnet nach Gleichungen 4.90, 4.96, 4.102 und 4.104

Hsiang und Faeth (1995) übernommen, die Kennzahlen  $On$  und  $We_0$  werden mittels  $\mu_d$  und  $v_{rel}$  variiert. Die Beschleunigung des Tropfens ist über einen deformationsabhängigen  $c_D$ -Wert berücksichtigt, sowohl ohne, als auch mit beschleunigungsabhängiger Korrektur. Die Werte der Weber-Zahl bei der kritischen Deformation sind für die verschiedenen Übergänge der Zerfallsformen in Tabelle 6.3 zusammengestellt.

Grenzkurve	$(We_0)_{On \ll On_c}$	$(We)_{y_c}$
bag-plume Zerfall	18	11.5
Multimodezerfall	35	27
plume-shear Zerfall	40	32
Scheibenzerfall	80	64

Tabelle 6.3: Klassifizierung für NLTAB3-Modell mit  $c_D(Re, y, A_c)$  und  $y_c = 1.8$

Die Wirkung tropfeninterner Reibung auf das berechnete Deformations- und Zerfallsver-

halten läßt sich in drei Bereiche einteilen, wobei die kritische Ohnesorge-Zahl der linearen Theorie,  $On_c = 0.4$ , als entscheidende Kenngröße auftritt. Für  $On < 0.1 On_c$  ist grundsätzlich kein Reibungseinfluß feststellbar. Die überhöhten Grenzkurven kleinerer Querdeformationen (5% – 20%) sind eine Folge zu gering berechneter  $y_{max}$ , was im wesentlichen auf die Anpassung der Modelle an die Stabilitätsgrenze zurückzuführen ist (vgl. Abbildung 5.10). Im Bereich  $0.1 On_c < On < On_c$  findet eine zunehmende Dämpfung der ersten Schwingungsamplitude statt, so daß zum Erreichen eines bestimmten Wertes  $y_{max}$  zunehmende Beaufschlagungsintensitäten notwendig sind. Die Beschleunigung des Tropfens und einhergehende Abnahme der Relativgeschwindigkeit ist dabei von untergeordneter Bedeutung. Mit  $On = On_c$  wird  $y_{max}$  nur noch aperiodisch angenähert und die Isolinien der Maximalverformung steigen daher auf etwa den doppelten Wert von  $We_0$  an. Ein ähnliches Verhalten ist anhand der direkten numerischen Simulationen von Aalburg et al. (2003) zu erkennen. Wie die Abweichungen zwischen empirischen und berechneten Grenzkurven im Bereich der kritischen Dämpfung zeigen, ist dieser Reibungseffekt in Realität jedoch deutlich schwächer ausgeprägt. Mit weiter zunehmender Ohnesorge-Zahl und verstärkter Verzögerung der Deformation setzt sich für  $On > On_c$  schließlich der Effekt der Tropfenbeschleunigung durch. Entsprechend wirkt sich in diesem Bereich die Modellierung des Bewegungsverhaltens aus, wobei die Rechnungen die Bedeutung der beschleunigungsabhängigen Korrektur des aerodynamischen Widerstandsbeiwertes hervorheben.

Die dargestellte Klassifizierung auf Basis dynamischer Verformungsmodelle und empirischer Zerfallskriterien ermöglicht somit eine quantitative Erfassung aller wesentlichen Einflüsse. Dies gilt hinsichtlich aufgeprägter Variationen der Relativgeschwindigkeit wie auch tropfeninterner Reibungseffekte, womit sich wesentliche Vorteile für die numerische Beschreibung der Vorgänge in komplexen Strömungsfeldern bei der technischen Gemischaufbereitung ergeben.

## 6.2 Stadien des Tropfenzerfalls

Wie anhand der Bildsequenzen in Abschnitt 2.1.1 erkennbar, gilt die Einteilung in Deformations- und Zerfallsphase für sämtliche betrachteten Zerfallsvorgänge. Während die anfängliche Querdehnung des Tropfens zur Scheibenform vergleichsweise einheitlich abläuft, ist die mit dem Übergang zur Zerfallsphase beginnende Ausbildung komplexer Flüssigkeitsstrukturen entscheidend durch den Mechanismus des Zerfalls geprägt. Grundlegender Bestandteil einer empirischen Modellbildung ist daher die Differenzierung der Zerfallsstadien in Abhängigkeit der Weber-Zahl der aerodynamischen Beaufschlagung.

Die in Abbildung 6.3 dargestellte Auftragung ist an Samenfink (1995) angelehnt, mit dem Unterschied, daß der Großteil der Daten sowie die Klassifizierung der Phänomene aus den Stoßrohrversuchen von Dai und Faeth (2001) übernommen ist. Die Einteilung ist über der dimensionslosen Zeit  $T = t/t_0^*$  vorgenommen, wobei  $t_0^*$  nach Gleichung 3.25 mit dem Anfangswert  $v_{rel,0}$  gebildet wird. Schattiert gekennzeichnet sind die Bereiche in denen Zerfallsvorgänge ablaufen, d.h. zusammenhängende Flüssigkeitsstrukturen zerreißen und Sekundärtropfen ablösen. Das Diagramm enthält die Kennlinien der minimalen Dicke des Tropfens,  $T_{min}$ , des Beginns der Zerfallsphase,  $T_i$ , und der Zerfallszeit,  $T_b$ . Die für  $T > T_{min}$  zunehmende Dicke der Tropfenscheibe ist eine Folge verschiedener Vor-

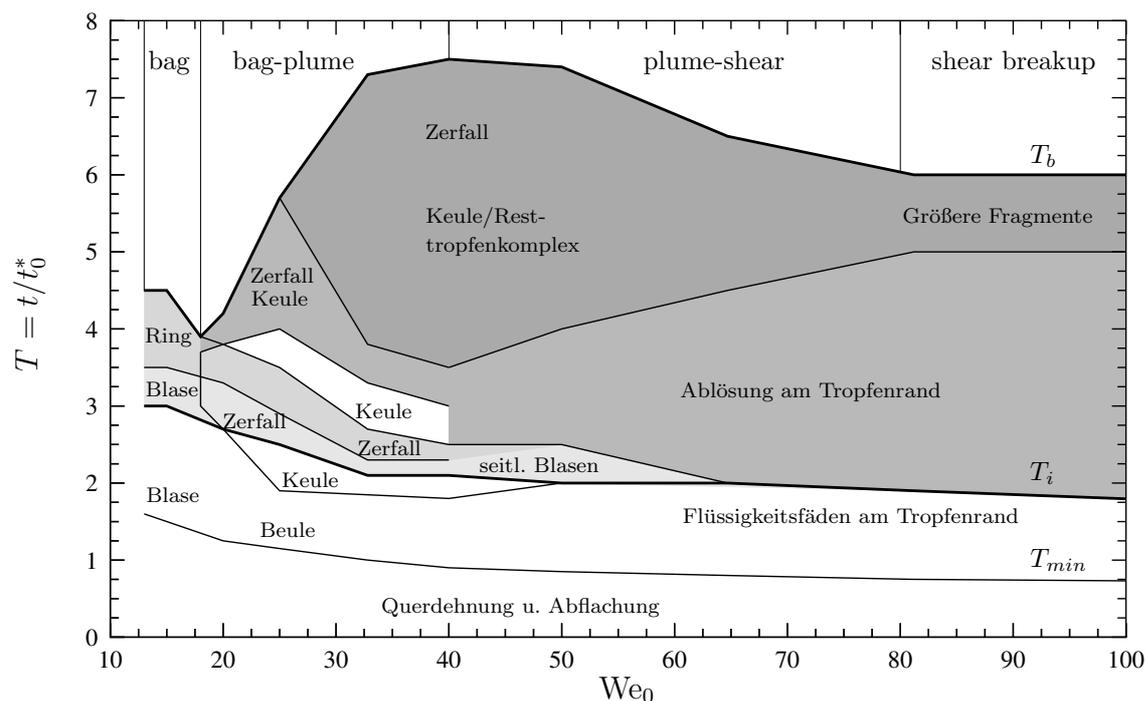


Abbildung 6.3: Stadien des Tropfenzerfalls ( $On < 0.1$ ). Experimentelle Datenbasis:  $We_0 = 15, 20, 25, 32, 50, 64, 81$  (Dai und Faeth 2001),  $We_0 = 48.1$  (Krzeczkowski 1980) und  $We_0 = 12.5$  (Wierzba 1990).

gänge, die bei Variation der Weber-Zahl kontinuierlich ineinander übergehen: Wölbung der Scheibe und Blasenbildung bei Blasenzerfall, Beulen- und Blasenbildung sowie Längswachstum der zentralen Flüssigkeitssäule bei Keulenzfall und die Ausbildung kleinskaliger Flüssigkeitsstrukturen am Tropfenrand bei plume-shear Zerfall und Scheibenzerfall. Das Maximum von  $T_b$  bei  $We_0 \approx 40$  wird nach Dai und Faeth durch den vergleichsweise langsamen Rayleigh-Zerfall der zusammenhängenden Flüssigkeitsstruktur aus Keule und Resttropfen (Keulenkopf) verursacht. Die von ihnen vorgeschlagene Bezeichnung des Übergangsbereichs zum Scheibenzerfall als plume-shear breakup rührt von der Beobachtung eines langgestreckten Flüssigkeitselementes bis etwa  $We_0 = 80$ . Bei Steigerung der Weber-Zahl im Bereich des Scheibenzerfalls ändert sich der Ablauf des Zerfallsvorganges nur noch wenig. Nach Chou et al. (1997) gelten bei  $We_0 = 250$  die Werte  $T_i = 1.5$  und  $T_b = 5.5$ .

In der Literatur finden sich weitere Definitionen zur zeitlichen Einteilung der Zerfallsvorgänge. Eine Zusammenstellung von Zeitmaßen auf Basis einer großen Zahl von Versuchsdaten wird von Pilch und Erdman (1987) vorgestellt. Für den Beginn der Ausbildung von Blasen, Keulen oder Flüssigkeitsstrukturen am Tropfenrand geben sie folgende Korrelation an

$$T = 1.9(We_0 - 12)^{-0.25}(1 + 2.2On^{1.6}), \quad (6.7)$$

deren Verlauf ähnlich der in Abbildung 6.3 enthaltenen Kennlinie  $T_{min}$  ist, zusätzlich jedoch den Einfluß tropfeninterner Reibungseffekte berücksichtigt. Entsprechend formulieren sie eine Korrelation für die Zerfallszeit, die ähnlich der Kennlinie  $T_b$  verläuft. Die maximale Querabmessung wird nach Hsiang und Faeth (1992) nach einer universellen

Zeit  $T = 1.6$  erreicht, für die Zerfallszeit geben sie den Wert  $T_b = 5$  an. Zur Berücksichtigung tropfeninterner Reibungseffekte empfehlen sie die Verwendung einer korrigierten Zerfallszeit

$$T_b^* = \frac{T_b}{1 - \frac{1}{7} \text{On}}, \quad \text{We}_0 < 10^3, \quad \text{On} < 3.5. \quad (6.8)$$

### 6.3 Kinematik und Aerodynamik des Zerfalls

Bereits während der anfänglichen Abflachung und Querdeformation nehmen die Strömungskräfte auf den Tropfen drastisch zu. Mit der gegen Ende der Deformationsphase erreichten Scheibenform ist eine Überhöhung um etwa eine Größenordnung verbunden, was wiederum einen maßgeblichen Einfluß auf die Beschleunigung des Tropfens hat. Diese Effekte wurden im Rahmen der Modellrechnungen in Abschnitt 6.1.2 berücksichtigt und diskutiert.

Eine weitere Querausbreitung der Tropfenflüssigkeit findet mit den Auflösungsvorgängen in der Zerfallsphase statt. Wie die Stoßrohrversuche von Dai und Faeth (2001) zeigen, werden infolge der abermals gesteigerten Strömungskräfte selbst die größeren Fragmente auf etwa 50% der Gasgeschwindigkeit beschleunigt. Eine quantitative Beschreibung der Querausbreitung ist in Abbildung 6.4 für Zerfallsmechanismen mit Blasenbildung zusammengestellt. Charakteristisch für den Blasenzerfall ist die Ausdehnung des Flüssigkeitsrin-

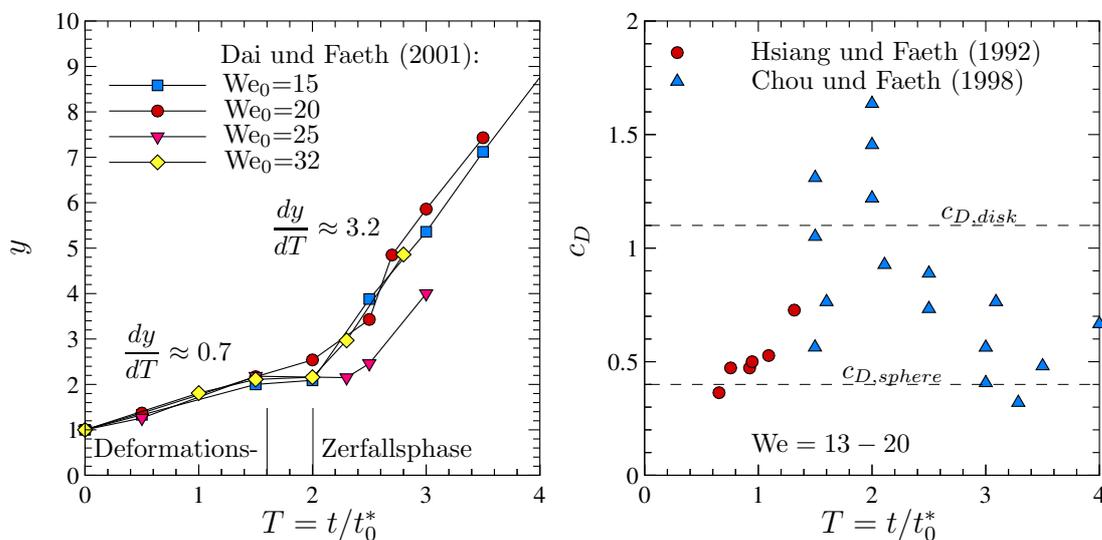


Abbildung 6.4: Querausbreitung der Flüssigkeitsstruktur (links) und Änderung des  $c_D$ -Wertes (rechts) während des Zerfallsvorgangs

ges auf das bis über achtfache des anfänglichen Tropfendurchmessers, ein Wert der auch von Gutknecht (1996) angegeben wird. Beim Keulenzfall ist dieser Vorgang aufgrund der zusätzlichen Flüssigkeitsansammlung auf der Tropfenachse etwas schwächer ausgeprägt (vgl. Abbildungen 2.3 und 2.4). Periphere Blasen- und Ringstrukturen existieren bis in den Übergangsbereich zum Scheibenzerfall, also bis etwa  $We_0 = 60$ , werden mit abnehmender Lebenszeit und Volumenanteil jedoch zunehmend durch die schubspannungsgetriebene Filmablösung verdrängt. Wie aus Abbildung 2.5 ersichtlich, kommt es dabei

ebenfalls zur Querausbreitung der Flüssigkeit. Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß die Kinematik in der Zerfallsphase, trotz der erheblichen Unterschiede der Zerfallsmechanismen, durch einen einheitlichen Wert der dimensionslosen Expansionsgeschwindigkeit charakterisiert werden kann

$$\frac{dy}{dT} = \frac{1}{v^*} \frac{dD}{dt} \approx 3.2, \quad T > 2. \quad (6.9)$$

Dieser Wert geht auch aus den Messungen von Kim (1977), Krzeczowski (1980) und Gutknecht (1996) hervor, und gilt allgemein im Bereich  $We_0 \lesssim 100$ . Chou und Faeth (1998) berichten für Blasenzerfall von einem niedrigeren Wert  $dy/dT = 1.8$ . Von zusätzlichem Interesse ist der mit dem Übergang zum Scheibenzerfall auftretende Resttropfen. Infolge der Ausbildung und Ablösung der umgebenden Filmstrukturen sind die Abmessungen des kompakten Kerns jedoch nur schwer meßbar. Wierzba und Takayama (1988) berichten von einer linearen Durchmesserabnahme mit der Zeit.

Zur Charakterisierung der aerodynamischen Eigenschaften der Tropfenflüssigkeit in der Zerfallsphase finden sich in der Literatur nur wenige, meist qualitative Angaben. Schwierigkeiten bei der experimentellen Bestimmung des  $c_D$ -Wertes sind im wesentlichen mit den Auflösungserscheinungen verbunden, d.h. es kann nur noch schwer ein eindeutiger Schwerpunkt bestimmt werden und es findet zusätzlich Massenverlust statt. Anhand der in Abbildung 6.4 dargestellten Daten von Chou und Faeth (1998) läßt sich in der Deformationsphase zunächst ein Anstieg des auf die momentane Querabmessung bezogenen  $c_D$ -Wertes feststellen, gefolgt von einem drastischen Abfall in der Zerfallsphase. Die Abnahme vom Wert bei Scheibenform auf den Wert bei Kugelform wird im wesentlichen durch Ausbildung und Aufplatzen der Blase sowie Zerfall des Ringes verursacht. Mit dem Übergang zum Scheibenzerfall und dem einsetzenden kontinuierlichen Massenverlust ist eine Differenzierung zwischen Kern- und Sekundärtropfen nur noch schlecht möglich. Für diese Zerfallsform geben Hsiang und Faeth (1993) einen mittleren, auf die Querschnittsfläche des Originaltropfens bezogenen Wert  $c_D = 5$  an.

## 6.4 Eigenschaften der Zerfallsprodukte

Die mathematischen Grundlagen zur Beschreibung der Produkteigenschaften mittels charakteristischer Größen und Verteilungsfunktionen wurden in Abschnitt 3.4 dargelegt. Dabei kann die Auswertung der Meßdaten in verschiedener Weise vorgenommen werden. Bei der *globalen* Betrachtung werden sämtliche Sekundärtropfen einer Zerfallsform, ungeachtet der individuellen Herkunft (Ring, Blase, Keule, Grenzschicht) und der Entstehungszeit, berücksichtigt. Ein tiefergehendes Verständnis der Zerfallsphänomene ist dagegen nur auf Basis einer *differenzierten* Betrachtung der Teilvorgänge mit den jeweiligen Sekundärtropfenspektren zu erreichen.

### 6.4.1 Globale Tropfengrößen-Volumenverteilungen

Zur Charakterisierung von Sekundärtropfengrößen stellen Hsiang und Faeth (1992; 1993) eine umfangreiche Studie vor. Diese zeigt, daß die globale Größenverteilung einer Zerfallsform durch die auf Simmons (1977) zurückgehende universelle Wurzel-Normalverteilung

beschrieben werden kann. Mit Gleichung 3.56 wurde diese in Form ihrer Verteilungsfunktion  $f(x)$  eingeführt. Unter Bezug auf Abbildung 3.5 ist die folgende Parameterkombination vereinbart

$$\frac{D_{0.5}}{D_{32}} = 1.2, \quad \mu = 1.0, \quad \sigma = 0.22. \quad (6.10)$$

Bei Blasen- und Keulenzzerfall ermöglicht die Verteilung die Beschreibung des gesamten Sekundärtropfenspektrums (Hsiang und Faeth 1992), bei Scheibenzzerfall dagegen nur des durch periphere Flüssigkeitsablösung entstehenden Feianteils (Hsiang und Faeth 1993). Deutlich ist dies an den in Abbildung 6.5 dargestellten Meßdaten zu erkennen. Bis in

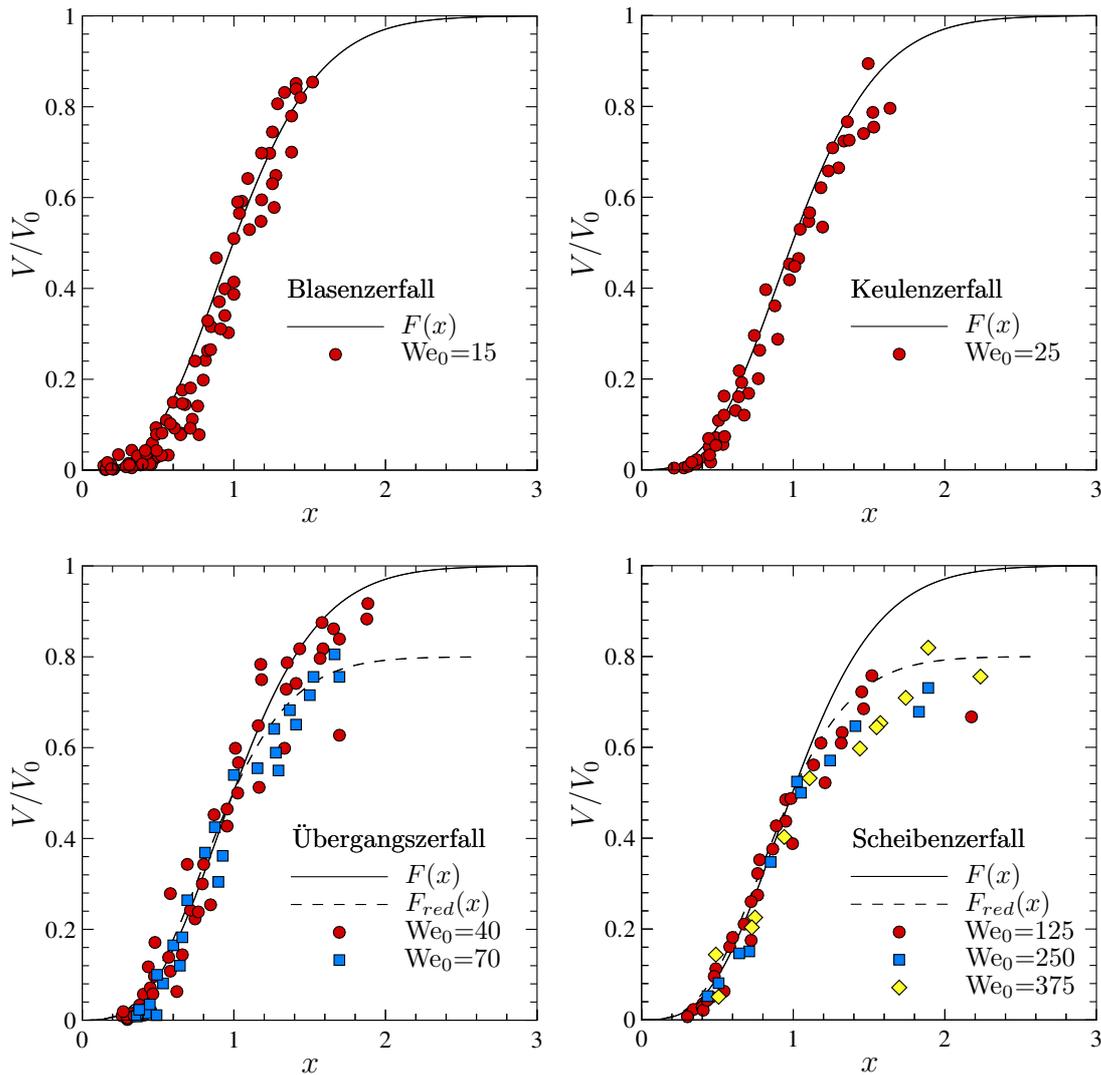


Abbildung 6.5: Tropfengrößen-Volumenverteilungen ( $x = D/D_{0.5}$  mit  $D_{0.5}$  des gesamten Spektrums gebildet). Experimentelle Daten von Hsiang und Faeth (1992) und Chou und Faeth (1998).

den Bereich des Übergangszzerfalls ( $We_0 \approx 40$ ) werden die Daten in guter Näherung von der theoretischen Summenfunktion  $F(x)$  wiedergegeben (aus Gleichung 3.59 oder durch numerische Integration von Gleichung 3.56). Mit dem Übergang zum Scheibenzzerfall ( $We_0 \approx 70$ ) stagniert die Zunahme des kumulierten Volumens bei  $V/V_0 \approx 0.8$ , was

auf eine bimodale Ausprägung der Verteilung schließen läßt, wobei der Volumenanteil bei großen Durchmesserwerten dem Resttropfen zugeordnet wird. Um die Volumenverteilung des Feianteils zu quantifizieren, wird eine reduzierte Summenfunktion eingeführt

$$F_{red}(x) = 0.8 F(Kx) , \quad \text{mit} \quad K = \frac{D_{0.5}}{D_{0.5,red}} , \quad (6.11)$$

wobei  $D_{0.5,red}$  den massenmittleren Durchmesser des Feianteils darstellt. Der Streckungsfaktor  $K$  ist über den Zusammenhang  $F_{red}(1) = 0.8F(K) = 0.5$  definiert, dessen numerische Invertierung den folgenden Zahlenwert ergibt

$$K = F^{-1}(0.625) = 1.145 . \quad (6.12)$$

Die zweite Fragestellung betrifft die charakteristischen Durchmesser  $D_{32}$  bzw.  $D_{0.5}$ , mit denen die *Lage* der Verteilung im Durchmesserspektrum festgelegt ist. Beide Größen sind über die *Form* der Verteilung gekoppelt und stehen für  $We_0 \lesssim 40$  über Gleichung 6.10 in einem konstanten Verhältnis. Mit dem bimodalen Charakter der Verteilung für  $We_0 \gtrsim 70$  gilt dies nur noch für den Feianteil des Spektrums, so daß bei der Verhältnisberechnung auch die Eigenschaften des Grobanteils berücksichtigt werden müssen. Ein mögliches Verfahren hierzu findet sich in Schmehl et al. (2000).

Hsiang und Faeth (1992) geben für den Sauter-Durchmesser  $D_{32}$  den folgenden Zusammenhang an

$$\frac{D_{32}}{D_0} = 6.2 \sqrt{\frac{On}{\sqrt{We_0}}} = \frac{6.2}{\sqrt{Re_{def}}} , \quad On < 0.1 , We_0 < 10^3 . \quad (6.13)$$

Zugrunde liegt diesem die in Abbildung 2.1 skizzierte Modellvorstellung einer schubspannungsgetriebenen Flüssigkeitsablösung und die direkte Proportionalität zwischen  $D_{32}$  und der Dicke  $\delta_d$  der Flüssigkeitsgrenzschicht am größten Durchmesser des Tropfens. Ausgangspunkt der formalen Ableitung ist die mit Gleichung 3.37 gegebene Größenordnungsbeziehung, wobei Hsiang und Faeth anstelle der charakteristischen Geschwindigkeit  $v_s^*$  allerdings die Geschwindigkeit  $v^*$  verwenden. Bemerkenswert ist, daß Gleichung 6.13 trotz des zugrundegelegten Grenzschichtmechanismus auch im Bereich mäßiger Weber-Zahlen, also für Blasen- und Keulenzерfall, eine gute Beschreibung der Tropfengrößen ermöglicht.

Bei Verwendung der Oberflächengeschwindigkeit  $v_s^*$  nach Gleichung 3.38 und der entsprechenden Reynolds-Zahl  $Re_s$  ergibt sich eine Variante des Zusammenhangs. Mit der Annahme  $\delta_d/D_0 \sim Re_s^{-0.5}$  folgt

$$\frac{D_{32}}{D_0} = \sqrt[6]{\frac{\mu}{\mu_d} \sqrt{\frac{\rho_d}{\rho}} \frac{K}{\sqrt{Re_{def}}}} . \quad (6.14)$$

Auf der Grundlage von Gleichung 6.13 verwenden Schmehl et al. (2000) die korrigierte Weber-Zahl  $We_0^*$  nach Gleichung 6.2 bzw. nach Gleichung 6.3. Durch Anpassung der Kennzahlexponenten an die Meßdaten von Hsiang und Faeth erhalten sie

$$\frac{D_{32}}{D_0} = 1.5 On^{0.2} We_0^{*-0.25} . \quad (6.15)$$

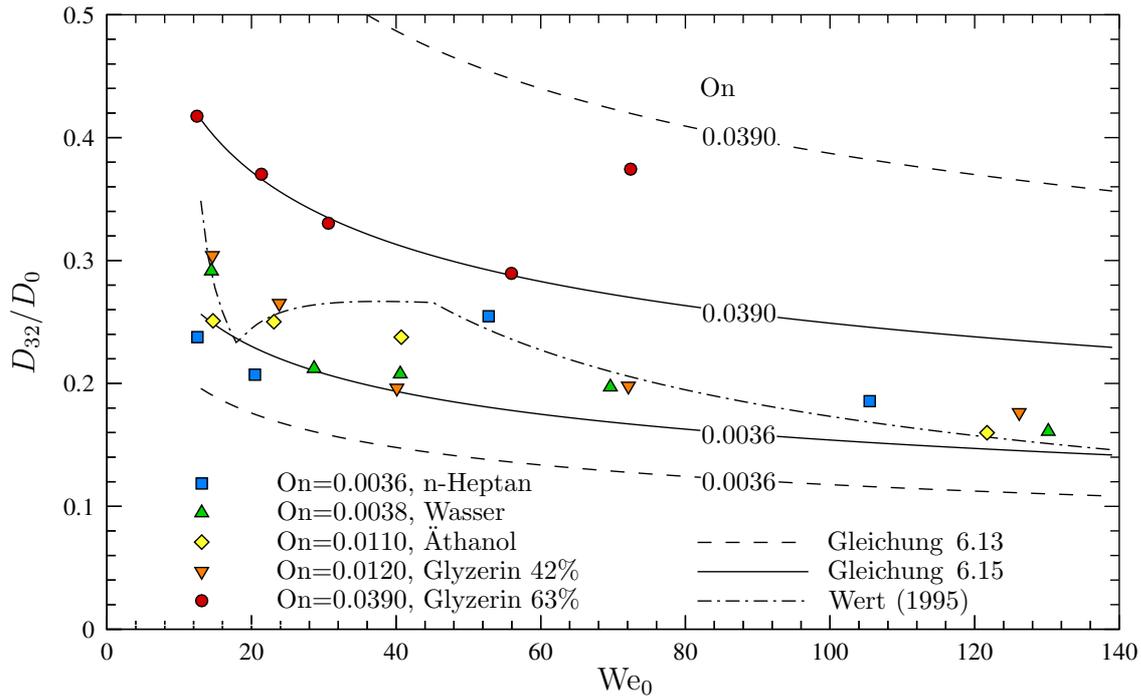


Abbildung 6.6: Globaler Sauter-Durchmesser der Zerfallsprodukte. Experimentelle Daten von Hsiang und Faeth (1992)

Zusammenfassend ist dies in Abbildung 6.6 dargestellt. Auffällig ist, daß die experimentellen Daten für den Maximalwert  $On = 0.039$  deutlich größere Sauter-Durchmesser zeigen. Für die übrigen Werte der Ohnesorge-Zahl ist keine eindeutige Tendenz auszumachen, wobei die Korrelation nach Gleichung 6.15 die Abhängigkeit jedoch grundsätzlich besser wiedergibt. Die starken Variationen für  $We_0 \lesssim 70$  weisen auf den Übergang der Zerfallsmechanismen bei Annäherung an den Scheibenzerfall hin. Wert (1995) verfeinert die Modellvorstellung unter Zugrundelegung einer linearen Stabilitätstheorie sowie empirischer Zerfallszeiten. Wie aus Abbildung 6.6 hervorgeht, ergibt sich jedoch keine wesentliche Verbesserung der globalen Beschreibung. Es soll deshalb im folgenden zwischen den verschiedenen, sich während des Zerfallsvorganges ausbildenden Flüssigkeitsstrukturen und deren individuellen Tropfenspektren differenziert werden.

### 6.4.2 Differenzierte Analyse der Sekundärtropfengrößen

Unterschieden wird zwischen kleinen Sekundärtropfen, die durch Zerfall dünner Filmstrukturen entstehen, und größeren Fragmenten des Ring-, Keulen- und Resttropfenzerfalls. Typisches Beispiel für die stark unterschiedlichen Sekundärtropfengrößen des Ringzerfalls und des Blasenplatzens ist die bimodale Größenverteilung des Blasenzerfalls, wie sie von Komabayasi et al. (1964) oder Gelfand et al. (1974) festgestellt wurde. Kein bimodaler Charakter ist dagegen anhand der in Abbildung 6.5 gezeigten Größenverteilungen festzustellen. Auf diesen Widerspruch wird gegen Ende dieses Abschnitts zurückgekommen.

Wichtige Informationen zur räumlichen Struktur der Zerfallsvorgänge im gesamten interessierenden Bereich der Weber-Zahl liefert die Studie von Dai und Faeth (2001). Die

Daten sind in Abbildung 6.7 zusammengestellt. Zum Restanteil des Volumens ist an-

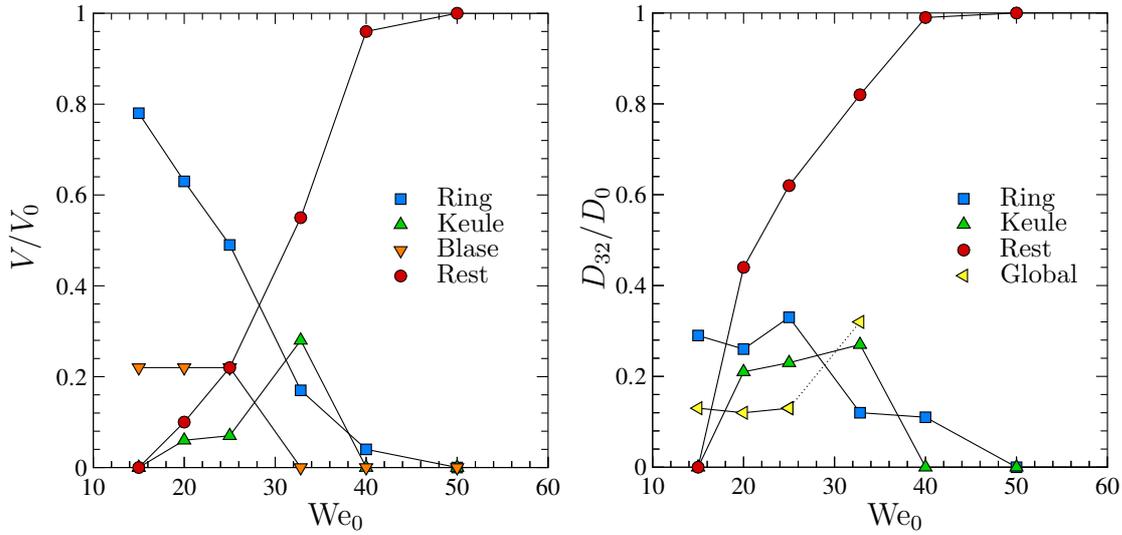


Abbildung 6.7: Volumenanteile (links) und Sauter-Durchmesser (rechts) der Tropfenpopulationen, differenziert nach ihrer Herkunft. Experimentelle Daten von Dai und Faeth (2001)

zumerken, dass es sich für  $We_0 \lesssim 25$  um den abgelösten Kopf der Keule handelt, der aufgrund seiner Größe oft durch nachträglichen Blasen- oder Keulenzersfall zerstört wird (Gutknecht 1996). Für größere Werte von  $We_0$  bildet sich dagegen ein zusammenhängender Komplex aus Keulenkopf und Keule aus, der durch langsamen Rayleigh-Zerfall in wenige große Fragmente zerfällt (vgl. Abbildung 6.3). Für  $We_0 \gtrsim 40$  überlagert sich diesem Vorgang die Ablösung von Film- und Fadenstrukturen am Tropfenrand. Sämtliche aus diesen Teilzerfallsprozessen hervorgehenden Tropfen sind in Abbildung 6.7 als Restvolumen zusammengefasst. Mit Verschwinden der Ringstrukturen verschwindet dieser Volumenanteil ( $V/V_0 \rightarrow 1$ ). Entsprechend ist der Sauter-Durchmesser des Restvolumens als Durchmesser eines volumenäquivalenten Einzeltropfens festgelegt und hat somit nur bei intaktem Keulenkopf eine unmittelbare physikalische Bedeutung.

Für reinen Blasenzerfall bei  $We_0 = 15 - 17$  geben Chou und Faeth (1998) folgende Daten je Einzelereignis an

$$\text{Ringtropfen:} \quad N = 17 - 18, \quad D/D_0 = 0.29, \quad (6.16)$$

$$\text{Knotentropfen (Ring):} \quad N = 4 - 6, \quad D/D_0 = 0.38 - 0.46, \quad (6.17)$$

$$\text{Blasentropfen:} \quad N = 6000, \quad D/D_0 = 0.03 - 0.05. \quad (6.18)$$

Wenn, wie Dai und Faeth empfehlen, die Tropfenpopulationen in erster Näherung jeweils als monodispers betrachtet werden, ist wegen des erheblichen Volumenanteils der Blasentropfen ein ausgeprägt bimodaler Charakter der Größenverteilung zu erwarten. Über Gleichung 3.51 lässt sich ein Schätzwert für den globalen Sauter-Durchmesser berechnen, der ebenfalls in Abbildung 6.7 eingetragen ist und der mit  $D_{32}/D_0 \approx 0.12$  deutlich unterhalb der in Abbildung 6.6 dargestellten Meßwerte liegt. Chou und Faeth führen dies auf eine Unterrepräsentation der Blasentropfen in den Originaldaten von Hsiang und Faeth (1992) zurück. Anstelle einer direkten meßtechnischen Erfassung der sehr kleinen Tropfen wird der Volumenanteil in den neueren Untersuchungen durch Differenzbildung ermittelt.

Aus Abbildung 6.3 geht hervor, daß die Bildung von Blasen- und Ringtropfen innerhalb enger, aufeinanderfolgender Zeitfenster stattfindet, und zwar deutlich früher als die Fragmentierung von Keule und Resttropfen durch Rayleigh-Zerfall. Wegen der fehlenden Informationen zu Anzahl und Größe der Fragmente des Rayleigh-Zerfalls ist eine Abschätzung des globalen Sauter-Durchmessers auf Basis der Einzelpopulationen für  $We_0 \gtrsim 32$  nicht mehr möglich. Dies gilt auch für reinen Scheibenzerfall, bei dem nach Beendigung der Flüssigkeitsablösung meist noch ein Aufbrechen des verbleibenden Resttropfens stattfindet (Samenfink 1995). Deutlich spiegelt sich der Effekt in dem von Hsiang und Faeth (1993) gemessenen Größenbereich,  $D/D_0 = 0.12 - 0.3$  wieder, der deutlich unterhalb des volumenäquivalenten Einzeltropfendurchmessers  $D/D_0 = 0.58$  ( $V/V_0 = 0.2$ ) liegt.

Im Gegensatz zu den besprochenen Teilerfallsprozessen mit eher diskretem Charakter, ist die Ablösung der Flüssigkeit am Tropfenrand ein kontinuierlicher Vorgang. Nach Hsiang und Faeth (1993) findet die Ablösung so lange statt, bis der Momentanwert der Bond-Zahl infolge der Beschleunigung des Tropfens den Wert  $Bo_c = 16$  unterschreitet. Chou et al. (1997) untersuchen den zeitlichen Verlauf des Scheibenzerfalls im Bereich  $125 < We_0 < 375$  und stellen fest, daß die Größenverteilung des erzeugten Tropfenspektrums zu jedem Zeitpunkt durch eine universelle Wurzel-Normalverteilung beschrieben werden kann. Sie geben folgende Korrelationen an

$$\frac{D_{32}}{D_0} = \begin{cases} 2\sqrt{T_\zeta}, & T_\zeta < 0.002, \\ 0.09, & T_\zeta > 0.002, \end{cases} \quad (6.19)$$

$$\frac{1}{m_{d,0}} \frac{dm_d}{dT} = 0.42 \exp [0.8(T - 3.5)^2], \quad 1.5 < T < 5.5. \quad (6.20)$$

Der Zeitverlauf des Sauter-Durchmessers wird hierbei auf dem Zeitmaß  $T_\zeta = t/t_\zeta^*$ , gebildet mit der charakteristischen Wirbeldiffusionszeit nach Gleichung 3.41, in eine instationäre und eine quasistationäre Phase eingeteilt. Dagegen stellt Gleichung 6.20 den auf die Anfangsmasse bezogenen Massenverlust des Tropfens dar, formuliert auf dem Zeitmaß  $T = t/t^*$ . Mit dem Feinanteil des Tropfenspektrums und der Maximalgröße des Resttropfens,  $D/D_0 = 0.58$ , läßt sich für den globalen Sauter-Durchmesser bei Scheibenzerfall der Maximalwert  $D_{32}/D_0 = 0.11$  angeben. Wie bei den Zerfallsvorgängen bei niedrigen Weber-Zahlen liegt auch dieser Wert deutlich unterhalb der in Abbildung 6.6 dargestellten Meßwerte, was ebenfalls auf eine Unterrepräsentation kleiner Tropfen in der Originalstudie von Hsiang und Faeth (1992) hinweist.

### 6.4.3 Sekundärtropfengeschwindigkeiten

Es soll abschließend die durch den Zerfallsvorgang aufgeprägte Geschwindigkeit der Fragmente beschrieben werden. Da der Feinanteil der Zerfallsprodukte sehr schnell von der Relativströmung mitgerissen wird und die Bewegung der größeren Fragmente eher durch den Eigenimpuls bestimmt ist, bietet sich auch hier eine Unterscheidung bezüglich der Herkunft der Tropfen an.

Bei Blasenzerfall kommt den Ringtropfen eine besondere Bedeutung zu. In erster Näherung übernehmen diese den Querimpuls des expandierenden Flüssigkeitsrings und bewe-

gen sich mit der durch Gleichung 6.9 angegebenen Quergeschwindigkeit weiter

$$\frac{v_y}{v^*} = \frac{dy}{dT} = 3.2 . \quad (6.21)$$

Nach Chou und Faeth (1998) ist hierbei eine leichte Geschwindigkeitsüberhöhung der Ringtropfen gegenüber den schwereren, aus den Knoten des Ringes gebildeten Tropfen festzustellen. Da durch den Rayleigh-Zerfall keine wesentlichen Impulskomponenten aufgeprägt werden, übernehmen die aus Keule und Keule-Resttropfenkomplex hervorgehenden Fragmente im wesentlichen den Impuls des Muttertropfens.

Bei der schubspannungsgetriebenen Flüssigkeitsablösung entstehen dagegen Sekundärtropfen, die sich mit vergleichsweise großen Geschwindigkeiten vom Kerntropfen entfernen. Ursache hierfür ist die Beschleunigung der Flüssigkeit in der Grenzschicht sowie die chaotischen Bewegungen der zerfallenden Filmstrukturen am Tropfenrand. Chou et al. (1997) stellen fest, daß die Geschwindigkeiten bei Ablösung nahezu unabhängig von der Tropfengröße und der Entstehungszeit sind. Sie geben volumetrische Mittelwerte an, die bei Übergang zum tropfenfest mitbewegten Bezugssystem wie folgt lauten (Feinanteil,  $125 < We_0 < 375$ )

$$\frac{\bar{v}_z}{v^*} = -9.5 , \quad \frac{\bar{v}_y}{v^*} = 0 . \quad (6.22)$$

Der Beschleunigungseffekt zeigt sich deutlich bei Bezug der Mittelwerte auf die Relativgeschwindigkeit,  $\bar{v}_z/v_{rel} = -0.37$ , wonach die Tropfen im Mittel bei der Ablösung vom Muttertropfen bereits 37% der Gasgeschwindigkeit erreicht haben. Zur Beschreibung der Geschwindigkeitsschwankungen geben Chou et al. volumetrisch gemittelte RMS-Werte an, deren Übertragung ins mitbewegte Bezugssystem lautet

$$\frac{\overline{v'_z}}{v_{rel} - \bar{v}_z} = 0.31 , \quad \frac{\overline{v'_y}}{v_{rel} - \bar{v}_z} = 0.37 . \quad (6.23)$$

Zur Normierung ist hier die Geschwindigkeit der Sekundärtropfen relativ zur Gasströmung verwendet. Entsprechend ergeben sich  $\overline{v'_z}/v_{rel} = 0.20$  und  $\overline{v'_y}/v_{rel} = 0.23$ .

## 7 Zusammenfassung

Die numerische Berechnung disperser Zweiphasenströmungen wird heute vielfach zur Auslegung und Optimierung technischer Gemischbildungsprozesse, wie z.B. der Gemischaufbereitung für Verbrennungskraftmaschinen, eingesetzt. Dabei hängt die Genauigkeit der Berechnungsverfahren entscheidend von der Modellierung des Einzeltropfenverhaltens ab. Neben der Bewegung und Verdunstung der Tropfen müssen bei höheren Relativgeschwindigkeiten auch die Deformation und der Zerfall durch aerodynamische Kräfte berücksichtigt werden. Wichtig ist die Kopplung der Vorgänge. Einerseits können Verdunstung, Deformation und Zerfall die aerodynamischen Eigenschaften eines Tropfens und damit sein Bewegungsverhalten beeinflussen, andererseits wirkt die Bewegung im Strömungsfeld über die zeitliche Variation der Relativströmung auf die Vorgänge am Tropfen zurück. Diese beeinflussen sich auch untereinander. So führt die Oberflächenvergrößerung in der Regel zu einer verstärkten Verdunstung der Flüssigkeit, während die von der Oberfläche weggerichtete Konvektionsströmung die Wirkung aerodynamischer Schubspannungen auf den Tropfen abschwächt.

Vor dem Hintergrund dieser Problemstellung werden in der vorliegenden Arbeit zunächst grundlegende Aussagen über die Wirkungsweise der an Deformation und Zerfall beteiligten Strömungsmechanismen gemacht. Zu diesem Zweck wird auf eine umfangreiche Zusammenstellung existierender experimenteller und theoretischer Erkenntnisse zurückgegriffen und diese durch eigene Dimensions- und Zeitskalenanalysen ergänzt. Für die im Zusammenhang mit der Gemischaufbereitung wichtige sprunghafte aerodynamische Beaufschlagung werden zwei wesentliche Modellmechanismen identifiziert: die Verformung und der Zerfall des Tropfens infolge der aerodynamischen Druckverteilung (bei schwacher bis mäßig starker Beaufschlagung im Bereich  $We_0 \lesssim We_{0,c}$ ) sowie die kontinuierliche Ablösung feiner Flüssigkeitsstrukturen infolge der aerodynamischen Schubspannungen (bei stärkerer Beaufschlagung mit  $We_0 \gg We_{0,c}$ ).

Kernelement der Arbeit sind Modellansätze zur Beschreibung der Verformungsdynamik eines Tropfens bei zeitlich variierender Umströmung. Das Normalmodenmodell für kleine, sonst beliebige Verformungen baut auf der Normalmodenanalyse der Verformungsdynamik auf und wird aus einer Kräftebetrachtung nach Hinze (1948b) sowie alternativ aus einer Energiebetrachtung nach Isshiki (1959) abgeleitet. Die unterschiedlichen Reibungsterme der beiden klassischen Theorien können in dieser Arbeit auf eine abweichende Behandlung der dynamischen Randbedingung an der Tropfenoberfläche zurückgeführt werden. Um die Ansätze auf quasistationär variierende Umströmungsverhältnisse zu erweitern, werden die Modalkoeffizienten  $C_2 - C_5$  von 48 Druckverteilungen auf umströmten Kugeloberflächen als Korrelationen der Reynolds-Zahl dargestellt.

Die zur Beschreibung größerer Streck-Stauch-Verformungen entwickelten nichtlinearen Modelle bauen dagegen auf einer näherungsweisen Darstellung des deformierten Tropfens als Rotationsellipsoid auf. Während dem NLTAB3-Modell eine komponentenweise Betrachtung der axialen und radialen Verformungsströmung und Beschreibung der Modellterme über Punktmassen- bzw. Projektionsflächen-Ansätze zugrundeliegt, basiert das PTB-Modell auf gekoppelten potentialtheoretischen Ansätzen zur Beschreibung der Verformungsströmung und der Ellipsoidumströmung. Als Fazit läßt sich festhalten, daß die Beschreibung der aerodynamischen Kraftwirkungen die zentrale Schwierigkeit der analyti-

schen Modellbildung darstellt. Ursache ist einerseits die Komplexität der Umströmung, die bereits bei mäßiger Reynolds-Zahl ablöst und mit zunehmender Geschwindigkeit durch ein asymmetrisches, dann instationäres und schließlich turbulentes Nachlaufgebiet geprägt ist, andererseits die überlagerte Wirkung der aufgeprägten Schubspannungen, die im Rahmen der analytischen Modellbildung unberücksichtigt bleibt. Bei den nichtlinearen Modellen sind diese Effekte in einem aerodynamischen Wirkungskoeffizienten  $C_2$  zusammengefaßt, mit welchem die Modellgleichungen an empirische Daten angepaßt werden können. Der Einfluß dynamischer Tropfenverformung auf das Bewegungsverhalten wird über die Änderung der Querschnittsfläche und des aerodynamischen Widerstandsbeiwertes  $c_D$  beschrieben. Letzterer wird als Funktion des Formfaktors  $E$  mittels quadratischer Interpolation zwischen den Grenzfällen der Kugel- und Scheibenform dargestellt.

Die systematische Validierung der Modellansätze umfaßt Problemstellungen zunehmender Komplexität: freie Formschwingungen, stationäre Deformation, dynamische Deformation bei sprunghaft einsetzender, konstanter Anströmung, quasistationäre Deformation beim freien Fall aus der Ruhelage sowie dynamische Deformation beim Durchfallen einer horizontalen Düsenströmung. Hinsichtlich der Formschwingungen ist festzustellen, daß die mit zunehmender Amplitude beobachtete Frequenzverschiebung und Periodenasymmetrie allein durch die nichtlinearen Modelle wiedergegeben wird. Entsprechend wirkt sich die Berücksichtigung nichtlinearer Effekte auf die Dynamik größerer Verformungen durch aufgeprägte Strömungskräfte aus, bei der Sprungbeaufschlagung insbesondere auf den Zeitpunkt maximaler Verformung. Dagegen ist der Wert der Maximalverformung im wesentlichen durch den aerodynamischen Wirkungskoeffizient  $C_2$  bestimmt. In der vorliegenden Arbeit wird dieser so angepaßt, daß bei Sprungbeaufschlagung mit der kritischen Weber-Zahl  $We_{0,c} = 13$  gerade der empirische Wert der kritischen Querabmessung  $y_c = 1.8$  erreicht wird. Es ergeben sich Werte im Bereich  $1.0 < C_2 < 1.1$ .

Die Berechnungen mit dem Normalmodenmodell lassen eine durchgehende Unterbewertung kleiner Deformationen erkennen. In der vorliegenden Arbeit wird dies auf die idealisierte Randbedingungen an der Tropfenoberfläche zurückgeführt: bei stationärer Beaufschlagung auf die Vernachlässigung tropfeninterner Wirbelströmung infolge aufgeprägter Schubspannungen, bei Sprungbeaufschlagung auf die vernachlässigte Wirkung instationärer Spannungsbeiträge. Zur qualitativen Bewertung der Effekte sind weitergehende Studien notwendig, z.B. auf Basis direkter numerischer Simulationen. Sowohl die linearen wie auch die nichtlinearen Modellrechnungen zeigen, daß allein die zeitaufgelöste Formkorrektur des Strömungswiderstandes eine korrekte Beschreibung des Bewegungsverhaltens deformierter Tropfen ermöglicht, eine quasistationäre Beschreibung dagegen nur begrenzt einsetzbar ist. Von wesentlicher Bedeutung ist in diesem Zusammenhang auch der Effekt anfänglicher Deformation der Tropfen, der in experimentellen Studien oft nicht beachtet wird und zu großen Fehlern führen kann.

Schließlich werden die dynamischen Verformungsmodelle zur Beschreibung des Tropfenzerfalls erweitert. Grundlage ist eine Differenzierung der verschiedenen Zerfallsformen anhand des Momentanwertes der Weber-Zahl beim Überschreiten der kritischen Deformation. Dieses im Rahmen der Arbeit entwickelte Konzept ermöglicht eine näherungsweise Beschreibung der Wirkung zeitlich variierender Relativströmungsbedingungen auf den Tropfenzerfall. Das Potential der Modellerweiterung wird anhand einer numerischen Parameterstudie der Zerfallsklassifizierung bei Sprungbeaufschlagung verdeutlicht. Ergänzend

wird eine empirische Beschreibung der Vorgänge in der Zerfallsphase vorgenommen. Differenziert nach den verschiedenen Zerfallsformen umfaßt diese die zeitlichen Stadien, die Kinematik, die aerodynamischen Eigenschaften des Tropfens sowie die Eigenschaften der Zerfallsprodukte.

Mit den dargelegten Ansätzen steht eine allgemeingültige und effiziente Modellbeschreibung der Tropfendynamik in inhomogenen Strömungsfeldern zur Verfügung. Berücksichtigt sind insbesondere die Kopplungen zwischen der Bewegung, der Verformung und dem Zerfall des Tropfens. Gerade in Bezug auf technische Gemischbildungsprozesse sollte sich auf Basis der neu entwickelten Ansätze eine entscheidende Verbesserung der Genauigkeit numerischer Simulationsrechnungen erzielen lassen.

## A Reihenentwicklung der Druckverteilungen

Entsprechend der Reihenentwicklung 4.12 kann eine Druckverteilung  $p_s(\theta)$  auf einer Kugel­fläche als Funktion der Entwicklungskoeffizienten  $C_n$  dargestellt werden. Um die Koeffizienten auf Basis einer begrenzten Anzahl diskreter Druckwerte  $p_s(\theta_i)$  zu bestimmen, wird anstelle der Definitionsgleichung 4.16 eine Anpassung der Reihenentwicklung durch Minimierung der Fehlerquadrate vorgenommen. Verwendet wird zu diesem Zweck ein Verfahren der *singular value decomposition* (Press et al. 1992).

Bei Berechnungen mit dem Normalmodenmodell werden in der Regel nur die ersten Moden  $P_2$  bis  $P_5$  benötigt, so daß es zunächst sinnvoll erscheint, auch bei der Anpassung der Druckverteilungen nur die ersten Reihenglieder zu berücksichtigen. Je nach Form der Verteilung konvergieren die Reihenentwicklungen zum Teil jedoch nur langsam, was dazu führt, daß die Anpassung der Koeffizienten maßgeblich durch die Anzahl der berücksichtigten Reihenglieder beeinflusst wird. Um diesen Diskretisierungsfehler zu minimieren, wird bei der Anpassung eine große Anzahl Reihenglieder zugrundegelegt. Diese ist alleine durch die Anzahl der je Verteilung zur Verfügung stehenden Druckwerte  $p_s(\theta_i)$  begrenzt. Numerisch berechnete Druckverläufe aus der Literatur sind auf Basis von 37 Stützstellen übernommen. Obwohl bei der Anpassung auch Koeffizienten höherer Ordnung von zum Teil nicht unbedeutendem Betrag ( $C_n \sim 0.1$ ) berechnet werden, können diese hinsichtlich der Tropfenverformung vernachlässigt werden. Gerechtfertigt ist dies aufgrund der starken Dämpfung höherer Moden, worauf bereits im Rahmen der Diskussion gegen Ende von Abschnitt 4.1.1 hingewiesen wurde.

Eine Zusammenstellung der Entwicklungskoeffizienten  $C_0$  bis  $C_8$  für insgesamt 48 Druckverteilungen aus der Literatur ist in den Tabellen A.1 und A.2 enthalten. Für kleine Reynolds-Zahlen ( $Re < 1$ ) nähern sich diese den Koeffizienten  $C_1 = 6/Re$  und  $C_2 = 1$  der Lösung nach Oseen an (z.B. Clift et al. 1978)

$$\frac{p_s - p_\infty}{\frac{\rho}{2} v_{rel}^2} = \frac{6}{Re} P_1(\cos \theta) + P_2(\cos \theta) . \quad (\text{A.1})$$

Aufgrund der Dominanz von  $C_1$  können die restlichen Koeffizienten in diesem Bereich nur mit großen relativen Fehlern bestimmt werden. Diese Problematik wurde bei der Bestimmung der Korrelationen 4.36 berücksichtigt, indem für kleine Reynolds-Zahlen eine asymptotische Annäherung an die oben angegebenen Koeffizienten gefordert wurde.

Bis auf die experimentellen Verteilungen von Flachsbar (1927) und Achenbach (1972) nahe des laminar-turbulenten Umschlags der Grenzschichtströmung, werden numerische Simulationen der Kugelumströmung zugrundegelegt. Für  $Re > 210$  geht die Axialsymmetrie der bereits oberhalb von  $Re = 20$  abgelösten Umströmung verloren, so daß auch die Druckverteilung über den Azimutwinkel  $\phi$  variiert. Im Bereich  $Re = 270 - 300$  findet mit der periodischen Wirbelablösung der Übergang zur instationären Strömung statt, so daß die Druckverteilung auf der Kugeloberfläche nun auch mit der Zeit variiert. Die bis etwa  $Re = 10^3$  eingesetzten Simulationsverfahren basieren auf Finite-Elemente-, Finite-Volumen- oder Spektral-Methoden. Dagegen wurde von Constantinescu und Squires (2000) zur Simulation der Kugelumströmung bei  $Re = 10^4$  und  $Re = 10^5$  aufgrund der im Nachlauf auftretenden Turbulenzstrukturen ein Large-Eddy- bzw. Detached-Eddy-Verfahren verwendet. Der Vollständigkeit wegen sei abschließend die Reihenentwicklung der Druckver-

Re	Zitiert in	$C_0$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$	$C_6$	$C_7$	$C_8$
0.01	Le Clair et al. (1970)	8.1032	599.2500	1.1188	0.1168	-0.04235	-1.744e-3	0.07052	-0.05097	-0.02243
0.1	Le Clair et al. (1970)	0.7079	60.8340	1.1112	7.297e-3	-2.729e-4	2.524e-3	-6.392e-4	5.854e-4	-7.154e-4
1	Le Clair et al. (1970)	-0.03692	6.8191	1.0190	7.209e-3	5.829e-4	1.158e-4	2.033e-4	1.559e-4	4.129e-4
1	Woo (1971)	0.2078	6.7153	1.0229	0.02217	-0.01880	-4.254e-3	-0.02340	0.01047	0.02628
1	Magnaudet et al. (1995)	-0.2144	6.9049	0.9843	-0.06258	-4.097e-3	0.07022	0.03323	-0.06750	-0.02590
5	Le Clair et al. (1970)	-0.1492	1.8344	0.8660	0.04803	1.886e-3	-3.956e-4	1.473e-4	-1.186e-4	-2.169e-4
5	Dennis und Walker (1971)	-0.1944	1.8443	0.8909	0.05766	0.02039	-5.048e-3	-0.01080	8.499e-4	-3.811e-3
10	Le Clair et al. (1970)	-0.1857	1.1529	0.8147	0.08654	1.788e-3	-1.916e-3	1.225e-3	2.221e-4	-7.377e-4
10	Dennis und Walker (1971)	-0.2512	1.1639	0.8626	0.1086	8.517e-3	-8.586e-3	-0.01202	-0.01309	-5.935e-3
10	Woo (1971)	-0.1884	1.1455	0.8291	0.09062	6.196e-3	5.090e-3	-3.749e-3	-6.353e-3	4.434e-3
10	Magnaudet et al. (1995)	-0.2349	1.1598	0.8218	0.03615	-0.03653	-0.03391	-0.01648	-0.02037	-9.935e-3
20	Le Clair et al. (1970)	-0.2081	0.7634	0.7782	0.1382	4.656e-4	-4.376e-3	9.890e-4	4.588e-4	-3.287e-4
20	Dennis und Walker (1971)	-0.2185	0.7563	0.7916	0.1408	7.038e-3	-5.625e-3	2.955e-3	2.771e-3	-0.01464
20	Gebing (1994)	-0.2162	0.8236	0.8111	0.1097	-0.02153	-5.667e-3	2.696e-3	-5.194e-4	1.328e-3
30	Le Clair et al. (1970)	-0.2226	0.6141	0.7644	0.1740	7.434e-4	-6.137e-3	1.884e-3	-6.736e-4	3.741e-4
40	Dennis und Walker (1971)	-0.2193	0.5371	0.7542	0.1976	2.524e-4	-7.474e-3	-1.457e-3	-5.687e-3	-5.042e-3
50	Tomboulides et al. (2000)	-0.2480	0.5078	0.7534	0.2117	-9.446e-3	-0.01196	4.143e-3	-3.202e-3	-4.115e-4
100	Le Clair et al. (1970)	-0.2507	0.3804	0.7141	0.2830	-1.990e-3	-0.02618	8.207e-3	-1.533e-3	1.504e-3
100	Woo (1971)	-0.2343	0.3602	0.6951	0.2786	8.793e-3	6.937e-4	-3.280e-3	-9.943e-3	3.478e-3
100	Gebing (1994)	-0.2228	0.4101	0.7248	0.2805	-0.01670	-0.03541	0.01006	2.070e-3	5.499e-4
100	Magnaudet et al. (1995)	-0.1873	0.3742	0.7170	0.2727	-8.680e-3	-0.03158	0.01357	1.697e-3	7.151e-3
100	Tomboulides et al. (2000)	-0.2467	0.3953	0.7168	0.2717	-8.653e-3	-0.02801	9.103e-3	-7.706e-4	1.755e-3
100	Lee (2000)	-0.2263	0.3761	0.6883	0.2626	0.01239	-0.01566	6.921e-3	5.331e-3	4.580e-3

Tabelle A.1: Modalkoeffizienten für Druckverteilungen auf umströmten Kugeln

Re	Zitiert in	$C_0$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$	$C_6$	$C_7$	$C_8$
150	Tomboulides et al. (2000)	-0.2402	0.3441	0.6893	0.3130	-2.206e-3	-0.04212	0.01130	-3.811e-3	5.597e-3
200	Le Clair et al. (1970)	-0.2522	0.3005	0.6675	0.3583	0.01894	-0.05123	0.01460	-3.413e-3	6.058e-3
200	Gebing (1994)	-0.2117	0.3354	0.6606	0.3497	7.375e-3	-0.06566	0.01338	6.828e-4	4.667e-3
200	Tomboulides et al. (2000)	-0.2269	0.3205	0.6653	0.3363	2.100e-3	-0.05804	0.01824	-2.320e-3	9.163e-3
200	Lee (2000)	-0.2111	0.3010	0.6410	0.3217	0.02173	-0.03867	6.580e-3	-6.747e-4	5.629e-3
300	Le Clair et al. (1970)	-0.2006	0.2892	0.6060	0.3465	0.01634	-0.04664	-3.300e-3	5.741e-3	4.224e-4
300	Gebing (1994)	-0.1621	0.2841	0.6175	0.3721	0.03899	-0.09118	0.01218	7.378e-3	4.873e-3
300	Gebing (1994)	-0.2082	0.3207	0.6319	0.3797	0.02358	-0.08637	9.213e-3	-5.160e-4	0.01885
300	Magnaudet et al. (1995)	-0.1905	0.2650	0.5900	0.3751	0.04164	-0.08443	0.02592	-8.304e-3	0.01693
300	Lee (2000)	-0.2006	0.2892	0.6060	0.3465	0.01636	-0.04658	-3.170e-3	5.794e-3	3.898e-4
350	Bagchi et al. (2001)	-0.2262	0.2709	0.5971	0.3778	0.03267	-0.07925	9.718e-3	6.796e-3	0.01932
400	Woo (1971)	-0.3112	0.2545	0.6117	0.4385	0.09670	-0.07396	0.01366	6.765e-4	-1.695e-3
400	Gebing (1994)	-0.1431	0.2693	0.5724	0.4121	0.02747	-0.07343	-0.01908	0.02842	-5.138e-3
400	Gebing (1994)	-0.2248	0.3249	0.6214	0.4069	0.01562	-0.08560	-8.403e-3	0.01395	8.151e-3
450	Gebing (1994)	-0.1354	0.2582	0.5669	0.4089	0.05068	-0.08335	-0.02653	0.03693	-0.01400
450	Gebing (1994)	-0.2132	0.3152	0.6013	0.4183	0.02330	-0.07948	-0.01789	0.01515	6.036e-3
500	Bagchi et al. (2001)	-0.2415	0.2673	0.5809	0.4190	0.04278	-0.06407	-3.704e-3	0.01597	-0.01330
1000	Gebing (1994)	-0.2444	0.3264	0.5393	0.4480	0.05480	-0.06061	-0.04320	0.02718	8.965e-3
1000	Gebing (1994)	-0.3484	0.3595	0.6458	0.4731	-0.01646	-0.07160	-0.01536	0.02496	-1.859e-3
10000	Constantinescu et al. (2000)	-0.2076	0.2688	0.4487	0.4408	0.1734	-0.07992	-0.09889	9.271e-3	0.06245
10000	Constantinescu et al. (2000)	-0.1891	0.2615	0.4441	0.4379	0.1645	-0.07439	-0.09462	0.01008	0.06176
100000	Constantinescu et al. (2002)	-0.2603	0.3225	0.4574	0.4391	0.1688	-0.06618	-0.09173	-0.02241	0.06399
162000	Achenbach (1972)	-0.2451	0.3122	0.4527	0.4089	0.1764	-0.05629	-0.07313	-0.04791	0.05857
163000	Flachsbart (1927)	-0.2787	0.3346	0.4725	0.4387	0.1410	-0.07951	-0.08577	6.668e-4	0.04876

Tabelle A.2: Modalkoeffizienten für Druckverteilungen auf umströmten Kugeln

teilung bei Potentialströmung genannt

$$\frac{p_s - p_\infty}{\frac{\rho}{2} v_{rel}^2} = -\frac{1}{2} P_0(\cos \theta) + \frac{3}{2} P_2(\cos \theta) . \quad (\text{A.2})$$

## B Implementierung der Verformungsmodelle

Die simultane Integration von Bewegungs-, Verdunstungs- und Verformungsgleichungen wird im Strömungsprogramm Ladrop2 über der dimensionsbehafteten Zeit  $t$  vorgenommen. Die Rücktransformation der Modellgleichungen 2.2, 4.83, 4.84, 4.85, 4.86 und 4.35 mithilfe der Momentanwerte der charakteristischen Zeit  $t_\sigma^*$ , der Weber-Zahl  $We$  und der Ohnesorge-Zahl  $On$  führt auf die folgenden Ausdrücke der Verformungsbeschleunigungen

**TAB:**

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{1}{t_\sigma^*} \left\{ \frac{1}{t_\sigma^*} [2C_2 We - 64(y - 1)] - 40 On \frac{dy}{dt} \right\} \quad (\text{B.1})$$

**NLTAB1:**

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{1}{t_\sigma^*} \left\{ \frac{1}{t_\sigma^*} \left[ \frac{2C_2}{y} We - 64(y - 1) \right] - 40 On \frac{1}{y^2} \frac{dy}{dt} \right\} \quad (\text{B.2})$$

**NLTAB2:**

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{1}{t_\sigma^*} \left\{ \frac{1}{t_\sigma^*} \left[ \frac{2C_2}{y} We - 20 \frac{1}{S_0} \frac{dS}{dy} \right] - 40 On \frac{1}{y^2} \frac{dy}{dt} \right\} \quad (\text{B.3})$$

**NLTAB3:**

$$\frac{\pi^2 + \frac{16}{y^6}}{\pi^2 + 16} \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{1}{t_\sigma^*} \left\{ \frac{1}{t_\sigma^*} \left[ \frac{2C_2}{y} We - 20 \frac{1}{S_0} \frac{dS}{dy} \right] - 40 On \frac{1}{y^2} \frac{dy}{dt} \right\} + \frac{\frac{48}{y^7}}{\pi^2 + 16} \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 \quad (\text{B.4})$$

**PTB:**

$$\frac{1}{3} \left[ 1 + \frac{2}{y^6} \right] \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{1}{t_\sigma^*} \left\{ \frac{1}{t_\sigma^*} \left[ \frac{15 C_2 \lambda_0}{4 y} We - 20 \frac{1}{S_0} \frac{dS}{dy} \right] - 40 On \frac{1}{y^2} \frac{dy}{dt} \right\} + \frac{2}{y^7} \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 \quad (\text{B.5})$$

**NM:**

$$\frac{d^2 \alpha_n}{dt^2} = \frac{1}{t_\sigma^*} \left\{ \frac{1}{t_\sigma^*} \left[ -2n C_n We - 8n(n-1)(n+2) \alpha_n \right] - 8(n-1)(2n+1) On \frac{d\alpha_n}{dt} \right\} \quad (\text{B.6})$$

## Literatur

- Aalburg, C., G. M. Faeth und B. van Leer (2002). Deformation and Drag Properties of Round Drops Subjected to Shock Wave Disturbances. *AIAA-Paper 2002-0341*.
- Aalburg, C., B. van Leer und G. M. Faeth (2003). Deformation and Drag Properties of Round Drops Subjected to Shock-Wave Disturbances. *AIAA-Journal* 41(12), S. 2371–2378.
- Achenbach, E. (1972). Experiments on the Flow past Spheres at Very High Reynolds Numbers. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 54, S. 565–575.
- Aggarwal, S. K. und F. Peng (1995). A Review of Droplet Dynamics and Vaporization Modeling for Engineering Calculations. *ASME–Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, Vol. 117, S. 453–461.
- Amsden, A. A., P. J. O'Rourke und T. D. Butler (1989). KIVA-II: A Computer Program for Chemically Reactive Flows with Sprays. LA-11560-MS, Los Alamos National Laboratory, <http://www.lanl.gov/orgs/t/t3/docs/KIVA2.pdf>.
- Aris, R. (1989). *Vectors, Tensors and the Basic Equations of Fluid Mechanics*. Dover Publications.
- Astrup, P. (1992). Turbulent Gas-Particle Flow. Dissertation, Risø National Laboratory, Roskilde, Denmark, Risø-R-618 (EN).
- Bagchi, P., M. Y. Ha und S. Balachandar (2001). Direct Numerical Simulation of Flow and Heat Transfer From a Sphere in a Uniform Cross-Flow. *ASME–Journal of Fluids Engineering* 123(2), S. 347–358.
- Bartley, D. L., A. B. Martinez, P. A. Baron, D. R. Secker und H. E. (2000). Droplet Distortion in Accelerated Flow. *Journal of Aerosol Science* 31(12), S. 1447–1460.
- Beard, K. V. und C. Chuang (1987). A New Model for the Equilibrium Shape of Raindrops. *Journal of the Atmospheric Science* 44(11), S. 1509–1524.
- Becker, E. (1991). Nichtlineare Tropfenschwingungen unter Berücksichtigung von Oberflächenspannung und Viskosität. Mitteilungen aus dem Max-Planck-Institut für Strömungsforschung, Nr. 104, ISSN 0374-1257.
- Becker, E., W. J. Hiller und T. A. Kowalewski (1994). Nonlinear Dynamics of Viscous Droplets. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 258, S. 191–216.
- Borisenko, A. I. und I. E. Tarapov (1979). *Vector and Tensor Analysis with Applications*. Dover Publications.
- Borisov, A. A., B. E. Gelfand, M. S. Natanzon und O. M. Kossov (1981). On the Regimes of Drop Breakup and Criteria of their Existence. *Journal of Engineering Physics* 40(1), S. 44–49.
- Brenn, G. (1990). Untersuchungen zu Schwingungsbewegungen von Flüssigkeitstropfen. Dissertation, Institut für Thermodynamik der Luft- und Raumfahrt, Universität Stuttgart.

- Bruno, B. (2000). Secondary Droplet Breakup in Periodic Aerodynamic Flows. Ph.D. thesis, Pennsylvania State University, USA.
- Burger, M., R. Schmehl, P. Gorse, K. Dullenkopf, O. Schäfer, R. Koch und S. Wittig (2002). Transient Fuel Spray Phenomena in the Intake Port of a SI-Engine. *SAE paper 2002-02FFL-80*.
- Chandrasekhar, S. (1961). *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Oxford University Press.
- Chen, K. P., W. Saric und H. A. Stone (2000). On the deviatoric normal stress on a slip surface. *Physics of Fluids* 12(12), S. 3280–3281.
- Chou, W.-H. und G. M. Faeth (1998). Temporal Properties of Secondary Breakup in the Bag Breakup Regime. *International Journal of Multiphase Flow*, Vol. 24, S. 889–912.
- Chou, W.-H., L.-P. Hsiang und G. M. Faeth (1997). Temporal Properties of Drop Breakup in the Shear Breakup Regime. *International Journal of Multiphase Flow* 23(4), S. 651–669.
- Clark, M. M. (1988). Drop Breakup in a Turbulent Flow - I. Conceptual and Modeling Considerations. *Chemical Engineering Science* 43(3), S. 671–679.
- Clift, R., J. R. Grace und M. E. Weber (1978). *Bubbles, Drops, and Particles*. Academic Press.
- Constantinescu, G. S., R. Pacheco und K. D. Squires (2002). Detached-Eddy Simulation of Flow over a Sphere. *AIAA-Paper 2002-0425*.
- Constantinescu, G. S. und K. D. Squires (2000). LES and DES Investigations of Turbulent Flow over a Sphere. *AIAA-Paper 2000-0540*.
- Crowe, C. T., M. Sommerfeld und Y. Tsuji (1998). *Multiphase Flows with Droplets and Particles* (1. Auflage). CRC Press.
- Dai, Z. und G. M. Faeth (2001). Temporal Properties of Secondary Drop Breakup in the Multimode Breakup Regime. *International Journal of Multiphase Flow* 27(2), S. 217–236.
- Daidžić, N., R. Stadler und S. Schrankler (1994). Nonlinear Droplet Oscillations. In: *7th Workshop on Two-Phase flow predictions*, Erlangen, Germany.
- Davis, H. F. (1989). *Fourier Series and Orthogonal Functions*. Dover Publications.
- Delplanque, J.-P. und W. A. Sirignano (1994). Boundary Layer Stripping Effects on Droplet Transcritical Convective Vaporization. *Atomization and Sprays*, Vol. 4, S. 325–349.
- Dennis, S. und J. Walker (1971). Calculation of the Steady Flow Past a Sphere at Low and Moderate Reynolds Numbers. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 48, S. 771–789.
- Flachsbart, O. (1927). Neuere Untersuchungen über den Luftwiderstand von Kugeln. *Physikalische Zeitschrift*, Vol. 28, S. 461–469.

- Forney, L. J., A. E. Walker und W. K. McGregor (1987). Dynamics of Particle-Shock Interactions: Part II: Effect of the Basset Term. *Atomisation and Spray Technology*, Vol. 6, S. 143–152.
- Fuchs, N. A. (1964). *The Mechanics of Aerosols*. Pergamon Press, Oxford.
- Funada, T. und D. Joseph (2002). Viscous potential flow analysis of capillary instability. *International Journal of Multiphase Flow*, Vol. 28, S. 1459–1478.
- Gebing, H. (1994). Numerische Simulation und topologisch-physikalische Analyse der instationären, dreidimensionalen, abgelösten Wirbelströmungen an einer Kugel und an Rotationsellipsoiden. DLR FB-94-01 zugl. Dissertation, Universität Göttingen.
- Gelfand, B. E. (1996). Droplet Breakup Phenomena in Flows with Velocity Lag. *Progress in Energy and Combustion Science*, Vol. 22, S. 201–265.
- Gelfand, B. E., S. A. Gubin und S. M. Kogarko (1974). Variety of Drop Breaking in Shock Waves and their Characteristics. *ASME–Journal of Engineering for Power* 27(1), S. 119–126.
- Gutknecht, R. (1996). Experimentelle Untersuchungen des Sekundärzerfalls von Tropfen unter Variation der Weber- und Ohnesorge-Zahl. Diplomarbeit, Institut für Thermische Strömungsmaschinen, Universität Karlsruhe.
- Hallmann, M. (1994). Numerische Beschreibung der Gemischbildung in Verbrennungskraftmaschinen. Dissertation, Institut für Thermische Strömungsmaschinen, Universität Karlsruhe (TH).
- Han, J. und G. Tryggvason (1999). Secondary Breakup of Axisymmetric Liquid Drops. I. Acceleration by a Constant Body Force. *Physics of Fluids* 11(12), S. 3650–3667.
- Harper, E. Y., G. W. Grube und I. Chang (1972). On the Breakup of Accelerating Liquid Drops. *Journal of Fluid Mechanics* 52(3), S. 565–591.
- Hase, M. (2001). Numerische Berechnung dreidimensionaler Transportvorgänge an angeströmten, sich verformenden Tropfen, kleinen Tropfengruppen und Flüssigkeitsligamenten. Bericht zum Forschungsvorhaben We-2549 /1-1, Institut für Thermodynamik der Luft- und Raumfahrt, Universität Stuttgart.
- Hase, M. (2003). Persönliche Mittelungen.
- Hase, M. und B. Weigand (2004). Transient Heat Transfer of Deforming Droplets at High Reynolds Numbers. *International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow* 14(1), S. 85–97.
- Häßler, G. (1972). Untersuchung zur Zerstörung von Wassertropfen durch aerodynamische Kräfte. *Forschung im Ingenieurwesen*, Vol. 38, S. 183–192.
- Haywood, R. J., M. Renksizbulut und G. D. Raithby (1994). Transient Deformation and Evaporation of Droplets at Intermediate Reynolds Numbers. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 37(9), S. 1401–1409.

- Helenbrook, B. T. (2001). Numerical Studies of Droplet Deformation and Break-up. In: *14th Annual Conference on Liquid Atomization and Spray Systems, ILASS-Americas 2001*.
- Helenbrook, B. T. und C. F. Edwards (2002). Quasi-steady deformation and drag of uncontaminated liquid drops. *International Journal of Multiphase Flow*, Vol. 28, S. 1631–1657.
- Hinze, J. O. (1948a). Critical Speeds and Sizes of Liquid Globules. *Applied Scientific Research*, Vol. A1, S. 273–288.
- Hinze, J. O. (1948b). Forced Deformations of Viscous Liquid Globules. *Applied Scientific Research*, Vol. A1, S. 263–272.
- Hinze, J. O. (1955). Fundamentals of the Hydrodynamic Mechanism of Splitting in Dispersion Processes. *AIChE-Journal* 1(3), S. 289–295.
- Hinze, J. O. (1972). Turbulent Fluid and Particle Interaction. *Progress in Heat and Mass Transfer*, Vol. 6, S. 433–452.
- Hochschwender, E. (1919). Über des Zerblasen von Wassertropfen im Luftstrom und die Wasserfalltheorie der Gewitter. Dissertation, Universität Heidelberg.
- Hohmann, S. (1999). Strahlausbreitung und Tropfenverdunstung bei der dieselmotorischen Direkteinspritzung. Dissertation, Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen.
- Hsiang, L.-P. und G. M. Faeth (1992). Near-Limit Drop Deformation and Secondary Breakup. *International Journal of Multiphase Flow* 18(5), S. 635–652.
- Hsiang, L. P. und G. M. Faeth (1993). Drop Properties after Secondary Breakup. *International Journal of Multiphase Flow* 19(5), S. 721–735.
- Hsiang, L.-P. und G. M. Faeth (1995). Drop Deformation and Breakup Due to Shock Wave and Steady Disturbances. *International Journal of Multiphase Flow* 21(4), S. 545–560.
- Hwang, S. S., Z. Liu und R. D. Reitz (1996). Breakup Mechanisms and Drag Coefficients of High-Speed Vaporizing Liquid Drops. *Atomization and Sprays*, Vol. 6, S. 353–376.
- Ibrahim, E. A., H. Q. Yang und A. J. Przekwas (1993). Modeling of Spray Droplets Deformation and Breakup. *AIAA-Journal of Propulsion and Power*, Vol. 9, S. 651–654.
- Isshiki, N. (1959). Theoretical and Experimental Study on Atomization of Liquid Drop in High Speed Gas Stream. Technical Report 35, Transportation Technical Research Institute.
- Jeng, S.-M. und Z. Deng (1996). *Numerical Simulation of Deformed Droplet Dynamics and Evaporation*, Volume 2 - Spray Combustion Measurement and Model Simulation (Progress in astronautics and aeronautics; 171) of 1-563-47181-7, Chapter 12, S. 305–330. AIAA.

- Joseph, D. D. (2003). Viscous potential flow. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 479, S. 191–197.
- Joseph, D. D., J. Belanger und G. S. Beavers (1999). Breakup of a liquid drop suddenly exposed to a high-speed airstream. *International Journal of Multiphase Flow*, Vol. 25, S. 1263–1304.
- Kim, S. S. (1977). An Experimental Study of Droplet Response to Weak Shock Waves. Ph.D. thesis, Rutgers University, New Jersey.
- Kitscha, J. und G. Kocamustafaogullari (1989). Breakup Criteria for Fluid Particles. *International Journal of Multiphase Flow* 15(4), S. 573–588.
- Komabayasi, M., T. Gonda und K. Isono (1964). Life Time of Water Drops before Breaking and Size Distribution of Fragment Drops. *Journal of the Meteorological Society, Japan*, Vol. 42, S. 330–340.
- Körner, W. (1969). Die Zerstörung eines Flüssigkeitstropfens aufgrund von aerodynamischen Kräften. Dissertation, Universität Karlsruhe (TH), zugl. DFVLR-FB 70-05.
- Körner, W. (1972). Das Verhalten von Flüssigkeitstropfen in Gasstrahlen hoher Geschwindigkeiten. *Acta Mechanica*, Vol. 13, S. 87–115.
- Kowalewski, T. A. und D. Bruhn (1994). Nonlinear Oscillations of Viscous Droplets. In: I. P. W. . Akiyama, Kleiber (Hrsg.), *Proc. of Japanese-Centr. European Workshop on Adv. Comp. in Eng., Pultusk*, S. 63–68.
- Krzeczkowski, S. A. (1980). Measurements of Liquid Droplet Disintegration Mechanisms. *International Journal of Multiphase Flow*, Vol. 6, S. 227–239.
- Kürten, H., J. Raasch und H. Rumpf (1966). Beschleunigung eines kugelförmigen Feststoffteilchens im Strömungsfeld konstanter Geschwindigkeit. *Chemie-Ingenieur-Technik*, Vol. 38, S. 941–948.
- Lamb, H. (1881). On the Oscillations of a Viscous Spheroid. *Proceedings of the London Mathematical Society*, Vol. 13, S. 51–66.
- Lamb, H. (1932). *Hydrodynamics* (6. Auflage). Cambridge University Press.
- Landau, L. D. und E. M. Lifshitz (1987). *Fluid Mechanics* (2. Auflage). Pergamon Press.
- Lane, W. R. (1951). Shatter of Drops in Streams of Air. *Industry and Engineering Chemistry*, Vol. 43, S. 1312–1317.
- Le Clair, B. P., A. E. Hamielec und H. E. Pruppacher (1970). A Numerical Study of the Drag of a Sphere at Low and Intermediate Reynolds Numbers. *Journal of the Atmospheric Science*, Vol. 27, S. 308–315.
- Lee, C. H. und R. D. Reitz (2000). An Experimental Study of the Effect of Gas Density on the Distortion and Breakup Mechanism of Drops in High Speed Gas Stream. *International Journal of Multiphase Flow* 26(2), S. 229–244.

- Lee, S. (2000). A Numerical Study of the Unsteady Wake Behind a Sphere in a Uniform Flow at Moderate Reynolds Numbers. *Computers and Fluids*, Vol. 29, S. 639–667.
- Lefebvre, A. H. (1998). *Atomization and Sprays*. New York: Hemisphere Publications.
- Lenard, P. (1886). Ueber die Schwingungen fallender Tropfen. Dissertation, Universität Heidelberg.
- Lenard, P. (1904). Über Regen. *Meteorologische Zeitschrift*, Vol. 21, S. 249–260.
- Leppinen, D. M., M. Renksizbulut und R. J. Haywood (1996a). The Effects of Surfactants on Droplet Behaviour at Intermediate Reynolds Numbers - I. The Numerical Model and Steady-State Results. *Chemical Engineering Science* 51(3), S. 479–489.
- Leppinen, D. M., M. Renksizbulut und R. J. Haywood (1996b). The Effects of Surfactants on Droplet Behaviour at Intermediate Reynolds Numbers - II. Transient Deformation and Evaporation. *Chemical Engineering Science* 51(3), S. 491–501.
- Liu, A. B., D. Mather und R. D. Reitz (1993). Effects of Drop Drag and Breakup on Fuel Sprays. *SAE paper 930072*.
- Liu, Z. und R. D. Reitz (1997). An Analysis of the Distortion and Breakup Mechanisms of High Speed Liquid Droplets. *International Journal of Multiphase Flow* 23(4), S. 631–650.
- Magnaudet, J., M. Rivero und J. Fabre (1995). Accelerated Flows Past a Rigid Sphere or a Spherical Bubble. Part 1. Steady Straining Flow. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 284, S. 97–136.
- Maier, G. und S. Wittig (1999). Fuel Preparation and Emission Characteristics of a Pressure Loaded LPP Combustor. *AIAA-Paper 99-3774*.
- Masliyah, J. H. und N. Epstein (1970). Numerical Study of Steady Flow Past Spheroids. *Journal of Fluid Mechanics* 44(3), S. 493–512.
- Maxey, M. R. (1993). The Equation of Motion for a Small Rigid Sphere in a Nonuniform or Unsteady Flow. *ASME/FED, Gas-Solid Flows*, Vol. 166, S. 57–62.
- Mayer, W. O. H. (1993). Zur koaxialen Flüssigkeitszerstäubung im Hinblick auf die Treibstoffaufbereitung in Raketentriebwerken. DLR-FB 93-09.
- Meier, R., K. Merkle, G. Maier, N. Zarzalis, W. Leukel und S. Wittig (1999). Development of an Improved Prefilming Airblast Atomizer for Gas Turbine Application. In: *15th Annual Conference on Liquid Atomization and Spray Systems, ILASS-Europe '99, Toulouse, France*.
- Michaelides, E. E. (1997). Review-The Transient Equation of Motion for Particles, Bubbles, and Droplets. *ASME-Journal of Fluids Engineering*, Vol. 119, S. 233–247.
- Munk, M. M. (1924). Remarks on the Pressure Distribution Over the Surface of an Ellipsoid, Moving Translationally Through a Perfect Fluid. NACA-TN-196, <http://naca.larc.nasa.gov/reports/1924/naca-tn-196/>.

- Odar, F. und W. S. Hamilton (1964). Forces on a Sphere Accelerating in a Viscous Fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 18, S. 302–314.
- O'Donnell, B. J. und B. T. Helenbrook (2003). Drag on Ellipsoids at Finite Reynolds Number. In: *9th International Conference on Liquid Atomization and Spray Systems, ICLASS 2003, Sorrento, Italy*.
- O'Rourke, P. J. und A. A. Amsden (1987). The TAB Method for Numerical Calculation of Spray Droplet Breakup. *SAE 872089*.
- Paloposki, T. (1994). Drop Size Distributions in Liquid Sprays. Acta Polytechnica Scandinavica, Mechanical Engineering Series No. 114, Helsinki, ISBN 951-666-409-1.
- Papageorgakis, G. C. und D. Assanis (1996). A Spray Breakup Model for Low Injection Pressures. *International Communications in Heat and Mass Transfer* 23(1), S. 1–10.
- Pilch, M. und C. A. Erdman (1987). Use of Breakup Time Data and Velocity History Data to Predict the Maximum Size of Stable Fragments for Acceleration-Induced Breakup of a Liquid Drop. *International Journal of Multiphase Flow* 13(6), S. 741–757.
- Plateau, J. A. F. (1873). *Statique Expérimentale et Théorique des Liquides Soumis aux Seules Forces Moléculaire*. Gauthier-Villars, Paris.
- Press, W., S. A. Teucholsky, W. T. Vetterling und F. B. P. (1992). *Numerical Recipes in Fortran 77*. Cambridge University Press.
- Prevish, T. D. (1998). Secondary Droplet Breakup in Highly Turbulent Flowfields. Ph.D. thesis, Pennsylvania State University, USA.
- Pruppacher, H. R. und K. V. Beard (1970). A Wind Tunnel Investigation of the Internal Circulation of Water Drops Falling at Terminal Velocity in Air. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, Vol. 96, S. 247–256.
- Ranger, A. A. (1972). Shock Wave Propagation through a Two-Phase Medium. *Astronautica Acta*, Vol. 17, S. 675–683.
- Ranger, A. A. und J. A. Nicholls (1969). Aerodynamic Shattering of Liquid Drops. *AIAA-Journal*, Vol. 7, S. 285–290.
- Rayleigh, L. (1877). *The Theory of Sound*, Volume 1. Reprinted 1945 by Dover.
- Rayleigh, L. (1879). On the Capillary Phenomena of Jets. *Proc. R. Soc. Lond.*, Vol. 29, S. 71–97.
- Reeks, M. W. und S. McKee (1984). The Dispersive Effects of Basset History Forces on Particle Motion in Turbulent Flow. *Physics of Fluids*, Vol. 27, S. 1573–1582.
- Reichelt, L., A. Pawlowski und U. Renz (2002). Numerische Untersuchungen zum aerodynamischen Tropfenzerfall mit der Volume of Fluid (VOF)-Methode. In: *Spray 2002, Techniken der Fluidzerstäubung und Sprühvorgänge, TU Bergakademie Freiberg*.

- Reichelt, L. und U. Renz (2003). Experimental and numerical investigation of the aerodynamic break-up of liquid droplets at diesel engine conditions. In: *9th International Conference on Liquid Atomization and Spray Systems, ICLASS 2003, Sorrento, Italy*.
- Reinhart, A. (1964). Das Verhalten fallender Tropfen. *Chemie - Ingenieur - Technik*, Vol. 36, S. 740–746.
- Reitz, R. D. (1987). Modeling Atomization Processes in High-Pressure Vaporizing Sprays. *Atomisation and Spray Technology*, Vol. 3, S. 309–337.
- Richards, J. R. (1994). Fluid Mechanics of Liquid-Liquid Systems. Dissertation, University of Delaware.
- Rottenkolber, G. (2001). Ottomotoren im Kaltstart: Laseroptische Messverfahren zur Charakterisierung des Kraftstofftransports. Dissertation, Institut für Thermische Strömungsmaschinen, Universität Karlsruhe (TH).
- Rottenkolber, G., K. Dullenkopf und S. Wittig (1998). Two Phase PIV Measurements inside the Intake Port of an IC-Engine. In: *Proceedings of VSJ-SPIE98, December 6-9, 1998, Yokohama, Japan*.
- Rottenkolber, G., J. Gindele, J. Raposo, K. Dullenkopf, W. Hentschel, S. Wittig, U. Spischer und W. Merzkirch (1999). Spray Analysis of a Gasoline Direct Injector by Means of Simultaneous Two Phase PIV. In: *Proceedings of the 3rd International Workshop on PIV, Santa Barbara, CA, USA*.
- Samenfink, W. (1995). Sekundärzerfall von Tropfen. In: *Atomization and Sprays, Short Course*. Institut für Thermische Strömungsmaschinen, Universität Karlsruhe (TH).
- Samenfink, W., M. Hallmann, A. Elsäßer und S. Wittig (1994). Secondary Breakup of Liquid Droplets: Experimental Investigation for a Numerical Description. In: *ICLASS '94, Rouen, France*, S. 156–163.
- Schlichting, H. (1979). *Boundary-Layer Theory* (7. Auflage). McGraw-Hill.
- Schmehl, R. (1992). Optimierung von numerischen Algorithmen zur Beschreibung der Tropfenbewegung und -Verdunstung in Zweiphasenströmungen. Studienarbeit, Institut für Thermische Strömungsmaschinen, Universität Karlsruhe (TH).
- Schmehl, R., G. Maier und S. Wittig (2000). CFD Analysis of Fuel Atomization, Secondary Droplet Breakup and Spray Dispersion in the Premix Duct of a LPP Combustor. In: *8th International Conference on Liquid Atomization and Spray Systems, ICLASS 2000, Pasadena, USA*.
- Schmehl, R. und J. Steelant (2003). Flash Evaporation of Oxidizer Spray during Start-Up of an Upper-Stage Rocket Engine. *AIAA-Paper 2003-5075*.
- Schmelz, F. (2002). Tropfenzerfall in beschleunigten Gasströmungen. Dissertation, Universität Dortmund.

- Schmelz, F. und P. Walzel (1999). Breakup of Liquid Droplets in Accelerated Gas Flows. In: *15th Annual Conference on Liquid Atomization and Spray Systems, ILASS-Europe '99, Toulouse, France*.
- Schmelz, F. und P. Walzel (2003). Zerfall von Tropfen in beschleunigten Gasströmungen. *Chemie-Ingenieur-Technik*, Vol. 75, S. 200–207.
- Scriven, L. E. (1959). Dynamics of a fluid interface. *Chemical Engineering Science*, Vol. 12, S. 98–108.
- Simmons, H. C. (1977). The Correlation of Drop-Size Distributions in Fuel Nozzle Sprays; Part I: The Drop-Size/Volume-Fraction Distribution. *ASME–Journal of Engineering for Power*, Vol. 99, S. 309–314.
- Stein, W. (1973). Berechnung der Verdampfung von Flüssigkeit aus feuchten Produkten im Sprühturm. *Verfahrenstechnik* 7(9).
- Stone, H. A. und L. G. Leal (1990). The effects of surfactants on drop deformation and breakup. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 220, S. 161–186.
- Suzuki, T. und K. Mitachi (2000). Experimental Study on Aerodynamic Breakup of Liquid Droplets in Time Dependent Relative Velocity Fields. In: *8th International Conference on Liquid Atomization and Spray Systems, ICLASS 2000, Pasadena, USA*.
- Taylor, G. I. (1949). The Shape and Acceleration of a Drop in a High-Speed Air Stream. In: *The Scientific Papers of Sir G. I. Taylor*, S. 457–467. Cambridge University Press, Cambridge (1963).
- Temkin, S. und S. S. Kim (1980). Droplet Motion Induced by Weak Shock Waves. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 96, S. 133–157.
- Thomas, P. (1991). Experimentelle und theoretische Untersuchungen zum Folgeverhalten von Teilchen unter dem Einfluß großer Geschwindigkeitsgradienten in kompressibler Strömung. Dissertation, Universität Göttingen, zugl. DLR-FB 91-25.
- Tomboulides, A. G. und S. A. Orszag (2001). Numerical Investigation of Transitional and Weak Turbulent Flow Past a Sphere. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 416, S. 45–73.
- Tuckerman, L. B. (1926). Inertia Factors of Ellipsoids for Use in Airship Design. NACA-TR-210, <http://naca.larc.nasa.gov/reports/1926/naca-report-210/>.
- Vieille, B. (1998). Étude Expérimentale de l'Atomisation Secondaire de Gouttes d'Oxygène Liquide. Influence de la Pression. Thèse, Université d'Orléans, France.
- Voronin, V. V. (1986). Analysis of liquid droplet deformation in a gas flow. *Journal of Engineering Physics* 50(5), S. 743–747.
- Walzel, P. und C. Tropea (Hrsg.) (2004). *Atomization and Spray Processes*, Volume 7 of *Schriftenreihe Mechanische Verfahrenstechnik*. Shaker Verlag, Aachen.
- Weinmann, O. (1996). Untersuchung von Lösungsalgorithmen zur effizienten Berechnung brennkammertypischer Zweiphasenströmungen. Diplomarbeit, Institut für Thermische Strömungsmaschinen, Universität Karlsruhe (TH).

- Wert, K. L. (1995). A Rationally-Based Correlation of Mean Fragment Size for Drop Secondary Breakup. *International Journal of Multiphase Flow* 21(6), S. 1063–1071.
- Wiegand, H. (1987). Die Einwirkung eines ebenen Strömungsfeldes auf frei bewegliche Tropfen und ihren Widerstandsbeiwert im Reynoldszahlenbereich von 50 bis 2000. *Fortschrittberichte VDI*, Reihe 7, Nr. 120.
- Wiegand, H. (1999). Persönliche Mitteilungen.
- Wierzba, A. (1990). Deformation and Breakup of Liquid Drops in a Gas Stream at nearly Critical Weber Number. *Experiments in Fluids*, Vol. 9, S. 59–64.
- Wierzba, A. und K. Takayama (1988). Experimental Investigation of the Aerodynamic Breakup of Liquid Drops. *AIAA-Journal*, Vol. 26, S. 1329–1335.
- Willmann, M. (1999). Charakterisierung eines Airblastzerstäubers - Bestätigung numerischer Simulationen mit einem angepaßten Phasen-Doppler-Tropfenmeßverfahren. Dissertation, Institut für Thermische Strömungsmaschinen, Universität Karlsruhe (TH).
- Woo, S. (1971). Simultaneous Free and Forced Convection Around Submerged Cylinders and Spheres. Ph.D. thesis, McMaster University, Hamilton, Ontario.
- Zerf, G. (1998). Holographische Untersuchungen zum komplexen Widerstands-, Deformations- und Fragmentierungsverhalten von beschleunigten Tröpfchen in Strömungen. Dissertation, Universität der Bundeswehr, München.
- Zierep, J. (1984). Viscous potential flow. *Arch. Mech.* 36(1), S. 127–133.
- Zierep, J. (1991). *Ähnlichkeitsgesetze und Modellregeln der Strömungslehre* (3. Auflage). G. Braun, Karlsruhe.

# Lebenslauf

Name		Roland Schmehl
Geburtsdatum	09/07/1967	
Geburtsort		Phillipsburg / USA
Familienstand		Verheiratet
Schulbildung	1973-1977	Grundschule Renchen-Ulm
	1977-1986	Gymnasium Achern
	1986	Abitur
Wehrdienst	1986-1987	
Studium	1987-1994	Studium des Theoretischen Maschinenbau an der Universität Karlsruhe (TH) und an der Arizona State University in Tempe / USA
	1989	Diplom-Vorprüfung
	1994	Diplom-Hauptprüfung
Beruf	1995-1999	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Thermische Strömungsmaschinen der Universität Karlsruhe (TH)
	1999-2002	Selbstständige Tätigkeit in Los Angeles / USA
	2002-2004	Research Fellow am Forschungszentrum ESTEC der European Space Agency in Noordwijk / Niederlande
	seit 05/2004	Consultant Engineer im Bereich Raumfahrtantriebe am Forschungszentrum ESTEC