

Untersuchungen zu Lorentz-Verletzung, Gravitation und Photon-Propagation

Zur Erlangung des akademischen Grades eines
DOKTORS DER NATURWISSENSCHAFTEN
der Fakultät für Physik der
Universität Karlsruhe (TH)

vorgelegte

DISSERTATION

von

**Dipl.-Phys. Elisabeth Kant
aus Marburg**

Tag der mündlichen Prüfung: 30. Oktober 2009
Referent: Prof. Dr. F.R. Klinkhamer (Universität Karlsruhe)
Korreferent: Prof. Dr. A. Wipf (Universität Jena)

Untersuchungen zu Lorentz-Verletzung, Gravitation und Photon-Propagation

Elisabeth Kant

Oktober 2009

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	9
I. Lorentz-Verletzung und Gravitation	11
1. Lorentz-Verletzung und Noether-Strom	13
2. Energie-Impuls-Tensor als Quelle der Einstein-Gleichungen	15
3. Definition des Energie-Impuls-Tensors über die Metrik	17
4. Definition des Energie-Impuls-Tensor über das Vierbein	19
5. Lorentz-Verletzung und Bianchi-Identitäten	21
6. Zusammenfassung Teil I und Ausblick	25
II. Maxwell-Chern-Simons Theorie und Gravitation	27
7. Einführung	29
7.1. Konventionen	29
8. Maxwell-Chern-Simons-Theorie in Minkowski-Raumzeit	31
8.1. Dispersionsrelation	32
8.2. Kanonischer Energie-Impuls-Tensor	33
9. Kopplung an die Gravitation	35
9.1. ζ^μ im gekrümmten Raum	35
9.2. Vierbeinformalismus	35
10. Lösungen von Maxwell-Chern-Simons-Theorie und Gravitation	37
10.1. Schwarzschild-Lösung	37
10.2. Reissner-Nordström-Lösung	37

10.3. Diskussion	38
11. CPT-Anomalie für ein Robertson-Walker Universum	39
11.1. Einführung und Motivation	39
11.2. Felder mit Spin in gekrümmten Raumzeiten	40
11.3. Modell und Konventionen	41
11.4. Kompaktifizierung einer Raumrichtung	43
11.5. Effektive 3-dimensionale Wirkung	44
11.6. Quantisierung der freien Theorie	45
11.7. Wechselwirkende Theorie	46
11.8. Diskussion	47
12. Physikalische Effekte	49
12.1. Allgemeine Lösung des Dispersionsgesetzes	50
12.2. Rotverschiebung	50
12.3. Photon- und Muon-Lebensdauer	51
12.4. Zusammenfassung	52
13. Maxwell-Chern-Simons Theorie und Finsler-Geometrie	53
13.1. Finsler-Geometrie	53
13.2. Lorentz-verletzende Dispersionsrelationen und Finsler-Geometrie	54
13.3. Punkt-Teilchen-Mechanik und Geometrische Optik	55
13.4. Anwendung auf Maxwell-Chern-Simons Theorie	56
13.5. Methoden und Konventionen	57
13.6. Rein orthogonaler Fall	57
13.7. Entwicklung in m	59
13.8. Interpretation	60
14. Zusammenfassung Teil II	63
III. Modifizierte Maxwell-Theorie und Gravitation	65
15. Modifizierte Maxwell-Theorie	67
15.1. Einheiten und Konventionen	67
15.2. Modifizierte Maxwell-Theorie in flachen Raumzeiten	67
15.3. Kopplung an die Gravitation	70
15.4. Feldgleichungen	71
16. Propagation in gekrümmten Hintergründen	73
16.1. Photonischer Teil der Wirkung und effektive Metrik	73

16.2. Dispersionsrelation und geometrische Optik	74
17. Drei modifizierte Maxwell-Modelle im Schwarzschild-Hintergrund	77
17.1. Fall 1: Ricci-flache effektive Metrik mit modifiziertem Horizont . . .	77
17.2. Fall 2:	
Nicht Ricci-flache effektive Metrik ohne Horizontverschiebung . . .	79
17.3. Fall 3: Ricci-flache effektive Metrik ohne Horizontverschiebung . . .	80
18. Gravitative Rotverschiebung und Lichtbeugung	83
18.1. Horizonte (Fall 1)	83
18.2. Kein äußerer Photon Horizont für Fall 2 und 3	84
18.3. Rotverschiebung	86
18.4. Lichtbeugung an einer Schwarzschild-Masse	87
19. Lorentz-Verletzung und der verallgemeinerte zweite Hauptsatz der Thermodynamik	91
19.1. Der verallgemeinerte zweite Hauptsatz der Thermodynamik	92
19.1.1. Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik	92
19.1.2. Klassische Thermodynamik Schwarzer Löcher	92
19.1.3. Hawking-Strahlung und der verallgemeinerte zweite Hauptsatz der Thermodynamik	93
19.2. Grundidee des Compton-Streuprozesses	94
19.3. Modifizierte QED in gekrümmten Raumzeiten	94
19.4. Geodätische Bewegungen, Killingfelder und Erhaltungsgrößen . . .	96
19.5. Lemaître Koordinaten	98
19.6. Parametrisierung des Streuprozesses	99
19.7. Physikalische Randbedingungen	101
19.8. Wirkungsquerschnitt des modifizierten Compton-Streuprozesses . .	101
19.9. Beispiel	103
19.10. Diskussion	104
19.11. Allgemeine Verletzung des zweiten Hauptsatzes in Lorentz-verletzenden Theorien?	106
19.12. Diskussion	109
20. Lösungen in modifizierter Maxwell-Theorie mit Gravitation	111
20.1. Theorie und Konventionen	111
20.2. Noether Strom	112
20.3. Energie-Impuls Tensor aus Variation nach dem Vierbein	113
20.4. Energie-Impuls Tensor aus Variation der Metrik	116
20.5. Standard Reissner-Nordström Lösung	117

20.6. Rein elektrische Reissner-Nordström-artige Lösung	118
20.7. Reissner-Nordström-artige magnetische Monopol Lösung	120
20.8. Diskussion der Lösungen	121
21. Dynamische Modelle für modifizierte Maxwell-Theorie	123
21.1. Ghost-condensate	123
21.2. Dynamisches Modell für Fall 2	124
21.3. Dynamisches Modell für Fall 3?	126
22. Zusammenfassung Teil III	129
IV. Zusammenfassung	131
23. Zusammenfassung	133
A. Appendix: Kinematik des Compton-Prozesses	137
A.1. Lokales Inertialsystem	137
A.2. Masselose Elektronen	138
A.2.1. Ansatz	138
A.2.2. Physikalische Schranken an die Parameter	140
A.2.3. Bemerkung	144
A.2.4. Beispiele für erlaubte hochenergetische Prozesse	144
A.2.5. Diskussion der Lösungen für masselose Elektronen	146
A.2.6. Diskussion der Funktion Y	146
A.2.7. Diskussion der Funktion X_1	147
A.2.8. Diskussion der Funktion X_2	149
A.3. Massive Elektronen	151
A.3.1. Ansatz	151
A.3.2. Bedingungen	152
A.3.3. Diskussion der Lösungen für massive Elektronen	154
A.3.4. Diskussion von $X_{1,\text{massive}}$	155
A.3.5. Diskussion von X_2	155
A.3.6. Diskussion der Funktion Y_{massive}	157
Literatur	168
Abstract	169
Danksagung	173

Lebenslauf

175

Einleitung

Die vorliegende Dissertation beschäftigt sich mit Lorentz-Verletzung und Gravitation. Symmetrieprinzipien spielen in der Physik eine wichtige Rolle, die Lorentz-Symmetrie nimmt als grundlegende Symmetrie im Standardmodell der Elementarteilchenphysik einen wichtigen Platz ein. Es gibt aktuell keinerlei experimentelle Hinweise darauf, dass Lorentz-Symmetrie nicht exakt sein könnte. Verschiedene Theorien, die als Kandidaten einer fundamentalen Theorie diskutiert werden, sagen aber eine Verletzung von Lorentz-Symmetrie voraus. Lorentz-Verletzung kann beispielsweise im Niedrig-Energie-Limes von String-Theorie [1–3], Loop-Quantengravitation [4–6], Raumzeit-Schaum [7, 8], oder durch nichttriviale Raumzeit-Topologie [9, 10] auftreten. Auf diese Weise kann die Verletzung von Lorentz-Symmetrie als Fenster zu neuer Physik jenseits des Standardmodells verstanden werden.

Mit der „Standard-Modell-Extension“ [11] existiert eine umfassende, renormierbare, eichinvariante, effektive Beschreibung aller in diesem Rahmen möglichen Erweiterungen des Standardmodells, die im Limes kleiner Lorentz-verletzender Parameter wieder das Standardmodell der Elementarteilchenphysik liefert.

Einen konsistenten Rahmen zu finden, der auch die Einstein-Hilbert Wirkung und eine (minimale) gravitative Kopplung des Standardmodells umfasst und um Lorentz-verletzende Terme erweitert, stellt dagegen ein ungelöstes physikalisches Problem dar [12]. Das zentrale Problem ist die Frage nach dem Quellterm der Einstein-Gleichungen. Explizit Lorentz-verletzende Terme in der Wirkung brechen die Diffeomorphismus-Invarianz und führen zu geometrischen Unverträglichkeiten zwischen dem Einstein-Tensor und dem Energie-Impuls-Tensor. Die Reaktion der Raumzeit auf explizit Lorentz-verletzende Probleme ist somit unbekannt.

Noch weitere Aspekte lassen vermuten, dass die Kopplung von Lorentz-verletzenden Theorien an die Gravitation zu Inkonsistenzen mit fundamentalen physikalischen Ergebnissen führen kann. Verschiedene Publikationen [13–15] äußern die Vermutung, dass innerhalb Lorentz-verletzender Theorien eine Verletzung des verallgemeinerten zweiten Hauptsatz der Thermodynamik möglich sein könnte.

Es ist bereits bekannt, dass Lorentz-verletzende Theorien existieren, in denen z.B. Unitariät oder Kausalität verletzt sind [16, 17], was sicherlich als Ausschlusskriterium für eine physikalisch sinnvolle Theorie zu werten ist. Mit der Kopplung Lorentz-verletzender Theorien an die Gravitation treten möglicherweise neue Inkonsistenzen auf, diese Arbeit untersucht die Kopplung von Lorentz-verletzenden Theorien an die Gravitation unter verschiedenen Aspekten auf solche Inkonsistenzen.

Die Arbeit gliedert sich in vier Teile. Teil I diskutiert explizite Lorentz-Verletzung im Minkowski-Raum, insbesondere im Hinblick auf den Energie-Impuls-Tensor und Möglichkeiten der Kopplung an die Gravitation. Teil II und III beschäftigen sich jeweils exemplarisch mit der Kopplung einer Lorentz-verletzenden photonischen Theorie an die Gravitation.

Teil II diskutiert die CPT- und Lorentz-verletzende Maxwell-Chern-Simons-Theorie. Mit der CPT-Anomalie in Kapitel 11 wird ein Mechanismus diskutiert, unter dem ein solch Lorentz-verletzender Term auftreten kann, der auf natürliche Weise stark unterdrückt wäre. In Kapitel 13 wird eine geometrische Interpretation des Propagationsverhaltens von Lichtstrahlen in Maxwell-Chern-Simons-Theorie im Rahmen von Finsler-Geometrie diskutiert.

Teil III untersucht die modifizierte Maxwell-Theorie. Besonderer Schwerpunkt wird hier auf die Diskussion gelegt, ob es möglich ist, ein Perpetuum Mobile zweiter Art in Lorentz-verletzenden Theorien zu konstruieren.

Teil IV fasst die zentralen Ergebnisse dieser Dissertation zusammen. Teilresultate dieser Dissertation wurden bereits veröffentlicht, bzw. zur Veröffentlichung eingereicht [18–20].

Teil I.

Lorentz-Verletzung und Gravitation

1. Lorentz-Verletzung und Noether-Strom

Diese Arbeit beschäftigt sich mit Lorentz-Verletzung und Gravitation. Die Kopplung von explizit Lorentz-verletzenden Theorien an die Gravitation stellt ein ungelöstes physikalisches Problem dar [12]. Das vorliegende einführende Kapitel der Dissertation diskutiert diese Problematik. Einen sehr umfassenden Ansatz, um Lorentz-Verletzung zu parameterisieren, ist die sogenannte Standard-Model-Extension (SME) [11], die eine mögliche, oberflächlich renormierbare Erweiterung des Standardmodells darstellt. Die Lorentz-Verletzung in der SME ist explizit: Es werden konstante Hintergrund-Tensor-Felder per Hand zur Standard-Modell-Wirkung dazugeschrieben. Diese Hintergrund-Felder sind nicht dynamisch und erfüllen keine eigenen Bewegungsgleichungen. In der SME sind sie konstant gewählt, so dass Raumzeittranslationen als Symmetrie erhalten bleiben. Damit ist über das Noether-Theorem [21, 22] eine physikalisch sinnvolle Definition des (kanonischen) Energie-Impuls-Tensors möglich,

$$T^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu})} \partial_{\nu} \phi - \mathcal{L} \delta^{\mu}_{\nu}. \quad (1.1)$$

\mathcal{L} bezeichnet die Lagrangedichte einer translationsinvarianten Theorie, ϕ steht symbolisch für alle Felder dieser Theorie, die ggf. enthaltene Summe über mehrere Felder oder innere Symmetrieindizes ist unterdrückt.

Der so definierte Noether-Strom (der kanonische Energie-Impuls-Tensor) ist im Allgemeinen nicht symmetrisch,

$$T^{\mu\nu} \neq T^{\nu\mu}, \quad (1.2)$$

kann aber in Lorentz-invarianten Theorien stets symmetrisiert werden [23]. Diesem Symmetrisierungsprozess wohnt jedoch eine gewisse Mehrdeutigkeit inne, die darauf zurück zu führen ist, dass die Addition bestimmter Divergenzterme die physikalische Bedeutung eines erhaltenen Stromes nicht ändert, insbesondere bleiben die erhaltenen Ladungen gleich. In [24] wird diskutiert, dass diese Mehrdeutigkeit vermieden werden kann und man auf natürliche Weise einen symmetrischen Energie-Impuls-Tensor findet, wenn man zusätzlich zu den Feldgleichungen

auch die Bianchi-Identitäten berücksichtigt und die Invarianz der Wirkung unter allgemeinen Lorentztransformationen und nicht nur unter Translationen fordert. Dieser symmetrische Energie-Impuls-Tensor ist dann mit dem Strom $M^{\mu\nu\sigma}$, der zu den homogenen Lorentz-Transformationen gehört, auf folgende Weise verknüpft,

$$M^{\mu\nu\sigma} = T^{\mu\nu} x^\sigma - T^{\mu\sigma} x^\nu . \quad (1.3)$$

In einer Lorentz-verletzenden Theorie dagegen, lässt sich der kanonische Energie-Impuls-Tensor (in aller Regel) nicht symmetrisieren, auch wenn Translationsinvarianz als Symmetrie weiterhin erhalten ist. Man erkennt das, wenn man sich vor Augen führt, dass aus einem erhaltenen und symmetrischen Energie-Impuls-Tensor immer ein weiterer Strom konstruiert werden kann,

$$M^{\mu\nu\sigma} = T^{\mu\nu} x^\sigma - T^{\mu\sigma} x^\nu , \quad (1.4)$$

der kovariant erhalten ist,

$$\partial_\mu M^{\mu\nu\sigma} = 0 , \quad (1.5)$$

Wie in [24] diskutiert, ist $M^{\mu\nu\sigma}$ der zu den homogenen Lorentztransformationen korrespondierende Strom. Damit wäre aber bereits wieder die gesamte Poincarè-Gruppe Symmetriegruppe der Theorie und die Theorie somit vollständig Lorentz-invariant.

Ein symmetrischer und erhaltener kanonischer Energie-Impuls-Tensor impliziert also bereits Lorentz-Symmetrie [25], das bedeutet, dass es unmöglich ist, in einer explizit Lorentz-verletzenden Theorie den Energie-Impuls-Tensor zu symmetrisieren.

2. Energie-Impuls-Tensor als Quelle der Einstein-Gleichungen

In der Allgemeinen Relativitätstheorie [26, 27] trifft man auf eine neue physikalische Interpretation des Energie-Impuls-Tensors, auf der rechten Seite der Einstein-Gleichungen (in üblicher Schreibweise)

$$G^{\mu\nu} = 8\pi T^{\mu\nu} \quad (2.1)$$

tritt der Energie-Impuls-Tensor als Quellterm auf und ist dadurch für die Krümmung des Raumes verantwortlich. Auf der linken Seite der Einstein-Gleichungen steht der Einstein-Tensor. Er ist über den Riemann-Tensor $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ definiert, der die Nichtkommutativität der kovarianten Ableitungen misst,

$$R_{\mu\nu\rho}{}^{\sigma}\omega_{\sigma} = D_{\mu}D_{\nu}\omega_{\sigma} - D_{\nu}D_{\mu}\omega_{\sigma} \quad (2.2)$$

für beliebige duale Vektorfelder ω_{σ} . Es gilt

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - 1/2Rg_{\mu\nu}, \quad (2.3)$$

mit Hilfe des Ricci-Tensors

$$R_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\rho\nu}{}^{\rho} \quad (2.4)$$

und des Ricci-Skalars

$$R \equiv R_{\mu}{}^{\mu}. \quad (2.5)$$

Aus den geometrischen Eigenschaften des Riemann-Tensors, insbesondere aus Kontraktion der zweiten Bianchi-Identität,

$$D_{[\mu}R_{\nu\rho]\sigma}{}^{\tau} = 0, \quad (2.6)$$

folgen zwei wichtige, rein geometrische Eigenschaften des Einstein-Tensors, er ist symmetrisch

$$G_{\mu\nu} = G_{\nu\mu} \quad (2.7a)$$

2. Energie-Impuls-Tensor als Quelle der Einstein-Gleichungen

und kovariant erhalten,

$$D_\mu G^{\mu\nu} = 0. \tag{2.7b}$$

Man erhält die Einstein-Gleichungen aus dem Variationsprinzip, der Energie-Impuls-Tensor ist durch die Variation des Materieanteils der Wirkung nach der Metrik gegeben, der Einstein-Tensor durch die Variation der Einstein-Hilbert-Wirkung. Die Einstein-Gleichung erzwingt damit die rein geometrischen Eigenschaften (2.7) des Einstein-Tensors auch für den Energie-Impuls-Tensor.

3. Definition des Energie-Impuls-Tensors über die Metrik

Der Quellterm der Einstein-Gleichungen lässt sich über die Variation des metrischen Tensors definieren. Die Wirkung der betrachteten Theorie sei gegeben durch

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_g + \mathcal{S}_M, \quad (3.1)$$

wobei

$$\mathcal{S}_g = \int d^4x \sqrt{g} \frac{1}{16\pi} R \quad (3.2)$$

den rein gravitativen Einstein-Hilbert-Term und \mathcal{S}_M den Materieanteil der Wirkung bezeichne,

$$-\frac{1}{2} T_{\mu\nu, g} \equiv \frac{\delta \mathcal{S}_M}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (3.3)$$

oder

$$\delta \mathcal{S}_M = - \int d^4x \frac{1}{2} \sqrt{g} T_{\mu\nu, g} \delta g^{\mu\nu}. \quad (3.4)$$

Im rein metrischen Formalismus wird die Symmetrie des Energie-Impuls-Tensors gefordert, indem man in der Definition (3.4) nur symmetrische Variationen $\delta g^{\mu\nu} = \delta g^{\nu\mu}$ zulässt [28, 29]. Unter Variationen der Metrik ergibt sich

$$\delta \mathcal{S}_g = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{g} G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (3.5)$$

Mit dieser Definition ergeben sich die Einstein-Gleichungen zu

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (3.6)$$

In einer Diffeomorphismus-invarianten Theorie garantiert die Invarianz des Materieanteils der Wirkung, dass der durch (3.4) definierte Energie-Impuls-Tensor

3. Definition des Energie-Impuls-Tensors über die Metrik

kovariant erhalten ist, vgl. [26, 30]. Dazu betrachte man eine infinitesimale Koordinatentransformation

$$x^\mu \rightarrow x^{\mu'} = x^\mu + \epsilon^\mu . \quad (3.7)$$

Die Variation der Metrik ist durch die Lie-Ableitung gegeben,

$$\delta g^{\mu\nu} = D^\mu \epsilon^\nu + D^\nu \epsilon^\mu = (\delta^\mu_\lambda g^{\nu\alpha} + \delta^\nu_\lambda g^{\mu\alpha}) \partial_\alpha \epsilon^\lambda + g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \epsilon^\lambda \partial_\lambda g_{\rho\sigma} . \quad (3.8)$$

Die induzierte Variation im Materieanteil der Wirkung ist nun

$$0 = - \int d^4x \frac{1}{2} \sqrt{g} T_{\mu\nu, g} \delta g^{\mu\nu} + \dots, \quad (3.9)$$

wobei die nicht ausgeschriebenen Terme, unter Berücksichtigung der Feldgleichungen für die Materiefelder, nicht zur Variation beitragen. Einsetzen von (3.8) in (3.9) und partielle Integration liefert nun

$$0 = \int d^4x (\partial_\alpha (\sqrt{g} 1/2 (T^{\rho\alpha} + T^{\alpha\rho}) g_{\rho\lambda}) - 1/2 (T^{\rho\alpha} + T^{\alpha\rho}) \partial_\lambda g_{\rho\alpha}) \epsilon^\lambda , \quad (3.10a)$$

was impliziert

$$0 = D_\mu (1/2 (T^{\mu\nu} + T^{\nu\mu}) , \quad (3.10b)$$

also einen Erhaltungssatz für den symmetrischen Anteil des Energie-Impuls-Tensors. Im metrischen Formalismus kann man also nur Aussagen über den symmetrischen Anteil des Energie-Impuls Tensor treffen, beziehungsweise man definiert den Energie-Impuls-Tensor als den symmetrischen Anteil der Variation der Materie-Wirkung nach der Metrik. Dieser so definierte Energie-Impuls-Tensor ist automatisch, aufgrund der Diffeomorphismus-Invarianz der Theorie und der Gültigkeit der Feldgleichungen, kovariant erhalten.

4. Definition des Energie-Impuls-Tensor über das Vierbein

Der Vierbein-Formalismus [28, 30] bietet insbesondere die Möglichkeit, Spinorfelder im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie, oder allgemeiner bei Vorliegen von Raumkrümmung, zu behandeln. Ein Vierbein $e_\mu^a(x)$ ist ein orthogonales und normiertes System von vier kovarianten Vektorfeldern,

$$e_\mu^a(x) e_\nu^b(x) g^{\mu\nu}(x) = \eta^{ab}, \quad (4.1)$$

die Metrik ist gegeben durch

$$g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab}. \quad (4.2)$$

Griechische Indizes bezeichnen Tensoren unter allgemeinen Koordinatentransformationen, lateinische Indizes Tensoren unter lokalen Lorentztransformationen. Da der Vierbein-Formalismus zwischen allgemeinen Koordinatentransformationen und lokalen Lorentztransformationen trennt, ist er möglicherweise geeignet, um explizit Lorentz-verletzende Theorien an die Gravitation anzukoppeln [12]. Im Vierbein-Formalismus lässt sich der Energie-Impuls Tensor wie folgt definieren:

$$\delta \mathcal{S}_M = \int d^4x \sqrt{g} T_{\text{vierbein}}^{\mu\nu} e_{\nu a}(x) \delta e_\mu^a. \quad (4.3)$$

Mit dieser Definition ergeben sich die Einstein-Gleichungen wieder zu (3.6). In einer Diffeomorphismus-invarianten Theorie kann man nun zeigen, dass aus der Invarianz unter lokalen Lorentz-Transformationen der Energie-Impuls-Tensor (4.3) symmetrisch ist: Unter einer infinitesimalen, lokalen Lorentztransformation

$$\Lambda^a_b(x) = \delta^a_b + \omega^a_b(x), \quad (4.4)$$

mit antisymmetrischem

$$\omega_{ab}(x) = -\omega_{ba}(x), \quad (4.5)$$

4. Definition des Energie-Impuls-Tensor über das Vierbein

transformiert sich das Vierbein wie folgt

$$\delta e_\mu^a = -\omega^a{}_b e_\mu^b. \quad (4.6)$$

Unter Berücksichtigung der Feldgleichung ist die induzierte Variation im Materie-
teil der Wirkung

$$0 = \delta \mathcal{S}_M = \int d^4x \sqrt{g} T_{\text{vierbein}}^{\mu\nu} e_{\nu a} \delta e_\mu^a = - \int d^4x \sqrt{g} T_{\text{vierbein}}^{\mu\nu} e_\nu^a \omega_{ab} e_\mu^b. \quad (4.7)$$

Mit der Antisymmetrie von ω_{ab} folgt unmittelbar die Symmetrie des Energie-Impuls-Tensors im Vierbein-Formalismus für Lorentz-invariante Theorien. Die kovariante Erhaltung im Vierbein-Formalismus ergibt sich analog wie im metrischen Formalismus.

Der Zusammenhang zum Noether-Strom (1.1) ist weder im Vierbein noch im metrischen Formalismus eindeutig herzustellen. Bereits in Standard-Maxwell-Theorie ist der Noether-Strom weder symmetrisch noch eichinvariant. In [31] wurde gezeigt, dass sich der Noether-Strom im Allgemeinen nicht zu einem erhaltenen Tensor in gekrümmten Raumzeiten verallgemeinern lässt.

5. Lorentz-Verletzung und Bianchi-Identitäten

Die obigen Ableitungen greifen auf das Transformationsverhalten der Materiewirkung unter bestimmten Transformationen zurück und setzen außerdem die Gültigkeit der Feldgleichungen voraus. Betrachtet man nun explizit Lorentz-verletzende Theorien, die Hintergrundfelder enthalten, die von außen vorgegeben werden und keine eigenen Feldgleichungen erfüllen, so ändert sich das Transformationsverhalten der Materiewirkung. Der durch Variation nach der Wirkung oder dem Vierbein definierte Energie-Impuls-Tensor ist, anders als ein Energie-Impuls-Tensor einer Diffeomorphismus-invarianten Theorie, weder notwendigerweise symmetrisch noch kovariant erhalten. Möchte man eine Einstein-artige Gleichung in einer Gravitations-Theorie für Lorentz-verletzende Wirkungen behandeln, so stellt einen das vor die Frage, wie damit umzugehen ist. Wie oben bereits erwähnt, erzwingt ja die Einstein-Gleichungen die (rein geometrischen) Eigenschaften des Einstein-Tensors auch für den Energie-Impuls-Tensor der Materiefelder.

Wir betrachten im Folgenden Wirkungen der Form (vgl.[12])

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_g + \mathcal{S}_M, \quad (5.1)$$

wobei der Materieteil (zusätzlich zu einem Standard-Lorentz-invarianten Teil) der Wirkung einen Anteil

$$\mathcal{S}_M \supset \int d^4x \sqrt{g} k_x J^x \quad (5.2)$$

enthält. Der explizit Lorentz-verletzende Koeffizient k_x transformiert dabei in kovarianter Weise in einer gegebenen Darstellung der Lorentz-Gruppe, während der Strom J^x von den Feldern, deren kovarianten Ableitungen sowie dem Vierbein abhängen kann. Eine Variation der Materiewirkung führt jetzt, unter der Berücksichtigung der Feldgleichungen, auf folgenden Ausdruck:

$$0 = \delta \mathcal{S}_M = \int d^4x \sqrt{g} T_{\text{vierbein}}^{\mu\nu} e_{\nu a} \delta e_{\mu}^a + \sqrt{g} J^x \delta k_x. \quad (5.3)$$

Anders als in [12] wird hier der Spin-Zusammenhang nicht als dynamisches Feld betrachtet und die Torsion damit zu Null gesetzt. (In [12] wurde gezeigt, dass die zusätzliche Einführung von Torsion nicht in der Lage ist, die aufgezeigten Schwierigkeiten zu umgehen. Die hier diskutierten Lösungsansätze gehen daher in andere Richtungen.) Betrachtet man nun die, von einer infinitesimalen Lorentz-Transformation induzierte Variation, so ergibt sich

$$0 = \delta \mathcal{S}_M = - \int d^4x \sqrt{g} T_{\text{vierbein}}^{\mu\nu} e_\nu^a \omega_{ab} e_\mu^b - \sqrt{g} J^x \delta k_x . \quad (5.4)$$

Mit dem Transformationsverhalten des Koeffizienten k_x unter Lorentz-Transformationen

$$\delta k_x = -\frac{1}{2} \omega^{ab} \left(X_{[ab]} \right)_x^y k_y \quad (5.5)$$

findet man folgende Symmetriebedingung

$$T_{\text{vierbein}}^{\mu\nu} - T_{\text{vierbein}}^{\nu\mu} = e^{\mu a} e^{\nu b} k_x \left(X_{[ab]} \right)_y^x J^y . \quad (5.6)$$

Der in die Einstein-Gleichungen eingehende Energie-Impuls-Tensor ist nur unter der Bedingung

$$k_x \left(X_{[ab]} \right)_y^x J^y = 0 \quad (5.7)$$

symmetrisch. Ähnliches gilt für die kovariante Erhaltung. Betrachtet man an Stelle von Lorentz-Transformationen allgemeine Koordinatentransformationen, so findet man einen verallgemeinerten erhaltenen Strom, der, im Allgemeinen, nicht dem Energie-Impuls-Tensor entspricht. Unter infinitesimalen allgemeinen Koordinatentransformationen,

$$x^\mu \rightarrow x^{\mu'} = x^\mu + \epsilon^\mu , \quad (5.8)$$

transformieren sich Vierbein und Hintergrundfelder gemäß den Lie-Ableitungen [30]

$$\delta e_\mu^a = e_\nu^a \partial_\mu \epsilon^\nu + \epsilon^\nu \partial_\nu e_\mu^a \quad (5.9a)$$

und

$$\delta k_x = \epsilon^\mu \partial_\mu k_x . \quad (5.9b)$$

Für solch eine induzierte Variation in der Wirkung findet man

$$0 = \int d^4x \left(-\partial_\mu \sqrt{g} T^\mu{}_\rho + \sqrt{g} T^\mu{}_a \partial_\rho e_\mu^a + \sqrt{g} J^x \partial_\rho k_x \right) \epsilon^\rho , \quad (5.10)$$

was impliziert

$$D_\mu T^\mu_\nu = J^x D_\mu k_x . \quad (5.11)$$

Damit die Standard-Einstein-Gleichungen erfüllt werden können, muss also gelten

$$0 = J^x D_\mu k_x , \quad (5.12)$$

denn es gilt aufgrund der Bianchi-Identität

$$D_\mu G^\mu_\nu = 0 . \quad (5.13)$$

6. Zusammenfassung Teil I und Ausblick

Die beiden Gleichungen (5.6) und (5.11) stehen in möglichem Widerspruch zu (2.7) und zeigen auf, dass es nicht auf übliche Weise möglich ist, explizit Lorentz-verletzende Theorien an die Gravitation zu koppeln. Es sind verschiedene Lösungsansätze denkbar.

Man kann beispielsweise versuchen, im Rahmen einer erweiterten Riemannschen Geometrie, einen verallgemeinerten Ansatz für die Einstein-Gleichungen zu finden. Eine solche, natürliche Verallgemeinerung der Riemannschen Geometrie ist die Finsler-Geometrie. Eine Finsler-Metrik hängt nicht nur von den Koordinaten, sondern auch von den Tangentialvektoren ab und eignet sich daher beispielsweise dafür, anisotrope Propagationseffekte zu beschreiben [32].

Zu Beginn dieser Doktorarbeit wurde daher versucht, eine Verallgemeinerung der Einstein-Gleichung zu finden, die Finsler-Metriken als Lösungen zulässt. In Kapitel 13 wird die Finsler-Geometrie kurz vorgestellt. Es gibt jedoch bisher keine dynamische Theorie von Finsler-Gravitation und eine solche Realisierung ist auch im Rahmen dieser Dissertation nicht möglich gewesen. Es hat sich aber herausgestellt, dass Finsler-Geometrie in gewissen Rahmen geeignet ist zur phänomenologischen Beschreibung von Maxwell-Chern-Simons Theorie. Auch darauf wird in Kapitel 13 eingegangen.

Eine zweite Möglichkeit besteht darin, die Symmetrie und kovariante Erhaltung des Energie-Impuls-Tensors als Konsistenzbedingungen an die externen Hintergrundfelder aufzufassen. Im Verlaufe der Arbeit werden Beispiele dafür gegeben, dass das unter Umständen nicht-trivial möglich ist.

Wird Lorentz-Invarianz spontan gebrochen, so sind diese Konsistenzbedingungen automatisch erfüllt. Auch hierfür werden im zweiten Teil der Arbeit Beispiele gegeben.

Diese Dissertation untersucht im Wesentlichen zwei spezielle, explizit Lorentz-verletzende Theorien und deren Kopplung an die Gravitation, sowohl im Hinblick auf die konsistente Möglichkeit der Kopplung an die Gravitation als auch auf interessante phänomenologische Effekte. In Teil II werden verschiedene Aspekte der

6. Zusammenfassung Teil I und Ausblick

Maxwell-Chern-Simons-Theorie diskutiert, in Teil III die modifizierte Maxwell-Theorie untersucht.

Teil II.

Maxwell-Chern-Simons Theorie
und Gravitation

7. Einführung

Dieses Kapitel beschäftigt sich unter verschiedenen Aspekten mit Maxwell-Chern-Simons Theorie (MCS-Theorie), als einem Beispiel für Lorentz-verletzende Theorien, und Gravitation. Zunächst wird MCS-Theorie im flachen Raum eingeführt (Kapitel 8), auf die Nichtsymmetrisierbarkeit des Energie-Impuls-Tensors eingegangen und die Kopplung von Maxwell-Chern-Simons-Theorie an die Gravitation diskutiert (Kapitel 9).

In Kapitel 10 werden explizite Beispiele für Konfigurationen des Hintergrundfeldes, die nicht-triviale Lösungen der Einstein-Gleichung zulassen, angegeben.

Dann wird in Kapitel 11 motiviert, wie ein, auf natürliche Weise kleiner, Maxwell-Chern-Simons Term in einem topologisch nicht-trivialen Universum anomal auftreten könnte. In den folgenden Kapiteln werden physikalische Effekte diskutiert, die durch einen solchen Term auftreten können. Kapitel 12 diskutiert die Photonlebensdauer und Propagationseffekte und in Kapitel 13 werden solche Propagationseffekte mit Hilfe von Finsler-Metriken beschrieben und interpretiert.

7.1. Konventionen

Es werden natürliche Einheiten benutzt, $\hbar = c = G = 1$, falls nicht explizit anders angegeben. Die Metrik habe Signatur -2 und ϵ^{0123} sei 1 , $\eta_{\mu\nu}$ bezeichne die Minkowski-Metrik, $g_{\mu\nu}$ die Metrik im gekrümmten Raum. Weltindizes werden durch griechische Buchstaben gekennzeichnet, Lorentz-Indizes durch lateinische Buchstaben. Die Raumzeit wird stets vierdimensional angenommen. Ein großes D kennzeichnet kovariante Ableitungen, partielle Ableitungen werden durch ∂ gekennzeichnet. Im Sinne der sprachlichen Einfachheit werden die Eichfelder der modifizierten Theorie weiterhin als Licht oder Photonen bezeichnet.

8. Maxwell-Chern-Simons-Theorie in Minkowski-Raumzeit

Maxwell-Chern-Simons-Theorie ist eine, um einen bilinearen Term in den Eichfeldern erweiterte Theorie der Elektrodynamik,

$$\mathcal{L}_{\text{MCS}} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}m\zeta_\mu A_\nu \tilde{F}^{\mu\nu}. \quad (8.1)$$

Hierbei ist $A_\mu(x)$ das abelsche Eichfeld und $F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)$ die Maxwellsche Feldstärke. Der duale Feldstärketensor $\tilde{F}^{\mu\nu}$ ist definiert durch:

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}. \quad (8.2)$$

Der erste Term in (8.1) ist der Standard-Maxwell-Term, der zweite ist der sogenannte Chern-Simons-artige Term [16], charakterisiert durch ζ^μ , einen konstanten, normierten, rein raumartigen, dimensionslosen „Vierervektor“

$$\zeta^\mu = (0, \vec{\zeta}), \quad |\vec{\zeta}| = 1 \quad (8.3)$$

und einen reellen Massenparameter m .

Die Maxwellgleichungen werden durch den Zusatzterm modifiziert. Die quellenfreien Feldgleichungen lauten nun [33]

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = m\zeta_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} \quad (8.4)$$

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0. \quad (8.5)$$

Lorentz-Symmetrie und CPT sind durch den Zusatzterm gebrochen, verbleibende Symmetrien des Modells sind,

- Raumzeit-Translationen,
- Lorentz-Transformationen unter denen ζ^μ invariant bleibt,
- Ladungskonjugation (C) und Parität (P),

- Eichinvarianz.

Unter Eichtransformationen $A_\mu(x) \mapsto A_\mu(x) + \partial_\mu \chi(x)$ bleibt die Lagrangedichte nicht invariant, ändert sich aber nur um eine totale Ableitung

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{L} &= -\frac{m}{2} \zeta_\mu \partial_\nu \chi \tilde{F}^{\mu\nu} \\ &= -\partial_\nu \left(\frac{m}{2} \zeta_\mu \chi \tilde{F}^{\mu\nu} \right) + \frac{m}{2} \chi \zeta_\mu \partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} + \frac{m}{2} \chi \tilde{F}^{\mu\nu} \partial_\nu \zeta_\mu \\ &= -\partial_\nu \left(\frac{m}{2} \zeta_\mu \chi \tilde{F}^{\mu\nu} \right), \end{aligned} \quad (8.6)$$

so dass die Wirkung des Modells

$$S_{\text{MCS}} = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2} m \zeta_\mu A_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} \right) \quad (8.7)$$

invariant bleibt, wenn Oberflächeneffekte vernachlässigt werden. In der obigen Rechnung wurden die Feldgleichung (8.5) und die Konstanz von ζ^μ ausgenutzt. Für die Eichinvarianz der Theorie ist es ausreichend, nur die Geschlossenheit von ζ^μ

$$\partial_\mu \zeta_\nu - \partial_\nu \zeta_\mu = 0 \quad (8.8)$$

zu fordern, die Theorie ist dann aber im Allgemeinen nicht mehr translationsinvariant.

Die Lagrangedichte (8.1) ist ein einfacher Spezialfall der allgemeinen CPT- und Lorentz-Symmetrie verletzenden Standardmodellerweiterung [11, 34].

8.1. Dispersionsrelation

Der Zusatzterm in der Lagrangedichte (8.1) hat den Effekt, dass die Dispersionsrelation der Photonen verändert wird [16, 33], sie lautet dann:

$$(k_\mu k^\mu)^2 + m^2 k_\mu k^\mu \zeta^\nu \zeta_\nu - m^2 (\zeta_\mu k^\mu)^2 = 0. \quad (8.9)$$

k^μ bezeichnet den Viererimpuls der Photonen. Nach ω aufgelöst findet man

$$\omega_\pm(\vec{k}) = \sqrt{\omega_{\pm\parallel}(k_\parallel)^2 + \vec{k}_\perp^2} \quad (8.10)$$

mit

$$\omega_{\pm\parallel}(k_\parallel) \equiv \sqrt{k_\parallel^2 + \frac{m^2}{4}} \pm \frac{m}{2}. \quad (8.11)$$

\vec{k}_\parallel und \vec{k}_\perp bezeichnen dabei die Zerlegung des Impulses in seine Komponenten bezüglich $\vec{\zeta}$:

$$\begin{aligned} k_\parallel &:= \vec{k} \cdot \vec{\zeta}, & \vec{k}_\parallel &:= (\vec{k} \cdot \vec{\zeta}) \vec{\zeta}, \\ k_\perp &:= |\vec{k} - k_\parallel \vec{\zeta}|, & \vec{k}_\perp &:= \vec{k} - k_\parallel \vec{\zeta}. \end{aligned} \quad (8.12)$$

Die Photonen sind also aufgespalten in zwei Moden mit unterschiedlicher Energie-Impuls-Beziehung. Sie werden mit \oplus und \ominus bezeichnet, nach dem jeweiligen Vorzeichen in (8.11).

8.2. Kanonischer Energie-Impuls-Tensor

Die Theorie (8.1) ist translationsinvariant, der aus dem kanonischen Formalismus erhaltene Energie-Impuls-Tensor

$$T^{ab} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_a A_c)} \partial^b A_c - \eta^{ab} \mathcal{L} \quad (8.13)$$

ist folglich eine Erhaltungsgröße [22]

$$\partial_a T^{ab} = 0. \quad (8.14)$$

Dieser Energie-Impuls-Tensor lautet explizit:

$$\begin{aligned} T^{ab} &= -F^{ac} F_c^b + \frac{1}{4} \eta^{ab} F_{e\beta} F^{e\beta} - m A^b \zeta_c \tilde{F}^{ca} \\ &\quad - \frac{1}{2} m \zeta_e A_f \epsilon^{efac} \partial^b A_c + \frac{1}{4} \eta^{ab} m \zeta_e A_f \epsilon^{efcd} F_{cd}. \end{aligned} \quad (8.15)$$

Äquivalent zu diesem Ausdruck ist die folgende, bis auf totale Ableitungen manifest eichinvariante, Form des Energie-Impuls Tensors [35]

$$\Theta^{ab} = -F^{ac} F_c^b + \frac{1}{4} F^{dc} F_{dc} \eta^{ab} + \frac{m}{2} \zeta^b A_f \tilde{F}^{af}. \quad (8.16)$$

Wie in Kapitel 1 diskutiert, ist der kanonische Energie-Impuls-Tensor in einer Lorentz-verletzenden Theorie in der Regel nicht symmetrisierbar. Für das Beispiel Maxwell-Chern-Simons-Theorie ist die Rotationsinvarianz gebrochen, wie sich z.B. direkt an der Dispersionsrelation ablesen lässt, in die die Richtung des

Hintergrund-Feldes ζ_a direkt eingeht. Direkte physikalische Konsequenz sind beispielsweise doppelbrechende Effekte im Vakuum und optische Aktivität des Vakuums. Ein symmetrischer und erhaltener Energie-Impuls-Tensor Θ^{ab} würde aber Rotationsinvarianz der Theorie implizieren,

$$M^{abc} \equiv \Theta^{ab} x^c - \Theta^{ac} x^b. \quad (8.17)$$

$M^{\mu\nu\sigma}$ kann als kovariante Verallgemeinerung der Drehimpulsdichte des Eichfeldes interpretiert werden, [36]. Folglich ist der Energie-Impuls-Tensor (8.15) nicht symmetrisierbar.

9. Kopplung an die Gravitation

In diesem Kapitel wird versucht, die Maxwell-Chern-Simons-Theorie (8.7) an die Gravitation anzukoppeln. Es treten die erwarteten, in Kapitel I allgemein diskutierten Unverträglichkeiten auf.

9.1. ζ^μ im gekrümmten Raum

Eine kovariante Formulierung der Bedingung $\partial_\mu \zeta_\nu = 0$ ist nicht ohne Weiteres möglich, da die Existenz eines kovariant konstanten Vektors bereits sehr starke Einschränkungen an die Krümmung fordert, [37]. Um die Eichinvarianz der Theorie zu erhalten, wird im Folgenden, in Anlehnung an [33], gefordert

$$\partial_\lambda (\zeta_a e_\kappa^a) - \partial_\kappa (\zeta_a e_\lambda^a) = D_\lambda \zeta_\kappa - D_\kappa \zeta_\lambda = 0. \quad (9.1)$$

9.2. Vierbeinformalismus

Die betrachtete Theorie ist

$$S^{\text{vierbein}} = \int d^4x e \left(\frac{R}{2\kappa} - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{m}{4e} \zeta_a A_\lambda F_{\mu\nu} \epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} e_\kappa^a \right). \quad (9.2)$$

e_a^κ ist das Vierbein, R ist der Ricci-Skalar, ($R \equiv R^{\mu\nu} g_{\mu\nu}$), $e \equiv \sqrt{-\det g_{\mu\nu}}$ und $1/2\kappa \equiv 1/16\pi G$. $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ bezeichnet die Levi-Civita-Tensordichte. Der Energie-Impuls-Tensor ergibt sich zu

$$\delta S_M = \int d^4x e T_\mu^a \delta e^a_\mu, \quad (9.3)$$

wobei gilt

$$T_{\mu\nu} = T_\mu^a e_{\nu a}. \quad (9.4)$$

und ist explizit gegeben durch

$$T_{\mu\nu}^{\text{vierbein}} = -F_{\mu\sigma}F_{\nu}^{\sigma} + \frac{1}{4}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}g_{\mu\nu} + \frac{m}{2}\zeta_a A_{\beta}\tilde{F}_{\mu}^{\beta}e_{\nu}^a. \quad (9.5)$$

Hier wird während einer Variation das extern vorgegebene Feld ζ_a konstant gehalten.

Die Feldgleichungen lauten

$$e(g^{v\kappa}R - 2R^{v\kappa})e_{\kappa a} = T_a^v \quad (9.6a)$$

und

$$D_{\mu}F^{\mu\nu} = m(e_{\kappa}^a\zeta_a)\tilde{F}^{\kappa\nu}. \quad (9.6b)$$

D_{μ} bezeichnet die kovariante Ableitung

$$D_{\mu}A_{\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \Gamma_{\nu\mu}^{\kappa}A_{\kappa} \quad (9.7)$$

und $\tilde{F}^{\kappa\nu}$ ist der duale Feldstärketensor im gekrümmten Raum [38]

$$\tilde{F}^{\kappa\nu} = e^{-1}\frac{1}{2}\epsilon^{\kappa\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}. \quad (9.8)$$

Wie in Teil I diskutiert, ist der Energie-Impuls-Tensor (9.5) im Allgemeinen weder symmetrisch noch kovariant erhalten. Es ist daher a priori unklar, ob in der durch (9.2) definierten Theorie überhaupt Lösungen existieren können. Das folgende Kapitel zeigt, dass es innerhalb der Theorie (9.2) Lösungen gibt.

10. Lösungen von Maxwell-Chern-Simons-Theorie und Gravitation

Wie in Teil I diskutiert, besteht eine Möglichkeit, die Unverträglichkeiten zwischen den Bianchi-Identitäten und explizit Lorentz-verletzenden Theorien zu umgehen, darin, die Bedingungen (5.7) und (5.11) als zusätzliche Konsistenzbedingungen an die externen Lorentz-verletzenden Koeffizienten zu fordern. Das folgende Unterkapitel zeigt, dass es in Maxwell-Chern-Simons-Theorie möglich, diese Koeffizienten so zu wählen, dass Reissner-Nordström-artige Lösungen existieren.

10.1. Schwarzschild-Lösung

Die Schwarzschild-Lösung ist eine Vakuum-Lösung. Da in der Wirkung (9.2) das externe Hintergrund-Vektorfeld $\zeta_a(x)$ nicht direkt an die Gravitation koppelt, und der rein gravitative Term in der Wirkung einfach der Einstein-Hilbert-Term ist, ist die Schwarzschild-Lösung, wie alle anderen Vakuum-Lösungen auch, weiterhin eine Lösung dieser Theorien für beliebige Hintergrundfeld-Konfigurationen.

10.2. Reissner-Nordström-Lösung

Die Reissner-Nordström-Lösung beschreibt ein geladenes, statisches Schwarzes Loch. Die Metrik ist gegeben durch [26],

$$ds^2 = (1 - 2M/r + 1/q^2) dt^2 - \frac{1}{1 - 2M/r + 1/q^2} dr^2 - r^2 d(\varphi)^2 \sin^2(\theta) - r^2 d(\theta)^2 . \quad (10.1)$$

q lässt sich als die totale Ladung des Schwarzen Loches interpretieren und das elektromagnetische Feld lautet

$$A_\mu = (q/r, 0, 0, 0) . \quad (10.2)$$

Für die Feldkonfiguration (10.2) gilt

$$\tilde{F}_{\mu\nu} A^\mu = 0. \quad (10.3)$$

Damit fällt der Zusatzterm im Energie-Impuls-Tensor weg und die Standard-Reissner-Nordström-Lösung ist somit eine Lösung der modifizierten Einstein-Gleichung (9.6a). Wählt man nun das Hintergrundfeld ζ so, dass gilt

$$\tilde{F}_{\mu\nu} \zeta^\mu = 0 , \quad (10.4)$$

so ist die Maxwell-Chern-Simons-Gleichung ebenfalls erfüllt. Eine mögliche Wahl, die die Eichinvarianz nicht bricht, ist z. B.

$$\zeta_\mu = D_\mu t \quad (10.5)$$

Diese Lösung ist ein Beispiel, das die Konsistenzbedingungen (5.7) und (5.11) erfüllt.

10.3. Diskussion

Die Reissner-Nordström-Lösung (10.1) ist einfach die Standard-Reissner-Nordström Lösung, die durch bestimmte Hintergrundfeld-Konfigurationen nicht modifiziert wird, ebenso wie die Schwarzschild-Lösung. Damit sind die Bianchi-Identitäten automatisch erfüllt und die geometrischen Inkonsistenzen in diesem Spezialfall beseitigt. Physikalisch sind daher solche Lösungen interessant, als dass sie zeigen, dass prinzipiell Lösungen (mit nicht verschwindendem Photonfeld) existieren, die sowohl die modifizierte Einstein-Gleichung und die Maxwell-Chern-Simons-Gleichung erfüllen.

11. CPT-Anomalie für ein Robertson-Walker Universum

11.1. Einführung und Motivation

Unter einer Anomalie [39, 40] versteht man den Sachverhalt, dass Symmetrien der Wirkung und damit der klassischen Feldgleichungen auf Quantenniveau gebrochen sind. Der Ursprung der Anomalien liegt im Maß des Pfadintegrals [41], welches unter bestimmten Symmetrien nicht mehr invariant ist. Ein prominente Manifestation einer Anomalie ist die anomale Lebensdauer des Pions [42].

In [9] wurde gezeigt, dass ein Maxwell-Chern-Simons-Term unter bestimmten Bedingungen anomal auftreten kann. Wesentlich dafür ist, dass die betrachtete Quantenfeldtheorie auf einer topologisch nicht-trivialen Mannigfaltigkeit definiert ist. Typischerweise ist der Massenparameter des MCS-Terms dabei invers proportional zur Länge der kompaktifizierten Raumdimension.

In diesem Kapitel soll die Rechnung aus [9] für ein expandierendes, räumlich flaches Friedman-Robertson-Walker-Universum mit einer kompaktifizierten Raumrichtung durchgeführt werden. Die Vermutung ist, dass ein unter solchen Bedingungen anomal auftretender Maxwell-Chern-Simons-Term auf natürliche Weise stark unterdrückt wäre, da in eine expandierenden Robertson-Walker-Universum der Umfang der kompaktifizierten Raumrichtung mit der Zeit anwachsen würde. Diese Vermutung soll im Folgenden durch konkrete Rechnung bestätigt werden. Es ist möglich ein Ergebnis (in erster Ordnung Störungstheorie) zu erhalten, ohne dass weitere Näherungen (etwa aufgrund der nicht-Minkowski-Struktur) notwendig sind.

11.2. Felder mit Spin in gekrümmten Raumzeiten

Möchte man Felder mit Spin in gekrümmten Raumzeiten beschreiben, so stellt sich das Problem, wie man Spinoren behandelt. Tensoren (oder Tensordichten) unter allgemeinen Koordinatentransformationen verhalten sich unter der Subgruppe der Lorentz-Transformationen wieder wie Tensoren (oder Tensordichten). Es existieren jedoch keine Darstellungen von $GL(4)$, die sich unter der Subgruppe der Lorentz-Transformationen wie Spinoren verhalten [30]. Um Felder mit beliebigem Spin in gekrümmten Raumzeiten beschreiben zu können, führt man daher den Vierbein-Formalismus ein [30, 43]. Die Grundidee dabei ist, an jedem Raumzeitpunkt X lokale Normalkoordinaten y_X^a zu errichten. Die Metrik in diesen Koordinaten am Punkt X ist dann einfach die flache Metrik η_{ab} . In einem allgemeinen Koordinatensystem ergibt sich die Metrik dann als

$$g_{\mu\nu}(x) = e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab} , \quad (11.1)$$

mit dem Vierbein

$$e_\mu^a = \frac{\partial y_X^a}{\partial x^\mu} . \quad (11.2)$$

Unter allgemeinen Koordinatentransformationen transformiert sich das Vierbein wie ein kovarianter Vektor

$$e_\mu^a \rightarrow \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} e_\nu^a . \quad (11.3)$$

Durch Kontraktion mit Vierbein werden aus Tensorfeldern unter allgemeinen Koordinatentransformationen Skalare bezüglich allgemeinen Koordinatentransformationen und Tensoren unter lokalen Lorentz-Transformationen.

Gravitative Effekte für Felder mit beliebigem definierten Transformationsverhalten unter Lorentz-Transformationen können dann auf folgende Weise implementiert werden. Man erhält den Materie-Anteil der Wirkung, indem man in der Minkowski-Wirkung alle Ableitungen durch die „kovariante“ Ableitung

$$\nabla_a = e^{\mu}_a (\partial_\mu + \Omega_\mu) \quad (11.4)$$

mit dem Zusammenhang

$$\Omega_\mu = \frac{1}{2} \Sigma^{ab} e^{\nu}_a (\partial_\mu e_{\nu b}) \quad (11.5)$$

ersetzt. Hierbei werden mit Σ_{ab} die Generatoren der Darstellung der Lorentz-Gruppe bezeichnet, unter der die Felder jeweils transformieren. Es gilt

$$[\Sigma_{ab}, \Sigma_{ba}] = \eta_{cb} \Sigma_{ad} - \eta_{ac} \Sigma_{bd} + \eta_{db} \Sigma_{ca} - \eta_{da} \Sigma_{cb} , \quad (11.6)$$

mit antisymmetrischem Σ_{ab} . Hier und im Folgenden stehen lateinische Indizes immer für lokale Lorentz-Indizes und griechische Indizes für Raumzeit-Indizes.

11.3. Modell und Konventionen

In [9] wurde gezeigt, dass für bestimmte Klassen von chiralen Eichtheorien, die über topologisch nicht-trivialen Mannigfaltigkeiten definiert sind, ein CPT-verletzender Term in der effektiven Eichfeld-Wirkung anomal auftritt. Die in [9] durchgeführte Rechnung soll in diesem Kapitel für ein räumlich flaches, expandierendes Robertson-Walker Universum mit einer kompaktifizierten Dimension durchgeführt werden.

Die Motivation für diese Rechnung ist die, dass der auftretende CPT-verletzende Term für Minkowski-Universen antiproportional zum Umfang der kompaktifizierten Raumrichtung ist. Die Vermutung ist dann, dass in einem expandierenden Universum der auftretende anomale Term auf natürliche Weise heutzutage stark unterdrückt wäre. Diese Vermutung soll durch die folgende Rechnung quantifiziert werden.

Wir betrachten ein räumlich flaches, expandierendes Robertson-Walker Universum. Das Linienelement lässt sich schreiben als

$$ds^2 = d\tau^2 - a^2(\tau) (dx^2 + dy^2 + dz^2) , \quad (11.7)$$

aber für die folgenden Rechnungen wird es sich als bequemer erweisen, die konforme Zeit [26]

$$t = \int \frac{d\tau}{a(\tau)} \quad (11.8)$$

zu benutzen. In diesen Koordinaten schreibt sich das Linienelement als

$$ds^2 = a^2(t) (dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2) . \quad (11.9)$$

Eine bequeme Wahl für das Vierbein ist dann

$$e_\mu^a = a(t)\delta_\mu^a; \quad e_a^\mu = \frac{1}{a(t)}\delta_a^\mu . \quad (11.10)$$

Lateinische Indizes beziehen sich auf lokale Lorentz-Koordinaten und nehmen die Werte 0, 1, 2, 3 an, während sich griechische Indizes auf allgemeine Koordinaten

beziehen und die Werte t, x, y, z annehmen können. Analog wie in [9] wird eine Lagrangedichte für ein chirales Spinorfeld Ψ untersucht, das an ein nichtabelsches Eichfeld A_μ koppelt. Speziell werden, ebenfalls wie in [9], chirale Yang-Mills Theorie mit der Eichgruppe $SO(10)$ und linkshändige Weyl-Fermionen in der komplexen Repräsentation $R_L = 16$ gewählt. Die Wahl ist einerseits motiviert durch die Anomalie-Freiheit der $SO(10)$ chiralen Eichtheorie [44] und andererseits durch die Möglichkeit, das Standardmodell in eine $SO(10)$ -Eichtheorie einzubetten. Im Prinzip lässt sich die Rechnung auch für eine abelsche Theorie durchführen. Aufgrund der chiralen Anomalie treten in einer abelschen Theorie stets links- und rechtshändige Fermionen auf, die beide ausintegriert werden müssten. Aufgrund der Vorzeichenunsicherheit des für beide Klassen von Fermionen auftretenden MCS-Terms (siehe unten) könnte sich die CPT-Anomalie in einer solchen Theorie gerade aufheben. Das ist der wesentliche Grund, warum es geschickt ist, eine anomalfreie Eichgruppe zu wählen.

Die Lagrangedichte im Minkowski-Raum ist durch

$$\mathcal{L}_{\text{Minkowski}} = \frac{1}{2} \Psi^\dagger \sigma_-^a \delta_a^\mu (\partial_\mu + A_\mu) \Psi \quad (11.11)$$

gegeben, mit den σ_\pm^a Matrizen

$$\sigma_\pm^a = \left(\left(\begin{array}{cc} \mp i & 0 \\ 0 & \mp i \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 0 & i \\ i & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} i & 0 \\ 0 & -i \end{array} \right) \right). \quad (11.12)$$

Das Eichfeld A_μ ist gegeben durch

$$A_\mu(x) = g A_\mu^a(x) T^a, \quad (11.13)$$

wobei g die Kopplungskonstante bezeichnet und die T^a die 45 antihermiteschen Generatoren der $SO(10)$ in der gewählten Repräsentation bezeichnen. Die Normierung ist $\text{tr}(T^a T^b) = -\frac{1}{2} \delta^{ab}$. Das linkshändige Fermion-Feld $\Psi_{L\alpha i}$ trägt den Spinor-Index $\alpha = 1, 2$ und einen internen Symmetrie-Index $i = 1, \dots, 16$. Spinor- und interne Indizes werden im Folgenden aus Lesbarkeitsgründen unterdrückt.

Nach dem Prinzip minimaler Kopplung [43] wird die partielle Ableitung durch die kovariante Ableitung für Spinoren ersetzt

$$\nabla_\mu = \partial_\mu + \Omega_\mu, \quad (11.14)$$

mit dem Spin-Zusammenhang

$$\Omega_\mu \equiv \frac{1}{2} \Sigma^{ab} e_a^\nu(x) \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} e_{\nu b}(x) \right) \quad (11.15)$$

und Σ_{ab} definiert durch

$$\Sigma_{ab} \equiv \left(\sigma_+^a \sigma_-^b - \sigma_-^a \sigma_+^b \right). \quad (11.16)$$

Außerdem muss, wieder nach dem minimalen Kopplungsprinzip, ein Faktor $e(x) \equiv \det e_\mu^a = a^4(t)$ zur Lagrangedichte (11.11) hinzugefügt werden und die σ werden durch die Ersetzung

$$\delta_a^\mu \sigma_-^a \rightarrow e_a^\mu \sigma_-^a \quad (11.17)$$

raumzeitabhängig. Die Lagrangedichte ergibt sich damit zu

$$\mathcal{L}(x) = e(x) \frac{1}{2} \Psi^\dagger \sigma_-^a e_a^\mu (\partial_\mu + \Omega_\mu + A_\mu) \Psi \quad (11.18)$$

für linkshändige Spinoren Ψ . Die Lagrangedichte ist bereits symmetrisch und muss nicht weiter symmetrisiert werden [45]. Für die spezielle Wahl des Vierbeins (11.10) verschwindet der Spin-Zusammenhang Ω_μ , da die partiellen Ableitungen $\partial_\mu e_\nu^a$ proportional zum Vierbein e_ν^a sind. Die Kontraktion $\Sigma^{ab} e_\nu^a(x) (\partial_\mu e_{\nu b}(x))$ verschwindet dann aufgrund der Antisymmetrie von Σ^{ab} . Damit vereinfacht sich die Lagrangedichte (11.18) zu

$$\mathcal{L}(x) = a^3(t) \frac{1}{2} \Psi^\dagger \sigma_-^a \delta_a^\mu (\partial_\mu + A_\mu) \Psi. \quad (11.19)$$

11.4. Kompaktifizierung einer Raumrichtung

Analog zur Rechnung in [9] wird nun eine raumartige Richtung kompaktifiziert. Die z -Koordinate läuft damit nur noch von 0 bis zu einer Konstante L_0 und periodische Randbedingungen werden gefordert, $\Psi(t, x, y, 0) = \Psi(t, x, y, L_0)$.

Physikalisch wird durch dieses Setting ein zylinderförmiges Universum mit *zeitabhängigem* Umfang $L(t)$ beschrieben

$$L(t) = \int_0^{L_0} \sqrt{(g_{zz})} dz = \int_0^{L_0} a(t) dz = a(t) L_0. \quad (11.20)$$

In Anlehnung an die Rechnung in [9] werden nun, zur Bestätigung des Auftretens des CPT-ungeraden Terms in der effektiven Wirkung, spezielle Eichpotentiale gewählt, die unabhängig von der z -Koordinate sind und deren z -Komponente verschwindet,

$$A_\mu(t, x, y, z) = \tilde{A}_\mu(t, x, y), \quad A_z(t, x, y, z) = 0. \quad (11.21)$$

Die Fermionfelder lassen sich nach der Kompaktifizierung in Fouriermoden entwickeln,

$$\begin{aligned}\Psi(t, x, y, z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n z / L_0} \xi_n(t, x, y) \\ \Psi^\dagger(t, x, y, z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i n z / L_0} \xi_n^\dagger(t, x, y) .\end{aligned}\tag{11.22}$$

11.5. Effektive 3-dimensionale Wirkung

Für die speziellen Eichpotentiale (11.21) lässt sich nun die Intergration über die z-Achse in der Weyl-Wirkung

$$I_{\text{Weyl}} = \int d^4x a^3(t) \frac{1}{2} \Psi^\dagger \sigma_-^\mu \delta_a^\mu (\partial_\mu + A_\mu) \Psi\tag{11.23}$$

explizit ausführen. Die Weyl-Wirkung reduziert sich dann auf

$$I_{\text{Weyl}} = L_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int dt dx dy a^3(t) \xi_n^\dagger \left(\sigma_-^0 (\partial_t + A_t) + \sigma_-^1 (\partial_x + A_x) + \sigma_-^2 (\partial_y + A_y) + \sigma_-^3 \frac{2\pi i n}{L_0} \right) \xi_n .\tag{11.24}$$

Wie für die CPT-Anomalie im Minkowski-Raum erwartet man auch hier den CPT-verletzenden Term aus dem Beitrag des „masselosen“ ($n = 0$) Terms. Dieser Term lässt sich umschreiben in Form von dreidimensionalen Gamma-Matrizen:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} .\tag{11.26}$$

Die effektiv dreidimensionale Wirkung lautet dann

$$I_{\text{Weyl}}^{n=0} = \int dt dx dy a^3(t) \bar{\chi} \gamma^a \delta_a^\mu (i\partial_\mu + A_\mu) \chi .\tag{11.27}$$

Mit χ wird die reskalierte masselose Fermionmode $\chi \equiv \zeta_0 \sqrt{L_0}$ bezeichnet.

Anders als im flachen Fall handelt es sich hier nicht um die Standard-Wirkung für einen dreidimensionalen Spinor, da diese noch mit einem zusätzlichen Faktor $a(t)$ multipliziert wird. Im Folgenden wird zunächst die freie Theorie quantisiert.

11.6. Quantisierung der freien Theorie

Im Folgenden wird zunächst die freie Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = a^3(t) \bar{\chi} (i\gamma^a \delta_a^\mu \partial_\mu) \chi \quad (11.28)$$

betrachtet. Die Quantisierung der Theorie folgt dem Vorgehen in [46]. Die klassischen Feldgleichungen, erhalten aus dem Wirkungsprinzip für die Lagrange-Dichte (11.28), lauten

$$\begin{aligned} a^3(t) i\gamma^a \delta_a^\mu \partial_\mu \chi &= 0, \\ \partial_\mu (a^3(t) \bar{\chi} \gamma^a \delta_a^\mu) &= 0. \end{aligned} \quad (11.29)$$

Aus dem Pfadintegral

$$W[K, \bar{K}, 0] = \int \mathcal{D}\chi \mathcal{D}\bar{\chi} \exp \left(i \int d^3x a^3(t_x) \bar{\chi}(x) i\gamma^a \delta_a^\mu \partial_\mu \chi(x) - \bar{K}(x) \chi(x) - \bar{\chi}(x) K(x) \right) \quad (11.30)$$

der freien Theorie mit Quellen erhält man den freien Fermion-Propagator. Eine formale Lösung dieses Funktional-Integrals findet man, nachdem ein Shift durchgeführt wird,

$$\begin{aligned} \chi(x) &\rightarrow \chi(x) + \Delta\chi(x) = \chi(x) + \int d^3y S_F(x-y) K(y) \\ \bar{\chi}(x) &\rightarrow \bar{\chi}(x) + \Delta\bar{\chi}(x) = \bar{\chi}(x) + \int d^3z \bar{K}(z) S_F(z-x) \end{aligned} \quad (11.31)$$

wobei $S_F(x-y)$ durch das Inverse des modifizierten Dirac-Operators gegeben ist,

$$\begin{aligned} a^3(t_x) i\gamma^a \delta_a^\mu \partial_\mu^x S_F(x-y) &= \delta(x-y) \\ &\Leftrightarrow \\ i\gamma^a \delta_a^\mu \partial_\mu^x S_F(x-y) &= \frac{1}{a^3(t_y)} \delta(x-y). \end{aligned} \quad (11.32)$$

Der Propagator lässt sich schreiben als:

$$S_F(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^3 a^3(t_y)} \int d^3k e^{-ik(x-y)} \frac{\gamma^a \delta_a^\mu k_\mu}{k^2}. \quad (11.33)$$

Damit findet man für das Pfadintegral (11.30)

$$W[K, \bar{K}, 0] = \exp \left(-i \int d^3x d^3z \bar{K}(z) S_F(z-x) K(x) \right) W[0, 0, 0], \quad (11.34)$$

mit

$$W[0,0,0] = \int \mathcal{D}\chi \mathcal{D}\bar{\chi} \exp \left(i \int d^3x a^3(t_x) \bar{\chi}(x) i\gamma^a \delta_a^\mu \partial_\mu \chi(x) \right). \quad (11.35)$$

11.7. Wechselwirkende Theorie

Im Folgenden wird die volle wechselwirkende Lagrange-Dichte betrachtet, das vollständige Pfadintegral lautet damit

$$W[K, \bar{K}, A] = \exp \left(-ig \int d^3x a^3(t_x) [-i\delta_K(x)] [\gamma^a \delta_a^\mu A_\mu(x)] [i\delta_{\bar{K}}(x)] \right) W[K, \bar{K}, 0]. \quad (11.36)$$

Analog zum Verfahren im Minkowski-Raum erhält man die störungstheoretische Entwicklung durch die Ersetzung

$$\bar{\chi}(x) \gamma^a \delta_a^\mu A_\mu(x) \chi(x) \rightarrow [-i\delta_K] [\gamma^a \delta_a^\mu A_\mu] [i\delta_{\bar{K}}] \quad (11.37)$$

mit der Abkürzung

$$\delta_K \equiv \delta / \delta K \quad \text{und} \quad \delta_{\bar{K}} \equiv \delta / \delta \bar{K}. \quad (11.38)$$

Die interessierenden anomalen Beiträge erwartet man aus den Termen zweiter und dritter Ordnung, wenn man die effektive Wirkung

$$-i \ln [W[K, \bar{K}, A]] \quad (11.39)$$

in der Kopplungskonstanten g entwickelt. Die relevanten Terme der Entwicklung sind

$$\begin{aligned} & -i \ln [W[K, \bar{K}, A]] = \dots \\ & + \frac{1}{2} ig^2 \int d^3x d^3y a^3(t_x) a^3(t_y) iS_F(x-y) [-i\gamma^a \delta_a^\mu A_\mu(y)] iS_F(y-x) [-i\gamma^b \delta_b^\nu A_\nu(x)] \\ & - ig^3 \int d^3x d^3y d^3z a^3(t_x) a^3(t_y) a^3(t_z) \\ & iS_F(x-y) [-i\gamma^a \delta_a^\mu A_\mu(y)] iS_F(y-z) [-i\gamma^b \delta_b^\nu A_\nu(z)] iS_F(z-x) [i\gamma^c \delta_c^\rho A_\rho(x)] + \dots \end{aligned} \quad (11.40)$$

Man beachte, dass zusammen mit jedem internen Fermionpropagator, jedesmal ein $a^3(t)$ auftaucht, das heißt, dass die zu lösenden Integrale exakt denen im Minkowski-Raum entsprechen.

Der interessierende anomale Beitrag zur effektiven Wirkung ist daher [9]

$$\Gamma_{\text{anom}}[A, e] \supseteq \pm \frac{\pi}{8\pi^2} \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} \left(A_\mu \partial_\nu A_\rho - \frac{2}{3} A_\mu A_\nu A_\rho \right). \quad (11.41)$$

Formal lässt sich der obige Ausdruck (11.41) wieder als vierdimensionales Integral schreiben,

$$\Gamma^{n=0}[A, e] = \pm \frac{\pi}{8\pi^2 L_0} \int d^4x \epsilon^{z\mu\nu\rho} \text{tr} \left(A_\mu \partial_\nu A_\rho - \frac{2}{3} A_\mu A_\nu A_\rho \right). \quad (11.42)$$

Mit $\epsilon^{z\mu\nu\rho}$ wird die total-antisymmetrische Tensor-Dichte mit Gewicht +1 bezeichnet, gegeben durch

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1, & \text{für gerade Permutationen von } 0,1,2,3 \\ -1, & \text{für ungerade Permutationen von } 0,1,2,3 \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (11.43)$$

wobei die z-Komponente festgehalten wird.

Der anomale Beitrag (11.42) lässt sich auch durch einen dualen Vektor $\xi_\sigma = (0,0,0,1)$ ausdrücken,

$$\Gamma^{n=0}[A, e] = \pm \frac{\pi}{8\pi^2 L_0} \int d^4x \xi_\sigma \epsilon^{\sigma\mu\nu\rho} \text{tr} \left(A_\mu \partial_\nu A_\rho - \frac{2}{3} A_\mu A_\nu A_\rho \right). \quad (11.44)$$

Der Vektor ξ^σ ist dabei noch nicht normiert, $\xi_\sigma \xi^\sigma = g^{zz} = -1/a^2(t)$. Mit Hilfe eines normierten Vektors $\zeta_\sigma = a(t)\xi_\sigma$, lässt sich das Ergebnis für die CPT-anomalen Terme folgendermaßen ausdrücken

$$\Gamma^{n=0}[A, e] = \pm \frac{\pi}{8\pi^2} \int d^4x \frac{1}{a(t)L_0} \zeta_\sigma \epsilon^{\sigma\mu\nu\rho} \text{tr} \left(A_\mu \partial_\nu A_\rho - \frac{2}{3} A_\mu A_\nu A_\rho \right). \quad (11.45)$$

Die Vorzeichenunsicherheit hier und in Gleichung (11.41) ist auf das Vorzeichen der Pauli-Villar Regulatormassen zurück zu führen.

11.8. Diskussion

Der Faktor vor dem Chern-Simons in Gleichung (11.45), der die Skala der physikalischen Effekte bemisst, ist, in der betrachteten Ordnung Störungstheorie, exakt durch $1/L(t)$ gegeben. Dieses Ergebnis wurde in führender Ordnung erwartet, und diese Erwartung hat natürlich die obige Rechnung motiviert, aber es ist

vielleicht überraschend, dass sich die Anomalie im gekrümmten Hintergrund eines Robertson-Walker-Universums perturbativ exakt berechnen ließ. Der tiefere Grund für den relativ simplen freien Propagator (11.33) im Hintergrund (11.9) ist die konforme Invarianz der Lagrangedichte für chirale Fermionen, zusammen mit dem konform flachen Hintergrund.

Die Rechnung ist, wie auch in [9], nur für spezielle Eichfeld-Konfigurationen exakt ausgeführt. Es wurde nicht gezeigt, dass der CPT-verletzende anomale Term für beliebige Eichfeldkonfigurationen durch (11.45) gegeben ist. Auftreten und Struktur des anomalen CPT-verletzenden Terms ist aber physikalisch gut motiviert [47, 48]. Für den Spezialfall einer zweidimensional chiralen Eichtheorie wurde die CPT-Anomalie auch exakt ausgerechnet [49], ebenso wurde sie auf dem Gitter nachgewiesen [50]. Diese Faktoren zusammengenommen sind eine starke Motivation dafür, dass die CPT-Anomalie tatsächlich auftritt. Mit der Rechnung in diesem Kapitel wurde gezeigt, dass sich das Auftreten eines CPT-anomalen Terms für räumlich flache Robertson-Walker-Universen auf das physikalisch sehr plausible Auftreten dieses Terms im Minkowski-Fall zurückführen lässt. In [51] wurde gezeigt, dass für verschiedene topologisch nichttriviale Universen, nicht für den einfachsten oben betrachteten Fall, ein Chern-Simons-Term für geeignete chirale Eichtheorien auftreten kann. Diese Ergebnisse lassen sich ebenfalls auf ein räumlich flaches Robertson-Walker-Universum übertragen.

12. Physikalische Effekte

Im vorherigen Kapitel wurde gezeigt, dass ein Chern-Simons-Term anomal auftreten kann, wenn man bestimmte chirale Eichtheorien in topologisch nichttrivialen, expandierenden Robertson-Walker-Universen betrachtet.

Dieses Kapitel diskutiert einige physikalische Effekte im Photon-Sektor, die auf die Anomalie zurückzuführen sind.

Es ist plausibel anzunehmen, dass im photonischen Teil der Wirkung, wenn das Photonfeld in eine große vereinheitlichte Theorie eingebettet wird, folgender Term auftritt [9],

$$S = \int d^4x e \left(-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{m(x_0)}{4e} \zeta_\kappa(x) A_\lambda F_{\mu\nu} \epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} \right). \quad (12.1)$$

Mit e wird wieder die Determinante des Vierbeins im flachen Robertson-Walker Universum betrachtet. A_μ bezeichnet jetzt den photonischen Teil des Eichfeldes. $F^{\mu\nu}$ ist der Feldstärke-Tensor, $\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}$ das Levi-Civita-Symbol und ζ_κ ein kovarianter Einheitsvector, $\zeta_\kappa = (0, 0, 0, a(\tau))$; mit Skalenfaktor $a(\tau)$. x_0 bezeichnet die zeitartige Koordinate und wird fortan τ genannt werden

$m(\tau)$ ist ein, im Unterschied zu [18], zeitabhängiger Massenparameter,

$$m(\tau) = m \frac{1}{a(\tau)}. \quad (12.2)$$

Die Feldgleichung für das Photon-Feld lautet

$$\partial_\mu (e F^{\mu\nu}) = e D_\mu F^{\mu\nu} = m(\tau) e \zeta_\kappa \tilde{F}^{\kappa\nu}. \quad (12.3)$$

Aus der Feldgleichung (12.3) ergibt sich die folgende zeitabhängige Dispersionsrelation,

$$(k_\mu k^\mu)^2 - m(\tau)^2 k_\mu k^\mu - m(\tau)^2 (\zeta_\mu k^\mu)^2 = 0, \quad (12.4)$$

auf deren Grundlage die folgende Effekte basieren.

12.1. Allgemeine Lösung des Dispersionsgesetzes

Da das Hintergrundfeld ζ^μ im Unterschied zur Diskussion in [18] jetzt explizit bekannt ist, kann man die Dispersionsrelation explizit für den Wellenvektor k^μ lösen. Anders als im Fall für allgemeines ζ^μ , ist es komfortabler und aussagekräftiger mit dem Wellenvektor und nicht mit dem „modifizierten“ Wellenvektor zu arbeiten. Hier werden wieder die Standard-Koordinaten (und nicht die konformen Koordinaten) für ein flaches Robertson-Walker-Universum benutzt,

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (12.5)$$

In Analogie zum flachen Fall [33], findet man zwei Moden, die mit unterschiedlicher Geschwindigkeit propagieren und im Grenzfall $m \rightarrow 0$ links- und rechtszirkular polarisiertem Licht entsprechen,

$$k_\mu^\pm = \left(a^{-1}(t) \left(\sqrt{k_\perp^2 + \left(\pm m/2 + \sqrt{k_\parallel^2 + m^2/4} \right)^2} \right), k_\perp, 0, k_\parallel \right). \quad (12.6)$$

12.2. Rotverschiebung

Die von einem mitbewegten Beobachter gemessene Frequenz ω lässt sich direkt ablesen. Sie ist gegeben durch die Kontraktion der Weltlinie $u_\mu = (1, 0, 0, 0)$ mit dem Wellenvektor,

$$\omega_i \equiv \omega_{P_i} = (k^\mu u_\mu)_{P_i}. \quad (12.7)$$

Man findet für die gemessene Rotverschiebung,

$$\frac{\omega(t_2)}{\omega(t_1)} = \frac{a(t_1)}{a(t_2)}. \quad (12.8)$$

Das ist das gleiche Verhalten, das Standard-Photonen in einem expandierenden Robertson-Walker-Universum aufweisen, [26].

Die sich im Fall mit konstantem m ergebenden Korrekturterme [18], werden nun genau durch die Zeitabhängigkeit von $m(t)$ aufgehoben ¹.

¹Das selbe Ergebnis lässt sich auch erzielen, wenn man im Formalismus des modifizierten Wellenvektors \tilde{k}^μ arbeitet und die Näherung macht, dass dieser auf Geodäten läuft. Das ist ein Indiz dafür, dass die Näherung das der modifizierte Wellenvektor auf Geodäten läuft im Allgemeinen gute Ergebnisse liefert.

12.3. Photon- und Muon-Lebensdauer

In [52] wurden Zerfallsprozesse von Maxwell-Chern-Simons Photonen studiert, die in geeigneter Weise an Fermionen koppeln. Die Rechnungen wurden im Minkowski-Raum mit konstantem Massenparameter m durchgeführt. Die Lebensdauer von hochenergetischen ($m \ll q_{\parallel}$) Photonen im Bezugssystem, in dem der Hintergrundvektor rein raumartig ist, ergibt sich zu

$$T(q) = \frac{2\omega(q)}{c K^2 m^5 q_{\parallel}^5}. \quad (12.9)$$

K bezeichnet die effektive Kopplungskonstante $K = 2\alpha^2 / (45M^2)$ mit Elektronenmasse M . Da die Lebensdauer (12.9) des Photons von dem Parameter m abhängt, erwartet man in der Theorie (12.1) eine zeitabhängige Lebensdauer des Photons. So wäre etwa das Verhältnis der Lebensdauer des Photons gegenüber der Lebensdauer des Muons im frühen Universum deutlich kleiner gewesen als heute.

Dieses Verhältnis soll nun in der einfachsten denkbaren Näherung, der adiabatischen Näherung, berechnet werden. Diese Näherung setzt voraus, dass die Expansionsrate des Universums deutlich kleiner ist als die Zerfallsrate des Photons. Diese Näherung ist mit den bekannten Schranken an den Maxwell-Chern-Simons Parameter [33] im heutigen Universum sicher nicht gut gerechtfertigt, und liefert nur eine grobe Abschätzung.

In der adiabatischen Näherung beträgt die Lebensdauer eines Photons zu einem bestimmten Zeitpunkt t

$$T_{\gamma}(q) = \frac{2\omega(q)}{c K^2 m^5(t) q_{\parallel}^5}. \quad (12.10)$$

Die Zeitabhängigkeit von $m(\tau)$ ist durch folgenden Ausdruck gegeben,

$$m(t) = \frac{m_0}{a(t)}, \quad (12.11)$$

mit dem Skalenfaktor $a(t)$ des Universums und einer Konstante m_0 mit Massendimension 1.

Der früheste sinnvolle Zeitpunkt um von der Lebensdauer des Photons zu sprechen ist der Zeitpunkt der Rekombination. Im Folgenden soll das Verhältnis Photon-Lebensdauer/Muon-Lebensdauer zum Zeitpunkt der Rekombination und heute

verglichen werden. Nur der Haupt-Zerfallskanal $\mu^+, \mu^+ \longrightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$ des Muons in führender Ordnung wird dabei in Betracht gezogen. Die Lebensdauer des Muons ist dann gegeben durch [53]

$$T_\mu = \frac{192\pi^3}{G_F^2 m_\mu^5}, \quad (12.12)$$

sie ist natürlich zeitunabhängig.

In einem flachen, materie-dominierten Robertson-Walker-Universum ist das Verhalten des Skalenfaktors gegeben durch [26]

$$a(t) \sim t^{2/3}. \quad (12.13)$$

Für den Zeitpunkt der Rekombination und das Alter des Universums wird angenommen

$$t_{\text{Rekombination}} \approx 300.000y, \quad t_{\text{heute}} \approx 12 \cdot 10^9 y. \quad (12.14)$$

Für das Verhältnis von Photon- zu Muon-Lebensdauer zum Zeitpunkt der Rekombination und heute findet man dann,

$$\frac{T(q)_{\text{now}}/T_\mu}{T(q)_{\text{rec}}/T_\mu} = \frac{a^5(t_{\text{heute}})}{a^5(t_{\text{Rekombination}})} \approx 2 \cdot 10^{15}. \quad (12.15)$$

12.4. Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden physikalische Effekte von zeitabhängiger Maxwell-Chern-Simons Theorie, die sich aus der CPT-Anomalie in einem topologisch nicht-trivialen Universum ergeben kann, untersucht. Die Dispersionsrelation wurde ausgerechnet und exakt gelöst. Eine geometrische Interpretation des Propagationsverhaltens wird im nächsten Kapitel gegeben werden. Aus der Dispersionsrelation wurde die Rotverschiebung ausgerechnet, die das gleiche Verhalten wie für Standard-Photonen zeigt. Im Allgemeinen kann für Maxwell-Chern-Simons Theorie die Rotverschiebung jedoch modifiziert sein [18]

Die Lebensdauer des Photons dagegen wird von der universalen Zeit t abhängig. Die Lebenszeit des Photons, ausgedrückt in der Lebensdauer des Muons ist zum Zeitpunkt der Rekombination 10^{15} mal niedriger als zum heutigen Zeitpunkt. Allerdings wurde zum Berechnen dieses Ergebnisses auf die adiabatische Näherung zurückgegriffen was nur für ausreichend große $m(t)$ und damit hinreichend kleinen Lebensdauern für das Photon gerechtfertigt ist.

13. Maxwell-Chern-Simons Theorie und Finsler-Geometrie

Dieses Kapitel behandelt das Thema Lorentz-verletzender Dispersionsrelationen und Finsler-Geometrie. Eine erste Idee die Inkompatibilitäten zwischen expliziter Lorentz-Verletzung und Gravitation zu behandeln war die Einführung eines erweiterten geometrischen Rahmens, um Gravitation zu beschreiben.

13.1. Finsler-Geometrie

Finsler-Geometrie [32, 54, 55], ist eine natürliche Erweiterung der Riemannschen Geometrie. Eine Finslerstruktur ist gegeben durch eine n -dimensionale C^∞ Mannigfaltigkeit und eine Abbildung

$$F : TM \rightarrow \mathbb{R} \tag{13.1}$$

vom Tangentialbündel TM in die reellen Zahlen, so dass gilt:

1. Regularität: F ist C^∞ auf $TM \setminus 0$.
2. Positive Homogenität: $F(x, \lambda v) = \lambda F(x, v)$, für alle $\lambda > 0$.
3. $F(x, v) \neq 0$ für alle $v \neq 0$.

Aus der Finsler-Norm lässt sich die Finsler-Metrik definieren

$$f_{\mu\nu} := \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial v^\mu \partial v^\nu} , \tag{13.2}$$

mit Eulers Theorem folgt dann,

$$F(x, v) = \sqrt{f_{\mu\nu} v^\mu v^\nu} . \tag{13.3}$$

Die inverse Finsler-Metrik wird im Folgenden mit $f^{\mu\nu}$ bezeichnet und es gilt

$$f_{\mu\nu} f^{\nu\rho} = \delta^\rho_\mu . \tag{13.4}$$

Eine Finsler-Metrik hängt also nicht nur von den Koordinaten sondern auch noch von Tangentialvektoren ab. Diese mathematische Struktur ermöglicht es, bestimmte Formen von Lorentz-Verletzung mit Hilfe von Finsler-Geometrie zu beschreiben.

In [56] wurden systematisch Propagationseffekte von Licht untersucht, die durch Finsler-artigen Modifikation der Metrik zustande kommen und Schranken an die zugrunde liegenden Parameter angeben.

Im Folgenden wird eine in [57] vorgeschlagene Idee etwas erweitert und auf Maxwell-Chern-Simons Theorie angewandt werden, die Finsler-Geometrie und Lorentz-verletzende Dispersionsrelationen verknüpft.

13.2. Lorentz-verletzende Dispersionsrelationen und Finsler-Geometrie

In [57] wird gezeigt, dass für Lorentz-verletzende Dispersionrelationen der Form

$$E^2 = m^2 + p^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n p^n \quad (13.5)$$

(im Minkowski-Raum) eine Punktteilchen-Wirkung gefunden werden kann, die einerseits die korrekte Dispersionsrelation für das Teilchen liefert und andererseits interpretiert werden kann als die Bewegung dieses Teilchen in einem *Finsler-Hintergrund*.

Ein Punkt-Teilchen, das in einem Finsler-Hintergrund propagiert wird durch die folgende Wirkung beschrieben,

$$\mathcal{S} = m \int_a^b F(x, \dot{x}) d\tau . \quad (13.6)$$

Hier bezeichnet $F(x, \dot{x})$ eine Finslernorm (13.1) und die Weltlinie des Teilchens ist parameterisiert durch einen Parameter τ . Diese Beschreibung ist die natürliche Verallgemeinerung der Standard-Wirkung für ein freies relativistisches Teilchen,

$$\mathcal{S} = m \int_a^b \sqrt{g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} d\tau. \quad (13.7)$$

Der kanonische Impuls des Teilchens ist definiert durch

$$p_\mu = m \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\mu}. \quad (13.8)$$

Ein solches Teilchen erfüllt dann die verallgemeinerte Massenschalenbedingung

$$f^{\mu\nu}(x, p)p_\mu p_\nu = m^2. \quad (13.9)$$

Wir betrachten ein Teilchen, das einer Lorentz-verletzenden Dispersionsrelation, $D(p_\mu) = 0$ gehorcht. Die Massenschalenbedingung $D(p_\mu) = 0$ wird über einen Lagrange-Multiplier in der Lagrangefunktion implementiert,

$$\mathcal{L} = \int (\dot{x}^\mu p_\mu - \lambda D(p)) . \quad (13.10)$$

Mit Hilfe der ersten Hamiltongleichung kann p_μ bestimmt und aus der Lagrange-dichte eliminiert werden.

$$\dot{x}^\mu = \frac{\partial H}{\partial p_\mu} = \lambda \frac{\partial D}{\partial p_\mu}. \quad (13.11)$$

Invertiert man die Gleichung, lässt sich die Wirkung als Funktion von \dot{x}^μ allein ausdrücken. Der Lagrange-Multiplier wird über die zugehörige Euler-Lagrange Gleichung eliminiert.

So erhält man aus einer (nicht lorentz-invarianten) Massenschalung, ganz allgemein, eine Wirkung der Form (13.6). Die Pfade, die sich aus dem Wirkungsprinzip ergeben, sind Geodäten in einer *Finsler-Metrik*. Die Diskussion in [57] wurde für Punktteilchen im Minkowski-Raum durchgeführt. Die erhaltenen Finsler-Metriken waren immer flach, und die Trajektorien immer Geraden.

Im Folgenden soll die hier zusammengefasste Methode auf Maxwell-Chern-Simons Theorie in einem expandierenden Robertson-Walker-Universum angewandt werden. Die Verallgemeinerung auf gekrümmte Hintergründe ist möglich, und da die Trajektorien keine einfachen Geraden mehr sind, liefert sie interessante geometrische Einblicke. Zunächst wird eine Verbindung zwischen der Näherung der geometrischen Optik im Wellenformalismus und der klassischen Punkt-Teilchen-Mechanik hergestellt.

13.3. Punkt-Teilchen-Mechanik und Geometrische Optik

Wir betrachten eine Dispersionsrelation $D(k^\mu) = D(\omega, \vec{k}) = 0$. Die Gruppengeschwindigkeit eines Wellenvektors $k^\mu = (\omega, \vec{k})$, der diese Dispersionsrelation löst ist gegeben durch,

$$\vec{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}}. \quad (13.12)$$

Die Vierergruppengeschwindigkeit v_g^μ ist tangential zur Weltlinie des Maximums des Wellenpakets, folglich

$$v_g^\mu = (1, \vec{v}_g) = \left(1, \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}}\right). \quad (13.13)$$

Das Theorem über implizite Funktionen [58] liefert

$$\frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}} = - \frac{\partial D / \partial \vec{k}}{\partial D / \partial \omega}. \quad (13.14)$$

Damit folgt,

$$v_g^\mu = \left(\frac{\partial D / \partial \omega}{\partial D / \partial \omega}, - \frac{\partial D / \partial \vec{k}}{\partial D / \partial \omega} \right) = \frac{\partial D / \partial k_\mu}{\partial D / \partial \omega}. \quad (13.15)$$

Die Gleichung (13.15) liefert den gesuchten Zusammenhang zwischen dem Wellenformalismus und der Punkt-Teilchen-Mechanik, da die Gruppengeschwindigkeit (13.15) proportional zu \dot{x}^μ aus dem Hamiltonformalismus (13.11) ist.

Die Trajektorien, die das Maximum eines Wellenpakets mit gegebener Dispersionsrelation beschreibt (in der Näherung der geometrischen Optik), stimmen damit überein mit den Pfaden eines Punktteilchens im Hamiltonformalismus, wenn die kanonischen Impulse die selbe Dispersionsrelation erfüllen. Damit kann für die Diskussion der Dispersionsrelation (12.4) auf die Methoden aus [57] zurück gegriffen werden, die für Punktteilchen entwickelt wurden.

13.4. Anwendung auf Maxwell-Chern-Simons Theorie

Im vorhergehenden Kapitel wurde die CPT-Anomalie für ein räumlich flaches $3 + 1$ dimensionales Robertson-Walker Universum mit einer kompaktifizierten raumartigen Dimension berechnet. Der hier interessierende induzierte Teil der photonischen Wirkung ist

$$S_{\text{MCS}} = \int d^4x \left(-e \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \frac{m}{a(t)} \zeta_\mu A_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} \right). \quad (13.16)$$

Aus dieser Wirkung ließ sich ein modifizierter Dispersionsgesetz für die Photonen ableiten,

$$(k_\mu k^\mu)^2 - m(t)^2 k_\mu k^\mu - m(t)^2 (\zeta_\mu k^\mu)^2 = 0, \quad (13.17)$$

mit $m(t) = m/a(t)$. Für Standard-Photonen lässt sich aus Differenzierung der Dispersionsrelation die Geodätengleichung für den Wellenvektor gewinnen, [26]. Differenziert man dagegen das Dispersionsgesetz (13.17), so erhält man eine nicht-triviale Bedingung an den Wellenvektor, die nicht ohne Weiteres als Geodätengleichung interpretiert werden kann

$$\begin{aligned} 2k^\nu k_\nu k^\mu D_\lambda k_\mu - m^2(t) k^\mu D_\lambda k_\mu - k^\nu k_\nu m(t) D_\lambda m(t) \\ - m(t) \zeta^\nu k_\nu k^\mu D_\lambda (m(t) \zeta_\mu) - m^2(t) \zeta^\nu k_\nu \zeta^\mu D_\lambda k_\mu = 0. \end{aligned} \quad (13.18)$$

Die Dispersionsrelation (13.17) lässt sich allerdings direkt für den Wellenvektor lösen,

$$k_\mu^\pm = \left\{ a^{-1}(t) \sqrt{k_\perp^2 + \left(\pm m/2 + \sqrt{k_\parallel^2 + m^2/4} \right)^2}, k_\perp, 0, k_\parallel \right\}, \quad (13.19)$$

das Propagationsverhalten der modifizierten Photonen ist also bekannt. Im Folgenden wird gezeigt werden, dass eine geometrische Interpretation für das Propagationsverhalten existiert.

13.5. Methoden und Konventionen

Es wird Gebrauch gemacht von der in Abschnitt 13.2 vorgestellten Methode, nach der nichttriviale Dispersionsrelationen geometrisch mit Hilfe von Finsler Geometrie interpretiert werden können. Kontraktionen werden im Folgenden, wenn nichts anderes explizit gesagt wird, als Kontraktionen bezüglich der Robertson-Walker-Metrik

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2(t) \end{pmatrix}. \quad (13.20)$$

verstanden.

13.6. Rein orthogonaler Fall

Die folgende Rechnung lässt sich nicht für allgemeine Wellenvektoren durchführen. Es wird daher der Spezialfall senkrecht zu ζ_μ propagierender Photonen betrachtet werden.

Für den betrachteten Spezialfall vereinfacht sich das Dispersionsgesetz zu,

$$(k_\mu k^\mu)^2 - m^2(\tau) k_\mu k^\mu = 0, \quad (13.21)$$

was für \oplus -Moden sich noch weiter vereinfacht lässt,

$$(k_\mu k^\mu) = m^2(\tau). \quad (13.22)$$

Nach der in Abschnitt 13.3 diskutierten Analogie wird nun die Wirkung für ein Punktteilchen mit der Dispersionsrelation (13.22) betrachtet, die Massenschalungsbedingung wird mit Hilfe eines Lagrange-Multipliers λ gefordert. Die Wirkung ergibt sich zu

$$I = \int (\dot{x}^\mu p_\mu - \lambda (p_\mu p^\mu - m^2/a^2(\tau))) d\tau. \quad (13.23)$$

Mit Hilfe des Lagrange-Formalismus lässt sich der Parameter λ über die Lagrange-Gleichungen bestimmen und eliminieren.

Der Hamiltonian ergibt sich zu,

$$H = \dot{x}^\mu p_\mu - \mathcal{L} = \lambda ((k_\mu k^\mu) - m^2(\tau)). \quad (13.24)$$

Mit der ersten Hamilton-Gleichung wird p^μ bestimmt und aus der Lagrange-Dichte eliminiert,

$$\dot{x}^\mu = \frac{\partial H}{\partial p_\mu} = 2\lambda p^\mu. \quad (13.25)$$

Die Wirkung ergibt sich nun als alleinige Funktion von \dot{x}^μ ,

$$I = \int \left(\frac{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}{4\lambda} + \lambda \frac{m^2}{a^2(\tau)} \right). \quad (13.26)$$

Die Euler-Lagrange Gleichungen für λ lauten,

$$-\frac{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}{4\lambda^2} - \frac{m^2}{a(t)^2} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{a(t)}{2m} \sqrt{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}. \quad (13.27)$$

Die Wirkung mit eliminiertem Lagrange-Multiplier lautet dann,

$$I = \int \left(\frac{m}{a(t)} \sqrt{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu} \right). \quad (13.28)$$

Nach [57] wird die Wirkung (13.28) nun interpretiert als Wirkung eines freien Punktteilchens, das in einer Finsler-Mannigfaltigkeit propagiert,

$$I = m \int F(x, \dot{x}) d\tau. \quad (13.29)$$

Die abzulesende Finsler-Norm lautet,

$$F(x, \dot{x}) = \frac{\sqrt{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}}{a(t)}. \quad (13.30)$$

Die entsprechende Finsler-Metrik berechnet sich nach Gleichung (13.4) zu,

$$f_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial v^\mu \partial v^\nu} = \frac{1}{a^2(t)} g_{\mu\nu}, \quad (13.31)$$

mit der räumlich flachen Friedmann-Robertson-Walker-Metrik

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2(t) \end{pmatrix}. \quad (13.32)$$

Die Finsler-Metrik lautet explizit

$$f_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} a(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (13.33)$$

was der flachen Minkowski-Metrik mit einer reskalierten Zeitkomponente entspricht.

13.7. Entwicklung in m

Entwickelt man die Dispersionsrelation (8.9) in m/k_{\parallel} für rein raumartiges ζ^μ , so findet man

$$(k_0^2 - \vec{k}^2) = \pm m k_{\parallel} + m^2/2 + O(m/k_{\parallel})^3, \quad (13.34)$$

wobei sich jeweils das obere Vorzeichen auf die \oplus - und das untere auf die \ominus -Moden bezieht. Die Entwicklung versagt für den Fall, dass k_{\parallel} größer als m wird.

In diesem Fall gilt aber mit guter Näherung, dass $\vec{\zeta}$ und \vec{k} orthogonal sind und es kann auf das Ergebnis in Abschnitt 13.6 zurück gegriffen werden. Diese Entwicklung kann auch für das Dispersionsgesetz im Robertson-Walker-Universum (13.17) übernommen werden, als Zwangsbedingung wird jetzt, in zweiter Ordnung in m/k_{\parallel} gefordert:

$$a(t)^2 k_0^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2 \mp m|k_3| - m^2/2 = 0. \quad (13.35)$$

Für die Wirkung ergibt sich dann, nach Elimination von λ

$$\mathcal{S} = \int d\tau \left(\frac{m}{2a(\tau)} \sqrt{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu \mp m|\dot{x}_3|} \right), \quad (13.36)$$

wobei das obere Vorzeichen wieder für die \oplus - und das untere für die \ominus -Moden steht. Daraus lässt sich die Finslernorm direkt ablesen,

$$F(x, \dot{x}) = \left(\frac{1}{2a(\tau)} \sqrt{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu \mp |\dot{x}_3|} \right) \quad (13.37)$$

die zugehörige Finsler-Metrik ist dann keine simple Riemannsche-Metrik mehr, sondern hängt explizit von \dot{x} ab.

13.8. Interpretation

Das durch die CPT-Anomalie induzierte, modifizierte Propagationsverhalten (13.18) hat nun eine geometrische Interpretation.

Die Lorentz-Verletzung wird in einer Finsler-Metrik absorbiert. Bezüglich dieser Finsler-Metrik propagiert das Licht wieder auf Geodäten.

Es war nicht möglich, diese Metrik allgemein analytisch zu berechnen, für den Grenzfall $\vec{k} \perp \vec{\zeta}$ konnte die Finsler-Metrik jedoch berechnet werden, allgemein war eine Entwicklung im Parameter m/k_{\parallel} möglich.

Im orthogonalen Fall $\vec{k} \cdot \vec{\zeta} = 0$ geht diese Finsler-Metrik in eine flache Minkowski-Metrik über. Dieser Grenzfall kann folgendermaßen verstanden werden: Die einzige Skala der Theorie ist durch $m/a(t)$, diese zeitabhängige Masse koppelt an die Gravitation. Reskaliert man den Hintergrund mit der inversen Funktion $a(t)$, so absorbiert man, im orthogonalen Grenzfall, sämtliche gravitativen Effekte. Oder, anders ausgedrückt, multipliziert man in (13.21) jede Kontraktion mit einem Faktor $a(t)^2$, so erhält man ein simples Dispersionsgesetz für massive Teilchen im Minkowski-Raum.

Interessanter ist jedoch Propagation, die nicht ausschließlich orthogonal zum Hintergrund-Vektor verläuft. Hierfür ist es gelungen, eine Finsler-Metrik $f_{\mu\nu}$ mit inverser Metrik $f^{\mu\nu}$ anzugeben, so dass, bis in zweiter Ordnung in m/k_{\parallel} ,

$$k_{\mu} f^{\mu\nu} k_{\nu} = 0 \tag{13.38}$$

gilt. Die Lorentz-verletzenden Effekte sind also in einer Finsler-Metrik, die sich mit der Definition (13.4) aus der Finslernorm (13.37) ableiten lässt, absorbiert worden.

In [12, 59] wurde die Vermutung geäußert, dass Finsler-Geometrie möglicherweise ein geeigneter Kandidat für eine erweiterte Gravitationstheorie wäre, die in der Lage sein könnte, die geometrischen Inkompatibilitäten zwischen dem Einstein-Tensor und dem Energie-Impuls-Tensor zu beheben.

Eine dynamische Finsler-Gravitationstheorie existiert derzeit jedoch nicht, eine solche Realisierung war auch im Rahmen dieser Arbeit nicht möglich. Die Ergebnisse dieses Kapitels sind jedoch in dieser Hinsicht ermutigend, da sie zumindest eine geometrische Interpretation des modifizierten Propagationsverhaltens im Rahmen von Finsler-Geometrie ermöglichen. Weitere Forschung ist hier sicherlich von Interesse.

14. Zusammenfassung Teil II

Der vorliegende Teil II der Dissertation behandelte Maxwell-Chern-Simons Theorie im Hinblick auf die Kopplung an die Gravitation. Als explizit Lorentz-verletzende Theorie wirft die Kopplung von Maxwell-Chern-Simons Theorie an die Gravitation die in Teil I dargestellten Fragen auf.

In Kapitel 8 wurde zunächst Maxwell-Chern-Simons Theorie in Minkowski-Raumzeiten vorgestellt. Das darauf folgende Kapitel diskutierte die beiden Möglichkeiten einer Kopplung an die Gravitation im metrischen und im Vierbein-Formalismus. Bei beiden Beschreibungen kommt es zu Inkompatibilitäten mit den, für den Einstein-Tensor geltenden, Bianchi-Identitäten. Eine Möglichkeit, diese Schwierigkeiten zu umgehen, ist es, die Implikationen der Bianchi-Identitäten als Konsistenzbedingungen an das Lorentz-verletzende, externe Hintergrund-Feld zu stellen. In Kapitel 10 wurde gezeigt, dass solche Lösungen prinzipiell existieren, es handelte sich um bekannte Lösungen der Einstein-Gleichungen. Sowohl die Schwarzschild- als auch die Reissner-Nordström-Lösung sind, unter Beachtung von zusätzlichen Bedingungen an das externe Hintergrund-Feld, mögliche Lösungen der (gekoppelten) Maxwell-Chern-Simons Gleichungen und der Einstein-Gleichungen.

In Kapitel 11 wurde eine Möglichkeit diskutiert, das Auftreten eines stark unterdrückten Maxwell-Chern-Simons Terms zu motivieren. Es war bereits bekannt, dass ein Maxwell-Chern-Simons Term unter bestimmten Bedingungen für Quantenfeldtheorien auf topologisch nicht trivialen Mannigfaltigkeiten anomal auftreten kann. In dieser Doktorarbeit wurde eine nichtabelsche chirale Eichtheorie auf einem flachen Robertson-Walker-Universum mit einer kompaktifizierten Raumdimension untersucht. Das anomale Auftreten eines Maxwell-Chern-Simon-artigen Terms, sowie das erwartete unterdrückte Verhalten (der Term ist proportional zur Länge der kompaktifizierten Raumrichtung, die mit der Zeit zunimmt) wurde bestätigt.

Im Folgenden wurden einige physikalische Effekte diskutiert, die sich für den photonischen Anteil einer Wirkung ergeben, für die die Anomalie berechnet wurde. Unter anderem ergibt sich ein modifiziertes Dispersionsgesetz und eine endliche Photon-Lebensdauer, die abhängig vom Alter des Universums ist.

Kapitel 13 beschäftigte sich mit Finsler-Geometrie. Die ursprüngliche Motivation dafür war die Hoffnung, dass sich im Rahmen einer Erweiterung der Riemannschen Geometrie die Einstein-Gleichung so verallgemeinern ließe, dass mögliche Verallgemeinerungen der Bianchi-Identitäten nicht mehr im Widerspruch zu einem nicht-symmetrischen Energie-Impuls-Tensor stünden. Finsler-Geometrie schien ein vielversprechender Kandidat, da in einer Finsler-Geometrie die Metrik nicht nur eine Orts-, sondern auch eine Richtungsabhängigkeit haben kann. Es existiert aber bisher keine Theorie von Finsler-Gravitation und eine Realisierung ist auch im Rahmen dieser Dissertation nicht möglich gewesen. Es hat sich jedoch heraus gestellt, dass Finsler-Geometrie zur phänomenologischen Beschreibung von Lorentz-verletzenden Dispersions-Relationen geeignet ist. Im Rahmen dieser Methode wurde eine geometrische Interpretation der Photon-Dispersions-Relation gefunden, die sich aufgrund der im vorhergehenden Kapitel berechnenden CPT-Anomalie ergibt.

Teil III.

Modifizierte Maxwell-Theorie und Gravitation

15. Modifizierte Maxwell-Theorie

Ein weiteres Beispiel für eine Lorentz-verletzende photonische Theorie ist die modifizierte Maxwell-Theorie [60–62]. Modifizierte Maxwell-Theorie ist ein Teil des erweiterten Standardmodells [11]. Modifizierte Maxwell-Theorie und Maxwell-Chern-Simons-Theorie sind die beiden einzigen möglichen, renormierbaren $U(1)$ -Eichtheorien im erweiterten Standardmodell. In diesem Teil der Dissertation wird die Kopplung von modifizierter Maxwell-Theorie an die Gravitation untersucht und mögliche physikalische Effekte werden diskutiert.

15.1. Einheiten und Konventionen

Es werden natürliche Einheiten benutzt $c = G_N = k_B = \hbar = 1$. Raumzeitindizes werden durch griechische Buchstaben gekennzeichnet und entsprechen den sphärischen Koordinaten t, r, θ, ϕ , lokale Lorentz-Indizes werden mit lateinischen Buchstaben gekennzeichnet und können die Werte 0 bis 3 annehmen.

Mit η_{ab} wird die flache Minkowski-Metrik bezeichnet, mit $g_{\mu\nu}$ die gekrümmte Metrik, jeweils mit Signatur $(+, -, -, -)$. Der Betrag der Determinante wird mit $g = |\det g_{\mu\nu}(x)|$ abgekürzt. Mit $e^{\mu}_a(x) = g^{\mu\nu}(x)\eta_{ab}(x)e^b_\nu(x)$ wird das Vierbein bezeichnet, es gilt $e^{\mu}_a(x)e^b_\mu(x) = \delta_a^b$, $e^{\mu}_a(x)e^a_\nu(x) = \delta^{\mu}_\nu$, und $g_{\mu\nu}(x) = e^a_\mu(x)e^b_\nu(x)\eta_{ab}$. Kovariante Ableitungen bezüglich der Metrik werden mit D_μ bezeichnet.

15.2. Modifizierte Maxwell-Theorie in flachen Raumzeiten

Modifizierte Maxwell-Theorie ist eine verallgemeinerte $U(1)$ -Eichtheorie, deren Lagrangedichte, zusätzlich zum Standard-Maxwell-Term, einen weiteren bilinearen Term enthält

$$\mathcal{L}_{\text{modMax, flach}} = -\frac{1}{4}F_{ab}F_{cd}\eta^{ac}\eta^{bd} - \frac{1}{4}\kappa^{abcd}F_{ab}F_{cd}. \quad (15.1)$$

$F_{ab} \equiv \partial_a A_b(x) - \partial_b A_a(x)$ bezeichnet den Standard-Maxwell-Feldstärke-Tensor, mit dem Eichfeld $A_a(x)$. Da nur der eichinvariante Feldstärke-Tensor und nicht das Eichfeld selbst in der Wirkung auftritt, ist die Theorie selbstverständlich eichinvariant.

An den Lorentz-verletzende „Hintergrundtensor“ κ^{abcd} werden die selben Symmetrien wie an den Riemannschen Krümmungstensor gefordert, zusätzlich wird noch eine Annahme an die doppelte Spur gemacht (also ein „Krümmungstensor“ mit verschwindender Skalarkrümmung gefordert):

$$\kappa^{abcd} = \kappa^{[ab][cd]}, \quad \kappa^{abcd} = \kappa^{cdab}, \quad \kappa^{ab}{}_{ab} = 0. \quad (15.2)$$

Die Symmetrieannahmen lassen sich wie folgt begründen: Antisymmetrie in den ersten beiden und letzten beiden Indexpaaren, sowie Symmetrie unter Austausch der beiden Indexpaare ergibt sich ohne Beschränkung der Allgemeinheit durch die Kontraktion mit den Feldstärketensoren. Ein total antisymmetrischer Term wäre eine totale Ableitung und kann weggelassen werden, und durch Redefinition der Felder und Kopplungskonstanten ließe sich ein nicht-verschwinderden Spurterm in den Standard-Maxwell-Term absorbieren.

Die einfachste Annahme an diesen Tensor, die üblicherweise in der Literatur diskutiert wird, ist die, dass der Tensor κ^{abcd} räumlich und zeitlich konstant ist. In diesem Fall sind Raumzeit-Translationen Symmetrien der Theorie und die zugehörigen Noether-Ströme sind erhalten. Für konstantes κ^{abcd} enthält der Tensor 19 freie Parameter, im allgemeinen Fall jedoch kann $\kappa^{abcd}(x)$ ein beliebiges, aber festes „Tensorfeld“ sein. Der Begriff „Tensorfeld“ ist hier in Anführungszeichen gehalten, da sich κ^{abcd} als Hintergrundfeld nur unter passiven Transformationen wie ein Tensor transformiert. Unter aktiven Symmetrietransformationen („particle Lorentz transformations“) transformiert sich κ^{abcd} nicht [11]. Im Folgenden wird jedoch, der Lesbarkeit zuliebe, einfach von Hintergrund-Tensor-Feldern gesprochen werden.

Im Unterschied zur Maxwell-Chern-Simons-Theorie ist modifizierte Maxwell-Theorie, obwohl Lorentz-verletzend, invariant unter CPT-Transformationen.

In dieser Arbeit werden weitere, vereinfachende Annahmen an den modifizierten Maxwell-Term gemacht. Zunächst beschränken wir uns auf einen (in erster Ordnung Störungstheorie) nicht-doppelbrechenden Ansatz [61, 62]

$$\kappa^{abcd} = \frac{1}{2} \left(\eta^{ac} \tilde{\kappa}^{bd} - \eta^{ad} \tilde{\kappa}^{bc} + \eta^{bd} \tilde{\kappa}^{ac} - \eta^{bc} \tilde{\kappa}^{ad} \right). \quad (15.3)$$

$\tilde{\kappa}^{ab}$ ist ein symmetrischer, spurfreier Tensor. Im Folgenden wird sich oft der weitere, vereinfachende Ansatz als nützlich erweisen

$$\tilde{\kappa}^{ab} = \kappa \left(\tilde{\zeta}^a \tilde{\zeta}^b - \eta^{ab} \tilde{\zeta}^c \tilde{\zeta}_c / 4 \right), \quad (15.4a)$$

$$\kappa \equiv \frac{4}{3} \tilde{\kappa}_{ab} \tilde{\zeta}^a \tilde{\zeta}^b. \quad (15.4b)$$

$\tilde{\zeta}^a$ bezeichnet hier einen normierten Hintergrund-Vierervektor $\tilde{\zeta}_a \tilde{\zeta}^a = \pm 1$, der zeit- oder raumartig sein kann. Der lichtartige Fall müsste teilweise getrennt betrachtet werden und wird in dieser Arbeit nicht behandelt.

Mit Hilfe des Variationsprinzips folgen die modifizierten Maxwell-Gleichungen (für allgemeines Hintergrundfeld der Form (15.2)) aus der Lagrangedichte (15.1)

$$\partial_a \left(F^{ab} + \kappa^{abcd} F_{cd} \right) = 0. \quad (15.5)$$

Die homogene Maxwell-Gleichung folgt direkt aus der Definition des Feldstärke-tensors und ist weiterhin unverändert gültig:

$$\partial_a \tilde{F}^{ab} = 0, \quad (15.6)$$

mit

$$\tilde{F}^{ab} = 1/2 \epsilon^{abcd} F_{cd}. \quad (15.7)$$

Die modifizierte Elektrodynamik erlaubt maximale (unter Umständen richtungsabhängige) Photongeschwindigkeiten, die sich von der Kausalgeschwindigkeit $c = 1$ des zugrunde liegenden Minkowskiraumes unterscheiden können.

Das Dispersionsgesetz ist aufgrund der Skaleninvarianz der Theorie für allgemeine Hintergrundtensoren der Form (15.2) von der Form [63]

$$\omega(\vec{k}) = \left| \vec{k} \left(1 - \Theta(\hat{k}) \right) \right|, \quad (15.8)$$

mit dem Einheitsvektor \hat{k} in Richtung des Impulses \vec{k} , und einer dimensionslosen Funktion Θ , die die Richtungsabhängigkeit enthält. Bei Vorliegen von Doppelbrechung gibt es zwei Funktionen $\Theta_{1,2}$ für die beiden Moden.

Die modifizierte Maxwell-Theorie erlaubt interessante physikalische Phänomene, wie z. B. Vakuum-Cherenkov-Strahlung und Photon-Zerfall, deren Nicht-Beobachtung Schranken an die Einträge des Hintergrundfeldes κ^{abcd} erlaubt. Näheres hierzu findet sich beispielsweise in [60, 61, 63–66].

15.3. Kopplung an die Gravitation

Möchte man die Kopplung explizit Lorentz-verletzender Theorien an die Gravitation untersuchen, so bietet sich der Vierbein-Formalismus an, da er erlaubt zwischen lokalen Lorentz-Transformationen und allgemeinen Koordinatentransformationen zu unterscheiden [12].

Im Folgenden wird, wie in Kapitel 4 ausgeführt, der Vierbein-Formalismus genutzt, um die Theorie (15.1) an die Gravitation anzukoppeln.

Ein minimaler Kopplungsprozess führt dann auf die folgende Lagrangedichte für den photonischen Teil der Wirkung

$$\mathcal{L}_{\text{modMax}} = -\sqrt{g} \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + \frac{1}{4} \kappa^{\mu\nu\rho\sigma}(x) F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \right), \quad (15.9a)$$

$$\kappa^{\mu\nu\rho\sigma} \equiv \kappa^{abcd}(x) e^{\mu}_a(x) e^{\nu}_b(x) e^{\rho}_c(x) e^{\sigma}_d(x). \quad (15.9b)$$

Hier und im Folgenden werden die Funktionen $\kappa^{abcd}(x)$ als vorgegebene Hintergrundfelder ohne eigene Feldgleichungen aufgefasst. Weiter unten wird gezeigt, dass die Kopplung an die Gravitation bereits strenge Konsistenzbedingung an die Form des Hintergrundfeldes erzwingt, auch ohne dass eigene Feldgleichungen für dieses Hintergrundfeld gestellt werden. Aus Lesbarkeitsgründen wird die Abhängigkeit von x^μ im Folgenden unterdrückt: $\kappa^{abcd}(x) \equiv \kappa^{abcd}$, wenn nicht anders angegeben.

Der rein gravitative Teil der Lagrangedichte ist durch den Einstein-Hilbert Term gegeben [26],

$$\mathcal{L}_{\text{grav}} = \sqrt{g} \frac{1}{16\pi} R, \quad (15.10)$$

mit Ricci-Skalar R . Die gesamte Wirkung für an die Gravitation gekoppelte modifizierte Maxwell-Theorie ist dann durch

$$\mathcal{S} = \int d^4x (\mathcal{L}_{\text{grav}} + \mathcal{L}_{\text{modMax}}) \quad (15.11)$$

gegeben.

15.4. Feldgleichungen

Die Euler-Lagrange Gleichungen für das Photon-Feld in modifizierter Maxwell-Theorie (15.11) unter Berücksichtigung der Gravitation lauten

$$D_\mu \left(F^{\mu\nu} + \kappa^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) = 0. \quad (15.12)$$

Die Einstein-Gleichung ist:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (15.13)$$

wobei $G_{\mu\nu}$ wie bisher den Einstein-Tensor der Metrik g bezeichnet. Die Definition des Energie-Impuls Tensors $T_{\mu\nu}$ in einer Lorentz-verletzenden Theorie ist, wie bereits in Kapitel I diskutiert, nicht eindeutig, im Kapitel 20 wird darauf näher eingegangen. Da der rein gravitative Teil der Wirkung einfach als Einstein-Hilbert Wirkung gewählt wurde, ist die linke Seite der Einstein-Gleichung im Vergleich mit konventioneller Einstein-Theorie nicht modifiziert. Es ist daher unmittelbar klar, dass die Vakuumlösungen ($T^{\mu\nu} = 0$) der Theorie (15.11) mit den Vakuumlösungen der Allgemeinen Relativitätstheorie übereinstimmen. Diese Lösungen werden im Folgenden als triviale Lösungen bezeichnet werden.

Zunächst werden Hintergrundpropagationseffekte in modifizierter Maxwell-Theorie diskutiert.

16. Propagation in gekrümmten Hintergründen

Dieses Kapitel führt eine allgemeine Methode ein, mit der sich die geometrische Optik von nicht doppelbrechender modifizierter Maxwell-Theorie in gekrümmten Hintergründen beschreiben lässt. In den folgenden Kapiteln wird diese Methode dann angewandt werden, um die „Phänomenologie“ Schwarzer Löcher in modifizierter Maxwell-Theorie zu beschreiben.

Auch wenn in den Kapitel 20 und 21 auf Lösungen der Einsteingleichung in modifizierter Maxwell-Theorie eingegangen wird, ist offen, wie eine vollständige, selbstkonsistente Theorie von modifizierter Maxwell-Theorie und Gravitation aussehen könnte. Betrachtet man jedoch Propagation in gekrümmten Hintergründen in der Näherung der geometrischen Optik, benötigt man keine vollständige Theorie der Gravitation, da die (unbekannte) Rückreaktion der Raumzeit vernachlässigt wird. Man darf davon ausgehen, dass die Näherung der geometrischen Optik für modifizierte Maxwell-Theorie in gekrümmten Raumzeiten, analog wie für Standard-Elektrodynamik, für schwache elektromagnetische Felder gültig ist.

16.1. Photonischer Teil der Wirkung und effektive Metrik

Mit dem speziellen, nicht doppelbrechenden Ansatz (15.3)–(15.4) kann man den photonischen Teil der Lagrangedichte (15.9) vereinfacht schreiben als:

$$\mathcal{L}_{\text{modMax}} = -\sqrt{g} \left(1 - \frac{1}{2} \kappa(x) \zeta^\rho \zeta_\rho \right) \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \tilde{g}^{\mu\rho} \tilde{g}^{\nu\sigma}, \quad (16.1)$$

für $\zeta^\rho \zeta_\rho = g_{\rho\sigma} \zeta^\rho \zeta^\sigma = \pm 1$ und die *effektive* Metrik und inverse Metrik

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x) - \frac{\kappa(x)}{1 + \kappa(x) \zeta^\rho \zeta_\rho / 2} \zeta_\mu(x) \zeta_\nu(x), \quad (16.2a)$$

$$\tilde{g}^{\mu\nu}(x) = g^{\mu\nu}(x) + \frac{\kappa(x)}{1 - \kappa(x) \zeta^\rho \zeta_\rho / 2} \zeta^\mu(x) \zeta^\nu(x), \quad (16.2b)$$

für die gilt $\tilde{g}^{\mu\nu}\tilde{g}_{\nu\rho} = \delta^{\mu}_{\rho}$.

Im Folgenden wird gezeigt werden, dass die effektive Metrik (16.2) ein nützliches Instrument zur Beschreibung der Propagation von Lichtstrahlen in modifizierter Maxwell-Theorie darstellt. Zur Verdeutlichung sei darauf hingewiesen, dass Herauf- und Hinunterziehen von Indizes weiterhin mit der ursprünglichen Metrik $g_{\mu\nu}$ und ihrem Inversen $g^{\mu\nu}$ durchgeführt wird, soweit nicht ausdrücklich anders angegeben.

16.2. Dispersionsrelation und geometrische Optik

In diesem Unterkapitel werden Lichtstrahlen in modifizierter Maxwell-Theorie mit dem Ansatz (15.3)–(15.4) für den Lorentz-verletzenden Hintergrund betrachtet. Es wird gezeigt, dass die Lichttrajektorien in der Approximation der geometrischen Optik auf Nullgeodäten der effektiven Metrik (16.2) laufen.

Dazu wird ein Ebener-Wellen-Ansatz in Lorentz-Eichung $D_{\mu}A^{\mu} = 0$ betrachtet,

$$A_{\mu}(x) = C_{\mu}(x) e^{iS(x)}, \quad (16.3)$$

wobei, wie üblich, der Wellenvektor $k^{\mu}(x)$ als orthogonal zu Flächen gleicher Phase $S(x)$ definiert wird,

$$k_{\mu}(x) \equiv \partial_{\mu}S(x). \quad (16.4)$$

Im Folgenden vernachlässigen wir Ableitungen der Amplitude $C_{\mu}(x)$ und Terme, die den Ricci-Tensor enthalten. Diese Näherung setzt voraus, dass die typische Längenskala, auf der sich die Amplitude ändert, sehr viel kleiner ist als die typische Längenskala des Raumzeit-Hintergrundes (siehe z.B. [26, 67]). Die Vernachlässigung des Ricci-Tensor-Terms ist für die im Folgenden häufig diskutierte Schwarzschild-Geometrie sogar exakt, da es sich um eine Vakuumlösung ($R^{\mu\nu} = G^{\mu\nu} = 0$) handelt.

Setzt man den Ansatz (16.3) in die Feldgleichung (15.12) ein, so erhält man

$$k_{\mu}k_{\nu}g^{\mu\nu} = -\frac{\kappa}{1 - \kappa\tilde{\zeta}^{\rho}\tilde{\zeta}_{\rho}} \left(g^{\mu\nu}\tilde{\zeta}_{\mu}k_{\nu} \right)^2, \quad (16.5a)$$

oder äquivalent dazu

$$k_{\mu}k_{\nu}\tilde{g}^{\mu\nu} = 0. \quad (16.5b)$$

Die rechte Seite von (16.5a) gibt die Änderung in der Photonen-Dispersionsrelation an, die aufgrund des Lorentz-verletzenden Anteils der Lagrangedichte (15.11) auftritt. Wie erwartet enthält sie einen globalen Faktor $\kappa(x)$. Wie man aus (16.5b) und der Definition (16.4) leicht abliest ist der Vektor

$$\tilde{k}^\mu \equiv \tilde{g}^{\mu\nu} k_\nu = \dot{x}^\mu \quad (16.6)$$

tangential zu Nullgeodäten $x^\mu(\lambda)$ bezüglich der effektiven Metrik $\tilde{g}_{\mu\nu}$, denn es gilt

$$\tilde{k}^\mu \tilde{D}_\mu \tilde{k}_\nu = 0, \quad (16.7)$$

wenn man mit \tilde{D}_μ die zu $\tilde{g}_{\mu\nu}$ gehörende kovariante Ableitung bezeichnet. Hier und im Folgenden bezeichnet ein Punkt die Ableitung der Kurve nach dem affinen Parameter λ .

Um mögliche Schwierigkeiten in Bezug auf Kausalität zu vermeiden, wird im Folgenden der Parameterbereich der Theorie so eingeschränkt, dass keine, in Bezug auf die Originalmetrik, raumartigen Photontrajektorien auftreten. (In [68] wurde diskutiert, dass superluminale Dispersionsrelationen nicht notwendigerweise zu Schwierigkeiten mit klassischer Kausalität führen. Dennoch soll im Folgenden nur subluminale Propagation erlaubt sein, da einiges dafür spricht, dass die Quantisierung einer Lorentz-verletzenden Theorie nur möglich ist, wenn keine Gruppengeschwindigkeiten größer als 1 auftreten [69, 70].)

Wie oben gezeigt ist der Tangentenvektor an eine Photontrajektorie durch (16.6) gegeben. Wird nun verlangt, dass dieser bezüglich des Originalhintergrundes nicht raumartig ist, so führt das auf die Bedingung

$$\dot{x}^\mu g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu = k_\mu \tilde{g}^{\mu\nu} g_{\nu\alpha} \tilde{g}^{\alpha\beta} k_\beta \geq 0. \quad (16.8)$$

Mit der Definition der inversen Metrik (16.2b) findet man

$$\kappa(x) + \frac{1}{2} (\kappa(x))^2 \tilde{\zeta}^\rho \tilde{\zeta}_\rho \geq 0, \quad (16.9)$$

was für zeitartige $\tilde{\zeta}^\mu$ durch $\kappa(x) \geq 0$ oder $\kappa(x) \leq -2$ erfüllt wird und für raumartige $\tilde{\zeta}^\mu$ durch $0 \leq \kappa(x) \leq 2$. Um beide Möglichkeiten abzudecken, wird im Folgenden der Parameterbereich auf

$$0 \leq \kappa(x) < 2 \quad (16.10)$$

eingeschränkt, was, auf dem Niveau von Signalpropagationsgeschwindigkeit, Kausalität für raum- oder zeitartige $\tilde{\zeta}^\mu$ garantiert. Physikalisch interessant ist natürlich vor allem der Bereich kleiner κ , es wird sich jedoch später herausstellen,

dass ein bestimmtes Gedankenexperiment für kleine κ nicht realisierbar ist. Soweit nicht ausdrücklich anders gesagt, sind alle Ergebnisse gültig für den gesamten Bereich 16.10. In der obigen Diskussion der geometrischen Optik für modifizierte Maxwell-Theorie wurde sich auf den Ansatz (15.3)–(15.4) für das Lorentzverletzende Hintergrundfeld beschränkt. An die Funktion $\kappa(x)$ wurden jedoch keine Einschränkungen gemacht. Für die Diskussion um das Propagationsverhalten in Schwarzschild Hintergründen wird sich im Folgenden jedoch auf konstantes κ beschränkt werden.

Für die im Folgenden diskutierten Spezialfälle des Ansatzes (15.3)–(15.4) mit $\kappa \equiv \text{const}$ ist die Lagrangedichte (16.1) bis auf einen konstanten Faktor die Standard-Maxwell-Lagrangedichte in einem gekrümmten Hintergrund (16.2), da für diese Fälle die Wurzel der Determinante der Originalmetrik einfach proportional zur Wurzel der Determinante der effektiven Metrik ist. Für diese Fälle ließe sich also schon direkt aus der Lagrangedichte das Propagationsverhalten ableiten, ohne die obige Diskussion. Die Aussage, dass Lichtstrahlen in modifizierter Maxwell-Theorie auf Nullgeodäten einer effektiven Metrik laufen gilt jedoch, wie oben gezeigt, für eine größere Klasse von Ansätzen, bei denen die Lagrangedichte nicht einfach proportional der Standard Maxwell-Lagrangedichte mit effektiver Metrik ist.

17. Drei modifizierte Maxwell-Modelle im Schwarzschild-Hintergrund

In diesem Kapitel beschränken wir uns auf die Schwarzschild-Metrik als gegebenen Hintergrund,

$$ds^2 = (1 - 2M/r) dt^2 - (1 - 2M/r)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (17.1)$$

mit einem Parameter M der, wie üblich, als die Zentralmasse des Schwarzen Lochs interpretiert wird.

Die Lorentz-verletzenden Parameter ζ^μ dieser Beispiele sind per Hand eingeführt und werden, bis auf Weiteres, nicht durch eine zugrunde liegende Theorie bestimmt. Im Kapitel 21 wird jedoch auf mögliche dynamische Modelle zur Erzeugung von verschiedenen modifizierten Maxwell-Szenarien eingegangen.

17.1. Fall 1: Ricci-flache effektive Metrik mit modifiziertem Horizont

Als erstes Beispiel wählen wir einen Schwarzschild-Hintergrund (17.1) und

$$\zeta^\mu|_{\text{Fall 1}} = \left(\frac{1}{1 - 2M/r}, -\sqrt{2M/r}, 0, 0 \right) \quad (17.2)$$

für das Lorentz-verletzende Hintergrundfeld, das in Ansatz (15.4a) eingesetzt wird. $\kappa > 0$ wird konstant gewählt, im Limes $\kappa \rightarrow 0$ erhält man wieder Standard-Maxwell-Theorie. Mit Hilfe zweier abkürzender Parameter

$$\epsilon \equiv \frac{\kappa}{1 - \zeta^\rho \zeta_\rho \kappa/2} = \frac{\kappa}{1 - \kappa/2} > 0, \quad \chi \equiv \frac{\epsilon}{1 + \epsilon} > 0, \quad (17.3)$$

lässt sich die effektive Metrik (16.2a) dann schreiben als

$$\begin{aligned} d\tilde{s}^2|_{\text{Fall 1}} &= (1 - 2M/r - \chi) dt^2 - 2\chi \frac{\sqrt{2Mr}}{r - 2M} dt dr \\ &\quad - \frac{r}{r - 2M} \left(1 + \chi \frac{2M}{r - 2M} \right) dr^2 - r^2 d\Omega^2. \end{aligned} \quad (17.4)$$

Wie man aus der effektiven Metrik (17.4) für $r \gg 2M$ abliest, ist die maximale Photongeschwindigkeit durch $v_{r,\max} = \sqrt{1 - \chi}$ gegeben, was für kleine, positive χ kleiner ist, als die Maximalgeschwindigkeit für Lorentz-invariante Materie im Hintergrund (17.1).

Eine geeignete Koordinatentransformation

$$dt = \sqrt{1 + \epsilon} dT + \chi \frac{\sqrt{2Mr}}{r - 2M} \frac{1}{1 - 2M/r - \chi} dr \quad (17.5)$$

zeigt, dass es sich bei der Metrik (17.4) um eine Standard-Schwarzschild-Metrik mit neuer Masse handelt,

$$d\tilde{s}^2|_{\text{Fall 1}} = \left(1 - 2\tilde{M}/r \right) dT^2 - \left(1 - 2\tilde{M}/r \right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (17.6a)$$

$$\tilde{M} \equiv M(1 + \epsilon). \quad (17.6b)$$

Daraus wird ersichtlich, dass sich der Ereignishorizont für modifizierte Maxwell-Photonen, die der Lorentz-Verletzung des *Falles 1* genügen, in einem Standard-Schwarzschild-Hintergrund verschiebt, der effektive Horizont liegt bei $r = 2\tilde{M} = 2M(1 + \epsilon)$. In einer Theorie, die sowohl den Lorentz-verletzenden modifizierten Maxwell-Teil, als auch Standard-Materie, die keiner Lorentz-Verletzung unterläge, enthält, gäbe es demnach für verschiedene Materie verschiedene Ereignishorizonte. In [13] wurde ebenfalls eine Lorentz-verletzende Theorie mit zwei verschiedenen Ereignishorizonten untersucht, die dort diskutierte effektive Metrik ist gerade obiger *Fall 1*, der dort in Lemaître Koordinaten angegeben ist. In [13] und folgenden Publikationen [14, 71] wurde die Möglichkeit eines Perpetuum Mobiles zweiter Art für derartige Theorien mit zwei verschiedenen Horizonten diskutiert. Kapitel 19 wird näher darauf eingehen.

Die Annahme, dass jede Lorentz-verletzende Theorie mit Maximalgeschwindigkeiten, die von der Kausalgeschwindigkeit c abweichen, automatisch zu multiplen Horizonten (und damit zu Problemen des verallgemeinerten zweiten Hauptsatzes

führt) scheint zunächst sehr intuitiv. Dazu vergegenwärtige man sich, dass der Schwarzschild-Horizont in einer Lorentz-invarianten Theorie bei $r = 2 G_{\text{N}}M/c^2$ auftritt, wobei c hier die Maximalgeschwindigkeit aller Teilchen darstellt. Naiv könnte man schlussfolgern, dass Lorentz-verletzende Teilchen mit einer Maximalgeschwindigkeit kleiner als c automatisch einen effektiven Horizont außerhalb des Standard-Horizontes für Lorentz-invariante Materie wahrnehmen. Wie jedoch durch die beiden folgenden Beispiele gezeigt werden wird, ist diese naive Schlussfolgerung nicht allgemein gültig.

17.2. Fall 2: Nicht Ricci-flache effektive Metrik ohne Horizontverschiebung

Wieder betrachten wir einen Schwarzschild-Hintergrund (17.1), aber diesmal mit dem Hintergrundfeld

$$\zeta^\mu|_{\text{Fall 2}} = (0, \sqrt{1 - 2M/r}, 0, 0) . \quad (17.7)$$

Zunächst werden die Betrachtungen auf den Bereich $r > 2M$ beschränkt. κ wird wieder konstant und größer als Null gewählt. Für die effektive Photonmetrik (16.2a) findet man dann

$$d\tilde{s}^2|_{\text{Fall 2}} = (1 - 2M/r) dt^2 - \frac{1}{1 - \eta} (1 - 2M/r)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2 , \quad (17.8)$$

hier sind die zusätzlichen Hilfsparameter wie folgt definiert,

$$\eta \equiv \frac{\kappa}{1 - \tilde{\zeta}^\rho \tilde{\zeta}_\rho \kappa/2} = \frac{\kappa}{1 + \kappa/2} > 0 . \quad (17.9)$$

Für $r \gg 2M$ ist die maximale radiale Photongeschwindigkeit in der effektiven Metrik (17.8) durch $v_{\gamma, \text{rad}, \text{max}} = \sqrt{1 - \eta} < 1$ gegeben, während die maximale Tangentialgeschwindigkeit nicht beeinflusst wird, $v_{\gamma, \text{tang}, \text{max}} = 1$.

Die resultierende effektive Metrik (17.8) hat weiterhin eine Koordinatensingularität bei $r = 2M$, ist aber nicht einfach wieder eine Schwarzschild-Lösung. Das wird deutlich, wenn man den effektiven Ricci Skalar ausrechnet, der durch

$$R[\tilde{g}] = -2\eta/r^2 \quad (17.10)$$

gegeben ist. Es ist somit klar, dass sich das einfache Argument aus *Fall 1*, in dem die Horizontverschiebung dadurch zustande kam, dass die effektive Metrik wie-

der eine Schwarzschild-Metrik mit reskaliertem Masse war, sich hier nicht anwenden lässt. Die Teilchenhorizontstruktur der effektiven Metrik (17.8) gilt es im Folgenden zu klären. Konkrete Rechnungen dazu finden sich in Kapitel 18. Einige einfache Vorüberlegungen werden hier bereits präsentiert.

Eine erste physikalische Vorstellung der effektiven Raumzeit (17.8) gewinnt man, indem man, formal, eine Quelle sucht, die durch die Einsteingleichung eine solche Raumzeit erzeugen würde, $\tilde{G}^\alpha_\beta \equiv G^\alpha_\beta[\tilde{g}] = 8\pi T^\alpha_\beta$.

Der zu der effektiven Metrik (17.8) gehörende Einstein-Tensor ist durch $\tilde{G}^\alpha_\beta = \text{diag}(\eta/r^2, \eta/r^2, 0, 0)$ gegeben. Ein entsprechender Energie-Impuls-Tensor wird durch eine Flüssigkeit mit Vierergeschwindigkeit $u^\alpha = ((1 - 2M/r)^{-1/2}, 0, 0, 0)$ und konstanter Zustandsgleichung $w \equiv P/\rho = -1/3$ erzeugt; der Energie-Impuls-Tensor ist dann gegeben durch $T^\alpha_\beta = (\rho + P)u^\alpha u_\beta - P g^\alpha_\beta$. Physikalisch betrachtet benötigt man also Materie mit einer Zustandsgleichung vom Typ dunkler Energie, um die Raumzeit (17.8) zu erzeugen.

17.3. Fall 3: Ricci-flache effektive Metrik ohne Horizontverschiebung

Dieser Abschnitt behandelt ein drittes Beispiel für modifizierte Maxwell-Theorie in einem Schwarzschild-Hintergrund. Die resultierende effektive Metrik ist wieder die Schwarzschild-Metrik, sogar mit *derselben* Masse M , daher sieht es zunächst so aus, als hätte die Lorentz-Verletzung keinen Einfluß auf das Propagationsverhalten der Photonen. Dass dies, auf subtile Weise, dennoch der Fall ist, wird in Abschnitt 18.4 gezeigt.

Als Ansatz für das Lorentz-verletzende Hintergrundfeld wird gewählt

$$\tilde{\zeta}^\mu|_{\text{Fall 3}} = \left((1 - 2M/r)^{-1/2}, 0, 0, 0 \right), \quad (17.11)$$

wieder mit $0 < \kappa < 2$. Wie für den *Fall 2* ebenfalls, wird sich hier zunächst auf den Koordinatenbereich $r > 2M$ beschränkt.

Das effektive Linienelement (16.2a) ist jetzt

$$d\tilde{s}^2|_{\text{Fall 3}} = \frac{1}{1 + \epsilon} (1 - 2M/r) dt^2 - (1 - 2M/r)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (17.12)$$

wo ϵ wie in (17.3) definiert ist.

Im Bereich $r \gg 2M$ findet man für die maximale Photongeschwindigkeit in der effektiven Metrik (17.12) $v_{\gamma, \max} = 1/\sqrt{1+\epsilon} < 1$. Durch die Zeitreskalierung

$$t = \sqrt{1+\epsilon} \tilde{t} \quad (17.13)$$

geht die effektive Metrik (17.12) in die Standard-Schwarzschild-Metrik über.

Diese Äquivalenz zur Schwarzschild-Metrik sagt jedoch nur, dass Lichtstrahlen in der effektiven Metrik dieselben Pfade durchlaufen, wie Photonen in der Standard-Schwarzschild-Metrik. Im Bezugssystem eines (zur Originalmetrik stationären) Beobachters laufen die Lichtstrahlen jedoch mit einer von c verschiedenen Geschwindigkeit. Dazu betrachte man einen stationären Beobachter mit Vierergeschwindigkeit

$$u^\mu = \left((1 - 2M/r)^{-1/2}, 0, 0, 0 \right). \quad (17.14)$$

Der Übergang in ein lokales Inertialsystem dieses Beobachters ist durch folgendes Vierbein gegeben

$$e_t^0 = \sqrt{1 - 2M/r} = \left(e_r^1 \right)^{-1}, \quad e_\theta^2 = r, \quad e_\phi^3 = r \sin \theta, \quad (17.15)$$

andere Komponenten sind identisch null. Ein solcher Beobachter misst die Frequenz $\omega = g_{\mu\nu} k^\mu u^\nu = k^0$, wobei der Wellenvektor k^μ der Gleichung (16.5) genügt. Für die quadratische Dispersionsrelation im lokalen Inertialsystem des Beobachters findet man

$$\omega(\mathbf{k})^2 = \frac{1 - \kappa/2}{1 + \kappa/2} |\mathbf{k}|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon} |\mathbf{k}|^2, \quad (17.16)$$

mit dem Wellenvektor $\mathbf{k} \equiv (k^1, k^2, k^3)$. Für $\kappa > 0$ ist dann klar, dass Lichtstrahlen mit der Maximalgeschwindigkeit

$$v_{\gamma, \max} = \sqrt{\frac{1 - \kappa/2}{1 + \kappa/2}} < 1 \quad (17.17)$$

propagieren, was auch mit der Angabe einige Zeilen unter (17.12), die im asymptotischen Flächen gültig war, übereinstimmt. Im allgemeinen ist die Dispersionsrelation natürlich komplizierter für nicht isotrope Fälle, wie z. B. (17.2) and (17.7).

Wie in Kapitel 18 gezeigt werden wird, haben Photonen, die in einem effektiven Hintergrund wie (17.12) propagieren, messbar verschiedene Eigenschaften

von Standard-Photonen, die in einem Standard-Schwarzschild-Hintergrund propagieren. Das spiegelt die Tatsache wider, dass die Invarianz unter allgemeinen Koordinatentransformationen in der Theorie (15.9) gebrochen ist. Physikalisch relevant wird es jedoch erst, wenn in der Theorie zusätzlich Teilchen auftreten, die keine Lorentz-Brechung erfahren. Würden in einer Theorie nur Teilchen auftreten, die sich alle bezüglich der effektiven Metrik (17.12) bewegen würden, so ließe sich die Lorentzverletzung durch die Koordinatentransformation (17.13) wegtransformieren und hätte keine beobachtbaren Auswirkungen. Durch das Zusammenspiel von Lorentz-verletzenden Photonen und Lorentz-invarianter Materie jedoch ist das nicht mehr möglich, die globale Transformation (17.13) würde dann zwar die effektive Metrik in eine Standard-Schwarzschild-Metrik überführen, aber die ursprüngliche Schwarzschild-Metrik, die für die Propagation der Lorentz-invarianten Materie relevant wäre, würde dadurch nicht trivial transformiert. Ein Beobachter mit Messgeräten aus Standard-Materie spürt weiterhin den Original Schwarzschild-Hintergrund. Es ist die Präsenz dieser zwei verschiedenen Metriken, die die Ursache für die physikalischen Effekte, die im nächsten Kapitel behandelt werden, ist.

18. Gravitative Rotverschiebung und Lichtbeugung

In diesem Kapitel werden, als Beispiel für physikalische Effekte, die gravitative Rotverschiebung und Lichtbeugung an der Schwarzschild-Masse für die drei modifizierten Maxwell-Theorien *Fall 1-3* aus dem vorhergehenden Kapitel 17 berechnet. Außerdem wird explizit diskutiert, dass für die effektiven Metriken (17.8) und (17.12) aus *Fall 2* und *Fall 3* am naiv erwarteten Wert $r = 2M/(1 - \eta)$ bzw. $r = 2M(1 + \epsilon)$ kein Teilchenhorizont auftritt. Dafür wird einerseits die Rotverschiebung diskutiert (Kapitel 18.3) und andererseits gezeigt, dass ein Photon die jeweilige Region, in der man naiv einen Horizont erwarten könnte, verlassen und, in endlicher Koordinatenzeit, in den asymptotisch flachen Teil der Raumzeit propagieren kann (Kapitel 18.2). Begonnen wird mit der Diskussion der existierenden Horizonte in den drei Fällen.

18.1. Horizonte (Fall 1)

Genau wie für die Standard-Schwarzschild-Metrik wechseln die Koordinaten t und r im *Fall 1* für das Linienelement (17.4) ihren Charakter: t wird raumartig und r wird zeitartig. Ein Photon, das von einer Position $r < 2\tilde{M}$ aus emittiert wird, muss immer lokal vorwärts in der Zeit propagieren, was konkret bedeutet, dass r kleiner werden muss, und kann deshalb niemals die Region $r < 2M$ verlassen [72]. Das wird auch durch Studium der Nullgeodäten innerhalb der Region $r < 2M$ bestätigt. $r = 2\tilde{M}$ ist also, wie erwartet, ein Teilchenhorizont für die Photonen aus *Fall 1*.

Ein ähnliches Argument lässt sich auch für *Fall 2-3* anwenden, wenn man einerseits \tilde{M} durch M und andererseits die folgenden Annahmen für die Lorentz-verletzenden Parameter ξ^μ in der Innenregion $r < 2M$ macht:

$$\xi^\mu \Big|_{\text{Fall 2, interior}} = \left(0, \sqrt{2M/r - 1}, 0, 0 \right), \quad (18.1a)$$

$$\tilde{\zeta}^\mu \Big|_{\text{Fall 3, interior}} = \left(1/\sqrt{2M/r-1}, 0, 0, 0 \right). \quad (18.1b)$$

Mit diesen zusätzlichen Annahmen ist $r = 2M$ ein Teilchenhorizont für die Photonen aus *Fall 2* und *Fall 3*. Allerdings beruht das Argument auf der ad-hoc Annahme für die Struktur der Lorentz Verletzung innerhalb dieser Regionen. Im nächsten Absatz wird gezeigt werden, dass die Oberfläche $r = 2M$, unabhängig von Annahmen über die Struktur der Lorentz Verletzung innerhalb des Horizontes einen Rotverschiebungshorizont für einen weit entfernten Beobachter darstellt.

Wird nun Standard-Lorentz-invariante Materie zu den modifizierten Maxwell-Photonen hinzugefügt, dann existiert im *Fall 1* ein äußerer Horizont für die Photonen und ein innerer Horizont für die Standard-Materie. Innerhalb dieser beiden Regionen befindet sich, wie im Kapitel 19 diskutiert werden wird, eine sogenannte Ergosphäre, die für die mögliche Konstruktion eines Perpetuum Mobiles zweiter Art relevant ist.

Die Horizonte in *Fall 2* und *Fall 3* für modifizierte Maxwell-Photonen und Standard-Materie stimmen überein, hier scheint die Konstruktionen eines Perpetuum Mobiles, das auf der Existenz der Ergosphäre beruht, analog zur Diskussion in [14] ausgeschlossen zu sein.¹

18.2. Kein äußerer Photon Horizont für Fall 2 und 3

Betrachtet man die effektive Metrik (17.4) für *Fall 1*, so findet man für die (Maximal)geschwindigkeit des modifizierten Lichts $v_{\gamma, \max} = c/\sqrt{1+\epsilon}$. Diese modifizierte Maximalgeschwindigkeit ist mit einem modifizierten Teilchenhorizont $r = \tilde{r}_{\text{Schw}} \equiv (1+\epsilon)r_{\text{Schw}} = (1+\epsilon)2M$ verknüpft [13, 14]. Es scheint daher naheliegend, diesen Zusammenhang zu verallgemeinern, dass heißt zu schließen, dass mit einer modifizierten Maximalgeschwindigkeit \tilde{c} immer ein modifizierter Horizont $r = \tilde{r}_{\text{Schw}} = c^2/\tilde{c}^2 r_{\text{Schw}}$ einhergeht, insbesondere wenn man sich vergegenwärtigt, dass der Standard-Schwarzschild-Horizont durch $r = 2G_{\text{N}}M/c^2$ gegeben ist. Nach dieser eigentlich intuitiven Argumentation müssten auch im *Fall 2* und *Fall 3* äußere Photonhorizonte existieren, analog wie im *Fall 1*. In der folgenden Rechnung wird jedoch explizit gezeigt werden, dass diese heuristische Ableitung *nicht* zutrifft und dass keine modifizierten (äußeren) Photonhorizonte existieren.

¹Für ein Perpetuum Mobile, das auf der Idee der Hawking-Strahlung beruht, ist die Diskussion nicht so eindeutig. Auch wenn der Horizont in den Fällen 2 und 3 nicht modifiziert wird, muss dennoch den Fällen 2 und 3 eine modifizierte Temperatur zugeordnet werden, vgl. die Diskussion in Abschnitt 19.11.

Für Fall 2 ist die Maximalgeschwindigkeit richtungsabhängig: Teilchen die sich „parallel“ zum Hintergrundfeld ξ^μ (17.7) bewegen, haben die Maximalgeschwindigkeit $\sqrt{1-\eta}$. Nach obiger „Ableitung“ könnte man also für $r = 2M/(1-\eta)$ nicht-triviale Effekte erwarten, zumindest für Photonen mit nichtverschwindender Radialgeschwindigkeit.

Im Folgenden soll ein Photon betrachtet werden, das am Punkt $r = 2M/(1-\eta/2) < 2M/(1-\eta)$, also *innerhalb* des naiv postulierten Horizontes, startet und geodätisch nach außen propagiert. Der Einfachheit halber wird rein radiale Propagation angenommen. Es wird dann gezeigt werden, dass es zu beliebig großen Koordinaten r in endlicher Koordinatenzeit t propagieren kann. Daher ist $r = 2M/(1-\eta)$ im Fall 2 kein Teilchenhorizont und somit wird gezeigt, dass die heuristische Annahme, mit einer modifizierten maximalen Teilchengeschwindigkeit gehe immer ein modifizierter Horizont einher, falsch ist.

Der Schwarzschild-Horizont $r_{\text{Schw}} = 2M$ bleibt bestehen, er manifestiert sich etwa durch das Verschwinden des zeitartigen Killingfeldes. Wie oben diskutiert, lässt sich, unter zusätzlichen Annahmen für die Struktur des Hintergrundfeldes innerhalb des Horizontes, zeigen, dass es sich auch um einen Teilchenhorizont im oben definierten Sinne handelt. Sowohl Lorentz-invariante Materie wie Standard-Protonen, -Neutronen, -Elektronen als auch die modifizierten Maxwell-Photonen hätten dann einen Teilchenhorizont an der Stelle $r = 2M$.

Der Tangentenvektor für ein radial auslaufendes Photon $\dot{x}^\mu(\lambda)$ mit dimensionlosem affinen Parameter λ ist durch die folgenden Differentialgleichung gegeben:

$$\dot{x}^\mu = E \left(\frac{r}{r-2M}, \sqrt{1-\eta}, 0, 0 \right), \quad (18.2)$$

für $r \geq 2M/(1-\eta/2)$. E bezeichnet eine energie-artige Konstante der Bewegung und ist in (18.9a) definiert. Auf die detaillierte Struktur der Geodätengleichung in den Raumzeiten (17.8) und (17.12) wird in Abschnitt 18.4 eingegangen.

Für eine zur Zeit $t = 0$ vom Punkt

$$r_{\text{start}} \equiv r_{\text{Schw}}/(1-\eta/2) = 2M/(1-\eta/2) \quad (18.3a)$$

startende Geodäte findet man für den integrierten Pfad

$$x^\mu(\lambda) = \left(E \tau(\lambda), E \lambda \sqrt{1-\eta} + r_{\text{start}}, 0, 0 \right), \quad (18.3b)$$

$$\tau(\lambda) = \lambda + \frac{2M}{E\sqrt{1-\eta}} \ln \left(1 + \frac{E \lambda \sqrt{1-\eta}}{r_{\text{start}} - r_{\text{Schw}}} \right), \quad (18.3c)$$

für $\lambda \in [0, \infty)$. Es können beliebig hohe Werte für r in endlicher Zeit t erreicht werden, daher handelt es sich bei $r = 2M/(1 - \eta)$ nicht um einen Teilchenhorizont. Eine analoge Rechnung für den *Fall 3* zeigt, dass ebenfalls kein äußerer Photonhorizont existiert.

18.3. Rotverschiebung

Um die Rotverschiebung in modifizierter Maxwell-Theorie zu diskutieren, wird die Geodätengleichung

$$k_\mu \tilde{g}^{\mu\nu} k_\nu = 0, \quad \tilde{g}^{\mu\nu} k_\nu \tilde{D}_\mu k_\lambda = 0, \quad (18.4)$$

für einen Lichtstrahl der durch den Tangentenvektor $\tilde{k}^\mu = \tilde{g}^{\mu\nu} k_\nu$ beschrieben wird, explizit gelöst. \tilde{D}_μ steht hier für die kovariante Ableitung bezüglich der effektiven Metrik $\tilde{g}_{\mu\nu}$. Für das dem hypothetischen Messprozess zugrunde liegende Gedankenexperiment wird ein Messinstrument angenommen, das aus konventioneller Materie (Protonen, Neutronen, Elektronen) gebaut ist. So muss, zumindest in erster Ordnung in κ , keine weitere, durch den Messprozess induzierte, Lorentzverletzung berücksichtigt werden. Wir betrachten einen Beobachter am Raumzeitpunkt P_i mit beliebiger Vierergeschwindigkeit. Die von ihm gemessene Frequenz einer Wellenfront mit Tangentenvektor k_μ ist gegeben durch

$$\omega_{P_i} = k_\mu g^{\mu\nu} u_\nu \Big|_{P_i}. \quad (18.5)$$

Im Folgenden wird die Diskussion auf stationäre Beobachter mit $u^\mu = t^\mu / (t^\nu t_\nu)$ beschränkt, was lediglich zusätzliche Dopplereffekte ausschließt, die unabhängig von der Lorentzverletzung sind. t^μ ist das zeitartige Killingfeld im Schwarzschild-Hintergrund des Beobachters.

Die Rotverschiebung für alle drei Fälle ergibt sich zu

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} \Big|_{\text{Fall 1,2,3}} = \sqrt{\frac{1 - 2G_N M / (r_2 c^2)}{1 - 2G_N M / (r_1 c^2)}}. \quad (18.6)$$

Hier wurden G_N und c explizit angegeben. Die Gleichung (18.6) ist nur gültig, solange beide Punkte P_i außerhalb des jeweiligen Photonhorizontes liegen, d.h. $r_i > 2\tilde{M}$ für *Fall 1* und $r_i > 2M$ für *Fall 2* und *Fall 3*.

Um die Rotverschiebungshorizonte zu identifizieren, wird folgendes Gedankenexperiment konstruiert. Eine starke Gammaquelle bewege sich auf die Schwarzschild-Singularität zu und emittiere dabei Photonen (der Einfachheit halber sei die Emission isotrop im Ruhesystem der Quelle angenommen). Ein „im Unendlichen“ ($r_2 \gg 2M$) sitzenden Beobachter misst dann folgende Rotverschiebung:

$$z \approx 1/\sqrt{1 - 2M/r_1} - 1. \quad (18.7)$$

r_1 ist der Emissionspunkt des Gammaquants (hier wurden Dopplereffekte vernachlässigt, die für den Kernpunkt des Arguments keine Rolle spielen). Für die Fälle 2–3 divergiert die Rotverschiebung (18.7), wenn die Quelle $r_1 = 2M$ erreicht. Für Fall 1 dagegen ist die maximale Rotverschiebung, die ein Beobachter im Unendlichen messen wird

$$z = 1/\sqrt{1 - 2M/(2M(1 + \epsilon))} - 1 = \sqrt{(1 + \epsilon)/\epsilon} - 1, \quad (18.8)$$

was groß, aber endlich ist für kleine, positive ϵ . Das Beispiel zeigt klar, dass in Lorentz-verletzenden Theorien Rotverschiebungs- und Teilchenhorizonte nicht einfach gleichgesetzt werden können.

18.4. Lichtbeugung an einer Schwarzschild-Masse

Ein wohlbekannter Effekt in Standard-Einstein-Maxwell-Theorie ist die Lichtablenkung an einer Schwarzschild-Masse [26]. Im Folgenden wird dieser Prozess für modifizierte Maxwell-Theorie untersucht, deren Lichtstrahlen Gleichung (15.12) genügen.

Für alle drei effektiven Raumzeiten aus Abschnitt 17 existiert ein zeitartiges und ein Rotations-Killing-Feld, die durch $t^\mu = (\partial/\partial t)^\mu$ und $\psi^\mu = (\partial/\partial \phi)^\mu$ gegeben sind. Außerdem bewegt sich, wiederum genau wie im Standard Schwarzschild-Hintergrund, eine Geodäte immer in einer Äquatorialebene, die sich durch globale Rotationen in die durch $\theta = \pi/2$ definierte Ebene überführen lässt.

Im Fall 2 und Fall 3 ist die effektive Metrik weiterhin diagonal. Es ist damit möglich, ähnlich wie in der Schwarzschild-Metrik [26] für Nullgeodäten $x^\mu(\lambda)$ in den Hintergründen (17.8) und (17.12) die folgenden Konstanten der Bewegung zu identifizieren:

$$E = \tilde{g}_{\mu\nu} t^\mu \tilde{k}^\nu = \tilde{g}_{tt} \dot{t}, \quad (18.9a)$$

$$L = -\tilde{g}_{\mu\nu} \psi^\mu \tilde{k}^\nu = r^2 \dot{\phi}. \quad (18.9b)$$

In obiger Gleichung bezeichnet $\dot{x}^\mu(\lambda) = \tilde{k}^\mu$ den Tangentenvektor an die Geodäte. Benutzt man die Konstanten der Bewegung (18.9), so vereinfacht sich die (integrierte) Geodätengleichung in den jeweiligen Hintergründen zu

$$0 = \frac{E^2}{\tilde{g}_{tt} \tilde{g}_{rr}} + \dot{r}^2 - \frac{L^2}{r^2 \tilde{g}_{rr}}. \quad (18.10)$$

Durch Auflösen von (18.10) nach \dot{r} und Isolation von $\dot{\phi}$ aus (18.9b) ergibt sich für den Orbit eines Lichtstrahls:

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{L}{r^2} \frac{1}{\sqrt{-E^2/(\tilde{g}_{rr} \tilde{g}_{tt}) + L^2/(r^2 \tilde{g}_{rr})}}. \quad (18.11)$$

Für den Ablenkungswinkel $\Delta\phi$ findet man

$$\Delta\phi = 2 \int_{r_0}^{\infty} dr \frac{d\phi}{dr}, \quad (18.12)$$

wobei der Minimalabstand r_0 durch

$$\left. \frac{dr}{d\phi} \right|_{r=r_0} = 0 \quad (18.13)$$

gegeben ist.

Setzt man konkret die effektive Metrik (17.8) für *Fall 2* ein, so findet man

$$\left. \frac{d\phi}{dr} \right|_{\text{Fall 2}} = \frac{L}{r^2 \sqrt{1-\eta}} \frac{1}{\sqrt{E^2 - L^2(1-2M/r)/r^2}}, \quad (18.14)$$

was einem $1/\sqrt{1-\eta}$ mal dem Standard-Ausdruck ist. Der Parameter η ist durch (17.9) gegeben. Der gesamte Ablenkungswinkel ist also, wenn man ihn mit dem Ausdruck für normale, Lorentz-invariante Photonen vergleicht, um denselben Faktor modifiziert,

$$\Delta\phi|_{\text{Fall 2}} = 1/\sqrt{1-\eta} \frac{4G_N M E}{L c^2} = 1/\sqrt{1-\eta} \Delta\phi|_{\text{Standard}}, \quad (18.15)$$

wobei G_N und c explizit aufgeführt sind. E und L haben die Dimensionen einer Länge, bzw. eines Längenquadrates und der Standard-„Impact Parameter“ lautet ausgedrückt durch diese Größen $b \equiv L/E$. Man beachte, dass üblicherweise nicht der gesamte Ablenkungswinkel $\Delta\phi$ angegeben wird, sondern die Differenz zu π , $\delta\phi_{\text{Standard}} \equiv -\pi + \Delta\phi$. Im Standard-Schwarzschild-Fall ergibt die Lösung des Integrals (18.12) in nullter Ordnung gerade π , was einer „Ablenkung“ (sprich dem

geraden Flug) im flachen Fall entspricht. In erster Ordnung in M findet man im Schwarzschild-Fall [26]

$$\delta\phi|_{\text{Standard}} = \frac{4G_{\text{N}}ME}{Lc^2} + O(G_{\text{N}}ME/(Lc^2))^2. \quad (18.16)$$

Für die Theorien (17.8) und (17.12) liegt der Fall anders, das Integral in nullter Ordnung in M ergibt nicht π , sondern $1/\sqrt{1-\eta}\pi$. Die modifizierten Photonen im Flachen fliegen hier nicht geradeaus, was an den nichtkonstanten Hintergrundfeldern (17.7) und (17.11) liegt. Für die Abweichung $\delta\phi|_{\text{Fall 2}} \equiv -\pi + \Delta\phi|_{\text{Fall 2}}$ von π findet man damit

$$\delta\phi|_{\text{Fall 2}} = \frac{1-\sqrt{1-\eta}}{\sqrt{1-\eta}}\pi + \frac{1}{\sqrt{1-\eta}}\delta\phi|_{\text{Standard}}. \quad (18.17)$$

Analog findet man für den Fall 3:

$$\left.\frac{d\phi}{dr}\right|_{\text{Fall 3}} = \frac{L}{r^2} \frac{1}{\sqrt{E^2(1+\epsilon) - L^2(1-2M/r)}/r^2}, \quad (18.18)$$

mit ϵ gegeben durch (17.3). Das sich aus (18.12) ergebende Integral lässt sich leicht in erster Ordnung in M bestimmen. Für den Ablenkungswinkel findet man dann

$$\delta\phi|_{\text{Fall 3}} = \left(\sqrt{1+\epsilon} - 1\right)\pi + \sqrt{1+\epsilon}\delta\phi|_{\text{Standard}}. \quad (18.19)$$

Der Fall 1 ist etwas komplizierter. Selbstverständlich lässt sich die Rechnung einfach im Bezugssystem (17.6) durchführen. Dort handelt es sich um die bekannte Lichtablenkung an einer Schwarzschild-Masse mit der modifizierten Masse \tilde{M} und man erhält $\delta\phi = 4G_{\text{N}}\tilde{M}\tilde{E}/(c^2\tilde{L})$. Nun bezeichnen aber hier \tilde{E} und \tilde{L} die Konstanten der Bewegung im Hintergrund (17.6), und diese müssen noch zu den physikalisch messbaren Größen E_{phys} und L_{phys} in Bezug gesetzt werden, die ein (in Bezug auf die Originalmetrik) stationärer Beobachter im Unendlichen messen würde. Unter Benutzung der Transformation (17.5) findet man den Zusammenhang

$$E_{\text{phys}} = \tilde{E}/\sqrt{1+\epsilon}, \quad L_{\text{phys}} = \tilde{L}, \quad (18.20)$$

womit sich der Ablenkungswinkel für den Fall 1 zu

$$\delta\phi|_{\text{Fall 1}} \approx \frac{(1+\epsilon)^{3/2} 4G_{\text{N}}ME_{\text{phys}}}{c^2L_{\text{phys}}} = (1+\epsilon)^{3/2} \delta\phi_{\text{Standard}} \quad (18.21)$$

ergibt. Hier wurden wiederum Terme der Ordnung $(G_{\text{N}}ME_{\text{phys}}/(L_{\text{phys}}c^2))^2$ oder höher vernachlässigt.

18. Gravitative Rotverschiebung und Lichtbeugung

Für die drei betrachteten Beispiele ist die Ablenkung von modifizierten Maxwell-Photonen and einer Schwarzschild-Masse quantitativ verschieden von der Ablenkung, die Standard-Photonen erfahren würden².

²Da nur ein Photon-Typ in der Natur realisiert ist, sollte man in einem Gedankenexperiment adäquaterweise modifizierte Photonen und, beispielsweise, ultrahochrelativistische Protonen oder Elektronen vergleichen.

19. Lorentz-Verletzung und der verallgemeinerte zweite Hauptsatz der Thermodynamik

Studiert man Lorentz-verletzende Theorien, so ist es wichtig, sie hinsichtlich der Konsistenz mit fundamentalen Ergebnissen der Physik zu überprüfen. Beispielsweise sind Unitarität und (Mikro-)kausalität in explizit Lorentz-verletzenden Theorien nicht notwendigerweise gewährleistet, sondern abhängig von der Wahl der Lorentz-verletzenden Parameter, der Nachweis von Unitaritäts- oder Kausalitätsverletzung bietet somit die Möglichkeit, bestimmte Klassen von Lorentz-verletzenden Theorien auszuschließen [16, 17].

Koppelt man Lorentz-verletzende Theorien an die Gravitation, so scheint es unter bestimmten Voraussetzungen fraglich, ob der verallgemeinerte zweite Hauptsatz der Thermodynamik in solchen Theorien Gültigkeit besitzt. In verschiedenen Veröffentlichungen wurde die Möglichkeit der Realisierung eines Perpetuum Mobiles zweiter Art in Lorentz-verletzenden Theorien diskutiert [13–15, 73, 74]. Die Verletzung des verallgemeinerten zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik stellt damit möglicherweise ein weiteres Ausschlusskriterium für bestimmte Klassen Lorentz-verletzender Theorien dar.

Es existieren verschiedene Grundideen, ein solches Perpetuum Mobile zu realisieren, zwei davon sollen im Folgenden für das Beispiel modifizierter Maxwell-Theorie vertieft werden.

Eine bestimmte Realisierung wurde in [14] vorgeschlagen. Sie basiert auf der Existenz von multiplen Horizontstrukturen, die, wie in Kapitel 18.2 diskutiert wurde, in Lorentz-verletzenden Theorien vorkommen können, aber nicht zwangsläufig auftreten müssen. Die Grundidee ist, die unterschiedlichen effektiven Horizonte für verschiedene Teilchen-Spezies zu nutzen, und Streuprozesse in der sogenannten Ergosphäre zu betrachten. Damit ist unmittelbar klar, dass diese Realisierung eines Perpetuum Mobiles in den Modellen 2 und 3 nicht möglich ist, da dort der Horizont der Photonen nicht modifiziert wird. In den Kapitel 19.2-19.10 wird

eine konkrete Realisierung der in [14] vorgestellten Idee für modifizierte Maxwell-Theorie mit der Parameter-Konfiguration (17.2) diskutiert.

Eine weitere Idee für die Verletzung des verallgemeinerten zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik basiert darauf, dass Schwarzen Löchern in Lorentz-verletzenden Theorien keine für alle Teilchen universale Temperatur mehr zugeordnet werden kann. Dieser Umstand kann dazu genutzt werden, einen Wärmefluss von einer heißen zu einer kälteren Schale zu realisieren [13], und damit den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik explizit zu verletzen. Diese Idee greift auf das Konzept der Hawking-Strahlung zurück. Die Möglichkeit eines analogen Perpetuum Mobiles für die verschiedenen Konfigurationen in modifizierter Maxwell-Theorie wird in Kapitel 19.11 diskutiert.

19.1. Der verallgemeinerte zweite Hauptsatz der Thermodynamik

19.1.1. Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik

Für den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik existieren verschiedene äquivalente Formulierungen. In der ursprünglichen Formulierung von Claudius lautet er: „Es gibt keine Zustandsänderung, deren einziges Ergebnis der Fluss von Wärme von einem kälteren zu einem wärmeren Körper ist.“

Eine andere äquivalente Formulierung ist: „Befindet sich ein geschlossenes System in einem Nicht-Gleichgewichtszustand, so ist die wahrscheinlichste Konsequenz, dass sich das System zu einem späteren Zeitpunkt in einem Zustand höherer Entropie befindet“, [75].

19.1.2. Klassische Thermodynamik Schwarzer Löcher

Bekenstein hat eine bemerkenswerte mathematische Analogie in den siebziger Jahren gefunden. In den siebziger Jahren wurde eine bemerkenswerte Analogie zwischen den Gesetzen Schwarzer Löcher und denen der Thermodynamik etabliert [76–79].

Bezeichnet man mit A die Oberfläche eines Schwarzen Loches und mit κ_{sf} die Oberflächenbeschleunigung, so erhält man, mit der formalen Ersetzung $E \leftrightarrow M$, $T \leftrightarrow c\kappa$, und $S \leftrightarrow A/(8\pi\kappa_{sf})$, die folgende Analogie:

Hauptsatz	Thermodynamik	Schwarze Löcher
Nullter Hauptsatz	Die Temperatur eines eines Körpers im thermischen Gleichgewicht ist konstant	κ_{sf} ist konstant entlang des Horizonts eines stationären Schwarzen Loches
Erster Hauptsatz	$dE = TdS +$ Terme mechanischer Arbeit	$dM = 1/(8\pi)\kappa_{sf}dA +$ Terme für rotierende Schwarze Löcher
Zweiter Hauptsatz	$\delta S \geq 0$	Die Fläche des Horizontes kann niemals abnehmen $\delta A \geq 0$

Insbesondere wurde gezeigt, dass (innerhalb klassischer Gravitationstheorie) die Oberfläche A eines Schwarzen Loches niemals geringer werden kann.

19.1.3. Hawking-Strahlung und der verallgemeinerte zweite Hauptsatz der Thermodynamik

Mit der Entdeckung der Hawking-Strahlung 1974 [80] konnte gezeigt werden, dass aufgrund von Quanteneffekten ein Schwarzes Loch ein Schwarzkörperspektrum der Temperatur

$$T_{\text{Hawking}} = \frac{\kappa_{sf}}{2\pi} \quad (19.1)$$

emittiert. Damit war gezeigt, dass es sich bei der Größe $\kappa_{sf}/2\pi$ tatsächlich um die physikalische Temperatur eines Schwarzen Loches und nicht nur um eine formale mathematische Analogie handelte. Mit der Definition für die Entropie eines Schwarzen Loches

$$S_{\text{BH}} = A/4 \quad (19.2)$$

wird der verallgemeinerte zweite Hauptsatz der Thermodynamik postuliert [77]:

„Die Gesamtentropie als Summe der Entropie des Schwarzen Loches und der Entropie der äußeren Welt kann nicht abnehmen.“

Wie auch der zweite Hauptsatz der Thermodynamik lässt sich der verallgemeinerte zweite Hauptsatz der Thermodynamik nicht strikt beweisen [79]. Eine manifeste Verletzung des verallgemeinerten zweiten Hauptsatzes würde dennoch starke Zweifel an der Validität der zugrunde liegenden Theorie aufwerfen, da (zumindest der herkömmliche) zweite Hauptsatz der Thermodynamik eine starke empirische Erfahrungstatsache darstellt.

19.2. Grundidee des Compton-Streuprozesses

Im Folgenden soll versucht werden, eine konkrete Realisierung des in [14] vorgeschlagenen Prozesses gefunden werden, das heißt versucht werden, ein Gedankenexperiment im Rahmen modifizierter Maxwell Theorie zu konstruieren, das eindeutig in der Lage ist, den verallgemeinerten zweiten Hauptsatz der Thermodynamik zu verletzen. Die Ergebnisse wurden zur Veröffentlichung eingereicht [20].

Die zugrunde liegende Theorie ist modifizierte Maxwell-Theorie, in einem vorgegebenen Schwarzschild-Hintergrund, gegeben durch (16.1), (16.2), und (17.2), mit konstantem, nicht-verschwindendem κ . Zusätzlich enthalte die Wirkung einen Standard-Dirac-term [43, 81] für (geladene) Elektronen. In diesem Szenario liegt, wie in Kapitel 17.1 diskutiert, für die Photonen ein effektiver Schwarzschildradius an der Stelle $r = 2M(1 + \epsilon)$ vor, der Schwarzschildradius für die Elektronen befindet sich weiterhin an der Stelle $r = 2M$. Der Bereich zwischen diesen Horizonten soll weiterhin als Ergosphäre bezeichnet werden.

Betrachtet wird nun ein Compton-Streuprozess, bei dem das einlaufende Elektron und einlaufende Photon im Unendlichen präpariert werden, auf Geodäten in die Ergosphäre einlaufen und dort streuen. Das auslaufende Elektron soll nach dem Stoß auf einer Geodäte ins Unendliche laufen und dabei mehr Killing-Energie tragen als die Summe der Killing-Energien der einlaufenden Teilchen. Das auslaufende Photon trägt damit negative Killing-Energie und verringert dadurch die Masse des Schwarzen Loches. Das ist physikalisch möglich, da sich das Photon bereits hinter seinem Horizont befindet, und das asymptotisch zeitartige Killingfeld der effektiven Photon-Metrik bereits raumartig ist. In verschiedenen Veröffentlichungen wurde der Verdacht geäußert, dass solche Prozesse in der Lage sein könnten, den verallgemeinerten zweiten Hauptsatz der Thermodynamik zu verletzen [14, 71]. Das soll im Folgenden erörtert werden.

19.3. Modifizierte QED in gekrümmten Raumzeiten

Die dem betrachteten Compton-Streuprozess zugrunde liegende Wirkung der modifizierten Quantenelektrodynamik sieht wie folgt aus. Der photonische Teil ist durch

$$\mathcal{L}_{\text{modM}} = -\frac{1}{4} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} - \frac{1}{4} \kappa^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} , \quad (19.3a)$$

$$\kappa^{\mu\nu\rho\sigma} \equiv \kappa^{abcd} e^{\mu}_a e^{\nu}_b e^{\rho}_c e^{\sigma}_d. \quad (19.3b)$$

mit der Wahl (15.3)–(15.4) und konstantem Parameter κ für den Tensor $\kappa^{\mu\nu\rho\sigma}$ gegeben.

Der an die Gravitation gekoppelte Standard-Dirac-Term ist [43]

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}(x) \left(\frac{1}{2} \gamma^a e^{\mu}_a \overset{\leftrightarrow}{\nabla}_{\mu} - m \right) \psi(x). \quad (19.4)$$

γ^a bezeichnen die Standard-Dirac Gamma-Matrizen und $\nabla_{\mu}\psi$ die Eich- und Lorentz-kovariante Ableitung der Spinoren [43],

$$\nabla_{\mu}\psi \equiv \partial_{\mu}\psi + \Gamma_{\mu}\psi - eA_{\mu}\psi. \quad (19.5)$$

Ausgeschrieben lautet der Spin-Zusammenhang,

$$\Gamma_{\mu} = \frac{1}{2} \Sigma^{ab} e_a^{\nu} \partial_{\mu}(e_{b\nu}), \quad (19.6a)$$

$$\Sigma_{ab} \equiv \frac{1}{4} (\gamma_a \gamma_b - \gamma_b \gamma_a). \quad (19.6b)$$

Der Vollständigkeit halber soll auch noch der Einstein-Hilbert-Term angegeben werden [26],

$$\mathcal{L}_{EH} = \frac{1}{16\pi} R, \quad (19.7)$$

mit Ricci-Skalar R der zugehörigen Metrik $g_{\mu\nu}$.

Die gesamte Wirkung der an die Gravitation gekoppelten modifizierten Elektrodynamik ist dann durch

$$S = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \sqrt{-g} (\mathcal{L}_{EH} + \mathcal{L}_{\text{modM}} + \mathcal{L}_D) \quad (19.8)$$

gegeben.

Im Folgenden werden jedoch Compton-Streuprozesse in einem vorgegebenen Schwarzschild-Hintergrund, also nicht die volle dynamische Theorie (19.8), betrachtet.

19.4. Geodätische Bewegungen, Killingfelder und Erhaltungsgrößen

Mithilfe der Symmetrien des Schwarzschild-Hintergrundes lässt sich die geodätische Bewegung eines Testteilchens in einem Schwarzschild-Hintergrund auf eine eindimensionale Bewegung in einem effektiven Potential reduzieren [26]. Für (massive) Elektronen reduziert sich die Bewegungsgleichung auf

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + V_{\text{Elektron}}(r) = 1/2E_{\text{Killing}}^2 \quad (19.9a)$$

mit

$$V_{\text{Elektron}}(r) = \frac{1}{2} - M/r + L_{\text{Killing}}^2/(2r^2) - ML_{\text{Killing}}^2/r^3. \quad (19.9b)$$

\dot{r} bezeichnet die Ableitung der Radialkoordinate nach der Eigenzeit, $E_{\text{Killing}}, L_{\text{Killing}}$ die erhaltene Killing-Energie und den erhaltenen Killing-Drehimpuls des Teilchens, und M die Schwarzschildmasse. Das effektive Potential kann, für entsprechend hohe Killing-Drehimpulse, ein Maximum an der Stelle

$$r_{\text{max}} = \frac{L_{\text{Killing}}^2 - \sqrt{L_{\text{Killing}}^4 - 12L_{\text{Killing}}^2 M^2}}{2M} \quad (19.10)$$

haben. Der Wert des Maximums beträgt

$$V_{\text{max}} = \frac{r_{\text{max}} - 2M}{\sqrt{r_{\text{max}}^2 - 3Mr_{\text{max}}}}. \quad (19.11)$$

Auch die Bewegungsgleichung der modifizierten Photonen lässt sich auf eine eindimensionale Bewegung in einem effektiven Potential reduzieren. Da die Photonen sich in der effektiven Metrik (17.4) bewegen, ist die Bewegungsgleichung gegenüber dem Standard-Fall leicht modifiziert.

Man findet

$$1/2\dot{r}^2 + V_{\text{photon}}(r) = 1/2\sqrt{1 + \epsilon}E_{\text{Killing}}^2 \quad (19.12a)$$

mit

$$V_{\text{photon}}(r) = L_{\text{Killing}}^2/(2r^2) - (1 + \epsilon)ML_{\text{Killing}}^2/r^3. \quad (19.12b)$$

Die Killing-Energie der Photonen wird hier mit dem Killing-Feld der Standard-Schwarzschild-Geometrie, nicht dem der effektiven Metrik, berechnet. \dot{r} bezeichnet hier die Ableitung der Radialkoordinate nach einem affinen Parameter. Das effektive Potential für die Photonen besitzt ein Maximum an der Stelle

$$r_{\text{max,photon}} = 3M(1 + \epsilon) \quad (19.13)$$

mit dem Wert

$$V_{\text{max,photon}} = \frac{L_{\text{Killing}}^2}{54M^2(1 + \epsilon)^2}. \quad (19.14)$$

Am Horizont einer Standard Schwarzschild-Geometrie wechselt das asymptotisch zeitartige Killingfeld seinen Charakter, es wird raumartig. Die mit dem Killingfeld verknüpfte Erhaltungsgröße E_{Killing} kann nun (z. B. nach einem Stoßprozess) negativ werden, da die physikalische Bedingung der Positivität an das Vorwärtslaufen des Teilchens in der Zeitrichtung in seinem lokalen Inertialsystem geknüpft war. (Dieselbe physikalische Bedingung erzwingt jetzt, dass sich das Teilchen zwingend zu kleineren Werten der nun zeitartigen Koordinate r bewegt und damit den Bereich innerhalb des Horizontes nicht mehr verlassen kann.) Die Identifizierung der mit dem „zeitartigen“ Killingfeld assoziierten Erhaltungsgröße E_{Killing} mit der Energie des Teilchens ist nur im asymptotisch flachen möglich. Da ein Teilchen aus dem Inneren des Horizontes nicht mehr in den asymptotisch flachen Teil der Raumzeit gelangen kann, ist eine negative Killing-Energie hinter dem Horizont (auch im Standardfall) nicht physikalisch widersprüchlich.

In der Metrik (17.4) wechselt das asymptotisch zeitartige Killingfeld in der effektiven Raumzeit der Photonen bereits am Photonhorizont $r = 2M(1 + \epsilon)$ zu raumartigem Charakter, das Killingfeld der Standard-Schwarzschild-Geometrie, die für die Propagation der Elektronen bestimmend ist, wird weiterhin erst für $r < 2M$ raumartig. Die Grundidee ist nun, Stoßprozesse zwischen Elektronen und Photonen in der sogenannten Ergosphäre $2M(1 + \epsilon) > r > 2M$ zu betrachten. Die Summe der Killing-Energien ist in einem solchen Stoßprozess erhalten. Nach dem Stoß in der Ergosphäre kann das Photon in einen Zustand negativer Killing-Energie gelangen, während die Killing-Energie des gestreuten Elektrons größer ist als die Summe der Killing-Energien des einlaufenden Elektrons und Photons. Die auf den ersten Blick paradoxe Frage nach der Energieerhaltung klärt sich, wenn man die Schwarzschildmasse in die Energiebilanz miteinbezieht. Das auslaufende

Photon trägt negative Killing-Energie in das Schwarze Loch und verringert damit dessen Masse. ¹

Die zu diskutierende Frage ist nun, ob sich der diskutierte Prozess kinematisch realisieren lässt.

19.5. Lemaître Koordinaten

Für die Rechnung wird sich ein auf Lemaître zurückgehendes Koordinatensystem [84], als bequem erweisen:

$$ds^2 = d\tau^2 - \left(\frac{3(R - \tau)}{4M} \right)^{(-2/3)} dR^2 - (3/2(R - \tau))^{4/3} (2M)^{2/3} (d\theta^2 + \sin^2 d\phi^2). \quad (19.15)$$

Lemaître Koordinaten beschreiben die Standard-Schwarzschild-Lösung, sind aber am Horizont nicht singulär. Der Übergang zu den Standard-Schwarzschild-Koordinaten ist gegeben durch

$$d\tau = dt + \frac{\sqrt{2M/r}}{1 - 2M/r} dr, \quad (19.16a)$$

$$dR = dt + \frac{1}{(1 - 2M/r) \sqrt{2M/r}} dr. \quad (19.16b)$$

Der Horizont wird durch die Gleichung

$$(R - \tau) = 4/3M \quad (19.17)$$

beschrieben. Die Standard-Radialkoordinate r lässt sich folgendermaßen in Lemaître-Koordinaten ausdrücken:

$$r = (3/2(R - \tau))^{2/3} (2M)^{1/3}. \quad (19.18)$$

Das asymptotisch zeitartige Killingfeld in diesen Koordinaten ist durch

$$\sigma^\mu = (1, 1, 0, 0) \quad (19.19)$$

¹Ein ähnlicher Mechanismus, der es erlaubt, einem rotierenden Schwarzen Loch Masse zu entziehen geht auf Penrose [26, 82, 83] zurück und hat das obige Gedankenexperiment natürlich inspiriert

gegeben. Wie in der Einführung diskutiert, wird das Killingfeld σ^μ hinter dem Horizont raumartig.

Zur Erinnerung sei die effektive Metrik für Photonen, die durch den Fall 1 der modifizierten Maxwell-Theorie beschrieben werden, hier noch einmal angeben:

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x) - \frac{\kappa}{1 + \kappa \tilde{\zeta}^\rho \tilde{\zeta}_\rho / 2} \tilde{\zeta}_\mu(x) \tilde{\zeta}_\nu(x), \quad (19.20a)$$

$$\tilde{g}^{\mu\nu}(x) = g^{\mu\nu}(x) + \frac{\kappa}{1 - \kappa \tilde{\zeta}^\rho \tilde{\zeta}_\rho / 2} \tilde{\zeta}^\mu(x) \tilde{\zeta}^\nu(x). \quad (19.20b)$$

In Lemaître Koordinaten wird das Hintergrund-Vektorfeld $\tilde{\zeta}^\mu$ durch folgenden Ausdruck beschrieben,

$$\tilde{\zeta}^\mu = (1, 0, 0, 0). \quad (19.21)$$

19.6. Parametrisierung des Streuprozesses

Wir betrachten, in der Ergosphäre stattfindende Streuprozesse an der Stelle $r = 2M(1 + \epsilon\rho)$, wobei ϵ durch Gleichung (17.3) definiert ist, und im Wesentlichen ein Maß für die Stärke der Lorentz-Verletzung darstellt. Durch (16.10) ist auch der Wertebereich für ϵ auf $0 < \epsilon < 1$ eingeschränkt. Der Parameter ρ läuft zwischen 0 und 1 und parameterisiert in allgemeiner Weise die Radialkoordinate an der der Streuprozess stattfinden soll. Durch Rotationen des Koordinatensystems kann man, ohne Beschränkung der Allgemeinheit, Streuprozesse am Ort $\phi = 0$, $\theta = \pi/2$, $r = 2M(1 + \epsilon\rho)$ betrachten und sicherstellen, dass das auslaufende Photon in der Äquatorialebene $\theta = \pi/2$ läuft.

Bequem ist es, in einem lokalen Inertialsystem am Punkt

$$r = 2M(1 + \epsilon\rho), \quad \theta = \pi/2, \quad \phi = 0 \quad (19.22)$$

zu rechnen, was ohne Beschränkung der Allgemeinheit durch Koordinatentransformationen möglich ist. Der Übergang ist durch das Vierbein e_μ^a gegeben, mit

$$e_\tau^0 = 1, e_\rho^1 = \sqrt{|g_{\rho\rho}|}, e_\theta^2 = \sqrt{|g_{\theta\theta}|}, e_\phi^3 = \sqrt{|g_{\phi\phi}|}, \quad (19.23)$$

und allen anderen Komponenten identisch 0. An der Stelle $r = 2M(1 + \epsilon\rho)$, $\theta = \pi/2$ gilt explizit

$$e_\tau^0 = 1, e_\rho^1 = 1/\sqrt{1 + \epsilon\rho}, e_\theta^2 = 2M(1 + \epsilon\rho), e_\phi^3 = 2M(1 + \epsilon\rho). \quad (19.24)$$

Das asymptotisch zeitartige Killingfeld in lokalen Koordinaten an der Stelle $r = 2M(1 + \epsilon\rho)$ lautet

$$\sigma^a = e_\mu^a \sigma^\mu = \left(1, \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon\rho}}, 0, 0 \right). \quad (19.25)$$

Die folgende Parametrisierung garantiert, dass die Photonen der modifizierten Dispersionsrelation (16.5b) genügen. Für die Elektronen gilt

$$k_\mu^{e,\text{in}} k_\nu^{e,\text{in}} g^{\mu\nu} = k_\mu^{e,\text{out}} k_\nu^{e,\text{out}} g^{\mu\nu} = m^2. \quad (19.26)$$

Im Folgenden wird m zur Vereinfachung auf 1 gesetzt und kann durch dimensionale Analyse wieder ergänzt werden. Die Parametrisierung des allgemeinsten möglichen Streuprozesses sieht dann wie folgt aus:

$$(k_a)^{\gamma,\text{out}} = E_{\gamma,\text{out}} \left(1, -\zeta\omega_1, 0, \zeta \sqrt{1 - \omega_1^2} \right), \quad (19.27a)$$

$$(k_a)^{e,\text{out}} = p_{e,\text{out}} \left(\sqrt{m^2 / (p_{e,\text{out}})^2 + 1}, \hat{p}_{e,\text{out}} \right), \quad (19.27b)$$

$$(k_a)^{\gamma,\text{in}} = \tilde{E}_{\gamma,\text{in}} \left(1, -\zeta\beta_1, -\zeta\beta_2, s_1\zeta \sqrt{1 - \beta_1^2 - \beta_2^2} \right), \quad (19.27c)$$

$$k_a^{e,\text{in}} = k_a^{e,\text{out}} + k_a^{\gamma,\text{out}} - k_a^{\gamma,\text{in}}, \quad (19.27d)$$

mit

$$p_{e,\text{out}} = \gamma E_{\gamma,\text{out}}, \quad (19.28a)$$

$$\hat{p}_{e,\text{out}} = \left(-\delta_1, -\delta_2, s_1 \sqrt{1 - \delta_1^2 - \delta_2^2} \right). \quad (19.28b)$$

ζ ist die Abkürzung für $\zeta \equiv \sqrt{1 + \epsilon}$, dieser Ansatz stellt bereits sicher, dass die Wellenvektoren die jeweilige Dispersionsrelation erfüllen.

Die Parameter ω_1 , $\delta_{1,2}$ und $\beta_{1,2}$ parametrisieren den Ansatz und variieren jeweils zwischen -1 und 1 mit der zusätzlichen Einschränkung $\beta_1^2 + \beta_2^2 \leq 1$ und $\delta_1^2 + \delta_2^2 \leq 1$.

Die Killing-Energie des auslaufenden Elektrons wird durch die Killing-Energie des auslaufenden Photons ausgedrückt, $E_{e,\text{out}} = \gamma E_{\gamma,\text{out}}$, wobei $\gamma > 0$ eine positive Konstante ist.

Im Folgenden sind Prozesse gesucht, bei denen das einfallende Photon und das einfallende Elektron aus dem „Unendlichen“, das heißt dem asymptotisch flachen Bereich der Raumzeit kommen, das auslaufende Elektron den asymptotisch flachen Bereich erreichen kann und das auslaufende Photon negative Killing-Energie trägt.

19.7. Physikalische Randbedingungen

Wie schon weiter oben diskutiert werden spezielle Randbedingungen an den gesuchten Compton-Prozess gestellt. Zunächst wird gefordert, dass die einlaufenden Teilchen auf Geodäten laufen, die aus dem Unendlichen kommen. Diese Randbedingung stellt sicher, dass Experimentatoren in einem Gedankenexperiment die Teilchen weit entfernt vom Horizont präparieren können und ermöglicht eine saubere Diskussion.

Des Weiteren soll das auslaufende Elektron mehr Killing-Energie als die Summe der einlaufenden Killing-Energien tragen und das Unendliche erreichen können. Mit dieser Randbedingung wird gewährleistet, dass das diskutierte Streueignis tatsächlich die Masse des Schwarzen Loches reduziert.

Die, recht technische, Quantifizierung dieser Randbedingungen ist in den Anhang ausgelagert. Im folgenden expliziten Beispiel werden diese Randbedingungen erfüllt.

19.8. Wirkungsquerschnitt des modifizierten Compton-Streuprozesses

Das Betragsquadrat des diskutierten Compton-Prozesses auf Baumgraphen-Niveau wurde in [85] (in der Näherung von Elektron-Propagatoren in flacher Raumzeit) berechnet und ist gegeben durch

$$\frac{1}{4} \sum_{s_1, s_2 = \pm 1/2} \sum_{\lambda_1, \lambda_2 = \pm 1} |\mathcal{M}|^2 = \Pi_{ac} \Pi_{bd} \frac{e^4}{4} \text{tr} \left\{ (k_{e,\text{out}} + m) \left[\frac{\gamma^a k_{\gamma,\text{in}} \gamma^b + 2\gamma^a k_{e,\text{in}}^b}{2k_{e,\text{in}} \cdot k_{\gamma,\text{in}} + k_{\gamma,\text{in}}^2} + \frac{\gamma^b k_{\gamma,\text{out}} \gamma^a - 2\gamma^b k_{e,\text{in}}^a}{2k_{e,\text{in}} \cdot k_{\gamma,\text{out}} - k_{\gamma,\text{out}}^2} \right] \right\}$$

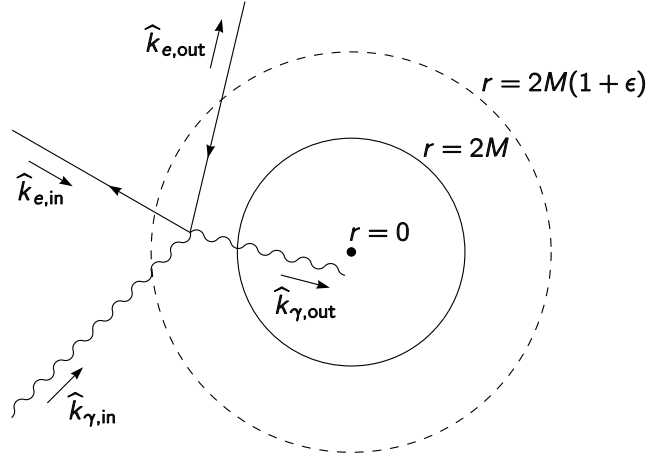


Abbildung 19.1.: Skizze des diskutierten Compton-Streuereignisses $e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma$ in der Ergosphäre einer Schwarzschild-Geometrie für modifizierte QED (19.8), mit Lorentz-verletzendem Parameter $\epsilon > 0$. Aufgetragen sind die Dreier-Impulse \hat{k}_n der Teilchen ($n = 1, \dots, 4$) und der Fluss positiver Ladung entlang der Elektron-Linie.

$$\times (\not{k}_{e,\text{in}} + m) \left[\frac{\gamma^d \not{k}_{\gamma,\text{in}} \gamma^c + 2\gamma^c \not{k}_{e,\text{in}}^d}{2k_{e,\text{in}} \cdot k_{\gamma,\text{in}} + k_{\gamma,\text{in}}^2} + \frac{\gamma^c \not{k}_{\gamma,\text{out}} \gamma^d - 2\gamma^d \not{k}_{e,\text{in}}^c}{2k_{e,\text{in}} \cdot k_{\gamma,\text{out}} - k_{\gamma,\text{out}}^2} \right] , \quad (19.29)$$

mit „Feynman slash“ $\not{k} \equiv k_a \gamma^a$ und Photon-Polarisationssumme

$$\Pi_{ab} \equiv \sum_{\lambda=\pm 1} \overline{(\varepsilon^{(\lambda)})_a} (\varepsilon^{(\lambda)})_b . \quad (19.30)$$

Die Ward-Identitäten gewährleisten, dass es erlaubt ist (in eichinvarianten Ausdrücken) die Polarisationssumme durch den folgenden Ausdruck zu ersetzen:

$$\Pi_{ab} \mapsto \frac{1}{1 + \kappa/2} \left(-\eta_{ab} + \frac{\kappa}{1 + \kappa/2} \xi_a \xi_b \right) . \quad (19.31)$$

Setzt man Photon-Impulse, die die Standard-Dispersionsrelation erfüllen, $k_{\gamma,\text{in}}^2 = k_{\gamma,\text{out}}^2 = 0$ und die Standard-Photon-Polarisations-Summen ein, so reduziert sich (19.29) auf das Standard-Matrix-Element für gewöhnliche Compton-Streuung, (siehe z.B. [22]).

19.9. Beispiel

Dieser Abschnitt gibt ein explizites Beispiel für die Kinematik eines Compton-Streuprozesses, der die Masse des Schwarzen Lochs reduziert.

Das Beispiel benötigt einen großen Lorentz-verletzenden Parameter $\epsilon = 1/2$. Da die experimentellen Schranken an für die den Lorentz-verletzenden Parameter in isotroper modifizierter Maxwell-Theorie sehr strikt sind [66], wäre es physikalisch natürlich interessanter, ein Beispiel für kleine Lorentz-Verletzung zu geben.

Wie jedoch in Anhang A gezeigt werden wird, ist der diskutierte Compton-Prozess (mit den geforderten Randbedingungen aus Kapitel 19.7) für kleine Lorentz-verletzende Parameter kinematisch verboten.

Das folgende Beispiel ist daher ausschließlich von theoretischem Interesse. Eine kinematisch erlaubte Konfiguration von Wellenvektoren ist durch

$$\epsilon = 1/2, \quad \rho = 99/100, \quad (19.32a)$$

$$E_{\gamma, \text{out}} = 5m, \quad \omega_1 = 9984/10000, \quad (19.32b)$$

$$p_{e, \text{out}} = 20 E_{\gamma, \text{out}}, \quad \hat{p}_{e, \text{out}} = (-41/50, 0, (3\sqrt{91})/50), \quad (19.32c)$$

$$\beta_1 = 74/100, \quad \beta_2 = 0, \quad s_1 = 1 \quad (19.32d)$$

gegeben.

Die konkreten Zahlenwerte für die Vierervektoren für das Compton-Streueignis (19.27)–(19.32) sind gegeben durch:

$$(k_a)^{e, \text{in}} \approx m (17.0968, -8.44173, 0, -14.833628), \quad (19.33a)$$

$$(k_a)^{\gamma, \text{in}} \approx m (87.9082, -79.6722, 0, 72.4163), \quad (19.33b)$$

$$(k_a)^{e, \text{out}} \approx m (100.005, -82, 0, 57.2364), \quad (19.33c)$$

$$(k_a)^{\gamma, \text{out}} \approx m (5, -6.11393, 0, 0.346272). \quad (19.33d)$$

Die Dreier-Impulse liegen in einer Ebene $k_2 = 0$. Die Killing-Energien für das Ereignis berechnen sich zu:

$$(E_{\text{Killing}})^{e, \text{in}} \approx 10.19264 m, \quad (19.34a)$$

$$(E_{\text{Killing}})^{\gamma, \text{in}} \approx 22.74743 m, \quad (19.34b)$$

$$(E_{\text{Killing}})^{e, \text{out}} \approx 32.94041 m, \quad (19.34c)$$

$$(E_{\text{Killing}})^{\gamma, \text{out}} \approx -0.00034 m. \quad (19.34d)$$

Man sieht explizit, dass die Killing-Energie des auslaufenden Elektrons (19.34c) größer ist als die Summe der Killing-Energien der einlaufenden Teilchen, $E_{\text{Killing}}^{\text{in}} \approx 32.94007 m$.

Präpariert man nun ein Gedankenexperiment mit Elektronen- und Photon-Strahlen, so dass ihre Vierer-Impulse die Werte (19.33a)–(19.33b) am Streuort (19.22) beitragen, gibt es eine nicht verschwindende Wahrscheinlichkeit, dass dieses Experiment die Masse des Schwarzen Loches reduziert. (Die Massendifferenz des Schwarzen Loches lässt sich beispielsweise mit Testteilchen bestimmen, die auf zirkulären Orbits das Schwarze Loch umrunden.)

19.10. Diskussion

In den vorhergehenden Kapitel wurde quantitativ gezeigt, dass in modifizierter Maxwell-Theorie nicht-Standard Quanten-Prozesse erlaubt sind, die in der Lage sind, die Masse eines Schwarzen Loches reduzieren. Das diskutierte Gedankenexperiment greift auf die multiple Horizont-Struktur zurück, die für modifizierte Maxwell-Theorie für bestimmte Hintergrundfeld-Konfigurationen auftreten kann.

In solchen Szenarien liegt in einer Schwarzschild-Geometrie ein effektiver Photonen-Horizont vor, der außerhalb des Standard-Schwarzschild-Horizontes liegt. Zwischen den beiden Horizonten liegt die sogenannte Ergosphäre. Photonen, die sich innerhalb der Ergosphäre befinden können nach einem Stoßprozess negative Killing-Energie tragen. Damit war es möglich, ein Gedankenexperiment zu konstruieren, in dem einlaufende Photonen und Elektronen in der Ergosphäre streuen und das Photon nach dem Stoß negative Killing-Energie trägt. Das in den asymptotisch flachen Teil der Raumzeit auslaufende Elektron trägt damit effektiv Masse aus dem Schwarzen Loch ins Unendliche.

Die theoretische Möglichkeit des oben diskutierten Effektes ist zweifellos physikalisch ungewöhnlich. In vorhergehenden Publikationen [14, 71] wurde die Vermutung geäußert, man könne mit Hilfe solcher Prozesse den verallgemeinerten zweiten Hauptsatz der Thermodynamik verletzen. Dabei wurde argumentiert, dass das auslaufende Elektron keine Entropie tragen müsse. Die Summe der Gesamtentropie nach dem Stoß wäre damit geringer als vor dem Stoß, da sich die Masse und damit die Oberfläche des Schwarzen Loches verringert. Eine zweifelsfreie Möglichkeit, den verallgemeinerten zweiten Hauptsatz der Thermodynamik zu verletzen würde starke Argumente liefern um eine Lorentz-verletzende Theorie für physikalisch unmöglich zu halten.

In der Argumentation in [14, 71] wurde jedoch außer Acht gelassen, dass die modifizierte Horizont-Struktur (zunächst) nur für Elementarteilchen gilt. Die diskutierten Stoßprozesse sind damit, wie im obigen konkreten Beispiel auch, stets *Quantenprozesse* und (zunächst) keine klassischen und damit deterministischen Stoßvorgänge.

Die Existenz eines Entropie-verringernenden Quantenprozesses an sich verletzt noch nicht automatisch den (verallgemeinerten) zweiten Hauptsatz der Thermodynamik. Dazu verdeutliche man sich beispielsweise ein System zweier Moleküle, von denen sich eines (das „heiße“) schneller bewegt als das andere („kalte“). In einem Stoßprozess zwischen zwei solchen Molekülen existiert eine nicht-verschwindende Wahrscheinlichkeit, dass das langsame Molekül Energie an das Schnellere abgibt. Erst die Anwendung der statistischen Mechanik auf ein großes System mit vielen Molekülen liefert (im Mittel) den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik [75].

Eine quantitative Analyse des diskutierten Compton-Prozesses würde möglicherweise Aufschluss liefern, ob der verallgemeinerte Hauptsatz tatsächlich verletzt wird. Dazu müsste man, in einem ersten Schritt, die Wahrscheinlichkeit bestimmen, mit der ein solcher Prozess die Masse des Schwarzen Loches verringert, sowie die mittlere Masse, um die das Schwarze Loch reduziert wird. Möglicherweise ließe sich zeigen, dass in diesem Szenario das Fluktuations-Theorem [86, 87] verletzt wäre, was wiederum die Verletzung des verallgemeinerten zweiten Hauptsatzes implizieren könnte.

Mit einem analogen klassischen Prozess wäre es, wie oben bereits erwähnt, möglich, die Anfangsbedingungen so zu präparieren, dass die Masse des Schwarzen Loches sich deterministisch verringern ließe.

Die offene Frage ist, ob sich ein (quasi-) klassischer „Compton-Prozess“ realisieren ließe, vielleicht in Form von Laserpulsen, die an makroskopischen, geladenen Objekten streuen. Aber auch wenn dies möglich wäre, müsste noch die Frage der diesen makroskopischen Objekten innewohnenden Entropie quantitativ diskutiert werden, bevor sich entscheiden ließe, ob der verallgemeinerte zweite Hauptsatz tatsächlich verletzt wäre.

Ein weiterer interessanter Punkt in der Diskussion ist die Beobachtung, dass der Prozess bereits für endliche Lorentz-Verletzung $\epsilon < \epsilon_0$ verboten ist. Im Anhang A wird dies konkret ausgeführt. Eine definitive (konservative) Schranke ist durch $\epsilon_0 > 0.1$ gegeben. Numerische Analysen legen jedoch nahe, dass der reale Wert etwa $\epsilon_0 \approx 0.35$ beträgt [85]. Diese Tatsache könnte möglicherweise Ausdruck eines Mechanismus sein, der den verallgemeinerten zweiten Hauptsatz im Falle kleiner

Lorentz-Verletzung schützt. In [73] wird ausgeführt, dass verschiedene Szenarien, die die Verletzung des verallgemeinerten zweiten Hauptsatzes zum Ziel haben, für das „ghost-condensate“ nicht funktionieren, da die Zeitskalen, auf denen es möglich ist, den verallgemeinerten zweiten Hauptsatz zu verletzen stets deutlich länger sind als die Lebensdauer einer Schwarzschild-Lösung mit modifiziertem Horizont im „ghost-condensate“. Dabei wird angenommen, dass die relevanten Kopplungen nur durch Quantengravitationseffekte induziert, also klein sind. Das könnte ebenfalls, ähnlich wie in der obigen Diskussion, ein Indiz dafür sein, dass der verallgemeinerte zweite Hauptsatz, für den Fall kleiner Lorentz-Verletzung, allgemein geschützt ist.

Zusammengefasst lässt sich sagen, dass es nicht möglich war, auf der Basis des in [14] vorgeschlagenen Prozesses, ein Gedankenexperiment zu konstruieren, das zweifelsfrei in der Lage ist, den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik zu verletzen. Die konkrete Realisierung des von Eling et. al. vorgeschlagenen Prozesses durch Compton-Streuung in modifizierter Maxwell-Theorie, liefert jedoch die quantitative Grundlage, um diese hochinteressante Frage weitergehend zu studieren.

19.11. Allgemeine Verletzung des zweiten Hauptsatzes in Lorentz-verletzenden Theorien?

Die Gedankenkonstruktion eines quasiklassischen Perpetuum Mobiles im obigen Sinne ist für die Beispielfiguren (17.7) und (17.11) nicht möglich, da sich der Photonhorizont für diese Beispiele nicht verschiebt und die Ergospäre nicht auftritt. Wie jedoch durch Dr. S.M. Sibiryakov [88], aufgezeigt wurde, treten möglicherweise dennoch Konflikte mit dem verallgemeinerten zweiten Hauptsatz auf. Setzt man die Metriken (17.8) und (17.12) analytisch ins Euklidische fort, so erhält man die Linienelemente

$$d\tilde{s}^2|_{\text{Fall } 2, E} = (1 - 2M/r) d\tau^2 + \frac{1}{1 - \eta} (1 - 2M/r)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (19.35a)$$

und

$$d\tilde{s}^2|_{\text{Fall } 3, E} = \frac{1}{1 + \epsilon} (1 - 2M/r) d\tau^2 + (1 - 2M/r)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (19.35b)$$

Für $r = 2M$ liegt eine Koordinaten-Singularität vor. Durch geeignete Periodizitätsbedingungen an die Koordinate τ lässt sich diese Singularität eliminieren.

Betrachtet man die Koordinatentransformation

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{1-\eta}} 4M\sqrt{1-2M/r}, \quad (19.36)$$

so erhält man für das Linienelement (19.35a)

$$d\tilde{s}^2|_{\text{Fall 2, E}} = \rho^2 \left(\frac{\sqrt{1-\eta}}{4M} \right)^2 d\tau^2 + \left(\frac{r}{2M} \right)^4 d\rho^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (19.37)$$

Dadurch ist klar, dass die Singularität von der gleichen Struktur ist wie die Singularität der Polarkoordinaten, wobei ρ die Rolle der Radialkoordinate und der Kombination $\tau\sqrt{1-\eta}/2M$ die Rolle der Winkelkoordinate zukommt. Mit der Periodizitätsbedingung

$$\Delta\tau = 8\pi M / \sqrt{1-\eta}, \quad (19.38)$$

wird die Metrik für $\rho \rightarrow 0$, d.h. $r \rightarrow 2M$ regulär. Die Hawking Temperatur ist das Inverse dieser Periode [26, 79, 80]

$$T_{\text{Hawking, Fall 2}} = \frac{8\pi M}{\sqrt{1-\eta}}. \quad (19.39)$$

Mit ähnlichen Überlegungen erhält man für die Hawking-Temperatur für Beispiel 3

$$T_{\text{Hawking, Fall 3}} = 8\pi M\sqrt{1+\eta}. \quad (19.40)$$

Nimmt man diese Betrachtungen ernst, sei bedeutet dass, das einem schwarzen Loch in modifizierter Maxwell-Theorie keine universale Temperatur mehr zuzuordnen ist.

Ein Perpetuum Mobile zweiter Art, das auf dem Phänomen unterschiedlicher Hawking-Temperaturen für unterschiedliche Teilchenspezies basiert, wurde in [13] vorgeschlagen. In den konkreten Beispielen für modifizierte Maxwell-Theorie (17.7) und (17.11) gilt stets, dass die „Hawking-Temperatur“ für die Photonen niedriger ist als die „Hawking-Temperatur“ für Teilchen, die keiner modifizierten Dispersionsrelation unterliegen.

Im Folgenden betrachten wir Photonen und B-Teilchen. Es wird angenommen, dass die B-Teilchen nur minimal mit Photonen wechseln, keiner modifizierten Dispersionsrelation und somit keiner modifizierten Hawking-Temperatur unterliegen. Die „Hawking-Temperatur“ der B-Teilchen $T_{\text{Hawking,B}}$ ist damit höher als die, die für die Photonen $T_{\text{Hawking, photon}}$.

Die Grundidee ist eine Konstruktion zweier „Schalen“(A und B), die um das Schwarze Loch errichtet werden. Idealisiert soll wie in [13] angenommen werden, dass die A-Schale nur mit den modifizierten Photonen wechselwirkt und die B-Schale nur mit den Teilchen, deren Dispersionsrelation nicht modifiziert ist. Die A-Schale trage die Temperatur T_A , die B-Schale die Temperatur T_B . Es wird angenommen, dass für die verschiedenen Temperaturen gilt

$$T_{\text{Hawking,B}} > T_B > T_A > T_{\text{Hawking, photon}}. \quad (19.41)$$

In diesem Szenario existiert also ein Fluss von Photonen, von der A-Schale in das Schwarze Loch, da gilt $T_A > T_{\text{Hawking, photon}}$. Andererseits existiert ein Fluss von B-Teilchen vom Schwarzen Loch auf die B-Schale, da gilt $T_{\text{Hawking,B}} > T_B$. Es ist möglich, die Temperaturen so einzustellen, dass die Masse des Schwarzen Lochs konstant bleibt [13], so dass das einzige Resultat des Prozesses ein Netto-Fluss von der kälteren A-Schale auf die wärmere B-Schale ist.

Das vorgeschlagene Perpetuum Mobile würde also den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik manifest verletzen, falls es realisierbar wäre.

Es greift allerdings auf das Konzept der Hawking-Strahlung [80] zurück. Das Vorliegen zwei verschiedener „Hawking-Temperaturen“ zeigt bereits, dass dieser Ansatz möglicherweise zu naiv ist. Eine Temperatur charakterisiert ein System im thermodynamischen Gleichgewicht, von zwei Temperaturen eines Systems auszugehen ist damit schon widersprüchlich. In [89] wurde zudem explizit gezeigt, dass die Hawking Strahlung im Ghost-condensate nicht thermischer Natur ist.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass das in diesem Abschnitt diskutierte Perpetuum Mobile zweifellos den zweiten Hauptsatz verletzen würde, es aber fraglich ist, ob es sich realisieren lässt, da die einfache Zuordnung einer unterschiedlichen Hawking-Temperatur für die Photonen und die B-Teilchen sicherlich zu naiv ist.

19.12. Diskussion

Die Frage, ob es tatsächlich möglich ist, innerhalb Lorentz-verletzender Theorien den verallgemeinerten Hauptsatz der Thermodynamik zu verletzen, muss an dieser Stelle offen bleiben.

Zweifellos existieren einige interessante Ansätze zur Konstruktion von Perpetua Mobilia, von denen zwei innerhalb modifizierter Maxwell-Theorie intensiver untersucht wurden. Es bleiben jedoch in beiden Fällen berechtigte Zweifel, ob es mit diesen Gedankenexperimenten tatsächlich möglich ist, den verallgemeinerten zweiten Hauptsatz zu verletzen. Ein weiterer interessanter Vorschlag stammt von Feldstein [15]. Er zeigt auf, dass innerhalb des „Ghost-condensates“ (quasi) stationäre Lösungen existieren, die direkt einen Fluss von negativer Energie in das Schwarze Loch beschreiben und somit eine direkte Verletzung des verallgemeinerten zweiten Hauptsatzes zu erlauben scheinen.

In einer kürzlich erschienenen Veröffentlichung [74] wurde das Dubovsky-Sibiryakov Perpetuum Mobile [13] das auf dem Penrose-Prozess basierende Perpetuum Mobile [14], sowie der Vorschlag von Feldstein [15] innerhalb des „Ghost-condensates“ diskutiert und überzeugend dargelegt, dass sich keiner der Vorschläge zur Entropiereduktion in diesem Rahmen spontaner Lorentz-Verletzung realisieren lässt. Die Grundlage des Argument ist in allen drei Fällen dieselbe. Die Schwarzschild-Lösung mit multipler Horizontstruktur innerhalb des Ghost-condensates hat eine endliche Lebensdauer. In [74] wurde gezeigt, dass die Zeitskalen, auf denen eine Verletzung des verallgemeinerten zweiten Hauptsatzes stattfinden kann, in allen drei Fällen deutlich größer sind, als die Lebensdauer der Schwarzschild-Lösung im Ghost-condensate.

Die Analyse aus [74] legt den Schluss nahe, dass im Falle spontaner Lorentz-Verletzung die Konstruktion eines Perpetuum Mobiles ausgeschlossen werden kann. In diesem Kapitel der vorliegenden Dissertation wurde daher untersucht, ob sich ein Perpetuum Mobile im Rahmen expliziter Lorentz-Verletzung realisieren ließe. Es wurde also auf die Stabilitätsdiskussion des angenommenen Lorentz-verletzenden Hintergrundes verzichtet, zugunsten eines relativ einfachen theoretischen Rahmens. Im Rahmen expliziter Lorentz-Verletzung werden externe Felder (ohne eigene Feldgleichung) per Hand eingefügt. Eine (scheinbare) Verletzung des verallgemeinerten zweiten Hauptsatzes wäre demnach in einem solchen Szenario nicht allzu erstaunlich, wenn man sich vergegenwärtigt, dass diese Felder selbst Energie und Entropie tragen könnten, die (in einem ersten, naiven Zugang) nicht berücksichtigt würde. Wie in Kapitel 21 diskutiert, wurden Lorentz-verletzende

Szenarien gewählt, die sich auch als dynamische Lösungen einer Theorie ergeben können, die Lorentz-Invarianz spontan bricht, der mögliche Ursprung der Lorentz-Verletzung aber in der folgenden Diskussion außer Acht gelassen. Bemerkenswerterweise ist es auch im Rahmen expliziter Lorentz-Verletzung nicht gelungen, ein Gedankenexperiment durchzuführen, das den verallgemeinerten Hauptsatz der Thermodynamik nachweislich verletzt. Ein rigoroses Ausschlusskriterium aufgrund der Verletzung des verallgemeinerten zweiten Hauptsatzes für Lorentz-verletzende Theorien, wie es in [14, 71] postuliert wurde, kann demnach, auf dem momentanen Stand, nicht formuliert werden.

20. Lösungen in modifizierter Maxwell-Theorie mit Gravitation

Dieses Kapitel behandelt das Problem der Kopplung von explizit Lorentz-verletzenden Theorien an dem expliziten Beispiel von modifizierter Maxwell-Theorie. Wie zuvor diskutiert, ist der Energie-Impuls Tensor in explizit Lorentz-verletzenden Theorien nicht automatisch symmetrisch oder kovariant erhalten, was die Frage aufwirft, wie und ob solche Theorien an die Gravitation gekoppelt werden können und wie z.B die gravitative Rückreaktion auf explizit nicht Lorentz-invariante propagierende Felder aussieht.

Der Einstein-Hilbert-Teil der Wirkung wird im Folgenden als nicht modifiziert angenommen. Damit ist unmittelbar klar, dass alle Vakuumlösungen der Einstein-Theorie, wie etwa die Schwarzschild-Lösung automatisch auch Lösungen von modifizierter Maxwell-Theorie sind. Für solche, im Folgenden als trivial bezeichnete, Lösungen verschwindet das modifizierte Maxwell-Feld. Es wird explizit gezeigt, dass nichttriviale Lösungen von modifizierter Maxwell-Theorie gekoppelt an die Gravitation existieren. Die Frage, wie eine komplette Theorie der Gravitation und modifizierter Maxwell-Theorie aussehen kann, bleibt jedoch offen.

20.1. Theorie und Konventionen

Wie im Vorhergehenden auch wird $c = G = 1$ gesetzt. Allerdings wird, anders als in den vorherigen Abschnitten, nicht im MKSA-System, sondern im Gauß-System gearbeitet, was die Struktur der Reissner-Nordström Lösung vereinfacht.

In Gauß-Einheiten lautet die Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}_{\text{ModMax,flach}} = -\frac{1}{16\pi} F^{ab} F_{ab} - \frac{1}{16\pi} \kappa^{abcd} F_{ab} F_{cd}. \quad (20.1)$$

Betrachtet man die Kopplung von explizit Lorentz-verletzenden Theorien an die Gravitation, so bietet sich der Vierbein-Formalismus als theoretischer Rahmen

an, da man hier auf natürliche Weise zwischen lokalen Lorentz-Transformationen und allgemeinen Koordinatentransformationen unterscheiden kann. Ein minimaler Kopplungsprozess führt dann auf folgende Lagrangedichte für den Materieanteil

$$\mathcal{L}_{\text{ModMax}} = \sqrt{g} \left(-\frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{16\pi} \kappa^{abcd}(x^\lambda) e^{\mu}_{\ a} e^{\nu}_{\ b} e^{\rho}_{\ c} e^{\sigma}_{\ d} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \right). \quad (20.2)$$

Wie im Vorhergehenden diskutiert wird $\kappa^{abcd}(x^\mu)$ hier als vorgegebenes, nichtdynamisches Hintergrundfeld verstanden ohne eigene Feldgleichungen. Weiter unten wird gezeigt werden, dass die Kopplung an die Gravitation bereits strenge Konsistenzbedingung an die Form des Hintergrundfeldes erzwingt, auch ohne dass eigene Feldgleichungen für dieses Hintergrundfeld gelöst werden. Aus Lesbarkeitsgründen wird die Abhängigkeit von x^μ im Folgenden unterdrückt werden, $\kappa^{abcd}(x^\mu) \equiv \kappa^{abcd}$.

Der rein gravitative Teil der Lagrangedichte ist durch die Einstein-Hilbert Wirkung gegeben,

$$\mathcal{L}_{\text{grav}} = \frac{\sqrt{g}R}{16\pi}. \quad (20.3)$$

R bezeichnet hier den Ricci-Krümmungsskalar.

Die vollständige Wirkung lautet dann

$$\mathcal{S} = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x (\mathcal{L}_{\text{grav}} + \mathcal{L}_{\text{ModMax}}). \quad (20.4)$$

20.2. Noether Strom

Betrachtet man modifizierte Maxwell-Theorie im Minkowski Raum mit konstantem Hintergrundfeld κ^{abcd} , so sind Raum-Zeit-Translationen Symmetrietransformationen und die vier zugehörigen Noether-Ströme

$$T_{\text{Noether}}^{ab} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_a A_c)} \partial^b A_c - \eta^{ab} \mathcal{L}. \quad (20.5)$$

sind erhalten. Für die Lagrangedichte (20.1) lauten die Noether-Ströme

$$T_{\text{Noether}}^{ab} = -\frac{1}{4\pi} \left(F^{ac} + \kappa^{acde} F_{de} \right) \partial^b A_c + \frac{1}{16\pi} \eta^{ab} \left(F^{cd} F_{cd} + \kappa^{cdef} F_{cd} F_{ef} \right). \quad (20.6)$$

Wie auch für die Standard-Maxwell-Theorie ist dieser Tensor nicht symmetrisch. In der konventionellen Elektrodynamik lässt sich der Noether-Strom durch Addition eines erhaltenen Stroms, der den Energieinhalt nicht ändert, symmetrisieren [36],

$$T_D^{ab} = -\frac{1}{4\pi} \partial_c (F^{ca} A^b), \quad (20.7)$$

und der folgende Bedingungen erfüllt

$$\partial_a (T_D^{ab}) = 0, \quad (20.8a)$$

$$\int T_D^{0b} d^3x = 0. \quad (20.8b)$$

Der resultierende Energie-Impuls Tensor im Falle von modifizierter Maxwell-Theorie lautet:

$$T_{\text{Noether}}^{ab} = -\frac{1}{4\pi} (F^{ac} F^b{}_c + \kappa^{adce} F^b{}_d F_{ce}) + \frac{1}{16\pi} \eta^{ab} (F_{cd} F^{cd} + \kappa^{cdef} F_{cd} F_{ef}). \quad (20.9)$$

Hier wurden die Feldgleichungen ausgenutzt und weitere Terme mit den Eigenschaften (20.8) wurden vernachlässigt. Im Falle des nicht doppelbrechenden Ansatzes (15.3)-(15.4) vereinfacht sich der Energie-Impuls Tensor (20.9) zu

$$T_{\text{Noether}}^{ab} = \frac{1}{4\pi} \left(-(1 - \kappa/2\bar{\zeta}^c \bar{\zeta}_c) F^{ad} F^b{}_d - \kappa (F^b{}_c F^a{}_d \bar{\zeta}^c \bar{\zeta}^d - F^{bc} F_{cd} \bar{\zeta}^a \bar{\zeta}^d) \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \eta^{ab} \left((1 - \kappa/2\bar{\zeta}^c \bar{\zeta}_c) F_{de} F^{de} + 2\kappa F^{cd} F_{ce} \bar{\zeta}^e \bar{\zeta}_d \right) \right). \quad (20.10)$$

Der Energie-Impuls Tensor (20.9) ist nicht manifest symmetrisch. Ein Theorem, das die Symmetrisierbarkeit des Noether Stroms generell beweist [23], ist hier nicht anwendbar, da der Beweis Lorentz-Invarianz der betrachteten Theorien voraussetzt. Wie in Kapitel 1 diskutiert wurde, kann der Energie-Impuls-Tensor auch nicht symmetrisiert werden, da modifizierte Maxwell-Theorie Lorentz-Invarianz manifest bricht. Physikalisch äußert sich das beispielsweise im Auftreten von Photongeschwindigkeiten, die ungleich c sind.

20.3. Energie-Impuls Tensor aus Variation nach dem Vierbein

Wie im vorhergehenden Kapitel gesehen ist es möglich für konstantes Hintergrundfeld κ^{abcd} in flachen Raumzeiten durch den Noether-Strom eine physikalisch

sinnvolle Definition des Energie-Impuls Tensors zu geben. In Gravitationstheorien ist der Energie-Impuls Tensor die Quelle des Gravitationsfeldes und wird üblicherweise definiert durch die Variation des Materieanteils der Wirkung nach der Metrik oder dem Vierbein. Schon in nicht Lorentz-verletzenden Theorien können sich diese unterscheiden [12].

Ziel dieses Abschnittes ist es, eine Definition für den Energie-Impuls Tensor anzugeben, der im formalen Limes $g^{\mu\nu} \rightarrow \eta^{\mu\nu}$ in den Noether Strom (20.9) übergeht.

Eine Möglichkeit ist es, den Energie-Impulstensor durch Variation nach dem Vierbein zu definieren. Hierbei wird κ^{abcd} während der Variation als konstant aufgefasst [12].

$$T_e^{\mu\nu} = -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta \mathcal{S}_M}{\delta e_\mu^a} e^{\nu a}, \quad (20.11)$$

bzw.

$$\delta \mathcal{S}_M = \int d^4x \sqrt{g} T_a^\mu \delta e_\mu^a. \quad (20.12)$$

Für die Variation des rein gravitativen Teils der Wirkung ergibt sich:

$$\delta \mathcal{S}_G = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x (G_a^\alpha + G_a^\alpha) \delta e_\mu^a, \quad (20.13)$$

und die Forderung $\delta \mathcal{S} = 0$ führt damit auf die Einstein-Gleichung (15.13).

Der durch (20.11) definierte Energie-Impuls Tensor lautet

$$T_e^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(-(1 - \kappa/2\tilde{\zeta}^\rho \tilde{\zeta}_\rho) F^{\mu\sigma} F^\nu{}_\sigma - \kappa \left(F^\nu{}_\rho F^\mu{}_\sigma \tilde{\zeta}^\rho \tilde{\zeta}^\sigma - F^{\nu\rho} F_{\rho\sigma} \tilde{\zeta}^\mu \tilde{\zeta}^\sigma \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} \left((1 - \kappa/2\tilde{\zeta}^\rho \tilde{\zeta}_\rho) F_{\sigma\lambda} F^{\sigma\lambda} + 2\kappa F^{\rho\sigma} F_{\rho\lambda} \tilde{\zeta}^\lambda \tilde{\zeta}_\sigma \right) \right) \quad (20.14)$$

und geht im formalen Limes $g^{\mu\nu} \rightarrow \eta^{\mu\nu}$ in den Noether-Strom (20.9) über, das heißt im Minkowski-Limes der Theorie (20.4) ist er eine sinnvolle Definition für den Energieinhalt. Das kann man als Hinweis werten, dass dieser Tensor einen geeigneten Quellterm für die Einstein-Gleichungen darstellt.

Im Allgemeinen ist der Tensor (20.11) weder kovariant erhalten noch symmetrisch. Für Lorentz-invariante Materieanteile der Wirkung ist, wie in Kapitel I gesehen, der Energie-Impuls Tensor bereits automatisch kovariant erhalten und symmetrisch. Die Bianchi-Identitäten fordern jedoch durch die Einstein-Gleichung Symmetrie und kovariante Erhaltung auch an den Quellterm

$$T_e^{\mu\nu} - T_e^{\nu\mu} = 0 \Leftrightarrow \kappa^{\mu\beta\rho\sigma} F_{\beta}^{\nu} F_{\rho\sigma} - \kappa^{\nu\beta\rho\sigma} F_{\beta}^{\mu} F_{\rho\sigma} = 0 \quad (20.15a)$$

und

$$D_{\mu} T^{\mu}_{\nu} = 0. \quad (20.15b)$$

Im Falle Lorentz-verletzender Theorien stellen die Forderungen (20.15) zusätzliche Bedingungen dar, die man als Konsistenzbedingungen an das externe Lorentz-verletzende Hintergrundfeld auffassen kann.

Diese Bedingungen sollen im Folgenden näher spezifiziert werden. Die kovariante Divergenz des Energie-Impuls Tensors lässt sich ausrechnen, indem man die Variation des Materieanteils der Wirkung unter infinitesimalen allgemeinen Koordinatentransformationen, paramterisiert durch ϵ^{μ} betrachtet. Unter Berücksichtigung der modifizierten Maxwell-Gleichungen tragen nur die Variationen von Vierbein und lorentz-verletzendem Hintergrundfeld bei

$$\frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta e_{\mu}^a} \delta e_{\mu}^a + \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta \kappa^{abcd}} \delta \kappa^{abcd} = 0. \quad (20.16)$$

Die Variationen von Vierbein und Hintergrundfeld lauten

$$\delta e_{\mu}^a = e_{\nu}^a \partial_{\mu} \epsilon^{\nu} + \epsilon^{\nu} \partial_{\nu} (e_{\mu}^a), \quad (20.17a)$$

und

$$\delta \kappa^{abcd} = \epsilon^{\nu} \partial_{\nu} \kappa^{abcd}, \quad (20.17b)$$

mit infinitesimalem Parameter ϵ . Invarianz der Materie-Wirkung unter allgemeinen Koordinatentransformationen impliziert dann

$$\sqrt{g} T^{\mu}_{\nu} \partial_{\nu} e_{\mu}^a - \partial_{\mu} (\sqrt{g} T^{\mu}_{\nu}) - \frac{\sqrt{g}}{16\pi} F_{ab} F_{cd} \partial_{\nu} \kappa^{abcd} = 0, \quad (20.18)$$

was, wenn man die explizite Form des antisymmetrischen Anteils von $T^{\mu\nu}$ nutzt, äquivalent ist zu

$$D_{\mu} T^{\mu}_{\nu} = -\frac{1}{4} F_{ab} F_{cd} \partial_{\nu} \kappa^{abcd}. \quad (20.19)$$

Der antisymmetrische Anteil des Energie-Impuls Tensor lässt sich direkt aus (20.9) ablesen. Zusammengefasst findet man als Konsistenzbedingungen für eine Lösung der Einstein-Gleichung:

$$F_{ab} F_{cd} \partial_{\nu} \kappa^{abcd} = 0 \quad (20.20a)$$

und

$$\kappa^{\mu\beta\rho\sigma} F_{\beta}^{\nu} F_{\rho\sigma} - \kappa^{\nu\beta\rho\sigma} F_{\beta}^{\mu} F_{\rho\sigma} = 0 . \quad (20.20b)$$

Mit dem nicht doppelbrechenden Ansatz (15.3)-(15.4) vereinfachen sich die Bedingungen (20.20) zu:

$$F^{\mu\sigma} F_{\rho\sigma} \bar{\zeta}^{\nu} \bar{\zeta}^{\rho} - F^{\nu\sigma} F_{\rho\sigma} \bar{\zeta}^{\mu} \bar{\zeta}^{\rho} = 0 \quad (20.21a)$$

und

$$F_{\nu}^{\mu} F_{\mu\rho} \bar{\zeta}^{\nu} e^{\rho}{}_{a} \partial_{\sigma} \bar{\zeta}^a = 0 . \quad (20.21b)$$

Eine, im Allgemeinen, stärkere Konsistenzbedingung, die beide Gleichungen (20.21) erfüllt, ist

$$F_{\mu\nu} \bar{\zeta}^{\nu} = 0. \quad (20.22)$$

Sie wird im Folgenden genutzt werden, um zu zeigen, dass nichttriviale Lösungen der Einstein- und Maxwell-Gleichungen in der Theorie (20.4) existieren.

Wenn man die Bedingungen (20.21) betrachtet, könnte man fragen, ob auch der Ansatz $F^{\mu\rho} F_{\rho\sigma} = 0$ eine mögliche Konsistenzbedingung an Lösungen der Einstein-Gleichung darstellt. Es ist jedoch klar, dass eine solche Bedingung das Verschwinden des gesamten Energie-Impuls Tensors erzwingen würde, und Lösungen, die dieser Bedingung genügen, in die Klasse der „trivialen“ Lösungen fallen würden.

20.4. Energie-Impuls Tensor aus Variation der Metrik

In diesem Abschnitt wird darauf eingegangen, ob man den Energie-Impuls Tensor für modifizierte Maxwell-Theorie auch aus der Variation nach der Metrik gewinnen kann.

Zunächst ist dafür wesentlich, zu definieren, welches Hintergrundfeld man während der Variation konstant halten möchte. Entscheidet man sich beispielsweise dazu, den vollständig kontravarianten Tensor $\kappa^{\mu\nu\rho\sigma}$ konstant zu halten, so liefert die Variation des modifizierten Maxwell-Terms nach der Metrik keinen Beitrag,

anders, als wenn man die vollständig kovariante Form $\kappa_{\mu\nu\rho\sigma}$ konstant hält. Zur Definition der Theorie ist es also unabdingbar, anzugeben welches Hintergrundfeld als gegeben betrachtet wird.

Wird der gemischte Tensor $\kappa^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma}$ während der Variation konstant gehalten und definiert

$$-8\pi\sqrt{g}T_{\mu\nu, g} = \frac{\delta\mathcal{L}_M}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (20.23)$$

erhält man für den Energie-Impuls-Tensor ebenfalls

$$T_g^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(-F^{\mu\rho}F^\nu{}_\rho - \kappa^{\mu\gamma\rho\sigma}F^\nu{}_\gamma F_{\rho\sigma} + \frac{1}{4}g^{\mu\nu} \left(F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + \kappa_{\alpha\beta\rho\sigma}F^{\alpha\beta}F^{\rho\sigma} \right) \right). \quad (20.24)$$

Mit der oben erläuterten Vorschrift den gemischten Tensor konstant zu halten, erhält man damit die gleiche Einstein-Gleichung und dieselben Konsistenzbedingungen wie im vorhergehenden Kapitel.

20.5. Standard Reissner-Nordström Lösung

In diesem Abschnitt wird nach der Existenz von Reissner-Nordström-artigen Lösungen in modifizierter Maxwell-Theorie gesucht. Die Reissner-Nordström Lösung im engeren Sinne [90–92] beschreibt das Gravitationsfeld einer geladenen, kugelsymmetrischen Massenverteilung. Als Ansatz wählt man Metrik und Energie-Impuls Tensor statisch und sphärisch symmetrisch. Erlaubt man Monopole in der Theorie, so lässt sich die Reissner-Nordström Lösung entsprechend erweitern [26]. Das allgemeinste sphärisch symmetrische, statische Linienelement lautet [26]

$$ds^2 = f^2(r)dt^2 - h^2(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2). \quad (20.25)$$

Eine bequeme Wahl des Vierbeins für ein solches Linienelement ist

$$e_\mu{}^a = \text{diag} \left(\sqrt{f^2(r)}, \sqrt{h^2(r)}, r, r \sin(\theta) \right). \quad (20.26)$$

Der Einstein-Tensor, der sich aus dem Linienelement (20.25) ergibt, ist diagonal mit den nicht verschwindenden Komponenten

$$G^t{}_t = \frac{h(r)^2 - h(r) + rh'(r)}{r^2h(r)^2} \quad (20.27a)$$

$$G^r_r = \frac{f(r)(h(r) - 1) - rf'(r)}{r^2 f(r) h(r)} \quad (20.27b)$$

$$G^\theta_\theta = G^\phi_\phi = \frac{2h'(r)f(r)^2 + (rf'(r)h'(r) - 2h(r)(f'(r) + rf''(r)))f(r) + rh(r)f'(r)^2}{4rf(r)^2h(r)^2} \quad (20.27c)$$

und der allgemeinste Maxwell-Tensor, der die obigen Symmetrien respektiert ist durch

$$F_{\mu\nu} = A(r) (e_{\mu 0} e_{\nu 1} - e_{\nu 1} e_{\mu 0}) + B(r) (e_{\mu 2} e_{\nu 3} - e_{\nu 3} e_{\mu 2}) \quad (20.28)$$

gegeben [26].

Eine, einem solchen Ansatz (20.25)-(20.28), genügende Lösung wird im Folgenden mit Reissner-Nordström-artige Lösung bezeichnet werden.

Das Linienelement der Standard-Reissner-Nordström-Lösung lautet

$$\left(\frac{r_q^2}{r^2} - \frac{r_s}{r} + 1 \right) dt^2 - \frac{dr^2}{\frac{r_q^2}{r^2} - \frac{r_s}{r} + 1} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2. \quad (20.29)$$

Der Parameter r_s bezeichnet den Schwarzschild-Horizont $r_s = 2M$ und r_q bezeichnet eine weitere Längenskala, die mit der Ladung q des schwarzen Loches in Verbindung gebracht wird, in den benutzten Einheiten gilt einfach $r_q = q$.

Im Folgenden werden zwei spezielle Reissner-Nordström-artige Lösungen der Theorie (20.4) diskutiert.

20.6. Rein elektrische Reissner-Nordström-artige Lösung

Für eine rein elektrische Reissner-Nordström-artige Lösung wird der Ansatz für den Maxwell Tensor laut (20.28) mit $B(r) = 0$ gewählt

Desweiteren wird die Annahme $\zeta^\mu \zeta_\mu = -1$ und $\zeta_t = \zeta_r = 0$ gemacht. ¹ Für diese ζ^μ ist dann die Bedingung (20.22) erfüllt und der Energie-Impuls Tensor ist proportional zum üblichen Maxwell-Energie-Impulstensor

$$T_e^{\mu\nu} = \frac{(1 + \kappa/2)}{4\pi} \left(-F^{\mu\sigma} F^\nu{}_\sigma + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} (F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma}) \right). \quad (20.30)$$

Mit obigem Ansatz für den Maxwell Tensor lautet der Energie-Impuls Tensor konkret

$$T^\mu{}_\nu = \frac{(1 + \kappa/2)}{8\pi f(r)h(r)} \begin{pmatrix} A(r)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A(r)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -A(r)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -A(r)^2 \end{pmatrix} \quad (20.31)$$

Vergleich des Energie-Impuls Tensors (20.31) liefert $G^t{}_t = G^r{}_r$ und damit $f(r)h(r) = \text{const}$. Die Wahl der Konstanten entspricht lediglich einer Reskalierung der Zeit und kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit mit 1 angenommen werden. Über die Bianchi-Identitäten wird kovariante Erhaltung des Energie-Impuls Tensors impliziert, was auf $A(r) = C_1/r^2$ mit noch zu bestimmender Konstante C_1 führt. Bestimmung der Konstanten C_1 ist gleichbedeutend mit der Frage der Definition der Ladung. In Übereinstimmung mit [61] wird die Definition der Ladung so gewählt, dass der führende (und hier im konkreten Fall einzige) Beitrag zum Potential $\phi = A_0$ im Minkowski Limes die übliche Normierung der Standard-Elektrodynamik hat. Aus dieser Bedingung findet man $C_1 = -q$. Für das Eichfeld ergibt sich damit

$$A_\mu = (q/r, 0, 0, 0) . \quad (20.32)$$

Mit dem Eichfeld (20.32) ergibt sich der Energie-Impuls Tensor zu:

$$T^\mu{}_\nu = \frac{1}{8\pi r^4} \begin{pmatrix} q^2(1 + \kappa/2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^2(1 + \kappa/2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -q^2(1 + \kappa/2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q^2(1 + \kappa/2) \end{pmatrix}. \quad (20.33)$$

¹Eine solche Realisierung ist aufgrund des Poincaré-Theorems [93] nicht stetig möglich. Eine Folgerung des Poincaré-Theorems besagt, dass jedes stetige Vektorfeld auf der 2-Sphäre mindestens eine Nullstelle besitzt. („You can't comb the hair on a 2-sphere“).

Das entsprechende Linienelement, das sich aus dem Vergleich von (20.27) und (20.33) ergibt, ist formal das Standard-Reissner-Nordström-Linienelement

$$(r_q^2/r^2 - r_s/r + 1) dt^2 - \frac{dr^2}{r_q^2/r^2 - r_s/r + 1} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2; \quad (20.34)$$

mit

$$r_s = 2M, \quad (20.35a)$$

aber mit modifiziertem Parameter

$$r_q = q\sqrt{1 + \kappa/2} \neq q. \quad (20.35b)$$

Die zugrunde liegende Geometrie ist die einer gewöhnlichen Reissner-Nordström Raumzeit, aber mit modifizierter Ladung $q' = q\sqrt{1 + \kappa/2}$. Die oben erhaltene Reissner-Nordström-artige Lösung unterscheidet sich also physikalisch von einer Standard-Reissner-Nordström Lösung.

20.7. Reissner-Nordström-artige magnetische Monopol Lösung

Als Ansatz wird gewählt

$$F_{\mu\nu} = B(r) (e_{\mu 2} e_{\nu 3} - e_{\nu 3} e_{\mu 2}), \quad (20.36)$$

und $A(r) = 0$, zusammen mit dem Linienelement (20.25). Um die Bedingung (20.22) zu erfüllen, wird außerdem die Annahme

$$\bar{\zeta}^\mu \bar{\zeta}_\mu = \pm 1 \text{ und } \bar{\zeta}_\theta = \bar{\zeta}_\phi = 0 \quad (20.37)$$

gemacht.

Mit dem Ansatz (20.36) sind die modifizierten Maxwellgleichungen (15.12) automatisch erfüllt und der Energie-Impuls Tensor ergibt sich zu:

$$\frac{B(r)^2}{8\pi} \begin{pmatrix} (1 - \bar{\zeta}^\mu \bar{\zeta}_\mu \frac{\kappa}{2}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1 - \bar{\zeta}^\mu \bar{\zeta}_\mu \frac{\kappa}{2}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1 - \bar{\zeta}^\mu \bar{\zeta}_\mu \frac{\kappa}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(1 - \bar{\zeta}^\mu \bar{\zeta}_\mu \frac{\kappa}{2}) \end{pmatrix}. \quad (20.38)$$

Kovariante Erhaltung des Energie-Impuls Tensors impliziert

$$B(r) = \frac{P}{r^2}, \quad (20.39)$$

und aus Vergleich mit dem Einstein Tensor erhält man für das Linienelement

$$(r_p^2/r^2 - r_s/r + 1) dt^2 - \frac{dr^2}{r_p^2/r^2 - r_s/r + 1} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2. \quad (20.40)$$

Wiederum ist das formal das Reissner-Nordström Monopol Linienelement mit $r_s = 2M$, aber mit dem nicht-standard Parameter $r_p = P\sqrt{1 - \bar{\xi}^\mu \bar{\xi}_\mu \kappa/2}$. P ist die magnetische Monopol Ladung. Im Gegensatz zur rein elektrischen Reissner-Nordström-artigen Lösung (20.34)-(20.35) kann die scheinbare Ladung, die die Geometrie der Lösung bestimmt, größer oder kleiner als die Monopolladung P werden, da $\bar{\xi}^\mu \bar{\xi}_\mu$ hier positiv oder negativ sein kann, während im rein elektrischen Fall $\bar{\xi}_\mu \bar{\xi}^\mu$ immer negativ ist und die scheinbare Ladung daher immer größer ist als die elektrische Ladung q .

20.8. Diskussion der Lösungen

In diesem Kapitel wurde gezeigt, dass es möglich ist, das externe Hintergrundfeld in modifizierter Maxwell-Theorie so zu wählen, dass gravitative Lösungen mit nicht-verschwindendem Photon-Feld existieren. Für diese Lösungen ist der Energie-Impuls-Tensor kovariant erhalten und symmetrisch. Es wurden zwei Reissner-Nordström-artige Lösungen gefunden, eine für eine elektrisch geladene kugelsymmetrische Massenverteilung und eine magnetische Monopol-Lösung. Im Unterschied zu den in Kapitel 10 diskutierten Reissner-Nordström artigen Lösung in Maxwell-Chern-Simons Theorie unterscheiden sich die in diesem Kapitel diskutierten Reissner-Nordström artigen Lösungen physikalisch von der Standard-Reissner-Nordström-Lösung: Eine elektrische Ladung q erzeugt in modifizierter Maxwell-Theorie die Geometrie einer Standard-Reissner-Nordström-Lösung mit modifizierter Ladung $q' = q\sqrt{1 + \kappa/2}$. Ähnliches gilt für Reissner-Nordström-Monopol-Lösungen.

Die Konsistenzbedingungen (20.20) ermöglichen eine konsistente Beschreibung von Situationen, in denen der Energie-Impuls-Tensor symmetrisch und kovariant erhalten ist. Auf der anderen Seite wurde in Teil I dieser Dissertation argumentiert, dass innerhalb von Lorentz-verletzenden Theorien gerade die Situationen interessant sind, in denen der Energie-Impuls-Tensor nicht symmetrisierbar ist, da sich die Lorentz-Brechung gerade in dieser Nichtsymmetrisierbarkeit manifestiert.

Wie beispielsweise die Antwort der Raumzeit auf ein propagierendes Wellenpaket, das durch modifizierte Maxwell-Theorie beschrieben wird, aussieht, muss auch nach der Diskussion in diesem Kapitel offen bleiben.

21. Dynamische Modelle für modifizierte Maxwell-Theorie

Die in Kapitel 17 diskutierten Beispielkonfigurationen für modifizierte Maxwell-Theorie waren *ad hoc* gewählt und damit Beispiele für explizit Lorentz-verletzende Theorien.

In diesem Kapitel wird gezeigt, dass sich zwei der drei Beispielkonfigurationen auch aus Theorien gewinnen lassen, die die Lorentz-Invarianz spontan brechen. Spontane Lorentz-Verletzung weist nicht die mit dem Energie-Impuls Tensor verknüpften Probleme auf, die für explizite Lorentz-Verletzung auftreten, da die Hintergrundfelder jetzt eigene Feldgleichungen erfüllen und damit die Konsistenzbedingungen (5.7) und (5.12) automatisch erfüllt sind.

21.1. Ghost-condensate

Wie schon in Abschnitt (17.1) angesprochen stimmt die effektive Metrik (17.4) mit der in [13] diskutierten überein. In [13] wurde die effektive Metrik aus dem „Ghost-condensate“ [94] erhalten. Die dem „Ghost-condensate“ zugrunde liegende Idee ist, durch eine Art Higgsmechanismus den Infrarot-Sektor der Allgemeinen Relativitätstheorie zu modifizieren.

Dazu wird das „Ghost-condensate“ eingeführt, das als eine Art Flüssigkeit mit Zustandsgleichung $p = -\rho$ das Universum füllt. Diesen Hintergrund erhält man aus einer Theorie mit einem reellen Skalarfeld ϕ

$$\mathcal{L}_{\text{ghost-cond}} = M^4 P(X) + \text{höhere Ableitungen} , \quad (21.1)$$

mit

$$X = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi . \quad (21.2)$$

$P(X)$ ist eine Funktion mit Minimum an der Stelle $X = 1$. Es wurde hier die nicht-kanonische Massendimension -1 für das Skalarfeld ϕ gewählt. X ist somit dimensionslos.

Die Schwarzschild-Lösung zusammen mit der Ghost-Konfiguration $\bar{\phi} = \tau$, (in Lemaître Koordinaten (19.5)) ist dann eine (Näherungs)lösung [95].

Mit der Wahl $\xi_\mu = \partial_\mu \bar{\tau}$, der Definition (15.3)-(15.4) für den κ -Tensor und der Kopplung (15.9) an das Photon-Feld ergibt sich dann die Hintergrundkonfiguration (17.2) aus dem Abschnitt 17.1 als Lösung einer dynamischen Theorie.

21.2. Dynamisches Modell für Fall 2

In diesem Abschnitt wird ein Spielzeug-Modell vorgestellt, das das Beispiel 2 als Lösung einer dynamischen Theorie liefert. Die Struktur ist von der Idee des Ghost-condensate (21.1) direkt inspiriert. Ähnliche Modelle wurden z. B. auch in den Veröffentlichungen [96, 97] studiert.

Wir betrachten ein an die Gravitation gekoppeltes Skalarfeld, das der folgenden Wirkung unterliegt:

$$S = \int d^4x \left(\mathcal{L}_{\text{grav}} + \sqrt{g} m^4 V \right), \quad (21.3a)$$

$$V = (X + 1)^2, \quad (21.3b)$$

$$X \equiv g^{\mu\nu} (\partial_\mu \phi) (\partial_\nu \phi), \quad (21.3c)$$

und mit der rein gravitativen Lagrangedichte $\mathcal{L}_{\text{grav}}$ gegeben durch (15.10). Wie oben hat das Skalarfeld nicht die nicht-kanonische Massendimension -1 und X ist somit dimensionslos.

Allgemeiner kann für das Potential $V(X)$ jede Funktion gewählt werden, die an der Stelle $X = -1$ ein Minimum hat,

$$V(-1) = V'(-1) = 0, \quad V''(-1) > 0, \quad (21.4)$$

Mit dem Strich wird die Ableitung nach X bezeichnet.

Anders als im Ghost-condensate ist das Vorzeichen des kinetischen Terms hier kanonisch.

Die Feldgleichungen für die Wirkung (21.3) lauten

$$G^{\mu\nu} = -4\pi m^4 (2V' \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi + V g^{\mu\nu}) \equiv 8\pi T_\phi^{\mu\nu}, \quad (21.5a)$$

und

$$D_\mu (V' \partial^\mu \phi) = 0. \quad (21.5b)$$

$G^{\mu\nu}$ bezeichnet den durch (15.13) definierten Einsteintensor.

Die einfachste Lösung der Gleichungen (21.5) (in kartesischen Koordinaten) ist eine flache Raumzeit

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \equiv \text{diag}(1, -1, -1, -1), \quad (21.6a)$$

mit

$$\phi = n_\mu x^\mu. \quad (21.6b)$$

n_μ ist ein konstanter raumartiger Vektor, $n_\mu n_\nu \eta^{\mu\nu} = -1$.

Dieser Vektor kann die Quelle für beobachtbare Anisotropien sein, falls das Skalarfeld ϕ an Standard-Materie gekoppelt ist. In Ref. [64, 65] werden experimentelle Schranken an solche Anisotropien im Photon-Sektor diskutiert.

Die Schwarzschild-Metrik ist eine Vakuumlösung der allgemeinen Relativitätstheorie. Daher ist sie zusammen mit jeder ϕ -Konfiguration für die gilt $X \equiv \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi = -1$ ebenfalls eine Lösung der Feldgleichungen (21.5), denn für solche Konfigurationen verschwindet der Energie-Impuls Tensor (21.5a).

Eine explizite Lösung für den Bereich $r > 2M$ in Standard Schwarzschild Koordinaten lautet :

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \text{diag} \left([1 - 2M/r], -[1 - 2M/r]^{-1}, -r^2, -r^2 \sin^2 \theta \right), \quad (21.7a)$$

$$\bar{\phi} = 2M \ln \left(\frac{\sqrt{r} + \sqrt{r - 2M}}{\sqrt{M}} \right) + \sqrt{r(r - 2M)}. \quad (21.7b)$$

$2M$ multipliziert mit der Newton-Konstante G_N/c^2 ist der Längenparameter der Lösung.

Die Feldkonfiguration (21.7b) löst die Feldgleichung (21.5b) außerhalb des Horizonts und ihr Gradient ist identisch mit der Hintergrund-Feldkonfiguration (17.7),

$$\bar{\xi}_\mu \Big|_{\text{Fall 2}} = \partial_\mu \bar{\phi}, \quad (21.8)$$

mit der Radialkomponente $\partial_r \bar{\phi} = 1/\sqrt{1 - 2M/r}$.

Die wesentlichen Betrachtungen zur Hintergrund-Feldkonfiguration (17.7) waren von der expliziten Form von $\bar{\xi}_\mu$ innerhalb des Horizontes unabhängig, das gilt insbesondere für die Behauptung, dass kein Photon-Horizont außerhalb von $r =$

2M auftritt, vgl. Abschnitt 18.2. Die einzige Ausnahme sind die Rechnungen in Abschnitt 18.1.

Fügt man nun zur Wirkung (21.3) die Photon-Wirkung (15.9) hinzu und ersetzt in den Definitionen (15.3)–(15.4) ζ_μ durch $\partial_\mu\phi$, so erhält man durch $\phi = \bar{\phi}$ aus (21.7b) auf dynamische Weise das in Abschnitt (17.2) diskutierte Beispiel.

Das in diesem Abschnitt diskutierte Spielzeug-Modell (21.3) hat nicht den Anspruch ein ernstzunehmendes phänomenologisches Modell zu sein. Neben den offensichtlichen Schwierigkeiten wie Nicht-Renormierbarkeit sind auch Probleme bzgl. Stabilität und Kausalität zu erwarten.

Betrachtet man Quantenkorrekturen, so wird klar, dass zwar der kinetische Term im Potential nicht-ghost-artig ist, die Quantenfluktuationen um das Minimum aber durchaus ghost-artig sein können, so dass die Stabilität der Lösung fraglich ist.

Dennoch erfüllt das Spielzeug-Modell den Zweck des Existenzbeweises; es ist gezeigt worden, dass im Prinzip dynamische Theorien mit spontaner Lorentz-Verletzung möglich sind, die keine multiplen Horizontstrukturen aufweisen. Zumindest auf klassischem Niveau ist es ein Beispiel einer Theorie, die dynamisch den Hintergrund (17.8) liefert.

21.3. Dynamisches Modell für Fall 3?

Es scheint deutlich schwieriger, eine dynamische Theorie für die dritte Hintergrund-Feldkonfiguration (17.12) zu finden, da sich das Vektorfeld (17.11) nicht als Gradient eines Skalarfeldes schreiben lässt. Beschränkt man sich jedoch auf sphärisch symmetrische Felder, so kann man die Theorie (21.3) auch nutzen um das Beispiel 3 dynamisch zu erhalten. Die Grundidee dabei ist, die sphärisch symmetrischen Felder als Felder einer reduzierten $(1 + 1)$ -dimensionalen Theorie zu betrachten.¹ Mit Hilfe des zweidimensionalen Levi-Civita Symbols ϵ^{mn} lässt sich dann das Lorentz-verletzende Hintergrundfeld schreiben als $\zeta^\mu|_{\text{Fall 3}} = (\bar{\zeta}^0, \bar{\zeta}^1, 0, 0)$ mit $\bar{\zeta}^m = \epsilon^{mn} \partial_n \bar{\phi}$ und dem Gradienten $(\partial_0, \partial_1) \equiv (\partial_t, \partial_r)$

Da sich jedoch der Nutzen der dynamischen Theorie (21.3) lediglich auf den Existenzbeweis beläuft und ein weitergehender Nutzen für eine dynamische Theorie

¹Solche Theorien lassen sich beispielsweise aus höherdimensionalen Eichtheorien erhalten, vgl.[98]

für das Beispiel 3 ebenfalls nicht erkennbar ist, soll diese Idee hier nicht weiter verfolgt werden.

22. Zusammenfassung Teil III

Der zweite Teil dieser Dissertation behandelte die Kopplung von modifizierter Maxwell-Theorie an die Gravitation unter verschiedenen physikalischen Aspekten. Wie auch bei der Kopplung von Maxwell-Chern-Simons-Theorie treten dabei Schwierigkeiten auf.

In Kapitel 15 wurde zunächst die modifizierte Maxwell-Theorie eingeführt und minimal an die Gravitation gekoppelt. In den folgenden Kapiteln wurden dann zunächst Propagationseffekte in gekrümmten Hintergründen studiert. Dazu wurden die gravitativen Hintergründe als gegeben vorausgesetzt und die Propagation modifizierter Maxwell-Felder in der Näherung der geometrischen Optik studiert. In Kapitel 16 wurde ein allgemeines Verfahren zum Studium der geometrischen Optik für eine große Klasse von modifizierten Maxwell-Theorien angegeben, es stellt sich heraus, dass die modifizierten Lichtstrahlen wieder auf Nullgeodäten laufen, allerdings in einer modifizierten Metrik. Das folgende Kapitel studierte explizit drei verschiedenen Modelle modifizierter Maxwell-Theorie in einem Schwarzschild-Hintergrund und untersuchte die resultierenden effektiven Metriken. Diese können, je nach Konfiguration des Hintergrundfeldes, verschieden aussehen. Eine Möglichkeit ist wieder ein Schwarzschild-Hintergrund, mit modifizierter Masse (17.4) oder reskaliert Zeit (17.12). Eine andere Möglichkeit ist eine nicht Ricci-flache effektive Raumzeit (17.8). Die verschiedenen effektiven Raumzeiten wurden insbesondere auf Horizontstrukturen untersucht. Für die Konfiguration (17.4) ergibt sich ein äußerer Photon-Horizont und ein innerer Horizont für gewöhnliche Materie, in den beiden anderen Fällen fällt der Horizont mit dem Horizont für gewöhnliche Materie (Schwarzschild-Horizont) zusammen.

Auch die Rotverschiebung und Lichtbeugung in den verschiedenen Theorien wurde untersucht (Kapitel 18). In allen drei Theorien ist die Lichtbeugung an einer Schwarzschild-Masse modifiziert, die Rotverschiebung ändert sich gegenüber der Standard-Theorie nicht.

Das folgende Kapitel 19 widmet sich dem verallgemeinerten zweiten Hauptsatz in modifizierter Maxwell-Theorie.

Kapitel 20 untersuchte die Existenz von Lösungen der Einstein-Gleichung und der modifizierten Maxwell-Gleichung mit nicht verschwindendem Photon-Feld. Die Schwierigkeit besteht insbesondere darin, dass der Energie-Impuls-Tensor in modifizierter Maxwell-Theorie nicht manifest symmetrisierbar ist und auch nicht notwendigerweise kovariant erhalten. Diese Forderungen, die sich für nicht Lorentz-verletzende Theorien direkt aus der Invarianz der Theorie unter lokalen Lorentz-Transformationen und allgemeinen Koordinatentransformationen und den Feldgleichungen für die Felder ergeben, stellen für explizit Lorentz-verletzende Theorien zusätzliche Bedingungen dar. Es wird gezeigt, dass für modifizierte Maxwell-Theorie Reissner-Nordström-artige Lösungen existieren.

Im folgenden Kapitel wird untersucht, ob sich die explizit Lorentz-verletzenden Konfigurationen, die in Kapitel 17 diskutiert wurden, sich auch als Lösungen einer Theorie finden lassen, die Lorentz-Invarianz nicht explizit, sondern spontan bricht. Dies ist besonders im Hinblick auf die möglichen Schwierigkeiten mit dem verallgemeinerten zweiten Hauptsatz der Thermodynamik interessant, da es unwahrscheinlich erscheint, dass spontane Lorentz-Verletzung Schwierigkeiten mit dem verallgemeinerten zweiten Hauptsatz haben könnte. Es zeigt jedoch, dass sich zumindest das erste Beispiel (17.4) auch aus einer Theorie gewinnen lässt, die Lorentz-Invarianz spontan bricht. Dies spricht dafür, die mögliche Realisierung eines Perpetuum Mobiles in dieser Theorie noch intensiver zu studieren. Auch für das zweite Beispiel scheint es möglich eine dynamische Theorie zu finden, die die effektive (17.8) durch spontane Brechung realisiert. Diese Theorie ist allerdings mit potentiellen Problemen bezüglich Instabilitäten und Kausalität behaftet. Für das dritte Beispiel scheint es schwieriger eine dynamische Theorie zu finden, dazu wurden nur Ideenansätze diskutiert.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass das Problem der Kopplung von modifizierter Maxwell-Theorie nicht allgemein gelöst werden konnte. So ist insbesondere die Rückreaktion der Raumzeit auf Störungen, deren zugehöriger Energie-Impuls-Tensor nicht symmetrisch ist, weiter ungeklärt. Es war aber möglich modifizierte Maxwell-Theorie minimal an die Gravitation zu koppeln und interessante Propagationseffekte in der Näherung der geometrischen Optik zu studieren, die möglicherweise auf Probleme mit dem verallgemeinerten zweiten Hauptsatz der Thermodynamik schließen lassen. Ebenfalls war es möglich zu zeigen, dass im Rahmen der minimalen Kopplung Lösungen der Einstein-Gleichung mit nicht verschwindendem modifizierten Photon-Feld existieren.

Teil IV.

Zusammenfassung

23. Zusammenfassung

Diese Dissertation befasst sich mit Lorentz-Verletzung und Gravitation. Ausgangspunkt der Überlegungen war die Beobachtung, dass in explizit Lorentz-verletzenden, translations-invarianten Theorien im Minkowski-Raum, wie sie z.B. durch die „Standard Model Extension“ beschrieben werden, der zu den Translationen gehörende Noether-Strom in der Regel nicht symmetrisierbar ist. Diese Nicht-Symmetrisierbarkeit kann z.B. Ausdruck der gebrochenen Rotations-Invarianz sein [36]. Wie im ersten Teil dieser Arbeit gezeigt wurde, gilt, dass ein symmetrischer und erhaltener Energie-Impuls-Tensor bereits Invarianz der Wirkung unter Poincaré-Transformationen impliziert. Für echt Lorentz-Invarianz-verletzende Theorien existieren die Noether-Ströme demnach entweder nicht (falls Translations-Invarianz gebrochen wird) oder der korrespondierende Tensor ist nicht symmetrisierbar. Für explizit Lorentz-Invarianz verletzende, translationsinvariante Theorien in flachen Raumzeiten existiert also eine mit dem Noether-Strom eine physikalisch sinnvolle Beschreibung von Energie- und Impuls-Strömen, die manifest nicht symmetrisierbar ist. Das wirft die Frage auf, ob und wie sich solche Theorien an die Gravitation koppeln lassen. In den Standard-Einstein-Gleichungen tritt der Energie-Impuls-Tensor als Quellterm auf, der die Raumkrümmung verursacht. Die geometrische Struktur der Einstein-Gleichungen impliziert, dass der auftretende Quellterm stets symmetrisch und kovariant erhalten ist [12]. Wie die Rückreaktion der Raumzeit auf einen nichtsymmetrischen Energie-Impuls-Tensor aussehen könnte, ist eine offene Frage, die sich auch im Rahmen dieser Dissertation nicht beantworten ließ.

Teil II und III beschäftigten sich, unter verschiedenen Aspekten, mit zwei verschiedenen Lorentz-verletzenden photonischen Theorien und der Kopplung an die Gravitation.

Für die explizit Lorentz-verletzende Maxwell-Chern-Simons-Theorie wurde zunächst gezeigt, dass Hintergrundfeld-Konfigurationen existieren, die gravitative Lösungen erlauben, die mit der Lorentz-verletzenden Struktur verträglich sind. Konkret bedeutet das, dass der Energie-Impuls-Tensor (für bestimmte Lösungen der Feldgleichungen, nicht im Allgemeinen) symmetrisch und kovariant erhalten

ist.

In Kapitel 11 wurde mit der CPT-Anomalie ein Mechanismus berechnet, der einen, auf natürliche Weise stark unterdrückten, Maxwell-Chern-Simons-Term in einem topologisch nicht-trivialen, expandierendem, räumlich flachen Robertson-Walker-Universum induziert. Einige durch diesen Maxwell-Chern-Simons-Term induzierte physikalische Effekte wurden diskutiert, unter anderem ein modifiziertes Dispersionsgesetz für die Photonen. Mit Hilfe von Finsler-Geometrie gelang eine geometrische Interpretation dieses Dispersionsgesetzes (Kapitel 13).

Teil III beschäftigte sich mit der Kopplung von nicht-doppelbrechender modifizierter Maxwell-Theorie [61] an die Gravitation. Zunächst wurden verschiedene Effekte in der Näherung der geometrischen Optik berechnet, das heißt die (unbekannte) Rückreaktion der Raumzeit auf die modifizierten Photonen wurde vernachlässigt. Es wurde gezeigt, dass sich, für eine große Klasse von modifizierten Maxwell-Theorien, die Propagation der Photonen elegant und einfach durch die Einführung einer modifizierten Metrik beschreiben lässt (Kapitel 16). Bezüglich dieser effektiven Metrik laufen die modifizierten Photonen wieder auf Nullgeodäten.

Studiert man verschiedene Konfigurationen modifizierter Maxwell-Theorie in einem Schwarzschild-Hintergrund, so ergeben sich interessante Effekte. Je nach Konfiguration des Hintergrundfeldes kann die effektive Metrik der Photonen wieder eine Schwarzschild-Metrik sein (z.B. mit modifizierter Masse oder reskalierter Zeit) oder auch von anderer Struktur, z.B. nicht mehr Ricci-flach sein. Auch für modifizierte Maxwell-Theorie wurde (wie für Maxwell-Chern-Simons-Theorie) gezeigt, dass Hintergrundfeld-Konfigurationen existieren, die gravitative Lösungen erlauben, die mit der Lorentz-verletzenden Struktur verträglich sind (Kapitel 20). In Kapitel 21 wurden dynamische Modelle diskutiert, die zu den verschiedenen Konfigurationen modifizierter Maxwell-Theorie führen können.

Für Lorentz-verletzende Theorien, in denen sich die Symmetriebrechung durch unterschiedliche Maximalgeschwindigkeiten für verschiedene Teilchen ausdrückt, wurde die Vermutung geäußert, dass diese in Konflikt mit dem verallgemeinerten zweiten Hauptsatz der Thermodynamik stehen könnten [13–15]. Modifizierte Maxwell-Theorie fällt in diese Klasse von Theorien, daher wurden drei spezifische Modelle modifizierter Maxwell-Theorie in diesem Zusammenhang näher untersucht. Zunächst wurde gezeigt, dass, entgegen des heuristischen Bildes, das den Horizont mit der maximal möglichen Fluchtgeschwindigkeit assoziiert, nicht jede Theorie mit Maximalgeschwindigkeit ungleich c eine modifizierte Horizont-Struktur in Schwarzschild-Lösungen impliziert. Insbesondere diese modifizierten

Horizont-Strukturen gaben Anlass zu der Vermutung, dass Lorentz-verletzende Theorien potentiell in der Lage sein könnten, den verallgemeinerten zweiten Hauptsatz der Thermodynamik zu verletzen.

Im Folgenden wurde versucht, innerhalb des theoretischen Rahmens von modifizierter Maxwell-Theorie ein Gedankenexperiment zu konstruieren, das ein Perpetuum mobile der zweiten Art realisiert. Dazu wurde Compton-Streuung in einem Schwarzschild-Hintergrund betrachtet, in dem die modifizierten Photonen einen effektiven Horizont wahrnehmen, der außerhalb des Standard-Schwarzschild-Horizontes liegt. Nach einem Streuprozess in der sogenannten Ergosphäre zwischen diesen beiden Horizonten ist es möglich, dass das gestreute Photon negative Killing-Energie trägt und das auslaufende Elektron mehr Energie ins Unendliche trägt als die Summe der Energien der einlaufenden Teilchen betrug.

Es ist damit gelungen, einen (nicht-Standard) *Quanteneffekt* zu konstruieren, der die Masse des Schwarzen Loches verringert, ohne dabei die Entropie der äußeren Welt zu erhöhen. Entropie-reduzierende Prozesse auf Quantenniveau implizieren jedoch noch keine Verletzung des (verallgemeinerten) zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik, da dieser nur eine statistische Aussage über gemittelte makroskopische Systeme macht. Es ist nicht gelungen, den verallgemeinerten zweiten Hauptsatz im Rahmen modifizierter Maxwell-Theorie manifest zu verletzen. Anders als in verschiedenen Veröffentlichungen vermutet [14, 71], scheint ein Konflikt von Lorentz-verletzenden Theorien mit dem verallgemeinerten zweiten Hauptsatz der Thermodynamik kein effektiv anwendbares Ausschlusskriterien für bestimmte Klassen von Lorentz-verletzenden Theorien zu sein.

Ein weiteres interessantes Ergebnis dieser Doktorarbeit ist die Feststellung, dass der diskutierte Compton-Prozess bereits für *endliche*, genügend kleine Lorentz-Verletzung verboten ist. Das könnte ein Hinweis auf einen Mechanismus sein, der den verallgemeinerten zweiten Hauptsatz im Fall kleiner Lorentz-Verletzung schützt. Dieses Ergebnis wird gestützt von Ergebnissen aus [74], hier werden ähnliche Effekte für einen verwandten Prozess beschrieben. Weitere Forschung ist hier sicherlich von Interesse.

A. Appendix: Kinematik des Compton-Prozesses

Dieser Anhang diskutiert die Unmöglichkeit einer Realisierung des in Kapitel 19 betrachteten Perpetuum Mobiles zweiter Art für kleine Lorentz-Verletzung. In Kapitel 19 wurde an einem expliziten Beispiel die Möglichkeit einer Realisierung für große Lorentz-Verletzung gezeigt. Für hinreichend kleine (aber endliche) Lorentz-Verletzung ist der Prozess nicht mehr möglich. Das soll im Folgenden gezeigt werden, zunächst für die Näherung masseloser und dann auch für massive Elektronen. (Im Fall masseloser Elektronen lässt sich die Behauptung mathematisch streng zeigen, für den Fall endlicher Elektronenmasse muss in einem letzten Schritt auf numerische Methoden zurückgegriffen werden.)

Betrachtet wird jeweils die Kinematik für einen Compton-Streuprozess in der Ergosphäre, an den als Randbedingung gefordert wird, dass die einlaufenden Teilchen im Unendlichen präpariert werden können, ihre Tangentialvektoren also tangential zu Geodäten sind, die aus dem asymptotisch flachen Teil der Raumzeit kommen.

An das auslaufende Elektron wird gefordert, dass es mehr Killing-Energie als die Summe der Killing-Energien der einlaufenden Teilchen trägt und auf einer Geodäte propagiert, die ins Unendliche führt.

Das auslaufende Photon trägt somit negative Killing-Energie.

Unter diesen geforderten Randbedingungen wird gezeigt werden, dass der Prozess für ausreichend kleine, aber endliche Lorentz-verletzende Parameter kinematisch verboten ist.

A.1. Lokales Inertialsystem

Es werden die in Abschnitt 19.5 eingeführten Lemaître-Koordinaten genutzt. Wir betrachten in der Ergosphäre stattfindende Streuprozesse an der Stelle $r = 2M(1 +$

$\epsilon\rho$), wobei ϵ durch Gleichung (17.3) definiert ist, und im Wesentlichen ein Maß für die Stärke der Lorentzverletzung darstellt. Durch (16.10) ist der Wertebereich für ϵ auf $0 < \epsilon < \infty$ eingeschränkt, im Folgenden interessiert jedoch der Bereich $\epsilon \lll 1$. Der Parameter ρ läuft zwischen 0 und 1 und parametrisiert in allgemeiner Weise die Radialkoordinate an welcher der Streuprozess stattfinden soll. Durch Rotationen des Koordinatensystems kann man, ohne Beschränkung der Allgemeinheit, Streuprozesse am Ort $\phi = 0, \theta = \pi/2, r = 2M(1 + \epsilon\rho)$ betrachten und sicherstellen, dass das gestreute Photon in der Äquatorialebene $\theta = \pi/2$ ausläuft.

Der allgemeinste Streuprozess lässt sich dann wie folgt parametrisieren. Die Wellenvektoren k_a sind in einem lokalen Inertialsystem angegeben, in dem die Rechnungen etwas einfacher sind. Der Übergang in das lokale Inertialsystem ist durch das Vierbein e_μ^a gegeben, mit

$$e_\tau^0 = 1, e_\rho^1 = \sqrt{|g_{\rho\rho}|}, e_\theta^2 = \sqrt{|g_{\theta\theta}|}, e_\phi^3 = \sqrt{|g_{\phi\phi}|}, \quad (\text{A.1})$$

und allen anderen Komponenten identisch 0. Für $r = 2M(1 + \epsilon\rho), \theta = \pi/2$, gilt explizit

$$e_\tau^0 = 1, e_\rho^1 = 1/\sqrt{1 + \epsilon\rho}, e_\theta^2 = 2M(1 + \epsilon\rho), e_\phi^3 = 2M(1 + \epsilon\rho). \quad (\text{A.2})$$

Das asymptotisch zeitartige Killingfeld in lokalen Koordinaten an der Stelle $r = 2M(1 + \epsilon\rho)$ lautet

$$\sigma^a = e_\mu^a \sigma^\mu = \left(1, \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon\rho}}, 0, 0\right). \quad (\text{A.3})$$

A.2. Masselose Elektronen

A.2.1. Ansatz

Es wird (zunächst) vereinfachenderweise ein ultrarelativistischer Ansatz für die ein- und auslaufenden Elektronen gewählt: ¹

$$k_\mu^{e,\text{in}} k_\nu^{e,\text{in}} g^{\mu\nu} = k_\mu^{e,\text{out}} k_\nu^{e,\text{out}} g^{\mu\nu} = 0 \quad (\text{A.4})$$

¹Man mag versucht sein, diesen Ansatz in Frage zu stellen, wenn man sich an die Veltman-van Dam-Diskontinuität [99] erinnert, die besagt, dass massive Yang-Mills- und Gravitations-Theorien im Limes kleiner Massen nicht äquivalent sind zu den jeweiligen Theorien mit masselosen Austauschteilchen. Die Trajektorien massiver Teilchen in einem Schwarzschild-Hintergrund gehen aber im ultrahochenergetischen Limes $E \ggg m$ in die Trajektorien masseloser Teilchen über, daher ist dieser Ansatz für hochenergetische Elektronen gerechtfertigt.

$g^{\mu\nu}$ ist hier die (inverse) Schwarzschild-Metrik. Für hochrelativistische Elektronen mit $E^2 \gg m^2$ ist dieser Ansatz gerechtfertigt, da die Trajektorien solcher Elektronen beliebig nah an die Nullgeodäten für masselose Teilchen herankommen.

Die Photonen unterliegen der modifizierten Dispersionsrelation (16.5b). Der Ansatz für die Wellenvektoren im lokalen Inertialsystem sieht dann wie folgt aus:

$$k_a^{\gamma,\text{out}} = E_{\gamma,\text{out}} \left(1, -\sqrt{1 + \epsilon}\omega_1, 0, \sqrt{1 + \epsilon}\sqrt{1 - \omega_1^2} \right), \quad (\text{A.5a})$$

$$k_a^{e,\text{out}} = E_{e,\text{out}} \left(1, -\delta_1, -\delta_2, s_1\sqrt{1 - \delta_1^2 - \delta_2^2} \right), \quad (\text{A.5b})$$

$$k_a^{\gamma,\text{in}} = \tilde{E}_{\gamma,\text{in}} \left(1, -\sqrt{1 + \epsilon}\beta_1, -\sqrt{1 + \epsilon}\beta_2, s_2\sqrt{1 + \epsilon}\sqrt{1 - \beta_1^2 - \beta_2^2} \right) \quad (\text{A.5c})$$

$$k_a^{e,\text{in}} = k_a^{e,\text{out}} + k_a^{\gamma,\text{out}} - k_a^{\gamma,\text{in}} \quad (\text{A.5d})$$

Dieser Ansatz stellt bereits sicher, dass die Wellenvektoren die jeweilige Dispersionsrelation erfüllen.

Die Parameter ω_1 , $\delta_{1,2}$ und $\beta_{1,2}$ parameterisieren den Ansatz, und variieren jeweils zwischen -1 und 1 mit der zusätzlichen Einschränkung $\beta_1^2 + \beta_2^2 \leq 1$ und $\delta_1^2 + \delta_2^2 \leq 1$.

Die Energie des auslaufenden Elektrons im lokalen Inertialsystem (im Folgenden kurz Energie genannt) wird durch die Energie des auslaufenden Photons ausgedrückt, $E_{e,\text{out}} = \gamma E_{\gamma,\text{out}}$, wobei $\gamma > 0$ eine positive Konstante ist.

Vorgegangen wird wie folgt: Die Parameter ω_1 , $\delta_{1,2}$ und $\beta_{1,2}$ sowie $E_{\gamma,\text{out}}$ und γ werden (für festes ϵ und ρ) im erlaubten Bereich gewählt (siehe unten). Aus der Dispersionsrelation für das einlaufende Elektron folgt eine Gleichung für die Energie des einlaufenden Photons $E_{\gamma,\text{in}}$. Für diese muss überprüft werden, ob sie physikalisch ist, (das heißt reell und größer als 0) und ob das einlaufende Elektron tatsächlich aus dem Unendlichen kommt. Dann wird gezeigt werden, dass für kleines, aber endliches ϵ und die diskutierten Randbedingungen an den Prozess keine positiven Lösungen für $E_{\gamma,\text{in}}$ existieren.

Es werden also die auslaufenden Viererimpulse vorgegeben und einlaufende Teilchen gesucht, mit denen die Kinematik erfüllt ist. Diese Parametrisierung ist für den diskutierten Streuprozess bequem, da wir an definierten Endzuständen interessiert sind.

A.2.2. Physikalische Schranken an die Parameter

Im Folgenden sind Prozesse gesucht, bei denen das einfallende Photon und das einfallende Elektron aus dem „Unendlichen“, das heißt dem asymptotisch flachen Bereich der Raumzeit kommen, das auslaufende Elektron den asymptotisch flachen Bereich erreichen kann und das auslaufende Photon negative Killing-Energie trägt.

Lokal ein- bzw. auslaufend

Es muss gewährleistet sein, dass das auslaufende Elektron tatsächlich auslaufend ist, das heißt, dass es sich lokal zu größer werdenden Radialkoordinaten r bewegt, was auf die Bedingung

$$\delta_1 > \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon\rho}} \quad (\text{A.6})$$

führt. Für eine mögliche Lösung des Streuprozesses muss überprüft werden, ob das einlaufende Elektron sich lokal in Richtung kleinerer Radialkoordinaten bewegt. Da der Streuprozess hinter dem Photonhorizont stattfindet, bewegen sich die beteiligten Photonen bereits automatisch in Richtung des Schwarzen Loches.

Killing-Energie

Im diskutierten Streuprozess muss die Killing-Energie des einlaufenden Photons positiv sein und die des auslaufenden Photons negativ, was auf die Bedingungen

$$\omega_1 > \frac{\sqrt{1 + \epsilon\rho}}{\sqrt{1 + \epsilon}} \quad (\text{A.7})$$

und

$$\beta_1 < \frac{\sqrt{1 + \epsilon\rho}}{\sqrt{1 + \epsilon}} \quad (\text{A.8})$$

führt. Die Killing-Energie der beteiligten Elektronen ist automatisch positiv, da sie sich vor ihrem Horizont befinden.

Potentialwall

Die Bewegung auf Nullgeodäten im Schwarzschild-Hintergrund lässt sich auf eine effektiv eindimensionale Bewegung mit Potential V reduzieren,

$$V_{\text{Elektronen, masselos}} = \frac{L_{\text{Killing}}^2}{2r^2} - \frac{ML_{\text{Killing}}^2}{r^3}, \quad (\text{A.9})$$

$$V_{\text{Photonen}} = \frac{L_{\text{Killing}}^2}{2r^2} - \frac{\tilde{M}L_{\text{Killing}}^2}{r^3}. \quad (\text{A.10})$$

Das effektive Potential hat ein Maximum an der Stelle $r = 3M$ für die Elektronen

$$V_{\text{max}} = L_{\text{Killing}}^2 / (54M^2) \quad (\text{A.11})$$

für die Elektronen, bzw für die Photonen

$$V_{\text{max}} = L_{\text{Killing}}^2 / (54\tilde{M}^2) \quad (\text{A.12})$$

Sollen die einlaufenden Teilchen aus dem Unendlichen kommen, bzw. das auslaufende Elektron das Unendliche erreichen, so muss das Verhältnis von Killing-Energie E und Killing-Drehimpuls L so gewählt sein, dass die Potentialbarriere überwunden werden kann.

Für das auslaufende Elektron führt (A.9) auf eine Ungleichung für den Parameter δ_1 ,

$$\left(\frac{4}{27}(\epsilon\rho + 1)^2 + \frac{1}{2(\epsilon\rho + 1)} \right) \delta_1^2 - \frac{\delta_1}{\sqrt{\epsilon\rho + 1}} - \frac{4}{27}(\epsilon\rho + 1)^2 + \frac{1}{2} > 0. \quad (\text{A.13})$$

Bezeichnet man mit $N_{1,2}^\delta$ die Nullstellen der obigen quadratischen Gleichung,

$$N_{1,2}^\delta = \frac{27\epsilon\rho \mp 2\sqrt{2}\sqrt{(\epsilon\rho + 1)^4 (8\epsilon^3\rho^3 + 24\epsilon^2\rho^2 - 3\epsilon\rho + 8)} + 27}{\sqrt{\epsilon\rho + 1} (8\epsilon^3\rho^3 + 24\epsilon^2\rho^2 + 24\epsilon\rho + 35)}, \quad (\text{A.14})$$

so ist die Ungleichung erfüllt für $\delta_1 < N_1^\delta$ oder $\delta_1 > N_2^\delta$.

Dem 3D-Plot (A.1) entnimmt man, dass N_1^δ für $0 < \epsilon < 1$ and $0 < \rho < 1$ immer kleiner als $1/\sqrt{1 + \epsilon\rho}$ ist; und dem 3D-Plot (A.2), dass N_2^δ für $0 < \epsilon < 1$ and $0 < \rho < 1$ immer größer als $1/\sqrt{1 + \epsilon\rho}$ ist, es folgt also

$$\delta_1 > N_2^\delta \quad (\text{A.15})$$

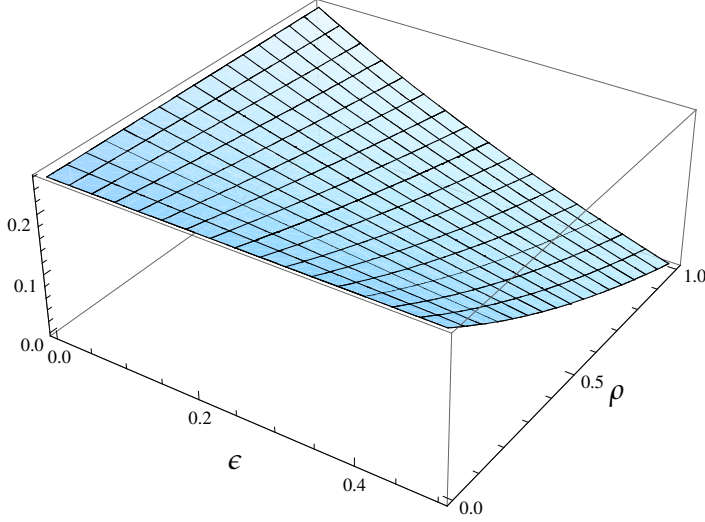


Abbildung A.1.: $1/\sqrt{1+\epsilon\rho} - N_1^\delta$

als notwendige und hinreichende Bedingung an δ_1 , damit das auslaufende Elektron das Unendliche erreichen kann.

Für das einlaufende Photon folgt aus (A.10) eine quadratische Ungleichung für β_1 :

$$\frac{4}{27} (\beta_1^2 - 1) (\epsilon + 1)(\epsilon\rho + 1)^2 + (\epsilon + 1)^3 \left(\frac{\beta_1 \sqrt{\epsilon + 1}}{\sqrt{\epsilon\rho + 1}} - 1 \right)^2 > 0. \quad (\text{A.16})$$

Bezeichnet man mit $N_{1,2}^\beta$ die Nullstellen dieser Gleichung, wobei gelten soll, $N_1^\beta \leq N_2^\beta$,

so ist die Bedingung erfüllt für $\beta_1 < N_1^\beta$ oder $\beta_1 > N_2^\beta$. Den 3D-Plots A.3 und A.4 entnimmt man, dass $\sqrt{1+\epsilon\rho}/\sqrt{1+\epsilon}$ immer zwischen den beiden Nullstellen liegt. Zusammen mit (A.8) ergibt sich als Bedingung an β_1

$$\beta_1 < N_1^\beta. \quad (\text{A.17})$$

Für das einlaufende Elektron ist in einer möglichen Lösung die Bedingung

$$E_{\text{Killing, e, in}}^2 > L_{\text{Killing, e, in}}^2 / (27M^2) \quad (\text{A.18})$$

zu überprüfen.

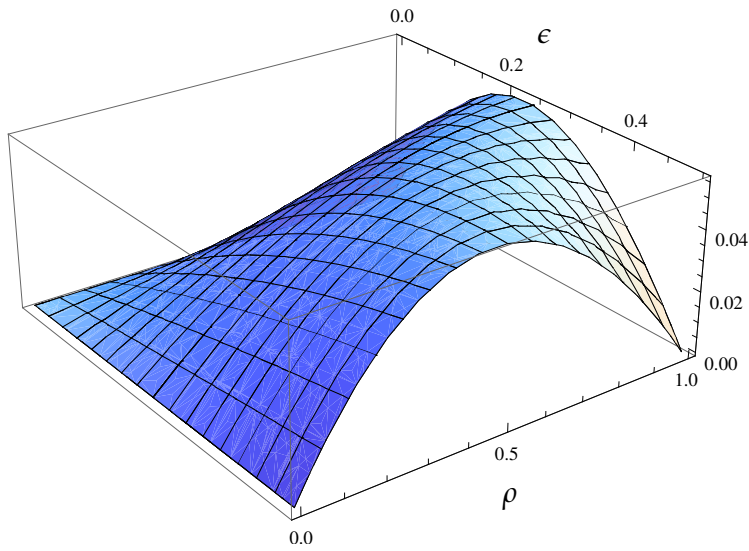


Abbildung A.2.: $-1/\sqrt{1+\epsilon\rho} + N_2^\delta$

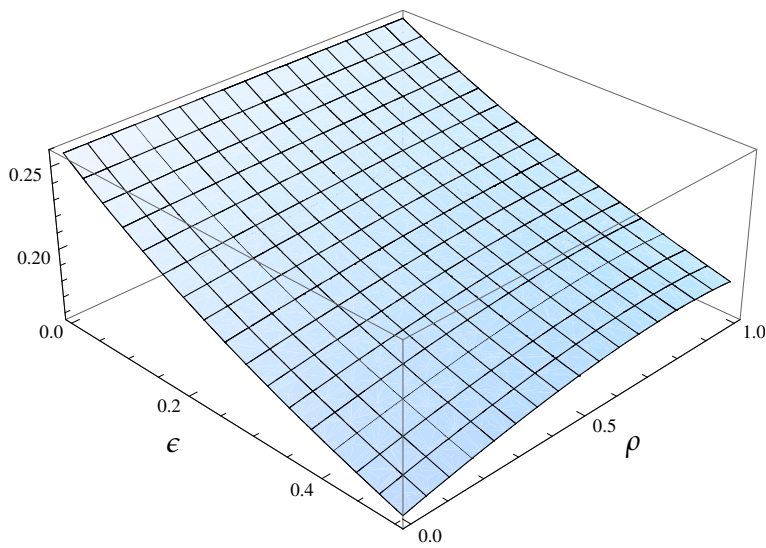


Abbildung A.3.: $\sqrt{1+\epsilon\rho}/\sqrt{1+\epsilon} - N_1^\beta$

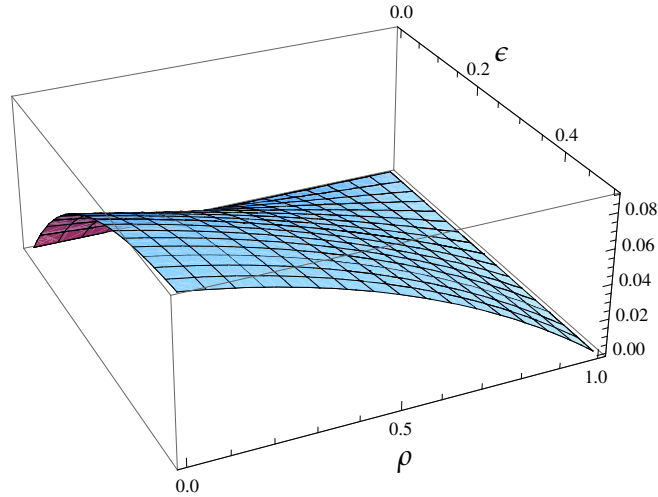


Abbildung A.4.: $N_2^\beta - \sqrt{1 + \epsilon\rho} / \sqrt{1 + \epsilon}$

A.2.3. Bemerkung

Die untere Schranke N_2^δ an δ_1 wird für festes ϵ durch die Wahl $\rho = 1$ minimiert. Diese von ρ nun unabhängige untere Schranke ist monoton fallend in ϵ (für den interessierenden Bereich $0 < \epsilon < 0.5$).

Die untere Schranke $\sqrt{1 + \epsilon\rho} / \sqrt{1 + \epsilon}$ an ω_1 wird für die Wahl $\rho = 0$ minimiert und ist ebenfalls monoton fallend in ϵ .

Die obere Schranke N_1^β an β_1 wird für die Wahl $\rho = 1$ maximiert. Diese nun von ρ unabhängige obere Schranke ist monoton steigend in ϵ .

A.2.4. Beispiele für erlaubte hochenergetische Prozesse

Beispiel I

Für kleine Lorentz-verletzende Parameter liegt die Ergosphäre hinter dem Potentialmaximum der Elektronen (und immer, unabhängig von der Stärke der Lorentz-Verletzung hinter dem Potentialmaximum der Photonen). Die Tatsache, dass das ein- und ausfallende Elektron dieses Potentialmaximum überwinden müssen, er-

weist sich als zusätzliche Einschränkung an den Streuprozess, die nicht trivial zu erfüllen ist. Deshalb wird hier zunächst ein Beispielprozess für starke Lorentzverletzung ($\epsilon > 1/2$) vorgestellt. Diese Lorentz-Verletzung ist zwar groß und sicher nicht konsistent mit existierenden experimentellen Schranken, aber noch im theoretisch erlaubten Bereich, in dem raumartige Photon-Trajektorien ausgeschlossen sind (16.10). Mit der Wahl der Parameter:

$$\epsilon = 2/3, \tag{A.19a}$$

$$\rho = 99/100, \tag{A.19b}$$

$$\omega_1 = 9984/10000, \tag{A.19c}$$

$$\delta_1 = 82/100, \delta_2 = 0, \tag{A.19d}$$

$$\beta_1 = 74/100, \beta_2 = 0, \tag{A.19e}$$

$$\gamma = 20 \tag{A.19f}$$

und

$$s_{1,2} = 1 \tag{A.19g}$$

sind alle Randbedingungen aus Abschnitt A.2.2 erfüllt.

Beispiel 2

Ein zweites Beispiel ist durch die Parameterkonfiguration

$$\epsilon = 1/2, \tag{A.20a}$$

$$\rho = 99/100, \tag{A.20b}$$

$$\omega_1 = 9984/10000, \tag{A.20c}$$

$$\delta_1 = 82/100, \delta_2 = 0, \tag{A.20d}$$

$$\beta_1 = 74/100, \beta_2 = 0, \tag{A.20e}$$

$$\gamma = 20, \tag{A.20f}$$

$$s_{1,2} = 1 \tag{A.20g}$$

gegeben. Beides sind Beispiele für große Lorentz-Verletzung.

A.2.5. Diskussion der Lösungen für masselose Elektronen

Aus der Forderung des Dispersionsgesetzes für das einlaufende Elektron folgt eine Gleichung für die Energie des einlaufenden Photons. Sie ist gegeben durch

$$E_{\gamma,\text{in}} = E_{\gamma,\text{out}}/\epsilon \left(X \pm \sqrt{X^2 + Y} \right), \quad (\text{A.21a})$$

mit

$$X = X_1 + X_2, \quad (\text{A.21b})$$

$$X_1 = -1 + (1 + \epsilon) \left(\beta_1 \omega_1 + s_2 \sqrt{1 - \beta_1^2 - \beta_2^2} \sqrt{1 - \omega_1^2} \right), \quad (\text{A.21c})$$

$$X_2 = \gamma \left(\sqrt{1 + \epsilon} \left(s_1 s_2 \sqrt{1 - \beta_1^2 - \beta_2^2} \sqrt{1 - \delta_1^2 - \delta_2^2} + \beta_1 \delta_1 + \beta_2 \delta_2 \right) - 1 \right), \quad (\text{A.21d})$$

$$Y = \epsilon \left(2\gamma \left(1 - \sqrt{1 + \epsilon} \left(s_1 \sqrt{1 - \omega_1^2} \sqrt{1 - \delta_1^2 - \delta_2^2} + \delta_1 \omega_1 \right) \right) - \epsilon \right). \quad (\text{A.21e})$$

Eine notwendige Bedingung, damit der Streuprozess stattfinden kann, ist dass der Ausdruck (A.21a) positiv ist. Es ist für unsere Zwecke ausreichend, nur den Term mit positivem Vorzeichen zu diskutieren, da dieser stets größer oder gleich dem Term mit negativem Vorzeichen ist. Im Folgenden wird gezeigt werden, dass für hinreichend kleines ϵ der Term (A.21a) stets negativ ist, und somit für kleine Lorentz-Verletzung das vorgeschlagene Perpetuum mobile nicht realisiert werden kann.

A.2.6. Diskussion der Funktion Y

Eine hinreichende Bedingung, damit der Term (A.21a) positiv ist, ist $Y > 0$.

Y kann nur positiv werden, wenn der Subterm

$$Y' = 1 - \sqrt{1 + \epsilon} \left(s_1 \sqrt{1 - \omega_1^2} \sqrt{1 - \delta_1^2 - \delta_2^2} + \delta_1 \omega_1 \right) \quad (\text{A.22})$$

positiv wird. Im Folgenden wird eine obere Schranke an Y' gesucht werden und gezeigt werden, dass diese für hinreichend kleines ϵ stets negativ ist.

Zunächst sieht man, dass, unabhängig von den anderen Parametern, der Term (A.22) für die Wahl $s_1 = -1$ stets kleiner ist, als für die Wahl $s_1 = 1$. Des Weiteren wird er, ebenfalls unabhängig von den verbleibenden Parametern, minimal für $\delta_2 = 0$. Nach der Diskussion in Abschnitt A.2.2 erzwingen die physikalischen Randbedingungen, dass die Parameter ω_1 und δ_1 Werte zwischen 0 und 1 annehmen. In diesem Wertebereich ist der verbleibende Ausdruck

$$Y'' = 1 - \sqrt{1 + \epsilon} \left(-\sqrt{1 - \omega_1^2} \sqrt{1 - \delta_1^2} + \delta_1 \omega_1 \right) \quad (\text{A.23})$$

monoton fallend in ω_1 und δ_1 . Eine obere Schranke an Y' ist also gegeben, wenn man die minimal erlaubten Werte für $\omega_1 = \sqrt{1 + \epsilon\rho}/\sqrt{1 + \epsilon}$ und $\delta_1 = N_2^\delta$ einsetzt,

$$Y' \leq Y'_{\max} = 1 - \sqrt{1 + \epsilon} \left(-\sqrt{1 - (1 + \epsilon\rho)/(1 + \epsilon)} \sqrt{1 - N_2^{\delta^2}} + N_2^\delta \sqrt{1 + \epsilon\rho}/\sqrt{1 + \epsilon} \right). \quad (\text{A.24})$$

Damit ist der Ausdruck

$$\begin{aligned} Y_{\max} &= 2\gamma \left(1 - \sqrt{1 + \epsilon} \left(N_2^\delta \sqrt{1 + \epsilon\rho}/\sqrt{1 + \epsilon} - \sqrt{1 - N_2^{\delta^2}} \sqrt{\frac{\epsilon + \epsilon\rho}{1 + \epsilon}} \right) \right) - \epsilon^2 \\ &\equiv 2\gamma Y'_{\max} - \epsilon^2 \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

eine obere Schranke für Y . Der 3D-Plot A.5 zeigt, dass Y'_{\max} für $\epsilon < 0.2$ für alle $0 < \rho < 1$ stets negativ ist. Damit kann Y für $\epsilon < 0.2$ nicht positiv werden und eine notwendige Bedingung für die Existenz einer physikalischen Lösung ist damit, dass der Term X positiv ist. Die beiden Summanden X_1 und X_2 sollen im Folgenden getrennt diskutiert werden.

A.2.7. Diskussion der Funktion X_1

Eine obere Schranke an den Term X_1 ist gegeben, wenn man die Parameter $s_2 = 1$ und $\beta_2 = 0$ setzt,

$$X_1 \leq -1 + (1 + \epsilon) \left(\beta_1 \omega_1 + \sqrt{1 - \beta_1^2} \sqrt{1 - \omega_1^2} \right). \quad (\text{A.26})$$

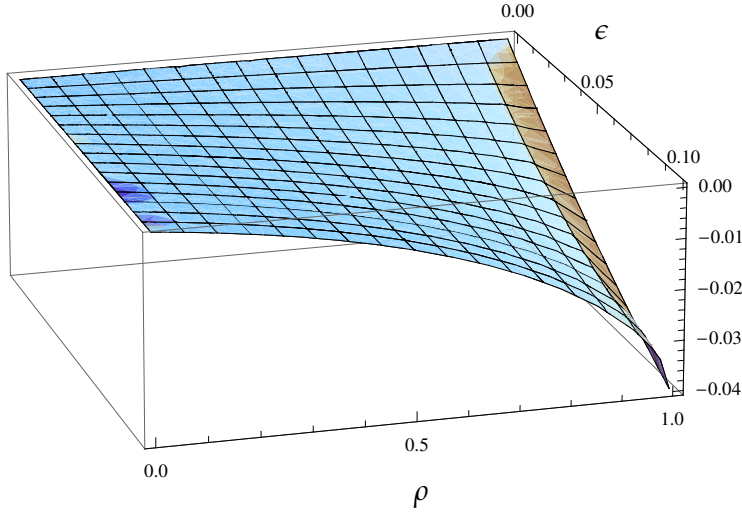


Abbildung A.5.: Y'_{\max} im Parameterbereich $0 < \epsilon < 0.1$ und $0 < \rho < 1$.

Wie schon diskutiert, muss für den betrachteten Streuprozess immer $\beta_1 < N_1^\beta \leq \sqrt{1 + \epsilon\rho}/\sqrt{1 + \epsilon} < \omega_1$ gelten. Führt man die Differenz $d = \omega_1 - \beta_1 \geq 0$ ein, so lässt sich leicht zeigen, dass der Ausdruck

$$\begin{aligned}
 & \left(\beta_1 \omega_1 + \sqrt{1 - \beta_1^2} \sqrt{1 - \omega_1^2} \right) \\
 = & \left((\omega_1 - d) \omega_1 + \sqrt{1 - (\omega_1 - d)^2} \sqrt{1 - \omega_1^2} \right) \\
 = & \left(\beta_1 (\beta_1 + d) \sqrt{1 - \beta_1^2} \sqrt{1 - (\beta_1 + d)^2} \right)
 \end{aligned} \tag{A.27}$$

für $d = 0$ den maximalen Wert 1 annimmt und für $d > 0$ streng monoton fallend in d ist. Er wird also maximal im Grenzfall $\beta_1 \rightarrow N_1^\beta$ und $\omega_1 \rightarrow \sqrt{1 + \epsilon}$. Damit ist

$$X_1 \leq X_{1,\max} = -1 + (1 + \epsilon) \left(N_1^\beta \sqrt{1 + \epsilon\rho}/\sqrt{1 + \epsilon} + \sqrt{1 - N_1^{\beta^2}} \sqrt{\frac{\epsilon + \epsilon\rho}{1 + \epsilon}} \right). \tag{A.28}$$

Der 3D-Plot A.6 zeigt, dass $X_{1,\max}$ im Parameterbereich $0 < \epsilon < 0.1$ und $0 < \rho < 1$ stets negativ ist. Für kleine ϵ kann X_1 damit nicht positiv werden.

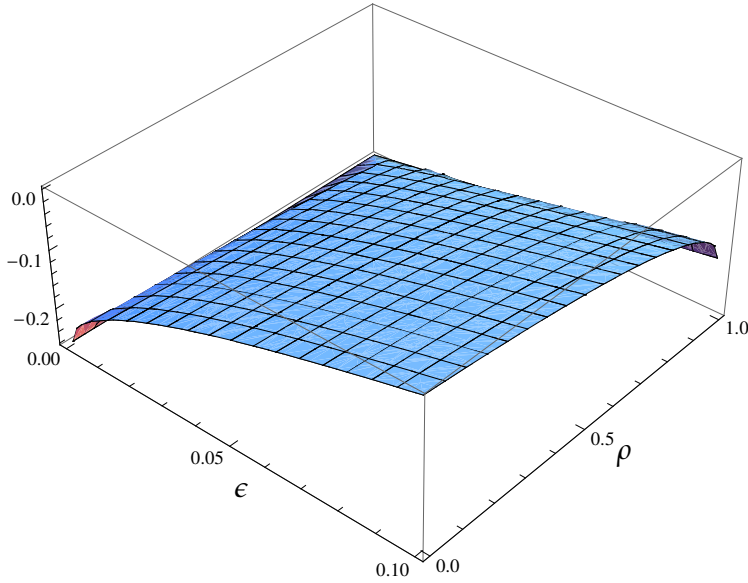


Abbildung A.6.: $X_{1,\max}$ im Parameterbereich $0 < \epsilon < 0.1$ und $0 < \rho < 1$.

A.2.8. Diskussion der Funktion X_2

Diskutiert man den zweiten Term X_2

$$X_2 = \gamma \left(s_1 s_2 \sqrt{\epsilon + 1} \sqrt{-\beta_1^2 - \beta_2^2 + 1} \sqrt{-\delta_1^2 - \delta_2^2 + 1} + \beta_1 \delta_1 \sqrt{\epsilon + 1} + \beta_2 \delta_2 \sqrt{\epsilon + 1} - 1 \right), \quad (\text{A.29})$$

so kann man wieder zur Bildung einer oberen Schranke $s_1 = s_2 = 1$ setzen. X_2 wird maximal, wenn der Subterm

$$X_{2,\text{textsub}} = \beta_1 \delta_1 + \beta_2 \delta_2 + \sqrt{1 - \beta_1^2 - \beta_2^2} \sqrt{1 - \delta_1^2 - \delta_2^2} \quad (\text{A.30})$$

maximal wird.

Für beliebige, aber feste β_1 und δ_1 liegen die Maxima auf der durch

$$\delta_2 = \beta_2 \sqrt{1 - \delta_1^2} / \sqrt{1 - \beta_1^2} \quad (\text{A.31})$$

gegebenen Hyperebene und haben den von β_2 und δ_2 unabhängigen Wert

$$X_{2,\text{sub,max}} = \beta_1 \delta_1 + \sqrt{1 - \beta_1^2} \sqrt{1 - \delta_1^2}. \quad (\text{A.32})$$

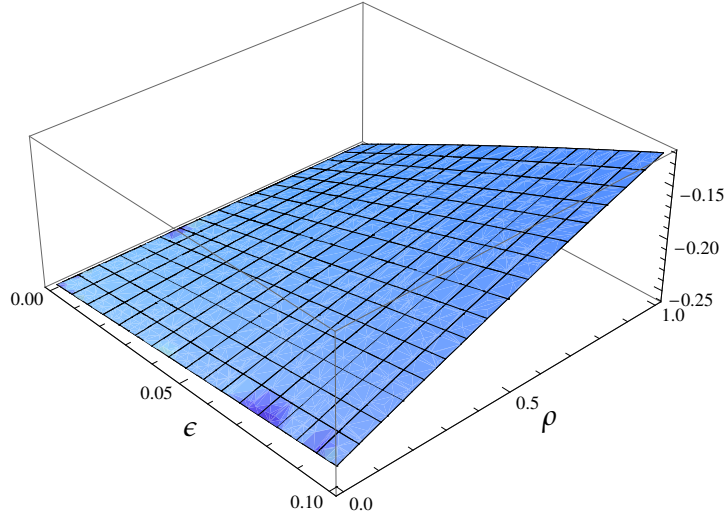


Abbildung A.7.: $X'_{2,\max}$ im Parameterbereich $0 < \epsilon < 0.1$ und $0 < \rho < 1$.

Wie im Abschnitt A.2.2 diskutiert, ist β_1 immer kleiner oder gleich δ_1 , für kleine ϵ wird der Mindestabstand größer. Führt man die Differenz $d = \delta_1 - \beta_1$ ein, lässt sich analog wie in der Diskussion um den Term X_1 zeigen, dass der Ausdruck (A.32) für $d > 0$ monoton fallend in d ist. Er wird also maximiert für minimalen Abstand zwischen β_1 und δ_1 .

Insgesamt folgt, dass (A.30) im Limes $\delta_1 \rightarrow N\delta_2$ und $\beta_1 \rightarrow N\beta_1$ maximiert wird. Setzt man die jeweils maximierenden Parameter in X_2 ein, so findet man mit

$$X_{2,\max} = \gamma \left(-1 + \sqrt{\epsilon + 1} \left(\sqrt{1 - N_1^{\beta^2}} \sqrt{1 - N_2^{\delta^2}} + N_1^\beta N_2^\delta \right) \right) \equiv \gamma X_{2',\max} \quad (\text{A.33})$$

eine obere Schranke an X_2 .

Der 3D-Plot A.7 zeigt, dass $X'_{2,\max}$ im Parameterbereich $0 < \epsilon < 0.1$ und $0 < \rho < 1$ stets negativ ist. Für kleine ϵ kann X_2 damit nicht positiv werden.

Zusammengefasst findet man, dass Lösungen mit positiver Energie für den oben beschriebenen Streuprozess für kleine ϵ nicht mehr möglich sind. Eine konservative Schranke ist $\epsilon < 0.1$.

A.3. Massive Elektronen

In diesem Kapitel soll die in Kapitel A.2 für masselose Elektronen durchgeführte Diskussion für massive Elektronen erweitert werden. Große Teile der Diskussion lassen sich ähnlich durchführen, ein entscheidender Unterschied ist jedoch, dass sich die Bedingung, dass das auslaufende Elektron die Potentialbarriere überwinden muss, nicht mehr analytisch für den Radialimpuls des auslaufenden Elektrons auflösen lässt. Im letzten Teil der Diskussion muss daher auf numerische Analyse zurückgegriffen werden.

A.3.1. Ansatz

Der Ansatz (A.5) für den Compton-Streuprozess muss für massive Elektronen, die der Dispersionsrelation

$$k_\mu^{e,\text{in}} k_\nu^{e,\text{in}} g^{\mu\nu} = k_\mu^{e,\text{out}} k_\nu^{e,\text{out}} g^{\mu\nu} = m^2 \quad (\text{A.34})$$

genügen, leicht modifiziert werden:

$$(k_a)^{\gamma,\text{out}} = E_{\gamma,\text{out}} \left(1, -\zeta\omega_1, 0, \zeta \sqrt{1 - \omega_1^2} \right), \quad (\text{A.35a})$$

$$(k_a)^{e,\text{out}} = p_{e,\text{out}} \left(\sqrt{m^2 / (p_{e,\text{out}})^2 + 1}, \hat{p}_{e,\text{out}} \right), \quad (\text{A.35b})$$

$$(k_a)^{\gamma,\text{in}} = \tilde{E}_{\gamma,\text{in}} \left(1, -\zeta\beta_1, -\zeta\beta_2, s_1\zeta \sqrt{1 - \beta_1^2 - \beta_2^2} \right), \quad (\text{A.35c})$$

$$(k_a)^{e,\text{in}} = (k_a)^{e,\text{out}} + (k_a)^{\gamma,\text{out}} - (k_a)^{\gamma,\text{in}}, \quad (\text{A.35d})$$

mit

$$p_{e,\text{out}} = \gamma E_{\gamma,\text{out}}, \quad (\text{A.36a})$$

$$\hat{p}_{e,\text{out}} = \left(-\delta_1, -\delta_2, s_1 \sqrt{1 - \delta_1^2 - \delta_2^2} \right). \quad (\text{A.36b})$$

Im folgenden wird m zur Vereinfachung auf 1 gesetzt und kann durch dimensionale Analyse wieder ergänzt werden.

A.3.2. Bedingungen

Die Bedingungen an die Photon-Parameter ω_1 und β_1 können aus der vorherigen Diskussion (Abschnitt: A.2.2) übernommen werden.

Die Bedingungen an das auslaufende Elektron sind im massiven Fall etwas komplizierter als im masselosen.

Lokal auslaufend

Das auslaufende Elektron muss lokal auswärts laufen, was auf die Bedingung

$$E_{\gamma,\text{out}}\gamma\delta_1\sqrt{\epsilon\rho+1} - \sqrt{E_{\gamma,\text{out}}^2\gamma^2+1} > 0 \quad (\text{A.37})$$

führt. Daraus folgt

$$\delta_1 > \frac{\sqrt{\frac{1}{E_{\gamma,\text{out}}^2\gamma^2}+1}}{\sqrt{1+\epsilon\rho}}. \quad (\text{A.38})$$

Das ist notwendig, nicht unbedingt hinreichend. Aus der Bedingung, dass $\delta_1 \leq 1$ gelten muss, folgt

$$\gamma E_{\gamma,\text{out}} \geq \frac{1}{\sqrt{\epsilon\rho}}. \quad (\text{A.39})$$

Effektives Potential

Damit das auslaufende Elektron mit Killingenergie $E_{\text{Killing},e,\text{out}}$ und Killingdrehimpuls $L_{\text{Killing},e,\text{out}}$ das Unendliche erreichen kann, muss seine Killingenergie größer sein als das Maximum des effektiven Potentials [26] sein,

$$1/2E_{\text{Killing},e,\text{out}}^2 > 1/2(1 - M/r_{\text{max}}) + L_{\text{Killing},e,\text{out}}^2(1/(2r_{\text{max}}^2) - M/r_{\text{max}}^3). \quad (\text{A.40})$$

Wie auch im Fall masseloser Elektronen ist das eine implizite Bedingung an δ_1 , die sich aber, anders als im Fall masseloser Elektronen, nicht analytisch auflösen lässt. Formt man (A.40) um, so erhält man,

$$\begin{aligned} 1/2 > 1/(2E_{\text{Killing},e,\text{out}}^2)(1 - M/r) + \tilde{L}_{\text{Killing},e,\text{out}}^2(1/(2r^2) - M/r^3) \\ > \tilde{L}_{\text{Killing},e,\text{out}}^2(1/(2r^2) - M/r^3), \quad \forall r > 2M, \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

mit $\tilde{L}_{\text{Killing},e,\text{out}} = L_{\text{Killing},e,\text{out}}/E_{\text{Killing},e,\text{out}}$. Das Maximum der Funktion

$$V_{\text{relativistic}} = \tilde{L}_{\text{Killing},e,\text{out}}^2 (1/(2r^2) - M/r^3) \quad (\text{A.42})$$

für gegebenes $L_{\text{Killing},e,\text{out}}$ und $E_{\text{Killing},e,\text{out}}$ liegt bei $r = 3M$ und beträgt $V_{\text{relativistic, max}} = \tilde{L}_{\text{Killing},e,\text{out}}^2/(54M^2)$. Eine notwendige (nicht unbedingt hinreichende) Bedingung, damit ein massives Elektron die Potentialbarriere überwinden kann, ist damit

$$E_{\text{Killing},e,\text{out}}^2/L_{\text{Killing},e,\text{out}}^2 > 1/(27M^2). \quad (\text{A.43})$$

Aus Gleichung (A.43) folgt eine notwendige Bedingung an δ_1 .

$$\begin{aligned} & -\frac{\sqrt{E_{e,\text{out}}^2 + 1}\delta_1}{2E_{e,\text{out}}M^2} \\ & + \sqrt{\epsilon\rho + 1} \left(\frac{-4E_{e,\text{out}}^2\epsilon^3\rho^3 - 12E_{e,\text{out}}^2\epsilon^2\rho^2 + 15E_{e,\text{out}}^2\epsilon\rho + 23E_{e,\text{out}}^2 + 27(\epsilon\rho + 1)}{108E_{e,\text{out}}^2M^2(\epsilon\rho + 1)} \right) \\ & + \frac{\delta_1^2(4\epsilon^3\rho^3 + 12\epsilon^2\rho^2 + 12\epsilon\rho + 31)}{108M^2\sqrt{\epsilon\rho + 1}} \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

Die Gleichung (A.44) beschreibt eine nach oben geöffnete Normalparabel. Es ist folgende Fallunterscheidung zu treffen:

- Für

$$E_{e,\text{out}} < \frac{3\sqrt{3}\sqrt{\epsilon\rho + 1}}{\sqrt{4\epsilon^3\rho^3 + 12\epsilon^2\rho^2 - 15\epsilon\rho + 4}} \quad (\text{A.45})$$

hat die Parabel keine Nullstellen. Die Bedingung (A.44) ist damit automatisch erfüllt.

- Für

$$E_{e,\text{out}} > \frac{3\sqrt{3}\sqrt{\epsilon\rho + 1}}{\sqrt{4\epsilon^3\rho^3 + 12\epsilon^2\rho^2 - 15\epsilon\rho + 4}} \quad (\text{A.46})$$

hat die Parabel Nullstellen, $N_{1,\text{massive}}^\delta \leq N_{2,\text{massive}}^\delta$. Die Ungleichung ist erfüllt für $\delta_1 < N_{1,\text{massive}}^\delta$ oder $\delta_2 > N_{2,\text{massive}}^\delta$.

Zusätzlich muss (A.39) gelten. Für $\epsilon < 0.09$ ist mit (A.39) auch (A.46) erfüllt. Außerdem lässt sich zeigen, dass $N_{1,\text{massive}}^\delta - \sqrt{\frac{1}{E_{\gamma,\text{out}}^2 \gamma^2} + 1} / \sqrt{1 + \epsilon \rho}$ für die Wahl $E_{e,\text{out}} = \chi / \sqrt{\epsilon \rho}$ für kleine ϵ stets negativ ist.

Damit sind notwendige Bedingungen (für kleine ϵ), damit das auslaufende Elektron das Unendliche erreichen kann,

$$\delta_1 \geq N_{2,\text{massive}}^\delta \quad (\text{A.47})$$

und

$$E_{e,\text{out}} > 1 / \sqrt{\epsilon \rho}. \quad (\text{A.48})$$

A.3.3. Diskussion der Lösungen für massive Elektronen

Die allgemeine Lösung für die Energie des auslaufenden Photons ergibt sich zu

$$E_{\gamma,\text{in}} = 1/\epsilon \left(X_{\text{massive}} \pm \sqrt{X_{\text{massive}}^2 + Y_{\text{massive}}} \right) \quad (\text{A.49})$$

mit

$$X_{\text{massive}} = X_{1,\text{massive}} + X_{2,\text{massive}}, \quad (\text{A.50})$$

$$Y_{\text{massive}} = -E_{\gamma,\text{out}} \epsilon \left(E_{\gamma,\text{out}} \left(2\gamma \sqrt{\epsilon + 1} \left(s_1 \sqrt{1 - \omega_1^2} \sqrt{-\delta_1^2 - \delta_2^2 + 1} + \delta_1 \omega_1 \right) + \epsilon \right) - 2\sqrt{E_{\gamma,\text{out}}^2 \gamma^2 + 1} \right), \quad (\text{A.51})$$

$$X_{1,\text{massive}} = E_{\gamma,\text{out}} \left(s_2 (\epsilon + 1) \sqrt{1 - \omega_1^2} \sqrt{-\beta_1^2 - \beta_2^2 + 1} + \beta_1, (\epsilon + 1) \omega_1 - 1 \right) \quad (\text{A.52})$$

und

$$X_{2,\text{massive}} = E_{\gamma,\text{out}} \gamma \sqrt{\epsilon + 1} \left(s_1 s_3 \sqrt{-\beta_1^2 - \beta_2^2 + 1} \sqrt{-\delta_1^2 - \delta_2^2 + 1} + \beta_1 \delta_1 + \beta_2 \delta_2 \right) - \sqrt{E_{\gamma,\text{out}}^2 \gamma^2 + 1}. \quad (\text{A.53})$$

A.3.4. Diskussion von $X_{1,\text{massive}}$

Im Term $X_{1,\text{massive}}$ treten rein photonische Größen auf, es ist derselbe wie der Term X_1 in der Diskussion masseloser Elektronen. Daher kann die Diskussion eins zu eins übernommen werden und es damit existiert ein $\epsilon_0 > 0$ so dass für $\epsilon < \epsilon_0$ X_1 nicht mehr positiv werden kann. Aus der Diskussion in Abschnitt A.2.7 kann übernommen werden, dass für $\epsilon < 0.1$ der Term X_1 in jedem Fall negativ ist.

A.3.5. Diskussion von X_2

Umformung ergibt:

$$X_{2,\text{massive}} = E_{\gamma,\text{out}}\gamma \left(\sqrt{\epsilon + 1} \left(s_1 s_2 \sqrt{-\beta_1^2 - \beta_2^2 + 1} \sqrt{-\delta_1^2 - \delta_2^2 + 1} + \beta_1 \delta_1 + \beta_2 \delta_2 \right) - \sqrt{\frac{1}{E_{\gamma,\text{out}}^2 \gamma^2} + 1} \right). \quad (\text{A.54})$$

Es gilt

$$X_{2,\text{massive}} \leq E_{\gamma,\text{out}}\gamma \left(\left(\sqrt{\epsilon + 1} \left(\sqrt{-\beta_1^2 - \beta_2^2 + 1} \sqrt{-\delta_1^2 - \delta_2^2 + 1} + \beta_1 \delta_1 + \beta_2 \delta_2 \right) \right) - 1 \right). \quad (\text{A.55})$$

Die Maxima des Terms

$$\left(\sqrt{\epsilon + 1} \left(\sqrt{-\beta_1^2 - \beta_2^2 + 1} \sqrt{-\delta_1^2 - \delta_2^2 + 1} + \beta_1 \delta_1 + \beta_2 \delta_2 \right) \right) \quad (\text{A.56})$$

für beliebiges, aber festes β_1 und δ_1 liegen auf der Hyperebene

$$\delta_2 = \beta_2 \sqrt{1 - \delta_1^2} / \sqrt{1 - \beta_1^2} \quad (\text{A.57})$$

und haben den von β_2 und δ_2 *unabhängigen* Wert

$$X_{2,\text{max},\text{massive}} = \beta_1 \delta_1 + \sqrt{1 - \beta_1^2} \sqrt{1 - \delta_1^2}. \quad (\text{A.58})$$

Wie im Abschnitt A.3.2 diskutiert wurde, ist δ_1 nach unten und β_1 nach oben beschränkt. Dies gilt für alle ϵ und ρ , $\delta_1 \geq \beta_1$; für kleine ϵ wird der Mindestabstand

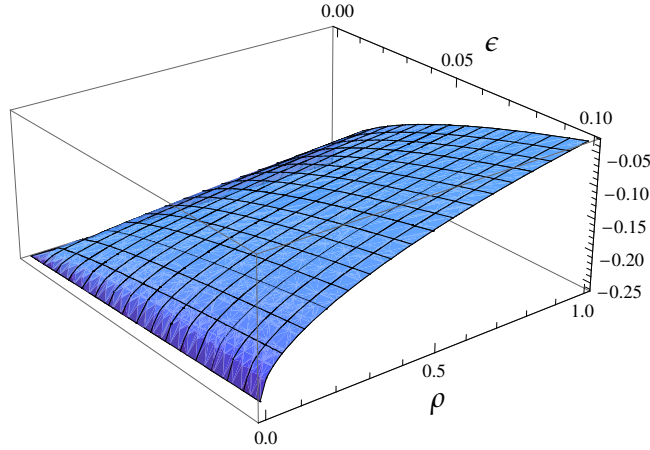


Abbildung A.8.: $X'_{2,\max,\text{massive}}$ im Parameterbereich $0 < \epsilon < 0.1$ und $0 < \rho < 1$.

größer. Führt man die Differenz $d = \delta_1 - \beta_1$ ein, lässt sich analog wie in der Diskussion um den Term X_1 zeigen, dass der Ausdruck (A.58) für $d > 0$ monoton fallend in d ist. Er wird also maximiert für minimalen Abstand zwischen β_1 und δ_1 . Eine obere Schranke an β_1 ist N_1^β , eine untere Schranke an δ_1 ist durch $\delta_1 > 1/\sqrt{1 + \epsilon\rho}$ gegeben.

$$\begin{aligned}
 X_2 &\leq E_{\gamma,\text{out}}\gamma \left(\left(\sqrt{\epsilon + 1} \left(\sqrt{1 - N_1^{\beta^2}} \sqrt{1 - \frac{1}{1 + \epsilon\rho}} + N_1^\beta 1/\sqrt{1 + \epsilon\rho} \right) \right) - 1 \right) \\
 &\equiv E_{\gamma,\text{out}} X'_{2,\max,\text{massive}}.
 \end{aligned}
 \tag{A.59}$$

In Abbildung A.8 ist $X'_{2,\max,\text{massive}}$ im Bereich $0 < \epsilon < 0.1$ und $0 < \rho < 1$ aufgetragen. Man erkennt, dass in diesem Bereich $X'_{2,\max,\text{massive}}$ stets negativ ist.

Damit wurde insgesamt gezeigt, dass der Term X auch im massiven Fall für $\epsilon < 0.1$ nicht positiv werden kann. Eine notwendige (und hinreichende) Bedingung für die Existenz von Lösungen mit positiver Energie für das einlaufende Photon ist damit die Bedingung $Y > 0$. Diese soll im folgenden Abschnitt diskutiert werden.

A.3.6. Diskussion der Funktion Y_{massive}

Umformung des Terms Y_{massive} liefert:

$$Y_{\text{massive}} = \epsilon E_{\gamma,\text{out}}^2 \left(- \left(2\gamma\sqrt{\epsilon+1} \left(s_1 \sqrt{1-\omega_1^2} \sqrt{-\delta_1^2 - \delta_2^2 + 1} + \delta_1 \omega_1 \right) + \epsilon \right) + 2\gamma \sqrt{\frac{1}{E_{\gamma,\text{out}}^2 \gamma^2} + 1} \right). \quad (\text{A.60})$$

Eine obere Schranke ist gegeben durch

$$Y_{\text{massive}} \leq \epsilon E_{\gamma,\text{out}}^2 2\gamma \left(- \left(\sqrt{\epsilon+1} \left(-\sqrt{1-\omega_1^2} \sqrt{-\delta_1^2 + 1} + \delta_1 \omega_1 \right) \right) + \sqrt{\frac{1}{E_{\gamma,\text{out}}^2 \gamma^2} + 1} \right) - \epsilon^2 E_{\gamma,\text{out}}^2. \quad (\text{A.61})$$

Die Funktion

$$\left(-\sqrt{1-\omega_1^2} \sqrt{1-\delta_1^2} + \delta_1 \omega_1 \right) \quad (\text{A.62})$$

ist im interessierenden Parameterbereich $0 \leq \omega_1 \leq 1$, $0 \leq \delta_1 \leq 1$ (siehe Schranken an die Parameter) monoton steigend in δ_1 und ω_1 . Sie wird daher minimal, wenn $\omega_1 = \sqrt{1+\epsilon\rho}/\sqrt{1+\epsilon}$ und $\delta_1 = N_{\text{massive},2}^\delta$ gewählt wird. (δ_1 muss im Allgemeinen noch größer gewählt, dies verbessert aber die Abschätzung nur.) Für γ wird nach (A.39) $\gamma = \chi/E_{\gamma,\text{out}}\sqrt{\epsilon\rho}$ mit $\chi > 1$ gewählt.

Setzt man diese maximierenden Werte in Y_{massive} ein und entwickelt um $\epsilon = 0$, so findet man,

$$Y_{\text{massive}} \leq -\frac{E_{\gamma,\text{out}}\epsilon^{3/2}\sqrt{\rho}(\chi^2-1)}{\chi} - E_{\gamma,\text{out}}^2\epsilon^2 + O(\epsilon^{5/2}). \quad (\text{A.63})$$

Der führende Term ist negativ. Die Entwicklung um $\epsilon = 0$ hat einen nicht verschwindenden Konvergenzradius, vorausgesetzt, Terme der Form $\sqrt{\epsilon}$ werden korrekt ausgeklammert. Möglicherweise problematisch ist jedoch das Verhalten von Koeffizienten höherer Ordnung für bestimmte Konfigurationen der Parameter χ und ρ . Es ist nicht gelungen, zu beweisen, dass Koeffizienten der Reihenentwicklung nicht divergieren können.

Daher wurde unterstützend eine Monte-Carlo Analyse des Terms $Y_{\max, \text{massive}}$ mit 10^8 zufällig gewählten Punkten durchgeführt. Für $\epsilon < 0.1$ wurde, unter Berücksichtigung der in Kapitel A.3.2 diskutierten Nebenbedingungen stets $Y_{\max, \text{massive}} < 0$ gefunden. Zusammen mit dem rigorosen Ergebnis für den Fall masseloser Elektronen lässt sich mit hinreichender Sicherheit behaupten:

Es existiert eine endliche Zahl $\epsilon_0 > 0$, so dass der in Kapitel 19 diskutierte Compton-Streuprozess, der in der Lage ist, die Masse eines Schwarzen Loches zu verringern, kinematisch verboten ist, für $\epsilon < \epsilon_0$.

Literaturverzeichnis

- [1] V. A. Kostelecky and S. Samuel.
Spontaneous breaking of Lorentz symmetry in string theory.
Phys. Rev., D39:683, 1989.
- [2] V.A. Kostelecky and R. Potting.
CPT and strings.
Nucl. Phys., B359:545–570, 1991.
- [3] V. A. Kostelecky and R. Potting.
Expectation values, Lorentz invariance, and CPT in the open bosonic string.
Phys. Lett., B381:89–96, 1996, hep-th/9605088.
- [4] R. Gambini and J. Pullin.
Nonstandard optics from quantum spacetime.
Phys. Rev., D59:124021, 1999, gr-qc/9809038.
- [5] J. Alfaro, H.A. Morales-Tecotl, and L.F. Urrutia.
Quantum gravity corrections to neutrino propagation.
Phys. Rev. Lett., 84:2318–2321, 2000, gr-qc/9909079.
- [6] H. Sahlmann and T. Thiemann.
Towards the QFT on curved spacetime limit of QGR. I: A general scheme.
Class. Quant. Grav., 23:867–908, 2006, gr-qc/0207030.
- [7] J.A. Wheeler.
On the nature of quantum geometrodynamics.
Annals Phys., 2:604–614, 1957.
- [8] S.W. Hawking.
Spacetime foam.
Nucl. Phys., B144:349–362, 1978.
- [9] F.R. Klinkhamer.
A CPT anomaly.
Nucl. Phys., B578:277–289, 2000, hep-th/9912169.

- [10] F.R. Klinkhamer and C. Rupp.
Spacetime foam, CPT anomaly, and photon propagation.
Phys. Rev., D70:045020, 2004, hep-th/0312032.
- [11] D. Colladay and V.A. Kostelecky.
Lorentz-violating extension of the standard model.
Phys. Rev., D58:116002, 1998, hep-ph/9809521.
- [12] V.A. Kostelecky.
Gravity, Lorentz violation, and the standard model.
Phys. Rev., D69:105009, 2004, hep-th/0312310.
- [13] S.L. Dubovsky and S.M. Sibiryakov.
Spontaneous breaking of Lorentz invariance, black holes and perpetuum mobile of the 2nd kind.
Phys. Lett., B638:509–514, 2006, hep-th/0603158.
- [14] C. Eling, B.Z. Foster, T. Jacobson, and Aron C. Wall.
Lorentz violation and perpetual motion.
Phys. Rev., D75:101502, 2007, hep-th/0702124.
- [15] Brian Feldstein.
Spontaneous Lorentz violation, negative energy and the second law of thermodynamics.
Phys. Rev., D80:044020, 2009, 0904.1212.
- [16] C. Adam and F.R. Klinkhamer.
Causality and CPT violation from an Abelian Chern-Simons like term.
Nucl. Phys., B607:247–267, 2001, hep-ph/0101087.
- [17] C. Adam and F.R. Klinkhamer.
Causality and radiatively induced CPT violation.
Phys. Lett., B513:245–250, 2001, hep-th/0105037.
- [18] E. Kant and F.R. Klinkhamer.
Maxwell-Chern-Simons theory for curved spacetime backgrounds.
Nucl. Phys., B731:125–139, 2005, hep-th/0507162.
[Erratum-ibid. 809, 362 (2008)].
- [19] G. Betschart, E. Kant, and F.R. Klinkhamer.
Lorentz violation and black-hole thermodynamics.
Nucl. Phys., B815:198–214, 2009, 0811.0943.
- [20] E. Kant, F.R. Klinkhamer, and M. Schreck.

- Lorentz violation and black-hole thermodynamics: Compton scattering process.*
2009, 0909.0160.
- [21] E. Noether.
Invariante Variationsprobleme.
*Nachr. v. d. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, Math.-phys. Klasse:*235, 1918.
- [22] M.M. Peskin and D.V. Schroeder.
An Introduction to Quantum Field Theory.
Westview Press (1995).
- [23] G. Wentzel.
Quantum Theory of Fields.
Interscience Publishers, New York, 1949.
- [24] M. Montesinos and E. Flores.
*Symmetric energy-momentum tensor in Maxwell, Yang-Mills, and Proca theories
obtained using only Noether's theorem.*
Rev. Mex. Fis., 52:29–36, 2006, hep-th/0602190.
- [25] R. Lehnert.
CPT- and Lorentz-symmetry breaking: A review.
2006, hep-ph/0611177.
- [26] R.M. Wald.
General Relativity.
Chicago, Usa: Univ. Pr. (1984) 491p.
- [27] C.W. Misner, K.S. Thorne, and J.A. Wheeler.
Gravitation.
San Francisco 1973, 1279p.
- [28] F.J. Belinfante.
On the covariant derivative of tensor-undors.
Physica, VII, 4:305, 1940.
- [29] F.J. Belinfante.
*On the current and the density of the electric charge, the energy, the linear momentum
and the angular momentum of arbitrary fields.*
Physica, VII, 5:449, 1940.
- [30] S. Weinberg.
Gravitation and Cosmology.
Wiley, New York, 1972.

- [31] K. Kuchar.
Dynamics of tensor fields in hyperspace III.
J. Math. Phys., 17:801–820, 1976.
- [32] Ingarden R.S. Antonelli, P.L. and M. Matsumoto.
The Theory of Sprays and Finsler Spaces with Applications in Physics and Biology.
Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Holland (1993).
- [33] S.M. Carroll, G.B. Field, and R. Jackiw.
Limits on a Lorentz and parity violating modification of electrodynamics.
Phys. Rev., D41:1231, 1990.
- [34] D. Colladay and V.A. Kostelecky.
CPT violation and the standard model.
Phys. Rev., D55:6760–6774, 1997, hep-ph/9703464.
- [35] E. Kant.
Maxwell-Chern-Simons-Theorie und Gravitation.
Diplomarbeit, Universitat Karlsruhe, 2005.
- [36] J.D. Jackson.
Classical Electrodynamics.
2nd edition, John Wiley, New York, 1975.
- [37] B. F. Schutz.
Geometrical Methods of Mathematical Physics.
Cambridge, Uk: Univ. Pr. (1980).
- [38] M. Carmeli.
Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory.
Wiley-Interscience Publication, New York, (1982).
- [39] J.S. Bell and R. Jackiw.
A PCAC puzzle: $\pi^0 \rightarrow \gamma \gamma$ in the sigma model.
Nuovo Cim., A60:47–61, 1969.
- [40] S.L. Adler.
Axial vector vertex in spinor electrodynamics.
Phys. Rev., 177:2426–2438, 1969.
- [41] Kazuo Fujikawa.
Path integral for gauge theories with fermions.
Phys. Rev., D21:2848, 1980.

- [42] R.A. Bertlmann.
Anomalies in Quantum Field Theory.
Clarendon Press, Oxford, 1996.
- [43] N.D. Birrell and P.C.W. Davies.
Quantum Fields in Curved Space.
Cambridge, Uk: Univ. Pr. (1982) 340p.
- [44] W.A. Bardeen.
Anomalous Ward identities in spinor field theories.
Phys. Rev., 184:1848–1857, 1969.
- [45] V Fock.
Geometrisierung der Diracschen Theorie des Elektrons.
Z. Phys., 57:261, 1929.
- [46] G. Sterman.
Quantum Field Theory.
Cambridge Univ. Pr. (1993).
- [47] F.R. Klinkhamer and C. Rupp.
A global anomaly from the Z-string.
Nucl. Phys., B495:172–194, 1997, hep-th/9702023.
- [48] F.R. Klinkhamer.
Z-string global anomaly and Lorentz non-invariance.
Nucl. Phys., B535:233–241, 1998, hep-th/9805095.
- [49] F.R. Klinkhamer and J. Nishimura.
CPT anomaly in two-dimensional chiral $U(1)$ gauge theories.
Phys. Rev., D63:097701, 2001, hep-th/0006154.
- [50] F.R. Klinkhamer and J. Schimmel.
CPT anomaly: A rigorous result in four dimensions.
Nucl. Phys., B639:241–262, 2002, hep-th/0205038.
- [51] F. Leder.
CPT-Anomalie und Topologie.
Diplomarbeit, Universität Karlsruhe, 2004.
- [52] C. Kaufhold and F.R. Klinkhamer.
Vacuum Cherenkov radiation and photon triple-splitting in a Lorentz-noninvariant extension of quantum electrodynamics.
Nucl. Phys., B734:1–23, 2006, hep-th/0508074.

- [53] P. Herczeg.
The nature of neutrinos in muon decay and physics beyond the standard model.
Los Alamos Sci., 25:128–135, 1997.
- [54] G.S. Asanov.
Finsler Geometry, Relativity and Gauge Theories.
D.Reidel Publishing Company, Holland (1985).
- [55] Chern S.-S. Bao, D. and Z. Shen.
An Introduction to Riemann-Finsler Geometry.
Springer, New York (2000).
- [56] C. Lämmerzahl, D. Lorek, and H. Dittus.
Confronting Finsler space-time with experiment.
Gen. Rel. Grav., 41:1345–1353, 2009, 0811.0282.
- [57] F. Girelli, S. Liberati, and L. Sindoni.
Phenomenology of quantum gravity and Finsler geometry.
Phys. Rev., D75:064015, 2007, gr-qc/0611024.
- [58] T. Frankel.
The Geometry of Physics.
Cambridge University Press, 2004.
- [59] F.R Klinkhamer.
private communication.
- [60] V.A. Kostelecky and M. Mewes.
Signals for Lorentz violation in electrodynamics.
Phys. Rev., D66:056005, 2002, hep-ph/0205211.
- [61] Q.G. Bailey and V.A. Kostelecky.
Lorentz-violating electrostatics and magnetostatics.
Phys. Rev., D70:076006, 2004, hep-ph/0407252.
- [62] B. Altschul.
Vacuum Cerenkov radiation in Lorentz-violating theories without CPT violation.
Phys. Rev. Lett., 98:041603, 2007, hep-th/0609030.
- [63] C. Kaufhold.
Untersuchungen zu baryonenzahl- und lorentzsymmetrieverletzenden Prozessen.
Doktorarbeit, Universität Karlsruhe, 2007.
- [64] F.R. Klinkhamer and M. Risse.

-
- Ultra-high-energy cosmic-ray bounds on nonbirefringent modified-Maxwell theory.*
Phys. Rev., D77:016002, 2008, 0709.2502.
- [65] F.R. Klinkhamer and M. Risse.
Addendum: Ultrahigh-energy cosmic-ray bounds on nonbirefringent modified-Maxwell theory.
Phys. Rev., D77:117901, 2008, 0806.4351.
- [66] F.R. Klinkhamer and M. Schreck.
New two-sided bound on the isotropic Lorentz-violating parameter of modified-Maxwell theory.
Phys. Rev., D78:085026, 2008, 0809.3217.
- [67] M. Born and E. Wolf.
Principles of Optics.
7th edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [68] E. Babichev, V.F. Mukhanov, and A. Vikman.
k-Essence, superluminal propagation, causality and emergent geometry.
JHEP, 02:101, 2008, 0708.0561.
- [69] V.A. Kostelecky and R. Lehnert.
Stability, causality, and Lorentz and CPT violation.
Phys. Rev., D63:065008, 2001, hep-th/0012060.
- [70] B. Altschul and D. Colladay.
Velocity in Lorentz-violating fermion theories.
Phys. Rev., D71:125015, 2005, hep-th/0412112.
- [71] T. Jacobson and A.C. Wall.
Black-hole thermodynamics and Lorentz symmetry.
2008, 0804.2720.
- [72] B.F. Schutz.
A first course in general relativity.
Cambridge Univ. Pr. (1985).
- [73] S. Mukohyama.
Ghost condensate and generalized second law.
2009, 0901.3595.
- [74] S. Mukohyama.
Can ghost condensate decrease entropy?
2009, 0908.4123.

- [75] L.D. Landau and E. M. Lifschitz.
Statistical Physics, Part 1, 3rd edition.
Pergamon Press, Oxford, 1980.
- [76] J.D. Bekenstein.
Black holes and entropy.
Phys. Rev. D, 7(8):2333–2346, Apr 1973.
- [77] J.D. Bekenstein.
Generalized second law of thermodynamics in black hole physics.
Phys. Rev., D9:3292–3300, 1974.
- [78] S.W. Hawking.
Gravitational radiation from colliding black holes.
Phys. Rev. Lett., 26:1344–1346, 1971.
- [79] R.M. Wald.
The thermodynamics of black holes.
Living Rev. Rel., 4:6, 2001, gr-qc/9912119.
- [80] S.W. Hawking.
Particle creation by black holes.
Commun. Math. Phys., 43:199–220, 1975.
- [81] J.M. Jauch and F. Rohrlich.
The Theory of Photons and Electrons.
2nd edition, Springer, New York, 1976.
- [82] R. Penrose and R. M. Floyd.
Extraction of rotational energy from a black hole.
Nature, 229:177–179, 1971.
- [83] R. Penrose.
Gravitational collapse: The role of general relativity.
Riv. Nuovo Cim., 1:252–276, 1969.
- [84] L.D. Landau and E.M. Lifschitz.
Lehrbuch der Theoretischen Physik II, Klassische Feldtheorie.
Akademie-Verlag, Berlin (1984).
- [85] M. Schreck.
Lorentz-Symmetrie brechende Modifikation der Maxwell-Theorie.
Doktorarbeit, Universität Karlsruhe, geplant 2010.

- [86] D.J. Evans, E.G.D. Cohen, and G.P. Morriss.
Probability of second law violations in shearing steady states.
Phys. Rev. Lett., 71:2401, 1993.
- [87] D.J. Evans and D.J. Searles.
The fluctuation theorem.
Advances Phys., 51:1529, 2002.
- [88] S.M. Sibiryakov.
private communication.
- [89] B. Feldstein.
Hawking radiation in the ghost condensate is non-thermal.
Phys. Rev., D78:064061, 2008, 0807.0253.
- [90] H. Reissner.
Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie.
Annalen der Physik, 50:106, 1916.
- [91] G. Nordström.
On the energy of the gravitational field in Einstein's theory.
Verhandl. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap., Afdel. Natuurk., Amsterdam, 26:1201, 1918.
- [92] M. Adler, R. Bazin and M. Schiffer.
Introduction to General Relativity.
McGraw-Hill Book Company, New York, 1965.
- [93] O. Forster.
Analysis II.
Vieweg-Verlag, 2008.
- [94] N. Arkani-Hamed, H.-C. Cheng, M.A. Luty, and S. Mukohyama.
Ghost condensation and a consistent infrared modification of gravity.
JHEP, 05:074, 2004, hep-th/0312099.
- [95] S. Mukohyama.
Black holes in the ghost condensate.
Phys. Rev., D71:104019, 2005, hep-th/0502189.
- [96] C. Armendariz-Picon, V.F. Mukhanov, and P.J. Steinhardt.
Essentials of k-essence.
Phys. Rev., D63:103510, 2001, astro-ph/0006373.

- [97] E. Babichev, V.F. Mukhanov, and A. Vikman.
Escaping from the black hole?
JHEP, 09:061, 2006, hep-th/0604075.
- [98] E. Witten.
Some exact multipseudoparticle solutions of classical Yang-Mills theory.
Phys. Rev. Lett., 38:121, 1977.
- [99] H. van Dam and M.J.G. Veltman.
Massive and massless Yang-Mills and gravitational fields.
Nucl. Phys., B22:397–411, 1970.

Abstract

Symmetry is a key concept of theoretical physics. Lorentz symmetry lies at the heart of the Standard Model of elementary particle physics. At the moment, there are no experimental results indicating that Lorentz symmetry is not an exact symmetry of nature. On the other hand, a violation of Lorentz symmetry is suggested from various theoretical viewpoints. Lorentz violation may appear in the low-energy limit of string theory [1–3], loop quantum gravity [4–6], spacetime foam [7, 8] or may be induced by nontrivial spacetime topology [9, 10]. In that sense, a violation of Lorentz symmetry can be considered as a window to new physics.

In Minkowski spacetime, Lorentz violation can be described by adding action terms to those of the Standard Model of elementary particles. The resulting Standard Model Extension [11] contains all such gauge-invariant and power-counting renormalizable terms.

But it remains an open problem to find a consistent framework to effectively describe Lorentz violation, which also includes the Einstein-Hilbert action and the gravitationally coupled Standard Model [12]. The main obstacle concerns the energy-momentum tensor, which is the source term of the standard Einstein equation. Explicit Lorentz violation breaks diffeomorphism invariance of the action and may lead to an inconsistency between the Einstein tensor and the energy-momentum tensor. The spacetime response to Lorentz-violating matter sources is, therefore, unknown.

Other inconsistencies may appear, if Lorentz-violating fields are coupled to gravity. Several publications [13–15] discuss a possible violation of the generalized second law of thermodynamics in Lorentz-violating theories coupled to gravity.

It is known that some Lorentz-noninvariant theories violate unitarity and/or microcausality [16, 17] and are, thus, excluded as candidates for physically reasonable theories. With the coupling of Lorentz-violating theories to gravity possibly new sources of inconsistencies arise. The present dissertation discusses the coupling of Lorentz-violating theories to gravity and focuses on this type of inconsistencies.

Part I discusses explicit Lorentz violation in Minkowski spacetime, particularly with regard to the energy-momentum tensor in flat spacetime and the coupling to gravity. In explicitly Lorentz-violating theories, which are invariant under spacetime translations, the corresponding Noether current is conserved, making a physically meaningful description of energy and momentum possible. As shown in Part I, if Lorentz invariance is violated, the energy-momentum tensor cannot be symmetrized, because a conserved and symmetric energy-momentum tensor already implies invariance of the action under Poincaré transformations. That raises the question how such theories can be coupled to gravity, since the geometric structure of general relativity implies that the source of the Einstein equation must be symmetric and covariantly conserved. The question of the gravitational response of spacetime to Lorentz-violating matter sources has not been solved in this thesis.

Part II and III discuss two different photonic Lorentz-violating theories and their coupling to gravity.

Part II discusses the explicitly Lorentz-violating Maxwell-Chern-Simons theory. It is shown that special configurations of the Chern-Simons background field allow for a symmetric and covariantly conserved energy-momentum tensor and, hence, for gravitational solutions. Chapter 11 discusses a mechanism which motivates a naturally suppressed Maxwell-Chern-Simons term: certain classes of quantum field theories defined over a topologically nontrivial universe contain a Maxwell-Chern-Simons term, induced by the CPT anomaly [9]. The CPT anomaly for an expanding spatially flat Friedman-Robertson-Walker universe is calculated and some induced physical effects are discussed. The induced modified photon dispersion law is geometrically interpreted in terms of Finsler geometry in Chapter 13.

Part III discusses the coupling of nonbirefringent modified Maxwell theory to gravity. A general method is introduced, which allows for description of the propagation behaviour of modified Maxwell photons in curved spacetime. These photons propagate on null geodesics with respect to an *effective* metric, different, in general, from the underlying spacetime metric.

Different configurations of modified Maxwell theory in a given Schwarzschild spacetime background are studied. The corresponding effective metric may or may not have an effective photon horizon differing from the standard Schwarzschild horizon. Certain configurations of the Lorentz-violating parameters for modified Maxwell theory are found, which allow for gravitational solutions (Chapter 20). Chapter 21 discusses models for spontaneous Lorentz symmetry breaking, repro-

ducing the modified Maxwell models studied previously.

Lorentz-violating theories with maximal velocities differing from the causal speed c have been suspected to be in conflict with the generalized second law of thermodynamics [13–15]. Modified Maxwell theories allow for photon velocities different from c . In Chapter 17, it is shown that not every modified Maxwell model with maximal photon velocities different from c leads to a modified notion of horizon, contrary to naive expectations. Especially the notion of a multiple horizon structure has given rise to the conjecture of violation of the generalized second law of thermodynamics.

Chapter 19 discusses a modified Maxwell model with an effective photon horizon, which lies outside the standard Schwarzschild horizon. A particular type of Compton-scattering event, taking place between those two horizons and ultimately decreasing the mass of the black hole, is found to have a nonzero probability.

In this way, a quantum process of modified Maxwell theory is constructed, which is able to reduce the mass of the black hole, while not increasing the entropy of the outside world. Such processes have been suspected to violate the generalized second law. However, an entropy reducing quantum process need not imply, by itself, the breakdown of the generalized second law. It has, therefore, not been possible to obtain a convincing and explicit *Gedankenexperiment* that is able to violate the generalized second law.

A further result is that the reduction of the black-hole mass by the specific Compton-scattering process appears to be separated from the standard situation of nondecreasing black-hole mass by a *finite gap* of the Lorentz-violating parameter. At the moment, it is not clear if this is just an artefact of the particular process considered or if it indicates the existence of a mechanism that protects the Hawking area theorem for the case of “small enough Lorentz violation.” This question certainly deserves further study.

Danksagung

Es ist mir ein wichtiges Anliegen, mich bei den Menschen, mit denen ich in den letzten Jahren zusammengearbeitet habe und die mich unterstützt haben zu bedanken.

Besonderer Dank gilt meinem Doktorvater Professor Dr. F.R. Klinkhamer, für seine Bereitschaft, diese Doktorarbeit zu betreuen und für viele anregende physikalische Gespräche, nicht nur im Themenumkreis dieser Dissertation.

Prof. Dr. A. Wipf danke ich für seine Bereitschaft, das Korreferat zu übernehmen.

Bei meinen Arbeitskollegen am Institut für Theoretische Physik möchte ich mich für das gute Arbeitsklima bedanken, besonders bei Dr. Gerold Betschart für die fruchtbare Zusammenarbeit im Sommer 2008. Meinen aktuellen und ehemaligen Zimmerkollegen Dr. Christian Kaufhold, Markus Schwarz, Marco Schreck, Mareike Haberrichter, sowie Dr. Christian Rupp, Dr. Ralf Hofmann und Dr. Hanno Sahlmann danke ich für zahlreiche anregende und hilfreiche Diskussionen in ungezwungener und gleichzeitig produktiver Atmosphäre.

Marco Schreck danke ich für das zur Verfügungstellen des Bildes 19.1.

Bei Dr. S.M. Sibiriyakov bedanke ich mich für die Anregung die Hawking-Temperatur in verschiedenen Lorentz-verletzenden Modellen zu untersuchen.

Dem Graduiertenkolleg für Hochenergie- und Teilchenastrophysik und der Studienstiftung des deutschen Volkes danke ich für die finanzielle und ideelle Förderung dieser Arbeit. Ganz besonders gedankt sei der Studienstiftung für ihre wirklich hilfreiche und unbürokratische Familienfreundlichkeit.

Ein herzliches Dankeschön geht auch an die Korrekturleser dieser Arbeit, insbesondere an Marco Schreck, Markus Schwarz und Christa Steubing.

Für die Gewährleistung der Rechner-Infrastruktur möchte ich den Systemadministratoren von ITP und TTP danken.

Über die fachliche und kollegiale Unterstützung hinaus tragen vielfältige Faktoren zum Gelingen einer Dissertation bei, von denen einige wichtige im Folgenden genannt werden sollen.

Ganz besonderer Dank gilt meinem Ehemann Philipp für die gemeinsame Begeisterung für unsere Wissenschaft, die ungezählten physikalischen Diskussionen seit Beginn unseres Studiums und für seine uneingeschränkte Bereitschaft, Haushalts- und Familienverantwortung partnerschaftlich zu teilen.

Meine Eltern haben mich während meines gesamten Studiums emotional und finanziell unterstützt. Darüber hinaus haben sie auch schon viel früher das Fundament für diese Doktorarbeit gelegt, meine Mutter Liugard, indem sie mir den Blick für vielfältige Naturschönheiten geöffnet hat, mein Vater Karl, indem er mir früh gezeigt hat, dass sich die Natur auch analytisch und quantitativ fassen lässt.

Meinen Geschwistern und Schwagern, Eltern und Schwiegereltern danke ich für enorm flexible, liebevolle und zuverlässige Babysitterdienste, ohne die manche Konferenz oder Sommerschule nicht möglich gewesen wäre.

Dem Team des Kinderspielhauses Heidezwerg sei ebenfalls für kompetente und liebevolle Kinderbetreuung und hohe Flexibilität gedankt.

Viele weitere Begegnungen und Gespräche mit ganz verschiedenen Menschen, haben ebenfalls direkt oder indirekt ein Mosaiksteinchen beigetragen. Die folgende Aufzählung ist sicher unvollständig und in annähernd chronologischer, nicht wertender, Reihenfolge: Herr Heilmann, Herr Hardt, Herr Faber, Herr Habenichts, Dr. Maier-Metz, Herr Blaschke, Frau Vollmer, Marie Gutzheit, Nina Hermann, Henning Christ, Gerhard Pöter, Miguel und Elisa de Tejada, Reina Elisabeth Cañas, Dr. Franz Kitzka, Dr. Stina Schiller, und die „Mädels vom Babyclub“ insbesondere Larissa Klein: Euch allen ein herzliches Danke!

Und zum Schluss sei noch meiner wunderbaren Tochter Silja Marie gedankt, die allein durch ihre Existenz so viel Lebensfreude und Begeisterung weckt.

Lebenslauf

Elisabeth Kant

Institut für Theoretische Physik
Universität Karlsruhe
Wolfgang-Gaede-Str.1
76128 Karlsruhe
Tel. 030 20624113

Schirnerstr. 22
12524 Berlin
kant@particle.uni-karlsruhe.de

Personendaten

Geburtsdatum	21. September 1978
Geburtsort	Marburg
Staatsangehörigkeit	deutsch
Familienstand	verheiratet
Eltern	Karl Kant, Oberstudienrat Liugard Kant, geb. Michaelis de Vasconcellos, Ärztin

Ausbildungsdaten

Schulbesuch:	1985 - 1988 Grundschule, Gladenbach 1988 - 1995 Freie Waldorfschule, Marburg 1995 - 1998 Freiherr-vom-Stein Europaschule, Gladenbach 15. 06. 1998 Abitur, Durchschnittsnote 1,0
Studium:	1999 - 2002 Physikstudium an der Philipps-Universität Marburg 18. 09. 2001 Vordiplom in Marburg, Note „sehr gut“ 2002 - 2005 Physikstudium an der Universität Karlsruhe

Diplom: Februar 2005, Note „sehr gut“
Titel der Arbeit: Maxwell-Chern-Simons Theorie und Gravitation
Referent: Prof. Dr. F.R. Klinkhamer
Korreferent: Prof. Dr. R.A. Bertlmann
Promotion: seit Mai 2005 Physik an der Universität Karlsruhe
bis Mai 2006 Stipendiatin im Graduiertenkolleg
Hochenergiephysik und Teilchenastrophysik
seit Mai 2006 Stipendiatin der Studienstiftung
des deutschen Volkes
Mündliche Prüfung: 30. Oktober 2009
Titel der Arbeit: Untersuchungen zu Lorentz-Verletzung,
Gravitation und Photon-Propagation
Referent: Prof. Dr. F. R. Klinkhamer (Universität Karlsruhe)
Korreferent: Prof. Dr. A. Wipf (Universität Jena)