

# Zufällige harte Partikelsysteme

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

DOKTORS DER NATURWISSENSCHAFTEN

von der Fakultät für Mathematik des  
Karlsruher Instituts für Technologie genehmigte

DISSERTATION

von

Dipl.-Math. oec. Mario Sebastian Hörig  
aus Karlsruhe

Tag der mündlichen Prüfung: 23.06.2010

Referent: Prof. Dr. Wolfgang Weil  
Korreferent: Prof. Dr. Günter Last



# Vorwort

Die hier vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Algebra und Geometrie der Universität Karlsruhe bzw. des Karlsruher Instituts für Technologie.

Mein erster Dank gilt Herrn Prof. Wolfgang Weil, der das Thema der Arbeit anregte, mir viele Freiheiten in der inhaltlichen Gestaltung ließ und immer bemüht war, mir den Rücken frei zu halten. Weiteren Dank schulde ich Herrn Prof. Günter Last, nicht nur für die Übernahme des Korreferats, sondern auch für die frühe Förderung, die er mir zukommen ließ. Große Unterstützung erfuhr ich von Herrn apl. Prof. Daniel Hug, dessen reges Interesse an meiner Arbeit und stetige Bereitschaft zur Diskussion mir eine wertvolle fachliche und moralische Stütze waren. Meinem Kollegen Dr. Steffen Winter danke ich für die sehr angenehme Zeit, in der wir uns ein Büro teilten. Frau Dr. Claudia Redenbach unterstützte die Arbeit an den Simulationen in Kapitel 7 dieser Arbeit wesentlich. Die dort dargestellten Visualisierungen wären ohne ihren Einsatz nicht möglich gewesen. Unsere Diskussionen zur Simulation räumlicher Daten waren mir eine große Hilfe. Herr Dipl.-math. oec. Florian Ketterer stand mir bei allen Fragen zur statistischen Auswertung räumlicher Daten und insbesondere dem Umgang mit dem Statistikpaket R zuverlässig wie kompetent zur Seite, wofür ich ihm vielmals danken möchte.

Meiner Familie kann ich nicht genug danken für all die Unterstützung, die ich von ihnen erhalten habe. Meiner Freundin Anika danke ich für alles, das mir durch sie zuteil wurde.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>7</b>
<b>1 Grundlagen aus der konvexen und stochastischen Geometrie</b>	<b>9</b>
1.1 Grundlagen aus der konvexen Geometrie . . . . .	9
1.2 Grundlagen aus der stochastischen Geometrie . . . . .	15
<b>2 Einführung in die Theorie harter Partikelprozesse</b>	<b>31</b>
2.1 Motivation . . . . .	31
2.2 Grundlagen . . . . .	36
2.2.1 Statistische Kenngrößen für Modelle harter Partikel . . . . .	36
2.2.2 Globale und lokale Modelle . . . . .	39
2.3 Bekannte Modelle . . . . .	40
2.3.1 Stienen Modell . . . . .	41
2.3.2 Dynamisches Lilypond Modell . . . . .	42
2.3.3 Dead Leaves Modell . . . . .	43
2.3.4 Random Sequential Adsorption Modell . . . . .	44
2.3.5 Prozesse harter Partikel von Matérnschem Typ . . . . .	46
2.4 Der Prozess der gewichtsmaximalen harten Teilmenge von $\Xi$ . . . . .	60
<b>3 Der Prozess der gewichtsmaximalen harten Teilmenge von <math>\Xi</math></b>	<b>63</b>
3.1 Die messbare Auswahl einer gewichtsmaximalen harten Teilmenge . . . . .	63
3.1.1 Eine translationsinvariante strenge Totalordnung auf $\mathcal{K}'$ . . . . .	64
3.1.2 Eine translationsinvariante strenge Totalordnung auf $\mathcal{F}_e(\mathcal{K}')$ . . . . .	66
3.1.3 Die Messbarkeit und Wohldefiniertheit der Abbildung $T$ . . . . .	68
3.2 Der Prozess der gewichtsmaximalen harten Teilmenge von $\Xi_W$ . . . . .	71
3.3 Stationäre Grenzprozesse mit möglichst großem Gewicht . . . . .	74
3.3.1 Ein Beispiel zur Motivation . . . . .	75
3.3.2 Stabilität . . . . .	77
3.3.3 Konvergenz von $(\tilde{\Xi}_{r_n W})_{n \in \mathbb{N}}$ . . . . .	80
3.3.4 Definition und Existenz eines Grenzprozesses . . . . .	81
3.3.5 Alternative Konstruktion eines stationären Grenzprozesses . . . . .	82
<b>4 Graphentheoretische Sichtweise, Algorithmen und untere Schranken</b>	<b>88</b>
4.1 Graphentheoretische Grundlagen . . . . .	88

4.2	Zufällige geometrische Graphen . . . . .	93
4.3	Heuristiken und eine untere Schranke für $\mathbb{E}M(\tilde{\Xi}_W)$ . . . . .	94
4.4	Weitere untere Schranken . . . . .	101
<b>5</b>	<b>Das Verhalten von <math>M(\tilde{\Xi}_{rW})</math> für <math>r \rightarrow \infty</math></b>	<b>105</b>
5.1	Ursprünge . . . . .	105
5.2	Ein starkes Gesetz großer Zahlen für $M(\tilde{\Xi}_{r_nW})$ . . . . .	107
5.3	Ein zentraler Grenzwertsatz für $M(\tilde{\Xi}_{r_nW})$ . . . . .	113
<b>6</b>	<b>Das Verhalten von <math>M(\tilde{\Xi}_{\gamma,W})</math> für <math>\gamma \rightarrow \infty</math></b>	<b>116</b>
6.1	Dichteste Packungen und obere Schranken . . . . .	116
6.2	Das asymptotische Gewicht von $\tilde{\Xi}_{\gamma,W}$ . . . . .	123
<b>7</b>	<b>Simulationen und algorithmische Aspekte</b>	<b>130</b>
7.1	Eine Zwei-Phasen-Heuristik . . . . .	130
7.2	Simulationsstudien . . . . .	134
7.2.1	Prozesse harter Kugeln fester Gestalt . . . . .	134
7.2.2	Prozesse harter binärer Kreismischungen . . . . .	140
7.2.3	Prozesse harter Zylinder . . . . .	149
7.3	Fazit und weitere Anregungen . . . . .	152
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>153</b>
	<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>159</b>

# Einleitung

*A mathematician who argues with probabilities in geometry is not worth an ace.*

Sokrates

Wenngleich sich dieser Ausspruch eher auf die Rigorosität bezieht, die Sokrates von einem Mathematiker im Umgang mit Geometrie fordert, so scheint die Verbindung von Zufall und Geometrie auf den ersten Blick nicht gerade naheliegend. Daher ist es nicht verwunderlich, dass es bis zum letzten Drittel des 20. Jahrhunderts dauerte, bis ein formaler Zugang zur Beschreibung zufälliger geometrischer Strukturen entwickelt wurde und die stochastische Geometrie damit als mathematische Disziplin entstand. Die stochastische Geometrie weist enge Verbindungen zur konvexen Geometrie, geometrischen Funktionalanalysis, räumlichen Stochastik, Theorie stochastischer Prozesse, statistischen Physik und der Integralgeometrie auf, findet Anwendungen in der Stereologie, der räumlichen Statistik und der Bildverarbeitung, stimuliert aber beispielsweise auch das Interesse an effizienten Simulationstechniken und algorithmischen Lösungen; letztendlich besteht die stochastische Geometrie mit ihren vielfältigen Aspekten aus einer engen Verzahnung verschiedenster mathematischer Disziplinen und wird etwa in der Biologie, Physik, Geologie oder den Materialwissenschaften, um nur einige Beispiele zu nennen, erfolgreich eingesetzt. Dabei hat sich gezeigt, dass Stochastik und Geometrie gerade nicht im Widerspruch zueinander stehen, sondern eine fruchtbare Symbiose eingehen. Einen Eckpfeiler in der stochastischen Geometrie bildet die Klasse der Poissonprozesse. Diese stellen, ob in  $\mathbb{R}^d$  oder in komplexeren Räumen, eine ebenso einfache wie mächtige Möglichkeit zur Beschreibung und Modellierung zufälliger räumlicher Strukturen dar. Aufgrund ihrer starken Unabhängigkeitseigenschaften sind Poissonprozesse dabei für explizite Untersuchungen besonders zugänglich. Auch für Modelle, bei denen diese räumlichen Unabhängigkeiten nicht mehr zweckmäßig sind, können Poissonprozesse als Ausgangspunkt dienen, indem man aus diesen komplexere Prozesse ableitet. Bei der Modellierung harter Partikelprozesse beispielsweise, wobei wir darunter Prozesse paarweise disjunkter konvexer Partikel verstehen wollen, besteht eine in intuitivem Sinn zu verstehende Abhängigkeit zwischen den Partikeln eines solchen Prozesses, was den direkten Einsatz von Poissonschen Partikelprozessen ausschließt. Eine sehr beliebte Möglichkeit zur Generierung Prozesse harter Partikel besteht nun aber darin, einen Poissonschen Partikelprozess realisierungsweise so auszudünnen, dass die verbleibenden Partikel paarweise f.s. disjunkt sind. Der Vorteil bei diesem Vorgehen besteht darin, dass trotz aller nun vorhandenen räumlichen Abhängigkeiten in diesem Modell der im Hintergrund stehende Poissonprozess immer noch dafür sorgt, dass sich bestimmte Aussagen qualitativer wie teilweise sogar quantitativer Natur über den Prozess treffen lassen. In dieser Arbeit werden wir uns genau mit solchen Ausdünnungen

Poissonscher Partikelprozesse beschäftigen.

Die vorliegende Arbeit gliedert sich wie folgt. In Kapitel 1 wollen wir grundlegende Definitionen und Sätze aus der konvexen und stochastischen Geometrie wiederholen sowie die für den weiteren Verlauf dieser Arbeit notwendigen Bezeichnungen und Notationen festlegen und bestimmte Übereinkünfte treffen, welche die Darstellung erleichtern sollen. In Kapitel 2 geben wir zuerst einen Überblick über verschiedene Ansätze zur Beschreibung und Modellierung harter Partikelsysteme, gehen dann auf die statistische Untersuchung von zufälligen harten Partikelsystemen ein und stellen zuletzt bekannte Modelle vor. Bei der Vorstellung dieser Modelle liegt der Schwerpunkt auf Ausdünnungen stationärer Poissonprozesse, insbesondere auf denjenigen von Matérnschem Typ. Für letztgenannte Klasse von harten Partikelsystemen werden wir eine möglichst vollständige Untersuchung ihrer Eigenschaften, Kenngrößen erster und zweiter Ordnung und ihrer Beziehung untereinander durchführen.

Die Kapitel 3 bis 6 beschäftigen sich mit der Einführung und Untersuchung eines Prozesses harter Partikel, der aus der konsequenten Fortsetzung der im zweiten Kapitel dargestellten Ausdünnungsmodelle entspringt. Kapitel 3 dient der Beschreibung dieses Prozesses und dem Nachweis seiner Existenz sowie weiteren qualitativen Aussagen. In Kapitel 4 wollen wir uns mit der algorithmischen Konstruktion des Prozesses beschäftigen, wozu wir den Prozess bzw. die zugehörige Ausdünnungsvorschrift in ein graphentheoretisches Umfeld einbetten und damit im Wechselspiel zwischen der formalen Beschreibung des Prozesses und seiner graphentheoretischen Darstellung unter anderem untere Schranken für dessen Intensität und Volumendichte erhalten. Kapitel 5 widmet sich der Herleitung eines starken Gesetzes großer Zahlen und eines zentralen Grenzwertsatzes für das zufällige Gewicht des eingeführten harten Partikelprozesses. Im vorletzten Kapitel werden wir untersuchen, wie sich die Verteilung des oben beschriebenen Prozesses unter Erhöhung der Ausgangsintensität verhält, was in einer der Hauptaussagen der vorliegenden Arbeit gipfeln wird.

Das abschließende Kapitel befasst sich mit Ergebnissen der Simulation des vorher beschriebenen Prozesses. Aufgrund der Komplexität der Konstruktion dieses Prozesses werden wir zuerst einen Näherungsprozess definieren, welcher ein effizientes Verhältnis zwischen Rechenzeit und Qualität der Näherung liefert. Für diesen Prozess werden Simulationen für Partikelprozesse in Dimension zwei und drei für Partikel sphärischer und zylindrischer Gestalt durchgeführt und deren Ergebnisse mit bekannten Prozessen verglichen. Abschließend diskutieren wir kurz die Einsatzmöglichkeiten dieses Modells.



# Kapitel 1

## Grundlagen aus der konvexen und stochastischen Geometrie

In diesem Kapitel wollen wir die für diese Arbeit wesentlichen Grundlagen der konvexen und stochastischen Geometrie vorstellen. Dabei werden wir uns aus Gründen der Übersichtlichkeit inhaltlich sehr eng an diejenigen Begriffe und Aussagen halten, welche für den weiteren Verlauf dieser Arbeit von Bedeutung sind. Darüber hinausgehende Aussagen wollen wir nur dann erwähnen, wenn sie der Abrundung des Themenkomplexes dienen. Die in diesem Kapitel vorgestellten Begriffe und Definitionen sowie die getroffenen Konventionen sollen für die ganze vorliegende Arbeit gelten. Wesentliche Grundlage dieses Kapitel sind [67] und [68]; dort finden sich auch die Beweise zu den meisten der in diesem Kapitel vorgestellten Aussagen. Zur Theorie der Punktprozesse sei insbesondere noch auf [9], [24], [25], [28] und speziell für Poissonprozesse auf [27] verwiesen. Der erste Abschnitt dieses Kapitels konzentriert sich inhaltlich auf die konvexe Geometrie, wird aber auch kurz auf integralgeometrische Grundlagen eingehen, während der zweite Abschnitt zentrale Inhalte der stochastischen Geometrie wiedergeben soll.

### 1.1 Grundlagen aus der konvexen Geometrie

Im Folgenden bezeichnen  $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$  die natürlichen Zahlen,  $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$  und  $\mathbb{R}^d$  für  $d \in \mathbb{N}$  die Menge der  $d$ -Tupel reeller Zahlen. Die Elemente des  $\mathbb{R}^d$  werden wir sowohl als Zeilen- als auch als Spaltenvektoren darstellen, wobei  $e_i$  für  $i \in \{1, \dots, d\}$  den  $i$ -ten Einheitsvektor der Standardbasis bezeichnet. Wir versehen den  $\mathbb{R}^d$  mit dem Standardskalarprodukt

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^d x_i y_i, \quad \text{für } x = (x_1, \dots, x_d), y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d,$$

so dass dieser dadurch zu einem euklidischen Vektorraum wird, auf dem durch

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

die euklidische Norm induziert wird.

Für einen beliebigen topologischen Raum  $(E, \mathcal{E})$  bezeichne  $\mathcal{B}(E)$  die zugehörige Borelsche  $\sigma$ -Algebra. Falls klar ist, von welchem topologischen Raum die Rede ist, werden wir auch kurz einfach  $\mathcal{B}$  für  $\mathcal{B}(E)$  schreiben. Für  $A \subset E$  bezeichnen  $\text{bd } A$ ,  $\text{cl } A$ ,  $\text{int } A$  und  $A^c := E \setminus A$  in dieser Reihenfolge den Rand, den Abschluss, das Innere bzw. das Komplement von  $A$ . Ist  $(E, \mathcal{E})$  metrisierbar mit Metrik  $\delta$ , so bezeichnet  $B_\delta(x, r) := \{y \in E : d(x, y) \leq r\}$  für  $x \in E$  sowie  $r > 0$  die abgeschlossene Kugel um  $x$  mit Radius  $r$ . Falls wir uns im  $\mathbb{R}^d$ , versehen mit der kanonischen Metrik  $\delta(x, y) := \|x - y\|$ , befinden, schreiben wir für diese Kugel kurz  $B(x, r)$ .

Mit  $\lambda_d$  bezeichnen wir das  $d$ -dimensionale Lebesguemaß auf  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ ; bei Integration bezüglich  $\lambda_d$  schreiben wir  $dx$  anstelle von  $\lambda_d(dx)$ . Weiterhin bezeichne  $S^{d-1} := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| = 1\}$  die Einheitssphäre im  $\mathbb{R}^d$ . Des Weiteren sei

$$\kappa_d := \lambda_d(B(0, 1)) = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(1 + d/2)}$$

für  $d \in \mathbb{N}$  und  $\kappa_0 := 1$ .

Für  $A, B \subset \mathbb{R}^d$  seien

$$A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

die Minkowski-Summe von  $A$  und  $B$ ,  $\alpha A := \{\alpha a : a \in A\}$  für  $\alpha \geq 0$  die Streckung von  $A$  um den Faktor  $\alpha$  und  $-A := A^* := \{-a : a \in A\}$  die Spiegelung von  $A$  am Ursprung. Für  $A + \{x\}$  schreiben wir kurz  $A + x$ .

Auf dem  $\mathbb{R}^d$  operieren die Translationsgruppe, also der  $\mathbb{R}^d$  als additive Gruppe selbst, die Gruppe  $\mathcal{SO}_d$  der eigentlichen Drehungen, also die Mengen aller linearen Abbildungen  $\vartheta : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  die das Skalarprodukt und die Orientierung erhalten, sowie die Menge  $G_d$  aller Bewegungen, also aller orientierungstreuen, abstandserhaltenden, affinen Abbildungen. Die Gruppe  $\mathcal{SO}_d$  ist isomorph zur Menge aller orthogonalen  $d \times d$ -Matrizen des  $\mathbb{R}^d$  mit Determinante eins, welche wir mit einer Teilmenge des  $\mathbb{R}^{d^2}$  identifizieren können. Dadurch lässt sich eine Topologie auf  $\mathcal{SO}_d$  einführen. Analog dazu identifizieren wir  $G_d$  als isomorph zu einer Teilmenge von  $\mathbb{R}^{d^2} \times \mathbb{R}^d$  und erhalten damit eine Topologie auf  $G_d$ . Die topologischen Eigenschaften von  $\mathcal{SO}_d$  und  $G_d$ , versehen mit diesen Topologien, werden in nachstehender Aussage zusammengefasst.

**Satz 1.1.1.** *Der topologische Raum  $\mathcal{SO}_d$  ist ein kompakter Hausdorff-Raum und erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom;  $G_d$  ist ein lokalkompakter Hausdorff-Raum und erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom. Beide Räume operieren stetig auf  $\mathbb{R}^d$ .*

Auf beiden Räumen lässt sich also ein bis auf eine positive Konstante eindeutig bestimmtes invariantes Maß  $\nu$  bzw.  $\nu$  einführen, wobei wir die Normierung so wählen, dass  $\nu(\mathcal{SO}_d) = 1$  und  $\nu(\{g \in G_d : gx \in B(0, 1)\}) = \kappa_d$  für  $x \in \mathbb{R}^d$  gelten. Bei Integrationen bezüglich  $\nu$  bzw.  $\nu$  schreiben wir kurz  $d\vartheta$  für  $\nu(d\vartheta)$  bzw.  $dg$  für  $\nu(dg)$ .

Im Folgenden bezeichnen  $\mathcal{C}$  die Menge der kompakten Teilmengen des  $\mathbb{R}^d$ ,  $\mathcal{K}$  die Menge der kompakten, konvexen Teilmengen des  $\mathbb{R}^d$  und  $\mathcal{R}$  die Menge der endlichen Vereinigungen von Elementen aus  $\mathcal{K}$ , den sogenannten *Konvexring*. Außerdem definieren wir  $\mathcal{C}' := \mathcal{C} \setminus \{\emptyset\}$  und  $\mathcal{K}' := \mathcal{K} \setminus \{\emptyset\}$  und bezeichnen die Elemente von  $\mathcal{K}'$  Menge als *konvexe Körper*. Zu jeder nicht-leeren, kompakten Menge  $C$  gibt es eine eindeutig bestimmte Kugel  $B(c(C), r_U(C))$  kleinsten Radius, so dass  $C \subset B(c(C), r_U(C))$  gilt. Den Mittelpunkt  $c(C)$  dieser Kugel nennen wir *Umkugelmittelpunkt*. Dadurch können wir die Mengen  $\mathcal{C}_0 := \{C \in \mathcal{C}' : c(C) = 0\}$  und  $\mathcal{K}_0 := \{K \in \mathcal{K}' : c(K) = 0\}$  der nichtleeren, zentrierten kompakten Mengen bzw. konvexen Körper einführen. Für  $C \in \mathcal{C}'$  sei  $\text{diam } C := \max_{x,y \in C} \|x - y\|$  der *Durchmesser* von  $C$ . Unter der Dimension eines konvexen Körpers  $K$  wollen wir die Dimension seiner affinen Hülle verstehen und schreiben dafür  $\dim K$ .

Für  $K \in \mathcal{K}'$  bezeichnet die Abbildung

$$p_K(\cdot) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$$

$$x \mapsto p_K(x)$$

die *metrische Projektion* auf  $K$ , wobei  $p_K(x)$  der eindeutig bestimmte Punkt aus  $K$  ist, für den  $\|x - p_K(x)\| \leq \|x - y\|$  für alle  $y \in K$  gilt.

Auf  $\mathcal{K}'$  lässt sich durch

$$d_H(K, L) := \max\{\max_{k \in K} \min_{l \in L} d(k, l), \max_{l \in L} \min_{k \in K} d(k, l)\}, \quad K, L \in \mathcal{K}' \quad (1.1)$$

die sogenannte *Hausdorff-Metrik* einführen. Dabei gilt

$$d_H(K, L) \leq \varepsilon \Leftrightarrow K \subset L + B(0, \varepsilon) \text{ und } L \subset K + B(0, \varepsilon).$$

Setzt man zusätzlich  $d_H(K, \emptyset) = d_H(\emptyset, K) := \infty$  so wird daraus eine Metrik auf  $\mathcal{K}$ , welche die sogenannte *Hausdorff-Topologie* erzeugt. Im dieser Arbeit sei  $\mathcal{K}$  immer mit der Hausdorff-Topologie versehen. Die Hausdorff-Metrik lässt sich ebenso auch auf dem Raum  $\mathcal{C}$  der kompakten Teilmengen des  $\mathbb{R}^d$  einführen. Für konvexe Körper können wir die Konvergenz bezüglich der Hausdorff-Metrik wie folgt charakterisieren.

**Satz 1.1.2.** *Es seien  $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$  ein Folge in  $\mathcal{K}'$  und  $K \in \mathcal{K}'$ . Dann gilt  $K_i \rightarrow K$  für  $i \rightarrow \infty$  in der Hausdorff-Metrik genau dann, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:*

- (i) *Jeder Punkt  $x \in K$  ist Grenzwert einer geeigneten Folge  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  mit  $x_i \in K_i$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ .*
- (ii) *Für jede Folge  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  mit  $x_i \in K_i$  für alle  $i \in \mathbb{N}$  gilt, dass alle ihre Häufungspunkte in  $K$  liegen.*

Der nachfolgende *Auswahlsatz von Blaschke* charakterisiert eine zentrale Eigenschaft beschränkter Teilmengen von  $\mathcal{K}'$ .

**Satz 1.1.3.** *Es sei  $(K_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{K}'$  eine beschränkte Folge konvexer Körper, d.h. es gilt  $K_i \subset C$  für ein  $C \in \mathcal{C}$  und alle  $i \in \mathbb{N}$ . Dann gibt es eine Teilfolge  $(K_{i_j})_{j \in \mathbb{N}}$  und ein  $K \in \mathcal{K}'$ , so dass*

$$K_{i_j} \rightarrow K$$

für  $j \rightarrow \infty$  gilt.

Beschränkte Teilmengen von  $\mathcal{K}'$  sind folglich relativ kompakt.

Wir wollen die wesentlichen topologischen Eigenschaften von  $\mathcal{K}'$  in folgender Aussage zusammenfassen.

**Satz 1.1.4.** *Der Raum  $\mathcal{K}'$  versehen mit der Hausdorff-Topologie ist ein vollständiger, lokalkompakter Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis.*

*Beweis.* Die Vollständigkeit folgt aus Theorem 1.8.2 in [67]. Die Lokalkompaktheit ist eine direkte Konsequenz aus dem Auswahlssatz von Blaschke, während die Hausdorff-Eigenschaft aus der Metrisierbarkeit folgt. Der Beweis, dass das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt ist, erfolgt über die Tatsache, dass  $\mathcal{K}'$  separabel ist, da die Menge aller Polytope mit rationalen Eckpunkten dicht in  $\mathcal{K}'$  liegt.  $\square$

Ein hilfreiches Charakteristikum eines konvexen Körpers  $K$  ist die zugehörige *Stützfunktion*  $h_K$ . Sie ist definiert durch

$$h_K : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \max_{y \in K} \langle x, y \rangle.$$

Ihre Bedeutung und mögliche Anwendungen lassen sich aus folgendem Satz erschließen.

**Satz 1.1.5.** *Seien  $K, L \in \mathcal{K}'$  und  $x, y \in \mathbb{R}^d$ . Dann gilt:*

- a)  $h_K$  ist positiv homogen, abgeschlossen, beschränkt und konvex.
- b)  $h_K$  ist stetig auf  $\mathbb{R}^d$ .
- c)  $K = L \Leftrightarrow h_K = h_L \Leftrightarrow h_K|_{S^{d-1}} = h_L|_{S^{d-1}}$ .
- d)  $h_{-A}(x) = h_A(-x)$ .
- e)  $h_{K+y} = h_K + \langle y, \cdot \rangle$ .
- f)  $h_{\alpha K + \beta L} = \alpha h_K + \beta h_L$  für  $\alpha, \beta \geq 0$ .

Fasst man die Stützfunktion eines konvexen Körpers als Element des Raumes  $C(S^{d-1})$  der auf  $S^{d-1}$  stetigen, reellwertigen Funktionen auf, wobei wir diesen mit der Maximumsnorm  $\|\cdot\|_\infty$  versehen, so gilt folgender Zusammenhang.

**Satz 1.1.6.** Für  $K, L \in \mathcal{K}'$  gilt

$$d_H(K, L) = \|h_K - h_L\|_\infty. \quad (1.2)$$

Für ein Polytop  $P$  und  $u \in S^{d-1}$  nennen wir Mengen der Gestalt

$$F := \{x \in P : h_P(u) = \langle x, u \rangle\}$$

eine Seite von  $P$ . Für  $i = 0, \dots, d-1$  bezeichnen wir die Menge aller Seiten der Dimension  $i$  von  $P$  mit  $\mathcal{F}_i(P)$  und setzen  $\mathcal{F}_\bullet(P) = \cup_{i=0}^{d-1} \mathcal{F}_i(P)$ .

Für einen konvexen Körper  $K$  und  $r > 0$  nennen wir die Menge  $K + B(0, r)$ , also die Menge aller Punkte des  $\mathbb{R}^d$ , deren Abstand zu  $K$  höchstens  $r$  beträgt, die *Parallelmenge* von  $K$  im Abstand  $r$ . Bei der Charakterisierung konvexer Körper durch skalare Größen spielen die *inneren Volumina* eine zentrale Rolle. Sie werden über die *Steiner-Formel* erklärt, welche eine Aussage über das Volumen der Parallelmenge konvexer Körper trifft und sich in nachfolgendem Satz findet, der zugleich eine Definition beinhaltet.

**Satz 1.1.7.** Es gibt Funktionale  $V_i : \mathcal{K}' \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 0, \dots, d$ , so dass für  $K \in \mathcal{K}'$  und  $r > 0$  die Gleichung

$$\lambda_d(K + B(0, r)) = \sum_{i=0}^d r^{d-i} \kappa_{d-i} V_i(K) \quad (1.3)$$

gilt.  $V_i$  nennen wir das  $i$ -te innere Volumen.

Das Volumen der Parallelmenge von  $K$  im Abstand  $r$  ist somit ein Polynom in  $r$ , das vom Grad  $d$  ist. Die Koeffizienten der Potenzen von  $r$  definieren bis auf eine Reskalierung die inneren Volumina von  $K$ . Sie liefern eine intrinsische Charakterisierung von  $K$  und haben nachstehende Eigenschaften.

**Satz 1.1.8.** Für  $i \in \{0, \dots, d\}$  gilt:

- a)  $V_i \geq 0$ .
- b) Die Abbildung  $\mathcal{K}' \rightarrow [0, \infty)$ ,  $K \mapsto V_i(K)$  ist stetig.
- c)  $V_i$  ist bewegungsinvariant, monoton und homogen vom Grad  $i$ .
- e)  $V_i$  ist additiv, d.h.

$$V_i(K \cap L) + V_i(K \cup L) = V_i(K) + V_i(L) \text{ für alle } K, L \in \mathcal{K}' \text{ mit } K \cup L \in \mathcal{K}'.$$

- f)  $V_i$  lässt sich eindeutig additiv auf  $\mathcal{R}$  fortsetzen.
- g)  $V_i$  ist unabhängig von der Dimension des umgebenden Raums.
- h)  $V_d = \lambda_d$ .

i)  $V_0 \equiv 1$ .

j)  $V_{d-1} = 2F$ .

Dabei bezeichnet  $F(K)$  die Oberfläche von  $K$ , welche sich für konvexe Körper auf geeignete Weise elementar einführen lässt. Die Aussagen h), i) und j) ermöglichen also eine Deutung spezieller innerer Volumina. Insbesondere wird  $V_0$  auch als *Euler-Charakteristik* bezeichnet. Im Stile dieser Aussagen lässt sich auch eine Deutung des ersten inneren Volumens  $V_1(K)$  eines konvexen Körpers  $K$  liefern; es ist proportional zur mittleren Breite von  $K$ , wobei wir diese als

$$\bar{B}(K) := \frac{1}{d\kappa_d} \int_{S^{d-1}} (h_K(u) + h_K(-u)) du$$

einführen und die Integration bezüglich des sphärischen Lebesguemaßes erfolgt. Es gilt dann nämlich

$$V_1(K) = \frac{d\kappa_d}{2\kappa_{d-1}} \bar{B}(K).$$

Die besondere Bedeutung der inneren Volumina ergibt sich daraus, dass diese und ihre Linearkombinationen bereits die einzigen Funktionale auf  $\mathcal{K}'$  sind, die stetig, additiv und bewegungsinvariant sind, was aus dem nachfolgenden *Funktionalatz von Hadwiger* hervorgeht.

**Satz 1.1.9.** *Ist  $\varphi : \mathcal{K}' \rightarrow \mathbb{R}$  ein stetiges, additives und bewegungsinvariantes Funktional, so existieren Konstanten  $c_0, \dots, c_d \in \mathbb{R}$ , so dass*

$$\varphi(K) = \sum_{i=0}^d c_i V_i(K)$$

für alle  $K \in \mathcal{K}'$  gilt.

Zum Abschluss dieses Abschnittes wollen wir mit der *Kinematischen Hauptformel* ein Resultat aus der Integralgeometrie vorstellen, welches später nützlich sein wird und aus dem Satz von Hadwiger folgt.

**Satz 1.1.10.** *Seien  $K, L \in \mathcal{K}'$  und  $i \in \{0, \dots, d\}$ . Dann gilt*

$$\int_{G_d} V_i(K \cap gL) dg = \sum_{k=i}^d c_{d,i,k} V_k(K) V_{d-k+i}(L),$$

wobei  $c_{d,i,k} := \frac{\binom{k}{i} \kappa_k \kappa_{d+i-k}}{\binom{d}{k-i} \kappa_i \kappa_d} = \frac{\Gamma(\frac{k+1}{2}) \Gamma(\frac{d+i-k+1}{2})}{\Gamma(\frac{i+1}{2}) \Gamma(\frac{d+1}{2})}$ .

Besondere Bedeutung für spätere Anwendungen in dieser Arbeit erhält der Fall  $i = 0$ . Für diesen lautet die kinematische Hauptformel dann

$$\int_{G_d} V_0(K \cap gL) dg = \sum_{k=0}^d c_{d,0,k} V_k(K) V_{d-k}(L), \quad K, L \in \mathcal{K}'. \quad (1.4)$$

## 1.2 Grundlagen aus der stochastischen Geometrie

Zu Beginn dieses Abschnitts wollen wir zufällige abgeschlossene Mengen und allgemeine Punktprozesse definieren. Um diese zufälligen abstrakten Objekte einführen zu können, wollen wir zuerst die Räume spezifizieren, in denen sich die jeweiligen Realisierungen von ihnen befinden. In diesem Abschnitt sei dazu  $(E, \mathcal{E})$  ein lokalkompakter Hausdorff-Raum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Nachstehende Aussage soll wesentliche topologische Eigenschaften von  $(E, \mathcal{E})$  zusammenfassen, die später an verschiedenen Stellen implizit eine Rolle spielen.

**Satz 1.2.1.** *a) Die Topologie von  $E$  besitzt eine abzählbare Basis  $\mathcal{D}$ , bestehend aus offenen, relativ kompakten Mengen, so dass*

$$G = \bigcup_{D \in \mathcal{D}: \text{cl } D \subset G} D$$

für alle  $G \in \mathcal{E}$  gilt.

- b) *Es gibt eine Folge  $(G_i)_{i \in \mathbb{N}}$  offener, relativ kompakter Mengen in  $E$ , so dass  $\text{cl } G_i \subset G_{i+1}$  für  $i \in \mathbb{N}$  und  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} G_i = E$  gelten.*
- c) *Für jede kompakte Menge  $C \subset E$  existiert eine fallende Folge  $(G_i)_{i \in \mathbb{N}}$  offener, relativ kompakter Umgebungen von  $C$  in  $E$ , so dass für jede Menge  $G \in \mathcal{E}$  mit  $C \subset G$  ein  $i \in \mathbb{N}$  existiert mit  $G_i \subset G$ .*
- d) *Ist  $C \subset E$  kompakt und sind  $G_1, G_2 \in \mathcal{E}$  mit  $C \subset G_1 \cup G_2$ , so gibt es kompakte Mengen  $C_1 \subset G_1$  und  $C_2 \subset G_2$  mit  $C = C_1 \cup C_2$ .*

Mit  $\mathcal{F}(E)$ ,  $\mathcal{G}(E)$  bzw.  $\mathcal{C}(E)$  bezeichnen wir die Systeme der abgeschlossenen, offenen bzw. kompakten Teilmengen von  $E$ , wobei die leere Menge jeweils eingeschlossen ist. Ähnlich wie im vorherigen Abschnitt setzen wir  $\mathcal{F}'(E) := \mathcal{F}(E) \setminus \{\emptyset\}$ ;  $\mathcal{G}'(E)$  und  $\mathcal{C}'(E)$  sind analog definiert. Des Weiteren bezeichnen  $\mathcal{F}_{le}(E)$  und  $\mathcal{F}_e(E)$  die Menge der lokalendlichen bzw. endlichen Teilmengen von  $E$ . Weiterhin setzen wir

$$\mathcal{F}^A(E) := \{F \in \mathcal{F}(E) : F \cap A = \emptyset\}$$

und

$$\mathcal{F}_A(E) := \{F \in \mathcal{F}(E) : F \cap A \neq \emptyset\}.$$

für  $A \subset E$ .

Auf  $\mathcal{F}(E)$  wollen wir nun die *Topologie der abgeschlossenen Konvergenz* einführen. Dabei handelt es sich um die von dem System

$$\{\mathcal{F}^C(E) : C \in \mathcal{C}(E)\} \cup \{\mathcal{F}_G(E) : G \in \mathcal{G}(E)\}$$

erzeugte Topologie. Sie wird auch als *Fell-Topologie* bezeichnet. Es lässt sich zeigen, dass die zugehörige Borelsche  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}(\mathcal{F}(E))$  bereits von

$$\{\mathcal{F}^C(E) : C \in \mathcal{C}(E)\}$$

oder

$$\{\mathcal{F}_G(E) : G \in \mathcal{G}(E)\}$$

erzeugt wird. Die wesentlichen topologischen Eigenschaften von  $\mathcal{F}(E)$  gibt nachfolgende Aussage wieder.

**Satz 1.2.2.** *Der Raum  $\mathcal{F}(E)$  ist ein kompakter Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis. Bezüglich der Spurtopologie ist  $\mathcal{F}'(E)$  ein lokalkompakter Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis, dessen Alexandroff-Kompaktifizierung gerade  $\mathcal{F}(E)$  ist.*

Wir wollen an dieser Stelle die Übereinkunft treffen, dass wir unter  $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{C}, \mathcal{F}'$  und  $\mathcal{C}'$  immer die jeweiligen Teilmengen des  $\mathbb{R}^d$  verstehen werden. Es gilt dann folgendes Resultat.

**Satz 1.2.3.** *Die Mengen  $\mathcal{C}, \mathcal{K}$  und  $\mathcal{R}$  sind Borelmengen in  $\mathcal{F}$ .*

Zunächst werden wir uns nun mit Regularitätseigenschaften der üblichen Mengenoperationen befassen. Da wir in der hier vorliegenden Arbeit nur die Messbarkeit solcher Abbildungen benötigen, beschränken wir uns in der nachfolgenden Aussage auf diesen Aspekt, wenngleich die meisten dieser Abbildungen sogar (halb)stetig sind.

**Satz 1.2.4.** *Die Abbildungen*

- $\mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}, (F, F') \mapsto F \cup F'$
- $\mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}, (F, F') \mapsto F \cap F'$
- $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}, F \mapsto -F =: F^*$
- $[0, \infty) \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}, (\alpha, F) \mapsto \alpha F$
- $\mathcal{SO}_d \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}, (\vartheta, F) \mapsto \vartheta F$
- $G_d \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}, (g, F) \mapsto gF$
- $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}, F \mapsto \text{bd } F$
- $\mathcal{F} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{F}, (F, C) \mapsto F + C$

*sind messbar bezüglich der jeweiligen Borelschen  $\sigma$ -Algebren.*

Ähnlich wie in Satz 1.1.2 lässt sich die Konvergenz einer Folge in  $\mathcal{F}$  wie folgt äquivalent charakterisieren.

**Satz 1.2.5.** *Es seien  $(F_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathcal{F}$  und  $F \in \mathcal{F}$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*



a) Es gilt  $F_i \rightarrow F$  für  $i \rightarrow \infty$ .

b) Es gelten:

b1) Aus  $G \cap F \neq \emptyset$ ,  $G \in \mathcal{G}$ , folgt  $G \cap F_i \neq \emptyset$  für fast alle  $i \in \mathbb{N}$ .

b2) Aus  $C \cap F = \emptyset$ ,  $C \in \mathcal{C}$ , folgt  $C \cap F_i = \emptyset$  für fast alle  $i \in \mathbb{N}$ .

c) Es gelten:

c1) Für jedes  $x \in F$  existieren für fast alle  $i \in \mathbb{N}$  Punkte  $x_i \in F_i$  mit  $x_i \rightarrow x$  für  $i \rightarrow \infty$ .

c2) Für jede Teilfolge  $(F_{i_k})_{k \in \mathbb{N}}$  und jede konvergente Folge  $(x_{i_k})_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $x_{i_k} \in F_{i_k}$  gilt  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{i_k} \in F$ .

Auf den Räumen  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{K}$  stehen uns mit den bisher eingeführten Begriffen zwei Topologien zur Verfügung. Zum einen die von der Hausdorff-Metrik induzierte Topologie und zum anderen die Spurtopologie der Fell-Topologie. Über den Zusammenhang zwischen diesen beiden Topologien gibt folgender Satz Auskunft.

**Satz 1.2.6.** Die Topologie der Hausdorff-Metrik auf  $\mathcal{C}$  ist echt feiner als die Spurtopologie von  $\mathcal{F}$ . Auf  $\mathcal{K}'$  und Mengen der Gestalt

$$\{C \in \mathcal{C} : C \subset C'\}, \quad C \in \mathcal{C}$$

stimmen beide Topologien überein.

Die Spur  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}(\mathcal{F})_{\mathcal{C}}$  von  $\mathcal{B}(\mathcal{F})$  auf  $\mathcal{C}$  stimmt hingegen mit der Borelschen  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}(\mathcal{C})$  überein, wenn  $\mathcal{C}$  mit der Hausdorff-Metrik versehen wird.

Im Folgenden wollen wir abschließend weitere Stetigkeitsaussagen vorstellen.

**Satz 1.2.7.** a) Die Abbildungen  $c$  und  $r_U$ , die jedem konvexen Körper seinen Umkreismittelpunkt bzw. Umkreisradius zuordnen, sind stetig.

b) Die Abbildungen

- $\mathcal{C} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(F, x) \rightarrow \mathbf{1}_F(x)$
- $\mathcal{K}' \times \mathcal{K}' \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(K, L) \rightarrow \mathbf{1}\{K \cap L \neq \emptyset\}$
- $\mathcal{K}' \times \mathcal{K}' \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(K, L) \rightarrow \mathbf{1}\{\text{int } K \cap \text{int } L = \emptyset\}$

sind nach oben halbstetig.

Von nun an sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum. Unter einer zufälligen abgeschlossenen Menge verstehen wir dann eine messbare Abbildung

$$Z : \Omega \rightarrow \mathcal{F}$$

und bezeichnen ihre Verteilung mit  $\mathbb{P}^Z := Z(\mathbb{P})$ . Eine zufällige abgeschlossene Menge  $Z$  heißt stationär, falls  $\mathbb{P}^Z = \mathbb{P}^{Z+x}$  für alle  $x \in \mathbb{R}^d$  gilt und isotrop, falls  $\mathbb{P}^Z = \mathbb{P}^{\vartheta Z}$  für alle  $\vartheta \in \mathcal{SO}_d$

gilt. Es lässt sich nun folgende elementare Eigenschaft stationärer zufälliger abgeschlossener Mengen nachweisen.

**Satz 1.2.8.** *Eine stationäre zufällige abgeschlossene Menge  $Z$  ist f.s. nicht beschränkt.*

Außerdem gilt folgendes Eindeutigkeitsresultat für zufällige abgeschlossene Mengen.

**Satz 1.2.9.** *Seien  $Z, Z'$  zufällige abgeschlossene Mengen mit  $\mathbb{P}^Z(\mathcal{F}_C) = \mathbb{P}^{Z'}(\mathcal{F}_C)$  für alle  $C \in \mathcal{C}$ . Dann gilt  $\mathbb{P}^Z = \mathbb{P}^{Z'}$ .*

Wir wählen nun wieder den lokalendlichen Hausdorff-Raum  $(E, \mathcal{E})$  mit abzählbarer Basis als Grundraum und führen auf diesem Punktprozesse ein. Sei dazu  $\mathbf{N}(E)$  die Menge aller *lokalendlichen, einfachen Zählmaße* auf  $E$ , d.h. die Menge aller Maße  $\eta$  auf  $\mathcal{B}(E)$  für die

- $\eta(C) < \infty$  für alle  $C \in \mathcal{C}(E)$
- $\eta(A) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$  für alle  $A \in \mathcal{B}(E)$
- $\eta(\{x\}) \leq 1$  für alle  $x \in E$

gilt. Wir versehen  $\mathbf{N}(E)$  mit der  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{N}(E)$ , die von den Auswertungsfunktionalen

$$\begin{aligned} \Phi_A : \mathbf{N}(E) &\rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\} \\ \eta &\mapsto \eta(A) \end{aligned}$$

für  $A \in \mathcal{B}(E)$  erzeugt wird. Damit ist  $\mathcal{N}(E)$  die kleinste  $\sigma$ -Algebra, bezüglich der alle Abbildungen  $\Phi_A$  für  $A \in \mathcal{B}(E)$  messbar sind. Das folgende Lemma liefert uns ein einfacheres Erzeugendensystem von  $\mathcal{N}(E)$ .

**Lemma 1.2.10.** *Die  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{N}(E)$  wird von*

$$\{\{\eta \in \mathbf{N}(E) : \eta(G) = k\} : G \in \mathcal{G}, G \text{ relativ kompakt}, k \in \mathbb{N}_0\}$$

*erzeugt.*

Ein Beispiel für lokalendliche, einfache Zählmaße auf  $E$  sind endliche oder abzählbar unendliche Summen von Dirac-Maßen der Gestalt

$$\eta = \sum_{i=1}^k \delta_{x_i}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\},$$

wobei die Punkte  $x_i$  paarweise verschieden sind und  $\{x_i : 1 \leq i \leq k\}$  lokalendlich ist. In der Tat sind umgekehrt sogar alle lokalendlichen, einfachen Zählmaße auf  $E$  von dieser Gestalt, wie nachfolgendes Ergebnis besagt.

**Lemma 1.2.11.** *Es gibt messbare Abbildungen  $\zeta_i : \mathbf{N}(E) \rightarrow E$ , so dass*

$$\eta = \sum_{i=1}^{\eta(E)} \delta_{\zeta_i(\eta)}$$

für  $\eta \in \mathbf{N}(E)$  gilt.

Betrachtet man nun für ein Maß  $\eta \in \mathbf{N}(E)$  dessen Träger

$$\text{supp } \eta := \{x \in E : \eta(\{N_x\}) > 0 \text{ für alle offenen Umgebungen } N_x \text{ von } x\},$$

so ist dieser aufgrund der Lokalendlichkeit von  $\eta$  abgeschlossen, also Element von  $\mathcal{F}(E)$ . Es gilt  $\text{supp } \eta := \{x \in E : \eta(\{x\}) = 1\}$ . Wir können dann folgenden Zusammenhang zwischen  $\mathbf{N}(E)$  und  $\mathcal{F}_{le}(E)$  herstellen.

**Satz 1.2.12.** *Die Menge  $\mathcal{F}_{le}(E)$  ist Borel-messbar. Die Abbildung*

$$\begin{aligned} i : \mathbf{N}(E) &\rightarrow \mathcal{F}_{le}(E) \\ \eta &\mapsto \text{supp } \eta \end{aligned}$$

*ist messbar und bijektiv. Für die Spur  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}(\mathcal{F}(E))_{le}$  von  $\mathcal{B}(\mathcal{F}(E))$  auf  $\mathcal{F}_{le}(E)$  gelten  $\mathcal{N}(E) = i^{-1}(\mathcal{B}(\mathcal{F}(E))_{le})$  und  $\mathcal{B}(\mathcal{F}(E))_{le} = i(\mathcal{N}(E))$ .*

Unter einem *einfachen Punktprozess* verstehen wir dann eine messbare Abbildung  $\Xi : \Omega \rightarrow \mathbf{N}(E)$ . Mit  $\mathbb{P}^\Xi := \Xi(\mathbb{P})$  sei die Verteilung des Punktprozesses bezeichnet. Im Fall  $E = \mathbb{R}^d$  nennen wir einen solchen Prozess auch einen *gewöhnlichen Punktprozess*. Einen Punktprozess in  $E = \mathcal{F}'$ , welcher der später folgenden Bedingung (1.5) genügt, nennen wir einen *Partikelprozess*. Aufgrund von Satz 1.2.12 werden wir in der hier vorliegenden Arbeit Punktprozesse sowohl als zufällige einfache Zählmaße als auch als zufällige abgeschlossene Mengen betrachten und in der Sprechweise diese beiden Anschauungen synonym verwenden. Wir werden im Folgenden nur noch von Punktprozessen sprechen, ohne bei deren Erwähnung auf ihre Einfachheit Bezug zu nehmen.

Im Sinne von Satz 1.2.9 lässt sich folgende Aussage treffen.

**Satz 1.2.13.** *Die Abbildung  $\Xi : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbf{N}(E), \mathcal{N}(E))$  ist genau dann ein Punktprozess, wenn  $\{\Xi(C) = 0\} := \{\omega \in \Omega : \Xi(\omega)(C) = 0\}$  für alle  $C \in \mathcal{C}(E)$  messbar ist. Seien  $\Xi, \Xi'$  zwei Punktprozesse in  $E$ . Dann gilt  $\mathbb{P}^\Xi = \mathbb{P}^{\Xi'}$  genau dann, wenn  $\mathbb{P}(\Xi(C) = 0) = \mathbb{P}(\Xi'(C) = 0)$  für alle  $C \in \mathcal{C}$  gilt.*

Für eine Folge  $(\Xi_i)_{i \in \mathbb{N}}$  von Punktprozessen auf  $E$  und einen Punktprozess  $\Xi$  in  $E$  schreiben wir  $\Xi_i \xrightarrow{\mathcal{D}} \Xi$  für  $i \rightarrow \infty$ , falls  $\mathbb{E}f(\Xi_i) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \mathbb{E}f(\Xi)$  für alle stetigen beschränkten Abbildungen  $f : \mathbf{N}(E) \rightarrow \mathbb{R}$  gilt. Wir sagen dann, dass  $\Xi_i$  (*schwach*) gegen  $\Xi$  konvergiert.

Für  $A \in \mathcal{B}(E)$  ist die Abbildung  $\eta \rightarrow \eta|_A$ , wobei wir  $\eta|_A(\cdot) := \eta(\cdot \cap A)$  setzen, messbar, weshalb die Einschränkung eines Punktprozesses auf eine solche Menge  $A$  wiederum ein Punktprozess ist. Um die spätere Notation zu vereinfachen, vereinbaren wir hier, dass wir für  $E = \mathcal{C}'$  bzw.  $E = \mathcal{K}'$  und  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  unter  $\Xi_A$  die Menge  $\{C \in \Xi : c(C) \in A\}$  verstehen wollen.

In den Fällen  $E = \mathbb{R}^d, \mathcal{F}', \mathcal{C}', \mathcal{K}'$  operieren die topologischen Gruppen  $\mathbb{R}^d, \mathcal{SO}_d$  und  $G_d$  stetig auf  $E$ . Damit können wir diese Operationen auf messbare Weise über geeignete Bildmaße auf  $\mathbf{N}(E)$  übertragen. Wir erklären dazu für  $B \in \mathcal{B}(E), \eta \in \mathbf{N}(E), x \in \mathbb{R}^d, \vartheta \in \mathcal{SO}_d$  und  $g \in G_d$  das Zählmaß  $\eta+x$  via  $(\eta+x)(B) := \eta(B-x)$ , das Zählmaß  $\vartheta\eta$  via  $\vartheta\eta(B) := \eta(\vartheta^{-1}B)$  und das Zählmaß  $g\eta$  via  $g\eta(B) := \eta(g^{-1}(B))$ . Wie für zufällige abgeschlossene Mengen nennen wir einen Punktprozess  $\Xi$  in  $E = \mathbb{R}^d$  oder  $E = \mathcal{F}'$  bzw. geeigneten Teilmengen davon *stationär*, falls  $\mathbb{P}^\Xi = \mathbb{P}^{\Xi+x}$  für alle  $x \in \mathbb{R}^d$  gilt und *isotrop*, falls  $\mathbb{P}^\Xi = \mathbb{P}^{\vartheta\Xi}$  für alle  $\vartheta \in \mathcal{SO}_d$  gilt. Sobald wir im Folgenden von stationären bzw. isotropen Punktprozessen sprechen, nehmen wir implizit an, dass es sich bei  $E$  um einen der oben erwähnten Räume handelt.

Das Intensitätsmaß  $\Theta$  eines Punktprozesses  $\Xi$  in  $E$  ist ein Maß auf  $\mathcal{B}(E)$ , das durch

$$\Theta(A) := \mathbb{E} \Xi(A)$$

für  $A \in \mathcal{B}(E)$  definiert ist. Dabei ist leicht einzusehen, dass es sich bei  $\Theta$  tatsächlich um ein Maß handelt. Das Intensitätsmaß ist von seiner Definition her an den Erwartungswert reellwertiger Zufallsvariablen angelehnt. Alle in dieser Arbeit auftretenden Intensitätsmaße von Punktprozessen seien als lokalendlich vorausgesetzt, auch wenn dies der Einfachheit halber nicht immer explizit erwähnt wird.

Damit lassen sich nun Partikelprozesse formal einführen. Bei einem Partikelprozess handelt es sich um einen Punktprozess  $\Xi$  in  $\mathcal{F}'$ , dessen Intensitätsmaß auf  $\mathcal{C}'$  konzentriert ist, für das also

$$\Theta(\mathcal{F}' \setminus \mathcal{C}') = 0 \tag{1.5}$$

gilt. Später werden wir sogar nur konvexe Partikelprozesse betrachten, also Prozesse bei denen das Intensitätsmaß auf  $\mathcal{K}'$  konzentriert ist. Die Lokalendlichkeit von  $\Theta$  ist äquivalent zur Bedingung

$$\Theta(\mathcal{F}_C) < \infty \text{ für alle } C \in \mathcal{C}. \tag{1.6}$$

Für stationäre Punktprozesse weiß man, dass das Intensitätsmaß besondere Gestalt annimmt. Zur einfacheren Darstellung benötigen wir dazu für Partikelprozesse den Homöomorphismus

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}^d \times \mathcal{C}_0 &\rightarrow \mathcal{C}' \\ (x, C) &\mapsto C + x. \end{aligned}$$

**Satz 1.2.14.** *Es sei  $\Xi$  ein stationärer Punktprozess in  $E$ , dessen Intensitätsmaß nicht das Nullmaß ist. Dann gilt:*

- (i) *Ist  $E = \mathbb{R}^d$ , so gilt  $\Theta = \gamma\lambda_d$  für ein  $\gamma > 0$ .*

(ii) Ist  $E = \mathcal{F}'$  und gilt  $\Theta(\mathcal{F}' \setminus \mathcal{C}') = 0$ , so gibt es ein  $\gamma > 0$  und ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{Q}$  auf  $\mathcal{C}_0$ , so dass

$$\Theta = \gamma \Phi(\lambda_d \otimes \mathbb{Q}) \quad (1.7)$$

gilt. Dabei sind  $\gamma$  und  $\mathbb{Q}$  eindeutig bestimmt. Insbesondere gilt dann für jede  $\Theta$ -integrierbare Funktion  $f$  auf  $\mathcal{C}'$

$$\int_{\mathcal{C}'} f d\Theta = \gamma \int_{\mathcal{C}_0} \int_{\mathbb{R}^d} f(C+x) dx \mathbb{Q}(dC). \quad (1.8)$$

Zudem erhalten wir für  $A \in \mathcal{B}(\mathcal{C}_0)$  die Darstellung

$$\mathbb{Q}(A) = \frac{1}{\gamma} \sum_{C \in \Xi, c(C) \in [0,1]^d} \mathbb{E} \mathbf{1}\{C - c(C) \in A\}. \quad (1.9)$$

In beiden Fällen nennen wir die Konstante  $\gamma$  die *Intensität* von  $\Xi$ . Sie entspricht im Fall (i) der mittleren Anzahl an Punkten von  $\Xi$ , die in einer messbaren Menge mit Volumen eins liegen und im Fall (ii) der mittleren Anzahl an Partikeln von  $\Xi$ , deren Umkreismittelpunkt in einer solchen Menge liegen. Da wir  $\Theta$  als lokalendlich voraussetzen, gilt damit insbesondere  $\gamma < \infty$ . Das Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{Q}$  in (ii) nennen wir *Formverteilung*. Eine zufällige Menge mit Verteilung  $\mathbb{Q}$  heißt *typisches Partikel*. Ist  $\Xi$  isotrop, so ist  $\mathbb{Q}$  rotationsinvariant, d.h. es gilt  $\mathbb{Q}(B) = \mathbb{Q}(\vartheta B)$  für alle  $B \in \mathcal{B}(\mathcal{C}_0)$ ,  $\vartheta \in \mathcal{SO}_d$ . Daraus lässt sich leicht folgende Aussage schließen.

**Korollar 1.2.15.** Sei  $\Xi$  ein stationärer Punktprozess in  $E$ , dessen Intensitätsmaß nicht das Nullmaß ist und  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ .

(i) Ist  $E = \mathbb{R}^d$ , so gilt für das Intensitätsmaß  $\Theta_A$  von  $\Xi|_A$  die Beziehung

$$\Theta_A = \gamma \lambda_d|_A \text{ für ein } \gamma > 0. \quad (1.10)$$

(ii) Ist  $E = \mathcal{F}'$  und gilt  $\Theta(\mathcal{F}' \setminus \mathcal{C}') = 0$ , so gibt es ein  $\gamma > 0$  und ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{Q}$  auf  $\mathcal{C}_0$ , so dass das Intensitätsmaß  $\Theta_A$  von  $\Xi_A$  die Beziehung

$$\Theta = \gamma \Phi(\lambda_d|_A \otimes \mathbb{Q}) \quad (1.11)$$

erfüllt. Dabei sind  $\gamma$  und  $\mathbb{Q}$  eindeutig bestimmt.

Analog zum Intensitätsmaß lassen sich für  $m \geq 2$  auf  $E^m$  bzw.

$$E_{\neq}^m := \{(x_1, \dots, x_m) \in E^m : x_i \text{ paarweise verschieden}\}$$

das sogenannte *m-te Momentenmaß*  $\Theta^{(m)}$  bzw. das *m-te faktorielle Momentenmaß*  $\Lambda^{(m)}$  durch

$$\Theta^{(m)}(A_1 \times \dots \times A_m) := \mathbb{E} \Xi^m(A_1 \times \dots \times A_m) = \mathbb{E} [\Xi(A_1) \dots \Xi(A_m)] \quad (1.12)$$

und

$$\Lambda^{(m)}(A_1 \times \cdots \times A_m) := \mathbb{E} \Xi^m((A_1 \times \cdots \times A_m) \cap E_{\neq}^m), \quad (1.13)$$

mit  $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{B}(E)$  einführen. Die Menge  $E_{\neq}^m$  ist dabei offen in  $\mathcal{F}^m$  und folglich messbar. Damit ist  $\Theta^{(m)}$  das Intensitätsmaß des Punktprozesses  $\Xi^m := \Xi \otimes \cdots \otimes \Xi$  und  $\Lambda^{(m)}$  das Intensitätsmaß des Punktprozesses  $\Xi_{\neq}^m := \Xi^m|_{E_{\neq}^m}$ . Der nachfolgende *Satz von Campbell* ist eine häufig verwendete Aussage in der stochastischen Geometrie.

**Satz 1.2.16.** *Sei  $\Xi$  ein Punktprozess in  $E$  mit Intensitätsmaß  $\Theta$ ,  $m \in \mathbb{N}$  und  $f : E^m \rightarrow \mathbb{R}$  eine nichtnegative, messbare Funktion. Dann sind  $\int_{E^m} f d\Xi^m$  und  $\int_{E^m} f d\Xi_{\neq}^m$  messbar und es gilt*

$$\mathbb{E} \int_{E^m} f d\Xi^m = \mathbb{E} \sum_{(x_1, \dots, x_m) \in \Xi^m} f(x_1, \dots, x_m) = \int_E f d\Theta^{(m)}$$

und

$$\mathbb{E} \int_{E^m} f d\Xi_{\neq}^m = \mathbb{E} \sum_{(x_1, \dots, x_m) \in \Xi_{\neq}^m} f(x_1, \dots, x_m) = \int_E f d\Lambda^{(m)}.$$

Für die vorliegende Arbeit werden wir die Klasse der Punktprozesse noch erweitern, indem wir markierte Punktprozesse einführen, welche es erlauben, den Punkten eines Ausgangsprozesses zusätzliche zufällige Informationen anzuheften. Wir werden hier nur markierte gewöhnliche Punktprozesse und Partikelprozesse behandeln, da diese die einzigen für diese Arbeit relevanten markierten Prozesse sind. Dazu sei im Folgenden  $E = \mathbb{R}^d$  oder  $E = \mathcal{C}'$  und  $S$  ein lokal-kompakter Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis, der sogenannte *Markenraum*. Unter einem markierten gewöhnlichen Punktprozess bzw. einem markierten Partikelprozess wollen wir einen Punktprozess  $\Xi$  in  $\mathbb{R}^d \times S$  bzw.  $\mathcal{C}' \times S$  verstehen, dessen Intensitätsmaß  $\Theta$  der Bedingung

$$\Theta(C \times S) < \infty \quad \text{für alle } C \in \mathcal{C}(E) \quad (1.14)$$

genügt. Ein markierter Partikelprozess  $\Xi$  hat demnach eine Darstellung in der Form

$$\Xi = \sum_{i=1}^{\Xi(\mathcal{C}' \times S)} \delta_{(x_i, m_i)}, \quad (1.15)$$

wobei es sich bei  $x_1, \dots, x_{\Xi(\mathcal{C}' \times S)}$  um zufällige Punkte in  $E$  und bei  $m_1, \dots, m_{\Xi(\mathcal{C}' \times S)}$  um zufällige Marken in  $S$  handelt. Die Translation eines Punktes  $(x, m) \in E \times S$  um den Vektor  $t \in \mathbb{R}^d$  sei definiert als Operation auf der ersten Komponente, d.h. wir wollen darunter die Operation  $(x, m) + t := (x + t, m)$  verstehen, wobei die Abbildung  $(x, m) \mapsto (x + t, m)$  für alle  $t \in \mathbb{R}^d$  messbar ist. Unter der Stationarität eines markierten Punktprozesses verstehen wir dann wie im unmarkierten Fall die Invarianz der Verteilung des Prozesses unter der hier definierten Translation. Falls  $E = \mathcal{C}'$  ist, so führen wir analog zur Translation eines Punktes  $(K, m) \in \mathcal{C}' \times S$  dessen Drehung um  $\vartheta \in \mathcal{SO}_d$  durch die Operation  $\vartheta(K, m) := (\vartheta K, m)$  ein, wobei die Abbildung  $(K, m) \mapsto (\vartheta K, m)$  für alle  $\vartheta \in \mathcal{SO}_d$  messbar ist. Unter der Isotropie eines markierten

Punktprozesses verstehen wir dann die Invarianz der Verteilung des Prozesses unter der hier definierten Drehung.

Für stationäre markierte gewöhnliche Punktprozesse bzw. stationäre markierte Partikelprozesse gilt folgende Aussage, zu deren einfacheren Darstellung für Partikelprozesse wir den Homöomorphismus

$$\begin{aligned}\Phi : \mathbb{R}^d \times \mathcal{C}_0 \times S &\rightarrow \mathcal{C}' \times S \\ (x, C, m) &\mapsto (C + x, m)\end{aligned}$$

eingeführen.

**Satz 1.2.17.** *Sei  $\Xi$  ein stationärer markierter Punktprozess in  $E$  mit Markenraum  $S$ , dessen Intensitätsmaß nicht das Nullmaß ist. Dann gilt:*

- (i) *Ist  $E = \mathbb{R}^d$ , so gibt es eine Konstante  $0 < \gamma < \infty$  und ein eindeutig bestimmtes Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu$  auf  $S$ , so dass*

$$\Theta = \gamma \lambda_d \otimes \mu \tag{1.16}$$

*gilt.*

- (ii) *Ist  $E = \mathcal{F}'$  und gilt  $\Theta((\mathcal{F}' \setminus \mathcal{C}') \times S) = 0$ , so gibt es eine Konstante  $0 < \gamma < \infty$  und ein eindeutig bestimmtes Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{Q}'$  auf  $\mathcal{C}_0 \times S$ , so dass*

$$\Theta = \gamma \Phi(\lambda_d \otimes \mathbb{Q}') \tag{1.17}$$

*gilt.*

Die Verteilungen  $\mu$  bzw.  $\mathbb{Q}'$  heißen auch *Markenverteilung* bzw. *Formmarkenverteilung*. Je nachdem wie die Markierung vorgenommen wird, sind auch explizitere Darstellungen für  $\mathbb{Q}'$  möglich. Besonders interessant ist dabei der Fall eines *unabhängig markierten Partikelprozesses*. Darunter verstehen wir einen Partikelprozess  $\Xi$ , der eine Darstellung wie in (1.15) hat, wobei die zufälligen Marken  $m_1, m_2, \dots$  unabhängig voneinander und von  $((K_i)_{i \in \mathbb{N}}, \Xi(\mathcal{C}' \times S))$  sowie identisch verteilt sind. In diesem Fall gilt dann für  $\mathbb{Q}'$  aus (1.2.17), dass es ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{Q}$  auf  $\mathcal{C}_0$  und ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu$  auf  $S$  gibt, so dass  $\mathbb{Q}'$  die Darstellung

$$\mathbb{Q}' = \mathbb{Q} \otimes \mu$$

besitzt.

Als nächsten Punkt dieses Abschnittes wollen wir die in der stochastischen Geometrie zentrale Klasse der Poissonprozesse einführen und deren Eigenschaften diskutieren. Es handelt sich dabei um die einzigen Punktprozesse, denen eine bestimmte Unabhängigkeitseigenschaft zukommt, weshalb sie für explizite Untersuchungen sehr zugänglich sind. Zugleich jedoch bieten Poissonprozesse immer noch einen hohen Grad an Allgemeinheit, so dass sich durch

sie oder durch von ihnen abgeleitete Prozesse eine Vielzahl von Phänomenen der räumlichen Stochastik beschreiben und modellieren lassen.

Nun sei  $\Theta$  ein lokalendliches Maß auf  $E$ , das zudem noch atomfrei sei, d.h. es gelte  $\Theta(\{x\}) = 0$  für alle  $x \in E$ . Dann heißt ein Punktprozess  $\Xi$  in  $E$  mit Intensitätsmaß  $\Theta$  *Poissonprozess*, falls

$$\mathbb{P}(\Xi(A) = k) = e^{-\Theta(A)} \frac{\Theta(A)^k}{k!} \quad (1.18)$$

für  $k \in \mathbb{N}_0$  und  $A \in \mathcal{B}(E)$  gilt, wobei wir  $e^{-\infty} \infty^k := 0$  setzen. Es gilt dann  $\mathbb{E} \Xi(A) = \Theta(A)$ . Die Existenz von Poissonprozessen gewährleistet nachfolgender Satz.

**Satz 1.2.18.** *Sei  $\Theta$  ein lokalendliches, atomfreies Maß auf  $E$ . Dann existiert ein (bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmter) Poissonprozess  $\Xi$  in  $E$  mit Intensitätsmaß  $\Theta$ .*

Von nun an sei ohne weitere Hinweise jedes Intensitätsmaß  $\Theta$  zusätzlich atomfrei.

Für eine explizite Darstellung der Konstruktion von Poissonprozessen verweisen wir auf die Ausführungen von Section 3.2 in [68] und wollen nun nachstehendes Resultat vorstellen, welches die elementaren Eigenschaften eines Poissonprozesses darstellt.

**Satz 1.2.19.** *Sei  $\Xi$  ein Poissonprozess in  $E$  mit Intensitätsmaß  $\Theta$ .*

- a) *Seien  $A_1, A_2, \dots$  paarweise disjunkte Borelmengen in  $E$ . Dann sind die Punktprozesse  $\Xi|_{A_1}, \Xi|_{A_2}, \dots$  und damit insbesondere die Zufallsvariablen  $\Xi(A_1), \Xi(A_2), \dots$  voneinander unabhängig.*
- b) *Seien  $A \subset E$  eine Borelmenge mit  $0 < \Theta(A) < \infty$  und  $k \in \mathbb{N}_0$ . Dann gilt*

$$\mathbb{P}(\Xi|_A \in \cdot \mid \Xi(A) = k) = \mathbb{P} \left( \sum_{i=1}^k \delta_{\xi_i} \in \cdot \right), \quad (1.19)$$

wobei  $\xi_1, \dots, \xi_k$  unabhängige, identisch verteilte zufällige Punkte in  $E$  mit der Verteilung  $\mathbb{P}^{\xi_i} := \frac{\Theta|_{A_i}}{\Theta(A_i)}$  sind.

- c)  $\Lambda^{(m)} = \Theta^m$ .

In Anlehnung an den eindimensionalen Fall wird die Eigenschaft von Satz 1.2.19 a) auch als das Vorliegen unabhängiger Zuwächse bezeichnet. Die Aussage von Teil b) des Satzes liefert eine Möglichkeit der expliziten Konstruktion eines Poissonprozesses, die auch für Simulationen in Kapitel 7 verwendet wird. Auf einer Borelmenge  $A \subset E$  mit  $0 < \Theta(A) < \infty$  lässt sich ein Poissonprozess mit Intensitätsmaß  $\Theta|_A$  konstruieren, indem man  $\iota$  unabhängige Punkte jeweils mit Verteilung  $\frac{\Theta|_A}{\Theta(A)}$  betrachtet, wobei die Zufallsvariable  $\iota$  einer Poissonverteilung mit Parameter  $\Theta(A)$  folgt. Für den Fall, dass  $E = \mathcal{C}'$  bzw.  $E = \mathcal{K}'$  gilt und  $\Xi$  stationär ist, lässt sich die Aussage von Satz 1.2.19 b) konkretisieren, was wir aufgrund der Bedeutung dieser Aussage in folgendem Korollar festhalten wollen.



**Korollar 1.2.20.** Seien  $\Xi$  ein stationärer Poissonprozess in  $\mathcal{C}'$  bzw.  $\mathcal{K}'$  und  $A \subset \mathbb{R}^d$  eine Borelmenge mit  $0 < \lambda_d(A) < \infty$  sowie  $k \in \mathbb{N}_0$ . Dann existieren zufällige Punkte  $\xi_1, \dots, \xi_k \in A$  mit Verteilung  $\lambda_d|_A / \lambda_d(A)$  und zufällige abgeschlossene Mengen  $K_1, \dots, K_k$  mit Verteilung  $\mathbb{Q}$  wie in Satz 1.2.14, so dass  $\xi_1, \dots, \xi_k, K_1, \dots, K_k$  unabhängig sind und

$$\mathbb{P}(\Xi_A \in \cdot \mid \text{card } \Xi_A = k) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^k \delta_{\xi_i + K_i} \in \cdot\right). \quad (1.20)$$

gilt.

Während sich der Satz von Campbell für beliebige Punktprozesse mit dem Erwartungswert der Zufallsvariable  $\sum_{x \in \Xi} f(x)$  beschäftigt, können wir für den Erwartungswert der Zufallsvariable  $\prod_{x \in \Xi} f(x)$  eine speziellere, den Poissonprozess charakterisierende Aussage treffen.

**Satz 1.2.21.** Bei einem Punktprozess  $\Xi$  in  $E$  mit Intensitätsmaß  $\Theta$  handelt es sich genau dann um einen Poissonprozess, wenn

$$\mathbb{E} \prod_{x \in \Xi} f(x) = \exp\left(\int_E (f - 1) d\Theta\right) \quad (1.21)$$

für alle messbaren Funktionen  $f : E \mapsto [0, 1]$  gilt.

Der nächste Satz soll weitere wesentliche Eigenschaften von Poissonprozessen wiedergeben, auf die wir im Verlauf dieser Arbeit immer wieder zurückgreifen werden.

**Satz 1.2.22.** a) Seien  $\Xi_1, \Xi_2, \dots$  voneinander unabhängige Poissonprozesse in  $E$  wobei  $\Xi_i$  das Intensitätsmaß  $\Theta_i$  besitze und  $\Theta := \sum_{i \in \mathbb{N}} \Theta_i$  lokalendlich sei. Dann ist  $\sum_{i \in \mathbb{N}} \Xi_i$  ein Poissonprozess in  $E$  mit Intensitätsmaß  $\Theta$ . Wir nennen  $\Xi$  auch die Überlagerung der Prozesse  $\Xi_1, \Xi_2, \dots$

b) Seien  $\Xi$  ein Poissonprozess in  $E$  mit Intensitätsmaß  $\Theta$ ,  $E'$  lokalendlicher Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis sowie  $f : E \rightarrow E'$  messbar und so, dass  $\bar{\Theta} := f(\Theta)$  ein atomfreies, lokalendliches Maß auf  $E'$  ist. Dann ist  $f(\Xi)$  ein Poissonprozess in  $E'$ .

Nachfolgendes Resultat findet sich in [46]. Es liefert eine Charakterisierung von Poissonprozessen und wird an verschiedenen Stellen dieser Arbeit seine Anwendung finden.

**Satz 1.2.23.** Ein Punktprozess  $\Xi$  in  $E$  mit Intensitätsmaß  $\Theta$  ist genau dann ein Poissonprozess, falls

$$\mathbb{E} \sum_{x \in \Xi} f(\Xi, x) = \int_E \mathbb{E} f(\Xi \cup \{x\}, x) \Theta(dx) \quad (1.22)$$

für alle messbaren Funktionen  $f : \mathcal{N}(E) \times E \rightarrow [0, \infty)$  erfüllt ist.

Abschließend wollen wir einen für diese Arbeit wichtigen Zusammenhang zwischen gewöhnlichen Poissonprozessen, die unabhängig mit Marken aus  $S$  markiert werden, und Poissonprozessen auf dem Produktraum  $\mathbb{R}^d \times S$  darstellen. Für einen Punktprozess  $\Xi$  in  $\mathbb{R}^d \times S$  sei dazu  $\Xi_0$  die Projektion auf die erste Komponente, also der zugehörige unmarkierte Prozess.

**Satz 1.2.24.** *Sei  $\Xi$  ein unabhängig markierter Punktprozess im  $\mathbb{R}^d$ . Ist dann der zugehörige unmarkierte Prozess  $\Xi_0$  ein Poissonprozess im  $\mathbb{R}^d$ , so ist  $\Xi$  ein Poissonprozess in  $\mathbb{R}^d \times S$ .*

Durch unabhängiges Markieren eines gewöhnlichen Poissonschen Punktprozesses erhält man also einen Poissonprozess im Produktraum.

Ein mächtiges Hilfsmittel zur Untersuchung von Punktprozessen liegt in der sogenannten Palmtheorie, deren Ursprünge sich in [54] finden. Sie liefert den theoretischen Hintergrund für die Betrachtung bestimmter bedingter Verteilungen, die es ermöglichen, einen intrinsischen Beobachtungspunkt, nämlich von einem „typischen“ Punkt aus, auf einen Punktprozesse zu wählen und damit globale Fragestellungen auf lokale zu reduzieren. Das besondere Interesse der stochastischen Geometrie an der Palmtheorie gründet sich nicht zuletzt auf die weiter unten folgende Aussage, welche die besondere Einfachheit der oben erwähnten Verteilungen für Poissonprozesse aufzeigt. Wir werden nun *Palmsche Verteilungen* für stationäre gewöhnliche Punktprozesse und stationäre Partikelprozesse sowie markierte Versionen davon einführen.

- (I) Sei  $\Xi$  ein stationärer gewöhnlicher Punktprozess mit Intensität  $\gamma > 0$ . Die Palmsche Verteilung  $\mathbb{P}^0$  von  $\Xi$  definieren wir dann durch

$$\mathbb{P}^0(A) := \frac{1}{\gamma} \mathbb{E} \sum_{x \in \Xi} \mathbb{1}_{[0,1]^d}(x) \mathbb{1}_A(\Xi - x), \quad A \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^d). \quad (1.23)$$

- (II) Sei  $\Xi$  ein stationärer Partikelprozess mit Intensität  $\gamma > 0$  und Formverteilung  $\mathbb{Q}$ . Die Palmsche Verteilung  $\mathbb{P}^0$  von  $\Xi$  definieren wir dann durch

$$\mathbb{P}^0(A) := \frac{1}{\gamma} \mathbb{E} \sum_{K \in \Xi} \mathbb{1}_{[0,1]^d}(c(K)) \mathbb{1}_A(K - c(K), \Xi - c(K)), \quad A \in \mathcal{B}(\mathcal{C}') \otimes \mathcal{N}(\mathcal{C}'). \quad (1.24)$$

Es gibt dann eine  $\mathbb{Q}$ -f.s. eindeutig bestimmte reguläre Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen  $(P^{(0,C)})_{C \in \mathcal{C}_0}$  auf  $\mathcal{N}(\mathcal{C}')$ , so dass

$$\mathbb{P}^0(B \times A_0) = \int_B \mathbb{P}^{(0,C)}(A_0) \mathbb{Q}(dC) \quad (1.25)$$

für alle  $B \in \mathcal{B}(\mathcal{C}_0)$  und  $A_0 \in \mathcal{N}(\mathcal{C}')$  gilt.

- (III) Für den Fall, dass  $\Xi$  ein stationärer markierter gewöhnlicher Punktprozess mit Intensität  $\gamma > 0$ , Markenraum  $S$  und Markenverteilung  $\mu$  ist, definieren wir die Palmsche Verteilung  $\mathbb{P}^0$  von  $\Xi$  durch

$$\mathbb{P}^0(A) := \frac{1}{\gamma} \mathbb{E} \sum_{(x,m) \in \Xi} \mathbb{1}_{[0,1]^d}(x) \mathbb{1}_A(m, \Xi - x), \quad A \in \mathcal{B}(S) \otimes \mathcal{N}(\mathbb{R}^d \times S). \quad (1.26)$$

Es gibt dann eine  $\mu$ -f.s. eindeutig bestimmte reguläre Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen  $(\mathbb{P}^{(0,m)})_{m \in S}$  auf  $\mathcal{N}(\mathbb{R}^d \times S)$ , so dass

$$\mathbb{P}^0(B \times A_0) = \int_B \mathbb{P}^{(0,m)}(A_0) \mu(dm) \quad (1.27)$$

für alle  $B \in \mathcal{B}(S)$  und  $A_0 \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^d \times S)$  gilt.

(IV) Sei  $\Xi$  ein stationärer markierter Partikelprozess mit Intensität  $\gamma > 0$ , Markenraum  $S$  und Formmarkenverteilung  $\mathbb{Q}'$ . Die Palmsche Verteilung  $\mathbb{P}^0$  von  $\Xi$  definieren wir dann durch

$$\mathbb{P}^0(A) := \frac{1}{\gamma} \mathbb{E} \sum_{K \in \Xi} \mathbb{1}_{[0,1]^d}(c(K)) \mathbb{1}_A(m, K - c(K), \Xi - c(K)),$$

$$A \in \mathcal{B}(S) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{C}') \otimes \mathcal{N}(\mathcal{C}' \times S). \quad (1.28)$$

Es gibt dann eine  $\mathbb{Q}'$ -f.s. eindeutig bestimmte reguläre Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen  $(\mathbb{P}^{(0,C,m)})_{C \in \mathcal{C}_0, m \in S}$  auf  $\mathcal{N}(\mathcal{C}' \times S)$ , so dass

$$\mathbb{P}^0(B \times A_0) = \int_B \mathbb{P}^{(0,C,m)}(A_0) \mathbb{Q}'(d(C, m)) \quad (1.29)$$

für alle  $B \in \mathcal{B}(\mathcal{C}_0 \times S)$  und  $A_0 \in \mathcal{N}(\mathcal{C}' \times S)$  gilt.

Aufgrund der Ausführungen in [68], Theorem 3.3.4 und [25], Theorem 6.3, können wir die Verteilungen  $\mathbb{P}^0$ ,  $\mathbb{P}^{(0,C)}$ ,  $\mathbb{P}^{(0,m)}$  bzw.  $\mathbb{P}^{(0,C,m)}$  aus obigem Kontext als Verteilung von  $\Xi$  unter der Bedingung  $0 \in \Xi$ ,  $C \in \Xi$ ,  $(0, m) \in \Xi$  bzw.  $(0, C, m) \in \Xi$  interpretieren und bezeichnen dann eben diesen Punkt  $0$ ,  $C$ ,  $(0, m)$  bzw.  $(0, C, m)$  als typischen Punkt von  $\Xi$ . Der nachfolgende Satz von Slivnyak liefert eine äquivalente Charakterisierung von Poissonprozessen und legt damit zugleich die Einfachheit der Palmschen Verteilung im Poissonfall dar.

**Satz 1.2.25.** *Sei  $\Xi$  wie in (I),(II),(III) bzw. (IV) oben. Dann ist  $\Xi$  genau dann ein Poissonprozess, wenn*

*in Situation (I)*

$$\mathbb{P}^0(A) = \mathbb{P}(\Xi \cup \{0\} \in A) \quad (1.30)$$

*für alle  $A \in \mathcal{B}(\mathcal{F})$ ,*

*in Situation (II)*

$$\mathbb{P}^{(0,C)}(A) = \mathbb{P}(\Xi \cup \{C\} \in A) \quad (1.31)$$

*für  $\mathbb{Q}$ -f.a.  $C \in \mathcal{C}_0$  und alle  $A \in \mathcal{B}(\mathcal{F}(\mathcal{C}'))$ ,*

*in Situation (III)*

$$\mathbb{P}^{(0,m)}(A) = \mathbb{P}(\Xi \cup \{(0, m)\} \in A) \quad (1.32)$$

*für  $\mu$ -f.a.  $m \in S$  und alle  $A \in \mathcal{B}(\mathcal{F}(\mathbb{R}^d \times S))$  bzw.*

in Situation (IV)

$$\mathbb{P}^{(0,C,m)}(A) = \mathbb{P}(\Xi \cup \{(C, m)\} \in A) \quad (1.33)$$

für  $\mathbb{Q}'$ -f.s.  $(C, m) \in \mathcal{C}_0 \times S$  und alle  $A \in \mathcal{B}(\mathcal{F}(\mathcal{C}' \times S))$  gilt.

Dieses Resultat unterstreicht nochmals die weitreichenden Konsequenzen, die sich aus der räumlichen Unabhängigkeit von Poissonprozessen (siehe Satz 1.2.19 a)) ergeben. Später werden wir aufgrund von Satz 1.2.25 für  $\mathbb{P}(\Xi \in \cdot \mid 0 \in \Xi)$ ,  $\mathbb{P}(\Xi \in \cdot \mid C \in \Xi)$ ,  $\mathbb{P}(\Xi \in \cdot \mid (0, m) \in \Xi)$  bzw.  $\mathbb{P}(\Xi \in \cdot \mid (C, m) \in \Xi)$ ,  $m \in S$ ,  $C \in \mathcal{C}_0$  auch  $\mathbb{P}(\Xi \cup \{0\} \in \cdot)$ ,  $\mathbb{P}(\Xi \cup \{C\} \in \cdot)$ ,  $\mathbb{P}(\Xi \cup \{(0, m)\} \in \cdot)$  bzw.  $\mathbb{P}(\Xi \cup \{(C, m)\} \in \cdot)$  schreiben. Für eine detaillierte Einführung in die Theorie Palmischer Maße, insbesondere für den Zusammenhang zwischen der Palmischen Verteilung und dem aus der Punktprozessentheorie bekannten Campbellschen Maß verweisen wir auf [32] und [68].

Den Abschluss dieses Kapitels bildet eine kurze Beschreibung einer wichtigen Teilklasse stationärer Punktprozesse. Im Folgenden sei dazu  $E = \mathbb{R}^d$  oder  $E = \mathcal{F}'$ . Wir betrachten dann das Quadrupel  $(\mathbf{N}(E), \mathcal{N}(E), \mathbb{P}, \mathbf{T})$ , wobei  $\mathbb{P}$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(\mathbf{N}(E), \mathcal{N}(E))$  ist und es sich bei  $\mathbf{T} = \{\mathbf{T}_x : x \in \mathbb{R}^d\}$  um eine Familie von Automorphismen

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_x : \mathbf{N}(E) &\rightarrow \mathbf{N}(E) \\ \eta &\mapsto \eta + x \end{aligned}$$

in dem Sinn, dass  $\mathbf{T}_x(\eta)(B) := \eta(B - x)$  für  $x \in \mathbb{R}^d$  und  $B \in \mathcal{B}(E)$  gilt, handelt. Zusätzlich gelte

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\mathbf{T}_x A)$$

für alle  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $A \in \mathcal{N}(E)$ . Die Verteilung  $\mathbb{P}$  ist daher also translationsinvariant und wir bezeichnen  $(\mathbf{N}(E), \mathcal{N}(E), \mathbb{P}, \mathbf{T})$  als *dynamisches System*. Unter der *translationsinvarianten  $\sigma$ -Algebra*  $\mathcal{T}(E) \subset \mathcal{N}(E)$  wollen wir die  $\sigma$ -Algebra der translationsinvarianten Mengen, also der Mengen  $A \in \mathcal{N}(E)$  mit  $\mathbf{T}_x A = A$  für alle  $x \in \mathbb{R}^d$ , verstehen.

Das dynamische System  $(\mathbf{N}(E), \mathcal{N}(E), \mathbb{P}, \mathbf{T})$  heißt *mischend*, wenn für alle  $A_1, A_2 \in \mathcal{N}(E)$  die Beziehung

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \mathbf{T}_x A_2) \rightarrow \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2) \text{ für } \|x\| \rightarrow \infty \quad (1.34)$$

erfüllt ist und *ergodisch*, wenn für jede aufsteigende Folge  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{K}'$  mit  $W_n \nearrow \mathbb{R}^d$  für  $n \rightarrow \infty$  und alle  $A_1, A_2 \in \mathcal{N}(E)$  die Beziehung

$$\frac{1}{\lambda_d(W_n)} \int_{W_n} \mathbb{P}(A_1 \cap \mathbf{T}_x A_2) dx \rightarrow \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2) \text{ für } n \rightarrow \infty \quad (1.35)$$

erfüllt ist. Letztere Aussage ist äquivalent dazu, dass

$$\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\} \quad (1.36)$$

für alle  $A \in \mathcal{T}(E)$  gilt. Dies bedeutet gerade, dass  $\mathcal{T}(E)$  trivial ist, d.h. es gilt  $\mathcal{T}(E) = \{\mathbf{N}(E), \emptyset\}$ , was wiederum äquivalent dazu ist, dass aus  $\mathbb{P} = \alpha\mathbb{P}_1 + (1 - \alpha)\mathbb{P}_2$ ,  $\alpha \in [0, 1]$ ,

für translationsinvariante Wahrscheinlichkeitsmaße  $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$  auf  $(\mathbf{N}(E), \mathcal{N}(\mathcal{E}))$  bereits  $\alpha \in \{0, 1\}$  oder  $\mathbb{P} = \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_2$  folgt. Wählt man in (1.34)  $A \in \mathcal{T}(E)$  und  $B = A$ , so folgt daraus, dass  $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A)^2$  gilt, weshalb mischende dynamische Systeme immer ergodisch sind. Wir sprechen im Folgenden kurz von einem mischenden bzw. ergodischen Punktprozess  $\Xi$  in  $E$ , falls dieser stationär und das dynamische System  $(\mathbf{N}(E), \mathcal{N}(\mathcal{E}), \mathbb{P}^\Xi, \mathbf{T})$  mischend bzw. ergodisch ist.

**Satz 1.2.26.** *Sei  $\Xi$  ein stationärer Poissonprozess im  $\mathbb{R}^d$  bzw. ein stationärer Poissonscher Partikelprozess. Dann ist  $\Xi$  mischend. Insbesondere gilt*

$$\mathbb{P}(\Xi \in A) \in \{0, 1\}. \quad (1.37)$$

für alle  $A \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^d)$  bzw.  $A \in \mathcal{T}(\mathcal{F}')$

Für einen stationären markierten gewöhnlichen Punktprozess  $\Xi := (X_i, m_i)_{i \in \mathbb{N}}$  in  $E$  mit Markenraum  $S$ , wobei  $E = \mathbb{R}^d$  oder  $E = \mathcal{F}'$  gilt, definieren wir für  $x \in \mathbb{R}^d$  die Automorphismen  $\mathbf{T}_x : \mathbf{N}(\mathbb{R}^d \times S) \rightarrow \mathbf{N}(\mathbb{R}^d \times S)$  via  $\mathbf{T}_x(\Xi) := (X_i + x, m_i)_{i \in \mathbb{N}}$ . Ein solcher Punktprozess heißt dann mischend bzw. ergodisch wenn das dynamische System  $(\mathbf{N}(\mathbb{R}^d \times S), \mathcal{N}(\mathbb{R}^d \times S), \mathbb{P}^\Xi, \mathbf{T})$  die Gleichung (1.34) bzw. (1.35) erfüllt. Nachfolgendes Resultat zeigt, wie sich Ergodizität von einem Ausgangsprozess auf unabhängige Markierungen davon überträgt.

**Satz 1.2.27.** *Sei  $\Xi$  ein unabhängig markierter Punktprozess in  $E = \mathbb{R}^d$  oder  $E = \mathcal{F}'$ . Ist dann der zugehörige unmarkierte Prozess  $\Xi'$  mischend bzw. ergodisch, so gilt dies auch für  $\Xi$ .*

Für weitere Ausführungen dazu verweisen wir insbesondere auf [18] und [28].

**Bemerkung 1.2.28.** Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir nochmals alle die nächsten Kapitel betreffenden Voraussetzungen erwähnen:

- Intensitätsmaße von beliebigen Punktprozessen sind als lokalendlich und atomfrei anzusehen; insbesondere bedeutet die Lokalendlichkeit des Intensitätsmaßes  $\Theta$  eines Partikelprozesses, dass (1.6) erfüllt ist. Des Weiteren gilt für die Intensität eines stationären Punktprozesses, dass diese endlich ist.
- Unter Partikelprozessen verstehen wir von nun an Punktprozesse auf  $\mathcal{F}'$ , deren Intensitätsmaß auf  $\mathcal{K}'$  konzentriert ist, auch wenn wir der einfacheren Darstellung wegen auch von einem Punktprozess in  $\mathcal{K}'$  sprechen. Die bisher hergeleiteten Ergebnisse über Partikelprozesse übertragen sich von  $\mathcal{F}'$  bzw.  $\mathcal{C}'$  auf  $\mathcal{K}'$ .
- Der besseren Lesbarkeit wegen wollen wir von nun an gewöhnliche Punktprozesse mit  $\xi$  und Partikelprozesse mit  $\Xi$  bezeichnen.
- Wir wollen nicht weiter zwischen einem Punktprozess  $\Xi$  als zufälliges, lokalendliches, einfaches Zählmaß auf  $E$  und dessen Träger als zufällige, abgeschlossene Menge in  $E$  unterscheiden; insbesondere interpretieren wir Aussagen der Gestalt  $x \in \Xi$  als  $x \in \text{supp } \Xi$  und fassen  $\Xi \cup \{x\}$  als  $\Xi + \delta_x$  auf.

- Von nun an sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  immer ein nicht näher spezifizierter Wahrscheinlichkeitsraum. Alle auftretenden Punktprozesse  $\Xi$  sind als messbare Abbildungen von  $\Omega$  in  $\mathbf{N}(E)$  zu verstehen und ihre Verteilungen sind über entsprechende Bildmaße definiert. Weiterhin werden wir für Ereignisse der Gestalt  $\{\omega \in \Omega : \Xi(\omega) \in B\}$  kurz  $\{\Xi \in B\}$  schreiben.
- Für einen stationären Poissonschen Partikelprozess  $\Xi$  mit Intensität  $\gamma$  schreiben wir auch  $\Xi_\gamma$ , um die Abhängigkeit von der Intensität  $\gamma$  zu betonen. Für eine beschränkte Menge  $W \subset \mathbb{R}^d$  und  $r > 0$  bezeichnet  $\Xi_{rW} := \{K \in \Xi : c(K) \in rW\}$ , wobei wir hierfür teilweise auch  $\Xi_{\gamma, rW}$  schreiben.

# Kapitel 2

## Einführung in die Theorie harter Partikelprozesse

### 2.1 Motivation

Zufällige Systeme harter Partikel, also zufällige Partikelsysteme deren Partikel sich nicht schneiden bzw. höchstens berühren, stellen eine wichtige Klasse von Modellen zur Beschreibung von räumlichen Strukturen, wie sie in der Biologie, Chemie oder den Materialwissenschaften vorkommen, dar.

Betrachtet man etwa gießfähigen Feuerbeton, so besteht dieses Material aus zwei Phasen: Einem System von harten Partikeln und ein diese Partikel umgebendes Bindemittel. Der Herstellungsprozess verläuft dabei so, dass diese beiden Phasen zuerst getrennt produziert und dann zusammengemischt werden, bevor sie abschließend trocknen. Aufgrund dieses Verlaufs kann man davon ausgehen, dass die harten Partikel zufällig ihren Platz im fertigen Feuerbeton finden und ihre Struktur und Lage eine zentrale Bedeutung für physikalische Eigenschaften wie Druckfestigkeit und Bruchverhalten des Feuerbetons haben. Eine statistische Untersuchung der harten Phase des Feuerbetons sowie Möglichkeiten zu deren Modellierung sind in [5] beschrieben.

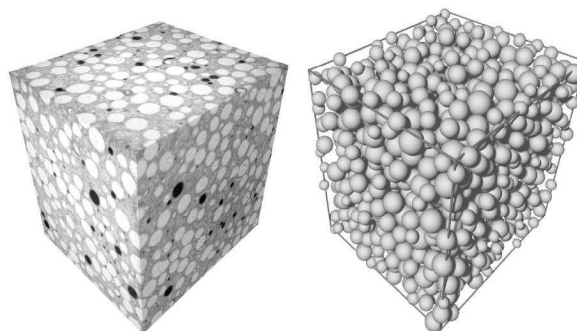


Abbildung 2.1: CT-Bild einer Feuerbetonprobe und daneben die Rekonstruktion der ersten Phase (Quelle: [5]).

Ähnlich zum Feuerbeton bestehen Faserverbundwerkstoffe ebenfalls aus zwei Hauptkomponenten: Einer bettenden Matrix sowie verstärkenden Fasern, wie etwa Glas-, Kohle-, Keramik- oder Aramidfasern. Durch das Zusammenwirken der beiden Komponenten werden höherwertige Eigenschaften, etwa im Bezug auf Zugfestigkeit, erreicht. Auch hier sind die Fasern als harte Partikel anzusehen, deren gemeinsame Ausrichtung und Dichte wesentlichen Einfluss auf die Materialeigenschaften haben.

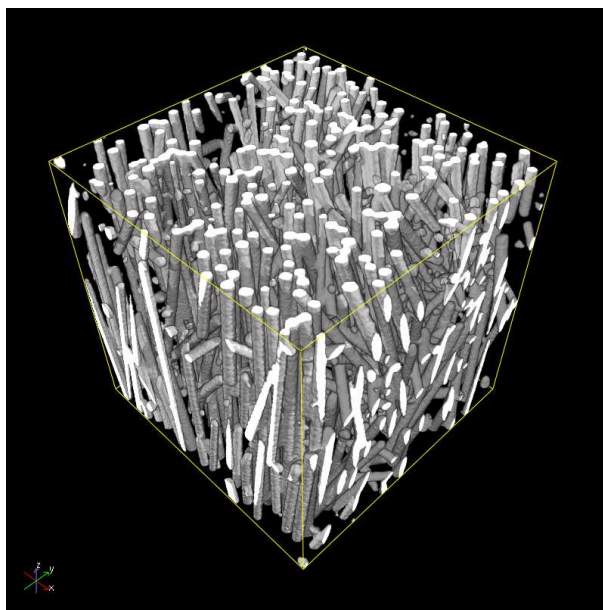


Abbildung 2.2: Visualisierung des CT-Bildes einer Glasfaserverbundwerkstoffes der Robert Bosch GmbH.

Für die mathematische Modellierung bestimmter (nicht notwendigerweise harter) Strukturen sowie den Zusammenhängen zwischen deren physikalischen Eigenschaften und dem zugrundeliegenden Modell verweisen wir auf [78].

Zur Modellierung und Erzeugung zufälliger harter Strukturen gibt es eine Vielzahl von Vorgehensweisen. Wir wollen diese im Folgenden einer groben Klassifizierung unterziehen, dabei aber aufgrund der Vielfalt der Möglichkeiten und Ansätze keinen Anspruch auf Vollständigkeit oder Schnittfreiheit der Klassen erheben.

- **Dynamische wachsende Modelle**

Ausgangspunkt dieser Modelle ist die leere Menge oder eine lokalendliche Punktconfiguration des  $\mathbb{R}^d$ . Diese Ausgangsmenge entwickelt sich mit der Zeit dynamisch zu einem immer größeren System von Partikeln, das zu jedem Zeitpunkt hart ist. Dies geschieht etwa durch simultanes Vergrößern der Ausgangspunkte zu harten Partikeln oder durch sequentielles Einsetzen von Partikeln in vorhandene Lücken. Der Wachstumsvorgang währt



so lange, bis er gestoppt wird oder bis sichergestellt ist, dass ein weiteres Wachstum nicht mehr möglich ist. Vertreter dieser Klasse sind etwa die *Random Sequential Adsorption* (kurz RSA) oder *Cooperative Sequential Adsorption* Modelle, das *Dead Leaves Modell*, das *Dynamische Lilypond Modell* oder das *Stienen Modell*. Insbesondere zählen auch Birth-and-Death Prozesse zu dieser Klasse.

- **Ausdünnungsmodelle**

Im Gegensatz zu den dynamische Modellen ist der Ausgangspunkt hier bereits eine Obermenge des gewünschten Resultats. Bei den Ausdünnungsmodellen wird eine zufällige Partikelmenge, die in der Regel Überlappungen aufweist, so ausgedünnt, dass die resultierende Partikelmenge aus paarweise disjunkten Partikeln besteht. Die Ausgangspartikel nennen wir oft *primäre* und die resultierenden Partikel *sekundäre Partikel*. Solche Modelle werden auch als *Offline-Modelle* bezeichnet. Ausgangspunkt ist in der Regel ein stationärer (markierter) Poissonscher Partikelprozess. Das resultierende ausgedünnte Modell hingegen kann kein Poissonprozess mehr sein, da sich aus der Forderung nach ausschließlich harten Partikeln Abhängigkeiten zwischen den einzelnen Partikeln ergeben. Bekanntester Vertreter dieser Modelle sind die Matérnschen Hard-Core-Prozesse und deren Verallgemeinerungen. Auch das später in dieser Arbeit vorgestellte Modell der gewichtsmaximalen harten Teilmengen gehört zu dieser Klasse. Daneben lassen sich auch manche der dynamischen Modelle als Ausdünnungen bestimmter Poissonprozesse interpretieren; wie wir in Abschnitt 2.3 sehen werden, ist dies etwa beim RSA Modell und beim Dead Leaves Modell der Fall.

- **Gibbs Prozesse mit Hard-Core-Potenzial**

*Gibbs Prozesse* stellen eine sehr flexible Klasse von gewöhnlichen Punktprozessen dar und haben ihre Ursprünge in der statistischen Physik. Sie hängen eng mit sogenannten Gibbs-Verteilungen zusammen, welche die Gleichgewichtszustände von Teilsystemen großer abgeschlossener physikalischer Systeme beschreiben. Wir beschränken uns hier auf den Fall von Gibbs Prozessen auf einem kompakten Beobachtungsfenster  $W \subset \mathbb{R}^d$ . Im Fall eines Gibbs Prozesses  $\xi$  in  $W$  mit einer festen Anzahl  $n \in \mathbb{N}$  an Punkten, ist die Verteilung von  $\xi$  durch eine Dichte  $f : \mathbb{R}^{nd} \rightarrow [0, \infty)$  gegeben, für die

$$\int_W \cdots \int_W f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = 1$$

gilt. Da es sich bei Punktprozessen realisierungsweise um ungeordnete Punktfolgen handelt, darf  $f$  daher nicht von der Reihenfolge der Argumente abhängen. Es ist dann

$$\mathbb{P}(\xi \in A) = \int_W \cdots \int_W \mathbb{1}_{\{\{x_1, \dots, x_n\} \in A\}} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

für  $A \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^d)$ . Kanonischerweise wählt man für  $f$  eine Darstellung der Gestalt

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{C} e^{-U(x_1, \dots, x_n)},$$

wobei  $C$  eine normierende Konstante ist und wir der Konvention  $e^{-\infty} = 0$  folgen. Die Abbildung  $U : \mathbb{R}^{nd} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  heißt auch *Energiefunktion* und wird häufig so gewählt, dass sie sich in der Form

$$U(x_1, \dots, x_n) = \sum_{r=1}^n \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_r \leq n} \Psi_r(x_{i_1}, \dots, x_{i_r})$$

schreiben lässt, wobei  $\Psi_r(x_{i_1}, \dots, x_{i_r})$  den Kräften entspricht, die auf jeweils  $r = 1, \dots, n$  Punkte wirken. Beschränkt man sich nun etwa nur auf Paarinteraktionen und haben diese die Gestalt

$$\Psi_2(x, y) := \Psi_2(\|x - y\|) = \begin{cases} \infty, & \|x - y\| \leq R \\ 0, & \|x - y\| > R, \end{cases}$$

so liefert dies einen Hard-Core-Prozess mit Hard-Core-Abstand  $R$ . Ein weiterer bekannter Vertreter von Gibbsschen Hard-Core-Prozessen dieses Typs sind Strausssche Hard-Core-Prozesse.

Der Fall eines Gibbs Prozesses in  $W$  mit zufälliger Anzahl an Punkten stellt sich ähnlich wie obiger Fall dar. In diesen Fall wählt man eine Verteilung, die absolut stetig bezüglich der Verteilung der Einschränkung eines stationären Poissonschen Punktprozesses auf  $W$  ist. Über die Dichte  $f$  lassen sich dann bestimmte Charakteristika des resultierenden Prozesses steuern. Durch diese Darstellung ergibt sich auch die Möglichkeit der Ausdehnung dieses Prozesses auf allgemeinere Räume, etwa als Gibbsschen Partikelprozess.

Gibbs Prozesse hängen eng mit Markovschen Punktprozessen zusammen, da sie für viele Dichten, insbesondere auch für die meisten Hard-Core-Dichten, genau dieser Klasse von Punktprozessen entstammen. Dies ermöglicht den Einsatz von Markov-Chain-Monte-Carlo-Methoden zu deren Simulation. Für weitere Details zu Markovschen Punktprozessen und deren effizienter Simulation sei auf [33] verwiesen. Verallgemeinerungen davon mit allgemeineren Hard-Core-Potenzialen und auf unbeschränkte Mengen sind möglich, wobei zumindest erwähnt werden soll, dass die Ausweitung auf unbeschränkte Mengen nicht ohne weitere tiefer gehende Überlegungen möglich ist.

Für Details zu Gibbs Prozessen sei auf [75] und [22] verwiesen. Ergebnisse insbesondere zu Straussschen Hard-Core-Prozessen finden sich etwa in [39], [40] und [63]. Auch das RSA Modell lässt sich in dem oben beschriebenen Sinn deuten [34].

- **Dense Random Packing Verfahren**

Hierbei wirken äußere Einflüsse wie beispielsweise physikalische Kräfte auf ein System von Partikeln, wobei diese Partikel zu jedem Zeitpunkt hart sind. So kann man etwa Kugeln in einen Zylinder fallen lassen, ein bereits bestehendes System harter Partikel durch Vibrationen und die dadurch erzeugten Partikelbewegungen verändern oder die Partikel von einer Flüssigkeit umspülen lassen. Treffen zwei Partikel zu einem beliebigen Zeitpunkt aufeinander so stoßen sie sich nach vorher festgelegten Regeln wieder ab

oder können sich zumindest nicht durchdringen. Zu dieser Klasse zählen Verfahren, bei der eine zufällige, harte Ausgangskonfiguration durch Wachstum und Bewegung der einzelnen Partikel verdichtet wird. Bekannte Vertreter sind etwa der *Lubachevsky-Stillinger-Algorithmus* [35] oder der *Force-Biased-Algorithmus* der auf dem Konzept des *collective rearrangement* basiert [7].

Alle diese Modelle finden ihren Einsatz in der Praxis der Modellierung und Simulation zufälliger harter Strukturen, wenngleich sie auch verschiedene Schwerpunkte haben und sich in ihren Eigenschaften teils erheblich unterscheiden. Auch im Vorliegen analytischer Beschreibungen und Aussagen gibt es große Unterschiede zwischen den Modellklassen. Die Dense Random Packing Verfahren zielen meist darauf ab, Packungen mit Volumendichten zu erzeugen, die über den Möglichkeiten der anderen Verfahren liegen. Aus mathematischer Sicht jedoch weisen sie das fundamentale Defizit auf, dass sie sich nicht mathematisch exakt sondern nur als Output eines Algorithmus beschreiben lassen. Auch wenn diese Algorithmen an sich mathematisch erfasst werden können, so umfassen sie jedoch typischerweise so viele komplexe Wechselwirkungen, dass eine Beschreibung des Resultats bzw. dessen Verteilungseigenschaften nicht explizit möglich erscheint. Dies führt dazu, dass keine analytischen Ergebnisse für diese Verfahren bekannt sind. Aufgrund ihrer Natur weisen solche Dense Random Packings teilweise gewisse Defekte auf, die gegen ihren praktischen Einsatz sprechen oder ihren Einsatzbereich limitieren. So wurde beispielsweise beim Force-Biased-Algorithmus mit mittleren Intensitäten festgestellt, dass die von diesem generierten harten Partikelsysteme einen höheren Grad an Regelmäßigkeit aufweisen, als dies bei realen Strukturen der Fall ist. Dies lässt sich in diesem Fall damit erklären, dass sich die harten Kugeln im Verlauf ihrer Anordnung voneinander wegstoßen [5], [31]. Zudem beschränken sich die Dense Random Packing Verfahren nur auf den Fall der Simulation harter Kugelsysteme; eine Ausweitung auf komplexere Partikelformen scheitert an der Komplexität der damit verbundenen Berechnungen zur Dynamik und Auswirkung der Kräfte auf nicht-sphärische Partikel.

Wenn auch die Hard-Core-Prozesse vom Gibbsschem Typ durch die Wahl des Hard-Core-Potenzials einen gewissen Grad an Freiheit in der Modellierung gewähren, so zeigt sich dennoch in der Praxis, dass sie keine universale Klasse zur Modellierung harter Strukturen darstellen. Es hat sich gezeigt, dass sich solche Hard-Core-Prozesse vom Gibbsschem Typ besonders zur Modellierung von Strukturen mit mittlerer Regularität bzw. Packungsdichte eignen, während sie für Packungen mit eher niedriger Volumendichte, wie sie etwa in den ersten beiden Matérnschen Modellen auftreten, oder mit großer Volumendichte nicht geeignet erscheinen [75].

Die oben erwähnten dynamischen Modelle sowie die Ausdünnungsmodelle lassen eine Beschreibung von Systemen harter Partikel konvexer Form zu. Ein Vorteil, der typischerweise den Ausdünnungsmodellen mit einem Poissonschen Partikelprozess als Primärprozess zukommt, besteht darin, dass die resultierenden Sekundärprozesse keine allzu großen Regelmäßigkeiten, wie etwa einen Mindestabstand zwischen den Partikeln, aufweisen. Dies geht wesentlich auf die starke Unabhängigkeitseigenschaften des Poissonprozesses, wie etwa in Satz 1.2.19 a) und b) dargestellt, zurück. Ein Nachteil dieser Modelle liegt jedoch darin, dass deren Intensitäten

und Volumendichten typischerweise verhältnismäßig klein sind, was wiederum ihre Anwendungsmöglichkeiten erheblich einschränkt. Analytische Ergebnisse liegen auch für die Klassen der dynamischen Modelle und der Ausdünnungsmodelle nur in wenigen Fällen vor und hängen stark von der Komplexität des Modells ab. Generell ist festzustellen, dass Abhängigkeit zwischen den Partikeln für deren theoretische Untersuchung ein erhebliches Hindernis darstellt. Die recht niedrigen Volumendichten der bisher bekannten Ausdünnungsmodelle resultieren aus den sehr einfachen Ausdünnungsvorschriften, die diesen Modellen zugrunde liegen. Diese verschwenden Partikel in dem Sinn, dass sie sich für Partikelkonfigurationen entscheiden, deren Gesamtvolumen nicht maximal ist. Zentrales Anliegen dieser Arbeit wird darin bestehen, eine Ausdünnungsvorschrift zu konstruieren, die genau diesen Missstand behebt, indem sie sich für die gewichtsmaximale (in später zu spezifizierendem Sinn) harte Teilmenge einer gegebenen Partikelmenge entscheidet. Wir werden die Eigenschaften des aus dieser Ausdünnungsvorschrift resultierenden harten Partikelprozesses untersuchen und mit den in diesem Kapitel beschriebenen Eigenschaften anderer prominenter Vertreter vergleichen.

## 2.2 Grundlagen

### 2.2.1 Statistische Kenngrößen für Modelle harter Partikel

Zur Untersuchung von Modellen harter Partikel kommen bekannte Größen aus der Theorie allgemeiner Punktprozesse bzw. zufälliger abgeschlossener Mengen, wie auch speziell auf das Verhalten und die Konstruktion von Systemen harter Partikel angepasste Größen in Frage. Einige davon sollen in diesem Abschnitt vorgestellt werden. Für eine ausführlichere Herleitung und Diskussion dieser Größen sei auf [22], [76] und [77] verwiesen. Zugleich wollen wir uns überlegen, welche Größen dazu dienen können, um verschiedene Modelle miteinander zu vergleichen. Diese Überlegung ist insbesondere dazu notwendig, um Modelle, die auf verschiedene Klassen, wie in Abschnitt 2.1 beschrieben, zurückgehen, sinnvoll vergleichen zu können.

Nachfolgende Größen stellen die wichtigsten Charakteristika von zufälligen harten Partikelsystemen dar.

- (i) **Volumendichte:** Für eine stationäre zufällige abgeschlossene Menge  $Z$  heißt

$$p := \mathbb{P}(0 \in Z) = \mathbb{E}\lambda_d(Z \cap [0, 1]^d) \quad (2.1)$$

die Volumendichte von  $Z$ . Weiterhin gilt die Darstellung

$$p = \frac{\mathbb{E}\lambda_d(Z \cap B)}{\lambda_d(B)} \quad (2.2)$$

für alle Borelmengen  $B \subset \mathbb{R}^d$  mit  $0 < \lambda_d(B) < \infty$ . Für den Fall, dass  $W \subset \mathbb{R}^d$  ein kompaktes Fenster ist und wir eine Familie  $\{Z_{W+x} : x \in \mathbb{R}^d\}$  von lokalen zufälligen,

abgeschlossenen Mengen betrachten, wobei  $Z_{W+x}$  für alle  $x \in \mathbb{R}^d$  f.s. in  $W+x$  enthalten ist, und

$$\mathbb{P}^{Z_{W+x}} = \mathbb{P}^{Z_{W+x}}$$

für alle  $x \in \mathbb{R}^d$  gilt, wollen wir unter

$$p = \frac{\mathbb{E}\lambda_d(Z_W)}{\lambda_d(W)}. \quad (2.3)$$

deren Volumendichte verstehen.

Die nun folgenden Größen lassen sich nur für Punktprozesse im  $\mathbb{R}^d$  definieren. Dafür nehmen wir an, dass der zu analysierende Prozess  $\xi$  ein stationärer und isotroper Punktprozess im  $\mathbb{R}^d$  mit Intensität  $\gamma > 0$  ist. Eine Ausweitung dieser Größen auf Partikelprozesse ist im Allgemeinen nicht möglich. Jedoch kann man diese Größen zur Analyse des Punktprozesses der Umkreismitelpunkte eines Partikelprozesses verwenden, um damit bestimmte Informationen die Struktur des Partikelprozesses zu erhalten.

- (ii)  **$K$ -Funktion:** Die  $K$ -Funktion ist so gewählt, dass  $\gamma K(r)$  der erwarteten Anzahl von Punkten mit Abstand von maximal  $r$  zum typischen Punkt entspricht, wobei der typische Punkt selbst nicht mitgezählt wird. Es ist also

$$K(r) = \frac{1}{\gamma} \int_{\mathbb{R}^d} (\xi(\omega)(B(0, r)) - 1) \mathbb{P}^0(d\omega). \quad (2.4)$$

- (iii) **Paarkorrelationsfunktion:** Als Größe zweiter Ordnung dient die Paarkorrelationsfunktion  $g$  dazu, das Verhalten von Punktepaaren des Prozesses untereinander zu analysieren. Formal gilt

$$g(r) = \frac{\partial K(r)}{\partial r} / (d\kappa_d r^{d-1}). \quad (2.5)$$

Dabei lässt sich  $g(r)$  wie folgt interpretieren: Ist  $q$  die Wahrscheinlichkeit, dass  $\xi$  jeweils einen Punkt in den infinitesimalen Mengen  $dA_1$  und  $dA_2$  mit Abstand  $r$  besitzt, so gilt

$$q = \gamma^2 g(r) \lambda_d(dA_1) \lambda_d(dA_2).$$

Für einen Poissonprozess gilt  $g(r) \equiv 1$ . Werte von  $g$  größer als eins deuten auf Clustering bzw. ein anziehendes Verhalten der Punkte untereinander und Werte unterhalb von eins auf Regularität bzw. ein abstoßendes Verhalten der Punkte untereinander hin.

Liegt nun ein markierter Punktprozess  $\xi = (\xi_i, m_i)_{i \in \mathbb{N}}$  mit dem Markenraum  $S = \{1, 2\}$  vor, der stationär und isotrop ist, d.h. wir unterscheiden zwei Klassen von Punkten, so lassen sich mit Hilfe von modifizierten Versionen der Paarkorrelationsfunktion Aussagen über die gegenseitige Lage von Punkte gleicher bzw. unterschiedlicher Klassen sowie deren Abhängigkeit treffen. Für  $i, j \in \{1, 2\}$  wird dazu  $g_{ij}(r)$  so gewählt, dass für die Wahrscheinlichkeit  $q_{ij}$ , dass  $\xi$  jeweils einen Punkt mit Marke  $i$  in der infinitesimalen

Menge  $dA_1$  und einen Punkt mit Marke  $j$  in der infinitesimalen Menge  $dA_2$  besitzt, wobei der Abstand zwischen  $dA_1$  und  $dA_2$  gerade  $r$  beträgt,

$$q_{ij} = \gamma^2 g_{ij}(r) \lambda_d(dA_1) \lambda_d(dA_2) \quad (2.6)$$

gilt.

Die Markenkorrelationsfunktion  $p_{ij}$  soll für  $i, j \in \{1, 2\}$  die Interaktionen der Punkte des Typs  $i$  mit den Punkten des Typs  $j$  aufzeigen. Dazu definieren wir

$$p_{ij}(r) = p_i p_j g_{ij}(r) / g(r), \quad (2.7)$$

wobei  $p_k$  dem Anteil an Punkten mit Marke  $k \in \{1, 2\}$  entspricht. Gegeben zwei Punkte von  $\xi$  mit Abstand  $r$ , so entspricht  $p_{ij}(r)$  der Wahrscheinlichkeit, dass einer davon vom Typ  $i$  und der andere vom Typ  $j$  ist.

**Bemerkung 2.2.1.** Nun sei  $T : \mathcal{F}_{le}(\mathcal{K}' \times S) \rightarrow \mathcal{F}_{le}(\mathcal{K}')$  eine Abbildung, die jede markierte Partikelmenge  $\Lambda \in \mathcal{F}_{le}(\mathcal{K}' \times S)$  mit Markenraum  $S \in \mathcal{B}$  auf eine harte unmarkierte Teilmenge davon abbildet. Für ein Ausdünnungsmodell  $\tilde{\Xi} := T(\Xi)$ , wobei  $T$  jede Realisierung eines stationären markierten Poissonschen Partikelprozess  $\Xi$  mit Intensität  $\gamma > 0$ , Formmarkenverteilung  $\mathbb{Q}'$  und Markenraum  $S$  auf eine harte unmarkierte Teilmenge davon abbildet, lassen sich die Intensität  $\tilde{\gamma}$  und die Volumendichte  $\tilde{\rho}$  von  $\tilde{\Xi}$  allein über das Verhalten des typischen Partikels  $X_0$  beschreiben. Nach Satz 1.2.17 und Satz 1.2.23 gilt nämlich

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} &= \mathbb{E} \sum_{(K,k) \in \Xi} \mathbb{1}\{c(K) \in [0, 1]^d\} \mathbb{1}\{K \in \tilde{\Xi}\} \\ &= \int_{\mathcal{K}' \times S} \mathbb{E} \mathbb{1}\{c(K) \in [0, 1]^d\} \mathbb{1}\{K \in T(\Xi \cup \{(K, k)\})\} \Theta(d(K, k)) \\ &= \gamma \int_{\mathcal{K}_0 \times S} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E} \mathbb{1}\{c(K_0 + x) \in [0, 1]^d\} \\ &\quad \times \mathbb{1}\{K_0 + x \in T(\Xi \cup \{(K_0 + x, k)\})\} dx \mathbb{Q}'(d(K_0, k)) \\ &= \gamma \int_{\mathcal{K}_0 \times S} \int_{[0, 1]^d} \mathbb{P}(K_0 + x \in T(\Xi \cup \{(K_0 + x, k)\})) dx \mathbb{Q}'(d(K_0, k)) \\ &= \gamma \int_{\mathcal{K}_0 \times S} \mathbb{P}(K_0 \in T(\Xi \cup \{(K_0, k)\})) \mathbb{Q}'(d(K_0, k)). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Damit entspricht die Intensität  $\tilde{\gamma}$  des ausgedünnten Prozesses  $\tilde{\Xi}$  also gerade der Ausgangsintensität multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit, dass das typische Partikel in  $\tilde{\Xi}$  aufgenommen wird, nachdem man ihn zu  $\Xi$  hinzugefügt hat. Diese Wahrscheinlichkeit nennen wir auch *Überlebenswahrscheinlichkeit des typischen Partikels*  $X_0$ . Sie wird später noch von zentraler Bedeutung sein.

Für die Volumendichte eines Prozesses harter Partikel mit Intensität  $\tilde{\gamma}$  gilt weiterhin

$$\tilde{p} = \tilde{\gamma} \int_{\mathcal{K}_0} V_d(K_0) \tilde{\mathbb{Q}}(dK_0) \quad (2.9)$$

gilt, wobei  $\tilde{\mathbb{Q}}$  die Formverteilung des Prozesses  $\tilde{\Xi}$  ist.

## 2.2.2 Globale und lokale Modelle

Für die theoretische Beschreibung von Punktprozessen bzw. zufälligen abgeschlossenen Mengen führt man diese häufig auf dem ganzen zugrundeliegenden Raum ein und betrachtet für den Fall, dass man nur einen beschränkten Ausschnitt benötigt, die Einschränkung des beschriebenen Prozesses auf den gewünschten Ausschnitt. Die Simulation solcher Modelle und deren Einsatz in der Praxis hingegen können aber nur lokal, d.h. auf beschränkten Beobachtungsfenstern, stattfinden - eine Tatsache die sowohl formale als auch praktische Auswirkungen hat, welche nun hier kurz diskutiert werden sollen.

Zum einen geht durch die lokale Betrachtung der für die Theorie zufälliger abgeschlossener Mengen zentrale Begriff der Stationarität verloren, da stationäre zufällige abgeschlossene Mengen nach Satz 1.2.8 f.s. unbeschränkt sind. Wir werden im nächsten Abschnitt diskutieren, wie man im lokalen Fall dennoch die für den stationären Fall vorliegenden Größen empirisch motiviert lokal einführen kann. Zum anderen treten in lokal definierten Modellen sogenannte *Randeffekte* auf. Darunter versteht man das Phänomen, dass ein räumlicher Prozess, der nur auf einem endlichen Beobachtungsfenster eingeführt wird, am Rand dieses Fensters eine andere Gestalt als im Inneren aufweist. Das Auftreten von Randeffekten liegt daran, dass die Partikel, die in einem globalen Modell außerhalb des Beobachtungsfensters aber nahe an dessen Rand liegen würden und somit einen Einfluss auf bestimmte Größen oder gar das Verhalten des Prozesses im Beobachtungsfenster hätten, im lokalen Fall nicht vorhanden sind. Im Kontext harter Partikelsysteme kann man dies genauer darstellen: Hier haben Partikel, die nahe des Randes liegen einen „Standortvorteil“ gegenüber den Partikeln die weiter im Inneren liegen. Dies bedeutet, dass ein Partikel am Rand anderen Partikeln weniger „Angriffsfläche“ bietet als ein Partikel in der Mitte, was die Wahrscheinlichkeit, dass ein Partikel am Rand überlebt, erhöht. Die Stärke des Einflusses der Randeffekte auf den Prozess hängt auch von der Dimension und der Gestalt des Beobachtungsfensters ab. Ein interessantes Beispiel, das aufzeigt welchen Einfluss Randeffekte auf bestimmte Größen in zufälligen Partikelsystemen nehmen können, findet sich in [12].

In der Literatur ist eine Vielzahl von Möglichkeiten beschrieben, um solche Randeffekte zu vermeiden bzw. auszugleichen. Für Details hierzu verweisen wir auf [22]. Viele der dort beschriebenen Verfahren sind auf die spezielle Gestalt des zugrundeliegenden Problems zugeschnitten. Daher wollen wir hier nur zwei klassische und für eine Vielzahl von Szenarien passende Verfahren beschreiben, da wir diese auch teilweise in den Simulationen für Kapitel 7 anwenden.

- **Plus - Sampling:** Die Idee des Plus-Samplings besteht darin, dass man den auf einem kompakten Fenster  $W \subset \mathbb{R}^d$  zu untersuchenden Prozess, auf einer Obermenge von  $W$

simuliert, aber zur eigentlichen Analyse nur die Einschränkung dieses Prozesses auf  $W$  heranzieht. Damit ist es möglich den Einfluss von Partikeln außerhalb von  $W$  auf den Prozess innerhalb von  $W$  in die Untersuchungen miteinzubeziehen. Typischerweise haben diese Obermengen die Gestalt  $W + B(0, r)$  oder  $(1 + r)W$  für ein  $r > 0$ , wobei wir für den zweiten Fall annehmen, dass  $0 \in \text{int } W$  gilt.

Ob man Plus-Sampling zum Ausgleich von Randeffekten durchführt und wie man den Parameter  $r$  wählt hängt von den Eigenschaften des zu untersuchenden Prozesses ab. So kann es für bestimmte Prozesse etwa möglich sein,  $r$  so zu wählen, dass durch den Oberprozess alle Einflüsse von außerhalb abgedeckt werden. Im diesem Fall erweist sich Plus-Sampling als sehr effizient. Für den Fall, dass weitreichende räumliche Abhängigkeiten vorkommen, also dass Partikel weit außerhalb von  $W$  einen Einfluss auf die Gestalt des Prozesses in  $W$  nehmen, verfehlt Plus-Sampling sein Ziel.

- **Periodische Randbehandlung:** Für quadratische Beobachtungsfenster  $W \subset \mathbb{R}^d$  der Breite  $w > 0$  erweist sich die periodische Randbehandlung häufig als sehr effizient. Dabei wird  $W$  als Torus betrachtet, d.h. man „verklebt“ gegenüberliegende Ränder miteinander, was dazu führt, dass Punkte bzw. Partikel, welche jeweils nahe an entgegengesetzten Kanten liegen, als sich naheliegend betrachtet werden. Der Vorteil dieser Randbehandlung besteht zum einen darin, dass man im Gegensatz zum Plus-Sampling nur den Ausgangsprozess in  $W$  realisieren muss und zum anderen, dass sie sich in vielen Fällen sehr leicht umsetzen lässt, indem man einen neuen Abstandsbegriff  $d_T$  auf  $W$  einführt. Dabei ist für  $x = (x_1, \dots, x_d), y = (y_1, \dots, y_d) \in W$  dann

$$d_T(x, y) = \sum_{i=1}^d \sqrt{\min\{(x_i - y_i)^2, (w - |x_i - y_i|)^2\}}. \quad (2.10)$$

Im Falle des Vorliegens eines Prozesses aus Kugeln lässt sich damit leicht bestimmen, ob sich zwei Kugeln unter Einbeziehung periodischer Randbehandlung schneiden. Für andere Partikelformen ist dies meist deutlich aufwändiger.

Solche hier beschriebenen Randeffekte werden uns nicht nur in den Simulationen in Kapitel 7 begegnen, sondern auch in Kapitel 6 dafür verantwortlich sein, dass sich gewisse globale Größen, wie etwa Packungsdichten, von ihren lokalen Versionen unterscheiden.

## 2.3 Bekannte Modelle

Dieser Abschnitt soll einen Überblick über in der Literatur bekannte Modelle zur Beschreibung zufälliger harter Partikelsysteme bieten. Dabei wollen wir uns auf diejenigen Modelle beschränken, die einer rigorosen mathematischen Beschreibung zugänglich sind. Wenngleich auch aufgrund der Vielfalt und Variationsmöglichkeit dieser und ähnlicher Modelle kein Anspruch auf Vollständigkeit erhoben werden kann, so sollen dennoch die bisher bekanntesten solcher Model-



le und Ansätze sowie dafür bekannte Ergebnisse und mögliche Verallgemeinerungen vorgestellt werden.

### 2.3.1 Stienen Modell

Das *Stienen Modell* [71] entstammt einem materialwissenschaftlichen Hintergrund. Ausgangspunkt ist ein stationärer Poissonprozess  $\xi$  im  $\mathbb{R}^d$  mit Intensität  $\gamma > 0$ . Das Stienen Modell entsteht nun, indem man jeden Punkt von  $\xi$  als Mittelpunkt einer Kugel, deren Durchmesser gerade dem Abstand des Punktes zu seinem nächsten Nachbar in  $\xi$  entspricht, auffasst. Diese Kugeln bilden dann einen stationären Prozess harter Kugeln der Gestalt

$$\tilde{\Xi} = \{B(z, r/2) : z \in \xi, r = d(z, \xi \setminus \{z\})\}.$$

Alternativ betrachtet kann man  $\tilde{\Xi}$  auch als Endzustand eines dynamisch anwachsenden Prozesses harter Kugeln ansehen. Dazu werden zu Beginn infinitesimal kleine Kugeln gleicher Größe auf die Punkte von  $\xi$  platziert. Diese beginnen dann alle zur gleichen Zeit und mit gleicher Geschwindigkeit zu wachsen. Eine Kugel beendet ihr Wachstum genau dann, wenn ihr Durchmesser dem Abstand ihres Zentrums zu dessen nächsten Nachbarn aus  $\xi$  entspricht. Zwei Partikel  $B(x_1, r_1)$  und  $B(x_2, r_2)$  des Stienen Modells berühren sich genau dann, wenn die beiden zugehörigen Mittelpunkte  $x_1$  und  $x_2$  gegenseitig nächste Nachbarn sind, also wenn  $x_1$  der nächste Nachbar von  $x_2$  ist und umgekehrt. Daher neigen große Partikel des Stienen Modells dazu isoliert zu sein, während kleine Partikel eher ein anderes Partikel berühren.

Betrachtet man nun das typische Partikel  $B(0, \rho_0)$  von  $\tilde{\Xi}$ , dessen Darstellung sich aus Satz 1.2.25 und den Ausführungen danach ergibt, so lässt sich dessen Radiusverteilung leicht bestimmen. Die Wahrscheinlichkeit, dass das typische Partikel mindestens Radius  $r$  hat, entspricht aufgrund der Stationarität von  $\xi$  gerade der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses  $\{\xi(B(0, 2r)) = 0\}$ . Für den zufälligen Radius  $\rho_0$  des typischen Partikels gilt also

$$\mathbb{P}(\rho_0 > r) = e^{-\gamma\kappa_d(2r)^d},$$

weshalb

$$\mathbb{E}\rho_0^d = (\gamma\kappa_d 2^d)^{-1}$$

gilt. Die Volumendichte des klassischen Stienen Modells entspricht daher wegen (2.9) gerade

$$\tilde{p} = \gamma\kappa_d \mathbb{E}\rho_0^d = 2^{-d}.$$

Mögliche Verallgemeinerungen bestehen etwa darin, nicht-sphärische Partikel auf die Ausgangspunkte zu setzen und diese wachsen zu lassen oder im sphärischen Fall die Kugeln mit unterschiedlicher bzw. sogar zufälliger Geschwindigkeit wachsen zu lassen. Für Ergebnisse für die Fälle fixer nicht notwendigerweise sphärischer Partikel, die mit zufälliger Geschwindigkeit wachsen oder Partikel fixer Form aber zufälliger Orientierung sei auf [36] verwiesen.

### 2.3.2 Dynamisches Lilypond Modell

Bei der Betrachtung der Partikel des Stienen Modells im Fall sphärischer Partikel stellt man fest, dass gewisse Partikel isoliert sind. Ein Partikel  $B(x, r)$  des Stienen Modells ist dabei genau dann isoliert, wenn der nächste Nachbar von  $x$  nicht  $x$  als nächsten Nachbarn hat. In einer Weiterentwicklung des Wachstumsprotokolls des Stienen Modells kann man nun aber genau diese Partikel noch weiterwachsen lassen bis sie ein anderes Partikel berühren, egal ob dieser schon vorher gestoppt wurde oder bis zum Zeitpunkt der Berührung noch wächst. Das *dynamische Lilypond Modell* wählt genau dieses Vorgehen. Um jeden Punkt eines stationären Poissonprozesses  $\xi$  mit Intensität  $\gamma > 0$  wächst dabei ähnlich wie beim Stienen Modell eine zu Beginn infinitesimal kleine Kugel. Dies geschieht nun aber so lange bis die Kugel eine andere Kugel berührt. Sobald dies passiert stoppen beide Kugeln ihr Wachstum bzw. falls eine der beiden Kugeln schon von einer anderen früher gestoppt wurde, so stoppt nur diejenige, die noch wuchs. Eine explizite Beschreibung der Partikelradien ist hier nicht mehr möglich. Will man den Radius  $r_1$  einer Kugel  $B(x_1, r_1)$  mit Zentrum  $x_1$  bestimmen, so geht man wie in [11] vor: Die einzigen Partikel, deren Radius man sofort bestimmen kann, sind diejenigen, deren Zentren gegenseitig nächste Nachbarn sind, da diese sich gegenseitig stoppen. Falls also  $x_1$  und dessen nächster Nachbar  $x_2$  gegenseitig nächste Nachbarn sind, so gilt für die Radien  $r_1, r_2$  der Kugeln um  $x_1$  bzw.  $x_2$  die Beziehung  $r_1 = r_2 = \|x_1 - x_2\|/2$ . Ist dies nicht der Fall, so verwendet man die Tatsache, dass  $r_1 = \|x_1 - x_2\| - r_2$  gilt und versucht  $r_2$  zu bestimmen, indem man den nächsten Nachbarn  $x_3$  von  $x_2$  betrachtet. Dieses Vorgehen wird dann iterativ so lange fortgesetzt, bis man ein Paar  $(x_{n-1}, x_n)$  an Zentren gefunden hat, die gegenseitig nächste Nachbarn sind. Mit der Beziehung  $r_{n-1} = r_n = \|x_{n-1} - x_n\|/2$  lassen sich dann alle Radien  $r_1, \dots, r_{n-2}$  bestimmen.

Dieses Vorgehen liefert für einen stationären Poissonprozess  $\xi$  als Zentrumsprozess einen wohldefinierten, stationären Prozess harter Partikel

$$\tilde{\Xi} = \{B(z, r) : z \in \xi\}. \quad (2.11)$$

Die Wohldefiniertheit dieses Vorgehens resultiert zum einen daraus, dass jeder Punkt von  $\xi$  f.s. nur einen nächsten Nachbarn hat. Zum anderen funktioniert das oben beschriebene Vorgehen zur Radienbestimmung nur, wenn man tatsächlich nach endlich vielen Schritten ein solches Paar gegenseitig nächster Nachbarn findet. Hierfür sei auf [10] verwiesen, wo mit Hilfe des Begriffs der absteigenden Kette gezeigt wird, dass dies für stationäre Poissonprozesse im  $\mathbb{R}^d$  f.s. der Fall ist. Später wurde in [19] gezeigt, dass das Lilypond Modell in einem sehr allgemeinen deterministischen Rahmen existiert und eindeutig bestimmt ist.

In [11] finden sich neben diversen Simulationen auch folgende Schranken für die Volumendichte  $\tilde{p}$  des dynamischen Lilypond Modells für den Fall, dass die Intensität des Ausgangsprozesses

$\xi$  gerade eins ist:

$$\tilde{p} \leq 1 - \int_0^1 \frac{\frac{1}{2}d(1 - \frac{1}{2}t)^{d-1}}{1 + \frac{\tilde{v}_d(t)}{\kappa_d}} dt = \begin{cases} 2/3, & d = 1 \\ 0,4123, & d = 2 \\ 0,2448, & d = 3. \end{cases} \quad (2.12)$$

Dabei ist  $\tilde{v}_d(t) = \lambda_d(B(e_1, t) \setminus B(0, 1))$ . Durch Simulationen wurden folgende Schätzungen für die Volumendichten in Dimension zwei und drei erzielt (in Klammern sind die zugehörigen Standardabweichungen angegeben):

$$\tilde{p} = \begin{cases} 0,3487 (0,00045), & d = 2 \\ 0,1859 (0,00026), & d = 3. \end{cases}$$

Mögliche Verallgemeinerungen bestehen darin, dass man einen anderen Prozess als Zentrumsprozess wählt, wie beim Stienen Modell die Partikel mit zufälligen Geschwindigkeiten wachsen lässt oder zufällige Partikelformen verwendet. Hierzu sind jedoch bisher keine Ergebnisse bekannt.

### 2.3.3 Dead Leaves Modell

Das *Dead Leaves Modell* geht auf Matheron [44] zurück und weist, im  $\mathbb{R}^2$  betrachtet, eine einfache Deutung auf, die dessen Namen prägte. In unserer Darstellung des Dead Leaves Modells folgen wir der Darstellung in [69], welche es einfacher macht, das Dead Leaves Modell mit den nachfolgenden Modellen zu vergleichen. Formal liegt dem Dead Leaves Modell im  $\mathbb{R}^d$  ein Poissonprozess  $\Xi = ((K_i, t_i))_{i \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{K}' \times [0, \infty)$  mit Intensität eins zugrunde. Sein Intensitätsmaß  $\Theta$  habe die Gestalt

$$\Theta = \Phi(\lambda_d \otimes \mathbb{Q}) \otimes \lambda_1|_{[0, \infty)}, \quad (2.13)$$

wobei  $\Phi : \mathbb{R}^d \times \mathcal{K}_0 \rightarrow \mathcal{K}'$ ,  $(x, K_0) \mapsto K_0 + x$  und  $\mathbb{Q}$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $\mathcal{K}_0$  ist. Es handelt sich bei  $\Xi$  nicht um einen markierten Poissonschen Partikelprozess, da die Bedingung (1.14) verletzt wird. Wir können uns  $\Xi$  aber als Vereinigung einer Folge von unabhängig markierten stationären Poissonschen Partikelprozessen  $\Xi_1, \Xi_2, \dots$  vorstellen, wobei das Intensitätsmaß  $\Theta_i$  von  $\Xi_i$  die Darstellung  $\Theta_i = \Phi'(\lambda_d \otimes \mathbb{Q}')$  mit  $\mathbb{Q}' = \mathbb{Q} \otimes \lambda_1|_{[i-1, i]}$  und  $\Phi' : \mathbb{R}^d \times \mathcal{K}_0 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{K}' \times \mathbb{R}$ ,  $(x, K_0, m) \mapsto (K_0 + x, m)$  hat.

Dabei interpretieren wir die Marke  $t_i$  als den Zeitpunkt, zu welchem der zufällige konvexe Körper  $K_i$  geboren wird und sagen, dass ein Partikel  $K_i$  mit Marke  $t_i$  vor einem Partikel  $K_j$  mit Marke  $t_j$  geboren wurde bzw. älter ist, falls  $t_i < t_j$ . Ein Partikel im Dead Leaves Modell heißt nun *intakt*, wenn er von keinem vor ihm geborenen Partikel geschnitten wird. Die intakten Partikel von  $\Xi$  ohne ihre Marken formen dann das Dead Leaves Modell  $\tilde{\Xi}$ , d.h.

$$\tilde{\Xi} := \{K_i : (K_i, t_i) \in \Xi, K_i \cap K_j \neq \emptyset \Rightarrow t_i < t_j \text{ für alle } (K_j, t_j) \in \Xi, i \neq j\} \quad (2.14)$$

Damit ist  $\tilde{\Xi}$  ein stationärer Prozess harter Partikel, der einer Ausdünnung des Ausgangsprozesses  $\Xi$  unter Weglassen der Zeitmarken entspricht. Betrachtet man nun dieses Modell für den Fall  $d = 2$ , so kann man die Partikel als Blätter eines Baumes auffassen, die zu ihrem Geburtszeitpunkt auf den Boden fallen. Sind nun so viele Blätter auf den Boden gefallen, dass dieser komplett überdeckt ist, dann besteht das Dead Leaves Modell aus denjenigen Blättern, die, wenn man die Menge der Blätter auf dem Boden von unten betrachtet, vollständig sichtbar sind, also nicht von früheren Partikeln teilweise oder komplett überdeckt werden. Für Ergebnisse zum Dead Leaves Modell verweisen wir auf [23], [36] und [38].

### 2.3.4 Random Sequential Adsorption Modell

Das *Random Sequential Adsorption* (kurz: *RSA*) Modell ist eine Weiterentwicklung des Dead Leaves Modells. Es kann im hier ausschließlich betrachteten stationären Fall als Grenzwert eines Geburtsprozesses aufgefasst werden (siehe die Bemerkung dazu in [69]). Im eindimensionalen Fall hängt es eng mit dem bekannten *car parking* Problem zusammen. Wir wollen auch hier der Darstellung in [69] folgen. Formal liegt dem RSA Modell wie auch dem Dead Leaves Modell ein stationärer Poissonprozess  $\Xi = ((K_i, t_i))_{i \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{K}' \times [0, \infty)$  mit Intensität eins und Intensitätsmaß  $\Theta$  wie in (2.13) zugrunde. Ähnlich wie oben wählt man bestimmte Partikel von  $\Xi$  ohne deren Marken aus. Dabei überlebt ein Partikel  $(K_i, t_i) \in \Xi$  genau dann, wenn es kein anderes überlebendes Partikel  $(K_j, t_j) \in \Xi$  gibt, mit

$$K_i \cap K_j \neq \emptyset \text{ und } t_j < t_i.$$

Jedes überlebende Partikel  $(K_i, t_i) \in \Xi$  löscht automatisch alle anderen Partikel  $(K_j, t_j) \in \Xi$  mit

$$K_i \cap K_j \neq \emptyset \text{ und } t_i < t_j.$$

Die Menge der überlebenden Partikel ohne deren Marken bilden dann einen stationären Prozess harter Partikel, das RSA Modell. Im Gegensatz zum Dead Leaves Modell können beim RSA Modell Partikel von  $\Xi$  überleben, die von älteren Partikeln geschnitten werden. Damit ist, gegeben  $\Xi$ , jedes Partikel des Dead Leaves Modell auch im RSA Modell enthalten aber nicht umgekehrt.

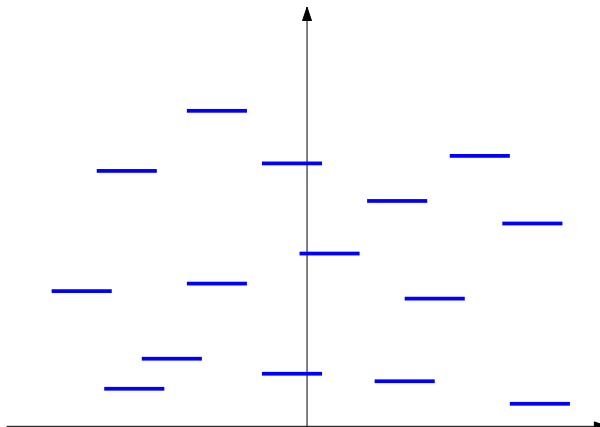


Abbildung 2.3: Ausschnitt einer Realisierung von  $\Xi$  für  $d = 1$  und den Fall fixer Partikelgröße. Die  $y$ -Achse dient dabei als Zeitachse.



Abbildung 2.4: Resultierende Partikel im Dead Leaves Modell.



Abbildung 2.5: Resultierende Partikel im RSA Modell. Dabei ist zu erkennen, dass alle Partikel des Dead Leaves Modells auch im RSA Modell enthalten sind, aber das rote Partikel noch zusätzlich dazukommt.

Betrachtet man das RSA Modell  $\tilde{\Xi}_W$  bestehend aus Partikeln fester Form  $K \in \mathcal{K}_0$  auf einem kompakten, konvexen Beobachtungsfenster  $W \subset \mathbb{R}^d$  mit  $\lambda_d(W) > 0$ , so kann man dieses, unter Vernachlässigung von Randeffekten, auch alternativ beschreiben, indem man es als Prozess von einer zufälligen Anzahl  $\eta$  sequentiell eintreffender Partikel  $x_1 + K, \dots, x_\eta + K$  beschreibt. Hierbei hängt die Verteilung von  $x_i$ , gegeben  $\eta \geq i$ , von  $x_1, \dots, x_{i-1}$  ab. Für  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  können wir diese wie folgt ausdrücken:

$$\mathbb{P}(x_1 \in A) = \frac{\lambda_d(A \cap W)}{\lambda_d(W)}$$

und

$$\mathbb{P}(x_i \in A | x_1, \dots, x_{i-1}, \eta \geq i) = \frac{\lambda_d \left( A \cap \left( W \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} (x_k + K) + K^* \right) \right)}{\lambda_d \left( W \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} (x_k + K) + K^* \right)}.$$

Dabei ist zu beachten, dass  $\{\eta \geq i\} = \{\lambda_d(W \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} (x_k + K) + K^*) > 0\}$  gilt.

Der Mittelpunkt des ersten Partikels ist folglich gleichverteilt auf  $W$ . Ein Punkt  $x \in W$  heißt zum Zeitpunkt  $i \in \mathbb{N}$  *frei*, wenn, gegeben  $x_1, \dots, x_{i-1}$ , der Partikel  $x + K$  zu den Partikeln  $x_1 + K, \dots, x_{i-1} + K$  disjunkt ist. Sind die ersten  $i - 1$  Partikel gegeben und hat die Menge an freien Punkten positives Lebesguemaß, so ist der Mittelpunkt des  $i$ -ten Partikels auf der Menge der freien Partikel gleichverteilt. Betrachtet man diese sequentielle Darstellung von  $\tilde{\Xi}_W$  als Grenzwert von  $\tilde{\Xi}_W^{(n)} := \{x_1 + K, \dots, x_{n \wedge \eta} + K\}$  für  $n \rightarrow \infty$ , so sehen wir, dass es sich bei  $\tilde{\Xi}_W^{(n)}$  um eine Markov-Kette handelt, da die Verteilung von  $\tilde{\Xi}_W^{(n)}$  gegeben  $\tilde{\Xi}_W^{(n-1)}, \dots, \tilde{\Xi}_W^{(1)}$  nur von  $\tilde{\Xi}_W^{(n-1)}$  abhängt. Damit ist das RSA Modell durch perfect simulation effizient zu simulieren, siehe etwa [13].

Das RSA Modell erweist sich als ausgesprochen schwer zugänglich für theoretische Untersuchungen. Exakte analytische Ergebnisse liegen nur für den eindimensionalen Fall vor, sowie für den zweidimensionalen Fall, sofern man sich in letzterem Fall auf bestimmte Gittermodelle beschränkt. Im eindimensionalen Fall für Liniensegmente gleicher Länge als Ausgangspartikel gilt, dass die Volumendichte einen Wert von

$$\tilde{p} = \int_0^\infty \exp\{-2 \int_0^u \frac{1}{v}(1 - e^{-v})dv\} du \approx 0,7476 \quad (2.15)$$

annimmt; siehe [61] für weitere Details.

Für allgemeine Modelle ab Dimension zwei jedoch gibt es keine expliziten theoretischen Ergebnisse. Simulationen weisen darauf hin, dass die Volumendichte für den Fall von Kugeln gleicher Größe als Ausgangspartikel in Dimension 2 und 3 Werte von 0,55 bzw. 0,38 annimmt (siehe etwa [16], [45] und [79]). Für weitere Simulationsstudien und algorithmische Aspekte der Simulation sei neben diesen Quellen auch auf [13], [69] und [66] verwiesen.

### 2.3.5 Prozesse harter Partikel von Matérnschem Typ

Die Idee, Hard-Core-Punktprozesse im  $\mathbb{R}^d$ , d.h. Punktprozesse mit festem Mindestabstand  $R > 0$  zwischen den Punkten, durch die Ausdünnung eines (typischerweise nicht harten) Primärprozesses zu erzeugen, geht auf die bahnbrechende Arbeit von Matérn [41] bzw. [42] zurück. Dort werden drei Verfahren beschrieben, mit denen man - teilweise unter dem Einsatz von Marken - eben solche Hard-Core-Punktprozesse durch eine abhängige Ausdünnung erzeugen kann. In den nächsten drei Abschnitten sollen diese drei Verfahren dargestellt und auf den Fall allgemeiner Partikelprozesse übertragen werden. Insbesondere die beiden letzten Verfahren ermöglichen Querverbindungen zu den bereits erwähnten Dead Leaves und RSA Modellen und werden sich im weiteren Verlauf dieser Arbeit noch als sehr nützlich erweisen.

Ausgangspunkt ist in allen Modellen ein stationärer Poissonprozess  $\xi = (\xi_i)_{i \in \mathbb{N}}$  im  $\mathbb{R}^d$  mit Intensität  $\gamma > 0$ . Für den allgemeinen Fall betrachten wir dann einen stationären Poissonschen

Partikelprozess  $\Xi$  mit konvexen Partikeln und Intensität  $\gamma > 0$ . Später auftretende markierte Versionen von  $\xi$  bzw.  $\Xi$  werden der Übersichtlichkeit halber dieselbe Bezeichnung tragen. Beide Prozesse werden wir im Folgenden auch als *Primärprozesse* und ihre Intensitäten als *primäre Intensitäten* bezeichnen. Die resultierenden Prozesse und ihre Intensitäten nennen wir *Sekundärprozesse* bzw. *sekundäre Intensitäten*.

### Matérns erster Hard-Core-Prozess

Beim ersten Matérnschen Modell - im Folgenden kurz Matérn I-Modell genannt - werden alle Punkte von  $\xi$  gelöscht, die zu ihrem nächsten Nachbarn höchstens Abstand  $R > 0$  haben. Legt man dann um die verbleibenden Partikel jeweils Kugeln mit Radius  $R/2$  so bilden diese ein System harter Partikel. Formal betrachten wir beim Matérn I-Modell den stationären Punktprozess

$$\tilde{\xi} = \{x \in \xi : \xi(B(x, R)) = 1\} \quad (2.16)$$

bzw. den resultierenden stationären Prozess harter Kugeln

$$\tilde{\Xi} = \{B(x, R/2), x \in \tilde{\xi}\}. \quad (2.17)$$

Für die Intensität  $\tilde{\gamma}$  des Matérn I-Modells gilt nach (2.8)

$$\tilde{\gamma} = \gamma \mathbb{P}(\xi(B(0, R)) = 0) = \gamma e^{-\gamma \kappa_d R^d}. \quad (2.18)$$

Der Matérn I-Prozess  $\tilde{\Xi}$  ist damit nichts anderes als der Prozess der isolierten Partikel des Ausgangsprozesses  $\Xi = \{B(x, R/2) : x \in \xi\}$ . Als Verallgemeinerung auf beliebige stationäre Poissonsche Partikelprozesse als Primärprozess können wir analog den Matérn I-Prozess als Prozess der isolierten Partikel des Primärprozesses einführen. Ist dann  $\Xi = (X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  ein stationärer Poissonscher Partikelprozess mit Intensität  $\gamma > 0$ , Formverteilung  $\mathbb{Q}$  und Intensitätsmaß  $\Theta$ , so entspricht

$$\tilde{\Xi} := \{X_i \in \Xi : X_i \cap X_j \neq \emptyset \text{ für alle } X_j \in \Xi (i \neq j)\} \quad (2.19)$$

dem daraus resultierenden Prozess isolierter Partikel. Wir stellen nun nachfolgend eine Reihe von Ergebnissen vor, die für den in dieser Allgemeinheit betrachteten Matérn I-Prozess neu sind.

**Satz 2.3.1.** *Für die Intensität  $\tilde{\gamma}$  und Formverteilung  $\tilde{\mathbb{Q}}$  des Matérn I-Prozesses  $\tilde{\Xi}$  gelten*

$$\tilde{\gamma} = \gamma \int_{\mathcal{K}_0} \exp\left(-\gamma \int_{\mathcal{K}_0} V_d(K_0 + L_0^*) \mathbb{Q}(dL_0)\right) \mathbb{Q}(dK_0) \text{ und} \quad (2.20)$$

$$\tilde{\mathbb{Q}}(A) = \frac{\gamma}{\tilde{\gamma}} \int_A \exp\left(-\gamma \int_{\mathcal{K}_0} V_d(K_0 + L_0^*) \mathbb{Q}(dL_0)\right) \mathbb{Q}(dK_0), \quad A \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_0). \quad (2.21)$$

*Beweis.* Zur besseren Darstellung betrachten wir die Abbildung

$$T : \mathcal{F}_{le}(\mathcal{K}') \rightarrow \mathcal{F}_{le}(\mathcal{K}') \quad (2.22)$$

$$\Lambda \mapsto \tilde{\Lambda} := \{K \in \Lambda : K \cap L = \emptyset \text{ für alle } L \in \Lambda \setminus \{K\}\}. \quad (2.23)$$

Es gilt dann für  $K_0 \in \mathcal{K}_0$  nach Satz 1.2.21

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(K_0 \in T(\Xi \cup \{K_0\})) &= \mathbb{P}(K_0 \cap L = \emptyset \text{ für alle } L \in \Xi) \\ &= \mathbb{E} \prod_{L \in \Xi} \mathbf{1}\{K_0 \cap L = \emptyset\} \\ &= \exp\left\{-\int_{\mathcal{K}'} \mathbf{1}(K_0 \cap L \neq \emptyset) \Theta(dL)\right\} \\ &= \exp\left\{-\gamma \int_{\mathcal{K}_0} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}(K_0 \cap (L_0 + x) \neq \emptyset) dx \mathbb{Q}(dL_0)\right\} \\ &= \exp\left\{-\gamma \int_{\mathcal{K}_0} V_d(K_0 + L_0^*) \mathbb{Q}(dL_0)\right\}. \end{aligned}$$

Damit ist nach (2.8)

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} &= \gamma \int_{\mathcal{K}_0} \mathbb{P}(K_0 \in T(\Xi \cup \{K_0\})) \mathbb{Q}(dK_0) \\ &= \gamma \int_{\mathcal{K}_0} \exp\left(-\gamma \int_{\mathcal{K}_0} V_d(K_0 + L_0^*) \mathbb{Q}(dL_0)\right) \mathbb{Q}(dK_0). \end{aligned}$$

Für  $A \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_0)$  folgt daraus mit (1.9) aus Satz 1.2.14 (ii) und Satz 1.2.23 sowie dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{Q}}(A) &= \frac{1}{\tilde{\gamma}} \mathbb{E} \sum_{K \in \Xi} \mathbf{1}\{c(K) \in [0, 1]^d\} \mathbf{1}\{K - c(K) \in A\} \mathbf{1}\{K \in \tilde{\Xi}\} \\ &= \frac{\gamma}{\tilde{\gamma}} \mathbb{E} \int_{\mathcal{K}_0} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}\{c(K_0 + x) \in [0, 1]^d\} \mathbf{1}\{(K_0 + x) - c(K_0 + x) \in A\} \\ &\quad \times \mathbf{1}\{(K_0 + x) \in T(\Xi \cup (K_0 + x))\} dx \mathbb{Q}(dK_0) \\ &= \frac{\gamma}{\tilde{\gamma}} \mathbb{E} \int_{\mathcal{K}_0} \int_{[0,1]^d} \mathbf{1}\{K_0 \in A\} \mathbf{1}\{(K_0 + x) \in T(\Xi \cup (K_0 + x))\} dx \mathbb{Q}(dK_0) \\ &= \frac{\gamma}{\tilde{\gamma}} \int_A \mathbb{P}(K_0 \in T(\Xi \cup K_0)) \mathbb{Q}(dK_0) \\ &= \frac{\gamma}{\tilde{\gamma}} \int_A \exp\left\{-\gamma \int_{\mathcal{K}_0} V_d(K_0 + L_0^*) \mathbb{Q}(dL_0)\right\} \mathbb{Q}(dK_0). \end{aligned}$$



□

Betrachtet man nun das Verhalten von  $\tilde{\gamma}$  bei Veränderung von  $\gamma$ , so sieht man, dass  $\tilde{\gamma} \rightarrow 0$  für  $\gamma \rightarrow \infty$ , weshalb die  $C^1$ -Abbildung  $f : \gamma \mapsto \tilde{\gamma}$  auf  $(0, \infty)$  ihr Maximum annimmt.

**Bemerkung 2.3.2.** Gilt  $\mathbb{Q} = \delta_K$  für ein  $K \in \mathcal{K}_0$ , so ist  $\tilde{\gamma} = \gamma \exp\{-\gamma V_d(K + K^*)\}$ . Damit kann  $\tilde{\gamma}$  maximal den Wert  $1/(eV_d(K + K^*))$  annehmen. Dies geschieht für  $\gamma = 1/V_d(K + K^*)$ ; für kleinere bzw. größere Werte von  $\gamma$  wächst bzw. fällt  $f$  monoton. Für bestimmte Primärintensitäten führt also deren Erhöhung zu einem Abfallen der Sekundärintensität. Das Verhalten der Abbildung  $f$  ist nicht trivial. Einzig sicher ist, dass es  $c_1, c_2 > 0$  gibt, so dass  $f$  auf  $[0, c_1)$  steigt und auf  $(c_2, \infty)$  gegen 0 fällt. Dazwischen kann es je nach ursprünglicher Formverteilung  $\mathbb{Q}$  immer wieder zu alternierendem Verhalten kommen.

Bereits für den Fall  $\mathbb{Q} = p\delta_{K_1} + (1-p)\delta_{K_2}$  für ein  $p \in (0, 1)$  und  $K_1, K_2 \in \mathcal{K}_0$  kann es vorkommen, dass  $\gamma$  mehrere lokale Extrema annimmt.

Aufgrund der Konstruktion des Matérn I-Prozesses überträgt sich die Mischungseigenschaft von  $\Xi$  auf  $\tilde{\Xi}$  wie nachfolgender Satz zeigt.

**Satz 2.3.3.** *Der Matérn I-Prozess  $\tilde{\Xi}$  ist mischend.*

*Beweis.* Seien  $A_1, A_2 \in \mathcal{N}(\mathcal{F}')$  und  $x \in \mathbb{R}^d$ . Für die translationskovariante Abbildung  $T$  aus (2.22) gilt dann  $T^{-1}(\mathbf{T}_x(A_2)) = \mathbf{T}_x(T^{-1}(A_2))$ . Damit gilt aufgrund der Mischungseigenschaft von  $\Xi$  (siehe Satz 1.2.26) für  $\|x\| \rightarrow \infty$  die Aussage

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tilde{\Xi} \in A_1 \cap \mathbf{T}_x A_2) &= \mathbb{P}(\Xi \in T^{-1}(A_1 \cap \mathbf{T}_x A_2)) = \mathbb{P}(\Xi \in T^{-1}(A_1) \cap \mathbf{T}_x T^{-1}(A_2)) \\ &\rightarrow \mathbb{P}(\Xi \in T^{-1}(A_1))\mathbb{P}(\Xi \in T^{-1}(A_2)) = \mathbb{P}(\tilde{\Xi} \in A_1)\mathbb{P}(\tilde{\Xi} \in A_2). \end{aligned}$$

□

Über das zweite faktorielle Momentenmaß von  $\tilde{\Xi}$  lässt sich folgende Aussage treffen.

**Satz 2.3.4.** *Das zweite faktorielle Momentenmaß  $\Lambda^{(2)}$  des Matérn I-Prozesses  $\tilde{\Xi}$  ist absolut stetig bezüglich  $(\lambda_d \otimes \mathbb{Q})^2$  mit Dichte*

$$\begin{aligned} &\varrho^{(2)}(K_0 + x, L_0 + y) \\ &= \gamma^2 \mathbb{1}\{(K_0 + x) \cap (L_0 + y) = \emptyset\} \exp\left\{-\gamma \int_{\mathcal{K}_0} \lambda_d(M_0 + ((K_0 + x) \cup (L_0 + y))^*) \mathbb{Q}(dM_0)\right\}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

für  $K_0, L_0 \in \mathcal{K}_0$ ,  $x, y \in \mathbb{R}^d$ .

*Beweis.* Für  $A_1, A_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{K}')$  gilt nach (1.13) und Satz 1.2.23

$$\begin{aligned}
 \Lambda^{(2)}(A_1 \times A_2) &= \mathbb{E} \sum_{K \in \Xi} \sum_{L \in \Xi \setminus \{K\}} \mathbb{1}_{A_1}(K) \mathbb{1}_{A_2}(L) \\
 &= \mathbb{E} \sum_{K \in \Xi} \sum_{L \in \Xi \setminus \{K\}} \mathbb{1}_{A_1}(K) \mathbb{1}_{A_2}(L) \mathbb{1}\{\Xi(\mathcal{F}_K) = 1\} \mathbb{1}\{\Xi(\mathcal{F}_L) = 1\} \\
 &= \mathbb{E} \int_{\mathcal{K}_0} \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{L \in \Xi} \mathbb{1}_{A_1}(K_0 + x) \mathbb{1}_{A_2}(L) \mathbb{1}\{\Xi(\mathcal{F}_{K_0+x}) = 0\} \\
 &\quad \times \mathbb{1}\{(\Xi \cup \{K_0 + x\})(\mathcal{F}_L) = 1\} dx \mathbb{Q}(dK_0) \\
 &= \gamma \int_{\mathcal{K}_0} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{A_1}(K_0 + x) \mathbb{E} \sum_{L \in \Xi} \mathbb{1}_{A_2}(L) \mathbb{1}\{\Xi(\mathcal{F}_{K_0+x}) = 0\} \\
 &\quad \times \mathbb{1}\{\Xi(\mathcal{F}_L) = 1\} \mathbb{1}\{(K_0 + x) \cap L = \emptyset\} dx \mathbb{Q}(dK_0) \\
 &= \gamma^2 \int_{\mathcal{K}_0} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathcal{K}_0} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{A_1}(K_0 + x) \mathbb{1}_{A_2}(L_0 + y) \mathbb{1}\{(K_0 + x) \cap (L_0 + y) = \emptyset\} \\
 &\quad \times \mathbb{P}(\Xi(\mathcal{F}_{(K_0+x) \cup (L_0+y)}) = 0) dy \mathbb{Q}(dL_0) dx \mathbb{Q}(dK_0) \\
 &= \gamma^2 \int_{\mathcal{K}_0} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathcal{K}_0} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{A_1}(K_0 + x) \mathbb{1}_{A_2}(L_0 + y) \mathbb{1}\{(K_0 + x) \cap (L_0 + y) = \emptyset\} \\
 &\quad \times \exp\{-\gamma \int_{\mathcal{K}_0} \lambda_d(M_0 + ((K_0 + x) \cup (L_0 + y))^*) \mathbb{Q}(dM_0)\} dy \mathbb{Q}(dL_0) dx \mathbb{Q}(dK_0).
 \end{aligned}$$

□

### Matérns zweiter Hard-Core-Prozess, Verallgemeinerungen und Zusammenhang zum Dead Leaves Modell

Die Tatsache, dass Punktepaare von  $\xi$ , deren Abstand höchstens  $R$  beträgt, im Matérn I-Modell gelöscht werden, führt zu sehr niedrigen sekundären Intensitäten in diesem Modell. Um dieses Defizit zu überwinden, wird im Matérn II-Modell versucht, das „unnötige“ Löschen von Punkten zu vermindern. Dazu wird im klassischen Modell jedem Punkt eine auf  $[0, 1]$  gleichverteilte Marke zugewiesen, unabhängig von den anderen Marken und von  $\xi$ . Haben nun zwei Punkte einen kleineren Abstand als  $R$  voneinander, so wird derjenige mit der größeren Marke gelöscht. Wichtig dabei ist, dass dieser paarweise Vergleich der Marken zwischen allen Punktepaaren mit Abstand kleiner  $R$  durchgeführt wird, also insbesondere zwischen Paaren, bei denen ein Punkt bereits von einem anderen gelöscht wird. Übrig bleiben diejenigen Punkte, die von keinem anderen Punkt aufgrund obiger Vorschrift gelöscht werden.

Ausgangspunkt ist damit formal der stationäre markierte gewöhnliche Poissonprozess  $\xi = (x_i, m_i)_{i \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{R}^d \times [0, 1]$ , dessen unmarkierte Version wir mit  $\xi_0$  bezeichnen. Daraus resultiert ein ausgedünnter Punktprozess

$$\tilde{\xi} = \{x_i \in \xi_0 : B(x_i, R/2) \cap B(x_j, R/2) \neq \emptyset \text{ für ein } x_j \in \xi_0 (i \neq j) \Rightarrow m_i < m_j\}, \quad (2.25)$$

den wir als Matérnschen Hard-Core-Prozess vom Typ II bezeichnen.

Hier soll nun eine Verallgemeinerung des Matérn II-Modells nach [37] vorgestellt werden, welche in späteren Abschnitten weitere Verwendung finden wird. Ausgangspunkt ist ein stationärer markierter Poissonscher Partikelprozess  $\Xi = (X_i, m_i)_{i \in \mathbb{N}}$  auf  $\mathcal{K}' \times S$  mit Intensität  $\gamma > 0$  und  $S \in \mathcal{B}([0, \infty))$ . Es sei daran erinnert, dass wir darunter einen Poissonschen Partikelprozess verstehen, dessen Partikel zusätzlich mit Marken aus  $S$  versehen sind, wobei dessen Intensitätsmaß  $\Theta$  nach (1.17) die Gestalt

$$\Theta = \gamma \Phi(\lambda_d \otimes \mathbb{Q}')$$

besitzt. Dabei gilt  $\Phi : \mathbb{R}^d \times \mathcal{K}_0 \times S \rightarrow \mathcal{K}' \times S$ ,  $(x, K_0, m) \mapsto (K_0 + x, m)$  und  $\mathbb{Q}'$  ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $\mathcal{K}_0 \times S$ . Für  $\mathbb{Q}'$  gelte zudem

$$\mathbb{Q}'(A \times B) = \int_A \mu^{K_0}(B) \mathbb{Q}(dK_0), \quad A \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_0), B \in \mathcal{B}(S) \quad (2.26)$$

für eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen  $\{\mu^{K_0} : K_0 \in \mathcal{K}_0\}$  auf  $S$ , den sogenannten Markenverteilungen, und ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{Q}$  auf  $\mathcal{K}_0$ , welches wir in Anlehnung an den unmarkierten Fall Formverteilung von  $\Xi$  nennen wollen. Wir verwenden also jedem Partikel zufällig und unabhängig von den anderen Partikeln zugewiesene Marken, wobei die Verteilung der Marke des Partikels  $X \in \Xi$  gerade  $\mu^{X-c(X)}$  ist. Die Ausdünnung erfolgt nun analog zum klassischen Matérn II-Modell: Ein Primärpartikel überlebt genau dann, wenn er eine kleinere Marke besitzt als alle anderen Partikel, die er schneidet, insbesondere überleben also auch die isolierten Partikel. Damit erhalten wir folgendes System  $\tilde{\Xi}$  harter Partikel

$$\tilde{\Xi} = \{X_i \in \Xi_0 : X_i \cap X_j \neq \emptyset \text{ für ein } X_j \in \Xi_0 (i \neq j) \Rightarrow m_i < m_j\}, \quad (2.27)$$

wobei  $\Xi_0$  dem unmarkierten Prozess entspricht. Die Markenverteilung des Partikels  $K \in \Xi$  kann selbst wieder von  $K$  abhängen. Damit die Ausdünnungsprozedur wohldefiniert und nicht zu komplex ist, stellen wir zwei Bedingungen an die Markenverteilung:

$$\text{Es gilt } \mu^K = \mu^{\vartheta K + x} \text{ für alle } K \in \mathcal{K}', x \in \mathbb{R}^d, \vartheta \in \mathcal{SO}_d \text{ und} \quad (2.28)$$

$$\text{für } (K, k), (L, l) \in \Xi, K \neq L \text{ gilt } k \neq l \text{ f.s.} \quad (2.29)$$

Die erste Forderung besagt, dass die Verteilung der Marke eines Partikels höchstens von dessen Form aber nicht von dessen Lage und Orientierung abhängt. Forderung (2.29) gewährleistet, dass die Auswahlvorschrift wohldefiniert ist. Insbesondere muss die Markenverteilung eines Partikels aus  $\Xi$  nicht von dessen Gestalt abhängen, solange (2.29) eingehalten wird.

**Bemerkung 2.3.5.** Wenngleich Markenverteilung eines Partikels durchaus von dessen Gestalt abhängen kann, so erfolgt das Markieren der Partikel dennoch immer unabhängig von den anderen Partikeln und Marken.

Die nachfolgenden Ergebnisse zum Matérn II-Prozess sind in dieser Allgemeinheit, welche sich durch die Möglichkeit der Wahl einer beliebigen Formverteilung und einer beliebigen Markenverteilung, welche (2.28) und (2.29) erfüllt, kennzeichnet, bisher nicht in der Literatur bekannt. In [4] und [37] findet man ein zu Satz 2.3.7 analoges Resultat, jedoch nicht für beliebige Formverteilungen bzw. zwar für beliebige Formverteilungen, aber nur für auf  $[0, 1]$  gleichverteilte Marken. Zudem unterscheidet sich unser Ansatz zur Herleitung von Satz 2.3.7 wesentlich von denen in [4] und [37]. Auch die nachfolgenden Sätze 2.3.8, 2.3.9 und 2.3.11 sind in der Literatur nicht bzw. nur für oben erwähnte Spezialfälle bekannt.

Zur Berechnung der Charakteristika von  $\tilde{\Xi}$  wird, wie schon in (2.8) beschrieben, die Überlebenswahrscheinlichkeit  $g((L_0, l_0))$  eines zu  $\Xi$  hinzugefügten markierten Partikels  $(L_0, l_0)$  eine zentrale Rolle spielen, wobei formal

$$g((L_0, l_0)) := \mathbb{P}^{(0, L_0, l_0)}(L_0 \in \tilde{\Xi}), \quad (2.30)$$

gilt und letzterer Ausdruck nach Satz 1.2.25 auch als  $\mathbb{P}(L_0 \in \tilde{\Xi} | (L_0, l_0) \in \Xi)$  aufgefasst werden kann.

Im Hinblick auf die Bestimmung der Größe  $g((L_0, l_0))$  stellen wir fest, dass ein Partikel von  $\Xi$  die Ausdünnung nach dem Matérn II-Schema genau dann überlebt, wenn er von keinem anderen Partikel gelöscht und damit von keinem anderen Partikel mit kleinerer Marke geschnitten wird.

Es ist daher nach Satz 1.2.25, Satz 1.2.21, Satz 1.2.17 und (2.26)

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}^{(0, L_0, l_0)}(L_0 \in \tilde{\Xi}) &= \mathbb{E} \prod_{(K, k) \in \Xi} \mathbb{1}\{(L_0, l_0) \text{ wird nicht von } (K, k) \text{ gelöscht}\} \\
 &= \exp\left\{-\gamma \int_{\mathcal{K}_0 \times S} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{(K_0 + x, k_0) \text{ löscht } (L_0, l_0)\} dx \mathbb{Q}'(d(K_0, k_0))\right\} \\
 &= \exp\left\{-\gamma \int_{\mathcal{K}_0 \times S} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{(K_0 + x) \cap L_0 \neq \emptyset\} \mathbb{1}\{k_0 < l_0\} dx \mathbb{Q}'(d(K_0, k_0))\right\} \\
 &= \exp\left\{-\gamma \int_{\mathcal{K}_0 \times S} V_d(L_0 + K_0^*) \mathbb{1}\{k_0 < l_0\} \mathbb{Q}'(d(K_0, k_0))\right\} \tag{2.31} \\
 &= \exp\left\{-\gamma \int_{\mathcal{K}_0} \int_S V_d(L_0 + K_0^*) \mathbb{1}\{k_0 < l_0\} \mu^{K_0}(dk_0) \mathbb{Q}(dK_0)\right\} \\
 &= \exp\left\{-\gamma \int_{\mathcal{K}_0} V_d(L_0 + K_0^*) \mu^{K_0}([0, l_0)) \mathbb{Q}(dK_0)\right\} \\
 &= \exp\left\{-\gamma \int_{\mathcal{K}_0} \sum_{i=0}^d \binom{d}{i} V_d(L_0[i], K_0^*[d-i]) \mu^{K_0}([0, l_0)) \mathbb{Q}(dK_0)\right\}.
 \end{aligned}$$

Ist  $\Xi$  zusätzlich noch isotrop so gilt aufgrund von Forderung (2.28) und Satz 1.1.10 bzw. (1.4)

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}^{(0, L_0, l_0)}(L_0 \in \tilde{\Xi}) &= \exp\left\{-\gamma \int_{\mathcal{K}_0 \times S} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{(K_0 + x) \cap L_0 \neq \emptyset\} \mathbb{1}\{k_0 < l_0\} dx \mathbb{Q}'(d(K_0, k_0))\right\} \\
 &= \exp\left\{-\gamma \int_{\mathcal{K}_0 \times S} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{SO_d} \mathbb{1}\{(\vartheta K_0 + x) \cap L_0 \neq \emptyset\} \right. \\
 &\quad \left. \times \mathbb{1}\{k_0 < l_0\} d\vartheta dx \mathbb{Q}'(d(K_0, k_0))\right\} \\
 &= \exp\left\{-\gamma \int_{\mathcal{K}_0 \times S} \mathbb{1}\{k_0 < l_0\} \right. \\
 &\quad \left. \times \int_{\mathbb{R}^d} \int_{SO_d} V_0((\vartheta K_0 + x) \cap L_0) d\vartheta dx \mathbb{Q}'(d(K_0, k_0))\right\} \\
 &= \exp\left\{-\gamma \int_{\mathcal{K}_0} \sum_{i=0}^d c_{d0i} V_i(L_0) V_{d-i}(K) \mu^{K_0}([0, l_0)) \mathbb{Q}(dK_0)\right\}
 \end{aligned}$$

Zusammenfassend gilt folgende Aussage.

**Satz 2.3.6.** Für einen stationären markierten Poissonschen Partikelprozess mit Formmarkenverteilung  $\mathbb{Q}'$  wie in (2.26) gilt für die Überlebenswahrscheinlichkeit des markierten Partikels  $(L_0, l_0)$  im Matérn II-Modell

$$g((L_0, l_0)) = \exp\left\{-\gamma \int_{\mathcal{K}_0} \sum_{i=0}^d \binom{d}{i} V_d(L_0[i], K_0^*[d-i]) \mu^{K_0}([0, l_0]) \mathbb{Q}(dK_0)\right\}. \quad (2.32)$$

Ist  $\Xi$  zusätzlich noch isotrop so gilt weiterhin

$$g((L_0, l_0)) = \exp\left\{-\gamma \int_{\mathcal{K}_0} \sum_{i=0}^d c_{d0i} V_i(L_0) V_{d-i}(K_0) \mu^{K_0}([0, l_0]) \mathbb{Q}(dK_0)\right\}, \quad (2.33)$$

mit  $c_{d0i}$  wie in Satz 1.1.10.

Für Intensität, Formverteilung und Volumendichte des ausgedünnten Prozesses vom Typ II gilt damit nach Bemerkung 2.2.1 und Satz 1.2.25

**Satz 2.3.7.**

$$\tilde{\gamma} = \gamma \int_{\mathcal{K}_0} \int_S g((L_0, l_0)) \mu^{L_0}(dl_0) \mathbb{Q}(dL_0), \quad (2.34)$$

$$\tilde{\mathbb{Q}}(A) = \frac{\gamma}{\tilde{\gamma}} \int_A \int_S g((L_0, l_0)) \mu^{L_0}(dl_0) \mathbb{Q}(dL_0), \quad A \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_0), \quad (2.35)$$

$$\tilde{p} = \tilde{\gamma} \int_{\mathcal{K}_0} V_d(L_0) \tilde{\mathbb{Q}}(dL_0). \quad (2.36)$$

Analog zu Satz 2.3.3 überträgt sich auch hier die Mischungseigenschaft von  $\Xi$  auf  $\tilde{\Xi}$

**Satz 2.3.8.** Der Matérn II-Prozess  $\tilde{\Xi}$  ist mischend.

*Beweis.* Wir fassen  $\Xi$  als unabhängige Markierung eines stationären gewöhnlichen Poissonschen Punktprozesses auf und sehen dann mit Satz 1.2.27, dass  $\Xi$  mischend ist. Die Behauptung folgt nun durch analoges Vorgehen zum Beweis von Satz 2.3.3.  $\square$

Auch über das zweite faktorielle Momentenmaß von  $\tilde{\Xi}$  können wir eine Aussage im Stil von Satz 2.3.4 treffen.

**Satz 2.3.9.** Das zweite faktorielle Momentenmaß  $\Lambda^{(2)}$  des Matérn II-Prozesses  $\tilde{\Xi}$  ist absolut stetig bezüglich  $(\lambda_d \otimes \mathbb{Q}')^2$  mit Dichte

$$\begin{aligned} \varrho^{(2)}(K_0 + x, L_0 + y) &= \gamma^2 \mathbf{1}\{(K_0 + x) \cap (L_0 + y) = \emptyset\} \\ &\times \int_{\mathcal{K}_0} \int_{\mathcal{K}_0} \exp\left\{-\gamma \int_{\mathcal{K}_0} \left( V_d(K_0 + M_0^*) \mu^{M_0}([0, m_1]) + V_d(L_0 + M_0^*) \mu^{M_0}([0, m_2]) \right. \right. \\ &\left. \left. + V_d((K_0 + x + M_0^*) \cap (L_0 + y + M_0^*)) \mu^{M_0}([0, m_1 \vee m_2]) \right) \mathbb{Q}(dM_0) \right\} \mu^{K_0}(dm_1) \mu^{L_0}(dm_2), \end{aligned} \quad (2.37)$$

für  $K_0, L_0 \in \mathcal{K}_0$ ,  $x, y \in \mathbb{R}^d$ .

*Beweis.* Zur einfacheren Darstellung definieren wir uns die Abbildung  $T$ , die jeder lokalendlichen markierten Partikelmenge ihre zugehörige (unmarkierte) harte Teilmenge nach der Matérn II-Ausdünnungsvorschrift zuordnet. Insbesondere ist damit  $\tilde{\Xi} = T(\Xi)$ . Für  $A_1, A_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{K}')$  gilt dann wie im Beweis von Satz 2.3.4 nach (1.13) und zweimaliger Anwendung von Satz 1.2.23

$$\begin{aligned} \Lambda^{(2)}(A_1 \times A_2) &= \mathbb{E} \sum_{K \in \tilde{\Xi}} \sum_{L \in \tilde{\Xi} \setminus \{K\}} \mathbf{1}_{A_1}(K) \mathbf{1}_{A_2}(L) \\ &= \mathbb{E} \sum_{(K, k) \in \Xi} \sum_{(L, l) \in \Xi \setminus \{(K, k)\}} \mathbf{1}_{A_1}(K) \mathbf{1}_{A_2}(L) \mathbf{1}\{K \in T(\Xi)\} \mathbf{1}\{L \in T(\Xi)\} \\ &= \gamma^2 \int_{\mathcal{K}_0 \times S} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathcal{K}_0 \times S} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{A_1}(K_0 + x) \mathbf{1}_{A_2}(L_0 + y) \mathbf{1}\{(K_0 + x) \cap (L_0 + y) = \emptyset\} \\ &\quad \times \mathbb{P}(K_0 + x, L_0 + y \in T(\Xi \cup \{K_0 + x, L_0 + y\})) \\ &\quad \times \mathbb{Q}'(d(L_0, l_0)) dy \mathbb{Q}'(d(K_0, k_0)) dx. \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Partikel  $(K_0 + x, k_0)$  und  $(L_0 + y, l_0)$  bei Hinzufügen zu  $\Xi$  die

Ausdünnung überleben entspricht dann nach Satz 1.2.21, Satz 1.2.17 und (2.26) gerade

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} \prod_{(M_0, m_0) \in \Xi} \mathbb{1}\{(K_0 + x, k_0) \text{ wird nicht von } (M_0, m_0) \text{ gelöscht}\} \\
 & \quad \times \mathbb{1}\{(L_0 + y, l_0) \text{ wird nicht von } (M_0, m_0) \text{ gelöscht}\} \\
 & = \exp\left\{-\gamma \int_{\mathcal{K}_0 \times S} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{(M_0 + z, m_0) \text{ löscht } (K_0 + x, k_0) \text{ oder } (L_0 + y, l_0)\}\right\} \\
 & \quad \times dz \mathbb{Q}'(d(M_0, m_0)) \\
 & = \exp\left\{-\gamma \int_{\mathcal{K}_0 \times S} \int_{\mathbb{R}^d} \left( \mathbb{1}\{(M_0 + z, m_0) \text{ löscht } (K_0 + x, k_0)\} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \mathbb{1}\{(M_0 + z, m_0) \text{ löscht } (K_0 + x, k_0) \text{ und } (L_0 + y, l_0)\} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \mathbb{1}\{(M_0 + z, m_0) \text{ löscht } (L_0 + y, l_0)\} \right) dz \mathbb{Q}'(d(M_0, m_0))\right\}
 \end{aligned}$$

Wir gehen nun wie in (2.31) vor und erhalten schließlich

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} \prod_{(M_0, m_0) \in \Xi} \mathbb{1}\{(K_0 + x, k_0) \text{ wird nicht von } (M_0, m_0) \text{ gelöscht}\} \\
 & \quad \times \mathbb{1}\{(L_0 + y, l_0) \text{ wird nicht von } (M_0, m_0) \text{ gelöscht}\} \\
 & = \exp\left\{-\gamma \int_{\mathcal{K}_0} \left( V_d(K_0 + M_0^*) \mu^{M_0}([0, k_0]) + V_d(L_0 + M_0^*) \mu^{M_0}([0, l_0]) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - V_d((K_0 + x + M_0^*) \cap (L_0 + y + M_0^*)) \mu^{M_0}([0, k_0 \vee l_0]) \right) \mathbb{Q}(dM_0) \right\}.
 \end{aligned}$$

□

Das im Matérn I-Modell auftretende Phänomen, dass eine Erhöhung der Primärintensität in einer Verminderung der Sekundärintensität resultiert, kann auch bei dieser allgemeinen Version des Matérn II-Modells vorkommen, etwa im Falle einer Primärprozesses aus Kugeln mit zufälligen Radien und einer von den Radien abhängigen Markenverteilung (siehe [3] für derartige Beispiele). Für den Fall einer Markenverteilung, die (2.28) und (2.29) genügt und zudem unabhängig von den Partikeln ist, gilt folgende Aussage aus [3].

**Satz 2.3.10.** *Seien  $\gamma_2 > \gamma_1 > 0$  und  $\Xi_1$  bzw.  $\Xi_2$  zwei stationäre markierte Poissonsche Partikelprozesse mit Intensitäten  $\gamma_1$  bzw.  $\gamma_2$ , Formverteilung  $\mathbb{Q}$  und Markenverteilung  $\mu$ , die absolut stetig und unabhängig von den zu markierenden Partikeln ist. Für die daraus resultierenden Matérn II-Prozesse  $\tilde{\Xi}_1$  und  $\tilde{\Xi}_2$  gilt, dass  $\tilde{\Xi}_1$  von  $\tilde{\Xi}_2$  stochastisch dominiert wird, d.h. es gibt einen Prozess  $\tilde{\Xi}'_2 \sim \tilde{\Xi}_2$ , so dass f.s.  $\tilde{\Xi}'_1 \subset \tilde{\Xi}'_2$  gilt.*



Wie wir nun sehen werden, hängt das Matérn II-Modell eng mit dem in 2.3.3 beschriebenen Dead Leaves Modell zusammen.

**Satz 2.3.11.** *Es sei  $\Xi_\gamma$  ein stationärer, unabhängig markierter Poissonscher Partikelprozess mit Intensität  $\gamma > 0$ , Formverteilung  $\mathbb{Q}$ , Markenraum  $[0, 1]$  sowie Markenverteilung  $\lambda_1|_{[0,1]}$  und  $\tilde{\Xi}_\gamma$  der daraus resultierende Matérn II-Prozess. Weiterhin sei  $\Xi_\infty$  ein Poissonprozess in  $\mathcal{K}' \times [0, \infty)$  mit Intensitätsmaß wie in (2.13), Formverteilung  $\mathbb{Q}$  und  $\tilde{\Xi}_\infty$  der daraus resultierende Dead Leaves Prozess. Dann gilt:*

- a)  $\tilde{\Xi}_\gamma$  wird von  $\tilde{\Xi}_\infty$  stochastisch dominiert, d.h. es gibt einen Prozess  $\tilde{\Xi}'_\gamma \sim \tilde{\Xi}_\gamma$ , so dass f.s.  $\tilde{\Xi}'_\gamma \subset \tilde{\Xi}_\infty$  gilt.
- b)  $\tilde{\Xi}_\gamma \xrightarrow{\mathcal{D}} \tilde{\Xi}_\infty$  für  $\gamma \rightarrow \infty$ .

*Beweis.* Zum Beweis dieser Aussage betrachten wir für  $\gamma > 0$  ausgehend von  $\Xi_\infty$  den Prozess

$$\Xi'_\gamma := \bigcup_{(K,t) \in \Xi_\infty: t \leq \gamma} (K, t/\gamma)$$

und stellen fest, dass  $\Xi'_\gamma \sim \Xi_\gamma$  gilt. Für den daraus resultierenden Matérn II-Prozess gilt daher  $\tilde{\Xi}'_\gamma \sim \tilde{\Xi}_\gamma$ . Ein Partikel von  $\Xi'_\gamma$  überlebt nun genau dann die Ausdünnung nach Matérn II, wenn es von keinem anderen Partikel von  $\Xi'_\gamma$  mit kleinerer Marke geschnitten wird, d.h. es gilt realisierungsweise

$$\begin{aligned} \tilde{\Xi}'_\gamma &= \{K : (K, t) \in \Xi'_\gamma, K \cap L \neq \emptyset \text{ für } (L, s) \in \Xi'_\gamma \setminus \{(K, t)\} \Rightarrow t < s\} \\ &= \{K : (K, t) \in \Xi_\infty, t \leq \gamma, K \cap L \neq \emptyset \text{ für } (L, s) \in \Xi_\infty \setminus \{(K, t)\} \Rightarrow t < s\} \\ &\subset \tilde{\Xi}_\infty. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. □

### Matérns dritter Hard-Core-Prozess, Verallgemeinerungen und Zusammenhang zum RSA Modell

In [41] bzw. [42] erwähnt Matérn eine Weiterentwicklung des Hard-Core-Prozesses vom Typ II, welche wir den Matérnschen Hard-Core-Prozess vom Typ III nennen wollen. Der Motivation des Schrittes von Typ II zu Typ III liegt ein Gedanke wie beim Schritt vom Dead Leaves Modell zum RSA Modell zugrunde. Sowohl beim Dead Leaves Modell als auch beim Matérn II-Modell kann es vorkommen, dass ein Partikel des Primärprozesses von einem anderen Primärpartikel gelöscht wird, welcher wiederum selbst nicht akzeptiert wird. Eine Vermeidung dieses Missstandes beim Dead Leaves Modell führte zum RSA Modell und analog wird die Forderung, dass ausschließlich spätere Sekundärpartikel andere Primärpartikel löschen können,

zum Matérn III-Modell führen. In der formalen Darstellung dieses Modells wollen wir [50] folgen. Die in diesem Abschnitt vorgestellten Sätze sind in der Literatur nicht bekannt.

Ausgangspunkt ist auch hier ein stationärer markierter Poissonscher Partikelprozess, wobei jedes Partikel unabhängig mit einer Marke versehen wird. In diesem Modell sind die Marken auf  $[0, 1]$  gleichverteilt. Seien  $\Xi = (X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  der Partikelprozess und  $(m_i)_{i \in \mathbb{N}}$  die zugehörigen Marken. Der resultierende Sekundärprozess entsteht durch sukzessives Vergrößern der Menge der Sekundärpartikel; in jedem Schritt der Konstruktion kommt eine neue Generation von Sekundärpartikeln hinzu. Wir beginnen mit  $\Xi^{(1)} := \Xi$  und definieren dann rekursiv für  $i = 1, 2, \dots$

$$\Upsilon^{(i)} := \Xi^{(i)} \setminus \bigcup_{k: X_k \in \Xi^{(i)}} \{X_j \in \Xi^{(i)} (j \neq k) : X_j \cap X_k \neq \emptyset \text{ und } m_k < m_j\}, \quad (2.38)$$

$$\Xi^{(i+1)} := \Xi^{(i)} \setminus \bigcup_{k: X_k \in \Upsilon^{(i)}} \{X_j \in \Xi^{(i)} : X_j \cap X_k \neq \emptyset \text{ und } m_k \leq m_j\}. \quad (2.39)$$

Der resultierende Sekundärprozess  $\tilde{\Xi}$  ist ein stationärer Partikelprozess bestehend aus allen Partikeln der Mengen  $\Upsilon^{(1)}, \Upsilon^{(2)}, \dots$ , d.h.

$$\tilde{\Xi} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Upsilon^{(i)}. \quad (2.40)$$

Die Menge  $\Xi^{(i)}$  entspricht den bis vor dem  $i$ -ten Schritt noch nicht gelöschten oder ausgewählten Primärpartikeln. In jedem Schritt wählen wir aus diesen Partikeln nach dem Matérn II-Auswahlschema die neue Generation  $\Upsilon^{(i)}$  aus und löschen daraufhin diese Partikel sowie alle Partikel, die sie schneiden, aus dem Vorrat. Insbesondere entspricht also  $\Upsilon^{(1)}$  gerade den Partikeln des Matérn II-Modells. Diese Beobachtung führt zu der Feststellung, dass das Matérn III-Verfahren höhere Intensitäten und Volumendichten als das Matérn II-Verfahren generiert, welches wiederum dichtere Modelle generiert als das Matérn I-Verfahren. Es gilt sogar eine realisierungsweise Inklusion der Modelle, d.h. zu jeder gegebenen Realisierung von  $\Xi$  mitsamt auf  $[0, 1]$  gleichverteilten Marken ist der resultierende Matérn I-Prozess eine Teilmenge des resultierenden Matérn II-Prozesses, welcher wiederum eine Teilmenge des resultierenden Matérn III-Prozesses darstellt.

**Satz 2.3.12.** *Es sei  $\Xi = (X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  ein stationärer Poissonscher Partikelprozess mit Intensität  $\gamma > 0$  und  $(m_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Folge von unabhängigen auf  $[0, 1]$  gleichverteilten Marken. Bezeichnet  $\tilde{\Xi}_j$  den daraus resultierenden Matérnsche Partikelprozess vom Typ  $j \in \{I, II, III\}$ , so gibt es  $\tilde{\Xi}'_j \sim \tilde{\Xi}_j$ ,  $j = I, II, III$ , so dass f.s.*

$$\tilde{\Xi}'_I \subset \tilde{\Xi}'_{II} \subset \tilde{\Xi}'_{III} \quad (2.41)$$

*gilt. Insbesondere folgt daraus für die zugehörigen Intensitäten  $\tilde{\gamma}_j$ ,  $j \in \{I, II, III\}$ , die Beziehung*

$$\tilde{\gamma}_I \leq \tilde{\gamma}_{II} \leq \tilde{\gamma}_{III}. \quad (2.42)$$

Des Weiteren weist das Matérn III-Modell ähnlich wie das Matérn II-Modell eine Monotonität auf, die sich in folgendem Ergebnis niederschlägt.

**Satz 2.3.13.** *Seien  $\gamma_2 > \gamma_1 > 0$  und  $\tilde{\Xi}_1$  und  $\tilde{\Xi}_2$  zwei stationäre Matérn III-Prozesse, die aus einem Primärprozess mit Intensität  $\gamma_1$  bzw.  $\gamma_2$  und Formverteilung  $\mathbb{Q}$  entstanden sind. Dann gibt es einen Prozess  $\tilde{\Xi}'_1 \sim \tilde{\Xi}_1$ , so dass f.s.*

$$\tilde{\Xi}'_1 \subset \tilde{\Xi}_2$$

*gilt.*

*Beweis.* Zum Beweis dieser Kopplungsaussage beginnen wir mit  $\Xi_2 = (X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  wie oben, einer Folge  $(m_i)_{i \in \mathbb{N}}$  von unabhängigen, auf  $[0, 1]$  gleichverteilten Marken und dem daraus resultierenden Matérn III-Modell  $\tilde{\Xi}_2$ . Nun setzen wir

$$\Xi'_1 := \{X_i \in \Xi_2 : m_i \leq \gamma_1/\gamma_2\}$$

und stellen fest, dass  $\Xi'_1 \sim \Xi_1$  und  $\Xi'_1 \subset \Xi_2$  gelten. Für das daraus resultierende Matérn III-Modell  $\tilde{\Xi}'_1$  gilt daher wegen der Unabhängigkeit der ursprünglichen Marken  $\tilde{\Xi}'_1 \sim \tilde{\Xi}_1$ . Zudem haben die Partikel von  $\Xi_2 \setminus \Xi'_1$  bei der Matérn III-Auswahlvorschrift keinen Einfluss auf die Auswahl der Partikel aus  $\Xi'_1$ , weshalb für das aus  $\Xi_2$  resultierende Matérn III-Modell  $\tilde{\Xi}_2$  folgt, dass  $\tilde{\Xi}'_1 \subset \tilde{\Xi}_2$  gilt.  $\square$

Ähnlich wie in Satz 2.3.11 erhalten wir folgende Aussage über den Zusammenhang zwischen dem Matérn III-Prozess und dem RSA Modell.

**Satz 2.3.14.** *Es sei  $\Xi_\gamma$  ein stationärer, unabhängig markierter Poissonscher Partikelprozess mit Intensität  $\gamma > 0$ , Formverteilung  $\mathbb{Q}$ , Markenraum  $[0, 1]$  und Markenverteilung  $\lambda_1|_{[0,1]}$  und  $\tilde{\Xi}_\gamma$  der daraus resultierende Matérn III-Prozess. Weiterhin sei  $\Xi_\infty$  ein Poissonprozess in  $\mathcal{K}' \times [0, \infty)$  mit Intensitätsmaß wie in (2.13) und  $\tilde{\Xi}_\infty$  das daraus resultierende RSA Modell. Dann gilt:*

- a)  $\tilde{\Xi}_\gamma$  wird von  $\tilde{\Xi}_\infty$  stochastisch dominiert, d.h. es gibt einen Prozess  $\tilde{\Xi}'_\gamma \sim \tilde{\Xi}_\gamma$ , so dass f.s.  $\tilde{\Xi}'_\gamma \subset \tilde{\Xi}_\infty$  gilt.
- b)  $\tilde{\Xi}_\gamma \xrightarrow{\mathcal{D}} \tilde{\Xi}_\infty$  für  $\gamma \rightarrow \infty$ .

*Beweis.* Der Beweis erfolgt analog zum Beweis von Satz 2.3.11.  $\square$

Analog zu Satz 2.3.3 und Satz 2.3.8 überträgt sich auch hier die Mischungseigenschaft von  $\Xi$  auf  $\tilde{\Xi}$

**Satz 2.3.15.** *Der Matérn III-Prozess  $\tilde{\Xi}$  ist mischend.*

*Beweis.* Analog zum Beweis von Satz 2.3.8.  $\square$

Für eine Möglichkeit der effektiven Simulation des Matérn III-Modells mittels perfect simulation sei auf [21] verwiesen.

## 2.4 Der Prozess der gewichtsmaximalen harten Teilmenge von $\Xi$

Wir haben im dem vorherigen Abschnitt diverse Ansätze kennengelernt, um ein System zufälliger harter Partikel zu modellieren, wobei der Schwerpunkt auf Ausdünnungsmodellen lag. Betrachtet man diese Ausdünnungsmodelle unter dem Aspekt der damit realisierbaren Volumendichten, so sieht man, dass diese in dieser Hinsicht sehr beschränkt sind und deren Volumendichte nach Satz 2.3.12 und Satz 2.3.14 unterhalb derjenigen des RSA Modells liegen. Wenn auch im Allgemeinen für die Volumendichten des RSA Modells keine expliziten Darstellungen und Werte bekannt sind, so zeigen schon die in Abschnitt 2.3.4 erwähnten Simulationen eines RSA Prozesses im  $\mathbb{R}^2$  bzw.  $\mathbb{R}^3$  bestehend aus Kugeln gleicher Größe, dass die resultierenden Volumendichten von 0,55 bzw. 0,38 im mittleren Bereich liegen, gemessen daran, dass man mit solchen Kugeln rein deterministisch Volumendichten von ca. 0,91 bzw. 0,74 erreichen kann (siehe Kapitel 6). Dies dient uns als Motivation, ein Ausdünnungsmodell einzuführen, das darauf angelegt ist möglichst hohe Volumendichten zu erreichen, indem es die bisher dargestellten Ausdünnungsmethoden noch einmal deutlich weiterführt. Alle diese Methoden haben nämlich unter dem Aspekt der Generierung von Packungen mit möglichst hoher Volumendichte den Nachteil, dass sie im Allgemeinen suboptimal agieren, indem sie zum einen unnötig viele Partikel löschen oder zum anderen Partikel bzw. Partikelkonstellationen wählen, welche zu niedrigeren Volumendichten führen als dies möglich wäre. Genau dieser Missstand soll nun bei dem *Prozess der gewichtsmaximalen harten Teilmenge* eines Primärprozesses überwunden werden.

Den Ausgangspunkt dabei bildet ein stationärer Poissonscher Partikelprozess  $\Xi$  bzw. genauer  $\Xi_W$ , also genau die Partikel von  $\Xi$ , deren Umkugelmittelpunkte in einem kompakten Beobachtungsfenster  $W \subset \mathbb{R}^d$  liegen. Realisierungsweise betrachtet soll  $\tilde{\Xi}_W$ , der Prozess der gewichtsmaximalen harten Teilmenge von  $\Xi_W$ , nun aus derjenigen Teilmenge von  $\Xi_W$  bestehen, die zum einen hart ist und zum anderen ein gegebenes Gewichtsfunktional unter all diesen harten Teilmengen maximiert. Wir wollen diesen Prozess im folgenden Kapitel formal einführen. Dort werden wir auch überlegen, wie man ausgehend davon einen derartigen Prozess auf dem ganzen Raum einführen kann.

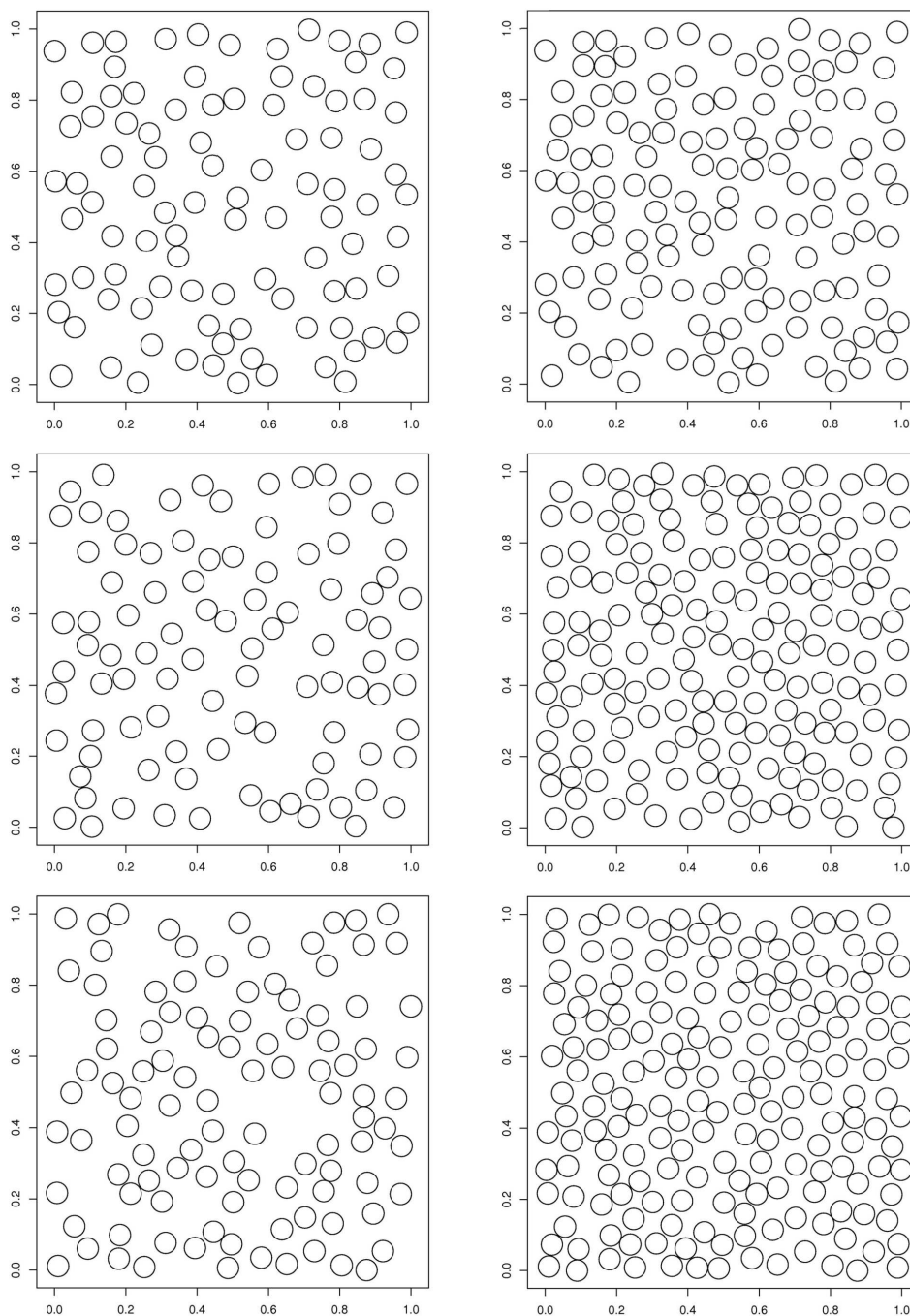


Abbildung 2.6: Realisierungen der Matérn II (jeweils links) und Matérn III (jeweils rechts) Prozesse in  $[0, 1]^2$  für Primärintensitäten von  $\gamma = 500, 2000,$  und  $50000$  (von oben nach unten) und einen Poissonschen Partikelprozess mit Formverteilung  $\mathbb{Q} = \delta_{B(0,0,03)}$ , wobei die linke Partikelmenge immer in der rechten enthalten ist.

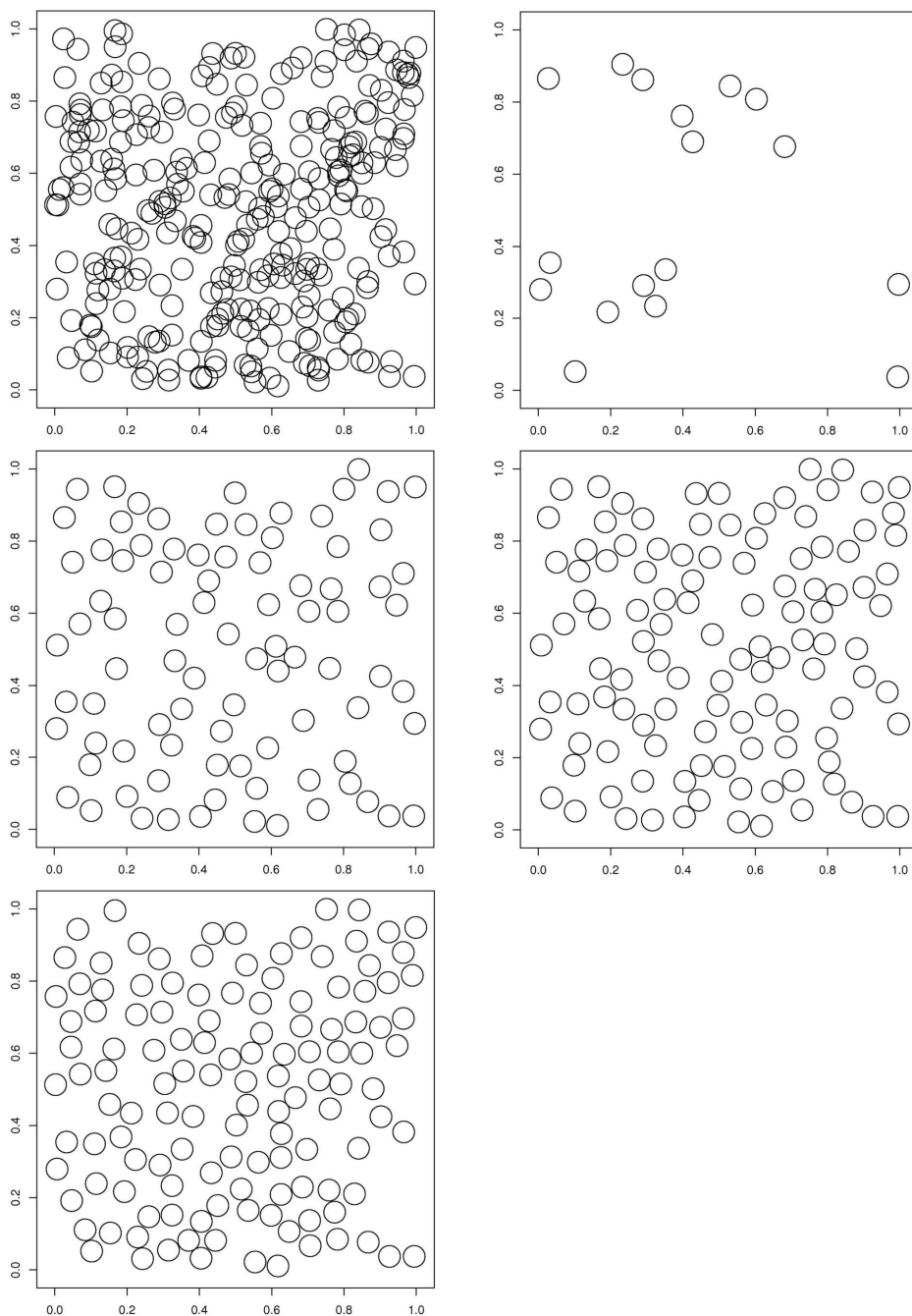


Abbildung 2.7: Realisierung der Einschränkungen eines stationären Poissonschen Partikelprozesses in  $[0, 1]^2$  mit Intensität  $\gamma = 300$  und Formverteilung  $\mathbb{Q} = \delta_{B(0,0,0.03)}$  (oben links, 290 Partikel), sowie die daraus resultierenden Matérnschen Prozesse vom Typ I (oben rechts, 17 Partikel), II (Mitte links, 88 Partikel) und III (Mitte rechts, 113 Partikel) sowie des Prozesses der volumenmaximalen Teilmenge (unten links, 127 Partikel).

# Kapitel 3

## Der Prozess der gewichtsmaximalen harten Teilmenge von $\Xi$

In diesem Kapitel wollen wir den in Abschnitt 2.4 beschriebenen Prozess der gewichtsmaximalen harten Teilmenge eines stationären Poissonschen Partikelprozesses  $\Xi$  formal einführen. Dazu behandeln wir in Abschnitt 3.1 zuerst eine rein deterministische Fragestellung, welche danach auf ein stochastisches Umfeld übertragen wird und es ermöglicht, den oben skizzierten Prozess formal einzuführen. Wir weisen darauf hin, dass alle ab diesem Kapitel dargestellten Ergebnisse neu sind, sofern wir nicht explizit darauf hinweisen, dass dies nicht der Fall ist.

Von nun an sei dazu  $M : \mathcal{K}' \rightarrow [0, \infty)$  ein translationsinvariantes, messbares Funktional.

### 3.1 Die messbare Auswahl einer gewichtsmaximalen harten Teilmenge

Wir betrachten nun endliche Kollektionen konvexer Partikel und wollen zeigen, dass man jede solche Kollektion  $\Lambda \in \mathcal{F}_e(\mathcal{K}')$  auf messbare Weise auf eine eindeutig bestimmte Teilmenge  $\tilde{\Lambda}$  von  $\Lambda$  abbilden kann, so dass deren Partikel disjunkt sind und das Gewichtsfunktional  $M$  maximieren.

Formal betrachten wir dazu für  $\Lambda := \{K_1, \dots, K_n\} \in \mathcal{F}_e(\mathcal{K}')$  die Menge

$$\mathcal{J} := \{J \subset \{1, \dots, n\} : k, l \in J, k \neq l \Rightarrow K_k \cap K_l = \emptyset\}. \quad (3.1)$$

Dann definieren wir  $\tilde{\Lambda}$  durch

$$\tilde{\Lambda} := \{K_i : i \in \tilde{J}\} \quad (3.2)$$

mit  $\tilde{J} \in \mathcal{J}$ , so dass

$$\sum_{j \in \tilde{J}} M(K_j) \geq \sum_{i \in I} M(K_i) \text{ für alle } I \in \mathcal{J}. \quad (3.3)$$

Damit ist  $\tilde{\Lambda}$  also diejenige bzw. eine der harten Teilmengen von  $\Lambda$ , die das Gewichtsfunktional  $M$  maximiert. Im Allgemeinen ist  $\tilde{\Lambda}$  durch  $\Lambda$  nicht eindeutig bestimmt. Besteht  $\Lambda$  etwa nur

aus zwei sich schneidenden Partikeln gleichen Gewichts, so erfüllt jeder dieser beiden Partikel allein die definierenden Eigenschaften von  $\tilde{\Lambda}$ . Die zentrale Überlegung dieses Abschnitts dreht sich darum, ob es eine wohldefinierte und messbare Abbildung

$$\begin{aligned} T : \mathcal{F}_e(\mathcal{K}') &\rightarrow \mathcal{F}_e(\mathcal{K}') \\ \Lambda &\mapsto \tilde{\Lambda}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

mit  $\tilde{\Lambda}$  wie durch (3.2) und (3.3) festgelegt, gibt. Diese soll zusätzlich noch translationskovariant sein, d.h. es soll

$$T(\Lambda + x) = T(\Lambda) + x \tag{3.5}$$

für alle  $x \in \mathbb{R}^d$  gelten.

Wir werden den Beweis der Existenz einer solchen Abbildung konstruktiv erbringen und müssen dazu auf dem Raum  $\mathcal{F}_e(\mathcal{K}')$  eine strenge Totalordnung einführen, über die wir dann in dem Fall, dass es mehrere gewichtsmaximale harte Teilmengen von  $\Lambda$  gibt, auf messbare Weise eine Menge auswählen können.

### 3.1.1 Eine translationsinvariante strenge Totalordnung auf $\mathcal{K}'$

Wir wollen eine strenge Totalordnung  $\prec_1$  auf  $\mathcal{K}'$  angeben, so dass die Abbildung

$$(K, L) \mapsto \mathbb{1}\{K \preceq_1 L\}$$

messbar bezüglich den jeweiligen Borelschen  $\sigma$ -Algebren ist, wobei  $\preceq_1$  die zugehörige Totalordnung auf  $\mathcal{K}'$  bezeichnet. Weiterhin soll  $\prec_1$  translationsinvariant in dem Sinn sein, dass

$$K \prec_1 L \Rightarrow K + x \prec_1 L + x \tag{3.6}$$

für alle  $K, L \in \mathcal{K}'$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$  gilt.

Dazu machen wir Gebrauch von der Stützfunktion, die wir in Abschnitt 1.1 vorgestellt haben. Unser Verfahren wählt nun für den Fall, dass  $K \neq L$  ist, einen Vektor  $u^* \in S^{d-1}$  mit  $h_K(u^*) \neq h_L(u^*)$  aus und wir legen fest, dass

$$K \prec_1 L \text{ genau dann gelten möge, wenn } h_K(u^*) < h_L(u^*) \text{ gilt.} \tag{3.7}$$

Dazu wählen wir eine im weiteren Verlauf fixe abzählbare Menge  $D^{d-1} \subset S^{d-1}$ , die dicht in  $S^{d-1}$  ist. Die Existenz einer solchen Menge ist durch die Kompaktheit und Metrisierbarkeit von  $S^{d-1}$  gewährleistet (siehe [1]). Wir schreiben

$$D^{d-1} = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Beim Vergleich von  $K$  und  $L$  betrachten wir die Folge  $(\delta_n^{K,L})_{n \in \mathbb{N}}$  mit

$$\delta_n^{K,L} = |h_K(u_n) - h_L(u_n)|.$$



Wir wissen nun wegen der Kompaktheit von  $K$  und  $L$ , dass diese Folge beschränkt ist. Des Weiteren gilt

$$K = L \Leftrightarrow \delta_n^{K,L} = 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dies folgt aus Satz 1.1.5 und der Tatsache, dass stetige Funktionen durch ihre Funktionswerte auf dichten Teilmengen ihres Definitionsbereichs eindeutig bestimmt sind. Für den Fall, dass  $K \neq L$  gilt, wählen wir dann

$$u^* = u_{i^*}, \text{ mit } i^* = \min\{n \in \mathbb{N} : \delta_n^{K,L} \neq 0\} \quad (3.8)$$

und erhalten somit, wie in (3.7) beschrieben, eine totale Ordnungsrelation auf  $\mathcal{K}'$ .

Für  $K \neq L$  ist  $u^*$  aus (3.8) folglich wohldefiniert. Zudem ist die so definierte strenge Totalordnung translationsinvariant im Sinne von (3.6), da nach Satz 1.1.5 e) für  $x \in \mathbb{R}^d$  die Beziehung  $\delta_n^{K+x, L+x} = \delta_n^{K,L}$  gilt. Aus der strengen Totalordnung  $\prec_1$  auf  $\mathcal{K}'$  lässt sich eine Totalordnung  $\preceq_1$  auf  $\mathcal{K}'$  gewinnen, indem man für  $K, L \in \mathcal{K}'$  fordert, dass

$$K \preceq_1 L \text{ genau dann gelten möge, wenn } K \prec_1 L \text{ oder } K = L \text{ gilt.}$$

Für  $\preceq_1$  gilt dann nachfolgende Aussage.

**Lemma 3.1.1.** *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} f : \mathcal{K}' \times \mathcal{K}' &\rightarrow \{0, 1\} \\ (K, L) &\mapsto \mathbb{1}\{K \preceq_1 L\} \end{aligned}$$

ist messbar.

*Beweis.* Es reicht aus die Messbarkeit der Menge  $f^{-1}(\{1\})$  zu zeigen. Dazu schreiben wir

$$f^{-1}(\{1\}) = \{(K, L) \in (\mathcal{K}' \times \mathcal{K}')_{\neq} : K \prec_1 L\} \cup \{(K, K) : K \in \mathcal{K}'\}.$$

Nun seien für  $j \in \mathbb{N}$

$$A_j := \{(K, L) \in (\mathcal{K}' \times \mathcal{K}')_{\neq} : h_K(u_j) = h_L(u_j)\}$$

und

$$B_j := \{(K, L) \in (\mathcal{K}' \times \mathcal{K}')_{\neq} : h_K(u_j) < h_L(u_j)\}.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} &\{(K, L) \in (\mathcal{K}' \times \mathcal{K}')_{\neq} : K \prec_1 L\} \\ &= \{(K, L) \in (\mathcal{K}' \times \mathcal{K}')_{\neq} : \exists i \in \mathbb{N} : h_K(u_i) < h_L(u_i) \text{ und } h_K(u_j) = h_L(u_j) \text{ für alle } j < i\} \\ &= \bigcup_{i=1}^{\infty} \left( B_i \cap \bigcap_{j=1}^{i-1} A_j \right). \end{aligned}$$

Zudem wissen wir aus Satz 1.1.6, dass die Abbildungen

$$g_i : \mathcal{K}' \times \mathcal{K}' \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(K, L) \mapsto (h_K - h_L)(u_i)$$

für alle  $i \in \mathbb{N}$  stetig sind. Damit ist dann  $B_i = g_i^{-1}((-\infty, 0))$  und  $A_j = g_j^{-1}(\{0\})$ , woraus die Messbarkeit von  $f^{-1}(\{1\})$  folgt.  $\square$

**Bemerkung 3.1.2.** 1.) Aufgrund der Aussage von Lemma 3.1.1 ist die Abbildung  $\varsigma : \mathcal{F}_e(\mathcal{K}') \rightarrow \mathcal{K}'$ , die einer endlichen Menge von paarweise verschiedenen konvexen Körpern ihr bezüglich  $\prec_1$  kleinstes Element zuordnet, messbar in dem Sinne, dass die Abbildung

$$l : \mathcal{F}_e(\mathcal{K}') \times \mathcal{K}' \rightarrow \{0, 1\}$$

$$(\{K_1, \dots, K_n\}, K) \mapsto \mathbb{1}\{K = \varsigma(\{K_1, \dots, K_n\})\}$$

messbar bezüglich den jeweiligen Borelschen  $\sigma$ -Algebren ist.

- 2.) Die Totalordnung  $\prec_1$  ist nicht dreihinvariant und damit auch nicht bewegungsinvariant, d.h. im Allgemeinen impliziert  $K \prec_1 L$  nicht  $\vartheta K \prec_1 \vartheta L$  für  $\vartheta \in \mathcal{SO}_d$ . Dies liegt daran, dass  $h_{\vartheta K}(u) = h_K(\vartheta^{-1}(u))$  gilt und damit aus dem sukzessiven Vergleich von  $h_K(u_i)$  und  $h_L(u_i)$  nicht dasselbe Ergebnis wie beim Vergleich der Werte  $h_K(\vartheta^{-1}u_i)$  und  $h_L(\vartheta^{-1}u_i)$  resultieren muss und zudem im Allgemeinen  $\vartheta^{-1}u_i$  nicht mehr in  $D^{d-1}$  liegen muss.

Wir wollen nun mit Hilfe von  $\prec_1$  bzw.  $\preceq_1$  eine messbare, translationsinvariante Totalordnung auf  $\mathcal{F}_e(\mathcal{K}')$  einführen.

### 3.1.2 Eine translationsinvariante strenge Totalordnung auf $\mathcal{F}_e(\mathcal{K}')$

Seien  $\Lambda = \{K_1, \dots, K_n\} \in \mathcal{F}_e(\mathcal{K}')$  und  $(\emptyset \neq) \Gamma \subset \mathcal{F}_e(\Lambda)$  eine Teilmenge der Potenzmenge von  $\Lambda$ . Wir möchten nun eine wohldefinierte Auswahlabbildung  $\varsigma : \mathcal{F}_e(\Lambda) \rightarrow \mathcal{F}_e(\mathcal{K}')$  konstruieren, die uns auf messbare Weise ein Element aus  $\Gamma$  liefert. Die Messbarkeit bezieht sich dabei auf die Messbarkeit der Abbildung

$$l : \mathcal{F}_e(\mathcal{F}_e(\mathcal{K}')) \times \mathcal{F}_e(\mathcal{K}') \rightarrow \{0, 1\}$$

$$(\Gamma, \Lambda) \mapsto \mathbb{1}\{\Lambda = \varsigma(\Gamma)\}$$

bezüglich den jeweiligen Borelschen  $\sigma$ -Algebren. Eine solche Auswahlabbildung  $\varsigma$  nennen wir eine *messbare Selektion*.

Wir werden zunächst mithilfe der Totalordnung  $\preceq_1$  auf  $\mathcal{K}'$  aus dem vorherigem Abschnitt eine translationsinvariante Totalordnung  $\preceq$  auf  $\mathcal{F}_e(\mathcal{K}')$  einführen, mit deren Hilfe wir später auswählen werden. Unter der Translationsinvarianz wollen wir analog zu (3.6) verstehen, dass für  $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathcal{F}_e(\mathcal{K}'), x \in \mathbb{R}^d$  die Aussage

$$\Lambda_1 \prec \Lambda_2 \Rightarrow \Lambda_1 + x \prec \Lambda_2 + x, \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^d \quad (3.9)$$

gilt. Beim Vergleich zweier Mengen  $\Lambda_1 = \{K_1, \dots, K_n\}, \Lambda_2 = \{L_1, \dots, L_m\} \in \mathcal{F}_e(\mathcal{K}')$  gehen wir dazu wie folgt vor:

- (i) Es seien  $v^{(1)} := (K_{i_1}, \dots, K_{i_n})$  und  $v^{(2)} := (L_{i_1}, \dots, L_{i_m})$ , wobei die Einträge von  $v^{(1)}$  und  $v^{(2)}$  aufsteigend bezüglich  $\preceq_1$  angeordnet sind.
- (ii) Zum Vergleich von  $\Lambda_1$  und  $\Lambda_2$  betrachten wir nun  $v^{(1)}$  und  $v^{(2)}$ . Falls  $v_1^{(l)} \prec_1 v_1^{(k)}$  für  $l, k \in \{1, 2\}, l \neq k$  gilt, so soll  $\Lambda_l \prec \Lambda_k$  gelten. Im Fall der Gleichheit von  $v_1^{(1)}$  und  $v_1^{(2)}$  vergleicht man  $v_2^{(1)}$  und  $v_2^{(2)}$ . Gilt  $v_j^{(1)} = v_j^{(2)}$  für alle  $1 \leq j \leq i$ , so werden  $v_{i+1}^{(1)}$  und  $v_{i+1}^{(2)}$  verglichen und falls  $v_{i+1}^{(l)} \prec_1 v_{i+1}^{(k)}$  für  $l, k \in \{1, 2\}, l \neq k$  gilt, so soll  $\Lambda_l \prec \Lambda_k$  gelten. Tritt der Fall ein, dass die ersten  $j$  Einträge von  $v^{(1)}$  und  $v^{(2)}$  gleich sind und genau eine der Mengen  $\Lambda_1$  und  $\Lambda_2$  nur  $j$  Elemente besitzen, so sei diese die kleinere bezüglich  $\prec$ . Haben  $\Lambda_1$  und  $\Lambda_2$  gleich viele Elemente und stimmen alle Einträge von  $v^{(1)}$  jeweils mit den zugehörigen Einträgen aus  $v^{(2)}$  überein, so ist  $\Lambda_1 = \Lambda_2$ .

Aus der strengen Totalordnung  $\prec$  auf  $\mathcal{F}_e(\mathcal{K}')$  lässt sich eine Totalordnung  $\preceq$  auf  $\mathcal{F}_e(\mathcal{K}')$  gewinnen, indem man für  $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathcal{F}_e(\mathcal{K}')$  fordert, dass

$$\Lambda_1 \preceq \Lambda_2 \text{ genau dann gelten möge, wenn } \Lambda_1 \prec \Lambda_2 \text{ oder } \Lambda_1 = \Lambda_2 \text{ gilt.}$$

Wie für  $\preceq_1$  gilt auch hier folgende Aussage.

**Lemma 3.1.3.** *Die Abbildung*

$$f : \mathcal{F}_e(\mathcal{K}') \times \mathcal{F}_e(\mathcal{K}') \rightarrow \{0, 1\}$$

$$(\Lambda_1, \Lambda_2) \mapsto \mathbb{1}\{\Lambda_1 \preceq \Lambda_2\}$$

*ist messbar.*

*Beweis.* Seien  $\Lambda_1 = \{K_1, \dots, K_n\} \in \mathcal{F}_e(\mathcal{K}')$  und  $\Lambda_2 = \{L_1, \dots, L_m\} \in \mathcal{F}_e(\mathcal{K}')$ . Wegen der Aussage von Lemma 3.1.1, können wir oBdA davon ausgehen, dass  $K_1 \prec_1 K_2 \prec_1 \dots \prec_1 K_n$  und  $L_1 \prec_1 L_2 \prec_1 \dots \prec_1 L_m$  gilt. Wir wollen die Messbarkeit der Abbildung  $f$  zeigen und verwenden dazu die Darstellung

$$f(\Lambda_1, \Lambda_2) = \sum_{i=1}^{n \vee m} \left( \prod_{j=1}^{i-1} \mathbb{1}\{K_j = L_j\} \right) \mathbb{1}\{K_i \prec_1 L_i\} + \left( \prod_{j=1}^{n \vee m} \mathbb{1}\{K_j = L_j\} \right) \mathbb{1}\{m \geq n\}.$$

Damit ist  $f$  nach Lemma 3.1.1 messbar. □

**Bemerkung 3.1.4.** Aufgrund der Aussage von Lemma 3.1.3 ist die Abbildung  $\zeta : \mathcal{F}_e(\mathcal{F}_e(\mathcal{K}')) \rightarrow \mathcal{F}_e(\mathcal{K}')$ , die jeder Kollektion von paarweise verschiedenen Mengen konvexer Körper ihr bezüglich  $\prec$  kleinstes Element zuordnet, messbar in dem Sinne, dass die Abbildung

$$l : \mathcal{F}_e(\mathcal{F}_e(\mathcal{K}')) \times \mathcal{F}_e(\mathcal{K}') \rightarrow \{0, 1\}$$

$$(\Gamma, \Lambda) \mapsto \mathbb{1}\{\Lambda = \zeta(\Gamma)\}.$$

messbar bezüglich den jeweiligen Borelschen  $\sigma$ -Algebren ist.

### 3.1.3 Die Messbarkeit und Wohldefiniertheit der Abbildung $T$

In diesem Abschnitt wollen wir zur ursprünglichen Fragestellung, der Existenz einer wohldefinierten und messbaren Abbildung  $T$  wie in (3.4), die zusätzlich noch translationskovariant sein soll, zurückkehren. Sei also  $\Lambda := \{K_1, \dots, K_n\} \in \mathcal{F}_e(\mathcal{K}')$  eine endliche Menge konvexer Körper und  $M : \mathcal{K}' \rightarrow [0, \infty)$  ein messbares translationsinvariantes Gewichtsfunktional. Wir definieren die Abbildung  $M^* : \mathcal{F}_e(\mathcal{K}) \rightarrow [0, \infty)$  durch

$$M^*(\Lambda) := \left( \sum_{K \in \Lambda} M(K) \right) \left( \prod_{K, L \in \Lambda, K \neq L} \mathbb{1}\{K \cap L = \emptyset\} \right)$$

und wissen, dass  $\tilde{\Lambda} \subset \Lambda$  genau dann (3.2) und (3.3) erfüllt, wenn gilt

$$\tilde{\Lambda} \in \arg \max_{\Lambda' \subset \Lambda} \{M^*(\Lambda')\}.$$

Wie in Abschnitt 3.1 beschrieben, kann die Menge  $\arg \max_{\Lambda' \subset \Lambda} \{M^*(\Lambda')\}$  aus mehreren Partikelkollektionen bestehen. Ein möglicher Ansatz zum Beweis der Existenz einer messbaren Abbildung  $T$  wie in (3.4) besteht darin,  $T = \zeta \circ T'$  mit  $\zeta$  wie in Bemerkung 3.1.4 und

$$T' : \mathcal{F}_e(\mathcal{K}') \rightarrow \mathcal{F}_e(\mathcal{F}_e(\mathcal{K}'))$$

$$\Lambda \mapsto \arg \max_{\Lambda' \subset \Lambda} \{M^*(\Lambda')\}$$

zu wählen und die Messbarkeit der Abbildung  $T'$  nachzuweisen.

Bei der Beantwortung der Frage nach der Existenz einer solchen Abbildung  $T$  wählen hier nun einen anderen Weg, indem wir uns eine derartige Abbildung konstruktiv über einen algorithmischen Ansatz definieren. Interessanterweise wird sich zeigen, dass diese Abbildung genau mit  $\zeta \circ T'$  übereinstimmt, wir dabei aber nicht den Umweg über die Abbildung  $T'$  gehen müssen.

Will man das Problem der Bestimmung von  $\tilde{\Lambda}$  algorithmisch lösen, so besteht der *Brute-Force-Ansatz* darin, dass man alle harten Teilmengen von  $\Lambda$  durchläuft und sich dabei diejenige mit maximalem Gewicht merkt (im Falle der Nichteindeutigkeit merkt man sich die kleinste bezüglich  $\prec$ ). Nach endlich vielen Schritten hat man dann alle Teilmengen von  $\Lambda$  durchlaufen und

damit die gewichtsmaximale harte Teilmenge davon bestimmt. Wir wollen dieses Vorgehen im Folgenden formalisieren und damit die Abbildung  $T$  als Grenzwert der Hintereinanderausführung einer messbaren Abbildung  $\Phi$  darstellen.

Dazu fixieren wir eine Menge  $\Lambda \in \mathcal{F}_e(\mathcal{K}')$  und definieren rekursiv die Folgen  $(C_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_e(\Lambda)$ ,  $(D_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_e(\Lambda)$ ,  $(\mathcal{I}_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_e(\mathcal{F}_e(\Lambda))$  von Mengen, deren Abhängigkeit von  $\Lambda$  wir zum Wohl der besseren Lesbarkeit nicht in die Notation aufnehmen wollen. Dabei haben  $C_i, D_i, \mathcal{I}_i$  folgende Bedeutung:

- $C_i$  ist der im  $i$ -ten Schritt untersuchte Kandidat für  $\tilde{\Lambda}$
- $D_i$  ist die harte Teilmenge von  $\Lambda$  mit bis zum  $(i - 1)$ -ten Schritt größtem Gewicht
- $\mathcal{I}_i := \cup_{j=1}^i \{C_j\}$  ist die Menge bestehend aus allen nach dem  $(i - 1)$ -ten Schritt untersuchten harten Teilmengen von  $\Lambda$

Wir beginnen mit  $C_0 := \emptyset, D_0 := \Lambda, \mathcal{I}_0 := \{\emptyset\}$ . Zur iterativen Fortsetzung benötigen wir folgende Abbildungen:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{F}_e(\mathcal{K}') \times \mathcal{F}_e(\mathcal{F}_e(\mathcal{K}')) \times \mathcal{K}' &\rightarrow \{0, 1\} \\ (C, \mathcal{I}, K) &\mapsto \mathbb{1}\{\{C \cup \{K\}\} \notin \mathcal{I}\} \prod_{L \in \mathcal{C}} \mathbb{1}\{L \cap K = \emptyset\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} m : \mathcal{F}_e(\mathcal{K}') \times \mathcal{F}_e(\mathcal{K}') \times \mathcal{F}_e(\mathcal{F}_e(\mathcal{K}')) &\rightarrow \{0, 1\} \\ (\Lambda, C, \mathcal{I}) &\mapsto \max_{K \in \Lambda \setminus C} \varphi(C, \mathcal{I}, K). \end{aligned}$$

Damit können wir  $C_i, D_i$  und  $\mathcal{I}_i$  wie folgt iterativ fortsetzen:

$$C_{i+1} := \begin{cases} C_i \cup \{N(\Lambda, C_i, \mathcal{I}_i)\}, & \text{falls } m(\Lambda, C_i, \mathcal{I}_i) = 1 \\ C_i \setminus \{L(C_i)\}, & \text{falls } m(\Lambda, C_i, \mathcal{I}_i) = 0 \text{ und } C_i \neq \emptyset \\ \emptyset, & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\mathcal{I}_{i+1} := \begin{cases} \mathcal{I}_i \cup \{C_{i+1}\}, & \text{falls } m(\Lambda, C_i, \mathcal{I}_i) = 1 \\ \mathcal{I}_i, & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$D_{i+1} = \begin{cases} C_{i+1}, & \text{falls } M^*(C_{i+1}) > M^*(D_i) \\ D_i, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dabei ist  $N(\Lambda, C_i, \mathcal{I}_i)$  das bezüglich  $\prec_1$  kleinste Element der Menge  $\Gamma_i := \Gamma_i(\Lambda, C_i, \mathcal{I}_i) := \{K \in \Lambda \setminus C_i : \varphi(C_i, \mathcal{I}_i, K) = 1\}$  sofern diese nichtleer ist und  $L(C_i)$  das bezüglich  $\prec_1$  größte Element von  $C_i$ . Die Menge  $\Gamma_i$  entspricht gerade allen Partikeln von  $\Lambda$  die zu allen

Partikeln von  $C_i$  disjunkt sind und zuvor noch nicht als Kandidat für  $\tilde{\Lambda}$  vorgeschlagen wurden. Gilt  $m(\Lambda, C_i, \mathcal{I}_i) = 0$ , so gibt es keine solchen Partikel und es ist  $\Gamma_i(\Lambda, C_i, \mathcal{I}_i) = \emptyset$ .

Bei diesem algorithmisch motivierten Ansatz durchläuft die Folge  $(C_i)_{i \in \mathbb{N}}$  alle harten Teilmengen von  $\Lambda$ . Alle bis zum  $i$ -ten Schritt bereits betrachteten harten Teilmengen von  $\Lambda$  werden in  $\mathcal{I}_i$  zusammengefasst. Das Gewicht von  $C_i$  wird dabei immer mit dem Gewicht von  $D_{i-1}$ , der bis zum  $(i-1)$ -ten Schritt gewichtsmaximalen harten Teilmenge von  $\Lambda$ , verglichen. Falls das Gewicht von  $C_i$  größer ist als das Gewicht von  $D_{i-1}$ , setzen wir  $D_i := C_i$ ; ansonsten sei  $D_i := D_{i-1}$ . Dies liefert uns eine Folge  $(D_i)_{i \in \mathbb{N}}$  harter Teilmengen von  $\Lambda$  deren Gewicht nichtfallend ist. So ist sichergestellt, dass die Folge  $(D_i)_{i \in \mathbb{N}}$  gegen eine gewichtsmaximale harte Teilmenge konvergiert, wobei dieser Grenzwert aufgrund der Endlichkeit von  $\Lambda$  immer nach endlich vielen Schritten erreicht wird. Im Falle der Nichteindeutigkeit der gewichtsmaximalen harten Teilmenge von  $\Lambda$  liefert unser Algorithmus die bezüglich  $\prec$  kleinste solcher Teilmengen zurück, was daran liegt, dass  $N(C_i)$  immer das bezüglich  $\prec_1$  kleinste zur Verfügung stehende Element ist. Damit wird die bezüglich  $\prec$  kleinste gewichtsmaximale harte Teilmenge zuerst entdeckt und aufgrund der Auswahlregeln nicht mehr verworfen.

Formal definieren wir uns dann die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{F}_e(\mathcal{K}') \times \mathcal{F}_e(\mathcal{K}') \times \mathcal{F}_e(\mathcal{K}') \times \mathcal{F}_e(\mathcal{F}_e(\mathcal{K}')) &\rightarrow \mathcal{F}_e(\mathcal{K}') \times \mathcal{F}_e(\mathcal{K}') \times \mathcal{F}_e(\mathcal{K}') \times \mathcal{F}_e(\mathcal{F}_e(\mathcal{K}')) \\ (\Lambda, C_i, D_i, \mathcal{I}_i) &\mapsto (\Lambda, C_{i+1}, D_{i+1}, \mathcal{I}_{i+1}), \end{aligned}$$

welche den oben beschriebenen Schritt von  $i$  nach  $i+1$  realisiert. Damit erhält  $T$  folgende Darstellung:

$$T(\cdot) = \pi_3(\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi^n(\cdot, \emptyset, \emptyset, \{\emptyset\})), \quad (3.10)$$

wobei  $\pi_3$  die Projektion auf das dritte Argument darstellt. Damit ist  $T(\Lambda)$  nach obigen Ausführungen eine gewichtsmaximale harte Teilmenge von  $\Lambda$ .

Wir wollen nun zeigen, dass die Abbildung  $T$  wohldefiniert, messbar und translationskovariant ist: Die Wohldefiniertheit von  $T$  ergibt sich aus der Verwendung der Totalordnung  $\prec_1$  auf  $\mathcal{K}'$  und die Translationskovarianz folgt aus der Translationsinvarianz von  $M$  und von  $\prec_1$ . Zur Messbarkeit von  $T$  müssen wir folgende Punkte zeigen:

- (i) Die Abbildung  $N$  ist messbar.
- (ii) Die Abbildung  $L$  ist messbar.
- (iii) Die Abbildung  $(\Lambda, C_i, \mathcal{I}_i) \mapsto \mathbb{1}\{m(\Lambda, C_i, \mathcal{I}_i) = 1\}$  ist messbar.

Wir haben in Bemerkung 3.1.2 gesehen, dass wir aus einer endlichen Kollektion  $\Lambda$  von konvexen Körpern das kleinste bzw. größte Element bezüglich  $\prec_1$  messbar auswählen können, woraus (ii) und (unter der Verwendung der Messbarkeit der Abbildung  $\varphi$ ) (i) folgen. Die Messbarkeit in (iii) ergibt sich aus dem Zusammenhang

$$m(\Lambda, C_i, \mathcal{I}_i) = 0 \Leftrightarrow \sum_{K \in \Lambda \setminus C_i} \left( \prod_{L \in C_i} \mathbb{1}\{K \cap L = \emptyset\} \right) \mathbb{1}\{\{C_i \cup \{K\}\} \notin \mathcal{I}_i\} = 0.$$

Damit haben wir mit  $T$  wie in (3.10) eine messbare, wohldefinierte Abbildung gefunden, die (3.4) genügt. Für endliche Mengen  $\Lambda$  paarweise disjunkter konvexer Körper setzen wir von nun an

$$M(\Lambda) := \sum_{K \in \Lambda} M(K).$$

Wir wollen einige zentrale Eigenschaften von  $T$  nun nochmals zusammenfassen, da diese für den weiteren Verlauf dieser Arbeit von zentraler Bedeutung sein werden.

**Satz 3.1.5.** *Seien  $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathcal{F}_e(\mathcal{K}')$  und  $x \in \mathbb{R}^d$ . Dann gilt:*

- a)  $T(\Lambda_1 + x) = T(\Lambda_1) + x$ .
- b)  $\Lambda_1 \subset \Lambda_2 \Rightarrow M(T(\Lambda_1)) \leq M(T(\Lambda_2))$ .
- c)  $K_1 \cap K_2 = \emptyset$  für alle  $K_1 \in \Lambda_1, K_2 \in \Lambda_2 \Rightarrow T(\Lambda_1 \cup \Lambda_2) = T(\Lambda_1) \cup T(\Lambda_2)$ .
- d)  $M(T(\Lambda_1 \cup \Lambda_2)) \leq M(T(\Lambda_1)) + M(T(\Lambda_2))$ .
- e)  $\Lambda_1 \subset \Lambda_2 \not\Rightarrow T(\Lambda_1) \subset T(\Lambda_2)$ .

*Beweis.* Aussage a) folgt direkt aus der Translationsinvarianz von  $\prec_1$  und  $M$ . Die Feststellung, dass  $T(\Lambda_1)$  eine harte Teilmenge von  $\Lambda_2$  ist, falls  $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$  gilt, beweist Aussage b). Aussage c) resultiert aus der Tatsache, dass unter den dort getroffenen Voraussetzungen  $\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2$  gilt, wobei sich  $\mathcal{J}_1$  ausschließlich auf Partikel von  $\Lambda_1$  und  $\mathcal{J}_2$  ausschließlich auf Partikel von  $\Lambda_2$  bezieht. Zum Beweis von d) nehmen wir an, dass  $M(T(\Lambda_1 \cup \Lambda_2)) > M(T(\Lambda_1)) + M(T(\Lambda_2))$  gilt und zerlegen die Partikel von  $T(\Lambda_1 \cup \Lambda_2)$  in diejenigen aus  $\Lambda_1$  und diejenigen aus  $\Lambda_2$ . Damit wäre aber entweder das Gewicht derjenigen aus  $\Lambda_1$  größer als  $M(T(\Lambda_1))$  oder das Gewicht derjenigen aus  $\Lambda_2$  größer als  $M(T(\Lambda_2))$ , was einen Widerspruch zur Definition von  $T$  darstellt.  $\square$

## 3.2 Der Prozess der gewichtsmaximalen harten Teilmenge von $\Xi_W$

Nachdem wir die Messbarkeit der wohldefinierten Abbildung  $T$  gezeigt haben, können wir uns nun einem stochastischen Szenario zuwenden und den Prozess  $\tilde{\Xi}_W$  aus Abschnitt 2.4 formal einführen.

Es sei  $\Xi$  ein stationärer Poissonscher Partikelprozess mit Intensität  $\gamma > 0$  und  $W \subset \mathbb{R}^d$  kompakt mit  $\lambda_d(W) > 0$ . Dann heißt

$$\tilde{\Xi}_W := T(\Xi_W) \tag{3.11}$$

der Prozess der gewichtsmaximalen harten Teilmenge von  $\Xi_W$

Aufgrund der Stationarität von  $\Xi$  und der Translationsinvarianz von  $T$  gilt für  $x \in \mathbb{R}^d$  daher

$$\mathbb{P}(\tilde{\Xi}_{W+x} \in \cdot) = \mathbb{P}(\tilde{\Xi}_W + x \in \cdot). \tag{3.12}$$

Damit und nach 3.11 kommen  $\tilde{\Xi}_W$  folgende Eigenschaften zu:

- 1) Der Prozess  $\tilde{\Xi}_W$  ist  $\Xi_W$ -messbar.
- 2) Für  $W_1, \dots, W_m \in \mathcal{C}'$  und  $x \in \mathbb{R}^d$  stimmen die gemeinsame Verteilung von  $M(\tilde{\Xi}_{W_1+x}), \dots, M(\tilde{\Xi}_{W_m+x})$  und die gemeinsame Verteilung von  $M(\tilde{\Xi}_{W_1}), \dots, M(\tilde{\Xi}_{W_m})$  überein.

**Bemerkung 3.2.1.** Zum Vergleich von konvexen Körpern  $K, L$  haben wir die Totalordnung  $\prec_1$  auf  $\mathcal{K}'$  eingeführt, wobei wir sukzessive  $h_K(u_i)$  und  $h_L(u_i)$  für eine dichte Folge  $(u_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset S^{d-1}$  verglichen haben. Wie wir nun sehen werden, reicht es für den Fall, dass es sich bei  $K$  und  $L$  um zwei Partikel eines stationären Poissonschen Partikelprozesses  $\Xi$  handelt, den Vergleich zwischen  $h_K$  und  $h_L$  nur für eine beliebige Richtung  $u \in S^{d-1}$  durchzuführen, da wir schon dann f.s. ungleiche Werte der Stützfunktion in  $u$  erhalten. Für  $u \in S^{d-1}$  gilt nämlich nach Satz 1.2.16, Satz 1.2.19 c), Satz 1.2.14 (ii) und dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} \sum_{(K,L) \in \Xi_{\neq}^2} \mathbb{1}\{h_K(u) = h_L(u)\} \\
 &= \int_{(\mathcal{K}')^2} \mathbb{1}\{h_K(u) = h_L(u)\} d\Lambda^{(2)} \\
 &= \int_{\mathcal{K}'} \int_{\mathcal{K}'} \mathbb{1}\{h_K(u) = h_L(u)\} \Theta(dK) \Theta(dL) \\
 &= \int_{\mathcal{K}_0} \int_{\mathcal{K}_0} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{h_{K_0+x}(u) = h_{L_0+y}(u)\} dx dy \mathbb{Q}(dK_0) \mathbb{Q}(dL_0) \\
 &= \int_{\mathcal{K}_0} \int_{\mathcal{K}_0} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{\langle x, u \rangle = h_{L_0+y}(u) - h_{K_0}(u)\} dx dy \mathbb{Q}(dK_0) \mathbb{Q}(dL_0) \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

da  $\lambda_d(\{x \in \mathbb{R}^d : \langle x, u \rangle = c\}) = 0$  für beliebiges  $c \in \mathbb{R}$  gilt. Für das stochastische Szenario setzen wir daher im Folgenden  $u_1 := e_1$ .

Nachstehendes Resultat soll eine Aussage darüber treffen, in welchen Szenarien es für eine kompakte Menge  $W \subset \mathbb{R}^d$  mehrere harte Teilmengen von  $\Xi_W$  gibt, die das Gewichtsfunktional maximieren.

**Satz 3.2.2.** Sei  $\Xi$  ein stationärer Poissonscher Partikelprozess mit Intensität  $\gamma > 0$  und Formverteilung  $\mathbb{Q}$  und  $M$  ein translationsinvariantes, messbares Gewichtsfunktional. Weiterhin sei  $\mathbb{Q}$  auf  $\{K \in \mathcal{K}_0 : V_d(K) > 0\}$  konzentriert. Dann gilt für jede kompakte Menge  $W \subset \mathbb{R}^d$  mit  $\lambda_d(W) > 0$  die Äquivalenz folgender Aussagen:

- (i) Für zwei zufällige, unabhängige konvexe Partikel  $X, Y \sim \mathbb{Q}$  gilt

$$M(X) \neq M(Y) \text{ f.s.} \tag{3.13}$$



(ii) Es gibt f.s. nur eine harte Teilmenge von  $\Xi_W$ , die das Gewichtsfunktional maximiert.

*Beweis.* (ii)  $\Rightarrow$  (i) : Wir nehmen an (i) gilt nicht, d.h. es gilt

$$\int_{\mathcal{K}_0} \int_{\mathcal{K}_0} \mathbb{1}\{M(K_0) = M(L_0)\} \mathbb{Q}(dK_0) \mathbb{Q}(dL_0) > 0. \quad (3.14)$$

Es reicht dann zu zeigen, dass  $\Xi_W$  mit echt positiver Wahrscheinlichkeit aus genau zwei sich schneidenden Partikeln gleichen Gewichts besteht. Die Wahrscheinlichkeit dafür entspricht nach Korollar 1.2.20 gerade

$$\begin{aligned} & e^{-\gamma\lambda_d(W)} \frac{\gamma\lambda_d(W)^2}{2} \int_{\mathcal{K}_0} \int_{\mathcal{K}_0} \int_W \int_W \mathbb{1}\{(K_0 + x) \cap (L_0 + y) \neq \emptyset\} \\ & \times \mathbb{1}\{M(K_0) = M(L_0)\} dx dy \mathbb{Q}(dK_0) \mathbb{Q}(dL_0) \\ & = e^{-\gamma\lambda_d(W)} \frac{\gamma\lambda_d(W)^2}{2} \int_{\mathcal{K}_0} \int_{\mathcal{K}_0} \underbrace{c(K_0, L_0)}_{>0(\mathbb{Q}^2\text{-f.s.})} \mathbb{1}\{M(K_0) = M(L_0)\} \mathbb{Q}(dK_0) \mathbb{Q}(dL_0) \stackrel{(3.14)}{>} 0. \end{aligned}$$

(i)  $\Rightarrow$  (ii) : Hierzu zeigen wir, dass für unabhängige Partikel  $X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_n \sim \mathbb{Q}$  und  $n, m \in \mathbb{N}$  bereits f.s.

$$\sum_{i=1}^m M(X_i) \neq \sum_{j=1}^n M(Y_j). \quad (3.15)$$

gilt. Daraus folgt zusammen mit der Tatsache, dass  $\Xi_W$  ein Poissonscher Partikelprozess ist und der Translationsinvarianz von  $M$ , dass es f.s. keine zwei disjunkten Teilmengen von  $\Xi_W$  mit gleichem Gesamtgewicht geben kann. Im Falle der Nichteindeutigkeit der gewichtsmaximalen harten Teilmenge von  $\Xi_W$  muss es aber zwei solche Mengen geben, weshalb aus (3.15) die Behauptung folgt.

Zum Beweis von (3.15) überlegen wir uns zuerst, dass aus (3.13) für alle  $a \in \mathbb{R}$  sofort

$$\mathbb{Q}(\{K \in \mathcal{K}_0 : M(K) = a\}) = 0$$

folgt. Wäre dies nämlich nicht der Fall, dann gelte  $\mathbb{Q}^2(K_a \times K_a) > 0$  mit  $K_a := \{K \in \mathcal{K}_0 : M(K) = a\}$ , was im Widerspruch zu (3.13) steht. Damit gilt nun aber wiederum für beliebiges  $m \in \mathbb{N}$  und  $a \in \mathbb{R}$  die Aussage

$$\mathbb{Q}^m(\{(K_1, \dots, K_m) \in \mathcal{K}_0^m : \sum_{i=1}^m M(K_i) = a\}) = 0,$$

welche aus

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{Q}^m(\{(K_1, \dots, K_m) \in \mathcal{K}_0^m : \sum_{i=1}^m M(K_i) = a\}) \\
 &= \int_{\mathcal{K}_0} \cdots \int_{\mathcal{K}_0} \underbrace{\int_{\mathcal{K}_0} \mathbb{1}\{M(K_m) = a - \sum_{i=1}^{m-1} M(K_i)\} \mathbb{Q}(dK_m) \mathbb{Q}(dK_{m-1}) \cdots \mathbb{Q}(dK_1)}_{=0(\mathbb{Q}^{m-1}\text{-f.s.})} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

folgt. Daher gilt für  $m, n \in \mathbb{N}$  dann die Beziehung

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{Q}^{m+n}(\{(K_1, \dots, K_m, L_1, \dots, L_n) \in \mathcal{K}_0^{m+n} : \sum_{i=1}^m M(K_i) = \sum_{j=1}^n M(L_j)\}) \\
 &= \int_{\mathcal{K}_0} \cdots \int_{\mathcal{K}_0} \underbrace{\int_{\mathcal{K}_0} \cdots \int_{\mathcal{K}_0} \mathbb{1}\{\sum_{i=1}^m M(K_i) = \sum_{j=1}^n M(L_j)\} \mathbb{Q}(dL_n) \cdots \mathbb{Q}(dL_1)}_{=0(\mathbb{Q}^m\text{-f.s.})} \\
 & \quad \times \mathbb{Q}(dK_m) \cdots \mathbb{Q}(dK_1) \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

womit (3.15) bewiesen ist. □

### 3.3 Stationäre Grenzprozesse mit möglichst großem Gewicht

Wir wollen nun aus dem lokal definierten Prozess  $\tilde{\Xi}_W$  aus (3.11) einen stationären Grenzprozess gewinnen, der sich in seinen lokalen Eigenschaften möglichst wenig von  $\tilde{\Xi}_W$  unterscheidet. Betrachtet man direkt  $\Xi$  und versucht daraus einen gewichtsmaximalen Prozess harter Partikel zu konstruieren, so steht man vor dem Problem, dass es unendliche Teilmengen von  $\Xi$  geben kann, die aus harten Partikel mit unendlichem Gesamtgewicht bestehen, obwohl nicht jede dieser Teilmengen von  $\Xi$  gleich „dicht“ besetzt ist.

### 3.3.1 Ein Beispiel zur Motivation

Zu Beginn dieses Abschnitts wollen wir anhand eines deterministischen Beispiels die bei der intuitiv naheliegenden Definition des Grenzprozesses  $\tilde{\Xi}$  als geeigneter Grenzwert der Folge  $\tilde{\Xi}_{r_n W}$ , wobei  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset [0, \infty)$  mit  $r_n \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ , auftretenden Probleme und mögliche Lösungsansätze diskutieren. Dazu betrachten wir die deterministische Partikelkollektion

$$\Lambda := \{B(x, 1 - \varepsilon) : x \in \mathbb{L}\} \subset \mathcal{K}'$$

im  $\mathbb{R}^2$  für ein hinreichend kleines  $\varepsilon > 0$  sowie eine diskrete Punktmenge  $\mathbb{L} \subset \mathbb{R}^2$  wie nachfolgend beschrieben und wählen  $M = V_2$ . Dabei wählen wir  $\mathbb{L}$  so, dass  $\mathbb{L} = \mathbb{L}^I \cup \mathbb{L}^{II}$ ,  $\mathbb{L}^I \cap \mathbb{L}^{II} = \emptyset$  gilt mit

$$\begin{aligned} \mathbb{L}^I := & \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} \left\{ \begin{pmatrix} \pm\alpha_n \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pm\alpha_n \\ \pm 2 \end{pmatrix}, \dots, \right. \\ & \left. \begin{pmatrix} \pm\alpha_n \\ \pm 2n - 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \pm\alpha_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pm 2 \\ \pm\alpha_n \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \pm 2n - 2 \\ \pm\alpha_n \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

und

$$\mathbb{L}^{II} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \begin{pmatrix} \pm\beta_n \\ \pm 1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \pm\beta_n \\ \pm 2n - 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \pm\beta_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \pm\beta_n \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \pm 2n - 1 \\ \pm\beta_n \end{pmatrix} \right\}.$$

Dabei sind die Folgen  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  so zu wählen, dass die Punkte von  $\mathbb{L}^I$  bzw.  $\mathbb{L}^{II}$  jeweils einen Mindestabstand von Zwei untereinander haben und gleichzeitig

$$\|\beta_1\| \leq 1 + \sqrt{3}\|\alpha_{n+1} - \beta_n\|, \quad \|\alpha_n - \beta_n\| \leq \sqrt{3}$$

erfüllen.

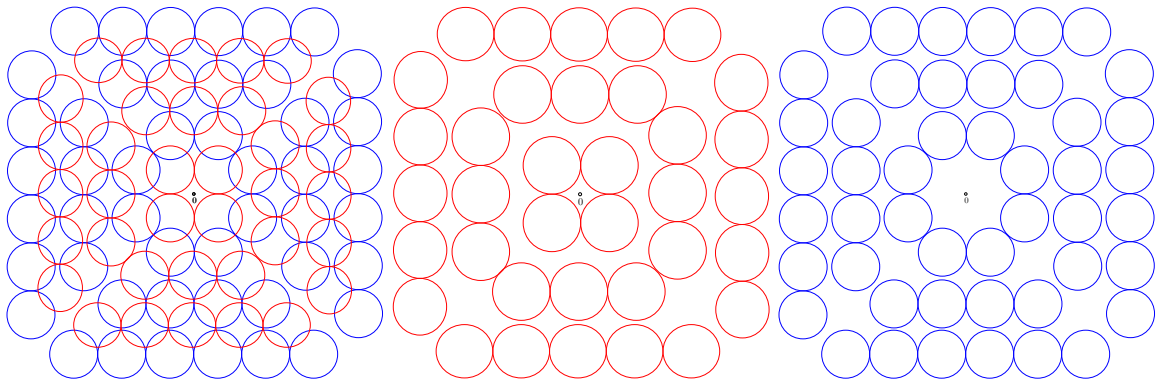


Abbildung 3.1: Links sehen wir einen Ausschnitt von  $\Lambda$ . Dabei besteht dieser Ausschnitt aus der Menge der Kreise mit Mittelpunkt in  $\mathbb{L}^I$  (Mitte) und der Menge der Kreise mit Mittelpunkt  $\mathbb{L}^{II}$  (rechts). Diese beiden Teilmengen bestehen aus harten Partikeln, aber überlappen sich gegenseitig auf spezielle Weise.

Wählen wir nun

$$W := [-1, 1]^2, r_1 := 1, r_n := \begin{cases} \beta_{\frac{n}{2}}, & n \text{ gerade,} \\ \alpha_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}, & \text{sonst,} \end{cases} \text{ für } n \geq 2,$$

so erhalten wir

$$\tilde{\Lambda}_n = \begin{cases} \{B(x, 1 - \varepsilon) : x \in \mathbb{L}^{II} \cap r_n W\}, & n \text{ gerade,} \\ \{B(x, 1 - \varepsilon) : x \in \mathbb{L}^I \cap r_n W\}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

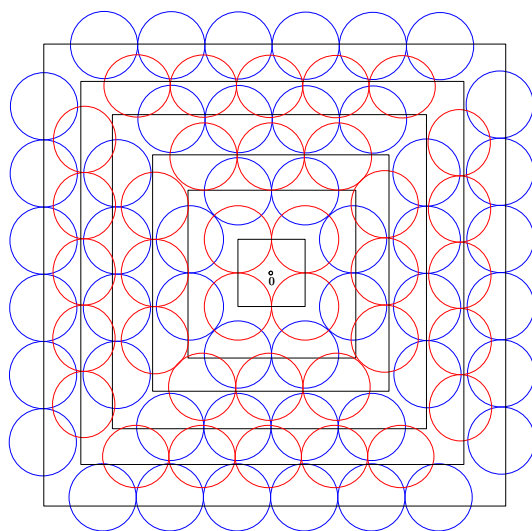


Abbildung 3.2: Die Partikelmenge  $\Lambda$  und die Beobachtungsfenster  $r_1 W, \dots, r_6 W$ .

Dieses Beispiel zeigt zwei für die nachfolgenden Überlegungen wichtige Punkte auf: Zum einen sehen wir an der Tatsache, dass  $\tilde{\Lambda}_n$  immer zwischen zwei disjunkten Regimes hin- und herspringt, dass die Folge  $\tilde{\Lambda}_n$  nicht „stabil“ ist und daher nicht konvergieren kann, wobei wir den Konvergenzbegriff und den Begriff der Stabilität noch genauer spezifizieren werden. Gleichzeitig deutet sich bei dem hier vorgestellten Phänomen aber auch eine Möglichkeit an ein Grenzobjekt  $\tilde{\Lambda}$  zu definieren. Wir sehen nämlich zugleich, dass die Folge  $(\tilde{\Lambda}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $(\tilde{\Lambda}_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(\tilde{\Lambda}_{2n-1})_{n \in \mathbb{N}}$  zwei in späterem Sinne konvergente Teilfolgen besitzt, deren Grenzwerte existieren und somit Kandidaten für  $\tilde{\Lambda}$  sind. Zum anderen sehen wir an diesem Beispiel, dass die Folge  $\tilde{\Lambda}_n$  und damit mögliche Grenzwerte in hohem Maße von der Wahl der Radienfolge und des Beobachtungsfensters abhängen.

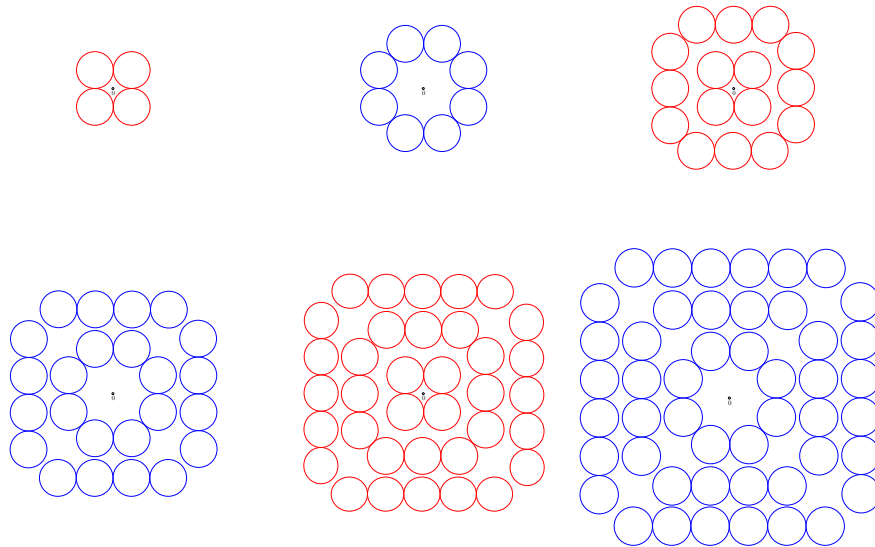


Abbildung 3.3: Die volumenmaximalen Mengen harter Partikel  $\tilde{\Lambda}_1, \dots, \tilde{\Lambda}_6$ .

### 3.3.2 Stabilität

Für die folgenden Abschnitte fixieren wir ein Beobachtungsfenster  $W \in \mathcal{C}'$  mit  $\lambda_d(W) > 0$ . Gleichzeitig wechseln wir wieder in das stochastische Szenario und betrachten den Prozess  $\tilde{\Xi}_W$ .

In diesem Abschnitt wollen wir mit dem Begriff der *Stabilität* ein Konzept kennenlernen, das es uns ermöglicht, den Begriff der lokalen Abhängigkeit zu formalisieren. Dazu wollen wir den Einfluss der Partikel von  $\tilde{\Xi}_W$ , die weit von der Mitte von  $W$  entfernt sind, auf die Gestalt von  $\tilde{\Xi}_W$  in der Mitte untersuchen und folgen dabei den Darstellungen in [56, 58]. Wir betrachten zuerst das Funktional

$$H : \mathcal{F}_e(\mathcal{K}') \rightarrow [0, \infty)$$

$$\Lambda \mapsto M(T(\Lambda)),$$

das jede endliche Menge konvexer Körper  $\Lambda$  auf das Gewicht der zugehörigen gewichtsmaximalen harten Teilmenge  $\tilde{\Lambda}$  abbildet. Der *Differenzenoperator*  $\Delta_K$  hat für  $K \in \mathcal{K}'$  die Gestalt

$$\Delta_K : \mathcal{F}_e(\mathcal{K}') \rightarrow [0, \infty)$$

$$\Lambda \mapsto H(\Lambda \cup \{K\}) - H(\Lambda).$$

Für  $\Lambda \in \mathcal{F}_e(\mathcal{K}')$  und ein zufälliges Partikel  $X_0 \sim \mathbb{Q}$ , wobei  $\mathbb{Q}$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $\mathcal{K}_0$  ist, führen wir die Zufallsvariable

$$\Delta^{\mathbb{Q}}(\Lambda) := \Delta_{X_0}(\Lambda) = H(\Lambda \cup \{X_0\}) - H(\Lambda) \quad (3.16)$$

ein und nennen sie die *Hinzufügekosten* von  $H$ . Die Zufallsvariable  $\Delta^{\mathbb{Q}}(\Lambda)$  entspricht also dem Unterschied zwischen den Gewichten der gewichtsmaximalen harten Teilmenge vor und nach Hinzufügen eines zufälligen Partikels  $X_0$  zur Ausgangskollektion  $\Lambda$ . Für ein kompaktes Beobachtungsfenster  $W \subset \mathbb{R}^d$  und die Einschränkung  $\Xi_W$  eines stationären Partikelprozesses  $\Xi$  mit Formverteilung  $\mathbb{Q}$  auf die Partikel von  $\Xi$ , deren Umkugelmittelpunkte in  $W$  liegen, definieren wir die Zufallsvariable

$$\Delta^{\mathbb{Q}}(\Xi_W) := H(\Xi_W \cup \{X_0\}) - H(\Xi_W), \quad (3.17)$$

wobei  $X_0 \sim \mathbb{Q}$  unabhängig von  $\Xi_W$  ist und bezeichnen sie als die *Hinzufügekosten* von  $H$  bezüglich  $\Xi_W$ . Analog setzen wir

$$\Delta^{\mathbb{Q}}(\Xi_W \cup \Lambda) := H(\Xi_W \cup \Lambda \cup \{X_0\}) - H(\Xi_W \cup \Lambda)$$

für  $\Lambda \in \mathcal{F}_e(\mathcal{K}')$ , wobei auch hier  $X_0 \sim \mathbb{Q}$  unabhängig von  $\Xi_W$  ist.

Damit können wir nun einen für das Verhalten von  $\tilde{\Xi}_W$  zentralen Begriff einführen. Es sei dazu  $\Xi_\gamma$  ein stationärer Poissonscher Partikelprozess mit Intensität  $\gamma > 0$  und Formverteilung  $\mathbb{Q}$ . Dann sagen wir, dass das Funktional  $H$  *stabilisierend* ist, falls es eine f.s. positive, endliche Zufallsvariable  $R_\gamma$  sowie eine Zufallsvariable  $\Delta_\gamma(\infty)$  gibt, so dass

$$\Delta^{\mathbb{Q}}(\Xi_{\gamma, B(0, R_\gamma)} \cup \Lambda') = \Delta_\gamma(\infty) \quad (3.18)$$

für alle endlichen Partikelmengen  $\Lambda' := \{L_1, \dots, L_n\}$  mit  $L_i - c(L_i)$  aus dem Träger von  $\mathbb{Q}$  und  $L_i \cap B(0, R_\gamma) = \emptyset$  für  $1 \leq i \leq n$  gilt.

Folglich ist  $R_\gamma$  genau dann ein stabilisierender Radius, falls die Hinzufügekosten von  $H$  nur durch die Partikel innerhalb von  $B(0, R_\gamma)$  bestimmt werden. Partikel außerhalb von  $B(0, R_\gamma)$  haben keinen Einfluss mehr auf die Entscheidung, ob ein Partikel, das im Ursprung hinzugefügt wird, aufgenommen wird, und damit keinen Einfluss auf die innere Gestalt von  $\tilde{\Xi}_W$ . Die Frage, unter welchen Voraussetzungen an  $\Xi_\gamma$  das Funktional  $H$  stabilisierend ist, können wir nicht exakt beantworten. Ein hinreichendes Kriterium für die Stabilität liefert ein Ergebnis aus der Perkolationstheorie, welche sich mit kritischen Phänomenen im Zusammenhang mit der Größe der Zusammenhangskomponenten von  $\Xi_\gamma$  beschäftigt. Hat nämlich  $\Xi_\gamma$  f.s. nur endliche Zusammenhangskomponenten, so zeigen wir unten, dass  $H$  unter einer Zusatzvoraussetzung an  $\mathbb{Q}$  stabilisierend ist. Über das Auftreten von Perkolation lassen sich jedoch bisher keine exakten Aussagen treffen, sondern nur Ergebnisse nachfolgender Form, siehe etwa [47] für weitere Details.

**Satz 3.3.1.** *Seien  $\Xi_\gamma$  ein stationärer Poissonscher Partikelprozess mit Intensität  $\gamma > 0$ , dessen Partikel Kugeln mit zufälligem Radius  $\rho \sim \mathbb{F}$  sind und  $d \geq 2$ . Weiterhin gelte*

$$\int_0^\infty r^{2d-1} \mathbb{F}(dr) < \infty.$$

*Dann gibt es eine kritische Intensität  $\gamma_c > 0$ , so dass für  $0 < \gamma < \gamma_c$  alle Zusammenhangskomponenten der Vereinigungsmenge von  $\Xi_\gamma$  f.s. endlich sind.*

Gelten  $\mathbb{Q} = \delta_{B(0,1)}$  und  $d = 2$  so wissen wir nach [47] Theorem 3.10, dass  $0,174 < \gamma_c < 0,843$  gilt. Simulationsstudien für  $\mathbb{Q} := \delta_{B(0,r)}$  in  $\mathbb{R}^2$  bzw.  $\mathbb{R}^3$  weisen darauf hin, dass  $\gamma_c$  die (eindeutig bestimmte) Lösung der Gleichung  $1 - e^{-\gamma\pi r^2} = 0.6763$  bzw.  $1 - e^{-\gamma^4/3\pi r^3} = 0,2895$  ist (siehe [60] bzw. [62]). Für den Fall  $d = 1$  hat ein solcher Prozess  $\Xi_\gamma$  bzw. seine Vereinigungsmenge f.s. nur endliche Zusammenhangskomponenten, falls  $\int_0^\infty r \mathbb{F}(dr) < \infty$  gilt.

Dieses Ergebnis gewährleistet also die Existenz einer oberer Schranke  $\gamma_c$  für die Intensität  $\gamma$  eines Poissonschen Partikelprozesses  $\Xi_\gamma$  aus Kugeln mit zufälligem Radius, so dass  $\Xi_\gamma$  für alle  $\gamma < \gamma_c$  f.s. nur endliche Zusammenhangskomponenten besitzt. Die Aussage von Satz 3.3.1 ist sehr eng mit der sphärischen Partikelform verbunden. Für einen beliebigen stationären Poissonschen Partikelprozess  $\Xi_\gamma$  mit Intensität  $\gamma$  und Partikelverteilung  $\mathbb{Q}$  liefert uns Satz 3.3.1 jedoch ebenfalls die Existenz einer oberer Schranke  $\gamma_c$  für die Intensität, indem wir für jedes Partikel  $K \in \text{supp } \mathbb{Q}$  seine Umkugel  $B(c(K), r_U(K))$  betrachten. Wir wissen dann, dass sich zwei Partikel  $K$  und  $L$  nicht schneiden, falls  $B(c(K), r_U(K)) \cap B(c(L), r_U(L)) = \emptyset$  gilt. Zu dem Prozess  $\Xi_\gamma = (X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  betrachten wir also dann den Prozess  $\Psi_\gamma = (B(c(X_i), r_U(X_i)))_{i \in \mathbb{N}}$  und wissen, dass die Vereinigungsmenge von  $\Xi_\gamma$  f.s. keine unendliche Zusammenhangskomponente hat, falls dies f.s. schon für die Vereinigungsmenge von  $\Psi_\gamma$  gilt. Die Verteilung  $\mathbb{F}_{r_U}$  der Umkugelradien, also die Radienverteilung der Partikel von  $\Psi_\gamma$ , entspricht dabei gerade  $r_U(\mathbb{Q})$ . Wenden wir nun Satz 3.3.1 auf  $\Psi_\gamma$  an, so erhalten wir eine obere Schranke  $\gamma_c$  für die Intensität von  $\Xi_\gamma$ . Dabei ist zu bemerken, dass die Vereinigungsmenge von  $\Xi_\gamma$  auch für  $\gamma > \gamma_c$  durchaus noch ausschließlich endliche Zusammenhangskomponenten besitzen kann.

**Bemerkung 3.3.2.** Die formale Existenz des Prozesses  $\Psi_\gamma$  begründet sich auf der Messbarkeit der Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{K}' &\rightarrow \mathbb{R}^d \times (0, \infty) \\ K &\mapsto (c(K), r_U(K)), \end{aligned}$$

welche aus Satz 1.2.7 a) folgt.

Damit ergibt sich folgende Aussage, die ein hinreichendes Kriterium für die Stabilität von  $H$  liefert.

**Satz 3.3.3.** *Sei  $\Xi_\gamma$  ein stationärer Poissonscher Partikelprozess mit gleichmäßig beschränkter Formverteilung  $\mathbb{Q}$ . Dann gibt es eine kritische Intensität  $\gamma_c > 0$  so dass für alle  $\gamma < \gamma_c$  das zu  $\Xi_\gamma$  gehörige Funktional  $H$  stabilisierend ist.*

*Beweis.* Da mit den Partikeln von  $\Xi_\gamma$  auch die Partikeln des assoziierten Umkugelprozesses  $\Psi_\gamma$  gleichmäßig beschränkt sind, ergibt sich mit obiger Überlegung in Kombination mit Satz 3.3.1, dass es eine kritische Intensität  $\gamma_c > 0$  gibt, so dass für alle  $\gamma < \gamma_c$  die Zusammenhangskomponenten von  $\Xi_\gamma$  f.s. endlich sind. Das Ereignis  $\{\Xi_\gamma \text{ besitzt ausschließlich endliche Zusammenhangskomponenten}\}$  ist terminal, d.h. es hängt nicht vom Zustand von  $\Xi_\gamma$  auf endlich vielen Bereichen  $A_i \subset \mathbb{R}^d$  mit  $\lambda_d(A_i) < \infty$  ab. Insbesondere ändert das Hinzufügen eines Partikels  $K \in \mathcal{K}'$  das Eintreten dieses Ereignisses nicht, d.h.  $\{\Xi_\gamma \text{ besitzt ausschließlich endliche Zusammenhangskomponenten}\} = \{\Xi_\gamma \cup \{K\} \text{ besitzt ausschließlich endliche Zusammenhangskomponenten}\}$ . Für  $\gamma < \gamma_c$  hat folglich  $\Xi_\gamma \cup \{X_0\}$ , wobei  $X_0 \sim \mathbb{Q}$  unabhängig von  $\Xi_\gamma$ , f.s. ausschließlich endliche Zusammenhangskomponenten. Wir betrachten dann  $R_0$ , den (zufälligen) Radius der Komponente von  $\Xi_\gamma \cup \{X_0\}$ , die das Partikel  $X_0$  enthält. Weiterhin sei  $R_{max}$  so gewählt, dass

$$K \subset B(0, R_{max})$$

für alle  $K \in \text{supp } \mathbb{Q}$  gilt. Dann ist  $H$  stabilisierend zum Radius

$$R_\gamma := R_0 + R_{max}.$$

□

Falls  $\Xi_\gamma$  f.s. nur endliche Zusammenhangskomponenten besitzt, ist  $H$  folglich stabilisierend. Offen bleibt die Frage, ob das Funktional  $H$  für  $\gamma \geq \gamma_c$  immer noch stabilisierend ist bzw. wie sich die Abbildung  $\gamma \mapsto \mathbb{1}\{H \text{ ist stabilisierend bezüglich } \Xi_\gamma\}$  auf  $(0, \infty)$  verhält.

### 3.3.3 Konvergenz von $(\tilde{\Xi}_{r_n W})_{n \in \mathbb{N}}$

Betrachten wir nun nochmals das Beispiel aus Abschnitt 3.3.1, bei dem  $\tilde{\Lambda}_{r_n}$  immer zwischen zwei Regimes alternierte, so stellen wir fest, dass hier für jedes  $n \in \mathbb{N}$  die Partikel von  $\Lambda_{r_{n+1}}$  einen Einfluss auf die Gestalt der Partikel von  $\tilde{\Lambda}_{r_{n+1}}$ , die ihren Mittelpunkt in  $r_n W$  haben, hatten. Bei der Frage nach der Konvergenz von  $\tilde{\Xi}_{r_n W}$  für eine Folge  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $r_n \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$  wollen wir uns daher folgende Eigenschaft definieren.

Die Folge  $(\tilde{\Lambda}_{r_n W})_{n \in \mathbb{N}}$  endlicher Mengen konvexer Körper heißt *von der Mitte aus stabilisierend*, wenn es für alle  $i \in \mathbb{N}$  einen Index  $n_0(i) \in \mathbb{N}$  gibt, so dass sich  $\{K \in \tilde{\Lambda}_{r_n W} : c(K) \in r_i W\}$  für alle  $n \geq n_0(i)$  nicht mehr verändert. Insbesondere bilden dann die Partikelkollektionen  $\Upsilon_i := \{K \in \tilde{\Lambda}_{r_{n_0(i)} W} : c(K) \in r_i W\}$  für  $i \in \mathbb{N}$  und  $n \geq n_0(i)$  beliebig eine aufsteigende Folge, d.h. es gilt

$$\Upsilon_1 \subset \Upsilon_2 \subset \dots$$

Eine von der Mitte aus stabilisierende Folge  $\tilde{\Lambda}_{r_n}$  verändert sich also für alle  $i \in \mathbb{N}$  und alle  $n \geq n_0(i)$  nur noch auf den Schalen  $r_n W \setminus r_i W$ , bleibt aber in der Mitte stabil. Dies tritt etwa dann auf, wenn die Vereinigungsmenge von  $\Lambda$  nur endliche Zusammenhangskomponenten hat.



In Abschnitt 3.3.1 haben wir eine deterministische Folge  $(\tilde{\Lambda}_{r_n})_{n \in \mathbb{N}}$  kennengelernt, die nicht von der Mitte aus stabilisierend war. Gleichzeitig zeigte sich in diesem Beispiel, dass es zwei Teilfolgen  $(n_j^{(1)})_{j \in \mathbb{N}}$  mit  $n_j^{(1)} = 2j$  und  $(n_j^{(2)})_{j \in \mathbb{N}}$  mit  $n_j^{(2)} = 2j - 1$  gab, so dass  $\tilde{\Lambda}_{r_{n_j^{(1)}}}$  und  $\tilde{\Lambda}_{r_{n_j^{(2)}}}$  von der Mitte aus stabilisierend waren.

**Frage 3.3.4.** *Gegeben sei eine feste messbare und translationsinvariante Gewichtsfunktion  $M : \mathcal{K}' \rightarrow [0, \infty)$ , ein stationärer Poissonscher Partikelprozess  $\Xi$  mit fester Intensität  $\gamma > 0$ , eine Folge  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $r_n \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$  und ein Beobachtungsfenster  $W \in \mathcal{K}'$  mit  $0 \in \text{int } W$ . Ist dann die Folge  $(\tilde{\Xi}_{r_n W})_{n \in \mathbb{N}}$  entweder f.s. immer oder f.s. nie von der Mitte aus stabilisierend?*

Dazu wäre etwa zu zeigen, dass das Ereignis, dass  $\{\tilde{\Xi}_{r_n W}$  ist von der Mitte aus stabilisierend $\}$  terminal ist oder in  $\mathcal{T}(\mathcal{F}')$  liegt, um dann mit dem 0-1-Gesetz von Kolmogorov bzw. der Ergodizität von  $\Xi$  obige Frage positiv zu beantworten.

### 3.3.4 Definition und Existenz eines Grenzprozesses

Falls  $(\tilde{\Xi}_{r_n W})_{n \in \mathbb{N}}$  f.s. von der Mitte aus stabilisierend ist, können wir einen Grenzprozess  $\tilde{\Xi}$  direkt dadurch definieren, dass jeweils realisierungsweise

$$K \in \tilde{\Xi} \Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : K \in \tilde{\Xi}_{r_n W} \text{ für alle } n \geq n_0. \quad (3.19)$$

Für den Fall, dass  $(\tilde{\Xi}_{r_n W})_{n \in \mathbb{N}}$  nicht von der Mitte aus stabilisierend ist, versuchen wir eine von der Mitte aus stabilisierende Teilfolge zu finden. Dazu zeigen wir, dass die Folge  $(\tilde{\Xi}_{r_n W})_{n \in \mathbb{N}}$  schwach gegen einen bestimmten Grenzprozess konvergiert.

**Satz 3.3.5.** *Die Folge  $(\mathbb{P}^{\tilde{\Xi}_{r_n W}})_{n \in \mathbb{N}}$  der Verteilungen der Prozesse  $\tilde{\Xi}_{r_n W}$  hat eine konvergente Teilfolge.*

*Beweis.* Wir stellen fest, dass  $(\tilde{\Xi}_{r_n W})_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathcal{F}(\mathcal{K}')$  ist. Weiterhin ist  $\mathcal{K}'$  ein lokalkompakter Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis. Da in diesem Fall die Familie der abgeschlossenen Teilmengen von  $\mathcal{K}'$  kompakt ist (siehe [49], Satz B.2 (i)), kann man direkt Theorem 6.2 aus [49] anwenden und erhält die Aussage, dass die Familie von Verteilungen  $\{\mathbb{P}^{\tilde{\Xi}_{r_n W}} : n \in \mathbb{N}\}$  relativ kompakt ist. □

Jedoch kann es abzählbar viele solcher konvergenter Teilfolgen mit jeweils unterschiedlichen Grenzprozessen geben, weshalb dieses Ergebnis wenig befriedigend ist, da sich die Frage stellt, wie man aus den vorhandenen Grenzwerten konvergenter Teilfolgen von  $(\mathbb{P}^{\tilde{\Xi}_{r_n W}})_{n \in \mathbb{N}}$  einen Grenzwert so auswählt, dass der resultierende Prozess stationär ist. Außerdem wäre weiterhin zu klären, ob ein potentieller Grenzprozess von der Wahl des Fensters  $W$  und der Radienfolge  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  abhängt.

Aufgrund der hier vorliegenden Schwierigkeiten wollen wir im nächsten Abschnitt einen anderen Ansatz zur Konstruktion eines stationären Prozesses  $\tilde{\Xi}$ , der lokal betrachtet eng mit dem Prozess  $\tilde{\Xi}_W$  zusammenhängt, wählen.

### 3.3.5 Alternative Konstruktion eines stationären Grenzprozesses

Das hier vorliegende Problem der Ausweitung des auf einem endlichen Fenster  $W \subset \mathbb{R}^d$  eingeführten Prozesses  $\tilde{\Xi}_W$  auf den ganzen Raum, so dass der resultierende Prozess zum einen stationär ist und zum anderen lokal betrachtet sich in seinen Eigenschaften bis auf Randeffekte möglichst wenig von dem lokal definierten Prozess unterscheidet, wird dadurch erschwert, dass die dem Prozess  $\tilde{\Xi}_W$  zugrundeliegende Ausdünnungsvorschrift, welche durch die Abbildung  $T$  aus (3.4) dargestellt wird, dafür sorgt, dass die Gestalt des ausgedünnten Prozesses an einer beliebigen Stelle im Raum auch von Primärpartikeln beeinflusst werden kann, die weit von dieser Stelle entfernt sind. Wir werden in diesem Abschnitt unter Berücksichtigung dieser Schwierigkeit eine Konstruktion vorstellen, die einen stationären harten Grenzprozess liefert, dessen Einschränkung auf ein endliches Fenster  $W \subset \mathbb{R}^d$  sich in dem Sinn nicht zu sehr von  $\tilde{\Xi}_W$  unterscheidet, dass das Gesamtgewicht dieser Einschränkung und  $M(\tilde{\Xi}_W)$  möglichst nahe beieinander liegen.

Ausgangspunkt ist dabei ein stationärer Poissonscher Partikelprozess mit Intensität  $\gamma > 0$  und Formverteilung  $\mathbb{Q}$ , dessen Partikel gleichmäßig beschränkt sind, d.h. es gilt

$$\mathbb{Q}(\{K \in \mathcal{K}_0 : K \subset B(0, R_o)\}) = 1$$

für ein  $R_o > 0$  wobei oBdA  $R_o < 1/4$  gelten soll (siehe hierzu Bemerkung 3.3.9 unten). Weiterhin seien  $C := [0, 1]^d$ ,  $C^- := (R_o, 1 - R_o)^d$  sowie  $C_z := C + z$ ,  $C_z^- := C^- + z$  für  $z \in \mathbb{Z}^d$ . Wir wollen nun zuerst eine messbare Abbildung

$$T' : \mathcal{F}_{le}(\mathcal{K}') \rightarrow \mathcal{F}_{le}(\mathcal{K}') \tag{3.20}$$

angeben, die jede lokalendliche Partikelmenge  $\Lambda \in \mathcal{F}_{le}(\mathcal{K}')$  mit Hilfe der Abbildung  $T$  aus (3.4) auf eine harte Teilmenge davon abbildet. Dazu wird eine harte Partikelmenge  $\Lambda' =: T'(\Lambda)$  bestehend aus zwei Teilmengen konstruiert. Für  $\Lambda \in \mathcal{F}_{le}(\mathcal{K}')$  beginnen wir mit

$$\Lambda_0 := \bigcup_{z \in \mathbb{Z}^d} T(\Lambda_{C_z^-}). \tag{3.21}$$

Damit besteht  $\Lambda_0$  aus disjunkten Partikeln von  $\Lambda$ , enthält aber keine Partikel deren Umkugelmittelpunkte einen Abstand von höchstens  $R_o$  zum Rand einer der Zellen  $C_z$ ,  $z \in \mathbb{Z}^d$ , haben. In den nächsten beiden Schritten werden diese Lücken nun möglichst effizient aufgefüllt. Dazu sei  $(F_n^{(d-1)})_{n \in \mathbb{N}}$  eine beliebige aber feste Abzählung von  $\cup_{z \in \mathbb{Z}^d} \mathcal{F}_{d-1}(C_z)$ , wobei wir daran erinnern, dass  $\mathcal{F}_{d-1}(C_z)$  die Menge der Facetten von  $C_z$ , also der  $(d-1)$ -dimensionalen Seiten

von  $C_z$ , bezeichnet. Weiterhin ordne die Abbildung

$$\zeta_{d-1} : \mathcal{K}' \rightarrow \bigcup_{z \in \mathbb{Z}^d} \mathcal{F}_{d-1}(C_z) \quad (3.22)$$

jedem konvexen Körper  $K$  das Element von  $\bigcup_{z \in \mathbb{Z}^d} \mathcal{F}_{d-1}(C_z)$  zu, das  $c(K)$  am nächsten liegt und im Falle der Nichteindeutigkeit das bezüglich  $\prec_1$  kleinste. Wir setzen dann

$$\Lambda_1 := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T(\{K \in \Lambda \setminus \Lambda_0 : K \cap L = \emptyset \text{ für alle } L \in \Lambda_0, \zeta_{d-1}(K) = F_n^{(d-1)}\}). \quad (3.23)$$

Wir wissen nun aufgrund der Beschränkung  $R_o < 1/4$ , dass  $\Lambda_1$  nur endliche Zusammenhangskomponenten haben kann und definieren schließlich

$$T'(\Lambda) := \Lambda' := \Lambda_0 \cup T(\Lambda_1), \quad (3.24)$$

wobei dies so zu verstehen ist, dass  $T$  auf die einzelnen Zusammenhangskomponenten von  $\Lambda_1$  angewendet wird. Nachfolgende Aussage zeigt, dass die Abbildung  $T'$  das Gewünschte leistet.

**Satz 3.3.6.** *Die Abbildung  $T'$  ist messbar, kovariant unter Translationen aus  $\mathbb{Z}^d$  und bildet eine lokalendliche Menge von konvexen Partikeln auf eine harte Teilmenge davon ab.*

*Beweis.* Die Messbarkeit von  $T'$  folgt unmittelbar aus der Messbarkeit der Abbildungen  $T$  und  $\zeta_{d-1}$ . Letztere ist nach Satz (1.2.7), der Stetigkeit der Abbildung  $(\mathbb{R}^d, \bigcup_{z \in \mathbb{Z}^d} \mathcal{F}_i(C_z)) \ni (x, F) \mapsto \min_{y \in F} \|x - y\|$  und Bemerkung 3.1.2 messbar. Die Translationskovarianz bezüglich Translationen aus  $\mathbb{Z}^d$  ergibt sich aus der Gestalt der Partition  $\{C_z : z \in \mathbb{Z}^d\}$ , der Translationskovarianz von  $T$  und der Translationsinvarianz im Sinne von (3.6) der Totalordnung  $\prec_1$ .  $\square$

Um unter Verwendung der Abbildung  $T'$  einen globalen Prozess einzuführen, dessen Verteilung die Invarianzeigenschaften der Verteilung eines Poissonschen Primärprozesses  $\Xi$  erbt, betrachten wir einen erweiterten Punktprozess

$$\Xi' : (\Omega \times [0, 1]^d, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}([0, 1]^d), \mathbb{P} \otimes \lambda_d|_{[0, 1]^d}) \rightarrow \mathbf{N}(\mathcal{K}') \quad (3.25)$$

$$(\omega, x) \mapsto T'(\Xi(\omega) - x) + x. \quad (3.26)$$

**Satz 3.3.7.** *Es sei  $\Xi$  ein Poissonscher Partikelprozess, dessen Verteilung invariant unter der Translation um  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  sei. Dann ist die Verteilung von  $\Xi'$ , wie in (3.25) definiert, ebenfalls invariant unter der Translation um  $x_0$ .*

*Beweis.* Für  $A \in \mathcal{N}(\mathcal{K}')$  gilt nach den Voraussetzungen des Satzes

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{P} \otimes \lambda_d|_{[0,1]^d}(\{(\omega, y) : \Xi'(\omega, y) + x_0 \in A\}) \\
 &= \int_{[0,1]^d} \mathbb{P}(\{\omega : \Xi'(\omega, y) + x_0 \in A\})dy \\
 &= \int_{[0,1]^d} \mathbb{P}(\{\omega : T'(\Xi(\omega) - y) + y + x_0 \in A\})dy \\
 &= \int_{[0,1]^d} \mathbb{P}(\{\omega : T'(\Xi(\omega) + x_0 - (x_0 + y)) + y + x_0 \in A\})dy \\
 &= \int_{[0,1]^d} \mathbb{P}(\{\omega : T'(\Xi(\omega) - (x_0 + y)) + (x_0 + y) \in A\})dy
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Für jeden Punkt  $x_0 + y$  aus  $[0, 1]^d + x_0$  gibt es nun eine eindeutige Zerlegung  $x_0 + y = y_0(x_0, y) + z_0(x_0, y)$  mit  $y_0(x_0, y) \in [0, 1]^d$  und  $z_0(x_0, y) \in \mathbb{Z}^d$ . Dabei kann die Abbildung

$$\begin{aligned}
 \varphi_{x_0} : [0, 1]^d &\rightarrow \mathbb{Z}^d \\
 y &\mapsto z_0(x_0, y)
 \end{aligned}$$

nur endlich viele Werte  $z_1, \dots, z_k$  annehmen, da für  $z_0(x_0, y)$  nur diejenigen Punkte aus  $\{z \in \mathbb{Z}^d : (z + [0, 1]^d) \cap (x_0 + [0, 1]^d) \neq \emptyset\} = \mathbb{Z}^d \cap ([0, 1]^d + x_0 + (-1, 0]^d)$  in Frage kommen. Setzen wir

$$D_i := \{y \in [0, 1]^d : z_0(x_0, y) = z_i\}$$

für  $i \in \{1, \dots, k\}$ , so sind die Mengen  $D_i$  paarweise disjunkt und es gilt  $\cup_{i=1}^k D_i = [0, 1]^d$ . Weiterhin ist die Abbildung

$$\begin{aligned}
 \psi_{x_0} : [0, 1]^d &\rightarrow [0, 1]^d \\
 y &\mapsto y_0(x_0, y)
 \end{aligned}$$

auf jeder der Mengen  $D_i$  gerade eine Translation. Für  $y, y' \in [0, 1]^d$  impliziert  $y_0(x_0, y) = y_0(x_0, y')$  zudem  $y - y' = z_0(x_0, y) - z_0(x_0, y') \in \mathbb{Z}^d$ , weshalb bereits  $y = y'$  gelten muss. Damit ist  $\psi$  injektiv. Die Surjektivität von  $\psi$  ist offensichtlich. Insgesamt haben wir gezeigt, dass  $\psi$  eine Bijektion auf  $[0, 1]^d$  ist, die das Lebesguemaß invariant lässt. Damit können wir mit

dem letzten Integral aus (4.3.5) wie folgt fortfahren:

$$\begin{aligned}
 & \int_{[0,1]^d} \mathbb{P}(\{\omega : T'(\Xi(\omega) - (x_0 + y)) + (x_0 + y) \in A\}) dy \\
 &= \int_{[0,1]^d} \mathbb{P}(\{\omega : T'(\Xi(\omega) - (y_0(x_0, y) + z_0(x_0, y))) + (y_0(x_0, y) + z_0(x_0, y)) \in A\}) dy \\
 &= \int_{[0,1]^d} \mathbb{P}(\{\omega : T'(\Xi(\omega) - y_0(x_0, y)) + y_0(x_0, y) \in A\}) dy \\
 &= \int_{[0,1]^d} \mathbb{P}(\{\omega : T'(\Xi(\omega) - y) + y \in A\}) dy \\
 &= \mathbb{P} \otimes \lambda_d|_{[0,1]^d}(\{(\omega, y) : \Xi'(\omega, y) \in A\})
 \end{aligned}$$

□

Daraus ergibt sich insbesondere folgender wichtige Spezialfall.

**Satz 3.3.8.** *Es sei  $\Xi$  ein stationärer Poissonscher Partikelprozess. Dann ist  $\Xi'$ , wie in (3.25) definiert, stationär und mischend.*

*Beweis.* Die Stationarität folgt direkt aus Satz 3.3.7. Zum Beweis, dass  $\Xi'$  mischend ist, betrachten wir das dynamische System  $(\mathbf{N}(\mathcal{F}'), \mathcal{N}(\mathcal{F}'), \mathbb{P}^{\Xi'}, \mathbf{T})$  wie in Kapitel 1 eingeführt. Aus Satz 1.2.12 folgt, dass es sich dann bei  $Z := \text{supp}(\Xi')$  um eine zufällige abgeschlossene Menge handelt. Wir wollen nun zeigen, dass das dynamische System  $(\mathcal{F}(\mathcal{K}'), \mathcal{B}(\mathcal{F}(\mathcal{K}')), \mathbb{P}^Z, \mathbf{T})$  mischend ist, wobei wir für  $x \in \mathbb{R}^d$  die Automorphismen  $\mathbf{T}_x : \mathcal{F}(\mathcal{K}') \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{K}')$  analog zu oben via  $\mathbf{T}_x(F) := F + x := \{K + x : K \in F\}$  definieren. Da die Operation von  $\mathbf{T}$  auf  $\mathcal{F}(\mathcal{K}')$  bzw.  $\mathbf{N}(\mathcal{F}')$  und die Abbildung  $i$  aus Satz 1.2.12 kommutieren, folgt daraus dann die Behauptung.

Wie in [68] Theorem 9.3.2 und der Bemerkung danach dargestellt, reicht es daher zu zeigen, dass für alle  $A_1, A_2 \in \mathcal{C}$  die Beziehung

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \mathbb{P}^Z(\mathcal{F}^{A_1 \cup \mathbf{T}_x A_2}) = \mathbb{P}^Z(\mathcal{F}^{A_1}) \mathbb{P}^Z(\mathcal{F}^{A_2})$$

gilt. Wir beginnen mit folgender Überlegung:

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{P}^Z(\mathcal{F}^{A_1 \cup \mathbf{T}_x A_2}) \\
 &= \mathbb{E} \prod_{K \in \Xi'} \mathbb{1}\{K \cap (A_1 \cup \mathbf{T}_x A_2) = \emptyset\} \\
 &= \mathbb{E} \prod_{K \in \Xi'_{A_1 + B(0, R_0)}} \mathbb{1}\{K \cap A_1 = \emptyset\} \prod_{L \in \Xi'_{A_2 + B(x, R_0)}} \mathbb{1}\{L \cap \mathbf{T}_x A_2 = \emptyset\}.
 \end{aligned}$$

Die Zufallsvariablen

$$\Pi_1 := \prod_{K \in \Xi'_{A_1+B(0,R_o)}} \mathbb{1}\{K \cap A_1 = \emptyset\}$$

und

$$\Pi_2(x) := \prod_{L \in \Xi'_{A_2+B(x,R_o)}} \mathbb{1}\{L \cap \mathbf{T}_x A_2 = \emptyset\}$$

sind nun aber nach Konstruktion asymptotisch unabhängig, da  $\Pi_1$  bzw.  $\Pi_2(x)$  realisierungsweise nur von der Gestalt von  $\Xi$  auf kompakten Beobachtungsfenstern  $W_1$  bzw.  $W_2(x)$  abhängt. Wählt man nun realisierungsweise  $R > 0$  so, dass  $W_1 \cap W_2(x) = \emptyset$  für alle  $x \in \mathbb{R}^d$  mit  $\|x\| > R$  gilt, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \prod_{K \in \Xi'_{A_1+B(0,R_o)}} \mathbb{1}\{K \cap A_1 = \emptyset\} \prod_{L \in \Xi'_{A_2+B(x,R_o)}} \mathbb{1}\{L \cap \mathbf{T}_x A_2 = \emptyset\} \\ &= \mathbb{E} \prod_{K \in \Xi_{W_1}} \mathbb{1}\{K \cap A_1 = \emptyset\} \mathbb{1}\{K \in \Xi'\} \prod_{L \in \Xi_{W_2(x)}} \mathbb{1}\{L \cap \mathbf{T}_x A_2 = \emptyset\} \mathbb{1}\{L \in \Xi'\} \\ &= \mathbb{E} \prod_{K \in \Xi_{W_1}} \mathbb{1}\{K \cap A_1 = \emptyset\} \mathbb{1}\{K \in \Xi'\} \mathbb{E} \prod_{L \in \Xi_{W_2(x)}} \mathbb{1}\{L \cap \mathbf{T}_x A_2 = \emptyset\} \mathbb{1}\{L \in \Xi'\} \\ &= \mathbb{P}^Z(\mathcal{F}^{A_1}) \mathbb{P}^Z(\mathcal{F}^{\mathbf{T}_x A_2}) = \mathbb{P}^Z(\mathcal{F}^{A_1}) \mathbb{P}^Z(\mathcal{F}^{A_2}). \end{aligned}$$

□

- Bemerkung 3.3.9.** 1.) Wir haben zu Beginn dieses Abschnitts gefordert, dass der maximale Umkugelradius  $R_o$  einer Partikelform aus dem Träger der Formverteilung  $\mathbb{Q}$  kleiner als  $1/4$  sein soll. Falls dies nicht der Fall ist, so können wir durch eine Reskalierung der Partition  $\{C_z : z \in \mathbb{Z}^d\}$  um den Faktor  $4R_o$  die Ergebnisse von oben auf diesen Prozess übertragen.
- 2.) Wir haben in Satz 3.3.7 und Korollar 3.3.8 gesehen, dass sich Invarianzen unter Translationen von  $\Xi$  auf  $\Xi'$  übertragen. Für Drehungen oder Bewegungen ist dies nicht der Fall. Der Grund hierfür liegt darin, dass  $\prec_1$  nicht drehinvariant ist (siehe Bemerkung 3.1.2 2.)).
- 3.) Alternativ zur vorliegenden Konstruktion von  $\Xi'$  hätte man für den Fall, dass der Poissonische Primärprozess  $\Xi$  bereits stationär ist, einen stationären Prozess einführen können, indem man realisierungsweise  $T'(\Xi)$  um eine auf  $[0, 1)^d$  gleichverteilte Translation verschiebt. Für diese Konstruktion wäre die Aussage von Satz 3.3.7 nicht richtig.
- 4.) Es sind auch andere Ausdünnungsvorschriften vorstellbar, welche der Abbildung  $T'$  ähnlich sind. Ausgehend von einer lokalendlichen Partikelmenge  $\Lambda$  könnte man mit den Bezeichnungen von oben etwa zuerst jeweils die Partikel der Mengen  $\Lambda_{C_z}, z \in \mathbb{Z}^d$ , mittels  $T$  ausdünnen und dann die Überlappungen zwischen Partikeln der Mengen  $T(\Lambda_{C_z}), z \in \mathbb{Z}^d$ , behandeln.

Später soll in Kapitel 5 untersucht werden, wie sich die Gewichte von  $\tilde{\Xi}_W$  und  $\Xi'_W := \{K \in \Xi' : c(K) \in W\}$  für konvexe Körper  $W$  voneinander unterscheiden. Dazu wollen wir hier noch eine rein deterministische Vorüberlegung anstellen:

Es seien  $W := \cup_{i=1}^k C_{z_i}$  für ein  $k \in \mathbb{N}$  und  $z_1, \dots, z_k \in \mathbb{Z}^d$  sowie  $\Lambda \in \mathcal{F}_{le}(\mathcal{K}')$ , wobei für alle  $K \in \Lambda$  die Größenbeschränkung  $r_U(K) \leq R_o$  für ein  $R_o < 1/4$  gelte. Dann gilt zunächst folgende Ungleichung

$$\sum_{i=1}^k M(T(\Lambda_{C_{z_i}^-})) \leq M(T'(\Lambda)_W) \leq M(T(\Lambda_W)) \leq \sum_{i=1}^k M(T(\Lambda_{C_{z_i}})). \quad (3.28)$$

Damit ergibt sich dann mit Satz 3.1.5 d) die Abschätzung

$$M(T(\Lambda_W)) - M(T'(\Lambda)_W) \leq \sum_{i=1}^k (M(T(\Lambda_{C_{z_i}})) - M(T(\Lambda_{C_{z_i}^-}))) \leq \sum_{i=1}^k M(T(\Lambda_{C_{z_i} \setminus C_{z_i}^-})). \quad (3.29)$$

# Kapitel 4

## Graphentheoretische Sichtweise, Algorithmen und untere Schranken

Dieses Kapitel ist inhaltlich zweigeteilt. Zuerst beschäftigen wir uns mit der Beschreibung des Problems des Auffindens einer gewichtsmaximalen harten Teilmenge einer endlichen Menge von konvexen Körpern. Dazu werden wir dieses Problem auf eine graphentheoretische Fragestellung zurückführen und als ganzzahliges lineares Optimierungsproblem formulieren. Dann werden wir ein effizientes Lösungsverfahren für die graphentheoretische Problemstellung vorstellen und den Aufwand für diesen Algorithmus und mögliche Verbesserungen diskutieren. Im zweiten Teil werden wir in Abschnitt 4.3 ein Verfahren zur näherungsweisen Lösung des Problems präsentieren und davon ausgehend eine untere Schranke für das erwartete Gewicht des Prozesses der gewichtsmaximalen Teilmenge eines stationären Poissonschen Partikelprozesses herleiten.

### 4.1 Graphentheoretische Grundlagen

Ein *Graph*  $G$  besteht aus einem Tupel  $(V, E)$ , wobei  $V := (v_1, \dots, v_m)$  eine endliche Menge von *Knoten* und  $E := (e_1, \dots, e_l) \subset V \times V$  eine Relation auf  $V$ , die (endliche) Menge der *Kanten*, bezeichnet. Wir schreiben  $(v_j, v_i)$  für die Kante, die  $v_j$  mit  $v_i$ , ( $i \neq j$ ), verbindet, und sprechen von einem ungerichteten Graphen, falls die Kantenrelation  $E$  symmetrisch ist. In diesem Fall müssen wir nicht zwischen  $(v_i, v_j)$  und  $(v_j, v_i)$  unterscheiden. Von nun an sei  $G$  ungerichtet. Versieht man jeden Knoten  $v_i \in V$  noch zusätzlich mit einem (nichtnegativen) Gewicht  $w_i := w(v_i)$  so nennt man  $G = (V, E, W)$  mit  $W := (w_1, \dots, w_m)$  einen gewichteten Graphen. Für einen solchen ungerichteten gewichteten Graphen und  $U \subset V$  setzen wir  $W(U) := \sum_{i: v_i \in U} w_i$ . Für  $v \in V$  bezeichne  $N(v)$  die *Nachbarschaft* von  $v$ , d.h. alle zu  $v$  adjazenten Knoten, und  $d(v) := d_G(v) := \text{card } N(v)$  den *Grad* von  $v$ . Für eine Knotenmenge  $U \subset V$  bezeichne  $G(U)$  den von  $U$  induzierten Subgraphen von  $G$ , d.h.  $G(U) = (U, E(U))$  mit  $E(U) = E \cap (U \times U)$ . Einen Graphen  $G_1 = (V_1, E_1)$  nennt man *Teilgraph* eines Graphen  $G = (V, E)$ , falls  $V_1 \subset V$  und  $E_1 \subset E$  gelten. Der zu  $G = (V, E)$  gehörende *Komplementärgraph*  $\bar{G} = (V, \bar{E})$  ist dadurch gekennzeichnet, dass  $(v_i, v_j) \in \bar{E}$  genau dann gilt, wenn



$(v_i, v_j) \notin \bar{E}$  gilt.

**Bemerkung 4.1.1.** Wir werden später den Begriff des Graphen auch auf eine abzählbare Knotenmenge  $V$  und eine dementsprechenden Kantenrelation  $E$  auf  $V$  erweitern. Dabei wird die Kantenmenge immer lokalendlich sein, was bedeutet, dass jeder Knoten einen endlichen Grad hat. Dafür gelten dann die bisher verwendeten Begriffe und Notationen analog.

Im Folgenden sei  $G = (V, E, W)$  ein ungerichteter gewichteter Graph mit  $V = (v_1, \dots, v_m)$ ,  $E = (e_1, \dots, e_l)$  und  $W = (w_1, \dots, w_m)$ . Eine Knotenmenge  $U \subset V$  nennt man dann ein *Independent Set* von  $G$ , falls

$$v_i, v_j \in U \Rightarrow (v_i, v_j) \notin E$$

gilt. Die Menge aller solcher Independent Sets von  $G$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{I}_G$ , d.h.

$$\mathcal{I}_G := \{U \subset V : v_i, v_j \in U \Rightarrow (v_i, v_j) \notin E\}.$$

Eine Menge  $U \subset V$  heißt *Clique* von  $G$ , falls

$$v, w \in U \Rightarrow (v, w) \in E.$$

Die Menge aller solcher Cliques von  $G$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{C}_G$ , d.h.

$$\mathcal{C}_G := \{U \subset V : v_i, v_j \in U \Rightarrow (v_i, v_j) \in E\}.$$

Wir betrachten nun folgendes Optimierungsproblem:

$$\text{maximiere } W(U) \text{ unter der Nebenbedingung } U \in \mathcal{I}_G. \quad (4.1)$$

Diese Problemstellung ist bekannt als *Maximum Weight Independent Set*, kurz MWIS; sie fragt nach dem gewichtsmaximalen Independent Set von  $G$ . Es ist bekannt, dass dieses Problem NP-vollständig ist, siehe etwa [14]. Gleiches gilt auch für den ungewichteten Fall. Dies bedeutet, dass es sehr unwahrscheinlich ist, dass ein Algorithmus zur Lösung dieses Problems existiert, der polynomiale Laufzeit besitzt, und dass alle bekannten Algorithmen exponentielle Laufzeit besitzen. Als ganzzahliges lineares Optimierungsproblem lässt sich (4.1) wie folgt darstellen:

$$\text{maximiere } w^\top x \text{ unter } Ax \leq (1, \dots, 1)^\top, x \in \{0, 1\}^m, \quad (4.2)$$

wobei  $w = (w_1, \dots, w_m)$ ,  $a_{ij} := \mathbb{1}\{v_j \text{ ist inzident zu } e_i\}$  für  $j = 1, \dots, m, i = 1, \dots, l$  und  $A = ((a_{ij}))_{1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq m} \in \{0, 1\}^{l \times m}$ . Analog dazu betrachten wir folgendes Optimierungsproblem:

$$\text{maximiere } W(U) \text{ unter der Nebenbedingung } U \in \mathcal{C}_G. \quad (4.3)$$

Diese Problemstellung ist bekannt als *Maximum Weight Clique*, kurz MWC, und fragt nach der gewichtsmaximalen Clique von  $G$ . Es besteht nun folgender Zusammenhang zwischen gewichtsmaximalen Independent Sets von  $G$  und gewichtsmaximalen Cliques von  $\bar{G}$ .

**Lemma 4.1.2.** Sei  $G = (V, E, W)$  ein ungerichteter gewichteter Graph. Dann ist  $U \subset V$  genau dann ein MWIS in  $G$ , wenn  $U$  eine MWC in  $\bar{G}$  ist.

*Beweis.* Da das zu maximierende Funktional in beiden Problemstellungen dasselbe ist, reicht es zu zeigen, dass  $\mathcal{I}_G = \mathcal{C}_{\bar{G}}$  gilt. Dies zeigen wir wie folgt:

$$\begin{aligned} U \in \mathcal{I}_G &\Leftrightarrow (v_i, v_j \in U \Rightarrow (v_i, v_j) \notin E) \\ &\Leftrightarrow (v_i, v_j \in U \Rightarrow (v_i, v_j) \in \bar{E}) \\ &\Leftrightarrow U \in \mathcal{C}_{\bar{G}}. \end{aligned}$$

□

**Bemerkung 4.1.3.** a) Die ganzzahligen Optimierungsprobleme (4.1) und (4.3) sind im Allgemeinen nicht eindeutig lösbar.

b) Sowohl (4.1) als auch (4.3) lassen sich auch für den Fall ungewichteter Graphen definieren. In diesem Fall setzen wir  $w = (1, \dots, 1)$  und erhalten als Lösung das Independent Set bzw. die Clique von  $G$  mit maximaler Kardinalität.

Wir wollen nun einen Algorithmus vorstellen, der das Problem des Auffindens eines MWIS möglichst effektiv löst. Dazu verwenden wir Lemma 4.1.2 und konstruieren einen Algorithmus für das Problem des Auffindens einer MWC. In der Praxis wenden wir nachstehenden Algorithmus also auf  $\bar{G}$  an und erhalten somit ein MWIS auf  $G$ .

Der naive Ansatz zum Auffinden einer Clique mit maximalem Gewicht in  $\bar{G}$  besteht darin, alle Cliques auf  $G$  zu bestimmen und unter diesen diejenige mit maximalem Gewicht auszuwählen. Ein solches Verfahren durchläuft sukzessive alle Cliques von  $G$ , wobei in jedem Schritt die bis dato gewichtsmaximale Clique sowie deren Gewicht gespeichert wird. Hat man nun eine Clique  $C_i \subset V$  gefunden, so versucht man diese durch Hinzufügen eines Knotens  $u_i$ , der zu allen Knoten aus  $C_i$  adjazent ist, zu vergrößern, d.h. man setzt  $C_{i+1} := C_i \cup \{u_i\}$ , falls ein solcher Knoten  $u_i$  existiert. Ist dies der Fall, so bestimmt man das neue Gewicht der neuen Clique und speichert es als neues maximales Gewicht, falls es das bisherige maximale Gewicht übertrifft. Dieses Vorgehen wiederholt man so lange, bis es im  $i_0$ -ten Schritt keinen solchen Knoten  $u_{i_0}$  mehr gibt. Dann entfernt man den letzten hinzugefügten Knoten  $u_{i_0-1}$  und sucht nach anderen Möglichkeiten wie man  $C_{i_0-1}$  zu einer Clique erweitern kann. Setzt man dieses Verfahren immer weiter fort, so durchläuft man über eine Tiefensuche alle möglichen Cliques in  $G$  und hat am Ende eine Clique mit maximalem Gewicht gefunden. Dieses Vorgehen wird im hier vorgestellten Algorithmus aus [52], [53] wesentlich erweitert, indem man versucht „unnötige“ Äste des Tiefensuchbaums abzuschneiden und nicht zu naiv alle Cliques zu durchlaufen. Konkret bedeutet dies, dass man versucht, Kriterien bereitzustellen, die es ermöglichen zu entscheiden, ob man die bereits gefundene Clique  $C_i$  im Restgraphen so erweitern kann, dass sie das bisherige maximale Gewicht noch übertrifft. Dennoch ist es bemerkenswert aber auch charakteristisch für

das Problem des Auffindens einer gewichtsmaximalen Clique bzw. eines gewichtsmaximalen Independent Sets, dass der oben vorgestellte naive Ansatz trotzdem den Kern des Algorithmus bildet. Der Grund dafür liegt in der NP-Vollständigkeit des Problems, welche darauf hinweist, dass man immer eine beachtliche Teilmenge der Potenzmenge von  $V$  durchlaufen muss, um die Lösung des Optimierungsproblems zu erhalten.

Der nun folgende Algorithmus aus [52], [53], der auch für die Simulationen im letzten Kapitel verwendet wurde, erzielte state-of-the-art Performance-Ergebnisse für eine große Anzahl von Benchmark-Problemen und ist dennoch vergleichsweise leicht zu implementieren. Er basiert auf dem Prinzip des *branch-and-bound* und geht in zwei Schritten vor. Der erste Schritt besteht aus einer Umordnung der Knoten, welche jedoch nur die Performance des Algorithmus verbessern soll. Im zweiten Schritt wird dann die Suche nach der gewichtsmaximalen Clique vorgenommen. Auch wenn der vorgestellte Algorithmus den gewichteten Fall behandelt, so soll erwähnt werden, dass man diesen für den ungewichteten Fall verwenden kann, indem man allen Knoten das Gewicht eins zuordnet. Gleichzeitig ist das Vorgehen des Algorithmus auch für den ungewichteten Fall immer noch äußerst effektiv. Es sind keine Verfahren bekannt, die nur den ungewichteten Fall behandeln und dafür eine wesentlich bessere Performance aufweisen.

Im Folgenden werden wir zur Beschreibung der Algorithmen auf eine intuitive Pseudocode-Notation zurückgreifen. Gegeben sei ein ungerichteter gewichteter Graph  $G = (V, E, W)$  mit  $V = (v_1, \dots, v_n)$  und  $W = (w_1, \dots, w_n)$ . Wir verwenden ein globales Array  $c[]$  sowie die globalen Variablen  $max$  und  $found$ . In  $c[i]$  speichern wir das Gewicht der gewichtsmaximalen Clique in  $G(\{v_1, \dots, v_i\})$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $max$  enthält das bisher größte Gewicht einer Clique und die Boolesche Variable  $found$  gibt an, ob eine Clique, deren Gewicht größer als  $max$  ist, im aktuellen Zweig des Suchbaums gefunden wurde.

#### Schritt 1 - Umordnung:

Zu Beginn werden die Knoten von  $V$  so unnummeriert, dass  $v_n$  der Knoten mit maximalem Gewicht ist. Falls es mehrere solcher Knoten gibt, dann wählen wir denjenigen, dessen Nachbarn maximales Gewicht haben bzw. im Falle der Nichteindeutigkeit einen beliebigen davon. Hat man nun  $v_{i+1}, \dots, v_n$ ,  $1 \leq i \leq n-1$ , festgelegt, so erhält man  $v_i$ , indem man dieses gerade beschriebene Verfahren auf  $G(V \setminus \{v_{i+1}, \dots, v_n\})$  anwendet.

#### Schritt 2 - Durchführung der Suche:

Hier wird nun genau das oben vorgestellte Vorgehen formalisiert. Für  $1 \leq k \leq n$  sei  $G_k$  der von  $v_k, \dots, v_n$  induzierte Subgraph von  $G$  und  $C_k$  bezeichne die gewichtsmaximale Clique in  $G_k$ . Der Algorithmus bestimmt nun ausgehend von  $C_n = \{v_n\}$  via backtracking  $C_{n-1}, \dots, C_1$ , wobei  $C_1$  gerade die gesuchte gewichtsmaximale Clique von  $G$  darstellt. Dabei werden im  $k$ -ten Schritt ausgehend von  $C_{k+1}$  in einer Tiefensuche sukzessive alle möglichen Cliquen des Teilgraphen  $G_k$  jeweils entweder durchlaufen oder nachdem man festgestellt hat, dass diese keine Clique mit größerem Gewicht enthalten können, verworfen.

**function main**

```

1:  $max := 0; c[1] = w_1;$ 
2: for  $i := 1$  to  $m$  do
3:    $found := false;$ 
4:    $clique(\{v_1, \dots, v_i\} \cap N(v_i), w_i);$ 
5:    $c[i] := max;$ 
6: end for
7: return;

```

**function clique(U, weight)**

```

1: if  $|U| = 0$  then
2:   if  $weight > max$  then
3:      $max := weight;$ 
4:      $save\ current\ clique;$  // da das Gewicht der momentan betrachteten Clique bisher maximal ist
5:      $found := true;$ 
6:   end if
7:   return;
8: end if
9: while  $U \neq \emptyset$  do
10:  if  $weight + W(U) \leq max$  then
11:    return;
12:  end if
13:   $i := \max\{j : v_j \in U\};$ 
14:  if  $weight + c[i] \leq max$  then
15:    return;
16:  end if
17:   $U := U \setminus \{v_i\};$ 
18:   $clique(U \cap N(v_i), weight + w_i);$ 
19:  if  $found = true$  then
20:    return;
21:  end if
22: end while
23: return;

```

Unter leichten Modifikationen kann man mit diesem Vorgehen auch alle MWC des Graphen  $G$  finden.

## 4.2 Zufällige geometrische Graphen

Wir wollen nun zunächst eine lokalendliche Menge  $\Lambda = (K_i)_{i \in \mathbb{N}}$  von paarweise verschiedenen konvexen Körpern in einen sogenannten *geometrischen Graphen* überführen. Darunter verstehen wir einen Graphen, dessen Kanten durch eine bestimmte geometrische Interpretation der zugehörigen Knoten zustande kommen. Wir identifizieren dazu jeden Körper  $K_i \in \Lambda$  mit einem Knoten  $v_i \in V$  und fügen für  $i \neq j$  die Kante  $e = (v_i, v_j)$  genau dann zu  $E$  hinzu, wenn  $K_i \cap K_j \neq \emptyset$  gilt. Das Gewicht von  $v_i$  sei  $w_i := M(K_i)$ , wobei  $M : \mathcal{K}' \rightarrow [0, \infty)$  ein messbares, translationsinvariantes Gewichtsfunktional ist. Der resultierende gewichtete Graph  $G_\Lambda := G = (V, E, W)$  ist damit ungerichtet. Dabei ist zu beachten, dass jeder Knoten von  $V$  aufgrund der Lokalendlichkeit von  $\Lambda$  einen endlichen Grad hat. Wie in Bemerkung 4.1.1 festgehalten, ist die Tatsache, dass  $G$  nicht aus endlich vielen Knoten besteht mit der Definition eines Graphen verträglich.

Wir überführen nun einen stationären Poissonschen Partikelprozesses  $\Xi$  mit Intensität  $\gamma > 0$  und Formverteilung  $\mathbb{Q}$  bzw. später auch dessen Einschränkung  $\Xi_W$  auf eine kompakte Region  $W \subset \mathbb{R}^d$  realisierungsweise auf oben beschriebene Weise in einen geometrischen Graphen  $G := G_\Xi = (V, E, W)$  und nennen  $G$  einen *zufälligen geometrischen Graphen*. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass wir nicht tiefer in die formale Beschreibung zufälliger geometrischer Graphen vordringen wollen; insbesondere wollen wir keine  $\sigma$ -Algebra auf dem Raum aller (gewichteten) ungerichteten Graphen einführen. Daher verwenden wir den Begriff des zufälligen Graphen auf intuitive Weise, ohne auf die zugehörigen Messbarkeitsfragen einzugehen.

Analog lassen sich endliche zufällige geometrische Graphen einführen, indem man als Ausgangsprozess  $\Xi_W$  wählt und dann wie oben einen ungerichteten gewichteten Graphen  $G_{\Xi_W}$  konstruiert. Derartige geometrische Graphen  $G_{\Xi_W}$  werden im Folgenden eine zentrale Rolle spielen. Zuvor wollen wir aber zum Zwecke der Vereinheitlichung des Setups folgende Überlegung zur Skalierung von  $\Xi_W$  anstellen.

Seien  $\Xi = (X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  ein stationärer Poissonscher Partikelprozess mit Intensität  $\gamma > 0$  und Formverteilung  $\mathbb{Q}$  und  $a > 0$ . Unter  $a \Xi$  wollen wir dann den Prozess

$$a \Xi := (aX_i)_{i \in \mathbb{N}}$$

verstehen. Wir wissen nach Satz 1.2.22 b), dass  $a \Xi$  ebenfalls ein stationärer Poissonscher Partikelprozess mit Intensität  $\gamma/a$  und Formverteilung  $s_a(\mathbb{Q})$ , wobei  $s_a : \mathcal{K}_0 \rightarrow \mathcal{K}_0$ ,  $K \mapsto aK$ , ist. Sei nun  $\Xi_W$  die Einschränkung von  $\Xi$  auf ein kompaktes Beobachtungsfenster  $W \subset \mathbb{R}^d$  und sei  $\Psi$  ein stationärer Poissonscher Partikelprozess mit Intensität  $\gamma/a^d$  und Formverteilung  $s_a(\mathbb{Q})$ . Dann haben die zugehörigen zufälligen ungewichteten geometrischen Graphen  $G_{\Xi_W}$  und  $G_{\Psi_{aW}}$  dieselbe Verteilung in dem Sinn, dass es einen Prozess  $\Psi'_{aW} \sim \Psi_{aW}$  gibt, so dass für die zugehörigen geometrischen Graphen f.s.

$$G_{\Xi_W} = G_{\Psi'_{aW}}$$

gilt. Wir werden uns später in Kapitel 7 auf diese Feststellung berufen, wenn wir unseren Simulationsstudien immer nur auf Fenstern der Gestalt  $W = [0, 1]^d$  durchführen.

Bei der Untersuchung der Struktur zufälliger geometrischer Graphen betrachtet man bestimmte Funktionale endlicher Graphen, wie etwa den minimalen oder maximalen Knotengrad des Graphen, die Anzahl von Knoten mit festem Grad  $k \in \mathbb{N}$  oder das Gewicht der gewichtsmaximalen Clique. Dabei ist besonders das asymptotische Verhalten dieser Funktionale angewandt auf  $G_{\Xi_{r_n W}}$  für  $r_n \rightarrow \infty$  von Interesse. Für den speziellen Fall, dass  $\mathbb{Q} = \delta_{B(0, \rho)}$  für ein  $\rho > 0$ ,  $W = [-1/2, 1/2]^d$  und  $r_n = n^{1/d}$  spricht man vom *thermodynamischen Limit*. Für dieses Szenario sind eine Vielzahl Aussagen über Funktionale des zufälligen geometrischen Graphen bekannt. Wir verweisen dazu auf [55] und werden in Kapitel 5 eine bestimmte Klasse solcher Funktionale und deren Asymptotik untersuchen.

Der zufällige geometrische Graph  $G_{\Xi_W}$ , wie oben beschrieben, hilft uns nun, das Ausgangsproblem der Bestimmung einer gewichtsmaximalen harten Teilmenge von  $\Xi_W$  auf eine graphentheoretische Fragestellung zu reduzieren.

**Satz 4.2.1.** *Es sei  $\Xi$  ein stationärer Poissonscher Partikelprozess mit Intensität  $\gamma > 0$  und Formverteilung  $\mathbb{Q}$ . Weiterhin seien  $W \subset \mathbb{R}^d$  kompakt,  $M : \mathcal{K}' \rightarrow [0, \infty)$  messbar und translationsinvariant und  $G_{\Xi_W}$  der daraus resultierende zufällige gewichtete geometrische Graph. Realisierungsweise betrachtet ist nun  $\tilde{\Xi}_W \subset \Xi_W$  genau dann eine gewichtsmaximale harte Teilmenge von  $\Xi_W$ , falls die zu  $\tilde{\Xi}_W$  gehörende Knotenmenge ein MWIS in  $G_{\Xi_W}$  ist.*

Folglich können wir den Algorithmus aus Abschnitt 4.1 dazu verwenden, um eine gewichtsmaximale harte Teilmenge einer endlichen Kollektion von Partikeln zu bestimmen. Gleichzeitig weist die im vorherigen Abschnitt diskutierte Komplexität des Problems der Bestimmung eines MWIS in einem gerichteten ungewichteten Graphen darauf hin, dass die Untersuchung von  $\tilde{\Xi}_W$  bzw. der zugehörigen Kenngrößen nur sehr schwer möglich sein wird.

### 4.3 Heuristiken und eine untere Schranke für $\mathbb{E}M(\tilde{\Xi}_W)$

Die zentrale Kenngröße, die bei der Analyse von  $\tilde{\Xi}_W$  von Interesse sein wird, ist das erwartete Gewicht von  $\tilde{\Xi}_W$ . Wie bereits im vorherigen Abschnitt angedeutet, scheint eine exakte Berechnung dieses Wertes kaum möglich, weshalb dieser Abschnitt dazu dienen soll, untere Schranken dafür bereitzustellen. Dazu werden wir eine deterministische Konstruktionsvorschrift, die ihre Ursprünge in der Graphentheorie hat, angeben, welche angewandt auf  $\Xi_W$  einen Prozess  $\Xi''_W$  liefert, für den f.s.  $M(\Xi''_W) \leq M(\tilde{\Xi}_W)$  gilt und für dessen erwartetes Gewicht Abschätzungen bekannt sind.

Im Zentrum steht eine graphentheoretische Heuristik, die für einen gerichteten ungewichteten Graphen  $G = (V, E, W)$  ein Independent Set mit möglichst großen Gewicht liefert, das im Allgemeinen aber kein MWIS sein wird. Wenden wir diese Heuristik dann realisierungsweise

auf den geometrischen Graphen  $G_{\Xi_W}$  an und betrachten die daraus resultierenden Knoten  $V''$ , so ist deren Gesamtgewicht f.s. kleiner als das Gewicht des MWIS von  $G_{\Xi_W}$ . Bezeichnen wir mit  $\Xi''_W$  die zu den Knoten  $V''$  gehörenden Partikel von  $\Xi_W$  so gilt f.s.

$$M(\Xi''_W) \leq M(\tilde{\Xi}_W), \quad (4.4)$$

woraus sich dann die Abschätzung

$$\mathbb{E}M(\Xi''_W) \leq \mathbb{E}M(\tilde{\Xi}_W) \quad (4.5)$$

ergibt.

Zur Beschreibung der Heuristik sei  $G = (V, E, W)$  ein gerichteter ungewichteter Graph mit endlicher Knotenmenge. Die Heuristik konstruiert eine aufsteigende, endliche Folge  $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$  von Independent Sets von  $G$ . Zur Konstruktion benötigen wir zudem eine absteigende Folge  $(G_i)_{i \in \mathbb{N}}$  von Teilgraphen von  $G$ . Wir beginnen mit

$$P_0 := \emptyset, G_0 := G.$$

Gegeben  $P_{i-1}, G_{i-1}$  wählen wir unter den Knoten  $V(G_{i-1})$  von  $G_{i-1}$  denjenigen Knoten  $v_i$  aus, der die Abbildung  $v \mapsto \frac{w(v)}{d_{G_i}(v)+1}$  minimiert; falls es mehrere solcher Knoten gibt, wird ein beliebiger davon ausgewählt, etwa der mit dem kleinsten Index. Dann fügen wir diesen zu  $P_{i-1}$  hinzu, löschen ihn und seine Nachbarschaft aus  $G_{i-1}$  und beginnen mit dem nächsten Schritt der Iteration. Sobald  $G_i$  keine Knoten mehr enthält, endet die Heuristik und liefert uns ein Independent Set  $P_i$  zurück. Dies geschieht aufgrund der endlichen Anzahl an Knoten immer nach endlich vielen Schritten. Der Algorithmus terminiert also immer.

Das Vorgehen der Heuristik basiert auf dem Wissen, dass alle Nachbarn eines Knotens  $v$  eines Independent Sets  $P$  von  $G$  nicht in  $P$  enthalten sein können. Der Algorithmus versucht daher solche Knoten  $v$  wählen, mit denen man ein möglichst großes Gewicht hinzufügt und gleichzeitig möglichst wenige Nachbarn löscht. Diese Auswahlvorschrift ist nicht eindeutig, was aber die untere Schranke nicht weiter beeinflusst.

### Heuristik

Input: Ungerichteter gewichteter Graph  $G = (V, E, W)$

Output: Independent Set  $P \in \mathcal{I}_G$

**function** Heuristik

- 1:  $i := 0; G_i := G; P_i := \emptyset;$
- 2: **while**  $V(G_i) \neq \emptyset$  **do**
- 3:    $v_i := \arg \max_{v \in V(G_i)} \left( \frac{w(v)}{d_{G_i}(v)+1} \right);$  // falls nicht eindeutig bestimmt, dann wird unter allen Kandidaten derjenige mit kleinstem Index gewählt
- 4:    $P_i := P_i \cup \{v_i\}; G_i := G_i(V(G_i) \setminus (N_{G_i}(v_i) \cup \{v_i\}));$
- 5:    $i := i + 1;$

- 6: **end while**  
 7: **return**  $P_i$ ;

Für die folgenden beiden Aussagen sei  $G = (V, E, W)$  ein ungerichteter gewichteter Graph. Nach [72] gilt dann folgende Aussage.

**Satz 4.3.1.** *Das minimale Gewicht eines Independent Sets  $P \in \mathcal{I}_G$ , das durch obige Heuristik erzielt wird, beträgt*

$$\sum_{v \in V} \frac{w(v)}{d_G(v) + 1}.$$

Daraus folgt direkt nachstehende Abschätzung.

**Korollar 4.3.2.** *Es sei  $\alpha(G)$  das Gewicht eines MWIS auf  $G$ . Dann gilt*

$$\alpha(G) \geq \sum_{v \in V} \frac{w(v)}{d_G(v) + 1}.$$

Überträgt man diese Aussage auf das Gewicht der gewichtsmaximalen harten Teilmenge einer endlichen Kollektion konvexer Körper so erhält man folgendes Resultat.

**Korollar 4.3.3.** *Es sei  $\Lambda = \{K_1, \dots, K_n\}$  eine endliche Kollektion konvexer Körper und  $\tilde{\Lambda}$  eine zugehörige gewichtsmaximale harte Teilmenge von  $\Lambda$ . Dann gilt*

$$M(\tilde{\Lambda}) \geq \sum_{i=1}^n \frac{M(K_i)}{\text{card}\{K_j \in \Lambda : K_i \cap K_j \neq \emptyset\}}.$$

Von nun an seien  $\Xi$  ein stationärer Poissonscher Partikelprozess mit Intensität  $\gamma > 0$  und Formverteilung  $\mathbb{Q}$  sowie  $W \subset \mathbb{R}^d$  kompakt und  $\lambda_d(W) > 0$ . Das Intensitätsmaß von  $\Xi_W$  sei  $\Theta_W$ . Übertragen wir die Aussage von Korollar 4.3.3 auf den zufälligen geometrischen Graphen  $G_{\Xi_W}$ , so lässt sich damit über folgende Rechnung eine untere Schranke für das erwartete Gewicht von  $\tilde{\Xi}_W$  angeben. Mit der Abschätzung aus Korollar 4.3.3 gilt unter Anwendung von Satz 1.2.14 (ii) und Satz 1.2.23

$$\begin{aligned} \mathbb{E}M(\tilde{\Xi}_W) &\geq \mathbb{E} \sum_{K \in \tilde{\Xi}_W} \underbrace{\frac{M(K)}{\Xi_W(\mathcal{F}_K)}}_{:=f(K, \Xi_W)} = \int_{\mathcal{K}'} \mathbb{E}f(K, \Xi_W \cup \{K\}) \Theta_W(dK) \\ &= \int_{\mathcal{K}'} M(K) \mathbb{E} \left[ \frac{1}{1 + \Xi_W(\mathcal{F}_K)} \right] \Theta_W(dK) \\ &= \gamma \int_{\mathcal{K}_0} \int_W M(K_0) \mathbb{E} \left[ \frac{1}{1 + \Xi_W(\mathcal{F}_{K_0+x})} \right] dx \mathbb{Q}(dK_0). \end{aligned}$$



Der Erwartungswert im Integral lässt sich nun unter Verwendung der Eigenschaften des Poissonprozesses weiter vereinfachen. Es ist dann

$$\mathbb{E} \left[ \frac{1}{1 + \Xi_W(\mathcal{F}_{K_0+x})} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\text{card } \Xi_W = n) \mathbb{E} \left[ \frac{1}{1 + \Xi_W(\mathcal{F}_{K_0+x})} \mid \text{card } \Xi_W = n \right].$$

Mit Korollar 1.2.20 können wir diesen bedingten Erwartungswert durch

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} p_{K_0+x}^k (1 - p_{K_0+x})^{n-k}$$

mit

$$p_{K_0+x} := \frac{1}{\lambda_d(W)} \int_{\mathcal{K}_0} \int_W \mathbf{1}\{(K_0+x) \cap (K_1+x_1) \neq \emptyset\} dx_1 \mathbb{Q}(dK_1) \quad (4.6)$$

darstellen. Damit erhalten wir also

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \frac{1}{1 + \Xi_W(\mathcal{F}_{K_0+x})} \right] &= e^{-\gamma \lambda_d(W)} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(\gamma \lambda_d(W))^n}{n!} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} p_{K_0+x}^k (1 - p_{K_0+x})^{n-k} \\ &= e^{-\gamma \lambda_d(W)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(\gamma \lambda_d(W))^n}{n!} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} p_{K_0+x}^k (1 - p_{K_0+x})^{n-k} \\ &= e^{-\gamma \lambda_d(W)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma \lambda_d(W) p_{K_0+x})^k}{(k+1)!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma \lambda_d(W))^n}{n!} (1 - p_{K_0+x})^n \\ &= \frac{1 - e^{-\gamma \lambda_d(W) p_{K_0+x}}}{\gamma \lambda_d(W) p_{K_0+x}}. \end{aligned}$$

Es ergibt sich folgende Aussage.

**Satz 4.3.4.** *Es seien  $\Xi$  ein stationärer Poissonscher Partikelprozess mit Intensität  $\gamma > 0$  und Formverteilung  $\mathbb{Q}$  sowie  $W \subset \mathbb{R}^d$  kompakt und  $\lambda_d(W) > 0$ . Dann gilt*

$$\mathbb{E}M(\tilde{\Xi}_W) \geq \gamma \int_{\mathcal{K}_0} \int_W \frac{1 - e^{-\gamma \lambda_d(W) p_{K_0+x}}}{\gamma \lambda_d(W) p_{K_0+x}} dx \mathbb{Q}(dK_0), \quad (4.7)$$

mit  $p_{K_0+x}$  aus (4.6).

Für spezielle Formverteilungen und Beobachtungsfenster lässt sich die Aussage von Satz 4.3.4 noch weiter vereinfachen. Dazu betrachten wir nun einen stationären Poissonschen Partikelprozess aus Kugeln mit zufälligen Radien auf  $W = B(0, 1)$ , d.h. es gilt

$$\mathbb{Q}(A) = \int_0^{\infty} \delta_{B(0,r)}(A) \mathbb{F}(dr), \quad (4.8)$$

wobei  $\mathbb{F}$  eine Verteilung auf  $(0, \infty)$  ist, deren  $d$ -tes Moment existiert.

**Korollar 4.3.5.** *Es seien  $\Xi$  ein stationärer Poissonscher Partikelprozess mit Intensität  $\gamma > 0$  und Formverteilung  $\mathbb{Q}$  wie in (4.8) mit  $\text{supp } \mathbb{F} \subset [0, 1/2]$  sowie  $W = B(0, 1)$ . Dann gilt*

$$\mathbb{E}M(\tilde{\Xi}_{B(0,1)}) \geq \gamma d \kappa_d \int_0^1 t^{d-1} \int_0^\infty M(B(0, r)) \frac{1 - e^{-\gamma \kappa_d f(t, r)}}{\gamma \kappa_d f(t, r)} \mathbb{F}(dr) dt, \quad (4.9)$$

mit

$$f(t, r) = \int_0^{1-(r+t) \vee 0} (r + \rho)^d \mathbb{F}(d\rho) + \frac{1}{\kappa_d} \int_{1-(r+t) \vee 0}^\infty \left( \int_{t-(r+\rho)}^{s(t)} ((r + \rho)^2 - (t - \tau)^2)^{\frac{d-1}{2}} \kappa_{d-1} d\tau + \int_{s(t)}^1 (1 - \tau^2)^{\frac{d-1}{2}} \kappa_{d-1} d\tau \right) \mathbb{F}(d\rho).$$

Für den Fall, dass  $\mathbb{Q} = \delta_{B(0, R_0)}$  für ein  $0 < R_0 < 1/2$  ist, gilt sogar

$$\mathbb{E}M(\tilde{\Xi}_W) \geq \gamma \kappa_d d M(B(0, R_0)) \int_0^1 t^{d-1} \frac{1 - e^{-\gamma \kappa_d f(t)}}{\gamma \kappa_d f(t)} dt, \quad (4.10)$$

mit

$$f(t) = (2R_0)^d$$

für  $0 \leq t \leq 1 - 2R_0$  und

$$f(t) = \frac{1}{\kappa_d} \int_{t-2R_0}^{s(t)} ((2R_0)^2 - (t - \tau)^2)^{\frac{d-1}{2}} \kappa_{d-1} d\tau + \int_{s(t)}^1 (1 - \tau^2)^{\frac{d-1}{2}} \kappa_{d-1} d\tau$$

für  $1 - 2R_0 \leq t \leq 1$ .

*Beweis.* Es ist

$$\begin{aligned} p_{B(x, r)} &= \frac{1}{\kappa_d} \int_0^\infty \int_{B(0, 1)} \mathbb{1}\{B(x, r) \cap B(x_1, \rho) \neq \emptyset\} dx_1 \mathbb{F}(d\rho) \\ &= \frac{1}{\kappa_d} \int_0^\infty \lambda_d(B(0, 1) \cap B(x, r + \rho)) \mathbb{F}(d\rho) \end{aligned}$$

Dabei hängt  $p_{B(x,r)}$  aufgrund der sphärischen Gestalt des Beobachtungsfensters nur von  $\|x\|$  und  $r$  ab. Wir setzen daher  $p_{B(x,r)} := f(\|x\|, r)$  mit

$$f(t, r) = \frac{1}{\kappa_d} \int_0^\infty \lambda_d(B(0, 1) \cap B(te_1, r + \rho)) \mathbb{F}(d\rho),$$

wobei wir beachten, dass  $t \in [0, 1]$  gilt.

Wir unterscheiden nun 2 Fälle:

1. Fall  $0 \leq t \leq 1 - (r + \rho)$  : Hier ist  $B(te_1, r + \rho) \subset B(0, 1)$  und damit

$$\lambda_d(B(0, 1) \cap B(te_1, r + \rho)) = \kappa_d(r + \rho)^d. \quad (4.11)$$

2. Fall  $1 - (r + \rho) \leq t \leq 1$  : Für diesen Fall gilt

$$\begin{aligned} & \lambda_d(B(0, 1) \cap B(te_1, r + \rho)) \\ &= \int_{t-(r+\rho)}^{s(t)} ((r + \rho)^2 - (t - \tau)^2)^{\frac{d-1}{2}} \kappa_{d-1} d\tau + \int_{s(t)}^1 (1 - \tau^2)^{\frac{d-1}{2}} \kappa_{d-1} d\tau, \end{aligned} \quad (4.12)$$

wobei

$$s(t) = \frac{1 - (r + \rho)^2 + t^2}{2t}. \quad (4.13)$$

Für den zweiten Fall haben wir den Satz von Fubini angewendet, indem wir das Volumen des Kugelschnittes zweier  $d$ -dimensionaler Kugeln als Integral über das Volumen  $(d-1)$ -dimensionaler Kugeln mit positionsabhängigem Radius ausgedrückt haben.

Letztendlich erhalten wir damit

$$\begin{aligned} f(t, r) &= \frac{1}{\kappa_d} \int_0^\infty \lambda_d(B(0, 1) \cap B(te_1, r + \rho)) \mathbb{F}(d\rho) \\ &= \int_0^{1-(r+t) \vee 0} (r + \rho)^d \mathbb{F}(d\rho) \\ &+ \frac{1}{\kappa_d} \int_{1-(r+t) \vee 0}^\infty \left( \int_{t-(r+\rho)}^{s(t)} ((r + \rho)^2 - (t - \tau)^2)^{\frac{d-1}{2}} \kappa_{d-1} d\tau + \int_{s(t)}^1 (1 - \tau^2)^{\frac{d-1}{2}} \kappa_{d-1} d\tau \right) \mathbb{F}(d\rho), \end{aligned} \quad (4.14)$$

Weiterhin ist mit dieser Koordinatentransformation

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}M(\tilde{\Xi}_{B(0,1)}) &\geq \gamma \int_0^\infty \int_{B(0,1)} M(B(0,r)) \frac{1 - e^{-\gamma \kappa_d p_{B(x,r)}}}{\gamma \kappa_d p_{B(x,r)}} dx \mathbb{F}(dr) \\
 &= \gamma \kappa_d \int_0^\infty \int_0^1 t^{d-1} M(B(0,r)) \frac{1 - e^{-\gamma \kappa_d f(t,r)}}{\gamma \kappa_d f(t,r)} dt \mathbb{F}(dr),
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

woraus die Darstellung (4.9) folgt.

Gilt nun sogar  $\mathbb{Q} = \delta_{B(0,R_0)}$ , so ist

$$\begin{aligned}
 f(t, R_0) &:= f(t) = \frac{1}{\kappa_d} \lambda_d(B(0,1) \cap B(te_1, 2R_0)) \\
 &= \begin{cases} (2R_0)^d, & 0 \leq t \leq 1 - 2R_0 \\ \frac{1}{\kappa_d} \int_{t-2R_0}^{s(t)} ((2R_0)^2 - (t-\tau)^2)^{\frac{d-1}{2}} \kappa_{d-1} d\tau + \int_{s(t)}^1 (1-\tau^2)^{\frac{d-1}{2}} \kappa_{d-1} d\tau, & 1 - 2R_0 \leq t \leq 1 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

mit  $s(t) = \frac{r^2 - (2R_0)^2 + t^2}{2t}$ . Damit erhalten wir wie oben

$$\mathbb{E}M(\tilde{\Xi}_{B(0,1)}) \geq \gamma \kappa_d dM(B(0, R_0)) \int_0^1 t^{d-1} \frac{1 - e^{-\gamma \kappa_d f(t)}}{\gamma \kappa_d f(t)} dt. \tag{4.17}$$

□

Für den Fall, dass  $\mathbb{Q} = \delta_{B(0,R_0)}$  für ein  $0 < R_0 < 1/2$  gilt, können wir die Abschätzung aus (4.10) weiter führen, indem wir bei der äußeren Integration den Bereich  $1 - 2R_0 \leq t \leq 1$  vernachlässigen. Damit gilt

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}M(\tilde{\Xi}_W) &\geq \gamma \kappa_d dM(B(0, R_0)) \int_0^1 t^{d-1} \frac{1 - e^{-\gamma \kappa_d f(t)}}{\gamma \kappa_d f(t)} dt \\
 &\geq \gamma \kappa_d dM(B(0, R_0)) \int_0^{1-2R_0} t^{d-1} \frac{1 - e^{-\gamma \kappa_d (2R_0)^d}}{\gamma \kappa_d (2R_0)^d} dt \\
 &= M(B(0, R_0)) (1 - 2R_0)^d \frac{1 - e^{-\gamma \kappa_d (2R_0)^d}}{(2R_0)^d}.
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Betrachtet man nun den Fall  $M = V_d$ , so entspricht  $\mathbb{E}M(\tilde{\Xi}_{B(0,1)})$  gerade dem  $\kappa_d$ -fachen der Volumendichte, weshalb sich die Volumendichte nach (4.18) durch  $(1 - 2R_0)^d \frac{1 - e^{-\gamma \kappa_d (2R_0)^d}}{2^d}$  abschätzen lässt.

## 4.4 Weitere untere Schranken

In diesem Abschnitt seien  $\Xi$  ein stationärer Poissonscher Partikelprozess mit Intensität  $\gamma > 0$  und Formverteilung  $\mathbb{Q}$  sowie  $W \subset \mathbb{R}^d$  kompakt und messbar. Da der Prozess der gewichtsmaximalen harten Teilmenge  $\tilde{\Xi}_W$  gerade die Ausdünnung des Primärprozesses darstellt, welche zu maximalem Gesamtgewicht führt, können wir uns durch andere Ausdünnungsverfahren und deren erwartetes Gewicht in  $W$  untere Schranken für  $\tilde{\gamma}_M^W$  von  $\tilde{\Xi}_W$  herleiten, wobei wir

$$\tilde{\gamma}_M^W := \frac{\mathbb{E} M(\tilde{\Xi}_W)}{\lambda_d(W)}$$

setzen. Das in Abschnitt 2.3.5 besprochene zweite Ausdünnungsverfahren nach Matérn stellt eine solche Möglichkeit dar,  $\tilde{\gamma}_M^W$  nach unten abzuschätzen, da realisierungsweise betrachtet jede Ausdünnung vom zweiten Matérnschen Typ eine harte Teilmenge des Ausgangsprozesses liefert, deren Gesamtgewicht in  $W$  nicht größer als das von  $\tilde{\Xi}_W$  ist.

**Bemerkung 4.4.1.** Wir wollen an dieser Stelle explizit darauf hinweisen, dass die analytischen Ergebnisse zum Matérn II-Modell sich auf eine Ausdünnung von  $\Xi$ , also einen stationären Prozess harter Partikel, beziehen, während  $\tilde{\Xi}_W$  nicht mehr stationär ist und es zu Randeffekten, wie in Abschnitt 2.2.2 beschrieben, kommt. Auf die Gültigkeit der nachfolgenden Abschätzungen hat dies jedoch keinen Einfluss.

Nach (2.32) und (2.35) erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_M^W &\geq \gamma \lambda_d(W) \int_{\mathcal{K}_0} \int_S M(L_0) g(L_0, m) \mu^{L_0}(dm) \mathbb{Q}(dL_0) \\ &= \gamma \lambda_d(W) \int_{\mathcal{K}_0} \int_S M(L_0) \exp\left\{-\gamma \int_{\mathcal{K}_0} \sum_{i=0}^d \binom{d}{i} V_i(L_0[i], K_0^*[d-i]) \right. \\ &\quad \left. \times \mu^{K_0}([0, m]) \mathbb{Q}(dK_0)\right\} \mu^{L_0}(dm) \mathbb{Q}(dL_0). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Um die Schärfe dieser Abschätzung zu verbessern, kann man die Vergabe der Gewichte anpassen. Dabei haben wir die Möglichkeit, die Verteilung  $\mu^{K_0}$  von  $m(K_0)$  für  $K_0 \in \Xi$  an die Gestalt des Partikels anzupassen, wobei zu beachten ist, dass die Verteilung (2.28) und (2.29) erfüllen muss.

Im Folgenden wollen wir für verschiedene Formverteilungen  $\mathbb{Q}$  mögliche Markenverteilungen, die (2.28) und (2.29) erfüllen, diskutieren.

(i)  $\mathbb{Q} = \delta_{B(0, R_o)}$  für ein  $R_o > 0$ :

Um sicherzustellen, dass die Markenverteilung den Bedingungen (2.28) und (2.29) genügt, betrachten wir nur absolut stetige Verteilungen  $\mu = \mu^K$  für beliebiges  $K \in \mathcal{K}'$  mit Dichte  $g$  und Verteilungsfunktion  $\mathbb{G}$ . Aus der  $\lambda_1$ -f.s. geltenden Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial m} e^{-\gamma \kappa_d (2R_o)^d \mathbb{G}(m)} = -\gamma \kappa_d (2R_o)^d e^{-\gamma \kappa_d (2R_o)^d \mathbb{G}(m)} g(m)$$

folgen wir mittels (4.19)

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_M^W &\geq \gamma \lambda_d(W) M(B(0, R_o)) \int_0^\infty \exp\{-\gamma \kappa_d (2R_o)^d \mathbb{G}(m)\} g(m) dm \\ &= \lambda_d(W) M(B(0, R_o)) \frac{1 - e^{-\gamma \kappa_d (2R_o)^d}}{\kappa_d (2R_o)^d}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Besonders hervorzuheben an diesem Ergebnis ist die Tatsache, dass (4.20) nicht von der absolut stetigen Markenverteilung  $\mu$  abhängt, weshalb wir hier keine weiteren Einflussmöglichkeiten haben, um die untere Schranke zu erhöhen.

(ii)  $\mathbb{Q}(\cdot) = \int_0^\infty \delta_{B(0, r)}(\cdot) \mathbb{F}(dr)$ , wobei  $\mathbb{F}$  absolut stetig mit Träger  $R \in \mathcal{B}([0, \infty))$  ist und  $\int_R r^d \mathbb{F}(dr) < \infty$  gilt:

Eine Möglichkeit besteht hier darin, immer das Partikel mit größerem Radius gewinnen zu lassen. Dies führt zu einer Ein-Punkt-Markenverteilung  $\mu^{B(x, r)} = \delta_r$ . Damit gilt nach (4.19) für die Gewichtsichte  $\tilde{\gamma}_M^W$

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_M^W &\geq \gamma \lambda_d(W) \int_R \int_S M(B(0, r)) \exp\left\{-\gamma \int_R \sum_{i=0}^d \binom{d}{i} V_i(B(0, r)[i], B(0, s)[d-i])\right. \\ &\quad \left. \times \mu^{B(0, s)}([0, m]) \mathbb{F}(ds)\right\} \mu^{B(0, r)}(dm) \mathbb{F}(dr) \\ &= \gamma \lambda_d(W) \int_R M(B(0, r)) \exp\left\{-\gamma \int_0^r \kappa_d (r+s)^d \mathbb{F}(ds)\right\} \mathbb{F}(dr) \end{aligned} \quad (4.21)$$

Alternativ kann man die Verteilung der Marken so an den zugehörigen Radius anpassen, dass große Partikel den Vergleich mit einem kleinen Partikel eher gewinnen. Dies kann man etwa realisieren, indem man  $\mu_M^{B(0, r)}$  als Gleichverteilung auf  $[r, r+l]$  für ein  $l > 0$

wählt. Dann erhält man nach (4.19)

$$\begin{aligned}
 \tilde{\gamma}_M^W &\geq \gamma \lambda_d(W) \int_R \int_S M(B(0, r)) \exp\left\{-\gamma \int_R \sum_{i=0}^d \binom{d}{i} V_i(B(r)[i], B(0, s))\right. \\
 &\quad \left. \times \mu^{B(0, s)}([0, m]) \mathbb{F}(ds)\right\} \mu^{B(0, r)}(dm) \mathbb{F}(dr) \\
 &= \gamma \lambda_d(W) \int_R \int_S M(B(0, r)) \\
 &\quad \times \exp\left\{-\gamma \int_R \kappa_d(r+s)^d \mu^{B(0, s)}([0, m]) \mathbb{F}(ds)\right\} \mu^{B(0, r)}(dm) \mathbb{F}(dr) \\
 &= \gamma \lambda_d(W) \int_R M(B(0, r)) \int_r^{r+l} \frac{1}{l} \exp\{-\gamma \kappa_d \\
 &\quad \times \left(\int_0^{(m-l) \vee 0} (r+s)^d \mathbb{F}(ds) \int_{(m-l) \vee 0}^m \frac{m-s}{l} (r+s)^d \mathbb{F}(ds)\right)\} dm \mathbb{F}(dr).
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

Für konkrete Radienverteilungen  $\mathbb{F}$  kann man damit explizite untere Schranken für  $\tilde{\gamma}_M^W$  erhalten.

(iii)  $\mathbb{Q} = q\delta_{B(0, r_1)} + (1-q)\delta_{B(0, r_2)}$  für  $q \in (0, 1)$  und  $0 < r_1 < r_2$ :

Hier gilt nach (4.19) folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\gamma}_M^W &\geq \gamma \lambda_d(W) q \int_S M(B(0, r_1)) \exp\{-\gamma \kappa_d(qT_{1,1}(m) + (1-q)T_{1,2}(m))\} \mu^{B(0, r_1)}(dm) \\
 &\quad + (1-q) \int_S M(B(0, r_2)) \exp\{-\gamma \kappa_d(qT_{2,1}(m) + (1-q)T_{2,2}(m))\} \mu^{B(0, r_2)}(dm),
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

mit

$$T_{i,j}(m) := \mu^{B(0, r_j)}([0, m])(r_i + r_j)^d \text{ für } i, j \in \{1, 2\}.$$

Um (2.28) und (2.29) zu gewährleisten, fordern wir, dass die Markenverteilung  $\mu$  absolut stetig mit Dichte  $f$  und Verteilungsfunktion  $\mathbb{F}$  ist.

Ist  $\mu^{B(0, r_i)} := \mu$  für  $i = 1, 2$  die Gleichverteilung auf  $[0, 1]$  so ergibt sich aus (4.23) die

Abschätzung

$$\begin{aligned}
 \tilde{\gamma}_M^W &\geq \gamma \lambda_d(W) q \int_0^1 M(B(0, r_1)) \exp\{-\gamma \kappa_d m (q(2r_1)^d + (1-q)(r_1 + r_2)^d)\} dm \\
 &+ \gamma \lambda_d(W) (1-q) \int_0^1 M(B(0, r_2)) \exp\{-\gamma \kappa_d m (q(r_1 + r_2)^d + (1-q)(2r_2)^d)\} dm \\
 &= \gamma \lambda_d(W) q M(B(0, r_1)) \frac{1 - \exp\{-\gamma \kappa_d (q(2r_1)^d + (1-q)(r_1 + r_2)^d)\}}{\gamma \kappa_d (q(2r_1)^d + (1-q)(r_1 + r_2)^d)} \\
 &+ \gamma \lambda_d(W) (1-q) M(B(0, r_2)) \frac{1 - \exp\{\gamma \kappa_d (q(r_1 + r_2)^d + (1-q)(2r_2)^d)\}}{\gamma \kappa_d (q(r_1 + r_2)^d + (1-q)(2r_2)^d)}.
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

Als weitere Möglichkeit können wir die Markenverteilung so an den Radius des jeweiligen Partikels anpassen, dass beim Vergleich zweier überlappender Partikel der Größere mit Wahrscheinlichkeit  $p \in (0, 1)$  gewinnt und bei zwei Partikeln mit gleichem Radius jede der beiden mit Wahrscheinlichkeit  $1/2$  gewinnt. Dies lässt sich beispielsweise realisieren, indem man für ein  $l \in [0, 1]$   $\mu^{B(0, r_1)}$  die Gleichverteilung auf  $[0, 1 + l]$  und für  $\mu^{B(0, r_2)}$  die Gleichverteilung auf  $[1 - l, 2]$  wählt. Betrachten wir nun speziell  $l = 0$ , so entsprechen  $\mu^{B(0, r_1)}$  der Gleichverteilung auf  $[0, 1]$  und  $\mu^{B(0, r_2)}$  der Gleichverteilung auf  $[1, 2]$ . Beim Vergleich von sich schneidenden Kugeln mit unterschiedlichen Radien gewinnt damit immer die größere, während beim Vergleich von sich schneidenden Kugeln mit gleichem Radius jede der beiden mit Wahrscheinlichkeit  $1/2$  gewinnt. Dafür gilt dann

$$\begin{aligned}
 \tilde{\gamma}_M^W &\geq \gamma q \lambda_d(W) M(B(0, r_1)) \frac{1 - \exp\{-\gamma \kappa_d q (2r_1)^d\}}{\gamma \kappa_d q (2r_1)^d} \\
 &+ (1-q) \gamma \lambda_d(W) M(B(0, r_2)) \frac{\exp\{-\gamma \kappa_d (q(r_1 + r_2)^d + (1-q)(2r_2)^d)\}}{\gamma \kappa_d (1-q)(2r_2)^d} \tag{4.25} \\
 &\times (\exp\{-\gamma \kappa_d (1-q)(2r_2)^d\} - \exp\{-2\gamma \kappa_d (1-q)(2r_2)^d\}).
 \end{aligned}$$



# Kapitel 5

## Das Verhalten von $M(\tilde{\Xi}_{rW})$ für $r \rightarrow \infty$

In diesem Kapitel seien  $\Xi$  ein stationärer Poissonscher Partikelprozess mit Intensität  $\gamma > 0$  und Formverteilung  $\mathbb{Q}$ ,  $W \subset \mathbb{R}^d$  kompakt und messbar,  $M : \mathcal{K}' \rightarrow [0, \infty)$  ein translationsinvariantes, messbares Gewichtsfunktional und  $\tilde{\Xi}_W$  der bezüglich  $M$  gewichtsmaximale harte Teilprozess von  $\Xi_W$ , wie in 3.11 eingeführt. Dieses Kapitel befasst sich mit der asymptotischen Untersuchung der Zufallsvariable  $M(\tilde{\Xi}_{rW})$  für  $r \rightarrow \infty$ . Die Ursprünge einer solchen Fragestellung finden sich in der Theorie der euklidischen Funktionale wieder, welche wir im ersten Abschnitt kurz vorstellen wollen. Im Anschluss daran werden wir für  $M(\tilde{\Xi}_{rW})$  ein starkes Gesetz großer Zahlen und einen zentralen Grenzwertsatz herleiten.

### 5.1 Ursprünge

Unter einem *euklidischen Funktional* verstehen wir eine Abbildung  $L$  von der Menge aller endlichen Teilmengen von  $\mathbb{R}^d$  in die nichtnegativen reellen Zahlen, die folgende drei Eigenschaften erfüllt:

- (i)  $L(\emptyset) = 0$ ,
- (ii)  $L(\{\alpha x_1, \dots, \alpha x_k\}) = \alpha L(\{x_1, \dots, x_k\})$ , für alle  $k \geq 1, \alpha > 0, x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^d$  und
- (iii)  $L(\{x_1 + y, \dots, x_k + y\}) = L(\{x_1, \dots, x_k\})$ , für alle  $k \geq 1, x_1, \dots, x_k, y \in \mathbb{R}^d$ .

Solche euklidischen Funktionale treten häufig in der kombinatorischen Optimierung auf; bekannte Beispiele sind etwa die beiden nachfolgenden.

**Beispiel 5.1.1.** Das *Traveling-Salesman-Problem* - Funktional  $L_{TSP}$  berechnet für  $k$  Punkte im  $\mathbb{R}^d$  die Länge des kürzesten geschlossenen Weges durch alle Punkte. Formal bedeutet dies, dass  $L_{TSP}(\{x_1, \dots, x_k\}) = \min_{\tau \in S(k)} \{\|x_{\tau(1)} - x_{\tau(2)}\| + \dots + \|x_{\tau(k-1)} - x_{\tau(k)}\| + \|x_{\tau(k)} - x_{\tau(1)}\|\}$  für  $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^d$  gilt.

**Beispiel 5.1.2.** Für eine endliche Punktmenge  $\{x_1, \dots, x_{2k}\} \subset \mathbb{R}^d$  mit gerader Kardinalität berechnet  $L_{MM}$  die *Gesamtlänge des minimalen Matchings* der Punkte  $x_1, \dots, x_{2k}$ . Damit ist  $L_{MM}(\{x_1, \dots, x_{2k}\}) = \min_{\tau \in S(k)} \{\|x_{\tau(1)} - x_{\tau(k+1)}\| + \|x_{\tau(2)} - x_{\tau(k+2)}\| + \dots + \|x_{\tau(k)} - x_{\tau(2k)}\|\}$ .

Bereits vor über 50 Jahren wuchs das Interesse an der Untersuchung des Verhaltens solcher Funktionale angewandt auf eine zufällige, f.s. endliche Punktmenge, etwa einen Binomialprozess oder einen Poissonprozess in  $[0, 1]^d$ . Von besonderem Interesse dabei war die Fragestellung, ob für ein euklidisches Funktional  $L$  und eine Folge  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  u.i.v. auf  $[0, 1]^d$  gleichverteilter Punkte der Grenzwert  $\lim_{k \rightarrow \infty} L(x_1, \dots, x_k)/k^{(d-1)/d}$  existiert und falls dies der Fall ist, was sich darüber aussagen lässt.

Der erste Erfolg in der Bearbeitung dieser Fragestellung geht auf Beardwood, Halton und Hammersley zurück, welche für das Traveling-Salesman-Problem-Funktional  $L_{TSP}$  sogar für nicht notwendig gleichverteilte zufällige Punkte zeigten, dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} L_{TSP}(x_1, \dots, x_k)/k^{(d-1)/d} = \alpha_d \int_{[0,1]^d} f(x) dx \quad (5.1)$$

gilt, wobei  $\alpha_d$  eine positive Konstante und  $f$  die Dichte des absolut stetigen Teils der Verteilung von  $x_1$  ist (siehe [6]).

Für beliebige euklidische Funktionale vergingen nach diesem ersten Erfolg mehr als 20 Jahre bis durch Steele [73] ein Durchbruch in der Beantwortung obiger Fragestellung erzielt wurde. Es zeigte sich dabei, dass die bisher erwähnten drei definierenden Eigenschaften eines euklidischen Funktional im Allgemeinen nicht allein ausreichen, um angewandt auf eine bestimmte Folge zufälliger Punkte eine entsprechende Asymptotik zu entwickeln, sondern dass man noch zusätzlich ein mächtiges Hilfsmittel benötigt, nämlich die *Subadditivität*. Es gibt in der Literatur verschiedenen Definitionen der Subadditivität mit jeweils leicht unterschiedlichen Anforderungen. Wir werden vorerst folgende Version verwenden:

- (iv) Für alle  $m \geq 1, k \geq 1$  und  $x_1, \dots, x_k \in [0, 1]^d$  gibt es eine Konstante  $C_0$ , so dass für jede Partition  $\{Q_i\}$  von  $[0, 1]^d$  in  $m^d$  Würfel der Seitenlänge  $1/m$  die Ungleichung

$$L(\{x_1, \dots, x_k\}) \leq \sum_{i=1}^{m^d} L(\{x_j \in Q_i\}) + C_0 m^{d-1}$$

gilt.

Diese Forderung lässt sich so deuten, dass die Kosten, die entstehen, wenn man das jeweilige Optimierungsproblem auf den  $m^d$  Teilmengen löst und die Lösungen zusammenfügt (dies soll mit Kosten der Ordnung  $\mathcal{O}(m^{d-1})$  verbunden sein), größer sind als die Kosten der Lösung des kompletten Optimierungsproblems. Es stellt sich heraus, dass es sich bei den Beispielen 5.1.1 und 5.1.2 um in diesem Sinne subadditive Funktionale handelt.

Die Hauptaussage von [73] bestand nun darin, dass für eine Folge  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  unabhängiger, auf  $[0, 1]^d$  gleichverteilter Punkte und für ein euklidisches Funktional  $L$ , das subadditiv und zusätzlich monoton ist in dem Sinn, dass  $L(A) \leq L(A \cup \{x\})$  für alle endlichen Mengen  $A \subset \mathbb{R}^d$  und  $x \in \mathbb{R}^d$  gilt, der Grenzwert

$$\lim_{k \rightarrow \infty} L(x_1, \dots, x_k)/k^{(d-1)/d} =: \beta_T \quad (5.2)$$

f.s. existiert und  $\beta_T$  positiv und konstant ist.

Zur Theorie euklidischer Funktionale und der Untersuchung von Problemen aus der kombinatorischen Optimierung im Zusammenhang mit wahrscheinlichkeitstheoretischen Fragestellungen sei auf [74] und [80] verwiesen.

Eine Übertragung der Theorie euklidischer Funktionale auf Funktionale allgemeiner endlicher Partikelmengen und damit auch auf Fragestellungen, die im folgenden Abschnitt auftreten, ist nicht ohne Weiteres möglich, da hier meist die Homogenität, also Eigenschaft (ii), verloren geht. Wir werden im folgenden Abschnitt jedoch sehen, dass die Subadditivität ausreicht, um eine zu (6.15) ähnliche Aussage für das Funktional  $M \circ T$  mit  $T$  wie in Abschnitt 3.1 definiert herzuleiten.

## 5.2 Ein starkes Gesetz großer Zahlen für $M(\tilde{\Xi}_{r_n W})$

In diesem Abschnitt wollen wir ein starkes Gesetz großer Zahlen für die Folge von Zufallsvariablen  $(M(\tilde{\Xi}_{r_n W}))_{n \in \mathbb{N}}$  herleiten, wobei dies bemerkenswerterweise gelingt, ohne dabei den Begriff der Stabilität aus Kapitel 3 beachten zu müssen. Zur Herleitung der gewünschten Aussage müssen wir zusätzlich fordern, dass

$$\int_{\mathcal{K}_0} M(K_0) \mathbb{Q}(dK_0) < \infty \quad (5.3)$$

gilt. Zentrales Hilfsmittel für unsere Untersuchung wird die Tatsache sein, dass das hier betrachtete Funktional f.s. subadditiv im folgenden Sinne ist.

**Lemma 5.2.1.** *Für alle paarweise disjunkten Mengen  $W_1, \dots, W_n \in \mathcal{C}'$  gilt für  $\mathbb{P}$ -f.a.  $\omega \in \Omega$  die Beziehung*

$$M(\tilde{\Xi}(\omega)_{\cup_{i=1}^n W_i}) \leq \sum_{i=1}^n M(\tilde{\Xi}(\omega)_{W_i}). \quad (5.4)$$

Wir wissen zudem, dass aufgrund der Translationsinvarianz von  $M$  und (3.12) für kompakte Beobachtungsfenster  $W_1, \dots, W_n$  und  $x \in \mathbb{R}^d$  die gemeinsame Verteilung von  $M(\tilde{\Xi}_{W_1+x}), \dots, M(\tilde{\Xi}_{W_n+x})$  der von  $M(\tilde{\Xi}_{W_1}), \dots, M(\tilde{\Xi}_{W_n})$  entspricht. Zudem gilt wegen (5.3)

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{\mathbb{E}M(\tilde{\Xi}_{[0,n]^d})}{n^d} < \infty,$$

da nach Satz 1.2.16 die Abschätzung

$$\mathbb{E}M(\tilde{\Xi}_W) \leq \mathbb{E} \sum_{K \in \Xi_W} M(K) = \gamma \lambda_d(W) \int_{\mathcal{K}_0} M(K_0) \mathbb{Q}(dK_0)$$

vorgenommen werden kann.

Für  $A \in \mathcal{B}$  und  $r > 0$  bezeichne  $\partial_r A := \{x \in \mathbb{R}^d : d(x, \text{bd } W) \leq r\}$  die Parallelmenge des Randes von  $W$ . Damit können wir folgende Aussage zeigen.

**Satz 5.2.2.** *Sei  $W \subset [0, 1]^d$  ein konvexer Körper mit  $V_d(W) > 0$ . Dann gibt es eine positive reelle Zahl  $\tilde{\gamma}_M$ , die nicht von  $W$  abhängt, so dass f.s.*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M(\tilde{\Xi}_{nW})}{n^d V_d(W)} = \tilde{\gamma}_M \quad (5.5)$$

gilt.

*Beweis.* Für  $\omega \in \Omega$  und eine messbare Menge  $A \subset [0, 1]^d$  gilt f.s.

$$M(\tilde{\Xi}(\omega)_A) \leq \sum_{K \in \Xi_{[0,1]^d}(\omega)} M(K),$$

wobei die rechte Seite dieser Ungleichung nach (5.3) in  $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  liegt. Damit liegt auch die Zufallsvariable  $\sup\{M(\tilde{\Xi}_A) : A \subset \mathcal{B}([0, 1]^d)\}$  in  $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ . Die Konvergenz von  $M(\tilde{\Xi}_{nW})/(n^d V_d(W))$  gegen eine Zufallsvariable  $Z \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  ergibt sich damit wegen der Subadditivität (5.4) aus Theorem 6.2.14 in [29] (bzw. der Bemerkung danach). Aufgrund der Ergodizität von  $\Xi$  gilt zudem f.s.

$$Z = \mathbb{E}Z =: \tilde{\gamma}_M.$$

□

**Bemerkung 5.2.3.** 1.) Aufgrund der Translationskovarianz der Abbildung  $T$  (siehe (3.12)) und der Stationarität von  $\Xi$  gilt die Aussage von Satz 5.2.2 auch für beliebige Translationen der Folge  $(nW)_{n \in \mathbb{N}}$ .

2.) Das Ergebnis aus Satz 5.2.2 lässt sich noch verschärfen (siehe Theorem 3 in [30]): Für eine Familie  $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}([0, 1]^d)$  von Mengen, die

$$\sup\{\lambda_d(\partial_r W) : W \in \mathcal{M}\} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$$

erfüllt, gilt sogar f.s.

$$\sup\left\{\frac{M(\tilde{\Xi}_{nW})}{n^d \lambda_d(W)} - \tilde{\gamma}_M : W \in \mathcal{M}\right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Ergodensätze für subadditive Funktionale haben eine lange Tradition. Die Basis dafür bildet ein Ergodensatz für den Fall eines Prozesses mit eindimensionalem Parameter von Kingman [26]. Der mehrdimensionale Fall geht auf Akcoglu und Krengel (Satz 2.9 in [2]) zurück.

Diese beschränken sich jedoch auf Funktionale, die lediglich auf bestimmten Intervallen bzw. Streifen definiert sind. Eine Übertragung dieser Aussage auf allgemeinere Fensterformen findet sich in [29], wobei immer noch eine gewisse Mindestanforderung an die Regularität der Folge von Beobachtungsfenstern gestellt werden muss, etwa dass  $\lambda_d(\partial_r(W_n))/\lambda_d(W_n) \rightarrow 0$  für alle  $r > 0$  gilt.

Über den exakten Wert bzw. explizite Darstellungen für  $\tilde{\gamma}_M$  lässt sich, selbst unter Beschränkung auf einfache Partikelformen und Gewichtsfunktionale, keine Aussage treffen - ein Phänomen, über das Kingman in [26] Folgendes schreibt:

Pride of place among the unsolved problems in subadditive ergodic theory must go to the calculation of the constant  $\tilde{\gamma}$ . [...] In none of the applications described here there is an obvious mechanism for obtaining the exact numerical value, and indeed this usually seems to be a problem of some depth.

Wir wollen nun zeigen, dass die Konstante  $\tilde{\gamma}_M$  unter einer Zusatzvoraussetzung an die Formverteilung  $\mathbb{Q}$  nicht davon abhängt, ob man für die Definition von  $\tilde{\Xi}_W$  diejenigen Partikel von  $\Xi$  betrachtet, deren Umkreismittelpunkt in  $W$  liegt, die ganz in  $W$  liegen oder diejenigen, die  $W$  schneiden. Dazu definieren wir uns die Prozesse  $\hat{\Xi}_W$  und  $\bar{\Xi}_W$  wie folgt:

Sei  $W \subset \mathbb{R}^d$  ein kompaktes, konvexes Beobachtungsfenster. Dann definieren wir

$$\hat{\Xi}_W := T(\{K \in \Xi : K \subset W\})$$

und

$$\bar{\Xi}_W := T(\{K \in \Xi : K \cap W \neq \emptyset\})$$

wobei  $T$  die Abbildung aus Abschnitt 3.1 ist.

**Satz 5.2.4.** *Sei  $W \subset [0, 1]^d$  ein konvexer Körper mit  $V_d(W) > 0$  und es existiere ein  $R_o > 0$ , so dass*

$$\mathbb{Q}(\{K \in \mathcal{K}_0 : K \subset B(0, R_o)\}) = 1 \tag{5.6}$$

gelte. Dann gilt f.s.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M(\hat{\Xi}_{nW})}{n^d V_d(W)} = \tilde{\gamma}_M = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M(\bar{\Xi}_{nW})}{n^d V_d(W)} \tag{5.7}$$

mit  $\tilde{\gamma}_M$  aus (5.5).

*Beweis.* Für f.a.  $\omega \in \Omega$  gilt

$$M(\hat{\Xi}_{nW}(\omega)) \leq M(\tilde{\Xi}_{nW}(\omega)) \leq M(\bar{\Xi}_{nW}(\omega)) \tag{5.8}$$

und

$$\begin{aligned}
 M(\tilde{\Xi}_{nW}(\omega)) - M(\hat{\Xi}_{nW}(\omega)) &\leq M(T(\{K \in \Xi(\omega) : K \cap nW \neq \emptyset, K \not\subset nW\})) \\
 &\leq \sum_{K \in \Xi(\omega) : K \cap nW \neq \emptyset, K \not\subset nW} M(K) \\
 &\leq \sum_{K \in \Xi(\omega)_{\partial_{R_0} nW}} M(K).
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

Wir zeigen nun in zwei Schritten, dass f.s.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^d V_d(W)} \sum_{K \in \Xi(\omega)_{\partial_{R_0} nW}} M(K) = 0$$

gilt, woraus dann wegen (5.8) und (5.9) die Behauptung des Satzes folgt.

Zuerst stellen wir fest, dass für alle paarweise disjunkten Mengen  $W_1, \dots, W_n \in \mathcal{C}'$  und  $\mathbb{P}$ -f.a.  $\omega \in \Omega$  die Beziehung

$$M(\Xi(\omega)_{\partial_{R_0}(\cup_{i=1}^n W_i)}) \leq \sum_{i=1}^n M(\Xi(\omega)_{\partial_{R_0} W_i})$$

gilt und zugleich nach (5.3)

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{\mathbb{E} M(\Xi_{\partial_{R_0} [0, n]^d})}{n^d} < \infty$$

und

$$\sup\{M(\Xi_{\partial_{R_0} A}) : A \subset \mathcal{B}([0, 1]^d)\} \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$$

gelten. Damit folgt aus Theorem 6.2.14 in [29] (bzw. der Bemerkung danach) und der Ergodizität von  $\Xi$ , dass f.s.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^d V_d(W)} \sum_{K \in \Xi(\omega)_{\partial_{R_0} nW}} M(K) = \beta$$

für eine Konstante  $\beta \geq 0$  gilt. Zudem ist nach dem Lemma von Fatou

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^d V_d(W)} \sum_{K \in \Xi_{\partial_{R_0} nW}} M(K) \right) &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^d V_d(W)} \mathbb{E} \sum_{K \in \Xi_{\partial_{R_0} nW}} M(K) \\
 &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_d(\partial_{R_0} nW)}{n^d V_d(W)} \gamma \int_{\mathcal{K}_0} M(K_0) \mathbb{Q}(dK_0) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Letzterer Grenzwert folgt dabei aus der Konvexität von  $W$ : Wir bilden dazu zuerst  $\partial_{R_o} nW \setminus nW = (nW + B(0, R_o)) \setminus nW$  für hinreichend große Werte von  $n$  surjektiv auf  $\partial_{R_o} nW \cap nW$  ab, indem wir jedem  $x \in (nW + B(0, R_o)) \setminus nW$  den Punkt

$$\hat{x} := 2p_{nW}(x) - x$$

zuordnen, wobei wir beachten, dass  $n$  dabei so groß sein soll, dass  $\hat{x} \in \partial_{R_o} nW \cap nW$  gilt. Daraus folgt dann mit Hilfe der Steinerformel aus Satz 1.1.7

$$\lambda_d(\partial_{R_o} nW) \leq 2\lambda_d((nW + B(0, R_o)) \setminus nW) \in \mathcal{O}(n^{d-1}),$$

weshalb

$$\frac{\lambda_d(\partial_{R_o} nW)}{n^d V_d(W)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

gilt. Damit muss  $\beta = 0$  gelten, was den Beweis schließt.  $\square$

Zentrales Hilfsmittel dieses Beweises war also die Aussage, dass die Masse der Partikel von  $\Xi$ , deren Umkugelmittelpunkt in  $\partial_{R_o}(nW)$  liegt, keine Rolle für den Grenzwert in (5.5) spielt.

An dieser Stelle wollen wir abschließend die Intensität  $\gamma'$  bzw. allgemeiner die  $M$ -Dichte

$$\begin{aligned} \gamma'_M &:= \mathbb{E} \sum_{K \in \Xi': c(K) \in [0,1]^d} M(K) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^d V_d(W)} \mathbb{E} \sum_{K \in \Xi': c(K) \in nW} M(K) \text{ für } W \in \mathcal{K}' \text{ mit } V_d(W) > 0 \end{aligned} \quad (5.10)$$

des stationären Prozesses  $\Xi'$  aus Abschnitt 3.3.5 mit der Konstanten  $\tilde{\gamma}_M$  aus (5.5) vergleichen. Dazu sei  $W$  wie in Satz 5.2.2,  $\Xi$  ein stationärer Poissonscher Partikelprozess mit Intensität  $\gamma > 0$  und Formverteilung  $\mathbb{Q}$  so, dass eine Konstante  $0 < R_o < 1/4$  existiert für die  $\text{supp}(\mathbb{Q})$  die Bedingung (5.6) erfüllt. Dann gilt folgender Zusammenhang.

**Satz 5.2.5.** *Unter den oben getroffenen Voraussetzungen gilt*

$$0 \leq \tilde{\gamma}_M - \gamma'_M \leq \mathbb{E} M(\tilde{\Xi}_{[0,1]^d \setminus (R_o, 1-R_o)^d}). \quad (5.11)$$

*Beweis.* Wir erinnern nochmals an die Festlegungen  $\tilde{\Xi}_W = T(\Xi_W)$  und  $\Xi'_W = T'(\Xi)_W$ . Zudem seien  $C := [0, 1]^d$ ,  $C^- := (R_o, 1 - R_o)^d$ ,  $C_z := C + z$  und  $C_z^- := C^- + z$  für  $z \in \mathbb{Z}^d$ . Mit Hilfe der Abschätzung (3.29) und der Subadditivität aus Lemma 5.2.1 lässt sich folgende

Ungleichung herleiten, wobei  $W \in \mathcal{K}'$  mit  $V_d(W) > 0$  sei:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\gamma}_M - \gamma'_M &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^d V_d(W)} \underbrace{(\mathbb{E}M(\tilde{\Xi}_{nW}) - \mathbb{E}M(\tilde{\Xi}'_{nW}))}_{\geq 0} \\
 &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^d V_d(W)} \left( \sum_{z \in \mathbb{Z}^d: C_z \cap nW \neq \emptyset} \mathbb{E}M(\tilde{\Xi}_{C_z}) - \sum_{z \in \mathbb{Z}^d: C_z \subset nW} \mathbb{E}M(\tilde{\Xi}_{C_z^-}) \right) \\
 &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^d V_d(W)} \left( \sum_{z \in \mathbb{Z}^d: C_z \cap nW \neq \emptyset, C_z \not\subset nW} \mathbb{E}M(\tilde{\Xi}_{C_z}) + \sum_{z \in \mathbb{Z}^d: C_z \subset nW} \mathbb{E}(M(\tilde{\Xi}_{C_z}) - M(\tilde{\Xi}_{C_z^-})) \right) \\
 &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^d V_d(W)} \left( \sum_{z \in \mathbb{Z}^d: C_z \cap nW \neq \emptyset, C_z \not\subset nW} \mathbb{E}M(\tilde{\Xi}_{C_z}) + \sum_{z \in \mathbb{Z}^d: C_z \subset nW} \mathbb{E}M(\tilde{\Xi}_{C_z \setminus C_z^-}) \right) \\
 &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^d V_d(W)} \left( \mathbb{E} \sum_{\substack{K \in \Xi, \\ d(c(K), \text{bd}(nW)) \leq \sqrt{d}}} M(K) + \text{card}\{z \in \mathbb{Z}^d : C_z \subset nW\} \mathbb{E}M(\tilde{\Xi}_{C_z \setminus C_z^-}) \right). \tag{5.12}
 \end{aligned}$$

Aufgrund der sich aus dem Satz von Campbell (Satz 1.2.16) und der Translationsinvarianz von  $M$  ergebenden Beziehung

$$\mathbb{E} \sum_{K \in \Xi_A} M(K) = \gamma \lambda_d(A) \int_{\mathcal{K}_0} M(K_0) \mathbb{Q}(dK_0)$$

für  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  schließen wir aus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_d(x \in \mathbb{R}^d : d(x, \text{bd}(nW)) \leq \sqrt{d})}{n^d V_d(W)} = 0, \tag{5.13}$$

dass

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^d V_d(W)} \mathbb{E} \sum_{K \in \Xi, d(c(K), \text{bd}(nW)) \leq \sqrt{d}} M(K) = 0$$

gilt. Der Beweis von (5.13) folgt, indem wir analog wie im Beweis von Satz 5.2.4 zeigen, dass  $\lambda_d(x \in \mathbb{R}^d : d(x, \text{bd}(nW)) \leq \sqrt{d})$  in  $\mathcal{O}(n^{d-1})$  liegt.

Des Weiteren gilt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{card}\{z \in \mathbb{Z}^d : C_z \subset nW\}}{n^d V_d(W)} \leq 1, \tag{5.14}$$

was den Beweis schließt.  $\square$



## 5.3 Ein zentraler Grenzwertsatz für $M(\tilde{\Xi}_{r_n W})$

Wir wollen nun einen zentralen Grenzwertsatz für die Folge von Zufallsvariablen  $(M(\tilde{\Xi}_{r_n W}))_{n \in \mathbb{N}}$  herleiten. Dieser geht auf die Arbeiten von Penrose und Yukich ([56], [57], [58]) zurück. Im Gegensatz zu dem im letzten Abschnitt behandelten starken Gesetz großer Zahlen werden für den zentralen Grenzwertsatz nicht von der Subadditivität aus (5.4) Gebrauch gemacht, sondern müssen auf den Begriff der Stabilität, wie im Abschnitt 3.3.2 eingeführt, zurückgreifen.

Von nun an sei  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  ein Folge von Beobachtungsfenstern, die nachfolgenden Bedingungen genügt:

- (i)  $\lambda_d(W_n) = n$ ,
- (ii)  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \geq n} W_m = \mathbb{R}^d$ ,
- (iii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_d(\partial'_r W_n)}{n} = 0$  für alle  $r > 0$ , mit  $\partial'_r W_n := \bigcup_{x \in \text{bd } W_n} (x + [-r, r]^d)$ , und
- (iv)  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{diam}(W_n)}{n} < \infty$ .

Ansonsten unterliegt  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  im Nachfolgenden keinen weiteren Bedingungen.

**Bemerkung 5.3.1.** Beispiele für solche Folgen sind Mengen der Gestalt  $n^{1/d}C$  wobei  $C$  ein konvexer Körper mit Volumen eins ist, der den Ursprung enthält, wie etwa  $W_n = B(0, (\frac{n}{\kappa_d})^{1/d})$  oder  $W_n = [0, n^{1/d}]^d$ .

Für eine solche Folge  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  setzen wir  $\mathcal{W} := \{x + W_n : x \in \mathbb{R}^d, n \in \mathbb{N}\}$ . Es sei  $\Xi$  ein stationärer Poissonscher Partikelprozess mit Intensität  $\gamma > 0$  und Formverteilung  $\mathbb{Q}$ . Weiterhin wollen wir den Binomialprozess  $U_{m,W} := \{(K_1 + u_1), \dots, (K_m + u_m)\}$  auf  $W$  einführen und dessen Verteilung mit  $\mathbb{P}^{U_{m,W}}$  bezeichnen. Dabei sind  $u_1, \dots, u_m$  voneinander unabhängige, auf  $W$  gleichverteilte Punkte und  $K_1, \dots, K_m \sim \mathbb{Q}$  unabhängig voneinander und von  $u_1, \dots, u_m$ . Dann führen wir folgende Begriffe ein:

Das Funktional  $H$  erfüllt für  $p \geq 1$  die *beschränkte  $p$ -te Momentenbedingung* zur Intensität  $\gamma$  auf  $\mathcal{W}$ , falls gilt

$$\sup_{W \in \mathcal{W}: 0 \in W} \sup_{m \in [\gamma \lambda_d(W)/2, 3\gamma \lambda_d(W)/2]} \int \int \Delta_{X_0}(\Lambda)^p \mathbb{Q}(dX_0) \mathbb{P}^{U_{m,W}}(d\Lambda) < \infty.$$

Dabei bezeichnet  $\Delta_{X_0}$  die Hinzufügekosten von  $H$  aus (3.16). Das Funktional  $H$  heißt *polynomial beschränkt*, falls es Konstanten  $C_1$  und  $\beta_1$  gibt, so dass

$$|H(\Lambda)| \leq C_1(\text{diam}(\{c(K) : K \in \Lambda\}) + \text{card } \Lambda)^{\beta_1} \text{ für alle } \Lambda \in \mathcal{F}_e(\mathcal{K}')$$

gilt.

Nach diesen Definitionen lässt sich folgender zentraler Grenzwertsatz für Partikelprozesse herleiten (siehe [56], [58], [57]).

**Satz 5.3.2.** *Sei  $H$  ein stabilisierendes, translationsinvariantes Funktional, das auf endlichen Mengen konvexer Partikel definiert ist, die beschränkte vierte Momentenbedingung auf  $\mathcal{W}$  erfüllt und polynomial beschränkt ist. Sei weiterhin  $\Xi$  ein stationärer Poissonscher Partikelprozess mit Intensität  $\gamma > 0$  und  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Beobachtungsfenstern, welche den Bedingungen (i) bis (iv) von oben genügt. Dann existiert eine Konstante  $\sigma_\gamma^2$ , so dass für  $n \rightarrow \infty$  gilt*

$$\frac{\text{Var } H(\Xi_{W_n})}{n} \rightarrow \sigma_\gamma^2,$$

$$\frac{H(\Xi_{W_n}) - \mathbb{E}H(\Xi_{W_n})}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \sigma_\gamma^2).$$

Dabei ist  $\sigma_\gamma^2$  unabhängig von der Wahl von  $W$ . Falls die Verteilung von  $\Delta_\gamma(\infty)$  aus (3.18) nicht degeneriert ist, gilt  $\sigma_\gamma^2 > 0$ .

Wir wollen die Aussage von Satz 5.3.2 auf  $M(\tilde{\Xi}_{W_n})$  anwenden. Dazu betrachten wir das translationsinvariante Funktional  $H := M \circ T$ , mit  $T$  wie in Abschnitt 3.1, beschränken uns aber auf Partikelmengen aus  $\mathcal{F}_e(\mathcal{K}')^{C_0} := \{\Lambda \in \mathcal{F}_e(\mathcal{K}') : M(K) \leq C_0 \text{ für alle } K \in \Lambda\}$  für ein von nun an festes  $C_0 > 0$ . Zudem sei  $\Xi$  ein stationärer Poissonscher Partikelprozess mit Intensität  $\gamma > 0$  und Formverteilung  $\mathbb{Q}$ , die auf  $\{K \in \mathcal{K}_0 : M(K) \leq C_0\}$  konzentriert sei.

In Abschnitt 3.3.2 haben wir hinreichende Bedingungen diskutiert, unter welchen  $H$  stabilisierend ist. Für  $p > 0$  gilt nach Voraussetzung für alle  $\Lambda \in \mathcal{F}_e(\mathcal{K}')^{C_0}$  und  $K \in \mathcal{K}'$  mit  $M(K) \leq C_0$  die Abschätzung

$$\Delta_K(\Lambda) = M(T(\Lambda \cup \{K\})) - M(T(\Lambda)) \leq M(K) \leq C_0$$

weshalb  $H$  die vierte Momentenbedingung erfüllt. Weiterhin gilt  $H(\Lambda) \leq C_0 \text{card}(\Lambda)$  für  $\Lambda \in \mathcal{F}_e(\mathcal{K}')^{C_0}$ ; daher ist  $H$  polynomial beschränkt. Damit gilt folgender zentraler Grenzwertsatz.

**Satz 5.3.3.** *Sei  $\Xi$  ein stationärer Poissonprozess, dessen Partikel gleichmäßig beschränkt sind, dessen Formverteilung  $\mathbb{Q}$  auf  $\{K \in \mathcal{K}' : M(K) \leq C_0\}$  für ein  $C_0 > 0$  konzentriert ist und für den  $\int_{\mathcal{K}_0} M(K_0) \mathbb{Q}(dK_0) > 0$  gilt. Für die Intensität  $\gamma$  von  $\Xi$  gelte  $0 < \gamma < \gamma_c$  mit  $\gamma_c$  aus Satz 3.3.3. Es sei weiterhin  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^d$  eine Folge von Beobachtungsfenstern, welche den Bedingungen (i) bis (iv) von oben genügt. Dann existiert eine Konstante  $\sigma_\gamma^2 > 0$ , so dass für  $n \rightarrow \infty$  gilt*

$$\frac{\text{Var } M(\tilde{\Xi}_{W_n})}{n} \rightarrow \sigma_\gamma^2,$$

$$\frac{M(\tilde{\Xi}_{W_n}) - \mathbb{E}M(\tilde{\Xi}_{W_n})}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \sigma_\gamma^2).$$

Die zentrierten und standardisierte Zufallsvariable

$$\frac{M(\tilde{\Xi}_{W_n}) - \mathbb{E}M(\tilde{\Xi}_{W_n})}{\sqrt{n}}$$

ist also asymptotisch normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz  $\sigma_\gamma^2$ , wobei sich  $\sigma_\gamma^2$  nicht weiter bestimmen lässt.

# Kapitel 6

## Das Verhalten von $M(\tilde{\Xi}_{\gamma,W})$ für $\gamma \rightarrow \infty$

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels wollen wir obere Schranken für  $M(\tilde{\Xi}_{\gamma,W})$  bzw.  $\tilde{\gamma}_M$  herleiten. Im Mittelpunkt steht dabei die Frage nach der maximalen  $M$ -Dichte einer Packung von Partikeln bestimmter Form. Diese Schranken werden dann im zweiten Abschnitt hilfreich sein, um der Frage nach dem Verhalten von  $M(\tilde{\Xi}_{\gamma,W})$  für  $\gamma \rightarrow \infty$  nachzugehen.

Für dieses Kapitel setzen wir nun voraus, dass das Gewichtsfunktional  $M$  stetig und translationsinvariant ist.

### 6.1 Dichteste Packungen und obere Schranken

Ein klassische Problem der diskreten Geometrie besteht aus der Frage, auf welche Art und Weise man Einheitskreise im  $\mathbb{R}^2$  anordnen muss, so dass diese sich höchstens berühren und zugleich „möglichst dicht“ liegen, also einen möglichst großen Anteil des Raumes überdecken. Dieses Problem erweist sich als recht einfach zu lösen. Man kann zeigen, dass maximal  $\pi/\sqrt{12} \approx 90,69\%$  des Raumes überdeckt werden können und dies realisiert werden kann, indem man die Mittelpunkte der Kreise auf die Punkte des hexagonalen Gitters

$$\mathbb{L}_{hex} := \left\{ z_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} : z_1, z_2 \in \mathbb{Z} \right\}$$

setzt. Schon die Übertragung dieses Problems in den  $\mathbb{R}^3$  erhöht den Schwierigkeitsgrad wesentlich und geht bis ins 16. Jahrhundert zurück. Dort stellte Sir Walter Raleigh seinem Freund, dem Mathematiker Thomas Harriot, die Frage, wie man Kanonenkugeln auf Schiffen möglichst effizient lagern kann. Im Jahr 1611 war es Kepler, der behauptete, dass die maximale Dichte einer Kugelpackung im  $\mathbb{R}^3$  den Wert  $\pi/\sqrt{18}$  besitzt. Allein einen Beweis blieb man lange Zeit schuldig. Nahezu 400 Jahre lässt sich die weitläufige Meinung der Gelehrten zu diesem Problem stellvertretend durch folgende beiden Zitate aus den Jahren 1958 bzw. 1967 zusammenfassen:

While many mathematicians believe, and all physicists know, that the density can-

not exceed

$$\frac{\pi}{\sqrt{18}} = 0,7404\dots$$

[...].

C.A. Rogers, [64]

This is a scandalous situation. All that is missing, is a proof.

J. Milnor, [48]

Erst 1998 gelang es dann Hales in einem sehr aufwändigen, computergestützten Verfahren, dies vollständig zu beweisen. Eine Darstellung der mathematischen Ideen dieses Beweise findet sich in [17]. Für Dimensionen größer drei ist die Frage nach der dichtesten Packung von Kugeln gleichen Radius noch immer offen.

Wir wollen das Thema Packungen hier in ein allgemeineres Umfeld einbetten, als dieses klassischerweise betrachtet wird. Für einen Überblick über traditionelle Fragestellungen aus dem Themenkomplex Packungen sei insbesondere auf [8], [15], [65] und [81] verwiesen.

Bei der Behandlung von Packungen konvexer Partikel müssen wir zuerst zwischen dem lokalen und dem globalen Fall unterscheiden. Ausgangspunkt ist in beiden Fällen eine Menge  $\mathcal{D} \subset \mathcal{K}_0$  von volldimensionalen, konvexen Partikeln und ein translationsinvariantes, stetiges Gewichtsfunktional  $M : \mathcal{K}' \rightarrow [0, \infty)$ . In beiden Fällen geht es darum, Partikel mit einer Form aus  $\mathcal{D}$  so auf Punkten, welche in einem kompakten Fenster  $W \subset \mathbb{R}^d$  bzw. im  $\mathbb{R}^d$  liegen, zu platzieren, dass die Partikel gewichtsmaximal liegen und sich dabei höchstens berühren.

Wir wollen nun zuerst für eine kompakte Menge  $W \subset \mathbb{R}^n$  mit inneren Punkten den Begriff der dichtesten Packung auf  $W$  lokal einführen.

Sei dazu  $W \in \mathcal{C}'$  volldimensional und  $\mathcal{D} \subset \mathcal{K}_0$  eine kompakte Partikelmenge, so dass

$$B(0, R_u) \subset K \subset B(0, R_o) \text{ für } R_u, R_o > 0 \text{ und alle } K \in \mathcal{D}. \quad (6.1)$$

Dann betrachten wir die Folge  $(\Phi_n^W)_{n \in \mathbb{N}}$  von Abbildungen

$$\Phi_i^W : (\times_{k=1}^i \mathcal{D}) \times (\times_{k=1}^i W) \rightarrow [0, \infty)$$

$$(K_1, \dots, K_i, x_1, \dots, x_i) \mapsto M^{**}(\{K_1 + x_1, \dots, K_i + x_i\})$$

$$:= \left( \sum_{k=1}^i M(K_k) \right) \left( \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^i \mathbb{1}\{(\text{int } K_k + x_k) \cap (\text{int } K_l + x_l) = \emptyset\} \right).$$

Wir wissen wegen (6.1), dass es ein kleinstes  $i_0 \in \mathbb{N}$  gibt, so dass gilt

$$\Phi_i^W \equiv 0 \text{ für alle } i \geq i_0.$$

Weiterhin ist die Abbildung  $M^{**}$  wegen Satz 1.2.7 b) nach oben halbstetig. Daher nimmt  $\Phi_i^W$  auf der kompakten Menge  $\mathcal{D}^i \times W^i$  ein Maximum an, welches wir mit  $\eta_i^W$  bezeichnen wollen.

Wir nennen dann

$$\eta_{\mathcal{D}}^W := \max_{i \in \mathbb{N}} \eta_i^W \quad (6.2)$$

das maximale Gewicht einer Packung von Partikeln aus  $\mathcal{D}$  auf  $W$ . Außerdem nennen wir ein Element aus  $\arg \max \Phi_{i^*}$ , wobei  $i^*$  so gewählt ist, dass  $\eta_{\mathcal{D}}^W = \eta_{i^*}^W$  gilt, eine maximale Packung von Partikeln aus  $\mathcal{D}$  auf  $W$ . Des Weiteren bezeichne

$$\delta_{\mathcal{D}}^W := \frac{\eta_{\mathcal{D}}^W}{\lambda_d(W)}$$

die maximale Packungsdichte einer Packung von Partikeln aus  $\mathcal{D}$  auf  $W$ . Diese maximale Packung ist im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt, d.h. es kann mehrere Partikelzentren  $x_1, \dots, x_{i^*} \in W$  und Partikelformen  $K_1, \dots, K_{i^*} \in \mathcal{D}$  geben, so dass  $M^{**}(\{K_1 + x_1, \dots, K_{i^*} + x_{i^*}\}) = \eta_{\mathcal{D}}^W$  gilt. Nach der Behandlung des lokalen Falls können wir davon ausgehend den globalen Fall exakt beschreiben. Dafür benötigen wir folgende Hilfsüberlegung, welche auf früheren Überlegungen, wie etwa in Lemma 5.2.1, basiert.

**Lemma 6.1.1.** *Für eine kompakte Partikelmenge  $\mathcal{D} \subset \mathcal{K}_0$ , die (6.1) erfüllt, ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} f : \mathcal{C}' &\rightarrow [0, \infty) \\ W &\mapsto \eta_{\mathcal{D}}^W \end{aligned}$$

*subadditiv, d.h. es gilt*

$$\eta_{\mathcal{D}}^{W_1 \cup W_2} \leq \eta_{\mathcal{D}}^{W_1} + \eta_{\mathcal{D}}^{W_2}.$$

*für alle  $W_1, W_2 \in \mathcal{C}'$ .*

Damit lässt sich nun der Begriff der maximalen Packungsdichte einführen. Dazu sei  $\mathcal{D}$  wie in Lemma 6.1.1. Wir nennen dann

$$\delta_{\mathcal{D}} := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\eta_{\mathcal{D}}^{[0,n]^d}}{n^d} \quad (6.3)$$

die *maximale Packungsdichte* einer Packung von Partikeln aus  $\mathcal{D}$ . Die Endlichkeit von  $\delta_{\mathcal{D}}$  in (6.3) folgt aus der Beschränktheit der Folge  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $d_n := \eta_{\mathcal{D}}^{[0,n]^d} / n^d$ . Nach Lemma (6.1.1) ist nämlich  $\eta_{\mathcal{D}}^{[0,n]^d} \leq n^d \eta_{\mathcal{D}}^{[0,1]^d}$  und damit  $d_n \leq \eta_{\mathcal{D}}^{[0,1]^d}$ .

Wir wollen nun zeigen, dass  $\delta_{\mathcal{D}}$  nicht von der speziellen Form des Beobachtungsfensters  $W \subset \mathbb{R}^n$  abhängt, sofern wir voraussetzen, dass dieses konvex ist.

**Satz 6.1.2.** *Seien  $W \in \mathcal{K}'$  ein konvexer Körper mit  $0 \in \text{int } W$  und  $\mathcal{D}$  eine kompakte Partikelmenge, die (6.1) erfüllt. Dann gilt*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\eta_{\mathcal{D}}^{rW}}{V_d(rW)} = \delta_{\mathcal{D}}. \quad (6.4)$$

Der Beweis dieser Aussage beruht auf einem für sich selbst gesehen wichtigen Resultat, nämlich der Tatsache, dass es egal ist, ob wir bei der Definition von  $\delta_{\mathcal{D}}$  in (6.3) bzw. (6.4) Translate der Partikel aus  $\mathcal{D}$  betrachten, deren Zentren in  $W$  liegen oder die komplett in  $W$  enthalten sind. Zum Beweis dieser Aussage werden wir daher zunächst den Begriff der gewichtsmaximalen Packung von Partikeln, die komplett in  $W$  enthalten sind, einführen.

Dazu seien  $W \in \mathcal{C}'$  und  $\mathcal{D} \subset \mathcal{K}_0$  wie in Lemma 6.1.1. Wir betrachten dann die Folge  $(\bar{\Phi}_n^W)_{n \in \mathbb{N}}$  von Abbildungen

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_i^W &: (\times_{k=1}^i \mathcal{D}) \times (\times_{k=1}^i W) \rightarrow (0, \infty) \\ &(K_1, \dots, K_i, x_1, \dots, x_i) \mapsto M^{***}(\{K_1 + x_1, \dots, K_i + x_i\}) \\ &:= M^{***}(\{K_1 + x_1, \dots, K_i + x_i\}) \prod_{k=1}^i \mathbb{1}\{K_k + x_k \subset W\}. \end{aligned}$$

Wegen (6.1) wissen wir, dass es ein kleinstes  $i_0 \in \mathbb{N}$  gibt, so dass

$$\bar{\Phi}_i^W \equiv 0 \text{ für alle } i \geq i_0.$$

Die Abbildung  $M^{***}$  ist ebenfalls nach oben halbstetig, weshalb  $\bar{\Phi}_i^W$  auf der kompakten Menge  $\mathcal{D}^i \times W^i$  ein Maximum annimmt, welches wir mit  $\bar{\eta}_i^W$  bezeichnen wollen. Wir nennen dann

$$\bar{\eta}_{\mathcal{D}}^W := \max_{i \in \mathbb{N}} \bar{\eta}_i^W$$

das maximale Gewicht einer Packung von Partikeln aus  $\mathcal{D}$  in  $W$ . Außerdem nennen wir ein Element aus  $\arg \max \bar{\Phi}_{i^*}$ , wobei  $i^*$  so gewählt ist, dass  $\bar{\eta}_{\mathcal{D}}^W = \bar{\eta}_{i^*}^W$  gilt, eine maximale Packung von Partikeln aus  $\mathcal{D}$  in  $W$ . Bevor wir zur ersten Hauptaussage gelangen, benötigen wir noch folgendes Hilfsaussage.

**Lemma 6.1.3.** *Für eine kompakte Partikelmenge  $\mathcal{D} \subset \mathcal{K}_0$ , die (6.1) erfüllt, ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} \bar{f} &: \mathcal{C}' \rightarrow [0, \infty) \\ W &\mapsto \bar{\eta}_{\mathcal{D}}^W \end{aligned}$$

*superadditiv, d.h. es gilt*

$$\bar{\eta}_{\mathcal{D}}^{W_1 \cup W_2} \geq \bar{\eta}_{\mathcal{D}}^{W_1} + \bar{\eta}_{\mathcal{D}}^{W_2}.$$

*für alle  $W_1, W_2 \in \mathcal{C}'$  mit  $W_1 \cap W_2 = \emptyset$ .*

Es gilt dann folgender Satz, der zugleich eine Definition beinhaltet.

**Satz 6.1.4.** *Seien  $W \in \mathcal{K}'$  ein konvexer Körper mit  $0 \in \text{int } W$  und  $\mathcal{D}$  eine kompakte Partikelmenge, die (6.1) erfüllt. Dann gilt*

$$\bar{\delta}_{\mathcal{D}} := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{\eta}_{\mathcal{D}}^{[0,n]^d}}{n^d} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\bar{\eta}_{\mathcal{D}}^{rW}}{V_d(rW)}. \quad (6.5)$$

*Beweis.* Die Endlichkeit von  $\bar{\delta}$  folgt aus der Beziehung  $\bar{\eta}_{\mathcal{D}}^{[0, n]^d} \leq \eta_{\mathcal{D}}^{[0, n]^d}$ . Zum Beweis der Aussage, dass  $\bar{\delta}_{\mathcal{D}} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\bar{\eta}_{\mathcal{D}}^{rW}}{V_d(rW)}$  für beliebige konvexe Körper  $W \in \mathcal{K}'$  mit  $0 \in \text{int } W$  gilt, sei nun  $\varepsilon > 0$ . Nach der Definition von  $\bar{\delta}$  gibt es ein  $t(\varepsilon) > 0$ , so dass

$$\frac{\bar{\eta}_{\mathcal{D}}^{[0, t(\varepsilon)]^d}}{t(\varepsilon)^d} > \bar{\delta}_{\mathcal{D}} - \varepsilon \quad (6.6)$$

und

$$\frac{\eta_{\mathcal{D}}^{[0, t(\varepsilon)]^d}}{t(\varepsilon)^d} < \bar{\delta}_{\mathcal{D}} + \varepsilon \quad (6.7)$$

gilt. Während (6.6) direkt aus der Definition von  $\bar{\delta}$  folgt, muss man zum Beweis von (6.7) zeigen, dass der Unterschied zwischen  $\bar{\eta}_{\mathcal{D}}^{[0, t]^d}/t^d$  und  $\eta_{\mathcal{D}}^{[0, t]^d}/t^d$  für hinreichend großes  $t$  vernachlässigt werden kann. Dazu stellen wir nachfolgende Überlegung für  $t > 0$  an:

$$\begin{aligned} \frac{\eta_{\mathcal{D}}^{[0, t]^d} - \bar{\eta}_{\mathcal{D}}^{[0, t]^d}}{t^d} &\leq \frac{\bar{\eta}_{\mathcal{D}}^{[-R_o, t+R_o]^d \setminus [R_o, t-R_o]^d}}{t^d} \leq \frac{\eta_{\mathcal{D}}^{[-R_o, t+R_o]^d \setminus [R_o, t-R_o]^d}}{t^d} = \frac{\eta_{\mathcal{D}}^{[0, t+2R_o]^d \setminus [2R_o, t]^d}}{t^d} \\ &\leq \frac{\eta_{\mathcal{D}}^{[0, [t+2R_o]]^d \setminus [[2R_o], [t]]^d}}{t^d} \leq \frac{([\lceil t + 2R_o \rceil]^d - ([\lfloor t \rfloor - \lceil 2R_o \rceil])^d) \eta_{\mathcal{D}}^{[0, 1]^d}}{t^d} \rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Gleichzeitig lässt sich für jeden konvexen Körper  $W$  ein  $r(\varepsilon) > 0$  finden, so dass für alle  $r > r(\varepsilon)$  zwei Familien von nichtüberlappenden Würfeln

$$\left\{ \left[ 0, \frac{t(\varepsilon)}{r} \right]^d + x_i, i = 1, \dots, n_1 \right\}$$

und

$$\left\{ \left[ 0, \frac{t(\varepsilon)}{r} \right]^d + y_i, i = 1, \dots, n_2 \right\}$$

existieren mit

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=1}^{n_1} \left( \left[ 0, \frac{t(\varepsilon)}{r} \right]^d + x_i \right) &\subset W, \\ (1 - \varepsilon)V_d(W) &\leq \lambda_d \left( \bigcup_{i=1}^{n_1} \left[ 0, \frac{t(\varepsilon)}{r} \right]^d + x_i \right) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=1}^{n_2} \left( \left[ 0, \frac{t(\varepsilon)}{r} \right]^d + y_i \right) &\supset W, \\ (1 + \varepsilon)V_d(W) &\geq \lambda_d \left( \bigcup_{i=1}^{n_2} \left[ 0, \frac{t(\varepsilon)}{r} \right]^d + y_i \right). \end{aligned}$$



Damit gilt dann für  $r \geq r(\varepsilon)$  die Abschätzung

$$(1 - \varepsilon) \frac{\bar{\eta}_{\mathcal{D}}^{rW}}{n_1 t(\varepsilon)^d} \leq \frac{\bar{\eta}_{\mathcal{D}}^{rW}}{V_d(rW)} \leq (1 + \varepsilon) \frac{\bar{\eta}_{\mathcal{D}}^{rW}}{n_2 t(\varepsilon)^d}. \quad (6.8)$$

Wir wollen nun zuerst die linke Seite von (6.8) weiter abschätzen. Hierfür gilt

$$(1 - \varepsilon) \frac{\bar{\eta}_{\mathcal{D}}^{rW}}{n_1 t(\varepsilon)^d} \geq \frac{(1 - \varepsilon)}{n_1 t(\varepsilon)^d} \sum_{i=1}^{n_1} \bar{\eta}_{\mathcal{D}}^{[0, t(\varepsilon)]^d + x_i} = \frac{(1 - \varepsilon)}{t(\varepsilon)^d} \bar{\eta}_{\mathcal{D}}^{[0, t(\varepsilon)]^d} > (1 - \varepsilon)(\bar{\delta}_{\mathcal{D}} - \varepsilon).$$

Ähnlich gehen wir bei der rechten von (6.8) Seite vor, wobei wir hierbei auf die Beziehung  $\bar{\eta}_{\mathcal{D}}^{rW} \leq \eta_{\mathcal{D}}^{rW}$  und die Subadditivität aus Lemma 6.1.1 zurückgreifen. Dann gilt

$$(1 + \varepsilon) \frac{\bar{\eta}_{\mathcal{D}}^{rW}}{n_2 t(\varepsilon)^d} \leq \frac{(1 + \varepsilon)}{n_2 t(\varepsilon)^d} \sum_{i=1}^{n_2} \eta_{\mathcal{D}}^{[0, t(\varepsilon)]^d + y_i} = \frac{(1 + \varepsilon)}{t(\varepsilon)^d} \eta_{\mathcal{D}}^{[0, t(\varepsilon)]^d} < (1 + \varepsilon)(\bar{\delta}_{\mathcal{D}} + \varepsilon),$$

was den Beweis schließt.  $\square$

Den Zusammenhang zwischen  $\delta_{\mathcal{D}}$  und  $\bar{\delta}_{\mathcal{D}}$  stellt die nachfolgende Aussage her.

**Korollar 6.1.5.** *Seien  $W \in \mathcal{K}'$  ein konvexer Körper mit  $0 \in \text{int } W$  und  $\mathcal{D}$  eine kompakte Partikelmengde, die (6.1) erfüllt. Dann gilt*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\eta_{\mathcal{D}}^{rW}}{V_d(rW)} = \bar{\delta}_{\mathcal{D}} = \delta_{\mathcal{D}}. \quad (6.9)$$

*Beweis.* Nach Definition ist

$$\bar{\eta}_{\mathcal{D}}^{rW} \leq \eta_{\mathcal{D}}^{rW} \leq \bar{\eta}_{\mathcal{D}}^{(r+R_o)W}.$$

Teilt man diese Ungleichungskette durch  $V_d(rW)$ , so konvergiert die linke Seite für  $r \rightarrow \infty$  nach Satz 6.1.4 gegen  $\bar{\delta}_{\mathcal{D}}$ . Weiterhin seien  $x, y \in \mathbb{R}^d$  und  $a > 0$  so gewählt, dass

$$Q_u := a[0, 1]^d + x \subset W \subset \text{diam } W[0, 1]^d + y =: Q_o$$

gilt. Für hinreichend große Werte von  $r$  erhalten wir dann die Abschätzung

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_{\mathcal{D}}^{(r+R_o)W} &\leq \bar{\eta}_{\mathcal{D}}^{rW} + \bar{\eta}_{\mathcal{D}}^{(r+R_o)W \setminus (r-R_o)W} \leq \bar{\eta}_{\mathcal{D}}^{rW} + \eta_{\mathcal{D}}^{(r+R_o)W \setminus (r-R_o)W} \\ &\leq \bar{\eta}_{\mathcal{D}}^{rW} + \eta^{(r+R_o)(\text{diam } W[0, 1]^d + y) \setminus (r-R_o)(a[0, 1]^d + x)} \\ &\leq \bar{\eta}_{\mathcal{D}}^{rW} + ((\lceil r + R_o \rceil \lceil \text{diam } W \rceil)^d - (\lfloor r - R_o \rfloor \lfloor a \rfloor)^d) \eta_{\mathcal{D}}^{[0, 1]^d}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Dividiert man nun wieder durch  $V_d(rW)$ , so folgt daraus für  $r \rightarrow \infty$  nach Satz 6.1.4 die erste Gleichheit in (6.9), da

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{(\lceil r + R_o \rceil \lceil \text{diam } W \rceil)^d - (\lfloor r - R_o \rfloor \lfloor a \rfloor)^d}{r^d} = 0$$

gilt.

Die zweite Gleichheit ergibt sich aus der im Beweis zu Satz 6.1.4 gezeigten Beziehung

$$\frac{\eta_{\mathcal{D}}^{[0, n]^d} - \bar{\eta}_{\mathcal{D}}^{[0, n]^d}}{n^d} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

□

Insbesondere folgt aus Korollar 6.1.5 direkt der Beweis von Satz 6.1.2.

Mit diesen Begriffen ergibt sich dann sofort folgende Aussage

**Satz 6.1.6.** *Es sei  $\Xi$  ein stationärer Poissonscher Partikelprozess mit Intensität  $\gamma > 0$  und Formverteilung  $\mathbb{Q}$ . Der Träger  $\text{supp}(\mathbb{Q})$  von  $\mathbb{Q}$  sei kompakt und erfülle (6.1). Weiterhin sei  $W \subset \mathbb{R}^d$  kompakt. Dann gilt f.s.*

$$M(\tilde{\Xi}_W) \leq \eta_{\text{supp}(\mathbb{Q})}^W.$$

Gilt zudem  $\mathbb{Q}(\{K \in \mathcal{K}_0 : K \subset B(0, 1/4)\}) = 1$  so lässt sich die  $M$ -Dichte  $\gamma'_M$  des stationären Prozesses  $\Xi'$ , wie in (5.10) definiert, durch

$$\gamma'_M \leq \delta_{\text{supp}(\mathbb{Q})}$$

abschätzen.

Explizite Werte für  $\eta_{\mathcal{D}}^W$  und  $\delta_{\mathcal{D}}$  sind schwer zu berechnen und hängen stark von  $W$  und  $\mathcal{D}$  ab. Am bekanntesten sind die Werte von  $\delta_{\mathcal{D}}$  für  $\mathcal{D} = \{B(0, 1)\}$  in Dimension eins, zwei und drei. Für den Fall eines anderen Gewichtsfunktionals  $M$  gilt, dass  $\delta_{\{B(0,1)\}}$  bezüglich  $M$  gerade dem  $M(B(0, 1))/\kappa_d$ -fachen von  $\delta_{\{B(0,1)\}}$  bezüglich  $V_d$  entspricht, da alle Partikel gleich sind.

Für Packungen von Kugeln mit beliebigem fixem Radius  $r > 0$  kann man ein Skalierungsargument verwenden, um folgende Aussage zu erhalten.

**Satz 6.1.7.** *Die Dichte einer Packung von  $d$ -dimensionalen Kugeln mit Radius  $r > 0$  im  $\mathbb{R}^d$  bezüglich  $M$  beträgt*

$$\delta_{\{B(0,r)\}} = \begin{cases} \frac{M(B(0,r))}{2r}, & d = 1 \\ \frac{M(B(0,r))}{2\sqrt{3}r^2}, & d = 2 \\ \frac{M(B(0,r))}{4\sqrt{2}r^3}, & d = 3. \end{cases} \quad (6.11)$$

**Bemerkung 6.1.8.** Wir wollen an dieser Stelle darauf hinweisen, dass aufgrund von Randeffekten im Allgemeinen keine Gleichheit zwischen  $\eta_{\mathcal{D}}^W$  und  $\lambda_d(W)\delta_{\mathcal{D}}$  vorliegt.

## 6.2 Das asymptotische Gewicht von $\tilde{\Xi}_{\gamma,W}$

Wir haben bereits in Satz 3.1.5 b) festgestellt, dass für  $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathcal{F}_e(\mathcal{K}')$  mit  $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$

$$M(T(\Lambda_1)) \leq M(T(\Lambda_2))$$

gilt. Der Grund hierfür besteht darin, dass  $T(\Lambda_1)$  eine harte Teilmenge von  $\Lambda_2$  ist. Die Abbildung  $\Lambda \mapsto M(T(\Lambda))$  ist also monoton bezüglich  $\subset$  auf  $\mathcal{F}_e(\mathcal{K}')$ . Dieses Ergebnis wollen wir nun auf die Zufallsvariable  $M(\tilde{\Xi}_{\gamma,W})$  übertragen. Dabei wird sich herausstellen, dass mit steigender mittlerer Partikelzahl auch das mittlere Gewicht der gewichtsmaximalen harten Teilmenge steigt und „beinahe“ (in einem noch zu spezifizierenden Sinn) gegen den größtmöglichen Wert konvergiert, wenn man die Ausgangsintensität beliebig groß werden lässt. Besonders hervorzuheben ist die letztgenannte Eigenschaft, da diese für alle bisher bekannten Packungsmodelle nicht vorliegt, wie wir dies für die in Kapitel 2 vorgestellten Modelle bereits dort gesehen haben.

Von nun an sei  $\Xi_\gamma$  ein stationärer Poissonscher Partikelprozess mit Intensität  $\gamma$  und Formverteilung  $\mathbb{Q}$ . Der Träger  $\mathcal{D} := \text{supp}(\mathbb{Q})$  von  $\mathbb{Q}$  sei kompakt und erfülle (6.1). Insbesondere sind die Partikel aus dem Träger also volldimensional. Weiterhin sei  $W \subset \mathbb{R}^d$  ein konvexer Körper mit inneren Punkten. Mit dieser Menge  $\mathcal{D}$  lässt sich, wie in (6.2) gesehen, das Gewicht  $\eta_{\mathcal{D}}^W$  der maximalen Packung von Partikeln aus  $\mathcal{D}$  auf  $W$  einführen.

Zur Motivation der nachfolgenden Ergebnisse bei der Untersuchung des Verhaltens von  $M(\tilde{\Xi}_{\gamma,W})$  für  $\gamma \rightarrow \infty$  sei folgendes Beispiel vorangestellt.

**Beispiel 6.2.1.** Es seien  $d = 1$ ,  $M = V_1$  und  $\mathbb{Q} = \delta_{[0,2]}$ , d.h.  $\text{supp}(\mathbb{Q}) = \{[0, 2]\}$ .

- (i)  $W = [-1, 1]$ : Hier ist  $\eta_{\{[0,2]\}}^{[-1,1]} = 4$ , wobei dieses Gewicht nur von der Packung  $\{[-2, 0], [0, 2]\}$  erreicht wird. Gleichzeitig gilt aber für alle  $\gamma > 0$  f.s.  $M(\tilde{\Xi}_{\gamma,[-1,1]}) < 4$ .
- (ii)  $W = [-1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$  für  $0 < \varepsilon < 1$ : Auch hier ist  $\eta_{\{[0,2]\}}^{[-1-\varepsilon, 1+\varepsilon]} = 4$ , wobei dieses Gewicht aber im Gegensatz zu a) von allen Packungen der Gestalt  $\{[-2 - y, -y], [x, 2 + x]\}$  mit  $|x|, |y| \leq 1 + \varepsilon$  und  $|x - y| > 2$  erreicht wird. Daher gilt

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(M(\tilde{\Xi}_{\gamma,[-1-\varepsilon, 1+\varepsilon]}) = 4) \\ & \leq \mathbb{P}(\Xi \text{ enthält jew. mind. ein Partikel mit Zentrum in } [-1 - \varepsilon, -1) \text{ und } (1, 1 + \varepsilon]) \\ & = (1 - e^{-\gamma\varepsilon})^2 \xrightarrow{\gamma \rightarrow \infty} 1. \end{aligned}$$

Anhand dieses einfachen Beispiels erkennen wir bereits wesentliche Eckpunkte bei der Untersuchung des Verhaltens von  $M(\tilde{\Xi}_{\gamma,W})$  für  $\gamma \rightarrow \infty$ . Eine besondere Rolle spielt dabei das Verhalten der Abbildung  $v := v_{\mathcal{D}}^W : t \rightarrow \eta_{\mathcal{D}}^{tW}$  auf  $(0, \infty)$ . Wie obiges Beispiel zeigt muss  $v$  nicht stetig sein. Zusammenfassend lässt sich jedoch Folgendes zeigen.

**Satz 6.2.2.** Die Abbildung  $v := v_{\mathcal{D}}^W$  ist auf  $(0, \infty)$  monoton wachsend und nach oben halbstetig.

*Beweis.* Die Monotonie ergibt sich daraus, dass für  $0 < t_1 < t_2$  die gewichtsmaximale Packung von Partikeln aus  $\mathcal{D}$  in  $t_1 W$  auch eine Packung in  $t_2 W$  ist. Die Halbstetigkeit nach oben ergibt sich zusammen mit der Monotonie und der Eigenschaft, dass für  $W$  wie oben die Abbildung  $t \rightarrow \mathbb{1}_{tW}(x)$  für  $x \in \mathbb{R}^d$  auf  $(0, \infty)$  nach oben halbstetig ist.  $\square$

Die Abbildung  $v$  muss jedoch wie in obigem Beispiel gesehen nicht streng monoton wachsen.

Will man nun das Verhalten von  $M(\tilde{\Xi}_{\gamma,W})$  für  $\gamma \rightarrow \infty$  untersuchen, so kann es wie in Beispiel 6.2.1 vorkommen, dass die damit assoziierte Funktion  $v := v_{\text{supp } \mathbb{Q}}^W$  gerade in  $t = 1$  eine Unstetigkeitsstelle hat. Dies führt dazu, dass wir für nachstehende Aussage das asymptotische Verhalten von  $M(\tilde{\Xi}_{\gamma,(1+\varepsilon)W})$  für  $\varepsilon > 0$  mit  $\eta_{\text{supp}(\mathbb{Q})}^W$  in Verbindung bringen.

**Satz 6.2.3.** Sei  $W \in \mathcal{K}'$  mit  $B(0, 1) \subset W$  und  $\Xi_\gamma$  ein stationärer Poissonscher Partikelprozess mit Intensität  $\gamma > 0$  und Formverteilung  $\mathbb{Q}$ . Diese habe einen kompakten Träger  $\text{supp}(\mathbb{Q}) =: \mathcal{D}$ , der zudem (6.1) erfüllt. Dann gilt für alle  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ :

$$\mathbb{P}(M(\tilde{\Xi}_{\gamma,(1+\varepsilon_1)W}) \geq \eta_{\text{supp}(\mathbb{Q})}^W - \varepsilon_2) \xrightarrow{\gamma \rightarrow \infty} 1. \quad (6.12)$$

**Bemerkung 6.2.4.** Die Forderung  $B(0, 1) \subset W$  ist für die Gültigkeit der Aussage nicht notwendig, erleichtert jedoch die Darstellung des Beweis wesentlich, da dadurch etwa gewährleistet ist, dass für  $x \in W$  und  $t_1, t_2 > 0$  bereits  $B((1+t_1)x, t_2) \in (t_1+t_2)W$  gilt. Man könnte die Forderung aber ohne einen Verlust der Aussage durch  $0 \in \text{int } W$  ersetzen und müsste die im Beweis auftretenden Distanzen entsprechend reskalieren.

*Beweis von Satz 6.2.3.* Seien nun also  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ . Die Beweisidee ist folgende: Sei

$$P = \{K_1 + x_1, \dots, K_i + x_i\} \text{ mit } x_1, \dots, x_i \in W, K_1, \dots, K_i \in \text{supp}(\mathbb{Q})$$

eine Packung mit Gewicht  $\eta_{\text{supp}(\mathbb{Q})}^W$ , d.h. es gilt

$$M^{**}(P) = \eta_{\text{supp}(\mathbb{Q})}^W.$$

Wir versuchen nun ausgehend davon Kugeln  $B(x'_1, r'), \dots, B(x'_i, r')$  mit  $r' > 0$  und Partikelmengen  $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_i \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_0)$  zu finden, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (i)  $B(x'_j, r') \subset (1 + \varepsilon_1)W$  für  $j = 1, \dots, i$ .
- (ii)  $(y_k + L_k) \cap (y_l + L_l) = \emptyset$  für alle  $y_l \in B(x'_l, r')$ ,  $y_k \in B(x'_k, r')$ ,  $L_l \in \mathcal{M}_l$ ,  $L_k \in \mathcal{M}_k$ ,  $1 \leq k < l \leq i$ .
- (iii)  $\mathbb{Q}(\mathcal{M}_j) > 0$  für  $j = 1, \dots, i$ .
- (iv)  $M(L) \geq M(K_j) - \varepsilon_2/i$  für alle  $L \in \mathcal{M}_j$ ,  $j = 1, \dots, i$ .

Damit gilt dann insbesondere  $M^{**}(\{y_1 + L_1, \dots, y_i + L_i\}) \geq \eta_{\text{supp}(\mathbb{Q})}^W - \varepsilon_2$  für alle  $y_j \in B(x'_j, r')$ ,  $L_j \in \mathcal{M}_j$  für  $j = 1, \dots, i$ . Haben wir solche Mengen gefunden, so müssen wir zum Beweis des Satzes in einem zweiten Schritt zeigen, dass die Wahrscheinlichkeit, dass  $\tilde{\Xi}_{\gamma,W}$  für alle  $1 \leq j \leq i$  ein Partikel mit Zentrum in  $B(x'_j, r')$  und Form in  $\mathcal{M}_j$  besitzt, für  $\gamma \rightarrow \infty$  gegen eins konvergiert.

Ein Skalierungsargument liefert uns paarweise verschiedene Punkte  $x'_1, \dots, x'_i \in (1 + \varepsilon/2)W$ , so dass die Partikel von  $P' := \{K_1 + x'_1, \dots, K_i + x'_i\}$  paarweise disjunkt sind. Es gibt daher ein  $0 < r' \leq \varepsilon/2$ , so dass  $B(x'_1, r'), \dots, B(x'_i, r')$  Bedingung (i) erfüllen und zusätzlich

$$(K_k + B(x'_k, r')) \cap (K_l + B(x'_l, r')) = \emptyset$$

für  $1 \leq k < l \leq i$  gilt. Um nun Mengen  $\mathcal{M}_j$  zu finden, so dass diese zusammen mit den Mengen  $B(x'_1, r'), \dots, B(x'_i, r')$  die Bedingungen (ii)-(iv) erfüllen, ist es ausreichend, sich auf Mengen der Gestalt  $\text{int } B_{d_H}(K_j, r)$  für  $r > 0$  zu konzentrieren. Wir wissen dann wegen  $K_j \in \text{supp}(\mathbb{Q})$  für  $1 \leq j \leq i$ , dass  $\mathbb{Q}(N_{K_j}) > 0$  für jede offene Umgebung  $N_{K_j}$  von  $K_j$  gilt. Damit ist dann

$$\mathbb{Q}(\text{int } B_{d_H}(K_j, r)) > 0 \text{ für alle } 1 \leq j \leq i, r > 0.$$

Wir setzen nun  $A_j := \cup_{y \in B(x'_j, r')} (K_j + y)$  für  $1 \leq j \leq i$  und wählen  $r''$  so, dass

$$r''/2 < \underbrace{\min_{z_k \in A_k, z_l \in A_l, 1 \leq k < l \leq i} \|z_k - z_l\|}_{>0}$$

gilt. Zusätzlich sei  $r''$  so klein, dass die Mengen  $\mathcal{M}_j := B_{d_H}^\circ(K_j, r'')$ ,  $1 \leq j \leq i$ , Bedingung (iv) genügen, was wegen der Stetigkeit von  $M$  möglich ist. Damit erfüllen die Mengen  $B(x'_j, r')$  und  $\mathcal{M}_j := B_{d_H}^\circ(K_j, r'')$ ,  $1 \leq j \leq i$ , die Bedingungen (i) – (iv).

Wir konzentrieren uns nun auf die Einschränkung von  $\tilde{\Xi}_\gamma$  auf die paarweise disjunkten Mengen  $B(x'_1, r'), \dots, B(x'_i, r')$  und zeigen, dass die Wahrscheinlichkeit, dass in jeder dieser Kugeln  $B(x'_j, r)$  ein Partikel mit Form aus  $\mathcal{M}_j$  liegt, für  $\gamma \rightarrow \infty$  gegen eins konvergiert. Es gilt nach

Satz 1.2.19

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{P}(M(\tilde{\Xi}_{\gamma,(1+\varepsilon_1)W}) \geq \eta_{\text{supp}(\mathbb{Q})}^W - \varepsilon_2) \\
 & \geq \mathbb{P}(\text{ in } B(x'_j, r') \text{ liegt mind. ein Partikel mit Form } L_j \in \text{int } B_{d_H}(K_j, r'') \text{ für alle } 1 \leq j \leq i) \\
 & = \prod_{j=1}^i \mathbb{P}(\text{ in } B(x'_j, r') \text{ liegt mind. ein Partikel mit Form } L_j \in \text{int } B_{d_H}(K_j, r'')) \\
 & = \prod_{j=1}^i (1 - \mathbb{P}(\text{ in } B(x'_j, r') \text{ liegt kein Partikel mit Form } L_j \in \text{int } B_{d_H}(K_j, r''))) \\
 & = \prod_{j=1}^i \left( 1 - \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\gamma \kappa_d r'^d} \frac{(\gamma \kappa_d r'^d)^k}{k!} p_j^k \right) \\
 & = \prod_{j=1}^i \left( 1 - e^{-\gamma \kappa_d r'^d (1-p_j)} \right),
 \end{aligned}$$

mit  $p_j := 1 - \underbrace{\mathbb{Q}(\text{int } B_{d_H}(K_j, r''))}_{>0} < 1$ . Insbesondere ist also  $e^{-\gamma \kappa_d r'^d (1-p_j)} < 1$ , weshalb

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \mathbb{P}(M(\tilde{\Xi}_{\gamma,(1+\varepsilon_1)W}) \geq \eta_{\text{supp}(\mathbb{Q})}^W - \varepsilon_2) = 1$$

gilt. □

Alternativ lässt sich (6.12) auch wie folgt formulieren: Unter den Voraussetzungen von Satz 6.2.3 gilt für alle  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ :

$$\mathbb{P} \left( M(\tilde{\Xi}_{\gamma,W}) \geq \eta_{\text{supp}(\mathbb{Q})}^{\frac{1}{1+\varepsilon_1}W} - \varepsilon_2 \right) \xrightarrow{\gamma \rightarrow \infty} 1. \quad (6.13)$$

Betrachtet man den Beweis von Satz 6.2.3, so sehen wir, dass sich dieses Resultat unter gewissen Voraussetzungen an das Verhalten der Abbildung  $v$  an der Stelle  $t = 1$  noch verfeinern lässt.

**Satz 6.2.5.** *In der Situation von Satz 6.2.3 gelte zusätzlich*

$$\lim_{t \nearrow 1} \eta_{\text{supp}(\mathbb{Q})}^{tW} = \eta_{\text{supp}(\mathbb{Q})}^W.$$

Dann gilt

$$\mathbb{P} \left( M(\tilde{\Xi}_{\gamma,W}) \geq \eta_{\text{supp}(\mathbb{Q})}^W - \varepsilon \right) \xrightarrow{\gamma \rightarrow \infty} 1 \quad (6.14)$$

für alle  $\varepsilon > 0$ .

Existieren zudem  $x_1, \dots, x_i \in W$  und  $K_1, \dots, K_i \in \text{supp}(\mathbb{Q})$ , so dass

- $(K_k + x_k) \cap (K_l + x_l) = \emptyset$  für alle  $1 \leq k < l \leq i$ ,
- $\sum_{j=1}^i M(K_j) = \eta_{W, \text{supp}(\mathbb{Q})}$ ,
- $\mathbb{Q}(\{K_1\}), \dots, \mathbb{Q}(\{K_i\}) > 0$ ,

dann gilt sogar

$$\mathbb{P}\left(M(\tilde{\Xi}_{\gamma,W}) = \eta_{\text{supp}(\mathbb{Q})}^W\right) \xrightarrow{\gamma \rightarrow \infty} 1. \quad (6.15)$$

Nun bezeichne  $\mathcal{U}_{i,W}$  einen Binomialprozess in  $W$  bestehend aus  $i$  Partikeln mit Formverteilung  $\mathbb{Q}$ , deren Träger  $\text{supp}(\mathbb{Q})$  kompakt ist und (6.1) erfüllt. Dann gilt folgende Aussage über  $\tilde{\mathcal{U}}_{i,W} := T(\mathcal{U}_{i,W})$ .

**Lemma 6.2.6.** Sei  $W \in \mathcal{K}_0$  mit  $V_d(W) > 0$ .

a) Die Folge  $(p_{i,W}(t))_{i \in \mathbb{N}}$  mit

$$p_{i,W}(t) := \mathbb{P}(M(\tilde{\mathcal{U}}_{i,W}) \geq t)$$

wächst monoton in  $i$  für alle  $t \geq 0$

b) Seien  $\Xi_{\gamma_1}, \Xi_{\gamma_2}$  zwei stationäre Poissonsche Partikelprozesse mit Intensität  $\gamma_1$  bzw.  $\gamma_2$  und Formverteilung  $\mathbb{Q}$  wie oben. Für  $\gamma_2 \geq \gamma_1 > 0$  dominiert dann die Verteilung von  $M(\tilde{\Xi}_{\gamma_2,W})$  die Verteilung von  $M(\tilde{\Xi}_{\gamma_1,W})$ , d.h. es gilt

$$\mathbb{P}(M(\tilde{\Xi}_{\gamma_2,W}) \geq t) \geq \mathbb{P}(M(\tilde{\Xi}_{\gamma_1,W}) \geq t)$$

für alle  $t \geq 0$ .

*Beweis.* a) Wir benutzen ein Kopplungsargument, indem wir ausgehend von  $\mathcal{U}_{i,W}$  einen Binomialprozess  $\mathcal{U}'_{i+1,W}$  konstruieren, für den  $\mathcal{U}'_{i+1,W} \sim \mathcal{U}_{i+1,W}$  und f.s.  $\mathcal{U}_{i,W} \subset \mathcal{U}'_{i+1,W}$  gilt. Dies geschieht, indem wir

$$\mathcal{U}'_{i+1,W} := \mathcal{U}_{i,W} \cup \{K_0 + x\}$$

setzen, wobei  $x$  gleichverteilt auf  $W$  und  $K_0 \sim \mathbb{Q}$  ist (jeweils unabhängig voneinander und von  $\mathcal{U}_{i,W}$ ). Damit gilt dann nach Satz 3.1.5 b)  $\{M(\mathcal{U}_{i,W}) \geq t\} \subset \{M(\mathcal{U}'_{i+1,W}) \geq t\}$  und es folgt die Behauptung.

b) Analog zu a).

□

Weiterhin ist festzustellen, dass sich  $p_{i,W}(t)$  für  $i \rightarrow \infty$  wie  $\mathbb{P}(M(\tilde{\Xi}_{\gamma,W}) \geq t)$  für  $\gamma \rightarrow \infty$  verhält, d.h. die asymptotischen Ergebnisse aus Satz 6.2.3 und Satz 6.2.5 gelten analog für  $M(\tilde{\mathcal{U}}_{i,W})$  für  $i \rightarrow \infty$ .

**Satz 6.2.7.** Sei  $W \subset \mathbb{R}^d$  kompakt und enthalte innere Punkte. Dann ist die Abbildung

$$g : \gamma \mapsto \mathbb{E}M(\tilde{\Xi}_{\gamma,W})$$

aus  $C^\infty((0, \infty))$ . Weiterhin gelten

$$g'(\gamma) \geq 0 \text{ für alle } \gamma \in (0, \infty)$$

und

$$g''(\gamma) \leq 0 \text{ für hinreichend große Werte von } \gamma.$$

*Beweis.* Wir benutzen die Darstellung

$$\mathbb{E}M(\tilde{\Xi}_{\gamma,W}) = \int_0^\infty \mathbb{P}(M(\tilde{\Xi}_{\gamma,W}) \geq t) dt = \int_0^{\eta_{\text{supp}(Q)}^W} \mathbb{P}(M(\tilde{\Xi}_{\gamma,W}) \geq t) dt.$$

Nach dem Gesetz von der totalen Wahrscheinlichkeit gilt

$$\mathbb{P}(M(\tilde{\Xi}_{\gamma,W}) \geq t) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\mathbb{P}(M(\tilde{\mathcal{U}}_{k,W}) \geq t)}_{=: p_{k,W}(t)} e^{-\gamma \lambda_d(W)} \frac{(\gamma \lambda_d(W))^k}{k!}.$$

Damit ergibt sich nach dem Satz von der monotonen Konvergenz

$$\mathbb{E}M(\tilde{\Xi}_{\gamma,W}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\gamma \lambda_d(W)} \frac{(\gamma \lambda_d(W))^k}{k!} \underbrace{\int_0^{\eta_{\text{supp}(Q)}^W} p_{k,W}(t) dt}_{=: P_{k,W}} = e^{-\gamma \lambda_d(W)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma \lambda_d(W))^k}{k!} P_{k,W}.$$

Da  $(P_{n,W})_{n \in \mathbb{N}}$  durch  $\eta_{\text{supp}(Q)}^W$  nach oben beschränkt ist, gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{P_{n,W}}{n!} \right)^{1/n} = 0,$$

weshalb die Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma \lambda_d(W))^k}{k!} P_{k,W}$  unendlichen Konvergenzradius besitzt. Daher dürfen

wir  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma \lambda_d(W))^k}{k!} P_{k,W}$  gliedweise auf  $(0, \infty)$  nach  $\gamma$  differenzieren und erhalten damit

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \gamma} \mathbb{E}M(\tilde{\Xi}_{\gamma,W}) &= \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( e^{-\gamma \lambda_d(W)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma \lambda_d(W))^k}{k!} P_{k,W} \right) \\ &= e^{-\gamma \lambda_d(W)} \lambda_d(W) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma \lambda_d(W))^k}{k!} \underbrace{(P_{k+1,W} - P_{k,W})}_{\geq 0 \text{ (s. Lemma 6.2.6 a)}} \geq 0. \end{aligned}$$



Aus dieser Darstellung lässt sich nun induktiv zeigen, dass  $g$  beliebig oft differenzierbar ist mit

$$g^{(n)}(\gamma) = e^{-\gamma\lambda_d(W)} \lambda_d(W)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma\lambda_d(W))^k}{k!} \left( \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} P_{k+i,W} \right).$$

Da die Abbildung  $g$  beschränkt ist und  $g'$  auf  $(0, \infty)$  positiv ist, folgt daraus, dass  $g''(\gamma) \leq 0$  für hinreichend große Werte von  $\gamma$  gilt.  $\square$

**Bemerkung 6.2.8.** Wir haben in Satz 6.2.7 gesehen, dass das erwartete Gesamtgewicht von  $M(\tilde{\Xi}_{\gamma,W})$  monoton in  $\gamma$  wächst. Im Gegensatz zu den Matérn II- und Matérn III-Modellen (siehe Satz 2.3.10 bzw. Satz 2.3.13) lassen sich im Allgemeinen für  $0 < \gamma_1 < \gamma_2$  keine Prozesse  $\tilde{\Xi}'_{\gamma_1,W} \sim \tilde{\Xi}_{\gamma_1,W}$  und  $\tilde{\Xi}'_{\gamma_2,W} \sim \tilde{\Xi}_{\gamma_2,W}$  finden, so dass f.s.

$$\tilde{\Xi}'_{\gamma_1,W} \subset \tilde{\Xi}'_{\gamma_2,W}$$

gilt.

# Kapitel 7

## Simulationen und algorithmische Aspekte

Die Simulation des Prozesses der gewichtsmaximalen harten Teilmenge auf einem konvexen, kompakten Beobachtungsfenster ist nach den Ausführungen in den Abschnitten 4.1 und 4.2 aufgrund des exponentiellen Aufwandes nur für sehr niedrige Primärintensitäten möglich. Daher ist nicht zu erwarten, dass wir das Ergebnis von Satz 6.2.3 mit vertretbarem Aufwand in Simulationen beobachten können, weshalb wir auf einen Näherungsprozess konstruieren wollen, der effizient zu simulieren ist und ein möglichst hohes Gesamtgewichtsdichte erzielt. In diesem Kapitel wollen wir zunächst den algorithmischen Aspekt der näherungsweise Konstruktion einer gewichtsmaximalen harten Teilmenge einer endlichen Menge konvexer Körper behandeln und eine Zwei-Phasen-Heuristik dazu vorstellen. Danach werden wir das Vorgehen der Heuristik zum Matérn III-Modell in Bezug setzen und anschließend Simulationsstudien der Heuristik wie des exakten Algorithmus aus 4.1 für stationäre Poissonsche Prozesse von Kugeln gleicher Größe (Abschnitt 7.2.1), Kugeln mit binärer Radienverteilung (Abschnitt 7.2.2) und Zylindern (Abschnitt 7.2.3) präsentieren. Durch den direkten Vergleich des exakten Algorithmus mit der Heuristik werden wir deren Qualität belegen. Zudem wird bei der Simulationsstudie der Vergleich zum RSA Modell gezogen sowie Vorteile und mögliche Einsatzmöglichkeiten des Prozesses der volumenmaximalen harten Teilmenge diskutiert. Die Inhalte dieses Kapitels finden sich Großteils in [20] wieder.

### 7.1 Eine Zwei-Phasen-Heuristik

Die hier vorgestellte Heuristik basiert auf einem mehrphasigen lokalen Suchalgorithmus zur Bestimmung eines MWIS in einem ungerichteten gewichteten Graphen und geht in der Grundidee auf Pullan ([59]) zurück. Dieser Algorithmus erzielte bei weitläufigen Testserien mit der gängigen DIMACS Benchmarkbibliothek herausragende Ergebnisse und erwies sich daher und aufgrund der Möglichkeit, ihn an unseren speziellen Bedürfnisse anzupassen, als besonders geeignet für unsere Zwecke. Nach Konstruktion liefert er für einen ungerichteten gewichteten Graphen immer ein Independent Set zurück, dessen Gewicht aber nicht maximal sein muss.

Bezogen auf unser Problem der Bestimmung der gewichtsmaximalen harten Teilmenge einer endlichen Menge von Partikeln, wird aus der Anwendung der Heuristik immer eine harte Teilmenge der primären Partikelmenge resultieren. Der Einfachheit halber werden wir von nun an direkt von Partikeln und gewichtsmaximalen harten Teilmengen anstelle von Graphen und zugehörigen MWIS sprechen. Zudem werden wir nur den ungewichteten Fall, also den Fall in dem alle Partikel gleiches Gewicht haben, beschreiben, der insbesondere dann auftritt, wenn der Primärprozess f.s. nur aus Partikeln identischer Gestalt besteht. Der einzige Unterschied zum gewichteten Fall besteht darin, dass in den Pseudocodeanweisungen, die mit (\*) markiert sind, eine kleine Veränderung der Auswahlprozedur vorgenommen werden muss.

In der Bestimmung einer harten Teilmenge einer gegebenen endlichen Kollektion konvexer Partikel  $\Lambda = \{K_1, \dots, K_m\}$  mit gleichem Gewicht gehen wir in folgenden beiden Phasen vor.

#### Phase I - Initialisierung:

In dieser Phase wird  $\Lambda$  so auf zufällige Art und Weise iterativ ausgedünnt, dass die resultierenden Partikel paarweise disjunkt sind. Zuerst wählen wir dazu zufällig ein Partikel aus  $\Lambda$ , wobei jedes Partikel mit gleicher Wahrscheinlichkeit gewählt wird. Dann wird dieser sowie alle ihn schneidenden Partikel aus  $\Lambda$  gelöscht und es wird wieder ein Partikel zufällig wie oben aus der Menge der verbleibenden Partikel ausgewählt. Dieser Vorgang wird so lange wiederholt bis alle Partikel aus  $\Lambda$  gelöscht wurden, was nach höchstens  $m$  Schritten der Fall ist. Wir betrachten dann die Menge der ausgewählten Partikel. Diese bilden eine Teilmenge von paarweise disjunkten Partikeln von  $\Lambda$ .

#### **Algorithmus Phase I**

Input: Endliche Menge konvexer Partikel  $\Lambda$

Output: Harte Teilmenge  $\tilde{\Lambda}_0$  von  $\Lambda$

- 1:  $\tilde{\Lambda}_0 := \emptyset; i := 0; G_0 := \Lambda;$
- 2: **while**  $G_i \neq \emptyset$  **do**
- 3:   wähle zufällig ein Partikel  $K \in G_i; (*)$
- 4:    $\tilde{\Lambda}_0 := \tilde{\Lambda}_0 \cup \{K\};$
- 5:    $G_{i+1} := G_i \setminus \{L \in G_i : L \cap K \neq \emptyset\};$
- 6:    $i := i + 1;$
- 7: **end while**
- 8: **return**  $\tilde{\Lambda}_0;$

#### Phase II - Verdichtung:

Die zweite Phase beginnt mit einer harten Teilmenge  $\tilde{\Lambda}_0$  von  $\Lambda$  und erzeugt davon ausgehend iterativ eine Folge harter Teilmengen  $\tilde{\Lambda} \subset \Lambda$ , deren Gesamtgewicht nicht fallend ist. Zur besse-

ren Darstellung definieren wir uns folgende zwei Mengen:

$$C_0(\Lambda, \tilde{\Lambda}) := \{K \in \Lambda \setminus \tilde{\Lambda} : K \text{ schneidet kein Partikel von } \tilde{\Lambda}\},$$

$$C_1(\Lambda, \tilde{\Lambda}) := \{K \in \Lambda \setminus \tilde{\Lambda} : K \text{ schneidet genau ein Partikel von } \tilde{\Lambda}\}.$$

Wir werden diese auch kurz als  $C_0$  bzw.  $C_1$  bezeichnen, falls klar ist, auf welche Mengen  $\Lambda$  und  $\tilde{\Lambda}$  Bezug genommen wird.

Bei der Durchführung der Verdichtung beginnen wir mit der aus Phase I resultierenden Menge  $\tilde{\Lambda}_0$ , was  $C_0(\Lambda, \tilde{\Lambda}_0) = \emptyset$  impliziert. Dann betrachten wir  $C_1(\Lambda, \tilde{\Lambda}_0)$ , also die Menge aller Partikel aus  $\Lambda \setminus \tilde{\Lambda}_0$ , die genau ein Partikel von  $\tilde{\Lambda}_0$  schneiden. Daraus wählen wir dann zufällig ein Partikel, wobei jedes Partikel mit gleicher Wahrscheinlichkeit gewählt wird. Dieses Partikel wird dann gegen denjenigen aus  $\tilde{\Lambda}_0$ , den er schneidet, ausgetauscht, d.h. dieses Partikel wird zu  $\tilde{\Lambda}_0$  hinzugefügt und das ihn schneidende Partikel wird aus  $\tilde{\Lambda}_0$  gelöscht. Dies geschieht in der Hoffnung, dass es nun Partikel aus  $\Lambda$  gibt, die noch nicht in der neuen Version von  $\tilde{\Lambda}_0$  liegen und kein Partikel davon schneiden. Diese Partikel sind genau die Elemente von  $C_0(\Lambda, \tilde{\Lambda})$ . Falls solche Partikel existieren fügen wir so lange zufällig ausgewählte Partikel davon zu  $\tilde{\Lambda}$  hinzu, bis  $C_0(\Lambda, \tilde{\Lambda}) = \emptyset$  gilt. Dabei müssen wir nach jedem Hinzufügen die Menge  $C_0(\Lambda, \tilde{\Lambda})$  neu berechnen. Nach diesem Schritt wenden wir diese bisher beschriebene Prozedur auf die aktualisierten Versionen von  $\tilde{\Lambda}$ ,  $C_0$  und  $C_1$  an. Dieses Tausche-und-Versuche Verfahren wird so lange wiederholt, bis  $C_1$  leer ist, wobei wir uns die jeweils getauschten Partikel merken, um Endlosschleifen zu vermeiden.

### Algorithmus Phase II

Input: Endliche Menge konvexer Partikel  $\Lambda$  und eine harte Teilmenge  $\tilde{\Lambda}_0 \subset \Lambda$

Output: Harte Teilmenge  $\tilde{\Lambda}$  von  $\Lambda$  mit  $V(\tilde{\Lambda}) \geq V(\tilde{\Lambda}_0)$

- 1:  $\tilde{\Lambda} := \tilde{\Lambda}_0; U = \emptyset;$
- 2: **repeat**
- 3:   **while**  $C_0 \setminus U \neq \emptyset$  **do**
- 4:     wähle zufällig ein Partikel  $K \in C_0; (*)$
- 5:      $\tilde{\Lambda} := \tilde{\Lambda} \cup \{K\};$
- 6:      $U := \emptyset;$
- 7:   **end while**
- 8:   **if**  $C_1 \setminus U \neq \emptyset$  **then**
- 9:     wähle zufällig ein Partikel  $K \in C_1 \setminus U; (*)$
- 10:      $L := \tilde{\Lambda} \setminus \{M \in \tilde{\Lambda} : M \cap K = \emptyset\};$
- 11:      $\tilde{\Lambda} := (\tilde{\Lambda} \setminus \{L\}) \cup \{K\};$
- 12:      $U := U \cup \{L\};$
- 13:   **end if**

- 14: **until** ( $C_0 = \emptyset$  and  $C_1 \setminus U = \emptyset$ )  
 15: **return**  $\tilde{\Lambda}$ ;

Für den gewichteten Fall verwenden wir das gleiche Vorgehen, müssen dabei nur die Auswahlregel in (\*) so verändern, dass immer nur aus den Partikeln mit größtem Gewicht in der jeweiligen Partikelmenge ausgewählt wird. Zudem müssen wir  $C_1$  wie folgt definieren:

$$C_1(\Lambda, \tilde{\Lambda}) := \{K \in \Lambda \setminus \tilde{\Lambda} : K \text{ schneidet genau ein Partikel von } \tilde{\Lambda} \\ \text{und dessen Gewicht ist nicht größer als das von } K\}.$$

Somit ist insbesondere sichergestellt, dass sich das Gewicht von  $\tilde{\Lambda}$  im Verlauf der Ausführung des Algorithmus nie verringern kann.

**Bemerkung 7.1.1.** 1.) Die Auswahlregel in beiden Phasen könnte durch komplexere Regeln verbessert werden. So könnte man etwa immer das Partikel mit kleinster Anzahl an ihn schneidenden Partikeln oder im gewichteten Fall gar denjenigen mit größtem Quotienten aus Gewicht und Anzahl an schneidenden Partikeln (wie in [72] vorgeschlagen und in der Heuristik aus Abschnitt 4.3 verwendet) nehmen und für den Fall, dass es mehrere solcher Partikel gibt, zufällig aus diesen auswählen. Diese Vorschrift würde zu einer Auswahl von Partikeln führen, die wahrscheinlicher zu einem großen Gesamtgewicht führen. Jedoch zeigte sich in Simulationsstudien, dass diese vermeintliche Verbesserung nicht zu einer signifikanten Erhöhung der sekundären Gewichtsichten führte, insbesondere nicht für den Fall von relativ hohen Primärintensitäten, welche für die hier vorgestellten Untersuchungen im Vordergrund standen. Daraus schließen wir, dass die hier vorgeschlagene einfache aber sehr schnelle Auswahlprozedur beharrlich genug ist, um einen guten Kompromiss zwischen Laufzeit und Genauigkeit zu bieten.

2.) Eine mehrfache Anwendung der Heuristik auf die primäre Partikelmenge könnte ebenfalls zur Erhöhung der Gewichtsichte führen. Dabei wird in jedem Durchgang die harte Partikelmenge mit bisher größtem Gesamtgewicht gespeichert und damit die Wahrscheinlichkeit eine harte Teilmenge mit besonders großem Gesamtgewicht zu finden erhöht. Auch diese Option haben wir nach intensiven Simulationen verworfen, da sich zeigte, dass das Gesamtgewicht der aus der Zwei-Phasen-Heuristik resultierenden harten Partikelmenge sehr stabil war und eine mehrfache Anwendung der Heuristik auf die Primärmenge nur mit sehr kleiner Wahrscheinlichkeit zu einer signifikanten Erhöhung der Gewichtsichte führte.

3. Das Vorgehen von Phase I entspricht genau der Auswahlvorschrift des Matérn III-Modells für beschränkte Beobachtungsfenster unter Vernachlässigung von Randeffekten:

Das Matérn III-Modell bezüglich der Einschränkung  $\Xi_W$  eines stationären Poissonschen Partikelprozesses  $\Xi$  auf ein kompaktes Beobachtungsfenster  $W \subset \mathbb{R}^d$  mittels unabhängiger, auf  $[0, 1]$  gleichverteilten Marken wählt realisierungsweise zuerst das Partikel von  $\Xi_W$  mit kleinster Marke. Ein solcher existiert f.s. aufgrund der Lokalendlichkeit von  $\Xi$ . Dann

wird dieser sowie alle ihn schneidenden Partikel aus  $\Xi_W$  gelöscht und es wird aus den verbleibenden Partikeln wieder derjenige mit kleinster Marke ausgewählt. Iterativ fortgesetzt endet diese Auswahlprozedur f.s. nach endlich vielen Schritten und die ausgewählten Partikel bilden das Matérn III-Modell. Da die Marken den Partikeln unabhängig zugewiesen wurden, entspricht das Auswählen des ersten Partikels beim Matérn III-Modell dem Auswählen unter allen Partikeln mit gleicher Wahrscheinlichkeit. Danach werden sowohl bei Phase I als auch beim Matérn III-Modell das ausgewählte Partikel sowie alle ihn schneidenden Partikel gelöscht. Im nächsten Schritt der Iteration wählt das Matérn III-Modell nun unter den verbleibenden Partikeln denjenigen mit kleinster Marke, was wegen der unabhängigen Markenvergabe wiederum der Auswahl unter den verbleibenden Partikeln mit gleicher Wahrscheinlichkeit entspricht. Damit hat Phase I dieselbe Auswahlregel wie das Matérn III-Modell und ein Kopplungsargument zeigt, dass die Gewichtsichte der mittels Heuristik erzeugten harten Menge somit nicht kleiner als die Gewichtsichte des Matérn III-Modells sein kann.

- 4.) Von nun an werden wir der Einfachheit halber den Prozess der entsteht, wenn man die Heuristik auf den Primärprozess anwendet, selbst als die Heuristik bezeichnen.

## 7.2 Simulationsstudien

Wir wollen nun für stationäre Poissonsche Partikelprozesse mit verschiedenen Formverteilungen als Primärprozess die wesentlichen Merkmale des volumenmaximalen Teilprozesses und der zugehörigen Heuristik, deren Beziehung zum Primärprozess sowie die Qualität der Heuristik untersuchen und einen Vergleich zum RSA Modell ziehen, um damit potentielle Einsatzmöglichkeiten dieses Prozesses bzw. der zugehörigen Heuristik zu diskutieren.

### 7.2.1 Prozesse harter Kugeln fester Gestalt

In diesem Abschnitt bildet ein stationärer Poissonscher Partikelprozesses mit Intensität  $\gamma > 0$  bestehend aus Kugeln mit festem Radius  $R$  in Dimension zwei und drei den Primärprozess. Alle Simulationen wurden im Einheitswürfel ausgeführt, was mit den Überlegungen aus Abschnitt 4.2 gerechtfertigt wird. Dem Auftreten von Randeffekten wurde durch die Anwendung von periodischer Randbehandlung entgegengewirkt (siehe Abschnitt 2.2.2).

Die Charakteristika, für die wir uns interessieren, sind die sekundäre Volumendichte  $\tilde{p} = \tilde{\gamma}_{V_d}$ ,  $d = 2, 3$ , wie in (2.3) definiert, und die Paarkorrelationsfunktion aus (2.5).

Zur Untersuchung der Qualität der Zwei-Phasen-Heuristik aus Abschnitt 7.1 haben wir verschiedene Realisierungen des oben beschriebenen Poissonschen Partikelprozesses mit  $R = 0,03$  und  $\gamma$  zwischen 100 und 600 in Dimension zwei bzw.  $R = 0,05$  und  $\gamma$  zwischen 100 und 500 in Dimension drei betrachtet und auf jede dieser Realisierungen jeweils den exakten

Algorithmus aus Abschnitt 4.1 und die Heuristik angewandt (höhere Primärintensitäten als 600 bzw. 500 führten zu Partikelmengen, die nicht mehr in vertretbarem Aufwand mit dem exakten Algorithmus zu verarbeiten waren). Die daraus resultierenden Volumendichten unterschieden sich nur marginal; sie stimmten für Primärintensitäten bis 400 im zweidimensionalen und bis 300 im dreidimensionalen Fall überein und unterschieden sich für höhere Primärintensitäten bis 600 bzw. 500 höchstens um 0,008. Aufgrund dieser Tatsache haben wir für die folgenden Untersuchungen ausschließlich die Heuristik verwendet.

**Bemerkung 7.2.1.** Die Tatsache, dass die Volumendichten des exakten Modells und der Heuristik für niedrige Intensitäten -welche die einzigen sind, für die man das exakte Modell überhaupt in vertretbarer Zeit simulieren kann- nahezu identisch sind, unterstreicht die Qualität der Heuristik und lässt sich mit der recht einfachen Struktur des primären Poissonprozesses bei niedriger Intensität erklären, für welche das Vorgehen der Heuristik ausschöpfend genug erscheint. Wir wollen dennoch darauf hinweisen, dass es aus theoretischen Gründen (siehe hierzu insbesondere die Aussage von Satz 6.2.3) für sehr große Primärintensitäten zu einem Unterschied zwischen der Volumendichte der Heuristik und der Volumendichte des exakten Modells kommen wird.

### Der zweidimensionale Fall

Wir haben die Heuristik für  $R = 0,02$  und ansteigende Primärintensitäten  $\gamma$  simuliert und die resultierenden Volumendichten nach Phase I und Phase II aufgezeichnet. Realisierungen der Modelle für Phase I und Phase II und  $\gamma = 2000, 5000$  und  $20000$  sieht man in Abbildung 7.2. Die Volumendichten, die wir jeweils als Mittelwert von zehn Realisierungen pro Primärintensität erhalten haben, finden sich in Abbildung 7.1. Es wird deutlich, dass die Volumendichte des RSA Modells durch die Heuristik erheblich übertroffen werden kann. Bereits für  $\gamma = 2700$  erreicht die sekundäre Volumendichte einen Wert von 0,55, welcher gerade der Volumendichte des RSA Modells für Kreise mit Radius  $R$  entspricht (siehe Abschnitt 2.3.4). Des Weiteren ist aus Abbildung 7.1 die aus Satz 2.3.14 und Bemerkung 7.1.1 3.) folgende Konvergenz der Volumendichte von Phase I gegen die Volumendichte des RSA Modells ersichtlich. Als weiterer Richtwert wurde die Volumendichte des Matérn II-Modells in Abbildung 7.1 eingezeichnet.

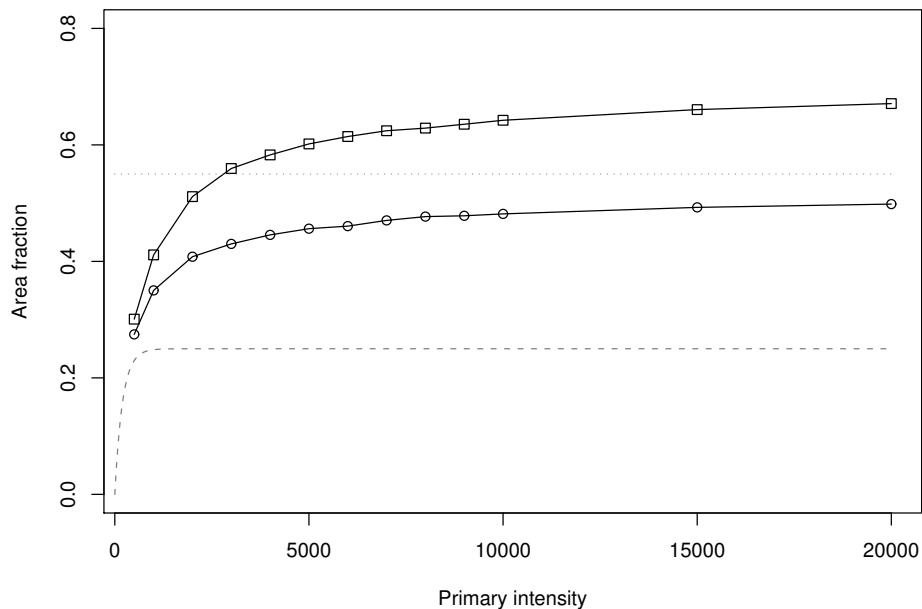


Abbildung 7.1: Volumendichten nach Phase I (Kreise) und Phase II (Quadrate) in Abhängigkeit von der Primärintensität  $\gamma$  für  $R = 0,02$ . Die grauen Linien entsprechen den Volumendichten des Matérn II- (gestrichelt) bzw. des RSA Modells (gepunktet).

Zum Vergleich der Heuristik mit dem RSA Modell haben wir zehn Realisierungen des RSA Modells aus Kugeln mit Radius  $R = 0,02$  im Einheitsquadrat generiert. Diese wurden mit zehn Realisierungen der Heuristik für  $R = 0,02$  und Primärintensität  $\gamma = 2700$ , welche im Mittel zur Volumendichte des RSA Modells führte, verglichen. Abbildung 7.3 zeigt die daraus geschätzten Paarkorrelationsfunktionen. Die Oszillationen der Paarkorrelationsfunktion der Heuristik sind etwas ausgeprägter als die der Paarkorrelationsfunktion des RSA Modells, was für eine stärkere Ausprägung der Packungsanordnung spricht, d.h. nahe beieinander liegende Partikel liegen in der Heuristik etwas dichter als im RSA Modell. Dieses Phänomen lässt sich auch aus der Konstruktion des RSA Modells erklären: Sowohl das RSA Modell als auch die Heuristik besitzen in dem hier betrachteten Setup im Mittel gleich viele Partikel. Beim RSA Modell ist aber sichergestellt, dass man keine weiteren Partikel mehr einfügen kann ohne Überlappungen zu erzeugen, was bedeutet, dass in der Partikelkollektion des RSA Modells keine zu großen „Löcher“ mehr auftreten können, da dort ansonsten noch ein Partikel eingefügt werden könnte. Die Heuristik kann jedoch immer solche Löcher aufweisen, weshalb aufgrund der gleichen mittleren Partikelzahl die vorhandenen Partikel dazu neigen etwas dichter bei deren benachbarten Partikeln zu liegen als im RSA Modell. Dieser Eindruck wird auch von den Realisierungen in Abbildung 7.4 unterstützt.



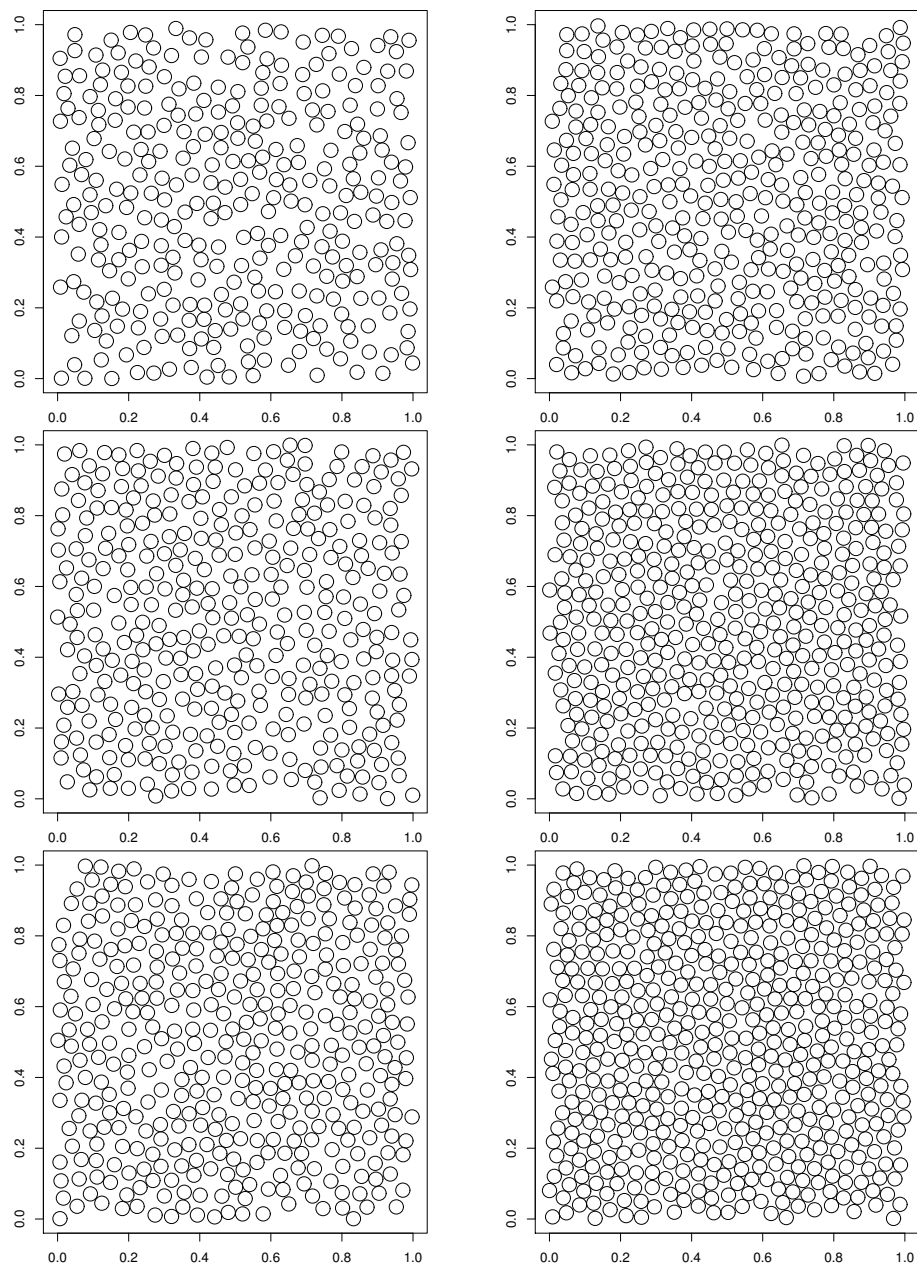


Abbildung 7.2: Realisierungen der Heuristik in  $[0,1]^2$  für Primärintensitäten von  $\gamma = 2000, 5000$ , und  $20000$  (von oben nach unten) und  $R = 0,02$ . Phase I findet sich auf der linken, Phase II auf der rechten Seite.

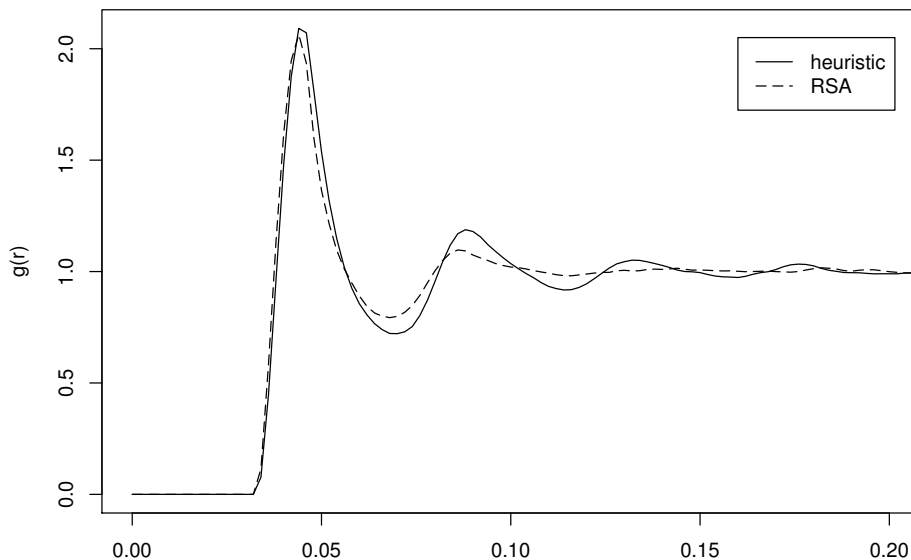


Abbildung 7.3: Geschätzte Paarkorrelationsfunktion für das RSA Modell und die Heuristik in Dimension zwei bei festem Kreisradius  $R = 0,02$  und Volumendichte  $0,55$ . Die Primärintensität für die Heuristik lag bei  $\gamma = 2700$ .

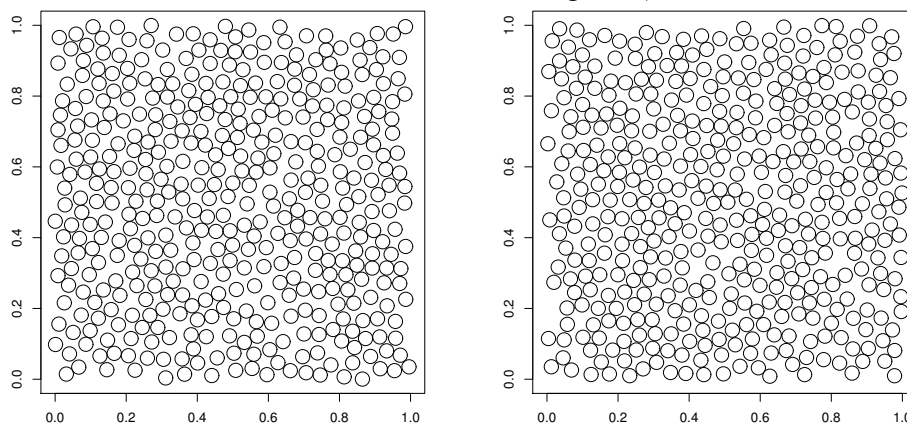


Abbildung 7.4: Realisierungen des RSA Modells (links) und der Heuristik in Dimension zwei bei festem Kreisradius  $R = 0,02$  und Intensität  $2700$ .

### Der dreidimensionale Fall

Wie im zweidimensionalen Fall auch haben wir die Heuristik bei ansteigender Primärintensität  $\gamma$  simuliert. Hierbei betrug  $R = 0,05$ . Die Volumendichten, die wir jeweils als Mittelwert von zehn Realisierungen pro jeweiliger Primärintensität erhalten haben, finden sich in Abbildung 7.5. Das Verhalten der Heuristik und des RSA Modells ist dabei ähnlich wie im zwei-

mensionalen Fall. Für  $\gamma = 9700$  erreicht die sekundäre Volumendichte einen Wert von 0,38, welcher gerade der Volumendichte des RSA Modells für Kugeln mit Radius  $R$  entspricht (siehe Abschnitt 2.3.4). Wie im zweidimensionalen Fall erreicht die Heuristik Volumendichten, die deutlich über der des RSA Modells liegen. Zusätzlich vergleichen wir wieder die räumliche Anordnung der Kugeln des RSA Modells und der Heuristik. Dazu haben wir zehn Realisierungen des RSA Modells und der Heuristik jeweils unter festem Kugelradius  $R = 0,05$  und bei gleicher Volumendichte generiert. Die geschätzten Paarkorrelationsfunktionen in Abbildung 7.6 weisen dasselbe Verhalten wie im zweidimensionalen Fall auf.

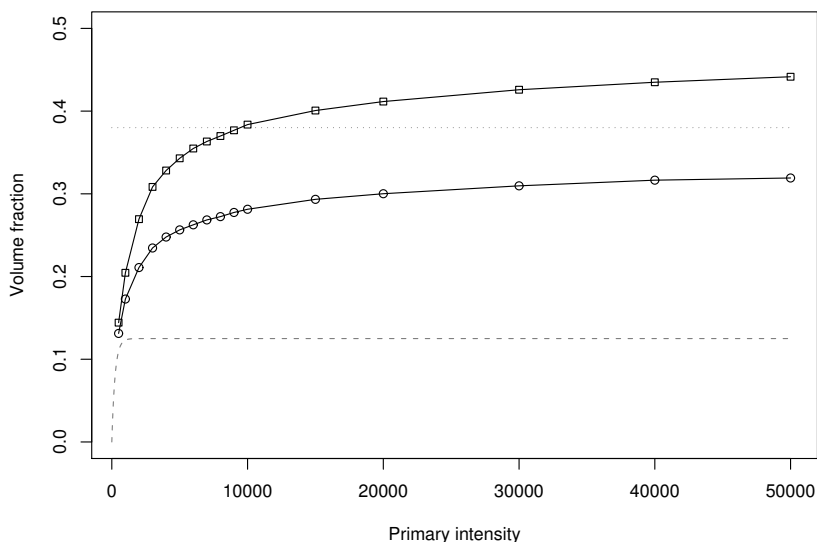


Abbildung 7.5: Volumendichten nach Phase I (Kreise) und Phase II (Quadrate) in Abhängigkeit von der Primärintensität  $\gamma$  für  $R = 0,02$ . Die grauen Linien entsprechen den Volumendichten des Matérn II- (gestrichelt) bzw des RSA Modells (gepunktet).

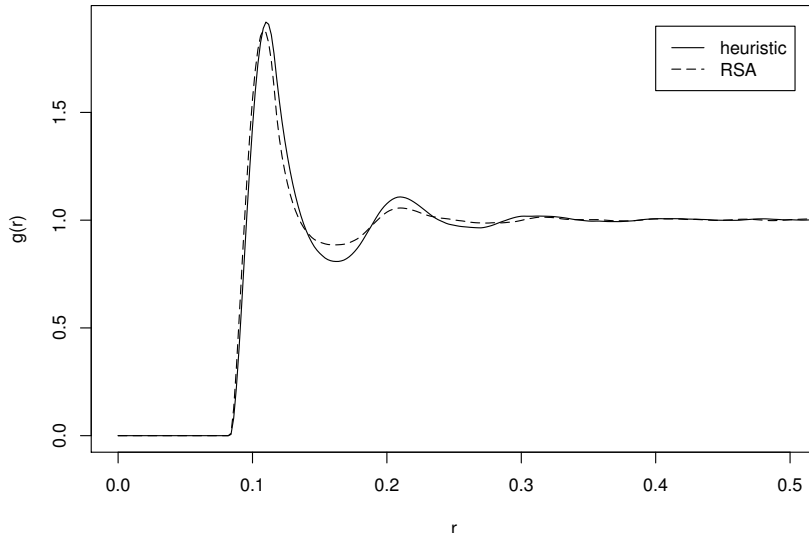


Abbildung 7.6: Geschätzte Paarkorrelationsfunktion für das RSA Modell und die Heuristik in Dimension drei bei festem Kreisradius  $R = 0,05$  und Volumendichte  $0,38$ . Die Primärintensität für die Heuristik lag bei  $\gamma = 9700$ .

## 7.2.2 Prozesse harter binärer Kreismischungen

Wir wollen nun im  $\mathbb{R}^2$  einen Poissonschen Partikelprozess aus Kreisen, für dessen Formverteilung

$$\mathbb{Q} = q\delta_{B(0,R_2)} + (1 - q)\delta_{B(0,R_1)}, \quad q \in (0, 1), R_2 > R_1 > 0 \quad (7.1)$$

gilt, als Primärprozess wählen und daraus mittels der im vorherigen Abschnitt vorgestellten Heuristik einen Prozess harter Kreise mit möglichst großer Volumendichte generieren. Zur Anpassung der Heuristik an den gewichteten Fall wird jedes Partikel mit seinem Volumen gewichtet. Zudem stellen wir die Forderungen an die Heuristik, dass zum einen beim Vergrößern der sekundären Partikelmenge durch Hinzufügen primärer Partikel diejenigen Primärpartikel mit großem Volumen denen mit kleinem Volumen immer vorzuziehen sind und dass beim Partikel austausch in Phase II nie ein großes Partikel durch ein kleines Partikel ersetzt wird.

Neben der Primärintensität erhalten wir in dem hier vorliegenden Fall mit  $R_1$ ,  $R_2$  und  $q$  aus (7.1) drei weitere primäre Parameter, welche die Gestalt des Sekundärprozesses quantitativ wie auch qualitativ beeinflussen. Dabei ist es plausibel davon auszugehen, sich bei der Wahl möglicher Parameterszenarien auf solche mit jeweils unterschiedlichen Werten des Quotienten  $R_2/R_1$  zu beschränken. Um die Bandbreite an Parametern hinreichend auszuschöpfen, werden wir für ansteigende Werte der Primärintensität  $\gamma$  und  $q = 0, 1, 0,5, 0,9$  jeweils

- $R_2 = 0,04$ ,  $R_1 = 0,015$  oder

- $R_2 = 0,04$ ,  $R_1 = 0,03$

wählen. Für die hier vorliegende Wahl der Radien spricht, dass im ersten Fall die Kreispartikel mit Radius  $R_1$  so klein sind, dass sie die „Lücken“ zwischen den großen Partikeln mit Radius  $R_2$  füllen können, während dies beim zweiten Szenario nicht der Fall ist.

Als Größen erster Ordnung untersuchen wir die resultierende sekundäre Volumendichte sowie die sekundäre Radienverteilung. Um die Interaktionen zwischen den Partikeln unterschiedlicher und gleicher Größe sowie die Interaktionen zwischen den Radien verschiedener Partikel darzulegen, betrachten wir den markierten gewöhnlichen Punktprozess bestehend aus den Mittelpunkten der sekundären Partikel. Dabei wird jeder Punkt mit der Marke eins bzw. zwei versehen, falls der Radius des zugehörigen Partikels gerade  $R_1$  bzw.  $R_2$  beträgt. Für diesen Prozess untersuchen wir für  $i, j \in \{1, 2\}$  die Cross-Paarkorrelationsfunktionen  $g_{ij}$  und die Markenkorrelationsfunktionen  $p_{ij}$  aus Abschnitt 2.2.1.

Die sekundären Volumendichten und Radienverteilungen werden jeweils mit denen des RSA Modells verglichen; zusätzlich werden auch die Volumendichten des zugehörigen Matérn II-Modells mit auf  $[0, 1]$  gleichverteilten Marken dargestellt. Entsprechende Vergleiche der oben genannten Größen zweiter Ordnung mit denen des RSA Modells werden hingegen nicht angestellt, da der Vergleich solcher Größen verschiedener Prozesse nur für den Fall identischer Radien- bzw. Markenverteilungen und Volumendichten sinnvoll ist, was in den hier betrachteten Parameterszenarien jedoch nicht der Fall ist. Zur Gewinnung der Daten wurden pro Parameterwahl jeweils zehn Simulationen der Heuristik bzw. des RSA Modells jeweils im Einheitsquadrat unter Anwendung von periodischer Randbehandlung durchgeführt.

Für eine Simulationsstudie des RSA Modells für binäre Kreismischungen sei auf [69]) verwiesen, theoretische Ansätze zum gleichen Thema findet man etwa in [66].

### **Der Fall $R_2 = 0,04$ , $R_1 = 0,015$**

Die in Abbildung 7.7 jeweils für  $q = 0,1$ ,  $q = 0,5$  und  $q = 0,9$  dargestellten Volumendichten der Heuristik und des RSA Modells zeigen, dass die Volumendichten der Heuristik für hohe Ausgangsintensitäten die jeweiligen Volumendichten des RSA Modells übertreffen. Dabei ist zu beobachten, dass die Volumendichten des RSA Modells für ansteigende Werten von  $q$  abnehmen, was bei den Volumendichten der Heuristik nicht der Fall ist.

Beim Vergleich der sekundären Radienverteilungen des RSA Modells und der Heuristik in Abbildung 7.8 ist festzustellen, dass bei der Heuristik Kreise mit Radius 0.04 mit höherer Wahrscheinlichkeit vorkommen als beim RSA Modell. Dieser Sachverhalt lässt sich darauf zurückführen, dass der Algorithmus, welcher der Heuristik zugrunde liegt, in jedem Schritt große Partikel bevorzugt auswählt.

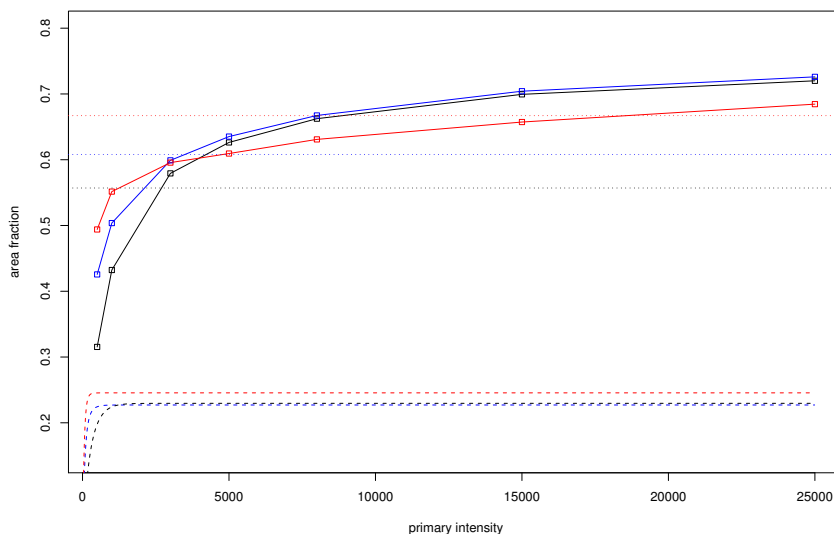


Abbildung 7.7: Volumendichten der Heuristik (Quadrate), des RSA Modells (gepunktet) und des Matérn II-Modells (gestrichelt) jeweils für  $q = 0,1$  (schwarz),  $q = 0,5$  (blau) und  $q = 0,9$  (rot) in Abhängigkeit von der Primärintensität  $\gamma$ .

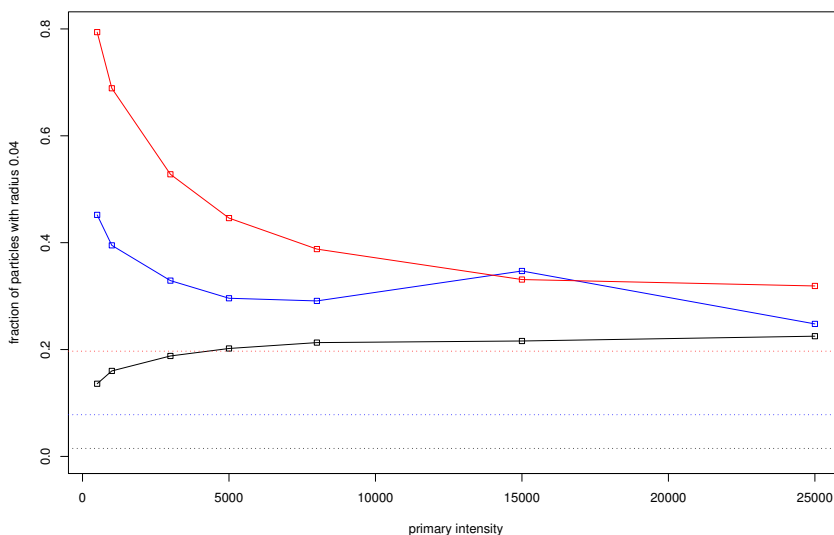


Abbildung 7.8: Anteil an Kreisen mit Radius 0,04 bei der Heuristik (Quadrate) und beim RSA Modell (gepunktet) jeweils für  $q = 0,1$  (schwarz),  $q = 0,5$  (blau) und  $q = 0,9$  (rot) in Abhängigkeit von der Primärintensität  $\gamma$ .

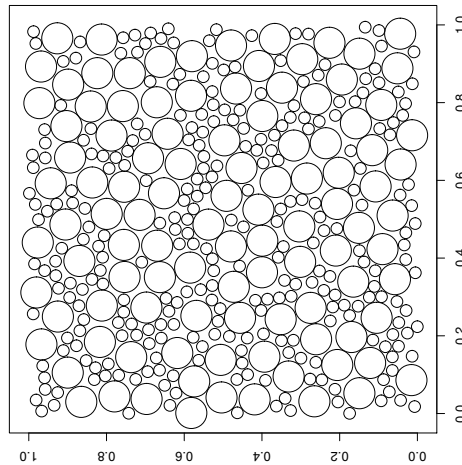


Abbildung 7.9: Realisierung der Heuristik in  $[0, 1]^2$  für  $q = 0,5$  und eine Primärintensität von  $\gamma = 25000$ .

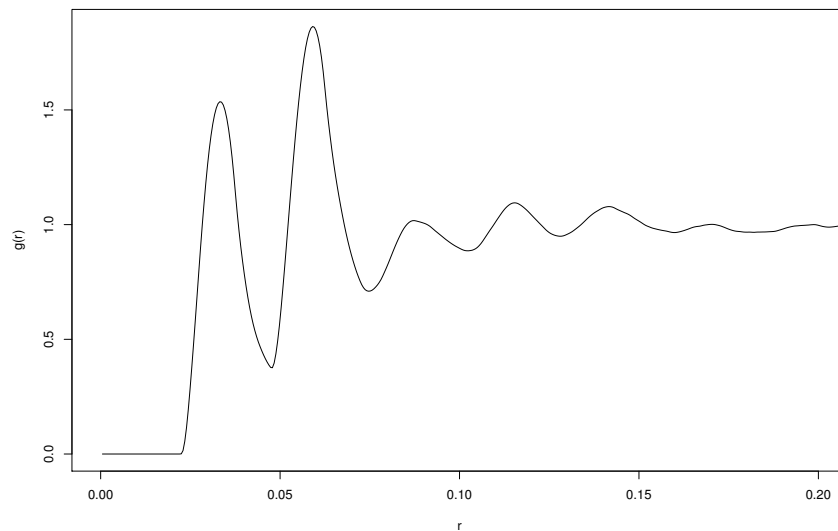


Abbildung 7.10: Geschätzte Paarkorrelationsfunktion der Heuristik für  $q = 0,5$  bei einer Primärintensität von  $\gamma = 25000$ .

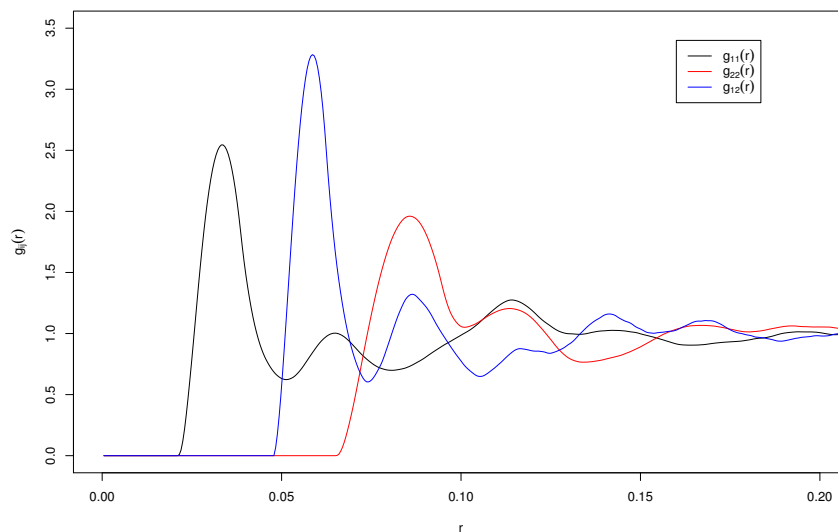


Abbildung 7.11: Geschätzte Cross-Paarkorrelationsfunktionen der Heuristik für  $q = 0,5$  bei einer Primärintensität von  $\gamma = 25000$ .

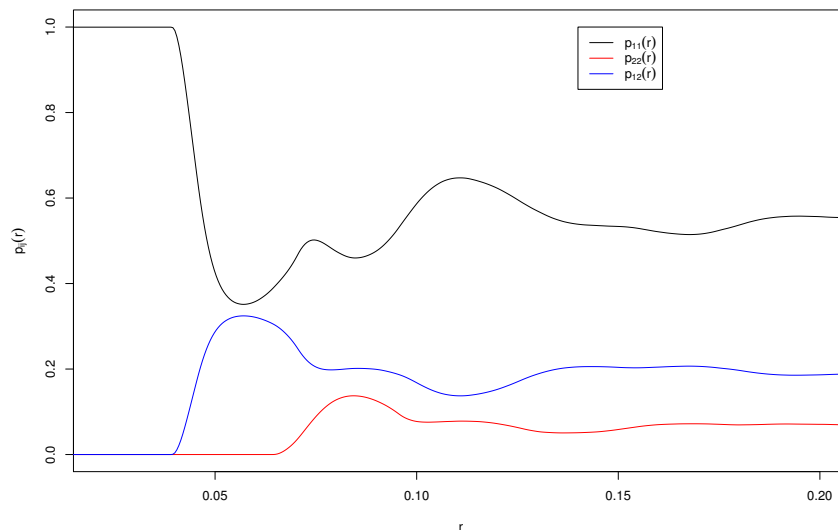


Abbildung 7.12: Geschätzte Markenkorrelationsfunktionen der Heuristik für  $q = 0,5$  bei einer Primärintensität von  $\gamma = 25000$ .

Zur Analyse der gegenseitigen Lage der Kreismittelpunkte, sowohl im Gesamten als auch zwischen den Mittelpunkten verschieden großer bzw. gleich großer Kreise, betrachten wir für die



Primärintensität  $\gamma = 25000$  und  $q = 0.5$  die Paarkorrelationsfunktion in Abbildung 7.10 und die Cross-Paarkorrelationsfunktionen in Abbildung 7.11. Die verschieden stark ausgeprägten Oszillationen der Cross-Paarkorrelationsfunktionen zeigen, dass kleine und große Kreise am engsten zueinander gepackt liegen, während große Kreise bzw. kleine Kreise jeweils allein betrachtet weniger eng gepackt sind.

### Der Fall $R_2 = 0,04$ , $R_1 = 0,03$

Die Volumendichten und sekundären Radienverteilungen verhalten sich im hier vorliegenden Szenario analog zum vorherigen Fall. Insbesondere übertreffen auch in diesem Fall die jeweils für  $q = 0,1$ ,  $q = 0,5$  und  $q = 0,9$  dargestellten Volumendichten der Heuristik die entsprechenden Volumendichten des RSA Modells für hohe Ausgangsintensitäten, wie aus Abbildung 7.13 hervorgeht. Die maximal erreichten Volumendichten in den einzelnen Szenarien unterscheiden sich dabei nur marginal von den jeweiligen Werten der Volumendichten im letzten Abschnitt.

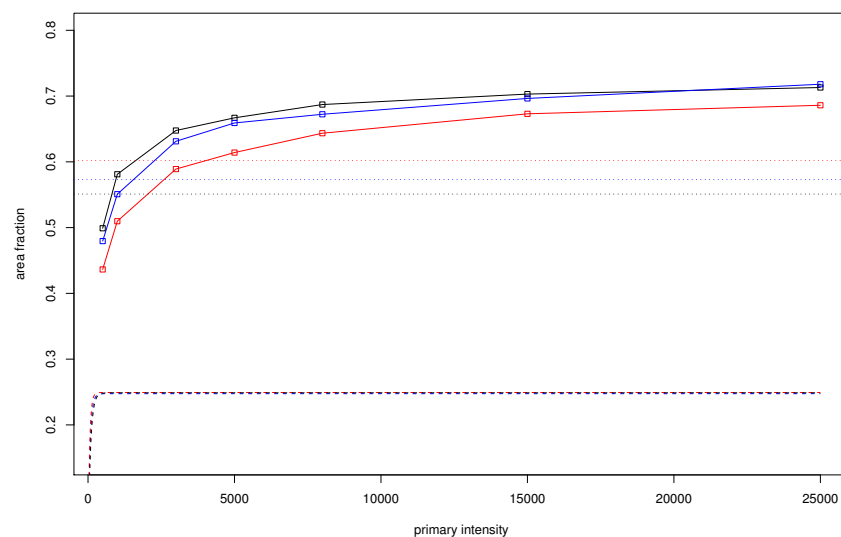


Abbildung 7.13: Volumendichten der Heuristik (Quadrate), des RSA Modells (gepunktet) und des Matérn II-Modells (gestrichelt) jeweils für  $q = 0,1$  (schwarz),  $q = 0,5$  (blau) und  $q = 0,9$  (rot) in Abhängigkeit von der Primärintensität  $\gamma$ .

Wie im ersten Fall treten auch hier bei der Heuristik Kreise mit Radius 0.04 mit höherer Wahrscheinlichkeit auf als beim RSA Modell. Da der Quotient  $R_2/R_1$  nahe bei eins liegt, ist bei den sekundären Radienverteilungen der Heuristik festzustellen, dass Kreise mit Radius 0.04 mit noch größerer Wahrscheinlichkeit in diesem Szenario vorkommen als dies weiter oben der Fall war.

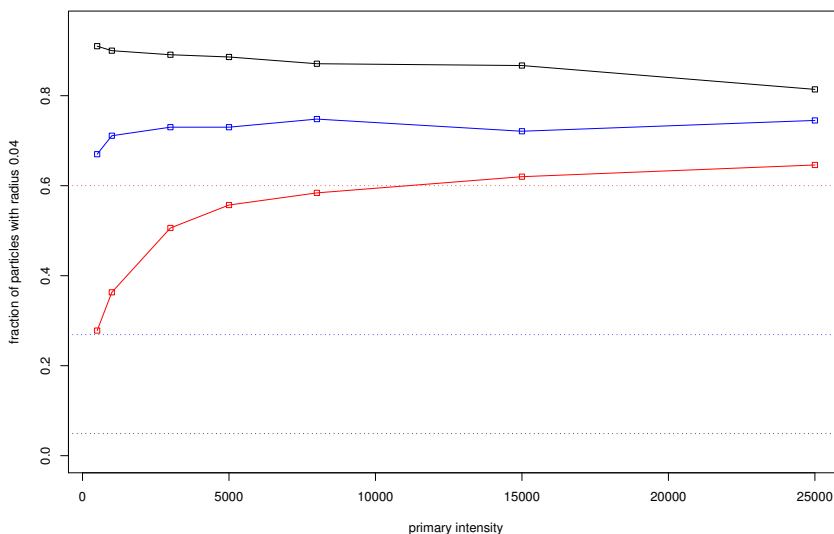


Abbildung 7.14: Anteil an Kreisen mit Radius 0,04 bei der Heuristik (Quadrate) und beim RSA Modell (gepunktet) jeweils für  $q = 0, 1$  (schwarz),  $q = 0, 5$  (blau) und  $q = 0, 9$  (rot) in Abhängigkeit von der Primärintensität  $\gamma$ .

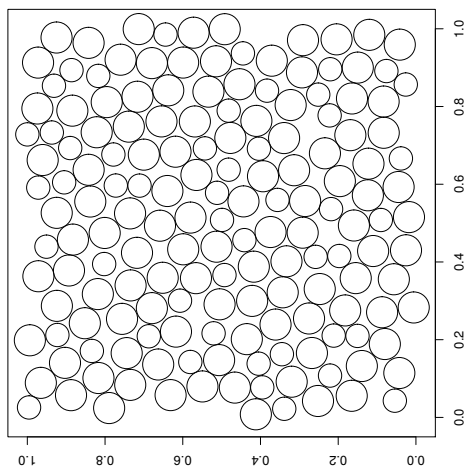


Abbildung 7.15: Realisierung der Heuristik in  $[0, 1]^2$  für  $q = 0, 5$  und eine Primärintensität von  $\gamma = 25000$ .

Vergleicht man die Paarkorrelationsfunktion für den hier vorliegenden Fall, Abbildung 7.16, mit Abbildung 7.10, so sieht man, dass die Erstgenannte aufgrund des größeren Wertes von

$R_1$  bzw. des kleineren Quotienten  $R_2/R_1$  weniger Oszillationen aufweist. Die im Vergleich mit dem ersten Fall deutlich stärker bzw. schwächer ausgeprägten Oszillationen von  $g_{11}$  bzw.  $g_{22}$  sind darauf zurückzuführen, dass der Quotient  $R_2/R_1$  nahe bei eins liegt, und belegen, dass in diesem Fall die kleinen Kreise die Lücken der großen Kreise nicht in einem Ausmaß wie für  $R_1 = 0.015$  füllen, sondern die großen Kreise noch dichter liegen und kaum Lücken für kleine Kreise bieten. Dieser Eindruck wird auch die die Markenkorrelationen aus Abbildung 7.18 verstärkt. Dort ist zu erkennen, dass  $p_{22}$  die anderen beiden Funktionen  $p_{12}$  und  $p_{11}$  nahezu auf dem ganzen Intervall  $[0, 08, 0, 2]$  übertrifft und insbesondere  $p_{11}$  dort nur sehr kleine Werte annimmt.

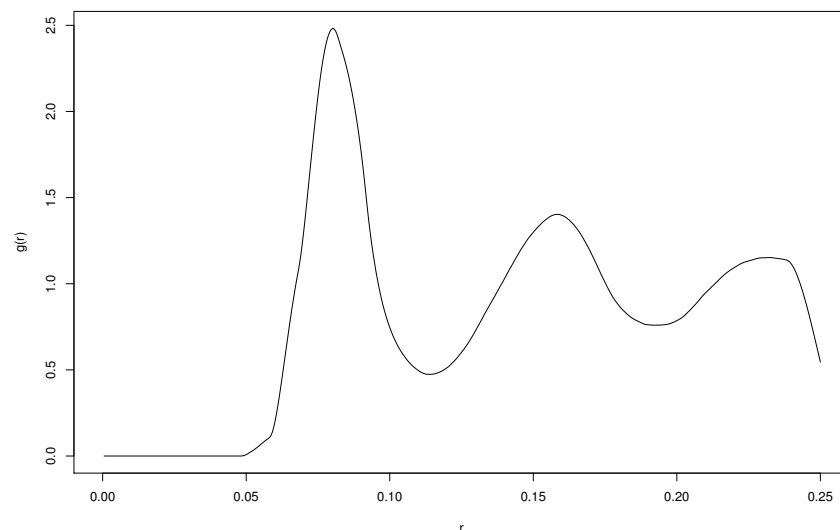


Abbildung 7.16: Geschätzte Paarkorrelationsfunktion der Heuristik für  $q = 0,5$  bei einer Primärintensität von  $\gamma = 25000$ .

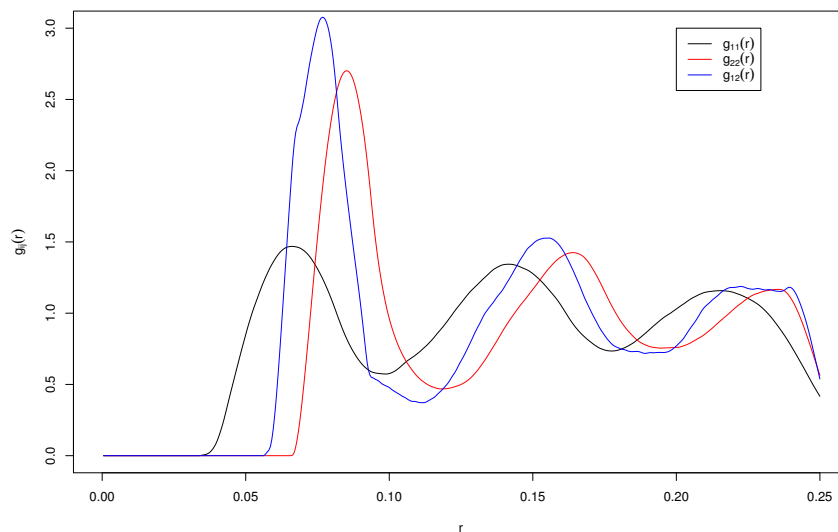


Abbildung 7.17: Geschätzte Cross-Paarkorrelationsfunktionen der Heuristik für  $q = 0,5$  bei einer Primärintensität von  $\gamma = 25000$ .

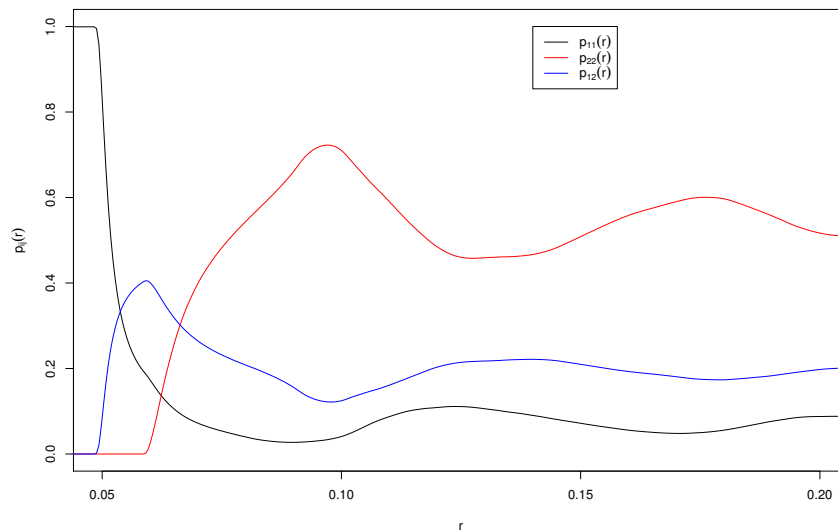


Abbildung 7.18: Geschätzte Markenkorrelationsfunktionen der Heuristik für  $q = 0,5$  bei einer Primärintensität von  $\gamma = 25000$ .

### 7.2.3 Prozesse harter Zylinder

In diesem Abschnitt wählen wir einen stationären Poissonschen Partikelprozess  $\Xi$  zylindrischer Partikel im  $\mathbb{R}^3$  als Primärprozess und generieren daraus mittels der oben beschriebenen Heuristik einen Prozess harter zylindrischer Partikel mit möglichst großer Volumendichte. Der Einfachheit halber betrachten wir im Folgenden immer nur zylindrische Partikel mit kreisförmigem Querschnitt und bezeichnen diese als Zylinder. Zur Darstellung der Formverteilung  $\mathbb{Q}$  des primären Poissonschen Zylinderprozesses betrachten wir die Abbildung

$$\begin{aligned}\Phi &: \mathcal{SO}_2 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \vartheta \times (x_1, x_2, x_3) &\mapsto (\vartheta((x_1, x_2)), x_3).\end{aligned}$$

Weiterhin sei  $\nu$  das in Abschnitt 1.1 eingeführte invariante Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $\mathcal{SO}_2$  und  $K_0 \in \mathcal{K}_0$  ein Zylinder, der orthogonal zur  $x_3$ -Achse liege. Für die Formverteilung  $\mathbb{Q}$  gilt

$$\mathbb{Q}(A) = \int_{\mathcal{SO}_2} \mathbb{1}_A(\Phi(\vartheta, K_0)) \nu(d\vartheta), \quad A \in \mathcal{B}(\mathcal{F}), \quad (7.2)$$

wobei wir  $\Phi(\vartheta, K_0) := \{\Phi(\vartheta, x) : x \in K_0\}$  setzen. Die Partikel von  $\Xi$  liegen somit f.s. parallel zur  $x_1x_2$ -Ebene. Der Grund für diese spezielle Formverteilung liegt in der größeren Regularität der Realisierungen des zugehörigen Poissonprozesses, durch welche der extrem hohe Rechenaufwand, der zur Simulation solcher harter Zylinderprozesse nötig ist, reduziert werden kann. Da alle Zylinder des Primärprozesses gleiches Volumen haben, können wir auf die Heuristik für den ungewichteten Fall zurückgreifen:

Die unten stehenden Abbildungen zeigen die Realisierungen der zugehörigen Heuristik für drei verschiedene Zylinderformen  $K_0$ , wobei wir wie in den vorherigen Simulationsstudien die Einschränkung des stationären Poissonschen Zylinderprozesses auf den Einheitswürfel als Primärprozess wählen. Dabei haben alle drei Formen von  $K_0$  dasselbe Volumen und unterscheiden sich nur im Verhältnis der Zylinderlänge zum Durchmesser des (kreisförmigen) Querschnitts. Zur Simulation wird eine periodische Randbehandlung für Zylinder verwendet, siehe [70].

Bei den Realisierungen von Abbildung 7.19 und 7.20 ist deutlich erkennbar, dass es zu einer „Schichtenbildung“ kommt, d.h. dass die  $x_3$ -Koordinaten der Umkugelmittelpunkte der Zylinder sich nahe bestimmter Werte in  $[0, 1]$  anhäufen. Zudem ist insbesondere für ein Verhältnis von 25 zwischen Zylinderlänge und Querschnittsdurchmesser erkennbar, dass Zylinder einer solchen Schicht sehr ähnlich orientiert sind.

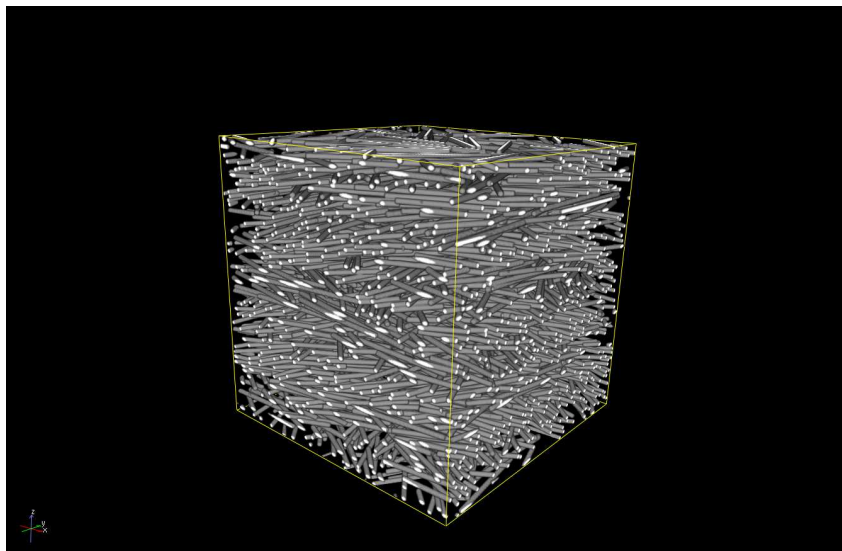


Abbildung 7.19: Realisierung der Heuristik für einen Poissonschen Zylinderprozess mit Ausgangsintensität  $\gamma = 25000$ , Formverteilung wie in (7.2) und einem Verhältnis zwischen Zylinderlänge und Querschnittsdurchmesser von 25. Die resultierende Volumendichte beträgt 0,1027.

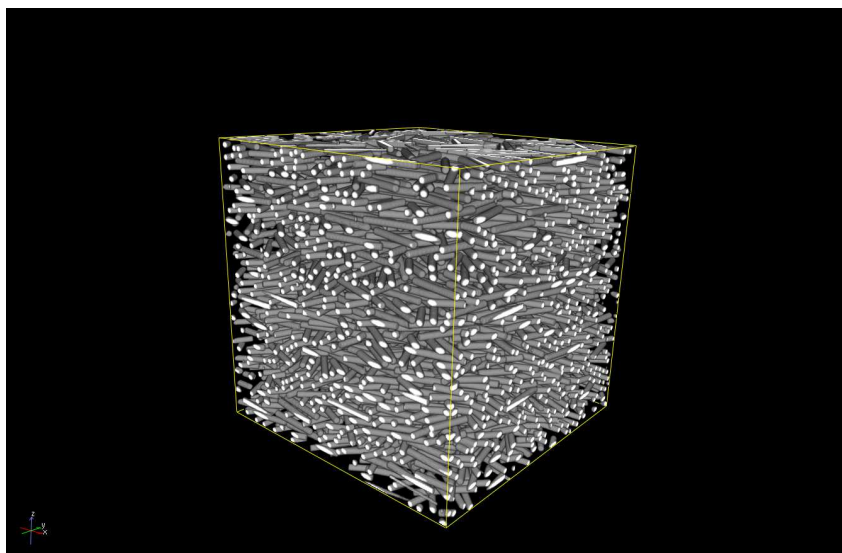


Abbildung 7.20: Realisierung der Heuristik für einen Poissonschen Zylinderprozess mit Ausgangsintensität  $\gamma = 25000$ , Formverteilung wie in (7.2) und einem Verhältnis zwischen Zylinderlänge und Querschnittsdurchmesser von 10. Die resultierende Volumendichte beträgt 0,1579.

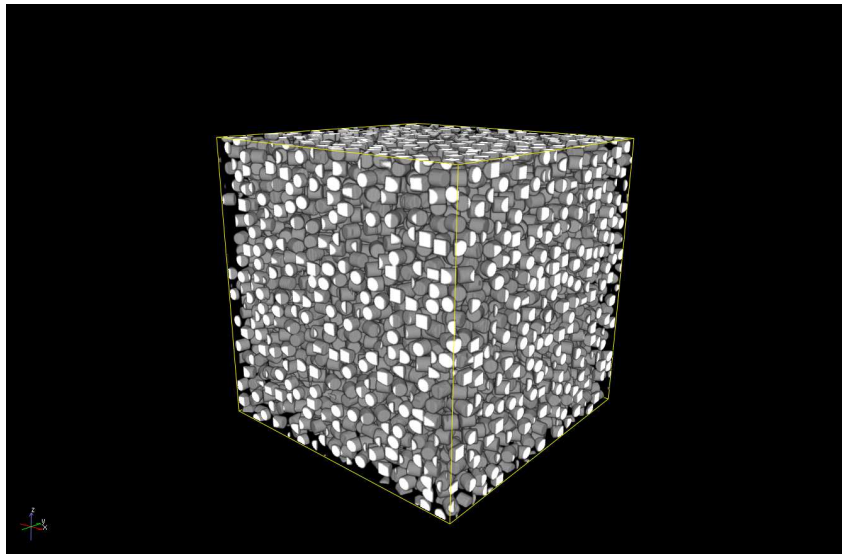


Abbildung 7.21: Realisierung der Heuristik für einen Poissonschen Zylinderprozess mit Ausgangsintensität  $\gamma = 25000$ , Formverteilung wie in (7.2) und einem Verhältnis zwischen Zylinderlänge und Querschnittsdurchmesser von Eins. Die resultierende Volumendichte beträgt 0,2622.

Die hier vorgestellten Realisierungen sollen auftretende Phänomene und Einsatzmöglichkeiten umreißen. Eine profunde Simulationsstudie war aufgrund der enormen Laufzeiten der Simulationen nicht mehr im Rahmen dieser Arbeit möglich. Folgende Punkte beschreiben offene Fragen und sollen als Anregungen für weiter gehende Untersuchungen dienen.

- Welcher Zusammenhang besteht zwischen der primären und der sekundären Formverteilung? Dabei ist insbesondere auch die Untersuchung des Phänomens, dass die sekundären Zylinder (zumindest innerhalb der einzelnen Schichten) ähnlich orientiert sind, von Bedeutung. Von Interesse ist auch die Verallgemeinerung dieser Untersuchung auf isotrope Zylinderprozesse oder Zylinderprozesse, deren Zylinder eine bevorzugte Orientierung besitzen, welche zufällig „verwackelt“ wird.
- Wie lässt sich die oben beobachtete Schichtenbildung mathematisch charakterisieren bzw. statistisch messen? Eine Möglichkeit hierzu besteht etwa wie oben bereits erwähnt, den Punktprozess in  $[0, 1]$  bestehend aus den  $x_3$ -Koordinaten der Umkugelmittelpunkte der Zylinder zu betrachten.
- Wie verändert sich die beschriebene Schichtenbildung bei einer Erhöhung der Primärintensität?
- Wie verhält sich die Heuristik im Vergleich zum zugehörigen RSA Modell? Dabei sind sowohl die erreichbaren Volumendichten und zugehörigen sekundären Formverteilungen als auch eine Untersuchung von speziellen Größen zweiter Ordnung, welche etwa die Abhängigkeit der Orientierung der harten Zylinder von der gegenseitigen Lage der Zylinder

darstellen, von Interesse.

- Finden sich Anwendungsmöglichkeiten für die Heuristik für harte Zylinderprozesse, etwa zur Modellierung von Faserverbundwerkstoffen?

### 7.3 Fazit und weitere Anregungen

Das Ziel dieses Kapitels bestand darin, durch eine geeignete Heuristik einen Näherungsprozess für den Prozess der gewichtsmaximalen harten Teilmengen zu konstruieren, welcher effizient zu simulieren ist und ein möglichst großes Gesamtgewicht erreicht. Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass die vorgestellte Zwei-Phasen-Heuristik die an sie gestellten Forderungen in folgenden Aspekten erfüllt:

- Die erreichten Volumendichten übertrafen in allen untersuchten Szenarien die entsprechenden Werte des RSA Modells und damit zugleich die Werte aller bekannten Ausdünnungsmodelle deutlich.
- Die Heuristik ist unabhängig von der Gestalt der involvierten Partikel durchführbar, was sie wesentlich von den in Abschnitt 2.1 vorgestellten Dense Random Packing Verfahren unterscheidet.
- Unerwünschte Regelmäßigkeiten, wie sie bei Dense Random Packing Verfahren auftreten können und in Abschnitt 2.1 erwähnt wurden, traten bei der Heuristik nicht auf.

Die Heuristik kann folglich auch zur Bestimmung einer unteren Schranke für  $\eta_D^W$  aus (6.2) herangezogen werden.



# Literaturverzeichnis

- [1] P. Alexandroff, H. Hopf (1965). *Topologie*. Chelsea Publishing Company, New York.
- [2] M.A. Akcoglu, U. Krengel (1981). Ergodic theorems for superadditive processes. *J. Reine Angew. Math.* **323**, 53-67.
- [3] J. Andersson, O. Häggström, M. Månsson (2005). The volume fraction of a non-overlapping germ-grain model. *Electr. Comm. Probab.* **11**, 78-88.
- [4] F. Ballani (2006). Beiträge zur Theorie und Anwendung von Keim-Korn-Modellen mit konvexen Körpern. Dissertation TU Bergakademie Freiberg.
- [5] F. Ballani, D. Daley, D. Stoyan (2006). Modelling the microstructure of concrete with spherical grains. *Comp. Mat. Science* **35**, 399-407.
- [6] J. Beardwood, J.H. Halton, J.M. Hammersley (1959). The shortest path through many points. *Proc. Camb. Philos. Soc.* **55**, 299-327.
- [7] A. Bezrukov, M. Bargiel, D. Stoyan (2002). Statistical analysis of simulated random packings of spheres. *Part. Part. Syst. Charact.* **19**, 111-118.
- [8] J.H. Conway, N.J.A. Sloane (1988). *Sphere Packings, Lattices and Groups*. Springer, New York.
- [9] D. Daley, D. Vere-Jones (1988). *An Introduction to the Theory of Point Processes*. Springer, New York.
- [10] D. Daley, G. Last (2004). Descending chains, the lilypond model, and mutual nearest neighbour matching. *Adv. Appl. Prob.* **37**, 604-628.
- [11] D. Daley, D. Stoyan, H. Stoyan (1999). The volume fraction of a Poisson germ model with maximally non-overlapping spherical grains. *Adv. Appl. Prob.* **31**, 610-624.
- [12] H. Dette, N. Henze (1990). Some peculiar boundary phenomena for extremes of  $r$ -nearest neighbor links. *Statist. Probab. Lett.* **10**, 381-390.
- [13] G. Döge (2001). Perfect simulation for random sequential adsorption of  $d$ -dimensional spheres with random radii. *J. Stat. Comput. Simul.* **69**, 141-156.
- [14] M.R. Garey and D.S. Johnson (1979). *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-completeness*. Freeman, New York.
- [15] P.M. Gruber (2007). *Convex and Discrete Geometry*. Springer, Berlin.

- [16] J. Feder (1980). Random sequential adsorption. *J. Theor. Biol.* **87**, 237-254.
- [17] T.C. Hales (2005). A proof of the Kepler conjecture. *Ann. of Math.* **162**, 1063-1183.
- [18] L. Heinrich (1992). On the existence and mixing properties of germ-grain models. *Statistics* **23**, 271-286.
- [19] M. Heveling, G. Last (2006). Existence, uniqueness and algorithmic computation of general lilypond systems. *Random Structures & Algorithms* **29**, 338-350.
- [20] M. Hörig, C. Redenbach (2010). The maximum volume hard subset model for Poisson processes: simulation aspects. Eingereicht.
- [21] M. L. Huber, R. L. Wolpert (2009). Likelihood-based inference for Matérn type-III repulsive point processes. *Adv. Appl. Prob.* **41**, 958-977.
- [22] J. Illian, A. Penttinen, H. Stoyan, D. Stoyan (2008). *Statistical Analysis and Modelling of Spatial Point Patterns*. Wiley, Chichester.
- [23] D. Jeulin (Ed.) (1997). *Advances in Theory and Applications of Random Sets*. World Scientific, Singapur.
- [24] O. Kallenberg (1983). *Random Measures*. 3rd Edition, Academic Press, London.
- [25] O. Kallenberg (2003). *Foundations of Modern Probability*. 2nd Edition, Springer, New York.
- [26] J.F.C. Kingman (1973). Subadditive ergodic theory. *Ann. Probab.* **6**, 883-909.
- [27] J.F.C. Kingman (1993). *Poisson Processes*. Clarendon Press, Oxford.
- [28] D. König, V. Schmidt (1992). *Zufällige Punktprozesse*. Teubner, Stuttgart.
- [29] U. Krengel (1985). *Ergodic Theorems*. De Gruyter, Berlin.
- [30] U. Krengel, R. Pyke (1987). Uniform pointwise ergodic theorems for classes of averaging sets and multiparameter subadditive processes. *Stochastic Process. Appl.* **26**, 289-296.
- [31] C. Lautensack, K. Schladitz, A. Särkkä (2006). Modeling the microstructure of sintered copper. *Proceedings of the 6th International Conference on Stereology, Spatial Statistics and Stochastic Geometry*. R. Lechnerova, I. Saxl, V. Benes (Ed.) Union of Czech Mathematicians and Physicists, Prague, 287-292.
- [32] G. Last (2010). Modern random measures: Palm theory and related models. *New Perspectives in Stochastic Geometry*. W. Kendall, I. Molchanov (Ed.) Oxford University Press, Oxford, 77-110.
- [33] M.N.M. van Lieshout (2000). *Markov Point Processes and their Applications*. Imperial College Press, London.
- [34] M.N.M. van Lieshout (2006). Maximum likelihood estimation for random sequential adsorption. *Adv. Appl. Prob.* **38**, 889-898.

- 
- [35] B.D. Lubachevsky, F.H. Stillinger (1990). Geometric properties of random disc packings. *J. Statist. Phys.* **60**, 561-583.
- [36] M. Månsson (2007). A connection between the volume fraction of the Stienen model and the dead leaves model. *Adv. Appl. Prob.* **39**, 41-52.
- [37] M. Månsson, M. Rudemo (2002). Random patterns of non-overlapping convex grains. *Adv. Appl. Prob.* **34**, 718-738.
- [38] M. Månsson (2004). Volume fraction of some models for non-intersecting grains, in particular dead leaves models. *Preprint*.
- [39] S. Mase (1985). On the possible form of size distributions for Gibbsian processes of mutually non-intersecting discs. *J. Appl. Prob.* **23**, 649-659 .
- [40] S. Mase, J. Møller, D. Stoyan, R.P. Waagepetersen, G. Döge (2001). Packing densities and simulated tempering for hard core Gibbs point processes. *Ann. Inst. Statist. Math.* **53**, 661-680.
- [41] B. Matérn (1960), Spatial Variation. Stochastic models and their application to some problems in forest surveys and other sampling investigations. *Medd. Statens Skogforskningsinstitut* **49**, 1-144.
- [42] B. Matérn (1986). *Spatial Variation*. Lecture Notes in Statistics 36, Springer, Berlin.
- [43] G. Matheron (1969). *Random Sets and Integral Geometry*. Wiley, New York.
- [44] G. Matheron (1968). Schéma booléen séquentiel de partition aléatoire. N-83 CMM, Ecole des Mines de Paris.
- [45] P. Meakin, R. Jullien (1992). Random sequential adsorption of spheres of different sizes. *Physica A* **187**, 475-488.
- [46] J. Mecke (1967). Stationäre zufällige Maße auf lokalkompakten Abelschen Gruppen. *Z. Wahrsch. verw. Gebiete* **9**, 36-58.
- [47] R. Meester, R. Roy (1996). *Continuum Percolation*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [48] J. Milnor (1976). Hilbert's problem 18: On crystallographic groups, fundamental domains and on sphere packings. *Proc. Symp. Pure Math. AMS* **28**, 491-506.
- [49] I. Molchanov (2004). *Theory of Random Sets*. Springer, New York.
- [50] J. Møller, M.L. Huber, R.L. Wolpert (2009). Perfect simulation and moment properties for the Matérn Type III Process. Eingereicht.
- [51] X.X. Nguyen, H. Zessin (1979). Ergodic theorems for spatial processes. *Z. Wahrsch. verw. Gebiete* **48**, 133-158.
- [52] P.R.J. Östergård (2002). A fast algorithm for the maximum clique problem. *Discrete Appl. Math.* **120**, 197-207.

- [53] P.R.J. Östergård (2002). A new algorithm for the maximum-weight clique problem. Preprint.
- [54] C. Palm (1943). Intensitätsschwankungen im Fernsprechverkehr. Doctoral Dissertation. *Ericsson Technics* no. 44.
- [55] M.D. Penrose (2004). *Random Geometric Graphs*. Oxford University Press, Oxford.
- [56] M.D. Penrose (2001). A central limit theorem with applications to percolation, epidemics and Boolean models. *Ann. Probab.* **29**, 1515-1546.
- [57] M.D. Penrose, J.E. Yukich (2001). Central limit theorems for some graphs in computational geometry. *Ann. Appl. Probab.* **11**, 1005-1041.
- [58] M.D. Penrose, J.E. Yukich (2002). Limit theory for random sequential packing and deposition. *Ann. Appl. Probab.* **12**, 272-301.
- [59] W. Pullan (2009). Optimisation of unweighted/weighted maximum independent sets and minimum vertex covers. *Discrete Optim.* **6**, 214-219.
- [60] J. Quintanilla, S. Torquato, R. Ziff (2000). Efficient Measurement of the Percolation Threshold for Fully Penetrable Disks. *J. Phys. A* **33**, 399-407.
- [61] A. Rényi (1958). On a one-dimensional random space-filling problem. *Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci.* **3**, 109-127.
- [62] M. D. Rintoul, S. Torquato (1997). Precise determination of the critical threshold and exponents in a 3D continuum percolation model. *J. Phys. A* **30**, 585-592.
- [63] B.D. Ripley (1981). *Spatial Statistics*. Wiley, New York.
- [64] C.A. Rogers (1958). The packing of equal spheres. *Proc. London Math. Soc.* **8**, 609-620.
- [65] C.A. Rogers (1964). *Packing and Covering*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [66] P. Schaaf, J. Talbot (1989). Random sequential adsorption of mixtures. *Phys. Rev. A* **40**, 422 - 427.
- [67] R. Schneider (1993). *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [68] R. Schneider, W. Weil (2008). *Stochastic and Integral Geometry*. Springer, Berlin.
- [69] M. Schlather, D. Stoyan (2000). Random sequential adsorption: Relationship to dead leaves and characterisation of variability. *J. Statist. Phys.* **100**, 969-979.
- [70] M. Schöneberger (2008). *Hard-Core-Zylinder-Prozesse zur Modellierung von Fasersystemen in 3D*. Diplomarbeit, Fachhochschule Kaiserslautern.
- [71] H. Stienen (1982). Die Vergrößerung von Karbiden in reinen Eisen-Kohlenstoff Stählen. Dissertation, RWTH Aachen.
- [72] S. Sakai, M. Togasaki, K. Yamazaki (2003). A note on greedy algorithms for the maxi-

- mum weighted independent set problem. *Discrete Appl. Math.* **126**, 313-322.
- [73] J.M. Steele (1981). Subadditive Euclidean functionals and non-linear growth in geometric probability. *Ann. Prob.* **9**, 365-376.
- [74] J.M. Steele (1997). *Probability Theory and Combinatorial Optimization*. Regional Conference Series in Applied Mathematics, 69.
- [75] D. Stoyan, W.S. Kendall, J. Mecke (1995). *Stochastic Geometry and its Applications*. 2nd Edition, Wiley, Chichester.
- [76] D. Stoyan, H. Stoyan (1992). *Fraktale - Formen - Punktfelder : Methoden der Geometrie-Statistik*. Akademie-Verlag, Berlin.
- [77] D. Stoyan, H. Stoyan (1994). *Fractals, random shapes and point fields : methods of geometrical statistics*. Wiley, Chichester.
- [78] S. Torquato (2002). *Random Heterogeneous Materials: Microstructure and Macroscopic Properties*. Springer, New York.
- [79] J.-S. Wang (1994). A fast algorithm for random sequential adsorption of discs. *Int. J. Mod. Phys. C* **5**, 707 - 715.
- [80] J.E. Yukich (1998). *Probability Theory of Classical Euclidean Optimization Problems*. Lecture notes in mathematics, Springer, Berlin.
- [81] C. Zong (1999). *Sphere Packings*. Springer, New York.



# Symbolverzeichnis

## Verschiedenes

$\langle \cdot, \cdot \rangle$	S. 9
$\  \cdot \ $	S. 9
$\  \cdot \ _\infty$	S. 12
$\prec_1$	S. 64
$\preceq_1$	S. 65
$\preceq_1$	S. 67
$\preceq$	S. 67
$\xrightarrow{p}$	S. 19
$B(\cdot, \cdot)$	S. 10
$B_\delta(\cdot, \cdot)$	S. 10
$\bar{B}(K)$	S. 14
$d_H$	S. 11
$A + B$	S. 10
$\alpha A$	S. 10
$-A$	S. 10
$A^c$	S. 10
bd	S. 10
cl	S. 10
diam	S. 11
dim	S. 11
$\partial_r$	S. 108
int	S. 10
supp	S. 19
<b>Mengen</b>	
$\mathcal{B}(E), \mathcal{B}$	S. 10
$\mathcal{C}(E), \mathcal{C}'(E)$	S. 15

$\mathcal{C}, \mathcal{C}'$	S. 11
$\mathcal{C}_0$	S. 11
$E_{\neq}^m$	S. 21
$\mathcal{F}$	S. 16
$\mathcal{F}(E), \mathcal{F}'(E)$	S. 15
$\mathcal{F}^A(E)$	S. 15
$\mathcal{F}_{\bullet}(P)$	S. 13
$\mathcal{F}_A(E)$	S. 15
$\mathcal{F}_e(E)$	S. 15
$\mathcal{F}_i(P)$	S. 13
$\mathcal{F}_{le}(E)$	S. 15
$\mathcal{G}$	S. 16
$\mathcal{G}(E), \mathcal{G}'(E)$	S. 15
$G_d$	S. 10
$G_{\Lambda}$	S. 92
$\mathcal{K}, \mathcal{K}'$	S. 11
$\mathcal{K}_0$	S. 11
$\mathbb{N}, \mathbb{N}_0$	S. 9
$\mathbf{N}(E)$	S. 18
$\mathcal{N}(E)$	S. 18
$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$	S. 17
$\mathcal{R}$	S. 11
$\mathbb{R}^d$	S. 9
$S$	S. 22
$S^{d-1}$	S. 10
$\mathbf{T}$	S. 28
$\mathcal{T}(E)$	S. 28
<b>Konstanten</b>	
$\delta_{\mathcal{D}}$	S. 117
$\delta_{\mathcal{D}}^W$	S. 117
$\eta_{\mathcal{D}}^W$	S. 117
$\gamma'_M$	S. 111
$\gamma$	S. 21
$\tilde{\gamma}_M$	S. 108



$\kappa_d$	S. 10
$p$	S. 36
$\tilde{p}_W^M$	S. 100
<b>Abbildungen</b>	
$c$	S. 11
$F$	S. 14
$g$	S. 37
$g_{ij}$	S. 38
$h_K$	S. 12
$K$	S. 37
$M$	S. 63
$M^*$	S. 68
$M^{**}$	S. 117
$M^{***}$	S. 118
$p_{ij}$	S. 38
$p_K$	S. 11
$r_U$	S. 11
$T(\cdot)$	S. 64
$\mathbf{T}_x$	S. 28
$V_i$	S. 13
<b>Maße, Zufallsvariablen</b>	
$G_{\Xi_W}$	S. 92
$\lambda_d$	S. 10
$\Lambda^{(m)}$	S. 21
$\mu$	S. 23
$\nu$	S. 10
$\mathbb{P}^0$	S. 26
$\mathbb{P}^Z$	S. 17
$\mathbb{P}^{(0,C)}$	S. 26
$\mathbb{P}^{(0,C,m)}$	S. 27
$\mathbb{P}^{(0,m)}$	S. 27
$\mathbb{Q}$	S. 21
$\mathbb{Q}'$	S. 23
$\Theta$	S. 20

$\Theta^{(m)}$	S. 21
$\Theta_A$	S. 21
$\nu$	S. 10
$\tilde{\Xi}_W$	S. 71
$\hat{\Xi}_W$	S. 109
$\bar{\Xi}_W$	S. 109
$\Xi'$	S. 83
$\Xi^m$	S. 22
$\Xi^m_{\neq}$	S. 22
$Z$	S. 17