

Rotationssymmetrischer hydraulischer Sprung in Flüssigmetall

Zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor der Ingenieurwissenschaften
der Fakultät für Maschinenbau
Karlsruhe Institute of Technology

vorgelegte
Dissertation
von

Dipl.-Ing. Thomas M. Schmidt

Datum der mündlichen Prüfung: 14.12.2009

Hauptreferent: Prof. Dr.-Ing. Andreas Class
Institut für Kern- und Energietechnik
Karlsruhe Institute of Technology

Korreferent: Prof. Dr.-Ing. Martin Gabi
Fachgebiet Strömungsmaschinen
Karlsruhe Institute of Technology

Korreferent: G. Paul Neitzel, Ph.D.
Professor of Fluid Mechanics
George W. Woodruff School of Mechanical Engineering
Georgia Institute of Technology

Rückseite des Titelblatts mit Impressum (Repro)

Zusammenfassung

Flüssigmetalle sind attraktive Fluide für kerntechnische Anwendungen, wobei insbesondere die hohe Wärmeleitfähigkeit und der hohe Siedepunkt eine optimale Kühlung von thermisch hoch belasteten Komponenten versprechen. In der vorliegenden Dissertation wird für das generische Grundlagenproblem des rotationssymmetrischen hydraulischen Sprungs eine numerische und analytische Untersuchung mit dem Fluid Gallium Indium Zinn durchgeführt.

Die Arbeit entstand in Zusammenarbeit mit Georgia Tech (Georgia Institute of Technology, George W. Woodruff School of Mechanical Engineering) und dem IKET am Forschungszentrum Karlsruhe (Institut für Kern- und Energietechnik). Der Fokus liegt auf der Analyse und Modellierung freier Oberflächenströmungen eines Fluids mit sehr hoher Dichte und hohen Oberflächenspannungskoeffizienten. Experimentelle und numerische Ergebnisse werden verglichen und die Anwendbarkeit früherer Theorien untersucht, die auf dem Fluid Wasser beruhen. Aufgrund der hohen Oberflächenspannungskraft und schlechter Benetzungseigenschaften treten fixierte Kontaktlinien und Fingerstrukturen auf. Eine Theorie zur Berechnung der Sprunghöhe und Sprungposition bei vollständiger Benetzung, basierend auf Gleichgewichtsbetrachtungen zwischen den hydrostatischen und Oberflächenspannungskräften, wird hergeleitet. Bei nur teilweiser Benetzung wird ein quantitatives Modell für das Auftreten von Fingerstrukturen aufgestellt. Die Strömung lässt sich dann in einen schießenden, einen Finger und einen fließenden Bereich einteilen. Auf Grundlage der Stromfadentheorie und Erhaltungsgleichungen werden Druck und Massenstrom in einem Finger bestimmt. Betrachtungen zur Oberflächenkrümmung an der Symmetrielinie ergeben den Existenzbereich und die mögliche Anzahl der Finger. Zusätzlich wird die Lage der Transition der Finger in einem fließenden Bereich bestimmt.

Die hergeleiteten analytischen Beziehungen für den rotationssymmetrischen hydraulischen Sprung mit Flüssigmetallen erlauben die Berechnung der Sprungposition und liefern zusätzlich ein Kriterium, ob mit Fingerstrukturen gerechnet werden muss, die mit Entnetzung einhergehen. Dies ermöglicht eine schnelle Vorhersage ohne aufwendige numerische oder experimentelle Variantenrechnungen.

INHALTSVERZEICHNIS

| | | |
|----------|--|----|
| 1 | Einleitung | 1 |
| 1.1 | Motivation | 1 |
| 1.2 | Beschleuniger getriebene Systeme..... | 5 |
| 1.3 | Hydraulischer Sprung | 9 |
| 1.4 | Gliederung der Arbeit..... | 16 |
| 2 | Mathematisch-Physikalisches Modell | 17 |
| 2.1 | Dynamik freier Oberflächen | 17 |
| 2.2 | Grundlagen: Numerische Strömungsmechanik..... | 19 |
| 2.2.1 | Erhaltungsgleichungen..... | 19 |
| 2.2.2 | Turbulenzmodellierung..... | 20 |
| 2.3 | Grundlagen: Modellierung von Zweiphasenströmungen | 25 |
| 2.3.1 | „Phasenfeld“ Modell | 29 |
| 2.4 | Numerische Methode..... | 36 |
| 2.4.1 | Integrationsgebiet und Randbedingungen..... | 36 |
| 2.4.2 | Auswertung..... | 37 |
| 3 | Hydraulischer Sprung in Flüssigmetall..... | 40 |
| 3.1 | Klassischer rotationssymmetrischer hydraulischer Sprung..... | 42 |
| 3.2 | Auswerteeinfluss..... | 49 |
| 3.3 | Theoretisch berechneter Sprungradius | 51 |
| 3.3.1 | Fluidhöhe im fließenden Bereich..... | 53 |
| 3.3.2 | Analytische Beziehung im fließenden Bereich..... | 56 |
| 3.4 | Fingerstrukturen beim hydraulischen Sprung..... | 61 |
| 3.4.1 | Numerisches Detail-Modell | 62 |
| 3.4.2 | Bilanzierung durch das Transitionsgebiet..... | 64 |
| 3.4.3 | Froudezahl- und Fingerabstandskriterium | 74 |
| 3.4.4 | Transition in den fließenden Bereich | 79 |
| 4 | Zusammenfassung und Ausblick | 87 |
| 5 | Literatur..... | 89 |
| Anhang A | Nomenklatur | 1 |
| Anhang B | Dimensionslose Kennzahlen | 5 |
| Anhang C | Turbulenzmodelle | 5 |
| Anhang D | Krümmung rotationssymmetrischer Oberflächen | 9 |
| Anhang E | Höhenprofil Finger | 11 |

TABELLENVERZEICHNIS

| | |
|-----------------------------|----|
| Tab. 2-1 Stoffwerte | 37 |
| Tab. 3-1 Geometrische Daten | 44 |

ABBILDUNGSVERZEICHNIS

| | | |
|-----------|--|----|
| Abb. 1-1 | DLP-Messsystem KALLA [44] | 3 |
| Abb. 1-2 | Radiotoxizität eines abgebrannten Brennelements und nach Transmutation [9] | 6 |
| Abb. 1-3 | Fensterloses XT-ADS Target [45] | 7 |
| Abb. 1-4 | IFMIF-Target [46] | 8 |
| Abb. 1-5 | Froudezahl | 9 |
| Abb. 1-6 | Rotationssymmetrischer hydraulischer Sprung [14] | 10 |
| Abb. 1-7 | Regionen beim hydraulischen Sprung [24] | 11 |
| Abb. 1-8 | Grenzschicht beim hydraulischen Sprung [26] | 13 |
| Abb. 1-9 | Charakteristische hydraulische Sprünge [14] | 14 |
| Abb. 1-10 | Sprungformen [15] | 14 |
| Abb. 2-1 | Reynoldszahl-verlauf | 24 |
| Abb. 2-2 | Modellierungsmethoden für freie Oberflächen | 25 |
| Abb. 2-3 | Methoden für die Bestimmung freier Oberflächen [53] | 26 |
| Abb. 2-4 | Volumenindikatorfunktion | 28 |
| Abb. 2-5 | Adaptives Netz | 32 |
| Abb. 2-6 | Dammbruch Problem Randbedingungen | 33 |
| Abb. 2-7 | „Dammbruch“ Simulation | 34 |
| Abb. 2-8 | Transitionsgebiet Oberflächenspannung | 34 |
| Abb. 2-9 | Geometrie und Randbedingungen | 36 |
| Abb. 2-10 | Zeitliche Mittelung | 38 |
| Abb. 2-11 | Radiale Geschwindigkeit | 38 |
| Abb. 3-1 | Versuchsaufbau KALLA | 40 |
| Abb. 3-2 | Strömungsformen in Abhängigkeit vom Kontaktwinkel [44] | 41 |
| Abb. 3-3 | Fixierte Kontaktlinie und asymmetrische Ausströmung | 42 |
| Abb. 3-4 | Definierte Ausströmgebiete | 43 |
| Abb. 3-5 | Quasistationäre Sprungposition | 43 |
| Abb. 3-6 | Auswertebereiche Messung (re.) und Numerik (li.) | 44 |
| Abb. 3-7 | Sprungverlauf für $w = 1$ mm (re.) und $w = 3$ mm (li.) | 45 |
| Abb. 3-8 | Wirbelformen beim hydraulischen Sprung [67] | 46 |
| Abb. 3-9 | Vektorplot für $w = 3$ mm für Standard $k-\varepsilon$ (oben) und RNG- $k-\varepsilon$ Turbulenzmodell (unten) | 47 |
| Abb. 3-10 | Turbulenzmodellvergleich | 48 |
| Abb. 3-11 | Statistischer Profilverlauf $w = 3$ mm, $Re = 26\,000$ | 49 |
| Abb. 3-12 | Momentaner Profilverlauf $w = 3$ mm, $Re = 26\,000$ | 50 |
| Abb. 3-13 | Momentaner Profilverlauf $w = 3$ mm, $Re = 26\,000$ | 51 |
| Abb. 3-14 | Sprungverlauf für $w = 1$ mm | 52 |
| Abb. 3-15 | Sprungverlauf für $w = 3$ mm | 52 |
| Abb. 3-16 | Geometrische Faktoren im fließenden Bereich | 53 |
| Abb. 3-17 | Sprungpositionen nach Wehrhöhenvorgabe | 54 |
| Abb. 3-18 | Sprungpositionen nach Froudezahlkriterium | 55 |

| | | |
|-----------|--|----|
| Abb. 3-19 | Froudezahlverlauf am Wehr | 56 |
| Abb. 3-20 | Radien an der fixierten Kontaktlinie | 57 |
| Abb. 3-21 | Höhenfunktion | 59 |
| Abb. 3-22 | Profilverlauf für $w = 1$ mm und $w = 3$ mm | 60 |
| Abb. 3-23 | Theoretischer Sprungradius in Abhängigkeit der Oberflächenspannung | 61 |
| Abb. 3-24 | Fingerstrukturen | 61 |
| Abb. 3-25 | Hydraulischer Sprung mit Finger | 62 |
| Abb. 3-26 | Detail-Modell Finger | 63 |
| Abb. 3-27 | Auswerteebenen | 64 |
| Abb. 3-28 | Isokontur der freien Oberfläche eines Fingers | 65 |
| Abb. 3-29 | Finger anteilige Bogenlänge b_1 am Sprung | 65 |
| Abb. 3-30 | Kräfte an einem Finger | 67 |
| Abb. 3-31 | Stromfaden entlang der Oberfläche | 68 |
| Abb. 3-32 | Druckverlustkoeffizient | 69 |
| Abb. 3-33 | Bogenlänge des Fingers | 70 |
| Abb. 3-34 | Verlauf effektive Kontaktbogenlänge | 71 |
| Abb. 3-35 | Projektions-Faktor | 71 |
| Abb. 3-36 | Vereinfachter Bogenabschnitt | 72 |
| Abb. 3-37 | „Extra Spacing“ | 72 |
| Abb. 3-38 | Fläche in Abhängigkeit vom Druck | 74 |
| Abb. 3-39 | Froudezahlverlauf an einem Finger | 75 |
| Abb. 3-40 | Isogeschwindigkeitslinien für $Fr = 1$ ($d = 2$) | 75 |
| Abb. 3-41 | Isolinien der Froudezahl ($d = 2$) | 76 |
| Abb. 3-42 | Extra-Finger-Spacing | 76 |
| Abb. 3-43 | Froudezahl- und Mindestabstandskriterium | 78 |
| Abb. 3-44 | Stromfaden der Bilanzierung | 79 |
| Abb. 3-45 | Wirkende Kräfte | 80 |
| Abb. 3-46 | Froudezahl- und Mindestabstandskriterium | 82 |
| Abb. 3-47 | Kombination des ersten und zweiten Sprungradius | 83 |
| Abb. 3-48 | Kombination des ersten und zweiten Sprungradius | 84 |
| Abb. 3-49 | Kombination des ersten und zweiten Sprungradius mit $Fr = 3$ | 85 |
| Abb. 3-50 | Kombination des ersten und zweiten Sprungradius für $Fr = 1, \dots, 4$ | 85 |
| Abb. 3-51 | Grenzkurve des Sprungradius für höhere Froudezahlen | 86 |
| Abb. 5-1 | Radialer Krümmungsradius (li.) und Krümmung am Rand (re.) | 9 |
| Abb. 5-2 | Höhenprofil Fingerquerschnitt | 11 |
| Abb. 5-3 | Höhenprofil Fingerquerschnitt | 11 |
| Abb. 5-4 | Höhenprofil Fingerquerschnitt | 12 |
| Abb. 5-5 | Höhenprofil Fingerquerschnitt | 12 |

1 Einleitung

Die Mehrphasenströmung, speziell die Zweiphasenströmung, ist eine der häufigsten Strömungsformen in Natur und Technik. Beispiele hierfür wären unter anderem das Mitreißen von Festpartikeln in gasförmigen oder flüssigen Fluiden, Gasblasen in Flüssigkeiten oder die Sprayströmung. Heutige ingenieurwissenschaftliche Anwendungen werfen häufig Fragen in Bezug auf die Auslegung und Optimierung technischer Anlagen und Applikationen mit Mehrphasenströmungen auf. Speziell die technisch sehr interessante Zweiphasenströmung und ihre Beschreibung in mathematischen Korrelationen und Umsetzung in numerischen Modellen ist in den vergangenen Jahren in den Fokus der Forschung gerückt.

Bei Mehrkomponentenströmungen treten häufig mikroskopisch kleine Partikel auf. Die Mehrphasenströmung zeigt dagegen klar erkennbare Oberflächen zwischen den Phasen im makroskopischen Bereich. Eine spezielle Form einer Zweiphasenströmung tritt bei zwei nicht mischbarer Fluiden auf, die durch eine Trennfläche, der freien Oberfläche, voneinander getrennt sind. In den meisten Fällen ist dies eine Trennfläche zwischen einer Flüssigkeit und einem Gas.

Die numerische Simulation von freien Oberflächenströmungen bedingt eine Behandlung von Viskositäts- und Dichtesprüngen zwischen den Fluiden. Die Position der freien Oberfläche ist eine Unbekannte und muss als Bestandteil der numerischen Lösung berechnet werden. Sowohl das Erzielen einer guten Genauigkeit als auch die Koppelung der Oberflächeneigenschaften mit den Bewegungsgleichungen stellen eine komplexe Aufgabe dar.

1.1 Motivation

Die Zielsetzung der Arbeit liegt in der Analyse und Modellierung freier Oberflächenströmungen eines Fluids sehr hoher Dichte und Oberflächenspannung. Dabei garantiert der direkte Vergleich mit experimentellen Untersuchungen, dass die maßgeblichen Phänomene erfasst werden. Spezielles Interesse richtet sich auf nukleartechnische Anlagensysteme. Neue Reaktortypen verwenden Flüssigmetalle zum einem zur Kühlung temperaturkritischer Bereiche und zum anderen als Neutronenspallationsquelle für unterkritische Reaktoren, bei denen durch Beschuss eines Spallationstargets die fehlenden Neutronen bereitgestellt werden. Flüssigmetallgekühlte Bauteile finden zunehmend auch bei der Abführung von Verlustleistungen elektronischer Bauteile Verwendung. Hier erfordern immer größere Leistungsdichten und Anforderungen im Hinblick auf Geräuschentwicklung neue Kühlungsansätze.

Im Folgenden wird das Flüssigmetall Gallium Indium Zinn (GaInSn) betrachtet. Das Flüssigmetall Gallium besitzt als eutektische Legierung mit den Metallen Indium und Zinn eine niedrige Schmelztemperatur von wenigen Grad Celsius. Der niedrige Dampfdruck und der sehr hohe Siedepunkt von Gallium Indium Zinn erlauben eine große Wärmeaufnahme, ohne dass merklich Verdampfung auftritt. Es eignet sich daher sehr gut für die Abführung hoher Wärmestromdichten und den Transport hoher Energiestromdichten. Die betrachtete Legierung ist umweltfreundlich, nicht flammbar und nicht toxisch. Mit seiner großen Spanne zwischen Schmelzpunkt und Siedepunkt besitzt Gallium den größten Flüssigkeitstemperaturbereich aller Metalle.

Zur Auslegung von Flüssigmetallkomponenten werden belastbare Informationen über das Strömungsverhalten des Flüssigmetalls mit freier Oberfläche benötigt. Mithilfe der numerischen Strömungsmechanik soll eine fluiddynamische Beschreibung von Strömungen mit freier Oberfläche und hoher Dichte und Oberflächenspannungswerte realisiert werden. Die Anforderungen an numerische Codes sind die Fähigkeit, Deformationen und Oberflächenwellen darzustellen. Es soll eine Methode zur Verfügung gestellt werden, die es ermöglicht, das Strömungsverhalten des Flüssigmetalls in der Auslegungsphase vorherzusagen. Dies erlaubt den schnellen Variantenvergleich ohne dass auf aufwändige Experimente zurückgegriffen werden muss.

Der Ausgangspunkt für die vorliegende Dissertation ist eine Zusammenarbeit im Bereich der Grundlagenforschung zwischen Professor P. Neitzel von der Georgia Tech und dem IKET am Forschungszentrum Karlsruhe GmbH. Im Rahmen des EUROTRANS Projekts (European Research Program for the TRANsmutation of High Level Nuclear Waste in Accelerator Driven Systems) wird eine Designstudie PDS-XADS (Preliminary Design Studie of an eXperimental Accelerator Driven system) erstellt. Ziel dieser Studie ist eine erste Planung eines neutronisch unterkritischen Kernreaktors, der mittels eines Teilchenbeschleunigers und einem Spallationstarget die fehlenden Neutronen bezieht. Die wesentliche neue Komponente solch eines Reaktors ist ein sogenanntes fensterloses Spallationstarget, das sich durch freie Flüssigmetalloberflächen auszeichnet. In diesem Zusammenhang soll eine Messtechnik für reflektierende Oberflächen entwickelt werden.

Die Schwierigkeit der freien Grenzflächenerfassung liegt in der hohen Reflektivität und der großen Geschwindigkeit der Oberflächenbewegung. Am IKET wird eine geeignete Messtechnik entwickelt. Das generische Problem des hydraulischen Sprungs wurde zur Validierung der Messtechnik ausgewählt. Abb. 1-1 zeigt das verwendete Double-Layer-Projection (DLP)-Messsystem. Mithilfe eines Scanners werden Laserstrahlen auf die reflektierende Oberfläche gelenkt. Die ein- und ausfallenden Strahlen werden mittels zweier Schirme detektiert, und der Strahlengang wird durch die geometrische Optik rekonstruiert. Die Vorgehens-

weise erlaubt die Bestimmung der Lage und Neigung der freien Oberfläche. Der Scanner erlaubt ein schnelles Abtasten der Oberfläche [44].

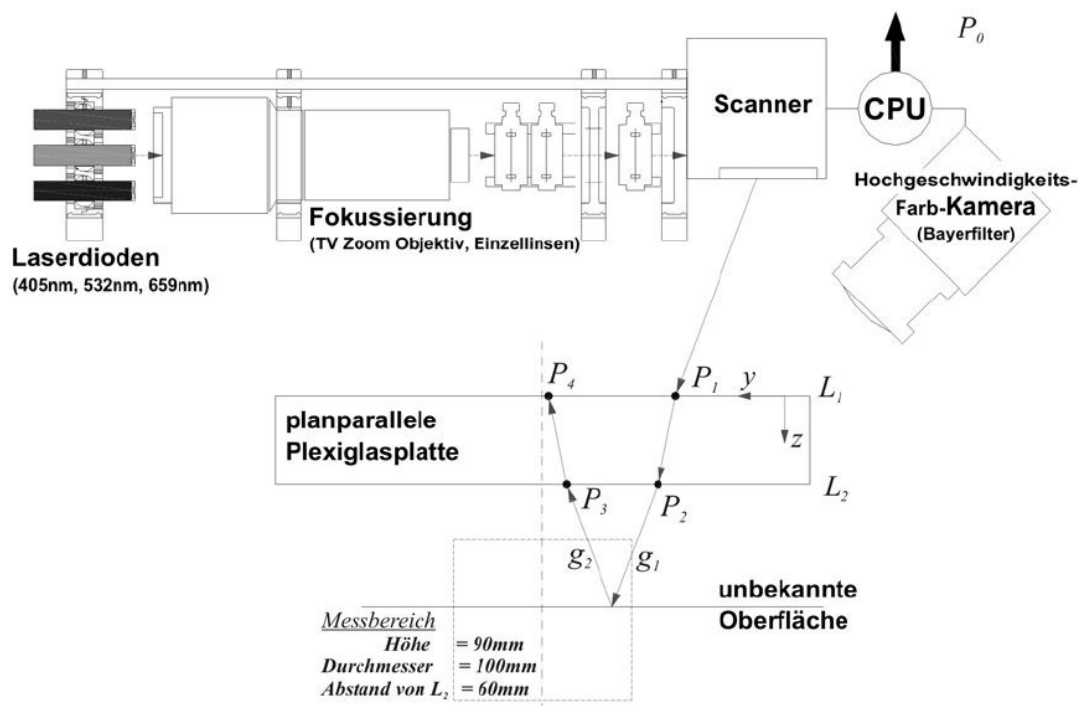


Abb. 1-1 DLP-Messsystem KALLA [44]

Die vorliegende Arbeit stellt anhand des generischen Grundlagenproblems des hydraulischen Sprungs die Ergebnisse der experimentellen Untersuchungen den numerischen Simulationen gegenüber. Ein wichtiger Fokus liegt auf der analytischen Betrachtung der Charakterisierung der Oberfläche von Fluiden mit hoher Oberflächenspannung. Die ersten experimentellen und numerischen Variationsrechnungen zeigen, dass sich in Abhängigkeit der Benetzung zwei unterschiedliche Typen von hydraulischen Sprüngen ausbilden. Bei einer guten Wandbenetzung ergibt sich ein hydraulischer Sprung in qualitativ vergleichbarer Form wie bei den bisher betrachteten Sprüngen mit dem Fluid Wasser. Es zeigte sich sowohl in den numerischen Ergebnissen als auch in den Experimenten, dass die Fluidhöhe im fließenden Bereich mit dem Flüssigmetall Gallium Indium Zinn signifikant höher ist als in vergleichbaren Experimenten mit Wasser. Die mittleren Sprungpositionen und die Fluidhöhen im fließenden Bereich weisen eine gute Übereinstimmung zwischen den Experimenten und den numerischen Ergebnissen auf.

Die Anwendbarkeit bestehender theoretischer Beschreibungen der Sprungposition auf den hydraulischen Sprung mit Flüssigmetall wurde überprüft. Die analytische Bestimmung der Sprungpositionen basiert auf den Gleichgewichtsbetrachtungen an der Sprungposition mit dem Fluid Wasser. Es wurden Parametervergleiche des Einlassmassenstroms und der Fluidhöhe im fließenden Bereich in Gegenüberstellung numerischer und theoretischer Ergeb-

nisse durchgeführt. Der Vergleich dieser Ergebnisse mit der Theorie nach Bush und Aristoff [14], die die Oberflächenspannungskraft berücksichtigt, liefert eine hohe Übereinstimmung zu den numerischen Ergebnissen.

Aus Beobachtungen am Experiment und zeitabhängiger Auswertungen der numerischen Ergebnisse wird abgeleitet, dass die gegenüber dem hydraulischen Sprung mit Wasser größere Fluidhöhe im fließenden Bereich auf sogenannte Kontaktlinienphänomene zurückzuführen ist. Eine fixierte Kontaktlinie geht mit zusätzlichen Oberflächenspannungskräften einher und bewirkt so die vergrößerte Fluidhöhe. Ein großer Kontaktwinkel zwischen dem Fluid und der Wand ist ein deutliches Indiz für diesen Effekt. Basierend auf der Young-Laplace-Beziehung wurde eine analytische Beschreibung der Fluidhöhe in Abhängigkeit der geometrischen Randbedingung und der Fluideigenschaften aufgestellt. Diese zusätzliche Beziehung ermöglicht eine Erweiterung der theoretischen Beschreibung von Watson sowie Bush und Aristoff ([14], [26]) und erlaubt eine geschlossene Berechnung der Sprungposition. Die erweiterte Theorie zeigt eine gute Übereinstimmung mit den Experimenten und den numerischen Ergebnissen für das verwendete Flüssigmetall Gallium Indium Zinn.

Bei unvollständiger Benetzung zwischen dem Fluid und der Wand tritt ein neuer Typ bzw. eine Topologie des hydraulischen Sprungs in Erscheinung. Dabei geht der schießende Bereich nicht wie zuvor direkt über einen rotationssymmetrischen Transitionsbereich, dem hydraulischen Sprung, in den fließenden Bereich über, sondern zerfällt in sogenannte Fingerstrukturen. Die Finger sind wie die Speichen eines Rads angeordnet. Diese Strukturen führen zu einer Entnetzung der Wand. Bei einem größeren Radius nimmt die Fluidhöhe wieder zu, und es ergibt sich wieder ein fließender Bereich mit einer über den ganzen Umfang benetzten Wand. Dieses Phänomen ist sowohl in den Experimenten als auch in der Numerik zu beobachten. In der vorliegenden Arbeit wird dies als zweistufiger Sprung klassifiziert. Der erste Sprungradius beschreibt den Übergang des schießenden Bereichs in Fingerstrukturen, der zweite ist definiert als Transition der Finger in den bekannten fließenden Bereich. Anhand von numerischen Berechnungen und Detail-Modellen werden analytische Beziehungen zur Vorhersage von Fingerstrukturen abgeleitet. Die Beziehungen basieren auf Gleichgewichtsbetrachtungen am Transitionsgebiet, das den Übergang in Fingerstrukturen kennzeichnet. Berücksichtigt werden:

- Hydrostatik
- Oberflächenspannungskräfte aufgrund der Krümmung und fixierten Kontaktlinien
- Impulsflüsse

-
- Massenbilanz
 - und Energieerhaltung

Zur Klärung, ob Fingerstrukturen für gegebene Parameter möglich sind, werden zusätzlich ein Mindest-Froudezahl-Kriterium sowie ein Kriterium für den kleinsten Abstand zwischen den Fingern formuliert. Damit lässt sich nach Vorgabe von Stoffeigenschaften sowie Einlass- und Randbedingungen analytisch das Auftreten von Fingern vorhersagen. Der Zerfall in Fingerstrukturen führt zu einer unvollständigen Benetzung und somit bei Kühlungsapplikationen zu unerwünschten nicht konvektiv gekühlten Bereichen.

Die Transition der Finger in einen fließenden Bereich leitet sich analog her, wobei maßgebliche Annahmen für den fließenden Bereich aus den Theorien auf Basis des Fluids Wasser übernommen werden. Fingerstrukturen sind nur möglich, wenn der zweite Sprungbereich größer als der Erste ist.

1.2 Beschleuniger getriebene Systeme

Seit einigen Jahren wird die Transmutation als eine mögliche Lösung für das Aufbereiten von nuklearen Abfällen erachtet. Als Transmutation bezeichnet man die Umwandlung langlebiger Radionuklide durch Spaltung in kurzlebige Spaltprodukte. Die nuklearen Abfälle aus Kernkraftwerken enthalten eine Reihe von Radionukliden mit langer Halbwertszeit und hoher Radiotoxizität (Neptium, Americium und Curium), die auch als minore Aktinide bezeichnet werden. Die Transmutation erfolgt dabei in einem unterkritischen nuklearen Reaktor [3]. Das Hauptziel ist die Reduzierung dieser langlebigen Radionuklide durch Transmutation in kurzlebigeren oder stabilen Elementen. Dadurch lässt sich der Zeitraum der Radiotoxizität von Hunderttausenden Jahren auf einige Hundert Jahre reduzieren. In Abb. 1-2 zeigt den Verlauf der Radiotoxizität eines abgebrannten Brennelements aus einem Kernkraftwerk vor und nach der Transmutation.

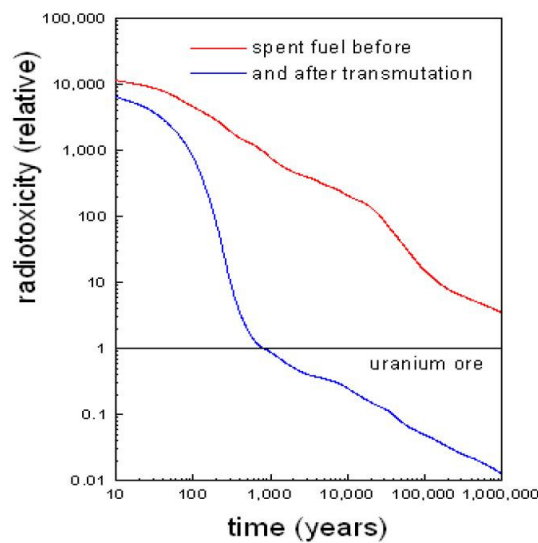


Abb. 1-2 Radiotoxizität eines abgebrannten Brennelements und nach Transmutation [9]

Die Transmutation lässt sich theoretisch durch ein beschleunigergetriebenes System (Accelerator Driven Systems (ADS)) erreichen. Dieses System verbindet einen Beschleuniger mit einem unterkritischen nuklearen Reaktor und besteht aus einem leistungsstarken Protonenstrahl, einem im Zentrum des Reaktorkerns angeordneten Target sowie einem unterkritischen Blanket, in dem der Transmutationsprozess stattfindet [4]. Der hochenergetische Partikelstrahl eines Beschleunigers wird auf ein Spallations-Target gerichtet, welches Spallationsneutronen im Reaktorkern erzeugt. Das Blanket, in das die minore Aktiniden eingebracht werden, wird dem Neutronenfluss aus der Kernspaltungsreaktion und den Spallationsneutronen des Targets ausgesetzt, sodass die minoren Aktiniden in weniger radiotoxische Elemente umgewandelt werden. Das Spallations-Target ist ausgelegt, um eine große Anzahl von Neutronen zu erzeugen und die eingebrachte Wärme des Partikelstrahls abzuführen. Als Target sind Schwermetalle bevorzugte Materialien, da sie eine große Anzahl Spallationsneutronen erzeugen. Bei Feststofftargets ist die Wärmeabfuhr der mit dem Partikelstrahl eingeführten Wärme problematisch und es können Temperaturschocks auftreten [5].

Wegen der Wärmeabfuhrproblematik werden Flüssigmetalltargets als aussichtsreiche Konzepte erachtet. Wird die Flüssigmetallströmung durch feste Wände im Bestrahlungsbereich geführt, ergibt sich ein sogenanntes Target mit einem Fenster, wobei Strahlenschäden die mechanischen Eigenschaften des Fensters beeinträchtigen können. Daher verwenden neuere Konzepte fensterlose Targets, bei denen der Partikelstrahl in das Flüssigmetall durch eine freie Oberfläche eintritt [6]. Abb. 1-3 zeigt das MYRRHA-XT-ADS Target als Beispiel für ein fensterloses Targetkonzept. Dieses Target wird durch einen Zusammenfluss vertikaler koaxialer Fluidströmung durch einen Ringspalt erzeugt. Die treibende Kraft der Strömung ist die Gravitationskraft. Mittig bildet sich eine konische freie Oberfläche auf die der Protonen-

strahl auftrifft und den Spallationsprozess auslöst. Der zentrale Bereich wird vom Strahl gemieden, da hier unzureichende Kühlung befürchtet wird.

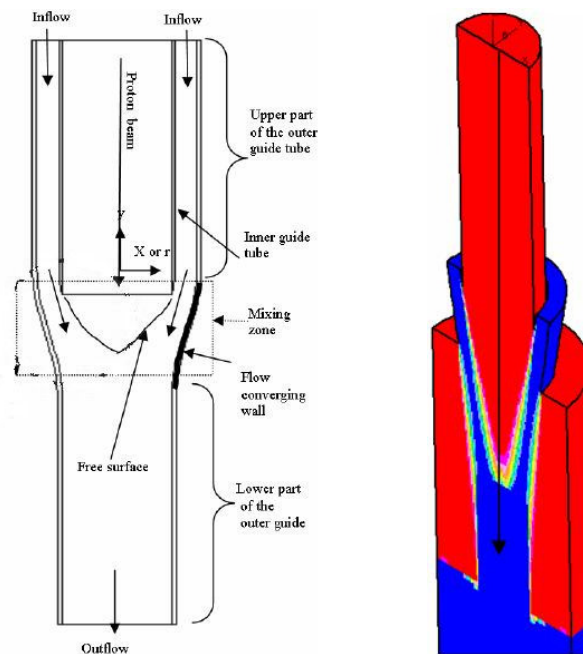


Abb. 1-3 Fensterloses XT-ADS Target [45]

Die größte Herausforderung bei fensterlosen Targets ist die hydraulische Stabilität der freien Oberflächenströmung, die beeinflusst wird durch Wirbeleffekte auf die Strahlform, Strahlzerfall und mögliche Wellen auf der Oberfläche des Flüssigmetalls. Da der externe Protonenstrahl instantan zu- oder abgeschaltet wird, müssen Temperaturschocks beherrscht werden.

Das IFMIF-Target wurde entwickelt, um Materialproben einem sehr hohen Neutronenfluss auszusetzen. Das Fluid strömt von oben in das Bestrahlungsgebiet ein und wird durch eine Rückwand stabilisiert. Eine vollständige Benetzung der Rückwand ist für die Kühlung notwendig (Abb. 1-4).

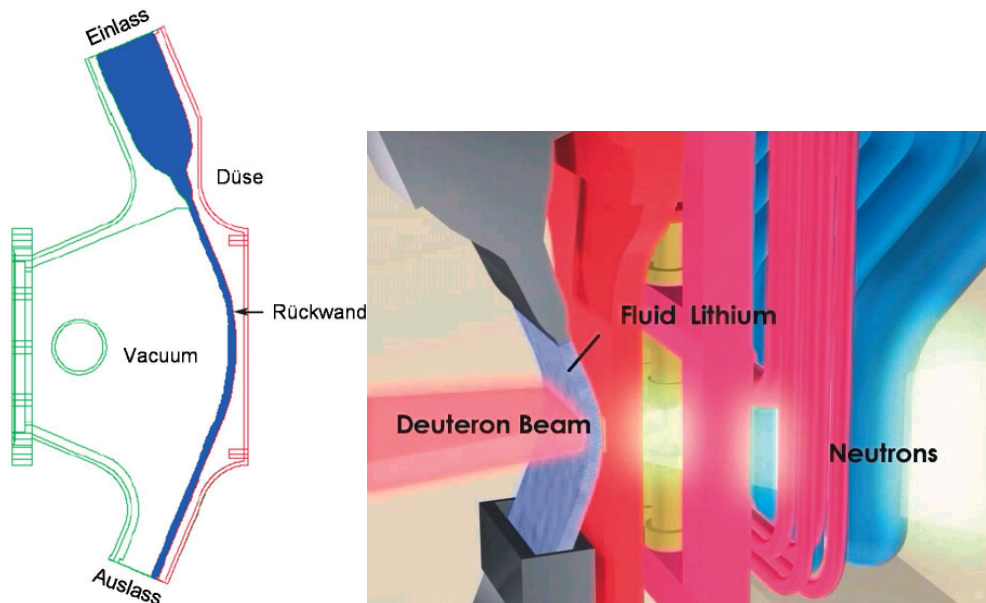


Abb. 1-4 IFMIF-Target [46]

Für die Auslegung von fensterlosen Targets ist es zwingend notwendig, die numerische Strömungssimulation zu nutzen. Zum einen aufgrund des beschränkt verfügbaren Bauraums und zum anderen, da kein Experiment den Abtransport der eingebrachten Wärme adäquat aufzeigen kann. Die numerische Vorhersage der freien Oberflächenform und des Abtransports der eingebrachten Wärme ist erforderlich [10]. Daher ist es wesentlich, numerische Methoden für dreidimensionale Geometrien zu entwickeln, die in der Lage sind, die freie Oberfläche inklusive auftretender Oberflächenwellen gut zu beschreiben. Hierzu wird ein geeignetes Turbulenzmodell benötigt. Derzeit fehlen validierte und verifizierte Modelle für Oberflächenwellen bei hohen Strömungsgeschwindigkeiten, Fluidichten und Oberflächenspannungen.

Eine weitere nukleartechnische Applikation ist die Kühlung von temperaturkritischen Bauteilen. Mit Flüssigmetall gekühlte Reaktoren weisen gegenüber wassergekühlten Reaktoren einige Vorteile auf: Flüssigmetalle besitzen gegenüber Wasser eine deutlich erhöhte Siedetemperatur. Wassergekühlte Reaktoren arbeiten in der Nähe des Siedepunktes, wodurch ein Temperaturanstieg in eine Verdampfung und einem erhöhten Druck resultiert. Die normale Betriebstemperatur eines Reaktors liegt weit unter der Siedetemperatur von Flüssigmetall, wodurch die Druckprobleme nicht mehr bestehen. Die hohe Wärmeleitfähigkeit erlaubt zudem eine Abführung hoher Energiedichten. Ein Beispiel für einen mit Flüssigmetall gekühlten Reaktor sind die natriumgekühlten schnellen Reaktoren [11].

1.3 Hydraulischer Sprung

Bei der Modellentwicklung und Validierung durch Experimente wird das bekannte akademische Problem des hydraulischen Sprungs benutzt. Grundlagenuntersuchungen mit Flüssigmetall werden durchgeführt und mit experimentellen Ergebnissen verifiziert, um die Bedeutung von hohen Oberflächenspannungen und das Benetzungsverhalten von Flüssigmetallen unter typischen Bedingungen zu bestimmen [12]. Der hydraulische Sprung oder auch Wechselsprung genannt, ist eine Strömungsform, die durch einen lokalen Anstieg in der Flüssigkeitshöhe charakterisiert ist. Die Transition in der Höhe trennt den schießenden und fließenden Bereich einer Strömung. Diese Bezeichnung bezieht sich auf die Fluidgeschwindigkeit, die schneller beziehungsweise langsamer als die Wellenausbreitung ist. Im schießenden Bereich können Oberflächenwellen nur stromab transportiert werden. Während sie im fließenden Bereich auch stromauf fließen können wodurch sie sich gegenseitig unterstützen können.

Der Anstieg des Flüssigkeitsspiegels beim hydraulischen Sprung ergibt sich aus Kontinuitätsgründen, wenn eine schnell fließende Flüssigkeit ($u_L(x) > c$) auf eine Geschwindigkeit $u_L(x) < c$ verlangsamt wird. Die Position des Anstiegs verlagert sich bis zu der Stelle fort, an dem die Phasengeschwindigkeit $c = \sqrt{g \cdot z(r)}$ der Schwerewelle im fließenden Bereich gleich der mittleren Strömungsgeschwindigkeit ist [13]. Die Position des Wechselsprungs ist somit durch den Wert Eins der Froudezahl charakterisiert. Die Froudezahl ist eine dimensionslose Zahl, die das Verhältnis von Trägheits- zu Gravitationskräften darstellt. Sie ist gegeben durch (1.1), mit der lokalen Fluidgeschwindigkeit $u_L(r)$, der Gravitationskonstante g und der lokalen Flüssigkeitshöhe $z(r)$ (Abb. 1-5). Schießende und fließende Bedingungen hängen von der lokalen Froudezahl Fr ab. Für eine Froudezahl von größer 1 ($Fr > 1$) befindet man sich im schießenden Bereich. Beträgt die Froudezahl weniger als 1 ($Fr \leq 1$), ist man im fließenden Bereich..

$$Fr = \frac{u_L(r)}{\sqrt{g \cdot z(r)}} \quad (1.1)$$

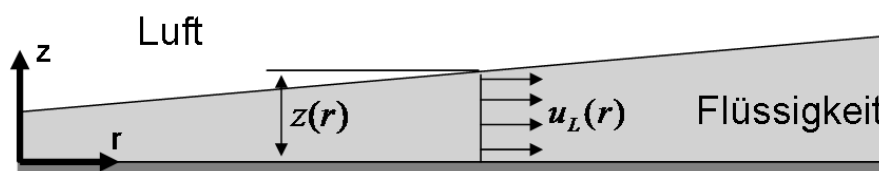


Abb. 1-5 Froudezahl

Der klassische hydraulische Sprung in offenen Kanälen wird gewöhnlich als leicht turbulente Oberfläche angesehen, die den schießenden und fließenden Bereich einer Strömung trennt. Bei diesem Fall wird eine eindimensionale Beschreibung der Impulsbilanz zwischen den beiden Bereichen benutzt, um das Verhältnis zwischen den Fluidhöhen stromauf und stromab in Bezug auf die Geschwindigkeit zu erhalten. Die theoretischen Beschreibungen weisen eine Abweichung von ungefähr 1 % gegenüber Experimenten auf [15]. Dieser klassische hydraulische Sprung wurde ausgiebig untersucht [47]

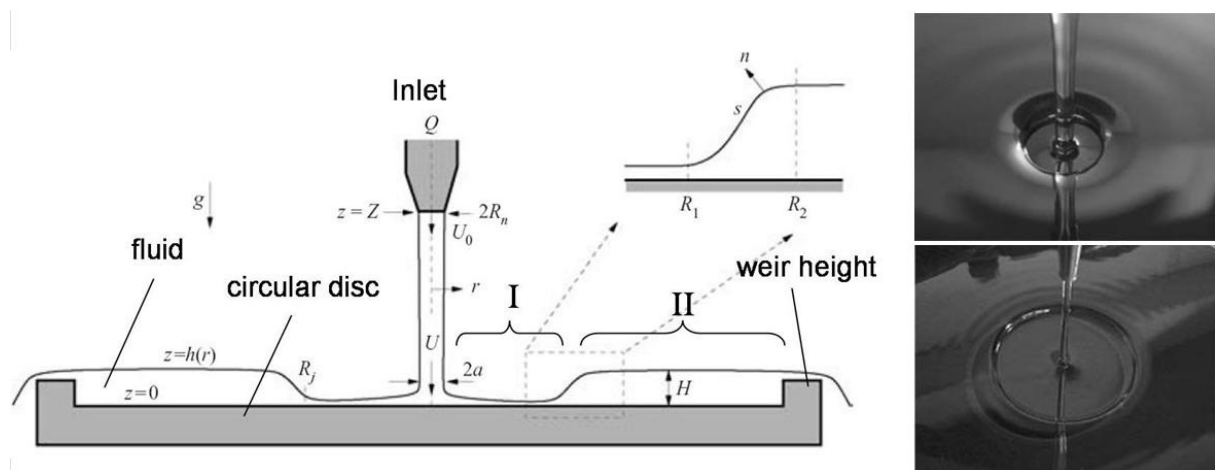


Abb. 1-6 Rotationssymmetrischer hydraulischer Sprung [14]

Der rotationssymmetrische hydraulische Sprung tritt auf, wenn eine vertikale Flüssigkeitsstrahlströmung auf einen ebenen Untergrund trifft. Ein abrupter Sprung in der Flüssigkeitshöhe kann beobachtet werden, dessen Ausprägung von der Fluidgeschwindigkeit, der Viskosität und der Oberflächenspannung abhängt. Beispiele hierfür wären die alltägliche Situation eines auftreffenden Wasserstrahls auf einen Teller (Abb. 1-6 rechts [14]), oder Kühlungssysteme, die mit auftreffenden Flüssigkeitsstrahlen arbeiten, um eine hohe Wärmeabfuhr zu erzielen ([16], [17], [18], u. a.). Gegenüber dem ebenen hydraulischen Sprung besitzt der rotationssymmetrische hydraulische Sprung eine sehr dünne Fluidhöhe im schießenden Bereich. Die Froudezahl ist um viele Hundertfache größer als im klassischen, ebenen hydraulischen Sprung.

Abb. 1-6 zeigt eine Schemenskizze eines oft benutzten experimentellen Aufbau [14]. Der Einlass des Strahls liegt mit einem definierten Durchmesser zentriert über einer Scheibe. Der Strahl trifft auf die Scheibe auf, und das Fluid breitet sich unter Ausbildung eines hydraulischen Sprungs radial aus. Am äußeren Rand der Scheibe befindet sich eine verstellbare Überlaufkante, welche eine Variation der Sprunghöhe erlaubt. Die Sprunghöhe hat einen direkten Einfluss auf die Position an der sich der hydraulische Sprung ausbildet. Die Position des Sprungs wird durch den Sprungradius R_j beschrieben, der als radialer Abstand des Sprungs zur Scheibenmitte respektive dem Auftreffpunkt definiert ist.

Kate et al. unterteilten die Gebiete des hydraulischen Sprungs, induziert durch einen auftreffenden Strahl in drei Hauptregionen [23]: das Gebiet des freien Strahls, des auftreffenden Strahls und das Wandströmungsgebiet. Die beiden Letzteren lassen sich noch in fünf Unterregionen unterteilen, gekennzeichnet durch S_1 , S_2 , S_3 , S_4 und S_5 (Abb. 1-7). Die Unterregionen sind das Gebiet der Grenzschicht (S_1), der vollständig entwickelten Strömung (S_2), das Gebiet kurz vor dem hydraulischen Sprung (S_3), das Gebiet des hydraulischen Sprungs (S_4) und stromabwärts des hydraulischen Sprungs (S_5).

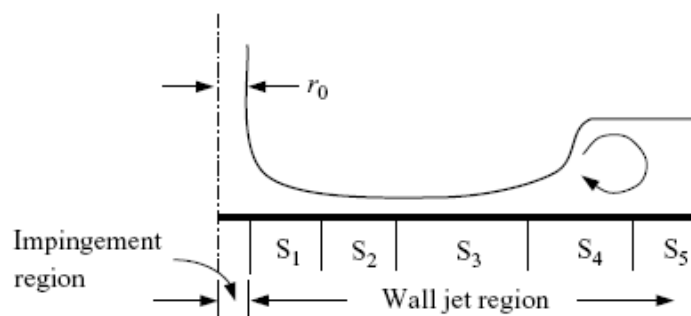


Abb. 1-7 Regionen beim hydraulischen Sprung [24]

Es gibt zahlreiche experimentelle Untersuchungen am hydraulischen Sprung mit dem oben erwähnten Aufbau und dem Fluid Wasser (z.B. [15], [19], [20], [21]). Die Untersuchungen, um ein geeignetes Flüssigmetallexperiment zu definieren, beziehen sich auf die von Steven. Er führte Experimente mit dem Fluid Wasser bei verschiedenen Reynoldszahlen und Geometrieparametern durch und verglich die beobachteten Sprungposition mit bestehenden analytischen Theorien [22]. Die Strahl-Reynoldszahl liegt im Bereich zwischen 20 000 und 50 000. Der Durchmesser des Strahls, der durch die Einlassdüse bestimmt wird, beträgt 7,75 mm und 10,16 mm. Es werden numerische Berechnungen mit Stevens Parametern durchgeführt und die Ergebnisse verglichen. Im Weiteren dienen die Ergebnisse der Simulationen mit Flüssigmetall als Richtlinie für die Durchführung von „in-house“ Experimenten im *Karlsruhe Liquid Metal Laboratory* (KALLA). Auf Basis eines Reynoldszahlen-Vergleichs zwischen den Ergebnissen der Experimente nach Stevens [22] und dem in den Untersuchungen verwendeten Fluid Gallium Indium Zinn wird der Sprungbereich bestimmt und daraufhin die geometrischen Parameter definiert [48].

Frühere theoretische Untersuchungen zum hydraulischen Sprung gehen auf Rayleigh zurück ([25]). Er leitete ein Modell für einen reibungsfreien hydraulischen Sprung her, basierend auf der Erhaltung von Masse und Impuls. Die Erhaltung des Volumenstroms bedingt eine Abnahme der Höhe des Fluids im schießenden Bereich.

Die Gleichgewichtsbeziehung zwischen dem hydrostatischen und dynamischen Druck mit der Fluidichte ρ , der Gravitations g , der Flüssigkeitshöhe z und der Radius abhängigen Geschwindigkeit u_0 bzw. u_1 . Der Index „0“ bzw. „1“ bezeichnet die schießende bzw. fließende Strömung. Die Geschwindigkeiten ergeben sich gemäß (1.3) und (1.4) aus dem Einlassmassenstrom Q_{ein} . Die Höhe kurz vor und nach dem Sprung sind die Größen h und H .

$$\int_0^H \rho \cdot g \cdot dz - \int_0^h \rho \cdot g \cdot dz = \int_0^h \rho \cdot u_0^2(r) \cdot dz - \int_0^H \rho \cdot u_1^2(r) \cdot dz \quad (1.2)$$

$$\rho \cdot g \cdot H - \rho \cdot g \cdot h = \rho \cdot u_0^2 \cdot h - \rho \cdot u_1^2 \cdot H$$

$$u_0 = \frac{Q_{ein}}{2\pi \cdot r \cdot h} \quad (1.3)$$

$$u_1 = \frac{Q_{ein}}{2\pi \cdot r \cdot H} \quad (1.4)$$

Watson betrachtete als Erster den rotationssymmetrischen hydraulischen Sprung eines auftreffenden Wasserstrahls [26]. Er kombinierte den theoretischen Ansatz von Rayleigh mit einer Grenzschichttheorie um eine analytische Beziehung für den Sprungradius eines laminaren und turbulenten hydraulischen Sprungs zu erhalten. Watson schätzt in seiner Theorie das Geschwindigkeitsprofil und die Filmdicke in Abhängigkeit des radialen Abstands zur Sprungposition ab. Bei hinreichend kleinen radialen Abständen nimmt er ein gleichförmiges Geschwindigkeitsprofil an, das durch eine anwachsende Blasius-Grenzschicht verändert wird. Bei größeren Radien erreicht die Blasius-Grenzschicht die freie Oberfläche. Das Geschwindigkeitsfeld wird dann nach Watson durch eine Ähnlichkeitsbeziehung angenommen.

Der Ansatz wird erweitert durch die Betrachtung der Grenzschichtausbreitung relativ zur Position des hydraulischen Sprungs. Watson stellt einen Koeffizienten vor, der es erlaubt, den Radius r_v zu bestimmen, an dem die Grenzschicht die freie Oberfläche der Flüssigkeit erreicht. Die Beziehung ist gegeben durch (1.5), mit dem Einlassdurchmesser a des Strahls und der Einlass-Reynoldszahl Re . Erreicht die Grenzschicht die Flüssigkeitsoberfläche, so wird die Geschwindigkeit geringer und nimmt somit Einfluss auf die Sprungposition des hydraulischen Sprungs. Kurz vor dem Sprung kann das Fluid durch Reibungseinflüsse verzögert werden und die Fluidhöhe steigt wieder leicht an.

$$r_v = 0.315a Re^{1/3} \quad (1.5)$$

Mit der Reynoldszahl Re wird als dimensionslose Kennzahl das Verhältnis der Trägheitskräfte zu den Reibungskräften beschrieben. Zur Ermittlung der Reynoldszahl wird als charakteristische Länge L der Strahldurchmesser a und die Strahlgeschwindigkeit u_{ein} sowie die kinematische Viskosität ν verwendet.

$$Re = \frac{u_{ein} \cdot a}{\nu} \quad (1.6)$$

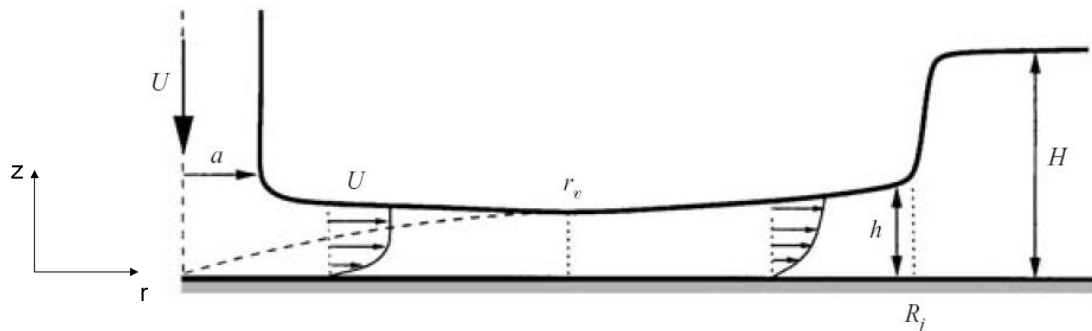


Abb. 1-8 Grenzschicht beim hydraulischen Sprung [26]

Die analytische Beziehung für den Sprungradius R_j nach Watson (1964) [26] ist durch die Gleichungen (1.7) für $r < r_v$ und (1.8) für $r > r_v$, gegeben.

$$\frac{R_j H^2 g a^2}{Q^2} + \frac{a^2}{2\pi^2 R_j H} = \frac{1}{\pi^2} - \frac{\left[560\pi \left(0.239 - \frac{2}{9} \right) \right]^{1/5}}{40\pi^2} \left(\frac{R_j}{a} Re^{-1/9} \right)^{9/5} \quad (1.7)$$

$$\frac{R_j H^2 g a^2}{Q^2} + \frac{a^2}{2\pi^2 R_j H} = \frac{200}{81.14^{1/4} (\pi \cdot 0.239)^{9/4}} \left[\left(\frac{R_j}{a} Re^{-1/9} \right)^{9/4} + \frac{40(1 - 2 \cdot 0.239)}{(7\pi)^{1/4} (2 \cdot 0.239)^{5/4}} \right] \quad (1.8)$$

Der Strahldurchmesser a wird vereinfacht als Düseninnendurchmesser angenommen. Nach Vorgabe der Randbedingungen muss (1.7) bzw. (1.8) nach dem Sprungradius R_j numerisch aufgelöst werden.

Der Vergleich der theoretischen Beschreibung mit Experimenten zeigt sowohl gute als auch schlechte Übereinstimmungen der Sprungpositionen [49]. Die Theorie nach Watson liefert gute Übereinstimmungen mit Experimenten für hydraulische Sprünge, bei denen der Sprung-

radius zehnmal größer ist als die Fluidhöhe nach dem Sprung [27]. Die Übereinstimmung ist weniger zufriedenstellend für schwache Sprünge, bei denen das Verhältnis zwischen Flüssigkeitshöhe vor und nach dem Sprung klein ist [19].

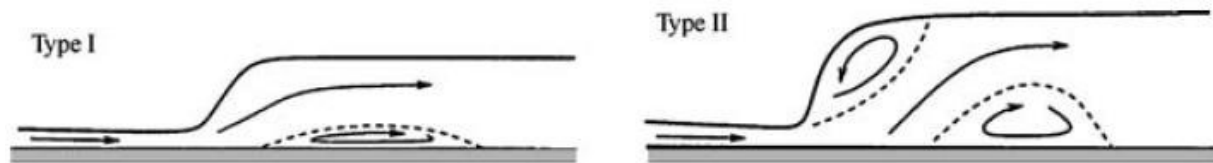


Abb. 1-9 Charakteristische hydraulische Sprünge [14]

Für Typ-1-Sprünge (Abb. 1-9), ist die theoretische Beschreibung nach Watson ausreichend [27]. Craik et al. [27] stellten fest, dass ein Wirbel, der in seiner Größe abhängig vom Abströmbereich ist, elementarer Bestandteil des Sprungs ist. Die Stabilität der Sprungposition hängt von einer kritischen Reynoldszahl im Auslaufbereich ab. Sie zeigen mithilfe von Experimenten, dass eine relativ gute Übereinstimmung für Watsons Theorie bei Sprüngen für einen Sprungradius zehnmal größer als die Fluidhöhe im fließenden Bereich besteht.

Liu und Lienhard [15] folgerten, dass das Modell von Watson für große Fluidhöhen im fließenden Bereich und hohe Froudezahlen im schießenden Bereich schlechte Übereinstimmungen mit Experimenten liefert. Sie begründeten dies mit dem Geschwindigkeitsprofil nach dem Sprung. Experimentelle Untersuchungen zeigten, dass sich direkt nach dem Sprung Rezirkulationswirbel ablösen können, die mit steigender Fluidhöhe zu verschiedenen Formen des hydraulischen Sprungs führen (Abb. 1-10).

Bei einer kleinen Änderung der Höhe zwischen schießenden und fließenden Bereich entsteht ein sanfter Sprung. Mit steigender Sprunghöhe wird der hydrostatische Druck entlang des Sprungprofils größer, was zu einer Rezirkulationszone an der freien Oberfläche am Sprung führt. Dies nimmt Einfluss auf das Geschwindigkeitsprofil nach dem Sprung und ist ein Grund für die Abweichungen der Theorien von Experimenten.

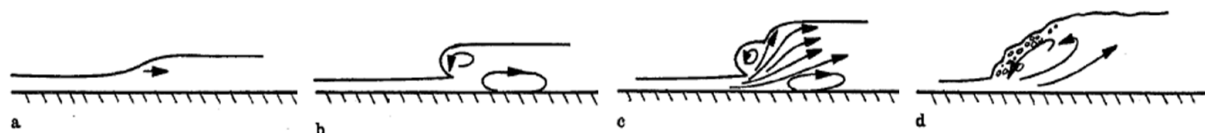


Abb. 1-10 Sprungformen [15]

Bush und Aristoff erweiterten die Theorie mit dem Einfluss der Oberflächenspannung. Die Oberflächenspannung wird relevant, wenn sie vergleichbar zum hydrostatischen Druck ist. Sie wird relevant für

$$B_0 \approx 2 \quad (1.9)$$

Die Bondzahl B_0 ist definiert als Verhältnis von Gravitationskräften zu Oberflächenspannungskräften (1.10) mit ΔH als Sprunghöhe und σ Oberflächenspannungskraft. Die Sprunghöhe $\Delta H=(H-h)$ ist als Differenz der Fluidhöhen vor und nach dem Sprung definiert. Aufgrund der sehr geringen Fluidhöhe im schießenden Bereich lässt sich die Sprunghöhe zu $\Delta H \approx H$ vereinfachen.

$$B_0 = \rho \cdot g \cdot R_j \cdot \Delta H / \sigma \quad (1.10)$$

Bush und Aristoff ergänzen Watsons Theorie, indem sie eine Radialkraft, auch Krümmungskraft genannt, einführen [14]. Die radiale Krümmungskraft F_c ergibt sich entlang eines kreisförmigen hydraulischen Sprungs zu (1.11) mit R_j als Sprungradius, als Bogenlänge s und ΔR als radialem Abstand zwischen Beginn und Ende des Sprungs.

$$F_c = -\sigma(s - \Delta R) / R_j \quad (1.11)$$

Bush und Aristoff zeigen mit Hilfe von Experimenten, dass die Oberflächenspannung vor allem für Sprünge mit kleinem Radius und geringer Höhe im fließenden Bereich für das Fluid Wasser relevant wird. Die Beziehungen von Bush und Aristoff sind definiert durch (1.12) für $r < r_v$ und (1.13) für $r > r_v$ [14],

$$\frac{R_j \cdot g \cdot H^2 \cdot a^2}{Q_{ein}} \left(1 + \frac{2}{B_0}\right) + \frac{a^2}{2\pi \cdot R_j \cdot H} = 0,10132 - 0,1297 \left(\frac{R_j}{a}\right)^{3/2} \text{Re}^{-1/2} \quad (1.12)$$

$$\frac{R_j \cdot g \cdot H^2 \cdot a^2}{Q_{ein}} \left(1 + \frac{2}{B_0}\right) + \frac{a^2}{2\pi \cdot R_j \cdot H} = 0,01676 \left[\left(\frac{R_j}{a}\right)^3 \text{Re}^{-1} + 0,1826 \right]^{-1} \quad (1.13)$$

und besitzen gegenüber den Beziehungen nach Watson ((1.7) und (1.8)) einen Oberflächenspannungseinfluss durch das Hinzufügen der Bondzahl B_0 . Bei Betrachtungen mit Flüssigmetallen ist davon auszugehen, dass aufgrund der hohen Fluidichte und der großen Oberflächenspannungskoeffizienten die Oberflächenspannungskraft eine wesentliche Rolle spielen wird.

1.4 Gliederung der Arbeit

Die Struktur der vorliegenden Arbeit gliedert sich wie folgt: In Kapitel 2 wird eine Übersicht über mathematisch-physikalische Modelle zur Beschreibung von freien Oberflächenströmungen gegeben. Neben allgemeinen physikalischen Grundlagen wird in diesem Kapitel ein Überblick über die gängigsten Modellierungs- und numerischen Methoden gegeben. Am Ende wird auf das in der Arbeit verwendete Verfahren, das „Phasenfeld“ Modell eingegangen.

Im darauf folgenden Kapitel werden die Randbedingungen des Validationsexperiments und des numerischen Modells definiert sowie die Auswertemethoden beschrieben. In Kapitel 4 wird der klassische rotationssymmetrische hydraulische Sprung mit Flüssigmetall betrachtet. Es werden die numerischen Ergebnisse mit den Experimenten verglichen. Darüber hinaus werden aufgrund der Charakteristik von Flüssigmetallströmungen bestehende analytische Beschreibungen der Sprungpositionen erweitert. Im letzten Kapitel wird das Phänomen der Ausbildung von Fingerstrukturen beim rotationssymmetrischen hydraulischen Sprung erörtert. Auf Basis von Kräftebilanzen werden erste theoretische Beschreibungen für das Auftreten von Fingern aufgestellt.

2 Mathematisch-Physikalisches Modell

Strömungen mit freien Oberflächen kommen in einer Vielzahl industrieller Anwendungen vor. Beispiele hierfür sind Dieselinjektoren, Ink-Jet Drucker und das Schwappen von Flüssigkeiten in Behältern. Zweiphasenströmungen besitzen eine komplexe Physik, die eine phänomenologische oder detaillierte Modellierung sowie numerische Simulationen unverzichtbar machen. Bei der numerischen Berechnung freier Oberflächenströmungen wird die deformierbare freie Oberfläche als Teil der Lösung aufgefasst. Die freie Oberfläche ist undurchdringlich und es findet kein Massenübergang zwischen den beiden Phasen statt. Sie muss eine Impulsverträglichkeit in normaler und tangentialer Richtung aufweisen und den Drucksprung aufgrund der Oberflächenspannungskraft berücksichtigen.

2.1 Dynamik freier Oberflächen

Die Grenzfläche wird als Diskontinuität in der Dichte und der Viskosität zwischen den beiden Fluiden betrachtet. Bei inkompressiblen Fluiden wie beispielsweise Flüssigmetallen werden üblicherweise die Dichte und Viskosität für beide Phasen als konstant angenommen. An der Oberfläche soll eine konstante Oberflächenspannungskraft vorliegen.

Bei der numerischen Simulation müssen die Lage der Diskontinuität, respektive der freien Oberfläche, und die Oberflächenspannungen modelliert werden. Die Lage der freien Oberfläche ist abgesehen von der Anfangsbedingung unbekannt und muss in Abhängigkeit der Zeit als Teil der numerischen Lösung bestimmt werden. Wenn, wie oben vorausgesetzt, kein Phasenübergang zwischen den beiden Fluiden stattfindet, ist die Normalgeschwindigkeit an der freien Oberfläche für beide Fluide identisch. Für zwei nicht mischbare Fluide gelten an der Oberfläche folgende Grenzflächenbedingungen:

1. Kinematische Grenzflächenbedingung: Ein Fluidteilchen kann die freie Oberfläche nicht durchdringen.
2. Dynamische Grenzflächenbedingung: Tangentialspannungen an der Oberfläche sind kontinuierlich. Es herrscht ein Sprung der Normalspannungen aufgrund von Oberflächenspannungskräften.

Beim vorliegenden Fall besteht kein Phasenübergang zwischen den Fluiden. Somit können für die freie Oberfläche die kinematische und dynamische Grenzflächenbedingung angenommen werden. An der freien Oberfläche sind die beiden Phasen durch diese Grenzflä-

chenbedingung miteinander verknüpft. Formal ausgedrückt ergibt sich die kinematische Bedingung (2.1), wobei \mathbf{u}_1 und \mathbf{u}_2 die Geschwindigkeitsvektoren der jeweiligen Fluide, sowie \mathbf{n}_1 und \mathbf{n}_2 die zugehörigen Grenzflächennormalenvektoren sind.

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_1 = \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}_2 \quad (2.1)$$

Somit ergibt sich die Geschwindigkeit, mit der sich die freie Oberfläche bewegt, als Normalgeschwindigkeit beider Fluide an der freien Oberfläche

$$\mathbf{u}_s = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_1 = \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}_2 \quad (2.2)$$

Handelt es sich weiter um viskose Fluide, so sind die Tangentialgeschwindigkeiten an der freien Oberfläche für beide Fluide gleich und es gilt:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 \quad (2.3)$$

Die dynamische Randbedingung besagt, dass alle Kräfte, die auf eine freie Oberfläche wirken, im Gleichgewicht sind. Der Druck und die viskosen Spannungen sind im Gleichgewicht mit der Oberflächenkraft bedingt durch die Oberflächenspannungskräfte. Die normalen Kräfte auf einer freien Oberfläche sind vom Betrag her gleich mit gegensätzlichen Richtungen. Die tangentialen Kräfte haben den gleichen Betrag und die gleiche Richtung (2.4), wobei σ die Oberflächenspannung ist und \mathbf{n} und \mathbf{t} die Einheitsvektoren im lokalen Koordinatensystem an der freien Oberfläche, mit dem Spannungstensor \mathbf{T} (2.5), der die molekulare Transportrate des Impulses darstellt [29].

$$\begin{aligned} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{T})_1 \cdot \mathbf{n} &= (\mathbf{n} \cdot \mathbf{T})_2 \cdot \mathbf{n} + \sigma \cdot k \\ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{T})_1 \cdot \mathbf{t} &= (\mathbf{n} \cdot \mathbf{T})_2 \cdot \mathbf{t} + \frac{\partial \sigma}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\mathbf{T} = \left(-p + \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \text{div} \mathbf{u} \right) \mathbf{I} + 2 \cdot \mu \cdot \mathbf{D} \quad (2.5)$$

Mit der dynamischen Viskosität μ , dem Einheitstensor \mathbf{I} , dem statischen Druck p , der Krümmung k und dem Tensor der Deformationsrate \mathbf{D} (2.6).

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \left[\text{gradu} + (\text{gradu})^T \right] \quad (2.6)$$

2.2 Grundlagen: Numerische Strömungsmechanik

2.2.1 Erhaltungsgleichungen

Die kontinuumsmechanischen Erhaltungssätze für Masse, Impuls und Energie bilden die Grundlage der numerischen Strömungssimulation. In allgemeiner Form beschreiben die Erhaltungssätze instationäre, kompressible, dreidimensionale, ein- und zweiphasige Strömungen mit Wärmetransport. Sie basieren auf der Bilanzierung an einem infinitesimal kleinen Volumenelement dV .

Die Kontinuitätsgleichung beschreibt die Massenerhaltung, die besagt, dass Masse weder erzeugt noch vernichtet werden kann. Die zeitliche Änderung der Masse in einem Volumenelement ergibt sich aus den einströmenden Massenströmen in das Volumenelement abzüglich der ausströmenden Massenströme aus dem Volumenelement. Sie lautet für inkompressible Strömungen [30]:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.7)$$

Die Impulserhaltung am Volumenelement dV wird als die Navier-Stokes-Gleichungen bezeichnet. Der Impuls in jedem infinitesimal kleinen Volumenelement dV ändert sich zeitlich über die Impulsströme durch die Oberflächen des Volumenelements, Kräfte auf den Oberflächen des Volumenelements und der auf die Masse des Volumenelements wirkenden Kräfte. Die Navier-Stokes-Gleichungen für inkompressible einphasige laminare Strömungen lauten [10], mit der Volumenkraft \mathbf{f} pro Masse:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \cdot \mathbf{f} \quad (2.8)$$

Für die Druck-Geschwindigkeits-Koppelung in den Navier-Stokes-Gleichungen existieren verschiedene numerische Methoden wie die SIMPLE- [50] und die PISO-Methode [51]. Bei der nachfolgenden Simulationen wurde die PISO-Methode verwendet.

2.2.2 Turbulenzmodellierung

Die Turbulenzmodellierung der freien Oberflächenströmung erfolgt mit einem einphasigen Ansatz. Damit berücksichtigt die Turbulenzmodellierung nicht den Einfluss der freien Oberfläche und den Einfluss von Dichte und Viskositätsgradienten auf die Turbulenz. Dieser Ansatz stellt eine maßgebliche Vereinfachung dar. Oberflächenwellen können bei zu grober Diskretisierung mit diesem Ansatz nicht beschrieben werden. Die Anforderungen an das Turbulenzmodell ist die Simulation von zeitlichen Geschwindigkeits- und Druckvariationen innerhalb einer Zelle.

Die Grundlage der Modellierung bildet der Ansatz nach Reynolds, der besagt, dass sich eine Strömungsgröße ϕ in einen zeitlichen Mittelwert und der dazugehörigen Schwankungsgröße aufteilen lässt. Gemittelte Werte werden mit einem Querstrich über der Variable und Schwankungswerte mit einem Strich gekennzeichnet

$$\phi = \bar{\phi} + \phi' \quad (2.9)$$

Den zeitlichen Mittelwert erhält man aus der Reynolds-Mittelung

$$\bar{\phi} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \phi(\tau) d\tau \right) \quad (2.10)$$

Wendet man die Mittelung (2.9) und (2.10) auf die Erhaltungsgleichungen (2.8) an, so erhält man die inkompressiblen Reynoldsgleichungen (hier ohne zusätzliche Volumenkräfte) und zu (2.11), mit der Kontinuitätsgleichung (2.12) [13].

$$\frac{\partial \overline{(\mathbf{u} + \mathbf{u}')}}{\partial t} + \overline{(\mathbf{u} + \mathbf{u}')} \cdot \nabla \overline{(\mathbf{u} + \mathbf{u}')} = -\frac{1}{\rho} \nabla \overline{(p + p')} + \nu \nabla^2 \overline{(\mathbf{u} + \mathbf{u}')} \quad (2.11)$$

$$\nabla \cdot \overline{(\mathbf{u} + \mathbf{u}')} = 0 \quad (2.12)$$

mit

$$\overline{(\mathbf{u} + \mathbf{u}')} = \bar{\mathbf{u}} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \overline{(\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}') \cdot \nabla (\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}')} &= \overline{\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{u}' + \mathbf{u}' \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{u}'} \\ &= \overline{\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}' \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}} \end{aligned} \quad (2.14)$$

resultiert in den stationären Reynolds'schen Gleichungen

$$\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} = -\frac{1}{\rho} \nabla \bar{p} + \nu \nabla^2 \bar{\mathbf{u}} - \overline{\mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{u}'} \quad (2.15)$$

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (2.16)$$

Die zusätzlichen Terme in der Impulserhaltung (2.15) sind die Schwankungsterme, welche als Reynoldsspannungen bezeichnet werden. Sie lassen sich ausdrücken durch [1]:

$$\tau^t = -\rho \cdot \overline{\mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}'} \quad (2.17)$$

In Matrixschreibweise lautet der Reynoldsspannungstensor:

$$\tau = -\rho \cdot \begin{pmatrix} \overline{u'_1 \cdot u'_1} & \overline{u'_1 \cdot u'_2} & \overline{u'_1 \cdot u'_3} \\ \overline{u'_2 \cdot u'_1} & \overline{u'_2 \cdot u'_2} & \overline{u'_2 \cdot u'_3} \\ \overline{u'_3 \cdot u'_1} & \overline{u'_3 \cdot u'_2} & \overline{u'_3 \cdot u'_3} \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Um das Gleichungssystem (2.15)-(2.16) zu schließen, ist der Reynoldsspannungstensor zu bestimmen. Beim Wirbelviskositätsansatz werden die Austauschvorgänge der Turbulenz durch eine turbulente Viskosität modelliert. Für die Reynoldsspannungen (2.17) ergibt sich mit dem Boussinesq-Ansatz die Beziehung nach (2.19), mit der turbulenten Zähigkeit μ_t , dem Kroneckerdelta δ_{ij} mit $\delta_{ij} = 1$ für $i = j$ und $\delta_{ij} = 0$ für $i \neq j$ und der turbulenten kinetischen Energie pro Masse K (2.20).

$$-\rho \cdot \overline{u'_i \cdot u'_j} = \mu_t \cdot \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \cdot \rho \cdot K \cdot \delta_{ij} \quad (2.19)$$

$$K = \frac{1}{2} \cdot \overline{u'_i \cdot u'_i} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overline{u'^2_1} + \overline{u'^2_2} + \overline{u'^2_3} \right) \quad (2.20)$$

Im Folgenden wird ein Überblick über die in der Arbeit verwendeten Turbulenzmodelle gegeben. Die durchgeführten Variationsrechnungen der Turbulenzmodelle werden im Hinblick auf Ablöse- und Sekundärwirbelerscheinungen verglichen. Die gängigen Turbulenzmodelle wurden nicht für freie Oberflächenströmungen entwickelt. Ziel des Variantenvergleiches ist es, ein Turbulenzmodell zu finden, das die Struktur im Sprungbereich wiedergibt. Im Vergleich zum Experiment wird als Anforderung eine gute Übereinstimmung in der Sprunghöhe und im Sprungverlauf gefordert. Der Sprungverlauf soll die Charakteristik eines flachen bzw. stufigen Sprungs aufweisen. Folgende Zweigleichungsturbulenzmodelle finden in den Variationsrechnungen Anwendung:

- I. Standard k - ε Turbulenzmodell
- II. k - ω -SST Turbulenzmodell
- III. RNG k - ε Turbulenzmodell
- IV. Launder-Sharma k - ε Turbulenzmodell
- V. Nicht lineares k - ε Turbulenzmodell nach Shih
- VI. Lien kubisches nicht lineares k - ε Turbulenzmodell.

Bei dem Standard k - ε Turbulenzmodell nach Launder und Spalding 1973 [31] sind die Transportgleichungen für die kinetische Energie k und die Dissipationsrate ε nach (2.22) und (2.23) definiert. Die Wirbelviskosität ist gegeben durch (2.21).

$$\mu_t = C_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot k) = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \left(\frac{\mu_t}{\sigma_k} \nabla k \right) + 2 \frac{\mu_t}{\rho} |\nabla \cdot \mathbf{u}| - \varepsilon \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \varepsilon) = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \left(\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \nabla \varepsilon \right) + 2 \frac{C_1 \mu_t}{\rho} |\nabla \cdot \mathbf{u}|^2 \frac{\varepsilon}{k} - C_2 \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (2.23)$$

Die Modellkonstanten sind: $C_{\varepsilon 1} = 1,44$; $C_{\varepsilon 2} = 1,92$ und $\sigma_{\varepsilon} = 1,3$. Die Modellierung der wandnahen Strömung erfolgt durch Wandfunktionen, so dass sich ein vergleichsweise geringer numerischer Aufwand ergibt. Beim Standard $k-\omega$ Turbulenzmodell, wird die turbulente kinetische Energie k und die spezifische Dissipationsrate ω der Wirbel numerisch gelöst (2.24). Die Transportgleichung mit den Koeffizienten sind in Anhang C dargestellt.

$$\omega = \frac{1}{C_{\mu}} \frac{\varepsilon}{k} \quad (2.24)$$

Das $k-\omega$ SST Turbulenzmodell nach Menter [69] ist ein Zweigleichungs-Wirbelviskositätsmodell. Es kombiniert das $k-\varepsilon$ und das $k-\omega$ Turbulenzmodell und vereint die Vorteile des $k-\varepsilon$ Turbulenzmodell im freien Strömungsbereich und des $k-\omega$ Turbulenzmodell im inneren Bereich der Wandgrenzschicht. Die Transportgleichungen und die kinematische Wirbelviskosität sind dem Anhang C zu entnehmen.

Das RNG $k-\varepsilon$ Turbulenzmodell basiert auf dem Standard $k-\varepsilon$ Turbulenzmodell und verwendet die „Renormalization-Group-Methode“. Die Renormalisierung der Navier-Stokes-Gleichungen berücksichtigt Effekte von kleinen Bewegungsskalen. Die Methode wird auf die großen Wirbel angewendet und die Wirkung der kleinen Wirbel über einen modifizierten Konvektionsterm berücksichtigt [32]. Im Gegensatz zum Standard $k-\varepsilon$ Turbulenzmodell wird die Wirbelviskosität nicht mithilfe einer einzigen turbulenten Längenskala, sondern durch verschiedene Bewegungsskalen aus den Veränderungen des Produktionsterms abgeleitet. Die Transportgleichungen für k und ε beim RNG $k-\varepsilon$ Turbulenzmodell sind im Anhang C dargestellt.

In dem Niedrig-Reynoldszahl $k-\varepsilon$ Turbulenzmodell nach Launder – Sharma [71] wurde das Standard $k-\varepsilon$ Modell verändert, um den Übergang bis in die laminare Unterschicht in Wandnähe zu berücksichtigen. Beim nicht linearen $k-\varepsilon$ Turbulenzmodell nach Shih et al. [73] erhält man die turbulente Viskosität in einer ähnlichen Weise wie beim Standard $k-\varepsilon$ Turbulenzmodell, jedoch sind $C_{1\varepsilon}$ und C_{μ} keine Konstanten, so dass nicht isotrope Strömungen besser beschrieben werden [74]. Das kubische Turbulenzmodell nach Lien et al. [72] basiert auf dem nicht linearen quadratischen Modell nach Shih et al.[73] und wurde durch kubische Terme und einen Niedrig-Re-Ansatz erweitert. Das Modell eignet sich besonders für Strömungen mit starken Druckgradienten. Die Transportgleichungen und die Beziehungen für die turbulente Wirbelviskosität sind dem Anhang C zu entnehmen.

Die Größen der turbulenten kinetischen Energie k und die Dissipation ε , werden am Einlass nach Kapitel 2.4.1 an der Einlassdüse vorgegeben. Die Größe ω der energiedissipierenden Wirbel ergibt sich nach

$$\omega = \frac{\sqrt{k}}{L}$$

(2.25)

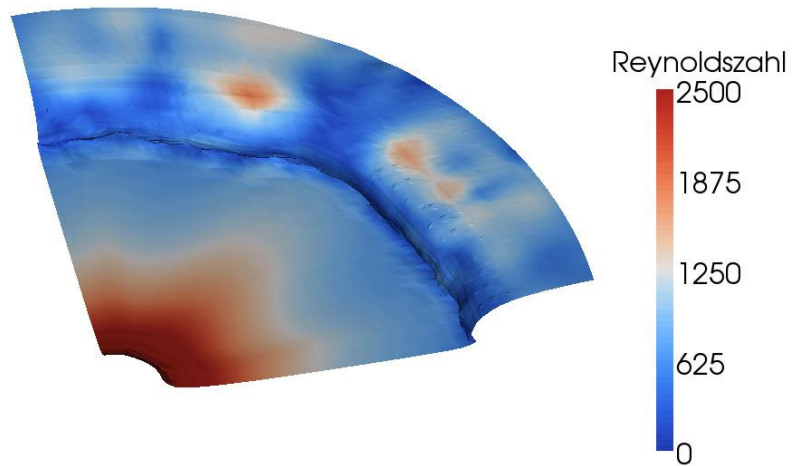


Abb. 2-1 Reynoldszahl-verlauf

Abb. 2-1 zeigt den typischen Reynoldszahlenverlauf auf der Oberfläche des hydraulischen Sprung mit dem Fluid Gallium Indium Zinn. Durch Rezirkulations- und Ablösegebiete bilden sich nach dem Sprung instationäre Gebiete höherer Reynoldszahlen aus.

2.3 Grundlagen: Modellierung von Zweiphasenströmungen

Die Methoden für die Modellierung von Zweiphasenströmungen mit freien Oberflächen können in zwei Gruppen eingeteilt werden: in Methoden mit einem festen Gitter („Fixed Grid Methods“) und Methoden mit einem bewegten Gitter („Moving Grid Methods“) (Abb. 2-2 und Abb. 2-3).

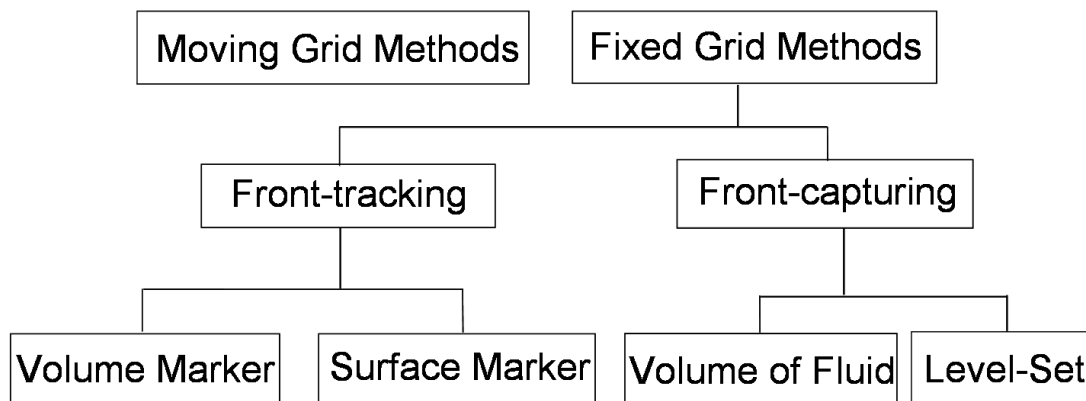


Abb. 2-2 Modellierungsmethoden für freie Oberflächen

Bei den Methoden mit bewegtem Gitter wird die Grenze zwischen zwei Gittern benutzt, um die freie Oberfläche darzustellen [34]. Das Gitter wird mit der Fluidgeschwindigkeit bewegt, weshalb deformierbare Gitter benötigt werden [35]. Jede Phase belegt somit einen definierten Bereich des numerischen Netzes. Für die Netzbewegung werden definierte Netzpunkte benötigt, die die Netzbewegung in Abhängigkeit der Deformation der freien Oberfläche beschreiben. Die Bewegung des Netzes innerhalb der Fluide wird typisch durch Lösen einer Laplace-Gleichung beschrieben, mit einem diffusiven Feld γ und der Grenzflächengeschwindigkeit \vec{u}_p [36]

$$\nabla \cdot (\gamma \cdot \nabla \vec{u}_p) \quad (2.26)$$

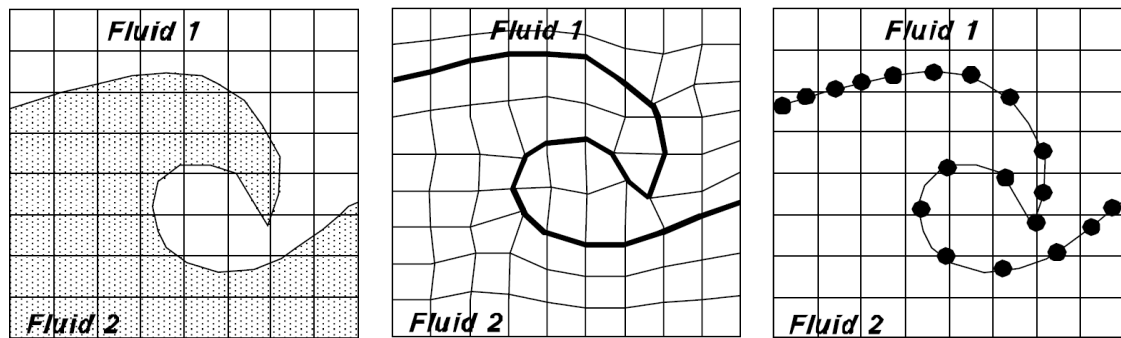


Abb. 2-3 Methoden für die Bestimmung freier Oberflächen [53]

Der Vorteil von Methoden mit bewegten Gittern liegt in der sehr genauen und scharfen Wiedergabe der freien Oberfläche und der Massenerhaltung. Die freie Oberfläche wird explizit durch das Gitter dargestellt. Die Methode erlaubt die unmittelbare numerische Umsetzung von Grenzflächenbedingungen an der freien Oberfläche und kann somit Probleme mit hohen Oberflächenspannungseinflüssen lösen. Des Weiteren lässt diese Methode die Betrachtung von nur einer Phase zu, wenn der Einfluss der zweiten vernachlässigbar gering ist.

Schwierigkeiten können bei großen Deformationen des Gitters auftreten, die ein Neuvernetzen notwendig machen. Dieses Neuvernetzen des Rechengebiets führt zu Interpolationsungenauigkeiten, da die Ergebnisse des alten Netzes auf das Neue abgebildet werden müssen. Die Methode benötigt darüber hinaus einen großen rechnerischen Aufwand resultierend aus der Punkteverwaltung des Gitters [34].

Bei den Methoden mit festem Gitter beschreiben mathematische Modelle die Position der freien Oberfläche auf einem Euler'schen Gitter. Diese Methoden benutzen ein einzelnes Kontinuum mit einer Behandlung der freien Oberfläche als Sprung in den Fluideigenschaften der Viskosität und Dichte. Diese implizite Darstellung der Grenzfläche erfordert häufig eine Rekonstruktion der freien Oberfläche, basierend auf Indikatorfunktionen, die die Zugehörigkeit eines Punktes zu den einzelnen Phasen festlegen. Der Vorteil von Methoden mit festen Gittern liegt in der sehr schnellen Berechnung.

Abhängig von einer impliziten oder expliziten Darstellung der freien Oberfläche werden die verwendeten Advektionsschemata wiederum in zwei Gruppen unterteilt: Implizite Methoden oder auch sogenannte „Front-Capturing“ Methoden sind die Level-Set-Methode und die Volumenanteilsfunktion [37], [38].

Die Level-Set-Methode beschreibt die freie Oberfläche als eine Isokontur der Level-Set-Funktion. Die Funktion ist auf dem gesamten Rechengebiet gültig und definiert als der kür-

zesten Abstand jedes Punktes zur freien Oberfläche. Die freie Oberfläche wird durch die Isokontur des Abstands null wiedergegeben. Die beiden Fluide werden formal unterschieden durch einen positiven bzw. negativen Abstand zu der freien Oberfläche. Die Ausbreitung der Level-Set-Funktion und somit der freien Oberfläche wird durch eine Advektionsgleichung beschrieben, der die lokale Fluidgeschwindigkeit zugrunde legt [54], [55]. Der Vorteil dieser Methode liegt in der einfachen Implementation in zwei oder drei Raumdimensionen und der genauen Wiedergabe der freien Oberfläche und deren Krümmung. Dies ermöglicht eine gute Berechnung der Oberflächenspannungskräfte. Probleme der Methode sind auf die Abstandsfunktion zurückzuführen. Die ursprüngliche Funktion behält nicht die Form einer Abstandsfunktion bei. Dies liegt zum einem an der Benutzung von Diskretisierungsverfahren, die stets zu numerischer Diffusion führen. Abhilfe können Diskretisierungsverfahren hoher Ordnung wie das WENO- oder ENO-Verfahren bringen ([75], [76]). Zum anderen ist die Level-Set-Funktion bestrebt, die Abstandsfunktion und ihre minimalen und maximalen Werte beizubehalten, was z.B. beim Verschmelzen zweier Blasen zu sehr steilen Gradienten führt. Dies macht eine Reinitialisierung der Abstandseigenschaft nach jedem Zeitschritt notwendig [56]. Der größte Nachteil besteht darin, dass die Level-Set-Funktion nicht konservativ ist und zu Massenverlusten in der einen oder anderen Phase führt. Probleme können auch bei Oberflächenzerfall und Wiedervereinigung entstehen, da kleinskalige Strukturen entstehen können, die nicht vom numerischen Gitter aufgelöst werden können.

Bei der Volumenanteilsfunktion wird eine charakteristische Indikatorfunktion verwendet, mit deren Hilfe der Volumenanteil eines Fluids in einer Zelle bestimmt wird. Die Methode verwendet eine skalare Indikatorfunktion, die Werte zwischen null und eins annimmt (Abb. 2-4). Der Wert null kennzeichnet das Fluid eins und der Wert eins das Fluid zwei. Dazwischenliegende Werte beschreiben das Transitionsgebiet endlicher Dicke, welche die freie Oberfläche enthält. Bei der Volume-of-Fluid-Methode (VoF Methode) ist nur der Volumenanteil für jene Zellen zu lösen, die die Grenzfläche enthalten. Die Volumenanteilsfunktion kann Zerfall und Wiedervereinigung der freien Oberfläche simulieren. Die Methode bietet eine Möglichkeit für die Zweiphasensimulation ohne relevant vergrößerten Rechen- und Verwaltungsaufwand gegenüber Ein-Fluid-Simulationen. Die zeitabhängige numerische Diffusion der freien Oberfläche bei Diskretisierungsverfahren niedriger Ordnung wie Euler-Upwind ist ein Nachteil dieser Methode, was zusätzliche Verfahren zur Erhaltung der Auflösung der freien Oberfläche notwendig macht [77]. Die bekannteste Volumenanteilmethode ist die Volume-of-Fluid-Methode (VoF) von Hirt und Nichols [40], die ein Donor-Akzeptor-Schema zur Rekonstruktion der freien Oberfläche verwendet. Die VoF-Methode ist das häufigste Verfahren für die numerische Simulation von freien Oberflächenströmungen. Aufgrund der robusten Methode ist sie auch Bestandteil vieler kommerzieller CFD-Programme.

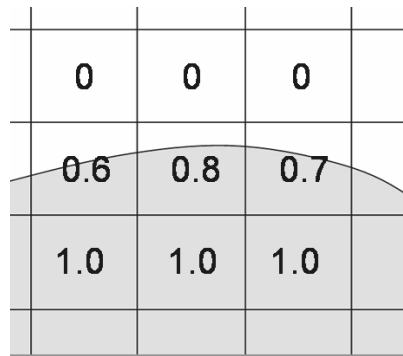


Abb. 2-4 Volumenindikatorfunktion

Die expliziten oder auch „Front-Tracking“ genannten Methoden verwenden für die Beschreibung der freien Oberfläche Markerpartikel in der Simulation [39]. Es gibt zwei Möglichkeiten, mit Partikeln die Oberfläche zu bestimmen: die Volumenmarker und die Oberflächenmarker. Bei Letzterem wird die freie Oberfläche durch spezielle masselose Markerteilchen auf der selbigen bestimmt. Die lokalen Geschwindigkeitsfelder dienen zur Advektion der masselosen Markerteilchen in einer Lagrange'schen Beschreibung. Die Position der freien Oberfläche wird durch eine Interpolation zwischen den Markerpartikeln dargestellt. Dies geschieht gewöhnlich durch eine stückweise polynomische Interpolation [78]. Die Markerteilchen ändern im Lauf der Rechnung ihren Abstand zueinander. Probleme der Methode treten auf, wenn sich der Abstand der Markerteilchen zueinander zu stark verändert. Bei großen Abständen zwischen den Partikeln wird die Oberfläche nicht genügend aufgelöst. Bei zu kleinen Abständen können lokale Fluktuationen zu hohen Krümmungswerten führen, die in einer starken Oberflächenspannungskraft resultieren [53]. Dies macht einen zusätzlichen Algorithmus für das Hinzufügen und Löschen von Markerteilchen notwendig, wobei sich aufgrund der Punkteverwaltung und Zuordnung der Rechenaufwand vergrößert. Oberflächenmarker sind genaue Methoden, da sie die freie Oberfläche exakt durch die Partikel auf dieser bestimmen. Der genauen Wiedergabe der freien Oberfläche steht ein großer Verwaltungsaufwand der gespeicherten Punkte gegenüber.

Bei den Volumenmarkermethoden werden masselose Partikel, verteilt in einem Fluid, benutzt, um die freie Oberfläche darzustellen. Die ursprüngliche Volumenmarkermethode MAC („Marker and Cell“) von Harlow & Welch [57] verwendet Markerteilchen für die Lokalisierung des Fluids. Zellen mit Markerteilchen enthalten das Fluid, Zellen ohne Markerteilchen enthalten kein Fluid. Besitzt eine Zelle mit Markerteilchen eine Nachbarzelle ohne Markerteilchen, so ist dadurch die Position der freien Oberfläche bestimmt. Daly [58] erweiterte die Methode durch eine Zwei-Fluid-Betrachtung: Die masselosen Volumenmarkerteilchen besitzen eine Beziehung zu dem jeweiligen Fluid, das sowohl eine Beschreibung der freien Oberfläche als auch eine fluidabhängige Dichte- und Viskositätsberechnung ermöglicht. Aufgrund der hohen

Anzahl zu verwendender Markerteilchen liegt der Nachteil von Volumenmarkermethoden in dem sehr großen Verwaltungs- und Rechenaufwand für dreidimensionale Geometrien.

Der Vorteil in der sehr guten Behandlung des Aufbrechens und Zerfalls der freien Oberfläche sowie in der Verwendung eines statischen Netzes für effiziente Simulationen. Der Nachteil ist die ungenaue Behandlung der freien Oberfläche was zu unerwünschten Strömungen und ungenauen Oberflächengleichgewichten führt. Die Methode ist bezüglich der behandelbaren Dichteunterschiede und Oberflächenspannungstermen begrenzt. Es ist erforderlich, immer beide Phasen in den Berechnungen zu berücksichtigen.

2.3.1 „Phasenfeld“ Modell

In der vorliegenden Arbeit wird für die numerische Analyse der freien Oberflächenströmung ein homogenes Modell im numerischen Strömungsmechanikcode OpenFOAM verwendet. Dieses Modell basiert auf der klassischen Volume-of-Fluid-Methode von Hirt und Nichols [40]. Die Methode identifiziert das Fluid mit Größen von eins und null und Werten dazwischen, dem sogenannten Transitionsgebiet.

Die Position der freien Oberfläche ist bei den Phasenfeld Modellen nicht exakt beschrieben und muss aus den Indikatorvariablen im Raum Ω rekonstruiert werden. Die Indikatorfunktion ist definiert als das Verhältnis der Fluide in einem Zellvolumen (2.27)

$$\gamma(\Omega, t) = \frac{\text{Fluidvolumen}}{\text{Zellvolumen}} \quad (2.27)$$

Bei dem Singel-Kontinuumsansatz werden beide Fluide im Rechengbiet als ein Fluid mit variablen Stoffwerten betrachtet. Die Werte null und eins beschreiben das Vorliegen der jeweiligen Fluide.

$$\gamma(\Omega, t) = \begin{cases} \gamma(\Omega, t) = 1 & \text{Fluid 1} \\ 0 < \gamma(\Omega, t) < 1 & \text{Transition} \\ \gamma(\Omega, t) = 0 & \text{Fluid 2} \end{cases}$$

Die freie Oberfläche wird nicht diskret beschrieben und muss mithilfe der Indikatorvariablen γ rekonstruiert werden. Die Fluideigenschaften der Dichte und der Viskosität sind an der freien Oberfläche unstetig. Der Sprung in den Fluideigenschaften wird mithilfe der Indikatorfunktion bestimmt. Die variable Dichte und Viskosität werden mittels der beiden Fluidichten ρ_1 und ρ_2 zu (2.28) und (2.29) definiert.

$$\rho(\gamma) = \gamma \cdot \rho_1 + (1 - \gamma) \cdot \rho_2 \quad (2.28)$$

$$\mu(\gamma) = \gamma \cdot \mu_1 + (1 - \gamma) \cdot \mu_2 \quad (2.29)$$

Die Indikatorfunktion breitet sich im Rechenraum als unveränderliche Lagrange'sche Größe aus. Sie wird durch eine hyperbolische Transportgleichung nach (2.30) beschrieben [52], mit \mathbf{u} als dem zugrunde liegenden Geschwindigkeitsfeld

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \gamma = 0 \quad (2.30)$$

Die Ausbreitung des Fluids wird durch die Erhaltungsgleichung von Masse und Impuls mit den variablen Stoffwerten (2.28) und (2.29) berechnet. Die Advektionsgleichung (2.30) führt bei Diskretisierungsverfahren niedriger Ordnung aufgrund ihrer numerischen Diffusivität zu einer zeitabhängigen Verschmierung der freien Oberfläche. Numerische Diskretisierungsverfahren höherer Ordnung führen zu instabilen Ergebnissen, die in Oszillationen resultieren. Des Weiteren zeigte Lafaurie, dass die VoF-Methode bei der Form der freien Oberfläche zu unphysikalischen Deformationen führen kann [61]. Das Phasenfeld-Modell mit der Indikatorfunktion γ benötigt für eine scharfe und genaue Wiedergabe der freien Oberfläche zusätzliche Operatoren die der numerischen Diffusion entgegen wirken. Die gebräuchlichsten Methoden sind [79]:

- Simple Line Interface Calculation (SLIC)
- Donor Akzeptor Methode
- CICSAM Methode
- Flux Corrected Transport Method
- Compressive Scheme

Die SLIC-Methode („Simple Line Interface Calculation“) von Noh & Woodward [59] rekonstruiert die freie Oberfläche mithilfe von Linien, die parallel zu den Gitterlinien des strukturierten Netzes sind. Die Fluidverteilung in einer Zelle wird mithilfe der Volumenverteilung des Fluids in den Nachbarzellen bestimmt. Youngs [60] erweitert die Methode, indem er die Rekonstruktion mit geneigten Linienelementen verwirklicht (PLIC). Beide Rekonstruktionsme-

thoden wurden jedoch noch nicht auf unstrukturierten Gittern angewendet. Der Nachteil der PLIC-Methode („Piecewise Linear Interface Calculation“) liegt darin, dass die Ebenen, welche die freie Oberfläche repräsentieren, an den Zellrändern nicht mit den Nachbarebenen übereinstimmen [28]. Der Nachteil des Verfahrens liegt in der Beschreibung von Liniensegmenten, was ein strukturiertes Netz voraussetzt.

Die Donor-Akzeptor-Methode basiert darauf, dass die Volumenverteilung einer Zelle mithilfe der stromauf gelegenen Zelle bestimmt wird [40], woraus sich die Liniensegmente zur Oberflächenrekonstruktion ableiten lassen. Hirt und Nichols erweiterten die Donor-Akzeptor-Methode durch Berücksichtigung der Steigung der freien Oberfläche, mit deren Hilfe sich automatisch zwischen „Downwinding“ und „Upwinding“ wechseln lässt.

Abb. 2-5 zeigt eine Verbesserung der freien Oberflächenwiedergabe durch ein adaptives Netz. Mithilfe der Volumenindikatorfunktion γ wird das Netz während der numerischen Simulation iterativ im Bereich der freien Oberfläche verfeinert. Dies geschieht sowohl im Transitionsbereich als auch in den Nachbarzellen. Der Nachteil der Methode liegt in einem sehr hohen Rechenaufwand. In jedem Zeitschritt wird das Rechengebiet neu vernetzt und die Ergebnisse auf das neue Gitter interpoliert. Parameterstudien mit den Randbedingungen des rotationssymmetrischen hydraulischen Sprungs mit Gallium Indium Zinn zeigen, dass Rechnungen mit adaptiven Netzen eine ungefähr achtmal geringere Courantzahl gegenüber Netzen mit festem Gitter benötigen. Die Courantzahl ist ein Stabilitätskriterium der Diskretisierung und ist definiert als das Verhältnis zwischen dem Produkt der Geschwindigkeit u und der Zeitdiskretisierung Δt zur Ortsdiskretisierung Δx . Die sehr kleine Courantzahl ($Co \approx 0,1$ und weniger) verlängert die Rechenzeit zusätzlich zu dem Vernetzungs- und Interpolationsaufwand beträchtlich. Somit stellt sich die Methode als nicht geeignet heraus.

$$Co = \frac{u \cdot \Delta t}{\Delta x} \tag{2.31}$$

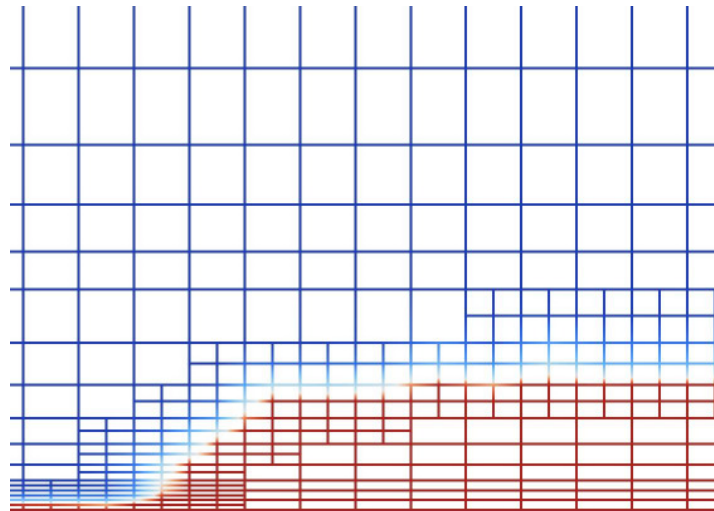


Abb. 2-5 Adaptives Netz

Verfahren höherer Ordnung zur Diskretisierung der konvektiven Advektionsgleichung vermeiden eine Verschmierung des Transitionsgebiets durch numerische Diffusion. Ein Ansatz für ein der Diffusion entgegenwirkendes Diskretisierungsverfahren ist das CICSAM-Verfahren (Compressive Interface Capturing Scheme für Arbitrary Meshes) von Ubbink [53]. Dieses Verfahren zeigt jedoch Probleme bei Strömungen mit hohen Oberflächenspannungen und neigt dazu, die Oberfläche zu zerknittern. Die CICSAM-Methode verwendet ein Diskretisierungsschema, das eine Mischung aus Upwind-Differenzierungsverfahren und einem Verfahren höherer Ordnung ist. Die CICSAM-Methode benutzt einen Prädiktor-Korrektor-Verfahren, das die Beschränkung der Indikatorvariable gewährleistet [53].

Die „Flux-Corrected-Transport“-Methode kombiniert ein Diskretisierungsverfahren höherer Ordnung mit einem Verfahren niedriger Ordnung. Der Nachteil bei Verfahren höherer Ordnung bezüglich der numerischen Stabilität wird durch einen zusätzlichen antidiffusiven Fluss-term niedriger Ordnung kompensiert.

In der vorliegenden Arbeit wird in der Advektionsgleichung (2.30) der Indikatorvariablen γ ein nur auf den Transitionsbereich wirkender Kompressionsterm eingeführt. Diese zusätzliche Kompression wirkt der numerischen Diffusion entgegen und ermöglicht eine scharfe Wiedergabe des Transitionsgebiets [41] (2.32).

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \gamma + \nabla \cdot (\mathbf{u}_r \cdot \gamma(1 - \gamma)) = 0 \quad (2.32)$$

Der Geschwindigkeitsterm \mathbf{u}_r im Kompressionsterm ist ein Geschwindigkeitsfeld, das der Verschmierung des Transitionsbereichs entgegenwirkt. Aufgrund des Faktors $\gamma(1-\gamma)$ wirkt dieser Geschwindigkeitsterm nur im Transitionsbereich [41] und beeinflusst das Gebiet außerhalb des Transitionsbereichs unwesentlich. Die Kompressionsgeschwindigkeit \mathbf{u}_r erreicht den größten Geschwindigkeitswert im Transitionsbereich und wirkt senkrecht auf die freie Oberfläche. Die Kompressionsgeschwindigkeit ist definiert durch (2.33) mit einem empirischen Faktor $K_c=1,5$, der die Größe der Kompression bestimmt und dem Oberflächenvektor \mathbf{S} .

$$\mathbf{u}_r = K_c \cdot \mathbf{n} \cdot \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})}{|\mathbf{S}|^2} \quad (2.33)$$

Für die Diskretisierung der Advektionsgleichung der Indikatorvariablen wird ein kombiniertes Upwind- und zentrales Differenzenverfahren verwendet (2.34). Das zentrale Differenzenverfahren wird im Transitionsgebiet benutzt, um die numerische Diffusion des Gebiets zu reduzieren. Die Variable Γ nimmt analog zur Indikatorfunktion Werte zwischen 0 und 1 an, so dass der Fluss ϕ_f gewichtet aus einem Upwind- und zentralem Differenzenverfahren berechnet wird.

$$\phi_f = (1-\Gamma)(\phi_f)_{UD} + \Gamma(\phi_f)_{CD} \quad (2.34)$$

Im Folgenden wird ein Standard-„Dambruch“-Simulation nach Martin und Moyce [80] mit den Randbedingungen nach Abb. 2-6 und den Advektionsgleichungen (2.30) und (2.32) als Testfall durchgeführt.

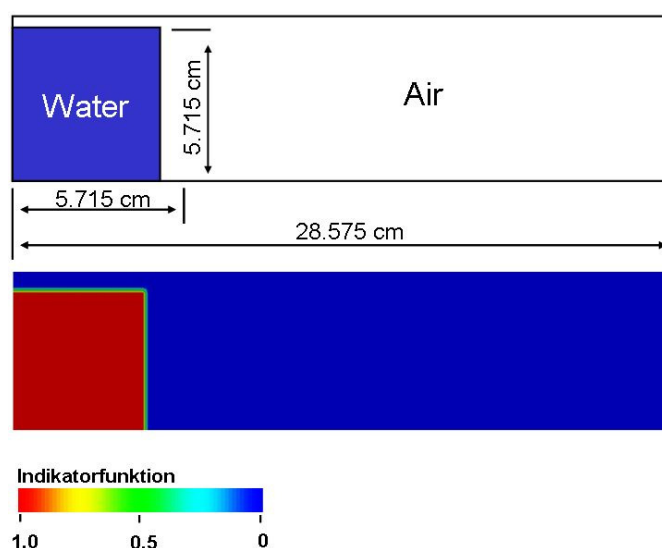


Abb. 2-6 Dambruch Problem Randbedingungen

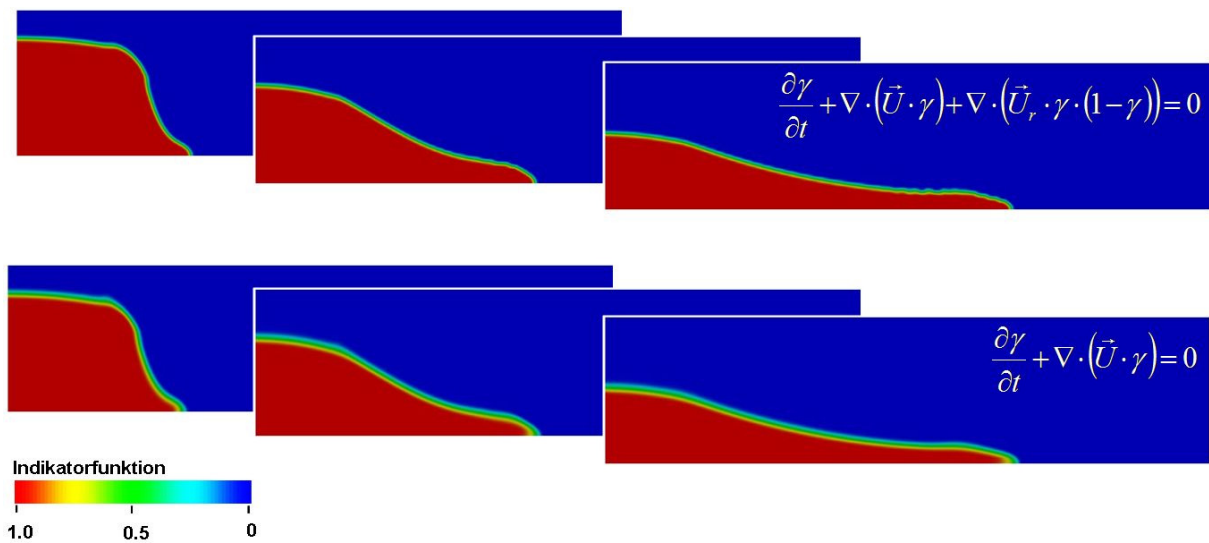


Abb. 2-7 „Dammbruch“ Simulation

In Abb. 2-7 ist der Einfluss des zusätzlichen Kompressionsterm deutlich zu erkennen. Der Term unterdrückt wirkungsvoll die numerische Verschmierung.

Die Oberflächenspannung wird bei der Modellierung mithilfe des “Continuum-Surface-Force”-Modell (CSF) von Brackbill et al. berücksichtigt [81]. Die freie Oberfläche wird durch eine Transitionsregion ersetzt, in der die Oberflächenspannung des Fluids über ein paar Zellen in der Nähe der freien Oberfläche verschmiert wird (Abb. 2-8). Diese Methode vermeidet Diskontinuitäten im Druckverlauf an der freien Oberfläche und dadurch die Notwendigkeit einer genauen Wiedergabe der Krümmung.

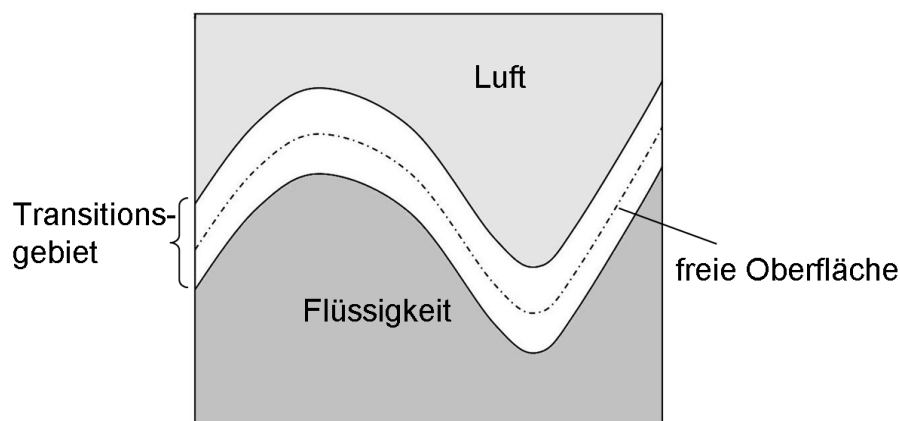


Abb. 2-8 Transitionsgebiet Oberflächenspannung

Die Krümmung der freien Oberfläche wird mithilfe der Indikatorfunktion γ ermittelt. Sie ist gegeben durch die Divergenz des Normalenvektors (2.35) zu (2.36).

$$\mathbf{n} = \left(\frac{\nabla \gamma}{|\nabla \gamma|} \right) \quad (2.35)$$

$$\kappa = \nabla \cdot \mathbf{n} \quad (2.36)$$

Das CSF-Modell verwendet eine kontinuierliche volumetrische Kraft f_σ , die auf das Übergangsgebiet wirkt und die Oberflächenspannungskraft repräsentiert(2.37).

$$f_\sigma = \frac{1}{\rho} \cdot \sigma \cdot \kappa \cdot \nabla \gamma \quad (2.37)$$

Die Verwendung einer volumetrischen Kraft vermeidet Sprünge im Oberflächenspannungsverlauf des mathematischen Modells und führt bei großen Gradienten der Oberflächenspannung zu numerisch stabilen Berechnungen.

2.4 Numerische Methode

Im Folgenden wird die numerische Simulation des rotationssymmetrischen hydraulischen Sprungs mit seinen Rand- und Anfangsbedingungen dargestellt.

2.4.1 Integrationsgebiet und Randbedingungen

Das Integrationsgebiet und die Randbedingungen sind wie folgt definiert: Die Rotationssymmetrie des hydraulischen Sprungs erlaubt die Berechnung einer Viertelgeometrie mit Symmetrierandbedingungen (Abb. 2-9). Als Fernfeld wird eine Atmosphärenrandbedingung angesetzt. Der Einlass befindet sich zentriert mit einer definierten Höhe über der Scheibe. Am radialen Ende der Scheibe befindet sich ein in der Höhe verstellbares Wehr zur Variation der Sprungposition. Als Randbedingung wird für das Fluid an der Wand die Haftbedingung gesetzt.

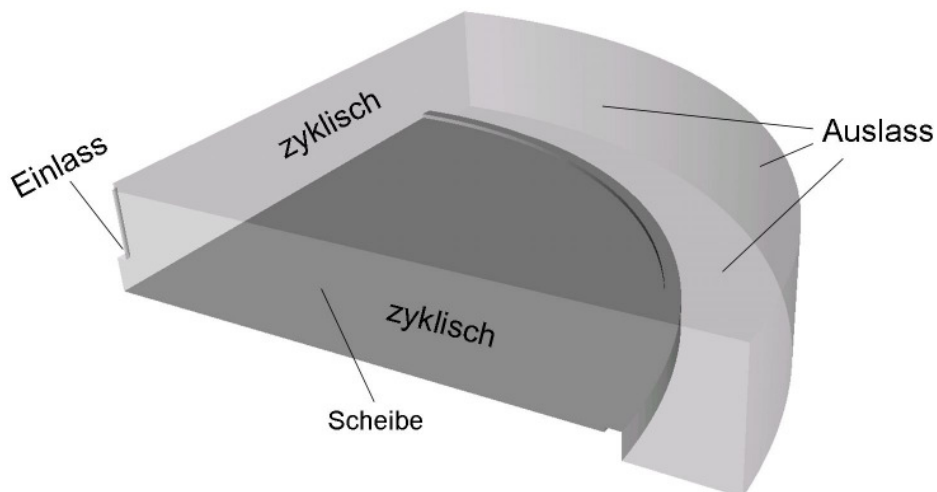


Abb. 2-9 Geometrie und Randbedingungen

Bei der Vernetzung der Geometrie wird ein Hexaedernetz verwendet mit folgenden Mindestwerten der Qualitätsgüte [42]: Das Netz besitzt Hexaedernzellen, deren Großteil einen Winkel um die 90 Grad aufweisen. Die Winkel aller Hexaedernzellen liegt zwischen 40 und 140 Grad. Das Seitenverhältnis beträgt maximal die Größe 10. In der Nähe der erwarteten freien Oberfläche sowie im Gebiet des Flüssigmetalls wurde eine höhere Netzdichte gewählt. Durch die Verwendung verschieden variierten Teilblöcke mit radialer Ausrichtung der Kanten wurde eine homogene Dichte des Netzes in radialer Richtung erreicht. Des Weiteren konnte mit dieser Ausrichtung die Netzabhängigkeit minimiert werden. In Testrechnungen zeigte sich bei einer Standard-O-Gridvernetzung der Geometrie eine Netzabhängigkeit der Fluidfront an der Kantenausrichtung der Zellen. Die genauen Parameter des Netzes sind dem Anhang zu entnehmen.

Für die variable Zeitschrittweite Δt der instationären numerischen Strömungssimulation wurde eine Abhängigkeit von der dimensionslosen Courantzahl Co von 0,3 gewählt (2.31) [82]. Die turbulente kinetischen Energie k und die Dissipation müssen am Eintritt geeignet abgeschätzt werden. Die kinetische Energie k wird mithilfe von (2.38), mit U_{ref} als Referenzgeschwindigkeit, u_{ein} als Einlassgeschwindigkeit und der turbulenten Intensität U'/U_{ref} für voll entwickelte Rohrströmung (2.39) bestimmt. Die Reynoldszahl Re wird als Einlassreynoldszahl definiert.

$$k \approx \frac{3}{2}(U')^2 \quad (2.38)$$

$$\frac{U'}{U_{ref}} = 0,16 \cdot Re_{d_h}^{1/8} \quad (2.39)$$

Die Größe der Dissipation ε berechnet sich nach (2.40) mit $l = 0,007d_h$ und der Konstante C_μ [83]. Die Variable d_h bezeichnet den hydraulischen Durchmesser

$$\varepsilon \approx C_\mu^{3/4} \frac{k^{3/2}}{l} \quad (2.40)$$

Tab. 2-1 stellt die Stoffeigenschaften der verwendeten Fluide zusammen. Zum einem wurde für die numerische Strömungssimulation des Experiments nach Stevens et al. [22] das Fluid Wasser mit dem Umgebungsfluid Luft verwendet und zum anderen für die vorliegende Aufgabenstellung das Flüssigmetall Gallium Indium Zinn.

| | Luft | | Liquid | | Oberflächenspannung |
|----------------|---------------------------------------|---|---------------------------------------|---|---------------------|
| | Dichte ρ [kg/m ³] | Viskosität ν [m ² /s] | Dichte ρ [kg/m ³] | Viskosität ν [m ² /s] | σ [N/m] |
| Stevens's Fall | 1,1188 | 1,535e-5 | 998,21 | 1,004e-6 | 0,07 |
| Flüssigmetall | 1,1188 | 1,535e-5 | 6362 | 0,34809e-6 | 0,532 |

Tab. 2-1 Stoffwerte

2.4.2 Auswertung

Bei der Auswertung der numerischen Ergebnisse wird eine statistische Mittelung gewählt. In der zeitlichen Betrachtung der Ergebnisse der numerischen Strömungssimulationen wird beobachtet, dass die Sprungposition in der Zeit fluktuiert. Diese Bewegungen in einem be-

stimmten Bereich wurden auch im Experiment festgestellt. Für die Mittelung wird mit Erreichen eines quasistationären Zustands eine bestimmte Anzahl n gleicher Zeitschrittweiten Δt für die Mittelung verwendet. Abb. 2-10. Als quasistationärer Zustand wird eine Fluktuation um eine feste Größe angesehen.

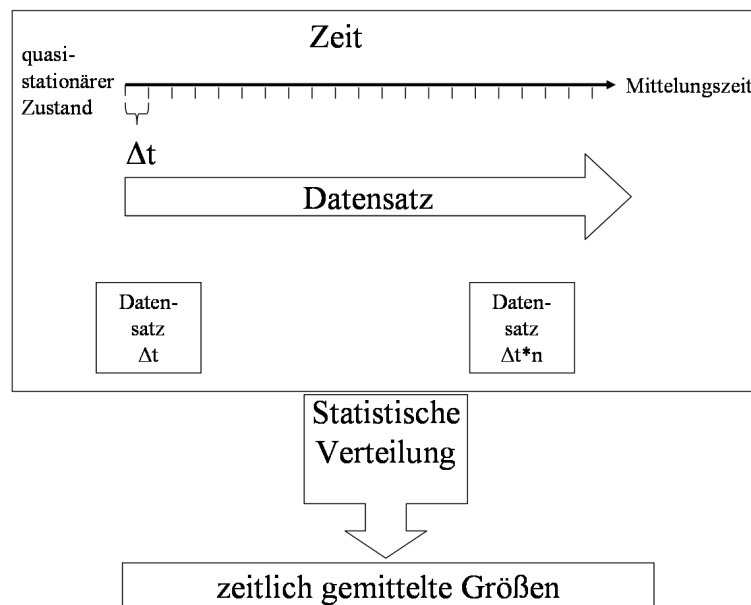


Abb. 2-10 Zeitliche Mittelung

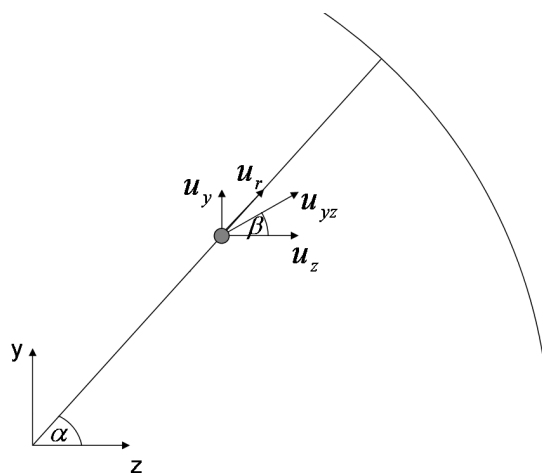


Abb. 2-11 Radiale Geschwindigkeit

Beim rotationssymmetrischen hydraulischen Sprung ist die Hauptströmungsrichtung, auf die sich nachfolgende Betrachtungen beziehen, die radiale Richtung. Die radiale Strömungsgeschwindigkeit erhält man durch (2.42) mit den Geschwindigkeitskomponenten u_y und u_z und

den Winkeln α und β bezogen zum Koordinatensystem (Abb. 2-11). Die einzelnen Fluktuationen in Abweichung zur Hauptströmung sind für die Betrachtungen nicht relevant.

$$\alpha = \arctan\left(\frac{\text{coordy}}{\text{coordx}}\right) \quad (2.41)$$

$$u_r = \cos \alpha \cdot u_z + \sin \alpha \cdot u_y \quad (2.42)$$

3 Hydraulischer Sprung in Flüssigmetall

Abb. 3-1 zeigt den Versuchsaufbau des rotationssymmetrischen hydraulischen Sprungs in Flüssigmetall, wie er im KALLA-Labor des IKET durchgeführt wird. Eine zentrierte Einlassdüse ist mit dem zweifachen Düsendurchmesser über eine Kupferplatte angebracht. Die Platte ist am radialen Ende mit einem verstellbaren Wehr versehen, um die Fluidhöhe im fließenden Bereich und somit die Sprungposition zu variieren.

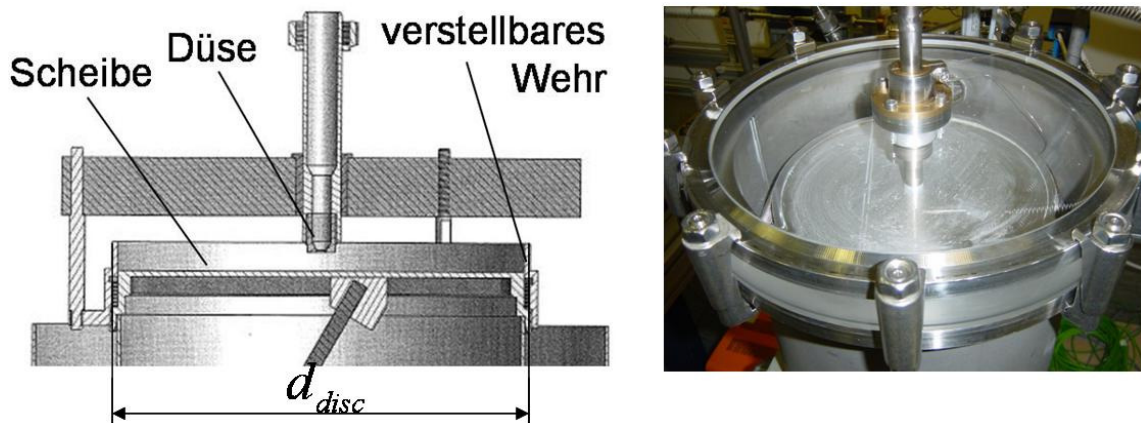


Abb. 3-1 Versuchsaufbau KALLA

Die geometrischen Randbedingungen sind wie folgt [84]:

$$d_{Düse} = 0,006 \text{ m (Düsendurchmesser)}$$

$$d_{Scheibe} = 0,220 \text{ m (Scheibendurchmesser)}$$

$$h_{Düse} = 0,005 \text{ m (Abstand der Düse zur Scheibe)}$$

$$h_{Wehr} = 0,001 \text{ m und } 0,003 \text{ m (Höhe des stufenlos verstellbaren Wehrs).}$$

In den nachfolgenden Betrachtungen werden die zwei Einlassreynoldszahlen von 17 600 und 26 000 untersucht. Die letzte Reynoldszahl ergibt sich aus der maximalen Pumpenleistung im experimentellen Aufbau.

Experimente und numerische Berechnungen zeigen zwei Strömungsformen bei dem verwendeten Fluid Gallium Indium Zinn: Zum einen bildet sich ein scheinbar klassischer hydraulischer Sprung aus und zum anderen ein Zustand mit Fingerstrukturen. Der klassische

hydraulische Sprung bildet sich bei einer vollständigen Benetzung der Platte mit dem Flüssigmetall. Hierbei liegt ein kleiner Kontaktwinkel vor. Bei hohen Kontaktwinkeln zwischen Fluid und Wand und bestimmten Eingangsparametern bilden sich sogenannte Fingerstrukturen aus. Dem schießenden Bereich folgt ein Zerfall in Finger, die dann in einen fließenden Bereich übergehen (Abb. 3-2).

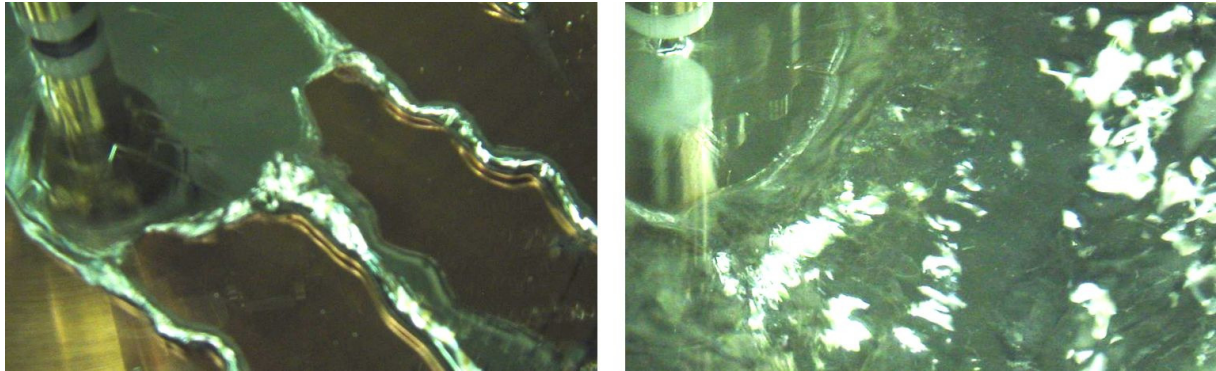


Abb. 3-2 Strömungsformen in Abhängigkeit vom Kontaktwinkel [44]

Um eine allgemeine Theorie für den hydraulischen Sprung mit Fingern herzuleiten, werden für die fortführenden Gleichgewichtsbetrachtungen dimensionslose Größen eingeführt. Hierfür wird die Kapillarlänge l_{Kap} [13] als Referenzlänge l_{ref} eingeführt.

$$l_{ref} = l_{Kap} = \sqrt{\frac{\sigma}{\Delta\rho \cdot g}} \quad (3.1)$$

Der dimensionslose Referenzdruck p_{ref} leitet sich aus der Oberflächenspannung σ des Fluids bezogen auf die Referenzlänge l_{ref} ab (3.1). Die Wurzel aus dem Verhältnis der Oberflächenspannung zu dem Produkt aus der Dichte des Fluids und der Kapillarlänge führt zu der dimensionslosen Geschwindigkeit u_{ref} (3.3).

$$p_{ref} = \frac{\sigma}{l_{ref}} \quad (3.2)$$

$$u_{ref} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho \cdot l_{ref}}} \quad (3.3)$$

Die Referenzgrößen aus oben genannten Kapillarskalen ergeben sich für eine Oberflächenspannung des Fluids von $\sigma = 0,532 \text{ kg m/s}^2$, einer Fluidichte von $\rho = 6390 \text{ kg/m}^3$ und einer

Erdbeschleunigung von $g = 9,81 \text{ m/s}^2$; eine Referenzlänge von $l_{ref} = 2,924 \text{ mm}$, einen Referenzdruck von $p_{ref} = 183,3 \text{ Pa}$ und eine Referenzgeschwindigkeit u_{ref} von $0,16934 \text{ m/s}$.

3.1 Klassischer rotationssymmetrischer hydraulischer Sprung

Das folgende Kapitel untersucht den rotationssymmetrischen hydraulischen Sprung mit Flüssigmetall bei vollständiger Benetzung. Es wird ein Vergleich zwischen experimentellen Ergebnissen und numerischen Lösungen durchgeführt. Darüber hinaus wird die Übertragbarkeit bestehender analytischer Theorien für das Fluid Wasser auf Flüssigmetall untersucht. Die vollständige Benetzung der Scheibe wird beim Experiment durch Polieren dieser mit dem Strömungsfluid Gallium Indium Zinn erreicht. Entsprechend wurde die vollständige Benetzung bei den numerischen Berechnungen durch eine Vorgabe eines niedrigen Kontaktwinkels verwirklicht.

Erste Parameterrechnungen und Experimente zeigten die Ausbildung eines hydraulischen Sprungs, der in seiner Ausprägung mit dem Standardfall von Wasser vergleichbar ist. Jedoch zeigt sich in den Experimenten, dass die Überströmung des Wehrs zu Benetzungsfluktuationen führt. Bedingt durch hohe Oberflächenspannungswerte und Kontaktwinkel, bilden sich fixierte Kontaktliniengebiete (im engl.: „pin contact“) aus, an denen sich das Fluid temporär lokal staut. Aus diesen Stellen, die sich beim Erreichen eines quasistationären Zustandes bezüglich der Sprungposition vornehmlich an der Wehroberseite ausbilden, brechen fluktuierend Ausströmbereiche aus. Die fluktuierende Abströmung führt zu einem asymmetrischen Verhalten, und ein Vergleich zwischen Experimenten und der Numerik ist erschwert (Abb. 3-3).

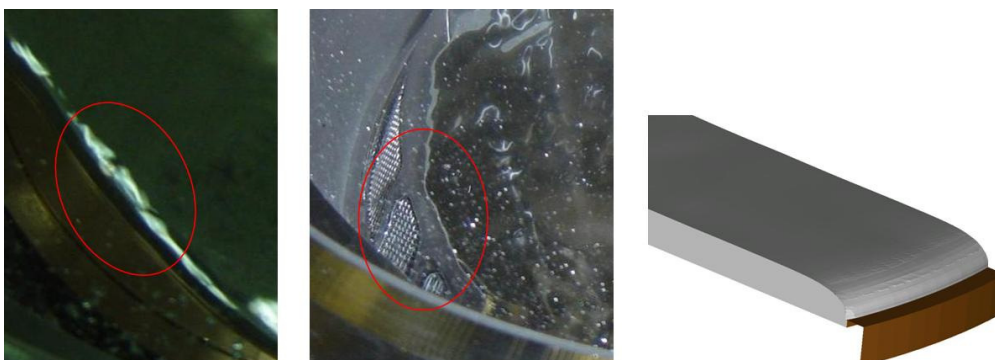


Abb. 3-3 Fixierte Kontaktlinie und asymmetrische Ausströmung

Deshalb werden sowohl beim Experiment als auch bei den numerischen Berechnungen Ausströmgebiete am Auslassrand für die weiterfolgenden Untersuchungen definiert. Die

Ausströmgebiete besitzen eine Breite von 1 mm und 3 mm und geringe Kontaktwinkel zwischen Fluid und Wand. Mithilfe dieser zusätzlichen Randbedingung soll das Fluid gezielt abgeführt und eine Rotationssymmetrie hergestellt werden. Es entsteht somit ein rotations-symmetrischer Sprung mit definiert fixierten Kontaktlinienbereichen und Ausströmbereichen. Abb. 3-4 zeigt die Ausströmgebiete des numerischen Modells.

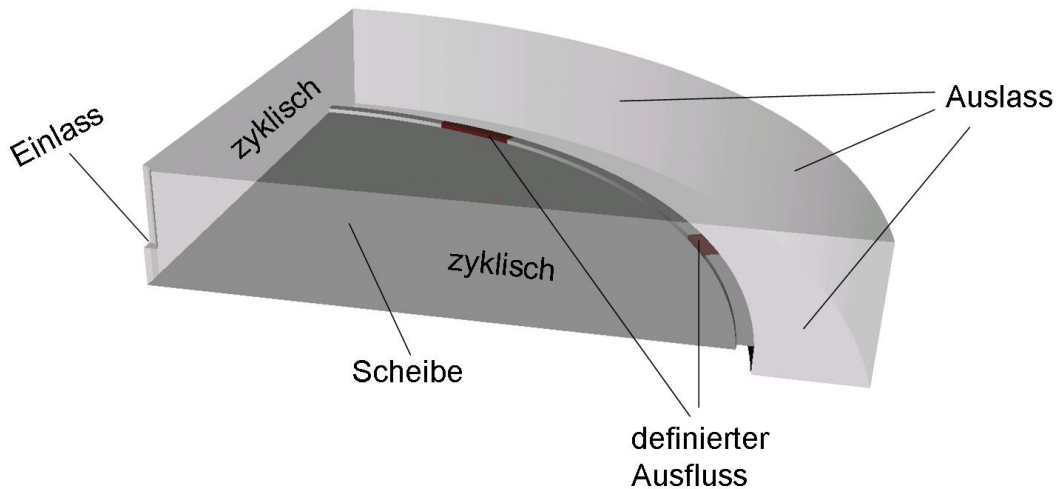


Abb. 3-4 Definierte Ausströmgebiete

Die fixierte Kontaktlinie resultiert in einer beträchtlich erhöhten Fluidhöhe im fließenden Bereich des hydraulischen Sprungs. Die zusätzliche Höhe über der Wehroberkante ist um ein Vielfaches größer als bei hydraulischen Sprüngen mit Wasser. Die Höhe bestimmt direkt den hydrostatischen Druck, der auf den hydraulischen Sprung wirkt, und bestimmt somit den Sprungradius.

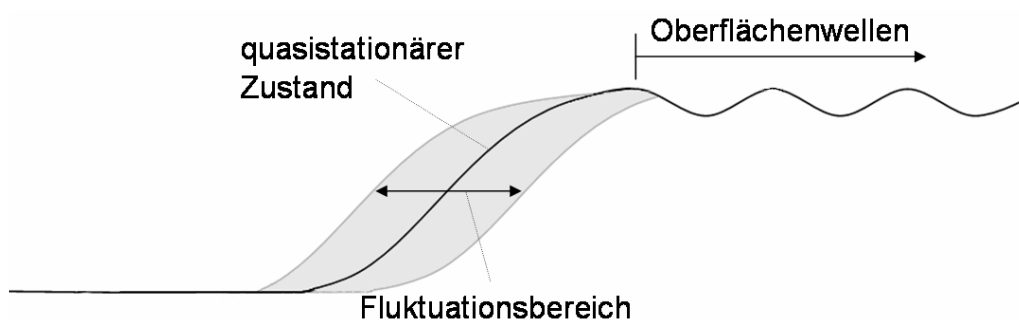


Abb. 3-5 Quasistationäre Sprungposition

Bei der Sprungposition stellt sich ein quasistationärer Zustand ein. Die Position fluktuiert temporär in einem Bereich und ist verantwortlich für die induzierten Oberflächenwellen im fließenden Bereich (Abb. 3-5). Die Oberflächenwellen liegen im Bereich der kapillaren Wellenlänge und stellen das Maß für die Fluktuation der Sprungposition dar. Die Stärke der Fluktuation ist abhängig von der Sprunghöhe und der turbulenten Struktur am Sprung.

Beim Experiment der analytischen Theorie und der vergleichenden numerischen Rechnungen wurden die Randbedingungen für die Wehrhöhe H , dem Düsendurchmesser d und der Einlassgeschwindigkeit u nach Tab. 3-1 gewählt.

Tab. 3-1 Geometrische Daten

| | Re = 17500 | Re = 26000 |
|----------------------|------------|------------|
| Wehrhöhe H | 1 mm | 1 mm |
| Düsendurchmesser d | 6 mm | 6 mm |
| Einlassgeschw. u | 1,0152 m/s | 1.4986 m/s |

Abb. 3-6 stellt die Auswertungsbereiche des Experiments und der Numerik dar. Sie zeigt eine Draufsicht auf die Viertelgeometrie mit der zentrierten Einlassdüse, der Scheibe und dem Wehr mit den grau hinterlegten definierten Ausströmgebieten.

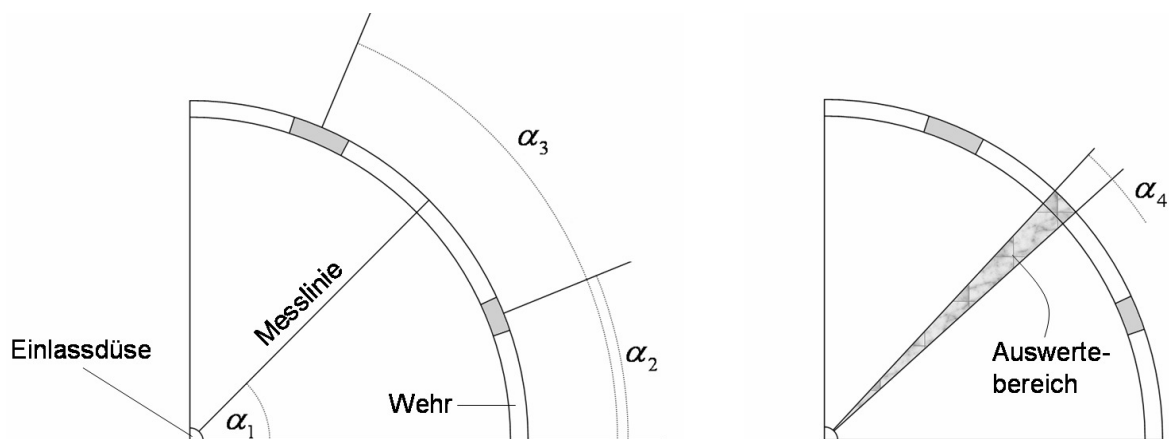


Abb. 3-6 Auswertebereiche Messung (re.) und Numerik (li.)

Der Profilverlauf der freien Oberfläche aus den Messungen wird entlang einer definierten Messlinie ermittelt. Die Messlinie befindet sich in einem Winkel von 70 Grad zu der horizontalen Symmetrieebene [66]. Um Modelleinflüsse der Numerik und Messtoleranzen zu berücksichtigen, werden die numerischen Ergebnisse in einem Auswertebereich gemittelt. Die freie Oberfläche wird durch eine diskrete Anzahl von Punkten beschrieben. In den folgenden Betrachtungen sind die Höhenprofile des Experiments und der numerischen Simulationen über den Radius aufgetragen. Die Höhe h und der Radius r werden mit dem Düsendurchmesser d dimensionslos dargestellt.

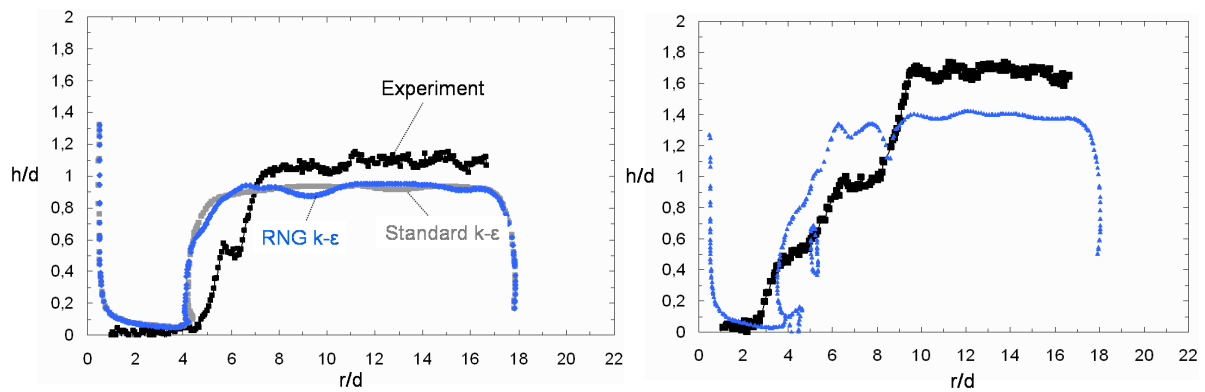


Abb. 3-7 Sprungverlauf für $w = 1$ mm (re.) und $w = 3$ mm (li.)

Der Vergleich zwischen dem Experiment und den numerischen Lösungen zeigt eine hohe Übereinstimmung der Sprungposition und eine Abweichung von $\sim 10\%$ in der Fluidhöhe des schießenden Bereichs. Abb. 3-7 zeigt den momentanen Profilverlauf der numerischen Ergebnisse. Wie bereits aus vorangegangenen Experimenten mit dem Fluid Wasser beobachtet, hängt die Fluidhöhe nicht von der Reynoldszahl respektive Fluidgeschwindigkeit ab [22].

Bei einer Wehrhöhe von $w = 3$ mm zeigt der Sprungverlauf gegenüber $w = 1$ mm eine andere Charakteristik. Es stellt sich aufgrund der hohen Fluidhöhe im fließenden Bereich und dem damit verbundenen größeren hydrostatischen Druck ein stufiger Sprung ein, der durch eine charakteristische Wirbelstruktur impliziert wird. Flache bzw. stufige Sprünge enthalten Sekundärwirbel oder lang gezogene Wirbel und Ablösgebiete an der Wand, die zu einer Strömungsstruktur führen ([15], [67]). Bohr et al. haben die Wirbelstruktur beim rotationssymmetrischen hydraulischen Sprung mit Wasser untersucht. Abb. 3-8 stellt zwei Sprünge mit den jeweiligen Wirbelstrukturen dar. Je nach Fluidhöhe bilden sich unterschiedliche Wirbelstrukturen aus, die den Profilverlauf des Sprungs beeinflussen.

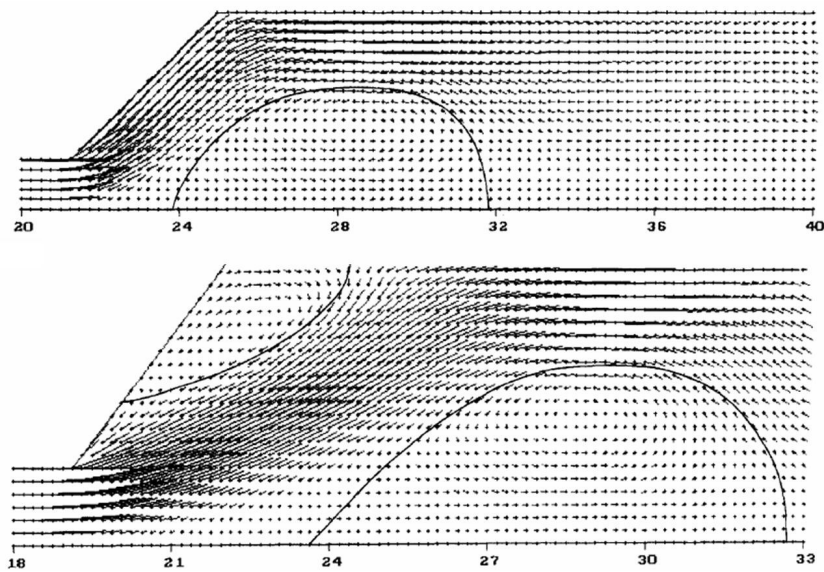


Abb. 3-8 Wirbelformen beim hydraulischen Sprung [67]

Wie zu erkennen ist, werden die Oberflächenwellen durch das $k-\varepsilon$ Turbulenzmodell stark gedämpft. Bei der Wehrhöhe $w = 3$ mm wirkt sich die Wahl des Turbulenzmodells stark auf den Profilverlauf aus. Aufgrund der hohen Sprunghöhe bildet sich ein stufiger Sprung aus. Bei den $k-\varepsilon$ Turbulenzmodellen wird die Stufigkeit nicht wiedergegeben. Wie schon in Kapitel 1 erwähnt, induziert der hydraulische Sprung in Abhängigkeit der Sprunghöhe Wirbelstrukturen, die wiederum mit der freien Oberfläche interagieren. Diese Strukturen bedingen bei größeren Sprunghöhen einen stufigen hydraulischen Sprung. Variationsrechnungen zeigen, dass die Charakteristik am Besten durch folgende Modelle wiedergegeben wird: dem RNG- $k-\varepsilon$ Turbulenzmodell und dem nicht linearen $k-\varepsilon$ Turbulenzmodellen.

Die Wirbelstruktur der numerischen Simulation für die Reynoldszahl von $Re = 26\,000$ und einer Wehrhöhe von 3 mm zeigt Abb. 3-9. Aus dem normierten momentanen Vektorplot in einer Ebene ($\alpha = 67,5^\circ$) des Standard $k-\varepsilon$ Turbulenzmodells und des RNG $k-\varepsilon$ Turbulenzmodells zeigt sich der Unterschied in der Wiedergabe der Turbulenzstruktur (Abb. 3-9). Dargestellt ist eine $\gamma = 0,5$ Isokontur, geschnitten mit einer Fläche $y-z$ und einem Vektorplot des normierten Geschwindigkeitsvektors im Bereich $\gamma > 0,5$ für einen momentanen Verlauf. Zu erkennen sind die gerichteten Vektoren im schießenden Bereich. Beim Standard $k-\varepsilon$ Turbulenzmodells bildet sich ein Wirbel am Sprung aus, der zu einer bauchigen Form im Sprungverlauf führt. Dies entspricht nicht den Beobachtungen aus dem Experiment. Wie zu erkennen ist, hat sich an der Sprungposition ein einzelner Wirbel ausgebildet. Die Sprungform ergibt sich somit auf den zweidimensionalen Schnitt bezogen zu (3.4), mit der Wirbelgröße ω , der Krümmung κ und der Tangentialgeschwindigkeit q [68].

$$\omega = -2\kappa \cdot q$$

(3.4)

Ein Ablösebereich und Sekundärwirbel, die einen flachere Sprungform bzw. einen zweistufigen Sprung bewirken, bilden sich nicht aus. Diese nicht vorhandene Strömungscharakteristik bei einem zweistufigen bzw. einem flachen Sprung deckt sich mit den bekannten Schwächen des Standard $k-\varepsilon$ Turbulenzmodell aus dem einphasigen Bereich. Das Turbulenzmodell berechnet druckinduzierte Ablösegebiete an der Wand zu spät oder gar nicht und die Größe der Ablösezone meist zu gering. Des Weiteren weist das Modell Ungenauigkeiten bei der Berechnung von Sekundärwirbeln auf [42]. Die Ungenauigkeiten liegen darin, dass der Reynolds'sche Spannungstensor in allen Raumrichtungen gleich groß berechnet wird und somit Strömungsfelder, die von Normalspannungen beeinflusst werden, falsch berechnet werden.

Dem gegenüber zeigt das RNG- $k-\varepsilon$ Turbulenzmodell einen stufigen Sprung mit verschiedenen unterschiedlichen Wirbelformen im Sprunggebiet: Rückströmgebiete und Sekundärwirbel. Zu erkennen ist auch der dreidimensionale Charakter. Auf dem zweidimensionalen Vektorplot sind Bereiche ohne Geschwindigkeitskomponenten in Ausströmrichtung zu erkennen.

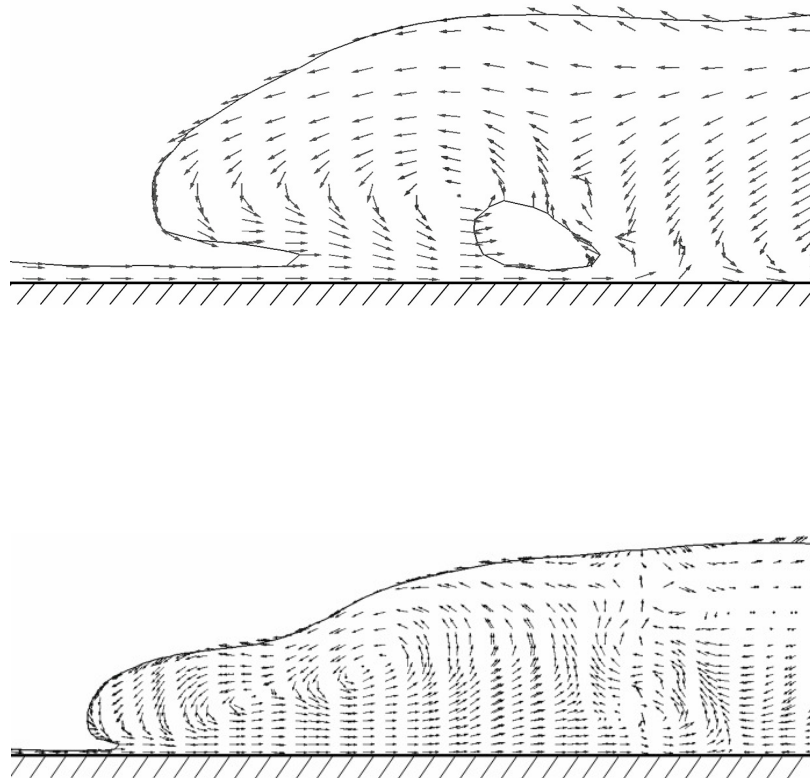


Abb. 3-9 Vektorplot für $w = 3 \text{ mm}$ für Standard $k-\varepsilon$ (oben) und RNG- $k-\varepsilon$ Turbulenzmodell (unten)

Ein Vergleich des Einflusses unterschiedlicher Turbulenzmodelle auf die freie Oberfläche zeigt Abb. 3-10. Aufgetragen sind die dimensionslose Höhe h/d bezogen auf den dimensionslosen Radius r/d . Die Turbulenzmodelle haben keinen Einfluss auf die Höhe des fließenden Bereichs. Sie wird lediglich durch die fixierte Kontaktlinie am Wehrrand induziert. Die $k-\varepsilon$ Modelle sowie das $k-\omega$ -SST Modell weisen eine starke Dämpfung von Oberflächenwellen auf, und es prägt sich keine Stufigkeit im Sprungverlauf aus. Wie zu erwarten, eignen sich diese Turbulenzmodelle nicht für die Modellierung maßgeblicher Wirbelcharakteristiken, wie Sekundärströmungen, Rezirkulationen und Anisotropien an der freien Oberfläche, die für einen stufigen Sprung verantwortlich sind. Bei Initiallösungen und schnellen Parametervergleichen findet das $k-\varepsilon$ Modell weiter seine Anwendung. Eine Verbesserung versprechen das nicht lineare $k-\varepsilon$ Modell und RNG Modell, deren Stärken in der Beschreibung von Sekundärwirbeln und Rückströmgebieten liegen. Aus den numerischen Ergebnissen sind eine geringe Dämpfung von Oberflächenwellen und ein stufiger Sprung festzustellen. Ein weiterer Nachteil des $k-\varepsilon$ Turbulenzmodell ist, dass die Zähigkeit in der Mitte der Strömung zu groß wiedergegeben wird.

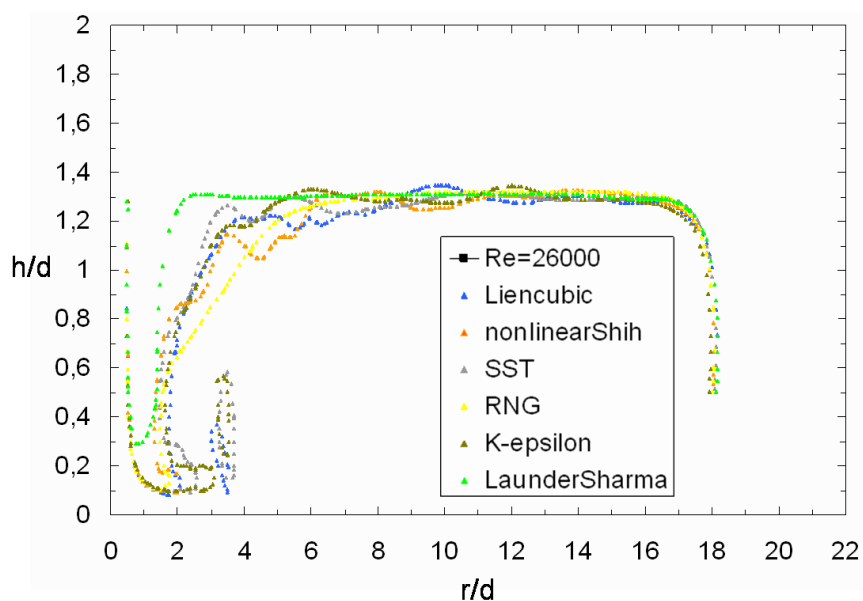


Abb. 3-10 Turbulenzmodellvergleich

3.2 Auswerteeinfluss

Die Datensätze der numerischen Berechnung und dem Experiment unterscheiden sich grundlegend. Die experimentellen Ergebnisse basieren auf eine momentane Linienmessung für die Wehrhöhen von $w = 1 \text{ mm}$ und $w = 3 \text{ mm}$. Aus den transienten numerischen Rechnungen steht ein räumlich dreidimensionaler Datensatz unterschiedlicher Zeitschritte zur Verfügung. Betrachtet man die räumlich und zeitlich statistische Auswertung des Profilverlaufs in Abb. 3-11, so kann man aus den Max- (rot) und Min- (blau) Werten zum einem die Amplitude der Oberflächenwellen im fließenden Bereich ableiten und zum anderen die Fluktuation der Sprungposition bestimmen. Wie schon in Abschnitt 3.1 erwähnt, fluktuiert die Sprungposition um einen möglichen quasistationären Bereich.

Die Größe des fluktuierenden Bereiches beträgt in den numerischen Ergebnissen 20 mm. An einer stationären Sprungposition muss ein Kräftegleichgewicht vorherrschen. Aufgrund von verschiedenen Einflüssen wie z.B. der pulsierenden Einströmung, den instationären Wirbeln am Sprung sowie Verschmutzungen beim Experiment ändern sich die auftretenden Kräfte an der Sprungposition. Die Sprungposition weist einen großen Variationsbereich auf, was für einen direkten Vergleich mit der Numerik experimentelle statistische Daten notwendig macht.

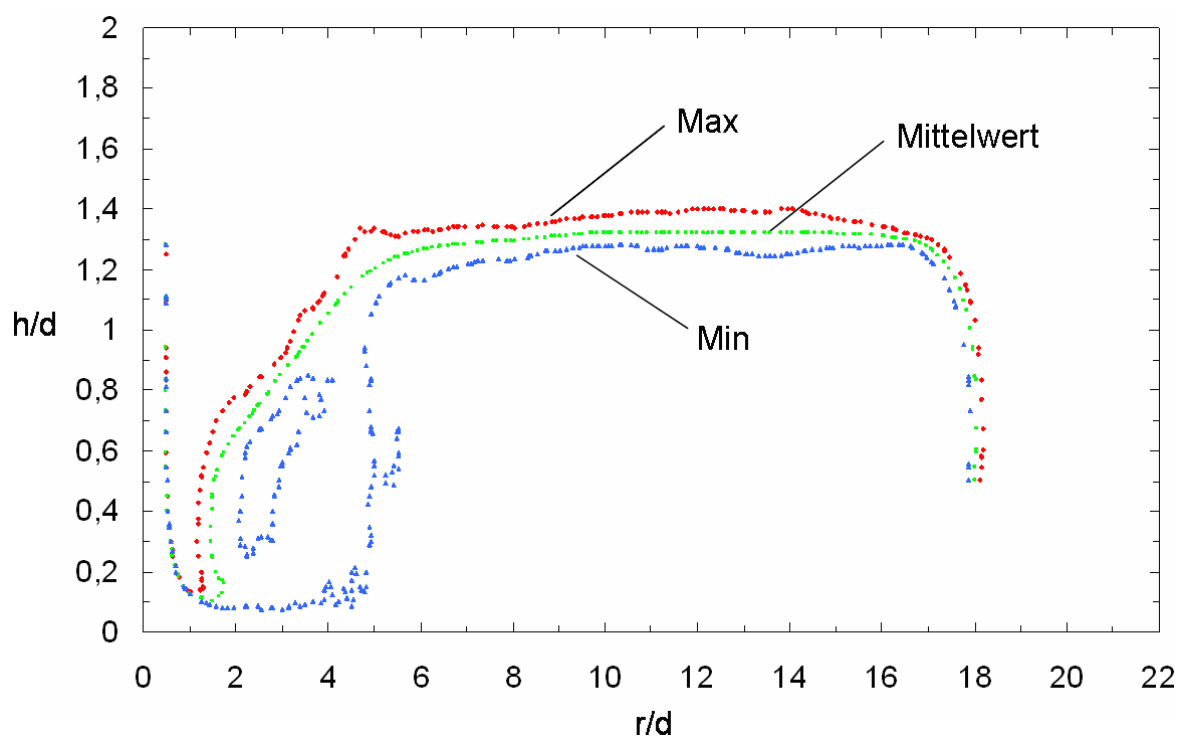


Abb. 3-11 Statistischer Profilverlauf $w = 3 \text{ mm}$, $Re = 26\,000$

In einer weiteren Parametervariation der numerischen Berechnungen wurde die Oberflächenspannung in einem Bereich von -20% und $+20\%$ variiert. Der technische Oberflä-

chenspannungswert von $\sigma = 0,532 \text{ N/m}$ variiert unter realen Bedingungen aufgrund von verschiedenen Verunreinigungen wie z. B. Partikeln, Maschinenölrückstände und Schmutz. Eine Erhöhung der Oberflächenspannung führt zu einer Erhöhung des fließenden Bereichs aufgrund des fixierten Kontaktlinienbereichs und somit zu einer Vergrößerung des hydrostatischen Drucks an der Sprungstelle. Dem wirkt die vergrößerte Oberflächenspannungskraft an der Sprungposition entgegen. Die Summe beider Größen führt zu einer deutlichen Verkleinerung des Sprungradius. Eine Verkleinerung der Oberflächenspannungswerte führt analog zu einer Vergrößerung des Sprungradius. Abb. 3-12 zeigt die momentanen Profilverläufe für die Auswerteebene $\alpha = 70 \text{ Grad}$. Die Überschneidungen der Kurvenverläufe unterschiedlicher Oberflächenspannungswerte ergeben sich aus dem momentanen Verlauf, bei dem die Oberflächenwellen zwischen den Variationsrechnungen unterschiedlich lokalisiert sind.

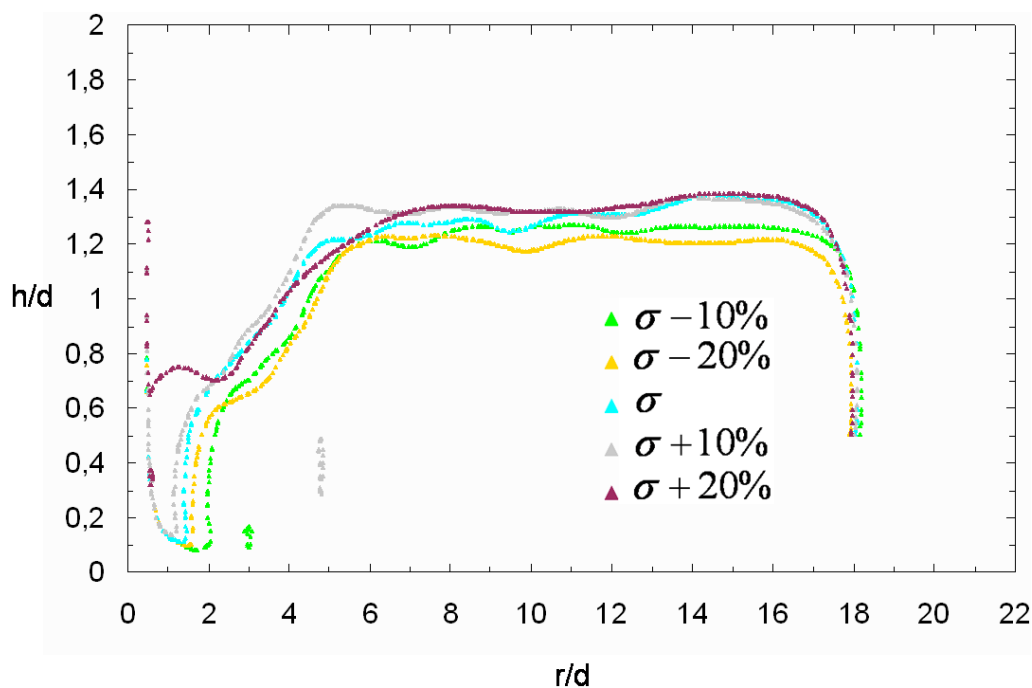


Abb. 3-12 Momentaner Profilverlauf $w = 3 \text{ mm}$, $Re = 26\,000$

Eine weitere Parametervariation wurde beim Massenstrom durchgeführt. Änderungen des Massenstroms berücksichtigen die Schwankungen in der Pumpenleistung und eine mögliche Schrägstellung der Einlassdüse und der damit verbundenen Erhöhung des Massenstroms in Richtung der Schrägstellung. Die Höhe des fließenden Bereichs wird durch den Massenstrom nicht beeinflusst. Die Erhöhung des Massenstroms führt direkt zu einer Verschiebung der Sprungposition aufgrund des erhöhten Fluidimpulses an der Sprungposition.

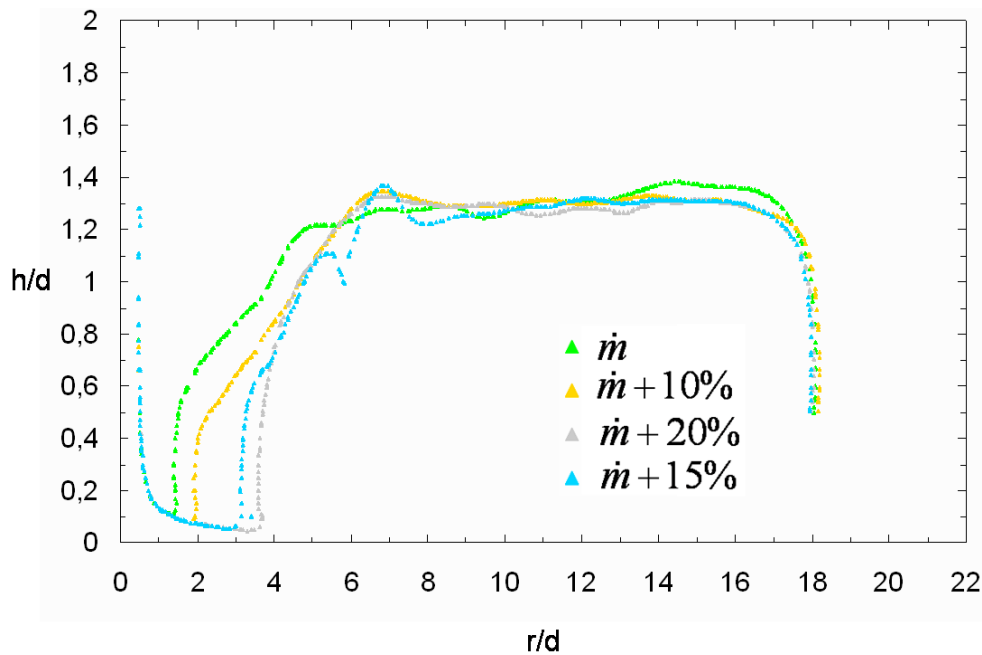


Abb. 3-13 Momentaner Profilverlauf $w = 3 \text{ mm}$, $Re = 26\,000$

3.3 Theoretisch berechneter Sprungradius

Das folgende Kapitel untersucht die Adaption der theoretischen Beschreibung nach Bush und Aristoff [14]. Bisher fand die Theorie nur für die Vorhersage des Sprungradius R_j mit dem Fluid Wasser Anwendung und wurde deshalb auch mit Experimenten validiert. Die Beziehungen (1.12) und (1.13) für R_j müssen mit den Parametern der Flüssigmetallbetrachtungen numerisch nach dem Sprungradius R_j aufgelöst werden. Aus den erhaltenen Lösungen wird mit einer Fallunterscheidung bei der Grenzschichtausbreitung ($R_j > r_v$ oder $R_j < r_v$) die gültige Lösungsmenge definiert. Nicht physikalische Größen und Zahlen mit Imaginärteil werden nicht als Bestandteil einer möglichen Lösung für den Sprungradius R_j betrachtet. Für die Höhe des fließenden Bereichs wird die mittlere Höhe aus den experimentellen Werten verwendet. Sie ergibt sich für eine Wehrhöhe von $w = 0,001 \text{ m}$ zu $H = 0,0066 \text{ m}$ und für $w = 0,003 \text{ m}$ zu $H = 0,0102 \text{ m}$. Die nachfolgenden Abbildungen (Abb. 3-14 und Abb. 3-15) stellen die theoretisch berechneten Sprungpositionen für die beiden betrachteten Reynoldszahlen im Profilverlauf der experimentellen Ergebnisse dar. Die berechneten Positionen besitzen eine geringe Abweichung zu den experimentellen Sprungpositionen. Bei einer Wehrhöhe von 3 mm wird der Sprungradius zu klein berechnet, was jedoch bei einer Abschätzung einer Kühlungsapplikation einem Worst-Case-Szenario entsprechen würde. Wie schon in Kapitel 3.2 beschrieben, geben die experimentell ermittelten Sprungverläufe nur einen momentanen

Verlauf wieder, und die Sprungposition fluktuiert vor allem bei dem hohen Auslasswehr von $w = 3\text{mm}$. Für einen genaueren Vergleich fehlen die Medianwerte aus einer statistischen Erfassung der freien Oberfläche aus dem Experiment.

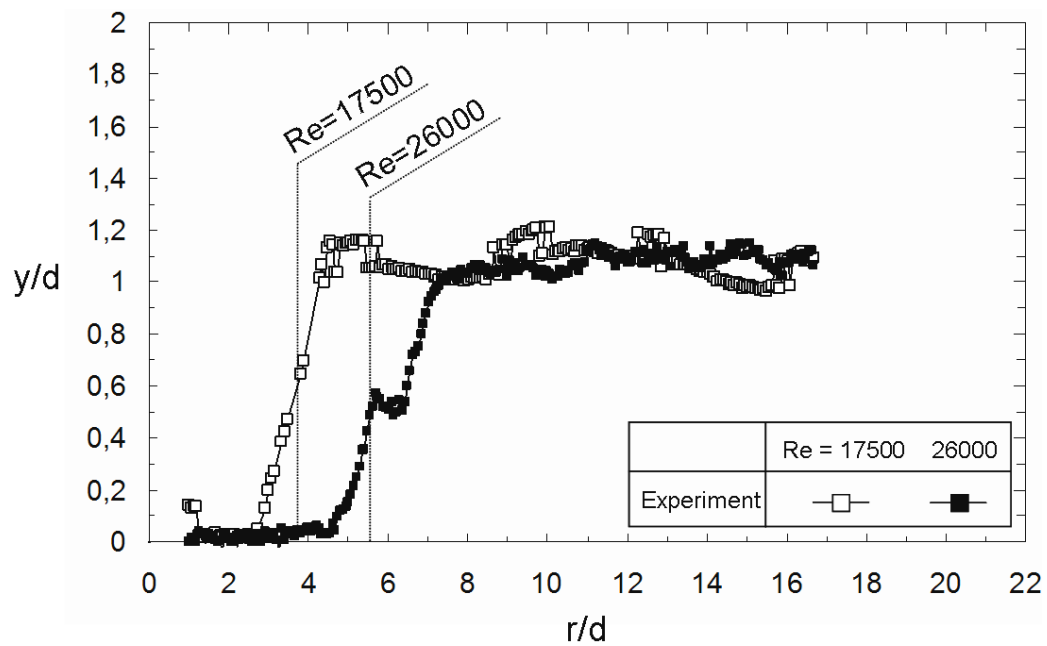


Abb. 3-14 Sprungverlauf für $w = 1\text{ mm}$

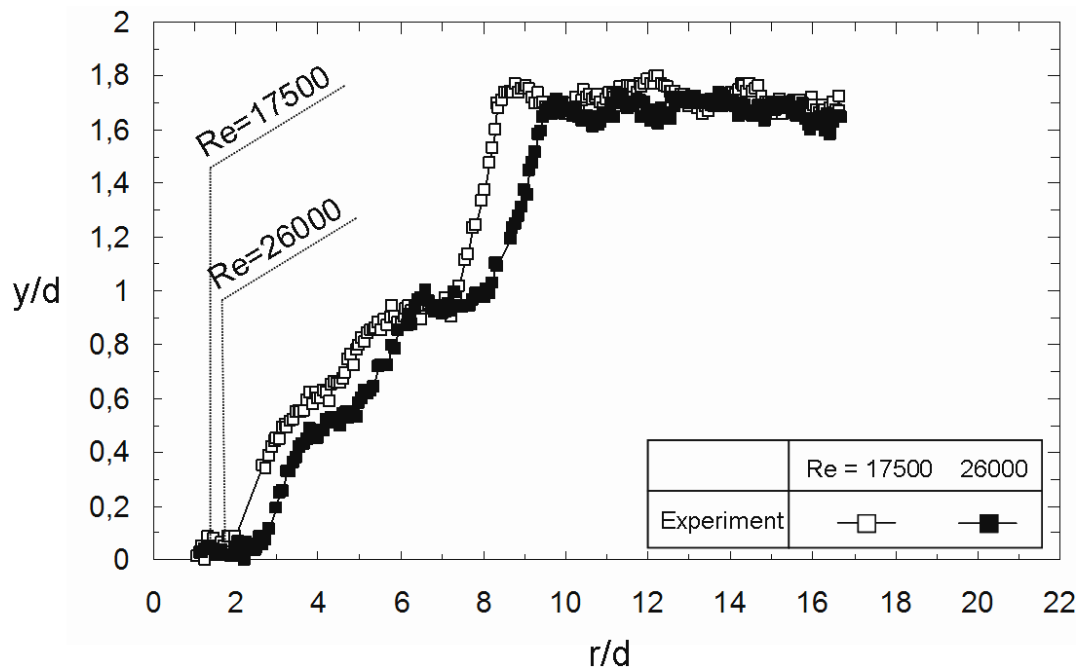


Abb. 3-15 Sprungverlauf für $w = 3\text{ mm}$

Die theoretische Beschreibung des hydraulischen Sprungs von Bush und Aristoff [14] lässt sich auf das Flüssigmetall Gallium Indium Zinn mit seinen hohen Dichten und Oberflächenspannungswerten übertragen. Der direkte Vergleich mit Experimenten zeigte einen hohen Übereinstimmungsbereich zwischen den Sprungradien. Der theoretische Ansatz benötigt neben den Stoffwerten Oberflächenspannung, Viskosität und Dichte und den Einlassrandbedingungen Einlassdüsendurchmesser und Massenstrom die Höhe im fließenden Bereich. Die Höhe muss bisher durch Messung aus Experimenten oder der numerischen Strömungssimulation bestimmt werden. Diese Limitierung lässt eine Anwendung der Theorie für eine schnelle Bestimmung des Sprungradius in Abhängigkeit der Rand- und Einlassbedingungen nicht zu.

3.3.1 Fluidhöhe im fließenden Bereich

Weiterführend werden Ansätze für eine Beschreibung der Sprunghöhe respektive der Höhe des fließenden Bereichs gesucht, mithilfe dessen eine autonome theoretische Beschreibung des Sprungradius auf Basis der Stoffwerte und den Eingangsparameter möglich ist. Um die Sprunghöhe ΔH zu bestimmen, ist bis jetzt kein analytischer Ansatz bekannt. Die Höhe muss aus experimentellen Messungen oder aus numerischen Simulationen entnommen werden. Eine theoretische Berechnung der Sprungposition nur mit Vorgabe der Randbedingungen ist somit nicht möglich. Die Fluidhöhe besitzt im fließenden Bereich eine Höhe H , die in der Größe $h_{extra} = H - w$ über der Wehrhöhe liegt (Abb. 3-16).

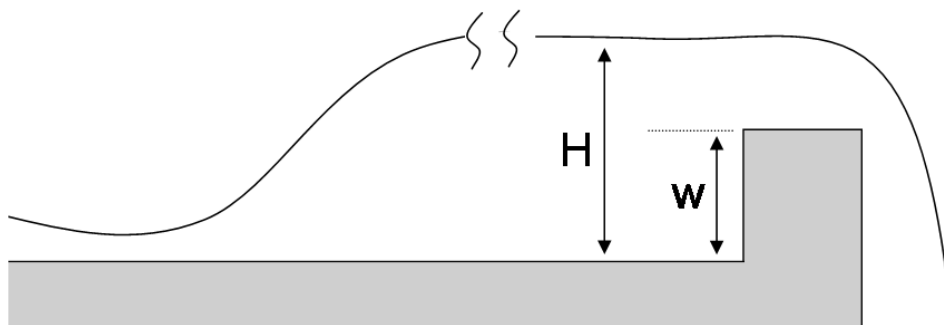


Abb. 3-16 Geometrische Faktoren im fließenden Bereich

Um eine analytische Vorhersage der Sprunghöhe durchzuführen, werden zwei Ansätze untersucht: Zum einem wurde die Sprunghöhe gleich der Wehrhöhe gesetzt und zum anderen wurde eine Froudezahl von $Fr = 1$ an der Überlaufkante als Ausströmbedingung angenommen. Die erste Betrachtung bezieht sich auf die Vereinfachung, dass die Fluidhöhe im fließenden Bereich durch die Wehrhöhe angenähert werden kann. Abb. 3-17 zeigt die berech-

neten Sprungpositionen nach diesem Ansatz. Wie zu erkennen ist, weichen die theoretisch bestimmten Sprungpositionen deutlich von den experimentellen Ergebnissen ab. Die Abschätzung entspricht nicht einem Worst-Case-Ansatz, da der schießende Bereich zu groß abgeschätzt wird. Der schießende Bereich ist für die gute konvektive Kühlung verantwortlich. Die große Abweichung eignet sich auch nicht für eine schnelle Abschätzung von Einlass- und Randbedingungen für Variantenvergleiche.

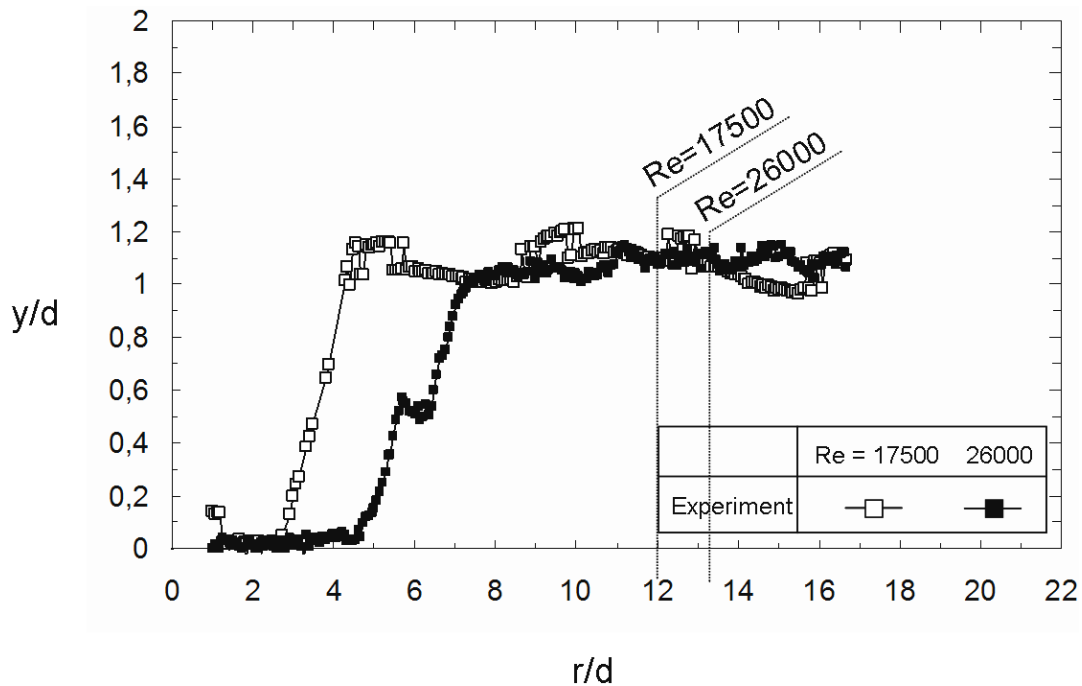


Abb. 3-17 Sprungpositionen nach Wehrhöhenvorgabe

Der zweite Ansatz basiert auf der Annahme, dass die Froudezahl im Ausströmbereich dem Wert eins entspricht. Mithilfe der Froudezahl lässt sich die Ausströmgeschwindigkeit bestimmen. Der Einlassmassenstrom liefert den erforderlichen Wert zur Bilanzierung, wodurch sich die zusätzliche Höhe zum Wehr bestimmen lässt. Die Ausströmfläche ergibt sich zu (3.5), mit dem Scheibenradius von $R_{Scheibe} = 0,110$ mm.

$$A_{aus} = (H - w) \cdot 2\pi \cdot R_{Scheibe} \quad (3.5)$$

Einlassmassenstrom entspricht dem Auslassmassenstrom bei dem Erreichen eines quasi-stationären Zustands (3.6), mit \mathbf{U}_{ein} und \mathbf{U}_{aus} , als Ein- und Ausströmgeschwindigkeit.

$$\mathbf{U}_{ein} \cdot \pi \cdot (R_{Düse})^2 = \mathbf{U}_{aus} \cdot (H - w) \cdot 2\pi \cdot R_{Scheibe} \quad (3.6)$$

Aus der Bedingung $Fr = 1$ erhält man mit (3.5) und (3.6) die Gleichung (3.7) für die Überströmgeschwindigkeit am Wehr \mathbf{U}_{aus} .

$$U_{aus} = \sqrt[3]{\frac{U_{ein} \cdot \pi \cdot (R_{Düse})^2 \cdot g}{2\pi \cdot R_{Scheibe}}} \quad (3.7)$$

Aus (3.7) lässt sich die zusätzliche Höhe mit (3.8) bestimmen.

$$(H - w) = \Delta h = \frac{U_{aus}^2}{g \cdot 1} \quad (3.8)$$

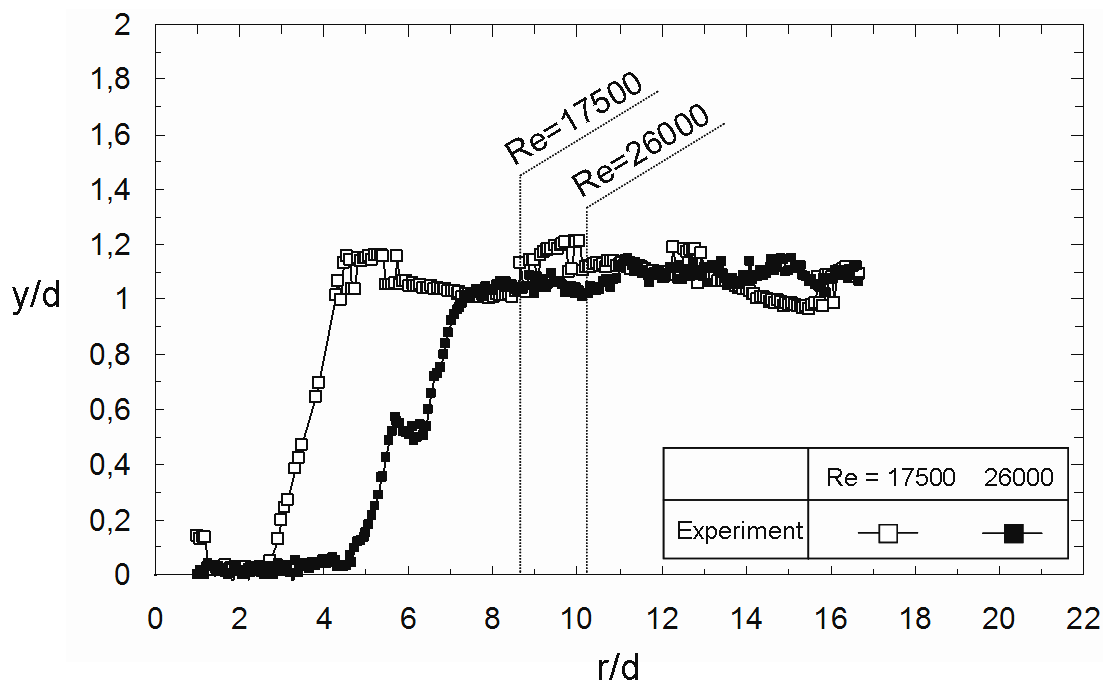


Abb. 3-18 Sprungpositionen nach Froudezahlkriterium

Abb. 3-18 zeigt die theoretisch berechneten Sprungradien für den Ansatz über die Froudezahl. Dieser Ansatz liefert eine Vertauschung der Sprungpositionen, bezogen auf die Reynoldszahl. Eine höhere Fluidgeschwindigkeit resultiert bei diesem Ansatz in einer höheren Fluidhöhe und somit einem größeren hydrostatischen Druck, was die Sprungposition gegenüber der niedrigeren Reynoldszahl nach innen verschiebt. Des Weiteren lässt sich anhand der Auswertung des Froudezahlverlaufs erkennen, dass sich keine einheitliche Froudezahl annehmen lässt (Abb. 3-19). An der Überströmung am Wehr treten zusätzlich noch Erdbeschleunigungskräfte auf, welche die Froudezahl variieren.

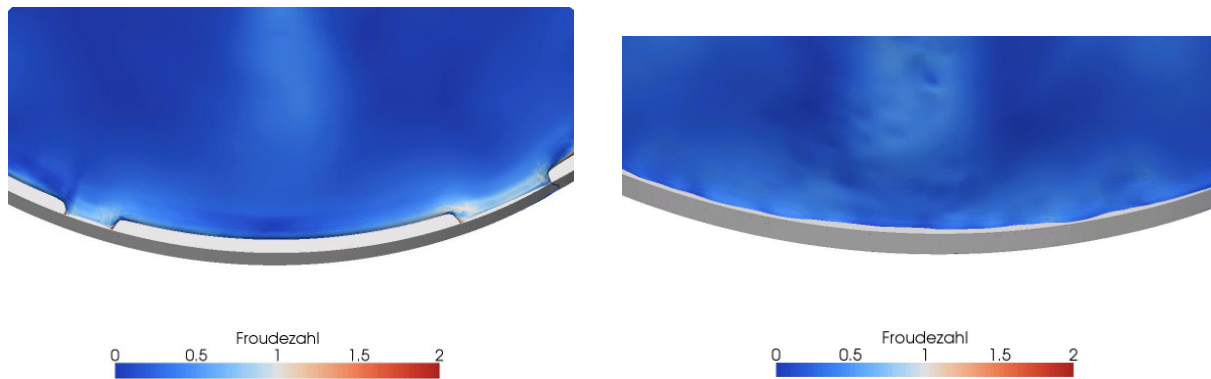


Abb. 3-19 Froudezahlverlauf am Wehr

Ein weiterer Ansatz wird aus dem Wasserbau abgeleitet, der den Massenstrom Q in Abhängigkeit der Breite des Wehres b , einem Überfallbeiwert μ_{ii} und der Überlaufhöhe h_{ii} darstellt (3.9) [63].

$$Q = \frac{2}{3} \cdot \mu_{ii} \cdot b \cdot \sqrt{2g} \cdot h_{ii}^{3/2} \quad (3.9)$$

Der Überfallbeiwert hängt von der Wehrhöhe und der Krümmung des Überfallstrahls ab, den die Geometrie des Wehres bestimmt. Die Krümmung führt zu einer Zentrifugalbeschleunigung, durch die der Druck im Strahl reduziert und die Geschwindigkeit erhöht werden. Jedoch ist dieser Ansatz für die Überströmung des hydraulischen Sprungs nicht geeignet, da hier zum einen die Strömungsgeschwindigkeit als Größe am Wehr fehlt und zum anderen die Überlaufhöhe massenstromabhängig ist. Die Experimente und die numerischen Simulationen zeigen, dass die Höhe nicht massenstromabhängig ist.

3.3.2 Analytische Beziehung im fließenden Bereich

Im Folgenden wird eine analytische Beziehung für die Höhe im fließenden Bereich erläutert, die in Verbindung mit der theoretischen Beschreibung der Sprungposition von Bush und Aristoff [14], [19] Verwendung finden soll. Ziel dieser Betrachtung ist es, eine Beziehung herzuleiten, mit deren Hilfe die Sprungposition in Flüssigmetall mit den Parametern der Fluideigenschaften, der Einlassgeschwindigkeit, dem Einlassdurchmesser und der Wehrhöhe bestimmt werden kann. Für die analytische Beschreibung wird eine Ausströmung am Wehr nach unten angenommen, die bei der Gleichgewichtsbetrachtung äquivalent zu der Ausströmung an den definierten Ausströmgebieten steht.

Aus der Betrachtung der fixierten Kontaktlinie des Fluids am Wehraußenrand lässt sich eine Gleichgewichtsbeziehung mit den zwei Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 an der Kontaktlinie ansetzen. R_2 charakterisiert die radiale Ausbreitung, dargestellt als schematische Draufsicht in Abb. 3-20. Die Krümmung der Fluidfront wird durch den Radius R_1 beschrieben. Es wird eine Null-Geschwindigkeit des Fluids in der Umgebung des Wehres angenommen und die Abströmung modellhaft nach unten am Wehr angenommen.

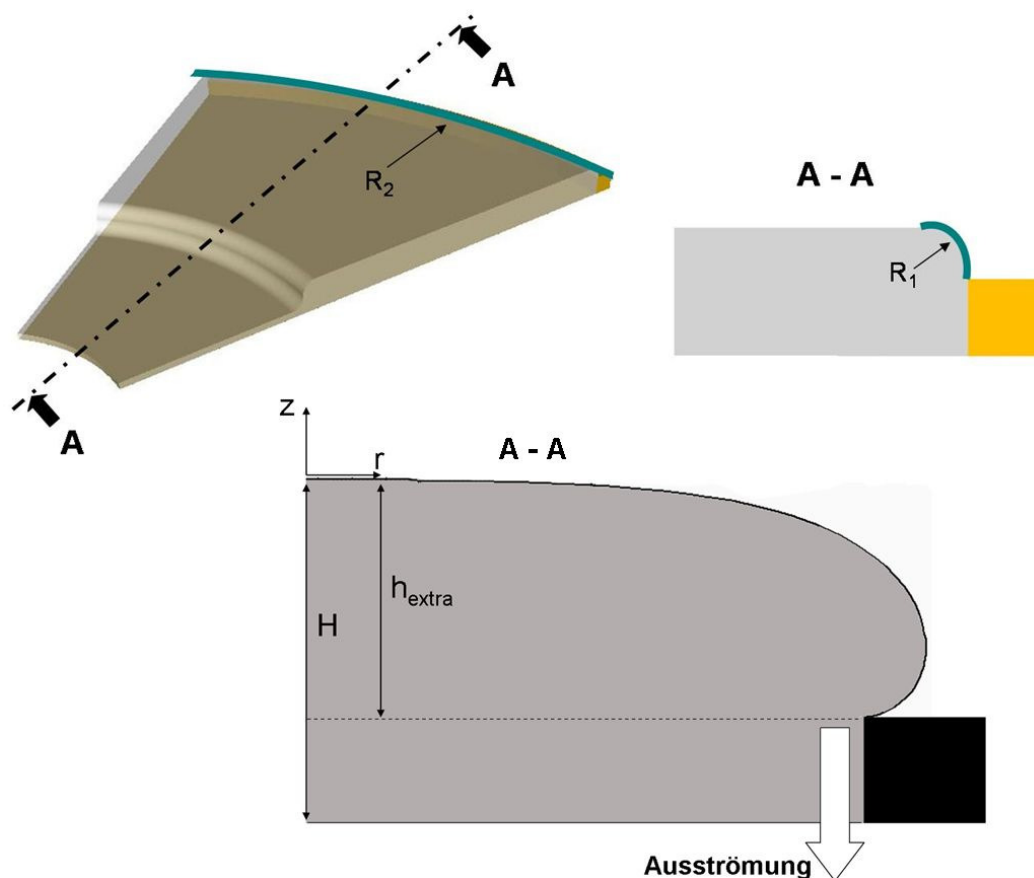


Abb. 3-20 Radien an der fixierten Kontaktlinie

Für die Gleichgewichtsbetrachtung wird von einem beliebigen Punkt auf der freien Oberfläche zu einem Punkt auf der gekrümmten Oberfläche integriert. Der hydrodynamische Druck steht im Gleichgewicht zur Kraft, die durch die Oberflächenkrümmung hervorgerufen wird. Den resultierenden Druck, aufgrund der Krümmung κ und der Oberflächenspannung σ , beschreibt die Young-Laplace-Gleichung (3.10).

$$p_{surf} = \sigma \cdot \kappa \quad (3.10)$$

Sie resultiert in die Gleichgewichtsbeziehung zwischen hydrostatischem Druck und der Oberflächenspannung:

$$P_{top} - \rho_{Fluid} \cdot g \cdot z = \sigma \cdot \kappa \quad (3.11)$$

Die Krümmung ist gegeben durch die Hauptkrümmungsradien die R_1 und R_2 (3.12). Der Wert R_1 bezieht sich auf den Radius bis zu Wehrinnenkante.

$$c = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \kappa + \frac{1}{R_1} \quad (3.12)$$

Es zeigt sich, dass der Radius R_2 lediglich einen Einfluss von 5 % hat und somit vernachlässigt wird. Mit den Referenzskalen((3.1)-(3.3)) führt (3.11) zu (3.13). Variablen mit Tilde kennzeichnen dimensionslose Größen.

$$\tilde{z} + \tilde{p}_{Scheitel} = \kappa \quad (3.13)$$

Mit der Krümmung aus (5.22) lässt sich (3.13) mithilfe der Ersatzvariablen ζ integrieren,

$$\int_0^{\tilde{z}} (\zeta + \tilde{p}_{Scheitel}) d\zeta = \int_0^{\tilde{z}} \frac{d}{d\zeta} \frac{-\tilde{r}'}{\sqrt{1+\tilde{r}'^2}} d\zeta \quad (3.14)$$

und führt zu:

$$\frac{1}{2} \tilde{z}^2 + \tilde{p}_{Scheitel} \cdot z = \frac{-\tilde{r}'}{\sqrt{1+\tilde{r}'^2}} + 1 \quad (3.15)$$

Für $z = 0$ nimmt die freie Oberfläche im flachen Bereich eine unendlich große Steigung $r' \rightarrow \infty$ ein. Die Anwendung der Regel nach l'Hospital führt zum Wert 1 auf der rechten Seite der Gleichung (3.15). Die Ableitung von r an der Stelle $z = h$ ist mit dem Kontaktwinkel θ gekoppelt durch $r'(h) = -\cot(\theta)$ und führt zu (3.16)

$$\frac{1}{2} \tilde{h}^2 + \tilde{p}_{Scheitel} \cdot \tilde{h} - 1 + \cos(\theta) = 0 \quad (3.16)$$

(3.15) und (3.16) führt zu der Höhenfunktion (3.17).

$$\frac{1}{2} \tilde{h}^2 + \tilde{p}_{Scheitel} \cdot \tilde{h} - 1 + \cos(\theta) = 0 \quad (3.17)$$

An der maximalen Höhe liegt eine ebene Oberfläche vor, bei der der Drucksprung durch die Grenzfläche zu null wird. Dies führt zu der Beziehung für die zusätzliche Höhe in Abhängigkeit vom Kontaktwinkel zu (3.18)

$$\tilde{h}_{extra} = \sqrt{2(1 - \cos(\theta))} \quad (3.18)$$

Die zusätzliche Höhe ist unabhängig von der Wehrhöhe, was auch die Experimente und numerische Strömungssimulationen gezeigt haben.

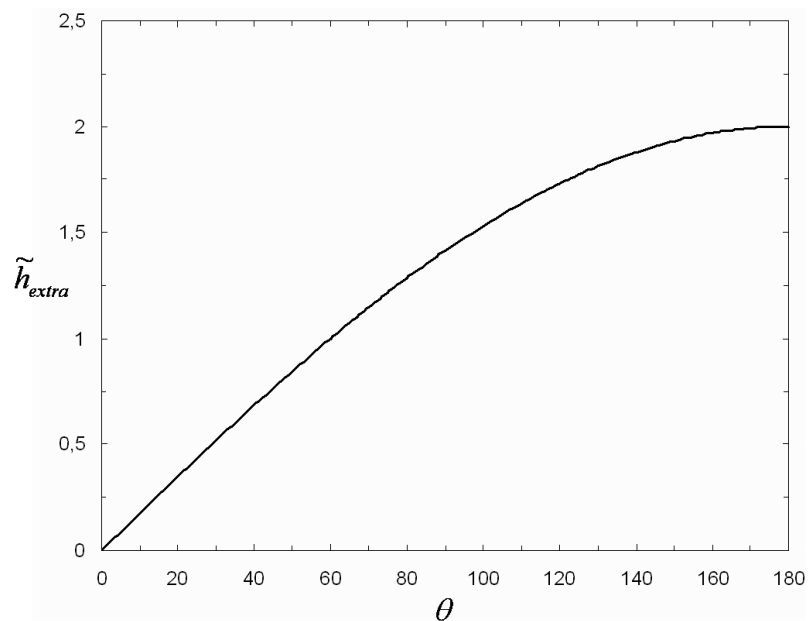


Abb. 3-21 Höhenfunktion

Mit den Stoffwerten des verwendeten Fluids Gallium Indium Zinn erhält man eine Referenzlänge von $l_{ref} = 2,924 \cdot 10^{-3}$ m und eine extra Höhe zu der Wehrhöhe mit einem Kontaktwinkel von $\theta = 180^\circ$ zu $h_{extra} = 0,005848$ m.

Abb. 3-22 stellt die Höhe nach (3.18) des fließenden Bereichs für die zwei untersuchten Wehrhöhen $w = 1$ mm und $w = 3$ mm dar. Die theoretische bestimmte Höhe besitzt eine sehr gute Übereinstimmung mit der experimentellen Höhe bei einer Wehrhöhe von $w = 1$ mm und eine geringe Abweichung von ca. 10 % bei der Wehrhöhe von $w = 3$ mm. Die Sprungpositionen besitzen eine gute Übereinstimmung für die beiden Wehrhöhen, trotz der Abweichung der berechneten Höhe im fließenden Bereich für $w = 3$ mm. Die in Kapitel 3.2 erwähnten Fluktuationen der Sprungposition sind zu berücksichtigen, die einen Vergleich mit den experimentellen Ergebnissen erschweren.

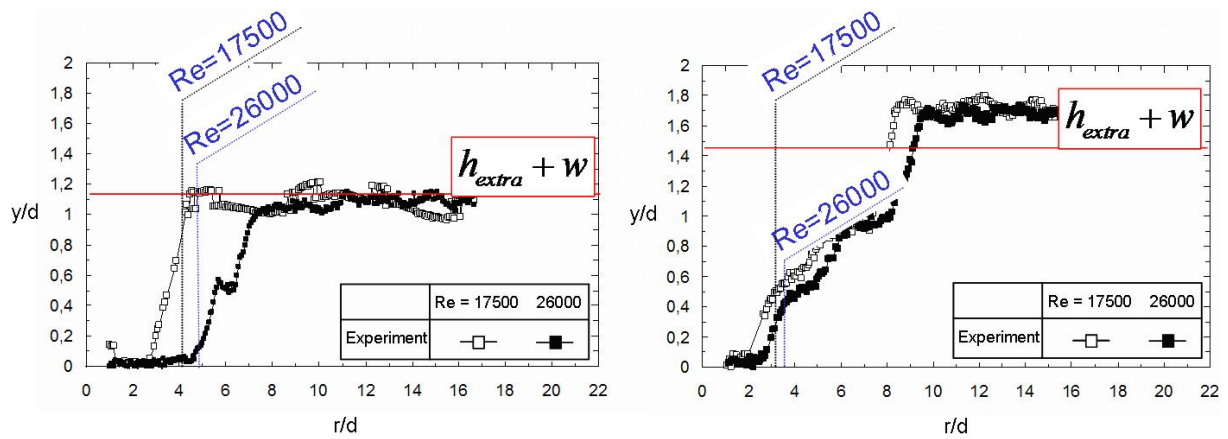


Abb. 3-22 Profilverlauf für $w = 1 \text{ mm}$ und $w = 3 \text{ mm}$

In Abb. 3-23 ist der dimensionslose Sprungradius, bezogen auf den Oberflächenspannungskoeffizienten auf Basis der Theorie nach Bush und Aristoff und der theoretisch berechneten Extrahöhe (3.18), aufgetragen.

Die dreieckigen und viereckigen Zeichen stellen die experimentellen Größen für die beiden Reynoldszahlen dar. Die Erhöhung der Oberflächenspannung führt zu einer höheren Fluidhöhe im fließenden Bereich aufgrund der fixierten Kontaktlinie und einer vergrößerten Oberflächenspannungskraft am hydraulischen Sprung. Die Kombination beider Theorien führt zu einer Proportionalität des dimensionslosen Sprungradius zu der Oberflächenspannung nach (3.19).

$$R_j / d \sim \sigma^{-3/5} \quad (3.19)$$

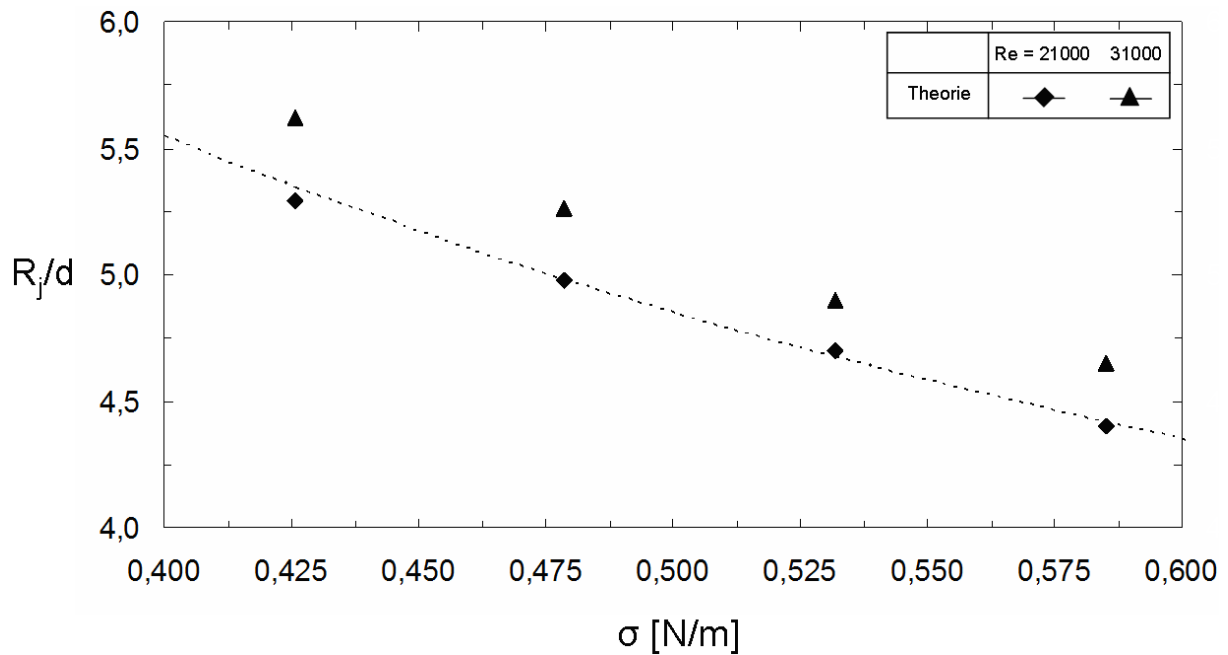


Abb. 3-23 Theoretischer Sprungradius in Abhängigkeit der Oberflächenspannung

3.4 Fingerstrukturen beim hydraulischen Sprung

Bei großen Kontaktwinkeln zwischen Wand und dem Fluid und bestimmten Einlassparametern bilden sich beim rotationssymmetrischen hydraulischen Sprung mit dem Flüssigmetall Gallium Indium Zinn aufgrund seiner Stoffeigenschaften und in Abhängigkeit der Anfangsbedingungen Fingerstrukturen aus. Diese Charakteristik ist sowohl in Experimenten als auch bei numerischen Simulationen zu beobachten (Abb. 3-24). Im Experiment ist das Wehr auf eine Höhe null eingestellt, wodurch der fließende Bereich bei den vorliegenden Randbedingungen entfällt.

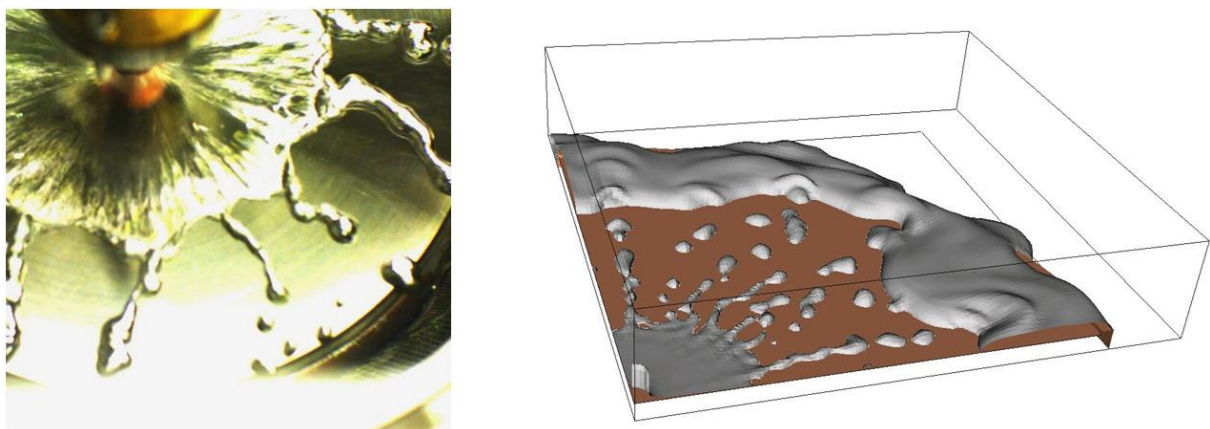


Abb. 3-24 Fingerstrukturen

Bei dem sogenannten „Fingering“ geht der schießende Bereich, im Gegensatz zum klassischen hydraulischen Sprung, nicht mit Änderung der Froudezahl von $Fr > 1$ zu $Fr < 1$ in einen fließenden Bereich mit deutlich erhöhter Fluidhöhe über. Die schießende Strömung zerfällt zuerst in Finger, die sich radial ausbreiten, und geht dann in den bekannten fließenden Bereich über. Das „Fingering“ spielt eine Rolle bei der Kühlung von Oberflächen mithilfe eines Fluids durch einen auftreffenden Strahl. Bei der Ausprägung von Fingern ist eine effektive konvektive Kühlung nicht mehr gewährleistet.

Dieser spezielle Fall des hydraulischen Sprungs wird als zweistufiger Sprung betrachtet und in vier Teilgebiete unterteilt: das Gebiet des auftreffenden Strahls (I), den schießenden Bereich (II), den Fingern (III) und den fließenden Bereich (IV). Als erster Sprung wird der Zerfall der geschlossenen Oberfläche in Finger zwischen den Gebieten II und III (Abb. 3-25) angesehen, der Zweite zwischen den Fingern (III) und dem fließenden Bereich (IV).

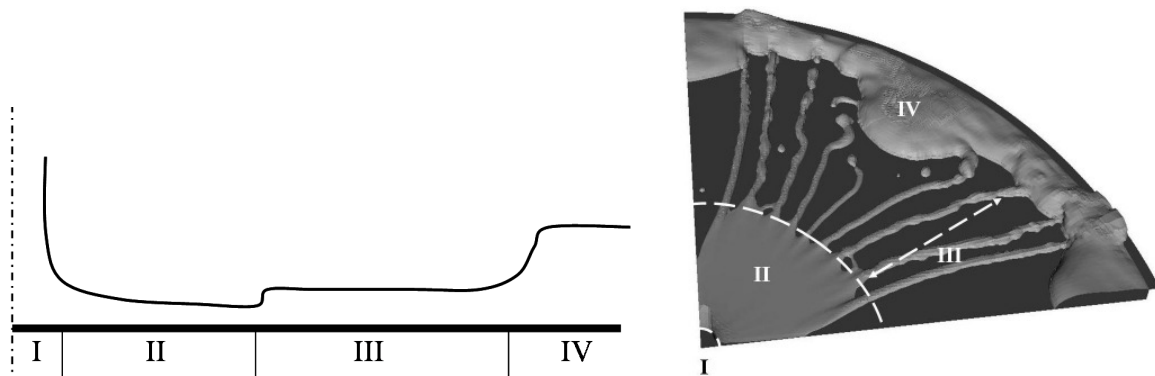


Abb. 3-25 Hydraulischer Sprung mit Finger

3.4.1 Numerisches Detail-Modell

Für genaue Untersuchungen der Fingerdynamik wird ein numerisches Detail-Modell eines Fingers verwendet. Es umfasst ein Rechengebiet, das genau zur Hälfte eines Fingers korrespondiert (Abb. 3-26). Der Finger wird durch die Symmetrierandbedingungen an den Seiten stabilisiert. Die Einlasshöhe entspricht der Höhe des schießenden Bereichs aus den Rechnungen der Viertelgeometrie am Radius R_1 . Für die Einleitung des „Fingering“ wird ein numerischer Stolperdraht verwendet, an dem ein hoher Kontaktwinkel vorgegeben wird. Am Fernfeld wird wie bei der Viertelgeometrie ein Atmosphärendruck vorgegeben. Die Größen der Radien R_1 und R_2 sowie die Einlasshöhe h und der Gebietsausschnitt δ wurden für eine halbautomatische Vernetzung variabel gehalten. Die Größen wurden mithilfe einer iterativen

Anpassung an die vorherrschende Fingerdynamik aus der numerischen Berechnung am Viertelmodell des rotationssymmetrischen hydraulischen Sprungs bestimmt. Sie ergeben sich zu den in Abb. 3-26 abgebildeten Werten.

Mithilfe der numerischen Ergebnisse des Detail-Modells lassen sich Modellannahmen für das mathematische Modell des „Fingering“ ableiten und Verlustbeiwerte beim Übergang der schießenden Strömung in Finger bestimmen. Um den Profilverlauf auszuwerten werden Auswerteflächen eingeführt. Die Flächen stellen Isoflächen des Radius dar und ergeben im Schnitt mit der Isokontur der freien Oberfläche den Querschnittsprofilverlauf an der betrachteten Stelle. Für die Auswertung werden Isoflächen des Radius mit $R = \{0,012; 0,014, 0,016, 0,02, 0,022, 0,024 \dots 0,04\}$ verwendet. Die einzelnen Profilverläufe sind im Anhang dargestellt.

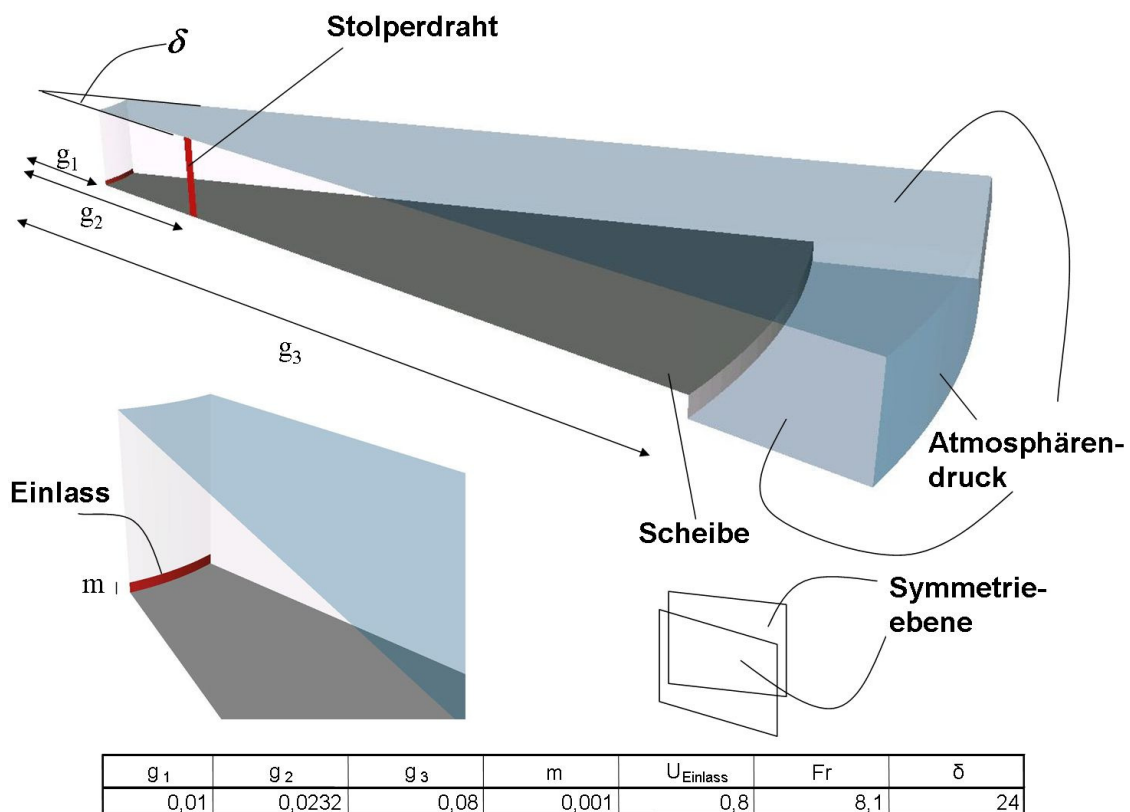


Abb. 3-26 Detail-Modell Finger

Abb. 3-27 zeigt rechts die Isokontur der freien Oberfläche geschnitten mit den Auswerteebenen. Es ist zu erkennen, dass die konstante Geschwindigkeit im schießenden Bereich zu einer sinkenden Fluidhöhe in Abhängigkeit vom Radius führt. Die Transitionsregion, der Übergang zwischen schießender Strömung und dem Finger, bildet sich in eine dreieckige Form aus. Diese Einschnürung mit einer bauchigen Flanke bewirkt eine konstante Fluidhöhe im flachen Bereich in der Mitte der freien Oberflächen. Auf dem Finger selber bilden sich instationäre Oberflächenwellen aus.

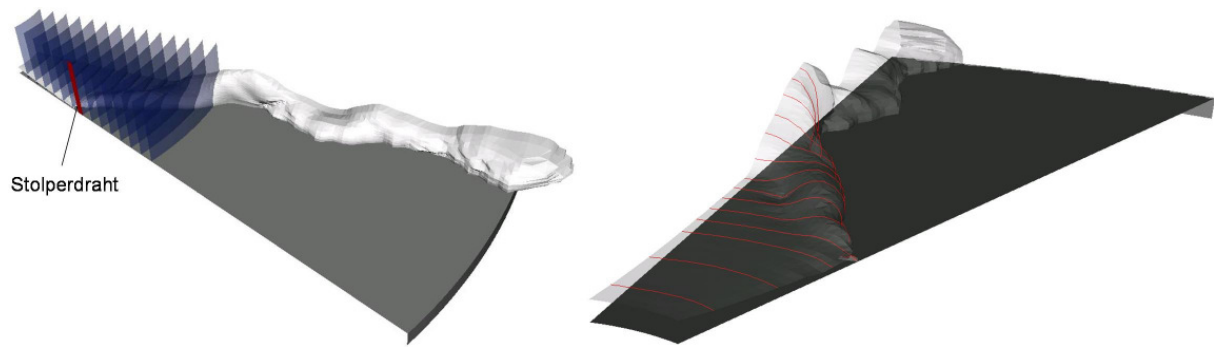


Abb. 3-27 Auswerteebenen

3.4.2 Bilanzierung durch das Transitionsgebiet

Grundlage der nachfolgenden Betrachtungen bildet die Annahme, dass ein Kräftegleichgewicht an beiden Sprungpositionen vorliegt. Die theoretischen Ansätze zur Vorhersage der Sprungpositionen basieren auf Gleichgewichtsbeziehungen mit hohen Oberflächenspannungen und Benetzungseffekten. Um ein mathematisches Modell herzuleiten, wird eine Bilanzierung durch die Transitionsregion angesetzt. Es wird ein quasistationärer Zustand des Fingers angenommen, womit sich folgende unbekannte Größen ergeben:

- die Geschwindigkeit im Finger
- der Radius des Fingerzerfalls (Beginn Transition)
- die Form der Finger
- der Druck innerhalb eines Fingers
- die Anzahl der Finger.

Dem stehen die Gleichungen der integralen Bilanzierung gegenüber:

- Massenerhaltung
- Energieerhaltung (Bernoulli)
- Kräftebilanz durch das Transitionsgebiet

- Young-Laplace-Gleichung.

Des Weiteren werden die zwei Kriterien der Froudezahl und des minimalen Abstands zwischen den Fingern für die Existenz von Fingern eingeführt. Abb. 3-28 zeigt die Bereiche des Fingerzerfalls. Der schießende Bereich zerfällt über eine Transitionsregion in Finger. Der charakteristische Radius für den Zerfall ist der Radius R zum Beginn der Transitionsregion.

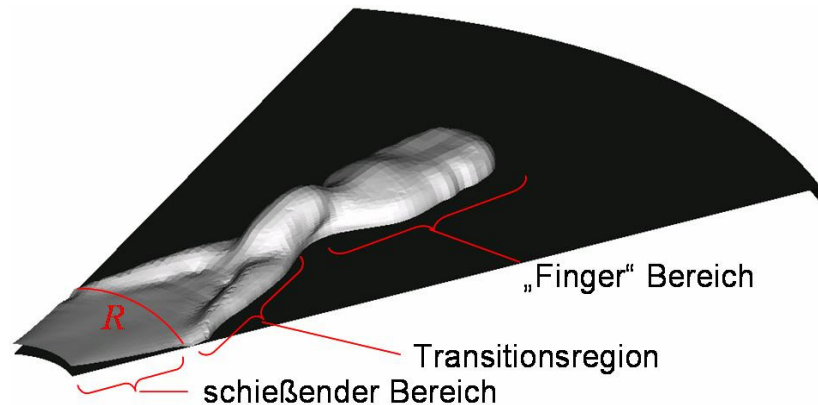


Abb. 3-28 Isokontur der freien Oberfläche eines Fingers

Für die nachfolgende Bilanzierung wird ein quasistationärer Zustand eines Fingers angenommen, an dem die momentan wirkenden Kräfte ein Gleichgewicht bilden. Die viskosen Kräfte auf der Scheibe werden vernachlässigt. Die hydrostatischen Kräfte im schießenden Bereich können aufgrund der sehr niedrigen Fluidhöhe wie im klassischen hydraulischen Sprung ebenfalls vernachlässigt werden ([14], [25] und [26]). Der Umgebungsdruck wird zu $p_{ambient} = 0$ angenommen.

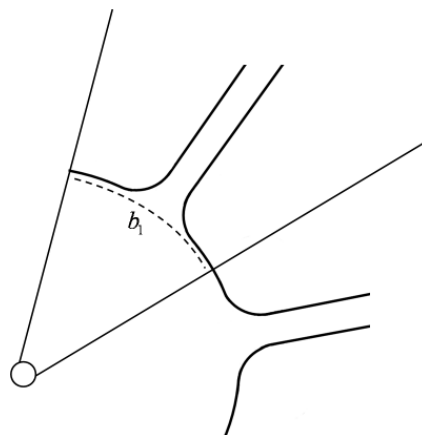


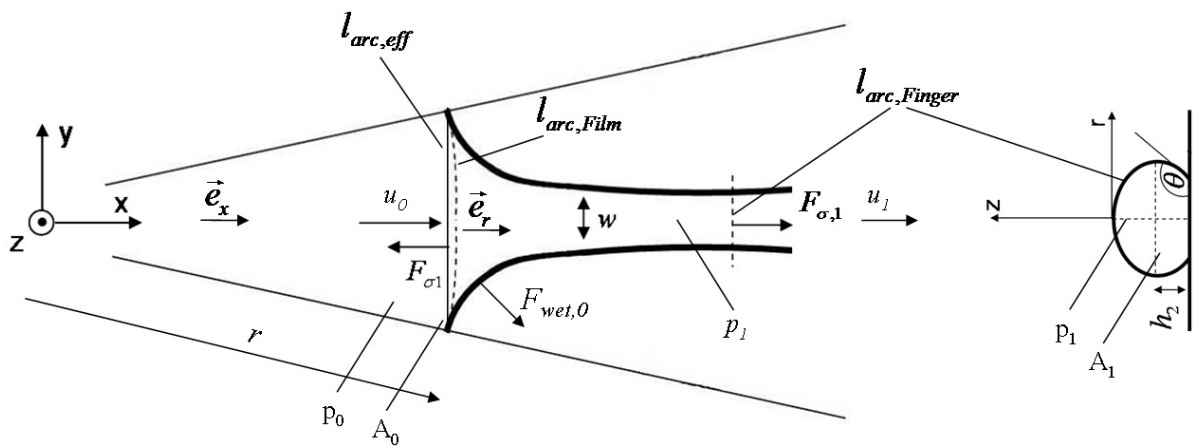
Abb. 3-29 Finger anteilige Bogenlänge b_1 am Sprung

Ein weiterer zu bestimmender Parameter ist die Flüssigkeitshöhe des schießenden Bereichs, der sich durch die Kontinuitätsgleichung von einer beliebigen Stelle im Film bis zur Position des ersten Sprungs ausdrücken lässt. Der anteilige Flächeninhalt des Films zu einem Finger $A_{\text{Film-F}}$ wird auf die zu einem Finger anteiligen Bogenfläche b_1 des Filmbereichs bezogen (Abb. 3-29). Aufgrund der nahezu konstanten Geschwindigkeit im schießenden Bereich erhält man die Fluidhöhe h_0 im schießenden Bereich über die Massenerhaltung (3.21) mit u_0 als Fluidgeschwindigkeit im schießenden Bereich zu (3.22).

$$A_0 = \frac{2\pi \cdot r \cdot h_0}{n_{\text{Finger}}} \quad (3.20)$$

$$\frac{\pi \cdot d_{\text{Düse}}^2}{4} \cdot u_0 = 2\pi \cdot r \cdot h_0 \cdot u_0 \quad (3.21)$$

$$h_0 = \frac{d_{\text{Düse}}^2}{8r} \quad (3.22)$$



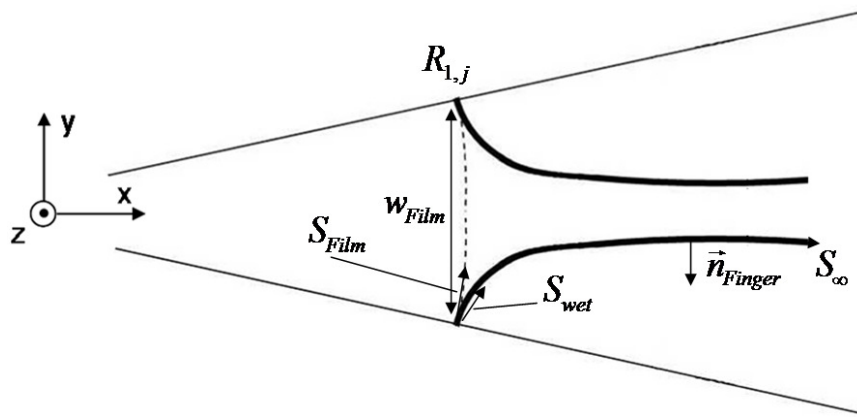


Abb. 3-30 Kräfte an einem Finger

Die Kontinuitätsgleichung durch das Transitionsgebiet mit den zueinander korrespondierenden Querschnittsflächen A und den Fluidgeschwindigkeiten u erhält man durch (3.23). Die Indizierung 0 steht nachfolgend für den schießenden Bereich, die Indizierung 1 für den Fingerbereich.

$$A_0 \cdot \rho_{Fluid} \cdot u_0 - A_1 \cdot \rho_{Fluid} \cdot u_1 = 0 \quad (3.23)$$

Wendet man die Kapillarlänge als Referenzlänge (3.1) und die Referenzgeschwindigkeit (3.3) auf (3.23) an, so erhält man die dimensionslose Kontinuitätsgleichung zwischen schießendem Bereich (0) und einem Finger (1) zu (3.24).

$$\tilde{u}_0 \cdot \tilde{A}_0 = \tilde{u}_1 \cdot \tilde{A}_1 \quad (3.24)$$

Die Energiegleichung erhält man mithilfe der Stromfadentheorie von Bernoulli entlang der Fluidoberfläche zu (3.25) mit dem Druck p_1 im Finger aufgrund der Krümmung und dem Verlustkoeffizienten ζ .

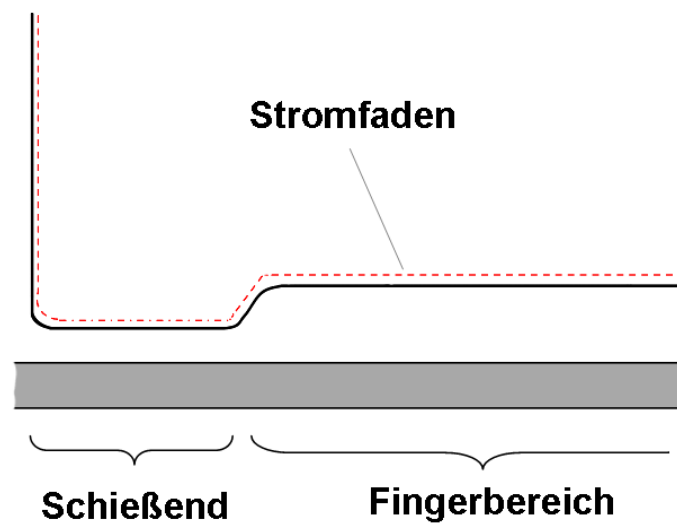


Abb. 3-31 Stromfaden entlang der Oberfläche

$$\frac{\rho_{Fluid}}{2} \cdot u_0^2 \cdot (1 - \zeta) - \left(\frac{\rho_{Fluid}}{2} \cdot u_1^2 + p_1 \right) = 0 \quad (3.25)$$

Die dimensionslose Energiegleichung leitet sich mit der Referenzgeschwindigkeit u_{ref} und dem Referenzdruck p_{ref} zu (3.26) ab.

$$\frac{1}{2} \cdot \tilde{u}_0^2 \cdot (1 - \zeta) + \tilde{p}_0 - \left(\frac{1}{2} \cdot \tilde{u}_1^2 + \tilde{p}_1 \right) = 0 \quad (3.26)$$

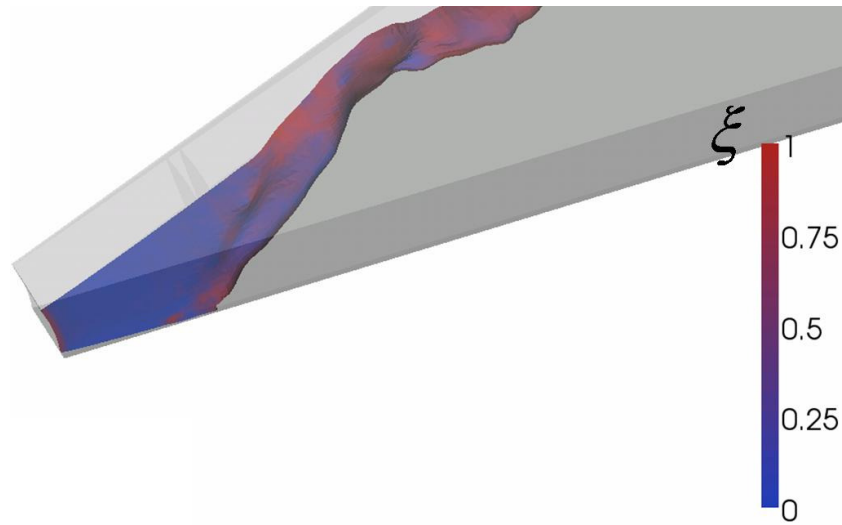


Abb. 3-32 Druckverlustkoeffizient

Abb. 3-32 zeigt den Verlauf des Druckverlustkoeffizienten auf der freien Oberfläche. Der Koeffizient resultiert aus der Differenz des Druckes aus der Stromfadentheorie nach Bernoulli und dem numerisch berechneten Druck. Die Auswertung des numerischen Detail-Modells beim Übergang der schießenden Strömung in einen Finger ergibt für den Druckverlustkoeffizienten einen Wert von 0,4 (Abb. 3-32).

Bei einer Betrachtung der wirkenden Kräfte eines Schnitts zu Beginn und am Ende des Transitionsgebiets lassen sich folgende Kräfte extrahieren: Zum einem sind es die Impulskräfte entlang des Fingers und zum anderen die wirkenden Oberflächenspannungskräfte. Der Oberflächenspannungskraft $F_{\sigma,1}$ im Finger (3.28) wirken die Oberflächenspannungskraft des Films im schießenden Bereich $F_{\sigma,0}$ (3.29) und die Kontaktlinienkraft F_{wet} des Transitionsgebiets mit der Wand (3.31) entgegen (Abb. 3-30). Die Bilanzierung führt zu (3.27), mit der Bogenlänge des Fingers $l_{arc,Finger}$ (Abb. 3-33), der Bogenlänge des zu einem Finger korrespondierenden Films $l_{arc,Film}$ und der effektiven Bogenlänge der Kontaktlinienkraft ($l_{arc,Kontakt})_{eff}$.

$$A_0 \cdot \left(\rho \cdot u_0^2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot g \cdot s \right) - A_1 \cdot (\rho \cdot u_1^2 + p_1) + F_{\sigma,1} - F_{\sigma,0} + F_{wet} = 0 \quad (3.27)$$

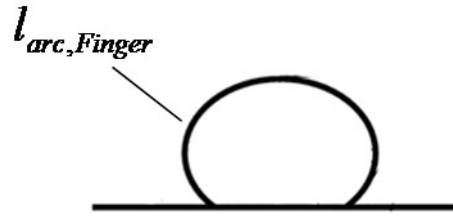


Abb. 3-33 Bogenlänge des Fingers

$$F_{\sigma,1} = l_{arc, Finger} \cdot \sigma \quad (3.28)$$

$$F_{\sigma,0} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{n}} R_{1,j} \cdot \vec{e}_r \cdot \vec{e}_j \cdot d\varphi \cdot \sigma = \frac{2\pi}{n} \cdot R_{1,j} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot \sigma = w_{Film} \cdot \sigma \quad (3.29)$$

$$w_{Film} = \frac{2\pi R_{1,j}}{n} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \quad (3.30)$$

$$F_{wet} = (l_{arc, Kontakt})_{eff} \cdot \sigma \cdot \cos(\theta) \quad (3.31)$$

$$F_{wet} = \sigma \cdot \cos(\theta) \cdot 2 \int_0^{S_{\infty}} \vec{n}_{Finger} \cdot \vec{e}_x \cdot dS_{Kontakt} \quad (3.32)$$

Die effektive Kontaktbogenlänge und die einem Finger anteilige Fläche des Films resultiert aus dem Produkt der jeweiligen Größe mit dem Projektionsfaktor φ . Die effektive Bogenlänge am Filmrand b_1 und b_2 (Abb. 3-36) erhält man durch Abzug der projizierten Breite des Fingers auf den Bereich II \tilde{b}_{finger} (Abb. 3-25):

$$\tilde{b}_{Kontakt, eff} = 2 \cdot \tilde{R}_{j,1} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n_{finger}}\right) - \tilde{b}_{finger} \quad (3.33)$$

Wie aus Abb. 3-34 zu erkennen ist, lässt die Bedingung ab einem bestimmten Kontaktwinkel nur eine effektive Kontaktbogenlänge größer null zu.

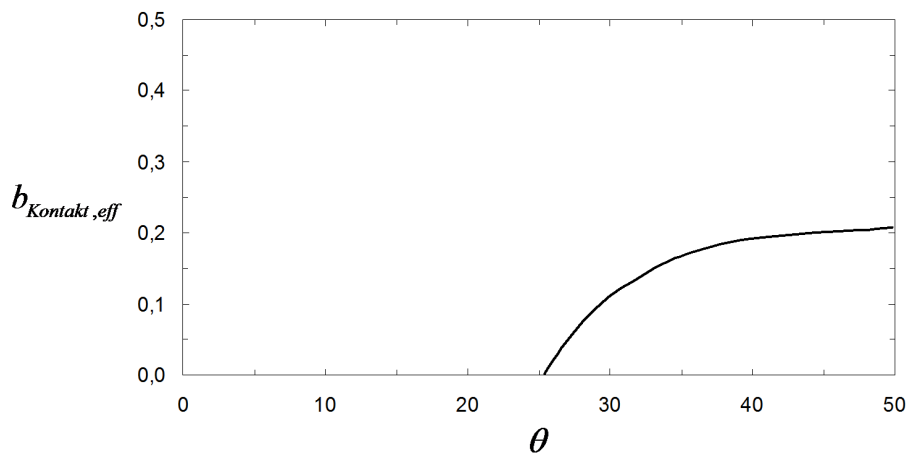


Abb. 3-34 Verlauf effektive Kontaktbogenlänge

Mithilfe des Projektionsfaktors werden radial wirkende Kräfte auf die Längsachse des zugehörigen Fingers bezogen (3.34).

$$\varphi = \frac{n_{\text{Finger}}}{\pi} \int_0^{\pi / n_{\text{Finger}}} \cos(\phi) d\phi \quad (3.34)$$

In Abb. 3-35 ist der Projektionsfaktor über die Fingeranzahl aufgetragen. Dem Diagramm ist zu entnehmen, dass der Projektions-Faktor für einen Finger null ist und ab etwa 10 Fingern in eine Sättigung übergeht. Ab 10 Fingern hat der Projektions-Faktor keinen Einfluss mehr, und alle wirkenden Kräfte gehen direkt in die Kräftebilanz entlang eines Fingers ein. Bei der Ausprägung nur eines Fingers heben sich die radial wirkenden Kräfte auf. Die bezogenen Größen werden in der weiterführenden Betrachtung als effektive Größen benannt.

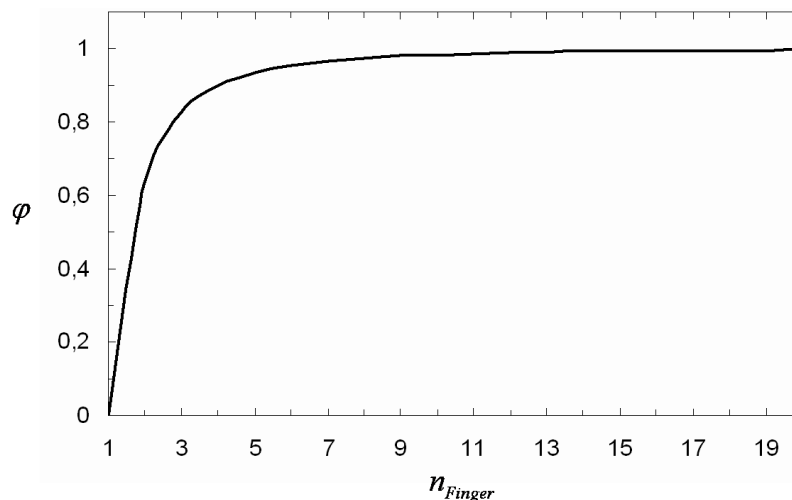


Abb. 3-35 Projektions-Faktor

Für die Kräftegleichgewichtsbetrachtung an der ersten Sprungposition wird der kleine Radius vernachlässigt, der am Beginn eines Fingers auftritt. Somit ergeben sich zwei Bogenabschnitte für die radial wirkenden Kräfte am Rand des Filmbereichs aus Projektion der Finger-
außenränder.

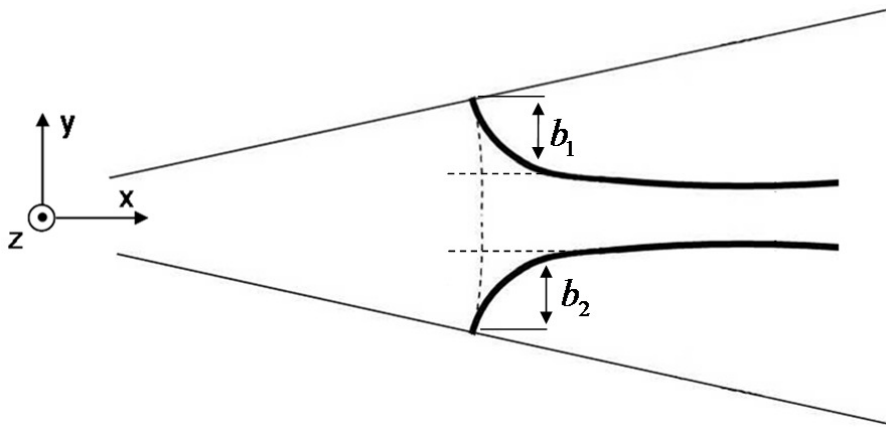


Abb. 3-36 Vereinfachter Bogenabschnitt

Um den radialen Impulsfluss zu bilanzieren wird noch ein sogenanntes „Extra-Spacing“ benötigt. Diese zusätzliche Strecke berücksichtigt den Fehler, der durch die Differenz in horizontaler Richtung zwischen Bauch des Fingers und der Kontaktstelle mit der Wand entsteht (Abb. 3-37).

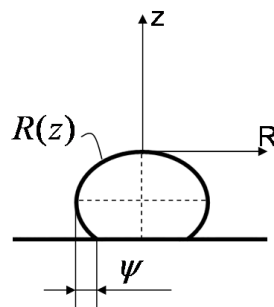


Abb. 3-37 „Extra Spacing“

Für die Berechnung der Querschnittsfläche eines Fingers wird wie in Kapitel 3.3.2 die Young-Laplace-Gleichung angesetzt (3.35), dies führt zu der Höhe h_f des Fingers (3.36). Der Kontaktwinkel am Fingergrund zwischen der freien Oberfläche und der Wand induziert die Form der freien Oberfläche, mit deren Hilfe sich der Querschnitt des Fingers ausrechnen lässt.

$$\tilde{z} + \tilde{p}_1 = -\frac{d}{dz} \frac{\tilde{y}'(z)}{(1 + y'(z)^2)^{1/2}} \quad (3.35)$$

$$\tilde{h}_1 = -\tilde{p}_1 + \sqrt{\tilde{p}_1^2 + 2(1 - \cos(\theta))} \quad (3.36)$$

Die Fläche eines Fingers setzt sich aus dem Doppelintegral über das ebene Flächenstück dA (3.37).

$$A = 2 \iint_{A_{half}} dA \quad (3.37)$$

Die Gleichung (3.37) lässt sich mithilfe des Vektors $(0, z)$ und $\nabla \cdot (0, z) = 1$ zu (3.38) umschreiben und mit Anwendung des Gauss'schen Integralsatz folgt:

$$A = 2 \iint_{A_{half}} \nabla \cdot (0, z) dA = 2 \oint \mathbf{n} \cdot (0, z) ds \quad (3.38)$$

Mit dem Linienelement der Kurve $ds = \sqrt{1 + r'^2} dz$ führt die Integration zu (3.39).

$$A = wh + 2 \int_0^h \frac{-r'z}{\sqrt{1 + r'^2}} \sqrt{1 + r'^2} dz = wh - 2 \int_0^h r'z dz = 2 \int_0^h (h - z) r' dz \quad (3.39)$$

Die Bogenlänge ist definiert mit (3.40).

$$l_{arc} = 2 \int_0^h \sqrt{1 + r'^2} dz = 2 \int_0^h \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2} z^2 - p_{top} \cdot z \right)^2 \right)^{-1/2} dz \quad (3.40)$$

Der durchschnittliche Druck in einem Finger lässt sich mit (3.41) beschreiben.

$$\begin{aligned} p_{mean} - p_{top} &= \frac{2}{A} \iint_{A_{half}} z dA = \frac{2}{A} \oint \mathbf{n} \cdot (0, z^2 / 2) ds \\ &= \frac{1}{A} \left(\frac{1}{2} w \cdot h^2 - \int_0^h r' z^2 dz \right) = \frac{1}{A} \left(\int_0^h (h^2 - z^2) r' dz \right) \end{aligned} \quad (3.41)$$

In Abb. 3-38 ist die Fläche als Funktion vom Druck für exemplarisch eingezeichnete Isolinien des Kontaktwinkels dargestellt. Aufgrund der Druckerhöhung sind keine beliebig kleinen Finger möglich. Die Druckrückgewinnung für die Ausbildung der Finger geschieht durch Abbremsen des Fluids im Transitionsgebiet. Flüssigmetalle und das verwendete Fluid Gallium Indium Zinn sind besonders für die Druckrückgewinnung geeignet, da sie eine große Dichte und somit eine hohe Trägheit besitzen.

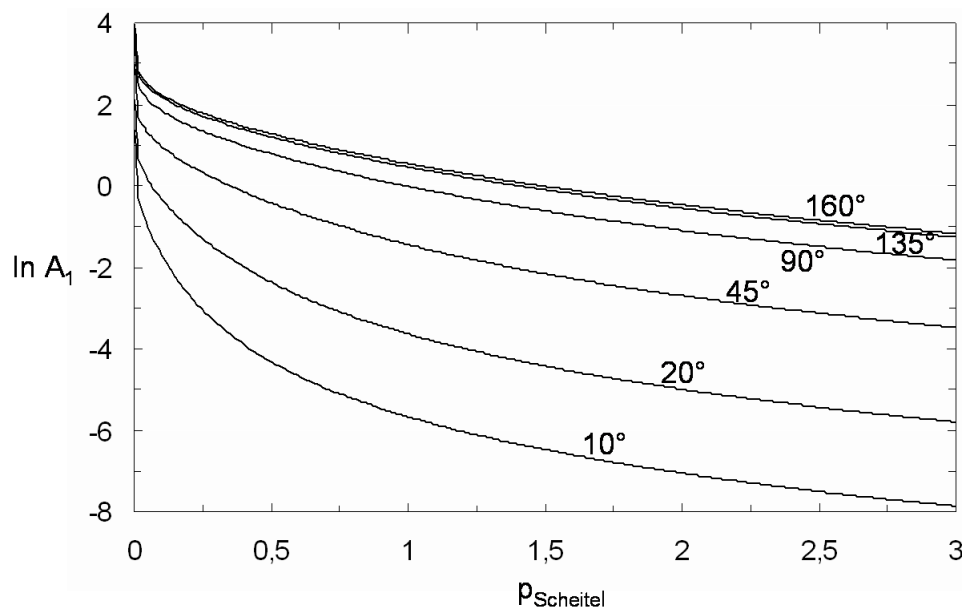


Abb. 3-38 Fläche in Abhängigkeit vom Druck

3.4.3 Froudezahl- und Fingerabstandskriterium

Aus der Auswertung des Froudezahlverlaufs an der Fingeroberfläche des numerischen Detail-Modells lässt sich ableiten, dass die Froudezahl im Finger mindestens die Größe eins betragen muss (Abb. 3-39). Diese Bedingung besagt, dass Oberflächenwellen nur stromab des Fingers transportiert werden können. Stromauflaufende Oberflächenwellen ($Fr < 1$) würden bis zum schießenden Bereich laufen und dort zu einer Verbreiterung und somit zur Vernichtung des Fingers führen.

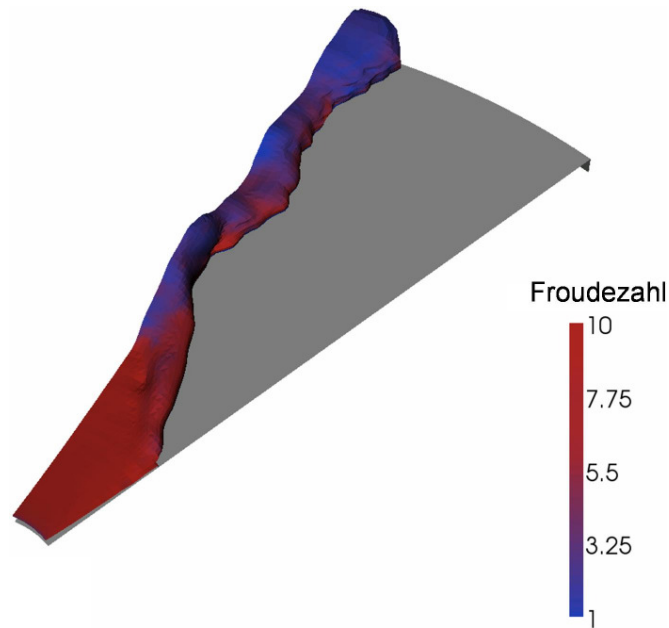


Abb. 3-39 Froudezahlerverlauf an einem Finger

Die Anwendung der Froudezahlbedingung auf die Bilanzgleichungen und der Fingerquerschnittsfläche führt zu den in Abb. 1-1 dargestellten dimensionslosen Isogeschwindigkeitslinien der Froudezahl eins in Abhängigkeit vom Kontaktwinkel und der Fingeranzahl.

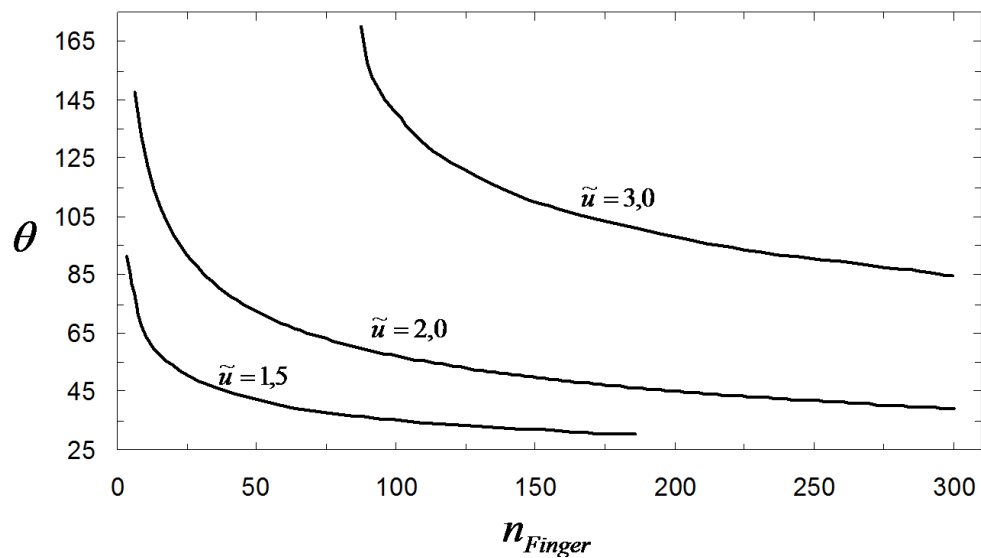


Abb. 3-40 Isogeschwindigkeitslinien für $Fr = 1$ ($d = 2$)

Aus Abb. 3-41, den Isolinien verschiedener Froudezahlen über den dimensionslosen Radius und dem Kontaktwinkel aufgetragen, erhält man als mögliche Lösungen für die Bedingung $Fr > 1$ alle Werte unterhalb der $Fr = 1$ Linie.

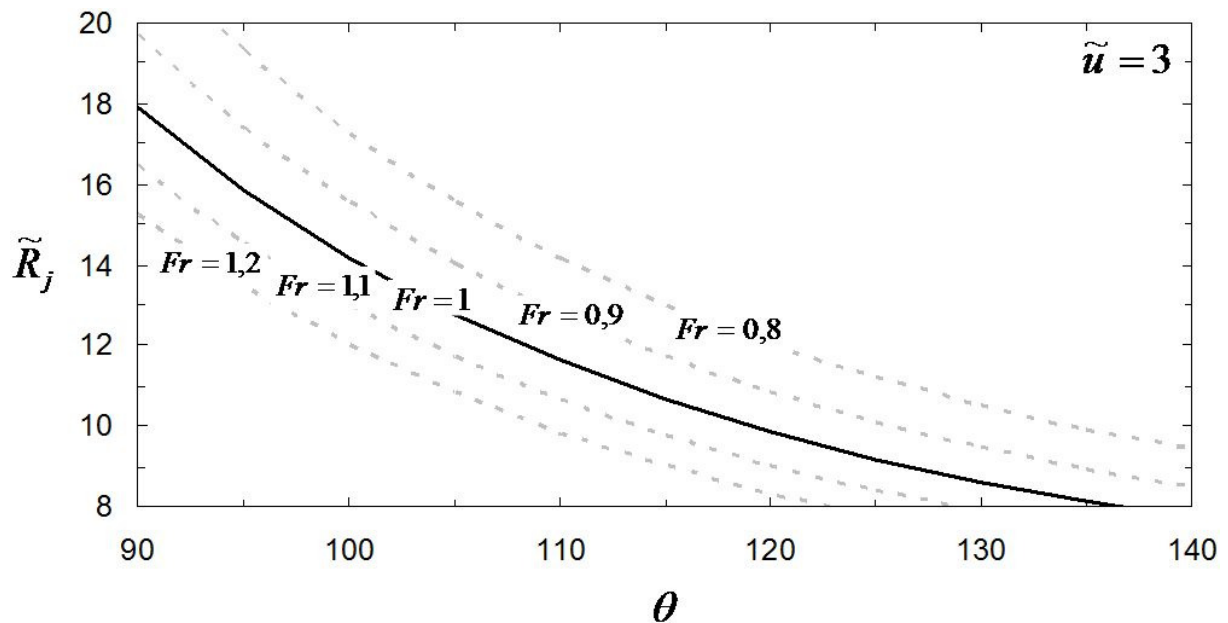


Abb. 3-41 Isolinien der Froudezahl ($d = 2$)

Für die eindeutige Bestimmung der Fingeranzahl ist ein weiteres Kriterium des minimalen Abstands zwischen den Fingern das sogenannte „Extra-Finger-Spacing“ notwendig: Es definiert den Abstand der Finger über den Innenkreisradius zwischen den Fingern. Dieser Abstand resultiert aus der Gleichgewichtsbetrachtung am Außenradius des schießenden Bereichs zwischen zwei Fingern, gekennzeichnet durch Punkt B in Abb. 3-42.

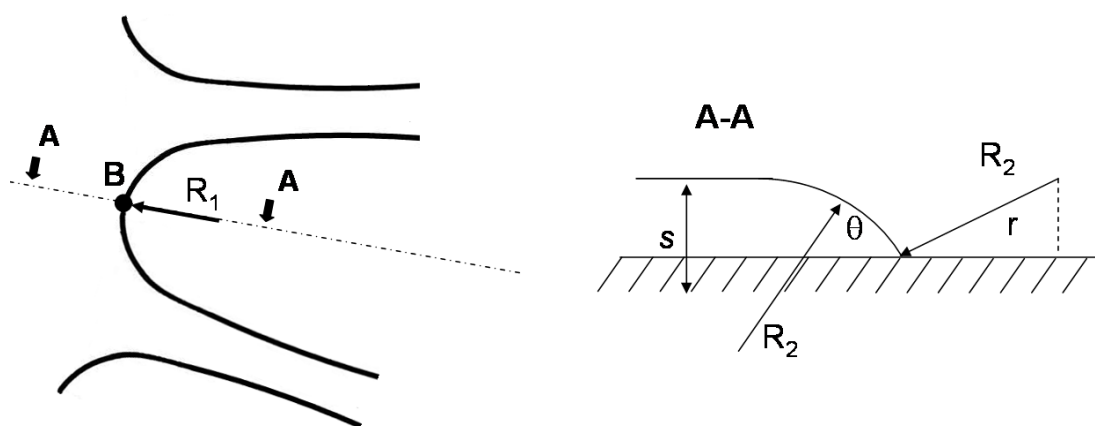


Abb. 3-42 Extra-Finger-Spacing

Es wird angenommen, dass im quasistationären Zustand der Sprungpositionen am Punkt B die Fluidgeschwindigkeit annähernd null beträgt. Somit stehen die Oberflächenspannungskräfte im Gleichgewicht mit den hydrostatischen Kräften.

$$\rho \cdot g \cdot h_0 - \sigma \cdot \kappa = \rho \cdot g \cdot h_0 - \sigma \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = 0 \quad (3.42)$$

Vernachlässigt man aufgrund der sehr geringen Höhe des schießenden Bereichs den hydrostatischen Einfluss, so muss der mittlere Krümmungsradius nach (3.42) null sein. Damit steht die Druckerhöhung aufgrund der Krümmung der beiden Radien R_1 und R_2 im Gleichgewicht. Der Radius $R(z)$ erhält man aus der Krümmungsgleichung mit dem statischen Kontaktwinkel als Randbedingung. Das „Extra-Finger-Spacing“ erhält man somit zu:

$$\Lambda = \left(2 \cdot R_j \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n_{Finger}}\right) - b_{finger, max} \right) - \begin{cases} \frac{s \cdot \sin(\theta \cdot \pi / 180)}{-\cos(\theta \cdot \pi / 180)} & \theta < 90^\circ \\ 1 & \theta \geq 90^\circ \end{cases} \quad (3.43)$$

mit dem Kontaktwinkel θ des Fluids mit der Wand, dem Radius des ersten Sprungs $R_{j,1}$ und der maximalen Fingerbogenlänge $b_{Finger,max}$. Kombiniert man die Bedingung des effektiven Kontaktwinkels mit der Größe des „Extra-Finger-Spacing“ unter Berücksichtigung des „Extra-Spacing“ und dem Berührungspunkt an der breitesten Stelle, so lässt sich die Fingeranzahl eindeutig bestimmen. Die Bedingung des kleinsten Fingerabstands führt zu möglichen Lösungen oberhalb des Sprungradius gegeben durch das Mindestabstandskriterium.

Die Kombination beider Kriterien führt zu einem Bereich möglicher Lösungen, beschrieben durch die Schnittmenge der Isolinien der dimensionslosen Geschwindigkeiten der minimalen Froudezahlbedingung und des minimalen Fingerabstands. In Abb. 3-43 sind die Isolinien der beiden Kriterien in Abhängigkeit vom Kontaktwinkel über dem dimensionlosen Sprungradius \tilde{R}_j für eine dimensionslose Geschwindigkeit von $\tilde{u} = 3$ aufgetragen. Als Lösungsmengen für den Sprungradius \tilde{R}_j sind alle Werte, begrenzt durch die beiden Kriterien, gültig.

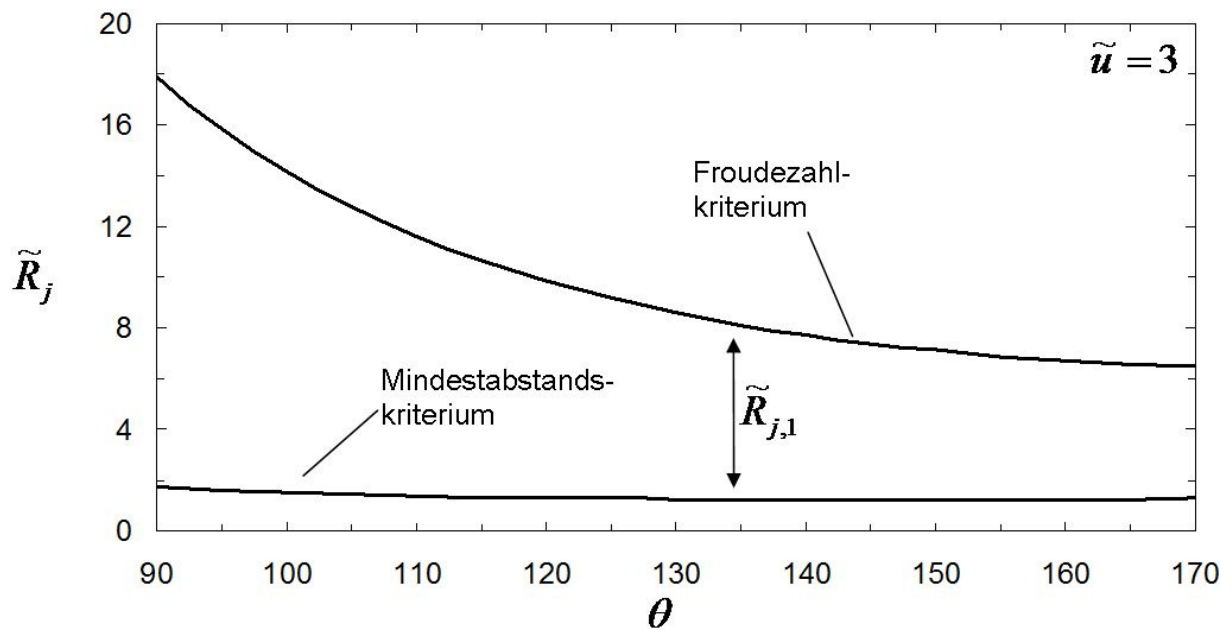


Abb. 3-43 Froudezahl- und Mindestabstandskriterium

Mit Vorgabe eines Kontaktwinkels lässt sich somit ein Bereich bestimmen in dem ein Fingerzerfall möglich ist. Dieser Bereich wird durch die Kurven der beiden Kriterien begrenzt. Für eine eindeutige Bestimmung von Fingerstrukturen ist ein weiteres Kriterium notwendig. Der zweite Sprungradius, der Übergang in das fließende Gebiet, muss größer als der Radius des Fingerzerfalls sein.

3.4.4 Transition in den fließenden Bereich

Im Folgenden wird der zweite Sprungradius aus der Klassifizierung in Kapitel 3 hergeleitet. Grundlage bilden wieder Gleichgewichtsbetrachtungen, hier zwischen dem Bereich der Fingerstrukturen und dem fließenden Bereich.

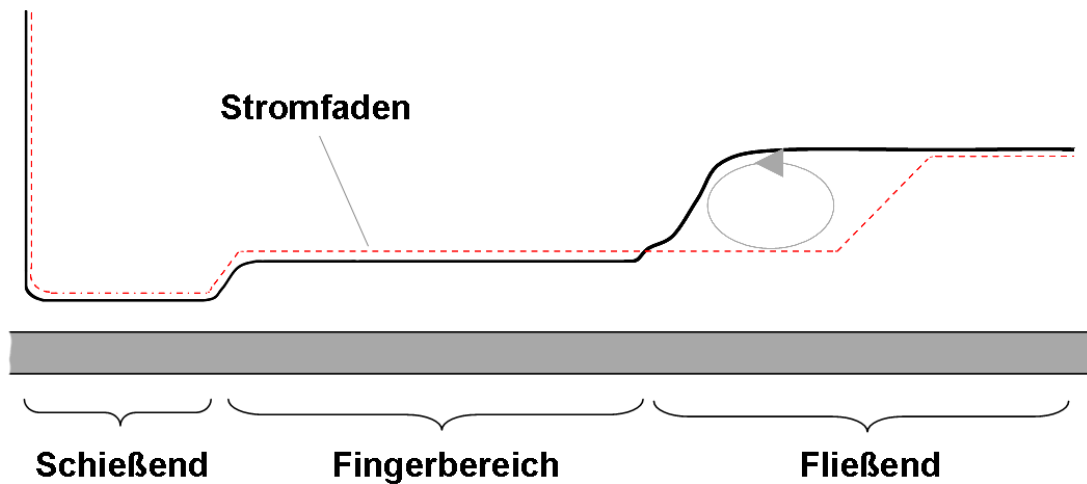


Abb. 3-44 Stromfaden der Bilanzierung

Bei der weiteren Bilanzierung wird die Stromfadentheorie nach Bernoulli angesetzt. Im Gegensatz zur Bilanzierung zwischen einem Finger und dem korrespondierenden schießenden Bereich wird der Stromfaden nicht entlang der Oberfläche angesetzt. Der Stromfaden wird so angesetzt, dass er den zu erwartenden Wirbel an der Sprungposition umgeht und somit seine Gültigkeit behält (Abb. 3-44). Der sich hieraus ergebende Fehler ist zu vernachlässigen.

Die Kontinuitätsgleichung zwischen Bereich 1 (Finger) und Bereich 2 (Fließend) (3.44) lautet:

$$\rho \cdot A_1 \cdot U_1 = \rho \cdot A_2 \cdot U_2 \quad (3.44)$$

Die Fläche A_2 berechnet sich aus der Fluidhöhe im fließenden Bereich H und dem Transitionsradius R_2 durch (3.45)

$$A_2 = H \cdot R_2 \cdot \alpha \quad (3.45)$$

Die Höhe H , lässt sich mithilfe der in Kapitel 0 hergeleiteten Beziehung der Fluidhöhe im fließenden Bereich in Kombination mit der fixierten Kontaktlinie berechnen. Aufgrund $U_2(R_2) \ll 1$ kann die Geschwindigkeit vernachlässigt werden.

$$\frac{\rho}{2}U_1^2(1-\zeta_2)+p_1-\left(\frac{\rho}{2}U_2^2+p_2\right)=0 \quad (3.46)$$

In Abb. 3-45 sind die wirkenden Kräfte schematisch dargestellt. Der Impulskraft des Fingers und seiner Oberflächenspannungskraft wirken die Oberflächenspannungskraft aufgrund der Krümmung am zweiten Sprung sowie die hydrostatische Kraft entgegen.

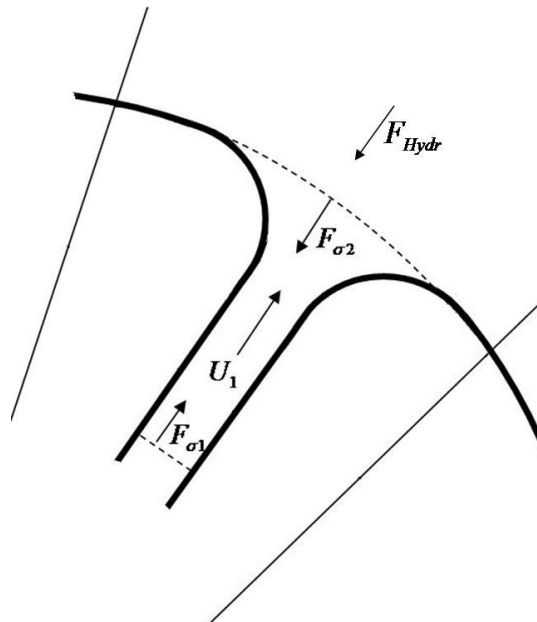


Abb. 3-45 Wirkende Kräfte

Für die Ausbildung des fließenden Bereichs im Anschluss an die Finger ist eine Wehrhöhe notwendig. Ohne eine zusätzliche Höhe und dem daraus folgenden hydrostatischen Druck würden sich die Kräfte aufgrund der fixierten Kontaktlinien am zweiten Sprung ($F_{wet,2}$) sowie am Wehr ($F_{wet,3}$) gegenseitig aufheben. Die resultierende Druckerhöhung aufgrund des dynamischen Drucks des Fingers sowie die Druckerhöhung aufgrund der Oberflächenspannung würden zu einem „Auswaschen“ des fließenden Bereichs führen. Dies deckt sich auch mit den Beobachtungen aus dem Experiment und numerischen Variantenrechnungen. Beim Experiment konnte kein fließender Bereich aufgrund des fehlenden Wehres beobachtet werden. In numerischen Simulationen zeigte sich die Ausprägung des fließenden Bereichs bei Verwendung von radial begrenzenden Wehren.

Den Druck p_2 erhält man aus (3.47), als die hydrostatische Druckverteilung unter Vernachlässigung des dynamischen Drucks aufgrund von $U_2 (R_2) \ll 1$

$$p_2 \approx \rho \cdot g \cdot (H_2 - h_{\text{Finger}}) \quad (3.47)$$

Für den Druckverlustkoeffizienten ζ_2 kommen per Definition nur Werte $\zeta_2 \in [0,1]$ infrage. Die Kräftebilanz zwischen dem Finger und dem fließenden Bereich ergibt sich zu:

$$A_1(\rho \cdot U_1^2 + p_1) - A_2(\rho \cdot U_2^2 + p_2) + F_{\sigma_2} - F_{\sigma_1} + F_{\text{wet},2} = 0 \quad (3.48)$$

mit der Fläche A_1 als Querschnittsfläche des Fingers, seiner Geschwindigkeit U_1 und dem Innendruck p_1 . Die Fläche A_2 ergibt sich aus (3.45). Der Druck p_2 ist definiert als der mittlere hydrostatische Druck über die Fluidhöhe im fließenden Bereich (3.49). Die Oberflächenspannungskraft $F_{\sigma,1}$ ist in (3.28) definiert.

$$p_2 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot g \cdot H_2 \quad (3.49)$$

$$F_{\sigma,2} = l_{\text{arc},2} \cdot \sigma \quad (3.50)$$

Mit der Oberflächenspannungskraft aufgrund der fixierten Kontaktlinie am zweiten Sprung zu:

$$F_{\text{wet},2} = -(l_{\text{arc},2,\text{Kontakt}})_{\text{eff}} \cdot \sigma \cdot \cos \Theta \quad (3.51)$$

Analog zu der ersten Sprungposition, dem Zerfall in Finger, erhält man für die beiden Kriterien einen Bereich, in dem die Existenz der zweiten Sprungposition möglich ist. Der Bereich wird wieder durch die Kurven der beiden Kriterien begrenzt. In Abb. 3-46 sind die Isolinien der beiden Kriterien des zweiten Sprunges in Abhängigkeit vom Kontaktwinkel über dem dimensionlosen Sprungradius \tilde{R}_j für eine dimensionslose Geschwindigkeit von $\tilde{u} = 3$ aufgetragen. Als Lösungsmenge sind analog zum ersten Sprung alle Werte, begrenzt durch die beiden Kriterien, gültig.

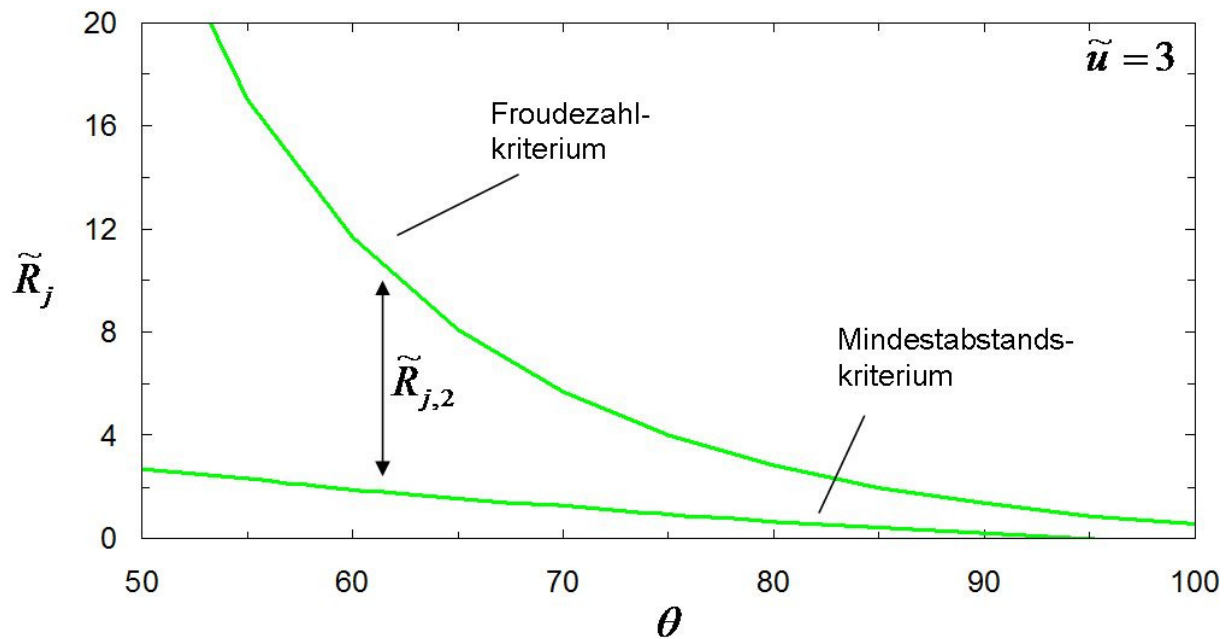


Abb. 3-46 Froudezahl- und Mindestabstandskriterium

Die Kombination der beiden Sprünge mit den verwendeten Kriterien ist in Abb. 3-47 und Abb. 3-48 für verschiedene dimensionslose Geschwindigkeiten dargestellt. Die schwarzen Linien begrenzen die mögliche Sprungposition des ersten Sprungs, die Grünen die des zweiten Sprungs. Wie zu erkennen ist, findet der zweite Sprung für die verwendete dimensionlose Geschwindigkeit $\tilde{u} = 3$ vor dem ersten Sprung statt. Eine Ausprägung von Fingerstrukturen ist für die vorliegenden Randbedingungen daher nicht möglich. Der Bereich des zweiten Sprungradius wandert mit zunehmender Einlassgeschwindigkeit in Richtung des ersten Sprungs, und führt mit zunehmender Geschwindigkeit zu einer Überschneidung der beiden Bereiche. Bei einer exemplarischen dimensionslosen Geschwindigkeit von $\tilde{u} = 4$ existiert ein Bereich, für den gilt $R_{j,2} > R_{j,1}$, womit eine Fingerstrukturausbildung möglich ist. Aus Abb. 3-47 und Abb. 3-48 geht hervor, dass Fingerstrukturen auch bei kleinen Kontaktwinkeln möglich sind. Der Radius des möglichen Zerfalls besitzt hierbei einen großen Wert und nimmt erst für große Geschwindigkeiten und großen Kontaktwinkel kleinere Werte des Sprungradius Fingerzerfall an.

Die Existenz von Fingerstrukturen ist an Randbedingungen gebunden, die hohe Einlassgeschwindigkeiten und große Kontaktwinkel des Fluides mit der Platte erfordern. Dies ist ein seltenes Phänomen in Natur und technischen Anwendungen.

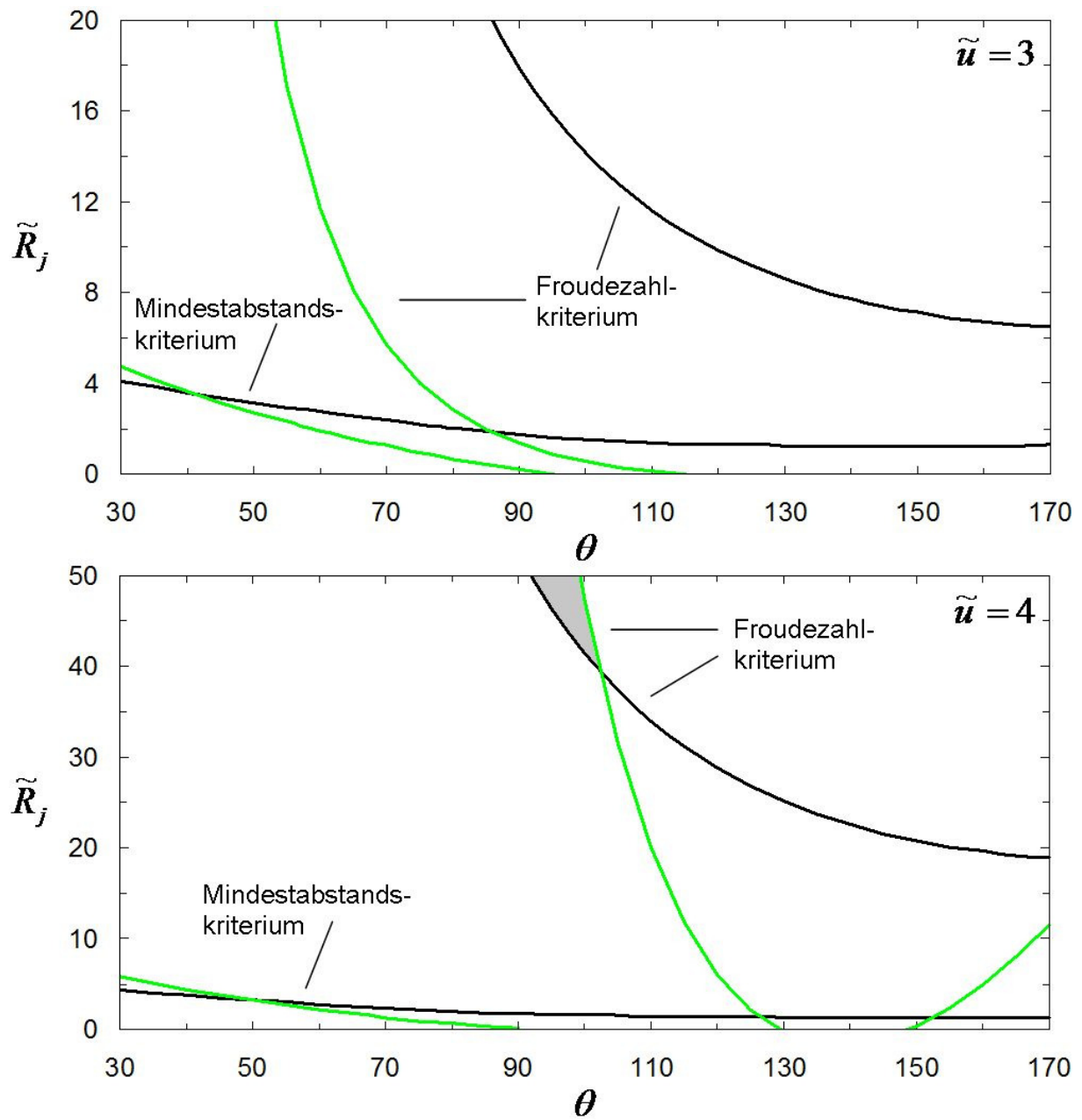


Abb. 3-47 Kombination des ersten und zweiten Sprungradius

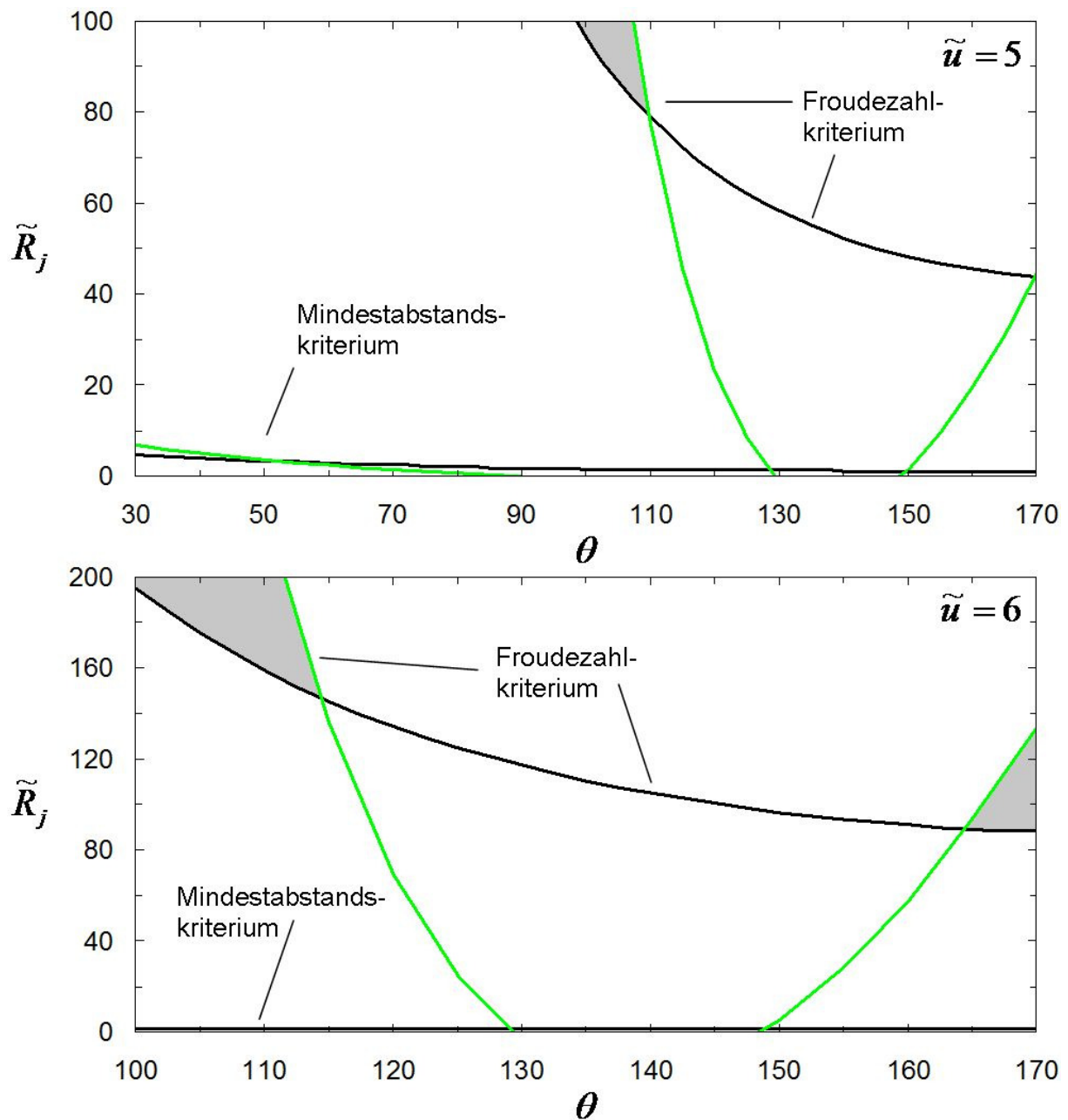


Abb. 3-48 Kombination des ersten und zweiten Sprungradius

Nachfolgend ist in Abb. 3-49 der Verlauf der beiden Kriterien für eine dimensionslose Geschwindigkeit von $\tilde{u} = 5$ mit einer Froudezahl von 3 dargestellt. Die Isolinie der Froudezahl ($Fr = 3$) ist eine exemplarisch mögliche Lösung aus der Mindest – Froudezahlbedingung $Fr = 1$. Wie zu erkennen ist, gibt es mögliche Lösungen einer Fingerstrukturausbildung für kleine Kontaktwinkel ($\theta < 110^\circ$) und große Kontaktwinkel ($175 < \theta < 180^\circ$). Eine Parametervariation der Froudezahl zeigt, dass der Radius des Fingerzerfalls für steigende Froudezahlen schneller fällt als der zweite Sprung (Abb. 3-50). Somit vergrößert sich der Bereich möglichen Fingerzerfalls mit größer werdender Froudezahl. Der Radius der Fingerausbildung liegt für kleine Kontaktwinkel jedoch höher. Verglichen mit dem dieser Arbeit zugrunde liegenden

vergleichenden Experiment, könnte der Radius außerhalb der Scheibe liegen. Für größere Kontaktwinkel und Geschwindigkeiten wird ein Auftreten der Fingerstrukturen innerhalb des Scheibenradius möglich. Der Verlauf zeigt, dass Fingerstrukturen für kleine Kontaktwinkel bei einem größeren Radius auftreten als für große Kontaktwinkel.

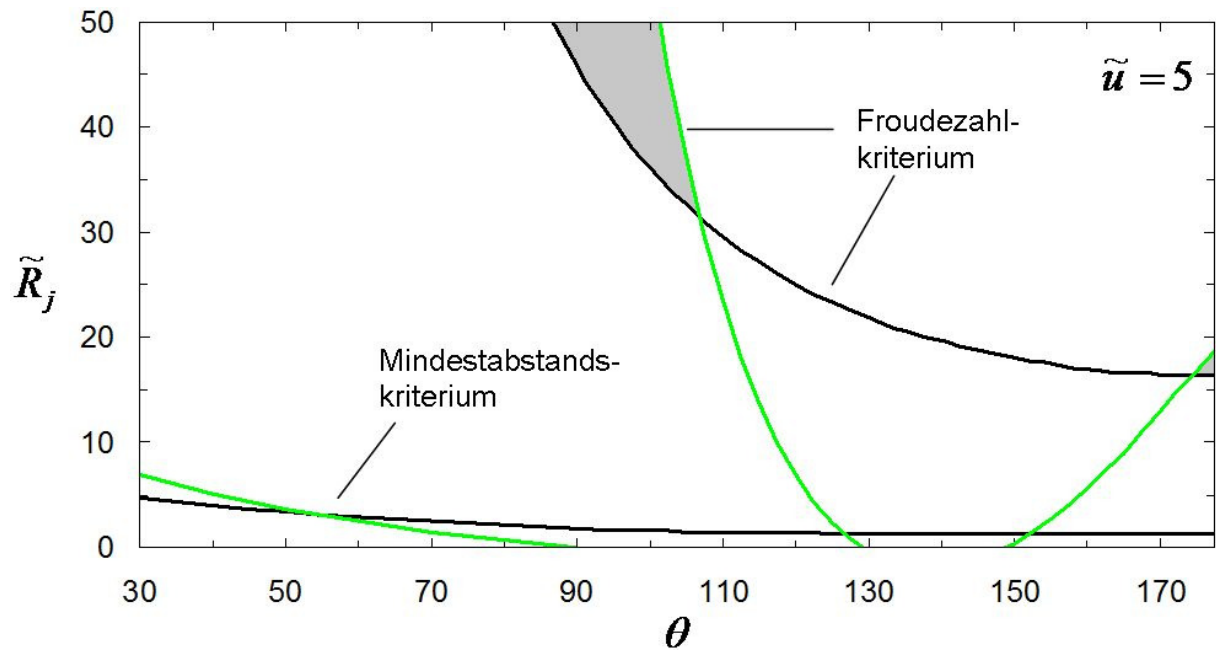


Abb. 3-49 Kombination des ersten und zweiten Sprungradius mit $Fr = 3$

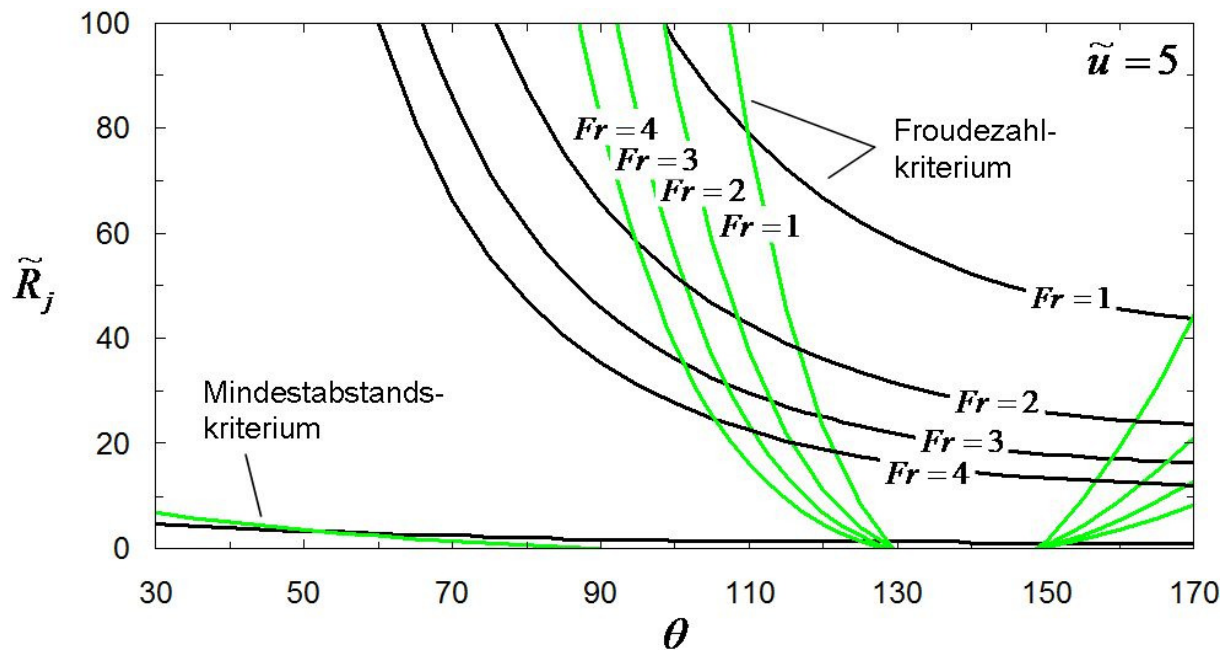


Abb. 3-50 Kombination des ersten und zweiten Sprungradius für $Fr = 1, \dots, 4$

Auf der nachfolgenden Abbildung (Abb. 3-51) sind die Isolinien der Froudezahlen für das Froudezahlkriterium beider Sprünge über den Bereich der größeren Kontaktwinkel aufgezogen. Eine Erhöhung der Froudezahl führt zu einer Reduzierung des Radius möglichen Fingerzerfalls. In der Abbildung ist die Linie kleinster Kontaktwinkel des Fingerzerfalls als gestrichelt hervorgehoben. Wie zu erkennen ist, sind beliebig hohe Froudezahlen für eine konstante Einlassgeschwindigkeit nicht möglich. Eine Erhöhung der Froudezahl führt zu einem dünner werden der Finger, was einen hohen Gegendruck erzeugt.

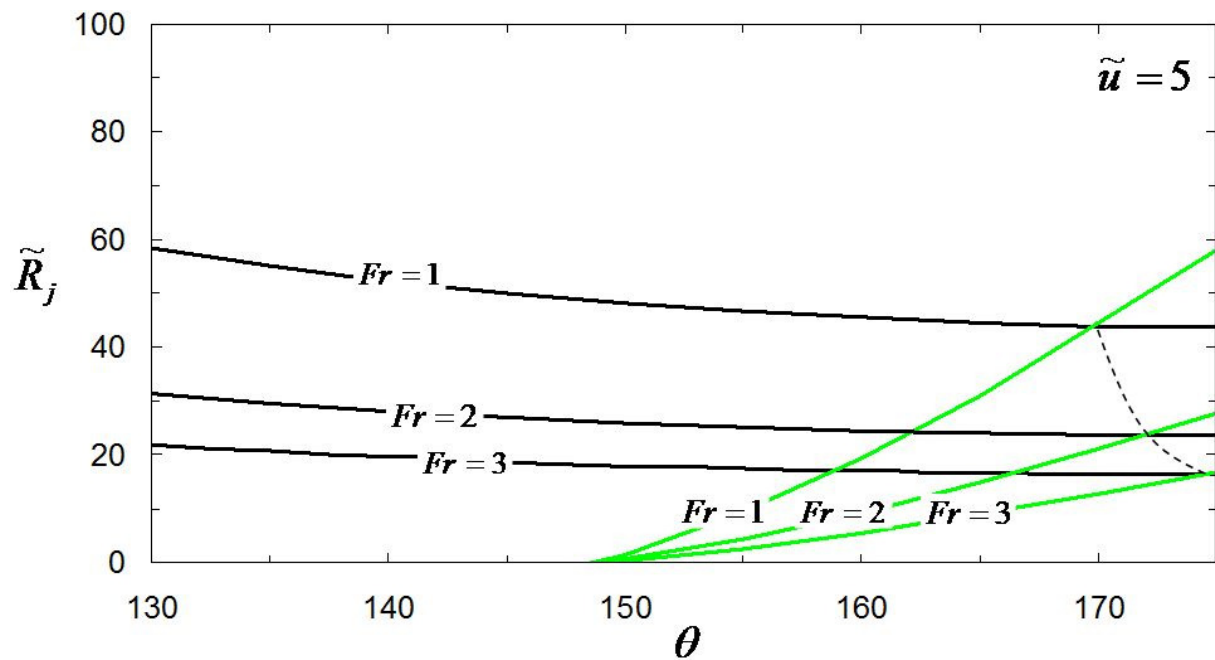


Abb. 3-51 Grenzcurve des Sprungradius für höhere Froudezahlen

4 Zusammenfassung und Ausblick

Das Ziel der vorliegenden Arbeit war eine numerische und analytische Betrachtung von Flüssigmetallströmungen in Begleitung der Entwicklung einer Messtechnik für reflektierende Oberfläche am KALLA Labor [44]. Anhand des physikalischen Grundlagenproblems des rotationssymmetrischen hydraulischen Sprungs wurden die Untersuchungen in Zusammenarbeit zwischen Georgia Tech und dem IKET am Forschungszentrum Karlsruhe mit dem Flüssigmetall Gallium Indium Zinn durchgeführt. Beim hydraulischen Sprung geht eine schießende Strömung in eine fließende Strömung durch ein Transitionsgebiet über.

Der Fokus lag auf der Analyse und Modellierung freier Oberflächenströmung eines Fluids mit sehr hoher Dichte und hohen Oberflächenspannungskoeffizienten. Neben der numerischen Strömungssimulation des rotationssymmetrischen hydraulischen Sprungs mit Flüssigmetall wurden analytische Beziehungen und theoretische Beschreibungen anhand von zeitabhängigen Beobachtungen der numerischen Ergebnisse in Bezug auf experimentelle Daten hergeleitet.

Für die numerische Strömungssimulation wurde für die Beschreibung der freien Oberfläche ein Phasenfeld Modell verwendet. Dieses Modell indiziert ähnlich der Volume-of-Fluid-Methode die freie Methode mithilfe einer Indikatorfunktion und benutzt einen zusätzlichen Kompressionsterm, um die freie Oberfläche aufgrund numerischer Diffusion nicht zu verschmieren.

Mithilfe von Parametervariationen an den Randbedingungen des betrachteten Problems ist zu beobachten, dass sich für das Fluid Gallium Indium Zinn zwei charakteristische Sprungformen ausbilden: Bei guter Benetzungen zwischen dem Fluid und der Wand bildet sich ein mit dem Wasserversuch vergleichbarer hydraulischer Sprung aus. Für eine unvollständige Benetzung konnten Fingerstrukturen beobachtet werden. Der schießende Bereich geht hierbei nicht über ein Transitionsgebiet in einen fließenden Bereich über, sondern bildet sogenannte Fingerformen aus.

Bei vollständigen Benetzungen konnten gute Übereinstimmungen zwischen den Experimenten und den numerischen Ergebnissen festgestellt werden. Jedoch zeigten statistische Auswertungen der Numerik sowie Beobachtungen am Experiment, dass die Sprungposition um einen quasistationären Zustand fluktuiert. Das macht experimentell statistische Daten für einen direkten Vergleich notwendig. Bestehende analytische Beziehungen für die Vorhersage des Sprungradius wurden auf die Anwendbarkeit auf den rotationssymmetrischen hydraulischen Sprung mit dem Flüssigmetall Gallium Indium Zinn untersucht. Es zeigt sich, dass im Gegensatz zum Fluid Wasser bei dem verwendeten Flüssigmetall fixierte Kontaktlinien des

Fluids an den Rändern auftreten. Diese Kontaktlinien führen zu einer signifikanten Erhöhung des Fluids. Für diesen Fall wurde eine Funktion für die Höhe des fließenden Bereichs anhand einer Gleichgewichtsbetrachtung an der fixierten Kontaktlinie am Ausströmrand hergeleitet. Grundlage hierfür bildet die Gleichgewichtsbetrachtung zwischen Hydrostatik und der Young-Laplace-Beziehung. Dies ermöglicht eine autonome theoretische Beschreibung des Sprungradius in Flüssigmetall, ohne Werte der Höhe aus experimentellen Daten oder numerischen Berechnungen zu benötigen.

Die Ausbildung von Fingerstrukturen werden anhand von numerischen Berechnungen und Detailmodellen analytische Beziehungen für die Vorhersage von Fingerstrukturen abgeleitet. Die Beziehungen basieren auf Gleichgewichtsbetrachtungen durch das Transitionsgebiet, das den Übergang in Fingerstrukturen kennzeichnet. Bei den Betrachtungen wurden die Hydrostatik, Oberflächenspannungskräfte aufgrund der Krümmung und fixierten Kontaktlinien, Impulsflüsse, die Massenbilanz und die Energieerhaltung berücksichtigt. Für die Bestimmung des Finger-Auftretens sind des Weiteren ein Mindest-Froudezahlkriterium sowie ein Kriterium für den kleinsten Abstand zwischen den Fingern notwendig. Auf Basis von Gleichgewichtsbetrachtungen am zweiten Sprung, konnte eine weitere Beziehung für den zweiten Sprungradius hergeleitet werden. Es zeigt sich aus der analytischen Betrachtung, dass das Vorhandensein eines fließenden Bereichs nur bei der Existenz einer Wehrkante möglich ist. Das Auftreten der Finger ist keine triviale Lösung und ein seltenes Phänomen.

Die hergeleiteten analytischen Beziehungen für den rotationssymmetrischen hydraulischen Sprung mit Flüssigmetall erlauben eine Vorhersage der Sprungposition und Charakteristik mithilfe der Randbedingung. Dies ermöglicht eine schnelle Vorhersage ohne aufwendige numerische Variantenrechnungen oder experimentelle Versuche.

5 Literatur

- [1] Laurien, E.; Oertel, H.: Numerische Strömungsmechanik, Vieweg Verlag, Braunschweig/Wiesbaden, 2003.
- [2] Schmidt, T.: Kühlungsoptimierung temperaturkritischer Bauteile am Kfz-Generator mittels numerischer Strömungssimulation, Institut für Kernenergetik und Energiesysteme, IKE-8-D-25, 2005.
- [3] Baylac-Domengtroy, V.: Investigations Related to the Generation of Reaction Products in the Target of Accelerator Driven Systems for Nuclear Waste Incineration; FZKA 6908, Forschungszentrum Karlsruhe, 2003.
- [4] Knebel, J. U.; Cheng, X.; Müller, G.; Schumacher, G.; Konys, J.; Wedemeyer, O.; Grötzbach, G.; Carteciano, L.: Thermalhydraulic and Material Specific Investigations into the Realization of an Accelerator Driven System (ADS) to Transmute Minor Actinides, FZKA Bericht 6618, 2001.
- [5] Hassanein, A.: Liquid-metal targets for high-power applications: Pulsed heating and shock hydrodynamics, Laser and Particle Beams, 18: pp. 611-622, 2000.
- [6] NEA, Accelerator-driven Systems (ADS) and Fast Reactors (FR) in Advanced Nuclear Fuel Cycles, A comparative Study; 2002.
- [7] Daubner, M.; Batta, A.; Fellmoser, F.; Lefhalm, C.-H.; Stieglitz, R.: Turbulent thermal mixing of a heavy liquid metal flow in a target window geometry - The Heated Jet Experiment, FZKA Bericht 7098, 2005.
- [8] Daubner, M.; Batta, A.; Fellmoser, F.; Lefhalm, C.-H., Mack, K.-J.; Stieglitz, R.: Turbulent heat mixing of a heavy liquid metal flow within the MEGAPIE window geometry: The heated jet experiments, Journal of Nuclear Materials 335, 2004.
- [9] Schuurmans, P.: The MYRRHA / XT-ADS project: nuclear physics challenges and opportunities, Präsentation, IAP day, Leuven, 2007.
- [10] Roelofs, F.: Liquid Metal Thermal Hydraulics in Computational Fluid Dynamics, Presentation, IP-Eurotrans: ADS Thermal Hydraulics, System codes & CFD codes, Modells and Experimental Validation, Louvain-la-Neuve, France, 2007.
- [11] Ichimiya, M.; Roglans, J.; Fiorini, G.L.; Hah, D.; Abram, T.: Overview of an R&D plan for the development of a Generation IV sodium cooled fast reactor system, Proc. of ICAPP '05 Seoul, KOREA, 2005
- [12] Batta, A.; Class, A.; Cheng, X.; Litfin, K.; Otic, I.; Schmidt, T.: HLM Thermohydraulics CFD and Modelling Activities at the Institute for Nuclear and Energy Technologies, Forschungszentrum Karlsruhe, 3rd Conference Heavy Liquid-Metal Coolants In Nuclear Technologies (HLMC-2008), Obninsk, Russia, 2008.
- [13] Kuhlmann, H.: Strömungsmechanik, Pearson Studium, 2007.

-
- [14] Bush, J.W.M.; Aristoff, J.M.: The influence of surface tension on the circular hydraulic jump, *Journal of Fluid Mechanics*, 489: pp. 229-238, 2003.
- [15] Liu, X.; Lienhard, J.H.: The hydraulic jump in circular jet impingement and in other thin liquid films, *Experiments in Fluids*, 15: pp. 108-116, 1993.
- [16] Behnia, M.; Parneix, S.; Shabany, Y.; Durbin, P. A.: Numerical study of turbulent heat transfer in confined and unconfined impinging jets, *International Journal of Heat and Fluid Flow* 20, 1999.
- [17] Garimella, S. V.; Rice, R. A.: Confined and Submerged Liquid Jet Impingement Heat Transfer, *Journal of Heat Transfer* Vol. 117, 1995.
- [18] Hadziabdic, M.; Hanjalic, K.: Vortical structures and heat transfer in a round impinging jet, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 596, 2008.
- [19] Bush, J.W.M.; Aristoff, J.M.; Hosoi, A.E.: An experimental investigation of the stability of the circular hydraulic jump, *Journal of Fluid Mechanics*, 558: pp. 33-52, 2006.
- [20] Blackford, B.L.: The hydraulic jump in radially spreading flow: A new model and new experimental data; *American Journal of Physics*, 64(2), 1996.
- [21] Brecht, Y.; Néda, Z.: On the circular hydraulic jump; *American Journal of Physics*, 67(2), 1999.
- [22] Stevens, J.W.: Free Surface Flow Profile and Fluctuations of a Circular Hydraulic Jump Formed by an Impinging Jet; *Journal of Fluids Engineering*, 117: pp. 677-682, 1995.
- [23] Kate, P.R.; Das, P.K.; Chakraborty, S.: Hydraulic jumps due to oblique impingement of circular liquid jets on a flat horizontal surface, *Journal of Fluid Mechanics*, 573: pp. 247-263, 2007.
- [24] Blackford, B.L.: The hydraulic jump in radially spreading flow: A new Modell and new experimental data; *American Journal of Physics*, 64(2), 1996.
- [25] Rayleigh, Lord: On the Theory of Long Waves and Bores; *Proc. R. Soc. London* A90 324, 1914.
- [26] Watson, E. J.: The radial spread of a liquid jet over a horizontal plane, *Journal of Fluid Mechanics*, 20: 481-499, 1964.
- [27] Craik, A.; Latham, R.; Fawkes, M.; Gibbon, P.: The circular hydraulic jump, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 112: 347-362, 1981.
- [28] Wörner, M.: A Compact Introduction to the Numerical Modelling of Multiphase Flows, *Forschungszentrum Karlsruhe, FZKA 6932*, 2003.
- [29] Ferziger, J.H.; Peric, M.: *Numerische Strömungsmechanik*, Springer, Berlin, 2008.
- [30] Oertel, H.; Böhle, M.: *Strömungsmechanik*, Vieweg Verlag, Braunschweig / Wiesbaden, 2003.
- [31] Launder, B.E.; Spalding, D.B.: The numerical computation of turbulent flows. *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.*, 3: pp. 269-289, 1974.

-
- [32] Yakhot, V.; Orszag, S. A.: Renormalization Group Analysis of Turbulence, Journal of Scientific Computing, Vol 1, 1986.
- [33] Yakhot, V.; Orszag, S. A.; Thangam, S.; Gatski, T. B. & Speziale, C. G.: Development of turbulence Models for shear flows by a double expansion technique, Physics of Fluids A, Vol. 4, No. 7: pp. 1510-1520, 1992.
- [34] Zaleski, S.: Computation of Multiphase Flow by Volume of Fluid and High-Order Front Tracking Methods, Modélisation en Mécanique, Université Pierre et Marie Curie Paris.
- [35] Jasak, H.; Tuković: Automatic Mesh Motion for the Unstructured Finite Volume Method, Transactions of FAMEN, 2007.
- [36] Lucchini, T.; D'Errico, G.: Automatic Mesh Motion, Topological Changes and Innovative Mesh Setup for I.C.E. CFD Simulations, Modena, 2006.
- [37] Sussman, M.; Fatemi, E. Smereka, P.; Osher, S.: An improved level set approach for incompressible two-phase flows, Computer and Fluids, 1998.
- [38] Sethian, J.A.: Level Set Methods and Fast Marching Methods, Cambridge University Press, 1999.
- [39] Univerdi, S.O.; Tryggvason, G.: A Front-Tracking Method for Viscous, Incompressible, Mult-fluid Flows, Journal of Computational Physics, 100: 25-37, 1992.
- [40] Hirt, C. W.; Nichols, B. D.: Volume of Fluid (VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries, Journal of Computational Physics, 39: pp. 201-225, 1981.
- [41] Rusche, H.: Computational Fluid Dynamics of Dispersed Two-Phase Flows at High Phase Fractions; Ph.D. thesis; Imperial College of Science, Technology & Medicine, Department of Mechanical Engineering, 2002.
- [42] Casey, M.; Wintergerste, T.: Best Practice Guidelines, ERCOFTAC, 2000.
- [43] Berg, J. C.: Wettability, New York, 1993
- [44] Hillenbrand, M. P.: Qualifizierung einer Messtechnik zur Erfassung freier Grenzflächen bei Flüssigmetallen, FZKA 7437, Forschungszentrum Karlsruhe, 2008.
- [45] Batta, A.; Class, A.: Numerical Investigations on Geometrical Designs of the Windowless XT ADS Spallation Target, Proceedings ICAP, 2007.
- [46] Kolesnik, V.; Mikheyev, A.; Loginov, N.: Lithium Jet Hydraulics, Fluent News, 2005.
- [47] Higuera, F. J.: The hydraulic jump in a viscous laminar flow, Journal of Fluid Mechanics, 274: pp. 69-92, 1994.
- [48] Neitzel, P.: Geometrische Abschätzung, persönliche Mitteilung, 2008.
- [49] Nakaryakov, V. E.; Pokusaev, B. G.; Troyan, E. N. : Impingement of an Axisymmetric Liquid Jet on a Barrier. Int. J. Heat Mass Transfer 21, 1175-1184, 1978.
- [50] Patankar, S.: Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Hemisphere Publishing, 1980.
- [51] Issa, R.: Solution of the implicit discretised fluid flow equations by operator-splitting, Journal of Computational Physics, 62: pp. 40-65, 1986.

-
- [52] Trujillo, M. F.; Hsiao, C.-T.; Choi, J.-K.; Paterson, E. G.; Chahine, G. L.; Peltier, L. J.: Numerical and Experimental Study of a Horizontal Jet Below a Free Surface, 9th International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics Ann Arbor, Michigan, 2007.
- [53] Ubbink, O.: Numerical prediction of two fluid systems with sharp interfaces, Ph.D. thesis, Imperial College London, 1997.
- [54] Osher, S.; Sethian, J.A.: Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations, *Journal of Computational Physics*, Vol 79, 1988.
- [55] Sethian, J.A.: *Level set methods: Evolving interfaces in geometry, fluid mechanics, computer vision and material sciences*. Cambridge University Press, 1996.
- [56] Sussman, M.; Smereka, P.; Osher, S.: A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow, *Journal of Computational Physics*, 114: pp. 146-159, 1994.
- [57] Harlow, F.H.; Welch, J.E.: Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface, *Physics of Fluids*, Vol 81, 1965.
- [58] Daly, B.J.: Numerical study of two fluid Rayleigh-Taylor instability, *Physics of Fluids*, Vol 10(2), 1967.
- [59] Noh, W.F.; Woodward, P.: SLIC (Simple Line Interface Calculations). *Lecture Notes in Physics*, Vol. 59, 1976.
- [60] Youngs, D.L.: Time-dependent multi-material flow with large fluid distortion, *Numerical Methods for fluid dynamics*, London: Academic Press, 1982.
- [61] Lafaurie, B.; Nardone, C.; Scardovelli, R.; Zaleski, S.; Zanetti, G.: Modelling merging and fragmentation in multiphase flows with SURFER, *Journal of Computational Physics*, Vol 113, 1994.
- [62] Brocchini, M.; Peregrine, D. H.: The dynamics of strong turbulence at free surfaces. Part1. Description, *Journal of Fluid Mechanics*, 449: pp. 225-254, 2001.
- [63] Heinemann, E.; Feldhaus, R.; Runo, P.: *Hydraulik für Bauingenieure*, Vieweg und Teubner, 2003.
- [64] Sethian, J. A.: *Level Set Methods*, Cambridge University Press, 1996.
- [65] Osher, S.; Fedkiw, R.: *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*, Springer Verlag, 2000.
- [66] Hillenbrand, M.: Auswertung entlang einer Messlinie, persönliche Kommunikation, 2009.
- [67] Bohr, T.; Ellegaard, C.; Hanse, A. E.; Haaning, A.: Hydraulic jumps, flow separation and wave breaking: An experimental study, *Physica B* 228: p.1-10, 1996.
- [68] Longuet-Higgins, M. S.: Vorticity and curvature at a free surface, *Journal of Fluid Mechanics*, 356: pp. 149-153, 1998.
- [69] Menter, F. R.: Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Appli-

-
- cations, AIAA Journal Vol.32, No.8, 1994
- [70] Lam, C.K.G.; Bremhorst, K.A.: A Modified Form of the k - epsilon Modell for Predicting Wall Turbulence, Journal of Fluids Engineering 103: pp. 456-460, 1981.
- [71] Launder, B.E.; Sharma, B.I.: Application of the Energy Dissipation Modell of Turbulence to the Calculation of Flow Near a Spinning Disc, Letters in Heat and Mass Transfer 1, pp. 131-138, 1974.
- [72] Lien, F. S.; Chen, W. L.; Leschziner, M. A.: Low - Reynolds - Number Eddy - Viscosity Modelling Based on Non - Linear Stress - Strain / Vorticity Relations. 3rd Int. Symposium on Engineering Turbulence Modeling and Measurements, 1996.
- [73] Shih, T. H.; Liou, W. W.; Shabbir, A.; Yang, Z.; Zhu, J.: A New k - epsilon Eddy Viscosity Modell for High Reynolds Number Turbulent Flows, Computers Fluids, 24: pp. 227-238, 1995.
- [74] Karvinen, A.; Ahlstedt, H.: Comparison of Turbulence Models in Case of Jet in Cross-flow using Commercial CFD Code, Engineering Turbulence Modeling and Experiments 6, 2005.
- [75] Jiang, G.-S.; Shu, C.-W.: Efficient Implementation of Weighted ENO Schemes, Journal of Computational Physics, 126: pp. 202-228, 1996.
- [76] Jian, G.-S.; Peng, D.: Weighted ENO Schemes for Hamilton-Jacobi Equations, SIAM J. Sci. Comput., Vol. 21 No. 6, 2000.
- [77] Aulisa, E.; Manservigi, S.; Scardovelli, R.; Zaleski, S.: interface reconstruction with least-squares fit and split advection in three-dimensional cartesian geometry, Journal of Computational Physics, 225: pp. 2301-2319, 2007.
- [78] Hyman, J. M.: Numerical methods for tracking interfaces, Physica Vol12D, pp. 396-407, 1984.
- [79] Gopola, V. R.: Volume of Fluid Method, Chalmers University, Seminar, 2005.
- [80] Martin, J. C.; Moyce, W. J.: An Experimental study of the collapse of liquid columns on a rigid horizontal plane, Royal Society Publishing, London, 1952.
- [81] Brackbill, J. U.; Kothe, D. B.; Zemach, C.: A continuum method for Modelling surface tension, Journal of Computational Physics, 100: pp. 335-354, 1992.
- [82] Courant, R.; Friedrichs, K.; Lewy, H.: On the Partial Difference Equations of Mathematical Physics, IBM Journal, 1967.
- [83] Versteeg, H. K.; Malalasekera, W.: An introduction to computational fluid dynamics: The finite volume method, Pearson Education Limited, Harlow, 1995.
- [84] Hillenbrand, M.; Neitzel, P.: Persönliche Mitteilung, 2007.

Anhang A Nomenklatur

Normale gedruckte Symbole bezeichnen skalare Größen, fett gedruckte vektorielle oder tensorielle Größen.

Lateinische Symbole

| | | |
|----------------------|---|---------------------|
| a | Einlassdurchmesser des Fluidstrahls | [m] |
| A_0 | Querschnittsfläche schießender Bereich | [m ²] |
| A_1 | Querschnittsfläche Finger Bereich | [m ²] |
| A_2 | Querschnittsfläche fließender Bereich | [m ²] |
| A_{aus} | Ausströmfläche | [m ²] |
| $A_{\text{Film-F}}$ | Querschnittsfläche schießender – fließender Bereich | [m ²] |
| A_{half} | Halbe Querschnittsfläche | [m ²] |
| b | Breite des Wehrs | [m] |
| b_1 | Bogenlänge des Sprungverlaufs | [m] |
| b_{Finger} | Breite des Fingers | [m] |
| c | Phasengeschwindigkeit | [m/s] |
| C_μ | Modellkonstante | [-] |
| $C_{\varepsilon 1}$ | Modellkonstante | [-] |
| $C_{\varepsilon 2}$ | Modellkonstante | [-] |
| coordx | Raumkoordinate x | [-] |
| coordy | Raumkoordinate y | [-] |
| D | Deformationsrate | [-] |
| $d_{\text{Düse}}$ | Düsendurchmesser | [m] |
| d_h | hydraulischer Durchmesser | [m] |
| d_{Scheibe} | Scheibendurchmesser | [m] |
| f | Volumenkraft pro Masse | [N/kg] |
| f_σ | volumetrische Oberflächenspannungskraft | [N] |
| $F_{\sigma,0}$ | Oberflächenspannungskraft fließender Bereich | [N] |
| $F_{\sigma,1}$ | Oberflächenspannungskraft schießender Bereich | [N] |
| F_{wet} | Oberflächenspannungskraft Benetzung | [N] |
| g | Erdschwerebeschleunigung | [m/s ²] |
| g_1, g_2, g_2 | geometrische Größen numerisches Detail-Modell | [m] |
| h | Fluidhöhe schießender Bereich | [m] |
| h_0 | Fluidhöhe schießender Bereich | [m] |

| | | |
|---------------------------|---|-----------------------------------|
| h_1 | Fluidhöhe Finger Bereich | [m] |
| h_2 | Fluidhöhe fließender Bereich | [m] |
| H | Fluidhöhe fließender Bereich | [m] |
| ΔH | Sprunghöhe | [m] |
| $h_{Düse}$ | Abstand Düse zur Scheibe | [m] |
| h_{extra} | Fluidhöhe über der Wehrhöhe | [m] |
| h_{Wehr} | Wehrhöhe | [m] |
| I | Einheitstensor | |
| q | Tangentialgeschwindigkeit | [m/s] |
| Q | Massenstrom | [kg/s] |
| Q_{ein} | Einlassmassenstrom | [kg/s] |
| k | turbulente kinetische Energie | [m ² /s ²] |
| K_c | Faktor für Kompressionsgeschw.term | [-] |
| $l_{arc,Film}$ | Bogenlänge Film | [m] |
| $l_{arc,Finger}$ | Bogenlänge Finger | [m] |
| $l_{arc,Kontakt}$ | Kontaktbogenlänge | [m] |
| $(l_{arc,Kontakt})_{eff}$ | effektive Kontaktbogenlänge | [m] |
| l_{Kap} | Kapillarlänge | [m] |
| l_{ref} | Referenzlänge | [m] |
| m | geometrische Größe numerisches Detail-Modell | [m] |
| n | Normalenvektor | [-] |
| n₁ | Normalenvektor an der Oberfläche Fluid 1 | [-] |
| n₂ | Normalenvektor an der Oberfläche Fluid 2 | [-] |
| n_{Finger} | Anzahl der Finger | [-] |
| p | statischer Druck | [Pa] |
| p_{ref} | Referenzdruck | [Pa] |
| p_{innen} | Innendruck | [Pa] |
| p_{mean} | mittlerer Innendruck | [Pa] |
| $p_{Scheitel}$ | Druck am Scheitelpunkt | [Pa] |
| p_{surf} | Druck an der Oberfläche aufgrund von Oberflächenspannungskräften | [Pa] |
| p_{tot} | Gesamtdruck | [Pa] |

| | | |
|------------------------|--|---------------------|
| r | Abstand zw. Fluidaufreffpunkt und Punkt auf der rot.sym. Scheibe | [m] |
| $R[z]$ | lokaler Radius | [m] |
| ΔR | radialer Abstand zwischen Beginn und Ende des Sprungs | [m] |
| R_1, R_2, R_3 | Geometrische Maße numerisches Detail-Modell | [m] |
| $R_{Düse}$ | Einlassdüsenradius | [m] |
| R_j | Sprungradius | [m] |
| $R_{j,1}$ | Transition schießend zu Finger | [m] |
| $R_{j,2}$ | Transition Finger zu fließend | [m] |
| r_v | Radius an dem die Grenzschicht die freie Oberfläche erreicht | [m] |
| $R_{Scheibe}$ | Scheibenradius | [m] |
| t | Zeit | [s] |
| T | Spannungstensor | [N/m ²] |
| $u_L(x)$ | allgemeine Fluidgeschwindigkeit | [m/s] |
| u | Geschwindigkeit | [m/s] |
| u' | turbulente Schwankungsgeschwindigkeit | [m/s] |
| u_0 | Geschwindigkeit schießender Bereich beim Fingering | [m/s] |
| u_1 | Geschwindigkeit Finger Bereich beim Fingering | [m/s] |
| u_2 | Geschwindigkeit fließender Bereich beim Fingering | [m/s] |
| u₁ | Geschwindigkeit Fluid 1 | [m/s] |
| u₂ | Geschwindigkeit Fluid 2 | [m/s] |
| u_p | Punktgeschwindigkeit | [m/s] |
| u_r | Kompressionsgeschwindigkeitsterm | [m/s] |
| U_{aus} | Ausström- bzw. Überströmgeschwindigkeit am Wehr | [m/s] |
| u_{ein} | Einlassgeschwindigkeit | [m/s] |
| u_{ref} | Referenzgeschwindigkeit | [m/s] |
| u_x | Geschwindigkeit in x – Richtung | [m/s] |
| u_y | Geschwindigkeit in y – Richtung | [m/s] |

| | | |
|--------|------------------|-----|
| w | Wehrhöhe | [m] |
| x | Raumrichtung | [-] |
| y | Raumrichtung | [-] |
| z | Raumrichtung | [-] |
| $z(r)$ | lokale Fluidhöhe | [m] |

Griechische Symbole

| | | |
|----------------------|---|-----------------------------------|
| α_1 | Gebietsausschnitt | [°] |
| β_1 | lokale Winkelgröße | [°] |
| β_2 | lokale Winkelgröße | [°] |
| γ | diffusives Feld / Indikatorfunktion | [-] |
| δ | geometrische Größe numerisches Detail-Modell | [°] |
| ε | Dissipationsrate | [m ² /s ³] |
| θ | Fluid Kontaktwinkel | [rad] |
| \mathcal{K} | Krümmung | [-] |
| μ | dynamische Viskosität | [N/m ² s] |
| μ_t | Wirbelviskosität | [N/m ² s] |
| ρ | Fluidichte | [kg/m ³] |
| ρ_{Fluid} | Fluidichte | [kg/m ³] |
| ρ_1 | Dichte Fluid 1 | [kg/m ³] |
| ρ_2 | Dichte Fluid 2 | [kg/m ³] |
| σ | Oberflächenspannung | [N/m] |
| σ_ε | Modellkonstante | [-] |
| τ | Schubspannungstensor | [N/m ²] |
| τ_{ij}^t | Reynoldsspannungstensor | [N/m ²] |
| Φ | allgemeine Strömungsgröße | [-] |
| ϕ | allgemeine Funktion | [-] |
| ω | spezifische Dissipationsrate | |
| Ω | Raum | [-] |

Anhang B Dimensionslose Kennzahlen

- Die Froudezahl beschreibt das Verhältnis der Trägheitskräfte zu den Gravitationskräften:

$$Fr = \frac{u_L(x)}{\sqrt{g \cdot z(r)}}$$

- Die Reynoldszahl beschreibt das Verhältnis von Trägheits- zu Reibungskräften:

$$Re = \frac{u_L(x) \cdot L}{\nu}$$

- Die Bondzahl beschreibt das Verhältnis von Gravitationskräften zu Oberflächenspannungskräften

$$Bo = \rho \cdot g \cdot R_j \cdot \frac{\Delta H}{\sigma}$$

- Die Courantzahl gibt an wieviele Gitternetzstellen ein sich konstant bewegendes Fluid in einer gewissen Zeit durchquert

$$Co = \frac{u \cdot \Delta t}{\Delta x}$$

- Die Kapillarlänge als Referenzlänge

$$l_{ref} = l_{Kap} = \sqrt{\frac{\sigma}{\Delta \rho \cdot g}}$$

- Referenzdruck als Verhältnis von Oberflächenspannungskraft zur Kapillarlänge

$$p_{ref} = \frac{\sigma}{l_{ref}}$$

- Die Referenzgeschwindigkeit

$$u_{ref} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho \cdot l_{ref}}}$$

Anhang C Turbulenzmodelle

RNG Turbulenzmodell

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k u_i) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k - \rho \varepsilon \quad (5-1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \varepsilon u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_{1\varepsilon}^* \frac{\varepsilon}{k} P_k - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (5-2)$$

$$C_{1\varepsilon}^* = C_{1\varepsilon} - \frac{C_\mu \eta^3 (1 - \eta / \eta_0)}{1 + \beta \eta^3} \quad (5.3)$$

Mit $\eta = S k / \varepsilon$ und $S = (2 S_{ij} S_{ij})^{1/2}$, die Koeffizienten sind nach Yakhot et al.[33] definiert zu $C_\mu = 0,0845$; $\sigma_k = 0,07194$; $\sigma_\varepsilon = 0,7194$; $C_{\varepsilon 1} = 1,42$; $C_{\varepsilon 2} = 1,48$; $\eta_0 = 1,42$ und $\beta = 0,012$.

Standard k-ε Turbulenzmodell

$$\mu_t = C_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (5-4)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot k) = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \left(\frac{\mu_t}{\sigma_k} \nabla k \right) + 2 \frac{\mu_t}{\rho} |\nabla \cdot \mathbf{u}| - \varepsilon \quad (5-5)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \varepsilon) = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \left(\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \nabla \varepsilon \right) + 2 \frac{C_1 \mu_t}{\rho} |\nabla \cdot \mathbf{u}|^2 \frac{\varepsilon}{k} - C_2 \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (5-6)$$

Für die Modellkonstanten gilt $C_{\varepsilon 1} = 1,44$; $C_{\varepsilon 2} = 1,92$ und $\sigma_\varepsilon = 1,3$.

SST Turbulenzmodell

Die turbulente kinetische Energie ist definiert zu:

$$u_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \nu_t S^2 - \beta_\infty^* \cdot k \cdot \omega \quad (5.7)$$

Die spezifische Dissipation zu

$$u_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + S^2 - \beta_i \omega^2 + D\omega \quad (5.8)$$

Mit der kinematischen Wirbelviskosität

$$\nu_t = \frac{a_1 k}{\max(a_1 \omega, SF_2)} \quad (5.9)$$

und

$$\beta_i = F_1 \beta_{i,1} + (1 - F_1) \beta_{i,2} \quad (5.10)$$

F_1 und F_2 sind Blendfunktionen .Die Modellkonstanten sind definiert zu $a_1 = 0,31$; $\beta_{i,1} = 0,09$; $\beta_{i,2} = 0,09$; $\sigma_{k,1} = 1,176$; $\sigma_{\omega,1} = 2,0$; $\sigma_{k,2} = 1,0$ und $\sigma_{\omega,2} = 1,168$.

Lauder Sharma k - ε Turbulenzmodell

Transportgleichungen für k und ε :

$$u_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \nu_t S^2 - \varepsilon \quad (5.11)$$

$$u_j \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x_j} \right] + C_{1e} f_1 \frac{\tilde{\varepsilon}}{k} \nu_t S^2 - C_{2e} f_2 \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{k} + E \quad (5.12)$$

mit $\varepsilon = \varepsilon_0 + \tilde{\varepsilon}$. Die Wirbelviskosität ist definiert zu

$$\nu_t = C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\tilde{\varepsilon}} \quad (5.13)$$

k – ω Turbulenzmodell

$$\omega = \frac{1}{C_\mu} \frac{\varepsilon}{k} \quad (5.14)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \beta^* k \cdot \omega + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(v + \sigma^* v_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (5.15)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \alpha \frac{\omega}{k} \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \beta \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(v + \sigma v_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] \quad (5.16)$$

Die kinematische Wirbelviskosität ergibt sich aus $v_t = k / \omega$. Die Modellkonstanten und die Hilfsfunktionen sind zu $\alpha = 5/9$, $\beta = 3/40$, $\beta^* = 9/100$, $\sigma = 1/2$, $\sigma^* = 1/2$ und $\varepsilon = \beta^* \omega \cdot k$ definiert.

Nicht lineares Turbulenzmodell nach Shih

$$u_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(v + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + v_t S^2 - \varepsilon \quad (5.17)$$

$$u_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(v + \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_{1\varepsilon} S \varepsilon - C_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k + \sqrt{v\varepsilon}} \quad (5.18)$$

Mit den Modellkonstanten $C_{2\varepsilon} = 1,9$; $\sigma_\varepsilon = 1,2$ und $\sigma_k = 1,9$. $C_{1\varepsilon}$ und C_μ sind keine Konstanten.

Anhang D Krümmung rotationssymmetrischer Oberflächen

Die Grundlage der Betrachtungen bilden der Einfluss der Oberflächenspannung auf das Fluid an der fixierten Kontaktlinie.

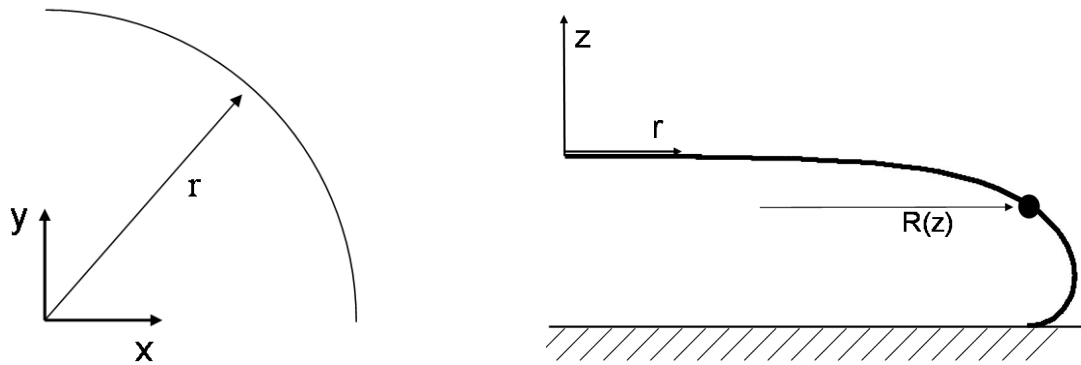


Abb. 5-1 Radialer Krümmungsradius (li.) und Krümmung am Rand (re.)

Die Kontur der freien Oberfläche sei als Nullstellenmenge der Funktion ϕ definiert. Die rotationssymmetrische, dreidimensionale freie Oberfläche wird in kartesischen Koordinaten durch die Level-Set-Funktion (5-19), mit r als globalem und $R[z]$ als lokalem Radius beschrieben. Die radiale Ausbreitung r wird durch die allgemeine Kreisgleichung (5-20) gegeben.

$$\phi = r - R[z] \quad (5-19)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (5-20)$$

Eine explizite Darstellung der freien Oberfläche ist durch die Profilkurve $R[z]$ gegeben. Die Isokontur $\phi = 0$ stellt die freie Oberfläche dar. Die Werte $\phi > 0$ repräsentieren den Außenbereich, die Werte für $\phi < 0$ den Innenbereich auf die freie Oberfläche bezogen [64]. Mit (5-19) und (5-20) erhält man den Normalenvektor als normierten Gradientenvektor zu (5.21), und die örtliche dreidimensionale Krümmung als Gradient des Normalenvektors mit (5.22) [65].

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{1 + R'[z]^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{1 + R'[z]^2}}, -\frac{R'[z]}{\sqrt{1 + R'[z]^2}} \right) \quad (5.21)$$

Mit der Divergenz des Normalenvektors erhält man die Krümmung zu:

$$\kappa = \nabla \cdot \mathbf{n} = \frac{\frac{1 + R'[z]^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} - R''[z]}{(1 + R'[z]^2)^{3/2}} = \frac{1 + R'[z]^2 - R[z] \cdot R''[z]}{R[z] \cdot (1 + R'[z]^2)^{3/2}} \quad (5.22)$$

Anhang E Höhenprofil Finger

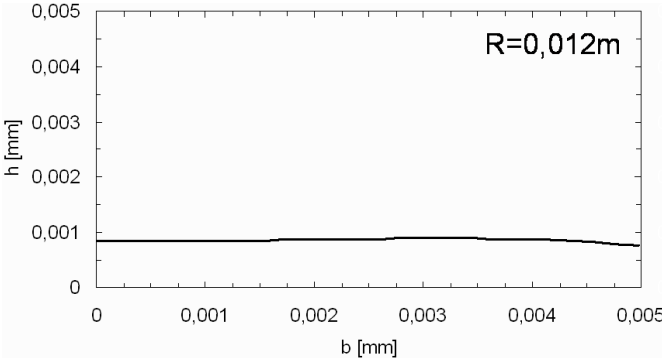


Abb. 5-2 Höhenprofil Fingerquerschnitt

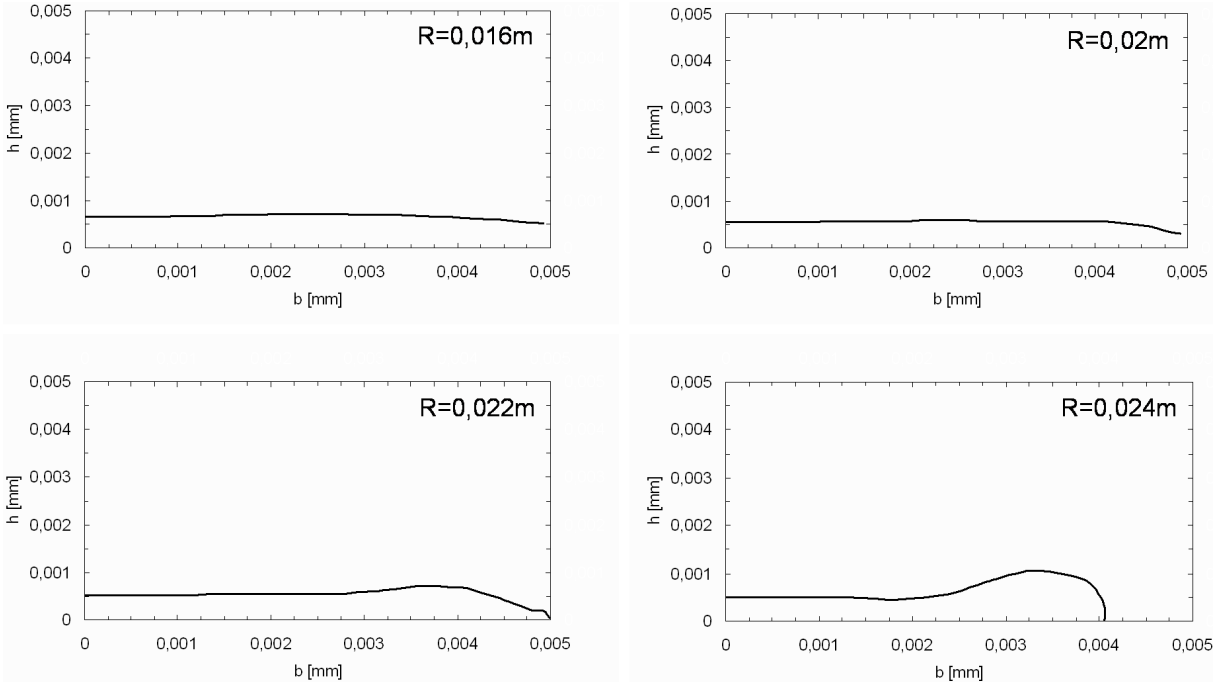


Abb. 5-3 Höhenprofil Fingerquerschnitt

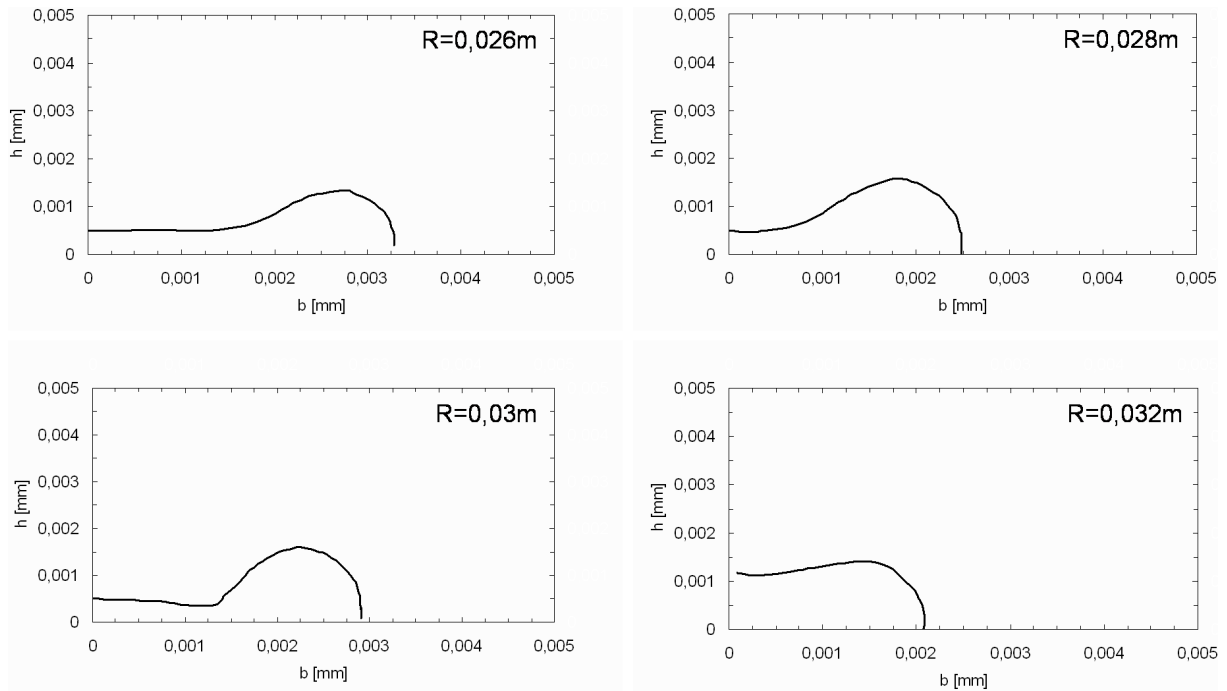


Abb. 5-4 Höhenprofil Fingerquerschnitt

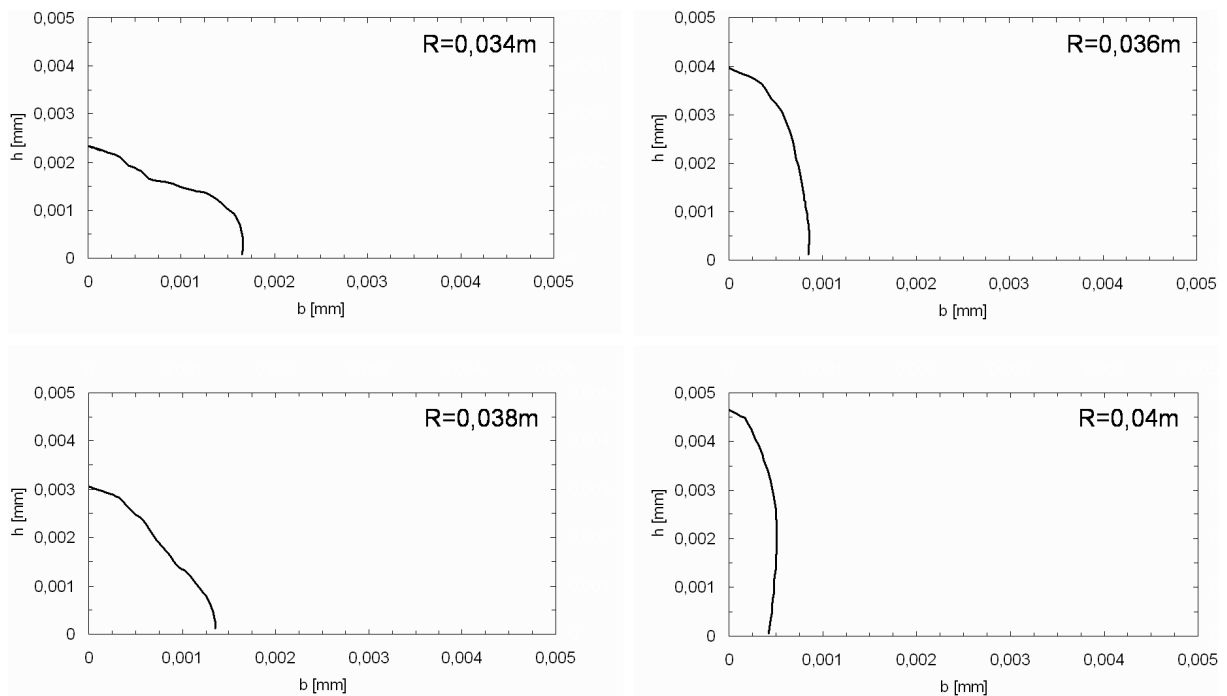


Abb. 5-5 Höhenprofil Fingerquerschnitt