

# Probabilistische Lebensdauervorhersage für keramische Bauteile unter komplexer zyklischer Beanspruchung

zur Erlangung des akademischen Grades  
**Doktor der Ingenieurwissenschaften**

von der Fakultät für Maschinenbau des  
Karlsruher Instituts für Technologie (KIT)  
genehmigte

## **Dissertation**

von

Dipl.-Ing. Martin Härtelt  
geboren am 8.1.1979  
in Dresden

Tag der mündlichen Prüfung: 15.12.2009  
Hauptreferent: Prof. Dr. O. Kraft  
Korreferent: Prof. Dr. M. Hoffmann

## Kurzzusammenfassung

Moderne Hochleistungskeramiken wie  $\text{Si}_3\text{N}_4$  gewinnen aufgrund ihrer hohen Festigkeit als Strukturwerkstoff in technischen Anwendungen zunehmend an Bedeutung. Ein Beispiel hierfür sind keramische Walzwerkzeuge beim Drahtwalzen. Die Erweiterung des Einsatzgebietes keramischer Werkstoffe auf derartige zyklisch beanspruchte Anwendungen erfordert Auslegungsmethoden, die die Ermüdungseffekte im Werkstoff betrachten. Die Auslegung keramischer Bauteile beruht auf probabilistischen Methoden, mit denen die für Keramik typische Streuung von Festigkeit und Lebensdauer berücksichtigt werden kann. Ein numerisches Werkzeug zur Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeit ist das Programm STAU, das als Post-Prozessor einer Finite-Elemente Analyse fungiert.

Das Ziel der Arbeit ist es, die vorhandenen Auslegungsmethoden in Hinblick auf Ermüdung zu erweitern und anhand eines Beispiels anzuwenden. Hierfür wird die Versagensbeschreibung auf der Grundlage einer empirischen Beschreibung für zyklisches Risswachstum erweitert und in das Programm STAU implementiert. Die Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeit erfolgt auf der Basis von zyklischen Lastkollektiven, die anhand der Ergebnisse der FE-Analyse automatisch ermittelt werden. Damit können komplexe zyklische Lastgeschichten effizient abgebildet und verarbeitet werden.

Die neu entwickelten Methoden werden anhand eines Kontaktermüdungsbeispiels, einem Wälzversuch mit einer  $\text{Si}_3\text{N}_4$ -Rolle, angewendet. Hierbei treten Risse an der Rollenoberfläche auf, die eine Beeinträchtigung der Funktionalität darstellen. Die Wahrscheinlichkeit der Bildung einer bestimmten Rissdichte an der Rollenoberfläche wird mit STAU vorhergesagt. Ein Vergleich der Vorhersagen mit experimentellen Ergebnissen des Wälzversuchs zeigt, dass die Schädigung quantitativ auf Basis der Versagensbeschreibung vorhergesagt werden kann, wenn die Vorhersage für zyklisches Risswachstum erfolgt. Durch die Berücksichtigung von Ermüdung in der Zuverlässigkeitsanalyse wird die Grundlage für die Anwendung hochfester keramischer Werkstoffe in komplexen zyklisch beanspruchten Bauteilen geschaffen.

## Abstract

High-strength ceramics like  $\text{Si}_3\text{N}_4$  have been established as structural materials for a number of technological applications. However, these materials exhibit fatigue which is a limiting factor for components under cyclic loading, e.g. ceramic rolling tools. Including fatigue effects in the design and failure assessment is therefore necessary for successful use of such components. The reliability assessment for ceramics is based on probabilistic methods accounting for the scatter in strength and lifetime which is a consequence of the brittle failure behaviour. The failure probability of a component can be determined numerically using the code STAU, which acts as a post-processor for the results of a finite-element analysis.

In the present work, the probabilistic failure model will be extended to cover not only time-dependent failure due to subcritical crack growth but also fatigue under cyclic loading conditions. The new methods will be verified by means of a typical application. The failure analysis will be implemented in STAU based on an empirical law for cyclic crack propagation. In order to simplify the analysis especially for complex load histories, the calculation of the failure probability is carried out for repeated blocks of cyclic loading which are identified from the finite-element results.

The extended probabilistic analysis is demonstrated for a rolling contact fatigue test on  $\text{Si}_3\text{N}_4$ . In this case, failure is characterized by the continuous formation of cracks on the surface of the roll. The probability that cracks with a given density evolve on the roll after a given number of cycles is predicted by STAU. A comparison with the experimental results shows, that the surface failure can only be predicted if fatigue effects are accounted for in the analysis. Thus, the probabilistic analysis presented in this work contributes essentially to the future application of ceramics under complex cyclic loading.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Abkürzungsverzeichnis</b>	<b>vi</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2 Ermüdung keramischer Werkstoffe</b>	<b>4</b>
2.1 Verstärkungsmechanismen und R-Kurvenverhalten . . . . .	4
2.2 Unterkritische Rissausbreitung . . . . .	6
2.3 Zyklische Rissausbreitung . . . . .	8
2.3.1 Ermüdungsmechanismen . . . . .	10
2.3.2 Wichtige Einflussgrößen . . . . .	11
2.3.3 Risswachstumsbeschreibung . . . . .	12
2.3.4 Bestimmung von Risswachstumsparametern . . . . .	14
2.3.5 Kontaktermüdung . . . . .	14
<b>3 Probabilistische Zuverlässigkeitsbewertung keramischer Bauteile</b>	<b>17</b>
3.1 Weibull-Theorie und Erweiterungen . . . . .	17
3.2 Numerische Werkzeuge . . . . .	25
3.2.1 STAU . . . . .	25
3.2.2 Spezielle Lösungen für Kontaktprobleme . . . . .	30
<b>4 Versagensbewertung bei zyklischer Ermüdung</b>	<b>32</b>
4.1 Ausfallwahrscheinlichkeit . . . . .	32
4.2 Programmtechnische Umsetzung . . . . .	39
4.2.1 Bestimmung des Lastkollektivs . . . . .	40
4.2.2 Serielle Abfolge periodisch wiederholter Lastkollektive . . . . .	42
4.2.3 Temperaturabhängige Risswachstumsparameter . . . . .	43
4.2.4 Mixed-Mode-Kriterium . . . . .	43
4.3 Verifikationsbeispiel . . . . .	43
<b>5 Werkstoffeigenschaften Si<sub>3</sub>N<sub>4</sub>-SL200</b>	<b>47</b>
5.1 Allgemeine Eigenschaften . . . . .	47
5.2 Risszähigkeit und R-Kurvenverhalten . . . . .	47
5.3 Festigkeit . . . . .	49
5.4 Unterkritisches Risswachstum . . . . .	50

5.5	Zyklisches Risswachstum . . . . .	51
5.5.1	Auswertemethoden . . . . .	51
5.5.2	Lebensdauerdaten in Laborluft . . . . .	52
5.5.3	Pooling . . . . .	56
5.5.4	Lebensdauerdaten in Wasser . . . . .	62
5.5.5	Zusammenfassende Bemerkungen . . . . .	65
<b>6</b>	<b>Zuverlässigkeitsanalyse am Beispiel eines Wälzversuchs</b>	<b>66</b>
6.1	Versuchsaufbau und experimentelle Ergebnisse . . . . .	67
6.1.1	Versuchsaufbau und Versuchsführung . . . . .	67
6.1.2	Experimentelle Ergebnisse . . . . .	68
6.2	Spannungsanalyse . . . . .	70
6.3	STAU-Analyse . . . . .	80
6.3.1	Extraktion der zyklischen Lastgeschichte . . . . .	80
6.3.2	STAU-Vorhersagen . . . . .	84
6.3.3	Vergleich mit experimentellen Ergebnissen . . . . .	88
6.3.4	Wichtige Einflussgrößen auf die Lebensdauervorhersage . .	91
6.3.5	Spannungsgradienten . . . . .	97
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>102</b>
<b>A</b>	<b>Ergänzende Formeln zur Ausfallwahrscheinlichkeit</b>	<b>105</b>
<b>B</b>	<b>Weibullverteilungen und Risswachstumskurven SL200</b>	<b>108</b>
<b>C</b>	<b>Technische Zeichnungen der Wälzkörper</b>	<b>111</b>
<b>D</b>	<b>Herleitung zur Entwicklung der Rissdichte</b>	<b>114</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>115</b>
	<b>Danksagung</b>	<b>121</b>

## Abkürzungen

Symbol	Bedeutung
<b>lateinische Symbole</b>	
$a$	Fehlergröße
$a_c$	kritische Fehlergröße
$a_{c,0}$	kritische Anfangsfehlergröße
$a_0$	(a) untere Grenze Pareto-Verteilung (b) Anfangsfehlergröße
$A$	(a) Fläche, (b) zyklischer Risswachstumsparameter
$A^*$	zyklischer Risswachstumsparameter
$A_{\text{eff}}$	effektive Oberfläche
$A_u, A_u^*$	unterkritische Risswachstumsparameter
$A_0$	Einheitsfläche
$b$	Weibullparameter (Festigkeit)
$B, B_u$	zyklischer/unterkritischer Risswachstumsparameter
$c$	Fehlergröße
$C, C^*$	zyklischer Risswachstumsparameter
$C_n$	Koeffizient Spannungspolynom
$D_I$	Koeffizient zur Berechnung der Gewichtsfunktion
$E$	Elastizitätsmodul
$f_a$	Verteilungsdichte der Fehlergröße
$F_a$	Verteilungsfunktion der Fehlergröße
$F_{F,i}/F_{L,i}$	Rangstatistik
$F_A$	Anpresskraft im Wälzversuch
$H$	normiertes Spannungsintegral
$h_I$	Gewichtsfunktion
$J_\Omega, J_V$	Jacobi-Determinanten
$k_L, k_F$	Umfang der Lebensdauer/Festigkeitsstichprobe
$K_{I-III}$	Spannungsintensitätsfaktor Modus I-III
$K_{I\text{appl}}$	Spannungsintensitätsfaktor durch äußere Last
$K_{Ic}$	Risszähigkeit
$K_{I\text{eq}}$	äquivalenter Modus-I Spannungsintensitätsfaktor
$K_{I\text{tip}}$	Spannungsintensitätsfaktor an der Risspitze
$K_{A,B}$	lokale Spannungsintensitätsfaktoren

$K_{\text{eff}}$	effektiver Spannungsintensitätsfaktor
$K_{\text{I,min}}, K_{\text{I,max}}$	minimaler/maximaler Spannungsintensitätsfaktor eines Zyklus
$K_{\text{R}}$	Risszähigkeit (R-Kurve)
$K_{\text{I0}}$	Schwellwert Risszähigkeit bei R-Kurvenverhalten
$K_{\text{sh}}$	shielding-Term bei Verstärkungseffekten
$K_{\text{th}}$	Schwellwert für unterkritisches/zyklisches Risswachstum
$\Delta K_{\text{I}}/\Delta K_{\text{I}}$	Differenz des maximalen/minimalen $K$ -Faktors eines Zyklus
$l_{\text{e}}$	Kantenlänge eines finiten Elements
$m$	Weibull-Modul (Festigkeitsverteilung)
$m^*$	Weibull-Modul (Lebensdauerverteilung)
$M, M_0$	mittlere Fehlerzahl im Volumen/Einheitsvolumen
$n$	zyklischer Risswachstumsexponent
$n_{\text{u}}$	unterkritischer Risswachstumsexponent
$N$	Anzahl von Zyklen
$N_{\text{f}}$	Anzahl von Zyklen bei Versagen
$N_{\text{G}}$	Anzahl Stützstellen für Gauß-Integration
$N_{\text{k}}$	Anzahl der Zyklen eines Lastkollektiv
$N_0$	charakteristische (Weibull-)Lebensdauer
$p$	(a) zyklischer Risswachstumsparameter (b) Flächenpressung
$p_0$	maximale Flächenpressung
$P_{\text{n}}$	Poisson-Verteilung
$Q_{\text{i}}$	Quantil
$Q_1$	Ausfallwahrscheinlichkeit für Bauteil mit einem Fehler
$r$	(a) Parameter Fehlergrößenverteilung (b) Pfadkoordinate
$R$	Spannungsverhältnis ( $R$ -Verhältnis)
$s_{\text{i}}$	Stützstelle für $K$ -Faktorberechnung
$s_{\text{ij}}$	Green'sche Funktion
$S_{\text{y}}$	Symmetriefaktor in STAU
$t$	Zeit
$t_{\text{f}}$	Versagenszeitpunkt
$t_{\text{xij}}, t_{\text{yij}}$	Green'sche Funktionen
$t_0$	Zeitraum
$T$	Temperatur
$u$	Rissöffnung

$u, v, w$	Koordinaten im Einheitselement
$v$	Risswachstumsgeschwindigkeit
$V, V_0$	Volumen/Einheitsvolumen
$V_{\text{eff}}$	effektives Volumen
$w_i$	Gewichte für Gauß-Integration
$W_{u/v/w/\varphi/\psi}$	Gewichte für Gauß-Integration in STAU
$x, y, z$	Koordinaten
$\vec{x}$	Ortsvektor
$Y_{A,B}$	lokale Geometriefunktionen
$Y_{I-III}$	Geometriefunktionen Modus I-III
$Z$	Anzahl der Wiederholungen eines Lastkollektivs bzw. Rotationen

---

### Griechische Symbole

---

$\Delta\sigma$	Differenz maximale/minimale Spannung
$\Delta\sigma_{\text{eq}}$	Differenz maximale/minimale Äquivalentspannung
$\theta$	Winkel für Risspfad
$\mu$	Reibwert
$\nu$	Querkontaktionszahl
$\sigma$	Spannung
$\sigma_c$	kritische Spannung/Versagensspannung
$\sigma_{\text{eq}}$	Modus-I Äquivalentspannung
$\sigma_{\text{eq,min}}, \sigma_{\text{eq,max}}$	minimale/maximale Äquivalentspannung eines Zyklus
$\sigma_{ij}$	Spannungstensor
$\sigma_n$	Normalspannung an einem Riss
$\sigma_R$	Druckeigenspannung
$\sigma_{0V}, \sigma_{0A}$	Festigkeit bezogen auf Einheitsvolumen/fläche
$\sigma^*$	Referenzspannung
$\tau$	Schubspannung an einem Riss
$\tau_x, \tau_y$	Scherspannung bei Kontaktbelastung
$\tau_0$	maximale Scherspannung
$\phi$	Rissdichte
$\varphi$	Winkel für Fehlerorientierung
$\psi$	Winkel für Fehlerorientierung
$\omega$	Kreisfrequenz
$\Omega$	Raumwinkel

---

### sonstige Abkürzungen

---

ESIS	European Structural Integrity Society
------	---------------------------------------

DT	schnelles Design-Tool
KSS	Kühlschmierstoffemulsion, Schmiermittel
SEVNB	Probengeometrie (Biegebalken mit V-Kerbe)
SFB	Sonderforschungsbereich
SL200	Si <sub>3</sub> N <sub>4</sub> -Variante
STAU	Programm zur Zuverlässigkeitsbewertung
4PB	4-Punkt-Biegung

---

# 1 Einleitung

## Motivation und Zielsetzung

Keramische Werkstoffe haben sich im Laufe der letzten 25 Jahre in einer beeindruckenden Vielzahl von technologischen Anwendungen etabliert. Als Funktionswerkstoffe sind sie heutzutage in den Bereichen Aktorik und Sensorik unverzichtbar und werden in hoher Stückzahl produziert. Auch in strukturmechanischen Anwendungen sind technische Keramiken mittlerweile stark verbreitet und werden häufig dort eingesetzt, wo metallische Werkstoffe an ihre Grenzen stoßen. Ein bekanntes Beispiel hierfür sind künstliche Hüftgelenke in der Medizintechnik. Daran wird deutlich, dass keramische Werkstoffe selbst im sensibelsten aller Systeme, dem menschlichen Körper, zuverlässig einsetzbar sind.

Im Bereich der 'klassischen' Anwendungen des Maschinenbaus werden technische Keramiken vor allem aufgrund ihrer Temperaturbeständigkeit, chemischen Inertheit und günstigen tribologischen Eigenschaften eingesetzt. Hierbei haben sich jene Werkstoffe nachhaltig durchgesetzt, die neben diesen Eigenschaften zusätzlich auch eine hohe Festigkeit bieten. Als Referenzwerkstoff ist hierbei an erster Stelle Siliziumnitrid ( $\text{Si}_3\text{N}_4$ ) zu nennen, das sich vor allem auf Grund seiner hervorragenden Hochtemperatureigenschaften etabliert hat. Die hohe Festigkeit ist im wesentlichen auf Fortschritte in der Erhöhung der Risszähigkeit zurückzuführen, was durch mikrostrukturelle Verstärkungsmechanismen an den versagensbestimmenden natürlichen Fehlern im Material erreicht wird.

Die Grenzen hochfester keramischer Werkstoffe zeigen sich häufig bei Kontaktproblemen in Kombination mit überlagerter Friktion, bei denen stark lokalisierte Zugspannungen zur Bildung von Rissen an der Oberfläche führen. Für  $\text{Si}_3\text{N}_4$  wurde dies bereits in den 90er Jahren an Wälzlagern umfassend untersucht. Ein neueres Beispiel sind Schäden an  $\text{Si}_3\text{N}_4$ -Rollen, die als Walzwerkzeuge bei der Herstellung hochfester Drähte Hartmetallrollen ersetzen sollen. Im Fall derartiger zyklischer Beanspruchung treten Ermüdungseffekte des Materials in den Vordergrund, die eine zeitabhängige Festigkeitsreduktion bewirken.

Ermüdungseffekte sind bei keramischen Werkstoffen auf das langsame Wachsen der versagensrelevanten natürlichen Fehler zurückzuführen. Unter statischer Last tritt unterkritisches Risswachstum auf, welches ein chemisch aktivierter Prozess

ist. Unter zyklischer Beanspruchung treten Verschleißeffekte der mikrostrukturellen Verstärkungsmechanismen in den Vordergrund, so dass die natürlichen Fehler in Abhängigkeit der Zyklenzahl wachsen. Somit sind die Mechanismen, die eine Erhöhung der Risszähigkeit und die damit verbundene hohe Festigkeit bewirken, maßgeblich für die Ermüdung des Werkstoffs verantwortlich. Für die Auslegung und das Design hochfester keramischer Bauteile hat dies zur Konsequenz, dass das Risswachstum bzw. die Festigkeitsreduktion unter zyklischer Last besonderer Aufmerksamkeit bedarf.

Für die Auslegung keramischer Bauteile haben sich probabilistische Methoden etabliert, mit denen die Ausfallwahrscheinlichkeit eines Bauteils auf Basis der Weibull-Theorie bestimmt werden kann. Hiermit können Streuung und Größeneffekte von Festigkeit und Lebensdauer, die auf die Sprödigkeit der Keramik zurückgehen, berücksichtigt werden. Für komplex beanspruchte Bauteile existieren numerische Werkzeuge wie z.B. das Programm STAU, das als Post-Prozessor einer Finite-Elemente Spannungsanalyse eingesetzt wird und aus der Spannungsverteilung Ausfallwahrscheinlichkeiten ermittelt. Bisher kann die zeitabhängige Veränderung der Risspopulation in STAU mit einem Ansatz für unterkritisches Risswachstum natürlicher Fehler berücksichtigt werden. Hiermit werden jedoch unter zyklischer Beanspruchung nicht-konservative Vorhersagen getroffen, falls der Werkstoff wie im Fall von  $\text{Si}_3\text{N}_4$  zyklische Ermüdungseffekte aufweist. Daher ist es mit Blick auf die zunehmende Verbreitung hochfester Keramiken erforderlich, zyklisches Risswachstum auch in STAU zu berücksichtigen.

Das Ziel dieser Arbeit ist es, die Zuverlässigkeitsbewertung in STAU im Hinblick auf Ermüdung unter zyklischer Belastung zu erweitern. Hierfür wird eine Versagensbeschreibung unter Verwendung eines geeigneten empirischen Ansatzes für zyklisches Risswachstum erarbeitet und in STAU integriert. Die wichtigste Aufgabe hierbei ist die Erfassung komplexer zyklischer Lastgeschichten und deren Verarbeitung innerhalb der vorhandenen Programmstruktur. Die neu erarbeiteten Methoden werden anhand eines Beispiels angewendet und mittels experimenteller Daten evaluiert.

Als Anwendungsbeispiel wird ein Wälzversuch vorgestellt, der im Rahmen eines Sonderforschungsbereichs<sup>1</sup> zur Charakterisierung von  $\text{Si}_3\text{N}_4$  als Werkstoff für Walzwerkzeuge verwendet wird. Als Kontaktproblem stellt dieser Versuch ein geeignetes Beispiel für ein komplex beanspruchtes Bauteil dar mit dem Vorteil, dass die Belastungsrandbedingungen definiert und mögliche Abweichungen messbar sind. Auf dieser Basis können mittels der STAU-Analyse wesentliche Ein-

---

<sup>1</sup>SFB 483: Hochbeanspruchte Gleit- und Friktionssysteme auf Basis ingenieurkeramischer Werkstoffe

flussgrößen hinsichtlich der Ermüdung identifiziert und vor dem Hintergrund der experimentellen Ergebnisse bewertet werden. Damit liefert die vorliegende Arbeit den Grundstein für die Übertragung der probabilistischen Auslegungsmethoden auf zyklisch belastete, hochfeste keramische Bauteile unter rauen Einsatzbedingungen.

### **Kurzübersicht der Arbeit**

Im zweiten Kapitel werden die Ermüdungsmechanismen keramischer Werkstoffe und verschiedene phänomenologische Risswachstumsbeschreibungen vorgestellt. Darüber hinaus werden spezielle Aspekte im Bezug auf Kontaktermüdung behandelt.

Das dritte Kapitel beschäftigt sich mit der vorhandenen probabilistischen Theorie zur Zuverlässigkeitsbewertung und deren Implementierung in STAU. Hier wird insbesondere auf die vorhandenen Routinen zu unterkritischem Risswachstum sowie zu Spannungsgradienten eingegangen.

Im vierten Kapitel wird die Erweiterung der Versagensbeschreibung im Bezug auf zyklisches Risswachstum dargelegt. Ein besonderes Augenmerk gilt hier der Erfassung komplexer Lastkollektive und deren Verarbeitung im Rahmen der in STAU vorhandenen Programmstruktur.

Das fünfte Kapitel widmet sich den zyklischen Risswachstumseigenschaften der im Wälzversuch verwendeten  $\text{Si}_3\text{N}_4$ -Variante SL200. Dabei werden Pooling-Strategien eingesetzt, um Unsicherheiten in den hierbei erhaltenen Parametern zu reduzieren.

Im letzten Kapitel wird die Zuverlässigkeitsanalyse anhand des Wälzversuchs vorgestellt. Den Schwerpunkt stellt neben der Finite-Elemente Analyse die Lebensdauervorhersage mit STAU dar. Die Vorhersagen werden im Hinblick auf wichtige Einflussgrößen sowie bruchmechanische Aspekte diskutiert.

## 2 Ermüdung keramischer Werkstoffe

Das Versagen keramischer Werkstoffe<sup>1</sup> ist durch sprödes Verhalten, also plötzlichen katastrophalen Bruch ohne nennenswerte plastische Verformung gekennzeichnet. Die Festigkeit wird von Fehlern im Material bestimmt, die in der Regel durch den Herstellungsprozess oder spätere Bearbeitungsschritte eingebracht werden und die bruchmechanisch als Risse beschrieben werden können. Fehler, die im Volumen auftreten, sind Poren bzw. poröse Bereiche, Agglomerate, Einschlüsse oder Korngrenzen. Typische Beispiele für Oberflächenfehler sind Kratzer, Kavitäten oder durch Kontakt verursachte Risse [3]. Die charakteristischen Abmessungen der Fehler liegen im mikroskopischen/submikroskopischen Bereich, je nach Werkstoff zwischen unter 10  $\mu\text{m}$  und einigen 100  $\mu\text{m}$ .

Neben spontanem Versagen treten bei keramischen Werkstoffen auch zeitabhängige Versagensmechanismen wie unterkritische Rissausbreitung, Ermüdung bei zyklischer Last sowie Kriechen bei höheren Temperaturen auf. Die Mechanismen, die zu Ermüdung führen, sind eng mit den Mechanismen zur Erhöhung der Risszähigkeit von Keramik verbunden. Die Konzepte solcher Verstärkungsmechanismen und das Rissausbreitungsverhalten werden daher im folgenden Abschnitt ausführlicher erläutert.

### 2.1 Verstärkungsmechanismen und R-Kurvenverhalten

Für keramische Werkstoffe existiert eine Vielzahl von Strategien zur Erhöhung der Risszähigkeit [4, 5]. Hierbei kann zwischen intrinsischen und extrinsischen Ansätzen unterschieden werden [6]. Intrinsische Mechanismen beruhen auf einer Erhöhung der Risszähigkeit durch mikrostrukturelle Prozesse in der Nähe der Rissspitze, wie z.B. Mikrorissbildung. Die erfolgreicheren extrinsischen Mechanismen beruhen dagegen auf energiedissipativen Prozessen, die nicht direkt an der Rissspitze wirken. Die wichtigsten Mechanismen im Bezug auf moderne Hochleistungswerkstoffe sind dabei spannungsinduzierte martensitische Phasenumwandlung und Rissüberbrückung (bridging).

---

<sup>1</sup>Allgemeine Abhandlungen zum Versagensverhalten und zur Bruchmechanik spröder Werkstoffe finden sich z.B. in den Lehrbüchern von *D. Munz und T. Fett* [1] und *B. Lawn* [2].

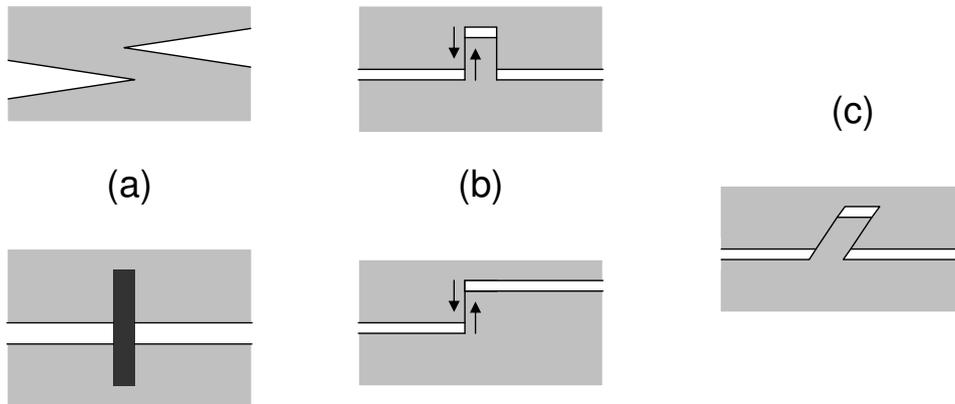


Abbildung 2.1: Grundtypen der Rissüberbrückung: (a) elastische (intakte) Brücken, (b) Reibbrücken und (c) Verhakung (nach [7]).

Rissüberbrückung beruht auf der Interaktion von Rissufern, wodurch eine Kraftübertragung und damit verbunden eine Abschirmung der Riss Spitze erfolgt. Hierbei kann zwischen elastischen Brücken, Reibbrücken und Verhakungen unterschieden werden (siehe Abb. 2.1) [7]. Elastische Brücken beruhen auf intakten oder elongierten Körnern, die ähnlich wie bei faserverstärkten Werkstoffen den Riss vollständig überbrücken. Reibbrücken sind typisch für grobkörnige polykristalline Keramiken, bei denen große Körner der gegenüberliegenden Rissflanken interagieren, sie treten aber auch in feinkörnigen Gefügen wie  $\text{Si}_3\text{N}_4$  auf.

Verstärkungsmechanismen können bruchmechanisch durch den  $K$ -Faktor  $K_{\text{sh}}$  ('shielding'-Term) beschrieben werden, der dem durch eine äußere Last aufgetragenen  $K$ -Faktor  $K_{\text{Iappl}}$  entgegenwirkt. Somit ergibt sich für die Riss Spitze der Spannungsintensitätsfaktor  $K_{\text{Itip}} = K_{\text{Iappl}} - K_{\text{sh}}$ . Die Abschirmung der Riss Spitze ist abhängig von der Größe der Prozesszone der Verstärkungsmechanismen, so dass sich  $K_{\text{sh}}$  mit zunehmender Risslänge erhöht. Dies bewirkt eine ansteigende Risswiderstandskurve (R-Kurve)  $K_{\text{R}}$ , deren typischer Verlauf in Abb. 2.2 dargestellt ist.

Das Rissausbreitungsverhalten kann anhand von Abb. 2.2 für einen Fehler der Anfangsgröße  $a_0$  in Abhängigkeit der Last  $\sigma$  aufgezeigt werden. Der Verlauf von  $K_{\text{Iappl}}$  über der Risslänge ergibt sich jeweils für unterschiedliche Werte  $\sigma$  gemäß  $K_{\text{Iappl}} = Y_I \sigma \sqrt{a}$ . Die Kurven  $K_{\text{Iappl},0}$  und  $K_{\text{Iappl},c}$  stellen dabei die Übergänge zu stabiler bzw. instabiler Rissausbreitung dar. Stabile Rissausbreitung tritt ein, wenn  $K_{\text{Iappl}} > K_{\text{Iappl},0}$  ist, so dass der untere Schwellwert ( $K_{\text{I0}}$ ) der R-Kurve überschritten wird. Der Riss wächst stabil, solange  $K_{\text{Iappl}}$  unter der  $K_{\text{Iappl},c}$ -Kurve

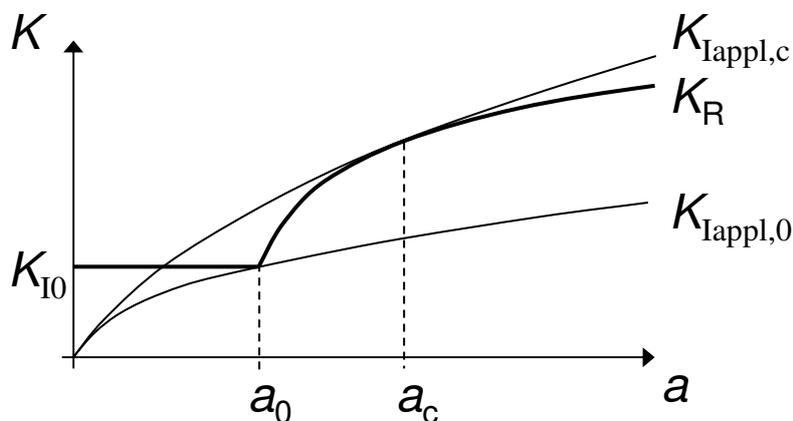


Abbildung 2.2: Exemplarische Darstellung des Rissausbreitungsverhaltens bei Werkstoffen mit R-Kurveneffekt.

liegt. Im Fall von  $K_{Iappl,c}$  kommt es bei  $a_c$  zu instabilem Risswachstum, da hier die Tangentenbedingung

$$K_{Iappl} = K_R \quad \frac{\partial K_{Iappl}}{\partial a} = \frac{dK_R}{da} \quad (2.1)$$

erfüllt ist ([1], S.23).

Die Auswirkung des R-Kurveneffekts auf kurze Risse, die in der Größenordnung natürlicher Fehler liegen, ist in Abb. 2.3 dargestellt. Hierzu sind die  $K_{Iappl}$ -Verläufe für zwei Spannungen  $\sigma^{(1)}$  und  $\sigma^{(2)}$  aufgetragen. Für die flach ansteigende R-Kurve ( $K_{R,1}$ ) wächst der Riss  $a_0$  bereits beim Spannungsniveau  $\sigma^{(1)}$  bei Überschreiten von  $K_{I0}$  instabil, so dass sich die Verstärkungseffekte in diesem Fall nicht auswirken. Im Fall einer steil ansteigenden R-Kurve ( $K_{R,2}$ ) wird die Tangentenbedingung erst bei einer höheren Last  $\sigma^{(2)}$  erfüllt. Die Festigkeit des Werkstoffs wird also durch eine steil ansteigende R-Kurve (wie im Fall  $\text{Si}_3\text{N}_4$ ) erhöht, da sich die Verstärkungsmechanismen in diesem Fall bereits auf kleine natürliche Fehler auswirken.

## 2.2 Unterkritische Rissausbreitung

Unter unterkritischem Risswachstum versteht man zeitabhängiges langsames Risswachstum bei Beanspruchungen, die nicht zu instabiler Rissausbreitung führen. Unterkritisches Risswachstum ist auf chemisch aktivierte Prozesse an den

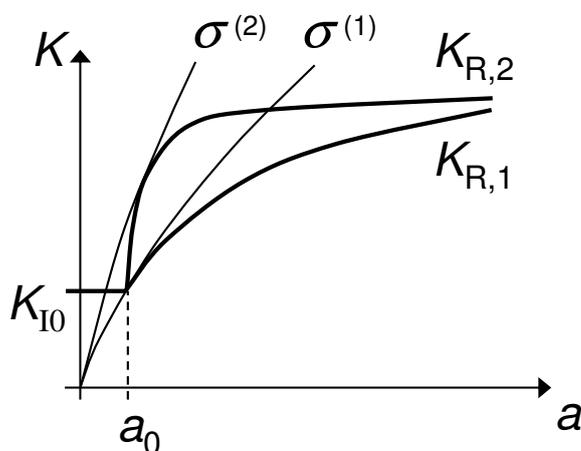


Abbildung 2.3: Einfluss des R-Kurvenverlaufs auf das Versagenverhalten kurzer (natürlicher) Risse.

mechanisch belasteten Atomen der Rissspitze zurückzuführen. Dieser Prozess ist temperaturabhängig und wird insbesondere durch Wasser begünstigt [8].

Grundsätzlich kann das Risswachstumsverhalten vieler keramischer Werkstoffe durch die in Abb. 2.4 beschriebene Kurve dargestellt werden. Hierbei unterscheidet man drei Bereiche, wobei es einen Schwellwert  $K_{th}$  gibt, unter dem kein Rissfortschritt auftritt (Bereich 0). Im Bereich I hängt die Risswachstumsgeschwindigkeit  $v$  in hohem Maße vom Spannungsintensitätsfaktor  $K_I$  an der Rissspitze ab. Die Abhängigkeit  $v$ - $K_I$  kann hier durch ein Potenzgesetz beschrieben werden:

$$v = \frac{da}{dt} = A_u \cdot K_I^{n_u} \quad . \quad (2.2)$$

$A_u$  und  $n_u$  sind materialspezifische Parameter, die zur späteren Unterscheidung mit dem Index 'u' gekennzeichnet werden. Der Risswachstumsexponent nimmt typischerweise Werte  $n_u > 15$  ([1], S.77) an. Die Risswachstumsparameter variieren mit der Temperatur und dem Umgebungsmedium.

In vielen Fällen tritt ein Plateau (Bereich II) auf, welches auf den begrenzten Transport von Wasser zur Rissspitze zurückzuführen ist. Die Höhe des Plateaus hängt damit stark vom Umgebungsmedium ab. Eine Erhöhung der relativen Luftfeuchtigkeit bewirkt z.B. eine Anhebung des Plateaus bei Glas [9]. Im Bereich III kommt es zu einer starken Erhöhung der Risswachstumsgeschwindigkeit und schließlich zu instabilem Risswachstum.

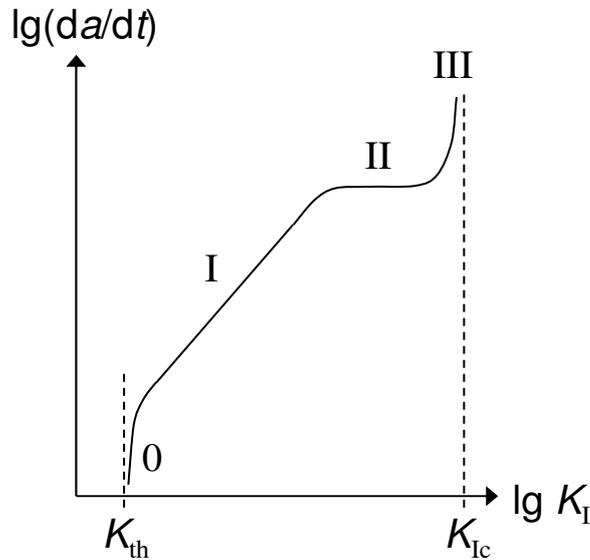


Abbildung 2.4: Schematische Darstellung der  $\log v - \log K_I$ -Kurve für unterkritisches Risswachstum.

### 2.3 Zyklische Rissausbreitung

Langsames Risswachstum tritt bei einer Vielzahl von keramischen Werkstoffen nicht nur unter statischer, sondern auch unter zyklischer Last auf. Bei einigen spröden Materialien, wie z.B. Glas, kann der Ermüdungseffekt auf den quasi-statischen Belastungsanteil und somit auf unterkritisches Risswachstum zurückgeführt werden [10]. Um zu zeigen, dass bei einem Material ein zyklischer Effekt vorliegt, können Vorhersagen auf Basis der unterkritischen Parameter mit experimentellen Daten verglichen werden. Ein Beispiel hierfür ist in Abb. 2.5 für  $Al_2O_3$  gezeigt [11]. In diesem Fall liegt ein echter Ermüdungseffekt vor und die Lebensdauer wird durch die Vorhersage auf Basis von quasi-statischen Mechanismen stark überschätzt.

Eine typische Risswachstumskurve ist in Abb. 2.6 dargestellt. Die Risswachstumsrate  $v = da/dN$  wird hier in Abhängigkeit der zyklischen Belastungsgröße  $\Delta K_I$  ( $\Delta K_I = K_{I,max} - K_{I,min}$ ) angegeben. Analog zu unterkritischem Risswachstum kann  $v$  im Bereich I durch ein Potenzgesetz der Form beschrieben werden:

$$\frac{da}{dN} = A (\Delta K_I)^n \quad . \quad (2.3)$$

Bereich II ist durch stark ansteigende Werte für  $v$  gekennzeichnet und es kommt zu instabiler Rissausbreitung für  $K_{I,max} \rightarrow K_{IIc}$ . Ein unterer Schwellwert (Bereich 0) wird beobachtet, wenn die Risswachstumskurve an makroskopischen Rissen

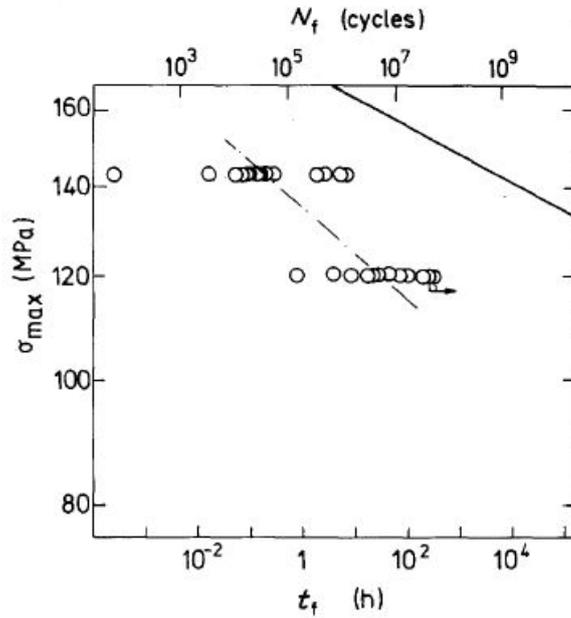


Abbildung 2.5: Lebensdauerergebnisse  $\text{Al}_2\text{O}_3$  und Vorhersage (durchgezogene Linie) auf Basis von unterkritischem Risswachstum (aus [11]).

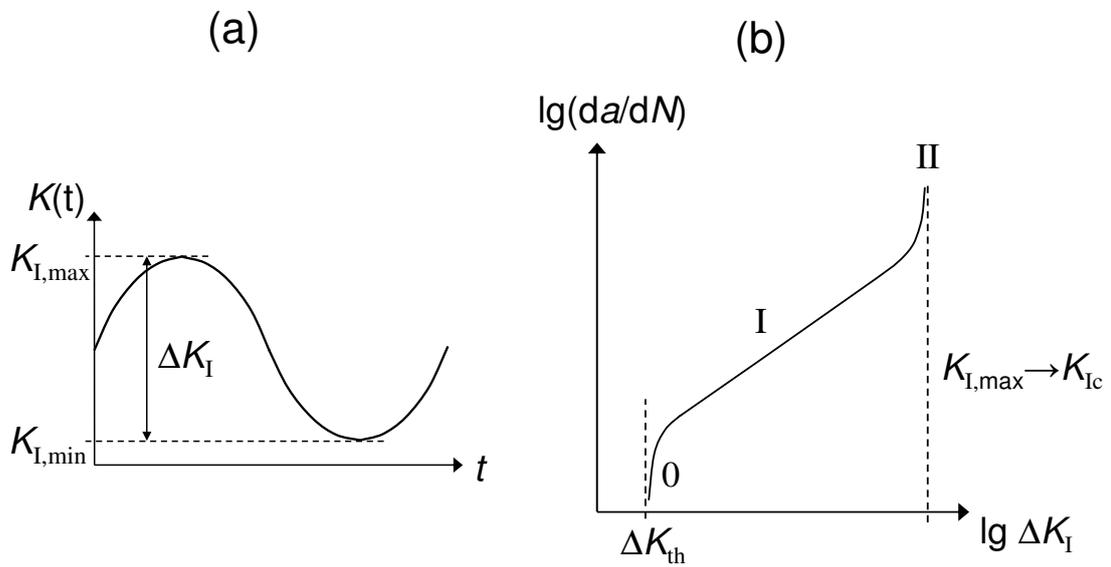


Abbildung 2.6: (a)  $K$ -Verlauf bei zyklischer Belastung; (b) Zyklische Risswachstumskurve.

gemessen wird (z.B. [12]). Bei natürlichen Fehlern wird in der Regel kein unterer Schwellwert  $\Delta K_{\text{th}}$  beobachtet (siehe z.B. [13]).

Typischerweise hängt die Risswachstumsrate bei Keramiken stärker von  $K_{\text{I,max}}$  als von  $\Delta K_{\text{I}}$  ab. Dies wird durch Gl. (2.4) ausgedrückt, wobei gilt:  $p \ll q$ .<sup>2</sup>

$$\frac{da}{dN} = C (\Delta K_{\text{I}})^p (K_{\text{I,max}})^q \quad (2.4)$$

### 2.3.1 Ermüdungsmechanismen

Der Ermüdungseffekt bei zyklischer Belastung ist auf die Degradation von Verstärkungseffekten der Mikrostruktur zurückzuführen. Dabei sind vorrangig die Reibbrücken betroffen, deren Kraftübertragungsvermögen mit zunehmender Zyklenzahl abgebaut wird. Dies ist auf Verschleiß zwischen den brückenbildenden Körnern zurückzuführen, welcher aufgrund der wechselnden Belastung und der damit verbundenen Relativbewegung verursacht wird. Dies wurde erstmals von Lathabai *et al.* [15] mittels in-situ Rasterelektronenmikroskop-Analysen an  $\text{Al}_2\text{O}_3$  experimentell nachgewiesen. Einige Studien zeigen auch, dass ein Zusammenhang zwischen Ermüdung und interkristallinem Rissfortschritt besteht [16, 17]. Im Falle von transkristallinem Rissfortschritt wurde kein Unterschied zwischen statischer und zyklischer Belastung gemessen, was auf die Abwesenheit von Reibbrücken zurückgeführt werden kann.

Eine Beschreibung des Risswachstumsverhaltens auf Basis des Verschleißansatzes wurde von Dauskardt [18] vorgestellt. Das Modell basiert auf der Brückenspannung eines einzelnen ausgelösten Korns in einer umgebenden Matrix (Abb. 2.7). Die Brückenspannung  $p(u)$  hängt von der Kontaktfläche des Korns, die von der Rissöffnung abhängt, der Druckeigenspannung  $\sigma_{\text{R}}$  und dem Reibkoeffizienten  $\mu$  ab. Bei zyklischer Last wird das Volumen des Korns durch Verschleiß reduziert, wodurch die Normalkraft (bzw. die Eigenspannung) zwischen Korn und Matrix abnimmt. Dadurch wird die vom Korn übertragene Brückenspannung  $p(u)$  reduziert.

Die Degradation der Brückenspannung der einzelnen Körner führt zur Abnahme des shielding-Terms  $K_{\text{sh}}$ , so dass der K-Faktor  $K_{\text{Itip}} = K_{\text{Iappl}} - K_{\text{sh}}$  zunimmt, was zu weiterer Rissausbreitung führt. Somit liegt ein stationärer Prozess vor, bei dem ein Gleichgewicht zwischen der Bildung von Brücken mit der Rissausbreitung  $da$  und des zyklischen bzw. zeitabhängigen Abbaus von  $K_{\text{sh}}$  mit  $dt$  vor [19]:

$$dK_{\text{sh}} = \frac{\partial K_{\text{sh}}}{\partial a} da + \frac{\partial K_{\text{sh}}}{\partial t} dt = 0 \quad . \quad (2.5)$$

---

<sup>2</sup>Für metallische Werkstoffe gilt:  $p \gg q$  [14]

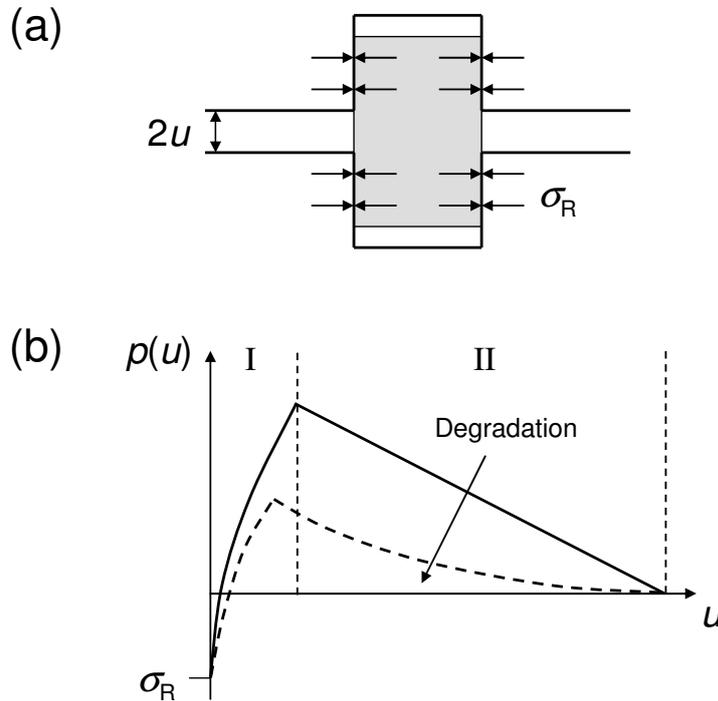


Abbildung 2.7: (a) Modell eines Rissüberbrückenden Korns; (b) Degradation der Brückenspannung  $p(u)$ , Bereich I: Ablösen des Korns, Bereich II: Herausziehen des Korns (nach [18]).

Mit dieser Überlegung kann die starke Abhängigkeit der Risswachstumsrate von  $K_{\max}$  grundsätzlich erklärt werden. Im zyklischen Fall ist der Rissfortschritt durch die gleichen Mechanismen wie im statischen Fall, also durch  $K_{I,\max}$ , bestimmt [20]. Durch den Abbau der Verstärkungseffekte wird der effektive Spannungsintensitätsfaktor erhöht, so dass sich die risstreibende Kraft stärker erhöht als im quasi-statischen Fall.

### 2.3.2 Wichtige Einflussgrößen

Wie im vorigen Abschnitt gezeigt stellt der Abbau von Rissüberbrückungen den wesentlichen Ermüdungsmechanismus für einen Großteil der keramischen Werkstoffe dar. Da die Brücken stark von der betrachteten Werkstoffvariante und der Mikrostruktur abhängig sind, können allgemeingültige Aussagen über Einflüsse auf das Ermüdungsverhalten nur schwer getroffen werden. In diesem Abschnitt

sollen daher einige generelle Einflussgrößen, die für die Modellierung zyklischer Rissausbreitung relevant sind, aufgezeigt werden.

### Umgebungsmedium

Der zyklische Ermüdungsmechanismus kann grundsätzlich als rein mechanischer Effekt aufgefasst werden. Dies zeigen experimentelle Untersuchungen an  $\text{Si}_3\text{N}_4$  [21, 22], bei denen Rissfortschritt unter zyklischer Last im Vakuum beobachtet wurde. Im Allgemeinen hängt die zyklische Risswachstumsrate jedoch in hohem Maße vom 'statischen' Anteil ( $K_{I,\max}$ ) des Rissfortschritts ab. Somit wirken sich die Mechanismen, die unterkritisches Risswachstum bewirken, in ähnlich starker Form auch auf die zyklische Ermüdung aus. Dies zeigt sich vor allem am Einfluss von Wasser. Beispielsweise wurde in Studien an  $\text{Si}_3\text{N}_4$  [22, 23] eine Abhängigkeit des Wasseranteils im Umgebungsmedium nachgewiesen. Ein höherer Wasseranteil führt dabei zu höheren Risswachstumsraten, die die im Vakuum gemessenen Werte um mehrere Größenordnungen überschreiten [22].

### Temperatureinfluss

Über die Temperaturabhängigkeit des Ermüdungseffekts können nur bedingt allgemeine Aussagen getroffen werden. Man kann davon ausgehen, dass das Risswachstumsverhalten bis zur Glasübergangstemperatur der Glasphase durch die statischen (temperaturabhängigen) Risswachstumsvorgänge und die Degradation der Brückenspannungen bestimmt wird und somit werkstoffspezifisch variiert.

Bei Temperaturen über  $1000^\circ\text{C}$  wird häufig eine geringere zyklische Risswachstumsrate als im statischen Fall beobachtet. Dies kann überwiegend auf die Viskosität der Glasphase zurückgeführt werden, die in diesem Temperaturbereich einen zusätzlichen Überbrückungseffekt der Rissufer bewirkt [24, 25]. Aufgrund der Fließeigenschaften tritt dieser Verstärkungseffekt nur bei (schnell) wechselnder Beanspruchung auf. Daher erklärt sich auch die Frequenzabhängigkeit im Ermüdungsverhalten, die z.B. für  $\text{Si}_3\text{N}_4$  [26] beobachtet wurde.

#### 2.3.3 Risswachstumsbeschreibung

Die zyklische Risswachstumsrate  $\frac{da}{dN}$  im Bereich I (Abb. 2.6) kann durch ein Potenzgesetz wie in Gl. (2.3) bzw. Gl. (2.4) beschrieben werden.

Mit der Definition des R-Verhältnis

$$R = \frac{K_{I,\min}}{K_{I,\max}} \quad (2.6)$$

kann Gl. (2.3) in Abhängigkeit von  $K_{I,\max}$  geschrieben werden:

$$\frac{da}{dN} = A \cdot (\Delta K_I)^n = A^* \cdot \left( \frac{\Delta K_I}{K_{Ic}} \right)^n \quad (2.7)$$

$$\frac{da}{dN} = A(1-R)^n \cdot (K_{I,\max})^n = A^*(1-R)^n \cdot \left( \frac{K_{I,\max}}{K_{Ic}} \right)^n \quad (2.8)$$

Dabei sind  $n$  und  $A$  bzw.  $A^*$  materialspezifische Risswachstumsparameter, wobei  $A^*$  die Einheit  $Länge \cdot Zyklus^{-1}$  hat.

Hängt die Risswachstumsrate wie in Gl. (2.4) von  $\Delta K_I$  bzw.  $K_{I,\max}$  mit unterschiedlichen Exponenten ab, kann dies in Abhängigkeit von  $R$  umgeschrieben werden:

$$\frac{da}{dN} = C \cdot (\Delta K_I)^p \cdot (K_{I,\max})^q = \frac{C}{(1-R)^q} \cdot (\Delta K_I)^{p+q} \quad .$$

Setzt man  $n = p + q$  ergibt sich

$$\frac{da}{dN} = \frac{C}{(1-R)^{n-p}} \cdot \Delta K_I^n = \frac{C^*}{(1-R)^{n-p}} \cdot \left( \frac{\Delta K_I}{K_{Ic}} \right)^n \quad (2.9)$$

$$\frac{da}{dN} = C \cdot (1-R)^p \cdot (K_{I,\max})^n = C^* \cdot (1-R)^p \cdot \left( \frac{K_{I,\max}}{K_{Ic}} \right)^n \quad (2.10)$$

Für einen festen Wert  $R$  ergibt sich der Zusammenhang zwischen beiden Potenzgesetzen (Gl. (2.7) und Gl. (2.9)) mit:

$$A = \frac{C}{(1-R)^{n-p}} \quad (2.11)$$

Die Beziehungen in Gl. (2.9) setzen voraus, dass die Abhängigkeit von  $\Delta K_I$  bzw.  $K_{I,\max}$  durch einen konstanten Exponenten  $n$  beschrieben werden kann. In der Literatur finden sich jedoch auch Beispiele [27], bei denen der Risswachstumsexponent mit  $R$  variiert. Für diesen Fall wurde ein Risswachstumsgesetz von *Fett und Munz* [20] vorgeschlagen (Gl. (2.12)).

$$v = \frac{da}{dN} = A(K_{\max} - K_{sh})^n \quad (2.12)$$

Hierbei wird der Term  $K_{sh}$ , der die Rissspitze abschirmt, in ein Potenzgesetz eingebunden. Die zyklische Degradation von  $K_{sh}$  wird durch die Parameter  $K_{sh,0}$ ,  $A$ ,  $W$  bzw. durch die Schwellwerte  $V_0$  und  $R_0$  bestimmt:

$$K_{sh} = K_{sh,0} \left( \frac{v}{v_0} \right)^{W(R_0-R)} + \left( \frac{v}{A} \right)^{1/n} \quad v < v_0 \quad R < R_0 \quad .$$

Die Degradation ist dabei umso stärker, je kleiner die Risswachstumsrate  $v$  (Reibbrücke verbleibt länger in der Prozesszone und durchläuft mehr Zyklen) bzw. das  $R$ -Verhältnis (größerer relativer Reibweg) ist. Damit lassen sich sowohl unterkritisches als auch zyklisches Risswachstum beschreiben.

### 2.3.4 Bestimmung von Risswachstumsparametern

Bei einer Vielzahl von Arbeiten zu zyklischer Ermüdung werden Rissausbreitungsversuche an künstlichen Rissen (CT-Probe (Compact-Tension), gekerbte Biegeproben, Indentation) durchgeführt. Für die Auslegung von Bauteilen sind jedoch die natürlichen Fehler relevant. Während die Bestimmung von Risswachstumsparametern für makroskopische Fehler auf einer direkten Messung der Rissvergrößerung in Abhängigkeit einer aufgetragenen Last beruht, wird das Risswachstumsverhalten natürlicher Fehler durch die Zuordnung von Lebensdauerdaten und Festigkeitsdaten ermittelt. Hierbei wird davon ausgegangen, dass die Streuung der gemessenen Lebensdauer mit der Streuung der Festigkeit zusammenhängt, da zeitabhängiges Versagen von der natürlichen Fehlerpopulation bestimmt wird. Dabei müssen Probengeometrie bzw. die Beanspruchungsart der zyklischen Versuche und der Festigkeitsversuche übereinstimmen. In der Praxis werden meist zyklische 4PB-Versuche durchgeführt, da diese standardmäßig auch für die Festigkeitsmessung verwendet werden [28].

Bei den Lebensdauerversuchen an 4PB-Proben wird eine konstante zyklische Biegelast  $\Delta\sigma$  bei konstantem R-Verhältnis aufgebracht. Dabei wird die Anzahl der Zyklen bis zum Bruch gemessen. Es existieren mehrere Möglichkeiten, Risswachstumsparameter aus diesen Daten zu erhalten. Diese Auswertemethoden werden im einzelnen in Kapitel 5.5.1 vorgestellt.

### 2.3.5 Kontaktermüdung

Grundsätzlich führt Kontaktbelastung in keramischen Werkstoffen einerseits zur Bildung von Rissen (konische Risse bei kugelförmigen Indentern) am Rand des Kontaktbereichs und andererseits zu Druckschädigung (siehe Abb. 2.8). Diese Schädigungsmechanismen treten auch unter zyklischer Last auf, was eine (zyklenabhängige) Degradation der Festigkeit bewirkt. Im ersten Fall wachsen Oberflächenfehler im Bereich hoher Zugspannungen am Rand der Kontaktzone. Wenn die kritische Größe erreicht ist, kommt es zu instabiler Rissausbreitung und (durch Koaleszenz) zur Bildung eines konischen Risses, der weiter zyklisch wachsen kann. Der zweite Mechanismus beruht auf schubspannungsabhängigem Risswachstum im Bereich hoher Druckspannungen, wodurch sich ein Mikrorissnetzwerk ausbildet. Dadurch entsteht eine quasi-plastische Verformungszone im Eindruckbereich. Untersuchungen an  $\text{Si}_3\text{N}_4$  haben gezeigt, dass der dominierende Schädigungsmechanismus stark von der Mikrostruktur abhängig ist [30].

Das zyklische Risswachstumsverhalten von Fehlern in der Nähe des Kontaktbereichs ist in hohem Maße durch das stark variierenden Spannungsfeld beeinflusst.

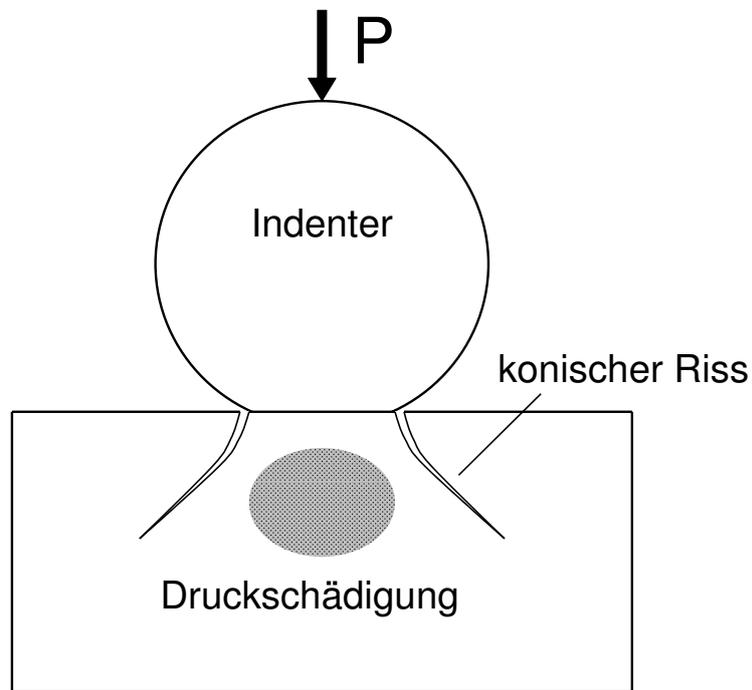


Abbildung 2.8: Versagensmoden unter Kontaktbelastung: Druckschädigung und Bildung konischer Risse.

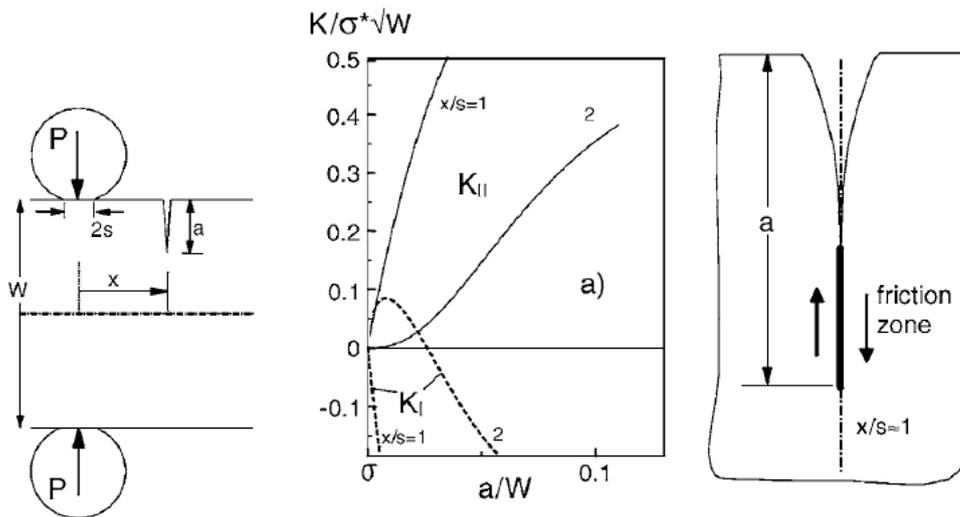


Abbildung 2.9: Oberflächenriss in der Nähe des Kontaktbereichs im Doppelrollenversuch (links); Verlauf der K-Faktoren  $K_I, K_{II}$  (mitte); Bereich der Rissflankenreibung unter  $K_I < 0$  (rechts); aus [29].

Das zeigt sich z.B. in Untersuchungen an feinkörnigem  $\text{Al}_2\text{O}_3$  in einem Doppelrollenversuch [31], bei dem zyklische Risswachstumsexponenten von  $n \approx 10$  gemessen wurden, die sich deutlich von den Ergebnissen aus zyklischen 4PB-Versuchen ( $n \approx 20$ ) unterscheiden. Nach *Fett* [29] kann dies darauf zurückgeführt werden, dass an der Risspitze ein negativer  $K_{\text{I}}$ -Wert vorliegt, so dass der Riss in diesem Bereich geschlossen ist (siehe Abb. 2.9). In diesem Fall wird der Rissfortschritt durch den effektiven Spannungsintensitätsfaktor  $K_{\text{eff}}$  bestimmt, welcher sich aus  $K_{\text{II}}$  und  $K_{\text{I}}$  nach dem Richard-Kriterium in Gl. (2.13) berechnet.

$$K_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{3}{2}} K_{\text{II,eff}}, \quad K_{\text{II,eff}} = K_{\text{II}} + \mu K_{\text{I}} \quad K_{\text{I}} < 0 \quad (2.13)$$

Zyklisches Risswachstum kann dann anhand der Degradation des Reibwerts  $\mu$  der Rissufer mit einem zyklenzahlabhängigen Exponentialansatz beschrieben werden [29]. Aus diesen Ergebnissen geht hervor, dass eine Mixed-Mode-Abhängigkeit im zyklischen Risswachstumsverhalten existieren kann. Dies würde sich insbesondere im Fall von Kontaktermüdung durch die großen Unterschiede im  $n$ -Wert auf die Vorhersagen auswirken.

## 3 Probabilistische Zuverlässigkeitsbewertung keramischer Bauteile

Die Festigkeit bzw. Lebensdauer von Bauteilen aus spröden Werkstoffen ist durch die natürlichen inhärenten Fehler des Materials bestimmt, die durch die Herstellung (vorwiegend Volumenfehler) oder spätere Bearbeitung (Oberflächenfehler) entstehen. Probabilistische Auslegungsmethoden beruhen auf einer Annahme der Größenverteilung dieser Fehler, auf deren Basis Verteilungsfunktionen für die Festigkeit abgeleitet werden. Die wichtigste Funktion in diesem Zusammenhang ist die Weibull-Verteilung [32]. Die Einbeziehung lokaler bruchmechanischer Versagenskriterien im Rahmen des Weibull-Konzepts bildet die Basis zur Zuverlässigkeitsbewertung von Bauteilen mit nicht-homogener Spannungsverteilung [33]. Diese multiaxiale Weibull-Theorie bildet dabei die Grundlage für die gängigen numerischen Tools zur Zuverlässigkeitsbewertung keramischer Bauteile [34, 35].

### 3.1 Weibull-Theorie und Erweiterungen

Die Weibull-Theorie beruht auf einem Weakest-Link-Ansatz, nach dem das Bauteilversagen durch den im Bezug auf Lage und Größe ungünstigsten natürlichen Fehler bestimmt ist. Demnach tritt (katastrophales) Versagen der Gesamtstruktur ein, wenn ein Fehler eine von Ort, Orientierung und lokaler Beanspruchung abhängige kritische Fehlergröße überschreitet. Dabei stellt die Fehlergrößenverteilung den wesentlichen Einfluss auf die Streuung und Größenabhängigkeit der Strukturfestigkeit dar. Für die folgenden Überlegungen werden einige grundsätzliche Annahmen gemacht:

- Die Fehler beeinflussen sich nicht gegenseitig und sind klein im Verhältnis zur Dimension der Gesamtstruktur.
- Lage und Orientierung der Fehler sind gleichverteilt.
- Die Fehler können bruchmechanisch durch vereinfachte Rissmodelle beschrieben werden.

Ist die kritische Fehlergröße  $a_c$  bekannt, so berechnet sich die Wahrscheinlichkeit, dass  $a_c$  bei gegebener Fehlergrößenverteilung  $f_a(a)$  nicht überschritten wird, durch das Integral

$$F_a(a_c) = \int_0^{a_c} f_a(a) da \quad . \quad (3.1)$$

Legt man der Verteilungsfunktion ein Potenzgesetz der Form  $f_a(a) \sim a^{-r}$  zugrunde, so erhält man für  $F_a(a_c)$  die Pareto-Verteilung<sup>1</sup> Gl. (3.2), wobei  $r$  ein materialspezifischer Parameter ist und  $a_0$  ein Schwellwert, unter dem kein Versagen auftritt.

$$F_a(a_c) = 1 - \left( \frac{a_0}{a_c} \right)^{(r-1)} \quad (3.2)$$

Im Folgenden wird zunächst ein Bauteil mit exakt einem Fehler betrachtet. Ort und Orientierung des Fehlers sind dabei beliebig. Die Ausfallwahrscheinlichkeit  $Q_1$  für diesen Fall erhält man durch die Integration der kritischen Fehlergröße  $a_c$  über das Bauteilvolumen  $V$  bzw. die Raumorientierung  $\Omega$  in Gl. (3.3), wobei die kritische Fehlergröße vom Ort  $\vec{x}$  und vom Raumorientierungswinkel  $\Omega$  abhängt.

$$Q_1 = \frac{1}{V} \int_V \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \left( \frac{a_0}{a_c(\vec{x}, \Omega)} \right)^{r-1} d\Omega dV \quad (3.3)$$

Um die Ausfallwahrscheinlichkeit für eine beliebige Fehlerzahl zu erhalten, geht man davon aus, dass die Anzahl der Fehler im Volumen durch die in Gl. (3.4) dargestellte Poisson-Verteilung abgebildet werden kann.

$$P_n = \frac{M^n e^{-M}}{n!} \quad M = \frac{M_0}{V_0} V \quad (3.4)$$

Die Wahrscheinlichkeit, genau  $n$  Fehler in einem Volumen  $V$  zu finden ist demnach durch die mittlere Fehlerzahl  $M_0$  im Einheitsvolumen  $V_0$  bestimmt. Mit der Reihenentwicklung

$$\begin{aligned} P_f &= \sum_{k=0}^{\infty} P_k \cdot Q_k \\ &= 1 - \exp(-MQ_1) \end{aligned} \quad (3.5)$$

---

<sup>1</sup>Eine ausführliche Herleitung im Rahmen der Extremwerttheorie findet sich bei [36], wo auch Gültigkeitsgrenzen durch die getroffenen Annahmen betrachtet werden.

ergibt sich für schließlich die Ausfallwahrscheinlichkeit  $P_f$  Gl. (3.6).

$$P_f = 1 - \exp \left( -\frac{M}{V} \int_V \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \left( \frac{a_0}{a_c(\vec{x}, \Omega)} \right)^{r-1} d\Omega dV \right) \quad (3.6)$$

Werden Fehler an der Bauteiloberfläche betrachtet, ergibt sich analog zu Gl. (3.6) ein Integral über die Fläche  $A$  und einen Winkel  $\varphi$ , der die Orientierung eines senkrecht zur Oberfläche verlaufenden Risses beschreibt:

$$P_f = 1 - \exp \left( -\frac{M}{A} \int_A \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi} \left( \frac{a_0}{a_c(\vec{r}, \varphi)} \right)^{r-1} d\varphi dA \right) . \quad (3.7)$$

$M$  bezeichnet in diesem Zusammenhang die mittlere Fehlerzahl pro Einheitsfläche  $A_0$ .

### Äquivalentenspannung - Mixed-Mode-Kriterium

Die Formulierung in Gl. (3.6) stellt eine allgemeine Grundlage für die Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeit beliebiger Probleme dar. Die kritische Risslänge  $a_c$  hängt vom lokalen Spannungszustand, der Rissgeometrie und der Risszähigkeit des Materials ab. Unter der Annahme, dass die Spannungen über der Dimension der betrachteten natürlichen Fehler als konstant angesehen werden können, kann die kritische Risslänge durch eine Spannung  $\sigma_{eq}(\vec{x}, \Omega)$  ersetzt werden:

$$a_c(\vec{x}, \Omega) = \left( \frac{K_{Ic}}{Y_I \sigma_{eq}(\vec{x}, \Omega)} \right)^2 . \quad (3.8)$$

$\sigma_{eq}(\vec{x}, \Omega)$  ist eine Modus-I-Äquivalentenspannung, die auf einem lokalen bruchmechanischen mehrachsigen Versagenskriterium (Mixed-Mode-Kriterium) der Form:

$$K_{Ieq} = f(K_I, K_{II}, K_{III}) \quad (3.9)$$

beruht. Die Spannungsintensitätsfaktoren  $K_{I-III}$  berechnen sich aus dem Normalspannungsanteil  $\sigma_n$  und dem Schubspannungsanteil  $\tau$  am Riss. Eine Übersicht und Bewertung verschiedener Mixed-Mode-Kriterien für keramische Werkstoffe findet sich in [37]. Für den Großteil keramischer Materialien ist das Normalspannungskriterium in Gl. (3.10) anwendbar.

$$K_{Ieq} = K_I \quad (3.10)$$

Mit der Äquivalentsspannung in Gl. (3.8) können die Integrale über die kritische Fehlergröße zur Berechnung von  $P_f$  in Gl. (3.6) durch ein Integral über die Äquivalentsspannung ersetzt werden. Definiert man die Parameter  $m$  und  $\sigma_{0V}$  (analog  $\sigma_{0A}$ ) gemäß

$$m = 2(r - 1) \qquad \sigma_{0V} = \frac{K_{Ic}}{M_0^{\frac{1}{m}} Y_I a_0^{\frac{1}{2}}} \quad (3.11)$$

so erhält man Gl. (3.12) für die Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeit für Volumenfehler.

$$P_f = 1 - \exp \left( -\frac{1}{V_0} \int_V \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \left( \frac{\sigma_{eq}(x, y, z, \varphi, \psi)}{\sigma_{0V}} \right)^m d\Omega dV \right) \quad (3.12)$$

Der Weibull-Modul  $m$ , der als Funktion von  $r$  die Streuung der Fehlergröße charakterisiert und  $\sigma_{0V}$  sind materialabhängige Parameter. Die Integration erfolgt insgesamt über fünf Variablen: drei Raumkoordinaten  $x, y, z$  und zwei Winkel  $\varphi, \psi$ . Werden Fehler an der Oberfläche des Bauteils betrachtet, erfolgt die Integration über drei Variablen:  $x, y, \varphi$ . Die Ausfallwahrscheinlichkeit berechnet sich dann nach Gl. (3.13).

$$P_f = 1 - \exp \left( -\frac{1}{A_0} \int_A \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi} \left( \frac{\sigma_{eq}(x, y, \varphi)}{\sigma_{0A}} \right)^m d\varphi dA \right) \quad (3.13)$$

Der Parameter  $\sigma_{0A}$  berechnet sich analog zu Gl. (3.11).

Führt man eine Referenzspannung  $\sigma^*$  ein, kann  $P_f$  in Form einer Weibull-Verteilung wie in Gl. 3.14 geschrieben werden [38].

$$P_f = 1 - \exp \left[ -\left( \frac{\sigma^*}{b} \right)^m \right] \quad (3.14)$$

Der Parameter  $b$  hängt dann einerseits von den materialspezifischen Größen  $m$  und  $\sigma_{0V}$ , sowie von der Beanspruchung und dem Volumen des Bauteils ab:

$$b = \sigma_{0V} H^{-1} = \sigma_{0V} \left( \frac{V_{eff}}{V_0} \right)^{-\frac{1}{m}} \quad (3.15)$$

$$V_{eff} = \int_V \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \left( \frac{\sigma_{eq}(x, y, z, \varphi, \psi)}{\sigma^*} \right)^m d\Omega dV \quad (3.16)$$

Die Größenabhängigkeit von  $b$  ist in  $V_{eff}$ , dem effektiven Volumen bzw. dem normierten Spannungintegral  $H$  enthalten. Entsprechende Formulierungen ergeben sich analog zu Gl. (3.15) für Oberflächenfehler.

Handelt es sich um das gleiche Material, können die Parameter zweier Weibull-Verteilungen mit Hilfe von Gl. (3.17) umgerechnet werden, da  $m$  und  $\sigma_{0V}$  bzw.  $\sigma_{0A}$  Materialeigenschaften sind.

$$b_1 H_1 = b_2 H_2 \quad (3.17)$$

Gl. (3.17) bildet eine wichtige Grundlage einerseits für Festigkeitsvorhersagen und andererseits für die Bestimmung der Parameter  $\sigma_{0V}$  bzw.  $\sigma_{0A}$  aus einer experimentell bestimmten Weibull-Verteilung.

### Zeitabhängiges Versagen und unterkritisches Risswachstum

Bei transienter Beanspruchung ist die kritische Fehlergröße zusätzlich von der Zeit abhängig:  $a_c(\vec{x}, \Omega, t)$ . In Bild 3.1 (a) ist der Verlauf von  $a_c(t)$  im Zeitintervall  $t \in [0; t_0]$  exemplarisch dargestellt. Versagen tritt zu dem Zeitpunkt  $t_f$  ein, bei dem die kritische Fehlergröße minimal ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Bauteil mit exakt einem Fehler zum Zeitpunkt  $t_0$  bereits versagt hat, ist demnach:

$$Q_1(t_0) = \left( \frac{a_0}{\min_{t \in [0; t_0]} a_c(t)} \right)^{\frac{m}{2}} \quad (3.18)$$

Die Äquivalentsspannung hängt dann analog zu Gl. (3.8) ebenfalls von der Zeit ab (Gl. (3.19)), wobei  $\sigma_{eq}(t)$  zum Zeitpunkt  $t_f$  maximal wird.

$$a_c(t) = \left( \frac{K_{Ic}}{Y_I \sigma_{eq}(t)} \right)^2 \quad (3.19)$$

Werden diese Überlegungen auf beliebige Fehlerzahlen übertragen, so ergibt sich die Ausfallwahrscheinlichkeit  $P_f(t_0)$  im Intervall  $[0; t_0]$  gemäß Gl. (3.20).

$$P_f(t_0) = 1 - \exp \left( - \frac{1}{V_0} \int_V \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \left( \frac{\max_{t \in [0; t_0]} \{ \sigma_{eq}(t) \}}{\sigma_{0V}} \right)^m d\Omega dV \right) \quad (3.20)$$

Liegt eine zeitliche Veränderung der Fehlerpopulation durch unterkritisches Risswachstum vor, hängt die kritische Fehlergröße  $a_c(t)$  neben der Beanspruchung zum Zeitpunkt  $t$  auch von der Lastgeschichte ab, die bis zu diesem Zeitpunkt  $t$  am Riss gewirkt hat. Verdeutlicht wird dies durch Bild 3.1 (b), wo der zeitabhängige Verlauf der kritischen Fehlergröße und die für das Bauteilversagen relevante Fehlergröße  $a_{c,min}$  zum Zeitpunkt  $t_f$  dargestellt sind. Zu  $a_{c,min}$  existiert eine Anfangsfehlergröße  $a_{c,0}$ , die von der Lastgeschichte im Zeitraum  $t \in [0; t_f]$  bestimmt ist.

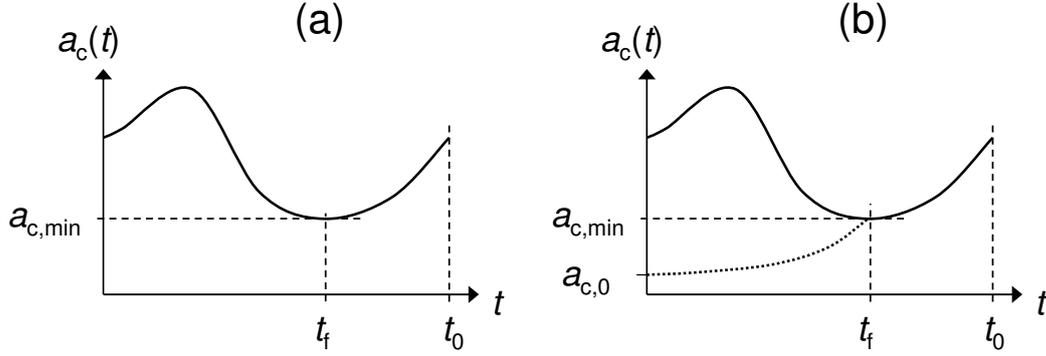


Abbildung 3.1: Zeitabhängiger Verlauf der kritischen Fehlergröße  $a_c(t)$  im Zeitraum  $t \in [0, t_0]$  ohne (a) und mit (b) unterkritischem Risswachstum;  $t_f$  ist der Zeitpunkt des Versagens.

Die Beziehung zwischen einer anfänglichen Fehlergröße  $a_0$  und der Fehlergröße  $a(t)$  kann für beliebiges  $t$  aus dem Risswachstumsgesetz Gl. (3.21) abgeleitet werden.

$$\frac{da}{dt} = A_u K_I^{n_u} = A_u^* \left( \frac{K_I}{K_{Ic}} \right)^{n_u} \quad (3.21)$$

Unter der Voraussetzung, dass die Geometriefunktion  $Y_I$  als unabhängig von der Fehlergröße  $a$  angenommen werden kann, kann die Differentialgleichung Gl. (3.21) (für  $n_u \neq 2$ ) durch Trennung der Variablen integriert werden:

$$\int_{a_0}^{a(t)} a^{-\frac{n_u}{2}} da = A_u \cdot Y_I^{n_u} \cdot \int_0^t \sigma_{eq}^{n_u}(\tau) d\tau \quad (3.22)$$

$$a(t) = \left[ a_0^{\frac{2-n_u}{2}} + \frac{(2-n_u)A_u Y_I^{n_u}}{2} \cdot \int_0^t \sigma_{eq}^{n_u}(\tau) d\tau \right]^{\frac{2}{2-n_u}} \quad (3.23)$$

Wird nun  $a(t)$  durch die kritische Fehlergröße  $a_c(t)$  nach Gl. (3.19) ersetzt, so ist  $a_0$  die kritische Anfangsgröße  $a_{c,0}$ . Diese berechnet sich gemäß Gl. (3.24).

$$a_{c,0}(t) = \left[ \left( \frac{Y_I \sigma_{eq}(t)}{K_{Ic}} \right)^{n_u-2} + \frac{(n_u-2)A_u Y_I^{n_u}}{2} \int_0^t \sigma_{eq}^{n_u}(\tau) d\tau \right]^{\frac{2}{2-n_u}} \quad (3.24)$$

Der probabilistische Versagensansatz kann nun auf Basis der kritischen Anfangsfehlergröße formuliert werden. Die Ausfallwahrscheinlichkeit für ein Bauteil mit exakt einem Fehler ergibt sich analog zu Gl. (3.18):

$$Q_1(t_0) = \left( \frac{a_0}{\min_{t \in [0; t_0]} a_{c,0}(t)} \right)^{\frac{m}{2}} \quad (3.25)$$

Die Ausfallwahrscheinlichkeit für eine beliebige Fehlerzahl in Abhängigkeit der zeitabhängigen Äquivalentsspannung  $\sigma_{eq}(t)$  ist in Gl. (3.26) dargestellt.

$$P_f(t_0) = 1 - \exp \left[ -\frac{1}{V_0} \int_V \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \left( \max_{t \in [0; t_0]} \left\{ \left( \frac{\sigma_{eq}(t)}{\sigma_{0V}} \right)^{n_u-2} + \frac{\sigma_{0V}^2}{B} \int_0^t \left( \frac{\sigma_{eq}(\tau)}{\sigma_{0V}} \right)^{n_u} d\tau \right\} \right)^{\frac{m}{n_u-2}} d\Omega dV \right] \quad (3.26)$$

Der Integrand ist nun im Vergleich zu Gl. (3.20) um einen Term erweitert, der den Anteil der unterkritischen Ermüdung in Form des Integrals über die Lastgeschichte  $\sigma_{eq}(\tau)$  berücksichtigt. Der Parameter  $B_u$  beruht auf dem Risswachstumsparameter  $A_u$  nach Gl. (3.27)

$$B_u = \frac{2 K_{Ic}^{2-n_u}}{A_u Y_I^2(n_u - 2)} = \frac{2 K_{Ic}^2}{A_u^* Y_I^2(n_u - 2)} \quad (3.27)$$

Mit  $m$  und  $\sigma_{0V}$  für die Inertfestigkeit sowie  $n_u$  und  $B_u$  für unterkritisches Risswachstum werden nun 4 materialspezifische Parameter zur Berechnung von  $P_f$  benötigt.

Wird die Lastgeschichte  $Z$ -mal wiederholt, so kann die Ausfallwahrscheinlichkeit als Weibull-Verteilung von  $Z$  mit dem Weibull-Modul  $m^* = \frac{m}{n_u-2}$  geschrieben werden [36]:

$$P_f(N) = 1 - \exp[-D \cdot Z^{m^*}] \quad (3.28)$$

$$D = \frac{1}{4\pi V_0} \int_V \int_{\Omega} \left[ \frac{\sigma_{0V}^2}{B} \int_0^{t_0} \left( \frac{\sigma_{eq}(\tau)}{\sigma_{0V}} \right)^{n_u} d\tau \right]^{m^*} d\Omega dV \quad (3.29)$$

Hierbei ist zu beachten, dass es sich um eine zyklische Wiederholung der Lastgeschichte handelt, jedoch aufgrund des unterkritischen Risswachstums keine 'echten' zyklischen Ermüdungseffekte berücksichtigt werden.

### Spannungsgradienten

Bei den bisher gezeigten Formulierungen für  $P_f$  wurde vorausgesetzt, dass die Spannungen über der Dimension der betrachteten natürlichen Fehler als konstant angesehen werden können. In zahlreichen Fällen, wie z.B. Thermoschock [39] oder bei Kontaktproblemen [40] ist diese Annahme aufgrund der auftretenden starken Spannungsgradienten jedoch nicht mehr gerechtfertigt. In diesem Fall kann die kritische Fehlergröße nicht mehr durch die Äquivalentspannung ausgedrückt werden und muss daher für jeden Ort und jede Orientierung direkt ermittelt werden. Ersetzt man in der allgemeinen Formulierung für Oberflächenfehler in Gl. (3.7) die Parameter  $a_0$ ,  $M_0$  und  $r$  gemäß Gl. (3.11), so muss folgendes Integral gelöst werden:

$$P_f = 1 - \exp \left( -\frac{1}{A_0} \left( \frac{K_{Ic}}{Y_I \sigma_{0A}} \right)^m \int_A \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi} (a_c)^{-\frac{m}{2}} d\varphi dA \right) . \quad (3.30)$$

Die Bestimmung der kritischen Rissgröße erfolgt implizit durch die Ermittlung des Mode-I Spannungsintensitätsfaktors  $K_I(a)$  in Abhängigkeit der Risslänge  $a$ . Ein Riss der Größe  $a$  wird dann als kritisch betrachtet, wenn  $K_I(a) \geq K_{Ic}$ .  $K_I(a)$  wird nach Gl. (3.31) mit der Methode der Gewichtsfunktionen bestimmt.

$$K_I(a) = \int_0^a \left( h_I^{(1)}(x, a) \cdot \sigma_n(x) + h_I^{(2)}(x, a) \cdot \tau(x) \right) dx \quad (3.31)$$

Dabei sind  $\sigma_n(x)$  und  $\tau(x)$  die Normal- bzw. Schubspannungsanteile am Riss, die aufgrund der Inhomogenität des äußeren Spannungsfeldes mit  $x$  variieren. Die Gewichtsfunktionen  $h_I^{(i)}$  können durch die Potenzreihenentwicklung in Gl. (3.32) ermittelt werden ([41], S.102).

$$h_I^{(i)}(x, a) = \sqrt{\frac{2}{\pi a}} \sum_{k=0}^{\infty} D_{I,k}^{(i)} \cdot \left( 1 - \frac{x}{a} \right)^{k-\frac{1}{2}} \quad (3.32)$$

Im Falle eines Oberflächenfehlers, der durch einen Kantenriss im unendlichen Halbraum abgebildet wird, können die Gewichte durch 7 Koeffizienten hinreichend genau angenähert werden [42]:

$$\begin{aligned} D_0 &= 1.0 & D_1 &= 0.55852 & D_2 &= 0.03185 & D_3 &= 0.463397 \\ D_4 &= 0.22721 & D_5 &= -0.82853 & D_6 &= 0.351383 \end{aligned}$$

Im Falle von zeitabhängiger Belastung bestimmt die kleinste kritische Fehlergröße im Intervall  $t \in [0, t_0]$  das Versagen. In diesem Fall wird das Integral für den

Minimalwert  $a_c(t)$  ausgewertet. Die Berücksichtigung von unterkritischem Risswachstum ist im Rahmen der in diesem Kapitel gezeigten Herangehensweise nicht möglich, da bei der Integration des Risswachstumsgesetzes davon ausgegangen wird, dass die Rissgröße  $a$  durch einen einfachen Zusammenhang mit  $\sigma_{\text{eq}}$  ersetzt werden kann. Somit existiert keine analytische Beschreibung des Rissfortschritts in Abhängigkeit der Zeit (Gl. (3.24)) für beliebige Spannungsfelder über dem Riss.

## 3.2 Numerische Werkzeuge

Die Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeit beruht auf der Lösung eines Integrals über das Bauteilvolumen bzw. die Oberfläche und die Fehlerorientierung. Für komplexe Spannungszustände müssen numerische Integrationsverfahren angewendet werden. Das Programm STAU stellt als Post-Prozessor einer Finite-Elemente Spannungsanalyse ein universelles Werkzeug zur Zuverlässigkeitsanalyse komplex beanspruchter Bauteile dar. Daneben gibt es jedoch auch nicht FE-basierte Methoden für spezielle Anwendungsfälle. Ein Beispiel hierfür ist ein Auslegungstool für Kontaktprobleme, das in diesem Abschnitt ebenfalls vorgestellt wird.

### 3.2.1 STAU

Die Struktur der Zuverlässigkeitsanalyse mit STAU ist in Bild 3.2 schematisch dargestellt. Um die Beanspruchungen im Bauteil zu ermitteln, wird eine FE-Analyse durchgeführt. Die Spannungen und Temperaturen sowie die Informationen zum FE-Netz werden von einer STAU-Schnittstelle aus der Ergebnis-Datei des FE-Codes ausgelesen und in ein neutrales Format geschrieben. In STAU existieren Schnittstellen für die kommerziellen Codes ABAQUS und ANSYS.

Die natürlichen Fehler werden in STAU durch zwei vereinfachte bruchmechanische Modelle abgebildet. Fehler im Bauteilvolumen werden durch kreisrunde ebene Risse (penny-shaped cracks) modelliert, Oberflächenfehler werden als ebene Kantenrisse (senkrecht zur Bauteiloberfläche) im unendlichen Halbraum dargestellt. Die Geometriefunktionen, die für die Berechnung der Äquivalentspannung benötigt werden, sind in Tab. 3.1 dargestellt.

Für die numerische Integration ist die Vorgabe eines Mixed-Mode-Kriteriums zur Berechnung der Äquivalentspannung notwendig. Hierfür sind mehrere Kriterien in STAU implementiert [43], wobei die Wahl eines geeigneten Kriteriums anhand des verwendeten Werkstoffs erfolgt [37, 44].

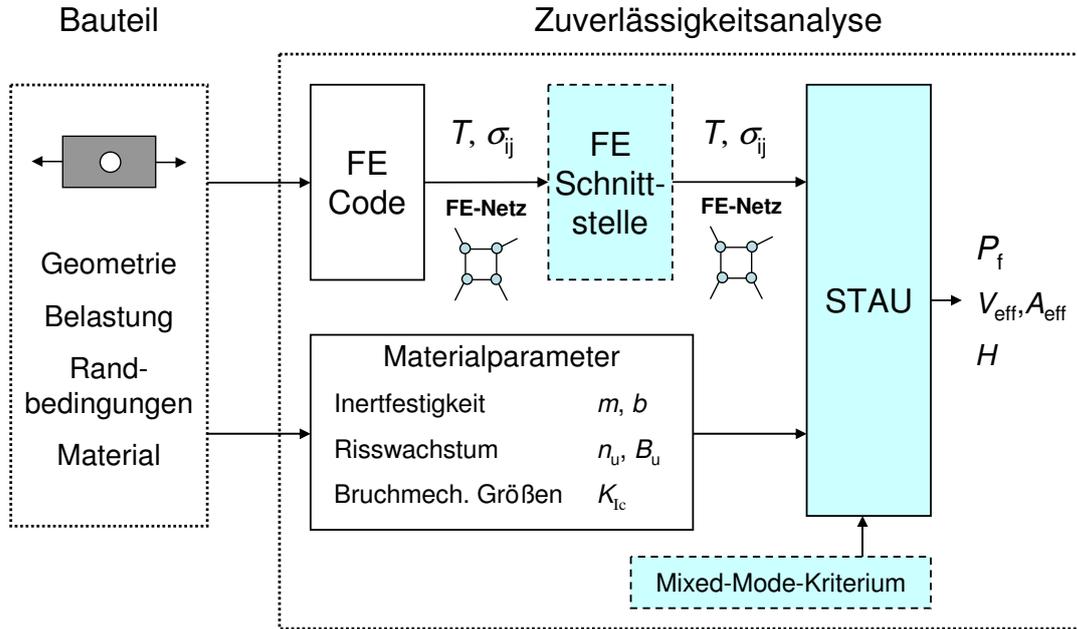


Abbildung 3.2: Funktionsschema STAU.

Die materialspezifischen Parameter zur Inertfestigkeit ( $m, b$ ) und für unterkrit. Risswachstum ( $n_u, B_u$ ) werden dem Programm vorgegeben. Die größenunabhängigen Parameter  $\sigma_{0V}/\sigma_{0A}$  werden aus dem Weibull-Parameter  $b$  einer experimentell ermittelten Festigkeitsverteilung (3.17) ermittelt. Hierzu berechnet STAU das Spannungsintegral  $H$  der verwendeten Probengeometrie, wofür ein geeignetes Mixed-Mode-Kriterium vorgegeben werden muss.

STAU bietet die Möglichkeit, die Parameter  $\sigma_{0V}/\sigma_{0A}, n, B$  temperaturabhängig zu berücksichtigen. Die Parameter werden dabei durch entsprechende Routinen im Zuge der Integration interpoliert. Eine Übersicht zu den hier verwendeten Ansätzen findet sich in [36]. Eine Temperaturabhängigkeit des Weibull-Moduls ist dabei nicht berücksichtigt.

Als Ergebnis werden (ggf. zeitabhängig) die Ausfallwahrscheinlichkeit, das effektive Volumen bzw. das normierte Spannungsintegral  $H$  ausgegeben. Als weiteres Ergebnis stellt STAU das lokale Bruchrisiko zur Verfügung. Diese Größe charakterisiert die Verteilungsdichte der Ausfallwahrscheinlichkeit im Bauteilvolumen.

Als Ergänzung zu der bisher vorgestellten Funktionalität von STAU sollen an dieser Stelle noch zwei Erweiterungen erwähnt werden. Die erste Erweiterung ist ein Modul zur Berechnung der Restausfallwahrscheinlichkeit nach Proof-Tests, das sich für die Auslegung derartiger Tests eignet [45]. Des Weiteren können Unsicherheiten der STAU-Vorhersagen mit Bootstrap-Methoden bewertet werden.

	(a) Volumenfehler	(b) Oberflächenfehler
$Y_I$	$\frac{2}{\sqrt{\pi}}$	$1.1215\sqrt{\pi}$
$Y_{II}$	$\frac{4 \cos(\gamma)}{\sqrt{\pi(1-\nu)}}$	$1.1215\sqrt{\pi}$
$Y_{III}$	$\frac{4(1-\nu) \sin(\gamma)}{\sqrt{\pi(2-\nu)}}$	0

Tabelle 3.1: Geometriefunktionen der bruchmechanischen Modelle für natürliche Fehler in STAU: (a) ebener kreisrunder Riss (penny-shaped) ([1], S.177); (b) senkrechter Kantenriss ([43]).

Hierzu wurden systematische Untersuchungen zum Einfluss der Unsicherheit von materialspezifischen Eingangsgrößen in STAU durchgeführt [46].

### Numerische Integration

Die numerische Lösung der Integrale über Volumen und Orientierung erfolgt mit dem Gauß-Algorithmus. Hierbei wird das Integral einer Funktion  $g(u)$  durch die gewichtete Summe in Gl. (3.33) approximiert.

$$\int_{-1}^1 g(u) du \simeq \sum_{i=1}^{N_G} w_i g(u_i) \quad (3.33)$$

Die Funktion  $g(u)$  wird dabei an  $N_G$  Stützstellen mit den Gewichten  $w_i$  ausgewertet.

Die Zahl der Stützstellen, die für eine möglichst genaue Berechnung der Integrale mittels der Gauß-Integration erforderlich sind, überschreitet die Anzahl der Stützstellen, an denen in der FE-Analyse Spannungswerte ermittelt werden. Daher müssen die Spannungswerte innerhalb des Elements interpoliert werden, um eine Verfeinerung des FE-Netzes zu vermeiden. Die Werte des Spannungstensors sind aus der FE-Analyse an den Integrationspunkten bekannt und werden (innerhalb des FE-Programms) an die Randknoten des Elements extrapoliert. In STAU werden die Formfunktionen der Finiten Elemente verwendet, um die Spannungstensoren an einem beliebigen Ort  $(u, v, w)$  im Einheitselement anhand der Randknotenwerte zu interpolieren [38].

Die Interpolation der Spannungswerte mit Hilfe der Formfunktionen erfordert eine Transformation der realen Knotenkoordinaten auf das Einheitselement. Die Transformation des Integrals einer beliebigen Funktion  $f(x)$  über dem Intervall

$[a, b]$  auf die Integrationsgrenzen  $[-1, 1]$  erfolgt mit der Transformation in Gl. (3.34):

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}u, \quad -1 \leq u \leq +1 \quad (3.34)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{u=-1}^{+1} f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}u\right) \frac{b-a}{2}du = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{+1} g(u)du$$

Mit dieser Variablentransformation kann das Integral zur Berechnung von  $P_f$  gemäß dem Gauß-Verfahren in Gl. (3.33) als Summe geschrieben werden:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{V_0 4\pi} \int_V \int_{\Omega} \left( \frac{\sigma_{\text{eq}}(x, y, z, \varphi, \psi)}{\sigma_{0V}} \right)^m d\Omega dV \\ &= \frac{1}{V_0 4\pi} \sum_{i=1}^{N_e} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left( \frac{\sigma_{\text{eq},i}(u, v, w, \varphi, \psi)}{\sigma_{0V}} \right)^m J_{\Omega} J_V d\varphi d\psi dw dv du \\ &\simeq \frac{1}{V_0 4\pi} \sum_{i=1}^{N_e} \sum_{k=1}^{N_k} W_{u,k} \sum_{l=1}^{N_l} W_{v,l} \sum_{m=1}^{N_m} W_{w,m} \sum_{o=1}^{N_o} W_{\varphi,o} \sum_{p=1}^{N_p} W_{\psi,p} \left( \frac{\tilde{\sigma}_{\text{eq},i}(u_k, v_l, w_m, \varphi_o, \psi_p)}{\sigma_{0V}} \right)^m \\ & \quad \cdot J_{\Omega}(\varphi_o, \psi_p) J_V(u_k, v_l, w_m) \end{aligned} \quad (3.35)$$

Der Integralwert des Gesamtvolumens berechnet sich aus den Beiträgen der einzelnen Finiten Elemente ( $N_e$ ) des FE-Modells. Die Integration erfolgt über die Äquivalentsspannung  $\sigma_{\text{eq},i}(u_k, v_l, w_m, \varphi_o, \psi_p)$ , die an den Raum- und Orientierungsstützstellen eines Elements  $i$  ermittelt wird. Die Jacobi-Determinanten  $J_V$  und  $J_{\Omega}$  sind die für die Integration benötigten Funktionaldeterminanten, die sich aus der Variablentransformation in Gl. (3.34) ergeben. Die Gewichte  $W_{u/v/w/\varphi/\psi}$  hängen von der Anzahl-Stützstellen  $N_{k/l/m/o/p}$  ab.

### Spannungsgradienten

Treten starke Spannungsgradienten über dem Rissverlauf auf, kann die Ausfallwahrscheinlichkeit nicht mehr anhand der Äquivalentsspannung berechnet werden. In diesem Fall muss für jeden Ort bzw. jede Orientierung die kritische Rissgröße direkt berechnet werden (Vgl. Gl. (3.30)). Hierfür wurde ein Modul für Oberflächenfehler in STAU implementiert [47].

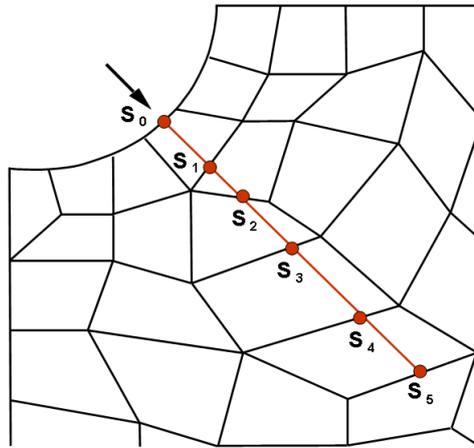


Abbildung 3.3: Schematische Darstellung eines Rissverlaufs in der Integration mit Gradienten-STAU (aus [47]).

Um die kritische Risslänge berechnen zu können, muss der  $K_I$ -Verlauf über dem Riss ermittelt werden. Dies geschieht mit der Methode der Gewichtsfunktionen in Gl. (3.31). Um die hierfür benötigten Stützstellen für die Spannungswerte zu erhalten, geht man von einem Oberflächenriss aus, dessen Rissebene senkrecht zur Oberfläche im Bauteil verläuft. Hierzu wird bei der numerischen Integration für jede Stützstelle an der Oberfläche ein senkrechter Pfad ermittelt, an dessen Schnittpunkten mit den Flächen der darunterliegenden Elemente die Spannungstensoren interpoliert werden. Dieser 'gedachte' Rissverlauf ist in Abb. 3.3 exemplarisch dargestellt. Die Schnittpunkte  $s_i$  werden als Stützstellen für die  $K_I$ -Berechnung verwendet.

Die Berechnung des  $K_I$ -Verlaufs wird abgebrochen, wenn an einer Stützstelle das Abbruchkriterium  $K_I \geq K_{Ic}$  erfüllt wird, wobei  $K_{Ic}$  vorgegeben wird. Damit ist die kritische Fehlergröße  $a_c$  für die entsprechende Gauß-Stützstelle der Oberflächenintegration bekannt.

### Grenzen der Versagensbeschreibung in STAU

In diesem Abschnitt werden einige wichtige Einschränkungen der in diesem Kapitel vorgestellten Versagensbeschreibung im Bezug auf STAU genannt. Die wichtigsten Aspekte hierbei sind:

- R-Kurvenverhalten wird in STAU nicht berücksichtigt. Das lokale Versagenskriterium geht stets von einem konstanten Wert  $K_{Ic}$  aus.

- Es werden nur gerade Rissverläufe berücksichtigt. Ein Abknicken der Risse, was z.B. bei Kontaktbeanspruchung typischerweise auftritt, kann nicht berücksichtigt werden.
- Ermüdung kann im Zusammenhang mit Spannungsgradienten nicht betrachtet werden, da die Integration des Risswachstumsgesetzes von einer konstanten Spannungsverteilung über dem Riss ausgeht.

Diese Anmerkungen gelten grundsätzlich auch für die spätere Erweiterung von STAU im Bezug auf zyklisches Risswachstum.

### 3.2.2 Spezielle Lösungen für Kontaktprobleme

Während die für STAU benötigte Spannungsverteilung im Bauteil mittels der FE-Methode bestimmt wird, können auch analytische Ansätze zur Beschreibung des Spannungsfeldes für bestimmte Lastfälle in Betracht gezogen werden. Ein Beispiel hierfür sind Hertz'sche Kontaktprobleme, deren Spannungsverteilung analytisch beschrieben werden kann [48]. Eine probabilistische Analyse auf Basis einer analytisch ermittelten Spannungsverteilung findet sich z.B. in [49] am Beispiel von  $\text{Si}_3\text{N}_4$ -Kugeln unter statischem Kontakt. Ein Kontaktermüdungsproblem wird in [50] am Beispiel der Lebensdauervorhersage eines Wälzversuchs mit  $\text{Si}_3\text{N}_4$ -Kugeln betrachtet. In beiden Beispielen werden jedoch die Spannungsgradienten über den natürlichen Fehlern vernachlässigt.

Für komplexe dreidimensionale Kontaktprobleme existiert ein schnelles Design-Tool (DT), welches die Ausfallwahrscheinlichkeit unter Berücksichtigung der starken Spannungsgradienten ermittelt [42]. Die Grundlage hierfür ist die numerische Berechnung der Spannungsverteilung auf Basis eines analytischen Ansatzes zur Ermittlung der Kontaktgeometrie. Damit kann eine hinreichende Diskretisierung ohne aufwendige FE-Rechnungen erzielt werden. Das Spannungsfeld kann durch Gl. (3.36) beschrieben werden.

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ij}(x, y, z) &= \int_A p(x', y') s_{ij}(x - x', y - y', z) dx' dy' \\
 &= \int_A \tau_x(x', y') t_{xij}(x - x', y - y', z) dx' dy' \\
 &= \int_A \tau_y(x', y') s_{yij}(x - x', y - y', z) dx' dy'
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

Hierbei ist  $p(x', y')$  die durch die Normallast verursachte Verteilung der Flächenpressung. Diese Verteilung und die daraus resultierende Form des Kontaktbereichs

ist durch die Krümmungen der beiden Körper sowie die elastischen Eigenschaften der beteiligten Werkstoffe bestimmt.  $\tau_x$  bzw.  $\tau_y$  sind durch die Querkräfte aufgebrauchte Schubspannungsanteile in  $x$  bzw.  $y$ -Richtung, die z.B. aus Reibung resultieren. Die Integration erfolgt mit Hilfe der Green'schen Funktionen  $s_{ij}$  bzw.  $t_{xij}/t_{yij}$  [48].

Die Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeit beruht auf der für Spannungsgradienten modifizierten Weibull-Theorie (siehe Kap. 3.1) für Oberflächenfehler. Die numerische Umsetzung erfolgt analog zur Vorgehensweise in STAU durch die Berechnung der kritischen Risslänge anhand eines normal zur Bauteiloberfläche verlaufenden Risspfades. Im Hinblick auf Ermüdung ist ein Ansatz implementiert, der auf dem in Kap. 2.3.5 vorgestellten Risswachstumsmodell für Fehler mit  $K_I < 0$  beruht [51]. Die Degradation der Brückenspannung im Fall  $K_I > 0$  wird hierbei nicht berücksichtigt.

## 4 Versagensbewertung bei zyklischer Ermüdung

In diesem Kapitel wird die Versagensbeschreibung in Hinblick auf die Berücksichtigung zyklischer Ermüdung und deren Implementierung in STAU vorgestellt. Der Schwerpunkt liegt dabei auf der Beschreibung und Erfassung möglichst komplexer zyklischer Lastgeschichten sowie der programmtechnischen Umsetzung. Abschließend werden wichtige Aspekte der Versagensbeschreibung anhand eines Verifikationsbeispiels verdeutlicht.

### 4.1 Ausfallwahrscheinlichkeit

In einem Bauteil unter zyklisch wechselnder Belastung ergibt sich in jedem Punkt eine von der Zeit abhängige kritische Fehlergröße  $a_c(t)$ . In einem Zyklus, der als Abfolge von zwei Lastwechseln durch eine Minimal- und Maximallast eindeutig definiert ist, bestimmt die Maximallast die kritische Fehlergröße. Liegt ein zyklisches Lastkollektiv vor, welches eine Abfolge von Einzelzyklen ist, so wird das Versagen durch das Minimum  $a_{c,min}$  aller kritischen Fehlergrößen der Einzelzyklen zum Zeitpunkt  $t_f$  bestimmt. Dies ist in Abb. 4.1 veranschaulicht.

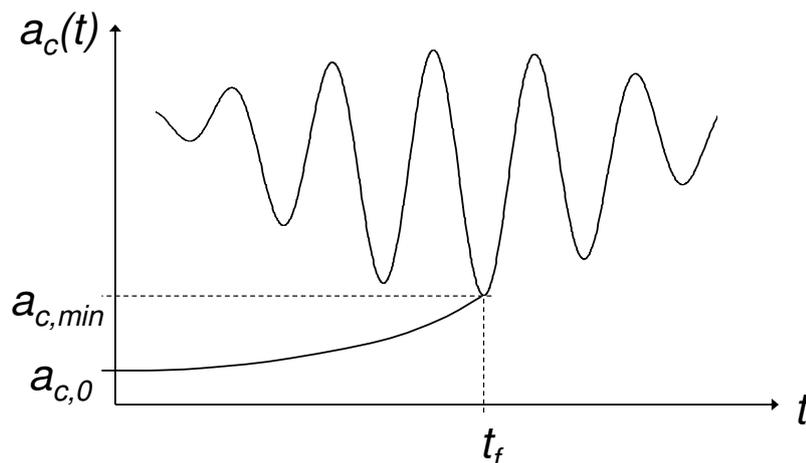


Abbildung 4.1: Zeitlicher Verlauf der kritischen Fehlergröße  $a_c$  bei zyklischer Last.

Um die Versagenswahrscheinlichkeit zu ermitteln, wird die Anfangsgröße  $a_{c,0}$  des zum Zeitpunkt  $t_f$  kritischen Risses benötigt. Diese Anfangsgröße ist durch die

zyklische Lastgeschichte bestimmt, die an dem betreffenden Riss bis zu diesem Zeitpunkt gewirkt hat (siehe Abb. 4.1). In Analogie zu den Überlegungen zum unterkritischem Risswachstum in Kap. 3 kann der Anteil des Rissfortschritts bei gegebener Lastgeschichte durch Integration des Risswachstumsgesetzes abgeleitet werden.

In Hinblick auf eine möglichst allgemeine Risswachstumsbeschreibung bietet sich das in Kap. 2 vorgestellte Potenzgesetz in Gl. (4.1) an, mit dem die Abhängigkeit vom  $R$ -Verhältnis beschrieben werden kann. Diese Beziehung bietet trotz der Einschränkung, dass der Exponent  $n$  nicht mit dem  $R$ -Verhältnis variiert ( $n \neq f(R)$ ) eine hinreichende Flexibilität zur Beschreibung komplexer zyklischer Lastkollektive. Zudem kann Gl. (4.1) durch Trennung der Variablen elementar integriert werden, was bei komplexeren Formulierungen (wie Gl. (2.12)) nicht gegeben ist.

$$\frac{da}{dN} = \frac{C}{(1-R)^{n-p}} \cdot \Delta K_I^n = \frac{C^*}{(1-R)^{n-p}} \cdot \left( \frac{\Delta K_I}{K_{Ic}} \right)^n \quad (4.1)$$

Für die weiteren Überlegungen wird vorausgesetzt, dass die Spannungen über einem Riss als konstant betrachtet werden können. Damit kann  $\Delta K_I$  für den Ort  $\vec{x}$  und die Orientierung  $\Omega$  durch die Differenz der Äquivalentsspannung  $\Delta\sigma_{eq}$  bzw. nach der Definition des  $R$ -Verhältnisses  $R = K_{I,\min}/K_{I,\max} = \sigma_{eq,\min}/\sigma_{eq,\max}$  durch die maximale Äquivalentsspannung  $\sigma_{eq,\max}$  ersetzt werden:

$$\begin{aligned} \Delta K_I &= Y_I a^{\frac{1}{2}} \Delta\sigma_{eq}(\vec{x}, \Omega, N) \\ &= Y_I a^{\frac{1}{2}} \sigma_{eq,\max}(\vec{x}, \Omega, N) (1 - R(\vec{x}, \Omega, N)). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Für  $\sigma_{eq,\max}$  bzw.  $R$  wird zur Vereinfachung in der weiteren Darstellung nur die Abhängigkeit vom jeweiligen Zyklus  $N$  gekennzeichnet. Das Risswachstumsgesetz kann nach Gl. (4.2) schließlich in folgender Form geschrieben werden:

$$\frac{da}{dN} = C \cdot Y_I^n \cdot (\sigma_{eq,\max}(N))^n \cdot (1 - R(N))^p \cdot a^{\frac{n}{2}}. \quad (4.3)$$

### Zyklisches Lastkollektiv

Im Folgenden soll eine Versagensbeschreibung für ein zyklisches Lastkollektiv, welches als eine Abfolge von  $k$ -Einzelzyklen definiert wird, hergeleitet werden. Wie in Abb. 4.2 gezeigt, ist die Belastung in jedem Einzelzyklus  $N_i$  durch die zyklischen Belastungsgrößen  $\Delta\sigma_{eq}^{(i)}$  und  $R^{(i)}$  gegeben. Um eine Beziehung zwischen

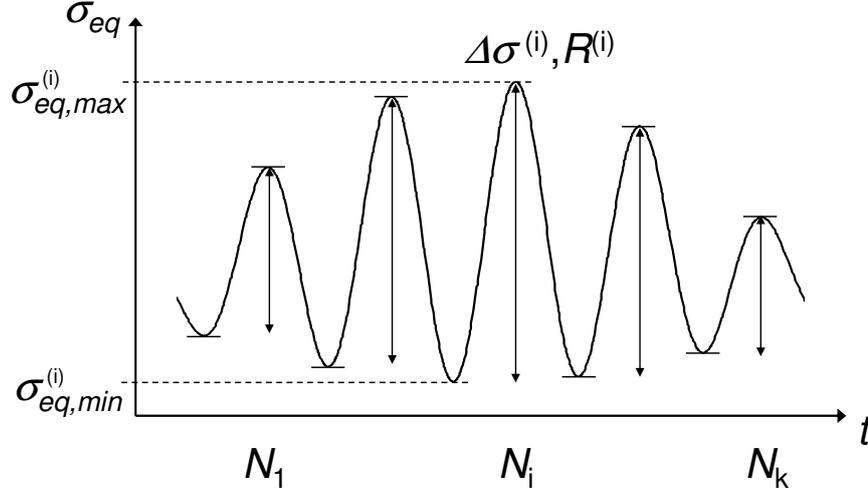


Abbildung 4.2: Zyklisches Lastkollektiv in Abhängigkeit der Äquivalentsspannung  $\sigma_{eq}$ .

einer anfänglichen Rissgröße  $a_0$  und der Rissgröße  $a_k$  nach  $k$ -Zyklen zu erhalten, wird die Differentialgleichung Gl. (4.3) nach Trennung der Variablen integriert:

$$\int_{a_0}^{a_k} a^{-\frac{n}{2}} da = C Y_I^n \int_0^{N_k} (\sigma_{eq,max}(N))^n \cdot (1 - R(N))^p dN. \quad (4.4)$$

Nach Lösen des Integrals über die Fehlergröße ergibt sich  $a_0$  in Abhängigkeit von  $a_k$ :

$$a_0 = \left[ a_k^{\frac{2-n}{2}} + \frac{(n-2) C Y_I^n}{2} \int_0^{N_k} (\sigma_{eq,max}(N))^n \cdot (1 - R(N))^p dN \right]^{\frac{2}{2-n}}. \quad (4.5)$$

Betrachtet man den Fall, dass der Riss nach  $N_k$ -Zyklen kritisch wird, so kann  $a_k$  durch die kritische Rissgröße  $a_c$  bzw. durch  $K_{Ic}$  ersetzt werden. Für die kritische Anfangsgröße kann schließlich

$$\begin{aligned} a_{c,0} &= \left[ a_c^{\frac{2-n}{2}} + \frac{(n-2) C Y_I^n}{2} \int_0^{N_k} (\sigma_{eq,max}(N))^n \cdot (1 - R(N))^p dN \right]^{\frac{2}{2-n}} \\ &= \left[ \left( \frac{K_{Ic}}{\sigma_{eq,max}(N_k) Y_I} \right)^{(2-n)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(n-2) C Y_I^n}{2} \int_0^{N_k} (\sigma_{eq,max}(N))^n \cdot (1 - R(N))^p dN \right]^{\frac{2}{2-n}} \end{aligned} \quad (4.6)$$

geschrieben werden. Mit diesem Zusammenhang ist die Wahrscheinlichkeit  $Q_1(N_k)$ , dass ein Bauteil mit exakt einem Fehler im Intervall  $[0; N_k]$  versagt, durch die kleinste kritische Anfangsfehlergröße  $a_{c,0}(N)$  bestimmt (Gl. (4.7)).

$$Q_1 = \left( \frac{a_0}{\min_{N \in [0; N_k]} a_{c,0}(N)} \right)^{\frac{m}{2}} \quad (4.7)$$

Die Verallgemeinerung auf beliebige Fehlerzahlen (siehe Kapitel 3) ergibt schließlich die Ausfallwahrscheinlichkeit für das gesamte Bauteil nach  $N_k$  Zyklen:

$$P_f(N_k) = 1 - \exp \left( -\frac{1}{V_0} \int_V \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} I \, d\Omega \, dV \right) \quad \text{mit} \quad (4.8)$$

$$I = \max_{\eta \in [0; N_k]} \left[ \left( \frac{\sigma_{\text{eq,max}}(\eta)}{\sigma_{0V}} \right)^{n-2} + \frac{\sigma_{0V}^2}{B} \int_0^{\eta} \left( \frac{\sigma_{\text{eq,max}}(N)}{\sigma_{0V}} \right)^n \cdot (1-R(N))^p \, dN \right]^{\frac{m}{n-2}} .$$

$$B = \frac{2K_{Ic}^{2-n}}{CY_I^2(n-2)} = \frac{2K_{Ic}^2}{C^* \cdot Y_I^2(n-2)} \quad (4.9)$$

Der erste Term des Integranden  $I$  bildet den 'statischen' Anteil der Ausfallwahrscheinlichkeit, während der zweite Term die zyklische Lastgeschichte berücksichtigt. Die Ausfallwahrscheinlichkeit wird durch das Maximum von  $I$  bestimmt, also für den Einzelzyklus  $\eta$ , bei dem die Summe des statischen Terms und des Ermüdungsterms am größten ist. Im Falle einer statischen Last ( $R = 1$ ) verschwindet der Ermüdungsterm vollständig und  $P_f$  wird für den Maximalwert von  $\sigma_{\text{eq,max}}(\eta)$  ermittelt:

$$P_f(N_k) = 1 - \exp \left( -\frac{1}{V_0} \int_V \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \max_{\eta \in [0; N_k]} \left\{ \left( \frac{\sigma_{\text{eq,max}}(\eta)}{\sigma_{0V}} \right)^m \right\} \, d\Omega \, dV \right) . \quad (4.10)$$

Die Formeln zur Berechnung von  $P_f$  weisen eine starke Analogie zu den Formulierungen bei unterkritischem Risswachstum auf (Gl. (3.26,3.27)). In beiden Fällen enthält der Integrand einen Term, bei dem über die Lastgeschichte der Äquivalentsspannung (bei zyklischer Last unter Einbeziehung des  $R$ -Verhältnis) integriert wird. Der wesentliche Unterschied ist, dass im zyklischen Fall der zeitliche Verlauf von  $\sigma_{\text{eq}}$  nicht berücksichtigt wird, sondern nur die Maximalwerte  $\sigma_{\text{eq,max}}$  der jeweiligen Zyklen. Die durch diese 'punktweise' Berechnung erzielte Vereinfachung basiert letztlich auf der Annahme, dass der zyklische Rissfortschritt unabhängig von der Frequenz und der Form der Lastamplitude ist.

### Periodisch wiederholte Lastkollektive

Das Ziel der Versagensbeschreibung ist, möglichst komplexe Belastungsgeschichten erfassen und effizient verarbeiten zu können. Zu diesem Zweck dient das im vorherigen Abschnitt betrachtete zyklische Lastkollektiv (Abb. 4.2) als 'Basiselement' für komplexere Belastungsgeschichten.

Die periodische Wiederholung eines Lastkollektivs ist im Hinblick auf technologische Anwendungen von Interesse. Eine solche periodische Wiederholung tritt z.B. bei rotierenden Bauteilen auf. Ein anschauliches Beispiel hierfür ist eine Drahtwalze, die bei einer vollständigen Rotation mit dem Draht in Kontakt kommt. Daraus ergibt sich für jeden Punkt eine individuelle zeitliche Lastgeschichte, die sich im quasi-stationären Fall bei jeder Rotation wiederholt. Die Versagenswahrscheinlichkeit kann nun in Abhängigkeit der Anzahl der Rotationen bzw. der periodischen Wiederholung des Umdrehungsvorgangs ausgedrückt werden.

Wird ein Lastkollektiv wie im vorigen Abschnitt beschrieben  $Z$ -mal wiederholt, so berechnet sich die Wahrscheinlichkeit, dass das Bauteil nach  $Z$ -Wiederholungen versagt, nach Gl. (4.11).

$$P_f(Z) = 1 - \exp \left( -\frac{1}{V_0} \int_V \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} I d\Omega dV \right) \quad \text{mit} \quad (4.11)$$

$$I = \max_{\eta \in [0; N_k]} \left[ \left( \frac{\sigma_{\text{eq,max}}(\eta)}{\sigma_{0V}} \right)^{n-2} + \frac{\sigma_{0V}^2}{B} \left( \int_0^{\eta} \left( \frac{\sigma_{\text{eq,max}}(N)}{\sigma_{0V}} \right)^n \cdot (1 - R(N))^p dN \right. \right. \\ \left. \left. + (Z - 1) \cdot \int_0^{N_k} \left( \frac{\sigma_{\text{eq,max}}(N)}{\sigma_{0V}} \right)^n \cdot (1 - R(N))^p dN \right) \right]^{\frac{m}{n-2}}$$

Der Ermüdungsterm im Integrand  $I$  ist im Vergleich zu Gl. (4.8) um einen periodischen Anteil erweitert. Für jeden betrachteten Zyklus  $\eta$  setzt sich der Ermüdungsanteil nun einerseits aus dem Beitrag der bereits erfolgten  $(Z-1)$ -Wiederholungen des Lastkollektivs  $[0; N_k]$  und andererseits aus dem Beitrag der Zyklen 0 bis  $\eta$  bei der letzten Wiederholung  $Z$  des Lastkollektivs zusammen. Die Ausfallwahrscheinlichkeit wird dann für den Zyklus  $\eta$  berechnet, für den  $I$  maximal ist.

Geht man davon aus, dass der statische Term in Gl. (4.11) für große Werte von  $Z$  vernachlässigt werden kann, so ergibt sich die in Gl. (4.12) dargestellte Vereinfachung der Ausfallwahrscheinlichkeit. Hierbei wird lediglich der Ermüdungsanteil

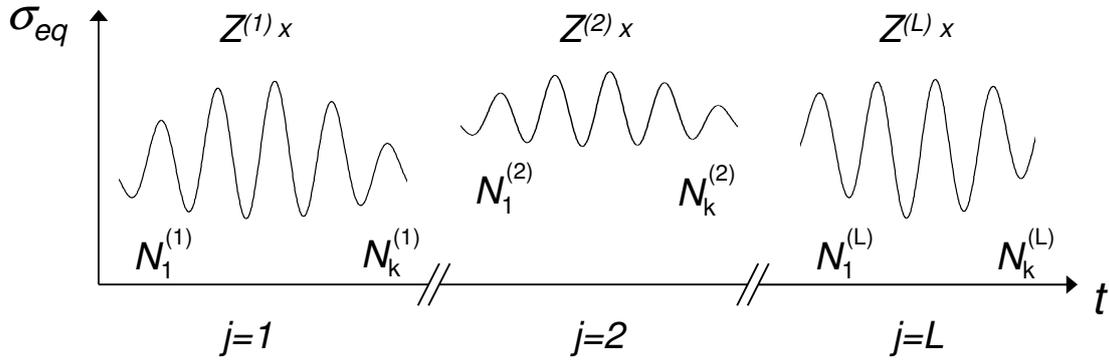


Abbildung 4.3: Schematische Darstellung einer seriellen Lastgeschichte.

der  $Z$  periodisch wiederholten Lastkollektive berücksichtigt. Setzt man  $m^* = \frac{m}{n-2}$ , so kann Gl. (4.12) als Weibull-Verteilung im Bezug auf  $Z$  geschrieben werden:

$$P_f(Z) = 1 - \exp \left[ - \left( \frac{Z}{N_0} \right)^{m^*} \right] \quad \text{mit}$$

$$N_0 = D^{-\frac{1}{m^*}}$$

$$D = \frac{1}{V_0} \int_V \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \left( \frac{\sigma_{0V}^2}{B} \int_0^{N_k} \left( \frac{\sigma_{eq, \max}(N)}{\sigma_{0V}} \right)^n \cdot (1 - R(N))^p dN \right)^{m^*} d\Omega dV \quad (4.12)$$

Dabei ist  $m^*$  der Weibull-Modul und  $N_0$  die charakteristische Lebensdauer (63.2%-Quantil) der Verteilung. Die Struktur von Gl. (4.12) ist analog zu Gl. (3.28).

### Serielle Abfolge periodisch wiederholter Lastkollektive

Mit der im vorigen Abschnitt gezeigten periodischen Wiederholung können quasi-stationäre Belastungszustände in der Zuverlässigkeitsanalyse berücksichtigt werden. Für technische Anwendungen ist es darüber hinaus wichtig, die Auswirkungen von Abweichungen des quasi-stationären Zustands berücksichtigen zu können. Vor diesem Hintergrund ist eine weitere Abstraktion bei der Beschreibung der zyklischen Lastgeschichte notwendig. Wurde im vorigen Abschnitt die Wiederholung eines Lastkollektivs behandelt, soll nun eine Serie von unterschiedlichen, periodisch wiederholten Lastkollektiven betrachtet werden. Eine solche Serie ist in Abb. 4.3 exemplarisch dargestellt.

Ein serielles Lastkollektiv besteht aus  $j = 1..L$  Blöcken. Jeder Block  $j$  beinhaltet ein (im Bezug auf den Ort) individuelles Lastkollektiv aus  $N_k^{(j)}$  Zyklen. Jedes Lastkollektiv eines Blocks wird  $Z^{(j)}$ -mal wiederholt. Geht man davon aus, dass die Anzahl der Wiederholungen  $Z^{(j)}$  groß sind, können die statischen Terme im Integrand  $I$  (wie im Abschnitt zuvor) vernachlässigt werden. Dann ergibt sich folgende Formel für die Ausfallwahrscheinlichkeit<sup>1</sup>:

$$P_f = 1 - \exp \left( -\frac{1}{V_0} \int_V \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} I \, d\Omega \, dV \right) \quad \text{mit}$$

$$I = \left[ \frac{\sigma_{0V}^2}{B} \sum_{j=1}^L Z^{(j)} \int_0^{N_k^{(j)}} \left( \frac{\sigma_{\text{eq,max}}^{(j)}(N)}{\sigma_{0V}} \right)^n (1 - R^{(j)}(N))^p \, dN \right]^{\frac{m}{n-2}} \quad (4.13)$$

In diesem Fall berechnet sich die Ausfallwahrscheinlichkeit aus der Summe der Beiträge der Zyklenintegrale der einzelnen Blöcke.

### Oberflächenfehler

Die bisher hergeleiteten Formulierungen für zyklische Belastungen können direkt auf Oberflächenfehler übertragen werden. Die entsprechenden Formeln befinden sich in Anhang A.

### Einfaches Potenzgesetz

Für die auf Gl. (4.1) beruhende Versagensbeschreibung werden drei materialspezifische Ermüdungsparameter ( $n, p, B$ ) benötigt. Um die Parameter zu bestimmen, sind zyklische Lebensdauerversuche bei mindestens zwei unterschiedlichen  $R$ -Verhältnissen erforderlich (siehe Kap. 1). Für den speziellen Fall, dass diese Versuchsergebnisse nicht vorliegen, kann die Ausfallwahrscheinlichkeit auch mit dem einfachen Potenzgesetz (wie Gl. (2.7)):

$$\frac{da}{dN} = A \cdot \Delta K_I^n = A^* \cdot \left( \frac{\Delta K_I}{K_{Ic}} \right)^n \quad (4.14)$$

---

<sup>1</sup>Die allgemeine Form von Gl. (4.13) befindet sich im Anhang A

ermittelt werden. Hiermit ergibt sich eine modifizierte Formulierung für den Integrand I aus Gl. (4.11):

$$I = \max_{\eta \in [0; N_k]} \left[ \left( \frac{\sigma_{\text{eq,max}}(\eta)}{\sigma_{0V}} \right)^{n-2} + \frac{\sigma_{0V}^2}{B} \left( \int_0^\eta \left( \frac{\sigma_{\text{eq,max}}(N)}{\sigma_{0V}} \right)^n \cdot (1 - R(N))^n dN + (Z - 1) \cdot \int_0^{N_k} \left( \frac{\sigma_{\text{eq,max}}(N)}{\sigma_{0V}} \right)^n \cdot (1 - R(N))^n dN \right) \right]^{\frac{m}{n-2}} \quad (4.15)$$

$$B = \frac{2 K_{Ic}^{2-n}}{A Y_I^2 (n-2)} = \frac{2 K_{Ic}^2}{A^* Y_I^2 (n-2)} \quad (4.16)$$

Wenn der Einfluss des  $R$ -Verhältnisses (und damit  $\Delta K$ ) nicht generell vernachlässigt werden kann, muss der  $R$ -Wert der Bauteilbelastung mit dem der Versuche übereinstimmen, die zur Parameterbestimmung durchgeführt wurden.

## 4.2 Programmtechnische Umsetzung

Die numerischen Integrationsroutinen in STAU beinhalten bereits die Behandlung zeitabhängiger Lastgeschichten im Zusammenhang mit unterkritischer Rissausbreitung. Dabei wird das Zeitintegral (Gl. (3.26)), das den Anteil der Rissausbreitung im Integranden für jede Stützstelle enthält, durch eine Schleife über alle Zeitinkremente der Lastgeschichte numerisch gelöst. Aufgrund der strukturellen Ähnlichkeit der Formulierungen bei unterkritischem und zyklischen Risswachstum kann die Implementierung daher eng in Anlehnung an die bereits vorhandenen Integrationsroutinen in STAU erfolgen.

Im Falle zyklischer Ermüdung sind einige wesentliche Modifikationen der vorhandenen Routinen nötig. Der wesentliche Aspekt ist hierbei, dass zyklische Ermüdung nicht von der zeitlichen Lastgeschichte (wie im unterkritischen Fall) sondern von der Anzahl der Zyklen bestimmt wird. Somit kann das Integral über die zyklische Lastgeschichte an einer bestimmten Stützstelle  $(\vec{x}, \Omega)$  anhand der Summe der Beiträge der Einzelzyklen berechnet werden:

$$\begin{aligned} & \int_0^{N_k} \left( \frac{\sigma_{\text{eq,max}}(\vec{x}, \Omega, N)}{\sigma_{0V}} \right)^n (1 - R(\vec{x}, \Omega, N))^p dN \\ &= \sum_{i=N_1}^{N_k} \left( \frac{\sigma_{\text{eq,max}}(\vec{x}, \Omega, i)}{\sigma_{0V}} \right)^n (1 - R(\vec{x}, \Omega, i))^p . \end{aligned}$$

Für die programmtechnische Umsetzung bedeutet dies, dass die Zeitschleife im Rahmen der numerischen Integration so modifiziert wird, dass nur die Zeitpunkte, die die einzelnen Zyklen repräsentieren, betrachtet werden. Dafür muss für jede Stützstelle vorher bekannt sein, zu welchen Zeitpunkten minimale und maximale Beanspruchung in jedem Zyklus  $N_i$  auftritt. Diese Informationen können global festgelegt oder mit Hilfe einer Zusatzroutine automatisch bestimmt werden. Aus der maximalen und minimalen Äquivalentsspannung  $\sigma_{\text{eq,max}}(\vec{x}, \Omega, i)$  bzw.  $\sigma_{\text{eq,min}}(\vec{x}, \Omega, i)$  ergibt sich schließlich das entsprechende Verhältnis  $R(\vec{x}, \Omega, i)$ . Die Summierung über die Einzelzyklen hat zur Folge, dass der Rechenaufwand einer STAU-Analyse im Falle zyklischer Ermüdung verringert wird, da nicht über alle Zeitinkremente integriert werden muss. Lediglich bei der Identifikation des zyklischen Lastkollektivs muss die zeitliche Lastgeschichte analysiert werden.

### 4.2.1 Bestimmung des Lastkollektivs

Das zyklische Lastkollektiv bildet die Basis, um komplexe zyklische Lastgeschichten durch periodische Wiederholung abzubilden. Das Lastkollektiv muss anhand des in der FE-Analyse ermittelten zeitlichen Spannungsverlaufs definiert werden. Im Zuge der numerischen Integration werden dabei folgende Informationen für jede Stützstelle benötigt: Anzahl der Zyklen sowie die Zeitpunkte, an denen maximale und minimale Belastung des jeweiligen Zyklus auftreten. In STAU sind dafür zwei Möglichkeiten implementiert, diese Informationen vorzugeben: Direkte Vorgabe und automatische Extraktion des Lastkollektivs.

### Globale Vorgabe des Lastkollektivs

Bei der globalen Vorgabe des Lastkollektivs werden die jeweiligen Zeitpunkte der Maxima und Minima der Zyklen für alle Stützstellen identisch festgelegt. Die globale Vorgabe des Lastkollektivs kann daher nur erfolgen, wenn eine (im zeitlichen Sinne) proportionale Beanspruchung im Bauteil vorliegt. In Anlehnung an die in STAU vorhandene Vorgehensweise im Falle zyklischer Belastung mit unterkritischem Risswachstum erfolgt die Vorgabe der Lastgeschichte über eine Datei. In dieser Datei können neben den Zeitpunkten von Maxima/Minima der Zyklen zusätzlich Amplituden für die Beanspruchung vorgegeben werden. Somit ist es beispielsweise möglich, ein beliebiges Lastkollektiv auf Basis der Spannungsdaten eines einzelnen Zeitpunktes zu definieren.

### **Automatische Bestimmung des Lastkollektivs**

In vielen Anwendungen, wie z.B. bei der im vorigen Abschnitt erwähnten Walze, liegt eine nicht-proportionale Beanspruchung vor. In diesem Fall kann die einfache direkte Vorgabe nicht erfolgen, da an jedem Integrationspunkt ein individuelles Lastkollektiv vorliegt. Für diesen Fall wurde eine Routine implementiert, die Lastkollektive automatisch aus dem zeitlichen Spannungsverlauf extrahiert.

Bei der automatischen Bestimmung des Lastkollektivs werden maximale und minimale Belastungen an einem Punkt bestimmt und mit Hilfe eines Zählalgorithmus in eine zyklische Lastgeschichte überführt. Die Analyse des Belastungsverlaufs erfolgt anhand der maximalen Hauptspannung. Diese Größe wurde in Hinblick auf das Normalspannungskriterium gewählt, da die Äquivalentspannung mit diesem Kriterium zum Zeitpunkt der maximalen Hauptspannung für alle Orientierungsstützstellen ebenfalls maximal sein muss. Sollten andere Mixed-Mode-Kriterien verwendet werden, können grundsätzlich auch andere geeignete Größen zur Analyse des Spannungsverlaufs in die entsprechende Routine implementiert werden.

Im Zuge der numerischen Integration ist es erforderlich, für jede räumliche Stützstelle ein Lastkollektiv zu identifizieren. Um den rechnerischen Aufwand, der mit dieser Vorgehensweise verbunden wäre zu reduzieren, wird das Lastkollektiv lediglich für das betreffende Element bestimmt. Hierfür wird die Routine zur Bestimmung des Lastkollektivs zu Beginn der Integration auf der Ebene der Elemente aufgerufen. Die daraus resultierenden Informationen gelten dann global für alle Stützstellen des Elements.

Die Bestimmung des Lastkollektivs eines Elements erfolgt anhand des Hauptspannungsverlaufs der Randknoten, für die Ergebnisse vorliegen. Da die Randknoten unterschiedliche Spannungswerte aufweisen können bzw. da auch innerhalb eines Elements nicht-proportionale Beanspruchung vorliegen kann, wird jeweils der maximale Hauptspannungswert aller Randknoten für die Identifikation verwendet. Dadurch wird sichergestellt, dass im Falle einer nicht-proportionalen Belastung innerhalb eines Elements die höchste Äquivalentspannung berücksichtigt wird.

Die Identifikation eines Lastkollektivs erfolgt schließlich in einem Zählalgorithmus auf Basis des Hauptspannungsverlaufs. Hierbei wird, wie in Abb. 4.4 gezeigt, die Abfolge von Maximum-Minimum oder Minimum-Maximum im Spannungsverlauf registriert und als Zyklus betrachtet. Sollte ein vereinzelt Maximum/Minimum auftreten, so wird grundsätzlich der letzte Zeitschritt im betrachteten Intervall als ergänzendes Minimum/Maximum angesehen. Das Beispiel in Abb. 4.4 verdeutlicht, dass der in der FE-Analyse betrachtete Zeitabschnitt den Verlauf des

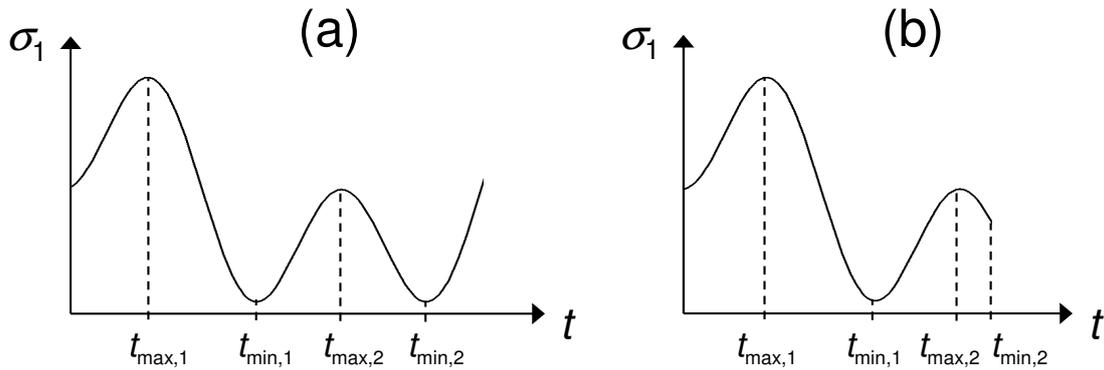


Abbildung 4.4: Beispiele für die Identifikation des Lastkollektivs: Das Lastkollektiv (a) liegt im Fall (b) unvollständig vor

Lastkollektivs für alle in der STAU-Rechnung berücksichtigten Elemente vollständig beinhalten muss.

#### 4.2.2 Serielle Abfolge periodisch wiederholter Lastkollektive

Im Falle serieller Lastgeschichten werden für ein gegebenes Modell unterschiedliche Blöcke betrachtet. Das bedeutet, dass mehrere Lastkollektive in einer oder mehreren FE-Analysen berechnet werden müssen. Da in STAU bei einem Durchlauf der Integrationsroutine jedoch nur ein Lastkollektiv bearbeitet wird, sind mehrere aufeinander folgende Durchläufe für unterschiedliche Spannungsanalysen notwendig. Um nicht innerhalb einer STAU-Analyse die Daten mehrerer Lastkollektive einlesen zu müssen und um die Struktur der Integrationsroutine zu erhalten, wird für jedes Lastkollektiv eine eigene STAU-Rechnung durchgeführt. Um die Ausfallwahrscheinlichkeit nach Gl. (4.13) berechnen zu können, müssen die für jedes Lastkollektiv  $j$  ermittelten Integralwerte addiert werden. Hierfür wird der Integralwert für jede Stützstelle  $(x, y, z, \varphi, \psi)$  in eine Datei geschrieben. Diese Werte werden in der nachfolgenden STAU-Rechnung an der entsprechenden Stelle in der Integrationsroutine eingelesen, zum aktuellen Integralwert hinzu addiert und schließlich wieder in die Datei geschrieben. Die Ausfallwahrscheinlichkeit wird jeweils für den aktuellen Integralwert berechnet. Auf diese Art lassen sich Modelle unabhängig voneinander seriell rechnen, wobei nur die entsprechende Datei zur Datenspeicherung übernommen werden muss. Es versteht sich, dass diese Vorgehensweise nur für Modelle mit identischem FE-Netz und betrachteten Elementset durchgeführt werden kann.

### 4.2.3 Temperaturabhängige Risswachstumsparameter

Sollen die Formulierungen aus Abschnitt 4.1 auf temperaturabhängige Werkstoffparameter erweitert werden, ergeben sich mehrere Schwierigkeiten bei der Umsetzung. Ein Problem ist, dass ein Tupel  $\{n, B, p\}$  ermittelt werden muss, das einen ganzen Zyklus repräsentiert. Dabei können die Werte  $n, B, p$  bereits innerhalb eines Zyklus variieren, da hier mehrere Temperaturen durchlaufen werden können. Eine zweite Schwierigkeit geht direkt auf den Exponenten  $n$  zurück, da dieser in den Exponenten  $m^*$  des Integrands eingeht. Für diesen Fall wurde von *Ziegler* [36] eine Näherungslösung vorgeschlagen, bei der eine exakte Interpolation von  $n$  erfolgt. Diese Vorgehensweise kann jedoch nicht ohne großen Rechenaufwand auf zyklisch wiederholte Lastgeschichten übertragen werden.

Im Falle zyklischer Ermüdung muss eine konservative Abschätzung von  $n$  erfolgen, die für ein Lastkollektiv einen konstanten Wert für alle Zyklen festlegt. Bei unterkritischer Rissausbreitung wird das Minimum von  $n$  aller Zeitinkremente verwendet. Dies kann grundsätzlich auf die zyklische Ermüdung übertragen werden, indem der Minimalwert  $n$  im Bezug auf das zyklische Lastkollektiv bestimmt wird. Dann müssen die Parameter  $p(T), B(T)$  für jeden Zyklus bestimmt werden. Diese Werte werden an den Zeitpunkten der maximalen Belastung interpoliert.

### 4.2.4 Mixed-Mode-Kriterium

Die in STAU verwendeten Mixed-Mode-Kriterien sind lokale Versagenskriterien für die katastrophale Rissausbreitung natürlicher Fehler im Material. Dabei wird davon ausgegangen, dass diese Mechanismen auch im Falle langsamen Rissfortschritts (Ermüdung) anwendbar sind. Daher wird bei der Berechnung der Äquivalentsspannung für den statischen Anteil und den Ermüdungsanteil das selbe Kriterium verwendet. Grundsätzlich könnte an dieser Stelle mit unterschiedlichen Mixed-Mode-Kriterien gearbeitet werden. Obwohl es Hinweise auf eine Mixed-Mode-Abhängigkeit der zyklischen Mechanismen gibt [52], existieren jedoch nicht ausreichend Daten bzw. Kriterien, die einen solchen Ansatz zum jetzigen Zeitpunkt rechtfertigen.

## 4.3 Verifikationsbeispiel

In diesem Abschnitt wird die Funktion der erweiterten Version von STAU anhand eines einfachen Fallbeispiels an  $\text{Al}_2\text{O}_3$  demonstriert. Hierbei handelt es sich um die kommerzielle Variante  $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-F99.7}$  (Friatec, Mannheim), für die eine große Datenbasis an dynamischen und zyklischen 4PB-Versuchen vorliegt [53].

Die für die Zuverlässigkeitsbewertung wesentlichen Werkstoffparameter können Tab. 4.1 entnommen werden. Die Kennwerte für Inertfestigkeit und unterkritisches Risswachstum wurden in dynamischen 4PB-Versuchen gemessen. Daneben wurden zyklische 4PB-Versuche bei unterschiedlichen  $R$ -Verhältnissen (0.1, 0.33, 0.5) durchgeführt. Anhand dieser Daten wurden die zyklischen Risswachstumsparameter mittels einer in [11] beschriebenen Methode bestimmt.

(a) Inertfestigkeit [54]		
$m$	$b$ [MPa]	
15	383	
(b) unterkritisches Risswachstum [54]		
$n_u$	$B_u$ [MPa <sup>2</sup> · s]	
37.3	$5.16 \cdot 10^4$	
(c) zyklisches Risswachstum [52]		
$n$	$B$ [MPa <sup>2</sup> · Zyklus]	$p$
19.88	$3.22 \cdot 10^5$	4.57

Tabelle 4.1: Materialparameter Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>-F99.7; Messungen SFB483: (a) Inertfestigkeitsparameter, (b) unterkritische und (c) zyklische Risswachstumsparameter.

Abb. 4.5 zeigt die mit STAU ermittelten Vorhersagen für die charakteristische Lebensdauer  $N_0$  (63.2%-Quantil). Diese wurden auf Basis eines 3D-FE-Modells nach Gl. 4.12 für Volumenfehler berechnet. Da die verwendeten Risswachstumsparameter selbst aus den 4PB-Versuchen bestimmt wurden, weisen die Vorhersagen wie erwartet eine gute Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen auf. Größere Abweichungen zu den Messwerten treten einzig beim mittleren Spannungshorizont für  $R = 0.33$  auf.

Die Auswirkung des zyklischen Ermüdungseffekts zeigt sich, wenn Lebensdauer Vorhersagen auf Basis der unterkritischen Parameter getroffen werden, wobei nur der statische Ermüdungsanteil der periodischen Last (in diesem Fall sinusförmig, 30 Hz) berücksichtigt wird. Um den Einfluss am Beispiel von Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> aufzuzeigen, wurden die charakteristischen Lebensdauern im Fall  $R = 0.1$  auf Basis von  $n_u$  und  $B_u$  (nach [1], S.81) berechnet. Die Ergebnisse dieser statischen Vorhersage sind in Abb. 4.6 im Vergleich zu den Vorhersagen mit STAU dargestellt. Dabei zeigt sich, dass die vorhergesagte Lebensdauer mit der statischen Methode um mehr als

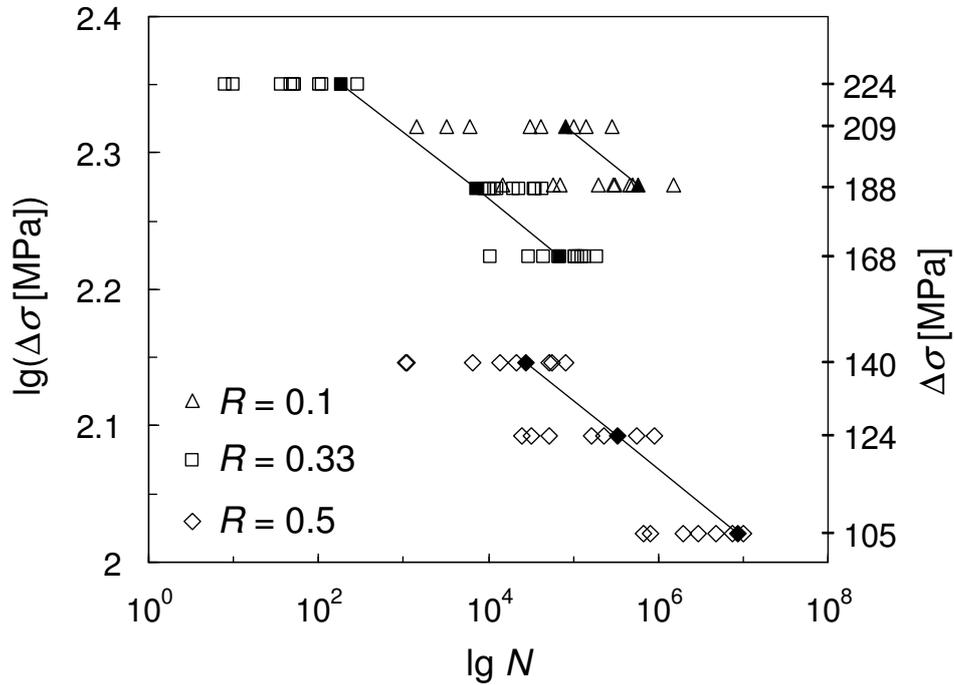


Abbildung 4.5: STAU-Vorhersage der charakteristischen Lebensdauer  $N_0$  (durchgezogene Linien) für zyklische 4PB-Versuche an  $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-F99.7}$ .

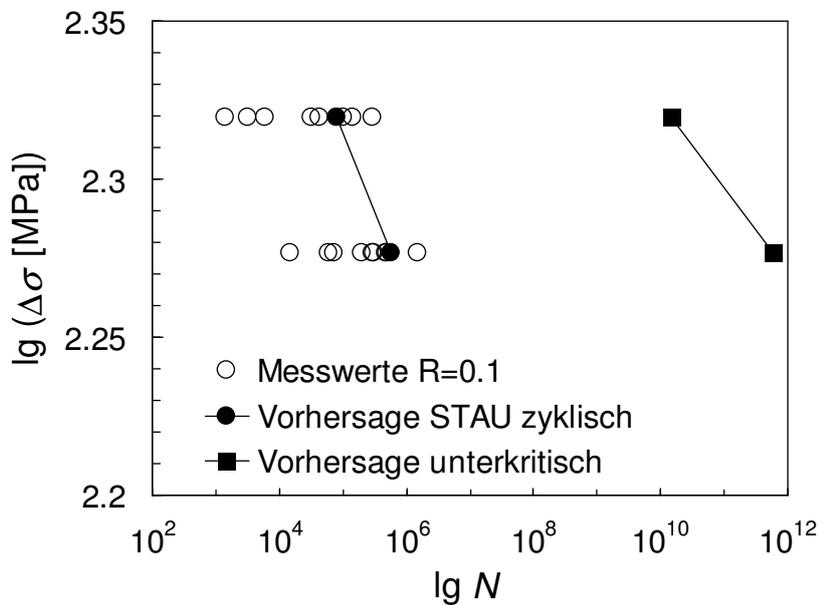


Abbildung 4.6: Vergleich der STAU-Vorhersagen und der Vorhersagen aus statischen Versuchen auf Basis der unterkritischen Parameter für  $R = 0.1$ .

fünf Größenordnungen überschätzt wird. Dies unterstreicht den starken Einfluss zyklischer Degradation bei diesem Werkstoff.

Da die Berechnung der charakteristischen Lebensdauer nach Gl. 4.12 eine Vereinfachung des allgemeinen Zusammenhangs in Gl. 4.11 darstellt, wurde eine Vergleichsrechnung für  $R = 0.33$  durchgeführt. Dabei wurde die Zyklenzahl bestimmt, für die sich mit der exakten Formel eine Ausfallwahrscheinlichkeit von 63.2% ergibt. Diese Ergebnisse sind den  $N_0$ -Werten der vereinfachten Berechnung in Abb. 4.7 gegenübergestellt. Dabei wird deutlich, dass sich wesentliche Abweichungen in den Vorhersagen für  $N_0$  nur ergeben, wenn die maximale Randfaserspannung im Versuch im Bereich der Inertfestigkeit  $b$  liegt. Für den oberen gemessenen Spannungshorizont, der bereits relativ niedrige Lebensdauern aufweist, ergibt sich durch die Vereinfachung jedoch noch keine wesentliche Abweichung in der Vorhersage. Das bedeutet, dass  $N_0$  im Bereich hoher Zyklenzahlen ( $>100$  Zyklen) eine geeignete Größe ist, um die Lebensdauer eines Bauteils zu bewerten.

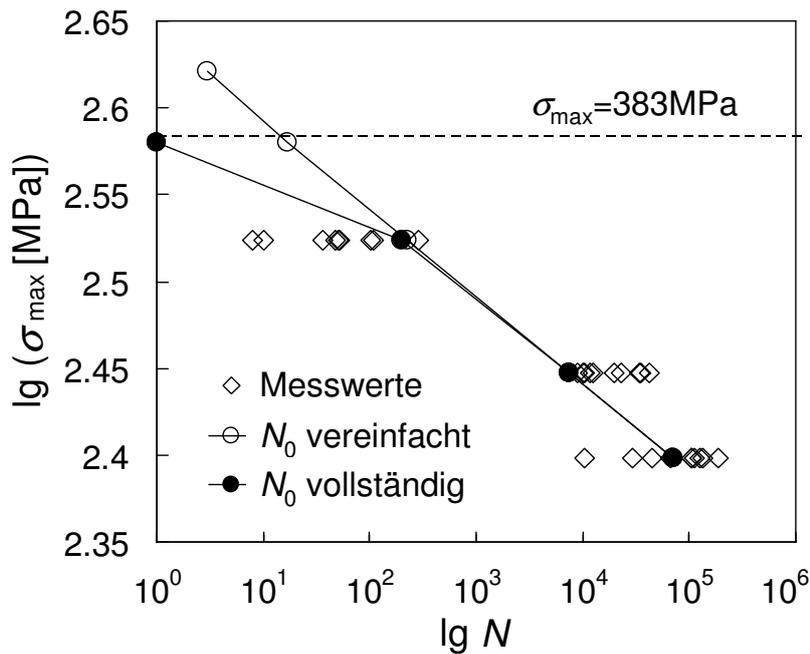


Abbildung 4.7: Vergleich der Ergebnisse für  $N_0$  berechnet mit der vereinfachten und vollständigen Formulierung für  $R = 0.33$ .

## 5 Werkstoffeigenschaften Si<sub>3</sub>N<sub>4</sub>-SL200

Siliziumnitrid-Keramiken sind vor allem aufgrund ihrer hohen Festigkeit (auch im Hochtemperaturbereich) in technischen Anwendungen verbreitet. Festigkeit und Risszähigkeit dieser Keramik werden dabei wesentlich durch die Mikrostruktur bestimmt. Die mechanischen Eigenschaften werden einerseits durch die Kornmorphologie [55, 56] und andererseits durch den amorphen Korngrenzfilm bestimmt [57]. Charakteristisch für Si<sub>3</sub>N<sub>4</sub>-Keramiken sind elongierte stengelförmige  $\beta$ -Si<sub>3</sub>N<sub>4</sub>-Körner, die insbesondere für die Brückenbildung bei Mikrorissen verantwortlich sind.

Für die Wälzversuche, die im nachfolgenden Kapitel beschrieben werden, wurde die kommerzielle Si<sub>3</sub>N<sub>4</sub>-Variante SL200BG der Firma Ceramtec ausgewählt. Dieser Werkstoff wurde bereits im Rahmen eines europäischen Forschungsprogramms (ESIS TC6) als Referenzmaterial umfassend charakterisiert [58]. In Ergänzung zu dieser Datenbasis wurden im Rahmen des SFB 483 Vergleichsmessungen zu mechanischen Eigenschaften sowie umfangreiche Versuche zur Charakterisierung des zyklischen Ermüdungsverhaltens durchgeführt. Die Auswertung und die Interpretation der zyklischen Messungen sind der Schwerpunkt dieses Kapitels.

### 5.1 Allgemeine Eigenschaften

SL200BG enthält  $\sim 3$  Masse-% Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> sowie  $\sim 3$  Masse-% Y<sub>2</sub>O<sub>3</sub> als Sinterhilfsmittel. Der Sinterprozess erfolgt in einer kommerziellen Route der Fa. Ceramtec. Tab. 5.1 (a) enthält Kenngrößen zu Mikrostruktur, Dichte und den elastischen Eigenschaften. Diese sind vor allem für die Spannungsanalyse von Bedeutung.

### 5.2 Risszähigkeit und R-Kurvenverhalten

Die Risszähigkeit wurde mittels der SEVNB-Methode bestimmt. Die Ergebnisse sind in Tab. 5.1 (b) aufgeführt, als Referenz ist zusätzlich der im ESIS-Projekt gemessene Wert angegeben. Die unterschiedlichen Werte können auf die Empfindlichkeit der Messmethode bzgl. der Kerbeinbringung zurückgeführt werden.

Die R-Kurvenmessung wurde ebenfalls mittels der SEVNB-Methode anhand einer gekerbten 4PB-Probe gemessen. Dabei wurde die R-Kurve im Bereich kleiner

Größe	Einheit	Wert
(a) Allgemeine Eigenschaften [59]		
mittl. Streckungsgrad	-	3
mittl. Kornlänge	$\mu\text{m}$	1
Dichte	$\text{g}/\text{cm}^3$	3.21
Härte	-	1483 (HV10)
E-Modul	GPa	310
$\nu$	-	0.29
(b) Risszähigkeit		
$K_{\text{Ic}}$ (SEVNB) [59]	$\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$	5.65
$K_{\text{Ic}}$ (SEVNB), ESIS [58]	$\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$	4.9
(c) Festigkeit		
Weibull-Modul $m$	-	12.2 (8.7;15.1)
Weibull-Modul $m$ (korrigiert)	-	11.5
4PB-Festigkeit $b$	MPa	1044 (1012;1077)
(d) unterkritisches Risswachstum		
$n_{\text{u}}$	-	42
$A_{\text{u}}^*$	m/s	$2.0 \cdot 10^{-6}$
$B_{\text{u}}$	$\text{MPa}^2 \cdot \text{s}$	$3.6 \cdot 10^{+5}$
(e) zyklisches Risswachstum (Luft)		
$n$	-	24
$p$	-	3.5
$C^*$	m/Zyklus	$3.6 \cdot 10^{-8}$
$B$	$\text{MPa}^2 \cdot \text{Zyklus}$	$4.8 \cdot 10^{+7}$
(f) zyklisches Risswachstum (Wasser)		
$n$	-	29.9
$p$	-	3.5
$C^*$	m/Zyklus	$1.3 \cdot 10^{-4}$
$B$	$\text{MPa}^2 \cdot \text{Zyklus}$	$1.1 \cdot 10^{+4}$

Tabelle 5.1: Werkstoffeigenschaften  $\text{Si}_3\text{N}_4\text{-SL200-BG}$  bei Raumtemperatur.

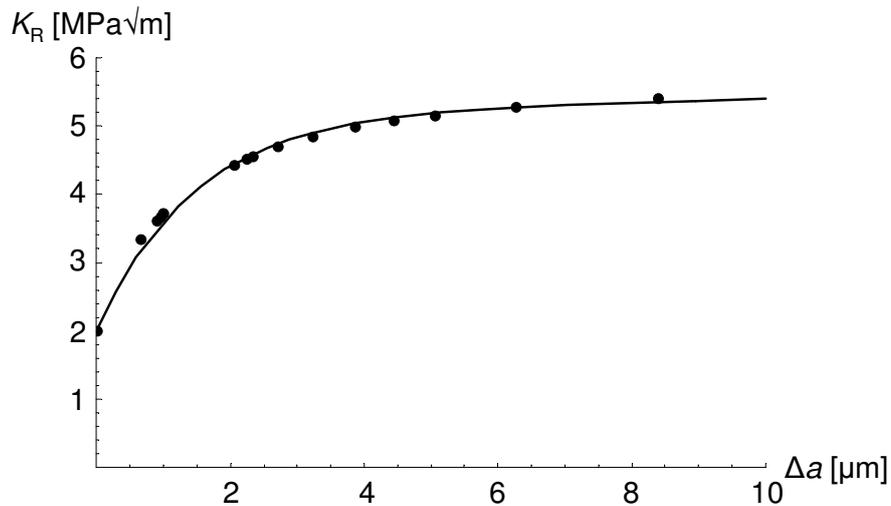


Abbildung 5.1: R-Kurve im Bereich kleiner Risslängen  $\Delta a$  (Messwerte aus [60]).

Risslängen  $\Delta a$  aus der Änderung der Nachgiebigkeit bestimmt, die aus der Last-Verschiebungskurve ermittelt wird. Dieses Verfahren wurde erstmals von *Fett et al.* [60] vorgestellt und ermöglicht eine sehr feine Auflösung im Anfangsbereich der R-Kurve. Aus Abb. 5.1 wird deutlich, dass die R-Kurve bereits nach ca. 10  $\mu\text{m}$  einen Sättigungswert erreicht. Die Brückenspannungsparameter, die als materialspezifische Kenngrößen im Bezug auf das R-Kurvenverhalten angesehen werden können, wurden in [61] anhand dieser Daten bestimmt.

### 5.3 Festigkeit

Die Inertfestigkeit wurde mittels eines Standard 4PB-Versuchs [28] bestimmt. Dabei wurden zunächst 15 Messungen durchgeführt, deren Ergebnisse in [62] dokumentiert sind. Um die Stichprobengröße zu erhöhen, wurden 9 weitere Versuche mit Restproben auf zwei unterschiedlichen Maschinen durchgeführt. Somit liegt ein Stichprobenumfang von '24' für die Bestimmung der Inertfestigkeit vor.

Die Festigkeitsverteilung ist in dem Weibull-Diagramm in Abb. 5.2 dargestellt. Die Schätzwerte der Parameter  $m$  und  $b$  mit den jeweiligen 90%-Konfidenzintervallen sind in Tabelle 5.1 (c) angegeben. SL200 weist eine für  $\text{Si}_3\text{N}_4$  typische 4PB-Festigkeit von über 1 GPa auf.

Die schwach ausgeprägte Bimodalität in der Verteilung der Messwerte kann mit dem R-Kurvenverhalten erklärt werden. Demnach werden grosse Fehler stärker geschirmt als kleine Fehler, die nicht den Plateauwert der Risszähigkeit erreichen.

Somit sind sehr niedrige Festigkeiten weniger wahrscheinlich, was zu dem charakteristischen 'Abknicken' der Festigkeitsverteilung führt. Dies wird z.B. auch bei  $\text{Al}_2\text{O}_3$  beobachtet [63], wobei die Bimodalität im Fall von  $\text{Si}_3\text{N}_4$  durch den steilen Anstieg der R-Kurve nicht so stark ausgeprägt ist wie bei  $\text{Al}_2\text{O}_3$ .

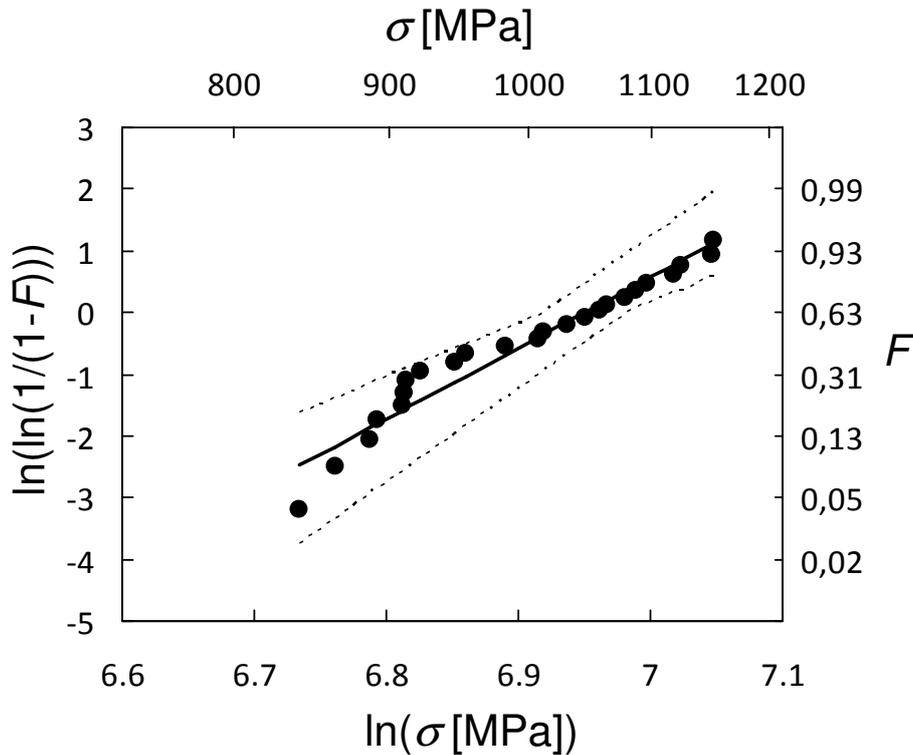


Abbildung 5.2: Inertfestigkeitsverteilung mit 90% Konfidenzbereich

## 5.4 Unterkritisches Risswachstum

Das unterkritische Risswachstumsverhalten wurde im Rahmen des SFB 483 nicht untersucht. Hier kann auf die Ergebnisse von statischen 4PB-Versuchen aus dem ESIS-Projekt in [58] zurückgegriffen werden. Die Risswachstumsparameter sind in Tabelle 5.1 (d) angegeben. Der Wert  $n_u$  wurde der o.g. Veröffentlichung entnommen,  $A_u^*$  wurde anhand der dort gezeigten Risswachstumskurve geschätzt. Für die Berechnung von  $B_u$  nach Gl. (3.27) wurde der in [58] gemessene  $K_{Ic}$ -Wert von  $4.9 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$  verwendet.

## 5.5 Zyklisches Risswachstum

Zur Untersuchung des Ermüdungsverhaltens wurden im Rahmen des SFB 483 zyklische 4PB-Versuche durchgeführt. Die Versuche wurden an unterschiedlichen Umgebungsmedien (Laborluft und Wasser) bei Raumtemperatur durchgeführt. Die Versuchsführung sowie Einzelheiten zum Versuchsaufbau sind in *Schwind et al.* [62] beschrieben. Im folgenden Abschnitt werden die Auswertemethoden skizziert, mit denen Risswachstumsparameter für natürliche Fehler bestimmt werden können.

### 5.5.1 Auswertemethoden

#### Wöhlerkurve

Basierend auf dem Potenzgesetz in Gl. (2.7) kann die experimentell ermittelte Lebensdauer  $N_f$  in Abhängigkeit der Versuchsparameter  $\Delta\sigma$  bzw.  $\sigma_{\max}$  beschrieben werden ([1], S.114):

$$N_f = \frac{B\sigma_c^{n-2}}{(\Delta\sigma)^n} = \frac{B\sigma_c^{n-2}}{(\sigma_{\max})^n(1-R)^n} \quad (5.1)$$

Hierbei ist  $\sigma_c$  die Inertfestigkeit; der Parameter  $B$  enthält den Risswachstumsparameter  $A$  bzw.  $A^*$  nach Gl. (4.16). Aus der Wöhlerauftragung  $\log N_f = -n \log(\Delta\sigma) + \log[B\sigma_c^{n-2}]$  können  $n$  und  $B$  und somit  $A$  bzw.  $A^*$  bestimmt werden. Bei dieser Methode müssen Lebensdauertests für mehrere Lasthorizonte  $\Delta\sigma$  durchgeführt werden.

#### Weibull-Verteilung

Bei dieser Methode werden die Parameter aus der Weibull-Verteilung der Messwerte eines einzelnen Lasthorizonts  $\Delta\sigma$  bestimmt. Hierfür wird vorausgesetzt, dass die Lebensdauer durch eine Weibull-Verteilung

$$P_f(N) = 1 - \exp \left[ - \left( \frac{N}{N_0} \right)^{m^*} \right] \quad (5.2)$$

beschrieben werden kann ([1], S.114). Aus den Weibull-Parametern  $m^*$  und  $N_0$ , die mit der Maximum-Likelihood Methode geschätzt werden, berechnen sich die Risswachstumsparameter nach Gl. (5.3).

$$m^* = \frac{m}{n-2} \quad B = \frac{N_0(\Delta\sigma)^n}{\sigma_c^{n-2}} \quad (5.3)$$

Hierbei sind  $m$  und  $\sigma_c$  die Weibull-Parameter der zugehörigen Festigkeitsverteilung.

### Erweiterte Lebensdauer Methode

Ein entscheidender Nachteil der beiden erstgenannten Methoden ist, dass sie auf dem Potenzgesetz in Gl. (2.7) beruhen. Die erweiterte Lebensdauer Methode hingegen ermöglicht die Ermittlung der Risswachstumskurve und ist somit unabhängig von einer Annahme über die Form des Risswachstumsgesetzes. Diese Methode wurde erstmals für unterkritisches Risswachstum angewendet [64] und später für zyklischen Rissfortschritt erweitert [11]. Hierbei wird jedem gemessenen Lebensdauerwert  $N_{f,i}$  eine Bruchspannung  $\sigma_{c,i}$  aus der dazugehörigen Festigkeitsverteilung zugeordnet. Die Zuordnung erfolgt jeweils über die Rangstatistik  $F_{F,i}$  (Festigkeit) und  $F_{L,i}$  (Lebensdauer)

$$F_{F,i} = \frac{i}{k_F + 1} \quad F_{L,i} = \frac{i}{k_L + 1} \quad (5.4)$$

wobei  $k_F$  die Größe der Festigkeitsstichprobe und  $k_L$  die der Lebensdauerstichprobe ist. Falls sich die Stichprobengrößen unterscheiden, erfolgt die Zuordnung durch Interpolation der jeweiligen  $F_{F,i}/F_{L,i}$ -Werte.

Aus dem Tupel  $\{N_{f,i}; \sigma_{c,i}\}$  ergibt sich nach Gl. (5.5) ein Wert für die Risswachstumsrate [11]:

$$\left(\frac{da}{dN}\right)_i = -\frac{2K_{Ic}^2}{N_f \sigma_c^2 Y_I^2} \frac{d \log(\Delta\sigma/\sigma_c)}{d \log[N_f(\Delta\sigma)^2]} \quad (5.5)$$

Der zu  $(da/dN)_i$  gehörige Wert  $\left(\frac{\Delta K_I}{K_{Ic}}\right)_i$  berechnet sich aus

$$\left(\frac{\Delta K_I}{K_{Ic}}\right)_i = \frac{\Delta\sigma}{\sigma_{c,i}} \quad (5.6)$$

Die logarithmische Ableitung  $\frac{d \log(\Delta\sigma/\sigma_c)}{d \log[N_f(\Delta\sigma)^2]}$  in Gl. (5.5) wird dabei aus der Auftragung  $\log(N_f(\Delta\sigma)^2)$  gegen  $\log(\Delta\sigma/\sigma_c)$  ermittelt.

Ein Vergleich der hier beschriebenen Methoden anhand experimenteller Daten findet sich in [11].

#### 5.5.2 Lebensdauerdaten in Laborluft

Die Versuche in Luft wurden jeweils für die  $R$ -Verhältnisse 0.1 und 0.5 durchgeführt. Dabei wurden jeweils 10 Proben bei unterschiedlichen Lasthorizonten

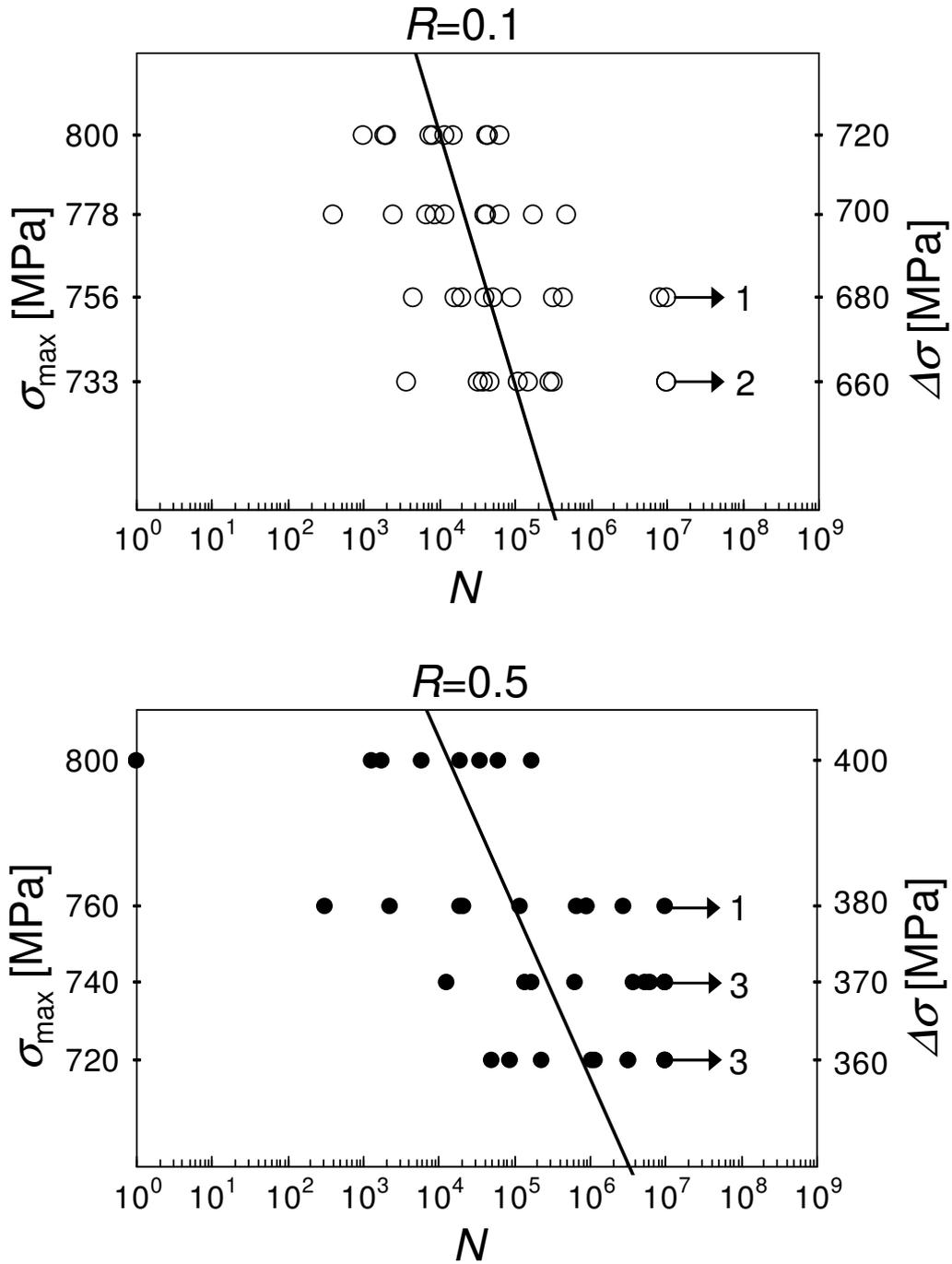


Abbildung 5.3: Wöhlerkurven der zyklischen Versuche bei  $RT$  in Laborluft für  $R = 0.1$  und  $R = 0.5$ .

$\Delta\sigma$  bis zum Versagen zyklisch belastet. Die maximale Versuchsdauer war auf  $10^7$  Zyklen beschränkt, so dass Proben, die nicht innerhalb dieses Intervalls versagt haben, als Durchläufer gewertet wurden. Das Wöhlerdiagramm in Abb. 5.3 gibt eine vollständige Übersicht der Messwerte. Die Ausgleichsgeraden beruhen auf einer linearen Regression über die Messwerte (ohne Durchläufer/Sofortbrüche).

Aufgrund der geringen Stichprobenzahl pro Lasthorizont sind Auswertung und Interpretation der Ergebnisse nicht trivial. Durch die hohe Zahl von Durchläufern stehen für einige Lasthorizonte nur 7 Messwerte zur Verfügung. Um eine Abschätzung des Risswachstumsexponenten  $n$  zu erhalten, wurden die Messwerte in einem ersten Schritt anhand der Weibull-Verteilung bzw. mittels der erweiterten Lebensdauerermethode für jeden Lasthorizont  $\Delta\sigma$  einzeln ausgewertet. Zusätzlich wurden die  $n$ -Werte aus der Regressionsgrade der Wöhlerkurve bestimmt. Die Ergebnisse sind in Tab. 5.2 aufgeführt, zusätzlich sind die einzelnen Weibull-Verteilungen bzw. Risswachstumskurven im Anhang B graphisch dargestellt.

$R$	$\Delta\sigma$ [MPa]	$n$	$n$	$n$
		Weibull-Verteilung	Risswachstumskurve	Wöhlerkurve
0.1	660	16.6	19.5	
	680	33.9	26.3	37.3
	700	25.5	23.7	25.8*
	720	17.8	17.1	
0.5	360	32.3	24.7	
	370	33.9	33.5	46.9
	380	39.6	37.1	38.4*
	400	23.7	24.7	

Tabelle 5.2: Risswachstumsexponent  $n$  ermittelt aus der Weibull-Verteilung bzw. der Risswachstumskurve einzelner Lasthorizonte  $\Delta\sigma$  sowie aus der Regression der Wöhlerkurve (\*Auswertung ohne Durchläufer/Sofortbrüche).

Die aus der Steigung der Wöhlerkurve ermittelten Risswachstumsexponenten liegen signifikant höher als die jeweiligen Werte der Weibull- bzw. Risswachstumskurvenauswertung, die jeweils auf den Daten der einzelnen Lasthorizonte beruhen. Zudem liegen die Werte mit  $n > 40$  eher in der Größenordnung des unterkritischen Risswachstumsexponenten. Diese Ergebnisse können dadurch erklärt

werden, dass Durchläufer und Sofortbrüche einen großen Einfluss auf die Steigung der Regressionsgerade der Wöhlerkurve haben. Werden Durchläufer und Sofortbrüche vernachlässigt, ergeben sich deutlich geringere  $n$ -Werte, die mit den Ergebnissen der anderen Auswertemethoden vergleichbar sind.

Bei der Weibull-Auswertung haben Durchläufer einen großen Einfluss auf den Modul  $m^*$  (und somit auf die  $n$ -Werte), insbesondere im Fall  $R = 0.1$ . Abb. 5.4 verdeutlicht, dass sich bei Berücksichtigung von Durchläufern Abweichungen der Messwerte zur Weibull-Gerade ergeben, die nicht auftreten, wenn Durchläufer nicht berücksichtigt werden. Dieser starke Einfluss beruht darauf, dass Lebensdauern  $\geq 10^7$ -Zyklen im Vergleich zu den restlichen Messwerten ungewöhnlich hoch sind. Eine Erklärung hierfür könnte sein, dass die Durchläufer bereits den Bereich des unteren Schwellwerts für zyklisches Risswachstum erreicht haben, so dass die Risswachstumsraten nicht mehr dem linearen Bereich der Risswachstumskurve (Vgl. Abb. 2.6) zuzuordnen sind. Dieser Effekt ist bei  $R = 0.1$  besonders ausgeprägt, so dass die Durchläufer in diesem Fall für die weitere Weibull-Auswertung nicht berücksichtigt werden.

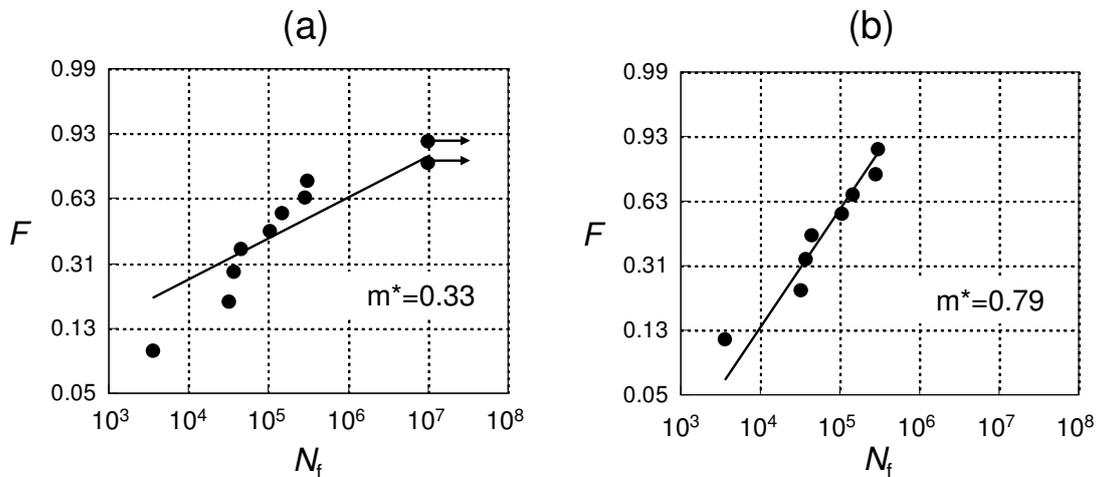


Abbildung 5.4: Weibull-Auswertung für  $R = 0.1$  und  $\Delta\sigma = 660\text{MPa}$ ; Auswertung (a) mit Durchläufern bzw. (b) ohne Durchläufer.

Die Ergebnisse in Tabelle 5.2 eignen sich trotz der teilweise relativ großen Streuung der  $n$ -Werte als erster Anhaltspunkt zur Abschätzung der Höhe des Risswachstumsexponenten. Hier deutet sich eine Abhängigkeit von  $n$  bzgl. des  $R$ -Verhältnisses an. Bei  $R = 0.1$  liegen die Werte tendenziell im Bereich  $n \approx 20$ , während sie für  $R = 0.5$  bei  $n \approx 30$  liegen. Der Grund für diesen Effekt ist, dass sich unterkritisches Risswachstum bei einem höheren Spannungsverhältnis stär-

ker auswirkt. Somit wird der zyklische  $n$ -Wert in Richtung des unterkritischen Werts  $n_u = 42$  verschoben.

In Abb. 5.5 sind die Daten aller Risswachstumskurven in einem Diagramm gemeinsam dargestellt. Diese Kurven dienen als Ausgangspunkt für die Bestimmung von Risswachstumsparametern. Die große Streuung der Daten ist auf den geringen Umfang der Stichproben zurückzuführen, die pro Lasthorizont für die Lebensdauerermessung verwendet werden. Ist der Stichprobenumfang zu klein, kann das Festigkeitsniveau der jeweiligen Stichprobe und somit das Risswachstumsniveau in Abhängigkeit von  $\Delta\sigma$  stark variieren, was zu einer Verschiebung der Kurven entlang der  $\frac{\Delta K_{I,\max}}{K_{Ic}}$ -Achse führt. Liegen die Lasthorizonte wie im vorliegenden Fall dann in einem engen Bereich, wirkt sich diese Verschiebung besonders stark aus.

Werden die Kurven getrennt nach  $R$ -Verhältnis mit dem Potenzgesetz (Gl. (2.7)) ausgewertet, ergeben sich unterschiedliche Exponenten  $n$  (Tab. 5.3 (a)). Dabei wird für  $R = 0.5$  ein höherer  $n$ -Wert ermittelt als im Fall  $R = 0.1$ . Dies bestätigt den Trend, der sich bereits bei der Einzelauswertung der Lasthorizonte in Tab. 5.2 abzeichnet. Für das in STAU verwendete Gesetz (Gl. (2.9)) werden die Kurven beider  $R$ -Verhältnisse ausgewertet, so dass neben dem Exponent auch der Parameter  $p$  (Tab. 5.3 (a)) bestimmt wird, der die Abhängigkeit der Risswachstumsrate von  $R$  charakterisiert. Aufgrund der großen Streuung in den Risswachstumsdaten unterliegen die daraus gewonnenen Risswachstumsparameter (Tab. 5.3 (a)) einer Unsicherheit. Dies spiegelt sich vor allem in den Kurven (Abb. 5.5) bzgl.  $K_{\max}/K_{Ic}$  für die verschiedenen  $R$ -Verhältnisse wieder, die sich z.T. überschneiden.

Aufgrund der Überlegungen zur Unsicherheit der Parameter ist eine Reduzierung der Streuung in den Risswachstumsdaten mit Blick auf eine möglichst genaue Kenntnis der Risswachstumsparameter von großem Interesse. Dies soll im folgenden Abschnitt mittels einer Pooling-Strategie erreicht werden.

### 5.5.3 Pooling

Die Grundidee des Pooling-Ansatzes ist, die bei unterschiedlichen Werten  $\Delta\sigma$  gemessenen Lebensdauerwerte auf einen einzigen Spannungshorizont abzubilden. Die daraus resultierende 'gepoolte' Stichprobe hat dann einen größeren Umfang. Die Umrechnung der einzelnen Messwerte erfolgt auf Basis der Weibull-Verteilung, die für jeden Lasthorizont  $\Delta\sigma$  ermittelt wird und ist in Abb. 5.6 schematisch dargestellt.

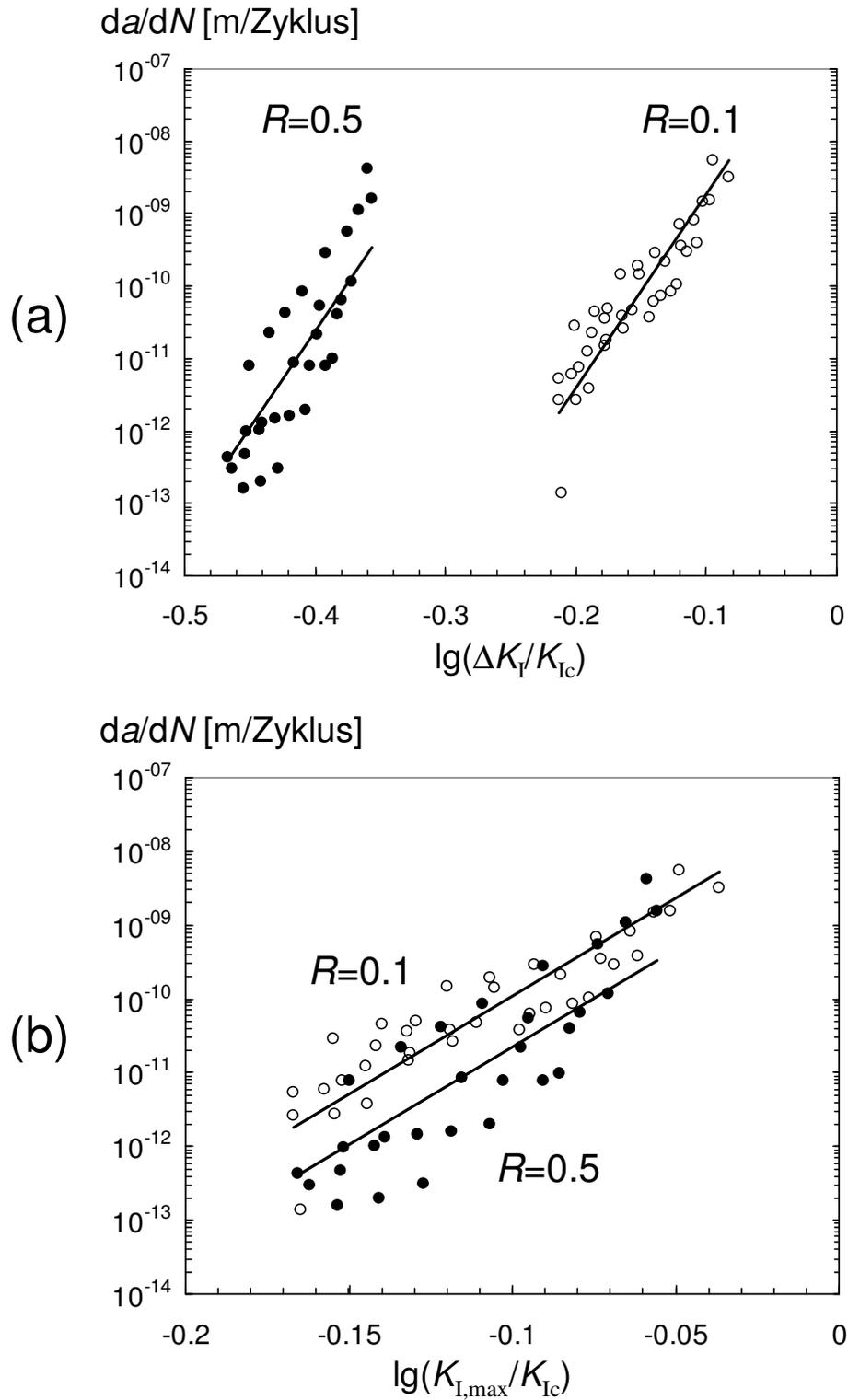


Abbildung 5.5: Risswachstumskurven bezogen auf (a)  $\Delta K_I/K_{Ic}$  und auf (b)  $K_{I,max}/K_{Ic}$  bei  $RT$  in Laborluft.

einfaches Potenzgesetz Gl. (2.7)						
	(a) ungepoolt		(b) paarweise gepoolt		(c) vollständig gepoolt	
$R$	0.1	0.5	0.1	0.5	0.1	0.5
$n$	22.9	32.7	20.9	29.0	20.0	27.5
$A^* \left[ \frac{m}{\text{Zyklus}} \right]$	$2.3 \cdot 10^{-7}$	$3.5 \cdot 10^{+2}$	$1.0 \cdot 10^{-7}$	$6.2 \cdot 10^0$	$5.6 \cdot 10^{-8}$	$1.1 \cdot 10^0$
erweitertes Potenzgesetz Gl. (2.9)						
	(a) ungepoolt		(b) paarweise gepoolt		(c) vollständig gepoolt	
$n$	26.6		24.0		23.1	
$p$	2.7		3.5		3.7	
$C^* \left[ \frac{m}{\text{Zyklus}} \right]$	$6.7 \cdot 10^{-8}$		$3.6 \cdot 10^{-8}$		$2.3 \cdot 10^{-8}$	

Tabelle 5.3: Übersicht Risswachstumsparameter (Luft, RT) ermittelt mit verschiedenen Poolingstrategien und im Bezug auf verschiedene Potenzgesetze.

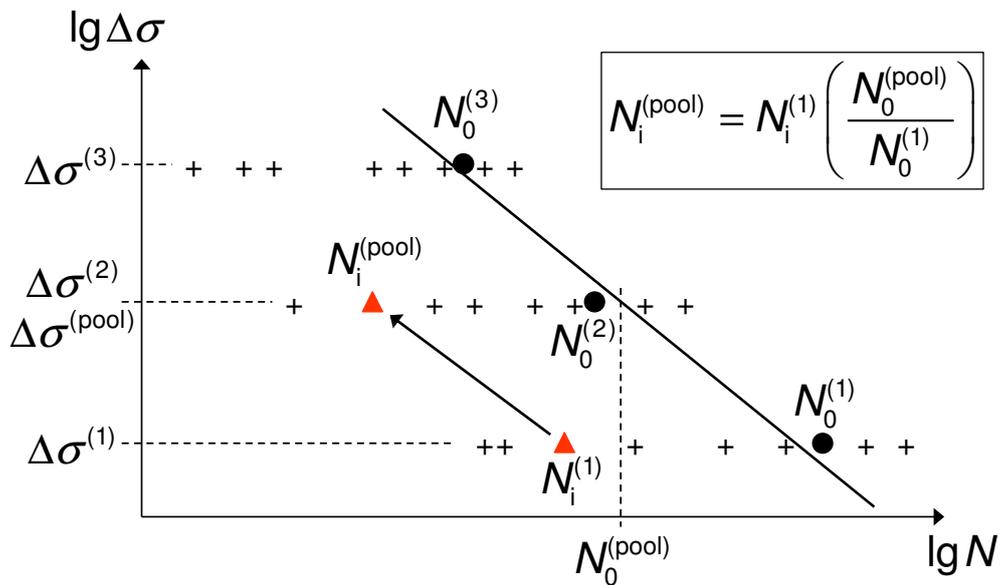


Abbildung 5.6: Schematische Darstellung des Pooling-Verfahrens.

Um einen Lebensdauerwert  $N_i^{(1)}$ , der bei einem Spannungsniveau  $\Delta\sigma^{(1)}$  gemessen wurde, auf ein anderes Spannungsniveau  $\Delta\sigma^{(\text{pool})}$  umzurechnen, werden zuerst die Weibull-Parameter  $m^{*(1)}$  bzw.  $N_0^{(1)}$  der Lebensdauervertelung für das Spannungsniveau  $\Delta\sigma^{(1)}$  ermittelt. Damit wird dem Messwert ein Quantilwert  $Q_i$  zugewiesen:

$$Q_i = 1 - \exp \left[ - \left( \frac{N_i^{(1)}}{N_0^{(1)}} \right)^{m^{*(1)}} \right].$$

Der gepoolte Lebensdauerwert  $N_i^{(\text{pool})}$  ergibt sich aus der Bedingung, dass der Quantilwert  $Q_i$  im Lasthorizont  $\Delta\sigma^{(\text{pool})}$  erhalten bleibt (Quantil-Verschiebung), so dass sich folgende Beziehung ergibt:

$$\begin{aligned} Q_i = 1 - \exp \left[ - \left( \frac{N_i^{(\text{pool})}}{N_0^{(\text{pool})}} \right)^{m^{*(1)}} \right] &= 1 - \exp \left[ - \left( \frac{N_i^{(1)}}{N_0^{(1)}} \right)^{m^{*(1)}} \right] \\ \Rightarrow N_i^{(\text{pool})} &= N_i^{(1)} \left( \frac{N_0^{(\text{pool})}}{N_0^{(1)}} \right). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Der Wert  $N_0^{(\text{pool})}$  kann dabei für einen beliebigen Lasthorizont anhand der Ausgleichsgerade berechnet werden, die aus den einzelnen Weibull-Lebensdauern  $N_0^{(1)}$ - $N_0^{(3)}$  erhalten wird.

Im Folgenden werden zwei Pooling-Varianten betrachtet. Im ersten Fall wurden die Daten der beiden äußeren Lasthorizonte auf das Niveau der jeweils benachbarten (inneren) Horizonte umgerechnet, so dass sich die Anzahl der auszuwertenden Lasthorizonte pro  $R$ -Verhältnis auf zwei reduziert. Diese Variante wird im Folgenden als paarweises Pooling bezeichnet. Im zweiten Fall wurden alle Daten auf jeweils einen Lasthorizont umgerechnet, so dass pro  $R$ -Wert eine einzige Stichprobe entsteht. Dies wird als vollständiges Pooling bezeichnet. Als Lasthorizonte  $\Delta\sigma^{(\text{pool})}$  wurden bei dieser Variante  $\Delta\sigma = 680$  MPa ( $R = 0.1$ ) und  $\Delta\sigma = 370$  MPa ( $R = 0.5$ ) ausgewählt (Vgl. Abb. 5.3).

Eine deutliche Verringerung der Streuung kann bereits durch das paarweise Pooling erzielt werden, was aus den Kurven in Abb. 5.7 hervorgeht. Der Vergleich mit den ungepoolten Daten zeigt, dass die Abnahme vor allem bei  $R = 0.5$  stark ausgeprägt ist. Im Diagramm bzgl.  $K_{I,\text{max}}/K_{Ic}$  (Abb. 5.7 (b)) deutet sich zudem die charakteristische Unterteilung der Kurven in die Bereiche I-III an. Der lineare Bereich II liegt demnach näherungsweise im Bereich  $0.66 \leq K_{I,\text{max}}/K_{Ic} \leq 0.92$ . Die Risswachstumsparameter wurden aus den paarweise gepoolten Daten hinsichtlich des einfachen Potenzgesetzes (Gl. (2.7)) sowie des in STAU verwendeten

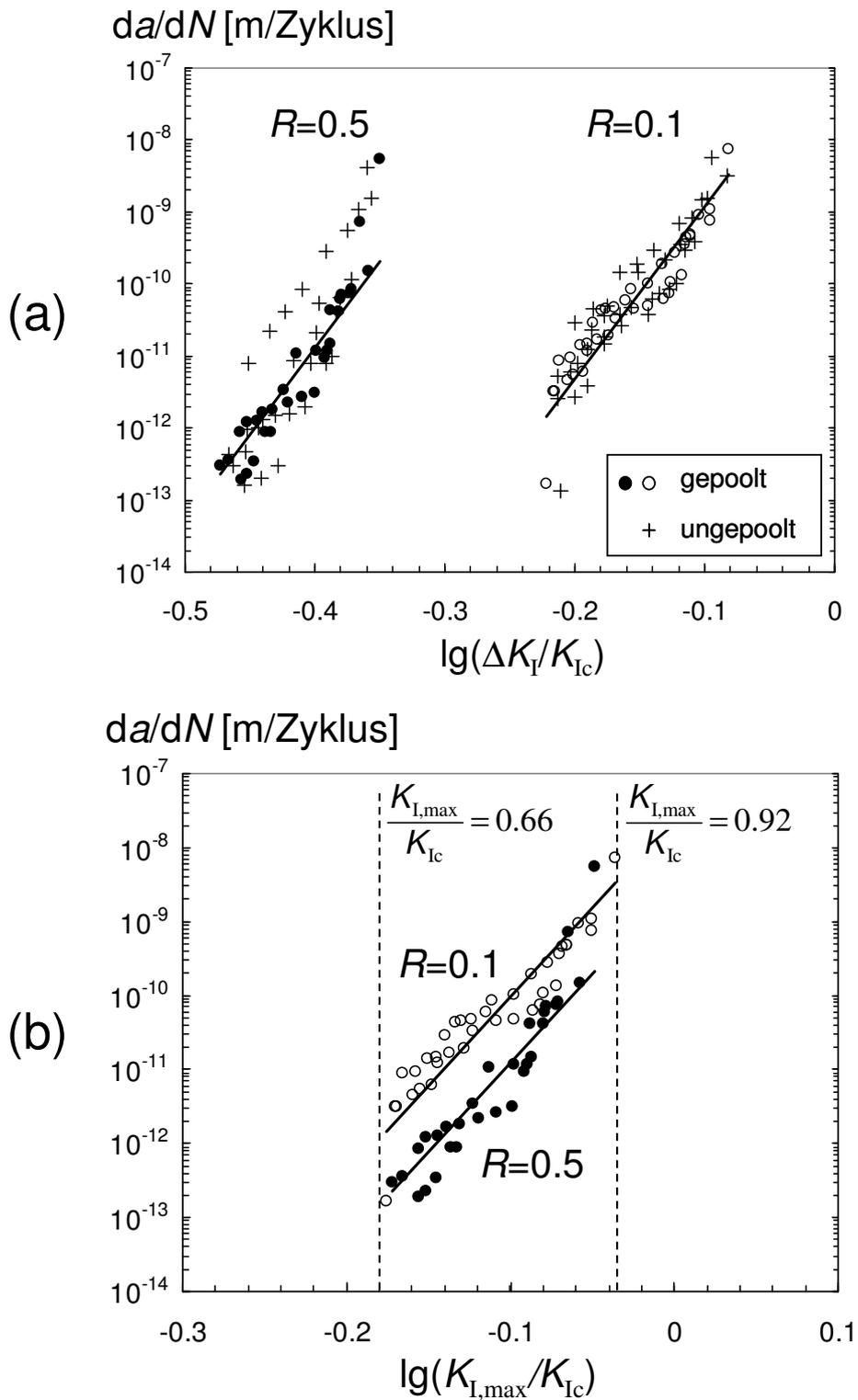


Abbildung 5.7: Risswachstumskurven aus paarweise gepoolten Messwerten bezogen auf (a)  $\Delta K_I/K_{Ic}$  (mit ungepoolten Werten als Vergleich) und auf (b)  $K_{I,max}/K_{Ic}$ .

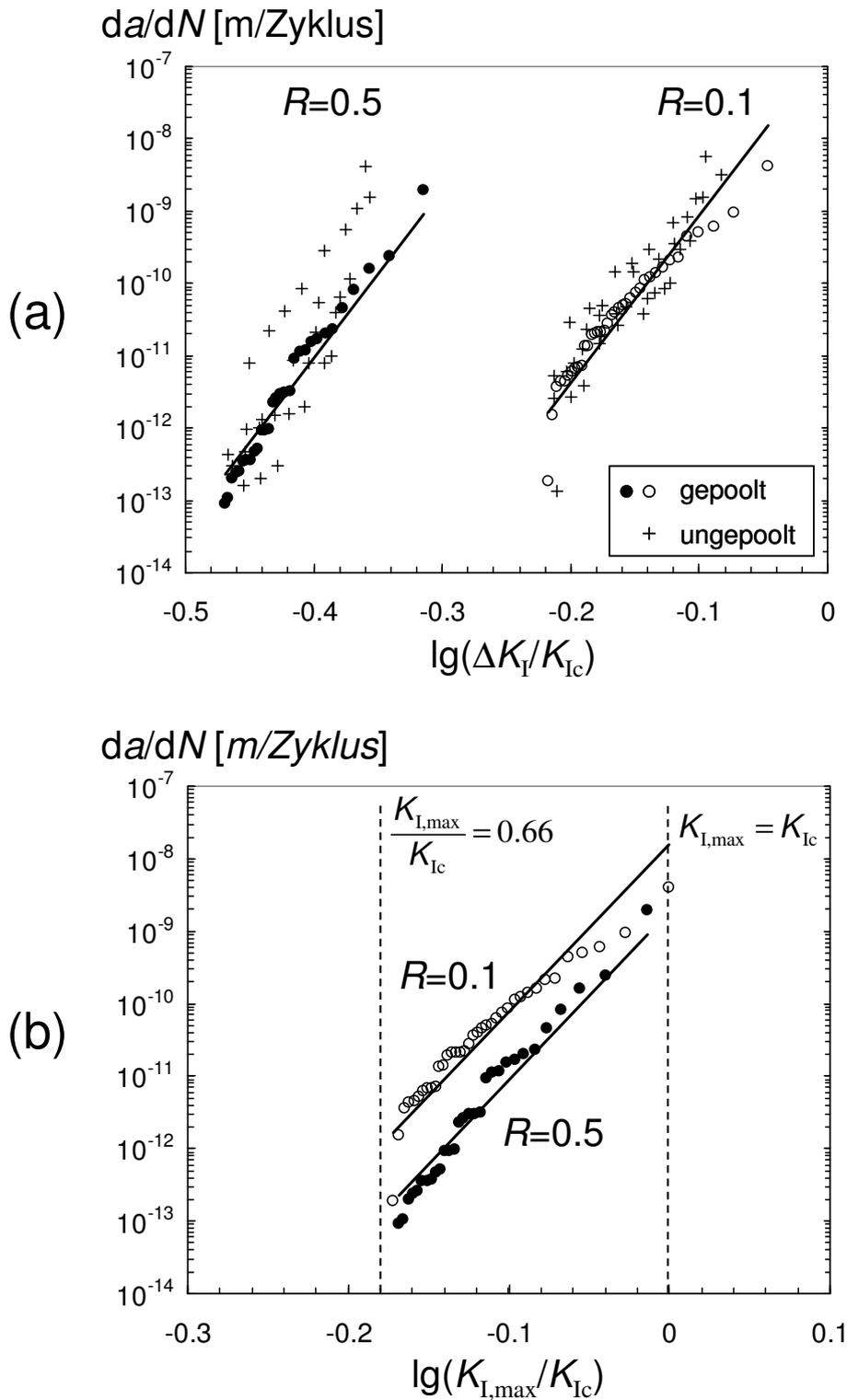


Abbildung 5.8: Risswachstumskurven aus vollständig gepoolten Messwerten bezogen auf (a)  $\Delta K_I/K_{Ic}$  (mit ungepoolten Werten als Vergleich) und auf (b)  $K_{I,max}/K_{Ic}$ .

Gesetzes (Gl. (2.9)) ermittelt und sind in Tab. 5.3 (b) aufgeführt. Insgesamt ergeben sich im Vergleich zum ungepoolten Fall niedrigere  $n$ -Werte, der Einfluss des Spannungsverhältnisses  $R$  auf den Exponenten bleibt jedoch erhalten. Die Erhöhung der Trennschärfe beider Kurven wirkt sich zudem auf den  $p$ -Wert ( $p = 3.5$ ) aus, der nun höher ist als im ungepoolten Fall ( $p = 2.7$ ).

Betrachtet man die auf Basis der vollständig gepoolten Daten errechneten Risswachstumsparameter in Tab. 5.3 (c), so zeigt sich keine wesentliche Veränderung im Vergleich zu den Ergebnissen aus den paarweise gepoolten Daten. Da nur ein Lasthorizont pro  $R$ -Wert ausgewertet wird, ist die Streuung der Risswachstumskurven praktisch eliminiert (Abb. 5.8).

Beim genauen Vergleich der vollständig gepoolten Kurven mit den ungepoolten bzw. paarweise gepoolten Daten fällt auf, dass die Risswachstumsdaten in den Bereich  $K_{I,max} = K_{Ic}$  hin verschoben sind, in dem eigentlich instabiles Risswachstum zu erwarten wäre. Hierbei handelt es sich um ein Artefakt, welches auf die erweiterte Lebensdauerermethode (Kap. 5.5.1) und die Bimodalität der Festigkeitsverteilung zurückzuführen ist. Im vorliegenden Fall überschreitet der Umfang der Lebensdauerstichprobe  $k_L$  den der Festigkeitsstichprobe  $k_F$ . Aus diesem Grund wurde die Zuordnung der Lebensdauerwerte anhand der Weibull-Verteilung der Festigkeit gemäß Gl. (5.8) vorgenommen.

$$\sigma_{c,i} = b + \frac{1}{m} \cdot \ln \left( \ln \left( \frac{1}{1 - F_{L,i}} \right) \right) \quad (5.8)$$

Die Bimodalität in der Festigkeitsverteilung hat jedoch zur Folge, dass im Bereich niedrigerer Spannungswerte die Ausfallwahrscheinlichkeit überschätzt wird (Abb. 5.2). Dadurch werden niedrigen Lebensdauern tendenziell zu niedrige Spannungen  $\sigma_{c,i}$  zugewiesen, wodurch  $\left( \frac{\Delta K_I}{K_{I,max}} \right)_i = \frac{\Delta \sigma}{\sigma_{c,i}}$  zu höheren Werten hin verfälscht wird.

#### 5.5.4 Lebensdauerdaten in Wasser

Wie bereits in Kap. 2.3.2 angesprochen wird unterkritischer Rissfortschritt durch die Anwesenheit von Wasser begünstigt, was gleichzeitig zu einer Erhöhung der zyklischen Risswachstumsrate führt. Daher wurde der Einfluss von Wasser anhand zyklischer 4PB-Versuche im Rahmen des SFB 483 untersucht. Die Versuche wurden bei einem Spannungsverhältnis von  $R = 0.5$  durchgeführt. Diese Ergebnisse sind zusammen mit den in Luft gemessenen Daten im Wöhlerdiagramm in Abb. 5.9 (a) dargestellt. Das Lebensdauerniveau ist unter Wassereinfluss um etwa zwei Größenordnungen verringert. Analog dazu ist die Risswachstumsrate im Fall von Wasser um mehr als zwei Größenordnungen erhöht, was sich anhand der gepoolten Risswachstumskurven in Abb. 5.9 (b) ablesen lässt.

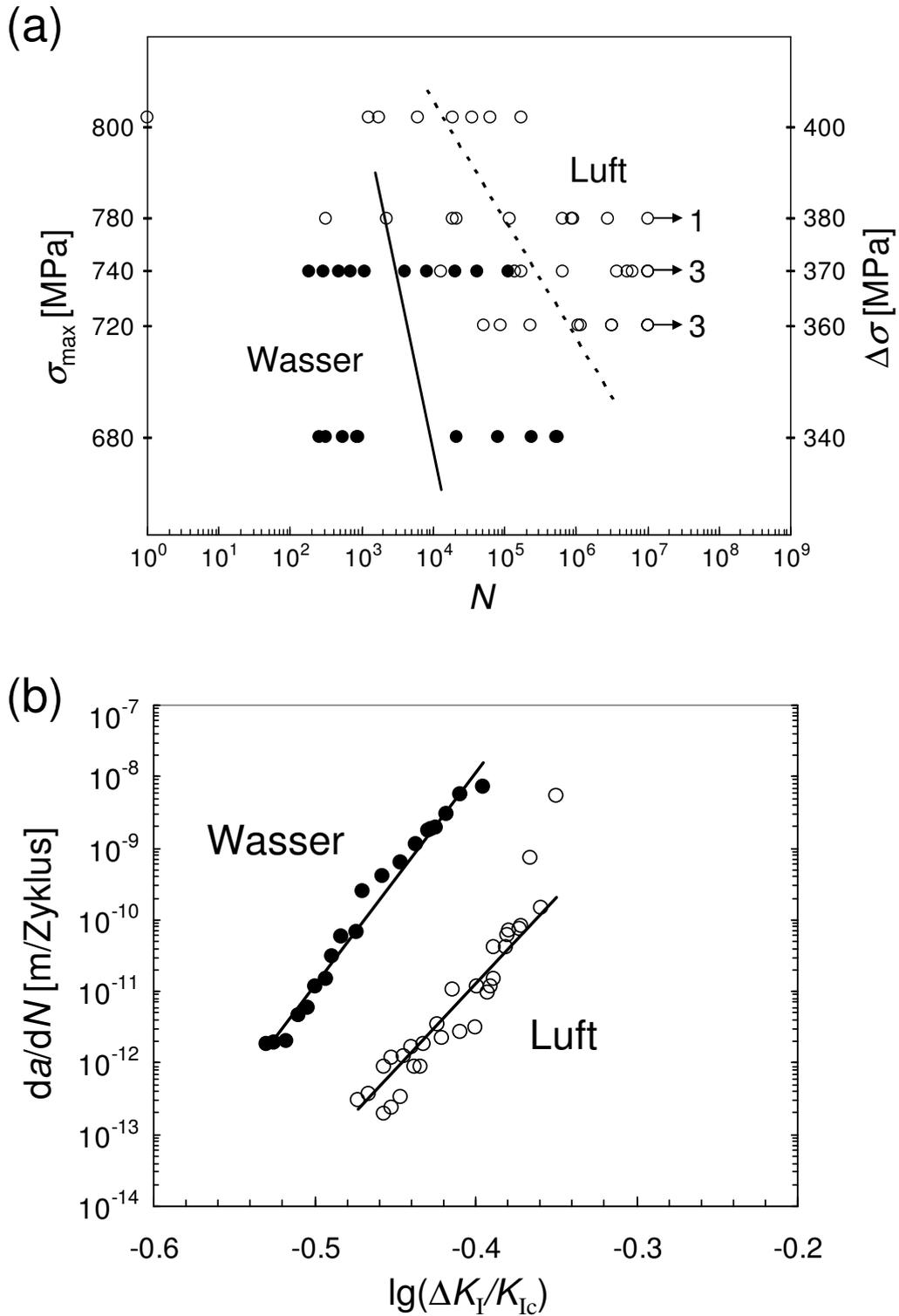


Abbildung 5.9: (a) Wöhlerkurve und (b) gepoolte Risswachstumskurven aus Daten an Luft und Wasser bei  $R = 0.5$ .

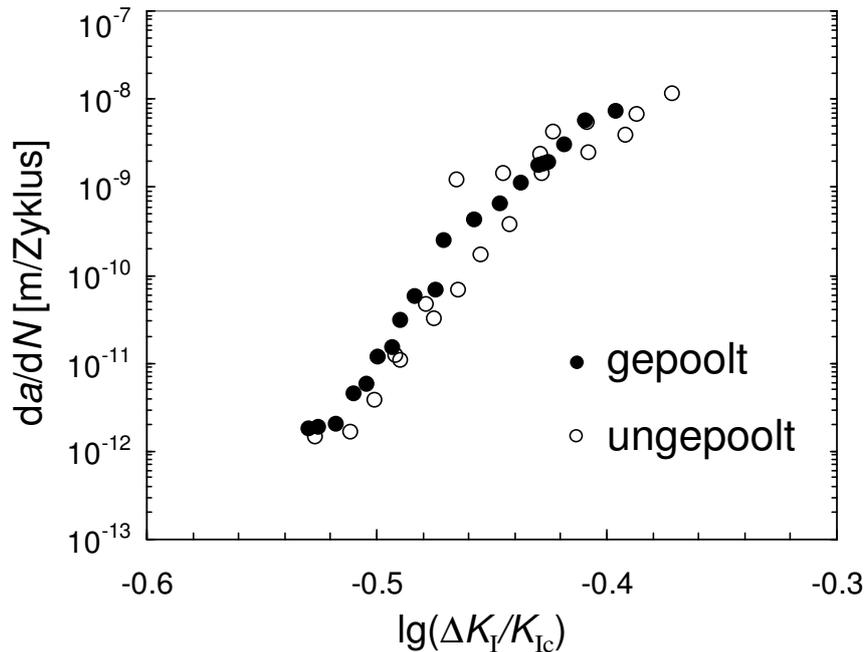


Abbildung 5.10: Vergleich der gepoolten und ungepoolten Risswachstumskurven in Wasser bei  $R = 0.5$ .

Ein interessanter Aspekt zeigt sich beim Vergleich der ungepoolten bzw. gepoolten Kurven in Abb. 5.10. Im ungepoolten Fall scheint die Steigung der Kurve im Bereich höherer Werte von  $\frac{da}{dN}$  abzunehmen, was auf einen verringerten Wassertransport zur Risspitze hindeuten würde. Dieser Effekt zeichnet sich ebenfalls in den gepoolten Daten ab, ist dort jedoch weniger stark ausgeprägt. Aufgrund der geringen Stichprobengröße im ungepoolten Fall kann jedoch nicht ausgeschlossen werden, dass es sich hierbei um ein Artefakt handelt, welches auf den geringen Stichprobenumfang zurückzuführen ist. Daher wird der Effekt mit Bezug auf die gepoolten Ergebnisse als vernachlässigbar betrachtet.

Wird die gepoolte Kurve in Abb. 5.9 im Hinblick auf das einfache Potenzgesetz (Gl. 2.7) ausgewertet, ergibt sich ein Risswachstumsexponent von  $n \approx 30$  (siehe Tab. 5.1). Da für Wasser nur Ergebnisse bei  $R = 0.5$  vorliegen, können für das in STAU verwendete Gesetz (Gl. (2.9)) im Prinzip keine Parameter bestimmt werden. Um die Ergebnisse in Wasser dennoch in der späteren Zuverlässigkeitsanalyse berücksichtigen zu können, wird angenommen, dass der Wert  $p$ , der die Verschiebung der Risswachstumskurven in Abhängigkeit von  $R$  charakterisiert, unabhängig vom Umgebungsmedium ist. Unter dieser Voraussetzung kann mit dem in Wasser bestimmten  $n$ -Wert der Parameter  $C^*$  bzw.  $B$  nach Gl. (2.11)

aus dem Parameter  $A^{*1}$  berechnet werden (siehe Tab. 5.1). Da sich bei den Ergebnissen in Luft eine Abhängigkeit des  $n$ -Werts von  $R$  gezeigt hat, ist auch bei Wasser davon auszugehen, dass bei  $R$ -Werten unter 0.5 ein niedrigerer  $n$ -Wert zu erwarten ist. Dies konnte jedoch aufgrund fehlender experimenteller Ergebnisse bislang nicht überprüft werden.

### 5.5.5 Zusammenfassende Bemerkungen

An dieser Stelle sollen abschließend die wichtigsten Erkenntnisse zum zyklischen Rissausbreitungsverhalten von  $\text{Si}_3\text{N}_4$ -SL200 zusammengefasst werden.

Insgesamt erweist sich die hier vorgestellte Pooling-Strategie als wirksam in Hinblick auf die Charakterisierung des zyklischen Risswachstumsverhaltens. Die Reduktion der Streuung durch Erhöhung der Stichprobengröße zeigt einerseits, dass die  $n$ -Werte insgesamt niedriger sind als im ungepoolten Fall und verdeutlicht den Einfluss des  $R$ -Verhältnis auf den Risswachstumsexponent. Aufgrund möglicher Artefakte, die sich im Fall der vollständig gepoolten Stichprobe ergeben, werden für die STAU-Analyse die Parameter der paarweise gepoolten Werte verwendet. Diese sind in der Gesamtübersicht in Tab. 5.1 vollständig aufgeführt.

Der Einfluss des Spannungsverhältnisses auf den Exponenten  $n$  kann als nachgewiesen angesehen werden. Dieser Effekt ist auf den zunehmenden Einfluss unterkritischen Risswachstums bei höheren Spannungsverhältnissen zurückzuführen. Grundsätzlich verlangt das in STAU verwendete erweiterte Potenzgesetz, dass  $n$  unabhängig von  $R$  ist. Dennoch stellen die so ermittelten Parameter eine gute Näherung beider Kurven dar, was anhand der Diagramme in Abb. 5.7 bzw. 5.8 deutlich wird.

Der starke Einfluss von unterkritischem Risswachstum zeigt sich auch an den Risswachstumsraten in Wasser, die im Vergleich zu Luft deutlich erhöht sind. Der häufig in Zusammenhang mit Glas beobachtete Effekt der Abnahme von  $n$  im Übergang von Bereich II-III der Risswachstumskurve ist bei  $\text{Si}_3\text{N}_4$  schwach ausgeprägt und wird daher in der späteren Zuverlässigkeitsanalyse vernachlässigt.

---

<sup>1</sup> $A^* = 1.12 \text{ m/Zyklus}$

## 6 Zuverlässigkeitsanalyse am Beispiel eines Wälzversuchs

In diesem Kapitel wird ein Wälzversuch betrachtet, um die für zyklisches Risswachstum erweiterte STAU-Version an einer realistischen Anwendung zu erproben. Der Wälzversuch ist ein Kontaktermüdungsversuch, bei dem eine abgerundete Stahlscheibe auf einer Keramikrolle mit einem definierten Schlupf abrollt. Dieser Versuch wurde am IWM (Institut für Werkstoffmechanik, Fraunhofer Gesellschaft, Freiburg) in Hinblick auf die Anwendung von  $\text{Si}_3\text{N}_4$  als Material für Walzanwendungen konzipiert und im Rahmen des SFB 483 an Rollen aus  $\text{Si}_3\text{N}_4$ -SL200 angewendet [65, 66]. Neben den tribologischen Aspekten kann mit dem Wälzversuch vor allem die Schädigung der Walzenoberfläche durch Rissbildung in Abhängigkeit von Walzparametern wie Schmiermittel oder Flächenpressung untersucht werden.

Der Wälzversuch ist aufgrund seiner komplexen transienten Beanspruchung ein geeignetes Referenzbeispiel, um die Methoden zur Lebensdauervorhersage in STAU zu evaluieren. Die im Versuch auftretende Kontaktschädigung durch Risse an der Oberfläche führt nicht zum kompletten Versagen des Bauteils. Somit kann eine Bewertung der Lebensdauervorhersage anhand der Rissdichte erfolgen, die an einer einzelnen Probe zeitabhängig auftritt. Das Hauptziel der STAU-Analyse ist es, die experimentell beobachtete Schädigung durch Rissbildung quantitativ nachzuvollziehen und eine mögliche Gewichtung der Einflussgrößen im Hinblick auf Risswachstum und Ausfallwahrscheinlichkeit aufzuzeigen. Die Ausfallwahrscheinlichkeit, die dabei berechnet wird, entspricht der Wahrscheinlichkeit der Rissinitiierung auf der Rollenoberfläche.

Im folgenden Kapitel wird zuerst auf die Versuchsführung und die experimentellen Ergebnisse eingegangen. Danach wird das FE-Modell vorgestellt, das als Basis für die STAU-Rechnungen dient. Die Ergebnisse von STAU werden schließlich vor dem Hintergrund der Schädigung im Versuch diskutiert und bewertet.

## 6.1 Versuchsaufbau und experimentelle Ergebnisse

### 6.1.1 Versuchsaufbau und Versuchsführung

Der Aufbau des Wälzprüfstands ist in Bild 6.1 schematisch dargestellt. Der Versuch besteht aus einer zylindrischen  $\text{Si}_3\text{N}_4$ -Rolle und einer Rolle aus gehärtetem Stahl, deren Profil im Kontaktbereich abgerundet ist. Die Randbedingungen des Versuchs sind in Tabelle 6.1 zusammengefasst; Details zur Geometrie können den technischen Zeichnungen im Anhang C entnommen werden. Beide Rollen werden mit einer Anpresskraft  $F_A$  in Kontakt gebracht und rotieren mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten  $\omega_1$  und  $\omega_2$ , die so eingestellt werden, dass sich eine Relativbewegung beider Rollen mit einem definierten Schlupf (ca. 22%) einstellt.

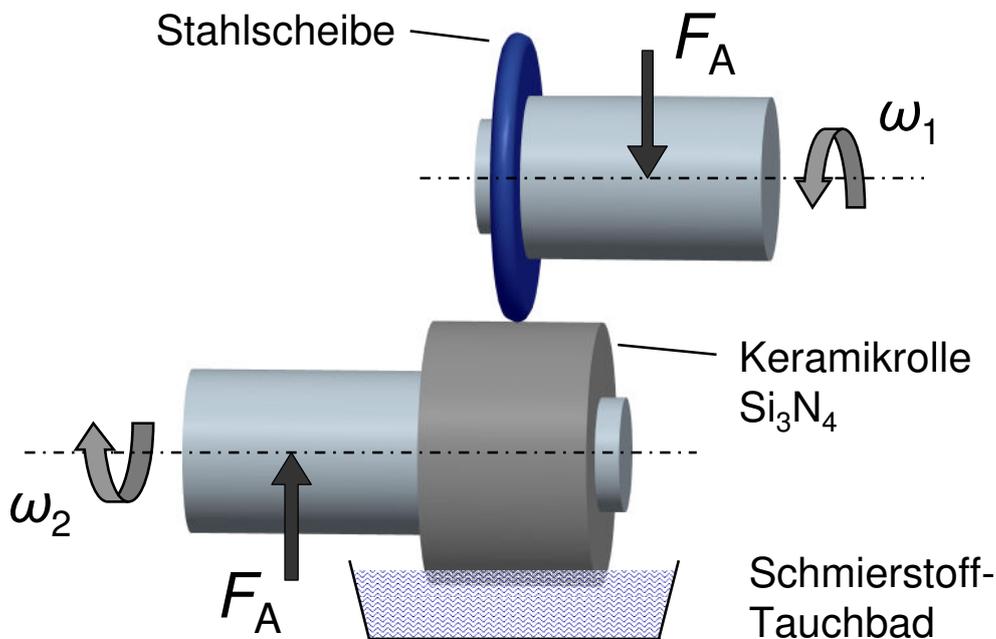


Abbildung 6.1: Schematische Darstellung des Versuchsaufbaus im Wälzversuch.

Werkstoff	Durchmesser	Drehzahl	Anpresskraft	Reibwerte	
				$\mu$	$\mu$
100Cr6	60 mm	$\omega_1 = 200 \text{ min}^{-1}$	$F_A = 1700 \text{ N}$	$\text{H}_2\text{O}$	KSS
SL200	55 mm	$\omega_2 = 175 \text{ min}^{-1}$		$\mu = 0.21$	$\mu = 0.085$

Tabelle 6.1: Versuchsparameter des Wälzversuchs.

Die Keramikrolle wird in ein Tauchbad mit Schmierstoff eingebracht. Als Schmierstoff wurde entweder entionisiertes Wasser oder eine Emulsion<sup>1</sup> aus Mineralöl und Wasser, im folgenden als KSS (Kühlschmierstoff) bezeichnet, verwendet. Die Gleitreibungszahl  $\mu$  für die jeweiligen Schmierstoffe wurde während der Versuche aus der Differenz der Drehmomente an beiden Wellen errechnet. Wie in Tabelle 6.1 gezeigt, ist der Reibwert von reinem Wasser etwa doppelt so hoch wie im Fall von KSS.

### 6.1.2 Experimentelle Ergebnisse

Die Versuchsdauer der Wälzversuche wurde systematisch variiert, um die Schädigungsentwicklung an der Oberfläche der  $\text{Si}_3\text{N}_4$ -Rolle zu untersuchen. Als Schädigung wird die Bildung von makroskopischen Rissen bezeichnet, die in lichtmikroskopischen Aufnahmen der Oberfläche deutlich sichtbar sind. In Tab. 6.2 ist angegeben, nach welcher Versuchsdauer die Rollenoberfläche untersucht wurde bzw. wann Rissbildung in Abhängigkeit des Schmierstoffs jeweils eingesetzt hat. Im Fall von Wasser wird Rissbildung bereits nach zwei Minuten (350 Rotationen der  $\text{Si}_3\text{N}_4$ -Rolle) beobachtet. Bei KSS wird eine vergleichbare Schädigung erst nach einer Versuchsdauer von 10 h (105000 Rotationen) festgestellt.

Versuchsdauer	1 min	2 min	10 min	10 h	15 h
H <sub>2</sub> O	○	●	●	●	●
KSS	○	○	○	●	●

Tabelle 6.2: Übersicht über die Versuchsdauern, nach denen Oberflächenschädigung festgestellt wurde; (○) - Keine Schädigung, (●) - Schädigung setzt ein.

Das Schädigungsmuster an der Oberfläche ist in Abb. 6.2 für unterschiedliche Versuchsdauern in Abhängigkeit des Schmierstoffs dargestellt. Die Risse, die sich an der Oberfläche der  $\text{Si}_3\text{N}_4$ -Rolle bilden, haben eine teilkonische Geometrie, die in Abb. 6.3 schematisch dargestellt ist. In der daneben gezeigten REM-Aufnahme (Querschliff eines Risses) ist zu sehen, dass ein anfänglich normal zur Oberfläche orientierter Riss abknickt und unter einem Winkel  $\theta$  weiter wächst. Diese teilkonischen Risse sind typisch für spröde Werkstoffe unter gleitender Kontaktbeanspruchung bei überlagerter Friktion [67]. Sie entstehen erst durch die Überlagerung von Kontaktbelastung und friktionsbehafteter Gleitbewegung an der Oberfläche.

<sup>1</sup>95% H<sub>2</sub>O, 5% UNOPOLG600

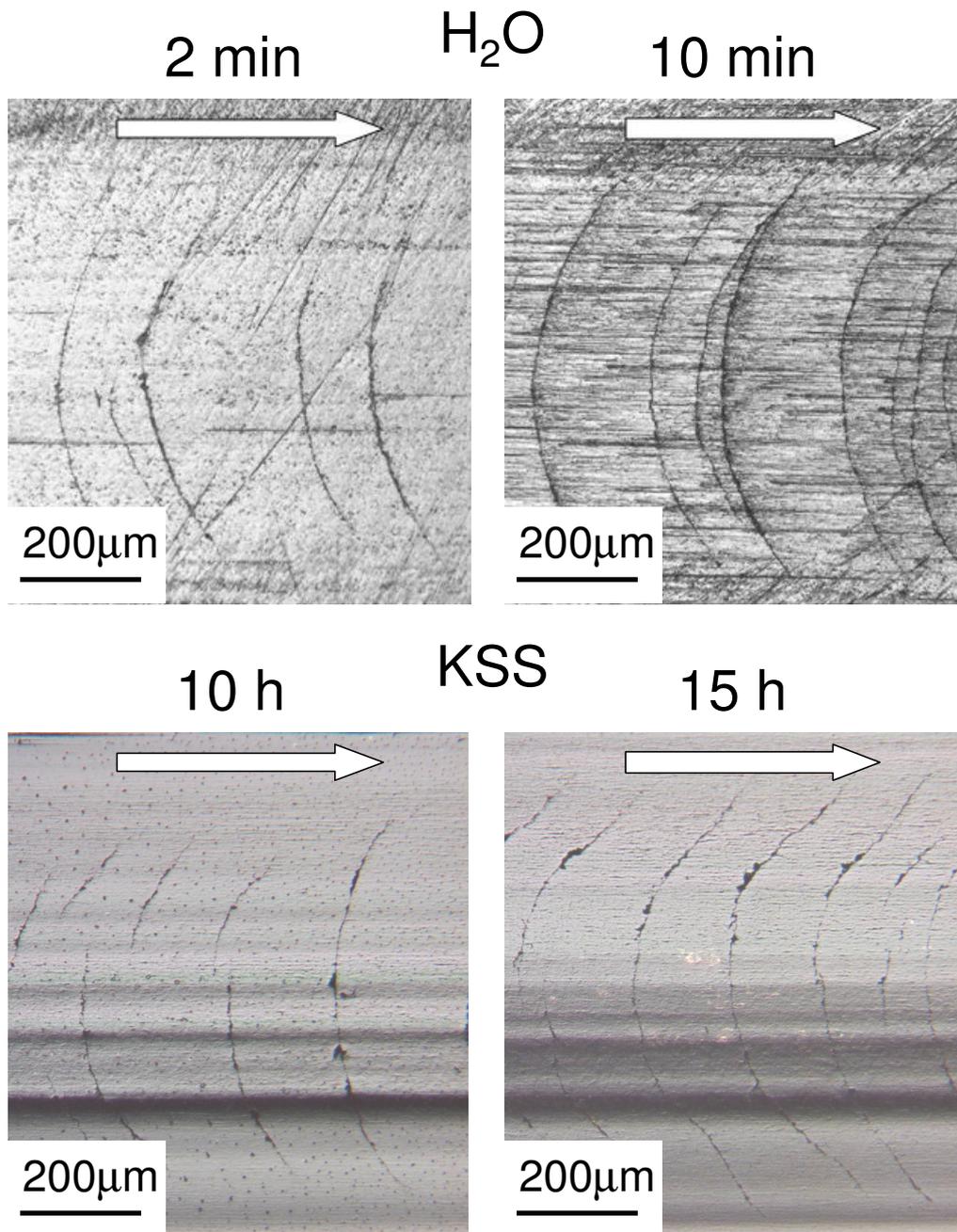


Abbildung 6.2: Schädigungsentwicklung an der Oberfläche der Keramikrolle in Abhängigkeit der Versuchsdauer und des Schmierstoffes; Die Pfeile geben die Relativbewegung der Stahlrolle (Gleitrichtung) an (Aufnahmen: Iyas Khader, IWM).

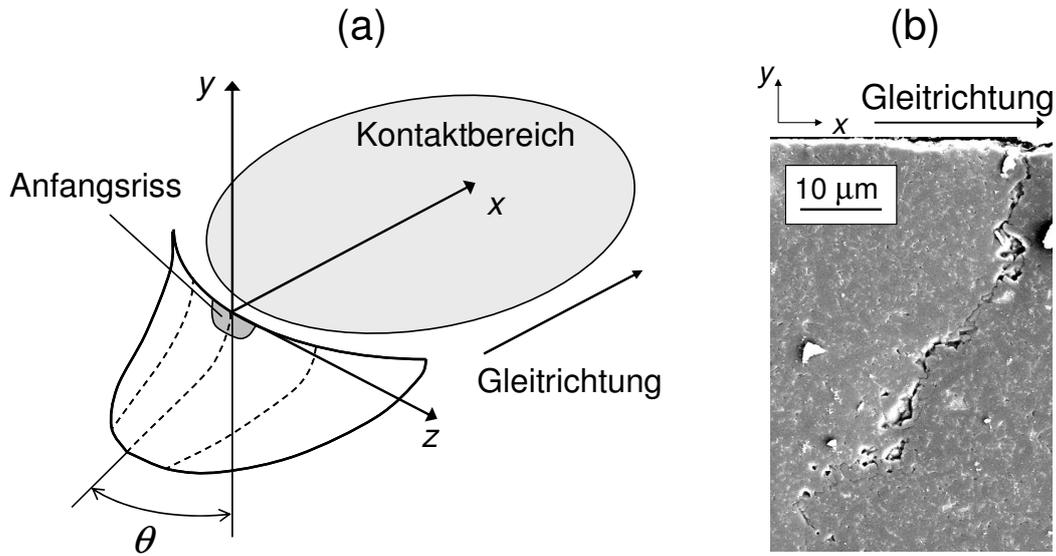


Abbildung 6.3: (a) Schematische Darstellung der Rissgeometrie im Wälzversuch; (b) REM-Bild eines Rissverlaufs unter der Oberfläche (REM-Bild: Iyas Khader, IWM).

Durch die Friktionsbelastung entstehen hohe Zugspannungen im Nachlauf des Kontakts, so dass es dort zur Ausbildung des Teilringes kommt. Die teilkonischen Risse bilden sich dabei durch natürliche Fehler an der Oberfläche, was z.B. im Fall von  $\text{Si}_3\text{N}_4$  anhand von Rissausbreitungssimulationen nachgewiesen wurde [68]. Ein solcher natürlicher Anfangsfehler ist in Abb. 6.3 ebenfalls angedeutet.

Die Schädigungsbilder in Abb. 6.2 zeigen, dass die Rissbildung bei beiden Schmierstoffvarianten zeitabhängig ist. Im Fall von Wasser bilden sich makroskopische Risse bereits nach zwei Minuten, eine spontane Rissinitiierung nach wenigen Zyklen kann jedoch nicht festgestellt werden. In beiden Fällen erkennt man, dass sich die Rissdichte bei längerer Versuchsdauer erhöht. Darüber hinaus wachsen die bereits vorhandenen Risse, was man an der Vergrößerung der an der Oberfläche sichtbaren Risskonturen sehen kann.

## 6.2 Spannungsanalyse

Wird plastische Verformung der Stahlscheibe vernachlässigt, kann der Wälzversuch als linear elastisches Kontaktproblem betrachtet werden. Die Geometrie des Kontaktbereichs ist in Abb. 6.4 dargestellt. Für die spätere Spannungsanalyse wird ein karthesisches Referenzkoordinatensystem definiert, das seinen Ursprung

im Mittelpunkt des elliptischen Kontaktbereichs hat. Die Größe der Kontaktellipse wird durch die Halbachsen  $a_x$  und  $a_z$  bestimmt. Die Verteilung der Flächenpressung  $p(x, z)$  ist in beiden Schnittdarstellungen skizziert. Die durch die Relativbewegung beider Rollen aufgebrauchte Scherspannung  $\tau$  wirkt in Richtung der effektiven Gleitrichtung, im vorliegenden Fall also in  $x$ -Richtung. Die Verteilung von  $\tau(x, z)$  ist direkt mit der Verteilung der Flächenpressung durch das Coulomb'sche Gesetz  $\tau(x, z) = \mu \cdot p(x, z)$  über die Gleitreibungszahl  $\mu$  verbunden.

### Design-Tool-Ergebnisse

Die analytische Spannungsverteilung kann mit dem schnellen Design-Tool (DT, siehe Kap. 3.2.2) bestimmt werden. Die wichtigsten Ergebnisse dieser Berechnung sind in Tab. 6.3 zusammengefasst. Die DT-Analyse liefert eine maximale Flächenpressung  $p_0$  von 4554 MPa. Daraus ergeben sich mit den Reibzahlen aus Tab. 6.1 maximale Scherspannungen von  $\tau_0 = 956$  MPa für Wasser und  $\tau_0 = 387$  MPa für KSS. Die maximalen Zugspannungen  $\sigma_x$  entstehen aufgrund der Scherbelastung im Nachlauf des Kontaktbereichs bei  $z = 0$ . Der Verlauf von  $\sigma_x$  entlang der  $x$ -Achse ist in Abb. 6.5 dargestellt. An den unterschiedlichen Maximalwerten der Zugspannung  $\sigma_x$ , die bei Wasser annähernd 2 GPa beträgt, zeigt sich der starke Einfluss des Reibwerts  $\mu$  auf das Beanspruchungsniveau. Die hier gezeigte Spannungsverteilung dient im Folgenden als Referenz, um die Qualität der FE-Analyse zu bewerten.

	$a_x$	$a_z$	$p_0$	$\tau_0$	$\sigma_{x,\max}$
H <sub>2</sub> O	0.6 mm	0.3 mm	4554 MPa	956 MPa	1930 MPa
KSS				387 MPa	1160 MPa

Tabelle 6.3: Ergebnisse der Spannungsanalyse mit dem schnellen Design-Tool: Halbachsen der Kontaktellipse  $a_x$  und  $a_z$ ; Flächenpressung  $p_0$ ; max. Scherspannungen  $\tau_0$  bzw. max. Zugspannungen  $\sigma_{x,\max}$  für Wasser ( $\mu = 0.21$ ) und KSS ( $\mu = 0.085$ ).

### Spannungsanalyse aus FE-Modell

Der im Design-Tool ermittelte Spannungsverlauf deutet bereits an, dass für die Auflösung der Zugspannungsspitzen eine sehr feine Vernetzung des FE-Modells

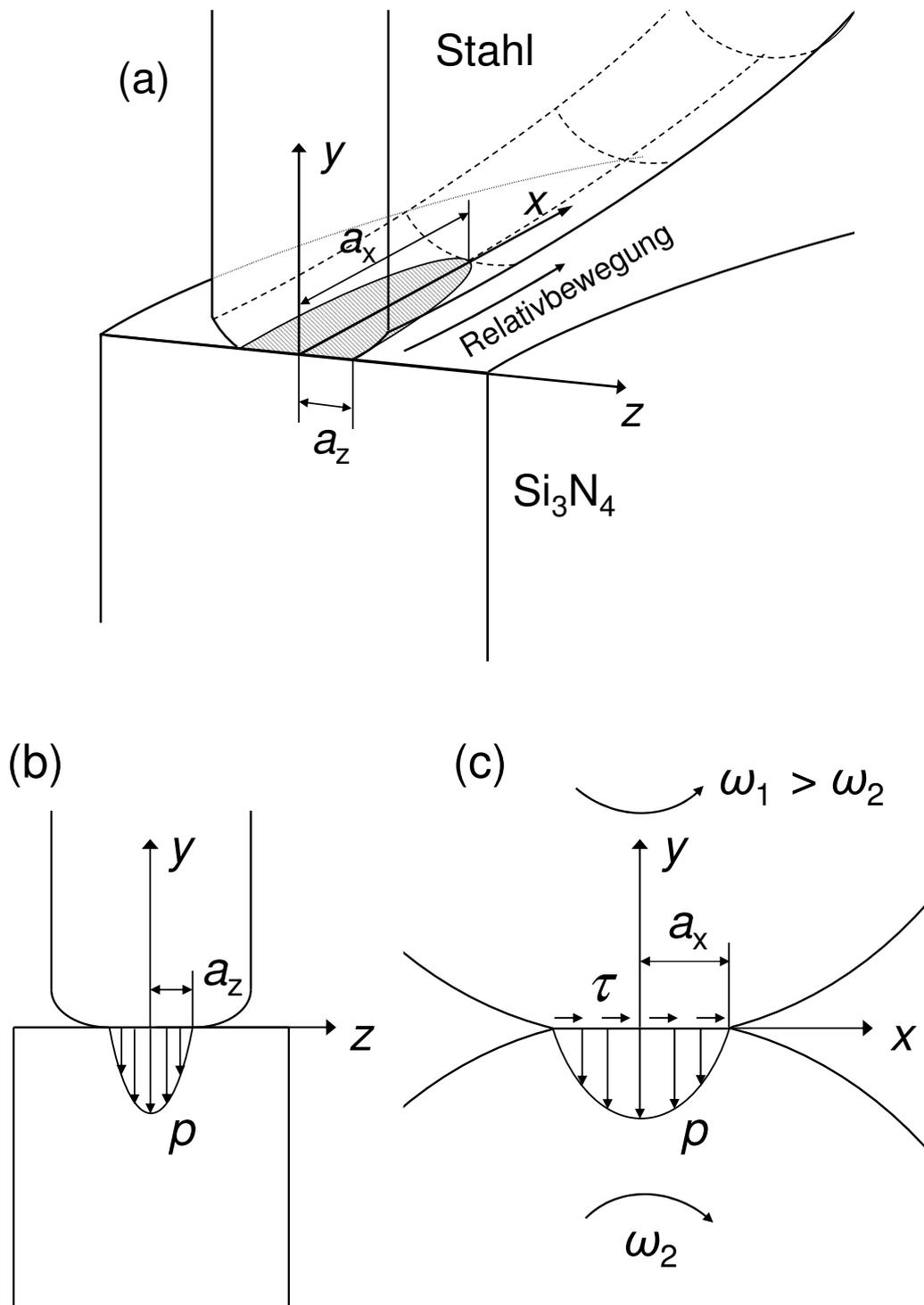


Abbildung 6.4: (a) 3D-Schnittdarstellung der Kontaktgeometrie mit den Halbachsen  $a_x$  bzw.  $a_z$  der Kontaktellipse; (b),(c) Schnittdarstellungen mit der Flächenpressung  $p(x, y)$  und der daraus resultierenden Scherbeanspruchung  $\tau(x, z)$ .

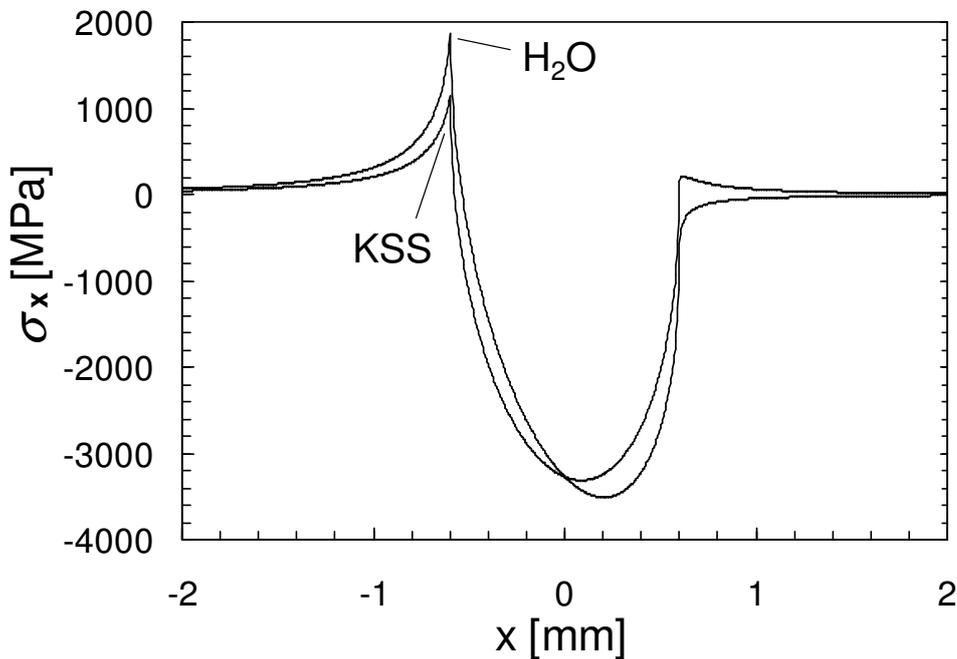


Abbildung 6.5: Verlauf  $\sigma_x(x)$  an der Rollenoberfläche ermittelt mit dem Design-Tool in Abhängigkeit der Schmierstoffe.

erforderlich ist. Das hat zur Konsequenz, dass die Keramikrolle auf einen Teilbereich reduziert werden muss, für den der zeitabhängige Spannungsverlauf berechnet wird. Im FE-Modell, welches als Grundlage für die STAU Vorhersagen dient, wird die  $\text{Si}_3\text{N}_4$ -Rolle auf einen  $45^\circ$ -Ausschnitt unter Ausnutzung der Symmetrie bzgl. der  $x$ - $y$ -Ebene reduziert. In diesem Ausschnitt befindet sich ein feinvernetzter Bereich, in dem die Spannungen für STAU ausgeschrieben werden (STAU-Elementset). Eine Gesamtansicht des FE-Modells ist in Abb. 6.6 dargestellt, das Elementset für die STAU-Rechnung ist zusätzlich hervorgehoben.

Die Reduzierung der FE-Analyse auf einen solchen kleinen Abschnitt ist dadurch gerechtfertigt, dass hohe Beanspruchungen nur im unmittelbaren Kontakt mit der Stahlscheibe auftreten. Unter der Voraussetzung eines stationären Prozesses sind die für diesen Teilbereich ermittelten Beanspruchungen repräsentativ für die gesamte Rolle. Neben der feinen Vernetzung ist es im Hinblick auf die STAU-Rechnung besonders wichtig, den zeitlichen Verlauf der Spannungen möglichst gut abzubilden. Zu diesem Zweck wird die FE-Rechnung in drei Schritten durchgeführt:

- Vorlauf: Der Kontakt zwischen Stahl- bzw. Keramikrolle wird außerhalb der feinvernetzten Bereichs hergestellt.

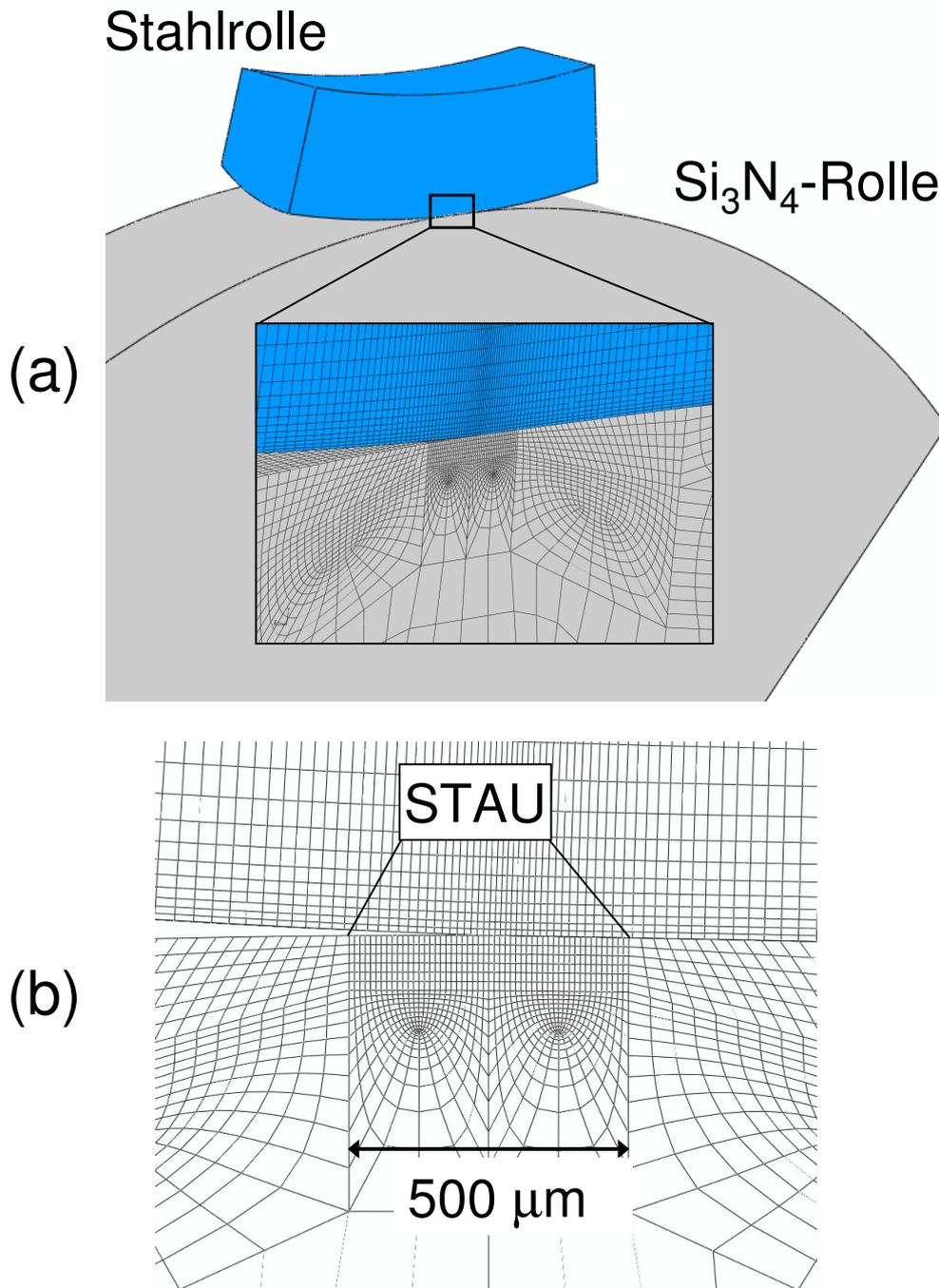


Abbildung 6.6: (a) Gesamtansicht des FE-Modells; (b) Detailansicht des feinvernetzten Bereichs für die STAU-Analyse.

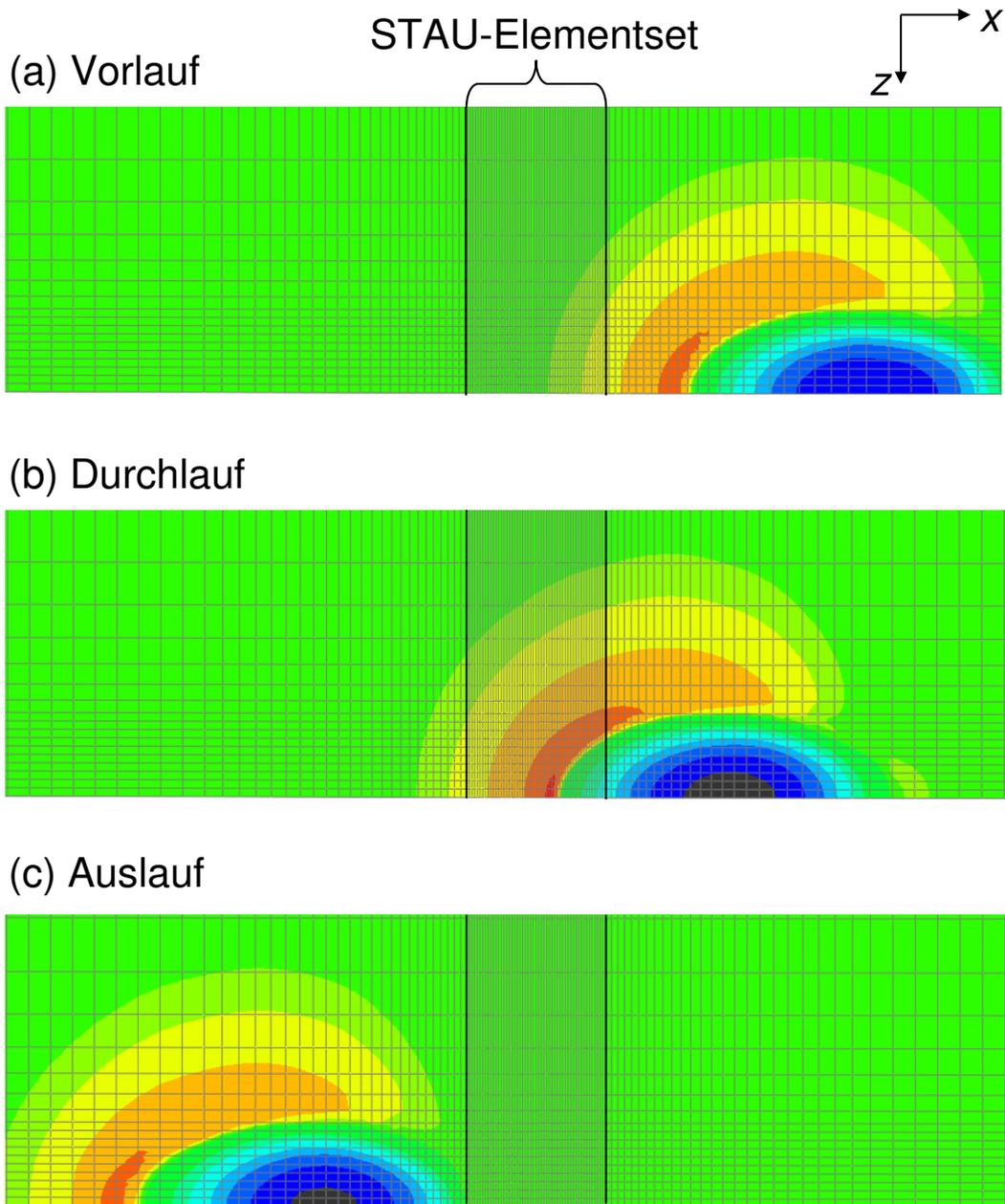


Abbildung 6.7: Exemplarischer Verlauf der max. Hauptspannung an der Oberfläche der  $\text{Si}_3\text{N}_4$ -Rolle in einem mitrotierenden Bezugssystem.

- Durchlauf: Beide Rollen werden gedreht, das feinvernetzte Elementset läuft in den Kontaktbereich hinein.
- Auslauf: Beide Rollen werden weiter gedreht, so dass der Kontaktbereich vollständig aus dem feinvernetzten Bereich herausläuft.

Durch dieses Verfahren ist gewährleistet, dass die Beanspruchungen innerhalb des Bereiches des STAU-Elementsets im Bezug auf den zeitlichen Verlauf realistisch sind. In Abb. 6.7 ist der zeitliche Verlauf der Beanspruchung im STAU-Set anhand der max. Hauptspannung an der Rollenoberfläche aufgezeigt. Die Spannungen (im STAU-Set) sind im Vorlauf sehr niedrig, erreichen ihr Maximum im Durchlauf, um im Nachlauf wieder abzuklingen. Der zeitliche Spannungsverlauf an den einzelnen Elementen bildet die Grundlage für die Identifikation der (zyklischen) Lastgeschichte in STAU.

Der wichtigste Aspekt in Bezug auf das FE-Modell ist die Gestaltung der Vernetzung des STAU-Elementsets, die unter zwei Gesichtspunkten erfolgt:

- Die Vernetzung muss fein genug sein, um den Spannungsverlauf im Kontaktbereich möglichst genau aufzulösen.
- Die Zeitintervalle der FE-Analyse müssen so klein gewählt werden, dass die maximale Beanspruchung für jedes Element im zeitlichen Verlauf abgebildet wird.

Diese zwei Gesichtspunkte müssen vor dem Hintergrund der benötigten Rechenressourcen abgewogen werden und stehen in enger Wechselwirkung zueinander. Bei einer groben Vernetzung reduziert sich die Anzahl der benötigten Zeitinkremente (und somit die Gesamtrechenzeit) auf Kosten der Genauigkeit der Spannungsverteilung. Auf der anderen Seite kann die Vernetzung nicht beliebig verfeinert werden, da dies im Hinblick auf den Zeitverlauf zu einer hohen Anzahl von Inkrementen in der FE-Rechnung führt. Darüber hinaus sollte das STAU-Elementset eine Mindestgröße haben, damit sich numerisch bedingte Abweichungen im Mittel weniger stark auf die STAU-Ergebnisse auswirken. Die laterale Abmessung des STAU-Sets in  $x$ -Richtung (Vgl. Abb. 6.6) wird daher auf  $500 \mu\text{m}$  festgelegt.

Um eine geeignete Vernetzung zu finden, wurde die Netzfeinheit systematisch variiert. In einem ersten Schritt wurden Abaqus-Elemente vom Typ C3D8 (linearer Verschiebungsansatz) mit zwei Kantenlängen  $l_e = 10 \mu\text{m}$  bzw.  $50 \mu\text{m}$  betrachtet. Diese Varianten werden in Abb. 6.8 anhand des Zugspannungsverlaufs  $\sigma_x(x, z = 0)$  mit den Ergebnissen des Design-Tools verglichen. Qualitativ betrachtet bewirkt diese Reduktion der Elementgröße um den Faktor 5 eine bessere Abbildung des Spannungsverlaufs. Im Hinblick auf die Absolutwerte  $\sigma_x$  wird die Spannungsspitze in beiden Fällen jedoch nur unzureichend aufgelöst. Vor

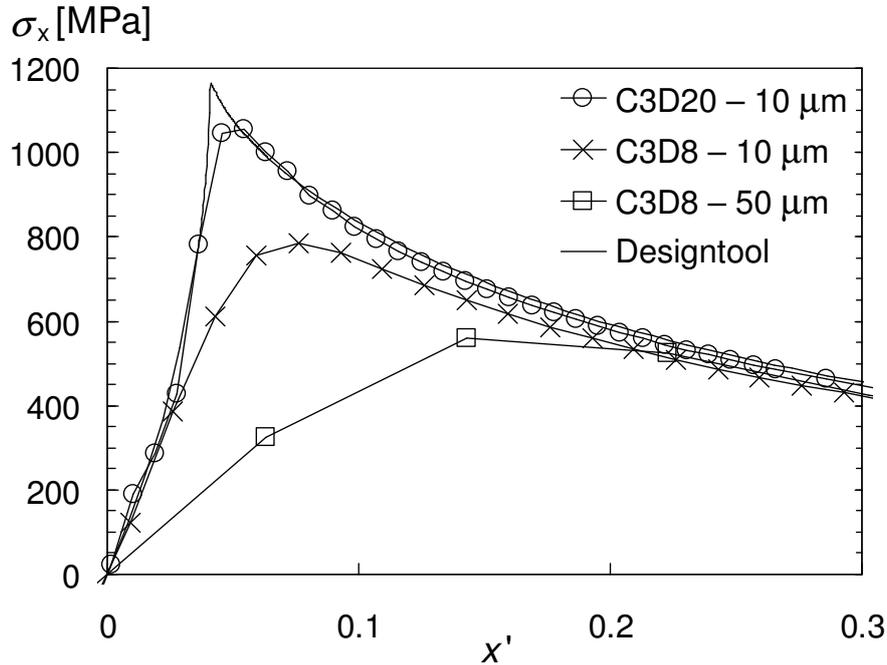


Abbildung 6.8: Vergleich der Zugspannungen am Rand der Kontaktzone, berechnet mit Design-Tool und FE in Abhängigkeit von Elementgröße (Kantenlänge) und Elementtyp (linear C3D8/quadratisch C3D20);  $x'$  ist auf die Halbaschse  $a_x$  normiert:  $x' = (x - a_x)/a_x$ ; FE-Rechnung für KSS.

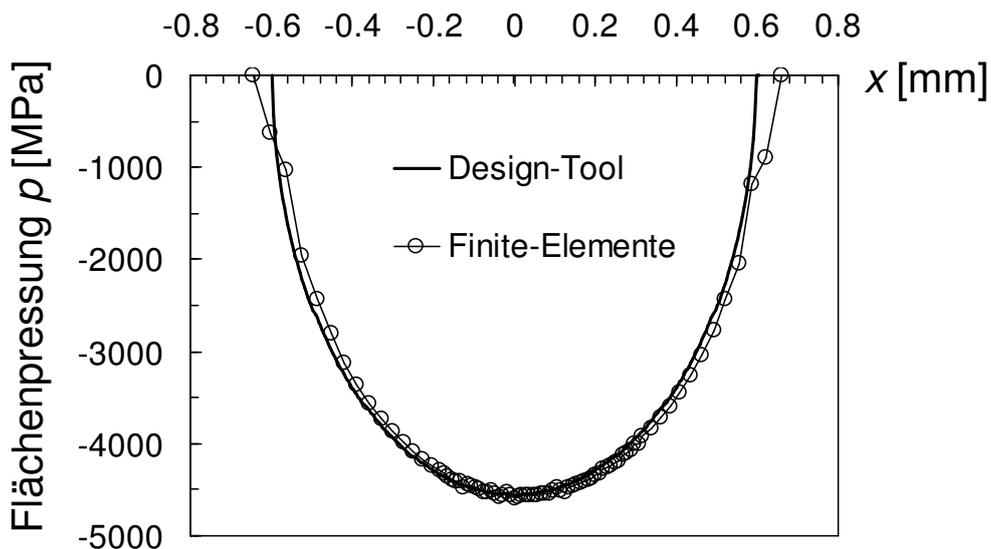


Abbildung 6.9: Vergleich des Verlaufs der Flächenpressung  $p(x)$  berechnet mittels Design-Tool und FE-Modell (C3D8,  $l_e = 10 \mu\text{m}$ ).

diesem Hintergrund wurde statt einer weiteren Netzverfeinerung mit dem C3D8-Elementtyp auf ein Element mit quadratischem Verschiebungsansatz (C3D20) übergegangen, das durch Zusatzknoten auf den Kanten bei gleicher Kantenlänge ( $10 \mu\text{m}$ ) den Spannungsverlauf hinreichend gut abbildet (Abb. 6.8). Von Nachteil ist hierbei, dass sich bei der Verwendung dieses Elementtyps die Rechenzeit im Vergleich zu den linearen Elementen erheblich erhöht, was allerdings angesichts der Qualität der Ergebnisse akzeptabel ist.

Bei Kontaktproblemen kann die Qualität der FE-Simulationsergebnisse im Bezug auf die Flächenpressung von der Vernetzung abhängig sein. Dies ist vor allem mit Blick auf die unterschiedlich vernetzten Bereiche relevant, die den Kontaktbereich während der Analyse durchlaufen. In der vorliegenden FE-Rechnung wurde der Surface-to-Surface Kontaktalgorithmus gewählt, da dieser weitgehend unabhängig von der Vernetzung ist. Ein Vergleich der im FE-Modell ermittelten Flächenpressung mit den Ergebnissen des Design-Tools in Abb. 6.9 zeigt eine gute Übereinstimmung beider Verläufe.

Die Spannungsverteilung an der Rollenoberfläche ist in Abb. 6.10 dargestellt. Aufgrund der Symmetrie des Modells ist jeweils nur die Hälfte des Kontaktbereichs abgebildet. Die Verteilung der maximalen Hauptspannung  $\sigma_1$  deutet bereits den ringförmigen Verlauf der teilkonischen Risse an der Oberfläche an. Die charakteristische gebogene Kontour der Hauptspannung ergibt sich aus der Überlagerung der Spannungskomponenten  $\sigma_x$ ,  $\sigma_z$  sowie  $\tau_{xz}$ . In der unmittelbaren Nähe der Symmetrieebene entspricht  $\sigma_1 = \sigma_x$ , hier befindet sich auch das Maximum von  $\sigma_1$ . Die Biegung der Kontour ergibt sich durch den Einfluss der Schubspannung  $\tau_{xz}$  bzw. im weiteren Verlauf durch  $\sigma_z$ . Der Betrag von  $\sigma_1$  nimmt mit zunehmender Entfernung von der Symmetrieebene ab.

Betrag und Verlauf der maximalen Hauptspannung werden unterhalb der Oberfläche durch die starken Gradienten in  $\sigma_x$  sowie durch den Einfluss der Schubspannung  $\tau_{xy}$  geprägt. Abb. 6.11 zeigt den Verlauf der Spannung  $\sigma_x$  entlang eines Pfades, der in der  $x$ - $y$ -Ebene normal zur Oberfläche in die Tiefe verläuft. Bei KSS ist der Betrag von  $\sigma_x$  nach  $10 \mu\text{m}$  bereits um 50% abgesunken. Dies zeigt, dass Spannungsgradienten in der Größenordnung natürlicher Oberflächenfehler vorliegen, was bei der Interpretation der STAU-Ergebnisse berücksichtigt werden muss.

Mit zunehmendem Abstand von der Oberfläche gewinnen die Schubspannung  $\tau_{xy}$  an Bedeutung, deren Verteilung in Abb. 6.12 dargestellt ist. Diese Schubspannungen bewirken die Änderung des anfangs senkrecht zur Oberfläche verlaufenden Risses hin zu der charakteristischen konischen Gestalt. Das lässt sich gut anhand der Hauptspannungstrajektoren zeigen, die in Abb. 6.13 zusammen mit dem

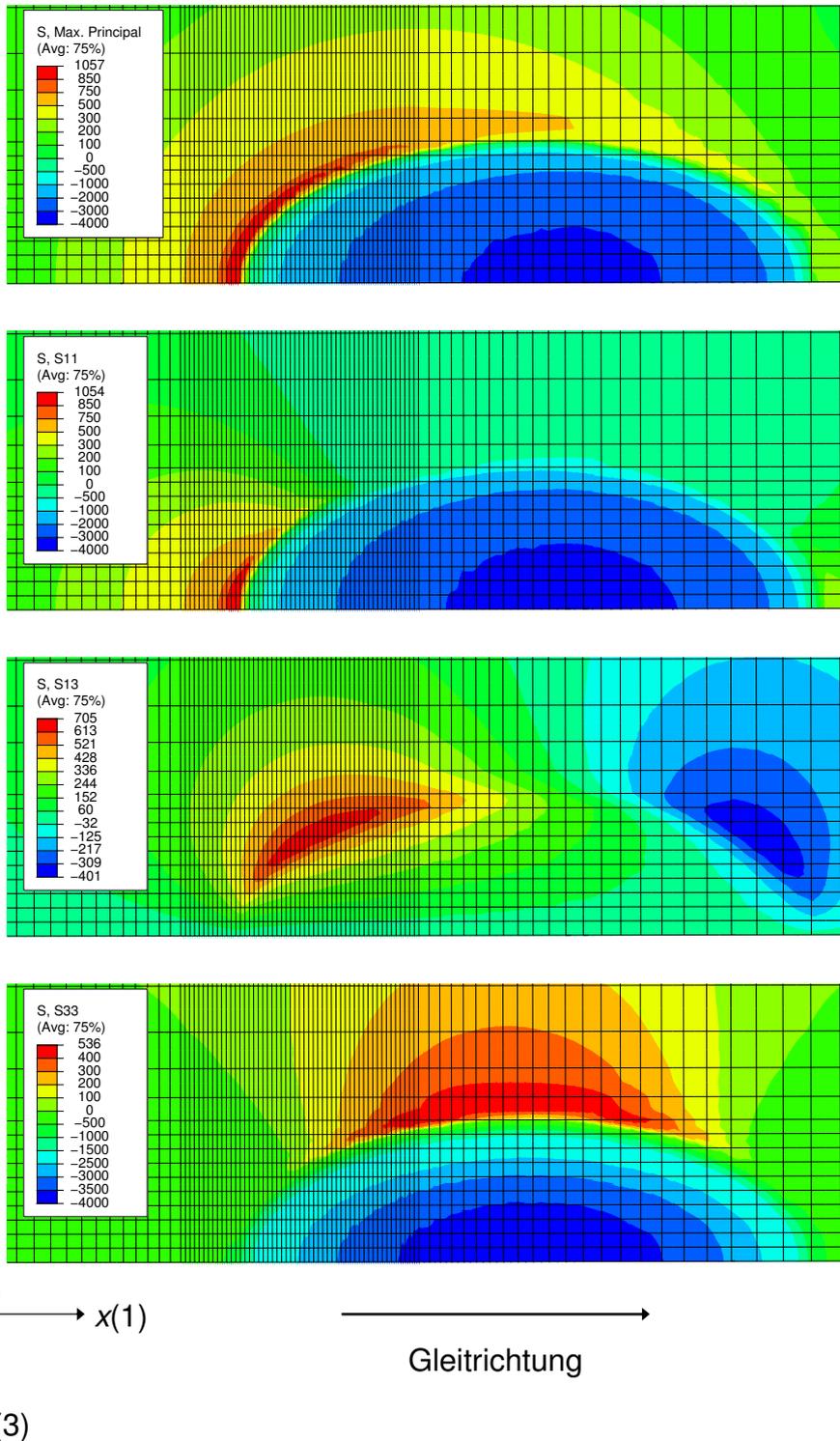


Abbildung 6.10: Verlauf der max. Hauptspannung  $\sigma_1$  sowie  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xz}$  und  $\sigma_z$  an der Oberfläche der Rolle; FE-Analyse für Schmierstoff KSS

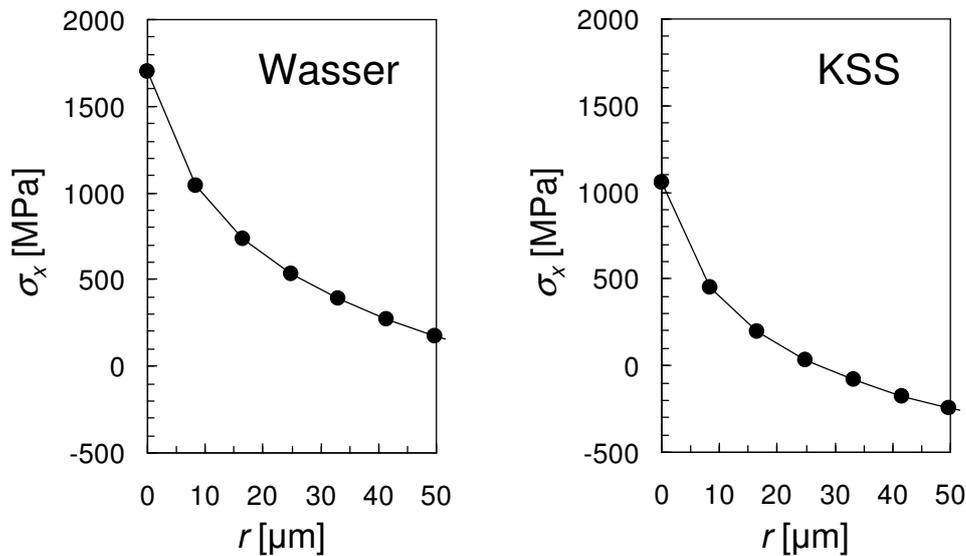


Abbildung 6.11: Tiefenverlauf der Spannung  $\sigma_x$  entlang eines normal zur Oberfläche verlaufenden Pfades  $r$  für Wasser und KSS.

Rissprofil aus Abb. 6.3 dargestellt sind. Unter der Voraussetzung, dass der Riss näherungsweise senkrecht zur Richtung der maximalen Hauptspannung verläuft ergibt sich eine gute qualitative Übereinstimmung zwischen den Trajektorien und dem Risspfad aus den Experimenten.

## 6.3 STAU-Analyse

### 6.3.1 Extraktion der zyklischen Lastgeschichte

Wird zyklische Ermüdung in STAU berücksichtigt, werden Lastkollektive für alle Elemente des STAU-Sets aus den Spannungsdaten, die an den Randknoten bekannt sind, extrahiert. Die Identifikation der Zyklen orientiert sich dabei an den Extremwerten der max. Hauptspannung. Abb. 6.14 zeigt einen typischen Verlauf von  $\sigma_1$ , wie er für ein exemplarisch ausgewähltes Element an der Oberfläche der Rolle vorliegt. Die Elementseite, die an der Oberfläche liegt, ist durch die Randknoten 1-4 (siehe Abb. 6.14 (a)) definiert. Die Knoten 1 und 2 liegen in der x-y-Symmetrieebene. Der zeitliche Verlauf der max. Hauptspannung  $\sigma_1$  an allen Randknoten ist in Abb. 6.14 (c) gezeigt. Wie zu erwarten ist der zeitliche Hauptspannungsverlauf in diesem Bereich analog dem Verlauf von  $\sigma_x$  entlang der x-Koordinate (Vgl. Abb. 6.5).

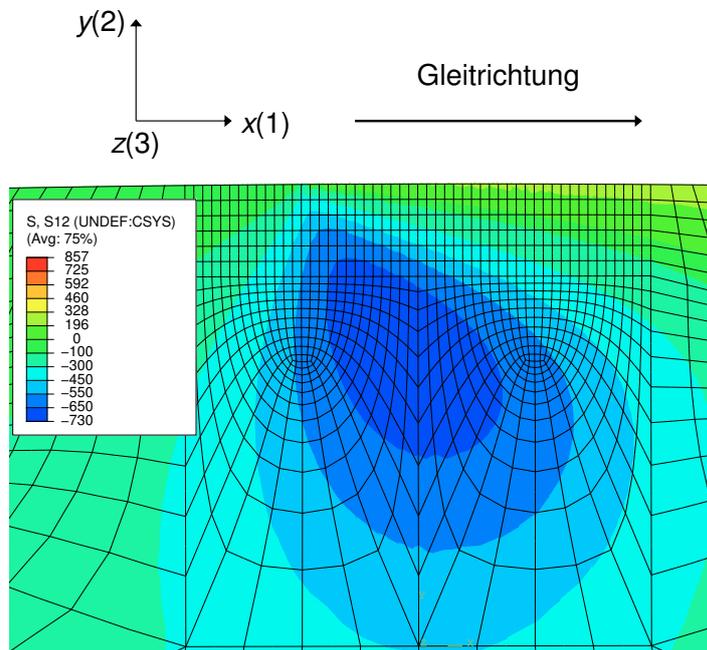


Abbildung 6.12: Verlauf der Schubspannung  $\tau_{xy}$  unter der Rollenoberfläche.

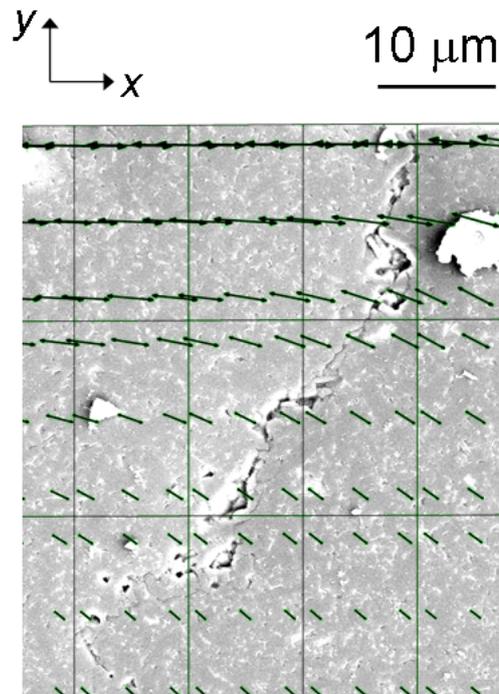


Abbildung 6.13: Vergleich des Risspfades mit den Trajektorien der max. Hauptspannung aus der FE-Rechnung.

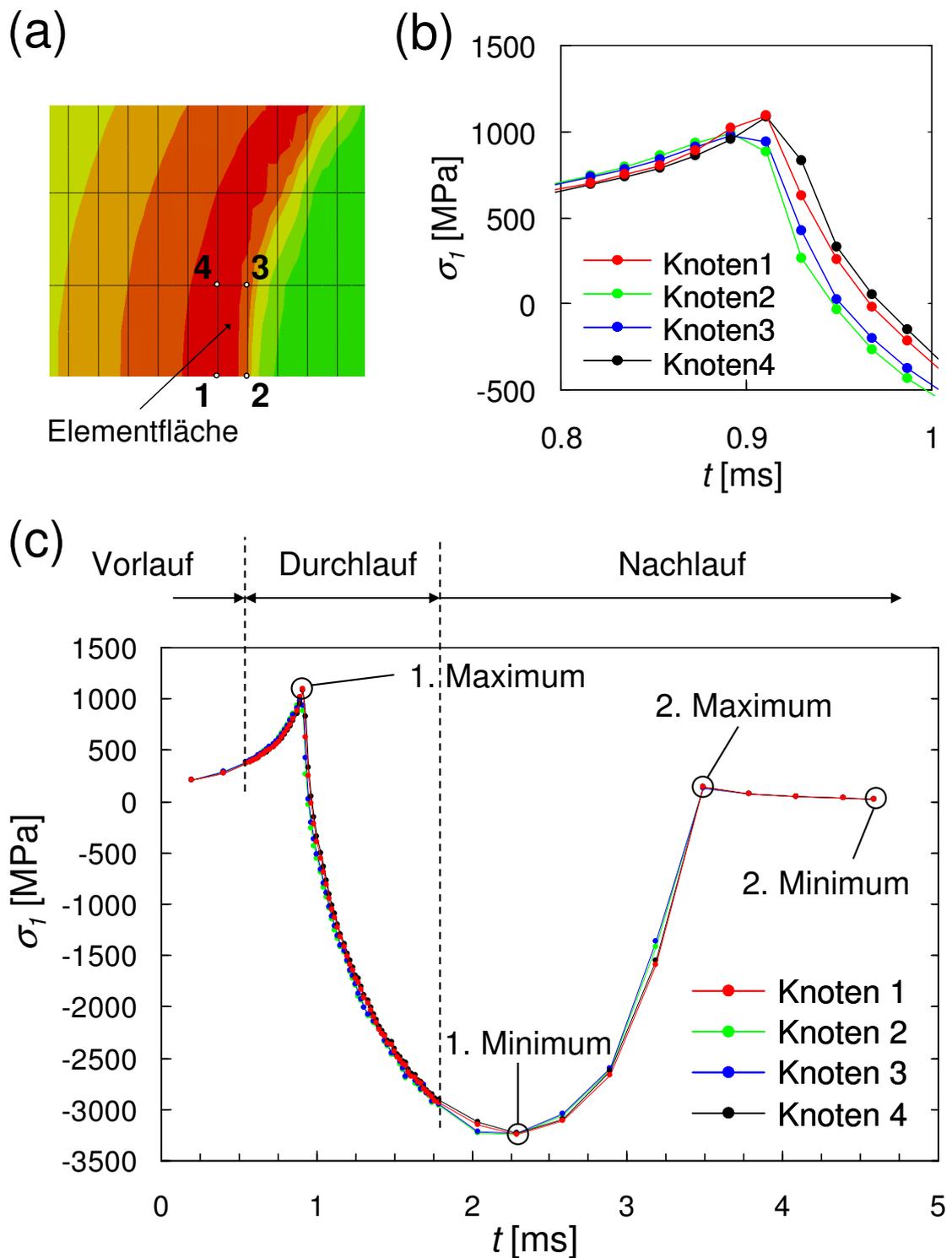


Abbildung 6.14: (a) Elementfläche an der Rollenoberfläche; (b),(c) zeitlicher Verlauf der max. Hauptspannung an den Randknoten der Elementfläche

Das zyklische Lastkollektiv wird durch die in Abb. 6.14 (c) eingetragenen lokalen Maxima und Minima bestimmt. Das erste Maximum wird im Durchlauf gefunden, der durch die kleinen Zeitinkremente gut abgrenzbar ist. Im Nachlauf ergibt sich ein zweites Maximum, der letzte Zeitpunkt bildet das dazugehörige zweite Minimum. Der Hauptspannungsverlauf an den einzelnen Knoten ist in Abb. 6.14 (b) im Bereich des ersten Maximums gesondert aufgetragen. Die höchsten Hauptspannungswerte treten an den Knoten 1 und 4 auf, die Knoten 2 und 3 durchlaufen ihren Maximalwert im vorausgehenden Zeitschritt. Der Zeitpunkt, an dem Knoten 1 und 4 ihr Maximum erreichen wird aufgrund der höheren Werte als maßgeblich angesehen und in der späteren STAU-Analyse für das gesamte Element verwendet. Als Konsequenz dieser Vorgehensweise gehen die Knoten 2 und 3 mit geringfügig niedrigeren Spannungen ein. Dies kann jedoch aufgrund der geringen Unterschiede zu den jeweiligen Maximalwerten an diesen Knoten als gute Approximation der Lastgeschichte betrachtet werden.

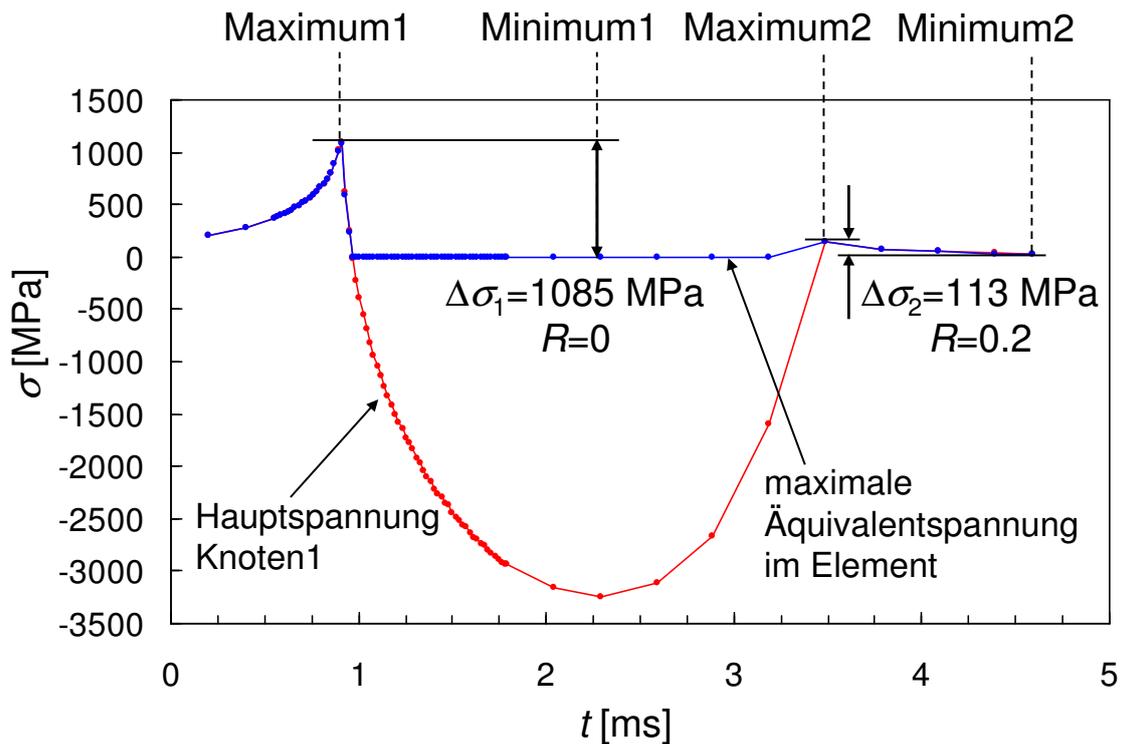


Abbildung 6.15: Vergleich des Verlaufs der max. Hauptspannung (Randknoten 1) mit der maximalen Äquivalentenspannung im Bezug auf das gesamte Elementoberfläche

Ein Vergleich des zeitlichen Verlaufs der maximalen Hauptspannung und der Äquivalentenspannung  $\sigma_{eq}$  ist in Abb. 6.15 gegeben. Der Äquivalentenspannung liegt

das Normalspannungskriterium zugrunde. Der zeitliche Verlauf bezieht sich dabei auf die Stützstelle  $(x, z, \varphi)$ , an der die höchsten  $\sigma_{\text{eq}}$ -Werte im Element auftreten, wobei es sich nicht um einen der Randknoten handelt. Die Übereinstimmung der Zeitpunkte, an denen die Maxima in beiden Verläufen auftreten zeigt, dass es sich bei der Hauptspannung um ein geeignetes Kriterium zur Bestimmung des Lastkollektivs handelt. Im Fall des Normalspannungskriteriums wird die Äquivalentsspannung im Bereich negativer Hauptspannung  $\sigma_{\text{eq}} = 0$ , so dass das  $R$ -Verhältnis des 1. Zyklus ebenfalls  $R = 0$  ist. Der  $R$ -Wert des zweiten Zyklus ist größer 0, da  $\sigma_{\text{eq}}$  im Nachlauf nicht vollständig abklingt. Diese Ungenauigkeit in der Abbildung des Lastkollektivs ist angesichts des geringen Werts  $\Delta\sigma_2$  im zweiten Zyklus hinnehmbar. Da der Äquivalentsspannungsverlauf in Abb. 6.15 charakteristisch für die Elemente an der Rollenoberfläche ist bleibt festzuhalten, dass für die versagensrelevanten Zyklen innerhalb der STAU-Analyse weitgehend ein  $R$ -Verhältnis von  $R = 0$  ermittelt wird.

### 6.3.2 STAU-Vorhersagen

Im Folgenden werden die Ergebnisse der STAU-Analyse für spontanes Versagen, unterkritisches Risswachstum und zyklisches Risswachstum (Ermüdung) vorgestellt. Im Fall von zyklischer Ermüdung wird zusätzlich noch zwischen den Umgebungsmedien der Lebensdauerermessungen unterschieden, die zu unterschiedlichen Risswachstumsparametern führen (siehe Kap. 4). Die verwendeten Risswachstumsparameter sind in Tab. 5.1 angegeben.

#### Vorgehensweise

Als Mixed-Mode-Kriterium zur Berechnung der Äquivalentsspannung wird das Normalspannungskriterium verwendet. Dies geht auf eine Arbeit von *Brückner-Foit et al.* [44] zum Mixed-Mode Einfluss bei  $\text{Si}_3\text{N}_4$  zurück. Hier wurde gezeigt, dass Mixed-Mode-Kriterien, die Schubspannungsanteile an Rissen berücksichtigen, die Festigkeit des Materials stark unterschätzen. Schubspannungssensitive Mixed-Mode-Kriterien sind daher ungeeignet für die Beschreibung des Versagensverhaltens von  $\text{Si}_3\text{N}_4$  und werden in dieser Arbeit nicht betrachtet.

Die mit STAU berechnete Ausfallwahrscheinlichkeit bezieht sich im Fall des Wälzversuchs auf die Wahrscheinlichkeit, dass es in einem bestimmten Teilvolumen bzw. Oberflächenabschnitt zur Rissinitiierung kommt. Rissinitiierung bedeutet in diesem Zusammenhang, dass ein natürlicher Fehler eine kritische Größe erreicht. Der weitere Rissverlauf und die Änderung der Rissgeometrie hin zu der charakteristischen teilkonischen Form wird dabei als direkte Konsequenz des Er-

eignisses angesehen, dass ein natürlicher Fehler kritisch wird. Damit wird das lokale Versagenskriterium in STAU mit der Bildung makroskopischer Risse im Wälzversuch verbunden.

Eine Beziehung zwischen der Rissdichte und der Ausfallwahrscheinlichkeit kann anhand der Größe des betrachteten Teilbereichs der Rolle hergestellt werden. Die Rissdichte  $\phi$  ist die Anzahl von Rissen im Bezug auf einen Abschnitt des Rollenumfanges mit der Einheit [1/Länge]. Das STAU-Elementset stellt beispielsweise einen 500  $\mu\text{m}$ -Ausschnitt der Rollenoberfläche dar. Wird die Ausfallwahrscheinlichkeit für das STAU-Set berechnet, entspricht dies unter Berücksichtigung der Symmetrieebene der Wahrscheinlichkeit, dass in einem 250  $\mu\text{m}$ -Ausschnitt ein Riss initiiert wird. Somit bezeichnet die Ausfallwahrscheinlichkeit in diesem Kontext die Wahrscheinlichkeit des Auftretens einer Rissdichte von  $\phi = 1/0.25 \text{ mm}^{-1} = 4 \text{ mm}^{-1}$ .

### Vorhersage der Lebensdauerverteilung

Im Folgenden werden Lebensdauer vorhersagen für den Wälzversuch mit den jeweiligen Schmiermittel Wasser und KSS vorgestellt. Die Ausfallwahrscheinlichkeit bezieht sich dabei auf eine Rissdichte von  $4 \text{ mm}^{-1}$ , die in Hinblick auf den späteren Vergleich mit den Experimenten gewählt wurde. Die Ausfallwahrscheinlichkeit  $P_f(Z)$  ist in Abb. 6.16 (a) für Wasser bzw. (b) für KSS in Abhängigkeit der Anzahl der Rotationen  $Z$  der Rolle dargestellt. Die Zahl der Rotationen entspricht jeweils der Anzahl periodischer Wiederholungen des Lastkollektives, das aus dem zeitlichen Spannungsverlauf des STAU-Elementsets ermittelt wird. Die hier gezeigten Werte wurden für Oberflächenfehler berechnet.

Für die Diagramme in den Abbildungen 6.16 (a) und (b) wurde eine Weibull-Auftragung gewählt, in der die Kurven mit zunehmender Rotationszahl mit den jeweiligen Werten  $m^*$  linear wachsen. Die dazugehörigen Weibull-Parameter  $N_0$  sind zusätzlich in den Diagrammen eingetragen. Bei unterkritischem bzw. zyklischem Risswachstum (für die in Luft gemessenen Risswachstumsparameter) entspricht die Ausfallwahrscheinlichkeit im Bereich weniger Rotationen dem Wert für spontanes Versagen. Bei zyklischem Risswachstum mit in Wasser gemessenen Parametern ist die Risswachstumsrate bereits so hoch, dass schon nach der ersten Rotation deutlich höhere Werte  $P_f$  ermittelt werden.

Das Niveau der Ausfallwahrscheinlichkeit ist im Fall der Wasserschmierung höher als bei KSS. Dies ist eine direkte Konsequenz des höheren Beanspruchungsniveaus aufgrund des höheren Reibwerts bei Wasser. Bei Wasser liegt bereits die spontane

Ausfallwahrscheinlichkeit bei  $> 10\%$ . Vergleichbare Werte werden im Fall von KSS erst nach ca.  $10^5$ -Rotationen für zyklisches Risswachstum vorhergesagt.

Bei den Vorhersagen für zyklisches Risswachstum kann die Auswirkung der unterschiedlichen zyklischen Risswachstumsparameter, die in den Medien Wasser und Luft ermittelt wurden, quantitativ anhand von Abb. 6.16 (b) aufgezeigt werden. Das Ausfallwahrscheinlichkeitsniveau liegt bei den Parametern aus Luft deutlich unter denen für Wasser. Dies zeigt sich auch anhand der Weibull-Parameter  $N_0$ , die sich um ca. zwei Größenordnungen unterscheiden.

### Vorhersage der Rissdichte

Die im vorherigen Abschnitt berechneten Ausfallwahrscheinlichkeitsverteilungen beruhen auf einer vorgegebenen Rissdichte. In diesem Abschnitt wird die Entwicklung der Rissdichte auf der Rollenoberfläche mit der Anzahl der Rotationen betrachtet. Dies geschieht durch die Vorgabe eines Ausfallwahrscheinlichkeitswertes, zu dem die dazugehörige Rotationszahl ermittelt wird. Hierfür eignet sich der  $N_0$ -Wert, der der Anzahl an Rotationen bei einer Ausfallwahrscheinlichkeit von 63% entspricht. Die Größe des betrachteten Rollenabschnitts wird in STAU durch einen Symmetriefaktor vorgegeben, der entsprechend der Größe des STAU-Elementsets und des gewünschten Rollenabschnitts angepasst wird. Über diesen Symmetriefaktor wird die Rissdichte vorgegeben, zu der der entsprechende  $N_0$ -Wert mit STAU berechnet wird.

Die Entwicklung der Rissdichte ist in Abb. 6.17 für den Wälzversuch mit KSS dargestellt. Die jeweiligen STAU-Analysen wurden für zyklisches Risswachstum mit den in Wasser gemessenen Risswachstumsparametern berechnet. In der logarithmischen Auftragung hängt die Rissdichte linear von der Anzahl der Rotationen ( $N_0$ ) mit der Steigung  $m^*$  ab. Diese Beziehung kann auch anhand der Definition von  $N_0$  (siehe Gl. (4.12))

$$N_0 = D^{-\frac{1}{m^*}} \quad (6.1)$$

abgeleitet werden. Ist  $D$  der Integralwert im Bezug auf eine bestimmte Teilfläche  $A_{\text{STAU}}$  (im vorliegenden Fall das STAU-Elementset), berechnet sich  $N_0$  für eine vorgegebene Rissdichte  $\phi$  mit dem Symmetriefaktor  $S_y$  gemäß

$$N_0 = (S_y \cdot D)^{-\frac{1}{m^*}} \quad (6.2)$$

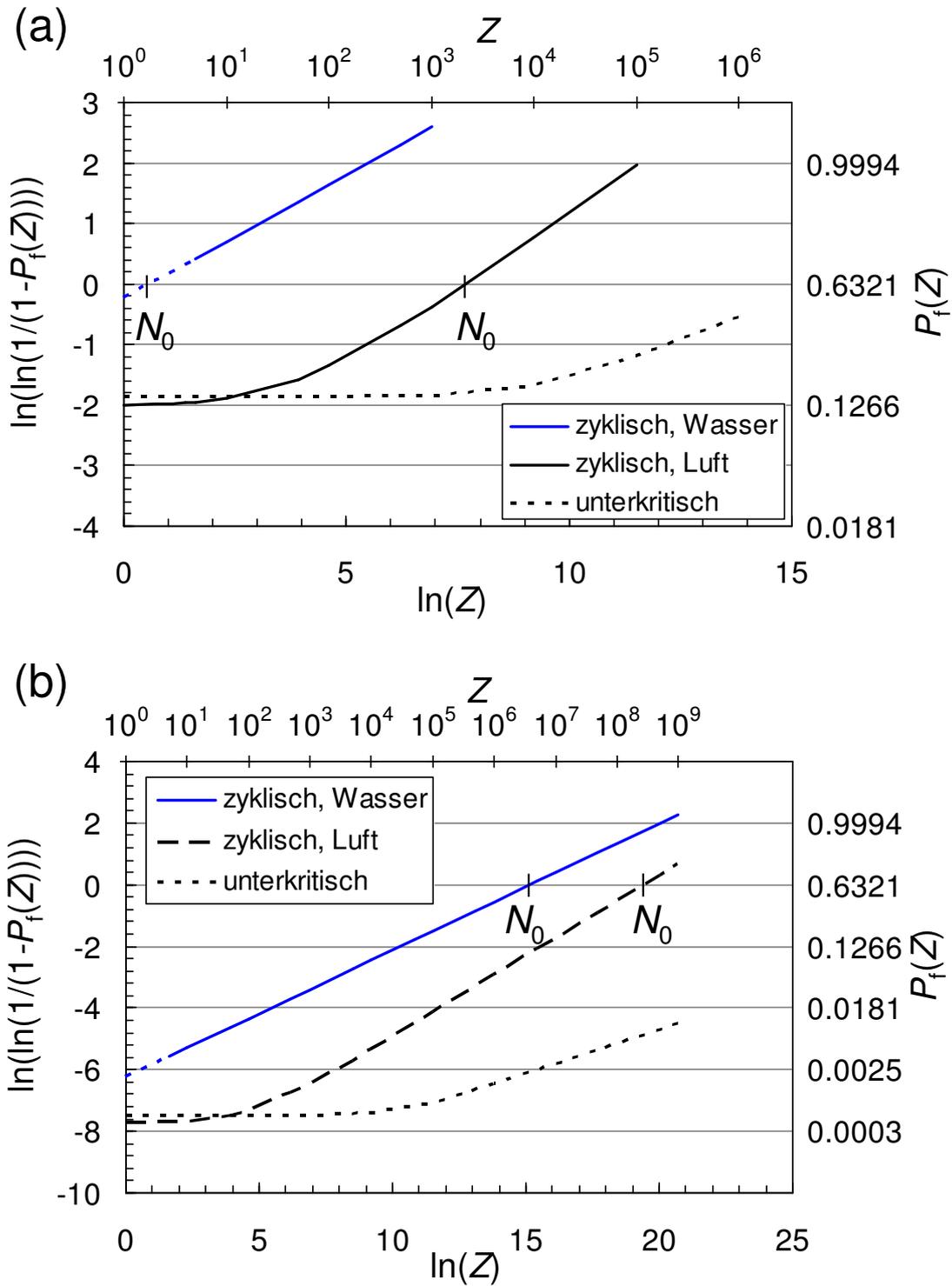


Abbildung 6.16: Ausfallwahrscheinlichkeitsverteilung für den Wälzversuch mit (a) **Wasser** und (b) **KSS** als Schmierstoff; Vorhersagen für spontanes Versagen, unterkritisches Risswachstum und zyklisches Risswachstum (mit Parametern für Wasser und Luft).

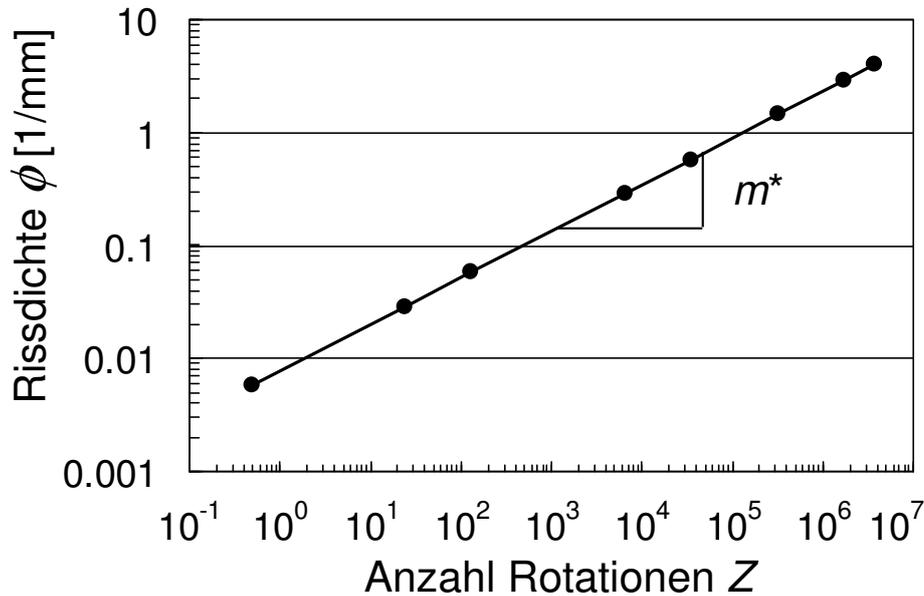


Abbildung 6.17: Entwicklung der Rissdichte in Abhängigkeit der Rotationen der Rolle  $Z$  bzw.  $N_0$  für KSS; Vorhersage für zyklisches Risswachstum (mit Parametern für Wasser).

wobei die Rissdichte über einen konstanten Faktor  $k$  mit dem Symmetriefaktor zusammenhängt<sup>2</sup>:

$$S_y = k \cdot \frac{1}{\phi} \quad . \quad (6.3)$$

Somit ergibt sich die Beziehung zwischen Rissdichte  $\phi$  und  $N_0$  über die Potenz  $m^*$ :

$$\phi = (kD \cdot N_0)^{m^*} \quad . \quad (6.4)$$

### 6.3.3 Vergleich mit experimentellen Ergebnissen

Um die STAU-Vorhersagen anhand der experimentellen Ergebnisse zu bewerten, wurde die Ausfallwahrscheinlichkeit für eine bestimmte Versuchsdauer und Rissdichte bestimmt. Die in der STAU-Analyse betrachtete Anzahl von Rotationen entspricht der Versuchsdauer, bei der Rissbildung mit der in Abb. 6.2 gezeigten Rissdichte auftritt. Im Fall von Wasser sind dies 2 min (350 Rotationen), im Fall von KSS werden 10 h (105000 Rotationen) betrachtet (Vgl. Tab. 6.2). Die

<sup>2</sup>Die Herleitung befindet sich in Anhang D

Rissdichte für die STAU-Analyse ist auf  $4 \text{ mm}^{-1}$  vorgegeben, so dass die Wahrscheinlichkeit vorhergesagt wird, dass sich entlang der Umfangsrichtung der Rolle 4 Risse pro mm bilden.

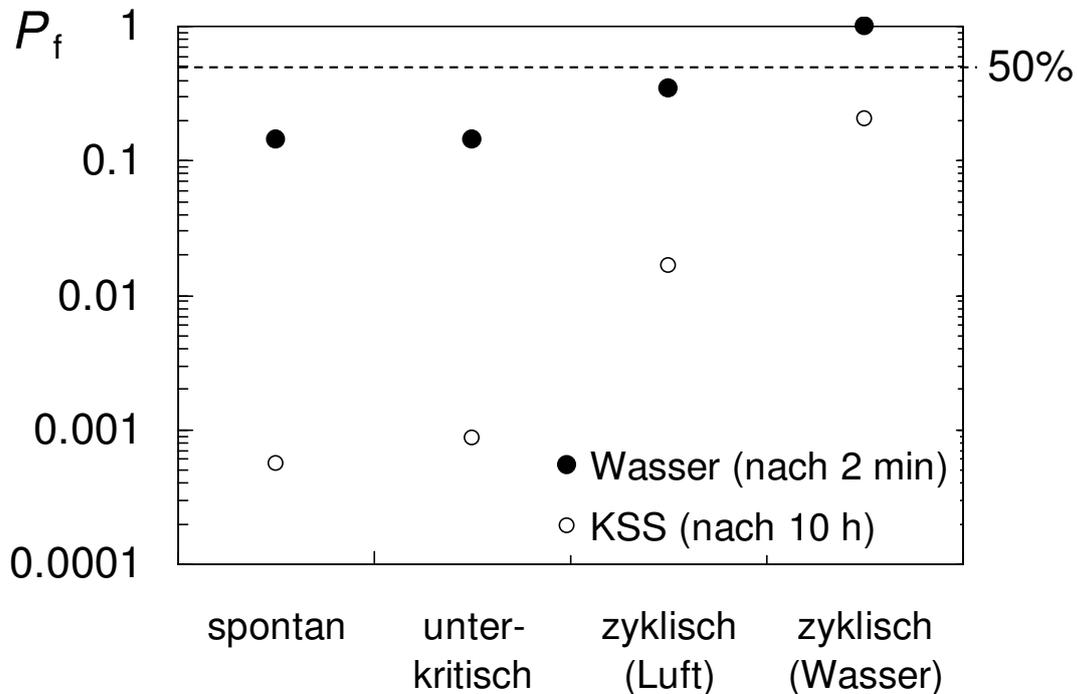


Abbildung 6.18: Ausfallwahrscheinlichkeit für Oberflächenfehler in Abhängigkeit der Schmierstoffe Wasser und KSS und der Versagensmoden spontanes, unterkritisches und zyklisches (mit den Parametern in Luft und Wasser) Risswachstum.

Die Ergebnisse der Ausfallwahrscheinlichkeit für Oberflächenfehler sind in Abb. 6.18 graphisch dargestellt und in Tab. 6.4 zusammengefasst. Im Fall von zyklischem Risswachstum wird zusätzlich die charakteristische Lebensdauer (63%-Quantil der Weibull-Verteilung) berechnet, die eine anschauliche Größe darstellt, nach welcher Versuchsdauer mit Schädigung zu rechnen ist. Die STAU-Rechnungen wurden jeweils für Volumen- und Oberflächenfehler durchgeführt. Die Ausfallwahrscheinlichkeit im Bezug auf Volumenfehler liegt stets ca. eine Größenordnung unter der von Oberflächenfehlern. Somit sind Oberflächenfehler für das Versagensverhalten im Wälzversuch relevant.

Die für Oberflächenfehler berechnete Ausfallwahrscheinlichkeit für spontanes Versagen liegt bei Wasser bereits bei einem relativ hohen Wert von 14%. Bei der Vorhersage auf Basis von zyklischem Risswachstum (mit Wasser-Parametern) wird

Schmierstoff	Wasser $\mu = 0.21$		KSS $\mu = 0.085$	
Fehlerart	Volumen	Oberfläche	Volumen	Oberfläche
spontanes Versagen $P_f$	$2.2 \cdot 10^{-3}$	0.14	$5.4 \cdot 10^{-6}$	$5.6 \cdot 10^{-4}$
unterkritisch $P_f$	$2.2 \cdot 10^{-3}$	0.15	$8.2 \cdot 10^{-6}$	$8.6 \cdot 10^{-4}$
zyklisch (Luft) $P_f$	$5.2 \cdot 10^{-3}$	0.35	$1.1 \cdot 10^{-4}$	$1.6 \cdot 10^{-2}$
$N_0$ (in Rotationen)	$1.1 \cdot 10^{+7}$	$2.3 \cdot 10^{+3}$	$2.7 \cdot 10^{+12}$	$2.7 \cdot 10^{+8}$
zyklisch (Wasser) $P_f$	$9.9 \cdot 10^{-2}$	0.99	$1.9 \cdot 10^{-3}$	0.20
$N_0$ (in Rotationen)	$8.1 \cdot 10^{+4}$	1.9	$4.1 \cdot 10^{+11}$	$3.8 \cdot 10^{+6}$

Tabelle 6.4: STAU-Ergebnisse:  $P_f$ -Ausfallwahrscheinlichkeit und  $N_0$ -charakteristische Lebensdauer; Die  $P_f$ -Werte bei unterkritischem und zyklischen Versagen beziehen sich auf eine Versuchsdauer von 2 min (Wasser) bzw. 10 h (KSS).

nach 2 min eine Ausfallwahrscheinlichkeit von nahezu 100% erreicht. Unterkritisches Risswachstum und zyklisches Risswachstum mit den in Luft gemessenen Parametern haben nur einen geringen Effekt auf die Ausfallwahrscheinlichkeit. Die STAU-Vorhersagen für Wasser zeigen, dass sich Ermüdung trotz der relativ kurzen Versuchsdauer auf die Wahrscheinlichkeit der Rissinitiierung auswirkt. Darin zeigt sich eine Übereinstimmung mit den Experimenten, bei denen erst nach 2 min ein Rissnetzwerk entsteht.

Der Einfluss zyklischer Ermüdung, der sich bei Wasser bereits andeutet, ist im Fall von KSS wesentlich deutlicher ausgeprägt. Die Ausfallwahrscheinlichkeit für spontanes und unterkritisches Versagen liegt in diesem Fall auf einem sehr niedrigen Niveau  $< 0.1\%$  (siehe Abb. 6.18). Höhere  $P_f$ -Werte werden in der zyklischen Analyse mit den in Luft gemessenen Parametern erhalten, wobei diese Ergebnisse, die im Bereich weniger Prozent liegen, keine Rissinitiierung vorhersagen. Der höchste Wert  $P_f$  wird für die Risswachstumsparameter in Wasser erhalten. Mit ca. 20% liegt dieser Wert in einer Größenordnung, bei der mit Rissinitiierung gerechnet werden kann. Die Analyse für KSS verdeutlicht, dass nur durch die Berücksichtigung von zyklischer Ermüdung eine Übereinstimmung zwischen Experimenten und Vorhersagen erreicht werden kann. Zudem zeigt sich, dass das Umgebungsmedium Wasser, das zu einem großen Teil in KSS (95%  $H_2O$ ) enthalten ist, bereits in den Risswachstumsparametern berücksichtigt werden muss, um stark nicht-konservative Vorhersagen zu vermeiden.

### 6.3.4 Wichtige Einflussgrößen auf die Lebensdauervorhersage

Die charakteristische Lebensdauer, die unter zyklischer Ermüdung für KSS vorhergesagt wird (Tab. 6.4), liegt mit  $3.8 \cdot 10^6$  Rotationen (ca. 360 h) deutlich über der tatsächlichen Versuchsdauer (10 h), bei der Rissbildung im Experiment eintritt. Im Folgenden werden daher ausgewählte Einflussgrößen der Zuverlässigkeitsanalyse anhand der STAU-Analyse für KSS untersucht. Im Detail zielt diese Studie auf die Sensitivität der Ausfallwahrscheinlichkeit bezüglich der zyklischen Risswachstumsexponenten einerseits und zeitlich bedingten Variationen des zugrunde liegenden Spannungsfeldes andererseits ab.

#### Einfluss der Risswachstumsexponenten

Der Risswachstumsexponent  $n$  beeinflusst neben dem Weibull-Modul maßgeblich die Berechnung der Integrale über Volumen bzw. Oberfläche, so dass Variationen in  $n$  als eine wesentliche Quelle von Unsicherheit in der Zuverlässigkeitsanalyse anzusehen sind. Der Parameter wurde daher in der folgenden Analyse systematisch variiert, wobei ein Wertebereich von  $n = 20 - 30$  abgedeckt wird. Dieser Wertebereich wurde vor dem Hintergrund der Risswachstumsdaten in Kap. 5 gewählt, wo eine signifikante Abhängigkeit von  $n$  bzgl. des  $R$ -Verhältnisses für die Daten an Luft nachgewiesen wird. Bei der Parameterstudie muss beachtet werden, dass eine Variation von  $n$  zu veränderten Werten  $B$  gemäß Gl. (4.9) bzw. (2.11) führt, welche in Tab. 6.5 aufgeführt sind.

$n$	20	22	24	26	28	30
$B$ [MPa <sup>2</sup> · Zyklus]	$1.71 \cdot 10^4$	$1.54 \cdot 10^4$	$1.40 \cdot 10^4$	$1.28 \cdot 10^4$	$1.18 \cdot 10^4$	$1.10 \cdot 10^4$

Tabelle 6.5: Abhängigkeit des zyklischen Risswachstumparameter  $B$  vom Exponenten  $n$ ; Werte basieren auf dem in Wasser gemessenen Wert  $A^* = 1.12 \cdot 10^4$  mit  $p = 3.5$ .

Die Ausfallwahrscheinlichkeit nach 10 h sowie die charakteristische Lebensdauer  $N_0$  sind in Abb. 6.19 (a) in Abhängigkeit von  $n$  aufgetragen. Die Verringerung des Exponenten bewirkt eine Erhöhung der Ausfallwahrscheinlichkeit bzw. eine Verringerung von  $N_0$ . Der Wert  $n = 24$  führt zu einer charakteristischen Lebensdauer von ca. 7.5 h, was sehr gut mit der experimentellen Versuchszeit von 10 h übereinstimmt. Eine weitere Verringerung auf  $n = 20$  führt zu Lebensdauern von unter einer Stunde.

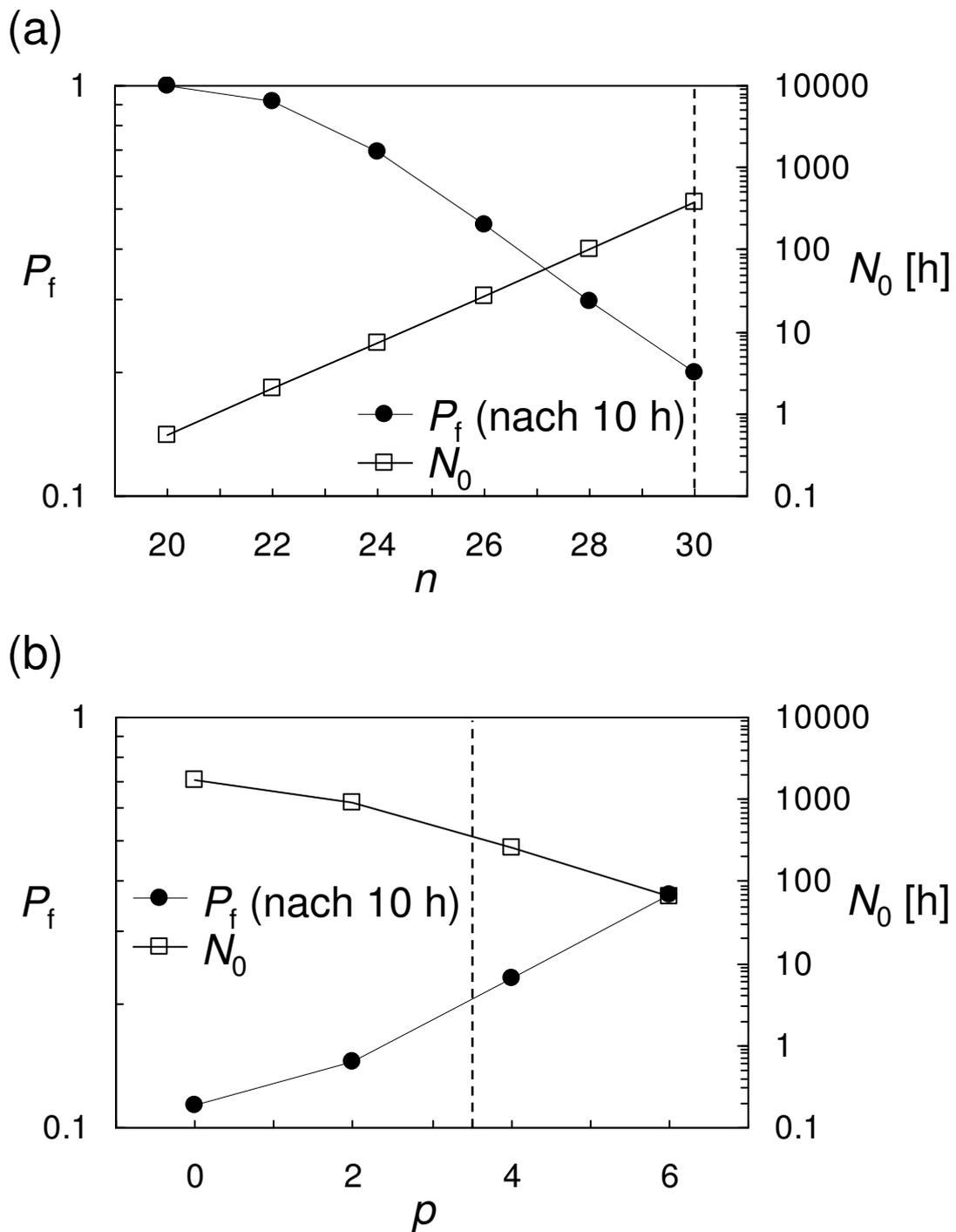


Abbildung 6.19: Ausfallwahrscheinlichkeit  $P_f$  nach 10 h bzw.  $N_0$  in Abhängigkeit der Risswachstumsexponenten  $n$  (a) und  $p$  (b); gestrichelte Linien kennzeichnen die Ergebnisse in Tab. 6.4.

$p$	0	2	4	6
$B$ [MPa <sup>2</sup> · Zyklus]	$1.21 \cdot 10^5$	$3.03 \cdot 10^4$	$7.57 \cdot 10^3$	$1.89 \cdot 10^3$

Tabelle 6.6: Abhängigkeit des zyklischen Risswachstumparameters  $B$  vom Exponenten  $p$  im Medium Wasser; Werte basieren auf  $A^* = 1.12 \cdot 10^4$  mit  $n = 29.9$

Angesichts der guten Ergebnisse bei niedrigen Werten  $n$  muss vor dem Hintergrund der zyklischen 4PB-Versuche diskutiert werden, in welchem Maße eine Reduktion von  $n$  gerechtfertigt ist. Die Versuche in Wasser, die bei  $R = 0.5$  durchgeführt wurden, haben einen Wert von  $n \approx 30$  zum Ergebnis. Ähnliche Werte  $n$  werden in Luft ermittelt, was darauf hindeutet, dass  $n$  unabhängig vom Umgebungsmedium ist. Dies würde bedeuten, dass sich wie bei Luft für niedrigere  $R$ -Werte auch im Fall von Wasser Exponenten im Bereich von  $n \approx 20$  einstellen. Damit wäre der im vorigen Abschnitt erwähnte Wert  $n = 24$ , der im Fall von Luft beide Risswachstumskurven repräsentiert, eine gute Abschätzung des tatsächlichen Risswachstumsexponenten.

Ein weiteres Argument für die Verwendung niedrigerer Risswachstumsexponenten ergibt sich aus dem Verlauf der Äquivalentspannung in Abb. 6.15. Der Übergang in den Druckbereich nach dem Durchlauf hoher Zugspannungen bewirkt ein  $R$ -Verhältnis von  $R = 0$ . Geht man davon aus, dass es sich hierbei um einen typischen Spannungsverlauf im Kontaktbereich handelt, kann man ableiten, dass im Bereich hoher Beanspruchungen Werte von  $R = 0$  vorherrschen. Somit wären mit Blick auf die Anwendung  $n$ -Werte im Bereich von 20 eher realistisch.

Der Risswachstumsparameter  $p$  wurde in einer zweiten Sensitivitätsanalyse variiert. Der Hintergrund ist, dass im Fall von Wasser bei der Bestimmung des Parameters  $C^*$  ein fester Wert  $p = 3.5$  angenommen wurde. Der Einfluss von  $p$  auf den Parameter  $B$  (der sich aus  $C^*$  bzw.  $A^*$  berechnet) ist in Tab. 6.6 dargestellt. Abb. 6.19 (b) zeigt die Ergebnisse von  $P_f$  bzw.  $N_0$ , die sich in Abhängigkeit von  $p$  ergeben. Der Einfluss von  $p$  auf die Ausfallwahrscheinlichkeit ist im wesentlichen auf die Änderung der Parameters  $B$  zurückzuführen (Tab. 6.6), was auf die Berechnung von  $C^*$  zurückgeht. Darüber hinaus wirken sich kleine Variationen im Bereich des Originalwerts  $p = 3.5$  nicht signifikant auf die STAU-Ergebnisse aus. Daraus kann geschlossen werden, dass die STAU-Vorhersagen nur wenig empfindlich bezüglich Unsicherheiten in  $p$  sind.

### Einfluss von Reibwert und Verschleiß

Die Unterschiede im Ausfallwahrscheinlichkeitsniveau, die sich je nach betrachtetem Schmierstoff ergeben, deuten darauf hin, dass die STAU-Ergebnisse empfindlich im Bezug auf Variationen des Spannungszustandes sind. Daher werden im Folgenden zwei Einflussgrößen betrachtet, die den Spannungszustand wesentlich beeinflussen: Reibwert des Schmiermediums und Verschleiß.

Um den Einfluss von Variationen des Reibwerts zu untersuchen, wurde eine Parameterstudie mit dem FE-Modell durchgeführt. Hierbei wurde  $\mu$  im Bereich der experimentellen Reibwerte systematisch variiert. Statt eines vollständigen Durchlaufs des STAU-Elementsets wurden bei diesen FE-Modellen nur wenige Zeitschritte simuliert. Diese Ergebnisse geben jedoch hinreichend Aufschluss über die Variation des Spannungsfeldes im Bereich der interessierenden Reibwerte.

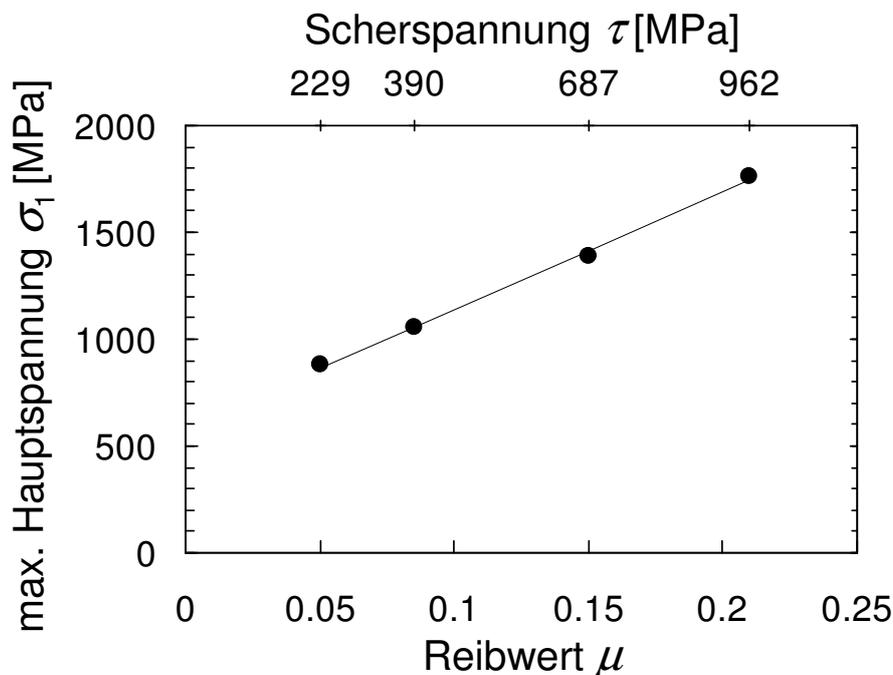


Abbildung 6.20: Max. Hauptspannung in Abhängigkeit des Reibwerts  $\mu$ , die Scherspannung  $\tau_0$  bezeichnet die max. Friktionsbelastung im Kontakt

Die Abhängigkeit der max. Hauptspannungen  $\sigma_1$  vom Reibwert  $\mu$  ist in Abb. 6.20 dargestellt und kann sehr gut durch eine lineare Beziehung beschrieben werden. Zusätzlich sind die jeweiligen max. Scherspannungen angegeben, die über die max. Flächenpressung, die konstant ist, unmittelbar von  $\mu$  abhängen. Mit

dem Hauptspannungsverlauf kann die Variation des Spannungsfeldes mittels eines Amplitudenfaktors beschrieben werden, mit dem die Äquivalentspannung in STAU gewichtet wird. Auf diese Weise können ausgehend der vorhandenen STAU-Analyse für einen festen Wert  $\mu$  Variationen des Reibwerts im Hinblick auf die Ausfallwahrscheinlichkeit betrachtet werden.

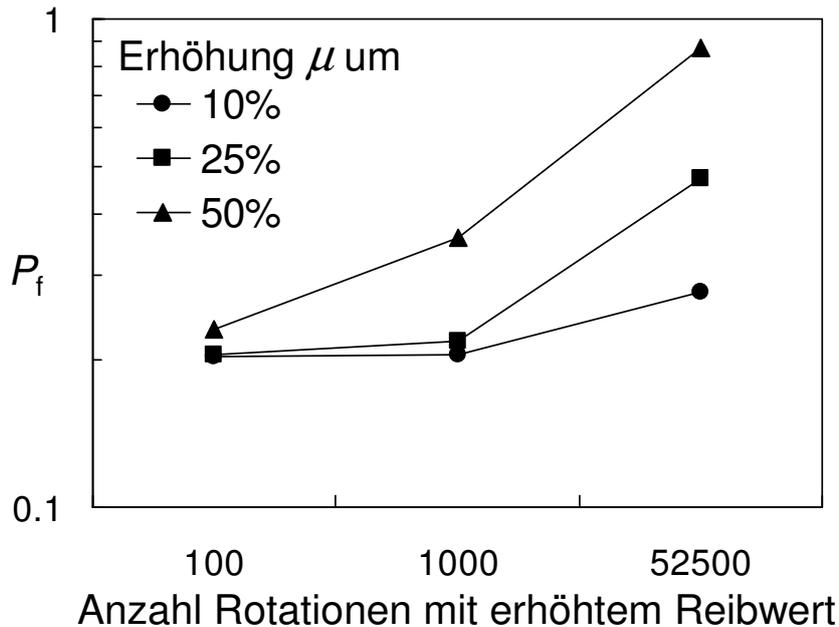


Abbildung 6.21: Einfluss der Variation des Reibwerts  $\mu = 0.085$  auf  $P_f$ . Zyklische Analyse für 105000 Rotationen (10 h) mit unterschiedlichen Anteilen erhöhter Reibwerte.

Die Auswirkung einer Variation des Reibwerts  $\mu = 0.085$  auf die Ausfallwahrscheinlichkeit ist in Abb. 6.20 dargestellt. Der Reibwert  $\mu$  wurde jeweils um 10%, 25% bzw. 50% erhöht. Zusätzlich wurde die Anzahl der Rotationen mit überhöhtem Reibwert variiert, wobei die Gesamtversuchsdauer von 105000 Rotationen (10 h) konstant ist. Dies bedeutet, dass bei 1000 Rotationen mit erhöhtem  $\mu$  104000 Rotationen mit dem Originalwert in die Berechnung von  $P_f$  eingehen. Dies wird mittels der Versagensbeschreibung für serielle zyklische Lastkollektive erfasst.

Die Ergebnisse zeigen, dass sich eine Erhöhung des Reibwerts bis zu einem Wert ca. 25% nur gering auswirkt. In diesem Fall zeigen sich signifikante Abweichungen von den Originalergebnissen erst, wenn die Anzahl der Rotationen mit erhöhtem Reibwert die Hälfte der Gesamtversuchsdauer ( $> 52500$ ) übersteigt. Wird der Reibwert weiter auf 50% erhöht, wirkt sich dies bereits bei wenigen Zyklen (im

Minutenbereich) aus. Insgesamt zeigen diese Ergebnisse, dass die Sensitivität von  $P_f$  bezüglich kleinen Reibwertschwankungen gering ist.

Der Einfluss von Verschleiß kann analog dem Vorgehen beim Reibwert anhand der Variation des Spannungsfeldes abgeschätzt werden. Verschleiß bewirkt eine Geometrieänderung der berührenden Körper im Bereich hoher Kontaktbeanspruchungen, was zu einer Änderung der Flächenpressungsverteilung führt. Im Wälzversuch ist z.B. die Abflachung der Rundung ( $r = 5 \text{ mm}$ ) an der Stirnseite der Stahlrolle denkbar, was zur Abnahme der max. Flächenpressung  $p_0$  mit zunehmender Versuchsdauer führen würde. Eine Beziehung zwischen  $p_0$  und der Hauptspannung besteht über die Scherspannung  $\tau_0$  bei konstantem Reibwert  $\mu$ . Somit kann für eine gegebene Reduktion  $p_0$  bzw.  $\tau_0$  die dazugehörige Hauptspannung ermittelt werden, woraus sich ein Faktor zur Gewichtung der Äquivalentspannung  $\sigma_{eq}$  ergibt. Die Änderung der Kontaktgeometrie wird bei dieser Vorgehensweise vernachlässigt. Somit handelt es sich bei dieser Methode um eine grobe Abschätzung des Verschleißeinflusses anhand einer Variation des Spannungsfeldes.

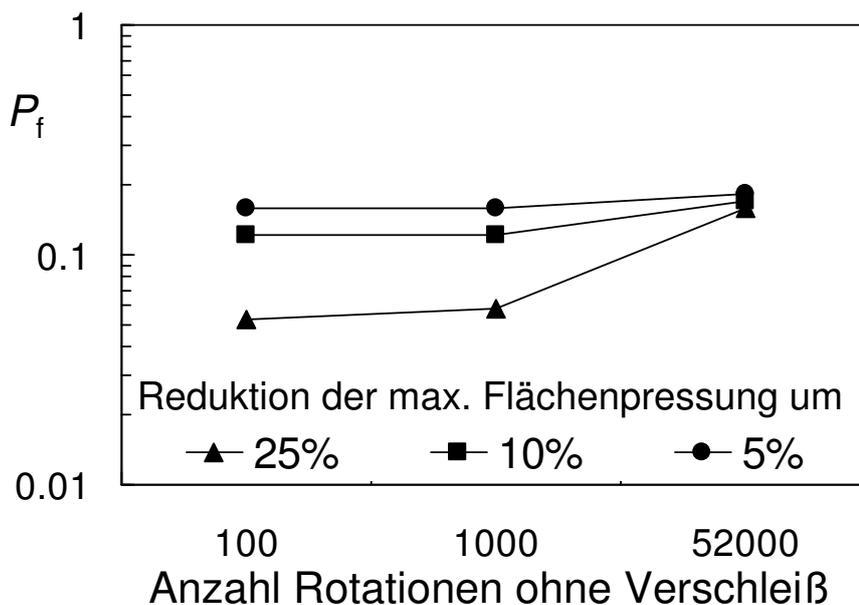


Abbildung 6.22: Einfluss von Verschleiß auf  $P_f$  anhand der Reduktion der max. Flächenpressung  $p_0$  (5%, 10% bzw. 25%) bei einer Versuchsdauer von 10 h (105000 Rotationen) bei gleichzeitiger Variation der Anzahl von Rotationen bei denen Verschleiß einsetzt.

Am Beispiel der STAU-Analyse für KSS wird exemplarisch untersucht, wie sich eine Reduktion der max. Flächenpressung  $p_0$  um 5%, 10% bzw. 25% auf  $P_f$  auswirkt. Daneben wird die Anzahl von Rotationen variiert, nach denen die Redukti-

on der Flächenpressung einsetzt. Beträgt die Anzahl z.B. 1000 bedeutet dies, dass 1000 Rotationen mit den Originalwerten und 104000 Rotationen mit verringerten  $\sigma_{eq}$ -Werten gerechnet wird. Die Ergebnisse sind in Abb. 6.22 dargestellt. Eine Reduktion der Flächenpressung wirkt sich bis zu einem Wert von 10% nur geringfügig auf die Ausfallwahrscheinlichkeit aus. Wird  $p_0$  um 25% reduziert, kann ein deutliches Absinken von  $P_f$  nur festgestellt werden, falls der Verschleiß nach einer kurzen Versuchsdauer auftritt.

### 6.3.5 Spannungsgradienten

Die Kontaktbeanspruchung im Wälzversuch ist gekennzeichnet durch starke Spannungsgradienten in die Tiefe des Bauteils (Abb. 6.11), die sich auf das Versagensverhalten natürlicher Oberflächenfehler auswirken. Die STAU-Vorhersagen beruhen jedoch auf der Annahme eines konstanten Spannungsverlaufs über den natürlichen Fehlern. Aus diesem Grund ist zu erwarten, dass diese Vorhersagen sehr konservativ sind und die Festigkeit bzw. die Lebensdauer stark unterschätzen. Daher wird in diesem Abschnitt eine bruchmechanische Analyse anhand der FE-Spannungsanalyse durchgeführt, um die Auswirkung der Spannungsgradienten auf die STAU-Vorhersagen abzuschätzen.

Schmiermedium	Wasser	KSS
STAU-Standard	$1.439086 \cdot 10^{-1}$	$5.543559 \cdot 10^{-4}$
STAU-Gradienten	$1.439037 \cdot 10^{-1}$	$5.460304 \cdot 10^{-4}$

Tabelle 6.7: Vergleich der Ausfallwahrscheinlichkeit für spontanes Versagen berechnet mit Standard-STAU und Gradienten-STAU.

Eine erste Möglichkeit zur Abschätzung des Einflusses von Spannungsgradienten ist eine Vergleichsrechnung mit dem Gradienten-STAU-Modul, welches die Variationen des Spannungsverlaufs über natürlichen Fehlern in der Versagensbeschreibung berücksichtigt (siehe Kap. 3.1). Da Ermüdung mit Gradienten-STAU nicht betrachtet wird, können lediglich die Ergebnisse für spontane Rissausbreitung miteinander verglichen werden.

Trotz der starken Spannungsgradienten sind die Unterschiede beider STAU-Rechnungen in Tab. 6.7 gering. Eine mögliche Erklärung dieses unerwarteten Verhaltens wäre, dass die Vernetzung des FE-Modells in die Bauteiltiefe nicht fein genug ist, um den tatsächlichen  $K_I$ -Verlauf ausreichend genau aufzulösen. Die numerische Berechnung von  $K_I$  beruht auf den Schnittpunkten des Risspfades mit den

Elementflächen, und hängt somit indirekt von der Netzfeinheit ab. Der Anfangswert von  $K_I$  wird im ersten Abschnitt anhand der Spannung an der Oberfläche mit dem konventionellen Ansatz (konstante Spannung) ermittelt, wobei die Distanz von der Oberfläche zum ersten Schnittpunkt als Risslänge eingeht. Im vorliegenden FE-Modell liegt der erste Schnittpunkt des Pfades bei ca.  $16 \mu\text{m}$ , so dass der erste Wert  $K_I \approx 8.3 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$  die Risszähigkeit überschreitet<sup>3</sup>. Daher eignet sich die Vergleichsrechnung nur bedingt, um den Einfluss von Spannungsgradienten zu bewerten.

Eine weitere Möglichkeit der bruchmechanischen Analyse ist die analytische Berechnung lokaler K-Faktoren auf Basis der Spannungsverteilung im FE-Modell. Hierfür wird von einem halb-elliptischen Oberflächenriss ausgegangen, der in Abb. 6.23 abgebildet ist. Die K-Faktoren werden an den Punkten A und B anhand des FE-Spannungsverlaufs  $\sigma_x(r)$  entlang eines Pfades  $r$  senkrecht zur Oberfläche (siehe Abb. 6.11) ermittelt. Der Spannungsverlauf wird durch ein Polynom (Gl. (6.5)) mit den Koeffizienten  $C_n$  approximiert.

$$\sigma_x(r) = \sum_{n=0}^N C_n r^n \quad n = 0..4 \quad (6.5)$$

$$K_{A,B} = \sqrt{a} \sum_{n=0}^N C_n Y_{(A,B),n} a^n \quad (6.6)$$

Die K-Faktoren  $K_A$  und  $K_B$  berechnen sich nach Gl. (6.6) anhand der Geometriefunktionen  $Y_{(A,B),n}$ , die in [41] (S. 285) bzw. [69] angegeben sind. Der  $K$ -Verlauf ist abhängig vom Verhältnis  $\frac{a}{c}$ , wobei  $\frac{a}{c} = 0$  dem Kantenriss entspricht, für den  $K_B$  verschwindet.

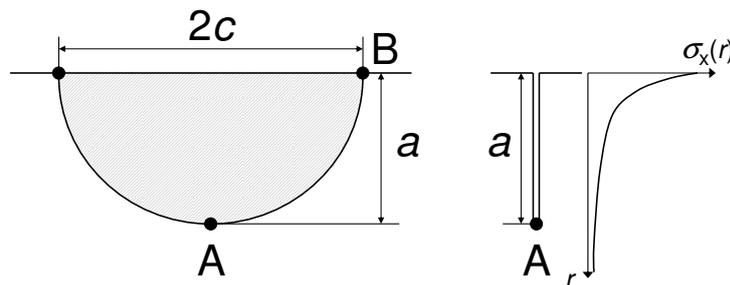


Abbildung 6.23: Halb-elliptischer Oberflächenriss; Seitenansicht mit Spannungsverlauf  $\sigma_x(r)$ .

<sup>3</sup> $K_I = 1.98 \cdot 1050 \text{ MPa} \cdot \sqrt{1.6 \cdot 10^{-5} \text{ m}} > 5.65 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$

Mit den in Abb. 6.24 dargestellten Spannungsintensitätsfaktoren  $K_A$  und  $K_B$  kann das Risswachstumsverhalten natürlicher Fehler im Wälzversuch für Wasser bzw. KSS abgeschätzt werden. Bei Wasser wird ein halbkreisförmiger Riss ( $a/c = 1$ ) ab einer Risstiefe von  $a \approx 9 \mu\text{m}$  an der Oberfläche ( $K_B$ ) kritisch, wenn man einen  $K_{Ic}$ -Wert von  $5.65 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$  zugrunde legt. Bei beiden Schmierstoffen unterscheidet sich die Kurve  $K_{\text{const}}$ , die den  $K$ -Verlauf bei konstanter Spannung angibt, ab einer Risstiefe von wenigen  $\mu\text{m}$  stark von den  $K_A$  bzw.  $K_B$  Kurven. Da der  $K_{Ic}$ -Wert im Fall von Wasser schon bei geringen Risstiefen überschritten wird, wirken sich diese Abweichungen hier weniger stark aus als bei KSS, da hier  $K_{Ic}$  an der Oberfläche erst bei relativ großen Risstiefen erreicht wird. Hier wird der Spannungsintensitätsfaktor  $K_A$  für keinen Wert  $a$  kritisch, wobei die Mode-II-Anteile, die mit zunehmender Risstiefe an Bedeutung gewinnen, nicht in der Berechnung von  $K_A$  berücksichtigt sind.

Anhand der  $K$ -Verläufe in Abb. 6.24 können Überlegungen zur Ermüdung eingebracht werden. Aus der Risswachstumskurve in Wasser (Abb. 5.9) kann abgeschätzt werden, dass es ab einem Verhältnis  $K_{\text{max}}/K_{Ic} > 0.8$  zu sehr hohen Risswachstumsraten ( $> 1 \mu\text{m}$  pro 100 Zyklen) kommt. Daraus folgt, dass Risse mit einem  $K_I$ -Wert größer  $4 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$  nach kurzer Versuchsdauer kritisch werden, was bei KSS auf Risse mit  $a > 15 \mu\text{m}$  zutrifft. Von dieser Überlegung ausgehend wären Vorhersagen auf Basis konstanter Spannung weniger konservativ, wenn Ermüdung vorliegt. Darüber hinaus deutet die hohe Zahl von Rissen an der Oberfläche an, dass vorrangig sehr kleine natürliche Fehler im Bereich weniger  $\mu\text{m}$  durch zyklisches Wachstum zur Schädigung beitragen. Für kleine Risse ( $a < 5 \mu\text{m}$ ) sind die Abweichungen der  $K_A/K_B$ -Kurven zu  $K_{\text{const}}$  wiederum gering. Demnach wäre der in dieser Arbeit verwendete Ansatz auf Basis der Standard-Version von STAU eine gute Annäherung an die realen Beanspruchungen natürlicher Fehler.

Generell zeigen die Ergebnisse des Wälzversuchs, dass eine Berücksichtigung von Spannungsgradienten in der Versagensbeschreibung von STAU bei zyklischer Ermüdung wünschenswert ist. Hierfür wäre ein Ansatz notwendig, der nicht auf der Integration eines empirischen Risswachstumsgesetzes basiert. Daher wird im Rahmen des SFB 483 als Konsequenz dieser Überlegung eine andere Herangehensweise verfolgt, bei der Ermüdung durch die Veränderung der R-Kurve modelliert werden soll. Hierfür wird das Gradienten-Modul in STAU derart erweitert, dass der durch Verstärkungseffekte verursachte  $K_{\text{sh}}$ -Term in der Berechnung der kritischen Risslänge berücksichtigt wird. Auf dieser Grundlage kann Ermüdung durch die zeitliche Veränderung bzw. Degradation von  $K_{\text{sh}}$  berücksichtigt werden.

Eine Alternative zur konservativen Auslegung keramischer Bauteile unter Berücksichtigung von Spannungsgradienten ist die Verwendung eines Grenzwerts  $K_{\text{th}}$ ,

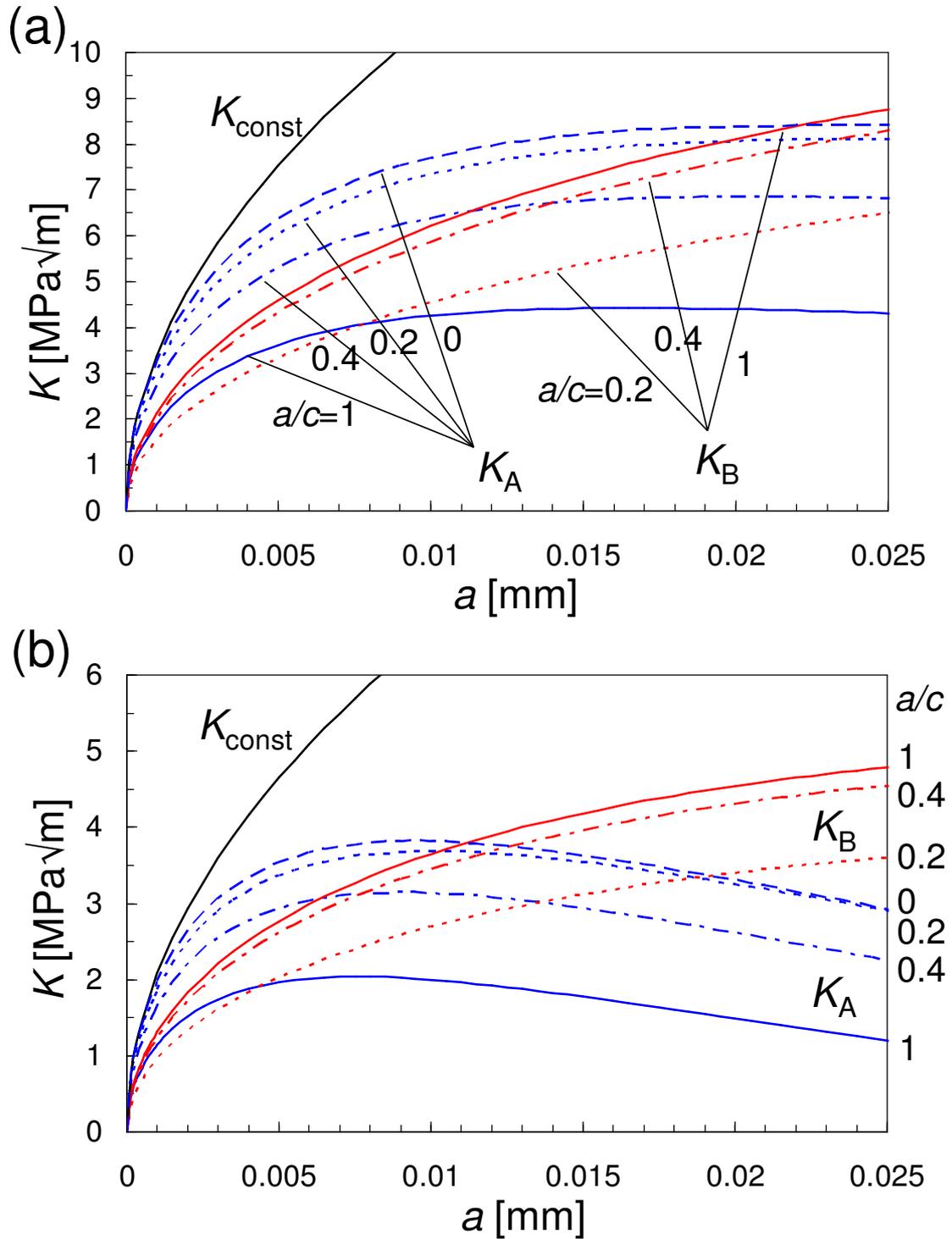


Abbildung 6.24: lokale  $K$ -Faktoren  $K_A$  und  $K_B$  für halb-elliptischen Oberflächenfehler berechnet aus den FE-Spannungsverläufen für Wasser (a) und KSS (b);  $K_{const}$  -  $K$ -Faktor für Kantenriss bei konstantem Spannungsgradienten

unter dem kein Risswachstum auftritt. Für zyklisches Risswachstum existieren hierfür entsprechende Werte in der Literatur [12]. Charakteristisch für diese (zyklischen) Grenzwerte bei Keramik ist, dass  $K_{th}$  ebenfalls von der Risslänge abhängt. Dieses R-Kurvenverhalten des unteren Grenzwerts  $K_{th}$  könnte mit der vorgesehenen Erweiterung von STAU im Bezug auf R-Kurven ebenfalls berücksichtigt werden.

## 7 Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit hat zum Ziel, die Ermüdung keramischer Werkstoffe bei zyklischer Beanspruchung in einer probabilistischen Zuverlässigkeitsbewertung zu berücksichtigen. Zu diesem Zweck wurde das Programm STAU um einen Ansatz für zyklisches Risswachstum erweitert. Die neu erarbeiteten Methoden wurden anhand eines komplex beanspruchten Bauteils, einer  $\text{Si}_3\text{N}_4$ -Rolle in einem Wälzversuch, angewendet.

Die Berechnung der Lebensdauer bei zyklischer Last in STAU basiert auf einem empirischen zyklischen Risswachstumsgesetz. Aus der Vielzahl vorhandener Ansätze wurde ein Potenzgesetz ausgewählt, das die Abhängigkeit der Risswachstumsrate vom Spannungsverhältnis an einem Riss berücksichtigt. Der Risswachstumsexponent, der vom Spannungsverhältnis abhängen kann, wird in diesem Ansatz als konstant betrachtet. Diese Einschränkung ergibt aus der Forderung nach einer einfachen mathematischen Struktur des Risswachstumsgesetzes im Hinblick auf die analytische Herleitung der Formulierungen für die Ausfallwahrscheinlichkeit.

Die numerische Umsetzung der zyklischen Versagensbeschreibung erfolgt weitgehend unter Ausnutzung der vorhandenen Programmstruktur von STAU. Im Gegensatz zur Vorgehensweise bei unterkritischem Risswachstum, bei der über einen zeitlichen Verlauf der Spannung integriert wird, erfolgt die numerische Berechnung auf Basis der einzelnen Zyklen eines Lastkollektivs. Dieses Lastkollektiv ist durch die minimalen und maximalen Beanspruchungen definiert und kann je nach Ort variieren. Liegen komplexe transiente Beanspruchungen (wie im Fall von Abrollvorhängen) vor, ist es notwendig, die Informationen zur zyklischen Lastgeschichte innerhalb der STAU-Analyse automatisch zu ermitteln. Hierfür wird der zeitliche Hauptspannungsverlauf an den Randknoten eines Elements ausgewertet, woraus sich die Zeitpunkte der minimalen und maximalen Belastungen in einem Element ergeben. Es hat sich gezeigt, dass die zyklische Lastgeschichte innerhalb eines Elements mit dieser vereinfachten Vorgehensweise hinreichend genau abgebildet wird.

Ein Schwerpunkt dieser Arbeit liegt in der Anwendung der neu entwickelten Methoden anhand eines praxisorientierten Beispiels. Hierfür wurde ein Wälzversuch an einer  $\text{Si}_3\text{N}_4$ -Rolle betrachtet, der aufgrund der gleitenden Kontaktbeanpru-

chung als Modellversuch für eine ganze Klasse von Anwendungen wie z.B. Wälzlager, Drahtwalzen oder Zahnräder steht. In solchen Fällen wird die Schädigung häufig durch Risse an der Oberfläche bestimmt, die sich zeitabhängig bilden. Daher eignet sich der Wälzversuch gut, um den Einfluss von Ermüdung mit den Methoden der Modellierung zu untersuchen und die STAU-Vorhersagen durch Vergleich mit experimentellen Ergebnissen zu bewerten.

Ein wichtiger Beitrag dieser Arbeit zum Verständnis von zeitabhängigen Schädigungsprozessen bei Keramik liegt darin, dass die Beiträge der Ermüdungsmechanismen unterkritisches und zyklisches Risswachstum auf die Lebensdauervorhersage quantitativ verglichen werden. Bei der Vorhersage der Schädigung im Wälzversuch betragen die Unterschiede bis zu drei Größenordnungen in der Ausfallwahrscheinlichkeit. Das wichtigste Ergebnis der Zuverlässigkeitsanalyse des Wälzversuchs ist, dass die Schädigung quantitativ nur auf Basis einer Versagensbeschreibung vorhergesagt werden kann, in der zyklisches Risswachstum berücksichtigt wird.

Die Ergebnisse von Lebensdauervorhersagen für keramische Werkstoffe unterliegen häufig Unsicherheiten, die auf die Variation der Materialparameter zurückzuführen sind. Bei unterkritischem und zyklischem Risswachstum ist es vorrangig der Risswachstumsexponent, der die Vorhersageergebnisse stark beeinflusst. Während die Variation des Risswachstumsexponenten bei unterkritischem Risswachstum im wesentlichen durch Streuungen der zugrunde liegenden Messwerte bedingt ist, kann bei zyklischem Risswachstum zusätzlich eine systematische Variation des Risswachstumsexponenten mit dem Spannungsverhältnis vorliegen. Wenn dieser Effekt wie bei der vorliegenden  $\text{Si}_3\text{N}_4$ -Variante signifikant ausgeprägt ist, erweist sich STAU als wichtiges Werkzeug, um die Auswirkungen derartiger Unsicherheiten auf die Zuverlässigkeit zu bewerten.

In der vorliegenden Versagensbeschreibung für zyklisches Risswachstum wird ein bruchmechanisches Versagensmodell verwendet, das von konstanten Spannungen über den natürlichen Fehlern ausgeht. Dies ist notwendig, da Ermüdung im Rahmen der Weibull-Theorie zur Versagensbeschreibung bei stark variierenden Spannungsfeldern nicht auf der Basis eines Risswachstumsgesetzes berücksichtigt werden kann. Werden die Spannungsvariationen nicht berücksichtigt, kann dies zu stark konservativen Vorhersagen führen. In der vorliegenden Arbeit konnte gezeigt werden, dass Werkstoffe wie  $\text{Si}_3\text{N}_4$  aufgrund der geringen Größe ihrer natürlichen Fehler weniger empfindlich gegenüber Spannungsgradienten sind als Werkstoffe, die nicht zur Klasse der hochfesten Keramik zählen. Somit ist das in dieser Arbeit verwendete Versagensmodell eine geeignete Näherung für die tat-

sächliche Beanspruchung natürlicher Fehler hochfester Keramik unter gleitender Kontaktbeanspruchung.

Mit der in dieser Arbeit vorgestellten STAU-Version steht ein verlässliches Werkzeug für die Lebensdauervorhersage zyklisch belasteter keramischer Bauteile zur Verfügung. Die Ergebnisse aus der Analyse des Wälzversuchs machen deutlich, dass FE-basierte probabilistische Methoden im Hinblick auf Ermüdung auch für Kontaktprobleme angewendet werden können. Dies ist von grundlegender Bedeutung für komplexere Anwendungen wie z.B. Drahtwalzen, bei denen die Spannungsverteilung nicht durch einfache analytische Lösungen ermittelt werden kann. Die Arbeit leistet somit einen wichtigen Beitrag zur sicheren Gestaltung von Produkten, in denen Hochleistungskeramiken als Strukturwerkstoffe wechselnder Belastung unterliegen.

## A Ergänzende Formeln zur Ausfallwahrscheinlichkeit

$P_f$  bei zyklischer Last für Oberflächenfehler

**Zyklisches Lastkollektiv**

$$P_f(N_k) = 1 - \exp \left( -\frac{1}{A_0} \int_A \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi} I d\varphi dA \right) \quad (\text{A.1})$$

mit

$$I = \max_{\eta \in [0; N_k]} \left[ \left( \frac{\sigma_{\text{eq,max}}(\eta)}{\sigma_{0A}} \right)^{n-2} + \frac{\sigma_{0A}^2}{B} \int_0^{\eta} \left( \frac{\sigma_{\text{eq,max}}(N)}{\sigma_{0A}} \right)^n \cdot (1 - R(N))^p dN \right]^{\frac{m}{n-2}} \quad (\text{A.2})$$

**Periodisch wiederholtes Lastkollektiv**

$$P_f(Z) = 1 - \exp \left( -\frac{1}{A_0} \int_A \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi} I d\varphi dA \right) \quad (\text{A.3})$$

mit

$$I = \max_{\eta \in [0; N_k]} \left[ \left( \frac{\sigma_{\text{eq,max}}(\eta)}{\sigma_{0A}} \right)^{n-2} + \frac{\sigma_{0A}^2}{B} \left( \int_0^{\eta} \left( \frac{\sigma_{\text{eq,max}}(N)}{\sigma_{0A}} \right)^n \cdot (1 - R(N))^p dN + (Z - 1) \cdot \int_0^{N_k} \left( \frac{\sigma_{\text{eq,max}}(N)}{\sigma_{0A}} \right)^n \cdot (1 - R(N))^p dN \right) \right]^{\frac{m}{n-2}}$$

Weibull-Darstellung

$$P_f(Z) = 1 - \exp \left[ - \left( \frac{Z}{Z_0} \right)^{m^*} \right] \quad (\text{A.4})$$

$$Z_0 = \frac{\sigma_{0A}^2}{B} \left( \frac{A^*}{A_0} \right)^{\frac{1}{m^*}} \quad (\text{A.5})$$

$$A^* = \int_A \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi} \int_0^{N_k} \left( \frac{\sigma_{\text{eq,max}}(N)}{\sigma_{0A}} \right)^n \cdot (1 - R(N))^p dN d\varphi dA \quad (\text{A.6})$$

**Serielle Abfolge periodisch wiederholter Lastspektren**

$$P_f = 1 - \exp \left( - \frac{1}{A_0} \int_A \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi} I d\varphi dA \right) \quad (\text{A.7})$$

mit

$$I = \left[ \frac{\sigma_{0A}^2}{B} \sum_{j=1}^L Z^{(j)} \int_0^{N_k^{(j)}} \left( \frac{\sigma_{\text{eq,max}}^{(j)}(N)}{\sigma_{0A}} \right)^n (1 - R^{(j)}(N))^p dN \right]^{\frac{m}{n-2}} \quad (\text{A.8})$$

## Vollständige Formel für serielle periodische Lastspektren

Für Volumenfehler:

$$P_f = 1 - \exp \left( -\frac{1}{V_0} \int_V \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} I d\Omega dV \right) \quad (\text{A.9})$$

mit

$$I = \max_{j \in [1, L]} \left\{ \max_{\eta \in [0, N_k^{(j)}]} \left\{ \left[ \left( \frac{\sigma_{\text{eq}}^{(j)}(\eta)}{\sigma_{0V}} \right)^{n-2} + \left( \frac{\sigma_{0V}^2}{B} \right) \left( \int_0^{\eta} (\sigma_{\text{eq, max}}^{(j)}(N))^n \cdot (1 - R^{(j)}(N))^p dN \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + (Z^{(j)} - 1) \int_0^{N_k^{(j)}} (\sigma_{\text{eq, max}}^{(j)}(N))^n \cdot (1 - R^{(j)}(N))^p dN \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \sum_{i=1}^{j-1} Z^{(i)} \int_0^{N_k^{(i)}} (\sigma_{\text{eq, max}}^{(i)}(N))^n \cdot (1 - R^{(i)}(N))^p dN \right] \right]^{\frac{n}{n-2}} \right\} \quad (\text{A.10})$$

## **B Weibullverteilungen und Risswachstumskurven SL200**

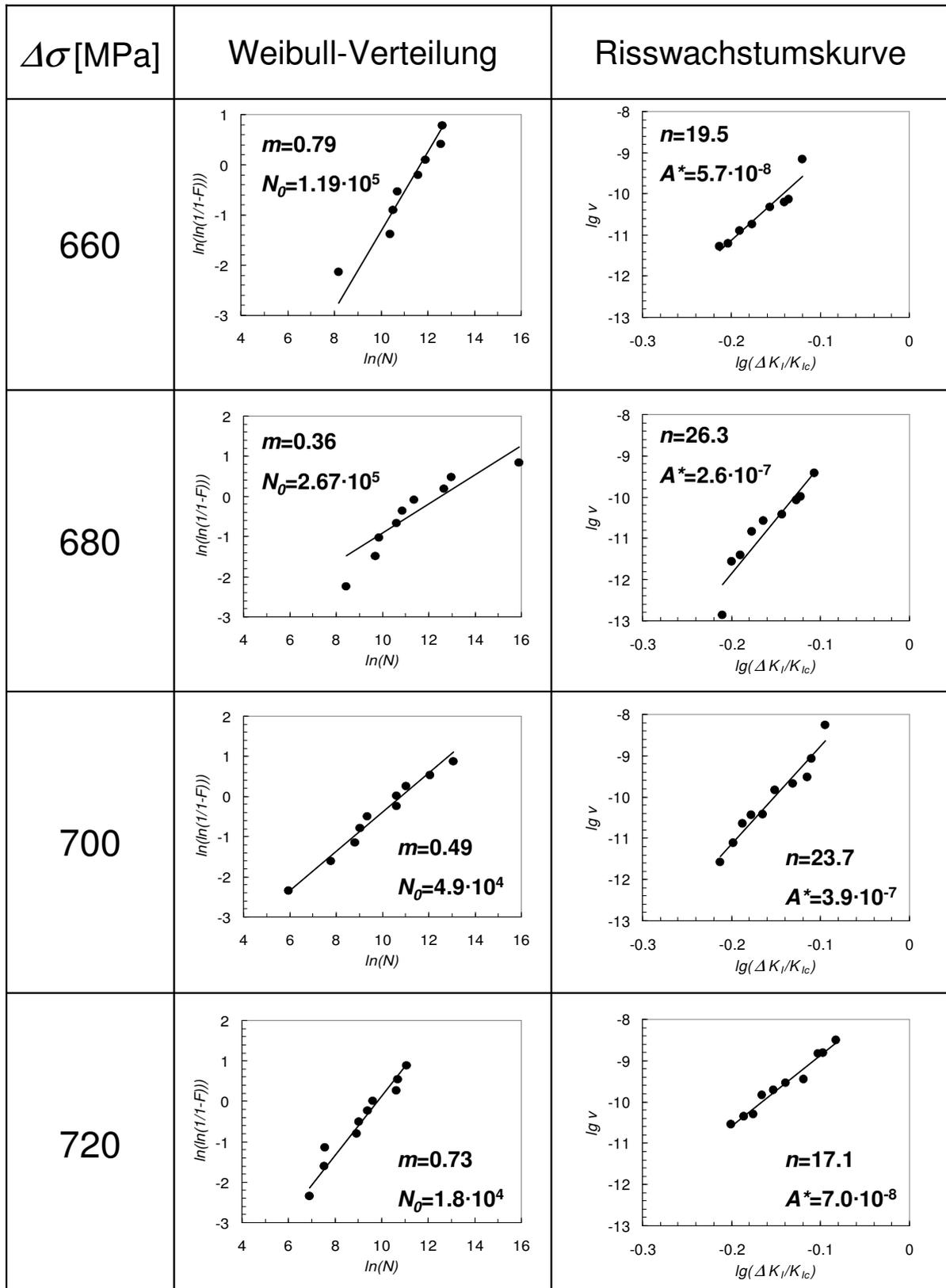


Abbildung B.1: Einzelauswertung der Lebensdauerdaten bei  $R = 0.1$  und  $RT$

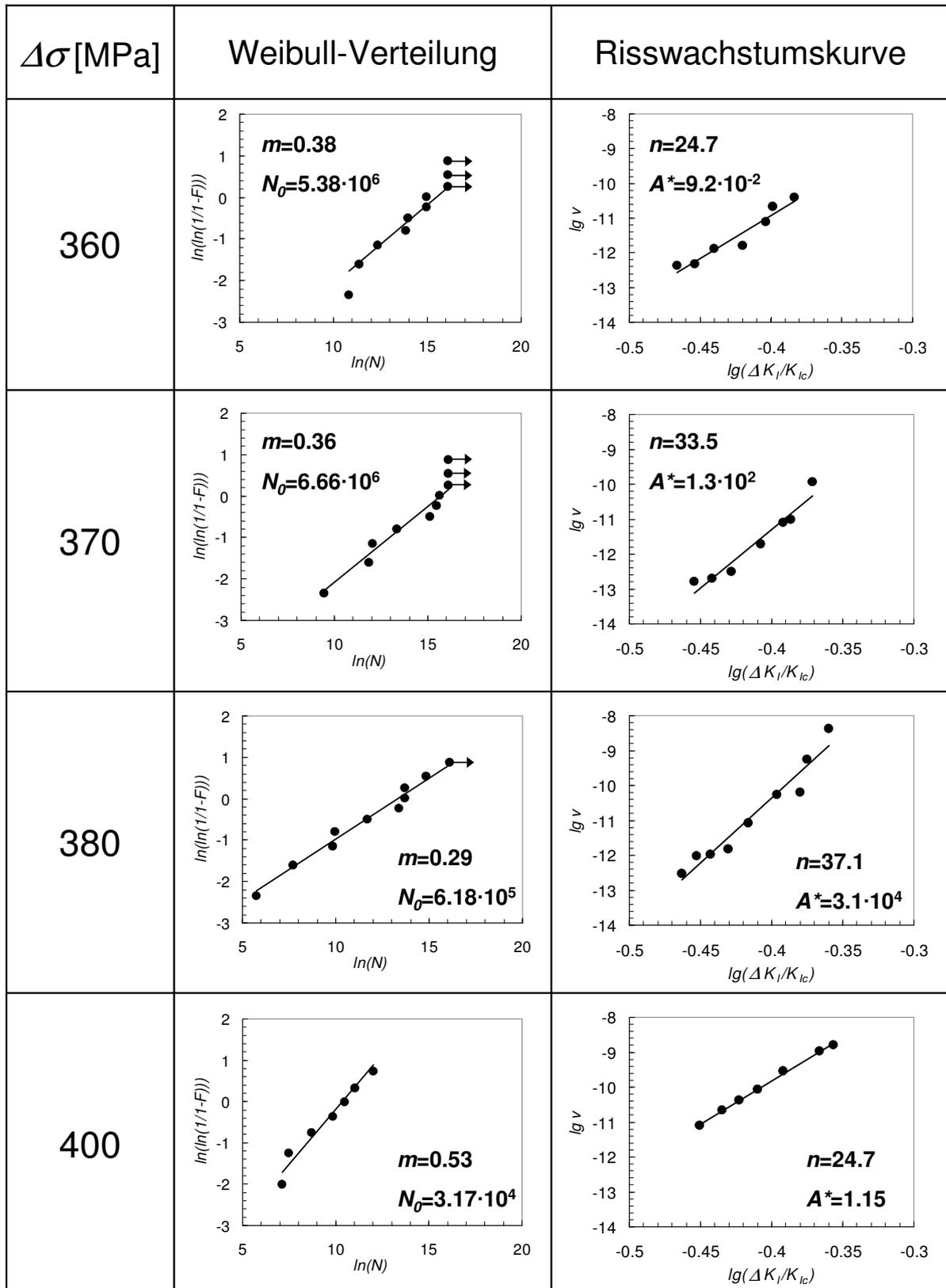
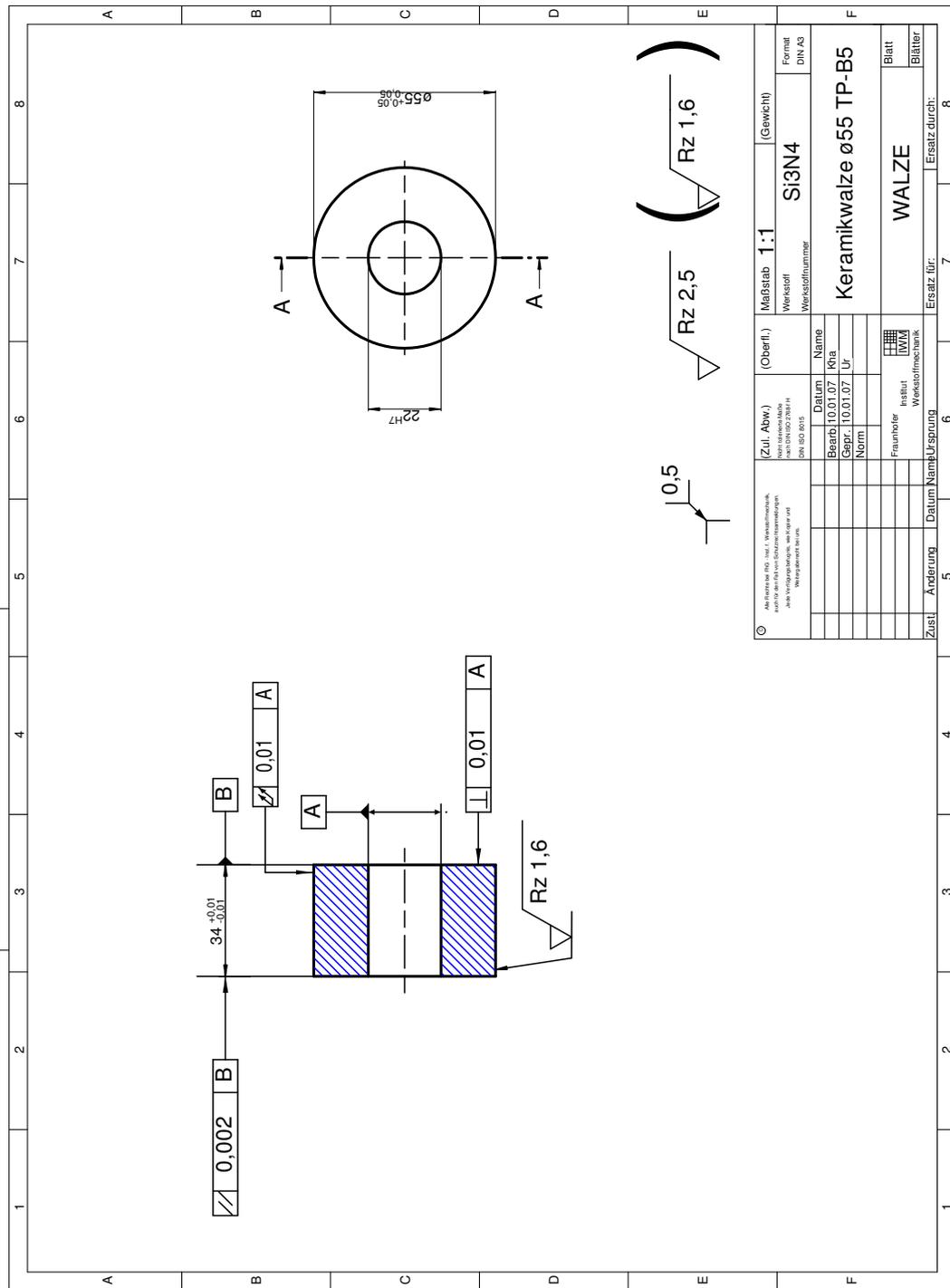


Abbildung B.2: Einzelauswertung der Lebensdauerdaten bei  $R = 0.5$  und  $RT$

## **C Technische Zeichnungen der Wälzkörper**

### **Detailzeichnungen der Wälzkörper**



© Alle Rechte vorbehalten. Nachdruck, Vervielfältigung und Verbreitung, auch auszugsweise, ist ohne schriftliche Genehmigung der IWM Fraunhofer-Gesellschaft.	(Zul. Abw.)	(Oberfl.)	Maßstab 1:1 (Gewicht)	
	Name: <input type="text"/> Datum: <input type="text"/> Bearb.: 10.01.07 Geprf.: 10.01.07 Norm: <input type="text"/>	Name: <input type="text"/> Kria: <input type="text"/> Ur: <input type="text"/>	Werkstoff: Si3N4 Werkstoffnummer: <input type="text"/>	Formatt: DIN A3
Keramikkwalze $\varnothing 55$ TP-B5				
Fraunhofer IWM			WÄLZE	
Datum Name / Sprung			Ersatz durch:	
Zust. Änderung			Ersatz für:	
1			8	

Abbildung C.1: Technische Zeichnung der  $\text{Si}_3\text{N}_4$ -Rolle (Zeichnung: Iyas Khader, IWM, Fraunhofer-Gesellschaft, Freiburg)

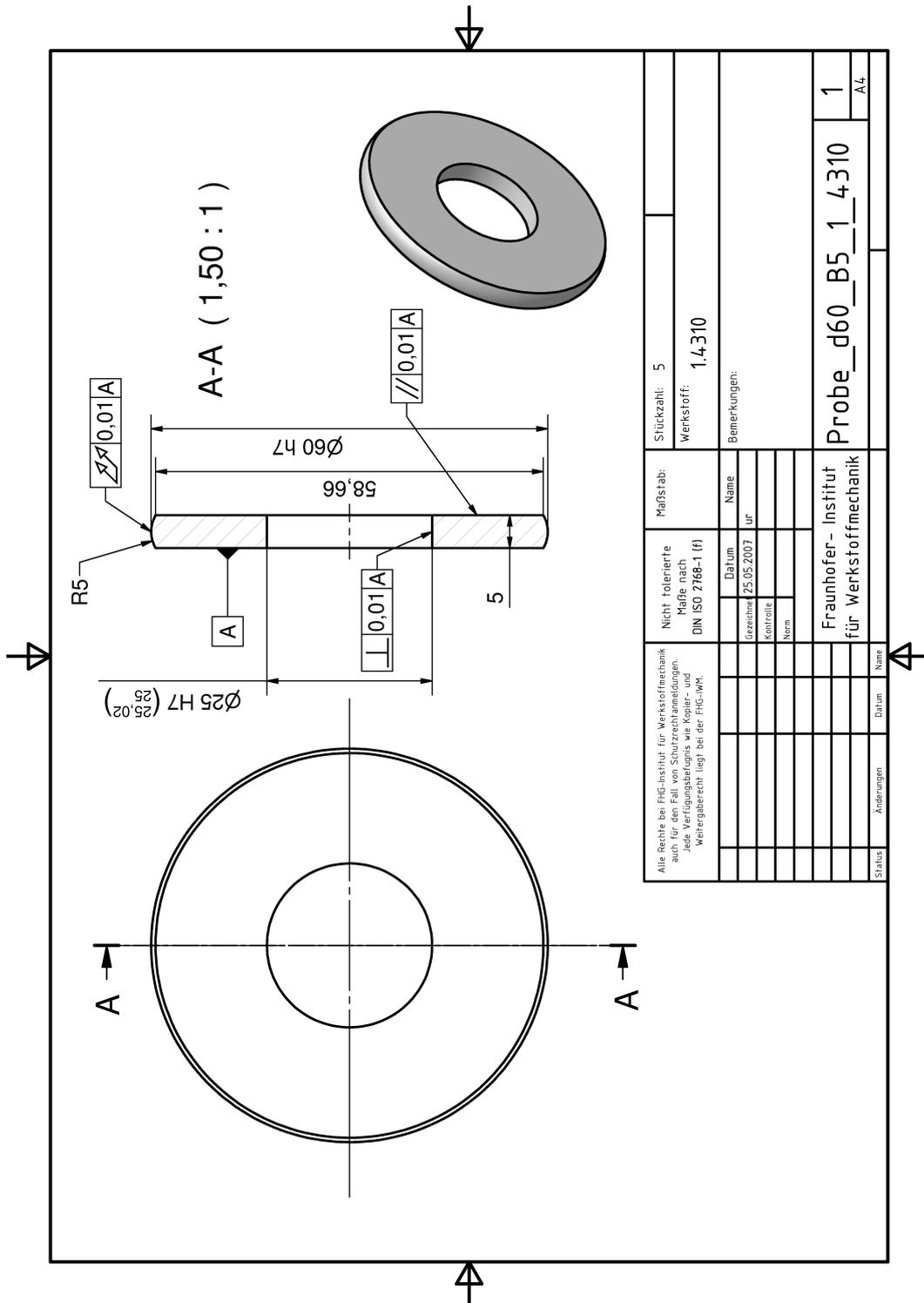


Abbildung C.2: Technische Zeichnung der Stahl-Rolle (Zeichnung: Iyas Khader, IWM, Fraunhofer-Gesellschaft, Freiburg)

## D Herleitung zur Entwicklung der Rissdichte

Der Symmetriefaktor  $S_y$  berechnet sich aus dem Verhältnis des Rollenabschnitts  $A_i$ , der betrachtet werden soll, und der Größe des STAU-Elementsets  $A_{\text{STAU}}$ :

$$S_y = \frac{A_i}{A_{\text{STAU}}} \quad (\text{D.1})$$

Die Anzahl  $n$  der Risse auf der Rolle ist gegeben durch

$$n = \frac{A_{\text{ges}}}{A_i} \quad , \quad (\text{D.2})$$

wobei  $A_{\text{ges}}$  die Rollenoberfläche ist.

Die Rissdichte  $\phi$  wird im Bezug auf den Rollenumfang  $d_{\text{Rolle}}$  definiert:

$$\phi = \frac{n}{\pi d_{\text{Rolle}}} \quad (\text{D.3})$$

so dass sie die Einheit [1/Länge] hat.

Mit Gl. (D.1)-(D.3) ergibt sich der Zusammenhang zwischen Rissdichte und Symmetriefaktor:

$$S_y = k \cdot \frac{1}{\phi} \quad \text{mit} \quad k = \frac{A_{\text{ges}}}{\pi d_{\text{Rolle}} A_{\text{STAU}}} \quad (\text{D.4})$$

## Literaturverzeichnis

- [1] Munz D., Fett T.: Ceramics, Mechanical Properties, Failure Behaviour, Materials Selection. Springer Verlag Berlin Heidelberg, 1999.
- [2] Lawn B.: Fracture of Brittle Solids - 2nd Edition. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [3] Quinn G.D.: Fractography of Ceramics and Glasses. NIST - National Institute of Standards and Technology, Special publication 960-16, Chapter 6: Origins of Fracture, 2007.
- [4] Evans A.G.: Perspective on the development of high-toughness ceramics. *Journal of the American Ceramic Society* 73(2):187–206, 1990.
- [5] Becher P.F.: Microstructural design of toughened ceramics. *Journal of the American Ceramic Society* 74(2):255–269, 1991.
- [6] Ritchie R.: Mechanisms of fatigue crack propagation in metals, ceramics and composites: Role of crack tip shielding. *Materials Science and Engineering: A* 103(1):15–28, 1988.
- [7] Roedel J.: Crack closure forces in ceramics: Characterization and formation. *Journal of the European Ceramic Society* 9(4):323–334, 1992.
- [8] Fett T.: A fracture-mechanical theory of subcritical crack growth in ceramics. *International Journal of Fracture* 54(2):117–130, 1992.
- [9] Wiederhorn S.M.: Moisture assisted crack growth in ceramics. *International Journal of Fracture* 4(2):171–177, 1968.
- [10] Evans A.G., Fuller E.R.: Crack propagation in ceramic materials under cyclic loading conditions. *Metallurgical Transactions* 5:27–33, 1974.
- [11] Fett T., Martin G., Munz D., Thun G.: Determination of  $da/dN-\Delta K_I$  curves for small cracks in alumina in alternating bending tests. *Journal of Materials Science* 26(12):3320–3328, 1991.
- [12] Kruzic J., Cannon R., Ager J., Ritchie R.: Fatigue threshold R-curves for predicting reliability of ceramics under cyclic loading. *Acta Materialia* 53(9):2595–2605, 2005.
- [13] Schmitt R., Fett T., Munz D.: Cyclic fatigue of zirconia. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 19(12):1411–1420, 1996.

- [14] Ritchie R.: Mechanisms of fatigue-crack propagation in ductile and brittle solids. *International Journal of Fracture* 100(1):55–83, 1999.
- [15] Lathabai S., Rödel J., Lawn B.R.: Cyclic fatigue from frictional degradation at bridging grains in alumina. *Journal of the American Ceramic Society* 74(6):1340–1348, 1991.
- [16] Mutoh Y., Takahashi M., Takeuchi M.: Fatigue crack growth in several ceramic materials. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 16(8):875–890, 1993.
- [17] Yuan R., Kruzic J., Zhang X., Jongue L.D., Ritchie R.: Ambient to high-temperature fracture toughness and cyclic fatigue behavior in al-containing silicon carbide ceramics. *Acta Materialia* 51:6477–6491, 2003.
- [18] Dauskardt R.: A frictional-wear mechanism for fatigue-crack growth in grain bridging ceramics. *Acta Metallurgica et Materialia* 41(9):2765–2781, 1993.
- [19] Jacobs D.S., Chen I.: Cyclic fatigue in ceramics: A balance between crack shielding accumulation and degradation. *Journal of the American Ceramic Society* 78(3):513–520, 1995.
- [20] Fett T., Munz D.: A relation for cyclic crack growth in ceramics. *Journal of Materials Science Letters* 17:307–309, 1998.
- [21] Horibe S., Hirahara R.: Fatigue crack propagation of sintered silicon nitride in vacuum and air. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 14(8):863–870, 1991.
- [22] Jacobs D.S., Chen I.W.: Mechanical and environmental factors in the cyclic and static fatigue of silicon nitride. *Journal of the American Ceramic Society* 77:1153–1161, 1994.
- [23] Qiao G.J., Hongjie W., Zhihao J.: Comparison between fatigue behavior of some ceramics: a new concept of intrinsic stress-corrosion exponent  $n_0$ . *International Journal of Fatigue* 24(5):499–508, 2002.
- [24] Dey N., Socie D.F., Hsia K.J.: Modeling static and cyclic fatigue in ceramics containing a viscous grain boundary phase. *Acta Metallurgica et Materialia* 43(6):2163–2175, 1995.
- [25] McNaney J.M., Gilbert C.J., Ritchie R.O.: Effect of viscous grain bridging on cyclic fatigue-crack growth in monolithic ceramics at elevated temperatures. *Acta Materialia* 47(9):2809–2819, 1999.
- [26] Liu S., Chen I., Tien T.: Fatigue crack growth of silicon nitride at 1400 °C: A novel fatigue-induced crack-tip bridging phenomenon. *Journal of the American Ceramic Society* 77(1):137–142, 1994.

- [27] Ueno A., Kishimoto H., Kawamoto H., Akura M.: Crack propagation behavior of sintered silicon nitride under cyclic loads of high stress ratio and high frequency. *Engineering Fracture Mechanics* 40(4-5):913–920, IN11–IN12, 1991.
- [28] DIN EN 843-1, Hochleistungskeramik - Mechanische Eigenschaft monolithischer Keramik bei Raumtemperatur - Teil 1: Bestimmung der Biegefestigkeit. Beuth Verlag, Berlin, 2008.
- [29] Fett T.: Interpretation of failure under cyclic contact loading. *Journal of Materials Science* 39:1795–1797, 2004.
- [30] Lee S.K., Lawn B.R.: Contact fatigue in silicon nitride. *Journal of the American Ceramic Society* 82(5):1281–1288, 1999.
- [31] Fett T., Keller R., Munz D., Ernst E., Thun G.: Fatigue of alumina under contact loading. *Engineering Fracture Mechanics* 70(9):1143–1152, 2003.
- [32] Weibull W.: A Statistical Theory of the Strength of Materials. Generalstabens Litografiska Anstalts Förlag, Stockholm, 1939.
- [33] Batdorf S.B., Heinisch H.L.: Weakest link theory reformulated for arbitrary fracture criterion. *Journal of the American Ceramic Society* 61(7-8):355–358, 1978.
- [34] Riesch-Oppermann H., Härtelt M., Kraft O.: Stau - a review of the karlsruhe weakest link finite element postprocessor with extensive capabilities. *International Journal of Materials Research* 99:1055–1065, 2008.
- [35] Nemeth N., Jadaan O., Gyekenyesi J.: Lifetime reliability prediction of ceramic structures under transient thermomechanical loads. Technical report, NASA/TP-2005-212505, 2005.
- [36] Ziegler C.: Bewertung der Zuverlässigkeit keramischer Komponenten bei zeitlich veränderlichen Spannungen und bei Hochtemperaturbelastung (Dissertation). Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 18, Nr. 228, VDI-Verlag, Düsseldorf, 1998.
- [37] Brückner-Foit A., Fett T., Schirmer K.S., Munz D.: Discrimination of multiaxiality criteria using brittle fracture loci. *Journal of the European Ceramic Society* 16(11):1201–1207, 1996.
- [38] Heger A.: Bewertung der Zuverlässigkeit mehrachsiger belasteter keramischer Bauteile (Dissertation). Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 18, Nr. 132, VDI-Verlag, Düsseldorf, 1993.
- [39] Brückner-Foit A., Diegele E., Hülsmeier P., Rettig U., Hohmann C.: Prediction of the failure probability of high strength ceramics subjected to thermal

- shock loading. In: Proceedings of the 26th Annual International Conference on Advanced Ceramics and Composites, Cocoa Beach, 2002.
- [40] Fett T., Munz D.: Influence of stress gradients on failure in contact strength tests with cylinder loading. *Engineering Fracture Mechanics* 69(12):1353–1361, 2002.
- [41] Fett T., Munz D.: Stress Intensity Factors and Weight Functions. Computational Mechanics Publications, 1997.
- [42] Licht V., Hülsmeier P., Fett T.: Probability of cone crack initiation due to spherical contact loading. *Journal of the European Ceramic Society* 24(10-11):2907–2915, 2004.
- [43] Brückner-Foit A., Heger A., Heiermann K., Hülsmeier P., Mahler A., Mann A., Riesch-Oppermann H., Scherrer-Rudiy S., Ulrich I., Ziegler C.: Stau 5 user's manual, internal report. Technical report, Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, 2007.
- [44] Brückner-Foit A., Fett T., Munz D., Schirmer K.: Discrimination of multiaxiality criteria with the brazilian disc test. *Journal of the European Ceramic Society* 17(5):689–696, 1997.
- [45] Brückner-Foit A., Heger A., Munz D.: Effect of proof testing on the failure probability of multiaxially loaded ceramic components. in: ASTM STP 1201, American Society for Testing Materials, Philadelphia, 1994.
- [46] Riesch-Oppermann H., Scherrer-Rudiy S., Erbacher T., Kraft O.: Uncertainty analysis of reliability predictions for brittle fracture. *Engineering Fracture Mechanics* 74:2933–2942, 2007.
- [47] Hülsmeier P.: Lebensdauervorhersage für keramische Bauteile unter Thermoschockbelastung (Dissertation). dissertation.de - Verlag im Internet GmbH, Berlin, 2005.
- [48] Johnson K.: Contact Mechanics. Cambridge University Press, 1985.
- [49] Ichikawa M., Takamatsu T., Shindou N., Okabe N., Abe Y.: Ring crack initiation of silicon nitride bearing balls. *JSME International Journal, Series A* 38(2):226–230, 1995.
- [50] Chiu Y.P.: An approach for fatigue cracking failure prediction of ceramic rolling elements under hertzian loading. *Tribology Transactions* 42(2):289, 1999.
- [51] Tyulyukovskiy E., Huber N., Kraft O.: Failure assessment of alumina in unlubricated unidirectional sliding contact. *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik* 36(3-4):157–162, 2005.

- [52] Härtelt M., Riesch-Oppermann H., Schwind T., Kraft O.: Lifetime prediction for ceramic components under cyclic tensile and torsional loading. In: J.G. Heinrich and C.G. Aneziris (Eds.), Proc. of the 10th International Conference of the European Ceramic Society, Berlin, 17.-21 June 2007, Göller Verlag GmbH, Baden-Baden, on CD-ROM, 2008.
- [53] Nejma R.: Verformungs und Versagensverhalten von Aluminiumoxidkeramik unter isothermer und thermisch-mechanischer Ermüdungsbeanspruchung (Dissertation). Schriftenreihe Werkstoffwissenschaft und Werkstofftechnik, Nr. 35, Shaker Verlag, Aachen, 2006.
- [54] Nejma R., Lang K.H., Löhe D.: Influence of the temperature on the strength and the subcritical crack growth rate of alumina. *Materials Science and Engineering A* 387-389:832–836, 2004.
- [55] Becher P.F., Sun E.Y., Plucknett K.P., Alexander K.B., Hsueh C., Lin H., Waters S.B., Westmoreland C.G., Kang E., Hirao K., Brito M.E.: Microstructural design of silicon nitride with improved fracture toughness: I, Effects of grain shape and size. *Journal of the American Ceramic Society* 81(11):2821–2830, 1998.
- [56] Sun E.Y., Becher P.F., Plucknett K.P., Hsueh C., Alexander K.B., Waters S.B., Hirao K., Brito M.E.: Microstructural design of silicon nitride with improved fracture toughness: II, Effects of yttria and alumina additives. *Journal of the American Ceramic Society* 81(11):2831–2840, 1998.
- [57] Satet R.L., Hoffmann M.J.: Influence of the rare-earth element on the mechanical properties of RE–Mg-Bearing silicon nitride. *Journal of the American Ceramic Society* 88(9):2485–2490, 2005.
- [58] Lube T., Dusza J.: A silicon nitride reference material–A testing program of ESIS TC6. *Journal of the European Ceramic Society* 27(2-3):1203–1209, 2007.
- [59] Fünfschilling S.: Mikrostrukturelle Einflüsse auf das R-Kurvenverhalten bei Siliciumnitridkeramiken (Dissertation). Karlsruhe Institute of Technology, 2010.
- [60] Fett T., Fünfschilling S., Hoffmann M.J., Oberacker R., Jelitto H., Schneider G.A.: R-curve determination for the initial stage of crack extension in Si<sub>3</sub>N<sub>4</sub>. *Journal of the American Ceramic Society* 91(11):3638–3642, 2008.
- [61] Fünfschilling S., Fett T., Hoffmann M., Oberacker R., Jelitto H., Schneider G., Härtelt M., Riesch-Oppermann H.: Bridging stresses from R-curves of silicon nitrides. *Journal of Materials Science* 44(14):3900–3904, 2009.

- [62] Schwind T., Schalk T., Kerscher E., Beck T., Lang K., Löhe D.: Thermal, mechanical and fretting fatigue of silicon nitride. *International Journal of Materials Research* 99:1090–1097, 2008.
- [63] Fett T., Munz D.: Estimation of bridging interactions for natural cracks from bending strength of coarse-grained Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>. *Journal of the American Ceramic Society* 78(1):188–192, 1995.
- [64] Fett T., Munz D.: Determination of  $v$ - $K_1$  curves by a modified evaluation of lifetime measurements in static bending tests. *Journal of the American Ceramic Society* 68(8):C213–215, 1985.
- [65] Kailer A., Mauck P., Eckardt C., Berroth K., Kozlowski J., Wagemann A.: Ceramic rolling tools for enhanced lifetime and production quality. *Metal Forming* 2:401–406, 2008.
- [66] Khader I., Kailer A.: Silicon nitride wire rolling tools: Damage analysis and correlation with rolling contact fatigue. *Proceedings of the 11th European Ceramic Society Conference, Cracow, 21.-25.6.2009* eingereicht, 2009.
- [67] Lawn B.: Partial cone crack formation in a brittle material loaded with a sliding spherical indenter. *Proceedings of the Royal Society of London, Ser. A* 299:307–316, 1967.
- [68] Levesque G., Arakere N.K.: An investigation of partial cone cracks in silicon nitride balls. *International Journal of Solids and Structures* 45(25-26):6301–6315, 2008.
- [69] Fett T., Munz D., Neumann J.: Local stress intensity factors for surface cracks in plates under power-shaped stress distributions. *Engineering Fracture Mechanics* 36(4):647–651, 1990.

## Danksagung

Ich möchte mich bei Herrn Prof. Kraft für die Übernahme des Hauptreferats sowie für sein stetes Interesse an der Arbeit und die wertvollen Anregungen und Diskussionen bedanken. Mein Dank gilt auch Herrn Prof. Hoffmann, der das Korreferat übernommen hat.

Bei Dr. Heinz Riesch-Oppermann möchte ich mich ganz herzlich für seine engagierte und motivierende Betreuung bedanken. Durch unsere gemeinsamen Interessen im kulturellen Bereich fühle ich mich ihm auch über die wissenschaftliche Zusammenarbeit hinaus verbunden.

Ein herzlicher Dank gilt Herrn Dr. Theo Fett, der mich in vielen Fragestellungen mit seinen wertvollen Ratschlägen unterstützt hat.

In vielerlei Hinsicht haben Thomas Schwind und Stefan Fünfschilling zum Erfolg dieser Arbeit beigetragen, denen ich für die zahllosen Anregungen aus unseren oft lustigen Diskussionen besonders danken möchte. Desweiteren bedanke ich mich bei Iyas Khader, der mir seine experimentellen Daten uneingeschränkt zur Verfügung gestellt hat.

Bei Gabi Rizzi möchte ich mich für die Unterstützung bei der FE-Modellierung bedanken, bei Sofie Burger für die sorgsame Korrektur der Arbeit. Viet Bui gilt mein Dank für seine Unterstützung als wissenschaftliche Hilfskraft. Außerdem danke ich allen Kollegen des IMFII und des SFB483 für die unkomplizierte und angenehme Arbeitsatmosphäre.

Ich möchte mich bei allen Menschen herzlich bedanken, die mich auch über die Arbeit hinaus begleitet haben. Bei Sarah bedanke ich mich für ihre Unterstützung während der Zeit des Schreibens. Zum Schluss möchte ich mich bei meiner Familie bedanken, die mich auf meinem Weg immer motiviert und bestärkt hat.