

Untersuchung der Stupakov-Schwelle zur Erzeugung stabiler kohärenter Synchrotronstrahlung

DIPLOMARBEIT IM FACH PHYSIK

vorgelegt von
cand. phys. Marit Klein

Hauptreferent: Prof. Dr. T. Baumbach
Laboratorium für Applikationen der Synchrotronstrahlung
der Universität Karlsruhe (TH)

Koreferent: Prof. Dr. G. Quast
Institut für Experimentelle Kernphysik
der Universität Karlsruhe (TH)

Oktober 2008

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig angefertigt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Karlsruhe, den 15. Oktober 2008

Marit Klein

Als Diplomarbeit akzeptiert: _____

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	ii
Abbildungsverzeichnis	iv
1 Einleitung	1
2 Grundlagen der Synchrotronstrahlungsquellen	3
2.1 Beschleunigungskette der Elektronen	4
2.2 Das Synchrotron als Speicherring	5
2.2.1 Beschleunigung durch elektrische Wechselfelder	6
2.2.2 Strahlführung durch Magnete	8
2.2.3 Die Synchrotronschwingung	10
2.2.4 Der Speicherring bei ANKA	10
2.3 Wake-Felder und Impedanzen	12
2.4 Ladungsverteilung im Bunch	12
2.4.1 Die Vlasov-Gleichung	13
2.4.2 Die Fokker-Planck-Gleichung	13
2.4.3 Die Haissinski-Gleichung	14
2.5 Synchrotronstrahlung	15
2.5.1 Kohärente Synchrotronstrahlung (CSR)	17
2.5.2 Die Stupakov-Schwelle	22
3 Bunchdeformation durch das CSR-Wake	26
3.1 Methodik zur Berechnung der verschiedenen Bunchformen	26
3.2 Berechneten Bunchformen für positiven Momentum-Compaction-Faktor α und ihre Eigenschaften	28
3.3 Verifizierung der verwendeten Methode	34
3.3.1 Prüfung mit Testfunktion	35
3.3.2 Die Entwicklung der Bunchform mit den Iterationen	35
3.3.3 Der Einfluss des Binnings auf die Ergebnisse	36
3.3.4 Bunchformen für negativen Momentum-Compaction-Faktor α	38

3.3.5	Vergleich mit dem Resistive-Wall-Wake	39
3.4	Untersuchung der numerischen Stabilitätsgrenze	44
4	Untersuchung der Stabilitätsgrenze nach Stupakov	48
4.1	Stabilitätsgrenze und Formfaktor	48
4.2	Messung der Bursting-Stable-Schwelle	50
4.2.1	Messaufbau	50
4.2.2	Auswertung	53
4.2.3	Ergebnisse	55
5	Die Strahlungsleistung der kohärenten Synchrotronstrahlung	60
5.1	Theoretische Leistungsspektren	60
5.2	Gemessene Leistungsspektren	62
6	Zusammenfassung	64
	Anhang	65
A	Verwendete Symbole und Größen	65
A.1	Konstanten	65
A.2	Symbole	66
B	Verwendete Gleichungen	68
B.1	Allgemeine Gleichungen	68
B.2	Gleichungen der Beschleunigerphysik	68
C	ANKA-Parameter	73
D	Die Spektralfunktion	74
E	Verwendeter Programmcode	75
F	Die numerische Instabilität des Resistive-Wall-Wake	79
	Literaturverzeichnis	81
	Danksagung	85

Abbildungsverzeichnis

1.0.1	Frequenzbereiche elektromagnetischer Strahlung	1
2.2.1	Das Koordinatensystem des Synchrotrons	6
2.2.2	Die Phasenfokussierung der Beschleunigungsspannung	7
2.2.3	Schematischer Aufbau der Quadrupol- und Sextupolmagnete	8
2.2.4	Schematische Darstellung des ANKA-Speicherrings	11
2.5.1	Räumliche Verteilung der Strahlungsleistung	15
2.5.2	Das Spektrum der Synchrotronstrahlung	16
2.5.3	Abstrahlung langer und kurzer Bunche	17
2.5.4	Spektren kohärenter und inkohärenter Synchrotronstrahlung	19
2.5.5	Selbstwechselwirkung durch kohärente Synchrotronstrahlung	20
2.5.6	Microbunching	24
3.0.1	Die Energieänderung durch das CSR-Wake	27
3.2.1	Ladungsverteilungen unter Einfluss der CSR für verschiedene Vorfaktoren κ	29
3.2.2	Normierte Ladungsverteilungen $y(x)$ für verschiedene Vorfaktoren κ	30
3.2.3	Der Formfaktor $F(\kappa)$ für verschiedene Vorfaktoren κ	31
3.2.4	Der Erwartungswert \bar{x} in Abhängigkeit des Vorfaktors κ und des Formfaktors $F(\kappa)$	32
3.2.5	Die Bunchlänge σ_0 in Abhängigkeit des Vorfaktors κ und des Formfaktors $F(\kappa)$	33
3.2.6	Die Skewness in Abhängigkeit des Vorfaktors κ und des Formfaktors $F(\kappa)$	33
3.2.7	Die Kurtosis in Abhängigkeit des Vorfaktors κ und des Formfaktors $F(\kappa)$	34
3.3.1	Das Anwachsen des Formfaktors $F(\kappa)$ mit den Iterationen	36
3.3.2	Die Entwicklung der Bunchformen mit den Iterationen	37
3.3.3	Einfluss des Binnings auf den Formfaktor $F(\kappa)$	38
3.3.4	Ladungsverteilungen für negativen Momentum-Compaction-Faktor α	39
3.3.5	Das Resistive-Wall-Wake	40
3.3.6	Ladungsverteilungen unter Einfluss des Resistive-Wall-Wake für kleine κ	41

3.3.7	Der Formfaktor $F(\kappa)$ des Resistive-Wall-Wake	42
3.3.8	Erwartungswert \bar{x} und Bunchlänge σ_0 für Ladungsverteilungen des Resistive-Wall-Wake	43
3.3.9	Skewness und Kurtosis für Ladungsverteilungen des Resistive-Wall-Wake	43
3.4.1	Entwicklung instabiler Ladungsverteilungen mit den Iterationen	45
3.4.2	Das Anwachsen des Formfaktors $F(\kappa)$ mit den Iterationen für stabile und instabile Verteilungen	46
3.4.3	Fit des Verlaufs der numerischen Stabilitätsgrenze	47
4.1.1	Der Formfaktor $F(\kappa)$ über dem Ringstrom pro Bunch I_R/b und der Bunchlänge σ_0	50
4.2.1	Oszillogramm des Bolometersignals bei chaotischem Bursting	51
4.2.2	Oszillogramm des Bolometersignals bei periodischem Bursting	52
4.2.3	Oszillogramm des Bolometersignals bei stabile Emission	53
4.2.4	Das Vorgehen bei der Messung	54
4.2.5	Die Ergebnisse der Messung der Stupakov-Schwelle bei einer Strahlenergie von 1,3 GeV	57
4.2.6	Die Ergebnisse der Messung der Stupakov-Schwelle bei einer Strahlenergie von 1,6 GeV	58
5.1.1	Vergleich verschiedener Ladungsverteilung und ihrer kohärenten Spektren	61
5.2.1	Gemessenes Leistungsspektrum der kohärenten Synchrotronstrahlung .	63
F.0.1	Ladungsverteilungen unter Einfluss des Resistive-Wall-Wake für große κ	79
F.0.2	Die Entwicklung des Formfaktors $F(\kappa)$ mit den Iterationen für das Resistive-Wall-Wake	80

Kapitel 1

Einleitung

Kohärente Synchrotronstrahlung zeichnet sich durch eine große Intensität und hohe Brillanz aus. Ihre Leistung ist um ein vielfaches größer als die Leistung der inkohärenten Anteile der selben Frequenzen. An einem Synchrotron gelingt die Erzeugung nutzbarer kohärenter Synchrotronstrahlung nur im Terahertz-Frequenzbereich, weswegen kohärente Synchrotronstrahlung und THz-Strahlung oft als Synonyme gebraucht werden.

Als THz-Strahlung bezeichnet man elektromagnetische Strahlung zwischen den Mikrowellen und dem Infrarot. Ihr Frequenzband liegt im Bereich von 0,3 THz bis 3 THz, das einem Wellenlängenbereich von 1 mm bis 100 μm entspricht. Da Strahlungsquellen in diesem Frequenzbereich lange überhaupt nicht oder nur schwer nutzbar waren, spricht man auch von der THz-Lücke. Abbildung 1.0.1 zeigt die Lage der verschiedenen Strahlungen und ihre entsprechenden Frequenzbereiche.



Abbildung 1.0.1: Frequenzbereiche elektromagnetischer Strahlung

THz-Strahlung kann viele nichtleitende Materialien wie Kleidung, Papier, Plastik und Holz durchdringen, wird aber von Metall abgeschirmt und von Wasser absorbiert. Sie findet vielfältige Anwendung in der Medizin, Biologie und Astronomie. In der Physik, Chemie und Materialkunde wird sie zur Spektroskopie und zu zeitaufgelösten Messungen herangezogen.

Da Untersuchungen im Zeitbereich von 1 ps möglich sind, können mit der THz-Strahlung

Rotationen und Vibrationen kleiner Moleküle beobachtet werden. Bei der Untersuchung von Halbleitern dient sie der Erkennung von Nanostrukturen und zur Vermessung der Bandlücken von Supraleitern. In der Medizin kann die THz-Strahlung bei der Untersuchung von wasserarmen Gewebe in geringen Eindringtiefen eine gefahrlose Alternative zur Röntgenstrahlung sein. Auch die Sicherheitstechnik macht sich ihre Vorteile zu Nutze: Da die THz-Strahlung Bekleidung durchdringt, können darunter getragene Waffen und Sprengstoffe sichtbar gemacht werden.

Quellen für die experimentelle Nutzung der THz-Strahlung sind zum Beispiel das Gyrotron, der Backward-Wave Oszillator oder der Quanten-Kaskaden Laser. Sie alle sind jedoch schmalbandig und können nicht wie das Synchrotron das volle THz-Spektrum abdecken.

Kohärente Synchrotronstrahlung kann nur in Wellenlängen emittiert werden, die mindestens der Länge der Elektronenpakete (so genannte „Bunche“) im Speicherring entsprechen, jedoch wird Strahlung mit zu großen Wellenlängen von der Vakuumkammer des Rings abgeschirmt. Um dies zu vermeiden, müssen die Bunche verkürzt werden, was allerdings zu einer Instabilität, der so genannten Stupakov-Schwelle, führen kann. Diese Instabilität verhindert die konstante, stabile Emission der kohärenten Strahlung und führt zu chaotischen Strahlungsausbrüchen. Eine stabile kohärente Emission konnte bisher nur in vier Beschleunigern beobachtet werden: Bei ANKA [1] in Karlsruhe, bei BESSY II [2] und MLS [3] in Berlin und bei NewSUBARU [4] in Japan.

Die kohärente Synchrotronstrahlung erzeugt elektrische Felder, die zu einer Selbstwechselwirkung der Ladungsverteilung führen. Diese Felder können eine Deformation der Ladungsverteilung und, durch Verstärkung anfänglicher Dichteschwankungen, die Instabilität hervorrufen. In der Simulation der deformierten Ladungsverteilungen muss die Lösung dieser iterativen Prozesse numerisch erfolgen. Systematische Untersuchungen der numerischen Einflussgrößen und der genauen Ausbildung der Instabilität fehlen jedoch. Ein Schwerpunkt der vorliegenden Diplomarbeit ist die Entwicklung einer möglichst exakten Methode zur Berechnung der theoretischen Ladungsverteilungen unter Einfluss der kohärenten Synchrotronstrahlung. Damit soll die genaue Lage und der Verlauf der Instabilität als Funktion verschiedener Strahlparameter bestimmt werden, um sie mit Messungen vergleichen zu können.

In einem zweiten Teil der Arbeit werden der Messaufbau und die Ergebnisse der Messungen der Stupakov-Schwelle bei ANKA vorgestellt und diskutiert. Sie sollen zeigen, ob die Theorie nach Stupakov den Übergang von stabiler Emission zu Strahlungsausbrüchen bei ANKA vollständig erklären kann.

Schließlich werden aus der Bunchdeformation resultierende, theoretische Leistungsspektren im THz-Frequenzbereich mit einem gemessenen Spektrum verglichen. Damit ist eine Ergänzung der Aussagen über Bunchlänge und Form der Ladungsverteilungen möglich.

Kapitel 2

Grundlagen der Synchrotronstrahlungsquellen

Synchrotronstrahlung entsteht, wenn geladene Teilchen in einem Magnetfeld abgelenkt werden und dadurch eine Beschleunigung senkrecht zu ihrer Bewegungsrichtung erfahren. Diese Strahlung kann beispielsweise künstlich in Teilchenbeschleunigern wie Synchrotrons oder Speicherringen erzeugt werden oder im Weltall durch Bewegung von heißem Plasma in einem Magnetfeld, wie in der Umgebung von Pulsaren und Quasaren zu beobachten ist.

Die in Beschleunigern erzeugte Synchrotronstrahlung hat ein kontinuierliches Spektrum, welches von Mikrowellen über sichtbare Wellenlängen bis hin zu harten Röntgenstrahlen reicht. Vorteile gegenüber herkömmlichen künstlichen Lichtquellen sind eine hohe Brillanz, starke Intensität und eine definierte Polarisation. Anwendungsbeispiele lassen sich in der Oberflächenphysik und den Materialwissenschaften finden, aber auch in der Biophysik und Medizin. Außerdem dient diese Strahlung zur Analyse von Kristallstrukturen und zur Röntgentiefenlithographie.

Man unterscheidet Synchrotronstrahlungsquellen verschiedener Generationen. Zu Beginn wurde die Strahlung parasitär an Synchrotrons genutzt, deren eigentliches Einsatzgebiet die Teilchenphysik war. In der zweiten Generation baute man dann Speicherringe, deren einziges Ziel es war, Synchrotronstrahlung in den Ablenkmagneten zu erzeugen. Die beschleunigten Elektronen wurden mehrere Stunden bei konstanten Bedingungen im Ring gehalten, um gleichbleibende Charakteristika der Strahlung für die Untersuchungen zu gewährleisten.

In heutigen Synchrotronstrahlungsquellen der dritten Generation werden die geraden Strecken zwischen den Ablenkmagneten genutzt, um so genannte „Insertion-Devices“ wie Wiggler und Undulatoren zu installieren. Diese Insertion-Devices bestehen aus einer größeren Anzahl von Magneten mit alternierender Feldpolung und zwingen die Elektronen so auf eine sinusförmige Bahn. Die dadurch erzeugte Strahlung summiert sich auf und ist

somit proportional zur Anzahl der Perioden. Bei Wiggeln ist die Ablenkung durch das Magnetfeld sehr groß, was zu hohen Photonenenergien und einem breiten Strahlungsspektrum führt. Bei Undulatoren wählt man kleinere Auslenkungen, um mit einem Überlapp der Strahlung verschiedener Pole Interferenzen zu erzeugen. Daraus resultiert ein Spektrum mit schmalen Energiebändern und einer hohen Brillanz.

Auf dem Gelände des Forschungszentrums Karlsruhe (FZK) wurde im Jahr 2000 eine Synchrotronstrahlungsquelle in Betrieb genommen, die Ångströmquelle Karlsruhe, kurz ANKA genannt. Sie wird durch das Institut für Synchrotronstrahlung (ISS) des Forschungszentrums betrieben und ist auch für externe Nutzer zugänglich. Momentan verfügt ANKA über 13 Beamlines, an denen Strahlung unterschiedlichster Wellenlängen für die Experimente bereitgestellt wird. Weitere Beamlines sind in Planung.

2.1 Beschleunigungskette der Elektronen

Für die Erzeugung von Synchrotronstrahlung großer Leistung benötigt man hochrelativistische Elektronen. Ihre Bereitstellung erfolgt mittels einer Elektronenkanone, in der eine Kathode Elektronen emittiert, die zur Anode hin beschleunigt werden. Magnetfelder kollimieren den Strahl.

Eine zweite mögliche Beschleunigungsstufe ist ein Linearbeschleuniger, Linac genannt, in dem hochfrequente Wechselfelder die Elektronen beschleunigen. Dazu werden Driftröhren aus Metall mit alternierender Polung an die Wechselspannung angeschlossen, die nach innen wie faradaysche Käfige wirken. Im Innern erfahren die Elektronen kein elektrisches Feld, zwischen den Driftröhren werden sie jedoch zur nächsten Röhre hin beschleunigt. Die Länge der Driftröhren muss einem Vielfachen der Periode der Wechselspannung entsprechen, damit die Elektronen zwischen den Röhren immer die maximale Beschleunigung erfahren.

Anstelle eines Linacs kann auch ein so genanntes Mikrotron verwendet werden. Dieses besteht aus einer Hochfrequenzbeschleunigungsstrecke, wie z. B. einem Linac, und mindestens zwei Magneten konstanter Feldstärke, um die Elektronen auf eine geschlossene Bahn zu lenken. Da die Elektronen bei jedem Umlauf Energie gewinnen, werden sie in den Magneten nicht mit konstantem Radius abgelenkt, sondern vergrößern ihre Bahn mit zunehmender Energie. Aus Platzgründen ist die Energiezunahme im Mikrotron somit begrenzt. Oft existiert vor der Injektion in den Speicherring ein zusätzliches Synchrotron als Vorbeschleuniger.

Bei ANKA werden die Elektronen in einer Elektronenkanone bereitgestellt und auf 70 keV beschleunigt. Der nächste Beschleunigungsschritt erfolgt in einem, nach seiner Form benannten, Rennbahnmikrotron, in dem die Elektronen eine Endenergie von 52 MeV erreichen. Dieses Mikrotron ist aus einem Linac mit 5,3 MV Wechselspannung und zwei

identischen 180° Ablenkmagneten aufgebaut. Damit erhält man eine Flugbahn der Elektronen, die im Linac ortsfest ist, jedoch mit steigender Energie immer größere Ablenkradien in den Magneten voraussetzt. Nach Erreichen der Endenergie folgt die Injektion in ein vorbeschleunigendes Synchrotron, das Booster-Synchrotron. Sein Umfang beträgt 26,4 m und es besteht aus acht 45° Ablenkmagneten und acht Quadrupolmagneten. Die Beschleunigung erfolgt durch einen Hohlraumresonator mit einer Frequenz von 500 MHz auf eine Endenergie von 0,5 GeV, bevor die Elektronen einmal pro Sekunde in den Speicherring geleitet werden.

2.2 Das Synchrotron als Speicherring

Speicherringe sind ein spezieller Typ von Synchrotrons, deren Ziel es ist, die Teilchen über lange Zeit im Ring zu halten. Dienen die Speicherringe zur Erzeugung von Synchrotronstrahlung werden sie oftmals auch als letzte Beschleunigungsstufe genutzt. Geschlossene Kreisstrukturen bieten den Vorteil, die einmal bereitgestellten Elektronen immer wieder zur Strahlungserzeugung nutzen zu können.

Um Geschwindigkeit und Bewegungsrichtung der Ladungsträger im Speicherring zu beeinflussen, werden elektrische und magnetische Felder verwendet. Ihre Wirkung auf eine Ladung q wird durch die Lorentzkraft beschrieben:

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) \quad (2.2.1)$$

Das elektrische Feld \vec{E} führt zu einer Änderung des Betrags der Geschwindigkeit $|\vec{v}|$, die Richtung von \vec{v} ändert sich durch die magnetischen Felder \vec{B} . Wird ein Teilchen mit der Masse m durch ein Magnetfeld abgelenkt, befinden sich Lorentzkraft und Zentripetalkraft im Gleichgewicht:

$$qvB = \frac{mv^2}{R} \quad (2.2.2)$$

Setzt man als Teilchenenergie $E = mc^2$ ein, so erhält man für den Radius:

$$R = \frac{vE}{qc^2B} \quad (2.2.3)$$

Durch das fest installierte Strahlrohr ist der Radius eines Synchrotrons als Konstante gegeben. Dies erfordert bei Veränderung der Energie eine synchrone Veränderung der magnetischen Feldstärke der Ablenkmagnete, daher auch der Name Synchrotron.

In Elektronensynchrotrons sind sehr große Teilchenenergien üblich, wodurch die Näherung $v \approx c$ gilt. Damit erhält man:

$$\frac{B}{E} = \frac{1}{ecR} = \text{const.} \quad (2.2.4)$$

Das Teilchen, dessen Bahn genau dem Radius R folgt, heißt Referenz- oder Sollteilchen. Es befindet sich zur Zeit t am Ort $s = vt$ und ist der Ursprung eines mitbewegten Koordinatensystems (x, y, z) , welches die Position der anderen Teilchen beschreibt (siehe Abbildung 2.2.1). Man definiert $\tau = z/v$ als den zeitlichen Abstand zum Referenzteilchen.

Befinden sich N Teilchen im Ring, berechnet sich der Gesamtstrom I durch

$$I = \frac{Nq}{T} \quad (2.2.5)$$

mit der Umlaufzeit T .

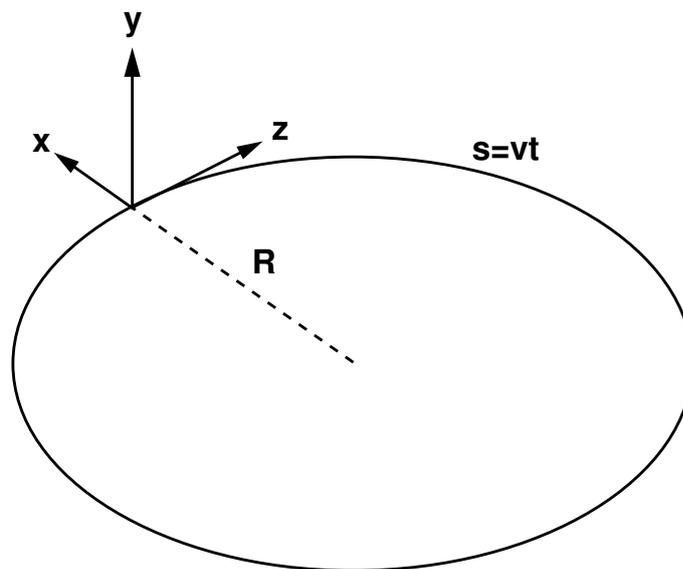


Abbildung 2.2.1: Das Koordinatensystem des Synchrotrons: Das Referenzteilchen befindet sich zur Zeit t am Ort s , die Positionen aller anderen Teilchen werden durch das mitbewegte Koordinatensystem (x, y, z) beschrieben.

2.2.1 Beschleunigung durch elektrische Wechselfelder

Die Elektronen in Synchrotronstrahlungsquellen verlieren bei jedem Umlauf durch die Strahlungsemission Energie. Um Energieverluste auszugleichen, setzt man Hohlraumresonatoren, so genannte Kavitäten ein. In die Kavitäten werden elektrische Wechselfelder eingespeist, die zu einer beschleunigenden Wechselspannung führen. Die eingespeisten Wechselfelder erfahren in der Kavität eine Verstärkung, da die Größe des Hohlraums gerade einer Resonanzwellenlänge entspricht. Typische Frequenzen liegen im Bereich von mehreren hundert Kilohertz, weswegen man auch von Radiofrequenz-Kavitäten (kurz: RF-Kavitäten) spricht. Damit die Elektronen möglichst genau jene Beschleunigung zu erfahren, die gerade den Energieverlust eines Umlaufs kompensiert, werden sie in Paketen, den so genannten Bunchen, mit dem Abstand einer Periode der Wechselspannung in den

Ring injiziert. Bei mehr als einer Kavität müssen außerdem die Frequenzen und Phasen jeder Kavität exakt aufeinander abgestimmt sein.

In einem Synchrotron sind sowohl die Umlauffrequenz der Teilchen $f_{rev} = 1/T$ als auch die Frequenz der Beschleunigungsspannung f_{RF} fest. Beide Frequenzen sind durch die harmonische Zahl $h = \frac{f_{RF}}{f_{rev}}$ miteinander verknüpft. Um die Energieverluste U_0 eines Umlaufs auszugleichen, müssen die Teilchen die passende Phase Ψ der Wechselspannung erreichen. Nur wenn h ganzzahlig ist, kann diese Phase bei jedem Umlauf die gleiche sein. Das beschleunigende Potential $V(\Psi)$ kann durch einen Sinus ausgedrückt werden:

$$V(\Psi) = V_{RF} \sin \Psi \quad (2.2.6)$$

Da sich der Großteil der Teilchen nicht am Ort des Referenzteilchens befindet, erfahren die meisten Teilchen nicht die zur Sollphase Ψ_s wirkende Beschleunigung. Doch nur am Ort des Referenzteilchens gilt:

$$U_0 = eV_{RF} \sin \Psi_s \quad (2.2.7)$$

Aus dem Ortsunterschied der Teilchen resultiert deshalb ein Beschleunigungsunterschied, der zum Anwachsen des Energieunterschieds der Teilchen führt.

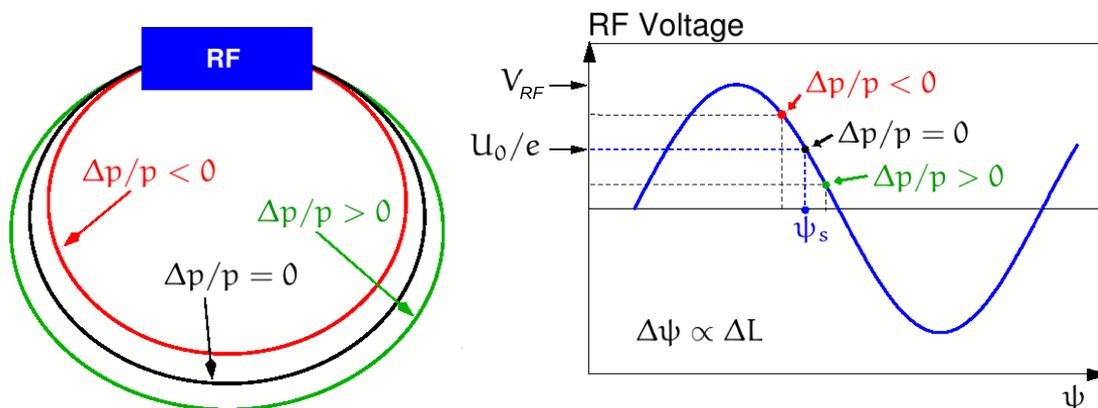


Abbildung 2.2.2: Die Phasenfokussierung der Beschleunigungsspannung: Teilchen mit einer zu großen Energie erreichen die Beschleunigungsspannung später und werden weniger beschleunigt als solche mit richtiger oder zu geringer Energie. Energieunterschiede können so ausgeglichen werden.

Um dies zu verhindern, kann man sich die Phasenfokussierung (Abbildung 2.2.2) der Hochspannung zu Nutze machen: Ein Teilchen mit zu geringem Impuls p läuft auf einer kleineren Umlaufbahn, da es stärker von den Magneten abgelenkt wird, als ein Teilchen mit zu großem Impuls. Da bei relativistischen Energien die Geschwindigkeit kaum mehr zunimmt ($v \approx c$), kommt jenes mit kleinerem Impuls früher an. Sitzt die Sollphase nun auf

der richtigen Flanke der Beschleunigungsspannung, kann das früher ankommende Teilchen mehr Energie gewinnen als das später ankommende. Die Teilchen laufen dadurch nicht auseinander sondern oszillieren mit der Synchrotronfrequenz f_s um die Sollphase. Die Bewegungsgleichung dieser näherungsweise ungedämpften Synchrotronoschwingung ist:

$$\ddot{\Psi} + f_s^2 \Psi = 0 \quad (2.2.8)$$

Ziel ist es also die Teilchen so zu injizieren, dass die Phasenfokussierung wirken und für die erforderliche Korrektur sorgen kann. Dies ist immer nach einer ganzen Schwingung der Hochspannung bei $\Psi \approx \Psi_s + n \cdot 2\pi$ der Fall, also an h verschiedenen Stellen im Ring. Man erzwingt damit eine Häufung der Teilchen in bestimmtem Abstand und erzeugt dadurch Teilchenpakete, die erwähnten Elektronenbunche.

2.2.2 Strahlführung durch Magnete

Wie im Mikrotron sorgen Dipolmagnete in Speicherringen für die Ablenkung der Elektronen, damit eine geschlossene Flugbahn entsteht. Das Magnetfeld lenkt die Teilchen je nach Energie mit einem bestimmten Radius ab. Im Idealfall entstünde so ein Kreis. Um jedoch Platz für andere Einbauten zu schaffen, wechseln sich gerade Strecken und Kreissegmente ab, dadurch entsteht ein Polygon mit runden Ecken. Im Gegensatz zu Mikrotrons ist die Feldstärke der Magnete in beschleunigenden Synchrotrons variabel. Sie muss je nach Energie der Teilchen angepasst werden, um diese auf einem konstanten Orbit zu halten.

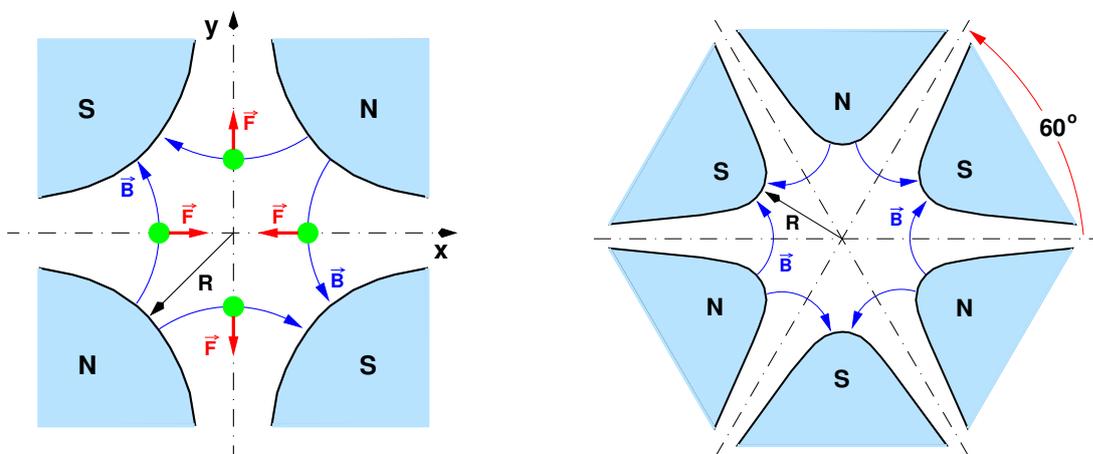


Abbildung 2.2.3: Schematischer Aufbau der Korrektur-Magnete: **links:** Quadrupolmagnet; Elektronen werden horizontal fokussiert und vertikal defokussiert. **rechts:** Sextupolmagnet; Fokussierungsfehler durch Energieunterschiede können ausgeglichen werden.

Durch abstoßende Kräfte zwischen den Elektronen, Streuung und kleinen Abweichungen von der idealen Teilchenbahn ist es nötig, den Elektronenstrahl immer wieder in magnetischen Linsen, den Quadrupolmagneten, zu fokussieren. Ihre Feldstärke nimmt ausgehend vom Mittelpunkt zu und lenkt damit nicht zentrierte Teilchen zurück in den Fokus. Allerdings geschieht diese Fokussierung immer nur in einer Ebene senkrecht zum Strahl, die andere Ebene wird dabei defokussiert. Dieser Effekt wird durch eine hintereinander Reihung zweier Quadrupole wechselnder Polung ausgeglichen, um beide Ebenen fokussieren zu können. Zusätzlich werden Sextupolmagnete installiert, die eine Korrektur nächsthöherer Ordnung darstellen. Sie korrigieren Fokussierungsfehler, die durch Energieunterschiede der Teilchen zu Stande kamen. Die konkrete Abfolge der Magnete im Ring wird als Optik des Synchrotrons bezeichnet. Ein schematischer Aufbau und der Verlauf der magnetischen Felder der fokussierenden Quadrupolen und Sextupolen ist in Abbildung 2.2.3 dargestellt.

Für die Umlaufzeit T_0 des Referenzteilchen gilt:

$$T_0 = \frac{L_0}{v_0} \quad (2.2.9)$$

wobei L die Länge eines Umlaufs ist und der Index 0 für das Sollteilchen steht.

Alle anderen Teilchen weisen in der Regel Abweichungen von der Umlaufzeit ΔT , der Länge eines Umlaufs ΔL und ihrer Geschwindigkeit Δv auf:

$$\Delta T = T - T_0, \quad \Delta L = L - L_0, \quad \Delta v = v - v_0 \quad (2.2.10)$$

Man definiert die Dispersion $D(s)$ als Änderung der Position u in Abhängigkeit von der relativen Impulsabweichung $\Delta p/p$:

$$D(s) = \frac{\Delta u}{\Delta p/p} \quad (2.2.11)$$

Der Bahnlängenunterschied ΔL der Teilchen hängt vom Ringintegral über die Dispersion ab:

$$\Delta L = \frac{\Delta p}{p} \oint \frac{D(s)}{R(s)} ds, \quad (2.2.12)$$

woraus folgt, dass jeder Dipol mit einem Ablenkradius $R(s)$ zu einer weiteren Änderung der Bahnlänge führt. Die Proportionalitätskonstanten zwischen Impulsunterschied Δp und Bahnlängenunterschied ΔL beziehungsweise Umlaufzeitunterschied ΔT werden Momentum-Compaction-Faktor α und Slip-Faktor η genannt:

$$\alpha = \frac{\Delta L/L}{\Delta p/p}, \quad \eta = \frac{\Delta T/T}{\Delta p/p} \quad (2.2.13)$$

Diese beiden Größen sind über die relative Energie γ miteinander verknüpft:

$$\eta = \alpha - \frac{1}{\gamma^2} \quad (2.2.14)$$

Bei Elektronensynchrotrons ist die Energie meist so groß, dass die Näherung $\eta \approx \alpha$ gilt. Gleichung (2.2.12) zeigt, dass der Momentum-Compaction-Faktor von der Dispersion abhängt:

$$\alpha = \frac{1}{L_0} \oint \frac{D(s)}{R(s)} ds \quad (2.2.15)$$

2.2.3 Die Synchrotronschwingung

Durch den Effekt der Phasenfokussierung vollführen die Elektronen eine longitudinale Schwingung, die Synchrotronschwingung, die durch Gleichung (2.2.8) beschrieben wird. Löst man diese Schwingungsgleichung erhält man die Synchrotronfrequenz f_s :

$$f_s^2 = f_{rev}^2 \frac{\eta h}{2\pi E} e \frac{dV}{d\Psi} \Big|_{\Psi_s} \quad (2.2.16)$$

Da $d\Psi = 2\pi f_{RF} dt$ gilt (siehe Abb. 2.2.2) und $ds \approx c dt$ ist, kann man auch schreiben:

$$f_s^2 = \frac{\eta e}{2\pi R m_0 \gamma} \frac{dV_{RF}}{ds} \quad (2.2.17)$$

Für kleine Auslenkungen um die Sollphase ist $\frac{dV}{d\Psi}$ konstant und mit Gleichung (2.2.7) erhält man eine dritte Möglichkeit die Synchrotronfrequenz auszudrücken:

$$f_s^2 = f_{rev}^2 \frac{\eta h}{2\pi E} e V_{RF} \cos(\Psi_s) = f_{rev}^2 \frac{\eta h}{2\pi E} \sqrt{e^2 V_{RF}^2 - U_0^2} \quad (2.2.18)$$

Mit ihrer Hilfe kann man Energie- und Ortsverteilung im Strahl in Beziehung setzen:

$$\sigma_z = \frac{\eta c \sigma_E}{2\pi f_s}, \quad (2.2.19)$$

wobei der quadratische Mittelwert der Teilchenorte hier durch σ_z und der quadratische Mittelwert der relative Abweichung der Teilchenenergien durch σ_E gegeben ist. Da die Teilchendichte in einem Bunch normalerweise nicht konstant ist, wird die Standardabweichung der longitudinalen Verteilung σ_z als Bunchlänge bezeichnet. Eine kleinere Synchrotronfrequenz führt damit bei gleichbleibender Energieverteilung zu kürzeren Bunchen.

2.2.4 Der Speicherring bei ANKA

Mit einer Energie von 0,5 GeV werden die Elektronen aus dem Boostersynchrotron in den Speicherring geleitet. Der Speicherring hat einen Umfang von 110,4 m und ist in vier Sektoren unterteilt (siehe Abbildung 2.2.4). In jedem Sektor setzt sich die Optik aus zwei so genannten „Double-Bend-Achromaten“ (DBA) zusammen: Ein fokussierender Quadrupolmagnet zwischen den beiden Ablenkmagneten, zwei Quadrupole zu Beginn und

am Ende und Sextupolmagnete zwischen den Dipolen und dem inneren Quadrupol. Ein Achromat hat den Vorteil, dass die Dispersion zwar im Innern steigen kann, jedoch nach dem Durchlaufen nicht höher ist als zuvor. Die Dipole haben einen Ablenkradius von 5,559 m und erzeugen ein maximales magnetisches Feld von 1,5 T.

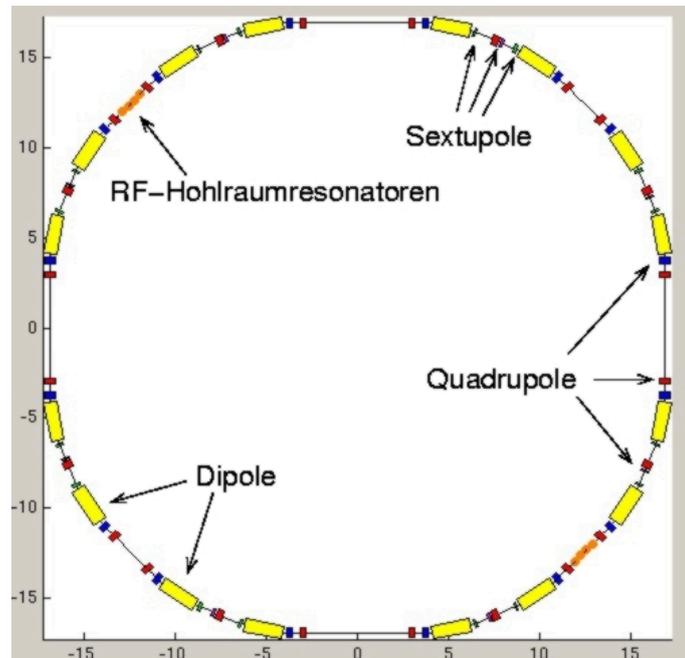


Abbildung 2.2.4: Schematische Darstellung des ANKA-Speicherrings: Der Speicherring ist in vier Sektoren unterteilt, die aus je zwei Double-Bend-Achromaten (DBA) bestehen. In zwei Sektoren sind zwischen den beiden DBA's je zwei RF-Kavitäten (orange) eingebaut. Die Dipole sind in gelb, die Quadrupole in rot und die Sextupole in grün dargestellt.

Für die Beschleunigung der Elektronen sorgen vier Kavitäten, mit einer Resonanzfrequenz von etwa 500 MHz, die paarweise zwischen zwei DBA-Strukturen angeordnet sind. Die maximal erreichbare Energie liegt bei 2,5 GeV und wird im Standardbetrieb genutzt. Dafür wird im Regelfall morgens und abends neu injiziert und der Strom der Elektronen in zwei Zügen von ca. 33 Bunchen auf 200 mA akkumuliert. Zusätzlich werden regelmäßig Sondernutzerschichten bei einer Energie von 1,3 GeV gefahren, um extrem kurze Bunche bereitzustellen.

Zwischen den Sektoren befinden sich, wie in Kapitel 2.2.2 erwähnt, geraden Strecken, die Platz für Insertion Devices bieten. Zur Zeit sind drei der vier geraden Strecken mit dem WERA¹ Undulator, dem SUL² Wiggler und dem Undulator SCU14³ besetzt. Der WERA Undulator und der SUL Wiggler haben beide eine Gesamtlänge von ca. 2 m und

¹WERA: Weichröntgenanalytikanlage

²SUL: Synchrotron Umweltlabor

³SCU: Superconducting Undulator

besteht aus 27 beziehungsweise 20 Perioden von Permanentmagneten. Diese beiden Insertion Devices erzeugen die Strahlung für die WERA- und SUL-Beamline. Der SCU14 ist ein supraleitender Undulator mit über 100 Perioden einer Länge von je 14 mm und seit 2005 in Betrieb. Die für 2009 neu geplanten Image- und Nano-Beamline sollen durch ihn gespeist werden. Alle übrigen Beamlines nutzen die Strahlung der Dipole.

2.3 Wake-Felder und Impedanzen

Jede Ladung ist Quelle eines elektrischen Feldes, welches je nach Umgebung verschiedene Verläufe annehmen kann. Um die Wirkung dieser Felder zu untersuchen, betrachtet man eine Testladung, die dem Bunch in festem Abstand folgt. Im relativistischen Fall existiert wegen des Kausalitätsprinzips vor dem Bunch kein Feld (mit einer Ausnahme, siehe Kapitel 2.5.1), weswegen es nach dem englischen Wort für Bugwelle (wake) benannt ist.

Das Wake-Feld $W(x,y,z)$ beschreibt die Wechselwirkung von Elektronenstrahl und Umgebung im Zeitbereich. Zur Beschreibung im Frequenzbereich benutzt man die Impedanzen $Z(\omega)$ der Vakuumkammer-Komponenten, wie zum Beispiel die des Strahlrohrs, welche die Proportionalität zwischen Strom $I(\omega)$ und induzierter Spannung $V(\omega)$ ist:

$$V(\omega) = -Z(\omega)I(\omega) \quad (2.3.1)$$

Im Allgemeinen ist die Impedanz komplex, ihr Realteil führt zu einem Energieverlust der Testladung, der Imaginärteil sorgt für eine Frequenzänderung. Wake-Felder und Impedanzen können nach transversaler und longitudinaler Komponente getrennt werden. In den folgenden Abschnitten wird nur letztere betrachtet und die transversale Ausdehnung vernachlässigt:

$$W_{\parallel} = W(z) \quad (2.3.2)$$

Wake-Feld und Impedanz sind durch Fouriertransformation miteinander verknüpft:

$$W(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega z/c} Z(\omega) d\omega \quad (2.3.3)$$

2.4 Ladungsverteilung im Bunch

Die Ladungsverteilung $\rho(x,y,z)$ eines Bunches wird zunächst als gaußförmig angenommen:

$$\rho(x,y,z) = \frac{N_b q}{\sqrt{2\pi}\sigma_x\sigma_y\sigma_z} \exp \left[-\frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2} - \frac{z^2}{2\sigma_z^2} \right] \quad (2.4.1)$$

Verschiedene elektromagnetische Felder können allerdings für eine Deformation der Ladungsdichte $\rho(x,y,z)$ sorgen. Die σ_i sind hierbei die Standardabweichung der Teilchenorte eines Bunches und werden als RMS-Bunchlänge bezeichnet, N_b gibt die Anzahl an Teilchen im Bunch an.

2.4.1 Die Vlasov-Gleichung

Die Vlasov-Gleichung beschreibt die Entwicklung eines Teilchen-Ensembles beim Transport entlang einer Trajektorie und ist die Bewegungsgleichung im Phasenraum. Dabei werden elektromagnetische Kräfte, jedoch keine Stöße und keine Diffusion oder Dämpfung berücksichtigt.

Der Phasenraum wird durch die verallgemeinerten Koordinaten und Impulse, q und p , aufgespannt. Die Änderung dieser Variablen ist durch

$$\dot{q} = f(q,p,t), \quad \dot{p} = g(q,p,t) \quad (2.4.2)$$

gegeben. In konservativen Systemen lässt sich diese Änderung durch den Hamiltonian H des Systems ausdrücken:

$$f = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad g = \frac{\partial H}{\partial q} \quad (2.4.3)$$

Zur Beschreibung des Teilchen-Ensembles nutzt man die Dichteverteilung $\rho(q,p,t)$. Ihre Änderung lässt sich dann durch die Vlasov-Gleichung beschreiben:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + f \frac{\partial \rho}{\partial q} + g \frac{\partial \rho}{\partial p} = 0 \quad (2.4.4)$$

Die Vlasov-Gleichung wird in Kapitel 2.5.2 verwendet, um die Auswirkungen einer anfänglich kleine Störung der Ladungsverteilung zu untersuchen.

2.4.2 Die Fokker-Planck-Gleichung

Um das Verhalten der Elektronen im Bunch vollständig zu beschreiben, muss Dämpfung, z.B. durch Synchrotronstrahlung, berücksichtigt werden. Ein Maß für die Dämpfung ist das Dämpfungsdekrement α_d , das den relativen Abfall zweier aufeinanderfolgender Amplituden eines schwingenden Systems darstellt.

$$\alpha_d = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial q} + \frac{\partial g}{\partial p} \right) \quad (2.4.5)$$

Die Diffusionskoeffizienten D_q und D_p beschreiben den Fluss im q - und p -Raum und errechnen sich aus den Mittelwerten der statistischen Änderungen der verallgemeinerten Koordinaten p und q . Erweitert man nun die Vlasov-Gleichung (2.4.4) um die Effekte der Dämpfung und Diffusion, erhält man die Fokker-Planck-Gleichung:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + f \frac{\partial \rho}{\partial q} + g \frac{\partial \rho}{\partial p} = 2\alpha_d \rho + D_q \frac{\partial^2 \rho}{\partial q^2} + D_p \frac{\partial^2 \rho}{\partial p^2} \quad (2.4.6)$$

2.4.3 Die Haissinski-Gleichung

Im Speicherring ist die longitudinale Verteilung der Elektronen im Phasenraum durch die Fokker-Planck-Gleichung (2.4.6) gegeben. Die stationäre Lösung dieser Gleichung wird Haissinski-Gleichung genannt. Ihre exakte Form ist abhängig vom vorhandenen Wake-Feld (2.3.3) und somit von der Impedanz des Speicherrings.

Bisher wurde zur Beschreibung der Elektronenverteilung im Bunch die Ladungsverteilung $\rho(x,y,z)$ verwendet. Betrachtet man nur die longitudinale Komponente z und vernachlässigt die transversale Ausbreitung, geht die Raumladungsdichte $\rho(x,y,z)$ in die Linienladungsdichte $\rho(z)$ über. Da die longitudinale Änderung der Teilchendichte nichts anderes als die Änderung des Stroms I mit der Zeit $\tau = z/c$ ist, kann stattdessen die messbare Größe $I(\tau)$ verwendet werden.

Ohne Einfluss des Wake-Feldes ist die Elektronenverteilung gaußförmig und der Stromverlauf I in Abhängigkeit von τ durch

$$I(\tau) = \frac{Nec}{\sqrt{2\pi}\sigma_0^2} \exp\left(-\frac{(c\tau)^2}{2\sigma_0^2}\right) \quad (2.4.7)$$

gegeben, wobei σ_0 natürliche Bunchlänge genannt wird.

Die Reaktion des Systems auf ein vorbeifliegendes Elektron wird Sprungantwort $S(t)$ genannt:

$$S(t) = \frac{2\pi R}{e} \int_{-\infty}^t W(t') dt' \quad (2.4.8)$$

Um die Wirkung des gesamten Bunches zu berechnen, muss $S(t)$ mit der Ladungsverteilung beziehungsweise dem Stromverlauf multipliziert werden.

Wie Haissinski [5] gezeigt hat, können dadurch Elektronen an verschiedenen Stellen innerhalb des Bunches Energie gewinnen oder verlieren. Eine Änderung der Ladungsverteilung im Bunch ist die Folge, deren Gleichgewichtsverteilung durch die Haissinski-Gleichung

$$I(\tau) = \kappa \exp\left[-\frac{(c\tau)^2}{2\sigma_0^2} - \frac{c^2}{\sigma_0^2 \dot{V}_{RF}} \int_{-\infty}^{\infty} I(\tau - t) S(t) dt\right] \quad (2.4.9)$$

gegeben ist. Der Vorfaktor κ ist so zu wählen, dass

$$\int I(t) dt = N_b e \quad (2.4.10)$$

gilt.

Nur für wenige Wake-Felder und Impedanzen, zum Beispiel einer rein resistiven Impedanz [6], kann Gleichung (2.4.9) analytisch gelöst werden. In allen anderen Fällen bleibt nur die Möglichkeit das iterative Integral in genügend vielen Schritten numerisch zu berechnen.

2.5 Synchrotronstrahlung

James Clerk Maxwell veröffentlichte 1864 erstmals die später nach ihm benannten Maxwell-Gleichungen, um die Erzeugung und Wechselwirkung von elektrischen und magnetischen Feldern zu beschreiben. Lienard und Wiechert leiteten daraus die Theorie der retardierten Potentiale ab, mit der man die Fernwirkung bewegter Ladungsträger erhält. Lamor berechnete daraus das Fernfeld einer bewegten Ladung mit dem Impuls $\vec{p} = m_0\vec{v}$ und die totale abgestrahlte Leistung für nichtrelativistische Teilchen ($v \ll c$):

$$P_s = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 m_0^2 c^3} \left(\frac{d\vec{p}}{dt} \right)^2 \quad (2.5.1)$$

Ändern relativistische Teilchen ihren Impuls, indem sie auf einer Kreisbahn mit dem Radius R abgelenkt werden, emittieren sie Strahlung der Leistung

$$P_s = \frac{e^2 c}{6\pi\epsilon_0 (m_0 c^2)^4} \frac{E^4}{R^2}, \quad (2.5.2)$$

was einen Energieverlust von

$$U_0 = \oint P_s dt = \frac{e^2}{3\epsilon_0 (m_0 c^2)^4} \frac{E^4}{R} \quad (2.5.3)$$

pro Umlauf zur Folge hat.

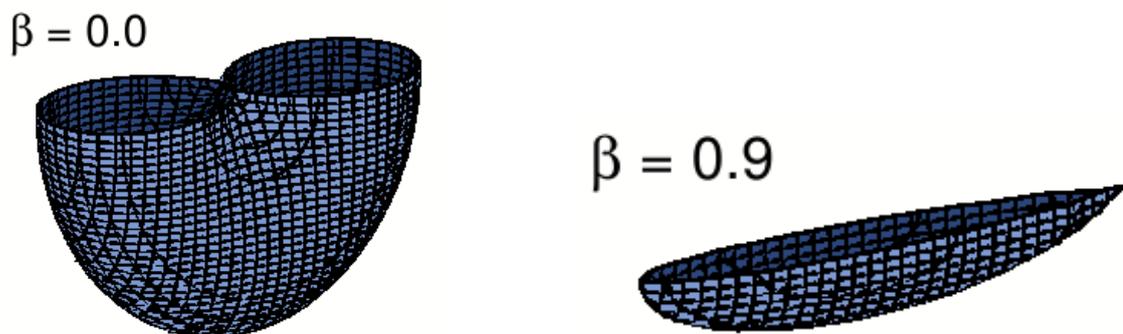


Abbildung 2.5.1: Räumliche Verteilung der Strahlungsleistung: **links:** Im Ruhesystem des Elektrons ($\beta = 0$); die Abstrahlung entspricht der eines hertzischen Dipols und ist torusförmig. **rechts:** Im Laborsystem für ein relativistische Elektron ($\beta = 0.9$); durch die Lorentztransformation erhält man einen langgestreckten Strahlungskegel.

Die azimutale Winkelverteilung der Strahlung im Ruhesystem des Elektrons entspricht der eines hertzischen Dipols:

$$\frac{P_s}{d\Omega} = \frac{e^2}{16\pi^2\epsilon_0 m_0^2 c^3} \left(\frac{d\vec{p}}{dt} \right)^2 \sin^2 \Theta, \quad (2.5.4)$$

die vergleichbar mit der Form eines Donuts ist. Transformiert man die Winkelverteilung in das Laborsystem, erhält man abhängig von der relativen Geschwindigkeit $\beta = \frac{v}{c}$ langgestrecktere Winkelverteilungen (siehe Abbildung 2.5.1).

Für hochrelativistische Elektronen ergibt sich eine Kegelform mit dem Öffnungswinkel $\Theta \approx \frac{1}{\gamma}$, die zu einer fast ausschließlichen Abstrahlung in Vorwärtsrichtung führt. Ein Beobachter an einem festen Platz sieht deswegen nur für eine kurze Zeit Δt und im Takt der Umlauffrequenz f_{rev} den Lichtpuls eines im Ring kreisenden Elektrons. Das Spektrum dieses Lichtes ergibt sich aus der Fouriertransformierten dieses Pulses und besteht somit aus der Umlauffrequenz und ihren Harmonischen. Da der Puls sehr kurz ist, erhält man ein weites Spektrum an nutzbarer Strahlung (Abbildung 2.5.2).

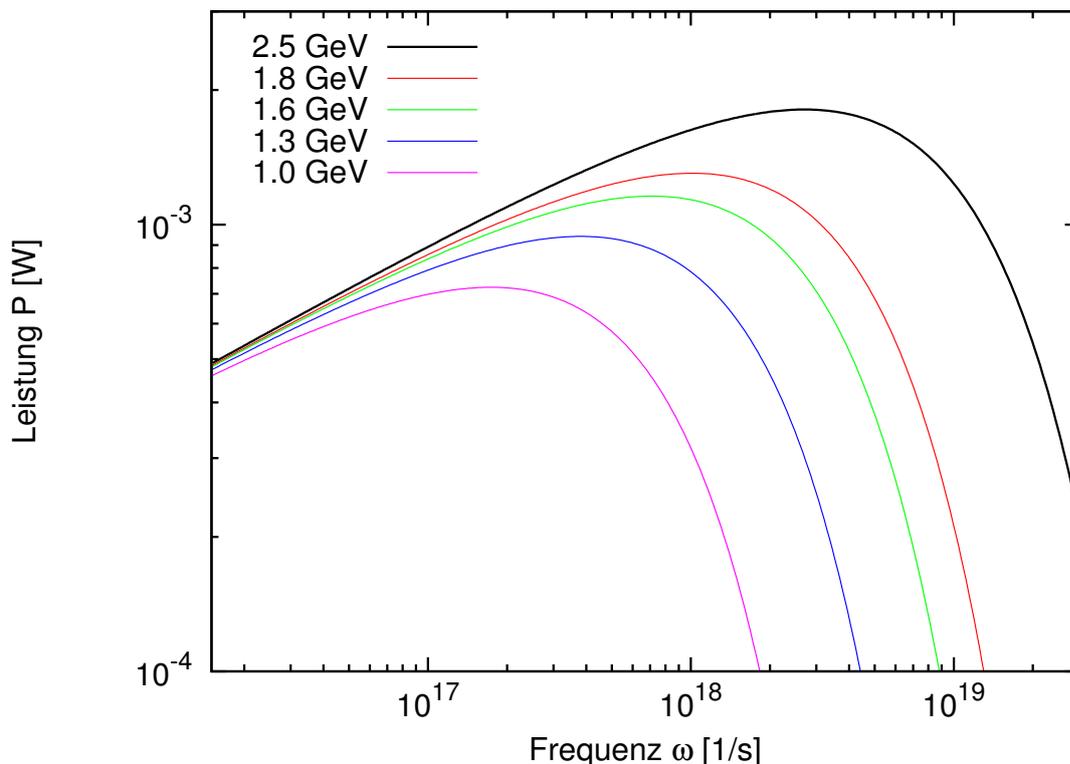


Abbildung 2.5.2: Das Spektrum der Synchrotronstrahlung: Photonenspektrum eines Ablenkmagneten für verschiedene Energien;

$I = 200$ mA, $R = 5,559$ m, $\Theta = 1$ mrad, vertikal integriert

Schwinger berechnete 1945 erstmals das abgestrahlte Spektrum von N relativistischen Ladungen auf einer gekrümmten Bahn:

$$\frac{dP}{d\omega} = \frac{P_s \cdot N}{\omega_c} S(\omega/\omega_c) \quad (2.5.5)$$

Dabei ist ω_c die kritische Frequenz, welche den Spektralverlauf in zwei Teile gleicher Leistung teilt:

$$\omega_c = \frac{3c\gamma^3}{2R} \quad (2.5.6)$$

Die Spektralfunktion S wird mit Hilfe der modifizierten Besselfunktion $K_{5/3}$ angegeben,

$$S(\xi) = \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} \xi \int_{\xi}^{\infty} K_{5/3}(x) dx \quad (2.5.7)$$

welche dem Anhang D entnommen werden kann.

2.5.1 Kohärente Synchrotronstrahlung (CSR⁴)

Grundsätzlich strahlt jeder von einem Magnetfeld abgelenkte Bunch auch kohärent, allerdings nur in Wellenlängen die größer oder gleich der Bunchlänge sind (Abbildung 2.5.3). Diese Wellenlängen sind meist so groß, dass sie durch das Strahlrohr abgeschnitten werden. Verkürzt man die Bunchlänge, wird diese Strahlung zugänglich.

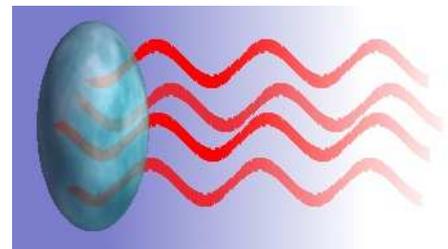
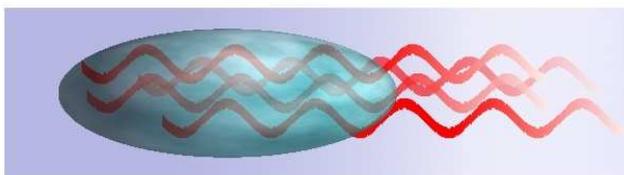


Abbildung 2.5.3: Abstrahlung von Wellenlängen kleiner und größer der Bunchlänge: Wellenlängen größer oder gleich der Bunchlänge können kohärent emittiert werden.

Um kurze Bunche zu erzeugen, muss die Optikeinstellung des Rings verändert werden, sodass der Momentum-Compaction-Faktor α reduziert wird. Diese so genannte Low-Alpha-Optik macht sich zu nutze, dass die fokussierenden Magnete so eingestellt werden können, dass die Dispersion kleiner wird (siehe Gleichung (2.2.15)), damit der Weg der hochenergetischen Teilchen verkürzt, und der Weg der niederenergetischen verlängert wird. Trotz der bestehenden Energieunterschiede sinkt die Wegdifferenz beim Umlauf und die Teilchen befinden sich näher beieinander.

⁴CSR: Coherent Synchrotron Radiation

Strahlungsleistung

Der Vorteil der kohärenten Synchrotronstrahlung ist, dass ihre Intensität proportional zum Quadrat der Teilchenzahl wächst und bei 10^8 bis 10^{10} Elektronen pro Bunch schon ein geringer kohärent emittierender Teil ausreicht, um einen großen Zuwachs an Strahlungsintensität zu erhalten.

Betrachtet man die gesamte Strahlungsleistung von N Teilchen, die mit einer konstanten Phase ϕ zueinander auf der selben Bahn kreisen, erhält man eine gewichtete Summe:

$$P_{tot} = \sum_n \left| \sum_{s=1}^N \exp(in\phi_s) \right|^2 P_n \quad (2.5.8)$$

wobei P_n die Leistung der n -ten Harmonischen ist. Teilchen gleicher Phase interferieren somit positiv.

Würden sich alle Teilchen am selben Ort befinden, ist ϕ für alle Teilchen gleich und es ergibt sich:

$$P_{tot} = N^2 \sum_n P_n \quad (2.5.9)$$

Zur Erzeugung von kohärenter Strahlung reicht es aus, wenn die Elektronen beinahe die gleiche Phase haben, sie muss nicht exakt gleich sein. Nimmt man an, die Phase folgt der Funktion $f(\phi)$, wird Gleichung (2.5.8) zu:

$$P_{tot} = \sum_n \left[N + N(N-1) \left| \int f(\phi) e^{in\phi} d\phi \right|^2 \right] P_n \quad (2.5.10)$$

Der Faktor $N(N-1)$ trägt dem Umstand Rechnung, dass nur über unterschiedliche Teilchen summiert beziehungsweise integriert wird. Um die Leistung der einzelnen Harmonischen zu bestimmen, benötigen wir die Fouriertransformierte der Ladungsverteilung, CSR-Formfaktor genannt:

$$g(\omega) = FT[\rho(z)|_{norm.}] \quad (2.5.11)$$

Dabei ist darauf zu achten, dass $\rho(z)$ normiert ist. So kann man für die Gesamtleistung einer abgestrahlten Wellenlänge schreiben:

$$\left(\frac{dP}{d\omega} \right)_{Bunch} = \left(\underbrace{N}_{inkoh.} + \underbrace{N(N-1)}_{koh.} g(\omega) \right) \left(\frac{dP_s}{d\omega} \right)_{Elektron} \quad (2.5.12)$$

Der Anteil der inkohärenten Strahlung ist in diesem Ausdruck enthalten und proportional zu N , da er aus der Summe der Einzelintensitäten besteht. Dieser Anteil ist unabhängig von der Phase der Teilchen, also unabhängig von der Bunchform.

Das in Abbildung 2.5.2 gezeigte Spektrum berücksichtigt nicht die kohärente Synchrotronstrahlung (CSR), da diese nur in wenigen Synchrotrons genutzt werden kann. Der

Das CSR-Wake-Feld

Für ein Elektron, das sich mit gleichbleibender Geschwindigkeit auf einer Kreisbahn mit dem Radius R bewegt, konnte Schott [8] das tangentielle elektrische Feld E_ϕ am Beobachtungspunkt \vec{x} bestimmen

$$E_\phi(\vec{x}, t) = -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \phi} \Phi(\vec{x}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} A_\phi(\vec{x}, t) \quad (2.5.13)$$

wobei $\Phi(\vec{x}, t)$ und $\vec{A}(\vec{x}, t)$ für das skalare Potential und das Vektorpotential stehen.

Ausgehend von den entsprechenden Ladungs- und Stromdichten kann man diese Potentiale berechnen und in obige Gleichung (2.5.13) einsetzen. Um daraus das Wake-Feld der Synchrotronstrahlung zu bestimmen, stellt man dieses Feld als Summe aus Coulomb-Term und Wake-Feld dar:

$$E_\phi = E_{coul.} + W \quad (2.5.14)$$

Man erhält in longitudinaler Richtung und für die Näherung $v = c$ [9]:

$$W(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ -\frac{Z_0 c e}{2\pi(3R^2)^{1/3}} \frac{\partial}{\partial z} z^{-1/3} & z > 0 \end{cases} \quad (2.5.15)$$

Das bedeutet, dass sich hier das Wake-Feld *vor* der Ladung befindet und nicht wie sonst dahinter (siehe Kapitel 2.3).

Obwohl sich die Elektronen fast mit Lichtgeschwindigkeit bewegen, kann die Synchrotronstrahlung den Bunch überholen, falls der Ablenkmagnet lang genug ist, da die Elektronen im Magneten einer gekrümmten Bahn folgen, während die Strahlung sich ohne Ablenkung ausbreitet. Abbildung 2.5.5 zeigt, wie das Feld, welches vom hinteren Ende des Bunches abgestrahlt wurde, den Kopf des Bunches beeinflusst.

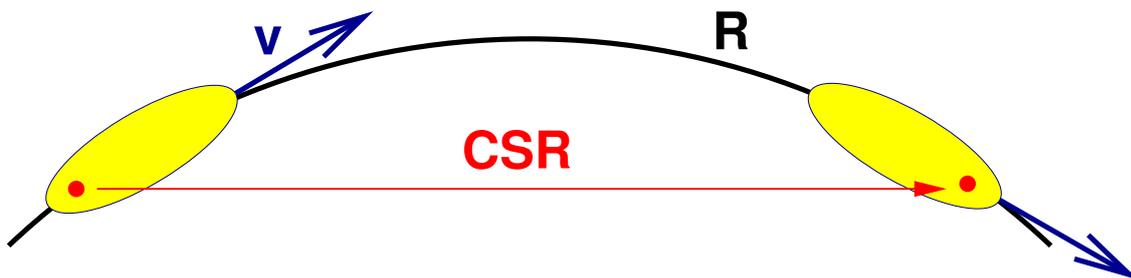


Abbildung 2.5.5: Selbstwechselwirkung durch kohärente Synchrotronstrahlung: Kohärente Synchrotronstrahlung die vom hinteren Teil des Bunches emittiert wurde, kann später auf den vorderen Teil des Bunches wirken.

Wie in Kapitel 2.5 beschrieben, breitet sich inkohärente Synchrotronstrahlung unter dem Öffnungswinkel $\Theta \approx \frac{1}{\gamma}$ aus, welcher im hochrelativistischen Fall extrem schmal wird.

Damit kann dieser Anteil der Strahlung den Bunch kaum mehr beeinflussen, wenn die transversale Ausdehnung vernachlässigt wird. Die niederfrequente kohärente Synchrotronstrahlung hingegen hat einen vergleichsweise großen Öffnungswinkel [7] von

$$\Theta_{low} \approx \left(\frac{3\sigma_z}{3R} \right)^{1/3} \quad (2.5.16)$$

und wird unter Winkeln abgestrahlt, die die spätere Bahn des Bunches treffen können. In Gleichung (2.5.15) wurde ein Raum ohne Begrenzungen angenommen, der Effekt der Abschirmung der Strahlung durch das Strahlrohr ist nicht berücksichtigt. Dieses wird oft näherungsweise als zwei parallele Platten dargestellt (das sog. Parallel-Plates-Modell [10]), an denen Strahlung reflektiert werden kann. Dieser Umstand wird hier aber aus Gründen der Vereinfachung vernachlässigt.

Bunchdeformation durch das CSR-Wake

Um die Ladungsverteilung im Bunch unter Einfluss der kohärenten Synchrotronstrahlung zu bestimmen, benutzt man die Haissinski-Gleichung (2.4.9). Dafür muss die Sprungantwort $S(t)$, also die Reaktion des Systems auf ein vorbeifliegendes Elektron, berechnet werden [9]:

$$W(t) = -\frac{Z_0 e}{2\pi(3cR^2)^{1/3}} \frac{\partial}{\partial t} t^{-1/3} \quad t > 0 \quad (2.5.17)$$

$$S(t) = \frac{2\pi R}{e} \int_{-\infty}^t W(t') dt' = -Z_0 \left(\frac{R}{3c} \right)^{1/3} t^{-1/3} \quad t > 0 \quad (2.5.18)$$

Daraus ergibt sich für den Strom:

$$I(\tau) = \kappa \exp \left[-\frac{(c\tau)^2}{2\sigma_0^2} - \frac{c^2}{\sigma_0^2 \dot{V}_{RF}} \left(-Z_0 \left(\frac{R}{3c} \right)^{1/3} \right) \int_0^\infty I(\tau - t) t^{-1/3} dt \right] \quad (2.5.19)$$

Mit den Ersetzungen

$$x = \frac{c\tau}{\sigma_0}, \quad y_\kappa = \frac{Z_0 c}{\dot{V}_{RF}} \left(\frac{R}{3\sigma_0^4} \right)^{1/3} I(x) \quad (2.5.20)$$

erhält man eine dimensionslose Form der Haissinski-Gleichung aus Gleichung (2.5.19):

$$y_\kappa(x) = \kappa \exp \left[-\frac{x^2}{2} + \text{sgn}(\alpha) \int_0^\infty y_\kappa(x - z) z^{-1/3} dz \right] \quad (2.5.21)$$

Hiebei ist x die dimensionslose longitudinale Ortskoordinate in Einheiten der Bunchlänge und y die unnormierte dimensionslose Ladungsdichte. Das Vorzeichen des Momentum-Compaction-Faktors $\text{sgn}(\alpha)$ muss hier zwingend berücksichtigt werden, da sich das Vorzeichen von \dot{V}_{RF} ändert, je nachdem ob α positiv oder negativ ist.

Da keine analytische Lösung für Gleichung (2.5.21) bekannt ist, muss die Gleichgewichtsverteilung $y_\kappa(x)$ numerisch berechnet werden. Dafür wird die Normalverteilung für $y_\kappa(x-z)$ als Startverteilung eingesetzt und daraus die neue Ladungsverteilung berechnet. Diese neue Verteilung ist Startverteilung der nächsten Iteration. Der Gleichgewichtszustand ist gefunden, wenn sich das Ergebnis der vorherigen Iteration nicht signifikant vom Ergebnis dieser Iteration unterscheidet.

Um die Ladungsverteilung des Gleichgewichtszustandes mit der Ladungsdichte im Beschleuniger zu verknüpfen, definiert man den Formfaktor $F(\kappa)$ als Integral über die Verteilung (2.5.21):

$$F(\kappa) = \int y_\kappa(x) dx \quad (2.5.22)$$

Der Formfaktor ist wegen Gleichung (2.5.20) zum Strom im Bunch I_b proportional:

$$F(\kappa) = I_b \frac{Z_0 c}{\dot{V}_{RF}} \left(\frac{R}{3\sigma_0^4} \right)^{1/3} \quad (2.5.23)$$

Der Wert des Formfaktor $F(\kappa)$ hängt alleine von dem dimensionslosen Normierungsfaktor κ aus Gleichung (2.4.9) ab, wobei ein großer κ -Wert für einen hohen Strom steht und die Deformierung der Ladungsverteilung damit zunimmt. Da Gleichung (2.5.21) wie oben erwähnt nicht analytisch lösbar ist, kann der Normierungsfaktor nicht explizit durch den Strom ausgedrückt werden.

Wenn die endgültige Bunchform y_κ bestimmt ist, lässt sich auch der CSR-Formfaktor

$$g(\lambda) = FT[y_\kappa(x)|_{norm.}] = \frac{1}{F(\kappa)^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} y_\kappa(x) e^{2i\pi\sigma_0/\lambda} dx \right|^2 \quad (2.5.24)$$

errechnen, um damit das Strahlungsspektrum des Bunches vorherzusagen. Dabei führt ein stark verformter Bunch zu einem verstärkten Anteil an hohen Frequenzen.

2.5.2 Die Stupakov-Schwelle

Wie im vorherigen Kapitel beschrieben, verhindert eine zu große Ladungsdichte im Bunch eine stabile Emission und es kommt zu Strahlungsausbrüchen. Manche Untersuchungen sind allerdings nur mit einer stabilen, zeitlich konstanten Strahlung im THz-Frequenzbereich möglich. Um diesen Nutzern die gewünschten Messungen standardmäßig zu ermöglichen, ist es wichtig, die genaue Lage der Instabilität im Parameterraum zu kennen.

Die theoretischen Erkenntnisse über den Einfluss von kohärenter Synchrotronstrahlung auf die Elektronenverteilung im Bunch fasste Karl Bane für den Microbunching Workshop 1996 [9] zusammen:

Die von der Strahlung verursachten Felder wirken auf den Bunch zurück und verändern

die Verteilung der Elektronen, dadurch wird eine kohärente Abstrahlung mit höheren Frequenzen möglich. Weiter kann für bestimmte Anfangsbedingungen keine Gleichgewichtsverteilung der Ladungen berechnet werden. Ob jedoch die daraus folgende Instabilität rein numerischer Natur ist oder gleichzeitig einen physikalischen Hintergrund besitzt, blieb ungeklärt.

Eine andere Erklärung für die Instabilität im Experiment gaben Stupakov und Heifets [11]: Eine anfängliche kleine Störung der Ladungsverteilung im Bunch wächst unter dem Einfluss der kohärenten Strahlung immer weiter an, sodass das gesamte System nach einiger Zeit von der Störung beherrscht wird.

Desweiteren konnten Stupakov und Heifets zeigen, welche Anfangsbedingungen diese Entwicklung begünstigen oder verhindern [11]:

Ausgehend von einem konstanten, nicht gebunchten Strahl mit der Sollenergie E_0 , der sich auf einem Orbit mit dem Radius R ohne Abschirmung befindet, kann die Vlasov-Gleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial s} - \eta \delta_E \frac{\partial \rho}{\partial z} - \frac{r_0}{\gamma} \frac{\partial \rho}{\partial \delta} \int_{-\infty}^{\infty} W(z - z') \rho(\delta', z', s) dz' d\delta' = 0 \quad (2.5.25)$$

aufgestellt werden. Hier ist die longitudinale Ladungsverteilung durch $\rho(z, \delta, s)$ gegeben, wobei der Abstand zum Referenzteilchen z als Ortskoordinate, der relative Energieunterschied zum Referenzteilchen $\delta_E = \frac{E - E_0}{E}$ als Impulsäquivalent und der Ort des Referenzteilchens $s = ct$ als Zeitkoordinate gegeben ist. Weitere Konstanten sind der Slip-Faktor η und der klassische Elektronenradius r_0 . Als Wake-Feld wird das in Gleichung (2.5.17) definierte CSR-Wake eingesetzt.

Für eine Störungsrechnung wird $\rho(z, \delta, s)$ als Summe aus Gleichgewichtsverteilung $\rho_0(\delta)$ und einer Störung $\rho_1(z, \delta, s)$ dargestellt,

$$\rho(z, \delta, s) = \rho_0(\delta) + \rho_1(z, \delta, s) \quad (2.5.26)$$

$$\rho_0(\delta_E) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\delta_E^2}{2\sigma_E^2}\right) \quad (2.5.27)$$

$$\rho_1(z, \delta, s) = \hat{\rho}_1 \exp(-i\omega s/c + ikz) \quad (2.5.28)$$

wobei $\rho_1 \ll \rho_0$ gelten muss. Die Wellenzahl der Störung ist mit k gegeben, n steht für die Teilchendichte im Gleichgewichtszustand und σ_E ist der quadratische Mittelwerte der relativen Energieunterschiede δ_E . Setzt man diese Verteilung in (2.5.25) ein und linearisiert die Gleichung, erhält man einen Ausdruck für ω in Abhängigkeit von k . Der Imaginärteil von k muss negativ sein, um ein Anwachsen der Störung zu verhindern. Daraus ergibt sich die Bedingung

$$kR > 2.0 \left(\frac{nr_0}{|\eta|\gamma\sigma_E^2} \right)^{3/2} \quad (2.5.29)$$

für einen stabilen Strahl. Besteht der Strahl aus einzelnen gaußförmig Bunchen mit N_b Teilchen und der jeweiligen Länge σ_z , behält das obige Ergebnis seine Gültigkeit, falls

$$\frac{1}{k} \ll \sigma_z \quad (2.5.30)$$

gilt. Die Instabilität ist dann abhängig von der lokalen Teilchendichte, die maximal den Wert

$$n = \frac{N_b}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} \quad (2.5.31)$$

annehmen kann. Damit ändert sich Gleichung (2.5.29) zu

$$kR > 2.0 \left(\frac{N_b r_0}{|\eta| \sqrt{2\pi}\sigma_z \gamma \sigma_E^2} \right)^{3/2}. \quad (2.5.32)$$

Diese Grenze zwischen stabiler Ladungsverteilung und Instabilität wird Stupakov-Schwelle genannt.

Die anwachsende Störung in der Theorie von Stupakov und Heifets führt zu Microbunching. Das bedeutet, dass die Ladungsverteilung keiner glatten Kurve entspricht, sondern kleine Modulationen aufweist, die Microbunche genannt werden. Microbunche strahlen für sich in sehr kurzen Wellenlänge kohärent und vergrößern damit die Strahlungsleistung, die wiederum die Instabilität treibt. Die anfänglich wenigen Microbunche vermehren sich und breiten sich über die gesamte Bunchlänge aus. Die erhöhte Abstrahlung führt allerdings zu einer größeren Dämpfung, was eine Rückbildung der Microbunche zur Folge hat. Es entsteht ein Kreislauf, der eine mögliche Erklärung der periodischen Strahlungsausbrüche ist [12, 13]. Abbildung 2.5.6 zeigt die Ergebnisse einer Simulation von Venturini et al. [13] zur Ausbildung von Microbunchen durch kohärente Synchrotronstrahlung.

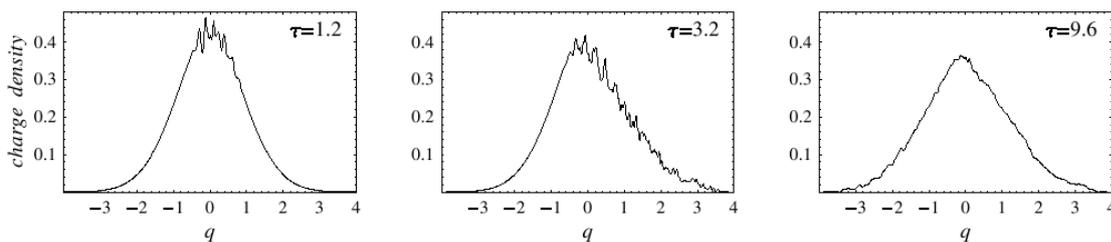


Abbildung 2.5.6: Microbunching: Simulierte Ladungsverteilung zu drei verschiedenen Zeiten τ über der Ortskoordinate q . Die Instabilität wurde durch eine kleine Störung zur Zeit $\tau = 0$ ausgelöst. **links:** Erste Microbunche bilden sich, **mittig:** Die Microbunche haben sich über die gesamte vordere Flanke ausgebreitet, **rechts:** Durch Dämpfung glättet sich die Ladungsverteilung wieder.

(Aus: Venturini et al., Coherent Synchrotron Radiation and Bunch Stability in a Compact Storage Ring [13])

Den Zusammenhang beider, in diesem Abschnitt behandelte, Theorien stellt Fernando Sannibale her [14]. Er verknüpft die Theorie von Stupakov mit messbaren Größen der Beschleunigerphysik und zeigt, welche Abstrahlungsspektren durch eine Verformung der Bunche nach Bane zu erwarten ist:

Um Gleichung (2.5.32) experimentell überprüfen zu können, muss sie in eine andere Form gebracht werden. Mit den Gleichungen (2.2.17) und (2.2.19) erhält man folgende Bedingung für eine stabile Emission

$$N_b < \frac{2^{5/2} \pi^{13/6} \epsilon_0}{ceR^{1/3}} f_{RF} V_{RF} \frac{\sigma_z^3}{\lambda^{2/3}}, \quad (2.5.33)$$

wobei angenommen wurde, dass die Elektronen auf einem Teil der Flanke der RF-Spannung ankommen, der als linear betrachtet werden kann. Dann gilt für die zeitliche Änderung der Beschleunigungsspannung \dot{V}_{RF} :

$$\frac{dV_{RF}}{dt} \approx 2\pi f_{RF} V_{RF} \quad (2.5.34)$$

Außerdem wurde von der Wellenzahl der Störung zur entsprechenden Wellenlänge $\lambda = 2\pi/k$ übergegangen.

Kapitel 3

Bunchdeformation durch das CSR-Wake

Das Wake-Feld der kohärenten Synchrotronstrahlung (Gleichung (2.5.15)) sorgt für Energiegewinne und Verluste der einzelnen Elektronen im Bunch. In Abbildung 3.0.1 sind diese Änderungen der Energie für einen gaußförmigen Bunch gezeigt. Durch die Beschleunigung der vorderen Ladungsträger und das Abbremsen der hinteren verändert sich die Verteilung im Bunch allmählich. Die veränderte Ladungsverteilung hat wiederum ein verändertes Wake-Feld zur Folge, weswegen die Berechnung der Gleichgewichtsverteilung der Ladungen mittels eines iterativen Integrals (Gleichung (2.5.19)) erfolgt.

3.1 Methodik zur Berechnung der verschiedenen Bunchformen

Die in Kapitel 2.5.1 eingeführte dimensionslose Form der Haissinski-Gleichung für das CSR-Wake

$$y_{\kappa}(x) = \kappa \exp \left[-\frac{x^2}{2} + \operatorname{sgn}(\alpha) \int_0^{\infty} y_{\kappa}(x-z) z^{-1/3} dz \right] \quad (3.1.1)$$

muss numerisch gelöst werden, um die Gleichgewichtsverteilung der Ladungen zu bestimmen. Dabei ist x ein vielfaches der natürlichen Bunchlänge σ_0 , also der Standardabweichung der ursprünglichen Normalverteilung, und y gibt eine unnormierte Dichte in Abhängigkeit des Vorfaktors κ an.

Bei der numerischen Berechnung treten zwei Probleme auf:

- Die obere Integrationsgrenze ist ∞
- Die untere Integrationsgrenze hat eine Singularität wegen $z^{-1/3}$

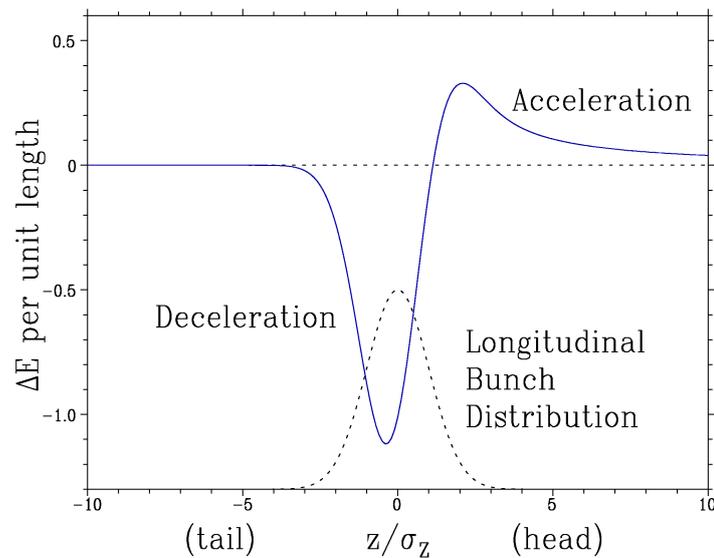


Abbildung 3.0.1: Die Energieänderung ΔE der Elektronen durch das CSR-Wake über der normierten longitudinalen Koordinate z/σ_z : Die kohärente Synchrotronstrahlung, die von einem gaußförmigen Bunch (schwarz gestrichelt) ausgesendet wird, sorgt für ein Abbremsen der hinteren Elektronen im Bunch, wohingegen die Elektronen im Kopf des Bunches beschleunigt werden. (Aus: Agoh, Dynamics of Coherent Synchrotron Radiation by Paraxial Approximation [7])

Da die Verteilungen sehr schnell zu beiden Seiten abfallen, muss die Integration nicht bis ∞ durchgeführt werden. Es reicht die Berechnungen der $(x-z)$ -Werte im Intervall $[-4,6]$ durchzuführen, was ein Absinken der Dichte-Werte $y(x)$ auf unter 10^{-4} an den Rändern gewährleistet. Um das zweite Problem zu umgehen, empfiehlt es sich, das Integral zu transformieren [15]. Divergiert der Integrand wie $(z-a)^{-\xi}$ für $0 \leq \xi < 1$ bei a , ist folgende Transformation die Lösung:

$$\int_a^b f(z) dz = \frac{1}{1-\xi} \int_0^{(b-a)^{1-\xi}} t^{\xi/1-\xi} f(t^{\xi/1-\xi} + a) dt \quad \text{für } (b > a) \quad (3.1.2)$$

Angewendet auf Gleichung (3.1.1) erhält man:

$$y(x) = \kappa \exp \left[-\frac{x^2}{2} + \operatorname{sgn}(\alpha) \frac{3}{2} \int_0^\infty y(x - t^{3/2}) dt \right] \quad (3.1.3)$$

Diese Gleichung ist Ausgangspunkt für die Bestimmung der Ladungsverteilungen unter Wirkung der CSR. Zu ihrer Berechnung wurde ein Programm in C++ geschrieben, das dem Anhang E entnommen werden kann.

Als Format für alle Gleitkommazahlen wurde „long double“ gewählt, um möglichst genaue Werte zu erhalten. Dadurch steht pro Zahl ein Speicherplatz von 80 Bit zur Verfügung, was eine Berechnung auf 19 Stellen zulässt.

Für die gewählten Parameter der oberen und unteren Grenze des Wertebereichs o und u ,

der Anzahl der Iterationen It , der Binngroße Δx und des Vorfaktors κ wird die Anfangsverteilung $y_{start}(x)$ erzeugt:

$$y_{start}(x) = \kappa \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \quad (3.1.4)$$

Mit Binngroße ist hierbei der Abstand der x -Werte Δx , zu denen ein y -Wert berechnet wurde, gemeint. Mit einer Ober- und Untergrenze von $o = 6$ beziehungsweise $u = -4$ und $\Delta x = 2000$ wurden für jede Verteilung 20.000 Wertepaare berechnet.

Der nächste Schritt ist die Berechnung des Integrals $I(x)$

$$I(x) = \int_0^\infty y(x - t^{3/2}) dt \quad (3.1.5)$$

für jeden x -Wert aus der aktuellen Verteilung. Dazu wird das Rechteckverfahren angewandt:

Man errechnet Funktionswerte in einem bestimmten Abstand und multipliziert diese jeweils mit dem Mittelwert der Abstände zum vorherigen und nachfolgenden Funktionswert. Der x -Wertebereich ist bereits in $s = (o - u)/\Delta x$ Teile unterteilt und der zugehörige Funktionswert $y(x)$ ist bekannt. Das Integral ist dann die Summe aus den Funktionswerten multipliziert mit der Breite Δx des Binnings. Da nach der Transformation der Haissinskigleichung (3.1.3) die Variable t eine gebrochene Hochzahl besitzt, hat man zwei Möglichkeiten der numerischen Berechnung: entweder man hält den Abstand zwischen den einzelnen $t^{3/2}$ konstant, oder den Abstand der einzelnen t . In dem verwendeten Programm wurde die erste Möglichkeit genutzt, dadurch muss die Breite immer wieder neu aus der Differenz des vorherigen und des nächsten t berechnet werden. Die neue Ladungsverteilung kann nun mit

$$y(x) = \kappa \exp\left(-\frac{1}{2}x^2 + \text{sgn}(\alpha)I(x)\right) \quad (3.1.6)$$

erzeugt werden.

Die letzten beiden Schritte müssen nun so oft durchgeführt werden, bis keine Veränderung der Verteilung mehr eintritt. Die Anzahl der Iterationen It ist also groß genug zu wählen. Am Ende der Berechnungen wird das Integral der gesamten Verteilung, der Formfaktor $F(\kappa)$, ebenfalls mit der Rechteckmethode berechnet.

3.2 Berechneten Bunchformen für positiven Momentum-Compaction-Faktor α und ihre Eigenschaften

Die Synchrotronstrahlungsquelle ANKA wird stets mit einem Momentum-Compaction-Faktor α betrieben, der größer Null ist. Deswegen wurde in allen folgende Berechnungen ein positives Vorzeichen angenommen. Mit der in Kapitel 3.1 vorgestellten Methode

wurden Ladungsverteilungen für unterschiedliche Vorfaktoren κ mit jeweils 2000 Funktionswerten $y(x)$ pro x im Intervall $[-4,6]$ und so vielen Iterationen berechnet, dass der Formfaktor eine Genauigkeit von 12 Nachkommastellen aufweist.

Ausgewählte Bunchformen sind in Abbildung 3.2.1 über der dimensionslosen longitudinalen Koordinate $x = c\tau/\sigma_0$ in Einheiten der Bunchlänge σ_0 dargestellt.

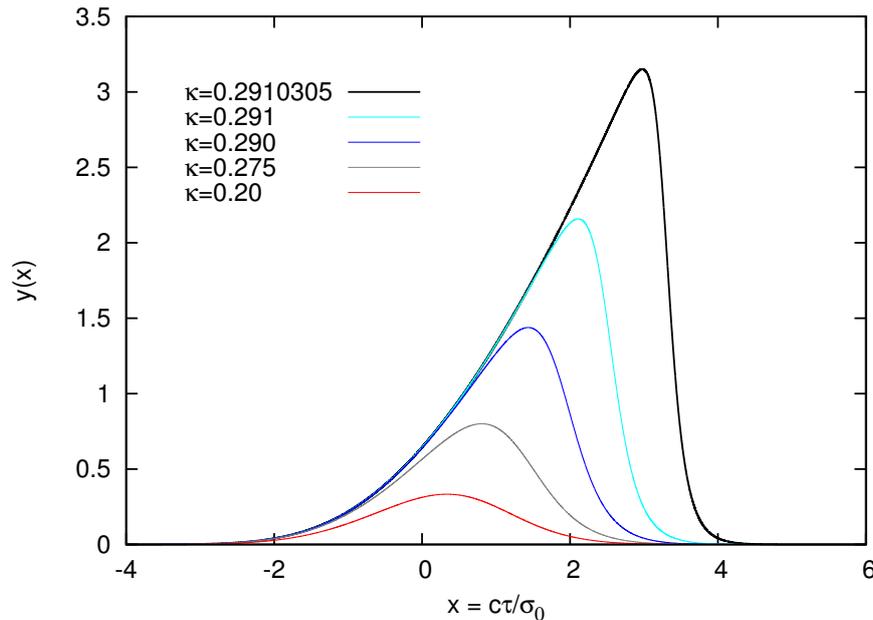


Abbildung 3.2.1: Gleichgewichtsverteilung $y(x)$ der Ladungen unter Einfluss der CSR für verschiedene Vorfaktoren κ : Mit steigendem κ werden die Verteilungen steiler und verschieben ihren Ladungsschwerpunkt zu größeren x -Werten, wobei x die dimensionslose longitudinale Koordinate in Einheiten der natürlichen Bunchlänge σ_0 ist.

Zu beobachten ist eine Verschiebung des Ladungsschwerpunkts zu positiven x -Werten und somit zum Kopf des Bunches hin für wachsenden Vorfaktor κ . Dies geschieht um den steigenden Energieverlust durch stärkere Synchrotronstrahlung bei größerem κ auszugleichen, denn bei positivem Momentum-Compaction-Faktor α werden früher ankommende Teilchen stärker in der Kavität beschleunigt (siehe Kapitel 2.2.1). Außerdem ist eine wachsende Asymmetrie der Ladungsverteilungen mit steigendem κ zu beobachten. Mit der in Kapitel 2.5.1 vorgestellten Gleichung (2.5.23) können Messgrößen wie der Strom im Bunch I_b und die Bunchlänge σ_0 mit dem Formfaktor $F(\kappa)$ und so mit der entsprechenden Ladungsverteilung verknüpft werden:

$$F(\kappa) = \int y_\kappa(x) dx = I_b \frac{Z_0 c}{\dot{V}_{RF}} \left(\frac{R}{3\sigma_0^4} \right)^{1/3} \quad (3.2.1)$$

Um die berechneten Verteilungen zu normieren, müssen sie durch den Formfaktor geteilt werden. Abbildung 3.2.2 zeigt die normierten Verteilungen für die gleichen Vorfaktoren

wie Abbildung 3.2.1.

Beobachtet man die Maxima der normierten Verteilungen, so wachsen diese zunächst mit dem Vorfaktor κ an. Daraus lässt sich auf eine verkürzte Bunchlänge σ_0 schließen. Ab einem Vorfaktor von $\kappa > 0,29$ kehrt sich dieses Verhalten jedoch um.

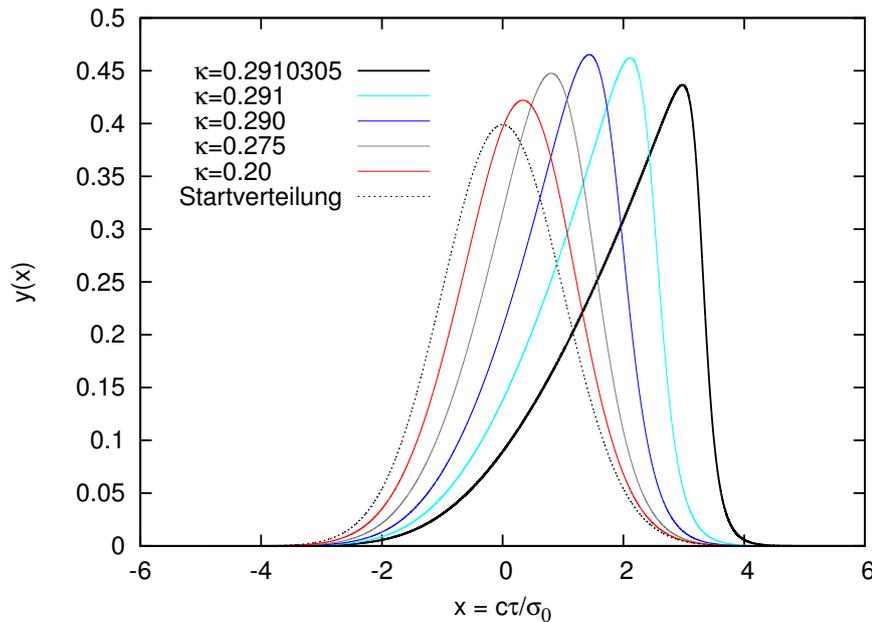


Abbildung 3.2.2: Normierte Gleichgewichtsverteilungen $y(x)$ für verschiedene Vorfaktoren κ : Ausgehend von der gaußförmigen Anfangsverteilung verkürzt sich mit steigendem κ zunächst die Bunchlänge stark, erkennbar an den wachsenden Maxima der Verteilungen. Bei Verteilungen mit $\kappa > 0,29$ ist jedoch neben der deutlichen Asymmetrie eine erneute Verlängerung der Bunche zu beobachten.

Trägt man den Formfaktor $F(\kappa)$ über dem Vorfaktor κ auf (Abbildung 3.2.3), zeigt sich, dass mit steigendem Wert von κ der Formfaktor extrem schnell anwächst und für einen Grenzwert κ_{max} gegen unendlich geht. Der Grenzwert des Vorfaktors wurde auf 12 Stellen genau bestimmt:

$$0,291030514208 < \kappa_{max} < 0,291030514209 \quad (3.2.2)$$

Für Werte $\kappa > \kappa_{max}$ kann keine Gleichgewichtsverteilung mehr gefunden werden. Sowohl das Aussehen der Bunchformen $y_\kappa(x)$ als auch die Entwicklung des Formfaktors $F(\kappa)$ mit dem Vorfaktor κ entsprechen den Ergebnissen von K. Bane [9] und F. Sannibale et al. [16]. Jedoch kann in den Berechnungen von K. Bane schon für $\kappa > 0,2905$ keine Gleichgewichtsverteilung mehr gefunden werden.

Zur weiteren Untersuchung der errechneten Verteilungen wurden die normierten zentralen Momente bestimmt. Die Momente beschreiben eine Verteilungsfunktion vollständig

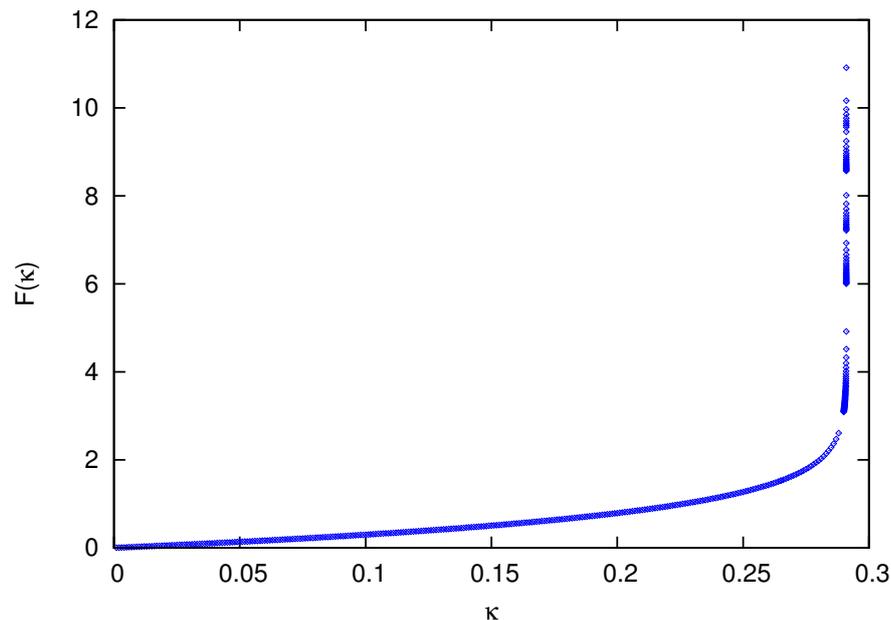


Abbildung 3.2.3: Der Formfaktor $F(\kappa)$ für verschiedene Vorfaktoren κ : $F(\kappa)$ wächst stetig für $0 < \kappa < 0,25$ an und geht dann für $\kappa \rightarrow \kappa_{max} = 0,291030514208$ gegen unendlich.

und ihre Werte geben die Stärke der Abweichung von der Normalverteilung an. Das k -te Moment m_k einer kontinuierlichen Verteilung $f(x)$ ist:

$$m_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx \quad (3.2.3)$$

Die Momente einer diskreten Verteilung mit den Werten x_i und den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten p_i berechnen sich aus:

$$m_k = \sum_{i=1}^{i=\infty} x_i^k \cdot p_i \quad (3.2.4)$$

Das erste Moment ist der Erwartungswert \bar{x} . Bei einer zentrierten Ladungsverteilung ist dieser Wert Null. Ein positiver Wert bedeutet eine Verschiebung zum Kopf, ein negativer eine Verschiebung zum Bunchende. Zur Berechnung der zentralen Momente wird die Verteilung der Ladungen um den Erwartungswert \bar{x} betrachtet:

Das zweite zentrale Moment ist die Varianz. Die Varianz ist das Quadrat der Standardabweichung, die wiederum der Bunchlänge σ entspricht. Werte der Varianz beziehungsweise der Standardabweichung größer eins, stehen für eine verbreiterte Verteilung und eine Bunchverlängerung, bei Werten kleiner eins wurde die Bunchlänge verkürzt. Das dritte zentrale Moment wird Skewness genannt und ist ein Maß für die Schiefe der Verteilung. Eine symmetrische Verteilung hat eine Schiefe von Null, positive Werte entsprechen einer linkssteilen, negative Werte einer rechtssteilen Verteilung. Das vierte zentrale Moment ist die Kurtosis und beschreibt die Wölbung der Verteilung. Eine positive Wölbung ist steiler,

besitzt einen höheren Peak und einen weiter auslaufenden Tail als die Normalverteilung. Eine negative Wölbung ist flacher als die Normalverteilung, fällt aber zu den Rändern schneller ab.

Für die berechneten Ladungsverteilungen mit N Datensätzen aus x-Werten x_i , y-Werten y_i und Abstand zwischen den x-Werten δ werden die zentralen Momente folgendermaßen bestimmt:

$$\text{Erwartungswert:} \quad \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \cdot y_i \cdot \delta \quad (3.2.5)$$

$$\text{Varianz:} \quad \text{Var} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \cdot y_i \cdot \delta = \sigma^2 \quad (3.2.6)$$

$$\text{Skewness:} \quad \text{Skew} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} \right)^3 \cdot y_i \cdot \delta \quad (3.2.7)$$

$$\text{Kurtosis:} \quad \text{Kurt} = \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} \right)^4 \cdot y_i \cdot \delta \right] - 3 \quad (3.2.8)$$

Die Subtraktion der Konstanten in Gleichung (3.2.8) sorgt dafür, dass die Normalverteilung eine Kurtosis von Null hat.

Der Quellcode zur Bestimmung der Momente ist im Anhang E aufgeführt.

Für eine konstante Bunchlänge σ_0 ist der Formfaktor $F(\kappa)$ direkt zum Strom im Bunch proportional (siehe Gleichung (3.2.1)). Trägt man die zentralen Momente also über $F(\kappa)$ auf, entspricht dies einer Darstellung über dem Strom in beliebigen Einheiten, falls die Bunchlänge konstant gehalten wird.

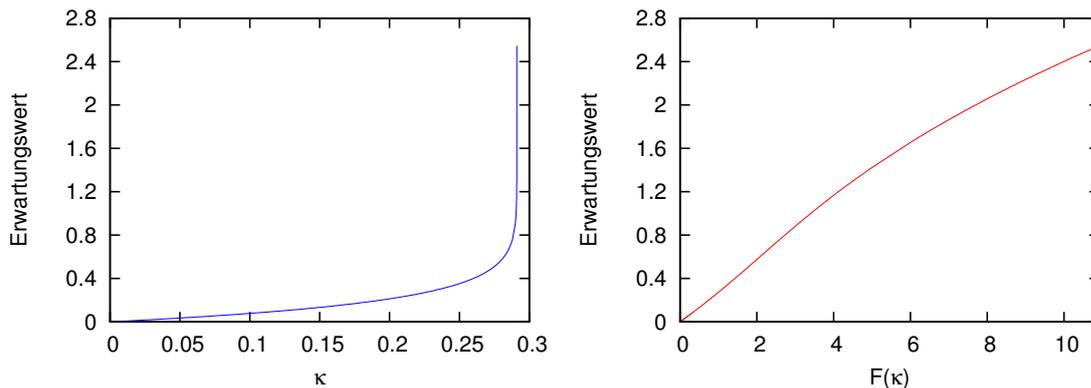


Abbildung 3.2.4: Der Erwartungswert \bar{x} der Ladungsverteilungen, **links:** über dem Vorfaktors κ , **rechts:** über dem Formfaktors $F(\kappa)$: Der Erwartungswert \bar{x} entwickelt sich mit dem Vorfaktor κ ganz analog zum Formfaktor (siehe Abbildung 3.2.3). Deshalb ist die Auftragung von κ über $F(\kappa)$ annähernd eine Gerade.

Die Entwicklung des Erwartungswertes \bar{x} in Abhängigkeit des Vorfaktors κ ist analog zum Formfaktor $F(\kappa)$ (Abbildung 3.2.3): Für kleine κ wächst \bar{x} zunächst stetig und

für $\kappa \rightarrow \kappa_{max}$ strebt \bar{x} gegen unendlich. Deswegen erhält man eine weitgehend lineare Abhängigkeit, wenn \bar{x} über $F(\kappa)$ aufgetragen wird. Der Erwartungswert ist also in erster Näherung proportional zum Strom, falls die Bunchlänge σ_0 konstant ist.

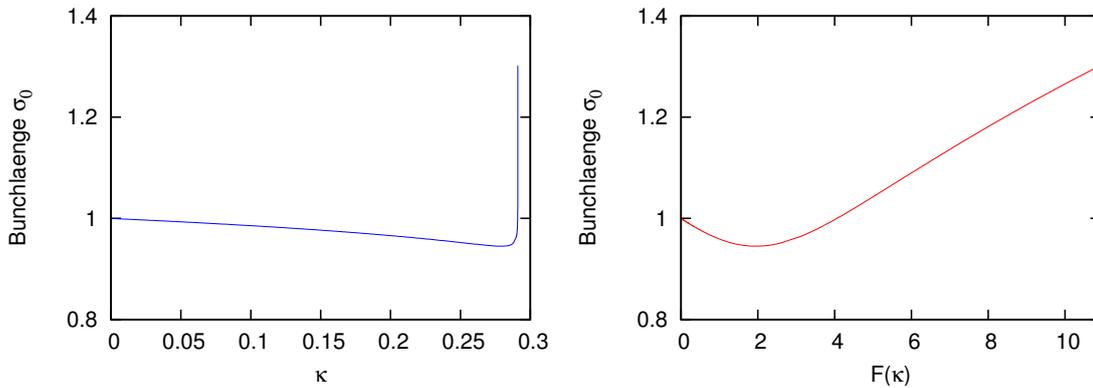


Abbildung 3.2.5: Die Bunchlänge σ_0 , **links:** über dem Vorfaktors κ , **rechts:** über dem Formfaktors $F(\kappa)$: Zunächst verkürzt sich die Bunchlänge bis auf ein Minimum von 0,945 bei $\kappa = 0,279$ oder $F(\kappa) = 1,94$, um dann linear mit $F(\kappa)$ anzuwachsen.

Die Bunchlänge σ_0 wird bei kleinem κ und somit kleinem $F(\kappa)$ zunächst verkürzt (Abbildung 3.2.5), bis sie ihr Minimum von 0,945 bei $\kappa = 0,279$ oder $F(\kappa) = 1,94$ erreicht. Danach verlängert sich der Bunch proportional zu $F(\kappa)$. Da hier die Bunchlänge eine Funktion von $F(\kappa)$ ist und somit nicht konstant, kann der Formfaktor $F(\kappa)$ nicht als Stromäquivalent dienen.

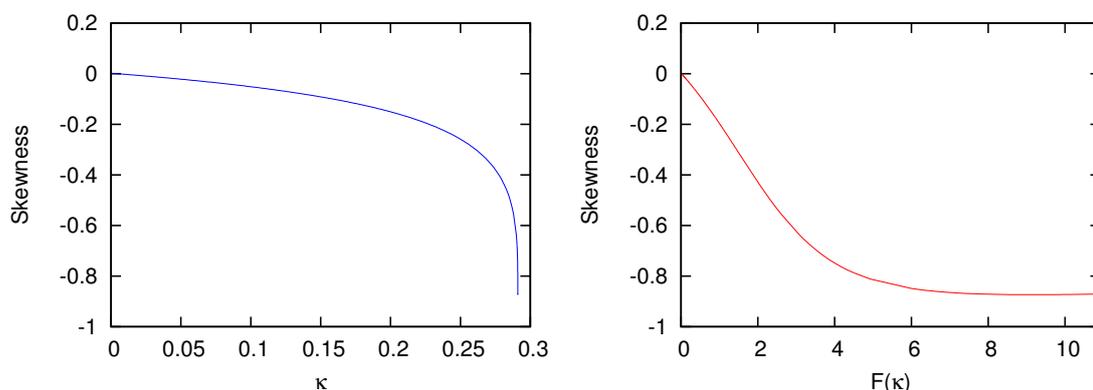


Abbildung 3.2.6: Die Skewness der Ladungsverteilungen, **links:** über dem Vorfaktors κ , **rechts:** über dem Formfaktors $F(\kappa)$: Die durchweg negativen Skewnesswerte stehen für rechtssteile Verteilungen, die Asymmetrie der Bunchformen nimmt mit steigendem κ zu. Stellt man die Skewness in Abhängigkeit von $F(\kappa)$ dar, erhält man eine Minimum bei $F(\kappa) = 9,12$.

Die Skewness nimmt für alle κ und $F(\kappa)$ negative Werte an (Abbildung 3.2.6), was auf eine rechtssteile Verteilung schließen lässt. Betrachtet man die Schiefe der Verteilung, die dem Betrag der Skewness entspricht, so wächst diese mit κ erst langsam, um dann für $\kappa \rightarrow \kappa_{max}$ gegen $-\infty$ zu gehen. Für steigenden Strom wächst die Schiefe zunächst kontinuierlich und erreicht dann bei $F(\kappa) = 9,12$ ihr Maximum. Der folgende Rückgang der Schiefe mit dem Strom ist vernachlässigbar.

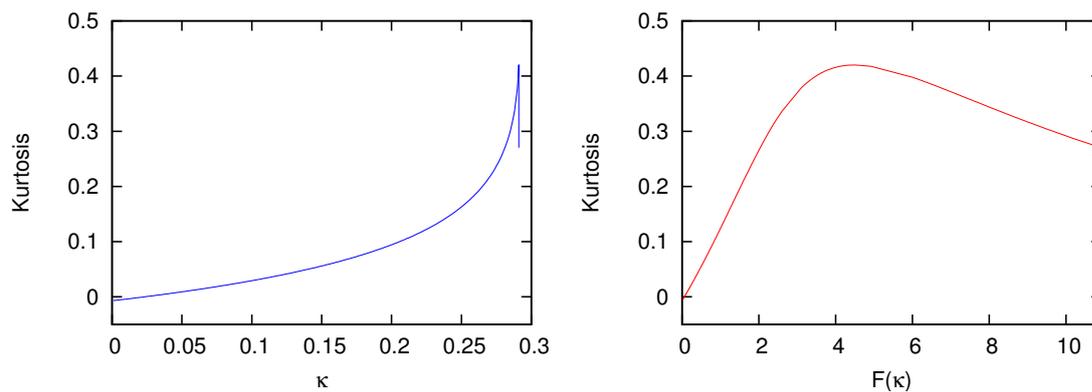


Abbildung 3.2.7: Die Kurtosis der Ladungsverteilungen, **links:** über dem Vorfaktors κ , **rechts:** über dem Formfaktors $F(\kappa)$: Verteilungen mit positiver Kurtosis sind steiler als Normalverteilungen. Das Maximum der Kurtosis von 0,42 ist für $\kappa = 0,291$ oder $F(\kappa) = 4,51$ zu finden.

Positive Kurtosiswerte stehen für Verteilungen mit scharfen Peaks und langen Tails. Betrachtet man die Kurtosis in Abhängigkeit vom Vorfaktor κ (Abbildung 3.2.7), so ähnelt das Verhalten für $\kappa < 0,29$ abermals dem des Formfaktors $F(\kappa)$ (siehe Abbildung 3.2.3), was einen linearen Anstieg der Kurtosis mit $F(\kappa)$ oder mit dem Strom zur Folge hat. Dann aber flacht die Kurve ab und erreicht ein Maximum von 0,42 für $\kappa = 0,291$ oder $F(\kappa) = 4,51$. Steigt der Strom weiter an, flachen die Verteilungen proportional dazu ab. Das Verhalten des Erwartungswertes und der Bunchlänge in Abhängigkeit des Vorfaktors κ stimmen mit den Ergebnissen von K. Bane [9] überein. Jedoch laufen die Entwicklung dieser Größen mit dem Vorfaktor κ nach den Berechnungen von K. Bane schneller ab.

3.3 Verifizierung der verwendeten Methode

Die in Kapitel 3.2 vorgestellten Ergebnisse stimmen in vielen Punkten gut mit früheren Veröffentlichungen überein, eine sorgfältige Überprüfung der einzelnen Schritte soll jedoch zeigen, wie weit diese Ergebnisse durch numerisch verursachte Ungenauigkeiten beeinflusst werden.

3.3.1 Prüfung mit Testfunktion

Die numerische Berechnung des Integrals in Gleichung (3.1.1) erfolgte mittels des Rechteckverfahrens. Dafür mussten für jedes x die Funktionswerte $y(x - t_j^{3/2})$ für j verschiedene t_j bestimmt werden. Die Funktionswerte $y(x)$ sind in festem Abstand bereits berechnet. Wählt man die $t_j^{3/2}$ so, dass die Differenz $x - t_j^{3/2}$ genau diesem Abstand entspricht, sind alle $y(x - t_j^{3/2})$ bereits bekannt. Die Breite des Rechtecks $\frac{t_{j+1} - t_{j-1}}{2}$ muss jedoch für jedes j neu berechnet werden.

Eine zweite Möglichkeit zur Berechnung des Integrals wäre, die Breite der Rechtecke konstant zu halten und die Funktionswerte $y(x - t_j^{3/2})$ durch Interpolation aus den bekannten benachbarten Werten zu berechnen (Programmcode siehe Anhang E).

Der Vergleich beider numerischer Methoden soll durch die Berechnung eines analytisch und numerisch lösbaren Integrals $I(x)$ über eine Testfunktion $y(x)$ geschehen:

$$y(x) = x^2 + x \quad (3.3.1)$$

$$I(x) = \int_0^5 y(x - t^{3/2}) dt|_{x=5} \quad (3.3.2)$$

Ergebnisse der Berechnung:

Methode	Wert des Integrals	Fehler
Analytische Lösung:	$I_a = 60.2825$	
Numerische Lösung, äquidistantes t :	$I_1 = 60.2809$	$\Delta I = -0,0016$
Numerische Lösung, äquidistantes $t^{3/2}$:	$I_2 = 60.2817$	$\Delta I = -0,0008$

Die Differenz zwischen Integral I_a und I_1 ist doppelt so groß wie die Differenz zwischen Integral I_a und I_2 . Damit ist auch der Fehler der ersten numerischen Methode doppelt so groß wie der der zweiten, weswegen letztere verwendet wurde.

3.3.2 Die Entwicklung der Bunchform mit den Iterationen

Die errechneten Ladungsverteilungen sind Gleichgewichtsverteilungen. Analog zur Thermodynamik bedeutet dies, dass die makroskopischen Größen, also hier die Dichte, zeitlich konstant sind, aber zum Beispiel der Ort eines einzelnen Elektrons innerhalb des Bunches sich durchaus ändern kann. Mit Beginn der Berechnung setzt die Wirkung der kohärenten Synchrotronstrahlung instantan ein und es dauert einige Iterationen, bis sich ein Gleichgewicht eingestellt hat. Um herauszufinden, wieviele Iterationen It nötig sind, wurde der Formfaktor $F(\kappa)$ nach jeder Iteration gespeichert und seine Änderung überwacht.

Abbildung 3.3.1 zeigt, dass mit zunehmendem Vorfaktor κ die Anzahl der benötigten Iterationen stark ansteigt. Für kleine Werte wie $\kappa = 0,15$ genügen 5 Iterationen um ein auf 4 Nachkommastellen genaues Endergebnis für $F(\kappa)$ zu erhalten. Bei $\kappa = 0,291030514208$

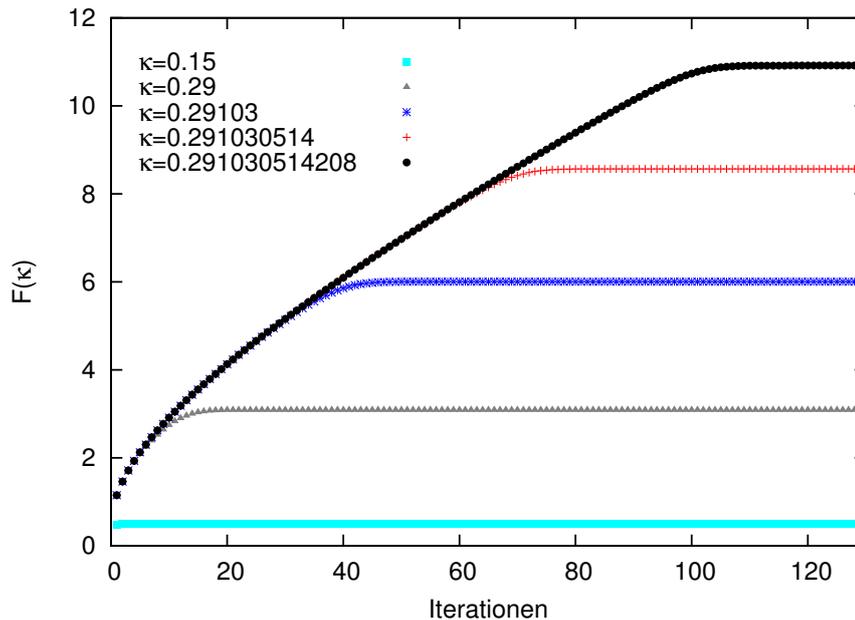


Abbildung 3.3.1: Das Anwachsen des Formfaktors $F(\kappa)$ mit den Iterationen: Die Anzahl der benötigten Iterationen steigt stark mit wachsendem Vorfaktor κ an. Die Werte für $F(\kappa)$ nach den ersten Iterationen sind für verschiedene κ annähernd gleich, erst kurz vor dem Erreichen der Gleichgewichtsverteilung teilen sich die Verläufe.

waren für diese Genauigkeit bereits 116 Iterationen nötig. Betrachtet man das Verhalten des Formfaktors $F(\kappa)$ für zwei nahe beieinanderliegende Vorfaktoren κ , so erhält man zunächst gleiche $F(\kappa)$ -Werte für beide Verteilungen. Die Verläufe trennen sich erst, wenn die Gleichgewichtsverteilung beinahe erreicht ist.

Um herauszufinden, wie die Entwicklung von einer Normalverteilung zur stabilen Gleichgewichtsverteilung vonstatten geht, wurden für $\kappa = 0,291030514$ die Start- und Endverteilung sowie fünf Zwischenschritte gespeichert. Sie sind in Abbildung 3.3.2 zu sehen. Anfangs stellt sich der Bunch sehr schnell auf und verschiebt seinen Schwerpunkt zum Kopf hin. Zur Berechnung der Endverteilung waren 100 Iterationen nötig, um eine Genauigkeit des Formfaktors $F(\kappa)$ auf 8 Nachkommastellen zu gewährleisten. Der Formfaktor $F(\kappa)$ und damit die Fläche unter der Kurve wachsen anfangs sehr schnell, weshalb sich der Wert von $F(\kappa)$ mit den ersten 10 Iterationen vervierfacht. Dann nimmt die Geschwindigkeit der Entwicklung ab, in den 40 Iterationen von $It = 20$ zu $It = 60$ steigt der $F(\kappa)$ nur von 4,13 auf 7,79 an, um nach weiteren 40 Iterationen für die Endverteilung einen Wert von 8,57 anzunehmen.

3.3.3 Der Einfluss des Binnings auf die Ergebnisse

Das in Kapitel 3.1 beschriebene Verfahren zu Berechnung des Integrals in Gleichung (3.1.3) stellt eine Approximation des Ergebnisses dar. Der exakte Wert kann auf Grund

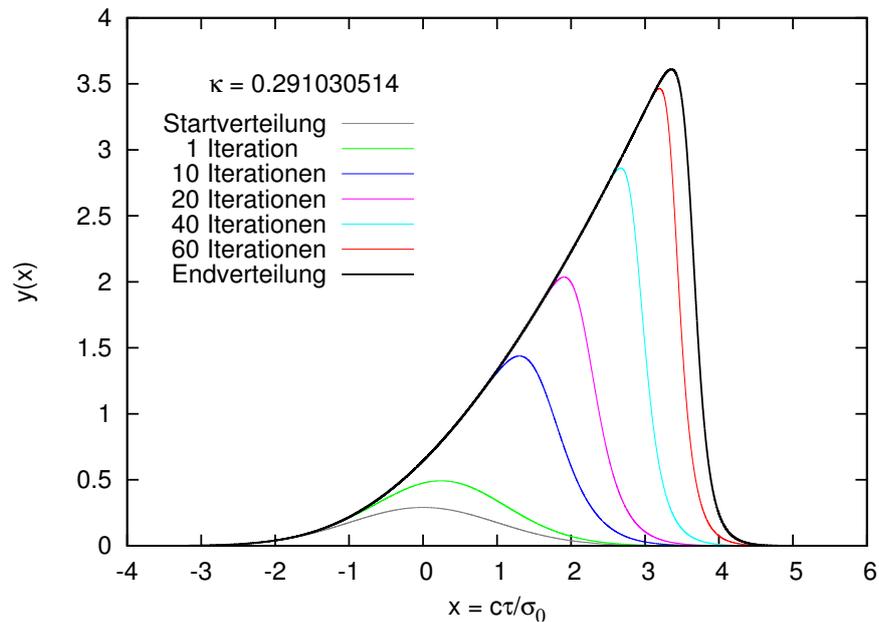


Abbildung 3.3.2: Die Entwicklung der Bunchform $y_\kappa(x)$ für $\kappa = 0,291030514$ mit den Iterationen: Die anfänglich sehr schnelle Entwicklung hin zu aufgesteilten, zu positiven x verschobenen Verteilungen verlangsamt sich stark mit den Iterationen. Die Endverteilung mit einer Genauigkeit des Formfaktors $F(\kappa)$ von 8 Nachkommastellen ist nach 100 Iterationen erreicht.

der endlichen Genauigkeit des Computers und den daraus resultierenden Rundungsfehlern nicht numerisch gefunden werden. Da das Ergebnis der Berechnungen mit endlicher Genauigkeit ausreicht, muss lediglich sichergestellt werden, dass diese Fehler sich bei folgenden Rechnungen nicht vergrößern.

Mit dem Begriff „Binning“ ist die Breite des Intervalls zwischen zwei berechneten Funktionswerten gemeint. Für die in Kapitel 3.2 vorgestellten Ergebnisse wurde ein Abstand zwischen zwei berechneten Datenpunkten der Ladungsverteilungen von $\Delta x = 0,0005 \frac{c\tau}{\sigma_0}$ gewählt, was 2000 Berechnungsschritten pro x -Einheit entspricht.

Mit dieser Auflösung konnte eine Genauigkeit des Formfaktors $F(\kappa)$ von mindestens vier Nachkommastellen für Vorfaktoren $\kappa \leq 0,291$ erreicht werden. Das Binning muss folgerichtig um so feiner werden, je näher der Vorfaktor an der numerischen Stabilitätsgrenze liegt.

Abbildung 3.3.3 zeigt den Einfluss des Binnings auf den Formfaktor $F(\kappa)$ für verschiedene κ -Werte. Dabei ist zu beobachten, dass bereits die Vorfaktoren $\kappa = 0,2910305$ und $\kappa = 0,29103043$ bei feinerem Binning zu keiner stabilen Verteilung mehr führen. Der Formfaktor $F(\kappa)$ geht gegen unendlich. Der in Gleichung (3.2.2) genannte Wert von $\kappa_{max} < 0,291030514209$ muss folglich nach unten auf einen Wert von $\kappa_{max} < 0,29103043$ korrigiert werden.

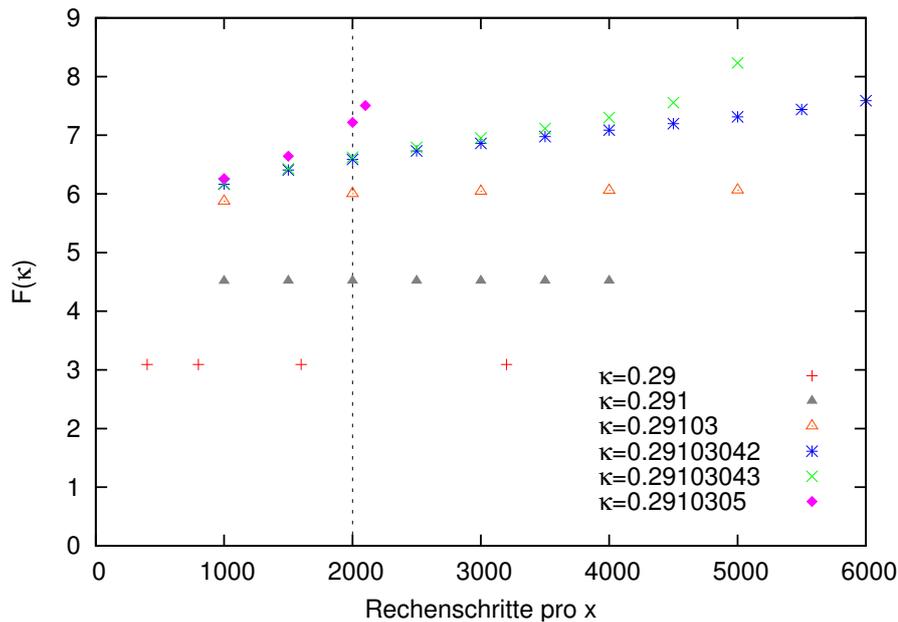


Abbildung 3.3.3: Einfluss des Binnings auf den Formfaktor $F(\kappa)$: Die in Kapitel 3.2 vorgestellten Ergebnisse wurden mit 2000 Rechenschritten pro x -Einheit berechnet (gestrichelte Linie). Ein feineres Binning führt bereits bei $\kappa = 0,29103043$ und nicht erst bei $\kappa = 0,291030514209$ zur Instabilität.

3.3.4 Bunchformen für negativen Momentum-Compaction-Faktor α

Bei den bisherigen Berechnungen wurde der Momentum-Compaction-Faktor α positiv angenommen, einige Synchrotrons können allerdings auch mit α -Werten kleiner Null betrieben werden (z.B. BESSY II in Berlin). Um den Effekt der Phasenfokussierung nutzen zu können (siehe Kapitel 2.2.1), muss der Bunch sich dann auf der mit der Zeit ansteigenden Flanke der Beschleunigungsspannung befinden. Damit werden später ankommende Elektronen stärker beschleunigt als früher ankommende.

Die Bunchformen für negatives α unter Einfluss der kohärenten Synchrotronstrahlung sind in Abbildung 3.3.4 für verschiedene Vorfaktoren κ dargestellt. Die Verteilungen sind runder und weniger steil als jene bei $\alpha > 0$ (vergl. Abbildung 3.2.1). Daraus folgt eine weniger starke Verschiebung des Erwartungswertes bei gleichem Formfaktor $F(\kappa)$ und eine durchgehende Verlängerung der Bunchlänge. Anders als die Bunchformen bei $\alpha > 0$ neigen sich diese Verteilungen zum Bunchende hin, sind also linkssteil. Somit erfahren später ankommende, langsame Elektronen die stärkere Beschleunigung und können dadurch den Energieverlust durch Synchrotronstrahlung ausgleichen. Das Wachstum des Formfaktors $F(\kappa)$ nimmt stark mit wachsendem Vorfaktor κ ab. $F(\kappa)$ vervierfacht sich nach dem Anwachsen von κ um eine Größenordnung.

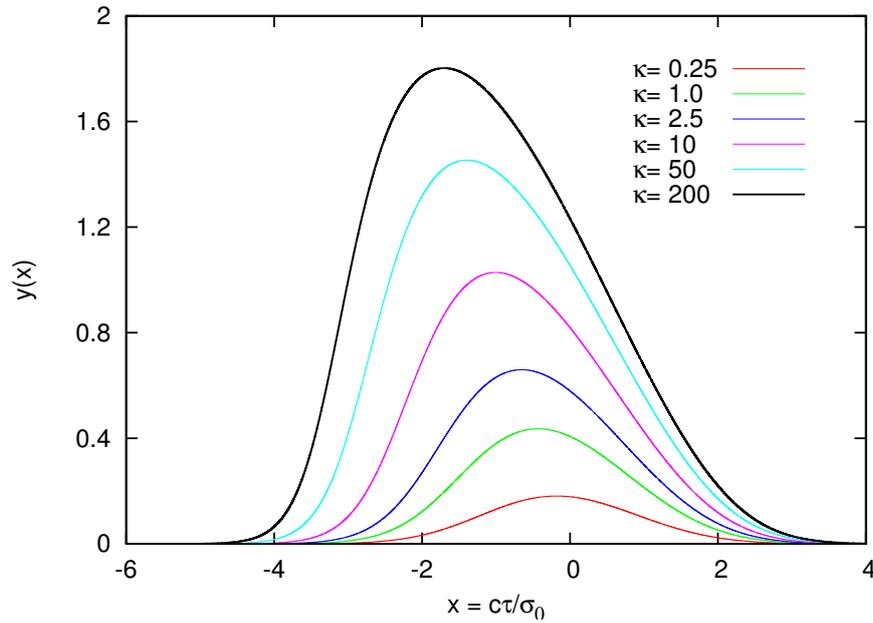


Abbildung 3.3.4: Ladungsverteilungen für negativen Momentum-Compaction-Faktor α : Mit wachsendem Vorfaktor κ verschiebt sich der Erwartungswert zu negativen x -Werten und die Bunchlänge wächst. Der Anstieg des Formfaktors $F(\kappa)$ verlangsamt sich mit wachsendem κ .

Diese Ergebnisse stimmen genau in Form und Wert des Formfaktors mit jenen von K. Bane [9] überein. Jedoch sind in dieser Veröffentlichung nur Berechnungen bis zu $\kappa = 2,5$ aufgeführt.

3.3.5 Vergleich mit dem Resistive-Wall-Wake

Die Untersuchung des so genannten „Resistive-Wall-Wake“ wurde durchgeführt, um ein exemplarisches Beispiel zu geben, wie die Ladungsdichte durch andere Wake-Felder deformiert werden kann. Das Resistive-Wall-Wake beschreibt den Einfluss des elektrischen Widerstands des Strahlrohrs auf die Ladungen in seiner Umgebung.

Das Strahlrohr eines Synchrotrons besteht meist aus Kupfer-, Aluminium- oder Edelstahl-Legierungen mit einer Leitfähigkeit σ_c . Diese Leitfähigkeit ist die Proportionalitätskonstante zwischen Stromdichte \vec{j} und elektrischem Feld \vec{E} :

$$\vec{j} = \sigma_c \vec{E} \quad (3.3.3)$$

Um den Einfluss der Umgebung auf die Elektronen im Ring zu beschreiben, benötigt man die Impedanz des Strahlrohrs. Für ein rundes Strahlrohr mit dem Radius a ist die Impedanz bekannt [17]:

$$Z(k) = \frac{Z_0}{2\pi a} \left(\frac{\xi}{k} - \frac{ika}{2} \right)^{-1} \quad (3.3.4)$$

In den Parameter ξ geht die Leitfähigkeit ein:

$$\xi = \sqrt{\frac{Z_0 \sigma_c |k|}{2}} (i + \text{sign}(k)) \quad (3.3.5)$$

Durch Fourier-Transformation der Impedanz (3.3.4) erhält man nach Gleichung (2.3.3) das Resistive-Wall-Wake:

$$W(z) = \frac{4Z_0 c}{\pi a^2} \left(\frac{e^{-z/z_0}}{3} \cos\left(\frac{\sqrt{3}z}{z_0}\right) - \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\infty \frac{x^2 e^{-x^2 z/z_0}}{x^6 + 8} dx \right) \quad (3.3.6)$$

Hierbei wird z_0 die charakteristische Länge genannt und ist durch

$$z_0 = \left(\frac{2a^2}{Z_0 \sigma_c} \right)^{1/3} \quad (3.3.7)$$

gegeben. Betrachtet man das Fernfeld, also Positionen $z \gg z_0$, nähert es sich asymptotisch folgender Funktion [17]:

$$W(z) = -\frac{c}{4\pi^{3/2} a} \sqrt{\frac{Z_0}{\sigma_c}} z^{-3/2} \quad \text{für } z \gg z_0 \quad (3.3.8)$$

Diese Näherung des Wake-Feldes berücksichtigt nur die hohen Frequenzanteile der zugehörigen Impedanz. Der Verlauf beider Felder ist in Abbildung 3.3.5 gezeigt.

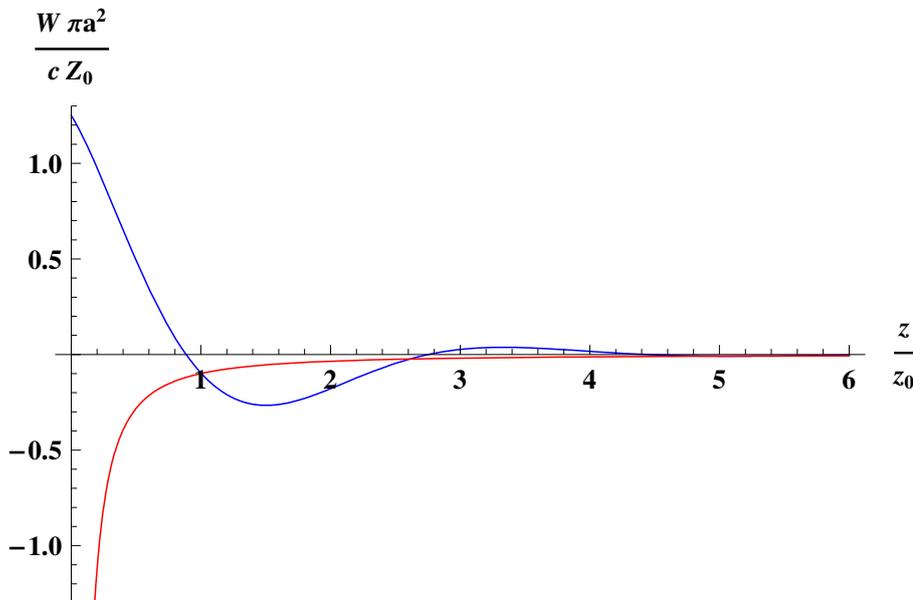


Abbildung 3.3.5: Genauer Verlauf (**blau**) und Fernfeld-Näherung (**rot**) des Resistive-Wall-Wake

Der ANKA Speicherring besitzt ein Strahlrohr aus Remanit 4429, welches nach europäischer Norm (EN 10088) einen elektrischen Widerstand von $0,75 \Omega \text{mm}^2/\text{m}$ bei 20°C

besitzt. Dies entspricht einer elektrischen Leitfähigkeit von $\sigma_c = 1,33 \cdot 10^6$ S/m. Da das Strahlrohr einen rechteckigen Querschnitt von $70 \text{ mm} \times 32 \text{ mm}$ hat, wurden exemplarisch drei charakteristische Längen berechnet: Für den Radius eines eingeschriebenen Kreises der kurzen Seite, für den Radius eines eingeschriebenen Kreises der langen Seite und für den Mittelwert.

a	16 mm	25 mm	35 mm
z_0	$101 \text{ } \mu\text{m}$	$136 \text{ } \mu\text{m}$	$170 \text{ } \mu\text{m}$

Für die Fernfeldnäherung ist gefordert, dass die charakteristische Länge sehr klein gegenüber der Bunchlänge ist, also $\sigma_0 \gg z_0$ gilt. Bei ANKA sind Bunchlängen zwischen $300 \text{ } \mu\text{m}$ und $9000 \text{ } \mu\text{m}$ typisch, somit erfüllen nur die längeren Bunche diese Bedingung. Analog zu Kapitel 2.5.1 und 3.1 wurde die dimensionslose Form der Haissinskigleichung für das Resistive-Wall-Wake (Gleichung (3.3.8)) aufgestellt und diese anschließend zur genaueren numerischen Berechnung transformiert:

$$y(x) = \kappa \exp \left[-\frac{x^2}{2} - \text{sgn}(\alpha) \int_0^\infty y(x-z) z^{-1/2} dz \right] \quad (3.3.9)$$

$$= \kappa \exp \left[-\frac{x^2}{2} - \text{sgn}(\alpha) \cdot 2 \int_0^\infty y(x-t^2) dt \right] \quad (3.3.10)$$

$$\text{mit} \quad x = \frac{c\tau}{\sigma_0}, \quad y_\kappa = \frac{R}{\dot{V}_{RF} e a} \sqrt{\frac{Z_0 c^5}{\sigma_0^3 \pi \sigma_c}} I(x) \quad (3.3.11)$$

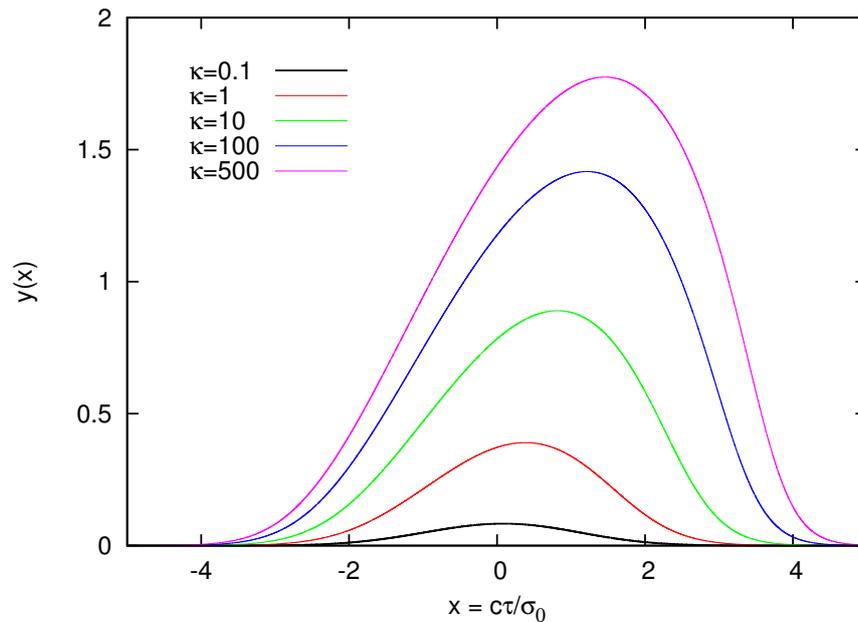


Abbildung 3.3.6: Ladungsverteilungen unter Einfluss des Resistive-Wall-Wake für kleine κ : Die Ladungsverteilungen verändern sich nur langsam mit wachsendem Vorfaktor κ . Die Bunchlänge nimmt zu und der Erwartungswert verschiebt sich zu positiven x -Werten.

Für positive α wurden dann zu verschiedenen Vorfaktoren die Ladungsverteilungen, wie in Kapitel 3.1 beschrieben, berechnet.

Für Vorfaktoren $\kappa < 1000$ erhält man Ladungsverteilungen (Abbildung 3.3.6), die denen unter Einfluss des CSR-Wake ähneln. Der Bunch wird asymmetrisch rechtssteil und verschiebt sich zu größeren x -Werten hin. Allerdings ist die Form weniger asymmetrisch und breiter als beim CSR-Wake (siehe Abbildung 3.2.1), weswegen sich die Bunchlänge mit steigendem κ vergrößert.

Ab einem Vorfaktor κ von ungefähr 1000 erhält man keine stabile Endverteilung mehr. Die Ladungsverteilungen nach ungerader Anzahl an Iterationen beginnen sich von jenen nach gerader Anzahl an Iterationen zu unterscheiden. Die Untersuchung dieser numerischen Instabilität des Resistive-Wall-Wakes kann dem Anhang F entnommen werden.

In Abbildung 3.3.7 ist der Formfaktors $F(\kappa)$ über κ für stabile Endverteilungen gezeigt. In der rechten Darstellung wurde für κ eine logarithmische Skala gewählt, wodurch man in erster Näherung eine Gerade erhält. Der Formfaktor ist also näherungsweise proportional zum Logarithmus des Vorfaktors. Nach Gleichung (3.3.11) ist der Formfaktor bei

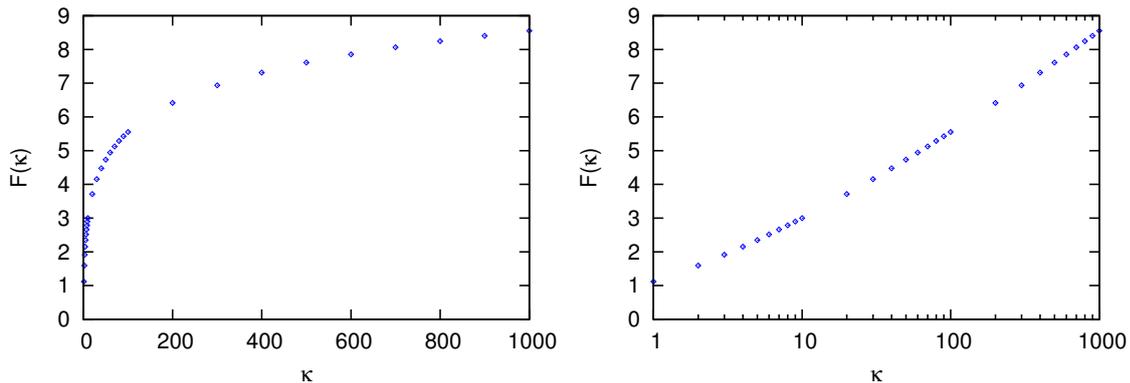


Abbildung 3.3.7: Die Entwicklung des Formfaktors $F(\kappa)$ unter dem Einfluss des Resistive-Wall-Wake: **links:** Der Formfaktor wächst erst stark dann immer schwächer mit dem Vorfaktor κ an; **rechts:** κ wurde mit einer logarithmischen Skala dargestellt. Da der Verlauf einer Geraden ähnlich ist, wächst der Formfaktor proportional zum Logarithmus von κ .

fester Bunchlänge σ_0 wie in Kapitel 3.2 zum Strom im Bunch I_b äquivalent:

$$F(\kappa) = \int y(x) = \frac{R}{\dot{V}_{RF}ea} \sqrt{\frac{Z_0 c^5}{\sigma_0^3 \pi \sigma_c}} I_b, \quad (3.3.12)$$

Da der Strom und die Bunchlänge messbare Größen sind, werden die zentralen Momente der normierten Ladungsverteilungen in Abbildung 3.3.8 und 3.3.9 über $F(\kappa)$ dargestellt. Dies entspricht also einer Darstellung über dem Strom in beliebigen Einheiten, falls die Bunchlänge konstant ist.

Vergleicht man die Erwartungswerte \bar{x} für verschiedene Formfaktoren $F(\kappa)$ der Ladungs-

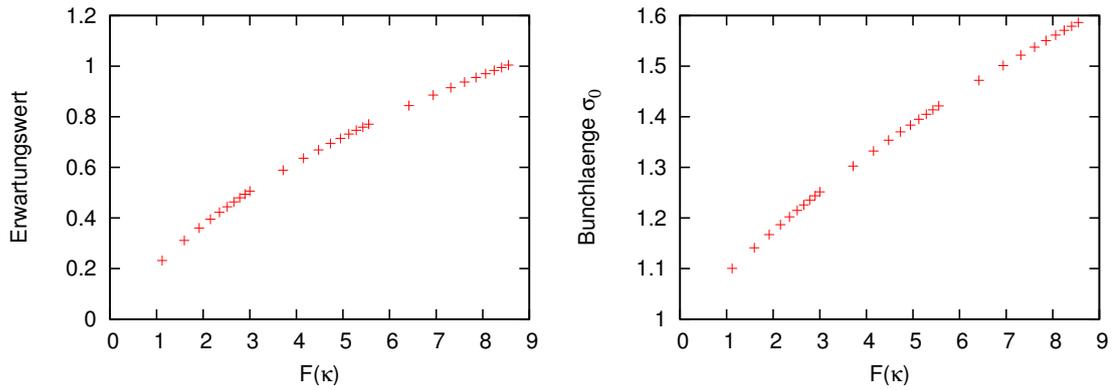


Abbildung 3.3.8: Erwartungswert \bar{x} und Bunchlänge σ_0 für Ladungsverteilungen des Resistive-Wall-Wake über dem Formfaktor $F(\kappa)$: Erwartungswert (links) und Bunchlänge (rechts) sind näherungsweise proportional zum Formfaktor.

verteilungen unter Einfluss des Resistive-Wall-Wakes (Abbildung 3.3.8 links) mit jenen unter Einfluss des CSR-Wake (Abbildung 3.2.4 rechts), so stellt man fest, dass die Entwicklung beider \bar{x} analog stattfindet. Unter dem Einfluss beider Wake-Felder wächst der Erwartungswert in erster Näherung proportional zu $F(\kappa)$, bei fester Bunchlänge also proportional zum Strom im Bunch, jedoch durch die Wirkung der kohärenten Synchrotronstrahlung schneller als durch die Wirkung des Resistive-Wall-Wakes.

Die Bunchlänge σ_0 ist für alle Formfaktoren $F(\kappa)$ größer 1 (Abbildung 3.3.8 rechts), woraus geschlossen werden kann, dass die Wirkung des Resistive-Wall-Wakes für eine Verlängerung der Bunche sorgt. Wie der Erwartungswert wächst auch die Bunchlänge linear mit $F(\kappa)$.

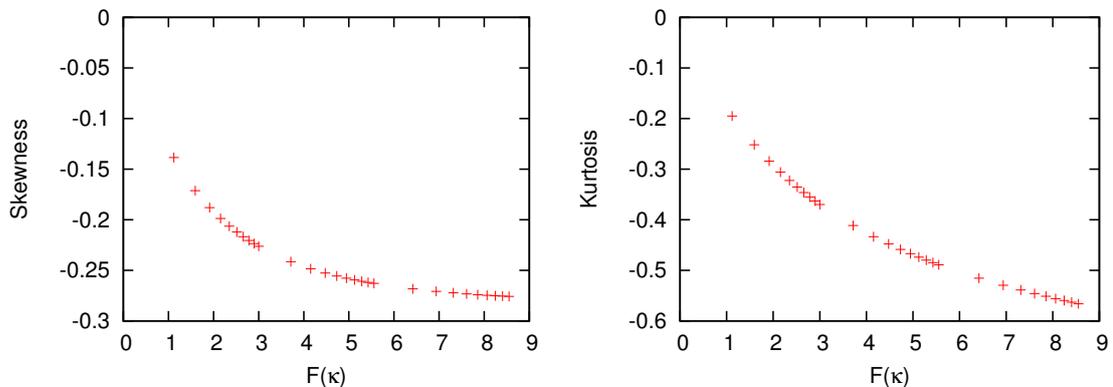


Abbildung 3.3.9: Skewness und Kurtosis für Ladungsverteilungen des Resistive-Wall-Wake über dem Formfaktor $F(\kappa)$: Skewness (links) und Kurtosis (rechts) sind immer negativ, was auf rechtssteile, abgeflachte Verteilungen schließen lässt.

Der Verlauf der Skewness (Abbildung 3.3.9 links) unter Einfluss des Resistive-Wall-Wakes gleicht dem Verlauf unter Einfluss des CSR-Wake (Abbildung 3.2.6 rechts): Beide Verteilungen sind immer rechtssteil ($\text{Skewness} < 0$) und die Skewness fällt zunächst stark mit dem Strom ab, um sich dann für einen Formfaktor $F(\kappa) > 6$ kaum mehr zu ändern. Jedoch ist der Betrag der Skewness, also die Schiefe der Verteilung, unter der Wirkung der kohärenten Synchrotronstrahlung bei gleichem $F(\kappa)$ stets größer.

Auch die Kurtosis (Abbildung 3.3.9 rechts) ist unter Einfluss des Resistive-Wall-Wakes stets negativ, was bedeutet, dass die erzeugten Verteilungen flacher als Normalverteilungen sind. Die Kurtosiswerte nehmen zuerst stark, dann nur noch wenig, mit wachsendem Strom ab.

Abschließend lässt sich sagen, dass sich auch die Deformation der Ladungsverteilung durch das Fernfeld des Resistive-Wall-Wakes mit der in Kapitel 3.1 vorgestellten Methode berechnen lässt. Das Verhalten des Erwartungswertes und der Schiefe der Verteilung gleicht dem unter Einfluss der kohärenten Synchrotronstrahlung. Unterschiede zeigen sich bei der Entwicklung der Bunchlänge und der Kurtosis: Sorgt das CSR-Wake für kurze, steile Verteilungen, so erhielt man mit dem Resistive-Wall-Wake flache, lange Bunchformen.

Auch frühere Untersuchungen zeigten, dass resistive Impedanzen die Bunchlänge vergrößern und zu asymmetrischen, zu positiven x -Werten verschobenen Ladungsverteilungen führen [18, 19].

Für beide Wake-Felder ist die Berechnung stabiler Gleichgewichtsverteilungen nur bis zu einem bestimmten Vorfaktor $\kappa = \kappa_{max}$ möglich. Jedoch unterscheiden sich die beiden Instabilitäten deutlich: Unter Einwirkung des CSR-Wakes bilden die Ladungsverteilungen einen Pol aus, wohingegen die Ladungsverteilungen unter Einwirkung des Resistive-Wall-Wakes sich von Iteration zu Iteration ändern und nicht in eine gemeinsame Endverteilung münden.

3.4 Untersuchung der numerischen Stabilitätsgrenze

Wie in Kapitel 3.2 beschrieben, strebt der Formfaktor $F(\kappa)$ für $\kappa \rightarrow \kappa_{max}$ (siehe Gleichung (3.2.2)) gegen unendlich. Für größere κ -Werte kann keine Gleichgewichtsverteilung mehr gefunden werden, die errechneten Ladungsverteilungen weisen eine Singularität auf.

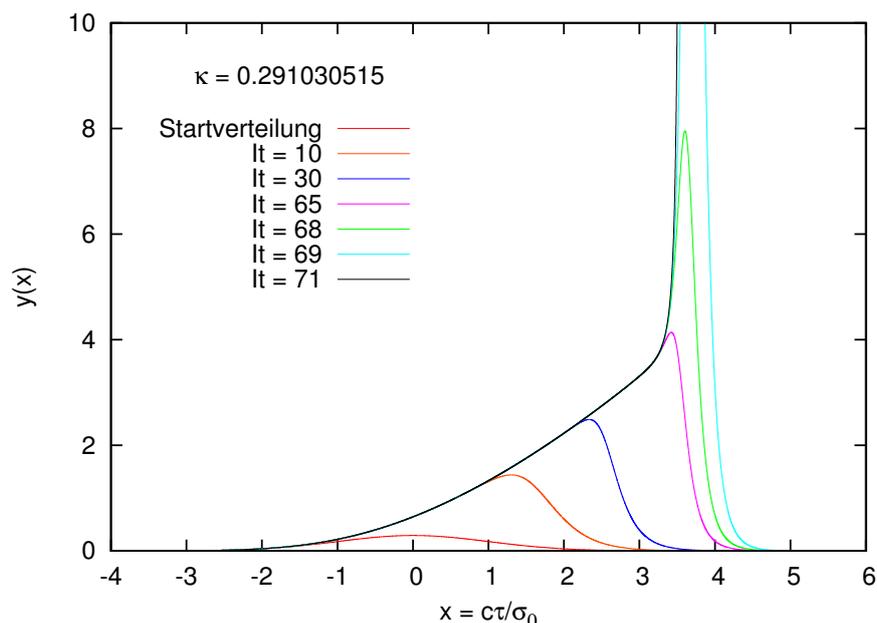


Abbildung 3.4.1: Entwicklung instabiler Bunchformen mit den Iterationen: Zunächst gleicht die Entwicklung instabiler Ladungsverteilung jener stabiler Ladungsverteilungen, dann bildet sich jedoch eine zusätzlicher Ladungsspeak aus, der zur Instabilität anwächst.

Betrachtet man exemplarisch die Entwicklung der instabilen Ladungsverteilung für $\kappa = 0,291030515$ mit den Iterationen It (Abbildung 3.4.1), so ist das Verhalten zunächst vergleichbar mit dem stabilen Verteilungen: Der Bunch stellt sich auf und verschiebt seinen Ladungsschwerpunkt zu größeren x -Werten. Doch ab $It = 60$ beginnt sich am Kopf des Bunches ein zusätzlicher Ladungsspeak auszubilden. Dieser wächst von Iteration zu Iteration an, strebt gegen unendlich und bildet dadurch einen Pol aus.

Abbildung 3.4.2 zeigt die Entwicklung des Formfaktors $F(\kappa)$ mit den Iterationen für verschiedene κ -Werte größer und kleiner als κ_{max} . Je größer der Vorfaktor gewählt wurde, umso schneller bildet sich der Pol in den Ladungsverteilungen aus und um so schneller geht der Formfaktor gegen unendlich. Zieht man wie oben als Beispiel den Vorfaktor $\kappa = 0,291030515$ heran, so beginnt auch hier ab $It = 60$ sich die Entwicklung des Formfaktors von der der stabilen Verteilungen zu unterscheiden: $F(\kappa)$ verlässt den gemeinsamen Verlauf und wächst rasch an.

Um die Stabilitätsgrenze besser beschreiben zu können, wurde eine Funktion gesucht, die dieses Verhalten bestmöglich nachzeichnet. Die anfängliche Vermutung, dass das Anwachsen des Formfaktors $F(\kappa_{max})$ mit den Iterationen It durch eine Wurzelfunktion gut beschrieben werden kann, konnte bestätigt werden. Es wurden folgende Gleichungen für die Anpassung herangezogen

$$F(\kappa_{max}) = a \cdot It^b + c \quad (3.4.1)$$

$$F(\kappa_{max}) \xrightarrow{It \rightarrow \infty} \infty \quad \text{für } b > 0 \quad (3.4.2)$$

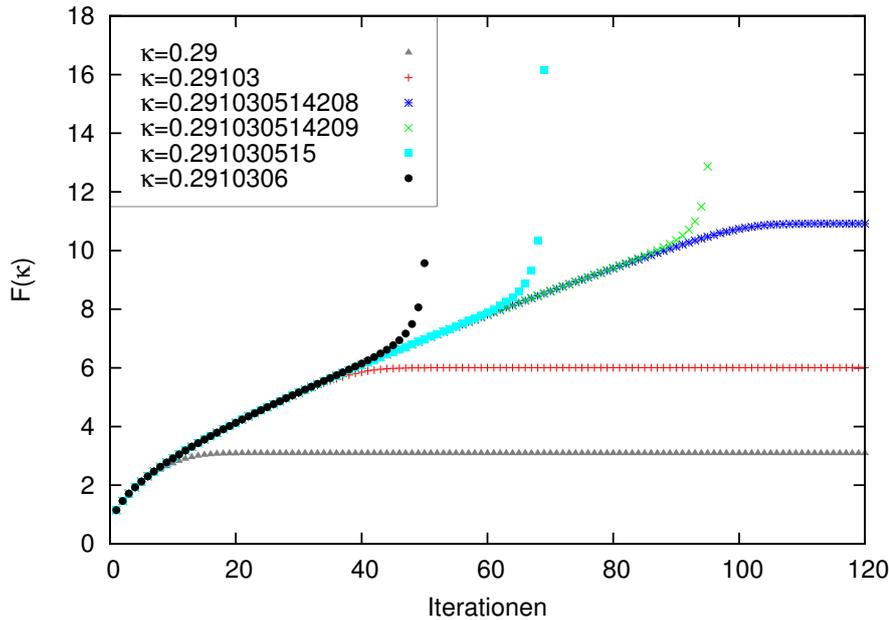


Abbildung 3.4.2: Das Anwachsen des Formfaktors $F(\kappa)$ mit den Iterationen für stabile und instabile Verteilungen: Der Formfaktor $F(\kappa)$ nimmt zunächst für stabile ($\kappa < \kappa_{max}$) wie für instabile ($\kappa > \kappa_{max}$) Verteilungen den gleichen Verlauf. Je größer der Vorfaktor κ der instabilen Verteilungen ist, umso früher gehen die Werte für den Formfaktor $F(\kappa)$ gegen unendlich.

und über die Parameter a , b und c an den gemeinsamen Verlauf stabiler und instabiler Verteilungen angefitet. In Abbildung 3.4.3 ist das Ergebnis für folgende Werte und zugehörige Standardabweichungen der Parameter dargestellt:

$$\begin{aligned} \text{Vorfaktor } a: & \quad 0,39 \pm 0,21 \\ \text{Exponent } b: & \quad 0,70 \pm 0,11 \\ \text{Offset } c: & \quad 0,90 \pm 0,66 \end{aligned}$$

Nimmt man an, dass dieser Fit dem Verlauf der Stabilitätsgrenze entspricht, bedeutet dies, dass es keinen Maximalwert für $F(\kappa)$ gibt, nur einen Maximalwert für κ . Durch eine sehr feine Abstimmung der κ -Werte für $\kappa < \kappa_{max}$ kann jeder Wert für den Formfaktor gefunden werden.

Nicht der Vorfaktor κ sondern der Formfaktor $F(\kappa)$ ist über Gleichung (3.2.1) mit den Größen Bunchlänge σ_0 und Elektronen im Bunch N_b verknüpft

$$F(\kappa) = I_b \frac{Z_0 c}{\dot{V}_{RF}} \left(\frac{R}{3\sigma_0^4} \right)^{1/3} = \frac{N_b c e}{\sqrt{2\pi} \sigma_0} \frac{Z_0 c}{\dot{V}_{RF}} \left(\frac{R}{3\sigma_0^4} \right)^{1/3}, \quad (3.4.3)$$

die wiederum den Verlauf der Stupakov-Schwelle (Gleichung (2.5.33)) festlegen:

$$N_b < \frac{2^{5/2} \pi^{13/6} \epsilon_0}{c e R^{1/3}} f_{RF} V_{RF} \frac{\sigma_z^3}{\lambda^{2/3}} \quad (3.4.4)$$

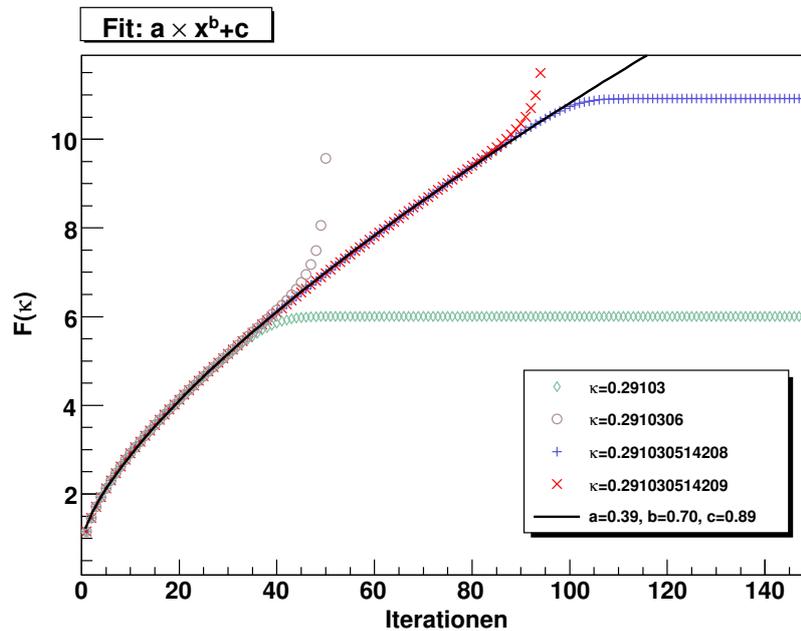


Abbildung 3.4.3: Fit des Verlaufs der numerischen Stabilitätsgrenze: Der Verlauf von $F(\kappa_{max})$ wird sehr gut durch die Funktion $F(\kappa_{max}) = 0,39 \cdot It^{0,7} + 0,9$ (schwarze Kurve) dargestellt.

Wenn aus der oberen Grenze für den Vorfaktor κ keine obere Grenze für den Formfaktor $F(\kappa)$ folgt, kann für jede Kombination aus Bunchlänge und Elektronenzahl eine entsprechende numerisch stabile Ladungsverteilung berechnet werden. Dann hat die numerische Stabilitätsgrenze bei $\kappa = \kappa_{max}$ nichts mit der Stabilitätsgrenze nach Stupakov (Kapitel 2.5.2) zu tun, sondern die Deformation der Ladungsverteilung und die Instabilität, die zu Microbunching führt, sind zwei unabhängige Effekte.

Kapitel 4

Untersuchung der Stabilitätsgrenze nach Stupakov

Nur wenige Beschleuniger sind in der Lage kohärente Synchrotronstrahlung stabil zu erzeugen und diese Stabilitätsgrenze experimentell zu untersuchen. Bei ANKA kann im Rahmen der regelmäßigen Sondernutzerschichten bei 1,3 GeV Strahlenergie und unter Verwendung der Low-Alpha-Optik (Kapitel 2.5.1) kohärente Synchrotronstrahlung routinemäßig genutzt werden. Dafür kann sowohl leistungsschwächere konstante Strahlung (stabile Emission) wie leistungsstarke Strahlung aus Strahlungsausbrüchen (Bursting) bereitgestellt werden.

Für einzelne Messungen wurde die Maschine auch mit Energien von 1,0 GeV, 1,6 GeV und 1,8 GeV in der Low-Alpha-Optik betrieben, sodass die Untersuchung der Stabilitätsgrenze nicht auf eine einzige Energie beschränkt ist.

4.1 Stabilitätsgrenze und Formfaktor

Kohärente Synchrotronstrahlung führt wie in Kapitel 3 gezeigt zu einer Deformation der Ladungsverteilung. Außerdem können anfängliche Dichteschwankungen durch diese Strahlung verstärkt werden und zu einer Instabilität, der so genannten Stupakov-Schwelle, führen (siehe Kapitel 2.5.2). Im folgenden Abschnitt wird, für die zur Berechnung notwendigen Parameter der Strahlungsquelle ANKA, zwischen dem Formfaktor $F(\kappa)$, der eine Maß für die Bunchdeformation durch CSR ist, und der Stupakov-Schwelle ein Zusammenhang hergestellt.

Bei ANKA steht einer Bunchlänge von typischerweise 1 cm eine Periodenlänge der Beschleunigungsspannung von 60 cm gegenüber. Damit kann der Verlauf der RF-Spannung, die auf den Bunch wirkt, als linear angenommen werden und es gilt $\dot{V}_{RF} \approx 2\pi f_{RF} V_{RF}$.

Damit erhält man nach Gleichung (2.5.23) für den Formfaktor:

$$F(\kappa) = I_b \frac{Z_0 c}{V_{RF}} \left(\frac{R}{3\sigma_0^4} \right)^{1/3} = I_b \frac{Z_0 c}{2\pi f_{RF} V_{RF}} \left(\frac{R}{3\sigma_0^4} \right)^{1/3} \quad (4.1.1)$$

Der Strom I_b der hier eingeht ist die durchschnittliche Ladungsträgerdichte im Bunch:

$$I_b = \frac{N_b c e}{\sqrt{2\pi} \sigma_0} \quad (4.1.2)$$

Der gemessene Wert während des Betriebs von ANKA ist jedoch der Strom I_R im gesamten Ring:

$$I_R = \frac{N c e}{2\pi R} \quad (4.1.3)$$

Befinden sich b Bunche im Ring, berechnet sich der Strom pro Bunch aus dem gemessenen Strom im Ring folgendermaßen

$$I_b = I_R \frac{\sqrt{2\pi} R}{b \sigma_0} \quad (4.1.4)$$

und man erhält für den Formfaktor:

$$F(\kappa) = I_R \frac{Z_0 c}{\sqrt{2\pi} b f_{RF} V_{RF}} \left(\frac{R^4}{3\sigma_0^7} \right)^{1/3} \quad (4.1.5)$$

Abbildung 4.1.1 zeigt die Werte des Formfaktors für bestimmte Ringströme pro Bunch und Bunchlängen für folgende ANKA-Parameter:

V_{RF}	Beschleunigungsspannung	4.150 kV
f_{RF}	RF-Frequenz	500 MHz
R	Radius der Ablenkmagnete	5,559 m

Folgt man der Kurve einer festen Bunchlänge σ_0 bei wachsendem Ringstrom pro Bunch I_R/b , so wächst der Formfaktor $F(\kappa)$ linear an. Verkürzt man die Bunchlänge bei konstantem Strom, nimmt der Formfaktor immer größere Werte an. Große Ströme und kurze Bunche sorgen also für einen großen Formfaktor $F(\kappa)$ und damit für eine starke Deformation der Ladungsverteilung im Bunch.

Aus der Theorie von Stupakov erhält man die Bedingung für stabile CSR (Gleichung (2.5.33))

$$N_b < \frac{2^{5/2} \pi^{13/6} \epsilon_0}{c e R^{1/3}} f_{RF} V_{RF} \frac{\sigma_0^3}{\lambda^{2/3}}, \quad (4.1.6)$$

die einem Grenzwert der Ladungsträgerdichte im Bunch entspricht. Drückt man N_b durch $F(\kappa)$ aus Gleichung (4.1.1) aus, erhält man [14]:

$$F(\kappa) \leq F_{max} = \frac{2^{3/2} \pi^{7/6}}{3^{1/3}} \left(\frac{\sigma_0}{\lambda} \right)^{2/3} = 7,456 \cdot \left(\frac{\sigma_0}{\lambda} \right)^{2/3} \quad (4.1.7)$$

$$F(\kappa) = \text{const.} \cdot I_R/b \cdot \sigma_0^{-7/3}$$

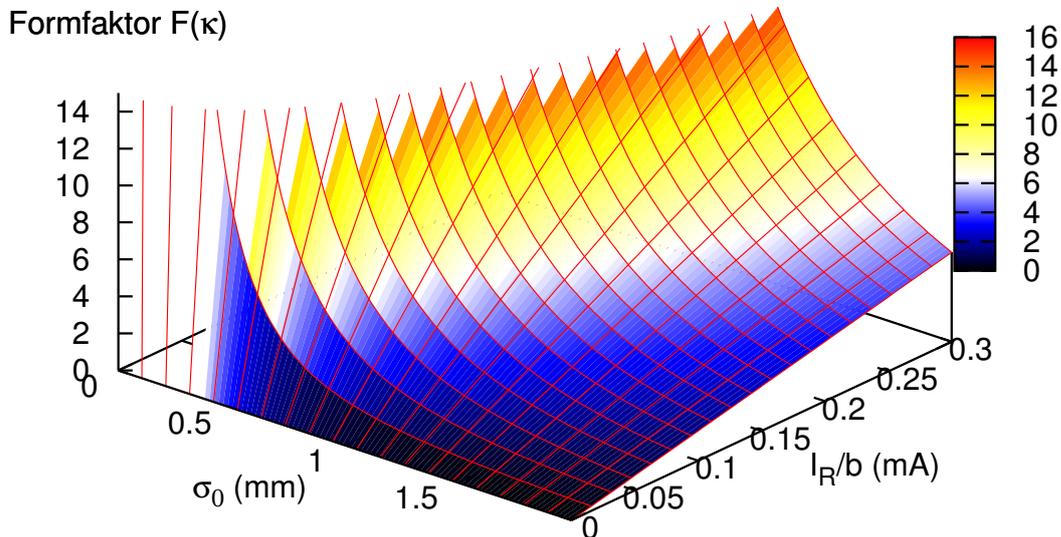


Abbildung 4.1.1: Der Formfaktor $F(\kappa)$ über dem Ringstrom pro Bunch I_R/b und der Bunchlänge σ_0 : Der Formfaktor $F(\kappa)$ ist ein Maß für die Bunchdeformation durch kohärente Synchrotronstrahlung. Große Ströme in kurzen Bunchen sorgen für eine starke Deformation.

Unbekannt ist die Wellenlänge der Störung λ . Nimmt der Quotient σ_0/λ unterschiedliche Werte an, folgt daraus, dass die Bunchdeformation an der Schwelle zwischen Bursting und stabiler Emission unterschiedliche Ausmaße annehmen kann.

4.2 Messung der Bursting-Stable-Schwelle

Der nutzbare Frequenzbereich der kohärenten Synchrotronstrahlung bei ANKA liegt zwischen 10 mm und 200 μm , größere Wellenlängen werden vom Strahlrohr abgeschnitten, kleinere Frequenzen besitzen zu geringe Intensitäten. Die Infrarot-Beamline bei ANKA bietet die Möglichkeit dieses Strahlungsfenster zu untersuchen.

4.2.1 Messaufbau

Das Synchrotron wird mit einem Zug aus 30 bis 35 Bunchen befüllt, sodass sich ungefähr 30 mA Strahlstrom im Ring befinden, um dann die Energie bis zur gewünschten Strahlenergie zu erhöhen. Um die Länge der Bunche zu verkürzen, wird die Optik der Maschine

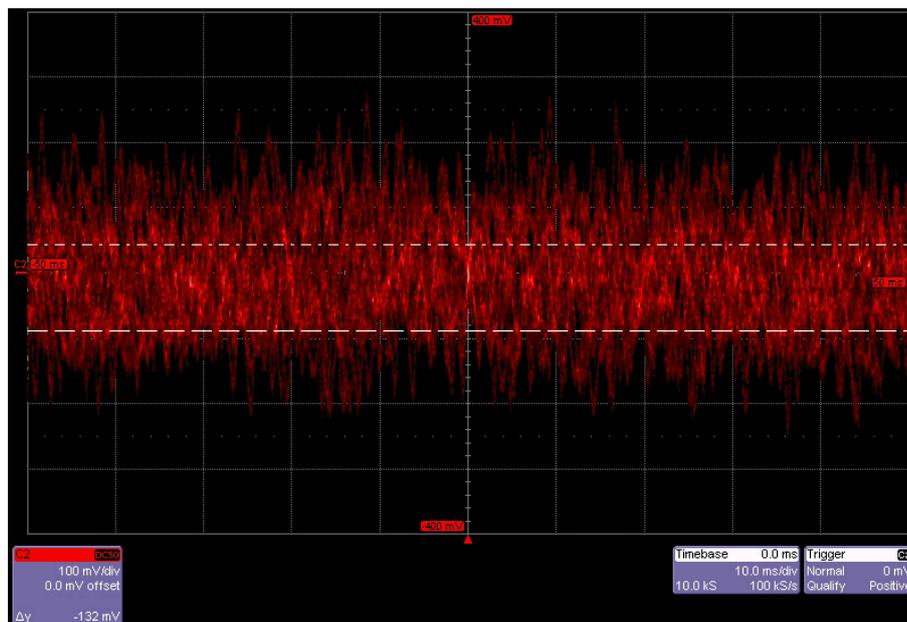


Abbildung 4.2.1: Oszillogramm des Bolometersignals bei chaotischem Bursting: Das Spannungssignal des Bolometers ist über der Zeit aufgetragen. Da die Strahlungsausbrüche in unregelmäßigen Abständen auftreten, nehmen die überlagerten Signale mehrerer Umläufe ganz unterschiedliche Verläufe an.

schrittweise so verändert, dass der Momentum-Compaction-Faktor α reduziert wird (siehe Kapitel 2.5.1). Nach jedem Schritt wird die Synchrotronfrequenz f_s gemessen, um auf die Bunchlänge zurückzuschließen. Zur Messung der Synchrotronfrequenz wird ein Echtzeit-Spekturmanalytator verwendet. Dieser fouriertransformiert das Ankunftszeitsignal des Strahls und stellt das resultierende Frequenzspektrum dar, aus dem die Synchrotronfrequenz abgelesen werden kann.

Am Diagnoseport der Infrarotbeamline wird ein heliumgekühltes Bolometer mit Silizium-Sensor eingesetzt. Trifft Strahlung auf diesen Sensor, wird er erwärmt und ändert seinen ohmschen Widerstand. Dieses Verhalten ermöglicht eine Messung der Intensitätsänderung der einfallenden Strahlung über die anliegende Spannung. Das Signal des Bolometers wird mit der Umlauffrequenz als externes Triggersignal auf einem Oszilloskop dargestellt. Da das Bolometer nur Intensitätsänderungen messen kann, ist eine Unterscheidung zwischen einer Nulllinie und einer stabilen Emission nicht ohne weiteres möglich. Ein unter diesen Bedingungen gemessenes Spektrum zeigt die kohärente Abstrahlung jedoch deutlich.

Sind die Bunche kurz genug, um kohärente Strahlung mit Wellenlängen unterhalb des Cutoff des Strahlrohrs zu emittieren, kann die Datennahme beginnen.

Durch den für diese Messung hohen Strom ist anfangs keine stabile Emission zu erwarten und die Zahl der Elektronen muss reduziert werden, um die Schwelle zwischen Bursting und stabiler Emission zu überqueren. Ist die natürliche Verlustrate zu gering, und lange

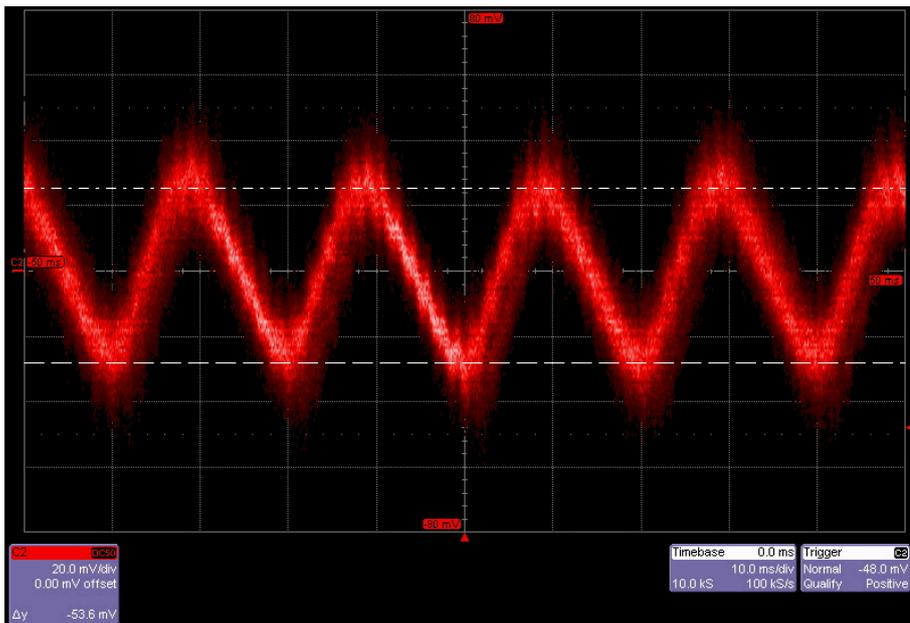


Abbildung 4.2.2: Oszillogramm des Bolometersignals bei periodischem Bursting: Emittieren alle Bunche periodisch, finden die Strahlungsausbrüche gemeinsam mit einer Frequenz von 50 Hz statt.

Wartezeiten sind dadurch zu erwarten, kann ein so genannter „Scraper“ eingesetzt werden, um den Prozess zu beschleunigen. Ein Scraper besteht aus zwei Metallstäben, die seitwärts im Strahlrohr an den Strahl herangefahren werden und so langsam, außen beginnend, die Elektronen von den Bunchen „abkratzen“ (englisch: to scrape).

Während der Strom abfällt, kann am Oszilloskop beobachtet werden, wie das chaotische Bursting langsam in periodisches Bursting übergeht. Schließlich wird die Stupakov-Schwelle unterschritten und das Signal weist keine Modulationen mehr auf, die Bunche emittieren stabil. Der vom Kontrollsystem in diesem Moment gemessene Strom im Ring wird als so genannter Schwellenstrom notiert.

Abbildung 4.2.1 zeigt das Bursting-Signal von mehreren Umläufen überlagert im Oszilloskop dargestellt. Da die Strahlungsausbrüche in unregelmäßigen Abständen stattfinden, kommen die Intensitätslinien verschiedener Umläufe nicht übereinander zu liegen.

Da sich mehrere Bunche mit unterschiedlichem Bunchstrom I_b im Ring befinden, gehen jene mit wenig Ladungsträgern bei einer Reduzierung des Stroms I_R im Ring zuerst von chaotischem in periodisches Bursting über. Reduziert man den Strom weiter, finden die Strahlungsausbrüche aller Bunche periodisch mit gleicher Frequenz und Phase statt. Die Überlagerung der Signale des periodischen Burstings mehrerer Umläufe sind in Abbildung 4.2.2 dargestellt. Die Strahlungsausbrüche besitzen eine Periodenlänge von 20 ms, was einer Frequenz von 50 Hz entspricht. Diese Oszillationen sind aber nicht auf Einflüsse der Netzspannung mit der selben Frequenz zurückzuführen. Auch in amerikanischen Beschleunigern wurde periodisches Bursting mit eben jener Frequenz beobachtet [20].

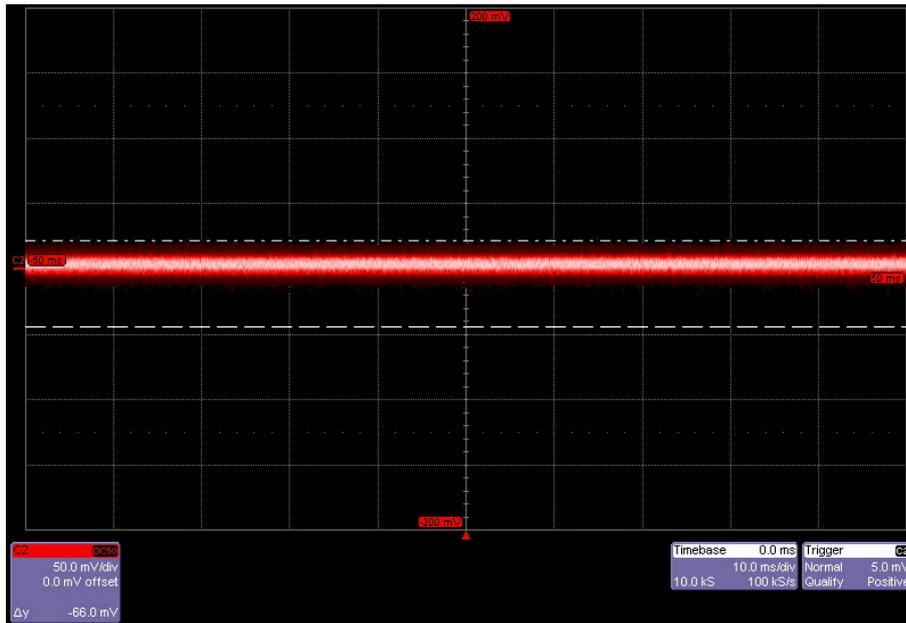


Abbildung 4.2.3: Oszillogramm des Bolometersignals bei stabile Emission: Bei stabiler Emission ändert sich die Intensität der Strahlung nicht mit der Zeit und das abgebildete Signal entspricht einer Nulllinie.

Wird der Strom weiter verringert, beginnen sich die Extrema bei gleichbleibender Frequenz zu verkleinern. Wenn alle Bunche stabil emittieren, erhält man eine Linie ohne Modulationen, wie in Abbildung 4.2.3 gezeigt. Der jetzt gemessene Schwellenstrom I_R und die aktuelle Bunchlänge σ_0 , die man aus der gemessenen Synchrotronfrequenz f_s errechnet, bilden das gesuchte Wertepaar.

Danach wird abermals der Momentum-Compaction-Faktor reduziert und damit die Länge der Bunche. Dadurch befindet man sich wieder im Bereich des Burstings und muss abermals den Strom verringern, um einen weiteren Messpunkt zu erhalten. Dieser Vorgang kann so lange wiederholt werden, bis das verbleibende Signal zu schwach für eine Auswertung ist (siehe Abbildung 4.2.4).

4.2.2 Auswertung

Die gemessenen Größen sind die Synchrotronfrequenz f_s^m und der Strom im Ring I_R . Der Strom im Ring wird durch die Anzahl der Bunche geteilt, um unterschiedliche Messungen miteinander vergleichbar zu machen. Dann wird aus den Ringparametern mit Gleichung (2.2.18) die theoretische Synchrotronfrequenz f_s^t errechnet und daraus mit Gleichung (2.2.19) die theoretische Bunchlänge σ_0^t :

$$f_s^t = f_{rev} \sqrt{\frac{\eta h}{2\pi E} \sqrt{e^2 V_{RF}^2 - U_D^2 + k}} \quad (4.2.1)$$

$$\sigma_0^t = \frac{\eta c \sigma_E}{2\pi f_s^t} \quad (4.2.2)$$

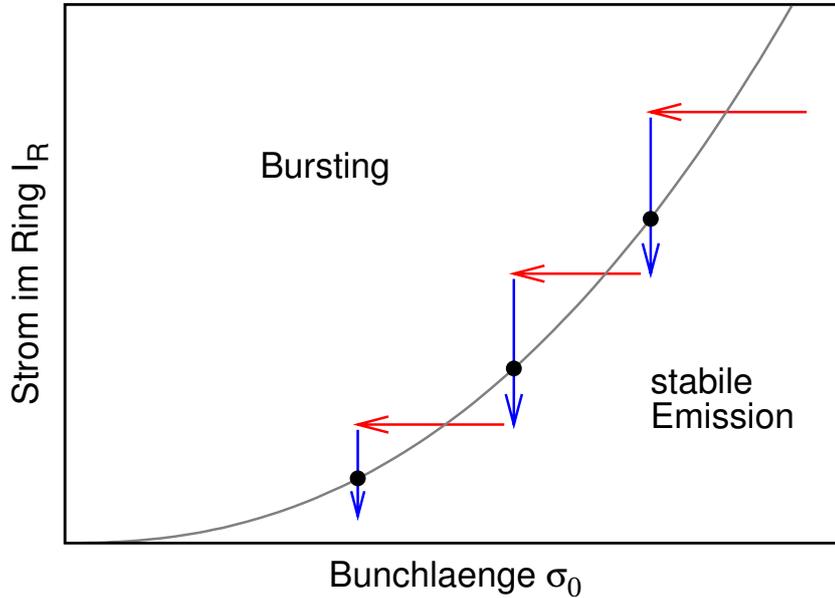


Abbildung 4.2.4: Das Vorgehen bei der Messung der Bursting-Stable-Schwelle (graue Kurve): Zuerst wird die Bunchlänge reduziert (rote Pfeile), um dann den Strom so lange zu verringern, bis die Schwelle überschritten wird (blaue Pfeile). Die Datennahme (schwarze Punkte) ist solange möglich, wie das Signal des Bolometers auswertbar ist.

Der Energieverlust eines Umlaufs U_0 setzt sich aus den Strahlungsverlusten in den Dipolen U_D und den restlichen Energieverlusten k zusammensetzt. Das Verhältnis aus theoretischer Synchrotronfrequenz f_s^t und theoretischer Bunchlänge σ_0^t ist gleich dem Verhältnis aus gemessener Synchrotronfrequenz f_s^m und der wirklichen Bunchlänge σ_0^m . Man erhält die Bunchlänge σ_0^m somit aus folgender Skalierung:

$$\sigma_0^m = f_s^m \frac{\sigma_0^t}{f_s^t} = f_s^m \frac{cE\sigma_E h}{f_{RF}^2 \sqrt{e^2 V_{RF}^2 - U_D^2 + k}} \quad (4.2.3)$$

Die RMS¹-Breite der Energieverteilung σ_E ist für eine Strahlenergie von 2,5 GeV aus Rechnungen bekannt und geht für jede andere Energie aus einer Skalierung hervor:

$$\sigma_E = \sigma_{E=2.5 \text{ GeV}} \frac{E}{2,5 \text{ GeV}} \quad (4.2.4)$$

Der Energieverlust in den Dipolen U_D hat einen zu der vierten Potenz von E proportionalen Anteil, der sich aus der Gleichung (2.5.3) für die Abstrahlung von geladenen Teilchen auf einer Kreisbahn ergibt:

$$U_D = u_1 + u_2 \cdot E^4 \quad (4.2.5)$$

Der Fehler auf den σ_0^m Wert wurde mittels eines Fehler-Monte-Carlos bestimmt. Dabei werden alle fehlerbehafteten Einflussgrößen mit der gegebenen Standardabweichung variiert. Mit diesen simulierten Werten wird jeder Rechenschritt der Auswertung durchgeführt

¹RMS: root mean square, Standardabweichung

und aus der resultierenden Streuung des Ergebniswertes die zugehörige Standardabweichung berechnet. Der Fehler auf den Strom I_R wurde als 0,5 mA angenommen.

Sind die Wertepaare $(\sigma_0^m : I_R/b)$ bestimmt, können sie in einem Diagramm dargestellt werden um zu vergleichen, ob sie mit der von Stupakov vorhergesagten (Kapitel 2.5.2) Stabilitätsgrenze (Gleichung (2.5.33)) übereinstimmen:

$$N_b < \frac{2^{5/2}\pi^{13/6}\epsilon_0}{ceR^{1/3}} f_{RF} V_{RF} \frac{\sigma_0^3}{\lambda^{2/3}} \leftrightarrow I_b < \frac{2^{5/2}\pi^{13/6}\epsilon_0}{chR^{1/3}} f_{RF}^2 V_{RF} \left(\frac{\sigma_0}{\lambda}\right)^{2/3} \sigma_0^{7/3} \quad (4.2.6)$$

Hierbei ist wie in Kapitel 4.1 die Wellenlänge der Störung λ beziehungsweise ihre Wellenzahl k unbekannt, jedoch wird der Quotient $2\pi\sigma_0/\lambda = k\sigma_0$ als konstant angenommen. Dies ermöglicht, den Verlauf der Bursting-Stable-Schwelle mit folgender Gleichung zu beschreiben:

$$I_R/b = \left(\frac{a}{2\pi}\right)^{2/3} \frac{2^{5/2}\pi^{13/6}\epsilon_0}{chR^{1/3}} f_{RF}^2 V_{RF} \sigma_0^{7/3} \quad (4.2.7)$$

Der Parameter a wird nun so gewählt, dass der Verlauf der Funktion (4.2.7) möglichst gut an die gemessenen Wertepaaren $(\sigma_0^m : I_R/b)$ angepasst wird. Für a werden üblicherweise ganze Zahlen gewählt [21][22], auch wenn dies nicht physikalisch gefordert ist. Durch die genauere Bestimmung dieses Faktors können keine weiteren Informationen gewonnen werden, da in ihn alle vorhandenen Unsicherheiten eingehen: Zum Beispiel der Umstand, dass für den Strom I_R/b anstatt I_b verwendet wurde und verschiedene Bunche mit unterschiedlichem Strom zu unterschiedlichen Zeiten die Bursting-Stable-Schwelle überqueren [23]. Ziel der Anpassung von a ist, das Potenzgesetz $I_R/b = \text{const.} \sigma_0^{7/3}$ zu bestätigen.

4.2.3 Ergebnisse

Die Messung der Bursting-Stable-Schwelle bei einer Strahlenergie von $E = 1,3$ GeV wurde während der Messzeit für Beschleunigerstudien am 28.5.08 durchgeführt, außerdem sind Daten einer älteren Messung aus dem Jahre 2005 zum Vergleich vorhanden. Eine weitere Messreihe für eine Energie von $E = 1,6$ GeV wurde am 20.8.08 aufgenommen.

Die Werte der Parameter, die für die Auswertungen der Messungen verwendet wurden, sind im folgenden aufgeführt:

h	Harmonische Zahl	184
f_{RF}	RF-Frequenz	500 MHz
$\sigma_{E=2,5 \text{ GeV}}$	Relative Breite der Energieverteilung bei 2,5 GeV	$1 \cdot 10^{-3}$
u_1	Energieunabhängiger Verlust in den Dipolen	$0,16284 \cdot 10^{-5} \text{ MeV}$
u_2	Energieabhängiger Verlust in den Dipolen	$0,16053 \cdot 10^{-13} \text{ MeV}$
k	Weitere Energieverluste	0,40251 MeV
V_{RF}	Beschleunigungsspannung bei 1,3 GeV	4·150 kV
	Beschleunigungsspannung bei 1,6 GeV	4·300 kV

Die Werte aus der obigen Tabelle für Beschleunigungsspannung V_{RF} und der zugehörige Frequenz des Wechselfeldes f_{RF} sind die Setzwerte des Kontrollsystems. Da die Elektronen in vier Kavitäten beschleunigt werden, müssen die Werte der Einzelspannungen addiert werden. Die reale Gesamtspannung liegt jedoch unter der Summe der vier Einzelspannungen, da mit Phasenfehlern zu rechnen ist.

Die Strahlenergie wird aus dem Magnetfeld der Dipole berechnet (siehe Gleichung (2.2.4)), wobei die Werte für kleine Energien genauer sind, da bei hohen Energien die Magnete teilweise in Sättigung gehen [24]. Die Werte für die Energieverluste u_1 , u_2 und k und ihre Standardabweichungen sowie die relative Breite der Energieverteilung bei 2,5 GeV $\sigma_{E=2,5 \text{ GeV}}$ und die entsprechende Standardabweichung stammen aus einer Modellrechnung des ANKA-Speicherrings mit dem Programm MAD².

In das Fehler-Monte-Carlo gingen folgende Unsicherheiten der verwendeten Größen ein:

Δf_s^m	0,61 kHz
$\Delta \sigma_{E=2,5 \text{ GeV}}$	$0,05 \cdot 10^{-3}$
Δu_1	$0,33660 \cdot 10^{-2} \text{ MeV}$
Δu_2	$0,20783 \cdot 10^{-15} \text{ MeV}$
Δk	0,032829 MeV

Messung bei 1,3 GeV Strahlenergie

Beide Messungen bei 1,3 GeV Strahlenergie wurden mit einer Beschleunigungsspannung von $V_{RF} = 4 \cdot 150 \text{ kV}$ durchgeführt.

Abbildung 4.2.5 zeigt die Ergebnisse der beiden Messungen aus den Jahren 2005 und 2008. Beide Messreihen sind sehr gut mit dem theoretischen Verlauf der Stupakov-Schwelle vereinbar, wenn für den Parameter $a = k\sigma_0 = 8$ gewählt wird. Um das Potenzgesetz $I_R/b = \text{const.} \cdot \sigma_0^{7/3}$ zu überprüfen, und um herauszufinden, ob ein Offset der Bunchlängen oder eine andere Potenz den Verlauf der Stabilitätsgrenze besser beschreibt, wurden

²MAD: Methodical Accelerator Design, ein Programm zur Berechnung der Eigenschaften und zum Design von Beschleunigern.

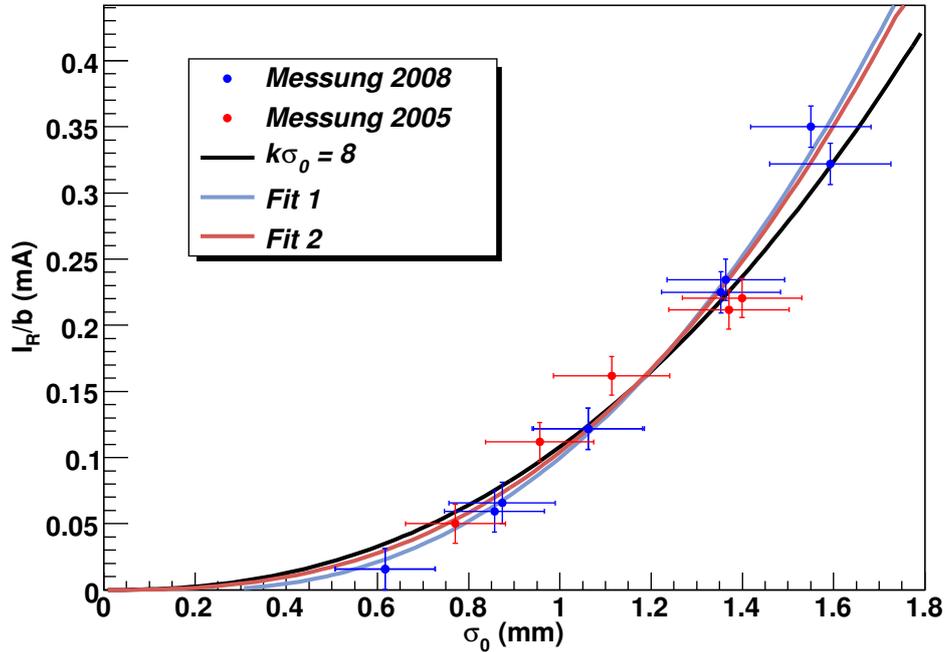


Abbildung 4.2.5: Die Ergebnisse der Messung der Stupakov-Schwelle bei einer Strahlenergie von 1,3 GeV: Die Übereinstimmung der theoretische Vorhersage der Bursting-Stable-Schwelle (schwarze Linie) mit einem Faktor $k\sigma_0 = 8$ und der gemessenen Daten beider Messreihen ist zu erkennen. Zusätzlich wurden zwei Anpassungen zu den Funktionen $I_R/b = b \cdot (\sigma_0 + c)^{7/3}$ (rote Linie) und $I_R/b = d \cdot \sigma_0^e$ (blaue Linie) durchgeführt. Diese ließen jedoch keine deutlich größere Übereinstimmung erkennen.

zusätzlich zu dem Fit des Parameters a zwei Fits mit folgenden Funktionen durchgeführt:

$$\text{Fit 1: } I_R/b = b \cdot (\sigma_0 + c)^{7/3} \quad (4.2.8)$$

$$\text{Fit 2: } I_R/b = d \cdot \sigma_0^e \quad (4.2.9)$$

Die aus den drei Fits resultierenden Werte und Fehler für den jeweiligen Vorfaktor, den Offset und den Exponenten sind in folgender Tabelle dargestellt:

	Vorfaktor	Offset	Exponent	$\chi^2/\text{Freiheitsgrad}$
Fit a	$0,110 \pm 0,010$	0 (fix)	$2,3$ (fix)	0,13
Fit 1	$0,158 \pm 0,047$	$-0,18 \pm 0,12$	$2,3$ (fix)	0,14
Fit 2	$0,104 \pm 0,014$	0 (fix)	$2,58 \pm 0,44$	0,11

Aus diesen Berechnungen folgt, dass bei ANKA für eine Strahlenergie von 1,3 GeV der Verlauf der Bursting-Stable-Schwelle innerhalb der Fehler mit den Vorhersagen von Stupakov übereinstimmt. Ein Offset der Bunchlänge oder eine anderer Exponent kann dieses

Verhalten ebenfalls beschreiben.

Da die Werte des χ^2 pro Freiheitsgrad für jede Anpassung sehr klein sind, wurden die Fehler höchstwahrscheinlich überschätzt.

Messung bei 1,6 GeV Strahlenergie

Die Vermessung der Stupakov-Schwelle bei einer Strahlenergie von 1,6 GeV wurde mit einer Beschleunigungsspannung von $V_{RF} = 4 \cdot 300$ kV durchgeführt.

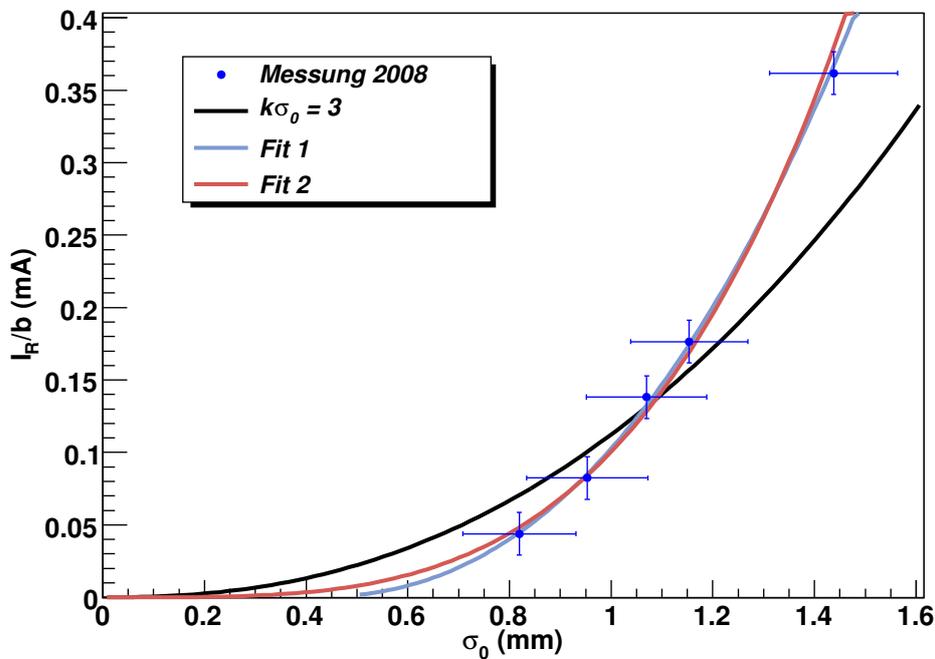


Abbildung 4.2.6: Die Ergebnisse der Messung der Stupakov-Schwelle bei einer Strahlenergie von 1,6 GeV: Der durch die Theorie von Stupakov vorhergesagte Verlauf (schwarze Linie, für $k\sigma_0 = 3$) unterscheidet sich deutlich von den Messwerten. Durch einen zusätzlichen Offset von $-0,4$ der Bunchlänge σ_0 (blaue Linie) oder einen Exponenten von $3,7$ (rote Linie) kann die Übereinstimmung mit den Daten deutlich erhöht werden.

Anders als bei einer Energie von 1,3 GeV passen die Messwerte weniger zur theoretischen Vorhersagen, als zu den Fits mit zusätzlichem Offset der Bunchlänge σ_0 oder anderem Exponenten (siehe Abbildung 4.2.6). Die Ergebnisse der drei Anpassungen sind in folgender Tabelle zusammengefasst:

	Vorfaktor	Offset	Exponent	$\chi^2/\text{Freiheitsgrad}$
Fit a	$0,128 \pm 0,015$	0 (fix)	$2,3$ (fix)	0,85
Fit 1	$0,33 \pm 0,22$	$-0,40 \pm 0,20$	$2,3$ (fix)	0,006
Fit 2	$0,100 \pm 0,024$	0 (fix)	$3,7 \pm 1,1$	0,03

Eine schlüssige Erklärung, wie es zu einem Offset der Bunchlänge bei 1,6 GeV kommen kann, ist noch nicht vorhanden. Weitere Messungen werden benötigt um festzustellen, ob dieser Offset existiert oder ein anderer, zusätzlicher Effekt (wie zum Beispiel das Resistive-Wall-Wake, Kapitel 3.3.5) zur Beschreibung der Stupakov-Schwelle bei dieser Energie hinzugezogen werden muss.

Kapitel 5

Die Strahlungsleistung der kohärenten Synchrotronstrahlung

Die Leistungsspektren der kohärenten Synchrotronstrahlung liefern Informationen über die Länge und Form der emittierenden Ladungsverteilungen. Diese Spektren können durch die Berechnungen zur Bunchlänge in Kapitel 4.2.2 ergänzen und Hinweis auf existierende Bunchdeformationen sein.

Die Leistung P der kohärenten Synchrotronstrahlung wächst proportional zum Quadrat der Anzahl N der emittierenden Elektronen. Außerdem beeinflusst die Form der Ladungsverteilung durch ihre Fouriertransformierte den Verlauf des Spektrums:

$$\left(\frac{dP}{d\lambda}\right)_{Bunch} = \left(\underbrace{N}_{incoh.} + \underbrace{N(N-1)}_{koh.} g(\lambda)\right) \left(\frac{dP_s}{d\lambda}\right)_{Elektron}, \quad (5.0.1)$$

mit dem CSR-Formfaktor $g(\lambda)$:

$$g(\lambda) = FT[y_\kappa(x)|_{norm.}] = \frac{1}{F(\kappa)^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} y_\kappa(x) e^{2i\pi\sigma_0/\lambda} dx \right|^2 \quad (5.0.2)$$

5.1 Theoretische Leistungsspektren

Ohne äußere Felder sind die Ladungen im Bunch normalverteilt (siehe Kapitel 2.4) und der CSR-Formfaktor ist als Fouriertransformierte der Ladungsverteilung ebenfalls eine Normalverteilung. Um ein breiteres Spektrum bei einer festen Bunchlänge zu erhalten, besteht die Möglichkeit, die Ladungsverteilung durch bestimmte Wake-Felder zu deformieren (siehe Kapitel 2.4.3). Das Wake-Feld der kohärenten Synchrotronstrahlung selbst führt, wie in Kapitel 3.2 dargestellt, zu einer Asymmetrie der Bunchform und so zu einem erweiterten Spektralbereich. Die Stärke der Deformation ist dabei von der Ladungsträgerdichte im Bunch abhängig.

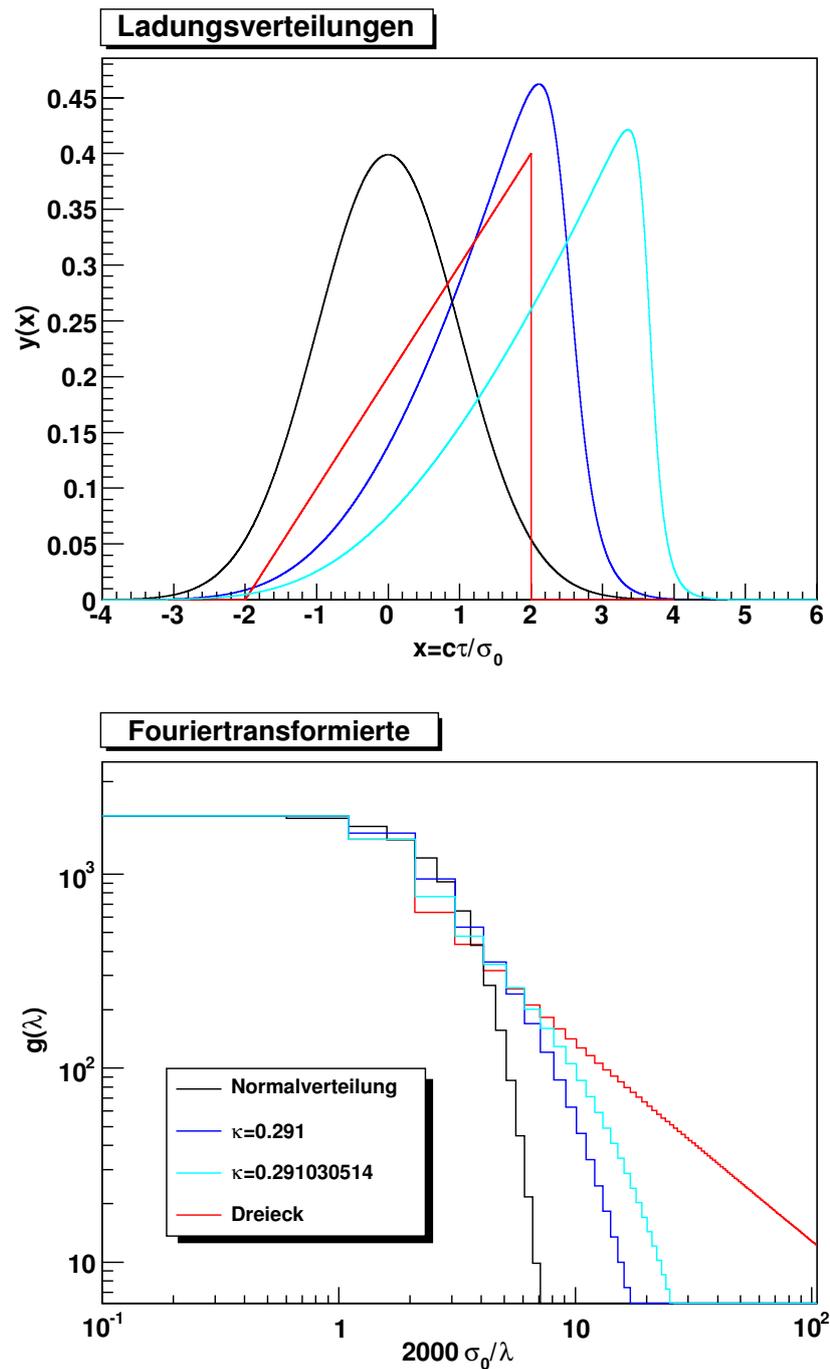


Abbildung 5.1.1: Vergleich verschiedener Ladungsverteilung und ihrer kohärenten Spektren: **oben:** Die Normierten Ladungsdichten einer Normalverteilung, einer Dreiecksverteilung und zweier durch CSR deformierten Bunchformen; **unten:** Das Spektrum der kohärenten Synchrotronstrahlung ist proportional zum CSR-Formfaktor $g(\lambda)$, der die Fouriertransformierte der normierten Ladungsverteilung im Bunch ist. Durch Deformation der Ladungsverteilungen kann der Spektralbereich der kohärenten Synchrotronstrahlung vergrößert werden.

Bei der Berechnung der Ladungsverteilungen unter Einfluss des CSR-Wake zu verschiedenen Ladungsträgerdichten in Kapitel 3.2 wurden 2000 Funktionswerte $y(x)$ pro $x = c\tau/\sigma_0$ berechnet, was einem Abstand zweier Datenpunkte von $\Delta x = 0,0005 c\tau/\sigma_0$ entspricht. Als Einheiten der Fouriertransformierten dieser Verteilungen erhält man den Kehrwert von Δx , also $\frac{1}{\Delta x} = 2000 \sigma_0/\lambda$.

Abbildung 5.1.1 zeigt den Vergleich der Ladungsverteilungen und resultierenden Spektren von einer Normalverteilung, sowie von zwei durch CSR deformierter Ladungsverteilungen und einer Dreiecks-Verteilung. Um den Spektralbereich der kohärenten Synchrotronstrahlung größtmöglich aufzuweiten, wäre die dargestellte, exakte Dreiecksverteilung ideal. Durch die Wirkung des CSR-Wake-Feldes erhält man dem Dreieck sehr ähnliche Verteilungen, die den Spektralbereich im Vergleich zur Normalverteilung nach einem Abfall um zwei Dekaden um den Faktor drei bis vier erweitern.

5.2 Gemessene Leistungsspektren

Die Infrarot-Beamline bei ANKA bietet die Möglichkeit Spektren zwischen $\tilde{k} = 4 \text{ cm}^{-1}$ und $\tilde{k} = 10.000 \text{ cm}^{-1}$ Wellenzahlen aufzuzeichnen, was einem Wellenlängenbereich von $1 \mu\text{m}$ bis $2,5 \text{ mm}$ entspricht. Die Messung der Spektren erfolgt mittels eines Michelson-Interferometers und einem Bolometer (siehe Kapitel 4.2.1) mit Siliziumdetektor.

Bei verschiedenen Gelegenheiten wurden Leistungsspektren P_m zu verschiedenen Synchrotronfrequenzen f_s bei einer Strahlenergie von $E = 1,3 \text{ GeV}$ aufgezeichnet. Der Strahlteiler des Interferometers bestand aus einer $6 \mu\text{m}$ dickem Silizium/Mylar Schicht, deren Transmissionspektrum P_{Hg} mit einer Quecksilberlampe bestimmt wurde. Außerdem wurde das thermische Spektrum P_{th} , also das Spektrum ohne Strahl, gemessen, um damit den Untergrund subtrahieren zu können.

Da im Bereich von 5 bis 50 Wellenzahlen der Anteil der inkohärenten Strahlung sehr gering ist, kann dieser vernachlässigt werden. Man erhält das kohärente Spektrum aus folgender Rechnung:

$$P_{coh}(\tilde{k}) = \frac{P_m(\tilde{k}) - P_{th}(\tilde{k})}{P_{Hg}(\tilde{k})} \quad (5.2.1)$$

Abbildung 5.2.1 zeigt das kohärente Spektrum bei einer Synchrotronfrequenz von $f_s = 6,25 \text{ kHz}$ und einem Strahlstrom von $18,7 \text{ mA}$. Die Leistung der kohärenten Strahlung P_{coh} ist in willkürlichen Einheiten über der Wellenzahl \tilde{k} aufgetragen. Der Verlauf des Spektrums zwischen $\tilde{k} = 12 \text{ cm}^{-1}$ und $\tilde{k} = 45 \text{ cm}^{-1}$ kann durch eine Normalverteilung mit einer Standardabweichung $\sigma_k = 10 \text{ cm}^{-1}$ angenähert werden.

Daraus lässt sich die Länge des THz-Pulses σ_s folgendermaßen berechnen:

$$\sigma_s = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}\sigma_k} \quad (5.2.2)$$

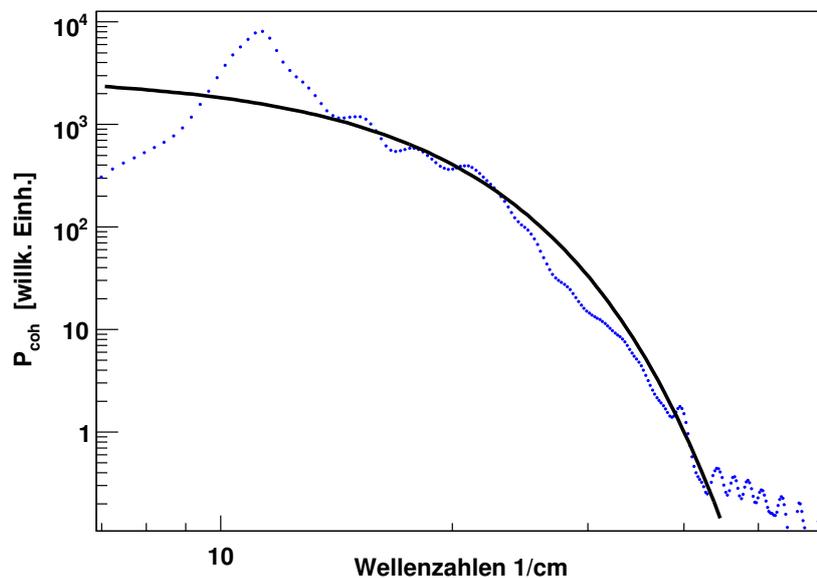


Abbildung 5.2.1: Gemessenes Leistungsspektrum der kohärenten Synchrotronstrahlung im THz-Frequenzbereich: Das gemessene Spektrum (blau) kann im Bereich von 12 bis 45 Wellenzahlen durch eine Normalverteilung (schwarz) beschrieben werden. Aus der Standardabweichung dieser Verteilung lässt sich auf eine Länge des strahlenden Bunches von $\sigma_s = 0,11$ mm schließen.

Für einen Wert von $\sigma_k = 10 \text{ cm}^{-1}$ erhält man damit eine Pulslänge von $\sigma_s = 0,11$ mm. Dieser Wert muss nicht unbedingt der Länge des strahlenden Bunches entsprechen. Zum einen ist es möglich, dass wie beim Microbunching (siehe Kapitel 2.5.2) nur ein Teil des Bunches kohärente Synchrotronstrahlung emittiert. Zum anderen würde ein deformierter Bunch zu einer nicht gaußförmigen Ladungsverteilung und deswegen zu einem anderen Spektralverlauf führen. Dafür müssten dann andere Verteilungen als die Normalverteilung an das Spektrum angepasst werden und das breite Spektrum würde nicht zwangsläufig auf eine kurze Bunchlänge zurückzuführen sein.

Zur Klärung dieses Umstandes sind weitere Auswertungen der vorhandenen Spektren und Bunchlängenmessungen durch andere Verfahren (z.B. mit einer Streak-Kamera und einem Single-Photon-Counter) geplant.

Kapitel 6

Zusammenfassung

Die vorliegende Diplomarbeit untersucht die Möglichkeiten und Grenzen der Erzeugung stabiler kohärenter Synchrotronstrahlung. Dabei werden die Effekte der Bunchdeformation durch das CSR-Wake und die Lage der Microbunching-Instabilität aus der Theorie von Stupakov, der so genannten Stupakov-Schwelle, untersucht.

Im ersten Teil der Arbeit wird eine mögliche Methode zur numerischen Berechnung der Bunchdeformation durch das CSR-Wake vorgestellt und auf ihre Genauigkeit hin getestet. Die damit berechneten Ladungsverteilungen sowie ihre Erwartungswerte und Formfaktoren sind mit Ergebnissen aus bisherigen Veröffentlichungen in Einklang. Darüber hinaus werden die zweiten bis vierten zentralen Momente der Ladungsverteilungen, Bunchlänge, Schiefe und Steilheit, berechnet und diskutiert.

Die Entwicklung der numerische Instabilität, die bei diesen Berechnungen bei zu großen Vorfaktoren auftritt, wird untersucht und der Grenzwert des Vorfaktors kann auf 8 Nachkommastellen genau bestimmt werden. In diesem Zusammenhang kann gezeigt werden, dass die numerische Instabilität nur eine Obergrenze des Vorfaktors darstellt und hinsichtlich des Formfaktors keine Obergrenze existiert. Der Formfaktor ist mit den Größen Bunchlänge und Strom verknüpft, woraus geschlossen werden kann, dass die numerische Instabilität nicht die Instabilität vorhersagt, die der Stupakov-Schwelle zu Grunde liegt und bei zu großer Teilchenzahl in zu kurzen Bunchen auftritt.

Im zweiten Teil der vorliegenden Diplomarbeit wird eine Methode zur experimentellen Messung der Stupakov-Schwelle vorgestellt. Die mit dieser Methode bei ANKA gewonnenen Messdaten bei einer Strahlenergie von 1,6 GeV zeigen eine Abweichung vom theoretischen Verlauf, die einen Offset in der Bunchlänge annehmen lässt. Eine Erklärung dieses Verhaltens bedarf weiterer Untersuchungen. Bei einer Strahlenergie von 1,3 GeV stimmen die Messdaten innerhalb ihrer Fehler mit den theoretischen Vorhersagen sehr gut überein.

Anhang A

Verwendete Symbole und Größen

In alphabetischer Reihenfolge

A.1 Konstanten

c	$2,9979 \cdot 10^8$ m/s	Vakuumlichtgeschwindigkeit
e	$1,602 \cdot 10^{-19}$ C	Elementarladung
eV	$1,602 \cdot 10^{-19}$ J	Elektronvolt
m_0	$9,109 \cdot 10^{-31}$ kg	Ruhemasse des Elektrons
r_0	$2,818 \cdot 10^{-15}$ m	klassischer Elektronradius
Z_0	377 Ω	Freiraumwellenwiderstand, $Z_0 = \mu_0 c$
ϵ_0	$8,854 \cdot 10^{-12}$ F/m	elektrische Feldkonstante
μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m	magnetische Feldkonstante

A.2 Symbole

\vec{A}	Vektorpotential [Vs/m]
a	Radius des Strahlrohrs [m]
b	Anzahl Bunche im Ring [1]
B	Feldstärke des Ablenkmagneten [T]
D_q, D_p	Diffusionskoeffizienten [m ² /s]
E	Energie [J]
\vec{E}	Elektrische Feldstärke [V/m]
\vec{F}	Kraft [N]
$F(\kappa)$	Formfaktor [1]
f_{rev}	Umlauffrequenz, $f_{rev} = \frac{1}{T}$ [Hz]
f_{RF}	Frequenz der Beschleunigungsspannung [Hz]
$g(\lambda), g(\omega)$	CSR-Formfaktor [1]
f_s	Synchrotronfrequenz [1]
H	Hamilton-Funktion [J]
h	Harmonische Zahl, $h = \frac{f_{RF}}{f_{rev}}$ [1]
I	Strom, $I = \frac{Ne}{T}$ [A]
$I(x)$	Korrekturintegral der Ladungsverteilungen [1]
I_b	Strom eines Bunches [A]
I_R	Strom im Ring [A]
It	Anzahl der Iterationen [1]
\vec{j}	Stromdichte [A/m ²]
\tilde{k}	Wellenzahl, $\tilde{k} = \frac{1}{\lambda}$ [1/cm]
k	Kreiswellenzahl, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ [1/m]
L	Länge der Teilchenbahn, $L = 2\pi R$ [m]
N	Anzahl Teilchen [1]
N_b	Anzahl Teilchen eines Bunches [1]
n	Teilchendichte [1/m ³]
o	Obere Integrationsgrenze [1]
P	Strahlungsleistung des Bunches [W]
P_s	Strahlungsleistung eines Elektrons [W]
\vec{p}	Impuls [kg m/s]
q	Verallgemeinerte Koordinaten [m]
q	Ladung [C]
R	Radius des Ablenkmagneten [m]
$S(t)$	Sprungantwort [1]
$S(\xi)$	Spektralfunktion [Ω]

s	Koordinate des Referenzteilchens, $s = vt$ [m]
s	Anzahl der Rechenschritte [1]
T	Zeit eines Umlaufs [s]
t	Zeit [s]
U_0	Energieverlust eines Umlaufs [J]
u	Untere Integrationsgrenze [1]
V	Spannung [V]
V_{RF}	Beschleunigungsspannung [V]
v	Geschwindigkeit [m/s]
W	Wake-Feld [V/m]
Z	Impedanz [Ω]
z	longitudinaler Abstand zum Referenzteilchen, $z = v\tau$ [m]
z_0	Charakteristische Länge [m]
α	Momentum-Compaction-Faktor [1]
α_d	Dämpfungsdekrement [1]
β	Relative Geschwindigkeit, $\beta = \frac{v}{c}$ [1]
γ	Lorentzfaktor, $\gamma = \frac{E}{mc^2}$ [1]
δ_E	Relativer Energieunterschied zum Referenzteilchen, $\delta_E = \frac{E-E_0}{E}$ [1]
η	Slip-Faktor, $\eta = \alpha - \frac{1}{\gamma^2}$ [1]
Θ	Winkel [$^\circ$]
κ	Normierungsfaktor [1]
λ	Wellenlänge [m]
$\rho(x,y,z)$	Dichteverteilung [1/m ³]
$\rho(z)$	Liniendichte [1/m]
σ_c	Elektrische Leitfähigkeit [S/m]
σ_E	RMS der relativen Abweichungen der Teilchenenergien δ_E [1]
σ_z	RMS-Bunchlänge [m]
σ_0	Natürliche Bunchlänge [m]
τ	zeitl. Abstand zum Referenzteilchen [s]
Φ	Skalares Potential [V]
ϕ	Phase der Teilchen zueinander [1]
Ψ	Phase der RF-Spannung [1]
Ω	Raumwinkel [$^\circ$]
ω	Frequenz [1/s]
ω_c	Kritische Frequenz [1/s]

Anhang B

Verwendete Gleichungen

Die folgende Liste der verwendeten Gleichungen ist nach ihrem Erscheinen in Kapitel 2 und 3 geordnet, wo sie ausführlicher behandelt werden.

B.1 Allgemeine Gleichungen

Lichtgeschwindigkeit:

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$$

Umrechnung zwischen Einheitensystemen:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = \frac{Z_0 c}{4\pi}$$

klassischer Elektronradius:

$$r_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_0 c^2}$$

Lorentzkraft:

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right)$$

B.2 Gleichungen der Beschleunigerphysik

Synchrotron Bedingung:

$$\frac{B}{E} = \frac{1}{ecR} = \text{const.}$$

Strom im Ring:

$$I = \frac{Nq}{T}$$

RF-Spannung:

$$V(\Psi) = V_{RF} \sin \Psi$$

Schwingungsgleichung Synchrotronschwingung:

$$\ddot{\Psi} + f_s^2 \Psi = 0$$

Dispersion:

$$D(s) = \frac{\Delta u}{\Delta p/p}$$

Momentum-Compaction-Faktor:

$$\alpha = \frac{\Delta L/L}{\Delta p/p} = \frac{1}{L_0} \oint \frac{D(s)}{R(s)} ds$$

Slip-Faktor:

$$\eta = \frac{\Delta T/T}{\Delta p/p} = \alpha - \frac{1}{\gamma^2}$$

Synchrotronfrequenz:

$$\begin{aligned} f_s^2 &= f_{rev}^2 \frac{\eta h}{2\pi E} e \frac{dV}{d\Psi} \Big|_{\Psi_s} \\ &= \frac{\eta e}{2\pi R m_0 \gamma} \frac{dV_{RF}}{ds} \\ &= f_{rev}^2 \frac{\eta h}{2\pi E} \sqrt{e^2 V_{RF}^2 - U_0^2} \end{aligned}$$

Bunchlänge:

$$\sigma_z = \frac{\eta c \sigma_E}{2\pi f_s}$$

Impedanz:

$$V(\omega) = -Z(\omega)I(\omega)$$

Wake-Feld:

$$W(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega z/c} Z(\omega) d\omega$$

Ungestörte Ladungsverteilung im Bunch:

$$\rho(x, y, z) = \frac{N_b q}{\sqrt{2\pi} \sigma_x \sigma_y \sigma_z} \exp \left[-\frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2} - \frac{z^2}{2\sigma_z^2} \right]$$

Vlasov-Gleichung:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + f \frac{\partial \rho}{\partial q} + g \frac{\partial \rho}{\partial p} = 0$$

Fokker-Planck-Gleichung:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + f \frac{\partial \rho}{\partial q} + g \frac{\partial \rho}{\partial p} = 2\alpha_d \rho + D_q \frac{\partial^2 \rho}{\partial q^2} + D_p \frac{\partial^2 \rho}{\partial p^2}$$

Sprungantwort:

$$S(t) = \frac{2\pi R}{e} \int_{-\infty}^t W(t') dt'$$

Haissinski-Gleichung:

$$I(\tau) = \kappa \exp \left[-\frac{(c\tau)^2}{2\sigma_0^2} - \frac{c^2}{\sigma_0^2 \dot{V}_{RF}} \int_{-\infty}^{\infty} I(\tau - t) S(t) dt \right]$$

Strahlungsleistung durch Ablenkung auf einer Kreisbahn:

$$P_s = \frac{e^2 c}{6\pi \epsilon_0 (m_0 c^2)^4} \frac{E^4}{R^2}$$

Energieverlust pro Umlauf:

$$U_0 = \oint P_s dt = \frac{e^2}{3\epsilon_0 (m_0 c^2)^4} \frac{E^4}{R}$$

Azimutale Winkelverteilung der Strahlung im Ruhesystem des Elektrons:

$$\frac{P_s}{d\Omega} = \frac{e^2}{16\pi^2 \epsilon_0 m_0^2 c^3} \left(\frac{d\vec{p}}{dt} \right)^2 \sin^2 \Theta$$

Spektrum relativistischer Ladungen auf einer Kreisbahn:

$$\frac{dP}{d\omega} = \frac{P_s \cdot N}{\omega_c} S(\omega/\omega_c)$$

Kritische Frequenz:

$$\omega_c = \frac{3c\gamma^3}{2R}$$

Spektralfunktion:

$$S(\xi) = \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} \xi \int_{\xi}^{\infty} K_{5/3}(x) dx$$

CSR-Strahlungsleistung:

$$\left(\frac{dP}{d\omega} \right)_{\text{Bunch}} = \underbrace{\left(\frac{N}{\omega_c} \right)}_{\text{inkoh.}} + \underbrace{N(N-1)}_{\text{koh.}} g(\omega) \left(\frac{dP_s}{d\omega} \right)_{\text{Elektron}}$$

Tangentiales elektrisches Feld eines kreisenden Elektrons:

$$E_\phi(\vec{x}, t) = -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \phi} \Phi(\vec{x}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} A_\phi(\vec{x}, t)$$

CSR-Wake-Feld:

$$W(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ -\frac{Z_0 c e}{2\pi(3R^2)^{1/3}} \frac{\partial}{\partial z} z^{-1/3} & z > 0 \end{cases}$$

CSR-Sprungantwort:

$$S(t) = -Z_0 \left(\frac{R}{3c} \right)^{1/3} t^{-1/3} \quad t > 0$$

Haissinski-Gleichung für CSR-Wake:

$$I(\tau) = \kappa \exp \left[-\frac{(c\tau)^2}{2\sigma_0^2} - \frac{c^2}{\sigma_0^2 \dot{V}_{RF}} \left(-Z_0 \left(\frac{R}{3c} \right)^{1/3} \right) \int_0^\infty I(\tau - t) t^{-1/3} dt \right]$$

Dimensionslose Form der Haissinski-Gleichung für CSR-Wake:

$$y_\kappa(x) = \kappa \exp \left[-\frac{x^2}{2} + \text{sgn}(\alpha) \int_0^\infty y_\kappa(x - z) z^{-1/3} dz \right],$$

Formfaktor:

$$F(\kappa) = \int y_\kappa(x) dx = I_b \frac{Z_0 c}{\dot{V}_{RF}} \left(\frac{R}{3\sigma_0^4} \right)^{1/3}$$

CSR-Formfaktor:

$$g(\lambda) = FT [y_\kappa(x)|_{norm.}] = \frac{1}{F(\kappa)^2} \left| \int_{-\infty}^\infty y_\kappa(x) e^{2i\pi\sigma_0/\lambda} dx \right|^2$$

Vlasov-Gleichung mit Wake-Feld:

$$\frac{\partial \rho}{\partial s} - \eta \delta \frac{\partial \rho}{\partial z} - \frac{r_0}{\gamma} \frac{\partial \rho}{\partial \delta} \int_{-\infty}^\infty W(z - z') \rho(\delta', z', s) dz' d\delta' = 0$$

Stupakov-Schwelle:

$$kR > 2.0 \left(\frac{N_b r_0}{|\eta| \sqrt{2\pi} \sigma_z \gamma \sigma_E^2} \right)^{3/2} \longleftrightarrow N_b < \frac{2^{5/2} \pi^{13/6} \epsilon_0}{c e R^{1/3}} f_{RF} V_{RF} \frac{\sigma_z^3}{\lambda^{2/3}}$$

Erwartungswert:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \cdot y_i \cdot \delta$$

Varianz:

$$Var = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \cdot y_i \cdot \delta = \sigma^2$$

Skewness:

$$Skew = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} \right)^3 \cdot y_i \cdot \delta$$

Kurtosis:

$$Kurt = \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} \right)^4 \cdot y_i \cdot \delta \right] - 3$$

Impedanz eines runden Strahlrohrs:

$$Z(k) = \frac{Z_0}{2\pi a} \left(\frac{\xi}{k} - \frac{ika}{2} \right)^{-1} \quad \text{mit:} \quad \xi = \sqrt{\frac{Z_0 \sigma_c |k|}{2}} (i + \text{sign}(k))$$

Resistive-Wall-Wake:

$$W(z) = \frac{4Z_0 c}{\pi a^2} \left(\frac{e^{-z/z_0}}{3} \cos\left(\frac{\sqrt{3}z}{z_0}\right) - \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\infty \frac{x^2 e^{-x^2 z/z_0}}{x^6 + 8} dx \right)$$

Charakteristische Länge:

$$z_0 = \left(\frac{2a^2}{Z_0 \sigma_c} \right)^{1/3}$$

Fernfeld-Näherung des Resistive-Wall-Wake:

$$W(z) = -\frac{c}{4\pi^{3/2} a} \sqrt{\frac{Z_0}{\sigma_c}} z^{-3/2} \quad \text{für } z \gg z_0$$

Anhang C

ANKA-Parameter

Für 2,5 GeV Strahlenergie

B	Ablenkmagnete	1,5 T
f_{rev}	Umlauffrequenz	2,7 MHz
f_{RF}	RF-Frequenz	500 MHz
h	Harmonische Zahl	184
I	Strahlstrom	200 mA
L	Länge des Rings	110,4 m
R	Radius der Ablenkmagnete	5,559 m
T	Zeit eines Umlaufs	368 ns
U_0	Energieverlust eines Umlaufs	0,6 MeV
v	Geschwindigkeit der Elektronen	$c-23$ m/s
α	Momentum-Compaction-Faktor	0,0097
β	Relative Geschwindigkeit	0,999999923
γ	Lorentzfaktor	2544
σ_z	RMS-Bunchlänge	10 mm
ω_c	Kritische Frequenz	$1,35 \cdot 10^{18}$ Hz

Anhang D

Die Spektralfunktion

Das Strahlungsspektrum der Synchrotronstrahlung (Gleichung (2.5.5)) wird mit Hilfe der Spektralfunktion S angegeben, zu deren Berechnung die modifizierte Besselfunktion zweiter Art $K_{5/3}$ benötigt wird:

$$S(\xi) = \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} \xi \int_{\xi}^{\infty} K_{5/3}(x) dx \quad (\text{D.0.1})$$

Die modifizierte Besselfunktionen n -ter Ordnung, sowohl erster und zweiter Art, lösen folgende Differentialgleichung:

$$x^2 y'' + xy' - (x^2 + n^2)y = 0 \quad (\text{D.0.2})$$

Die modifizierten Besselfunktionen zweiter Art sind explizit durch

$$K_n(x) = \lim_{p \rightarrow n} \frac{\pi}{2} \frac{I_{-p}(x) - I_p(x)}{\sin(px)} \quad (\text{D.0.3})$$

gegeben. Dabei sind die I_p die modifizierten Besselfunktionen erster Art und über die gewöhnliche Besselfunktionen J_p definiert:

$$I_p(x) = i^{-p} J_p(ix) \quad (\text{D.0.4})$$

Anhang E

Verwendeter Programmcode

Der Programmcode in C++ zur Berechnung der Bunchformen:

```
int main (){

    long double kappa=0.291; //Vorfaktor
    long double alpha=1.; //Vorzeichen alpha
    int it=150; //Iterationen
    int s=20000; //Anzahl Schritte
    long double u=-4.; //untere Grenze
    long double o=6.; //obere Grenze
    long double delta=(o-u)/s; //Schrittweite
    long double zd=2./3.;

    long double x[s];
    long double y[s];
    long double I[s];

    int i;
    for (i=0;i<s;i++){ //Erzeugung der Startwerte
        x[i]=u+(i*delta);
        y[i]=kappa*exp((-0.5)*x[i]*x[i]);
    }

    for (int k=1;k<=it;k++){ //fuehrt Iterationen durch
        i=0;
        while (i<=s){
            I[i]=0;
            int j=0;
            long double b; //Breite des Intervalls
            long double tv; //vorheriges t
```

```

        long double tn; //naechstes t
        tv=0;
        while (i>=j){ //Berechnet Wert des Integrals I[i]
            tn=pow(((j+1)*delta),zd);
            b=(tn-tv)*0.5;
            I[i]+=y[i-j]*b;
            tv=pow((j*delta),zd);
            j++;
        }
        I[i]*=1.5;
        i++;
    }

    i=0;
    while (i<s){ //Berechnet neues y[i]
        y[i]=kappa*exp((-0.5)*x[i]*x[i]+alpha*I[i]);
        i++;
    }
}

for (i=0;i<s;i++){ //Berechnet den Formfaktor
    F+=y[i]*delta;
}

std::stringstream name;
name.precision(8);
name << kappa;
string filename = "bf" + name.str() + ".txt";
std::ofstream file1(filename.c_str(),ios::app);
file2 <<"#_kappa="<<kappa<<" ,_delta=" <<delta<<endl
    <<"#_F(kappa)="<<F<<endl;

for (i=0;i<s;i++){
    file1 <<i<<"_ "<< x[i]<<"_ " <<y[i]<< "_ "<<I[i] <<endl;
}
file1.close();
}

```

Der Quellcode zur Bestimmung der Momente:

```
long double erw=0, var=0, sigma=0, skew=0, kurt=0;

while (i<s){           // Normierung
    y[i]/=F;
    i++;
}

for (i=0;i<s;i++){
    erw+=x[i]*y[i];
}
erw*=delta;

for (i=0;i<s;i++){
    var+=(x[i]-erw)*(x[i]-erw)*y[i];
    skew+=(x[i]-erw)*(x[i]-erw)*(x[i]-erw)*y[i];
    kurt+=(x[i]-erw)*(x[i]-erw)*(x[i]-erw)*(x[i]-erw)*y[i];
}
var*=delta;
skew*=delta;
kurt*=delta;
sigma=sqrt(var);
skew/=sigma*sigma*sigma;
kurt/=sigma*sigma*sigma*sigma;
kurt -=3;
```

Die Berechnung des Integrals $I(x)$ mit äquidistantem t mittels Interpolation:

```
I[i]=y[i]*delta*0.5;      //Erstes halbes Bin
int a;
long double arg;        //arg=x-t^3/2;
long double wert;      //wert=y(x-t^3/2);
long double b;         //b: Binbreite

    for(int t=1;(x[i]-pow(t*delta,1.5))>=u);t++){
        arg=x[i]-pow(t*delta,1.5);
        a=int((arg-u)/delta);
// x-t^3/2 liegt nun zwischen x[a] und x[a+1]
// Interpolation:
        wert=(arg-x[a])*(y[a+1]-y[a])/delta+y[a];
        I[i]+=wert*delta;
    }

I[i]*=1.5;
```

Anhang F

Die numerische Instabilität des Resistive-Wall-Wake

Für große Vorfaktoren κ kann keine stabile Endverteilung berechnet werden, da die Ladungsverteilungen nach ungerader Anzahl an Iterationen sich anhaltend von jenen nach gerader Anzahl an Iterationen unterscheiden. In Abbildung F.0.1 sind für drei κ -Werte jeweils die Ladungsverteilungen nach zwei aufeinander folgenden Iterationen zu sehen. Für $\kappa = 1000$ ist an der Bunchform noch kein Unterschied zu erkennen, der Formfak-

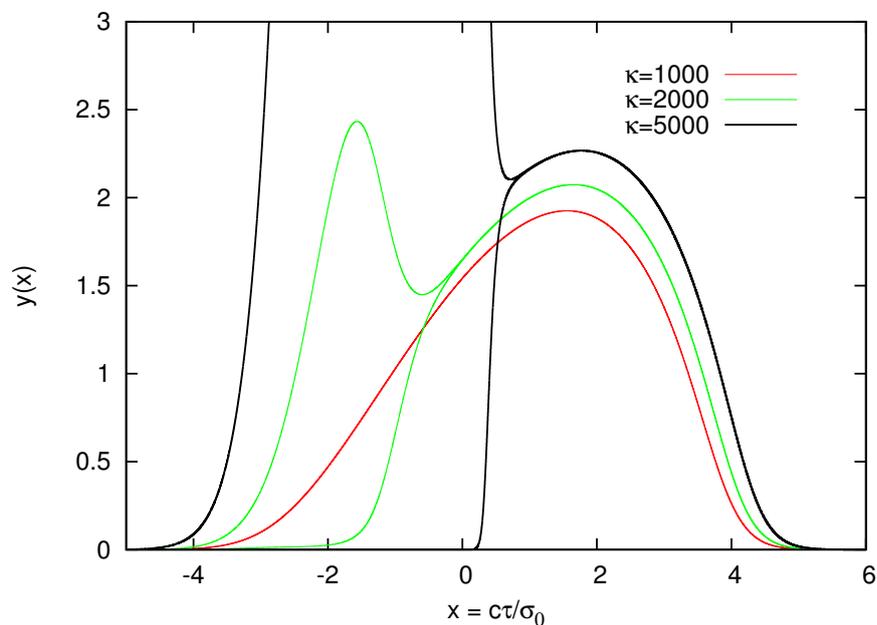


Abbildung F.0.1: Ladungsverteilungen unter Einfluss des Resistive-Wall-Wake jeweils nach gerader und ungerader Anzahl an Iterationen für große κ : Ab einem Vorfaktor κ von über 1000 kann keine stabile Endverteilung mehr berechnet werden. Nach ungerader Anzahl an Iterationen erhält man eine abgeflachte Bunchende, nach gerader Anzahl einen zusätzlichen Ladungspeak. Beide Bunchformen nähern sich auch nicht nach weiteren Iterationen an.

tor $F(\kappa)$ schwankt jedoch zwischen 8,5499 und 8,5517 nach ungerader beziehungsweise gerader Anzahl an Iterationen. Da der Unterschied der Formfaktoren und Ladungsverteilungen zu einem Vorfaktor stark mit κ anwächst, schwankt für $\kappa = 2000$ der Formfaktor $F(\kappa)$ abwechselnd bereits zwischen den Werte 8,45 und 11,84. Nach gerader Iteration bildet sich ein zusätzlicher Ladungspeak am Ende des Bunches aus, der nach der nächsten Iteration verschwindet und das Bunchende umso stärker abfällt.

Betrachtet man die Entwicklung des Formfaktors mit den Iterationen, wird deutlich, wie dieses Verhalten entsteht: Von Anfang an ist der Formfaktor nach einer ungeraden Iteration kleiner als jener nach einer geraden. Die Differenz der Formfaktoren von einer zur nächsten Iteration sinkt, bis bei kleinen κ -Werten (Abbildung F.0.2 links) schließlich eine stabile Endverteilung erreicht ist. Bei großen κ -Werten (Abbildung F.0.2 rechts) hingegen bleibt ein Unterschied der Formfaktoren nach geraden und ungeraden Iterationen bestehen.

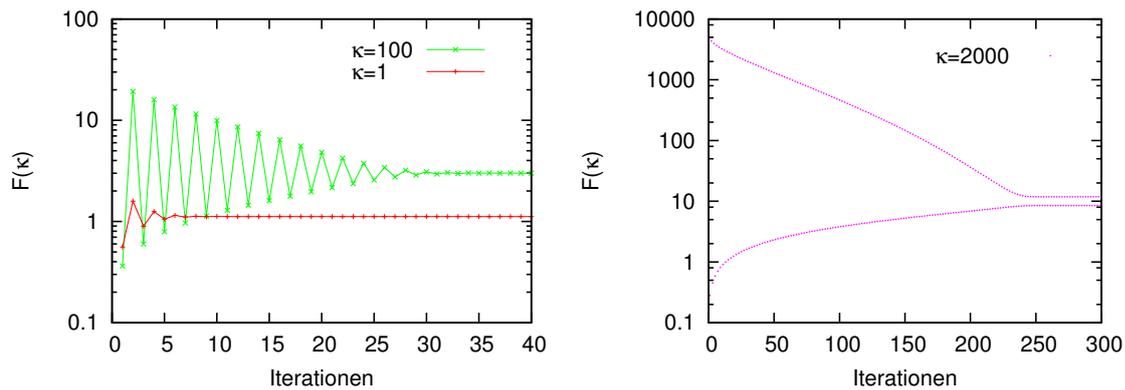


Abbildung F.0.2: Die Entwicklung des Formfaktors mit den Iterationen für das Resistive-Wall-Wake: **links:** Für kleine Vorfaktoren κ nähern sich die Formfaktoren $F(\kappa)$ mit jeder Iteration weiter an, bis eine gemeinsame Gleichgewichtsverteilung erreicht ist. **rechts:** Für große κ kann keine stabile Endverteilung mehr gefunden werden, der Unterschied der Formfaktoren nach geraden und ungeraden Iterationen bleibt bestehen.

Literaturverzeichnis

- [1] MÜLLER, A.-S. ; BIRKEL, I. ; GASHAROVA, B. ; HUTTEL, E. ; KUBAT, R. ; MATTHIS, Y.-L. ; MOSS, D.A. ; MEXNER, W. ; ROSSMANITH, R. ; WÜNSCH, M. ; WESOŁOWSKI, P. ; PEREZ, F. ; PONT, M. ; HIRSCHMUGL, C.J.:
Far Infrared Coherent Synchrotron Edge Radiation at ANKA.
In: *Particle Accelerator Conference, 2005. PAC 2005. Proceedings of the (2005)*,
May, S. 2518–2520
- [2] ABO-BAKR, M. ; FEIKES, J. ; HOLLDACK, K. ; WÜSTEFELD, G. ; HÜBERS, H.-W.:
Steady-State Far-Infrared Coherent Synchrotron Radiation detected at BESSY II.
In: *Phys. Rev. Lett.* 88 (2002), Jun, Nr. 25, S. 254801.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.88.254801>. –
DOI 10.1103/PhysRevLett.88.254801
- [3] WÜSTEFELD, G.:
Short Bunches in Electron Storage Rings and Coherent Synchrotron Radiation.
In: *Proceedings of EPAC08, Genoa, Italy (2008)*
- [4] HASHIMOTO, S. ; SHOJI, Y. ; ANDO, A. ; TAKAHASHI, T.:
Observation of Coherent Synchrotron Radiation at Newsubarū.
In: *Particle Accelerator Conference, 2005. PAC 2005. Proceedings of the (2005)*,
May, S. 4188–4190
- [5] HAISSINSKI, J.:
Exact Longitudinal Equilibrium Distribution of Stored Electrons in the Presence of
Self-Fields.
In: *Nuovo Cimento* 18B, No1 (1973), S. 72
- [6] CHAO, A. (Hrsg.) ; TIGNER, M. (Hrsg.):
Handbook of Accelerator Physics and Engineering.
World Scientific Publishing Company, 1999
- [7] AGOH, T.:
Dynamics of Coherent Synchrotron Radiation by Paraxial Approximation, Depart-
ment of Physics, University of Tokio, Diss., 2004
- [8] SCHOTT, G.A.:
-

Electromagnetic Radiation.

Cambridge University Press, 1912

- [9] BANE, K. ; KRINSKY, S. ; MURPHY, J. B.:
Longitudinal potential well distortion due to the synchrotron radiation wakefield.
In: *AIP Conf. Proc.* 367 (1996), S. 191–198. –
Given at Micro Bunches: A Workshop on the Production, Measurement and Applications of Short Bunches of Electrons and Positrons in Linacs and Storage Rings, Upton, NY, 28-30 Sep 1995
- [10] WARNOCK, Robert L.:
Shielded coherent synchrotron radiation and its effect on very short bunches.
(1990). –
Presented at 4th Advanced ICFA Beam Dynamics Workshop on Collective Effects in Short Bunches, Tsukuba, Japan, Sep 24-29, 1990
- [11] STUPAKOV, G. ; HEIFETS, S.:
Beam instability and microbunching due to coherent synchrotron radiation.
In: *Phys. Rev. ST Accel. Beams* 5 (2002), Mai, Nr. 5, 054402–.
<http://link.aps.org/abstract/PRSTAB/v5/e054402>
- [12] VENTURINI, M. ; WARNOCK, R.:
Bursts of Coherent Synchrotron Radiation in Electron Storage Rings: A Dynamical Model.
In: *Phys. Rev. Lett.* 89 (2002), November, Nr. 22, 224802–.
<http://link.aps.org/abstract/PRL/v89/e224802>
- [13] VENTURINI, Marco ; WARNOCK, Robert ; RUTH, Ronald ; ELLISON, James A.:
Coherent synchrotron radiation and bunch stability in a compact storage ring.
In: *Phys. Rev. ST Accel. Beams* 8 (2005), Jan, Nr. 1, S. 014202.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevSTAB.8.014202>. –
DOI 10.1103/PhysRevSTAB.8.014202
- [14] SANNIBALE, F. ; BYRD, J. M. ; LOFTSDOTTIR, A. ; VENTURINI, M. ; ABO-BAKR, M. ; FEIKES, J. ; HOLLDAK, K. ; KUSKE, P. ; WÜSTEFELD, G. ; HÜBERS, H.-W. ; WARNOCK, R.:
A Model Describing Stable Coherent Synchrotron Radiation in Storage Rings.
In: *Phys. Rev. Lett.* 93 (2004), August, Nr. 9, 094801–.
<http://link.aps.org/abstract/PRL/v93/e094801>
- [15] PRESS, William H. ; TEUKOLSKY, Saul A. ; VETTERLING, William T. ; FLANNERY, Brian P.:
Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing.
Cambridge University Press, 2007
-

- [16] SANNIBALE, F. u. a.:
Stable CSR in storage rings: A model.
In: *ICFA Beam Dyn. Newslett.* 35 (2004), S. 27–39
- [17] CHAO, Alexander W.:
Physics of collective beam instabilities in high energy accelerators.
Wiley, 1993
- [18] BANE, K.L.F. ; RUTH, R.D.:
Bunch lengthening calculations for the SLC damping rings.
In: *Particle Accelerator Conference, 1989. Accelerator Science and Technology., Proceedings of the 1989 IEEE (1989)*, Mar, S. 789–791 vol.2.
<http://dx.doi.org/10.1109/PAC.1989.73250>. –
DOI 10.1109/PAC.1989.73250
- [19] HOLTZAPPLE, R. ; BILLING, M. ; HARTILL, D. ; STEDINGER, M. ; PODOBEDOV, B.:
Single bunch longitudinal measurements at the Cornell Electron-Positron Storage Ring.
In: *Phys. Rev. ST Accel. Beams* 3 (2000), Mar, Nr. 3, S. 034401.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevSTAB.3.034401>. –
DOI 10.1103/PhysRevSTAB.3.034401
- [20] BYRD, J. M. ; LEMANS, W. P. ; LOFTSDOTTIR, A. ; MARCELIS, B. ; MARTIN, Michael C. ; MCKINNEY, W. R. ; SANNIBALE, F. ; SCARVIE, T. ; STEIER, C.:
Observation of Broadband Self-Amplified Spontaneous Coherent Terahertz Synchrotron Radiation in a Storage Ring.
In: *Phys. Rev. Lett.* 89 (2002), Nov, Nr. 22, S. 224801.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.89.224801>. –
DOI 10.1103/PhysRevLett.89.224801
- [21] FEIKES, J. ; HOLLDAK, K. ; KUSKE, P. ; WÜSTEFELD, G. ; HÜBERS, H.-W.:
The BESSY Low Alpha Optics and the Generation of Coherent Synchrotron Radiation.
In: *ICFA Beam Dyn. Newslett.* 35 (2004), S. 82–94
- [22] SANNIBALE, F. ; BYRD, J.M. ; LOFTSDOTTIR, A. ; MARTIN, M.C. ; VENTURINI, M.:
A model for producing stable, broadband terahertz coherent synchrotron radiation in storage rings.
In: *Particle Accelerator Conference, 2003. PAC 2003. Proceedings of the 2 (2003)*, May, S. 863–865 Vol.2.
<http://dx.doi.org/10.1109/PAC.2003.1289503>. –
-

DOI 10.1109/PAC.2003.1289503

[23] F. Sannibale, private Kommunikation.

[24] BÜCKLE, T.:

Bestimmung der Strahlenergie des ANKA-Speicherrings mittels resonanter Elektronen-Spin-Depolarisation, Diplomarbeit, 2008

Danksagung

Zu allererst möchten ich Prof. Baumbach und Prof. Quast für die Möglichkeit danken, dieses Thema bearbeiten zu dürfen.

Ein ganz großes Dankeschön geht an Frau Müller, für die tägliche Betreuung meiner Arbeit und das Vertrauen, das in mich gesetzt wurde. Als Leiterin der THz-Gruppe am ISS hat Sie es geschafft, ein nettes Arbeitsklima und eine konstruktive Arbeitsatmosphäre in unserer Gruppe zu schaffen. Doch was wäre eine Gruppe ohne all ihre Mitglieder und so möchte ich mich bei euch allen für das schöne, interessante und lustige arbeitsreiche letzte Jahr bedanken. Besonderen Dank an Tobias und Kiran, die mir mit Anregungen, Hilfe und Tips jederzeit zur Seite standen.

Zu besonderem Dank bin ich Yves-Laurent Mathis und Michael Süpfle verpflichtet, die uns ihre Beamline inklusive Rundumbetreuung zur Verfügung gestellt haben und so neben Erhard Huttel, Sara Casalbuoni und Ingrid Birkel mir eine große Hilfe bei den Messungen waren.

Weiter möchte ich Godehard Wüstefeld danken, der immer ein offenes Ohr für fachliche Fragen hatte.

Ohne die vielen netten sozialen Kontakte am ISS würde ich wohl nicht durchweg positiv auf das vergangene Jahr schauen, und so möchte ich mich ganz herzlich bei der allmüttäglichen Kaffeerrunde und ganz besonders bei Bärbel für die schöne Zeit und den Beistand bedanken.

Weiter geht mein Dank an all meine Freunde, Christiane und Dieter und Franz und Doris Bach, die mich in all der Zeit unterstützt und immer wieder aufgebaut haben, wenn ich schon verzweifeln wollte. Doch vielleicht den größten Anteil an dieser Arbeit hat Mathias, der mir immer zur Seite stand und all meine Sorgen vertrieb, vielen Dank.
