

# Flavourverletzung in supersymmetrischen vereinheitlichten Theorien

Zur Erlangung des akademischen Grades eines  
**DOKTORS DER NATURWISSENSCHAFTEN**

von der Fakultät für Physik des  
Karlsruher Instituts für Technologie (KIT)

genehmigte

**DISSERTATION**

von

**Dipl.-Phys. Jennifer Girrbach**

aus Pforzheim (Baden-Württemberg)

*Karlsruher Institut für Technologie – Campus Süd  
Fakultät für Physik  
Institut für Theoretische Teilchenphysik*

Tag der mündlichen Prüfung: 4. Februar 2011  
Referent: Univ.-Prof. Dr. Ulrich Nierste  
Korreferent: Univ.-Prof. Dr. Dieter Zeppenfeld



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Vom Standardmodell zu seiner supersymmetrischen Erweiterung</b>	<b>9</b>
2.1	Das Standardmodell der Teilchenphysik . . . . .	9
2.1.1	Teilcheninhalt des SMs . . . . .	9
2.1.2	Flavourstruktur des SMs . . . . .	11
2.1.3	$CP$ -Verletzung im SM . . . . .	15
2.1.4	Seesaw-Mechanismus . . . . .	18
2.2	Supersymmetrie und das MSSM . . . . .	19
2.2.1	Wie macht man die Symmetrie super? . . . . .	20
2.2.2	Das MSSM . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Lepton-Flavourverletzung im MSSM</b>	<b>29</b>
3.1	Selbstenergien und Massenrenormierung . . . . .	29
3.2	Anomales magnetisches Moment und Masse des Elektrons . . . . .	35
3.3	Chirale Korrekturen zu leichten Fermionen und Konsequenzen für Sfermionmassen 39	
3.3.1	Einschränkungen an flavourdiagonale Masseneinsetzungen auf Einschleifenniveau . . . . .	40
3.3.2	Einschränkungen von Zweischleifenkorrekturen zu den Fermionmassen . . . . .	40
3.4	Das magnetische Moment des Myons als Test für die Myon-Yukawakopplung . . . . .	43
3.5	PMNS-Matrix-Renormierung . . . . .	48
3.5.1	Flavourändernde Selbstenergien am externen Beinchen . . . . .	48
3.5.2	Numerische Auswertung . . . . .	51
3.6	Leptonflavour-Universalitätstest im geladenen Kaonzerfall . . . . .	54
3.6.1	Experimenteller Status, SM-Vorhersage und SUSY-Beiträge . . . . .	54
3.6.2	Lepton-flavourerhaltene Schleifenkorrekturen . . . . .	56
3.6.3	Lepton-flavourverletzende Schleifenkorrekturen . . . . .	57
3.6.4	Zusammenfassung von LFV-Effekten in $R_K$ . . . . .	63
3.7	Flavourstruktur von Dimension-5-Operatoren . . . . .	63
3.7.1	RGE und Universalität . . . . .	64
3.7.2	Wozu höherdimensionale Operatoren? . . . . .	64
3.7.3	Erste Untersuchungen in der Literatur . . . . .	65
3.7.4	Parametrisierung der Korrekturen zu den Fermionmassen . . . . .	66
3.7.5	Numerische Auswertung . . . . .	67
<b>4</b>	<b>Das Chang-Masiero-Murayama-Modell</b>	<b>71</b>
4.1	Motivation und Aktualität . . . . .	71
4.2	Flavour-Struktur des CMM-Modells . . . . .	72
4.2.1	Das Superpotenzial des CMM-Modells und dessen Brechung zum MSSM . . . . .	72
4.2.2	Basiswechsel: Up-Basis und Super-CKM-Basis . . . . .	75
4.2.3	Universalität der Brechungsterme . . . . .	76

4.2.4	CMM-Inputwerte . . . . .	77
4.2.5	Parameter bei $M_{\text{GUT}}$ : Ein Beispiel im CMM-Paramterraum . . . . .	77
4.3	Grundlegende Ergebnisse und Vorarbeiten des CMM-Modells . . . . .	78
4.3.1	Massensplitting und Flavourverletzung . . . . .	78
4.3.2	Das CMW-Programm . . . . .	80
4.3.3	Die Wahl von $\tan\beta$ und die Masse des neutralen Higgsbosons . . . . .	80
4.3.4	Vakuumstabilität und positive Fermionmassen . . . . .	81
4.3.5	Teilchenspektrum für einen speziellen CMM-Parameterpunkt . . . . .	81
4.4	Phänomenologie des CMM-Modells . . . . .	82
4.4.1	Grundidee effektiver Hamiltonoperatoren . . . . .	82
4.4.2	$B_s - \bar{B}_s$ -Mischung . . . . .	83
4.4.3	CMM-Beiträge zu den $\Delta B = 1$ -Wilson-Koeffizienten . . . . .	90
4.4.4	$CP$ -Verletzung in $B_d \rightarrow \phi K_S$ . . . . .	92
4.4.5	$CP$ -Verletzung in $B_s \rightarrow \phi\phi$ . . . . .	96
<b>5</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>107</b>
	<b>Anhang</b>	<b>113</b>
<b>A</b>	<b>Feynman-Regeln, <math>\ell_j \rightarrow \ell_i\gamma</math>, Schleifenfunktionen und RGE</b>	<b>113</b>
A.1	Feynman-Regeln . . . . .	113
A.2	Einschleifenergebnis für $\Gamma(\ell_j \rightarrow \ell_i\gamma)$ . . . . .	114
A.3	Schleifenfunktionen . . . . .	115
A.3.1	Anomales magnetisches Moment und $\ell_j \rightarrow \ell_i\gamma$ . . . . .	115
A.3.2	Für $\Delta B = 2$ - und $\Delta B = 1$ -Übergänge . . . . .	116
A.4	Renormierungsgruppengleichungen im MSSM mit $\nu_R$ . . . . .	118
<b>B</b>	<b>Inputwerte</b>	<b>121</b>
<b>C</b>	<b>Einführung in GUTs</b>	<b>123</b>
C.1	SU(5)-Vereinheitlichung . . . . .	123
C.2	SO(10)-Vereinheitlichung . . . . .	126
C.3	Supersymmetrische GUTs . . . . .	132
<b>D</b>	<b>Konventionen <math>B^0 - \bar{B}^0</math>-Mischung</b>	<b>135</b>
<b>E</b>	<b>Effektive Hamiltonoperatoren</b>	<b>137</b>
E.1	$\Delta B = 1$ -Operatoren . . . . .	137
E.2	$\Delta B = 1$ -Wilson-Koeffizienten . . . . .	139
E.3	Renormierungsgruppengleichungen . . . . .	141
E.4	$\Delta B = 2$ - und $\Delta B = 1$ -Übergänge im generischen MSSM in MIA . . . . .	144
<b>F</b>	<b>QCD-Faktorisierung</b>	<b>147</b>
F.1	QCDF für $PV$ -Endzustände . . . . .	149
F.2	QCDF für $VV$ -Endzustände . . . . .	154
F.3	Funktionen aus der Umparametrisierung . . . . .	158
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>160</b>
	<b>Danksagung</b>	<b>173</b>

# 1 Einleitung

Mit dem Start des Large Hadron Colliders (LHC) am CERN in Genf wurde eine neue Ära der Teilchenphysik eingeleitet. Er ist unser Mikroskop, das uns ins frühe Universum blicken lässt und neue fundamentale Bausteine der Materie finden kann. Damit sollen nicht nur das letzte fehlende Puzzlestück im Standardmodell der Teilchenphysik (SM) – das Higgsboson – entdeckt werden, sondern auch Antworten auf offene Fragen im SM gefunden werden, deren Klärung ein tieferes Verständnis der Natur liefert. Trotz des immensen Erfolges wird das SM von den meisten Physikern nur als eine effektive Theorie verstanden, die oberhalb der TeV-Skala durch eine fundamentalere Theorie ersetzt werden muss. Die ultimative Frage der Hochenergiephysik ist einfach formuliert, jedoch schwer zu beantworten: Wie lautet die fundamentale Lagrangedichte der Natur? Die Lagrangedichte des SMs  $\mathcal{L}^{\text{SM}}$  verliert spätestens bei der Planck-Skala  $M_{\text{Pl}} = 10^{18-19}$  GeV ihre Gültigkeit, da sich dort Gravitationseffekte bemerkbar machen. Nur wenige Physiker bezweifeln, dass bereits bei niedrigerer Energie Neue Physik, welche nicht im SM enthalten ist, zu Tage tritt. Um diese aufzuspüren, gibt es prinzipiell zwei Strategien:

- Zum einen ist der direkte Nachweis bei hohen Energien möglich, welcher vor allem in Collider-Experimenten angestrebt wird. Mit einer Schwerpunktsenergie von zur Zeit 7 TeV und künftig 14 TeV am LHC wird die Auflösung des Teilchen-Mikroskops so weit erhöht, dass – falls existent – das Higgsboson oder supersymmetrische Partnerteilchen am LHC sichtbar gemacht werden können.
- Zum anderen kann sich die Existenz neuer Teilchen indirekt über Quantenkorrekturen in kleinen Abweichungen zwischen SM-Vorhersage und Messergebnissen bemerkbar machen. Das Aufspüren solch kleiner Effekte erfordert eine hohe Präzision von Experiment und Theorie. Ein historisches Beispiel dafür ist die Entdeckung des Neptuns von Le Verrier im Jahre 1846. Er studierte die Abweichung des Uranus von seiner Sollbahn und fand eine Erklärung in Gravitationseffekten eines weiter außen gelegenen Planeten, dessen Position er auf  $1^\circ$  genau vorhergesagt hat. Auf analoge Weise kann man zuvor unbekanntem Teilchen auf die Spur kommen. Aufgrund des kleinen gemessenen Verzweigungsverhältnisses von  $K \rightarrow \mu^+\mu^-$  wurde beispielsweise das Charmquark als viertes Quark vorhergesagt, welches zusammen mit dem Strangequark ein Dublett bildet und somit via GIM-Mechanismus (benannt nach Glashow, Iliopoulos, Maiani) den Zerfall unterdrückt. Weiter wurde bereits 1987 ein schweres Topquark bei der  $B$ -Fabrik DORIS am DESY mit dem ARGUS-Experiment prognostiziert, wo erstmals  $B_d - \bar{B}_d$ -Oszillationen entdeckt wurden.

Der Einfluss neuer Teilchen als Zeichen von Physik jenseits des SMs lässt sich insbesondere in seltenen Prozessen studieren, welche im SM stark unterdrückt sind. Im Rahmen dieser Doktorarbeit werden Auswirkungen supersymmetrischer Teilchen auf Observablen der Flavourphysik untersucht.

## Symmetrien in der Teilchenphysik

Die Natur an sich ist reich geschmückt mit Symmetrien. Sie sind ein mächtiges Mittel, um die Eigenschaften und Wechselwirkungen der Elementarteilchen zu beschreiben und Vorhersagen zu machen. Das SM ist eine renormierbare Quantenfeldtheorie (QFT) mit einer  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$  Eichgruppe für die starke, schwache und elektromagnetische Wechselwirkung. Die elektromagnetische Wechselwirkung ist dabei eine Untergruppe von  $SU(2)_L \times U(1)_{em}$ . Das Eichprinzip basiert auf lokalen Symmetrietransformationen und schränkt zusammen mit der Forderung der Renormierbarkeit die Theorie stark ein, so dass mit dem bekannten Teilcheninhalt die SM-Lagrangedichte bereits die allgemeinste ist. Nach den Prinzipien der Quantenmechanik treten also alle erlaubten Terme bzw. Wechselwirkungen auch auf. Eine Konsequenz des Eichprinzips ist die Masselosigkeit der Eichbosonen, welche die Wechselwirkung zwischen den Fermionen (Quarks und Leptonen) vermitteln. Dazu gehören zum einen das masselose Photon  $\gamma$  als Träger der elektromagnetischen Kraft und die acht masselosen Gluonen der starken Wechselwirkung. Hingegen haben das  $W$ - und  $Z$ -Boson eine Masse von 80 bzw. 91 GeV. Dies bedeutet jedoch nicht, dass das Eichprinzip nicht gültig ist, sondern dass die Symmetriegruppe bei niedrigen Energien gebrochen ist. Mit anderen Worten: die volle Symmetriegruppe ist bei Energien unterhalb der elektroschwachen Skala „versteckt“. Das zugrunde liegende Phänomen ist die spontane Symmetriebrechung, für dessen Idee Yoichiro Nambu mit einer Hälfte des Physik-Nobelpreises 2008 geehrt wurde. Ein einfaches Beispiel für eine spontane Symmetriebrechung ist Wasser, welches im flüssigen Zustand rotationssymmetrisch ist. Kühlt man es ab durchläuft es einen Phasenübergang und wird zu Eis. Kristalle weisen jedoch nur noch eine diskrete Rotationssymmetrie auf. Die ursprüngliche, volle Symmetrie ist versteckt und kann durch Aufheizen wieder sichtbar gemacht werden. Nach einem ähnlichen Prinzip funktioniert auch der Higgsmechanismus des SMs, welcher eine Erklärung für die Massengenerierung der Fermionen und der  $W$ - und  $Z$ -Eichbosonen liefert, ohne das Eichprinzip zu verletzen. Die Lagrangedichte an sich bleibt eichinvariant; nur der gewählte Grundzustand weist eine geringere Symmetrie auf und bricht somit die Eichgruppe  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  zu  $U(1)_{em}$ .

## Das Rätsel der Fermionmassen

Wie die Fermionen tatsächlich ihre Masse bekommen, ist bislang unklar. Ein Diracmassenterm  $m\bar{\psi}_L\psi_R$  verknüpft links- und rechtshändige Teilchen, welche sich jedoch unterschiedlich unter  $SU(2)_L$  transformieren und somit die Eichinvarianz verletzen. Hingegen ist eine Majoranamasse  $m\bar{\psi}^c\psi$  nicht erlaubt, da sich die Hyperladungen nicht zu Null addieren. Für Eichsingulets wie beispielsweise ein rechtshändiges Neutrino ist es dagegen möglich. Die Einführung eines skalaren Teilchens  $\Phi$  mit geeigneten Quantenzahlen zusammen mit spontaner Symmetriebrechung kann dieses Problem lösen. Seine Kopplungen an die Fermionen via  $y\bar{\psi}_L\Phi\psi_R$  werden im Yukawasektor des SMs beschrieben. Dieser macht den Hauptanteil der freien Parameter im SM aus. Im Grundzustand erhält die neutrale Komponente von  $\Phi$  einen Vakuumerwartungswert (VEV von „vacuum expectation value“)  $v$ , womit ein eichinvarianter Diracmassenterm generiert wird:  $m\bar{\psi}_L\psi_R$  mit  $m = yv$ . Genau dieser Mechanismus soll am LHC durch das Auffinden des Higgsbosons bestätigt werden. Dadurch wird jedoch nicht erklärt, warum sich die Fermionmassen über fünf Größenordnungen von der Elektronmasse im MeV-Bereich bis zur Topquarkmasse von fast 200 GeV erstrecken, ganz zu schweigen von den kleinen Neutrinomassen. Übersetzt auf den Higgsmechanismus lautet die Frage, warum sich die Kopplungen zwischen  $\mathcal{O}(10^{-6})$  und  $\mathcal{O}(1)$  erstrecken. Der Yukawasektor birgt die meisten Rätsel des SMs, weshalb er eine entscheidende Rolle bei der Suche nach neuer Physik spielt.

---

Völlig unklar ist, warum es genau drei Generationen gibt, ist doch die Materie um uns herum nur aus der ersten aufgebaut. Diese drei Kopien unterscheiden sich nur durch die Fermionmassen, besitzen hingegen genau die gleichen Quantenzahlen unter der SM-Eichgruppe  $G_{\text{SM}}$ , so dass der Eichsektor flavourblind ist. Für ein Photon ist es irrelevant, ob es an ein Elektron oder Myon koppelt. Von Bedeutung ist allein die elektromagnetische Ladung. Nur der Yukawasektor kann somit zwischen den Familien unterscheiden.

Während die großen Massendifferenzen der Quarks- und geladenen Leptonen vornehmlich einen ästhetischen Haken haben, stellen die kleinen Neutrinomassen, welche durch die gemessenen Neutrinooszillationen experimentell bestätigt sind, ein konzeptionelles Problem im SM dar. Im SM sind Neutrinos masselos und die Erweiterung auf massive Neutrinos ist nichttrivial. Wir wissen nicht, wie ein um massive Neutrinos ergänztes SM aussieht, da die Erweiterung im Yukawasektor nicht eindeutig ist. Aber warum sind Neutrinomassen im Vergleich zu den anderen Fermionmassen so außergewöhnlich? Das Hinzufügen von rechtshändigen Neutrinos sollte keinen großen Schaden anrichten, da sie als Eichsingulets keinerlei Wechselwirkung unterliegen. Damit ist es, analog zu den anderen Fermionmassen, möglich, mit dem zugehörigen linkshändigen Teilchen einen Diracmassenterm zu konstruieren. Gleichzeitig ist auch ein Majoranamassenterm erlaubt. Eine Option wäre, eine zusätzliche globale Symmetrie zu fordern, welche diesen verbietet. Abgesehen davon umspannen mit der üblichen Massenkonstruktion die Yukawakopplungen sogar elf Größenordnungen. Billigt man hingegen eine Majoranamasse für rechtshändige Neutrinos, welche durch keinerlei Symmetrie geschützt ist, d.h. auf natürliche Weise sehr groß sein kann, so liefert der Seesaw-Mechanismus eine attraktive Erklärung für die leichten Neutrinomassen. Alternativ kann man mit Hilfe des Ausbaus des skalaren Sektors um ein Higgstriplett Neutrinomassen ohne rechtshändige Neutrinos generieren. Wir sehen also, dass Neutrinomassen bereits eine nichttriviale Erweiterung des SMs erzwingen und uns bei der Suche nach neuer Physik den Weg weisen könnten.

### Flavourphysik und $CP$ -Verletzung

Das Studium der Flavourübergänge zwischen den Generationen hilft nicht nur bei der Bestimmung einer Vielzahl an Parametern des SMs, sondern auch, Effekte neuer Physik ausfindig zu machen. Sehr imposant ist die Überbestimmung des Unitaritätsdreiecks, welches Informationen über Flavourübergänge im Quarksektor enthält und in beeindruckender Weise den Kobayashi-Maskawa-Mechanismus bestätigt. Kobayashi und Maskawa wurden dafür mit der zweiten Hälfte des Physik-Nobelpreises 2008 belohnt. Die Mischung zwischen den Familien wird im Quarksektor durch die Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-Matrix, kurz CKM-Matrix, beschrieben, welche mit drei Winkeln und einer  $CP$ -verletzenden Phase parametrisiert werden kann (hierbei steht  $C$  für Ladungskonjugation (charge conjugation) und  $P$  für Parität).  $CP$  bedeutet anschaulich, dass man alle Teilchen durch ihre Antiteilchen ersetzt und die Raumversion  $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$  ausführt. Im Leptonsektor werden Oszillationen zwischen den Neutrino flavours mittels der PMNS-Matrix, benannt nach Pontecorvo, Maki, Nakagawa und Sakata, parametrisiert, welche im Falle von Majorananeutrinos zusätzlich noch zwei Majoranaphasen enthalten kann. Qualitativ sehen die Mischungsmatrizen wie folgt aus<sup>1</sup>:

$$V_{\text{CKM}} = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \cdot \\ \cdot & \bullet & \cdot \\ \cdot & \cdot & \bullet \end{pmatrix}, \quad U_{\text{PMNS}} = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \cdot \\ \cdot & \bullet & \bullet \\ \cdot & \bullet & \bullet \end{pmatrix}.$$

<sup>1</sup>Die Radien der Kreise stellen die Absolutbeträge der Einträge dar, d.h.  $r \sim \sqrt{|V_{ij}|}$ .

Deutlich zu erkennen ist die hierarchische Struktur der CKM-Matrix, wohingegen die Größe der Einträge in der PMNS-Matrix – bis auf das Element rechts oben – viel gleichmäßiger verteilt ist. Der tiefere Grund, warum die Natur genau diese zwei so unterschiedlichen Strukturen gewählt hat, ist bislang ungeklärt. In sogenannten Großen Vereinheitlichten Theorien (GUT von „grand unified theory“), in denen Quarks und Leptonen verknüpft sind, ist es durchaus wahrscheinlich, dass die PMNS-Mischung im Quarksektor bzw. die CKM-Matrix bei den Leptonen auftaucht. Im SM ist – abgesehen vom  $\theta$ -Term der Quantenchromodynamik (QCD), welche hier nicht weiter berücksichtigt wird – die CKM-Phase die einzige Quelle von  $CP$ -Verletzung und folglich immer mit Flavourübergängen verbunden. Im Gegensatz zum Higgsmechanismus handelt es sich hier um eine explizite Symmetrieverletzung. Bei nur zwei Familien können alle Phasen wegrotiert werden. Kobayashi und Maskawa studierten die Bedingungen, unter denen  $CP$ -Verletzung realisierbar ist, und fanden, dass neben beispielsweise einem Zwei-Higgsdublett-Modell (2HDM) auch die Existenz einer dritten Generation eine Materie-Antimaterie-Asymmetrie bedingen würde. Mittlerweile kann man behaupten, dass die Kobayashi-Maskawa-Phase sehr wahrscheinlich die dominante Quelle für  $CP$ -Verletzung in niederenergetischen, flavourändernden Prozessen ist. In Erweiterungen des SMs können jedoch a priori zusätzliche  $CP$ -verletzende Phasen auftreten.

### Eine vereinheitlichte Theorie

Wie soll nun eine dem SM übergeordnete Theorie aussehen? Die Idee, verschiedene Kräfte oder Wechselwirkungen zu vereinheitlichen, reicht weit in die Geschichte der Physik zurück: Unter Anwendung der Universalität des Gravitationsgesetzes sowohl auf große als auch kleine Skalen verknüpfte bereits Isaac Newton (1642-1727) die Bewegung der Planeten mit dem Fallen eines Steines auf der Erde. James C. Maxwell (1831-1879) vollbrachte die Vereinigung der Elektrizität und des Magnetismus zum Elektromagnetismus. Fast hundert Jahre später gelang Sheldon Glashow (\*1932), Abdus Salam (1926-1996) und Steven Weinberg (\*1933) ein weiterer, sehr erfolgreicher Schritt: Die Vereinigung der Quantenelektrodynamik (QED) mit der schwachen Wechselwirkung zur Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung (Glashow-Salam-Weinberg-Theorie). Zusammen mit der QCD bildet sie das Standardmodell der Teilchenphysik. Es stellt sich somit die Frage, ob man nicht auch die starke und elektroschwache Kraft bei höheren Energien vereinigen kann. Beobachtet wird nämlich eine Abhängigkeit der Kopplungen von der Energie. Die drei Eichkopplungen laufen bei hohen Energien aufeinander zu und liefern somit einen Hinweis auf eine mögliche Vereinigung. Als Erklärung kann die Expansion des Universums dienen: Die Abkühlung und das Auftreten von Phasenübergängen führten zur Aufspaltung der drei Kräfte. Während im SM die Normierung der Hyperladung als Quantenzahl einer abelschen Gruppe beliebig ist, ist sie festgelegt, sobald man die SM-Eichgruppe  $G_{\text{SM}}$  in eine höhere Symmetriegruppe wie beispielsweise  $SU(5)$  oder  $SO(10)$  einbettet. Damit kann über die Gell-Mann-Nishima-Relation die Quantisierung der elektrischen Ladung erklärt werden. Ferner folgt daraus eine Begründung, warum Atome elektrisch neutral sind – eine fundamentale Bedingung für unsere Existenz. Durch die Einbettung wird mit dem Eich- auch der Fermionsektor des SMs systematisiert, da in GUTs die Fermionen einer Generation in ein oder zwei Multipletts der GUT-Symmetriegruppe zusammengefasst werden. Dies führt unweigerlich zu Korrelationen in der leptonischen und hadronischen Flavourmischung und zu Relationen zwischen den Massen. Unter der Annahme, dass zwischen der elektroschwachen Skala und einer denkbaren Vereinigungsskala bei  $\mathcal{O}(10^{16})$  GeV keine neuen Teilchen ins Spiel kommen verfehlen sich die laufenden Kopplungskonstanten knapp. An diesem Punkt kommen supersymmetrische Theorien (SUSY) ins Spiel. Diese postulieren

---



ren die Existenz von supersymmetrischen Partnern zu den bekannten SM-Teilchen, welche die Energieabhängigkeit der Kopplungsstärken beeinflusst und sie bei  $M_{GUT} \approx 2 \cdot 10^{16}$  GeV zu einem gemeinsamen Wert konvergieren lässt.

### Das Hierarchie-Problem und Supersymmetrie

Die Stabilisierung der elektroschwachen Skala – auch bekannt als Hierarchie-Problem – wird meist als einer der zwingendsten Gründe für Physik jenseits des SMs angesehen. Betrachtet man das SM als eine effektive Theorie, so kommt eine neue Energieskala  $\Lambda$  ins Spiel. Unter dem Hierarchie-Problem versteht man nun die Schwierigkeit, unter Anwesenheit dieser Skala  $\Lambda$  die große Lücke zwischen der elektroschwachen Skala  $\mu_{ew} = \mathcal{O}(200)$  GeV und der GUT- oder Planck-Skala zu erklären bzw. die elektroschwache Skala zu stabilisieren, und zwar in jeder Ordnung Störungstheorie. Fermionmassen sind proportional zur einzig vorhandenen Skala im SM,  $m_f \propto v$ . Sie werden durch die chirale Symmetrie, welche allein durch die Massenterme gebrochen ist, vor großen Strahlungskorrekturen geschützt, d.h.  $\delta m_f \propto m_f \ln \frac{\Lambda}{m_f}$ . Die Quantenkorrekturen verschwinden im Grenzfall  $m_f \rightarrow 0$  und bleiben selbst bei einem Abschneideparameter bei der Planck-Skala vertretbar klein. Der Zusammenhang zwischen Symmetrie und Kleinheit eines Parameters lässt sich im 't Hooftschen Natürlichkeitsprinzip zusammenfassen [1]: Ein kleiner Parameter ist in einer Theorie genau dann natürlich, falls sich die Symmetrie des Systems erhöht, wenn man ihn Null setzt. Eine Feinabstimmung (Fine-Tuning) zwischen verschiedenen Beiträgen um letztendlich bei einem kleinen Wert anzukommen wird als unnatürlich angesehen. Die Masse des Photons ist durch die Eichsymmetrie geschützt und bleibt in jeder Ordnung Störungstheorie Null. Ebenso werden die Massen des  $W$ - und  $Z$ -Bosons  $M_{W,Z} \propto v$  durch das Eichprinzip vor großen Korrekturen bewahrt. Doch was passiert mit Massen von skalaren Teilchen, wie der des Higgsbosons im SM? Das Higgs wurde als skalares Teilchen eingeführt, da nur solche einen nichtverschwindenden VEV haben können, ohne die Lorentz-Invarianz zu brechen. Der Massenterm  $m_h^2 \Phi^\dagger \Phi$  ist unter jeglicher Symmetrie invariant, weshalb die Higgsmasse nicht vor großen Strahlungskorrekturen geschützt ist. Vielmehr erhält sie quadratische Massenkorrekturen, welche proportional zur höchsten vorhandenen Skala sind, beispielsweise  $\delta m_h^2 \propto M_{GUT}^2$ . Um dennoch eine Higgsmasse von der Größenordnung der elektroschwachen Skala zu erhalten, gibt es drei Optionen:

- Fine-Tuning: Eine starke Feinabstimmung zwischen dem Parameter in der Lagrange-dichte und den Korrekturen kann zu einer physikalischen Masse bei der elektroschwachen Skala führen. Allerdings muss sich diese zufällige Auslöschung auf bis zu 32 signifikante Stellen ( $\mathcal{O}(\frac{M_{Pl}^2}{M_W^2}) \approx 10^{32}$ ) in jeder Ordnung Störungstheorie fortsetzen.
- Symmetrie: Es existiert eine (Super-)Symmetrie, welche die skalare Masse vor großen Korrekturen bewahrt. Supersymmetrie impliziert eine Erweiterung unserer vierdimensionalen Raum-Zeit um fermionische Freiheitsgrade und verknüpft Bosonen und Fermionen. Sie stellt eine attraktive Lösung des Hierarchie-Problems dar, da sie Partnerteilchen und deren Kopplungen postuliert, mit dem Resultat, dass die Effekte des Higgsinos und Stopquarks die oben genannten quadratischen Divergenzen wieder wegheben, und das in jeder Ordnung Störungstheorie. Doch da bisher kein Superpartner mit exakt der gleichen Masse gefunden worden ist, muss SUSY eine gebrochene Symmetrie sein. Um kein weiteres Fine-Tuning der Parameter zu benötigen, müssen die Massen der Superpartner in der Größenordnung von höchstens  $\mathcal{O}(1 - 10)$  TeV liegen. Das hat eine wichtige Konsequenz, denn es fordert eine Änderung des SM nahe der elektroschwachen Skala, d.h. im Energiebereich des LHCs, und nicht erst bei der Planck-Skala.

- Da diese quadratischen Divergenzen nur bei skalaren Teilchen auftreten, könnte man dieses Problem umgehen, falls das Higgs kein fundamentales Teilchen wäre, sondern ein Bindungszustand (analog zu den Cooper-Paaren bei der Supraleitung).
- Die vierte Möglichkeit ist eine weich gebrochene Skaleninvarianz: Im SM bricht nur der Higgs-Massenparameter  $\mu$  die Skaleninvarianz. Solange  $\mu$  der einzige Symmetriebrechungsparameter ist, ist auch jede Strahlungskorrektur proportional zu  $\mu^2$ . Diese Lösung ist jedoch nicht mit GUTs verträglich.

Abgesehen vom Hierarchie-Problem und der Vereinigung der Kopplungskonstanten liefert die Kosmologie eine weitere Motivation zugunsten der Supersymmetrie. Das Universum besteht zu 73% aus Dunkler Energie, zu 23% aus nicht baryonischer Dunkler Materie und nur zu 4% aus Atomen. Das SM liefert keinen geeigneten Kandidaten für die nichtbaryonische Dunkle Materie. Neutrinos galten lange Zeit als naheliegende Kandidaten. Allerdings ist ihre maximale Masse nicht ausreichend, um das Phänomen zu erklären. Man geht davon aus, dass Dunkle Materie aus WIMPs (weakly interacting massive particles) besteht. In supersymmetrischen Theorien mit  $R$ -Parität ist das leichteste supersymmetrische Teilchen (LSP) stabil, meist elektrisch neutral und demzufolge ein geeigneter Kandidat. Des Weiteren findet durch das Laufen der Parameter im Higgspotenzial das Auftreten spontaner Symmetriebrechung seine natürliche Erklärung. Wird Supersymmetrie zusätzlich zu einer lokalen Symmetrie erhoben, könnte es sogar möglich werden, die Gravitation mit einzubeziehen.

## Inhalt der Arbeit

Die Konsequenzen der PMNS-artigen Mischung der Neutrinos – das bisher deutlichste Signal neuer Physik – sollen in dieser Arbeit in SUSY-GUT bzw. GUT-inspirierten SUSY-Modellen in Observablen der Flavourphysik untersucht werden. Nach dieser allgemeinen Einführung in Flavourphysik, GUTs und Supersymmetrie widmen wir uns im nächsten Kapitel 2 dem Standardmodell mit Fokus auf die Flavourstruktur und seiner supersymmetrischen Erweiterung. Zusammen mit der Einführung in GUTs in Anhang C legt dies die Grundlage für die weiteren Analysen und kann auch zur Einarbeitung in diese Thematik dienen.

Wir starten in Kapitel 3 mit Lepton-Flavour-Observablen im Rahmen des MSSMs. Schleifenprozesse mit den Superpartnern der Leptonen können die Lepton-Flavourverletzung (LFV) vom neutralen in den geladenen Sektor übertragen, was im SM unbeobachtbar klein bleibt. Solche LF-verletzende und helizitätsflippende Selbstenergien, welche in Abschnitt 3.1 eingeführt werden, können im Minimalen Supersymmetrischen SM (MSSM) parametrisch verstärkt sein: über GUT-motivierte Randbedingungen durch einen Faktor  $\tan\beta \approx 50$ , der das Verhältnis der Vakuumerwartungswerte der zwei Higgsdoublets im MSSM bezeichnet, oder chiral-verstärkt wie im Falle radiativer Massengenerierung der leichten Fermionen in Kapitel 3.3. Dadurch kann die Schleifenunterdrückung teilweise kompensiert werden, so dass Experimente wie DOUBLE CHOOZ, Daya Bay, MEG oder NA62 sensitiv genug sind, deren Effekte nachzuweisen [2–8]. Die  $3.6\sigma$ -Diskrepanz bei  $(g-2)_\mu$  [9] lässt sich beispielsweise hervorragend im MSSM mit großem  $\tan\beta$  erklären. In der Literatur werden jedoch hauptsächlich Berechnungen im Entkopplungslimes  $M_{\text{SUSY}} \gg v$  durchgeführt. Die Resummation  $\tan\beta$ -verstärkter Korrekturen für den Fall  $M_{\text{SUSY}} \approx v$  (Abschnitt 3.1) ist gerade in Zusammenhang mit der Higgsphysik an Collidern von entscheidender Relevanz, denn dort spielt die durch  $\tan\beta$  gesteuerte Kopplung an Bottomquarks und Tauleptonen eine wichtige Rolle für Suchstrategien und Analysen.

Um die LF-verletzenden Parameter im MSSM einzuschränken bzw. deren Auswirkungen zu untersuchen, betrachten wir – basierend auf den Arbeiten [10–13] – die Anomalie der magne-

---

tischen Momente  $a_e$  und  $a_\mu$ , die Größe  $R_K = \Gamma(K \rightarrow e\nu) / \Gamma(K \rightarrow \mu\nu)$ , die Renormierung der leichten Fermionmassen, die radiativen Zerfälle  $\ell_j \rightarrow \ell_i\gamma$ , Korrekturen zum PMNS-Element  $U_{e3}$  und zu den geladenen Higgskopplungen: In Abschnitt 3.2 leiten wir unter Verwendung des Fine-Tuning-Arguments aus den Korrekturen zur Elektronenmasse  $m_e$  eine obere Schranke an LF-verletzende Parameter des MSSM ab. Dieselbe Parameterkombination, welche ein bisher uneingeschränktes Nebendiagonalelement der Sleptonmassenmatrix enthält, kann auch durch das anomale magnetische Moment des Elektrons  $a_e$  eingegrenzt werden und taucht in der Größe  $R_K$  auf. Des Weiteren werden in Kapitel 3.3 das Szenario radiativer Massengenerierung über chiral-verstärkten Selbstenergien inklusive LFV studiert und die Auswirkungen auf  $a_\mu$  analysiert. Aus der kombinierten Information aus  $a_\mu$  und zukünftigen Collider-Daten für das Smyon können Rückschlüsse auf den Baumgraph- und radiativen Beitrag zur Myon-Yukawakopplung gezogen werden. Unter den Annahmen, dass die  $3.6\sigma$ -Diskrepanz in  $a_\mu$  aus supersymmetrischen Beiträgen stammt und die Myonmasse radiativ erzeugt wird, folgt eine klare Prognose für den erlaubten Bereich der Smyonmasse, was in Kapitel 3.4 herausgearbeitet wird. Diese Aussage kann nicht abgeschwächt werden, wenn wir Sleptonmischung mit einbeziehen, da ansonsten  $\tau \rightarrow \mu\gamma$  zu groß wird. Ferner wird in Abschnitt 3.5 das Zusammenspiel von  $\tau \rightarrow e\gamma$  mit der endlichen Renormierung von  $U_{e3}$  ausgearbeitet, welches für eine richtige Interpretation einer zukünftigen  $U_{e3}$ -Messung erforderlich ist. Hochaktuell ist die Observable  $R_K$ , welche am NA62-Experiment am CERN mit bisher nicht erreichter Präzision gemessen wird. Sie testet Leptonflavour-Universalität, welche durch supersymmetrische Beiträge verletzt werden kann (siehe Abschnitt 3.6). Die Ergebnisse aus der Analyse von  $a_e$  und  $m_e$  in Abschnitt 3.2 werden hierbei von Relevanz sein.

Die Vereinigung der Yukawakopplungen ist eine Vorhersage von SU(5)-GUT-Modellen, welche gut für die dritte Generation, nicht jedoch für die ersten beiden funktioniert. Um dies zu korrigieren, werden Dimension-5-Operatoren benötigt, deren Flavourstruktur wir mit Hilfe einer Renormierungsgruppenanalyse und Konfrontation mit den Schranken von  $\mu \rightarrow e\gamma$  in Kapitel 3.7 stark eingrenzen können.

In Kapitel 4 untersuchen wir ein spezielles GUT-Modell, in dem sich die PMNS-Mischung in den Quarksektor transferiert. In SU(5)-GUT-Modellen sitzen rechtshändige Downquarks und linkshändige Leptondoublets im selben Multiplett, weshalb es möglich ist, Signaturen des großen atmosphärischen Neutrinomischungswinkels in den Übergängen zwischen rechtshändigen Bottom- und Strangequarks zu finden. Ein sehr prädiktives supersymmetrisches SO(10)-GUT-Modell mit PMNS-artiger Mischung im rechtshändigen Down-(S)Quarksektor, welches im Jahre 2003 von Chang, Masiero und Murayama vorgeschlagen wurde (CMM-Modell), stellt eine Alternative zu den vielfach studierten mSUGRA-Szenarien des MSSM dar, dessen Signaturen im Experiment überprüft werden können. Der Grundgedanke des CMM-Modells wird in Abschnitt 4.2 erklärt. Er beruht auf der Tatsache, dass die beobachtete Flavourverletzung in der Natur klein ist und somit als Brechung einer exakten Flavour-Symmetrie, die bei der Planck-Skala gilt, angesehen werden kann. Dies äußert sich im Auftreten eines höherdimensionalen Terms im effektiven SO(10)-Superpotenzial, welcher der einzige flavourbrechende Term in der Theorie ist. Eine Implementierung der Renormierungsgruppengleichungen (RGE von „renormalisation group equation“) zwischen der Planck-Skala  $M_{\text{Pl}}$  und der elektroschwachen Skala  $\mu_{\text{ew}}$  in Abhängigkeit weniger freier Parameter liegt bereits in Form eines `Mathematica`-Pakets vor. Aus einer ersten Analyse der Korrelation der Prozesse  $b \rightarrow s\gamma$ ,  $\tau \rightarrow \mu\gamma$ , der  $B_s - \bar{B}_s$ -Mischung und der Masse des leichten, neutralen Higgs  $M_h$  konnten bereits starke Einschränkungen an den Parameterraum gewonnen werden [14]. Im Rahmen dieser Arbeit soll das CMM-Modell insbesondere auf seine  $CP$ -verletzenden Eigenschaften untersucht werden (siehe Kapitel 4.4). Transferiert man die PMNS-Mischung in den Quarksektor, tritt eine

a priori freie  $CP$ -verletzende Phase  $\xi$  auf, welche sich nur im  $B_s$ -Sektor bemerkbar macht. Gerade dort gibt es jedoch einige Diskrepanzen zwischen Experiment und SM-Vorhersage. Konkret werden die  $CP$ -Asymmetrien in  $B_d \rightarrow \phi K_S$  und  $B_s \rightarrow \phi\phi$  und deren Vereinbarkeit mit der Phase in der  $B_s - \bar{B}_s$ -Mischung untersucht. Bei beiden Zerfällen handelt es sich um schleifeninduzierte  $b \rightarrow ss\bar{s}$ -Übergänge, deren  $CP$ -Asymmetrien im SM mit denen der „goldenen Kanäle“  $B_d \rightarrow J/\psi K_S$  und  $B_s \rightarrow J/\psi\phi$  übereinstimmen. Als Test an das CMM-Modell werden wir alle betrachteten Observablen korrelieren.

Im Anhang sind alle benötigte Formeln, Konventionen und einige Hintergründe verzeichnet. Dabei wird auch auf die verschiedenen in der Literatur zu findenden Konventionen eingegangen. Ziel dieser Zusammenstellung ist u.a., dass Ergebnisse problemlos verglichen und bei Bedarf Konventionen mühelos ineinander umgerechnet werden können. In Anhang A.1 sind die für diese Arbeit wichtigsten Feynman-Regeln angegeben. Das analytischen Ergebnis für  $\ell_j \rightarrow \ell_i\gamma$  ist in A.2, alle benötigten Schleifenfunktionen in A.3 und die RGE im MSSM mit rechtshändigen Neutrinos sind in A.4 zu finden. Die in unseren numerischen Analysen verwendeten Inputparameter sind – sofern nicht explizit im jeweiligen Kapitel angegeben – in Anhang B aufgelistet. Anhang C über GUTs dient als Hintergrundwissen für Kapitel 4, und D fasst die Konventionen der  $B - \bar{B}$ -Mischung zusammen. Während die Grundidee effektiver Hamiltonoperatoren in Abschnitt 4.4.1 erklärt wird, sind alle relevanten Formeln in Anhang E verzeichnet. Die für die Zerfälle  $B_d \rightarrow \phi K_S$  und  $B_s \rightarrow \phi\phi$  benötigten Formeln der QCD-Faktorisierung können in Anhang F nachgeschlagen werden.

---

## 2 Vom Standardmodell zu seiner supersymmetrischen Erweiterung

Dieses Grundlagenkapitel beinhaltet eine Wiederholung des SMs, mit Schwerpunkt auf dessen Flavourstruktur,  $CP$ -Verletzung und seine offene Fragen. Anschließend folgt eine recht knappe Einführung in die Supersymmetrie und speziell das Minimal Supersymmetrische SM (MSSM).

### 2.1 Das Standardmodell der Teilchenphysik

#### 2.1.1 Teilcheninhalt des SMs

Das Standardmodell der Teilchenphysik ist eine spontan gebrochene  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ -Eichtheorie, die sich – basierend auf den grundlegenden Arbeiten von Weinberg, Glashow und Salam im Jahre 1967 – als sehr erfolgreiches Modell zur Beschreibung von drei der vier bekannten Naturkräfte etabliert hat: Es beschreibt die elektromagnetische, die schwache und die starke Wechselwirkung zwischen den bekannten Elementarteilchen bei den heute experimentell zugänglichen Energieskalen bis etwa 200 GeV äußerst präzise. Aus theoretischer Sicht ist es die allgemeinste Theorie mit der angegebenen Symmetriegruppe und dem bekannten Teilcheninhalt, die die Forderung der Renormierbarkeit erfüllt. Das Transformationsverhalten der Fermionfelder und der Eichfelder ist in Tab. 2.1 aufgelistet, wobei bei  $SU(3)_C$  und  $SU(2)_L$  die Darstellung und bei  $U(1)_Y$  die Hyperladungsquantenzahl angegeben ist, deren Normierung über die Gell-Nishima-Relation wie folgt gewählt wurde:  $Q = Y + I_3$ . Hierbei ist  $Q$  die elektrische Ladung und  $I_3$  die dritte Komponente des schwachen Isospins. Nur die Quarks spüren die starke Wechselwirkung während lediglich linkshändige Felder zu einem Dublett unter der schwachen Wechselwirkung zusammengefasst werden. Bereits hier wird eine gewisse Asymmetrie zwischen Quark- und Leptonsektor deutlich. Ein rechtshändiges Neutrino wäre ein Singulett unter der SM-Eichgruppe  $(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 0)$  und nähme demzufolge an keiner Wechselwirkung teil. Für den Yukawasektor hat dies jedoch weitreichende Konsequenzen, welche in Kapitel 2.1.4 behandelt werden.

Unter der Forderung lokaler Eichinvarianz werden Eichbosonen für jede Wechselwirkung vorhergesagt, die sich jeweils nach der adjungierten Darstellung transformieren. Sie koppeln über die kovarianten Ableitungen  $D_\mu$ , welche aufgrund des Eichprinzips die üblichen Ableitungen ersetzen, an die Materieteilchen. Die Fermionfelder aus Tab. 2.1 sind in drei Kopien (Familien oder Generationen genannt) vorhanden. Sie haben genau die gleichen Quantenzahlen, jedoch unterschiedliche Massen. Man unterscheidet sie durch ihren Flavour: im Leptonsektor Elektron  $e$ , Myon  $\mu$  und Tau  $\tau$ ; im Upquarksektor Up  $u$ , Charm  $c$  und Top  $t$  und im Downquarksektor Down  $d$ , Strange  $s$  und Bottom  $b$ . Für die Eichbosonen dagegen sind allein die Quantenzahlen unter  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$  entscheidend, welche die kovarianten Ableitungen bestimmen und diagonal im Flavourraum sind:

$$\mathcal{L}_1^{\text{SM}} = \sum_{j=1,2,3} \bar{L}_j i \not{D} L_j + \bar{e}_{Rj} i \not{D} e_{Rj} + \bar{Q}_j i \not{D} Q_j + \bar{u}_{Rj} i \not{D} u_{Rj} + \bar{d}_{Rj} i \not{D} d_{Rj}. \quad (2.1)$$

Fermionen	$SU(3)_C$	$SU(2)_L$	$U(1)_Y$
$e_R$	<b>1</b>	<b>1</b>	-1
$L = (\nu_L, e_L)^\top$	<b>1</b>	<b>2</b>	$-\frac{1}{2}$
$u_R$	<b>3</b>	<b>1</b>	$\frac{2}{3}$
$d_R$	<b>3</b>	<b>1</b>	$-\frac{1}{3}$
$Q = (u_L, d_L)^\top$	<b>3</b>	<b>2</b>	$\frac{1}{6}$
Eichbosonen			
$G_\mu^a$	<b>8</b>	<b>1</b>	0
$W_\mu^a$	<b>1</b>	<b>3</b>	0
$B_\mu$	<b>1</b>	<b>1</b>	0

Tabelle 2.1: Transformationsverhalten der Fermionfelder und Eichbosonen.

Dieser Teil der SM-Lagrangedichte enthält die kinetischen Terme der Fermionen mitsamt ihren Kopplungen an die Eichbosonen. Die kinetischen Terme der Eichbosonen sind gegeben durch:

$$\mathcal{L}_{\text{eich}}^{\text{SM}} = \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W^{\mu\nu a} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu a}. \quad (2.2)$$

In Tab. 2.1 ist ein weiteres Teilchen des SMs nicht enthalten: das Higgsboson. Es ist das einzige skalare Teilchen im SM und seine experimentelle Entdeckung steht noch aus. Die bisherige Lagrangedichte beschreibt masselose Teilchen. Wir wissen jedoch, dass sowohl die Fermionen als auch die  $W$ - und  $Z$ -Eichbosonen massiv sind. Explizite Massenterme sind jedoch verboten, denn  $-m\bar{\psi}\psi = -m(\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L)$  koppelt links- und rechtshändige Fermionfelder, die unterschiedliches Transformationsverhalten unter  $SU(2)_L$  aufweisen. Ebenso bricht  $-m^2 V_\mu^a V^{\mu a}$  für die Eichbosonen die Eichinvarianz. Der Higgsmechanismus liefert eine Lösung des Problems. Das Higgs  $\Phi$  ist ein farbloses  $SU(2)_L$ -Dublett mit Hyperladung  $Y = 1/2$ , dessen neutrale Komponente einen Vakuumerwartungswert erhält, so dass  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  zu  $U(1)_{\text{em}}$  gebrochen wird:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}, \quad \hat{Q} = \hat{Y} + \hat{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad \text{ist invariant unter } U(1)_{\text{em}}. \quad (2.3)$$

Hierbei verwenden wir die Gell-Nishima-Relation für die Operatoren. Das Higgspotenzial  $V(\Phi) = -\mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2$ ,  $\mu, \lambda > 0$  enthält zwei freie Parameter des SMs: den „negativen“ Massenterm mit  $\mu$  und die Higgsselbstkopplung  $\lambda$ . Es besitzt ein Minimum bei  $v = \frac{\mu}{\sqrt{2\lambda}}$ , wobei für die Higgsmasse dann  $m_h = 2\sqrt{\lambda}v$  gilt<sup>1</sup>. Die Lagrangedichte für das Higgsboson  $\mathcal{L}_\Phi = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - V(\Phi)$  mit der kovarianten Ableitung

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_1 Y B_\mu - ig_2 \frac{\sigma^a}{2} W_\mu^a = \partial_\mu - i \begin{pmatrix} g_1 Y B_\mu + \frac{g_2}{2} W_\mu^3 & \frac{g_2}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \\ \frac{g_2}{\sqrt{2}} W_\mu^- & g_1 Y B_\mu - \frac{g_2}{2} W_\mu^3 \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

generiert mit  $\Phi \rightarrow (0, v)^\top$  quadratische Terme in den Eichbosonen, also eichinvariante Massenterme. Hierbei tritt aufgrund der ungebrochenen  $U(1)_{\text{em}}$  noch eine zusätzliche, durch den

<sup>1</sup>Supersymmetrie kann zum einen über Renormierungsgruppengleichungen solch einen negativen Massenterm generieren, der die spontane Symmetriebrechung triggert; zum anderen ist die Higgsselbstkopplung kein freier Parameter mehr, sondern einzig durch die  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  Eichkopplungen bestimmt. Dies impliziert, dass der Higgssektor des MSSM automatisch die Unitaritätsbeschränkungen erfüllt, und außerdem auf Baumgraphenniveau eine obere Grenze von  $M_Z$  für das leichteste Higgsboson.

Weinbergwinkel  $\vartheta_W$  charakterisierte Rotation zwischen den neutralen  $B_\mu$  und  $W_\mu^3$  auf, so dass das Photon  $A_\mu$  nur an elektrisch geladene Teilchen koppelt:

$$\begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta_W & \sin \vartheta_W \\ -\sin \vartheta_W & \cos \vartheta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_\mu \\ W_\mu^3 \end{pmatrix} \Rightarrow \tan \vartheta_W = \frac{g_1}{g_2}, \quad e = g_2 \sin \vartheta_W = g_1 \cos \vartheta_W. \quad (2.5)$$

Spontane Symmetriebrechung impliziert folgende Relationen für die Massen:

$$M_W = \frac{g_2 v}{2}, \quad M_Z = \frac{g_2 v}{2 \cos \vartheta_W}, \quad m_\gamma = 0. \quad (2.6)$$

Der Vakuumerwartungswert  $v$  kann mit der Fermikonstanten  $G_F = g_2^2/(4\sqrt{2}M_W^2)$  in Verbindung gebracht werden, welche aus dem Myonzerfall bekannt ist. Damit erhält man  $v = 174$  GeV.

Der Yukawasektor des SM enthält die Kopplungen des Higgsbosons an die Fermionen und stellt den für diese Arbeit wohl relevantesten Aspekt der SM-Lagrangedichte dar. Die Quantenzahlen des Higgs erlauben eine eichinvariante Kopplung an ein  $SU(2)_L$ -Dublett und  $SU(2)_L$ -Singulett:

$$\mathcal{L}_Y = -\bar{Q}\Phi Y^D d_R - \bar{Q}\Phi^c Y^U u_R - \bar{L}\Phi Y^E e_R. \quad (2.7)$$

Hierbei stehen die Fermionfelder für drei-komponentige Vektoren, die alle drei Generationen enthalten,  $Y^{D,U,E}$  sind  $3 \times 3$ -Matrizen in LR-Konvention (d.h. linkshändiger Felder stehen links und rechtshändige Felder rechts von  $Y$ ) und  $\Phi^c$  ist das ladungskonjugierte Higgsfeld. Ersetzt man nun das Higgsfeld wieder durch seinen Vakuumerwartungswert, bekommt man Terme wie  $y_e \bar{L}\phi e_R \rightarrow y_e v e_L e_R$ , so dass die Elektronmasse mit  $m_e = y_e v$  identifiziert werden kann. Es werden jedoch keine Massen für die Neutrinos generiert. Damit ist die SM-Lagrangedichte komplett. Die genaue Flavourstruktur, die aus Gl. (2.7) folgt, wird im nächsten Abschnitt vorgestellt.

### 2.1.2 Flavourstruktur des SMs

Obwohl der Yukawasektor mit seiner Vielzahl an Parametern der unschönste Teil des SM ist, liefert er sehr genaue Vorhersagen und macht Flavourphysik zu einem interessanten Studienobjekt. Die  $[U(3)]^5$  Flavoursymmetrie in Gl. (2.1) wird durch den Yukawasektor zu einer  $[U(1)]^4$  gebrochen, welche sich in der Baryonenzahlerhaltung  $B$  und der Erhaltung der drei Leptonflavourzahlen  $L_{e,\mu,\tau}$  widerspiegelt. Dies sind jedoch zufällige Symmetrien im SM, d.h. sie werden nicht extra gefordert und müssen in einer dem SM übergeordneten Theorie nicht exakt gelten. Selbst im SM ist  $B + L$  anomal gebrochen. Ein dadurch möglicher Protonzerfall wurde bisher nicht beobachtet. Im SM ist  $U(1)_{B-L}$  die einzige anomaliefreie globale Symmetrie. Majoranamassen jedoch brechen  $L$  und infolgedessen auch  $B - L$ . Im Folgenden soll auf Gl. (2.7) näher eingegangen werden, wobei wir drei rechtshändige Neutrinos mit einschließen. Die Lagrangedichte lautet damit:

$$\mathcal{L}_Y = -\bar{Q}\Phi Y^D d_R - \bar{Q}\Phi^c Y^U u_R - \bar{L}\Phi Y^E e_R - \bar{L}\Phi^c Y^\nu \nu_R - \frac{1}{2} \nu_R^\top C M_N \nu_R + h.c. \quad (2.8)$$

Hierbei bezeichnen  $\Phi^c$  das ladungskonjugierte Higgsfeld und  $C$  die Ladungskonjugationsmatrix. Der Majoranamassenterm und die Dirac-Yukawakopplung der rechtshändigen Neutrinos fehlen im ursprünglichen SM. Der aus den letzten beiden Termen resultierende Seesaw-Mechanismus wird in Abschnitt 2.1.4 erklärt. Die Yukawa-Matrizen sind a priori beliebige

$3 \times 3$ -Matrizen. Die  $[U(3)]^5$  Flavoursymmetrie des Eichsektors kann jedoch ausgenutzt werden, um die Struktur der Yukawa-Matrizen zu vereinfachen. Diese können nämlich ganz allgemein durch eine biunitäre Transformation diagonalisiert werden:

$$L_d^\dagger Y^D R_d = \hat{Y}^D, \quad L_u^\dagger Y^U R_u = \hat{Y}^U, \quad L_e^\dagger Y^E R_e = \hat{Y}^E, \quad L_\nu^\dagger Y^\nu R_\nu = \hat{Y}^\nu. \quad (2.9)$$

Da die linkshändigen Felder in den Dubletts  $Q$  und  $L$  eingebettet sind, müssen die darin enthaltenen Felder jeweils mit der gleichen Matrix rotiert werden (d.h.  $u_L$  erfährt die gleiche Rotation wie  $d_L$ , und  $\nu_L$  die gleiche wie  $e_L$ ). Üblicherweise wird  $Q$  mit  $L_u$  und  $L$  mit  $L_e$  rotiert:

$$Q_L \rightarrow L_u Q, \quad u_R \rightarrow R_u u_R, \quad d_R \rightarrow R_d d_R, \quad (2.10)$$

$$L \rightarrow L_e L, \quad e_R \rightarrow R_e e_R, \quad \nu_R \rightarrow R_\nu \nu_R. \quad (2.11)$$

Wir sehen, dass z.B. im Quarksektor nur drei Rotationen durchgeführt werden können, aber vier Matrizen benötigt werden (siehe Gl. (2.9)), um beide Yukawa-Matrizen zu diagonalisieren. Dieser „Mismatch“ ist für die Flavourübergänge verantwortlich und wird im Quarksektor durch die CKM-Matrix und im Leptonsektor durch die PMNS-Matrix parametrisiert. Ohne rechtshändige Neutrinos – wie es im SM der Fall ist – kann die Lepton-Yukawakopplung  $Y^E$  vollständig diagonalisiert werden, was zur Erhaltung der individuellen Leptonflavourquantenzahl führt. Mit diesen Rotationen bekommen wir folgende Lagrangedichte:

$$\mathcal{L}_Y = -\bar{Q}\Phi L_u^\dagger L_d \hat{Y}^D d_R - \bar{Q}\Phi^c \hat{Y}^U u_R - \bar{L}\Phi \hat{Y}^E e_R - \bar{L}\Phi^c L_e^\dagger L_\nu \hat{Y}^\nu \nu_R - \frac{1}{2} \nu_R^\top C R_\nu^\top M_N R_\nu \nu_R + h.c.$$

Nun definieren wir die Mischungsmatrizen im Quark- und Leptonsektor wie folgt:

$$V_{\text{CKM}} = L_u^\dagger L_d, \quad U_{\text{PMNS}} = L_e^\dagger L_\nu. \quad (2.12)$$

Hier wurde zunächst der Majoranamassenterm außer Acht gelassen, so dass Quark- und Leptonsektor völlig analog behandelt werden. Unter Berücksichtigung des Terms  $\propto M_N$  und eines dadurch bedingten Seesaw-Mechanismus (siehe Abschnitt 2.1.4) kommt man letztendlich auf das gleiche Resultat, nur dass  $L_\nu$  durch eine andere Matrix  $U_\chi$  ersetzt wird, welche die effektive leichte Neutrinomassenmatrix diagonalisiert. Um alle Yukawa-Matrizen zu diagonalisieren, rotiert man in die Masseneigenzustandsbasis<sup>2</sup>:

$$d_L \rightarrow d'_L = V_{\text{CKM}} d_L, \quad \nu_L \rightarrow \nu'_L = U_{\text{PMNS}} \nu_L^M. \quad (2.13)$$

Ausführlicher:

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu1} & U_{\mu2} & U_{\mu3} \\ U_{\tau1} & U_{\tau2} & U_{\tau3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}.$$

Im Grundzustand nimmt das Higgsfeld den Vakuumerwartungswert an, so dass wir diagonale Massenterme via  $y_f v = m_f$  erhalten. Die Flavourmischung des Yukawasektors wird durch

<sup>2</sup>Man beachte, dass wir hier Felder und keine Zustände  $|\nu\rangle$  rotieren. Im PDG von 2008 [15] wird die PMNS-Matrix über  $|\nu_\alpha\rangle = U_{\alpha i}^* |\nu_i\rangle$ ,  $\alpha = e, \mu, \tau$ ,  $i = 1, 2, 3$  definiert, welche eine komplexe Konjugation beinhaltet. Auf den ersten Blick scheint dies im Widerspruch zu Gl. (2.13) bzw. dem PDG von 2010 [15] zu stehen. Es handelt sich jedoch um dieselbe Matrix, da man beim Übergang von Feldern zu Zuständen berücksichtigen muss, dass die Erzeugungsoperatoren in der Standardkonvention in den konjugierte Diracfelder auftreten [16]. Da noch nichts über  $CP$ -Verletzung im Leptonsektor bekannt ist, die Dirac- $CP$ -Phase mit  $\sin\theta_{13} \approx 0$  multipliziert wird und die möglichen Majorana-Phasen nur beim neutrinolosen, doppelten Betazerfall relevant sind, ist der komplexe Charakter der PMNS-Matrix bisher nicht von Relevanz.



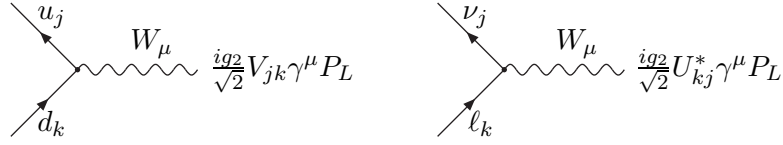


Abb. 2.1: Feynman-Regeln für die Masseneigenzustände

diesen Basiswechsel in die geladenen Ströme transferiert, während neutrale Kopplungen an das  $Z$ -Boson und Photon aufgrund der Unitarität der CKM- und PMNS-Matrix flavourdiagonal bleiben:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{CC} &= -\frac{g_2}{\sqrt{2}} \left( \bar{u}_j \gamma^\mu P_L d_j W_\mu^\dagger + \bar{\nu}_j \gamma^\mu P_L \ell_j W_\mu^\dagger \right) + h.c. \\
&\rightarrow \frac{g_2}{\sqrt{2}} \left( \bar{u}_j \gamma^\mu V_{jk} P_L d_k W_\mu^\dagger + \bar{\nu}_j \gamma^\mu U_{kj}^* P_L \ell_k W_\mu^\dagger \right) + h.c. \\
&= \frac{g_2}{\sqrt{2}} \left( \bar{u} \gamma^\mu V_{\text{CKM}} P_L d W_\mu^\dagger + \bar{\nu} \gamma^\mu U_{\text{PMNS}}^\dagger P_L \ell W_\mu^\dagger \right) + h.c.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Am letzten Term erkennt man außerdem gut, dass bei Rotation der Neutrinos mit  $U_{\text{PMNS}}$ , sich die geladenen Leptonen mit der inversen PMNS-Matrix transformieren. Die sich aus Gl. (2.14) ergebenden Feynman-Regeln für die Masseneigenzustände findet man in Abb. 2.1. Im SM gibt es auf Baumgraphenniveau keine flavourändernden neutralen Ströme (FCNC von flavour changing neutral currents) und im Grenzfall von identischen Quarkmassen auch nicht in Schleifenprozessen. Diese Unterdrückung von FCNC ist bekannt als GIM Mechanismus [17].

Eine unitäre  $3 \times 3$ -Matrix kann durch drei Winkel und sechs Phasen parametrisiert werden. Nicht alle davon sind jedoch physikalisch. Die diagonalen Yukawakopplungen  $\hat{Y}^U, \hat{Y}^D$  weisen eine  $[U(1)]^6$ -Symmetrie auf, d.h.  $u_j^{L,R} \rightarrow e^{i\varphi_j^u} u_j^{L,R}$ ,  $d_j^{L,R} \rightarrow e^{i\varphi_j^d} d_j^{L,R}$  lässt  $\bar{u}_L \hat{Y}^U u_R, \bar{d}_L \hat{Y}^D d_R$  invariant aber nicht die  $W$ -Kopplung. Dadurch können fünf der sechs Phasen via  $V_{ij}^{\text{CKM}} \rightarrow e^{i(\varphi_j^d - \varphi_i^u)} V_{ij}^{\text{CKM}}$  wegrotiert werden. Die einzig übrig bleibende Kobayashi-Maskawa-Phase ist im SM allein für die  $CP$ -Verletzung verantwortlich und untrennbar mit Flavourübergängen verbunden. Vor der Entdeckung der  $CP$ -Verletzung im Jahre 1964 durch Cronin und Fitch, wofür diese 1980 mit dem Nobelpreis für Physik ausgezeichnet wurden, glaubte man, dass  $CP$  eine exakte Symmetrie sei. Mit dem Kobayashi-Maskawa-Mechanismus, sind im SM alle  $CP$ -verletzenden Prozesse korreliert. Wir werden im nächsten Absatz genauer darauf eingehen. Bei nur zwei Familien genügt ein physikalischer Parameter – der Cabibbo-Winkel – um die  $2 \times 2$  Mischungsmatrix zu parametrisieren. Die Standardparametrisierung der CKM- (und PMNS-Matrix) sieht wie folgt aus [15]:

$$V_{\text{CKM}} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}. \tag{2.15}$$

Die Abkürzungen  $s_{ij}$  und  $c_{ij}$  stehen für  $\sin \theta_{ij}$  und  $\cos \theta_{ij}$ .  $U_{\text{PMNS}}$  wird genauso parametrisiert (wobei sich die Mischungswinkel natürlich vom Quarksektor unterscheiden). Da wegen des möglichen Majoranacharakters der Neutrinos weniger Phasenrotationen zur Verfügung stehen, treten zusätzlich zwei Majoranaphasen auf, welche durch Multiplikation mit der Diagonalmatrix  $P = \text{diag}(e^{i\frac{\alpha_1}{2}}, e^{i\frac{\alpha_2}{2}}, 0)$  berücksichtigt werden. Die hierarchische Struktur der

CKM-Matrix kommt in der Wolfenstein-Parametrisierung besonders gut zum Ausdruck, welche einer Entwicklung im Parameter  $\lambda = 0.22$  entspricht [18]. Die restlichen drei Parameter  $A$ ,  $\rho$  und  $\eta$  liegen zwischen Null und Eins und sind in Anhang B angegeben. Der Zusammenhang mit der Winkelparametrisierung kann in [19] nachgeschlagen werden. Warum die CKM-Matrix fast der Einheitsmatrix entspricht, ist dagegen völlig unklar:

$$V_{\text{CKM}} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\lambda^2}{2} & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \frac{\lambda^2}{2} & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \rho - i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\lambda^4). \quad (2.16)$$

Experimente beobachteten ein Defizit von Myon-Antineutrinos, die durch die kosmische Strahlung in der Atmosphäre produziert werden („atmosphärisches Neutrino-Problem“), und von Elektronneutrinos, die in der Sonne entstehen („solares Neutrino-Problem“). Beide lassen sich durch Neutrinooszillationen erklären, welche nichtverschwindende Massendifferenzen der Neutrinos und eine Verletzung der individuellen Leptonflavourquantenzahl implizieren – im Widerspruch zum SM. Verglichen mit den Mischungswinkeln in der CKM-Matrix, sind der atmosphärische und solare Mischungswinkel  $\theta_{23} = \theta_{\text{atm}}$  und  $\theta_{12} = \theta_{\text{sol}}$ , welche die Mischung zwischen der zweiten und dritten bzw. ersten und zweiten Generation charakterisieren, erstaunlich groß, wohingegen der dritte Mischungswinkel  $\theta_{13}$  – auch Reaktorneutrino-mischungswinkel genannt – klein ist. Der aktuelle experimentelle Status auf  $1\sigma$  Niveau ist [3, 20]:<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} \theta_{12} &= (34.5 \pm 1.4)^\circ, & \Delta m_{21}^2 &= 7.67_{-0.21}^{+0.22} \cdot 10^{-5} \text{ eV}^2, \\ \theta_{23} &= (42.3_{-3.3}^{+5.1})^\circ, & \Delta m_{31}^2 &= \begin{cases} -2.37 \pm 0.15 \cdot 10^{-3} \text{ eV}^2 & \text{invertierte Hierarchie,} \\ +2.46 \pm 0.15 \cdot 10^{-3} \text{ eV}^2 & \text{normale Hierarchie,} \end{cases} \\ \theta_{13} &= (0.0_{-0.0}^{+7.9})^\circ, \end{aligned} \quad (2.17)$$

wobei das quadratische Massensplitting definiert ist als  $\Delta m_{ij}^2 = m_{\nu_i}^2 - m_{\nu_j}^2$ . Diese Werte bestimmen das atmosphärische und solare Massensplitting  $\Delta m_{\text{atm}}^2 = \Delta m_{13}^2$ ,  $\Delta m_{\text{sol}}^2 = \Delta m_{21}^2$ , wobei die absolute Massenskala offen bleibt. Diese Struktur der Mischungswinkel ist mit der sog. tribimaximalen Mischung  $\theta_{23} = \arcsin(1/\sqrt{2}) = 45^\circ$ ,  $\theta_{12} = \arcsin(1/\sqrt{3}) \simeq 35^\circ$  und  $\theta_{13} = 0^\circ$  verträglich [22]:

$$U_{\text{PMNS}}^{\text{tribi}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ 1 & -\sqrt{2} & \sqrt{3} \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Wegen der Kleinheit von  $\theta_{13}$  ist die  $CP$ -Phase  $\delta$  unbeschränkt. Tribimaximale Mischung kann durch Symmetrien motiviert werden (siehe Ref. [23] und darin zitierte Referenzen), welche fundamentale Größen wie Yukawakopplungen oder soft SUSY-brechende Terme einschränken. Messbare Größen wie  $U_{e3}$  entsprechen gewöhnlich nicht direkt fundamentalen Parametern, sondern sind sensitiv auf Korrekturen. Wir werden den Einfluss von supersymmetrischen Schleifenkorrekturen und Effekte höherdimensionaler Yukawakopplungen auf Observablen im Leptonsektor untersuchen. Ferner kann in Großen Vereinheitlichten Theorien die atmosphärische Mischung zwischen zweiter und dritter Generation in den Quarksektor transferiert werden und so  $b \rightarrow s$ -Übergänge induzieren. Dies wird im Rahmen des CMM-Modells untersucht werden, wobei wir insbesondere auf die zusätzliche, im  $B_s$ -System auftretende schwache Phase ein Augenmerk haben werden.

<sup>3</sup>Kürzlich wurde in Ref. [21] ein Hinweis auf ein nichtverschwindendes  $\theta_{13}$  gefunden mit  $\sin^2 \theta_{13} = 0.016 \pm 0.010$  ( $1\sigma$ ).

Aktuell herrscht eine rege Diskussion über neueste Neutrino-Daten von MINOS [24, 25] und MiniBooNE [26]. MINOS beobachtete Oszillationen sowohl im  $\nu_\mu$  als auch im  $\bar{\nu}_\mu$ -Strahl. Laut ihren Messungen unterscheiden sich die Parameter, welche das  $\bar{\nu}_\mu$ -Verschwinden bestimmen, von denen im  $\nu_\mu$ -Fall. Die einfachste Interpretation, dass Neutrino und Antineutrino unterschiedliche Massen haben, bricht jedoch das  $CPT$ -Theorem, welches in einer kausalen, lokalen Quantenfeldtheorie gilt ( $T$  steht hierbei für Zeitumkehr). Das MiniBooNE-Experiment wurde entworfen, um das umstrittene Ergebnis des LSND-Experiments [27] (Existenz eines sterilen Neutrinos, in welches  $\bar{\nu}_e$  oszilliert mit  $|\Delta m_{41}^2| > |\Delta m_{31}^2|$ ) zu überprüfen. MiniBooNE beobachtet einen  $\bar{\nu}_e$ -Überschuss im Einklang mit dem LSND-Ergebnis. Allerdings ist dessen Resultat kein zwingender Beweis für das LSND-Ergebnis. Erst genauere Messungen können uns die wahre Natur der Neutrinos enthüllen und Hinweise auf Physik jenseits des SMs aufzeigen.

### 2.1.3 $CP$ -Verletzung im SM

Im Gegensatz zur starken und elektromagnetischen Wechselwirkung, welche sowohl invariant unter Parität  $P$ , Ladungskonjugation  $C$  als auch Zeitumkehr  $T$  sind, verletzt die schwache Wechselwirkung  $P$  und  $C$  maximal und die Kombination  $CP$  ist durch die Kobayashi-Maskawa-Phase in der der CKM-Matrix gebrochen<sup>4</sup>. In der Standardphasenkonvention lautet das Transformationsverhalten unter  $CP$ :

$$\bar{u}_L \gamma_\mu d_L \xrightarrow{CP} -\bar{d}_L \gamma^\mu u_L, \quad W_\mu^\pm \xrightarrow{CP} -W^{\mp\mu}. \quad (2.19)$$

Für die geladenen Ströme gilt damit:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_q^{CC} &= -\frac{g_2}{\sqrt{2}} (\bar{u}_j \gamma^\mu V_{jk} P_L d_k W_\mu^+ + \bar{d}_k \gamma^\mu V_{jk}^* P_L u_j W_\mu^-) \\ &\xrightarrow{CP} -\frac{g_2}{\sqrt{2}} (\bar{d}_k \gamma_\mu V_{jk} P_L u_j W^{\mu-} + \bar{u}_j \gamma_\mu V_{jk}^* P_L d_k W^{\mu+}). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Diese Lagrangedichte wäre nur dann invariant, falls  $V_{jk} = V_{jk}^*$  für alle  $j, k = 1, 2, 3$ . Es soll nochmals betont werden, dass alle Eichwechselwirkungen  $CP$ -erhaltend sind, während der Yukawasektor i.A.  $CP$  verletzen kann. Das Auftreten der CKM-Matrix bei der  $W$ -Kopplung rührt allein aus dem Basiswechsel in die Masseneigenzustände her. Des Weiteren müssen gewissermaßen alle drei Familien beteiligt sein, da schon bei zwei Generationen alle Phasen unphysikalisch sind. Wir folgern daraus:

$CP$ -Verletzung ist ein Interferenzeffekt!

In Modellen neuer Physik können jedoch prinzipiell neue Quellen von  $CP$ -Verletzung mit phänomenologischen Konsequenzen auftreten. Die Unitaritätsrelationen der CKM-Matrix  $V_{ik} V_{jk}^* = \delta_{ij}$  und  $V_{ik} V_{ij}^* = \delta_{kj}$  können für  $i \neq j$  als Dreiecke in der komplexen Ebene interpretiert werden. Die Fläche aller Dreiecke ist gleich groß und ein Maß für die  $CP$ -Verletzung. Sie wird beschrieben durch die Jarlskog-Invariante  $J$ :

$$J = \text{Im} [V_{td}^* V_{tb} V_{ub}^* V_{ud}] = c_{12} c_{23} c_{13}^2 s_{12} s_{23} s_{13} \sin \delta \simeq A^2 \lambda^6 \eta. \quad (2.21)$$

Das Unitaritätsdreieck, dessen Seitenlängen alle von der Größenordnung  $\mathcal{O}(\lambda^3)$  sind, wird aus der Relation  $V_{ud} V_{ub}^* + V_{cd} V_{cb}^* + V_{td} V_{tb}^* = 0$  gebildet, indem auf  $V_{cd} V_{cb}^*$  normiert wird (siehe Abb. 2.2). Durch Überbestimmung der Seiten und Winkel des Unitaritätsdreiecks mit Hilfe

<sup>4</sup>Wir berücksichtigen hier die Phase  $\theta_{\text{QCD}}$  nicht; bekannt als das starke  $CP$ -Problem.

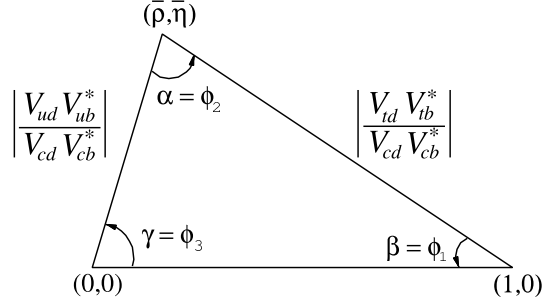


Abb. 2.2: Unitaritätsdreieck

von experimentellen Daten aus Observablen der  $B$ - und  $K$ -Physik hat man eine realistische Chance,  $CP$ -Verletzung des SMs von möglichen Beiträgen neuer Physik zu unterscheiden. Um das SM zu testen, ist man bestrebt, alle Parameter der CKM- und der PMNS-Matrix möglichst genau zu messen. Dadurch ist die Struktur der Flavormischung bereits sehr eingeschränkt. Von theoretischer Seite ist es schwierig sowohl die hierarchische Struktur im Quarksektor als auch den großen Unterschied zwischen der PMNS- und CKM-Matrix zu begründen.

### Drei Arten von $CP$ -Verletzung in Meson-Zerfällen

Mesonen bestehen aus einem Quark und einem Antiquark und können durch ihre Flavourquantenzahlen kategorisiert werden.  $K$ -Mesonen enthalten ein Strangequark,  $D$ -Mesonen ein Charmquark und  $B$ -Mesonen ein Bottomquark. Die neutralen Mesonen können über die schwache Wechselwirkung mit ihren Antiteilchen mischen (siehe Anhang D). Hier soll auf die  $CP$ -Verletzung eingegangen werden, die in Meson-Zerfällen auftreten kann. Man kann zwischen drei Arten von  $CP$ -Verletzung unterscheiden:

- $CP$ -Verletzung in der Mischung (indirekte  $CP$ -Verletzung): In diesem Fall sind die Masseneigenzustände keine exakten  $CP$ -Eigenzustände. Mit der Notation von Anhang D bedeutet dies:

$$\left| \frac{q}{p} \right| \neq 1 \Rightarrow [M - \frac{i}{2}\Gamma, CP] \neq 0. \quad (2.22)$$

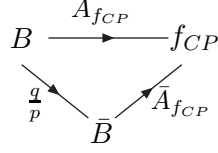
- $CP$ -Verletzung im Zerfall (direkte  $CP$ -Verletzung):

$$|\bar{f}\rangle = CP |f\rangle, \quad |\rho| = \left| \frac{\bar{A}_f}{A_f} \right| \neq 1 \Rightarrow A_{CP}^{\text{dir}} = \frac{|\bar{A}_f|^2 - |A_f|^2}{|\bar{A}_f|^2 + |A_f|^2} \neq 0. \quad (2.23)$$

Notwendige Bedingung einer nichtverschwindenden direkten  $CP$ -Verletzung sind mindestens zwei Amplituden mit unterschiedlicher starker und schwacher Phase. Hierbei bezeichnet  $A_f$  die Zerfallsamplitude mit Endzustand  $f$ .

- Mischungsinduzierte  $CP$ -Verletzung ( $CP$ -Verletzung in der Interferenz zwischen Mischung und Zerfall): Betrachten wir der Einfachheit halber einen Endzustand mit definierter  $CP$ -Quantenzahl  $f = f_{CP}$ , d.h.  $CP |f_{CP}\rangle = \eta_{CP} |f_{CP}\rangle$ , mit  $\eta_{CP} = \pm 1$ . Das Meson  $M$  kann entweder direkt in  $f_{CP}$  zerfallen oder zuerst in  $\bar{M}$  oszillieren und dann zerfallen (siehe Abb. 2.3). Diese Interferenz zwischen  $A_{f_{CP}}$  und  $\frac{q}{p} \bar{A}_{f_{CP}}$  kann  $CP$ -Verletzung hervorrufen, falls

$$\text{Im } \lambda_{f_{CP}} = \text{Im } \frac{q}{p} \frac{\bar{A}_{f_{CP}}}{A_{f_{CP}}} \neq 0 \Rightarrow A_{CP}^{\text{mix}} \neq 0. \quad (2.24)$$

Abb. 2.3: Mischungsinduzierte  $CP$ -Verletzung für  $B$ -Mesonen.

Die zeitabhängige  $CP$ -Asymmetrie in einen  $CP$ -Eigenzustand  $f$  ist definiert als

$$A_{CP}(f; t) := \frac{\Gamma(\bar{B}^0(t) \rightarrow f) - \Gamma(B^0(t) \rightarrow f)}{\Gamma(\bar{B}^0(t) \rightarrow f) + \Gamma(B^0(t) \rightarrow f)} = \frac{A_{CP}^{\text{dir}} \cos(\Delta Mt) + A_{CP}^{\text{mix}} \sin(\Delta Mt)}{\cosh\left(\frac{\Delta\Gamma t}{2}\right) - A^{\Delta\Gamma} \sinh\left(\frac{\Delta\Gamma t}{2}\right)}, \quad (2.25)$$

wobei wir folgende Abkürzungen einführen:

$$A_{CP}^{\text{dir}} = A_f = \frac{|\lambda_f|^2 - 1}{1 + |\lambda_f|^2} = \frac{|\bar{A}_f|^2 - |A_f|^2}{|A_f|^2 + |\bar{A}_f|^2}, \quad (2.26)$$

$$A_{CP}^{\text{mix}} = S_f = \frac{2 \text{Im } \lambda_f}{1 + |\lambda_f|^2}, \quad A^{\Delta\Gamma} = \frac{2 \text{Re } \lambda_f}{1 + |\lambda_f|^2}. \quad (2.27)$$

In der Literatur gibt es unterschiedliche Vorzeichenkonventionen. Hier wurde die Belle-Konvention gewählt, so dass  $A_{CP}^{\text{dir}} = A_f^{\text{Belle}} = -C_f^{\text{BaBar}^5}$  und  $A_{CP}^{\text{mix}} = S_f^{\text{BaBar}}$ . Bis auf das  $B_s$ -System kann die Zerfallsbreite  $\Delta\Gamma$  vernachlässigt werden, so dass der Nenner gerade 1 wird.

### Zwei Beispiele Mischung induzierter $CP$ -Verletzung

Die zwei Prozesse  $B_d \rightarrow J/\psi K_S$  und  $B_s \rightarrow J/\psi \phi$  liefern einen theoretisch sehr reinen Zugang zur Mischung induzierten  $CP$ -Verletzung. Sie unterscheiden sich im Prinzip nur durch das Spektatorquark (und die Mischung der Kaonen) und werden oft auch als goldene Kanäle bezeichnet. Da sie von einem Baumgraphenniveau-Prozess dominiert werden, sind sie nicht sensitiv auf Neue-Physik-Beiträge und werden deshalb bei unseren späteren Analysen des SO(10)-GUT-Modells als Referenz dienen. Betrachten wir zunächst den Zerfall des  $\bar{B}_d(b\bar{d})$ -Mesons in  $J/\psi(c\bar{c})\bar{K}(s\bar{d})$ , was dem Quark-Übergang  $b \rightarrow c\bar{c}s$  entspricht, d.h. proportional zu  $V_{cb}V_{cs}^*$  ist (siehe auch Abb. 2.4). Das  $\bar{K}$  mischt mit dem  $K$  zu  $K_S$  und zerfällt schließlich in zwei Pionen. Vernachlässigt man die kleine  $CP$ -Verletzung im  $\bar{K} - K$ -System, kann man  $K_S$  als  $CP$ -gerade Kombination auffassen. Die  $CP$ -Quantenzahl  $\eta_{J/\psi K_S}$  des Endzustandes kann aus folgender Überlegung hergeleitet werden:  $B_d$  ist ein pseudoskalar Meson, so dass wegen Drehimpulserhaltung im Endzustand  $J = 0$  sein muss.  $K_S$  hat ebenfalls Spin 0 und  $J/\psi$  hat Spin 1 ( $J^{CP} = 1^{--}$ ), weshalb der Endzustand eine  $p$ -Welle ist ( $\ell = 1$ ). Daraus erhält man insgesamt  $\eta_{J/\psi K_S} = -1$ . Unter Berücksichtigung der  $B_d$ -Mischung vor dem Zerfall folgt daraus:

$$\lambda_{J/\psi K_S} = \eta_{J/\psi K_S} \frac{V_{tb}^* V_{td}}{V_{tb} V_{td}^*} \cdot \frac{V_{cs}^* V_{cb}}{V_{cs} V_{cb}^*} \cdot \frac{V_{cd}^* V_{cs}}{V_{cd} V_{cs}^*} = -e^{-2i\beta}, \quad \beta = \arg\left(-\frac{V_{cb}^* V_{cd}}{V_{tb}^* V_{td}}\right). \quad (2.28)$$

Die drei Beiträge stammen aus der  $B_d$ -Mischung, dem  $\bar{b} \rightarrow \bar{c}c\bar{s}$ -Übergang und der Kaonmischung. Letztere ist für die Interferenz zwischen  $B_d \rightarrow J/\psi K$  und  $\bar{B}_d \rightarrow J/\psi \bar{K}$  nötig. Die zeitabhängige  $CP$ -Asymmetrie reduziert sich somit zu der einfachen Form

$$A_{CP}(J/\psi K_S; t) = \sin(2\beta) \sin(\Delta M_d t) \quad (2.29)$$

<sup>5</sup>Allerdings gilt in der Konvention von Ref. [28]  $a_{\text{dir}} = -A_f^{\text{Belle}}$ .

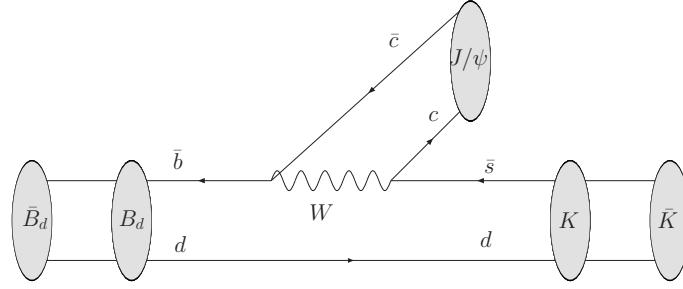


Abb. 2.4: Zerfall  $B_d \rightarrow J/\psi K_S$ , wobei vor dem Zerfall  $B_d$  und  $\bar{B}_d$  oszillieren können.

und misst den Winkel  $\beta$  des Unitaritätsdreiecks. Neue-Physik-Beiträge in der  $B_d$ -Mischung würden sich in einer Phasenverschiebung  $2\beta \rightarrow 2\beta + \phi$  bemerkbar machen. Die  $CP$ -Asymmetrie des Zerfalls  $B_d \rightarrow \phi K_S$  liefert im SM prinzipiell auch  $S_{J/\psi K_S} = \sin(2\beta)$ . Allerdings ist dies ein schleifeninduzierter Prozess und somit potenziell sensitiv auf Neue Physik. Im SM sind  $b \rightarrow s$ -Übergänge dominiert durch Gluon-Pinguin-Diagramme mit einem Top als virtuellem Teilchen, welche keine  $CP$ -verletzende Phase aufweisen. Der Einfluss von neuer Physik auf  $b \rightarrow s$ -Übergänge in  $B_d \rightarrow \phi K_S$  und  $B_s \rightarrow \phi\phi$  wird in den Abschnitten 4.4.4 und 4.4.5 im Rahmen des CMM-Modells analysiert werden.

Der Zerfall  $B_s \rightarrow J/\psi\phi(c\bar{c}s\bar{s})$  unterscheidet sich praktisch nur durch Austausch des Spektorquarks. Diesmal haben jedoch beide Teilchen im Endzustand Spin 1 und  $J/\psi\phi$  ist kein  $CP$ -Eigenzustand. Es ist jedoch möglich, über eine Winkelanalyse die  $CP$ -Asymmetrie zu extrahieren:

$$\lambda_{CP} = \frac{q \bar{A}_{J/\psi\phi}}{p A_{J/\psi\phi}} = \eta_{CP} \frac{V_{ts} V_{tb}^*}{V_{ts}^* V_{tb}} \cdot \frac{V_{cb} V_{cs}^*}{V_{cb}^* V_{cs}} = \eta_{CP} e^{2i\beta_s}, \quad \beta_s = -\arg\left(-\frac{V_{ts}^* V_{tb}}{V_{cb} V_{cs}^*}\right). \quad (2.30)$$

Auch hier kann die mischungsinduzierte  $CP$ -Asymmetrie  $A_{CP}^{\text{mix}} = \eta_{CP} \sin(2\beta_s)$  durch Neue-Physik-Beiträge in der Mischung verschoben werden. Für den zu  $\beta$  analogen Winkel im Unitaritätsdreieck des SM gilt (bis auf ein Vorzeichen)  $\beta_s^{\text{SM}} = 0.020 \pm 0.005$ . Die Auswirkungen der freien  $CP$ -verletzenden Phase  $\xi$  im CMM-Modell werden im Kapitel 4.4 erläutert.

## 2.1.4 Seesaw-Mechanismus

Fügt man dem SM, wie zuerst von P. Minkowski 1977 in Ref. [29] vorgeschlagen, drei rechtshändige Neutrinos hinzu, d.h. eines pro Generation, so lässt sich durch den Seesaw-Mechanismus die Kleinheit der Masse der linkshändigen Neutrinos auf natürliche Weise erklären [30, 31]. In diesem Abschnitt knüpfen wir im Hinblick auf die letzten beiden Terme an Gl. (2.8) an<sup>6</sup>. Die für Neutrinomassen relevante Lagrangedichte lautet:

$$\mathcal{L}_{m_\nu} = -\frac{1}{2} \nu_R^\top C M_N \nu_R - \nu_L m_D \nu_R + h.c. = -\frac{1}{2} n_L^\top C \mathcal{M} n_L + h.c. \quad (2.31)$$

$$n_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ (\nu_R)^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_L \\ \nu_L^c \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & m_D \\ m_D^\top & M_N \end{pmatrix}.$$

<sup>6</sup>In Anlehnung an Abschnitt 2.1.2 verwenden wir hier die LR-Konvention für die Yukawa-Matrizen. Man beachte jedoch, dass in den RGE die RL-Konvention für die Neutrino-Yukawakopplung verwendet wird. Die Umrechnung bekommt man durch die Ersetzung  $Y^\nu \leftrightarrow Y^{\nu\top}$  und analog für die Massenmatrizen.

Hierbei steht  $\mathbf{m}_D$  für den Diracmassenterm aus  $Y_\nu v$ ,  $\mathcal{M}$  ist eine  $6 \times 6$ -Matrix und  $n_L$  ein Multiplett von linkshändigen Weyl-Feldern, wobei die ersten drei Komponenten die SM-Neutrinos und die letzten 3 Komponenten die konjugierten Felder der schweren rechtshändigen Neutrinos sind. Es gibt keinen linkshändigen Majoranamassenterm, denn ein solcher würde die Invarianz des schwachen Isospins brechen. Mit dem Seesaw-Mechanismus verbindet man den Grenzfall  $m_D \ll M_N$ . (Block-)Diagonalisierung der Matrix  $\mathcal{M}$  liefert die Masseneigenzustände  $\chi_{1,2}$ , welche Majoranacharakter haben. Entwickeln bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(\frac{m_D}{M_N})$  liefert als Masseneigenwerte eine effektive Matrix für die leichten Neutrinos  $\mathbf{M}_\nu^{\text{eff}}$  und eine für die schweren  $\mathbf{M}_{\nu_h}$ :

$$\mathbf{M}_\nu^{\text{eff}} = -\mathbf{m}_D \mathbf{M}_N^{-1} \mathbf{m}_D^\top, \quad \mathbf{M}_{\nu_h} = \mathbf{M}_N. \quad (2.32)$$

Die zugehörigen Eigenzustände bestehen im ersten Fall hauptsächlich aus den ursprünglichen linkshändigen Neutrinos  $\nu_L$  mit einer kleinen Beimischung  $\simeq \frac{m_D}{M_N}$  der sterilen Neutrinos  $\nu_R$  und umgekehrt im schweren Fall. Hieraus folgt, dass das aktive Neutrino umso leichter wird, je schwerer das sterile Neutrino ist. Die Masse der schweren Neutrinos muss kleiner als die Planck-Skala sein. Typische Werte wie  $m_D = 200$  GeV und  $M_N = 10^{15}$  GeV liefern für die leichten Neutrinos  $m_\nu = 0.04$  eV. Die leichte Neutrinomassenmatrix ist symmetrisch und kann diagonalisiert werden:

$$U_\chi^\top \mathbf{M}_\nu^{\text{eff}} U_\chi = \text{diag}(m_{\nu_1}, m_{\nu_2}, m_{\nu_3}). \quad (2.33)$$

Mittels dieser Gleichung lässt sich die Brücke zurück zu Gl. (2.9) und (2.12) schlagen, denn es gilt  $U_{\text{PMNS}} = U_\chi$ .

Eine solche effektive leichte Majoranamasse kann durch allgemeine Überlegungen abgeleitet werden: Betrachtet man das SM als effektive Theorie, so gibt es nur einen  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ -invarianten Dimension-5-Term, den man hinzufügen kann:

$$\mathcal{L}_{\text{SM}}^{(5)} = \frac{1}{2} \frac{y_5^{ij}}{M_N} \bar{L}_i \Phi^c \Phi^\dagger L_j^c + h.c. \quad (2.34)$$

Nach elektroschwacher Symmetriebrechung folgt daraus ein Majoranamassenterm für die leichten Neutrinos mit  $\mathbf{M}_\nu^{\text{eff}} = \frac{v^2}{M_N} y_5$  mit  $y_5^{ij} = \mathcal{O}(1)$ .

## 2.2 Supersymmetrie und das MSSM

In diesem Abschnitt soll die Supersymmetrie, welche von Julius Wess und Bruno Zumino 1974 in Karlsruhe erfunden wurde [32, 33] und speziell das MSSM erläutert werden. Eine genauere Abhandlung findet man beispielsweise in Ref. [34–38]. Abgesehen von seiner eleganten mathematischen Struktur löst es einige Probleme des SMs: die zusätzliche Symmetrie zwischen Bosonen und Fermionen liefert eine Lösung für das Hierarchie-Problem. In der  $R$ -Parität-erhaltenden Version ist das leichteste supersymmetrische Teilchen (LSP) ein guter Kandidat für die dunkle Materie, die immerhin 23% der Masse des Universums ausmacht. Die Vereinigung der Eichkopplungen in GUT-Modellen wird unter Berücksichtigung supersymmetrischer Partnerteilchen kurz oberhalb der elektroschwachen Skala in den RGE bei einer Skala  $\simeq 10^{16}$  GeV erreicht. Gebrochene Supersymmetrie kann außerdem eine Erklärung für spontane Symmetriebrechung liefern, indem durch die RGE ein negativer Higgsmassenterm generiert wird. Ferner beinhaltet lokale Supersymmetrie die Invarianz unter lokalen Koordinatentransformationen, d.h. Einsteins Prinzip der Allgemeinen Relativitätstheorie.

## 2.2.1 Wie macht man die Symmetrie super?

Täglich erscheinen neue Artikel, die diverse Aspekte von supersymmetrischen Feldtheorien analysieren. Dies ist bemerkenswert, da bisher kein direkter experimenteller Nachweis supersymmetrischer Partnerteilchen existiert. In der Vergangenheit wurden bereits mehrfach aufgrund von Symmetrieüberlegungen neue Teilchen postuliert. So wurde z.B. die Existenz des Baryons  $\Omega = |sss\rangle$  1961 aufgrund gruppentheoretischer Überlegungen (SU(3)-Flavoursymmetrie) prognostiziert und über das Wigner-Eckart-Theorem seine Masse vorhergesagt. Schließlich wurde es 1964 am Brookhaven National Laboratory experimentell nachgewiesen. Ebenso wurde das Topquark aus der Forderung nach Anomaliefreiheit des SMs postuliert. Die Brechung der custodialen SU(2) $_{L+R}$ -Symmetrie durch die Hyperladung und das Massensplitting innerhalb einer Generation wird im  $\rho$ -Parameter quantifiziert, welcher zur Massenbestimmung der Topquarkmasse  $m_t$  diente<sup>7</sup>.

Eine Verdoppelung der bekannten Teilchen wurde durch den Übergang von der nichtrelativistischen Schrödinger-Gleichung zur Lorentz-invarianten Dirac-Gleichung erzielt, da aus letzterer die Existenz von Antiteilchen folgt. Supersymmetrie impliziert eine weitere Verdoppelung der Teilchenzahl, welche in der Erweiterung der Raumzeit um fermionische Freiheitsgrade begründet ist. Das Coleman-Mandula-Theorem besagt jedoch, dass die Symmetriegruppe einer konsistenten vier-dimensionalen Quantenfeldtheorie lokal isomorph zum direkten Produkt einer inneren Symmetriegruppe und zur Poincaré-Gruppe sein muss. Hingegen ebnete das Haag-Lopuszanski-Sohnius-Theorem [39] einen Weg zu einer Erweiterung, die das Coleman-Mandula-Theorem [40] aushebelte, indem Symmetriebetrachtungen auf antikommutierende Symmetriegeneratoren ausgedehnt wurden. R. Haag, J. Lopuszanski und M. Sohnius zeigten, dass mit Hilfe fermionischer Operatoren die Verbindung von Raumzeit-Symmetrien und internen Symmetrien möglich ist. Diese nichttriviale Erweiterung der Poincaré-Algebra ist die sogenannte Supersymmetrie-Algebra. Eine Supersymmetrie-Transformation verwandelt ein Boson in ein Fermion und umgekehrt, wobei die Symmetrieparameter Spinoren sind und somit die Antikommutatorrelation erfüllen. Die wichtigste Relation der SUSY-Algebra lautet

$$\{Q_\alpha, Q_{\dot{\alpha}}^\dagger\} = 2\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu P_\mu, \quad (2.35)$$

wobei  $\alpha, \dot{\alpha} = 1, 2$  Spinorindizes sind (entsprechend der Darstellung der Lorentzgruppe), woraus wir mit Dimensionsanalyse

$$\delta_{\text{SUSY}}(\text{Boson}) = \epsilon(\text{Fermion}), \quad \delta_{\text{SUSY}}(\text{Fermion}) = \epsilon\partial(\text{Boson}) \quad (2.36)$$

ableiten. Der infinitesimale, antikommutierende Objekt  $\epsilon$  parametrisiert die SUSY-Transformation und  $\partial$  bezeichnet den Ableitungsoperator. Man kann aus Gl. (2.35) folgern, dass zwei SUSY-Transformationen einer Raumzeit-Translation entsprechen. Drastischer formuliert bedeutet dies, dass SUSY die Wurzel aus dem Ableitungsoperator, insbesondere dem Hamiltonoperator zieht:  $\delta_{\text{SUSY}} \cdot \delta_{\text{SUSY}} \sim \partial$ . Dies erinnert an die Dirac-Gleichung, die man als Wurzel der Klein-Gordon-Gleichung auffassen kann:

$$Q \hat{=} \sqrt{i\partial_\mu}, \quad \gamma^\mu \partial_\mu \hat{=} \sqrt{\partial_\mu \partial^\mu}. \quad (2.37)$$

Mit SUSY-Transformationen erweitern wir unsere vierdimensionale Raumzeit um fermionische Freiheitsgrade zum sogenannten Superraum mit Koordinaten  $(x, \theta, \theta^*)$ . Ein Supermultiplett transformiert sich unter einer irreduziblen Darstellung der SUSY-Algebra und enthält je

<sup>7</sup>Heute wird der  $\rho$ -Parameter zur Einschränkung der Higgsmasse verwendet. Damit werden leichte Higgs mit  $m_h \leq 200$  GeV bevorzugt. Der beste globale Fit  $m_h = 90_{-22}^{+27}$  GeV steht jedoch im Konflikt mit der experimentellen Schranke  $m_h \geq 114.4$  GeV (LEP-II) [19].



die gleiche Anzahl bosonischer und fermionischer Freiheitsgrade. Da die SUSY-Generatoren mit den Generatoren der Eichgruppe vertauschen, haben die Teilchen eines Supermultipletts die gleichen Quantenzahlen und unterscheiden sich bei ungebrochener SUSY nur durch den Spin. Man differenziert zwischen chiralen Supermultipletts  $\Phi$  (komplexes Skalarfeld  $\phi(x)$ , zweikomponentiger Weyl-Spinor  $\psi(x)$ , komplexes Hilfsfeld  $F(x)$ ) und Vektor-Supermultipletts  $V = V^\dagger$  (Spin-1/2-Gauginos  $\lambda^a$ , Spin-1-Bosonen  $A_\mu^a$ , reelles bosonisches Hilfsfeld  $D$ ). Da die Vektor-Supermultipletts in der adjungierten Darstellung (reelle Darstellung) leben, können die SM-Fermionen keine Gauginos der supersymmetrischen Theorie sein. Da linkshändige und rechtshändige Fermionen unterschiedliches Transformationsverhalten aufweisen, muss es jeweils zwei verschiedene komplexe skalare Partner geben. Mit Hilfe des Superfeldformalismus kann ein linkshändiges chirales Superfeld immer folgendermaßen entwickelt werden:

$$\Phi_L(x, \theta) = \phi(x) + \theta \cdot \psi(x) + \frac{1}{2} \theta \cdot \theta F(x). \quad (2.38)$$

Für die Konstruktion SUSY-invarianter Wechselwirkungen verwendet man die Tatsache, dass sich die  $F$ -Komponente, d.h. der  $\theta\theta$ -Term, wie eine totale Ableitung transformiert. Mit Hilfe des Superpotenzials, welches als  $F$ -Komponente von Produkten von Superfeldern geschrieben werden kann, konstruiert man Lorentz-, Eich- und SUSY-invariante Wechselwirkungen:

$$W = \frac{1}{2} M^{ij} \Phi_i \Phi_j + \frac{1}{6} y^{ijk} \Phi_i \Phi_j \Phi_k \Big|_F, \quad (2.39)$$

wobei  $M^{ij}$  und  $y^{ijk}$  symmetrisch in den Indizes sind. Daraus ergeben sich die Massenterme und Yukawakopplungen. Eine wesentliche SUSY-Konsequenz ist die Gleichheit der Yukawakopplung für Teilchen und Superpartner. Ohne Verwendung des Superfeldformalismus werden im obigen Superpotenzial in Gl. (2.39) die Superfelder durch skalare Felder ersetzt und die Wechselwirkungsterme dann folgendermaßen bestimmt:

$$W^i = \frac{\delta W}{\delta \phi_i} = M^{ij} \phi_j + \frac{1}{3} y^{ijk} \phi_j \phi_k, \quad W^{ij} = \frac{\delta^2 W}{\delta \phi_i \delta \phi_j} = M^{ij} + y^{ijk} \phi_k, \quad (2.40)$$

$$\mathcal{L}_I = -|W^i|^2 - \frac{1}{2} (W^{ij} \psi_i \cdot \psi_j + h.c.). \quad (2.41)$$

Anwenden der Euler-Lagrange-Gleichungen für die nicht-propagierenden Hilfsfelder liefert:

$$F_i = -W_i^\dagger, \quad D^a = g \phi^\dagger T^a \phi.$$

Hierbei bezeichnen  $T^a$  die Generatoren der zu  $g$  gehörenden Eichgruppe. Das skalare Potenzial setzt sich aus diesen  $F$ - und  $D$ -Termen zusammen, welche durch Yukawakopplungen, Fermionmassen und Eichwechselwirkungen festgelegt sind. Im Gegensatz dazu ist im SM die quartische Higgskopplung ein freier Parameter.

$$V(\phi, \phi^*) = F^{i*} F_i + \frac{1}{2} \sum_a D^a D^a.$$

Die kinetischen Terme zusammen mit den Eichwechselwirkungen erhält man im Superfeldformalismus durch die SUSY-Version der minimalen Kopplung (hier in der Wess-Zumino-Eichung):

$$\begin{aligned} \Phi^\dagger \Phi \Big|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} &\rightarrow \Phi^\dagger e^{2gV} \Phi \Big|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} = \\ &|D_\mu \phi|^2 - i \bar{\psi} \sigma_\mu D^\mu \psi + |F|^2 - \sqrt{2} g (\phi^* T^a \psi) \lambda^a - \sqrt{2} g \lambda^{a\dagger} (\psi^\dagger T^a \phi) + g (\phi^* T^a \phi) D^a. \end{aligned} \quad (2.42)$$

chirale Superfelder	Spin 0	Spin $\frac{1}{2}$	$SU(3)_C, SU(2)_L, U(1)_Y$
$Q$	$(\tilde{u}_L \tilde{d}_L)$	$(u_L d_L)$	$(\mathbf{3}, \mathbf{2}, \frac{1}{6})$
$u^c$	$\tilde{u}_R^*$	$u_R^\dagger$	$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, -\frac{2}{3})$
$d^c$	$\tilde{d}_R^*$	$d_R^\dagger$	$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, \frac{1}{3})$
$L$	$(\tilde{\nu} \tilde{\ell}_L)$	$(\nu \ell_L)$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\frac{1}{2})$
$e^c$	$\tilde{e}_R^*$	$e_R^\dagger$	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 1)$
$H_u$	$(H_u^+ H_u^0)$	$(\tilde{H}_u^+ \tilde{H}_u^0)$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \frac{1}{2})$
$H_d$	$(H_d^0 H_d^-)$	$(\tilde{H}_d^0 \tilde{H}_d^-)$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\frac{1}{2})$

Tabelle 2.2: Chirale Supermultipletts im MSSM

Zu den letzten drei Termen gibt es kein SM-Analogon. Sie beschreiben durch die Eichkopplung bestimmte Yukawawechselwirkungen zwischen Fermion (oder Higgsino)  $\psi$ , Sfermion (oder Higgsboson)  $\phi$  und Gaugino  $\lambda$ . Der letzte Term wird im MSSM im wesentlichen die Higgs-Masse bestimmen (quartische Kopplung). Falls  $(\psi, \phi)$  ein Higgs-Supermultiplett ist und man den Vakuumerwartungswert einsetzt, bekommt man bilineare Terme der Higgsino-Gaugino-Felder, so dass Mischungen auftreten. Um die SUSY-Lagrangedichte zu komplettieren, fehlen noch die kinetischen Terme der Eichfelder. Mittels der supersymmetrischen Feldstärke  $W_\alpha$  berechnet man:

$$\frac{1}{4}W_\alpha W^\alpha \Big|_{\theta\theta} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} + \frac{1}{2}D^a D^a - \frac{i}{2}\lambda^a \sigma_\mu D^\mu \bar{\lambda}^a. \quad (2.43)$$

Darin sind die üblichen kinetischen Terme der Eichfelder, das nicht-propagierende Hilfsfeld  $D$  und kinetische Terme der Gaugino inklusive deren Eichkopplungen mit den Eichbosonen enthalten.

## 2.2.2 Das MSSM

### Teilcheninhalt des MSSM

Das MSSM führt die minimale Anzahl an Feldern ein, um das SM zu einer  $N = 1$ -Supersymmetrie zu erweitern ( $N$  bezieht sich auf die Anzahl der Supersymmetrien, d.h. die Anzahl der unterschiedlichen Kopien von  $Q, Q^\dagger$ ). Alle SM-Teilchen sitzen jeweils zusammen mit ihrem Superpartner in einem Multiplett, wobei der Higgssektor jedoch zu einem Zwei-Higgsdublett-Modell vom Typ II erweitert werden muss. Die Holomorphie des Superpotenzials bedingt zwei verschiedene Higgsdubletts, um sowohl für up-artige als auch down-artige Fermionen Massen zu generieren. Dies löst sogleich ein weiteres Problem, da die Erweiterung von nur einem Higgsino, die Aufhebung der Dreiecksanomalien im SM zerstören würde. Das zweite Higgsdublett besitzt jedoch genau die richtigen Quantenzahlen, um Anomaliefreiheit zu gewährleisten. Standardmäßig werden chirale Supermultipletts nur durch linkshändige Weyl-Spinoren ausgedrückt, weshalb man konjugierte rechtshändige Felder verwendet. Die Tabellen 2.2 und 2.3 fassen den Teilcheninhalt des MSSM zusammen.

Das Superpotenzial des MSSM ist gegeben durch (an geeigneter Stelle ist das  $SU(2)$  invariante Produkt einzusetzen, und Farb- und Spinorindizes wurden unterdrückt):

$$W_{\text{MSSM}} = Q_i Y_{ij}^U u_j^c H_u + Q_i Y_{ij}^D d_j^c H_d + L_i Y_{ij}^E e_j^c H_d + \mu H_d H_u. \quad (2.44)$$

Vektor Superfelder	Spin $\frac{1}{2}$	Spin 1	$SU(3)_C, SU(2)_L, U(1)_Y$
Gluinos, Gluonen ( $i = 1, \dots, 8$ )	$\tilde{g}_i$	$g_i$	$(\mathbf{8}, \mathbf{1}, 0)$
Winos, $W$ -Bosonen	$\tilde{W}^\pm, \tilde{W}^0$	$W^\pm, W^0$	$(\mathbf{1}, \mathbf{3}, 0)$
Bino, $B$ -Boson	$\tilde{B}$	$B$	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 0)$

Tabelle 2.3: Vektor-Supermultipletts im MSSM

Im Rahmen dieser Arbeit wird das um drei rechtshändige Neutrinos erweiterte MSSM betrachtet. In diesem Fall wird das Superpotenzial um zwei Terme ergänzt:

$$W = W_{\text{MSSM}} + L_i Y_{ij}^\nu \nu_j^c H_u + \frac{1}{2} \nu_i^c M_{ij}^N \nu_j^c. \quad (2.45)$$

Zusätzlich fordern wir Invarianz unter einer neuen diskreten Symmetrie, der sogenannten  $R$ -Parität:

$$R = (-1)^{3(B-L)+2S}. \quad (2.46)$$

Demzufolge haben alle SM-Teilchen  $R$ -Parität  $+1$  und alle SUSY-Partner  $-1$ . Durch diese Forderung werden weitere Terme im Superpotenzial ausgeschlossen, welche die Baryon- und Leptonzahl verletzen und insbesondere zu einem zu schnellen Protonzerfall führen, wenn die Kopplungen nicht gerade unnatürlich klein sind. Eine Konsequenz aus der Erhaltung der  $R$ -Parität ist, dass das leichteste supersymmetrische Teilchen (LSP) stabil und folglich ein Kandidat für nicht-baryonische Dunkle Materie ist.

### Der Parameter $\tan\beta$

Unterhalb der elektroschwachen Skala erhalten die neutralen Komponenten der Higgsfelder einen Vakuumerwartungswert  $\langle H_u^0 \rangle = v_u$ ,  $\langle H_d^0 \rangle = v_d$ , wobei  $|v_u|^2 + |v_d|^2 = v^2 = (174 \text{ GeV})^2$ . Das Verhältnis definiert den Parameter  $\tan\beta$ :

$$\tan\beta = \frac{v_u}{v_d}. \quad (2.47)$$

Die Fermionmassen sind damit durch  $m_u = y_u v_u$  und  $m_{d,e} = -y_{d,e} v_d$  gegeben, wobei das Minuszeichen der Konvention von Ref. [41] entspricht. Von den acht reellen Freiheitsgraden der zwei Higgsdubletts werden drei zu den longitudinalen Komponenten der Eichbosonen, so dass fünf Masseneigenzustände übrig bleiben: Die zwei neutralen  $CP$ -geraden  $h^0$  und  $H^0$ , das  $CP$ -ungerade  $A^0$  und die geladenen  $H^\pm = H^{\mp\dagger}$ . Der Parameter  $\tan\beta$  wird in dieser Arbeit eine entscheidende Rolle spielen. Er ist ein freier Parameter der Theorie, aber es existieren obere und untere Schranken an seinen Wert. Von experimenteller Seite schliesst die Higgsuche bei LEP den kleinen  $\tan\beta$ -Bereich in einfachen SUSY-Modellen aus [42]. Dieses Ergebnis passt gut mit der theoretischen Erwartung zusammen, dass die Top-Yukawakopplung perturbativ bleiben soll. Dieser Grenzfall, wo  $\tan\beta$  so klein wie möglich aber so groß wie nötig ist, damit  $|y_t| < 1$  bleibt, wird im Rahmen des CMM-Modells auftreten. Der Fall von großem  $\tan\beta$  ist ein vielfach studierter Parameterbereich des MSSM (siehe z.B. Ref. [43–48] und darin zitierte Referenzen). Er hat wesentliche Auswirkungen auf Observablen der Flavourphysik mit typischen Signaturen und ist vom theoretischen Standpunkt wohlmotiviert. In  $SO(10)$ -GUT-Modellen, in denen alle Teilchen einer Generation in der 16-dimensionalen Spinordarstellung untergebracht

werden, wird bei minimalem Higgssektor, d.h. nur einer Yukawakopplung, die Vereinigung von Top- und Bottom-Yukawakopplung vorhergesagt. Aufgrund der großen Massendifferenz zwischen Top- und Bottomquark müssen dazu die Vakuumerwartungswerte geeignet justiert werden:

$$\left| \frac{y_b}{y_t} \right| = \frac{m_b}{m_t} \tan \beta. \quad (2.48)$$

Fordert man naiv eine perturbative Bottom-Yukawakopplung, so erhält man eine obere Schranke von  $\tan \beta \lesssim 65$ . Ferner liefert das MSSM nur dann eine natürliche Erklärung für spontane Symmetriebrechung, falls  $|y_b| < |y_t|$ . Beide Argumente gelten jedoch nur auf Baumgraphenniveau. Gerade im Falle eines großen  $\tan \beta$  erhält die Bottom-Yukawakopplung Korrekturen aus der Kopplung an  $H_u$  über Schleifenprozesse. Unter Berücksichtigung dieser expliziten Massenrenormierung von  $m_b$  wird die  $\tan \beta$ -Verstärkung im Verhältnis  $|\frac{y_b}{y_t}|$  kompensiert, so dass Werte bis  $\tan \beta \approx 100$  sowohl die Perturbativität der Yukawakopplungen als auch die elektroschwache Symmetriebrechung nicht zerstören [10]. Das anomale magnetische Moment des Myons ist eine der präzisesten gemessenen und berechneten Größe in der Teilchenphysik. Der Vergleich zwischen SM-Theoriewert und dem experimentellen Messwert, ist nicht nur ein sensitiver Test der SM-Wechselwirkungen, sondern auch für Neue-Physik-Beiträge. Aktuellen Daten zufolge liegt die Diskrepanz bei  $3.6\sigma$  [9]. Gerade Supersymmetrie mit großem  $\tan \beta$  liefert eine natürliche Erklärung dieser Abweichung und zeichnet sich dadurch gegenüber anderen neuen Physik Modellen aus. Aufgrund der parametrischen Verstärkung können jedoch auch Probleme in Prozessen wie  $b \rightarrow s\gamma$ ,  $B_{d,s} \rightarrow \mu\mu$  und  $B \rightarrow (D)\tau\nu$  auftreten. In Supergravitation sind  $B_{d,s} \rightarrow \mu\mu$  und das anomale magnetische Moment des Myons korreliert, so dass der Beitrag  $a_\mu^{\text{SUSY}}$  begrenzt ist [49]. Wir werden den Fall  $\tan \beta = 50$  betrachten und im Rahmen des CMM-Modells  $\tan \beta = 6$ .

## SUSY-Brechung

Wäre SUSY eine exakte Symmetrie, dann wären die Massen der Teilchen und ihrer Superpartner gleich groß. Da dies experimentell ausgeschlossen ist, muss SUSY – falls existent – gebrochen sein. Wegen der Ferrara-Girardello-Palumbo-Summenregel  $\sum_S (-1)^{2S} (2S + 1) m_S^2 = 0$  muss SUSY in einem verborgenen Sektor gebrochen sein [50]. Da der genaue Mechanismus bisher unbekannt ist, wird generell angenommen, dass er seinen Ursprung bei einer hohen Skala hat und parametrisieren seinen Effekt durch explizite SUSY-brechende Terme. Die in der Literatur am häufigsten betrachteten SUSY-Brechungsmechanismen sind minimale Supergravitation (mSUGRA), „gauge-mediated“ SUSY-Brechung (GMSB) und „anomaly-mediated“ SUSY-Brechung (AMSB). Um keine weiteren Divergenzen einzuführen, muss die Brechung „soft“ (weich) sein, d.h. die Kopplungen haben positive Massendimension. Einem Theorem von Kurt Symanzik zufolge bekommt man keine anomalen Ströme, wenn die Symmetrie weich gebrochen ist. Im MSSM werden folgende Softmassenterme zur Lagrangedichte hinzuaddiert (Konvention von Ref. [41] in der sogenannten Super-CKM-Basis (SCKM), bei der alle Fermionfelder Masseneigenzustände sind und deren Superpartner die gleiche Rotation erfahren

haben<sup>8</sup>):

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{soft}} = & -\tilde{Q}^* m_{\tilde{Q}}^2 \tilde{Q} - \tilde{u}^{c*} m_{\tilde{U}}^2 \tilde{u}^c - \tilde{d}^{c*} m_{\tilde{D}}^2 \tilde{d}^c - \tilde{L}^* m_{\tilde{L}}^2 \tilde{L} - \tilde{e}^{c*} m_{\tilde{E}}^2 \tilde{e}^c \\
& + H_u \tilde{Q} A_u \tilde{u}^c + H_d \tilde{Q} A_d \tilde{d}^c + H_d \tilde{L} A_\ell \tilde{e}^c + h.c. \\
& + \frac{1}{2} \left( M_1 \tilde{B} \tilde{B} + M_2 \tilde{W}^a \tilde{W}^a + M_3 \tilde{g}^a \tilde{g}^a \right) + h.c. \\
& - m_{H_u}^2 H_u^* H_u - m_{H_d}^2 H_d^* H_d - (m_{12}^2 H_u H_d + h.c.)
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Hierbei sind die Sfermionmassen  $m_F^2$  hermitesche  $3 \times 3$ -Matrizen im Flavourraum. Die trilinearen Kopplungen  $A_f$  (die sogenannten  $A$ -Terme<sup>9</sup>) haben Massendimension eins und sind das Analogon zu den (dimensionslosen) Yukawakopplungen im Superpotenzial in Gl. (2.44). Ferner enthält  $\mathcal{L}_{\text{soft}}$  Massenterme für die Gauginos und SUSY-brechende Beiträge zum Higgs-potenzial. Um kein weiteres Fine-Tuning-Problem zu bekommen, sollte die mit den Softmassen assoziierte Skala 1 TeV nicht übersteigen. Während das Superpotenzial mit nur einem zusätzlichen Parameter  $\mu$  gegenüber dem Zwei-Higgsdublett-Modell (2HDM) auskommt, erhält man durch die SUSY-Brechung über 100 neue Parameter. Anstatt das Flavourproblem des SMs zu lösen, enthält das generische MSSM durch die komplexen Einträge in  $m_F^2$  und  $A_f$  neue Quellen von Flavour- und  $CP$ -Verletzung. Davon sind jedoch viele stark eingeschränkt, um z.B. nicht mit den experimentellen Schranken von FCNC in Konflikt zu geraten. In mSUGRA-Szenarien, werden durch die Annahme einer flavourblinden SUSY-Brechung gefährliche Nebendiagonalelemente durch eine Universalitätsannahme bei der Planck-Skala auf natürliche Weise unterdrückt. In diesem Fall gibt es nur vier freie Parameter:  $m_{1/2}$ ,  $m_0$ ,  $A_0$ ,  $\tan\beta$ ,  $\text{sgn}(\mu)$ . Im Rahmen dieser Arbeit werden mit Hilfe Lepton-flavourverletzender Prozesse die Nebendiagonalelemente der Sleptonmassenmatrix eingeschränkt. Ein vielverwendeter Ansatz, um den Einschränkungen aus der  $K$ - und  $B$ -Physik gerecht zu werden, ist die Annahme minimaler Flavourverletzung (MFV), bei der die ganze Flavour- und  $CP$ -Verletzung aus den Yukawakopplungen stammt [51]. In naiver Formulierung bedeutet das, dass die Up- und Downsquarks genau wie ihre SM-Partner um die CKM-Matrix gegeneinander verdreht sind. Im Gegensatz zum generischen MSSM, welches zu viele flavourändernde Parameter enthält, können mit dieser Einschränkung Korrelationen zwischen verschiedenen Observablen untersucht werden. Im Leptonsektor ist die Definition von minimaler Flavourverletzung jedoch nicht so geradlinig wie im Quarksektor, da noch Annahmen über Neutrinomassen mit einfließen [52, 53]. Ferner ist schon die Mischung in der PMNS-Matrix alles andere als minimal, so dass es schwierig ist, solch einen minimalen Ansatz zu motivieren. Mit dem CMM-Modell soll ein alternatives Szenario in der Flavourphysik etabliert werden, welches über die MFV hinaus geht und dennoch prädiktiv genug ist, um unterschiedliche Observablen miteinander in Beziehung setzen zu können.

## Massenspektrum des MSSM

Nach elektroschwacher Symmetriebrechung mischen Teilchen mit gleicher Farbe, Ladung und Spin, so dass die in Tabelle 2.2 und 2.3 aufgelisteten Felder keine Masseneigenzustände sind.

<sup>8</sup>Im Rahmen des CMM-Modells muss ein Übergang von der sogenannten Up-Basis in die SCKM-Basis vollzogen werden, mit dem Effekt, dass GUT-Relationen zwischen den Softmassen gelten. Wir unterscheiden zwischen den zwei Basen, indem wir bei den Softmassen in der Up-Basis die Indizes mit Kleinbuchstaben schreiben (z.B.  $m_{\tilde{q}}^2$  anstatt  $m_{\tilde{Q}}^2$ ).

<sup>9</sup>Eine Verwechslung mit der in Abschnitt 2.1.3 eingeführten Zerfallsamplitude  $A_f$  sollte nicht auftreten und im Folgenden aus dem Zusammenhang klar ersichtlich werden. Ferner geben wir bei den  $A$ -Termen meist den Flavour  $f = u, d, \ell$  an.

Beispielsweise mischen Higgsinos, Winos und Binos mit gleicher  $U(1)_{\text{em}}$ -Quantenzahl wegen der Nebendiagonalelemente, die durch die Higgs-Higgsino-Gaugino-Kopplung in Gl. (2.42) erzeugt werden:  $\dots - \sqrt{2}g_1\tilde{H}_d^0\frac{1}{2}H_d^0\tilde{B}\dots \rightarrow \dots - \frac{g_1v_d}{\sqrt{2}}\tilde{H}_d^0\tilde{B}\dots$ . Wir halten uns bei den Mischungsmatrizen und Feynman-Regeln weitestgehend an die Konventionen von Ref. [41], wobei Faktoren  $\sqrt{2}$  bei den VEVs weggelassen werden, so dass  $v$  auf 174 GeV normiert ist.

**Neutralinos**  $\tilde{\chi}_i^0$ : Das Bino, das neutrale Wino und die Higgsinos mischen zu vier Neutralinos. Mit  $\Psi^0 = (\tilde{B}, \tilde{W}, \tilde{H}_d^0, \tilde{H}_u^0)$  ist der Massenterm in der Lagrangedichte gegeben durch:

$$\mathcal{L}_{\tilde{\chi}_{\text{mass}}^0} = -\frac{1}{2}(\Psi^0)^\top \mathbf{M}_N \Psi^0 + \text{h.c.}, \quad \mathbf{M}_N = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & -\frac{g_1v_d}{\sqrt{2}} & \frac{g_1v_u}{\sqrt{2}} \\ 0 & M_2 & \frac{g_2v_d}{\sqrt{2}} & -\frac{g_2v_u}{\sqrt{2}} \\ -\frac{g_1v_d}{\sqrt{2}} & \frac{g_2v_d}{\sqrt{2}} & 0 & -\mu \\ \frac{g_1v_u}{\sqrt{2}} & -\frac{g_2v_u}{\sqrt{2}} & -\mu & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.50)$$

Durch eine orthogonale Transformation mit einer unitären Matrix  $Z_N$  kann  $\mathbf{M}_N$  diagonalisiert werden, so dass die Eigenwerte reell und positiv sind:

$$Z_N^\top \mathbf{M}_N Z_N = \hat{\mathbf{M}}_N = \text{diag} \left( m_{\tilde{\chi}_1^0}, \dots, m_{\tilde{\chi}_4^0} \right). \quad (2.51)$$

Dazu verwendet man  $Z_N^\dagger \mathbf{M}_N^\dagger \mathbf{M}_N Z_N = (\hat{\mathbf{M}}_N)^2$ .  $Z_N$  besteht dann gerade aus den Eigenvektoren von  $\mathbf{M}_N^\dagger \mathbf{M}_N$ . Danach multipliziert man die Spalten von  $Z_N$  mit Phasen  $e^{i\phi}$ , so dass  $Z_N^\top \mathbf{M}_N Z_N = \hat{\mathbf{M}}_N$  reell ist und positive Diagonalelemente hat.

**Charginos**  $\tilde{\chi}_i^\pm$ : Die physikalischen Charginos sind Mischungen der geladenen  $SU(2)_L$ -Gauginos und der geladenen Higgsinos  $\Psi^\pm = (\tilde{W}^+, \tilde{H}_u^+, \tilde{W}^-, \tilde{H}_d^-)$ . Die Massen der Charginos ergeben sich durch eine Singulärwertzerlegung folgender Massenmatrix:

$$\mathcal{L}_{\tilde{\chi}_{\text{mass}}^\pm} = -\frac{1}{2}(\Psi^\pm)^\top \mathbf{M}_C \Psi^\pm + \text{h.c.}, \quad \mathbf{M}_C = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{X}^\top \\ \mathbf{X} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} M_2 & g_2v_u \\ g_2v_d & \mu \end{pmatrix}. \quad (2.52)$$

Die Rotation der positiv und negativ geladenen Fermionen unterscheidet sich, so dass

$$Z_-^\top \mathbf{X} Z_+ = \text{diag} (m_{\tilde{\chi}_1}, m_{\tilde{\chi}_2}). \quad (2.53)$$

Gerade im Fall von großem  $\tan\beta$ , d.h.  $v_u \gg v_d$ , eignet sich eine Entwicklung und näherungsweise Diagonalisierung der Neutralino- und Charginomassenmatrix, um die einzelnen  $\tan\beta$ -verstärkten Beiträge zu identifizieren. Dies entspricht dem Grenzfall ungebrochener  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ , bei der die Gaugino-Higgsino-Mischung als Masseneinsetzung im Neutralino- bzw. Charginopropagator behandelt wird. Der Vorteil der Masseneinsetzung besteht in den einfacheren Feynman-Regeln und den anschaulicheren Diagrammen.

**Sleptonen, Sneutrinos und Squarks:** Prinzipiell gibt es zwei Möglichkeiten, die sechs Sleptonen in einem Vektor anzuordnen, entweder nach Familie oder nach Chiralität sortiert. Letzteres ist für den allgemeinen Fall geeignet, während ersteres im Lepton-flavourerhaltenden (LFC von „lepton flavour conserving“) Fall oder bei kleinen Nebendiagonalelementen passend ist. Dann zerfällt die  $6 \times 6$ -Matrix der Sleptonen (und analog für die Squarks) in drei  $2 \times 2$ -Blockmatrizen, bei denen es nur LR-Mischung innerhalb einer Generation gibt. Diese flavourerhaltenden aber chiralitätsverletzenden Einträge rühren von den trilinearen Kopplungen und dem SUSY-Analogon der Yukawakopplungen her. Die Diagonalelemente stammen aus den SUSY-brechenden Parametern und den  $D$ - und  $F$ -Termen.

Im allgemeinen Fall gilt, dass die Felder  $\tilde{L}_2^I := \tilde{\ell}_L^I$  und  $\tilde{R}^I := \tilde{e}_R^{*I}$  zu den sechs geladenen Slepton-Masseneigenzuständen  $\tilde{\ell}_i$ ,  $i = 1 \dots 6$  mischen ( $I, J$  bezeichnen hier die Generationenindizes):

$$\tilde{L}_2^I = Z_L^{Ii*} \tilde{\ell}_i^-, \quad \tilde{R}^I = Z_L^{(I+3)i} \tilde{\ell}_i^+, \quad (2.54)$$

$$Z_L^\dagger \begin{pmatrix} (m_L^2)_{LL} & (m_L^2)_{LR} \\ (m_L^2)_{RL}^\dagger & (m_L^2)_{RR} \end{pmatrix} Z_L = \text{diag} \left( m_{\tilde{\ell}_1}^2, \dots, m_{\tilde{\ell}_6}^2 \right), \quad (2.55)$$

wobei die Sleptonmassenmatrix aufgebaut ist aus

$$(m_L^2)_{LL}^{IJ} = \frac{e^2 (v_d^2 - v_u^2) (1 - 2c_W^2)}{4s_W^2 c_W^2} \delta_{IJ} + v_d^2 Y_{\ell_I}^2 \delta_{IJ} + (m_L^2)_{IJ}^\top, \quad (2.56)$$

$$(m_L^2)_{RR}^{IJ} = -\frac{e^2 (v_d^2 - v_u^2)}{2c_W^2} \delta_{IJ} + v_d^2 Y_{\ell_I}^2 \delta_{IJ} + m_{EIJ}^2, \quad (2.57)$$

$$(m_L^2)_{LR}^{IJ} = v_u \mu Y_{\ell}^{IJ*} + v_d A_{\ell}^{IJ*}. \quad (2.58)$$

Der LR-Block kann darüberhinaus einen Term  $v_u A_{\ell}^{*i}$  beinhalten, welcher aus zusätzlichen, nichtholomorphen Kopplungen in  $\mathcal{L}_{\text{soft}}$  entsteht. Im flavourerhaltenden Fall reduziert sich die Massenmatrix auf drei  $2 \times 2$ -Untermatrizen:

$$Z_{\ell}^\dagger \begin{pmatrix} (m_{\tilde{\ell}}^2)_{LL} & (m_{\tilde{\ell}}^2)_{LR} \\ (m_{\tilde{\ell}}^2)_{RL}^* & (m_{\tilde{\ell}}^2)_{RR} \end{pmatrix} Z_{\ell} = \begin{pmatrix} m_{\tilde{\ell}_1}^2 & 0 \\ 0 & m_{\tilde{\ell}_2}^2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\ell} = \tilde{e}, \tilde{\mu}, \tilde{\tau}. \quad (2.59)$$

Die Übersetzungsregel zum allgemeinen Fall bzw. zur Chiralitätsanordnung lautet :

$$Z_L^{1i} = Z_e^{1i} \quad Z_L^{2i} = Z_{\mu}^{1i} \quad Z_L^{3i} = Z_{\tau}^{1i} \quad Z_L^{4i} = Z_e^{2i} \quad Z_L^{5i} = Z_{\mu}^{2i} \quad Z_L^{6i} = Z_{\tau}^{2i}. \quad (2.60)$$

Wegen  $SU(2)_L$ -Invarianz haben die Sneutrinos die gleiche SUSY-brechende Softmasse wie die linkshändigen Sleptonen. Die schwachen Eigenzustände  $\tilde{L}_1 := \tilde{\nu}_{\ell}$  können via  $Z_{\nu}$  in die Masseneigenzustände  $\tilde{\nu}_j$  rotiert werden:

$$\tilde{L}_1^i = Z_{\nu}^{ij} \tilde{\nu}_j, \quad Z_{\nu}^\dagger M_{\nu}^2 Z_{\nu} = \text{diag} (m_{\tilde{\nu}_1}^2, m_{\tilde{\nu}_2}^2, m_{\tilde{\nu}_3}^2), \quad M_{\nu}^2 = \frac{e^2 (v_d^2 - v_u^2)}{8s_W^2 c_W^2} \mathbf{1} + m_L^2. \quad (2.61)$$

Die Nebendiagonalelemente der Slepton- und Sneutrinomassenmatrix haben weitreichende phänomenologische Konsequenzen, da sie Lepton-flavourverletzende Prozesse induzieren können. Durch Konfrontation mit experimentellen Werten und oberen Schranken können diese jedoch eingeschränkt werden, was in Kapitel 3 weiter untersucht wird.

Die Up- und Downsquarks können auf analoge Weise in ihre Masseneigenzustände rotiert werden. Die Downsquarks  $\tilde{Q}_2^I = \tilde{d}_{IL}$  und  $\tilde{D}^I = \tilde{d}_{IR}^*$  mischen zu  $\tilde{d}_i$ ,  $i = 1 \dots 6$ :

$$\tilde{Q}_2^I = Z_D^{Ii*} \tilde{d}_i^-, \quad \tilde{D}^I = Z_D^{(I+3)i} \tilde{d}_i^+, \quad (2.62)$$

$$Z_D^\dagger \begin{pmatrix} (m_D^2)_{LL} & (m_D^2)_{LR} \\ (m_D^2)_{RL}^\dagger & (m_D^2)_{RR} \end{pmatrix} Z_D = \text{diag} \left( m_{\tilde{d}_1}^2, \dots, m_{\tilde{d}_6}^2 \right), \quad (2.63)$$

mit

$$(m_D^2)_{LL}^{IJ} = -\frac{e^2 (v_d^2 - v_u^2) (1 + 2c_W^2)}{12s_W^2 c_W^2} \delta_{IJ} + v_d^2 Y_{d_I}^2 \delta_{IJ} + (m_Q^2)_{IJ}^\top, \quad (2.64)$$

$$(m_D^2)_{RR}^{IJ} = -\frac{e^2 (v_d^2 - v_u^2)}{6c_W^2} \delta_{IJ} + v_d^2 Y_{d_I}^2 \delta_{IJ} + m_{DII}^2, \quad (2.65)$$

$$(m_D^2)_{LR}^{IJ} = v_u \mu Y_d^{IJ*} + v_d A_d^{IJ*}. \quad (2.66)$$

Die sechs Upsquarks  $\tilde{u}_i$  sind aus den Feldern  $\tilde{Q}_1^I = \tilde{u}_{IL}$  und  $\tilde{U}^I = \tilde{u}_{IR}^I$  aufgebaut:

$$\tilde{Q}_1^I = Z_U^{Ii} \tilde{u}_i^+, \quad \tilde{D}^I = Z_U^{(I+3)i*} \tilde{u}_i^-, \quad (2.67)$$

$$Z_U^\top \begin{pmatrix} (m_U^2)_{LL} & (m_U^2)_{LR} \\ (m_U^2)_{RL}^\dagger & (m_U^2)_{RR} \end{pmatrix} Z_U^* = \text{diag} (m_{\tilde{u}_1}^2, \dots, m_{\tilde{u}_6}^2). \quad (2.68)$$

$$(m_U^2)_{LL}^{IJ} = -\frac{e^2 (v_d^2 - v_u^2) (1 - 4c_W^2)}{12s_W^2 c_W^2} \delta_{IJ} + v_u^2 Y_{u_i}^2 \delta_{IJ} + (V m_{\tilde{Q}}^2 V^\dagger)_{IJ}^\top, \quad (2.69)$$

$$(m_U^2)_{RR}^{IJ} = \frac{e^2 (v_d^2 - v_u^2)}{3c_W^2} \delta_{IJ} + v_u^2 Y_{u_i}^2 \delta_{IJ} + m_{\tilde{U}^{IJ}}^2, \quad (2.70)$$

$$(m_U^2)_{LR}^{IJ} = -v_d \mu Y_u^{IJ*} - v_u A_u^{IJ*}. \quad (2.71)$$

Zur Quantifizierung der tolerierten Abweichung des Alignments<sup>10</sup>, und damit der Flavourverletzung werden üblicherweise die dimensionslosen Parameter

$$\delta_{XY}^{fIJ} = \frac{(\Delta m_F^2)_{XY}^{IJ}}{\sqrt{m_{\tilde{f}_{IX}}^2 m_{\tilde{f}_{JY}}^2}} \quad (2.72)$$

eingeführt und obere Schranken bestimmt. Hierbei sind  $I$  und  $J$  Flavourindizes,  $X, Y$  bezeichnen die Chiralitäten  $L$  und  $R$ ,  $(\Delta m_F^2)_{XY}^{IJ}$  mit  $F = U, D, L$  ist das Nebendiagonalelement der Sfermionmassenmatrix und  $m_{\tilde{f}_{IX}}^2, m_{\tilde{f}_{JY}}^2$  sind die entsprechenden diagonalen Einträge. Man beachte, dass die Nebendiagonalelemente immer kleiner sein müssen als der Mittelwert der Diagonalelemente, denn sonst wird die Sfermionmasse negativ:

$$(\Delta m_L^2)_{XY}^{IJ} < \sqrt{m_{\tilde{\ell}_{IX}}^2 m_{\tilde{\ell}_{JY}}^2}. \quad (2.73)$$

Falls die  $\delta_{XY}^{fIJ}$  sehr viel kleiner als eins sind, wird oft die Masseneinsatznäherung (MIA von „mass insertion approximation“) verwendet. Dabei wird der Sfermionpropagator entwickelt, mit der Konsequenz, dass die Kopplung flavourerhaltend ist und LFV durch eine Masseneinsatzung (MI) im Propagator auftritt.

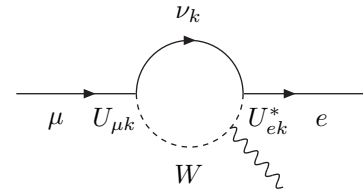
<sup>10</sup>In diesem Fall bedeutet Alignment soviel wie die Möglichkeit, dass die Fermion- und Sfermionmassenmatrizen gleichzeitig diagonalisiert werden können. Der Begriff wird oft auch in Zusammenhang mit den  $A$ -Termen verwendet, wenn diese proportional zur jeweiligen Yukawakopplung sind.



### 3 Lepton-Flavourverletzung im MSSM

In diesem Kapitel befassen wir uns mit den phänomenologischen Auswirkungen der Lepton-Flavourverletzung im MSSM, wobei wir uns in einigen Fällen auf den GUT-motivierten Parameterbereich mit großem  $\tan\beta$  konzentrieren.

Neutrinooszillationen sind wegen  $\Delta m_{ij}^2 \neq 0$  und  $|\Delta L_{e,\mu,\tau}| = 1$  ein erster direkter Hinweis, dass das SM erweitert werden muss und die Mischung im Leptonsektor groß ist. In einem um massive Neutrinos erweiterten SM kann die Neutrinomischung prinzipiell durch Schleifenprozesse Übergänge im geladenen Leptonsektor hervorrufen. Das Verzweigungsverhältnis kann abgeschätzt werden durch:



$$BR(\mu \rightarrow e\gamma) \approx \frac{3\alpha}{32\pi} \left| \sum_k U_{\mu k}^* \frac{m_{\nu_k}^2}{M_W^2} U_{ek} \right|^2 \approx \frac{3\alpha}{128\pi} \left( \frac{\Delta m_{21}^2}{M_W^2} \right)^2 \sin^2 2\theta_{12} \approx 10^{-54}.$$

Dies ist durch einen Faktor  $(m_{\nu_j}^2 - m_{\nu_i}^2)/M_W^2$  so stark unterdrückt, dass die Beobachtung solcher Prozesse ein Hinweis für Neue Physik ist. In Supersymmetrie enthalten die softbrechenden Terme weitere Quellen für Lepton-Flavourverletzung, deren phänomenologische Konsequenzen im Folgenden untersucht werden. Als Observablen betrachten wir das anomale magnetische Moment des Elektrons und des Myons, die leichten Fermionmassen, die PMNS-Matrix, das Verhältnis des leptonischen, geladenen Kaonzerfalls in ein Elektron bzw. Myon und die radiativen Zerfälle  $\ell_j \rightarrow \ell_i\gamma$ .

#### 3.1 Selbstenergien und Massenrenormierung

Im SM bestimmen die gemessenen Fermionmassen die Werte der Yukawakopplungen. Im MSSM hängen  $m_f$  und  $y_f$  über  $\tan\beta$  zusammen und dieser Zusammenhang erhält zusätzlich Korrekturen aus dem soften SUSY-brechenden Sektor, welche im Folgenden berechnet werden. Im Entkopplungslimes  $M_{\text{SUSY}} \gg M_{A^0}, M_{H^\pm}, v_u$  tauchen diese schleifeninduzierten Beiträge intuitiv aus Higgskopplungen an Sfermionen auf, welche entweder die trilinearen Terme oder den Higgsinomassenparameter  $\mu$  enthalten [43, 45, 54–59]. Zunächst betrachten wir in diesem Abschnitt den allgemeinen Effekt von Einteilchen-irreduziblen Selbstenergien. Diese können sowohl flavourerhaltend als auch -verletzend sein. Die Selbstenergie in Abb. 3.1 kann in chiralitätsändernde und -erhaltende Teile aufgespalten werden:

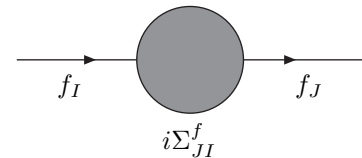


Abb. 3.1: Definition der Selbstenergie  $\Sigma_{JI}^f$

$$\Sigma_{JI}^f(p) = \left( \Sigma_{JI}^{fLR}(p^2) + \not{p} \Sigma_{JI}^{fRR}(p^2) \right) P_R + \left( \Sigma_{JI}^{fRL}(p^2) + \not{p} \Sigma_{JI}^{fLL}(p^2) \right) P_L, \quad f = u, d, \ell. \quad (3.1)$$

Man beachte, dass die skalaren Anteile  $\Sigma_{IJ}^{f LR}$  und  $\Sigma_{IJ}^{f RL}$  Massendimension 1 haben, während  $\Sigma_{IJ}^{f LL}$  und  $\Sigma_{IJ}^{f RR}$  dimensionslos sind. In den beiden ersteren tritt ein chiraler Verstärkungsfaktor  $A_f^{IJ} v_d / (M_{\text{SUSY}} \text{Max}[m_{f_I}, m_{f_J}])$  oder die  $\tan \beta$ -Verstärkung  $(v/M_{\text{SUSY}}) \tan \beta$  auf. Mit dieser Konvention ist die Renormierung der Fermionmassen gegeben durch (vgl. auch Abb. 3.2):

$$m_{f_I}^{\text{bare}} \rightarrow m_{f_I} = m_{f_I}^{\text{ren}} - \Sigma_{II}^{f LR}(m_{f_I}^2) - \frac{1}{2} m_{f_I} \left( \Sigma_{II}^{f LL}(m_{f_I}^2) + \Sigma_{II}^{f RR}(m_{f_I}^2) \right) + \delta m_{f_I}. \quad (3.2)$$

Falls die Selbstenergien endlich sind, verschwindet der Counterterm in Gl. (3.2) im  $\overline{\text{MS}}$ -Schema, während er im On-Shell-Schema gerade so gewählt wird, dass er den Schleifenbeitrag weghebt. Die Selbstenergien renormieren nicht nur die Fermionmassen, sondern induzieren auch eine Rotation im Flavourraum. Dies wird in Kapitel 3.5 genauer hergeleitet und analysiert. Der Wellenfunktions-Counterterm für den flavourdiagonalen Fall wird bestimmt durch die Forderung, dass das Residuum des Fermionpropagators bei  $\not{p} = m\mathbb{1}$  gerade 1 ist (Zustandsnormierung; siehe z.B. Ref. [60]):

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}(-p, p) &= i(\not{p} - m) - i\hat{\Sigma}(p) \rightarrow i(\not{p} - m) \quad \text{für } p^2 \rightarrow m^2 \\ &\Leftrightarrow \left[ \lim_{p^2 \rightarrow m^2} \frac{i}{\not{p} - m} \text{Re}(\hat{\Sigma}(p)) \right] u(p) \stackrel{!}{=} 0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

wobei  $\hat{\Sigma}$  die Selbstenergie plus Counterterm darstellt. Das Ergebnis für den flavourerhaltenden Fall ist

$$\delta Z_{II}^{f L} = -\text{Re} \left[ \Sigma_{II}^{f LL}(m_{f_I}^2) + 2m_{f_I} \Sigma_{II}^{f LR}(m_{f_I}^2) + m_{f_I}^2 \left( \Sigma_{II}^{f LL'}(m_{f_I}^2) + \Sigma_{II}^{f RR'}(m_{f_I}^2) \right) \right]. \quad (3.4)$$

Der  $W$ -Vertex Counterterm kann damit zu  $\frac{1}{2} \delta Z_{IJ}^{f L} \frac{ig_2}{\sqrt{2}} \gamma^\mu P_L$  berechnet werden. Für den flavourverletzenden Fall  $I \neq J$  erhalten wir:

$$\frac{\delta Z_{IJ}^{f L (1)}}{2} = - \frac{m_{f_J}^2 \Sigma_{IJ}^{f LL}(m_{f_I}^2) + m_{f_J} \Sigma_{IJ}^{f LR}(m_{f_I}^2) + m_{f_I} \Sigma_{IJ}^{f RL}(m_{f_I}^2) + m_{f_I} m_{f_J} \Sigma_{IJ}^{f RR}(m_{f_I}^2)}{m_{f_J}^2 - m_{f_I}^2}. \quad (3.5)$$

Die entsprechenden Korrekturen zur rechtshändigen Wellenfunktion erhält man durch Austausch von  $L \leftrightarrow R$ . Man beachte, dass die Selbstenergien  $\Sigma_{IJ}^{f RL}$  mit  $J > I$  durch kleine Massenverhältnisse unterdrückt sind. Deshalb können die entsprechenden Nebendiagonalelemente nicht aus CKM- oder PMNS-Matrix-Renormierung eingeschränkt werden. In Kapitel 3.5 wird dies noch genauer hergeleitet werden, wobei gleichzeitig die Resummation  $\tan \beta$ -verstärkter Korrekturen berücksichtigt wird. Im MSSM mit großem  $\tan \beta$  kann nämlich der Zusammenhang zwischen Yukawakopplung und gemessener Fermionmasse signifikant verändert werden. Im Entkopplungslimes  $M_{\text{SUSY}} \gg v$  ergeben sich diese verstärkten Korrekturen sehr intuitiv und anschaulich über eine schleifeninduzierte, nichtholomorphe Higgskopplung, wobei die Schleifenunterdrückung durch den Faktor  $\tan \beta \simeq 50$  teilweise kompensiert werden kann. Wie nämlich zuerst von Banks und später von Sarid, Hall und Rattazzi entdeckt, sind über die SUSY-brechenden Terme im Superpotenzial effektive Kopplungen an das „falsche“ Higgs-Boson möglich [43, 54]. Es ist jedoch a priori nicht klar, ob der Entkopplungslimes anwendbar ist, da die involvierten SUSY-Teilchen, z.B. die Neutralinos, Massen von der Größenordnung des VEVs haben können. Um den Fall  $M_{\text{SUSY}} \sim v, M_H$  abzudecken, muss auf eine diagrammatische Resummation der  $\tan \beta$ -verstärkten Korrekturen zurückgegriffen werden. Dies wurde für Quarks in Ref. [44, 47] und für Leptonen in Ref. [10, 48] ausgearbeitet. Schreiben wir die nackte Masse in der Lagrangedichte als

$$m^{\text{bare}} = m^{\text{ren}} + \delta m. \quad (3.6)$$

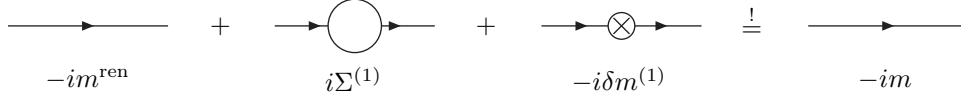


Abb. 3.2: Feynmandiagramme, die in erster Ordnung Störungstheorie zur Massenrenormierung beitragen. Hierbei bezeichnet  $m$  auf der rechten Seite die physikalische Masse bei der, der „dressed“-Propagator einen Pol hat [44].

so berechnet sich die physikalische Masse in erster Ordnung wie in Abb. 3.2 diagrammatisch dargestellt zu:

$$m^{\text{ren}} - \Sigma^{(1)} + \delta m^{(1)} = m, \quad \Rightarrow m^{\text{bare}} = m + \Sigma^{(1)} \stackrel{(*)}{=} m - m^{\text{ren}} \Delta. \quad (3.7)$$

Da die Masse links- und rechtshändige Felder verknüpft, muss die Selbstenergie  $\Sigma$  (hier mit Index (1) für erste Ordnung) einen Chiralitätsflip aufweisen. Eine weitere Möglichkeit ist, dass die Selbstenergie chiralitätserhaltend ist und der Flip durch die Bewegungsgleichung  $\not{p}u(p)_{L,R} = mu(p)_{R,L}$  verursacht wird. Der letzte Schritt (\*) in Gl. (3.7) ist nur dann möglich, wenn die chiralitätsflippende Selbstenergie proportional zur Masse selbst ist:  $\Sigma = -m^{\text{ren}}\Delta$ . Das ist z.B. im MSSM bei großem  $\tan\beta$  der Fall und stammt entweder aus der Higgsino-Kopplung  $\propto y$  oder aus dem Nebendiagonalelement der Sleptonmassenmatrix  $\propto m\mu \tan\beta$ . Um die  $\tan\beta$ -Verstärkung offensichtlich zu machen verwendet man auch die Notation  $\Delta = \epsilon \tan\beta$ . Die Resummation ist nicht möglich, falls die Selbstenergie aus den  $A$ -Termen stammt, wie es bei radiativer Fermionmassengenerierung (siehe Kapitel 3.3) der Fall ist.

**$\overline{\text{MS}}$ -Schema:** Da im MSSM die Selbstenergie endlich ist, gilt  $\delta m = 0$ , so dass nichts resummiert werden muss:

$$m^{\text{bare}} = m^{\text{ren}} + 0 = m + \Sigma = m - \Delta m^{\text{ren}}, \quad (3.8)$$

$$\boxed{m^{\text{bare}} = m^{\text{ren}} = \frac{m}{1 + \Delta}}, \quad m = m^{\text{bare}} - \Sigma. \quad (3.9)$$

**On-Shell-Schema:** Hier ist  $m^{\text{ren}} = m$ , wobei der Fermionpropagator einen Pol bei der physikalischen Masse  $m$  hat. Die Selbstenergiebeiträge werden durch die Counterterme gerade weggehoben. In erster Ordnung gilt:

$$m^{\text{bare}} = m + \delta m^{(1)} = m + \Sigma^{(1)} = m(1 - \Delta), \quad (3.10)$$

was in führender Ordnung mit dem  $\overline{\text{MS}}$ -Schema übereinstimmt. Wenn die Selbstenergie nun proportional zur Masse selbst ist, also  $\Sigma^{(1)} = -m\Delta = \delta m^{(1)}$ , dann muss resummiert werden, da der Counterterm erster Ordnung in ein Diagramm erster Ordnung eingesetzt werden kann und somit einem Diagramm zweiter Ordnung entspricht. Die Counterterme höherer Ordnung müssen demzufolge so gewählt werden, dass sie auch Beiträge wegheben, die durch das Einsetzen der Counterterme niedrigerer Ordnung entstehen (siehe Abb. 3.3). Der Counterterm  $n$ -ter Ordnung lautet demzufolge  $\delta m^{(n)} = \Sigma^{(n)} = -\delta m^{(n-1)}\Delta$ , so dass

$$\sum_{i=1}^n \delta m^{(i)} = - \left( m + \sum_{i=1}^{n-1} \delta m^{(i)} \right) \Delta, \quad (3.11)$$

$$n \rightarrow \infty : \delta m = -m^{\text{bare}}\Delta \quad \Rightarrow \boxed{m^{\text{bare}} = \frac{m}{1 + \Delta}}. \quad (3.12)$$

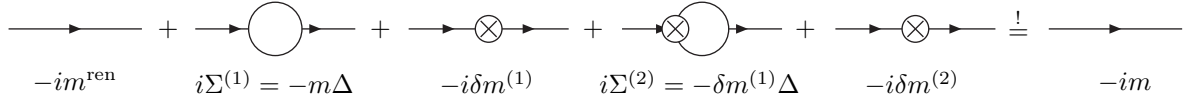


Abb. 3.3: Feynmandiagramme, die in zweiter Ordnung Störungstheorie zur Massenrenormierung beitragen (On-Shell-Schema).

folgt. Falls es nichts zu resumieren gibt, d.h. falls  $\Sigma$  nicht proportional zur Masse selbst ist, endet man mit  $m^{\text{bare}} = m + \Sigma^{(1)}$ .

Wie es sein sollte, führen  $\overline{\text{MS}}$ - und On-Shell-Schema zum gleichen Ergebnis für den Zusammenhang zwischen nackter und physikalischer Masse. Zusammenfassend lässt sich der Zusammenhang zwischen Yukawakopplung und physikalischer Masse mit Hilfe der Zerlegung  $\Sigma^{\ell LR} = \Sigma_{\mu}^{\ell LR} + \Sigma_A^{\ell LR}$  folgendermaßen schreiben:

$$\boxed{y_{\ell_I} = -\frac{m_{\ell_I} + \Sigma_{II,A}^{\ell LR}}{v_d + \frac{\Sigma_{II,\mu}^{\ell LR}}{y_{\ell_I}}} = -\frac{m_{\ell_I} + \Sigma_{II,A}^{\ell LR}}{v_d (1 + \Delta_{\ell_I})}} \quad (3.13)$$

Hierbei ist  $\Sigma_{II,\mu}^{\ell LR} = y_{\ell_I} v_d \Delta_{\ell_I}$  proportional zu  $\mu y_{\ell_I}$  ( $\Sigma_{II,\mu}^{\ell LR}/y_{\ell_I}$  ist unabhängig von  $y_{\ell_I}$ ) und wurde resummiert, während  $\Sigma_A^{\ell LR}$  aus dem restlichen Teil der Selbstenergie besteht, in welchem der Chiralitätsflip nicht von  $y_{\ell_I}$ , sondern beispielsweise vom  $A$ -term  $A_{\ell_I}$  bzw. seinem nichtholomorphen Analogon  $A'_{\ell_I}$  stammt (Analoges gilt für downartige Quarks).

### Zweischleifenbeiträge:

Bei chiral-verstärkten Selbstenergien können auch Zweischleifendiagramme, welche aus zwei Einschleifendiagrammen aufgebaut sind, wichtig werden. Diese wurden in der Literatur bisweilen meist vernachlässigt. Bei radiativ erzeugten Fermionmassen enthält beispielsweise die Korrektur zur Elektronmasse einen Verstärkungsfaktor  $m_{\tau}$ . Wie in Ref. [61] behandeln wir hier alle Diagramme, in denen kein Flavour zweimal auf einer Fermionlinie auftritt, als Einteilchen-irreduzibel, so dass beispielsweise chiral-verstärkte Selbstenergien auf Zweischleifenniveau konstruiert werden können. Aus dem Diagramm in Abb. (3.4) erhalten wir:

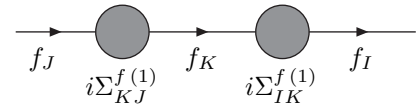


Abb. 3.4: Einteilchen-irreduzible Zweischleifen-Selbstenergie, welche aus zwei Einschleifen-Selbstenergien aufgebaut ist, wobei  $I \neq J \neq K$ .

$$i\Sigma_{IJ}^{f(2)} = -i\Sigma_{IK}^{f(1)} \frac{\not{p} + m_{f_K}}{p^2 - m_{f_K}^2} \Sigma_{KJ}^{f(1)}. \quad (3.14)$$

Zerlegt man die Selbstenergie zweiter Ordnung wie in Gl. (3.1), und nimmt man bei den

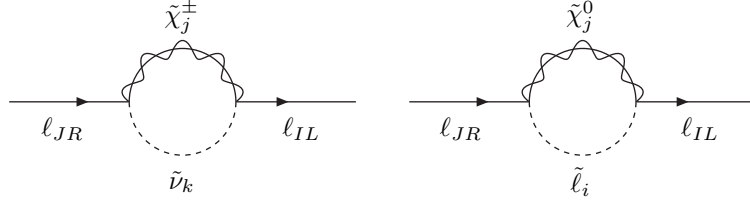


Abb. 3.5: Chargino-Sneutrino- und Neutralino-Slepton-Beitrag zur Selbstenergie

Einschleifen-Selbstenergien jeweils nur die chiralitätsflippenden Anteile mit, erhält man:

$$\begin{aligned}
\Sigma_{IJ}^{f RR(2)}(p^2) &= \sum_{K \neq I, J} \frac{-1}{p^2 - m_{fK}^2} \Sigma_{IK}^{f RL(1)} \Sigma_{KJ}^{f LR(1)}, \\
\Sigma_{IJ}^{f LL(2)}(p^2) &= \sum_{K \neq I, J} \frac{-1}{p^2 - m_{fK}^2} \Sigma_{IK}^{f LR(1)} \Sigma_{KJ}^{f RL(1)}, \\
\Sigma_{IJ}^{f LR(2)}(p^2) &= \sum_{K \neq I, J} \frac{-m_{fK}}{p^2 - m_{fK}^2} \Sigma_{IK}^{f LR(1)} \Sigma_{KJ}^{f LR(1)}, \\
\Sigma_{IJ}^{f RL(2)}(p^2) &= \sum_{K \neq I, J} \frac{-m_{fK}}{p^2 - m_{fK}^2} \Sigma_{IK}^{f RL(1)} \Sigma_{KJ}^{f RL(1)}.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Die chiral-verstärkten Zweischleifenkorrekturen zur Massenrenormierung und der Wellenfunktions-Counterterm im  $\overline{\text{MS}}$ -Schema ist folglich gegeben durch (wobei kleine Massenverhältnisse vernachlässigt werden;  $f$  steht für  $u, d, \ell$  und 1, 2, 3 für die Generationen):

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} m_{f_1}^{\text{bare}} \\ m_{f_2}^{\text{bare}} \\ m_{f_3}^{\text{bare}} \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} m_{f_1}^{\text{ren}} - \Sigma_{11}^{f LR(1)} - \frac{\Sigma_{12}^{f LR(1)} \Sigma_{21}^{f LR(1)}}{m_{f_2}} - \frac{\Sigma_{13}^{f LR(1)} \Sigma_{31}^{f LR(1)}}{m_{f_3}} \\ m_{f_2}^{\text{ren}} - \Sigma_{22}^{f LR(1)} - \frac{\Sigma_{23}^{f LR(1)} \Sigma_{32}^{f LR(1)}}{m_{f_3}} \\ m_{f_3}^{\text{ren}} - \Sigma_{33}^{f LR(1)} \end{pmatrix}, \tag{3.16} \\
\frac{\delta Z^{fL(2)}}{2} &= \begin{pmatrix} \frac{|\Sigma_{12}^{f LR(1)}|^2}{2m_{f_2}^2} + \frac{|\Sigma_{13}^{f LR(1)}|^2}{2m_{f_3}^2} & \frac{\Sigma_{13}^{f LR(1)} \Sigma_{32}^{f LR(1)}}{m_{f_2} m_{f_3}} & -\frac{\Sigma_{12}^{f LR(1)} \Sigma_{23}^{f LR(1)}}{m_{f_3}^2} \\ -\frac{\Sigma_{23}^{f LR(1)} \Sigma_{31}^{f LR(1)}}{m_{f_2} m_{f_3}} & \frac{|\Sigma_{23}^{f LR(1)}|^2}{2m_{f_3}^2} + \frac{|\Sigma_{12}^{f LR(1)}|^2}{2m_{f_2}^2} & -\frac{\Sigma_{21}^{f LR(1)} \Sigma_{13}^{f LR(1)}}{m_{f_3}^2} \\ -\frac{\Sigma_{32}^{f LR(1)} \Sigma_{21}^{f LR(1)}}{m_{f_2} m_{f_3}} & \frac{\Sigma_{31}^{f LR(1)} \Sigma_{12}^{f LR(1)}}{m_{f_2} m_{f_3}} & \frac{|\Sigma_{13}^{f LR(1)}|^2}{2m_{f_3}^2} + \frac{|\Sigma_{23}^{f LR(1)}|^2}{2m_{f_3}^2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Die Wellenfunktionsrenormierung in zweiter Ordnung ist für die Unitarität der CKM-Matrix nötig [62].

Nach dieser etwas allgemeineren Herangehensweise konzentrieren wir uns im Folgenden auf das MSSM und geben die Formeln für die Selbstenergien an. Da die SUSY-Teilchen viel schwerer als die Leptonen und leichtesten fünf Quarks sein müssen und aufgrund der Kinematik der Prozesse, können die Einschleifen-Selbstenergien bei verschwindendem äußeren Impuls ausgewertet und Terme, die durch  $m_{fI}^2/M_{\text{SUSY}}^2$  unterdrückt sind, vernachlässigt werden. Etwas transparentere Formeln für die jeweiligen Problemstellungen (z.B. chiral- oder  $\tan \beta$ -verstärkt; Auswirkung der Staumischung) werden in den entsprechenden Kapiteln vorgestellt.

Im Lepton-Fall tragen Neutralino-Slepton- und Chargino-Sneutrino-Schleifen zu den Selbstenergien  $\Sigma_{IJ}^{\ell LR}$  bei (siehe Abb. 3.5). Mit den Konventionen von Anhang A.1 und A.3 sind sie

gegeben durch:

$$\begin{aligned}\Sigma_{\ell_{IL}-\ell_{JR}}^{\tilde{\chi}^\pm} &= \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^3 \frac{m_{\tilde{\chi}_j^\pm}}{16\pi^2} \Gamma_{\ell_{JR}}^{\tilde{\chi}_j^\pm \tilde{\nu}_k^*} \Gamma_{\ell_{IL}}^{\tilde{\chi}_j^\pm \tilde{\nu}_k} B_0(m_{\tilde{\chi}_j^\pm}^2, m_{\tilde{\nu}_k}^2) \\ &= \frac{g_2 Y_{\ell_J}}{16\pi^2} \sum_{j=1,2}^3 \sum_{k=1}^3 m_{\tilde{\chi}_j^\pm} Z_-^{2j} Z_+^{1j} Z_\nu^{Jk} Z_\nu^{Ik*} B_0(m_{\tilde{\chi}_j^\pm}^2, m_{\tilde{\nu}_k}^2),\end{aligned}\tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}\Sigma_{\ell_{IL}-\ell_{JR}}^{\tilde{\chi}^0} &= \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^4 \frac{m_{\tilde{\chi}_j^0}}{16\pi^2} \Gamma_{\ell_{JR}}^{\tilde{\chi}_j^0 \tilde{\ell}_i^*} \Gamma_{\ell_{IL}}^{\tilde{\chi}_j^0 \tilde{\ell}_i} B_0(m_{\tilde{\chi}_j^0}^2, m_{\tilde{\ell}_i}^2) \\ &= \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^4 \frac{m_{\tilde{\chi}_j^0}}{16\pi^2} \left\{ -g_1^2 Z_L^{(J+3)i*} Z_L^{Ii} (Z_N^{1j})^2 - g_1 g_2 Z_L^{(J+3)i*} Z_L^{Ii} Z_N^{1j} Z_N^{2j} \right. \\ &\quad - \sqrt{2} g_1 Y_{\ell_I} Z_L^{(J+3)i*} Z_L^{(I+3)i} Z_N^{1j} Z_N^{3j} + \frac{g_1}{\sqrt{2}} Y_{\ell_J} Z_L^{Ji*} Z_L^{Ii} Z_N^{3j} Z_N^{1j} \\ &\quad \left. + \frac{g_2}{\sqrt{2}} Y_{\ell_J} Z_L^{Ji*} Z_L^{Ii} Z_N^{3j} Z_N^{2j} + Y_{\ell_I} Y_{\ell_J} Z_L^{Ji*} Z_L^{(I+3)i} (Z_N^{3j})^2 \right\} B_0(m_{\tilde{\chi}_j^0}^2, m_{\tilde{\ell}_i}^2).\end{aligned}\tag{3.18}$$

Die Summe beider Beiträge bezeichnen wir mit:

$$\Sigma_{IJ}^{\ell LR} = \Sigma_{\ell_{IL}-\ell_{JR}}^{\tilde{\chi}^0} + \Sigma_{\ell_{IL}-\ell_{JR}}^{\tilde{\chi}^\pm}.\tag{3.19}$$

Die  $B_0$ -Funktion weist hierbei eine Divergenz auf. Nimmt man nur den endlichen Anteil, entspricht dies gerade der Renormierungsvorschrift im On-Shell-Schema. Dennoch bleibt die Abhängigkeit von der Massenskala  $\mu_{\text{dim}}$ , die sich durch die dimensionale Regularisierung ergibt, bestehen, mit der Konsequenz, dass die Selbstenergie eine Abhängigkeit von  $\log\left(\frac{M_{\text{SUSY}}^2}{\mu_{\text{dim}}^2}\right)$  besitzt. Im Chargino-Beitrag tritt die Abhängigkeit aus der Kopplung an  $H_d$  auf, so dass die Selbstenergie proportional zu  $y_\ell g_2 \sum_{j=1,2} m_{\tilde{\chi}_j^\pm} Z_-^{2j} Z_+^{1j} \log \mu_{\text{dim}} \propto y_\ell g_2^2 v_d \log \mu_{\text{dim}}$  ist. Die Kopplung an  $H_u$  muss jedoch endlich sein, da es auf Baumgraphenniveau keinen  $\ell_L H_u \ell_R$ -Vertex gibt. Im Grenzfall von großem  $\tan \beta$  gilt  $v_d \rightarrow 0$ , so dass die  $\mu_{\text{dim}}$ -Abhängigkeit herausfällt. Nimmt man den Beitrag  $\propto v_d$  jedoch mit, müssen in konsistenter Weise auch chiralitätserhaltende Schleifendiagramme mit anschließendem Chiralitätsflip durch die Bewegungsgleichung mit eingebunden werden, welche in der Wellenfunktionsrenormierung auftauchen. Im Spezialfall von großem  $\tan \beta$  bekommen wir:

$$\begin{aligned}\Delta_\ell &= \epsilon_\ell \tan \beta = \frac{\alpha_1}{4\pi} \mu M_1 \tan \beta \left[ \frac{1}{2} I(M_1^2, \mu^2, m_{\tilde{\ell}_L}^2) - I(M_1^2, \mu^2, m_{\tilde{\ell}_R}^2) + I(M_1^2, m_{\tilde{\ell}_L}^2, m_{\tilde{\ell}_R}^2) \right] \\ &\quad - \frac{\alpha_2}{4\pi} \mu M_2 \tan \beta \left[ \frac{1}{2} I(M_2^2, \mu^2, m_{\tilde{\ell}_L}^2) + I(M_2^2, \mu^2, m_{\tilde{\nu}_\ell}^2) \right].\end{aligned}\tag{3.20}$$

Die ersten vier Terme stammen aus der Neutralino-Schleife und der letzte aus der Chargino-Schleife. Dies entspricht einer Entwicklung in  $\frac{v}{M_{\text{SUSY}}}$  bis zur führenden Ordnung. Berechnet man die Massenrenormierung im Rahmen einer effektiven Theorie, bekommt man direkt dieses Ergebnis. Da in Kapitel 3.3 auch der Quarksektor betrachtet wird, sollen noch die Quarkselbstenergien angegeben werden. Der Gluino-Beitrag lautet:

$$\Sigma_{q_{IL}-q_{JR}}^{\tilde{g}} = \sum_{i=1}^6 \frac{m_{\tilde{g}}}{16\pi^2} (\Gamma_{q_{JR}}^{\tilde{g} \tilde{q}_i})^* \Gamma_{q_{IL}}^{\tilde{g} \tilde{q}_i} B_0(m_{\tilde{g}}^2, m_{\tilde{q}_i}^2) = -\frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \sum_{i=1}^6 m_{\tilde{g}} Z_Q^{(J+3)i*} Z_Q^{Ii} B_0(m_{\tilde{g}}^2, m_{\tilde{q}_i}^2)$$

und für den Neutralino- und Chargino-Beitrag erhalten wir:

$$\Sigma_{d_{IL}-d_{JR}}^{\tilde{\chi}^0} = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^4 \frac{m_{\tilde{\chi}_j^0}}{16\pi^2} \Gamma_{d_{JR}}^{\tilde{\chi}_j^0 \tilde{d}_i^*} \Gamma_{d_{IL}}^{\tilde{\chi}_j^0 \tilde{d}_i} B_0(m_{\tilde{\chi}_j^0}^2, m_{\tilde{d}_i}^2), \quad (3.21)$$

$$\Sigma_{d_{IL}-d_{JR}}^{\tilde{\chi}^\pm} = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^2 \frac{m_{\tilde{\chi}_j^\pm}}{16\pi^2} \Gamma_{d_{JR}}^{\tilde{\chi}_j^\pm \tilde{u}_i^*} \Gamma_{d_{IL}}^{\tilde{\chi}_j^\pm \tilde{u}_i} B_0(m_{\tilde{\chi}_j^\pm}^2, m_{\tilde{d}_i}^2). \quad (3.22)$$

Die Selbstenergie für den Up-Sektor erhält man einfach durch Ersetzung von  $d$  durch  $u$ . Die Summe aller Beiträge bezeichnen wir wie folgt:

$$\Sigma_{IJ}^{qLR} = \Sigma_{q_{IL}-q_{JR}}^{\tilde{g}} + \Sigma_{q_{IL}-q_{JR}}^{\tilde{\chi}^0} + \Sigma_{q_{IL}-q_{JR}}^{\tilde{\chi}^\pm} \quad (3.23)$$

Man beachte, dass im Allgemeinen die Gluino-Beiträge dominieren, da sie die starke Kopplungskonstante enthalten. In den folgenden Abschnitten untersuchen wir die phänomenologischen Konsequenzen dieser flavourverletzenden Selbstenergien.

### 3.2 Anomales magnetisches Moment und Masse des Elektrons

Sowohl die LL- als auch LR-Nebendiagonalelemente der Sleptonmassenmatrix können durch die radiativen Zerfälle  $\ell_j \rightarrow \ell_i \gamma$  eingeschränkt werden, wogegen für die RR-Elemente aufgrund einer möglichen Auslöschung zweier Beiträge nur in sehr speziellen Parameterbereichen obere Schranken abgeleitet werden können. Die Auslöschung der RR-Sensitivität ist bereits in Ref. [63, 64] analysiert worden, mit der Folgerung, dass selbst eine bessere experimentelle Sensitivität auf  $BR(\ell_j \rightarrow \ell_i \gamma)$  nicht zu stärkeren Einschränkungen im RR-Sektor führen kann. Wir stellen hier zwei Möglichkeiten vor, wie zumindest das Produkt  $|\delta_{LL}^{\ell 13} \delta_{RR}^{\ell 13}|$  eingeschränkt werden kann [10]. Im Zusammenhang mit der Elektronenmasse wenden wir ein Natürlichkeitsargument auf eine nichtentkoppelnde Korrektur an, wohingegen die Einschränkung aus dem anomalen magnetischen Moment  $a_e$  entkoppelnden Charakter besitzt. Ersteres wurde schon in Ref. [65] betrachtet, während  $a_e$  neu ist.

#### Elektronenmasse:

In Theorien mit MFV ist die Kleinheit von  $m_e$  dadurch gerechtfertigt, dass man im Grenzfall  $y_e \rightarrow 0$  die chirale Symmetrie hinzugewinnt. Durch doppelte LFV tritt jedoch ein zweiter Symmetriebrechungsparameter  $y_\tau \delta_{LL}^{\ell 13} \delta_{RR}^{\ell 13}$  (Definition siehe Gl. (2.72)) auf, was zu großen Korrekturen zur Elektronenmasse führen kann (siehe Abb. 3.6). Gemäß dem Natürlichkeitsprinzip fordern wir, dass diese Korrektur kleiner als die Elektronenmasse selbst sein soll. Das ist dieselbe Argumentation mit der Niederenergie-SUSY gerechtfertigt wird: große Auslöschungen zwischen der nackten Higgsmasse und den Schleifenkorrekturen müssen vermieden werden, mit der Konsequenz, dass die Massen der Superpartner unterhalb der TeV-Skala liegen. Dieses Argument angewandt auf leichte Fermionmassen wurde bereits in der Pionierarbeit [66] von Gabbiani et al. studiert. Dort wurden jedoch nur Photinos

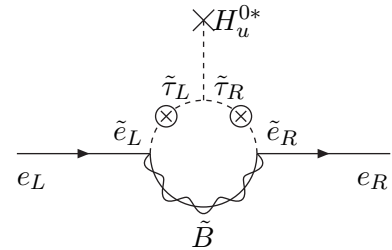


Abb. 3.6: Dominanter doppelter LFV-Beitrag bei großem  $\tan \beta$  zu  $m_e$ .

und keine Flavourverletzung berücksichtigt<sup>1</sup>. In diesem Abschnitt konzentrieren wir uns auf chiralitätserhaltende, flavourverletzende Masseneinsetzungen, um das Produkt  $\delta_{LL}^{\ell 13} \delta_{RR}^{\ell 13}$  unabhängig von der SUSY-Skala einzuschränken. Der dominante,  $\tan \beta$ -verstärkte Beitrag zur flavourerhaltenden Selbstenergie durch doppelte LFV ist gegeben durch:

$$\Sigma_e^{\text{FV}} = \frac{\alpha_1}{4\pi} \mu M_1 m_{\tilde{e}_L} m_{\tilde{e}_R} m_{\tilde{\tau}_L} m_{\tilde{\tau}_R} \delta_{LL}^{\ell 13} \delta_{RR}^{\ell 13} \frac{m_\tau \tan \beta}{1 + \epsilon_\tau \tan \beta} F_0(M_1^2, m_{\tilde{e}_L}^2, m_{\tilde{e}_R}^2, m_{\tilde{\tau}_L}^2, m_{\tilde{\tau}_R}^2). \quad (3.24)$$

Die Funktion  $F_0$  ist in Anhang A.3 angegeben. Für entartete SUSY-Massen vereinfacht sich dies zu

$$\Sigma_e^{\text{FV}} = -\frac{\alpha_1}{48\pi} \frac{m_\tau \tan \beta}{1 + \epsilon_\tau \tan \beta} \delta_{LL}^{\ell 13} \delta_{RR}^{\ell 13}. \quad (3.25)$$

Das Fine-Tuning-Argument verbietet große zufällige Auslöschungen zwischen den zwei Beiträgen zu  $m_e$ . Deshalb fordern wir  $\left| \frac{m_e + \Sigma_e^{\text{FV}}}{1 + \epsilon_e \tan \beta} - m_e \right| \leq m_e$  und finden eine obere Grenze (siehe Tab. 3.1), welche durch

$$\boxed{\left| \delta_{LL}^{\ell 13} \delta_{RR}^{\ell 13} \right| \lesssim 0.1} \quad (3.26)$$

zusammengefasst werden kann. Schreiben wir  $\Sigma_e^{\text{FV}} \equiv \frac{m_\tau \tan \beta}{1 + \epsilon_\tau \tan \beta} \Delta_{LR}^e$ , um mit der Notation von Ref. [68] vergleichen zu können, ändert sich die geladene Higgskopplung an Elektron und Elektronneutrino zu:

$$\begin{aligned} \Gamma_{e\nu_e}^{H^+} = -y_e \sin \beta &= \frac{g_2}{\sqrt{2} M_W} \frac{m_e}{1 + \epsilon_e \tan \beta} \tan \beta \left( 1 + \frac{\Sigma_e^{\text{FV}}}{m_e} \right) \\ &= \frac{g_2}{\sqrt{2} M_W} \frac{m_e}{1 + \epsilon_e \tan \beta} \tan \beta \left( 1 + \frac{m_\tau}{m_e} \frac{\tan \beta}{1 + \epsilon_\tau \tan \beta} \Delta_{LR}^e \right). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Dies wird in Abschnitt 3.6 im Zusammenhang mit der Observable  $R_K$  verwendet.

**Das anomale magnetische Moment des Elektrons**  $a_e$  spielt in der QED eine zentrale Rolle. Eine präzise Messung von  $a_e$  ist, unter der Annahme der Gültigkeit der QED, die beste Quelle zur Bestimmung der Feinstrukturkonstanten  $\alpha_e$  [69]. Umgekehrt kann man den Wert von  $\alpha_e$  von einem (weniger genauen) Experiment nehmen und es in die Theorie-Vorhersage für  $a_e$  einzusetzen, wodurch  $a_e$  auf neuen-Physik-Beiträge getestet werden kann. Die neueste Rechnung ergibt [70]

$$a_e = 1\,159\,652\,182.79(7.71) \times 10^{-12}. \quad (3.28)$$

Dabei stammt die größte Unsicherheit aus der zweitbesten Messung von  $\alpha_e^{-1} = 137.03599884(91)$  aus einem Rubidium-Atom-Experiment [71].

Supersymmetrische Beiträge zum magnetischen Moment sind aufgrund der kleinen Yukawakopplung und der SUSY-Unterdrückung für gewöhnlich klein. Durch den Verstärkungsfaktor  $y_\tau$  in der doppelten LFV können die SUSY-Beiträge vergleichbar groß wie schwache oder hadronische Beiträge werden [70], d.h. von der Ordnung  $\mathcal{O}(10^{-12})$ , was zu einer Einschränkung an die flavourverletzenden Parameter  $\delta_{LL}^{\ell 13}$  und  $\delta_{RR}^{\ell 13}$  führt. In Ref. [63] sind die magnetischen und elektrischen Dipolmomente  $a_i$  und  $d_i$  der geladenen Leptonen  $\ell_i$  ( $i = e, \mu, \tau$ ) im MSSM

<sup>1</sup>Der Fall von radiativer Massenerzeugung via trilinearere Terme wurde in Ref. [67] studiert. Eine aktualisierte Version inklusive der Kombination zweier flavourverletzender Selbstenergien ist in Ref. [11] zu finden und wird in Abschnitt 3.3 beschrieben.



Szenario		$x = 0.3$	$x = 1$	$x = 1.5$	$x = 3.0$	für
1	$M_1 = M_2 = m_L = m_R$	0.261	0.073	0.050	0.026	$\delta_{RR}^{\ell 13} \delta_{LL}^{\ell 13} > 0$
		0.234	0.059	0.040	0.023	$\delta_{RR}^{\ell 13} \delta_{LL}^{\ell 13} < 0$
2	$3M_1 = M_2 = m_L = m_R$	0.301	0.083	0.057	0.029	$\delta_{RR}^{\ell 13} \delta_{LL}^{\ell 13} > 0$
		0.269	0.067	0.045	0.024	$\delta_{RR}^{\ell 13} \delta_{LL}^{\ell 13} < 0$
3	$M_1 = M_2 = 3m_L = m_R$	0.292	0.082	0.057	0.031	$\delta_{RR}^{\ell 13} \delta_{LL}^{\ell 13} > 0$
		0.235	0.067	0.042	0.027	$\delta_{RR}^{\ell 13} \delta_{LL}^{\ell 13} < 0$
4	$M_1 = M_2 = \frac{m_L}{3} = m_R$	0.734	0.210	0.142	0.071	$\delta_{RR}^{\ell 13} \delta_{LL}^{\ell 13} > 0$
		0.702	0.190	0.127	0.064	$\delta_{RR}^{\ell 13} \delta_{LL}^{\ell 13} < 0$
5	$3M_1 = M_2 = m_L = 3m_R$	0.731	0.205	0.137	0.067	$\delta_{RR}^{\ell 13} \delta_{LL}^{\ell 13} > 0$
		0.693	0.179	0.116	0.054	$\delta_{RR}^{\ell 13} \delta_{LL}^{\ell 13} < 0$

Tabelle 3.1: Unterschiedliche Massenszenarien und die entsprechenden oberen Schranken für  $|\delta_{RR}^{\ell 13} \delta_{LL}^{\ell 13}|$ . Hierbei bezeichnet  $m_{R,L}$  die mittlere rechts- und linkshändige Slep-tonmasse,  $M_1$  und  $M_2$  sind die Bino- und Winomassen und  $x = \mu/m_R$ . In allen Szenarien wurde  $\tan \beta = 50$  und  $\text{sgn}(\mu) = +1$  gesetzt.

berechnet worden, wobei sowohl flavourerhaltende als auch flavourverletzende Elemente in der Masseneinsatznäherung betrachtet wurden. In der phänomenologischen Analyse in Ref. [63] wurde, um  $\delta_{XY}^{\ell ij}$  einzuschränken, nur  $a_\mu$  und die experimentellen Schranken an  $d_\mu$  und  $d_e$  verwendet, nicht jedoch  $a_e$ . Unsere Betrachtung von  $a_e$  fügt einen neuen Aspekt zur phänomenologischen Analyse von flavourverletzenden Parametern im MSSM hinzu und ergänzt in dieser Hinsicht die Analyse in Ref. [63].

Im MSSM tragen Neutralino- und Chargino-Schleifen zum magnetischen Moment bei, wobei das Photon an ein geladenes Teilchen koppelt (vergleiche Abb. 3.5 mit zusätzlichem Photon bei  $\tilde{\ell}_i$  bzw.  $\tilde{\chi}_j^\pm$ ). Das analytische Ergebnis für den flavourerhaltenden Fall wurde in Ref. [72,73] berechnet. Wir geben es mit einer leichten Verallgemeinerung der Mischungsmatrizen (siehe Diskussion in Abschnitt 2.2.2) für den flavourverletzenden Fall an:

$$a_e^{\tilde{\chi}^0} = -\frac{m_e}{16\pi^2} \sum_{A=1}^4 \sum_{X=1}^6 \left[ \frac{m_e}{m_{\tilde{\ell}_X}} \left( \left| \Gamma_{eL}^{\tilde{\chi}_A^0 \tilde{\ell}_X} \right|^2 + \left| \Gamma_{eR}^{\tilde{\chi}_A^0 \tilde{\ell}_X} \right|^2 \right) f_1^{\tilde{\chi}^0}(x_{AX}) + \frac{m_{\tilde{\chi}_A^0}}{m_{\tilde{\ell}_X}^2} \text{Re} \left( \Gamma_{eL}^{\tilde{\chi}_A^0 \tilde{\ell}_X} \Gamma_{eR}^{\tilde{\chi}_A^0 \tilde{\ell}_X*} \right) f_2^{\tilde{\chi}^0}(x_{AX}) \right], \quad (3.29)$$

$$a_e^{\tilde{\chi}^\pm} = \frac{m_e}{16\pi^2} \sum_{A=1}^2 \sum_{X=1}^3 \left[ \frac{m_e}{m_{\tilde{\nu}_X}} \left( \left| \Gamma_{eL}^{\tilde{\chi}_A^\pm \tilde{\nu}_X} \right|^2 + \left| \Gamma_{eR}^{\tilde{\chi}_A^\pm \tilde{\nu}_X} \right|^2 \right) f_1^{\tilde{\chi}^\pm}(x_{AX}) + \frac{m_{\tilde{\chi}_A^\pm}}{m_{\tilde{\nu}_X}^2} \text{Re} \left( \Gamma_{eL}^{\tilde{\chi}_A^\pm \tilde{\nu}_X} \Gamma_{eR}^{\tilde{\chi}_A^\pm \tilde{\nu}_X*} \right) f_2^{\tilde{\chi}^\pm}(x_{AX}) \right], \quad (3.30)$$

mit  $x_{AX} = m_{\tilde{\chi}_A^0}^2/m_{\tilde{\ell}_X}^2$  im Neutralino-Fall und  $x_{AX} = m_{\tilde{\chi}_A^\pm}^2/m_{\tilde{\nu}_X}^2$  im Chargino-Fall. Die Kopp-lungsmatrizen und Schleifenfunktionen sind in Anhang A.1 und A.3.1 angegeben. Beiträge proportional zur Elektronmasse und solche, die potenziell keine  $\tan \beta$ -Verstärkung aufweisen, sind hier gegenüber den jeweils hinteren Termen  $\propto f_2$  nicht relevant. Das anomale magnetische Moment des Myons wird im Rahmen radiativer Massenerzeugung in Abschnitt 3.4 diskutiert. In diesem Fall muss in obigen Formeln überall  $e$  durch  $\mu$  ersetzt werden. Die Abhängigkeit von  $\tan \beta$  ist in den Mischungsmatrizen enthalten und stammt von einem Chiralitätsflip des Selektorns oder im Chargino-Fall von der Kombination  $y_e v_u = m_e \tan \beta$ . Vereinfachte Aus-

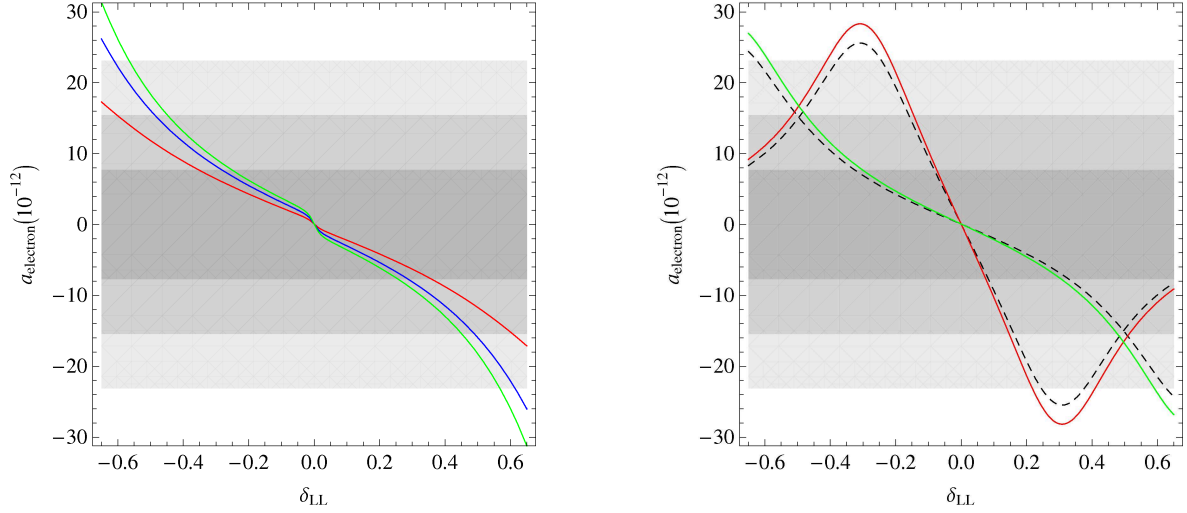


Abb. 3.7: SUSY-Beiträge zu  $a_e$  als Funktion von  $\delta_{LL}^{\ell 13}$  mit  $M_{\text{SUSY}} = 500$  GeV,  $\tan \beta = 50$  und  $\mu = M_{\text{SUSY}}$ . Links: Szenario 5 mit (von steil zu flach)  $\delta_{RR}^{\ell 13} = 0.6$  (grün); 0.4 (blau); 0.2 (rot); Rechts: Szenario 2 ( $\delta_{RR}^{\ell 13} = 0.6$  (grün); 0.2 (rot)), wobei die gestrichelten Kurven die Massenrenormierung nicht berücksichtigen. Die hell-, mittel-, und dunkelgrauen Regionen entsprechen den theoretischen  $1\sigma$ ,  $2\sigma$  und  $3\sigma$  Bereichen.

drücke erhält man, wenn man eine universelle SUSY-Masse  $M_{\text{SUSY}}$  für alle SUSY-Teilchen, reelle Parameter sowie das gleiche Vorzeichen für  $M_1$  und  $M_2$  wählt [74] und  $a_e$  nach Potenzen von  $M_W/M_{\text{SUSY}}$  oder  $1/\tan \beta$  entwickelt:

$$\begin{aligned}
 a_e^{\chi^0} &= \text{sgn}(\mu M_2) \frac{g_1^2 - g_2^2}{192\pi^2} \frac{m_e^2}{M_{\text{SUSY}}^2} \tan \beta \left[ 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\tan \beta}, \frac{M_W}{M_{\text{SUSY}}}\right) \right], \\
 a_e^{\chi^\pm} &= \text{sgn}(\mu M_2) \frac{g_2^2}{32\pi^2} \frac{m_e^2}{M_{\text{SUSY}}^2} \tan \beta \left[ 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\tan \beta}, \frac{M_W}{M_{\text{SUSY}}}\right) \right].
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

Die  $1/M_{\text{SUSY}}^2$ -Abhängigkeit spiegelt das Entkopplungsverhalten wider. Die numerischen Ergebnisse wurden mit der exakten Formel berechnet. Bisher sind die Yukawakopplungen noch unrenormiert. Möchte man die in Abschnitt 3.1 besprochenen  $\tan \beta$ -verstärkten Korrekturen zur Elektronenmasse mitnehmen, muss der zweite Term, welcher in der Yukawakopplung näherungsweise linear ist, mit  $\frac{1}{1+\Delta_e}$  multipliziert werden [48]. Für die numerische Analyse setzen wir nun alle flavourverletzenden Masseneinträge bis auf  $\delta_{LL}^{\ell 13}$  und  $\delta_{RR}^{\ell 13}$  auf Null. Die theoretische Unsicherheit in Gl. (3.28) wird als  $1\sigma$ -Abweichung verwendet, und wir verlangen, dass der SUSY-Beitrag zu  $a_e$  kleiner als  $3\sigma$  ist. In Abb. 3.7 sind die Ergebnisse exemplarisch für unsere Szenarien 2 und 5 aus Tab. 3.1 dargestellt. Die Schranke hängt stark von der SUSY-Massenskala ab und wird ab  $M_{\text{SUSY}} \gtrsim 500$  GeV schlechter als die Einschränkung von  $m_e$ . Wir finden  $|\delta_{LL}^{\ell 13} \delta_{RR}^{\ell 13}| < 0.1$  für  $M_{\text{SUSY}} \lesssim 500$  GeV, in Übereinstimmung mit unserer nichtentkoppelnden Schranke in Gl. (3.26).

### 3.3 Chirale Korrekturen zu leichten Fermionen und Konsequenzen für Sfermionmassen

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Effekte der nichtentkoppelnden, chiral-verstärkten Selbstenergien  $\propto A_f^{IJ} v_d / \text{Max}[m_{f_I}, m_{f_J}]$  über die führende Ordnung hinaus, und zwar sowohl im Quark- als auch im Leptonsektor [11]. Diese nächst-zu-führenden (NLO von „next-to-leading-order“) Korrekturen sind nicht nur für die Unitarität der Renormierung der CKM-Matrix notwendig [62], sondern numerisch auch für die leichten Fermionmassen wichtig. Wir konzentrieren uns hier auf die trilinearen  $A$ -Terme mit generischer Flavourstruktur. In Ref. [62, 75] wurde sogar gezeigt, dass die Flavourverletzung im Quarksektor allein durch den SUSY-brechenden trilinearen Term verursacht werden kann, da alle FCNC-Grenzen für  $M_{\text{SUSY}} \geq 500$  GeV eingehalten werden. Radiativ generierte Fermionmassen via softe, trilineare  $A$ -Terme entsprechen gerade der oberen Schranke des Fine-Tuning-Arguments, bei dem die Korrektur zur Masse gerade so groß wie die physikalische Masse selbst ist. Mittels des 't Hooftschen Natürlichkeitsprinzips leiten wir hier starke Einschränkungen an die Masseneinsetzungen  $\delta_{LR,RL}^{fIJ}$  ab. Dazu gehören zum einen die flavourdiagonalen Elemente  $\delta_{LR}^{u,d,\ell 11,22}$ , zum anderen ermöglichen uns die Zweischleifenkorrekturen, die Elemente  $\delta_{RL}^{f13}$  (und  $\delta_{RL}^{d23}$ ) einzuschränken, wenn gleichzeitig  $\delta_{LR}^{f13}$  (bzw.  $\delta_{LR}^{d23}$ ) von Null verschieden ist. Bisher ist  $\delta_{RL}^{u13}$  beispielsweise unbeschränkt. Dieses Ergebnis ist für die Single-Top-Produktion am LHC relevant.

**Radiative Massengenerierung:** Alle Massenterme verknüpfen links- und rechtshändige Felder und verletzen somit die chirale Symmetrie. Werden die Fermionmassen der ersten beiden Generationen jedoch radiativ über softe, trilineare  $A$ -Terme erzeugt, d.h. nur die Yukawakopplungen der dritten Generation verschwinden nicht, wird die chirale Symmetrie durch softe Dimension-3-Terme gebrochen und nicht durch Dimension-4-Yukawakopplungen aus dem Superpotenzial. Dies impliziert zusätzliche Symmetrien im Superpotenzial, und die kleinen Massen und CKM-Mischungswinkel können erklärt werden. Der Mechanismus der radiativen Massenerzeugung wurde bereits in Ref. [67, 76–78] untersucht. Dieses Modell hat die Eigenschaft, dass es in den ersten beiden Generationen minimal flavourverletzend und RG-invariant ist. Ferner entsteht nicht das Problem von zu großen elektrischen Dipolmomenten, denn die Phasen von Masse und elektrischem Dipolmoment sind annähernd gleich, d.h. man hat kein SUSY-Flavour-Problem [67]. Die gleichen virtuellen Prozesse, die den Fermionen Masse verleihen, führen allerdings auch zu zusätzlichen chiralitätsverletzenden Operatoren unterhalb der SUSY-Skala. Das anomale magnetische Moment des Myons beispielsweise stammt aus dem gleichen Diagramm mit einem zusätzlichen externen Photon und ist diesmal nicht schleifenunterdrückt. Das anomale magnetische Moment des Myons testet demnach sehr sensitive die Möglichkeit einer radiativen Myonmasse. Dies werden wir unter Berücksichtigung möglicher LFV-Effekte in Kapitel 3.4 untersuchen.

**Bemerkung:** Alle Einschränkungen in diesem Abschnitt sind nichtentkoppelnd. Obwohl  $\delta_{LR}^{fIJ}$  ein dimensionsloser Parameter ist, beinhaltet er nicht nur SUSY-Parameter, sondern ist auch proportional zum VEV. Er skaliert deshalb wie  $v/M_{\text{SUSY}}$ . Folglich werden unsere Einschränkungen an  $\delta_{LR}^{fIJ}$  stärker für  $M_{\text{SUSY}} \rightarrow \infty$ . Ähnliche Effekte treten in durch Higgsfelder vermittelten FCNC-Prozessen auf, die wie  $1/M_H^2$  anstatt  $1/M_{\text{SUSY}}^2$  entkoppeln [43, 54, 57]. Jedoch können diese Higgseffekte in SUSY nur in Anwesenheit von nichtholomorphen Termen induziert werden, welche für unsere Einschränkungen nicht gebraucht werden. Ein Beispiel, wo nichtentkoppelnde Higgs-Beiträge LFV-Effekte haben, ist die Observable  $R_K$  [13, 68, 79], die in Kapitel 3.6 analysiert wird.

### 3.3.1 Einschränkungen an flavourdiagonale Masseneinsetzungen auf Einschleifenniveau

Mit  $I = J$  erhalten wir in Gl. (3.19) und (3.23) den flavourerhaltenden Fall. Außer dem reinen Bino ( $\propto g_1^2$ ), der vernachlässigbar kleinen Bino-Wino-Mischung ( $\propto g_1 g_2$ ) (siehe Gl. (3.18)) und dem Gluino-Beitrag sind sie alle proportional zur Yukawakopplung auf Baumgraphenniveau. Falls die leichten Fermionmassen radiativ erzeugt werden, stammen die Nebendiagonalelemente  $\delta_{LR}^{fIJ}$  der Sfermionmassenmatrix nur von soften, trilinearen Termen. In der Masseneinsetzungsnaheung vereinfachen sich die Selbstenergien in diesem Fall zu (die  $C_0$ -Funktion ist in Anhang A.3 angegeben):

$$\Sigma_{q_{IX}-q_{JY}}^{\tilde{g}} = -\frac{2\alpha_s}{3\pi} M_{\tilde{g}} m_{\tilde{q}_{JY}} m_{\tilde{q}_{IX}} \delta_{XY}^{qIJ} C_0(m_{\tilde{g}}^2, m_{\tilde{q}_{JY}}^2, m_{\tilde{q}_{IX}}^2), \quad (3.32)$$

$$\Sigma_{\ell_{IX}-\ell_{JY}}^{\tilde{B}} = -\frac{\alpha_1}{4\pi} M_1 m_{\tilde{\ell}_{JY}} m_{\tilde{\ell}_{IX}} \delta_{XY}^{\ell IJ} C_0(M_1^2, m_{\tilde{\ell}_{JY}}^2, m_{\tilde{\ell}_{IX}}^2). \quad (3.33)$$

Da die Sneutrino Massenmatrix nur aus einem LL-Block besteht, gibt es keine Chargino-Diagramme mit LR-Einsetzungen. Unter der Bedingung  $|\Sigma_{LR}^{fII}| \leq m_{fI}$  erhalten wir obere Schranken an die flavourdiagonalen  $A$ -Terme, die in Abb. 3.8 für Up, Charm, Down, Strange, Elektron und Myon dargestellt sind. Näherungsweise sind sie gegeben durch:

$$\left| \delta_{LR}^{qII} \right| \lesssim \frac{3\pi m_{qI} (M_{\text{SUSY}})}{\alpha_s (M_{\text{SUSY}}) M_{\text{SUSY}}}, \quad \left| \delta_{LR}^{\ell II} \right| \lesssim \frac{8\pi m_{\ell I}}{\alpha_1 M_{\text{SUSY}}}. \quad (3.34)$$

Im Lepton-Fall kann Gl. (3.33) weiter vereinfacht werden, wenn wir das Laufen der Massen vernachlässigen:

$$\boxed{\left| \delta_{LR}^{\ell 11} \right| \lesssim 0.0025 \left( \frac{500 \text{ GeV}}{M_{\text{SUSY}}} \right)}, \quad \boxed{\left| \delta_{LR}^{\ell 22} \right| \lesssim 0.5 \left( \frac{500 \text{ GeV}}{M_{\text{SUSY}}} \right)}. \quad (3.35)$$

### 3.3.2 Einschränkungen von Zweischleifenkorrekturen zu den Fermionmassen

Gemäß Gl. (3.16) kann die Kombination zweier flavourverletzender Selbstenergien zu Korrekturen der leichten Fermionmassen führen. Verlangt man wieder, dass keine großen numerischen Auslöschungen zwischen der nackten Masse und den supersymmetrischen Schleifenkorrekturen auftreten, so können Schranken an das Produkt  $\delta_{LR}^{fIK} \delta_{LR}^{fKI}$  abgeleitet werden, welches das bislang nur sehr grob eingeschränkte Element  $\delta_{LR}^{fKI}$ ,  $K > I$  beinhaltet. Aus der Forderung  $|\Sigma_{11}^{fLR(2)}| \leq m_{f_1}$  leiten wir obere Schranken ab, welche näherungsweise gegeben sind durch:

$$\boxed{\left| \delta_{LR}^{qI3} \delta_{LR}^{q3I} \right| \lesssim \frac{9\pi^2 m_{qI} m_{q3} (M_{\text{SUSY}})}{(\alpha_s (M_{\text{SUSY}}) M_{\text{SUSY}})^2}, \quad I \neq 3}, \quad (3.36)$$

$$\boxed{\left| \delta_{LR}^{\ell 13} \delta_{LR}^{\ell 31} \right| \lesssim \frac{64\pi^2 m_e m_\tau}{(\alpha_1 M_{\text{SUSY}})^2} \approx 0.021 \left( \frac{500 \text{ GeV}}{M_{\text{SUSY}}} \right)^2}. \quad (3.37)$$

Die Beiträge proportional zu  $\delta_{LR}^{\ell 12} \delta_{LR}^{\ell 21}$  sind für die Massenkorrektur nicht wichtig, da diese schon durch  $\mu \rightarrow e\gamma$  stark eingegrenzt sind. Ferner kann die Kombination  $\delta_{LR}^{u,\ell 23} \delta_{LR}^{u,\ell 32}$  nicht eingeschränkt werden, da das Charm bzw. Myon zu schwer ist. Wie in Ref. [80] analysiert, ist bei der Single-Top-Produktion die Masseneinsetzung  $\delta_{LR}^{u31}$  involviert, welche unter der Annahme, dass gleichzeitig  $\delta_{LR}^{d33}$  von Null verschieden ist, eine rechtshändige  $W$ -Kopplung induzieren

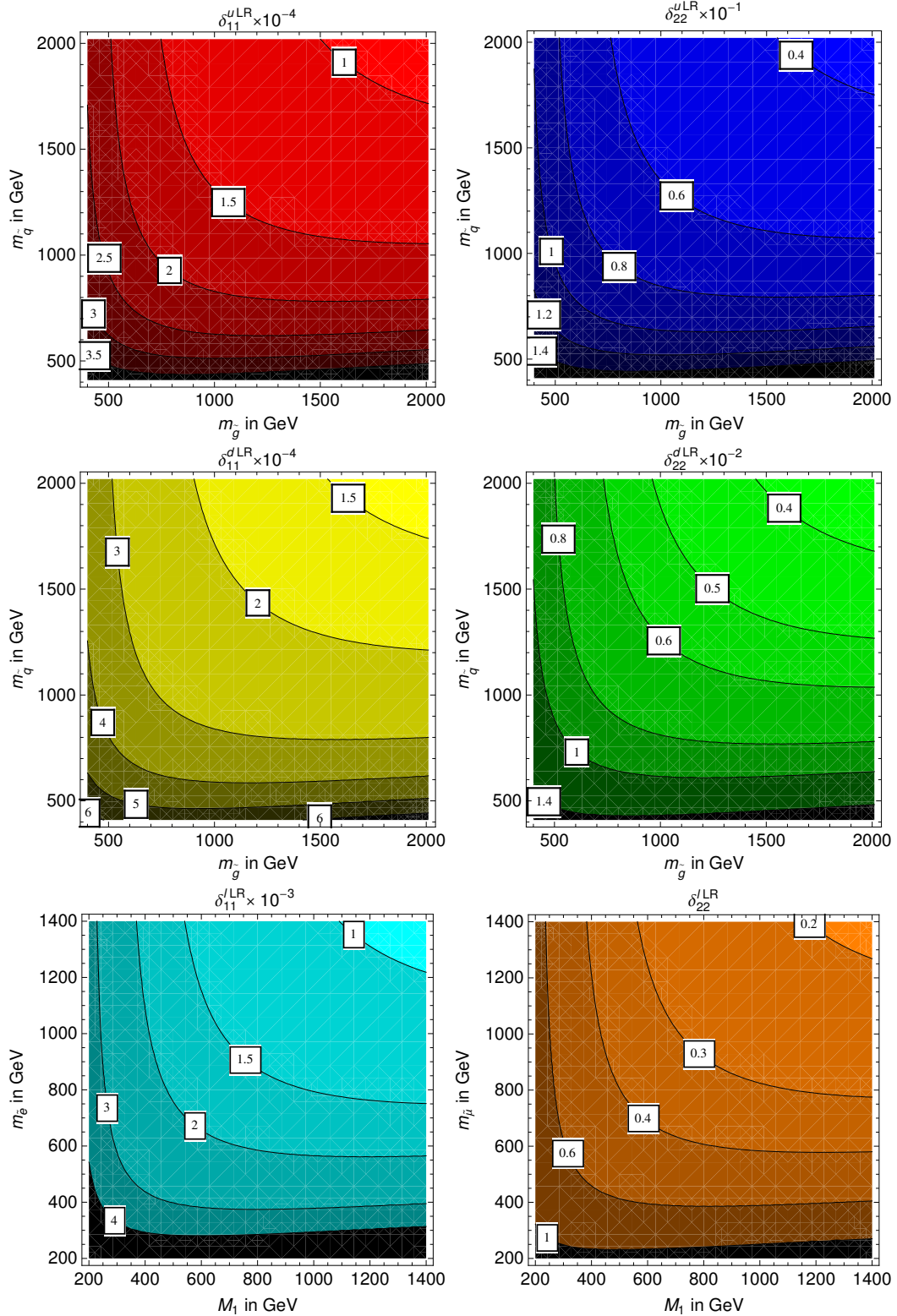


Abb. 3.8: Aus dem 't Hooftschen Natürlichkeitsprinzip abgeleitete Einschränkungen an die diagonalen Masseneinsetzungen  $\delta_{LR}^{u,d,\ell 11,22}$  als Funktion der Gluino- und Squarkmasse bzw. Bino- und Sleptonmasse.

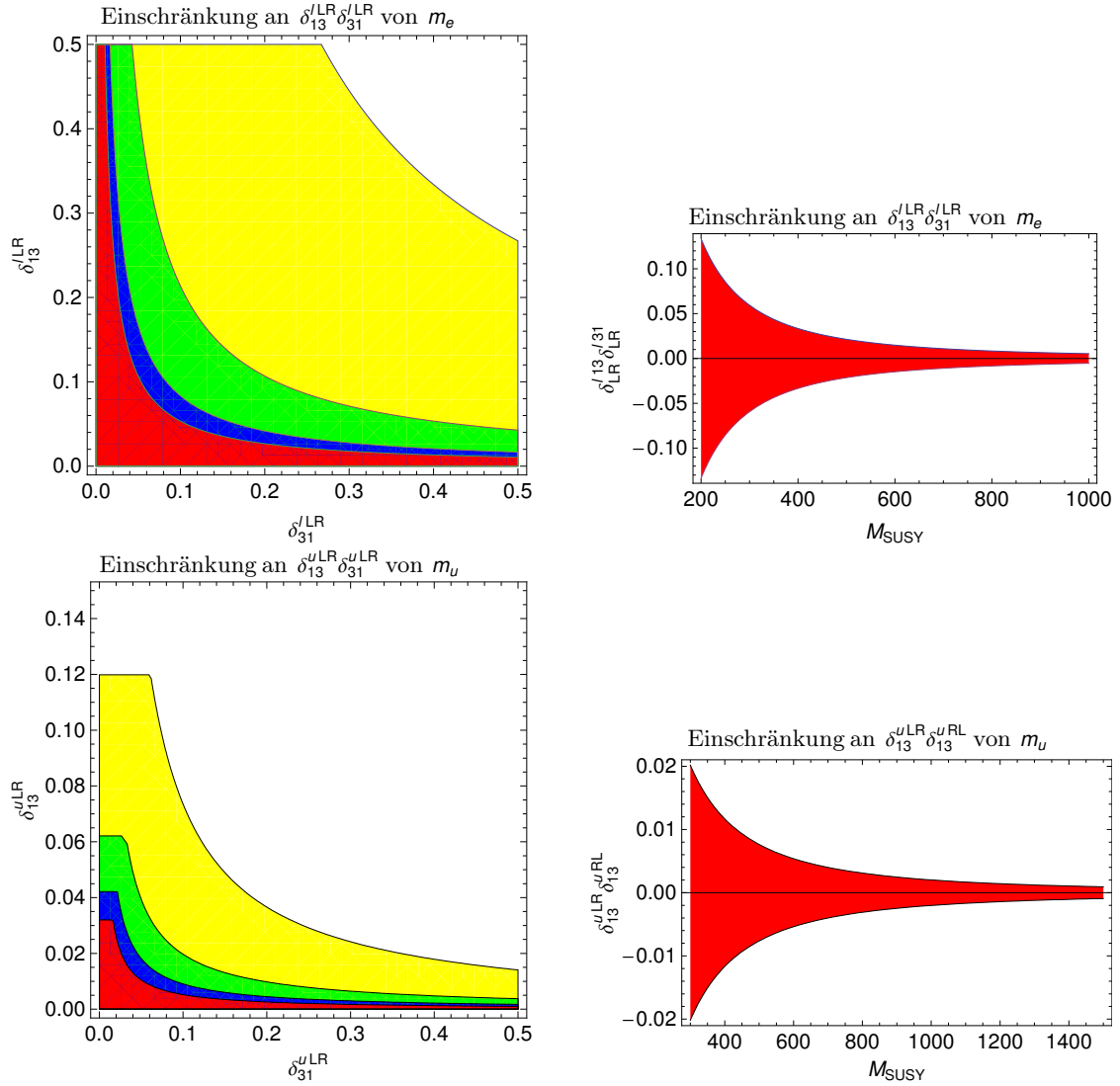


Abb. 3.9: Ergebnisse der Zweischleifenbeiträge zur Elektronmasse (erste Spalte) und Upmasse (zweite Spalte). Links: Mit dem Natürlichkeitsprinzip verträglicher Bereich (100% Schranke) für (von oben nach unten)  $M_{\text{SUSY}} = 200$  GeV (gelb), 500 GeV (grün), 800 GeV (blau), 1000 GeV (rot) im Elektron-Fall bzw.  $M_{\text{SUSY}} = 500$  GeV (gelb), 1000 GeV (grün), 1500 GeV (blau), 2000 GeV (rot) im Upquark-Fall. Rechts: Erlaubter Bereich für  $\delta_{13}^{\ell LR} \delta_{31}^{\ell LR}$  bzw.  $\delta_{13}^{u LR} \delta_{31}^{u LR}$  als Funktion von  $M_{\text{SUSY}}$ .

kann [81]. Deshalb kann unsere Schranke benutzt werden, um diesen Wirkungsquerschnitt zu begrenzen. Wie in Abb. 3.10 gezeigt, kann die Kombination  $\delta_{LR}^{d 23} \delta_{LR}^{d 32}$  begrenzt werden. Unsere Ergebnisse für die Up-, Down- und Elektronmasse sind in Abb. 3.9 und 3.10 dargestellt. Im Quark-Fall sind auch die Schranken an  $\delta_{LR}^{q 13,23}$  aus der CKM-Renormierung berücksichtigt worden, woher die zusätzliche Begrenzung stammt [62].

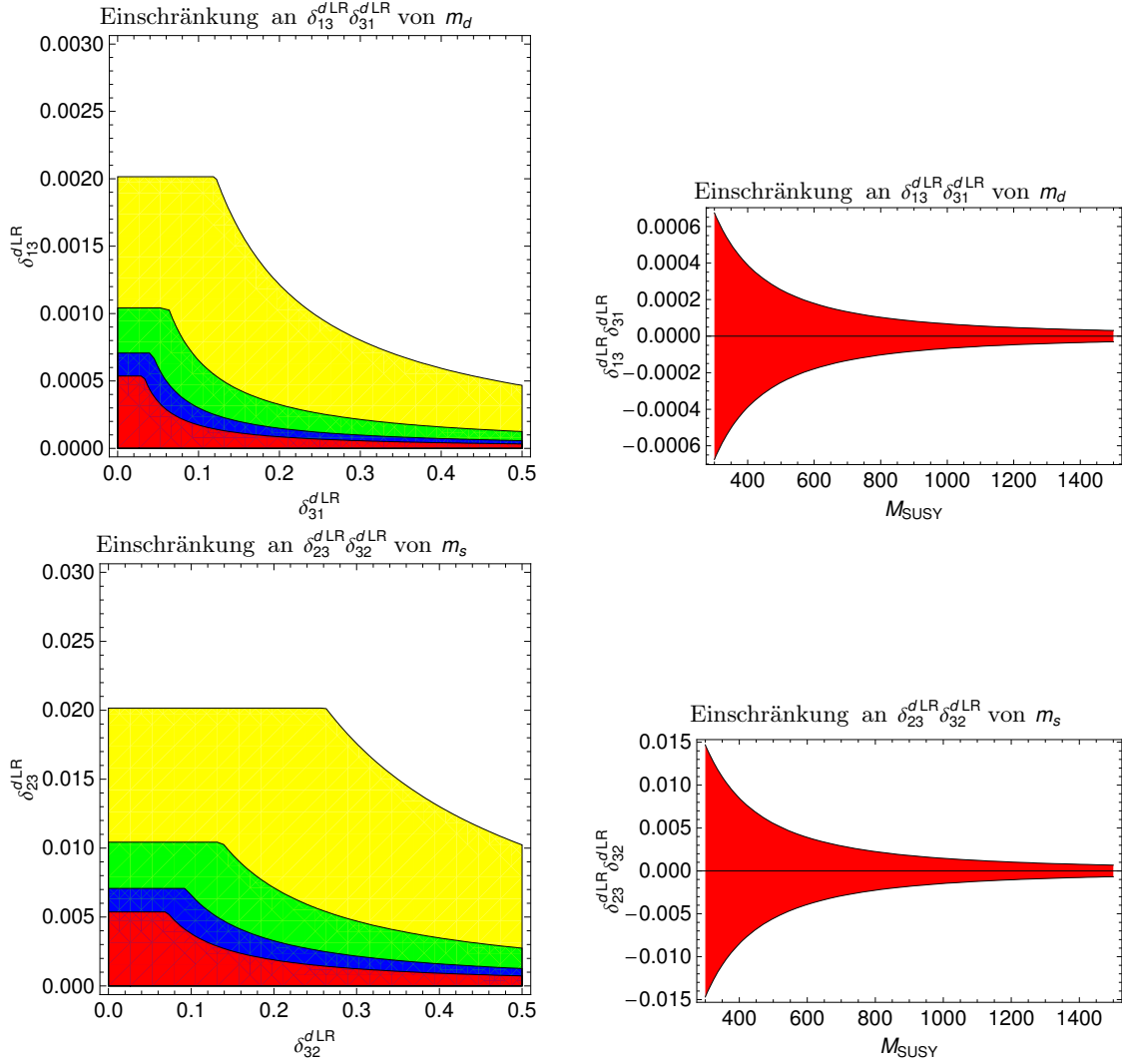


Abb. 3.10: Ergebnisse für Down- und Strangemasse wie in Abb. 3.9 für (links)  $M_{\text{SUSY}} = 500$  GeV (gelb), 1000 GeV (grün), 1500 GeV (blau), 2000 GeV (rot) und (rechts) Einschränkungen an  $\delta_{13}^{dLR}\delta_{31}^{dLR}$  bzw.  $\delta_{23}^{dLR}\delta_{32}^{dLR}$  als Funktion von  $M_{\text{SUSY}}$ .

### 3.4 Das magnetische Moment des Myons als Test für die Myon-Yukawakopplung

Im Hinblick auf eine mögliche Entdeckung eines Smyons am LHC untersuchen wir das Zusammenspiel zwischen einer soften Myon-Yukawakopplung, d.h. einer radiativen Myonmasse wie im vorherigen Abschnitt, und dem anomalen magnetischen Moment des Myons unter Einschluss von Slepton-Flavourmischung. Das anomale magnetische Moment des Myons ist sehr präzise gemessen und weicht um mehr als  $3\sigma$  von der SM-Vorhersage ab [9, 82–87]. Unter der Annahme radiativer Myonmassenerzeugung durch die trilinearen  $A$ -Terme und der Forderung, dass die SUSY-Beiträge zu  $a_\mu$  die Abweichung zwischen SM und Experiment erklären, folgen starke Einschränkungen an die Smyon- und Binomasse. Wir aktualisieren die Analyse in Ref. [67], indem wir aktuelle experimentelle und theoretische Werte verwenden. Darüberhinaus erweitern wir die Untersuchung, indem wir Effekte der Sleptonmischung miteinbeziehen,

was zu neuen Beiträgen proportional zu  $y_\tau$  führt. Dies kann prinzipiell die untere Schranke an die leichtere Masse eines smyon-artigen Sleptons<sup>2</sup> abschwächen, jedoch ist die Mischung durch die radiativen Zerfälle  $\ell_j \rightarrow \ell_i \gamma$  begrenzt.

Ein großer Triumph der Dirac-Gleichung war die Vorhersage des magnetischen Moments von Fermionen  $\vec{\mu} = g_f \frac{e_f}{2m_f} \vec{S}$  mit  $g_f = 2$ . Schleifenkorrekturen führen jedoch zu Abweichungen des gyromagnetischen Faktors von zwei. Die relevante magnetische Wechselwirkung für die Korrekturen lautet:

$$\frac{ie}{2m_\mu} F(q^2) \bar{u}(p_f) \sigma_{\mu\nu} q^\mu \epsilon^\nu u(p_i), \quad (3.38)$$

wobei  $q = p_f - p_i$  der Impuls,  $\epsilon$  der Polarisationsvektor des äußeren Photons und  $F(q^2)$  ein Formfaktor ist. Die Anomalie des magnetischen Moments ist dann gegeben durch  $(g-2)_\mu = 2F(q^2=0)$ . Die Abweichung von zwei ist definiert als  $a_\mu = \frac{1}{2}(g-2)_\mu$ . Die Diskrepanz zwischen SM-Vorhersage und Experiment liegt derzeit bei  $3.6\sigma$  [9]:

$$\Delta a_\mu = a_\mu^{\text{exp}} - a_\mu^{\text{SM}} = (28.7 \pm 8.0) \times 10^{-10}. \quad (3.39)$$

In ungebrochenen supersymmetrischen Theorien ist der gyromagnetische Faktor für alle Fermionen exakt 2 [88]. Folglich testet  $a_\mu$  direkt SUSY-Brechung. Supersymmetrie kann diese Abweichung auf natürliche Weise erklären und SUSY-Beiträge zu  $a_\mu$  wurden schon vielfach in der Literatur untersucht [48, 72, 89–94]. Der übliche Weg ist, einen geeignet großen Wert für  $\mu \tan\beta$  in der Smyonmassenmatrix zu wählen, wobei positives  $\mu$  und große Werte von  $\tan\beta$  bevorzugt sind. Wir untersuchen hier hingegen die Konsequenzen radiativer Massenerzeugung, d.h. der trilineare Term  $v_d A_\ell^{22} + v_u A_\ell^{22'}$  kann auch den gewünschten Effekt haben, ohne Quarkzerfälle oder das Higgspotenzial zu beeinflussen. Ohne Myon-Yukawakopplung gibt es keinen Chargino-Beitrag zu  $a_\mu$ , während vom Neutralino-Beitrag nur das Bino übrig bleibt (die Wino-Bino-Mischung ist vernachlässigbar klein). Deshalb hängt  $a_\mu^{\text{SUSY}}$  nur von der Smyon- und Binomasse ab (siehe Abb. 3.11). Gl. (3.29) vereinfacht sich zu:

$$\begin{aligned} a_\mu^{\tilde{\chi}^0} &= m_\mu \frac{\alpha_1}{4\pi} M_1 \sum_{X=1}^6 \text{Re} (Z_L^{2X} Z_L^{5X*}) m_{\tilde{\ell}_X}^2 \frac{1}{m_{\tilde{\ell}_X}^4} f_2^{\tilde{\chi}^0} \left( \frac{M_1^2}{m_{\tilde{\ell}_X}^2} \right) \\ &= 2m_\mu \frac{\alpha_1}{4\pi} M_1 \sum_{X=1}^6 \text{Re} (Z_L^{2X} Z_L^{5X*}) m_{\tilde{\ell}_X}^2 D_0 \left( M_1^2, m_{\tilde{\ell}_X}^2, m_{\tilde{\ell}_X}^2, m_{\tilde{\ell}_X}^2 \right). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Zusätzlich muss die Bedingung der radiativen Myonmasse erfüllt sein:

$$m_\mu \stackrel{!}{=} -\Sigma_{\mu_L - \mu_R}^{\tilde{\chi}^0} \approx \frac{\alpha_1}{4\pi} M_1 \Delta m_{LR}^{\ell 22} C_0(M_1^2, m_{\mu_1}^2, m_{\mu_2}^2), \quad (3.41)$$

wobei der letzte Schritt nur im flavourerhaltenen Fall gültig ist und  $\Delta m_{LR}^{22} = v_d A_\ell^{22} = m_{\tilde{\mu}_R} m_{\tilde{\mu}_L} \delta_{LR}^{\ell 22}$  das Nebendiagonalelement der Smyonmassenmatrix ist. In Anhang A.3.1 findet man die Funktionen  $f_2^{\tilde{\chi}^0}$ ,  $D_0$  und  $C_0$ .

## Reine Smyon-Mischung

Wir diskutieren zuerst den flavourerhaltenden Fall, in welchem Gl. (3.41) und (3.40) auf einfache Weise kombiniert werden können. Ist  $\theta_\mu$  der Smyonmischungswinkel mit  $s_{\theta_\mu} c_{\theta_\mu} =$

<sup>2</sup>Bei großer Mischung kann der Masseneigenzustand nicht mehr „Smyon“ genannt werden. Gemeint ist hier der leichteste Sleptonmasseneigenzustand mit großer Kopplung ans Myon.



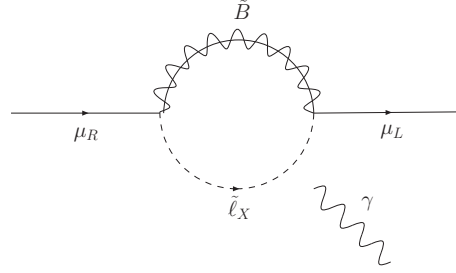


Abb. 3.11: Selbstenergie-Beitrag  $\Sigma_{22,A}^{\ell LR}$  zur Generierung von  $m_\mu$  für  $y_\mu = 0$ .  $\tilde{\ell}_X$ ,  $X = 1, \dots, 6$  bezeichnen die geladenenen Sleptonmasseneigenzustände. Mit dem zusätzlichen Photon trägt dieses Diagramm zu  $a_\mu$  bei.

$\frac{\Delta m_{LR}^{22}}{m_{\tilde{\mu}_1}^2 - m_{\tilde{\mu}_2}^2} = Z_\mu^{1X} Z_\mu^{2X*}$ , dann gilt:

$$\begin{aligned} a_\mu^{\tilde{X}0} &= 2m_\mu \frac{\alpha_1}{4\pi} M_1 s_{\theta_\mu} c_{\theta_\mu} (m_{\tilde{\mu}_1}^2 D_0(M_1^2, m_{\tilde{\mu}_1}^2, m_{\tilde{\mu}_1}^2, m_{\tilde{\mu}_1}^2) - m_{\tilde{\mu}_2}^2 D_0(M_1^2, m_{\tilde{\mu}_2}^2, m_{\tilde{\mu}_2}^2, m_{\tilde{\mu}_2}^2)) \\ &= 2m_\mu^2 \frac{I_{g-2}(M_1^2, m_{\tilde{\mu}_1}^2, m_{\tilde{\mu}_2}^2)}{I(M_1^2, m_{\tilde{\mu}_1}^2, m_{\tilde{\mu}_2}^2)}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Die Funktionen  $I$ ,  $I_{g-2}$ ,  $f_2^{\tilde{X}0}$  und  $D_0$  sind in Anhang A.3.1 angegeben. Wir verwenden physikalische Größen, welche am LHC gemessen werden könnten, d.h. die Smyonmasseneigenwerte und den Mischungswinkel (und nicht theoretische Größen wie z.B. die Massen des links- und rechts-händigen Smyons). Da das Nebendiagonalelement  $\delta_{LR}^{\ell 22}$  wegen der radiativen Myonmasse relativ groß sein muss, entsteht ein Massensplitting zwischen den zwei Smyonmasseneigenzuständen. Wenn wir der Einfachheit halber  $m_{\tilde{\mu}_L} = m_{\tilde{\mu}_R}$  annehmen, d.h. maximale Smyonmischung, erhalten wir für die leichte und schwere Smyonmasse  $m_{\tilde{\mu}_{\ell,h}}^2 = m_\mu^2 \pm v_d A_\ell^{22} = m_\mu^2 \pm \Delta m_{LR}^{\ell 22}$ . Für  $\Delta m_{LR}^{\ell 22} = \Delta m_{LR}^{\ell 22}(M_1, m_{\tilde{\mu}})$  muss der Wert aus der Bedingung radiativer Myonmassen eingesetzt werden. Unter der Annahme, dass die Diskrepanz in Gl. (3.39) durch Supersymmetrie erklärt wird, ist das Ergebnis links oben in Abb. (3.12) für die leichtere Smyonmasse dargestellt. Der Mechanismus radiativer Massenerzeugung benötigt relativ schwere Smyonen. Die Schlussfolgerung für das leichtere Smyon lautet zusammengefasst:

$$\boxed{\text{für } M_1 \leq 1 \text{ TeV} \Rightarrow 600 \text{ GeV} \leq m_{\tilde{\mu}_\ell} \leq 2200 \text{ GeV}}. \quad (3.43)$$

### Smyon-Stau-Mischung

Wir fragen uns nun, ob unter Einschluss von Lepton-Flavourverletzung die Schranke in Gl. (3.43) bestehen bleibt, oder ob man sie etwas abschwächen kann. Dazu müssen wir drei Aspekte beachten:

- Wie im vorherigen Abschnitt 3.3 ist es möglich, die Myon- und Elektronmasse radiativ über Kopplungen mit  $y_\tau$  zu generieren. Da solche flavourverletzenden Diagramme sowohl zu  $a_\mu$  als auch zu  $m_\mu$  beitragen, ist der Effekt jedoch beschränkt (siehe Abb. 3.11).
- Eine zusätzliche Flavourmischung erniedrigt die Masse eines smyon-artigen Slepions.
- Die Schranken der radiativen Zerfälle  $\ell_j \rightarrow \ell_i \gamma$  müssen eingehalten werden.

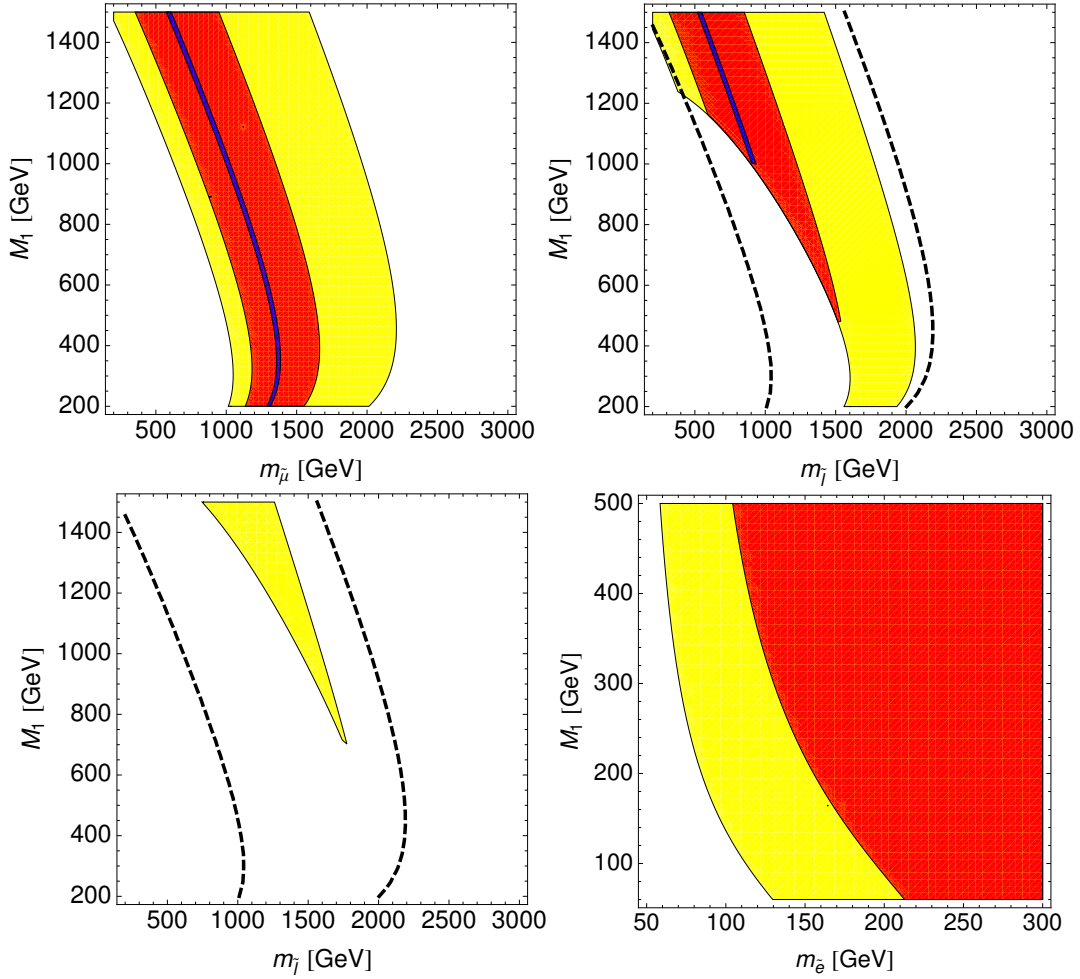


Abb. 3.12: Oben links: Erlaubter Bereich in der  $M_1$ - $m_{\tilde{\mu}}$ -Ebene unter der Annahme, dass die Myon-Yukawakopplung radiativ über  $v_d A_{22}^\ell$  und/oder  $v_u A_{22}^{\ell'}$  generiert wird. Hier ist  $m_{\tilde{\mu}}$  die leichtere Smyonmasse. Gelb (hellgrau):  $a_\mu \pm 2\sigma$ , rot (grau):  $a_\mu \pm 1\sigma$ , blau (dunkelgrau):  $a_\mu$ . Oben rechts: Erlaubter Bereich in der  $M_1$ - $m_{\tilde{\ell}}$ -Ebene unter Einschluss von Lepton-Flavourverletzung mit  $\delta_{23}^{\ell RR} = 0.3$  und der Einschränkung von  $\tau \rightarrow \mu\gamma$  (schwarz gestrichelte Linien für  $\delta_{23}^{\ell RR} = 0$ ), wobei  $m_{\tilde{\ell}}$  die leichteste smyonartige Sleptonmasse ist. Unten links: das Gleiche mit  $\delta_{23}^{\ell RR} = 0.5$ . Unten rechts: Erlaubter Bereich in der  $M_1$ - $m_{\tilde{e}}$ -Ebene unter der Annahme, dass die Elektron-Yukawakopplung radiativ über  $v_d A_{11}^\ell$  und/oder  $v_u A_{11}^{\ell'}$  generiert wird. Gelb (hellgrau):  $a_e \pm 2\sigma$ , rot (grau):  $a_e \pm 1\sigma$ .

Da die Elemente  $\delta_{LL}^{ij}$  und  $\delta_{LR}^{ij}$  von den radiativen Zerfällen  $\ell_j \rightarrow \ell_i\gamma$  eingeschränkt sind, beziehen wir neben dem flavourdiagonalen  $\delta_{LR}^{22}$  nur  $\delta_{RR}^{23}$  als einziges von Null verschiedenes, flavourverletzendes Element mit ein. Die RR-Elemente können nämlich aufgrund einer in Kapitel 3.6 genauer erläuterten Auslöschung nicht durch  $\ell_j \rightarrow \ell_i\gamma$  eingeschränkt werden. Unter diesen Bedingungen und  $y_\mu = 0$  vereinfacht sich die allgemeine Formel für  $\tau \rightarrow \mu\gamma$ , die in Anhang A.2 angegeben ist. Wir konzentrieren uns wieder auf den leichteren Sleptonmasseneigenzustand. Dabei verifizieren wir, dass die Smyonkomponente in der Tat größer als die Staukomponente ist, obwohl auch eine gleichmäßige Mischung zwischen  $\tilde{\mu}_R$  und  $\tilde{\tau}_R$  möglich ist. Das bedeutet, dass dieses Slepton tendenziell in ein Myon zerfällt und somit am LHC als

„Smyon“ identifiziert werden würde. Als Konsequenz dieser zusätzlichen Mischung beobachten wir, dass die Fläche links in Abb. (3.12) schrumpft. Dennoch müssen wir bei der hier betrachteten  $\tilde{\mu}_L - \tilde{\mu}_R - \tilde{\tau}_R$ -Rotation überprüfen, ob die Schranke an  $\tau \rightarrow \mu\gamma$  nicht verletzt wird, denn die Kombination  $\delta_{LR}^{22}\delta_{RR}^{23}$  generiert effektiv ein  $\delta_{LR}^{23}$ , für welches strengere Einschränkungen gelten. Im zweiten und dritten Schaubild in Abb. 3.12 wählen wir exemplarisch  $\delta_{RR}^{23} = 0.3$  und  $\delta_{RR}^{23} = 0.5$  und berücksichtigen zusammen mit der Bedingung für die radiative Myonmasse die Schranken (siehe auch Tab. B.1 in Anhang B):

$$BR(\tau \rightarrow \mu\gamma)^{\text{exp}} < 4.5 \times 10^{-8} \quad \text{auf 90\% CL (Belle) [95]}, \quad (3.44)$$

$$BR(\tau \rightarrow \mu\gamma)^{\text{exp}} < 4.4 \times 10^{-8} \quad \text{auf 90\% CL (BaBar) [96]}. \quad (3.45)$$

Dabei wurde  $M_1 = M_2 = \mu$  gewählt und  $\tan\beta = 10$  gesetzt, wobei sich für  $\tan\beta = 50$  oder andere Werte für  $M_2$  und  $\mu$  keinen großen Änderungen ergeben. Wir erkennen die oben erwähnten Effekte: Mit einer großen  $\tilde{\mu}_L - \tilde{\mu}_R - \tilde{\tau}_R$ -Mischung verschiebt sich der erlaubte Bereich wegen des leichteren „Smyon“-Masseneigenzustands nach rechts. Jedoch verbieten die Daten aus  $\tau \rightarrow \mu\gamma$  nichtverschwindendes  $\delta_{RR}^{23}$  in Kombination mit einem großen  $\delta_{LR}^{22}$  eine zu leichte „Smyonmasse“. Ein Teil des Parameterbereiches mit leichten Sleptonmassen wird demzufolge durch  $\tau \rightarrow \mu\gamma$  ausgeschlossen. Wir folgern daraus, dass die interessante untere Schranke an die leichteste Smyonmasse bei softer Myon-Yukawakopplung  $y_\mu$  auch bei Flavormischung intakt bleibt.

### Bedeutung für den LHC

Die klare Prognose  $600 \text{ GeV} \leq m_{\tilde{\mu}_\ell} \leq 2200 \text{ GeV}$  gewinnt angesichts der bevorstehenden LHC-Ergebnisse eine besondere Rolle: Da der LHC nur auf leichte Slep-tonen mit Massen  $m_{\tilde{\ell}} \leq 300 \text{ GeV}$  bei  $30 \text{ fb}^{-1}$  sensitiv ist [97–99], widerlegt der Nachweis eines Smyons direkt das Modell radiativer Fermionmassen. Positiv formuliert ist die Detektion eines Smyons am LHC ein Beweis für eine nichtverschwindende Myon-Yukawakopplung im MSSM-Superpotenzial. Jenseits des MSSM gibt es die Möglichkeit von zusätzlichen radiativen Beiträgen von supersymmetrischen Teilchen mit sehr hohen Massen, beispielsweise vom Messenger-Sektor in durch Eichwechselwirkung generierter SUSY-Brechung (siehe z.B. Ref. [100]). In solchen weitreichenderen Szenarien könnte die Frage nach  $y_\mu = 0$  oder  $y_\mu \neq 0$  von zusätzlichen Informationen aus  $B_{d,s} \rightarrow \mu^+\mu^-$  und  $B^+ \rightarrow \mu^+\nu_\mu$  profitieren, welche am LHC bzw. an einer Super-B-Fabrik gemessen werden können.

**Bemerkung zur Vakuumstabilität (VS):** Wie schon in Ref. [67] untersucht (basierend auf einer Analyse über VS in Ref. [101]), ist die VS entscheidend für das Myon. Die Einschränkungen aus der VS entkoppeln nicht. Wenn die Myonmasse radiativ erzeugt wird, kann das Vakuum nicht absolut-, sondern nur metastabil sein. Unter Verwendung des analytischen trilinearen Terms  $A_{22}^\ell$  kann die VS nur für kleine Werte von  $\tan\beta \approx 1$  erfüllt werden. Benutzt man jedoch die sogenannten nichtanalytischen  $A$ -Terme [41, 102, 103], hier speziell  $A_{22}^{\ell'}$ , welcher immer in Kombination mit  $v_u$  in der Sleptonmassenmatrix auftritt, sind auch größere Werte von  $\tan\beta$  erlaubt. Man beachte, dass Abb. 3.12 sowohl für  $A_{22}^\ell$  als auch  $A_{22}^{\ell'}$  gültig ist, da nur die Kombination  $A_{22}^\ell v_d$  oder  $A_{22}^{\ell'} v_u$  im Nebendiagonalelement der Smyonmassenmatrix auftaucht. Prozesse, die durch Higgskopplungen vermittelt werden, können jedoch zwischen den zwei Arten von  $A$ -Termen unterscheiden.

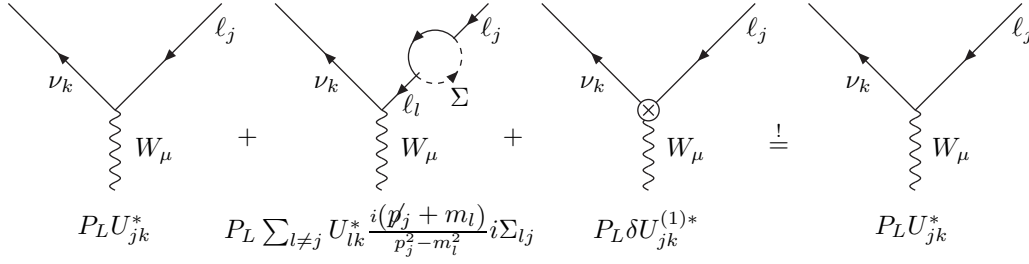


Abb. 3.13: Berechnung des Counterterms erster Ordnung im On-Shell-Schema

### Softes $y_e$ und $a_e$

Dieselbe Diskussion kann auch auf das Elektron und dessen Yukawakopplung angewandt werden. Wie in Kapitel 3.2 müssen wir als Input für die Feinstrukturkonstante den Wert aus Ref. [71] verwenden. Qualitativ können wir die gleichen Aussagen wie im Myon-Fall machen. Quantitativ sind die Einschränkungen wegen der Kleinheit der Elektronmasse und des Fehlers von  $\alpha_e$  jedoch viel schwächer (siehe Abb. 3.12 unten rechts).

## 3.5 PMNS-Matrix-Renormierung

Testet eine Messung der PMNS-Matrix den  
Yukawa- oder den soft-SUSY-brechenden Sektor?

Die flavourverletzenden Selbstenergien in Kapitel 3.1 verursachen Korrekturen zur CKM- und PMNS-Matrix. Wir konzentrieren uns hier auf den Leptonensektor und unterscheiden dabei zwischen dem Fall  $\tan\beta$ -verstärkter Beiträge [10] und chiral-verstärkter Selbstenergien [11]. Im Gegensatz zur CKM-Matrix ist die PMNS-Matrix nicht hierarchisch, weshalb bei der Resummation keine Terme vernachlässigt werden können. Wir interessieren uns für die Korrekturen zu dem einzigen kleinen Element  $U_{e3} = \sin\theta_{13}e^{-i\delta}$ . Bisher sind die Messergebnisse kompatibel mit  $\theta_{13} = 0^\circ$ . In Ref. [104,105] wurden über 60 Modelle nach ihrer Vorhersage zu  $\theta_{13}$  sortiert. Etwa zwei Drittel davon können ausgeschlossen werden, falls DOUBLE CHOOZ [2, 3] und Daya Bay [4] kein  $\bar{\nu}_e$ -Verschwinden entdecken. Es ist denkbar, dass  $U_{e3}$  auf Baumgraphenniveau aufgrund einer Symmetrie Null ist, durch Korrekturen jedoch einen nichtverschwindenden Wert annimmt. Da wir keine Feinabstimmung erlauben, fordern wir auch hier, dass die SUSY-Schleifenbeiträge kleiner als der physikalische Wert selbst bleiben müssen:

$$|\Delta U_{e3}| \leq |U_{e3}|. \quad (3.46)$$

### 3.5.1 Flavourändernde Selbstenergien am externen Beinchen

Im On-Shell-Schema ist der Counterterm gerade so definiert, dass er die Korrekturen weghebt. Die nackte Größe setzt sich – analog zu Gl. (3.6) – zusammen aus physikalischer Größe plus Counterterm ( $(n)$  gibt die Ordnung an):

$$U^{\text{bare}} = U + \sum_n \delta U^{(n)} = U + \delta U. \quad (3.47)$$

Falls der Counterterm wieder proportional zur Größe selbst ist, muss resummiert werden. Aus Abb. 3.13 berechnet man den Counterterm erster Ordnung zu<sup>3</sup>:

$$\Rightarrow \delta U_{jk}^{(1)*} = \sum_{l \neq j} U_{lk}^* \frac{(\not{p}_j + m_l)}{p_j^2 - m_l^2} \Sigma_{lj}. \quad (3.48)$$

Setzt man Gl. (3.1) in Gl. (3.48) ein und beachtet, dass die PMNS-Matrix immer zusammen mit  $P_L$  auftritt, erhalten wir:

$$\delta U_{jk}^{(1)*} = \sum_{l \neq j} U_{lk}^* \frac{m_j^2 \Sigma_{lj}^{LL}(m_l^2) + m_j \Sigma_{lj}^{LR}(m_l^2) + m_l \Sigma_{lj}^{RL}(m_l^2) + m_l m_j \Sigma_{lj}^{RR}(m_l^2)}{m_j^2 - m_l^2}. \quad (3.49)$$

Werten wir die Selbstenergien wieder bei verschwindendem externen Impuls aus und vernachlässigen unterdrückte Terme  $\propto m_l^2/M_{\text{SUSY}}^2$ , vereinfacht sich Gl. (3.49) zu

$$\delta U_{jk}^{(1)*} = \sum_{l \neq j} U_{lk}^* \frac{m_j \Sigma_{lj}^{LR} + m_l \Sigma_{lj}^{RL}}{m_j^2 - m_l^2} =: - \sum_{l \neq j} U_{lk}^* \Delta V_{lj}. \quad (3.50)$$

In Matrixschreibweise also  $\delta U^{(1)*} = -\Delta V^\top U^*$  mit

$$\Delta V = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{m_\mu \Sigma_{12}^{LR} + m_e \Sigma_{12}^{RL}}{m_\mu^2 - m_e^2} & -\frac{m_\tau \Sigma_{13}^{LR} + m_e \Sigma_{13}^{RL}}{m_\tau^2 - m_e^2} \\ -\frac{m_e \Sigma_{21}^{LR} + m_\mu \Sigma_{21}^{RL}}{m_e^2 - m_\mu^2} & 0 & -\frac{m_\tau \Sigma_{23}^{LR} + m_\mu \Sigma_{23}^{RL}}{m_\tau^2 - m_\mu^2} \\ -\frac{m_e \Sigma_{31}^{LR} + m_\tau \Sigma_{31}^{RL}}{m_e^2 - m_\tau^2} & -\frac{m_\mu \Sigma_{32}^{LR} + m_\tau \Sigma_{32}^{RL}}{m_\mu^2 - m_\tau^2} & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\Sigma_{12}^{LR}}{m_\mu} & -\frac{\Sigma_{13}^{LR}}{m_\tau} \\ \frac{\Sigma_{21}^{RL}}{m_\mu} & 0 & -\frac{\Sigma_{23}^{LR}}{m_\tau} \\ \frac{\Sigma_{31}^{RL}}{m_\tau} & \frac{\Sigma_{32}^{RL}}{m_\tau} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.51)$$

In erster Ordnung gilt somit  $U^{\text{bare}} = (\mathbb{1} - \Delta V^\dagger) U \approx e^{-\Delta V^\dagger} U$ , woraus wegen der Antihermizität von  $\Delta V$  folgt, dass das Renormierungsschema die Unitarität der PMNS-Matrix erhält. In Gl. (3.50) muss nun resummiert werden. Führt man das Verfahren zur zweiten Ordnung fort, bekommt man Einschleifendiagramme, in denen der Counterterm erster Ordnung eingesetzt wurde. Dies muss vom Counterterm  $\delta U^{(2)}$  weggehoben werden, d.h. um die Renormierungsbedingung zu erfüllen, muss die Summe der zwei Counterterme  $\delta U^{(1)} + \delta U^{(2)}$  alle Schleifenkorrekturen bis zur zweiten Ordnung wegheben:

$$\delta U_{jk}^{(1)*} + \delta U_{jk}^{(2)*} = \sum_{l \neq j} \left( U_{lk}^* + \delta U_{lk}^{(1)*} \right) \frac{m_j \Sigma_{lj}^{LR} + m_l \Sigma_{lj}^{RL}}{m_j^2 - m_l^2}. \quad (3.52)$$

Führt man dies in allen Ordnungen fort, erhält man:

$$\delta U_{jk}^* = \sum_{l \neq j} U_{lk}^{\text{bare}*} \frac{m_j \Sigma_{lj}^{LR} + m_l \Sigma_{lj}^{RL}}{m_j^2 - m_l^2} \Rightarrow U_{jk}^{\text{bare}*} = U_{jk}^* + \sum_{l \neq j} U_{lk}^{\text{bare}*} \frac{m_j \Sigma_{lj}^{LR} + m_l \Sigma_{lj}^{RL}}{m_j^2 - m_l^2}. \quad (3.53)$$

Berücksichtigt man nun immer nur den dominanten Anteil im Propagator, d.h. vernachlässigt kleine Massenquotienten, vereinfacht sich dies zu folgendem linearen Gleichungssystem:

$$U_{ek}^{\text{bare}*} = U_{ek}^* - U_{\mu k}^{\text{bare}*} \frac{\Sigma_{21}^{RL}}{m_\mu} - U_{\tau k}^{\text{bare}*} \frac{\Sigma_{31}^{RL}}{m_\tau}, \quad (3.54a)$$

$$U_{\mu k}^{\text{bare}*} = U_{\mu k}^* + U_{ek}^{\text{bare}*} \frac{\Sigma_{12}^{LR}}{m_\mu} - U_{\tau k}^{\text{bare}*} \frac{\Sigma_{32}^{RL}}{m_\tau}, \quad (3.54b)$$

$$U_{\tau k}^{\text{bare}*} = U_{\tau k}^* + U_{ek}^{\text{bare}*} \frac{\Sigma_{13}^{LR}}{m_\tau} + U_{\mu k}^{\text{bare}*} \frac{\Sigma_{23}^{LR}}{m_\tau}. \quad (3.54c)$$

<sup>3</sup>In diesem Abschnitt lassen wir, im Gegensatz zu dem allgemeineren Kapitel 3.1, den zusätzlichen Index  $f$  bei der Selbstenergie  $\Sigma^f$  weg, da hier ausschließlich  $f = \ell$  gilt.

Nehmen wir beispielsweise nur den 13-Sektor als nichtverschwindend an (12 ist durch  $\mu \rightarrow e\gamma$  stark eingeschränkt), erhalten wir als Lösung des Gleichungssystems:

$$\boxed{U_{e3}^{\text{bare}*} = \frac{U_{e3}^* - U_{\tau 3}^* \frac{\Sigma_{31}^{RL}}{m_\tau}}{1 + \frac{|\Sigma_{31}^{RL}|^2}{m_\tau^2}}}, \quad \delta U_{e3}^* = \frac{-U_{\tau 3}^* \frac{\Sigma_{31}^{RL}}{m_\tau} + U_{e3}^* \frac{|\Sigma_{31}^{RL}|^2}{m_\tau^2}}{1 + \frac{|\Sigma_{31}^{RL}|^2}{m_\tau^2}} \approx -U_{\tau 3}^* \frac{\Sigma_{31}^{RL}}{m_\tau}. \quad (3.55)$$

Die letzte Gleichung entspricht der naiven Erwartung, dass die Korrektur zu  $U_{e3}$  einer  $\tau - \nu_3$ -Kopplung kombiniert mit einem  $\tau \rightarrow e$ -Übergang entspricht.

Die diagrammatische Herangehensweise ist sehr anschaulich, jedoch wird oft auch eine andere Methode verwendet, bei der die flavourändernden Selbstenergien in die Wellenfunktions-Counterterme absorbiert werden. Wir stellen diese zweite Möglichkeit kurz vor, zum einem um die Äquivalenz beider Methoden aufzuzeigen, und zum anderen, um Vergleiche mit der Literatur zu vereinfachen. Ferner wird dadurch die Notation in Kapitel 3.1 mit  $\delta Z_L$  gerechtfertigt. Die Effekte der externen Beinen stecken in den Wellenfunktions-Countertermen, die nun in den Feynman-Regeln auftauchen und Flavourverletzungen hervorrufen können. Auch hier werden die Counterterme so bestimmt, dass sie die Schleifenkorrekturen gerade wegheben, wenn eines der externen Fermionen on-shell ist. Da nur chiralitätsflippende Selbstenergien der geladenen Leptonen  $\tan\beta$ -verstärkt sind, müssen nur die geladenen Leptonen renormiert werden:

$$\ell_{iL}^{\text{bare}} = (\delta_{ij} + \frac{1}{2}\delta Z_{ij}^L) \ell_{jL}, \quad \ell_{iR}^{\text{bare}} = (\delta_{ij} + \frac{1}{2}\delta Z_{ij}^R) \ell_{jR}, \quad (3.56)$$

wobei die Wellenfunktions-Counterterme antihermitesch sind:  $\delta Z^{L,R\dagger} = -\delta Z^{L,R}$ . Der Massenterm lautet wie folgt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m &= -m_j^{\text{bare}} \left( \bar{\ell}_{jL}^{\text{bare}} \ell_{jR}^{\text{bare}} + \bar{\ell}_{jR}^{\text{bare}} \ell_{jL}^{\text{bare}} \right) \\ &= - \left( m_j^{\text{bare}} \delta_{jk} + \frac{m_j^{\text{bare}}}{2} \delta Z_{jk}^R - \frac{m_k^{\text{bare}}}{2} \delta Z_{jk}^L \right) \bar{\ell}_{jL} \ell_{kR} \\ &\quad - \left( m_j^{\text{bare}} \delta_{jk} - \frac{m_j^{\text{bare}}}{2} \delta Z_{kj}^R + \frac{m_k^{\text{bare}}}{2} \delta Z_{kj}^L \right) \bar{\ell}_{kR} \ell_{jL}. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Berücksichtigung der Schleifenkorrekturen<sup>4</sup>  $\bar{\ell}_{jL}^{\text{bare}} \Sigma_{jk}^{LR} \ell_{kR}^{\text{bare}} + \bar{\ell}_{kR}^{\text{bare}} \Sigma_{kj}^{RL} \ell_{jL}^{\text{bare}}$  liefert folgende Renormierungsbedingung (On-Shell-Schema):

$$-\Sigma_{jk}^{LR} + \frac{m_j^{\text{bare}}}{2} \delta Z_{jk}^R - \frac{m_k^{\text{bare}}}{2} \delta Z_{jk}^L = 0, \quad -\Sigma_{kj}^{RL} - \frac{m_j^{\text{bare}}}{2} \delta Z_{kj}^R + \frac{m_k^{\text{bare}}}{2} \delta Z_{kj}^L = 0. \quad (3.58)$$

Hierbei enthält die nackte Masse  $m_j^{\text{bare}} = m_j + \delta m_j$  die  $\tan\beta$ -verstärkte Korrektur  $\delta m_j$ , welche flavourerhaltend ist (siehe Abschnitt 3.1). Die Wellenfunktions-Counterterme bestimmen sich zu:

$$\frac{\delta Z_{jk}^L}{2} = -\frac{m_j^{\text{bare}} \Sigma_{jk}^{RL} + m_k^{\text{bare}} \Sigma_{jk}^{LR}}{(m_k^{\text{bare}})^2 - (m_j^{\text{bare}})^2}, \quad \frac{\delta Z_{jk}^R}{2} = -\frac{m_j^{\text{bare}} \Sigma_{jk}^{LR} + m_k^{\text{bare}} \Sigma_{jk}^{RL}}{(m_k^{\text{bare}})^2 - (m_j^{\text{bare}})^2}. \quad (3.59)$$

Im Unterschied dazu wurde in Gl. (3.5) noch keine Resummation durchgeführt, weshalb dort die physikalische Masse auftritt. Ferner wurden hier nur chiralitätsflippende Selbstenergien

<sup>4</sup>Man beachte, dass im Vergleich zu Ref. [47] das Vorzeichen der Selbstenergie anders gewählt wurde.

betrachtet. Die Hierarchie in den Leptonmassen hat zur Folge, dass  $\delta Z^R$  unterdrückt ist. Die Renormierung der PMNS-Matrix ergibt sich aus den Wellenfunktions-Countertermen als:

$$\bar{\nu}_{kL}^{\text{bare}} U_{jk}^{\text{bare}*} \ell_{jL}^{\text{bare}} = \bar{\nu}_{kL} U_{jk}^{\text{bare}*} \left( \delta_{jn} + \frac{\delta Z_{jn}^L}{2} \right) \ell_{nL} = \bar{\nu}_{kL} U_{nk}^* \ell_{nL}. \quad (3.60)$$

Im On-Shell-Schema mit  $U = U^{\text{bare}} - \delta U$  lautet der Counterterm folglich  $\delta U^* = -\frac{\delta Z^L}{2}{}^\top U^{\text{bare}*} = -\Delta V^\top U^{\text{bare}*}$ , d.h. wir finden Konsistenz mit Gl. (3.53) und können  $\frac{\delta Z^L}{2}$  mit  $\Delta V$  identifizieren.

Als weiterer Konsistenztest wurde die Renormierung noch im  $\overline{\text{MS}}$ -Schema durchgeführt. Da die Korrekturen hier endlich sind, verschwindet der Counterterm, so dass sich die physikalische Matrix aus der nackten Matrix und den Korrekturen zusammensetzt:  $U = U^{\text{bare}} + \Delta U$ . Im Prinzip gilt gerade  $\Delta U = -\delta U^{(1)}$  aus Gl. (3.50). Diesmal gibt es jedoch nichts zu resumieren, weil der Counterterm Null ist. Das Gleichungssystem für den 13-Sektor lautet im  $\overline{\text{MS}}$ -Schema<sup>5</sup>:

$$\begin{aligned} \Delta U_{e3}^* &= U_{\tau 3}^{\text{bare}*} \frac{\Sigma_{31}^{RL}}{m_\tau} = U_{e3}^* - U_{e3}^{\text{bare}*}, & \Delta U_{\tau 3}^* &= -U_{e3}^{\text{bare}*} \frac{\Sigma_{13}^{LR}}{m_\tau} = U_{\tau 3}^* - U_{\tau 3}^{\text{bare}*}, \\ \Rightarrow U_{e3}^{\text{bare}*} &= \frac{U_{e3}^* - U_{\tau 3}^* \frac{\Sigma_{31}^{RL}}{m_\tau}}{1 + \frac{|\Sigma_{31}^{RL}|^2}{m_\tau^2}}. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Das Ergebnis ist identisch mit dem Resultat in Gl. (3.55), welches im On-Shell-Schema hergeleitet wurde. Im  $\overline{\text{MS}}$ -Schema ist die Interpretation der Korrekturen als Rotation der Felder im Flavour-Raum leicht darzulegen: Schreiben wir die Korrektur als  $\Delta U^* = \Delta V^\top U^{\text{bare}*}$ , bekommen wir  $U^{\text{bare}*} \rightarrow U^* = (\mathbf{1} + \Delta V^\top) U^{\text{bare}*} = (\mathbf{1} - \Delta V^*) U^{\text{bare}*}$ , so dass für den  $\ell\nu W$ -Vertex in der Lagrangedichte

$$\frac{g_2}{\sqrt{2}} \bar{\ell}_j \gamma^\mu U_{jk} P_L \nu_k W_\mu^- = \frac{g_2}{\sqrt{2}} \bar{\ell}_j \gamma^\mu (\mathbf{1} - \Delta V) U_{jk}^{\text{bare}} P_L \nu_k W_\mu^- \quad (3.62)$$

gilt. Daraus lesen wir ab, dass dies einer Rotation  $\ell^{\text{bare}} = (\mathbf{1} + \Delta V) \ell$  des geladenen Leptons entspricht. Das  $\overline{\text{MS}}$ -Schema ist z.B. geeignet, wenn die Korrekturen von den  $A$ -Termen stammen.  $A$ -Terme sind theoretische Größen, die nicht direkt mit physikalischen Observablen in Beziehung stehen. Für solche Größen ist es einfacher, ein minimales Schema zu verwenden, das eine direkte Relation zwischen physikalischen Größen und Observablen liefert. Falls man weiter den Grenzfall betrachtet, in dem die leichten Leptonmassen radiativ generiert werden, erscheint es unnatürlich, Yukawakopplungen auf Baumgraphenniveau zu haben, welche dann durch den Counterterm herausgehoben werden müssen.

### 3.5.2 Numerische Auswertung

Nach drei Jahren Laufzeit ist das DOUBLE CHOOZ Experiment sensitiv auf  $\theta_{13} = 3^\circ$ , was  $U_{e3} = 0.05$  entspricht [2, 3]; Daya Bay ist ebenso sensitiv auf  $\sin^2(2\theta_{13})$ , was ca.  $\theta_{13} = 3^\circ$  entspricht [4]. Eine zukünftige Neutrino-fabrik kann  $\theta_{13}$  sogar bis zu  $\theta_{13} = 0.6^\circ$  testen [106]. Wir stellen hier die Frage, ob Schwellenkorrekturen zur PMNS-Matrix die Vorhersage  $\theta_{13} = 0^\circ$  an der elektroschwachen Skala zerstören können. Was bedeutet es für die Physik an der hohen

<sup>5</sup>Im Gegensatz zur Renormierung der CKM-Matrix [62] tritt hier das physikalische PMNS-Element auf. Das liegt daran, dass ein lineares Gleichungssystem gelöst werden muss und keine Elemente vernachlässigt werden können.

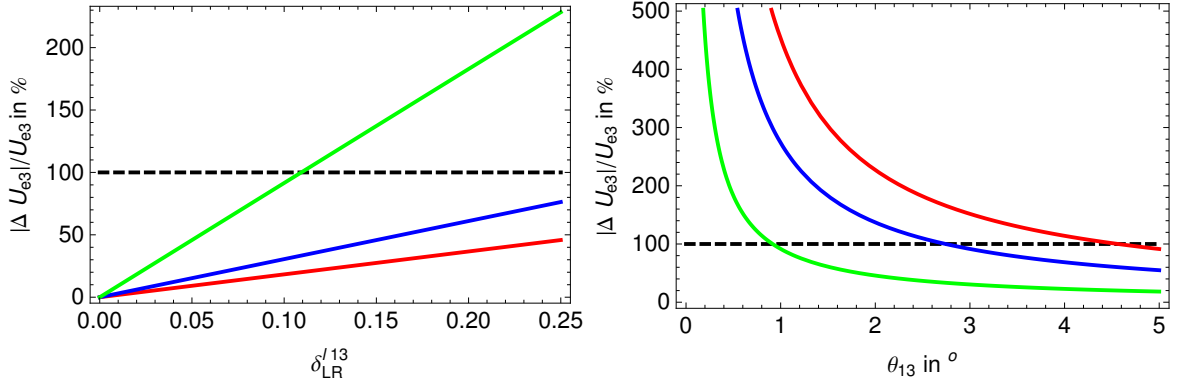


Abb. 3.14:  $|\Delta U_{e3}|/U_{e3}$  in Prozent. Links: als Funktion von  $\delta_{LR}^{\ell 13}$  für  $M_{\text{SUSY}} = 1000$  GeV und verschiedene Werte von  $\theta_{13}$  (grün  $1^\circ$ ; blau:  $3^\circ$ ; rot:  $5^\circ$ ). Rechts: als Funktion von  $\theta_{13}$  für  $M_{\text{SUSY}} = 1000$  GeV und verschiedene Werte von  $\delta_{LR}^{\ell 13}$  (rot:  $\delta_{LR}^{\ell 13} = 0.5$ ; blau:  $\delta_{LR}^{\ell 13} = 0.3$ ; grün:  $\delta_{LR}^{\ell 13} = 0.1$ ) (beides von oben nach unten).

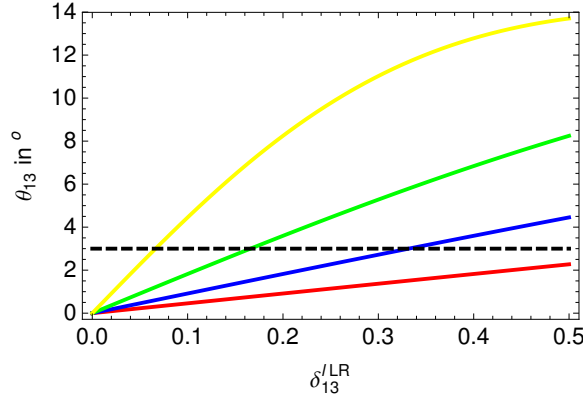


Abb. 3.15: Der ausgeschlossene  $(\theta_{13}, \delta_{LR}^{\ell 13})$ -Bereich befindet sich unterhalb der Kurven für (von unten nach oben)  $M_{\text{SUSY}} = 500$  GeV (rot),  $1000$  GeV (blau),  $2000$  GeV (grün) und  $5000$  GeV (gelb). Die schwarz gestrichelte Linie bei  $\theta_{13} = 3^\circ$  zeigt die zukünftige experimentelle Sensitivität.

Skala, wenn das Experiment uns lehren sollte, dass  $\theta_{13}$  von Null verschieden ist? Wir fordern, dass keine Feinabstimmung auftritt, was näherungsweise<sup>6</sup> (siehe Gl. (3.61) und (3.55))

$$\left| U_{\tau 3}^* \frac{\Sigma_{31}^{RL}}{m_\tau} \right| \leq |U_{e3}^*| \quad (3.63)$$

bedeutet, falls alle Nebendiagonalelemente außer dem 13-Sektor Null gesetzt werden. Dadurch könnte man prinzipiell die Nebendiagonalelemente  $\delta_{LR,LL}^{\ell 13}$  einschränken, wobei das Ergebnis von der SUSY-Massenskala und vom angenommenen Wert von  $\theta_{13}$  abhängt. Die Einschränkungen von  $\tau \rightarrow e\gamma$  sind im Allgemeinen jedoch stärker.

Wir betrachten hier zunächst die Korrekturen, welche vom flavourverletzenden  $A$ -Term stammen. Dies entspricht dem Bino-Beitrag aus Gl. (3.33). In Abb. 3.14 ist die prozentuale Abweichung von  $U_{e3}$  durch SUSY-Schleifenkorrekturen in Abhängigkeit von  $\delta_{LR}^{\ell 13}$  (links) und  $\theta_{13}$

<sup>6</sup>Da die  $CP$ -Phase(n) im Leptonsektor noch nicht gemessen wurden, ist die komplexe Konjugation bislang irrelevant.



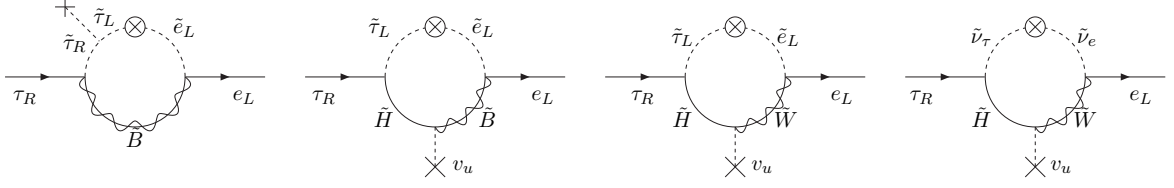


Abb. 3.16: Dominante Diagramme für die Neutralino-Slepton- und Chargino-Sneutrino-Schleife im  $\tau_R \rightarrow e_L$ -Übergang.

(rechts) für  $M_{\text{SUSY}} = 1000$  GeV abgebildet. Die Einschränkungen an  $\delta_{LR}^{\ell 13}$  werden stärker, je kleiner  $\theta_{13}$  und je größer  $M_{\text{SUSY}}$  sind. In Abb. 3.15 befindet sich der ausgeschlossene  $(\theta_{13}, \delta_{LR}^{\ell 13})$ -Bereich unterhalb der Kurven (für verschiedene  $M_{\text{SUSY}}$ ). Die abgeleiteten Schranken können folgendermaßen vereinfacht werden:

$$\left| \delta_{LR}^{\ell 13} \right| \lesssim 0.2 \left( \frac{500 \text{ GeV}}{M_{\text{SUSY}}} \right) |\theta_{13} [\text{in } ^\circ]|. \quad (3.64)$$

Beispielsweise erhalten wir für eine SUSY Masse von  $M_{\text{SUSY}} = 1000$  GeV und  $\theta_{13} = 3^\circ$  eine obere Schranke von  $|\delta_{LR}^{\ell 13}| \leq 0.3$ . Die Einschränkungen an  $\delta_{LR}^{\ell 13}$  aus  $BR(\tau \rightarrow e\gamma) \leq 1.1 \cdot 10^{-7}$  [96, 107] (siehe auch Tab. B.1) sind jedoch von der Größenordnung 0.02 [10] und im Allgemeinen besser als unsere abgeleiteten Schranken, falls  $\theta_{13}$  von Null verschieden ist.

Wir wenden uns nun dem Grenzfall großen  $\tan\beta$  zu. Es gibt vier dominante Beiträge  $\propto m_\tau$ , welche alle sensitiv auf das LL-Element sind (siehe Abb. 3.16):

$$\begin{aligned} \Sigma_{\tau_R - e_L} \simeq & \frac{m_\tau}{1 + \Delta_\tau} \mu \tan\beta \Delta m_{LL}^{\ell 31} \left\{ \left( -\frac{1}{2} \frac{\alpha_1}{4\pi} M_1 + \frac{1}{2} \frac{\alpha_2}{4\pi} M_2 \right) f_2(M_1^2, \mu^2, m_{\tilde{\tau}_L}^2, m_{\tilde{e}_L}^2) \right. \\ & \left. - \frac{\alpha_1}{4\pi} M_1 f_2(M_1^2, m_{\tilde{e}_L}^2, m_{\tilde{\tau}_R}^2, m_{\tilde{\tau}_L}^2) + \frac{\alpha_2}{4\pi} M_2 f_2(M_1^2, \mu^2, m_{\tilde{\nu}_e}^2, m_{\tilde{\nu}_\tau}^2) \right\}. \end{aligned} \quad (3.65)$$

In Abb. 3.17 sind die Resultate für den Fall mit großem  $\tan\beta$  abgebildet. Links sieht man die prozentuale Korrektur zu  $U_{e3}$  unter der Annahme, dass  $\theta_{13} = 3^\circ$  gilt, und rechts für  $\theta_{13} = 1^\circ$ . Ferner variieren wir die Werte für  $\tan\beta$  von 30 bis 90. Nach den Ausführungen in Abschnitt 2.2.2 sind Werte bis 100 möglich. Jedoch sind auch dann die daraus abgeleiteten oberen Schranken an  $\delta_{LL}^{\ell 13}$  für sinnvolle SUSY-Massen im Allgemeinen schwächer als die aus  $\tau \rightarrow e\gamma$ .

Eine wichtige Konsequenz, die wir daraus ziehen können ist, dass  $\tau \rightarrow e\gamma$  jegliche Korrektur aus supersymmetrischen Schleifen zu  $U_{e3}$  verhindert. Für SUSY-Massen von 500 GeV finden wir  $|\Delta U_{e3}| \leq 10^{-3}$ , was einer Korrektur zum Mischungswinkel  $\theta_{13}$  von höchstens  $0.06^\circ$  entspricht. Das bedeutet, dass falls DOUBLE CHOOZ  $U_{e3} \neq 0$  misst, man dies nicht dem SUSY-Brechungssektor zuschreiben kann. Positiv formuliert bedeutet  $U_{e3} \gtrsim 10^{-3}$ , dass bei niedrigen Energien die Flavoursymmetrien des Yukawasektors, die tribimaximale Mischung motivieren, verletzt sind. DOUBLE CHOOZ testet somit den Yukawasektor und nicht den soften SUSY-brechenden Sektor. Falls die gleichen Betrachtungen für den optimistischen Fall  $\theta_{13} \leq 0.6^\circ$  einer zukünftigen Neutrino-fabrik gemacht werden, werden die Schwellenkorrekturen erst ab SUSY-Massen oberhalb von 1500 GeV relevant. Da der betrachtete Effekt sowohl in  $\tau \rightarrow e\gamma$  als auch in  $U_{e3}$  das Produkt  $\delta_{RL}^{\ell 33} \delta_{LL}^{\ell 13}$  enthält, bleibt das Resultat ebenso gültig, falls die Flavour- und Chiralitätsverletzung durch andere Kombination der  $\delta_{XY}^{\ell IJ}$  getriggert wird. Man darf jedoch nicht vergessen, dass wegen der Entkopplung von  $\tau \rightarrow e\gamma$  unsere Methode

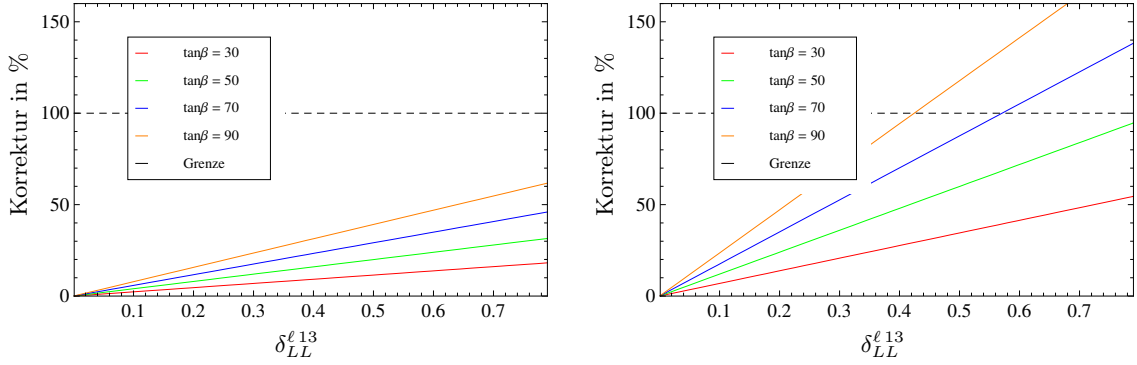


Abb. 3.17:  $|\Delta U_{e3}|/U_{e3}$  in Prozent als Funktion von  $\delta_{LL}^{\ell 13}$  und  $\tan\beta$  für  $\theta_{13} = 3^\circ$  (links) und  $\theta_{13} = 1^\circ$  (rechts) und verschiedene Werte für  $\tan\beta = 30, 50, 70, 90$  (von unten nach oben).

eine schärfere Grenze für sehr große SUSY-Massen, besonders mit kleinem  $\theta_{13}$  und großem  $\tan\beta$ , liefert.

### 3.6 Leptonflavour-Universalitätstest im geladenen Kaonzerfall

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Observable

$$R_K = \frac{\Gamma(K \rightarrow e\nu)}{\Gamma(K \rightarrow \mu\nu)}, \quad (3.66)$$

welche aktuell vom NA62-Experiment am CERN untersucht wird. Eine Motivation, die experimentellen Messwerte bisheriger Experimente, wie NA48/2 und KLOE, zu verbessern, war unter anderem eine theoretische Arbeit von Masiero, Paradisi und Petronzio [68], in der herausgestellt wird, dass sich LFV im MSSM in einer Verletzung der Leptonflavour-Universalität (LFU) in  $R_K$  bemerkbar macht. Abweichungen von LFU ist somit eine weitere Möglichkeit, die  $\delta_{XY}^{\ell IJ}$  einzuschränken. Wir möchten diese Effekte nochmals kritisch unter die Lupe nehmen und insbesondere die Einschränkungen aus Kapitel 3.2 mit einbeziehen. In Ref. [68] wird nämlich betont, dass eine doppelte flavourverletzende Masseneinsetzung den Wert von  $R_K$  im Vergleich zur SM-Vorhersage erniedrigen kann, und somit den etwas kleineren NA48/2'03 Wert erklären könnte. Genau dieser Beitrag ist jedoch durch  $\delta m_e$  und  $a_e$  begrenzt. Ferner werden die Effekte der Staumischung explizit berechnet und Auswirkungen einer zukünftigen Messung der leichtesten Staumasse betrachtet.

#### 3.6.1 Experimenteller Status, SM-Vorhersage und SUSY-Beiträge

Die experimentelle Präzision von  $R_K$  ist sehr beeindruckend und in Tab. 3.2 zusammengefasst. Da sich die hadronischen Unsicherheiten herauskürzen, ist die theoretische Vorhersage für  $R_K$  sehr rein: Inklusive Bremsstrahlung ist der SM-Wert gegeben durch [108–110]

$$R_K^{\text{SM}} = \frac{m_e^2 (m_K^2 - m_e^2)^2}{m_\mu^2 (m_K^2 - m_\mu^2)^2} (1 + \delta R_{\text{QED}}) = (2.477 \pm 0.001) \cdot 10^{-5}. \quad (3.67)$$

Aus der Helizitätsunterdrückung im elektronischen Zerfallskanal im SM folgt, dass  $R_K$  potenziell sensitiv auf Neue-Physik-Effekte ist. Dazu zählen insbesondere geladene Higgs-Beiträge,

Experiment	$R_K [10^{-5}]$	Fehler $\delta R_K/R_K$
PDG 2006	$2.45 \pm 0.11$	4.5%
NA48/2 '03	$2.416 \pm 0.043 \pm 0.024$	2.8%
NA48/2 '04	$2.455 \pm 0.045 \pm 0.041$	3.5%
KLOE	$2.55 \pm 0.05 \pm 0.05$	3.9%
Kaon 2007	$2.457 \pm 0.032$	1.3%
KLOE '09	$2.493 \pm 0.025 \pm 0.019$	1.7%
NA62 '10	$2.486 \pm 0.013$	0.5%

Tabelle 3.2: Experimentelle Werte für  $R_K$  [6–8,111–113]. Für das NA62-Experiment ist in der Zukunft eine experimentelle Genauigkeit von  $\delta R_K/R_K = 0.1 - 0.2\%$  durchaus machbar [113].

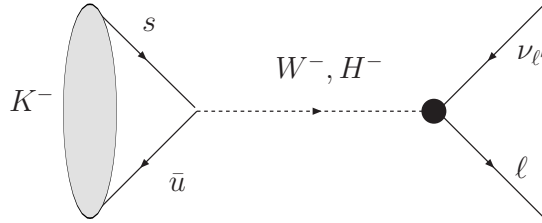


Abb. 3.18: Leptonischer Zerfallskanal eines geladenen Kaons über einen  $W$ - oder Higgsaustausch. Auf Baumgraphenniveau gilt  $\ell = \ell'$ , während MSSM-Schleifenkorrekturen effektiv zu einer flavourverletzenden Higgskopplung führen.

welche schon auf Baumgraphenniveau auftreten (siehe Abb. 3.18). Im 2HDM oder im MSSM auf Baumgraphenniveau kürzt sich der geladene Higgs-Beitrag jedoch im Verhältnis gerade wieder heraus. Die Autoren in Ref. [68] haben zuerst herausgestellt, dass auf Schleifenniveau LFU-verletzende Beiträge, die  $\delta_{XY}^{\ell IJ}$  involvieren, zu  $R_K \neq R_K^{\text{SM}}$  führen können. Eine geeignete Wahl, die  $\mu - e$ -Nicht-Universalität in  $R_K$  zu parametrisieren, ist in Form von  $\Delta r^{\mu-e}$ , welche durch

$$R_K = R_K^{\text{SM}} (1 + \Delta r^{\mu-e}) \quad (3.68)$$

definiert ist.

Die Definition in Gl. (3.66) beinhaltet eine Summation über alle Neutrinosorten, wobei im SM nur flavourerhaltende Endzustände möglich sind. Supersymmetrische Beiträge, die linear in  $\delta_{XY}^{\ell IJ}$  mit  $I \neq J$  sind, können nicht mit der SM-Amplitude in  $K \rightarrow \ell \nu_\ell$  interferieren, da sie zu einem Endzustand mit geladenem Lepton und einem Neutrino aus einer anderen Generation führen. Aufgrund dessen erhöhen diese Beiträge zwangsläufig  $\Gamma(K \rightarrow e \nu_e)$ . In Ref. [68] wurde ein Mechanismus vorgeschlagen, der das Produkt  $\delta_{LL}^{\ell 13} \delta_{RR}^{\ell 13}$  beinhaltet, um eine Unterdrückung von  $\Gamma(K \rightarrow e \nu_e)$  und infolgedessen auch von  $R_K$  zu erreichen. In Kapitel 3.2 haben wir jedoch aus den zwei Observablen  $m_e$  und  $a_e$  die gleiche Parameterkombination eingeschränkt. Wir werden dieses Resultat verwenden, um den maximalen Effekt von Schleifendiagrammen auf  $R_K$  mit  $\delta_{LL}^{\ell 13} \delta_{RR}^{\ell 13}$  zu berechnen. Ferner werden wir die MSSM-Beiträge mit nur einem  $\delta_{LL}^{\ell 13}$  oder  $\delta_{RR}^{\ell 13}$  analysieren und dabei insbesondere auf den Effekt der Staumischung eingehen. Diese Beiträge führen zu  $K \rightarrow e \nu_\tau$  Zerfällen und erhöhen  $R_K$ .

### 3.6.2 Lepton-flavourerhaltene Schleifenkorrekturen

Im 2HDM beschreibt folgender Hamiltonoperator leptonische Kaonzerfälle [114]:

$$\mathcal{H} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{us} \left[ \bar{u}\gamma^\mu(1 - \gamma^5)s\bar{\nu}_\ell\gamma_\mu(1 - \gamma^5)\ell - \frac{m_s m_\ell}{M_H^2} \tan^2 \beta \bar{u}(1 + \gamma^5)s\bar{\nu}_\ell(1 - \gamma^5)\ell \right], \quad (3.69)$$

woraus sich unter Verwendung von  $\langle 0 | \bar{u}\gamma^\mu\gamma^5 s | K \rangle = -if_K p_K^\mu$  die Zerfallsrate zu

$$\Gamma(K \rightarrow \ell\nu_\ell) = \frac{G_F^2}{8\pi} m_\ell^2 m_K f_K^2 |V_{us}|^2 \left( 1 - \frac{m_\ell^2}{m_K^2} \right)^2 \left[ 1 - m_K^2 \frac{\tan^2 \beta}{M_H^2} \right]^2, \quad \ell = e, \mu \quad (3.70)$$

berechnet. Der zweite Beitrag in den eckigen Klammern stammt aus dem zusätzlichen geladenen Higgsaustausch. Auf Baumgraphniveau ist der relative Higgs-Beitrag zur Zerfallsrate unabhängig vom Leptonflavour und kürzt sich deshalb im Verhältnis  $R_K$  in Gl. (3.66) wieder heraus. SUSY-Schleifenkorrekturen können jedoch eine Abhängigkeit vom Leptonflavour mit sich bringen. Zunächst einmal kann sich bei großem  $\tan\beta$  die geänderte Relation zwischen Yukawakopplung und gemessener Masse auswirken (siehe Kapitel 3.1). Gerade in unserem Fall der Lepton-Yukawakopplung ist die Gültigkeit des Entkopplungslimes a priori nicht klar. Unter Verwendung der geladene Higgskopplung (inklusive LFC- $\tan\beta$ -Resummation)

$$\Gamma_{\ell\nu_\ell}^{H^+} = -y_\ell \sin\beta = \frac{m_\ell \tan\beta}{v(1 + \epsilon_\ell \tan\beta)} = \frac{g_2}{\sqrt{2}M_W} \frac{m_\ell \tan\beta}{1 + \epsilon_\ell \tan\beta}, \quad \epsilon_\ell \tan\beta = -\frac{\Sigma_{LR}^\ell}{m_\ell}, \quad (3.71)$$

welche zum zweiten Term in der eckigen Klammer in Gl. (3.69) und (3.70) beiträgt, erhält man für das Verhältnis:

$$R_K = R_K^{\text{SM}} \left[ \frac{1 - m_K^2 \frac{\tan^2 \beta}{M_H^2} \frac{1}{(1 + \epsilon_s \tan\beta)(1 + \epsilon_e \tan\beta)}}{1 - m_K^2 \frac{\tan^2 \beta}{M_H^2} \frac{1}{(1 + \epsilon_s \tan\beta)(1 + \epsilon_\mu \tan\beta)}} \right]^2. \quad (3.72)$$

Mit der Notation von Gl. (3.68) heißt das:

$$\Delta r^{\mu-e} = -\frac{2m_K^2 \tan^2 \beta}{M_H^2 |1 + \epsilon_s \tan\beta|} \left[ \frac{1}{|1 + \epsilon_e \tan\beta|} - \frac{1}{|1 + \epsilon_\mu \tan\beta|} \right]. \quad (3.73)$$

Lepton-Universalität ist verletzt falls  $\epsilon_e \neq \epsilon_\mu$ . Im MSSM mit minimaler Flavourverletzung sind unterschiedliche Werte der Selektren- und Smyonmasse die einzige Quelle für  $\epsilon_e \neq \epsilon_\mu$ . Ein beträchtliches Sleptonmassensplitting zwischen der ersten und zweiten Generation ist theoretisch nur sehr schwer zu motivieren und wird deshalb im folgenden nicht weiter betrachtet.

A priori sind Diagramme mit doppelter LFV wie in Abb. 3.6 eine Quelle von Lepton-Nicht-Universalität [68]<sup>7</sup>. Dadurch ändert sich die geladene Higgskopplung wie in Kapitel 3.2 gemäß Gl. (3.27). Doch durch das Fine-Tuning-Argument und die Einschränkungen aus  $a_e$  ist dieser zusätzliche Beitrag stark eingeschränkt. Die Autoren von Ref. [68] haben  $\Delta_{LR}^e = \mathcal{O}(10^{-4})$  verwendet, um  $R_K$  mittels dieser doppelten LFV in bessere Übereinstimmung mit dem NA48/2-Ergebnis von 2004 zu bringen (siehe Tab. 3.2). Dieser Wert impliziert jedoch einer Änderung der Elektronmasse um 2000%, was nicht mit dem Natürlichkeitsprinzip vereinbar ist.

<sup>7</sup>Das SU(2)-Partnerdiagramm von Abb. 3.6, welches ein geladenes Higgsboson beinhaltet, ist in Ref. [68] abgebildet.

Bisher haben wir uns nur auf das MSSM beschränkt. Wir können unser Argument jedoch auch für eine modellunabhängige Analyse verwenden: Für die Schranke an  $y_e$  aus dem Natürlichkeitsprinzip ist es unwesentlich, in welcher Theorie die Selbstenergie  $\Sigma_e^{FV}$  berechnet wird. Jede Theorie mit einem Higgssektor vom Typ II auf Baumgraphenniveau, welche einen Selbstenergiebeitrag  $\Sigma_e^{FV}$  nicht proportional zu  $y_e$  besitzt, beeinflusst die geladene Higgskopplung durch endliche Counterterme:

$$\delta y_e = y_e \frac{\delta m_e}{m_e} = \frac{y_e}{m_e} \frac{\Sigma_e^{FV} - \epsilon_e \tan \beta}{1 + \epsilon_e \tan \beta} \simeq \frac{y_e}{m_e} \Sigma_e^{FV}. \quad (3.74)$$

Nehmen wir die obere Schranke vom Fine-Tuning-Argument  $|\delta m_e| = m_e$ , liegt der erlaubte Bereich für  $y_e$  zwischen 0 und zweimal dem Wert auf Baumgraphenniveau  $m_e/v_d$ . Der größte erlaubte Wert für  $-\Delta r^{\mu-e}$  in Gl. (3.68) entspricht deshalb:

$$\Delta r_{\min, \text{LFC}}^{\mu-e} = -4 \frac{m_K^2 \tan^2 \beta}{M_H^2 (1 + \epsilon_s \tan \beta)}. \quad (3.75)$$

Diese Schranke gilt nur, falls (wie im MSSM) die Myon-Yukawakopplung nicht wesentlich beeinflusst wird. Mit  $\tan \beta = 50$ ,  $\epsilon_s \tan \beta = 0.3$  und einer geladenen Higgsmasse von  $M_H = 300$  GeV finden wir  $\Delta r_{\min, \text{LFC}}^{\mu-e} = -5 \cdot 10^{-3}$ , was nicht im  $5\sigma$ -Entdeckungsbereich von NA62 liegt. In Ref. [79] wurde eine Analyse mehrerer Observablen der Quark- und Lepton-Flavourphysik durchgeführt. Während die meisten der Punkte in den darin aufgeführten „Scatterplots“ die Einschränkung von Gl. (3.75) erfüllen, schließt Gl. (3.26) die äußeren Punkte aus. Ferner würde die Verwendung von Gl. (3.26) die Resultate von Ref. [79] weniger vom anomalen magnetischen Moment des Myons abhängig machen, dessen theoretische Vorhersage im SM Unsicherheiten enthält, die nicht völlig verstanden sind.

In den kommenden Jahren wird NA62 immer mehr Statistik sammeln, während wir eine immer bessere Information über  $M_H$  und  $\tan \beta$  vom LHC erwarten, so dass die Schranke  $\Delta r_{\min, \text{LFC}}^{\mu-e} = -5 \cdot 10^{-3}$  strenger werden kann. Jegliche zukünftige NA62-Messung von  $\Delta r^{\mu-e}$  unter  $\Delta r_{\min, \text{LFC}}^{\mu-e}$  würde eine exotischere Neue-Physik-Erklärung als geladenen Higgsaustausch, wie z.B.  $t$ -Kanal-Leptoquark austausch, bedeuten.

### 3.6.3 Lepton-flavourverletzende Schleifenkorrekturen

Flavourverletzende Selbstenergien in der geladenen Leptonlinie können Zerfälle  $K \rightarrow \ell \nu_{\ell'}$  mit  $\ell \neq \ell'$  induzieren. Ein beträchtlicher Effekt ist nur in  $K \rightarrow e \nu_\tau$  möglich, so dass diese Selbstenergien  $R_K$  nur erhöhen können. In diesem Abschnitt schätzen wir den maximalen Effekt Lepton-flavourverletzender Schleifenkorrekturen zu  $R_K$  ab. Eine große Korrektur zu  $R_K$  involviert gleichzeitig eine relativ große  $\tilde{\tau}_L - \tilde{\tau}_R$ -Mischung. Wir können in diesem Parameterbereich des MSSMs nicht auf die Entwicklung in  $v^2/M_{\text{SUSY}}^2$  zurück greifen, die in Ref. [68, 79] verwendet wurde, da der  $\tilde{\tau}$ -Mischungswinkel  $\theta_\tau$  im Grenzfall  $v/M_{\text{SUSY}} \rightarrow 0$  verschwindet. Wir verwenden die exakte Formel, welche  $\Delta r^{\mu-e}$  durch die Massen der physikalischen Staueigenzustände  $\tilde{\tau}_{1,2}$  ausdrückt, anstatt durch die Diagonalelemente  $m_{\tilde{\tau}_{L,R}}^2$ .

Neutrinos werden sowohl als Flavoureigenzustände produziert als auch detektiert. Um flavourdiagonale  $W$ -Kopplungen zu erhalten, müssen (im On-Shell-Schema) Counterterme eingeführt werden, welche die Lepton-flavourverletzenden Schleifen am äußeren Beinchen gerade wieder aufheben. Dabei tritt die wie in Abschnitt 3.5 die Selbstenergie  $\Sigma_{ij}^{\ell LR}$  mit  $j > i$  auf. Im Gegensatz zur PMNS-Matrix-Renormierung, wo wir in der Masseneigenzustandsbasis der Neutrinos

sind, entspricht dies hier in der schwachen Basis einer Renormierung der Einheitsmatrix. In einer effektiven Herangehensweise erreicht man dies durch eine Wellenfunktionsrenormierung, indem man die Leptonfelder rotiert und so eine diagonale Massenmatrix und physikalische Felder erhält. Diese Rotation induziert LFV in den geladenen-Higgskopplungen an Lepton und Neutrino und das gleiche gilt für den diagrammatischen Ansatz mit Countertermen. Zusätzlich zu diesen Countertermen, welche aus den  $W$ -Kopplungen herrühren, treten auch nach der Higgskopplung flavourverletzenden Selbstenergien im geladenen Lepton-Propagator auf, welche diesmal umgekehrte Helizitäten aufweisen, da die Higgskopplung mit einem LR-Flip verknüpft ist, d.h.  $\Sigma_{ij}^{\ell LR}$  mit  $j < i$ . Im MSSM hebt sich der Chargino-Beitrag vom Counterterm und der LFV-Selbstenergie in der geladenen Higgskopplung gerade wieder heraus, da er exakt proportional zur Masse des rechtshängigen Leptons ist, so dass nur der Neutralino-Beitrag übrig bleibt. Damit lauten die geladenen Higgskopplungen ans Elektron:

$$i\Gamma_{e\nu\tau}^{H^+} = \frac{ig_2}{\sqrt{2}M_W} \tan\beta \left( m_e^{\text{bare}} \Delta V_{13} + m_\tau^{\text{bare}} \frac{\Sigma_{13}^{\ell RL}}{m_\tau} \right) = \frac{ig_2}{\sqrt{2}M_W} \tan\beta \left( -\frac{m_e}{m_\tau} \frac{\Sigma_{13}^{\ell LR}}{1 + \Delta_e} + \frac{\Sigma_{13}^{\ell RL}}{1 + \Delta_\tau} \right),$$

$$i\Gamma_{e\nu\mu}^{H^+} = \frac{ig_2}{\sqrt{2}M_W} \tan\beta \left( m_e^{\text{bare}} \Delta V_{12} + m_\mu^{\text{bare}} \frac{\Sigma_{12}^{\ell RL}}{m_\mu} \right) = \frac{ig_2}{\sqrt{2}M_W} \tan\beta \left( -\frac{m_e}{m_\mu} \frac{\Sigma_{12}^{\ell LR}}{1 + \Delta_e} + \frac{\Sigma_{12}^{\ell RL}}{1 + \Delta_\mu} \right),$$

wobei  $\Delta V$  aus Gl. (3.51) bekannt ist und die flavourdiagonale Kopplung  $\Gamma_{e\nu_e}^{H^+}$  in Gl. (3.27) zu finden ist. Die Counterterme sind mit der Elektronmasse unterdrückt. Da sich die Leptonmasse in  $\Sigma_{e_R - \ell_{iL}}/m_{\ell_i}$  herauskürzt, unterscheiden sich die LFV-Schleifenbeiträge mit  $\nu_\tau$  und  $\nu_\mu$  um einen Faktor  $m_\tau/m_\mu$ . Auf ähnliche Weise erhalten wir für die Kopplungen ans Myon:

$$i\Gamma_{\mu\nu\tau}^{H^+} = \frac{ig_2}{\sqrt{2}M_W} \tan\beta \left( m_\mu^{\text{bare}} \Delta V_{23} + m_\tau^{\text{bare}} \frac{\Sigma_{23}^{\ell RL}}{m_\tau} \right) = \frac{ig_2}{\sqrt{2}M_W} \tan\beta \left( -\frac{m_\mu}{m_\tau} \frac{\Sigma_{23}^{\ell LR}}{1 + \Delta_\mu} + \frac{\Sigma_{23}^{\ell RL}}{1 + \Delta_\tau} \right),$$

$$i\Gamma_{\mu\nu\mu}^{H^+} = \frac{ig_2}{\sqrt{2}M_W} \frac{m_\mu}{1 + \Delta_\mu} \tan\beta \left( 1 + \frac{m_\tau}{m_\mu} \frac{\tan\beta}{1 + \Delta_\tau} \Delta_{LR}^\mu \right), \quad (3.76)$$

$$i\Gamma_{\mu\nu_e}^{H^+} = \frac{ig_2}{\sqrt{2}M_W} \tan\beta \left( m_\mu^{\text{bare}} \Delta V_{21} - m_e^{\text{bare}} \frac{\Sigma_{21}^{\ell RL}}{m_e} \right) = \frac{ig_2}{\sqrt{2}M_W} \tan\beta \left( \frac{\Sigma_{21}^{\ell LR}}{1 + \Delta_\mu} - \frac{m_e}{m_\mu} \frac{\Sigma_{21}^{\ell RL}}{1 + \Delta_e} \right).$$

Im Vergleich zu den Elektronkopplungen sind keine so großen Verstärkungsfaktoren möglich. Schließlich findet man für die  $\tau$ -Kopplungen:

$$i\Gamma_{\tau\nu\tau}^{H^+} = \frac{ig_2}{\sqrt{2}M_W} \frac{m_\tau}{1 + \Delta_\tau} \tan\beta, \quad (3.77)$$

$$i\Gamma_{\tau\nu\mu}^{H^+} = \frac{ig_2}{\sqrt{2}M_W} \tan\beta \left( m_\tau^{\text{bare}} \Delta V_{32} - m_\mu^{\text{bare}} \frac{\Sigma_{32}^{\ell LR}}{m_\tau} \right) = \frac{ig_2}{\sqrt{2}M_W} \tan\beta \left( \frac{\Sigma_{32}^{\ell RL}}{1 + \Delta_\tau} - \frac{m_\mu}{m_\tau} \frac{\Sigma_{32}^{\ell LR}}{1 + \Delta_\mu} \right),$$

$$i\Gamma_{\tau\nu_e}^{H^+} = \frac{ig_2}{\sqrt{2}M_W} \tan\beta \left( m_\tau^{\text{bare}} \Delta V_{31} - m_e^{\text{bare}} \frac{\Sigma_{31}^{\ell LR}}{m_\tau} \right) = \frac{ig_2}{\sqrt{2}M_W} \tan\beta \left( \frac{\Sigma_{31}^{\ell RL}}{1 + \Delta_\tau} - \frac{m_e}{m_\tau} \frac{\Sigma_{31}^{\ell LR}}{1 + \Delta_e} \right).$$

Diese Ergebnisse sind im Entkopplungslimes  $M_{\text{SUSY}} \gg v$  in den Gl. (92-95) von Ref. [115] angegeben. In Anhang C von Ref. [115] ist ein iteratives Verfahren dargestellt, analog zu dem in Ref. [45], welches die  $\tan\beta$ -verstärkten Korrekturen resummiert. Unsere Ergebnisse erfassen den analytischen Grenzfall, zu dem die iterative Methode konvergiert. Wir sind am  $\tau_L \rightarrow e_R$ -Selbstenergiebeitrag (siehe Abb. 3.19) zu  $R_K$  interessiert und untersuchen, ob es möglich ist, durch die zukünftigen NA62-Daten das Element  $\delta_{RR}^{\ell 13}$  einzuschränken. Der  $H^+ e\nu_\tau$ -Vertex mit dem Verstärkungsfaktor  $m_\tau/m_e$  ist der einzige relevante Beitrag zu  $R_K$ . Korrekturen zur myonischen Zerfallsmode sind aufgrund der sehr viel kleineren Verstärkung  $m_\tau/m_\mu$  irrelevant. In Anbetracht der Ergebnisse im LFC-Fall im vorherigen Abschnitt können wir ferner große

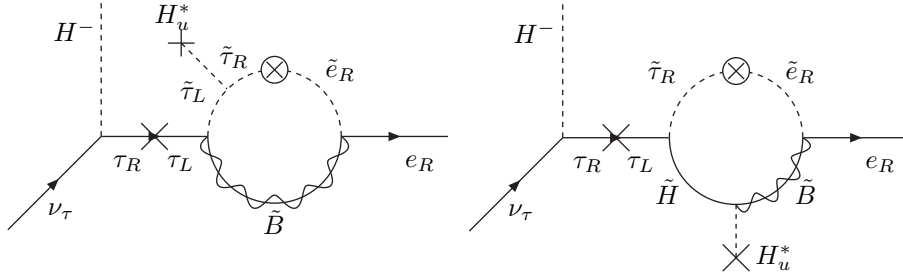


Abb. 3.19: Zwei dominante Selbstenergien am äußeren Beinchen, die zu flavourverletzenden, geladenen Higgskopplungen führen.

Effekte in  $\Gamma_{e\nu_e}^{H^+}$  ausschließen. Im LFV-Fall ist die Abweichung vom SM dann näherungsweise gegeben durch:

$$\Delta r_{\text{LFV}}^{\mu-e} = \frac{m_K^4 \tan^4 \beta}{M_H^4 (1 + \epsilon_e \tan \beta)^2 (1 + \epsilon_\tau \tan \beta)^2} \frac{m_\tau^2}{m_e^2} \left[ \frac{\Sigma_{\tau_L-e_R}}{m_\tau} \right]^2. \quad (3.78)$$

Für den  $\tau_L \rightarrow e_R$ -Übergang sind die zwei Diagramme in Abb. 3.19 die einzigen, die nicht mit der Elektron-Yukawakopplung unterdrückt sind. Wir berücksichtigen explizit die Stau-mischung: Wir wählen den Mischungswinkel im Bereich  $\theta_\tau \in [-\pi/4, \pi/4]$  und verwenden folgende Relationen:

$$\sin(2\theta_\tau) = \frac{2\Delta m_{LR}^{33}}{m_{\tilde{\tau}_1}^2 - m_{\tilde{\tau}_2}^2}, \quad \cos(2\theta_\tau) = \frac{m_{\tilde{\tau}_L}^2 - m_{\tilde{\tau}_R}^2}{m_{\tilde{\tau}_1}^2 - m_{\tilde{\tau}_2}^2}, \quad (3.79a)$$

$$m_{\tilde{\tau}_{1,2}}^2 = \frac{1}{2} \left( m_{\tilde{\tau}_L}^2 + m_{\tilde{\tau}_R}^2 \pm \sqrt{(m_{\tilde{\tau}_L}^2 - m_{\tilde{\tau}_R}^2)^2 + 4|\Delta m_{LR}^{33}|^2} \right), \quad (3.79b)$$

$$\text{sgn}(m_{\tilde{\tau}_1}^2 - m_{\tilde{\tau}_2}^2) = \text{sgn}(m_{\tilde{\tau}_L}^2 - m_{\tilde{\tau}_R}^2). \quad (3.79c)$$

Je nach Vorzeichen des Mischungswinkels ändert sich der Index des leichtesten Staus, was aus

$$m_{\tilde{\tau}_1}^2 = m_{\tilde{\tau}_2}^2 + \frac{2\Delta m_{LR}^{33}}{\sin(2\theta_\tau)} = m_{\tilde{\tau}_2}^2 - \frac{2\mu m_\tau \tan \beta}{\sin(2\theta_\tau)} \quad (3.80)$$

abgelesen werden kann. Wir drücken die Massen der rechts- und linkshändigen Staus durch physikalische Größen, d.h. durch die leichteste Staumasse  $m_{\tilde{\tau}_\ell}$  und den Mischungswinkel  $\theta_\tau$ , aus:

$$m_{\tilde{\tau}_L}^2 = m_{\tilde{\tau}_\ell}^2 + \frac{\mu m_\tau \tan \beta}{|\sin(2\theta_\tau)|} (1 - \text{sgn}(\theta_\tau) \cos(2\theta_\tau)), \quad (3.81)$$

$$m_{\tilde{\tau}_R}^2 = m_{\tilde{\tau}_\ell}^2 + \frac{\mu m_\tau \tan \beta}{|\sin(2\theta_\tau)|} (1 + \text{sgn}(\theta_\tau) \cos(2\theta_\tau)). \quad (3.82)$$

Prinzipiell ist beliebig großes  $\mu$ , während alles andere festgehalten wird, nicht erlaubt, weil es zu negativen Staumassen führt. Legt man  $m_{\tilde{\tau}_\ell}$  jedoch fest und erhöht  $\mu$ , folgt daraus ein großes Massensplitting zwischen den zwei Staumasseneigenwerten.

Behandeln wir die flavourverletzenden Einträge bis zur linearen Ordnung, bekommen wir damit für das Bino-Diagramm, welches dem ersten Term in Gl. (3.18) entspricht:

$$\begin{aligned} \Sigma_{\tau_L-e_R}^{\tilde{B}} &= -\frac{\alpha_1}{4\pi} M_1 \Delta m_{RR}^{\ell 31} \sin \theta_\tau \cos \theta_\tau (f_1(M_1^2, m_{\tilde{e}_R}^2, m_{\tilde{\tau}_1}^2) - f_1(M_1^2, m_{\tilde{e}_R}^2, m_{\tilde{\tau}_2}^2)) \\ &= -\frac{\alpha_1}{4\pi} \frac{m_\tau \tan \beta}{1 + \epsilon_\tau \tan \beta} M_1 \mu m_{\tilde{e}_R} m_{\tilde{\tau}_R} \delta_{RR}^{\ell 13} f_2(M_1^2, m_{\tilde{e}_R}^2, m_{\tilde{\tau}_1}^2, m_{\tilde{\tau}_2}^2). \end{aligned} \quad (3.83)$$

Hier wurde die Relation  $Z_L^{4i*} Z_L^{6i} = Z_\tau^{1i*} Z_\tau^{2i} = \pm \cos \theta \sin \theta$  ( $-/+$  für  $i = 1/2$ ) und der  $v_d \ll v_u$ -Grenzfall bei der Neutralino-Mischung verwendet (Funktionen in Anhang A.3). Für das rechte Diagramm in Abb. 3.19 bekommen wir:

$$\begin{aligned} \Sigma_{\tau_L-e_R}^{\tilde{H}-\tilde{B}} &= \frac{\alpha_1}{4\pi} \frac{m_\tau \tan \beta}{1 + \epsilon_\tau \tan \beta} M_1 \mu m_{\tilde{e}_R} m_{\tilde{\tau}_R} \delta_{RR}^{13} \\ &\cdot [\sin^2 \theta_\tau f_2(M_1^2, \mu^2, m_{\tilde{\tau}_1}^2, m_{\tilde{e}_R}^2) + \cos^2 \theta_\tau f_2(M_1^2, \mu^2, m_{\tilde{\tau}_2}^2, m_{\tilde{e}_R}^2)]. \end{aligned} \quad (3.84)$$

Prinzipiell ist  $\Sigma_{\tau_L-e_R}^{\tilde{X}^0} = \Sigma_{\tau_L-e_R}^{\tilde{B}} + \Sigma_{\tau_L-e_R}^{\tilde{H}-\tilde{B}}$  somit sensitiv auf das RR-Element. Das relative Minuszeichen zwischen den zwei Beiträgen (aufgrund von Hyperladungsquantenzahlen) führt zu einer möglichen Auslöschung in bestimmten Parameterbereichen. In dieser Näherung verschwindet die RR-Sensitivität, falls  $\mu^2 = m_{\tilde{\tau}_1}^2 \cos^2 \theta_\tau + m_{\tilde{\tau}_2}^2 \sin^2 \theta_\tau$ , was sich im Fall  $\theta_\tau = 0$  zu  $\mu^2 = m_{\tilde{\tau}_L}^2$  vereinfacht. Diese potentielle Auslöschung, die ohne Staumischung sogar transparenter ist, wurde schon in Ref. [116] gefunden, aber in Ref. [68] nicht berücksichtigt. Dies ist auch der Grund, warum aus den radiativen Zerfälle  $\ell_j \rightarrow \ell_i \gamma$  keine verlässlichen Schranken an die RR-Elemente abgeleitet werden können<sup>8</sup>. Im in der Literatur oft verwendeten Entkopplungslimes bekommt man in Gl. (3.83)  $m_{\tilde{\tau}_{L,R}}$  in der Schleifenfunktion anstatt  $m_{\tilde{\tau}_{1,2}}$  und in Gl. (3.84) reduziert sich die Klammer zu einem Term mit Vorfaktor 1 und  $m_{\tilde{\tau}_R}$  anstatt  $m_{\tilde{\tau}_{1,2}}$  in der Funktion.

Wir möchten den maximal erlaubten LFV-Effekt in  $R_K$  inklusive Staumischung abschätzen. Dieser hängt sehr stark von der Kombination  $\mu \tan \beta$  ab. Wir wählen dazu folgende Inputparameter: Die untere Schranke für das leichteste Neutralino liegt bei 46 GeV [15], und das leichteste Stau muss mindestens 15 GeV schwerer sein. Um diese Schranken einzuhalten, wählen wir  $M_1 = 100$  GeV und  $m_{\tilde{\tau}_\ell} = 120$  GeV. Die schwerere Staumasse  $m_{\tilde{\tau}_h}$  ist dann durch den Mischungswinkel  $\theta_\tau$  und  $\mu$  bestimmt. Für das Nebendiagonalelement  $\Delta m_{RR}^{\ell 13} = m_{\tilde{e}_R} m_{\tilde{\tau}_R} \delta_{RR}^{\ell 13}$  wählen wir der Einfachheit halber  $m_{\tilde{e}_R} = 200$  GeV und drücken  $m_{\tilde{\tau}_R}$  durch  $\theta_\tau$ ,  $\mu$  und  $m_{\tilde{\tau}_\ell}$  aus. Mit dieser Wahl steigt der Wert des Bino-Diagramms mit  $\mu$  an, da  $m_{\tilde{\tau}_R}$  und  $m_{\tilde{\tau}_h}$  ebenfalls wachsen. Setzen wir stattdessen  $\Delta m_{RR}^{\ell 13} = m_{\tilde{e}_R}^2 \delta_{RR}^{\ell 13}$ , so ist  $\Sigma_{\tau_L-e_R}^{\tilde{B}}$  endlich für  $\mu \rightarrow \infty$ . Ferner wählen wir wieder  $\tan \beta = 50$  und reelles und positives  $\mu$ . Mit diesen Eingabeparametern können wir den Flavourübergang als Funktion von  $\theta_\tau$ ,  $\mu$  und  $\delta_{RR}^{\ell 13}$  schreiben. Für kleine Werte von  $\mu$  dominiert das Higgsino-Bino-Diagramm, aber die maximalen Werte sind eher klein im Vergleich zu großen Werten des reinen Bino-Diagramms. Für großes  $\mu$  und festgehaltene SUSY-Massenskala strebt ersteres gegen Null, während letzteres groß werden kann; eine weitere Begründung, warum Staumischung relevant ist. In Abb. 3.20 ist die Abhängigkeit von  $\theta_\tau$  und  $\mu$  für die Summe des Bino- und Higgsino-Bino-Diagramms dargestellt. Der Hauptbeitrag stammt dabei von  $\Sigma_{\tau_L-e_R}^{\tilde{B}}$ . Mit diesem Setup bekommt man den größten Effekt im Bino-Beitrag bei einem Mischungswinkel von  $\theta_\tau \approx 26^\circ$ . Die Unstetigkeit bei  $\theta_\tau = 0$  kommt von der Tatsache, dass  $\tilde{\tau}_1$  und  $\tilde{\tau}_2$  ihre Rollen als leichteres und schwereres Stau vertauschen. Für kleines  $\mu$  ist der Effekt eher klein und nicht sensitiv auf die Staumischung, aber für großes  $\mu$  wird der Beitrag insbesondere für  $\theta_\tau = 26^\circ$  recht groß.

Die Resultate sind in Abb. 3.21 veranschaulicht, wo  $\Delta r_K^{\mu-e}$  für  $\delta_{RR}^{13} = 0.5$  und  $M_H = 500$  GeV als Funktion von  $\theta_\tau$  und  $\mu$  abgebildet ist, wobei typische Werte von  $\epsilon_s \tan \beta = 0.3$  und  $\epsilon_e \tan \beta = \epsilon_\tau \tan \beta = -0.07$  verwendet wurden. Die LFU-verletzende Größe  $\Delta r_K^{\mu-e}$  ist quadratisch in  $\delta_{RR}^{\ell 13}$ , proportional zu  $M_H^{-4}$  und  $\tan^6 \beta$ . Für andere Werte muss  $\Delta r_K^{\mu-e}$  in diesem

<sup>8</sup>Um eine Einschränkung an  $\delta_{RR}^{\ell 12}$  zu berechnen, wurden in Ref. [64] die Prozesse  $\mu \rightarrow e \gamma$  und  $\mu \rightarrow e$ -Konversion im Kern kombiniert. Die entsprechenden Einschleifenamplituden des letzteren Prozesses unterliegen einer ähnlichen Auslöschung, allerdings in einem anderen Parameterbereich, so dass die Schranke  $\delta_{RR}^{12} \leq 0.2$  abgeleitet werden konnte. Eine ähnliche Möglichkeit für das 13-Element gibt es jedoch nicht.



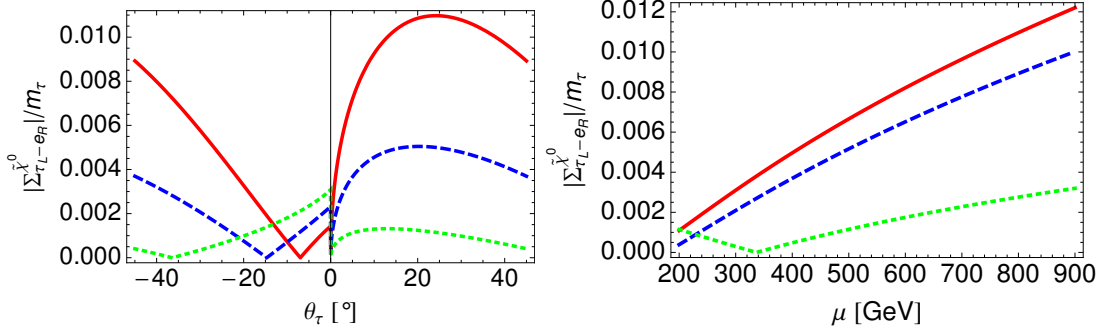


Abb. 3.20:  $|\Sigma_{\tau_L-e_R}^{\tilde{\chi}^0}|/m_\tau$  für  $\delta_{RR}^{\ell 13} = 0.5$ . Links: In Abhängigkeit von  $\theta_\tau$  für verschiedene Werte von  $\mu$ : 800 GeV (rot), 400 GeV (blau gestrichelt), 200 GeV (grün punktiert) (von oben nach unten). Rechts: In Abhängigkeit von  $\mu$  für verschiedene Werte von  $\theta_\tau$ :  $26^\circ$  (rot),  $45^\circ$  (blau gestrichelt),  $-18^\circ$  (grün punktiert).

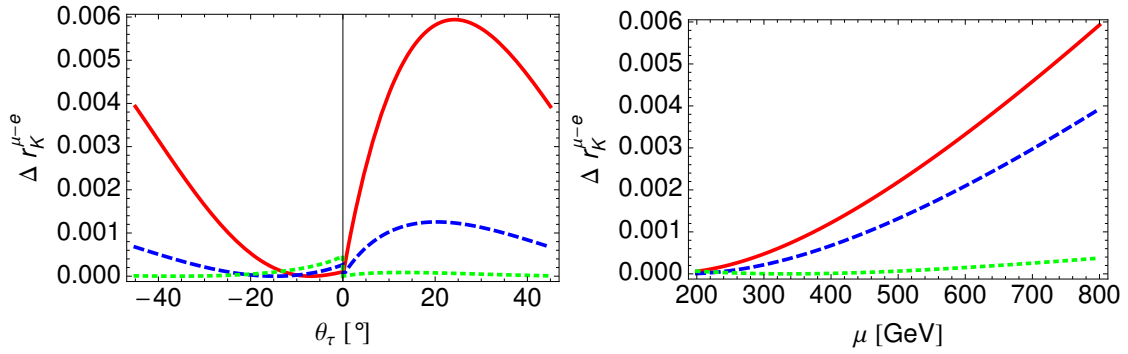


Abb. 3.21:  $\Delta r_K^{\mu-e}$  für  $\delta_{RR}^{\ell 13} = 0.5$ ,  $M_H = 500$  GeV und  $\tan\beta = 50$ . Links: als Funktion von  $\theta_\tau$  für verschiedene Werte von  $\mu$ : 800 GeV (rot), 400 GeV (blau gestrichelt), 200 GeV (grün gepunktet) (von oben nach unten). Rechts: In Abhängigkeit von  $\mu$  für verschiedene Werte von  $\theta_\tau$ :  $26^\circ$  (rot),  $45^\circ$  (blau gestrichelt),  $-18^\circ$  (grün gepunktet).

Schaubild reskaliert werden. Man bekommt einen maximalen Effekt von 0.6% für  $\mu = 800$  GeV,  $M_H = 500$  GeV,  $\delta_{RR}^{\ell 13} = 0.5$ ,  $\theta_\tau = 26^\circ$  und  $\tan\beta = 50$ , was sich im Rahmen der zukünftigen Sensitivität des NA62-Experiments befindet. Im Bereich von  $500 \text{ GeV} \leq \mu \leq 900 \text{ GeV}$  mit  $\theta_\tau = 26^\circ$  kann der maximale Effekt (mit einem 7%-Fehler) durch eine einfache Taschenrechnerformel ausgedrückt werden:

$$\Delta r_K^{\mu-e} \approx 0.006 \left( \frac{500 \text{ GeV}}{M_H} \right)^4 \left( \frac{\tan\beta}{50} \right)^6 \left( \frac{\delta_{RR}^{\ell 13}}{0.5} \right)^2 \left( \frac{\mu}{800 \text{ GeV}} \right)^2. \quad (3.85)$$

Falls die leichteste Staumasse als freier Parameter behandelt wird, skaliert  $\Delta r_K^{\mu-e}$  in etwa mit  $1/m_{\tilde{\tau}_\ell}^2$  für  $100 \text{ GeV} \leq m_{\tilde{\tau}_\ell} \leq 250 \text{ GeV}$ . In Abb. 3.22 sind diese Abhängigkeiten graphisch dargestellt. Es ist also durchaus möglich,  $\mathcal{O}(0.5\%)$ -Effekte zu erzielen, aber für verschwindende Staumischung und kleines  $\mu$  ist es schwer, die experimentelle Sensitivität zu erreichen. Um Einschränkungen an  $\delta_{RR}^{\ell 13}$  abzulesen ist Abb. 3.23 nützlich. Wir suchen  $(M_H, \mu, \tan\beta, \delta_{RR}^{\ell 13})$ -Bereiche, in denen  $\Delta r_K^{\mu-e}$  die zukünftige experimentelle Sensitivität von 0.2% erreicht. In Ref. [10] haben wir hervorgehoben, dass selbst Werte von  $\tan\beta = 100$  immer noch mit der Forderung nach perturbativer Bottom-Yukawakopplung vereinbar sind.

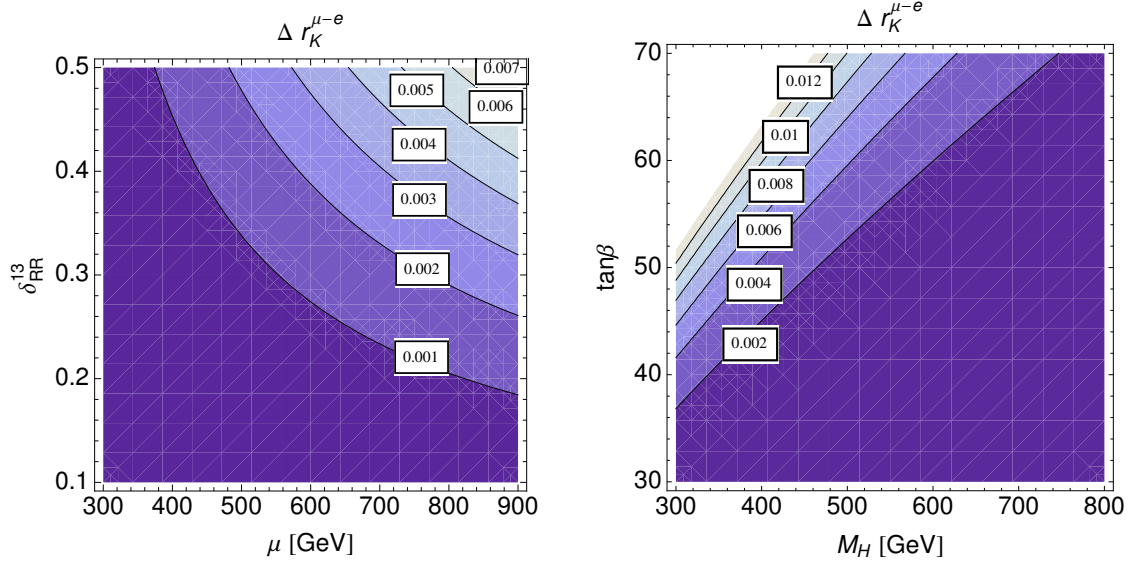


Abb. 3.22:  $\Delta r_K^{\mu-e}$  als Funktion von  $\mu$ ,  $\delta_{RR}^{\ell 13}$ ,  $M_H$  und  $\tan \beta$  mit  $\theta_\tau = 26^\circ$ . Links:  $M_H = 500$  GeV und  $\tan \beta = 50$ . Rechts:  $\mu = 800$  GeV und  $\delta_{RR}^{\ell 13} = 0.25$ .

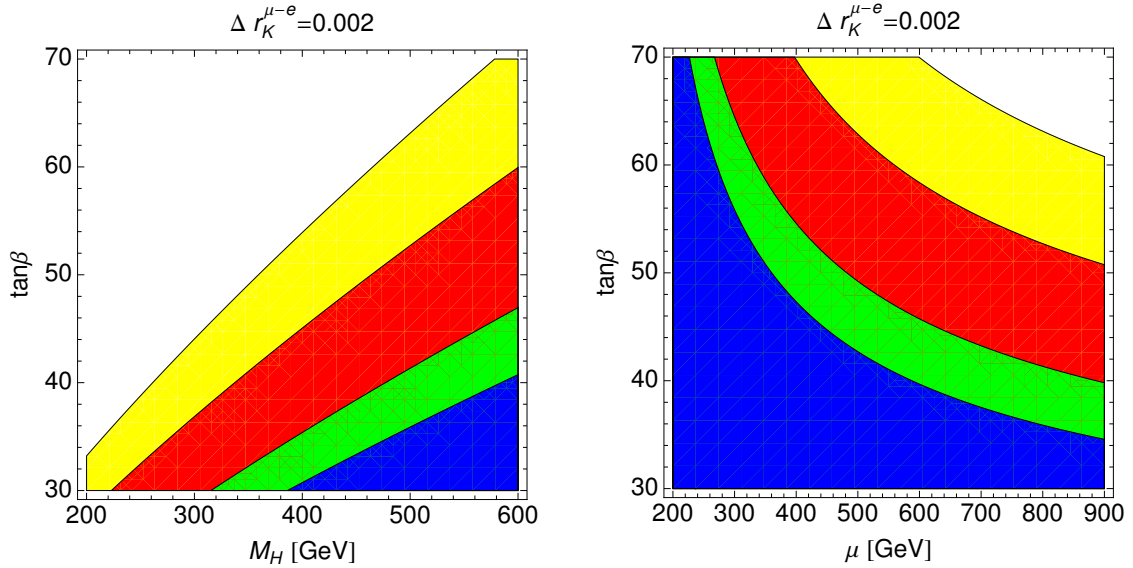


Abb. 3.23: Für verschiedene Werte von  $\delta_{RR}^{\ell 13} = 0.15$  (gelb),  $0.25$  (rot),  $0.5$  (grün),  $0.75$  (blau) (von oben nach unten) zeichnen wir Bereiche, in denen  $\Delta r_K^{\mu-e}$  die zukünftige experimentelle Sensitivität von  $0.2\%$  erreicht. Links: als Funktion von  $M_H$  und  $\tan \beta$  mit  $\mu = 800$  GeV; Rechts: als Funktion von  $\mu$  und  $\tan \beta$  mit  $M_H = 500$  GeV; jeweils  $\theta_\tau = 26^\circ$ .

Vergleich mit der Literatur: Um den Beitrag des  $\tau_L \rightarrow e_R$ -Übergangs zu  $R_K$  abzuschätzen, wurde in Ref. [68]  $\Delta_R^{31} = 5 \cdot 10^{-4}$  verwendet, was in unserer Notation  $\Sigma_{\tau_L-e_R} = \frac{m_\tau \tan \beta}{1 + \epsilon_\tau \tan \beta} \Delta_R^{31} \approx 0.04$  bzw.  $|\Sigma_{\tau_L-e_R}^{\tilde{\chi}^0}|/m_\tau = 0.025$  entspricht. Solch große Werte werden jedoch nur in ganz bestimmten Parameterbereichen erreicht (vergleiche Abb. 3.20), besonders für großes  $\mu$ . Um den Effekt nicht zu überschätzen und keine negativen Sleptonmassen zu erhalten, sollte höchstens

$|\Sigma_{\tau_L-e_R}^{\tilde{\chi}^0}|/m_\tau \approx 0.01$  verwendet werden. Mit diesem maximalen Wert von  $|\Sigma_{\tau_L-e_R}|/m_\tau = 0.01$ ,  $\tan\beta = 50$  und einer geladenen Higgsmasse von  $M_H = 500$  GeV enden wir bei  $\Delta r_{\max, \text{LFV}}^{\mu-e} \approx 0.007$ . In Ref. [117] wurde ein zukünftiger Fehler von 0.12% angenommen, um große, phänomenologisch interessante Werte für  $\delta_{LL}^{\ell 13}$  und  $\delta_{RR}^{\ell 13}$  abzuleiten. Ihre Parameterscans respektieren in Übereinstimmung mit unserem Ergebnis  $|\delta_{LL}^{13} \delta_{RR}^{13}| \leq 0.01$ . In Ref. [118] wird betont, dass mit einer allgemeinen, effektiven Herangehensweise in Modellen mit minimaler LFV (MLFV und MFV-GUT) die Effekte zu klein sind, um beobachtbar zu sein. Deren Einschränkungen sind stärker im Vergleich zu den maximalen Effekten in Ref. [79].

### 3.6.4 Zusammenfassung von LFV-Effekten in $R_K$

In diesem Kapitel haben wir LFV-Effekte im leptonen Kaonzerfall von Ref. [68] untersucht, die  $R_K$  im Vergleich zum SM-Wert signifikant ändern können. Der behauptete große Effekt aus doppelter LFV widerspricht dem Natürlichkeitsprinzip. Dadurch konnten wir eine obere Grenze an  $|\delta_{LL}^{\ell 13} \delta_{RR}^{\ell 13}|$  ableiten. Zusätzlich haben wir gefunden, dass selbst in einer modellunabhängigen Analyse große Korrekturen zur Higgs-Elektron-Kopplung das Natürlichkeitsprinzip verletzen. Folglich ist eine große destruktive Interferenz mit dem SM-Beitrag in  $R_K$  ein Signal für Neue Physik, die verschieden von LFV in SUSY ist. Weitere Quellen, die zu einer  $\mu - e$ -Nicht-Universalität führen, sind Lepton-flavourverletzende Selbstenergien, die den Higgsvertex und damit  $R_K$  korrigieren. Diese Korrekturen sind hauptsächlich sensitiv auf die geladene Higgsmasse und den Übergang  $\Sigma_{\tau_L-e_R} \propto \delta_{RR}^{\ell 13}$ . Um den Effekt zu maximieren, muss Staumischung berücksichtigt werden. Für  $\tan\beta = 50$ ,  $M_H = 500$  GeV,  $\mu = 800$  GeV, große Staumischung und ein großes  $\delta_{RR}^{13} = 0.5$  kommt man in den Bereich der experimentellen Sensitivität von 0.6% des NA62-Experiments. Jedoch gibt es Parameterbereiche, in denen die RR-Sensitivität größtenteils herausfällt. Misst man einen Wert von  $R_K$  kompatibel mit der SM-Vorhersage, kann weder LFV noch SUSY im Allgemeinen ausgeschlossen werden.

## 3.7 Flavourstruktur von Dimension-5-Operatoren

Die potenzielle Vereinigung der Yukawakopplungen bei hohen Energien ist ein erstrebenswertes, aber keinesfalls offensichtlicher Zusatz zur Eichkopplungs-Vereinigung. Jedoch ist es nicht so ohne weiteres möglich, gleichzeitig Yukawa-Vereinigung sowie realistische Fermionmassen und -mischungen zu erhalten. Dies erfordert eine Änderung des Yukawasektors. In diesem Kapitel sollen die Effekte von Dimension-5-Yukawakopplungen in den Renormierungsgruppengleichungen (RGE) untersucht werden [10]. Diese Korrekturen werden benötigt, um die Yukawakopplungen der ersten beiden Generationen zu vereinheitlichen, wie es in GUT-Modellen vorhergesagt wird (siehe Gl. (C.11) in Anhang C). Bisher parametrisierten die Elemente  $\delta_{XY}^{\ell IJ}$  modellunabhängig eine Quelle von LFV. In diesem Kapitel soll nun umgekehrt analysiert werden, wie nichtverschwindende  $\delta_{XY}^{\ell IJ}$  durch die RGE generiert werden können. Falls SUSY-Brechung oberhalb der GUT-Skala auftritt, folgt aus der Flavour-Universalität ein natürliches Alignment zwischen den trilinearen Brechungsterme und den Dimension-4-Yukawakopplungen, wobei die höherdimensionalen Operatoren als potenzielle Quellen von LFV übrig bleiben. Konfrontieren wir dies mit den experimentellen Einschränkungen aus  $\mu \rightarrow e\gamma$ , kann die Flavourstruktur der höherdimensionalen Operatoren eingegrenzt werden.

### 3.7.1 RGE und Universalität

Um das SUSY-Flavourproblem nicht zu verschlimmern, wird meist Universalität der SUSY-brechenden Terme bei der hohen Skala, z.B.  $M_{\text{GUT}} = 2 \cdot 10^{16}$  GeV, wo die Eichkopplungen konvergieren, angenommen. Nichtverschwindende  $\delta_{XY}^{\ell IJ}$  bei der elektroschwachen Skala werden dann durch die RGE induziert. Deren Größe ist stark modellabhängig. In Ref. [10] wurden zwei SO(10)-GUT-Szenarios untersucht, bei denen durch die Brechung von SO(10) schwere Majoranamassen für rechtshändige Neutrinos und via Seesaw-Mechanismus Massen für links-händige Neutrinos generiert werden. Löst man die RGE in führender Ordnung, bekommt man für die Nebendiagonalelemente [119, 120]<sup>9</sup>:

$$\left(\Delta m_{\bar{L}}^2\right)_{ij} \simeq -\frac{3m_0^2 + A_0^2}{8\pi^2} \left(\mathbf{Y}^{\nu\dagger} \ln\left(\frac{M_{\text{GUT}}}{M_{N_i}}\right) \mathbf{Y}^\nu\right)_{ij}, \quad i \neq j, \quad (3.86)$$

$$\left(\Delta m_{\bar{E}}^2\right)_{ij} \simeq 0, \quad i \neq j, \quad (3.87)$$

$$(A_\ell)_{ij} \simeq -\frac{3}{8\pi^2} A_0 y_{\ell_i} \left(\mathbf{Y}^{\nu\dagger} \ln\left(\frac{M_{\text{GUT}}}{M_{N_i}}\right) \mathbf{Y}^\nu\right)_{ij}, \quad i \neq j. \quad (3.88)$$

Da wir die RGE im MSSM mit rechtshändigen Neutrinos (mit Massen  $M_{N_i}$ ) [119, 121, 122] entnommen haben, wo RL-Konvention für die Yukawakopplungen verwendet wird, handhaben wir es in diesem Kapitel genauso. Die RGE sind in Anhang A.4 aufgelistet. Durch Transponieren bekommt man die zuvor verwendete LR-Konvention zurück. Wie man sieht, hängen die generierten Nebendiagonalelemente hauptsächlich von der Struktur und Größe von  $\mathbf{Y}^\nu$  ab, von den Massen der rechtshändigen Neutrinos  $M_{N_i}$  und den SUSY-brechenden Parametern  $A_0$  und  $m_0$  ab. Die RR-Terme verschwinden in LO, während die LR-Einträge via  $A_\ell$  gegenüber den LL-Elementen durch  $y_\ell$  unterdrückt sind. Bei den zwei in Ref. [10] untersuchten Szenarien handelt es sich um einen minimalen Fall, bei dem die Mischung der Neutrino-Yukawakopplung durch die CKM-Matrix charakterisiert ist, und um einen maximalen Fall mit PMNS-artiger Mischung. In letzterem hängt die Größe der generierten  $\delta_{LL}^{\ell 12,13}$  sehr stark davon ab, ob  $U_{e3}$  verschwindet oder nicht, da der dominante Beitrag  $\propto y_t^2$  mit  $U_{e3}$  multipliziert wird. Hier sollen nun die Effekte von Fermionmassenkorrekturen betrachtet werden. Die Betrachtungen in diesem Kapitel sind nicht sensitiv auf  $\tan\beta$ .

### 3.7.2 Wozu höherdimensionale Operatoren?

In GUT-Modellen stammen die Yukawakopplungen aus ein paar wenigen fundamentalen Kopplungen, wodurch die Kopplungen der SM-Felder in Beziehung gesetzt werden. Wie in Anhang C genauer erläutert, sagen schon (minimale) SU(5)-GUT-Modelle die Vereinigung der Downquark- und geladenen Lepton-Yukawakopplung voraus:  $\mathbf{Y}^D = (\mathbf{Y}^E)^\top$ . Da die Einführung einer neuen Skala  $M_{\text{GUT}}$  zum Hierarchieproblem des SMs führt, kann man stattdessen auch SUSY-SU(5) betrachten. Das minimale SUSY-SU(5)-Modell hat jedoch zwei entscheidende Probleme:

- Während die Vereinigung von Bottom- und Taumasse in bemerkenswerter Übereinstimmung bei  $M_{\text{GUT}}$  liegt, ist die Relation für die ersten beiden Generationen verletzt.
- Das minimale SUSY-SU(5)-Modell nach Ref. [123, 124] wurde wegen der Schranke an den Protonzerfall von SuperKamiokande bereits für ausgeschlossen erklärt [125, 126].

<sup>9</sup>Da wir Universalität der SUSY-brechenden Parameter bei  $M_{\text{GUT}}$  annehmen, bekommen wir keinen zusätzlichen Term aus farbigen Higgsfeldern wie beispielsweise in Ref. [117, 121].

Das Misslingen der Yukawa-Vereinheitlichung der leichten Generationen kann auf natürliche Weise durch das Hinzufügen höherdimensionaler Operatoren erklärt werden [127]. Diese entstehen durch das Ausintegrieren schwerer Freiheitsgrade bei der Planck-Skala und sind von der Größenordnung  $M_{\text{GUT}}/M_{\text{Pl}}$ . Dadurch wird aber auch gleichzeitig das zweite Problem einer zu großen Protonzerfallsrate, welche aus Kopplungen des farbigen Higgstripletts herrührt, gelöst [128–132]. Wir teilen die Korrekturen in zwei Anteile auf:

$$\Upsilon^D = \Upsilon - \frac{\sigma}{M_{\text{Pl}}} \tilde{Y}' + k_d \frac{\sigma}{M_{\text{Pl}}} \tilde{Y}, \quad (3.89)$$

$$(\Upsilon^E)^\top = \Upsilon - \frac{\sigma}{M_{\text{Pl}}} \tilde{Y}' + k_e \frac{\sigma}{M_{\text{Pl}}} \tilde{Y}, \quad \sigma = \mathcal{O}(M_{\text{GUT}}). \quad (3.90)$$

Hierbei trägt  $\tilde{Y}'$  jeweils gleichermaßen bei und ist hauptsächlich auf  $B$ - und  $L$ -verletzende Prozesse sensitiv [128, 129]. Die Koeffizienten  $k_d$  und  $k_e$  sind durch die Richtung der GUT-brechenden VEVs bestimmt. Aufgrund des Unterdrückungsfaktors wird die erfolgreiche Bottom-Tau-Vereinigung nicht zerstört.

**Bemerkung:** Falls SUSY unterhalb der GUT-Skala gebrochen wird, kann man nicht zwischen Dimension-4- und Dimension-5-Yukawakopplungen unterscheiden, da dann die zusammengesetzte effektive Yukawakopplung in die RGE des MSSMs eingeht. Die Relationen zwischen Quark und Leptonen gehen in diesem Fall verloren. SUSY-Brechung oberhalb der GUT-Skala bedeutet aber nicht, dass die soften Terme ebenso groß sind; sie können immer noch bei 1 TeV liegen. Anders formuliert: Damit die GUT-Relationen Auswirkungen auf die soften SUSY-brechenden Terme haben können, muss SUSY-Brechung in der GUT-Theorie schon präsent sein. Das wird sowohl hier als auch im CMM-Modell benötigt.

### 3.7.3 Erste Untersuchungen in der Literatur

Die Konsequenzen der höherdimensionalen Operatoren auf Observablen der Flavourphysik wurden lange Zeit vernachlässigt. Erste Untersuchungen mit verschwindenden Neutrinomassen wurden in Ref. [133, 134] unternommen. In Ref. [134] ist die CKM-Matrix zusammen mit einer zusätzlichen Rotationsmatrix im RR-Sleptonsektor eingebunden. Ref. [133] diskutiert ein  $\text{SO}(10)$ -SUSY-GUT-Modell mit nichtminimaler Yukawawechselwirkung. Massive Neutrinos via Seesaw-Mechanismus wurden zuerst in SUSY-SU(5) in Ref. [135] analysiert. Die Autoren nehmen einen höherdimensionalen Operator mit auf, dessen Haupteffekt durch zwei Mischungswinkel bestimmt wird, die jeweils die Rotation zwischen den ersten beiden Generationen der downartigen Quarks und geladenen Leptonen beschreiben. In Ref. [136] wird unter Berücksichtigung der Korrekturen, die die Quark-Lepton-Relation beheben, die Korrelation zwischen den flavourverletzenden Masseneinsetzungen im Squark- und Sleptonsektor in einem SUSY-SU(5)-Szenario studiert. Auch im CMM-Modell werden in Ref. [137] die Auswirkungen der Yukawakorrekturen, die durch einen Mischungswinkel und eine  $CP$ -verletzenden Phase parametrisiert werden, analysiert. Durch Kombination von  $K-\bar{K}$ -Mischung,  $B_d-\bar{B}_d$ -Mischung und  $B_s-\bar{B}_s$ -Mischung können sehr starke Einschränkungen an diese Parameter abgeleitet werden. Eine sehr detaillierte theoretische Analyse, die die Herangehensweise von Ref. [135] verallgemeinert, wurde erst kürzlich in Ref. [138] durchgeführt (für eine kompakte Zusammenfassung siehe Ref. [139]). Diese Papiere enthalten eine komplette Liste der RGE für SUSY-SU(5) mit nichtrenormierbaren Operatoren für alle drei Arten des Seesaw-Mechanismus. Dieses Setup erhöht drastisch die Anzahl der freien Parameter, die in verschiedenen Diagonalisierungsmatrizen auftreten. Selbst mit flavourblinder und Teilchenart-unabhängiger Vermittlung der SUSY-Brechung verursachen die höherdimensionalen Operatoren schon auf Baumgraphenniveau flavourverletzende Einträge in der Sfermionmassenmatrix, was schnell zu große

Effekte impliziert. Die effektiven trilinearen Kopplungen sind nicht länger mit den effektiven Yukawakopplungen abgestimmt, d.h. nicht mehr gleichzeitig diagonalisierbar. Die Autoren von Ref. [138] studieren spezielle Arten von Kähler- und Superpotenzialen, wo solche Terme vermieden werden können. Mit einigen Näherungen und Vereinfachungen erhalten sie die gleiche Parametrisierung mit zwei Mischungswinkeln zwischen der ersten und zweiten Generation wie in Ref. [135]. Wir werden eine ähnliche Herangehensweise wählen. Eine phänomenologische Analyse mit den RGE von Ref. [138] wurde bisher noch nicht durchgeführt und ist in dieser Allgemeinheit fast nicht zu bewerkstelligen. Deshalb werden wir einen vereinfachten Ansatz wählen: Anstelle des allgemeinsten Setups konzentrieren wir uns auf den Leptonsektor und parametrisieren die Effekte höherdimensionaler Operatoren als Rotation zwischen der ersten und zweiten Generation, ohne Phasen mit einzubeziehen (auf die aktuelle Experimente auch nicht sensitiv sind). Ferner verwenden wir ausschließlich die RGE im MSSM mit Fokus auf die trilinearen Terme.

### 3.7.4 Parametrisierung der Korrekturen zu den Fermionmassen

Wir können die Yukawakopplungen der Downquarks und geladenen Leptonen bei  $M_{\text{GUT}}$  wie folgt ausdrücken:

$$Y^D = Y_{\text{GUT}} + k_d \frac{\sigma}{M_{\text{Pl}}} \tilde{Y}, \quad (Y^E)^\top = Y_{\text{GUT}} + k_e \frac{\sigma}{M_{\text{Pl}}} \tilde{Y}, \quad (3.91)$$

wobei  $\sigma = \mathcal{O}(M_{\text{GUT}})$  ist und wir den Operator, der gleichermaßen zu  $Y^D$  und  $(Y^E)^\top$  beiträgt, in  $Y_{\text{GUT}}$  absorbiert haben, da wir uns nur für die Flavourstruktur der nichtrenormierbaren Operatoren interessieren. Obwohl wir die Fermionmassen bei  $M_{\text{GUT}}$  mit recht hoher Genauigkeit berechnen können, ist es nicht möglich, die verschiedenen Kopplungen zu bestimmen. Der Grund dafür ist, dass die beobachteten Mischungsmatrizen Produkte oder Kombinationen von Yukawakopplungen diagonalisieren. Im einfachsten Fall, in dem alle Matrizen außer  $Y^D$  und  $Y^E$  diagonal sind, diagonalisiert die Quarkmischungsmatrix

$$Y^D Y^{D\dagger} = Y_{\text{GUT}} Y_{\text{GUT}}^\dagger + k_d \frac{\sigma}{M_{\text{Pl}}} \left( Y_{\text{GUT}} \tilde{Y}^\dagger + \tilde{Y} Y_{\text{GUT}}^\dagger \right) + \left( k_d \frac{\sigma}{M_{\text{Pl}}} \right)^2 \tilde{Y} \tilde{Y}^\dagger, \quad (3.92)$$

während die Leptonmischungsmatrix

$$Y^E Y^{E\dagger} = Y_{\text{GUT}}^\top Y_{\text{GUT}}^* + k_e \frac{\sigma}{M_{\text{Pl}}} \left( Y_{\text{GUT}}^\top \tilde{Y}^* + \tilde{Y}^\top Y_{\text{GUT}}^* \right) + \left( k_e \frac{\sigma}{M_{\text{Pl}}} \right)^2 \tilde{Y}^\top \tilde{Y}^* \quad (3.93)$$

diagonalisiert. Diese Relationen gelten wieder bei der GUT-Skala. Zusätzlich deuten die Faktoren  $k_{e,d}$  an, dass die Matrizen modellabhängig sind. Da wir uns nicht auf ein spezielles Modell beschränken möchten, gehen wir wie folgt vor: In der Basis diagonalen geladener Lepton-Yukawakopplung bekommen wir:

$$\hat{Y}^E = U_1^\dagger \hat{Y}^D U_2 + \frac{\sigma}{M_{\text{Pl}}} \tilde{Y}' \quad (3.94)$$

mit unitären Matrizen  $U_1$  und  $U_2$ . Der Startpunkt für universelle  $A$ -Terme ist die renormierbare Yukawakopplung:

$$A_\ell = A_d = A_0 Y_{\text{GUT}} = A_0 \left( \hat{Y}^E - k_e \frac{\sigma}{M_{\text{Pl}}} \tilde{Y} \right). \quad (3.95)$$

SPS	1a	1b	2	3	4	A	B
$m_0$	100	200	1450	90	400	500	500
$A_0$	-100	0	0	0	0	0	0
$m_{1/2}$	250	400	300	400	300	500	500
$\tan\beta$	10	30	10	10	50	40	10
$\text{sgn}(\mu)$	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1
$\mu(M_Z)$	352	507	422	516	388	614	629

Tabelle 3.3: SPS-Punkte (Snowmass Points and Slopes) [141] und zwei zusätzliche Szenarien (Massen in GeV)

Nun wissen wir, dass die Einträge von  $Y_{\text{GUT}}$  im Allgemeinen von der richtigen Größenordnung sind. Da die Beiträge von  $\tilde{Y}$  mit einem Faktor  $M_{\text{GUT}}/M_{\text{Pl}}$  unterdrückt sind und die Bottom-Tau-Vereinigung funktioniert, ändern diese nicht die Einträge für die dritte Generation. Folglich können wir den Effekt der höherdimensionalen Operatoren durch eine Rotation im 12-Sektor, parametrisiert durch einen einzigen Mischungswinkel  $\theta$ , annähern:

$$A_\ell \simeq A_0 \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \hat{Y}^E. \quad (3.96)$$

Diese Parametrisierung ähnelt der in Ref. [135]. Wir starten mit unseren Randbedingungen bei der GUT-Skala anstatt der Planck-Skala, da wir Einschränkungen an die GUT-Parameter von Niederenergie-Daten der LFV erhalten möchten. Aufgrund der Yukawa-Unterdrückung sind die durch die RGE generierten LR-Nebendiagonalelemente im Allgemeinen vernachlässigbar klein. Unter Einbezug der zusätzlichen durch  $\theta$  parametrisierten Rotation erwartet man, dass diese LR-Einträge insbesondere im 12-Sektor groß werden können, solange nicht gerade  $A_0$  und  $\theta$  Null sind. Um modellunabhängig zu bleiben, werden wir immer noch Universalität der soften SUSY-Terme bei  $M_{\text{GUT}}$  annehmen. Dann beeinflusst die Mischung nicht die Ergebnisse für  $\delta_{LL}^{\ell IJ}$ , da die LL-Elemente nicht auf  $\theta$  sensitiv sind. In einem gegebenen GUT-Modell mag es jedoch natürlicher erscheinen, Universalität bei  $M_{\text{Pl}}$  wie in Ref. [117, 134] anzunehmen. Die Resultate sind dann modellspezifisch.

### 3.7.5 Numerische Auswertung

Zunächst leiten wir obere Schranken für die in Tabelle 3.3 aufgelisteten Szenarien an  $\delta_{LR}^{\ell 12}$  aus  $BR(\mu \rightarrow e\gamma) \leq 1.2 \cdot 10^{-11}$  ab [19]. Dazu setzen wir alle anderen Nebendiagonalelemente Null und schließen die in Ref. [10, 140] diskutierten Zweischleifenbeiträge in  $\ell_j \rightarrow \ell_i\gamma$  mit ein. Die aktuellen oberen Schranken an  $BR(\ell_j \rightarrow \ell_i\gamma)$  sind in Tab. B.1 in Anhang B verzeichnet. Die Ergebnisse sind in Tab. 3.4 und für den 12-Sektor in Abb. 3.24 zu finden. Der Hauptbeitrag stammt aus dem Bino-Austausch und ist unabhängig von  $\tan\beta$ .

Nimmt man bei der GUT-Skala eine diagonale Sleptonmassenmatrix an, so hängen die generierten  $\delta_{LR}^{\ell IJ}$  an der schwachen Skala hauptsächlich von  $A_0$  und  $\theta$  ab. Die Schranken an  $\delta_{LR}^{\ell 13}$  und  $\delta_{LR}^{\ell 23}$  sind zu schwach, und die generierten Nebendiagonalelemente bleiben weit unter ihnen. Nur das 12-Element kann die experimentelle Sensitivität erreichen. Solange wir  $A_0$  Null setzen, bleibt  $\delta_{LR}^{\ell 12}$  vernachlässigbar klein, selbst für einen großen Mischungswinkel  $\theta$ . Wir variieren nun  $A_0$ . Dadurch ändert sich das Massenspektrum an der elektroschwachen Skala geringfügig über die RGE, aber die oberen Schranken an  $\delta_{LR}^{\ell 12}$  ändern sich nicht signifikant. Beispielsweise

SPS	1a	1b	2	3	4	A	B
$ \delta_{LR}^{\ell 12}  \leq$	0.0000032	0.0000053	0.000062	0.0000045	0.0000082	0.0000103	0.0000103
$ \delta_{LR}^{\ell 13}  \leq$	0.012	0.019	0.232	0.017	0.028	0.036	0.039
$ \delta_{LR}^{\ell 23}  \leq$	0.009	0.015	0.182	0.013	0.022	0.028	0.030

Tabelle 3.4: Obere Schranken an  $|\delta_{LR}^{\ell 12}|$ ,  $|\delta_{LR}^{\ell 13}|$  und  $|\delta_{LR}^{\ell 23}|$  für die mSUGRA-Szenarien in Tab. 3.3.

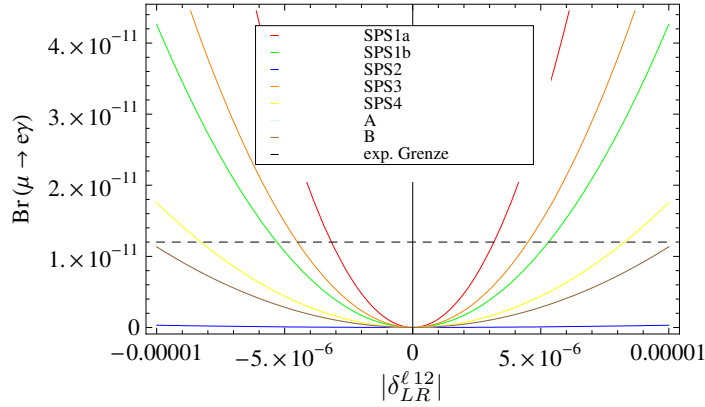


Abb. 3.24:  $BR(\mu \rightarrow e\gamma) \times 10^{11}$  als Funktion von  $\delta_{LR}^{\ell 12}$  für die verschiedenen mSUGRA-Szenarien: Von oben nach unten: SPS1a: rot, SPS3: orange, SPS1b: grün, SPS4: gelb, A: hellblau, B: braun, SPS2: blau, experimentelle obere Schranke: schwarz gestrichelt.

liegt die Schranke in einem modifizierten SPS1a-Szenario mit  $A_0$  zwischen  $-200$  und  $0$  innerhalb  $(3.22 - 3.34) \cdot 10^{-6}$ . Hingegen überschreiten die generierten  $\delta_{LR}^{\ell 12}$ -Elemente schnell die experimentelle Schranke, selbst für kleine Werte von  $\theta$  (siehe Abb. 3.25). Dann können wir eine Beziehung zwischen  $A_0$  und dem maximal erlaubten Wert für  $\theta$  ableiten: In Abb. 3.26 ist der maximal erlaubte Bereich für  $\theta$  als Funktion von  $A_0$  für SPS1a und 1b dargestellt. Die zusätzliche Rotation spiegelt die unterschiedliche Flavourstruktur der Downquark- und geladenen Lepton-Yukawakopplung wieder (siehe Gl. (3.95)). Folglich schließen wir daraus, dass für großes  $A_0$  die höherdimensionalen Operatoren die Flavourstruktur der Kopplungen auf Baumgraphenniveau respektieren.

Im Gegensatz zum LL-Sektor unterscheiden sich die Resultate für die zwei erwähnten Grenzfälle (PMNS- oder CKM-Mischung in  $Y^\nu$ ) nicht. In beiden Fällen ist das generierte  $\delta_{LR}^{\ell 12}$  vernachlässigbar für verschwindende Mischung  $\theta = 0^\circ$ . Dieses Verhalten ist leicht wegen Gl. (3.88) zu verstehen, denn  $\delta_{LR}^{\ell 12}$  enthält sowohl die Mischung aus  $Y^\nu$  als auch aus  $Y^E$ . Jegliche Mischung aus  $\theta \neq 0^\circ$  trägt zu  $Y^E$  bei und dominiert gegenüber der Mischung in  $Y^\nu$ . Deshalb gibt es keinen großen Unterschied zwischen CKM- und PMNS-Fall. Ref. [138] kommt zu der ähnlichen Schlussfolgerung, dass intrinsische, beliebige Flavourverletzung in der Sleptonmassenmatrix bei der hohen Skala, die durch den Seesaw-Mechanismus induzierten Schleifenefekte komplett verdecken kann, selbst wenn sie relativ klein sind. Dieses Resultat deutet auf eine Flavoursymmetrie hin, die von den höherdimensionalen Yukawa-Operatoren respektiert wird. Das gleiche qualitative Ergebnis, d.h. gleiche Flavourstruktur von Dimension-4- und -5-Yukawakopplungen ist in einer ergänzenden Analyse des Quarksektors im CMM-Modell in



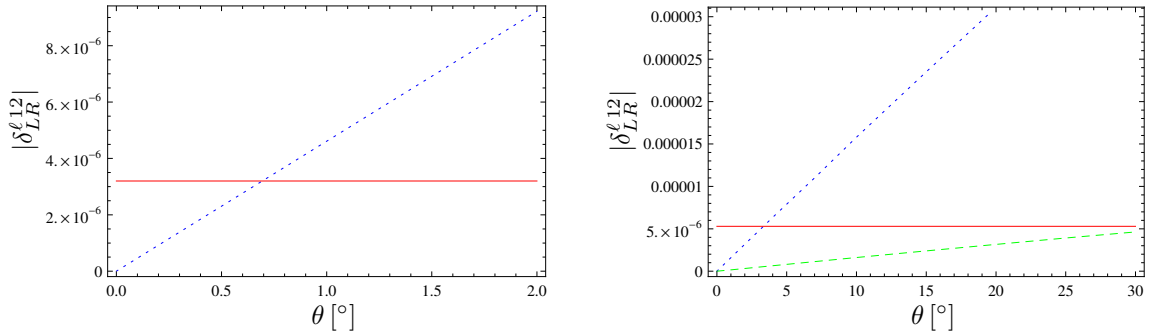


Abb. 3.25:  $\delta_{LR}^{\ell 12}$  als Funktion von  $\theta$  und die experimentelle Schranke (rot). Links: SPS1a mit  $A_0 = -100$  GeV (blau gepunktet). Rechts: SPS1b mit  $A_0 = -100$  GeV (blau gepunktet) und  $A_0 = -10$  GeV (grün gestrichelt).

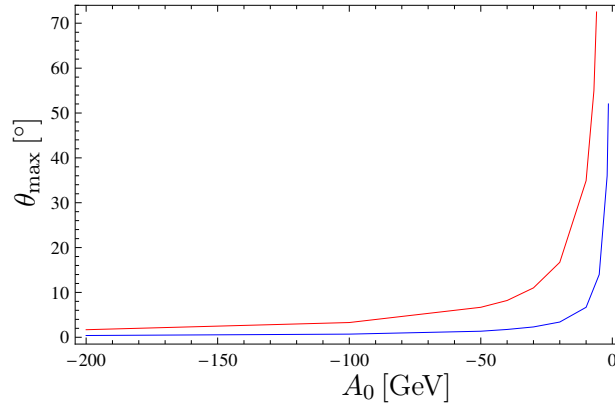


Abb. 3.26: Obere Schranke für  $\theta$  als Funktion von  $A_0$  für SPS1a (unten, blau) und SPS1b (oben, rot) mit variierendem  $A_0$ . Die erlaubte  $(A_0, \theta)$  Region liegt jeweils unterhalb der Kurve.

Ref. [137] gefunden worden.



# 4 Das Chang-Masiero-Murayama-Modell

## 4.1 Motivation und Aktualität

Bisher wurden Observablen der Lepton-Flavourphysik im MSSM mit GUT-motivierten Randbedingungen betrachtet. Während im um massive Neutrinos erweiterten SM die große Leptonmischung wegen des Unterdrückungsfaktors  $(m_{\nu_j}^2 - m_{\nu_i}^2)/M_W^2$  keine sichtbaren Auswirkungen im geladenen Leptonsektor haben kann, gilt dies a priori nicht in Supersymmetrie. Im Weiteren betrachten wir ein spezielles GUT-Modell, in welchem der große atmosphärische Mischungswinkel und eine zusätzliche freie Phase in  $b \rightarrow s$ -Übergängen auftaucht. Dies ist aber genau der Bereich, in welchem uns die  $B$ -Fabriken noch Platz für Neue-Physik-Effekte lassen. Erst kürzlich, am 14. Mai 2010, hat das DØ Experiment ein Hinweis für Neue Physik in der Dimyon-Asymmetrie verkündet, welche sich in einer neuen  $CP$ -Phase in der  $B_s - \bar{B}_s$ -Mischung äußert [142]. Dieses Ergebnis ist drei Tage später sogar in der New York Times unter dem Titel „*A New Clue to Explain Existence*“ erschienen. Darin wurde Folgendes berichtet: „*Physicists at the Fermi National Accelerator Laboratory are reporting that they have discovered a new clue that could help unravel one of the biggest mysteries of cosmology: why the universe is composed of matter and not its evil-twin opposite, antimatter*“. Joe Lykken, ein Theoretiker am Fermilab entgegnete: „*So I would not say that this announcement is the equivalent of seeing the face of God, but it might turn out to be the toe of God*“<sup>1</sup>. Zwei Jahre zuvor, am 5. März 2008, veröffentlichte die UTfit Collaboration ein Papier mit dem Titel „*First Evidence of New Physics in  $b \leftrightarrow s$  Transitions*“ [144]. Die aus Ref. [142] abgeleitete Phase zeigt sogar in die gleiche Richtung wie die von CDF und DØ aus  $B_s \rightarrow J/\psi\phi$  bestimmte Phase, liegt jedoch unter gewissen Annahmen außerhalb des physikalischen Bereichs. Neue-Physik-Modelle besitzen meist zusätzliche Quellen für Flavour- und  $CP$ -Verletzung, die diese Abweichung von der SM-Erwartung erklären könnten. Die Schwierigkeit liegt eher darin zu erklären, warum nur dort, also im  $B_s$ -Sektor (und im Neutrinossektor) Effekte auftreten, nicht jedoch in anderen Observablen, wie etwa im stark eingeschränkten Kaonsektor.

Im Hinblick auf den Start des LHCs ist es wünschenswert, eine prädiktive Theorie zu haben, welche die Präzisionsmessungen der Flavourphysik mit Größen wie Massen von Superpartnern verknüpft, die in high- $p_T$ -Colliderphysik-Experimenten getestet werden können. Das mSUGRA und CMSSM (constrained MSSM) minimieren von vornherein Flavoureffekte und führen zu einer MFV-Version des MSSMs. Ein alternatives Szenario, welches bei niedrigen Energien zu einer Version des MSSMs mit klarer Flavourstruktur führt, ist ein SO(10)-Modell, das von Chang, Masiero und Murayama 2003 vorgeschlagen wurde [145]. Das CMM-Modell ist ein SUSY-SO(10)-GUT-Modell, bei welchem der große atmosphärische Neutrinomischungswinkel in den rechtshändigen Downquarksektor transferiert wird und so Auswirkungen auf  $b \rightarrow s$ -Übergänge haben kann (den Kaonsektor dagegen weitestgehend unbeeinflusst lässt). Dass dies in GUT-Modellen auftreten kann, erscheint sehr plausibel und natürlich, denn im SU(5)-Modell sind rechtshändige Downquarks und Leptondoublets im selben Multiplett vereint (siehe Anhang C). Im CMM-Modell wird dies durch wenige Grundannahmen realisiert.

---

<sup>1</sup>Die Zitate wurden in dieser Form in Ref. [143] präsentiert.

Da die Parameter des Modells nicht nur in Größen der Flavourphysik auftreten, sondern auch in Observablen, welche im high- $p_T$ -Programm von CMS und ATLAS studiert werden können, kann das CMM-Modell als Referenzmodell angesehen werden, welches Quark- und Lepton-Flavourphysik mit Colliderphysik verknüpft. Eine erste Analyse des CMM-Modells in Bezug auf FCNC wurde in Ref. [146] durchgeführt und in Ref. [14, 147–149] fortgesetzt und verfeinert. Eine sehr pädagogische „bottom-up“ Herangehensweise an das CMM-Modell ist in Ref. [147] zu finden. Darin wird ein SUSY-GUT-Modell gesucht, bei welchem die Downsquark-Mischungsmatrix gerade der PMNS-Matrix entspricht. Das Ergebnis ist, dass dies auf natürliche Weise mit nur einer Grundannahme erfüllt werden kann: Die Neutrino-Majorana-Yukawakopplung  $Y_N$  kann simultan mit der Up-Yukawakopplung  $Y_1$  diagonalisiert werden. Die restlichen Bedingungen, nämlich dass die Up-Yukawakopplung diagonal ist und simultan dazu die Dirac-Neutrino-Yukawakopplung, folgen aus der Gruppenstruktur von  $SO(10)$ . Eine Einführung in Große Vereinheitlichte Theorien, insbesondere in  $SU(5)$  und  $SO(10)$ , ist in Anhang C aufgeführt.

## 4.2 Flavour-Struktur des CMM-Modells

Die Grundidee des Modells geht von der Annahme aus, dass die Flavoursymmetrie, welche bei der Planck-Skala exakt ist, gebrochen wird. Dies manifestiert sich im Auftauchen eines nichtrenormierbaren Terms  $\propto Y_2$  im Superpotenzial, welcher mit  $1/M_{\text{Pl}}$  unterdrückt ist und die gesamte Flavourstruktur beinhaltet.

### 4.2.1 Das Superpotenzial des CMM-Modells und dessen Brechung zum MSSM

Das Brechungsschema des CMM-Modells lautet:

$$SO(10) \xrightarrow[\langle 45_H \rangle]{\langle 16_H \rangle, \langle \overline{16}_H \rangle} SU(5) \xrightarrow{\langle 45_H \rangle} SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y \xrightarrow{\langle 10_H \rangle, \langle 10'_H \rangle} SU(3)_C \times U(1)_{\text{em}} .$$

Hierbei bezeichnen die Zahlen in den spitzen Klammern die Higgsdarstellungen, welche einen VEV erhalten und die jeweils angegebene Symmetrie zu einer niedrigeren Symmetrie brechen. Wir starten mit dem Yukawa Superpotenzial bei der  $SO(10)$ -Skala, unter der Annahme, dass  $Y_1$  und  $Y_N$  simultan diagonalisiert werden können:

$$W_Y^{\text{SO}(10)} = \frac{1}{2} \mathbf{16}_i Y_1^{ij} \mathbf{16}_j \mathbf{10}_H + \mathbf{16}_i Y_2^{ij} \mathbf{16}_j \frac{\mathbf{45}_H \mathbf{10}'_H}{2M_{\text{Pl}}} + \mathbf{16}_i Y_N^{ij} \mathbf{16}_j \frac{\overline{\mathbf{16}}_H \overline{\mathbf{16}}_H}{2M_{\text{Pl}}} . \quad (4.1)$$

Die drei Terme sollen – basierend auf den Erklärungen in den Anhängen C.1 und C.2 – erläutert werden: Der dritte Term generiert Neutrino-Majoranamassen über einen nichtrenormierbaren Dimension-5-Term und bricht die  $SO(10)$  zur  $SU(5)$ . Alternativ könnte auch die  $\overline{\mathbf{126}}_H$ -Darstellung verwendet werden. Neben der Darstellung  $\overline{\mathbf{16}}_H$  muss noch  $\mathbf{16}_H$  im Higgspotenzial auftauchen, um die nicht erwünschte D-Term-Brechung zu vermeiden. Im ersten Term ist die Yukawamatrix wegen der 10-dimensionalen Higgsdarstellung symmetrisch (siehe Gl. (C.26)) und kann durch eine orthogonale Transformation diagonalisiert werden. Durch eine Redefinition der Felder  $\mathbf{16}$  kann man somit o.B.d.A annehmen, dass  $Y_1$  diagonal ist. Wir nennen dies die Up-Basis. Aus der Grundannahme des Modells folgt nun, dass auch  $Y_N$  diagonal ist, so

dass die nichttriviale Flavourstruktur im zweiten Term in  $\mathbf{Y}_2$  steckt<sup>2</sup>. Dieser nichtrenormierbare Term stammt aus Physik bei der Planck-Skala, bei der die Flavoursymmetrie gebrochen wird. Er koppelt an die im Anhang C.2 eingeführte, reduzierbare Higgsdarstellung  $\mathbf{45}_H \otimes \mathbf{10}_{H'}$ , welche eine gemischte Flavoursymmetrie ermöglicht. Die zwei Higgsdubletts des MSSMs sind im CMM-Modell in zwei unterschiedlichen 10-dimensionalen Darstellungen enthalten:

SO(10)	SU(5)	MSSM
$\mathbf{10}_H$	$= (*, \mathbf{5}_H)$	$= (*, (\mathbf{3}_H, H_u))$
$\mathbf{10}_{H'}$	$= (\bar{\mathbf{5}}_{H'}, *)$	$= ((\bar{\mathbf{3}}_{H'}, H_d), *)$

Deshalb können wir  $\mathbf{Y}_1$  mit der Up-Yukawamatrix identifizieren, welche sowohl den Upquarks als auch den Neutrinos eine Diracmasse verleiht, und  $\mathbf{Y}_2$  mit der Down-Yukawamatrix, verantwortlich für die Down-Quark- und geladenen Leptonmassen. Bezieht man Korrekturterme aus Dimension-5-Operatoren mit ein (wie z.B. in Ref. [137]), so stimmen  $\mathbf{Y}^E$  und  $\mathbf{Y}^D$  (insbesondere für die ersten beiden Generationen) nicht mit  $\mathbf{Y}_2$  überein. Erhalten die Komponenten  $H_u$  bzw.  $H_d$  der 10-dimensionalen Darstellungen ihren üblichen VEV  $v_u$  und  $v_d$  in ihrer neutralen Komponente, so wird die SU(5) zum MSSM gebrochen. Die  $\mathbf{45}_H$  bekommt zwei verschiedene VEVs: Zunächst in die SU(5)-Singulett-Richtung  $v_{45} = \mathcal{O}(10^{17})$  GeV und anschließend die in ihr enthaltene, adjungierte Darstellung  $\mathbf{24}_H$  der SU(5) in Richtung des Hyperladungsoptors, um die SU(5) zu brechen (Vergleiche Gl. (C.35), (C.4) und Anhang C.1 und C.2). Die Down-Yukawakopplung bei der SU(5)-Skala ergibt sich somit als  $\mathbf{Y}_2^{\text{SU}(5)} = \frac{v_{45}}{M_{\text{Pl}}} \mathbf{Y}_2^{\text{SO}(10)}$  und ist – unter der Annahme  $\mathcal{O}(\mathbf{Y}_1^{\text{SO}(10)}) = \mathcal{O}(\mathbf{Y}_2^{\text{SO}(10)})$  – gegenüber  $\mathbf{Y}_1$  unterdrückt. Folglich bekommen wir mit Hilfe des nichtrenormierbaren Terms bzw. der reduzierbaren Higgsdarstellung eine natürliche Hierarchie zwischen Top- und Bottom-Yukawakopplung, da  $\mathcal{O}(\mathbf{Y}_1^{\text{SU}(5)}) \approx \mathcal{O}(\mathbf{Y}_2^{\text{SU}(5)})$ , was kleines  $\tan\beta$  impliziert. Das CMM-Modell ist ein minimales perturbatives SO(10)-Modell in dem Sinne, dass der Yukawasektor nur aus solchen Higgsdarstellungen konstruiert wurde, die zur Symmetriebrechung ohnehin gebraucht werden. Weiter wird nur das Minimum an nichtrenormierbaren Termen ausgewählt, welche benötigt werden, um realistische Fermionmassen und -mischungen zu generieren. Das CMM-Modell geht nicht von einer Bottom-Top-Vereinheitlichung aus, wie dies oft in minimalen SO(10)-Modellen vorhergesagt wird, bei denen beide MSSM-Higgsdubletts in derselben SO(10)-Darstellung eingebettet sind. In diesem Fall muss das große Massenverhältnis zwischen Top- und Bottomquark durch geeignetes Justieren der beiden VEVs  $v_u$  und  $v_d$  kompensiert werden (siehe Kapitel 2.2.2).

Nun soll die genaue Flavourstruktur anhand der Rotationsmatrizen ausgearbeitet werden. Die Yukawamatrizen können wie folgt diagonalisiert werden:

$$\mathbf{Y}_1 = L_1 D_1 P_1 L_1^\top, \quad \mathbf{Y}_2 = L_2 D_2 R_2^\dagger, \quad \mathbf{Y}_N = R_N D_N P_N R_N^\top. \quad (4.2)$$

Hierbei sind  $L_i$  und  $R_i$  unitäre Matrizen,  $P_i$  Phasenmatrizen und  $D_i$  diagonal mit positiven Einträgen. Um die physikalischen, beobachtbaren Mischungsparameter herauszuarbeiten, wählen wir die erste Kopplung diagonal, d.h. wir transformieren das Materiemultipllett wie

<sup>2</sup>In Ref. [137] wird argumentiert, dass diese Annahme aus den beobachteten Werten für die Fermionmassen und Mischungen motiviert werden kann und eventuell auf einer Familiensymmetrie beruht. Unter der Hypothese, dass Eigenwerte von  $\mathbf{Y}_N$  in Analogie zu den Upquarks eine ausgeprägtere Hierarchie haben als Downquarks und geladene Leptonen, erwartet man kleinere Nebendiagonalelemente in den Mischungsmatrizen von  $\mathbf{Y}_1$  und  $\mathbf{Y}_N$ . Ist die Mischung kleiner als die CKM-Matrix, wird sich die Phänomenologie nicht stark abändern.

$16 \rightarrow L_1^* 16$ ,  $16^\top \rightarrow 16^\top L_1^\dagger$  so, dass

$$W_Y^{\text{SO}(10)} = \frac{1}{2} \mathbf{16}^\top D_1 P_1 \mathbf{16} \mathbf{10}_H + \mathbf{16}^\top L_1^\dagger L_2 D_2 R_2^\dagger L_1^* \mathbf{16} \frac{\mathbf{45}_H \mathbf{10}'_H}{2M_{\text{Pl}}} + \mathbf{16}^\top L_1^\dagger R_N D_N P_N R_N^\top L_1^* \mathbf{16} \frac{\overline{\mathbf{16}}_H \overline{\mathbf{16}}_H}{2M_{\text{Pl}}}. \quad (4.3)$$

Mit Hilfe der Zerlegung der zwei Higgsdubletts in obiger Tabelle und der Gl. (C.23) erhalten wir auf SU(5)-Niveau folgendes Superpotenzial, welchem man auch in Form der SU(5)-Lagrangedichte in Gl. (C.9) begegnet:

$$W_Y^{\text{SU}(5)} = \left[ \frac{1}{4} \Psi^\top D_1 P_1 \Psi + N^\top D_1 \Phi \right] \mathbf{5}_H + \sqrt{2} \Psi^\top L_1^\dagger L_2 D_2' R_2^\dagger L_1^* \Phi \overline{\mathbf{5}}_{H'} + \frac{M_N}{2} \nu^{c\top} L_1^\dagger R_N D_N P_N R_N^\top L_1^* \nu^c, \quad (4.4)$$

$$D_2' = D_2 \frac{\langle \mathbf{45}_H \rangle}{M_{\text{Pl}}}, \quad M_N = \frac{\langle \overline{\mathbf{16}}_H \rangle \langle \overline{\mathbf{16}}_H \rangle}{M_{\text{Pl}}}.$$

Diese Normierung führt zur üblichen Konvention im Superpotenzial bzw. in der SM-Lagrangedichte<sup>3</sup>.

Wir definieren die Quark-Mischungsmatrix

$$V_q = L_1^\top L_2^*, \quad (4.5)$$

wobei wir aus Gl. (4.4) ablesen, dass  $V_q$  – bis auf Phasen – mit der CKM-Matrix übereinstimmt. Die gleichzeitige Diagonalisierbarkeit von  $Y_1$  und  $Y_N$  drückt sich folgendermaßen aus:

$$L_1^\dagger R_N = \mathbb{1}. \quad (4.6)$$

Mit diesen Annahmen an die Flavourstruktur und der unbeobachtbaren Rotation des Materiemultipletts ergibt sich aus Gl. (4.3) nun:

$$W_Y^{\text{CMM}} = \frac{1}{2} \mathbf{16}^\top D_1 P_1 \mathbf{16} \mathbf{10}_H + \mathbf{16}^\top V_q^* D_2 R_2^\dagger L_1^* \mathbf{16} \frac{\mathbf{45}_H \mathbf{10}'_H}{2M_{\text{Pl}}} + \mathbf{16}^\top D_N P_N \mathbf{16} \frac{\overline{\mathbf{16}}_H \overline{\mathbf{16}}_H}{2M_{\text{Pl}}}. \quad (4.7)$$

Der höherdimensionale Operator  $\propto Y_2$  kann auf mehrere Weisen generiert werden (siehe Anhang C.2), so dass  $Y_2$  im Allgemeinen eine beliebige Symmetrie aufweist. Der dominante Beitrag stammt aus dem VEV  $v_{45}$  der SU(5)-Singulett-Komponente von  $\mathbf{45}_H$ , welcher sich um eine Größenordnung vom VEV des adjungierten SU(5)-Feldes in Richtung des Hyperladungsgenerators  $\sigma = \mathcal{O}(10^{16})$  GeV unterscheidet. In diesem Fall ist der Beitrag identisch für Quarks und Leptonen, und wir können

$$U_D = P_N^* R_2^\dagger L_1^* \quad (4.8)$$

<sup>3</sup>Ausgehend vom SO(10)-Superpotenzial bekommt man zunächst eine andere Normierung der Felder der ungebrochenen Untergruppe. Zerlegt man die Vektor- und adjungierte Darstellung der SO(10) in SU(5)-Darstellungen, müssen sowohl die fundamentalen als auch die adjungierten SU(5)-Felder mit einem Faktor  $\sqrt{2}$  reskaliert werden. Um eine kontinuierliche Eichkopplung zu erhalten, reskaliert man stattdessen die SO(10)-Generatoren um einen Faktor  $1/\sqrt{2}$  [150, 151]. Dies verhindert, dass man die Top-Yukawakopplung um einen Faktor  $\sqrt{2}$  reskalieren muss.

mit der Mischung der Leptonen identifizieren<sup>4</sup>. Bis auf Phasenmatrizen gilt  $U_D = U_{\text{PMNS}}^*$  (vgl. Kapitel 2.1.2). Im Folgenden vernachlässigen wir die Majorana-Phasenmatrizen  $P_1$  und  $P_N$ , da sie für unsere Betrachtungen nicht relevant sind.  $SU(5)$  vereinigt die Downquark-Yukawakopplung mit der für geladene Leptonen. Im CMM-Modell bekommen wir:

$$Y_2 = V_q^* D_2 U_D . \quad (4.9)$$

Folglich tritt die PMNS-Mischung bei der Rotation der rechtshändigen Downsquarks auf. Die Yukawa-Vereinigung funktioniert gut für die dritte Generation, jedoch nicht für die beiden leichten Generationen. Die Korrekturen aus höherdimensionalen Operatoren (vgl. Kapitel 3.7) wirken sich aber nur minimal auf die Rotation  $U_D$  aus. Sie können mit eingebaut werden, in dem man die Ersetzung  $U_D \rightarrow R U_D$  durchführt, wobei die zusätzliche Rotationsmatrix  $R$  im oberen  $2 \times 2$ -Block eine Drehung beschreibt. Der Winkel und die zusätzlichen Phasen sind jedoch stark durch  $B_d - \bar{B}_d$ -Mischung,  $\Delta M_K$  und  $\epsilon_K$  eingeschränkt [137]. Im Folgenden vernachlässigen wir diesen kleinen Effekt. Damit erhalten wir nach Brechung der  $SU(5)$  aus Gl. (4.4) das MSSM-Superpotenzial mit rechtshändigen Neutrinos:

$$\begin{aligned} W_Y = & Q_i D_1^{ij} u_j^c H_u + Q_i (V_q^* D_2' U_D)^{ij} d_j^c H_d + L_i D_1^{ij} \nu_j^c H_u + L_i \left( U_D^\top D_2' V_q^\dagger \right)^{ij} e_j^c H_d \\ & + \frac{1}{2} \nu_i^c D_N^{ij} \nu_j^c + \mu H_d H_u . \end{aligned} \quad (4.10)$$

Im Vergleich zu Gl. (2.44) ist die Flavourstruktur durch die GUT-Relation  $Y^D = (Y^E)^\top$  genauer spezifiziert. Auf den Ursprung des  $\mu$ -Terms gehen wir nicht weiter ein, da wir keinerlei Annahmen an das Higgspotenzial haben. Der  $\mu$ -Parameter wird aber nicht als freier Parameter des Modells angenommen, sondern – bis auf seine Phase – über die Forderung erfolgreicher elektroschwacher Symmetriebrechung festgelegt.

#### 4.2.2 Basiswechsel: Up-Basis und Super-CKM-Basis

Die Felder in Gl. (4.10) befinden sich in der Up-Basis. Die Rotationsmatrizen der rechtshändigen Felder sind an der elektroschwachen Skala a priori unbeobachtbar, da es keine rechtshändigen flavourverletzende Ströme gibt. Doch mit den SUSY-Brechungstermen von Gl. (2.49) werden die Rotationen physikalisch, da sie sich beim Basiswechsel von der Up-Basis (in der die weichen Brechungsterme diagonal sind) in die Super-CKM-Basis in der Superpartnermischung bemerkbar machen. Dieser Wechsel wird durch folgende Rotationen erreicht (vgl. Gl. (2.49)), wobei wir hier der Deutlichkeit halber die Indizes U und sCKM hinzuschreiben:

$$Q_U = V_q Q_{\text{sCKM}}, \quad d_U^c = U_D^\dagger d_{\text{sCKM}}^c, \quad L_U = U_{\text{PMNS}}^\top L_{\text{sCKM}}, \quad e_U^c = V_q e_{\text{sCKM}}^c, \quad (4.11)$$

$$\tilde{d}_U^{c*} m_d^2 \tilde{d}_U^c = \tilde{d}_{\text{sCKM}}^{c*} U_D m_d^2 U_D^\dagger \tilde{d}_{\text{sCKM}}^c \Rightarrow m_D^2 = U_D m_d^2 U_D^\dagger, \quad (4.12a)$$

$$\tilde{u}_U^{c*} m_u^2 \tilde{u}_U^c = \tilde{u}_{\text{sCKM}}^{c*} m_u^2 \tilde{u}_{\text{sCKM}}^c \Rightarrow m_U^2 = m_u^2, \quad (4.12b)$$

$$\tilde{e}_U^{c*} m_e^2 \tilde{e}_U^c = \tilde{e}_{\text{sCKM}}^{c*} V_q^\dagger m_e^2 V_q \tilde{e}_{\text{sCKM}}^c \Rightarrow m_E^2 = V_q^\dagger m_e^2 V_q, \quad (4.12c)$$

$$\tilde{Q}_U^{*} m_q^2 \tilde{Q}_U = \tilde{Q}_{\text{sCKM}}^{*} V_q^\dagger m_q^2 V_q \tilde{Q}_U \Rightarrow m_Q^2 = V_q^\dagger m_q^2 V_q, \quad (4.12d)$$

$$\tilde{L}_U^{*} m_\ell^2 \tilde{L}_U = \tilde{L}_{\text{sCKM}}^{*} U_{\text{PMNS}}^* m_\ell^2 U_{\text{PMNS}}^\top \tilde{L}_U \Rightarrow m_L^2 = U_{\text{PMNS}}^* m_\ell^2 U_{\text{PMNS}}^\top. \quad (4.12e)$$

<sup>4</sup>Die Notation  $U_D$  erklärt sich dadurch, dass durch die Yukawa-Vereinigung (siehe nach Gl. (4.10)) die rechtshändigen Downquarks mit der gleichen Matrix rotiert werden.

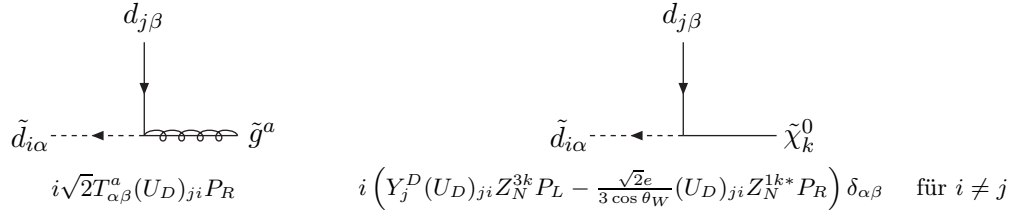


Abb. 4.1: Quark-Squark-Gluino- und Quark-Squark-Neutralino-Vertex (für  $i, j = 2, 3$ ).

Sowohl  $V_q$  als auch  $U_D$  sind unitäre Matrizen und können allgemein durch drei Winkel und sechs Phasen parametrisiert werden. Im SM können fünf der sechs Phasen in  $V_{\text{CKM}}$  wie in Abschnitt 2.1.2 beschrieben durch Phasenrotationen der Quarkfelder eliminiert werden. Aufgrund des Majorana-Charakters der Neutrinos bleiben bei  $U_{\text{PMNS}}$  drei Phasen übrig. Im CMM-Modell können wir jedoch nicht Quark- und Leptonfelder unabhängig voneinander rotieren. Wenn wir in  $V_q$  alle bis auf eine Phase eliminieren, so dass  $V_q = V_{\text{CKM}}$  gilt, so bleiben sechs Phasen in  $U_D$ . Dies parametrisieren wir wie folgt:

$$\Theta_L = \text{diag}(e^{-ia_1}, e^{-ia_4}, e^{-ia_5}), \quad \Theta_R = \text{diag}(1, e^{i(a_1-a_2)}, e^{i(a_1-a_3)}), \quad (4.13)$$

$$U_D = \Theta_L U_{\text{PMNS}}^* \Theta_R.$$

Falls man sich nur für Übergänge im 23-Sektor interessiert (beispielsweise  $B_s - \bar{B}_s$ -Mischung), dann spielt nur eine Phase (ndifferenz) eine Rolle:

$$U_D = \text{diag}(1, e^{i\xi}, 1) U_{\text{PMNS}}^*, \quad \xi = a_5 - a_4. \quad (4.14)$$

Dies ist eine wesentliche Eigenschaft des CMM-Modells: die große PMNS-Mischung im Leptonsektor wird mit einer zusätzlichen, freien  $CP$ -Phase in den rechtshändigen Down(s)quarksektor transferiert. Die Matrix  $U_D$  tritt in den Feynmanregeln auf (siehe Abb. 4.1) und verursacht Flavour- und  $CP$ -Verletzung.

### 4.2.3 Universalität der Brechungsterme

Nach der Grundannahme des Modells wird Supersymmetrie an der Planck-Skala flavourblind gebrochen, was zur Universalität der Softmassen und zu  $A$ -Terme proportional zu den Yukawakopplungen bei  $M_{\text{Pl}}$  führt. In diesem Sinne ist das CMM-Modell minimal flavourverletzend. Ohne diese Einschränkung könnten die aus großer Vereinheitlichung herrührenden Flavourmischungseffekte nicht von Softmassen mit beliebiger Flavourstruktur unterschieden werden (ähnlich wie in Kapitel 3.7, wo SUSY oberhalb der GUT-Skala gebrochen sein muss). Die supersymmetrischen Brechungsterme in der  $\text{SO}(10)$ -Basis lauten:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{soft}} = & -\widetilde{\mathbf{16}}_i m_{\widetilde{\mathbf{16}}}^{2ij} \widetilde{\mathbf{16}}_j - m_{\widetilde{\mathbf{10}}_H}^2 \mathbf{10}_H^* \mathbf{10}_H - m_{\widetilde{\mathbf{10}}_H'}^2 \mathbf{10}_{H'}^* \mathbf{10}_{H'} \\ & - m_{\widetilde{\mathbf{16}}_H}^2 \overline{\mathbf{16}}_H^* \overline{\mathbf{16}}_H - m_{\widetilde{\mathbf{16}}_H}^2 \mathbf{16}_H^* \mathbf{16}_H - m_{\widetilde{\mathbf{45}}_H}^2 \mathbf{45}_H^* \mathbf{45}_H \\ & - \left( \frac{1}{2} \widetilde{\mathbf{16}}_i A_1^{ij} \widetilde{\mathbf{16}}_j \mathbf{10}_H + \frac{1}{2} \widetilde{\mathbf{16}}_i A_2^{ij} \widetilde{\mathbf{16}}_j \frac{\mathbf{45}_H \mathbf{10}_{H'}}{M_{\text{Pl}}} + \frac{1}{2} \widetilde{\mathbf{16}}_i A_N^{ij} \widetilde{\mathbf{16}}_j \frac{\overline{\mathbf{16}}_H \overline{\mathbf{16}}_H}{M_{\text{Pl}}} + \text{h.c.} \right). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Die Universalität bei der Planck-Skala äußert sich durch:

$$m_{\widetilde{\mathbf{16}}_i}^2 = m_0^2 \mathbb{1}, \quad m_{\widetilde{\mathbf{10}}_H}^2 = m_{\widetilde{\mathbf{10}}_H'}^2 = m_{\widetilde{\mathbf{45}}_H}^2 = m_{\widetilde{\mathbf{16}}_H}^2 = m_{\widetilde{\mathbf{16}}_H}^2 = m_0^2, \quad (4.16a)$$

$$A_1 = A_0 Y_1, \quad A_2 = A_0 Y_2, \quad A_N = A_0 Y_N, \quad (4.16b)$$



Ebenso ist die Gauginomasse  $m_{\tilde{g}}$  universell. Bei Energien unterhalb der Planck-Skala wird die Universalität von den RGE gebrochen, insbesondere bereits bei  $M_{\text{GUT}}$ , was zu einer vom CMSSM verschiedenen Phänomenologie führt. In den RGE generiert die große Top-Yukawakopplung merkbare Effekte: Die Massen der Squarks der dritten Generation werden im Vergleich zu denen der leichten Generationen zu kleineren Werten getrieben. Die Flavour-effekte dieses Massensplittings werden dann in der Super-CKM-Basis sichtbar, deren phämenologische Konsequenzen wir im nächsten Kapitel vorstellen.

#### 4.2.4 CMM-Inputwerte

Das CMM-Modell benötigt je nach Zählweise nur fünf bis acht Inputwerte bei der elektroschwachen Skala, die wie folgt gewählt werden können: Die Gluinomasse  $m_{\tilde{g}}$ , die Softmassen der rechtshändigen Up- und Downsquarks der ersten Generation  $m_{\tilde{u}_1}, m_{\tilde{d}_1}$ <sup>5</sup>, das Verhältnis der 11-Komponente der trilinearen und Yukawa-Kopplung  $a_1^D = A_a^{11}/\nu_{11}^D$  und die Phase von  $\mu$ <sup>6</sup>. Hinzugezählt werden könnten noch der Parameter  $\tan\beta$  und die Phase  $\xi$  in  $U_D$ . Doch bei Berücksichtigung der im Modell eingebauten Hierarchie zwischen Top- und Bottom-Yukawakopplung und der Forderung der Perturbativität von  $y_t$  bis zur Planck-Skala ist der Bereich von kleinem  $\tan\beta$  schon festgelegt.

$$\boxed{m_{\tilde{u}_1} \quad m_{\tilde{d}_1} \quad m_{\tilde{g}} \quad a_1^D \quad \arg\mu \quad \xi} \quad (4.18)$$

Der Einfachheit halber werden wir beide Squarkmassen bei  $M_Z$  gleich setzen und mit  $M_{\tilde{q}}$  bezeichnen.

#### 4.2.5 Parameter bei $M_{\text{GUT}}$ : Ein Beispiel im CMM-Paramterraum

Um den Unterschied zum CMSSM herauszustellen, geben wir für eine Beispielpunkt im CMM-Paramterraum die Werte der Parameter bei der GUT-Skala an. Im Gegensatz zum CMM-Modell sind diese im CMSSM bei  $M_{\text{GUT}}$  universell. Wir wählen exemplarisch

$$M_{\tilde{q}} = 1500 \text{ GeV}, \quad m_{\tilde{g}} = 600 \text{ GeV}, \quad a_1^D/M_{\tilde{q}} = 1.5, \quad \arg(\mu) = 0, \quad \tan\beta = 6. \quad (4.19)$$

als Inputwerte (später Set 4 in Tab. 4.1). Das CMW-Programm<sup>7</sup> liefert bei der Planck-Skala die universellen Parameter:

$$a_0 = 1077 \text{ GeV}, \quad m_0 = 1394 \text{ GeV}. \quad (4.20)$$

Bei  $M_{\text{GUT}}$  erhalten wir die folgenden nicht-universellen Parameter (die trilinearen Terme sind in der Super-CKM-Basis und die Massen in der Up-Basis. Die Tilde über den  $A$ -Termen bedeutet, dass sie durch  $4\pi$  geteilt wurden):

$$\tilde{\mathbf{A}}_u(M_{\text{GUT}}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 41.5 \end{pmatrix} \text{ GeV}, \quad \tilde{\mathbf{A}}_d(M_{\text{GUT}}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & -3.2 \end{pmatrix} \text{ GeV}, \quad (4.21a)$$

<sup>5</sup>Dies spezifiziert das D-Term-Splitting in den RGE und ist in Ref. [14, 146–149] genauer erläutert.

<sup>6</sup>Der Betrag von  $\mu$  wird über die Bedingung erfolgreicher elektroschwacher Symmetriebrechung

$$|\mu| = \frac{m_{H_u}^2 \sin^2\beta - m_{H_d}^2 \cos^2\beta}{\cos(2\beta)} - \frac{1}{2}M_Z \quad (4.17)$$

festgelegt.

<sup>7</sup>Ein *Mathematica*-Programm, welches nach Christian Scherrer, Markus Knopf und Waldemar Martens benannt ist und kurz in Abschnitt 4.3.2 erläutert wird.

$$\tilde{A}_\nu(M_{\text{GUT}}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.0012 & 0.0021 & 39.15 \end{pmatrix} \text{ GeV}, \quad (4.21b)$$

$$m_{\tilde{q}}(M_{\text{GUT}}) = \text{diag}(1396, 1396, 1067) \text{ GeV}, \quad (4.21c)$$

$$m_{\tilde{\psi}}(M_{\text{GUT}}) = \text{diag}(1413, 1413, 1069) \text{ GeV}, \quad (4.21d)$$

$$m_{\tilde{N}}(M_{\text{GUT}}) = \text{diag}(1426, 1426, 1068) \text{ GeV}, \quad (4.21e)$$

$$m_{H_u}(M_{\text{GUT}}) = 1113 \text{ GeV}, \quad m_{H_d}(M_{\text{GUT}}) = 1413 \text{ GeV}. \quad (4.21f)$$

Mit  $\tilde{y}_t(M_{\text{GUT}}) = 0.046$  und  $\tilde{y}_b(M_{\text{GUT}}) = -0.0027$  können wir nicht mehr  $\mathbf{A} = a_0 \mathbf{Y}$  schreiben, insbesondere weil  $\mathbf{A}_d$  schon ein Nebendiagonalelement generiert hat, welches  $\tilde{b}_L \rightarrow \tilde{s}_R$ -Übergänge induziert. Zusätzlich ist bereits die dritte Generation von den ersten beiden separiert. Hingegen sind in Modellen wie mSUGRA oder CMSSM, welche auch nur fünf Inputparameter benötigen, Quarks und Leptonen nicht miteinander verknüpft: Sie können unabhängig voneinander rotiert werden, so dass die große Mischung der Neutrinos nicht im Quarksektor sichtbar wird.

### 4.3 Grundlegende Ergebnisse und Vorarbeiten des CMM-Modells

Im Folgenden sollen die für die Phänomenologie relevanten Ergebnisse, basierend auf Ref. [14, 146–149], zusammengefasst werden.

#### 4.3.1 Massensplitting und Flavourverletzung

Das Massensplitting zwischen der dritten und ersten/zweiten Generation stellt sich als eine entscheidende Größe für die Flavourphysik heraus. Die Universalität der Softmassen bei  $M_{\text{Pl}}$  (siehe Gl. (4.16)) wird in den RGE durch den Einfluss der Top-Yukawakopplung zerstört. In der Up-Basis bleibt  $m_d^2$  zwar diagonal, doch  $y_t$  treibt die Softmasse der dritten Generation von der ersten und zweiten Generation zu kleineren Werten:

$$m_d^2(M_Z) = \text{diag}\left(m_{\tilde{d}_1}^2, m_{\tilde{d}_1}^2, m_{\tilde{d}_1}^2 (1 - \Delta_{\tilde{d}})\right). \quad (4.22)$$

Der Renormierungsgruppenfluss zwischen der Planck- und der GUT-Skala kann im physikalischen Bereich  $\Delta_{\tilde{d}}$ -Werte bis zu 0.4 generieren, wie in Abb. 4.2 illustriert. Darin ist zusätzlich noch die CMM-Vorhersage für die leichteste Higgsmasse eingetragen, welche Teile des Parameterbereichs bereits ausschließt. Darauf wird in Abschnitt 4.3.3 genauer eingegangen. Wir erkennen insbesondere, dass das Massensplitting für festes  $m_{\tilde{g}}/M_{\tilde{q}}$  konstant bleibt. Das Massensplitting ist approximativ gegeben als [145]:

$$m_d^2 \Delta_{\tilde{d}} \approx \frac{1}{8\pi^2} y_t^2 \left(3m_d^2 + |\mathbf{A}_2|^2\right) \cdot \left(5 \log \frac{M_{\text{Pl}}}{M_{\text{SO}(10)}} + \frac{M_{\text{SO}(10)}}{M_{\text{GUT}}}\right). \quad (4.23)$$

Mit tribimaximaler Mischung bekommen wir für die Rotationsmatrix der rechtshändigen Down-Squarks aus Gl. (4.13):

$$U_D^{\text{TBM}} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} e^{-ia_1} & \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-ia_2} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} e^{-ia_4} & \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-i(-a_1+a_2+a_4)} & \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i(-a_1+a_3+a_4)} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} e^{-ia_5} & -\frac{1}{\sqrt{3}} e^{-i(-a_1+a_2+a_5)} & \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i(-a_1+a_3+a_5)} \end{pmatrix}. \quad (4.24)$$

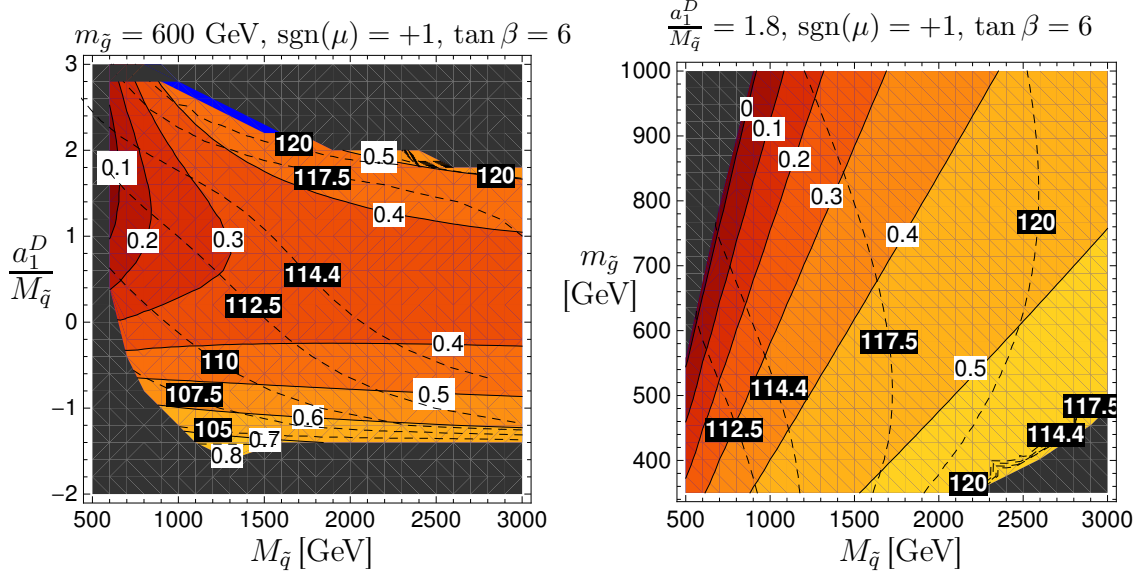


Abb. 4.2: Downsquark-Massensplitting  $\Delta_{\tilde{d}}$  (durchgezogene Linie mit schwarzen Zahlen auf weißem Hintergrund) für  $\text{sgn}(\mu) = +1$  und  $\tan \beta = 6$ . Links als Funktion von  $M_{\tilde{q}}$  und  $a_1^D/M_{\tilde{q}}$  für  $m_{\tilde{g}} = 600$  GeV und rechts als Funktion von  $M_{\tilde{q}}$  und  $m_{\tilde{g}}$  für  $a_1^D/M_{\tilde{q}} = 1.8$ . Schwarz: ausgeschlossen durch negative Softmassen. Gestrichelte Linien mit weißen Zahlen auf schwarzem Hintergrund: Higgsmasse  $M_h$  in GeV.

Wechselt man nun an der elektroschwachen Skala zu den Masseneigenzuständen, also in die Super-CKM-Basis, in der Quarks und Squarks gleichzeitig rotiert werden und  $Y_2$  diagonal ist, tauchen große Flavour- und  $CP$ -verletzende Nebendiagonalelemente im RR-Block der Down-Squark-Massenmatrix auf:

$$m_D^2 = U_D m_{\tilde{d}}^2 U_D^\dagger = m_{\tilde{d}_1}^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{1}{2} \Delta_{\tilde{d}} & -\frac{1}{2} \Delta_{\tilde{d}} e^{i\xi} \\ 0 & -\frac{1}{2} \Delta_{\tilde{d}} e^{-i\xi} & 1 - \frac{1}{2} \Delta_{\tilde{d}} \end{pmatrix}, \quad \xi \equiv a_5 - a_4. \quad (4.25)$$

Wir lesen ab, dass Flavourübergänge proportional zur Massenaufspaltung zwischen zweiter und dritter Generation sind und die Top-Yukawakopplung die treibende Kraft der Flavourverletzung ist. Weiter hat die  $CP$ -verletzende Phase  $\xi$  Auswirkungen auf die Phase  $\phi_s$  in der  $B_s$ -Mischung und auf die  $CP$ -Asymmetrien von  $B_d \rightarrow \phi K_S$  und  $B_s \rightarrow \phi \phi^8$ .

Vernachlässigt man LR-Mischung und Terme aus der elektroschwachen Symmetriebrechung, erhält man für die Rotationsmatrix  $Z_{D,L,\nu}$  der Down-Squarks, Sleptonen und Sneutrinos folgendes:

$$Z_D^\dagger \begin{pmatrix} V_q^\top m_{\tilde{q}}^2 V_q^* & 0 \\ 0 & U_D m_{\tilde{d}}^2 U_D^\dagger \end{pmatrix} Z_D = \text{diag} \left( m_{\tilde{d}_1}^2, \dots, m_{\tilde{d}_6}^2 \right), \quad Z_D = \begin{pmatrix} V_q^\top & 0 \\ 0 & U_D \end{pmatrix}, \quad (4.26)$$

$$Z_L^\dagger \begin{pmatrix} U_{\text{PMNS}} m_\ell^2 U_{\text{PMNS}}^\dagger & 0 \\ 0 & V_q^\dagger m_{\tilde{e}}^2 V_q \end{pmatrix} Z_L = \text{diag} \left( m_{\tilde{\ell}_1}^2, \dots, m_{\tilde{\ell}_6}^2 \right), \quad Z_L = \begin{pmatrix} U_{\text{PMNS}} & 0 \\ 0 & V_q^\dagger \end{pmatrix}, \quad (4.27)$$

<sup>8</sup>Nimmt man alle Phasen wie in Ref. [137] mit, so entspricht  $\xi$  der Phase  $\phi_{B_s}$ . Die unterschiedliche Vorzeichenkonvention stammt aus der unterschiedlichen Definition der Softterme für  $\tilde{d}^c$ . Hier wurde die Definition von Ref. [41] verwendet, während in Ref. [137]  $\tilde{d}^c m_{\tilde{d}^c}^2 \tilde{d}^c$  verwendet wurde, d.h.  $m_{\tilde{d}}^2 = (m_{\tilde{d}}^2 [137])^*$ .

$$Z_\nu^\dagger m_{\bar{l}}^2 Z_\nu = \text{diag}(m_{\bar{\nu}_1}^2, m_{\bar{\nu}_2}^2, m_{\bar{\nu}_3}^2), \quad Z_\nu = U_{\text{PMNS}}^*. \quad (4.28)$$

Eine zusätzliche Quelle von Flavourverletzung stammt aus den  $A$ -Termen. Die RGE generieren ein Misalignment zwischen  $Y^D, A_d$  und  $Y^E, A_\ell$ :  $A_d^{32} \neq 0 \neq A_\ell^{23}$ .

### 4.3.2 Das CMW-Programm

Mittels einer aufwändigen Renormierungsgruppenanalyse, der Universalitätsannahme bei der Planck-Skala in Gl. (4.16) und der SO(10)- und SU(5)-Relationen können die CMM-Inputwerte aus (4.18) mit den restlichen SUSY-Parametern verknüpft werden. Dies wurde im CMW-Programm implementiert. Dabei wird das Laufen im MSSM auf Zweischleifenordnung im  $\overline{\text{DR}}$ -Schema und Einschleifenordnung in SU(5) und SO(10) verwendet, wobei Yukawakopplungen der ersten beiden Generationen Null gesetzt wurden. Anstatt  $A_0$  und  $m_0$  bei der Planck-Skala zu raten, startet man das Laufen bei der elektroschwachen Skala, mit dem Vorteil, dass bereits bestehende Einschränkungen eingebunden werden können. Nach der Evolution hoch zur Planck-Skala und wieder zurück zur elektroschwachen Skala wird ein zweiter Durchlauf gestartet, wodurch eine gute Konvergenz erreicht wird.

### 4.3.3 Die Wahl von $\tan\beta$ und die Masse des neutralen Higgsbosons

Um das CMM-Modell zu testen, maximiert man die Flavoureffekte, d.h. in diesem Fall die generierte Massenaufspaltung zwischen dritter und erster/zweiter Generation der Squarkmassen. Dies bedeutet großes  $y_t$  bzw. kleines  $\tan\beta$ . Die SO(10)-RGE für die Eich- und Top-Yukawakopplung hat einen Fixpunkt für  $g^2/y_t^2 = 56/55$ . Falls dieser bei  $M_{\text{SO}(10)}$  erreicht wird, bleibt  $y_t/g$  konstant. Für größere Werte jedoch steigt  $y_t$  rasch an und wird nichtperturbativ. Im CMM-Modell liegt der Infrarotfixpunkt bei  $\tan\beta \simeq 2.5$ . Um eine obere Schranke an die Flavourverletzung zu erhalten, wählen wir  $\tan\beta$  so groß wie nötig, damit  $y_t$  bis  $M_{\text{Pl}}$  perturbativ bleibt, aber so klein wie möglich, damit die Effekte möglichst groß werden:

$$2.5 \lesssim \tan\beta \lesssim 10. \quad (4.29)$$

Kann man das CMM-Modell nicht für kleine Werte von  $\tan\beta$  ausschließen, gilt dies auch für größere  $\tan\beta$ .

Die Masse des leichten neutralen Higgsbosons liefert starke Einschränkungen an den CMM-Parameterbereich [147]. Die experimentelle untere Schranke hängt von den MSSM-Higgsparametern ab, insbesondere von der Kopplung an das  $Z$ -Boson. Bei großem  $\tan\beta$  fällt die Untergrenze auf  $M_h^{\text{exp}} \geq 89.8$  GeV [15]. Für unsere Analyse bei kleinem  $\tan\beta$  liegt die Schranke bei  $M_h^{\text{exp}} \geq 114$  GeV [152]. Die Relation auf Baumgraphenniveau  $M_h^{\text{tree}} \leq M_Z |\cos(2\beta)|$  erhält Korrekturen, die sowohl von der Topmasse als auch logarithmisch von der Stopmasse abhängen. Sie werden somit kleiner für großes  $y_t$ , d.h. großes Massensplitting und kleines  $\tan\beta$ . Im Gegensatz zur experimentellen Untergrenze wächst also  $M_h^{\text{CMM}}$  mit  $\tan\beta$ . Bei  $\tan\beta = 3$  sind sehr schwere  $M_{\bar{q}}$  und  $m_{\bar{g}}$  nötig, um die Korrekturen groß genug zu machen, wobei gleichzeitig wegen der Entkopplung die flavourverletzenden Prozesse irrelevant werden. Wählen wir hingegen  $\tan\beta = 6$ , werden die CMM-spezifischen Effekte kleiner und  $M_h^{\text{CMM}}$  größer. Zusammenfassend stellen wir die Korrelationen nocheinmal gegenüber:

kleines $\tan\beta$	$\Leftrightarrow$	große Flavour Effekte	$\Leftrightarrow$	(zu) kleine Higgsmasse
großes $\tan\beta$	$\Leftrightarrow$	kleine Flavour Effekte	$\Leftrightarrow$	große Higgsmasse

#### 4.3.4 Vakuumstabilität und positive Fermionmassen

Der Input  $a_1^D$  wird durch die Forderung, dass das skalare Potenzial weder zur Brechung der Ladungs- noch der Farbquantenzahl führt, eingeschränkt:

$$|a_1^D|^2 \leq 3 \left( m_Q^2 + m_d^2 + m_{H_d}^2 \right) \equiv |a_1^D|_{\max}^2. \quad (4.30)$$

Unter Betrachtung der Parameterscans in Ref. [147] wurde gefunden, dass der Wert  $|a_1^D|/M_{\tilde{q}} < 3$  bei der Skala  $M_Z$  praktisch nie überschritten wurde, ohne die Einschränkung zu verletzen.

Bereiche, in denen Sfermionen, die  $U(1)_Y$ - oder  $SU(3)_C$ -Ladung tragen, negative Softmassen bekommen und so zu nichttrivialen Minima des skalaren Potenzials führen, sind unphysikalisch und müssen ebenfalls ausgeschlossen werden. Dies gilt nicht für negative Higgsmassenquadrate, welche zur Brechung der elektroschwachen Symmetrie führen. Im CMM-Modell tritt dieses Problem auf, falls die Top-Yukawakopplung die dritte Generation der Sfermionmassen zu negativen Werten treibt. Die tatsächlichen unteren Schranken an die Massen haben keinen relevanten Effekt aufgrund eines sehr steilen Fallens der Massen von  $\mathcal{O}(M_{\text{SUSY}})$  auf 0.

#### 4.3.5 Teilchenspektrum für einen speziellen CMM-Parameterpunkt

Exemplarisch präsentieren wir hier den Output des CMM-Modells bei der elektroschwachen Skala für denselben Parameterpunkt wie in Abschnitt 4.2.5:  $M_{\tilde{q}} = 1500$  GeV,  $m_{\tilde{g}} = 600$  GeV,  $a_1^D(M_Z)/M_{\tilde{q}} = 1.5$ ,  $\arg(\mu) = 0$  und  $\tan\beta = 6$  (siehe Gl. (4.19)). Für die SUSY-Massen bekommen wir (Masseneigenwerte):

$$M_2 = 100 \text{ GeV}, \quad M_2 = 200 \text{ GeV}, \quad (4.31)$$

$$m_{\tilde{\chi}_i^0} = (665, 657, 193, \underline{99}) \text{ GeV}, \quad (4.32)$$

$$m_{\tilde{\chi}_i^\pm} = (666, 193) \text{ GeV}, \quad (4.33)$$

$$M_{\tilde{\ell}_i} = (1401, 1401, \mathbf{1073}, 1431, 1431, \mathbf{1087}) \text{ GeV}, \quad (4.34)$$

$$M_{\tilde{u}_i} = (1520, 1520, \mathbf{974}, 1501, 1501, \mathbf{543}) \text{ GeV}, \quad (4.35)$$

$$M_{\tilde{d}_i} = (1521, 1521, \mathbf{947}, 1498, 1498, \mathbf{1194}) \text{ GeV}. \quad (4.36)$$

Das leichteste Neutralino ist das LSP (unterstrichene Zahl). Die ersten drei Einträge in  $M_{\tilde{f}_i}$ ,  $\tilde{f} = \tilde{\ell}, \tilde{u}, \tilde{d}$  entsprechen den Sfermionen mit einer größeren linkshändigen Komponente und die letzten drei mit einer größeren rechtshändigen Komponente, wobei die Massen der dritten Generation fett gedruckt sind. Das typische Massensplitting ist recht evident. Der Mischungswinkel zwischen den zwei Stopeigenzuständen mit 543 GeV und 974 GeV ist  $\theta_{\tilde{t}} = 13^\circ$ . Die Higgsparameter lauten:

$$m_{H_u}^2 = -(604 \text{ GeV})^2, \quad m_{H_d}^2 = (1404 \text{ GeV})^2, \quad \mu = 654 \text{ GeV}. \quad (4.37)$$

Dadurch wird die Bedingung für die elektroschwache Symmetriebrechung erfüllt. Die trilinearen Terme sind gegeben durch (wieder in der SCKM-Basis):

$$\tilde{\mathbf{A}}_u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 51.0 \end{pmatrix} \text{ GeV}, \quad \tilde{\mathbf{A}}_d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 - 0.7i & -14.3 \end{pmatrix} \text{ GeV}, \quad \tilde{\mathbf{A}}_\ell = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 - 0.4i \\ 0 & 0 & -5.6 \end{pmatrix} \text{ GeV}.$$

Für die radiativen Zerfälle erhalten wir  $BR(\tau \rightarrow \mu\gamma) = 1.46 \cdot 10^{-8}$  und  $BR(b \rightarrow s\gamma) = 2.96 \cdot 10^{-4}$ . Lässt man den (3,2)-Eintrag von  $\tilde{\mathbf{A}}_d$  weg, führt dies zu einer kleinen Erhöhung von

ca.  $0.02 \cdot 10^{-4}$  für diesen speziellen Parameterpunkt. Man beachte jedoch, dass für kleinere Gluinomassen und z.B.  $\tan \beta = 3$  Effekte von bis zu  $0.7 \cdot 10^{-4}$  dem  $\tilde{A}_{d,3,2}$ -Element zugeschrieben werden können. Dieser Effekt wurde in bisherigen Analysen nicht betrachtet.

Unter Verwendung eines  $\chi^2$ -Test für  $\Delta M_s$ ,  $\sin \phi_s$  und  $f_{B_s}^2 \hat{B}_{B_s}$  bestimmen wir die Phase  $\xi$  so, dass wir Werte von  $\Delta M_s$ ,  $\sin \phi_s$  und  $f_{B_s}^2 \hat{B}_{B_s}$  erhalten, die jeweils so nah wie möglich an ihren experimentellen und theoretischen Werten liegen (Genauer ist in Kapitel 4.4.2 zu finden). Wir scannen über den theoretischen Fehler von  $f_{B_s}^2 \hat{B}_{B_s}$  (siehe weiter unten in Gl. (4.57)) sowie den experimentellen Bereich für  $\sin \phi_s$  (siehe Gl. (4.54)) und  $\Delta M_s$ . Als besten Fitwert für den gewählten Parameterpunkt erhalten wir die Phase  $\xi = 59^\circ$ ,  $\Delta M_s = 17.43 \text{ ps}^{-1}$  und  $f_{B_s} \sqrt{\hat{B}_{B_s}} = 0.275 \text{ GeV}$ . Dies entspricht einer Phase  $\phi_s = -31^\circ$ , welche bei diesem Parameterpunkt auch die maximale (negative) Phase  $\phi_s$  im CMM-Modell ist.

## 4.4 Phänomenologie des CMM-Modells

Eine erste phänomenologische Analyse CMM-spezifischer Effekte in  $b \rightarrow s\gamma$ ,  $\tau \rightarrow \mu\gamma$  und der  $B_s - \bar{B}_s$ -Mischung ist bereits in Ref. [146–149, 153] durchgeführt worden. Angesichts neuer Daten der Dimyon-Asymmetrie und einer Reduktion des hadronischen Fehlers von 20% auf 7.5% werden wir letztere nochmals genauer untersuchen, insbesondere im Hinblick auf die  $CP$ -Asymmetrien in  $B_d \rightarrow \phi K_S$  und  $B_s \rightarrow \phi\phi$ . Die CMM-spezifischen Effekte in den anderen beiden Observablen sollen kurz zusammengefasst werden: Die Auswirkungen des atmosphärischen Mischungswinkel in  $U_D$  auf  $\tau \rightarrow \mu\gamma$  und  $b \rightarrow s\gamma$  sind im CMM-Modell offensichtlich. Im SM wird letzterer über eine  $W$ -Schleife vermittelt. Der  $b_L - s_R$ -Übergang ist proportional zur Strangequarkmasse und deshalb gegenüber dem  $b_R - s_L$ -Übergang ( $\propto m_b$ ) vernachlässigbar. Im CMM-Modell treten Amplituden mit beiden Chiralitäten auf:

$$b_L \rightarrow s_R \gamma \propto m_b \alpha_s m_{\tilde{g}} \left( U_D m_d^2 U_D^\dagger \right)_{32}, \quad b_R \rightarrow s_L \gamma \propto \left( V_q^\dagger m_q^2 V_q \right)_{32}. \quad (4.38)$$

Bei  $\tau \rightarrow \mu\gamma$  dominieren Übergänge  $\propto Z_L^{2J*} Z_L^{3J}$ ,  $Z_\nu^{2J} Z_\nu^{3J*} = U_D^{2J} U_D^{3J*}$ . Ausgehend von dem exakten Einschleifenergebnis aus Ref. [73] (siehe Anhang A.2) wird in Ref. [146] der Grenzfall verschwindender Myon-Yukawakopplung und nur der Übergang  $\tau_R \rightarrow \mu_L \gamma$  betrachtet, da der Beitrag des helizitätsgeflippten Übergangs mit  $m_\mu^2/m_\tau^2$  unterdrückt ist. Das um einen Faktor 1/2 und  $\cos \theta_W$  verbesserte Ergebnis aus Ref. [146] für das Verzweigungsverhältnis ist in Ref. [14] angegeben.

### 4.4.1 Grundidee effektiver Hamiltonoperatoren

Bevor wir genauer auf CMM-spezifische phänomenologische Effekte eingehen, soll die Grundlage des dazu benötigten Mechanismus effektiver Hamiltonoperatoren erklärt werden. Die Effekte schwerer Freiheitsgrade werden üblicherweise in sogenannten Wilson-Koeffizienten absorbiert. Durch das Auftreten verschiedener Skalen wie beispielsweise  $M_W \gg m_b$ ,  $m_c \gg \Lambda_{\text{QCD}}$  treten bei der Renormierung große Logarithmen auf, welche die Anwendbarkeit der Störungsreihe in Frage stellen. Wird eine Observable  $X$  bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s^n)$  berechnet, dann enthält  $\mu \frac{d}{d\mu} X = \mathcal{O}(\alpha_s^{n+1})$  Terme mit  $\log^k(m_b^2/M_W^2)$ ,  $k \leq n+1$ . Mittels effektiver Feldtheorien kann diese Unzulänglichkeit gelöst werden. Eine sehr pädagogische Einführung dazu findet man in Ref. [154, 155]. Die Idee dabei ist, die kurz- und langreichweitigen Wechselwirkungen getrennt

zu behandeln, d.h. man spaltet die großen Logarithmen in den Schleifenkorrekturen auf:

$$\frac{\alpha_s}{4\pi} \log \left( \frac{m_b^2}{M_W^2} \right) = \frac{\alpha_s}{4\pi} \left[ \underbrace{\log \left( \frac{\mu^2}{M_W^2} \right)}_{\rightarrow C_i(\mu)} + \underbrace{\log \left( \frac{m_b^2}{\mu^2} \right)}_{\rightarrow \langle Q_i(\mu) \rangle} \right]. \quad (4.39)$$

Die Effekte an der hohen Skala werden in die Wilson-Koeffizienten  $C_i(\mu)$  und die nichtperturbativen Beiträge in die Matrixelemente der Operatoren absorbiert. Die effektive Feldtheorie wird durch einen Hamiltonoperator beschrieben, der keine Felder für die schweren Teilchen mehr beinhaltet und folgende Form besitzt:  $\mathcal{H}_{\text{eff}} \propto \sum_i C_i(\mu) Q_i(\mu)$ . Begründet ist dieser Ansatz durch das Entkopplungstheorem („Appelquist-Carrazone-Theorem“ [156]), wonach für das  $S$ -Matrixelement gilt:

$$\langle f | \mathcal{T} e^{-i \int d^4x \mathcal{H}(x)} | i \rangle = \langle f | \mathcal{T} e^{-i \int d^4x \mathcal{H}_{\text{eff}}(x)} | i \rangle \cdot \left( 1 + \mathcal{O} \left( \frac{m_{\text{leicht}}^2}{m_{\text{schwer}}^2}, \frac{p^2}{m_{\text{schwer}}^2} \right) \right). \quad (4.40)$$

Der effektive Hamiltonoperator kann berechnet werden und ist dann unabhängig vom Anfangs- und Endzustand. Die effektiven Kopplungskonstanten  $C_i(\mu)$  werden in einer sogenannten „Matching-Rechnung“ bestimmt. Dabei fordert man, dass die Amplitude in der vollen Theorie und die Amplitude in der effektiven Theorie gleich sind. Die Strategie ist die folgende:

- Mittels der „Matching-Rechnung“ werden die Wilson-Koeffizienten  $C_i(\mu)$  bis zur gewünschten Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s^p)$  bestimmt. Damit die auftretenden Logarithmen klein bleiben, wählen wir  $\mu = \mathcal{O}(M_W)$ .
- Mit der Renormierungsgruppengleichung werden die Wilson-Koeffizienten zur niedrigen Skala  $m_b$  umgerechnet, bei der die Zerfallsamplitude berechnet werden soll. Das hat den Effekt, dass die auftretenden großen Logarithmen ( $(\frac{\alpha_s}{4\pi})^n \log^n(\frac{m_b}{M_W})$  in LO und  $(\frac{\alpha_s}{4\pi})^{n+1} \log^n(\frac{m_b}{M_W})$  in NLO) aufsummiert werden. Um das Laufen zu berechnen, benötigt man die sogenannte anomale Dimensionsmatrix  $\gamma$ , welche bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s^{p+1})$  bestimmt werden muss.
- Schließlich muss noch das Matrixelement  $\langle Q_i \rangle$  berechnet werden. Dies geschieht meist in Gittereich-Theorie.

Die Konventionen des effektiven Hamiltonoperators sind in Anhang E angegeben und werden in Kapitel 4.4.3 aufgegriffen.

#### 4.4.2 $B_s - \bar{B}_s$ -Mischung

Der Fokus bei unserer Untersuchung der  $B_s - \bar{B}_s$ -Mischung liegt in der  $CP$ -verletzenden Phase  $\xi$ , da diese in der Analyse der mischungsinduzierten  $CP$ -Asymmetrien in Abschnitt 4.4.4 und 4.4.5 benötigt wird. Eine kurze Einführung zur Mesonmischung findet man in Anhang D. Neue Physik kann die Größe  $\Gamma_{12}^s$  nicht beeinflussen, da sie von CKM-begünstigten Prozessen auf Baumgraphenniveau stammt. Die Phase  $\phi_s$  kann somit näherungsweise mit der Phase  $\phi_M$  des Nebendiagonalelements  $M_{12}^s = |M_{12}^s| e^{i\phi_M}$  identifiziert werden. Diese bestimmt die Mischung der neutralen  $B_s$ -Mesonen via  $q/p = -e^{-i\phi_M}$ . Die SM-Vorhersage  $\phi_s^{\text{SM}} = (4.2 \pm 1.4) \times 10^{-3}$  aus Ref. [157] wurde erst kürzlich in Ref. [158] mit neuesten Inputwerten aktualisiert:

$$\phi_s^{\text{SM}} = (4.7_{-3.1}^{+3.5}) \times 10^{-3}. \quad (4.41)$$

Beiträge neuer Physik können diese kleine Phase jedoch drastisch ändern, und wir schreiben:

$$\phi_s = \phi_s^{\text{SM}} + \phi_s^{\text{NP}}. \quad (4.42)$$

Der gleiche zusätzliche Beitrag wie in Gl. (4.42) tritt auch in der beobachtbaren Phase auf, welche experimentell über die zeitabhängige  $CP$ -Asymmetrie von  $B_s \rightarrow J/\psi\phi$  (siehe Abschnitt 2.1.3) bestimmt wird:

$$2\beta_s^{\text{exp}} = 2\beta_s^{\text{eff}} = 2\beta_s^{\text{SM}} - \phi_s^{\text{NP}}. \quad (4.43)$$

Die aktuelle experimentelle Genauigkeit erlaubt es nicht, die kleinen Phasen  $\beta_s^{\text{SM}}$  und  $\phi_s^{\text{SM}}$  aufzulösen, weshalb man bei großen Neue-Physik-Beiträgen näherungsweise

$$\phi_M = -2\beta_s^{\text{exp}} = -2\beta_s^{\text{SM}} + \phi_s^{\text{NP}} \approx \phi_s^{\text{NP}} \approx \phi_s \quad (4.44)$$

bekommt bzw.  $\phi_s \approx \arcsin\left(\text{Im} \frac{M_{12}^s}{|M_{12}^s|}\right)$ .

### Experimenteller Status

Die Messung des CDF-Experiments für die Massendifferenz ergibt [159]:

$$\Delta M_s^{\text{CDF}} = (17.77 \pm 0.10 \text{ (stat.)} \pm 0.07 \text{ (syst.)}) \text{ ps}^{-1}. \quad (4.45)$$

Kombiniert mit dem DØ-Wert  $\Delta M_s = (18.53 \pm 0.98 \text{ (stat.)} \pm 0.30 \text{ (syst.)}) \text{ ps}^{-1}$  erhält man:

$$\Delta M_s^{\text{PDG}} = (117.0 \pm 0.8) \cdot 10^{-10} \text{ MeV} = (17.77 \pm 0.12) \text{ ps}^{-1}. \quad (4.46)$$

Beide Werte sind in Einklang mit der SM-Vorhersage [157]:

$$\Delta M_s^{\text{SM}} = (19.30 \pm 6.68) \text{ ps}^{-1}. \quad (4.47)$$

Die  $CP$ -Phase wurde sowohl von CDF als auch von DØ eingeschränkt. Im Sommer 2010 präsentierten sie ihre neuen Ergebnisse [160–162]:

$$-2\beta_s^{\text{CDF}} \equiv -2\beta_s^{\text{SM}} + \phi_s^{\text{NP}} \in [-1.04, -0.04] \cup [-3.10, -2.16] \quad (68\% \text{ CL}), \quad (4.48a)$$

$$\in [-\pi, -1.78] \cup [-\mathbf{1.36}, \mathbf{0.26}] \cup [2.88, \pi] \quad (95\% \text{ CL}) \quad (4.48b)$$

$$\phi_s^{\text{DØ}} \equiv -2\beta_s^{\text{SM}} + \phi_s^{\text{NP}} = -0.76_{-0.36}^{+0.38} \text{ (stat)} \pm 0.02 \text{ (syst)} \quad (4.48c)$$

$$\in [-\mathbf{1.65}, \mathbf{0.24}] \cup [1.14, 2.93] \quad (95\% \text{ CL}). \quad (4.48d)$$

Bisher hat HFAG nur die älteren Werte aus Ref. [163, 164]<sup>9</sup> zu  $\phi_s^{\text{HFAG}} = (-0.77_{-0.37}^{+0.29}) \cup (-2.36_{-0.29}^{+0.37})$  kombiniert [165]. Kürzlich hat DØ die inklusive Dimyon-Asymmetrie  $A^b = \frac{N_b^{++} - N_b^{--}}{N_b^{++} + N_b^{--}}$  bei einer integrierten Luminosität von  $6.1 \text{ fb}^{-1}$  gemessen, wobei  $N_b^{++}$  die Zerfälle  $(B^0(t), \bar{B}^0(t)) \rightarrow (f, f)$  zählt und  $N_b^{--}$  entsprechend die in  $(\bar{f}, \bar{f})$  [142]. Die gleiche Asymmetrie kann auch durch flavourspezifische, semileptonische Zerfälle

$$a_{\text{fs}} = \frac{\Gamma(\bar{B}^0 \rightarrow X\ell^+\nu_\ell) - \Gamma(B^0 \rightarrow \bar{X}\ell^-\bar{\nu}_\ell)}{\Gamma(\bar{B}^0 \rightarrow X\ell^+\nu_\ell) + \Gamma(B^0 \rightarrow \bar{X}\ell^-\bar{\nu}_\ell)} = A^b \quad (4.49)$$

bestimmt werden. Das DØ-Ergebnis [142]

$$a_{\text{fs}} = -0.00957 \pm 0.00251 \pm 0.00146 \quad (4.50)$$

---

<sup>9</sup> $2\beta_s^{\text{CDF}} \equiv 2\beta_s^{\text{SM}} - \phi_s^{\text{NP}} \in [0.32, 2.82] \quad (68\% \text{ CL}), \quad \phi_s^{\text{DØ}} \equiv -2\beta_s^{\text{SM}} + \phi_s^{\text{NP}} \in [-1.20, 0.06] \quad (90\% \text{ CL}).$



beinhaltet eine Mischung der  $B_d$ - und  $B_s$ -Mesonen mit

$$a_{fs} = (0.506 \pm 0.043) a_{fs}^d + (0.494 \pm 0.043) a_{fs}^s. \quad (4.51)$$

Der Vergleich mit der SM-Vorhersage  $a_{fs}^{\text{SM}} = (-0.23_{-0.06}^{+0.05}) \cdot 10^{-3}$  [157] ergibt eine  $3.2\sigma$  Abweichung. Diese reduziert sich auf  $2.9\sigma$  durch Mittelung mit dem CDF-Ergebnis  $a_{fs} = 0.008 \pm 0.0090 \pm 0.0068$  [166]:

$$a_{fs} = -0.0085 \pm 0.0028. \quad (4.52)$$

Unter der Annahme, dass keine neuen Physik in  $a_{fs}^d$  auftritt, erhalten wir  $a_{fs}^s = -0.017 \pm 0.056$ , welches sich mit Hilfe der Relation in Gl. (D.10) auf  $2\sigma$  in

$$\sin \phi_s = -2.2 \pm 1.4 \quad (4.53)$$

übersetzt [143], dessen Zentralwert im unphysikalischen Bereich liegt. Eine Kombination der Werte in Gl. (4.48) und (4.53) existiert noch nicht. Deshalb verwenden wir für die numerische Analyse einen gewichteten Mittelwert der drei experimentellen Werte für  $\sin \phi_s$ , wobei wir nur das zweite Intervall in (4.48b) und das erste in (4.48d) verwenden. Damit erhalten wir

$$\boxed{\sin \phi_s = -0.77 \pm 0.47 \quad (95\% \text{CL})}. \quad (4.54)$$

### Neue-Physik-Beiträge zur Massendifferenz $\Delta M_s$

Die experimentelle Genauigkeit der Oszillationsfrequenz  $\Delta M_s$  scheint die Beiträge von neuer Physik stark einzuschränken. Da diese jedoch mit einer relativen Phase zu den SM-Beiträgen auftreten, addieren sie sich in der komplexen Ebene, so dass selbst große Neue-Physik-Beiträge in Einklang mit der experimentellen Schranke sein können [137, 147–149, 153]. Das Matrixelement  $M_{12}^s$  wird mit dem Formalismus effektiver Feldtheorien berechnet (siehe Abschnitt 4.4.1 und Anhang E). Im SM trägt nur ein Operator zu diesem  $\Delta B = 2$ -Prozess bei:

$$\mathcal{O}_L = \bar{s}_{L,\alpha} \gamma_\mu b_{L,\alpha} \bar{s}_{L,\beta} \gamma^\mu b_{L,\beta}, \quad (4.55)$$

und man erhält:

$$M_{12, \text{SM}}^s = \frac{G_F^2 M_W^2 M_{B_s}}{12\pi^2} \left( f_{B_s}^2 \hat{B}_{B_s} \right) (V_{ts}^* V_{tb})^2 C_L(\mu_b)^{\text{SM}}, \quad (4.56)$$

wobei  $C_L(\mu_b)^{\text{SM}} = \eta_B S_0(x_t)$  mit der Schleifenfunktion  $S_0$  aus Anhang A.3.2,  $\eta_B = 0.55$  und  $x_t = m_t^2/M_W^2$  gilt. Die langreichweitigen QCD-Effekte des hadronischen Matrixelements sind parametrisiert durch  $f_{B_s}(\hat{B}_{B_s})^{1/2}$ . Während der etwas ältere Wert aus Ref. [157] mit  $f_{B_s}(\hat{B}_{B_s})^{1/2} = (0.27263 \pm 0.0567465) \text{ GeV}$ , welcher bei bisherigen CMM-Analysen verwendet wurde, noch einen Fehler von 20% aufweist, liefert der neue Wert aus Ref. [158] eine Genauigkeit von 7.5%:

$$f_{B_s} \sqrt{\hat{B}_{B_s}} = (0.25795 \pm 0.01953) \text{ GeV}. \quad (4.57)$$

Zusätzliche supersymmetrische Beiträge, die nicht die charakteristische CMM-Verstärkung aufweisen, sind geladene-Higgs-Quark- und Chargino-Squark-Boxdiagramme. Sie ändern den Wilson-Koeffizient zu  $C_L(\mu_b)^{\text{SM}+H^\pm+\tilde{\chi}^\pm} = \eta_B F_{tt}$ , wobei  $F_{tt}$  in Ref. [167] (dort Gl. (4.5))

angegeben ist. Die CMM-spezifischen Effekte hingegen stecken im Wilson-Koeffizienten  $C_R$  des paritätsgeflipten Operators:

$$\mathcal{O}_R = \bar{s}_{R,\alpha} \gamma_\mu b_{R,\alpha} \bar{s}_{R,\beta} \gamma^\mu b_{R,\beta} . \quad (4.58)$$

Die dominanten Beiträge stammen aus Gluino-Squark-Boxen, denn dort tritt der flavourverletzende Quark-Squark-Gluino-Vertex aus Abb. 4.1 auf. Sie sind von der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$  und durch den atmosphärischen Mischungswinkel verstärkt. Da die QCD invariant unter Parität ist, unterscheiden sich die Matrixelemente von  $\mathcal{O}_R$  und  $\mathcal{O}_L$  nicht, d.h. man kann die Wilson-Koeffizienten – unter Berücksichtigung der relativen Phase – einfach addieren (siehe Abb. 4.3). Man erhält:

$$M_{12}^s, \text{CMM} = \frac{G_F^2 M_W^2 M_{B_s}}{12\pi^2} \left( f_{B_s}^2 \hat{B}_{B_s} \right) (V_{ts}^* V_{tb})^2 (C_L(\mu_b) + C_R(\mu_b)) , \quad (4.59a)$$

$$C_L(\mu_b) = \eta_B F_{tt} , \quad (4.59b)$$

$$C_R(\mu_b) = \frac{(U_D^{23*} U_D^{33})^2}{(V_{ts}^* V_{tb})^2} \frac{8\pi^2 \alpha_s^2(M_Z)}{G_F^2 M_W^2 m_{\tilde{g}_3}^2} \eta_B S^{(\tilde{g})}(x, y) . \quad (4.59c)$$

Hierbei bezeichnet  $S^{(\tilde{g})}(x, y)$  die Schleifenfunktion (siehe Anhang A.3.2)<sup>10</sup>.

Mit der Parametrisierung von Gl. (4.24) und (4.25) können die Wilson-Koeffizienten wie folgt geschrieben werden<sup>11</sup>:

$$C = C_L^{\text{SM}+H^\pm+\tilde{\chi}^\pm} + e^{-2i\xi} |C_R^{\text{CMM}}| . \quad (4.60)$$

Hieran erkennt man, dass die Phase  $\xi$  durch die  $B_s-\bar{B}_s$ -Mischung nur mit einer Zweideutigkeit bestimmt werden kann. Zu jedem gefundenen  $\xi$  ist auch  $\xi + \pi$  eine erlaubte Phase. In Ref. [153] wurde gefunden, dass der Beitrag aus dem CMM-Modell prinzipiell bis zu 16-mal so groß werden kann wie der SM-Wert, jedoch hängt dies entscheidend von der Phase  $\xi$  ab. Auf diese Weise kann das CMM-Modell nicht nur mit den experimentellen Einschränkungen in Einklang gebracht werden, sondern liefert mit  $\xi$  auch eine mögliche Erklärung für  $\phi_s$ .

### Bestimmung der Phase $\xi$ im CMW-Programm

Die Phase  $\xi$  in  $U_D$  geht in die RGE ein und hat somit Auswirkungen auf die Parameter, die das Programm bei der elektroschwachen Skala berechnet. Jedoch hängen nur die  $A$ -Terme wesentlich von der Phase ab, welche wiederum nicht in die  $B_s-\bar{B}_s$ -Mischung eingehen. Deshalb wird wie folgt vorgegangen: Nach einem zweimaligen Durchlauf der RGE mit Startwert  $\xi = 0$  wird mit dem so erhaltenen Satz die  $B_s-\bar{B}_s$ -Mischung berechnet. Dann wird über die Phase  $\xi$  gescannt und getestet, ob zu dem Datensatz eine passende Phase  $\xi$  existiert, der mit den experimentellen Einschränkungen im Einklang ist. Mittels eines  $\chi^2$ -Tests wird das optimale  $\xi$  berechnet. Da  $\tau \rightarrow \mu\gamma$  und  $b \rightarrow s\gamma$  von den  $A$ -Termen abhängen, wird mit der gefundenen Phase  $\xi$  das zweimalige Laufen erneut berechnet. Die Phase  $\xi$  kann nur modulo  $\pi$  bestimmt werden. Jedoch sind  $\tau \rightarrow \mu\gamma$  und  $b \rightarrow s\gamma$  insensitiv auf diese Zweideutigkeit. Eine Möglichkeit zwischen den zwei Werten zu unterscheiden, ist die  $CP$ -Asymmetrie in  $B_d \rightarrow \phi K_S$ .

<sup>10</sup>In Ref. [137] wird  $C_R$  noch mit dem Faktor  $1/r$  multipliziert, wobei  $r = 0.985$  [45, 168] die NLO-QCD-Korrekturen zur Schleifenfunktion  $S_0(x_t)$  im SM wieder aufhebt, da  $C_R$  nur in LO berechnet wird. Der Faktor  $r$  beinhaltet neben dem Faktor  $(1 - \alpha_s(\mu_W)/(4\pi)J_5)$  aus den RGE zusätzlich die NLO-Korrekturen zu den Box-Diagrammen bei der hohen Skala  $\mu_W$ . Die Formel findet man in Ref. [154], Gl (8.30). Dort entspricht  $r$  dem Inhalt der eckigen Klammer ( $r = 1 + \alpha_s(\mu_W)/(4\pi)(C_1(\mu_W)/C_0(\mu_W) - J_5)$ ).

<sup>11</sup>Aufgrund einer fehlenden komplexen Konjugation bei  $U_D^{23}$  in Gl. (4.59c) steht in Ref. [147–149] fälschlicherweise  $C = C_L + e^{+2i\xi} |C_R|$ .

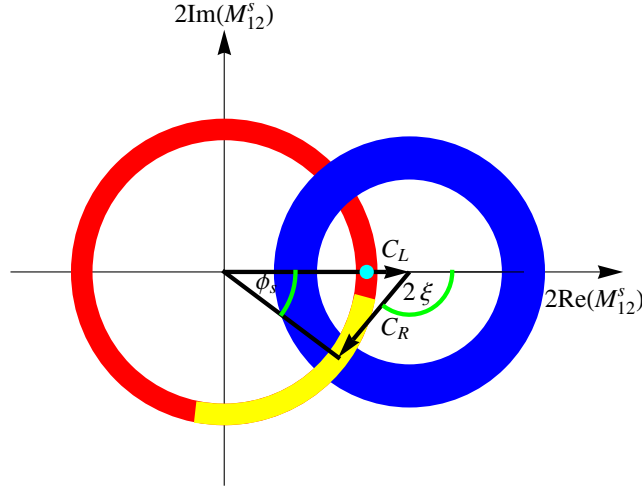


Abb. 4.3: Schematische Darstellung von  $\Delta M_s = 2 |M_{12}^s|$  in der komplexen Ebene (nicht maßstabsgetreu). Der gelbe Kreis entspricht dem experimentell erlaubten Bereich, der rote ist ausgeschlossen und der blaue Kreis stellt die Summe aus SM- und CMM-Beitrag dar. Die Dicke der Kreise symbolisiert den Fehler. Die SM-Vorhersage ist durch den cyanfarbenen Punkt dargestellt. (Man beachte, dass in Ref. [149] die Phase  $2\xi$  in die falsche Richtung eingezeichnet wurde).

### Numerische Analyse

Um die Abhängigkeit von  $\xi$  zu verdeutlichen, behandeln wir  $\xi$  zunächst als freien Parameter. Weiter vernachlässigen wir die kleine SM-Phase  $\phi_s^{\text{SM}}$  und die numerisch kleinen geladene-Higgs- und Chargino-Beiträge. Wir untersuchen exemplarisch die in Tab. 4.1 aufgelisteten CMM-Szenarien. Durch Vergleich von Set 1 und 2 bekommt man beispielsweise das Verhalten für größere Gluinomassen, Set 2 und 3 unterscheiden sich die Squarkmassen, usw. Die ersten drei Spalten geben den CMW-Input an, womit das Massensplitting, die Higgsmasse,  $BR(b \rightarrow s\gamma)$ ,  $BR(\tau \rightarrow \mu\gamma)$  und  $\xi$  bestimmt werden. Darin sind sowohl einige „extreme“ CMM-Punkte, d.h. großes Massensplitting und kleinere SUSY-Massen (Set 1, 6 und 7), als auch moderatere Punkte wie Set 2 und 4 sowie Set 5 mit sehr kleinen CMM-Effekten.

In den ersten drei Schaubildern in Abb. 4.4 ist  $\Delta M_s$  für die verschiedenen CMM-Punkte in Abhängigkeit von  $\xi$  unter Berücksichtigung der hadronischen Unsicherheit in Gl. (4.57) aufgetragen, wobei wir in der oberen Reihe zwischen dem alten und aktuellen hadronischen Fehler unterscheiden. Dadurch wird deutlich, wie entscheidend sich der Fehler auf die Einschränkung an  $\xi$  auswirkt. In den Szenarien mit Massensplitting um die 50% gilt  $|C_R| > |C_L|$ , weshalb in diesen Fällen  $\Delta M_s$  sehr stark mit  $\xi$  variiert. Mit dem älteren hadronischen 20%-Fehler lässt sich  $\xi$  in den CMM-Sets 2, 3 und 5 nicht aus der Forderung, dass  $\Delta M_s$  im experimentellen  $3\sigma$ -Bereich liegen muss, einschränken. Dagegen kann mit dem 20%-Fehler  $\Delta M_s$  für Szenario 7 noch in Einklang mit der Messung gebracht werden, nicht jedoch mit dem neuen Fehler. Mit den aktuellen Werten erhalten wir nämlich folgende Einschränkungen an  $\xi$ :

- Set 1:  $1.2 \leq \xi \leq 1.4 \vee 1.8 \leq \xi \leq 2.0 \vee 4.3 \leq \xi \leq 4.5 \vee 4.9 \leq \xi \leq 5.1$ ,
- Set 2 & 3:  $0.7 \leq \xi \leq 1.1 \vee 2.0 \leq \xi \leq 2.4 \vee 3.8 \leq \xi \leq 4.2 \vee 5.1 \leq \xi \leq 5.5$ ,
- Set 4:  $0.7 \leq \xi \leq 1.1 \vee 2.0 \leq \xi \leq 2.4 \vee 3.8 \leq \xi \leq 4.2 \vee 5.1 \leq \xi \leq 5.5$ ,
- Set 5: alle  $\xi$  erlaubt,

	$M_{\tilde{q}}$ [GeV]	$m_{\tilde{g}}$ [GeV]	$\frac{a_1^P}{M_{\tilde{q}}}$	$\Delta_{\tilde{d}}$	$M_h$ [GeV]	$b \rightarrow s\gamma$	$\tau \rightarrow \mu\gamma$	$\xi_{\chi^2}$ [rad]
Set 1	2000	400	1.8	0.52	119.5	$2.86 \cdot 10^{-4}$	$0.92 \cdot 10^{-8}$	$0.43\pi$
Set 2	2000	700	1.8	0.44	118.6	$2.98 \cdot 10^{-4}$	$0.74 \cdot 10^{-8}$	$0.33\pi$
Set 3	3000	700	1.8	0.51	121.1	$3.03 \cdot 10^{-4}$	$0.20 \cdot 10^{-8}$	$0.33\pi$
Set 4	1500	600	1.5	0.36	115.4	$2.97 \cdot 10^{-4}$	$1.46 \cdot 10^{-8}$	$0.33\pi$
Set 5	1500	900	1.5	0.27	117.0	$3.09 \cdot 10^{-4}$	$0.89 \cdot 10^{-8}$	–
Set 6	1500	400	2.0	0.51	120.2	<b><math>2.72 \cdot 10^{-4}</math></b>	$3.29 \cdot 10^{-8}$	–
Set 7	1500	500	2.0	0.48	119.1	$2.78 \cdot 10^{-4}$	$2.92 \cdot 10^{-8}$	$0.40\pi$

Tabelle 4.1: Verschiedene CMM-Szenarien mit  $\arg(\mu) = 0$  und  $\tan\beta = 6$ , wobei fast alle die Einschränkungen von  $BR(b \rightarrow s\gamma)$ ,  $BR(\tau \rightarrow \mu\gamma)$  und die leichteste Higgsmasse erfüllen (Set 6 verletzt knapp die untere Schranke von  $BR(b \rightarrow s\gamma)$  und Set 5 und 6 finden kein passendes  $\xi$ ). Die letzte Spalte gibt die im CMW-Programm mit einem  $\chi^2$ -Test gefundene Phase  $\xi$  an.

Set 6: kein passendes  $\xi$ ,

Set 7:  $1.0 \leq \xi \leq 1.2 \vee 1.9 \leq \xi \leq 2.1 \vee 4.1 \leq \xi \leq 4.3 \vee 5.0 \leq \xi \leq 5.2$ .

Szenario 6 ist somit ein CMM-Punkt, in dem die CMM-spezifischen Effekte schon zu groß sind, um durch Variation von  $\xi$  in den experimentellen Bereich von  $\Delta M_s$  zu kommen. Hingegen sind in Set 5 die Auswirkung sehr klein und wie wir gleich sehen werden sogar zu klein. Bei den extremen CMM-Parameterpunkten mit sehr großem Massensplitting, wie beispielsweise 1 und 7, kann man umgekehrt auch argumentieren, dass man diese bereits ausschließen muss, da die a priori freie Phase  $\xi$  auf einen speziellen Bereich feinabgestimmt werden muss.

Rechts unten in Abb. 4.4 ist die für die mischungsinduzierte  $CP$ -Asymmetrie relevante Größe  $\sin\phi_s \approx -\sin(2\beta_s^{\text{eff}})$  dargestellt, welche in Abschnitt 4.4.5 wieder aufgegriffen wird. Die Phase ist gegeben durch  $\phi_s = \arg(C_L + |C_R|e^{-2i\xi})$  (siehe Abb. 4.3). Der grau hinterlegte Bereich entspricht dem in Abschnitt 4.4.2 bestimmte experimentellen 95% CL Bereich. Dominieren die CMM-spezifischen Effekte wie in Set 1 und 6 gilt  $|C_R| \gg |C_L|$  und somit ein näherungsweise linearer Zusammenhang  $\phi_s \approx -2\xi$ . Wir lesen folgende Bedingungen an die Phase  $\xi$  ab:

Set 1 & 6:  $0.2 \leq \xi \leq 1.5 \vee 3.3 \leq \xi \leq 4.5$ ,

Set 2 & 3:  $0.4 \leq \xi \leq 1.5 \vee 3.5 \leq \xi \leq 4.6$ ,

Set 4:  $0.5 \leq \xi \leq 1.4 \vee 3.6 \leq \xi \leq 4.5$ ,

Set 5: kein passendes  $\xi$ ,

Set 7:  $0.3 \leq \xi \leq 1.5 \vee 3.4 \leq \xi \leq 4.6$ .

Kombiniert man beide Forderungen an  $\Delta M_s$  und  $\phi_s$ , so bleiben folgende Intervalle übrig:

Set 1:  $1.2 \leq \xi \leq 1.4 \vee 4.3 \leq \xi \leq 4.5$ ,

Set 2 & 3:  $0.7 \leq \xi \leq 1.1 \vee 3.8 \leq \xi \leq 4.2$ ,

Set 4:  $0.7 \leq \xi \leq 1.1 \vee 3.8 \leq \xi \leq 4.2$ ,

Set 5 & 6: kein passendes  $\xi$ ,

Set 7:  $1.0 \leq \xi \leq 1.2 \vee 4.1 \leq \xi \leq 4.3$ .

In Set 1–4 und 7 werden durch  $\phi_s$  jeweils zwei der erlaubten Intervalle aus der  $\Delta M_s$ -Bedingung ausgeschlossen. Für Set 5 kann aufgrund einer zu kleinen Massenaufspaltung  $\Delta_{\tilde{d}}$  bzw. zu klei-

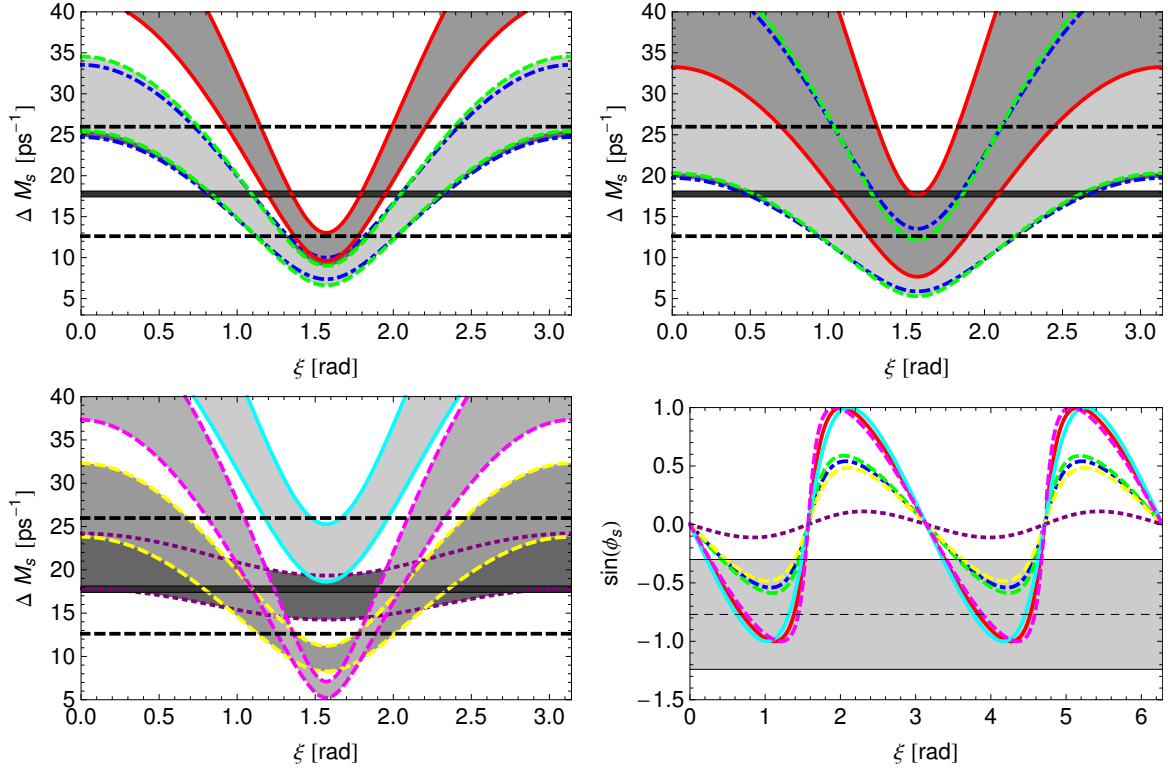


Abb. 4.4: Linke Spalte: Auswirkung der Phase  $\xi$  auf die  $B_s-\bar{B}_s$ -Massendifferenz  $\Delta M_s$  mit dem aktuellen Fehler des hadronischen Matrixelements von 7.5%. Set 1 rot durchgehend; Set 2 blau strichpunktirt; Set 3 grün gestrichelt (links oben); Set 4 gelb gestrichelt; Set 5 lila punktiert; Set 6 cyan durchgehend; Set 7 magenta gestrichelt (links unten). Schwarzer Balken: experimenteller  $3\sigma$ -Bereich, schwarz gestrichelt: SM-Verhersage. Rechts oben: wie links oben, aber mit dem alten 20%-Fehler auf  $f_{B_s}(\hat{B}_{B_s})^{1/2}$ . Rechts unten: Auswirkung der Phase  $\xi$  auf  $\sin \phi_s$ , wobei  $\phi_s = \arg(-M_{12}^s/\Gamma_{12})$ . Grauer Bereich: experimenteller 95%-CL-Bereich (naiv kombiniert aus  $B_s \rightarrow J/\psi\phi$  und der Dimyon-Asymmetrie), andere Farben wie vorher.

nen CMM-Effekten die Phase  $\phi_s$  nicht groß genug werden, so dass kein passendes  $\xi$  gefunden wurde, wohingegen im Set 6 die Auswirkungen in  $\Delta M_s$  zu groß sind. Generell können wir jedoch feststellen, dass die a priori freie  $CP$ -Phase im CMM-Modell, welche nur im  $B_s$ -System auftritt, es ermöglicht, die Spannung zwischen der Messung und dem SM-Wert von  $\phi_s$  einzudämmen.

#### Maximale Phase $\phi_s$ :

In Abb. 4.5 ist die im CMM-Modell maximale (negative) Phase  $\phi_s$  zusammen mit der Higgs-masse abgebildet, wobei wir fordern, dass  $\Delta M_s$  innerhalb des  $3\sigma$ -Bereichs liegt und das hadronische Matrixelement innerhalb seines Fehlerbalkens (dabei wird nicht das aus dem  $\chi^2$ -Test bestimmte  $\xi$  verwendet). Innerhalb des mit  $b \rightarrow s\gamma$ ,  $\tau \rightarrow \mu\gamma$  und der  $B_s-\bar{B}_s$ -Mischung kompatiblen (grünen) Bereichs kann die Phase große negative Werte um ca.  $-25^\circ$  bis  $-90^\circ$  annehmen.

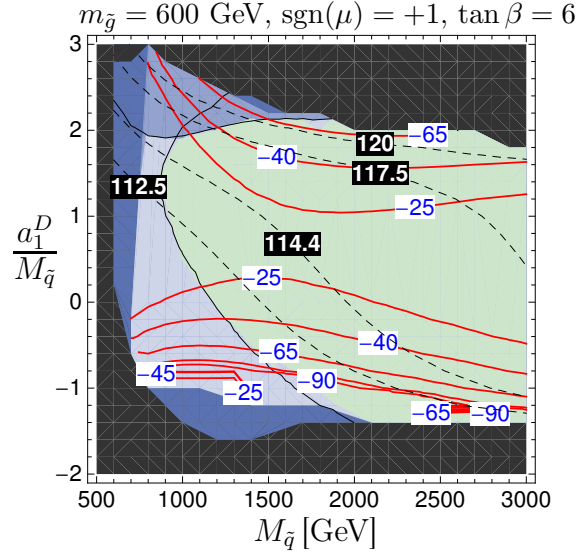


Abb. 4.5: Maximale Phase  $\phi_s$  in Grad (rote Linien mit roten Zahlen auf weißem Hintergrund) und Higgsmasse  $M_h$  in GeV (gestrichelte Linien mit weißen Zahlen auf schwarzem Hintergrund) für  $\text{sgn}(\mu) = +1$  und  $\tan \beta = 6$  als Funktion von  $M_{\tilde{q}}$  und  $a_1^D/M_{\tilde{q}}$  für  $m_{\tilde{g}} = 600$  GeV. Dunkelblauer Bereich: ausgeschlossen durch  $B_s - \overline{B}_s$ ; mittelblauer Bereich: konsistent mit  $B_s - \overline{B}_s$ , aber wegen  $b \rightarrow s\gamma$  ausgeschlossen; hellblauer Bereich: konsistent mit  $B_s - \overline{B}_s$  und  $b \rightarrow s\gamma$ , aber inkompatibel mit  $\tau \rightarrow \mu\gamma$ ; grüner Bereich: kompatibel mit  $B_s - \overline{B}_s$ ,  $b \rightarrow s\gamma$  und  $\tau \rightarrow \mu\gamma$ .

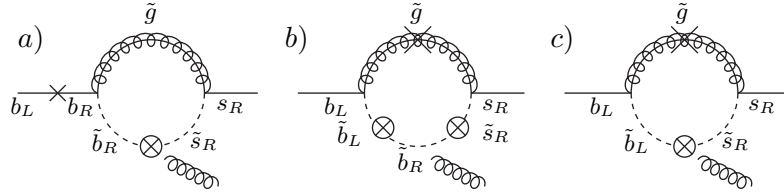


Abb. 4.6: Dominante chromomagnetische CMM-Beiträge in  $C'_{sg}$ . In a) stammt der Chiralitätsflip aus der Bottomquarkmasse am externen Beinchen und trägt somit zu  $C'_{sb,\tilde{g}}$  bei. Bei b) und c) ist die Gluinomasse der chiralitätsverletzende Parameter, und die Diagramme sind in  $C'_{sg,\tilde{g}}$  enthalten.

#### 4.4.3 CMM-Beiträge zu den $\Delta B = 1$ -Wilson-Koeffizienten

Bevor wir uns den  $CP$ -Asymmetrien in  $B_d \rightarrow \phi K_S$  und  $B_s \rightarrow \phi\phi$  widmen, untersuchen wir die CMM-Beiträge in den Wilson-Koeffizienten, welche die Zerfallsamplitude  $A_f$  beeinflussen. Diese sind nicht-universell, hängen also vom spezifischen Zerfallskanal ab. In Anhang E sind die Konventionen des effektiven Hamiltonoperators und die expliziten Formeln für die SUSY-Beiträge zu den Wilson-Koeffizienten aufgelistet.

Wir betrachten sowohl Gluino- als auch geladene Higgs- und Chargino-Beiträge zu den Wilson-Koeffizienten  $C_{3-6}^{g(\prime)}$ ,  $C_{7\gamma}^{(\prime)}$  und  $C_{8g}^{(\prime)}$  (jedoch nicht zu den elektroschwachen Pinguinen). Durch die CMM-spezifischen Gluino-Beiträge dominieren die mit rechtshändigen Strömen verbundenen gestrichelten Wilson-Koeffizienten. Dies gilt nicht für die geladenen Higgs- und Chargino-Beiträge zu  $C_{7\gamma,8g}^{(\prime)}$ . Des Weiteren ist  $C'_{8g}$  um zwei bis vier Größenordnungen größer als  $C_{3-6}^{g(\prime)}$ ,

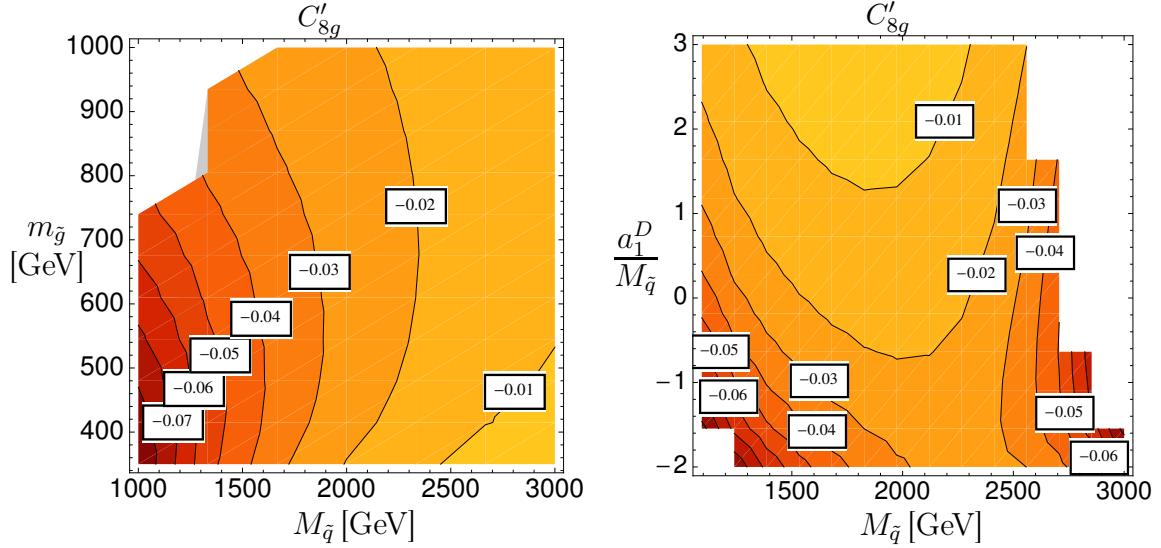


Abb. 4.7: Wilson-Koeffizient  $C'_{8g}(m_b)$  für  $\xi = 0$  in Abhängigkeit von den Inputparametern  $M_{\tilde{q}}$  und  $m_{\tilde{g}}$  für  $a_1^D/M_{\tilde{q}} = 1.8$  und  $\arg(\mu) = 0$  (links) sowie  $M_{\tilde{q}}$  und  $a_1^D/M_{\tilde{q}}$  für  $m_{\tilde{g}} = 500$  GeV und  $\arg(\mu) = 0$  (rechts). Der SM-Wert für  $C_{8g}(m_b)$  beträgt  $-0.15$ .

so dass beispielsweise bei  $B_d \rightarrow \phi K_S$  der chromomagnetische Beitrag dominiert (obwohl das hadronische Matrixelement des Operators in naiver Abschätzung um eine Größenordnung kleiner ist als die QCD-Pinguin-Operatoren). Die typischen CMM-spezifischen Beiträge zu den Wilson-Koeffizienten sind in Abb. 4.6 für  $C'_{8g}$  dargestellt. Dabei unterscheidet man zwischen den Quellen des Chiralitätsflips. Dieser kann wie im SM durch Anwendung der Bewegungsgleichung  $\not{p}b_R = m_b b_L$  am externen Beinchen erfolgen (Abb. a) in 4.6) oder aber aus der Gluino-Masse (Abb. b), c) in 4.6). In Anhang E ist das unterschiedliche Renormierungsgruppenverhalten der beiden Beiträge angegeben. Diagramm 4.6 a) ist proportional zu  $\propto m_b \delta_{RR}^{d23}$ , b) zu  $\propto m_b m_{\tilde{g}} (\mu \tan \beta + \frac{A_b}{y_b}) \delta_{RR}^{d23}$  und c) zu  $\propto m_{\tilde{g}} m_b \frac{A_d^2}{y_b}$ . Das Nebendiagonalelement im A-Term wird durch das Auftauchen der Matrix  $U_D$  in den RGE induziert. Ohne LL- und LR-Mischung verschwinden sowohl die CMM-Beiträge zu den ungestrichenen Wilson-Koeffizienten als auch zu  $C'_{7,8\tilde{g},\tilde{g}}$ . Mit LR-Mischung jedoch dominieren letztere in  $C'_{8g}$ , d.h.  $C'_{8\tilde{g},\tilde{g}} \geq C'_{8b,\tilde{g}}$ .

Die Phase  $\xi$  bestimmt den Imaginärteil der gestrichenen Operatoren, da  $C' \propto Z_D^{6k} Z_D^{5k*} \propto e^{-i\xi}$  gilt:

$$C'_{8g} = C'_{8g}(\xi = 0)e^{-i\xi}, \quad C_{3-6}^{g'} = C_{3-6}^{g'}(\xi = 0)e^{-i\xi}. \quad (4.61)$$

In Abb. 4.7 ist  $C'_{8g}(m_b)$  für  $\xi = 0$  als Funktion von  $M_{\tilde{q}}$  und  $m_{\tilde{g}}$  für  $a_1^D/M_{\tilde{q}} = 1.8$  und  $\arg(\mu) = 0$  (links) sowie in Abhängigkeit von  $M_{\tilde{q}}$  und  $a_1^D/M_{\tilde{q}}$  für  $m_{\tilde{g}} = 500$  GeV und  $\arg(\mu) = 0$  (rechts) geplottet. Für die sieben CMM-Szenarien aus Tab. 4.1 bekommen wir die in Tab. 4.2 angegebenen Werte. Im Vergleich zu den SM-Beiträgen sind die QCD-Pinguin-Beiträge relativ klein (ca. zwei Größenordnungen kleiner), während der  $C'_{8g}$  je nach Parameterwahl spürbare Auswirkungen haben kann (zum Vergleich  $C_{8g}^{\text{SM}}(m_b) = -0.15$ ). Man beachte, dass der chromomagnetische Beitrag mit einer komplexen Phase zum SM-Wert addiert wird. Ähnlich wie bei der  $B_s - \bar{B}_s$ -Mischung in Abschnitt 4.4.2 sind die größten Effekte bei Szenario 1 und 6, bei denen die Massenaufspaltung fast 50% beträgt. Auch Set 2 und 3 weisen ein recht großes  $\Delta_{\tilde{q}}$  auf, aber in diesen Fällen macht sich die Entkopplung stärker bemerkbar.

Bei Belle und BaBar wurden neun Observablen zu den vier Zerfällen  $B^+ \rightarrow K^0 \pi^+$ ,  $B^+ \rightarrow$

	$C'_{8g}(m_b)$	$C'_{3g}(m_b)$	$C'_{4g}(m_b)$	$C'_{5g}(m_b)$	$C'_{6g}(m_b)$
Set 1	-0.052	0.00031	-0.00042	0.00004	-0.00103
Set 2	-0.023	0.000071	-0.00009	$9 \cdot 10^{-6}$	-0.00028
Set 3	-0.020	0.00010	-0.00014	0.000001	-0.00035
Set 4	-0.023	0.00007	-0.00008	$8 \cdot 10^{-6}$	-0.00026
Set 5	-0.009	$-6 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-6}$	$-1 \cdot 10^{-6}$
Set 6	-0.085	0.00032	-0.00041	0.00004	-0.00114
Set 7	-0.058	0.00016	-0.00021	0.00002	-0.00063

Tabelle 4.2: Gestrichene Wilson-Koeffizienten mit  $\xi = 0$  für die sieben verschiedene CMM Parametersets. Die Phasenabhängigkeit lautet jeweils  $C'(\xi) = C'(\xi = 0)e^{-i\xi}$ .

$K^+\pi^0$ ,  $B_d^0 \rightarrow K^+\pi^-$  und  $B_d^0 \rightarrow K^0\pi^0$  gemessen: Vier Verzweungsverhältnisse, vier direkte  $CP$ -Asymmetrien sowie die mischungsinduzierte  $CP$ -Asymmetrie im Zerfall  $B_d^0 \rightarrow K^0\pi^0$ . Während sich die Daten der Verzweungsverhältnisse auf die SM-Vorhersage zubewegt haben, bestehen im Bereich der  $CP$ -Asymmetrien weiterhin Diskrepanzen (bekannt als  $\pi K$ -Puzzle) zwischen SM-Vorhersage und Messwerten. Wir haben untersucht, ob diese Abweichungen auf Beiträge des CMM-Modells zurückzuführen sind. Jedoch sind diese Diskrepanzen nur auf elektroschwache Pinguindiagramme sensitiv und nicht auf die QCD-Pinguine. Erstere sind jedoch im CMM-Modell vernachlässigbar klein, so dass das CMM-Modell keine Lösung für das  $\pi K$ -Puzzle bietet. In unseren Analysen werden im Folgenden die QED-Pinguinbeiträge immer vernachlässigt.

#### 4.4.4 $CP$ -Verletzung in $B_d \rightarrow \phi K_S$

Der seltene Zerfall  $B_d \rightarrow \phi K_S$  kann im SM nur durch Schleifenprozesse induziert werden und weist die gleiche zeitabhängige  $CP$ -Asymmetrie wie  $B_d \rightarrow J/\psi K_S$  auf (siehe Kapitel 2.1.3). Er ist dominiert von  $b \rightarrow s\bar{s}s$ -Übergängen und sensitiv auf neue  $CP$ -verletzende Phasen. Im CMM-Modell sind die dominanten Beiträge die in Abb. 4.6 dargestellten Diagramme, wobei noch ein Spektator-Downquark benötigt wird und das Gluon in ein  $s\bar{s}$ -Paar aufspaltet, welches das  $\phi$  bildet (siehe auch Abb. 4.8).

Eine Diskrepanz der zeitabhängigen  $CP$ -Asymmetrie im Vergleich zu  $b \rightarrow c\bar{c}s$ -Zerfällen, d.h. von  $\sin(2\beta)$  wäre ein Indiz für eine neue  $CP$ -verletzende Phase. Die  $B$ -Fabriken haben  $\sin(2\beta)$ , in neun  $B^0$ -Pinguin-Moden gemessen, welche tendenziell unter dem Wert aus  $b \rightarrow c\bar{c}s$ -Übergängen liegen, aber keine signifikanten Abweichungen aufweisen.

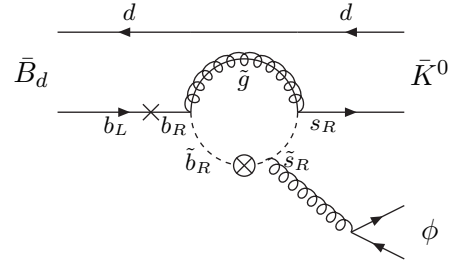


Abb. 4.8:  $C'_{sb,g}$ -Beitrag zu  $B_d \rightarrow \phi K_S$ .

#### Experimenteller Status

Der Winkel  $\beta$  des Unitaritätsdreiecks wird hauptsächlich durch  $B_d \rightarrow J/\psi K_S$  bestimmt (siehe Gl. (2.29)). Der aktuelle Wert von HFAG für  $\sin(2\beta)$  aus den Baumgraph-dominierten Zerfällen ( $b \rightarrow c\bar{c}s$ ) lautet [169]:

$$\sin(2\beta) = 0.673 \pm 0.023. \quad (4.62)$$



Die  $CP$ -Asymmetrie von  $B \rightarrow \phi K_S$  hat in den vergangenen Jahren viel Aufsehen erregt, da die Belle-Kollaboration zunächst einen negativen Wert für  $S_{\phi K_S}$  gemessen hat [170], was einer  $3.5\sigma$ -Abweichung vom SM-Wert entspricht. Während der bei ICHEP 2008 präsentierte Zentralwert von Belle noch leicht unter Gl. (4.62) bei  $S_{\phi K_S} = 0.67^{+0.21}_{-0.32}$  lag, ist der aktuelle Wert sogar oberhalb. HFAG kombiniert die gegenwärtige Belle- und BaBar-Daten zu:

- BaBar [171]:  $S_{\phi K_S} = 0.26 \pm 0.26 \pm 0.03$ ,  $C_{\phi K_S} = -0.14 \pm 0.19 \pm 0.02$
- Belle [172]:  $S_{\phi K_S} = 0.90^{+0.09}_{-0.19}$ ,  $C_{\phi K_S} = -0.04 \pm 0.20 \pm 0.10 \pm 0.02$
- Mittelwert:  $S_{\phi K_S} = \mathbf{0.56^{+0.16}_{-0.18}}$ ,  $C_{\phi K_S} = \mathbf{-0.11 \pm 0.15}$

Der aktuelle experimentelle Weltmittelwert nähert sich dem SM-Wert an. In Ref. [19] hingegen sind die neuesten Ergebnisse noch nicht mit eingebunden, so dass folgende Werte angegeben werden:

- $S_{\phi K_S} = 0.39 \pm 0.17$ ,  $C_{\phi K_S} = -0.01 \pm 0.12$ ,  $BR(B^0 \rightarrow \phi K^0) = (8.6^{+1.3}_{-1.1}) \cdot 10^{-6}$ .

Am LHCb-Experiment werden 800  $B_d \rightarrow \phi K_S$  Ereignisse in 2 fb $^{-1}$  Daten erwartet. Dies entspricht einer Sensitivität von  $\sigma(\sin(2\beta)) \simeq 0.32$  nach einem Jahr.

### Berechnung der $CP$ -Asymmetrie

Zur Berechnung der  $CP$ -Asymmetrien benötigen wir die hadronischen Matrixelemente für exklusive hadronische Endzustände. Exemplarisch gilt für zwei Beiträge zur Amplitude:

$$A_f \propto C_A \langle f | Q_A | B^0 \rangle + C_B \langle f | Q_B | B^0 \rangle \Rightarrow A_{CP} \propto \arg \left( 1 + \frac{C_B \langle f | Q_B | B^0 \rangle}{C_A \langle f | Q_A | B^0 \rangle} \right). \quad (4.63)$$

Falls nur ein Operator und dessen gestrichener Partner dominieren, kürzen sie sich jedoch heraus, wobei man je nach Parität des Endzustands ein Plus- oder Minuszeichen erhält:

$$C \langle f | Q | B^0 \rangle + C' \langle f | Q' | B^0 \rangle = C \langle f | Q | B^0 \rangle + C' \langle f | P^\dagger Q P | B^0 \rangle = (C - \eta_f C') \langle f | Q | B^0 \rangle.$$

In unserem Fall von  $\phi K_S$  im Endzustand muss der gestrichene Wilson-Koeffizient addiert werden:  $B_d$  und  $K_S$  haben Parität  $P = -1$  und Spin 0.  $\phi$  hingegen ist ein Vektormeson mit  $J^{PC} = 1^{--}$ , d.h. der Endzustand befindet sich in einem  $\ell = 1$  Zustand. Insgesamt ist der Endzustand somit ungerade unter Parität, d.h.  $\eta_{\phi K_S} = -1$ .

Für die Berechnung der hadronischen Matrixelemente  $\langle f | \mathcal{H}_{\text{eff}}^{\Delta B=1} | \bar{B} \rangle$  wurden mehrere Methoden entwickelt. Die naive Faktorisierung (NF) [173–175] geht vom Grenzfall  $m_b \gg \Lambda_{\text{QCD}}$  aus und vernachlässigt QCD Korrekturen in  $\alpha_s$ , wodurch die hadronischen Matrixelemente eines  $B$ -Mesonzerfalls in zwei Mesonen faktorisiert werden können. Allerdings berücksichtigt sie weder Streuung im Endzustand, starke Phasen noch Skalenabhängigkeit des Matrixelements. Eine Verbesserung stellt die von Beneke und Neubert entwickelte QCD-Faktorisierung [176, 177] und die SCET (soft collinear effective theory) dar [178, 179]. In QCDF werden exklusive Zweiteilchen-Zerfallsamplituden mittels Konvolution von harten Streukernen und Lichtkegel-Verteilungsamplituden der Mesonen beschrieben. Wir verwenden die QCDF, welche im An-

hang F erläutert wird. Die Zerfallsamplitude lautet nach Ref. [176]<sup>12</sup>:

$$A(\bar{B}^0 \rightarrow \bar{K}^0 \phi) = -\frac{iG_F}{\sqrt{2}} \underbrace{2m_\phi(\epsilon_\phi^* \cdot p_B)}_{\approx m_B^2} F_+^{B \rightarrow K}(0) f_\phi \sum_{p=u,c} V_{pb} V_{ps}^* \cdot \left[ \alpha_3^p + \alpha_4^p - \frac{1}{2} \alpha_{3,EW}^p - \frac{1}{2} \alpha_{4,EW}^p + \beta_3^p - \frac{1}{2} \beta_{3,EW}^p + \beta_{S3}^p - \frac{1}{2} \beta_{S3,EW}^p \right]. \quad (4.64)$$

Die verschiedenen Beiträge und Notationen werden in Anhang F beschrieben.

**Umparametrisierung:** Für Analysen von Modellen neuer Physik wäre eine Parametrisierung der Amplitude in Form von Wilson-Koeffizienten geeigneter, da in diesen die Effekte der schweren Freiheitsgrade absorbiert sind. Dazu setzen wir die Ausdrücke für  $\alpha_i$  und  $\beta_i$  ein und sortieren nach den Wilson-Koeffizienten  $C_i$ :

$$\bar{A} = iA(\bar{B}^0 \rightarrow \phi \bar{K}^0) = \frac{G_F}{\sqrt{2}} m_B^2 F_+^{B \rightarrow K} f_\phi \sum_{i=1..10,7\gamma,8g} h_i(X_H, X_A) (C_i(\mu_b) + C_i'(\mu_b)). \quad (4.65)$$

Hierbei hängen die Funktionen  $h_i(X_H, X_A)$  von unbekanntem Parametern  $X_{H,A}$ , die IR-Divergenzen parametrisieren ab. Diese Umparametrisierung vereinfacht es, zusätzliche schwache Phasen aus Neue-Physik-Beiträgen einzubinden. Da starke Phasen (invariant unter  $CP$ ) durch Streuung im Endzustand entstehen, werden Neue-Physik-Amplituden nicht mit starken Phasen assoziiert [180]. Ebenso ändert sich die starke Phase beim paritätsgeflippten Operator nicht, da die QCD invariant unter Parität ist. In unserem Fall weist die SM-Amplitude in guter Näherung keine schwache Phase auf. Wir erhalten mit

$$A^{\text{SM}} = \sum_i X_i e^{i\delta_i^{\text{SM}}}, \quad A^{\text{SUSY}} = \sum_i Y_i e^{i\theta_i^{\text{NP}}} e^{i\delta_i^{\text{SM}}} \quad (4.66)$$

und der Notation aus Abschnitt 2.1.3:

$$\bar{\rho} = \frac{\bar{A}^{\text{SM}} + \bar{A}^{\text{SUSY}}}{A^{\text{SM}} + A^{\text{SUSY}}} = \frac{\sum_i (X_i + Y_i e^{-i\theta_i^{\text{NP}}}) e^{i\delta_i^{\text{SM}}}}{\sum_i (X_i + Y_i e^{i\theta_i^{\text{NP}}}) e^{i\delta_i^{\text{SM}}}}, \quad \lambda_{\phi K_S} = \frac{q}{p} \rho. \quad (4.67)$$

Daraus kann man die mischungsinduzierte und direkte  $CP$ -Verletzung nach Gl. (2.26) und (2.27) berechnen. Die  $B_d - \bar{B}_d$ -Mischung bestimmt den Faktor  $q/p$ . Mittels der Umparametrisierung gilt<sup>13</sup>:

$$\bar{A} \propto \sum_{i=1}^{10,7\gamma,8g} h_i(X_H, X_A) (C_i(\mu_b) + C_i'(\mu_b)), \quad A \propto \sum_{i=1}^{10,7\gamma,8g} h_i(X_H, X_A) (C_i^*(\mu_b) + C_i'^*(\mu_b)).$$

Die berechneten Funktionen  $h_i$  sind in Anhang F.3 angegeben.

## Numerische Auswertung

Wir bestimmen die mischungsinduzierte und direkte  $CP$ -Asymmetrie mit Hilfe der QCD-Faktorisierung, wobei wir für den SM-Wert  $S_{\phi K_S} = \sin(2\beta) = 0.673$  (wie in Gl. (4.62)) und  $C_{\phi K_S} = 0$  gesetzt haben. Für die hadronischen Unsicherheiten setzen wir zunächst den

<sup>12</sup>In deren Konvention gilt  $M_1 = P = K$ ,  $M_2 = V = \phi$ , wobei  $V$  für Vektormeson und  $P$  für pseudoskalar steht. Weiter beachte man die unterschiedliche Konvention von Faktoren  $i$  in der Amplitude, d.h.

$\bar{A} = \langle \phi K_S | \mathcal{H}_{\text{eff}}^{\Delta B=1} | \bar{B}^0 \rangle = iA(\bar{B}^0 \rightarrow \phi K_S)_{\text{QCD}}^{\text{Beneke et al.}}$ .

<sup>13</sup>Man beachte, dass auch die CKM-Faktoren komplex konjugiert werden müssen.

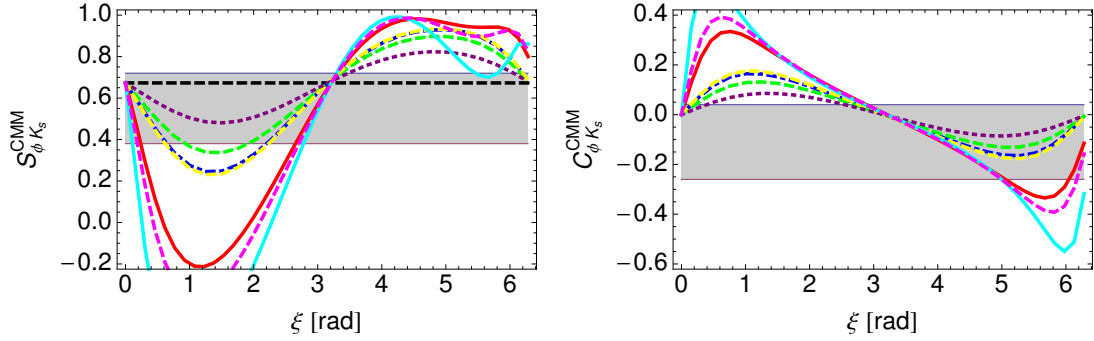


Abb. 4.9: Mischungsinduzierte und direkte  $CP$ -Asymmetrie  $S_{\phi K_S}$  und  $C_{\phi K_S}$  für die CMM Inputs aus Tab. 4.1 als Funktion von  $\xi$  (SM-Vorhersage schwarz gestrichelt; Set 1 rot durchgehend; Set 2 blau strichpunktiert; Set 3 grün gestrichelt; Set 4 gelb gestrichelt; Set 5 lila punktiert; Set 6 cyan durchgehend; Set 7 magenta gestrichelt). Der grau hinterlegte Bereich ist der experimentelle Mittelwert von HFAG.

Ausgangswert von  $X_H = X_A = \log(m_b/\Lambda_h) \approx 2.13$  ein, was  $\rho_H = \rho_A = 0$  entspricht (siehe Anhang F). Im Gegensatz zur  $B_s - \bar{B}_s$ -Mischung bekommt man unterschiedliche Werte für  $\xi$  und  $\xi + \pi$ . In Abb. 4.9 sind die beiden  $CP$ -Asymmetrien für die Parametersets aus Tab. 4.1 in Abhängigkeit von  $\xi$  abgebildet. Auch in diesem Fall bekommt man die stärksten Effekte bei den Datensets 1, 6 und 7, wobei wir daran erinnern, dass Punkt 6 für alle  $\xi$  ein zu großes  $\Delta M_s$  liefert. Gleichzeitig lassen auch Set 1 und 7 nicht viel Spielraum für die Phase  $\xi$  übrig. Beim CMM-Punkt 3, der zwar ein großes Massensplitting, aber relativ schwere Squarks aufweist, liegt  $S_{\phi K_S}$  für Werte von  $\xi$  zwischen 0 und 3.3 mit Ausnahme vom Intervall  $[0.9, 1.9]$  im experimentellen Bereich. Ähnliches gilt für Szenario 2 und 4 mit kleinerem Massensplitting, aber leichteren SUSY-Massen:  $\xi \in [0, 0.6]$  oder  $\xi \in [2.3, 3.3]$ . Beim moderaten CMM-Punkt 5 sind hinsichtlich  $S_{\phi K_S}$  alle Werte von  $\xi$  zwischen 0 und 3.4 erlaubt. Hingegen bevorzugt  $C_{\phi K_S}$  bei den Szenarien 2–5 eher das Intervall  $[2.7, 2\pi]$ , so dass bei der Kombination von  $S_{\phi K_S}$  und  $C_{\phi K_S}$  auf  $1\sigma$ -Niveau nur die kleinen Bereiche  $\xi \in [0, 0.2]$  und  $\xi \in [2.7, 3.3]$  übrig bleiben. Für die CMM-Punkte 1, 6 und 7 ist aus dem Zusammenspiel von  $S_{\phi K_S}$  und  $C_{\phi K_S}$  nur der Bereich  $\xi \in [2.8, 3.3]$  und  $\xi \approx 0$  mit dem experimentellen  $1\sigma$ -Schranken verträglich. Grob gesagt findet man aus Abb. 4.9, dass bei allen Szenarien  $S_{\phi K_S}$  und  $C_{\phi K_S}$  nur dann mit den Messungen kompatibel ist, falls  $\xi \approx 0$  oder  $\xi \approx \pi$ . Genau diese Bereiche sind durch Ergebnisse der  $B_s - \bar{B}_s$ -Mischung in Abschnitt 4.4.2 nicht erlaubt. Lassen wir beispielsweise die direkte  $CP$ -Asymmetrie außen vor und betrachten die Einschränkungen aus  $S_{\phi K_S}$  und der  $B_s - \bar{B}_s$ -Mischung, so bleibt im CMM-Punkt 3 ein kleines Intervall  $\xi \in [0.7, 0.9]$  erlaubt. Naiv folgern wir daraus, dass das CMM-Modell nicht alle Observablen der  $B$ -Physik gleichzeitig richtig wiedergeben kann.

Die Situation ändert sich drastisch, wenn man die hadronischen Unsicherheiten mit einbezieht. Bisher wurde nur die abgeschätzte Größenordnung der Infrarotdivergenzen benutzt. Lässt man jedoch eine 100%-Unsicherheit zum Ausgangswert  $\log(m_b/\Lambda_h)$  zu, d.h. variiert man  $\rho_{H,A}$  zwischen 0 und 1 und die starken Phasen  $\varphi_{H,A}$  beliebig, so werden die Linien in Abb. 4.9 sehr viel breiter. Die Abhängigkeit von  $\xi$  inklusive der hadronischen Unsicherheiten ist beispielhaft in Abb. 4.10 für den CMM-Punkt 2 dargestellt. Damit ist nun fast jeder Wert von  $\xi$  möglich. Im Zuge dessen ist eine weitere Einschränkung an die Phase  $\xi$  allein aus  $B_d \rightarrow \phi K_S$  nicht möglich.

Exemplarisch sind in Abb. 4.11 die Observablen korreliert dargestellt. Dabei verwenden wir das

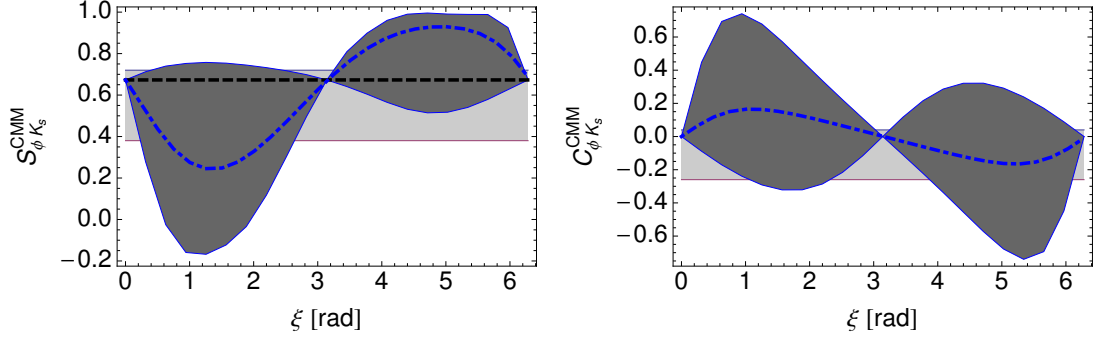


Abb. 4.10:  $S_{\phi K_S}^{\text{CMM}}$  (links) und  $C_{\phi K_S}^{\text{CMM}}$  (rechts) für CMM-Parameterset 2 in Abhängigkeit von  $\xi$  inklusive der hadronischen Unsicherheiten aus den Infrarotdivergenzen, d.h.  $\rho_{H,A} \in [0, 1]$  und  $\varphi_{H,A} \in [0, 2\pi]$  (blau gestrichelt für den Ausgangswert  $\rho_{H,A} = 0$ ). Die horizontale, schwarz gestrichelte Linie ist die SM-Vorhersage und der hellgraue Bereich der experimentelle Mittelwert von HFAG [169].

bereits bekannte Ergebnis von  $\Delta M_s$ ,  $b \rightarrow s\gamma$ ,  $\tau \rightarrow \mu\gamma$  und  $M_h$  mittels des CMW-Programms und fügen die  $CP$ -Asymmetrien  $S_{\phi K_S}$  und  $C_{\phi K_S}$  hinzu. Hierbei verwenden wir für  $\xi$  die aus dem  $\chi^2$ -Test bestimmte Phase und setzen die Standardabschätzung der hadronische Unsicherheiten ein. Wir erkennen, dass  $S_{\phi K_S}$  und  $C_{\phi K_S}$  zwei weitere Tests für das CMM-Modell darstellen. In der Abbildung ist der linke rosafarbenen Bereich bereits durch die  $B_s-\bar{B}_s$ -Mischung ausgeschlossen. Dies spiegelt unsere Ergebnisse aus den sieben CMM-Szenarien aus Tab. 4.1 wieder: Das Schaubild enthält den etwas moderateren CMM-Punkt 4. Dieser liegt mit dem bestimmten  $\xi_{\chi^2}$  knapp außerhalb des mit  $S_{\phi K_S}$  verträglichen Parameterraums. Tendenziell bleiben nach dieser korrelierten Analyse Bereiche mit kleinem  $A$ -Term und großen Squarkmassen übrig. Bedacht werden muss, dass die Werte der  $CP$ -Asymmetrien in Abb. 4.11 nur für  $X_H = X_A = \log m_b/\Lambda_h$  berechnet wurden. Wie wir in Abb. 4.10 gesehen haben sind die hadronischen Unsicherheiten der mischungsinduzierten und direkten  $CP$ -Asymmetrie relativ groß.

#### 4.4.5 $CP$ -Verletzung in $B_s \rightarrow \phi\phi$

Genau wie  $B_d^0 \rightarrow \phi K_S$  ist auch  $B_s^0 \rightarrow \phi\phi$  vom Gluon-Pinguin-Diagramm  $b \rightarrow ss\bar{s}$  dominiert und somit sensitiv auf die in  $b \rightarrow s$ -Übergängen auftretende Phase  $\xi$  (siehe Abb. 4.12). Die schwache Phase setzt sich aus der Mischungs- und Zerfallsphase zusammen:

$$\phi_s(B_s^0 \rightarrow \phi\phi) = \underbrace{\phi_M(B_s^0)}_{\text{aus Mischung}} - \underbrace{\phi_D(B_s^0 \rightarrow \phi\phi)}_{\text{aus Zerfallsamplitude}}. \quad (4.68)$$

Die Mischungsphase bekommt man (wie in Abschnitt 2.1.3 erklärt) aus dem Baumgraphdominierten Zerfall  $B_s \rightarrow J\psi\phi$ . Im SM ist die schwache Phase des Zerfalls  $B_s^0 \rightarrow \phi\phi$  kleiner als  $1^\circ$ , da sich die Abhängigkeit von  $V_{ts}$  in der Mischung und im Zerfall gerade herausheben:

$$\phi_s(B_s^0 \rightarrow \phi\phi)^{\text{SM}} = -\arg(\eta_{\phi\phi}\lambda_{\phi\phi}) \approx 2\arg(V_{ts}^*V_{tb}) - \arg\left(\frac{V_{tb}V_{ts}^*}{V_{tb}^*V_{ts}}\right) = 0. \quad (4.69)$$

Neue Physik kann nun sowohl die Mischungsphase als auch die Phase im Zerfall beeinflussen und zwar im Allgemeinen jeweils unterschiedlich. In Kapitel 4.4.2 haben wir ausführlich die Mischung im CMM-Modell untersucht, deren Phase sehr groß werden kann. Ein Beispiel

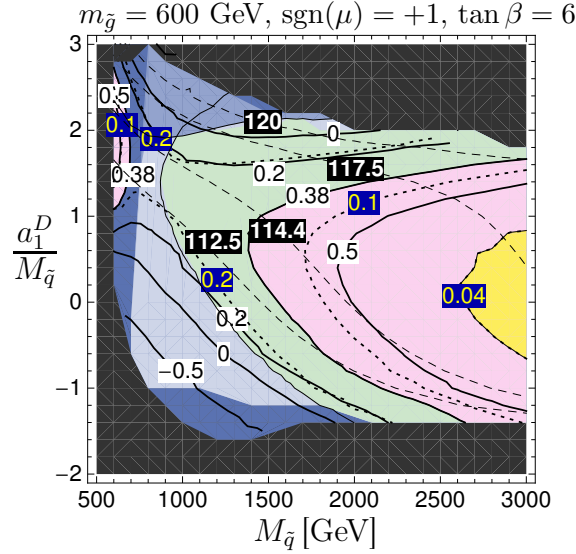


Abb. 4.11: Korrelation der FCNC-Prozesse  $B_s - \bar{B}_s$ ,  $b \rightarrow s\gamma$ ,  $\tau \rightarrow \mu\gamma$ , der Higgsmasse  $M_h$  (gestrichelte Linien mit weißen Zahlen auf schwarzem Hintergrund),  $S_{\phi K_S}$  (durchgehende Linien mit schwarzen Zahlen auf weißem Hintergrund) und  $C_{\phi K_S}$  (gestrichelte Linien mit gelben Zahlen auf blauem Hintergrund) als Funktion von  $M_{\bar{q}}$  und  $\frac{a_1^D}{M_{\bar{q}}}$  für  $m_{\bar{q}} = 600$  GeV,  $\text{sgn} \mu = +1$  und  $\tan \beta = 6$ . Der  $1\sigma$ -Bereich von  $S_{\phi K_S} \in [0.38, 0.72]$  ist rosa gefärbt, der von  $C_{\phi K_S} \in [-0.26, 0.04]$  gelb, wobei die Standardabschätzung der Infrarotdivergenzen verwendet wurde. Dunkelblauer Bereich: ausgeschlossen durch  $B_s - \bar{B}_s$ ; mittelblauer Bereich: konsistent mit  $B_s - \bar{B}_s$ , aber wegen  $b \rightarrow s\gamma$  ausgeschlossen; hellblauer Bereich: konsistent mit  $B_s - \bar{B}_s$  und  $b \rightarrow s\gamma$ , aber inkompatibel mit  $\tau \rightarrow \mu\gamma$ ; grüner Bereich: kompatibel mit  $B_s - \bar{B}_s$ ,  $b \rightarrow s\gamma$  und  $\tau \rightarrow \mu\gamma$ . Man beachte jedoch, dass Teile des gelb- und rosafarbenen Gebiets sowohl durch  $M_h$  als auch durch die  $B_s - \bar{B}_s$ -Mischung bereits ausgeschlossen sind.

für den Einfluss der Phase  $\xi$  auf einen  $\Delta B = 1$ -Übergang war im vorherigen Abschnitt die  $CP$ -Asymmetrie  $S_{\phi K_S}$ . Da es im CMM-Modell nur eine Quelle von  $CP$ -Verletzung gibt – die Phase  $\xi$  – sollten die  $CP$ -Verletzung in  $B_s^0 \rightarrow \phi\phi$  und die Mischungsphase korreliert sein, während dies in generischen Modellen nicht der Fall ist. Der Zerfall  $B_s \rightarrow \phi\phi$  hat im Vergleich zu anderen hadronischen  $B$ -Zerfällen den Vorteil, dass die hadronischen Unsicherheiten kleiner ausfallen. Dennoch wird es schwierig, CMM-Beiträge in den Zerfallsraten ausfindig zu machen. Die  $CP$ -Asymmetrie, welche im SM Null ist und mit den hadronischen Unsicherheiten multipliziert wird, stellt sich wieder als die geeignetere Observable heraus. Da der Zerfall eines pseudoskalaren Mesons in zwei Vektormesonen eine Mischung aus  $CP$ -geraden und  $CP$ -ungeraden Endzuständen ist, muss eine zeitabhängige Winkelanalyse durchgeführt werden, um die  $CP$ -verletzenden Parameter zu extrahieren.

### Experimenteller Status und Polarisationspuzzle

Obwohl der Anteil der Bottomquarks, die in ein  $B_s$ -Meson hadronisieren, im Vergleich zu  $B_d$ -Mesonen um einen Faktor vier kleiner ist, erwartet man, dass die Rekonstruktionseffizienz des Zerfalls  $B_s^0 \rightarrow \phi\phi$  höher als die für  $B_d^0 \rightarrow \phi K_S$  ist. Dies liegt unter anderem daran, dass

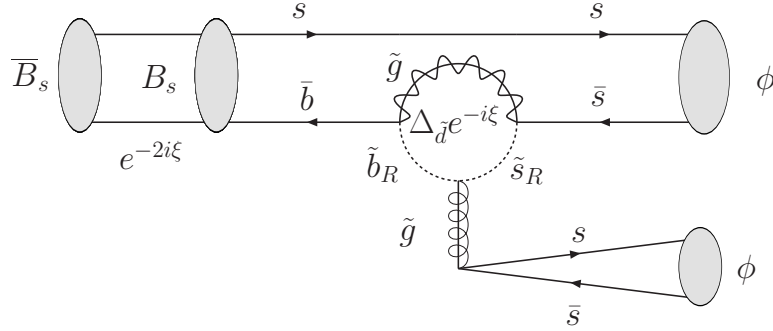


Abb. 4.12: Es gibt es zwei Quellen, die zur  $CP$ -Verletzung im Zerfall  $B_s \rightarrow \phi\phi$  beitragen: Die aus der Mischung induzierte  $CP$ -Verletzung, welche über den „goldenen Kanal“  $B_s \rightarrow J/\psi\phi$  gemessen werden kann (siehe Abschnitt 2.1.3 und 4.4.2) und die in der Zerfallsamplitude auftretenden Phase  $e^{i\xi}$ . Im CMM-Modell stammen beiden von der Phase  $\xi$ , weshalb  $B_s \rightarrow J/\psi\phi$  und  $B_s \rightarrow \phi\phi$  korreliert sind.

$B_s^0 \rightarrow \phi\phi$  gefolgt von  $\phi \rightarrow K^+K^-$  nur geladene Teilchen im Endzustand aufweist und das sichtbare Verzweungsverhältnis im Vergleich zu anderen  $b \rightarrow s$ -Übergängen verhältnismässig groß ist [181]:

$$BR^{\text{vis}}(B_s^0 \rightarrow \phi(K^+K^-)\phi(K^+K^-)) \equiv BR(B_s^0 \rightarrow \phi\phi) BR(\phi \rightarrow K^+K^-)^2 = (3.4 \pm 2.1) \cdot 10^{-6}.$$

LHCb erwartet 4000 Signalereignisse bei  $2 \text{ fb}^{-1}$  Daten. Die Sensitivität für  $\phi_s$  im  $B_s \rightarrow \phi\phi$ -Kanal ist jeweils  $\sigma(\phi_s) = 0.10 \text{ rad}$  und  $0.04 \text{ rad}$  in 2 bzw.  $10 \text{ fb}^{-1}$  [182]. 2009 hat CDF seine Daten mit  $2.9 \text{ fb}^{-1}$  von 2005 aktualisiert und [183–185]

$$BR(B_s \rightarrow \phi\phi) = (2.40 \pm 0.21(\text{stat.}) \pm 0.27(\text{syst.}) \pm 0.83(BR)) \cdot 10^{-5} \quad (4.70)$$

erhalten, in Übereinstimmung mit den theoretischen Vorhersagen

$$\text{QCD-Faktorisierung: } (2.18 \pm 0.1^{+3.04}_{-1.78}) \cdot 10^{-5}, \quad (4.71)$$

$$\text{Perturbative QCD: } (3.53^{+0.83+1.67}_{-0.69-1.02}) \cdot 10^{-5}. \quad (4.72)$$

**Polarisationspuzzle:** Die differentielle Zerfallsrate von  $B_s \rightarrow \phi\phi$  ist durch drei unabhängige Amplituden, welche den unterschiedlichen Polarisierungen entsprechen, bestimmt: eine longitudinale Polarisation  $\mathcal{A}_0$  und zwei transversale mit Spins parallel  $\mathcal{A}_\parallel$  und senkrecht  $\mathcal{A}_\perp$  zueinander. Man definiert das transversale und longitudinale Amplitudenverhältnis:

$$f_T = f_\perp + f_\parallel = \frac{|\mathcal{A}_\perp|^2 + |\mathcal{A}_\parallel|^2}{|\mathcal{A}_0|^2 + |\mathcal{A}_\perp|^2 + |\mathcal{A}_\parallel|^2}, \quad f_L = \frac{|\mathcal{A}_0|^2}{|\mathcal{A}_0|^2 + |\mathcal{A}_\perp|^2 + |\mathcal{A}_\parallel|^2}. \quad (4.73)$$

Naiv erwartet man  $f_L \gg f_T$ , bzw. genauer  $f_L = 1 - \mathcal{O}(1/m_b^2)$ , sowie  $f_\perp/f_\parallel = 1 + \mathcal{O}(1/m_b)$ . Diese Prognosen wurden experimentell von BaBar und Belle in den Baumgraph-dominierten Übergängen  $B^0 \rightarrow \rho^0\rho^0$ ,  $B^0 \rightarrow \rho^-\rho^+$  und  $B^+ \rightarrow \rho^+\rho^0$  bestätigt. Das Interesse an  $B$ -Zerfällen in zwei Vektormesonen wurde vor allem durch die gemessene longitudinale Polarisation  $f_L \approx 0.5$  des  $B_d^{0,+} \rightarrow \phi K^{0,+,*}$  Zerfalls hervorgerufen, welche genau wie  $B_s \rightarrow \phi\phi$  durch  $b \rightarrow s$  Pinguin-Diagramme beschrieben werden. Eine erste Messung der Polarisation von  $B_s \rightarrow \phi\phi$  wurde am CDF-Experiment durchgeführt. Die erhaltenen Polarisierungsanteile

von  $f_L = 0.348 \pm 0.041$  (stat.)  $\pm 0.021$  (syst.) und  $f_T = 0.652 \pm 0.041$  (stat.)  $\pm 0.021$  (syst.) [184] entsprechen ebenfalls nicht der erwarteten Amplitudenhierarchie (siehe unten in Gl. (4.77)):

$$|\mathcal{A}_0|^2 \simeq |\mathcal{A}_\parallel|^2 \simeq |\mathcal{A}_\perp|^2 \quad \text{anstatt} \quad |\mathcal{A}_0|^2 \gg |\mathcal{A}_\parallel|^2 \simeq |\mathcal{A}_\perp|^2. \quad (4.74)$$

Es gibt mehrere Lösungen, diese Diskrepanz ohne Neue Physik zu erklären, wie beispielsweise verstärkte Annihilations-Beiträge, Effekte elektromagnetischer oder sog. Charming-Pinguin-diagramme oder langreichweitige Streuprozesse [173, 186–190].

### Berechnung der $CP$ -Asymmetrie

Da es sich um zwei Vektorteilchen im Endzustand handelt, gibt es drei Helizitätsamplituden  $\mathcal{A}_\lambda$ ,  $\lambda = 0, +, -$  bzw.  $\bar{\mathcal{A}}_\lambda$  für den  $\bar{B}_s$ -Zerfall. Der Zusammenhang mit der transversalen Basis ist gegeben durch:

$$\bar{\mathcal{A}}_\parallel = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{\mathcal{A}}_- + \bar{\mathcal{A}}_+), \quad \bar{\mathcal{A}}_- = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{\mathcal{A}}_\perp + \bar{\mathcal{A}}_\parallel), \quad (4.75)$$

$$\bar{\mathcal{A}}_\perp = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{\mathcal{A}}_- - \bar{\mathcal{A}}_+), \quad \bar{\mathcal{A}}_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{\mathcal{A}}_\parallel - \bar{\mathcal{A}}_\perp). \quad (4.76)$$

Die Amplituden  $\mathcal{A}_{0,\parallel}$  sind  $CP$ -gerade und  $\mathcal{A}_\perp$  ist  $CP$ -ungerade. Die transversale Basis ist meistens für experimentelle Analysen geeigneter, da der Endzustand eine definierte  $CP$ -Quantenzahl besitzt, während die Helizitätsbasis vorwiegend in theoretischen Analysen verwendet wird [186, 187, 191–194]. Naive Faktorisierung deutet auf eine Hierarchie der Helizitätsamplituden hin:

$$\bar{\mathcal{A}}_0 : \bar{\mathcal{A}}_- : \bar{\mathcal{A}}_+ = 1 : \frac{\Lambda_{\text{QCD}}}{m_b} : \left( \frac{\Lambda_{\text{QCD}}}{m_b} \right)^2. \quad (4.77)$$

Dies ist eine Konsequenz der  $V - A$ -Struktur der schwachen Wechselwirkung und der Faktorisierung. In Anwesenheit von rechtshändigen Strömen wird diese Hierarchie jedoch invertiert. Die Amplitude  $\bar{\mathcal{A}}_+$  ist nicht faktorisiert und besteht nur aus Annihilationsbeiträgen, welche schwierig zu berechnen sind.

Aufgrund der Drehimpulserhaltung können die Dipoloperatoren  $Q_{7\gamma}$  und  $Q_{8g}$  in Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s)$  nicht zu den Pinguin-Diagrammen der transversalen Amplitude beitragen [187, 191]. Dies ist gerade im CMM-Modell relevant, da die dominanten Effekte in den gestrichenen Wilson-Koeffizienten der Dipoloperatoren stecken, welche analog zur Überlegung bei  $B_d \rightarrow \phi K_S$  bei gerader Parität subtrahiert und bei ungerader Parität addiert werden müssen:

$$\mathcal{A}_{0,\parallel} \propto C_{\text{SM}} + C_{\text{SUSY}} - C'_{\text{SUSY}}, \quad (4.78)$$

$$\mathcal{A}_\perp \propto C_{\text{SM}} + C_{\text{SUSY}} + C'_{\text{SUSY}}. \quad (4.79)$$

Das ist der Grund, weshalb die Helizitätsamplituden, wie sie in Ref. [186] angegeben sind, in unserem Fall in die transversale Basis umgerechnet werden müssen. Die Zerfallsamplitude in QCDF ist gegeben durch [186]

$$A(\bar{B}_s \rightarrow \phi\phi)^h = 2A_{\phi\phi}^h \sum_{p=u,c} V_{pb} V_{ps}^* \left[ \alpha_4^p + \alpha_3^p - \frac{1}{2} \alpha_{3,EW}^p + \beta_3^p + \beta_4^p \right], \quad h = 0, +, -. \quad (4.80)$$

Genauer dazu ist Anhang F.2 zu entnehmen.

**Umparametrisierung:** Auch hier lohnt sich wieder eine Umparametrisierung, damit man die Neue-Physik-Beiträge zu den Wilson-Koeffizienten einfach hinzufügen kann<sup>14</sup>:

$$\bar{A}_{\phi\phi}^0 = iA(\bar{B}_s \rightarrow \phi\phi)^0 = -\frac{G_F}{\sqrt{2}}m_{B_s}^2 f_{B_s} A_0^{B_s \rightarrow \phi} \sum_i h_i^0(X_H, X_A) (C_i(\mu_b) - C'_i(\mu_b)), \quad (4.81)$$

$$\bar{A}_{\phi\phi}^{\parallel} = iA(\bar{B}_s \rightarrow \phi\phi)^{\parallel} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}}m_{B_s} m_{\phi} f_{B_s} \sum_i h_i^{\parallel}(X_H, X_A, X_L) (C_i(\mu_b) - C'_i(\mu_b)), \quad (4.82)$$

$$\bar{A}_{\phi\phi}^{\perp} = iA(\bar{B}_s \rightarrow \phi\phi)^{\perp} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}}m_{B_s} m_{\phi} f_{B_s} \sum_i h_i^{\perp}(X_H, X_A, X_L) (C_i(\mu_b) + C'_i(\mu_b)). \quad (4.83)$$

Die Ergebnisse für die Funktionen  $h_i$  sind wieder in Anhang F.3 angegeben. Insgesamt sind die hadronischen Unsicherheiten in  $B_s \rightarrow \phi\phi$  viel kleiner als bei  $B_d \rightarrow \phi K_S$ . Die Koeffizienten vor  $X_H$ ,  $X_A$  und  $X_L$  sind um ca. zwei Größenordnungen kleiner als der Real- und Imaginärteil der Amplitude mit den Ausgangswerten für  $X_i$ . Wir betrachten die  $CP$ -Asymmetrie, welche durch  $\lambda_{\phi\phi} = \frac{q}{p} \frac{\bar{A}_{\phi\phi}}{A_{\phi\phi}}$  charakterisiert ist. Im CMM-Modell besteht eine Korrelation zwischen  $B_s \rightarrow J/\psi\phi$  und  $B_s \rightarrow \phi\phi$ . Aus ersterem misst man die Mischungsphase  $\phi_s$  über  $S_{J/\psi\phi} = \eta_{CP} \sin(2\beta_s^{\text{eff}})$  (siehe Abschnitt 2.1.3 und 4.4.2), in welchem im CMM-Modell die Phase  $\xi$  bzw.  $\phi_s$  eingeht. Weiter taucht  $\xi$  auch in  $A_{\phi\phi}$  auf, während sich im generischen Modell in  $\Delta B = 1$  und  $\Delta B = 2$  unterschiedliche Quellen von  $CP$ -Verletzung abzeichnen können.

## Numerische Analyse

Wir möchten die Korrelation der  $B_s - \bar{B}_s$ -Mischung (bestimmt durch den Baumgraph-dominierten Zerfall  $B_s \rightarrow J/\psi\phi$ ) und  $B_s \rightarrow \phi\phi$  im CMM-Modell genauer herausarbeiten. Beim  $\Delta B = 1$ -Übergang trägt der CMM-spezifische Effekt hauptsächlich zum chromomagnetischen Dipol bei. Da dieser nur in longitudinaler Polarisation zutage tritt, erwarten wir Unterschiede zwischen  $S_{\phi\phi,0}^{\text{CMM}}$  und  $S_{J/\psi\phi,0}^{\text{CMM}}$ , nicht jedoch bei paralleler oder senkrechter Polarisation. In die direkten  $CP$ -Asymmetrie  $C_{\phi\phi}$  geht nur die Zerfallsamplitude  $A_{\phi\phi}$  ein, nicht jedoch die Mischungsphase. Folglich sollte für senkrechte und parallele Polarisation die Asymmetrie sehr klein sein, während im longitudinalen Fall größere Effekte auftreten können. Dies soll numerisch überprüft werden.

Wir untersuchen wieder die CMM-Szenarien aus Tab. 4.1 zunächst bei variablem  $\xi$ , und beginnen mit der mischungsinduzierten  $CP$ -Asymmetrie  $S_{\phi\phi}^{\text{CMM}}$ . Für die hadronischen Unsicherheiten setzen wir vorab die Standardwerte  $X_H = X_A = \log \frac{m_{B_s}}{\Lambda_h}$ ,  $X_L = \frac{m_{B_s}}{\Lambda_h}$  ein und untersuchen anschließend, wie sich deren Variation auswirkt.

In Abb. 4.13 (links) sind die Größen  $S_{\phi\phi,0}^{\text{CMM}}$  und  $S_{J/\psi\phi,0}^{\text{CMM}}$  für die sieben Szenarien dargestellt. Die Abweichung von der Diagonalen rührt vom CMM-Beitrag in  $C'_{8g}$  her, welcher in  $S_{\phi\phi,0}^{\text{CMM}}$  nicht aber in  $S_{J/\psi\phi,0}^{\text{CMM}}$  auftritt. Sie kann für die extremen CMM-Szenarien (1, 6, 7) recht groß werden, z.B. in Set 7  $S_{J/\psi\phi,0}^{\text{CMM}} = -0.5$  gegenüber  $S_{\phi\phi,0}^{\text{CMM}} = +0.1$ , während die Abweichung für die etwas moderateren CMM-Punkte kleiner ist (für Set 2, 3 und 4 z.B.  $S_{J/\psi\phi,0}^{\text{CMM}} = -0.4$  gegenüber  $S_{\phi\phi,0}^{\text{CMM}} = -0.1$  und für Set 5  $S_{J/\psi\phi,0}^{\text{CMM}} = -0.1$  gegenüber  $S_{\phi\phi,0}^{\text{CMM}} = 0$ ). Rechts in Abb. 4.13 ist  $S_{\phi\phi,0}^{\text{CMM}}$  in Abhängigkeit von  $\xi$  abgebildet. Im Gegensatz zu  $S_{J/\psi\phi,0}^{\text{CMM}}$  weist es eine Periodizität von  $2\pi$  und nicht  $\pi$  auf, da (im longitudinalen Fall) die  $CP$ -Verletzung nicht mehr

<sup>14</sup>Bei den transversalen Amplituden klammern wir keinen Formfaktor aus, da jeweils eine Linearkombination von  $F_-^{B_s \rightarrow \phi}$  und  $F_+^{B_s \rightarrow \phi}$  aus den Helizitätsamplituden auftritt und somit nicht faktorisiert werden kann.



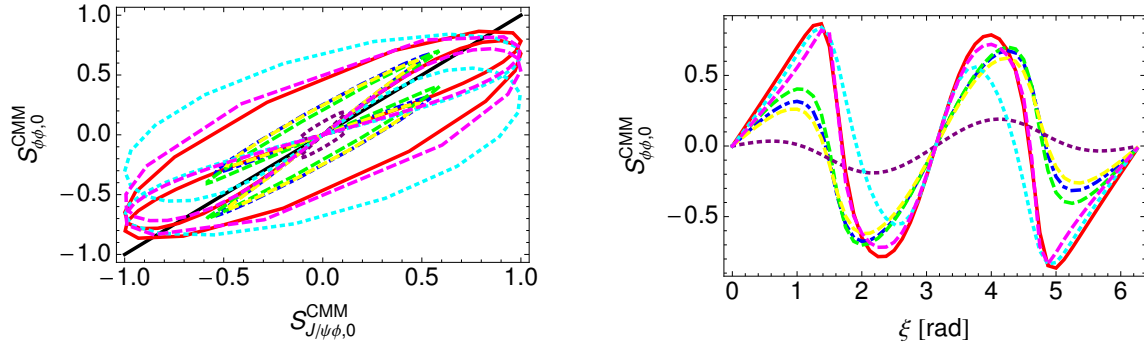


Abb. 4.13: Korrelation zwischen  $S_{\phi\phi,0}^{\text{CMM}}$  und  $S_{J/\psi\phi,0}^{\text{CMM}}$ , wobei  $\xi \in [0, 2\pi]$  (links) und  $S_{\phi\phi,0}^{\text{CMM}}$  als Funktion von  $\xi$  (rechts) für die sieben Szenarien in Tab. 4.1: Set 1 rot durchgehend; Set 2 blau strichpunktiert; Set 3 grün gestrichelt; Set 4 gelb gestrichelt; Set 5 lila punktiert; Set 6 cyan durchgehend; Set 7 magenta gestrichelt.

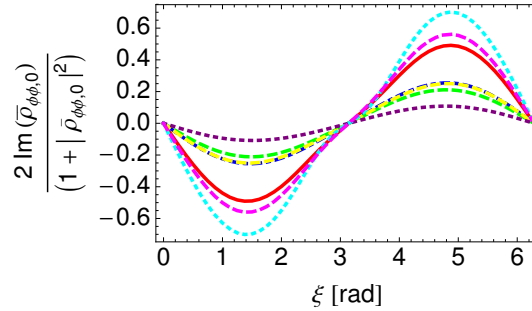


Abb. 4.14:  $\bar{\rho}_{\phi\phi,0}/(1 + |\rho_{\phi\phi,0}|^2)$  in Abhängigkeit von  $\xi$  für die Szenarien in Tab. 4.1 (Legende wie in Abb. 4.13).

nur aus der  $B_s - \bar{B}_s$ -Mischung herrührt, sondern auch aus der Amplitude  $A_{\phi\phi}^0$ . Um den Effekt allein aus dem Amplitudenverhältnis  $\bar{\rho}_{\phi\phi} = \bar{A}_{\phi\phi}/A_{\phi\phi}$  zu isolieren, haben wir in Abb. 4.14 den Imaginärteil von  $2\bar{\rho}_{\phi\phi,0}/(1 + |\rho_{\phi\phi,0}|^2)$  in Abhängigkeit von  $\xi$  abgebildet. Dies kann mit  $S_{\phi K_S}$  in Abb. 4.9 verglichen werden, da dort die Abweichung von  $\sin(2\beta)$  aus demselben Effekt – nämlich  $C'_{8g}$  – stammt.

Eine korrelierte Analyse mit der Standardabschätzung für  $X_H, X_A, X_L$  und dem berechneten Wert  $\xi_{\chi^2}$  für die a priori freie Phase ist in Abb. 4.15 dargestellt. Die Farbgebung ist dieselbe wie in Abb. 4.11, wo nur der grüne Bereich die Forderung an  $B_s - \bar{B}_s, b \rightarrow s\gamma$  und  $\tau \rightarrow \mu\gamma$  erfüllt. Weiter sind die erlaubten  $1\sigma$ -Gebiete von  $S_{\phi K_S}$  und  $C_{\phi K_S}$  (ohne Höhenlinien) eingezeichnet. Hinzugefügt wurden die Höhenlinien von  $S_{J/\psi\phi,0}$  und  $S_{\phi\phi,0}$ , welche gegeneinander verschoben sind. Diese können sich je nach Parameterpunkt im longitudinalen Fall um beispielsweise 0.3 unterscheiden.

Da die CMM-Beiträge zu den QCD-Pinguinen vergleichsweise gering sind (siehe Kapitel 4.4.3), ist der Unterschied zwischen  $S_{\phi\phi,\perp/\parallel}^{\text{CMM}}$  und  $S_{J/\psi\phi,\perp/\parallel}^{\text{CMM}}$  bei senkrechter und paralleler Polarisation unbeobachtbar klein (in einem zu Abb. 4.13 analogen Plot liegen alle Szenarien auf der Diagonalen). Augenscheinlich in Abb. 4.16 ist die  $\pi$ -Periodizität in  $\xi$ , die aus der Zweideutigkeit in der  $B_s - \bar{B}_s$ -Mischung herrührt. Auch hier können sehr große  $CP$ -Asymmetrien prognostiziert werden, welche im SM Null sind. Sie entstammen jedoch alleine aus der  $B_s - \bar{B}_s$ -Mischung.

Die Vorhersage des CMM-Modells ist folglich, dass die mischungsinduzierten  $CP$ -Asymmetrien

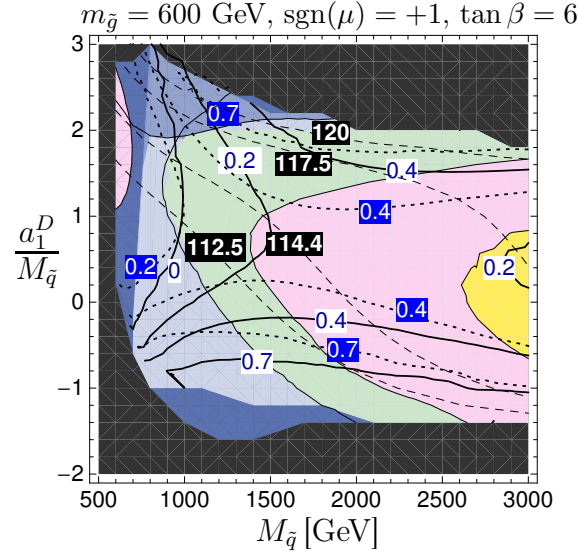


Abb. 4.15: Korrelation der FCNC-Prozesse  $B_s - \bar{B}_s$ ,  $b \rightarrow s\gamma$ ,  $\tau \rightarrow \mu\gamma$  und der der Higgsmasse  $M_h$  wie in Abb. 4.11 (ohne Markierungen und Höhenlinien für  $S_{\phi K_S}$  und  $C_{\phi K_S}$ ). Durchgehende Linien mit weißen Markierungen und blauen Zahlen geben  $S_{J/\psi\phi,0}$  und gepunktete Linien mit blauen Markierungen und weißen Zahlen geben  $S_{\phi\phi,0}$  an, wobei die Phase  $\xi_{\chi^2}$  eingesetzt wurde.

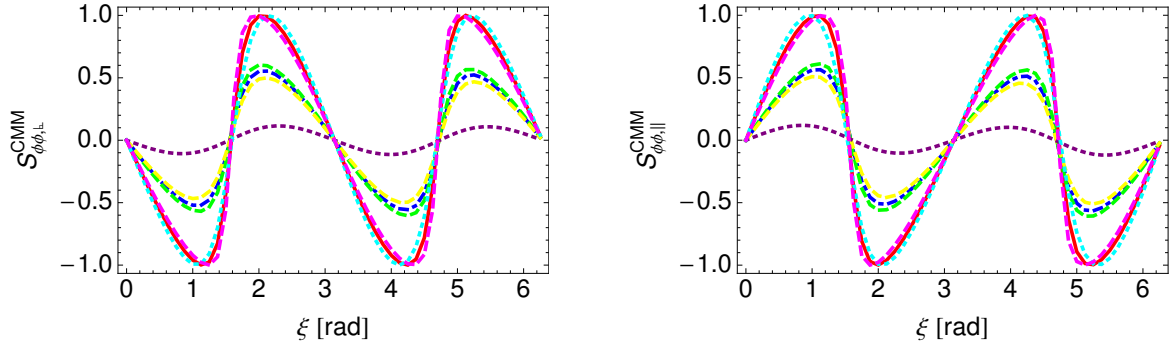


Abb. 4.16: Mischung induzierte  $CP$ -Asymmetrie  $S_{\phi\phi,\perp/\parallel}^{\text{CMM}}$  für senkrechte und parallele Polarisation in Abhängigkeit von  $\xi$  für die sieben verschiedenen Szenarien (Legende wie in Abb. 4.13).

in senkrechter und paralleler Polarisation für  $B_s \rightarrow \phi\phi$  und  $B_s \rightarrow J/\psi\phi$  gleich sein müssen und a priori aufgrund der  $B_s - \bar{B}_s$ -Mischung sehr groß sein können, während es im longitudinalen Fall zu Abweichungen zwischen den zwei Observablen kommen kann. Falls experimentell der umgekehrte Fall beobachtet wird, bedeutet dies, dass Neue Physik zu den QCD-Pinguinen, nicht aber zum chromomagnetischen Dipol beiträgt.

Wir wenden uns nun der direkten  $CP$ -Asymmetrie  $C_{\phi\phi}$  zu. Im SM verschwindet sowohl die direkte  $CP$ -Asymmetrie in  $B_s \rightarrow J/\psi\phi$  als auch im Zerfall  $B_s \rightarrow \phi\phi$ . Im CMM-Modell gilt ebenfalls  $C_{J/\psi\phi} = 0$ , da nur die  $B_s - \bar{B}_s$ -Mischung von CMM-Effekten beeinflusst wird, während der Baumgraphzerfall unbeeinflusst bleibt. Wie in Abschnitt 2.1.3 erklärt wurde, können  $CP$ -verletzende Phasen im Amplitudenverhältnis zu einer direkten  $CP$ -Asymmetrie führen. Genau dies passiert im CMM-Modell in  $B_s \rightarrow \phi\phi$ . In Abb. 4.17 sind alle drei Polarisationen für die

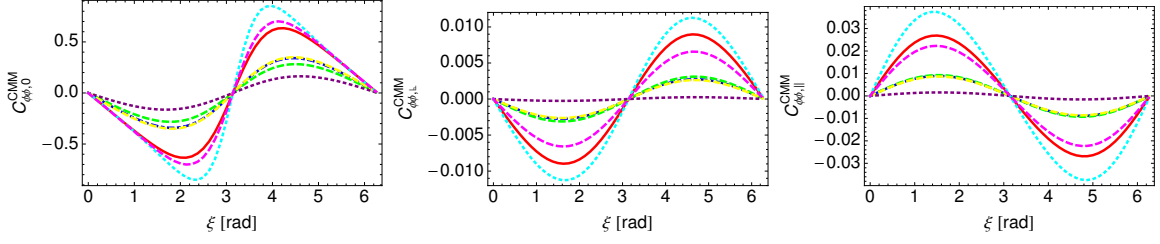


Abb. 4.17: Direkte  $CP$ -Asymmetrie  $C_{\phi\phi}^{\text{CMM}}$  für die drei Polarisationen  $0, \perp, \parallel$  in Abhängigkeit von  $\xi$  für die sieben CMM-Szenarien.

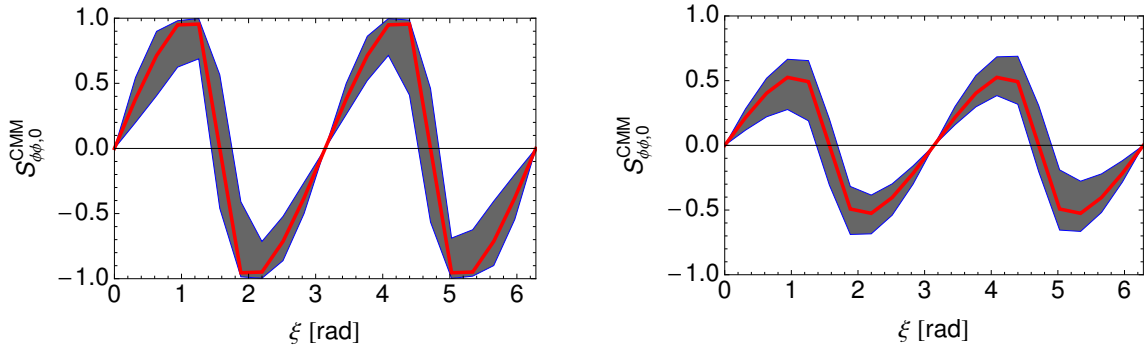


Abb. 4.18:  $S_{\phi\phi,0}^{\text{CMM}}$  in Abhängigkeit von  $\xi$  inklusive der hadronischen Unsicherheiten. Links: CMM-Punkt 1; Rechts: CMM-Punkt 2. Die rote Linie stellt  $S_{J/\psi\phi,0}^{\text{CMM}}$  dar.

verschiedenen CMM-Sets abgebildet. Deutlich zu erkennen ist wieder, dass die CMM-Effekte für senkrechte und parallel Polarisation verschwindend klein sind, man jedoch je nach Wert von  $\xi$  und CMM-Set im longitudinalen Fall Asymmetrien von bis zu 50% erhalten kann.

Bisher haben wir die Infrarotdivergenzen durch die Standardwerte abgeschätzt. Variiert man diese wie in Abschnitt 4.4.4 ( $\rho \in [0, 1]$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$ ) bekommen die Kurven in den obigen Abbildungen alle eine gewisse Breite. Im Vergleich zu  $B_d \rightarrow \phi K_S$  sind die hadronischen Unsicherheiten jedoch wesentlich geringer. Dies erkennt man auch an den kleineren Koeffizienten vor den  $X_H, X_A$  und  $X_L$  in der Umparametrisierung (siehe Anhang F.3). Exemplarisch wurde für die CMM-Punkte 1 und 2 über die hadronischen Unsicherheiten gescannt. Die Auswirkung auf die longitudinale Mischung induzierte  $CP$ -Asymmetrie ist in Abb. 4.18 dargestellt. Die rote Linie gibt den Beitrag allein aus der  $B_s - \bar{B}_s$ -Mischung, d.h.  $S_{J/\psi\phi,0}^{\text{CMM}}$  wieder. In Abb. 4.19 ist die Auswirkung der hadronischen Unsicherheiten auf die longitudinale und parallele direkte  $CP$ -Asymmetrie dargestellt.

### Vergleich mit dem generischen MSSM

Im Folgenden werden Korrelationen zwischen  $S_{J/\psi\phi}$  und  $S_{\phi\phi}$  im generischen MSSM betrachtet und nach Unterschieden gegenüber dem CMM-Modell gesucht. Für die  $B_s - \bar{B}_s$ -Mischung halten wir uns an Ref. [59, 195]. Im generischen MSSM treten im Vergleich zum CMM-Modell acht  $\Delta B = 2$ -Operatoren auf. Für die zugehörigen Wilson-Koeffizienten verwenden wir die Masseneinsatznäherung; ebenso für die  $\Delta B = 1$ -Wilson-Koeffizienten [66, 196], welche für  $B_s \rightarrow \phi\phi$  benötigt werden. Die Gleichungen dazu findet man in Anhang E.4. Die relevanten Nebendiagonalelemente der Squarkmassenmatrix  $\delta_{XY}^{d,23}$  sind vor allem durch die  $B_s - \bar{B}_s$ -Mischung

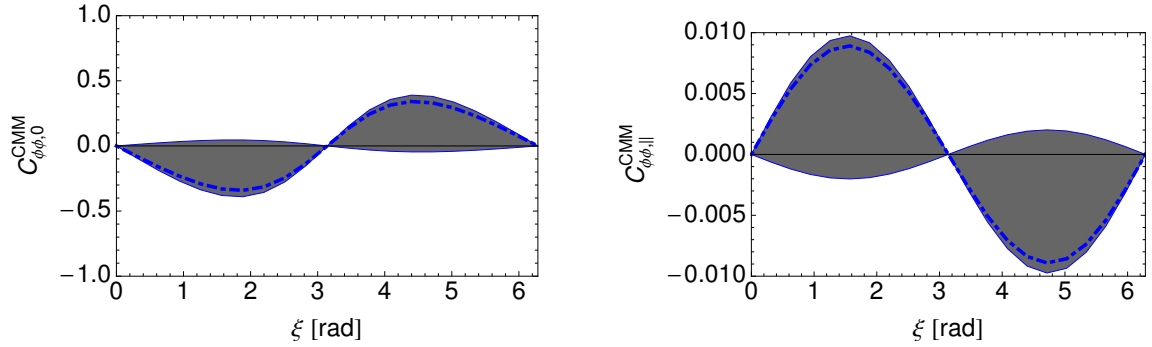


Abb. 4.19:  $C_{\phi\phi,0}^{\text{CMM}}$  (links) und  $C_{\phi\phi,||}^{\text{CMM}}$  (rechts) in Abhängigkeit von  $\xi$  inklusive der hadronischen Unsicherheiten für CMM-Punkt 2. Blau strichpunktiert ist der Wert für die Ausgangswerte der hadronischen Unsicherheiten.

und  $b \rightarrow s\gamma$  eingeschränkt. Die Schranken an das LR-Element stammen hauptsächlich von  $b \rightarrow s\gamma$ , während die  $B_s - \overline{B}_s$ -Mischung sensitiver auf die chiralitätserhaltenden LL- und RR-Elemente ist. Wir betrachten wieder nur die Gluino-Beiträge und setzen das LR-Element immer auf Null, um nicht mit  $b \rightarrow s\gamma$  in Konflikt zu geraten. Ferner berücksichtigen wir die Einschränkungen aus  $\Delta M_s$ .

Um die große Fülle der freien Parameter im MSSM etwas zu reduzieren, verwenden wir als Referenz für unseren Vergleich mit dem CMM-Modell entartete Squarkmassen und Werte für  $m_{\tilde{g}}$  und  $M_{\tilde{q}}$  wie in Tab. 4.1; allerdings ohne RGE. Für die Masseneinsetzungen fordern wir immer  $|\delta_{XY}^{d23}| < 1$ , damit keine negativen Squarkmassen auftreten können. Man muss allerdings auch bedenken, dass bei zu großen Nebendiagonalelementen die Gültigkeit der Masseneinsetzungsnaheung fraglich ist. Zunächst betrachten wir den Fall  $\delta_{RR}^{d23} \neq 0$  und setzen alle anderen Nebendiagonalelemente auf Null. Die  $B_s - \overline{B}_s$ -Mischung kann dadurch merklich beeinflusst werden, und durch komplexe  $\delta_{RR}^{d23}$  insbesondere auch die mischungsinduzierte  $CP$ -Asymmetrie. Allerdings ist die Differenz zwischen  $S_{J/\psi\phi,0}$  und  $S_{\phi\phi,0}$  in diesem Fall nur durch die hadronischen Unsicherheiten in  $S_{\phi\phi,0}$  gegeben. Variiert man stattdessen nur  $\delta_{LL}^{d23}$ , so erhalten wir bei den verwendeten Näherungen das gleiche Ergebnis.

Die Situation ändert sich, sobald wir nichtverschwindende chiralitätsverletzende Massenelemente erlauben. Wegen der Einschränkung von  $b \rightarrow s\gamma$  setzen wir  $\delta_{LR}^{d23} = 0$  und variieren nur  $\delta_{RL}^{d23}$ . Das Ergebnis ist in Abb. 4.20 dargestellt und es können ähnlich wie im CMM-Modell Unterschiede zwischen  $S_{J/\psi\phi,0}$  und  $S_{\phi\phi,0}$  auftreten. Man beachte auch hier wieder, dass nicht über die hadronischen Unsicherheiten gescannt wurde. Im Falle von senkrechter und paralleler Polarisation ist für nichtverschwindendes  $\delta_{RR}^{d23}$  kein Unterschied zwischen den transversalen  $CP$ -Asymmetrien zu erkennen, während im RL-Fall kleine Differenzen zwischen  $S_{J/\psi\phi,\perp,||}$  und  $S_{\phi\phi,\perp,||}$  auftreten können. Man muss jedoch bedenken, dass, falls unterschiedliche Nebendiagonalelemente gleichzeitig von Null verschieden und komplex sind, keine allgemeingültige Aussage über die Korrelation von  $S_{J/\psi\phi}$  und  $S_{\phi\phi}$  mehr gemacht werden kann.

Zusammenfassend gilt für die mischungsinduzierte  $CP$ -Asymmetrie, dass im Falle von nur chiralitätserhaltenden, flavourverletzenden Masseneinsetzungen der Unterschied zwischen  $S_{J/\psi\phi}$  und  $S_{\phi\phi}$  nur aus den hadronischen Unsicherheiten stammen kann, während bei  $\delta_{RL}^{d23}$ -Einsetzungen größere Differenzen bei longitudinaler Polarisation und kleinere bei transversaler Polarisation auftreten. Insgesamt wird es jedoch schwer möglich sein, allein aus den Informationen von  $S_{J/\psi\phi}$  und  $S_{\phi\phi}$  zwischen einem generischen MSSM und dem CMM-Modell zu unterscheiden. Die für das CMM-Modell wesentliche Vorhersage ist, dass sich die parallele und

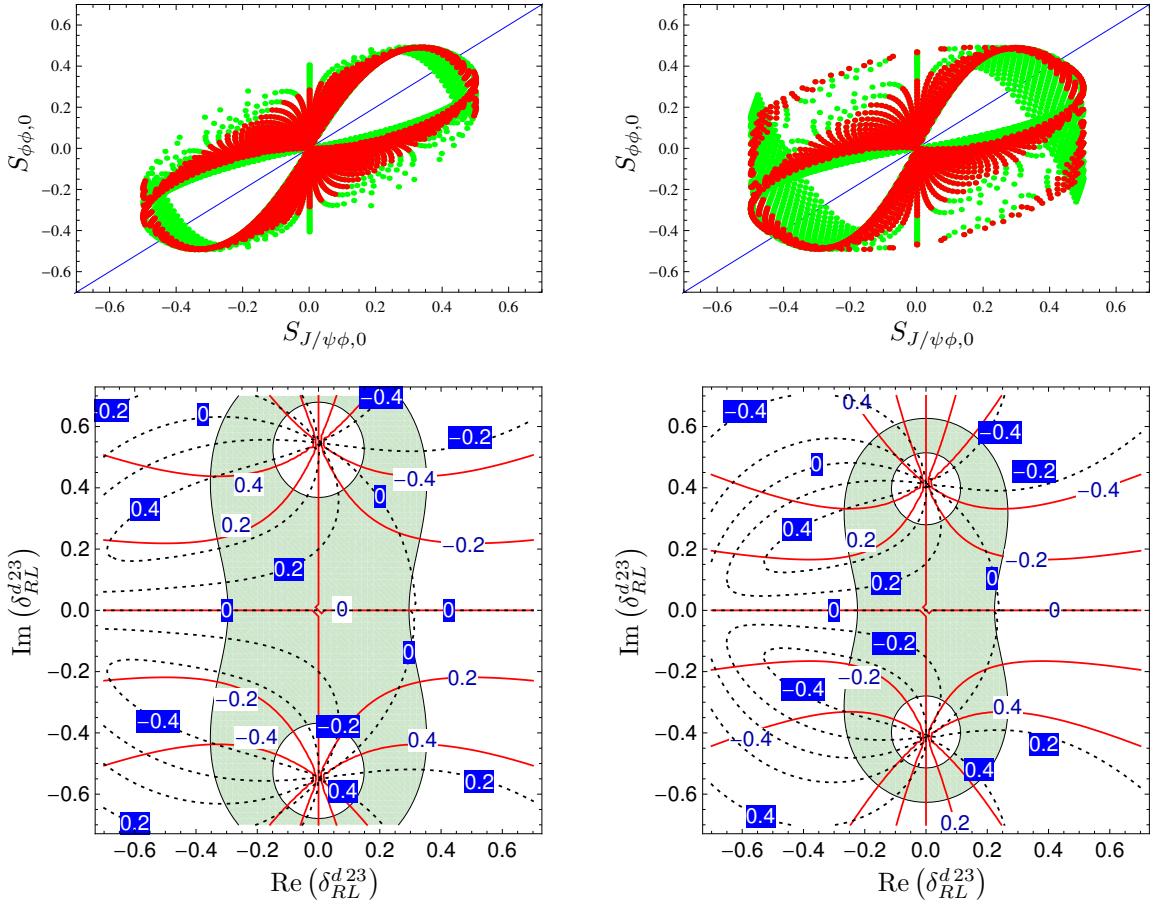


Abb. 4.20: Erste Zeile: Korrelation zwischen  $S_{J/\psi\phi,0}$  und  $S_{\phi\phi,0}$  mit  $M_{\tilde{q}} = 2000$  GeV und  $m_{\tilde{g}} = 400$  GeV (links) bzw.  $M_{\tilde{q}} = 2000$  GeV und  $m_{\tilde{g}} = 700$  GeV (rechts), wobei nur das komplexe  $\delta_{RL}^{d23}$  variiert wurde. Grüne (rote) Punkte sind ohne (mit) der Einschränkung aus  $\Delta M_s$ . Zweite Zeile:  $S_{J/\psi\phi,0}$  (rote durchgehende Linien mit blauen Zahlen auf weißem Hintergrund) und  $S_{\phi\phi,0}$  (schwarze gepunktete Linien mit weißen Zahlen auf blauem Hintergrund) als Funktion von  $\text{Re}(\delta_{RL}^{d23})$  und  $\text{Im}(\delta_{RL}^{d23})$ . Links:  $M_{\tilde{q}} = 2000$  GeV und  $m_{\tilde{g}} = 700$  GeV; rechts:  $M_{\tilde{q}} = 1500$  GeV und  $m_{\tilde{g}} = 500$  GeV. Der mit  $\Delta M_s$  verträgliche Bereich ist grün eingezeichnet.

transversale  $CP$ -Asymmetrien von  $B_s \rightarrow J/\psi\phi$  und  $B_s \rightarrow \phi\phi$  nicht unterscheiden, wohingegen bei longitudinaler Polarisation Abweichungen auftreten können.



# 5 Zusammenfassung

Motiviert durch die beobachteten Neutrinooszillationen wurden in dieser Arbeit Lepton-Flavourverletzung und ihre Konsequenzen in supersymmetrischen Großen Vereinheitlichten Theorien studiert. Die Mischungswinkel der PMNS-Matrix im Leptonsektor sind – verglichen mit den kleinen Mischungswinkeln der CKM-Matrix im Quarksektor – erstaunlich groß. Deshalb gibt es a priori keinen Grund, warum die Mischung im Sleptonsektor klein sein sollte. Ferner kann sich in GUT-Modellen die Neutrinomischung in den Quarksektor transferieren, was im Gegensatz zum vielfach studierten Szenario minimaler Flavourverletzung im Squarksektor steht. Nach einer allgemein gehaltenen Einleitung über Flavourphysik,  $CP$ -Verletzung und Große Vereinheitlichte Theorien wurde in Kapitel 2 das Standardmodell der Teilchenphysik mit Fokus auf den Yukawasektor und dessen supersymmetrische Erweiterung – das MSSM – beschrieben. Danach behandelte die Arbeit zwei Aspekte: Kapitel 3 untersuchte Lepton-Flavourverletzung im MSSM, wobei wir uns teilweise auf den GUT-motivierten Parameterraum mit großem  $\tan\beta$  beziehen, wohingegen in Kapitel 4 ein spezielles  $SO(10)$ -GUT-Modell, das CMM-Modell, analysiert wird.

Die endliche Massen- und Wellenfunktionsrenormierung durch Einteilchen-irreduzible Selbstenergien ist allgemein in Kapitel 3.1 behandelt worden. Dabei sind führende Zweischleifenbeiträge berücksichtigt worden, die insbesondere für leichte Fermionmassen relevant werden können. Im MSSM erfahren die chiralitätsflippenden Selbstenergien eine chirale Verstärkung, verursacht durch den Parameter  $\tan\beta$  oder den trilinearen  $A$ -Term  $\propto A_f^{ii}/(M_{\text{SUSY}}y_{f_i})$ , was die Schleifenunterdrückung teilweise wieder aufheben kann. Diese nichtentkoppelnden Korrekturen ändern den Zusammenhang zwischen Yukawakopplung und Masse, wobei alle  $\tan\beta$ -verstärkten Beiträge resummiert werden können, d.h. wir müssen nicht wie in einer effektiven Theorie  $v \ll M_{\text{SUSY}}$  annehmen. Folglich wird die Higgskopplung schon auf Baumgraphenniveau geändert. Die phänomenologischen Effekte der Selbstenergien wurden in den Kapiteln 3.2–3.6 studiert. Dabei wurden die in 3.1 angegebenen, allgemeinen Formeln der SUSY-Schleifenkorrekturen auf die jeweilige Problemstellung angepasst, um transparentere Ausdrücke zu erhalten.

In Kapitel 3.2 konzentrieren wir uns auf den Fall mit  $\tan\beta = 50$ , welcher in Modellen mit Bottom-Tau-Yukawakopplungsvereinigung motiviert werden kann. Darin berechnen wir erstmalig aus den Observablen  $a_e$  und  $m_e$  Einschränkungen an die Nebendiagonalelemente der Sleptonmassenmatrix, welche allgemein durch dimensionslose Größen  $\delta_{XY}^{\ell ij}$ , mit  $X, Y = L, R$  und  $i, j = 1, 2, 3$  parametrisiert werden können. Obwohl  $a_e$  und  $m_e$  flavourerhaltende Größen sind, können die Lepton-flavourverletzenden Nebendiagonalelemente eingeschränkt werden. Dies ist durch doppelte LFV möglich, wodurch die vor großen Korrekturen schützende chirale Symmetrie (welche für  $y_e \rightarrow 0$  exakt ist) durch einen Faktor  $y_\tau$  (multipliziert mit dem Verstärkungsfaktor  $\tan\beta$ ) gebrochen wird. Für die Elektronmasse verwenden wir ein Fine-Tuning-Argument, basierend auf dem 't Hooftschen Natürlichkeitsprinzip und fordern, dass die Korrekturen zu  $m_e$  kleiner als 100% sein sollen. Daraus leiten wir die – von der SUSY-Massenskala unabhängige – obere Schranke an das Produkt  $|\delta_{LL}^{\ell 13}\delta_{RR}^{\ell 13}| \lesssim 0.1$  ab, welche das bisher uneingeschränkte Nebendiagonalelement  $\delta_{RR}^{\ell 13}$  enthält. Erstmals ist die Anomalie des

magnetischen Moments des Elektrons  $a_e$  verwendet worden, um Neue-Physik-Effekte einzuschränken. Prinzipiell dient eine Messung von  $a_e$  der Bestimmung der Feinstrukturkonstanten  $\alpha$ . Da wir  $a_e$  auf Neue-Physik getestet haben, mussten wir die zweitbeste Messung von  $\alpha$  als Input für  $a_e$  verwendet. Wir fordern, dass die SUSY-Beiträge den  $3\sigma$ -Fehlerbereich von  $a_e$  nicht überschreiten, so dass wir für SUSY-Massen bis zu 500 GeV die gleiche Einschränkung wie aus  $m_e$  erhalten. Man beachte jedoch, dass die SUSY-Beiträge zu  $a_e$  entkoppeln. Auch wenn die Schranke nicht besonders streng erscheint, haben wir gesehen, dass sie gut genug ist, um klare Aussagen über die flavourerhaltenden Effekte in  $R_K$  (Abschnitt 3.6) zu machen.

Für die Abschnitte 3.3 und 3.4 verlassen wir den Parameterbereich mit großem  $\tan\beta$  und studieren die aus den trilinearen  $A$ -Termen stammenden, chiral-verstärkten Korrekturen. Dies ist insbesondere im Modell radiativer Fermionmassen realisiert, bei welchem die Baumgraph-Yukawakopplung der ersten beiden Generationen Null gesetzt wird. Es ist gut möglich, dass die chirale Flavoursymmetrie durch weiche SUSY-brechende Terme anstatt von trilinearen Yukawakopplungen gebrochen ist. Dieses Modell hat die angenehme Eigenschaft, dass es das SUSY-Flavour- und SUSY- $CP$ -Problem lösen kann. Die Massen werden dann radiativ über Schleifen mit den flavourdiagonalen  $A_f^{ij}$ -Termen generiert, welche durch die dimensionslosen  $\delta_{LR}^{f\ ii}$  parametrisiert werden. Alternativ können auch wieder durch das Natürlichkeitsprinzip obere Schranken an die  $A$ -Terme abgeleitet werden, indem man fordert, dass die Korrekturen kleiner als die gemessenen Massen selbst sein sollen. Dabei wurden von uns erstmals Zweischleifenkorrekturen mit einbezogen, welche ähnlich wie in Abschnitt 3.2 im Leptonsektor eine  $y_{\tau^-}$ - bzw. im Quarksektor eine  $y_{t^-}$  oder  $y_{b^-}$ -Verstärkung erfahren können. Dies erlaubt uns, das Produkt  $\delta_{LR}^{f\ 13} \delta_{LR}^{f\ 31}$  (und  $\delta_{LR}^{d\ 23} \delta_{LR}^{d\ 32}$ ) einzuschränken, was insbesondere im Hinblick auf das bisher uneingeschränkte  $\delta_{LR}^{u\ 23,13}$  relevant ist. Bei  $M_{\text{SUSY}} = 500$  GeV lauten die Einschränkungen bei den Leptonen  $|\delta_{LR}^{\ell\ 11}| \lesssim 0.0025$ ,  $|\delta_{LR}^{\ell\ 22}| \lesssim 0.5$  und  $|\delta_{LR}^{\ell\ 13} \delta_{LR}^{\ell\ 31}| \lesssim 0.021$ . Trotz dieser scheinbaren  $M_{\text{SUSY}}$ -Abhängigkeit, welche von der Tatsache herrührt, dass die dimensionslosen Größen  $\delta_{LR}^{\ell\ ij}$  nicht nur SUSY-Parameter, sondern auch einen VEV enthalten, entkoppeln die Effekte im Gegensatz zu FCNC-Einschränkungen nicht. Deshalb sind unsere Grenzen für genügend schwere SUSY- und Higgsmassen immer strenger als FCNC-Schranken.

Eine schon länger bekannte Möglichkeit, das Modell radiativer Massengenerierung zu testen, ist das anomale magnetische Moment des Myons, dessen Messung derzeit  $3.6\sigma$  von der SM-Vorhersage abweicht. Unter der Bedingung  $y_\mu = 0$  und der Forderung, dass die Diskrepanz  $a_\mu^{\text{exp}} - a_\mu^{\text{SM}}$  durch supersymmetrische Beiträge aufgehoben wird, folgen starke Einschränkungen an die Bino- und Smyonmasse. Wir aktualisierten die Analyse in Kapitel 3.4 und untersuchten zusätzlich ob der Einfluss der Sleptonmischung die Schranken abschwächen kann. Dabei beobachteten wir drei Effekte: da sich die Sleptonverletzung sowohl im generierenden Diagramm von  $m_\mu$  als auch  $a_\mu$  bemerkbar macht, ist die Auswirkung begrenzt. Die zusätzliche Mischung führt zu einem größeren Massensplitting und somit einem leichteren smyon-artigen Sleptonmasseneigenzustand, was prinzipiell die untere Schranke absenken könnte. Dieser Parameterbereich ist jedoch durch die experimentelle Obergrenze an  $\tau \rightarrow \mu\gamma$  ausgeschlossen. Unsere Prognose aus diesem Modell lautet somit, dass für Binomassen bis zu 1 TeV die leichtere Smyonmasse zwischen 600 GeV und 2200 GeV liegen muss. Da der LHC nur auf Sleptonmassen bis ca. 300 GeV sensitiv ist, würde eine Detektion eines Smyons das Modell radiativer Fermionmassen ausschließen bzw. innerhalb des MSSM eine nichtverschwindende Myon-Yukawakopplung im Superpotenzial implizieren. Die beobachtete Myonmasse kann in diesem Fall nicht allein aus dem weichen SUSY-brechenden Sektor stammen. Folglich können high- $p_T$ -Experimente am LHC Aufschluss darüber geben, ob  $y_\mu$  Null ist oder nicht.

Die endliche Renormierung der PMNS-Matrix mit Fokus auf das kleine Element  $U_{e3} =$



$\sin \theta_{13} e^{-i\delta}$  ist in Abschnitt 3.5 durchgeführt worden und später in Kapitel 3.6 auf den geladenen Higgsvertex angewandt worden. Dabei wurden zum ersten Mal auf diagrammatische Weise die  $\tan \beta$ -verstärkten Korrekturen zu allen Ordnungen aufsummiert. Diese sind sensitiv auf das  $\delta_{LL}^{\ell 13}$ -Element, wohingegen die Schwellenkorrekturen aus den  $A$ -Termen  $\delta_{LR}^{\ell 13}$  beinhalten. Wir stellten uns die Frage, ob die nichtentkoppelnden SUSY-Schleifenkorrekturen von einem verschwindenden  $U_{e3}$  bei der hohen Skala zu einem messbaren  $\theta_{13}$  bei der elektroschwachen Skala führen kann. Unser Ergebnis ist, dass mit den geplanten Sensitivitäten von  $\theta_{13} = 3^\circ$  die SUSY-Beiträge zu klein sind, um nachgewiesen werden zu können, da die dazu benötigten Nebendiagonalelemente  $\delta_{LL}^{\ell 13}$  und  $\delta_{LR}^{\ell 13}$  bei realistischen SUSY-Massen zu stark durch  $\tau \rightarrow e\gamma$  eingeschränkt sind. Mit anderen Worten: DOUBLE CHOOZ testet den Yukawa- und nicht den soft SUSY-brechenden Sektor. Wird ein nichtverschwindendes  $\theta_{13}$  gemessen, so gilt dies auch an der hohen Skala, und tribimaximale Mischung kann nicht exakt sein. Erst ab einer Sensitivität von  $\theta_{13} = 0.6^\circ$  und  $M_{\text{SUSY}} \geq 1500$  GeV werden die Schwellenkorrekturen zu  $U_{e3}$  relevant, da sie im Gegensatz zu  $\tau \rightarrow e\gamma$  nicht entkoppeln.

Die aktuell vom NA62-Experiment am CERN gemessene Observable  $R_K = \Gamma(K \rightarrow \mu\nu)/\Gamma(K \rightarrow e\nu)$ , die Leptonflavour-Universalität testet, ist in Kapitel 3.6 kritisch unter die Lupe genommen worden. Die Messung wurde unter anderen durch eine theoretische Arbeit von Masiero et al. motiviert, deren SUSY-Effekt zur Erniedrigung von  $R_K$  wir mit Hilfe der in Kapitel 3.2 gefundenen Schranke  $|\delta_{LL}^{\ell 13} \delta_{RR}^{\ell 13}| \lesssim 0.1$  widerlegen konnten. Nichtsdestoweniger können die  $\tan \beta$ -verstärkten und flavourverletzenden Selbstenergien, welche zu  $K \rightarrow e\nu_\tau$  führen,  $R_K$  beeinflussen. Die dadurch generierten flavourverletzenden geladenen Higgskopplungen wurde von uns erstmalig ohne Verwendung des Entkopplungslimes berechnet, d.h. im Gegensatz zu bisherigen Analysen verwenden wir keine Entwicklung in  $v^2/M_{\text{SUSY}}^2$ , welche gerade im Falle von großer Sleptonmischung fraglich ist. Wir haben überprüft, dass unsere analytischen Resultate im Grenzfall  $M_{\text{SUSY}} \gg v$  gegen die bereits bekannten Ergebnisse konvergieren. Ferner haben wir herausgestellt, dass flavourändernde Counterterme, welche die PMNS-Matrixelemente renormieren, auch in den geladenen Higgskopplungen auftreten, sogar wenn letztere in der schwachen Neutrino-Basis sind. Um herauszufinden, ob die Sensitivität des Experiments ausreicht, um LFV zu messen, haben wir den Effekt maximiert, wobei sich die Staumischung als essenziell herausgestellt hat. Wir folgerten, dass man in bestimmten Parameterbereichen die experimentelle Sensitivität erreichen bzw. umgekehrt Einschränkungen an die SUSY-Parameter  $M_{H^\pm}$ ,  $\tan \beta$ ,  $m_{\tilde{\tau}}$  und  $\delta_{RR}^{\ell 13}$  ableiten kann.

Während wir in den bisherigen Abschnitten die phänomenologischen Auswirkungen der Nebendiagonalelemente der Sleptonmassenmatrix analysiert haben, widmeten wir uns in Kapitel 3.7 deren Generierung durch die RGE. Da die Schranken an  $\delta_{XY}^{f ij}$  relativ streng sind, ist die Annahme, dass die SUSY-brechenden Terme die Flavourstruktur des SM respektieren, gut begründet. Deshalb wird oft angenommen, dass diese Terme bei der GUT-Skala universell sind. Dann generieren die RGE bei der elektroschwachen Skala nicht-verschwindende  $\delta_{XY}^{f ij}$ . Gegenüber den üblichen RGE im MSSM mit rechtshändigen Neutrinos haben wir als neuen Aspekt Dimension-5-Operatoren bei der GUT-Skala hinzugefügt. Diese dienen unter anderem dazu, die in GUT-Modellen verhergesagte Yukawavereinigung der Downquarks und geladenen Leptonen für die ersten beiden Generationen zu realisieren und den Protonzerfall zu unterdrücken. Über die Flavourstruktur solcher Operatoren gibt es bisher jedoch nur sehr wenige phänomenologische Analysen. Falls SUSY-Brechung oberhalb der GUT-Skala stattfindet, impliziert Flavouruniversalität ein natürliches Alignment zwischen den trilinearen Brechungstermen und den Dimension-4-Yukawakopplungen, so dass die höherdimensionalen Operatoren als potenzielle neue Quelle von Flavourverletzung übrig bleiben. Wir haben diesen Effekt durch einen neuen Mischungswinkel  $\theta$  parametrisiert. Durch Konfrontation mit der experimentellen

Obergrenze an  $\mu \rightarrow e\gamma$  konnten wir die durch den zusätzlichen Operator induzierte Mischung zwischen den ersten beiden Generationen stark einschränken, solange der  $A$ -Term nicht gerade verschwindet. Folglich müssen Dimension-4- und Dimension-5-Yukawakopplungen eine ähnliche Flavourstruktur aufweisen. Dieses Ergebnis deutet auf eine von den höherdimensionalen Operatoren respektierte Flavoursymmetrie hin. Man beachte, dass unser Resultat auch auf renormierbare Kopplungen mit höherdimensionalen Higgsdarstellungen, die unterschiedlich an Downquarks und geladene Leptonen koppeln, anwendbar ist. Darüberhinaus sind höherdimensionale Yukawaoperatoren im Allgemeinen mit allen Symmetrien vereinbar, tauchen infolgedessen auf natürliche Weise auf und implizieren signifikante Korrekturen zu den Massen der leichten Generationen.

Nach einer kurzen Motivation des CMM-Modells in Kapitel 4.1 wird der theoretische Rahmen des Modells in Kapitel 4.2 gelegt. Als Hintergrundwissen kann dazu der Anhang C über GUTs hilfreich sein. Wir beschreiben das Brechungsschema des CMM-Modells zum MSSM und gehen dabei insbesondere auf die daraus resultierende Flavourstruktur ein. Das CMM-Modell geht von der Annahme aus, dass an der Planck-Skala die Flavoursymmetrie exakt ist und sich deren Brechung durch einen einzigen nichtrenormierbaren Term bei der  $SO(10)$ -Skala bemerkbar macht. Das Brechungsschema impliziert, dass  $\tan\beta$  klein sein muss. Eine untere Schranke von  $\tan\beta \geq 2.5$  ist jedoch durch die Forderung der Perturbativität der Top-Yukawakopplung gegeben. Von entscheidender Bedeutung ist die  $SU(5)$ -Beziehung  $Y^D = (Y^E)^\top$ , welche die rechtshändigen Downquarks mit dem Leptondublett verknüpft. Daraus folgt, dass die Downquark-Singulets mit der PMNS-Matrix rotiert werden, wobei zusätzlich noch zwei Phasenmatrizen auftreten. Beschränken wir uns auf Flavourübergänge zwischen der zweiten und dritten Generation, wie es im  $B_s$ -System der Fall ist, dann bleibt nur eine physikalische freie Phase  $\xi$  übrig. Doch erst mit SUSY-Brechung wird die Rotation der rechtshändigen Downquarks physikalisch, was in Abschnitt 4.2.2 verdeutlicht wurde. Um eine Abgrenzung des CMM-Modells gegenüber dem CMSSM aufzuzeigen, wurden in Abschnitt 4.2.5 die Parameter des CMM-Modells für einen Beispielpunkt an der GUT-Skala angegeben. Im Gegensatz zum CMSSM ist die Universalität der Brechungsterme bei  $M_{\text{GUT}}$  nämlich schon aufgehoben. Hierzu verwenden wir ein bereits bestehendes `Mathematica`-Paket – das CMW-Programm – welches im Rahmen dieser Arbeit auf Fehler überprüft, verbessert und zur Berechnung neuer Observablen angewandt wurde. Exemplarisch wurden in Abschnitt 4.3.5 für den gleichen Beispielpunkt das Teilchenspektrum, die trilinearen  $A$ -Terme und Observablen der  $B_s - \bar{B}_s$ -Mischung an der elektroschwachen Skala angegeben.

In Kapitel 4.3 werden die für die Phänomenologie relevanten Eigenschaften des CMM-Modells beschrieben. Hierbei erweist sich die Top-Yukawakopplung als treibende Kraft der Flavourverletzung, da sie das Massensplitting  $\Delta_{\bar{d}}$  zwischen der dritten und den ersten beiden Generationen bestimmt. Dieses tritt durch die Rotation der rechtshändigen Downquarks zusammen mit einem Phasenfaktor  $e^{i\xi}$  im 23-Nebendiagonalelement der rechtshändigen Downquarks auf und ist somit proportional zu  $CP$ -verletzenden  $b_R \rightarrow s_R$ -Übergängen (siehe Abschnitt 4.3.1). Darüberhinaus ist bereits bekannt, dass sich aus der Masse des neutralen, leichtesten Higgsbosons eine starke Einschränkung an das CMM-Modell ergibt. Demzufolge darf  $\tan\beta$  nicht zu klein gewählt werden, um sowohl die LEP-Schranke an  $M_h$  als auch FCNC-Einschränkungen einzuhalten.

Nachdem die Grundlagen gelegt sind, beginnt in Kapitel 4.4 die phänomenologische Analyse des CMM-Modells. Wir konzentrieren uns dabei auf die aus der Phase  $\xi$  resultierenden  $CP$ -verletzenden Eigenschaften des CMM-Modells. Dazu wird angesichts der neuen Messungen im  $B_s$ -System und des geringeren hadronischen Fehlers die  $B_s - \bar{B}_s$ -Mischung in Kapitel 4.4.2 untersucht. Gleichzeitig werden bei unseren Analysen mit Hilfe des CMW-Programms stets

sowohl die Einschränkungen aus  $b \rightarrow s\gamma$  und  $\tau \rightarrow \mu\gamma$  als auch die Bedingung positiver Softmassen und Vakuumstabilität mit einbezogen. Wir haben die im CMM-Modell maximal mögliche (negative) Phase  $\phi_s$  bestimmt, welche je nach Parameterpunkt zwischen  $-25^\circ$  und  $-100^\circ$  liegt und somit in Übereinstimmung mit den Tendenzen der neuesten Messungen der Phase im  $B_s$ -System gebracht werden kann. Die CMM-Beiträge zu  $\Delta M_s$  können den SM-Beitrag bei weitem überschreiten, jedoch werden diese in der komplexen Ebene addiert, so dass es mittels der freien Phase  $\xi$  fast immer möglich ist, den experimentellen Bereich zu treffen. Bei den sehr extremen CMM-Punkten, d.h. mit Massensplittings bis zu 50%, muss  $\xi$  jedoch schon sehr feinabgestimmt werden, um sowohl die experimentellen Werte von  $\Delta M_s$  als auch  $\phi_s$  zu erreichen. Hierbei sei noch erwähnt, dass  $\xi$  in der  $B_s - \bar{B}_s$ -Mischung eine Zweideutigkeit aufweist, da sowohl  $\xi$  als auch  $\xi + \pi$  zum selben Ergebnis führen. Eine Möglichkeit, diese Ambiguität aufzulösen, die hier erstmals vorgestellt wurde, sind  $CP$ -Asymmetrien, welche wir für die Zerfälle  $B_d \rightarrow \phi K_S$  und  $B_s \rightarrow \phi\phi$  studiert haben. Dazu wurden in Abschnitt 4.4.3 die Gluino-, geladenen-Higgs- und Chargino-Beiträge zu den  $\Delta B = 1$ -Wilson-Koeffizienten im CMM-Modell berechnet. Insbesondere der gestrichene, chromomagnetische Dipoloperator erhält relevante CMM-spezifische Beiträge, und alle Wilson-Koeffizienten werden grob gesagt mit dem Phasenfaktor  $e^{-i\xi}$  multipliziert. In Kapitel 4.4.4 wenden wir uns der Berechnung der mischungsinduzierten und direkten  $CP$ -Asymmetrie  $S_{\phi K_S}$  und  $C_{\phi K_S}$  zu. Es handelt sich um einen  $b \rightarrow ss\bar{s}$ -Schleifenprozess, welcher im SM die gleichen  $CP$ -Asymmetrien wie der Baumgraphzerfall  $B_d \rightarrow J/\psi K_S$  ( $b \rightarrow c\bar{c}s$ ) aufweist:  $S_{J/\psi K_S} = \sin(2\beta)$  und  $C_{J/\psi K_S} = 0$ . Diese Observablen schränken in einer korrelierten Analyse mit  $b \rightarrow s\gamma$ ,  $\tau \rightarrow \mu\gamma$ ,  $\Delta M_s$ ,  $\phi_s$  und  $M_h$  den CMM-Parameterraum weiter ein. Jedoch lassen die hadronischen Unsicherheiten aus der QCDF im Zerfall  $B_d \rightarrow \phi K_S$  noch sehr viel Spielraum übrig. Über kleinere theoretische Unsicherheiten verfügt der Zerfall  $B_s \rightarrow \phi\phi$  – ebenfalls ein  $b \rightarrow ss\bar{s}$ -Schleifenprozess – dessen  $CP$ -Asymmetrien von LHCb gemessen werden können (Kapitel 4.4.5). Im SM stimmen diese mit denen von  $B_s \rightarrow J/\psi\phi$  ( $b \rightarrow c\bar{c}s$ ) überein, welche durch die  $B_s - \bar{B}_s$ -Mischung bestimmt sind. Grob gesagt, verhält sich der Zerfall  $B_s \rightarrow J/\psi\phi$  zu  $B_s \rightarrow \phi\phi$  genauso wie  $B_d \rightarrow J/\psi K_S$  zu  $B_d \rightarrow \phi K_S$  und unterscheidet sich jeweils durch das Spektatorquark (Strange- bzw. Downquark). Während die jeweils ersteren sogenannte goldene Kanäle sind und dazu prädestiniert sind, die  $B_d$ - bzw.  $B_s$ -Mischung zu studieren, sind letztere schleifeninduziert und sensitiv auf Neue Physik. Im CMM-Modell erhalten die drei mischungsinduzierten  $CP$ -Asymmetrien von  $B_s \rightarrow \phi\phi$  (für longitudinale, parallele und senkrechte Polarisierung) nun sowohl Beiträge aus der  $B_s - \bar{B}_s$ -Mischung, welche in Kapitel 4.4.2 untersucht worden ist, als auch aus der Zerfallsamplitude  $A_{\phi\phi}$ . Während diese zwei Beiträge im generischen MSSM voneinander unabhängig sein können, sind sie im CMM-Modell korreliert, da beide ihren Ursprung in der Phase  $\xi$  haben. Die drei direkten  $CP$ -Asymmetrien stammen allein aus den Zerfallsamplituden. Der für das CMM-Modell relevante chromomagnetische Dipoloperator taucht jedoch nur bei longitudinaler Polarisierung auf, was zu Unterschieden zwischen  $S_{\phi\phi,0}$  und  $S_{J/\psi\phi,0}$  führt. Diese können sich je nach Parameterpunkt beispielsweise um 40% unterscheiden, müssen es jedoch nicht, da auch hier die hadronischen Unsicherheiten wieder Spielraum übrig lassen, d.h. eine Messung  $S_{\phi\phi,0} \approx S_{J/\psi\phi,0}$  kann das CMM-Modell nicht zwangsläufig ausschließen. Bei transversaler Polarisierung sind hingegen keine CMM-Effekte ausfindig zu machen, so dass  $S_{\phi\phi,\parallel,\perp}$  und  $S_{J/\psi\phi,\parallel,\perp}$  übereinstimmen,  $C_{\phi\phi,\parallel,\perp}$  unbeobachtbar klein ist und  $C_{\phi\phi,0}$  je nach Wert von  $\xi$  auch bis zu 50% betragen kann. Ferner wurde ein kurzer Vergleich mit dem generischen MSSM gezogen. Insgesamt hat es sich jedoch als schwierig herausgestellt, allein aus den Daten von  $B_s \rightarrow \phi\phi$  zwischen dem generischen MSSM und dem CMM-Modell zu unterscheiden.

Die Konsequenzen der Neutrinomischung aufzuspüren, kann uns auf den richtigen Weg zu einer fundamentalen Theorie bringen. Sie ist derzeit das eindeutigste Signal für Physik jen-

seits des SMs, welche sich im supersymmetrischen SM durch Flavourverletzung im geladenen Leptonsektor bemerkbar machen kann. Mit dem LHC kann in Zukunft erforscht werden, ob Niederenergie-Supersymmetrie in der Natur realisiert ist oder nicht. Zusätzlich werden Experimente wie MEG (Messung von  $\mu \rightarrow e\gamma$ ), DOUBLE CHOOZ oder Daya Bay (jeweils Bestimmung von  $\theta_{13}$ ) die Sensitivität auf Neutrinoparameter verbessern. Lepton-Flavourverletzung liefert jedoch nicht nur Hinweise auf Physik bei der TeV-Skala, sondern auch Anhaltspunkte auf eine mögliche vereinheitlichte Theorie bei der hohen Skala. In GUTs sind Quarks und Leptonen miteinander verknüpft, so dass sich die Neutrinomischung in  $b \rightarrow s$ -Übergängen bemerkbar machen kann, wo derzeit Diskrepanzen mit dem SM vorliegen. Dies kann bei LHCb und an den  $B$ -Fabriken BaBar und Belle (II) weiter erforscht werden. Wir können gespannt sein, was uns die Experimente enthüllen werden.

---

# A Feynman-Regeln, $\ell_j \rightarrow \ell_i \gamma$ , Schleifenfunktionen und RGE

## A.1 Feynman-Regeln

Wir verwenden die Konventionen und Notationen aus Ref. [41] (bis auf Faktoren  $\sqrt{2}$  beim Vakuumenerwartungswert). Die Massen- und Rotationsmatrizen sind in Kapitel 2.2.2 definiert.

### Lepton-Slepton-Neutralino-Kopplung:

Feynman-Regel für einlaufendes Lepton  $\ell_I$ , auslaufendes Neutralino und Slepton  $\tilde{\ell}_i$ :

$$\begin{aligned}
 i\Gamma_{\ell_I}^{\tilde{\chi}_j^0 \tilde{\ell}_i} &= i \underbrace{\left( \frac{Z_L^I}{\sqrt{2}} \left( g_1 Z_N^{1j} + g_2 Z_N^{2j} \right) + Y_{\ell_I} Z_L^{(I+3)i} Z_N^{3j} \right)}_{= \Gamma_{\ell_{IL}}^{\tilde{\chi}_j^0 \tilde{\ell}_i}} P_L \\
 &+ i \underbrace{\left( -g_1 \sqrt{2} Z_L^{(I+3)i} Z_N^{1j*} + Y_{\ell_I} Z_L^I Z_N^{3j*} \right)}_{= \Gamma_{\ell_{IR}}^{\tilde{\chi}_j^0 \tilde{\ell}_i}} P_R.
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

### Lepton-Sneutrino-Chargino-Kopplung:

Feynman-Regel für einlaufendes Lepton  $\ell_I$ , auslaufendes Chargino und Sneutrino  $\tilde{\nu}_J$ :

$$i\Gamma_{\ell_I}^{\tilde{\nu}_J \tilde{\chi}_i^\pm} = -i \left( g_2 Z_+^{1i} P_L + Y_{\ell_I} Z_-^{2i*} P_R \right) Z_\nu^{IJ*}. \tag{A.2}$$

### Quark-Squark-Gluino-Kopplung

$$i\Gamma_{d_I}^{\tilde{g} \tilde{d}_i} = ig_s \sqrt{2} T^a \left( -Z_D^{Ii} P_L + Z_D^{(I+3)i} P_R \right), \tag{A.3}$$

$$i\Gamma_{u_I}^{\tilde{g} \tilde{u}_i} = ig_s \sqrt{2} T^a \left( -Z_U^{Ii*} P_L + Z_U^{(I+3)i*} P_R \right). \tag{A.4}$$

### Quark-Squark-Neutralino-Kopplung

$$\begin{aligned}
 i\Gamma_{d_I}^{\tilde{\chi}_j^0 \tilde{d}_i} &= i \left( \frac{Z_D^I}{\sqrt{2}} \left( -\frac{g_1}{3} Z_N^{1j} + g_2 Z_N^{2j} \right) + Y_{d_I} Z_D^{(I+3)i} Z_N^{3j} \right) P_L \\
 &+ i \left( -\frac{\sqrt{2} g_1}{3} Z_D^{(I+3)i} Z_N^{1j*} + Y_{d_I} Z_D^I Z_N^{3j*} \right) P_R,
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

$$\begin{aligned}
 i\Gamma_{u_I}^{\tilde{\chi}_j^0 \tilde{u}_i} &= i \left( \frac{Z_U^{Ii*}}{\sqrt{2}} \left( -\frac{g_1}{3} Z_N^{1j} - g_2 Z_N^{2j} \right) - Y_{u_I} Z_U^{(I+3)i*} Z_N^{4j} \right) P_L \\
 &+ i \left( \frac{2\sqrt{2} g_1}{3} Z_U^{(I+3)i*} Z_N^{1j*} - Y_{u_I} Z_U^{Ii*} Z_N^{4j*} \right) P_R.
 \end{aligned} \tag{A.6}$$

### Quark-Squark-Chargino-Kopplung

$$i\Gamma_{d_I}^{\tilde{\chi}_j^\pm \tilde{u}_i} = i \left( -g_2 Z_U^{Ji*} Z_+^{1j} + Y_{u_J} Z_U^{(J+3)i*} Z_+^{2j} \right) V_{JI} P_L + i \left( -Y_{d_I} Z_U^{Ji*} Z_-^{2j*} \right) V_{JI} P_R, \quad (\text{A.7})$$

$$i\Gamma_{u_I}^{\tilde{\chi}_j^\pm \tilde{d}_i} = i \left( -g_2 Z_D^{Ji} Z_-^{1j} - Y_{d_J} Z_D^{(J+3)i} Z_-^{2j} \right) V_{JI*} P_L + i \left( Y_{u_I} Z_D^{Ji} Z_+^{2j*} \right) V_{JI*} P_R. \quad (\text{A.8})$$

### Feynman-Regeln mit großem CMM-Modell-spezifischen Effekt

Die Vertices von Gl. (A.3) und (A.5), spezifiziert im CMM-Modell, lauten:

$$i\Gamma_{d_{RI}}^{\tilde{g} \tilde{d}_i} = i\sqrt{2} T_{\alpha\beta}^a (U_D)_{ji} P_R, \quad (\text{A.9})$$

$$i\Gamma_{d_I}^{\tilde{\chi}_j^0 \tilde{d}_i} = i \left( Y_j^D (U_D)_{ji} Z_N^{3k} P_L - \frac{\sqrt{2}e}{3\cos\theta_W} (U_D)_{ji} Z_N^{1k*} P_R \right). \quad (\text{A.10})$$

## A.2 Einschleifenergebnis für $\Gamma(\ell_j \rightarrow \ell_i \gamma)$

Im MSSM tragen Neutralino- und Charginodiagramme zum radiativen Zerfall  $\ell_j \rightarrow \ell_i \gamma$  bei. In Ref. [73] wurde die Zerfallsrate  $\Gamma(\ell_j \rightarrow \ell_i \gamma) = \frac{e^2}{16\pi} m_{\ell_j}^5 (|A_L|^2 + |A_R|^2)$  berechnet, wobei sich  $A_{L,R}$  aus  $A_{L,R} = A_{L,R}^{\tilde{\chi}^0} + A_{L,R}^{\tilde{\chi}^\pm}$  zusammensetzt:

**Neutralino-Beitrag:**

$$A_L^{\tilde{\chi}^0} = \frac{1}{32\pi^2} \sum_{A=1}^4 \sum_{X=1}^6 \frac{1}{m_{\tilde{\ell}_X}^2} \left[ N_{iAX}^L N_{jAX}^{L*} f_1^{\tilde{\chi}^0}(x_{AX}) + N_{iAX}^L N_{jAX}^{R*} \frac{m_{\tilde{\chi}_A^0}}{m_{\ell_j}} f_2^{\tilde{\chi}^0}(x_{AX}) \right], \quad (\text{A.11})$$

$$A_R^{\tilde{\chi}^0} = A_L^{\tilde{\chi}^0} |_{L \leftrightarrow R},$$

**Chargino-Beitrag:**

$$A_L^{\tilde{\chi}^\pm} = -\frac{1}{32\pi^2} \sum_{A=1}^2 \sum_{X=1}^3 \frac{1}{m_{\tilde{\nu}_X}^2} \left[ C_{iAX}^L C_{jAX}^{L*} f_1^{\tilde{\chi}^\pm}(x_{AX}) + C_{iAX}^L C_{jAX}^{R*} \frac{m_{\tilde{\chi}_A^\pm}}{m_{\ell_j}} f_2^{\tilde{\chi}^\pm}(x_{AX}) \right], \quad (\text{A.12})$$

$$A_R^{\tilde{\chi}^\pm} = A_L^{\tilde{\chi}^\pm} |_{L \leftrightarrow R},$$

wobei im Neutralino-Fall  $x_{AX} = m_{\tilde{\chi}_A^0}^2 / m_{\tilde{\ell}_X}^2$  und im Chargino-Fall  $x_{AX} = m_{\tilde{\chi}_A^\pm}^2 / m_{\tilde{\nu}_X}^2$  gilt. Die Funktionen sind in Anhang A.3.1 zu finden. Mit der Konvention von Ref. [41] und Anhang A.1 sind die Kopplungen gegeben durch:

$$N_{iAX}^L = \left( \Gamma_{\ell_{iR}}^{\tilde{\chi}_A^0 \tilde{\ell}_X} \right)^*, \quad N_{iAX}^R = \left( \Gamma_{\ell_{iL}}^{\tilde{\chi}_A^0 \tilde{\ell}_X} \right)^*, \quad C_{iAX}^L = \left( \Gamma_{\ell_{iR}}^{\tilde{\chi}_A^\pm \tilde{\nu}_X} \right)^*, \quad C_{iAX}^R = \left( \Gamma_{\ell_{iL}}^{\tilde{\chi}_A^\pm \tilde{\nu}_X} \right)^*.$$

Das Verzweigungsverhältnis berechnet sich dann gemäß  $BR(\ell_j \rightarrow \ell_i \gamma) = \Gamma(\ell_j \rightarrow \ell_i \gamma) \frac{\tau_{\ell_j}}{\hbar}$ .

## A.3 Schleifenfunktionen

Wir geben hier oft mehrere Bezeichnungen für eine Funktion bzw. diverse Relationen zwischen der verschiedenen in den Literatur verwendeten Funktionen an. Dies soll einen einfacheren Vergleich mit den Ergebnissen aus der Literatur ermöglichen.

$$\begin{aligned}
 B_0(x, y) &= \int \frac{dp}{i\pi^2} \frac{1}{p^2 - x} \frac{1}{p^2 - y} = \frac{1}{x - y} \int \frac{dp}{i\pi^2} \left( \frac{1}{p^2 - x} - \frac{1}{p^2 - y} \right) \\
 &= -\Delta - \frac{x}{x - y} \ln\left(\frac{x}{\mu^2}\right) - \frac{y}{y - x} \ln\left(\frac{y}{\mu^2}\right) = -\Delta + \ln \mu + \frac{y \ln y - x \ln x}{x - y} \\
 &= -\Delta - \ln\left(\frac{x}{\mu^2}\right) - \frac{y}{x - y} \ln\left(\frac{x}{y}\right) \quad \text{mit } \Delta = \frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \ln(4\pi),
 \end{aligned} \tag{A.13}$$

$$\begin{aligned}
 C_0(x, y, z) &= \int \frac{dp}{i\pi^2} \frac{1}{p^2 - x} \frac{1}{p^2 - y} \frac{1}{p^2 - z} = \frac{B_0(x, y) - B_0(x, z)}{y - z} \\
 &= -\frac{xy \ln\left(\frac{x}{y}\right) + xz \ln\left(\frac{z}{x}\right) + yz \ln\left(\frac{y}{z}\right)}{(x - y)(x - z)(y - z)} = -I(x, y, z) = -f_1(x, y, z),
 \end{aligned} \tag{A.14}$$

$$\begin{aligned}
 D_0(x, y, z, w) &= \frac{C_0(x, y, z) - C_0(x, y, w)}{z - w} \\
 &= -\left( \frac{w \ln\left(\frac{w}{z}\right)}{(w - x)(w - y)(w - z)} + \frac{y \ln\left(\frac{y}{x}\right)}{(y - w)(y - x)(y - z)} + \frac{z \ln\left(\frac{z}{x}\right)}{(z - w)(z - x)(z - y)} \right) \\
 &= -f_2(x, y, z, w),
 \end{aligned} \tag{A.15}$$

$$F_0(x, y, z, v, w) = \frac{D_0(x, y, z, v) - D_0(x, y, z, w)}{v - w}. \tag{A.16}$$

**Grenzwerte:**

$$f_1(x, y, y) = -\frac{x \left(1 - \ln\left(\frac{x}{y}\right)\right) - y}{(x - y)^2}, \quad f_1(x, x, x) = \frac{1}{2x}, \tag{A.17}$$

$$f_1(0, x, y) = \frac{\ln\left(\frac{x}{y}\right)}{x - y}, \quad f_1(0, x, x) = \frac{1}{x}, \tag{A.18}$$

$$f_2(x, x, z, z) = \frac{2(x - z) + (x + z) \ln\left(\frac{z}{x}\right)}{(x - z)^3}, \tag{A.19}$$

$$f_2(x, z, z, z) = \frac{x^2 - z^2 + 2xz \ln\left(\frac{z}{x}\right)}{2z(z - x)^3}, \tag{A.20}$$

$$f_2(x, x, x, x) = -\frac{1}{6x^2}, \quad F_0(x, x, x, x, x) = -\frac{1}{12x^3}. \tag{A.21}$$

### A.3.1 Anomales magnetisches Moment und $\ell_j \rightarrow \ell_i \gamma$

$$f_1^{\tilde{X}^0}(x) = \frac{1}{6(1 - x)^4} (1 - 6x + 3x^2 + 2x^3 - 6x^2 \ln(x)) = \frac{1}{12} F_1^N(x), \tag{A.22}$$

$$f_2^{\tilde{X}^0}(x) = \frac{1}{(1 - x)^3} (1 - x^2 + 2x \ln(x)) = \frac{1}{3} F_2^N(x), \tag{A.23}$$

$$f_1^{\tilde{X}^\pm}(x) = \frac{1}{6(1 - x)^4} (2 + 3x - 6x^2 + x^3 + 6x \ln(x)) = \frac{1}{12} F_1^C(x), \tag{A.24}$$

$$f_2^{\tilde{\chi}^\pm}(x) = \frac{1}{(1-x)^3} (-3 + 4x - x^2 - 2\ln(x)) = \frac{2}{3}F_2^C(x). \quad (\text{A.25})$$

Hierbei gilt  $f_1^{\tilde{\chi}^0}(1) = \frac{1}{12}$ ,  $f_2^{\tilde{\chi}^0}(1) = \frac{1}{3}$ ,  $f_1^{\tilde{\chi}^\pm}(1) = \frac{1}{12}$  und  $f_2^{\tilde{\chi}^\pm}(1) = \frac{2}{3}$ . Eine nützliche Relation ist

$$\frac{1}{2y^2}f_2^{\tilde{\chi}^0}(x/y) = -f_2(x, y, y, y) = D_0(x, y, y, y). \quad (\text{A.26})$$

Im Rahmen der radiativen Massengenerierung sind folgende Funktionen relevant:

$$I_{g-2}(x, y, z) = -\frac{x D_0(z, x, x, x) - y D_0(z, y, y, y)}{(x-y)}, \quad (\text{A.27})$$

$$I_{g-2}(x, y, z) = \frac{1}{z} \frac{1}{y-x} \left[ \frac{\frac{z}{x} \left( \frac{z^2}{x^2} - 1 - 2\frac{z}{x} \log \frac{z}{x} \right)}{2 \left( \frac{z}{x} - 1 \right)^3} - (x \rightarrow y) \right], \quad (\text{A.28})$$

$$I_{g-2}(x, x, z) = \frac{1}{x^2} \frac{1}{2 \left( \frac{z}{x} - 1 \right)^4} \left( 2\frac{z}{x} \left( \frac{z}{x} + 2 \right) \log \frac{z}{x} - 5\frac{z^2}{x^2} + 4\frac{z}{x} + 1 \right), \quad (\text{A.29})$$

$$I_{g-2}(0, x, z) = \frac{1}{xz} \frac{1}{2 \left( \frac{z}{x} - 1 \right)^3} \left( 2\frac{z^2}{x^2} \log \frac{z}{x} - 3\frac{z^2}{x^2} + 4\frac{z}{x} - 1 \right). \quad (\text{A.30})$$

Für  $\Gamma(\tau \rightarrow \mu\gamma)$  im CMM-Modell wurden in Ref. [14] folgende Funktionen verwendet, welche auf einfache Weise mit denen aus Ref. [73] verknüpft sind:

$$H_1(x) = \frac{1 - 6x + 3x^2 + 2x^3 - 6x^2 \ln x}{12(x-1)^4} = \frac{1}{2}f_1^{\tilde{\chi}^0}(x) = \frac{1}{2x}f_1^{\tilde{\chi}^\pm}(1/x), \quad (\text{A.31})$$

$$H_2(x) = \frac{-1 + 4x - 3x^2 + 2x^2 \ln x}{2(x-1)^3} = \frac{1}{2x}f_2^{\tilde{\chi}^\pm}(1/x), \quad (\text{A.32})$$

$$H_3(x) = \frac{-2 - 3x + 6x^2 - x^3 - 6x \ln x}{12(x-1)^4} = -\frac{1}{2}f_1^{\tilde{\chi}^\pm}(x) = -\frac{1}{2x}f_1^{\tilde{\chi}^0}(1/x), \quad (\text{A.33})$$

$$H_4(x) = \frac{1 - x^2 + 2x \ln x}{2(1-x)^3} = \frac{1}{2}f_2^{\tilde{\chi}^0}(x) = \frac{1}{2x}f_2^{\tilde{\chi}^0}(1/x). \quad (\text{A.34})$$

### A.3.2 Für $\Delta B = 2$ - und $\Delta B = 1$ -Übergänge

Bei unseren Berechnungen verwenden wir folgende Funktionen:

$$S_0(x_t) = \frac{4x_t - 11x_t^2 + x_t^3}{4(1-x_t^2)^2} - \frac{3x_t^2 \log x_t}{2(1-x_t)^3}, \quad (\text{A.35})$$

$$S^{(\tilde{g})}(x, y) = \frac{11}{18} [G(x, x) + G(y, y) - 2G(x, y)] - \frac{9}{2} [F(x, x) + F(y, y) - 2F(x, y)], \quad (\text{A.36})$$

$$F(x, y) = \frac{1}{y-x} \left[ \frac{x \ln x}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} - (x \leftrightarrow y) \right], \quad (\text{A.37})$$

$$F(x, x) = \frac{-2x + (x+1) \log x + 2}{(x-1)^3}, \quad (\text{A.38})$$

$$G(x, y) = \frac{1}{x-y} \left[ \frac{x^2 \ln x}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} - (x \leftrightarrow y) \right], \quad (\text{A.39})$$

$$G(x, x) = \frac{x^2 - 2x \log x - 1}{(x-1)^3}, \quad (\text{A.40})$$



$$F_1(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + 3x + 2 + 6x \log x}{12(x-1)^4}, \quad (\text{A.41})$$

$$F_2(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 - 6x + 1 - 6x^2 \log x}{12(x-1)^4}, \quad (\text{A.42})$$

$$F_3(x) = \frac{x^2 - 4x + 3 + 2 \log x}{2(x-1)^3}, \quad (\text{A.43})$$

$$F_4(x) = \frac{x^2 - 1 - 2x \log x}{2(x-1)^3}, \quad (\text{A.44})$$

$$F_5(x) = \frac{7x^3 - 36x^2 + 45x - 16 + (18x - 12) \log x}{36(x-1)^4} = x^{-1}C_2(x^{-1}), \quad (\text{A.45})$$

$$F_6(x) = \frac{-11x^3 + 18x^2 - 9x + 2 + 6x^3 \log x}{36(x-1)^4} = x^{-1}C_1(x^{-1}). \quad (\text{A.46})$$

Es gibt ferner nützliche Relationen mit den im Anhang von Ref. [197] verwendeten Funktionen:

$$B_1(x, y) = -\frac{1}{4}G(x, y), \quad (\text{A.47})$$

$$B_2(x, y) = F(x, y), \quad (\text{A.48})$$

$$C_1(x) = \frac{2x^3 - 9x^2 + 18x - 11 - 6 \log x}{36(x-1)^4} = x^{-1}F_6(x^{-1}), \quad (\text{A.49})$$

$$C_2(x) = \frac{-16x^3 + 45x^2 - 36x + 7 + 6x^2(2x-3) \log x}{36(x-1)^4} = x^{-1}F_5(x^{-1}), \quad (\text{A.50})$$

$$D_1(x) = -2F_1(x), \quad (\text{A.51})$$

$$D_2(x) = -2F_4(x), \quad (\text{A.52})$$

$$D_3(x) = 2F_2(x), \quad (\text{A.53})$$

$$D_4(x) = \frac{-3x^2 + 4x - 1 + 2x^2 \log x}{(x-1)^3} = -\frac{2}{x}F_3(x). \quad (\text{A.54})$$

Mit der Konvention von Ref. [198] gilt:

$$A(x) = C_2(x) - C_1(x), \quad B(x) = 2C_1(x). \quad (\text{A.55})$$

Für die Wilson-Koeffizienten in Masseneinsatznäherung (siehe Anhang E.4) werden folgende Funktionen benötigt:

$$f_6(x) = \frac{6(1+3x) \log x + x^3 - 9x^2 - 9x + 17}{6(x-1)^5}, \quad (\text{A.56})$$

$$\tilde{f}_6(x) = \frac{6x(1+x) \log x - x^3 - 9x^2 + 9x + 1}{3(x-1)^5}, \quad (\text{A.57})$$

$$P_1(x) = \frac{1 - 6x + 18x^2 - 10x^3 - 3x^4 + 12x^3 \log x}{18(x-1)^5}, \quad (\text{A.58})$$

$$P_2(x) = \frac{7 - 18x + 9x^2 + 2x^3 + 3 \log x - 9x^2 \log x}{9(x-1)^5}, \quad (\text{A.59})$$

$$M_1(x) = \frac{1 + 4x - 5x^2 + 4x \log x + 2x^2 \log x}{2(1-x)^4}, \quad (\text{A.60})$$

$$M_2(x) = \frac{-5 + 4x + x^2 - 2 \log x - 4x \log x}{2(1-x)^4}, \quad (\text{A.61})$$

$$M_3(x) = \frac{-1 + 9x + 9x^2 - 17x^3 + 18x^2 \log x + 6x^3 \log x}{12(x-1)^5}, \quad (\text{A.62})$$

$$M_4(x) = \frac{-1 - 9x + 9x^2 + x^3 - 6x \log x - 6x^2 \log x}{6(x-1)^5}, \quad (\text{A.63})$$

$$B_1(x) = -\frac{1}{4}M_1(x), \quad (\text{A.64})$$

$$M_2(x) = -xM_2(x). \quad (\text{A.65})$$

## A.4 Renormierungsgruppengleichungen im MSSM mit $\nu_R$

Im Folgenden bezeichnet  $\mu$  die Renormierungsskala (und nicht den  $\mu$ -Parameter im Superpotential) und  $t = \ln(\mu)$ . Für  $g_1$  verwenden wir die GUT-Normierung ( $g_1^{\text{GUT}} = \sqrt{\frac{5}{3}}g_1^{\text{SM}}$ ).

Auf Einschleifenniveau entwickeln sich die Eichkopplungen im MSSM gemäß:

$$\frac{d}{dt}\alpha_1(t) = \frac{1}{4\pi} \frac{66}{5}\alpha_1^2(t), \quad (\text{A.66a})$$

$$\frac{d}{dt}\alpha_2(t) = \frac{1}{4\pi} 2\alpha_2^2(t), \quad (\text{A.66b})$$

$$\frac{d}{dt}\alpha_3(t) = -\frac{1}{4\pi} 6\alpha_2^2(t). \quad (\text{A.66c})$$

Für das Laufen der Gauginomassen verwenden wir die Tatsache, dass  $g_i^2(t)/M_i(t)$  auf Einschleifenniveau unabhängig von der Skala  $t$  ist. Definieren wir  $k = g_3^2(t_{\text{GUT}})/m_{1/2}$  und nehmen universelle Gauginomassen  $m_{1/2}$  bei der GUT-Skala an, kann  $M_i(t) = g_i^2(t)/k$  in den RGE benutzt werden.

Das Laufen der Yukawa-Kopplungen und der Majoranamassenmatrix zwischen  $M_{\text{GUT}}$  und  $M_N$  wird auf Einschleifenniveau durch folgende Differenzialgleichungen bestimmt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}Y^U &= \frac{1}{16\pi^2}Y^U \left[ \left( \text{tr} \left( 3Y^U Y^{U\dagger} + Y^\nu Y^{\nu\dagger} \right) - \frac{16}{3}g_3^2 - 3g_2^2 - \frac{13}{15}g_1^2 \right) \mathbf{1} + 3Y^{U\dagger}Y^U + Y^{D\dagger}Y^D \right], \\ \frac{d}{dt}Y^D &= \frac{1}{16\pi^2}Y^D \left[ \left( \text{tr} \left( 3Y^D Y^{D\dagger} + Y^E Y^{E\dagger} \right) - \frac{16}{3}g_3^2 - 3g_2^2 - \frac{7}{15}g_1^2 \right) \mathbf{1} + 3Y^{D\dagger}Y^D + Y^{U\dagger}Y^U \right], \\ \frac{d}{dt}Y^\nu &= \frac{1}{16\pi^2}Y^\nu \left[ \left( \text{tr} \left( 3Y^U Y^{U\dagger} + Y^\nu Y^{\nu\dagger} \right) - 3g_2^2 - \frac{3}{5}g_1^2 \right) \mathbf{1} + 3Y^{\nu\dagger}Y^\nu + Y^{E\dagger}Y^E \right], \\ \frac{d}{dt}Y^E &= \frac{1}{16\pi^2}Y^E \left[ \left( \text{tr} \left( 3Y^D Y^{D\dagger} + Y^E Y^{E\dagger} \right) - 3g_2^2 - \frac{9}{5}g_1^2 \right) \mathbf{1} + 3Y^{E\dagger}Y^E + Y^{\nu\dagger}Y^\nu \right], \\ \frac{d}{dt}M_N &= \frac{1}{8\pi} \left[ M_N \left( Y^\nu Y^{\nu\dagger} \right)^\top + Y^\nu Y^{\nu\dagger} M_N \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.67})$$

Das Laufen der  $A$ -Terme ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}A_u &= \frac{1}{16\pi^2} \left[ A_u \left( \text{tr} \left( 3Y^U Y^{U\dagger} + Y^\nu Y^{\nu\dagger} \right) - \frac{16}{3}g_3^2 - 3g_2^2 - \frac{13}{15}g_1^2 \right) \right. \\ &\quad + Y^U \left( \text{tr} \left( 6Y^{U\dagger} A_u + 2Y^{\nu\dagger} A_\nu \right) + \frac{32}{3}g_3^2 M_3 + 6g_2^2 M_2 + \frac{26}{15}g_1^2 M_1 \right) \\ &\quad \left. + 4Y^U Y^{U\dagger} A_u + 5A_u Y^{U\dagger} Y^U + 2Y^U Y^{D\dagger} A_d + A_u Y^{D\dagger} Y^D \right], \end{aligned} \quad (\text{A.68a})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}A_d &= \frac{1}{16\pi^2} \left[ A_d \left( \text{tr}(3Y^D Y^{D\dagger} + Y^E Y^{E\dagger}) - \frac{16}{3}g_3^2 - 3g_2^2 - \frac{7}{15}g_1^2 \right) \right. \\ &\quad + Y^D \left( \text{tr}(6Y^{D\dagger} A_d + 2Y^{E\dagger} A_\ell) + \frac{32}{3}g_3^2 M_3 + 6g_2^2 M_2 + \frac{14}{15}g_1^2 M_1 \right) \\ &\quad \left. + 4Y^D Y^{D\dagger} A_d + 5A_d Y^{D\dagger} Y^D + 2Y^D Y^{U\dagger} A_u + A_d Y^{U\dagger} Y^U \right], \end{aligned} \quad (\text{A.68b})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}A_\nu &= \frac{1}{16\pi^2} \left[ A_\nu \left( \text{tr}(3Y^U Y^{U\dagger} + Y^\nu Y^{\nu\dagger}) - 3g_2^2 - \frac{3}{5}g_1^2 \right) \right. \\ &\quad + Y^\nu \left( \text{tr}(6Y^{U\dagger} A_u + 2Y^{\nu\dagger} A_\nu) + 6g_2^2 M_2 + \frac{6}{5}g_1^2 M_1 \right) \\ &\quad \left. + 4Y^\nu Y^{\nu\dagger} A_\nu + 5Y^\nu Y^{\nu\dagger} Y^\nu + 2Y^\nu Y^{E\dagger} A_\ell + A_\nu Y^{E\dagger} Y^E \right], \end{aligned} \quad (\text{A.68c})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}A_\ell &= \frac{1}{16\pi^2} \left[ A_\ell \left( \text{tr}(3Y^D Y^{D\dagger} + Y^E Y^{E\dagger}) - 3g_2^2 - \frac{9}{5}g_1^2 \right) \right. \\ &\quad + Y^E \left( \text{tr}(6Y^{D\dagger} A_d + 2Y^{E\dagger} A_\ell) + 6g_2^2 M_2 + \frac{18}{5}g_1^2 M_1 \right) \\ &\quad \left. + 4Y^E Y^{E\dagger} A_\ell + 5A_\ell Y^{E\dagger} Y^E + 2Y^E Y^{\nu\dagger} A_\nu + A_\ell Y^{\nu\dagger} Y^\nu \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.68d})$$

Die RGE für Sfermion- und Higgsmassen lauten:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}m_{\tilde{Q}}^2 &= \frac{1}{16\pi^2} \left[ m_{\tilde{Q}}^2 Y^{U\dagger} Y^U + Y^{U\dagger} Y^U m_{\tilde{Q}}^2 + m_{\tilde{Q}}^2 Y^{D\dagger} Y^D + Y^{D\dagger} Y^D m_{\tilde{Q}}^2 \right. \\ &\quad + 2 \left( Y^{D\dagger} m_{\tilde{D}}^2 Y^D + m_{\tilde{H}_d}^2 Y^{D\dagger} Y^D + A_d^\dagger A_d \right) + 2 \left( Y^{U\dagger} m_{\tilde{U}}^2 Y^U + m_{\tilde{H}_u}^2 Y^{U\dagger} Y^U + A_u^\dagger A_u \right) \\ &\quad \left. + \left( -\frac{2}{15}g_1^2 |M_1|^2 - 6g_2^2 |M_2|^2 - \frac{32}{3}g_3^2 |M_3|^2 + \frac{1}{5}g_1^2 S \right) \mathbf{1} \right], \end{aligned} \quad (\text{A.69a})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}m_{\tilde{U}}^2 &= \frac{1}{16\pi^2} \left[ 2 \left( m_{\tilde{U}}^2 Y^U Y^{U\dagger} + Y^U Y^{U\dagger} m_{\tilde{U}}^2 \right) + 4 \left( Y^U m_{\tilde{Q}}^2 Y^{U\dagger} + m_{\tilde{H}_u}^2 Y^U Y^{U\dagger} + A_u A_u^\dagger \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( -\frac{32}{15}g_1^2 |M_1|^2 - \frac{32}{3}g_3^2 |M_3|^2 - \frac{4}{5}g_1^2 S \right) \mathbf{1} \right], \end{aligned} \quad (\text{A.69b})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}m_{\tilde{D}}^2 &= \frac{1}{16\pi^2} \left[ 2 \left( m_{\tilde{D}}^2 Y^D Y^{D\dagger} + Y^D Y^{D\dagger} m_{\tilde{D}}^2 \right) + 4 \left( Y^D m_{\tilde{Q}}^2 Y^{D\dagger} + m_{\tilde{H}_d}^2 Y^D Y^{D\dagger} + A_d A_d^\dagger \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( -\frac{8}{15}g_1^2 |M_1|^2 - \frac{32}{3}g_3^2 |M_3|^2 + \frac{2}{5}g_1^2 S \right) \mathbf{1} \right], \end{aligned} \quad (\text{A.69c})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}m_{\tilde{L}}^2 &= \frac{1}{16\pi^2} \left[ m_{\tilde{L}}^2 Y^{E\dagger} Y^E + Y^{E\dagger} Y^E m_{\tilde{L}}^2 + m_{\tilde{L}}^2 Y^{\nu\dagger} Y^\nu + Y^{\nu\dagger} Y^\nu m_{\tilde{L}}^2 \right. \\ &\quad + 2 \left( Y^{E\dagger} m_{\tilde{E}}^2 Y^E + m_{\tilde{H}_d}^2 Y^{E\dagger} Y^E + A_\ell^\dagger A_\ell \right) + 2 \left( Y^{\nu\dagger} m_{\tilde{\nu}}^2 Y^\nu + m_{\tilde{H}_u}^2 Y^{\nu\dagger} Y^\nu + A_\nu^\dagger A_\nu \right) \\ &\quad \left. - \left( \frac{6}{5}g_1^2 |M_1|^2 + 6g_2^2 |M_2|^2 - \frac{3}{5}g_1^2 S \right) \mathbf{1} \right], \end{aligned} \quad (\text{A.69d})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}m_{\tilde{E}}^2 &= \frac{1}{16\pi^2} \left[ 2 \left( m_{\tilde{E}}^2 Y^E Y^{E\dagger} + Y^E Y^{E\dagger} m_{\tilde{E}}^2 \right) + 4 \left( Y^E m_{\tilde{L}}^2 Y^{E\dagger} + m_{\tilde{H}_d}^2 Y^E Y^{E\dagger} + A_\ell A_\ell^\dagger \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( -\frac{24}{5}g_1^2 |M_1|^2 + \frac{6}{5}g_1^2 S \right) \mathbf{1} \right], \end{aligned} \quad (\text{A.69e})$$

$$\frac{d}{dt}m_{\tilde{\nu}}^2 = \frac{1}{16\pi^2} \left[ 2 \left( m_{\tilde{\nu}}^2 Y^\nu Y^{\nu\dagger} + Y^\nu Y^{\nu\dagger} m_{\tilde{\nu}}^2 \right) + 4 \left( Y^\nu m_{\tilde{L}}^2 Y^{\nu\dagger} + m_{\tilde{H}_u}^2 Y^\nu Y^{\nu\dagger} + A_\nu A_\nu^\dagger \right) \right], \quad (\text{A.69f})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} m_{H_u}^2 = \frac{1}{16\pi^2} & \left[ 6 \operatorname{tr} \left( \mathbf{Y}^{U\dagger} (m_{\tilde{Q}}^2 + m_{\tilde{U}}^2 + m_{H_u}^2 \mathbf{1}) \mathbf{Y}^U + A_u^\dagger A_u \right) \right. \\ & \left. + 2 \operatorname{tr} \left( \mathbf{Y}^{\nu\dagger} (m_{\tilde{L}}^2 + m_{\tilde{\nu}}^2 + m_{H_u}^2 \mathbf{1}) \mathbf{Y}^\nu + A_\nu^\dagger A_\nu \right) - \frac{6}{5} g_1^2 |M_1|^2 - 6g_2^2 |M_2|^2 + \frac{3}{5} g_1^2 S \right], \end{aligned} \quad (\text{A.69g})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} m_{H_d}^2 = \frac{1}{16\pi^2} & \left[ 6 \operatorname{tr} \left( \mathbf{Y}^{D\dagger} (m_{\tilde{Q}}^2 + m_{\tilde{D}}^2 + m_{H_d}^2 \mathbf{1}) \mathbf{Y}^D + A_d^\dagger A_d \right) \right. \\ & \left. + 2 \operatorname{tr} \left( \mathbf{Y}^{E\dagger} (m_{\tilde{L}}^2 + m_{\tilde{E}}^2 + m_{H_d}^2 \mathbf{1}) \mathbf{Y}^E + A_\ell^\dagger A_\ell \right) - \frac{6}{5} g_1^2 |M_1|^2 - 6g_2^2 |M_2|^2 - \frac{3}{5} g_1^2 S \right], \end{aligned} \quad (\text{A.69h})$$

mit

$$S = \operatorname{tr} \left( m_{\tilde{Q}}^2 + m_{\tilde{D}}^2 - 2m_{\tilde{U}}^2 - m_{\tilde{L}}^2 + m_{\tilde{E}}^2 \right) - m_{H_d}^2 + m_{H_u}^2. \quad (\text{A.69i})$$

Die Neutrino-Yukawakopplung  $\mathbf{Y}^\nu$  entkoppelt von den RGE unterhalb der Majoranamassenskala und verschwindet deshalb aus den Gleichungen. Einige Feinheiten sind noch zu beachten, wenn wir die rechtshändigen Neutrinos nacheinander ausintegrieren. Sie sind in Ref. [65, 122, 199] beschrieben.

## B Inputwerte

Für unsere Analysen verwenden wir folgende experimentelle Daten (nicht aufgelistete Werte sind dem Text zu entnehmen):

$\alpha_e(M_Z) = 1/128.129$ [85]	$\sin^2 \theta_W = 0.2312$ [19] (in Kap. 3)
$\alpha_s(M_Z) = 0.1184$ [200]	$\sin^2 \theta_W = 0.23138$ [19, 201] (CMW)
$G_F = 1.16637 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$ [19]	$\overline{m}_b(\overline{m}_b) = 4.163 \text{ GeV}$ [202] (CMW)
$M_W = 80.399 \text{ GeV}$ [19]	$m_b^{\text{pole}} = 4.911 \text{ GeV}$ [202] (CMW)
$M_Z = 91.1876 \text{ GeV}$ [19]	$m_t^{\text{pole}} = 173.3 \text{ GeV}$ [203]
$m_\tau = 1.777 \text{ GeV}$ [19]	$\tau_\tau = 209.6 \cdot 10^{-15} \text{ s}$ [19]
$m_\mu = 0.105 \text{ GeV}$ [19]	$\tau_\mu = 2.197 \cdot 10^{-6} \text{ s}$ [19]
$m_e = 0.00051 \text{ GeV}$ [19]	$m_\phi = 1.02 \text{ GeV}$ [19]
$m_{B^0} = 5.279 \text{ GeV}$ [19]	$\tau_{B^0} = 1.525 \text{ ps}$ [19]
$m_{B_s} = 5.366 \text{ GeV}$ [19]	$\tau_{B_s} = 1.46 \text{ ps}$ [19]

Für die CKM-Matrix verwenden wir die aktuellen Wolfensteinparameter der CKMfitter-Gruppe [204]:

$$\lambda = 0.22543, \quad A = 0.812, \quad \overline{\rho} = 0.144, \quad \overline{\eta} = 0.342.$$

Im CMM-Modell ist die PMNS-Matrix mit der tribimaximalen Mischung implementiert, d.h.  $\theta_{12} = 30^\circ$ ,  $\theta_{23} = 45^\circ$ , und  $\theta_{13} = 0^\circ$ . Ferner wählen wir als Planck-Skala  $M_{\text{Pl}} = 10^{19} \text{ GeV}$ , als SO(10)-Skala  $M_{\text{SO}(10)} = 10^{17} \text{ GeV}$ , und die GUT-Skala wird durch die Skala bestimmt, an der sich die Eichkopplungen treffen, und liegt in etwa bei  $M_{\text{GUT}} = 2 \cdot 10^{16} \text{ GeV}$ .

Speziell für die QCD-Faktorisierung (siehe Anhang F) werden folgende Inputparameter verwendet (aus Ref. [176, 186]):

$f_B$ [MeV]	$f_{B_s}$ [MeV]	$f_\phi$ [MeV]	$f_\phi^\perp$ [MeV]
$200 \pm 30$	$228 \pm 17$ [158]	$221 \pm 3$	$175 \pm 25$
$\lambda_B$ [MeV]	$\lambda_{B_s}$ [MeV]	$\alpha_1^\phi, \alpha_{1,\perp}^\phi, \alpha_{1,2}^\parallel$	$\alpha_2^\phi, \alpha_{2,\perp}^\phi$
$350 \pm 150$ [176]	$200_{-0}^{+250}$ [186]	0	$0.0 \pm 0.3$
$A_0^{B_s \rightarrow \phi}$	$F_-^{B_s \rightarrow \phi}$	$F_+^{B_s \rightarrow \phi}$	
$0.38_{-0.02}^{+0.10}$	$0.65_{-0.00}^{+0.14}$	$0.00 \pm 0.06$	

Die aktuellen oberen experimentellen Schranken an die radiativen Zerfälle  $\ell_j \rightarrow \ell_i \gamma$  sind in Tab. B.1 verzeichnet.

Experimentelle obere Schranken	
$BR(\mu \rightarrow e\gamma)$	$1.2 \cdot 10^{-11}$
$BR(\tau \rightarrow e\gamma)$	$1.1 \cdot 10^{-7}$
$BR(\tau \rightarrow \mu\gamma)$	$4.4 \cdot 10^{-8}$

Tabelle B.1: Aktuelle obere Schranken an  $BR(\ell_j \rightarrow \ell_i\gamma)$ ,  $j > i$  [19, 96, 107].

---

# C Einführung in GUTs

Das Ziel von sogenannten Großen Vereinheitlichten Theorien ist es, die SM-Eichgruppe in eine einfache Gruppe  $G_{\text{GUT}}$  höheren oder gleichen Ranges einzubetten und dadurch eine einheitliche Beschreibung für die Wechselwirkungen des SMs zu entwickeln. An die Symmetriegruppe  $G_{\text{GUT}}$  werden folgende Bedingungen gestellt:

- Wegen  $G_{\text{GUT}} \supset G_{\text{SM}}$  muss die Vereinigungsgruppe mindestens Rang vier haben.
- Die Theorie muss anomaliefrei sein, um die Renormierbarkeit sicherzustellen.
- Die Darstellungen von  $G_{\text{GUT}}$  müssen die SM-Felder enthalten.
- Die Gruppe sollte komplexe Darstellungen besitzen, da die Paritätsverletzung nur realisiert werden kann, wenn konjugierte Darstellungen nicht äquivalent sind.

Nach Wahl der Eichgruppe  $G_{\text{GUT}}$  und der Darstellungen der Fermionen muss das Brechungsschema zum SM konkretisiert werden, was in mehreren Schritten geschehen kann. Benötigt werden geeignete Higgs-Darstellungen, die jeweils eine Singulett-Komponente bzgl. der Symmetrie haben, zu der die höhere Symmetriegruppe gebrochen werden soll. Weiter muss das Higgs-Potenzial so konstruiert werden, dass eben genau diese Singulett-Komponenten einen VEV erhalten. Dabei ist zu beachten, dass zusätzliche Teilchen eine große Masse bekommen, während die Massen der SM-Teilchen erst bei der letzten Brechung  $SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{\text{em}}$  generiert werden. Durch all diese Bedingungen kann sichergestellt werden, dass die GUT das SM als niederenergetischen Limes liefert. Durch die Vereinigung gibt es zusätzliche Relationen, die auf ihre Übereinstimmung mit dem Experiment hin analysiert werden müssen. Im Folgenden sollen zwei GUT-Gruppen, die  $SU(5)$  und  $SO(10)$ , besprochen werden. Sie bilden die Grundlage des CMM-Modells. Eine Einführung in die Gruppen- und Darstellungstheorie findet man z.B. in Ref. [205].

## C.1 $SU(5)$ -Vereinheitlichung

### Darstellung der Fermionen und Eichbosonen

Schon im Jahre 1974 wurde das auf der Eichgruppe  $SU(5)$  basierende Georgi-Glashow-Modell als Vereinigungsmodell vorgeschlagen [206]. Darin haben alle SM-Fermionen einer Generation genau die richtigen Quantenzahlen, um in den beiden irreduziblen  $SU(5)$ -Darstellungen  $\mathbf{\bar{5}}$  und  $\mathbf{10}$  untergebracht zu werden, wobei erstere das Leptonodublett und rechtshändige Downquarks enthält und letztere das Quarkdublett, rechtshändige Upquarks und das rechtshändige geladene Lepton.  $SU(5)$  besitzt 24 hermitesche Generatoren. Die  $SU(3) \times SU(2)$ -Untergruppenstruktur lässt sich dadurch veranschaulichen, dass in der definierenden Darstellung, unabhängige  $SU(3)$ - und  $SU(2)$ -Transformationen durch den oberen  $3 \times 3$  Block bzw. den unteren  $2 \times 2$ -Block der  $5 \times 5$ -Matrix beschrieben werden können. Konkret sieht für die erste Generation die Einbettung folgendermaßen aus, wobei alle Teilchen wie im Abschnitt 2.2.2 linkshändige Weyl-Spinoren

sind (d.h.  $\psi_R$  wird durch sein ladungskonjugiertes linkshändiges Feld  $(\psi_R)^c = \psi_L^c$  beschrieben) und die Indizes 1,2,3 die Farbquantenzahlen der  $SU(3)_C$  angeben<sup>1</sup>:

$$\Phi = \bar{\mathbf{5}} = \begin{pmatrix} d_1^c \\ d_2^c \\ d_3^c \\ e \\ -\nu_e \end{pmatrix}_L, \quad \Psi = \mathbf{10} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & u_3^c & -u_2^c & -u_1 & -d_1 \\ -u_3^c & 0 & u_1^c & -u_2 & -d_2 \\ u_2^c & -u_1^c & 0 & -u_3 & -d_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 & -e^c \\ d_1 & d_2 & d_3 & e^c & 0 \end{pmatrix}_L. \quad (\text{C.1})$$

Dies erkennt man an der Zerlegung in  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ :

$$\bar{\mathbf{5}} \rightarrow \underbrace{(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, \frac{1}{3})}_{d^c} \oplus \underbrace{(\mathbf{1}, \bar{\mathbf{2}}, -\frac{1}{2})}_L, \quad \mathbf{10} \rightarrow \underbrace{(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, -\frac{2}{3})}_{u^c} \oplus \underbrace{(\mathbf{3}, \mathbf{2}, \frac{1}{6})}_Q \oplus \underbrace{(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 1)}_{e^c}. \quad (\text{C.2})$$

Diese Art der Vereinigung ist sehr „ökonomisch“: Es werden lediglich zwei Darstellungen benötigt und keine weiteren Teilchen postuliert. Um Neutrinomassen erklären zu können, kann man noch ein Sigulett hinzufügen, welches dem rechtshändigen Neutrino entspricht:  $\mathbf{1} = \nu^c$ .

Da die adjungierte Darstellung 24-dimensional ist, gibt es neben den SM-Eichbosonen zwölf zusätzliche Eichbosonen, welche Wechselwirkungen zwischen den Quarks und Leptonen ermöglichen. Deren Zerlegung bezüglich  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$  ist gegeben durch:

$$\mathbf{24} = (\mathbf{8}, \mathbf{1}, 0) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{3}, 0) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, 0) \oplus (\mathbf{3}, \bar{\mathbf{2}}, -\frac{5}{6}) \oplus (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{2}, \frac{5}{6}). \quad (\text{C.3})$$

Der Vergleich mit Tabelle 2.3 zeigt, dass die  $\mathbf{24}$  die bereits bekannten Bosonen des SMs, sowie zwölf neuen Eichbosonen, die sogenannten  $X$ - und  $Y$ -Bosonen enthält. Sie sind Isospindubletts, die Farbladung tragen und folglich Baryon- und Leptonzahl-verletzende Prozesse bewirken.

Ein großer Fortschritt in diesem Modell ist, dass die Quantisierung der elektrischen Ladung erklärt werden kann. Das SM gibt nämlich keine Antwort auf die Frage, warum Proton und Elektron betragsmäßig genau die gleiche Ladung haben. Die Hyperladungsquantenzahlen der Felder scheinen eher willkürlich gewählt. Selbst die Forderung nach Anomaliefreiheit genügt nicht, um die Hyperladungen festzulegen [207]. Neben den Generatoren, die für die Farbe und den schwachen Isospin verantwortlich sind, findet man einen kommutierenden, spurlosen, diagonalen Generator, welcher mit der Hyperladung identifiziert werden kann. Dessen Normierung ist durch die übrigen Generatoren eindeutig festgelegt und nicht, wie im SM, frei skalierbar. Nach Brechung der  $SU(5)$  zum SM legt dieser die Hyperladungsquantenzahlen der Quarks und Leptonen fest. Aus diesem Grund muss die  $U(1)_Y$ -Eichkopplung in GUT-Modellen mit einem Faktor  $\sqrt{3/5}$  reskaliert werden. Die Gesamtladung jedes Multipletts verschwindet, da die Generatoren spurfrei sind:  $Q_d = -\frac{1}{2}Q_u = \frac{1}{3}Q_e$ . Ein weiterer Vorteil ist, dass die drittelzahlige Ladung der Quarks aus der  $SU(3)$ -Struktur der starken Wechselwirkung abgeleitet werden kann und somit mit den drei Farbfreiheitsgraden zusammenhängt.

## SU(5)-Brechung und Fermionmassen

Wir müssen zwei Aspekte klären: Wie bricht man die  $SU(5)$  spontan zu  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$  und wie bekommen die Leptonen und Quarks ihre Masse? Um  $SU(5)$  zum SM zu brechen, muss eine nichttriviale Darstellung von  $SU(5)$  einen VEV erhalten, welcher invariant unter der SM-Eichgruppe ist. Die Zerlegung in Gl. (C.3) enthält  $(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 0)$ , weshalb sich die

<sup>1</sup>Im Zusammenhang mit  $SO(10)$  wird gerne folgende Notation verwendet:  $\bar{\mathbf{5}} = \bar{\psi}_i$  und  $\mathbf{10} = \psi^{ij}$



adjungierte Darstellung zur SU(5)-Brechung eignet. Wählt man den VEV in Richtung des Hyperladungsoperators

$$\langle \Sigma(\mathbf{24}) \rangle = \sigma \text{diag}(2, 2, 2, -3, -3), \quad \sigma = \mathcal{O}(10^{16}) \text{ GeV}, \quad (\text{C.4})$$

so transformiert er sich als Singulett unter der SM-Eichgruppe und lässt diese ungebrochen. Dies verleiht den neuen Eichbosonen eine Masse von der Ordnung  $10^{16}$  GeV, wohingegen alle SM-Teilchen masselos bleiben. Um nun Fermionmassen zu generieren, benötigt man eine Darstellung, die an Fermionbilineare koppeln kann und eine Komponente besitzt, die sich unter  $G_{\text{SM}}$  wie  $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\frac{1}{2})$  oder  $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \frac{1}{2})$  transformiert. Betrachten wir die Tensorprodukte

$$\bar{\mathbf{5}} \otimes \mathbf{10} = \mathbf{5} \oplus \mathbf{45}, \quad (\text{Massen für Downquarks und geladene Leptonen}) \quad (\text{C.5})$$

$$\mathbf{10} \otimes \mathbf{10} = \mathbf{5}_s \oplus \mathbf{45}_a \oplus \mathbf{50}_s \quad (\text{Massen für Upquarks}) \quad (\text{C.6})$$

und die Zerlegung in die SM-Eichgruppe

$$\begin{aligned} \mathbf{5} &\rightarrow (\mathbf{3}, \mathbf{1}, -\frac{1}{3}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2}, +\frac{1}{2}), & \bar{\mathbf{5}} &\rightarrow (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, \frac{1}{3}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\frac{1}{2}), \\ \mathbf{45} &\rightarrow (\mathbf{8}, \mathbf{2}, \frac{1}{2}) \oplus (\bar{\mathbf{6}}, \mathbf{1}, -\frac{1}{2}) \oplus (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{2}, -\frac{7}{6}) \oplus (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, \frac{4}{3}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{3}, \frac{1}{2}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{1}, -\frac{1}{2}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \frac{1}{2}), \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

erkennen wir, dass sowohl die  $\mathbf{5}$  als auch die  $\mathbf{45}$  die Bedingungen erfüllen. In der Literatur wird meist die 5-dimensionale-Darstellung verwendet. Diese enthält neben dem SM-Higgsdublett ein Farbtriplett:  $\mathbf{5}_H = (\mathbf{3}_H, H)$ . Die farbigen Higgsbosonen, ebenso wie die schweren Neutrinos werden bei der SU(5)-Skala ausintegriert, so dass sie in der Niederenergie Theorie nicht mehr als Freiheitsgrade auftreten. In supersymmetrischen Theorien braucht man zwei verschiedene 5-dimensionale Darstellungen  $\mathbf{5}_H$  und  $\bar{\mathbf{5}}_{H'}$ , da wir sowohl das  $H_d$  als auch das  $H_u$  unterbringen müssen bzw. da im Superpotenzial keine komplex konjugierten Felder auftauchen dürfen. Ansonsten kann man, wie im SM, mit einem Higgsfeld  $\mathbf{5}_H$  und dessen konjugiertem Feld  $\bar{\mathbf{5}}_H$  auskommen, um sowohl den up- als auch down-artigen Teilchen Masse zu verleihen. Zusammenfassend geschieht die spontane Symmetriebrechung in zwei Schritten:

$$\text{SU}(5) \xrightarrow{\Sigma(\mathbf{24})} \text{SU}(3)_C \times \text{SU}(2)_L \times \text{U}(1)_Y \xrightarrow{H(\mathbf{5}), \bar{H}(\bar{\mathbf{5}})} \text{SU}(3)_C \times \text{U}(1)_{\text{em}}. \quad (\text{C.8})$$

Es sollte noch erwähnt werden, dass bei der Minimierung des Higgspotenzials Feinabstimmungsprobleme auftreten, bekannt als „Dublett-Triplett-Splitting-Problem“. Alle nicht SM-Felder, insbesondere das Higgs-Farbtriplett, sollten bei der GUT-Brechung eine große Masse bekommen, damit z.B. die Schranken an den Protonzerfall erfüllt sind. Dies wird durch den Mischterm im Higgspotenzial  $\propto \bar{\mathbf{5}}(\mathbf{24})\mathbf{5}$  erreicht. Das Higgsdublett bleibt jedoch nur mit aufeinander feinabgestimmten Parametern leicht. Zudem ist diese Feinabstimmung unter Strahlungskorrekturen nicht stabil, sofern eine nicht-SUSY-GUT betrachtet wird.

Kommen wir nun konkret zur Yukawa-Lagrangedichte in SU(5). Die Vereinigung der Materiefelder einer Generation in nur zwei bzw. drei Multipletts liefert zusammen mit den Higgsfeldern eine Beziehung zwischen der Flavourstruktur der Downquarks und geladenen Leptonen:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y^{SU(5)} &= \frac{1}{4} \Psi_{ij}^U \mathbf{10}_i \mathbf{10}_j \mathbf{5}_H + \sqrt{2} \Psi_{ij}^D \mathbf{10}_i \bar{\mathbf{5}}_j \bar{\mathbf{5}}_{H'} + \Psi_{ij}^\nu \bar{\mathbf{5}}_i \mathbf{1}_j \mathbf{5}_H + \frac{1}{2} \mathbf{M}_{ij}^N \mathbf{1}_i \mathbf{1}_j \\ &= \frac{1}{4} \Psi_i \Psi_{ij}^U \Psi_j \mathbf{5}_H + \sqrt{2} \Psi_i \Psi_{ij}^D \Phi_j \bar{\mathbf{5}}_{H'} + \Phi_i \Psi_{ij}^\nu \nu_j^c \mathbf{5}_H + \frac{1}{2} \nu_i^c \mathbf{M}_{ij}^N \nu_j^c \\ &:= \frac{1}{4} \epsilon_{abcde} \Psi_i^{ab} \Psi_{ij}^U \Psi_j^c \Psi_j^{cd} \mathbf{5}_H^e + \sqrt{2} \Psi_i^{ab} \Psi_{ij}^D \mathcal{C} \Phi_{ja} \bar{\mathbf{5}}_{H'b} + \Phi_i^a \Psi_{ij}^\nu \mathcal{C} \nu_j^c \mathbf{5}_{Ha} + \frac{1}{2} \nu_i^c \mathbf{M}_{ij}^N \nu_j^c. \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

In der ersten Zeile wurde die in der Literatur häufig anzutreffende Kurzschreibweise verwendet, in der SU(5)-Indizes  $(a, b, \dots)$ ,  $\epsilon$ -Tensoren und die Dirac-Ladungskonjugationsmatrix  $\mathcal{C}$

unterdrückt werden<sup>2</sup>. Die letzten beide Terme treten nur auf, falls man das Singulett hinzufügt. Sie entsprechen einer Dirac-Neutrinomasse und einer Majoranamasse. Den zweiten Term können wir unter Verwendung von Gl. (C.1) durch die SM-Felder ausdrücken:

$$\mathcal{L}_Y^{SU(5)} \supset -Y_{ij}^D \left( Q_i^\top C d_j^c + e_i^{c\top} C L_j \right) \epsilon H^* + h.c. \quad (C.10)$$

Damit erhalten wir für die Yukawakopplung ein für die Flavourphysik wesentliches Resultat des SU(5)-Modells:

$$\boxed{Y^E = (Y^D)^\top}. \quad (C.11)$$

Dies impliziert insbesondere, dass die Mischung der rechtshändigen (linkshändigen) Downquarks und der linkshändigen (rechtshändigen) geladenen Leptonen bis auf eine komplexe Konjugation gleich ist:  $R_d^* = L_e$ ,  $L_d = R_e^*$ . Da es bei der elektroschwachen Skala keine rechtshändigen Ströme gibt, ist die Mischung rechtshändiger Fermionen unbeobachtbar. Mit Niederenergie-Supersymmetrie jedoch wird die Mischung der zugehörigen skalaren Superpartner physikalisch. Während diese Vereinigung von Quark- und Lepton-Yukawakopplungen im SM und im MSSM für die dritte Generation relativ gut funktioniert, gibt es für die ersten beiden Generationen große Abweichungen. Dieses Problem wird in Kapitel 3.7 aufgegriffen, wo die Flavourstruktur von Korrekturtermen aus höherdimensionalen Operatoren unter Zuhilfenahme der RGE im Leptonsektor und  $\mu \rightarrow e\gamma$  eingeschränkt wird.

## C.2 SO(10)-Vereinheitlichung

### Vorzüge von SO(10)

Die Gruppe SO(10) ist zwar auf einem reellen Vektorraum definiert, besitzt dennoch komplexe Darstellungen wie die 16-dimensionale Spinordarstellung. Während man in SU(5) genau zwei Darstellungen benötigt, in die alle 15 Materiefelder einer Generation untergebracht werden können, hat die 16-dimensionale Spinordarstellung der SO(10) genau die richtigen SM-Quantenzahlen, um alle Fermionen, unter Hinzunahme eines einzigen Feldes, zu vereinen. Dieses zusätzliche Feld ist ein Singulett unter der SM-Eichgruppe  $G_{SM}$  und kann somit mit dem rechtshändigen Neutrino identifiziert werden. Des Weiteren ist SO(10) anomaliefrei und erklärt somit die im SM zufällige Aufhebung der Anomalien. Im Gegensatz zu  $G_{SM}$  und SU(5) hat SO(10) Rang 5. Der zusätzliche diagonale Generator ist  $B - L$ , welcher auch in Links-Rechts-symmetrischen Modellen anzutreffen ist. Die  $U(1)_{B-L}$ -Symmetrie wird geeicht, so dass SO(10) keine globale Symmetrie mehr besitzt. Bricht man die  $U(1)_{B-L}$ -Symmetrie bei einer hohen Skala, so werden schwere Majoranamassen generiert. SO(10) enthält sowohl die SU(5) als auch die Links-Rechts-symmetrische Pati-Salam-Gruppe  $G_{PS} = SU(4) \times SU(2)_L \times SU(2)_R$  als Untergruppe. All diese Eigenschaften machen SO(10) zu einer sehr „natürlichen“ GUT-Gruppe. Eine sehr pädagogische Einführung in SO(10) und die Einbettung von SU(5) findet man im Anhang von Ref. [208].

### Gruppenstruktur der SO(10)

Im Folgenden wird die Gruppenstruktur der SO(10) erläutert. Dabei gehen wir auf die Spinordarstellung ein und erklären, wie die SM-Eichgruppe in SO(10) eingebettet werden kann.

<sup>2</sup>Genau genommen müssten im Lorentzraum die Spinoren in Gl. (C.9) noch transponiert werden, d.h.  $\Psi_i^\top C Y_{ij} \Psi_j$ . Da die Lorentzindizes jedoch nie ausgeschrieben werden, verzichten wir in der Notation auf die zusätzliche Transposition.

Die Spinordarstellung ist komplex und kann nicht durch Tensorprodukte aus der reellen Fundamentaldarstellung **10** konstruiert werden.

Die Darstellung der SO(10)-Spinorzustände und die Einbettung von SU(5) kann mit der sogenannten „Oszillatormethode“ demonstriert werden [208–210]. Dazu betrachten wir einen Satz Operatoren, welche folgende Antivertauschungsrelationen erfüllen:

$$\{b_i, b_j\} = \{b_i^\dagger, b_j^\dagger\} = 0, \quad \{b_i, b_j^\dagger\} = 1, \quad i, j = 1, \dots, 5. \quad (\text{C.12})$$

Die Operatoren  $T_{ij} = b_i^\dagger b_j$  erfüllen die Algebra der U(5):

$$[T_{ij}, T_{kl}] = \delta_{jk} T_{il} - \delta_{il} T_{kj}, \quad i, j, k, l = 1, \dots, 5. \quad (\text{C.13})$$

Nach Entfernen des Cartan-Erzeugers mit nichtverschwindender Spur wird dadurch die SU(5) generiert. Die Erzeuger  $b_i^\dagger$  und Vernichter  $b_j$  wirken auf einen  $2^5 = 32$ -dimensionalen Vektorraum (wegen  $b_i^2 = 0 = b_i^{\dagger 2}$ ), dessen Basisvektoren wir als  $|\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \epsilon_4 \epsilon_5\rangle$  mit  $\epsilon_i = \pm$  schreiben können. Dabei wandelt  $b_i^\dagger$  ein  $-$  an der Stelle  $i$  in ein  $+$  um und  $b_i$  umgekehrt ein  $+$  in ein  $-$ . Dies definiert uns den SU(5) invarianten „Vakuum-Zustand“  $|-----\rangle \equiv |0\rangle$ , der von allen  $b_i$  vernichtet wird. Die Anwendung von  $T_{ij}$  auf einen Zustand kann eine gerade Anzahl von  $+$  Zeichen nicht in eine ungerade umwandeln und umgekehrt, d.h. man kann die Zustände weiter einteilen in „linkshändige“ mit  $\prod_{i=1}^5 \epsilon_i = -1$  und „rechtshändige“ mit  $\prod_{i=1}^5 \epsilon_i = +1$ .

Die Erzeuger  $\Sigma_{\mu\nu}$  der SO(10)-Spinordarstellung können folgendermaßen konstruiert werden. Zunächst definieren wir  $2 \cdot 5 = 10$  hermitesche Operatoren  $\Gamma_\mu$ :

$$\Gamma_{2j-1} = -i (b_j - b_j^\dagger), \quad \Gamma_{2j} = (b_j + b_j^\dagger), \quad j = 1, \dots, 5. \quad (\text{C.14})$$

Unter Verwendung der Antivertauschungsrelationen in Gl. (C.12) lässt sich leicht verifizieren, dass die  $\Gamma_\mu$  eine Clifford-Algebra vom Rang 10 bilden:

$$\{\Gamma_\mu, \Gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 1, \dots, 10. \quad (\text{C.15})$$

Die  $2 \cdot 5(2 \cdot 5 - 1)/2 = 45$  Erzeuger  $\Sigma_{\mu\nu}$ , mit

$$\Sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2i} [\Gamma_\mu, \Gamma_\nu], \quad \mu, \nu = 1, \dots, 10, \quad (\text{C.16})$$

erfüllen die Algebra der SO(10):

$$[\Sigma_{\mu\nu}, \Sigma_{\rho\sigma}] = i (\delta_{\mu\sigma} \Sigma_{\nu\rho} + \delta_{\nu\rho} \Sigma_{\mu\sigma} - \delta_{\mu\rho} \Sigma_{\nu\sigma} - \delta_{\nu\sigma} \Sigma_{\mu\rho}), \quad \mu, \nu, \rho, \sigma = 1, \dots, 10. \quad (\text{C.17})$$

Dass die SU(5) in die Spinordarstellung der SO(10) eingebettet werden kann, liegt daran, dass die Generatoren  $T_{ij}$  durch die  $\Sigma_{\mu\nu}$  ausgedrückt werden können [205]. Die SO(10)-Spinorzustände und ihre zugehörige SU(5)-Dimension sind in Tabelle (C.1) angegeben [209]. Diese Betrachtungen können auf SO(2N) verallgemeinert werden, so dass  $SU(N) \subset SO(2N)$  gilt. Es gilt auch die Umkehrung: Aus einer Clifford-Algebra (C.15), kann man via

$$b_j = \frac{1}{2} (\Gamma_{2j} + i\Gamma_{2j-1}), \quad b_j^\dagger = \frac{1}{2} (\Gamma_{2j} - i\Gamma_{2j-1}), \quad j = 1, \dots, 5 \quad (\text{C.18})$$

Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren definieren, die Gl. (C.12) erfüllen. Man kann zeigen, dass die  $\mathfrak{su}(5)$  ist eine Subalgebra der  $\mathfrak{so}(10)$  ist, indem man die  $T_{ij}$  durch die  $\Sigma_{\mu\nu}$  ausdrückt. Da die Matrix

$$\Gamma_0 = i^N \prod_{\mu=1}^{10} \Gamma_\mu = \prod_{j=1}^5 [b_j, b_j^\dagger] = (-1)^{\sum_j n_j}, \quad (\text{C.19})$$

SO(10)-Spinorzustand	SU(5)-Dimension	SO(10)-Spinorzustand	SU(5)-Dimension
$ 0\rangle$	1	$b_i^\dagger b_j^\dagger b_k^\dagger  0\rangle$	10
$b_i^\dagger  0\rangle$	5	$b_i^\dagger b_j^\dagger b_k^\dagger b_l^\dagger  0\rangle$	5
$b_i^\dagger b_j^\dagger  0\rangle$	10	$b_i^\dagger b_j^\dagger b_k^\dagger b_l^\dagger b_m^\dagger  0\rangle$	1

Tabelle C.1: SO(10)-Spinorzustände und ihre SU(5)-Dimension

wobei  $n_j = b_j^\dagger b_j$  der Teilchenzahloperator ist, mit allen  $\Gamma$ -Matrizen vertauscht, ist die Spinor-Darstellung reduzibel, und wir erhalten zwei 16-dimensionale, irreduzible Darstellungen  $\Psi_\pm$  durch chirale Projektion  $P_\pm$ :

$$[\Sigma_{\mu\nu}, (-1)^{\sum_j n_j}] = 0 \quad \Rightarrow \quad P_\pm = \frac{1}{2} (1 \pm \Gamma_0). \quad (\text{C.20})$$

Die zwei irreduziblen chiralen Unterräume sind somit charakterisiert durch eine gerade oder ungerade Anzahl von + Zeichen, wobei folgende Konvention verwendet wird:  $\Psi_+$  hat gerade Anzahl von + Zeichen, d.h.  $\prod_i \epsilon_i = -1$  und ist somit „linkshändig“;  $\Psi_-$  besitzt eine ungerade Anzahl von + Zeichen, d.h.  $\prod_i \epsilon_i = +1$  und ist folglich „rechtshändig“. Dass  $\Psi_+$  und  $\Psi_-$  tatsächlich irreduzibel sind, lässt sich leicht demonstrieren, indem man die Generatoren  $\Sigma$  durch die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren ausdrückt: Die Wirkung von  $\Sigma \propto Ab_i b_j^\dagger + Bb_i^\dagger b_j + Cb_i^\dagger b_j^\dagger + Db_i b_j$  auf die Zustände  $|\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \epsilon_4 \epsilon_5\rangle$  kann  $\prod_i \epsilon_i$  nicht ändern. In der SU(5)-Basis können wir für die zwei 16-dimensionalen irreduziblen Darstellungen schreiben:

$$\mathbf{16} \equiv |\Psi_+\rangle = |0\rangle \psi_0 + \frac{1}{2!} b_i^\dagger b_j^\dagger |0\rangle \psi^{ij} + \frac{1}{4!} \epsilon^{ijklm} b_j^\dagger b_k^\dagger b_l^\dagger b_m^\dagger |0\rangle \bar{\psi}_i, \quad (\text{C.21a})$$

$$\overline{\mathbf{16}} \equiv |\Psi_-\rangle = b_i^\dagger |0\rangle \psi^i + \frac{1}{2 \cdot 3!} \epsilon^{ijklm} b_k^\dagger b_l^\dagger b_m^\dagger |0\rangle \bar{\psi}_{ij} + b_1^\dagger b_2^\dagger b_3^\dagger b_4^\dagger b_5^\dagger |0\rangle \bar{\psi}_0. \quad (\text{C.21b})$$

Hierbei identifizieren wir  $\psi_0$  als SU(5)-Singulett, während  $\bar{\psi}_i$  und  $\psi^{ij}$  sich nach den SU(5)-Darstellungen  $\bar{\mathbf{5}}$  bzw.  $\mathbf{10}$  transformieren<sup>3</sup>. Die Zerlegung der SO(10)-Spinordarstellung in SU(5)-Darstellung lautet somit:

$$\mathbf{16} \rightarrow \mathbf{10} \oplus \bar{\mathbf{5}} \oplus \mathbf{1} = (\psi^{ij}, \bar{\psi}_i, \psi_0) = ((Q, u^c, e^c), (d^c, L), \nu^c). \quad (\text{C.23})$$

Alle 15 Fermionfelder des SM und das linkshändige Antineutrino (entspricht dem rechtshändigen Neutrino) können in der  $\mathbf{16}$  untergebracht werden. Indem wir die Operatoren  $b_i^{(\dagger)}$  aufteilen in  $(b_1^{(\dagger)}, b_2^{(\dagger)}, b_3^{(\dagger)})$  und  $(b_4^{(\dagger)}, b_5^{(\dagger)})$ , erzeugen wir Untergruppen für SU(3) und SU(2), so dass wir die SM-Gruppe SU(3)  $\times$  SU(2) in SU(5) einbetten können. Damit lässt sich das physikalische

<sup>3</sup>Unter Verwendung der Antivertauschungsrelationen erhält man für die zugehörigen „bras“:

$$\mathbf{16}^\top \equiv \langle \Psi_+^* | = \psi_0 \langle 0 | - \frac{1}{2!} \psi^{ij} \langle 0 | b_i b_j + \frac{1}{4!} \epsilon^{ijklm} \bar{\psi}_i \langle 0 | b_j b_k b_l b_m, \quad (\text{C.22a})$$

$$\overline{\mathbf{16}}^\top \equiv \langle \Psi_-^* | = \psi^i \langle 0 | b_i - \frac{1}{2 \cdot 3!} \epsilon^{ijklm} \bar{\psi}_{ij} \langle 0 | b_k b_l b_m + \bar{\psi}_0 \langle 0 | b_1 b_2 b_3 b_4 b_5. \quad (\text{C.22b})$$

Teilchenspektrum wie folgt beschreiben<sup>4</sup>:

$$\begin{aligned}
\psi_0 : (\nu_R)^c &= \nu_L^c = |---; --\rangle, \\
\psi^{ij} : u_L &= |+-; +-\rangle, | -+-; +-\rangle, | - -+; +-\rangle, \\
d_L &= |+-; -+\rangle, | -+-; -+\rangle, | - -+; -+\rangle, \\
(u_R)^c &= u_L^c = |++-; --\rangle, |+-+; --\rangle, |++-; --\rangle, \\
(e_R)^c &= e_L^c = |---; ++\rangle, \\
\bar{\psi}_i : (d_R)^c &= d_L^c = |++-; ++\rangle, |+-+; ++\rangle, |++-; ++\rangle, \\
\nu_L &= |+++; +-\rangle, \\
e_L &= |+++; -+\rangle.
\end{aligned} \tag{C.24}$$

### SO(10)-invariante Yukawaterme

Um SO(10)-invariante Bilinearformen, die z.B. für Massenterme nötig sind, ohne Verwendung der konjugierten Darstellung  $\bar{\mathbf{16}}$ , bilden zu können, benötigen wir die Konjugationsmatrix  $B$ , in Analogie zur Ladungskonjugationsmatrix  $\mathcal{C}$  der Lorentzgruppe.  $\Psi^\top BC\Psi$  ist SO(10)-invariant, falls  $B\Sigma_{\mu\nu} + \Sigma_{\mu\nu}^\top B = 0$  gilt. Dies wird durch  $B = \prod_{j=1}^5 \Gamma_{2j-1}$  erfüllt. Daraus folgt zusammen mit den Zerlegungen in Gl. (C.21a) und (C.21b):

$$B \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi^{ij} \\ \bar{\Psi}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\Psi}_0 \\ -\bar{\Psi}_{ij} \\ \Psi^i \end{pmatrix}, \quad B \begin{pmatrix} \Psi^i \\ \bar{\Psi}_{ij} \\ \bar{\Psi}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{\Psi}_i \\ \Psi_{ij} \\ \Psi_0 \end{pmatrix}. \tag{C.25}$$

Um SO(10)-invariante Yukawaterme bilden zu können, müssen wir Higgsfelder an die Spinorfelder koppeln. Das Tensorprodukt zweier 16-dimensionaler Spinordarstellungen zerlegt sich gemäß

$$\mathbf{16} \otimes \mathbf{16} = \mathbf{10}_s \oplus \mathbf{120}_a \oplus \mathbf{126}_s, \tag{C.26}$$

wobei die  $\mathbf{10}_s$  die Vektordarstellung, die  $\mathbf{120}_a$  die antisymmetrische drei-Index-Tensordarstellung und die  $\mathbf{126}_s$  die selbstadjungierte fünf-Index-Tensordarstellung ist. Die allgemeinsten, renormierbaren SO(10)-invarianten Yukawa-Terme lauten somit<sup>5</sup>:

$$\mathbf{16}^\top \Upsilon \mathbf{16} \mathbf{10}_H : \Upsilon_{ab}^{10} \langle \mathbf{16}_a^* | BC\Gamma_\mu \phi_\mu | \mathbf{16}_b \rangle \tag{C.27}$$

$$\mathbf{16}^\top \Upsilon \mathbf{16} \mathbf{120}_H : \frac{1}{3!} \Upsilon_{ab}^{120} \langle \mathbf{16}_a^* | BC\Gamma_\mu \Gamma_\nu \Gamma_\rho \phi_{\mu\nu\rho} | \mathbf{16}_b \rangle \tag{C.28}$$

$$\mathbf{16}^\top \Upsilon \mathbf{16} \bar{\mathbf{126}}_H : \frac{1}{5!} \Upsilon_{ab}^{126} \langle \mathbf{16}_a^* | BC\Gamma_\mu \Gamma_\nu \Gamma_\rho \Gamma_\sigma \Gamma_\tau \phi_{\mu\nu\rho\sigma\tau} | \mathbf{16}_b \rangle \tag{C.29}$$

Unter Verwendung von Gl. (C.23) und der Zerlegung in SU(5)-Darstellungen  $\mathbf{10} \rightarrow \mathbf{5} \oplus \bar{\mathbf{5}}$  können die SO(10)-Yukawaterme in der SU(5)-Zerlegung geschrieben werden. Eine explizite Berechnung dieser Kopplungen wurde z.B. in Ref. [150] durchgeführt. Bei folgender Zerlegung transformieren sich  $\phi_{c_j}$  und  $\phi_{\bar{c}_j}$  nach SU(5)-Darstellungen:

$$\begin{aligned}
\text{SU(5): } \mathbf{5}_H : \phi_{c_j} &= \phi_{2j} + i\phi_{2j-1}, \quad \bar{\mathbf{5}}_H : \phi_{\bar{c}_j} = \phi_{2j} - i\phi_{2j-1}, \quad j = 1, \dots, 5 \\
\Leftrightarrow \text{SO(10): } \mathbf{10}_H : \phi_\mu &= \begin{cases} \phi_{2j} &= \frac{1}{2} (\phi_{c_j} + \phi_{\bar{c}_j}) \\ \phi_{2j-1} &= \frac{1}{2i} (\phi_{c_j} - \phi_{\bar{c}_j}), \end{cases} \quad \mu = 1, \dots, 10.
\end{aligned} \tag{C.30}$$

<sup>4</sup>Da wir uns ausschließlich auf linkshändige Felder beschränken, kann der Index  $L$  auch weggelassen werden.

<sup>5</sup>Hier wird die in der Literatur häufig anzutreffende Kurznotation eingeführt.

Damit erhalten wir  $\Gamma_\mu \phi_\mu = b_j \phi_{\bar{c}_j} + b_j^\dagger \phi_{c_j}$ . Nach Reskalierung der Higgs-Felder ( $\phi_{c_j} = \sqrt{2} H^j$ ,  $\phi_{\bar{c}_j} = \sqrt{2} \bar{H}_j$ ), um kanonische kinetische Terme der SU(5)-Higgs-Felder  $H$ ,  $\bar{H}$  zu erhalten, berechnet sich Gl. (C.27) zu [211]:

$$\begin{aligned} Y_{ab} \langle \mathbf{16}_a^* | B C \Gamma_\mu \phi_\mu | \mathbf{16}_b \rangle &= \\ &= i\sqrt{2} Y_{ab} \left[ - \left( \psi_0^a \bar{\psi}_i^b + \bar{\psi}_i^a \psi_0^b \right) H^i + \left( \psi_a^{ij} \bar{\psi}_i^b + \bar{\psi}_i^a \psi_b^{ij} \right) \bar{H}_j + \frac{1}{4} \epsilon_{ijklm} \psi_a^{ij} \psi_b^{kl} H^m \right] \\ &= i\sqrt{2} Y_{ab} \left[ - (\mathbf{1}_a \bar{\mathbf{5}}_b + \bar{\mathbf{5}}_a \mathbf{1}_b) \mathbf{5}_H + (\mathbf{10}_a \bar{\mathbf{5}}_b + \bar{\mathbf{5}}_a \mathbf{10}_b) \bar{\mathbf{5}}_H + \frac{1}{4} \mathbf{10}_a \mathbf{10}_b \mathbf{5}_H \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.31})$$

Da  $\mathbf{5}_H$  und  $\bar{\mathbf{5}}_H$  Komponenten enthalten, die sich unter  $G_{SM}$  wie  $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \frac{1}{2})$  und  $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\frac{1}{2})$  transformieren, bekommen wir nach elektroschwacher Symmetriebrechung Massenterme für die Fermionen. Mit dieser Yukawakopplung alleine erhalten wir eine symmetrische Flavourstruktur, und alle Fermionen sind an der GUT-Skala vereinheitlicht:

$$Y^U = (Y^\nu)^\top = Y^D = (Y^E)^\top. \quad (\text{C.32})$$

Da diese Beziehung bei der elektroschwachen Skala höchstens für die dritte Generation erfüllt werden kann, muss der Yukawasektor erweitert werden. Generell gibt es dazu zwei Wege: Man addiert die in Gl. (C.28) und (C.29) erwähnten renormierbaren Kopplungen. Dadurch können die gemessenen Fermionmassen und -mischungen reproduziert werden [212]. Jedoch ist die Perturbativität der Theorie bei hohen Skalen durch die großen Higgsdarstellungen gefährdet [213]. Der zweite Weg besteht in der Einführung höherdimensionaler, nichtrenormierbarer Terme wie in Kapitel 3.7 durchgeführt. Da sie mit einer hohen Massenskala unterdrückt sind, korrigieren sie die Relationen der Massen und Mischungen der leichten Generationen, ohne die erfolgreiche Vereinigung der dritten Generation zu zerstören.

## Brechung der SO(10)

Die Brechung von SO(10) zur SM-Eichgruppe kann in mehreren Schritten geschehen, so dass verschiedene Zwischenskalen bzw. Massen-Hierarchien auftreten. Zwei mögliche Brechungsszenarien sind:

$$\text{SO}(10) \rightarrow \begin{cases} \text{SU}(5) \times \text{U}(1) \rightarrow G_{\text{SM}} \\ G_{\text{PS}} \rightarrow \text{SU}(3)_C \times \text{SU}(2)_L \times \text{SU}(2)_R \times \text{U}(1) \rightarrow G_{\text{SM}} \end{cases}, \quad (\text{C.33})$$

wobei  $G_{\text{PS}} = \text{SU}(4) \times \text{SU}(2)_L \times \text{SU}(2)_R$  die Pati-Salam Gruppe ist. Typischerweise auftretende Skalen sind die Planck-Skala  $M_{\text{Pl}} = \mathcal{O}(10^{19})$  GeV, die SO(10)-Brechungsskala  $M_{\text{SO}(10)} = \mathcal{O}(10^{17})$  GeV, die SU(5)-Brechungsskala  $M_{\text{GUT}} = 2 \cdot 10^{16}$  GeV und die elektroschwache Skala  $\mu_{\text{ew}} = \mathcal{O}(10^2)$  GeV. Welcher Brechungsweg eingeschlagen wird, hängt von den jeweiligen Werten der Parameter im Higgspotenzial ab. Auf die genaue Form des Higgspotenzials, welches die gewünschten VEV in die Singulett-Richtung im Minimierungsprozess generiert, kann hier nicht eingegangen werden. Ob und wie dies möglich ist, stellt ein eigenes Studienobjekt dar und ist ein wichtiger Schritt zur Verbesserung des Modells und dessen Vorhersagen.

## Brechung via SU(5)

Wir gehen zunächst auf die Brechung via SU(5) ein. Dieser Brechungsweg ist im CMM-Modell realisiert, denn hier ist die Vereinigung der Leptondoublets und der Downquarksingulets offensichtlich, und somit der Transfer des großen atmosphärischen Mischungswinkels in den

Quarksektor. Gesucht sind also SO(10)-Darstellungen, die SU(5)-Singulets (für die Brechung SO(10)→SU(5)), und welche, die **24**, **5** und **45** der SU(5) enthalten. Aus Gl. (C.23) erkennen wir, dass z.B. die Higgs-Darstellungen **16<sub>H</sub>** und **16<sub>H</sub>** geeignet sind, SO(10) zur SU(5) zu brechen. Eine weitere gängige Methode ist es, der **126<sub>H</sub>** einen VEV in Richtung des SU(5)-Singulets zu geben. Die Zerlegung in SU(5) lautet:

$$\mathbf{126} \rightarrow \overline{\mathbf{50}} \oplus \mathbf{45} \oplus \overline{\mathbf{15}} \oplus \mathbf{10} \oplus \overline{\mathbf{5}} \oplus \mathbf{1}. \quad (\text{C.34})$$

Die SU(5)-Singulett-Komponente koppelt beim Yukawaterm in Gl. (C.29) gerade an das rechtehändige Neutrino und führt zu einem Majoranamassenterm. Ein Nachteil der Darstellungen hoher Dimensionen ist, dass große Gruppenfaktoren die Renormierungsgruppengleichungen ändern und so zu nicht-perturbativen Eich- und Yukawakopplungen nahe der Planck-Skala führen können. Im CMM-Modell werden als Alternative nichtrenormierbare Yukawaterme gewählt, um so das Problem zu großer Gruppenfaktoren zu umgehen. Die Zerlegung der adjungierten Darstellung **45** sieht sehr vielversprechend aus:

$$\mathbf{45} \rightarrow \mathbf{24} \oplus \mathbf{10} \oplus \overline{\mathbf{10}} \oplus \mathbf{1}. \quad (\text{C.35})$$

Sie enthält zum einen ein SU(5)-Singulett, zum anderen kann die adjungierte Darstellung **24<sub>H</sub>** dazu verwendet werden, SU(5) weiter zu SU(3)<sub>C</sub> × SU(2)<sub>L</sub> × U(1)<sub>Y</sub> zu brechen. Die definierende Darstellung der SO(10) liefert schließlich die gewünschten Eigenschaften, um die elektroschwache Symmetrie zu brechen. Wegen der Zerlegung in SU(5) **10** → **5** ⊕ **5** (siehe Gl. (C.30)), enthält sie auch das SM-Higgsdublett. Weitere Möglichkeiten wären die **120** (**120** → **5** ⊕ **5** ⊕ **10** ⊕ **10** ⊕ **10** ⊕ **45** ⊕ **45**) und **126** (Gl. (C.34)), denn sie enthalten die **5** und die **45** und können zur elektroschwachen Symmetriebrechung beitragen. Jede Variante liefert eine etwas andere Struktur und andere Relationen der Fermionmassen.

Da die SO(10) Rang 5 hat, muss bei der Brechung zur SU(5) der Rang der Eichgruppe reduziert werden, was durch die Brechung eines U(1)-Generators geschieht (siehe Gl. (C.33)). In supersymmetrischen Theorien hat dies Auswirkungen auf die soften Massen. Die SU(5)-Multipletts haben unterschiedliche Quantenzahlen bezüglich dieser U(1)-Symmetrie; diese Quantenzahlen sind aber gleich für die drei Generationen. Die Brechung liefert familienuniverselle Korrekturen zu den Softmassen, die proportional zur U(1)-Ladung sind.

Es besteht nun auch die Möglichkeit, reduzierbare Higgsdarstellungen in höherdimensionalen Termen zu verwenden. Genau dies wird im CMM-Modell mit folgender Higgsdarstellung verwendet:

$$\mathbf{45} \otimes \mathbf{10} = \mathbf{10} \oplus \mathbf{120} \oplus \mathbf{320}. \quad (\text{C.36})$$

Sie kann somit effektiv als symmetrische **10** und als antisymmetrische **120** an Fermionbilineare koppeln und Flavourstrukturen beliebiger Symmetrie generieren. Betrachtet man neben (C.26) und (C.36) noch folgende direkten Produkte:

$$\overline{\mathbf{16}} \otimes \mathbf{10} = \mathbf{16} \oplus \mathbf{144}, \quad \mathbf{45} \otimes \mathbf{16} = \mathbf{16} \oplus \mathbf{144} \oplus \mathbf{560}, \quad (\text{C.37})$$

so erhalten wir insgesamt vier Invarianten aus der Kopplung **16 16 10<sub>H</sub> 45<sub>H</sub>**, welche in Ref. [211] analysiert werden:

$$\begin{aligned} (\mathbf{16} \mathbf{16})_{10} (\mathbf{10}_H \mathbf{45}_H)_{10}, & \quad (\mathbf{16} \mathbf{16})_{120} (\mathbf{10}_H \mathbf{45}_H)_{120}, \\ (\mathbf{16} \mathbf{10}_H)_{\overline{16}} (\mathbf{16} \mathbf{45}_H)_{16}, & \quad (\mathbf{16} \mathbf{10}_H)_{\overline{144}} (\mathbf{16} \mathbf{45}_H)_{144}. \end{aligned} \quad (\text{C.38})$$

Diese Kopplung ist im CMM-Modell für die Down-Yukawakopplung verantwortlich und ist aufgrund der Unterdrückung eine natürliche Erklärung für die Hierarchie zwischen Bottom-

und Topquarkmasse. Falls dieser Dimension-5-Term effektiv wie eine **10** koppelt, bleibt die Vereinigung von Downquarks und geladenen Leptonen erhalten, vorausgesetzt sie koppeln ausschließlich an die **10**. Um Korrekturen zu den leichten Fermionmassen zu erhalten, müssen effektive **120**-, **16**- oder **144**-Terme addiert werden. Wenn bei der SU(5)-Skala die in der **45** (siehe Gl. (C.35)) enthaltene adjungierte Darstellung der SU(5) **24** einen VEV wie in Gl. (C.4) erhält, wird Gl. (C.11) modifiziert zu:

$$\mathbf{Y}^D = (\mathbf{Y}^E)^\top + 5 \frac{\sigma}{M_{\text{Pl}}} \check{\mathbf{Y}}_{120,16,144}. \quad (\text{C.39})$$

Alternativ kann der Majoranamassenterm über einen Dimension-5-Operator generiert werden:

$$\frac{1}{2M_{\text{Pl}}} \mathbf{16}_i \mathbf{Y}_{ij}^N \mathbf{16}_j \overline{\mathbf{16}}_H \overline{\mathbf{16}}_H. \quad (\text{C.40})$$

Die Majoranamasse erhält man daraus als:

$$M_{ij}^N = \frac{v_{16}^2}{M_{\text{Pl}}} \mathbf{Y}_{ij}^N \approx \frac{\mathcal{O}(10^{2 \cdot 17} \text{ GeV})}{\mathcal{O}(10^{19} \text{ GeV})} \mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(10^{15} \text{ GeV}), \quad (\text{C.41})$$

was genau die richtige Größenordnung für den Seesaw-Mechanismus ist.

### Brechung via SU(4) × SU(2) × SU(2)

SO(10) kann auch über eine Links-Rechts-symmetrische Gruppe zum SM gebrochen werden. In diesem Fall wird die Linkshändigkeit der schwachen Wechselwirkung nicht – wie es im SM der Fall ist – durch die Algebra bestimmt, sondern durch das Vakuum. Die symmetrische **54** kann SO(10) zur SO(6) × SO(4) brechen, welche isomorph zur Pati-Salam-Gruppe  $G_{\text{PS}} = \text{SU}(4) \times \text{SU}(2)_L \times \text{SU}(2)_R$  ist. Hierin ist  $\text{SU}(4) \supset \text{SU}(3)_C \times \text{U}(1)_{B-L}$  eine erweiterte Farbgruppe mit der  $B-L$ -Quantenzahl als vierter Farbe. Die Pati-Salam-Gruppe kann durch die **16** oder **126** zu  $G_{\text{SM}}$  gebrochen werden. Die Attraktivität dieses Modells liegt unter anderem darin, dass die Quantisierung der elektrischen Ladung  $Q = T_3 + Y$  durch die Einführung eines rechtshändigen Isospins  $I_3^R = Y - \frac{B-L}{2}$  auf die Quantisierung von  $B-L$  zurückgeführt werden kann<sup>6</sup>. In SO(10) ist  $\text{U}(1)_{B-L}$  geeicht, und die Brechung bei der Skala  $M_{\text{SO}(10)}$  liefert einen eleganten Mechanismus für die Lepto- und Baryogenese.

## C.3 Supersymmetrische GUTs

Die Vorteile der Supersymmetrie lassen sich in GUT-Modelle übertragen, indem man diese genau wie das SM supersymmetrisiert. Umgekehrt liefert der Vereinheitlichungsgedanke eine Motivation für die Realisierung von Supersymmetrie. Formal ersetzt man im Superpotential, welches sich aus der Yukawa-Lagrangedichte und der Higgs-Selbstwechselwirkung der

<sup>6</sup>Die Hyperladungsquantenzahlen in Tabelle 2.2 werden im SM gerade so gewählt, dass die richtige beobachtete elektrische Ladung herauskommt und weisen auf den ersten Blick keine Systematik auf. Die Kombination  $Y - \frac{B-L}{2}$  liefert gerade die Quantenzahlen für einen rechtshändigen Isospin:

$$Y - \frac{B-L}{2} : \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \quad u_R \quad d_R \quad \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} \quad e_R \quad \nu_R \quad (\text{C.42})$$

$$0 \quad \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad 0 \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$$



vereinheitlichten Theorie ergibt, die Materiefelder durch Superfelder bzw. deren skalare Komponenten. Aufgrund der Holomorphie des Superpotenzials muss in  $SU(5)$  neben  $\mathbf{5}_H \supset H_u$  ein zweites Higgsfeld  $\bar{\mathbf{5}}_{H'} \supset H_d$  eingeführt werden. Analog muss in gewissen  $SO(10)$ -Modellen ein zweites Higgsfeld in der Darstellung  $\mathbf{10}_{H'}$  eingesetzt werden. Dies ist z.B. im CMM-Modell der Fall, bei dem die reduzierbare Higgsdarstellung bei der Down-Yukawakopplung auftritt. Im Brechungsschema der SUSY-GUT-Symmetrie zum SM muss auch die Supersymmetrie gebrochen werden. Zu jedem Yukawaterm in der Lagrangedichte gibt es einen entsprechenden  $A$ -Term, und die skalaren Felder erhalten eine Softmasse.



## D Konventionen $B^0 - \bar{B}^0$ -Mischung

Die neutralen Mesonen  $K$ ,  $B$  und  $D$  sind die einzigen Hadronen, die mit ihren Antiteilchen mischen. Sie unterscheiden sich durch eine Quantenzahl  $F$ , welche den Quarkflavourinhalt charakterisiert. Oszillationen können daher nur von Wechselwirkungen induziert werden, die die Flavourquantenzahl ändern. Sowohl die starke als auch die elektromagnetische Wechselwirkung sind flavourerhaltend. Im SM können solche  $\Delta F = 2$ -Prozesse nur über die schwache Wechselwirkung vermittelt werden. Weitere Einzelheiten findet man z.B. in Ref. [28, 154, 214].

Die Zeitabhängigkeit wird in der Wigner-Weisskopf Näherung [215, 216] durch folgende Schrödinger-Gleichung beschrieben<sup>1</sup>:

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} |B^0(t)\rangle \\ |\bar{B}^0(t)\rangle \end{pmatrix} = \left( M - \frac{i}{2} \Gamma \right) \begin{pmatrix} |B^0(t)\rangle \\ |\bar{B}^0(t)\rangle \end{pmatrix}. \quad (\text{D.1})$$

Hierbei ist  $M$  eine hermitesche Massenmatrix (dispersiver Anteil),  $\Gamma$  eine hermitesche Zerfallsmatrix (absorptiver Anteil), und  $B^0(t)$  ( $\bar{B}^0(t)$ ) beschreibt die zeitliche Entwicklung des  $B$ -Mesons, welches zur Zeit  $t = 0$  ein  $B^0$  ( $\bar{B}^0$ )-Meson war. Fordert man  $CPT$ -Symmetrie, dann gilt:  $M_{11} = M_{22}$  und  $\Gamma_{11} = \Gamma_{22}$ . Weiter wählen wir die Phasenkonvention  $CP |B^0\rangle = -|\bar{B}^0\rangle$  [28]. Diagonalisiert man  $M - i\Gamma/2$ , so erhält man die physikalischen Eigenzustände  $|B_{H,L}\rangle$  mit den Massen  $M_{H,L}$  und den Zerfallsraten  $\Gamma_{H,L}$ . Für diese Masseneigenzustände ist die Zeitabhängigkeit gegeben durch:

$$|B_{L,H}(t)\rangle = e^{-iM_{L,H}t - \frac{1}{2}\Gamma_{L,H}t} |B_{L,H}(0)\rangle. \quad (\text{D.2})$$

Sie lassen sich als Linearkombination der Flavoureigenzustände schreiben:

$$|B_L\rangle = p |B^0\rangle + q |\bar{B}^0\rangle, \quad (\text{D.3})$$

$$|B_H\rangle = p |B^0\rangle - q |\bar{B}^0\rangle, \quad (\text{D.4})$$

$$\frac{q}{p} = -\frac{\Delta M + \frac{i}{2}\Delta\Gamma}{2M_{12} - i\Gamma_{12}}, \quad |p|^2 + |q|^2 = 1. \quad (\text{D.5})$$

Hierbei bezeichnen  $\Delta\Gamma = \Gamma_L - \Gamma_H$  die Zerfallsraten- und  $\Delta M = M_H - M_L$  die Massendifferenz. Beide können experimentell gemessen werden, wobei die Oszillationsfrequenz gerade  $\Delta M$  bestimmt. Endzustände, in die sowohl  $B$  als auch  $\bar{B}$  zerfallen können, tragen zu  $\Delta\Gamma$  bei und entsprechen dem Imaginärteil der Boxdiagramme.

Die relative Phase zwischen  $M_{12}$  und  $\Gamma_{12}$  ist ebenfalls observabel:

$$\phi = \arg \left( -\frac{M_{12}}{\Gamma_{12}} \right). \quad (\text{D.6})$$

---

<sup>1</sup>Im Folgenden vereinfachen wir die Notation und verwenden für die Mesonen immer das Symbol  $B$ .

Im  $B^0$ -System gilt die Näherung  $|\Gamma_{12}| \ll |M_{12}|$ ,  $|\Delta\Gamma| \ll |\Delta M|$  so dass

$$\Delta M = 2|M_{12}| \left( 1 + \mathcal{O} \left( \left| \frac{\Gamma_{12}}{M_{12}} \right|^2 \right) \right) \approx 2|M_{12}|, \quad (\text{D.7})$$

$$\Delta\Gamma = 2|\Gamma_{12}| \cos \phi \left( 1 + \mathcal{O} \left( \left| \frac{\Gamma_{12}}{M_{12}} \right|^2 \right) \right) \approx 2|\Gamma_{12}| \cos \phi, \quad (\text{D.8})$$

$$\frac{q}{p} = -e^{-i\phi_M} \left( 1 - \frac{a}{2} \right) + \mathcal{O} \left( \left| \frac{\Gamma_{12}}{M_{12}} \right|^2 \right), \quad (\text{D.9})$$

$$\text{mit } a = \text{Im} \left( \frac{\Gamma_{12}}{M_{12}} \right) = \left| \frac{\Gamma_{12}}{M_{12}} \right| \sin \phi, \quad M_{12} = |M_{12}| e^{i\phi_M}. \quad (\text{D.10})$$

Die Phase  $\phi_M$  ist jedoch konventionsabhängig. Die zeitabhängige Zerfallsrate ist gegeben durch

$$\Gamma(B^0(t) \rightarrow f) = N_f |\langle f|B^0(t)\rangle|^2, \quad \Gamma(\bar{B}^0(t) \rightarrow f) = N_f |\langle f|\bar{B}^0(t)\rangle|^2, \quad (\text{D.11})$$

wobei  $N_f$  ein Normierungsfaktor ist. Mit den Zerfallsamplituden  $A_f = \langle f|B^0\rangle$ ,  $\bar{A}_f = \langle f|\bar{B}^0\rangle$  kann man die Größe  $\lambda_f$  definieren, welche unabhängig von Phasenkonventionen und somit physikalisch ist:

$$\lambda_f = \frac{q}{p} \frac{\bar{A}_f}{A_f}. \quad (\text{D.12})$$

Die Größen  $q/p$ ,  $\rho = \bar{A}_f/A_f$  und  $\lambda_f$  beschreiben die verschiedenen Arten der  $CP$ -Verletzung (siehe Abschnitt 2.1.3). Zur Berechnung von  $q/p$  ist die Relation  $e^{-i \arg(z^2)} = z^*/z$  hilfreich. Oszilliert beispielsweise ein  $\bar{B}_d$ -Meson über ein Boxdiagramm mit  $W$ -Bosonen und Top-Quark in ein  $B_d$ -Meson, ist das Diagramm  $M_{12} \propto (V_{tb}V_{td}^*)^2$ . Daraus bekommen wir schließlich  $\frac{q}{p} = -\frac{V_{tb}^*V_{td}}{V_{tb}V_{td}^*}$ .

# E Effektive Hamiltonoperatoren

Im Folgenden sollen die in der Arbeit verwendeten Konventionen und Formeln im Formalismus effektiver Hamiltonoperatoren angegeben werden. Dabei wird oft zwischen den verschiedenen in der Literatur anzutreffenden Konventionen verglichen, um so leichte Übersetzungsregeln anzugeben, und um mögliche Konfusionen beim Vergleich mit der Literatur zu vermeiden.

## E.1 $\Delta B = 1$ -Operatoren

Der effektive Hamiltonoperator, welcher  $\Delta B = 1$ -Prozesse beschreibt, kann mit der Abkürzung  $\lambda_p = V_{pb}V_{ps}^*$  und unter Ausnutzung der CKM-Unitarität geschrieben werden als [154, 217]:

$$\mathcal{H}_{\text{eff}}^{\Delta B=1} = \left\{ \frac{G_F}{\sqrt{2}} \left[ \sum_{p=u,c} \lambda_p (C_1 Q_1^p + C_2 Q_2^p) - \lambda_t \left( \sum_{i=3}^{10} C_i Q_i + C_{7\gamma} Q_{7\gamma} + C_{8g} Q_{8g} \right) \right] \right\} + \{Q_i \rightarrow Q'_i, C_i \rightarrow C'_i\}. \quad (\text{E.1})$$

Ein Strich am Operator und Wilson-Koeffizient bedeutet, dass die Chiralität umgedreht wird. Die Strom-Strom-Operatoren sind gegeben durch<sup>1</sup>:

$$Q_1^p = (\bar{p}_\alpha b_\beta)_{V-A} (\bar{s}_\beta p_\alpha)_{V-A} = (\bar{p}_\alpha \gamma^\mu (1 - \gamma_5) b_\beta) (\bar{s}_\beta \gamma_\mu (1 - \gamma_5) p_\alpha) = 4 (\bar{p}_{\alpha L} \gamma^\mu b_{\beta L}) (\bar{s}_{\beta L} \gamma_\mu p_{\alpha L}),$$

$$Q_2^p = (\bar{p} b)_{V-A} (\bar{s} p)_{V-A} = (\bar{p} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) b) (\bar{s} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) p) = 4 (\bar{p}_L \gamma^\mu b_L) (\bar{s}_L \gamma_\mu p_L). \quad (\text{E.2})$$

Dabei spezifiziert  $\alpha, \beta$  in  $Q_1^p$  die unterschiedliche Farbstruktur. Der letzte Schritt dient zur Verdeutlichung des Ursprungs der unterschiedliche Normierungen im effektiven Hamiltonoperator, wenn eine andere Operatorbasis gewählt wird. Die QCD-Pinguinoperatoren lauten:

$$Q_3 = (\bar{s} b)_{V-A} \sum_q (\bar{q} q)_{V-A}, \quad Q_4 = (\bar{s}_\alpha b_\beta)_{V-A} \sum_q (\bar{q}_\beta q_\alpha)_{V-A},$$

$$Q_5 = (\bar{s} b)_{V-A} \sum_q (\bar{q} q)_{V+A}, \quad Q_6 = (\bar{s}_\alpha b_\beta)_{V-A} \sum_q (\bar{q}_\beta q_\alpha)_{V+A}, \quad (\text{E.3})$$

und die QED-Pinguinoperatoren:

$$Q_7 = (\bar{s} b)_{V-A} \sum_q \frac{3}{2} e_q (\bar{q} q)_{V+A}, \quad Q_8 = (\bar{s}_\alpha b_\beta)_{V-A} \sum_q \frac{3}{2} e_q (\bar{q}_\beta q_\alpha)_{V+A},$$

$$Q_9 = (\bar{s} b)_{V-A} \sum_q \frac{3}{2} e_q (\bar{q} q)_{V-A}, \quad Q_{10} = (\bar{s}_\alpha b_\beta)_{V-A} \sum_q \frac{3}{2} e_q (\bar{q}_\beta q_\alpha)_{V-A}. \quad (\text{E.4})$$

Der magnetische bzw. chromomagnetische Dipoloperator ist definiert durch:

$$Q_{7\gamma} = \frac{e}{8\pi^2} m_b \bar{s} \sigma^{\mu\nu} (1 + \gamma_5) F_{\mu\nu} b = \frac{e}{4\pi^2} m_b \bar{s}_L \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} b_R, \quad (\text{E.5})$$

$$Q_{8g} = \frac{g_s}{8\pi^2} m_b \bar{s}_\alpha \sigma^{\mu\nu} (1 + \gamma_5) G_{\mu\nu}^a T_{\alpha\beta}^a b_\beta = \frac{g_s}{4\pi^2} m_b \bar{s}_{\alpha L} \sigma^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^a T_{\alpha\beta} b_{\beta R}. \quad (\text{E.6})$$

<sup>1</sup>Man beachte, dass die Konvention in Ref. [176, 177] bei der QCDF die zwei Operatoren vertauscht  $Q_1 \leftrightarrow Q_2$ .

Die gestrichenen Operatoren  $Q'$  erhält man aus  $Q$  durch die Ersetzung  $L \leftrightarrow R$ . Gerade für die RGE der (chromo-)magnetischen Operatoren in SUSY eignet sich die Konvention aus Ref. [218]. Darin wurde herausgestellt, dass man aufgrund von Gluino-Beiträgen die Operatorbasis des SM (wie in (E.1) ohne die gestrichenen Operatoren) erweitern muss. Insbesondere wird beim (chromo-)magnetischen Operator unterschieden, woher der Chiralitätsflip stammt. Er kann entweder wie im SM aus einem Flip im externen Bottomquark herrühren, was sich in einem Faktor  $m_b$  im Operator bemerkbar macht (siehe Gl. (E.5) und (E.6)). In SUSY kann auch der trilineare Term den Links-Rechts-Flip verursachen. Das Diagramm ist proportional zur Gluinomasse, welche im Wilson-Koeffizient enthalten ist. Damit ist der zugehörige Operator nur noch von der Dimension fünf. Die Konventionen von Ref. [218] lauten:

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = \mathcal{H}_{\text{eff}}^W + \mathcal{H}_{\text{eff}}^{\tilde{g}}, \quad \mathcal{H}_{\text{eff}}^W = -\frac{4G_F}{\sqrt{2}}\lambda_t \sum_i C_i(\mu)\mathcal{O}_i(\mu), \quad \mathcal{H}_{\text{eff}}^{\tilde{g}} \supset \sum_i C_{i,\tilde{g}}(\mu)\mathcal{O}_{i,\tilde{g}}(\mu). \quad (\text{E.7})$$

Hierbei enthält  $\mathcal{H}_{\text{eff}}^W$  die SM-Beiträge zu den Strom-Strom-, QCD-Pinguin-, magnetischen- und Leptonpaar-Operatoren. Letztere werden z.B. für  $b \rightarrow s\ell\bar{\ell}$  benötigt. Der unterschiedliche Vorfaktor  $-(\frac{4G_F}{\sqrt{2}})$  im Vergleich zu Gl. (E.1) stammt aus der Normierung der Operatoren, während die Wilson-Koeffizienten identisch normiert sind. Die Strom-Strom-Operatoren sind bis auf den Faktor vier wie in Ref. [154] definiert. Dagegen sind die QCD-Pinguinoperatoren nicht wie allgemein üblichen mit der  $P_L$ -Struktur definiert, da in Ref. [218] hauptsächlich Gluon-Beiträge betrachtet werden, welche nicht zwischen unterschiedlichen Chiralitäten unterscheiden. Den Hamiltonoperator  $\mathcal{H}_{\text{eff}}^{\tilde{g}}$  erhält man nach Ausintegrieren der Squarks und Gluinos. Er beinhaltet u.a. die magnetischen Operatoren, bei denen die Chiralitätsverletzung aus der Bottomquarkmasse oder der Gluinomasse stammt. Ferner enthält  $\mathcal{H}_{\text{eff}}^{\tilde{g}}$  vier-Quark-Operatoren mit Skalar-, Vektor- und Tensor-Lorentzstruktur, welche im Folgenden jedoch nicht gebraucht werden. Die magnetischen Operatoren, bei denen die Chiralitätsverletzung durch die Bottomquarkmasse signalisiert wird, lauten:

$$\mathcal{O}_7 = \frac{e}{16\pi^2}\bar{m}_b(\mu) (\bar{s}\sigma^{\mu\nu}P_R b) F_{\mu\nu}, \quad \mathcal{O}_8 = \frac{g_s}{16\pi^2}\bar{m}_b(\mu) (\bar{s}\sigma^{\mu\nu}T^a P_R b) G_{\mu\nu}^a. \quad (\text{E.8})$$

Die Normierung der Wilson-Koeffizienten der Gluino-Beiträge sollte so gewählt werden, dass die übliche Störungsreihenentwicklung der Wilson-Koeffizienten und der anomalen Dimensionsmatrix möglich ist. Dann kann man die ersten beiden Schritte der in Abschnitt 4.4.1 angegebenen Strategie genau wie im SM durchführen. Dazu müssen Faktoren  $\alpha_s$  aus dem Gluino-Beitrag zwischen Operator und Wilson-Koeffizient geeignet aufgeteilt werden, weswegen man  $\mathcal{O}_{7,8}$  neu definiert:

$$\mathcal{O}_i^{\text{neu}} = \frac{16\pi^2}{g_s^2}\mathcal{O}_i, \quad C_i^{\text{neu}} = \frac{g_s^2}{16\pi^2}C_i \quad i = 7, 8. \quad (\text{E.9})$$

Weiterhin erreicht man durch eine passende Wahl der  $\alpha_s$  in  $\mathcal{H}_{\text{eff}}^{\tilde{g}}$ , dass der SM-Hamiltonoperator  $\mathcal{H}_{\text{eff}}^W$  und der Gluino-induzierte  $\mathcal{H}_{\text{eff}}^{\tilde{g}}$  getrennt voneinander renormiert werden können. Die magnetischen Operatoren in  $\mathcal{H}_{\text{eff}}^{\tilde{g}}$  mit Chiralitätsflip durch die Bottomquarkmasse lauten:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{7b,\tilde{g}} &= eg_s^2(\mu)\bar{m}_b(\mu) (\bar{s}\sigma^{\mu\nu}P_R b) F_{\mu\nu}, & \mathcal{O}'_{7b,\tilde{g}} &= eg_s^2(\mu)\bar{m}_b(\mu) (\bar{s}\sigma^{\mu\nu}P_L b) F_{\mu\nu}, \\ \mathcal{O}_{8b,\tilde{g}} &= g_s(\mu)g_s^2(\mu)\bar{m}_b(\mu) (\bar{s}\sigma^{\mu\nu}T^a P_R b) G_{\mu\nu}^a, & \mathcal{O}'_{8b,\tilde{g}} &= g_s(\mu)g_s^2(\mu)\bar{m}_b(\mu) (\bar{s}\sigma^{\mu\nu}T^a P_L b) G_{\mu\nu}^a. \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

Magnetische Operatoren, bei denen die trilinearen Terme den Links-Rechts-Flip induzieren und die Gluinomasse beinhalten, sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{7\tilde{g},\tilde{g}} &= eg_s^2(\mu) (\bar{s}\sigma^{\mu\nu}P_R b) F_{\mu\nu}, & \mathcal{O}'_{7\tilde{g},\tilde{g}} &= eg_s^2(\mu) (\bar{s}\sigma^{\mu\nu}P_L b) F_{\mu\nu}, \\ \mathcal{O}_{8\tilde{g},\tilde{g}} &= g_s(\mu)g_s^2(\mu) (\bar{s}\sigma^{\mu\nu}T^a P_R b) G_{\mu\nu}^a, & \mathcal{O}'_{8\tilde{g},\tilde{g}} &= g_s(\mu)g_s^2(\mu) (\bar{s}\sigma^{\mu\nu}T^a P_L b) G_{\mu\nu}^a. \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

Die Konventionen von Ref. [198] sind wieder anders, können jedoch mit den genannten Hilfen leicht in die oben beschriebenen beiden Konventionen umgerechnet werden.

## E.2 $\Delta B = 1$ -Wilson-Koeffizienten

Die SUSY-Beiträge zu den Wilson-Koeffizienten können der Literatur entnommen werden. Bis auf einige Vorzeichen, die schon in Ref. [146] erwähnt wurden, stimmen die Ergebnisse aus Ref. [218,219] und Ref. [197] überein, und mit einem Vorzeichenwechsel in  $c_4^q$  vor der Funktion  $G$  stimmt auch Ref. [198]. Die Masseneinsatznäherung (siehe z.B. Ref. [196, 220–222] und Anhang E.4) ist im CMM-Modell aufgrund des großen atmosphärischen Mischungswinkels nicht anwendbar. Wir werden sie jedoch im generischen MSSM anwenden, wenn wir dieses und das CMM-Modell im Prozess  $B_s \rightarrow \phi\phi$  miteinander vergleichen. In Ref. [146] und Ref. [198] findet man Näherungen für den Fall von großer Mischung zwischen der zweiten und dritten Generation. Da wir die Konvention von Ref. [41] verwenden, gelten die nachstehenden Umrechnungsrelationen:

$$\Gamma_{DL}^{iI} = Z_D^{Ii}, \quad \Gamma_{DR}^{iI} = Z_D^{(I+3)i}, \quad \Gamma_{UL}^{iI} = Z_U^{Ii*}, \quad \Gamma_{UR}^{iI} = Z_U^{(I+3)i*}. \quad (\text{E.12})$$

QCD-Box- und Pinguin-Gluino-Beiträge mit der Normierung von Gl. (E.1), den Funktionen in Abschnitt A.3.2 und  $x_{kg} = x_{gk}^{-1} = m_{d_k}^2/m_g^2$  sind gegeben durch:

$$C_3^{g,\text{box}} = \frac{-\sqrt{2}}{4G_F\lambda_t} \frac{\alpha_s^2}{m_g^2} \sum_{k,l=1}^6 Z_D^{2k*} Z_D^{3k} Z_D^{2l*} Z_D^{2l} \underbrace{\left[ -\frac{1}{9}B_1(x_{kg}, x_{lg}) - \frac{5}{9}B_2(x_{kg}, x_{lg}) \right]}_{=\frac{1}{36}[G(x_{kg}, x_{lg}) - 20F(x_{kg}, x_{lg})]}, \quad (\text{E.13})$$

$$C_4^{g,\text{box}} = \frac{-\sqrt{2}}{4G_F\lambda_t} \frac{\alpha_s^2}{m_g^2} \sum_{k,l=1}^6 Z_D^{2k*} Z_D^{3k} Z_D^{2l*} Z_D^{2l} \left[ -\frac{7}{3}B_1(x_{kg}, x_{lg}) + \frac{1}{3}B_2(x_{kg}, x_{lg}) \right], \quad (\text{E.14})$$

$$C_5^{g,\text{box}} = \frac{-\sqrt{2}}{4G_F\lambda_t} \frac{\alpha_s^2}{m_g^2} \sum_{k,l=1}^6 Z_D^{2k*} Z_D^{3k} Z_D^{5l*} Z_D^{5l} \left[ \frac{10}{9}B_1(x_{kg}, x_{lg}) + \frac{1}{18}B_2(x_{kg}, x_{lg}) \right], \quad (\text{E.15})$$

$$C_6^{g,\text{box}} = \frac{-\sqrt{2}}{4G_F\lambda_t} \frac{\alpha_s^2}{m_g^2} \sum_{k,l=1}^6 Z_D^{2k*} Z_D^{3k} Z_D^{5l*} Z_D^{5l} \left[ -\frac{2}{3}B_1(x_{kg}, x_{lg}) + \frac{7}{6}B_2(x_{kg}, x_{lg}) \right], \quad (\text{E.16})$$

$$C_3^{g,\text{peng}} = \frac{-\sqrt{2}}{4G_F\lambda_t} \frac{\alpha_s^2}{m_g^2} \sum_{k=1}^6 Z_D^{2k*} Z_D^{3k} \underbrace{\left[ -\frac{1}{18}C_1(x_{kg}) + \frac{1}{2}C_2(x_{kg}) \right]}_{=\frac{1}{3}x_{gk} \left[ -\frac{1}{6}F_6(x_{gk}) + \frac{3}{2}F_5(x_{gk}) \right]} \quad (\text{E.17})$$

$$= \frac{-\sqrt{2}}{4G_F\lambda_t} \alpha_s^2 \frac{1}{3} \sum_{k=1}^6 \frac{1}{m_{d_k}^2} Z_D^{2k*} Z_D^{3k} \left[ -\frac{1}{6}F_6(x_{gk}) + \frac{3}{2}F_5(x_{gk}) \right], \quad (\text{E.18})$$

$$C_4^{g,\text{peng}} = \frac{-\sqrt{2}}{4G_F\lambda_t} \frac{\alpha_s^2}{m_g^2} \sum_{k=1}^6 Z_D^{2k*} Z_D^{3k} \left[ \frac{1}{6}C_1(x_{kg}) - \frac{3}{2}C_2(x_{kg}) \right], \quad (\text{E.19})$$

$$C_5^{g,\text{peng}} = \frac{-\sqrt{2}}{4G_F\lambda_t} \frac{\alpha_s^2}{m_g^2} \sum_{k=1}^6 Z_D^{2k*} Z_D^{3k} \left[ -\frac{1}{18}C_1(x_{kg}) + \frac{1}{2}C_2(x_{kg}) \right], \quad (\text{E.20})$$

$$C_6^{g,\text{peng}} = \frac{-\sqrt{2}}{4G_F\lambda_t} \frac{\alpha_s^2}{m_g^2} \sum_{k=1}^6 Z_D^{2k*} Z_D^{3k} \left[ \frac{1}{6}C_1(x_{kg}) - \frac{3}{2}C_2(x_{kg}) \right]. \quad (\text{E.21})$$

Die gestrichenen Wilson-Koeffizienten erhält man durch die Ersetzung  $\Gamma_{DL} \leftrightarrow \Gamma_{DR}$ , was einer Erhöhung/Erniedrigung des ersten Index in  $Z_D$  um drei entspricht. Es hängt von der Definition der Operatoren ab (mit oder ohne  $\sum_q$ ), ob die Box-Beiträge zu den Wilson-Koeffizienten vom Quarkflavour  $q$  abhängen. Pinguin-Beiträge hängen jedoch nicht vom Flavour  $q$  ab. Eine ausführlichere Anmerkung dazu kann in Ref. [198] gefunden werden. Nun kommen wir zu den Gluino-Beiträgen in den Dipoloperatoren mit der Konvention von Ref. [218] ( $Q_d = -\frac{1}{3}$ ,  $Q_u = \frac{2}{3}$ ,  $C(R) = \frac{4}{3}$ ):

$$C_{7b,\tilde{g}} = -\frac{Q_d}{16\pi^2} C(R) \sum_{k=1}^6 \frac{1}{m_{\tilde{d}_k}^2} Z_D^{3k} Z_D^{2k*} F_2(x_{gk}), \quad (\text{E.22})$$

$$C_{7\tilde{g},\tilde{g}} = m_{\tilde{g}} \frac{Q_d}{16\pi^2} C(R) \sum_{k=1}^6 \frac{1}{m_{\tilde{d}_k}^2} Z_D^{6k} Z_D^{2k*} F_4(x_{gk}), \quad (\text{E.23})$$

$$C_{8b,\tilde{g}} = -\frac{1}{16\pi^2} \sum_{k=1}^6 \frac{1}{m_{\tilde{d}_k}^2} Z_D^{3k} Z_D^{2k*} \left[ -\frac{1}{6} F_2(x_{gk}) - \frac{3}{2} F_1(x_{gk}) \right], \quad (\text{E.24})$$

$$C_{8\tilde{g},\tilde{g}} = m_{\tilde{g}} \frac{1}{16\pi^2} \sum_{k=1}^6 \frac{1}{m_{\tilde{d}_k}^2} Z_D^{6k} Z_D^{2k*} \left[ -\frac{1}{6} F_4(x_{gk}) - \frac{3}{2} F_3(x_{gk}) \right]. \quad (\text{E.25})$$

Analoges gilt für die paritätsgeflippten Koeffizienten mit  $Z_D^{Ii} \leftrightarrow Z_D^{(I+3)i}$ . Falls wir LR-Mischung vernachlässigen, verschwinden die Beiträge zu  $C_{7/8\tilde{g},\tilde{g}}^{(l)}$ . Setzt man nun alles zusammen, erhält man mit den Operatoren und Normierung wie in Gl. (E.1) für den chromomagnetischen Teil, welcher die CMM-spezifischen Beiträge enthält:

$$C'_{8g} = \frac{-\sqrt{2}}{2G_F \lambda_t} 16\alpha_s \pi^3 \left[ C'_{8b,\tilde{g}} + \frac{1}{m_b} C'_{8\tilde{g},\tilde{g}} \right] = \frac{\sqrt{2}}{2G_F \lambda_t} \sum_{k=1}^6 \frac{\alpha_s \pi}{m_{\tilde{d}_k}^2} \left[ Z_D^{6k} Z_D^{5k*} \left[ -\frac{1}{6} F_2(x_{gk}) - \frac{3}{2} F_1(x_{gk}) \right] - \frac{m_{\tilde{g}}}{m_b} Z_D^{3k} Z_D^{5k*} \left[ -\frac{1}{6} F_4(x_{gk}) - \frac{3}{2} F_3(x_{gk}) \right] \right]. \quad (\text{E.26})$$

Die SM-Wilson-Koeffizienten sind bekannt und können Ref. [154,217] entnommen werden. Die geladenen Higgs- und Chargino-Beiträge zu  $C_{7\gamma}$  und  $C_{8g}$  wurden in Ref. [219] berechnet und sind gegeben durch:

$$\begin{aligned} C_7(\mu_W) = & -\frac{1}{2} \left[ \cot^2 \beta x_{tH} (Q_u F_1(x_{tH}) + F_2(x_{tH})) + x_{tH} (Q_u F_3(x_{tH}) + F_4(x_{tH})) \right] \\ & + \frac{1}{2V} \sum_{j=1}^6 \sum_{l=1}^2 \frac{1}{m_{\tilde{u}_j}^2} B_{2j\ell}^d B_{3j\ell}^{d*} \left[ F_1(x_{\tilde{\chi}_\ell^\pm \tilde{u}_j}) + Q_u F_2(x_{\tilde{\chi}_\ell^\pm \tilde{u}_j}) \right] \\ & + \frac{1}{2V} \sum_{j=1}^6 \sum_{l=1}^2 \frac{1}{m_{\tilde{u}_j}^2} \frac{m_{\tilde{\chi}_\ell^\pm}}{m_b} B_{2j\ell}^d A_{3j\ell}^{d*} \left[ F_3(x_{\tilde{\chi}_\ell^\pm \tilde{u}_j}) + Q_u F_4(x_{\tilde{\chi}_\ell^\pm \tilde{u}_j}) \right] \\ & + \frac{Q_d}{2V} \sum_{j=1}^6 \sum_{l=1}^4 \frac{1}{m_{\tilde{d}_j}^2} \left[ D_{2j\ell}^d D_{3j\ell}^{d*} F_2(x_{\tilde{\chi}_\ell^0 \tilde{d}_j}) + \frac{m_{\tilde{\chi}_\ell^0}}{m_b} D_{2j\ell}^d C_{3j\ell}^{d*} F_4(x_{\tilde{\chi}_\ell^0 \tilde{d}_j}) \right], \quad (\text{E.27}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_8(\mu_W) = & -\frac{1}{2} \left[ \cot^2 \beta x_{tH} F_1(x_{tH}) + x_{tH} F_3(x_{tH}) \right] \\ & + \frac{1}{2V} \sum_{j=1}^6 \sum_{l=1}^2 \frac{1}{m_{\tilde{u}_j}^2} \left[ B_{2j\ell}^d B_{3j\ell}^{d*} F_2(x_{\tilde{\chi}_\ell^\pm \tilde{u}_j}) + \frac{m_{\tilde{\chi}_\ell^\pm}}{m_b} B_{2j\ell}^d A_{3j\ell}^{d*} F_4(x_{\tilde{\chi}_\ell^\pm \tilde{u}_j}) \right] \end{aligned}$$



$$+ \frac{1}{2V} \sum_{j=1}^6 \sum_{l=1}^4 \frac{1}{m_{\tilde{d}_j}^2} \left[ D_{2j\ell}^d D_{3j\ell}^{d*} F_2(x_{\tilde{\chi}_\ell^0 \tilde{d}_j}) + \frac{m_{\tilde{\chi}_\ell^0}}{m_b} D_{2j\ell}^d C_{3j\ell}^{d*} F_4(x_{\tilde{\chi}_\ell^0 \tilde{d}_j}) \right], \quad (\text{E.28})$$

$$\begin{aligned} C_7'(\mu_W) = & -\frac{1}{2} \frac{m_s m_b}{m_t^2} \tan^2 \beta x_{tH} (Q_u F_1(x_{tH}) + F_2(x_{tH})) \\ & + \frac{1}{2V} \sum_{j=1}^6 \sum_{l=1}^2 \frac{1}{m_{\tilde{u}_j}^2} A_{2j\ell}^d A_{3j\ell}^{d*} \left[ F_1(x_{\tilde{\chi}_\ell^\pm \tilde{u}_j}) + Q_u F_2(x_{\tilde{\chi}_\ell^\pm \tilde{u}_j}) \right] \\ & + \frac{1}{2V} \sum_{j=1}^6 \sum_{l=1}^2 \frac{1}{m_{\tilde{u}_j}^2} \frac{m_{\tilde{\chi}_\ell^\pm}}{m_b} A_{2j\ell}^d B_{3j\ell}^{d*} \left[ F_3(x_{\tilde{\chi}_\ell^\pm \tilde{u}_j}) + Q_u F_4(x_{\tilde{\chi}_\ell^\pm \tilde{u}_j}) \right] \\ & + \frac{Q_d}{2V} \sum_{j=1}^6 \sum_{l=1}^4 \frac{1}{m_{\tilde{d}_j}^2} \left[ C_{2j\ell}^d C_{3j\ell}^{d*} F_2(x_{\tilde{\chi}_\ell^0 \tilde{d}_j}) + \frac{m_{\tilde{\chi}_\ell^0}}{m_b} C_{2j\ell}^d D_{3j\ell}^{d*} F_4(x_{\tilde{\chi}_\ell^0 \tilde{d}_j}) \right], \end{aligned} \quad (\text{E.29})$$

$$\begin{aligned} C_8'(\mu_W) = & -\frac{1}{2} \frac{m_s m_b}{m_t^2} \tan^2 \beta x_{tH} F_1(x_{tH}) \\ & + \frac{1}{2V} \sum_{j=1}^6 \sum_{l=1}^2 \frac{1}{m_{\tilde{u}_j}^2} \left[ A_{2j\ell}^d A_{3j\ell}^{d*} F_2(x_{\tilde{\chi}_\ell^\pm \tilde{u}_j}) + \frac{m_{\tilde{\chi}_\ell^\pm}}{m_b} A_{2j\ell}^d B_{3j\ell}^{d*} F_4(x_{\tilde{\chi}_\ell^\pm \tilde{u}_j}) \right] \\ & + \frac{1}{2V} \sum_{j=1}^6 \sum_{l=1}^4 \frac{1}{m_{\tilde{d}_j}^2} \left[ C_{2j\ell}^d C_{3j\ell}^{d*} F_2(x_{\tilde{\chi}_\ell^0 \tilde{d}_j}) + \frac{m_{\tilde{\chi}_\ell^0}}{m_b} C_{2j\ell}^d D_{3j\ell}^{d*} F_4(x_{\tilde{\chi}_\ell^0 \tilde{d}_j}) \right], \end{aligned} \quad (\text{E.30})$$

mit den Abkürzungen  $x_{\tilde{\chi}_\ell^0, \pm \tilde{q}_j} = m_{\tilde{\chi}_\ell^0, \pm}^2 / m_{\tilde{q}_j}^2$ ,  $x_{tH} = m_t^2 / m_{H^\pm}^2$ ,  $V = (4G_F V_{tb} V_{ts}^*) / \sqrt{2}$  und

$$A_{ijl}^d = \frac{e}{\sqrt{2} \sin \theta_W M_W \cos \beta} \hat{M}_d^{ik} Z_U^{kj} Z_-^{2l}, \quad (\text{E.31})$$

$$B_{ijl}^d = \frac{e}{\sqrt{2} \sin \theta_W M_W \sin \beta} \left( V_{\text{CKM}}^\dagger \hat{M}_u \right)^{ik} Z_U^{(k+3)j} Z_+^{2l*} - \frac{e}{\sin \theta_W} Z_U^{ij} Z_+^{1l*}, \quad (\text{E.32})$$

$$C_{ijl}^d = \frac{e}{\sqrt{2} \sin \theta_W M_W \cos \beta} \hat{M}_d^{ik} Z_D^{kj*} Z_N^{3l} - \frac{\sqrt{2}e}{\cos \theta_W} Q_d Z_D^{(i+3)j*} Z_N^{1l}, \quad (\text{E.33})$$

$$D_{ijl}^d = \frac{e}{\sqrt{2} \sin \theta_W M_W \cos \beta} \hat{M}_d^{ik} Z_D^{(k+3)j*} Z_N^{3l*} + \frac{1}{\sqrt{2}} Z_D^{ij*} \left[ (2Q_d + 1) \frac{e}{\cos \theta_W} Z_N^{1l*} - \frac{e}{\sin \theta_W} Z_N^{2l*} \right], \quad (\text{E.34})$$

wobei  $\hat{M}_{u,d}$  diagonale  $3 \times 3$ -Matrizen der Up- und Downquarkmassen sind.

### E.3 Renormierungsgruppengleichungen

Mit Hilfe der Renormierungsgruppengleichungen werden die Wilson-Koeffizienten von  $\mu_W$  zur niedrigen Skala  $\mu_b$  entwickelt. Die Evolutionsmatrix  $U_{ij}(\mu_b, \mu_W)$  berücksichtigt die Resummation der Terme proportional zu  $(\alpha_s(M_W) \log m_b^2 / M_W^2)^n$  (LO),  $(\alpha_s^2(M_W) \log m_b^2 / M_W^2)^n$  (NLO). Es gilt:

$$C_i(\mu_b) = \sum_j U_{ij}(\mu_b, \mu_W) C_j(\mu_W). \quad (\text{E.35})$$

Für die starke Kopplungskonstante  $\alpha_s(\mu)$  zwischen  $\mu_W$  und  $\mu_b$  wird die 5-Flavourtheorie verwendet, in der  $\alpha_s(M_Z) = 0.1184$  gilt [200]. Diese ist in LO und NLO gegeben durch:

$$\alpha_s^{\text{LL}}(\mu) = \frac{\alpha_s(M_Z)}{1 - \beta_0 \frac{\alpha_s(M_Z)}{2\pi} \log\left(\frac{M_Z}{\mu}\right)}, \quad (\text{E.36})$$

$$\alpha_s^{\text{NLO}}(\mu) = \frac{\alpha_s(M_Z)}{1 - \beta_0 \frac{\alpha_s(M_Z)}{2\pi} \log\left(\frac{M_Z}{\mu}\right)} \left( 1 - \frac{\beta_1 \alpha_s(M_Z)}{\beta_0 4\pi} \frac{\log\left(1 - \beta_0 \frac{\alpha_s(M_Z)}{2\pi} \log\left(\frac{M_Z}{\mu}\right)\right)}{1 - \beta_0 \frac{\alpha_s(M_Z)}{2\pi} \log\left(\frac{M_Z}{\mu}\right)} \right), \quad (\text{E.37})$$

wobei  $\beta_0 = 11 - \frac{2}{3}f$ ,  $\beta_1 = 102 - \frac{38}{3}f$  und  $f = 5$  ist. Die Skalenabhängigkeit der Wilson-Koeffizienten ist durch die anomale Dimensionsmatrix  $\gamma$  bestimmt<sup>2</sup>:

$$\mu \frac{d}{d\mu} \vec{C}(\mu) = \gamma^\top \vec{C}(\mu). \quad (\text{E.38})$$

Die anomale Dimensionsmatrix unterscheidet nicht zwischen gestrichenen und ungestrichenen Größen, da die QCD-Korrekturen invariant unter Parität sind. Sie wird entwickelt nach Potenzen von  $\alpha_s$ :  $\gamma = \gamma^{(0)} \frac{\alpha_s}{4\pi} + \gamma^{(1)} \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2 + \mathcal{O}(\alpha_s^3)$ , wobei

$$\gamma^{(0)} = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & -\frac{2}{9} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{22}{9} & \frac{22}{3} & -\frac{4}{9} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 6 - \frac{2f}{9} & -2 + \frac{2f}{3} & -\frac{2f}{9} & \frac{2f}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -\frac{2f}{9} & \frac{2f}{3} & -\frac{2f}{9} & -16 + \frac{2f}{3} \end{pmatrix}, \quad (\text{E.39})$$

$$\gamma^{(1)} = \begin{pmatrix} -\frac{21}{2} - \frac{2f}{9} & \frac{7}{2} + \frac{2f}{3} & \frac{79}{9} & -\frac{7}{3} & -\frac{65}{9} & -\frac{7}{3} \\ \frac{7}{2} + \frac{2f}{3} & -\frac{21}{2} - \frac{2f}{9} & -\frac{202}{243} & \frac{1354}{81} & -\frac{1192}{243} & \frac{904}{81} \\ 0 & 0 & -\frac{5911}{486} + \frac{71f}{9} & \frac{5983}{162} + \frac{f}{3} & -\frac{2384}{243} - \frac{71f}{9} & \frac{1808}{81} - \frac{f}{3} \\ 0 & 0 & \frac{379}{18} + \frac{56f}{243} & -\frac{91}{6} + \frac{808f}{81} & -\frac{130}{9} - \frac{502f}{243} & -\frac{14}{3} + \frac{646f}{81} \\ 0 & 0 & -\frac{61f}{9} & -\frac{11f}{3} & \frac{71}{3} + \frac{61f}{9} & -99 + \frac{11f}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{682f}{243} & \frac{106f}{81} & -\frac{225}{2} + \frac{1676f}{243} & -\frac{1343}{6} + \frac{1348f}{81} \end{pmatrix}.$$

Die Evolutionsmatrix ist gegeben durch [154]:

$$U(\mu, \mu_W) = \left[ \mathbb{1} + \frac{\alpha_s(\mu)}{4\pi} J \right] U^{(0)}(\mu, \mu_W) \left[ \mathbb{1} - \frac{\alpha_s(\mu_W)}{4\pi} J \right]. \quad (\text{E.40})$$

Hierbei wird die Evolutionsmatrix in führender Ordnung bestimmt durch:

$$U^{(0)}(\mu, \mu_W) = V \left( \left[ \frac{\alpha_s(\mu_W)}{\alpha_s(\mu)} \right]^{\frac{\tilde{\gamma}^{(0)}}{2\beta_0}} \right)_D V^{-1}, \quad (\text{E.41})$$

<sup>2</sup>Kurze Erläuterung zur Namensgebung: Falls  $x \propto \mu^D$  ist, erfüllt es die Differentialgleichung  $\mu \frac{d}{d\mu} x = Dx$ . Vergleicht man dies mit Gl. (E.38), so entspricht  $D$  der anomalen Dimensionsmatrix  $\gamma$ . In der klassischen Mechanik ist  $D \in \mathbb{N}$ . In der Quantenfeldtheorie kann  $D$  jedoch reell oder sogar komplex sein. Die Skala geht nicht nur naiv in die Physik ein (durch Dimensionsanalyse), sondern auch über Logarithmen (durch Quantenkorrekturen).

wobei  $V$  die Matrix  $\gamma^{(0)T}$  diagonalisiert, d.h.  $\gamma_D^{(0)} = V^{-1}\gamma^{(0)T}V$ .  $\vec{\gamma}^{(0)}$  ist ein Vektor, der die Diagonalelemente von  $\gamma_D^{(0)}$  enthält. Die Größe  $J$  wird berechnet durch:

$$G = V^{-1}\gamma^{(1)T}V, \quad H_{ij} = \delta_{ij}\gamma_i^{(0)}\frac{\beta_1}{2\beta_0^2} - \frac{G_{ij}}{2\beta_0 + \gamma_i^{(0)} - \gamma_j^{(0)}} \Rightarrow J = VHV^{-1}. \quad (\text{E.42})$$

Möchte man die Evolutionsmatrix nur bis zur führenden Ordnung berechnen, muss in der Formel für  $U^{(0)}$  in Gl. (E.41)  $\alpha_s^{\text{LL}}(\mu)$  verwendet werden. Wenn die Evolutionsmatrix  $U$  in NLO berechnet werden soll, muss in Gl. (E.41) jedoch  $\alpha_s^{\text{NLO}}(\mu)$  eingesetzt und Gl. (E.40) bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$  entwickelt werden:

$$U^{(1)}(\mu, \mu_W) = U^{(0)}(\mu, \mu_W) + \frac{\alpha_s(\mu)}{4\pi}JU^{(0)}(\mu, \mu_W) - \frac{\alpha_s(\mu_W)}{4\pi}U^{(0)}(\mu, \mu_W)J. \quad (\text{E.43})$$

Für die Entwicklung der SUSY-Koeffizienten lässt man den letzte Term weg. Der Grund ist folgender: Entwickeln wir den Wilson-Koeffizienten in  $\alpha_s$  nach

$$C(\mu_t) = C_0 + \frac{\alpha_s(\mu_t)}{4\pi}C_1, \quad (\text{E.44})$$

so sind sowohl  $C_0$  als auch  $\frac{\gamma^{(0)}}{2\beta_0}$  schemenunabhängig, während  $C_1$ ,  $J$  und  $\langle Q(\mu) \rangle$  schemenabhängig sind. Die Schemenabhängigkeit von  $C_1$  kompensiert die von  $J$  in der hinteren Klammer von  $U(\mu, \mu_t)$ , d.h. insbesondere, dass die letzte Klammer weggelassen werden sollte, wenn man  $C_1$  nicht kennt. Die Schemenabhängigkeit des Matrixelements wird durch die von  $J$  in der ersten Klammer kompensiert. Des Weiteren müsste das Laufen der SUSY-Wilson-Koeffizienten bei  $M_{\text{SUSY}}$  und nicht bei  $M_W$  beginnen. Dies ist im Prinzip mit der Evolutionsmatrix kein Problem:  $U(m_b, M_{\text{SUSY}})C(M_{\text{SUSY}})$ , wobei bei der Top-Schwelle die Anzahl der Flavour angepasst werden muss. Allerdings ist der Fehler, den man macht, wenn man erst bei  $M_W$  beginnt, gerade von der Größenordnung wie die QCD-Korrekturen. Diese wurden bei den SUSY-Beiträgen zu den Wilson-Koeffizienten jedoch nicht berücksichtigt.

$$\frac{\alpha_s(\mu_W)}{4\pi}\gamma^{(0)}\log\left(\frac{M_{\text{SUSY}}}{M_W}\right) \approx 0.01 \cdot 8 \cdot 2 = 0.16 \approx \mathcal{O}(\alpha_s). \quad (\text{E.45})$$

Mit dieser  $6 \times 6$  Matrix  $U^{(1)}(\mu, \mu_W)$  kann die Entwicklung von  $C_1^{(l)}$ - $C_6^{(l)}$  berechnet werden. Die Entwicklung der  $C_{7\gamma}$ - und  $C_{8g}$ -Koeffizienten im SM kann in Ref. [154] nachgeschlagen werden ( $\eta = \frac{\alpha_s(\mu_W)}{\alpha_s(\mu_b)}$ ):

$$C_{7\gamma}^{\text{eff}}(\mu_b) = \eta^{\frac{16}{23}}C_{7\gamma}(\mu_W) + \frac{8}{3}\left(\eta^{\frac{14}{23}} - \eta^{\frac{16}{23}}\right)C_{8g}(\mu_W) + C_2(\mu_W)\sum_{i=1}^8 h_i\eta^{a_i} \quad (\text{E.46})$$

$$\approx 0.695C_{7\gamma}(\mu_W) + 0.085C_{8g}(\mu_W) - 0.158C_2(\mu_W),$$

$$C_{8g}^{\text{eff}}(\mu_b) = \eta^{\frac{14}{23}}C_{8g}(\mu_W) + C_2(\mu_W)\sum_{i=1}^8 \bar{h}_i\eta^{a_i} \quad (\text{E.47})$$

$$\approx 0.727C_{8g}(\mu_W) - 0.074C_2(\mu_W). \quad (\text{E.48})$$

Die geladenen Higgs- und Chargino-Beiträge  $C_{7\gamma}^{\tilde{\chi}H}$  und  $C_{8g}^{\tilde{\chi}H}$  entwickeln sich auf die gleiche Weise wie die SM-Koeffizienten. Die Evolution der Gluino-Beiträge  $C_{7/8b,\tilde{g}}$ ,  $C_{7/8\tilde{g},\tilde{g}}$  wird in

Ref. [218] studiert und ist gegeben durch<sup>3</sup>:

$$C_{7b,\tilde{g}}(\mu_b) = \eta^{\frac{39}{23}} C_{7b,\tilde{g}}(\mu_W) + \frac{8}{3} \left( \eta^{\frac{37}{23}} - \eta^{\frac{39}{23}} \right) C_{8b,\tilde{g}}(\mu_W), \quad (\text{E.49})$$

$$C_{7\tilde{g},\tilde{g}}(\mu_b) = \eta^{\frac{27}{23}} C_{7\tilde{g},\tilde{g}}(\mu_W) + \frac{8}{3} \left( \eta^{\frac{25}{23}} - \eta^{\frac{27}{23}} \right) C_{8\tilde{g},\tilde{g}}(\mu_W), \quad (\text{E.50})$$

$$C_{8b,\tilde{g}}(\mu_b) = \eta^{\frac{37}{23}} C_{8b,\tilde{g}}(\mu_W), \quad (\text{E.51})$$

$$C_{8\tilde{g},\tilde{g}}(\mu_b) = \eta^{\frac{25}{23}} C_{8\tilde{g},\tilde{g}}(\mu_W), \quad (\text{E.52})$$

und analog für die gestrichenen Koeffizienten. Wie oben addieren sich diese in der Konvention von Gl. (E.1) nach:

$$C_{8g}(\mu_b) = \frac{-\sqrt{2}}{2G_F \lambda_t} 16\alpha_s \pi^3 \left[ C_{8b,\tilde{g}}(\mu_b) + \frac{1}{m_b} C_{8\tilde{g},\tilde{g}}(\mu_b) \right]. \quad (\text{E.53})$$

## E.4 $\Delta B = 2$ - und $\Delta B = 1$ -Übergänge im generischen MSSM in MIA

Am Ende von Abschnitt 4.4.5 geben wir einen kurzen Vergleich zwischen dem CMM-Modell und dem generischen MSSM bezüglich der  $CP$ -Asymmetrien im  $B_s \rightarrow J/\psi\phi$  und  $B_s \rightarrow \phi\phi$  Zerfall an. Wir benötigen dazu sowohl die  $B_s - \overline{B}_s$ -Mischung, also den  $\Delta B = 2$ -Hamiltonoperator, als auch  $\Delta B = 1$ -Übergänge. Die Wilson-Koeffizienten werden jeweils in Masseneinsatznäherung (MIA) angegeben. Wir orientieren uns an Ref. [59, 66, 195, 196].

### $B_s - \overline{B}_s$ -Mischung

Anstatt die Wilson-Koeffizienten bei der niedrigen Skala  $\mu_b$  auszuwerten, verwenden wir die Methode aus Ref. [59]. Darin werden die hadronischen Matrixelemente mittels sogenannter  $P$ -Faktoren bei  $m_t^{\text{pole}}$  ausgedrückt, so dass die Wilson-Koeffizienten nur bei  $m_t^{\text{pole}}$  berechnet werden müssen. Im Gegensatz zur Berechnung der  $B_s - \overline{B}_s$ -Mischung im CMM-Modell wurde hier als hohe Skala  $m_t^{\text{pole}}$  und nicht  $M_Z$  oder  $M_W$  verwendet. Ferner wird auch wieder das Laufen zwischen  $M_{\text{SUSY}}$  und  $\mu_{\text{ew}} = \mathcal{O}(m_t, M_Z)$  vernachlässigt. Deshalb kann für die laufende Kopplungskonstante  $\alpha_s$  wieder die  $f = 5$ -Flavourtheorie verwendet werden. In Ref. [195] wurde das sogenannte RIMOM-Schema verwendet, während in Ref. [59] das  $\overline{\text{MS}}$ -Schema gewählt wurde, wo ferner die Berechnung der sog. Bag-Parameter durch Heavy-Quark-Relation und aktuelle Gitter-QCD-Ergebnisse verbessert wurde. Der effektive  $\Delta B = 2$ -Hamiltonoperator im generischen MSSM kann als  $\mathcal{H}_{\text{eff}}^{\Delta B=2} = \sum_{i=1}^8 C_i(\mu) Q_i(\mu)$  geschrieben werden. Die Massendifferenz  $\Delta M_s = 2|M_{12}|$  ist dann gegeben durch:

$$M_{12} = \frac{\langle \overline{B}_s | \mathcal{H}_{\text{eff}}^{\Delta B=2} | B_s \rangle}{2m_{B_s}}. \quad (\text{E.54})$$

Als Operatorbasis wählen wir (links Notation aus Ref. [59]; rechts aus Ref. [195]):

$$Q_1^{VLL} = (\overline{b}_L \gamma_\mu q_L)(\overline{b}_L \gamma^\mu q_L) = Q_1, \quad (\text{E.55})$$

$$Q_1^{SLL} = (\overline{b}_R q_L)(\overline{b}_R q_L) = Q_2, \quad (\text{E.56})$$

<sup>3</sup>Dimension-5-Operatoren  $C_{7/8\tilde{g},\tilde{g}}$  und  $C'_{7/8\tilde{g},\tilde{g}}$  mischen nicht mit Dimension-6 magnetischen Dipoloperatoren.

$$Q_2^{SLL} = (\bar{b}_R^\alpha q_L^\beta)(\bar{b}_R^\beta q_L^\alpha) = Q_3, \quad (\text{E.57})$$

$$Q_1^{VRR} = (\bar{b}_R \gamma_\mu q_R)(\bar{b}_R \gamma^\mu q_R) = \tilde{Q}_1, \quad (\text{E.58})$$

$$Q_1^{SRR} = (\bar{b}_L q_R)(\bar{b}_L q_R) = \tilde{Q}_2, \quad (\text{E.59})$$

$$Q_2^{SRR} = (\bar{b}_L^\alpha q_R^\beta)(\bar{b}_L^\beta q_R^\alpha) = \tilde{Q}_3, \quad (\text{E.60})$$

$$Q_2^{LR} = (\bar{b}_R q_L)(\bar{b}_L q_R) = Q_4, \quad (\text{E.61})$$

$$Q_1^{LR} = (\bar{b}_L \gamma_\mu q_L)(\bar{b}_R \gamma^\mu q_R) = -2Q_5 = -2(\bar{q}_R^\alpha b_L^\beta)(\bar{q}_L^\beta b_R^\alpha). \quad (\text{E.62})$$

Die Umrechnung benötigt man, um die Normierung der Wilson-Koeffizienten aus Ref. [195] korrekt an die Operatorbasis aus Ref. [59] anzupassen. Die hadronischen Matrixelemente können durch sogenannte Bag-Parameter parametrisiert werden:  $\langle \bar{B}_s | Q_i(\mu) | B_s \rangle \propto m_{B_s}^2 f_{B_s}^2 B_i(\mu)$ . Die unterschiedliche Normierung um einen Faktor  $2m_{B_s}$  zwischen Ref. [59] und Ref. [195] rührt von der Normierung der  $|B\rangle$ -Zustände her und kürzt sich in Gl. (E.54) wieder heraus, da in Ref. [195]  $M_{12}$  ohne den Faktor  $2m_{B_s}$  definiert wird. Des Weiteren gilt für die Umrechnung der Bag-Faktoren:  $B_1 = B_1^{VLL}$ ,  $R(\mu)B_2 = B_1^{SLL}$ ,  $R(\mu)B_3 = \tilde{B}_1^{SLL}$  (mit  $R(\mu) = m_{B_s}^2 / (m_s(\mu) + m_b(\mu))^2$ ),  $B_5 = B_1^{LR}$  und  $B_4 = B_2^{LR}$ . In Vakuumeinsatznäherung gilt  $B_i = 1$ ,  $i = 1, \dots, 5$ . Alternativ können sie via  $Q_i = \frac{2}{3} m_{B_s}^2 f_{B_s} P_i$  mit den  $P$ -Faktoren verknüpft werden, welche typischerweise bei der hohen Skala  $m_i^{\text{pole}}$  gegeben sind. Die  $P_i$  erhält man durch Renormierungsgruppenentwicklung der gebräuchlichen Bag-Faktoren  $B_i(\mu_b)$ , welche mittels Gitterrechnungen bestimmt werden. Sie sind gegeben durch:

$$P_1^{VLL} = P_1^{VRR} = 0.71 \pm 0.05, \quad P_2^{SLL} = P_2^{SRR} = 0.31, \quad (\text{E.63})$$

$$P_1^{SLL} = P_1^{SRR} = -1.36 \pm 0.12, \quad P_2^{LR} = 3.2 \pm 0.2, \quad P_1^{LR} = -2.5. \quad (\text{E.64})$$

Die Wilson-Koeffizienten bei der hohen Skala  $\mathcal{O}(\mu_{ew})$  in MIA lauten:

$$C_1^{VLL} = -\frac{\alpha_s}{216M_q^2} \left( 24x f_6(x) + 66\tilde{f}_6(x) \right) \left( \delta_{LL}^{d23} \right)^2, \quad (\text{E.65})$$

$$C_1^{SLL} = -\frac{\alpha_s}{216M_q^2} 204x f_6(x) \left( \delta_{RL}^{d23} \right)^2, \quad (\text{E.66})$$

$$C_2^{SLL} = \frac{\alpha_s}{216M_q^2} 36x f_6(x) \left( \delta_{RL}^{d23} \right)^2, \quad (\text{E.67})$$

$$C_1^{VRR} = -\frac{\alpha_s}{216M_q^2} \left( 24x f_6(x) + 66\tilde{f}_6(x) \right) \left( \delta_{RR}^{d23} \right)^2, \quad (\text{E.68})$$

$$C_1^{SRR} = -\frac{\alpha_s}{216M_q^2} 204x f_6(x) \left( \delta_{LR}^{d23} \right)^2, \quad (\text{E.69})$$

$$C_2^{RR} = \frac{\alpha_s}{216M_q^2} 36x f_6(x) \left( \delta_{LR}^{d23} \right)^2, \quad (\text{E.70})$$

$$C_2^{LR} = \frac{\alpha_s}{216M_q^2} \left( \left[ 504x f_6(x) - 72\tilde{f}_6(x) \right] \delta_{LL}^{d23} \delta_{RR}^{d23} - 132\tilde{f}_6(x) \delta_{LR}^{d23} \delta_{RL}^{d23} \right), \quad (\text{E.71})$$

$$C_1^{LR} = -\frac{1}{2} \frac{\alpha_s}{216M_q^2} \left( \left[ 24x f_6(x) + 120\tilde{f}_6(x) \right] \delta_{LL}^{d23} \delta_{RR}^{d23} - 180\tilde{f}_6(x) \delta_{LR}^{d23} \delta_{RL}^{d23} \right). \quad (\text{E.72})$$

Hierbei ist  $x = m_g^2/M_q^2$ , und die Funktionen  $f_6$  und  $\tilde{f}_6$  sind in Anhang A.3.2 aufgelistet. Der SM-Beitrag berechnet sich wie in Abschnitt 4.4.2, wobei der dort auftauchende SM-Operator  $\mathcal{O}_L$  hier mit  $Q_1^{VLL}$  bezeichnet wurde.

### $\Delta B = 1$ -Wilson-Koeffizienten in MIA

Die Wilson-Koeffizienten in Abschnitt E.2 lauten in Masseneinsatzungsnaherung bei der hohen Skala  $\mathcal{O}(\mu_{ew})$  wie folgt:

$$C_3^g = -\frac{1}{V_{tb}V_{ts}^*} \frac{\alpha_s^2}{2\sqrt{2}G_F M_{\tilde{q}}^2} \delta_{LL}^{d23} \left( -\frac{1}{9}B_1(x) - \frac{5}{9}B_2(x) - \frac{1}{18}P_1(x) - \frac{1}{2}P_2(x) \right), \quad (\text{E.73})$$

$$C_4^g = -\frac{1}{V_{tb}V_{ts}^*} \frac{\alpha_s^2}{2\sqrt{2}G_F M_{\tilde{q}}^2} \delta_{LL}^{d23} \left( -\frac{7}{3}B_1(x) + \frac{1}{3}B_2(x) + \frac{1}{6}P_1(x) + \frac{3}{2}P_2(x) \right), \quad (\text{E.74})$$

$$C_5^g = -\frac{1}{V_{tb}V_{ts}^*} \frac{\alpha_s^2}{2\sqrt{2}G_F M_{\tilde{q}}^2} \delta_{LL}^{d23} \left( \frac{10}{9}B_1(x) + \frac{1}{18}B_2(x) - \frac{1}{18}P_1(x) - \frac{1}{2}P_2(x) \right), \quad (\text{E.75})$$

$$C_6^g = -\frac{1}{V_{tb}V_{ts}^*} \frac{\alpha_s^2}{2\sqrt{2}G_F M_{\tilde{q}}^2} \delta_{LL}^{d23} \left( -\frac{2}{3}B_1(x) + \frac{7}{6}B_2(x) + \frac{1}{6}P_1(x) + \frac{3}{2}P_2(x) \right), \quad (\text{E.76})$$

$$C_{7\gamma}(x) = \frac{1}{V_{tb}V_{ts}^*} \frac{8\pi\alpha_s^2}{9\sqrt{2}G_F M_{\tilde{q}}^2} \left( \delta_{LL}^{d23} M_3(x) + \frac{m_{\tilde{g}}}{m_b} \delta_{LR}^{d23} M_1(x) \right), \quad (\text{E.77})$$

$$C_{8g}(x) = \frac{1}{V_{tb}V_{ts}^*} \frac{\pi\alpha_s^2}{\sqrt{2}G_F M_{\tilde{q}}^2} \left( \delta_{LL}^{d23} \left[ \frac{1}{3}M_3(x) + 3M_4(x) \right] + \frac{m_{\tilde{g}}}{m_b} \delta_{LR}^{d23} \left[ \frac{1}{3}M_1(x) + 3M_3(x) \right] \right). \quad (\text{E.78})$$

Hierbei ist  $x = m_{\tilde{g}}^2/M_{\tilde{q}}^2$ , und die Funktionen sind in Anhang A.3 gegeben. Für die gestrichenen Koeffizienten muss man nur die Vertauschung  $L \leftrightarrow R$  bei den Masseneinsatzungen durchführen. Das Renormierungsgruppenlaufen wurde in Abschnitt E.3 beschrieben.

## F QCD-Faktorisierung

Eine sehr ausführliche Einführung in die QCD-Faktorisierung (QCDF) findet man in Ref. [176, 177]. Sie behebt einige Probleme der naiven Faktorisierung und ermöglicht es nicht-leptonische  $B$ -Zerfälle zu berechnen. Wir möchten hier die Grundlagen der QCDF darlegen und listen die für unsere Analyse verwendeten Formeln auf.

Bei hadronischen  $B$ -Zerfällen treten im Allgemeinen mehrere separierte Skalen auf:

$$M_W > m_b > \sqrt{m_b \Lambda_{\text{QCD}}} > \Lambda_{\text{QCD}}. \quad (\text{F.1})$$

Mittels der Faktorisierung können Effekte von kurzen Abständen perturbativ berechnet werden und langreichweitige Effekte mit universellen Größen, wie beispielsweise den Formfaktoren, parametrisiert werden. In der QCDF werden die hadronischen Matrixelemente in  $\alpha_s$  und  $\Lambda_{\text{QCD}}/m_b$  entwickelt. Während Beiträge in  $\alpha_s$  prinzipiell in allen Ordnungen berechenbar sind, gilt dies nicht für die  $\Lambda_{\text{QCD}}/m_b$ -Entwicklung. Das führt im Allgemeinen zu großen theoretischen Unsicherheiten. Die QCDF enthält unbestimmte Parameter  $\rho_{H,A}$  und  $\varphi_{H,A}$ , welche die Infrarot-Divergenzen charakterisieren.

In der naiven Faktorisierung, welche man im Grenzfall  $\mathcal{O}(\alpha_s^0, (\Lambda_{\text{QCD}}/m_b)^0)$  der QCDF erhält, werden weder starke Phasen noch die Skalenabhängigkeit der Matrixelemente berücksichtigt. Folglich kann die naive Faktorisierung (NF) keine direkten  $CP$ -Asymmetrien vorhersagen und die  $\mu$ -Abhängigkeit im Wilson-Koeffizienten wird nicht kompensiert. Die QCDF hingegen macht Vorhersagen über starke Phasen, deren Ursprung im optischen Theorem begründet ist, und somit auch über direkten  $CP$ -Asymmetrien  $\propto \sin \delta^{\text{strong}}$ ,  $\delta^{\text{strong}} \propto \mathcal{O}(\alpha_s(m_b))$ ,  $\mathcal{O}(\Lambda_{\text{QCD}}/m_b)$ . Die Entwicklung von  $\langle \phi K_S | Q_i | \bar{B} \rangle$  in Ref. [176, 177] ist in LO in  $\Lambda_{\text{QCD}}/m_b$  und zu jeder Ordnung in  $\alpha_s$  gültig:

$$\langle \phi K_S | Q_i | \bar{B} \rangle_{\text{QCDF}} = \langle \phi K_S | Q_i | \bar{B} \rangle_{\text{NF}} \left[ 1 + \sum_n r_n \alpha_s^n + \mathcal{O}\left(\frac{\Lambda_{\text{QCD}}}{m_b}\right) \right]. \quad (\text{F.2})$$

Damit können die Matrixelemente mit wenigen nicht-perturbativen Parametern und Lichtkegel-Verteilungsfunktionen (LCDA von light-cone distribution amplitudes) berechnet werden. Unter einer LCDA kann man sich eine Art Wellenfunktion oder Parton-Verteilungsfunktion vorstellen. Sie beschreibt das Meson nach einer harten Streuung (hard scattering). Sie erreicht ihr Maximum, falls Quark und Antiquark jeweils den halben Gesamtimpuls tragen.

Die sogenannten „leading twist“-Verteilungsfunktionen des pseudoskalaren Mesons  $P$  bzw. eines Vektormesons  $V$  werden in Gegenbauer-Polynomen entwickelt<sup>1</sup>:

$$\Phi_{P,V}(x, \mu) = 6x(1-x) \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{P,V}(\mu) C_n^{(3/2)}(2x-1) \right] \quad (\text{F.3})$$

---

<sup>1</sup>Man beachte, dass der Index ein Großbuchstabe  $P, V$  ist. Die ersten Gegenbauer-Polynome sind  $C_0^{(3/2)}(x) = 1$ ,  $C_1^{(3/2)}(x) = 3x$ ,  $C_2^{(3/2)}(x) = \frac{3}{2}(5x^2 - 1)$ .

In der asymptotischen Form für  $\mu \rightarrow \infty$  kann die eckige Klammer gleich Eins gesetzt werden. Das gilt hier schon für  $\mu = m_b$ . Das bedeutet insbesondere, dass  $\Phi_P$  an den Endpunkten  $x = 0, 1$  verschwindet, d.h. falls eines der Quarks den ganzen Impuls trägt. Vernachlässigt man Dreiteilchen-Beträge, sind die „twist-3-two-particle“-Verteilungsamplituden für pseudoskalare Mesonen durch ihre Bewegungsgleichung bestimmt<sup>2</sup>:  $\Phi_p(x) = 1$ , und im Falle von Vektormesonen

$$\Phi_v(x) = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{n,\perp}^V(\mu) P_{n+1}(2x-1), \quad (\text{F.4})$$

wobei  $\alpha_{0,\perp}^V = 1$  und  $P_n(x)$  das Legendre-Polynome der Ordnung  $n$  ist<sup>3</sup>. Es gilt  $\int_0^1 dx \Phi_v(x) = 0$  und  $\Phi_v(1) = 3 \sum_n \alpha_{n,\perp}^V$ . Im Gegensatz zu  $\Phi_{P,V}(x, \mu)$  verschwindet  $\Phi_{p,v}(x)$  nicht an den Endpunkten.

In Ref. [176] wurden Endzustände  $M_1 M_2$  mit zwei pseudoskalaren Mesonen  $PP$  und einem pseudoskalaren und einem Vektormeson  $PV, VP$  betrachtet. Es gilt die Konvention, dass  $M_1$  dasjenige Meson ist, welches das Spektatorantiquark beinhaltet. Falls das Spektatorantiquark vernichtet wird, ist  $M_1$  das Meson, welches das Antiquark vom Zerfallsvertex enthält. Im Fall  $\bar{B}_d^0 \rightarrow \phi \bar{K}_0$  ist  $M_1 = \bar{K}_0 = P$  und  $M_2 = \phi = V$ . Wir geben die Formeln für diesen Fall in Anhang F.1 an. Der Fall  $B \rightarrow VV$  ist in Ref. [186, 192] beschrieben und wird weiter unten in Anhang F.2 separat behandelt. Eine Anwendung hierzu ist der Zerfall  $B_s \rightarrow \phi \phi$ .

Die Amplituden werden durch Parameter  $\alpha_i$  und  $\beta_i$  bzw.  $a_i$  und  $b_i$  ausgedrückt, welche sowohl die Wilson-Koeffizienten als auch Formfaktoren und Zerfallskonstanten beinhalten. Es gilt allgemein folgender Zusammenhang zwischen den  $a_i$  und den Wilson-Koeffizienten:

$$a_i^p(M_1 M_2) = \left( C_i + \frac{C_{i\pm 1}}{N_c} \right) N_i(M_2) + \frac{C_{i\pm 1}}{N_c} \frac{C_F \alpha_s}{4\pi} \left[ V_i(M_2) + \frac{4\pi^2}{N_c} H_i(M_1 M_2) \right] + P_i^p(M_2), \quad (\text{F.5})$$

wobei das obere (untere) Vorzeichen gilt, wenn  $i$  ungerade (gerade) ist. Es gilt  $N_c = 3$  und  $C_F = \frac{N_c^2 - 1}{2N_c}$ . Weiter ist  $N_i(M_2) = 0$  für  $i = 6, 8$  und  $M_2 = V$ . Sonst gilt  $N_i(M_2) = 1$ . Man beachte, dass in der QCDF die Rollen von  $Q_1$  und  $Q_2$  im Vergleich zu Kapitel E vertauscht sind. Die Größen  $V_i(M_2)$  berücksichtigen Vertex-Korrekturen,  $H_i(M_1 M_2)$  harte Spektatorwechselwirkungen (harter Gluon-Austausch, welcher das Spektatorquark involviert) und  $P_i^p(M_2)$  Pinguin-Kontraktionen. NLO-Korrekturen reduzieren die Skalenabhängigkeit der Amplituden und können relevante Korrekturen implizieren, beispielsweise im Falle von farbunterdrückten Moden. Außerdem enthalten die NLO Korrekturen zwei Imaginärteile von starken Streuphasen in  $V_i$  und  $P_i$ . Die einzelnen Beiträge und der Zusammenhang mit den  $\alpha_i$  sollen im Folgenden angegeben werden.

<sup>2</sup>Man beachte, dass hier  $\Phi$  einen Kleinbuchstaben als Index hat.

<sup>3</sup> $P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$ .



## F.1 QCDF für $PV$ -Endzustände

In Kapitel 4.4.4 betrachten wir den Zerfall  $B_d \rightarrow \phi K_S$ , bei dem es sich um einen  $PV$ -Endzustand handelt. Die Amplitude ist gegeben durch:

$$A(\bar{B}^0 \rightarrow \bar{K}^0 \phi) = -\frac{iG_F}{\sqrt{2}} \underbrace{2m_\phi(\epsilon_\phi^* \cdot p_B)}_{\approx m_B^2} F_+^{B \rightarrow K}(0) f_\phi \sum_{p=u,c} V_{pb} V_{ps}^* \cdot \left[ \alpha_3^p + \alpha_4^p - \frac{1}{2} \alpha_{3,EW}^p - \frac{1}{2} \alpha_{4,EW}^p + \beta_3^p - \frac{1}{2} \beta_{3,EW}^p + \beta_{S3}^p - \frac{1}{2} \beta_{S3,EW}^p \right]. \quad (\text{F.6})$$

Die Inputwerte sind in Anhang B aufgelistet. Die Koeffizienten der Flavour-Operatoren  $\alpha_i = \alpha_i(K, \phi)$  (definiert in Ref. [176]) beinhalten die dynamische Information. Sie können durch die Dirac-Operatoren  $a_i$  aus Gl. (F.5) wie folgt ausgedrückt werden<sup>4</sup>:

$$\alpha_3^p(K\phi) = a_3^p(K\phi) + a_5^p(K\phi), \quad \alpha_4^p(K\phi) = a_4^p(K\phi) + r_\chi^\phi a_6^p(K\phi), \quad (\text{F.7})$$

$$\alpha_{3,EW}^p(K\phi) = a_9^p(K\phi) + a_7^p(K\phi), \quad \alpha_{4,EW}^p(K\phi) = a_{10}^p(K\phi) + r_\chi^\phi a_8^p(K\phi). \quad (\text{F.8})$$

Terme proportional zu  $r_\chi^\phi = \frac{2m_\phi}{m_b(\mu)} \frac{f_\phi^\perp(\mu)}{f_\phi}$  sind formal um einen Faktor  $\Lambda_{\text{QCD}}/m_b$  unterdrückt, numerisch jedoch wichtig<sup>5</sup>. In der Analyse von Ref. [223] sind diese chiral-verstärkten Terme jedoch beispielsweise nicht enthalten. Vertex-Korrekturen, Pinguin-Korrekturen und harte Streubeiträge sind in den  $\alpha_i$  absorbiert und schwache Annihilationsdiagramme in den  $\beta_i(M_1 M_2) = \frac{B_{M_1 M_2}}{A_{M_1 M_2}} b_i(M_1 M_2)$ . In unserem Fall gilt:

$$A_{K\phi} = -i \frac{G_F}{\sqrt{2}} m_B^2 F_+^{B \rightarrow K}(0) f_\phi, \quad B_{K\phi} = -i \frac{G_F}{\sqrt{2}} f_B f_K f_\phi. \quad (\text{F.9})$$

Damit kann die eckige Klammer in Gl. (F.6) umgeschrieben werden zu:

$$a_3^p + a_4^p + a_5^p + r_\chi^\phi a_6^p - \frac{1}{2} (a_9^p + a_7^p) - \frac{1}{2} (a_{10}^p + r_\chi^\phi a_8^p) + \frac{f_B f_K}{m_B^2 F_+^{B \rightarrow K}} \left( b_3^p - \frac{1}{2} b_{3,EW}^p + b_{S3}^p - \frac{1}{2} b_{S3,EW}^p \right). \quad (\text{F.10})$$

In LO reproduziert man die naive Faktorisierung (unter Vernachlässigung von  $V_i$ ,  $H_i$  und  $P_i$ ):

$$\bar{A}_{\text{NF}} = iA(\bar{B}^0 \rightarrow \phi \bar{K}^0)_{\text{QCDF}}^{\text{LO}} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{tb} V_{ts}^* \underbrace{m_B^2 F_+^{B \rightarrow K}(0) f_\phi}_{=: Y} \cdot \left[ \frac{4}{3} C_3 + \frac{4}{3} C_4 + C_5 + \frac{1}{3} C_6 - \frac{1}{2} C_7 - \frac{1}{6} C_8 - \frac{2}{3} C_9 - \frac{2}{3} C_{10} \right] \quad (\text{F.11})$$

<sup>4</sup>Falls es sich um einen  $VP$ -Endzustand handelt, ändert sich jeweils das Vorzeichen des zweiten Terms und im Endzustand mit zwei pseudoskalaren Mesonen in  $\alpha_3^p, \alpha_{3,EW}^p$ . Weiter gilt  $a_1(M_1 M_2) = \alpha_1(M_1 M_2)$  und  $a_2(M_1 M_2) = \alpha_2(M_1 M_2)$ .

<sup>5</sup>Für pseudoskalare Mesonen gilt:  $r_\chi^K(\mu) = \frac{2m_K^2}{m_b(\mu)(m_q + m_s)(\mu)}$ .

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & \langle \phi \bar{K}^0 | Q_1 | \bar{B}^0 \rangle = 0, \quad \langle \phi \bar{K}^0 | Q_2 | \bar{B}^0 \rangle = 0, \quad \langle \phi \bar{K}^0 | Q_3 | \bar{B}^0 \rangle = \frac{4}{3}Y, \\
& \langle \phi \bar{K}^0 | Q_4 | \bar{B}^0 \rangle = \frac{4}{3}Y, \quad \langle \phi \bar{K}^0 | Q_5 | \bar{B}^0 \rangle = Y, \quad \langle \phi \bar{K}^0 | Q_6 | \bar{B}^0 \rangle = \frac{1}{3}Y, \\
& \langle \phi \bar{K}^0 | Q_7 | \bar{B}^0 \rangle = -\frac{1}{2}Y, \quad \langle \phi \bar{K}^0 | Q_8 | \bar{B}^0 \rangle = -\frac{1}{6}Y, \quad \langle \phi \bar{K}^0 | Q_9 | \bar{B}^0 \rangle = -\frac{2}{3}Y, \\
& \langle \phi \bar{K}^0 | Q_{10} | \bar{B}^0 \rangle = -\frac{2}{3}Y, \quad \langle \phi \bar{K}^0 | Q_{7\gamma} | \bar{B}^0 \rangle = 0, \quad \langle \phi \bar{K}^0 | Q_{8g} | \bar{B}^0 \rangle = 0.
\end{aligned} \tag{F.12}$$

In der naiven Faktorisierung verschwindet das Matrixelement des chromomagnetischen Operators. Stattdessen kann er über folgende Relation ausgewertet werden:

$$\langle \phi \bar{K}^0 | Q_{8g} | \bar{B}^0 \rangle = -\frac{\alpha_s}{4\pi} \frac{m_b}{\sqrt{\langle q^2 \rangle}} \left[ \langle Q_4 \rangle + \langle Q_6 \rangle - \frac{1}{3} (\langle Q_3 \rangle + \langle Q_5 \rangle) \right]. \tag{F.13}$$

Das virtuelle Gluon in  $Q_{8g}$  trägt den Impuls  $q^\mu = \sqrt{\langle q^2 \rangle} p_b^\mu / m_b$  und  $\sqrt{\langle q^2 \rangle}$  ist der gemittelte Wert von  $q^2$ . Kinematische Überlegungen führen zu dem physikalischen Bereich  $m_b^2/4 < \sqrt{\langle q^2 \rangle} < m_b^2/2$  was große Unsicherheiten impliziert, wenn  $Q_{8g}$  der dominante Beitrag ist. Deshalb werden wir die QCDF verwenden. die naive Faktorisierung dient lediglich zur Überprüfung.

## Vertex-Korrekturen

Die Vertex-Korrekturen sind gegeben durch<sup>6</sup>:

$$V_{3,4,9,10}(\phi) = 12 \log \frac{m_b}{\mu} - 18 + \int_0^1 dx \Phi_{M_2}(x) g(x), \tag{F.14}$$

$$V_{5,7}(\phi) = -12 \log \frac{m_b}{\mu} + 6 - \int_0^1 dx \Phi_{M_2}(x) g(1-x), \tag{F.15}$$

$$V_{6,8} = \int_0^1 dx \Phi_{m_2}(x) [-6 + h(x)], \tag{F.16}$$

$$\begin{aligned}
g(x) = 3 & \left( \frac{1-2x}{1-x} \log x - i\pi \right) \\
& + \left[ 2\text{Li}_2(x) - \log^2 x + \frac{2 \log x}{1-x} - (3 + 2i\pi) \log x - (x \leftrightarrow 1-x) \right],
\end{aligned} \tag{F.17}$$

$$h(x) = 2\text{Li}_2(x) - \log^2 x - (1 + 2i\pi) \log x - (x \leftrightarrow 1-x). \tag{F.18}$$

Diese Ausdrücke können mit der Entwicklung der LCDA  $\Phi_{M_2}$  und der twist-3-Amplitude  $\Phi_{m_2}$  vereinfacht werden. Für pseudoskalare Mesonen erhalten wir  $\int_0^1 dx \Phi_p(x) [-6 + h(x)] = -6$ . Man beachte, dass die Imaginärteile von  $g$  und  $h$  zu Streuphasen (rescattering phases) führen, welche aus dem Austausch von harten Gluonen zwischen den zwei auslaufenden Mesonen entstehen. Die Faltung mit der LCDA ist endlich:

$$\int_0^1 dx \Phi_{M_2}(x) g(x) = -\frac{1}{2} - 3i\pi + \left( \frac{11}{2} - 3i\pi \right) \alpha_1^\phi - \frac{21}{20} \alpha_2^\phi, \tag{F.19}$$

$$\int_0^1 dx \Phi_{M_2}(x) g(1-x) = -\frac{1}{2} - 3i\pi - \left( \frac{11}{2} - 3i\pi \right) \alpha_1^\phi - \frac{21}{20} \alpha_2^\phi, \tag{F.20}$$

<sup>6</sup>Hier gilt wieder  $M_2 = \phi$ . Man beachte den Unterschied zwischen  $\Phi_{M_2}$  und  $\Phi_{m_2}$  (deshalb zur leichteren Unterscheidbarkeit die Notation mit  $M_2$ ).

$$\int_0^1 dx \Phi_{m_2}(x) h(x) = 9 - 6i\pi + \left(\frac{19}{6} - i\pi\right) \alpha_{2,\perp}^\phi, \quad (\text{F.21})$$

wobei  $\alpha_{1,2}^{M_2} = \alpha_{1,2}^\phi$  eingesetzt wurde und bis zur zweiten Ordnung in den Gegenbauer-Momenten entwickelt wurde. Einige nützliche Formeln, welche bei den weiteren Berechnungen hilfreich sind, lauten:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x} \Phi_M(x) = 3 \left(1 + \alpha_1^M + \alpha_2^M + \dots\right), \quad (\text{F.22})$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} \Phi_M(x) = 3 \left(1 - \alpha_1^M + \alpha_2^M + \dots\right), \quad (\text{F.23})$$

$$\int_0^1 dx \Phi_v(x) = 0, \quad (\text{F.24})$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x} \Phi_p(x) = \Phi_p(1) X_H^P = X_H^P, \quad (\text{F.25})$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x} \Phi_v(x) = \underbrace{\Phi_v(1)}_{3 \sum_n \alpha_{n,\perp}^V} X_H^V - (6 + 9\alpha_{1,\perp}^V + 11\alpha_{2,\perp}^V + \dots), \quad (\text{F.26})$$

$$C_{8g}^{\text{eff}} = C_{8g} + C_5, \quad C_{7\gamma}^{\text{eff}} = C_{7\gamma} - \frac{1}{3}C_5 - C_6, \quad (\text{F.27})$$

## Pinguin-Beiträge

$$\begin{aligned} P_4^P(\phi) = & \frac{C_F \alpha_s}{4\pi N_c} \left\{ C_1 \left[ \frac{4}{3} \log \frac{m_b}{\mu} + \frac{2}{3} - G_{M_2}(s_p) \right] + C_3 \left[ \frac{8}{3} \log \frac{m_b}{\mu} + \frac{4}{3} - G_{M_2}(0) - G_{M_2}(1) \right] \right. \\ & + (C_4 + C_6) \left[ \frac{4n_f}{3} \log \frac{m_b}{\mu} - (n_f - 2)G_{M_2}(0) - G_{M_2}(s_c) - G_{M_2}(1) \right] \\ & \left. - 2C_{8g}^{\text{eff}} \int_0^1 \frac{dx}{1-x} \Phi_{M_2}(x) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{F.28})$$

Hier ist  $n_f = 5$  die Anzahl der leichten Quarkflavour,  $s_u = 0$ ,  $s_c = (m_c/m_b)^2$ , und die Funktion  $G_{M_2}(s)$  lautet:

$$G_{M_2}(s) = \int_0^1 dx G(s - i\epsilon, 1-x) \Phi_{M_2}(x), \quad (\text{F.29})$$

$$\begin{aligned} G(s, x) = & -4 \int_0^1 du (1-u) \log [s - u(1-u)x] \\ = & \frac{2(12s + 5x - 3x \log s)}{9x} - \frac{4\sqrt{4s-x}(2s+x)}{3x^{3/2}} \arctan \sqrt{\frac{x}{4s-x}}. \end{aligned} \quad (\text{F.30})$$

Einsetzen der Gegenbauer-Entwicklung liefert:

$$\begin{aligned}
G_{M_2}(s_c) = & \frac{5}{3} - \frac{2}{3} \log s_c + \frac{\alpha_1^\phi}{2} + \frac{\alpha_2^\phi}{5} + \frac{4}{3} \left( 8 + 9\alpha_1^\phi + 9\alpha_2^\phi \right) s_c \\
& + 2 \left( 8 + 63\alpha_1^\phi + 214\alpha_2^\phi \right) s_c^2 - 24 \left( 9\alpha_1^\phi + 80\alpha_2^\phi \right) s_c^3 + 2880\alpha_2^\phi s_c^4 \\
& - \frac{2}{3} \sqrt{1-4s_c} \left[ 1 + 2s_c + 6 \left( 4 + 27\alpha_1^\phi + 78\alpha_2^\phi \right) s_c^2 \right. \\
& \left. - 36 \left( 9\alpha_1^\phi + 70\alpha_2^\phi \right) s_c^3 + 4320\alpha_2^\phi s_c^4 \right] \left( 2\arctanh\sqrt{1-4s_c} - i\pi \right) \\
& + 12s_c^2 \left[ 1 + 3\alpha_1^\phi + 6\alpha_2^\phi - \frac{4}{3} \left( 1 + 9\alpha_1^\phi + 36\alpha_2^\phi \right) s_c \right. \\
& \left. + 18 \left( \alpha_1^\phi + 10\alpha_2^\phi \right) s_c^2 - 240\alpha_2^\phi s_c^3 \right] \left( 2\arctanh\sqrt{1-4s_c} - i\pi \right)^2 + \dots,
\end{aligned} \tag{F.31}$$

$$G_{M_2}(0) = \frac{5}{3} + \frac{2i\pi}{3} + \frac{\alpha_1^\phi}{2} + \frac{\alpha_2^\phi}{5} + \dots, \tag{F.32}$$

$$\begin{aligned}
G_{M_2}(1) = & \frac{85}{3} - 6\sqrt{3}\pi + \frac{4\pi^2}{9} - \left( \frac{155}{2} - 36\sqrt{3}\pi + 12\pi^2 \right) \alpha_1^\phi \\
& + \left( \frac{7001}{5} - 504\sqrt{3}\pi + 136\pi^2 \right) \alpha_2^\phi + \dots
\end{aligned} \tag{F.33}$$

Das Auftreten der starken Phasen in  $G(s, x)$  ist unter dem Namen Bander-Silverman-Soni-Mechanismus bekannt. Weitere Pinguin-Beiträge sind:

$$\begin{aligned}
P_6^p(\phi) = & -\frac{C_F\alpha_s}{4\pi N_c} \left\{ C_1 \hat{G}_{M_2}(s_p) + C_3 \left[ \hat{G}_{M_2}(0) + \hat{G}_{M_2}(1) \right] \right. \\
& \left. + (C_4 + C_6) \left[ (n_f - 2)\hat{G}_{M_2}(0) + \hat{G}_{M_2}(s_c) + \hat{G}_{M_2}(1) \right] \right\},
\end{aligned} \tag{F.34}$$

$$P_8^p(\phi) = -\frac{\alpha}{9\pi N_c} (C_1 + N_c C_2) \hat{G}_{M_2}(s_p), \tag{F.35}$$

$$P_{10}^p(\phi) = \frac{\alpha}{9\pi N_c} \left\{ (C_1 + N_c C_2) \left[ \frac{4}{3} \log \frac{m_b}{\mu} + \frac{2}{3} - \hat{G}_{M_2}(s_p) \right] - 3C_{7\gamma}^{\text{eff}} \int_0^1 \frac{dx}{1-x} \Phi_{M_2}(x) \right\},$$

wobei die Funktion  $\hat{G}_{M_2}$  durch die Konvolution mit der twist-3-Amplitude gegeben ist und mittels der Gegenbauer-Momente für ein Vektormeson  $M_2 = \phi$  wie folgt ausgedrückt werden kann:

$$\begin{aligned}
\hat{G}_{M_2}(s) = & \int_0^1 dx G(s - i\epsilon, 1-x) \Phi_{m_2}(x) \\
= & \frac{1}{6} \left( 6 + 2\alpha_{1,\perp}^\phi + \alpha_{2,\perp}^\phi \right) - 4s \left( 9 + 12\alpha_{1,\perp}^\phi + 14\alpha_{2,\perp}^\phi \right) \\
& - 6s^2 \left( 8\alpha_{1,\perp}^\phi + 35\alpha_{2,\perp}^\phi \right) + 360s^3 \alpha_{2,\perp}^\phi
\end{aligned} \tag{F.36}$$

$$\begin{aligned}
& + 12s\sqrt{1-4s} \left[ 1 + (1+4s)\alpha_{1,\perp}^\phi + (1+15s-30s^2)\alpha_{2,\perp}^\phi \right] \left( 2\arctanh\sqrt{1-4s} - i\pi \right) \\
& - 12s^2 \left[ 1 + (3-4s)\alpha_{1,\perp}^\phi + 2(3-10s+15s^2)\alpha_{2,\perp}^\phi \right] \left( 2\arctanh\sqrt{1-4s} - i\pi \right)^2 + \dots,
\end{aligned}$$

$$\hat{G}_{M_2}(0) = 1 + \frac{\alpha_{1,\perp}^\phi}{3} + \frac{\alpha_{2,\perp}^\phi}{6} + \dots, \tag{F.37}$$

$$\begin{aligned}
\hat{G}_{M_2}(1) = & -35 + 4\sqrt{3}\pi + \frac{4\pi^2}{3} + \left( -\frac{287}{3} + 20\sqrt{3}\pi - \frac{4\pi^2}{3} \right) \alpha_{1,\perp}^\phi \\
& + \left( \frac{565}{6} - 56\sqrt{3}\pi + \frac{64\pi^2}{3} \right) \alpha_{2,\perp}^\phi + \dots
\end{aligned} \tag{F.38}$$

Zu dem betrachteten Zerfall tragen keine weiteren Pinguin-Diagramme bei. Die Vertex- und Pinguin-Beiträge werden typischerweise bei  $\mu = m_b$  ausgewertet. Die  $\mu$ -Abhängigkeit kürzt sich mit der Renormierungsskalenabhängigkeit der Wilson-Koeffizienten in NLO heraus. Harte Streuungen und Annihilations-Terme sollten jedoch bei einer Zwischenskala  $\sim \sqrt{\Lambda_{\text{QCD}} m_b}$  ausgewertet werden. Man verwendet typischerweise  $\mu_h = \sqrt{\Lambda_h \mu}$  mit  $\Lambda_h = 0.5$  GeV.

## Harte Streuterme

Harte Streubeiträge beinhalten chiral-verstärkte Terme, die logarithmische Endpunktsingularitäten aufweisen, da der twist-3-Beitrag eine Korrektur höherer Ordnung in  $\Lambda_{\text{QCD}}/m_b$  ist. Sie sind gegeben durch ( $M_1 = K$ ,  $M_2 = \phi$ ):

$$\begin{aligned} H_i(K\phi) &= \frac{B_{K\phi} m_B}{A_{K\phi} \lambda_B} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \left[ \frac{\Phi_{M_2}(x)\Phi_{M_1}(y)}{(1-x)(1-y)} + r_\chi^K \frac{\Phi_{M_2}(x)\Phi_{m_1}(y)}{x(1-y)} \right], \quad i = 1 - 4, 9, 10, \\ H_i(K\phi) &= -\frac{B_{K\phi} m_B}{A_{K\phi} \lambda_B} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \left[ \frac{\Phi_{M_2}(x)\Phi_{M_1}(y)}{x(1-y)} + r_\chi^K \frac{\Phi_{M_2}(x)\Phi_{m_1}(y)}{(1-x)(1-y)} \right], \quad i = 5, 7, \\ H_i(K\phi) &= 0, \quad i = 6, 8, \end{aligned} \tag{F.39}$$

wobei  $\lambda_B$  durch  $\int_0^1 \frac{d\xi}{\xi} \Phi_B(\xi) \equiv \frac{m_B}{\lambda_B}$  definiert ist und unser Unwissen über die  $B$ -Meson-Verteilungsamplitude parametrisiert. Diese Integrale können mit Hilfe der Entwicklung der LCDA und der twist-3-Amplituden (siehe Gl. (F.22)-(F.25)) berechnet werden. Da  $\Phi_{m_1}(1) \neq 0$  gilt, ist der unterdrückte Term divergent und kann mittels Gl. (F.25) in den Parameter  $X_H^K$  absorbiert werden. Der Einfachheit halber wird dieser Faktor für alle Mesonen als universal angenommen und gleich gesetzt.  $X_H$  ist ein unbekannter Parameter, der die weiche Gluon-Wechselwirkung mit dem Spektatorquark darstellt. Die Divergenz tritt beim Versuch auf, die weiche Wechselwirkung perturbativ zu berechnen und wird mit einer physikalischen Skala der Ordnung  $\Lambda_{\text{QCD}}$  regularisiert. Daher erwartet man  $X_H \sim \log \frac{m_b}{\Lambda_{\text{QCD}}}$  mit einem komplexen Koeffizienten, da multiple weiche Streuung starke Wechselwirkungsphasen mit sich zieht. Die Divergenzen werden auf folgende Weise parametrisiert:

$$X_H = (1 + \rho_H e^{i\varphi_H}) \log \frac{m_b}{\Lambda_h}, \quad \rho_H \leq 1, \quad \Lambda_h = 0.5 \text{ GeV}, \tag{F.40}$$

wobei  $\varphi_H$  eine beliebige starke Phase ist. Dies induziert große theoretische Unsicherheiten und parametrisiert die zweite Quelle von starken Phasen, welche nicht berechnet werden können. Die harten Streuterme sind bei der Zwischenskala  $\mu_h = \sqrt{\Lambda_h \mu}$  auszuwerten.

## Annihilationsterme

Schwache Annihilationen sind unterdrückt mit  $\Lambda_{\text{QCD}}/m_b$  und treten folglich nicht in der Faktorisierungsformel auf. Jedoch sollten sie aufgrund ihres numerischen Beitrags mit einbezogen werden. Sie weisen schon bei Twist 2 Endpunktsingularitäten auf und können nicht selbstkonsistent in der Herangehensweise bei harter Streuung berechnet werden, weshalb wir sie nur abschätzen. Sie sind in den  $b_i$ - bzw.  $\beta_i$ -Koeffizienten enthalten und über  $\beta_i^p(\phi K) = \frac{B_{K\phi}}{A_{K\phi}} b_i^p(K\phi)$  miteinander verknüpft. Es gilt:

$$b_3^p(K\phi) = \frac{C_F}{N_c^2} \left[ C_3 A_1^i + C_5 (A_3^i + A_3^f) + N_c C_6 A_3^f \right], \tag{F.41}$$

$$b_{3,EW}^p(K\phi) = \frac{C_F}{N_c^2} \left[ C_9 A_1^i + C_7 \left( A_3^i + A_3^f \right) + N_c C_8 A_3^f \right], \quad (\text{F.42})$$

$$b_{S3}(K\phi) = 0, \quad b_{S3,EW}(K\phi) = 0, \quad (\text{F.43})$$

$$A_1^i = \pi\alpha_s \int_0^1 dx \int_0^1 dy \left\{ \Phi_{M_2}(x)\Phi_{M_1}(y) \left[ \frac{1}{y(1-x(1-y))} + \frac{1}{(1-x)^2y} \right] + r_\chi^K r_\chi^\phi \Phi_{m_2}(x)\Phi_{m_1}(y) \frac{2}{(1-x)y} \right\}, \quad (\text{F.44})$$

$$A_2^i = -\pi\alpha_s \int_0^1 dx \int_0^1 dy \left\{ \Phi_{M_2}(x)\Phi_{M_1}(y) \left[ \frac{1}{(1-x)(1-x(1-y))} + \frac{1}{(1-x)y^2} \right] + r_\chi^K r_\chi^\phi \Phi_{m_2}(x)\Phi_{m_1}(y) \frac{2}{(1-x)y} \right\}, \quad (\text{F.45})$$

$$A_3^i = \pi\alpha_s \int_0^1 dx \int_0^1 dy \left\{ r_\chi^K \Phi_{M_2}(x)\Phi_{m_1}(y) \frac{2(1-y)}{(1-x)y(1-x(1-y))} - r_\chi^\phi \Phi_{m_2}(x)\Phi_{M_1}(y) \frac{2}{(1-x)y(1-x(1-y))} \right\}, \quad (\text{F.46})$$

$$A_3^f = \pi\alpha_s \int_0^1 dx \int_0^1 dy \left\{ r_\chi^K \Phi_{M_2}(x)\Phi_{m_1}(y) \frac{2(2+x)}{(1-x)^2y} - r_\chi^\phi \Phi_{m_2}(x)\Phi_{M_1}(y) \frac{2(1+y)}{(1-x)y^2} \right\}. \quad (\text{F.47})$$

Die schwachen Annihilationsterme weisen Endpunktsingularitäten auf, die wir genau wie die Korrekturen zur harten Streuung behandeln (Ersetzung  $H \leftrightarrow A$ ):

$$\int_0^1 \frac{dy}{y} \rightarrow X_A = (1 + \rho_A e^{i\varphi_A}) \log \frac{m_b}{\Lambda_h}. \quad (\text{F.48})$$

Unter Verwendung der asymptotischen Form der Verteilungsamplituden kann der obige Ausdruck vereinfacht werden:

$$A_1^i \approx -A_2^i \approx 6\pi\alpha_s \left[ 3 \left( X_A - 4 + \frac{\pi^2}{3} \right) + r_\chi^K r_\chi^\phi (X_A^2 - 2X_A) \right], \quad (\text{F.49})$$

$$A_1^f = A_2^f = 0, \quad (\text{F.50})$$

$$A_3^i \approx 6\pi\alpha_s \left[ -3r_\chi^\phi \left( X_A^2 - 2X_A - \frac{\pi^2}{3} + 4 \right) + r_\chi^K \left( X_A^2 - 2X_A + \frac{\pi^2}{3} \right) \right], \quad (\text{F.51})$$

$$A_3^f \approx -6\pi\alpha_s \left[ 3r_\chi^\phi (2X_A - 1)(2 - X_A) - r_\chi^K (2X_A^2 - X_A) \right]. \quad (\text{F.52})$$

Diese Beiträge werden bei der Skala  $\sqrt{\Lambda_h \mu}$  ausgewertet, wobei  $\mu \approx m_b$  die Skala ist, bei der die Vertex- und Pinguin-Beiträge berechnet werden. Schließlich geben wir noch die Formel für das Verzweigungsverhältnis an:

$$BR(\bar{B}^0 \rightarrow \phi K) = \frac{\sqrt{(m_B^2 - (m_K + m_\phi)^2)(m_B^2 - (m_K - m_\phi)^2)}}{16\pi m_B^3 \Gamma_{\text{tot}}} |\langle \phi K | \mathcal{H}_{\text{eff}}^{\Delta B=1} | \bar{B}^0 \rangle|^2.$$

## F.2 QCDF für $VV$ -Endzustände

Die Formeln für longitudinale Polarisation  $h = 0$  sind die gleichen wie für  $PV$ -Endzustände bis auf Vorzeichenwechsel im Zusammenhang zwischen den  $a_i$  und  $\alpha_i$  und bei den Annihilati-

onsbeiträgen:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= a_1, & \alpha_2 &= a_2, & \alpha_3^p &= a_3^p + a_5^p, & \alpha_4^p &= a_4^p - r_\chi^\phi a_6^p, \\ \alpha_{3,EW}^p &= a_9^p + a_7^p, & \alpha_{4,EW}^p &= a_{10}^p - r_\chi^\phi a_8^p, & r_\chi^\phi &= \frac{2m_\phi f_\perp^\perp}{m_b f_\phi}.\end{aligned}\quad (\text{F.53})$$

Die Relation mit den Wilson-Koeffizienten bleibt die gleiche wie in Gl. (F.5), wobei bei den  $\alpha$  und  $a$  überall ein Index  $h$  für die Helizität hinzugefügt werden muss.

Wir benötigen die twist-2-LCDA  $\Phi_V \equiv \phi_\parallel$  und  $\phi_\perp$  und die twist-3-Vektormeson-Projektionen:

$$\begin{aligned}\phi_a(u) &= \int_u^1 dv \frac{\Phi_V(v)}{v}, & \phi_b(u) &= \int_0^u dv \frac{\Phi_V(v)}{1-v}, \\ \phi_v(u) &= \int_0^u dv \frac{\phi_\perp(v)}{1-v} - \int_u^1 dv \frac{\phi_\perp(v)}{v} = 3 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{n\perp}^V(\mu) P_{n+1}(2u-1).\end{aligned}\quad (\text{F.54})$$

Es gilt  $\int_0^1 \phi_a(u) du = \int_0^1 \phi_b(u) du = 1$ . Ferner sind die asymptotischen Verteilungsamplituden gegeben durch:

$$\phi_a(u) \rightarrow 3(1-u)^2, \quad \phi_b(u) \rightarrow 3u^2, \quad \phi_\perp(u) \rightarrow 6u(1-u), \quad \Phi_V(u) \rightarrow 3(2u-1). \quad (\text{F.55})$$

Wir betrachten konkret den Zerfall  $B_s \rightarrow \phi\phi$ , dessen Zerfallsamplitude in QCDF wie folgt gegeben ist [186]:

$$iA(\bar{B}_s \rightarrow \phi\phi)^h = 2iA_{\phi\phi}^h \sum_{p=u,c} V_{pb}V_{ps}^* \left[ \alpha_4^p + \alpha_3^p - \frac{1}{2}\alpha_{3,EW}^p + \beta_3^p + \beta_4^p \right], \quad h = 0, +, -. \quad (\text{F.56})$$

Der Vorfaktor unterscheidet sich für die verschiedenen Helizitäten:

$$A_{\phi\phi}^0 = i\frac{G_F}{\sqrt{2}} m_{B_s}^2 f_{B_s} A_0^{B_s \rightarrow \phi}, \quad A_{\phi\phi}^\pm = i\frac{G_F}{\sqrt{2}} m_{B_s} m_\phi f_{B_s} F_\pm^{B_s \rightarrow \phi}, \quad (\text{F.57})$$

Die  $B_{\phi\phi}^h$ -Faktoren benötigt man für den Zusammenhang zwischen den  $\beta_i$  und  $b_i$ :

$$B_{\phi\phi}^0 = i\frac{G_F}{\sqrt{2}} f_{B_s} f_\phi^2, \quad B_{\phi\phi}^\pm = -i\frac{G_F}{\sqrt{2}} f_{B_s} f_\phi^2. \quad (\text{F.58})$$

## Vertex-Korrekturen für negative Helizität

$$V_{1,2,3,4,9,10}^-(\phi) = 12 \log \frac{m_b}{\mu} - 18 + \int_0^1 dy \phi_{b2}(y) g_T(y), \quad (\text{F.59})$$

$$V_{5,7}^-(\phi) = -12 \log \frac{m_b}{\mu} + 6 + \int_0^1 dy \phi_{a2}(y) g_T(1-y), \quad (\text{F.60})$$

$$V_{6,8}^-(\phi) = 0. \quad (\text{F.61})$$

Hierbei ist  $g_T(y) = g(y) + \frac{\log y}{1-y}$ . Das Integral lässt sich mit der Entwicklung nach den Gegenbauer-Momente berechnen (bis zur zweiten Ordnung):

$$\int_0^1 dy \phi_b(y) g_T(y) = 4 - 6i\pi + \alpha_1^\parallel (4 - 2i\pi) + \alpha_2^\parallel \frac{1}{40} (53 - 20i\pi), \quad (\text{F.62})$$

$$\int_0^1 dy \phi_a(y) g_T(1-y) = 4 - 6i\pi + \alpha_1^\parallel (-4 + 2i\pi) + \alpha_2^\parallel \left( \frac{53}{40} - i\frac{\pi}{2} \right). \quad (\text{F.63})$$

## Pinguin-Beiträge für negative Helizität

Korrekturen von den Pinguin-Beiträgen und Dipoloperatoren gibt es für  $i = 4, 7 - 10$  zur Ordnung  $\alpha_{s,e}$ . Es gilt  $P_6^{-,p}(V_2) = P_8^{-,p}(V_2) = 0$  und

$$P_4^{-,p}(V_2) = \frac{C_F \alpha_s}{4\pi N_c} \left\{ C_1 \left[ \frac{2}{3} \log \frac{m_b}{\mu} + \frac{2}{3} - G_{V_2}^-(s_p) \right] + C_3 \left[ \frac{4}{3} \log \frac{m_b}{\mu} + \frac{4}{3} - G_{V_2}^-(0) - G_{V_2}^-(1) \right] \right. \\ \left. + (C_4 + C_6) \left[ \frac{10}{3} \log \frac{m_b}{\mu} - 3G_{V_2}^-(0) - G_{V_2}^-(s_c) - G_{V_2}^-(1) \right] \right\}, \quad (\text{F.64})$$

$$P_7^{-,p}(V_2) = -\frac{\alpha_e}{2\pi} C_{7\gamma}^{\text{eff}} \frac{m_B m_b}{m_{V_2}^2} + \frac{2\alpha_e}{27\pi} (C_1 + N_c C_2) \left[ \delta_{pc} \log \frac{m_c^2}{\mu^2} + \delta_{pu} \log \frac{\nu^2}{\mu^2} + 1 \right], \quad (\text{F.65})$$

$$P_{10}^{-,p}(\phi) = \frac{\alpha_e}{9\pi N_c} \left\{ (C_1 + N_c C_2) \left[ \frac{2}{3} \log \frac{m_b}{\mu} + \frac{2}{3} - \hat{G}_{V_2}^-(s_p) \right] \right\}. \quad (\text{F.66})$$

Hierbei ist  $G_{V_2}^-(s) = \int_0^1 dy \phi_{b2}(y) G(s - i\epsilon, 1 - y)$  mit der in Gl. (F.30) angegebenen Funktion  $G(s, x)$ . Zu beachten ist, dass im Gegensatz zum longitudinalen Fall die Dipoloperatoren  $Q_{8g}$  und  $Q_{7\gamma}$  nicht zu  $P_4^{-,p}(V_2)$  und  $P_{10}^{-,p}(V_2)$  beitragen. Mit der Entwicklung nach Gegenbauer-Momenten lässt sich das Integral wie folgt berechnen:

$$G_\phi^-(0) = \frac{2i\pi}{3} + \frac{7}{3} + \frac{\alpha_1^\parallel}{2} + \frac{\alpha_2^\parallel}{5}, \quad (\text{F.67})$$

$$G_\phi^-(1) = -37 + 6\sqrt{3} + \frac{4\pi^2}{9} + \alpha_1^\parallel (4\pi^2 - \frac{79}{2}) + \alpha_2^\parallel \frac{2}{5} (-877 + 270\sqrt{3}\pi - 60\pi^2), \quad (\text{F.68})$$

$$G_\phi^-(s) = -\frac{\alpha_1^\parallel}{2} \left( -144s^3 + 132s^2 + 72(2s^2 - 2s + 1) s^2 \log^2 \left( \frac{\sqrt{1-4s}-1}{\sqrt{1-4s}+1} \right) \right. \\ \left. - 24\sqrt{1-4s} (6s^2 - 5s - 1) s \log \left( \frac{\sqrt{1-4s}-1}{\sqrt{1-4s}+1} \right) + 92s - 1 \right) \\ + \frac{\alpha_2^\parallel}{5} \left( -3600s^4 + 3300s^3 - 1180s^2 + 360(10s^3 - 10s^2 + 4s - 1) s^2 \log^2 \left( \frac{\sqrt{1-4s}-1}{\sqrt{1-4s}+1} \right) \right. \\ \left. - 60\sqrt{1-4s} (60s^3 - 50s^2 + 16s + 1) s \log \left( \frac{\sqrt{1-4s}-1}{\sqrt{1-4s}+1} \right) - 275s + 1 \right) \\ + \frac{1}{3} \left( -24s^2 + 12(2s-3)s^2 \log^2 \left( \frac{\sqrt{1-4s}-1}{\sqrt{1-4s}+1} \right) \right. \\ \left. - 2\sqrt{1-4s} (12s^2 + 16s - 1) \log \left( \frac{\sqrt{1-4s}-1}{\sqrt{1-4s}+1} \right) - 94s - 2\log(s) + 7 \right), \quad 0 < s < \frac{1}{4}. \quad (\text{F.69})$$

Der Fall  $\frac{1}{4} < s < 1$  wird hier nicht benötigt.

## Harte Streuterme für negative Helizität

Die harten Streuterme sind gegeben durch:

$$H_i^- = -\frac{2f_B f_{V_1}^\perp}{m_B m_b F_-^{B \rightarrow V_1}(0)} \frac{m_b}{\lambda_B} \int_0^1 dx dy \frac{\phi_1^\perp(x) \phi_{b2}(y)}{(1-x)^2 y}, \quad i = 1, 2, 3, 4, 9, 10, \quad (\text{F.70})$$

$$H_i^- = +\frac{2f_B f_{V_1}^\perp}{m_B m_b F_-^{B \rightarrow V_1}(0)} \frac{m_b}{\lambda_B} \int_0^1 dx dy \frac{\phi_1^\perp(x) \phi_{a2}(y)}{(1-x)^2 (1-y)}, \quad i = 5, 7, \quad (\text{F.71})$$



$$H_i^- = - \frac{2f_B f_{V_1}}{m_B m_b F_-^{B \rightarrow V_1}(0)} \frac{m_b m_{V_1}}{m_{V_2}^2} \frac{m_b}{\lambda_B} \int_0^1 dx dy \frac{\phi_{a1}(x) \phi_2^\perp(y)}{y(1-x)(1-y)}, \quad i = 6, 8. \quad (\text{F.72})$$

In Ref. [194] wurde das Vorzeichen von  $H_{6,8}^-$  im Vergleich zu Ref. [186] korrigiert. Unter Verwendung von folgenden Gleichungen können diese vereinfacht werden:

$$\int_0^1 \frac{\phi_a(y)}{1-y} dy = \frac{\alpha_1^\parallel}{2} + \frac{\alpha_2^\parallel}{4} + \frac{3}{2}, \quad (\text{F.73})$$

$$\int_0^1 \frac{\phi_b(y)}{y} dy = -\frac{\alpha_1^\parallel}{2} + \frac{\alpha_2^\parallel}{4} + \frac{3}{2}, \quad (\text{F.74})$$

$$\int_0^1 dx \frac{\phi^\perp(x)}{(1-x)^2} = \left( \lim_{u \rightarrow 1} \frac{\phi^\perp(u)}{(1-u)^2} \right) X_H + \int_0^1 \frac{dx}{1-x} \left[ \frac{\phi^\perp(x)}{1-x} - \left( \lim_{u \rightarrow 1} \frac{\phi^\perp(u)}{1-u} \right) \right], \quad (\text{F.75})$$

$$\lim_{u \rightarrow 1} \frac{\phi^\perp(u)}{(1-u)^2} = 6(3\alpha_1^\perp + 6\alpha_2^\perp + 1), \quad (\text{F.76})$$

$$\frac{\phi^\perp(x)}{1-x} - \left( \lim_{u \rightarrow 1} \frac{\phi^\perp(u)}{1-u} \right) = -36\alpha_1^\perp - 96\alpha_2^\perp - 6, \quad (\text{F.77})$$

$$\int_0^1 \frac{\phi^\perp(y)}{y(1-y)} dy = 6 + 6\alpha_2^\perp. \quad (\text{F.78})$$

## Annihilationsterme

Die Annihilationsbeiträge weisen diesmal sowohl logarithmische als auch lineare Infrarotdivergenzen auf, welche mit den folgenden Vorschriften in komplexe Parameter absorbiert werden:

$$\int_0^1 \frac{du}{u} \rightarrow X_A, \quad \int_0^1 du \frac{\log u}{u} \rightarrow -\frac{1}{2}(X_A)^2, \quad \int_0^1 \frac{du}{u^2} \rightarrow X_L. \quad (\text{F.79})$$

Für den Zerfall  $B_s \rightarrow \phi\phi$  benötigen wir  $\beta_{3,4}^{p,h} = \frac{B_{\phi\phi}^h}{A_{\phi\phi}^h} b_{3,4}^{p,h}$ ,  $h = 0, \pm$  mit den Vorfaktoren aus Gl. (F.57) und (F.58). Es gilt folgender Zusammenhang:

$$b_3^{p,h} = \frac{C_F}{N_c^2} \left[ C_3 A_1^{i,h} + C_5 (A_3^{i,h} + A_f^{f,h}) + N_c C_6 A_3^{f,h} \right], \quad (\text{F.80})$$

$$b_4^{p,h} = \frac{C_F}{N_c^2} \left[ C_4 A_1^{i,h} + C_6 A_2^{i,h} \right]. \quad (\text{F.81})$$

Für den longitudinalen Fall ändern sich nur einige Vorzeichen im Vergleich zu  $PV$ -Endzuständen. Die vereinfachten Ausdrücke mit den asymptotischen Verteilungsamplituden lauten für die longitudinalen Amplituden:

$$A_1^{i,0} \approx A_2^{f,0} \approx 18\pi\alpha_s \left[ \left( X_A - 4 + \frac{\pi^2}{3} \right) + r_\chi^{V_1} r_\chi^{V_2} (X_A - 2)^2 \right], \quad (\text{F.82})$$

$$A_3^{i,0} \approx 18\pi\alpha_s (r_\chi^{V_1} - r_\chi^{V_2}) \left( -X_A^2 + 2X_A - 4 + \frac{\pi^2}{3} \right), \quad (\text{F.83})$$

$$A_3^{f,0} \approx 18\pi\alpha_s (r_\chi^{V_1} + r_\chi^{V_2}) (2X_A - 1)(2 - X_A), \quad (\text{F.84})$$

und für die transversalen Amplituden:

$$A_1^{i,-} \approx A_2^{i,-} \approx 18\pi\alpha_s \frac{m_{V_1} m_{V_2}}{m_B^2} \left( \frac{1}{2} X_L + \frac{5}{2} - \frac{\pi^2}{3} \right), \quad (\text{F.85})$$

$$A_3^{i,-} \approx 18\pi\alpha_s \left( \frac{m_{V_1} r_X^{V_2}}{m_{V_2}} - \frac{m_{V_2} r_X^{V_1}}{m_{V_1}} \right) (X_A^2 - 2X_A + 2), \quad (\text{F.86})$$

$$A_3^{f,-} \approx 18\pi\alpha_s \left( \frac{m_{V_1} r_X^{V_2}}{m_{V_2}} + \frac{m_{V_2} r_X^{V_1}}{m_{V_1}} \right) (2X_A^2 - 5X_A + 3), \quad (\text{F.87})$$

$$A_1^{1,+} \approx A_2^{i,+} \approx 18\pi\alpha_s \frac{m_{V_1} m_{V_2}}{m_B^2} (2X_A^2 - 3X_A + 6 - \frac{2}{3}\pi^2). \quad (\text{F.88})$$

### F.3 Funktionen aus der Umparametrisierung

Im Zuge der Umparametrisierung der Amplituden mit Wilson-Koeffizienten in Kapitel 4.4.4 und 4.4.5 haben wir die Funktionen  $h_i$  berechnet<sup>7</sup>.

**Ergebnisse für  $B_d \rightarrow \phi K_S$ :**

$$\begin{aligned} h_1(X_H, X_A) &= -0.00046 - 0.00007 i, \\ h_2(X_H, X_A) &= 8 \cdot 10^{-6} + 10^{-6} i, \\ h_3(X_H, X_A) &= 0.05093 - 0.00376 i + 0.00027 X_A + 0.00006 X_A^2 + 0.00077 X_H, \\ h_4(X_H, X_A) &= 0.04875 - 0.00518 i + 0.00077 X_H, \\ h_5(X_H, X_A) &= 0.04301 - 0.00237 i - 0.00089 X_A + 0.00060 X_A^2, \\ h_6(X_H, X_A) &= 0.01147 + 0.00097 i - 0.00265 X_A + 0.00178 X_A^2 - 0.00077 X_H, \\ h_7(X_H, X_A) &= -0.02151 + 0.00118 i + 0.00044 X_A - 0.00030 X_A^2, \\ h_8(X_H, X_A) &= -0.00709 - 0.00154 i + 0.00132 X_A - 0.00089 X_A^2 + 0.00039 X_H, \\ h_9(X_H, X_A) &= -0.02559 + 0.00154 i - 0.00013 X_A - 0.00003 X_A^2 - 0.00039 X_H, \\ h_{10}(X_H, X_A) &= -0.02572 + 0.00154 i - 0.00039 X_H, \\ h_{7\gamma}(X_H, X_A) &= 0.0000169, \\ h_{8g}(X_H, X_A) &= -0.001958. \end{aligned}$$

**Ergebnisse für  $B_s \rightarrow \phi\phi$ :**

Longitudinale Polarisation:

$$\begin{aligned} h_1^0(X_H, X_A) &= -0.00100 - 0.00045 i, \\ h_3^0(X_H, X_A) &= 0.10606 - 0.00747 i + 0.00041 X_A + 0.00015 X_A^2 + 0.00118 X_H, \\ h_4^0(X_H, X_A) &= 0.10159 - 0.01062 i + 0.00041 X_A + 0.00015 X_A^2 + 0.00118 X_H, \\ h_5^0(X_H, X_A) &= 0.07814 + 0.004704 i + 0.00385 X_A - 0.00154 X_A^2, \\ h_6^0(X_H, X_A) &= 0.01285 + 0.00161 i + 0.01196 X_A - 0.00447 X_A^2 - 0.00118 X_H, \\ h_7^0(X_H, X_A) &= -0.04096, \\ h_8^0(X_H, X_A) &= -0.01116 - 0.00306 i + 0.00059 X_H, \\ h_9^0(X_H, X_A) &= -0.04096, \end{aligned}$$

<sup>7</sup>Hierbei muss beachtet werden, dass in der QCDF in [176, 177] die Konvention von  $C_1$  und  $C_2$  im Vergleich zu Anhang E vertauscht ist, d.h. entsprechend  $h_1 \leftrightarrow h_2$ .

$$h_{10}^0(X_H, X_A) = -0.01225 + 0.00306 i - 0.00059 X_H,$$

$$h_{8g}^{\text{eff}0}(X_H, X_A) = -0.00389.$$

Parallele Polarisation:

$$h_1^{\parallel}(X_H, X_A, X_L) = -0.00050 - 0.00020 i,$$

$$h_2^{\parallel}(X_H, X_A, X_L) = 0.00003,$$

$$h_3^{\parallel}(X_H, X_A, X_L) = 0.05647 - 0.00625 i + 0.00015 X_A - 0.00010 X_A^2 - 0.00404 X_H - 0.000026 X_L,$$

$$h_4^{\parallel}(X_H, X_A, X_L) = 0.05539 - 0.00768 i + 0.00749 X_A - 0.00499 X_A^2 - 0.00404 X_H - 0.000026 X_L,$$

$$h_5^{\parallel}(X_H, X_A, X_L) = 0.03960 + 0.00544 X_A - 0.00218 X_A^2,$$

$$h_6^{\parallel}(X_H, X_A, X_L) = 0.00463 + 0.00356 i + 0.02381 X_A - 0.01152 X_A^2 + 0.00404 X_H - 0.000025 X_L,$$

$$h_7^{\parallel}(X_H, X_A, X_L) = -0.01882,$$

$$h_8^{\parallel}(X_H, X_A, X_L) = -0.00455 - 0.00281 i - 0.00202 X_H,$$

$$h_9^{\parallel}(X_H, X_A, X_L) = -0.01882,$$

$$h_{10}^{\parallel}(X_H, X_A, X_L) = -0.00621 + 0.00281 i + 0.00202 X_H,$$

$$h_{7\gamma}^{\text{eff}\parallel}(X_H, X_A, X_L) = 0.00067.$$

Senkrechte Polarisation:

$$h_1^{\perp}(X_H, X_A, X_L) = -0.00050 - 0.00020 i,$$

$$h_2^{\perp}(X_H, X_A, X_L) = 0.00003,$$

$$h_3^{\perp}(X_H, X_A, X_L) = 0.05641 - 0.00625 i - 0.00015 X_A + 0.00010 X_A^2 - 0.00404 X_H - 0.000026 X_L,$$

$$h_4^{\perp}(X_H, X_A, X_L) = 0.05250 - 0.00768 i - 0.00749 X_A + 0.00499 X_A^2 - 0.00404 X_H - 0.000026 X_L,$$

$$h_5^{\perp}(X_H, X_A, X_L) = 0.03960 + 0.00544 X_A - 0.00218 X_A^2,$$

$$h_6^{\perp}(X_H, X_A, X_L) = 0.00174 + 0.00356 i + 0.00884 X_A - 0.00154 X_A^2 + 0.00404 X_H - 0.000026 X_L,$$

$$h_7^{\perp}(X_H, X_A, X_L) = -0.01882,$$

$$h_8^{\perp}(X_H, X_A, X_L) = -0.00455 - 0.00281 i - 0.00202 X_H,$$

$$h_9^{\perp}(X_H, X_A, X_L) = -0.01882,$$

$$h_{10}^{\perp}(X_H, X_A, X_L) = -0.00621 + 0.00281 i + 0.00202 X_H,$$

$$h_{7\gamma}^{\text{eff}\perp}(X_H, X_A, X_L) = 0.00067.$$



# Literaturverzeichnis

- [1] G. 't Hooft, *Recent Developments in Gauge Theories, Cargèse summer school* (1979).
- [2] **Double Chooz** Collaboration, K. Anderson *et. al.*, *White Paper Report on Using Nuclear Reactors to Search for a value of  $\theta_{13}$* , <http://www.hep.anl.gov/minos/reactor13/reactor13.pdf> (2004).
- [3] **Double Chooz** Collaboration, F. Ardellier *et. al.*, *Double Chooz: A search for the neutrino mixing angle  $\theta_{13}$* , **hep-ex/0606025**.
- [4] **Daya-Bay** Collaboration, X. Guo *et. al.*, *A precision measurement of the neutrino mixing angle  $\theta_{13}$  using reactor antineutrinos at Daya Bay*, **hep-ex/0701029**.
- [5] **MEG** Collaboration, J. Adam *et. al.*, *A limit for the  $\mu \rightarrow e\gamma$  decay from the MEG experiment*, *Nucl. Phys.* **B834** (2010) 1–12, [[arXiv:0908.2594](https://arxiv.org/abs/0908.2594)].
- [6] **NA62** Collaboration, E. Goudzovski, *Lepton flavour universality test at the CERN NA62 experiment*, [arXiv:1008.1219](https://arxiv.org/abs/1008.1219).
- [7] E. Marinova, *K Rare Decays with NA62*, [arXiv:1006.2338](https://arxiv.org/abs/1006.2338).
- [8] E. Goudzovski, *Lepton universality test with  $K^+ \rightarrow l^+\nu$  decays*, [arXiv:0908.3858](https://arxiv.org/abs/0908.3858).
- [9] M. Davier, A. Hoecker, B. Malaescu, and Z. Zhang, *Reevaluation of the Hadronic Contributions to the Muon  $g-2$  and to  $\alpha(M_Z)$* , [arXiv:1010.4180](https://arxiv.org/abs/1010.4180).
- [10] J. Girrbach, S. Mertens, U. Nierste, and S. Wiesenfeldt, *Lepton flavour violation in the MSSM*, *JHEP* **05** (2010) 026, [[arXiv:0910.2663](https://arxiv.org/abs/0910.2663)].
- [11] A. Crivellin and J. Girrbach, *Constraining the MSSM sfermion mass matrices with light fermion masses*, *Phys. Rev.* **D81** (2010) 076001, [[arXiv:1002.0227](https://arxiv.org/abs/1002.0227)].
- [12] A. Crivellin, J. Girrbach, and U. Nierste, *Yukawa coupling and anomalous magnetic moment of the muon: an update for the LHC era*, [arXiv:1010.4485](https://arxiv.org/abs/1010.4485).
- [13] J. Girrbach and U. Nierste, *A critical look at  $\Gamma(K \rightarrow e\nu)/\Gamma(K \rightarrow \mu\nu)$* , in preparation.
- [14] J. Girrbach, S. Jager, M. Knopf, W. Martens, U. Nierste, C. Scherrer, and S. Wiesenfeldt, *Flavor Physics in an  $SO(10)$  Grand Unified Model*, [arXiv:1101.6047](https://arxiv.org/abs/1101.6047).
- [15] **Particle Data Group** Collaboration, C. Amsler *et. al.*, *Review of particle physics*, *Phys. Lett.* **B667** (2008) 1.
- [16] B. Kayser and S. Petcov, *Convention of PMNS matrix, (persoenliche Mitteilung)* (2010).
- [17] S. L. Glashow, J. Iliopoulos, and L. Maiani, *Weak interactions with lepton-hadron symmetry*, *Phys. Rev. D* **2** (Oct, 1970) 1285–1292.
- [18] L. Wolfenstein, *Parametrization of the Kobayashi-Maskawa Matrix*, *Phys. Rev. Lett.* **51** (1983) 1945.

- 
- [19] **Particle Data Group** Collaboration, K. Nakamura *et. al.*, *Review of particle physics*, *J. Phys.* **G37** (2010) 075021.
- [20] M. C. Gonzalez-Garcia and M. Maltoni, *Phenomenology with Massive Neutrinos*, *Phys. Rept.* **460** (2008) 1–129, [[arXiv:0704.1800](#)].
- [21] G. L. Fogli, E. Lisi, A. Marrone, A. Palazzo, and A. M. Rotunno, *Hints of  $\theta_{13} > 0$  from global neutrino data analysis*, *Phys. Rev. Lett.* **101** (2008) 141801, [[arXiv:0806.2649](#)].
- [22] P. F. Harrison, D. H. Perkins, and W. G. Scott, *Tri-bimaximal mixing and the neutrino oscillation data*, *Phys. Lett.* **B530** (2002) 167, [[hep-ph/0202074](#)].
- [23] S. F. King, *Neutrino Mass and Flavour Models*, [arXiv:0909.2969](#).
- [24] **MINOS** Collaboration, P. Adamson *et. al.*, *A Search for Lorentz Invariance and CPT Violation with the MINOS Far Detector*, [arXiv:1007.2791](#).
- [25] **MINOS** Collaboration, P. Vahle. Talk at *24th International Conference on Neutrino Physics and Astrophysics* (Neutrino 2010), June 14, 2010.
- [26] **The MiniBooNE** Collaboration, A. A. Aguilar-Arevalo *et. al.*, *Observed Event Excess in the MiniBooNE Search for  $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$  Oscillations*, [arXiv:1007.1150](#).
- [27] **LSND** Collaboration, A. Aguilar *et. al.*, *Evidence for neutrino oscillations from the observation of  $\bar{\nu}_e$  appearance in a  $\bar{\nu}_\mu$  beam*, *Phys. Rev.* **D64** (2001) 112007, [[hep-ex/0104049](#)].
- [28] K. Anikeev *et. al.*, *B physics at the Tevatron: Run II and beyond*, [hep-ph/0201071](#).
- [29] P. Minkowski,  *$\mu \rightarrow e\gamma$  at a Rate of One Out of 1-Billion Muon Decays?*, *Phys. Lett.* **B67** (1977) 421.
- [30] E. K. Akhmedov, *Neutrino physics*, [hep-ph/0001264](#).
- [31] A. Strumia and F. Vissani, *Neutrino masses and mixings and...*, [hep-ph/0606054](#).
- [32] J. Wess and B. Zumino, *Supergauge transformations in four dimensions*, *Nuclear Physics B* **70** (1974), no. 1 39 – 50.
- [33] J. Wess and B. Zumino, *A lagrangian model invariant under supergauge transformations*, *Physics Letters B* **49** (1974), no. 1 52 – 54.
- [34] S. P. Martin, *A supersymmetry primer*, [hep-ph/9709356](#).
- [35] I. J. R. Aitchison, *Supersymmetry in particle physics: An elementary introduction*, *SLAC-R-865*.
- [36] M. Drees, R. Godbole, and P. Roy, *Theory and phenomenology of sparticles: An account of four-dimensional  $N=1$  supersymmetry in high energy physics*, *Hackensack, USA: World Scientific (2004) 555 p.*
- [37] M. Drees, *An Introduction to supersymmetry*, [hep-ph/9611409](#).
- [38] A. Signer, *Abc of SUSY*, *J. Phys.* **G36** (2009) 073002, [[arXiv:0905.4630](#)].
- [39] R. Haag, J. T. Lopuszanski, and M. Sohnius, *All possible generators of supersymmetries of the s-matrix*, *Nuclear Physics B* **88** (1975), no. 2 257 – 274.
- [40] S. Coleman and J. Mandula, *All possible symmetries of the s-matrix*, *Phys. Rev.* **159** (Jul, 1967) 1251–1256.
-

- 
- [41] J. Rosiek, *Complete set of Feynman rules for the MSSM – ERRATUM*, [hep-ph/9511250](#).
- [42] F. Gianotti, *Searches for supersymmetry at high-energy colliders: The past, the present and the future*, *New J. Phys.* **4** (2002) 63.
- [43] L. J. Hall, R. Rattazzi, and U. Sarid, *The Top quark mass in supersymmetric  $SO(10)$  unification*, *Phys. Rev.* **D50** (1994) 7048–7065, [[hep-ph/9306309](#)].
- [44] M. S. Carena, D. Garcia, U. Nierste, and C. E. M. Wagner, *Effective Lagrangian for the  $\bar{t}bH^+$  interaction in the MSSM and charged Higgs phenomenology*, *Nucl. Phys.* **B577** (2000) 88–120, [[hep-ph/9912516](#)].
- [45] A. J. Buras, P. H. Chankowski, J. Rosiek, and L. Slawianowska,  *$\Delta M_{d,s}$ ,  $B_{d,s}^0 \rightarrow \mu^+\mu^-$  and  $B \rightarrow X_s \gamma$  in supersymmetry at large  $\tan\beta$* , *Nucl. Phys.* **B659** (2003) 3, [[hep-ph/0210145](#)].
- [46] G. Isidori and P. Paradisi, *Hints of large  $\tan\beta$  in flavour physics*, *Phys. Lett.* **B639** (2006) 499–507, [[hep-ph/0605012](#)].
- [47] L. Hofer, U. Nierste, and D. Scherer, *Resummation of  $\tan\beta$ -enhanced supersymmetric loop corrections beyond the decoupling limit*, *JHEP* **10** (2009) 081, [[arXiv:0907.5408](#)].
- [48] S. Marchetti, S. Mertens, U. Nierste, and D. Stoeckinger,  *$\tan\beta$ -enhanced supersymmetric corrections to the anomalous magnetic moment of the muon*, *Phys. Rev.* **D79** (2009) 013010, [[arXiv:0808.1530](#)].
- [49] A. Dedes, H. K. Dreiner, and U. Nierste, *Correlation of  $B_s \rightarrow \mu^+\mu^-$  and  $(g-2)(\mu)$  in minimal supergravity*, *Phys. Rev. Lett.* **87** (2001) 251804, [[hep-ph/0108037](#)].
- [50] S. Ferrara, L. Girardello, and F. Palumbo, *A General Mass Formula in Broken Supersymmetry*, *Phys. Rev.* **D20** (1979) 403.
- [51] G. D’Ambrosio, G. F. Giudice, G. Isidori, and A. Strumia, *Minimal flavour violation: An effective field theory approach*, *Nucl. Phys.* **B645** (2002) 155–187, [[hep-ph/0207036](#)].
- [52] V. Cirigliano, B. Grinstein, G. Isidori, and M. B. Wise, *Minimal flavor violation in the lepton sector*, *Nucl. Phys.* **B728** (2005) 121–134, [[hep-ph/0507001](#)].
- [53] V. Cirigliano and B. Grinstein, *Phenomenology of minimal lepton flavor violation*, *Nucl. Phys.* **B752** (2006) 18–39, [[hep-ph/0601111](#)].
- [54] T. Banks, *Supersymmetry and the Quark Mass Matrix*, *Nucl. Phys.* **B303** (1988) 172.
- [55] R. Hempfling, *Yukawa coupling unification with supersymmetric threshold corrections*, *Phys. Rev.* **D49** (1994) 6168–6172.
- [56] T. Blazek, S. Raby, and S. Pokorski, *Finite supersymmetric threshold corrections to CKM matrix elements in the large  $\tan\beta$  regime*, *Phys. Rev.* **D52** (1995) 4151–4158, [[hep-ph/9504364](#)].
- [57] C. Hamzaoui, M. Pospelov, and M. Toharia, *Higgs-mediated FCNC in supersymmetric models with large  $\tan\beta$* , *Phys. Rev.* **D59** (1999) 095005, [[hep-ph/9807350](#)].
- [58] G. Isidori and A. Retico, *Scalar flavour-changing neutral currents in the large-  $\tan\beta$  limit*, *JHEP* **11** (2001) 001, [[hep-ph/0110121](#)].
- [59] M. Gorbahn, S. Jager, U. Nierste, and S. Trine, *The supersymmetric Higgs sector and  $B - \bar{B}$  mixing for large  $\tan\beta$* , [arXiv:0901.2065](#).
-

- [60] M. Steinhauser, *Übungen zu Strahlungskorrekturen in Eichtheorien, Herbstschule für Hochenergiephysik, Maria Laach* (2003).
  - [61] H. E. Logan and U. Nierste,  $B(s, d) \rightarrow \ell^+ \ell^-$  in a two Higgs doublet model, *Nucl. Phys.* **B586** (2000) 39–55, [[hep-ph/0004139](#)].
  - [62] A. Crivellin and U. Nierste, *Supersymmetric renormalisation of the CKM matrix and new constraints on the squark mass matrices*, *Phys. Rev.* **D79** (2009) 035018, [[arXiv:0810.1613](#)].
  - [63] I. Masina and C. A. Savoy, *Sleptonarium (constraints on the CP and flavour pattern of scalar lepton masses)*, *Nucl. Phys.* **B661** (2003) 365–393, [[hep-ph/0211283](#)].
  - [64] P. Paradisi, *Constraints on SUSY lepton flavour violation by rare processes*, *JHEP* **10** (2005) 006, [[hep-ph/0505046](#)].
  - [65] J. Girrbach, *Lepton-Flavour-Verletzung im supersymmetrischen Standardmodell mit großem  $\tan\beta$* , (Diplomarbeit, Universitaet Karlsruhe - heute KIT) (2008).
  - [66] F. Gabbiani, E. Gabrielli, A. Masiero, and L. Silvestrini, *A complete analysis of FCNC and CP constraints in general SUSY extensions of the standard model*, *Nucl. Phys.* **B477** (1996) 321–352, [[hep-ph/9604387](#)].
  - [67] F. Borzumati, G. R. Farrar, N. Polonsky, and S. D. Thomas, *Soft Yukawa couplings in supersymmetric theories*, *Nucl. Phys.* **B555** (1999) 53–115, [[hep-ph/9902443](#)].
  - [68] A. Masiero, P. Paradisi, and R. Petronzio, *Probing new physics through  $\mu - e$  universality in  $K \rightarrow l\nu$* , *Phys. Rev.* **D74** (2006) 011701, [[hep-ph/0511289](#)].
  - [69] D. Hanneke, S. Fogwell, and G. Gabrielse, *New Measurement of the Electron Magnetic Moment and the Fine Structure Constant*, *Phys. Rev. Lett.* **100** (2008) 120801, [[arXiv:0801.1134](#)].
  - [70] T. Aoyama, M. Hayakawa, T. Kinoshita, and M. Nio, *Revised value of the eighth-order QED contribution to the anomalous magnetic moment of the electron*, *Phys. Rev.* **D77** (2008) 053012, [[arXiv:0712.2607](#)].
  - [71] P. Clade *et. al.*, *Determination of the Fine Structure Constant Based on Bloch Oscillations of Ultracold Atoms in a Vertical Optical Lattice*, *Phys. Rev. Lett.* **96** (2006) 033001.
  - [72] D. Stockinger, *The muon magnetic moment and supersymmetry*, *J. Phys.* **G34** (2007) R45–R92, [[hep-ph/0609168](#)].
  - [73] J. Hisano, T. Moroi, K. Tobe, and M. Yamaguchi, *Lepton-Flavor Violation via Right-Handed Neutrino Yukawa Couplings in Supersymmetric Standard Model*, *Phys. Rev.* **D53** (1996) 2442–2459, [[hep-ph/9510309](#)].
  - [74] T. Moroi, *The Muon Anomalous Magnetic Dipole Moment in the Minimal Supersymmetric Standard Model*, *Phys. Rev.* **D53** (1996) 6565–6575, [[hep-ph/9512396](#)].
  - [75] A. Crivellin, *CKM Elements from Squark Gluino Loops*, [arXiv:0905.3130](#).
  - [76] S. Weinberg, *Electromagnetic and weak masses*, *Phys. Rev. Lett.* **29** (1972) 388–392.
  - [77] J. F. Donoghue, H. P. Nilles, and D. Wyler, *Flavor Changes in Locally Supersymmetric Theories*, *Phys. Lett.* **B128** (1983) 55.
  - [78] J. Ferrandis and N. Haba, *Supersymmetry breaking as the origin of flavor*, *Phys. Rev.* **D70** (2004) 055003, [[hep-ph/0404077](#)].
-



- 
- [79] A. Masiero, P. Paradisi, and R. Petronzio, *Anatomy and Phenomenology of the Lepton Flavor Universality in SUSY Theories*, *JHEP* **11** (2008) 042, [[arXiv:0807.4721](#)].
- [80] T. Plehn, M. Rauch, and M. Spannowsky, *Understanding Single Tops using Jets*, *Phys. Rev.* **D80** (2009) 114027, [[arXiv:0906.1803](#)].
- [81] A. Crivellin, *Effects of right-handed charged currents on the determinations of  $|V_{ub}|$  and  $|V_{cb}|$* , *Phys. Rev.* **D81** (2010) 031301, [[arXiv:0907.2461](#)].
- [82] **Muon G-2** Collaboration, G. W. Bennett *et. al.*, *Final report of the muon E821 anomalous magnetic moment measurement at BNL*, *Phys. Rev.* **D73** (2006) 072003, [[hep-ex/0602035](#)].
- [83] F. Jegerlehner and A. Nyffeler, *The Muon  $g-2$* , *Phys. Rept.* **477** (2009) 1–110, [[arXiv:0902.3360](#)].
- [84] M. Davier, A. Hoecker, B. Malaescu, C. Z. Yuan, and Z. Zhang, *Reevaluation of the hadronic contribution to the muon magnetic anomaly using new  $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$  cross section data from BABAR*, *Eur. Phys. J.* **C66** (2010) 1–9, [[arXiv:0908.4300](#)].
- [85] T. Teubner, K. Hagiwara, R. Liao, A. D. Martin, and D. Nomura, *Update of  $g-2$  of the muon and  $\Delta\alpha$* , [arXiv:1001.5401](#).
- [86] M. Passera, W. J. Marciano, and A. Sirlin, *The muon  $g-2$  discrepancy: new physics or a relatively light Higgs?*, [arXiv:1001.4528](#).
- [87] J. Prades, *Standard Model Prediction of the Muon Anomalous Magnetic Moment*, [arXiv:0909.2546](#).
- [88] S. Ferrara and E. Remiddi, *Absence of the Anomalous Magnetic Moment in a Supersymmetric Abelian Gauge Theory*, *Phys. Lett.* **B53** (1974) 347.
- [89] J. A. Grifols and A. Mendez, *Constraints on supersymmetric particle masses from  $(g-2)_\mu$* , *Phys. Rev.* **D26** (1982) 1809.
- [90] J. R. Ellis, J. S. Hagelin, and D. V. Nanopoulos, *Spin 0 leptons and the anomalous magnetic moment for the muon*, *Phys. Lett.* **B116** (1982) 283.
- [91] R. Barbieri and L. Maiani, *The Muon Anomalous Magnetic Moment in Broken Supersymmetric Theories*, *Phys. Lett.* **B117** (1982) 203.
- [92] D. A. Kosower, L. M. Krauss, and N. Sakai, *Low-Energy Supergravity and the Anomalous Magnetic Moment of the Muon*, *Phys. Lett.* **B133** (1983) 305.
- [93] T. C. Yuan, R. L. Arnowitt, A. H. Chamseddine, and P. Nath, *Supersymmetric Electroweak Effects on  $(g-2)_\mu$* , *Zeit. Phys.* **C26** (1984) 407.
- [94] M. S. Carena, G. F. Giudice, and C. E. M. Wagner, *Constraints on supersymmetric models from the muon anomalous magnetic moment*, *Phys. Lett.* **B390** (1997) 234–242, [[hep-ph/9610233](#)].
- [95] **Belle** Collaboration, K. Hayasaka *et. al.*, *New search for  $\tau \rightarrow \mu\gamma$  and  $\tau \rightarrow e\gamma$  decays at Belle*, *Phys. Lett.* **B666** (2008) 16–22, [[arXiv:0705.0650](#)].
- [96] **BABAR** Collaboration, J. Benitez, *Recent Results on Flavor Physics from BaBar*, [arXiv:1006.0314](#).
- [97] Y. M. Andreev, S. I. Bitukov, and N. V. Krasnikov, *Sleptons at post-WMAP benchmark points at LHC(CMS)*, *Phys. Atom. Nucl.* **68** (2005) 340–347, [[hep-ph/0402229](#)].
-

- 
- [98] F. del Aguila and L. Ametller, *On the detectability of sleptons at large hadron colliders*, *Phys. Lett.* **B261** (1991) 326–333.
- [99] H. Baer, C.-h. Chen, F. Paige, and X. Tata, *Signals for Minimal Supergravity at the CERN Large Hadron Collider II: Multilepton Channels*, *Phys. Rev.* **D53** (1996) 6241–6264, [[hep-ph/9512383](#)].
- [100] B. A. Dobrescu and P. J. Fox, *Uplifted supersymmetric Higgs region*, [arXiv:1001.3147](#).
- [101] J. F. Gunion, H. E. Haber, and M. Sher, *Charge / Color Breaking Minima and  $a$ -Parameter Bounds in Supersymmetric Models*, *Nucl. Phys.* **B306** (1988) 1.
- [102] H. E. Haber and J. D. Mason, *Hard supersymmetry-breaking 'wrong-Higgs' couplings of the MSSM*, *Phys. Rev.* **D77** (2008) 115011, [[arXiv:0711.2890](#)].
- [103] D. A. Demir, G. L. Kane, and T. T. Wang, *The minimal  $U(1)$ ' extension of the MSSM*, *Phys. Rev.* **D72** (2005) 015012, [[hep-ph/0503290](#)].
- [104] C. H. Albright, *Overview of Neutrino Mixing Models and ways to differentiate among them*, [arXiv:0905.0146](#).
- [105] C. H. Albright, *Overview of Neutrino Mixing Models and their Mixing Angle Predictions*, *AIP Conf. Proc.* **1222** (2010) 98–102, [[arXiv:0911.2437](#)].
- [106] **ISS Physics Working Group** Collaboration, A. Bandyopadhyay *et. al.*, *Physics at a future Neutrino Factory and super-beam facility*, *Rept. Prog. Phys.* **72** (2009) 106201, [[arXiv:0710.4947](#)].
- [107] **BABAR** Collaboration, B. Aubert *et. al.*, *Search for lepton flavor violation in the decay  $\tau^\pm \rightarrow e^\pm \gamma$* , *Phys. Rev. Lett.* **96** (2006) 041801, [[hep-ex/0508012](#)].
- [108] M. Finkemeier, *Radiative corrections to  $\pi_{l2}$  and  $K_{l2}$  decays*, *Phys. Lett.* **B387** (1996) 391–394, [[hep-ph/9505434](#)].
- [109] V. Cirigliano and I. Rosell, *The Standard Model prediction for  $R_{e,\mu}^{(\pi,K)}$* , *Phys. Rev. Lett.* **99** (2007) 231801, [[arXiv:0707.3439](#)].
- [110] V. Cirigliano and I. Rosell,  *$\pi/K \rightarrow e\nu$  branching ratios to  $O(e^2 p^4)$  in Chiral Perturbation Theory*, *JHEP* **10** (2007) 005, [[arXiv:0707.4464](#)].
- [111] G. Isidori, *KAON 2007: Conference Summary*, *PoS KAON* (2006) 064, [[arXiv:0709.2438](#)].
- [112] T. K. Collaboration, *Precise measurement of  $B(K \rightarrow e\nu(\gamma))/B(K \rightarrow \mu\nu(\gamma))$  and study of  $K \rightarrow e\nu\gamma$* , [arXiv:0907.3594](#).
- [113] E. Goudzovski, *Talk at NA62 Physics Handbook Workshop*, CERN (2009).
- [114] W.-S. Hou, *Enhanced charged Higgs boson effects in  $B^- \rightarrow \tau\nu$ ,  $\mu\nu$  and  $b \rightarrow \tau\nu + X$* , *Phys. Rev.* **D48** (1993) 2342–2344.
- [115] J. Hisano, M. Nagai, and P. Paradisi, *Flavor effects on the electric dipole moments in supersymmetric theories: A beyond leading order analysis*, *Phys. Rev.* **D80** (2009) 095014, [[arXiv:0812.4283](#)].
- [116] P. Paradisi, *Higgs-mediated  $e \rightarrow \mu$  transitions in II Higgs doublet model and supersymmetry*, *JHEP* **08** (2006) 047, [[hep-ph/0601100](#)].
- [117] J. Ellis, S. Lola, and M. Raidal, *Supersymmetric Grand Unification and Lepton Universality in  $K \rightarrow l\nu$  Decays*, [arXiv:0809.5211](#).
-

- 
- [118] A. Filipuzzi and G. Isidori, *Violations of lepton-flavour universality in  $P \rightarrow l\nu$  decays: a model-independent analysis*, [arXiv:0906.3024](#).
- [119] J. A. Casas and A. Ibarra, *Oscillating neutrinos and  $\mu \rightarrow e\gamma$* , *Nucl. Phys.* **B618** (2001) 171–204, [[hep-ph/0103065](#)].
- [120] F. Borzumati and A. Masiero, *Large muon- and electron-number nonconservation in supergravity theories*, *Phys. Rev. Lett.* **57** (Aug, 1986) 961–964.
- [121] J. Hisano and D. Nomura, *Solar and atmospheric neutrino oscillations and lepton flavor violation in supersymmetric models with the right-handed neutrinos*, *Phys. Rev.* **D59** (1999) 116005, [[hep-ph/9810479](#)].
- [122] S. Antusch, J. Kersten, M. Lindner, M. Ratz, and M. A. Schmidt, *Running neutrino mass parameters in see-saw scenarios*, *JHEP* **03** (2005) 024, [[hep-ph/0501272](#)].
- [123] S. Dimopoulos and H. Georgi, *Softly Broken Supersymmetry and  $SU(5)$* , *Nucl. Phys.* **B193** (1981) 150.
- [124] N. Sakai, *Naturalness in Supersymmetric GUTs*, *Zeit. Phys.* **C11** (1981) 153.
- [125] T. Goto and T. Nihei, *Effect of  $RRRR$  dimension five operator on the proton decay in the minimal  $SU(5)$  SUGRA GUT model*, *Phys. Rev.* **D59** (1999) 115009, [[hep-ph/9808255](#)].
- [126] H. Murayama and A. Pierce, *Not even decoupling can save minimal supersymmetric  $SU(5)$* , *Phys. Rev.* **D65** (2002) 055009, [[hep-ph/0108104](#)].
- [127] J. R. Ellis and M. K. Gaillard, *Fermion Masses And Higgs Representations In  $SU(5)$* , *Phys. Lett. B.* **88** (1979) 315.
- [128] B. Bajc, P. Fileviez Perez, and G. Senjanovic, *Proton decay in minimal supersymmetric  $SU(5)$* , *Phys. Rev.* **D66** (2002) 075005, [[hep-ph/0204311](#)].
- [129] D. Emmanuel-Costa and S. Wiesenfeldt, *Proton decay in a consistent supersymmetric  $SU(5)$  GUT model*, *Nucl. Phys.* **B661** (2003) 62–82, [[hep-ph/0302272](#)].
- [130] Z. Berezhiani, Z. Tavartkiladze, and M. Vysotsky,  *$d = 5$  operators in SUSY GUT: Fermion masses versus proton decay*, [hep-ph/9809301](#).
- [131] B. Bajc, P. Fileviez Perez, and G. Senjanovic, *Minimal supersymmetric  $SU(5)$  theory and proton decay: Where do we stand?*, [hep-ph/0210374](#).
- [132] F. Borzumati, S. Mishima, and T. Yamashita, *Non-CKM induced flavor violation in 'minimal' SUSY  $SU(5)$  models*, [arXiv:0705.2664](#).
- [133] N. Arkani-Hamed, H.-C. Cheng, and L. J. Hall, *Flavor mixing signals for realistic supersymmetric unification*, *Phys. Rev.* **D53** (1996) 413–436, [[hep-ph/9508288](#)].
- [134] J. Hisano, D. Nomura, Y. Okada, Y. Shimizu, and M. Tanaka, *Enhancement of  $\mu \rightarrow e\gamma$  in the supersymmetric  $SU(5)$  GUT at large  $\tan\beta$* , *Phys. Rev.* **D58** (1998) 116010, [[hep-ph/9805367](#)].
- [135] S. Baek, T. Goto, Y. Okada, and K.-i. Okumura, *Muon anomalous magnetic moment, lepton flavor violation, and flavor changing neutral current processes in SUSY GUT with right-handed neutrino*, *Phys. Rev.* **D64** (2001) 095001, [[hep-ph/0104146](#)].
- [136] P. Ko, J.-h. Park, and M. Yamaguchi, *Sflavor mixing map viewed from a high scale in supersymmetric  $SU(5)$* , *JHEP* **11** (2008) 051, [[arXiv:0809.2784](#)].
-

- [137] S. Trine, S. Westhoff, and S. Wiesenfeldt, *Probing Yukawa Unification with  $K$  and  $B$  Mixing*, *JHEP* **08** (2009) 002, [[arXiv:0904.0378](#)].
  - [138] F. Borzumati and T. Yamashita, *Minimal supersymmetric  $SU(5)$  model with nonrenormalizable operators: Seesaw mechanism and violation of flavour and CP*, [arXiv:0903.2793](#).
  - [139] F. Borzumati and T. Yamashita, *The  $nrMSSU(5)$  and universality of soft masses*, [arXiv:0910.0372](#).
  - [140] S. Mertens, *Das magnetische Moment vom Myon und der Zerfall  $\tau \rightarrow e\gamma$  im MSSM bei großem  $\tan\beta$* , (Diplomarbeit, Universitaet Karlsruhe - heute KIT) (2008).
  - [141] B. C. Allanach *et. al.*, *The Snowmass points and slopes: Benchmarks for SUSY searches*, [hep-ph/0202233](#).
  - [142] **The D0 Collaboration**, V. M. Abazov *et. al.*, *Evidence for an anomalous like-sign dimuon charge asymmetry*, [arXiv:1005.2757](#).
  - [143] U. Nierste, *Supersymmetric Flavour Physics, 18<sup>th</sup> International Conference on Supersymmetry and Unification of Fundamental Interactions, Bonn* (2010).
  - [144] **UTfit Collaboration**, M. Bona *et. al.*, *First Evidence of New Physics in  $b \leftrightarrow s$  Transitions*, *PMC Phys.* **A3** (2009) 6, [[arXiv:0803.0659](#)].
  - [145] D. Chang, A. Masiero, and H. Murayama, *Neutrino mixing and large CP violation in  $B$  physics*, *Phys. Rev.* **D67** (2003) 075013, [[hep-ph/0205111](#)].
  - [146] S. Jager, *Supersymmetric  $SO(10)$  unification and flavor-changing weak decays*, (Phd thesis) (2003).
  - [147] W. Martens,  *$b \rightarrow s$ -Quark-Übergänge in einer Supersymmetrischen Großen Vereinheitlichten Theorie*, (Diplomarbeit, Universitaet Karlsruhe - heute KIT) (2008).
  - [148] M. Knopf, *A Computational Framework for the RGE Analysis of a SuSy GUT Model*, (Diplomarbeit, Universitaet Karlsruhe - heute KIT) (2008).
  - [149] C. Scherrer, *Seltene Zerfälle im supersymmetrischen  $SO(10)$ -Modell*, (Diplomarbeit, Universitaet Karlsruhe - heute KIT) (2008).
  - [150] P. Nath and R. M. Syed, *Analysis of couplings with large tensor representations in  $SO(2N)$  and proton decay*, *Phys. Lett.* **B506** (2001) 68–76, [[hep-ph/0103165](#)].
  - [151] P. Nath and R. M. Syed, *Complete cubic and quartic couplings of 16 and 16-bar in  $SO(10)$  unification*, *Nucl. Phys.* **B618** (2001) 138–156, [[hep-th/0109116](#)].
  - [152] **LEP Working Group for Higgs boson searches Collaboration**, R. Barate *et. al.*, *Search for the standard model Higgs boson at LEP*, *Phys. Lett.* **B565** (2003) 61–75, [[hep-ex/0306033](#)].
  - [153] S. Jager and U. Nierste, *Hadronic vs leptonic flavor and CP violation in SUSY  $SO(10)$* , [hep-ph/0410360](#).
  - [154] A. J. Buras, *Weak Hamiltonian, CP violation and rare decays*, [hep-ph/9806471](#).
  - [155] U. Nierste, *Vorlesung: Einführung in die Flavourphysik*, Diplomarbeit, Universitaet Karlsruhe - heute KIT (2008/09).
  - [156] T. Appelquist and J. Carazzone, *Infrared singularities and massive fields*, *Phys. Rev. D* **11** (May, 1975) 2856–2861.
-

- 
- [157] A. Lenz and U. Nierste, *Theoretical update of  $B_s - \bar{B}_s$  mixing*, *JHEP* **06** (2007) 072, [[hep-ph/0612167](#)].
- [158] A. Lenz *et al.*, *Anatomy of New Physics in  $B$ - $B$ bar mixing*, [arXiv:1008.1593](#).
- [159] **CDF** Collaboration, A. Abulencia *et al.*, *Observation of  $B_s^0 - \bar{B}_s^0$  oscillations*, *Phys. Rev. Lett.* **97** (2006) 242003, [[hep-ex/0609040](#)].
- [160] G. G. f. t. C. Collaboration, *New Measurement of the  $B_s$  Mixing Phase at CDF*, [arXiv:1012.0962](#).
- [161] T. A. *et al.* [CDF collaboration]. CDF public note 10206.
- [162] V. M. A. *et al.* [DØ collaboration]. DØ Conference note 6098.
- [163] **CDF** Collaboration, T. Aaltonen *et al.*, *First Flavor-Tagged Determination of Bounds on Mixing-Induced CP Violation in  $B_s^0 \rightarrow J/\psi\phi$  Decays*, *Phys. Rev. Lett.* **100** (2008) 161802, [[arXiv:0712.2397](#)].
- [164] **D0** Collaboration, V. M. Abazov *et al.*, *Measurement of  $B_s^0$  mixing parameters from the flavor-tagged decay  $B_s^0 \rightarrow J/\psi\phi$* , *Phys. Rev. Lett.* **101** (2008) 241801, [[arXiv:0802.2255](#)].
- [165] **Heavy Flavor Averaging Group** Collaboration, E. Barberio *et al.*, *Averages of  $b$ -hadron and  $c$ -hadron Properties at the End of 2007*, [arXiv:0808.1297](#).
- [166] T. A. *et al.* [CDF collaboration]. CDF public note 9015.
- [167] A. J. Buras, P. Gambino, M. Gorbahn, S. Jager, and L. Silvestrini,  *$\epsilon'/\epsilon$  and Rare  $K$  and  $B$  Decays in the MSSM*, *Nucl. Phys.* **B592** (2001) 55–91, [[hep-ph/0007313](#)].
- [168] A. J. Buras, M. Jamin, and P. H. Weisz, *Leading and next-to-leading QCD corrections to  $\epsilon$  parameter and  $B^0 - \bar{B}^0$  mixing in the presence of a heavy top quark*, *Nucl. Phys.* **B347** (1990) 491–536.
- [169] **The Heavy Flavor Averaging Group** Collaboration, D. Asner *et al.*, *Averages of  $b$ -hadron,  $c$ -hadron, and  $\tau$ -lepton Properties*, [arXiv:1010.1589](#).
- [170] **Belle** Collaboration, K. Abe *et al.*, *Measurement of time-dependent CP-violating asymmetries in  $B^0 \rightarrow \phi K_S^0$ ,  $K^+ K^- K_S^0$ , and  $\eta' K_S^0$  decays*, *Phys. Rev. Lett.* **91** (2003) 261602, [[hep-ex/0308035](#)].
- [171] **BABAR** Collaboration, B. Aubert *et al.*, *Measurement of CP-Violating Asymmetries in the  $B^0 \rightarrow K^+ K^- K_S^0$  Dalitz Plot*, [arXiv:0808.0700](#).
- [172] **BELLE** Collaboration, Y. Nakahama *et al.*, *Measurement of CP violating asymmetries in  $B^0 \rightarrow K^+ K^- K_S^0$  decays with a time-dependent Dalitz approach*, [arXiv:1007.3848](#).
- [173] A. Ali, G. Kramer, and C.-D. Lu, *Experimental tests of factorization in charmless non-leptonic two-body  $B$  decays*, *Phys. Rev.* **D58** (1998) 094009, [[hep-ph/9804363](#)].
- [174] M. Wirbel, B. Stech, and M. Bauer, *Exclusive Semileptonic Decays of Heavy Mesons*, *Z. Phys.* **C29** (1985) 637.
- [175] M. Bauer, B. Stech, and M. Wirbel, *Exclusive Nonleptonic Decays of  $D$ ,  $D(s)$ , and  $B$  Mesons*, *Z. Phys.* **C34** (1987) 103.
- [176] M. Beneke and M. Neubert, *QCD factorization for  $B \rightarrow PP$  and  $B \rightarrow PV$  decays*, *Nucl. Phys.* **B675** (2003) 333–415, [[hep-ph/0308039](#)].
-

- 
- [177] M. Beneke, G. Buchalla, M. Neubert, and C. T. Sachrajda, *QCD factorization in  $B \rightarrow \pi K$ ,  $\pi\pi$  decays and extraction of Wolfenstein parameters*, *Nucl. Phys.* **B606** (2001) 245–321, [[hep-ph/0104110](#)].
- [178] C. W. Bauer, D. Pirjol, and I. W. Stewart, *Soft-Collinear Factorization in Effective Field Theory*, *Phys. Rev.* **D65** (2002) 054022, [[hep-ph/0109045](#)].
- [179] C. W. Bauer, S. Fleming, D. Pirjol, and I. W. Stewart, *An effective field theory for collinear and soft gluons: Heavy to light decays*, *Phys. Rev.* **D63** (2001) 114020, [[hep-ph/0011336](#)].
- [180] A. Datta and D. London, *Measuring new-physics parameters in  $B$  penguin decays*, *Phys. Lett.* **B595** (2004) 453–460, [[hep-ph/0404130](#)].
- [181] S. Amato, B. Souza de Paula, J. McCarron, F. Muheim, and Y. Xie, *LHCb’s sensitivity to new CP-violating phases in the decay  $B_s^0 \rightarrow \phi\phi$* , *CERN-LHCB-2007-047*.
- [182] **LHCb** Collaboration, N. Harnew, *The physics prospects and status of the LHCb experiment*, *Int. J. Mod. Phys.* **A23** (2008) 3329–3333.
- [183] D. Tonelli and f. t. C. Collaboration, *Charmless  $B$  Decays at CDF*, [arXiv:1001.0868](#).
- [184] M. Dorigo, *Measurements of the masses, lifetimes and decay modes of hadrons*, *Recontre de Moriond QCD and High energy Interactions* (2010).
- [185] **CDF** Collaboration, G. Giurgiu,  *$B_s$  Decays at the Tevatron*, [arXiv:1010.4082](#).
- [186] M. Beneke, J. Rohrer, and D. Yang, *Branching fractions, polarisation and asymmetries of  $B \rightarrow VV$  decays*, *Nucl. Phys.* **B774** (2007) 64–101, [[hep-ph/0612290](#)].
- [187] A. L. Kagan, *Polarization in  $B \rightarrow VV$  decays*, *Phys. Lett.* **B601** (2004) 151–163, [[hep-ph/0405134](#)].
- [188] P. Colangelo, F. De Fazio, and T. N. Pham, *The riddle of polarization in  $B \rightarrow VV$  transitions*, *Phys. Lett.* **B597** (2004) 291–298, [[hep-ph/0406162](#)].
- [189] P. K. Das and K.-C. Yang, *Data for polarization in charmless  $B \rightarrow \phi K^*$ : A signal for new physics?*, *Phys. Rev.* **D71** (2005) 094002, [[hep-ph/0412313](#)].
- [190] H.-Y. Cheng and C.-K. Chua, *QCD Factorization for Charmless Hadronic  $B_s$  Decays Revisited*, *Phys. Rev.* **D80** (2009) 114026, [[arXiv:0910.5237](#)].
- [191] A. L. Kagan, *Right-handed currents, CP violation, and  $B \rightarrow VV$* , [hep-ph/0407076](#).
- [192] M. Bartsch, G. Buchalla, and C. Kraus,  *$B \rightarrow V_L V_L$  Decays at Next-to-Leading Order in QCD*, [arXiv:0810.0249](#).
- [193] H.-Y. Cheng and K.-C. Yang, *Branching Ratios and Polarization in  $B \rightarrow VV, VA, AA$  Decays*, *Phys. Rev.* **D78** (2008) 094001, [[arXiv:0805.0329](#)].
- [194] M. Beneke, X.-Q. Li, and L. Vernazza, *Hadronic  $B$  decays in the MSSM with large  $\tan\beta$* , *Eur. Phys. J.* **C61** (2009) 429–438, [[arXiv:0901.4841](#)].
- [195] D. Becirevic *et. al.*,  *$B_d - \bar{B}_d$  mixing and the  $B_d \rightarrow J/\psi K_s$  asymmetry in general SUSY models*, *Nucl. Phys.* **B634** (2002) 105–119, [[hep-ph/0112303](#)].
- [196] E. Gabrielli, K. Huitu, and S. Khalil, *Comparative study of CP asymmetries in supersymmetric models*, *Nucl. Phys.* **B710** (2005) 139–188, [[hep-ph/0407291](#)].
- [197] S. G. Kim, N. Maekawa, A. Matsuzaki, K. Sakurai, and T. Yoshikawa, *CP asymmetries of  $B \rightarrow \phi K_S$  and  $B \rightarrow \eta' K_S$  in SUSY GUT Model with Non-universal Sfermion Masses*, [arXiv:0803.4250](#).
-

- 
- [198] Y. Grossman, M. Neubert, and A. L. Kagan, *Trojan penguins and isospin violation in hadronic B decays*, *JHEP* **10** (1999) 029, [[hep-ph/9909297](#)].
- [199] S. Antusch, J. Kersten, M. Lindner, and M. Ratz, *Neutrino mass matrix running for non-degenerate see-saw scales*, *Phys. Lett.* **B538** (2002) 87–95, [[hep-ph/0203233](#)].  
[hep-ph/0203233](#).
- [200] S. Bethke, *The 2009 World Average of  $\alpha_s(M_Z)$* , *Eur. Phys. J.* **C64** (2009) 689–703, [[arXiv:0908.1135](#)].
- [201] W. Martens, *Towards a Two-Loop Matching of Gauge Couplings in Grand Unified Theories*, [arXiv:1011.2927](#).
- [202] K. G. Chetyrkin *et. al.*, *Charm and Bottom Quark Masses: an Update*, *Phys. Rev.* **D80** (2009) 074010, [[arXiv:0907.2110](#)].
- [203] **CDF and D0** Collaboration, and others, *Combination of CDF and D0 Results on the Mass of the Top Quark*, [arXiv:1007.3178](#).
- [204] **CKMfitter Group** Collaboration, J. Charles *et. al.*, *CP violation and the CKM matrix: Assessing the impact of the asymmetric B factories*, *Eur. Phys. J.* **C41** (2005) 1–131, [[hep-ph/0406184](#)].
- [205] H. Georgi, *Lie Algebras in Particle Physics. From Isospin to Unified Theories*, *Front. Phys.* **54** (1982) 1–255.
- [206] H. Georgi and S. L. Glashow, *Unity of all elementary-particle forces*, *Phys. Rev. Lett.* **32** (Feb, 1974) 438–441.
- [207] U. Nierste, *Vorlesung: Physik jenseits des Standardmodells*, *Universitaet Karlsruhe - heute KIT* (2007/2008).
- [208] F. Wilczek and A. Zee, *Families from Spinors*, *Phys. Rev.* **D25** (1982) 553.
- [209] R. N. Mohapatra, *Unification and Supersymmetry: The Frontiers of Quark-Lepton Physics; 3rd ed.* Graduate texts in contemporary physics. Springer, Berlin, 2003.
- [210] R. N. Mohapatra and B. Sakita, *SO(2N) grand unification in an SU(N) basis*, *Phys. Rev.* **D21** (1980) 1062.
- [211] S. Wiesenfeldt, *Operator analysis for proton decay in SUSY SO(10) GUT models*, *Phys. Rev.* **D71** (2005) 075006, [[hep-ph/0501223](#)].
- [212] S. Bertolini, M. Frigerio, and M. Malinsky, *Fermion masses in SUSY SO(10) with type II seesaw: A non-minimal predictive scenario*, *Phys. Rev.* **D70** (2004) 095002, [[hep-ph/0406117](#)].
- [213] D. Chang, T. Fukuyama, Y.-Y. Keum, T. Kikuchi, and N. Okada, *Perturbative SO(10) grand unification*, *Phys. Rev.* **D71** (2005) 095002, [[hep-ph/0412011](#)].
- [214] U. Nierste, *Three Lectures on Meson Mixing and CKM phenomenology*, [arXiv:0904.1869](#).
- [215] V. Weisskopf and E. P. Wigner, *Calculation of the natural brightness of spectral lines on the basis of Dirac's theory*, *Z. Phys.* **63** (1930) 54–73.
- [216] V. Weisskopf and E. Wigner, *Over the natural line width in the radiation of the harmonius oscillator*, *Z. Phys.* **65** (1930) 18–29.
-

- [217] G. Buchalla, A. J. Buras, and M. E. Lautenbacher, *Weak Decays Beyond Leading Logarithms*, *Rev. Mod. Phys.* **68** (1996) 1125–1144, [[hep-ph/9512380](#)].
- [218] F. Borzumati, C. Greub, T. Hurth, and D. Wyler, *Gluino contribution to radiative B decays: Organization of QCD corrections and leading order results*, *Phys. Rev.* **D62** (2000) 075005, [[hep-ph/9911245](#)].
- [219] T. Besmer, C. Greub, and T. Hurth, *Bounds on flavor violating parameters in supersymmetry*, *Nucl. Phys.* **B609** (2001) 359–386, [[hep-ph/0105292](#)].
- [220] G. L. Kane *et. al.*,  *$B_d \rightarrow \Phi K_S$  and supersymmetry*, *Phys. Rev.* **D70** (2004) 035015, [[hep-ph/0212092](#)].
- [221] S. Khalil and E. Kou, *On supersymmetric contributions to the CP asymmetry of the  $B \rightarrow \phi K_S$* , *Phys. Rev.* **D67** (2003) 055009, [[hep-ph/0212023](#)].
- [222] J.-F. Cheng, C.-S. Huang, and X.-H. Wu, *CP asymmetries in  $B \rightarrow \Phi K_S$  and  $B \rightarrow \eta' K_S$  in MSSM*, *Nucl. Phys.* **B701** (2004) 54–86, [[hep-ph/0404055](#)].
- [223] Y.-B. Dai, C.-S. Huang, W.-J. Li, and X.-H. Wu, *CP asymmetry in  $B \rightarrow \Phi K_S$  in a SUSY  $SO(10)$  GUT*, *Phys. Rev.* **D70** (2004) 116002, [[hep-ph/0407263](#)].



# Danksagung

All denen, die dazu beigetragen haben, dass ich diese Arbeit anfertigen konnte, möchte ich an dieser Stelle meinen Dank aussprechen.

Mein erster Dank gilt meinem Betreuer Prof. Dr. Ulrich Nierste, der es mir ermöglicht hat, nach der Diplomarbeit auf dem interessanten Gebiet der Flavourphysik jenseits des SMs weiterzuarbeiten. Ferner danke ich ihm für die lehrreichen Besprechungen, seine anschaulichen Erklärungen und seine Unterstützung, mich als Neuling in der Physikergemeinde bekannt zu machen. Seine Begeisterung für die Physik und seine offene Art sorgten stets für ein angenehmes Arbeitsklima.

Prof. Dr. Dieter Zeppenfeld danke ich für die Übernahme des Korreferates.

Für die gute Zusammenarbeit in unseren gemeinsamen Projekten bedanke ich mich bei Andreas Crivellin. Ebenso bedanken möchte ich mich bei Susanne Mertens und Sören Wiesenfeldt für unsere gemeinsame Arbeit in der Anfangsphase der Promotion. Ich danke Christian Scherrer, Markus Knopf und Waldemar Martens für die Bereitstellung des CMW-Programms und die Kooperation im CMM-Modell zusammen mit Sören Wiesenfeld, Sebastian Jäger und Ulrich Nierste.

Für das sorgfältige Korrekturlesen dieser Arbeit und viele hilfreiche Anregungen danke ich Andreas Ley, Stefan Bekavac, Waldemar Martens, Andreas Crivellin, Nikolai Zerf, Peter Marquard und Andreas Scharf.

Weiterhin bedanke ich mich bei den derzeitigen und ehemaligen Mitgliedern des Instituts für Theoretische Teilchenphysik für deren Hilfe bei auftretenden Problemen und die angenehme Atmosphäre, die durch sowohl fachliche als auch nicht-physikalische Gespräche ermöglicht wurde. All dies hat wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen. Zu nennen ist hier die TTP-Boardgame-Gruppe Jens Salomon, Nikolai Zerf, Peter Marquard und Yasmin Anstruther, meine ehemaligen Kollegen Joachim Brod, Susanne Westhoff und Stefan Bekavac und meine Flavourmitstreiter Lars Hofer, Dominik Scherer, Momchil Davidkov und Andreas Crivellin. Nicht vergessen möchte ich Andreas Maier, der sogar geholfen hat, Umzugskisten in den 5. Stock zu schleppen, sowie meinen derzeitigen Zimmergenossen Matthias Kauth und Anastasija Bierweiler. Ebenso bedanken möchte ich mich bei Andreas Scharf, der trotz der großen Entfernung immer mit Rat und Tat zur Seite stand und jeglichen Gemütszustand abgekriegt hat.

Auch bei Prof. Andrzej J. Buras möchte ich mich dafür bedanken, dass er mir so offen und herzlich bei meiner ersten Konferenz entgegengekommen ist, für die Möglichkeit, meine Ergebnisse in München vorzutragen, für seine Einladung zum „Andrzejfest“ nach Starnberg und natürlich für die Möglichkeit weiter auf dem Gebiet der Flavourphysik zu arbeiten.

Diese Arbeit wurde von der Studienstiftung des deutschen Volkes gefördert. Diese Förderung war nicht nur finanzieller Natur, sondern bot auch die Möglichkeit, an Sommerakademien und Doktorandenseminaren teilzunehmen. Außerdem danke ich dem Graduiertenkolleg für Hochenergiephysik und Teilchenastrophysik, welches mir neben einigen Dienstreisen und Workshops auch ermöglicht hat, mich für das Nobelpreisträgertreffen in Lindau zu bewerben. Der

Wilhelm-und-Else-Heräus-Stiftung danke ich für die Übernahme der Kosten und die Gelegenheit, an dieser interdisziplinären Tagung teilzunehmen, wo ich die weltbesten Wissenschaftler treffen durfte. Dabei möchte ich auch meinen Eltern danken, die mich samt Krücken und Gepäck sowohl hingefahren als auch wieder abgeholt haben.

Ferner danke ich all denen, die mich bei Standard- und Lateinamerikanischen Tänzen und beim Jazz-Dance auf andere Gedanken gebracht haben und so für Abwechslung und viele schöne und anstrengende Stunden gesorgt haben.

Zu guter letzt danke ich meiner Familie und meinem Freund Marcel für ihre Unterstützung auf so vielfältige Weise, ihre Liebe und ihr Vertrauen. Selbst in schwierigen Zeiten konnte ich immer auf sie zählen.