Konstruktionen von Mannigfaltigkeiten mit fast nichtnegativem Krümmungsoperator

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Naturwissenschaften

der Fakultät für Mathematik des
Karlsruher Instituts für Technologie (KIT)
genehmigte

Dissertation

von

Dennis Sebastian

Tag der mündlichen Prüfung: 19. Januar 2011

Referent: Prof. Dr. Wilderich Tuschmann

Korreferent: HDoz. Dr. Oliver Baues

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei Prof. Dr. Wilderich Tuschmann dafür bedanken, dass er mir die Möglichkeit gegeben hat, bei ihm zu promovieren, und mir dieses sehr interessante Thema vorgeschlagen hat. Ich bin außerdem dankbar für die geduldige, hilfreiche und nette Unterstützung während meiner Promotionszeit.
Ich bedanke mich außerdem bei HDoz. Dr. Oliver Baues für die Übernahme des Korreferats.
Mein weiterer Dank geht an die Teilnehmer der beiden Oberseminare Geometrie und Differentialgeometrie in Kiel der letzten Jahre, darunter vor allem an Prof. Dr. Jens Heber, Sebastian Grensing, Martin Scheffel, Martin Herrmann, deren Hilfsbereitschaft und Latex-Tipps ebenso wie die anregenden Gespräche mit ihnen bei der Entstehung dieser Arbeit sehr geholfen haben.
Nicht vergessen möchte ich Jenny Salau und Ralf Zimmermann, die mir besonders während des Einstiegs in die Promotionszeit mit Rat und Tat hilfsbereit zur Seite standen.
Des Weiteren geht mein Dank an Stiene Riemer, die mit ihrer Fröhlichkeit im gemeinsamen Büro immer für gute Stimmung gesorgt hat, und deren Korrekturlesen mir sehr geholfen haben.
Außerdem bedanke ich mich bei meiner Frau, die mich auch in schwierigen Zeiten während der Entstehung dieser Arbeit immer unterstützt und aufgebaut hat.
Des Weiteren gilt mein Dank meinen Eltern und meinen Freunden, die immer für mich da sind.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Der Zusammenhang zwischen der Krümmung einer Mannigfaltigkeit und ihrer globalen Gestalt ist eine wichtige Fagestellung in der globalen Riemannschen Geometrie. Für eine glatte, geschlossene, orientierte Fläche M mit Riemannscher Metrik erhält man den Satz von Gauß-Bonnet:

$$\int_M KdA = 2\pi\chi(M) = 4\pi(1-l),$$

wobei K die Gaußkrümmung, χ die Eulercharakteristik und l die Anzahl der Löcher der Fläche M beschreiben. Mit Hilfe dieses Resultats kann man z.B. zeigen, dass man auf dem Torus oder anderen Flächen höheren Geschlechts[1] keine Riemannsche Metrik mit überall positiver Gaußkrümmung konstruieren kann.
Auf der anderen Seite erhält man aus einer unteren Krümmungsschranke einer Fläche Aussagen über deren Eulercharakteristik. Die Eulercharakteristik einer Fläche mit strikt positiver Gaußkrümmung ist folglich positiv.
Die Untersuchung von Mannigfaltigkeiten mit unteren Krümmungsschranken zieht nicht nur aufgrund dieses Resultats das Interesse seit langer Zeit auf sich. Vor allem für Mannigfaltigkeiten mit positiver oder nichtnegativer Schnittkrümmung wurden viele wichtige Theoreme, wie die von Bonnet-Myers, Synge oder Gromovs Bettizahlensatz bewiesen.
Eine Erweiterung von nichtnegativer Schnittkrümmung wurde Ende der 1970er von Gromov eingeführt. Er definierte den Begriff der *fast nichtnegativ gekrümmten Mannigfaltigkeiten*, welche beliebig nah an nichtnegativ gekrümmte Mannigfaltigkeiten sind. Wir verwenden dafür in dieser Arbeit die folgende skalierungsinvariante Definition:

Definition. Eine geschlossene Mannigfaltigkeit M heißt *fast nichtnegativ gekrümmt*, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ eine Metrik g_ε gibt mit

$$sec_\varepsilon(M)(diam_\varepsilon(M))^2 \geqslant -\varepsilon.$$

Dies bedeutet anschaulich, dass eine geschlossene Mannigfaltigkeit bei nach unten beschränkter Krümmung und nach oben beschränktem Durchmesser im Gromov-Hausdorff-Sinn gegen einen Punkt konvergiert. Fast nichtnegativ gekrümmte Mannigfaltigkeiten verallgemeinern Mannigfaltigkeiten mit sowohl positiver und nichtnegativer Schnittkrümmung als auch fast flache Mannigfaltigkeiten, wobei eine Mannigfaltigkeit *fast flach* ist, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ eine Metrik g_ε so existiert, dass

$$|sec_\varepsilon(M)|(diam_{g_\varepsilon}(M))^2 \leqslant \varepsilon.$$

Beispiele für fast nichtnegativ gekrümmte Mannigfaltigkeiten kann man mit Hilfe des Theorems von Fukaya und Yamaguchi (siehe [FuYa]) konstruieren:

[1] Das Geschlecht einer Fläche wird durch die Anzahl der Löcher bestimmt.

Theorem. (Fukaya-Yamaguchi, 1992)
Sei E eine kompakte Mannigfaltigkeit, die die Struktur eines Faserbündels (E, π, M, F) mit kompakter Liegruppe G als Strukturgruppe trägt. Falls F eine G-invariante Metrik mit nichtnegativer Schnittkrümmung trägt und M fast nichtnegative Schnittkrümmung zulässt, so lässt E fast nichtnegative Schnittkrümmung zu.

Weitere Beispiele erhält man durch das Theorem von (siehe [ScTu]):

Theorem. (Schwachhöfer-Tuschmann, 2001)
Jede geschlossene Kohomogenität-Eins-Mannigfaltigkeit trägt invariante Metriken mit fast nichtnegativer Schnittkrümmung.

In beiden Fällen erhält man Beispiele von fast nichtnegativ gekrümmten Mannigfaltigkeiten, die keine Metrik mit nichtnegativer Schnittkrümmung tragen können. Allerdings ist die folgende Frage bis heute noch ungeklärt:

Frage. *Sind im geschlossenen, einfach zusammenhängenden Fall die Mengen aller Mannigfaltigkeiten mit positiver, nichtnegativer oder fast nichtnegativer Schnittkrümmung echt voneinander verschieden?*

Neben der Schnittkrümmung kann man mit Hilfe des Riemannschen Krümmungstensors den Krümmungsoperator und damit eine weitere Krümmungsgröße auf Mannigfaltigkeiten definieren, die im Laufe dieser Arbeit ein zentraler Begriff sein wird. Durch die Gleichung

$$\langle\langle \hat{R}(X \wedge Y), V \wedge W \rangle\rangle = R(X, Y, W, V)$$

erhält man einen Operator $\hat{R}$ auf dem Raum aller Bivektoren, der symmetrisch ist und damit nur relle Eigenwerte besitzt. Wir sagen, dass der Krümmungsoperator einer Mannigfaltigkeit größer als λ ist, $\lambda \in \mathbb{R}$, falls alle Eigenwerte größer als λ sind. Aussagen über den Krümmungsoperator sind stärker als Aussagen über die Schnittkrümmung, da sämtliche Schnittkrümmungen einer Mannigfaltigkeit zwischen dem kleinsten und dem größten Eigenwert des Krümmungsoperators liegen.
Im Gegensatz zur Schnittkrümmung ist es wesentlich einfacher Mannigfaltigkeiten mit positivem oder nichtnegativem Krümmungsoperator zu charakterisieren. Böhm und Wilking haben 2006 folgendes Resultat bewiesen (siehe [BöWi]):

Theorem. (Böhm-Wilking, 2006)
Eine Mannigfaltigkeit mit positivem Krümmungsoperator ist diffeomorph zu einer Raumform[2].

Damit ist eine einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit mit positivem Krümmungsoperator bereits diffeomorph zur Sphäre. Durch Arbeiten unter anderen von Gallot und Meyer kam es zu folgender Klassifikation für Mannigfaltigkeiten mit nichtnegativem Krümmungsoperator:

Theorem. *Sei M eine vollständige, einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit nichtnegativem Krümmungsoperator. Dann ist M das Riemannsche Produkt von Mannigfaltigkeiten der folgenden Typen:*

[2] Eine *Raumform* ist eine Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung.

(i) *Mannigfaltigkeiten diffeomorph zu Sphären,*

(ii) *Mannigfaltigkeiten diffeomorph zu euklidischen Räumen,*

(iii) *Mannigfaltigkeiten biholomorph zu komplex-projektiven Räumen,*

(iv) *Symmetrischen Räumen vom kompakten Typ.*

Folglich gibt es geschlossene, einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeiten mit nichtnegativem Krümmungsoperator, die keine Metrik mit positivem Krümmungsoperator tragen können und man erhält damit eine positive Antwort auf die obige Frage für den Krümmungsoperator.

Analog zur Schnittkrümmung kann man auch Mannigfaltigkeiten mit fast nichtnegativem Krümmungsoperator definieren.

Definition. Eine geschlossene Mannigfaltigkeit M hat *fast nichtnegativen Krümmungsoperator*, falls für alle $\varepsilon > 0$ eine Metrik g_ε auf M so existiert, dass

$$\lambda_\varepsilon(diam_\varepsilon(M))^2 \geqslant -\varepsilon$$

für den kleinsten Eigenwert λ_ε von $\hat{R}_\varepsilon$ erfüllt ist.

Neben Mannigfaltigkeiten mit positivem und nichtnegativem Krümmungsoperator liefern die Mannigfaltigkeiten mit fast flachem Krümmungsoperator eine weitere Klasse von Mannigfaltigkeiten mit fast nichtnegativem Krümmungsoperator. Man kann zeigen, dass es für eine Mannigfaltigkeit äquivalent ist, fast flache Schnittkrümmung oder fast flachen Krümmungsoperator zu haben, und erhält damit durch Ergebnisse von Gromov und Ruh eine vollständige Charakterisierung von Mannigfaltigkeiten mit fast flachem Krümmungsoperator.
Es schließt sich jetzt die Frage an, ob es eine geschlossene einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit gibt, die fast nichtnegativen Krümmungsoperator zu lässt, aber keine Metrik mit nichtnegativem Krümmungsoperator tragen kann.
Im Jahre 2000 wurden von Wilking die Fundamentalgruppen von Mannigfaltigkeiten mit nichtnegativer Schnittkrümmung charakterisiert (siehe [Wi]). In dem Artikel wird gezeigt, dass man kompakte Mannigfaltigkeiten mit nichtnegativer Riccikrümmung und Mannigfaltigkeiten mit nichtnegativer Schnittkrümmung nicht durch ihre Fundamentalgruppen unterscheiden kann. Dieses Resultat wird in der vorliegenden Arbeit auf Mannigfaltigkeiten mit nichtnegativem Krümmungsoperator erweitert und man erhält das folgende Resultat:

Theorem. *Für eine Gruppe Γ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *Γ ist isomorph zur Fundamentalgruppe einer kompakten Mannigfaltigkeit mit nichtnegativer Ricci-Krümmung.*

(ii) *Γ ist isomorph zur Fundamentalgruppe einer kompakten Mannigfaltigkeit mit nichtnegativer Schnittkrümmung.*

(iii) *Γ ist isomorph zur Fundamentalgruppe einer kompakten Mannigfaltigkeit mit nichtnegativem Krümmungsoperator.*

Des Weiteren hat Wilking gezeigt, dass sich kompakte Mannigfaltigkeiten mit fast nichtnegativer Schnittkrümmung nicht mit Hilfe ihrer Fundamentalgruppen von kompakten Mannigfaltigkeiten mit fast nichtnegativer Riccikrümmung unterscheiden lassen. Für Mannigfaltigkeiten mit fast nichtnegativem Krümmungsoperator erhält man das folgende Resultat:

Theorem. *Für eine Gruppe Γ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) Γ *ist isomorph zur Fundamentalgruppe einer kompakten Mannigfaltigkeit mit fast nichtnegativer Ricci-Krümmung.*

(ii) Γ *ist isomorph zur Fundamentalgruppe einer kompakten Mannigfaltigkeit mit fast nichtnegativer Schnittkrümmung.*

(iii) Γ *ist isomorph zur Fundamentalgruppe einer kompakten Mannigfaltigkeit mit fast nicht-negativem Krümmungsoperator.*

Ferner wird in der vorliegenden Arbeit die Konstruktion von Fukaya und Yamaguchi benutzt, um das folgende Theorem zu beweisen, mit dem man weitere Beispiele für Mannigfaltigkeiten konstruieren kann, die fast nichtnegativen Krümmungsoperator besitzen.

Theorem. *Sei E eine kompakte Mannigfaltigkeit, die die Struktur eines Faserbündels (E, π, M, F) mit kompakter Liegruppe G als Strukturgruppe trägt. Falls der Basisraum M fast nichtnegativen Krümmungsoperator zulässt und die Faser F eine G-invariante Metrik mit positivem Krümmungsoperator besitzt, so trägt der Totalraum E fast nichtnegativen Krümmungsoperator.*

Mit Hilfe dieses Satzes und der Klassifikation der Sphärenbündel über Sphären konstruieren wir Beispiele für Mannigfaltigkeiten, die fast nichtnegativen Krümmungsoperator zulassen. Für Prinzipalbündel mit abelscher Strukturgruppe wird im Verlaufe der vorliegenden Arbeit das folgende Resultat mit abgeschwächter Voraussetzung bewiesen:

Theorem. *Sei E eine kompakte Mannigfaltigkeit, die die Struktur eines Prinzipalbündels (E, π, M, G) mit einer kompakten, abelschen Liegruppe G als Strukturgruppe und Faser trägt. Falls der Basisraum M fast nichtnegativen Krümmungsoperator zulässt, so lässt ebenso der Totalraum E fast nichtnegativen Krümmungsoperator zu.*

Hiermit erhält man weitere Beispiele für Mannigfaltigkeiten, die fast nichtnegativem Krümmungsoperator zu lassen.
Wir werden im Laufe dieser Arbeit das folgende Theorem beweisen:

Theorem. *In jeder Dimension n, $n \geqslant 4$, gibt es Mannigfaltigkeiten, die fast nichtnegativen Krümmungsoperator zulassen. In Dimension sechs und sieben gibt es unendlich viele paarweise nicht zueinander homöomorphe Mannigfaltigekeiten, die fast nichtnegativen Krümmungsoperator tragen.*

Des Weiteren konstruieren wir einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeiten, die fast nichtnegativen Krümmungsoperator zulassen, aber keine Metrik mit nichtnegativem Krümmungsoperator tragen können und erhalten damit das folgende Hauptresultat dieser Arbeit:

Theorem. *Die Menge aller geschlossenen, einfach zusamenhängenden Mannigfaltigkeiten mit nichtnegativem Krümmungsoperator ist eine echte Teilmenge der Menge aller geschlossenen, einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten, die fast nichtnegativen Krümmungsoperator zulassen.*

Im Gegensatz zur Unterscheidung von geschlossenen, einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten mit nichtnegativer von solchen mit fast nichtnegativer Schnittkrümmung, erhält man mit Hilfe des Krümmungsoperators somit eine Unterscheidung dieser Klassen.

Zum Aufbau der Arbeit:

Das erste Kapitel behandelt den Krümmungsoperator und seine grundlegenden Eigenschaften. Mit Hilfe der Definition von Bivektoren wird der Krümmungsoperator definiert und es werden die Krümmungsoperatoren von einfachen Beispielen wie Mannigfaltigkeiten mit konstanter Schnittkrümmung, Liegruppen mit biinvarianter Metrik und Produkten von Mannigfaltigkeiten berechnet. Des Weiteren werden diverse Notationen eingeführt.

Das zweite Kapitel enthält die bereits bekannten Klassifikationen im Fall positiven und nichtnegativen Krümmungsoperators. Dem gegenüber gestellt werden Beispiele für Mannigfaltigkeiten mit positiver und nichtnegativer Schnittkrümmung sowie die bekannten Obstruktionen für positive und nichtnegative Schnittkrümmung.

In Kapitel 3 werden Mannigfaltigkeiten mit fast nichtnegativer Krümmung definiert und Resultate über diese Mannigfaltigkeiten vorgestellt. Als eine Klasse von Beispielen werden fast flache Mannigfaltigkeiten behandelt und gezeigt, dass fast flacher Krümmungsoperator äquivalent zu fast flacher Schnittkrümmung ist.

Kapitel 4 behandelt die Fundamentalgruppen von Mannigfaltigkeiten mit nichtnegativem und fast nichtnegativem Krümmungsoperator und zeigt, dass man diese nicht mit Hilfe ihrer Fundamentalgruppen von Mannigfaltigkeiten mit nichtnegativer Schnittkrümmung beziehungsweise fast nichtnegativer Schnittkrümmung unterscheiden kann.

Kapitel 5 stellt das technische Hauptresultat dieser Arbeit zur Verfügung. Es wird unter bestimmten Voraussetzungen auf dem Totalraum eines Faserbündels eine Zusammenhangsmetrik konstruiert, bezüglich der der Totalraum fast nichtnegativen Krümmungsoperator trägt.

Kapitel 6 behandelt die Anwendungen des Ergebnisses aus Kapitel 5. Es werden Beispiele von Mannigfaltigkeiten konstruiert, die fast nichtnegativen Krümmungsoperator zulassen, aber keine Metrik mit nichtnegativem Krümmungsoperator tragen können und damit das Hauptresultat dieser Arbeit bewiesen.

Der Anhang enthält ausführlichere Beschreibungen der Beispiele, wie die des komplexprojektive Raumes und der Heisenberg-Mannigfaltigkeit. Zudem werden bekannte, grundlegende Begriffe definiert und an wichtige Formeln, wie die O'Neill-Formeln erinnert. Des Weiteren stellen wir die Konstruktion der Sphären-Bündel über Sphären vor, mit deren Hilfe die Beispiele in Kapitel 6 konstuiert werden.

Kapitel 1

Der Krümmungsoperator einer Mannigfaltigkeit

In diesem Kapitel werden der Krümmungsoperator einer Mannigfaltigkeit definiert und einfache Eigenschaften des Operators vorgestellt. Für grundlegende Definitionen, Informationen und Beweise verweisen wir auf die Literatur [GaHuLa] oder [Pe].

Im Verlaufe dieser Arbeit seien alle Mannigfaltigkeiten und alle auftretenden Abbildungen glatt. Wir bezeichnen das Differential oder den Pushforward einer Abbildung $f : M \to N$ zwischen Mannigfaltigkeiten mit df oder f_*, d.h. $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ für alle $p \in M$.

1.1 Grundlagen

Generalvoraussetzung 1.1.1. Sei (M^n, g) eine n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit.

Wir definieren mit Hilfe des Levi-Civita-Zusammenhangs ∇ auf M für alle Vektorfelder X, Y, Z, W auf M den Riemannschen $(3,1)$-Krümmungstensor durch

$$R(X,Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

oder als $(4,0)$-Tensor durch

$$R(X,Y,Z,W) := g(R(X,Y)Z, W).$$

Wir werden in dieser Arbeit in der Regel auf die Abhängigkeit der Metrik und auch des Krümmungstensors vom auf der Mannigfaltigkeit gewählten Fußpunkt verzichten.
Mit Hilfe des Krümmungstensors definieren wir weiter die *Schnittkrümmung* einer Mannigfaltigkeit M im Punkte $p \in M$ durch

$$sec_M(X,Y) := \frac{R(X,Y,Y,X)}{\|X\|^2\|Y\|^2 - g(X,Y)^2}$$

für alle Vektoren $X, Y \in T_pM$. Der Einfachkeit halber schreiben wir oft $\langle \cdot, \cdot \rangle$ anstelle von $g(\cdot, \cdot)$.

Für einen beliebigen n-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum V kann man die Menge der *Bivektoren* von V definieren. Anschaulich kann man einen Bivektor $X \wedge Y$ als ein orientiertes Flächensegment von V auffassen, wobei die Orientierung durch die Reihenfolge der Vektoren X und Y festgelegt ist. Mit anderen Worten ist ein Bivektor eine zweidimensionale Verallgemeinerung eines Vektors. Zur formalen Definition sei V ein beliebiger $\mathbb{R}$-Vektorraum, V^* der zu V duale Vektorraum und

$$\bigwedge\nolimits_k(V) := \left\{ \alpha : \underbrace{V^* \times \ldots \times v^*}_{k-\text{mal}} \to \mathbb{R} \mid \alpha \text{ ist schiefsymmetrisch und } k\text{-linear} \right\}$$

sei die *k-te äußere Potenz* von V. Auf diesem Raum definiert man das *äußere Produkt* für beliebige $\omega_1 \in \bigwedge_k(V)$ und $\omega_2 \in \bigwedge_l(V)$ durch:

$$\omega_1 \wedge \omega_2(x_1^*, \ldots, x_{k+l}^*) := \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{l+k}} (sgn\sigma)\omega_1(x_{\sigma(1)}^*, \ldots, x_{\sigma(k)}^*)\omega_2(x_{\sigma(k+1)}^*, \ldots, x_{\sigma(k+l)}^*).$$ [1]

Die Elemente der zweiten äußeren Potenz von V nennen wir *Bivektoren*. Solche Bivektoren, die sich als Produkt zweier Vektoren aus V darstellen lassen, nennen wir *zerlegbar*. Durch ein beliebiges Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf V erhalten wir auch ein Skalarprodukt auf $\bigwedge_2(V)$, indem wir die folgende Definition linear auf ganz $\bigwedge_2(V)$ fortsetzen.

$$\langle\langle X \wedge Y, V \wedge W \rangle\rangle := \langle X, V\rangle\langle Y, W\rangle - \langle X, W\rangle\langle Y, V\rangle.$$

Dann beschreibt $\|X \wedge Y\|$ das Volumen des Parallelotops, das von X und Y aufgespannt wird.

Zu einer Orthonormalbasis $(e_i)_{i \leqslant n} := \{e_1, \ldots, e_n\}$ von V liefert

$$(e_i \wedge e_j)_{i<j} := \{e_i \wedge e_j \mid i < j \leqslant n\}$$

eine Orthonormalbasis von $\bigwedge_2(V)$ bezüglich des eben definierten Skalarproduktes.

Jetzt betrachten wir in jedem Punkt $p \in M$ den Tangentialraum T_pM und die davon erzeugte zweite äußere Potenz $\bigwedge_2^p := \bigwedge_2^p(T_pM)$ und definieren darauf mit Hilfe des Riemannschen Krümmungstensor einen Operator:

Definition 1.1.2. Durch die Gleichung

$$\langle\langle \hat{R}(X \wedge Y), V \wedge W \rangle\rangle = R(X, Y, W, V)$$

wird ein Operator $\hat{R} : \bigwedge_2(T_pM) \to \bigwedge_2(T_pM)$ definiert, den wir den *Krümmungsoperator* nennen.

Aufgrund der Schiefsymmetrie in den vorderen beiden und hinteren beiden Einträgen von R sowie der Blocksymmetrie gilt für beliebige Bivektoren $X \wedge Y$ und $V \wedge W$:

$$\begin{aligned} \langle\langle \hat{R}(X \wedge Y), V \wedge W \rangle\rangle &= R(X, Y, W, V) \\ &= R(V, W, Y, X) \\ &= \langle\langle \hat{R}(V \wedge W), X \wedge Y \rangle\rangle. \end{aligned}$$

[1] Mit S_{l+k} bezeichnen wir die symmetrische Gruppe auf $l + k$ Elementen.

Folglich ist der Kümmungsoperator bezüglich des oben definierten Skalarproduktes selbstadjungiert und hat somit nur reelle Eigenwerte. Diese Eigenwerte liefern eine weitere Krümmungsgröße auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten.
Wir wollen als erstes den Krümmungsoperator von Mannigfaltigkeiten mit konstanter Schnittkrümmung berechnen:

Lemma 1.1.3. *Der Krümmungsoperator einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M ist genau dann ein skalares Vielfaches der Identität, wenn M konstante Schnittkrümmung hat.*

Beweis. Um die eine Richtung zu zeigen, wählt man eine Orthonormalbasis $(e_i)_{i\leqslant n}$ von T_pM. Dann ist $(e_i \wedge e_j)_{i<j}$ eine Orthonormalbasis von $\bigwedge_2^p$. Wenn wir voraussetzen, dass die Schnittkrümmungen in T_pM alle konstant gleich k sind, so lässt sich der Krümmungstensor in folgender Form darstellen:

$$R(U,V)W = k(\langle V,W\rangle U - \langle U,W\rangle V) \quad \text{für alle} \quad U,V,W \in T_pM.$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned}
\langle\langle \hat{R}(e_i \wedge e_j), e_k \wedge e_l\rangle\rangle &= R(e_i, e_j, e_l, e_k) \\
&= k(\langle e_j, e_l\rangle\langle e_i, e_k\rangle - \langle e_i, e_l\rangle\langle e_j, e_k\rangle) \\
&= k\langle\langle e_i \wedge e_j, e_k \wedge e_l\rangle\rangle \\
&= \langle\langle k(e_i \wedge e_j), e_k \wedge e_l\rangle\rangle
\end{aligned}$$

Aus der Linearität von $\hat{R}$ folgt die Behauptung für alle $\omega \in \bigwedge_2^p$.
Für die andere Richtung geben wir uns einen zweidimensionalen Untervektorraum

$$\pi = span\{U,V\} \quad \text{von} \quad T_pM$$

vor. Da die Schnittkrümmung unabhängig von der Basiswahl ist, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass U, V orthonormale Vektoren sind. Dann folgt

$$\begin{aligned}
sec(\pi) &= R(U,V,V,U) \\
&= \langle\langle \hat{R}(U \wedge V), U \wedge V\rangle\rangle \\
&= \langle\langle k(U \wedge V), U \wedge V\rangle\rangle \\
&= k\,\underbrace{\langle\langle U \wedge V, U \wedge V\rangle\rangle}_{=1} \\
&= k.
\end{aligned}$$

□

Damit erhält man:

Beispiel 1.1.4. *(i) Der Krümmungsoperator des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^n$ ist die Nullabbildung.*

(ii) Der Krümmungsoperator der Sphäre $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ mit der Standardmetrik mit konstanter Schnittkrümmung 1, d.h. $sec \equiv 1$, ist die Identität.

(iii) Der Krümmungsoperator des hyperbolischen Raumes $H^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ *mit* $sec \equiv -1$ *ist das Negative der Identität.*

In diesen Fällen stimmen die Eigenwerte des Krümmungsoperators also immer mit der Schnittkrümmung der Mannigfaltigkeit überein. Im Allgemeinen gilt jedoch folgende Eigenschaft:

Lemma 1.1.5. *Sämtliche Schnittkrümmungen von* M *liegen zwischen dem kleinsten und dem größten Eigenwert von* $\hat{R}$.

Beweis. Für zwei orthonormale Vektoren X, Y gilt:

$$sec(X,Y) = R(X,Y,Y,X) = \langle\langle \hat{R}(X \wedge Y), X \wedge Y \rangle\rangle.$$

Da man aber nicht nur zerlegbare Bivektoren betrachtet, erhält man die Behauptung. □

Definition 1.1.6. Wir sagen, dass eine Mannigfaltigkeit M *positiven Krümmungsoperator* bzw. *nichtnegativen Krümmungsoperator*, in Zeichen $\hat{R} > 0$ bzw. $\hat{R} \geqslant 0$, hat, falls für alle Eigenwerte λ von $\hat{R}^M$ gilt $\lambda > 0$ beziehungsweise $\lambda \geqslant 0$.

Mit dem vorigen Lemma erhält man, dass Mannigfaltigkeiten mit positivem (nichtnegativem) Krümmungsoperator bereits positiv (nichtnegativ) gekrümmt sind. Wir werden im Laufe dieser Arbeit noch weitere Beispiele sehen, die zeigen, dass Schranken für den Krümmungsoperator wesentlich stärker sind als Schranken für die Schnittkrümmung.

Die Schnittkrümmungen einer Mannigfaltigkeit nehmen im Allgemeinen nicht alle Werte zwischen dem kleinsten und größten Eigenwert des Krümmungsoperators an. Ein Beispiel hierfür liefert der komplex-projektive Raum $\mathbb{CP}^n$, der im Anhang A.1 definiert wird und dessen Krümmungseigenschaften dort aufgelistet werden.
Zudem liefern obere und untere Schranken der Schnittkrümmung obere und untere Schranken für die Eigenwerte des Krümmungsoperators[2]:

Lemma 1.1.7. *Sei* M *eine* m*-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit. Falls die Schnittkrümmung obere und untere Schranken besitzt, d.h.* $\delta \leqslant sec \leqslant \Delta$, *so liegen die Eigenwerte des Krümmungsoperators* $\hat{R}$ *in dem Intervall*

$$\left[\frac{\Delta+\delta}{2} - (\Delta-\delta)\left\{\frac{2}{3}\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil - \frac{1}{6}\right\}, \frac{\Delta+\delta}{2} + (\Delta-\delta)\left\{\frac{2}{3}\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil - \frac{1}{6}\right\}\right].$$

Hierbei wird die obere Schranke für den komplex-projektiven Raum angenommen, da sämtliche Schnittkrümmungen von $\mathbb{CP}^n$ ausgestattet mit der Fubini-Study-Metrik in dem Intervall $[1, 4]$ liegen[3].

[2] Siehe [BoKa].
[3] Siehe Anhang A.1.

1.2 Skalieren der Metrik

Für jedes $\lambda > 0$ liefert $\tilde{g} := \lambda^2 g$ eine neue Metrik auf M. Bezüglich der skalierten Metrik $\tilde{g}$ unterscheidet sich der Levi-Civita-Zusammenhang und damit auch der Riemannsche $(3,1)$-Krümmungstensor nicht von den Objekten bezüglich der Ausgangsmetrik g. Man erhält aber folgende Beziehung zwischen den Schnittkrümmungen:

$$sec_{\tilde{g}} = \frac{1}{\lambda^2} sec_g.$$

Mit anderen Worten vergrößert sich beim Stauchen einer Metrik die Krümmung. Gleiches lässt sich auch für den Krümmungsoperator zeigen:

Lemma 1.2.1. *Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann gilt bezüglich der Metrik $\tilde{g} := \lambda^2 g$ für alle $\lambda > 0$:*

$$\hat{R}^{\tilde{g}} = \frac{1}{\lambda^2} \hat{R}^g.$$

Beweis. Sei $\omega \in \bigwedge_2^p(M)$ und sei $(e_i)_{i \leqslant n}$ eine Orthonormalbasis von (M, g). Dann gilt

$$\langle\langle e_i \wedge e_j, e_i \wedge e_j \rangle\rangle_{\tilde{g}} = \lambda^4$$

und damit ist $\left(\frac{e_i \wedge e_j}{\lambda^2}\right)_{i<j}$ eine Orthonormalbasis von $\bigwedge_2^p(M, \tilde{g})$.
Für alle $\omega = \sum_{i<j} \omega_{ij} e_i \wedge e_j$ gilt somit:

$$\begin{aligned}
\hat{R}^{\tilde{g}}(\omega) &= \sum_{(k<l)} \omega_{ij} \left\langle\left\langle \hat{R}^{\tilde{g}}(\omega), e_k \wedge e_l \right\rangle\right\rangle_{\tilde{g}} \frac{1}{\lambda^4} e_k \wedge e_l \\
&= \sum_{(i<j),(k<l)} \omega_{ij} R^{\tilde{g}}\left(e_i, e_j, e_k, e_l\right) \frac{1}{\lambda^4} e_k \wedge e_l \\
&= \sum_{(i<j),(k<l)} \omega_{ij} \frac{1}{\lambda^2} R^g\left(e_i, e_j, e_l, e_k\right) e_k \wedge e_l \\
&= \frac{1}{\lambda^2} \sum_{(k<l)} \omega_{ij} \left\langle\left\langle \hat{R}^g(\omega), e_k \wedge e_l \right\rangle\right\rangle_g e_k \wedge e_l \\
&= \frac{1}{\lambda^2} \hat{R}^g(\omega).
\end{aligned}$$

□

1.3 Krümmungsoperator von kompakten Liegruppen

Eine weitere Klasse von Mannigfaltigkeiten, für die man leicht Aussagen über den Krümmungsoperator treffen kann, sind kompakte Liegruppen. Zu einer Liegruppe G sei $\mathfrak{g}$ die Liealgebra der linksinvarianten Vektorfelder auf G, die man auch mit dem Tangentialraum im Einselement identifizieren kann. Da jede kompakte Liegruppe eine biinvariante

Metrik besitzt, d.h. Rechts- und Linkstranslationen sind Isometrien, erhält man aus der Koszul-Formel folgende Gleichung für den Levi-Civita-Zusammenhang auf G:

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$$

für alle linksinvarianten Vektorfelder $X, Y \in \mathfrak{g}$. Damit folgt für den Krümmungstensor R einer biinvarianten Metrik $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf G:

$$\langle R(X, Y, Z), W \rangle = -\frac{1}{4} \langle [X, Y][Z, W] \rangle$$

für alle linksinvarianten Vektorfelder $X, Y, Z, W \in \mathfrak{g}$. Insbesondere ist die Schnittkrümmung immer nichtnegativ. Damit kann man den Krümmungsoperator von Liegruppen mit biinvarianter Metrik berechnen.

Lemma 1.3.1. *Sei G eine Liegruppe mit biinvarianter Metrik $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dann ist der Krümmungsoperator nichtnegativ. Für abelsche Liegruppen verschwindet der Krümmungsoperator.*

Beweis. Sei $(e_i)_{i \leqslant n}$, $n = dim(G)$, eine Orthonormalbasis von $\mathfrak{g}$. Dann gilt für alle Bivektoren $\omega = \sum_{i<j\leqslant n} \omega_{ij} e_i \wedge e_j$:

$$\begin{aligned}
\left\langle\left\langle \hat{R}\left(\sum_{i<j} \omega_{ij} e_i \wedge e_j\right), \sum_{i<j} \omega_{ij} e_i \wedge e_j \right\rangle\right\rangle &= \sum_{\substack{(i<j\leqslant n)\\(k<l\leqslant n)}} \omega_{ij}\omega_{kl} \langle\langle \hat{R}(e_i \wedge e_j), e_k \wedge e_l \rangle\rangle \\
&= \sum_{\substack{(i<j\leqslant n)\\(k<l\leqslant n)}} \omega_{ij}\omega_{kl} \, \langle R(e_i, e_j)e_l, e_k \rangle \\
&= \left(-\frac{1}{4}\right) \sum_{\substack{(i<j\leqslant n)\\(k<l\leqslant n)}} \omega_{ij}\omega_{kl} \, \langle [e_i, e_j], [e_l, e_k] \rangle \\
&= \frac{1}{4} \sum_{\substack{(i<j\leqslant n)\\(k<l\leqslant n)}} \omega_{ij}\omega_{kl} \, \langle [e_i, e_j], [e_k, e_l] \rangle \\
&= \frac{1}{4} \left\langle \sum_{i<j\leqslant n} \omega_{ij} [e_i, e_j], \sum_{k<l\leqslant n} \omega_{kl} [e_k, e_l] \right\rangle \\
&= \frac{1}{4} \left\| \sum_{i<j\leqslant n} \omega_{ij} [e_i, e_j] \right\|^2 \geqslant 0
\end{aligned}$$

□

1.4 Krümmungsoperator auf Riemannschen Produkten

Seien (M, g) und (N, h) Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Dann ist das *Riemannsche Produkt* $(M \times N, g \times h)$ eine weitere Riemannsche Mannigfaltigkeit, wobei die Produktmetrik wie folgt definiert ist: Für alle $(v, w), (x, y) \in T_pM \times T_qN \cong T_{(p,q)}N \times N$ sei

$$g \times h_{(p,q)}((v, w), (x, y)) := g_p(v, x) + h_q(w, y).$$

Dann kann man mit Hilfe der Koszul-Formel den Levi-Civita-Zusammenhang ∇ der Riemannschen Mannigfaltigkeit $M \times N$ berechnen. Dieser ergibt sich durch

$$\nabla_X Y = \nabla^M_{X_1} Y_1 + \nabla^N_{X_2} Y_2,$$

wobei ∇^M und ∇^N die Levi-Civita-Zusammenhänge von M bzw. N bezeichnen und man Vektorfelder auf der Produktmannigfaltigkeit auffasst als $X = X_1 + X_2$. Damit erhält man für den Krümmungstensor R des Produktes $M \times N$ folgende Darstellung:

$$R(X, Y, Z, W) = R^M(X_1, Y_1, Z_1, W_1) + R^N(X_2, Y_2, Z_2, W_2).$$

Damit kann man den Krümmungsoperator von Produkten Riemannscher Mannigfaltigkeiten berechnen. Dazu verwendet man, dass die k-te äußere Potenz einer direkten Summe von zwei endlichdimensionalen Vektorräumen V und W gegeben ist durch

$$\bigwedge\nolimits_k (V \oplus W) = \bigoplus_{m+n=k} \bigwedge\nolimits_m (V) \otimes \bigwedge\nolimits_n (W).$$

Dann gilt für $k = 2$:

$$\bigwedge\nolimits_2 (V \oplus W) \cong \bigwedge\nolimits_2 (V) \oplus (V \otimes W) \oplus \bigwedge\nolimits_2 (W).$$

Falls $(e_i)_{i \leqslant n}$ eine Basis von V und $(f_i)_{i \leqslant m}$ eine Basis von W ist, so bildet also

$$\begin{aligned} B &= \{((e_i, 0) \wedge (e_j, 0))_{i<j}, ((0, f_k) \wedge (0, f_l))_{k<l}, ((e_i, 0) \wedge (0, f_k))_{i,k}\} \\ &= \{(e_i \wedge e_j)_{i<j}, (f_k \wedge f_l)_{k<l}, (e_i \wedge f_k)_{i,k}\} \end{aligned}$$

eine Basis von $\bigwedge_2 (V \oplus W)$. Falls die Basen $(e_i \wedge e_j)_{i<j}$ und $(f_k \wedge f_l)_{k<l}$ jeweils Orthonormalbasen sind, so ist das obige B auch eine Orthonormalbasis von $\bigwedge_2 (V \oplus W)$. Da der Krümmungstensor von einem Riemannschen Produkt R auf gemischten Termen verschwindet, d.h.

$$R(X_1, Y_2, Z_1, W_2) = 0 \quad \text{für alle} \quad X, Y, Z, W \in T_{(p,q)} M \times N,$$

ist der Krümmungsoperator von Riemannschen Produkten durch die Summe der beiden Operatoren gegeben:

$$\hat{R}^{g \times h}(X \wedge Y) = \hat{R}^g(X_1 \wedge Y_1) + \hat{R}^h(X_2 \wedge Y_2).$$

1.5 Reiner Krümmungsoperator

Definition 1.5.1. Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit M^n hat *reinen Krümmungsoperator*[4], falls für alle Punkte $p \in M$ eine Orthonormalbasis $(e_i)_{i \leqslant n}$ des Tangentialraums $T_p M$ existiert, so dass sämtliche Bivektoren $(e_i \wedge e_j)_{i<j}$ Eigenvektoren des Krümmungsoperators sind.

Zweidimensionale Mannigfaltigkeiten haben reinen Krümmungsoperator. Ein nützliches Kriterium für die Existenz eines reinen Krümmungsoperators liefert das folgende Lemma:

[4] In der englischsprachigen Literatur wird *reiner Krümmungsoperator* mit *pure curvature operator* bezeichnet.

Lemma 1.5.2. *Eine Mannigfaltigkeit M^n hat genau dann reinen Krümmungsoperator, wenn für alle $p \in M$ eine Orthonormalbasis $(e_i)_{i \leqslant n}$ von T_pM so existiert, dass*

$$R(e_i, e_j, e_k, e_l) = 0, \quad \textit{falls} \quad |\{e_i, e_j, e_k, e_l\}| \geqslant 3.$$

In diesem Fall diagonalisiert die Basis $(e_i \wedge e_j)_{i<j}$ den Krümmungsoperator.

Beweis. Die Behauptung erhält man unmittelbar aus der definierenden Gleichung für den Krümmungsoperator:

$$\langle\langle \hat{R}(e_i \wedge e_j), e_k \wedge e_l \rangle\rangle = \langle R(e_i, e_j)e_l, e_k \rangle = R(e_i, e_j, e_l, e_k).$$

□

Für Mannigfaltigkeiten mit reinem Krümmungsoperator sind Positivität, beziehungsweise Nichtnegativität des Krümmungsoperators äquivalent zur Positivität, beziehungsweise Nichtnegativität der Schnittkrümmung. Beispiele für Mannigfaltigkeiten mit reinem Krümmungsoperator sind etwa konform flache Mannigfaltigkeiten[5] und Mannigfaltigkeiten, die isometrisch in einen Raum konstanter Krümmung mit flachem Normalenzusammenhang eingebettet werden können. Des Weiteren gilt folgende Eigenschaft für Produkte von Mannigfaltigkeiten[6]:

Lemma 1.5.3. *Das Produkt zweier Mannigfaltigkeiten mit reinem Krümmungsoperator hat wieder reinen Krümmungsoperator und auch die Umkehrung gilt.*

Es gibt aber nicht sehr viele Beispiele für Mannigfaltigkeiten mit reinem Krümmungsoperator, da es sehr starke Obstruktionen gibt:

Theorem 1.5.4. (Maillot[7])
Falls eine Riemannsche Mannigfaltigkeit reinen Krümmungsoperator hat, so verschwinden alle Pontrjagin-Formen.

Theorem 1.5.5. [8] *Sei M ein irreduzibler[9] symmetrischer Raum[10]. Dann hat M genau dann reinen Krümmungsoperator, wenn M konstante Schnittkrümmung hat.*

[5] Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) ist*konform flach*, falls für alle Punkte $x \in M$ eine Umgebung U von x sowie eine Abbildung f auf U so existieren, dass die Mannigfaltigkeit $(U, e^{2f}g)$ flach ist.

[6] Siehe [DeMeNo], Proposition 3.5.

[7] Siehe [Ma].

[8] Siehe [DeMeNo].

[9] Irreduzibel ist in dieser Arbeit im Sinne der deRham Zerlegung zu verstehen (siehe [Pe]).

[10] Siehe Anhang A.2.

Kapitel 2

Positiver und nichtnegativer Krümmungsoperator

2.1 Positive und nichtnegative Schnittkrümmung

In diesem Kapitel geben wir einen kurzen Überblick über die Mannigfaltigkeiten mit positiver und nichtnegativer Schnittkrümmung. Für weitere Informationen sei auf die Literatur [Zi] und [Pe] verwiesen, in denen auch weiterführende Referenzen zu finden sind.

2.1.1 Positive Schnittkrümmung

Bis heute sind nicht viele Mannigfaltigkeiten mit positiver Schnittkrümmung bekannt. Die klassischen Beispiele sind die einfach zusammenhängenden, kompakten, symmetrischen Räume vom Rang 1, wie die Sphären S^n, die projektiven Räume $\mathbb{CP}^n$, $\mathbb{HP}^n$ und die Cayley-Ebene $\mathbb{C}a\mathbb{P}^2$ sowie die nicht einfach zusammenhängenden, rell-projektiven Räume $\mathbb{RP}^n$. Weitere Beispiele[1] liefern z.B. die Fahnenmannigfaltigkeiten von Wallach oder die Berger-Räume welche wie die symmetrischen Räume vom Rang 1 homogene Räume sind. Die homogenen Räume positiver Schnittkrümmung wurden von Bérard-Bergery und Wallach klassifiziert. Neben diesen wurden von Eschenburg und Bazaikin weitere Beispiele entdeckt, welche sogenannte Biquotienten sind.
Sämtliche bisher bekannten Beispiele ergeben sich als Quotienten von kompakten Liegruppen. Man konstruiert darauf eine Metrik mit positiver Schnittkrümmung mit Hilfe der O'Neill-Formeln und der Cheeger-Deformation[2]. Im letzten Jahr wurde von Grove, Verdiani und Ziller in [GrVeZi] mit Hilfe der Cheeger-Deformation ein weiteres Beispiel konstruiert. Auf der anderen Seite gibt es nur wenige bekannte Obstruktionen gegen die Existenz einer Metrik mit positiver Schnittkrümmung auf einer Mannigfaltigkeit. Diese stammen aus den klassischen Resultaten:

Theorem 2.1.1. (Bonnet-Myers)
Die Fundamentalgruppe einer Mannigfaltigkeit mit positiver Schnittkrümmung ist endlich.

[1] Referenzen und kurze Beschreibungen dieser Beispiele findet man in [Zi].
[2] Siehe [Mü].

Theorem 2.1.2. (Synge)
Eine geraddimensionale Mannigfaltigkeit mit positiver Schnittkrümmung hat triviale Fundamentalgruppe, falls sie orientierbar ist, und $\mathbb{Z}_2$ als Fundamentalgruppe, wenn sie nicht orientierbar ist. Eine Mannigfaltigkeit mit ungerader Dimension und positiver Schnittkrümmung ist orientierbar.

2.1.2 Nichtnegative Schnittkrümmung

Die Klasse der Mannigfaltigkeiten mit nichtnegativer Schnittkrümmung ist hingegen viel größer. Jede Liegruppe ausgestattet mit einer biinvarianten Metrik ist solch ein Beispiel. Weitere Beispiele erhält man durch das Bilden von Riemannschen Produkten solcher Mannigfaltigkeiten oder durch Riemannsche Submersionen (vgl. Anhang A.4). Folglich existiert auf jedem homogenen Raum G/H eine Metrik mit nichtnegativer Schnittkrümmung, falls es auf G eine biinvariante Metrik gibt. Eine weitere Möglichkeit, nichtnegativ gekrümmte Mannigfaltigkeiten zu konstruieren, ist die oben bereits angesprochene Cheeger-Deformation einer Metrik.
Im Fall nichtnegativer Schnittkrümmung erhält man die folgenden Obstruktion:

Theorem 2.1.3. (Gromovs Bettizahlensatz)
Falls M eine n-dimensionale kompakte Mannigfaltigkeit mit nichtnegativer Schnittkrümmung ist, so existiert eine Konstante $C(n)$, so dass für alle i und alle Koeffizientenkörper F die Bettizahlen beschräkt sind: $b_i(M;F) \leqslant C(n)$.

Man erhält auch eine Schranke für die Summe der Bettizahlen im Fall von Mannigfaltigkeiten mit fast nichtnegativer Schnittkrümmung, die nur von der Dimension abhängt[3]. Der Vollständigkeit halber haben wir dieses Resultat auch bereits an dieser Stelle zitiert.
Des Weiteren gibt es u.a. die folgenden beiden Struktursätze:

Theorem 2.1.4. (Cheeger-Gromoll)
Falls M eine kompakte Mannigfaltigkeit ist, die nichtnegative Schnittkrümmung zulässt, so existiert eine abelsche Untergruppe der Fundamentalgruppe von M mit endlichem Index.

Theorem 2.1.5. (Seelensatz von Cheeger-Gromoll)
Sei M eine nichtkompakte, vollständige Mannigfaltigkeit mit nichtnegativer Schnittkrümmung. Dann existiert eine totalgeodätische, kompakte Untermannigfaltigkeit S^k, die Seele, *so dass M diffeomorph zum Normalenbündel von S^k ist.*

Weitere Obstruktionen erhält man aus verschiedenen Resultaten über fast nichtnegativ gekrümmte Mannigfaltigkeiten in Kapitel 3.

2.2 Positiver und nichtnegativer Krümmungsoperator

2.2.1 Positiver Krümmungsoperator

Wir haben bereits gesehen, dass die Sphäre mit der Standardmetrik positiven Krümmungsoperator hat, der komplex-projektive Raum hingegen mit der Fubini-Study-Metrik nichtnegativem Krümmungsoperator trägt.

[3] Siehe 3.0.5.

Der erste Schritt zur Klassifikation von Mannigfaltigkeiten mit positivem Krümmungsoperator wurde 1988 von Micallef und Moore gemacht[4]:

Theorem 2.2.1. (Micallef-Moore)
Sei M eine kompakte, einfach zusammenhängende, n-dimensionale, $n \geqslant 2$, Riemannsche Mannigfaltigkeit. Falls der Krümmungsoperator von M positiv ist, so ist M homöomorph zur Sphäre.

Dieses Resultat wurde 2006 durch das folgende Theorem verbessert[5]:

Theorem 2.2.2. (Böhm-Wilking)
Eine Mannigfaltigkeit mit positivem Krümmungsoperator ist diffeomorph zu einer Raumform.

Da jede einfach zusammenhängende Raumform mit konstanter Schnittkrümmung κ isometrisch zum hyperbolischen Raum, zum euklidischen Raum oder zur Sphäre der Schnittkrümmung κ ist, erhält man folgendes Resultat:

Theorem 2.2.3. *Eine einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit positivem Krümmungsoperator ist isometrisch zur Sphäre.*

Mannigfaltigkeiten mit positivem Krümmungsoperator, die nicht einfach zusammenhängend sind, sind etwa Linsenräume.

2.2.2 Nichtnegativer Krümmungsoperator

Wie bereits gezeigt, hat jede Liegruppe mit einer biinvarianten Metrik nichtnegativen Krümmungsoperator. Da die Klasse der Mannigfaltigkeiten mit nichtnegativem Krümmungsoperator gegen Produktbildung abgeschlossen ist, erhält man so weitere Beispiele. Man kann allerdings nicht mit Hilfe der O'Neill-Formeln, wie bei der Konstruktion von Mannigfaltigkeiten mit nichtnegativer Schnittkrümmung, durch Quotientenbildung neue Beispiele für Mannigfaltigkeiten mit nichtnegativem Krümmungsoperator konstruieren, da eine Riemannsche Submersion im Allgemeinen nicht krümmungsoperatorvermindernd ist. Ein Gegenbeispiel liefert der komplex-projektive Raum $\mathbb{CP}^n$, dessen Krümmungsoperator nach [BoKa] einen $n(n-1)$-dimensionalen Eigenraum zum Eigenwert Null hat, falls man auf dem Totalraum S^{2n-1} die kanonische Metrik mit konstanter Schnittkrümmung verwendet[6].

Durch die Arbeit von verschiedenen Mathematikern, unter anderen Gallot und Meyer, Hamilton, Micallef und Moore, Böhm und Wilking kam es zur folgenden topologischen Klasssifikation der Mannigfaltigkeiten mit nichtnegativem Krümmungsoperator[7]:

Theorem 2.2.4. *Sei M eine vollständige, einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit nichtnegativem Krümmungsoperator. Dann ist M das Riemannsche Produkt von Mannigfaltigkeiten der folgenden Typen:*

[4] Siehe [MiMo].
[5] Siehe [BöWi].
[6] Siehe Anhang A.1.
[7] Siehe [MeNo].

(i) *Mannigfaltigkeiten diffeomorph zu Sphären,*

(ii) *Mannigfaltigkeiten diffeomorph zu euklidischen Räumen,*

(iii) *Mannigfaltigkeiten biholomorph zu komplex-projektiven Räumen,*

(iv) *Symmetrische Räume vom kompakten Typ.*

Anhand der Klassifikation von symmetrischen Räumen[8] durch Cartan und verschiedener Isomorphismen zwischen gewissen Liealgebren erhält man die folgende Liste aller einfach zusammenhängenden, irreduziblen symmetrischen Räume vom kompakten Typ bis Dimension $n = 9$:

Dimension	**einf. zshgd., irred. symmetrischer Raum**
$n = 2$	S^2
$n = 3$	S^3
$n = 4$	S^4, $\mathbb{CP}^2$
$n = 5$	S^5
$n = 6$	$\mathbb{CP}^3$, S^6, $Sp(2)/U(2)$.
$n = 7$	S^7
$n = 8$	S^8, $\mathbb{CP}^4$, $\mathbb{HP}^2$, $SO(6)/(SO(4) \times SO(2))$, $G_2/SU(2) \times SU(2)$.
$n = 9$	S^9, $SO(6)/(SO(3) \times SO(3))$

Damit erhält man eine Liste aller einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten mit nichtnegativem Krümmungsoperator. Insbesondere gibt es in jeder Dimension nur endlich viele einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeiten mit nichtnegativem Krümmungsoperator.

Wie im Fall nichtnegativer Schnittkrümmung kann man auch für Mannigfaltigkeiten mit nichtnegativem Krümmungsoperator mit Hilfe der Weitzenböck-Formel und der Bochner-Technik eine obere Schranke für die Bettizahlen finden[9]:

Theorem 2.2.5. *Sei M eine n-dimensionale orientierbare Mannigfaltigkeit. Falls der Krümmungsoperator $\hat{R}$ von M nichtnegativ ist, so gilt $b_k(M) \leqslant \binom{n}{k}$ und Gleichheit gilt genau dann, wenn M ein flacher Torus ist. Falls außerdem $\hat{R}$ in einem Punkt positiv ist, so verschwinden die Bettizahlen $b_k(M)$ für alle $k = 1, ..., n-1$.*

Eine Vermutung von Hopf besagt, dass es auf $S^2 \times S^2$ keine Metrik mit positiver Schnittkrümmung gibt. Mit dem obigen Resultat kann man immerhin zeigen, dass es auf $S^2 \times S^2$ zumindest keine Metrik mit positivem Krümmungsoperator geben kann, da für die Eulercharakteristik χ gilt:

$$\chi(S^2 \times S^2) = 4.$$

[8] Siehe [He] und A.2.

[9] Siehe [Pe] Seite 182 ff.

Ebenso kann es auf $\mathbb{CP}^n$ keine Metrik mit positivem Krümmungsoperator geben, da

$$\chi(\mathbb{CP}^n) = n + 1.$$

Positivität bzw. Nichtnegativität des Krümmungsoperators ist im Gegensatz zur Schnittkrümmung eine mögliche Bedingung dafür, dass der Gauss-Bonnet-Integrand in der verallgemeinerten Gauss-Bonnet-Formel[10] positiv bzw. nichtnegativ ist. Folglich gilt

Theorem 2.2.6. [11] *Die Eulercharakteristik einer kompakten, orientierbaren Mannigfaltigkeit mit positivem bzw. nichtnegativem Krümmungsoperator ist positiv (=2) bzw. nichtnegativ.*

Damit ist die Vermutung von Hopf, dass eine kompakte Mannigfaltigkeit mit nichtnegativer Schnittkrümmung nichtnegative Eulercharakteristik hat, für diese Klasse von Mannigfaltigkeiten bewiesen.

2.2.3 Reiner Krümmungsoperator

Falls zusätzlich vorausgesetzt wird, dass eine Mannigfaltigkeit reinen Krümmungsoperator hat, so erhält man das folgende Theorem[12]:

Theorem 2.2.7. *Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit mit reinem, nichtnegativem Krümmungsoperator.*

(i) Falls M einfach zusammenhängend ist, so sind die irreduziblen Komponenten in der de Rham-Zerlegung homöomorph zu Sphären.

(ii) Falls die universelle Überlagerung $\tilde{M}$ von M nicht kompakt ist, so ist $\tilde{M}$ das Produkt von $\mathbb{R}^m$ und Mannigfaltigkeiten, die homöomorph zur Sphäre sind.

[10] Siehe [Ch].
[11] Siehe [Pe].
[12] Siehe [DeMeNo].

Kapitel 3

Fast nichtnegative Krümmung

Wir sagen, dass eine geschlossene Mannigfaltigkeit fast nichtnegativ gekrümmt ist, wenn sie im Gromov-Hausdorff-Sinne[1], bei nach unten beschränkter Krümmung gegen einen Punktraum konvergiert. Eine skalierungsinvariante Definition ist die folgende:

Definition 3.0.1. Eine geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit M hat *fast nichtnegative Schnittkrümmung*, falls für alle $\varepsilon > 0$ eine Metrik g_ε auf M so existiert, dass

$$sec_\varepsilon(M)(diam_\varepsilon(M))^2 \geqslant -\varepsilon$$

erfüllt ist.

Fast nichtnegativ gekrümmte Mannigfaltigkeiten sind damit eine Verallgemeinerung von nichtnegativ gekrümmten Mannigfaltigkeiten. Weitere Beispiele erhält man durch das folgende 1992 in [FuYa] bewiesene Theorem über die Konstruktion von Mannigfaltigkeiten mit fast nichtnegativer Schnittkrümmung:

Theorem 3.0.2. (Fukaya-Yamaguchi)
Sei E eine kompakte Mannigfaltigkeit, die die Struktur eines Faserbündels (E, π, M, F) mit kompakter Liegruppe G als Strukturgruppe trägt. Falls F eine G-invariante Metrik mit nichtnegativer Schnittkrümmung trägt und M fast nichtnegative Schnittkrümmung zulässt, so lässt E fast nichtnegative Schnittkrümmung zu.

Falls M in obiger Voraussetzung eine flache Mannigfaltigkeit ist und das Faserbündel, das zu irgendeiner Überdeckung von M assoziiert ist, stets nichttrivial ist, so haben Cheeger und Gromoll [ChGr] gezeigt, dass der Totalraum E keine nichtnegative Schnittkrümmung haben kann. Hierdurch kann man viele Beispiele konstruieren[2], die fast nichtnegative Schnittkrümmung haben, aber nicht nichtnegative Schnittkrümmung haben können.
Weitere Beispiele erhält man durch das Resultat von 2001 aus [ScTu]:

Theorem 3.0.3. (Schwachhöfer-Tuschmann)
Jede geschlossene Kohomogenität-Eins-Mannigfaltigkeit trägt invariante Metriken mit fast nichtnegativer Schnittkrümmung, die unter der Kohomogenität-Eins-Wirkung invariant sind.

[1] Die Definition von Gromov-Hausdorff-Konvergenz findet man z.B. in [Pe], Seite 274.
[2] Siehe [FuYa].

Eine *Kohomogenität-Eins-Mannigfaltigkeit* ist eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit M^n, die eine glatte Wirkung einer kompakten Liegruppe zulässt, so dass die prinzipalen Orbiten Kodimension Eins haben, d.h. deren Dimension ist $n-1$.

Beispiel 3.0.4. *Die ungeraddimensionalen Brieskorn-Mannigfaltigkeiten*[3] *sind Kohomogenität-Eins-Mannigfaltigkeiten und lassen demnach fast nichtnegative Schnittkrümmung zu.*

Wir führen hier die wichtigsten bisher bekannten Resultate über fast nichtnegativ gekrümmte Mannigfaltigkeiten an. Für Referenzen und weitere Informationen verweisen wir z.B. auf [KaPeTu].

Wir nehmen in den kommenden Resultaten an, dass M stets eine n-dimensionale, fast nichtnegativ gekrümmte Mannigfaltigkeit sei.

Theorem 3.0.5. (Gromov)

(i) Die minimale Anzahl der Erzeuger der Fundamentalgruppe von M kann durch eine Konstante $C_1(n)$ abgeschätzt werden, die nur von n abhängt.

(ii) Die Summe der Bettizahlen von M bezüglich jedem Koeffizientenkörper kann durch eine Konstante $C_2(n)$ abgeschätzt werden, die ebenfalls nur von n abhängt.

Die Schranke für die Summe der Bettizahlen einer fast nichtnegativ gekrümmten Mannigfaltigkeit ist dieselbe, die man auch für nichtnegativ gekrümmte Mannigfaltigkeiten derselben Dimension durch Satz 2.1.3 erhält.

Theorem 3.0.6. (Yamaguchi)
Bis auf endliche Überlagerung fasert M über einem flachen $b_1(M;\mathbb{R})$-dimensionalen Torus. Falls $b_1(M;\mathbb{R}) = n$, so ist M diffeomorph zu einem Torus.

Theorem 3.0.7. (Fukaya-Yamaguchi)
Es existiert eine Konstante $C_3(n)$, so dass $\pi_1(M)$ $C_3(M)$-auflösbar ist, d.h. $\pi_1(M)$ enthält eine auflösbare Untergruppe, deren Index höchstens $C_3(n)$ ist.

Theorem 3.0.8. (Kapovitch-Petrunin-Tuschmann)

(i) Eine endliche Überlagerung von M ist ein nilpotenter Raum.

(ii) Es existiert eine Konstante $C_3(n)$, so dass $\pi_1(M)$ $C_3(M)$-nilpotent ist, d.h. $\pi_1(M)$ enthält eine nilpotente Untergruppe deren Index höchstens $C_3(n)$ ist.

(iii) Eine endliche Überlagerung $\tilde{M}$ von M ist der Totalraum eines Faserbündels

$$F \longrightarrow \tilde{M} \longrightarrow N$$

über einer Nilmannigfaltigkeit N mit einfach zusammenhängender Faser F.

[3] Für Definition und weiterführende Referenzen über Brieskorn-Mannigfaltigkeiten verweisen wir auf [ScTu].

In Analogie zum Oberen kann man auch von fast nichtnegativem Krümmungsoperator sprechen.

Definition 3.0.9. Eine geschlossene Mannigfaltigkeit M hat *fast nichtnegativen Krümmungsoperator*, falls für alle $\varepsilon > 0$ eine Metrik g_ε auf M so existiert, dass

$$\lambda_\varepsilon(diam_\varepsilon(M))^2 \geqslant -\varepsilon$$

für den kleinsten Eigenwert λ_ε von $\hat{R}_\varepsilon$ erfüllt ist. Wir verwenden dafür die folgende Schreibweise:

$$\hat{R}_\varepsilon(diam_\varepsilon(M))^2 \geqslant -\varepsilon.$$

Offensichtlich lassen geschlossene Mannigfaltigkeiten mit nichtnegativem Krümmungsoperator fast nichtnegativen Krümmungsoperator zu und zudem sind Mannigfaltigkeiten mit fast nichtnegativem Krümmungsoperator fast nichtnegativ gekrümmt.

3.1 Fast flache Mannigfaltigkeiten

Eine weitere Klasse von Beispielen für fast nichtnegativ gekrümmte Mannigfaltigkeiten liefern die fast flachen Mannigfaltigkeiten. Hierbei wird nicht nur eine untere, sondern auch eine obere Krümmungsschranke vorausgesetzt:

Definition 3.1.1. Eine geschlossene Mannigfaltigkeit M heißt *fast flach*, falls für alle $\varepsilon > 0$ eine Metrik g_ε auf M so existiert, dass

$$|sec_\varepsilon(M)|(diam_\varepsilon(M))^2 \leqslant \varepsilon.$$

Ein Beispiel für eine fast flache Mannigfaltigkeit ist die *Heisenberg-Mannigfaltigkeit*. Diese erhält man als Quotient der Liegruppe

$$N := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\},$$

der sogenannten *Heisenberg-Gruppe*, durch die Matrizen mit ganzzahligen Einträgen oberhalb der Hauptdiagonalen (siehe Anhang A.5).
Die Heisenberg-Mannigfaltigkeit kann nach Theorem 2.1.4 keine Metrik mit nichtnegativer Schnittkrümmung und damit insbesondere keine Metrik mit nichtnegativem Krümmungsoperator tragen, da die Fundamentalgruppe nilpotent ist.

Gromov hat 1978 die Mannigfaltigkeiten mit fast flacher Schnittkrümmung beschrieben[4]. Sein Resultat beinhaltet nicht nur fast flache Mannigfaltigkeiten.

Definition 3.1.2. Eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit heißt *ε-flach*, falls die Schnittkrümmung die folgende Ungleichung erfüllt:

$$|sec|(diam(M))^2 \leqslant \varepsilon.$$

[4] Siehe [Gr] oder [BuKa].

Theorem 3.1.3. (Gromov)

(i) Jede Nilmannigfaltigkeit[5] *ist fast flach.*

(ii) Eine $\varepsilon(n)$-flache Mannigfaltigkeit M^n, mit $\varepsilon(n) = exp(-exp(exp(n^2)))$, wird durch eine Nilmannigfaltigkeit endlich überlagert.

Die oben definierte Heisenberg-Mannigfaltigkeit ist insbesondere eine solche Nilmannigfaltigkeit.
Zudem wurde in [Ru] gezeigt, dass fast flache Mannigfaltigkeiten Infranilmannigfaltigkeiten sind.

Definition 3.1.4. Es seien G eine zusammenhängende, einfach zusammenhängende, nilpotente Liegruppe und K eine maximal kompakte Untergruppe der Automorphismengruppe $Aut(G)$ von G. Sei weiter Γ eine torsionsfreie, diskrete und kokompakte Untergruppe von $G \rtimes K$[6]. Falls die durch

$$(\gamma, k).g := \gamma \cdot k(g)$$

definierte Wirkung von Γ auf G frei ist und Γ endlichen Index in G hat, so heißt der Orbitraum $\Gamma\backslash G$ *Infranilmannigfaltigkeit.*

Theorem 3.1.5. (Ruh)
Sei M eine kompakte, n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann existiert eine Konstante $\varepsilon = \varepsilon(n)$, so dass, falls M ε-flach ist, M diffeomorph zu einer Infranilmannigfaltigkeit ist.

Den Begriff *fast flach* übertragen wir jetzt auf den Krümmungsoperator:

Definition 3.1.6. Eine geschlossene Mannigfaltigkeit M hat *fast flachen Krümmungsoperator*, falls für alle $\varepsilon > 0$ eine Metrik g_ε auf M so existiert, dass

$$|\lambda_\varepsilon|(diam_\varepsilon(M))^2 \leqslant \varepsilon$$

für alle Eigenwerte λ_ε von $\hat{R}$ erfüllt ist.

Aus den beiden Lemmata 1.1.5 und 1.1.7 über die Beziehung zwischen den Schranken der Schnittkrümmung und der Eigenwerte des Krümmungsoperators erhält man das folgende Resultat:

Satz 3.1.7. *Eine Mannigfaltigkeit ist genau dann fast flach, wenn sie fast flachen Krümmungsoperator besitzt.*

Mit den Ergebnissen von Gromov und Ruh erhält man somit eine Charakterisierung der Mannigfaltigkeiten mit fast flachem Krümmungsoperator.

[5] Eine Nilmannigfaltigkeit ist ein homogener Raum einer nilpotenten Liegruppe.
[6] Die Gruppenmultiplikation auf $G \rtimes K$ ist definiert durch $(\gamma, k) \cdot (\gamma', k') := (\gamma \cdot k(\gamma'), k \circ k')$.

Kapitel 4

Fundamentalgruppe und Krümmungsoperator

Im vorliegenden Kapitel geben wir eine algebraische Beschreibung der Fundamentalgruppen von Mannigfaltigkeiten mit nichtnegativem und fast nichtnegativem Krümmungsoperator an. Wilking hat 2000 [Wi] gezeigt, dass kompakte Mannigfaltigkeiten mit nichtnegativer Schnittkrümmung nicht von Mannigfaltigkeiten mit nichtnegativer Riccikrümmung unterschieden werden können. Zudem kann man auch nicht anhand der Fundamentalgruppe unterscheiden, ob eine Mannigfaltigkeit eine Metrik mit fast nichtnegativer Ricci-Krümmung oder fast nichtnegativer Schnittkrümmung zulässt. Die Techniken, die Wilking in dem Artikel verwendet, werden wir benutzen, um zu zeigen, dass man auch kompakte Mannigfaltigkeiten mit nichtnegativer (fast nichtnegativer) Schnittkrümmung nicht anhand der Fundamentalgruppe von kompakten Mannigfaltigkeiten mit nichtnegativem (fast nichtnegativem) Krümmungsoperator unterscheiden kann.
Mit Hilfe des folgenden, wohlbekannten Lemmas werden wir zu einer gegeben Gruppe eine Mannigfaltigkeit konstruieren, deren Fundamentalgruppe dann die gegebene Gruppe ist:

Lemma 4.0.1. *Sei X eine Mannigfaltigkeit. Wenn X wegzusammenhängend und einfach zusammenhängend ist und eine Gruppe G eigentlich diskontinuierlich*[1] *und fixpunktfrei auf X operiert, so ist X/G eine Mannigfaltigkeit mit Fundamentalgruppe*

$$\pi_1(X/G) \cong G.$$

In diesem Kapitel verwenden wir häufig den Begriff des semidirekten Produkts:

Definition 4.0.2. Für zwei beliebige Gruppen G und H und einen Gruppenhomomorphismus $\phi : H \to Aut(G)$ definiert man das *semidirekte Produkt* $G \rtimes_\phi H$ als Gruppe $(G \times H, *_\phi)$, wobei die Multiplikation $*_\phi$ folgende Gestalt hat:

$$(g_1, h_1) *_\phi (g_2, h_2) := (g_1 \cdot \phi(h_1)(g_2), h_1 h_2).$$

4.1 Der Fall nichtnegativen Krümmungsoperators

Aus dem Artikel von Wilking stammt folgendes Theorem:

[1] Eine Gruppe G operiert*eigentlich diskontinuierlich* auf einer Mannigfaltigkeit M, falls für jedes Kompaktum $K \subseteq M$ die Teilmenge $\{g \in G \mid g.K \cap K \neq \emptyset\}$ endlich ist.

Theorem 4.1.1. *Für eine Gruppe Γ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) Γ *ist isomorph zur Fundamentalgruppe einer kompakten Mannigfaltigkeit mit nichtnegativer Ricci-Krümmung.*

(ii) Γ *ist isomorph zur Fundamentalgruppe einer kompakten Mannigfaltigkeit mit nichtnegativer Schnittkrümmung.*

(iii) Es existieren eine endliche Gruppe E, eine kristallographische Gruppe Π und eine exakte Sequenz

$$\{1\} \longrightarrow E \longrightarrow \Gamma \longrightarrow \Pi \longrightarrow \{1\}.$$

(iv) Es existieren eine endliche Gruppe F, eine ganze Zahl $d \geqslant 0$ und eine exakte Sequenz

$$\{0\} \longrightarrow \mathbb{Z}^d \longrightarrow \Gamma \longrightarrow F \longrightarrow \{1\}.$$

(v) Γ *ist isomorph zu einer diskreten, kokompakten Untergruppe eines semidirekten Produktes $\mathbb{R}^d \rtimes_\beta F$, wobei F eine endliche Gruppe und $\beta : F \to GL(d, \mathbb{R})$ ein Gruppenhomomorphismus ist.*

Hierbei nennen wir eine Gruppe G *kristallographisch vom Rang d*, falls G eine diskrete und kokompakte Untergruppe der Isometriegruppe des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^d$ ist.
Wir wollen jetzt die obigen Äquivalenzen auf Mannigfaltigkeiten mit nichtnegativem Krümmungsoperator erweitern.

Theorem 4.1.2. *Für eine Gruppe Γ sind die folgenden zwei Eigenschaften äquivalent:*

(i) Γ *ist isomorph zur Fundamentalgruppe einer kompakten Mannigfaltigkeit mit nichtnegativer Schnittkrümmung.*

(ii) Γ *ist isomorph zur Fundamentalgruppe einer kompakten Mannigfaltigkeit mit nichtnegativem Krümmungsoperator.*

Beweis. Da eine Mannigfaltigkeit mit nichtnegativem Krümmungsoperator insbesondere eine Mannigfaltigkeit mit nichtnegativer Schnittkrümmung ist, ist die eine Richtung offensichtlich.
Für die andere Richtung verwenden wir die gleiche Konstruktion, die Wilking verwendet, um in 4.1.1 die Implikation $(v) \Rightarrow (ii)$ zu beweisen. Sei Γ isomorph zur Fundamentalgruppe einer kompakten Mannigfaltigkeit mit nichtnegativer Schnittkrümmung. Dann ist nach 4.1.1 Γ isomorph zu einer diskreten, kokompakten Untergruppe eines semidirekten Produktes $\mathbb{R}^d \rtimes_\beta F$, wobei F eine endliche Gruppe und $\beta : F \to GL(d, \mathbb{R})$ eine Darstellung von F ist. Wir definieren ein Skalarprodukt $g(\cdot, \cdot)$ auf $\mathbb{R}^d$ so, dass β orthogonal ist, d.h. für alle $f \in F$ gilt$g(\beta(f)(u), \beta(f)(v)) = g(u, v)$. Dafür setzen wir für alle u, v

$$g(u, v) := \sum_{f \in F} \langle \beta(f)(u), \beta(f)(v) \rangle.$$

Weiter definieren wir eine Wirkung von Γ auf $\mathbb{R}^d$ durch

$$\phi : \Gamma \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, ((v, f), w) \mapsto \beta(f)(w) + v.$$

Diese Wirkung ist offensichtlich isometrisch und eigentlich diskontinuierlich, da sich die Wirkung als Hintereinanderausführung von einer orthogonalen Abbildung und einer Translation schreiben lässt.
Für genügend große l existiert ein injektiver Homomorphismus $h : F \to SU(l)$. Wähle dazu etwa $l := |F|$ und fasse F als Untergruppe von S_l auf. Weiter kann man S_l in $O(l-1) \subseteq SU(l)$ einbetten.
Da $SU(l)$ eine kompakte Liegruppe ist, existiert eine biinvariante Metrik h darauf. Wir definieren nun eine Wirkung von Γ auf dem Riemannschen Produkt $(SU(l) \times \mathbb{R}^d, h + g)$ durch

$$\psi : \Gamma \times (SU(l) \times \mathbb{R}^d) \to SU(l) \times \mathbb{R}^d, ((v, f), (T, w)) \mapsto (h(f)T, \beta(f)(w) + v).$$

Diese Wirkung ist auch wieder isometrisch, da die Metrik auf $SU(l)$ biinvariant ist und die Wirkung auf $\mathbb{R}^d$ dieselbe wie oben ist. Weiter ist die Wirkung ϕ eigentlich diskontinuierlich und folglich ist die Wirkung ψ auch eigentlich diskontinuierlich. Außerdem ist die Wirkung ψ fixpunktfrei, da für ein Element aus $\Gamma \backslash \{e\}$ entweder die Wirkung auf dem ersten oder die auf dem zweiten Faktor nichttrivial ist.
Des Weiteren ist $(SU(l) \times \mathbb{R}^d, h + g)$ eine zusammenhängende, einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit mit nichtnegativem Krümmungsoperator und insbesondere auch mit nichtnegativer Schnittkrümmung. Dann ist $M := (SU(l) \times \mathbb{R}^d)/\Gamma$ nach Lemma 4.0.1 eine Mannigfaltigkeit und Γ ist isomorph zur Fundamentalgruppe M.
Da *Gamma* isometrisch auf $(SU(l) \times \mathbb{R}^d, h + g)$ wirkt, ist M, ausgestattet mit der Metrik bezüglich der die Quotientenabbildung

$$\pi : (SU(l) \times \mathbb{R}^d) \to M$$

zu einer Submersion wird, lokal isometrisch zu $(SU(l) \times \mathbb{R}^d)$. Somit hat M nichtnegativen Krümmngsoperator. □

4.2 Der Fall fast nichtnegativen Krümmungsoperators

Für die Fundamentalgruppen von Mannigfaltigkeiten mit fast nichtnegativer Schnittkrümmung findet man im Artikel von Wilking folgendes

Theorem 4.2.1. *Für eine endlich erzeugte Gruppe Γ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) Γ *ist isomorph zur Fundamentalgruppe einer vollständigen Mannigfaltigkeit mit positiver Ricci-Krümmung.*

(ii) Γ *ist isomorph zur Fundamentalgruppe einer vollständigen Mannigfaltigkeit mit nichtnegativer Ricci-Krümmung.*

(iii) Es existiert eine endliche Gruppe E, eine fast kristallographische Gruppe Π *und eine exakte Sequenz*

$$\{1\} \longrightarrow E \longrightarrow \Gamma \longrightarrow \Gamma \longrightarrow \{1\}.$$

(iv) Es existiert eine endliche Gruppe F, eine torsionsfreie, nilpotente Gruppe L und eine exakte Sequenz

$$\{1\} \longrightarrow L \longrightarrow \Gamma \longrightarrow F \longrightarrow \{1\},$$

(v) Γ ist isomorph zu einer diskreten, kokompakten Untergruppe eines semidirekten Produktes $N \rtimes_\beta F$, wobei N eine zusammenhängende, einfach zusammenhängende, nilpotente Liegruppe, F eine endliche Gruppe und $\beta : F \to Aut(N)$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

(vi) Γ ist isomorph zur Fundamentalgruppe einer kompakten Mannigfaltigkeit mit fast nichtnegativer Schnittkrümmung.

(vii) Γ ist isomorph zur Fundamentalgruppe einer kompakten Mannigfaltigkeit mit fast nichtnegativer Ricci-Krümmung.

Wir bezeichnen hierbei eine diskrete und kokompakte Untergruppe eines semidirekten Produktes $N \rtimes K$, wobei N eine zusammenhängende, einfach zusammenhängende, d-dimensionale, nilpotente Liegruppe und K eine kompakte Untergruppe der Automorphismengruppe $Aut(N)$ ist, als *fast kristallogrphische Gruppe vom Rang d.*
Wir werden jetzt das obige Theorem auf Mannigfaltigkeiten mit fast nichtnegativem Krümmungsoperator verallgemeinern. Dazu benötigen wir vorab noch ein Lemma, mit dessen Hilfe man auch die Implikationen $(v) \Rightarrow (vi)$ und $(v) \Rightarrow (vii)$ beweisen kann[2].

Lemma 4.2.2. *Sei F eine endliche Gruppe und N eine zusammenhängende, einfach zusammenhängende, nilpotente Liegruppe. Sei weiter $\beta : F \to Aut(N)$ ein Gruppenhomomorphismus und $\Pi \subseteq N \rtimes_\beta F$ ein Gitter. Dann existiert eine Folge von linksinvarianten Metriken $(g_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{N}}$ auf N, die die folgenden Bedingungen erfüllt:*

(i) Die Wirkung von $N \rtimes_\beta F$ auf (N, g_λ), gegeben durch $(g, f) \bullet h := g \cdot \beta(f)(h)$, ist isometrisch.

(ii) Der Durchmesser des Quotienten $(N, g_\lambda)/\Pi$ ist nach oben beschränkt.

(iii) Für die Schnittkrümmung von (N, g_λ) gilt $-\frac{1}{\lambda} \leqslant sec_\lambda \leqslant \frac{1}{\lambda}$.

Beweis. Mit $\mathfrak{n}$ sei die Liealgebra von N bezeichnet. Durch die Funktion

$$\phi : F \to Aut(\mathfrak{n}), f \mapsto (\beta(f))_{*e}$$

erhält man eine Darstellung der endlichen Gruppe F auf der Liealgebra $\mathfrak{n}$, d.h.

$$\phi(f\tilde{f}) = (\beta(f\tilde{f}))_{*e} = (\beta(f) \circ \beta(\tilde{f}))_{*e} = (\beta(f))_{*e} \circ (\beta(\tilde{f}))_{*e}.$$

Wir wählen ein geeignetes Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $\mathfrak{n}$ so, dass die obige Darstellung orthogonal ist, d.h. $\phi(f) = (\beta(f)))_{*e}$ erhält für alle $f \in F$ das Skalarprodukt. Dazu geben wir uns ein beliebiges Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ auf $\mathfrak{n}$ vor und definieren durch die folgende Vorschrift ein neues Skalarprodukt, das invariant unter der Darstellung von F ist

$$\langle v, u \rangle := \sum_{f \in F} \langle \beta(f)_{*e}(u), \beta_{*e}(v) \rangle_0.$$

[2] Siehe [Wi].

Dieses Skalarprodukt setzen wir zu einer linksinvarianten Metrik auf N fort, die wir ebenfalls mit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ bezeichnen.
Dann ist die Wirkung von $N \rtimes_\beta F$ auf $(N, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ isometrisch, da das Skalarprodukt so gewählt wurde, dass $\beta(f)_{*e} \in O(\mathfrak{n})$ und die Wirkung von $N \rtimes_\beta F$ auf N die Form

$$(g, f) \bullet h = g \cdot \beta(f)(h) = L_g(\beta(f)(h)) = (L_g \circ \beta(f))(h).$$

hat. Da N eine zusammenhängende, nilpotente Liegruppe ist, ist auch die zugehörige Liealgebra nilpotent. Deswegen können wir die aufsteigende Zentralreihe von $\mathfrak{n}$ betrachten:

$$\{0\} =: \mathfrak{g}_0 \subseteq \mathfrak{g}_1 \subseteq ... \subseteq \mathfrak{g}_k = \mathfrak{n}.$$

Dazu definieren wir induktiv $\mathfrak{g}_{i+1}$ durch die Eigenschaft, dass die Liealgebra $\mathfrak{g}_{i+1}/\mathfrak{g}_i$ das Zentrum von $\mathfrak{n}/\mathfrak{g}_i$ ist.
Definiere jetzt paarweise (bzgl. $\langle\cdot,\cdot\rangle$) orthogonale Vektorräume $V_1, ..., V_k \subseteq \mathfrak{n}$ durch

$$V_1 \oplus V_2 \oplus ... \oplus V_i = \mathfrak{g}_i,$$

indem man V_i als das orthogonale Komplement bzgl. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ von $\mathfrak{g}_{i-1}$ in $\mathfrak{g}_i$ definiert. Mit Hilfe der Definition der $\mathfrak{g}_i$ und der Eigenschaft, dass alle $\beta(f)_{*e}$ Liealgebren-Homomorphismen sind, folgt, dass jeder Teilraum V_j invariant unter allen $\phi(f)$ ist, d.h. für alle $f \in F$ gilt $\phi(f)(V_i)\beta(f)_{*e}(V_i) = V_i$. Aus der Definition der aufsteigenden Zentralreihe folgt weiter

$$[V_i, V_j] \subseteq \mathfrak{g}_{i-1} \quad \text{für alle} \quad i, j.$$

Setze jetzt

$$g_\lambda\left(\sum_{i=1}^k v_i, \sum_{i=1}^k w_i\right) := \sum_{i=1}^k \lambda^{2^{2(k-i)+1}} \langle v_i, w_i\rangle$$

für alle $v_i, w_i \in V_i$ und $\lambda \in]0, 1]$.
Dann gilt also für $u, v \in V_i$:

$$g_\lambda(u, v) = \lambda^{2^{2(k-i)+1}} \langle u, v\rangle$$

und für $u \in V_i, v \in V_j$ mit $i \neq j$ gilt

$$g_\lambda(u, v) = 0.$$

Also gilt weiterhin $V_i \perp V_j$ für $i \neq j$. Bezüglich der, von dem modifizierten Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ induzierten, linksinvarianten Metrik auf N, operiert $N \rtimes_\beta F$ weiterhin isometrisch. Dies folgt leicht aus der isometrischen Wirkung von $N \rtimes_\beta F$ auf N bzgl. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und der Invarianz der V_i unter allen $\phi(f)$. Wir bezeichnen für alle $i = 1, ..., k$ mit v_i die Komponente von v, die in V_i liegt. Dann folgt aus der Definition der Metrik:

$$\begin{aligned} g_\lambda(v, v) &= \sum_{i=1}^k g_\lambda(v_i, v_i) \\ &= \sum_{i=1}^k \lambda^{2^{2(k-i)+1}} \langle v_i, v_i\rangle \\ &\leqslant \sum_{i=1}^k \langle v_i, v_i\rangle \\ &= \langle v, v\rangle. \end{aligned}$$

Da die Wirkung von $N \rtimes_\beta F$ isometrisch auf N ist, folgt

$$diam((N, g_\lambda)/\Pi) \leqslant diam((N, \langle\cdot,\cdot\rangle)/\Pi).$$

Sei $\{v_{ij_1}, ..., v_{ij_i}\}$ eine Orthonormalbasis von V_i bzgl. $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Dann ist

$$\left\{ \frac{v_{il}}{\lambda^{2^{2(k-i)}}} \mid i = 1, ..., k, l = 1, ..., j_i \right\}$$

eine Orthonormalbasis von $\mathfrak{n}$ bezüglich g_λ, da

$$\begin{aligned} g_\lambda\left(\frac{v_{il}}{\lambda_i}, \frac{v_{i\tilde{l}}}{\lambda_i}\right) &= \frac{1}{\lambda_i\lambda_j} g_\lambda(v_{il}, v_{i\tilde{l}}) \\ &= \frac{1}{\lambda_i^2}\lambda_i^2\langle v_{il}, v_{i\tilde{l}}\rangle \\ &= \delta_{l\tilde{l}}. \end{aligned}$$

und

$$g_\lambda\left(\frac{v_{il}}{\lambda_i}, \frac{v_{j\tilde{l}}}{\lambda_j}\right) = \frac{1}{\lambda^2}\underbrace{g_\lambda(v_{il}, v_{j\tilde{l}})}_{=0} = 0.$$

Für alle $i \leqslant l$ gilt $[v_{ij}, v_{lm}] \in \mathfrak{g}_{i-1}$ und damit folgt

$$\begin{aligned} \left\| \left[\frac{v_{ij}}{\lambda^{2^{2(k-i)}}}, \frac{v_{lm}}{\lambda^{2^{2(k-l)}}} \right] \right\|_\lambda^2 &= \frac{1}{\lambda^{2^{2(k-i)+1}}}\frac{1}{\lambda^{2^{2(k-l)+1}}}\|[v_{ij}, v_{lm}]\|_\lambda^2 \\ &\leqslant \frac{1}{\lambda^{2^{2(k-i)+2}}}\|[v_{ij}, v_{lm}]\|_\lambda^2 \\ &\leqslant \frac{\lambda^{2^{2(k-i+1)+1}}}{\lambda^{2^{2(k-i)+2}}}\|[v_{ij}, v_{lm}]\|^2 \\ &= \lambda^2\|[v_{ij}, v_{lm}]\|^2. \end{aligned}$$

Mit der Formel für die Schnittkrümmung von Liegruppen mit linksinvarianter Metrik A.7.1 folgt die Konvergenz des Betrags der Schnittkrümmung gegen Null für $\lambda \to 0$.

□

Aus der Äquivalenz fast nichtnegativ gekrümmt zu sein und fast nichtnegativen Krümmungsoperator zu haben 3.1.7, erhält man unmittelbar das folgende Korollar:

Korollar 4.2.3. *Seien F und N wie oben. Dann existiert eine Folge von linksinvarianten Metriken $(g_\lambda)_{\mu\in\mathbb{N}}$ auf N, die die Bedingungen (i) und (ii) des obigen Theorems erfüllen und für die zusätzlich gilt:*
Der Krümmungsoperator von (N, g_λ) erfüllt $-\frac{1}{\lambda} \leqslant \hat{R}_\lambda \leqslant \frac{1}{\lambda}$.

Damit erhält man das:

Theorem 4.2.4. *Für eine endlich erzeugte Gruppe Π sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) Π *ist isomorph zur Fundamentalgruppe einer kompakten Mannigfaltigkeit mit fast nichtnegativer Schnittkrümmung,*

(ii) Π *ist isomorph zur Fundamentalgruppe einer kompakten Mannigfaltigkeit mit fast nichtnegativem Krümmungsoperator.*

Beweis. Für die eine Implikation nehmen wir an, dass Π isomorph zur Fundamentalgruppe einer kompakten Mannigfaltigkeit M mit fast nichtnegativem Krümmungsoperator sei. Dann ist M insbesondere eine Mannigfaltigkeit mit fast nichtnegativer Schnittkrümmung und damit folgt bereits (i).
Für die andere Implikation nutzen wir die Äquivalenz von (v) und (vi) aus dem vorherigen Lemma. Wir können also annehmen, dass Π isomorph zu einer diskreten, kokompakten Untergruppe eines semidirekten Produktes $N \rtimes_\beta F$ ist, wobei N eine zusammenhängende, einfach zusammenhängende, nilpotente Liegruppe und F eine endliche Gruppe und $\beta : F \to Aut(N)$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Für genügend großes $l \in \mathbb{N}$ existiert, wie im Beweis von 4.1.2, ein Monomorphismus

$$h : F \hookrightarrow SU(l).$$

Sei g die biinvariante Metrik auf $SU(l)$, die wir so wählen, dass $diam(SU(l), g) = 1$ erfüllt ist. Definiere eine Gruppenwirkung von Π auf dem Riemannschen Produkt $(N, g_\lambda) \times (SU(l), g)$ durch

$$\begin{aligned} \mu : \Pi \times ((N, g_\lambda) \times (SU(l), g)) &\to (N, g_\lambda) \times (SU(l), g) \\ ((a, b), (c, A)) &\mapsto (a \cdot \beta(b)(c), h(a) \cdot A). \end{aligned}$$

Diese Wirkung ist nach nach Lemma 4.2.5 im Anschluss fixpunktfrei und eigentlich diskontinuierlich. Damit ist der Quotient $(M, \bar{g_\lambda}) := ((N, g_\lambda) \times (SU(l), g))/\Pi$ eine Mannigfaltigkeit und Π ist isomorph zur Fundamentalgruppe von $(M, \bar{g_\lambda})$ nach 4.0.1, da $(N, g_\lambda) \times (SU(l), g)$ einfach zusammenhängend ist. Da die Gruppe kokompakt operiert, ist der Durchmesser des Quotienten endlich und nach oben beschränkt durch eine Konstante unabhängig von λ. Nach Korollar 4.2.3 ist auch der Krümmungsoperator von $(M, \bar{g_\lambda})$ nach unten beschränkt, da $(M, \bar{g_\lambda})$ lokal isometrisch zu $((N, g_\lambda) \times (SU(l), g))$ ist. Dies folgt aus der Eigenschaft, dass die Gruppenwirkung isometrisch ist und der Quotient $(M, \bar{g_\lambda})$ damit lokal isometrisch zu $((N, g_\lambda) \times (SU(l), g))$ ist. Also erhält man eine Mannigfaltigkeit mit fast nichtnegativem Krümmungsoperator, deren Fundamentalgruppe isomorph zu Π ist. □

Der Vollständigkeit halber führen wir noch das folgende Lemma an, das im vorigen Beweis Verwendung findet.

Lemma 4.2.5. *Unter den Voraussetzungen des vorangegangenen Satzes ist die Wirkung aus dem obigen Beweis*

$$\begin{aligned} \mu : \Pi \times (N \times SU(l)) &\to N \times SU(l) \\ ((a, b), (c, A)) &\mapsto (a \cdot \beta(b)(c), h(a) \cdot A) \end{aligned}$$

fixpunktfrei und eigentlich diskontinuierlich.

Beweis. Wir verwenden in diesem Beweis dieselben Bezeichnungen wie in den vorigen Sätzen und Beweisen. Es sei Π eine diskrete Untergruppe von $N \rtimes_\beta F$, wobei
$\beta : F \to Aut(N)$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Dann gilt insbesondere $\beta(e_F)(v) = v$ für alle $v \in N$.
Außerdem ist $h : F \to SU(l)$ ein weiterer Gruppenhomomorphismus, der injektiv ist, da h eine Einbettung ist. Also ist e_F ist die einzige Stelle, an der $h(e_F) = I_l$ gilt und damit $h(e_F) \cdot A = A$ für alle $A \in SU(l)$.
Seien jetzt $(g, f) \in \Pi$ und $(v, A) \in N \times SU(l)$ mit der Eigenschaft, dass

$$(g, f) \cdot (v, A) = (v, A).$$

Dann folgt aus obigen Überlegungen bereits $f = e_F$. Weiter folgt

$$v = g \cdot \beta(f)(v) = g \cdot \beta(e_F)(v) = g \cdot v$$

und damit $g = e_N$, da N eine Gruppe ist. Also ist die Gruppenwirkung fixpunktfrei.
Da die Gruppenwirkung von Π auf N eigentlich diskontinuierlich ist, existiert für jeden Punkt $x \in N$ eine Umgebung $U \subseteq N$ mit

$$U \cap \gamma \cdot U = \emptyset \quad \text{für alle} \quad \gamma \neq e_\Pi.$$

Sei jetzt $(v, A) \in N \times SU(L)$. Dann existiert eine offene Umgebung $U \subseteq N$ von v mit $U \cap \gamma \cdot U = \emptyset$ für alle $\gamma \neq e_\Pi$.
Da F eine endliche Gruppe ist, ist $h(F) \subseteq SU(l)$ endlich und damit ist die Wirkung von F auf $SU(l)$ eigentlich diskontinuierlich. Folglich existiert für alle $A \in SU(l)$ eine offene Umgebung $W \subseteq SU(l)$ mit

$$W \cap \alpha \cdot W = \emptyset \quad \text{für alle} \quad \alpha \neq I_l.$$

Definiere die Menge

$$U \times W \subseteq N \times SU(l).$$

Diese Menge ist offene Umgebung von (v, A) und es gilt

$$(U \times W) \cap \gamma \cdot (U \times W) = \emptyset \quad \text{für alle} \quad \gamma \neq e_\Pi.$$

Also ist die Wirkung eigentlich diskontinuierlich. □

Kapitel 5

Fast nichtnegativer Krümmungsoperator auf Bündeln

In diesem Kapitel wollen wir zeigen, dass der Totalraum eines Faserbündels[1] fast nichtnegativen Krümmungsoperator zulässt, falls der Basisraum dies tut und auf der Faser eine unter der Strukturgruppe invariante Metrik mit positivem Krümmungsoperator existiert. Dazu nehmen wir für dieses Kapitel an, dass eine kompakte Mannigfaltigkeit E die Struktur eines Faserbündels

$$\eta := (E, \pi, M, F)$$

zulässt. Wir nehmen weiter an, dass der Basisraum M dieses Faserbündels fast nichtnegativen Krümmungsoperator hat, d.h. für alle $\varepsilon > 0$ existiert eine Metrik h_ε so, dass der Krümmungsoperator $\hat{R}^M_\varepsilon$ folgende Ungleichung erfüllt

$$\hat{R}^M_\varepsilon (diam_\varepsilon(M))^2 > -\varepsilon, \tag{5.1}$$

dass die Strukturgruppe G des Faserbündels η eine kompakte Liegruppe ist und dass F eine G-invariante Metrik b mit positivem Krümmungsoperator trägt.

5.1 Konstruktion der Metrik

Wir wollen jetzt eine Metrik g_ε auf E so konstruieren, dass E die Ungleichung

$$\hat{R}^E_\varepsilon (diam_\varepsilon(E))^2 > -\varepsilon$$

erfüllt. Dazu benötigen wir zunächst noch einige Begriffe.

Definition 5.1.1. Sei $\pi : E \to M$ eine Submersion und sei $\mathcal{V}(E) = \ker(d\pi)$ das vertikale Bündel dieser Submersion. Wir nehmen an, dass $\mathcal{H}(E)$ ein Unterbündel von TE so ist, dass das Tangentialbündel TE sich als direkte Summe

$$TE = \mathcal{V}(E) \oplus \mathcal{H}(E)$$

schreiben lässt. Falls für alle Wege γ in M und alle Punkte $p_0 \in \pi^{-1}(\gamma(t_0))$ ein *horizontaler Lift* $\tilde{\gamma}$ von γ in E, d.h. für alle t gilt $\pi(\tilde{\gamma}(t)) = \gamma(t)$ und $\tilde{\gamma}'(t) \in \mathcal{H}(E)_{\tilde{\gamma}}(t)$, so existiert, dass $\tilde{\gamma}(t_0) = p_0$, dann heißt $\mathcal{H}(E)$ *Ehresmann-Zusammenhang*.

[1] Definition und grundlegende Begriffe über Faserbündel findet man im Anhang A.3.

Man kann zeigen, dass jedes Bündel einen Ehresmann-Zusammenhang trägt[2].

Satz 5.1.2. (Vilms[3])
Sei $\xi := (E, \pi, M, F, G)$ *ein Bündel mit einem Ehresmann-Zusammenhang. Falls* M *und* F *Riemannsche Metriken tragen und die Metrik auf* F G*-invariant ist, existiert auf* E *eine Riemannsche Metrik, so dass* π *eine Riemannsche Submersion mit total geodätischen Fasern ist.*

Da wir im Folgenden eine solche *Zusammenhangsmetrik* verwenden wollen, führen wir hier noch eine kurze Anleitung zur Konstruktion an. Weil es auf ξ einen Ehresmann-Zusammenhang gibt, zerfällt das Tangentialbündel von E in die direkte Summe $TE = \mathcal{V}(E) \oplus \mathcal{H}(E)$. Wir definieren die Metrik so, dass diese Zerlegung orthogonal ist. Sei $p \in E$ ein beliebiger Punkt und (U_α, ϕ_α) eine Bündelkarte um p. Definiere für alle $X, Y \in \mathcal{H}(E)_p$ und $U, V \in \mathcal{V}(E)_p$:

$$
\begin{aligned}
g_p(X,Y) &:= (h+b)_p(X,Y) := g_{\pi(p)}\left((d\pi)_p(X), (d\pi)_p(Y)\right), \\
g_p(U,V) &:= (h+b)_p(U,V) := h_{\phi'_\alpha(p)}\left((d\phi'_\alpha)_p(U), (d\phi'_\alpha)_p(V)\right), \\
g_p(X,U) &:= (h+b)_p(X,U) := 0.
\end{aligned}
$$

Hierbei ist $\phi'_\alpha = \phi_{\alpha,p}$ die zweite Komponentenfunktion von ϕ_α. Diese Definition ist wohldefiniert, d.h. unabhängig von der gewählten Bündelkarte, da für zwei beliebige Karten (U_α, ϕ_α) und (U_β, ϕ_β) aufgrund der G-Invarianz der Metrik auf F gilt:

$$
b_{\phi_{\alpha,p}}\left((d\phi_{\alpha,p})_p(U), (d\phi_{\alpha,p})_p(V)\right) = b_{\phi_{\beta,p}}\left((d\phi_{\beta,p})_p(U), (d\phi_{\beta,p})_p(V)\right).
$$

Um jetzt auf E eine Metrik $\tilde{g}$ zu definieren, die die Gleichung (5.1) erfüllt, skalieren wir die Metrik entlang der Faser F mit einer von ε abhängigen, positiven rellen Zahl δ:

$$
g_{\varepsilon\delta} := h_\varepsilon + \delta^2 b.
$$

Durch diese Skalierung ist der Durchmesser der Mannigfaltigkeit $(E, g_{\varepsilon\delta})$ nach oben beschränkt durch den Durchmesser der kompakten Mannigfaltigkeit $(E, g_{\varepsilon 1})$.

Im Laufe des Beweises verwenden wir in erster Linie die Formeln von O'Neill ([O'N] und Anhang A.3), die das Verhalten der Krümmungstensoren bei Riemannschen Submersionen beschreiben. Wir werden zuerst Zusammenhänge zwischen den Levi-Civita-Zusammenhängen $\nabla^{\varepsilon\delta}$ von $(E, g_{\varepsilon\delta})$ und $\nabla^\varepsilon := \nabla^{\varepsilon 1}$ von $(E, g_{\varepsilon 1})$ und damit zwischen den zugehörigen Fundamentaltensoren bzgl. dieser beiden Metriken herleiten. Dabei verwenden wir den $(2,1)$-Tensor A von O'Neill[4]
Die im Folgenden aufgelisteten Eigenschaften der Metrik und des dadurch definierten Zusammenhangs wurden bereits in [FuYa] verwendet.

Generalvoraussetzung 5.1.3. Im Laufe dieses Kapitels bezeichnen wir mit X, Y, Z, Z' horizontale und mit U, V, W, W' vertikale Vektoren, bzw. Vektorfelder.

---

[2] Siehe [koMiSl] Seite 81.
[3] Siehe [Vi],[Be]
[4] Siehe A.4.

Lemma 5.1.4. *Für die oben konstruierte Metrik gelten folgende Zusammenhänge zwischen den kovarianten Ableitungen:*

(i) $\nabla^{\varepsilon\delta}_X Y = \nabla^{\varepsilon}_X Y$ *und* $A^{\varepsilon\delta}_X Y = A^{\varepsilon}_X Y$,

(ii) $\nabla^{\varepsilon\delta}_V W = \nabla^{\varepsilon}_V W$,

(iii) $A^{\varepsilon\delta}_X V = \delta^2 A^{\varepsilon}_X V$,

(iv) $(\nabla^{\varepsilon\delta}_X V)^{\mathcal{V}} = (\nabla^{\varepsilon}_X V)^{\mathcal{V}} = [X, V]$,

(v) $(\nabla^{\varepsilon\delta}_V X)^{\mathcal{H}} = \delta^2(\nabla^{\varepsilon}_V X)^{\mathcal{H}}$.

Beweis. Mit Hilfe der Koszul-Formel für den Levi-Civita-Zusammenhang gilt:

$$\begin{aligned}
2g_{\varepsilon\delta}(\nabla^{\varepsilon\delta}_X Y, Z) &= X(g_{\varepsilon,\delta}(Y,Z)) + Y(g_{\varepsilon\delta}(Z,X)) - Z(g_{\varepsilon\delta}(X,Y)) \\
&\quad + g_{\varepsilon\delta}([X,Y],Z) - g_{\varepsilon\delta}([Y,Z],X) + g_{\varepsilon\delta}([Z,X],Y) \\
&= X(g_{\varepsilon}(Y,Z)) + Y(g_{\varepsilon}(Z,X)) - Z(g_{\varepsilon}(X,Y)) \\
&\quad + g_{\varepsilon}([X,Y],Z) - g_{\varepsilon}([Y,Z],X) + g_{\varepsilon}([Z,X],Y) \\
&= 2g_{\varepsilon}(\nabla^{\varepsilon}_X Y, Z) \\
&= 2g_{\varepsilon,\delta}(\nabla^{\varepsilon}_X Y, Z)
\end{aligned}$$

und ebenso

$$\begin{aligned}
2g_{\varepsilon\delta}(\nabla^{\varepsilon\delta}_X Y, U) &= X(\underbrace{g_{\varepsilon\delta}(Y,U)}_{=0}) + Y(\underbrace{g_{\varepsilon\delta}(U,X)}_{=0}) - \underbrace{U(g_{\varepsilon\delta}(X,Y))}_{=0} \\
&\quad + g_{\varepsilon\delta}([X,Y],U) - g_{\varepsilon\delta}(\underbrace{[Y,U]}_{\in\mathcal{V}},X) + g_{\varepsilon\delta}(\underbrace{[U,X]}_{\in\mathcal{V}},Y) \\
&= \delta^2 g_{\varepsilon}([X,Y],U) \\
&= \delta^2 \left\{X(g_{\varepsilon}(Y,U)) + Y(g_{\varepsilon}(U,X)) - U(g_{\varepsilon}(X,Y)) \right. \\
&\quad \left. + g_{\varepsilon}([X,Y],U) - g_{\varepsilon}([Y,U],X) + g_{\varepsilon}([U,X],Y)\right\} \\
&= 2\delta^2 g_{\varepsilon}(\nabla^{\varepsilon}_X Y, U) \\
&= 2g_{\varepsilon,\delta}(\nabla^{\varepsilon}_X Y, U).
\end{aligned}$$

Damit folgt $\nabla^{\varepsilon\delta}_X Y = \nabla^{\varepsilon}_X Y$. Aus der Definition des Fundamentaltensors A folgt weiter $A^{\varepsilon\delta}_X Y = A^{\varepsilon}_X Y$.
Die anderen Beweise folgen aus analogen Rechnungen.
In (iv) ist darüber hinaus zu zeigen, dass $(\nabla^{\varepsilon}_X V)^{\mathcal{V}} = [X, V]$. Da $[X, V]$ vertikal und der Levi-Civita- Zusammenhang torsionsfrei ist, folgt

$$[X, V] = [X, V]^{\mathcal{V}} = (\nabla^{\varepsilon}_X V)^{\mathcal{V}} - (\nabla^{\varepsilon}_V X)^{\mathcal{V}} = (\nabla^{\varepsilon}_X V)^{\mathcal{V}},$$

wobei die letzte Gleichheit aus der Eigenschaft folgt, dass der Fundamentaltensor T verschwindet. □

Damit erhält man:

Lemma 5.1.5. *Es gelten folgende Eigenschaften:*

(i) $\nabla^{\varepsilon\delta}_V(A^{\varepsilon\delta}_X Y) = \nabla^{\varepsilon}_V(A^{\varepsilon}_X Y)$,

(ii) $\langle \nabla^{\varepsilon}_V(A^{\varepsilon}_X Y), W\rangle_{\varepsilon\delta} = \frac{1}{2}\langle \nabla^{\varepsilon}_V[X,Y]^{\mathcal{V}}, W\rangle_{\varepsilon\delta}$,

(iii) $\langle (\nabla^{\varepsilon\delta}_X A^{\varepsilon\delta})_Y Z, L\rangle_{\varepsilon\delta} = \delta^2\langle (\nabla^{\varepsilon}_X A^{\varepsilon})_Y Z, L\rangle_{\varepsilon}$ *für alle Vektoren L.*

Beweis. (i) Folgt unmittelbar aus (i) und (ii) von Lemma 5.1.4.

(ii) Aus der Eigenschaft von A folgt:

$$\begin{aligned}
\langle \nabla^{\varepsilon}_V(A^{\varepsilon}_X Y), W\rangle_{\varepsilon\delta} &= \langle \nabla^{\varepsilon}_V(\frac{1}{2}[X,Y]^{\mathcal{V}}), W\rangle_{\varepsilon\delta} \\
&= \frac{1}{2}\langle \nabla^{\varepsilon}_V([X,Y]^{\mathcal{V}}), W\rangle_{\varepsilon\delta}.
\end{aligned}$$

(iii) Aus der Definition für die kovariante Ableitung von Tensoren mit Lemma 5.1.4 (i) folgt:

$$\begin{aligned}
(\nabla^{\varepsilon\delta}_X A^{\varepsilon\delta})_Y Z &= \nabla^{\varepsilon\delta}_X(A^{\varepsilon\delta}_Y Z) - A^{\varepsilon\delta}_{(\nabla^{\varepsilon\delta}_X Y)} Z - A^{\varepsilon\delta}_Y(\nabla^{\varepsilon\delta}_X Z) \\
&= \nabla^{\varepsilon\delta}_X(A^{\varepsilon}_Y Z) - A^{\varepsilon\delta}_{(\nabla^{\varepsilon}_X Y)} Z - A^{\varepsilon\delta}_Y(\nabla^{\varepsilon}_X Z) \\
&= \delta^2(\nabla^{\varepsilon}_X(A^{\varepsilon}_Y Z))^{\mathcal{H}} + (\nabla^{\varepsilon}_X(A^{\varepsilon}_Y Z))^{\mathcal{V}} \\
&\quad - A^{\varepsilon\delta}_{(\nabla^{\varepsilon}_X Y)^{\mathcal{H}}} Z - \underbrace{A^{\varepsilon\delta}_{(\nabla^{\varepsilon}_X Y)^{\mathcal{V}}} Z}_{=0} \\
&\quad - A^{\varepsilon\delta}_Y(\nabla^{\varepsilon}_X Z)^{\mathcal{H}} - A^{\varepsilon\delta}_Y(\nabla^{\varepsilon}_X Z)^{\mathcal{V}} \\
&= \delta^2(\nabla^{\varepsilon}_X(A^{\varepsilon}_Y Z))^{\mathcal{H}} + (\nabla^{\varepsilon}_X(A^{\varepsilon}_Y Z))^{\mathcal{V}} \\
&\quad - A^{\varepsilon}_{(\nabla^{\varepsilon}_X Y)} Z \\
&\quad - A^{\varepsilon}_Y(\nabla^{\varepsilon}_X Z)^{\mathcal{H}} - \delta^2 A^{\varepsilon}_Y(\nabla^{\varepsilon}_X Z)^{\mathcal{V}}
\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung aus der Definition der Metrik.

□

Im Folgenden verwenden wir die Schreibweisen:

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_{\varepsilon\delta} = g_{\varepsilon\delta}(\cdot,\cdot), \qquad \langle\cdot,\cdot\rangle_{\varepsilon} = g_{\varepsilon 1}(\cdot,\cdot),$$

und

$$\|X\|^2_{\varepsilon} = g_{\varepsilon 1}(X,X), \qquad \|V\|^2 = b(\tau(V),\tau(V)).$$

Aus den obigen beiden Lemmata in Verbindung mit den O'Neill-Formeln folgt der folgende

Satz 5.1.6.

(i) $R_{\varepsilon\delta}(X,Y,Z,Z') = R^N_{\varepsilon}(d\pi(X), d\pi(Y), d\pi(Z), d\pi(Z'))$
$+\,\delta^2\,\{-2\langle A^{\varepsilon}_X Y, A^{\varepsilon}_Z Z'\rangle_{\varepsilon} \qquad + \langle A^{\varepsilon}_X Z, A^{\varepsilon}_Y Z'\rangle_{\varepsilon} - \langle A^{\varepsilon}_Y Z, A^{\varepsilon}_X Z'\rangle_{\varepsilon}\}$,

(ii) $R_{\varepsilon\delta}(U,V,W,W') = \delta^2 R^F_\varepsilon(U,V,W,W')$,

(iii) $R_{\varepsilon\delta}(X,V,V,X) = \delta^4\|A^\varepsilon_X V\|^2_\varepsilon$,

(iv) $R_{\varepsilon\delta}(U,V,W,X) = 0$,

(v) $R_{\varepsilon\delta}(X,Y,Z,V) = \delta^2\langle(\nabla^\varepsilon_Z A^\varepsilon)_X Y, V\rangle_\varepsilon = \delta^2 R_\varepsilon(X,Y,Z,V)$,

(vi) $R_{\varepsilon\delta}(X,Y,V,W) = \frac{\delta^2}{2}\left\{\langle\nabla^\varepsilon_V[X,Y]^{\mathcal{V}}, W\rangle_\varepsilon - \langle\nabla^\varepsilon_W[X,Y]^{\mathcal{V}}, V\rangle_\varepsilon\right\}$
$+ \delta^4\left\{\langle A^\varepsilon_{(A^\varepsilon_X V)}Y, W\rangle_\varepsilon + \langle A^\varepsilon_X(A^\varepsilon_Y V), W\rangle_\varepsilon - \langle A^\varepsilon_{(A^\varepsilon_X W)}Y, V\rangle_\varepsilon - \langle A^\varepsilon_X(A^\varepsilon_Y W), V\rangle_\varepsilon\right\}$
$+ \delta^4\left\{\langle A^\varepsilon_X V, A^\varepsilon_Y W\rangle_\varepsilon - \langle A^\varepsilon_X W, A^\varepsilon_Y V\rangle_\varepsilon\right\}$,

(vii) $R_{\varepsilon\delta}(X,V,Y,W) = \frac{\delta^2}{2}\langle\nabla^\varepsilon_V[X,Y]^{\mathcal{V}}, W\rangle_\varepsilon - \delta^4\left\{\langle A^\varepsilon_{(A^\varepsilon_X V)}Y, W\rangle_\varepsilon + \langle A^\varepsilon_X(A^\varepsilon_Y W), V\rangle_\varepsilon\right\}$
$+ \delta^4\langle A^\varepsilon_X V, A^\varepsilon_Y W\rangle_\varepsilon$.

Beweis. Es gelten folgende Rechnungen:

(i)

$$\begin{aligned}
R_{\varepsilon\delta}(X,Y,Z,Z') &= R^N_\varepsilon(d\pi(X), d\pi(y), d\pi(Z), d\pi(Z')) \\
&\quad +\delta^2\left\{-2\langle A^{\varepsilon\delta}_X Y, A^{\varepsilon\delta}_Z Z'\rangle_{\varepsilon\delta} + \langle A^{\varepsilon\delta}_X Z, A^{\varepsilon\delta}_Y Z'\rangle_{\varepsilon\delta} - \langle A^{\varepsilon\delta}_Y Z, A^{\varepsilon\delta}_X Z'\rangle_{\varepsilon\delta}\right\} \\
&= R^N_\varepsilon(d\pi(X), d\pi(y), d\pi(Z), d\pi(Z')) \\
&\quad +\delta^2\left\{-2\langle A^\varepsilon_X Y, A^\varepsilon_Z Z'\rangle_{\varepsilon\delta} + \langle A^\varepsilon_X Z, A^\varepsilon_Y Z'\rangle_{\varepsilon\delta} - \langle A^\varepsilon_Y Z, A^\varepsilon_X Z'\rangle_{\varepsilon\delta}\right\} \\
&= R^N_\varepsilon(d\pi(X), d\pi(y), d\pi(Z), d\pi(Z')) \\
&\quad +\delta^2\left\{-2\langle A^\varepsilon_X Y, A^\varepsilon_Z Z'\rangle_\varepsilon + \langle A^\varepsilon_X Z, A^\varepsilon_Y Z'\rangle_\varepsilon - \langle A^\varepsilon_Y Z, A^\varepsilon_X Z'\rangle_\varepsilon\right\},
\end{aligned}$$

(ii)

$$R_{\varepsilon\delta}(U,V,W,W') = R^F_{\varepsilon\delta}(U,V,W,W') = \delta^2 R^F_\varepsilon(U,V,W,W'),$$

(iii)

$$\begin{aligned}
R_{\varepsilon\delta}(X,V,V,X) &= \|A^{\varepsilon\delta}_X V\|^2_{\varepsilon\delta} = \delta^4\|\underbrace{A^\varepsilon_X V}_{\in\mathcal{H}}\|^2_{\varepsilon\delta} \\
&= \delta^4\|A^\varepsilon_X V\|^2_\varepsilon,
\end{aligned}$$

(iv) $R_{\varepsilon\delta}(U,V,W,X) = 0$,

(v)

$$\begin{aligned}
R_{\varepsilon\delta}(X,Y,Z,V) &= \langle(\nabla^{\varepsilon\delta}_Z A^{\varepsilon\delta})_X Y, V\rangle_{\varepsilon\delta} \\
&\overset{5.1.5}{=} \delta^2\langle(\nabla^\varepsilon_Z A^\varepsilon)_X Y, V\rangle_\varepsilon.
\end{aligned}$$

(vi) Zunächst gilt folgende Gleichheit:

$$\begin{aligned}
\langle(\nabla_V^{\varepsilon\delta}A^{\varepsilon\delta})_X Y, W\rangle_{\varepsilon\delta} &= \langle\nabla_V^{\varepsilon\delta}(A_X^{\varepsilon\delta}Y), W\rangle_{\varepsilon\delta} - \langle A^{\varepsilon\delta}_{(\nabla_V^{\varepsilon\delta}X)}Y, W\rangle_{\varepsilon\delta} \\
&\quad -\langle A_X^{\varepsilon\delta}(\nabla_V^{\varepsilon\delta}Y), W\rangle_{\varepsilon\delta} \\
&\overset{5.1.5(\mathrm{i})}{=} \langle\nabla_V^{\varepsilon}(A_X^{\varepsilon}Y), W\rangle_{\varepsilon\delta} - \delta^2\langle A^{\varepsilon}_{(\nabla_V^{\varepsilon}X)^{\mathcal{H}}}Y, W\rangle_{\varepsilon\delta} \\
&\quad -\delta^2\langle A_X^{\varepsilon}(\nabla_V^{\varepsilon}Y)^{\mathcal{H}}, W\rangle_{\varepsilon\delta} - \langle\underbrace{A_X^{\varepsilon\delta}(\nabla_V^{\varepsilon\delta}Y)^{\mathcal{V}}}_{\in\mathcal{H}}, W\rangle_{\varepsilon\delta} \\
&= \delta^2\langle\nabla_V^{\varepsilon}(A_X^{\varepsilon}Y), W\rangle_{\varepsilon} - \delta^4\langle A^{\varepsilon}_{(\nabla_V^{\varepsilon}X)^{\mathcal{H}}}Y, W\rangle_{\varepsilon} \\
&\quad -\delta^4\langle A_X^{\varepsilon}(\nabla_V^{\varepsilon}Y)^{\mathcal{H}}, W\rangle_{\varepsilon} \\
&= \frac{\delta^2}{2}\langle\nabla_V^{\varepsilon}[X,Y]^{\mathcal{V}}, W\rangle_{\varepsilon} - \delta^4\langle A^{\varepsilon}_{(\nabla_V^{\varepsilon}X)^{\mathcal{H}}}Y, W\rangle_{\varepsilon} \\
&\quad -\delta^4\langle A_X^{\varepsilon}(\nabla_V^{\varepsilon}Y)^{\mathcal{H}}, W\rangle_{\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\langle A_X^{\varepsilon\delta}V, A_Y^{\varepsilon\delta}W\rangle_{\varepsilon\delta} = \delta^4\langle A_X^{\varepsilon}V, A_Y^{\varepsilon}W\rangle_{\varepsilon}.$$

Zusammen mit den O'Neill-Formeln erhält man die Behauptung.

(vii) Mit ähnlichen Rechnungen wie in (vi) beweist man die Behauptung (vii).

□

5.2 Berechnung des Krümmungsoperators

In diesem Unterkapitel werden die Eigenwerte des Krümmungsoperators von E bezüglich der vorher definierten Metrik abgeschätzt. Dies erfolgt in ähnlicher Art und Weise wie in [FuYa].
Wir wählen bezüglich der Metrik $g_{\epsilon 1}$ eine Orthonormalbasis $(e_i)_{i\leqslant n}$ von T_pM so, dass $(e_1, ..., e_m)$ eine Basis von $\mathcal{H}_p$ und $(e_{m+1}, ..., e_n)$ eine Basis von $\mathcal{V}_p$ ist. Dann ist für alle $\delta > 0$ $(e_1, ..., e_m, \frac{e_{m+1}}{\delta}, ..., \frac{e_n}{\delta})$ eine Orthonormalbasis bezüglich der Metrik $g_{\epsilon\delta}$ und damit bildet für alle $\delta > 0$

$$\{(\check{e}_i \wedge \check{e}_j)_{i<j}\} := \left\{(e_i \wedge e_j)_{i<j\leqslant m}, (e_i \wedge \frac{e_j}{\delta})_{i\leqslant m<j}, (\frac{e_i}{\delta} \wedge \frac{e_j}{\delta})_{m<i<j}\right\}$$

eine Orthonormalbasis von $\bigwedge_2(T_pM)$ bezüglich der Metrik $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle_{\varepsilon\delta}$. Ein beliebiger Bivektor ω lässt sich für ein $\delta > 0$ wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned}
\omega &= \sum_{i<j}\omega_{ij}(\check{e}_i \wedge \check{e}_j) \\
&= \sum_{i<j\leqslant m}\omega_{ij}e_i \wedge e_j + \sum_{i\leqslant m<j}\omega_{ij}e_i \wedge \frac{e_j}{\delta} + \sum_{m<i<j}\omega_{ij}\frac{e_i}{\delta} \wedge \frac{e_j}{\delta}.
\end{aligned}$$

Generalvoraussetzung 5.2.1. Wir können annehmen, dass ω normiert ist, d.h. $\|\omega\| = 1$.

Damit gilt

$$\begin{aligned}
\langle\langle \hat{R}_{\varepsilon\delta}(\omega), \omega\rangle\rangle_{\varepsilon\delta} &= \left\langle\!\!\left\langle \hat{R}_{\varepsilon\delta}\left(\sum_{i<j}\omega_{ij}\check{e}_i\wedge\check{e}_j\right), \sum_{k<l}\omega_{kl}\check{e}_k\wedge\check{e}_l\right\rangle\!\!\right\rangle_{\varepsilon\delta} \\
&= \sum_{\substack{(i<j),\\(k<l)}}\omega_{ij}\omega_{kl}R_{\varepsilon\delta}(\check{e}_i,\check{e}_j,\check{e}_l,\check{e}_k) \\
&= \underbrace{\sum_{\substack{(i<j\leqslant m),\\(k<l\leqslant m)}}\omega_{ij}\omega_{kl}R_{\varepsilon\delta}(e_i,e_j,e_l,e_k)}_{=:p^{\varepsilon\delta}} + \underbrace{\sum_{\substack{(m<i<j),\\(m<k<l)}}\omega_{ij}\omega_{kl}R_{\varepsilon\delta}\left(\frac{e_i}{\delta},\frac{e_j}{\delta},\frac{e_l}{\delta},\frac{e_k}{\delta}\right)}_{=:q^{\varepsilon\delta}} \\
&\quad + \underbrace{\sum_{\substack{(i\leqslant m<j)\vee\\(k\leqslant m<l)}}\omega_{ij}\omega_{kl}R_{\varepsilon\delta}(\check{e}_i,\check{e}_j,\check{e}_l,\check{e}_k)}_{=:r^{\varepsilon\delta}} + \underbrace{\sum_{\substack{(i<j\leqslant m),\\(m<k<l)}}\omega_{ij}\omega_{kl}R_{\varepsilon\delta}\left(e_i,e_j,\frac{e_l}{\delta},\frac{e_k}{\delta}\right)}_{=:s'^{\varepsilon\delta}} \\
&\quad + \underbrace{\sum_{\substack{(m<i<j),\\(k<l\leqslant m)}}\omega_{ij}\omega_{kl}R_{\varepsilon\delta}\left(\frac{e_i}{\delta},\frac{e_j}{\delta},e_l,e_k\right)}_{=:s''^{\varepsilon\delta}}.
\end{aligned}$$

Um die einzelnen Terme abzuschätzen, verwenden wir folgende von ε abhängige Konstanten:

$$\begin{aligned}
C_1(\varepsilon) &:= \sup\{\|A^{\varepsilon}_X Y\| \mid \|X\|_{\varepsilon} = \|Y\|_{\varepsilon} = 1\}, \\
C_2(\varepsilon) &:= \sup\{\|A^{\varepsilon}_X V\| \mid \|X\|_{\varepsilon} = \|V\| = 1\},
\end{aligned}$$

Mit diesen Konstanten erhält man analog zu [FuYa] folgende Abschätzungen:

Satz 5.2.2.

(i) $R_{\varepsilon\delta}(X,Y,Z,Z') \geqslant -R^M_{\varepsilon}(d\pi(X),d\pi(Y),d\pi(Z),d\pi(Z')) - 4\delta^2 C_1(\varepsilon)^2$,

(ii) $R_{\varepsilon\delta}\left(X,Y,Z,\frac{V}{\delta}\right) \geqslant -\delta C_3(\varepsilon)$,

(iii) $R_{\varepsilon\delta}\left(\frac{U}{\delta},\frac{V}{\delta},\frac{W}{\delta},\frac{W'}{\delta}\right) = \frac{1}{\delta^2}R^F_{\varepsilon}(U,V,W,W')$,

(iv) $R_{\varepsilon\delta}\left(X,Y,\frac{W}{\delta},\frac{V}{\delta}\right) \geqslant \frac{1}{2}\left\{\langle\nabla^{\varepsilon}_V[X,Y]^{\mathcal{V}},W\rangle_{\varepsilon} - \langle\nabla^{\varepsilon}_W[X,Y]^{\mathcal{V}},V\rangle_{\varepsilon}\right\}$
$-2\delta^2 C_2(\varepsilon)(2C_1(\varepsilon)+C_2(\varepsilon))$,

(v) $R_{\varepsilon\delta}\left(X,\frac{W}{\delta},Y,\frac{V}{\delta}\right) \geqslant \frac{1}{2}\langle\nabla^{\varepsilon}_V[X,Y]^{\mathcal{V}},W\rangle_{\varepsilon} - 2\delta^2 C_2(\varepsilon)(2C_1(\varepsilon)+C_2(\varepsilon))$.

Um die Summen über die ω_{ij} abzuschätzen, verwenden wir folgende Ungleichung:

$$\begin{aligned}
\sum_{i<j,k<l} \omega_{ij}\omega_{kl} &\leqslant \sum_{\substack{(i<j),\\(k<l)}} |\omega_{ij}||\omega_{kl}| \\
&= \left(\sum_{i<j} |\omega_{ij}|\right)\left(\sum_{k<l} |\omega_{kl}|\right) \\
&= \left(\sum_{i<j} \underbrace{|\omega_{ij}|}_{\leqslant 1}\right)^2 \\
&\leqslant \underbrace{\left(\frac{n^2}{2} - n\right)^2}_{=:\lambda_n}.
\end{aligned}$$

Nun kann man den Summanden $p^{\varepsilon\delta}$ wie folgt abschätzen:

Lemma 5.2.3. *Es gilt*

$$p^{\varepsilon\delta} \geqslant \langle\langle \hat{R}^N_\varepsilon(\tilde{\omega}), \tilde{\omega}\rangle\rangle_\varepsilon - 4\delta^2 C_1(\varepsilon)^2 \lambda^2 \|(\omega_{ij})\|_2^2,$$

wobei wir für alle $i \leqslant m$ definieren

$$\tilde{e_i} := d\pi(e_i) \quad \textit{und} \quad \tilde{\omega} := \sum_{i<j\leqslant m} \omega_{ij} e_i \wedge e_j.$$

Beweis. Mit Hilfe der vorher aufgeführten Ungleichungen erhält man folgende Rechnung

$$\begin{aligned}
p^{\varepsilon\delta} &= \sum_{\substack{(i<j\leqslant m),\\(k<l\leqslant m)}} \omega_{ij}\omega_{kl} R_{\varepsilon\delta}(e_i, e_j, e_l, e_k) \\
&= \sum_{\substack{(i<j\leqslant m),\\(k<l\leqslant m)}} \omega_{ij}\omega_{kl} \left\{ R^M_\varepsilon(d\pi(e_i), d\pi(e_j), d\pi(e_l), d\pi(e_k)) \right. \\
&\quad \left. +\delta^2 \left\{ -2\langle A_{e_i}e_j, A_{e_l}e_k\rangle + \langle A_{e_i}e_l, A_{e_j}e_k\rangle - \langle A_{e_j}e_l, A_{e_i}e_k\rangle \right\}\right\} \\
&\geqslant \sum_{\substack{(i<j\leqslant m),\\(k<l\leqslant m)}} \omega_{ij}\omega_{kl} R^M_\varepsilon(\tilde{e_i}, \tilde{e_j}, \tilde{e_l}, \tilde{e_k}) \\
&\quad -\delta^2 \sum_{\substack{(i<j\leqslant m),\\(k<l\leqslant m)}} |\omega_{ij}||\omega_{kl}| \left\{ 2\|A_{e_i}e_j\|\|A_{e_l}e_k\| + \|A_{e_i}e_l\|\|A_{e_j}e_k\| + \|A_{e_j}e_l\|\|A_{e_i}e_k\| \right\} \\
&\geqslant \sum_{\substack{(i<j\leqslant m),\\(k<l\leqslant m)}} \omega_{ij}\omega_{kl} R^M_\varepsilon(\tilde{e_i}, \tilde{e_j}, \tilde{e_l}, \tilde{e_k}) - 4\delta^2 C_1(\varepsilon)^2 \sum_{\substack{(i<j\leqslant m),\\(k<l\leqslant m)}} |\omega_{ij}||\omega_{kl}| \\
&= \langle\langle \hat{R}^M_\varepsilon(\tilde{\omega}), \tilde{\omega}\rangle\rangle_\varepsilon - 4\delta^2 C_1(\varepsilon)^2 \sum_{\substack{(i<j\leqslant m),\\(k<l\leqslant m)}} |\omega_{ij}||\omega_{kl}| \\
&\geqslant \langle\langle \hat{R}^M_\varepsilon(\tilde{\omega}), \tilde{\omega}\rangle\rangle_\varepsilon - 4\delta^2 C_1(\varepsilon)^2 \lambda_n.
\end{aligned}$$

□

Der Summand $q^{\varepsilon\delta}$ berechnet sich, indem man den Vertikalraum mit dem Tangentialraum der Faser identifiziert. Wir fassen dabei die vertikalen Vektoren e_i als Vektoren an die Mannigfaltigkeit F auf und schreiben dafür $\bar{e}_i$ und dementsprechend auch $\bar{\omega} := \sum_{m<i<j} \omega_{ij}\bar{e}_i \wedge \bar{e}_j$.

Lemma 5.2.4. *Es gilt*

$$q^{\varepsilon\delta} = \frac{1}{\delta^2} \sum_{\substack{(m<i<j),\\(m<k<l)}} \omega_{ij}\omega_{kl} R^F_\varepsilon(\bar{e}_i, \bar{e}_j, \bar{e}_l, \bar{e}_k).$$

Beweis. Für q gelten die folgenden Ungleichungen:

$$\begin{aligned} q^{\varepsilon\delta} &= \sum_{\substack{(m<i<j),\\(m<k<l)}} \omega_{ij}\omega_{kl} R_{\varepsilon\delta}\left(\frac{e_i}{\delta}, \frac{e_j}{\delta}, \frac{e_l}{\delta}, \frac{e_k}{\delta}\right) \\ &= \sum_{\substack{(m<i<j),\\(m<k<l)}} \frac{1}{\delta^2}\omega_{ij}\omega_{kl} R^F_\varepsilon(\bar{e}_i, \bar{e}_j, \bar{e}_l, \bar{e}_k) \\ &= \frac{1}{\delta^2} \sum_{\substack{(m<i<j),\\(m<k<l)}} \omega_{ij}\omega_{kl} R^F_\varepsilon(\bar{e}_i, \bar{e}_j, \bar{e}_l, \bar{e}_k) \end{aligned}$$

□

Lemma 5.2.5. *Für den Summanden $r^{\varepsilon\delta}$ gilt die folgende Abschätzung*

$$\begin{aligned} r^{\varepsilon\delta} \geqslant\; & -\delta\left[2\lambda_n C_3(\varepsilon) + \delta C_2(\varepsilon)\{2C_1(\varepsilon) + C_2(\varepsilon)\}\lambda_n\right] \\ & -\frac{1}{2} \sum_{\substack{(i\leqslant m<j),\\(k\leqslant m<l)}} \omega_{ij}\omega_{kl} \langle \nabla^\varepsilon_{e_j}[e_i, e_k]^{\mathcal{V}}, e_l\rangle_\varepsilon. \end{aligned}$$

Beweis. Den Summanden $r^{\varepsilon\delta}$ kann man aufgrund der Blocksymmetrie des Krümmungstensors und der Schiefsymmetrie in den vorderen und hinteren beiden Einträgen noch weiter zerlegen in:

$$\begin{aligned} r^{\varepsilon\delta} &= \sum_{(i\leqslant m<j)\vee(k\leqslant m<l)} \omega_{ij}\omega_{kl} R_{\varepsilon\delta}(\check{e}_i, \check{e}_j, \check{e}_l, \check{e}_k) \\ &= 2\left[\underbrace{\sum_{\substack{(i\leqslant m<j),\\(k<l\leqslant m)}} \omega_{ij}\omega_{kl} R_{\varepsilon\delta}\left(e_i, \frac{e_j}{\delta}, e_l, e_k\right)}_{=:t^{\varepsilon\delta}} + \underbrace{\sum_{\substack{(i\leqslant m<j),\\(m<k<l)}} \omega_{ij}\omega_{kl} R_{\varepsilon\delta}\left(e_i, \frac{e_j}{\delta}, \frac{e_l}{\delta}, \frac{e_k}{\delta}\right)}_{=:v^{\varepsilon\delta}}\right] \\ &\quad + \underbrace{\sum_{\substack{(i\leqslant m<j),\\(k\leqslant m<l)}} \omega_{ij}\omega_{kl} R_{\varepsilon\delta}\left(e_i, \frac{e_j}{\delta}, \frac{e_l}{\delta}, e_k\right)}_{=:u^{\varepsilon\delta}} \end{aligned}$$

Nach Satz 5.1.6 ist $v^{\varepsilon\delta} \equiv 0$. Die anderen Summanden lassen sich mit Hilfe der Blocksymmetrie von R wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned}
t^{\varepsilon\delta} &= \sum_{\substack{(i\leqslant m<j),\\(k<l\leqslant m)}} \omega_{ij}\omega_{kl} R_{\varepsilon\delta}\left(e_i, \frac{e_j}{\delta}, e_l, e_k\right)\\
&= \sum_{\substack{(i\leqslant m<j),\\(k<l\leqslant m)}} \omega_{ij}\omega_{kl}\delta R_{\varepsilon}(e_i, e_j, e_l, e_k)\\
&= \delta \sum_{\substack{(i\leqslant m<j),\\(k<l\leqslant m)}} \omega_{ij}\omega_{kl} R_{\varepsilon}(e_l, e_k, e_i, e_j)\\
&\geqslant -C_3(\varepsilon)\delta \sum_{\substack{(i\leqslant m<j),\\(k<l\leqslant m)}} |\omega_{ij}||\omega_{kl}|\\
&\geqslant -\delta C_3(\varepsilon)\lambda_n.
\end{aligned}$$

und für die Abschätzung des Summanden $u^{\varepsilon\delta}$ benötigt man noch folgende Ungleichungen, die man erhält, da $A_X Y$ vertikal und $A_X V$ horizontal ist. Für normale Vektoren X, Y, V, W gilt nach Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$\begin{aligned}
\left\langle A^{\varepsilon}_{(A^{\varepsilon}_X V)} Y, W \right\rangle_{\varepsilon} &\leqslant \|A^{\varepsilon}_{(A^{\varepsilon}_X V)} Y\|_{\varepsilon} \|W\| \leqslant C_1(\varepsilon) C_2(\varepsilon)\\
&\text{und}\\
\langle A^{\varepsilon}_X (A^{\varepsilon}_Y V), W\rangle_{\varepsilon} &\leqslant \|A^{\varepsilon}_X (A^{\varepsilon}_Y V)\|_{\varepsilon} \|W\| \leqslant C_1(\varepsilon) C_2(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
u^{\varepsilon\delta} &= \sum_{\substack{(i\leqslant m<j),\\(k\leqslant m<l)}} \omega_{ij}\omega_{kl}R_{\varepsilon\delta}\left(e_i,\frac{e_j}{\delta},\frac{e_l}{\delta},e_k\right)\\
&= -\sum_{\substack{(i\leqslant m<j),\\(k\leqslant m<l)}} \omega_{ij}\omega_{kl}R_{\varepsilon\delta}\left(e_i,\frac{e_j}{\delta},e_k\frac{e_l}{\delta}\right)\\
&= -\sum_{\substack{(i\leqslant m<j),\\(k\leqslant m<l)}} \omega_{ij}\omega_{kl}\frac{\delta^2}{2}\left\langle \nabla^{\varepsilon}_{\frac{e_j}{\delta}}[e_i,e_k]^{\mathcal{V}},\frac{e_l}{\delta}\right\rangle_{\varepsilon}\\
&\quad -\sum_{\substack{(i\leqslant m<j),\\(k\leqslant m<l)}} \omega_{ij}\omega_{kl}\delta^2\left\{2\langle A^{\varepsilon}_{e_i}e_j,A^{\varepsilon}_{e_k}e_l\rangle_{\varepsilon}-\langle A^{\varepsilon}_{(A^{\varepsilon}_{e_i}e_j)}e_k,e_l\rangle_{\varepsilon}-\langle A^{\varepsilon}_{e_i}(A^{\varepsilon}_{e_k}e_j),e_l\rangle_{\varepsilon}\right\}\\
&\geqslant -\frac{1}{2}\sum_{\substack{(i\leqslant m<j),\\(k\leqslant m<l)}} \omega_{ij}\omega_{kl}\langle\nabla^{\varepsilon}_{e_j}[e_i,e_k]^{\mathcal{V}},e_l\rangle_{\varepsilon}\\
&\quad -\delta^2\sum_{\substack{(i\leqslant m<j),\\(k\leqslant m<l)}} |\omega_{ij}||\omega_{kl}|C_2(\varepsilon)\{2C_1(\varepsilon)+C_2(\varepsilon)\}\\
&= -\frac{1}{2}\sum_{\substack{(i\leqslant m<j),\\(k\leqslant m<l)}} \omega_{ij}\omega_{kl}\langle\nabla^{\varepsilon}_{e_j}[e_i,e_k]^{\mathcal{V}},e_l\rangle_{\varepsilon}\\
&\quad -\delta^2C_2(\varepsilon)\{2C_1(\varepsilon)+C_2(\varepsilon)\}\sum_{(i\leqslant m<j),(k\leqslant m<l)}|\omega_{ij}||\omega_{kl}|\\
&\geqslant -\frac{1}{2}\sum_{\substack{(i\leqslant m<j),\\(k\leqslant m<l)}} \omega_{ij}\omega_{kl}\langle\nabla^{\varepsilon}_{e_j}[e_i,e_k]^{\mathcal{V}},e_l\rangle_{\varepsilon}-\delta^2C_2(\varepsilon)\{2C_1(\varepsilon)+C_2(\varepsilon)\}\lambda_n.
\end{aligned}$$

Letztlich kann man den Summanden $r^{\varepsilon\delta}$ wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned}
r^{\varepsilon\delta} &= 2t^{\varepsilon\delta}+u^{\varepsilon\delta}\\
&\geqslant -2\delta C_3(\varepsilon)\lambda_n-\frac{1}{2}\sum_{\substack{(i\leqslant m<j),\\(k\leqslant m<l)}} \omega_{ij}\omega_{kl}\langle\nabla^{\varepsilon}_{e_j}[e_i,e_k]^{\mathcal{V}},e_l\rangle_{\varepsilon}\\
&\quad +\delta^2C_2(\varepsilon)\{2C_1(\varepsilon)+C_2(\varepsilon)\}\lambda_n\\
&\geqslant -\delta\left[2\lambda_nC_3(\varepsilon)+\delta C_2(\varepsilon)\{2C_1(\varepsilon)+C_2(\varepsilon)\}\lambda_n\right]\\
&\quad -\frac{1}{2}\sum_{\substack{(i\leqslant m<j),\\(k\leqslant m<l)}} \omega_{ij}\omega_{kl}\langle\nabla^{\varepsilon}_{e_j}[e_i,e_k]^{\mathcal{V}},e_l\rangle_{\varepsilon}.
\end{aligned}$$

□

Aufgrund der Symmetrien des Krümmungstensors gilt $s'^{\epsilon\delta}=s''^{\epsilon\delta}$ und man erhält für den Summanden $s'^{\epsilon\delta}$ folgende Ungleichung:

Lemma 5.2.6. *Es gilt*

$$\begin{aligned} s'^{\varepsilon\delta} \quad \geqslant \quad & \frac{1}{2} \sum_{\substack{(i<j\geqslant m),\\(m<k<l)}} \omega_{ij}\omega_{kl} \left\{ \langle \nabla^{\varepsilon}_{e_l}[e_i,e_j]^{\mathcal{V}}, e_k\rangle_\varepsilon - \langle \nabla^{\varepsilon}_{e_k}[e_i,e_j]^{\mathcal{V}}, e_l\rangle_\varepsilon \right\} \\ & -2\delta^2 C_2(\varepsilon)\left\{2C_1(\varepsilon)+C_2(\varepsilon)\right\}\lambda_n. \end{aligned}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} s'^{\varepsilon\delta} \quad = \quad & \sum_{\substack{(i<j\leqslant m),\\(m<k<l)}} \omega_{ij}\omega_{kl} R_{\varepsilon\delta}\left(e_i,e_j,\frac{e_l}{\delta},\frac{e_k}{\delta}\right) \\ = \quad & \sum_{\substack{(i<j\leqslant m),\\(m<k<l)}} \omega_{ij}\omega_{kl} \left[\frac{1}{2}\left\{ \langle \nabla^{\varepsilon}_{e_l}[e_i,e_j]^{\mathcal{V}}, e_k\rangle_\varepsilon - \langle \nabla^{\varepsilon}_{e_k}[e_i,e_j]^{\mathcal{V}}, e_l\rangle_\varepsilon \right\}\right. \\ & +\delta^2\left\{\langle A^\varepsilon_{e_i}e_l, A^\varepsilon_{e_j}e_k\rangle_\varepsilon - \langle A^\varepsilon_{e_i}e_k, A^\varepsilon_{e_j}e_l\rangle_\varepsilon\right\} \\ & \left. -\delta^2\left\{\langle A^\varepsilon_{(A^\varepsilon_{e_i}e_l)}e_j, e_k\rangle_\varepsilon + \langle A^\varepsilon_{e_i}(A^\varepsilon_{e_j}e_l), e_k\rangle_\varepsilon - \langle A^\varepsilon_{(A^\varepsilon_{e_i}e_k)}e_j, e_l\rangle_\varepsilon - \langle A^\varepsilon_{e_i}(A^\varepsilon_{e_j}e_k), e_l\rangle_\varepsilon\right\}\right] \\ \geqslant \quad & \frac{1}{2} \sum_{\substack{(i<j\leqslant m),\\(m<k<l)}} \omega_{ij}\omega_{kl} \left\{ \langle \nabla^{\varepsilon}_{e_l}[e_i,e_j]^{\mathcal{V}}, e_k\rangle_\varepsilon - \langle \nabla^{\varepsilon}_{e_k}[e_i,e_j]^{\mathcal{V}}, e_l\rangle_\varepsilon \right\} \\ & -\delta^2 \sum_{\substack{(i<j\leqslant m),\\(m<k<l)}} |\omega_{ij}||\omega_{kl}| 2C_2(\varepsilon)\{2C_1(\varepsilon)+C_2(\varepsilon)\} \\ \geqslant \quad & \sum_{\substack{(i<j\leqslant m),\\(m<k<l)}} \omega_{ij}\omega_{kl} \left\{ \langle \nabla^{\varepsilon}_{e_l}[e_i,e_j]^{\mathcal{V}}, e_k\rangle_\varepsilon - \langle \nabla^{\varepsilon}_{e_k}[e_i,e_j]^{\mathcal{V}}, e_l\rangle_\varepsilon \right\} \\ & -\delta^2 2C_2(\varepsilon)\{2C_1(\varepsilon)+C_2(\varepsilon)\} \sum_{\substack{(i<j\leqslant m),\\(m<k<l)}} |\omega_{ij}||\omega_{kl}| \\ \geqslant \quad & \frac{1}{2} \sum_{\substack{(i<j\leqslant m),\\(m<k<l)}} \omega_{ij}\omega_{kl} \left\{ \langle \nabla^{\varepsilon}_{e_l}[e_i,e_j]^{\mathcal{V}}, e_k\rangle_\varepsilon - \langle \nabla^{\varepsilon}_{e_k}[e_i,e_j]^{\mathcal{V}}, e_l\rangle_\varepsilon \right\} \\ & -2\delta^2 C_2(\varepsilon)\left\{2C_1(\varepsilon)+C_2(\varepsilon)\right\}\lambda_n. \end{aligned}$$

□

Da wir die Metrik g_ε auf M so gewählt haben, dass (5.1) erfüllt ist, erhält man mit Hilfe der vorigen Lemmata die folgende Ungleichung:

Satz 5.2.7. *Es gilt*

$$
\begin{aligned}
\langle\langle \hat{R}_{\varepsilon\delta}(\omega),\omega\rangle\rangle_{\varepsilon\delta} &= p^{\varepsilon\delta}+q^{\varepsilon\delta}+r^{\varepsilon\delta}+2s'^{\varepsilon\delta} \\
&\geqslant -\varepsilon\|\tilde{\omega}\|^2-4\delta^2C_1(\varepsilon)^2\lambda_n \\
&\quad -\delta\lambda_n\left[2\lambda^2C_3(\varepsilon)-\delta C_2(\varepsilon)\{2C_1(\varepsilon)+C_2(\varepsilon)\}\right] \\
&\quad -4\delta^2\lambda_nC_2(\varepsilon)\{2C_1(\varepsilon)+C_2(\varepsilon)\} \\
&\quad +\frac{1}{\delta^2}\sum_{\substack{(m<i<j),\\(m<k<l)}}\omega_{ij}\omega_{kl}R^F_\varepsilon(\bar{e}_i,\bar{e}_j,\bar{e}_l,\bar{e}_k) \\
&\quad +\frac{1}{2}\sum_{\substack{(i<j\leqslant m),\\(m<k<l)}}\omega_{ij}\omega_{kl}\left\{\langle\nabla^\varepsilon_{e_l}[e_i,e_j]^{\mathcal{V}},e_k\rangle_\varepsilon-\langle\nabla^\varepsilon_{e_k}[e_i,e_j]^{\mathcal{V}},e_l\rangle_\varepsilon\right\} \\
&\quad -\frac{1}{2}\sum_{\substack{(i\leqslant m<j),\\(k\leqslant m<l)}}\omega_{ij}\omega_{kl}\langle\nabla^\varepsilon_{e_j}[e_i,e_k]^{\mathcal{V}},e_l\rangle_\varepsilon.
\end{aligned}
$$

□

Die für weitere Abschätzungen kritischen letzten drei Summanden fassen wir zu einem Ausdruck zusammen, den wir im weiteren Verlauf näher untersuchen werden.

$$
\begin{aligned}
D_{\varepsilon\delta} &:= \frac{1}{\delta^2}\sum_{\substack{(m<i<j),\\(m<k<l)}}\omega_{ij}\omega_{kl}R^F_\varepsilon(\bar{e}_i,\bar{e}_j,\bar{e}_l,\bar{e}_k) \\
&\quad +\frac{1}{2}\sum_{\substack{(i<j\leqslant m),\\(m<k<l)}}\omega_{ij}\omega_{kl}\left\{\langle\nabla^\varepsilon_{e_l}[e_i,e_j]^{\mathcal{V}},e_k\rangle_\varepsilon-\langle\nabla^\varepsilon_{e_k}[e_i,e_j]^{\mathcal{V}},e_l\rangle_\varepsilon\right\} \\
&\quad -\frac{1}{2}\sum_{\substack{(i\leqslant m<j),\\(k\leqslant m<l)}}\omega_{ij}\omega_{kl}\langle\nabla^\varepsilon_{e_j}[e_i,e_k]^{\mathcal{V}},e_l\rangle_\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Der erste Summand von $D_{\varepsilon\delta}$ entspricht dem Krümmungsoperator der Faser F.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\delta^2}\sum_{\substack{(m<i<j),\\(m<k<l)}}\omega_{ij}\omega_{kl}R^F_\varepsilon(\bar{e}_i,\bar{e}_j,\bar{e}_l,\bar{e}_k) &= \frac{1}{\delta^2}\sum_{\substack{(m<i<j),\\(m<k<l)}}\omega_{ij}\omega_{kl}\langle\langle\hat{R}^F_\varepsilon(\bar{e}_i\wedge\bar{e}_j),\bar{e}_k\wedge\bar{e}_l\rangle\rangle \\
&= \frac{1}{\delta^2}\langle\langle\hat{R}^F_\varepsilon(\sum_{m<i<j}\omega_{ij}\bar{e}_i\wedge\bar{e}_j),\sum_{m<k<l}\omega_{kl}\bar{e}_k\wedge\bar{e}_l\rangle\rangle \\
&= \frac{1}{\delta^2}\langle\langle\hat{R}^F_\varepsilon(\bar{\omega}),\bar{\omega}\rangle\rangle,
\end{aligned}
$$

wobei wir wie in den vorigen Rechnungen auch $\bar{\omega} := \sum_{m<i<j}\omega_{ij}\bar{e}_i\wedge\bar{e}_j$ definiert haben. Damit erhält $D_{\varepsilon\delta}$ folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} D_{\varepsilon\delta} &= \frac{1}{\delta^2}\langle\langle \hat{R}^F_\varepsilon(\bar{\omega}), \bar{\omega}\rangle\rangle \\ &+\frac{1}{2}\sum_{\substack{(i<j\leqslant m),\\(m<k<l)}} \omega_{ij}\omega_{kl}\left\{\langle \nabla^\varepsilon_{e_l}[e_i,e_j]^{\mathcal{V}}, e_k\rangle_\varepsilon - \langle \nabla^\varepsilon_{e_k}[e_i,e_j]^{\mathcal{V}}, e_l\rangle_\varepsilon\right\} \\ &-\frac{1}{2}\sum_{\substack{(i\leqslant m<j),\\(k\leqslant m<l)}} \omega_{ij}\omega_{kl}\langle \nabla^\varepsilon_{e_j}[e_i,e_k]^{\mathcal{V}}, e_l\rangle_\varepsilon. \end{aligned}$$

Falls man jetzt voraussetzt, dass der Krümmungsoperator der Faser F positiv ist, d.h. $\hat{R}^F > 0$, so kann man δ so groß wählen, dass bzgl. der Metrik $g_{\varepsilon\delta}$ auf E der Krümmungsoperator bei beschränktem Durchmesser $\hat{R}^M > -\varepsilon$ erfüllt. Wir haben also folgendes Theorem bewiesen:

Theorem 5.2.8. *Sei E eine kompakte Mannigfaltigkeit, die die Struktur eines Faserbündels (E, π, M, F) mit kompakter Liegruppe G als Strukturgruppe trägt. Falls der Basisraum M fast nichtnegativen Krümmungsoperator zulässt und die Faser F eine G-invariante Metrik mit positivem Krümmungsoperator besitzt, so trägt der Totalraum E fast nichtnegativen Krümmungsoperator.*

Im Resultat von Fukaya und Yamaguchi (Theorem 3.0.2) für fast nichtnegative Schnittkrümmung auf Faserbündel fordert man nur nichtnegative und nicht positive Schnittkrümmung auf der Faser. Mit den hier vorgestellten Rechnungen kann man die Voraussetzungen von Theorem 5.2.8 aber nicht von positivem zu nichtnegativem Krümmungsoperator abschwächen. Dies liegt vor allem an der Gestalt des Terms $D_{\varepsilon\delta}$. Da es aber keinerlei Obstruktionen oder Gegenbeispiele gibt, liegt die Vermutung nahe, dass man ebenso wie bei Fukaya und Yamaguchi die Voraussetzungen abschwächen kann und nur nichtnegativen Krümmungsoperator auf der Faser voraussetzen muss:

Vermutung 5.2.9. Sei E eine kompakte Mannigfaltigkeit, die die Struktur eines Faserbündels (E, π, M, F) mit kompakter Liegruppe G als Strukturgruppe trägt. Falls der Basisraum M fast nichtnegativen Krümmungsoperator zulässt und die Faser F eine G-invariante Metrik mit nichtnegativem Krümmungsoperator besitzt, so trägt der Totalraum E fast nichtnegativen Krümmungsoperator.

Wir werden in den folgenden Unterkapiteln noch zwei Spezialfälle betrachten, in denen der Term $D_{\varepsilon\delta}$ eine einfachere Gestalt hat und man deswegen schwächere Voraussetzungen an den Krümmungsoperator der Faser zu stellen braucht.

5.2.1 Der Fall von Prinzipalbündeln

Sei $\eta = (E, \pi, M, G)$ ein Prinzipalbündel[5] mit kompakter Liegruppe G. Wir nehmen wieder an, dass M fast nichtnegativen Krümmungsoperator zulässt, d.h. dass für alle $\varepsilon > 0$ eine Metrik g_ε auf M so existiert, dass gilt

$$\hat{R}^\varepsilon(diam_\varepsilon(M))^2 \geqslant -\varepsilon.$$

[5] Definition siehe Kapitel A.3.

Des Weiteren existiert auf G eine biinvariante Metrik b, da G kompakt ist.
Man kann in einem Prinzipalbündel den Vertikalraum mit der Liealgebra der Faser identifizieren und erhält so eine etwas andere Gestalt für den Term $D_{\varepsilon\delta}$ als für gewöhnliche Faserbündel.

Definition 5.2.10. Falls eine Liegruppe G von links auf einer glatten Mannigfaltigkeit M operiert und $V \in \mathfrak{g}$ ein Vektor in der Liealgebra von G ist, so heißt das durch

$$V^\star(p) := \frac{d}{dt}|_{t=0}(exp(-tV) \cdot p$$

definierte Vektorfeld, das *von V induzierte Fundamentalvektorfeld* auf M.

Wir benötigen noch weiter einen Ehresmann-Zusammenhang, der G-invariant ist, d.h. für den für alle $p \in E, g \in G$ gilt:

$$\mathcal{E}_{p \cdot g} = (R_g)_\star(\mathcal{V}(E)_p).$$

Hier bezeichnen wir mit R_g die Rechtswirkung der Liegruppe G auf dem Totalraum E. Zu diesem Zusammenhang definiert man die *Zusammenhangsform* $\tau \in \Omega^1(E)$[6] durch die Forderung, dass τ_p jedes $X \in T_pE$ auf das eindeutige $A \in \mathfrak{g}$ abbildet, so dass das von A erzeugte Fundamentalvektorfeld auf E die vertikale Komponente von X ist[7]. Für die Zusammenhangsform τ gilt also:

Bemerkung 5.2.11. *(i) Für alle Vektoren X gilt $\tau(X) = 0$ genau dann, wenn X horizontal ist.*

(ii) Für alle $A \in \mathfrak{g}$ gilt $\tau(A^\star) = A$.

Mit Hilfe der Zusammenhangsform τ definiert man jetzt analog zum Beginn des Kapitels eine Zusammenhangsmetrik $g_{\varepsilon,\delta}$ auf E, wobei die Metrik auf dem Vertikalraum folgende Gestalt hat:

$$g_{\varepsilon,\delta}(U, V) := \delta^2 b(\tau(U), \tau(V)).$$

Im Verlaufe dieses Unterkapitels verwenden wir dieselben Bezeichnungen wie im vorherigen. Mit dieser Identifikation kann man die Gleichung (ii) aus Lemma 5.1.5 noch weiter umformen:

Lemma 5.2.12. *Es gilt*

$$\langle \nabla^\varepsilon_V (A^\varepsilon_X Y), W\rangle_{\varepsilon\delta} = \frac{1}{2}\langle \nabla^\varepsilon_V [X, Y]^{\mathcal{V}}, W\rangle_{\varepsilon\delta} = -\frac{1}{4}\langle [X, Y], [V, W]\rangle_{\varepsilon\delta}.$$

Beweis. Das erste Gleichheitszeichen wurde bereits in Lemma 5.1.5 bewiesen. Aus der Formel für den Levi-Civita-Zusammenhang einer Liegruppe mit biinvarianter Metrik und der Schiefsymmetrie der Wirkung von ad_V folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\langle \nabla^\varepsilon_V [X, Y]^{\mathcal{V}}, W\rangle_{\varepsilon\delta} &= \frac{1}{4}\langle [V, [X, Y]^{\mathcal{V}}], W\rangle_{\varepsilon\delta} \\
&= -\frac{1}{4}\langle [X, Y]^{\mathcal{V}}, [V, W]\rangle_{\varepsilon\delta} \\
&= -\frac{1}{4}\langle [X, Y], [V, W]\rangle_{\varepsilon\delta}.
\end{aligned}$$

□

[6] Mit $\Omega^1(E)$ bezeichnen wir die 1-Formen auf E.

[7] Vergleiche [KoNo].

Mit Hilfe dieser Gleichung erhält die Abschätzung für die Eigenwerte des Krümmungsoperators aus Satz 5.2.7 die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned}
\langle\langle \hat{R}_{\varepsilon\delta}(\omega), \omega\rangle\rangle_{\varepsilon\delta} &= p^{\varepsilon\delta} + q^{\varepsilon\delta} + r^{\varepsilon\delta} + 2s'^{\varepsilon\delta} \\
&\geqslant -\varepsilon\|\tilde{\omega}\|^2 - 4\delta^2 C_1(\varepsilon)^2\lambda_n \\
&\quad -\delta\lambda_n\left[2\lambda^2 C_3(\varepsilon) - \delta C_2(\varepsilon)\{2C_1(\varepsilon) + C_2(\varepsilon)\}\right] \\
&\quad -4\delta^2\lambda_n C_2(\varepsilon)\{2C_1(\varepsilon) + C_2(\varepsilon)\} \\
&\quad +\frac{1}{\delta^2}\sum_{\substack{(m<i<j),\\(m<k<l)}} \omega_{ij}\omega_{kl} R^F_\varepsilon(\bar{e}_i, \bar{e}_j, \bar{e}_l, \bar{e}_k) \\
&\quad -\frac{1}{8}\sum_{\substack{(i<j\leqslant m),\\(m<k<l)}} \omega_{ij}\omega_{kl}\left\{\langle [e_i,e_j]^{\mathcal{V}}, [e_l,e_k]\rangle_\varepsilon - \langle [e_i,e_j]^{\mathcal{V}}, [e_k,e_l]\rangle_\varepsilon\right\} \\
&\quad +\frac{1}{8}\sum_{\substack{(i\leqslant m<j),\\(k\leqslant m<l)}} \omega_{ij}\omega_{kl}\langle [e_i,e_k]^{\mathcal{V}}, [e_j,e_l]\rangle_\varepsilon .
\end{aligned}$$

Demnach besitzt der Term $D_{\varepsilon\delta}$ folgende Gestalt:

$$\begin{aligned}
D_{\varepsilon\delta} &:= \frac{1}{\delta^2}\sum_{\substack{(m<i<j),\\(m<k<l)}} \omega_{ij}\omega_{kl} R^F_\varepsilon(\bar{e}_i, \bar{e}_j, \bar{e}_l, \bar{e}_k) \\
&\quad -\frac{1}{8}\sum_{\substack{(i<j\leqslant m),\\(m<k<l)}} \omega_{ij}\omega_{kl}\left\{\langle [e_i,e_j]^{\mathcal{V}}, [e_l,e_k]\rangle_\varepsilon - \langle [e_i,e_j]^{\mathcal{V}}, [e_k,e_l]\rangle_\varepsilon\right\} \\
&\quad +\frac{1}{8}\sum_{\substack{(i\leqslant m<j),\\(k\leqslant m<l)}} \omega_{ij}\omega_{kl}\langle [e_i,e_k]^{\mathcal{V}}, [e_j,e_l]\rangle_\varepsilon .
\end{aligned}$$

Durch Vertauschen der Indizes kann man den zweiten und dritten Summanden von $D_{\varepsilon\delta}$ wie folgt umformen:

Lemma 5.2.13. *Es gilt folgende Gleichheit:*

$$\begin{aligned}
&- \frac{1}{8}\sum_{\substack{(i<j\leqslant m),\\(m<k<l)}} \omega_{ij}\omega_{kl}\left\{\langle [e_i,e_j]^{\mathcal{V}}, [e_l,e_k]\rangle_\varepsilon - \langle [e_i,e_j]^{\mathcal{V}}, [e_k,e_l]\rangle_\varepsilon\right\} \\
&+ \frac{1}{8}\sum_{\substack{(i\leqslant m<j),\\(k\leqslant m<l)}} \omega_{ij}\omega_{kl}\langle [e_i,e_k]^{\mathcal{V}}, [e_j,e_l]\rangle_\varepsilon \\
&= \sum_{\substack{(i<j\leqslant m),\\(m<k<l)}} \left\{\frac{1}{8}\omega_{ij}\omega_{kl} + \frac{1}{4}\omega_{ik}\omega_{jl} - \frac{1}{8}\omega_{jk}\omega_{il}\right\}\langle [e_i,e_j]^{\mathcal{V}}, [e_k,e_l]\rangle .
\end{aligned}$$

Beweis. Mit der Schiefsymmetrie der Lieklammer erhält man:

$$-\frac{1}{8}\sum_{\substack{(i<j\leqslant m),\\(m<k<l)}} \omega_{ij}\omega_{kl}\left\{\langle [e_i,e_j]^{\mathcal{V}}, [e_l,e_k]\rangle_\varepsilon - \langle [e_i,e_j]^{\mathcal{V}}, [e_k,e_l]\rangle_\varepsilon\right\} = \frac{1}{4}\sum_{\substack{(i<j\leqslant m),\\(m<k<l)}} \omega_{ij}\omega_{kl}\langle [e_i,e_j]^{\mathcal{V}}[e_k,e_l]\rangle .$$

Den zweiten Summanden kann man durch Vertauschen der Indizes wie folgt umformen:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{(i\leqslant m<j),\\(k\leqslant m<l)}} \omega_{ij}\omega_{kl}\langle[e_i,e_k]^{\mathcal{V}}[e_j,e_l]\rangle \\
= &\sum_{(i<k\leqslant m<j<l)} \omega_{ij}\omega_{kl}\langle[e_i,e_k]^{\mathcal{V}}[e_j,e_l]\rangle \\
&+\sum_{(i<k\leqslant m<l<j)} \omega_{ij}\omega_{kl}\langle[e_i,e_k]^{\mathcal{V}}[e_j,e_l]\rangle \\
&+\sum_{(k<i\leqslant m<j<l)} \omega_{ij}\omega_{kl}\langle[e_i,e_k]^{\mathcal{V}}[e_j,e_l]\rangle \\
&+\sum_{(k<i\leqslant m<l<j)} \omega_{ij}\omega_{kl}\langle[e_i,e_k]^{\mathcal{V}}[e_j,e_l]\rangle \\
= &\sum_{(i<k\leqslant m<j<l)} \{2\omega_{ij}\omega_{kl}-\omega_{ik}\omega_{jl}-\omega_{kj}\omega_{il}\}\,\langle[e_i,e_k]^{\mathcal{V}},[e_j,e_l]\rangle \\
= &\sum_{(i<j\leqslant m<k<l)} \{2\omega_{ik}\omega_{jl}-\omega_{ij}\omega_{kl}-\omega_{jk}\omega_{il}\}\,\langle[e_i,e_j]^{\mathcal{V}},[e_k,e_l]\rangle.
\end{aligned}$$

Insgesamt erhält man damit die gewünschte Formel.

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2} &\sum_{\substack{(i<j\leqslant m),\\(m<k<l)}} \omega_{ij}\omega_{kl}\left\{\langle\nabla^{\varepsilon}_{e_l}[e_i,e_j]^{\mathcal{V}},e_k\rangle_{\varepsilon}-\langle\nabla^{\varepsilon}_{e_k}[e_i,e_j]^{\mathcal{V}},e_l\rangle_{\varepsilon}\right\} \\
&-\frac{1}{2}\sum_{\substack{(i\leqslant m<j),\\(k\leqslant m<l)}} \omega_{ij}\omega_{kl}\langle\nabla^{\varepsilon}_{e_j}[e_i,e_k]^{\mathcal{V}},e_l\rangle_{\varepsilon} \\
= &\sum_{\substack{(i<j\leqslant m),\\(m<k<l)}} \left\{\frac{1}{8}\omega_{ij}\omega_{kl}+\frac{1}{4}\omega_{ik}\omega_{jl}-\frac{1}{8}\omega_{jk}\omega_{il}\right\}\langle[e_i,e_j]^{\mathcal{V}},[e_k,e_l]\rangle.
\end{aligned}$$

□

Für ein Prinzipalbündel hat $D_{\varepsilon\delta}$ damit folgende Gestalt:

$$\begin{aligned}
D_{\varepsilon\delta} = &\frac{1}{4\delta^2}\sum_{\substack{(m<i<j),\\(m<k<l)}} \omega_{ij}\omega_{kl}\langle[e_i,e_j],[e_l,e_k]\rangle \\
&+\sum_{\substack{(i<j\leqslant m),\\(m<k<l)}} \left\{\frac{1}{8}\omega_{ij}\omega_{kl}+\frac{1}{4}\omega_{ik}\omega_{jl}-\frac{1}{8}\omega_{jk}\omega_{il}\right\}\langle[e_i,e_j]^{\mathcal{V}},[e_k,e_l]\rangle.
\end{aligned}$$

Damit verschwindet $D_{\varepsilon\delta}$, falls alle auftretenden Kommutatoren verschwinden. Insbesondere also, falls die Liealgebra abelsch ist. Folglich erhält man das Theorem:

Theorem 5.2.14. *Sei E eine kompakte Mannigfaltigkeit, die die Struktur eines Prinzipalbündels (E,π,M,G) mit einer kompakten abelschen Liegruppe G als Strukturgruppe und Faser trägt. Falls der Basisraum M fast nichtnegativen Krümmungsoperator zulässt, so lässt der Totalraum E fast nichtnegativen Krümmungsoperator zu.*

□

5.2.2 Der Fall reinen Krümmungsoperators

Wir nehmen wieder an, dass eine kompakte Mannigfaltigkeit E die Struktur eines Faserbündels

$$\eta := (E, \pi, M, F)$$

mit kompakter Liegruppe G als Strukturgruppe zulässt. Unter gewissen zusätzlichen Voraussetzungen an den Krümmungsoperator von M und F erhält man ein ähnliches Resultat wie in Theorem 5.2.8.

(a) Wir nehmen an, dass der Basisraum M dieses Faserbündels fast nichtnegativen Krümmungsoperator zu lässt und dass der Krümmungsoperator bezüglich der Metriken h_ε diagonalisierbar ist durch eine Basis $(e_i \wedge e_j)_{i<j\leqslant m}$, die von einer Orthonormalbasis $(e_i)_{i\leqslant m}$ des Tangentialraums an M erzeugt wird.

(b) Wir nehmen weiter an, dass die Faser des Bündels F eine G-invariante Metrik b mit reinem, nichtnegativem Krümmungsoperator trägt.

Jetzt kann man das folgende Resultat beweisen.

Theorem 5.2.15. *Sei E eine kompakte Mannigfaltigkeit, die die Struktur eines Faserbündels (E, π, M, F) mit einer kompakten abelschen Liegruppe G als Strukturgruppe trägt. Wir nehmen weiter an, dass für den Basisraum und die Faser die beiden Eigenschaften (a) und (b) gelten. Dann lässt der Totalraum E fast nichtnegativen Krümmungsoperator zu.*

Beweis. Für ein beliebiges ε wählen wir die Metrik h_ε auf M, so dass

$$\hat{R}^M_\varepsilon (diam_\varepsilon(M))^2 \geqslant -\varepsilon.$$

Für jedes beliebige $\delta > 0$ definieren wir wie im Laufe des Kapitels die Zusammenhangsmetrik

$$g_\varepsilon := h_\varepsilon + \delta b.$$

Da M und F bezüglich der gewählten Metriken reinen Krümmungsoperator haben, gilt dies auch für E bezüglich der Zusammenhangsmetrik g_ε. Mit Hilfe der Orthonormalbasen $(e_i)_{i\leqslant m}$ und $(e_i)_{m<i\leqslant n}$ der Tangentialräume von M und F, die die Krümmungsoperatoren diagonalisieren, kann man jeden beliebigen Bivektor ω aus $\bigwedge_2(T_pE)$ darstellen:

$$\omega = \sum_{i<j\leqslant n} \omega_{ij} e_i \wedge e_j.$$

Wir verwenden in den kommenden Rechnungen die gleichen Konstanten wie im Laufe des Kapitels und erhlten mit Hilfe der O'Neill-Formeln und analog zu den obigen Rechnungen die folgenden Ungleichungen:

$$
\begin{aligned}
\langle\langle \hat{R}^E(\omega), \omega\rangle\rangle &= \sum_{i<j} \omega_{ij}^2 \langle\langle \hat{R}^E(\tilde{e}_i \wedge \tilde{e}_j), \tilde{e}_i \wedge \tilde{e}_j\rangle\rangle \\
&= \sum_{i<j} \omega_{ij}^2 R^E(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j, \tilde{e}_j, \tilde{e}_i) \\
&= \sum_{i<j\leqslant m} \omega_{ij}^2 R^E(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j, \tilde{e}_j, \tilde{e}_i) + \sum_{i\leqslant m<j} \omega_{ij}^2 R^E(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j, \tilde{e}_j, \tilde{e}_i) \\
&\quad + \sum_{m<i<j} \omega_{ij}^2 R^E(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j, \tilde{e}_j, \tilde{e}_i) \\
&\geqslant \sum_{i<j\leqslant m} \omega_{ij}^2 R^M(e_i, e_j, e_j, e_i) - 4\delta^2 C_1(\varepsilon)^2 \lambda_n \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i\leqslant m<j} \omega_{ij}^2 \langle \nabla_{e_j} \underbrace{[e_i, e_i]}_{=0}, e_j\rangle_\varepsilon - \delta^2 C_2(\varepsilon)\{2C_1(\varepsilon) + C_2(\varepsilon)\}\lambda_n \\
&\quad + \frac{1}{\delta^2} \sum_{m<i<j} \omega_{ij}^2 R^F(e_i, e_j, e_j, e_i) \\
&= \langle\langle \hat{R}^M \bar{\omega}, \bar{\omega}\rangle\rangle - 4\delta^2 C_1(\varepsilon)^2 \lambda_n \\
&\quad - \delta^2 C_2(\varepsilon)\{2C_1(\varepsilon) + C_2(\varepsilon)\}\lambda_n \\
&\quad + \frac{1}{\delta^2} \langle\langle \hat{R}^F \tilde{\omega}, \tilde{\omega}\rangle\rangle.
\end{aligned}
$$

Unter den obigen Voraussetzungen an die Krümmungsoperatoren der Faser und des Basisraums erhält man die folgende Ungleichung:

$$
\langle\langle \hat{R}^E(\omega), \omega\rangle\rangle \geqslant -\varepsilon\|\bar{\omega}\|^2 - \delta^2 C_2(\varepsilon)\{2C_1(\varepsilon) + C_2(\varepsilon)\}\lambda_n + \frac{1}{\delta^2}\|\tilde{\omega}\|^2.
$$

Man kann jetzt also δ so wählen, dass der Ausdruck auf der rechten Seite der Ungleichung kleiner als ein vorgegebenes $\tilde{\varepsilon}$ ist und hat damit die Behauptung bewiesen.

□

Kapitel 6

Anwendungen

In diesem Kapitel wollen wir Beispiele für kompakte, einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeiten angeben, die fast nichtnegativen Krümmungsoperator zulassen aber keine Metrik mit nichtnegativem Krümmungsoperator tragen können. Zur Konstruktion verwenden wir Sphären-Bündel über Sphären und erhalten mit Satz 5.2.8, dass die Totalräume dieser Bündel fast nichtnegativen Krümmungsoperator zulassen. Mit Hilfe des Klassifikationssatzes 2.2.4 für einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeiten mit nichtnegativem Krümmungsoperator kann man ausschließen, dass diese Beispiele nicht von diesem Typ sein können.

6.1 Konstruktion der Beispiele

Wir werden in verschiedenen Dimensionen im vorliegenden Abschnitt die gewünschten Beispiele konstruieren.

6.1.1 Dimension 4 und Dimenson 5

Wir definieren $M := \mathbb{CP}^2 \# \overline{\mathbb{CP}^2}$[1]. Es gibt zwei Möglichkeiten M darzustellen:

(i) Als nicht triviales S^2-Bündel über S^2, d.h. $S^2 \longrightarrow M \longrightarrow S^2$.

(ii) Als Quotient einer S^1-Wirkung auf $S^3 \times S^2$, d.h. $S^1 \longrightarrow S^3 \times S^2 \longrightarrow M$. Dazu definieren wir eine S^1-Wirkung auf $S^3 \subseteq \mathbb{C}^2$ durch

$$S^1 \times S^3 \to S^3, (\xi, (w, z)) \mapsto (\xi w, \xi z),$$

die der gewöhnlichen Wirkung aus der Hopf-Faserung entspricht. Zusätzlich definieren wir eine S^1-Wirkung auf $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3 \cong \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ durch Rotation um die z-Achse:

$$S^1 \times S^2 \to S^2, (\xi, ((x + iy), z)) \mapsto (\xi(x + iy), z).$$

Dann kann man zeigen, dass der Quotientenraum $(S^3 \times S^2)/S^1$ nach der Diagonalwirkung von S^1 auf dem Produkt $S^3 \times S^2$ eine Mannigfaltigkeit ist, die diffeomorph zu $\mathbb{CP}^2 \# \overline{\mathbb{CP}^2}$ ist.

[1] Hierbei bezeichnet # die zusammenhängende Summe zweier Mannigfaltigkeiten und $\overline{M}$ die Mannigfaltigkeit M mit umgekehrter Orientierung.

Aus der langen exakten Homotopieseqeunz für Faserbündel kann man die Homotopiegruppen von M berechnen. Es folgt, dass M einfach zusammenhängend ist und für $n \geqslant 3$ gilt

$$\pi_n(M) \cong \pi_n(S^3 \times S^2) \cong \pi_n(S^3) \times \pi_n(S^3).$$

Insbesondere gilt $\pi_3(M) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.
Des Weiteren hat die Mannigfaltigkeit M folgende Eigenschaften:

Satz 6.1.1. *(i) Es existiert eine Metrik mit nichtnegativer Schnittkrümmung auf M.*

(ii) Die Mannigfaltigkeit M lässt fast nichtnegativen Krümmungsoperator zu.

(iii) Es existiert auf M keine Metrik mit nichtnegativem Krümmungsoperator.

Beweis. (i) Es existiert eine Metrik mit nichtnegativer Schnittkrümmung auf dem Produkt $S^3 \times S^2$, etwa die Produktmetrik aus den beiden kanonischen Metriken mit konstanter Schnittkrümmung 1. Aus den O'Neill-Formeln folgt, dass es eine Metrik mit nichtnegativer Schnittkrümmung auf der Quotientenmannigfaltigkeit $(S^3 \times S^2)/S^1$ gibt. Weiter ist M diffeomorph zu diesem Quotienten und damit findet man auch auf M eine Metrik mit nichtnegativer Schnittkrümmung.

(ii) Dies folgt aus Theorem 5.2.8.

(iii) Falls wir annehmen, dass M eine Metrik mit nichtnegativem Krümmungsoperator trägt, so folgt nach der Klassifikation der vollständigen, einfach zusammenhängenden Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit nichtnegativem Krümmungsoperator 2.2.4, da M vierdimensional ist, dass M homöomorph zu einer der folgenden Mannigfaltigkeiten sein muss:

(a) S^4,

(b) $S^2 \times S^2$ oder

(c) $\mathbb{CP}^2$.

Es ist $\pi_3(M) \cong \mathbb{Z}^2$ und damit ist M nicht homotopieäquivalent zu S^4, also insbesondere nicht homöomorph zu S^4, weil $\pi_3(S^4) \cong 0$.
Außerdem gilt $\pi_3(\mathbb{CP}^2) \cong \pi_3(S^5) \cong 0$ und damit kann M nicht homotopieäquivalent zu $\mathbb{CP}^2$ sein.
Mit Hilfe der Schnittform kann man zeigen, dass M und $S^2 \times S^2$ nicht homöomorph zueinander sind[2].
Folglich kann es auf M keine Metrik mit nichtnegativem Krümmungsoperator geben. □

Mit einer ähnlichen Konstruktion kann man auch fünfdimensionale Mannigfaltigkeiten konstruieren, die fast nichtnegativen Krümmungsoperator zulassen:

Satz 6.1.2. *Der Totalraum des nichttrivialen S^3-Bündels über S^2 ist eine fünfdimensionale, einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit M mit fast nichtnegativem Krümmungsoperator, die aber nicht nichtnegativen Krümmungsoperator haben kann.*

[2] Siehe [StZi], Seite 394-395.

Beweis. Falls wir annehmen, dass M nichtnegativen Krümmungsoperator hat, so muss M folgende Gestalt haben:

(i) $S^2 \times S^3$ oder

(ii) S^5.

In [Ba] wurde gezeigt, dass die Stiefel-Whitney-Klassen des Totalraums des nichttrivialen S^3-Bündels über S^2 und von dem Produkt $S^2 \times S^3$ nicht übereinstimmen. Insbesondere sind M und $S^2 \times S^3$ nicht homöomorph. Des Weiteren folgt aus der exakten Homotopiegruppensequenz für Faserbündel: $\pi_2(M) \cong \mathbb{Z}$. Damit kann M nicht hömöomorph zu S^5 sein, da M und S^5 nicht mal homotopieäquivalent sind. Folglich ist M ein weiteres einfach zusammenhängendes Beispiel. □

Durch Produktbildung von einer dieser beiden Mannigfaltigkeiten mit einer beliebigen, einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeit mit nichtnegativem Krümmungsoperator, etwa der Sphäre S^n, $n \geqslant 2$ erhält man das folgende Resultat:

Theorem 6.1.3. *In jeder Dimension $m \geqslant 4$ gibt es eine geschlossene Mannigfaltigkeit, die einfach zusammenhängend ist und fast nichtnegativen Krümmungsoperator zu lässt.*

In den übrigen Dimensionen 2 und 3 sind kompakte, einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeiten nach dem Beweis der Poincaré-Vermutung durch Perelmann bereits homöomorph zur Sphäre.
Im Gegensatz zur Klaasifikation von einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten mit nichtnegativer und fast nichtnegativer Schnittkrümmung erhält man somit für den Krümmungsoperator eine echte Unterscheidung:

Theorem 6.1.4. *Für geschlossene, einfach zusamenhängende Mannigfaltigkeiten sind die Mengen aller Mannigfaltigkeiten mit nichtnegativem Krümmungsoperator und die Menge aller Mannigfaltigkeiten, die fast nichtnegativen Krümmungsoperator zulassen, echt verschieden.*

Die in diesem Kapitel aufgeführten Beispiele legen die Vermutung nahe, dass für alle $k \geqslant 4$ das nichttriviale S^k-Bündel über S^2 ein weiteres Beispiel einer einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeit ist, die fast nichtnegativen Krümmungsoperator hat, aber nicht nichtnegativen Krümmungsoperator haben kann.

6.1.2 Dimension 6 und Dimension 7

Wir haben bereits in Kapitel 2 sämtliche irreduziblen, kompakten, einfach zusammenhängenden Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit nichtnegativem Krümmungsoperator der Dimension sechs aufgelistet. Da dies nur endlich viele sind, es aber abzählbar unendlich viele S^2-Bündel über S^4 gibt[3], deren Totalräume paarweise nicht homöomorph zueinander sind, erhält man folgenden Satz:

Satz 6.1.5. *Es gibt unendlich viele zueinander nicht homöomorphe einfach zusammenhängende 6-Mannigfaltigkeiten, die fast nichtnegativen Krümmungsoperator zulassen, aber nicht nichtnegativen Krümmungsoperator haben können.*

[3] Nach Lemma A.6.7.

□

Mit analogen Überlegungen wie in Dimension 6 erhalten wir mit Hilfe der Klassifikation der S^3-Bündel über S^4[4] den folgenden Satz:

Satz 6.1.6. *Es gibt unendlich viele zueinander nicht homöomorphe, einfach zusammenhängende 7-Mannigfaltigkeiten, die fast nichtnegativen Krümmungsoperator zulassen, aber nicht nichtnegativen Krümmungsoperator haben können.*

□

Die so konstruierten sechs- und siebendimensionalen Beispiele sind Mannigfaltigkeiten, auf denen es eine Metrik mit nichtnegativer Schnittkrümmung gibt:

Theorem 6.1.7. (Grove-Ziller[5]) *Jedes S^n-Bündel über S^4 trägt eine Metrik mit nichtnegativer Schnittkrümmung.*

Auch das oben konstruierte Beispiel ist eine Mannigfaltigkeit, die eine Metrik mit nichtnegativer Schnittkrümmung trägt. Es schließt sich jetzt die Frage an, ob alle hier konstruierten Beispiele fast nichtnegativ gekrümmt sind?

6.1.3 Weitere Beispiele

Weiter kann man zeigen dass zehn der 14 exotischen 7-Sphären[6] S^3-Bündel über S^4 sind. Grove und Ziller [GrZi] haben gezeigt, dass diese exotischen Sphären alle Metriken mit nichtnegativer Schnittkrümmung tragen[7].
Mit Hilfe von Theorem 5.2.8 erhält man den folgenden

Satz 6.1.8. *Diese siebendimensionalen exotischen Sphären lassen fast nichtnegativen Krümmungsoperator zu, können aber keine Metrik mit nichtnegativem Krümmungsoperator tragen.*

Außerdem lassen sich gewisse 15-dimensionale exotische Sphären als S^7-Bündel über S^8 darstellen[8]. Nach Theorem 5.2.8 gilt somit folgender

Satz 6.1.9. *Diese exotischen Sphären lassen fast nichtnegativen Krümmungsoperator zu, können aber keine Metrik mit nichtnegativem Krümmungsoperator tragen.*

Neben Sphärenbündel kann man mit Hilfe von Theorem 5.2.14 weitere Bündel betrachten und neue Beispiele konstruieren:

Satz 6.1.10. *Der Totalraum jedes Torus-Prinzipalbündels über einer Mannigfaltigkeit mit fast nichtnegativem Krümmungsoperator, lässt fast nichtnegative Krümmungsoperator zu.*

[4] Siehe A.6.8.
[5] Siehe [Zi] Korollar 2.11.
[6] Eine exotische Sphäre ist eine Mannigfaltigkeit, die homöomorph aber nicht diffeomorph zur Sphäre ist.
[7] Siehe 6.1.7.
[8] Siehe [JoWr].

Anhang

A.1 Komplex-projektive Räume

Man definiert den n-dimensionalen *komplex-projektiven Raum* $\mathbb{CP}^n$ als Menge aller komplexen Geraden in $\mathbb{C}^{n+1}$. Eine weitere Möglichkeit der Definition ist die als Quotientenmannigfaltigkeit. Hierbei betrachtet man $S^{2n+1} \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$ und eine glatte Wirkung von $S^1 \subseteq \mathbb{C}$ auf dieser Sphäre durch Multiplikation, die sogenannte *Hopf-Wirkung*,

$$S^1 \times S^{2n+1} \to S^{2n+1}, (\xi, (z_1, ..., z_{n+1})) \mapsto (\xi z_1, ..., \xi z_{n+1}).$$

Dann definiert man $\mathbb{CP}^n := S^{2n+1}/S^1$ und außerdem die folgenden Abbildung

$$\pi : S^{2n+1} \to \mathbb{CP}^n, z \mapsto [z] := S^1.z.$$

Diese Quotientenabbildung π ist eine Submersion, und wenn man auf S^{2n+1} die Standardmetrik mit konstanter Schnittkrümmung 1 verwendet, so erhält man eine Metrik auf $\mathbb{CP}^n$ bezüglich der π zu einer Riemannschen Submersion wird (siehe A.4). Diese Metrik nennt man auch *Fubini-Study-Metrik* und versehen mit dieser Metrik liegen die Schnittkrümmungen von $\mathbb{CP}^n$ in dem Intervall $[1, 4]$.
In [BoKa] wurden die Eigenwerte des Krümmungsoperators von $\mathbb{CP}^n$ ausgestattet mit der Fubini-Study-Metrik berechnet. Wir führen hier der Vollständigkeit halber noch die Spektraldaten des Krümmungsoperators auf, wobei J die komplexe Struktur ist und u und v $\mathbb{C}$-linear unabhängige Vektoren sind[9]:

Eigenraum	**Dimension**	**Eigenwert**
$\mathbb{R}J$	1	$2(dim\mathbb{CP}^n + 2)$
$span\{u \wedge v - Ju \wedge Jv\}$	$n(n-1)$	0
$span\{u \wedge v + Ju \wedge Jv\}$	$n(n-1)$	4
$span\{u \wedge Ju - v \wedge Jv\}$	$n-1$	4

A.2 Symmetrische Räume

Unter einem *symmetrischen Raum*[10] versteht man eine Riemannsche Mannigfaltigkeit M, in der es zu jedem Punkt $p \in M$ eine Isometrie ϕ_p von M gibt, deren Differential in p das

[9] Vergleiche [BoKa].
[10] Weitere Informationen findet man in [He] oder [Pe].

Inverse der Identität ist, die also Geodätische durch p umkehrt. Da die Identitätskomponente der Isometriengruppe $G := Iso(M)_0$ von M transitiv auf M operiert, erhält man eine Darstellung von M als homogenen Raum $M = G/H$, wobei H der Stabilisator eines Punktes aus M ist. Symmetrische Räume sind z.B. die Sphären und die komplex-projektiven Räume.
Wir bezeichnen mit $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ die Liealgebren von G bzw. H und mit

$$B(x,y) := tr(ad(x \circ ad(y)))$$

für alle $x, y \in \mathfrak{g}$ die *Killingform* B, die eine symmetrische Bilinearform auf $\mathfrak{g}$ ist. Wir nennen eine Liealgebra *halb einfach*, falls die Killingform B eine nicht degenerierte Bilinearform ist. Mit Hilfe der Killingform heißt ein symmetrischer Raum M *vom kompakten Typ*, falls in der Darstellung $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$, wobei wir $\mathfrak{m}$ mit dem Tangentialraum von G/H an H identifizieren, $\mathfrak{g}$ halbeinfach ist und $B|_{\mathfrak{m}}$ negativ definit ist.
Ein symmetrischer Raum vom kompaktem Typ ist immer kompakt und man kann zeigen, dass ein kompakter symmetrischer Raum das Produkt von irreduziblen symmetrischen Räumen vom kompakten Typ ist. In dieser Arbeit sind irreduzible Mannigfaltigkeiten solche, die keine lokale Produktstruktur besitzen.
Cartan hat sämtliche irreduziblen symmetrischen Räume klassifiziert und es gibt in jeder Dimension nur endlich viele symmetrische Räume: [11]

Typ	**Symmetrischer Raum**	**Dimension**
AI	$SU(n)/SO(n)$	$\frac{1}{2}(n-1)(n+2)$
AII	$SU(2n)/Sp(n)$	$(n-1)(2n+1)$
AIII	$SU(p+q)/S(U_p \times U_q)$	$2pq$
BD I	$SO(p+q)/SO(p) \times SO(q)$	pq
DIII	$SO(2n)/U(n)$	$n(n-1)$
CI	$Sp(n)/U(n)$	$n(n+1)$
CII	$Sp(p+q)/Sp(p) \times Sp(q)$	$4pq$
G	$G_2/(SU(2) \times SU(2))$	8

Hierbei beschreibt G_2 die Automorphismengruppe der Oktonionenalgebra und ist damit eine sogenannte außergewöhnliche Liegruppe. Wir haben weitere außergewöhnliche symmetrische Räume, deren Dimension größer als acht sind, nicht mit in die Tabelle aufgenommen, da wir im Folgenden nur an niedrigdimensionalen Beispielen für Mannigfaltigkeiten mit nichtnegativem Krümmungsoperator interessiert sind.

In einem symmetrischen Raum G/H gibt es flache, total geodätische Untermannigfaltigkeiten. Solche, deren Dimension maximal ist, sind alle zueinander konjugiert unter der Wirkung von G. Diese Dimension heißt der *Rang des symmetrischen Raumes*. Eine wichtige Klasse von symmetrischen Räumen sind die kompakten symmetrischen Räume vom Rang 1[12]. Die einfach zusammenhängenden kompakten symmetrischen Räume vom Rang 1

[11] Für weiterführende Informationen und Beweise wird auf die Literatur, z.B. Helgason [He], verwiesen.
[12] In der englischsprachigen Literatur werden diese häufig mit CROSS bezeichnet.

sind die Sphären, die komplex-projektiven und die quaternional-projektiven Räume sowie die Cayley-Ebene.

A.3 Faserbündel und Prinzipalbündel

In diesem Abschnitt wollen wir an die Begriffe Faserbündel und Prinzipalbündel erinnern.

Definition A.3.1. Seien E, F, M Mannigfaltigkeiten und G eine Liegruppe, die effektiv auf F operiert. Ein *Koordinaten-Bündel* ist eine glatte surjektive Abbildung $\pi : E \to M$ und ein Bündelatlas $\mathcal{A} = \{(\pi^{-1}(U_i), (\pi, \phi_i))\}_{i\in I}$, so dass die folgenden Eigenschaften gelten:

(i) $\{U_i\}_{i\in I}$ ist eine offene Überdeckung von M.

(ii) Die Abbildungen $(\pi, \phi_i) : \pi^{-1} \to U_i \times F$ sind Diffeomorphismen, die sogenannten *Bündelkarten*. Für alle $x \in M$ definiert man $\phi_{i,x} := \phi_i|_{\pi^{-1}(x)} : \pi^{-1}(x) \to F$.

(iii) Für beliebige $i, j \in I$ existiert eine glatte Abbildung $f_{ij} : U_i \cap U_j \to G$, die *Verklebeabbildung* definiert durch

$$F_{i,j}(x) := \phi_{j,x} \circ \phi_{i,x}^{-1} : F \to F.$$

Dann nennen wir E den *Totalraum*, M die *Basis*, π die *Projektion* und F die *Faser* des Bündels. Die Gruppe G heißt weiter die *Strukturgruppe* des Bündels.

Ein Beispiel für ein Koordinaten-Bündel ist etwa das *triviale Bündel* mit Basisraum M, Faser F und Totalraum $M \times F$ sowie der Projektion $\pi_M : M \times F \to M$ auf den ersten Faktor oder die sogenannte *Hopf-Faserung* $\pi : S^{2n+1} \to \mathbb{CP}^n$ mit Faser S^1 (siehe A.1).

Definition A.3.2. Seien $\xi_1 = (E_1, \pi_1, M_1, F, G)$ und $\xi_2 = (E_2, \pi_2, M_2, F, G)$ zwei Bündel mit derselben Faser und derselben Strukturgruppe. Mit einer *Bündelabbildung* $f : \xi_1 \to \xi_2$ bezeichnen wir eine differenzierbare Funktion $f : E_1 \to E_2$, die die folgenden Eigenschaften erfüllt:

(i) f ist fasererhaltend, d.h. f bildet jede Faser $\pi_1^{-1}(x_1)$ diffeomorph auf eine Faser $\pi_2^{-1}(x_2)$ ab und induziert dabei eine Abbildung $\bar{f} : M_1 \to M_2$ zwischen den Basisräumen der Bündel, so dass $\pi_2 \circ f = \bar{f} \circ \pi_1$.

(ii) Für zwei beliebige Bündelkarten (U_i, ϕ_i) von π_1 und (V_j, ψ_j) von π_2 und $x \in U_i \cap \bar{f}^{-1}(V_j)$ stimmt die Abbildung $\psi_{j,\bar{f}(x)} \circ f \circ \phi_{i,x}^{-1} : F \to F$ mit der Wirkung von einem Element von G überein und die dadurch entstehende Abbildung

$$f_{ij} : U_i \cap \bar{f}^{-1}(V_j) \to G, p \mapsto \psi_{j,\bar{f}(x)} \circ f \circ \phi_{i,x}^{-1}$$

ist differenzierbar.

Wir nennen die zwei Bündel *äquivalent*, falls $M_1 = M_2$ und eine Bündelabbildung f existiert, für die gilt $\bar{f} = id_{M_1}$. Dies definiert eine Äquivalenzrelation und wir bezeichnen eine Äquivalenzklasse von Bündeln auch als *Faserbündel*.

Analog kann man auch ein Faserbündel als ein Koordinaten-Bündel mit einem maximalen Atlas definieren.

Einen Spezialfall dieser Bündel bilden die sogenannten Prinzipalbündel:

Definition A.3.3. Ist G eine Liegruppe und $\pi : P \to M$ eine glatte Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten, so heißt (P, π, M, G) *G-Prinzipalbündel* über M, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i) G wirkt von rechts glatt auf P und die Wirkung ist fasertreu und einfach transitiv auf den Fasern.

(ii) P besitzt einen Bündelatlas $\{(U_i, \phi_i)\}$ mit G-äquivarianten Bündelkarten, d.h. die Bündelkarten ϕ_i erfüllen neben den Bedingungen (ii) und (iii) aus A.3.1 noch zusätzlich folgende Eigenschaft:

$$\phi_i(p.g) = \phi_i(p) \cdot g,$$

wobei G auf $U_i \times G$ durch $(x, h) \cdot g := (x, hg)$ operiert.

Beispiele für Prinzipalbündel sind das oben genannte triviale Bündel $\pi_M : M \times G \to M$ und das Hopf-Bündel.

A.4 Riemannsche Submersionen und O'Neill-Formeln

In diesem Kapitel definieren wir den Begriff einer Riemannschen Submersion und werden die O'Neill-Formeln anführen, die in dieser Arbeit ein häufig verwendetes Hilfsmittel sind. Wir nennen eine glatte Abbildung $f : M \to N$ zwischen zwei Mannigfaltigkeiten eine *Submersion*, falls das Differential von f in jedem Punkt $p \in M$ surjektiv ist. Dann ist $\pi^{-1}(q)$ für alle $q \in N$ eine Untermannigfaltigkeit von M.

Definition A.4.1. Seien (M, g) und (N, h) zwei Riemannsche Mannigfaltigkeiten und $\pi : M \to N$ eine Submersion. Der Untervektorraum $\mathcal{V}_p := \ker(d\pi_p) = T_p(\pi^{-1}(q))$ mit $\pi(p) = q$ von T_pM heißt der *Vertikalraum in p* und das orthogonale Komplement $\mathcal{H}_p := \mathcal{V}_p^\perp$ der *Horizontalraum in p*. Falls für alle $p \in M$ $d\pi_p : \mathcal{H}_p \to T_{\pi(p)}N$ eine Isometrie ist, so nennen wir die Abbildung π eine *Riemannsche Submersion*.

Die Projektionen von einem Riemannschen Produkt auf die jeweiligen Faktoren sind die ersten Beispiele für Riemannsche Submersionen.
Weiter kann man den folgenden Satz[13] beweisen:

Satz A.4.2. *Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und G eine Untergruppe der Isometriengruppe von (M, g), die frei und eigentlich diskontinuierlich auf M operiert. Dann existiert genau eine Metrik $\tilde{g}$ auf M/G, so dass die Quotientenabbildung $\pi : M \to M/G$ zu einer Riemannschen Submersion wird.*

[13] Siehe [GaHuLa], Propüosition 2.28.

Mit Hilfe dieses Satzes erhält man noch weitere Beispiele für Riemannsche Submersionen: Ausgestattet mit der Standardmetrik auf S^{2n+1} erhält man auf dem komplex-projektiven Raum die Fubini-Study-Metrik, bezüglich der die Quotientenabbildung[14] $\pi : S^{2n+1} \to \mathbb{CP}^n$ zu einer Riemannschen Submersion wird.

Generalvoraussetzung A.4.3. Wir nehmen für den Rest des Kapitels an, dass $\pi : (M, g) \to (N, h)$ eine Riemannsche Submersion zwischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten sei.

Im Folgenden nennen wir Vektorfelder X auf M, die in jedem Punkt tangential an den Vertikalraum sind, *vertikale Vektorfelder* und Vektorfelder, die in jedem Punkt orthogonal zum Vertikalraum sind, nennnen wir *horizontale Vektorfelder*. Zu einem beliebigen Vektorfeld $\hat{X}$ auf N erhält man mit Hilfe der Gleichung $d\pi_p(X) = \hat{X}$ ein glattes Vektorfeld X auf M. Dieses Vektorfeld X nennen wir den *horizontalen Lift* von $\hat{X}$.

Für ein Vektorfeld X und ein vertikales Vektorfeld V ist $[X, V]$ vertikal, da der Pushforward von V verschwindet. Außerdem ist $g(X, Y)$ für zwei horizontale Lifts X und Y konstant entlang der Fasern und damit verschwindet die Ableitung in Richtung eines vertikalen Vektorfeldes V, d.h. $V(g(X, Y)) = 0$.
Barrett O'Neill hat 1966 Zusammenhänge zwischen den Krümmungstensoren von M und N hergestellt. Dazu hat er die beiden (2,1)-Tensoren A und T durch

$$A_X Y = (\nabla_{X^{\mathcal{H}}} Y^{\mathcal{V}})^{\mathcal{H}} + (\nabla_{X^{\mathcal{H}}} Y^{\mathcal{H}})^{\mathcal{V}},$$

$$T_X Y = (\nabla_{X^{\mathcal{V}}} Y^{\mathcal{V}})^{\mathcal{H}} + (\nabla_{X^{\mathcal{V}}} Y^{\mathcal{H}})^{\mathcal{V}}$$

definiert.
Für den Tensor A gelten die folgenden Eigenschaften[15]:

Lemma A.4.4. *Wir bezeichnen mit X, Y, Z, Z' horizontale Vektoren und mit U, V, W, W' vertikale Vektoren. Dann gilt:*

(i) $A_V X = A_V U = 0$,

(ii) $A_X V = (\nabla_X V)^{\mathcal{H}}$ *und* $A_X Y = (\nabla_X Y)^{\mathcal{V}}$,

(iii) A_X *ist schiefsymmetrisch,*

(iv) $A_X Y = -A_Y X = \frac{1}{2}[X, Y]^{\mathcal{V}}$ *für horizontale Vektoren X und Y,*

(v) $\nabla_V X = A_X V$ *für horizontale X und vertikale V,*

Beweis. (i) Folgt direkt aus der Definition von A.

(ii) Folgt direkt aus der Definition von A.

---

[14] Vergleiche Anhang A.1.
[15] Vergleiche [Be] oder [O'N].

(iii) Für beliebige Vektoren L_1, L_2 folgt mit Hilfe der Metrizität des Zusammenhangs

$$\begin{aligned}
\langle A_X L_1, L_2\rangle &= \langle A_X(L_1)^{\mathcal{V}}, L_2\rangle + \langle A_X(L_1)^{\mathcal{H}}, L_2\rangle \\
&= \langle \nabla_X(L_1)^{\mathcal{V}}, L_2^{\mathcal{H}}\rangle + \langle \nabla_X(L_1)^{\mathcal{H}}, L_2^{\mathcal{V}}\rangle \\
&= X(\langle L_1^{\mathcal{V}}, L_2^{\mathcal{H}}\rangle) - \langle L_1^{\mathcal{V}}, \nabla_X(L_2)^{\mathcal{H}}\rangle \\
&\quad + X(\langle L_1^{\mathcal{H}}, L_2^{\mathcal{V}}\rangle) - \langle L_1^{\mathcal{H}}, \nabla_X(L_2)^{\mathcal{V}}\rangle \\
&= -\left\{\langle L_1^{\mathcal{V}}, \nabla_X(L_2)^{\mathcal{H}}\rangle + \langle L_1^{\mathcal{H}}, \nabla_X(L_2)^{\mathcal{V}}\rangle\right\} \\
&= -\langle A_X L_2, L_1\rangle.
\end{aligned}$$

(iv) Es gilt $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ und damit

$$[X, Y]^{\mathcal{V}} = (\nabla_X Y)^{\mathcal{V}} - (\nabla_Y X)^{\mathcal{V}} = A_X Y - A_Y X.$$

Damit reicht es, zu zeigen, dass $A_X Y = A_Y X$ oder äquivalent dazu $A_X X = 0$ für alle horizontalen Vektorfelder X. Wir nehmen an, dass X basic ist. Dann gilt für alle vertikalen Vektorfelder V

$$0 = V(\langle X, X\rangle) = 2\langle \nabla_V X, X\rangle. \tag{A.1}$$

Allerdings ist $[X, V] = \nabla_X V - \nabla_V X$ vertikal und damit folgt $(\nabla_X V)^{\mathcal{H}} = (\nabla_V X)^{\mathcal{H}}$. Damit folgt

$$\langle \nabla_V X, X\rangle = \langle \nabla_X V, X\rangle = -\langle V, \nabla_X X\rangle = -\langle V, A_X X\rangle.$$

Nach Gleichung (A.1) folgt also

$$\langle V, A_X X\rangle = -\langle \nabla_V X, X\rangle = -\frac{1}{2} V(\langle X, X\rangle) = 0$$

und damit die Behauptung.

(v) Da ∇ torsionsfrei ist, gilt $\nabla_X V = \nabla_V X + [X, V]$. Also folgt

$$\nabla_V X + [X, V] = \nabla_X V = (\nabla_X V)^{\mathcal{H}} + (\nabla_X V)^{\mathcal{V}}.$$

Da $[X, V]$ vertikal ist, ist aber $(\nabla_X V)^{\mathcal{V}} = [X, V]$ und damit folgt

$$\nabla_V X = (\nabla_X V)^{\mathcal{H}} = A_X V.$$

□

Da für beliebige vertikale Vektorfelder U, V der Fundamentaltensor $T_U V$ der zweiten Fundamentalform jeder Faser $\pi^{-1}(x)$ entspricht, sagen wir, dass eine Riemannsche Submersion *total geodätische Fasern hat*, wenn der Tensor T verschwindet. Auf der anderen Seite verschwindet A genau dann, wenn die horizontale Projektion $\mathcal{H}$ integrabel ist[16].
Mit Hilfe der beiden Tensoren A und T kann man die berühmten O'Neill-Formeln beweisen.

[16] Siehe [Be].

Theorem A.4.5. (O'Neill-Formeln)[17]
Es seien X, Y, Z, Z' horizontale und U, V, W, W' vertikale Vektoren. Falls die Fasern $\pi^{-1}(p)$ total geodätisch sind, so gelten folgende Gleichungen:

(i) $R_M(X, Y, Z, Z') = R_N(d\pi(X), d\pi(Y), d\pi(Z), d\pi(Z')) + 2\langle A_X Y, A_Z Z'\rangle + \langle A_X Z, A_Y Z'\rangle - \langle A_Y Z, A_X Z'\rangle$,

(ii) $R_M(U, V, W, W') = R_F(U, V, W, W')$,

(iii) $R_M(X, V, V, X) = \|A_X V\|^2$,

(iv) $R_M(U, V, W, X) = 0$,

(v) $R_M(X, Y, Z, V) = \langle(\nabla_Z A)_X Y, V\rangle$,

(vi) $R_M(X, V, Y, W) = \langle(\nabla_V A)_X Y, W\rangle + \langle A_X V, A_Y W\rangle$,

(vii) $R_M(X, Y, V, W) = \langle(\nabla_V A)_X Y, W\rangle - \langle(\nabla_W A)_X Y, V\rangle + \langle A_X V, A_Y W\rangle$.

Aus den obigen Formeln erhält man für orthonormale Vektoren X und Y auf N und dazugehörige Horizontale Lifts $\tilde{X}$ und $\tilde{Y}$:

$$sec_N(X, Y) = sec_M(\tilde{X}, \tilde{Y}) + \frac{3}{4}\|[\tilde{X}, \tilde{Y}]^{\mathcal{V}}\|^2,$$

mit anderen Worten ist eine Riemannsche Submersion nicht schnittkrümmungsvermindernd.

A.5 Die Heisenberg-Mannigfaltigkeit

Im vorliegenden Abschnitt stellen wir die Heisenberg-Mannigfaltigkeit vor, die das kanonische Beispiel für eine fast flache Mannigfaltigkeit ist und berechnen den Krümmungsoperator.

A.5.1 Die Heisenberg-Gruppe

Definition A.5.1. Die abgeschlossene Untergruppe der $Gl(3\mathbb{R})$

$$N := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

heißt die *Heisenberg-Gruppe.*

Die Heisenberg-Gruppe N ist ein klassisches Beispiel für eine nilpotente Liegruppe:

[17] Siehe [O'N] oder [Sak].

Definition A.5.2. Sei G ein Liegruppe. Für zwei beliebige Untergruppen $A, B \leqslant G$ definieren wir (A, B) als die von den Kommutatoren $xyx^{-1}y^{-1}$ mit $x \in A$ und $y \in B$ erzeugte Untergruppe von G. Setze $G^1 := (G)$ und $g^n := (G, G^{n-1})$. Dann heißt die Folge $(G^n)_{n\in\mathbb{N}}$ die *absteigende Zentralreihe* von G, und falls ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, so dass G^n trivial ist, heißt G *nilpotent*.

Durch Identifikation von N mit $\mathbb{R}^3$ wird durch die Multiplikation von Matrizen eine Multiplikation auf $\mathbb{R}^3$ induziert:

$$(x, y, z) \bullet (u, v, w) := (x + u, y + v, z + w + xv),$$

bezüglich derer $\mathbb{R}^3$ zu einer dreidimensionalen Liegruppe wird.
Mit Hilfe der Exponentialabbildung rechnet man nach, dass die Liealgebra der Heisenberg-Gruppe aus allen Matrizen der Form

$$\mathfrak{n} := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

besteht.
Die Liealgebra wird demnach von den Elementen

$$\xi_1 := (1, 0, 0), \quad \xi_2 := (0, 1, 0), \quad \xi_3 := (0, 0, 1)$$

erzeugt. Für den Kommutator dieser Liealgebra gelten folgende Gleichungen:

$$[\xi_1, \xi_2] = \xi_3, \qquad [\xi_1, \xi_3] = [\xi_2, \xi_3] = 0.$$

Folglich bildet ξ_3 das Zentrum der Liealgebra und man kann leicht zeigen, dass N eine nilpotente Liegruppe ist.

A.5.2 Der Krümmungsoperator der Heisenberg-Gruppe

Definiere für alle $q \in]0, 1]$ eine Familie von Skalarprodukten[18] auf der Liealgebra der Heisenberg-Gruppe durch

$$\langle(\mu_1, \mu_2, \mu_3), (\eta_1, \eta_2, \eta_3)\rangle_q := q^2(\mu_1\eta_1 + \mu_2\eta_2, q^2\mu_3\eta_3).$$

Für $q = 1$ bildet (ξ_1, ξ_2, ξ_3) eine Orthonormalbasis der Liealgebra von N und für $q \in]0, 1[$ eine orthogonale Basis. Die Vektoren ξ_1, ξ_2, ξ_3 kann man als linksinvariante Vektorfelder auf der ganzen Liegruppe fortsetzen. Ebenso kann man jedes Skalarprodukt auf der Liealgebra zu einer linksinvarianten Riemannschen Metrik, die wir hier auch mit $\langle\cdot, \cdot\rangle_q$ bezeichnen, auf ganz N fortsetzen. Dann kann man mit dieser Metrik und mit Hilfe der Koszul-Formel für alle $q \in]0, 1]$ die Levi-Civita-Zusammenhänge ∇^q der Heisenberg-Gruppe berechnen.
Es gilt

[18] Vergleiche etwa [BuKa].

$$\begin{aligned}
\nabla^q_{\xi_1}\xi_2 &= \frac{1}{2}\xi_3 = -\nabla^q_{\xi_2}\xi_1, \\
\nabla^q_{\xi_1}\xi_3 &= -\frac{1}{2}q^2\xi_2 = \nabla^q_{\xi_3}\xi_1, \\
\nabla^q_{\xi_2}\xi_3 &= \frac{1}{2}q^2\xi_1 = \nabla^q_{\xi_3}\xi_2, \\
\nabla^q_{\xi_1}\xi_1 &= \nabla^q_{\xi_2}\xi_2 = \nabla^q_{\xi_3}\xi_3 = 0.
\end{aligned}$$

Für den Krümmungstensor R^q der Heisenberg-Gruppe bezüglich der Metriken $\langle\cdot,\cdot\rangle_q$ gelten somit folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
R^q(\xi_1,\xi_2,\xi_1) &= \frac{3}{4}q^2\xi_2, \qquad R^q(\xi_1,\xi_2,\xi_2) = -\frac{3}{4}q^2\xi_1, \\
R^q(\xi_1,\xi_3,\xi_1) &= -\frac{1}{4}q^2\xi_3, \quad R^q(\xi_1,\xi_3,\xi_3) = \frac{1}{4}q^4\xi_1, \\
R^q(\xi_2,\xi_3,\xi_2) &= -\frac{1}{4}q^2\xi_3, \quad R^q(\xi_2,\xi_3,\xi_3) = \frac{1}{4}q^4\xi_2,
\end{aligned}$$

und es gilt,

$$R^q(\xi_i,\xi_j,\xi_k) = 0$$

für alle paarweise verschiedenen i,j,k. Folglich gilt für die Schnittkrümmungen der Heisenberg-Gruppe:

$$sec(\xi_1,\xi_2) = -\frac{3}{4} \quad \text{und} \quad sec(\xi_1,\xi_3) = sec(\xi_2,\xi_3) = \frac{1}{4}.$$

Die Schnittkrümmungen sind also unabhängig von $q \in]0,1]$. Da die Krümmungstensoren R^q für drei unterschiedliche Vektoren jeweils verschwinden, folgt aus Lemma 1.5.2, dass die Basis $(\xi_1\wedge\xi_2, \xi_1\wedge\xi_3, \xi_2\wedge\xi_3)$ die Krümmungsoperatoren $\hat{R}^q$ diagonalisieren. Die Eigenwerte der Krümmungsoperatoren sind nach obigen Rechnungen $-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ und auch die Eigenwerte der Krümmungsoperatoren sind von $q \in]0,1]$ unabhängig.

A.5.3 Die Heisenberg-Mannigfaltigkeit

Sei jetzt Γ die diskrete Untergruppe der Heisenberg-Gruppe, die nur ganzzahlige Einträge hat, d.h.

$$\Gamma := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a,b,c \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Die Gruppe Γ operiert auf N isometrisch durch Translationen und, da Γ eine diskrete Untergruppe von N ist, hat die Quotientenmannigfaltigkeit N/Γ, die wir die *Heisenberg-Mannigfaltigkeit* nennen, nach den O'Neill-Formeln A.3 dieselben Schnittkrümmungen und Eigenwerte des Krümmungsoperators wie die Heisenberg-Gruppe. Außerdem ist N/Γ eine kompakte Mannigfaltigkeit, da die Gruppe Γ kokompakt auf N operiert. Also hat N/Γ

insbesondere endlichen Durchmesser.
Aus der Definition der linksinvarianten Metrik auf N folgt, dass der Durchmesser der Heisenberg-Mannigfaltigkeit $(N/\Gamma, \langle\cdot,\cdot\rangle_q)$ gegen Null konvergiert, falls q gegen Null konvergiert.

A.6 Sphärenbündel

A.6.1 Bündel über Sphären

In diesem Kapitel wollen wir allgemeine Bündel über Sphären klassifizieren. Für weitergehende Informationen sei auf die Bücher von Steenrod [Stee] oder Walschap [Wa] verwiesen.

Im Laufe dieses Unterkapitels sei $\xi = (E, \pi, S^n, F)$ jetzt immer ein Bündel über S^n mit Strukturgruppe G. Wir nehmen im Folgenden vereinfachend an, dass G eine zusammenhängende Liegruppe ist. Dann erhält man eine bijektive Korrespondenz zwischen $\pi_k(G)$ und den Homotopieklassen von Abbildungen $S^k \to G$, $[S^k, G]$ für $k \geqslant 2$.
Dazu definieren wir zu jedem solchen Bündel eine charakteristische Abbildung. Wir fassen S^{n-1} als Äquator in S^n auf und bezeichnen mit E_1, E_2 die beiden abgeschlossenen Hemisphären. Weiter seien V_i, $i = 1, 2$ zwei offene n-Zellen, die E_i enthalten. Weil beide V_i kontrahierbar sind und $\{V_1, V_2\}$ eine offene Überdeckung von S^n bildet, erhält man einen Bündelatlas $\{\pi^{-1}(V_i), (\pi, \phi_i)\}$, der aus zwei Karten besteht. Mit Hilfe dieser Bündeldiffeomorphismen erhält man die Verklebeabbildung

$$f_{1,2} : V_1 \cap V_2 \to G,$$

definiert auf einer Umgebung des Äquators S^{n-1}.

Definition A.6.1. Wir definieren die *charakteristische Abbildung* von ξ durch

$$T := f_{1,2}|_{S^{n-1}} : S^{n-1} \to G$$

und bezeichnen mit $C(\xi) = [T] \in \pi_{n-1}(G)$ die *charakteristische Klasse* von ξ.

Mit Hilfe dieser Abbildung erhält man folgendes Theorem[19]:

Theorem A.6.2. *Wir nehmen an, dass G effektiv auf F wirkt. Die Abbildung, die jedem Bündel ξ mit Gruppe G und Faser F über S^n die charakteristische Klasse $C(\xi)$ zuordnet führt zu einer bijektiven Korrespondenz zwischen den Äquivalenzklassen von solchen Bündeln und den Homotopieklassen von Abbildungen $S^{n-1} \to G$. Insbesondere erhält man eine 1-1-Beziehung zwischen den Äquivalenzklassen dieser Bündel und der Gruppe $\pi_{n-1}(G)$, falls G zusammenhängend ist.*

Falls wir jetzt ein Prinzipalbündel $\tilde{\xi}$ betrachten, so bildet der Randoperator Δ aus der Homotopiegruppensequenz von $\tilde{\xi}$ $\pi_n(\tilde{E})$ auf $\pi_{n-1}(G)$ ab. Für den Randoperator gilt[20]:

Lemma A.6.3. $\Delta(1) = C(\tilde{\xi})$, *wobei 1 die Klasse in $\pi_n(S^n)$ ist, die die Identität auf S^n als Repräsentanten hat.*

Nach Satz 8.2 [Stee] sind zwei Bündel genau dann äquivalent, wenn die assoziierten Prinzipalbündel äquivalent sind.

[19] Siehe [Wa] Seite 94.
[20] Siehe [Wa] Seite 95.

A.6.2 Sphärenbündel über Sphären

Ein Faserbündel, in dem die Faser eine k-Sphäre und die Strukturgruppe die orthogonale Gruppe ist, nennen wir *k-Sphärenbündel*. Falls die Strukturgruppe in einem k-Sphärenbündel die spezielle orthogonale Gruppe ist, so heißt das Bündel auch *orientierbares Sphärenbündel*. Nach dem vorhergehenden Klassifikationssatz für Bündel über Sphären erhält man das folgende Theorem[21]:

Theorem A.6.4. *Es gibt eine 1-1-Beziehung zwischen den Äquivalenzklassen von orientierbaren k-Sphärenbündeln über S^n und $\pi_{n-1}(SO(k+1))$.*

Wir bezeichnen in diesem Kapitel eine Äquivalenzklasse von Bündeln über Sphären häufig nur als Bündel über einer Sphäre.

Bündel über S^2

Mit Hilfe der Klassifikation der Bündel über Sphären und da $\pi_1(SO(k+1)) \cong \mathbb{Z}_2$ für alle $k \geqslant 2$ gilt die folgende Aussage:

Lemma A.6.5. *Für alle $k \geqslant 2$ gibt es genau ein nichttriviales S^k-Bündel über S^2.*

Bündel über S^3

Weil für alle Liegruppen die zweite Homotopiegruppe trivial ist, erhält man folgende Aussage:

Lemma A.6.6. *Für alle k gibt es nur das triviale S^k-Bündel über S^3.*

Bündel über S^4

Es gilt $\pi_3(SO(3)) \cong \mathbb{Z}$ und damit gibt es unendlich viele S^2-Bündel über S^4. In [Stee] wird gezeigt, dass die zu $m, n \in \mathbb{Z}$ gehörigen Bündel nicht homöomorph sind, falls $|m| \neq |n|$.

Lemma A.6.7. *Es gibt unendlich viele S^2-Bündel über S^4, deren Totalräume nicht paarweise homöomorph zueinander sind.*

Da $\pi_3(SO(4)) \cong \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, gibt es unendlich viele S^3-Bündel über S^4. Ebenso wird in [Stee] gezeigt, dass unendlich viele dieser Bündel nicht paarweise homöomorphe Totalräume haben. Damit erhält man das folgende

Lemma A.6.8. *Es gibt unendlich viele S^3-Bündel über S^4, deren Totalräume nicht paarweise homöomorph zueinander sind.*

A.7 Krümmung von linksinvarianten Metriken

Wenn man für die Metrik auf einer Liegruppe nur fordert, dass diese linksinvariant und nicht zwangsweise biinvariant ist, so erhält man eine allgemeinere Formel für den Levi-Civita-Zusammenhang und damit auch für den Krümmungstensor als im biinvarianten Fall.

[21] Siehe [Stee].

Mit Hilfe der Koszul-Formel zur Berechnung des Levi-Civita-Zusammenhangs und mit der Eigenschaft, dass aus der Linksinvarianz für alle linksinvarianten Vektorfelder X, Y, Z, W gilt

$$X\langle \nabla_Y Z, W\rangle = 0,$$

erhält man das folgende Lemma[22]:

Lemma A.7.1. *Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine linksinvariante Metrik auf einer Liegruppe G und seien X, Y, Z, W linksinvariante Vektorfelder auf G. Dann gilt:*

(i) $\nabla_X Y = \frac{1}{2}\{[X, Y] - (ad_X)^* Y - (ad_Y)^* X\}$,

(ii) $\langle R(X, Y)Z, W\rangle = \langle \nabla_X Z, \nabla_Y W\rangle - \langle \nabla_Y Z, \nabla_X W\rangle - \langle \nabla_{[X,Y]} Z, W\rangle$,

(iii)

$$\begin{aligned} \langle R(X, Y)Y, X\rangle &= \|[(ad_X)^* Y + (ad_y)^* X]\|^2 - \langle (ad_X)^* X, (ad_Y)^* Y\rangle \\ &\quad -\frac{3}{4}\|[X, Y]\|^2 - \frac{1}{2}(\langle [[X, Y]Y], X\rangle + \langle [[Y, X], X], Y\rangle). \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnen wir mit A^* die adjungierte Abbildung eines Operators A bezüglich des gegebenen Skalarproduktes. Man erhält also, wie im biinvarianten Fall, eine Abschätzung für den Betrag der Schnittkrümmung gegen ein Vielfaches der Norm des Kommutators.

[22] Siehe [ChEb], Proposition 3.18.

Literaturverzeichnis

[Ba] D. Barden; *Simply connected five-manifolds*, The Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 82, No. 3, (1965), pp. 365-385.

[Be] A. L. Besse; *Einstein Manifolds*, Springer Verlag, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge Band 10, (1987).

[BöWi] C. Böhm, B. Wilking; *Manifolds with positive curvature operators are space forms*, The Annals of Mathematics, Vol. 167, (2008), pp. 1079-1097.

[BoKa] J. P. Bourguignon, H. Karcher; *Curvature Operators: Pinching Estimates and Geometric Examples*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4ê série, t. 11, (1978), pp. 71-92.

[BuKa] P. Buser, H. Karcher; *Gromov's almost flat manifolds*, soc. math. de france, astérisque 81 (1981).

[Ch] S. S. Chern; *The Geometry of G-Structures*, Bulletin Amer. Math. Soc. Vol. 72, No. 2 (1966), pp. 167-219.

[ChEb] J. Cheeger, D. G. Ebin; *Comparison Theorems in Riemannian Geometry*, North-Holland Publishing Company, Vol. 9, (1975).

[ChGr] J. Cheeger, D. Gromoll; *On the structure of complete manifolds of nonnegative curvature*, The Annals of Mathematics, Vol. 96, (1992), pp. 413-443.

[DeMeNo] A. Derdzinski, F. Mercuri, M. H. Noronha; *Manifolds with pure non-negative curvature operator*, Bol. Soc. Bras. Mat., Vol. 14, No. 2, (1987), pp. 13-22.

[Es] J. H. Eschenburg; *New examples of Manifolds with Strictly Positive Curvature*, Invent. math. 66 (1982), pp. 469-480.

[FuYa] K. Fukaya, T. Yamaguchi; *The Fundamental Groups of Almost Nonnegatively Curved Manifolds*, The Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 136, No. 2, (1992), pp. 253-333.

[GaHuLa] S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine; *Riemannian Geometry*, Springer 3rd Edition (2004).

[Gr] M. Gromov; *Almost flat manifolds*, J. Differential Geometry 13 (1978), pp. 231-242.

[GrZi] K. Grove, W. Ziller; *Curvature and Symmetry of Milnor Spheres*, The Annals of Mathematics, Vol. 152, (2000), pp. 331-367.

[GrVeZi] K. Grove, L. Verdiani, W. Ziller; *A new typ of a positivly curved manifold*, Preprint (2008).

[Ha] A. Hatcher; *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, (2002).

[He] S. Helgason; *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*, Academic Press, Inc., New York, (1978).

[JoWr] M. Joachim, D. J. Wraith; *Exotic Spheres and Curvature*, Bulletin of the Amer. Math. Soc., Vol. 45, No. 4 (2008), pp. 595-616.

[KaPeTu] V. Kapovitch, A. Petrunin, W. Tuschmann; *Nilpotency, almost nonnegative curvature, and the gradient flow on Alexandrov spaces*, The Annals of Mathematics, Vol. 171 , No. 1, (2010), pp. 343-373.

[KoMiSl] I. Kolár, P. W. Michor, J. Slovák; *Natural Operations in Differential Geometry*, Springer-Verlag, (1993).

[KoNo] S. Kobayashi, K. Nomizu; *Foundations of Differential Geometry I*, New York, London, Sydney: Interscience (1969).

[Ma] H. Maillot; *Sur l'opérateur de courbure d'une varieté Riemannienne*, thèse 3-ème cycle, L'université Claude-Bernard, Lyon, June 1974.

[MeNo] F. Mercuri, M. H. Noronha; *On the topology of complete riemannian manifolds with nonnegative curvature operator*, Rendiconti Seminario Fac. Sc. Uni. Cagliari, Vol. 63, Fasc. 2 (1993).

[MiMo] M. J. Micallef, J. D. Moore; *Minimal two-spheres and the topology of manifolds with positive curvature on totally isotropic two-planes*, The Annals of Mathematics, Vol. 127 , No. 1, (1988), pp. 199-227.

[Mü] M. Müter; *Krümmungserhöhende Deformationen mittels Gruppenaktionen*, Dissertation, Universität Münster, 1987.

[Na] J. C. Nash; *Positive Ricci Curvature on Fibre Bundles*, J. Differential Geometry 14 (1979), pp. 241-254.

[O'N] B. O'Neill; *The fundamental Equations of a Submersion*, Michigan Math. J. 13 (1966), pp. 459-469.

[Os] H. Osborn; *Vector Bundles (Volume I)*, Academic Press, Inc., New York, (1982).

[Pe] P. Petersen; *Riemannian Geometry*, Springer-Verlag New York, Inc (1998).

[Po] W. A. Poor; *Some Exotic Spheres with Positive Ricci Curvature*, Math. Ann. 216 (1975), pp. 245-252.

[Ru] E. A. Ruh; *Almost flat manifolds*, J. Differential Geometry 17 (1982), pp. 1-14.

[Sa] T. Sakai; *Riemannian Geometry*, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 149, (1992).

[ScTu] L. J. Schwachhöfer, W. Tuschmann; *Almost Nonnegative Curvature and Cohomogeneity One*, Max Planck Institute for Mathematics in the Sciences Preprint Series, Preprint No. 62, (2001), *http://www.mis.mpg.de/preprints/2001/preprint2001-62.pdf*.

[Stee] N. Steenrod; *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton university press, (1951).

[Ster] S. Sternberg; *Lectures on Differential Geometry*, Chelsea Pub Co; 2nd edition (1982).

[StZi] R. Stöcker, H. Zieschang; *Algebraische Topologie*, B.G. Teubner, Stuttgart, (1988).

[Vi] J. Vilms; *Totally Geodesic Maps*, J. Differential Geometry 4 (1970), pp. 73-79.

[Wa] G. Walschap; *Metric Structures in Differrential Geometry*, Springer-Verlag New York, (2004).

[Wi] B. Wilking; *On fundamentel groups of manifolds of nonnegative curvature*, Diff. Geom. and its Appl., Vol. 13, (2000), pp. 129-165.

[Wo] J. A. Wolf; *Curvature in Nilpotent Lie Groups*, Proceedings of the Amer. Math. Soc., Vol. 15, No. 2 (1964), pp. 271-274.

[Zi] W. Ziller; *Examples of Riemannian manifolds with non-negative sectional curvature*, Metric and Comparison Geometry, Surv. Diff. Gem. 11, ed. K. Grove and J. Cheeger, International Press, (2007), pp. 63-102.

Erklärung

Ich versichere an Eides statt, die vorliegende Arbeit bis auf die wissenschaftliche Beratung durch meinen Doktorvater selbständig verfasst zu haben.
Die Arbeit ist unter Einhaltung der Regeln guter wissenschaftlicher Praxis entstanden und ist bisher weder veröffentlicht noch zur Veröffentlichung eingereicht worden, noch hat sie ganz oder zum Teil an anderer Stelle im Rahmen eines Prüfungsverfahrens vorgelegen.
Des Weiteren versichere ich, noch keinen Promotionsversuch unternommen zu haben.

Karlsruhe, 19.01.2011