

# **Finite-Element-Formulierungen mit abgestimmten Approximationsräumen für die Modellierung piezoelektrischer Stab- und Schalenstrukturen**

Zur Erlangung des akademischen Grades eines  
DOKTOR-INGENIEURS

von der Fakultät für

Bauingenieur-, Geo- und Umweltwissenschaften  
des Karlsruher Instituts für Technologie (KIT)

genehmigte

DISSERTATION

von

**Dipl.–Ing. Dieter Legner**

aus Bretten

Tag der mündlichen Prüfung: 16. Februar 2011

Hauptreferent: Prof. Dr.–Ing. habil. W. Wagner

Korreferent: Prof. Dr.–Ing. habil. S. Klinkel

Karlsruhe 2011

**Herausgeber:**

Prof. Dr.–Ing. habil. W. Wagner

**Organisation und Verwaltung:**

Institut für Baustatik  
Karlsruher Institut für Technologie  
Postfach 6980  
76128 Karlsruhe

Telefon: (0721) 608–42280  
Telefax: (0721) 608–46015  
E–mail: [info@ibs.kit.edu](mailto:info@ibs.kit.edu)

© 2011 Dieter Legner  
Institut für Baustatik  
Karlsruher Institut für Technologie  
Kaiserstraße 12  
76131 Karlsruhe

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten.  
Ohne Genehmigung des Autors ist es nicht gestattet, dieses Heft ganz oder teilweise auf fotomechanischem Wege (Fotokopie, Mikrokopie) zu vervielfältigen oder in elektronischen Medien zu speichern.

ISBN 978–3–935322–18–8

## Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Baustatik des Karlsruher Instituts für Technologie, an dem ich im Rahmen des von der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) geförderten Projektes „Konsistente numerische Modellbildung gekoppelter Feldprobleme der Elektromechanik mit der Methode der finiten Elemente“ beschäftigt war. Ein dreimonatiger Aufenthalt an der University of Cape Town wurde durch ein Auslandsstipendium des „Karlsruhe House of Young Scientists“ (KHYS) unterstützt.

Dem Hauptreferenten und Institutsleiter, Herrn Prof. Dr.-Ing. W. Wagner, danke ich sehr herzlich für die hervorragende Betreuung, die Bereitstellung von ausgezeichneten Arbeitsbedingungen und die finanzielle Förderung über die Projektdauer hinaus.

Herrn Prof. Dr.-Ing. S. Klinkel danke ich in besonderer Weise für die zahlreichen Anregungen und intensiven Diskussionen zu wissenschaftlichen und konzeptionellen Fragestellungen, die herausragende Betreuung und für die Übernahme des Korreferats.

Für umfassende Vorarbeiten, die angenehme Zusammenarbeit und viele wertvolle Hinweise bedanke ich mich ausdrücklich bei Herrn Prof. Dr.-Ing. F. Gruttmann und Herrn Dr.-Ing. J. Wackerfuß. Mein weiterer Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. M. Kamlah für das Interesse an dieser Arbeit.

Allen Mitarbeitern des Instituts sei gedankt für das angenehme und überaus kollegiale Arbeitsklima, welches zum Gelingen der Arbeit maßgeblich beigetragen hat.

Einen herzlichen Dank möchte ich schließlich meinen Eltern für ihre Unterstützung und meiner Schwester Andrea für die gewissenhafte Durchsicht des Manuskripts aussprechen.

Karlsruhe, im Februar 2011

*Dieter Legner*



## Kurzfassung

In der Sensorik und Aktorik werden in zunehmendem Maße piezoelektrische Materialien eingesetzt. Um die Entwicklung von Anwendungen zu erleichtern, sind numerische Hilfsmittel von Bedeutung. Die physikalische Beschreibung führt auf ein Randwertproblem mit elektromechanisch gekoppelten Differentialgleichungen, welches sich beispielsweise durch Verwendung der Finite-Elemente-Methode näherungsweise lösen lässt. Da die Strukturen gewöhnlich sehr dünn sind, eignen sich piezoelektrische Stab- und Schalenelemente in besonderer Weise.

Bei piezoelektrischen Materialien sind mechanische und elektrische Feldgrößen über die konstitutiven Beziehungen gekoppelt. Verwendet man Standardelementformulierungen, in welchen die mechanischen und elektrischen Freiheitsgrade mit Ansatzfunktionen niedriger Ordnung interpoliert werden, ergeben sich insbesondere bei Biegebeanspruchung unausgewogene Approximationsräume für die mechanischen und elektrischen Felder. Dies führt zu fehlerhaften Berechnungsergebnissen.

Mit der vorliegenden Arbeit wird ein Konzept vorgeschlagen, um inkompatible Approximationsräume und die damit verbundenen Berechnungsfehler bei dünnen Strukturen für alle gängigen Polarisationsarten und Beanspruchungen zu vermeiden. Die Vorgehensweise basiert auf einer gemischten Variationsformulierung in Verbindung mit der EAS-Methode, wodurch eine von den Ansatzfunktionen unabhängige Interpolation der mechanischen und elektrischen Felder ermöglicht wird.

Das Konzept wurde in die Entwicklung eines piezoelektrischen Stab- und Schalenelements eingebunden. Das piezoelektrische Schalenelement basiert auf einer mechanischen Schalenformulierung mit kinematischen Annahmen nach Reissner-Mindlin und berücksichtigt Dickendehnungen. Auch eine Analyse von typischen piezoelektrischen Sensorstrukturen mit geschichtetem Querschnittsaufbau ist damit ohne parasitäre Approximationen möglich. Das piezoelektrische Stabelement basiert auf einer mechanischen Stabformulierung mit kinematischen Annahmen nach Timoshenko und berücksichtigt Quer- und Dickendehnungen. Da auch die Verwölbung des Querschnitts in das Konzept miteinbezogen ist, sind die mechanischen und elektrischen Felder auch bei Torsionsbeanspruchung ausgewogen. Beide Elementformulierungen verfügen über sechs mechanische und zwei elektrische Knotenfreiheitsgrade und ermöglichen die Verwendung von 3D-elektromechanischen, konstitutiven Beziehungen.

Numerische Beispiele zeigen, dass mit den Elementformulierungen bei der Analyse von piezoelektrischen Stab- und Schalenstrukturen für alle gängigen Beanspruchungsarten keine Berechnungsfehler infolge inkompatibler Approximationsräume auftreten.



## Abstract

Piezoelectric materials are increasingly employed throughout the field of sensor and actuator applications. Numerical tools are essential in assisting the development of such devices. The physical description leads to a boundary value problem with electromechanically coupled differential equations which can be solved approximatively, for example, by the finite element method. As the structures are usually quite thin, piezoelectric beam and shell elements are very well suited for this task.

In piezoelectric materials, the mechanical and electrical fields are coupled by the constitutive relations. Especially for problems dominated by bending, this results in incompatibilities when using standard element formulations where the mechanical and electrical degrees of freedom are interpolated with lowest order functions. As a consequence parasitic approximations and incorrect computation results occur.

The present work proposes a concept to avoid these incompatible approximation spaces and the thus occurring computation errors when dealing with thin structures for all typical kinds of polarisation and loading cases. The approach is based on a mixed variational formulation combined with the EAS-method. It allows for approximations of the mechanical and electrical field quantities independent of the interpolation functions.

The concept was integrated into the development of a piezoelectric shell and beam element. The piezoelectric shell element is based on a mechanical shell formulation with Reissner-Mindlin kinematics and enables the consideration of strains throughout the thickness. Also, the analysis of layered piezoelectric sensor structures becomes possible without parasitic approximations. The piezoelectric beam element is based on a mechanical beam formulation with Timoshenko kinematics and accounts for strains throughout the thickness and width. Since cross section warping is also covered by the concept, the mechanical and electrical fields are well balanced even when considering torsion as a loading case. Both element formulations allow for 3D-electromechanical constitutive relations and use six mechanical and two electrical nodal degrees of freedom: three displacements, three rotations and the electric potential on the top and at the bottom of the structure.

Numerical examples show that the element formulations are electromechanically consistent and make it possible to analyse piezoelectric beam and shell structures without parasitic approximations for all typical loading cases.





## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Motivation . . . . .	3
1.2	Stand der Forschung und Ziele der Arbeit . . . . .	3
1.3	Gliederung der Arbeit . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Elektromechanik deformierbarer Dielektrika</b>	<b>8</b>
2.1	Grundlagen der Kontinuumsmechanik . . . . .	8
2.1.1	Kinematik finiter Deformationen . . . . .	8
2.1.2	Definition von Verzerrungsmaßen . . . . .	10
2.2	Grundlagen der elektrostatischen Feldtheorie . . . . .	12
2.2.1	Mikroskopische Betrachtung . . . . .	12
2.2.2	Makroskopische Betrachtung . . . . .	14
2.2.3	Theorie der linearen Piezoelektrizität . . . . .	16
2.3	Bilanzgleichungen . . . . .	17
2.3.1	Massenbilanz . . . . .	18
2.3.2	Impulsbilanz . . . . .	18
2.3.3	Drehimpulsbilanz . . . . .	19
2.3.4	Ladungsbilanz . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Stoffgleichungen deformierbarer Dielektrika</b>	<b>22</b>
<b>4</b>	<b>Inkompatible Approximationsräume der FEM bei elektromechanischen Feldproblemen</b>	<b>30</b>
4.1	Stabmodell eines in Dickenrichtung gepolten piezoelektrischen Sensors . . . . .	30
4.1.1	Längsbeanspruchung . . . . .	31
4.1.2	Einachsige Biegebeanspruchung . . . . .	31
4.1.3	Querbeanspruchung . . . . .	32
4.1.4	Torsionsbeanspruchung . . . . .	32
4.2	Verallgemeinerte Betrachtungsweise . . . . .	33

<b>5</b>	<b>Technologien der FEM zur Beseitigung inkompatibler Approximationsräume</b>	<b>36</b>
5.1	Konsistente lineare Approximation der mechanischen und elektrischen Freiheitsgrade . . . . .	36
5.2	Approximation mit Ansatzfunktionen höherer Ordnung . . . . .	38
<b>6</b>	<b>Piezelektrische FE Schalenformulierung</b>	<b>40</b>
6.1	Vorbemerkungen zur Modellbildung . . . . .	40
6.2	Kinematische Annahmen der Schalenformulierung . . . . .	42
6.2.1	Mechanischer Teil . . . . .	42
6.2.2	Elektrischer Teil . . . . .	45
6.2.3	Generalisierte Darstellung der kinematischen Schalengrößen	46
6.3	Variationsformulierung des Randwertproblems . . . . .	46
6.3.1	Green'sche Verzerrungen . . . . .	46
6.3.2	Elektrisches Feld . . . . .	53
6.3.3	Generalisierte Darstellung der unabhängigen Schalengrößen	55
6.3.4	Formulierung des Randwertproblems . . . . .	56
6.3.5	Schwache Form und Linearisierung des Randwertproblems	58
6.4	Finite-Elemente-Approximation . . . . .	59
6.4.1	Approximation von Ausgangskonfiguration und Momentan- konfiguration der Schale . . . . .	59
6.4.2	Interpolation der Spannungen und der dielektrischen Ver- schiebungen . . . . .	65
6.4.3	Interpolation der Verzerrungen und des elektrischen Feldes	66
6.4.4	Approximation der schwachen Form des Randwertproblems	68
<b>7</b>	<b>Numerische Beispiele - Piezelektrische Schalenformulierung</b>	<b>71</b>
7.1	Piezelektrische Patch-Tests . . . . .	71
7.1.1	Membranbeanspruchung durch Längsbelastung . . . . .	72
7.1.2	Membranbeanspruchung durch ein elektrisches Feld . . . . .	73
7.1.3	Reine Biegebeanspruchung . . . . .	73
7.1.4	Querbeanspruchung . . . . .	74

7.2	Bimorph-Aktor . . . . .	79
7.3	Schub- und Torsionsaktor . . . . .	80
7.4	Geschichteter Querschnitt unter Querbelastung . . . . .	84
7.4.1	Validierung der Schubsteifigkeit . . . . .	85
7.4.2	Mechanischer Sandwichquerschnitt . . . . .	85
7.4.3	Piezoelektrischer Multimorph . . . . .	89
7.5	Zylinderförmiger Segmentaktor . . . . .	91
7.6	Dynamische Beanspruchung einer halbkreisförmigen Ringschale . . . . .	96
<b>8</b>	<b>Piezoelektrische FE 3D-Stabformulierung</b>	<b>101</b>
8.1	Vorbemerkungen zur Modellbildung . . . . .	101
8.2	Kinematische Annahmen der Stabformulierung . . . . .	102
8.2.1	Mechanischer Teil . . . . .	102
8.2.2	Elektrischer Teil . . . . .	105
8.2.3	Generalisierte Darstellung der kinematischen Stabgrößen . . . . .	107
8.3	Variationsformulierung des Randwertproblems . . . . .	108
8.3.1	Green'sche Verzerrungen . . . . .	108
8.3.2	Elektrisches Feld . . . . .	110
8.3.3	Generalisierte Darstellung der unabhängigen Stabgrößen . . . . .	113
8.3.4	Formulierung des Randwertproblems . . . . .	113
8.3.5	Schwache Form und Linearisierung des Randwertproblems . . . . .	115
8.4	Finite-Elemente-Approximation . . . . .	116
8.4.1	Approximation von Ausgangskonfiguration und Momentan- konfiguration des Stabes . . . . .	116
8.4.2	Interpolation der Spannungen und der dielektrischen Ver- schiebungen . . . . .	118
8.4.3	Interpolation der Verzerrungen und des elektrischen Feldes . . . . .	119
8.4.4	Approximation der schwachen Form des Randwertproblems . . . . .	120

---

<b>9</b>	<b>Numerische Beispiele - Piezoelektrische Stabformulierung</b>	<b>123</b>
9.1	Piezoelektrische Patch-Tests . . . . .	123
9.1.1	Längsbeanspruchung . . . . .	124
9.1.2	Einachsige Biegebeanspruchung . . . . .	125
9.1.3	Querbeanspruchung . . . . .	126
9.1.4	Torsionsbeanspruchung . . . . .	128
9.1.5	Beanspruchung durch ein elektrisches Feld . . . . .	131
9.2	Piezoelektrischer Stab auf zwei Stützen . . . . .	131
9.3	Piezoelektrischer Kragarm unter Endmoment . . . . .	134
9.4	Kreisringsensor unter Querbelastung . . . . .	136
<b>10</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>138</b>
<b>11</b>	<b>Ausblick</b>	<b>140</b>
<b>12</b>	<b>Empfehlungen für die Praxis</b>	<b>141</b>
12.1	Sensoren . . . . .	141
12.1.1	Dehnsensoren . . . . .	141
12.1.2	Biegesensoren . . . . .	141
12.2	Aktoren . . . . .	142
12.2.1	Unbehinderte Verformung . . . . .	142
12.2.2	Keine unbehinderte Verformung . . . . .	142
<b>A</b>	<b>Transformation zwischen lokalen und globalen elektrischen Freiheitsgraden</b>	<b>143</b>
<b>B</b>	<b>Orthogonalisierungskoeffizienten für die EAS-Ansätze der Schalen- und Stabformulierung</b>	<b>144</b>
B.1	Schalenformulierung . . . . .	144
B.2	Stabformulierung . . . . .	145
<b>C</b>	<b>Herleitung der analytischen Lösung für den Biegesensor bei Querbelastung</b>	<b>146</b>

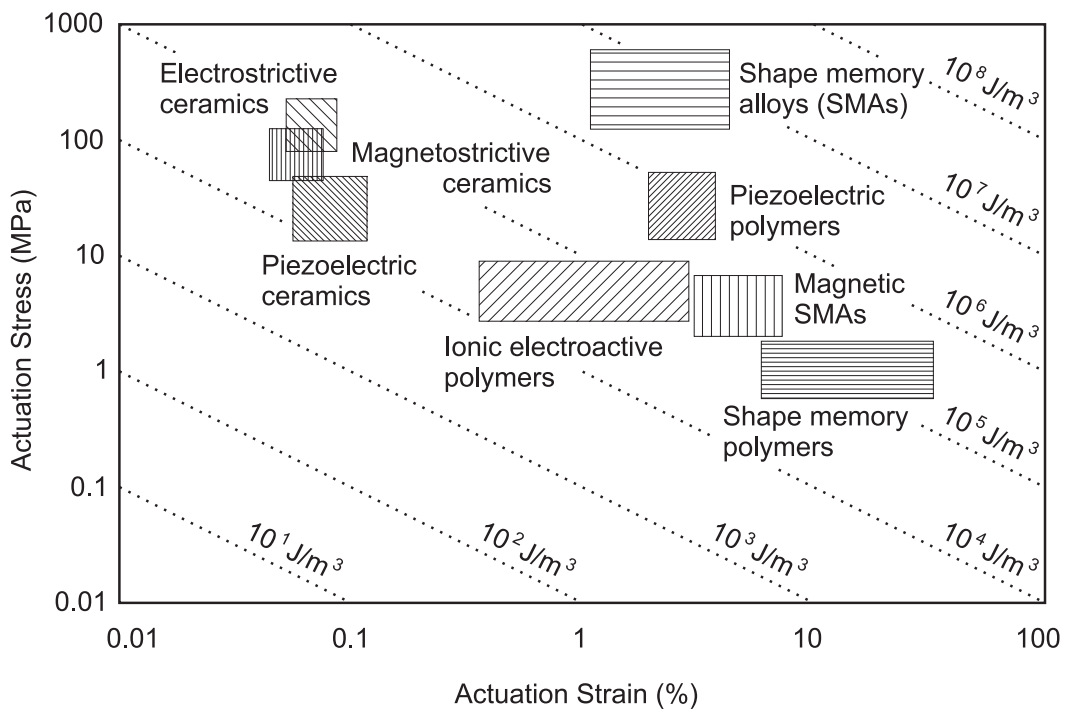
---

<b>D</b>	<b>Verlauf der Schubspannung über die Dicke bei einem geschichteten Querschnitt</b>	<b>149</b>
<b>E</b>	<b>Materialdaten</b>	<b>151</b>
E.1	Beispiel: Torsionsaktor . . . . .	151
E.2	Beispiele: Dynamische Beanspruchung einer halbkreisförmigen Ringschale und Kragarm unter Endmoment . . . . .	151
E.3	Beispiele: Zylinderförmiger Segmentaktor und Kreisringsensor unter Querbelastrung . . . . .	152
E.4	Beispiel: Piezoelektrischer Stab auf zwei Stützen . . . . .	152
	<b>Literatur</b>	<b>153</b>



# 1 Einleitung

Funktionsmaterialien sind in der Lage, Energie nicht nur in einer Hauptenergieform speichern zu können, sondern gleichzeitig auch in einer Nebenenergieform von einer solchen Größenordnung, dass sich diese technisch nutzen lässt. MAN-KAME & ALEXANDER charakterisieren die heutzutage eingesetzten Funktionsmaterialien in [79] ausführlich. Eine Übersicht aktueller Funktionsmaterialien, ein-



**Abb. 1.1:** Einteilung heute gängiger Funktionsmaterialien nach LAGOUDAS [68]

geordnet nach ihrer jeweiligen Energiedichte und dem zulässigen Arbeitsbereich ist - wie auch zu finden in LAGOUDAS [68] - im Diagramm in Abbildung 1.1 dargestellt.

Die vorliegende Arbeit ist auf piezoelektrische Keramiken (Piezoelektrika) unter Vernachlässigung dissipativer Prozesse fokussiert. Piezoelektrika gibt es sowohl natürlich vorkommend, z.B. Quarz, aber auch in synthetisch erzeugter Form, z.B. Blei-Zirkonat-Titanat (PZT) oder Bariumtitanat (BTO). Sie können bei einer äußeren Beanspruchung mechanische und elektrische Energie als Hauptenergieform und Nebenenergieform speichern.

Dies wurde im Jahre 1880 von Jacques und Pierre Curie anhand des direkten und inversen piezoelektrischen Effekts entdeckt, vgl. beispielsweise KATZIR [58].

Der direkte piezoelektrische Effekt besagt, dass unter einer mechanischen Beanspruchung neben der mit der Verformung primär mechanisch gespeicherten Energie auch elektrische Energie gespeichert wird, was man am Auftreten messbarer elektrischer Spannung erkennt. Der inverse piezoelektrische Effekt bewirkt, dass mit dem Anlegen einer elektrischen Spannung neben der primär elektrisch gespeicherten Energie auch mechanische Energie gespeichert wird, was man an der auftretenden Verformung erkennt.

Diese Effekte lassen sich technisch sehr gut nutzen: Beruht eine Anwendung auf dem direkten Effekt, spricht man von einem piezoelektrischen Sensor. Wird der inverse Effekt genutzt, spricht man von einem piezoelektrischen Aktor. Ausführliche Beschreibungen technischer Anwendungsmöglichkeiten geben zum Beispiel CRAWLEY [35], TANI et al. [110], RAO & SUNAR [94], LIU et al. [75], ALKHATIB & GOLNARAGHI [3]. Kurze Reaktionszeiten, hohe Präzision und Dauerhaftigkeit machen ihren Einsatz interessant für viele Fachbereiche: In der Optik zum Scannen, Fokussieren und zur Positionierung von Spiegeln und Linsen; in der Fluidtechnik für Ventile und Pumpen; in der Luft- und Raumfahrt für aktive Klappen und Flügel; in der Mechanik zum Positionieren von Werkzeugen, für aktive Keile und Federn, zur Erzeugung von Ultraschallwellen für Messgeräte; im Bauwesen für die Zustandskontrolle von Tragwerken oder die Detektion von Rissen mit zerstörungsfreier Prüfung sowie zur Schwingungsdämpfung; im Maschinenbau zum Beispiel für Reibelemente oder Einspritzdüsen neuerer Generation, vgl. MOCK & LUBITZ [86]. Darüber hinaus gibt es eine Vielzahl von Anwendungen in der Mechatronik, der Medizintechnik und der Microsystemtechnik.

Bei Menschen und Tieren finden sich elektromechanische Sensoren beispielsweise in Form von Flimmerhärchen im Gehör, welche die mechanische Beanspruchung durch Schall in elektrische Impulse umwandeln und weiterleiten. Pflanzen können wechselnde Umgebungsbedingungen wahrnehmen und sind sogar in der Lage, sich daran anzupassen. Die Fähigkeit, ihr Wachstum nach dem Lichteinfall auszurichten, hat für sie eine zentrale Bedeutung. Die Entwicklung von technischen Anwendungen mit dem Vorbild der Natur werden zusammengefasst unter dem Begriff der Biomimetik, vgl. BUSHAN [27]. Hierzu zählen demnach auch adaptive Systeme (smart structures), welche in der Lage sind, sich z.B. durch die Änderung ihrer Form an veränderte äußere Bedingungen anzupassen. Sie bestehen aus der Kombination von Sensor, Aktor und Steuereinheit. Dabei detektiert der Sensor eine äußere Bedingung, beispielsweise eine mechanische Schwingung, und übergibt die hierfür charakteristischen Informationen an eine Steuereinheit. Diese bestimmt anhand dessen eine Maßnahme und leitet durch Senden der hierfür erforderlichen Signale deren Umsetzung durch den Aktor ein. Eine von vielen möglichen Anwendungen, vgl. GAUDENZI [42], ist die adaptive Vibrationskon-



trolle von Helikopterrotorblättern zur Reduktion der Geräuschemissionen und Verbesserung der Rotordynamik, wie zu finden in PRECHTEL [92].

## 1.1 Motivation

Bei der Entwicklung von Bauteilen in der Sensorik und Aktorik sind sehr genaue Kenntnisse darüber erforderlich, welche elektrische Spannung mit welchen Verformungen korrespondiert. Hierfür sind numerische Methoden als Hilfsmittel von großer Bedeutung.

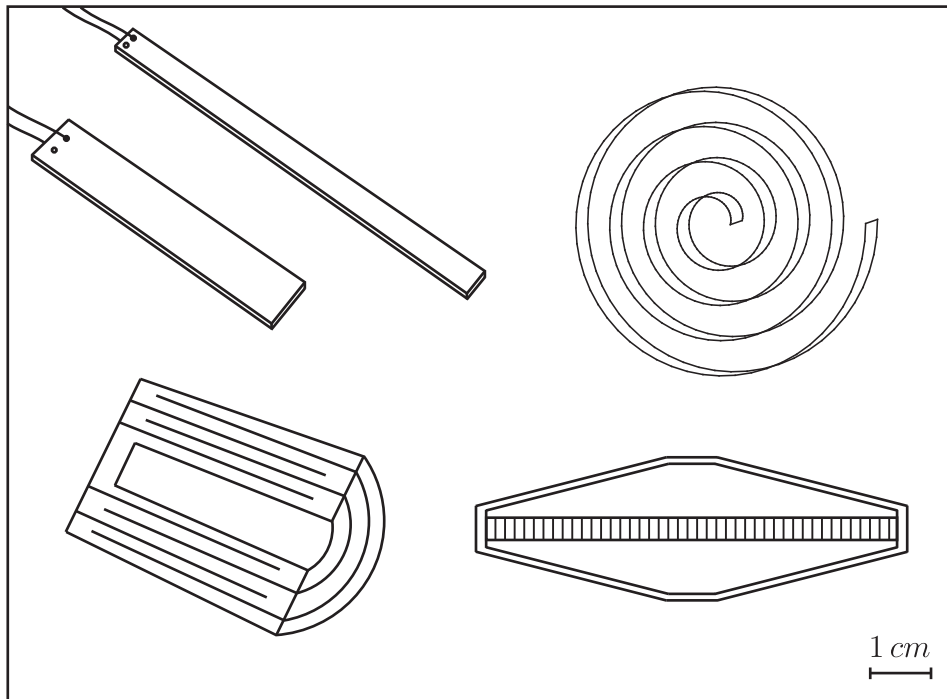
Die physikalische Beschreibung des Materialverhaltens führt auf ein System von elektromechanisch gekoppelten Differentialgleichungen. Für die Lösung des gekoppelten Randwertproblems kann die Finite-Elemente-Methode genutzt werden. Über die konstitutive Beziehung werden mechanische Verzerrungen und die Komponenten des elektrischen Feldes additiv gekoppelt. Da diese im Allgemeinen in unterschiedlichen Funktionsräumen approximiert werden, führt dies für bestimmte Beanspruchungen im Rahmen einer numerischen Analyse zu Unverträglichkeiten, welche mit denjenigen vergleichbar sind, die in rein mechanischen Problemen für so genannte Locking-Effekte verantwortlich sind. Diese Unverträglichkeiten treten insbesondere in Finite-Element-Formulierungen auf, bei denen die mechanischen und elektrischen Freiheitsgrade mit Polynomen niedriger Ansatzordnung interpoliert werden.

In der Literatur finden sich keine Arbeiten, in denen die Ursache der auftretenden Unverträglichkeiten umfassend untersucht wurde. Für die vorliegende Arbeit stellte sich daher als Ausgangsfrage, wie sich die Unverträglichkeiten und die damit verbundenen Berechnungsfehler der Finite-Elemente-Methode verhindern lassen.

## 1.2 Stand der Forschung und Ziele der Arbeit

Das Ziel dieser Arbeit ist es, ein geeignetes, allgemein gültiges Lösungskonzept zur Vermeidung unausgewogener Approximationsräume im Rahmen der Finite-Elemente-Methode bereitzustellen und damit eine konsistente numerische Modellierung elektromechanischer Feldprobleme zu ermöglichen.

Es werden permanent neue Aktoren und Sensoren entwickelt, eine Übersicht über gängige Bauteilklassen findet sich in TRESSLER et al. [112] und BREI et al. [23]. Eine Auswahl typischer Bauformen ist in Abbildung 1.2 zu sehen und zu finden in ALEXANDER et al. [2], NIEZRECKI [88] et al. und SU et al. [105]. Häufig haben die Bauteile eine stab- oder schalenartige Geometrie. Daher eignen sich für



**Abb. 1.2:** Typische Sensor- und Aktorbauweisen

die numerische Untersuchung piezoelektrische Stab- und Schalenformulierungen im Rahmen der Finite-Elemente-Methode. In der Literatur gibt es hierzu eine Reihe von Arbeiten. BENJEDDOU [12] gibt eine Übersicht über die Entwicklungen bezüglich aller piezoelektrischen Elementklassen.

Darüber hinausgehend werden piezoelektrische Schalenmodellierungen aus neuerer Zeit vorgestellt in BERNADOU & HAENEL [14], LAMMERING & MESECKE-RISCHMANN [69], MESECKE-RISCHMANN [85], DE MIRANDA & UBERTINI [37], KÖGL & BUCALEM [59], RACHMADINI et al. [93], MARINKOVIĆ et al. [81], VARELIS & SARAVANOS [115], SCHULZ et al. [99], SCHULZ [98], ZEMČÍK et al. [125] und ZOUARI et al. [128]. Diese beschreiben den Schalenraum mathematisch bezüglich einer Referenzfläche. Viele praxisrelevante Bauteile in der Sensorik und Aktorik sind aus unterschiedlichen Materialschichten aufgebaut und unterliegen sehr häufig dynamischen Beanspruchungen, siehe hierzu beispielsweise VEPA [116], BECKER et al. [11] und YOON & WASHINGTON [124]. Um dies berücksichtigen zu können, muss die Schalenmodellierung eine geeignete Laminattheorie beinhalten. Für piezoelektrische Volumen-Schalen-Elemente, siehe zum Beispiel SZE & YAO [107], SZE et al. [108], ZHENG et al. [126], TAN & VU-QUOC [109], KLINKEL et al. [62], ist keine Laminattheorie notwendig.

Piezoelektrische Stabformulierungen beschränken sich häufig auf eine zweidimen-

sionale Modellierung. Für die Untersuchung komplizierterer Bauweisen der Sensorik und Aktorik sowie für Anwendungen unter Torsionsbeanspruchung ist eine dreidimensionale Modellierung unerlässlich. Dennoch gibt es zu dieser Thematik bisher nur wenige Veröffentlichungen. In diesem Zusammenhang zu erwähnen sind die Arbeiten von GANAPATHI et al. [41], BROCKMANN [26], WANG & WANG [121] und BUTZ et al. [29].

AHMAD et al. [1] und KÖGL & BUCALEM [59] geben einen Überblick darüber, welche Ansätze für den Verlauf des elektrischen Potentials in existierenden piezoelektrischen Stab- und Schalenformulierungen zum Einsatz kommen. Eine Reihe von numerischen Modellierungen, die von einem konstanten Verlauf des elektrischen Feldes über die Dicke des Querschnitts ausgehen - und daher mit unausgewogenen Approximationsräumen arbeiten - können nur für bestimmte Beanspruchungsarten korrekte Ergebnisse liefern. WANG & WANG [121] begünden dies analytisch, indem sie zeigen, dass ein linearer Verlauf des elektrischen Potentials nicht ausreicht, um die physikalischen Verhältnisse unter Biegebeanspruchung korrekt wiederzugeben. Diese Aussage deckt sich mit den Erkenntnissen in YANG [123] sowie IRSCHIK & KROMMER [53] und wurde in den Elementformulierungen neuerer Zeit wie BERNADOU & HAENEL [14], LAMMERING & MESECKE-RISCHMANN [69], RACHMADINI et al. [93], KLINKEL et al. [62], MARINKOVIĆ et al. [81], BUTZ et al. [29], SCHULZ et al. [99], SCHULZ [98] und ZOUARI et al. [128] berücksichtigt.

Wird im Schrifttum auf Berechnungsfehler eingegangen, erfolgt dies ausnahmslos für Lastfälle, welche querkraftfreie Biegezustände hervorrufen. Dies entspricht nur selten üblichen Verformungszuständen in der Sensorik und Aktorik und beinhaltet die Problematik unausgewogener Approximationsräume nur in abgeschwächter Form. Zum Beispiel wird von DE MIRANDA & UBERTINI in [36] und [37] von Oszillationen der Spannungen und dielektrischen Verschiebungen bei Finite-Elemente-Berechnungen unter Biegebeanspruchung berichtet. Diese resultieren aus genau diesen Unverträglichkeiten aufgrund unverträglicher Approximationsräume der Verzerrungen und des elektrischen Feldes. Eine Analyse der Ursache parasitärer Approximationen findet sich in der Literatur nicht.

Biegeaktoren sind die in der Aktorik am häufigsten eingesetzten Bauteile. In diesem Fall haben das angelegte elektrische Feld und die Polarisierung des Materials die gleiche Orientierung. Aufgrund der höheren Effizienz des piezoelektrischen Effekts im Schubbetrieb haben innerhalb der letzten Jahre auch Schubaktoren an Bedeutung gewonnen. Dabei sind das elektrische Feld und die Polarisierung senkrecht zueinander orientiert. Eine Übersicht über die bisherigen Entwicklungen für diese Anwendungsklasse ist in BENJEDDOU [13] zu finden.

Die Erfassung von geometrischen Nichtlinearitäten ist nicht nur - wie zum Beispiel in MERESSI & PADEN [84] dargestellt - für Stabilitätsanalysen piezoelek-

trischer Strukturen von Bedeutung. Gemäß den Untersuchungen von MUKHERJEE & CHAUDURI [87] hängen die Berechnungsergebnisse für das elektrische Potential, das sich in einem Sensor einstellt, erheblich davon ab, ob geometrisch lineare oder geometrisch nichtlineare kinematische Annahmen zugrunde liegen. Insbesondere im Kontext von Präzisionsbauteilen innerhalb eines adaptiven Systems ist eine genaue numerische Ermittlung der am Sensor messbaren elektrischen Spannung unerlässlich.

Aus dem sich daraus ergebenden Forschungsbedarf ist diese Arbeit auf die Entwicklung eines durch die Verwendung abgestimmter Ansatzräume konsistenten piezoelektrischen 3D-Stackelements und eines konsistenten piezoelektrischen Schalenelements fokussiert, welche frei sind von parasitären Approximationen und damit eine zuverlässige und effiziente Berechnung von piezoelektrischen Strukturen bei beliebiger Beanspruchung ermöglichen. Dabei sollen 3D-konstitutive Beziehungen ohne Modifikation verwendet werden können, dynamische und geometrisch nichtlineare Analysen möglich sein, typische, richtungstreue Polarisationsarten berücksichtigen und mit der Schalenformulierung auch geschichtete Strukturen untersucht werden können.

### 1.3 Gliederung der Arbeit

- In **Kapitel 2** werden die Grundlagen der Elektromechanik deformierbarer Dielektrika zusammengestellt. Sie dienen im Rahmen dieser Arbeit als Basis für die mathematische Beschreibung elektromechanisch gekoppelter Feldprobleme und bestehen aus den dafür erforderlichen Grundlagen der Kontinuumsmechanik, den Grundlagen sowie wesentlichen Begriffen der elektrostatischen Feldtheorie und den Bilanzrelationen. Dabei zeigt sich, dass im Kontext von technischen Anwendungen der Spannungstensor auch für piezoelektrische Kontinua als symmetrisch angesehen werden kann.
- In **Kapitel 3** werden, ausgehend von allgemeiner Anisotropie, die transversalisotropen Stoffgleichungen für deformierbare Dielektrika abgeleitet und in allgemeiner Form für die typischen Fälle angegeben, bei denen die Polarisierung und damit die Vorzugsrichtung mit einer der drei Hauptrichtungen übereinstimmt.
- In **Kapitel 4** werden an einem Stabmodell die Ursachen für parasitäre Approximationen und die damit verbundenen Berechnungsfehler untersucht. Hierfür wird beschrieben, welche mechanischen Verzerrungskomponenten und elektrischen Feldkomponenten für typische Beanspruchungsarten jeweils auftreten, welchen Funktionsräumen diese angehören und wie die me-

chanischen und elektrischen Komponenten über die konstitutive Beziehung gekoppelt sind. Dabei wird von einer linearen Interpolation des elektrischen Potentials ausgegangen, wie sie in gewöhnlichen Finite-Element-Formulierungen verwendet wird. Es stellt sich heraus, dass die parasitären Approximationen mit einer fehlenden Balance der Approximationsräume für die Lastfälle Biegung und Torsion zusammenhängen.

- In **Kapitel 5** wird diskutiert, inwiefern gängige Methoden der Finite-Elemente-Technologie zur Beseitigung der inkompatiblen Approximationsräume bei elektromechanischen Feldproblemen angewendet werden können. Durch die Kombination verschiedener Methoden ergab sich eine effiziente Lösungsstrategie.
- In **Kapitel 6** wird die Formulierung eines elektromechanisch konsistenten Schalenelements beschrieben. Das Auftreten von parasitären Approximationen bei der Kopplung elektrischer und mechanischer Felder wird unter Verwendung der gemischten Methode und der Einbeziehung der EAS-Methode auch für typische, geschichtete Strukturen der Sensorik verhindert.
- In **Kapitel 7** wird anhand von numerischen Beispielen sowohl die piezoelektrische Schalenformulierung validiert als auch die vollständige Beseitigung von parasitären Approximationen veranschaulicht.
- In **Kapitel 8** ist die Formulierung eines elektromechanisch konsistenten Stabelements beschrieben. Durch Verwendung der gemischten Methode in Verbindung mit der EAS-Methode sind die Approximationsräume der elektrischen und mechanischen Felder auch bei der Analyse von Stabstrukturen unter Torsionsbeanspruchung ausgewogen.
- In **Kapitel 9** wird die piezoelektrische Stabformulierung anhand von numerischen Beispielen validiert und gezeigt, dass durch die Verwendung elektromechanisch abgestimmter Ansatzräume keine parasitären Approximationen auftreten.
- In **Kapitel 10** wird eine kurze Zusammenfassung der im Rahmen dieser Arbeit erzielten Fortschritte gegeben.
- In **Kapitel 11** wird in Form eines Ausblicks beschrieben, welche weiterführenden Forschungsarbeiten sich durch die gewonnenen Erkenntnisse ergeben könnten.
- In **Kapitel 12** werden auf den Untersuchungsergebnissen dieser Arbeit basierende Praxisempfehlungen bei der Verwendung von piezoelektrischen Stab- und Schalenelementen formuliert.

## 2 Elektromechanik deformierbarer Dielektrika

### 2.1 Grundlagen der Kontinuumsmechanik

In diesem Abschnitt werden die grundlegenden Beziehungen der Kontinuumsmechanik angegeben, welche für die Finite-Element-Formulierungen im Rahmen dieser Arbeit von Bedeutung sind. Hierzu erfolgt zunächst die mathematische Beschreibung der Kinematik eines Körpers - die Grundlage für die darauf folgende Definition von Verzerrungsmaßen. Die nachfolgend angegebenen Zusammenhänge und Beschreibungen finden sich in ausführlicherer Darstellung in den Standardwerken der Kontinuumsmechanik, siehe zum Beispiel BAŞAR & WEICHERT [8], BERTRAM [15], HOLZAPFEL [50], ŠILHAVÝ [100], STEIN & BARTHOLD [104].

#### 2.1.1 Kinematik finiter Deformationen

Unter einem materiellen Körper versteht man in der Kontinuumsmechanik einen geschlossenen Bereich, der aus kontinuierlich verteilten materiellen Punkten besteht. Für eine mathematische Beschreibung werden die materiellen Punkte in den Euklidischen Raum  $\mathbb{E}^3$  abgebildet. Darin lässt sich jeder materielle Punkt durch seine Position identifizieren. Die Bewegung des Körpers lässt sich über die Lage der materiellen Punkte zu verschiedenen Zeitpunkten beschreiben.

Die Konfiguration  $\mathcal{B}_0 \subset \mathbb{E}^3$  zum Zeitpunkt  $t = t_0$  wird als Ausgangskonfiguration oder Bezugsplatzierung des Körpers bezeichnet, ein materieller Punkt  $\mathcal{P}_0 \in \mathcal{B}_0$  wird durch den Ortsvektor  $\mathbf{X} = X^i \mathbf{e}_i$  bezüglich der raumfesten Orthonormalbasis  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  beschrieben, welche durch  $\|\mathbf{e}_i\| = 1$  und

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \quad (2.1)$$

definiert ist.

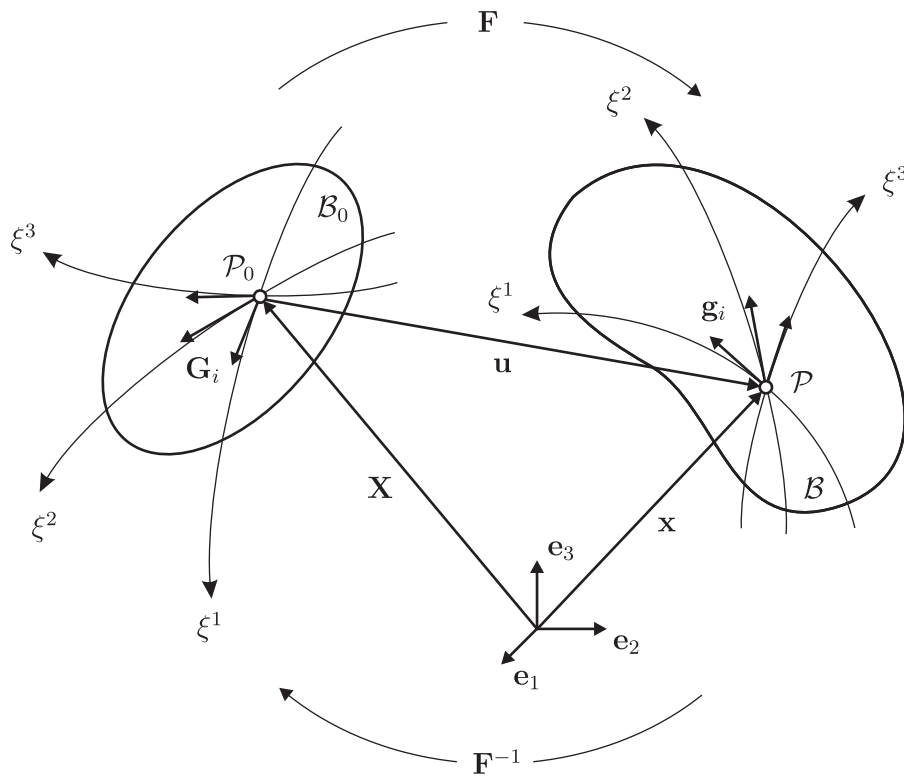
Zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t$  nimmt der Körper die Momentanplatzierung  $\mathcal{B}$  ein. Die Lage des materiellen Punktes  $\mathcal{P} \in \mathcal{B}$  wird durch den Ortsvektor

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) = \chi(\mathbf{X}, t) \quad (2.2)$$

identifiziert, womit die Bewegung des Körpers durch die Verwendung der materiellen Koordinaten  $\mathbf{X}$  als unabhängige Größe in sogenannter Lagrange'scher Darstellung gegeben ist.

Dabei wird gefordert, dass die Abbildung

$$\chi(\mathbf{X}, t) : \mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B} \subset \mathbb{E}^3 \quad (2.3)$$



**Abb. 2.1:** Bezugsplatzierung und Momentanplatzierung eines Körpers in  $\mathbb{E}^3$

zweimal stetig differenzierbar ist und die inverse Abbildung existiert. Als abgeleitete Größe ergibt sich daraus die Verschiebung

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \chi(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} \quad (2.4)$$

eines materiellen Punktes in Lagrange'scher Darstellung. Eine Kurve aus materiellen Punkten bildet eine materielle Linie. Der Tangentenvektor an eine materielle Linie wird als materielles Linienelement bezeichnet. Die Deformation des Körpers wird durch die Änderung von materiellen Linienelementen  $d\mathbf{x}$ , materiellen Flächenelementen  $d\mathbf{a}$  und materiellen Volumenelementen  $dV$  beschrieben. Hierfür wird die lineare Abbildung

$$\mathbf{F} := \frac{\partial \chi(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} = \text{Grad}[\mathbf{x}] \quad (2.5)$$

definiert und als Definitionsgradient bezeichnet. Um die Existenz der Umkehrabbildung  $\mathbf{F}^{-1}$  zu gewährleisten, muss  $\det[\mathbf{F}] > 0$  erfüllt sein. Der Deformationsgradient  $\mathbf{F}$  bildet ein materielles Linienelement  $d\mathbf{X}$  von der Bezugsplatzierung auf  $d\mathbf{x}$  in der Momentanplatzierung ab über die Beziehung

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X} \quad . \quad (2.6)$$

Drückt man materielle Flächenelemente und materielle Volumenelemente durch materielle Linienelemente aus, folgt unter Anwendung von Gleichung 2.6 sowie der Definition des Spatprodukts die Transformation von Volumenelementen

$$dv = \det[\mathbf{F}] dV \quad (2.7)$$

und die Piola-Transformation von vektoriellen Flächenelementen

$$d\mathbf{a} = \det[\mathbf{F}] \mathbf{F}^{-T} d\mathbf{A} \quad . \quad (2.8)$$

Die Gleichungen 2.6 - 2.8 ermöglichen die Transformation von Integrationsbereichen der Bezugs- und Momentanplatzierung.

### 2.1.2 Definition von Verzerrungsmaßen

Nach dem Satz zur polaren Zerlegung lässt sich der Deformationsgradient  $\mathbf{F}$  mit

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R} \quad (2.9)$$

in einen Verzerrungs- und einen Rotationsanteil zerlegen, wobei der rechte Strecktensor  $\mathbf{U}$ , der linke Strecktensor  $\mathbf{V}$  und der orthogonale Tensor  $\mathbf{R}$  eindeutig bestimmt sind. Anschaulich bewirkt die polare Zerlegung nach Gleichung 2.9 die Darstellung der Deformation als Hintereinanderschaltung einer Streckung und einer Drehung oder umgekehrt. Dabei bewirkt der Rotationstensor  $\mathbf{R}$  eine reine Drehung von materiellen Linienelementen, welche nicht zur Deformation des Körpers beitragen. Der rechte Strecktensor  $\mathbf{U}$  und der linke Strecktensor  $\mathbf{V}$  bewirken eine reine Streckung von materiellen Linienelementen, die in Richtung einer ihrer Eigenvektoren orientiert sind. Mit der Definition des rechten Cauchy-Green Tensors

$$\mathbf{C} := \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad (2.10)$$

und des linken Cauchy-Green Tensors

$$\mathbf{B} := \mathbf{F}\mathbf{F}^T \quad (2.11)$$

werden wegen der orthogonalen Eigenschaft von  $\mathbf{R}$  die Rotationsanteile der Bewegung des Körpers gefiltert. Da sie im undeformierten Zustand auf den Identitätstensor  $\mathbf{1}$  führen, sind sie dennoch nicht als objektives Verzerrungsmaß für die Verwendung in Bilanzrelationen geeignet.

Die Definition des Green'schen Verzerrungstensors

$$\mathbf{E} := \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}) \quad (2.12)$$



behebt dieses Problem. Anschaulich kann er als Maß für die Änderung der quadrierten Länge eines Linienelementes  $d\mathbf{X}$  durch die Abbildung  $\chi(\mathbf{X}, t)$  interpretiert werden.

Zu einer weiteren Darstellung des Green'schen Verzerrungsmaßes gelangt man, wenn die Ortsvektoren nicht bezüglich der Orthonormalbasis  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ , sondern mit  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$  und  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$  als Funktionen konvektiver Koordinaten  $\xi^i$  ausgedrückt werden. Mit den Tangentenvektoren

$$\mathbf{G}_i = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi^i} = \frac{\partial X^k}{\partial \xi^i} \mathbf{e}_k \quad (2.13)$$

an die konvektiven Koordinaten ist ein kovariantes Basissystem im Punkt  $\mathcal{P}_0$  der Ausgangskonfiguration gegeben, siehe Abbildung 2.1. Die Verwendung eines schiefwinkligen Basissystems erfordert immer die Mitführung einer Dualbasis oder kontravarianten Basis, welche man mit

$$\mathbf{G}^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial X^k} \mathbf{e}_k \quad (2.14)$$

oder durch Anwendung der Orthogonalitätsrelation

$$\mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}^j = \delta_{ij} \quad (2.15)$$

erhält. Die Metrikkoeffizienten sind gegeben durch

$$\begin{aligned} G_{ij} &= \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j \quad , \\ G^{ij} &= \mathbf{G}^i \cdot \mathbf{G}^j \quad . \end{aligned} \quad (2.16)$$

Analog dazu erhält man die ko- und kontravarianten Basissysteme im Punkt  $\mathcal{P}$  der verformten Konfiguration. Formal sind hierfür in den Gleichungen 2.13 - 2.16 die Symbole  $\mathbf{X}, \mathbf{G}$  und  $X^i, G$  durch  $\mathbf{x}, \mathbf{g}$  und  $x^i, g$  zu ersetzen. Wegen

$$\begin{aligned} d\mathbf{X} &= \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi^i} d\xi^i = \mathbf{G}_i d\xi^i \quad , \\ d\mathbf{x} &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^i} d\xi^i = \mathbf{g}_i d\xi^i \end{aligned} \quad (2.17)$$

folgt mit Gleichung 2.6

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{F} \mathbf{G}_i \quad . \quad (2.18)$$

Dies bedeutet anschaulich, dass der Deformationsgradient  $\mathbf{F}$  die Tangentialbasis  $\mathbf{G}_i$  der Ausgangskonfiguration  $\mathcal{B}_0$  auf die Tangentialbasis  $\mathbf{g}_i$  der Momentankonfiguration  $\mathcal{B}$  abbildet. Aus Gleichung 2.18 folgen mit  $\mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}^j = \mathbf{1}$  die Relationen

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^i \quad , \\ \mathbf{F}^T &= \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{g}_i \quad . \end{aligned} \quad (2.19)$$

Einsetzen von Gleichung 2.19 in 2.12 führt auf

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j - \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j) \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \quad , \quad (2.20)$$

womit sich der Green'sche Verzerrungstensor mittels der begleitenden Tangentialbasissysteme an die konvektiven Koordinaten darstellt.

## 2.2 Grundlagen der elektrostatischen Feldtheorie

Dieser Abschnitt beginnt mit der Beschreibung von grundlegenden Begriffen und Gesetzen der Elektrostatik auf mikroskopischer Ebene. Ausgehend davon erfolgt der Übergang auf eine makroskopische Beschreibung. Abschließend werden darauf aufbauend die Annahmen und Vereinfachungen für die Theorie der linearen Piezoelektrizität zusammengefasst, welche in Kombination mit den grundlegenden Beziehungen der Kontinuumsmechanik die Basis für die mathematische Beschreibung von elektromechanischen Problemstellungen bildet. Die Ausführungen in diesem Kapitel reduzieren die ausführlichen Darstellungen in Lehrbüchern zur Elektrodynamik, wie beispielsweise BRANDT & DAHMEN [21], GREINER [44], GRIFFITHS [45], JACKSON [54] und NOLTING [89], auf die im Rahmen dieser Arbeit relevanten Aspekte und Zusammenhänge.

### 2.2.1 Mikroskopische Betrachtung

Der Ort einer ruhenden Punktladung der Größe  $Q$  im Raum sei durch den Ortsvektor  $\mathbf{X}$  gegeben. Das Coulomb'sche Gesetz

$$\vec{\mathbf{F}}_{ab} = \frac{Q_a Q_b}{4\pi\epsilon_0 \|\mathbf{X}_a - \mathbf{X}_b\|^2} \quad (2.21)$$

beschreibt die elektrisch induzierte Kraft  $\vec{\mathbf{F}}_{ab}$ , die zwischen zwei Punktladungen der Größe  $Q_a$  und  $Q_b$  in Richtung ihrer Verbindungslinie wirkt und proportional zur dielektrischen Konstanten  $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Jm}$  ist. Es ist ein in Experimenten nachgewiesenes Grundgesetz und bildet die Grundlage der Elektrostatik.

Sind mehr als zwei Punktladungen im Raum vorhanden, ergibt sich die resultierende Kraft  $\vec{\mathbf{F}}$  für jede Punktladung nach dem Superpositionsprinzip durch mehrfache Anwendung von Gleichung 2.21.

Die elektrische Feldstärke ist mit

$$\vec{\mathbf{E}}(\mathbf{X}) := \frac{\vec{\mathbf{F}}}{Q} \quad (2.22)$$

am Ort  $\mathbf{X}$  einer Punktladung definiert durch den Quotienten aus der auf sie wirkenden resultierenden Kraft  $\vec{\mathbf{F}}$  und der Größe  $Q$  dieser Punktladung.

In einem Raum mit ortsfesten Punktladungen existiert damit ein Kraftfeld. Dieses ist ein reines Gradientenfeld und damit rotationsfrei. Das elektrische Feld hat daher die Eigenschaft

$$\text{Rot}[\vec{\mathbf{E}}] = \mathbf{0} \quad (2.23)$$

und lässt sich als Gradient eines Skalarfeldes ausdrücken. Mit dem elektrischen Potential  $\varphi(\mathbf{X})$  als Skalarfeld gilt

$$\vec{\mathbf{E}} = -\text{Grad}[\varphi] \quad . \quad (2.24)$$

Das Gauß'sche Gesetz

$$\int_{\partial V} \vec{\mathbf{E}} \mathbf{n} \, dA = \frac{Q_V}{\varepsilon_0} \quad (2.25)$$

besagt, dass der elektrische Fluss durch die ein Volumen  $V$  umschließende Fläche proportional zur in diesem Volumen  $V$  enthaltenen Gesamtladung  $Q_V$  ist. Drückt man diese mit

$$Q_V = \int_V q \, dV \quad (2.26)$$

durch die Verwendung der Ladungsverteilung  $q$  aus, erhält man aus 2.25 nach Umwandlung des Oberflächenintegrals in ein Volumenintegral die lokale Darstellung des Gauß'schen Gesetzes

$$\text{Div}[\vec{\mathbf{E}}] \varepsilon_0 = q \quad . \quad (2.27)$$

Zwei ortsfeste, entgegengesetzte Punktladungen  $Q_D$  mit dem Abstand

$\|\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1\| > 0$  werden als elektrostatischer Dipol bezeichnet. Diesem ist das Dipolmoment

$$\vec{\mathbf{p}} := Q_D [\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1] \quad (2.28)$$

zugeordnet.

Durch die Präsenz eines elektrischen Feldes  $\vec{\mathbf{E}}$  gemäß Abbildung 2.2 wirken auf die Punktladungen des Dipols wegen Gleichung 2.22 die Kräfte  $\vec{\mathbf{F}}_1 = Q_D \vec{\mathbf{E}}(\mathbf{X}_1)$  und  $\vec{\mathbf{F}}_2 = Q_D \vec{\mathbf{E}}(\mathbf{X}_2)$ . Diese sind im allgemeinen Fall nicht parallel und es ist  $\|\vec{\mathbf{F}}_1\| \neq \|\vec{\mathbf{F}}_2\|$ . Auf den Dipol wirkt damit eine resultierende Kraft

$$\vec{\mathbf{f}} := \vec{\mathbf{p}} \cdot \text{Grad}[\vec{\mathbf{E}}] \quad (2.29)$$

und ein Drehmoment

$$\vec{\mathbf{m}} := \vec{\mathbf{p}} \times \vec{\mathbf{E}} \quad . \quad (2.30)$$

In einem homogenen elektrischen Feld ist die Feldstärke überall gleich. Daher ist  $\vec{\mathbf{F}}_1$  parallel zu  $\vec{\mathbf{F}}_2$  und es gilt dann  $\|\vec{\mathbf{F}}_1\| = \|\vec{\mathbf{F}}_2\|$ . Als resultierende Kraft ergibt sich dann  $\vec{\mathbf{f}} = \vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_2 = \mathbf{0}$ , was wegen  $\text{Grad}[\vec{\mathbf{E}}] = \mathbf{0}$  im homogenen Feld auch unmittelbar aus Gleichung 2.29 folgt.

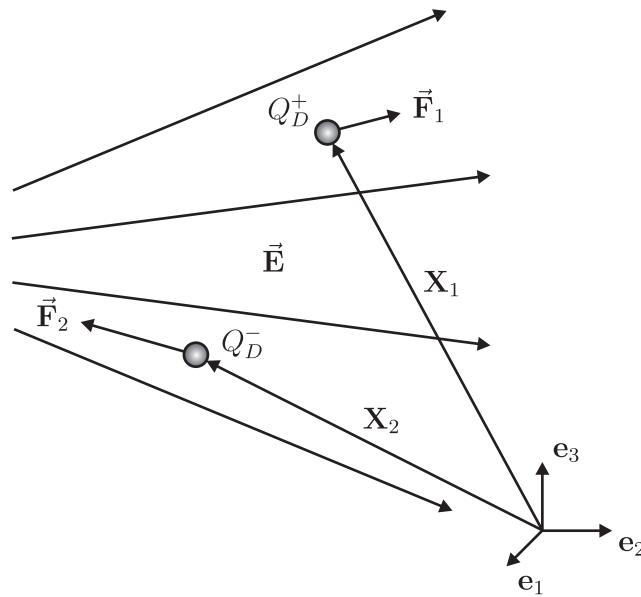


Abb. 2.2: Elektrostatistischer Dipol im inhomogenen elektrischen Feld

### 2.2.2 Makroskopische Betrachtung

Warum eine mikroskopisch exakte Theorie zum einen nicht realisierbar und zum anderen aber auch nicht notwendig ist, wird zum Beispiel in NOLTING [89] diskutiert. Durch eine geeignete, volumenbezogene Mittelung der mikroskopischen Beschreibung gelangt man zu einem makroskopischen Modell, wobei die Gleichungen der mikroskopischen Betrachtung in ihrem Wesen erhalten bleiben. Man geht dabei von Einzelgrößen über auf dichtebezogene Größen, vgl. beispielsweise BRANDT & DAHMEN [21]. Der Übergang von der mikroskopischen auf die makroskopische Ebene ist unumkehrbar, da zum Beispiel verschiedene Punktladungsverteilungen auf dieselbe Ladungsdichte führen können. Damit ist der Verlust von Detailinformationen verbunden, die wesentliche Phänomenologie bleibt jedoch erhalten und ist damit auch auf reale, makroskopische Strukturen anwendbar.

Die lineare Piezoelektrizität ist beschränkt auf Dielektrika. Unter einem Dielektrikum versteht man einen makroskopischen Körper  $\mathfrak{C}$ , dessen Material weder magnetisierbar noch elektrisch leitend ist. Der Ausschluss elektrischer Leitfähigkeit bedeutet, dass nur ortsfeste Ladungsträger in  $\mathfrak{C}$  vorhanden sind. Dies ist Voraussetzung dafür, dass sich ein elektrisches Feld  $\vec{E}$  ausbilden kann, da sich Gradienten im elektrischen Potentialfeld  $\varphi(\mathbf{X})$  nicht durch den Austausch von Elektronen abbauen können.

Den Gleichungen 2.23 und 2.24 entsprechend gilt auf makroskopischer Ebene die

Wirbelfreiheit des elektrischen Feldes

$$\text{Rot}[\vec{\mathbf{E}}] = \mathbf{0} \quad (2.31)$$

und dessen Bezug zum elektrischen Potentialfeld  $\varphi$  in Form von

$$\vec{\mathbf{E}} = -\text{Grad}[\varphi] \quad . \quad (2.32)$$

Aus Gleichung 2.27 folgt mit der makroskopischen, volumenbezogenen Ladungsdichte  $\bar{q}_b$ , die in der Literatur häufig auch als gebundene Ladung bezeichnet wird, die Beziehung

$$\text{Div}[\vec{\mathbf{E}}] \varepsilon_0 = \bar{q}_b \quad , \quad (2.33)$$

wobei für die Gesamtladung eines elektrisch neutralen Dielektrikums

$$\int_{\mathfrak{C}} \bar{q}_b \, dV = 0 \quad (2.34)$$

gelten muss. Mit der lokalen Form

$$-\text{Div}[\vec{\mathbf{P}}] = \bar{q}_b \quad (2.35)$$

von Gleichung 2.34 drückt sich die Ladungsdichte  $\bar{q}_b$  als Divergenz eines Vektorfeldes  $\vec{\mathbf{P}}$  aus, der als Polarisationsvektor bezeichnet wird.

In Form von Gleichung 2.35 ist zum Ausdruck gebracht, dass die Polarisation eine volumenbezogene Ladungsdichte  $\bar{q}_b$  innerhalb des Dielektrikums  $\mathfrak{C}$  hervorruft. Daneben induziert sie auch Ladungen an dessen Oberfläche  $\partial\mathfrak{C}$ , die sich flächenspezifisch als Oberflächenladungsdichte

$$\bar{\sigma}_b = \vec{\mathbf{P}} \mathbf{n} \quad (2.36)$$

ausdrücken lassen. Die Oberflächenladungen  $\bar{\sigma}_b$  heben sich, die gesamte Oberfläche  $\partial\mathfrak{C}$  betrachtend, gegenseitig auf.

Ausgehend von Gleichung 2.28 und durch Verwendung von Gleichung 2.35 lässt sich

$$\int_{\mathfrak{C}} \bar{q}_b (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \, dV = \int_{\mathfrak{C}} \vec{\mathbf{P}} \, dV \quad (2.37)$$

zeigen (vgl. KAMLAH [57]), womit sich das volumenbezogene Gesamtdipolmoment des Körpers  $\mathfrak{C}$  bezüglich eines beliebigen Bezugspunktes  $\mathbf{X}_0$  auch mit Hilfe des Polarisationsvektors  $\vec{\mathbf{P}}$  ausdrücken lässt. Anhand von Gleichung 2.37 lässt sich dieser als die Dichte des mit der Ladungsverteilung  $\bar{q}_b$  korrespondierenden, volumenbezogenen Dipolmomentes des Körpers  $\mathfrak{C}$  interpretieren. Polarisierung bedeutet damit formal, dass der Polarisationsvektor  $\vec{\mathbf{P}}$  nicht dem Nullvektor entspricht. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Elementarzellen des Dielektrikums

ein Dipolmoment aufweisen und sich damit ihre positiven und negativen Ladungsschwerpunkte nicht am selben Ort befinden. Je nach Werkstoff kann die räumliche Trennung der Ladungsschwerpunkte permanent vorliegen oder auch durch ein elektrisches Feld beeinflusst werden. Mit Erreichen der Curie-Temperatur verschwindet die Polarisation vollständig.

Befindet sich ein polarisiertes Dielektrikum in einem elektrischen Feld, wirken als makromechanisches Pendant zu den Gleichungen 2.29 und 2.30 die volumenspezifische Kraft

$$\vec{\mathbf{f}}^e := \vec{\mathbf{P}} \cdot \text{Grad}[\vec{\mathbf{E}}] \quad (2.38)$$

und das volumenspezifische Drehmoment

$$\vec{\mathbf{m}}^e := \vec{\mathbf{P}} \times \vec{\mathbf{E}} \quad . \quad (2.39)$$

In der Literatur werden diese beiden Größen häufig auch als ponderomotorische Kraft und ponderomotorisches Moment bezeichnet. Aus den Gleichungen 2.33 und 2.35 folgt

$$\text{Div}[\vec{\mathbf{E}} \epsilon_0 + \vec{\mathbf{P}}] = 0 \quad , \quad (2.40)$$

und mit Einführung der dielektrischen Verschiebung als formale Größe

$$\vec{\mathbf{D}} := \vec{\mathbf{E}} \epsilon_0 + \vec{\mathbf{P}} \quad (2.41)$$

erhält man die Darstellung

$$\text{Div}[\vec{\mathbf{D}}] = 0 \quad . \quad (2.42)$$

Diese Aussage für die elektrische Feldtheorie entspricht im übertragenen Sinn der Gleichgewichtsaussage der Mechanik für ruhende Körper.

### **Anmerkung:**

Für Betrachtungen, bei denen beispielsweise durch das Aufbringen von Elektronen auf die Oberfläche eines Dielektrikums auch Fremdladungen oder freie Ladungen involviert sind, müssen diese auf der rechten Seite der Gleichungen 2.40 und 2.42 in Form der Fremdladungsdichte  $\bar{q}_f$  berücksichtigt werden.

### **2.2.3 Theorie der linearen Piezoelektrizität**

Mit den eingeführten, grundlegenden Begriffen der Elektrostatik lässt sich die Theorie der linearen Piezoelektrizität charakterisieren. Sie beschreibt die elektrische Komponente der technischen Elektromechanik für ein deformierbares Dielektrikum, welches von nun an durch den Körper  $\mathfrak{D}$  repräsentiert wird, die Eigenschaften von  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{C}$  kombiniert und zeitgleich sowohl elektrischen wie auch

mechanischen Feldern unterliegt. Detailliertere Beschreibungen der linearen Piezoelektrizität finden sich beispielsweise in ANSI [6].

Die Theorie der linearen Piezoelektrizität beschränkt sich auf polarisierbare, aber weder magnetisierbare noch elektrisch leitende Körper. Die dabei im Hinblick auf technische Anwendungen auftretenden, verhältnismäßig kleinen Geschwindigkeiten erlauben eine quasi-elektrostatische Betrachtung. Durch diese Vereinfachungen und Annahmen stellt sie einen Sonderfall der Elektro-Magneto-Dynamik dar. Die Elektro-Magneto-Dynamik erklärt die Interaktion von elektrischen und magnetischen Feldern und wird durch die Maxwell'schen Gleichungen vollständig mathematisch beschrieben.

## 2.3 Bilanzgleichungen

Die Bilanzgleichungen sind von wesentlicher Bedeutung für die mathematische Beschreibung physikalischer Vorgänge. In diesem Abschnitt werden die Bilanzrelationen für ein deformierbares Dielektrikum angegeben und der Einfluss elektrisch induzierter Zusatzterme sowie Folgerungen daraus diskutiert. Das deformierbare Dielektrikum ist durch den Körper  $\mathfrak{D}$  repräsentiert, welcher alle Eigenschaften des Körpers  $\mathcal{B}$  (vgl. Kapitel 2.1) und des Körpers  $\mathcal{C}$  (vgl. Kapitel 2.2) in sich vereint.

Der allgemeine Aufbau einer Bilanzrelation ist in räumlicher Darstellung mit

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathfrak{D}} \Psi \, dv = \int_{\mathfrak{D}} (\Xi_z + \Xi_p) \, dv + \int_{\partial\mathfrak{D}} \Lambda \, da \quad (2.43)$$

in integraler Form gegeben, vgl. TRUESDELL & NOLL [113].

Damit wird die zeitliche Änderung einer physikalischen Feldgröße  $\Psi(\mathbf{x}, t)$  ausgedrückt durch die Ursachen dieser Änderung in Form von

$$\begin{aligned} \Xi_z &: \text{volumenverteilter Zufluss oder Abfluss} \\ \Xi_p &: \text{volumenverteilter Produktion} \\ \Lambda &: \text{oberflächenverteilter Zufluss oder Abfluss} \end{aligned}$$

Die Bilanzaussagen müssen für jeden beliebigen Teilkörper  $P \subset \mathfrak{D}$  und damit für jeden Punkt  $\mathbf{x}$  des Körpers  $\mathfrak{D}$  gültig sein. Dies wird durch ihre lokale Form zum Ausdruck gebracht, die man durch Lokalisierung aus der integralen Form erhält.

In diesem Abschnitt werden die Bilanzrelationen für ein deformierbares Dielektrikum angegeben. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Feldgröße  $\Psi$  stetig ist und damit keine singulären Flächen in  $\mathfrak{D}$  existieren.

### 2.3.1 Massenbilanz

Es wird gefordert, dass die Masse  $m$  während der Deformation eine Erhaltungsgröße darstellt.

Mit der Dichte  $\rho_0 = \rho_0(\mathbf{X})$  der Referenzkonfiguration  $\mathfrak{D}_0$  und der Dichte  $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$  der Momentankonfiguration  $\mathfrak{D}$  gilt daher

$$m = \int_{\mathfrak{D}_0} \rho_0 \, dV = \int_{\mathfrak{D}} \rho \, dv \quad . \quad (2.44)$$

Da Masse weder zugeführt oder abgeführt noch produziert wird, erhält man mit  $\Xi_z = 0, \Xi_p = 0, \Lambda = 0$  und  $\Psi = \rho$  aus Gleichung 2.43 die Beziehung

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathfrak{D}} \rho \, dv = \frac{d}{dt} m = 0 \quad . \quad (2.45)$$

Durch Umformungen erhält man mit Gleichung 2.44 und Gleichung 2.45 die lokale Form der Massenbilanz in materieller Darstellung

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{Div}[\mathbf{v}] = 0 \quad . \quad (2.46)$$

Unter Verwendung von Gleichung 2.7 lässt sich mit

$$\rho_0(\mathbf{X}) = \det[\mathbf{F}] \rho(\mathbf{x}, t) \quad (2.47)$$

eine Beziehung zwischen der Dichte der Ausgangskonfiguration und der Dichte der Momentankonfiguration angeben, welche für die Herleitung der lokalen Darstellung von Impuls- und Drehimpulsbilanz notwendig ist.

### 2.3.2 Impulsbilanz

Die Impulsbilanz entspricht dem 2. Newton'schen Gesetz, welches besagt, dass die Änderung der Bewegung einer Masse proportional ist zur Wirkung der bewegendenden Kräfte.

Aus der volumenverteilten Massenkraftdichte  $\rho \mathbf{b}$  und der elektrisch induzierten Volumenkraft  $\vec{\mathbf{f}}^e$  ergibt sich  $\Xi_z = \rho \mathbf{b} + \vec{\mathbf{f}}^e$ . In Abwesenheit von intern freigesetzten Kräften kann kein Impuls produziert werden und es gilt  $\Xi_p = 0$ . Für den oberflächenverteilten Zufluss gilt  $\Lambda = \bar{\mathbf{t}}$  mit den an der Oberfläche eingepprägten Spannungen  $\bar{\mathbf{t}}$ . Damit ergibt sich mit  $\Psi = \rho \mathbf{v}$  aus 2.43 für die Impulsbilanz

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathfrak{D}} \rho \mathbf{v} \, dv = \int_{\mathfrak{D}} (\rho \mathbf{b} + \vec{\mathbf{f}}^e) \, dv + \int_{\partial \mathfrak{D}} \bar{\mathbf{t}} \, da \quad . \quad (2.48)$$



Nach dem Lemma von Cauchy bildet der Cauchy-Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}_c$  den Normalenvektor  $\mathbf{n}$  einer Schnittfläche mit

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}_c \mathbf{n} \quad (2.49)$$

auf den Cauchy'schen Spannungsvektor  $\mathbf{t}$  ab. Für die Oberfläche  $\partial\mathfrak{D}$  gelte  $\mathbf{t} = \bar{\mathbf{t}}$ . Durch Anwendung auf Gleichung 2.48 und nach Umwandlung des Oberflächenintegrals in ein Volumenintegral mit dem Satz von Gauß sowie Anwendung von Gleichung 2.47 für die Durchführung der zeitlichen Ableitung kann die Lokalisierung erfolgen und man erhält als lokale Form der Impulsbilanz

$$\rho \dot{\mathbf{v}} = \rho \mathbf{b} + \vec{\mathbf{f}}^e + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_c \quad (2.50)$$

bezüglich der Momentankonfiguration  $\mathfrak{D}$ .

In MAUGIN [82] und KAMLAH [56] wird der Einfluss der durch die Präsenz eines elektrischen Feldes induzierten Zusatzterme in den Bilanzgleichungen diskutiert. Daraus lässt sich folgern, dass dieser Einfluss für piezoelektrische Keramiken im Kontext von technischen Anwendungen vernachlässigbar ist. Daher kann im Rahmen dieser Arbeit - wie auch in BUTZ et al. [29], BUTZ [28], KLINKEL & WAGNER [66] und KLINKEL [60] - der elektrisch induzierte Zusatzterm  $\vec{\mathbf{f}}^e$  in Gleichung 2.50 unberücksichtigt bleiben, womit diese in die rein mechanische Form der Impulserhaltung

$$\rho \dot{\mathbf{v}} = \rho \mathbf{b} + \operatorname{div}[\boldsymbol{\sigma}_c] \quad (2.51)$$

übergeht.

### 2.3.3 Drehimpulsbilanz

Die zeitliche Änderung des Drehimpulses ist gegeben durch die Summe der einwirkenden Momente.

Bezüglich eines Drehpunktes  $\mathbf{x}_0$  gilt  $\Xi_z = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times (\rho \mathbf{b} + \vec{\mathbf{f}}^e) + \vec{\mathbf{m}}^e$  mit dem elektrisch induzierten Volumenmoment  $\vec{\mathbf{m}}^e$ . Für die Drehimpulsbilanz folgt mit  $\Xi_p = 0$ ,  $\Lambda = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \bar{\mathbf{t}}$ ,  $\Psi = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \rho \mathbf{v}$  und  $\bar{\mathbf{x}} := \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$  aus Gleichung 2.43 die Darstellung

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathfrak{D}} \bar{\mathbf{x}} \times \rho \mathbf{v} \, dv = \int_{\mathfrak{D}} \left[ \bar{\mathbf{x}} \times (\rho \mathbf{b} + \vec{\mathbf{f}}^e) + \vec{\mathbf{m}}^e \right] \, dv + \int_{\partial\mathfrak{D}} \bar{\mathbf{x}} \times \bar{\mathbf{t}} \, da \quad . \quad (2.52)$$

Gemäß den Ausführungen in Abschnitt 2.3.2 können im Rahmen einer Betrachtung von piezoelektrischen Materialien für technische Anwendungen die elektrisch

induzierten Zusatzterme in den Bilanzgleichungen vernachlässigt werden. Damit entfallen  $\vec{\mathbf{f}}^e$  und  $\vec{\mathbf{m}}^e$  in Gleichung 2.52, was auf die rein mechanische Darstellung der Drehimpulsbilanz

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathfrak{D}} \bar{\mathbf{x}} \times \rho \mathbf{v} \, dv = \int_{\mathfrak{D}} \bar{\mathbf{x}} \times \rho \mathbf{b} \, dv + \int_{\partial \mathfrak{D}} \bar{\mathbf{x}} \times \bar{\mathbf{t}} \, da \quad (2.53)$$

führt. Unter Verwendung der lokalen Massenbilanz 2.46 erhält man aus 2.53 nach einigen Umformungen

$$\boldsymbol{\sigma}_c \times \mathbf{1} = \mathbf{0} \quad (2.54)$$

als lokale Form der Drehimpulsbilanz.

Hieraus folgt

$$\boldsymbol{\sigma}_c = \boldsymbol{\sigma}_c^T \quad (2.55)$$

und damit die Symmetrie des Cauchy'schen Spannungstensors  $\boldsymbol{\sigma}_c$ .

Durch den Cauchy'schen Spannungstensor ist der wahre Spannungszustand in einem Punkt  $\mathcal{P}$  der Momentankonfiguration vollständig beschrieben.

Über die Definition des Cauchy'schen Spannungsvektors

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{f}}{da} \quad , \quad (2.56)$$

welcher sich als Quotient aus einer infinitesimalen Schnittkraft  $d\mathbf{f}$  und dem Flächenelement  $da$ , die bei einem imaginären Schnitt durch einen Körper freigelegt werden, definiert, lassen sich in Verbindung mit Gleichung 2.49 weitere Spannungsmaße angeben:

Zur Definition des 1. Piola-Kirchhoff-Spannungstensors

$$\mathbf{P} := \det[\mathbf{F}] \boldsymbol{\sigma}_c \mathbf{F}^{-T} \quad (2.57)$$

gelangt man, wenn man den Normalenvektor  $\mathbf{n} = n \, d\mathbf{a}$  mit Gleichung 2.8 auf die Ausgangskonfiguration zurückzieht. Bezogen auf ein unverformtes Flächenelement  $dA$  ist dieser ein Maß für die Spannung in der verformten Konfiguration. Im Allgemeinen ist er unsymmetrisch.

Zieht man auch die Schnittkraft  $d\mathbf{f}$  auf die Ausgangskonfiguration zurück, gelangt man zur Definition des 2. Piola-Kirchhoff Spannungstensors

$$\mathbf{S} := \det[\mathbf{F}] \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma}_c \mathbf{F}^{-T} \quad , \quad (2.58)$$

welcher vollständig in der Referenzkonfiguration  $\mathfrak{D}_0$  definiert ist und das den Green'schen Verzerrungen konjugierte Spannungsmaß darstellt. Für ihn gilt wegen Gleichung 2.55 und der symmetrienerhaltenden Abbildung in Gleichung 2.58

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^T \quad . \quad (2.59)$$

Damit ist die Symmetrie des 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensors  $\mathbf{S}$  auch für die im Rahmen dieser Arbeit betrachteten elektromechanischen Problemstellungen gegeben.

**Anmerkung:**

Für Betrachtungen, bei denen die elektrisch induzierten Zusatzterme nicht vernachlässigt werden, folgt aus der Drehimpulserhaltung

$$\check{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma}_c + \boldsymbol{\sigma}_m \quad (2.60)$$

mit dem zusätzlich zu berücksichtigenden Momentenspannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}_m = \vec{\mathbf{P}} \otimes \vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{E}} \otimes \vec{\mathbf{P}}$ , vgl. McMEEKING & LANDIS [83] sowie KAMLAH [57]. Die damit verbundene Drehwirkung führt dazu, dass der Spannungstensor  $\check{\boldsymbol{\sigma}}$  unsymmetrisch ist.

### 2.3.4 Ladungsbilanz

Wie die Masse  $m$  ist auch die elektrische Ladung  $q$  eine Erhaltungsgröße. Ausgehend von Gleichung 2.43 lässt sich auch hierfür eine Bilanzrelation formulieren, wie beispielsweise zu finden in TIPLER & MOSCA [111]. Diese ist unbeeinflusst von mechanischen Größen und in den in Kapitel 2.2 zusammengestellten Beziehungen der Elektrostatik bereits implizit enthalten.

### 3 Stoffgleichungen deformierbarer Dielektrika

In diesem Kapitel werden - ausgehend von einer thermodynamischen Potentialfunktion - die mechanischen Spannungen und dielektrischen Verschiebungen abgeleitet und Materialtensoren identifiziert, um das Materialverhalten auf der Basis einer konstitutiven Beziehung mathematisch beschreiben zu können.

Deformierbare Dielektrika erlangen durch den Polungsvorgang transversalisotrope Materialeigenschaften, wobei die Vorzugsrichtung durch die Polarisierungsrichtung bestimmt ist und sich das Material in der Ebene senkrecht dazu isotrop verhält. Änderungen der Polarisierung während der Beanspruchung sollen nicht berücksichtigt werden.

Ausgehend von allgemeiner Anisotropie wird zunächst der Elastizitätstensor für transversalisotropes Materialverhalten abgeleitet, welcher gewöhnlich auf ein kartesisches Koordinatensystem bezogen ist. In Finite-Element-Formulierungen sind die damit verknüpften Komponenten des Verzerrungstensors häufig auf ein anderes Basissystem bezogen. Da vor ihrer Verwendung in der konstitutiven Beziehung eine Transformation der Komponenten erfolgen muss, werden die hierfür notwendigen Transformationsbeziehungen angegeben. Dies gilt sinngemäß auch für die elektrischen Materialtensoren und erfolgt daher entsprechend für die elektrischen Größen.

Im Rahmen dieses Kapitels wird aus Gründen einer einfacheren Darstellbarkeit, wie häufig in der Literatur zu finden, auf eine matrizielle Darstellung aller auftretenden tensoriellen Größen übergegangen. Die meisten Anwendungen nutzen in Dickenrichtung polarisierte Werkstoffe. Anwendungen, bei denen in einer dazu senkrechten Richtung polarisiert wird, gewinnen jedoch immer mehr an Bedeutung. Daher und hinsichtlich der numerischen Beispiele wird der Aufbau aller relevanten Materialmatrizen für die heute gängigen Polarisationsrichtungen bereitgestellt. Abschließend ist die konstitutive Beziehung für elastische Dielektrika in Matrixnotation angegeben.

Für die Beschreibung der linearen Piezoelektrizität kann von verschiedenen Paaren unabhängiger Variablen innerhalb der Energiefunktion ausgegangen werden, siehe z.B. MAUGIN [82] und IKEDA [52]. Zum Beispiel ist durch die elektrische Enthalpie

$$\rho\psi(\mathbf{E}, \vec{\mathbf{E}}) = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \frac{\partial^2 \rho\psi}{\partial \mathbf{E} \partial \mathbf{E}} : \mathbf{E} + \mathbf{E} : \frac{\partial^2 \rho\psi}{\partial \mathbf{E} \partial \vec{\mathbf{E}}} \vec{\mathbf{E}} + \frac{1}{2} \vec{\mathbf{E}} \frac{\partial^2 \rho\psi}{\partial \vec{\mathbf{E}} \partial \vec{\mathbf{E}}} \vec{\mathbf{E}} \quad (3.1)$$

eine Potentialfunktion mit dem Verzerrungstensor  $\mathbf{E}$  und dem Vektor der elektrischen Feldkomponenten  $\vec{\mathbf{E}}$  als unabhängige Variablen definiert.

Für reversible Prozesse lassen sich unter Verwendung des 2. Hauptsatzes der Thermodynamik die thermodynamischen Potentialrelationen

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &= \frac{\partial \rho \psi}{\partial \mathbf{E}} \quad , \\ -\vec{\mathbf{D}} &= \frac{\partial \rho \psi}{\partial \vec{\mathbf{E}}}\end{aligned}\tag{3.2}$$

begründen, wobei  $\mathbf{S}$  den zweistufigen Spannungstensor und  $\vec{\mathbf{D}}$  den Vektor der dielektrischen Verschiebungen bezeichnet. Unter Verwendung der zweifachen partiellen Ableitungen nach den freien Variablen, die in der elektrischen Enthalpie gemäß Gleichung 3.1 auftreten, werden die Materialtensoren  $\mathfrak{e}$  und  $\epsilon$  definiert. Der 3-stufige Tensor  $\mathfrak{e}$  beinhaltet die piezoelektrischen Konstanten

$$\mathfrak{e}_{ijk} := \frac{\partial^2 \rho \psi}{\partial \mathbf{E}_{ij} \partial \vec{\mathbf{E}}_k} \quad ,\tag{3.3}$$

der 2-stufige Tensor  $\epsilon$  beinhaltet die dielektrischen Konstanten

$$\epsilon_{ij} := \frac{\partial^2 \rho \psi}{\partial \vec{\mathbf{E}}_i \partial \vec{\mathbf{E}}_j} \quad .\tag{3.4}$$

Nach der linearen Elastizitätstheorie muss eine umkehrbar eindeutige und lineare Beziehung zwischen dem Spannungstensor und dem Verzerrungstensor existieren. Im mathematischen Sinne entspricht dies einer linearen Abbildung, welche die Komponenten  $E_{ij}$  des Verzerrungstensors  $\mathbf{E}$  auf die Komponenten  $S_{ij}$  des Spannungstensors  $\mathbf{S}$  abbildet. Dies leistet der 4-stufige Elastizitätstensor  $\mathbb{C}$ . Im allgemeinsten Fall beinhaltet dieser 81 unabhängige Elastizitätskonstanten

$$\mathbb{C}_{ijkl} := \frac{\partial^2 \rho \psi(\mathbf{E}, \vec{\mathbf{E}})}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} \quad .\tag{3.5}$$

Mit der Symmetrie des Green'schen Verzerrungstensors ( $E_{ij} = E_{ji}$ ) und des 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensors ( $S_{ij} = S_{ji}$ ) gemäß den Ausführungen in 2.3.3 gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{C}_{ijkl} &= \mathbb{C}_{jikl} \\ \mathbb{C}_{ijkl} &= \mathbb{C}_{ijlk} \quad ,\end{aligned}\tag{3.6}$$

wodurch noch 36 unabhängige Komponenten verbleiben.

Setzt man die Existenz eines elastischen Potentials voraus, was bedeutet, dass die von den Spannungen geleistete Arbeit wegunabhängig ist, folgt durch Vertauschbarkeit der Reihenfolge der partiellen Ableitungen in 3.5 die Beziehung

$\mathbb{C}_{ijkl} = \mathbb{C}_{klij}$ , womit sich die Zahl der unabhängigen Elastizitätskonstanten auf 21 reduziert.

Erfüllt das Werkstoffverhalten Symmetriebedingungen, ändert sich die Materialbeschreibung unter gewissen Transformationen nicht. Bei Symmetrieeigenschaften bezüglich einer Ebene spricht man von monotropem Materialverhalten. Bei einer Transformation von  $\mathbb{C}$  auf ein zur Symmetrieebene gespiegeltes Koordinatensystem darf sich dann die Materialbeschreibung nicht ändern und es verbleiben noch 13 unabhängige Konstanten.

Besteht zusätzlich Symmetrie bezüglich einer zweiten, orthogonal auf der ersten Symmetrieebene stehenden Ebene, lässt sich zeigen, dass damit zugleich auch Symmetrie zur dritten orthogonalen Ebene besteht. Derartiges Materialverhalten wird als orthotrop bezeichnet und beschreibt sich durch 9 unabhängige Elastizitätskonstanten.

Von nun an werden unter Ausnutzung der Symmetrie zur Vereinfachung der Darstellung die Spannungs- und Verzerrungskomponenten in Vektornotation

$$\mathbf{S} = [S^{11}, S^{22}, S^{33}, S^{12}, S^{13}, S^{23}]^T \quad (3.7)$$

und

$$\mathbf{E} = [E_{11}, E_{22}, E_{33}, 2E_{12}, 2E_{13}, 2E_{23}]^T \quad (3.8)$$

angeordnet und unter Beachtung der Komponentenzuordnung der Elastizitätstensor  $\mathbb{C}$  in Matrixnotation dargestellt. Die konstitutive Beziehung

$$\mathbf{S} = \mathbb{C} \mathbf{E} \quad (3.9)$$

für den rein mechanischen Fall wird für Orthotropie mit

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & sym. & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

bezogen auf eine kartesische Basis  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ , beschrieben.

Die Inverse der Elastizitätsmatrix ist von gleicher Struktur und wird als Nach-

giebigkeitsmatrix  $\bar{\mathbb{C}}$  bezeichnet. Für den orthotropen Fall hat sie die Gestalt

$$\bar{\mathbb{C}} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & \bar{C}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \bar{C}_{44} & 0 & 0 \\ & \text{sym.} & & & \bar{C}_{55} & 0 \\ & & & & & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Ist das Materialverhalten sogar bezüglich einer Drehung um eine Symmetrieachse  $x_i$  invariant, spricht man von transversal isotropem Materialverhalten. Die Richtung der Symmetrieachse wird auch als Vorzugsrichtung bezeichnet. Ausgehend von orthotropem Materialverhalten gemäß 3.10 und 3.11 ergeben sich damit jeweils vier weitere Relationen zwischen den Komponenten der Elastizitätsmatrix und der Nachgiebigkeitsmatrix, wodurch sich die Zahl der unabhängigen Konstanten auf 5 reduziert. Diese Relationen sind in Abhängigkeit von der Orientierung der Symmetrieachse, welche senkrecht auf der Isotropieebene ( $x_i = 0$ ) steht, in den Tabellen 3.1 und 3.2 angegeben. Dabei werden die Komponenten der Nach-

$x_1 = 0$	$C_{22} = C_{33}$	$C_{12} = C_{13}$	$C_{44} = C_{55}$	$C_{66} = \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23})$
$x_2 = 0$	$C_{11} = C_{33}$	$C_{12} = C_{23}$	$C_{44} = C_{66}$	$C_{55} = \frac{1}{2}(C_{33} - C_{13})$
$x_3 = 0$	$C_{11} = C_{22}$	$C_{13} = C_{23}$	$C_{55} = C_{66}$	$C_{44} = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12})$

**Tab. 3.1:** Relationen zwischen den Komponenten von  $\mathbb{C}$  bei Transversal-Isotropie

giebigkeitsmatrix  $\bar{\mathbb{C}}$  durch Ingenieurkonstanten ausgedrückt, die aus Versuchen ermittelbar sind. In Anlehnung an die Darstellung in LUBARDA & CHEN [76] sind mit  $E$ ,  $\nu$  und  $\mu$  der E-Modul, die Querkontraktion und der Schubmodul innerhalb der Isotropieebene und mit  $E_0$ ,  $\nu_0$  und  $\mu_0$  der E-Modul, die Querkontraktion und der Schubmodul in Vorzugsrichtung bezeichnet. Gewöhnlich sind die Material-

	$\bar{C}_{11}$	$\bar{C}_{22}$	$\bar{C}_{33}$	$\bar{C}_{12}$	$\bar{C}_{13}$	$\bar{C}_{23}$	$\bar{C}_{44}$	$\bar{C}_{55}$	$\bar{C}_{66}$
$x_1 = 0$	$\frac{1}{E_0}$	$\frac{1}{E}$	$\frac{1}{E}$	$-\frac{\nu_0}{E_0}$	$-\frac{\nu_0}{E_0}$	$-\frac{\nu}{E}$	$\frac{1}{\mu_0}$	$\frac{1}{\mu_0}$	$\frac{1}{\mu}$
$x_2 = 0$	$\frac{1}{E}$	$\frac{1}{E_0}$	$\frac{1}{E}$	$-\frac{\nu_0}{E_0}$	$-\frac{\nu}{E}$	$-\frac{\nu_0}{E_0}$	$\frac{1}{\mu_0}$	$\frac{1}{\mu}$	$\frac{1}{\mu_0}$
$x_3 = 0$	$\frac{1}{E}$	$\frac{1}{E}$	$\frac{1}{E_0}$	$-\frac{\nu}{E}$	$-\frac{\nu_0}{E_0}$	$-\frac{\nu_0}{E_0}$	$\frac{1}{\mu}$	$\frac{1}{\mu_0}$	$\frac{1}{\mu_0}$

**Tab. 3.2:** Relationen zwischen den Komponenten von  $\bar{\mathbb{C}}$  bei Transversal-Isotropie

tensoren  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{e}$  und  $\boldsymbol{\epsilon}$  auf eine kartesische Basis  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  bezogen. Verwendet man für die Beschreibung der Kinematik konvektive Koordinaten (vgl. Abschnitt

2.1.1), beziehen sich die Verzerrungen  $\mathbf{E}$ , das elektrische Feld  $\vec{\mathbf{E}}$ , die Spannungen  $\mathbf{S}$  und die dielektrischen Verschiebungen  $\vec{\mathbf{D}}$  auf im Allgemeinen schiefwinklige Tangentialbasissysteme. Vor deren Verwendung in einer konstitutiven Beziehung müssen ihre Komponenten daher auf die kartesische Basis transformiert werden. Für den Verzerrungstensor gilt

$$\mathbf{E} = E_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \hat{E}_{kl} \mathbf{G}^k \otimes \mathbf{G}^l \quad (3.12)$$

und damit für die Umrechnung der Komponenten

$$\hat{E}_{kl} = E_{ij} (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{G}_k)(\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{G}_l) \quad . \quad (3.13)$$

Die Auswertung führt unter Berücksichtigung der Anordnung der Verzerrungskomponenten in  $\mathbf{E}$  gemäß Gleichung 3.8 auf

$$\hat{\mathbf{E}} = \mathbf{T}_E \mathbf{E} \quad (3.14)$$

mit

$$\mathbf{T}_E = \begin{bmatrix} t_{11}t_{11} & t_{21}t_{21} & t_{31}t_{31} & t_{11}t_{21} & t_{11}t_{31} & t_{21}t_{31} \\ t_{12}t_{12} & t_{22}t_{22} & t_{32}t_{32} & t_{12}t_{22} & t_{12}t_{32} & t_{22}t_{32} \\ t_{13}t_{13} & t_{23}t_{23} & t_{33}t_{33} & t_{13}t_{23} & t_{13}t_{33} & t_{23}t_{33} \\ 2t_{11}t_{12} & 2t_{21}t_{22} & 2t_{31}t_{32} & t_{11}t_{22} + t_{21}t_{12} & t_{11}t_{32}t_{31}t_{12} & t_{21}t_{32} + t_{31}t_{22} \\ 2t_{11}t_{13} & 2t_{21}t_{23} & 2t_{31}t_{33} & t_{11}t_{23} + t_{21}t_{13} & t_{11}t_{33}t_{31}t_{13} & t_{21}t_{33} + t_{31}t_{23} \\ 2t_{12}t_{13} & 2t_{22}t_{23} & 2t_{32}t_{33} & t_{12}t_{23} + t_{22}t_{13} & t_{12}t_{33}t_{32}t_{13} & t_{22}t_{33} + t_{32}t_{23} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

und  $t_{ik} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{G}_k$ .

Aus der vom Basissystem unabhängigen, mechanischen Formänderungsenergie

$$W_m = \frac{1}{2} \mathbf{E}^T \mathbb{C} \mathbf{E} = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{E}}^T \hat{\mathbb{C}} \hat{\mathbf{E}} \quad (3.16)$$

ergibt sich unter Verwendung von Gleichung 3.14 die Transformation für den Stofftensor  $\mathbb{C}$  bei Wechsel des Bezugssystems zu

$$\hat{\mathbb{C}} = \mathbf{T}_E^{-T} \mathbb{C} \mathbf{T}_E^{-1} \quad (3.17)$$

und mit  $\mathbf{T}_S := \mathbf{T}_E^{-T}$  die Transformation für die Spannungen zu

$$\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{T}_S \mathbf{S} \quad . \quad (3.18)$$

Für das elektrische Feld

$$\vec{\mathbf{E}} = [\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3]^T \quad (3.19)$$



gilt

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{E}_i \mathbf{e}_i = \hat{E}_k \mathbf{G}^k \quad (3.20)$$

und damit zwischen den Komponenten der beiden Basissysteme die Umrechnungsbeziehung

$$\hat{E}_k = \vec{E}_i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{G}_k \quad . \quad (3.21)$$

Dies entspricht in symbolischer Schreibweise

$$\hat{\mathbf{E}} = \mathbf{T}_{\vec{E}} \vec{\mathbf{E}} \quad (3.22)$$

mit

$$\mathbf{T}_{\vec{E}} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{21} & t_{31} \\ t_{12} & t_{22} & t_{32} \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} \end{bmatrix} \quad . \quad (3.23)$$

Aus der elektrisch gespeicherten Energie

$$W_e = \frac{1}{2} \vec{\mathbf{E}}^T \boldsymbol{\epsilon} \vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{E}}^T \hat{\boldsymbol{\epsilon}} \hat{\mathbf{E}} \quad (3.24)$$

lässt sich mit Gleichung 3.22 für einen Wechsel des Bezugssystems die Transformationsvorschrift

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{T}_{\vec{E}}^{-T} \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{T}_{\vec{E}}^{-1} \quad (3.25)$$

für den Tensor der dielektrischen Konstanten ableiten.

Die Transformationsvorschrift für die dielektrischen Verschiebungen

$$\vec{\mathbf{D}} = [\vec{D}^1, \vec{D}^2, \vec{D}^3]^T \quad (3.26)$$

ergibt sich mit  $\mathbf{T}_{\vec{D}} := \mathbf{T}_{\vec{E}}^{-T}$  zu

$$\hat{\vec{\mathbf{D}}} = \mathbf{T}_{\vec{D}} \vec{\mathbf{D}} \quad . \quad (3.27)$$

Bezogen auf die kartesische Basis  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  beinhaltet im allgemeinen Fall der Tensor der dielektrischen Konstanten  $\boldsymbol{\epsilon}$  genau 6 unabhängige Koeffizienten und der Tensor der piezoelektrischen Konstanten  $\mathbf{e}$  genau 18 unabhängige Konstanten. Dabei repräsentieren die dielektrischen Konstanten die Permittivität des Dielektrikums. Die Indizierung der piezoelektrischen Konstanten (Koppelkoeffizienten) richtet sich nach den durch sie gekoppelten Verzerrungs- und elektrischen Feldkomponenten. Der Betrag der piezoelektrischen Konstanten beschreibt die Intensität der Wechselwirkung zwischen Verzerrungen und elektrischem Feld. Die

gängigen Methoden zur experimentellen Bestimmung der dielektrischen und piezoelektrischen Konstanten werden beispielsweise in ANSI [6] detailliert erläutert.

Kristallographische Symmetrien reduzieren die Anzahl der unabhängigen Koeffizienten in den Tensoren  $\epsilon$  und  $e$ , vgl. IKEDA [52]. Piezoelektrische Materialien zeigen ein isotropes Verhalten in der zur Polungsrichtung senkrechten Ebene, womit für ein in Richtung einer der Koordinatenachsen polarisiertes Dielektrikum noch zwei unabhängige Koeffizienten in  $\epsilon$  und drei unabhängige Konstanten in  $e$  verbleiben.

Für eine vereinfachte Darstellung wird  $e$  von nun an in Voigt'scher Matrixnotation angegeben. Eine Übertragung der Komponenten auf eine Matrixanordnung muss konform zur Anordnung der Komponenten in  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{E}$  und  $\mathbb{C}$  erfolgen. Die drei unabhängigen Komponenten innerhalb einer Matrixanordnung des piezoelektrischen Tensors  $e$  werden in der Literatur gewöhnlich mit  $e_{31}$ ,  $e_{33}$  und  $e_{15}$  bezeichnet.

Bei einer Polung in  $x_3$ -Richtung ergeben sich diese für die Matrixdarstellung von  $e$  durch die Komponentenzuordnungen  $e_{31} = e_{311}$ ,  $e_{33} = e_{333}$  und  $e_{15} = e_{131}$ . Die Berücksichtigung der Gleichungen 3.7 und 3.8 führt auf die Anordnung

$$e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

Die Matrix der elektrischen Permittivität  $\epsilon$  hat die Form

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{bmatrix}. \quad (3.29)$$

Sind die Materialmatrizen  $\mathbb{C}$ ,  $e$  und  $\epsilon$  für eine bestimmte Vorzugs- bzw. Polarisationsrichtung durch experimentelle Ermittlung ihrer Koeffizienten bekannt, lassen sich davon ausgehend die Materialmatrizen bezüglich einer anderen Polarisationsrichtung auch durch Transformationen ermitteln. Die Transformation für  $\mathbb{C}$  ist mit den Gleichungen 3.15 und 3.17 gegeben,  $\epsilon$  lässt sich durch Verwendung der Gleichungen 3.23 und 3.25 transformieren. Eine Transformationsbeziehung für  $e$  wird zum Beispiel in KAMLAH [56] diskutiert. Ausgehend von den Gleichungen 3.28 und 3.29 erhält man als Materialmatrizen für die Vorzugs- beziehungsweise Polungsrichtung  $x_1$

$$e = \begin{bmatrix} e_{33} & e_{31} & e_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \end{bmatrix}, \quad \epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_{33} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{11} \end{bmatrix}, \quad (3.30)$$

und für die Vorzugs- beziehungsweise Polungsrichtung  $x_2$

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{33} & e_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{11} \end{bmatrix}. \quad (3.31)$$

Um die Identitäten der Koppelkoeffizienten für die unterschiedlichen Polungsrichtungen zu verdeutlichen, wurde an dieser Stelle bewusst auf eine Anpassung der Koeffizientenindizierung für die Polungsrichtungen  $x_1$  und  $x_2$  in Gleichung 3.30 und Gleichung 3.31 verzichtet. Wie der Vergleich von Gleichung 3.30 bzw. Gleichung 3.31 mit Gleichung 3.28 und Gleichung 3.29 zeigt, ändert sich mit Wechsel der Polarisationsrichtung dann lediglich die Anordnung der Konstanten  $e_{31}$ ,  $e_{33}$  und  $e_{15}$  in den Materialmatrizen und je nach Polungsorientierung gegebenenfalls das Vorzeichen. Dies gilt allerdings nur für die gewöhnlichen Vorzugsbeziehungsweise Polarisationsrichtungen, die parallel zu einer Achse des kartesischen Bezugssystems orientiert sind.

Die konstitutiven Beziehungen für piezoelektrische Materialien lassen sich schließlich mit

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S} \\ -\vec{\mathbf{D}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{C} & -\mathbf{e}^T \\ -\mathbf{e} & -\boldsymbol{\epsilon} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \vec{\mathbf{E}} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

in Matrixform beschreiben, wobei sich die gekoppelte Stoffmatrix unter Verwendung der negativen dielektrischen Verschiebungen symmetrisch darstellt.

## 4 Inkomppatible Approximationsräume der FEM bei elektromechanischen Feldproblemen

In diesem Abschnitt wird dargestellt, warum unausgewogene Approximationsräume der Verzerrungen und des elektrischen Feldes die physikalischen Verhältnisse bei für Sensoren und Aktoren üblichen Beanspruchungsarten nur unzureichend wiedergeben können. Hierfür wird betrachtet, welche mechanischen Verzerrungskomponenten und elektrischen Feldkomponenten bei den einzelnen Beanspruchungsarten jeweils auftreten, welchen Funktionsräumen diese angehören und inwiefern dabei die jeweiligen mechanischen und elektrischen Komponenten miteinander gekoppelt sind.

### 4.1 Stabmodell eines in Dickenrichtung gepolten piezoelektrischen Sensors

Dies soll am einfachen Beispiel eines in Dickenrichtung gepolten Sensors anhand eines Stabmodells demonstriert werden. Bei Polarisierung des Materials in Dickenrichtung ( $\vec{P}_3$ ) gilt die konstitutive Beziehung

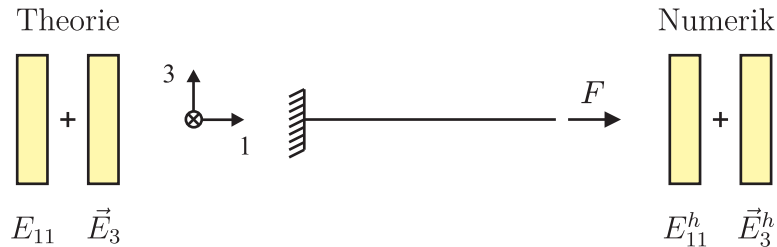
$$\begin{bmatrix} \mathbf{S} \\ -\vec{\mathbf{D}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{C} & -\mathbf{e}^T \\ -\mathbf{e} & -\epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \vec{\mathbf{E}} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

gemäß Gleichung 3.32 mit  $\mathbb{C}$  nach Gleichung 3.10 und Tabelle 3.1 sowie  $\mathbf{e}$  und  $\epsilon$  gemäß den Gleichungen 3.28 und 3.29. Anhand dessen wird ersichtlich, wie die Komponenten der Verzerrungen und des elektrischen Feldes in Abhängigkeit von der Beanspruchungsart gekoppelt sind. Zur übersichtlichen Darstellung der wesentlichen Effekte wird im Rahmen einer akademischen Vereinfachung an dieser Stelle die Querkontraktion nicht berücksichtigt, womit  $\mathbb{C}$  nur noch auf der Hauptdiagonalen besetzt ist. Die maßgeblichen Koppeleffekte werden davon nicht beeinträchtigt.

Es wird von einem über die Dicke linear verlaufenden Ansatz für das elektrische Potentialfeld  $\varphi$  ausgegangen. Das elektrische Feld bzw. seine Komponenten werden gemäß Gleichung 2.32 durch Gradientenbildung aus dem Potentialfeld gewonnen. Der Funktionsgrad der Verläufe von  $\vec{E}_1$  und  $\vec{E}_2$  entspricht damit dem Funktionsgrad des elektrischen Potentials über die Dicke. Der Funktionsgrad des Verlaufs von  $\vec{E}_3$  über die Dicke ist hingegen um einen Grad kleiner als der Funktionsgrad des elektrischen Potentials über die Dicke. Zur Verdeutlichung werden für vier repräsentative Beanspruchungsarten analytische Lösungen (Theorie) und numerische Berechnungsergebnisse (Numerik, Index  $h$ ) bei Polung des Materials in Dickenrichtung ( $\vec{P}_3$ ) qualitativ gegenübergestellt.

### 4.1.1 Längsbeanspruchung

Die Verzerrungskomponente  $E_{11}$  und die Komponente des elektrischen Feldes  $\vec{E}_3$  werden aktiviert und verlaufen konstant über die Dicke.  $E_{11}$  wird korrekt appro-

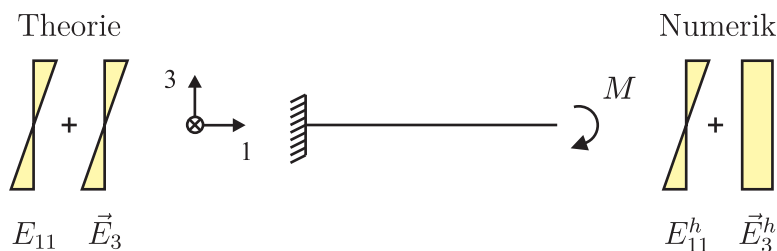


**Abb. 4.1:** Aktivierte Komponenten der mechanischen Verzerrungen und des elektrischen Feldes bei Längsbelastung

ximiert. Unter Verwendung des linearen Ansatzes für das Potential  $\varphi$  über die Dicke wird auch  $\vec{E}_3$  numerisch korrekt approximiert. Da die Approximationsräume gleich sind, treten bei der Kopplung keine Unverträglichkeiten auf.

### 4.1.2 Einachsige Biegebeanspruchung

Nach der klassischen Biegetheorie verläuft die Verzerrungskomponente  $E_{11}$  bei dieser Beanspruchung linear über die Dicke und damit auch die Komponente des elektrischen Feldes  $\vec{E}_3$ . Der lineare Verlauf von  $\vec{E}_3$  lässt sich auch aus energetischen Betrachtungen ableiten, siehe zum Beispiel MARINKOVIĆ et al. [81] und MARINKOVIĆ [80]. Die Verzerrungskomponente  $E_{11}$  wird korrekt approximiert.



**Abb. 4.2:** Aktivierte Komponenten der mechanischen Verzerrungen und des elektrischen Feldes bei reiner Biegung

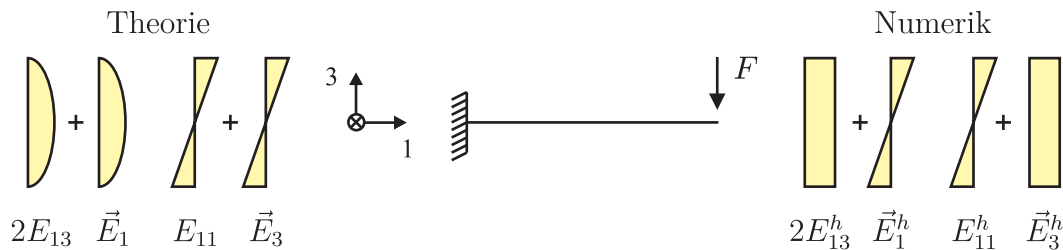
Unter Verwendung eines linearen Ansatzes für den Verlauf des Potentials über die Dicke kann  $\vec{E}_3$  nur fehlerhaft, nämlich konstant über die Dicke verlaufend, approximiert werden. Der lineare Verzerrungsverlauf  $E_{11}$  und der konstante Verlauf

von  $\vec{E}_3$  sind gekoppelt. Es findet daher eine additive Verknüpfung inkompatibler Funktionsräume statt, was zu fehlerhaften Berechnungsergebnissen führt.

Damit diese Unverträglichkeit unter reiner Biegebeanspruchung nicht auftritt, muss ein numerisches Modell dazu in der Lage sein, einen linearen Verlauf für  $\vec{E}_3$  approximieren zu können.

### 4.1.3 Querbeanspruchung

Zusätzlich zu den bei reiner Biegung aktivierten Komponenten werden hierbei die Schubverzerrung  $E_{13}$  sowie die Komponente des elektrischen Feldes  $\vec{E}_1$  aktiviert.  $\vec{E}_1$  verläuft quadratisch über die Dicke, was mit einem linearen Ansatz für das



**Abb. 4.3:** Aktivierte Komponenten der mechanischen Verzerrungen und des elektrischen Feldes bei Querbelastung

Potential  $\varphi$  nicht korrekt dargestellt werden kann. Bei kinematischen Annahmen, welche Schubverzerrungen berücksichtigen, wird die Approximation der Schubverzerrung  $E_{13}^h$  gewöhnlich energetisch gleichwertig zum tatsächlich quadratischen Verlauf beim Rechteckquerschnitt als konstant über die Höhe angenommen und mit einem Schubkorrekturfaktor korrigiert. Auf die Komponente des elektrischen Feldes  $\vec{E}_1^h$  ist dies nicht übertragbar, da im Biegesensorbetrieb die elektrischen Randbedingungen ( $\varphi_o = \varphi_u = 0$ ) nicht mehr erfüllt werden könnten. Da  $E_{13}$  und  $\vec{E}_1$  gekoppelt sind, findet hierbei eine weitere Verknüpfung von inkompatiblen Funktionsräumen statt, was zu Fehlern in den Berechnungsergebnissen führt.

Damit bei dieser Beanspruchungsart keine Unverträglichkeiten auftreten, muss das numerische Modell also dazu in der Lage sein, zusätzlich zum linearen Verlauf für  $\vec{E}_3$  die quadratischen Verläufe von  $\vec{E}_1$  und  $E_{13}$  approximieren zu können.

### 4.1.4 Torsionsbeanspruchung

Unter Torsionsbeanspruchung sind  $S^{12}$  und  $S^{13}$  über den Stabquerschnitt Funktionen der Querschnittskordinaten  $\xi_2$  und  $\xi_3$ . Diese lassen sich gemäß FRANKÉ & FRIEMANN [39], FRIEMANN [40] über eine Reihenentwicklung oder einen

Polynomansatz höherer Ordnung approximieren. Über die konstitutive Beziehung ist  $E_{13}$  mit  $\vec{E}_1$  gekoppelt.

Demnach müssen für diese Beanspruchung  $E_{13}$  und  $\vec{E}_1$  als Funktionen gleicher und ausreichend hoher Ordnung approximiert werden, um abgestimmte Approximationsräume zu gewährleisten.

## 4.2 Verallgemeinerte Betrachtungsweise

Die auf das Stabmodell eines Sensors bezogene Darstellung im vorigen Abschnitt lässt sich, abgesehen von der dann nicht zu berücksichtigenden Beanspruchungsart Torsion, formal auf die Komponenten  $E_{22}$ ,  $E_{23}$  und  $\vec{E}_2$  einer Schalenstruktur übertragen.

Durch Polarisierung in 1-Richtung ( $\vec{P}_1$ ) oder 2-Richtung ( $\vec{P}_2$ ) können unter Vorgabe von  $\vec{E}_3$  anhand der elektrischen Randbedingungen auch Schubaktoren modelliert werden. In Analogie zum Vorgehen in Kapitel 4.1 für einen Sensor lassen sich unter Verwendung von  $\mathbb{C}$ ,  $\mathfrak{e}$  und  $\epsilon$  für die jeweilige Polarisierungsrichtung anhand der konstitutiven Beziehung auch hierfür die Unverträglichkeiten der Approximationsräume aufdecken.

Für typische mechanische Beanspruchungen, welche die Schnittgrößen  $N$ ,  $M$  oder  $Q$  hervorrufen, sowie für die elektrische Beanspruchung  $\vec{E}_3$  zeigt Tabelle 4.1 die bei den typischen Polarisationsrichtungen gemäß der Theorie auftretenden konstanten, linearen und quadratischen Verläufe der Verzerrungskomponenten und der Komponenten des elektrischen Feldes über die Dicke. Dabei wurde der Einfluss der Querkontraktion berücksichtigt. Die bei einem Schalenmodell gegenüber einem Stabmodell zusätzlich auftretenden Komponenten sind gestrichelt dargestellt. Um parasitäre Approximationen zu vermeiden, muss ein numerisches Schalenmodell die je nach Polung  $\vec{P}_i$  und Beanspruchung auftretenden Verläufe approximieren können. Für ein Stabmodell ist darüber hinaus die Verwölbung des Querschnitts unter Torsionsbeanspruchung relevant. Dabei sind die Verläufe der Komponenten über den Querschnitt zum Teil von höherer Ordnung als quadratisch und müssen geeignet approximiert werden. Mögliche Vorgehensweisen für die Umsetzung im Rahmen der Finite-Elemente-Methode werden im nächsten Kapitel diskutiert.

### Fazit:

Fehlerhafte Berechnungsergebnisse in der Elektrostatik sind häufig auf inkompatible Approximationen der mechanischen und elektrischen Felder zurückzuführen.

$\vec{P}_1$	$E_{11}$	$E_{22}$	$E_{33}$	$E_{12}$	$E_{13}$	$E_{23}$	$\vec{E}_1$	$\vec{E}_2$	$\vec{E}_3$
$N$				-	-	-		-	-
$M$				-	-	-		-	-
$Q$				-				-	
$\vec{E}_3$	-	-	-	-		-	-	-	

$\vec{P}_2$	$E_{11}$	$E_{22}$	$E_{33}$	$E_{12}$	$E_{13}$	$E_{23}$	$\vec{E}_1$	$\vec{E}_2$	$\vec{E}_3$
$N$				-	-	-	-		-
$M$				-	-	-	-		-
$Q$				-			-		
$\vec{E}_3$	-	-	-	-	-		-	-	

$\vec{P}_3$	$E_{11}$	$E_{22}$	$E_{33}$	$E_{12}$	$E_{13}$	$E_{23}$	$\vec{E}_1$	$\vec{E}_2$	$\vec{E}_3$
$N$				-	-	-	-	-	
$M$				-	-	-	-	-	
$Q$				-					
$\vec{E}_3$				-	-	-	-	-	

**Tab. 4.1:** Verläufe der Verzerrungen und der Komponenten des elektrischen Feldes über die Dicke für die Polungsrichtung  $\vec{P}_i$  bei Beanspruchung durch Normalkraft, Biegemoment, Querkraft oder ein elektrisches Feld in Dickenrichtung

Bei rein mechanischen Problemen treten bei Verwendung von Ansatzfunktionen niederer Ordnung ähnlich gelagerte Probleme auf, für die sich aufgrund ihrer Wirkung der Begriff „Locking“ etabliert hat. Es existiert keine eindeutige De-



definition von „Locking“. Eine mögliche Klassifizierung wird zum Beispiel in BISCHOFF & RAMM [19], BISCHOFF [18] aus mechanischer, numerischer und mathematischer Sichtweise ausführlich beschrieben. Dabei sind nach mechanischer Sichtweise die meisten Locking-Phänomene auf eine fehlende Balance der Ansatzfunktionen zurückzuführen.

Geht man von der Ursache aus, liegt es nahe, die in diesem Abschnitt beschriebenen Effekte als elektromechanisch induziertes Locking zu bezeichnen. Die damit verbundenen Auswirkungen sind allerdings konträr zu den Versteifungseffekten bei mechanischem „Locking“. Da mit ungeeigneten Approximationsräumen die elektrisch gespeicherte Energie nicht in ausreichendem Maße erfasst werden kann, wird das Strukturverhalten zu weich approximiert. Ausgehend von der Wirkung müsste man eher von elektromechanisch induziertem „Weakening“ sprechen.

## 5 Technologien der FEM zur Beseitigung inkompatibler Approximationsräume

In diesem Abschnitt wird die Eignung von für mechanische Probleme bekannten Vorgehensweisen für die Lösung der im vorigen Abschnitt beschriebenen Problemstellung diskutiert und daraus eine effektive Lösungsstrategie abgeleitet.

Da die Probleme unmittelbar mit der linearen Approximation des Potentials über die Dicke zusammenhängen, sind grundsätzlich zwei mögliche Vorgehensweisen naheliegend.

### 5.1 Konsistente lineare Approximation der mechanischen und elektrischen Freiheitsgrade

Bei der Verwendung eines linearen Ansatzes für das Potential muss das numerische Modell dennoch dazu in der Lage sein, einen quadratischen Verlauf von  $\vec{E}_1$ ,  $\vec{E}_2$  und  $\vec{E}_3$  über die Dicke korrekt darstellen zu können. Um in einer Stabstruktur auch den Lastfall Torsion konsistent approximieren zu können, muss die Interpolation einzelner Komponenten mit Funktionen von noch höherer Ordnung erfolgen. Wie in Kapitel 4 erläutert wurde, führt dies zu abgestimmten Approximationsräumen der gekoppelten Komponenten der Verzerrungen und des elektrischen Feldes, vgl. Tabelle 4.1. Es wird nun diskutiert, ob und inwieweit in rein mechanischen Elementformulierungen gängige Konzepte hierfür geeignet und übertragbar sind:

Die **Hybride Spannungsmethode** lässt sich aus dem Variationsprinzip von Hellinger-Reissner ableiten. Die ursprüngliche Bedeutung hybrider Spannungselemente liegt in der Vermeidung von Schublockingeffekten, indem neben Verschiebungsansätzen auch geeignete Spannungsansätze verwendet werden. Um die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung sicherzustellen, müssen zueinander passende Ansätze gewählt werden. Für das mechanische Problem wird dies durch die Einhaltung der Ladyshenskaya-Babuska-Brezzi-Bedingung (LBB-Bedingung) gewährleistet. Diese Bedingung geht zurück auf die Arbeiten von BABUSKA & AZIS [7] und BREZZI [24]. Mit ihrer Einhaltung wird dafür gesorgt, dass Spannungen und Verzerrungen in jedem Verformungszustand Arbeit aufeinander verrichten und keine Zero-Energy-Modes auftreten. Innerhalb dieses Lösungskonzeptes sind nur Spannungsansätze und keine Bereicherung des Funktionsraumes der Verzerrungsansätze bzw. der elektrischen Feldkomponenten möglich. Dies ist bei linearer Approximation des elektrischen Potentials über die Dicke aber unbedingt notwendig, um die auftretenden Unverträglichkeiten zu beseitigen. Diese Methode

kommt daher nicht als Basis für ein generelles Lösungskonzept für die betrachtete Problemstellung in Frage. Da jedoch, wie in PIAN & SUMIHARA [90] und ZIENKIEWICZ et al. [127] gezeigt wird, eine hybride Formulierung insbesondere für Scheibenelemente ein deutlich besseres Biegeverhalten gegenüber herkömmlichen Formulierungen aufweist, werden die Stärken der Methode in der Lösungsstrategie verwendet.

Mittels der **EAS-Methode**, welche in SIMO & RIFAI [102] vorgestellt wurde, können zusätzlich zu den aus Verschiebungen resultierenden Verzerrungen so genannte erweiterte Verzerrungsansätze (**Enhanced Assumed Strains**) eingebracht werden. Für das elektro-mechanisch gekoppelte Problem sind damit auch Ansätze für die elektrischen Feldkomponenten möglich. Dabei ist die im Rahmen dieser Methode geforderte Orthogonalität von Spannungen und Verzerrungsansätzen und damit auch die Orthogonalität von dielektrischen Verschiebungen und den Ansätzen für die Komponenten des elektrischen Feldes zu berücksichtigen.

Die **Gemischte Methode** geht auf das Hu-Washizu Variationsprinzip zurück. Neben den Verschiebungsansätzen werden hierbei auch unabhängige Ansätze für Spannungen und Verzerrungen mit einbezogen. Bei der hier vorliegenden gekoppelten Problemstellung sind neben einem Ansatz für das elektrische Potential zusätzlich auch unabhängige Ansätze für das elektrische Feld und die dielektrischen Verschiebungen zu verwenden. Dadurch kann das numerische Modell für jede Polarisationsart effizient um die benötigten Interpolationsansätze für die mechanischen Verzerrungskomponenten und elektrischen Feldkomponenten erweitert werden.

Grundsätzlich denkbar ist auch die Übertragung von Vorgehensweisen der **ANS-Methode** nach BATHE & DVORKIN [9] oder der **DSG-Methode**, vgl. BLETZINGER et al. [20] auf die elektrischen Feldkomponenten. In mechanischen Elementformulierungen findet man diese häufig zur Vermeidung von Versteifungseffekten, die aus einer ähnlichen Problemstellung hervorgehen. So wird beispielsweise bei der ANS-Methode der Verlauf der Verzerrungen nicht unmittelbar durch Ableitung der Verschiebungen ermittelt. Es werden lediglich diskrete Werte der unverträglichen Verzerrungskomponenten in Kollokationspunkten ermittelt und anschließend geeignet über das Element interpoliert. Eine Übertragung dieser Methoden auf die elektrischen Feldkomponenten steht allerdings im Konflikt mit der Erfüllung von elektrischen Randbedingungen und wird für die vorliegende Problematik daher nicht als unmittelbar zielführend erachtet.

Ebenfalls ungeeignet im vorliegenden Fall ist eine über die Dicke **selektiv reduzierte Integration** der Komponenten des elektrischen Feldes. Diese auf einer Verringerung der Integrationsordnung basierende Technik wird für mechanische Elementformulierungen beispielsweise in MALKUS & HUGHES [78] beschrieben.

## 5.2 Approximation mit Ansatzfunktionen höherer Ordnung

Als zweite mögliche Vorgehensweise ist die Verwendung von Ansatzfunktionen höherer Ordnung für die Interpolation der Knotenfreiwerte denkbar.

Zwei Varianten sind im Rahmen dieser Vorgehensweise dafür naheliegend:

- Die Interpolation des elektrischen Potentials und der mechanischen Freiheitsgrade mit Ansatzfunktionen höherer Ordnung, wie auch zu finden bei BERNADOU & HAENEL [14], COTONI et al. [34], KOKO et al. [67], LAMMERING & MESECKE-RISCHMANN [69], MARINKOVIĆ et al. [81], MESECKE-RISCHMANN [85].
- Eine Kombination aus linearen Ansatzfunktionen für die mechanischen Freiheitsgrade und Ansatzfunktionen höherer Ordnung für das elektrische Potential über die Dicke, wie zum Beispiel bei BUTZ [29] für ein piezoelektrisches Stabelement und bei POLIT & BRUANT [91] oder KÖGL & BUCALEM [59] für piezoelektrische Platten- und Schalenelemente zu finden.

In LINNEMANN et al. [74], LINNEMANN [73] wird an einem magnetomechanischen Volumenelement die Leistungsfähigkeit verschiedener Konzepte anhand einer Testkonfiguration nach ZIENKIEWICZ et al. [127] systematisch untersucht. Dabei werden lineare (H1) oder quadratische (H2) Ansätze für die Verschiebungen in Kombination mit linearen (P1) oder quadratischen Ansätzen (P2) für das magnetische Potential mit oder ohne Verwendung von EAS-Ansätzen (EAS) und gemischter Methode (MIX) betrachtet. Da die Kopplung von magnetomechanischen Feldern formal der Kopplung von elektromechanischen Feldern entspricht, können diese Untersuchungen zur Beurteilung der in diesem Kapitel beschriebenen Lösungskonzepte herangezogen werden. Dabei zeigte sowohl die Variante H2P2 mit quadratischer Approximation der mechanischen und magnetischen Freiheitsgrade als auch die Variante H1P1MIX mit konsistenter, linearer Approximation der mechanischen und magnetischen Freiheitsgrade im Rahmen der gemischten Methode besonders gute Effizienz.

Zwar könnte entsprechend H2P2 in LINNEMANN et al. [74], LINNEMANN [73] mit einem quadratischen Ansatz für das elektrische Potential unmittelbar eine quadratische Approximation von  $\vec{E}_1$  und  $\vec{E}_2$  realisiert werden. Jedoch wäre für die erforderliche quadratische Approximation von  $\vec{E}_3$  im Lastfall  $Q$  bei Polarisation  $\vec{P}_1$ , vgl. Tabelle 4.1, wegen Gleichung 2.32 ein kubischer Ansatz für das elektrische Potential über die Dicke notwendig. Darüber hinaus sind für eine Stabstruktur

beispielsweise im Lastfall Torsion wie in Kapitel 4 erläutert Approximationen mit Polynomen von noch höherer Ordnung erforderlich.

Durch die Verwendung der EAS-Methode können Approximationen höherer Ordnung gezielt für diejenigen Größen im numerischen Modell eingesetzt werden, für die sie gemäß den Ausführungen in Kapitel 4 erforderlich sind.

Wie beispielsweise in COOK et al. [33] beschrieben wird, sind auf der gemischten Methode basierende Finite-Element-Formulierungen robuster. Darunter versteht man, dass bei nichtlinearen Problemstellungen wesentlich größere Lastschritte als bei herkömmlichen Elementformulierungen verwendet werden können, womit sich die Anzahl der notwendigen Iterationen deutlich reduziert, vgl. WAGNER & GRUTTMANN [119]. Darüber hinaus lassen sich mit der gemischten Methode das im Rahmen der Schalentheorie geforderte Verschwinden der Resultierenden der Spannungen in Dickenrichtung und das im Rahmen der Stabtheorie zudem geforderte Verschwinden der Resultierenden der Spannungen in Querrichtung im integralen Sinne elegant realisieren.

#### **Fazit:**

Für die im Rahmen dieser Arbeit betrachtete elektromechanisch gekoppelte Problemstellung wurde daher in Anlehnung an die Variante H1P1MIX in LINNEMANN [73] die unter 5.1 beschriebene, konsistente lineare Approximation der mechanischen und elektrischen Freiheitsgrade unter Verwendung der gemischten Methode in Verbindung mit der EAS-Methode als Lösungsstrategie gewählt.

Diese Lösungsstrategie kam im Rahmen der Entwicklung einer piezoelektrischen Schalenformulierung und einer piezoelektrischen Stabformulierung zur Anwendung, welche in den beiden folgenden Kapiteln beschrieben werden.

## 6 Piezoelektrische FE Schalenformulierung

### 6.1 Vorbemerkungen zur Modellbildung

In der Literatur werden verschiedene Herangehensweisen aufgezeigt, um eine dreidimensionale Schalenstruktur hinsichtlich einer Finite-Elemente-Diskretisierung zu beschreiben. In BÜCHTER & RAMM [10] werden die gängigsten Methoden verglichen. Bei jeder Herangehensweise sind geeignete Maßnahmen zu treffen, um Versteifungseffekte und damit verbundene Fehler in der Berechnung zu verhindern, die vor allem bei der Verwendung von Interpolationsfunktionen niedriger Ordnung auftreten. Bei Schalenelementen sind dies insbesondere Querschublocking und Membranlocking.

Ausgangsbasis dieser piezoelektrischen Schalenformulierung ist eine mechanische Schalenformulierung nach WAGNER & GRUTTMANN [119], GRUTTMANN & WAGNER [48], [49] auf Basis der gemischten Methode. Bei einer Schalenformulierung wird der Schalenraum über eine Referenzfläche idealisiert. Ein Punkt des Schalenraumes wird anhand von zwei Flächenparametern, die gewöhnlich als konvektive Koordinaten formuliert sind, bezüglich der Referenzfläche unter Verwendung einer Dickenkoordinate beschrieben. In den nachfolgenden Beschreibungen ist die Formulierung der Schalengleichungen auf den Fall beschränkt, dass die Mittelfläche der Schale die Referenzfläche darstellt.

Neben der Annahme vom Ebenbleiben der Querschnitte nach Reissner-Mindlin wird die Inextensibilität der Direktorvektoren vorausgesetzt, womit sich aus der Kinematik keine Dehnungen in Dickenrichtung ableiten. Da deren Berücksichtigung auch bei Schalenstrukturen und insbesondere auch bei der Untersuchung von Schalenstrukturen aus modernen Materialien mittlerweile als notwendig erachtet wird, werden Dickendehnungen - wie auch zu finden in KLINKEL et al. [63], SCHULZ et al. [99] und SCHULZ [98] - unter Verwendung der EAS-Methode berücksichtigt. Damit wird die Verwendung von 3D-konstitutiven Beziehungen ohne Modifikationen möglich.

Durch die Verwendung von Spannungsansätzen gemäß PIAN & SUMIHARA [90] und dementsprechender Verzerrungsansätze sowie durch die Anwendung der „Enhanced Assumed Strain“ (EAS) - Methode auf die Membran- und Biegekomponenten werden Versteifungseffekte im Membranteil verhindert und das Verhalten bei verzerrten Netzen verbessert. Um Querschublocking zu vermeiden, werden die Querschubanteile nach der „Assumed Natural Strain“ (ANS) - Methode interpoliert.

Bei typischen piezoelektrischen Sensor- und Aktorbauweisen werden gewöhnlich zwei sich gegenüberliegende Elektroden verwendet, um ein elektrisches Feld auf-

zubringen oder das Sensorsignal zu erfassen. Im Rahmen des numerischen Modells können die Elektroden durch Verwendung der elektrischen Knotenfreiheitsgrade  $\varphi_u$  und  $\varphi_o$ , welche das elektrische Potential an der Unterseite und Oberseite der Schale repräsentieren, abgebildet werden.

Die Materialbeschreibung erfolgt auf Basis der in Kapitel 2.2.3 beschriebenen Theorie der linearen Piezoelektrizität für deformierbare Dielektrika. Die für praktische Anwendungen in der Sensorik und Aktorik gängigen Polungsarten in Längsrichtung, Querrichtung oder Dickenrichtung sind modellierbar und werden während der Beanspruchung als invariant betrachtet. Damit sind alle Koeffizienten in der elektromechanisch gekoppelten Stoffmatrix konstant.

Konsistent zur bilinearen Approximation der Knotenwerte wird ein linearer Ansatz für die Verteilung des elektrischen Skalarpotentials über die Dicke verwendet. Über die elektrischen Freiheitsgrade lässt sich damit für den Aktorbetrieb ein lineares elektrisches Skalarpotential - und damit ein konstantes elektrisches Feld in Dickenrichtung - als Belastung aufbringen. Der aktorische Dehnbetrieb ergibt sich für in Dickenrichtung gepoltes Material, der aktorische Schubbetrieb für eine Polung senkrecht dazu.

Die Ursachen von parasitären Approximationen wurden in Kapitel 4 diskutiert und mit einer mangelnden Balance der Approximationsräume für die Komponenten der Verzerrungen und des elektrischen Feldes in Verbindung gebracht.

Mögliche Methoden für deren Beseitigung wurden in Kapitel 5 erörtert. Als effektivste Lösungsstrategie ergab sich dabei die Anwendung der gemischten Methode in Verbindung mit der EAS-Methode. Damit wird im Rahmen dieser Schalenformulierung die Balance der Approximationsräume hergestellt, wodurch keine elektromechanischen Lockingeffekte oder parasitäre Approximationen mehr auftreten, vgl. LEGNER et al. [70].

Die wesentlichen Merkmale der piezoelektrischen Schalenformulierung lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- Die Elementformulierung basiert auf einem gemischten Variationsfunktional.
- In den kinematischen Annahmen werden das Ebenbleiben der Querschnitte nach der Reissner-Mindlin-Theorie und eine lineare Verteilung des elektrischen Potentials über die Dicke verwendet.
- Die Formulierung ist exzentrisch, womit die Referenzfläche nicht mit der Mittelfläche übereinstimmen muss.

- Es sind große Verformungen und endliche Rotationen bei kleinen Verzerrungen abbildbar.
- Sensorstrukturen, die aus unterschiedlichen Schichten aufgebaut sind, können modelliert werden.
- Dickendehnungen werden berücksichtigt, womit 3D-piezoelektrische Stoffgesetze ohne Modifikationen verwendbar sind.
- Alle gängigen Polarisationsrichtungen können abgebildet werden.
- Die mechanischen Lasten bleiben mit der Verformung richtungstreu.
- Die elektrischen Lasten bleiben bei der Verformung konstant bezüglich der Referenzfläche.
- Dem Auftreten von mechanischen Lockingeffekten wird durch die Verwendung von Ansatzfunktionen nach PIAN & SUMIHARA [90], der EAS-Methode und der ANS-Methode entgegengewirkt.
- Es wird verhindert, dass bei der Kopplung der elektrischen und mechanischen Felder unverträgliche Approximationsräume und damit verbundene, parasitäre Approximationen auftreten.

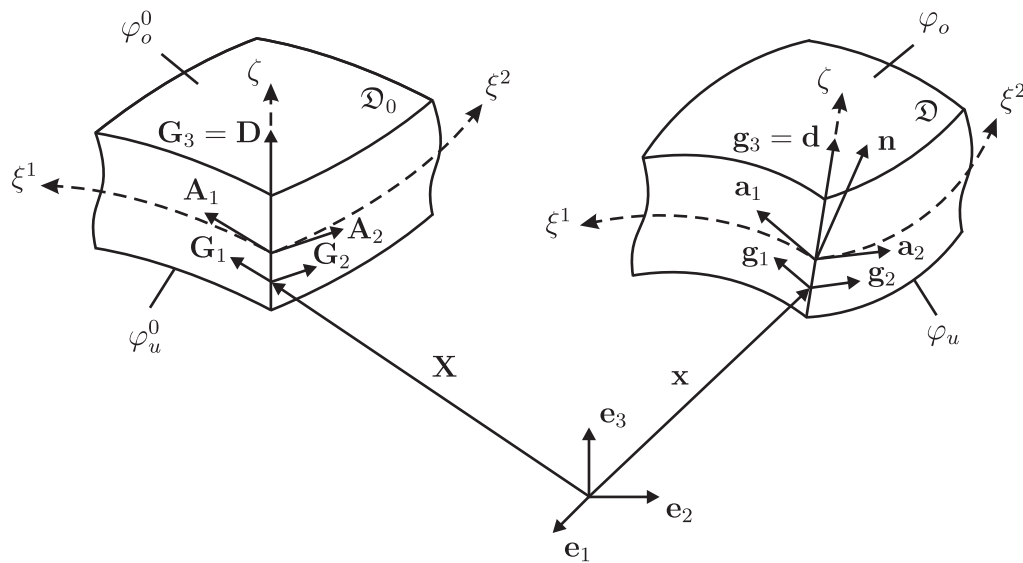
## 6.2 Kinematische Annahmen der Schalenformulierung

Die hier vorgestellte piezoelektrische Schalenformulierung beschreibt ein schalenartiges, dielektrisches Kontinuum der Dicke  $h$ , dessen Ausgangskonfiguration durch den Körper  $\mathcal{D}_0$  im Euklidischen Raum  $\mathbb{E}^3$  repräsentiert wird. Die nachfolgenden mathematischen Beschreibungen beschränken sich aus Gründen der Übersichtlichkeit auf den Fall, dass die Mittelfläche  $\Omega_0$  die Referenzfläche darstellt. Der Schalenrand wird mit  $\Gamma$  symbolisiert. Ist an den entsprechenden Stellen im Text nichts anderes vereinbart, gilt für die Indizes in diesem Kapitel  $\alpha, \beta \in \{1, 2\}$  und  $k \in \{1, 2, 3\}$ .

### 6.2.1 Mechanischer Teil

Die Position eines Punktes  $\mathcal{P}$  der Mittelfläche  $\Omega_0$  wird mit konvektiven Flächenkoordinaten  $\xi^1$  und  $\xi^2$  beschrieben. Als Bezugssystem dient die Orthonormalbasis  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ . Ausgehend von  $\Omega_0$  wird eine Dickenkoordinate  $\zeta \in [-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]$  definiert, womit einem Punkt der Mittelfläche in der Ausgangsplatzierung  $\mathcal{D}_0$  der Ortsvektor  $\mathbf{X} = (\xi^1, \xi^2, 0)$  zugeordnet ist, vgl. Abbildung 6.1.





**Abb. 6.1:** Bezeichnungen und Geometrie der Schale

Die Tangentenvektoren an die Koordinatenlinien  $\xi^1$  und  $\xi^2$  in Form von

$$\mathbf{A}_1 := \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi^1} \quad \mathbf{A}_2 := \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi^2} \quad (6.1)$$

bilden mit  $\mathbf{A}_3 = \frac{\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2}{\|\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2\|}$  ein konvektives Basissystem  $\mathbf{A}_k$  in einem Punkt  $\mathbf{X}$  der Mittelfläche in der Ausgangskonfiguration  $\mathcal{D}_0$ . Das entsprechende Basissystem  $\mathbf{a}_k$  in der Momentankonfiguration  $\mathcal{D}$  ergibt sich durch Verwendung von  $\mathbf{x}$  anstelle von  $\mathbf{X}$  in Gleichung 6.1 und  $\mathbf{n} = \mathbf{a}_3 = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|}$ .

Im Rahmen der Reissner-Mindlin-Kinematik wird angenommen, dass die Querschnitte bei der Deformation eben bleiben. Alle Punkte der Schale lassen sich dann in der Ausgangskonfiguration und zum Zeitpunkt  $t$  in der Momentankonfiguration mit

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{X}}(\xi^1, \xi^2, \zeta) &= \mathbf{X}(\xi^1, \xi^2) + \zeta \mathbf{D}(\xi^1, \xi^2) \\ \hat{\mathbf{x}}(\xi^1, \xi^2, \zeta, t) &= \mathbf{x}(\xi^1, \xi^2, t) + \zeta \mathbf{d}(\xi^1, \xi^2, t) \end{aligned} \quad (6.2)$$

beschreiben. Der Direktorvektor  $\mathbf{D} := \mathbf{A}_3$  steht in der Ausgangskonfiguration senkrecht auf der Mittelfläche  $\Omega_0$ , für seine Länge gilt  $\|\mathbf{D}\| = 1$ . In der Momentankonfiguration weicht  $\mathbf{d}$  von der Normalen  $\mathbf{n}$  auf  $\Omega$  in der Regel ab. Der Direktorvektor beschreibt die Verdrehung des Querschnitts und wird durch drei unbekannte Rotationen parametrisiert. Setzt man voraus, dass sich die Länge des Direktors nicht ändert, kann sich die Schale wegen  $\|\mathbf{d}\| = 1$  nicht in Dickenrichtung ausdehnen. In diesem Fall geht  $\mathbf{d}$  aus einer Rotation von  $\mathbf{D}$  mit  $\mathbf{d} = \mathbf{R}\mathbf{D}$

hervor. Verschiedene Konzepte zur Parametrisierung orthogonaler Tensoren werden beispielsweise in BETSCH et al. [16] diskutiert. Für die Parametrisierung von  $\mathbf{R}$  kommt die Euler-Rodrigues-Darstellung zum Einsatz.

In der Literatur wird ein zumindest linearer Verlauf der Dickendehnungen innerhalb einer Schalenformulierung als notwendig erachtet. Verschiedene Vorgehensweisen der Berücksichtigung von Dickendehnungen werden in BRANK et al. [22] verglichen. Im Rahmen dieser Formulierung werden Dickendehnungen unter Verwendung der EAS-Methode berücksichtigt.

Für einen Punkt  $\hat{\mathbf{X}}$  des Schalenkontinuums werden unter Verwendung von Gleichung 6.2<sub>1</sub> die Tangentenvektoren

$$\mathbf{G}_1 := \frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial \xi_1} = \mathbf{X}_{,\xi^1} + \zeta \mathbf{D}_{,\xi^1} \quad \mathbf{G}_2 := \frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial \xi_2} = \mathbf{X}_{,\xi^2} + \zeta \mathbf{D}_{,\xi^2} \quad (6.3)$$

definiert, welche in Verbindung mit  $\mathbf{G}_3 := \mathbf{D}$  das kovariante Basissystem  $\mathbf{G}_k$  in der Ausgangskonfiguration bilden. Die Komponenten des Basissystems  $\mathbf{g}_k$  in der Momentankonfiguration erhält man durch Vertauschung von  $\hat{\mathbf{X}}$  und  $\mathbf{D}$  mit  $\hat{\mathbf{x}}$  und  $\mathbf{d}$  in Gleichung 6.3 und  $\mathbf{g}_3 := \mathbf{d}$ . Die zugeordneten kontravarianten Basen  $\mathbf{G}^k$  und  $\mathbf{g}^k$  sowie die Metrikkoeffizienten ergeben sich aus den Gleichungen 2.15 und 2.16.

Setzt man die Tangentenvektoren in die Definition des Green'schen Verzerrungstensors  $\mathbf{E}$  nach Gleichung 2.20 ein, lassen sich unter Verwendung von geometrischen Schalenverzerrungen

$$\bar{\varepsilon}_g := [\check{\varepsilon}_{11}, \check{\varepsilon}_{22}, 2\check{\varepsilon}_{12}, \check{\kappa}_{11}, \check{\kappa}_{22}, 2\check{\kappa}_{12}, \check{\gamma}_1, \check{\gamma}_2]^T, \quad (6.4)$$

definiert gemäß GREEN & NAGHDI [43] durch

$$\begin{aligned} \check{\varepsilon}_{\alpha\beta} &:= \frac{1}{2} (\mathbf{x}_{,\alpha} \cdot \mathbf{x}_{,\beta} - \mathbf{X}_{,\alpha} \cdot \mathbf{X}_{,\beta}) \\ \check{\kappa}_{\alpha\beta} &:= \frac{1}{2} (\mathbf{x}_{,\alpha} \cdot \mathbf{d}_{,\beta} + \mathbf{x}_{,\beta} \cdot \mathbf{d}_{,\alpha} - \mathbf{X}_{,\alpha} \cdot \mathbf{D}_{,\beta} + \mathbf{X}_{,\beta} \cdot \mathbf{D}_{,\alpha}) \\ \check{\gamma}_\alpha &:= \mathbf{x}_{,\alpha} \cdot \mathbf{d} - \mathbf{X}_{,\alpha} \cdot \mathbf{D} \end{aligned} \quad (6.5)$$

sowie der Einführung einer Matrix  $\bar{\mathbf{A}}_g$  die nicht verschwindenden kontravarianten Komponenten von  $\mathbf{E}$ , vektoriell angeordnet gemäß Gleichung 3.8, bezüglich der kovarianten Basis  $\mathbf{G}^k$  durch

$$\begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ 2E_{12} \\ 2E_{13} \\ 2E_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_1 - \mathbf{G}_1 \cdot \mathbf{G}_1) \\ \frac{1}{2}(\mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{g}_2 - \mathbf{G}_2 \cdot \mathbf{G}_2) \\ \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_2 - \mathbf{G}_1 \cdot \mathbf{G}_2 \\ \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_3 - \mathbf{G}_1 \cdot \mathbf{G}_3 \\ \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{g}_3 - \mathbf{G}_2 \cdot \mathbf{G}_3 \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{A}}_g \bar{\varepsilon}_g \quad (6.6)$$

mit

$$\bar{\mathbf{A}}_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \zeta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \zeta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{a}}_1^T \\ \bar{\mathbf{a}}_2^T \\ \bar{\mathbf{a}}_3^T \\ \bar{\mathbf{a}}_4^T \\ \bar{\mathbf{a}}_5^T \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

ausdrücken. Die Matrix  $\bar{\mathbf{A}}_g$  beinhaltet alle von den Flächenkoordinaten  $\xi^1$  und  $\xi^2$  unabhängigen Ausdrücke. Da Krümmungen zweiter Ordnung bei dünnen Strukturen vernachlässigt werden können, enthält  $\bar{\mathbf{A}}_g$  nur konstante und lineare Ausdrücke. Wegen der Zwangsbedingung  $\|\mathbf{d}\| = 1$  ergibt sich für die Dehnung in Dickenrichtung  $E_{33} = 0$ . Mit Gleichung 6.6 ist der Zusammenhang zwischen der Schubverzerrung  $E_{\alpha 3}$  und der mittleren Gleitung  $\check{\gamma}_\alpha$  beschrieben mit

$$2E_{\alpha 3} = \check{\gamma}_\alpha \quad . \quad (6.8)$$

Die Variation von Gleichung 6.6 ergibt sich mit

$$\delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_g := [\delta \check{\varepsilon}_{11}, \delta \check{\varepsilon}_{22}, 2\delta \check{\varepsilon}_{12}, \delta \check{\kappa}_{11}, \delta \check{\kappa}_{22}, 2\delta \check{\kappa}_{12}, \delta \check{\gamma}_1, \delta \check{\gamma}_2]^T \quad (6.9)$$

und den Variationen der Komponenten

$$\begin{aligned} \delta \check{\varepsilon}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (\delta \mathbf{x}_{,\alpha} \cdot \mathbf{x}_{,\beta} + \delta \mathbf{x}_{,\beta} \cdot \mathbf{x}_{,\alpha}) \\ \delta \check{\kappa}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (\delta \mathbf{x}_{,\alpha} \cdot \mathbf{d}_{,\beta} + \delta \mathbf{x}_{,\beta} \cdot \mathbf{d}_{,\alpha} + \delta \mathbf{d}_{,\alpha} \cdot \mathbf{x}_{,\beta} + \delta \mathbf{d}_{,\beta} \cdot \mathbf{x}_{,\alpha}) \\ \delta \check{\gamma}_\alpha &= \delta \mathbf{x}_{,\alpha} \cdot \mathbf{d} + \delta \mathbf{d} \cdot \mathbf{x}_{,\alpha} \end{aligned} \quad (6.10)$$

zu

$$\begin{bmatrix} \delta E_{11} \\ \delta E_{22} \\ 2\delta E_{12} \\ 2\delta E_{13} \\ 2\delta E_{23} \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{A}}_g \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_g \quad . \quad (6.11)$$

### 6.2.2 Elektrischer Teil

Für das elektrische Skalarpotential an der Unterseite und Oberseite des Schalenelements werden gemäß Abbildung 6.1 die Knotenfreiheitsgrade  $\varphi_u, \varphi_o$  eingeführt.

Das elektrische Potential wird mit  $\zeta \in \{-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\}$  und

$$\varphi(\xi^1, \xi^2, \zeta) := \frac{1}{h} \left[ \left( \frac{h}{2} - \zeta \right) \varphi_u(\xi^1, \xi^2) + \left( \frac{h}{2} + \zeta \right) \varphi_o(\xi^1, \xi^2) \right] \quad (6.12)$$

linear über die Dicke der Schale approximiert.

Die Komponenten des elektrischen Felds  $\vec{\mathbf{E}}$  bezüglich der lokalen Koordinaten ergeben sich durch Anwendung von Gleichung 2.32 zu

$$\begin{bmatrix} \vec{E}_1 \\ \vec{E}_2 \\ \vec{E}_3 \end{bmatrix} = \vec{\mathbf{A}}_g \vec{\varepsilon}_g \quad \text{mit} \quad \vec{\varepsilon}_g := \begin{bmatrix} \varphi_{u,\xi^1} \\ \varphi_{u,\xi^2} \\ \varphi_{o,\xi^1} \\ \varphi_{o,\xi^2} \\ \varphi_u \\ \varphi_o \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

und

$$\vec{\mathbf{A}}_g = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{\zeta}{h} & 0 & -\frac{1}{2} - \frac{\zeta}{h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} + \frac{\zeta}{h} & 0 & -\frac{1}{2} - \frac{\zeta}{h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{h} & -\frac{1}{h} \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{a}}_1^T \\ \vec{\mathbf{a}}_2^T \\ \vec{\mathbf{a}}_3^T \end{bmatrix} . \quad (6.14)$$

Für die zugehörigen Variationen gilt

$$\begin{bmatrix} \delta \vec{E}_1 \\ \delta \vec{E}_2 \\ \delta \vec{E}_3 \end{bmatrix} = \vec{\mathbf{A}}_g \delta \vec{\varepsilon}_g \quad \delta \vec{\varepsilon}_g = \begin{bmatrix} \delta \varphi_{u,\xi^1} \\ \delta \varphi_{u,\xi^2} \\ \delta \varphi_{o,\xi^1} \\ \delta \varphi_{o,\xi^2} \\ \delta \varphi_u \\ \delta \varphi_o \end{bmatrix} . \quad (6.15)$$

### 6.2.3 Generalisierte Darstellung der kinematischen Schalengrößen

Die aus den kinematischen Annahmen abgeleiteten mechanischen und elektrischen Schalengrößen  $\bar{\varepsilon}_g$  und  $\vec{\varepsilon}_g$ , die in den Gleichungen 6.4 und 6.13 definiert wurden, werden für eine kompaktere Darstellung zu einer generalisierten Größe

$$\varepsilon_g := [\bar{\varepsilon}_g, \vec{\varepsilon}_g]^T \quad (6.16)$$

zusammengefasst. Für deren Variation gilt

$$\delta \varepsilon_g := [\delta \bar{\varepsilon}_g, \delta \vec{\varepsilon}_g]^T . \quad (6.17)$$

## 6.3 Variationsformulierung des Randwertproblems

### 6.3.1 Green'sche Verzerrungen

Es werden die unabhängigen Schalenverzerrungen

$$\bar{\varepsilon} = [\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2]^T \quad (6.18)$$

definiert. Der erste Teil  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 = [\bar{\varepsilon}_{11}, \bar{\varepsilon}_{22}, 2\bar{\varepsilon}_{12}, \bar{\kappa}_{11}, \bar{\kappa}_{22}, 2\bar{\kappa}_{12}, \bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2]^T$  beinhaltet die Dehnungen  $\bar{\varepsilon}_{11}$ ,  $\bar{\varepsilon}_{22}$ ,  $\bar{\varepsilon}_{12}$ , Krümmungen  $\bar{\kappa}_{11}$ ,  $\bar{\kappa}_{22}$ ,  $\bar{\kappa}_{12}$  und mittleren Gleitungen  $\bar{\gamma}_1$ ,  $\bar{\gamma}_2$ . Der zweite Teil  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_2$  der unabhängigen Schalenverzerrungen beinhaltet eine Anzahl von  $\bar{M}_1 \in \{1, 2\}$  Komponenten und ermöglicht die Berücksichtigung von Dickendehnungen.

Mit

$$\bar{\mathbf{A}}_1 = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{a}}_1^T \\ \bar{\mathbf{a}}_2^T \\ \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{a}}_3^T \\ \bar{\mathbf{a}}_4^{*T} \\ \bar{\mathbf{a}}_5^{*T} \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{A}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{w}_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

wird der Zusammenhang zwischen den Green'schen Verzerrungen  $\mathbf{E}$  in Vektornotation gemäß Gleichung 3.8 und den unabhängigen Schalenverzerrungen  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  beschrieben durch

$$\mathbf{E} = \bar{\mathbf{A}} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \bar{\mathbf{A}} = [\bar{\mathbf{A}}_1, \bar{\mathbf{A}}_2] \quad . \quad (6.20)$$

Für die Variation gilt

$$\delta \mathbf{E} = \bar{\mathbf{A}} \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = [\delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_1, \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_2]^T \quad . \quad (6.21)$$

Da die zugrunde liegende Schalenkinematik die Inextensibilität des Schalendirektors  $\mathbf{d}$  voraussetzt, liefern die aus ihr resultierenden und in Gleichung 6.7 definierten Vektoren  $\bar{\mathbf{a}}_i$  keinen Beitrag zur Dickendehnung  $E_{33}$ . Um Materialgleichungen, wie sie für den dreidimensionalen Festkörper gelten, ohne Modifikationen anwenden zu können, müssen mindestens konstante Dehnungen in Dickenrichtung berücksichtigt werden. In der Literatur herrscht Einigkeit darüber, dass sogar die Approximation einer linearen Verteilung von  $E_{33}$  über die Dicke auch bei Schalenstrukturen zu berücksichtigen ist. Daher wird mit den Polynomen

$$P_n := \zeta^n \quad (6.22)$$

der Vektor  $\mathbf{w}_1 \in \mathbb{R}^{\bar{M}_1}$  in der Matrix  $\bar{\mathbf{A}}_2$  definiert zu

$$\mathbf{w}_1 := \begin{cases} [P_0] & \text{für } \bar{M}_1 = 1 \\ [P_0, P_1] & \text{für } \bar{M}_1 = 2 \end{cases} \quad . \quad (6.23)$$

Die Annahme vom Ebenbleiben der Querschnitte während der Deformation in der Kinematik nach Reissner-Mindlin geht mit einer über die Dicke der Schale unveränderlichen Schubverzerrung  $E_{\alpha 3}$  einher, vgl. Gleichung 6.8. Es liegt nahe,

$E_{\alpha 3}$  unter Verwendung der unabhängigen Verzerrungen  $\bar{\epsilon}$  dementsprechend zu approximieren, indem

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{a}}_4^* &= \bar{\mathbf{a}}_4 \\ \bar{\mathbf{a}}_5^* &= \bar{\mathbf{a}}_5\end{aligned}\tag{6.24}$$

in der Matrix  $\bar{\mathbf{A}}_1$  verwendet wird, wodurch mit der mittleren Gleitung  $\bar{\gamma}_\alpha$  die Beziehung

$$2E_{\alpha 3} = \bar{\gamma}_\alpha\tag{6.25}$$

gilt. Insbesondere bei aktorischer Beanspruchung durch ein in Dickenrichtung konstantes elektrisches Feld  $\vec{E}_3$ , welches über die elektrischen Freiheitsgrade  $\varphi_o$  und  $\varphi_u$  aufgebracht werden kann, ist dies zur Herstellung elektromechanisch abgestimmter Approximationsräume zielführend. Wie man Tabelle 4.1 entnehmen kann, wird bei dieser Beanspruchung auch in Abwesenheit einer mechanischen Belastung eine konstant über die Dicke verlaufende Schubverzerrung  $E_{\alpha 3}$  induziert.

Bei durch eine Querkraft  $Q_\alpha$  induzierter Schubbeanspruchung ist der tatsächliche Verlauf der Schubverzerrung  $E_{\alpha 3}$  innerhalb der rechteckigen Querschnittsfläche  $A = b_\alpha h$  mit Breite  $b_\alpha$  eine quadratische Funktion der Dickenkoordinate  $\zeta$ . Bei konstanter Approximation von  $E_{\alpha 3}$  nach Reissner-Mindlin muss eine energetische Korrektur erfolgen, um die Schubsteifigkeit korrekt zu erfassen. Dies erfolgt gewöhnlich dadurch, dass die Schubverzerrung auf eine virtuelle, gegenüber der Querschnittsfläche  $A$  reduzierte Wirkfläche  $A_s = \kappa \cdot A$  bezogen wird. Für Rechteckquerschnitte gilt für den Schubkorrekturfaktor der bekannte Wert  $\kappa = \frac{5}{6}$ , womit sich mit dem Schubmodul  $G_{\alpha 3}$  und unter Verwendung der Beziehung in Gleichung 6.25 die spezifische Formänderungsenergie infolge Querbelastung mit

$$\hat{W}_\alpha = \frac{1}{2} [\bar{\gamma}_\alpha]^2 G_{\alpha 3} A_s\tag{6.26}$$

darstellt.

In Kapitel 4 wurde gezeigt, dass bei Querbeanspruchung der konstant über die Dicke approximierte Verlauf von  $E_{\alpha 3}$  zu Unverträglichkeiten der elektrischen und mechanischen Approximationsräume und zu parasitären Approximationen des elektrischen Potentials führt. Am oberen Rand sind mit dem konstanten Verlauf von  $E_{\alpha 3}$  nicht alle Spannungsrandbedingungen exakt erfüllbar, was bei mechanischen Analysen in den meisten Fällen von untergeordneter Bedeutung ist. Bei elektromechanischen Analysen führen die dadurch induzierten, fehlerhaften Approximationen des elektrischen Potentials dazu, dass das zu erwartende Sensor-signal nicht korrekt abgebildet werden kann. Dies kann man verhindern, indem

bei der Approximation von  $E_{\alpha 3}$  mittels der unabhängigen Verzerrungen  $\bar{\epsilon}$ , vgl. Gleichung 6.20, direkt die quadratische Verteilung von  $E_{\alpha 3}$  über die Dicke approximiert wird. Dies ist notwendig, um bei Querbelastrung zu einer konsistenten numerischen Modellbildung zu gelangen, und kann durch Wichtung der mittleren Gleitung  $\bar{\gamma}_\alpha$  über die Querschnittshöhe  $h$  unter Verwendung einer quadratischen Funktion  $\hat{p}_\alpha(\zeta)$  erfolgen, was auf

$$2E_{\alpha 3} := \hat{p}_\alpha(\zeta) \cdot \bar{\gamma}_\alpha \quad (6.27)$$

führt. Neben dem konstanten Verlauf von  $E_{\alpha 3}$  gemäß den kinematischen Annahmen, siehe Gleichung 6.8, geht damit über die unabhängigen Verzerrungen  $\bar{\epsilon}$  eine Approximation der Schubverzerrungen  $E_{\alpha 3}$  von höherer Ordnung in das numerische Modell ein. Die Wichtungsfunktion  $\hat{p}_\alpha(\zeta)$  muss dem Anspruch genügen, die Schubsteifigkeit korrekt abzubilden. Unter Verwendung der Beziehung 6.27 anstelle von Gleichung 6.25 bei der Aufstellung der spezifischen Formänderungsenergie infolge Querkraft erhält man

$$\hat{W}_\alpha^* = \frac{1}{2} G_{\alpha 3} b_\alpha \int_h [\hat{p}_\alpha(\zeta) \cdot \bar{\gamma}_\alpha]^2 d\zeta \quad . \quad (6.28)$$

Da  $\hat{W}_\alpha = \hat{W}_\alpha^*$  gelten muss, erhält man mit den Gleichungen 6.26 und 6.28 für die Wichtungsfunktion unter den Randbedingungen  $\hat{p}_\alpha(\zeta = \pm \frac{h}{2}) = 0$

$$\hat{p}_\alpha(\zeta) = \frac{5}{4} \left(1 - \frac{4\zeta^2}{h^2}\right) \quad . \quad (6.29)$$

Bei der Herleitung von  $\hat{p}_\alpha(\zeta)$  wurde die Kenntnis des Schubkorrekturfaktors  $\kappa$  für homogene Rechteckquerschnitte vorausgesetzt. Bei inhomogenen Querschnitten hängt der Schubkorrekturfaktor  $\kappa$  vom Querschnittsaufbau ab, siehe zum Beispiel REISSNER [95] und COHEN [32], wobei im Allgemeinen  $\kappa \neq \frac{5}{6}$  gilt. Um für einen Querschnitt, der aus verschiedenen Schichten besteht, die Wichtungsfunktion  $\hat{p}_\alpha(\zeta)$  bestimmen zu können, wird zunächst eine allgemeinere Herleitung des Ausdrucks in Gleichung 6.29 ohne explizite Verwendung des Schubkorrekturfaktors vorgestellt. Für eine übersichtlichere Darstellung werden im Weiteren die Schubspannungen mit  $\tau_\alpha := S^{\alpha 3}$  und die Schubverzerrungen mit  $\gamma_\alpha := 2E_{\alpha 3}$  symbolisiert.

Für die komplementäre spezifische Formänderungsenergie  $W_\alpha^*$  infolge Schubbeanspruchung und die konjugierte spezifische Formänderungsenergie  $W_\alpha$  gilt für den physikalisch linearen Fall

$$W_\alpha^* = W_\alpha \quad (6.30)$$

mit

$$W_\alpha^* = \frac{1}{2} \int_h [\tau_\alpha]^2 \frac{1}{G_{\alpha 3}} b_\alpha d\zeta \quad W_\alpha = \frac{1}{2} \int_h [\gamma_\alpha]^2 G_{\alpha 3} b_\alpha d\zeta \quad . \quad (6.31)$$

Die Schubspannung  $\tau_\alpha$  und die Schubverzerrung  $\gamma_\alpha$  lassen sich unter Verwendung der Querkraft  $Q_\alpha$  und der mittleren Gleitung  $\bar{\gamma}_\alpha$  sowie den nachfolgend spezifizierten Funktionen  $g_\alpha(\zeta)$  und  $p_\alpha(\zeta)$  der Dickenkoordinate  $\zeta$  mit

$$\tau_\alpha(\xi^1, \xi^2, \zeta) = g_\alpha(\zeta) Q_\alpha(\xi^1, \xi^2) \quad \gamma_\alpha(\xi^1, \xi^2, \zeta) = p_\alpha(\zeta) \bar{\gamma}_\alpha(\xi^1, \xi^2) \quad (6.32)$$

multiplikativ zerlegen.

Setzt man Gleichung 6.32 in Gleichung 6.31 ein, erhält man

$$W_\alpha^* = \frac{1}{2} [Q_\alpha]^2 \underbrace{\int_h [g_\alpha]^2 \frac{1}{G_{\alpha 3}} b_\alpha d\zeta}_{[\mathbb{G}_\alpha^*]^{-1}} \quad W_\alpha = \frac{1}{2} [\bar{\gamma}_\alpha]^2 \underbrace{\int_h [p_\alpha]^2 G_{\alpha 3} b_\alpha d\zeta}_{[\mathbb{G}_\alpha]} \quad (6.33)$$

worin sich die Integralterme als die Schubnachgiebigkeit  $[\mathbb{G}_\alpha^*]^{-1}$  und Schubsteifigkeit  $\mathbb{G}_\alpha$  identifizieren lassen.

Nach SCHNELL et al. [97] gilt für einen homogenen Rechteckquerschnitt

$$g_\alpha(\zeta) = \frac{3}{2} \frac{1}{b_\alpha h} \left(1 - \frac{4\zeta^2}{h^2}\right) \quad (6.34)$$

und aus der konstitutiven Beziehung folgt bei Orthotropie der proportionale Zusammenhang

$$p_\alpha(\zeta) = \hat{f}_\alpha \cdot g_\alpha(\zeta) \quad , \quad \hat{f}_\alpha \in \mathbb{N} \quad . \quad (6.35)$$

Mit Gleichung 6.34 und Gleichung 6.35 ergeben sich als Auswertung der Integralausdrücke in Gleichung 6.33

$$[\mathbb{G}_\alpha^*]^{-1} = \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{b_\alpha h G_{\alpha 3}} \quad [\mathbb{G}_\alpha] = \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{b_\alpha h} [\hat{f}_\alpha]^2 G_{\alpha 3} \quad . \quad (6.36)$$

Wegen Gleichung 6.30 gilt  $[\mathbb{G}_\alpha^*] = [\mathbb{G}_\alpha]$ , womit sich mit Gleichung 6.36 der Proportionalitätsfaktor

$$\hat{f}_\alpha = \pm \frac{5}{6} b_\alpha h \quad (6.37)$$

ergibt. Setzt man die physikalisch sinnvolle, positive Lösung für  $\hat{f}_\alpha$  in Gleichung 6.35 ein, folgt als Wichtungsfunktion

$$p_\alpha(\zeta) = \frac{5}{4} \left(1 - \frac{4\zeta^2}{h^2}\right) \quad . \quad (6.38)$$

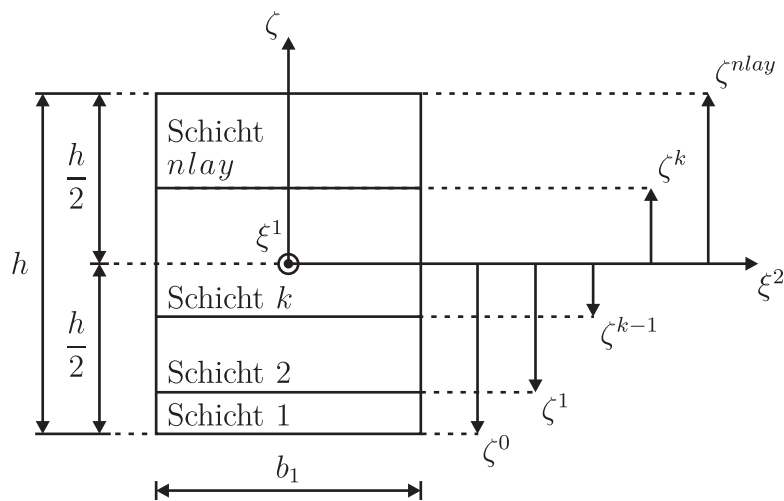
Diese ist identisch mit  $\hat{p}_\alpha(\zeta)$  nach Gleichung 6.29.

Um eine Balance der Approximationsräume bei Querkraftbeanspruchung herzustellen, ist die Wichtungsfunktion  $p_\alpha(\zeta)$  mittels der Vektoren

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{a}}_4^* &= \bar{\mathbf{a}}_4 \cdot p_1(\zeta) \\ \bar{\mathbf{a}}_5^* &= \bar{\mathbf{a}}_5 \cdot p_2(\zeta) \end{aligned} \quad (6.39)$$

in der Matrix  $\bar{\mathbf{A}}_1$  zu berücksichtigen.





**Abb. 6.2:** Schichtquerschnitt für  $\alpha = 1$

### Berücksichtigung von geschichteten Querschnitten

Auf ähnliche Weise lässt sich die Wichtungsfunktion  $p_\alpha(\zeta)$  für geschichtete Querschnitte mit  $k \in \{1, 2, \dots, nlay\}$  Schichten herleiten, vgl. KLINKEL & LEGNER [64].

Für einen geschichteten Querschnittsaufbau gemäß Abbildung 6.2 ist der Verlauf der Schubspannung  $\tau_\alpha^k$  und der Verlauf der Schubverzerrung  $\gamma_\alpha^k$  in jeder Schicht  $k$  quadratisch über die Dicke. Dabei unterscheiden sich die Verläufe  $\tau_\alpha^k$  und  $\gamma_\alpha^k$  durch einen Faktor für jede Schicht  $k$ . An den Schichtgrenzen verläuft die Schubspannung stetig, die Schubverzerrung weist hier im Allgemeinen Sprünge auf.

Die komplementäre spezifische Formänderungsenergie  $W_\alpha^*$  bei Schubbeanspruchung und die konjugierte spezifische Formänderungsenergie  $W_\alpha$  ergeben sich für den linear elastischen Fall mit Integration über jede Schicht  $k$  und Summation über alle Schichten  $nlay$  zu

$$W_\alpha^* = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{nlay} \int_{\zeta^{k-1}}^{\zeta^k} [\tau_\alpha^k]^2 \frac{1}{G_{\alpha 3}^k} b_\alpha \, d\zeta \quad W_\alpha = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{nlay} \int_{\zeta^{k-1}}^{\zeta^k} [\gamma_\alpha^k]^2 G_{\alpha 3}^k b_\alpha \, d\zeta \quad . \quad (6.40)$$

In Analogie zu Gleichung 6.32 lassen sich die Schubspannung  $\tau_\alpha^k$  und die Schubverzerrung  $\gamma_\alpha^k$  jeder Schicht unter Verwendung der Querkraft  $Q_\alpha$  und der mittleren Gleitung  $\bar{\gamma}_\alpha$  bezüglich ihrer Veränderlichen faktorisieren mit

$$\tau_\alpha^k(\xi^1, \xi^2, \zeta) = g_\alpha^k(\zeta) Q_\alpha(\xi^1, \xi^2) \quad \gamma_\alpha^k(\xi^1, \xi^2, \zeta) = p_\alpha^k(\zeta) \bar{\gamma}_\alpha(\xi^1, \xi^2) \quad . \quad (6.41)$$

Die Verteilung über die Dicke  $g_\alpha^k(\zeta)$  wird in ALTENBACH et al. [4] ausgehend von der Gleichgewichtsbedingung  $\text{div}[\mathbf{S}] = 0$  hergeleitet. Vernachlässigt man die

Querkontraktion, gilt für  $i \in \{j, k\}$  mit dem  $E$ -Modul  $E^i = C_{\alpha\alpha}^i$  der  $i$ -ten Schicht

$$g_\alpha^k(\zeta) = \frac{1}{\bar{D}} \left( -E^k \frac{\zeta^2}{2} + \sum_{j=1}^k (E^j - E^{j-1}) \frac{[\zeta^{j-1}]^2}{2} \right) , \quad (6.42)$$

wobei  $E^0 = 0$  gilt. Die Ersatzbiegesteifigkeit  $\bar{D}$  des Querschnitts ist gegeben mit

$$\bar{D} = \frac{b_\alpha}{3} \sum_{j=1}^{nlay} E^j ([\zeta^j]^3 - [\zeta^{j-1}]^3) . \quad (6.43)$$

Die Verteilung  $g_\alpha^k(\zeta)$  für den allgemeinen Fall unter Berücksichtigung von Querkontraktion wird in ANHANG D abgeleitet.

Setzt man Gleichung 6.41 in Gleichung 6.40 ein, folgt

$$W_\alpha^* = \frac{1}{2} [Q_\alpha]^2 \sum_{k=1}^{nlay} \int_{\zeta^{k-1}}^{\zeta^k} [g_\alpha^k]^2 \frac{1}{G_{\alpha 3}^k} b_\alpha \, d\zeta \quad W_\alpha = \frac{1}{2} [\bar{\gamma}_\alpha]^2 \sum_{k=1}^{nlay} \int_{\zeta^{k-1}}^{\zeta^k} [p_\alpha^k]^2 G_{\alpha 3}^k b_\alpha \, d\zeta . \quad (6.44)$$

Mit Einsetzen des proportionalen Zusammenhangs für jede Schicht

$$p_\alpha^k(\zeta) = \hat{f}_\alpha^k \cdot g_\alpha^k(\zeta) \quad , \quad \hat{f}_\alpha^k \in \mathbb{N} \quad (6.45)$$

sowie Verwendung der Kurzschreibweise

$$r_\alpha^k := \int_{\zeta^{k-1}}^{\zeta^k} [g_\alpha^k]^2 \, d\zeta \quad (6.46)$$

vereinfacht sich Gleichung 6.44 zu

$$W_\alpha^* = \frac{1}{2} [Q_\alpha]^2 b_\alpha \underbrace{\sum_{k=1}^{nlay} \frac{1}{G_{\alpha 3}^k} r_\alpha^k}_{[\bar{\mathbb{G}}_\alpha^*]^{-1}} \quad W_\alpha = \frac{1}{2} [\bar{\gamma}_\alpha]^2 b_\alpha \underbrace{\sum_{k=1}^{nlay} G_{\alpha 3}^k [\hat{f}_\alpha^k]^2 r_\alpha^k}_{[\bar{\mathbb{G}}_\alpha]} , \quad (6.47)$$

worin sich die mittlere Schubnachgiebigkeit  $[\bar{\mathbb{G}}_\alpha^*]^{-1}$  und die mittlere Schubsteifigkeit  $\bar{\mathbb{G}}_\alpha$  identifizieren lassen. Da wegen Gleichung 6.30  $[\bar{\mathbb{G}}_\alpha^*] = [\bar{\mathbb{G}}_\alpha]$  gelten muss, erhält man aus Gleichung 6.47 die Beziehung

$$\left[ b_\alpha \sum_{k=1}^{nlay} \frac{1}{G_{\alpha 3}^k} r_\alpha^k \right]^{-1} = b_\alpha \sum_{k=1}^{nlay} G_{\alpha 3}^k [\hat{f}_\alpha^k]^2 r_\alpha^k . \quad (6.48)$$

In Gleichung 6.48 sind die  $nlay$  Unbekannten  $\hat{f}_\alpha^1, \hat{f}_\alpha^2, \dots, \hat{f}_\alpha^k$  enthalten. Die für ihre Bestimmung zusätzlich erforderlichen  $(nlay - 1)$  Nebenbedingungen ergeben sich aus der Stetigkeit der Schubspannungen an den Schichtgrenzen. Für jede Schichtgrenze  $\zeta^k$  mit  $k \in \{1, 2, \dots, nlay - 1\}$  gilt

$$\tau_\alpha^k(\xi^1, \xi^2, \zeta^k) = \tau_\alpha^{k+1}(\xi^1, \xi^2, \zeta^k) . \quad (6.49)$$

Durch Verwendung der linearen konstitutiven Beziehung lassen sich die Schubspannungen in Gleichung 6.49 mit  $\tau_\alpha^k = G_{\alpha 3}^k \gamma_\alpha^k$  über die Schubverzerrungen ausdrücken. Ersetzt man die Schubverzerrungen durch Verwendung von Gleichung 6.41<sub>2</sub> und Gleichung 6.45, ergibt sich

$$\hat{f}_\alpha^k g_\alpha^k(\zeta^k) G_{\alpha 3}^k = \hat{f}_\alpha^{k+1} g_\alpha^{k+1}(\zeta^k) G_{\alpha 3}^{k+1} \quad . \quad (6.50)$$

Hiermit lässt sich in Verbindung mit Gleichung 6.48 ein Gleichungssystem aufstellen, mit dem alle Unbekannten  $\hat{f}_\alpha^1, \hat{f}_\alpha^2, \dots, \hat{f}_\alpha^k$  ermittelt werden können. Damit ist die in Gleichung 6.45 spezifizierte Funktion  $p_\alpha^k(\zeta)$  für jede Schicht  $k$  eindeutig bestimmt. Für  $nlay = 1$  ergibt die Auswertung  $p_\alpha^1(\zeta) = p_\alpha(\zeta)$ , womit  $p_\alpha(\zeta)$  nach Gleichung 6.38 als Spezialfall beinhaltet ist. Zur Verwendung in Gleichung 6.39 ergibt sich die abschnittsweise über die  $nlay$  Schichten definierte Wichtungsfunktion zu

$$p_\alpha(\zeta) = \bigcup_{k=1}^{nlay} \hat{f}_\alpha^k g_\alpha^k(\zeta) \quad . \quad (6.51)$$

### 6.3.2 Elektrisches Feld

Korrespondierend mit den unabhängigen Schalenverzerrungen gemäß Gleichung 6.18 werden die elektrischen Größen

$$\vec{\varepsilon} = [\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2]^T \quad (6.52)$$

eingeführt. Der erste Vektor  $\vec{\varepsilon}_1$  besteht aus sechs Komponenten, der zweite Vektor  $\vec{\varepsilon}_2$  beinhaltet  $\vec{M} \in \mathbb{N}$  Komponenten.

Der Zusammenhang zwischen dem elektrischen Feld  $\vec{\mathbf{E}}$  und den unabhängigen Größen  $\vec{\varepsilon}$  wird beschrieben durch

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{A}} \vec{\varepsilon} \quad \vec{\mathbf{A}} = [\vec{\mathbf{A}}_1, \vec{\mathbf{A}}_2] \quad (6.53)$$

mit

$$\vec{\mathbf{A}}_1 = \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{a}}_1^T \\ \vec{\mathbf{a}}_2^T \\ \vec{\mathbf{a}}_3^T \end{bmatrix} \quad \vec{\mathbf{A}}_2 = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{w}}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{w}}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{w}}_3 \end{bmatrix} \quad . \quad (6.54)$$

Für die Variation von  $\vec{\mathbf{E}}$  gilt

$$\delta \vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{A}} \delta \vec{\varepsilon} \quad \delta \vec{\varepsilon} = [\delta \vec{\varepsilon}_1, \delta \vec{\varepsilon}_2]^T \quad . \quad (6.55)$$

Die Vektoren  $\vec{\mathbf{a}}_1$ ,  $\vec{\mathbf{a}}_2$  und  $\vec{\mathbf{a}}_3$  sind in Gleichung 6.14 definiert und resultieren aus dem linearen Ansatz für das elektrische Potential nach Gleichung 6.12. Damit

können nicht alle für eine abgestimmte Approximation der elektrischen und mechanischen Größen erforderlichen Verläufe der elektrischen Feldkomponenten über die Dicke (vgl. Tabelle 4.1) approximiert werden. Die damit verbundene Unausgewogenheit der Approximationsräume lässt sich beseitigen, indem die fehlenden Verläufe mittels der Vektoren  $\tilde{\mathbf{w}}_1 \in \mathbb{R}^{\vec{M}_1}$ ,  $\tilde{\mathbf{w}}_2 \in \mathbb{R}^{\vec{M}_2}$  und  $\tilde{\mathbf{w}}_3 \in \mathbb{R}^{\vec{M}_3}$  in der Matrix  $\vec{\mathbf{A}}_2$  ergänzt werden. Diese beinhalten Polynome als zusätzliche Beiträge zu den elektrischen Feldkomponenten, wobei für ihre Definition

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{w}}_1 &:= \begin{cases} [P_0] & \text{für } \vec{M}_1 = 1 \\ [P_0, \tilde{P}_2^{\vec{E}_1}] & \text{für } \vec{M}_1 = 2 \end{cases} \\ \tilde{\mathbf{w}}_2 &:= \begin{cases} [P_0] & \text{für } \vec{M}_2 = 1 \\ [P_0, \tilde{P}_2^{\vec{E}_2}] & \text{für } \vec{M}_2 = 2 \end{cases} \\ \tilde{\mathbf{w}}_3 &:= \begin{cases} [\tilde{P}_1^{\vec{E}_3}] & \text{für } \vec{M}_3 = 1 \\ [\tilde{P}_1^{\vec{E}_3}, \tilde{P}_2^{\vec{E}_3}] & \text{für } \vec{M}_3 = 2 \end{cases} \end{aligned} \quad (6.56)$$

gilt. Die Matrix  $\vec{\mathbf{A}}_2$  besteht damit aus  $\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3$  Spalten und ermöglicht in Verbindung mit der Matrix  $\vec{\mathbf{A}}_1$  einen vollständigen Polynomansatz bis zur Ordnung zwei für jede Komponente  $\vec{E}_i$  des elektrischen Feldes. Die Polynome  $P_n$  sind in Gleichung 6.22 definiert. Die Komponenten der Vektoren  $\vec{\mathbf{a}}_1$  und  $\vec{\mathbf{a}}_2$  bestehen aus einem konstanten und einem linearen Anteil. Diese Anteile können sich aufgrund ihrer additiven Kopplung nicht unabhängig voneinander einstellen. Um sie zu entkoppeln, muss der konstante Term  $P_0$  in  $\tilde{\mathbf{w}}_1$  und  $\tilde{\mathbf{w}}_2$  enthalten sein. Dies ist notwendig, damit sowohl eine konstante als auch eine lineare Verteilung von  $\vec{E}_1$  bzw.  $\vec{E}_2$  frei von parasitären Approximationen abgebildet werden kann. Insbesondere ist dies auch von Bedeutung für die im Lastfall  $Q$  bei Polung  $\vec{\mathbf{P}}_3$  (vgl. Tabelle 4.1) zu approximierende quadratische Verteilung von  $\vec{E}_1$  auf Basis von  $\tilde{P}_2^{\vec{E}_1}$ . Nur in Verbindung mit dem entkoppelten konstanten Anteil ist das numerische Modell hierbei in der Lage, an der im Sensorbetrieb nicht geerdeten Oberfläche für  $\vec{E}_1$  den Wert 0 zu approximieren.

Um eine fehlerhafte Bestimmung der Schalenschnittgrößen zu verhindern und die Eindeutigkeit der Lösung zu gewährleisten, muss eine Orthogonalität der Ansätze in  $\vec{\mathbf{A}}_2$  bezüglich derer in  $\vec{\mathbf{A}}_1$  bestehen. Dies wird gewährleistet durch die Einhaltung der Bedingungen

$$\begin{aligned} \int_h \tilde{\mathbf{w}}_i [-\frac{1}{2} + \frac{\zeta}{h}] d\zeta &= \mathbf{0} \quad , \quad \int_h \tilde{\mathbf{w}}_i [-\frac{1}{2} - \frac{\zeta}{h}] d\zeta = \mathbf{0} \quad , \\ \int_h \tilde{\mathbf{w}}_3 1 d\zeta &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (6.57)$$

mit  $i \in \{1, 2\}$ . Dafür werden mit  $P_n$  für  $n \in \{1, 2\}$  nach Gleichung 6.22 die modifizierten Polynome

$$\begin{aligned}\tilde{P}_2^{\vec{E}_i} &= P_2 + \delta_2[-\frac{1}{2} + \frac{\zeta}{h}] + \varepsilon_2[-\frac{1}{2} - \frac{\zeta}{h}] \quad \text{für } i \in \{1, 2\} \\ \tilde{P}_1^{\vec{E}_3} &= P_1 + \psi_1[\frac{1}{h}] + \theta_1[-\frac{1}{h}] \\ \tilde{P}_2^{\vec{E}_3} &= P_2 + \psi_2[\frac{1}{h}] + \theta_2[-\frac{1}{h}]\end{aligned}\tag{6.58}$$

konstruiert. Durch Verwendung der Gleichungen 6.58 und 6.56 in den Orthogonalitätsbedingungen gemäß Gleichung 6.57 erhält man nach Auswertung die in ANHANG B.1 zusammengestellten Koeffizienten  $\delta_2$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\psi_1$ ,  $\theta_1$ ,  $\psi_2$  und  $\theta_2$ .

Die höchste Ordnung der von  $\tilde{\vec{w}}_1$ ,  $\tilde{\vec{w}}_2$  und  $\tilde{\vec{w}}_3$  beinhalteten Polynome kann mit den Parametern  $\vec{M}_1$ ,  $\vec{M}_2$  und  $\vec{M}_3$  gewählt werden. Der Beitrag jedes einzelnen Polynoms wird durch die ihm zugeordnete Unbekannte in  $\vec{\varepsilon}_2$  gewichtet.

### Berücksichtigung von geschichteten Querschnitten

Am Ende des Abschnitts 6.3.1 wurde der Verlauf der Schubverzerrungen bei geschichteten Querschnitten diskutiert. Die dabei an den Schichtgrenzen auftretenden Sprünge und der in jeder Schicht im Allgemeinen unterschiedlich gekrümmte, quadratische Verlauf werden in Form der abschnittsweise quadratischen Wichtungsfunktion  $p_\alpha(\zeta)$  nach Gleichung 6.51 mit Gleichung 6.39 in Gleichung 6.19 berücksichtigt. Dies ist aufgrund der Kopplung der Schubverzerrungen mit den Komponenten  $\vec{E}_1$  und  $\vec{E}_2$  des elektrischen Feldes erforderlich.

Der Verlauf von  $\vec{E}_1$  und  $\vec{E}_2$  über die Dicke ist unter Querkraftbeanspruchung bei geschichteten Sensoranwendungen in den piezoelektrischen Schichten ebenfalls quadratisch, weist allerdings an den Schichtgrenzen keine Sprünge auf. Daher kann für die typische Bauweise eines geschichteten Sensors mit symmetrischem Schichtaufbau und gleichartigen piezoelektrischen Deckschichten die quadratische Approximation von  $\vec{E}_1$  und  $\vec{E}_2$  nach Gleichung 6.58<sub>1</sub> verwendet werden. Auch für derartige Bauweisen ist damit die Balance der elektrischen und mechanischen Approximationsräume gegeben.

### 6.3.3 Generalisierte Darstellung der unabhängigen Schalengrößen

Fasst man die unabhängigen mechanischen und elektrischen Schalengrößen  $\vec{\varepsilon}$  und  $\vec{\varepsilon}$  nach Gleichung 6.18 und Gleichung 6.52 zusammen in

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} [\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_1]^T \\ [\vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_2]^T \end{bmatrix}, \tag{6.59}$$

ergibt sich unter Berücksichtigung der Gleichungen 6.20 und 6.53

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \vec{\mathbf{E}} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{mit} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_1 & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}}_2 & 0 \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}}_1 & 0 & \bar{\mathbf{A}}_2 \end{bmatrix} \quad (6.60)$$

als Zusammenhang zwischen den verallgemeinerten schalenbezogenen Größen  $\boldsymbol{\varepsilon}$  und den kontinuumsbezogenen Größen  $\mathbf{E}$  und  $\vec{\mathbf{E}}$ . Die Matrix  $\mathbf{A}$  besteht aus  $M = \bar{M} + \vec{M}$  Spalten.

### 6.3.4 Formulierung des Randwertproblems

Unter Verwendung der in Kapitel 3, Gleichung 3.1 eingeführten volumenspezifischen, elektromechanischen Potentialfunktion  $\rho\psi(\mathbf{E}, \vec{\mathbf{E}})$  gilt für die innere Arbeit der Schale

$$\delta W_i = \int_{\mathcal{B}_0} \delta [\rho\psi(\mathbf{E}, \vec{\mathbf{E}})] \, dV \quad . \quad (6.61)$$

Für das Flächenelement der Mittelfläche  $\Omega_0$  gilt  $dA = j \, d\xi^1 \, d\xi^2$  mit  $j = \|\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2\|$ , siehe hierzu Gleichung 6.1. Mit dem Shifter-Tensor  $\mathbf{Z}$ , welcher mit  $\mathbf{G}_k = \mathbf{Z} \mathbf{A}_k$  das kovariante Basissystem  $\mathbf{A}_k$  der Mittelfläche auf das kovariante Basissystem  $\mathbf{G}_k$  im Schalenkontinuum abbildet, gilt für das Volumenelement im Schalenraum  $dV = \det[\mathbf{Z}] \, d\zeta \, dA$ , womit sich die innere Arbeit der Schale nach Gleichung 6.61 umformen lässt zu

$$\delta W_i = \int_{\Omega_0} \int_h \delta [\rho\psi(\mathbf{E}, \vec{\mathbf{E}})] \det[\mathbf{Z}] \, d\zeta \, dA = \int_{\Omega_0} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} W \, dA \quad (6.62)$$

mit

$$\partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} W = \begin{bmatrix} \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}_1} W \\ \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}_2} W \end{bmatrix} := \int_h \mathbf{A}^T \begin{bmatrix} \mathbf{S} \\ -\vec{\mathbf{D}} \end{bmatrix} \det[\mathbf{Z}] \, d\zeta \quad . \quad (6.63)$$

Der Vektor  $\mathbf{S}$  beinhaltet die Komponenten der 2. Piola-Kirchhoff-Spannungen  $2\partial_{\mathbf{E}}\rho\psi(\mathbf{E}, \vec{\mathbf{E}})$  in gemäß Gleichung 3.7 arbeitskonformer Anordnung zu den im Vektor  $\mathbf{E}$  angeordneten Komponenten des Green'schen Verzerrungstensors, vgl. Gleichung 3.8. Die dielektrischen Verschiebungen  $\vec{\mathbf{D}}$  bilden eine arbeitskonforme Paarung mit dem elektrischen Feld  $\vec{\mathbf{E}}$ .

Die starke Form des Randwertproblems fordert in jedem Punkt des Gebietes  $\Omega_0$  die Erfüllung der statischen, geometrischen und elektrischen Feldgleichungen sowie der konstitutiven Beziehung, was in Anlehnung an GREEN et al. zusammenfassend mit

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{j}(j \mathbf{n}^\alpha)_{,\xi^\alpha} + \bar{\mathbf{p}} = \mathbf{0} \\ \frac{1}{j}(j \mathbf{m}^\alpha)_{,\xi^\alpha} + \mathbf{x}_{,\xi^\alpha} \times \mathbf{n}^\alpha = \mathbf{0} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \boldsymbol{\varepsilon}_g - \boldsymbol{\varepsilon}_1 = \mathbf{0} \\ \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}_1} W - \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \\ \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}_2} W = \mathbf{0} \end{array} \right\} \quad \text{in } \Omega_0 \quad (6.64)$$

beschrieben werden kann. Dabei fordern die geometrischen und elektrischen Feldgleichungen die Gleichheit der unabhängigen Größen  $\boldsymbol{\varepsilon}_1$  und der kinematischen Schalengrößen  $\boldsymbol{\varepsilon}_g$ .

Der Vektor  $\partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} W$  beinhaltet die Resultierenden der Spannungen und dielektrischen Verschiebungen, welche sich gemäß Gleichung 6.63 in Verbindung mit dem Stoffgesetz aus den unabhängigen Schalengrößen  $\boldsymbol{\varepsilon}$  ergeben. Für den ersten Teil  $\partial_{\boldsymbol{\varepsilon}_1} W$  wird die Gleichheit mit einem Satz von unabhängigen Resultierenden der Spannungen und dielektrischen Verschiebungen

$$\boldsymbol{\sigma} := \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}} \end{bmatrix} \quad (6.65)$$

gefordert. Der erste Vektor

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = [n^{11}, n^{22}, n^{12}, m^{11}, m^{22}, m^{12}, q^1, q^2]^T \quad (6.66)$$

beinhaltet die unabhängigen mechanischen Spannungsergebnisse in Form der Membrankräfte  $n^{\alpha\beta} = n^{\alpha\beta}$ , der Biegemomente  $m^{\alpha\beta} = m^{\alpha\beta}$  und der Querkräfte  $q^\alpha$ . In den statischen Feldgleichungen bedeuten  $\mathbf{n}^\alpha := n^{\alpha\beta} \mathbf{x}_{,\xi^\beta} + q^\alpha \mathbf{d} + m^{\alpha\beta} \mathbf{d}_{,\xi^\beta}$  und  $\mathbf{m}^\alpha := \mathbf{d} \times m^{\alpha\beta} \mathbf{x}_{,\xi^\beta}$ . Der zweite Vektor  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  besteht aus sechs unabhängigen resultierenden Größen der dielektrischen Verschiebungen.

Der zweite Teil  $\partial_{\boldsymbol{\varepsilon}_2} W$  beinhaltet Beiträge zu den Resultierenden der Spannungen und dielektrischen Verschiebungen, die in Verbindung mit dem Stoffgesetz den unabhängigen Schalengrößen  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_2$  und  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_2$  zugeordnet sind und zu Null gesetzt werden.

Das Randwertproblem in seiner starken Form ist vollständig beschrieben durch Gleichung 6.64 sowie den statischen, geometrischen und elektrischen Randbedingungen

$$\begin{aligned} j(\mathbf{n}^\alpha \nu_\alpha) &= \bar{\mathbf{t}} && \text{auf } \Gamma_\sigma \\ \left. \begin{aligned} \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}} \\ \boldsymbol{\omega} &= \bar{\boldsymbol{\omega}} \end{aligned} \right\} && \text{auf } \Gamma_v \\ \varphi &= \bar{\varphi} && \text{auf } \Gamma_\varphi \end{aligned} \quad (6.67)$$

mit den Komponenten  $\nu_\alpha$  des Normalenvektors auf dem Schalenrand  $\Gamma_\sigma$ .

Die Freiheitsgrade der Schale sind  $\mathbf{v} = [\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}, \varphi]^T$  mit den Verschiebungen  $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$ , den Rotationen  $\boldsymbol{\omega} = [\omega_1, \omega_2, \omega_3]^T$  und dem elektrischen Potential  $\varphi = [\varphi_u, \varphi_o]^T$  an der Unterseite und der Oberseite. In Gleichung 6.67 symbolisiert  $\Gamma_\sigma$  einen Randbereich mit vorgegebenen Spannungen,  $\Gamma_v$  einen Randbereich mit

vorgegebenen Verschiebungen beziehungsweise Verdrehungen und  $\Gamma_\varphi$  einen Randbereich mit vorgegebenem elektrischen Potential, wobei  $\Gamma = \Gamma_\sigma \cup \Gamma_v$  und  $\Gamma = \Gamma_\varphi$  angenommen wird. Beanspruchungen durch Oberflächenladungen werden nicht betrachtet. Die Schale kann belastet werden durch

- Flächenbelastungen  $\bar{\mathbf{p}}$  auf  $\Omega_0$
- Randbelastungen  $\bar{\mathbf{t}}$  auf  $\Gamma_\sigma$
- Verschiebungen  $\bar{\mathbf{u}}$ , Verdrehungen  $\bar{\boldsymbol{\omega}}$  auf  $\Gamma_v$
- elektrisches Potential  $\bar{\varphi}$  auf  $\Gamma_\varphi$  ,

wobei die Lasten als konservativ angesehen werden.

### 6.3.5 Schwache Form und Linearisierung des Randwertproblems

Die schwache Formulierung des Randwertproblems fordert die Erfüllung der Feldgleichungen in Gleichung 6.64 nicht mehr punktweise, sondern im integralen Mittel und dient als Basis für die im Weiteren vorgestellte numerische Lösung.

Die unabhängigen Größen und deren Variationen werden mit  $\boldsymbol{\theta} := [\mathbf{v}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}]$  und  $\delta\boldsymbol{\theta} := [\delta\mathbf{v}, \delta\boldsymbol{\sigma}, \delta\boldsymbol{\varepsilon}]$  zusammengefasst. Multipliziert man die Ausdrücke in Gleichung 6.64 mit zulässigen Testfunktionen und integriert über das Gebiet  $\Omega_0$ , erhält man

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{\theta}, \delta\boldsymbol{\theta}) &= \int_{\Omega_0} [\delta\boldsymbol{\varepsilon}_1^T (\partial_{\boldsymbol{\varepsilon}_1} W - \boldsymbol{\sigma}) + \delta\boldsymbol{\varepsilon}_2^T \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}_2} W + \delta\boldsymbol{\sigma}^T (\boldsymbol{\varepsilon}_g - \boldsymbol{\varepsilon}_1)] dA \\ &\quad - \int_{\Omega_0} [(\frac{1}{j}(j \mathbf{n}^\alpha)_{,\xi^\alpha} + \bar{\mathbf{p}}) \delta\mathbf{u} + (\frac{1}{j}(j \mathbf{m}^\alpha)_{,\xi^\alpha} + \mathbf{x}_{,\xi^\alpha} \times \mathbf{n}^\alpha) \delta\boldsymbol{\omega}] dA = 0, \end{aligned} \quad (6.68)$$

was in Verbindung mit den Randbedingungen in Gleichung 6.67 die schwache Form des Randwertproblems darstellt.

Mit der Einführung von  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} := [\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{0}_M]^T$  lässt sich Gleichung 6.68 unter Verwendung der statischen Randbedingungen gemäß Gleichung 6.67<sub>1</sub> umformen zu

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{\theta}, \delta\boldsymbol{\theta}) &= \int_{\Omega_0} [\delta\boldsymbol{\varepsilon}^T (\partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} W - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}) + \delta\boldsymbol{\sigma}^T (\boldsymbol{\varepsilon}_g - \boldsymbol{\varepsilon}_1) + \delta\boldsymbol{\varepsilon}_g^T \boldsymbol{\sigma} - \delta\mathbf{u}^T \bar{\mathbf{p}}] dA \\ &\quad - \int_{\Gamma_\sigma} \delta\mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} ds = 0 \quad . \end{aligned} \quad (6.69)$$

Um gängige Verfahren, wie zum Beispiel einen Newton-Raphson-Algorithmus, im Rahmen der numerischen Lösung der schwachen Form des Randwertproblems anwenden zu können, muss jeder im Allgemeinen nichtlineare Energieterm in



Gleichung 6.69 linearisiert werden. Da sich die Beanspruchungen der Schale nicht mit der Verformung ändern, erhält man als Linearisierung von Gleichung 6.69

$$L[g(\boldsymbol{\theta}, \delta\boldsymbol{\theta}), \Delta\boldsymbol{\theta}] := g(\boldsymbol{\theta}, \delta\boldsymbol{\theta}) + Dg \cdot \Delta\boldsymbol{\theta} \quad (6.70)$$

mit

$$Dg \cdot \Delta\boldsymbol{\theta} = \int_{\Omega_0} \left[ \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T (\mathbf{D}\Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \Delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) + \delta\boldsymbol{\sigma}^T (\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_g - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_1) + \delta\boldsymbol{\varepsilon}_g^T \Delta\boldsymbol{\sigma} + \Delta\delta\boldsymbol{\varepsilon}_g^T \boldsymbol{\sigma} \right] dA \quad (6.71)$$

und der elektromechanischen Schalensteifigkeit

$$\mathbf{D} := \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}}^2 W = \int_h \mathbf{A}^T \begin{bmatrix} \mathbb{C} & -\mathbf{e}^T \\ -\mathbf{e} & -\epsilon \end{bmatrix} \mathbf{A} \det[\mathbf{Z}] d\zeta \quad . \quad (6.72)$$

## 6.4 Finite-Elemente-Approximation

### 6.4.1 Approximation von Ausgangskonfiguration und Momentankonfiguration der Schale

Zur Beschreibung der Schalengleichungen wurden in Abschnitt 6.2.1 krummlinige konvektive Koordinaten eingeführt. Da die Verzerrungen die Ableitungen der Verschiebungen beinhalten, sind nach klassischer Vorgehensweise Ableitungen bezüglich der konvektiven Koordinaten erforderlich. Mit dem isoparametrischen Konzept werden sowohl die Geometrie wie auch die Verschiebungen, Rotationen und das elektrische Potential diskretisiert und das finite Element in der Ausgangskonfiguration und Momentankonfiguration auf ein Einheitsselement mit den Koordinaten  $\{\xi, \eta\} \in [-1, 1]$  abgebildet. Da Ableitungen und Integrationen auch im Referenzelement durchgeführt werden können, entfallen damit alle Ableitungen in konvektiven Koordinaten.

Allerdings kann das isoparametrische Konzept nur in modifizierter Form auf Schalenelemente angewendet werden, vgl. WRIGGERS [122]. In diesem Sinne ist die isoparametrische Beschreibung nicht auf die globale kartesische Basis  $\mathbf{e}_i$  zu beziehen, sondern auf ein lokales kartesisches Basissystem  $\mathbf{t}_i$  für jedes Element, welches gewöhnlich nicht mit  $\mathbf{e}_i$  übereinstimmt. Für den Aufbau der Elementsteifigkeit und des Lastvektors bezüglich der globalen Koordinaten ist dieser Sachverhalt durch eine Transformation zu berücksichtigen.

Die Interpolation der den Elementknoten  $I \in \{1, 2, 3, 4\}$  zugeordneten Größen über die Elementfläche erfolgt durch die Verwendung von bilinearen Ansatzfunktionen

$$N_I = \frac{1}{4}(1 + \xi_I \xi)(1 + \eta_I \eta) \quad \xi, \eta \in [-1, 1] \quad (6.73)$$

mit  $\xi_I \in \{-1, 1, 1, -1\}$  und  $\eta_I \in \{-1, -1, 1, 1\}$ . Damit gilt für die Ortsvektoren der Schalenmittelfläche  $\Omega_0$  in der Ausgangs- und Momentankonfiguration

$$\mathbf{X}^h = \sum_{I=1}^4 N_I \mathbf{X}_I \quad \mathbf{x}^h = \sum_{I=1}^4 N_I \mathbf{x}_I \quad (6.74)$$

mit  $\mathbf{x}_I = \mathbf{X}_I + \mathbf{u}_I$  und der Knotenverschiebung  $\mathbf{u}_I$ . Der Index  $(\cdot)^h$  weist auf den approximativen Charakter einer Größe hin.

Für die Interpolation der Verschiebungen  $\mathbf{u}$  und des elektrischen Potentials  $\varphi := [\varphi_u, \varphi_o]$  gilt

$$\mathbf{u}^h = \sum_{I=1}^4 N_I \mathbf{u}_I \quad \varphi^h = \sum_{I=1}^4 N_I \varphi_I \quad . \quad (6.75)$$

Mit der Eingabe des Finite-Elemente-Netzes ist für jeden Knoten der Ortsvektor  $\mathbf{X}_I$  und eine kartesische Basis  $\{\mathbf{A}_{1I}, \mathbf{A}_{2I}, \mathbf{A}_{3I}\}$  vorzugeben, wobei  $\mathbf{A}_{1I}$  und  $\mathbf{A}_{2I}$  innerhalb der Referenzfläche so orientiert sein müssen, dass die Randbedingungen erfüllt werden können. Die Beschreibung des Schalenraums ist durch die Referenzfläche  $\Omega_0$ , die Dicke  $h$  der Schale und den Direktor  $\mathbf{D}$  bzw.  $\mathbf{d}$  gegeben. Daher reicht es aus, mit  $\mathbf{D}_I = \mathbf{A}_{3I}$  und  $\mathbf{d}_I = \mathbf{a}_{3I}$  die dritte Komponente der Knotenbasis in Ausgangs- und Momentankonfiguration zu interpolieren mit

$$\mathbf{D}^h = \sum_{I=1}^4 N_I \mathbf{D}_I \quad \mathbf{d}^h = \sum_{I=1}^4 N_I \mathbf{d}_I \quad . \quad (6.76)$$

Die Knotenbasen der Ausgangskonfiguration und Momentankonfiguration stehen über eine orthogonale Abbildung  $\mathbf{a}_{kI} = \mathbf{R}_I \mathbf{A}_{kI}$  in Bezug, welche der Rotationstensor  $\mathbf{R}_I$  leistet. Dieser ergibt sich über die Rodrigues-Formel in Abhängigkeit von den Rotationsparametern  $\omega_{1I}$ ,  $\omega_{2I}$  und  $\omega_{3I}$  zu

$$\mathbf{R}_I = \mathbf{1} + \frac{\sin \varphi_I}{\varphi_I} \boldsymbol{\Omega}_I + \frac{1 - \cos \varphi_I}{\varphi_I^2} \boldsymbol{\Omega}_I^2 \quad (6.77)$$

mit

$$\boldsymbol{\omega}_I = \begin{bmatrix} \omega_{1I} \\ \omega_{2I} \\ \omega_{3I} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\Omega}_I = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{3I} & \omega_{2I} \\ \omega_{3I} & 0 & -\omega_{1I} \\ -\omega_{2I} & \omega_{1I} & 0 \end{bmatrix} \quad . \quad (6.78)$$

Hierbei repräsentiert die Orientierung des axialen Vektors  $\boldsymbol{\omega}_I$  die Lage der Drehachse und  $\varphi_I = \|\boldsymbol{\omega}_I\|$  den Drehwinkel der Rotation.  $\boldsymbol{\Omega}_I$  ist der dem axialen Vektor  $\boldsymbol{\omega}_I$  zugeordnete, schiefsymmetrische Tensor. Die Parametrisierung in Gleichung 6.77 ist eindeutig für  $\varphi < 2\pi$ , was man durch multiplikative Updates des Rotationstensors nach einigen Lastschritten sicherstellen kann.

Auch im Rahmen einer gemischten Elementformulierung ist eine lokale kartesische Basis  $\mathbf{t}_i$  von Bedeutung. Die normierten Basisvektoren von  $\mathbf{t}_i$  lassen sich mit den Ortsvektoren  $\mathbf{X}_I$  zum Beispiel konstruieren durch

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_1 &= (\hat{\mathbf{d}}_1 + \hat{\mathbf{d}}_2) / \|\hat{\mathbf{d}}_1 + \hat{\mathbf{d}}_2\| & \hat{\mathbf{d}}_1 &= \frac{\mathbf{X}_3 - \mathbf{X}_1}{\|\mathbf{X}_3 - \mathbf{X}_1\|} \\ \mathbf{t}_2 &= (\hat{\mathbf{d}}_1 - \hat{\mathbf{d}}_2) / \|\hat{\mathbf{d}}_1 - \hat{\mathbf{d}}_2\| & \hat{\mathbf{d}}_2 &= \frac{\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_4}{\|\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_4\|} \\ \mathbf{t}_3 &= \mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_2 \end{aligned} \quad (6.79)$$

Mit der Jacobi-Matrix

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{,\xi}^h \cdot \mathbf{t}_1 & \mathbf{X}_{,\xi}^h \cdot \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{X}_{,\eta}^h \cdot \mathbf{t}_1 & \mathbf{X}_{,\eta}^h \cdot \mathbf{t}_2 \end{bmatrix} \quad (6.80)$$

ist die Umrechnung zwischen den Ableitungen nach den Koordinaten  $\{\xi, \eta\}$  des Einheitselements und den Ableitungen nach den Koordinaten bezüglich der kartesischen Basis  $\mathbf{t}_i$  beschrieben, wobei sich die Tangentenvektoren approximieren mit

$$\mathbf{X}_{,\xi}^h = \sum_{I=1}^4 N_{I,\xi} \mathbf{X}_I \quad \mathbf{X}_{,\eta}^h = \sum_{I=1}^4 N_{I,\eta} \mathbf{X}_I \quad (6.81)$$

Bezüglich der lokalen kartesischen Koordinaten ergibt sich für die Ausgangs- und Momentankonfiguration die Interpolation der Tangentenvektoren

$$\mathbf{X}_{,\alpha}^h = \sum_{I=1}^4 N_{I,\alpha} \mathbf{X}_I \quad \mathbf{x}_{,\alpha}^h = \sum_{I=1}^4 N_{I,\alpha} \mathbf{d}_I \quad (6.82)$$

und die Interpolation der Ableitungen des Direktorvektors

$$\mathbf{D}_{,\alpha}^h = \sum_{I=1}^4 N_{I,\alpha} \mathbf{D}_I \quad \mathbf{d}_{,\alpha}^h = \sum_{I=1}^4 N_{I,\alpha} \mathbf{d}_I \quad (6.83)$$

unter Verwendung der Ableitungen der Ansatzfunktionen nach den lokalen kartesischen Koordinaten, welche sich mit

$$\begin{bmatrix} N_{I,1} \\ N_{I,2} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} N_{I,\xi} \\ N_{I,\eta} \end{bmatrix} \quad (6.84)$$

über die Ableitungen nach den Koordinaten des Einheitselements bestimmen lassen. Man kann zeigen, dass bei beliebiger Elementgeometrie für den Elementmittelpunkt  $\mathbf{X}_{,\alpha}^h = \mathbf{t}_\alpha$  gilt. Für die Interpolation der Ableitungen des elektrischen Potentials gilt

$$\varphi_{,\alpha}^h = - \sum_{I=1}^4 N_{I,\alpha} \varphi_I \quad (6.85)$$

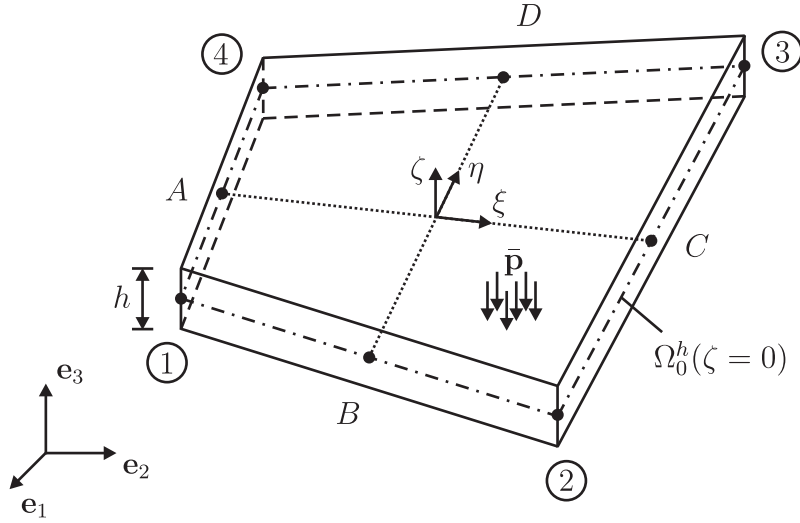


Abb. 6.3: 4-Knoten-Schalenelement mit Bezeichnungen

womit alle erforderlichen Größen für die Approximation

$$\boldsymbol{\varepsilon}_g^h = [\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_g^h, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_g^h]^T \quad (6.86)$$

von  $\boldsymbol{\varepsilon}_g$  nach Gleichung 6.16 vorliegen. Um Versteifungseffekten bei Schubbeanspruchung entgegenzuwirken, werden die in Gleichung 6.5<sub>3</sub> definierten Schubterme  $\gamma_\alpha$  nicht bilinear, sondern gemäß DVORKIN & BATHE [38] durch eine angenommene Querschubverteilung (ANS) über das Element approximiert. Die Auswertung der Schubterme erfolgt dabei an den Kollokationspunkten  $A, B, C, D$ , die sich bei einem 4-Knoten-Element in den Seitenmitten befinden. Davon ausgehend werden die Schubverzerrungen in ihrer Wirkrichtung konstant und senkrecht zur Wirkrichtung linear über das Element interpoliert, womit man vor dem Einsetzen der Finite-Elemente-Approximationen die Form

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_g^h = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^h \\ \varepsilon_{22}^h \\ \varepsilon_{12}^h \\ \kappa_{11}^h \\ \kappa_{22}^h \\ 2\kappa_{12}^h \\ \gamma_1^h \\ \gamma_2^h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\mathbf{x}_{,1}^h \cdot \mathbf{x}_{,1}^h - \mathbf{X}_{,1}^h \cdot \mathbf{X}_{,1}^h) \\ \frac{1}{2}(\mathbf{x}_{,2}^h \cdot \mathbf{x}_{,2}^h - \mathbf{X}_{,2}^h \cdot \mathbf{X}_{,2}^h) \\ \mathbf{x}_{,1}^h \cdot \mathbf{x}_{,2}^h - \mathbf{X}_{,1}^h \cdot \mathbf{X}_{,2}^h \\ \mathbf{x}_{,1}^h \cdot \mathbf{d}_{,1}^h - \mathbf{X}_{,1}^h \cdot \mathbf{D}_{,1}^h \\ \mathbf{x}_{,2}^h \cdot \mathbf{d}_{,2}^h - \mathbf{X}_{,2}^h \cdot \mathbf{D}_{,2}^h \\ \mathbf{x}_{,1}^h \cdot \mathbf{d}_{,2}^h + \mathbf{x}_{,2}^h \cdot \mathbf{d}_{,1}^h - \mathbf{X}_{,1}^h \cdot \mathbf{D}_{,2}^h - \mathbf{X}_{,2}^h \cdot \mathbf{D}_{,1}^h \\ \mathbf{J}^{-1} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}[(1-\eta)\gamma_\xi^B + (1+\eta)\gamma_\xi^D] \\ \frac{1}{2}[(1-\xi)\gamma_\eta^A + (1+\xi)\gamma_\eta^C] \end{array} \right\} \end{bmatrix} \quad (6.87)$$

erhält. Für die Auswertung der Schubverzerrungen an den Kollokationspunkten

gilt

$$\begin{aligned}\gamma_\xi^M &= [\mathbf{x}_{,\xi} \cdot \mathbf{d} - \mathbf{X}_{,\xi} \cdot \mathbf{D}]^M & M &\in \{B, D\} \\ \gamma_\eta^L &= [\mathbf{x}_{,\eta} \cdot \mathbf{d} - \mathbf{X}_{,\eta} \cdot \mathbf{D}]^L & L &\in \{A, C\}\end{aligned}\quad (6.88)$$

mit

$$\begin{aligned}\mathbf{d}^A &= \frac{1}{2}(\mathbf{d}_4 + \mathbf{d}_1) & \mathbf{D}^A &= \frac{1}{2}(\mathbf{D}_4 + \mathbf{D}_1) \\ \mathbf{d}^B &= \frac{1}{2}(\mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2) & \mathbf{D}^B &= \frac{1}{2}(\mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2) \\ \mathbf{d}^C &= \frac{1}{2}(\mathbf{d}_2 + \mathbf{d}_3) & \mathbf{D}^C &= \frac{1}{2}(\mathbf{D}_2 + \mathbf{D}_3) \\ \mathbf{d}^D &= \frac{1}{2}(\mathbf{d}_3 + \mathbf{d}_4) & \mathbf{D}^D &= \frac{1}{2}(\mathbf{D}_3 + \mathbf{D}_4) \\ \mathbf{x}_{,\eta}^A &= \frac{1}{2}(\mathbf{x}_4 + \mathbf{x}_1) & \mathbf{X}_{,\eta}^A &= \frac{1}{2}(\mathbf{X}_4 + \mathbf{X}_1) \\ \mathbf{x}_{,\xi}^B &= \frac{1}{2}(\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_1) & \mathbf{X}_{,\xi}^B &= \frac{1}{2}(\mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_1) \\ \mathbf{x}_{,\eta}^C &= \frac{1}{2}(\mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_2) & \mathbf{X}_{,\eta}^C &= \frac{1}{2}(\mathbf{X}_3 + \mathbf{X}_2) \\ \mathbf{x}_{,\xi}^D &= \frac{1}{2}(\mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_4) & \mathbf{X}_{,\xi}^D &= \frac{1}{2}(\mathbf{X}_3 + \mathbf{X}_4)\end{aligned}\quad (6.89)$$

unter Verwendung der Ortsvektoren  $\mathbf{X}_I$ ,  $\mathbf{x}_I$  und Direktorvektoren  $\mathbf{D}_I$ ,  $\mathbf{d}_I$  der Elementknoten.

Für den zweiten Vektor in Gleichung 6.86, welcher  $\vec{\epsilon}_g$  nach Gleichung 6.13 approximiert, gilt

$$\vec{\epsilon}_g^h := \begin{bmatrix} \varphi_{u,1}^h \\ \varphi_{u,2}^h \\ \varphi_{o,1}^h \\ \varphi_{o,2}^h \\ \varphi_u^h \\ \varphi_o^h \end{bmatrix}\quad (6.90)$$

und man erhält die diskretisierte Form mit Einsetzen der Interpolationen nach Gleichung 6.75<sub>2</sub> und Gleichung 6.85 unter Berücksichtigung von Gleichung 6.84.

Für die Variation von Gleichung 6.86 werden auch die Variationen der Ausdrücke in den Gleichungen 6.75, 6.76<sub>2</sub>, 6.82<sub>2</sub>, 6.83<sub>2</sub>, 6.85 und 6.88 benötigt. Mit Einführung eines generalisierten Vektors

$$\mathbf{v}_I = [\mathbf{u}, \mathbf{d}, \boldsymbol{\varphi}]_I^T\quad (6.91)$$

lässt sich die Variation der Knotenfreiheitsgrade in kompakter Schreibweise ausdrücken mit

$$\delta \mathbf{v}^h = \sum_{I=1}^4 \mathbf{N}_I \delta \mathbf{v}_I \quad .\quad (6.92)$$

Die Variation der Tangentenvektoren nach Gleichung 6.82<sub>2</sub>, der Ableitungen des Direktorvektors nach Gleichung 6.83<sub>2</sub> und der Ableitungen des elektrischen Potentials nach Gleichung 6.85 interpolieren sich mit

$$\delta \mathbf{x}_{,\alpha}^h = \sum_{I=1}^4 N_{I,\alpha} \delta \mathbf{u}_I \quad \delta \mathbf{d}_{,\alpha}^h = \sum_{I=1}^4 N_{I,\alpha} \delta \mathbf{d}_I \quad \delta \varphi_{,\alpha}^h = - \sum_{I=1}^4 N_{I,\alpha} \delta \varphi_I \quad , \quad (6.93)$$

die Variationen der Schubverzerrungen interpolieren sich unter Auswertung an den Kollokationspunkten gemäß Gleichung 6.89 mit

$$\begin{aligned} \delta \gamma_{\xi}^M &= [\delta \mathbf{x}_{,\xi} \cdot \mathbf{d} + \mathbf{x}_{,\xi} \cdot \delta \mathbf{d}]^M & M &\in \{B, D\} \\ \delta \gamma_{\eta}^L &= [\delta \mathbf{x}_{,\eta} \cdot \mathbf{d} + \mathbf{x}_{,\eta} \cdot \delta \mathbf{d}]^L & L &\in \{A, C\} \quad . \end{aligned} \quad (6.94)$$

Die Variation von Gleichung 6.86 wird nach Einsetzen der in den Gleichungen 6.92 - 6.94 gegebenden Approximationen unter Verwendung der Matrix  $\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4]$  mit

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}_g^h = \sum_{I=1}^4 \mathbf{B}_I \delta \mathbf{v}_I \quad \mathbf{B}_I = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{B}}_I \end{bmatrix} \quad (6.95)$$

ausgedrückt.

Die Teilmatrix  $\bar{\mathbf{B}}_I$  entspricht der Matrix  $\mathbf{B}_I$  in der mechanischen Schalenformulierung nach GRUTTMANN & WAGNER [48]. Für die den elektrischen Freiheitsgraden zugeordnete Teilmatrix gilt

$$\bar{\mathbf{B}}_I = \begin{bmatrix} \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} -N_{I,\xi} \\ -N_{I,\eta} \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} -N_{I,\xi} \\ -N_{I,\eta} \end{bmatrix} \\ 0 & 0 \\ N_I & 0 \\ 0 & N_I \end{bmatrix} \quad . \quad (6.96)$$

Die Linearisierung wird approximiert mit

$$\Delta \delta \boldsymbol{\varepsilon}_g^h = [\Delta \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_g^h, \Delta \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_g^h]^T \quad , \quad (6.97)$$

wobei der erste Vektor  $\Delta \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_g^h$  dem Vektor  $\Delta \delta \boldsymbol{\varepsilon}_g^h$  in GRUTTMANN & WAGNER [48] entspricht. Das elektrische Feld ist eine lineare Funktion des elektrischen Potentials  $\varphi$ , woraus  $\Delta \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_g = \mathbf{0}$  folgt.

### 6.4.2 Interpolation der Spannungen und der dielektrischen Verschiebungen

Neben den Verschiebungsansätzen basiert diese gemischte Elementformulierung auch auf Ansätzen für die Spannungen, dielektrischen Verschiebungen, Verzerrungen und das elektrische Feld. Diese Ansätze sind unabhängig. Um die numerische Stabilität der Elementformulierung zu gewährleisten, müssen bezüglich ihrer Anzahl und Konstruktion allerdings verschiedene Aspekte berücksichtigt werden, siehe BREZZI & FORTIN [25]. Die Interpolation der Membran- und Biegeschnittgrößen erfolgt wie in SIMO et al. [101], die Ansätze für die korrespondierenden elektrischen Größen werden in Analogie dazu aufgestellt.

In Form des Vektors

$$\boldsymbol{\sigma}^h = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^h \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}^h \end{bmatrix} = \mathbf{N}_\sigma \hat{\boldsymbol{\sigma}} \quad \mathbf{N}_\sigma = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} \end{bmatrix} \quad (6.98)$$

werden die Schalenschnittgrößen  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  und schalenbezogenen, dielektrischen Verschiebungen  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  auf Elementebene approximiert, wobei für die Interpolation der mechanischen Komponenten

$$\mathbf{N}_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N}_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}^m & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N}_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}^b & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N}_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}^s \end{bmatrix} \quad (6.99)$$

mit

$$\mathbf{N}_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}^m = \mathbf{N}_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}^b = \mathbf{T}_\sigma^0 \begin{bmatrix} \eta - \bar{\eta} & 0 \\ 0 & \xi - \bar{\xi} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{N}_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}^s = \tilde{\mathbf{T}}_\sigma^0 \begin{bmatrix} \eta - \bar{\eta} & 0 \\ 0 & \xi - \bar{\xi} \end{bmatrix} \quad (6.100)$$

verwendet wird. Mit

$$\mathbf{T}_\sigma^0 = \begin{bmatrix} J_{11}^0 J_{11}^0 & J_{21}^0 J_{21}^0 & 2J_{11}^0 J_{21}^0 \\ J_{12}^0 J_{12}^0 & J_{22}^0 J_{22}^0 & 2J_{12}^0 J_{22}^0 \\ J_{11}^0 J_{12}^0 & J_{21}^0 J_{22}^0 & J_{11}^0 J_{22}^0 + J_{12}^0 J_{21}^0 \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{T}}_\sigma^0 = \begin{bmatrix} J_{11}^0 & J_{21}^0 \\ J_{12}^0 & J_{22}^0 \end{bmatrix} \quad (6.101)$$

erfolgt die Transformation auf das lokale kartesische Basissystem, siehe hierzu auch Gleichung 3.18 und Gleichung 3.27 ohne Berücksichtigung der die Dickenrichtung betreffenden Komponenten. Die Koeffizienten  $J_{\alpha\beta}^0 = J_{\alpha\beta}(\xi = 0, \eta = 0)$  sind die Komponenten der Jacobi-Matrix  $\mathbf{J}$  gemäß Gleichung 6.80 bei Auswertung im Elementmittelpunkt. Durch die Konstanten

$$\bar{\xi} = \frac{1}{A_e} \int_{\Omega_e} \xi \, dA \quad \bar{\eta} = \frac{1}{A_e} \int_{\Omega_e} \eta \, dA \quad A_e = \int_{\Omega_e} dA \quad (6.102)$$

lässt sich die Orthogonalität der linearen Ansätze  $\xi$  und  $\eta$  bezüglich des konstanten Ansatzes für jede Zeile von  $\mathbf{N}_\sigma$  herstellen. Das Flächenelement  $dA = j d\xi d\eta$  ergibt sich mit  $j = (\xi, \eta) = \|\mathbf{X}_{,\xi} \times \mathbf{X}_{,\eta}\|$  .

Die Interpolation der Komponenten der dielektrischen Verschiebungen erfolgt durch

$$\mathbf{N}_{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N}_{\bar{\sigma}}^u & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N}_{\bar{\sigma}}^o & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N}_{\bar{\sigma}}^h \end{bmatrix} \quad (6.103)$$

mit

$$\mathbf{N}_{\bar{\sigma}}^h = \tilde{\mathbf{T}}_\sigma^0 \begin{bmatrix} \xi - \bar{\xi} & \eta - \bar{\eta} & (\xi - \bar{\xi})(\eta - \bar{\eta}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi - \bar{\xi} & \eta - \bar{\eta} & (\xi - \bar{\xi})(\eta - \bar{\eta}) \end{bmatrix} \quad (6.104)$$

$$\mathbf{N}_{\bar{\sigma}}^u = \tilde{\mathbf{T}}_\sigma^0 \begin{bmatrix} \eta - \bar{\eta} & 0 \\ 0 & \xi - \bar{\xi} \end{bmatrix} \quad \mathbf{N}_{\bar{\sigma}}^o = \mathbf{N}_{\bar{\sigma}}^u \quad .$$

In Form der Komponenten des Vektors  $\hat{\boldsymbol{\sigma}} \in \mathbb{R}^{[14+16]}$  sind den Ansätzen in  $\mathbf{N}_\sigma$  für das Spannungsfeld und  $\mathbf{N}_{\bar{\sigma}}$  für das dielektrische Verschiebungsfeld unbekannte Skalare zugeordnet. Da die Ansätze und damit die Unbekannten nicht auf die Knoten, sondern auf den Elementbereich bezogen sind, ist der Verlauf der Komponenten von  $\boldsymbol{\sigma}^h$  an den Elementgrenzen im Allgemeinen nicht stetig.

### 6.4.3 Interpolation der Verzerrungen und des elektrischen Feldes

Die Schalenverzerrungen und das elektrische Feld werden in Form von

$$\boldsymbol{\varepsilon}^h = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1^h \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2^h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^h, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^h]^T \\ [\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_2^h, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_2^h]^T \end{bmatrix} = \mathbf{N}_\varepsilon \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \mathbf{N}_\varepsilon = [\mathbf{N}_\varepsilon^1, \mathbf{N}_\varepsilon^2] \quad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 \\ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_2 \end{bmatrix} \quad (6.105)$$

mit

$$\mathbf{N}_\varepsilon^1 = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N}_{\bar{\varepsilon}}^{m1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N}_{\bar{\varepsilon}}^{b1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N}_{\bar{\varepsilon}}^{s1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N}_{\bar{\varepsilon}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \mathbf{N}_\varepsilon^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{N}_{\bar{\varepsilon}}^{m2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N}_{\bar{\varepsilon}}^{b2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{N}_{\bar{\varepsilon}}^{z2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N}_{\bar{\varepsilon}}^{z2} \end{bmatrix} \quad (6.106)$$



über das Element approximiert. Die Komponenten des ersten Teils  $\mathbf{N}_\varepsilon^1$  sind korrespondierend zu den Ansätzen in  $\mathbf{N}_\sigma$  gewählt mit

$$\mathbf{N}_\varepsilon^{m1} = \mathbf{T}_\varepsilon^0 \begin{bmatrix} \eta - \bar{\eta} & 0 \\ 0 & \xi - \bar{\xi} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_\varepsilon^0 = \begin{bmatrix} J_{11}^0 J_{11}^0 & J_{21}^0 J_{21}^0 & J_{11}^0 J_{21}^0 \\ J_{12}^0 J_{12}^0 & J_{22}^0 J_{22}^0 & J_{12}^0 J_{22}^0 \\ 2J_{11}^0 J_{12}^0 & 2J_{21}^0 J_{22}^0 & J_{11}^0 J_{22}^0 + J_{12}^0 J_{21}^0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_\varepsilon^{b1} = \mathbf{N}_\varepsilon^{m1} \quad \mathbf{N}_\varepsilon^{s1} = \mathbf{N}_\sigma^s \quad \mathbf{N}_\varepsilon^s = \mathbf{N}_\sigma^s \quad (6.107)$$

und den unbekanntenen Komponenten des Vektors  $\hat{\varepsilon}_1 \in \mathbb{R}^{[14+16]}$  zugeordnet.

Die Ansätze im zweiten Teil  $\mathbf{N}_\varepsilon^2$  sind orthogonal zu den Ansätzen in  $\mathbf{N}_\sigma$  und entsprechen damit den Anforderungen des EAS-Konzeptes, welches auf den Arbeiten von SIMO & RIFAI [102] und ANDELINGER & RAMM [5] basiert. Mit

$$\mathbf{N}_\varepsilon^{m2} = \frac{j_0}{j} (\mathbf{T}_\sigma^0)^{-T} \mathbf{M}_{[n_m]} \quad , \quad n_m \in \{2, 4\}$$

$$\mathbf{N}_\varepsilon^{b2} = \frac{j_0}{j} (\mathbf{T}_\sigma^0)^{-T} \mathbf{M}_{[n_b]} \quad , \quad n_b \in \{2, 4\}$$

$$\mathbf{M}_{[2]} = \begin{bmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \eta \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_{[4]} = \begin{bmatrix} \xi & 0 & \xi\eta & 0 \\ 0 & \eta & 0 & \xi\eta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.108)$$

und  $j_0 = j(\xi = 0, \eta = 0)$  kann das Membranverhalten - insbesondere bei Biegebeanspruchung - durch Ergänzung der Ansätze in  $\mathbf{N}_\varepsilon^1$  für die Membran- und Biegekomponenten von  $\varepsilon_1^h$  je nach Wahl von  $n_m$  zu vollständig linearen oder vollständig bilinearen Ansätzen verbessert werden.

Die Dickendehnungen werden konstant oder vollständig bilinear über das Element interpoliert durch die Ansätze in

$$\mathbf{N}_\varepsilon^{z2} = \begin{cases} \mathbf{1}_{n_z \times n_z} & \text{für } n_z \in \{1, 2\} \\ \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & \xi\eta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \eta & \xi\eta \end{bmatrix} & \text{für } n_z = 8 \end{cases} \quad , \quad (6.109)$$

wobei  $n_z = 1$  mit  $\bar{M}_1 = 1$  und  $n_z \in \{2, 8\}$  mit  $\bar{M}_2 = 2$  korrespondiert, vgl. hierzu Gleichung 6.23.

Die im Sinne der Diskussion in Kapitel 4 für ausbalancierte Approximationsräume notwendigen Verteilungen der Komponenten des elektrischen Feldes über die Dicke in Form der Ansätze in  $\bar{\mathbf{A}}_2$  gemäß Gleichung 6.56 werden mit

$$\mathbf{N}_\varepsilon^{z2} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{\varepsilon_1}^{z2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_{\varepsilon_2}^{z2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N}_{\varepsilon_3}^{z2} \end{bmatrix}_{\bar{M} \times \bar{M}} \quad (6.110)$$

und

$$\mathbf{N}_{\hat{\varepsilon}_1}^{z_2^2} = \mathbf{1}_{\vec{M}_1 \times \vec{M}_1} \quad \mathbf{N}_{\hat{\varepsilon}_2}^{z_2^2} = \mathbf{1}_{\vec{M}_2 \times \vec{M}_2} \quad \mathbf{N}_{\hat{\varepsilon}_3}^{z_2^2} = \mathbf{1}_{\vec{M}_3 \times \vec{M}_3} \quad (6.111)$$

konstant über das Element approximiert.

Die Ansätze in  $\mathbf{N}_\varepsilon^2$  sind verknüpft mit den Unbekannten im Vektor  $\hat{\varepsilon}_2 \in \mathbb{R}^M$ , deren Anzahl sich mit der Wahl der Ansatzparameter zu  $M = (n_m + n_b + n_z + \vec{M})$  ergibt. Da die Ansätze für die Schalenverzerrungen und das elektrische Feld elementbezogen sind, ist der Verlauf der Komponenten von  $\varepsilon^h$  nicht kontinuierlich an den Elementgrenzen.

#### 6.4.4 Approximation der schwachen Form des Randwertproblems

Durch Einsetzen aller Approximationen in die Linearisierung der schwachen Form des Randwertproblems nach Gleichung 6.70 ergibt sich mit

$$\begin{aligned} L[g(\boldsymbol{\theta}^h, \delta\boldsymbol{\theta}^h), \Delta\boldsymbol{\theta}^h] = & \sum_{e=1}^{numel} \begin{bmatrix} \delta\mathbf{v} \\ \delta\hat{\varepsilon} \\ \delta\hat{\boldsymbol{\sigma}} \end{bmatrix}_e^T \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{K}_g & \mathbf{0} & \mathbf{G}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{H} & -\mathbf{F} \\ \mathbf{G} & -\mathbf{F}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{v} \\ \Delta\hat{\varepsilon} \\ \Delta\hat{\boldsymbol{\sigma}} \end{bmatrix} \right. \\ & \left. + \begin{bmatrix} \mathbf{f}^i - \mathbf{f}^a \\ \mathbf{f}^s \\ \mathbf{f}^e \end{bmatrix}_e \right\} \end{aligned} \quad (6.112)$$

die Finite-Elemente-Approximation als Summe über alle zur räumlichen Diskretisierung der Struktur verwendeten  $numel$  Schalenelemente.

Die hierbei verwendeten Symbole sind durch

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_g &= \int_{\Omega_e} \mathbf{K}_\sigma \, dA & \mathbf{f}^i &= \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^h \, dA = \mathbf{G}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}} \\ \mathbf{H} &= \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_\varepsilon^T \mathbf{D} \mathbf{N}_\varepsilon \, dA & \mathbf{f}^e &= \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_\varepsilon^T \partial_\varepsilon W \, dA - \mathbf{F} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \\ \mathbf{F} &= \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_\varepsilon^T \tilde{\mathbf{N}}_\sigma \, dA & \mathbf{f}^s &= \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_\sigma^T \varepsilon_g^h \, dA + \mathbf{F}^T \hat{\varepsilon} \\ \mathbf{G} &= \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_\sigma^T \mathbf{B} \, dA \end{aligned} \quad (6.113)$$

definiert. Mit  $\tilde{\mathbf{N}}_\sigma = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_\sigma \\ \mathbf{0}_{M \times 30} \end{bmatrix}$  gilt die Zerlegung

$$\mathbf{F} = \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_\varepsilon^1 \\ \mathbf{N}_\varepsilon^2 \end{bmatrix}^T \tilde{\mathbf{N}}_\sigma \, dA = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \mathbf{F}_1 = \int_{\Omega_e} (\mathbf{N}_\varepsilon^1)^T \mathbf{N}_\sigma \, dA \quad . \quad (6.114)$$

Die Matrix

$$\mathbf{K}_\sigma = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\bar{\sigma}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{\bar{\sigma}} \end{bmatrix} \quad (6.115)$$

ergibt sich durch Diskretisierung von  $\Delta\delta\boldsymbol{\varepsilon}_g$  gemäß Gleichung 6.97, wobei wegen  $\Delta\delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_g = \mathbf{0}$  unmittelbar  $\mathbf{K}_{\bar{\sigma}} = \mathbf{0}$  folgt. Die nur auf dem mechanischen Teil der Schalenkinematik basierende Matrix  $\mathbf{K}_{\bar{\sigma}}$  wird in GRUTTMANN & WAGNER [48] abgeleitet.

Die Unbekannten  $\Delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = [\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_2]^T$  und  $\Delta\boldsymbol{\sigma}$  sind auf die Ansätze auf Elementebene bezogen, womit keine Stetigkeit an den Elementgrenzen gegeben ist. Hiermit reduziert sich bei beliebigen, kinematisch zulässigen Variationen  $\delta\boldsymbol{\theta} \neq \mathbf{0}$  die Gleichung 6.112 für  $L[g(\boldsymbol{\theta}^h, \delta\boldsymbol{\theta}^h, \Delta\boldsymbol{\theta}^h)] = 0$  auf

$$L[g(\boldsymbol{\theta}^h, \delta\boldsymbol{\theta}^h), \Delta\boldsymbol{\theta}^h] = \sum_{e=1}^{numel} \delta\mathbf{v}_e^T \{ \mathbf{K}_g \Delta\mathbf{v} + \mathbf{G}^T \Delta\hat{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{f}^i - \mathbf{f}^a \}_e = 0 \quad (6.116)$$

unter den auf Elementebene zu erfüllenden Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \mathbf{H}\Delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{F}\Delta\hat{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{f}^e &= \mathbf{0} \\ \mathbf{G}\Delta\mathbf{v} - \mathbf{F}^T\Delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{f}^s &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (6.117)$$

Mit Gleichung 6.114 und den Zerlegungen

$$\mathbf{H}_{\alpha\beta} = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_\varepsilon^{\alpha T} \mathbf{D} \mathbf{N}_\varepsilon^\beta \, dA \quad \mathbf{f}_\alpha^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_\varepsilon^{\alpha T} (\partial_\varepsilon W - \bar{\boldsymbol{\sigma}}^h) \, dA \quad (6.118)$$

kann man Gleichung 6.117<sub>1</sub> durch das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} \\ \mathbf{H}_{21} & \mathbf{H}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 \\ \Delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \Delta\hat{\boldsymbol{\sigma}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^e \\ \mathbf{f}_2^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (6.119)$$

ausdrücken und es folgt aus dessen zweiter Zeile

$$\Delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_2 = \mathbf{H}_{22}^{-1} (-\mathbf{f}_2^e - \mathbf{H}_{21} \Delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1) \quad (6.120)$$

Setzt man Gleichung 6.120 in Gleichung 6.119<sub>1</sub> ein, erhält man

$$\bar{\mathbf{H}}_{11} \Delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 - \mathbf{F}_1 \Delta\hat{\boldsymbol{\sigma}} + \bar{\mathbf{f}}_1^e = \mathbf{0} \quad (6.121)$$

mit

$$\bar{\mathbf{H}}_{11} = \mathbf{H}_{11} - \mathbf{H}_{12} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{H}_{21} \quad \bar{\mathbf{f}}_1^e = \mathbf{f}_1^e - \mathbf{H}_{12} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{f}_2^e \quad (6.122)$$

Aus Gleichung 6.117<sub>2</sub> folgt mit Gleichung 6.114

$$\mathbf{G}\Delta\mathbf{v} - \mathbf{F}_1^T \Delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 + \mathbf{f}^s = \mathbf{0} \quad (6.123)$$

und daraus

$$\Delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 = \mathbf{F}_1^{-T} (\mathbf{G} \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f}^s) \quad . \quad (6.124)$$

Nach Einsetzen von Gleichung 6.124 in Gleichung 6.121 erhält man durch Umformung

$$\Delta \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\mathbf{H}} \mathbf{G} \Delta \mathbf{v} + \hat{\mathbf{H}} \mathbf{f}^s + \mathbf{F}_1^{-1} \bar{\mathbf{f}}_1^e \quad (6.125)$$

mit

$$\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{F}_1^{-1} \bar{\mathbf{H}}_{11} \mathbf{F}_1^{-T} \quad . \quad (6.126)$$

Durch Einsetzen von Gleichung 6.125 in Gleichung 6.116 ergibt sich

$$L[g(\boldsymbol{\theta}^h, \delta \boldsymbol{\theta}^h), \Delta \boldsymbol{\theta}^h] = \sum_{e=1}^{numel} \delta \mathbf{v}_e^T \{ \mathbf{K}_T^e \Delta \mathbf{v} + \hat{\mathbf{f}}^e \} = 0 \quad , \quad (6.127)$$

worin man die Elementsteifigkeitsmatrix des Schalenelements mit

$$\mathbf{K}_T^e = \mathbf{G}^T \hat{\mathbf{H}} \mathbf{G} + \mathbf{K}_g \quad (6.128)$$

und den Elementresiduumsvektor mit

$$\hat{\mathbf{f}}^e = \mathbf{G}^T (\hat{\boldsymbol{\sigma}} + \hat{\mathbf{H}} \mathbf{f}^s + \mathbf{F}_1^{-1} \bar{\mathbf{f}}_1^e) - \mathbf{f}_a \quad (6.129)$$

identifiziert.

## 7 Numerische Beispiele - Piezoelektrische Schalenformulierung

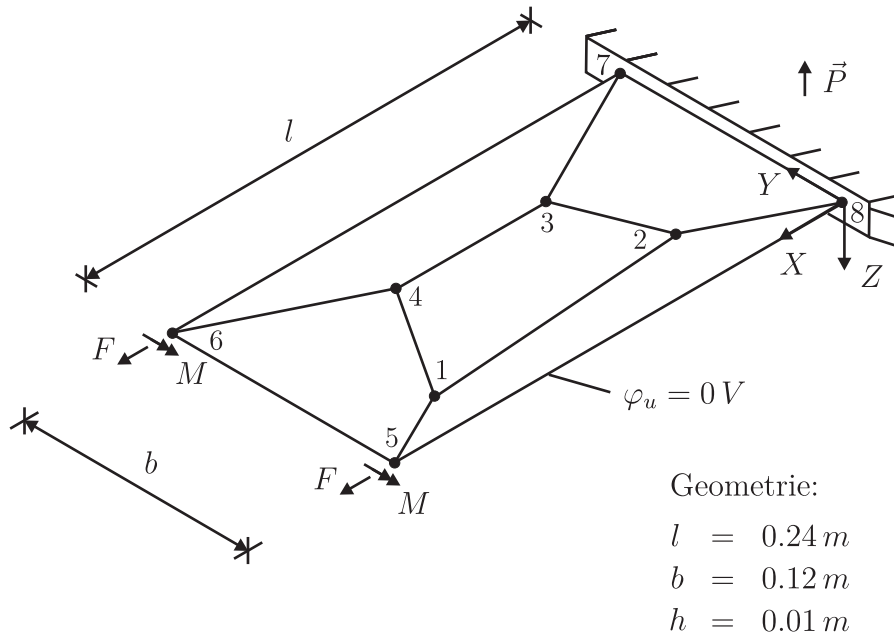
In diesem Kapitel wird eine Reihe von Beispielen diskutiert, um zum einen die piezoelektrische Schalenformulierung und das implementierte Modell für geschichtete Strukturen zu verifizieren, zum anderen die Beseitigung der parasitären Approximationen durch die im vorigen Kapitel beschriebene konsistente Modellierung der elektrischen und mechanischen Approximationsräume zu demonstrieren. Dabei werden typische Beanspruchungsarten verwendet. In einem Beispiel ist die Beanspruchung zeitabhängig, um das Verhalten der Elementformulierung bei dynamischen Problemen zu überprüfen. Einige der Beispiele zeigen, dass auch eine geometrisch nichtlineare Analyse und die Abbildung von großen Rotationen für die Aktorik und Sensorik von Bedeutung sein können. Die Untersuchungen beinhalten auch unregelmäßige Finite-Elemente-Netze, welche sich üblicherweise durch die Verwendung adaptiver Vernetzungsmethoden und durch die Generierung von Finite-Elemente-Netzen aus CAD-Modellen ergeben.

### 7.1 Piezoelektrische Patch-Tests

Die ursprüngliche Bedeutung von „Patch-Tests“ ist die Validierung mechanischer Finite-Element-Formulierungen. Für piezoelektrische finite Elemente haben sich in der Literatur bislang keine einschlägigen „Patch-Tests“ als Standard etabliert. Von KLINKEL & WAGNER [65] wird die Erweiterung des von MACNEAL & HARDER [77] vorgeschlagenen mechanischen „Patch-Tests“ auf piezoelektrische Problemstellungen vorgeschlagen, um das Membranverhalten und das Verhalten einer piezoelektrischen Elementformulierung bei reiner Biegung zu prüfen. Damit wird eine piezoelektrische Volumen-Schalen-Formulierung daraufhin untersucht, ob unter Verwendung eines unregelmäßigen Finite-Elemente-Netzes konstante Spannungen bei konstanten Verzerrungen und ein konstantes elektrisches Feld bei konstanten dielektrischen Verschiebungen approximiert werden können. Die vorliegende piezoelektrische Schalenformulierung wurde gemäß diesem Vorgehen untersucht. In Erweiterung dazu werden auch die aktorische Beanspruchung durch ein elektrisches Feld in Dickenrichtung sowie die Beanspruchung durch Querlast untersucht.

Die Ergebnisse werden getrennt für die einzelnen Beanspruchungsarten nachfolgend dargestellt. In Abbildung 7.1 sind die Geometrie mit der Dicke  $h$  und die Materialdaten des verwendeten Elementnetzes für die Beanspruchung durch Längskraft, ein elektrisches Feld in Dickenrichtung oder für reine Biegebeanspruchung

angegeben. Die Struktur ist in Dickenrichtung polarisiert. Um die Ermittlung analytischer Lösungen zu vereinfachen, wird die Querkontraktion vernachlässigt und isotropes Materialverhalten angenommen. Da die maßgeblichen Kuppel effekte erhalten bleiben, wird die wesentliche Phänomenologie durch diese akademischen Vereinfachungen nicht beeinträchtigt.



Materialdaten:

$$\begin{aligned}
 E &= 123 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2 \\
 G &= 61.5 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2 \\
 e_{31} &= -5.0 \text{ C/m}^2 \\
 \epsilon_{11} &= \epsilon_{33} = 12.5 \cdot 10^{-9} \text{ C}^2/\text{Nm}^2
 \end{aligned}$$

Knoten	X [m]	Y [m]
1	0.20	0.02
2	0.06	0.03
3	0.08	0.08
4	0.16	0.08

**Abb. 7.1:** Materialdaten und Geometrie des Patch-Tests für Membranbeanspruchung durch Längsbelastung oder ein elektrisches Feld in Dickenrichtung sowie für reine Biegebeanspruchung

### 7.1.1 Membranbeanspruchung durch Längsbelastung

Für alle Knoten ist  $\varphi_u = 0 \text{ V}$  vorgegeben, was einer Erdung der Unterseite gleichkommt. Alle Verschiebungs- und Rotationsfreiheitsgrade der Knoten 7 und 8 sind gehalten. Die Belastung erfolgt durch die Knotenkräfte  $F = 6 \cdot 10^4 \text{ N}$ , was mit einer konstanten Spannung in Längsrichtung von  $S^{11} = 10^8 \text{ N/m}^2$  verbunden ist.

Aus den elektrischen Randbedingungen folgt  $\vec{D}^3 = 0 \text{ C/m}^2$ . Durch die Vereinfachungen in den Materialdaten verbleiben zwei relevante konstitutive Beziehungen. Deren Auswertung ergibt eine konstante Verzerrung zu  $E_{11} = 8 \cdot 10^{-4}$  und die Komponente des elektrischen Feldes in Dickenrichtung zu  $\vec{E}_3 = 3.2 \cdot 10^5 \text{ V/m}$ , siehe KLINKEL & WAGNER [66]. Daraus folgt für die Verschiebung am freien Ende  $u_x = 1.92 \cdot 10^{-4} \text{ m}$  und für das Potential an der Oberseite  $\varphi_o = 3.2 \cdot 10^3 \text{ V}$ .

Die numerische Berechnung stimmt mit der analytischen Lösung überein - man erhält für die Verschiebung der Knoten 5 und 6 in Längsrichtung  $u_x^{\{5,6\}} = 1.92 \cdot 10^{-4} \text{ m}$  und für alle Knoten das elektrische Potential  $\varphi_o^{\{1,2,\dots,8\}} = 0 \text{ V}$ . Aus der Rückrechnung ergeben sich für das gesamte Gebiet die Spannung  $\tilde{S}^{11} = 10^8 \text{ N/m}^2$  und die dielektrische Verschiebung  $\vec{D}^3 = 0 \text{ C/m}^2$ . Um diesen Test zu bestehen, kann die Berechnung ohne interne Ansätze für die elektrischen Feldkomponenten mit  $\vec{M}_1 = \vec{M}_2 = \vec{M}_3 = 0$  erfolgen, vgl. Gleichung 6.56. Wählt man dennoch zusätzliche Polynomansätze, werden diese im Rahmen der Berechnung nicht aktiviert.

### 7.1.2 Membranbeanspruchung durch ein elektrisches Feld

Die Randbedingungen sind gewählt wie in Abschnitt 7.1.1, wobei darüber hinaus für alle Knoten  $\varphi_o = 10^3 \text{ V}$  gesetzt wird. Hierdurch erfolgt die Beanspruchung in Form eines in Dickenrichtung orientierten elektrischen Feldes mit  $\vec{E}_3 = -\frac{\varphi_o - \varphi_u}{h} = 10^5 \text{ V/m}$  und es gilt  $S^{11} = 0 \text{ N/m}^2$ . Damit lassen sich die beiden relevanten konstitutiven Gleichungen

$$\begin{aligned} S^{11} &= E \cdot E_{11} - e_{31} \cdot \vec{E}_3 \\ \vec{D}^3 &= e_{31} \cdot E_{11} + \epsilon_{33} \cdot \vec{E}_3 \end{aligned} \tag{7.1}$$

auswerten, woraus sich  $E_{11} = 4.065 \cdot 10^{-6}$  sowie  $\vec{D}^3 = 1.270 \cdot 10^{-3} \text{ C/m}^2$  ergeben und für die horizontale Verschiebung am freien Ende  $u_x = 9.756 \cdot 10^{-7} \text{ m}$  folgt.

Die numerischen Ergebnisse stimmen mit den theoretischen Ergebnissen überein. Die Verwendung zusätzlicher Polynomansätze für die Komponenten des elektrischen Feldes ist auch für diesen Belastungsfall nicht erforderlich.

### 7.1.3 Reine Biegebeanspruchung

Wie in Abschnitt 7.1.1 wird für alle Knoten  $\varphi_u = 0 \text{ V}$  vorgegeben, und es werden alle Verschiebungs- und Rotationsfreiheitsgrade der Knoten 7 und 8 gehalten. Mit  $M = 10^3 \text{ Nm}$  an den Knoten 5 und 6 wird die Struktur einer reinen Biegebeanspruchung unterworfen, was mit einer in Längsrichtung konstanten und in

Dickenrichtung linearen Verteilung der Spannung  $S^{11}$  und der Verzerrung  $E_{11}$  verbunden ist. Auch die Komponente  $\vec{E}_3$  des elektrischen Feldes verläuft linear über die Dicke, vgl. Tabelle 4.1, was mit einem quadratischen Verlauf des elektrischen Potentials  $\varphi$  in Dickenrichtung korrespondiert. Eine analytische Betrachtung für dieses Problem führt gemäß KLINKEL & WAGNER [66] auf eine vertikale Verschiebung  $u_z = 4.608 \cdot 10^{-2} m$  am freien Ende und auf ein elektrisches Potential  $\varphi_o = 0 V$  an der Oberseite der gesamten Struktur.

Die numerischen Ergebnisse für die vertikale Verschiebung am freien Ende und das elektrische Potential an der Oberseite sind in Tabelle 7.1 dargestellt. Allein mit der linearen Verteilung von  $\varphi$  über die Dicke gemäß den kinematischen Annahmen nach Gleichung 6.12 kann  $\vec{E}_3$  nur konstant über die Dicke approximiert werden, wenn mit  $\vec{M}_3 = 0$ , siehe Gleichung 6.56, kein zusätzlicher Polynomansatz für  $\vec{E}_3$  verwendet wird. Damit sind die Approximationsräume nicht konsistent, da der konstante Verlauf von  $\vec{E}_3$  und der lineare Verlauf von  $E_{11}$  über das Stoffgesetz additiv gekoppelt sind. Dennoch treten dabei keine parasitären Approxi-

Knotenwerte		$\vec{M}_3 = 0$	$\vec{M}_3 \geq 1$	analytisch [66]
$u_z^{\{5,6\}}$	[m]	$4.6829 \cdot 10^{-2}$	$4.6080 \cdot 10^{-2}$	$4.6080 \cdot 10^{-2}$
$\varphi_o^{\{1,2,\dots,8\}}$	[V]	0	0	0

**Tab. 7.1:** Ergebnisse für die vertikale Verschiebung  $u_z$  am freien Ende und das elektrische Potential  $\varphi_o$  an der Oberseite ohne ( $\vec{M}_3 = 0$ ) und mit ( $\vec{M}_3 \geq 1$ ) internen Ansätzen für die Approximation der elektrischen Feldkomponente  $\vec{E}_3$

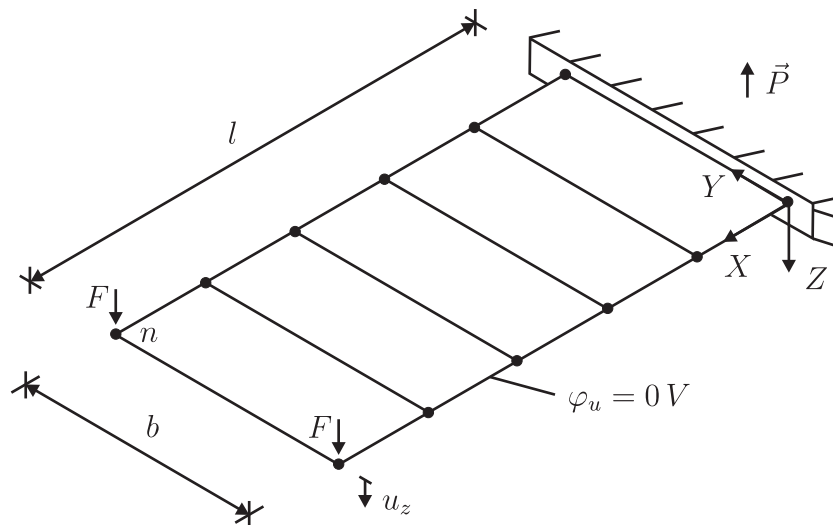
mationen des elektrischen Potentials auf - das elektrische Potential ergibt sich für alle Knoten zu  $\varphi_o^{\{1,2,\dots,8\}} = 0$ , was der analytischen Lösung entspricht. Dies erklärt sich damit, dass über die elektrischen Knotenfreiheitsgrade kein Gradient des elektrischen Potentials abgebildet wird, womit in Abwesenheit interner Ansätze ( $\vec{M}_3 = 0$ ) das elektrische Feld zu Null approximiert wird. Die vertikale Durchbiegung am freien Ende entspricht dem rein mechanischen Fall, womit sich das numerische Modell für die piezoelektrische Struktur zu weich verhält.

Mit  $\vec{M}_3 = 1$  wird der Verlauf von  $\vec{E}_3$  linear und damit korrekt approximiert, womit auch das numerische Ergebnis für die Durchbiegung der analytischen Lösung entspricht. Wählt man interne Ansätze höherer Ordnung ( $\vec{M}_3 > 1$ ), werden diese im Rahmen der Berechnung nicht aktiviert.

#### 7.1.4 Querbeanspruchung

Die Untersuchung des Verhaltens der piezoelektrischen Schalenformulierung bei Querbeanspruchung soll unter Verwendung derselben Bauteilgeometrie wie in den





Materialdaten:

$$E = 123 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$$

$$G = 61.5 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$$

$$e_{31} = -5.0 \text{ C/m}^2$$

$$e_{15} = 5.0 \text{ C/m}^2$$

$$\epsilon_{11} = \epsilon_{33} = 12.5 \cdot 10^{-9} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$$

Geometrie:

$$l = 0.24 \text{ m}$$

$$b = 0.12 \text{ m}$$

$$h = 0.01 \text{ m}$$

**Abb. 7.2:** Materialdaten und Geometrie des Elementnetzes für den Patch-Test unter Querbelastung

Beispielen zuvor erfolgen. Die Querkontraktion wird vernachlässigt, um den Vergleich der numerischen Ergebnisse mit einer analytischen Lösung zu vereinfachen. Als Randbedingung wird für alle Knoten  $\varphi_u = 0 \text{ V}$  vorgegeben und es werden die Verdrehungen und Verschiebungen der Knoten an der Einspannung gehalten. Da bei Querbeanspruchung durch  $F = 10^3 \text{ N}$  der Verlauf der Verzerrungen  $E_{11}$  über die Länge veränderlich ist, sind für die Approximation mehrere Elemente in X-Richtung erforderlich, vgl. Abbildung 7.2.

Die analytische Lösung des Problems ist in ANHANG C in allgemeiner Form für die Durchbiegung abgeleitet. Damit ergibt sich für die vertikale Verschiebung am freien Ende  $u_z = 7.3804 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ . Wie bei reiner Biegebeanspruchung ist auch für eine Querbeanspruchung bei geometrisch linearer Betrachtung  $\varphi_o = 0 \text{ V}$  die theoretische Lösung für das elektrische Potential an der Oberseite der gesamten Struktur. Im unpolarisierten Zustand ist die Verformung wie im rein mechanischen Fall, wobei für die vertikale Verschiebung am freien Ende  $u_z^* = 7.5005 \cdot 10^{-3} \text{ m}$  gilt.

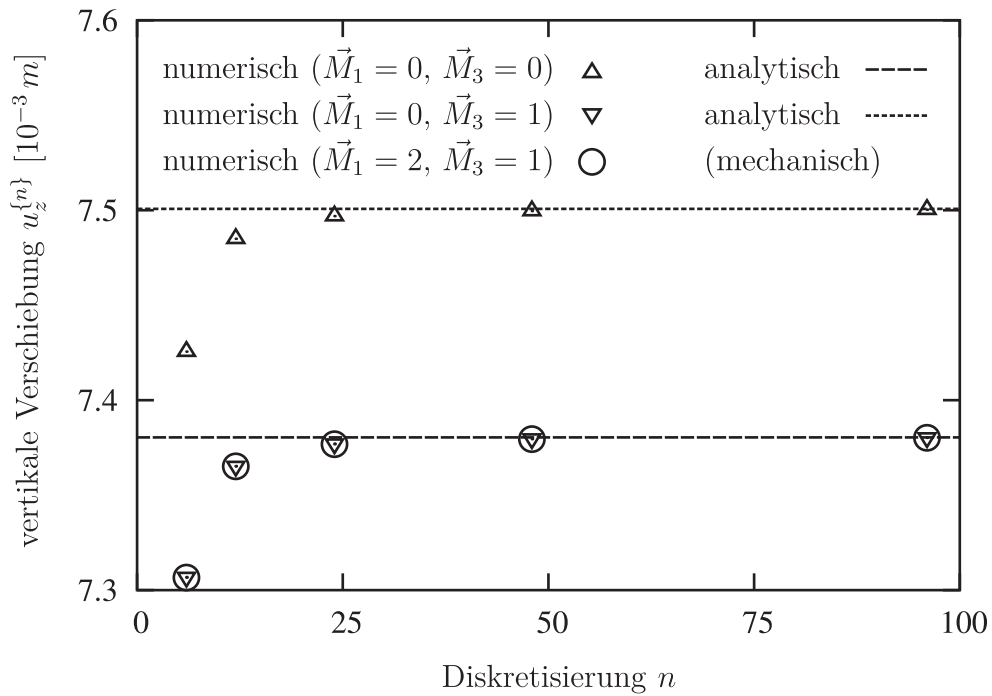
Die Ergebnisse der numerischen Berechnung sind in Form der vertikalen Verschiebung  $u_z^{\{n\}}$  und des elektrischen Potentials an der Oberseite  $\varphi_o^{\{n\}}$  am Knoten  $n$  bei unterschiedlichen Diskretisierungen und unter Verwendung von  $\vec{M}_1$  und  $\vec{M}_3$  internen Ansätzen für die Komponenten  $\vec{E}_1$  und  $\vec{E}_3$  des elektrischen Feldes in Tabelle 7.2 angegeben. Die grafische Darstellung der Ergebnisse in den Ab-

	$\vec{M}_1 = 0, \vec{M}_3 = 0$		$\vec{M}_1 = 0, \vec{M}_3 \geq 1$		$\vec{M}_1 = 2, \vec{M}_3 \geq 1 = 0$	
$n$	$u_z^{\{n\}}$	$\varphi_o^{\{n\}}$	$u_z^{\{n\}}$	$\varphi_o^{\{n\}}$	$u_z^{\{n\}}$	$\varphi_o^{\{n\}}$
	$[10^{-3} m]$	$[V]$	$[10^{-3} m]$	$[V]$	$[10^{-3} m]$	$[V]$
6	7.4256	-35.5648	7.3069	-35.5648	7.3066	0
12	7.4850	-62.3638	7.3654	-62.3638	7.3651	0
24	7.4969	-81.7708	7.3771	-81.7708	7.3769	0
48	7.4996	-89.3372	7.3798	-89.3372	7.3795	0
96	7.5003	-91.4679	7.3804	-91.4679	7.3802	0

**Tab. 7.2:** Numerische Ergebnisse für die Durchbiegung  $u_z^{\{n\}}$  und das elektrische Potential  $\varphi_o^{\{n\}}$  an der Kragarmspitze bei unterschiedlichen Diskretisierungen und verschiedenen internen Ansätzen  $\vec{M}_1$  und  $\vec{M}_3$  für das elektrische Feld

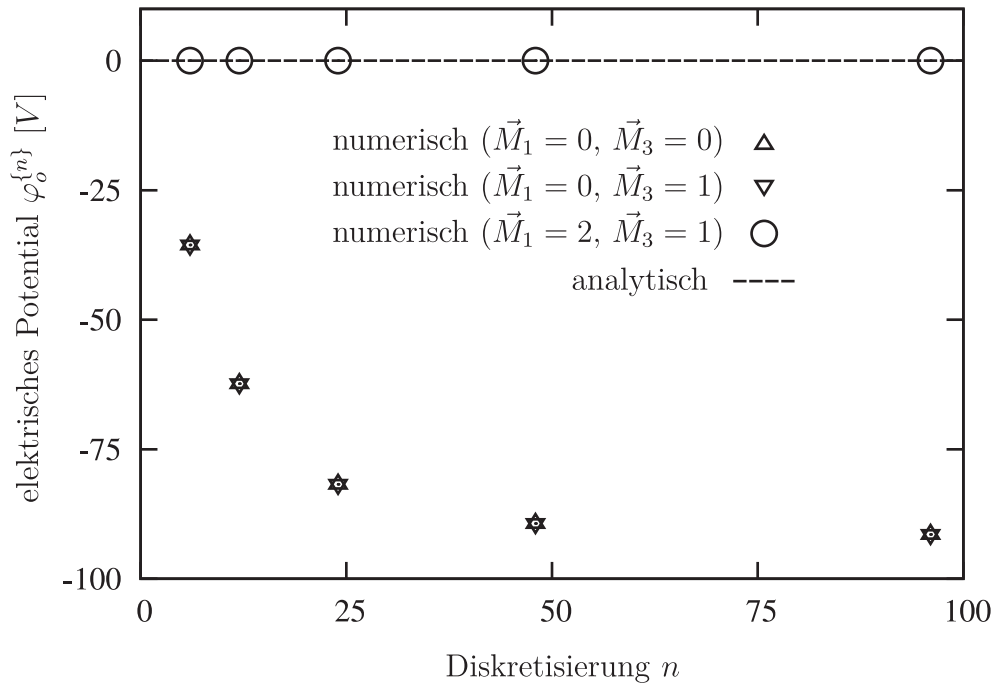
bildungen 7.3 und 7.4 verdeutlicht, dass die Durchbiegung  $u_z^{\{n\}}$  der numerischen Berechnung für  $\vec{M}_1 = 0$  und  $\vec{M}_3 = 0$  überschätzt wird. Sie nähert sich bei Netzverfeinerung nicht der analytischen Lösung  $u_z$  des elektromechanischen Problems, sondern der analytischen Lösung des mechanischen Problems  $u_z^*$  an. Die parasitären Approximationen des elektrischen Potentials nehmen bei Netzverfeinerung sogar zu, was sich genauso bei Verwendung von  $\vec{M}_1 = 0$  und  $\vec{M}_3 = 1$  verhält. Die Durchbiegung  $u_z^{\{n\}}$  wird für  $\vec{M}_1 = 0, \vec{M}_3 = 1$  wesentlich besser approximiert. Damit jedoch sowohl die Durchbiegung gegen die analytische Lösung konvergiert und gleichzeitig kein parasitäres Potential auftritt, ist  $\vec{M}_1 = 2$  und  $\vec{M}_3 = 1$  zu wählen. Damit ist die Balance der Approximationsräume für die mechanischen und elektrischen Felder gewährleistet, was in Einklang steht mit den in Tabelle 4.1 dargestellten Aussagen einer theoretischen Betrachtung für die betrachtete Polarisierung  $\vec{P}_3$  und die Beanspruchung  $Q$ . Dies zeigt, dass das Auftreten von parasitärem Potential durch inkompatible Approximationsräume eine Standardelementformulierung mit Ansatzfunktionen niedriger Ordnung ohne interne Ansätze ungeeignet zur Analyse von Sensoranwendungen macht. Elektromechanisch abgestimmte Approximationsräume sind auch Voraussetzung für eine zuverlässige, geometrisch nichtlineare Sensoranalyse.

Bei einer geometrisch nichtlinearen Betrachtung nimmt die Differenz zwischen einer äußeren Belastung  $F^* := \lambda \cdot F$  am freien Ende und der Querkraft  $Q$  mit



**Abb. 7.3:** Grafische Darstellung der berechneten vertikalen Durchbiegungen  $u_z^{\{n\}}$  nach Tabelle 7.2 und der analytischen Lösungen  $u_z$  und  $u_z^*$  für den elektromechanischen und mechanischen Fall

wachsendem Lastfaktor  $\lambda$  zu, wobei gleichzeitig eine mit wachsendem  $\lambda$  zunehmende Normalkraft auftritt. Mit der Normalkraft ist ein zusätzlicher, über die Querschnittshöhe konstanter Spannungsanteil  $\Delta S_{11}$  verbunden. Damit wird der im geometrisch linearen Fall bei Biegung linearen Verteilung von  $\vec{E}_3$  über die Dicke ein konstanter Anteil überlagert. Wegen Gleichung 2.32 setzt sich dabei das elektrische Potential  $\varphi$  aus einem quadratischen und einem linearen Anteil über die Dicke zusammen, was sich bei geerdeter Unterseite ( $\varphi_u = 0 V$ ) in einem elektrischen Potential an der Oberseite der Struktur äußert. Für die Lastfaktoren  $\lambda \in \{0.2, 0.4, \dots, 1.0\}$  sind die Ergebnisse einer nichtlinearen Berechnung der Struktur in Abbildung 7.2 mit  $F^*$  anstelle von  $F$  in Tabelle 7.3 dargestellt. Wie auch bei der geometrisch linearen Betrachtung werden für  $\vec{M}_3 = 0$  und  $\vec{M}_1 = 0$  sowohl die vertikale Verschiebung als auch das elektrische Potential falsch berechnet. Für  $\vec{M}_3 = 1$  und  $\vec{M}_1 = 0$  wird zwar die vertikale Verschiebung wesentlich besser approximiert, aber das ihr zugeordnete elektrische Potential  $\varphi_o^{\{n\}}$  weicht signifikant vom experimentell zu erwartenden Sensorsignal ab. Ein Abbau des an der Oberseite in Längsrichtung auftretenden Potentialgefälles wird vom numerischen Modell nicht berücksichtigt. Experimentell lässt sich dieser Vorgang einschränken, indem die Ausbildung derartiger Bauteile unter Verwendung einer



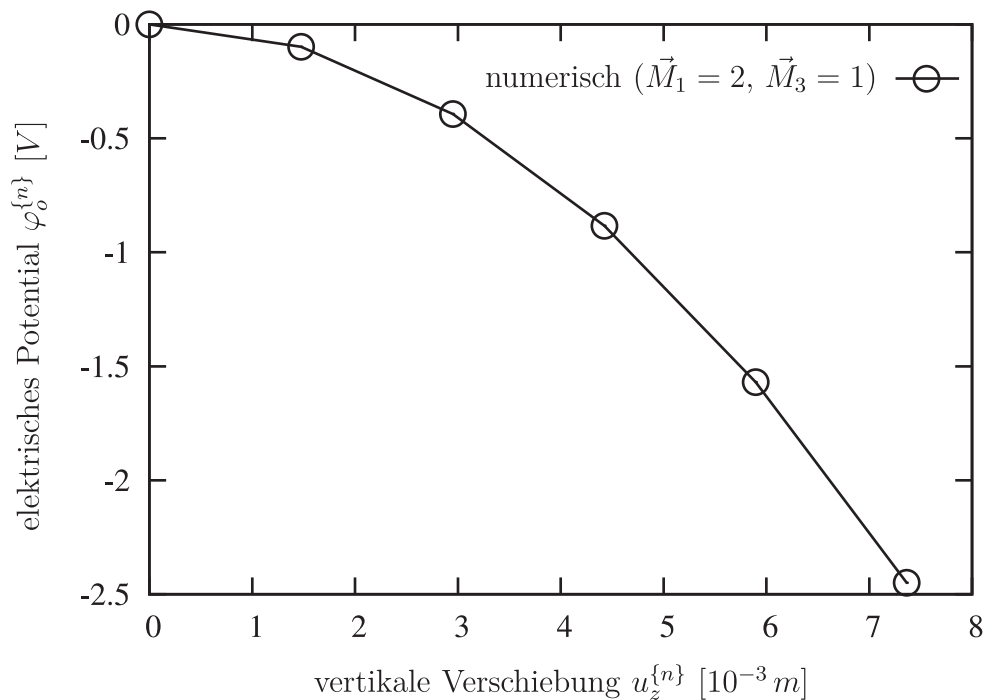
**Abb. 7.4:** Grafische Darstellung des berechneten elektrischen Potentials an der Oberseite  $\varphi_o^{\{n\}}$  nach Tabelle 7.2 und der analytischen Lösung für  $\varphi_o$

	$\vec{M}_1 = 0, \vec{M}_3 = 0$		$\vec{M}_1 = 0, \vec{M}_3 \geq 1$		$\vec{M}_1 = 2, \vec{M}_3 \geq 1 = 0$	
$\lambda$	$u_z^{\{n\}}$	$\varphi_o^{\{n\}}$	$u_z^{\{n\}}$	$\varphi_o^{\{n\}}$	$u_z^{\{n\}}$	$\varphi_o^{\{n\}}$
	$[10^{-3} m]$	$[V]$	$[10^{-3} m]$	$[V]$	$[10^{-3} m]$	$[V]$
0.2	1.4998	-17.9654	1.4758	-17.9639	1.4758	-0.0982
0.4	2.9989	-36.1205	2.9510	-36.1145	2.9509	-0.3927
0.6	4.4965	-54.4555	4.4248	-54.4425	4.4246	-0.8833
0.8	5.9920	-72.9607	5.8965	-72.9384	5.8963	-1.5693
1.0	7.4847	-91.6261	7.3655	-91.5926	7.3653	-2.4450

**Tab. 7.3:** Geometrisch nichtlineare numerische Ergebnisse für die Durchbiegung  $u_z^{\{n\}}$  und das elektrische Potential  $\varphi_o^{\{n\}}$  an der Kragarmspitze für die Diskretisierung  $n = 48$  bei unterschiedlichen Lastfaktoren  $\lambda$  und verschiedenen internen Ansätzen  $\vec{M}_1$  und  $\vec{M}_3$  für das elektrische Feld

Trägerschicht in Verbindung mit piezoelektrischen Patches erfolgt.

Dahingegen kann ein geometrisch nichtlineares numerisches Modell mit elektromechanisch abgestimmten Approximationsräumen frei von parasitärem elektrischen Potential ( $\vec{M}_1 = 2, \vec{M}_3 = 1$ ) bei der Erstellung von Sensorkennlinien genutzt werden. Dies ist im Diagramm in Abbildung 7.5 angedeutet, in der das



**Abb. 7.5:** Durchbiegung  $u_z^{n}$  und elektrisches Potential  $\varphi_o^{n}$  an der Kragarmspitze für  $\vec{M}_1 = 2$ ,  $\vec{M}_3 = 1$  und verschiedene Lastfaktoren  $\lambda$ , vgl. Tabelle 7.3

zu erwartende Sensorsignal  $\varphi_o^{n}$  über der vertikalen Verschiebung  $u_z^{n}$  am freien Ende aufgetragen ist.

## 7.2 Bimorph-Aktor

Mit diesem Beispiel wird das Verhalten der piezoelektrischen Schalenformulierung bei unregelmäßiger Netzgeometrie für aktorisch induzierte Biegung untersucht. Hierfür wird eine in SZE et al. [108] vorgeschlagene Testkonfiguration herangezogen. Die Unregelmäßigkeit des Netzes wird über den Parameter  $e$  beschrieben. Der piezoelektrische Kragarm mit Gesamtdicke  $h$  besteht aus zwei gleich dicken Schichten aus Polyvinylidene-Flourid, die miteinander verbunden und entgegengesetzt polarisiert sind. Die Geometrie und die Materialdaten sind in Abbildung 7.6 gegeben.

Unter Berücksichtigung der aufgrund entgegengesetzter Polung unterschiedlichen elektrischen Materialeigenschaften der beiden Schichten kann die Modellierung des Querschnitts mit einem einzigen Schalenelement über die Dicke erfolgen. Alle mechanischen Freiheitsgrade der Knoten an der Einspannung sind gehalten. Mit  $\varphi_u = 0V$  und  $\varphi_o = 1V$  für alle Knoten wird die Unterseite geerdet und ein konstantes elektrisches Feld in Dickenrichtung der Größe  $\vec{E}_3 = 1000 V/m$  als Be-

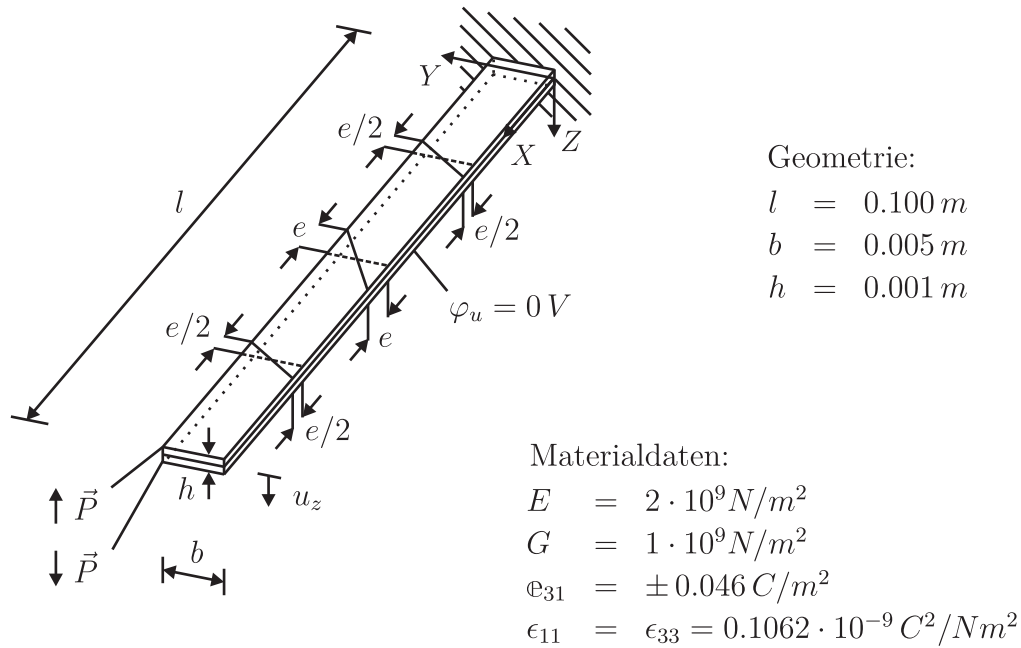


Abb. 7.6: Geometrie und Materialeigenschaften des Bimorph-Aktors

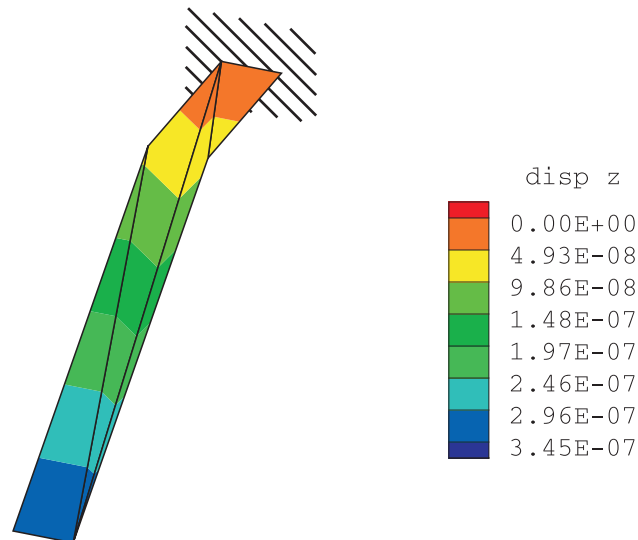
lastung erzeugt. Damit wird in der oberen Schicht eine Dehnung in Längsrichtung hervorgerufen. Gleichzeitig verkürzt sich wegen der gegensätzlichen Orientierung der Polarisation die untere Schicht in Längsrichtung, was zu einer Biegung des Bauteils führt.

In TZOU [114] wird eine analytische Lösung für das Problem auf Basis der Bernoulli-Stabtheorie angegeben. Daraus ergibt sich die vertikale Verschiebung der Kragarmspitze zu  $u_z = 0.345 \mu\text{m}$ . Um die numerischen Ergebnisse der piezoelektrischen Schalenformulierung damit vergleichen zu können, wird unter Vernachlässigung von Querkontraktion isotropes Materialverhalten betrachtet.

Die numerischen Ergebnisse für die vertikale Verschiebung der beiden Knoten an der Kragarmspitze entsprechen für alle  $e \in [0, \frac{l}{2}]$  exakt der analytischen Lösung. Abbildung 7.7 zeigt die vertikale Verschiebung und die Verformung in überhöhter Darstellung für  $e = \frac{l}{2}$ . Die Verwendung von internen Ansätzen für die Komponenten des elektrischen Feldes wirkt sich nicht auf die Berechnungsergebnisse aus.

### 7.3 Schub- und Torsionsaktor

Mit diesem Beispiel soll das Verhalten der piezoelektrischen Schalenformulierung bei elektrisch induzierter Schubdeformation untersucht werden. Piezoelektrische



**Abb. 7.7:** Vertikale Verschiebungen in [m] und Verformung in überhöhter Darstellung für  $e = \frac{l}{2}$

Aktoren, die auf diesem Mechanismus beruhen, werden als Schubaktoren bezeichnet. Die Richtung der Belastung in Form eines elektrischen Feldes ist dabei senkrecht zur Polung des Materials orientiert. Eine Übersicht zum Stand der Forschung im Bereich der Schubaktoren wird in BENJEDDOU [13] gegeben.

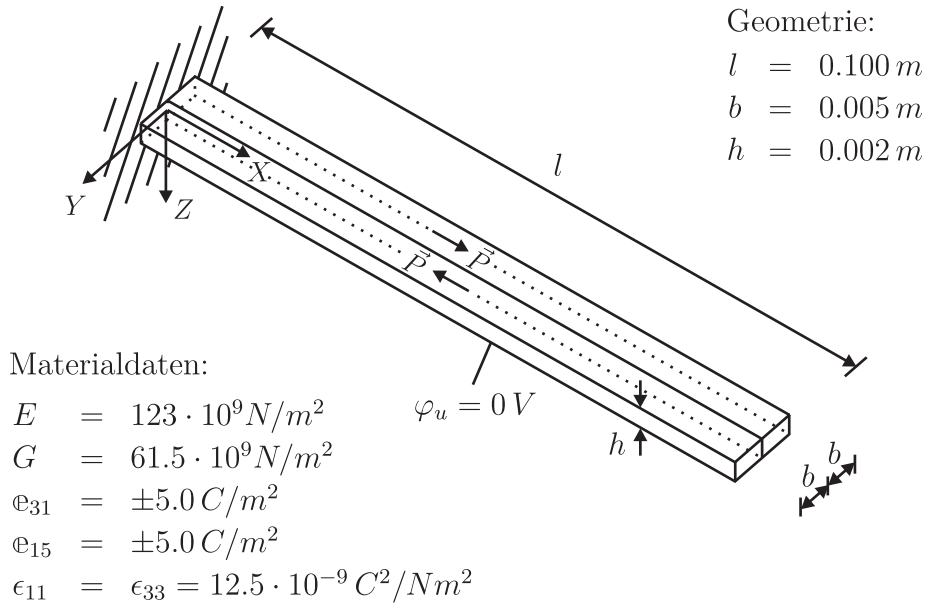
Die hier betrachtete Struktur besteht aus zwei piezoelektrischen Streifen, vgl. Abbildung 7.8. Diese sind entgegengesetzt polarisiert - im Gegensatz zum vorigen Beispiel ist die Polung in Längsrichtung orientiert und die Streifen sind nicht übereinander, sondern nebeneinander angeordnet. An der Einspannung sind alle mechanischen Freiheitsgrade gehalten. Mit  $\varphi_u = 0\text{ V}$  und  $\varphi_0 = 1000\text{ V}$  für alle Knoten wird die Unterseite geerdet und ein elektrisches Feld  $\vec{E}_3$  in Dickenrichtung erzeugt. Da für diese Art der Polarisation über das Stoffgesetz eine Kopplung des elektrischen Feldes in Dickenrichtung mit der Schubverzerrung besteht, agieren die piezoelektrischen Streifen als Schubaktoren, wodurch einer der Streifen mit dem Schubwinkel  $\bar{\gamma}_1$  nach unten und der andere Streifen mit dem Schubwinkel  $\bar{\gamma}_1$  nach oben klappt.

Unter Verwendung der in Abbildung 7.8 gegebenen Geometrie und der vereinfachten Materialdaten ergibt sich aus der konstitutiven Beziehung

$$S^{13} = 2E_{13} \cdot G \pm e_{15} \cdot \vec{E}_3 \quad (7.2)$$

mit der Schubspannung  $S^{13} = 0$ , dem elektrischen Feld  $\vec{E}_3 = 5 \cdot 10^5\text{ V/m}$  und Gleichung 6.25 der Schubwinkel zu

$$\bar{\gamma}_1 = 2E_{13} = \pm 4.06504 \cdot 10^{-5} \quad . \quad (7.3)$$

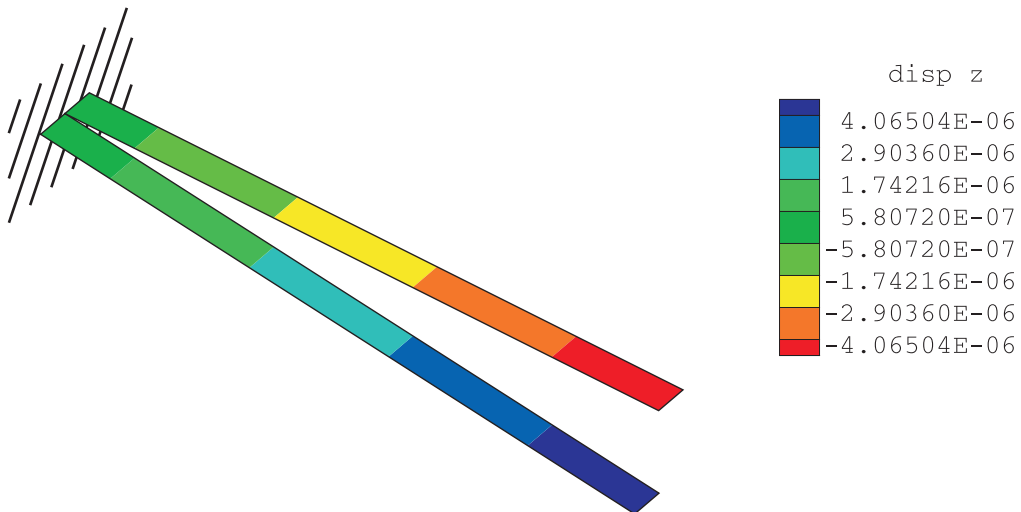


**Abb. 7.8:** Geometrie und vereinfachte Materialdaten des Schub-Torsionsaktors

Für das freie Ende beider piezoelektrischen Streifen ist damit die vertikale Verschiebung

$$u_z = \tan \bar{\gamma}_1 \cdot l = \pm 4.06504 \mu\text{m} \quad (7.4)$$

verbunden. Die Verformung und der Verlauf der vertikalen Verschiebungen sind in Abbildung 7.9 überhöht dargestellt. Schon mit der Diskretisierung jedes Streifens

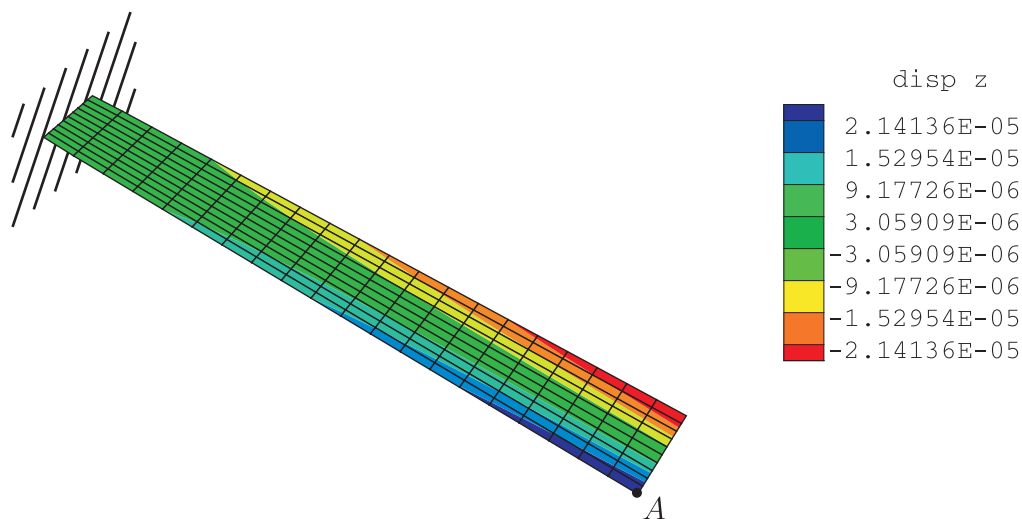


**Abb. 7.9:** Vertikale Verschiebungen des Schubaktors in [m] und Verformung in überhöhter Darstellung, diskretisiert mit einem Element pro Streifen ( $nx = 1, ny = 1$ )



durch ein einziges Schalenelement ( $nx = 1, ny = 1$ ) stimmt die numerische Lösung mit der analytischen Lösung überein.

Verbindet man die piezoelektrischen Streifen vor der Belastung, kann sich die Verformung aufgrund der geometrischen Zwangsbedingung nicht mehr in dieser Art einstellen. Es kommt zu einer Verdrehung des Querschnitts. Ein derartiger Torsionsaktor wurde bereits in BUTZ et al. [29] mit einem piezoelektrischen Stabelement und von LINNEMANN et al. mit einem in [74] vorgestellten Volumenelement numerisch untersucht. Die Materialdaten für den betrachteten Werkstoff PZT-5H sind in ANHANG E.1 angegeben. Abbildung 7.10 zeigt die Verformung und den Verlauf der vertikalen Verschiebung unter Verwendung von  $nx = 20$  und  $ny = 5$  piezoelektrischen Schalenelementen. Als Maß für die Verdrehung wird in der Literatur die vertikale Verschiebung  $u_z^A$  des Punktes  $A$  betrachtet, siehe Abbildung 7.10. In Tabelle 7.4 ist diese für unterschiedliche Diskretisie-



**Abb. 7.10:** Verformung in überhöhter Darstellung und vertikale Verschiebungen [m] des Torsionsaktors aus PZT-5H bei Diskretisierung mit  $nx = 20$  und  $ny = 5$  Schalenelementen für jeden Streifen

rungen ausgewertet. Mit zunehmender Elementanzahl in Längsrichtung nimmt die Durchbiegung ab, mit zunehmender Elementanzahl in Querrichtung nimmt sie zu. Damit konvergiert die Lösung mit Netzverfeinerung in Längsrichtung von oben und mit Netzverfeinerung in Querrichtung von unten. Ab  $40 \times 40$  Elementen ändern sich die Ergebnisse nicht mehr signifikant, womit das Netz als auskonvergiert angesehen werden kann und als vertikale Verschiebung für den Punkt  $A$  den Wert  $u_z^A = 21.6754 \mu m$  liefert. Interne Ansätze für die elektrischen Feldkomponenten wirken sich nicht auf die Ergebnisse aus - die Approximationsräume sind

$u_z^A [\mu m]$	$nx = 5$	$nx = 10$	$nx = 20$	$nx = 40$
$ny = 5$	21.4498	21.4289	21.4136	21.4077
$ny = 10$	21.6475	21.6254	21.6092	21.6027
$ny = 20$	21.7059	21.6834	21.6669	21.6603
$ny = 40$	21.7212	21.6986	21.6820	21.6754

**Tab. 7.4:** Numerische Lösung für die vertikale Durchbiegung am Punkt  $A$  bei  $nx$  Schalenelementen längs und  $ny$  Schalenelementen quer für jeden Streifen

ohne interne Ansätze ausgewogen, siehe hierzu Gleichung 6.24, Gleichung 6.25 und Tabelle 4.1 für die Polung  $\vec{P}_1$  und die Belastung  $\vec{E}_3$ .

	$u_z^A [\mu m]$
Piezoelektrische Schale	21.68
Piezoelektrisches Volumenelement [74]	21.84
Piezoelektrischer Stab [29]	21.80

**Tab. 7.5:** Numerische Ergebnisse für die vertikale Verschiebung am Punkt  $A$

Wie die Gegenüberstellung der Ergebnisse in Tabelle 7.5 zeigt, liegt die Abweichung von den Vergleichslösungen im Promillebereich. Die Abweichung erklärt sich insbesondere durch die unterschiedliche Modellierung der Einspannung bei Verwendung verschiedener Elementklassen.

## 7.4 Geschichteter Querschnitt unter Querbelastung

In Abschnitt 6.3.1 wurde diskutiert, wie auch bei einer geschichteten, in Dickenrichtung gepolten piezoelektrischen Struktur, welche aus einem mechanischen Kern und piezoelektrischen Deckschichten besteht, die Balance der Approximationsräume der mechanischen und elektrischen Felder bei Querbelastung erreicht wird. Damit lassen sich parasitäre Approximationen des elektrischen Potentials auch für derartige typische Sensorbauweisen verhindern.

Da bei Querbelastung das elektrische Potential und damit auch die elektrische Feldkomponente  $\vec{E}_\alpha$  ( $\alpha \in \{1, 2\}$ ) in den piezoelektrischen Schichten quadratisch über die Dicke verläuft und über das Stoffgesetz mit der Schubverzerrung  $E_{\alpha 3}$  gekoppelt ist, gelangt man bei konstanter Approximation der Schubverzerrungen gemäß der Reissner-Mindlin-Kinematik nicht zu ausgeglichenen Approximationsräumen. Um dies zu erreichen, wird unter Verwendung einer Wichtungsfunktion  $p_\alpha(\zeta)$ , vgl. Gleichung 6.51, der tatsächliche, gewöhnlich an den Schichtgrenzen

unstetige, abschnittsweise quadratische Verlauf der Schubverzerrungen über die Querschnittshöhe  $h$  approximiert.

Die Verifizierung der numerischen Modellierung erfolgt in drei Schritten:

#### 7.4.1 Validierung der Schubsteifigkeit

Zunächst wird ein homogener Querschnitt durch Unterteilung in  $nlay$  Schichten mit identischen Materialeigenschaften und den Dicken  $h^1, h^2, \dots, h^{nlay}$ ,  $h = \sum_{k=1}^{nlay} h^k$  diskretisiert. Die Modellierung erfolgt unter Verwendung eines einzigen Schalenelements über die Höhe. Damit ergibt sich für den Querschnitt die selbe Schubsteifigkeit wie bei Diskretisierung des Querschnitts mit einer einzigen Schicht der Dicke  $h$ .

Die Kenntnis des Schubkorrekturfaktors  $\kappa_\alpha$  ist hierfür a priori nicht erforderlich. Vielmehr ergibt sich dieser im Rahmen der Berechnung und kann zur Kontrolle des Modells verwendet werden. Im physikalisch linearen Fall erhält man mit  $A_s = \kappa_\alpha \cdot A$  und  $A = b_\alpha h$  unter Verwendung der Gleichungen 6.26, 6.33<sub>2</sub> die Beziehung

$$\kappa_\alpha \int_h G_{\alpha 3}(\zeta) d\zeta = \int_h [p_\alpha(\zeta)]^2 G_{\alpha 3}(\zeta) d\zeta \quad (7.5)$$

mit dem Schubmodul  $G_{\alpha 3}$  und der Wichtungsfunktion gemäß Gleichung 6.51

$$p_\alpha(\zeta) = \bigcup_{k=1}^{nlay} \hat{f}_\alpha^k g_\alpha^k(\zeta) \quad . \quad (7.6)$$

Gleichung 7.5 vereinfacht sich bei Schichten gleicher Materialeigenschaften zu

$$\kappa_\alpha = \frac{1}{h} \int_h [p_\alpha(\zeta)]^2 d\zeta \quad . \quad (7.7)$$

Bei beliebiger Unterteilung des Querschnitts in  $nlay$  Schichten liefert das numerische Modell für den homogenen Rechteckquerschnitt  $\kappa_\alpha = \frac{5}{6}$ .

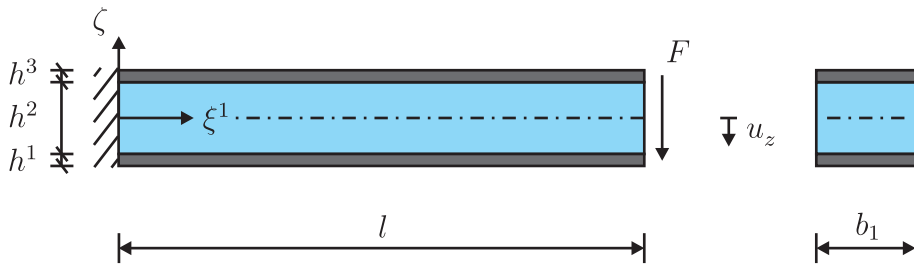
Des Weiteren ist die vom numerischen Modell unter Verwendung der Wichtungsfunktion  $p_\alpha(\zeta)$  approximierte Schubsteifigkeit identisch mit der Schubsteifigkeit, welche sich bei konstanter Approximation der Schubverzerrungen in Verbindung mit dem Schubkorrekturfaktor  $\kappa_\alpha$  ergibt.

#### 7.4.2 Mechanischer Sandwichquerschnitt

Dieses Beispiel beschreibt den zweiten Schritt der Verifikation. Damit wird gezeigt, dass das numerische Modell unter Nutzung der Wichtungsfunktion  $p_\alpha(\zeta)$

für die Schubverzerrung die Schubsteifigkeit auch bei einem geschichteten Querschnitt, der aus mechanischen Schichten unterschiedlicher Materialeigenschaften besteht, richtig erfasst. Dies erfolgt anhand einer Sandwichstruktur zum einen durch Vergleich der Ergebnisse mit Berechnungsergebnissen, die sich unter Verwendung eines Volumen-Schalen-Elements nach KLINKEL & WAGNER [66] ergeben, zum anderen durch Vergleich des numerisch ermittelten Schubkorrekturfaktors mit einer Abschätzung nach REUSS, vgl. ALTENBACH et al. [4].

Geometrie und Materialeigenschaften der betrachteten Struktur sind in Abbildung 7.11 gegeben, wobei zur Vereinfachung keine Querkontraktion berücksichtigt wird. Da die Schichten nicht piezoelektrisch sind, gilt für die piezoelektrischen Konstanten  $e_{31} = e_{33} = e_{15} = 0$ , womit eine elektromechanische Elementformulierung die mechanische Lösung liefert. Mit der Volumen-Schalen-Formulierung



Materialdaten:

Schicht 1 :	$E_1 = E_2 = E_3 = 16.0 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$
	$G_{12} = G_{13} = G_{23} = 8.0 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$
Schicht 2 :	$E_1 = E_2 = E_3 = 21.0 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$
	$G_{12} = G_{13} = G_{23} = 10.5 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$
Schicht 3 :	$E_1 = E_2 = E_3 = 16.0 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$
	$G_{12} = G_{13} = G_{23} = 8.0 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$

Geometrie:

$l$	$=$	$400 \text{ mm}$
$b_1$	$=$	$80 \text{ mm}$
$h^1$	$=$	$7.5 \text{ mm}$
$h^2$	$=$	$50.0 \text{ mm}$
$h^3$	$=$	$7.5 \text{ mm}$

**Abb. 7.11:** Geometrie und Materialdaten

werden 40 Elemente konstanter Höhe über die Dicke verwendet, um die Dickenverteilung der mechanischen Felder ausreichend genau approximieren zu können. Die Diskretisierung über die Länge erfolgt mit 60 Elementen, über die Querschnittsbreite wird 1 Element verwendet. An der Einspannstelle sind alle Knotenverschiebungen gehalten. Die Belastung wird quadratisch über die Höhe verteilt auf die Knoten am freien Ende aufgebracht. Für die Belastung  $F = 10 \text{ kN}$  berechnet man als vertikale Verschiebung der neutralen Faser am freien Ende  $u_z = 20.219 \text{ mm}$ .

Mit der piezoelektrischen Schalenformulierung genügt ein Element über die Dicke

zur Modellierung des geschichteten Querschnitts. Die Mittelfläche wurde mit einem regelmäßigen Netz mit 30 Elementen in Längsrichtung und einem Element in Querrichtung diskretisiert. An der Einspannung sind alle mechanischen Freiheitsgrade gehalten. Durch die Verteilung der Belastung  $F$  auf die beiden Knoten am freien Ende lässt sich die Lasteinleitung mit der Schalenformulierung wesentlich einfacher umsetzen als mit der Volumen-Schalen-Formulierung. Die mit der Schalenformulierung berechnete vertikale Verschiebung am freien Ende beträgt  $u_z = 20.372 \text{ mm}$ . Ein Vergleich der Lösungen anhand von Tabelle 7.6 ergibt einen Unterschied von 0.8 % für die Durchbiegung am freien Ende, was mit der für die beiden Elementklassen unterschiedlichen Modellierungen der Einspannung und der Lasteinleitung erklärt werden kann.

	Piezoelektrische Schale	Volumen-Schale [66]
$u_z \text{ [mm]}$	20.372	20.219

**Tab. 7.6:** Numerische Ergebnisse für die vertikale Verschiebung am freien Ende

Die Wichtungsfunktion  $p_1(\zeta)$ , vgl. Gleichung 7.6, ergibt sich aus der Geometrie und den Materialdaten des Querschnitts. Sie ist durch die in Tabelle 7.7 angegebenen Koeffizienten bestimmt. Für den Verlauf der Schubspannungen gilt nach

	$A_1^k \cdot b_1 \left[\frac{1}{m}\right]$	$B_1^k \cdot b_1 \left[\frac{1}{m}\right]$	$C_1^k \cdot b_1 \left[\frac{1}{m}\right]$	$\hat{f}_1^k/b_1 \left[\frac{1}{m}\right]$
$k = 1$	$-396.65 \cdot 10^2$	0.00	$418.96 \cdot 10^{-1}$	$873.57 \cdot 10^{-6}$
$k = 2$	$-520.61 \cdot 10^0$	0.00	$174.31 \cdot 10^{-1}$	$665.58 \cdot 10^{-4}$
$k = 3$	$-396.65 \cdot 10^2$	0.00	$418.96 \cdot 10^{-1}$	$873.57 \cdot 10^{-6}$

**Tab. 7.7:** Koeffizienten der Wichtungsfunktion  $p_1(\zeta)$  mit  $g_1^k(\zeta) = A_1^k \zeta^2 + B_1^k \zeta + C_1^k$

Gleichung 6.32<sub>1</sub>  $S^{13}(\zeta) = g_1(\zeta) \cdot Q_1$ . Die Verteilung der Schubverzerrung ergibt sich zu  $E_{13}(\zeta) = S^{13}(\zeta)/G_{13}(\zeta)$ . In den Abbildungen 7.12 und 7.13 ist der Verlauf von  $S^{13}$  und  $E_{13}$  über die Dicke graphisch dargestellt. Mit der Volumen-Schalen-Formulierung erfolgt die Auswertung in einem von Randstörungen unbeeinflussten Querschnitt bei  $\xi^1 = l/2$ . Die diskreten Werte zeigen hier so gut wie keine Abweichung von den mit der Schalenformulierung ermittelten Verläufen.

Der Schubkorrekturfaktor  $\kappa_\alpha$  lässt sich für einen geschichteten Querschnitt mit im Verhältnis zur Dicke  $h = \sum_{k=1}^{nlay} h^k$  dünnen Deckschichten nach REUSS mit

$$\frac{1}{\kappa_\alpha} = \sum_{k=1}^{nlay} \frac{1}{G_{\alpha 3}^k \frac{h^k}{h}} \cdot \sum_{k=1}^{nlay} G_{\alpha 3}^k \frac{h^k}{h} \quad (7.8)$$

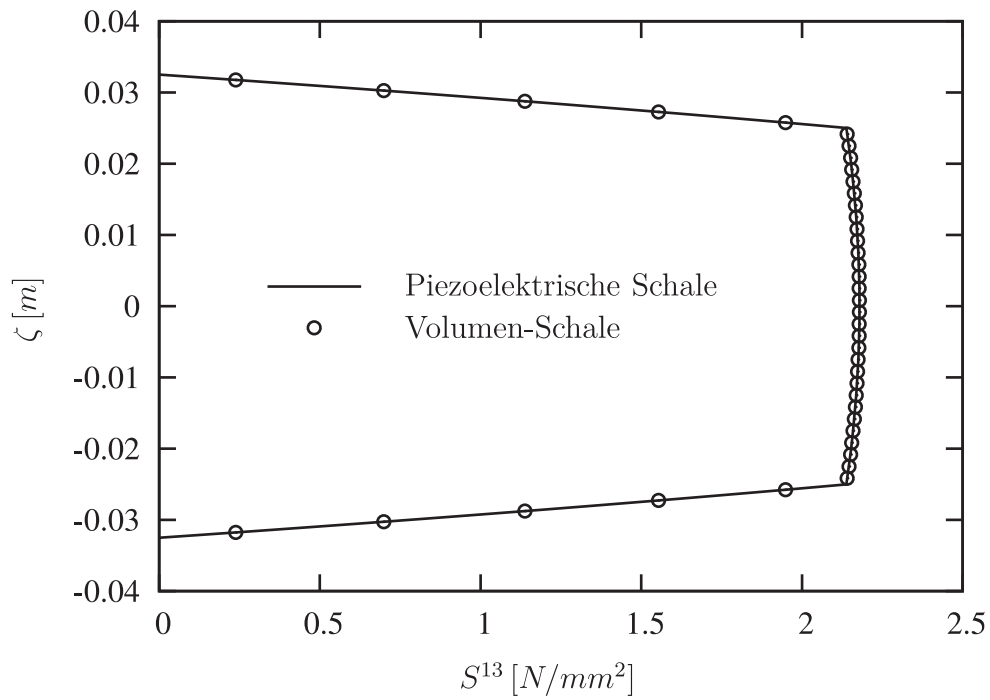


Abb. 7.12: Schubspannungen über die Höhe

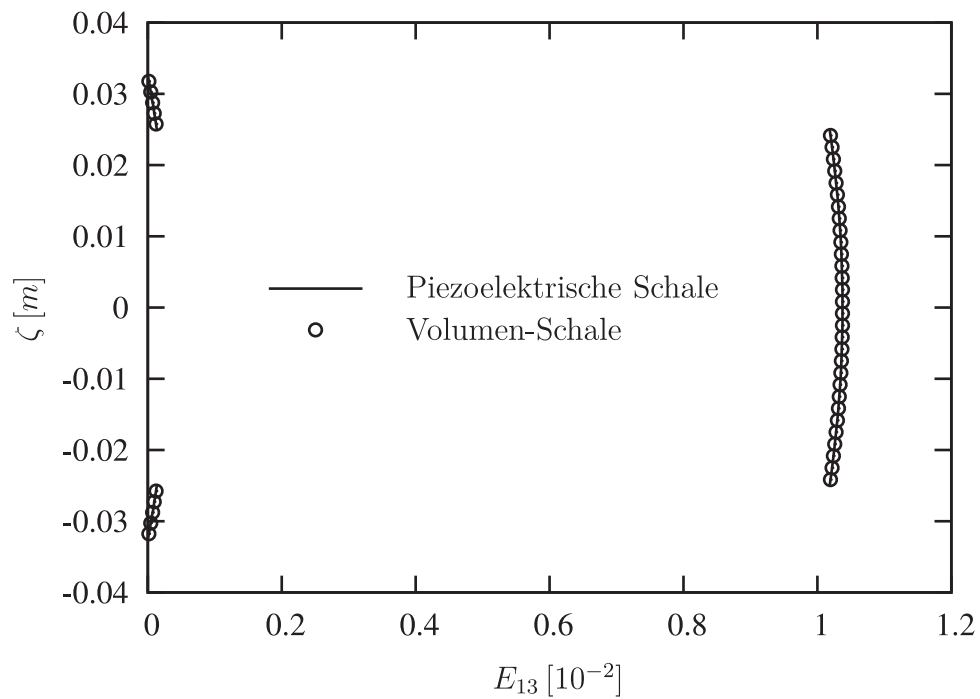


Abb. 7.13: Schubverzerrungen über die Höhe

abschätzen, womit sich für den betrachteten Sandwichquerschnitt  $\kappa_1 = 0.07$  er-

gibt. Insbesondere die im Gegensatz zu den Deckschichten weiche Mittelschicht ist verantwortlich für diesen kleinen Wert des Schubkorrekturfaktors. Mit Auswertung von Gleichung 7.5 liefert die numerische Berechnung für den Schubkorrekturfaktor  $\kappa_1 = 0.06$ . In ALTENBACH et al. [4] wird angemerkt, dass die Genau-

	Piezoelektrische Schale	Abschätzung nach REUSS
$\kappa_1$	0.06	0.07

**Tab. 7.8:** Schubkorrekturfaktor des geschichteten Querschnitts aus numerischer Berechnung und aus Abschätzung nach REUSS

igkeit einer Abschätzung mit Gleichung 7.8 signifikant abnimmt für  $h_2/h < 0.95$ . Im vorliegenden Fall beträgt  $h_2/h = 0.77$ , was die anhand von Tabelle 7.8 ermittelbare Abweichung von 14.4% des numerisch berechneten Wertes für den Schubkorrekturfaktor  $\kappa_1$  von der Abschätzung mit Gleichung 7.8 erklärt.

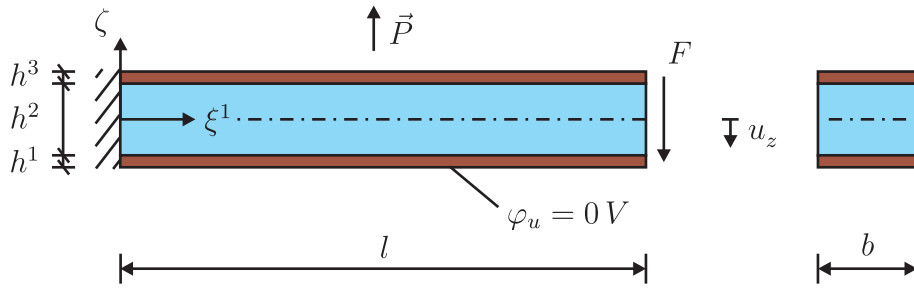
### 7.4.3 Piezoelektrischer Multimorph

Als dritter und letzter Schritt der Verifikation wird ein piezoelektrischer Multimorph betrachtet. Daran wird demonstriert, dass mit dem numerischen Modell auch bei geschichteten, piezoelektrischen Sensorstrukturen kein parasitäres elektrisches Potential approximiert wird.

Piezoelektrische Multimorphe bestehen aus einer nicht piezoelektrischen Trägerschicht und piezoelektrischen Deckschichten, siehe beispielsweise KALTENBACHER [55], KÖGL & BUCALEM [59] und YANG [123]. Die Abmessungen und Materialdaten des betrachteten Multimorphs sind in Abbildung 7.14 angegeben. Der geschichtete Querschnitt wird mit einem einzigen piezoelektrischen Schalenelement über die Dicke diskretisiert. Die Diskretisierung der Mittelfläche erfolgt wie im vorigen Beispiel mit 30 Elementen in Längsrichtung und einem Element in Querrichtung. Die Struktur ist an der Unterseite mit  $\varphi_u = 0\text{ V}$  geerdet, an der Einspannung sind alle mechanischen Freiheitsgrade gehalten. Die Belastung durch  $F = 10\text{ N}$  wird auf die Knoten am freien Ende verteilt.

Wie bei den in Abschnitt 7.1.3 und Abschnitt 7.1.4 untersuchten Biegesensoren muss sich auch für den piezoelektrischen Multimorph bei Biegebeanspruchung das elektrische Potential an der Oberseite zu Null ergeben. Die Berechnungsergebnisse für die vertikale Verschiebung  $u_z$  der Kragarmspitze und der Maximalwert des elektrischen Potentials an der Oberseite  $\varphi_o$  sind in Tabelle 7.9 angegeben.

Ohne interne Ansätze für die elektrischen Feldkomponenten ( $\vec{M}_1 = \vec{M}_2 = 0, \vec{M}_3 = 0$ ) wird die Durchbiegung überschätzt und es ergeben sich an der Oberseite mit



Materialdaten:

Schicht 1 :  $E_1 = E_2 = E_3 = 123.0 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$   
 $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 61.5 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$   
 $e_{31} = -e_{33} = -e_{15} = -5.0 \text{ C/m}^2$   
 $\epsilon_{11} = \epsilon_{33} = 12.5 \cdot 10^{-9} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$

Schicht 2 :  $E_1 = E_2 = E_3 = 21.0 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$   
 $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 10.5 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$

Schicht 3 :  $E_1 = E_2 = E_3 = 123.0 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$   
 $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 61.5 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$   
 $e_{31} = -e_{33} = -e_{15} = -5.0 \text{ C/m}^2$   
 $\epsilon_{11} = \epsilon_{33} = 12.5 \cdot 10^{-9} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$

Geometrie:

$l = 120 \text{ mm}$   
 $b = 8 \text{ mm}$   
 $h^1 = 1 \text{ mm}$   
 $h^2 = 6 \text{ mm}$   
 $h^3 = 1 \text{ mm}$

**Abb. 7.14:** Geometrie und Materialdaten des piezoelektrischen Multimorphs

$\varphi_o \neq 0$  parasitäre Approximationen des elektrischen Potentials.

Approximation von $\vec{\mathbf{E}}$	$u_z$ [mm]	$\varphi_o^{max}$ [V]
$\vec{M}_1 = \vec{M}_2 = 0, \vec{M}_3 = 0$	0.410	1.01
$\vec{M}_1 = \vec{M}_2 = 2, \vec{M}_3 = 1$	0.407	0.00

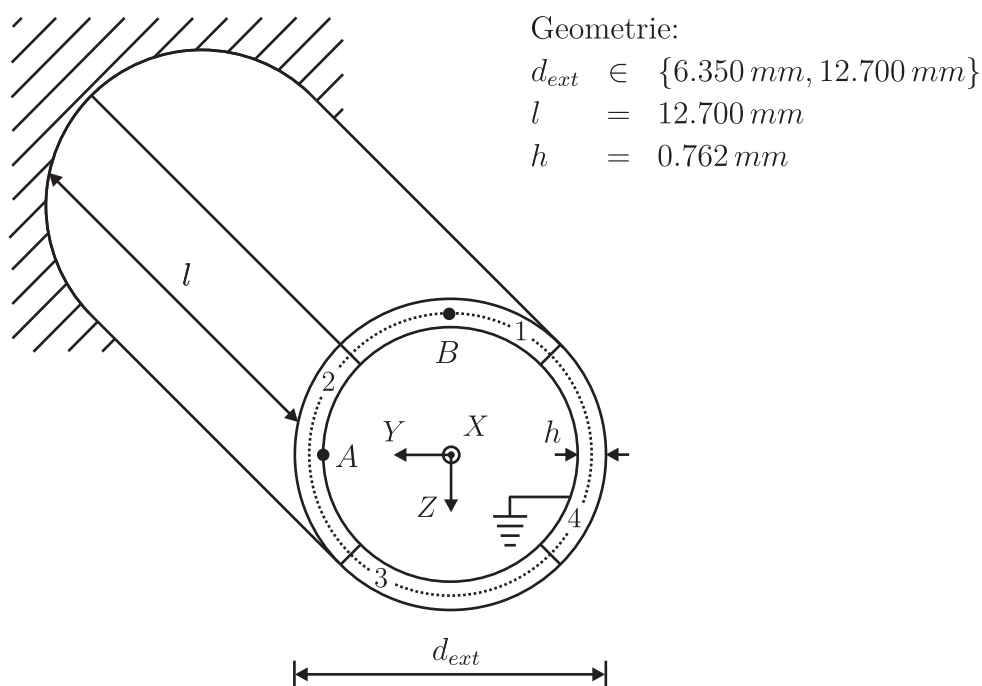
**Tab. 7.9:** Vertikale Durchbiegung  $u_z$  am freien Ende und elektrisches Potential  $\varphi_o^{max}$  an der Oberseite des Multimorphs mit und ohne interne Ansätze für die elektrischen Feldkomponenten

Unter Verwendung interner Ansätze ( $\vec{M}_1 = \vec{M}_2 = 2, \vec{M}_3 = 1$ ) sind die Approximationsräume der mechanischen und elektrischen Felder ausgewogen. Der Verlauf der elektrischen Feldkomponente  $\vec{E}_1$  in den Deckschichten und der über das Stoffgesetz damit additiv gekoppelte, ebenfalls quadratisch approximierte Verlauf der Schubverzerrung  $E_{13}$  gehören demselben Funktionsraum an und sind somit abgestimmt, womit kein parasitäres elektrisches Potential mehr approximiert wird.



## 7.5 Zylinderförmiger Segmentaktor

In diesem Beispiel wird ein an einer Seite eingespannter Zylinder aus PZT-5H betrachtet. Dieser ist in radialer Richtung polarisiert, die Materialdaten sind in ANHANG E.3 gegeben. Wie Abbildung 7.15 veranschaulicht, ist der Zylinder aus vier auf der Innenseite geerdeten Segmenten zusammengesetzt. An diese kann unabhängig voneinander an der Außenseite ein elektrisches Potential angelegt werden. Der Zylinder beinhaltet damit vier getrennt voneinander steuerbare Dehnaktoren, womit er gezielt deformiert werden kann. Ein derartiges Bauteil dient im



**Abb. 7.15:** Geometrie des zylinderförmigen Segmentaktors

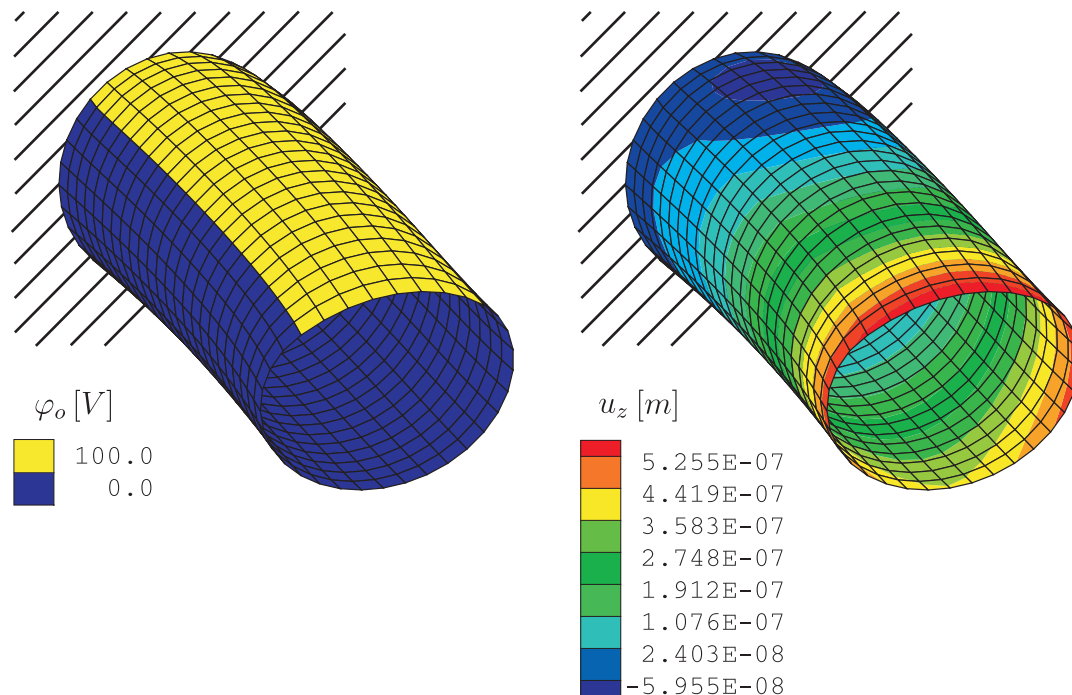
Rastertunnelmikroskop als Steuereinheit, vgl. BINNIG & SMITH [17]. Mit einer an einem Ende aufgesetzten Spitze werden Oberflächen abgerastert. Die verwendete Spitze muss dabei so fein sein, dass ihr vorderster Punkt aus einem einzelnen Atom besteht. Mit der piezoelektrischen Positionierung - diese erfolgt durch die Variation der Größe und des Vorzeichens der angelegten Spannungen an den vier Segmenten des Zylinders - lässt sich der Abstand zwischen Spitze und Oberfläche konstant halten. Voraussetzung dafür ist der so genannte „Tunneleffekt“, vgl. TIPLER & MOSCA [111]: Bei gleichem Abstand zweier Atome - also dem an der Spitze und dem dazu nächsten auf der Oberfläche - bleibt der an der Spitze messbare Tunnelstrom konstant. Dieser kommt durch das Überspringen von Elektronen aus den Hüllen dieser beiden Atome zustande. Das Rastertunnel-

mikroskop ermöglicht eine dreidimensionale Abbildung von Oberflächen bis auf atomare Ebene.

Die Bestimmung der Position der Spitze zu einem Zeitpunkt  $t_i$  basiert auf der Korrelation der zum Zeitpunkt  $t_i$  an den Aktoren angelegten Spannung und der damit verbundenen Verformung des Zylinders. Die Qualität der Oberflächenmessung hängt daher maßgeblich von der Kenntnis darüber ab, welche am Zylinder angelegten Spannungen mit welchen Verformungen korrespondieren. Daher war die Untersuchung dieses Zusammenhangs schon Thema einiger Veröffentlichungen. Dabei wird häufig nur der Zylinder ohne die aufgesetzte Spitze betrachtet, um das grundsätzliche Verformungsverhalten des Zylinders zu analysieren.

Die ersten numerischen Untersuchungen wurden von CARR [30] vorgenommen, der 13 verschiedene Zylindergeometrien betrachtete, die sich im Abmessungsverhältnis  $l/d_{ext}$  unterscheiden. Einige davon wurden auch von SUN & WOLKOW [106] mit einer piezoelektrischen Volumenelementformulierung und von ZOUARI et al. [128] mit einer piezoelektrischen Schalenformulierung analysiert. CHEN [31] und LI et al. [72] leiten mit einer analytischen Beziehung zwischen der angelegten Spannung und der Verformung auf Basis der Bernoulli-Stabtheorie „Designformeln“ ab. Eine geeignete Abschätzung der Verformung ist damit jedoch nur für diejenigen Zylindergeometrien möglich, die ein einem Stab genügendes Abmessungsverhältnis  $l/d_{ext}$  aufweisen. Mit allen beschriebenen Modellen wird das elektrische Potential linear über die Dicke approximiert.

Mit der vorgestellten piezoelektrischen Schalenformulierung werden exemplarisch zwei Zylindergeometrien untersucht, die sich in ihrem Außendurchmesser  $d_{ext}$  unterscheiden, vgl. hierzu Abbildung 7.15. Die Ergebnisse werden mit den aus Standardformulierungen erzielten Literaturergebnissen verglichen. Darüber hinaus wird auch der Einfluss von internen Ansätzen höherer Ordnung für die elektrischen Feldkomponenten gezeigt. Für den Vergleich mit den Literaturergebnissen wird an der Oberseite von Segment 1 ein elektrisches Potential angelegt, womit sich dieses in Längsrichtung ausdehnt und den Zylinder verformt, vgl. Abbildung 7.16. Die vertikale Verschiebung  $u_z^A$  des Punktes  $A$  wird dabei als Maß für die Verformung herangezogen. Der Punkt  $A$  liegt auf der Innenseite des Zylinders, vgl. Abbildung 7.15. Bei Verwendung eines Schalenelements ist dessen vertikale Verschiebung  $u_z^A$  aus der vertikalen Verschiebung und der Verdrehung des ihm auf der Schalenmittelfläche zugeordneten Knotens zu bestimmen. Da bei diesem Problem nur sehr kleine Verdrehungen um die Y-Achse auftreten, ist der Einfluss der Verdrehung auf die vertikale Verschiebung des Punktes  $A$  vernachlässigbar. Um den Einfluss von internen Ansätzen für das elektrische Feld besser zeigen zu können, wird darüber hinaus auch die am freien Ende des Aktors am Punkt  $B$  auftretende vertikale Maximalverschiebung des Zylinders betrachtet.



**Abb. 7.16:** Verformung mit Darstellung der vertikalen Verschiebung  $u_z$  (rechts) bei Beanspruchung durch  $\varphi_o = 100\text{ V}$  in Segment 1 (links) für  $l/d_{ext} = 2$

$u_z^A$ [ $10^{-7}\text{ m}$ ]	$l/d_{ext} = 1$	$l/d_{ext} = 2$
CARR [30]	1.70	4.00
SUN & WOLKOW [106]	1.78	4.43
ZOUARI et al. [128]	1.79	4.51
CHEN [31]	2.18	4.67
LI et al. [72]	2.17	4.56

**Tab. 7.10:** Literaturergebnisse für die vertikale Verschiebung  $u_z$  des Punktes A

Bei der Betrachtung der Literaturergebnisse für die vertikale Verschiebung  $u_z^A$  fällt anhand von Tabelle 7.10 auf, dass sich die numerischen Lösungen von CARR [30], SUN & WOLKOW [106] und ZOUARI et al. [128] zum Teil deutlich unterscheiden. Dies kann auf die unterschiedlichen Elementformulierungen und Diskretisierungen sowie auf verschiedene Vorgehensweisen bei der Modellierung des Übergangs der Segmente zurückzuführen sein. Meistens liegen keine detaillierten Angaben zur Diskretisierung vor, insbesondere bei den länger zurückliegenden Arbeiten könnte trotz Ausnutzung der Symmetrie nur eine verhältnismäßig grobe Diskretisierung im Rahmen der Berechnung möglich gewesen sein. Die Unterschiede zu den von CHEN [31] und LI et al. [72] gegebenen, analytischen Lösungen erklären sich damit, dass mit den in Tabelle 7.10 betrachteten Abmessungsverhältnissen

$l/d_{ext}$  die Voraussetzung für die Anwendbarkeit der Bernoulli-Stabtheorie, die den analytischen Lösungen zugrunde liegt, nicht mehr gegeben ist.

Für die eigenen Berechnungen sind an der Einspannung alle Knotenverschiebungen gehalten. Die Innenseite ist geerdet mit  $\varphi_u = 0 V$  für alle Knoten. Die Belastung erfolgt mit  $\varphi_o = 100 V$  für alle in und am Rand von Segment 1 liegenden Knoten. Es werden die Diskretisierungen mit  $n \in \{32, 64, 96\}$  Elementen in Längs- und Ringrichtung untersucht. Wie die Ergebnisse in den Tabellen 7.11 und 7.12 zeigen, kann das Netz bei einer Diskretisierung mit  $n = 96$  Elementen in Längs- und Ringrichtung als nahezu auskonvergiert angesehen werden. Die Modellierung mit konstanter Approximation der Dickendehnung  $E_{33}$  ( $\bar{M}_1 = 1$ ) ohne interne Ansätze für die Komponenten des elektrischen Feldes ( $\bar{M}_1 = \bar{M}_2 = \bar{M}_3 = 0$ ) kommt einer Standardformulierung am nächsten. Die hiermit unter Verwendung des auskonvergierten Netzes ( $n = 96$ ) erzielten Berechnungsergebnisse für die vertikale Verschiebung  $u_z^A$ , vgl. Tabelle 7.11 und Tabelle 7.12, werden den von SUN & WOLKOW [106] sowie ZOUARI et al. [128] (siehe Tabelle 7.10) veröffentlichten numerischen Ergebnissen aus neuerer Zeit in Tabelle 7.13 gegenübergestellt.

Zylindergeometrie $l/d_{ext} = 1$		$n = 32$		$n = 64$		$n = 96$	
$E_{33}$	Approximation von $\vec{\mathbf{E}}$	$u_z^A$	$u_z^B$	$u_z^A$	$u_z^B$	$u_z^A$	$u_z^B$
$\bar{M}_1 = 1$	$\vec{M}_1 = \vec{M}_2 = 0, \vec{M}_3 = 0$	1.823	5.015	1.780	5.309	1.762	5.460
$\bar{M}_1 = 1$	$\vec{M}_1 = \vec{M}_2 = 2, \vec{M}_3 = 1$	1.829	4.990	1.787	5.290	1.768	5.444
$\bar{M}_1 = 2$	$\vec{M}_1 = \vec{M}_2 = 0, \vec{M}_3 = 0$	1.791	5.178	1.744	5.464	1.722	5.616
$\bar{M}_1 = 2$	$\vec{M}_1 = \vec{M}_2 = 2, \vec{M}_3 = 1$	1.818	5.057	1.773	5.345	1.753	5.498
$[10^{-7} m]$							

**Tab. 7.11:** Numerische Ergebnisse für die vertikale Verschiebung  $u_z$  der Punkte  $A$ ,  $B$  bei  $n$  Elementen in Längs- und Ringrichtung, nur konstanter ( $\bar{M}_1 = 1$ ) oder auch linearer ( $\bar{M}_1 = 2$ ) Dickendehnung  $E_{33}$  und unterschiedlichen internen Ansätzen für den Verlauf der Komponenten des elektrischen Feldes  $\vec{\mathbf{E}}$  über die Dicke bei  $l/d_{ext} = 1$

Die Abweichungen in den Ergebnissen können sich insbesondere durch Unterschiede in der Modellierung der Einspannung, in der Modellierung der Segmentübergänge und in den verwendeten Netzfeinheiten erklären. Die zugehörigen Angaben liegen in den Literaturstellen nicht detailliert vor.

Die Veränderung des  $l/d_{ext}$ -Verhältnisses hat Einfluss auf die Verdrehung und die Ovalisierung des Querschnitts am freien Ende, womit sich die ausgeprägte Veränderung des Quotienten der vertikalen Durchbiegung  $u_z^A$  und  $u_z^B$  für die beiden betrachteten Geometrien erklärt, vgl. Tabelle 7.11 und Tabelle 7.12.

Zylindergeometrie $l/d_{ext} = 2$		$n = 32$		$n = 64$		$n = 96$	
$E_{33}$	Approximation von $\vec{\mathbf{E}}$	$u_z^A$	$u_z^B$	$u_z^A$	$u_z^B$	$u_z^A$	$u_z^B$
$\bar{M}_1 = 1$	$\vec{M}_1 = \vec{M}_2 = 0, \vec{M}_3 = 0$	4.581	5.255	4.561	5.344	4.557	5.372
$\bar{M}_1 = 1$	$\vec{M}_1 = \vec{M}_2 = 2, \vec{M}_3 = 1$	4.585	5.219	4.565	5.308	4.561	5.337
$\bar{M}_1 = 2$	$\vec{M}_1 = \vec{M}_2 = 0, \vec{M}_3 = 0$	4.598	5.408	4.575	5.511	4.570	5.543
$\bar{M}_1 = 2$	$\vec{M}_1 = \vec{M}_2 = 2, \vec{M}_3 = 1$	4.596	5.284	4.574	5.376	4.570	5.405
		$[10^{-7} m]$					

**Tab. 7.12:** Numerische Ergebnisse für die vertikale Verschiebung  $u_z$  der Punkte  $A$ ,  $B$  bei  $n$  Elementen in Längs- und Ringrichtung, nur konstanter ( $\bar{M}_1 = 1$ ) oder auch linearer ( $\bar{M}_1 = 2$ ) Dickendehnung  $E_{33}$  und unterschiedlichen internen Ansätzen für den Verlauf der Komponenten des elektrischen Feldes  $\vec{\mathbf{E}}$  über die Dicke bei  $l/d_{ext} = 2$

$u_z^A [10^{-7} m]$	$l/d_{ext} = 1$	$l/d_{ext} = 2$
Piezoelektrische Schale	1.76	4.56
SUN & WOLKOW [106]	1.78	4.43
ZOUARI et al. [128]	1.79	4.51

**Tab. 7.13:** Vergleich der Literaturergebnisse neuerer Zeit mit den Ergebnissen der piezoelektrischen Schalenformulierung ( $\bar{M}_1 = 1, \vec{M}_1 = \vec{M}_2 = 0, \vec{M}_3 = 0$ ) für die vertikale Verschiebung  $u_z^A$  des Punktes  $A$

Mit veränderten Modellierungsparametern für die mechanischen und elektrischen Feldgrößen in Dickenrichtung zeigen die Untersuchungsergebnisse darüber hinaus die folgende Tendenz: Mit der Berücksichtigung von internen Ansätzen für die elektrischen Feldkomponenten ( $\vec{M}_1 = \vec{M}_2 = 2, \vec{M}_3 = 1$ ) reduziert sich die maximale Durchbiegung  $u_z^B$  der Struktur. Diese Tendenz ist ausgeprägter, wenn gleichzeitig auch lineare statt ausschließlich konstante Dickendehnungen approximiert werden.

Dies erklärt sich wie folgt: Das Segment 1 agiert als Dehnaktor. Würde keine Verbindung zu den Nachbarsegmenten bestehen, würde sich Segment 1 durch das in radialer Richtung konstant aufgebrachte elektrische Feld primär in Längsrichtung ausdehnen. Da das Segment jedoch Teil des Zylinders ist, bestehen geometrische Zwangsbedingungen. Daher kann sich die Längsdehnung nicht ungehindert einstellen, und es treten aufgrund der unsymmetrischen Beanpruchung Biegeeffekte in Verbindung mit Schubspannungen auf. Dem konstanten Verlauf von  $E_{11}$  über die Dicke wird damit eine lineare Verteilung überlagert. Wegen der Kopplung von  $E_{11}$  mit  $\vec{E}_3$  über das Stoffgesetz gilt dies auch für den Verlauf von  $\vec{E}_3$  über die Dicke. Mit der zusätzlichen linearen Komponente von  $\vec{E}_3$  korrespondiert wegen Gleichung 2.32 ein quadratischer Verlauf von  $\varphi$  über die Dicke, welcher sich

dem über die Randbedingungen aufgebrachten linearen Verlauf von  $\varphi$  überlagert. Damit können auch quadratische Verteilungen von  $\vec{E}_1$  und  $\vec{E}_2$  über die Dicke verbunden sein. Mit  $\vec{M}_1 = \vec{M}_2 = 2$ ,  $\vec{M}_3 = 1$  wird die elektrisch gespeicherte Energie vom numerischen Modell vollständig erfasst. Damit reduziert sich die mechanische Verformungsenergie, was sich in einer etwas geringeren vertikalen Verschiebung  $u_z^B$  am freien Ende des Aktors niederschlägt.

In diesem Beispiel wird die Biegung aktorisch induziert. Für die Herstellung von ausbalancierten Ansätzen sind bei Polung in radialer Richtung unter Biegung wegen der linearen Komponente von  $E_{11}$  auch die Approximation einer linearen Verteilung von  $\vec{E}_3$  und einer quadratischen Verteilung von  $\vec{E}_1$  und  $\vec{E}_2$  notwendig. Bedingt durch den Einfluss von Querkontraktion sind in diesem Zusammenhang auch lineare Dickendehnungen zu approximieren. Werden diese nur konstant approximiert, verhält sich die Struktur zu weich. In den numerischen Ergebnissen zeigt sich dies daran, dass bei Berücksichtigung von linearen Dickendehnungen eine stärkere Reduzierung der vertikalen Durchbiegung im Punkt  $B$  bei Hinzunahme von internen Ansätzen für das elektrische Feld  $\vec{E}$  verbunden ist als bei Verwendung von ausschließlich konstanten Dickendehnungen.

Der Einfluss von konsistenten Approximationen auf die Berechnungsergebnisse wird auch hierbei deutlich. Insbesondere wegen der geringen Dicke des Zylinders ist dieser allerdings relativ klein, könnte im vorliegenden messtechnischen Anwendungsfeld aber dennoch von Bedeutung sein.

## 7.6 Dynamische Beanspruchung einer halbkreisförmigen Ringschale

Die mathematische Beschreibung eines dynamischen Vorgangs in der Mechanik führt auf ein System von partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung in der Zeit. Für eine approximative Lösung ist dabei nicht nur der Raum, sondern auch die Zeit zu diskretisieren, was auf ein partielles Differentialgleichungssystem der Form

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{F}^{int} = \mathbf{F}^{ext} \quad (7.9)$$

führt. Dabei ist mit  $\mathbf{F}^{int}$  der Vektor der inneren Kräfte und mit  $\mathbf{F}^{ext}$  der Vektor der äußeren Kräfte ausgedrückt. Die Matrix  $\mathbf{D}$  wird als Dämpfungsmatrix bezeichnet. Sie repräsentiert die Viskosität und ist beispielsweise zur Berücksichtigung von mechanischer Dämpfung oder auch zur Abbildung von Transportvorgängen relevant. Für das nachfolgend untersuchte Problem wird  $\mathbf{D}$  für eine Vergleichbarkeit mit den Ergebnissen in der Literatur nicht berücksichtigt. Die Trägheitsterme

werden unter Verwendung der Massenmatrix  $\mathbf{M} = \bigcup_{e=1}^{numel} \mathbf{M}^e$  ausgedrückt. Für den linearen Fall gilt  $\mathbf{F}^{int} = \mathbf{K} \mathbf{v}$ . Mit den Verschiebungen  $\mathbf{u}$ , den Rotationen  $\mathbf{d}$  und dem elektrischen Potential  $\boldsymbol{\varphi} = [\varphi_u, \varphi_o]^T$  wurde für die vorgestellte piezoelektrische Schalenformulierung der Vektor der Knotenfreiheitsgrade in Gleichung 6.91 mit  $\mathbf{v}_I = [\mathbf{u}, \mathbf{d}, \boldsymbol{\varphi}]_I^T$  eingeführt. Die Massenmatrix wird auf Elementebene mit

$$\mathbf{M}_{IK}^e = \int_A N_I \bar{\rho} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}^e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{M}}^e \end{bmatrix} N_K \, dA \quad (7.10)$$

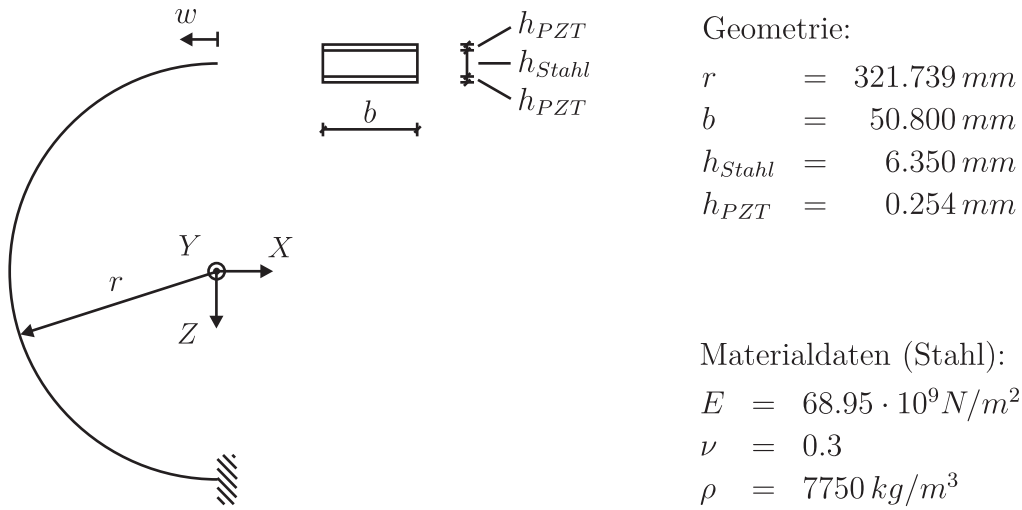
und

$$\bar{\mathbf{M}}^e = \begin{bmatrix} h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h^3/12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h^3/12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h^3/12 \end{bmatrix} \quad (7.11)$$

approximiert. Da keine hochfrequenten Vorgänge betrachtet werden sollen, können die den elektrischen Freiheitsgraden  $\varphi_o$  und  $\varphi_u$  zugeordneten Trägheitsterme vernachlässigt werden ( $\bar{\mathbf{M}}^e = \mathbf{0}$ ). Die Komponenten von  $\bar{\mathbf{M}}^e$  sind zeilenweise zusammengefasst, womit man eine nur auf der Diagonalen besetzte „lumped“ Massenmatrix  $\mathbf{M}_{IK}^e$  für jedes Knotenpaar erhält. Bei geschichteten Querschnitten kann die mittlere Dichte  $\bar{\rho}$  aus den Schichtdicken und der Dichte der einzelnen Schichten ermittelt werden.

Eine Vielzahl von Algorithmen zur approximativen Lösung von Gleichungen der Form 7.9 wird in der Literatur beschrieben, um die unbekanntenen Größen  $\mathbf{v}$  und deren zeitliche Ableitungen  $\dot{\mathbf{v}}$  und  $\ddot{\mathbf{v}}$  zu bestimmen. Die Genauigkeit und Stabilität der Verfahren wird zum Beispiel in ZIENKIEWICZ et al. [127] oder HUGHES [51] diskutiert. Für Ingenieur Anwendungen kommt sehr häufig das Newmark-Verfahren zur Anwendung. Dieses wird auch hier zur dynamischen Untersuchung einer halbkreisförmigen Ringschale verwendet. Bei nichtlinearen Problemen ist es allerdings als nicht energieerhaltend zu betrachten.

Die Eignung der piezoelektrischen Schalenformulierung für dynamische Analysen wird anhand des in Abbildung 7.17 dargestellten Halbrings überprüft. Für den Vergleich mit den Referenzlösungen wird der Einfluss von internen Ansätzen für die elektrischen Feldkomponenten nicht untersucht und die räumliche Diskretisierung der Struktur wie in der Literatur gewählt. Der an einem Ende eingespannte Halbring besteht aus einem Stahlring und damit fest verbundenen piezoelektrischen Deckschichten aus einer PZT-Keramik. Die Systemlinie ist durch den Radius  $r$  beschrieben. Die Materialdaten der piezoelektrischen Schichten sind in



**Abb. 7.17:** Geometrie und Materialdaten der Halbringschale

ANHANG E.2 aufgeführt, die Materialdaten für den Stahlring sowie die Geometrie und Querschnittsabmessungen sind in Abbildung 7.17 angegeben. An der Einspannung sind alle mechanischen Knotenfreiheitsgrade gehalten.

Dieses Beispiel wurde ursprünglich in TZOU [114] als adaptives System zur Schwingungskontrolle vorgestellt und auch von SZE et al. [108] und KLINKEL & WAGNER [66] untersucht. Dabei sind beide Deckschichten in radialer Richtung gepolt und die innere Oberfläche jeder Deckschicht geerdet. Versetzt man den Halbring in Schwingung, dient die innere piezoelektrische Deckschicht als Sensor. Nutzt man das zeitlich veränderliche Sensorsignal zur Steuerung der aktorischen äußeren Deckschicht, kann die Schwingung adaptiv gedämpft werden.

Im Rahmen dieser Betrachtung wird, wie auch zu finden in KLINKEL & WAGNER [66] und BUTZ et al. [29], die zeitabhängige Verformung der Struktur untersucht, wenn diese durch ein zeitlich veränderliches, radial orientiertes elektrisches Feld in der äußeren piezoelektrischen Deckschicht zum Schwingen angeregt wird. Die innere PZT-Schicht wird bei dieser Betrachtung nicht als Sensor verwendet und kann daher ungepolt modelliert werden. Dies ermöglicht es, den geschichteten Querschnitt mit einem einzigen Schalenelement über die Dicke zu modellieren, da das elektrische Feld in der äußeren Deckschicht über die elektrischen Randbedingungen  $\varphi_u$  und  $\varphi_o$  des piezoelektrischen Schalenelements erzeugt werden kann.

Zunächst werden die Eigenfrequenzen  $f_i = \frac{\omega_i}{2\pi}$  des Stahlrings ohne PZT-Schichten mit der piezoelektrischen Schalenformulierung bestimmt. Betrachtet man weder Dämpfungsterme noch äußere Einwirkungen, reduziert sich Gleichung 7.9 auf

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{F}^{int} = \mathbf{0} \quad . \quad (7.12)$$



Mit  $\mathbf{F}^{int} = \mathbf{K} \mathbf{v}$  im geometrisch linearen Fall erhält man daraus die charakteristische Gleichung  $(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \bar{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$  zur Bestimmung der Eigenkreisfrequenzen  $\omega_i$  der freien dynamischen Schwingung.

	Diskretisierung Umfang/Breite/Höhe	Eigenfrequenzen [1/s]		
		$f_1$	$f_2$	$f_3$
SZE et al. [108]	10/1/1	3.6822	5.8278	11.838
	20/2/1	3.6810	5.8041	11.691
KLINKEL & WAGNER [66]	10/1/1	3.6832	5.8352	11.843
	20/1/1	3.6727	5.8071	11.660
BUTZ et al. [29]	20/2/1	3.6728	5.3537	11.651
Piezoelektrische Schale	10/1/1	3.6852	5.8361	11.785
	20/1/1	3.6649	5.7399	11.613

Tab. 7.14: Eigenfrequenzen des Stahlrings

Ein Vergleich mit den Eigenfrequenzen der Elementformulierungen in der Literatur ist in Tabelle 7.14 gegeben. Die piezoelektrischen Deckschichten erhöhen

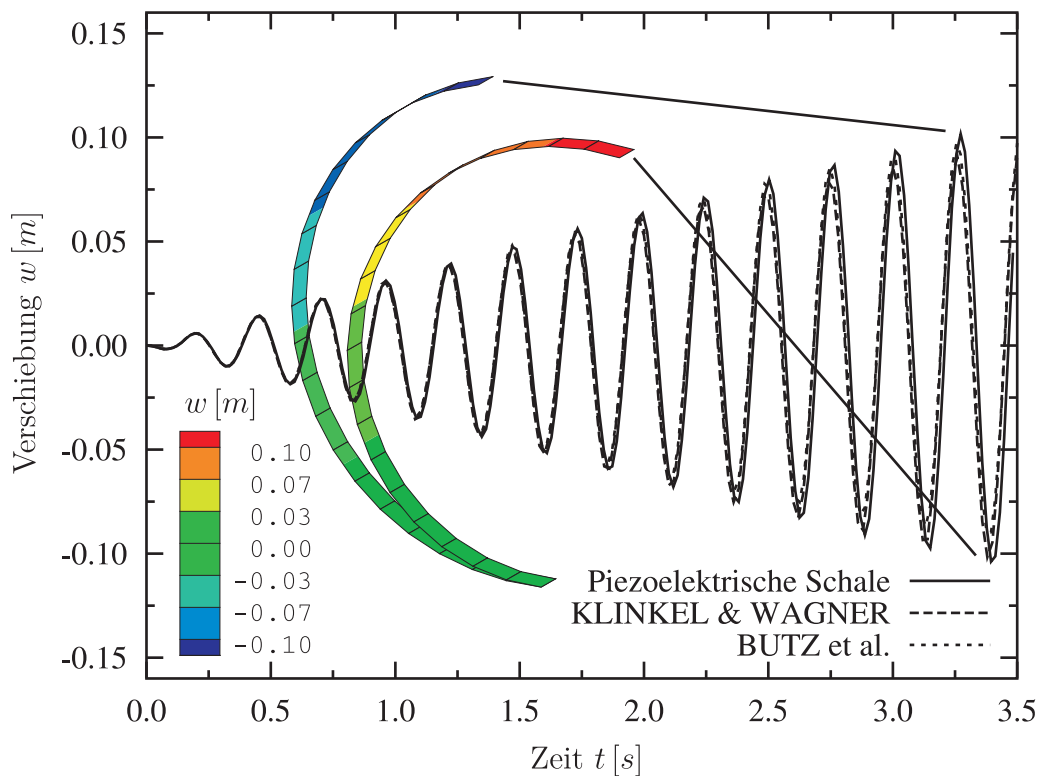


Abb. 7.18: Verformung der Halbringschale bei dynamischer Beanspruchung

hen die Steifigkeit der Struktur, was sich in etwas höheren Eigenfrequenzen ausdrückt. Mit 20 Elementen in Umfangsrichtung ergibt sich für den geschichteten Querschnittsaufbau als kleinste Eigenfrequenz  $\bar{f}_1 = 3.9255 \text{ 1/s}$ . Diese wird mit  $h = 2 \cdot h_{PZT} + h_{Stahl}$  zur Definition einer dynamischen Lastfunktion

$$\varphi_o(t) = 450 \cdot \cos(2\pi \bar{f}_1 t) \cdot h/h_{PZT} \quad (7.13)$$

herangezogen. Mit Erdung der Innenseite des Halbrings durch die elektrische Randbedingung  $\varphi_u = 0 \text{ V}$  wird in Verbindung mit Gleichung 7.13 in der äußeren PZT-Schicht ein zeitlich veränderliches, radial orientiertes elektrisches Feld der Größe  $\vec{E}_r(t) = -\varphi_o(t)/h$  erzeugt, womit der Halbring zum Schwingen in seiner ersten Eigenform angeregt wird. Die zeitabhängige Verformung der Struktur stimmt gut mit den Literaturergebnissen überein, wie der Vergleich in Abbildung 7.18 zeigt. Für das Newmark-Verfahren wurden die Parameter  $\beta=0.25$  und  $\gamma=0.5$  verwendet und in Anlehnung an das Vorgehen in der Literatur eine konstante Zeitschrittweite von  $\Delta t = 1.75 \cdot 10^{-2} \text{ s}$  gewählt.

## 8 Piezoelektrische FE 3D-Stubformulierung

### 8.1 Vorbemerkungen zur Modellbildung

Die Arbeiten von GRUTTMANN et al. [46], [47], SAUER [96], WAGNER & GRUTTMANN [118], KLINKEL & GOVINDJEE [61] sowie WACKERFUSS & GRUTTMANN [117] bilden die mechanische Basis für die hier vorgestellte elektromechanische Stubformulierung. Die elektrische Erweiterung basiert auf folgenden Aspekten:

In praxisrelevanten piezoelektrischen Bauteilen findet man in der Regel ein Paar von Elektroden. Diese sind dabei sich gegenüberliegend angeordnet. In der hier beschriebenen numerischen Modellbildung wird dem dadurch Rechnung getragen, dass die gegenüberliegende Anordnung der Elektroden durch die Einführung der elektrischen Knotenfreiheitsgrade  $\varphi_u$  an der Unterseite und  $\varphi_o$  an der Oberseite des Stabelements repräsentiert wird.

Es wird die in Kapitel 2.2.3 beschriebene Theorie der linearen Piezoelektrizität für deformierbare Dielektrika zugrunde gelegt. Die für praktische Anwendungen in der Sensorik und Aktorik gängigen Polarisationsrichtungen in Längsrichtung, Querrichtung oder Dickenrichtung sind modellierbar und werden während der Beanspruchung als invariant betrachtet. Damit sind alle Koeffizienten in der elektromechanisch gekoppelten Stoffmatrix konstant.

Konsistent zur linearen Approximation der Knotenwerte über das finite Stabelement wird ein linearer Ansatz für die Verteilung des elektrischen Skalarpotentials über die Dicke gewählt. Über die elektrischen Freiheitsgrade lässt sich damit für den Aktorbetrieb ein lineares elektrisches Skalarpotential und damit ein konstantes elektrisches Feld in Dickenrichtung als Belastung aufbringen. Ein aktorischer Dehnbetrieb ergibt sich für in Dickenrichtung gepoltes Material, aktorischer Schubbetrieb für eine Polung senkrecht dazu.

In Kapitel 4 wurden die Ursachen von elektromechanischen Lockingeffekten in einer mangelnder Balance von Approximationsräumen der Komponenten der Verzerrungen und des elektrischen Feldes ausgemacht.

Mögliche Lösungsstrategien wurden in Kapitel 5 diskutiert. Als effektivste Lösungsstrategie ergab sich dabei die Anwendung der gemischten Methode in Verbindung mit der EAS-Methode. Damit wird im Rahmen dieser Stubformulierung die Balance der Approximationsräume hergestellt, wodurch keine elektromechanischen Lockingeffekte auftreten, vgl. LEGNER et al. [71].

Die wesentlichen Merkmale der Elementformulierung sind:

- Betrachtung von Rechteckquerschnitten mit Breite  $b$  und Höhe  $h$ , womit

der Schwerpunkt  $S$  mit dem Schubmittelpunkt  $M$  zusammenfällt.

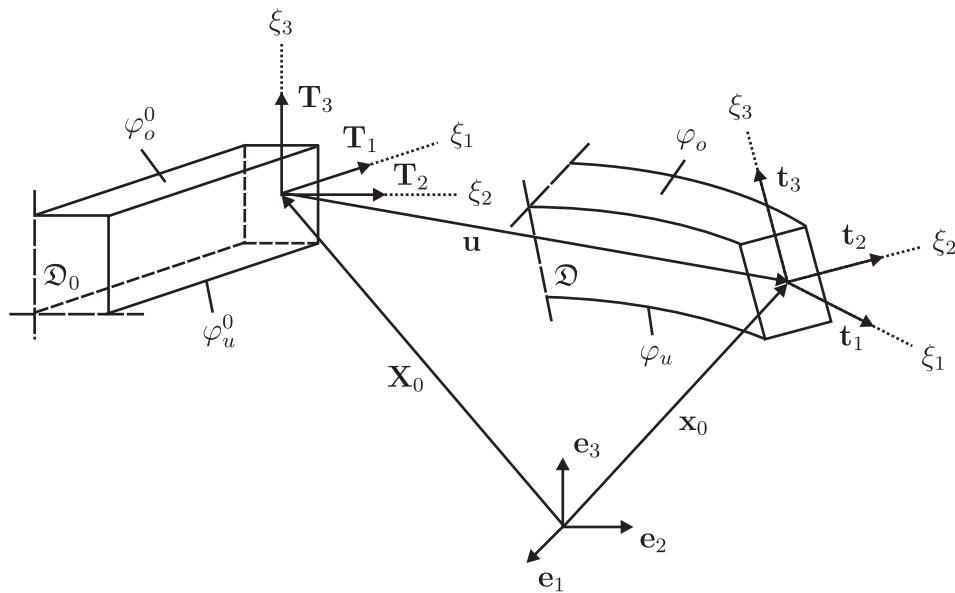
- Exzentrische Formulierung, wodurch die Definition der Bezugsachse nicht im Schwerpunkt  $S$  des Querschnitts liegen muss.
- Als kinematische Annahmen werden die Timoshenko-Stabtheorie sowie eine lineare Verteilung des elektrischen Potentials verwendet.
- Die Form des Querschnitts ändert sich durch die Verformung des Stabes nicht.
- Es sind große Verformungen und endliche Rotationen bei kleinen Verzerrungen abbildbar.
- Die Richtung der mechanischen Lasten ändert sich nicht mit der Verformung.
- Die elektrischen Lasten sind bezüglich der lokalen Stabkoordinaten konstant.
- 3D-Stoffgesetze sind ohne Modifikation verwendbar, womit die Querkontraktion des Materials berücksichtigt wird.
- Alle gängigen Polarisationsrichtungen können abgebildet werden.
- Die Elementformulierung basiert auf einer gemischten Variationsformulierung.

## 8.2 Kinematische Annahmen der Stabformulierung

### 8.2.1 Mechanischer Teil

In Abbildung 8.1 ist ein Stababschnitt zum Zeitpunkt  $t = t_0$  in der Bezugsplatzierung  $\mathfrak{D}_0$  und zum Zeitpunkt  $t$  in der Momentanplatzierung  $\mathfrak{D}$  dargestellt. Als Bezugssystem dient die Orthonormalbasis  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ . Durch Einführung der lokalen Koordinaten  $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$  wird ein Punkt der Bezugsplatzierung unter Verwendung des lokalen, orthonormalen Basissystems  $\mathbf{T}_i$  dargestellt - in der Momentanplatzierung erfolgt dessen Darstellung mit Hilfe des lokalen, orthonormalen Basissystems  $\mathbf{t}_i$ .

Der Vektor  $\mathbf{T}_1$  zeigt in Richtung der unverformten Stabachse, welche über die Bogenlänge  $S = \xi_1 \in [0, L]$  beschrieben wird.  $\mathbf{T}_2$  und  $\mathbf{T}_3$  spannen die Querschnittsebene auf. Es werden rechteckige Querschnitte mit Breite  $b$  und Höhe  $h$  betrachtet.



**Abb. 8.1:** Bezugskonfiguration und Momentankonfiguration

Als kinematische Annahme wird zugrunde gelegt, dass die Querschnitte eben bleiben. Im Gegensatz zur Bernoulli-Theorie sollen auch Querschubdeformationen berücksichtigt werden, was einer Timoshenko-Stabkinematik entspricht. Damit ist verbunden, dass der Vektor  $\mathbf{t}_i$  im Allgemeinen nicht mehr tangential zur deformierten Stabachse ist. Für die Ortsvektoren beliebiger Punkte des Stabes in Bezugslagerung und Momentanlagerung gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(\xi_2, \xi_3, S) &= \mathbf{X}_0(S) + \xi_2 \mathbf{T}_2(S) + \xi_3 \mathbf{T}_3(S) \\ \mathbf{x}(\xi_2, \xi_3, S, t) &= \mathbf{x}_0(S, t) + \xi_2 \mathbf{t}_2(S, t) + \xi_3 \mathbf{t}_3(S, t) \end{aligned} \quad (8.1)$$

Damit erfolgt im Gegensatz zu beispielsweise GRUTTMANN et al. [46], [47], SAUER [96] und BUTZ et al. [29], [28] die Berücksichtigung von Querschnittsverwölbungen nicht unmittelbar in den kinematischen Annahmen, siehe Gleichung 8.1.

Mit den orthogonalen Tensoren  $\mathbf{R}$  und  $\mathbf{R}_0$  stehen die Basissysteme  $\mathbf{T}_i$  und  $\mathbf{t}_i$  über die Abbildungen

$$\mathbf{T}_i = \mathbf{R}_0 \mathbf{e}_i \quad \mathbf{t}_i = \mathbf{R} \mathbf{e}_i \quad (8.2)$$

mit der kartesischen Basis in Bezug, womit

$$\mathbf{R}_0 = \mathbf{T}_i \otimes \mathbf{e}_i \quad \mathbf{R} = \mathbf{t}_i \otimes \mathbf{e}_i \quad (8.3)$$

gilt. Für die Parametrisierung der Rotationen wird die Rodrigues-Formel verwendet.

Für die kovarianten Tangentenvektoren  $\mathbf{G}_i = \mathbf{X}_{,i}$  und  $\mathbf{g}_i = \mathbf{x}_{,i}$  ergibt sich mit 8.1

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_1 &= \mathbf{X}'_0 + \xi_2 \mathbf{T}'_2 + \xi_3 \mathbf{T}'_3 & \mathbf{g}_1 &= \mathbf{x}'_0 + \xi_2 \mathbf{t}'_2 + \xi_3 \mathbf{t}'_3 \\ \mathbf{G}_2 &= \mathbf{T}_2 & \mathbf{g}_2 &= \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{G}_3 &= \mathbf{T}_3 & \mathbf{g}_3 &= \mathbf{t}_3 \end{aligned} \quad (8.4)$$

mit  $(\cdot)'$  als Bezeichnung für die Ableitung nach der Bogenlänge  $S$ . Die Vektoren der zugehörigen Dualbasen  $\mathbf{G}^i$  und  $\mathbf{g}^i$  folgen aus der Orthogonalitätsrelation gemäß Gleichung 2.15. Die Ableitung der lokalen Basissysteme nach der Stabkoordinate  $S$  führt auf

$$\mathbf{T}'_i = \mathbf{R}'_0 \mathbf{R}_0^T \mathbf{T}_i \quad \mathbf{t}'_i = \mathbf{R}' \mathbf{R}^T \mathbf{t}_i \quad . \quad (8.5)$$

Unter Verwendung der axialen Vektoren  $\boldsymbol{\theta}_0$  und  $\boldsymbol{\theta}$ , die den schiefssymmetrischen Tensoren  $\mathbf{R}'_0 \mathbf{R}_0^T$  und  $\mathbf{R}' \mathbf{R}^T$  aus Gleichung 8.5 zugeordnet sind, folgt die Darstellung

$$\mathbf{T}'_i = \boldsymbol{\theta}_0 \times \mathbf{T}_i \quad \mathbf{t}'_i = \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{t}_i \quad . \quad (8.6)$$

Die geometrischen Stabverzerrungen sind den Ableitungen der Verschiebungen zugeordnet und werden mit

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_g := \begin{bmatrix} \check{\boldsymbol{\varepsilon}} - \check{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 \\ \check{\boldsymbol{\kappa}} - \check{\boldsymbol{\kappa}}_0 \end{bmatrix} \quad (8.7)$$

definiert. Sie setzen sich zusammen aus den Anteilen

$$\check{\boldsymbol{\varepsilon}} := \begin{bmatrix} \mathbf{x}'_0 \cdot \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{x}'_0 \cdot \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{x}'_0 \cdot \mathbf{t}_3 \end{bmatrix} \quad \check{\boldsymbol{\kappa}} := \begin{bmatrix} \mathbf{t}'_2 \cdot \mathbf{t}_3 \\ \mathbf{t}'_3 \cdot \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}'_1 \cdot \mathbf{t}_2 \end{bmatrix} \quad (8.8)$$

für die Momentankonfiguration und  $\check{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 = \mathbf{R}_0^T \mathbf{X}'_0$ ,  $\check{\boldsymbol{\kappa}}_0 = \mathbf{R}_0^T \boldsymbol{\theta}_0$  für die Ausgangskonfiguration.

Für die Variation der geometrischen Verzerrungen gilt

$$\delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_g = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 \cdot \delta \mathbf{x}'_0 + \mathbf{x}'_0 \cdot \delta \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_2 \cdot \delta \mathbf{x}'_0 + \mathbf{x}'_0 \cdot \delta \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{t}_3 \cdot \delta \mathbf{x}'_0 + \mathbf{x}'_0 \cdot \delta \mathbf{t}_3 \\ \mathbf{t}_3 \cdot \delta \mathbf{t}'_2 + \mathbf{t}'_2 \cdot \delta \mathbf{t}_3 \\ \mathbf{t}_1 \cdot \delta \mathbf{t}'_3 + \mathbf{t}'_3 \cdot \delta \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_2 \cdot \delta \mathbf{t}'_1 + \mathbf{t}'_1 \cdot \delta \mathbf{t}_2 \end{bmatrix} \quad . \quad (8.9)$$

Mit der Definition des Green'schen Verzerrungstensors in Gleichung 2.20 ergeben sich unter Berücksichtigung der Symmetrie die von Null verschiedenen Komponenten

$$\begin{bmatrix} E_{11} \\ 2E_{12} \\ 2E_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_1 - \mathbf{G}_1 \cdot \mathbf{G}_1) \\ \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_2 - \mathbf{G}_1 \cdot \mathbf{G}_2 \\ \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_3 - \mathbf{G}_1 \cdot \mathbf{G}_3 \end{bmatrix} . \quad (8.10)$$

Nach Einsetzen von Gleichung 8.4 und unter Beachtung von Gleichung 8.9 lassen sich deren Variationen mit

$$\begin{bmatrix} \delta E_{11} \\ 2\delta E_{12} \\ 2\delta E_{13} \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{A}}_g \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_g \quad (8.11)$$

ausdrücken, wobei die Matrix

$$\bar{\mathbf{A}}_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ 0 & 1 & 0 & \xi_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\xi_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{a}}_1^T \\ \bar{\mathbf{a}}_2^T \\ \bar{\mathbf{a}}_3^T \end{bmatrix} \quad (8.12)$$

alle von der Stabkoordinate  $S$  unabhängigen Ausdrücke beinhaltet. Da Krümmungen zweiter Ordnung bei dünnen Strukturen vernachlässigt werden können, enthält  $\bar{\mathbf{A}}_g$  nur konstante und lineare Ausdrücke.

### 8.2.2 Elektrischer Teil

Im Aktorbetrieb wird in der Praxis für eine piezoelektrische Stabstruktur das elektrische Potential mittels Elektroden an zwei gegenüberliegenden Seiten - entweder an der Oberseite und der Unterseite oder an den beiden Außenseiten - vorgegeben. Dazwischen verläuft das elektrische Potential linear, die Komponente des elektrischen Feldes in Richtung der Potentialdifferenz ist damit konstant.

Um dies mit dem numerischen Modell abbilden zu können, werden die Knotenfreiheitsgrade  $\varphi_o$ ,  $\varphi_u$  für das elektrische Skalarpotential an der Oberseite und Unterseite des Stabelements eingeführt, siehe Abbildung 8.1. Eine Modellierung von Strukturen, bei denen das Skalarpotential an den beiden Außenseiten vorgegeben wird, ist damit durch eine 90°-Drehung des Stabelementes um seine Längsachse ebenfalls möglich.

Mit

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) := \frac{1}{h} \left[ \left( \frac{h}{2} - \xi_3 \right) \varphi_u(\xi_1) + \left( \frac{h}{2} + \xi_3 \right) \varphi_o(\xi_1) \right] , \quad -\frac{h}{2} \leq \xi_3 \leq \frac{h}{2} \quad (8.13)$$

wird das Skalarpotential linear über die Dicke  $h$  approximiert.

Das elektrische Feld  $\vec{\mathbf{E}}$  bezüglich der lokalen Koordinaten leitet sich mit Gleichung 2.32 aus dem negativen Gradienten des Skalarpotentials  $\varphi$  ab. Mit Gleichung 8.13 ergeben sich die von Null verschiedenen Komponenten des elektrischen Feldes

$$\begin{bmatrix} \vec{E}_1 \\ \vec{E}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{\xi_3}{h} & -\frac{1}{2} - \frac{\xi_3}{h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{h} & -\frac{1}{h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{u,\xi_1} \\ \varphi_{o,\xi_1} \\ \varphi_u \\ \varphi_o \end{bmatrix}. \quad (8.14)$$

Aus Gründen einer wesentlich übersichtlicheren mathematischen Darstellbarkeit an späterer Stelle werden die elektrischen Freiheitsgrade  $\varphi_o$ ,  $\varphi_u$  substituiert durch die Ausdrücke

$$\begin{aligned} \varphi_N(\xi_1) &= \frac{\varphi_o(\xi_1) + \varphi_u(\xi_1)}{2} \\ \varphi_M(\xi_1) &= \frac{\varphi_o(\xi_1) - \varphi_u(\xi_1)}{h}, \end{aligned} \quad (8.15)$$

womit Gleichung 8.13 in

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \varphi_N(\xi_1) + \varphi_M(\xi_1) \xi_3, \quad -\frac{h}{2} \leq \xi_3 \leq \frac{h}{2} \quad (8.16)$$

übergeht.

Für die Resubstitution gilt

$$\begin{aligned} \varphi_u(\xi_1) &= \varphi_N(\xi_1) - \frac{\varphi_M(\xi_1) h}{2} \\ \varphi_o(\xi_1) &= \varphi_N(\xi_1) + \frac{\varphi_M(\xi_1) h}{2}. \end{aligned} \quad (8.17)$$

Diese Substitution lässt sich allerdings nur im Aktorbetrieb, bei dem sowohl  $\varphi_o$  wie auch  $\varphi_u$  als Randbedingung vorgegeben sind, a priori durchführen. Im Sensorbetrieb hingegen ist an den Knoten nur einer dieser beiden Freiheitsgrade als Randbedingung vorgegeben und daher entweder  $\varphi_o$  oder  $\varphi_u$  eine Ergebnisgröße. Die Substitution kann daher nicht unmittelbar a priori durchgeführt werden. Dieses Problem lässt sich jedoch allgemein gültig für Aktor- wie auch Sensorbetrieb dadurch lösen, dass  $\varphi_G := [\varphi_o, \varphi_u]^T$  weiterhin als elektrische Freiheitsgrade auf globaler Ebene und damit auch zur Vorgabe der Randbedingungen dienen. Elementintern werden stattdessen die elektrischen Freiheitsgrade  $\varphi_L := [\varphi_N, \varphi_M]^T$  verwendet.

Damit drückt sich die Substitution in Gleichung 8.15 aus durch die Transformationsbeziehung

$$\varphi_L = \mathbf{T}_\varphi \varphi_G \quad \mathbf{T}_\varphi = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{h} & -\frac{1}{h} \end{bmatrix}. \quad (8.18)$$



Die Transformationsmatrix  $\mathbf{T}_\varphi$  ist bei jedem Wechsel zwischen globalen und lokalen elektrischen Freiheitsgraden zu berücksichtigen. Die damit verbundenen Modifikationen von Steifigkeitsmatrix und Lastvektor sind in ANHANG A dargestellt.

Mit der Definition

$$\vec{\epsilon}_g := \begin{bmatrix} \varphi_{N,\xi_1} \\ \varphi_{M,\xi_1} \\ \varphi_M \end{bmatrix} \quad (8.19)$$

und

$$\vec{\mathbf{A}}_g = \begin{bmatrix} -1 & -\xi_3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{a}}_4^T \\ \vec{\mathbf{a}}_6^T \end{bmatrix} \quad (8.20)$$

erhält man anstelle von Gleichung 8.14 die Darstellung

$$\begin{bmatrix} \vec{E}_1 \\ \vec{E}_3 \end{bmatrix} = \vec{\mathbf{A}}_g \vec{\epsilon}_g \quad (8.21)$$

und für die Variationen

$$\begin{bmatrix} \delta \vec{E}_1 \\ \delta \vec{E}_3 \end{bmatrix} = \vec{\mathbf{A}}_g \delta \vec{\epsilon}_g \quad \delta \vec{\epsilon}_g = \begin{bmatrix} \delta \varphi_{N,\xi_1} \\ \delta \varphi_{M,\xi_1} \\ \delta \varphi_M \end{bmatrix} . \quad (8.22)$$

### 8.2.3 Generalisierte Darstellung der kinematischen Stabgrößen

Für eine kompaktere Darstellung der Finite-Element-Formulierung werden die aus den kinematischen Annahmen abgeleiteten mechanischen und elektrischen Stabgrößen  $\vec{\epsilon}_g$  und  $\vec{\epsilon}_g$  gemäß den Gleichungen 8.7 und 8.19 zu einer generalisierten Größe

$$\epsilon_g := [\vec{\epsilon}_g, \vec{\epsilon}_g]^T \quad (8.23)$$

zusammengefasst, womit für die Variation

$$\delta \epsilon_g := [\delta \vec{\epsilon}_g, \delta \vec{\epsilon}_g]^T \quad (8.24)$$

folgt.

### 8.3 Variationsformulierung des Randwertproblems

#### 8.3.1 Green'sche Verzerrungen

Es werden unabhängige Stabverzerrungen

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = [\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_1, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_2]^T \quad (8.25)$$

definiert, wobei die Dehnung  $\varepsilon$ , Schubverzerrungen  $\gamma_2, \gamma_3$ , Verwindung  $\vartheta$  und Krümmungen  $\kappa_2, \kappa_3$  als Komponenten in  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 = [\varepsilon, \gamma_2, \gamma_3, \vartheta, \kappa_2, \kappa_3]^T$  enthalten sind. Der zweite Teil  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_2$  beinhaltet  $\bar{M} \in \mathbb{N}$  Komponenten und ist für die Berücksichtigung von Querschnittsverwölbungen und Querkontraktion erforderlich.

Die Green'schen Verzerrungen  $\mathbf{E}$  werden gemäß Gleichung 3.8 bezüglich der kontravarianten Basis über kovariante Komponenten in der vektoriellen Notation

$$\mathbf{E} = [E_{11}, E_{22}, E_{33}, 2E_{12}, 2E_{13}, 2E_{23}]^T \quad (8.26)$$

dargestellt.

Mit

$$\bar{\mathbf{A}}_1 = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{a}}_1^T \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{a}}_2^T \\ \bar{\mathbf{a}}_3^T \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \xi_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\xi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{A}}_2 = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{w}}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{w}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{w}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{w}}_{1,2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{w}}_{1,3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{w}_3 \end{bmatrix} \quad (8.27)$$

wird für kleine Verzerrungen der Zusammenhang zwischen den Green'schen Verzerrungen  $\mathbf{E}$  und den unabhängigen Stabverzerrungen  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  beschrieben durch

$$\mathbf{E} = \bar{\mathbf{A}} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \bar{\mathbf{A}} = [\bar{\mathbf{A}}_1, \bar{\mathbf{A}}_2] \quad . \quad (8.28)$$

Für die Variation gilt

$$\delta \mathbf{E} = \bar{\mathbf{A}} \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = [\delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_1, \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_2]^T \quad . \quad (8.29)$$

Die aus der Stabkinematik resultierenden Vektoren  $\bar{\mathbf{a}}_i$  liefern keine Beiträge zu den Verzerrungskomponenten  $E_{22}$ ,  $E_{33}$  und  $E_{23}$ , da bei einer klassischen Stabformulierung keine Querkontraktion berücksichtigt wird. Dreidimensionale Stoffgesetze sind daher vor ihrer Verwendung innerhalb klassischer Stabformulierungen bezüglich dieser Verzerrungskomponenten zu kondensieren.

Mit der hier beschriebenen Stabformulierung können dreidimensionale Konstitutivbeziehungen ohne Modifikationen verwendet werden, indem die Verzerrungskomponenten  $E_{22}$ ,  $E_{33}$  und  $E_{23}$  unabhängig voneinander durch die Verwendung von  $\mathbf{w}_2$  und  $\mathbf{w}_3$  in der Matrix  $\bar{\mathbf{A}}_2$  beschrieben werden.

In Form von  $\tilde{\mathbf{w}}_1$ ,  $\tilde{\mathbf{w}}_{1,2}$  und  $\tilde{\mathbf{w}}_{1,3}$  beinhaltet  $\bar{\mathbf{A}}_2$  darüber hinaus zusätzliche Beiträge zu den Verzerrungskomponenten  $E_{11}$ ,  $E_{12}$  und  $E_{13}$ . Diese dienen dazu, die Verwölbung des Querschnittes zu erfassen und die korrekte Torsionssteifigkeit für den Stab abzubilden. Im Gegensatz zu herkömmlichen Stabformulierungen wird mit diesem Vorgehen die Querschnittsverwölbung nicht unmittelbar in den kinematischen Annahmen nach Gleichung 8.1 berücksichtigt. Damit ist eine Vorabermittlung der Wölbfunktion nicht notwendig. Die Vorteile dieser Methode werden in WACKERFUSS & GRUTTMANN [117] eingehend diskutiert.

Die Matrix  $\bar{\mathbf{A}}_2$  beinhaltet  $\bar{M} = 2\bar{M}_1 + 2\bar{M}_2 + \bar{M}_3$  Spalten. Dies ergibt sich aus der Definition ihrer Komponenten durch die Vektoren

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{w}}_1 &:= [\tilde{P}_{11}, \tilde{\phi}_2, \dots, \tilde{\phi}_{n_1}] \in \mathbb{R}^{\bar{M}_1} \\ \mathbf{w}_2 &:= [P_{00}, \phi_1, \dots, \phi_{n_2}] \in \mathbb{R}^{\bar{M}_2} \\ \mathbf{w}_3 &:= [P_{00}, \phi_1, \dots, \phi_{n_3}] \in \mathbb{R}^{\bar{M}_3} \quad ,\end{aligned}\tag{8.30}$$

welche aus den Polynomen  $\tilde{P}_{11}$  und  $P_{00}$  sowie den Vektoren  $\tilde{\phi}_i$  und  $\phi_i$  bestehen. Die Polynome

$$P_{nm} := \xi_2^n \xi_3^m \tag{8.31}$$

sind Funktionen der lokalen Querschnittskordinaten  $\xi_2$ ,  $\xi_3$  und in folgender Anordnung auch die Bestandteile der Vektoren  $\phi_i$ :

$$\begin{aligned}\phi_1 &:= [P_{10}, P_{11}, P_{01}] \\ \phi_2 &:= [P_{20}, P_{21}, P_{22}, P_{12}, P_{02}] \\ \phi_3 &:= [P_{30}, P_{31}, P_{32}, P_{33}, P_{23}, P_{13}, P_{03}] \\ &\vdots\end{aligned}\tag{8.32}$$

Die Vektoren  $\tilde{\phi}_i$  sind nach derselben Systematik angeordnet, beinhalten jedoch die modifizierten Polynome  $\tilde{P}_{nm}$ :

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}_1 &:= [\tilde{P}_{10}, \tilde{P}_{11}, \tilde{P}_{01}] \\ \tilde{\phi}_2 &:= [\tilde{P}_{20}, \tilde{P}_{21}, \tilde{P}_{22}, \tilde{P}_{12}, \tilde{P}_{02}] \\ \tilde{\phi}_3 &:= [\tilde{P}_{30}, \tilde{P}_{31}, \tilde{P}_{32}, \tilde{P}_{33}, \tilde{P}_{23}, \tilde{P}_{13}, \tilde{P}_{03}] \\ &\vdots\end{aligned}\tag{8.33}$$

Für jede Komponente von  $\mathbf{E}$  erfolgt ein vollständiger Polynomansatz in Form der Ansätze in der entsprechenden Zeile in  $\bar{\mathbf{A}}_1$  und  $\bar{\mathbf{A}}_2$ .

Da für  $E_{22}$ ,  $E_{33}$  und  $E_{23}$  in  $\bar{\mathbf{A}}_1$  kein Ansatz aus der verwendeten Kinematik vorliegt, sind die Polynomansätze in  $\mathbf{w}_2$  und  $\mathbf{w}_3$  vollständig bis zur Ordnung  $n_2$  und  $n_3$ .

Für die Komponenten  $E_{11}$ ,  $E_{12}$  und  $E_{13}$  liefern im Gegensatz dazu auch die Komponenten in  $\bar{\mathbf{A}}_1$  einen Beitrag. Das ist bei der Wahl der Ansätze in  $\bar{\mathbf{A}}_2$  zu berücksichtigen. Dies erfolgt zum einen durch die Verwendung von Vektoren  $\tilde{\phi}_i$ , die aus den modifizierten Polynomen  $\tilde{P}_{nm}$  bestehen, und zum anderen durch eine in  $\tilde{\mathbf{w}}_1$  gegenüber  $\mathbf{w}_2$  und  $\mathbf{w}_3$  modifizierte Anordnung der Komponenten. Um zu vermeiden, dass die Stabschnittgrößen verfälscht werden und die Eindeutigkeit der Lösung erhalten bleibt, muss die Orthogonalität der Ansätze in  $\bar{\mathbf{A}}_2$  bezüglich derer in  $\bar{\mathbf{A}}_1$  gewährleistet sein. Dies wird durch die Einhaltung der Orthogonalisierungsbedingungen

$$\int_A \tilde{\mathbf{w}}_1 1 dA = \mathbf{0} \quad \int_A \tilde{\mathbf{w}}_1 \xi_2 dA = \mathbf{0} \quad \int_A \tilde{\mathbf{w}}_1 \xi_3 dA = \mathbf{0} \quad (8.34)$$

sichergestellt, welche sich aus den Komponenten von  $\bar{\mathbf{a}}_1$  ergeben.

Für die modifizierten Polynome erhält man damit die Konstruktionsvorschrift

$$\tilde{P}_{nm} = P_{nm} + \alpha_{nm} + \beta_{nm}P_{10} + \gamma_{nm}P_{01} \quad . \quad (8.35)$$

Die Koeffizienten  $\alpha_{nm}$ ,  $\beta_{nm}$  und  $\gamma_{nm}$  lassen sich durch Einsetzen von Gleichung 8.30<sub>1</sub> in Gleichung 8.34 unter Verwendung von Gleichung 8.33 und Gleichung 8.35 eindeutig für alle  $\tilde{P}_{nm}$  bestimmen.

Die Gewichtung des Beitrags jeder Komponente in  $\tilde{\mathbf{w}}_1$ ,  $\mathbf{w}_2$ ,  $\mathbf{w}_3$ ,  $\tilde{\mathbf{w}}_{1,2}$  und  $\tilde{\mathbf{w}}_{1,3}$  hängt von den zugeordneten Unbekannten in  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_2$  ab. Die Parameter  $n_1$ ,  $n_2$  und  $n_3$  können unabhängig voneinander gewählt werden und repräsentieren jeweils die höchste auftretende Polynomordnung in  $\tilde{\mathbf{w}}_1$ ,  $\mathbf{w}_2$  und  $\mathbf{w}_3$ , vgl. WACKERFUSS & GRUTTMANN [117].

### 8.3.2 Elektrisches Feld

Für die mit den unabhängigen Stabverzerrungen gemäß Gleichung 8.25 korrespondierenden elektrischen Größen wird

$$\vec{\boldsymbol{\varepsilon}} = [\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_1, \vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_2]^T \quad (8.36)$$

definiert, wobei  $\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_1$  drei Komponenten und  $\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_2$  genau  $\vec{M} \in \mathbb{N}$  Komponenten beinhaltet.

Das elektrische Feld ist mit

$$\vec{\mathbf{E}} = [\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3]^T \quad (8.37)$$

bezüglich der kontravarianten Basis über kovariante Komponenten dargestellt.

Mit

$$\vec{\mathbf{A}}_1 = \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{a}}_4^T \\ \mathbf{0} \\ \vec{\mathbf{a}}_6^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -\xi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \vec{\mathbf{A}}_2 = \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{w}}_4 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \vec{\mathbf{w}}_5 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \vec{\mathbf{w}}_6 \end{bmatrix} \quad (8.38)$$

wird der Zusammenhang zwischen dem elektrischen Feld  $\vec{\mathbf{E}}$  und den unabhängigen Größen  $\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}$  beschrieben durch

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{A}} \vec{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \vec{\mathbf{A}} = [\vec{\mathbf{A}}_1, \vec{\mathbf{A}}_2] \quad . \quad (8.39)$$

Für die Variation von  $\vec{\mathbf{E}}$  gilt

$$\delta \vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{A}} \delta \vec{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \delta \vec{\boldsymbol{\varepsilon}} = [\delta \vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_1, \delta \vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_2]^T \quad . \quad (8.40)$$

Die aus dem kinematischen Ansatz in Gleichung 8.16 resultierenden Vektoren  $\vec{\mathbf{a}}_4$  und  $\vec{\mathbf{a}}_6$  liefern keinen Beitrag zu der Komponente  $\vec{E}_2$  des elektrischen Feldes. Um dreidimensionale, elektromechanische Konstitutivbeziehungen nutzen zu können, wird die elektrische Feldkomponente durch die Verwendung von  $\vec{\mathbf{w}}_5$  in der Matrix  $\vec{\mathbf{A}}_2$  beschrieben.

Die Vektoren  $\vec{\mathbf{w}}_4$  und  $\vec{\mathbf{w}}_6$  in  $\vec{\mathbf{A}}_2$  beinhalten Polynome höherer Ordnung als zusätzliche Beiträge zu den elektrischen Feldkomponenten  $\vec{E}_1$  und  $\vec{E}_3$ . Diese sind notwendig, da mit dem linearen kinematischen Ansatz für das elektrische Potential bei der Analyse von typischen Beanspruchungsarten der physikalische Verlauf des elektrischen Feldes innerhalb des Querschnitts nur unzureichend abgebildet wird und zu einer Unverträglichkeit der Approximationsräume der Verzerrungen und des elektrischen Feldes führt, vgl. Kapitel 4. Die Einführung von  $\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_2$  ermöglicht also, Ansätze höherer Ordnung für die elektrischen Feldkomponenten im numerischen Modell berücksichtigen zu können, womit gleichzeitig die Approximationsräume aufeinander abgestimmt werden.

Die Matrix  $\vec{\mathbf{A}}_2$  beinhaltet  $\vec{\mathbf{M}} = \vec{\mathbf{M}}_1 + \vec{\mathbf{M}}_2 + \vec{\mathbf{M}}_3$  Spalten. Dies ergibt sich aus der Definition ihrer Komponenten durch die Vektoren

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{w}}_4 &:= [P_{00}, \tilde{P}_{10}^{\vec{E}_1}, \tilde{P}_{11}^{\vec{E}_1}, \tilde{\phi}_2^{\vec{E}_1}, \dots, \tilde{\phi}_{n_4}^{\vec{E}_1}] \in \mathbb{R}^{\vec{M}_1} \\ \vec{\mathbf{w}}_5 &:= [P_{00}, \phi_1, \dots, \phi_{n_5}] \in \mathbb{R}^{\vec{M}_2} \\ \vec{\mathbf{w}}_6 &:= [\tilde{\phi}_1^{\vec{E}_3}, \dots, \tilde{\phi}_{n_6}^{\vec{E}_3}] \in \mathbb{R}^{\vec{M}_3} \quad . \end{aligned} \quad (8.41)$$

$P_{00}$  und die Vektoren  $\phi_i$  sind in Gleichung 8.31 und Gleichung 8.32 definiert.

Die Vektoren  $\tilde{\phi}_i^{\vec{E}_j}$  für  $j \in \{1, 3\}$  werden definiert durch

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}_1^{\vec{E}_j} &:= \left[ \tilde{P}_{10}^{\vec{E}_j}, \tilde{P}_{11}^{\vec{E}_j}, \tilde{P}_{01}^{\vec{E}_j} \right] \\ \tilde{\phi}_2^{\vec{E}_j} &:= \left[ \tilde{P}_{20}^{\vec{E}_j}, \tilde{P}_{21}^{\vec{E}_j}, \tilde{P}_{22}^{\vec{E}_j}, \tilde{P}_{12}^{\vec{E}_j}, \tilde{P}_{02}^{\vec{E}_j} \right] \\ \tilde{\phi}_3^{\vec{E}_j} &:= \left[ \tilde{P}_{30}^{\vec{E}_j}, \tilde{P}_{31}^{\vec{E}_j}, \tilde{P}_{32}^{\vec{E}_j}, \tilde{P}_{33}^{\vec{E}_j}, \tilde{P}_{23}^{\vec{E}_j}, \tilde{P}_{13}^{\vec{E}_j}, \tilde{P}_{03}^{\vec{E}_j} \right] \\ &\vdots\end{aligned}\tag{8.42}$$

und beinhalten die modifizierten Polynome  $\tilde{P}_{nm}^{\vec{E}_j}$ .

Analog zum Vorgehen für die Verzerrungskomponenten erfolgt für jede Komponente des elektrischen Feldes ein vollständiger Polynomansatz in Form der Ansätze in  $\vec{\mathbf{A}}_1$  und  $\vec{\mathbf{A}}_2$ .

Da der kinematische Ansatz keinen Beitrag für  $\vec{E}_2$  liefert, beinhaltet  $\vec{\mathbf{w}}_5$  in  $\vec{\mathbf{A}}_2$  gemäß Gleichung 8.41<sub>2</sub> einen vollständigen Polynomansatz bis zur Ordnung  $n_5$ .

Für die Komponenten  $\vec{E}_1$  und  $\vec{E}_3$  liefert der kinematische Ansatz einen Beitrag in Form von  $\vec{\mathbf{a}}_4$  und  $\vec{\mathbf{a}}_6$  in  $\vec{\mathbf{A}}_1$ , woraus sich die Definition von  $\vec{\mathbf{w}}_4$  und  $\vec{\mathbf{w}}_6$  gemäß Gleichung 8.41<sub>1</sub> und Gleichung 8.41<sub>3</sub> ergibt.

Zur Einhaltung der Orthogonalität der Ansätze in  $\vec{\mathbf{A}}_2$  bezüglich derer in  $\vec{\mathbf{A}}_1$  müssen die Bedingungen

$$\begin{aligned}\int_A \vec{\mathbf{w}}_4 \cdot 1 \, dA &= \mathbf{0} \quad , \quad \int_A \vec{\mathbf{w}}_4 \cdot \xi_3 \, dA = \mathbf{0} \quad , \\ \int_A \vec{\mathbf{w}}_6 \cdot 1 \, dA &= \mathbf{0}\end{aligned}\tag{8.43}$$

erfüllt sein, die sich aus den Komponenten von  $\vec{\mathbf{A}}_1$  ergeben.

Daraus resultiert der Aufbau der modifizierten Polynome

$$\begin{aligned}\tilde{P}_{nm}^{\vec{E}_1} &= P_{nm} + \delta_{nm} P_{00} + \varepsilon_{nm} P_{01} \\ \tilde{P}_{nm}^{\vec{E}_3} &= P_{nm} + \psi_{nm} P_{00} \quad .\end{aligned}\tag{8.44}$$

Die Koeffizienten  $\delta_{nm}$ ,  $\varepsilon_{nm}$  und  $\psi_{nm}$  ergeben sich unter Verwendung der Gleichungen 8.41, 8.42 und 8.44 zusammen mit den Orthogonalitätsbedingungen gemäß Gleichung 8.43 und sind für Polynome bis zur Ordnung  $n = 4$  in ANHANG B.2 angegeben.

Die Gewichtung des Beitrags jeder Komponente von  $\vec{\mathbf{w}}_4$ ,  $\vec{\mathbf{w}}_5$  und  $\vec{\mathbf{w}}_6$  hängt von den zugeordneten Unbekannten in  $\vec{\mathbf{e}}_2$  ab. Die Parameter  $n_4$ ,  $n_5$  und  $n_6$  können

unabhängig voneinander gewählt werden und repräsentieren jeweils die höchste auftretende Polynomordnung in  $\tilde{\mathbf{w}}_4$ ,  $\tilde{\mathbf{w}}_5$  und  $\tilde{\mathbf{w}}_6$ .

Durch die Substitution der elektrischen Knotenfreiheitsgrade nach Gleichung 8.15 basieren die Vektoren  $\tilde{\mathbf{w}}_4$ ,  $\tilde{\mathbf{w}}_5$  und  $\tilde{\mathbf{w}}_6$  auf genau denjenigen Polynomen  $P_{nm}$ , die auch die Grundbausteine von  $\tilde{\mathbf{w}}_1$ ,  $\tilde{\mathbf{w}}_2$  und  $\tilde{\mathbf{w}}_3$  sind. Die Definition separater Polynomansätze für  $\tilde{\mathbf{w}}_4$ ,  $\tilde{\mathbf{w}}_5$  und  $\tilde{\mathbf{w}}_6$  wird damit umgangen.

### 8.3.3 Generalisierte Darstellung der unabhängigen Stabgrößen

Die unabhängigen mechanischen und elektrischen Stabgrößen  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  und  $\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}$  nach Gleichung 8.25 und Gleichung 8.36 werden zusammengefasst in

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} [\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_1, \vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_1]^T \\ [\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_2, \vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_2]^T \end{bmatrix} . \quad (8.45)$$

Damit ergibt sich zwischen den verallgemeinerten, stabbezogenen Größen  $\boldsymbol{\varepsilon}$  und den kontinuumsbezogenen Größen  $\mathbf{E}$  und  $\vec{\mathbf{E}}$  unter Berücksichtigung der Gleichungen 8.28 und 8.39 der Zusammenhang

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \vec{\mathbf{E}} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{mit} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_1 & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}}_2 & 0 \\ \mathbf{0} & \vec{\mathbf{A}}_1 & 0 & \vec{\mathbf{A}}_2 \end{bmatrix} . \quad (8.46)$$

### 8.3.4 Formulierung des Randwertproblems

Ausgehend von der in Kapitel 3 mit Gleichung 3.1 eingeführten Enthalpie als elektromechanische Potentialfunktion lautet die virtuelle, innere Arbeit des Stabes

$$\delta W_i = \int_S \int_A \delta [\rho \psi(\mathbf{E}, \vec{\mathbf{E}})] \, dA \, dS = \int_S \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} W \, dS \quad (8.47)$$

mit

$$\partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} W = \begin{bmatrix} \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}_1} W \\ \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}_2} W \end{bmatrix} := \mathbf{A}^T \begin{bmatrix} \mathbf{S} \\ -\vec{\mathbf{D}} \end{bmatrix} \, dA \quad , \quad (8.48)$$

den 2. Piola-Kirchhoff-Spannungen  $\mathbf{S} = S^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j = \partial_{\mathbf{E}} \rho \psi$  und den dielektrischen Verschiebungen  $\vec{\mathbf{D}} = D^i \mathbf{G}_i = -\partial_{\vec{\mathbf{E}}} \rho \psi$ , siehe Gleichung 3.2. Durch eine vektorielle Anordnung der Komponenten von  $\mathbf{S}$  gemäß Gleichung 3.7 sind  $\mathbf{S}$  und  $\vec{\mathbf{D}}$  arbeitskonform zu den Green'schen Verzerrungen  $\mathbf{E}$  und dem elektrischen Feld  $\vec{\mathbf{E}}$  gemäß Gleichung 8.26 und Gleichung 8.37 angeordnet.

Um die geometrischen Feldgleichungen zu erfüllen, wird die Gleichheit der unabhängigen Größen  $\boldsymbol{\varepsilon}_1$  und der kinematischen Stabgrößen  $\boldsymbol{\varepsilon}_g$  gefordert.

Der Vektor  $\partial_{\boldsymbol{\varepsilon}}W$  beinhaltet die Resultierenden der Spannungen und dielektrischen Verschiebungen, welche sich aus den unabhängigen Stabgrößen  $\boldsymbol{\varepsilon}$  und der von  $W$  implizierten, konstitutiven Beziehung ergeben. Die Aussage der konstitutiven Beziehung lässt sich auch dadurch ausdrücken, dass die durch den ersten Teil  $\partial_{\boldsymbol{\varepsilon}_1}W$  repräsentierten Resultierenden der Spannungen und dielektrischen Verschiebungen im Gleichgewicht stehen zu einem Satz von unabhängigen Resultierenden der Spannungen und dielektrischen Verschiebungen

$$\boldsymbol{\sigma} := \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}} \end{bmatrix} \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}} = [F^1, F^2, F^3, M^1, M^2, M^3]^T \quad . \quad (8.49)$$

Dabei beinhaltet  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  die unabhängigen mechanischen Spannungsergebnisse in Form der Normalkraft  $F^1$ , der Querkräfte  $F^2$  und  $F^3$ , des Torsionsmoments  $M^1$ , der Biegemomente  $M^2$  und  $M^3$ ;  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  beinhaltet drei unabhängige resultierende Größen der dielektrischen Verschiebungen.

In  $\partial_{\boldsymbol{\varepsilon}_2}W$  sind Resultierende der Spannungen und dielektrischen Verschiebungen, die in Richtung der Dicke und Breite des Stabes orientiert beziehungsweise von höherer Ordnung sind, enthalten. Da diese Größen im Rahmen einer Stabtheorie nicht auftreten, dürfen die ihnen zugrunde liegenden Verläufe über den Querschnitt nur so geartet sein, dass ihre Resultierenden zu Null werden, was durch die Beziehung  $\partial_{\boldsymbol{\varepsilon}_2}W = \mathbf{0}$  erzwungen wird.

Zusammenfassend ergibt sich in Verbindung mit den statischen Feldgleichungen

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{f}' + \bar{\mathbf{f}} = \mathbf{0} \\ \mathbf{m}' + \mathbf{x}'_0 \times \mathbf{f} + \bar{\mathbf{m}} = \mathbf{0} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \boldsymbol{\varepsilon}_g - \boldsymbol{\varepsilon}_1 = \mathbf{0} \\ \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}_1}W - \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \\ \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}_2}W = \mathbf{0} \end{array} \quad \text{in } [0, L] \quad . \quad (8.50)$$

Durch Berücksichtigung der statischen Randbedingungen

$$\mathbf{f} = \hat{\mathbf{f}} \quad , \quad \mathbf{m} = \hat{\mathbf{m}} \quad \text{auf } \partial\mathcal{B}_\sigma \quad , \quad (8.51)$$

der geometrischen Randbedingungen

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} \quad , \quad \boldsymbol{\omega} = \hat{\boldsymbol{\omega}} \quad \text{auf } \partial\mathcal{B}_v \quad (8.52)$$

sowie der elektrischen Randbedingungen

$$\varphi = \hat{\varphi} \quad \text{auf } \partial\mathcal{B}_\varphi \quad (8.53)$$

ist das Randwertproblem in seiner starken Form vollständig beschrieben. Dabei wird ein Randbereich mit vorgegebenen Spannungen durch  $\partial\mathcal{B}_\sigma$ , ein Randbereich



mit vorgegebenen Verschiebungen beziehungsweise Verdrehungen durch  $\partial\mathcal{B}_v$  und ein Randbereich mit vorgegebenem elektrischen Potential mit  $\partial\mathcal{B}_\varphi$  symbolisiert.

Für eine numerische Lösung wird das Randwertproblem zunächst in seine schwache Form überführt - die Lösung des Randwertproblems ist damit nicht mehr punktweise exakt gesucht, sondern im integralen Mittel zu erfüllen.

Die Freiheitsgrade des piezoelektrischen Stabes sind  $\mathbf{v} = [\mathbf{u}, \mathbf{R}, \varphi]^T$  mit den Verschiebungen  $\mathbf{u} = \mathbf{x}_0 - \mathbf{X}_0$ , dem Rotationstensor  $\mathbf{R}(\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{t}_i \otimes \mathbf{e}_i$  als Funktion der Verdrehungen  $\boldsymbol{\omega} = [\omega_1, \omega_2, \omega_3]^T$  und dem elektrischen Potential  $\varphi = [\varphi_u, \varphi_o]^T$  an der Unterseite und der Oberseite.

Mögliche Beanspruchungen sind

- Streckenlasten  $\bar{\mathbf{f}}$  und Streckenmomente  $\bar{\mathbf{m}}$  über die Stablänge  $L$
- Einzellasten  $\hat{\mathbf{f}}$  und Einzelmomente  $\hat{\mathbf{m}}$  auf  $\partial\mathcal{B}_\sigma$
- Verschiebungen  $\hat{\mathbf{u}}$ , Verdrehungen  $\hat{\boldsymbol{\omega}}$  auf  $\partial\mathcal{B}_v$
- elektrisches Potential  $\hat{\varphi}$  auf  $\partial\mathcal{B}_\varphi$  ,

wobei die Lasten als konservativ angesehen werden. Beanspruchungen durch elektrische Oberflächenladungen werden nicht betrachtet.

### 8.3.5 Schwache Form und Linearisierung des Randwertproblems

Unter Verwendung eines Prozessvektors  $\boldsymbol{\theta} := [\mathbf{v}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}]^T$ , der die unabhängigen Größen und deren Variationen mit  $\delta\boldsymbol{\theta} := [\delta\mathbf{v}, \delta\boldsymbol{\sigma}, \delta\boldsymbol{\varepsilon}]^T$  zusammenfasst, gelangt man durch Multiplikation der Ausdrücke in Gleichung 8.50 mit der jeweils zugehörigen Testfunktion und Integration über das Gebiet zur schwachen Form des Randwertproblems

$$g(\boldsymbol{\theta}, \delta\boldsymbol{\theta}) = \int_S \left[ \delta\boldsymbol{\varepsilon}_1^T (\partial_{\boldsymbol{\varepsilon}_1} W - \boldsymbol{\sigma}) + \delta\boldsymbol{\varepsilon}_2^T \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}_2} W + \delta\boldsymbol{\sigma}^T (\boldsymbol{\varepsilon}_g - \boldsymbol{\varepsilon}_1) \right] dS \quad (8.54)$$

$$- \int_S \left[ (\mathbf{f}' + \bar{\mathbf{f}}) \cdot \delta\mathbf{u} + (\mathbf{m}' + \mathbf{x}'_0 \times \mathbf{f} + \bar{\mathbf{m}}) \cdot \delta\boldsymbol{\omega} \right] dS = 0 \quad .$$

Diese Darstellung lässt sich unter Verwendung von  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} := [\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{0}_M]^T$  umformen zu

$$g(\boldsymbol{\theta}, \delta\boldsymbol{\theta}) = \int_S \left[ \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T (\partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} W - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}) + \delta\boldsymbol{\sigma}^T (\boldsymbol{\varepsilon}_g - \boldsymbol{\varepsilon}_1) + \delta\boldsymbol{\varepsilon}_g^T \boldsymbol{\sigma} \right] dS \quad (8.55)$$

$$- \int_S \left[ \delta\mathbf{u}^T \bar{\mathbf{f}} + \delta\boldsymbol{\omega}^T \bar{\mathbf{m}} \right] dS - \left[ \delta\mathbf{u}^T \hat{\mathbf{f}} + \delta\boldsymbol{\omega}^T \hat{\mathbf{m}} \right]_{\partial\mathcal{B}_\sigma} = 0 \quad .$$

Für den Übergang zu einer Finite-Element-Formulierung als numerische Lösung dieser schwachen Form des Randwertproblems ist die linearisierte Darstellung

$$L[g(\boldsymbol{\theta}, \delta\boldsymbol{\theta}), \Delta\boldsymbol{\theta}] := g(\boldsymbol{\theta}, \delta\boldsymbol{\theta}) + Dg \cdot \Delta\boldsymbol{\theta} \quad (8.56)$$

mit

$$Dg \cdot \Delta\boldsymbol{\theta} = \int_S \left[ \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T (\mathbf{D}\Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \Delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) + \delta\boldsymbol{\sigma}^T (\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_g - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_1) + \delta\boldsymbol{\varepsilon}_g^T \Delta\boldsymbol{\sigma} + \Delta\delta\boldsymbol{\varepsilon}_g^T \boldsymbol{\sigma} \right] dS \quad (8.57)$$

erforderlich. Darin ist die Stabsteifigkeit durch

$$\mathbf{D} := \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}}^2 W = \int_A \mathbf{A}^T \begin{bmatrix} \mathbb{C} & -\mathbf{e}^T \\ -\mathbf{e} & -\boldsymbol{\varepsilon} \end{bmatrix} \mathbf{A} dA \quad (8.58)$$

symbolisiert. Die Linearisierung von  $\delta\boldsymbol{\varepsilon}_g$  gemäß Gleichung 8.24 ist

$$\Delta\delta\boldsymbol{\varepsilon}_g = [\Delta\delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_g, \Delta\delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_g]^T \quad (8.59)$$

mit

$$\Delta\delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_g = \begin{bmatrix} \delta\mathbf{u}' \cdot \Delta\mathbf{t}_1 + \delta\mathbf{t}_1 \cdot \Delta\mathbf{u}' + \mathbf{x}'_0 \cdot \Delta\delta\mathbf{t}_1 \\ \delta\mathbf{u}' \cdot \Delta\mathbf{t}_2 + \delta\mathbf{t}_2 \cdot \Delta\mathbf{u}' + \mathbf{x}'_0 \cdot \Delta\delta\mathbf{t}_2 \\ \delta\mathbf{u}' \cdot \Delta\mathbf{t}_3 + \delta\mathbf{t}_3 \cdot \Delta\mathbf{u}' + \mathbf{x}'_0 \cdot \Delta\delta\mathbf{t}_3 \\ \delta\mathbf{t}'_2 \cdot \Delta\mathbf{t}_3 + \delta\mathbf{t}_2 \cdot \Delta\mathbf{t}'_3 + \mathbf{t}_2 \cdot \Delta\delta\mathbf{t}'_2 + \mathbf{t}'_2 \cdot \Delta\delta\mathbf{t}_3 \\ \delta\mathbf{t}'_3 \cdot \Delta\mathbf{t}_1 + \delta\mathbf{t}_3 \cdot \Delta\mathbf{t}'_1 + \mathbf{t}_3 \cdot \Delta\delta\mathbf{t}'_3 + \mathbf{t}'_2 \cdot \Delta\delta\mathbf{t}_1 \\ \delta\mathbf{t}'_1 \cdot \Delta\mathbf{t}_2 + \delta\mathbf{t}_1 \cdot \Delta\mathbf{t}'_2 + \mathbf{t}_1 \cdot \Delta\delta\mathbf{t}'_1 + \mathbf{t}'_2 \cdot \Delta\delta\mathbf{t}_2 \end{bmatrix} \cdot \quad (8.60)$$

Da das elektrische Feld eine lineare Funktion des elektrischen Potentials  $\varphi$  ist, folgt unmittelbar  $\Delta\delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_g = \mathbf{0}$ .

## 8.4 Finite-Elemente-Approximation

### 8.4.1 Approximation von Ausgangskonfiguration und Momentankonfiguration des Stabes

Im Rahmen des isoparametrischen Konzeptes werden die Geometrie und die Knotengrößen mit denselben Ansatzfunktionen approximiert. Das Stabelement besteht aus  $nel = 2$  Knoten. Mit den linearen Ansatzfunktionen für  $\xi_I \in \{-1, 1\}$

$$N_I = \frac{1}{2}(1 - \xi_I \xi) \quad I \in \{1, 2\} \quad (8.61)$$

als Funktionen von  $\xi \in [-1, 1]$  werden die Ortsvektoren in der Ausgangskonfiguration und Momentankonfiguration mit

$$\mathbf{X}_0^h = \sum_{I=1}^{nel} N_I(\xi) \mathbf{X}_I \quad \mathbf{x}_0^h = \sum_{I=1}^{nel} N_I(\xi) (\mathbf{X}_I + \mathbf{u}_I) \quad (8.62)$$

und die Basissysteme der Ausgangs- und Momentankonfiguration mit

$$\mathbf{T}^h = \sum_{I=1}^{nel} N_I(\xi) \mathbf{T}_I \quad \mathbf{t}^h = \sum_{I=1}^{nel} N_I(\xi) \mathbf{t}_I \quad (8.63)$$

approximiert. Dabei beschreibt  $\mathbf{X}_I$  die Position und  $\mathbf{u}_I$  die Verschiebung eines Knotens. Das Basissystem  $\mathbf{T}_I$  eines Knotens der Ausgangskonfiguration wird aufgebaut aus dem gegebenen Finite-Elemente-Netz, mit dem die Geometrie der Struktur diskretisiert ist. Das Basissystem  $\mathbf{t}_I$  eines Knotens in der Momentankonfiguration ergibt sich unter Verwendung der Rodrigues-Formel in Abhängigkeit von den Rotationsparametern  $\omega_{1I}$ ,  $\omega_{2I}$  und  $\omega_{3I}$  zu

$$\mathbf{t}_I = \mathbf{R}_I \mathbf{T}_I \quad \mathbf{R}_I = \mathbf{1} + \frac{\sin \varphi_I}{\varphi_I} \boldsymbol{\Omega}_I + \frac{1 - \cos \varphi_I}{\varphi_I^2} \boldsymbol{\Omega}_I^2 \quad (8.64)$$

mit

$$\boldsymbol{\omega}_I = \begin{bmatrix} \omega_{1I} \\ \omega_{2I} \\ \omega_{3I} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\Omega}_I = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{3I} & \omega_{2I} \\ \omega_{3I} & 0 & -\omega_{1I} \\ -\omega_{2I} & \omega_{1I} & 0 \end{bmatrix} . \quad (8.65)$$

Dabei repräsentiert die Orientierung des axialen Vektors  $\boldsymbol{\omega}_I$  die Lage der Drehachse und  $\varphi_I = \|\boldsymbol{\omega}_I\|$  den Drehwinkel der Rotation.  $\boldsymbol{\Omega}_I$  ist der dem axialen Vektor  $\boldsymbol{\omega}_I$  zugeordnete, schiefsymmetrische Tensor.

Die Verschiebungen  $\mathbf{u}$ , die Basisvektoren  $\mathbf{t}$  und die elektrischen Freiheitsgrade  $\boldsymbol{\varphi} := [\varphi_N, \varphi_M]$  werden mit

$$\mathbf{u}^h = \sum_{I=1}^{nel} N_I(\xi) \mathbf{u}_I \quad \mathbf{t}^h = \sum_{I=1}^{nel} N_I(\xi) \mathbf{t}_I \quad \boldsymbol{\varphi}^h = \sum_{I=1}^{nel} N_I(\xi) \boldsymbol{\varphi}_I \quad (8.66)$$

wie auch schon die Geometrie unter Verwendung von Gleichung 8.61 interpoliert. Nach der Einführung eines generalisierten Vektors der Knotenfreiheitsgrade

$$\mathbf{v}_I = [\mathbf{u}, \mathbf{t}, \boldsymbol{\varphi}]_I^T \quad (8.67)$$

lässt sich die Variation von 8.66 in kompakter Schreibweise ausdrücken mit

$$\delta \mathbf{v}^h = \sum_{I=1}^2 \mathbf{N}_I \delta \mathbf{v}_I \quad . \quad (8.68)$$

Unter Anwendung der Kettenregel erhält man

$$N'_I(\xi) = \frac{\partial N_I(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{X}_0^h} \quad (8.69)$$

als Ableitung der Ansatzfunktion nach der Stabkoordinate  $S$ . Ersetzt man damit  $N_I(\xi)$  in den Gleichungen 8.62 und 8.63, ergeben sich die Tangentenvektoren  $\mathbf{X}'_0$  und  $\mathbf{x}'_0$  sowie die Ableitungen der Basisvektoren  $\mathbf{T}'$  und  $\mathbf{t}'$  nach der Stabkoordinate  $S$ .

Die numerische Approximation (Index h) von  $\delta \varepsilon_g$  gemäß Gleichung 8.24 erfolgt unter Verwendung der Matrix  $\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2]$  mit

$$\delta \varepsilon_g^h = \sum_{I=1}^{nel} \mathbf{B}_I \delta \mathbf{v}_I \quad \mathbf{B}_I = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{B}}_I \end{bmatrix} . \quad (8.70)$$

Die Teilmatrix  $\bar{\mathbf{B}}_I$  entspricht derjenigen einer rein mechanischen Stabformulierung und ist zum Beispiel in WACKERFUSS & GRUTTMANN [117] gegeben. Der elektrische Teil wird mit

$$\bar{\mathbf{B}}_I = \begin{bmatrix} -N_I, \xi_1 & 0 \\ 0 & -N_I, \xi_1 \\ 0 & -N_I \end{bmatrix} \quad (8.71)$$

berücksichtigt.

#### 8.4.2 Interpolation der Spannungen und der dielektrischen Verschiebungen

Im Rahmen dieser gemischten Elementformulierung gehen neben Verschiebungsansätzen auch Ansätze für die Spannungen, dielektrischen Verschiebungen, Verzerrungen und das elektrische Feld in das Randwertproblem ein. Diese Ansätze sind zwar unabhängig, jedoch müssen, um die numerische Stabilität der Elementformulierung zu gewährleisten, bezüglich ihrer Anzahl und Konstruktion verschiedene Aspekte berücksichtigt werden, vgl. BREZZI & FORTIN [25].

In Form des Vektors

$$\boldsymbol{\sigma}^h = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^h \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}^h \end{bmatrix} = \mathbf{N}_\sigma \hat{\boldsymbol{\sigma}} \quad \mathbf{N}_\sigma = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} \end{bmatrix} \quad (8.72)$$

werden die Stabschnittgrößen  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  und stabbezogenen, dielektrischen Verschiebungen  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  auf Elementebene approximiert, wobei

$$\mathbf{N}_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} = [\mathbf{1}_6] \quad \mathbf{N}_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} = [\mathbf{1}_3] \quad (8.73)$$

gilt und in Form der neun Komponenten des Vektors  $\hat{\sigma}$  jedem Ansatz in  $\mathbf{N}_\sigma$  und  $\mathbf{N}_\sigma$  jeweils eine skalare Unbekannte zugeordnet ist. Da diese Unbekannten den elementbezogenen Ansätzen und nicht den Knoten zugeordnet sind, ist der Verlauf der Komponenten von  $\sigma^h$  an den Elementgrenzen nicht stetig.

### 8.4.3 Interpolation der Verzerrungen und des elektrischen Feldes

Die Stabverzerrungen und das elektrische Feld werden durch

$$\boldsymbol{\varepsilon}^h = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1^h \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2^h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^h, \vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^h]^T \\ [\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_2^h, \vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_2^h]^T \end{bmatrix} = \mathbf{N}_\varepsilon \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 \\ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_2 \end{bmatrix}, \quad (8.74)$$

$$\mathbf{N}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_\varepsilon^{11} & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{N}_\varepsilon^{22} \end{bmatrix} \quad \mathbf{N}_\varepsilon^{11} = \mathbf{N}_\sigma \quad \mathbf{N}_\varepsilon^{22} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_\varepsilon^{22} & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{N}_\varepsilon^{22} \end{bmatrix}, \quad (8.75)$$

$$\mathbf{N}_\varepsilon^{22} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}'_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{N}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N}_3 \end{bmatrix}_{\bar{M} \times \bar{M}} \quad \mathbf{N}_\varepsilon^{22} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_4 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_5 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N}_6 \end{bmatrix}_{\vec{M} \times \vec{M}} \quad (8.76)$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_1 &= [N_1 \mathbf{1}_{\bar{M}_1 \times \bar{M}_1}, N_2 \mathbf{1}_{\bar{M}_1 \times \bar{M}_1}] & \mathbf{N}_4 &= \mathbf{1}_{\vec{M}_1 \times \vec{M}_1} \\ \mathbf{N}'_1 &= [N'_1 \mathbf{1}_{\bar{M}_1 \times \bar{M}_1}, N'_2 \mathbf{1}_{\bar{M}_1 \times \bar{M}_1}] & \mathbf{N}_5 &= \mathbf{1}_{\vec{M}_2 \times \vec{M}_2} \\ \mathbf{N}_2 &= \mathbf{1}_{\bar{M}_2 \times \bar{M}_2} & \mathbf{N}_6 &= \mathbf{1}_{\vec{M}_3 \times \vec{M}_3} \\ \mathbf{N}_3 &= \mathbf{1}_{\bar{M}_3 \times \bar{M}_3} \end{aligned} \quad (8.77)$$

approximiert. Die Interpolation des ersten Teils  $\boldsymbol{\varepsilon}_1^h$  ist identisch mit der Interpolation von  $\sigma^h$  nach Gleichung 8.72 mit neun unbekannt Parametern in  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1$ . Der zweite Teil  $\boldsymbol{\varepsilon}_2^h$  ist in Verbindung mit den Ansätzen in  $\mathbf{N}_\varepsilon^{22}$  und  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_2 \in \mathbb{R}^M$  mit  $M = \bar{M} + \vec{M}$  Unbekannten verbunden. Da die Ansätze für die Stabverzerrungen und das elektrische Feld auch elementbezogen sind, ist der Verlauf der Komponenten von  $\boldsymbol{\varepsilon}^h$  nicht kontinuierlich an den Elementgrenzen.

#### 8.4.4 Approximation der schwachen Form des Randwertproblems

Setzt man alle Interpolationen in die Linearisierung der schwachen Form des Randwertproblems nach Gleichung 8.56 ein, erhält man mit

$$L[g(\boldsymbol{\theta}^h, \delta\boldsymbol{\theta}^h), \Delta\boldsymbol{\theta}^h] = \sum_{e=1}^{numel} \begin{bmatrix} \delta\mathbf{v} \\ \delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \delta\hat{\boldsymbol{\sigma}} \end{bmatrix}_e^T \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{K}_g & \mathbf{0} & \mathbf{G}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{H} & -\mathbf{F} \\ \mathbf{G} & -\mathbf{F}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{v} \\ \Delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \Delta\hat{\boldsymbol{\sigma}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{f}^i - \mathbf{f}^a \\ \mathbf{f}^s \\ \mathbf{f}^e \end{bmatrix} \right\}_e \quad (8.78)$$

die Finite-Elemente-Approximation als Summe über alle *numel* Stabelemente, die man zur räumlichen Diskretisierung der Struktur verwendet.

Die dabei verwendeten Symbole sind durch

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_g &= \int_{(S)} \mathbf{K}_\sigma \, dS & \mathbf{f}^i &= \int_{(S)} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^h \, dS = \mathbf{G}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}} \\ \mathbf{H} &= \int_{(S)} \mathbf{N}_\varepsilon^T \mathbf{D} \mathbf{N}_\varepsilon \, dS & \mathbf{f}^e &= \int_{(S)} \mathbf{N}_\varepsilon^T \partial_\varepsilon W \, dS - \mathbf{F} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \\ \mathbf{F} &= \int_{(S)} \mathbf{N}_\varepsilon^T \tilde{\mathbf{N}}_\sigma \, dS & \mathbf{f}^s &= \int_{(S)} \mathbf{N}_\sigma^T \boldsymbol{\varepsilon}_g^h \, dS + \mathbf{F}^T \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \mathbf{G} &= \int_{(S)} \mathbf{N}_\sigma^T \mathbf{B} \, dS \end{aligned} \quad (8.79)$$

definiert. Mit  $\tilde{\mathbf{N}}_\sigma = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_\sigma \\ \mathbf{0}_{M \times 9} \end{bmatrix}$  gilt die Zerlegung

$$\mathbf{F} = \int_{(S)} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_\varepsilon^{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_\varepsilon^{22} \end{bmatrix}^T \tilde{\mathbf{N}}_\sigma \, dS = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} . \quad (8.80)$$

Die Matrix

$$\mathbf{K}_\sigma = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\bar{\sigma}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{\bar{\sigma}} \end{bmatrix} \quad (8.81)$$

ergibt sich durch Diskretisierung von  $\Delta\delta\boldsymbol{\varepsilon}_g$  gemäß Gleichung 8.59, wobei wegen  $\Delta\delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_g = \mathbf{0}$  unmittelbar  $\mathbf{K}_{\bar{\sigma}} = \mathbf{0}$  folgt. Die nur auf dem mechanischen Teil der Stabkinematik basierende Matrix  $\mathbf{K}_{\bar{\sigma}}$  wird in WACKERFUSS & GRUTTMANN [117] abgeleitet.

Für die Unbekannten  $\Delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = [\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_2]^T$  und  $\Delta\boldsymbol{\sigma}$  wird keine Stetigkeit an den Elementengrenzen gefordert. Hiermit reduziert sich bei beliebigen, kinematisch zulässigen Variationen  $\delta\boldsymbol{\theta} \neq \mathbf{0}$  die Gleichung 8.78 für  $L[g(\boldsymbol{\theta}^h, \delta\boldsymbol{\theta}^h, \Delta\boldsymbol{\theta}^h)] = 0$  auf

$$L[g(\boldsymbol{\theta}^h, \delta\boldsymbol{\theta}^h), \Delta\boldsymbol{\theta}^h] = \sum_{e=1}^{numel} \delta\mathbf{v}_e^T \left\{ \mathbf{K}_g \Delta\mathbf{v} + \mathbf{G}^T \Delta\hat{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{f}^i - \mathbf{f}^a \right\}_e = 0 \quad (8.82)$$

unter den auf Elementebene zu erfüllenden Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \mathbf{H}\Delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{F}\Delta\hat{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{f}^e &= \mathbf{0} \\ \mathbf{G}\Delta\mathbf{v} - \mathbf{F}^T\Delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{f}^s &= \mathbf{0} \quad . \end{aligned} \quad (8.83)$$

Mit Gleichung 8.80 und den Zerlegungen

$$\mathbf{H}_{\alpha\beta} = \int_{(S)} \mathbf{N}_\varepsilon^{\alpha\alpha T} \mathbf{D}_{\alpha\beta} \mathbf{N}_\varepsilon^{\beta\beta} dS \quad \mathbf{f}_\alpha^e = \int_{(S)} \mathbf{N}_\varepsilon^{\alpha\alpha T} (\partial_\varepsilon W - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^h) dS \quad (8.84)$$

geht Gleichung 8.83<sub>1</sub> über in das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} \\ \mathbf{H}_{21} & \mathbf{H}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 \\ \Delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \Delta\hat{\boldsymbol{\sigma}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^e \\ \mathbf{f}_2^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (8.85)$$

und es folgt aus dessen zweiter Gleichung

$$\Delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_2 = \mathbf{H}_{22}^{-1} (-\mathbf{f}_2^e - \mathbf{H}_{21} \Delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1) \quad . \quad (8.86)$$

Setzt man Gleichung 8.86 in Gleichung 8.85<sub>1</sub> ein, erhält man

$$\bar{\mathbf{H}}_{11} \Delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 - \mathbf{F}_1 \Delta\hat{\boldsymbol{\sigma}} + \bar{\mathbf{f}}_1^e = \mathbf{0} \quad (8.87)$$

mit

$$\bar{\mathbf{H}}_{11} = \mathbf{H}_{11} - \mathbf{H}_{12} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{H}_{21} \quad \bar{\mathbf{f}}_1^e = \mathbf{f}_1^e - \mathbf{H}_{12} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{f}_2^e \quad . \quad (8.88)$$

Aus Gleichung 8.83<sub>2</sub> folgt mit Gleichung 8.80

$$\mathbf{G}\Delta\mathbf{v} - \mathbf{F}_1^T \Delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 + \mathbf{f}^s = \mathbf{0} \quad (8.89)$$

und daraus

$$\Delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 = \mathbf{F}_1^{-T} (\mathbf{G}\Delta\mathbf{v} + \mathbf{f}^s) \quad . \quad (8.90)$$

Nach Einsetzen von Gleichung 8.90 in Gleichung 8.87 erhält man durch Umformung

$$\Delta\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\mathbf{H}} \mathbf{G} \Delta\mathbf{v} + \hat{\mathbf{H}} \mathbf{f}^s + \mathbf{F}_1^{-1} \bar{\mathbf{f}}_1^e \quad (8.91)$$

mit

$$\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{F}_1^{-1} \bar{\mathbf{H}}_{11} \mathbf{F}_1^{-T} \quad . \quad (8.92)$$

Durch Einsetzen von Gleichung 8.91 in Gleichung 8.82 ergibt sich

$$L[g(\boldsymbol{\theta}^h, \delta\boldsymbol{\theta}^h), \Delta\boldsymbol{\theta}^h] = \sum_{e=1}^{numel} \delta\mathbf{v}_e^T \{ \mathbf{K}_T^e \Delta\mathbf{v} + \hat{\mathbf{f}}^e \} = 0 \quad , \quad (8.93)$$

worin man die Elementsteifigkeitsmatrix mit

$$\mathbf{K}_T^e = \mathbf{G}^T \hat{\mathbf{H}} \mathbf{G} + \mathbf{K}_g \quad (8.94)$$

und den Elementresiduumsvektor mit

$$\hat{\mathbf{f}}^e = \mathbf{G}^T (\hat{\boldsymbol{\sigma}} + \hat{\mathbf{H}} \mathbf{f}^s + \mathbf{F}_1^{-1} \bar{\mathbf{f}}_1^e) - \mathbf{f}_a \quad (8.95)$$

identifiziert.



## 9 Numerische Beispiele - Piezoelektrische Stabformulierung

Mit den folgenden numerischen Beispielen werden die piezoelektrische Stabformulierung überprüft und die Verbesserungen der Berechnungsergebnisse durch die Verwendung ausgewogener Approximationsräume herausgestellt. Dies erfolgt exemplarisch für die in der Praxis am häufigsten verwendete Polungsart in Dickenrichtung.

In Abschnitt 7.1 wird die Untersuchung von Strukturen mit dem piezoelektrischen Schalenelement beschrieben. Eine Untersuchung dieser Strukturen mit dem piezoelektrischen Stabelement liefert bei identischer Wahl interner Ansätze für die elektrischen Feldgrößen dieselben Ergebnisse. Die Validierung der piezoelektrischen Stabformulierung soll jedoch insbesondere anhand von piezoelektrischen Strukturen mit stabtypischen Abmessungen gezeigt werden.

Im ersten Beispiel wird das Verhalten eines Kragarms numerisch untersucht, der im Sensorbetrieb einer Längsbeanspruchung, einachsiger Biegebeanspruchung, Querbeanspruchung oder Torsionsbeanspruchung und im Aktorbetrieb einer Beanspruchung durch ein elektrisches Feld  $\vec{E}_3$  in Dickenrichtung unterzogen wird. Zum Vergleich werden die jeweiligen analytischen Lösungen angegeben, weswegen hinsichtlich einer übersichtlichen Darstellung der Einfluss von Querkontraktion vernachlässigt wird.

Im Gegensatz zu klassischen Stabformulierungen erlaubt die vorgestellte piezoelektrische Stabformulierung die Berücksichtigung von Querkontraktion. Das zweite Beispiel ist dadurch motiviert, den Einfluss von Querkontraktion auf die elektromechanische Kopplung zu untersuchen.

Mit dem dritten Beispiel, bei dem die Berücksichtigung großer Rotationen und geometrischer Nichtlinearität von maßgeblicher Bedeutung ist, wird der Einfluss der elektromechanischen Kopplung sowohl ohne als auch mit Verwendung ausgewogener Approximationsräume an einem akademischen Beispiel visualisiert.

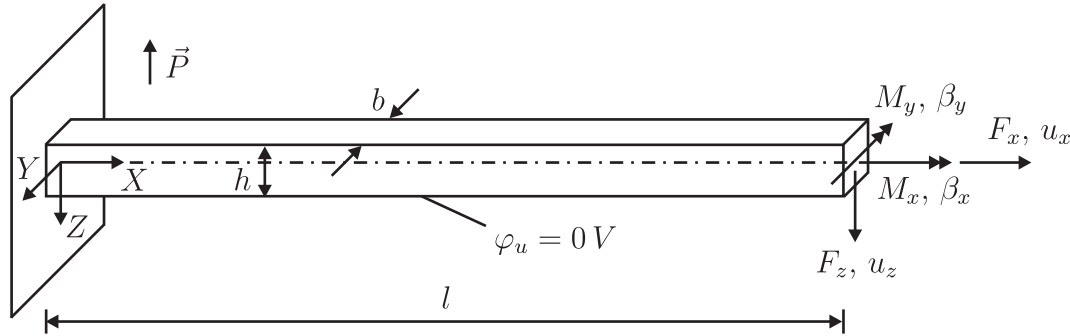
Im letzten Beispiel wird eine gekrümmte Stabstruktur in Form eines Kreisringsensors untersucht. Bei diesem tritt Quer- und Torsionsbeanspruchung kombiniert auf. Die Berechnungsergebnisse ohne und mit Verwendung abgestimmter Approximationsräume werden verglichen.

### 9.1 Piezoelektrische Patch-Tests

Um die piezoelektrische Stabformulierung zu verifizieren und um die Beseitigung parasitärer Approximationen durch die Verwendung elektromechanisch ab-

gestimmter Ansatzräume zu demonstrieren, wird eine an einem Ende eingespannte und in Dickenrichtung polarisierte piezoelektrische Stabstruktur betrachtet.

Diese wird im Sensorbetrieb jeweils separat für Längsbeanspruchung, einachsige Biegebeanspruchung, Querbeanspruchung und Torsionsbeanspruchung sowie im Aktorbetrieb für Beanspruchung durch ein elektrisches Feld  $\vec{E}_3$  in Dickenrichtung untersucht. Geometrie, Materialdaten, Beanspruchungen und Randbedingungen



Materialdaten:

$$\begin{aligned} E &= 123 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2 \\ G &= 61.5 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2 \\ e_{31} &= -5.0 \text{ C/m}^2 \\ e_{15} &= 5.0 \text{ C/m}^2 \\ \epsilon_{11} &= \epsilon_{33} = 12.5 \cdot 10^{-9} \text{ C}^2/\text{Nm}^2 \end{aligned}$$

Geometrie:

$$\begin{aligned} l &= 20 \text{ mm} \\ b &= 1 \text{ mm} \\ h &= 1 \text{ mm} \end{aligned}$$

**Abb. 9.1:** Geometrie, Materialdaten, Randbedingungen und Belastungen der piezoelektrischen Stabstruktur

sind in Abbildung 9.1 dargestellt. Der piezoelektrische Stab ist an der Unterseite geerdet ( $\varphi_u = 0 \text{ V}$ ), an der Einspannung sind alle mechanischen Freiheitsgrade gehalten. Um zugehörige analytische Lösungen für die Überprüfung der numerischen Ergebnisse einfacher ermitteln zu können, wird keine Querkontraktion berücksichtigt und isotropes Materialverhalten betrachtet. Die maßgeblichen Koppeleffekte werden durch diese Vereinfachungen nicht beeinträchtigt.

### 9.1.1 Längsbeanspruchung

Mit den gegebenen vereinfachten Materialdaten resultieren aus den konstitutiven Beziehungen die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} S^{11} &= E \cdot E_{11} - e_{31} \cdot \vec{E}_3 \\ \vec{D}^3 &= e_{31} \cdot E_{11} + \epsilon_{33} \cdot \vec{E}_3 \end{aligned} \quad (9.1)$$

Für die Belastung  $F_x = 10^3 N$  ergibt sich im Stab eine Spannung von  $S^{11} = 10^9 N/m^2$ . Mit den elektrischen Randbedingungen folgt  $\vec{D}^3 = 0 C/m^2$ , womit sich durch Auswertung von Gleichung 9.1 die Verzerrung in Längsrichtung zu  $E_{11} = 8.00 \cdot 10^{-3}$  und das elektrische Feld in Dickenrichtung zu  $\vec{E}_3 = 3.20 \cdot 10^6 V/m$  ergeben. Damit ist am freien Ende eine Verschiebung von  $u_x = 1.600 \cdot 10^{-4} m$  und an der Oberseite des Stabes ein elektrisches Potential von  $\varphi_o = 3.200 \cdot 10^3 V$  verbunden.

Die numerischen Ergebnissen stimmen damit überein. Die auftretenden Verläufe der elektrischen und mechanischen Felder können mit einem einzigen piezoelektrischen Stabelement und ohne Verwendung interner Ansätze für die elektrischen Feldkomponenten ( $\vec{M}_1 = \vec{M}_2 = \vec{M}_3 = 0$ ) abgebildet werden. Durch die Verwendung interner Ansätze für die elektrischen Feldkomponenten ( $\vec{M}_1 \geq 0, \vec{M}_2 \geq 0, \vec{M}_3 \geq 0$ ) wird die numerische Lösung nicht beeinflusst. Dies bedeutet, dass keine internen Ansätze für die vorliegende Beanspruchung aktiviert werden. Die den internen Ansätzen für die elektrischen Feldkomponenten zugeordneten Parameter ergeben sich in der numerischen Berechnung zu Null.

### 9.1.2 Einachsige Biegebeanspruchung

Die Beanspruchung des Kragarms mit  $M_y = 10 Nmm$  ist mit einer linear über die Dicke verlaufenden, über die Stablänge konstanten Spannung  $S^{11} = -1.20 \cdot 10^8 \cdot \frac{Z}{h} N/m^2$  verbunden. Damit erhält man durch Auswertung von Gleichung 9.1 mit  $\vec{D}_3 = 0 C/m^2$  für die Verzerrung in Längsrichtung  $E_{11} = -0.96 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{Z}{h}$  und für das elektrische Feld in Dickenrichtung  $\vec{E}_3 = -3.84 \cdot 10^5 \cdot \frac{Z}{h} V/m$ . Aus Integration folgt mit der elektrischen Randbedingung  $\varphi_u = 0 V$  für den Verlauf des elektrischen Potentials  $\varphi(Z) = 1.92 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{Z^2}{h^2} V - 4.8 \cdot 10^{-7} V$  und damit  $\varphi_o = 0 V$  über die gesamte Stablänge. Mit  $E_{11}$  ergibt sich unter Verwendung der kinematischen Beziehungen und geometrischen Randbedingungen aus Integration die Durchbiegung zu  $w(X) = 1.92 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{X^2}{l^2} m$  und die vertikale Verschiebung der Kragarmspitze zu  $u_z = w(l) = 1.92 \cdot 10^{-4} m$ .

Auch bei dieser Beanspruchung ist die Diskretisierung mit einem einzigen piezoelektrischen Stabelement ausreichend, um die auftretenden mechanischen Felder approximieren zu können. In Tabelle 9.1 sind die numerischen Ergebnisse für die vertikale Verschiebung der Kragarmspitze und das elektrische Potential  $\varphi_o$  an der Oberseite angegeben. Ohne Verwendung eines linearen, internen Ansatzes für die elektrische Feldkomponente in Dickenrichtung ( $\vec{M}_3 = 0$ ) kann  $\vec{E}_3$  gemäß den kinematischen Annahmen nach Gleichung 8.13 nur konstant über die Dicke approximiert werden. Dies bedeutet, dass die Ansatzräume nicht elektromechanisch abgestimmt sind, da der lineare Verlauf von  $E_{11}$  und der konstante Verlauf

	$\vec{M}_3 = 0$	$\vec{M}_3 \geq 1$	analytisch
$u_z$ [m]	$1.951 \cdot 10^{-4}$	$1.920 \cdot 10^{-4}$	$1.920 \cdot 10^{-4}$
$\varphi_o$ [V]	0	0	0

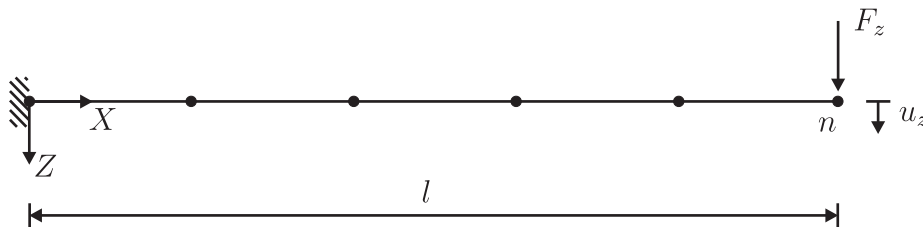
**Tab. 9.1:** Analytische und numerische Ergebnisse für die vertikale Verschiebung  $u_z$  an der Kragarmspitze und das elektrische Potential  $\varphi_o$  an der Staboberseite mit ( $\vec{M}_3 \geq 1$ ) und ohne ( $\vec{M}_3 = 0$ ) interne Ansätze für das elektrische Feld

von  $\vec{E}_3$  über das Stoffgesetz gekoppelt sind. Eine parasitäre Approximation des elektrischen Potentials ist in diesem Fall jedoch nicht zu beobachten, da sich das elektrische Potential an der Oberseite zu  $\varphi_o = 0 V$  ergibt und damit der analytischen Lösung entspricht. Wegen  $\varphi_o = 0 V$  und  $\varphi_u = 0 V$  wird über die elektrischen Knotenfreiheitsgrade kein Gradient des elektrischen Potentials abgebildet, womit ohne internen Ansatz ( $\vec{M}_3 = 0$ ) das elektrische Feld zu Null approximiert wird. Die vertikale Verschiebung  $u_z$  der Kragarmspitze entspricht daher der Lösung für den rein mechanischen Fall.

Mit linearem, internen Ansatz für die elektrische Feldkomponente in Dickenrichtung ( $\vec{M}_3 = 1$ ) wird  $\vec{E}_3$  korrekt approximiert und die vertikale Verschiebung  $u_z$  an der Kragarmspitze stimmt mit der analytischen Lösung überein. Die Verwendung von Ansätzen höherer Ordnung ( $\vec{M}_1 > 0$ ,  $\vec{M}_2 > 0$ ,  $\vec{M}_3 > 1$ ) wirkt sich nicht auf die Berechnungsergebnisse aus.

### 9.1.3 Querbeanspruchung

Infolge einer Querlast  $F_z = 10 N$  ist die Krümmung in Längsrichtung linear veränderlich. Um dies approximieren zu können, ist der Kragarm mit mehreren Elementen zu diskretisieren, vgl. Abbildung 9.2. Bei einer geometrisch linearen Be-



**Abb. 9.2:** Diskretisierung des Kragarms mit  $n - 1$  piezoelektrischen Stabelementen

trachtung ergibt sich die analytische Lösung für die vertikale Verschiebung der Kragarmspitze zu  $u_z = 2.5638 \cdot 10^{-3} m$  (vgl. ANHANG C) und für das elektrische Potential an der Oberseite des Kragarms zu  $\varphi_o = 0 V$ . Für den unpolarisierten

Zustand entspricht die Verformung dem rein mechanischen Fall mit der vertikalen Verschiebung  $u_z^* = 2.6055 \cdot 10^{-3} m$  des freien Endes.

In Form der vertikalen Verschiebung  $u_z^{\{n\}}$  und des elektrischen Potentials an der Oberseite  $\varphi_o^{\{n\}}$  am Knoten  $n$  sind in Tabelle 9.2 die Ergebnisse der numerischen Berechnung bei unterschiedlichen Diskretisierungen und unter Verwendung von  $\vec{M}_1$  und  $\vec{M}_3$  internen Ansätzen für die elektrischen Feldkomponenten  $\vec{E}_1$  und  $\vec{E}_3$  angegeben. An der grafischen Darstellung der Ergebnisse in den Abbildungen

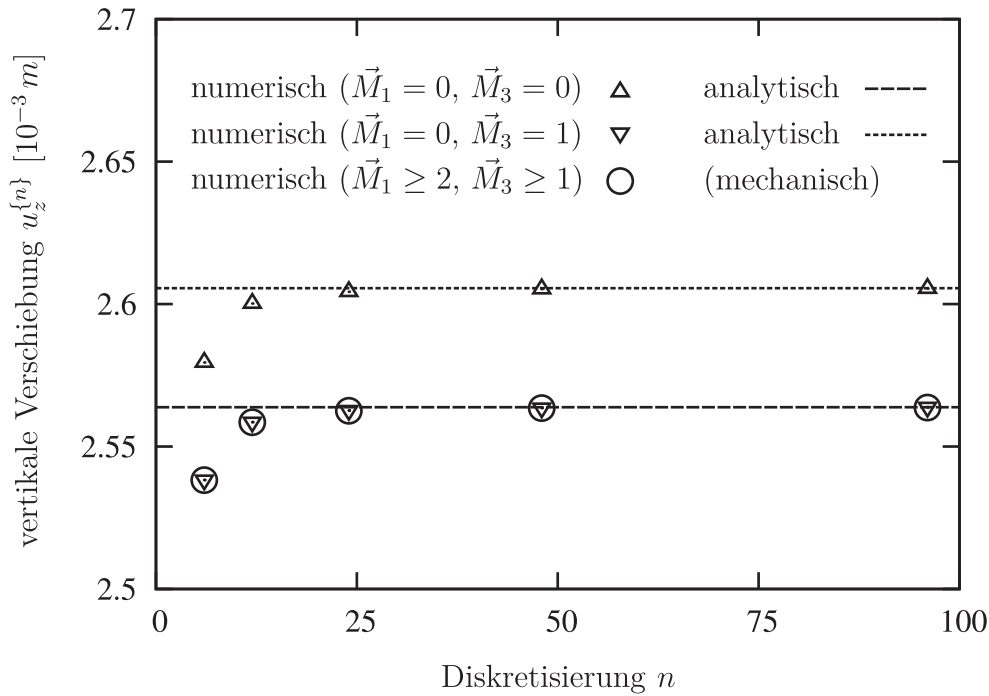
	$\vec{M}_1 = 0, \vec{M}_3 = 0$		$\vec{M}_1 = 0, \vec{M}_3 \geq 1$		$\vec{M}_1 \geq 2, \vec{M}_3 \geq 1$	
$n$	$u_z^{\{n\}}$	$\varphi_o^{\{n\}}$	$u_z^{\{n\}}$	$\varphi_o^{\{n\}}$	$u_z^{\{n\}}$	$\varphi_o^{\{n\}}$
	$[10^{-3} m]$	$[V]$	$[10^{-3} m]$	$[V]$	$[10^{-3} m]$	$[V]$
6	2.5795	-60.7721	2.5383	-60.7721	2.5382	0
12	2.6002	-54.9875	2.5586	-54.9875	2.5585	0
24	2.6043	-54.9875	2.5627	-54.9875	2.5626	0
48	2.6052	-54.9875	2.5636	-54.9875	2.5635	0
96	2.6055	-54.9875	2.5638	-54.9875	2.5637	0

**Tab. 9.2:** Numerische Ergebnisse für die Durchbiegung  $u_z^{\{n\}}$  und das elektrische Potential  $\varphi_o^{\{n\}}$  an der Kragarmspitze bei unterschiedlichen Diskretisierungen und verschiedenen internen Ansätzen  $\vec{M}_1$  und  $\vec{M}_3$  für das elektrische Feld

9.3 und 9.4 wird deutlich, dass die vertikale Verschiebung  $u_z^{\{n\}}$  ohne Verwendung interner Ansätze ( $\vec{M}_1 = 0, \vec{M}_3 = 0$ ) überschätzt wird. Sie konvergiert bei Netzverfeinerung gegen die analytische Lösung des rein mechanischen und nicht gegen die analytische Lösung des elektromechanischen Problems. Die parasitären Approximationen des elektrischen Potentials sind mit zunehmender Elementanzahl zunächst rückläufig, verändern sich bei weiterer Netzverfeinerung jedoch nicht mehr signifikant. Mit internen Ansätzen ( $\vec{M}_1 = 0, \vec{M}_3 = 1$ ) für eine lineare Verteilung der elektrischen Feldkomponenten  $\vec{E}_3$  liegt die berechnete Durchbiegung  $u_z^{\{n\}}$  wesentlich näher an der analytischen Lösung, da die lineare Verteilung von  $\vec{E}_3$  den bei dieser Beanspruchung über die Dicke quadratischen Verlauf des elektrischen Potentials repräsentiert.

Damit sowohl die Durchbiegung gegen die analytische Lösung des elektromechanischen Problems konvergiert und gleichzeitig kein parasitäres Potential approximiert wird, ist  $\vec{M}_1 = 2, \vec{M}_3 = 1$  zu wählen. Hiermit sind die Approximationsräume der mechanischen und elektrischen Felder ausgewogen (vgl. Tabelle 4.1), wodurch kein parasitäres elektrisches Potential mehr approximiert wird.

Da sich die zugeordneten Parameter für interne Ansätze höherer Ordnung ( $\vec{M}_1 > 2, \vec{M}_3 > 1$ ) während der Berechnung zu Null ergeben, werden diese nicht aktiviert



**Abb. 9.3:** Grafische Darstellung der berechneten vertikalen Durchbiegungen  $u_z^{\{n\}}$  nach Tabelle 9.2 und der analytischen Lösungen  $u_z$  und  $u_z^*$  für den elektromechanischen und mechanischen Fall

und sind ohne Einfluss auf die numerischen Ergebnisse.

### 9.1.4 Torsionsbeanspruchung

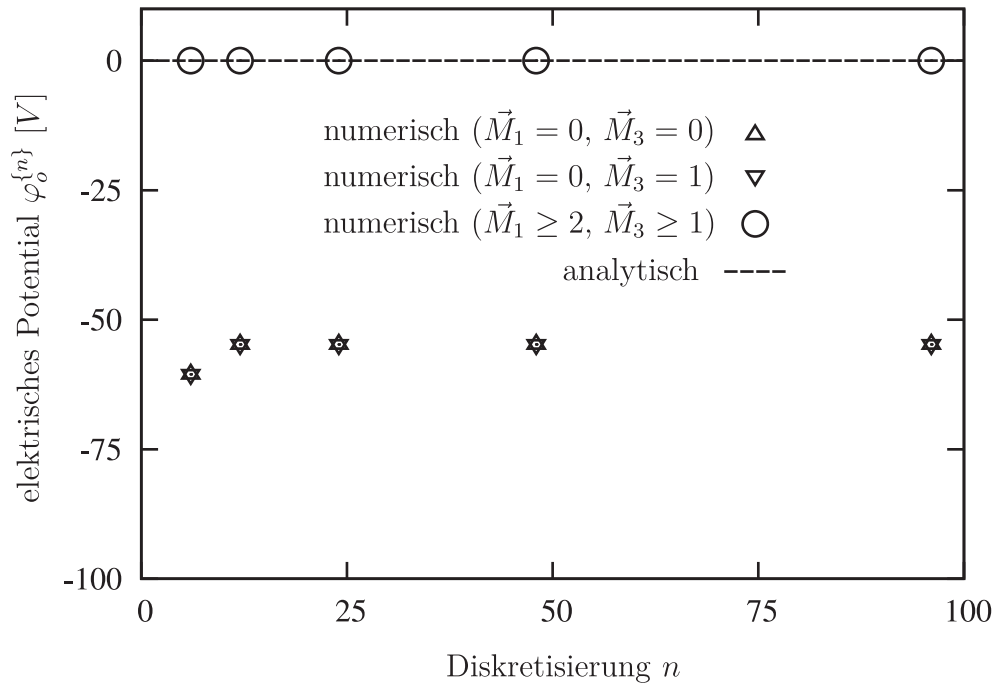
Da sich bei Torsionsbeanspruchung ohne Wölbbehinderung in Analogie zu einer Beanspruchung durch Normalkraft die mechanischen und elektrischen Feldgrößen in Längsrichtung nicht ändern, kann die Diskretisierung des Kragarms mit einem einzigen Stabelement vorgenommen werden.

Die analytische Lösung für den unpolarisierten Zustand entspricht der mechanischen Lösung des Torsionsproblems. Für den Torsionswiderstand eines Rechteckquerschnitts der Breite  $b$  und der Höhe  $h$  gilt

$$I_T = \frac{b^3 h}{3} \left[ 1 - \frac{192 b}{\pi^5 h} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^5} \tanh \frac{(2n+1)\pi h}{2b} \right] \quad . \quad (9.2)$$

Damit ergibt sich für den hier betrachteten quadratischen Querschnitt mit  $b = h = 1 \text{ mm}$  als Torsionswiderstand  $I_T = 0.14058 \text{ mm}^4$ . Die Verdrehung am freien Ende infolge der Belastung  $M_x = 10 \text{ Nm}$  berechnet sich damit zu

$$\tilde{\beta}_x = \frac{M_x \cdot l}{G \cdot I_T} = 2.31335 \cdot 10^{-2} \quad . \quad (9.3)$$



**Abb. 9.4:** Grafische Darstellung des berechneten elektrischen Potentials an der Oberseite  $\varphi_o^{\{n\}}$  nach Tabelle 9.2 und der analytischen Lösung für  $\varphi_o$

Mit zunehmender Polynomordnung der internen Ansätze für die mechanischen Feldgrößen konvergiert das numerische Ergebnis für die Verdrehung und die Approximation des Querschnittskennwertes  $I_T$  gegen die analytische Lösung gemäß Gleichung 9.2 und Gleichung 9.3. Mit  $\bar{M}_1 = 5, \bar{M}_2 = 1, \bar{M}_3 = 0$  wird die Verwölbung bereits sehr gut abgebildet. Hiermit ergibt sich die Verdrehung am freien Ende im unpolarisierten Zustand zu

$$\beta_x = 2.31323 \cdot 10^{-2} \quad . \quad (9.4)$$

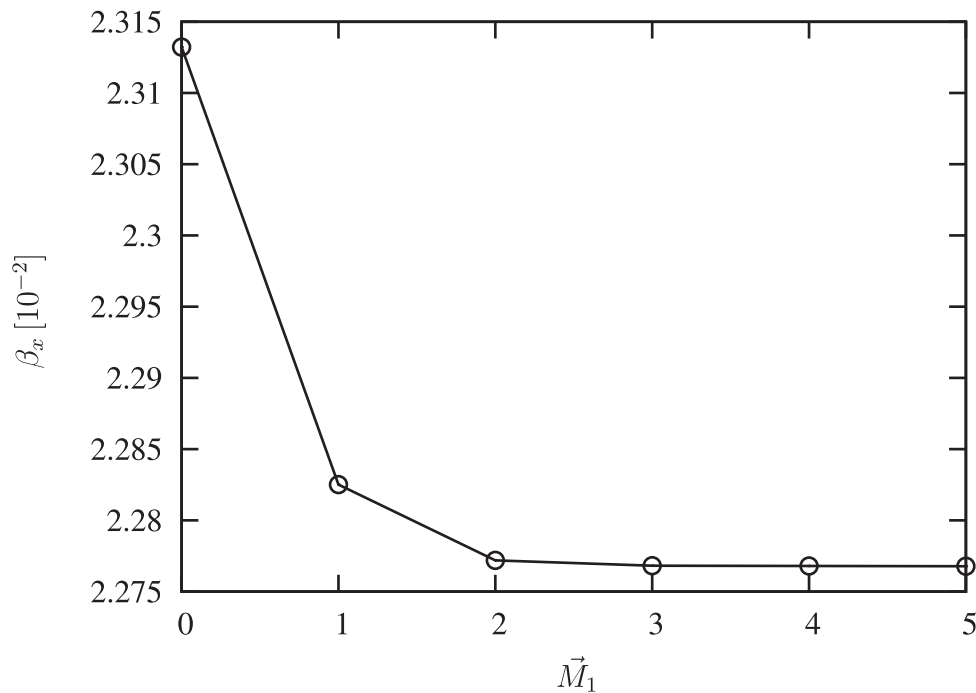
Wie in den vorherigen Beispielen gezeigt wurde, ist auch die Verwendung von höheren internen Ansätzen für die elektrischen Feldgrößen als zur Abbildung der physikalischen Gegebenheiten benötigt ohne Auswirkung auf das Ergebnis. Da keine analytische Lösung für einen piezoelektrischen Torsionssensor bekannt ist, soll diese Eigenschaft zur Validierung herangezogen werden, indem der Polynomgrad der internen Ansätze für das elektrische Feld sukzessive erhöht wird, bis sich die numerischen Ergebnisse nicht mehr ändern.

Die Ergebnisse für die Verdrehung der Kragarmspitze sind in Tabelle 9.3 und Abbildung 9.5 in Abhängigkeit vom Polynomgrad der internen Ansätze für das elektrische Feld dargestellt. Da die Torsionsbeanspruchung nur die Verzerrungen  $E_{12}$  und  $E_{13}$  hervorruft und für die betrachtete Polarisierung lediglich  $E_{13}$  über

$\vec{M}_1$	$\vec{M}_2 = \vec{M}_3$	$\beta_x [10^{-2}]$	$\varphi_o [V]$
0	$\geq 0$	2.31323	0
1	$\geq 0$	2.28250	0
2	$\geq 0$	2.27720	0
3	$\geq 0$	2.27681	0
4	$\geq 0$	2.27679	0
5	$\geq 0$	2.27678	0

**Tab. 9.3:** Numerische Ergebnisse für die axiale Verdrehung  $\beta_x$  der Kragarmspitze und das elektrische Potential  $\varphi_o$  an der Staboberseite in Abhängigkeit von verschiedenen internen Ansätzen für die elektrischen Feldkomponenten

die konstitutive Beziehung mit der Komponenten  $\vec{E}_1$  des elektrischen Feldes gekoppelt ist, sind interne Ansätze für  $\vec{E}_2$  und  $\vec{E}_3$  ( $\vec{M}_2 > 0, \vec{M}_3 > 0$ ) ohne Einfluss. Ohne internen Ansatz für die elektrische Feldkomponente  $\vec{E}_1$  ( $\vec{M}_1 = 0$ ) entspricht



**Abb. 9.5:** Grafische Darstellung der berechneten Verdrehung  $\beta_x$  der Kragarmspitze in Abhängigkeit vom Polynomgrad  $\vec{M}_1$  der internen Ansätze für die elektrische Feldkomponente  $\vec{E}_1$

die numerische Lösung für die Verdrehung der Kragarmspitze der mechanischen Lösung, vgl. Gleichung 9.4. Mit zunehmendem Polynomgrad für  $\vec{E}_1$  wird die berechnete Verdrehung immer kleiner, da mehr und mehr Energie elektrisch ge-



speichert wird. Mit dem Polynomgrad  $\vec{M}_1 = 5$  sind die Approximationsräume ausgewogen.

Die Ergebnisse zeigen, dass bei dem hier untersuchten Torsionssensor bei geerdeter Unterseite ( $\varphi_u = 0$ ) und Polarisierung in Dickenrichtung auch bei inkonsistenten Approximationsräumen ( $\vec{M}_1 < 5$ ) mit der Ergebnisgröße  $\varphi_o = 0$  kein parasitäres Potential an der Oberseite approximiert wird, vgl. Tabelle 9.3. Wegen der Randbedingung  $\varphi_u = 0$  ist mit dem Ergebniswert  $\varphi_o = 0$  allerdings verbunden, dass ohne interne Ansätze überhaupt kein elektrisches Feld approximiert wird, was für  $\vec{M}_1 = 0$  die Übereinstimmung mit der mechanischen Lösung erklärt. Da der Verlauf der mit  $\vec{E}_1$  gekoppelten Verzerrung  $E_{13}$  von höherer Ordnung ist, sind die Approximationsräume ohne interne Ansätze für das elektrische Feld nicht ausgewogen. Damit ist verbunden, dass  $\vec{E}_1$  nur unzureichend approximiert wird, womit bei der Verwendung elektromechanisch inkonsistenter Approximationsräume die Verdrehung der Kragarmspitze um 1.6% überschätzt wird.

### 9.1.5 Beanspruchung durch ein elektrisches Feld

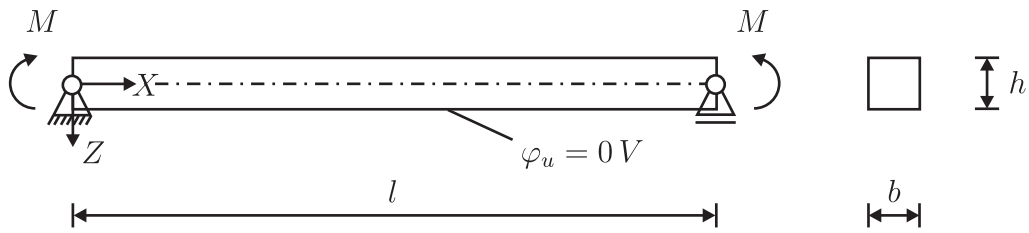
Mit den Randbedingungen  $\varphi_u = 0 V$  und  $\varphi_o = 1000 V$  wird als Belastung ein elektrisches Feld in Dickenrichtung  $\vec{E}_3 = -\frac{\varphi_o - \varphi_u}{h} = 10^6 V/m$  aufgebracht. Hiermit folgt wegen  $S^{11} = 0 N/m^2$  aus Gleichung 9.1 für die Dehnung in Längsrichtung  $E_{11} = 4.065 \cdot 10^{-5}$  und als dielektrische Verschiebung  $\vec{D}^3 = 1.270 \cdot 10^{-2} C/m^2$ . Für die horizontale Verschiebung des freien Endes ergibt sich  $u_x = 8.130 \cdot 10^{-7} m$ .

Sowohl mit als auch ohne die Verwendung von internen Ansätzen ( $\vec{M}_1 \geq 0$ ,  $\vec{M}_2 \geq 0$ ,  $\vec{M}_3 \geq 0$ ) für die elektrischen Feldkomponenten liefert das piezoelektrische Stabelement mit der analytischen Lösung übereinstimmende Ergebnisse.

## 9.2 Piezoelektrischer Stab auf zwei Stützen

Mit der vorgestellten piezoelektrischen Stabformulierung lässt sich im Gegensatz zu herkömmlichen Stabformulierungen auch der Einfluss von Querkontraktion berücksichtigen. Wird das elektrische Potential nicht von ausreichend hoher Ordnung approximiert, treten für piezoelektrische Strukturen Berechnungsfehler auf. Dieses Beispiel zeigt, dass diese Berechnungsfehler größer sind, wenn Querkontraktion berücksichtigt wird - dies macht eine Approximation des elektrischen Feldes mit Ansätzen ausreichend hoher Ordnung umso wichtiger.

Untersucht wird ein piezoelektrischer Stab auf zwei Stützen, der in Dickenrichtung polarisiert ist und durch Endmomente  $M = 10^{-3} Nm$  belastet wird, siehe



Materialdaten:

$$\begin{aligned}
 E &= 78.50 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2 \\
 G &= 39.25 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2 \\
 e_{31} &= -4.10 \text{ C/m}^2 \\
 \epsilon_{33} &= 5.84 \cdot 10^{-9} \text{ C}^2/\text{Nm}^2
 \end{aligned}$$

Geometrie:

$$\begin{aligned}
 l &= 20 \text{ mm} \\
 b &= 1 \text{ mm} \\
 h &= 1 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

**Abb. 9.6:** Geometrie, Belastung und vereinfachte Materialdaten

Abbildung 9.6. Der Stab ist an der Unterseite geerdet ( $\varphi_u = 0 \text{ V}$ ). Am linken Ende sind alle Verschiebungen und die Verdrehung  $\omega_x$  gehalten, am rechten Ende die Verschiebungen  $u_y$  und  $u_z$ . Mit der Belastung ist eine Verteilung von  $E_{11}$  und  $\vec{E}_3$  linear über die Dicke und konstant in Stabrichtung verbunden. Der Verlauf des elektrischen Potentials ist damit quadratisch über die Dicke, konstant in Längsrichtung und nimmt an der Oberseite den Wert Null an.

Ohne Berücksichtigung von Querkontraktion wurde dieses Beispiel erstmals in WANG & QUEK [120] untersucht und auf Basis der in Abbildung 9.6 gegebenen, vereinfachten Materialdaten eine analytische Lösung für die Verteilung des elektrischen Potentials über die Dicke abgeleitet. Die numerische Lösung in BUTZ et al. [29] im Rahmen der Validierung einer piezoelektrischen Stabformulierung stimmt mit der analytischen Lösung nach WANG & QUEK [120] überein. Für eine vergleichende Untersuchung mit der vorgestellten piezoelektrischen Stabformulierung wird als Maß für die Deformation die in BUTZ et al. [29] gegebene, zugehörige vertikale Verschiebung in Stabmitte  $u_z^{max}$  herangezogen. Analog zum Vorgehen in der Literatur wird die Struktur mit 20 Stabelementen diskretisiert. Wie die

$\nu = 0$	$u_z^{max} [10^{-6} \text{ m}]$	$\varphi_o [V]$
Piezoelektrischer Stab ( $\vec{M}_1 = 0, \vec{M}_2 = 0, \vec{M}_3 = 0$ )	7.64	0
Piezoelektrischer Stab ( $\vec{M}_1 \geq 0, \vec{M}_2 \geq 0, \vec{M}_3 \geq 1$ )	7.37	0
BUTZ et al. [29]	7.37	0
WANG & QUEK [120]	-	0

**Tab. 9.4:** Vertikale Durchbiegung in Feldmitte und elektrisches Potential an der Oberseite für  $\nu = 0$

Ergebnisse in Tabelle 9.4 zeigen, wird ohne internen Ansatz für  $\vec{E}_3$  ( $\vec{M}_3 = 0$ ) die Durchbiegung  $u_z^{max}$  um 3.67% überschätzt. Dies stimmt mit dem Berechnungsfehler überein, den BUTZ et al. [29] bei der Verwendung einer linearen gegenüber einer quadratischen Approximation des elektrischen Potentials über die Dicke feststellen.

Mit Berücksichtigung von Querkontraktion wird anstelle der vereinfachten Materialdaten in Abbildung 9.6 das in ANHANG E.4 gegebene piezoelektrische Stoffgesetz verwendet. In BUTZ et al. [29] ist hiermit der absolute Wert für die Durchbiegung in Feldmitte nicht explizit angegeben. Aus den Ergebnissen in Tabel-

$\nu \neq 0$	$u_z^{max} [10^{-6} m]$	$\varphi_o [V]$
Piezoelektrischer Stab ( $\vec{M}_1 = 0, \vec{M}_2 = 0, \vec{M}_3 = 0$ )	7.64	0
Piezoelektrischer Stab ( $\vec{M}_1 \geq 0, \vec{M}_2 \geq 0, \vec{M}_3 \geq 1$ )	7.02	0
BUTZ et al. [29]	-	0

**Tab. 9.5:** Vertikale Verschiebung in Feldmitte für  $\nu \neq 0$

le 9.5 lässt sich die Überschätzung der Verformung ohne den internen Ansatz für  $\vec{E}_3$  ( $\vec{M}_3 = 0$ ) zu 8.79% bestimmen. Die von BUTZ et al. [29] beobachtete Überschätzung bei der Verwendung einer linearen gegenüber einer quadratischen Approximation des elektrischen Potentials über die Dicke beträgt 8.8%.

Die Ergebnisse erklären sich wie folgt: Der kinematische Ansatz, vgl. Gleichung 8.13, approximiert das Potential - wie bei einer Standardelementformulierung - lediglich linear über die Dicke. Die elektrische Feldkomponente  $\vec{E}_3$  kann damit wegen Gleichung 2.32 nur konstant approximiert werden. Ohne den internen Ansatz für eine lineare Verteilung von  $\vec{E}_3$  in Dickenrichtung ( $\vec{M}_3 = 0$ ) sind die Approximationsräume für die vorliegende Belastung daher unzureichend und nicht abgestimmt. Die Berechnung führt zwar auf  $\varphi_o = 0 V$ , womit kein parasitäres Potential approximiert wird. Dennoch ist die Berechnung falsch, da überhaupt kein elektrisches Potential approximiert wird. Die berechnete Durchbiegung entspricht der mechanischen Lösung ( $u_z^{max} = 7.64 \cdot 10^{-6} m$ ), womit sich die piezoelektrische Struktur bei der numerischen Analyse zu weich verhält. Um die richtige Lösung zu erhalten, muss die Approximation von  $\vec{E}_3$  linear erfolgen ( $\vec{M}_3 = 1$ ).

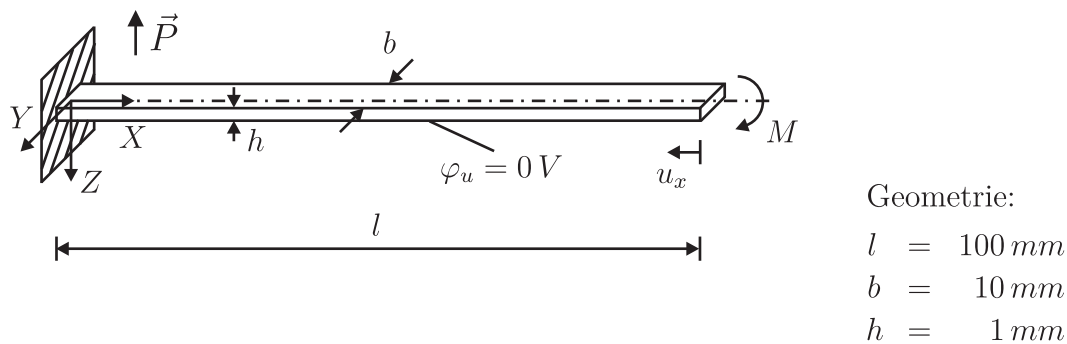
Der Unterschied in den Berechnungsergebnissen mit ( $\vec{M}_3 = 1$ ) und ohne ( $\vec{M}_3 = 0$ ) internen Ansatz für  $\vec{E}_3$  ist durch den Einfluss der Querkontraktion mit 8.79% mehr als doppelt so groß wie bei vernachlässigter Querkontraktion (3.67%). Dies erklärt sich damit, dass durch die Querkontraktion zwar die Dehnung  $E_{11}$  reduziert wird, aber dafür auch Dehnungen  $E_{22}$  und  $E_{33}$  auftreten, die aufgrund ihrer

Kopplung mit  $\vec{E}_3$  über das Stoffgesetz mit einem zusätzlichen Beitrag zu  $\vec{E}_3$  verbunden sind. Der Anteil der inneren elektrischen Arbeit an der gesamten inneren Arbeit muss dann für  $\vec{M}_3 = 1$  bei  $\nu \neq 0$  größer sein als bei  $\nu = 0$ .

Wählt man zusätzliche interne Ansätze ( $\vec{M}_1 > 0$ ,  $\vec{M}_2 > 0$ ,  $\vec{M}_3 > 1$ ), welche für die Abbildung der physikalischen Gegebenheiten nicht erforderlich sind, ergeben sich die ihnen zugeordneten internen Parameter zu Null und keine Veränderungen der Ergebnisse, siehe Tabelle 9.4, Tabelle 9.5. Dies bestätigt, dass sich im numerischen Modell bereitgestellte, aber nicht benötigte interne Ansätze bei der Berechnung neutral verhalten.

### 9.3 Piezoelektrischer Kragarm unter Endmoment

Dieses Beispiel soll den Berechnungsfehler visualisieren, der sich ergibt, wenn keine abgestimmten Ansatzräume für die elektrischen und mechanischen Feldkomponenten verwendet werden. Hierfür wird der Kragarm gemäß Abbildung 9.7



**Abb. 9.7:** Geometrie, Belastung und Materialdaten

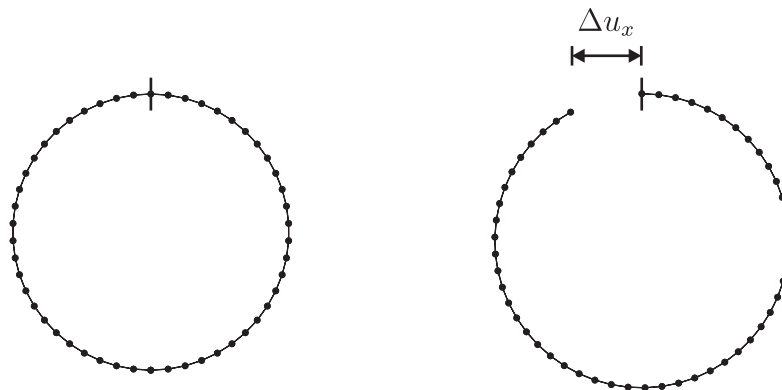
untersucht, der am freien Ende mit einem so großen Biegemoment  $M$  belastet wird, dass er sich zu einem vollständigen Kreis verformt. Bei rein mechanischer Betrachtungsweise lässt sich unter Vernachlässigung von Querkontraktion das erforderliche Endmoment  $M$  analytisch bestimmen, vgl. SIMO & VU-QUOC [103].

Im hier betrachteten Fall besteht der Kragarm aus einer in Dickenrichtung polarisierten piezoelektrischen Keramik aus PZT. Die Materialdaten sind in ANHANG E.2 angegeben. Die Unterseite der Struktur ist geerdet mit  $\varphi_u = 0 \text{ V}$ , an der Einspannung sind alle mechanischen Freiheitsgrade gehalten. Im Rahmen einer geometrisch nichtlinearen Berechnung wird die Belastung in drei Lastschritten aufgebracht.

Ohne die Verwendung interner Ansätze für die elektrischen Feldgrößen ( $\vec{M}_1 = 0$ ,  $\vec{M}_2 = 0$ ,  $\vec{M}_3 = 0$ ) ist bei einer Diskretisierung mit 50 Stabelementen in Längs-

richtung das Endmoment  $M = 3.260 \text{ Nm}$  notwendig, um den Kragarm zu einem geschlossenen Kreis zu verformen, siehe Abbildung 9.8 (links).

Die bei dieser Beanspruchung auftretenden Verzerrungen  $E_{11}$ ,  $E_{22}$  und  $E_{33}$  verlaufen linear über die Dicke und sind über das Stoffgesetz mit der elektrischen Feldkomponente  $\vec{E}_3$  gekoppelt, vgl. Tabelle 4.1. Abgestimmte Approximationsräume der elektrischen und mechanischen Feldkomponenten liegen daher erst unter Verwendung des internen Ansatzes einer über die Höhe linearen Approximation der elektrischen Feldkomponente  $\vec{E}_3$  ( $\vec{M}_3 = 1$ ) vor. Da damit der bei dieser Beanspruchung quadratische Verlauf des elektrischen Potentials über die Dicke repräsentiert wird, reduziert sich die mechanische Verformungsenergie und der Kreis schließt sich für die Belastung  $M = 3.260 \text{ Nm}$  nicht mehr vollständig. Die horizontale Verschiebung des freien Endes von der Einspannstelle beträgt in der Endkonfiguration  $u_x = 108.88 \text{ mm}$ , was dem horizontalen Abstand  $\Delta u_x = 8.88 \text{ mm}$  zwischen freiem Ende und Einspannstelle entspricht, siehe Abbildung 9.8 (rechts). Für die Verformung zu einem geschlossenen Kreis ist in diesem Fall eine Belastung von  $M^* = 3.557 \text{ Nm}$  erforderlich. Die Verwendung von Ansätzen höherer



**Abb. 9.8:** Verformter Kragarm bei Diskretisierung mit 50 piezoelektrischen Stabelementen ohne interne Ansätze (links) und mit internen Ansätzen (rechts) für die elektrischen Feldgrößen bei Belastung mit  $M = 3.260 \text{ Nm}$  in vergrößerter Darstellung

Ordnung für die elektrischen Feldkomponenten ( $\vec{M}_1 \geq 0$ ,  $\vec{M}_2 \geq 0$ ,  $\vec{M}_3 \geq 1$ ) im numerischen Modell hat keine Auswirkungen auf das Ergebnis. Da das elektrische Potential für diese Beanspruchung in Dickenrichtung quadratisch und in Stablängsrichtung konstant verläuft, werden diese im Zuge der Berechnung nicht aktiviert, da sie nicht zur Abbildung der physikalischen Gegebenheiten beitragen.

Mit  $M$  und  $M^*$  lässt sich ein Berechnungsfehler von 9.1% abschätzen, der bei Verwendung elektromechanisch inkonsistenter Approximationsräume auftritt.

## 9.4 Kreisringensensor unter Querbelastung

In diesem Beispiel wird für einen Kreisringensensor unter Querbelastung die Verbesserung der Berechnungsergebnisse durch die Verwendung elektromechanisch abgestimmter Approximationsräume untersucht.

Der betrachtete Kreisringensensor hat einen Querschnitt der Breite  $b$  und Höhe  $h$ . Das freie Ende ist durch eine vertikale Einzelkraft  $F = 1\text{ N}$  belastet, vgl. Abbildung 9.9. Der Kreisringensensor besteht aus einer in Dickenrichtung polarisierten PZT-Keramik. Die Materialeigenschaften sind im Anhang E.3 gegeben. Die Unterseite ist geerdet mit  $\varphi_u = 0\text{ V}$ .

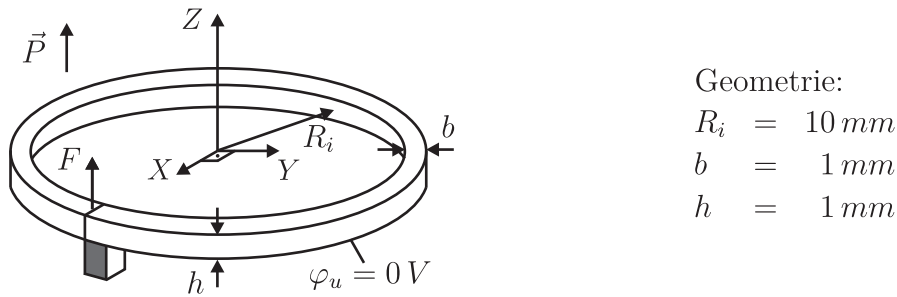


Abb. 9.9: Geometrie des Kreisringensensors

Für die Diskretisierung wurden 21 piezoelektrische Stabelemente verwendet. Am eingespannten Ende sind alle Verschiebungen und Verdrehungen gehalten. Für die Erfassung der Querschnittsverwölbung wird wie im Beispiel in Abschnitt 9.1.4  $\vec{M}_1 = 5, \vec{M}_2 = 1, \vec{M}_3 = 0$  gewählt. Mit Überhöhungsfaktor 1.5 ist in Abbildung 9.10 die Verformung ohne ( $\vec{M}_1 = 0, \vec{M}_2 = 0, \vec{M}_3 = 0$ ) und mit Verwendung interner Ansätze ( $\vec{M}_1 = 2, \vec{M}_2 \geq 0, \vec{M}_3 \geq 1$ ) für die elektrischen Feldkomponenten veranschaulicht.

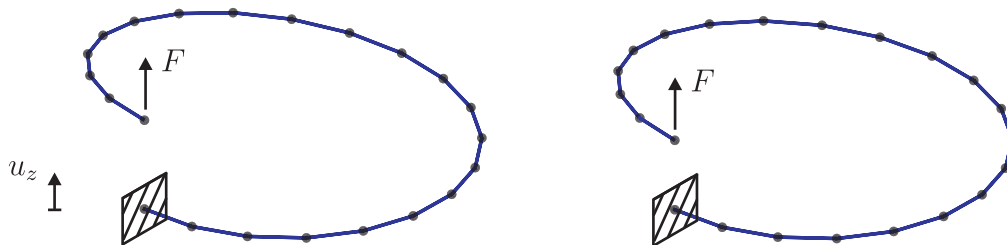


Abb. 9.10: Verformung des Kreisringensensors ohne Verwendung interner Ansätze (links) und mit internen Ansätzen (rechts) für die elektrischen Feldgrößen

Die gegebene Belastung ist für den Kreisringensensor sowohl mit Querbeanspruchung als auch mit Torsionsbeanspruchung verbunden. Damit treten die Beanspruchungsarten der Beispiele in Abschnitt 9.1.3 und Abschnitt 9.1.4 kombiniert auf.

In Tabelle 9.6 sind die Berechnungsergebnisse für die vertikale Verschiebung  $u_z$  und die axiale Verdrehung  $\beta_y$  des Querschnitts am freien Ende sowie der Maximalwert  $\varphi_o^{max}$  des elektrischen Potentials an der Oberseite des Kreisringensensors angegeben. Alle anderen Verschiebungen und Verdrehungen am freien Ende ergeben sich zu Null. Ohne interne Ansätze ( $\vec{M}_1 = 0, \vec{M}_2 = 0, \vec{M}_3 = 0$ ) sind die elektrischen und mechanischen Approximationsräume nicht ausgewogen und die elektrischen Feldgrößen werden nicht korrekt abgebildet. Dies führt dazu, dass die berechnete Verformung zu groß ist und sich parasitäres elektrisches Potential an der Oberseite des Kreisringensensors ergibt.

Approximation von $\vec{E}$	$u_z$ [mm]	$\beta_y$ [ $10^{-1}$ ]	$\varphi_o^{max}$ [V]
$\vec{M}_1 = 0, \vec{M}_2 = 0, \vec{M}_3 = 0$	3.456	-1.580	22.1
$\vec{M}_1 = 0, \vec{M}_2 \geq 0, \vec{M}_3 \geq 1$	3.364	-1.486	22.1
$\vec{M}_1 = 2, \vec{M}_2 \geq 0, \vec{M}_3 \geq 1$	2.714	-1.266	0
$\vec{M}_1 \geq 5, \vec{M}_2 \geq 0, \vec{M}_3 \geq 1$	2.702	-1.263	0

**Tab. 9.6:** Numerische Ergebnisse für die vertikale Verschiebung  $u_z$  und die axiale Verdrehung  $\beta_y$  am freien Ende sowie für den Maximalwert des elektrischen Potentials  $\varphi_o^{max}$  an der Kreisringoberseite bei unterschiedlicher Approximation des elektrischen Feldes

Mit  $\vec{M}_1 = 2, \vec{M}_2 = 0, \vec{M}_3 = 1$  liegen hinsichtlich der Querbeanspruchung elektromechanisch konsistente Approximationsräume vor und die elektrischen Feldgrößen werden bezüglich der Querbeanspruchung korrekt abgebildet. Da damit mehr Energie elektrisch gespeichert wird, ist die berechnete Verformung kleiner. Bezüglich der Torsionsbeanspruchung sind die Ansatzräume damit zwar noch nicht ausgewogen, dennoch treten keine parasitären Approximationen für das elektrische Potential auf. Diese Feststellung deckt sich mit den Erkenntnissen aus dem Beispiel in Abschnitt 9.1.4. Um auch bezüglich der Torsionsbeanspruchung elektromechanisch abgestimmte Ansatzräume zu schaffen, muss bei der gegebenen Polarisationsrichtung die Interpolation von  $\vec{E}_1$  mit dem Polynomgrad  $\vec{M}_1 = 5$  erfolgen. Wie die Ergebnisse für die vertikale Verschiebung  $u_z$  und die Verdrehung  $\beta_y$  in Tabelle 9.6 zeigen, wirkt sich dies jedoch nur noch geringfügig auf die Verformungsberechnung des Kreisringensensors aus.

## 10 Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit stellt ein Konzept zur Beseitigung inkompatibler Approximationsräume und damit verbundener Berechnungsfehler bei elektromechanisch gekoppelten Feldproblemen dar. Die Umsetzung wird im Kontext der Finite-Elemente-Methode in Form einer piezoelektrischen Stab- und Schalenformulierung demonstriert.

In **Kapitel 2** sind die Grundlagen für die mathematische Beschreibung eines deformierbaren Dielektrikums zusammengestellt, welche neben den kontinuumsmechanischen Grundgleichungen auch die Grundgleichungen der elektromechanischen Feldtheorie umfassen. Damit ist verbunden, dass im allgemeinen Fall elektrisch induzierte Zusatzterme in den Bilanzgleichungen zu berücksichtigen sind. Beschränkt man sich auf die Theorie der linearen Piezoelektrizität, ist der Einfluss der elektrisch induzierten Zusatzterme im Kontext von technischen Anwendungen vernachlässigbar, womit die Symmetrie des Spannungstensors erhalten bleibt.

Ausgehend von der elektrischen Enthalpie als thermodynamische Potentialfunktion werden in **Kapitel 3** Materialtensoren identifiziert, die es ermöglichen, das Verhalten deformierbarer Dielektrika mit konstitutiven Beziehungen zu beschreiben. Zur Vereinfachung werden der Spannungs-, der Verzerrungs- und die Stofftensoren in Matrixform dargestellt, was bei einem Wechsel des Bezugssystems bei der Transformation der Komponenten zu berücksichtigen ist.

Anhand der konstitutiven Beziehungen wird in **Kapitel 4** für die gängigen Polarisationsrichtungen und typischen Beanspruchungsarten erläutert, warum es bei einer Standardelementformulierung mit Approximation des elektrischen Potentials unter Verwendung von Ansatzfunktionen niedriger Ordnung zu Berechnungsfehlern kommt. Die Ursache liegt in einer Unausgewogenheit der Approximationsräume für die elektrischen und mechanischen Felder, welche über das Stoffgesetz gekoppelt sind.

Inwiefern gängige Methoden der Finite-Elemente-Technologie geeignet sind, um eine Balance der Approximationsräume herzustellen, wird in **Kapitel 5** diskutiert. Die Verwendung der EAS-Methode im Rahmen einer gemischten Elementformulierung auf Basis eines Mehrfeldfunktionals mit sechs unabhängigen Feldgrößen stellte sich als die am besten geeignete Vorgehensweise heraus. Da sich hiermit Interpolationen höherer Ordnung für die elektrischen Feldkomponenten gezielt ergänzen lassen, ist diese Methode effektiv und variabel verwendbar.

In **Kapitel 6** wird die piezoelektrische Schalenformulierung und in **Kapitel 8** die piezoelektrische Stabformulierung beschrieben. Diese basieren auf einem mechanischen Schalenelement nach GRUTTMANN & WAGNER [48], [49] und WAG-



---

NER & GRUTTMANN [119] sowie einem mechanischen Stabelement nach GRUTTMANN et al. [46], [47], SAUER [96], WAGNER & GRUTTMANN [118] und WACKERFUSS & GRUTTMANN [117]. Das implementierte Konzept zur Beseitigung inkompatibler Approximationsräume der elektrischen und mechanischen Felder ist mit mathematischen Gleichungen beschrieben, welche für die piezoelektrische Stab- und Schalenformulierung weitestgehend synchrone Bezeichnungen verwenden. Bei Querbelastrung ist es im Rahmen des Verfahrens notwendig, den tatsächlichen, quadratischen Verlauf der Schubverzerrungen zu approximieren. Durch die Übertragung des Konzeptes auf ein Laminatmodell ist mit der Schalenformulierung auch die numerische Untersuchung von typischen, geschichteten piezoelektrischen Strukturen mit ausgewogenen Approximationsräumen möglich. Die Vorabermittlung des Schubkorrekturfaktors für einen geschichteten Querschnitt ist damit nicht erforderlich. Für ein Stabelement ist auch eine Verwölbung des Querschnitts in die Betrachtungen mit einzubeziehen. Die piezoelektrische Stabformulierung verfügt damit auch bei Torsionsbeanspruchung über ausgewogene Approximationsräume der mechanischen und elektrischen Felder. Damit ermöglichen die Elementformulierungen bei richtungstreuer Polarisierung eine konsistente numerische Approximation von piezoelektrischen Stab- und Schalenstrukturen für alle gängigen Beanspruchungsarten.

In **Kapitel 7** und **Kapitel 9** wird dies anhand von numerischen Beispielen veranschaulicht, indem jeweils die Berechnungsergebnisse mit und ohne Verwendung des Konzepts angegeben und, sofern verfügbar, mit analytischen Lösungen oder Literaturergebnissen verglichen werden. Dabei werden zum Teil auch geometrisch nichtlineare Einflüsse sowie dynamische Beanspruchung mit einbezogen, wobei die Komponenten der Stoffensoren während der Beanspruchung als invariant angesehen werden. Die gemischte Methode ermöglicht unter Berücksichtigung von Dickendehnungen bei der Schalenformulierung sowie Quer- und Dickendehnungen bei der Stabformulierung die Verwendung von 3D-elektromechanischen konstitutiven Beziehungen. Wie auch bei der piezoelektrischen Schalenformulierung ist es im Gegensatz zu herkömmlichen Stabformulierungen daher auch mit dem piezoelektrischen Stabelement möglich, Querkontraktion zu berücksichtigen. Deren unmittelbarer Einfluss auf die elektromechanische Kopplung wird in einem der Beispiele gesondert betrachtet. Darüber hinaus zeigen die Beispiele, dass die numerischen Lösungen nicht beeinflusst werden, wenn auch Polynomansätze von höherer Ordnung für die elektrischen Feldkomponenten im numerischen Modell vorhanden sind als zur Abbildung der physikalischen Gegebenheiten erforderlich. Diese Eigenschaft ist insbesondere dann von besonderer Bedeutung, wenn a priori nicht bekannt ist, welche Polynomgrade zur Approximation der elektrischen Feldkomponenten für eine genaue numerische Analyse notwendig sind.

## 11 Ausblick

Abschließend wird ein Ausblick gegeben auf mögliche weiterführende Forschungsarbeiten, die sich durch die gewonnenen Erkenntnisse ergeben:

Die in dieser Arbeit beschriebene und auf elektromechanische Feldprobleme angewendete Vorgehensweise zur Beseitigung inkompatibler Approximationsräume ist allgemein gültig. Sie kann daher auch auf andere über die konstitutiven Beziehungen gekoppelte Feldprobleme - wie zum Beispiel magnetomechanische oder thermomechanische Feldprobleme - angewendet werden.

Die vorgestellten piezoelektrischen Elementformulierungen verfügen über eine allgemeine Schnittstelle für beliebige 3D-Stoffgesetze. Damit ist eine von der Beanspruchung abhängige Veränderlichkeit der Koeffizienten in den elektromechanischen Stoffgleichungen verbunden. Deren Berücksichtigung durch entsprechende Erweiterung der Vorgehensweise kann zum einen für die Analyse von Präzisionsbauteilen in der Sensorik und Aktorik von Bedeutung sein. Zum anderen wird damit auch die Modellierung von ferroelektrischen Werkstoffen möglich, deren Polarisierung sich während der Beanspruchung durch ein elektrisches Feld umkehren lässt.

Ist bei einer geschichteten piezoelektrischen Schalenstruktur das elektrische Potential an einem Schichtübergang gesucht oder als Randbedingung vorgegeben, sind zwei elektrische Freiheitsgrade über die Höhe nicht ausreichend. Um auch derartige Problemstellungen elektromechanisch konsistent modellieren zu können, wäre das Konzept dahingehend weiterzuentwickeln.

Für die Überprüfung von mechanischen Elementformulierungen haben sich in der Vergangenheit verschiedene Patch-Tests etabliert - für piezoelektrische Elemente steht dies noch aus. Damit könnten Mindestanforderungen an eine piezoelektrische Elementformulierung einheitlich überprüft werden, welche auch den in dieser Arbeit untersuchten Aspekt abgestimmter Approximationsräume für die elektrischen und mechanischen Felder beinhalten sollten.

## 12 Empfehlungen für die Praxis

Auf Basis der in dieser Arbeit erzielten Forschungsergebnisse werden für eine numerische Untersuchung piezoelektrischer Bauteile mit Stab- und Schalenelementen Empfehlungen für die Praxis gegeben.

Diese sind bei Sensoranwendungen beschränkt auf die gewöhnlich verwendete Polarisierung in Dickenrichtung und die praxistypischen Beanspruchungen in Längsrichtung oder Querrichtung.

Für Aktoranwendungen beschränken sich die Empfehlungen auf ein in Dickenrichtung orientiertes elektrisches Feld bei Polarisierung der Struktur in Längsrichtung (Schubaktoren) oder Dickenrichtung (Dehnaktoren).

Für andere Konstellationen wird im Rahmen einer ersten Orientierung auf Tabelle 4.1 verwiesen.

### 12.1 Sensoren

#### 12.1.1 Dehnsensoren

Die mechanische Beanspruchung erfolgt in Längsrichtung. Eine lineare Approximation des elektrischen Potentials über die Dicke ist ausreichend, da damit der konstante Verlauf des elektrischen Feldes über die Dicke korrekt abgebildet wird.

#### 12.1.2 Biegesensoren

Bei Querbelastung ist die elektrische Feldkomponente in Dickenrichtung linear über die Höhe verteilt. Dies lässt sich mit einer linearen Approximation des elektrischen Potentials über die Höhe im Rahmen einer Standardformulierung nicht abbilden, was zu fehlerhaften Ergebnissen für die Verschiebungen, die Verdrehungen und das elektrische Potential führt. Die Berechnungsfehler für das elektrische Potential und damit des Sensorsignals sind signifikant.

Um korrekte Ergebnisse zu erzielen, muss bei Biegesensoren zum einen die elektrische Feldkomponente  $\vec{E}_3$  linear über die Höhe interpoliert werden. Zum anderen ist die Verteilung der Schubterme und der damit gekoppelten elektrischen Feldkomponenten  $\vec{E}_1$  und  $\vec{E}_2$  quadratisch über die Höhe abzubilden.

Eine Querbelastung führt bei einem Biegesensor, welcher in der senkrecht zur Beanspruchungsrichtung orientierten Ebene gekrümmt ist, auch zu einer Torsionsbeanspruchung. Diese ist mit einer Verwölbung des Querschnitts verbunden. Auf Grundlage der numerischen Untersuchungen im Rahmen dieser Arbeit wird bei

korrekter Erfassung der Querschnittsverwölbung für die Interpolation der elektrischen Feldkomponenten dieselbe Vorgehensweise wie für den ungekrümmten Biegesensor als ausreichend erachtet. Dies begründet sich damit, dass auch bei einer Verwölbung des Querschnitts mit einer linearen Interpolation von  $\vec{E}_3$  und der quadratischen Interpolation von  $\vec{E}_1$  und  $\vec{E}_2$  nur noch sehr kleine Berechnungsfehler auftreten.

## 12.2 Aktoren

Ob eine lineare Approximation des elektrischen Potentials über die Dicke für die Untersuchung von praxistypischen Aktoranwendungen ausreichend ist, hängt zunächst davon ab, ob sich der Aktor unbehindert verformen kann oder nicht.

### 12.2.1 Unbehinderte Verformung

Ermöglichen die Randbedingungen eine unbehinderte Verformung des Aktors, ist das elektrische Feld in Dickenrichtung über die Höhe konstant und wird mit einer über die Dicke linearen Approximation des elektrischen Potentials korrekt approximiert.

### 12.2.2 Keine unbehinderte Verformung

Wird aufgrund von geometrischen Zwangsbedingungen keine aktorisch induzierte Biegebeanspruchung hervorgerufen, verläuft das elektrische Feld in Dickenrichtung konstant über die Höhe, womit eine über die Dicke lineare Approximation des elektrischen Potentials ausreicht.

Tritt aufgrund von geometrischen Zwangsbedingungen aktorisch induzierte Biegebeanspruchung auf, sind gemäß den Ausführungen in Abschnitt 12.1.2 im Allgemeinen auch Approximationen höherer Ordnung für die elektrischen Feldgrößen notwendig. Ob im jeweiligen Anwendungsfall auch eine lediglich lineare Approximation des elektrischen Potentials für eine gute Qualität der Ergebnisse ausreichend ist, hängt im Wesentlichen ab von der Intensität der induzierten Biegebeanspruchung. Diese wiederum ist von verschiedenen Parametern abhängig, wie beispielsweise von der Bauteilgeometrie, der Beanspruchung, den Materialeigenschaften und den geometrischen Randbedingungen. Daher kann für diesen Fall keine allgemeine Empfehlung gegeben werden.

## A Transformation zwischen lokalen und globalen elektrischen Freiheitsgraden

Mit

$$\boldsymbol{\varphi}_L = \mathbf{T}_\varphi \boldsymbol{\varphi}_G \quad , \quad \mathbf{T}_\varphi = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{h} & -\frac{1}{h} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

ist der Zusammenhang zwischen den lokalen elektrischen Freiheitsgraden  $\boldsymbol{\varphi}_L = [\varphi_N, \varphi_M]^T$  und den globalen elektrischen Freiheitsgraden  $\boldsymbol{\varphi}_G = [\varphi_o, \varphi_u]^T$  gegeben.

Aus der Betrachtung der inneren Arbeit

$$\begin{aligned} \Delta\delta\Pi_i &= \begin{bmatrix} \delta\mathbf{v}^T \\ \delta\boldsymbol{\varphi}_L^T \end{bmatrix} \mathbf{K}_L \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{v} \\ \Delta\boldsymbol{\varphi}_L \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \delta\mathbf{v}^T \\ \delta\boldsymbol{\varphi}_G^T \mathbf{T}_\varphi^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{vv} & \mathbf{K}_{v\varphi} \\ \mathbf{K}_{\varphi v} & \mathbf{K}_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{v} \\ \mathbf{T}_\varphi \Delta\boldsymbol{\varphi}_G \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \delta\mathbf{v}^T \\ \delta\boldsymbol{\varphi}_G^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{vv} & \mathbf{K}_{v\varphi} \mathbf{T}_\varphi \\ \mathbf{T}_\varphi^T \mathbf{K}_{\varphi v} & \mathbf{T}_\varphi^T \mathbf{K}_{\varphi\varphi} \mathbf{T}_\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{v} \\ \Delta\boldsymbol{\varphi}_G \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \delta\mathbf{v}^T \\ \delta\boldsymbol{\varphi}_G^T \end{bmatrix} \mathbf{K}_G \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{v} \\ \Delta\boldsymbol{\varphi}_G \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

bezüglich lokaler und globaler elektrischer Freiheitsgrade und den mechanischen Freiheitsgraden  $\mathbf{v} = [u_1, u_2, u_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3]^T$  folgt der Zusammenhang zwischen den Elementsteifigkeiten  $\mathbf{K}_L$  und  $\mathbf{K}_G$  auf lokaler und globaler Ebene.

Über die äußere Arbeit

$$\begin{aligned} \delta\Pi_a &= \begin{bmatrix} \delta\mathbf{v}^T \\ \delta\boldsymbol{\varphi}_L^T \end{bmatrix} \mathbf{R}_L \\ &= \begin{bmatrix} \delta\mathbf{v}^T \\ \delta\boldsymbol{\varphi}_G^T \mathbf{T}_\varphi^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_v \\ \mathbf{R}_\varphi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \delta\mathbf{v}^T \\ \delta\boldsymbol{\varphi}_G^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_v \\ \mathbf{T}_\varphi^T \mathbf{R}_\varphi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \delta\mathbf{v}^T \\ \delta\boldsymbol{\varphi}_G^T \end{bmatrix} \mathbf{R}_G \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

ergibt sich der Zusammenhang zwischen dem residualen Vektor  $\mathbf{R}_L$  und  $\mathbf{R}_G$  auf lokaler und globaler Ebene.

## **B Orthogonalisierungskoeffizienten für die EAS- Ansätze der Schalen- und Stabformulierung**

### **B.1 Schalenformulierung**

$n$	$\delta_n$	$\varepsilon_n$	$\psi_n$	$\theta_n$
1	–	–	0	0
2	$h^2/12$	$h^2/12$	0	$h^3/12$

**Tab. B.1:** Orthogonalisierungskoeffizienten der EAS-Ansätze über die Schalendicke für  $\vec{E}_1$ ,  $\vec{E}_2$  und  $\vec{E}_3$

## B.2 Stabformulierung

$n$	$m$	$\delta_{nm}$	$\varepsilon_{nm}$	$\psi_{nm}$
1	0	0	0	0
1	1	0	0	0
0	1	0	1	0
2	0	$b^2/12$	0	$b^2/12$
2	1	0	$b^2/12$	0
2	2	$h^2b^2/144$	0	$h^2b^2/144$
1	2	0	0	0
0	2	$h^2/12$	0	$h^2/12$
3	0	0	0	0
3	1	0	0	0
3	2	0	0	0
3	3	0	0	0
2	3	0	$h^2b^2/80$	0
1	3	0	0	0
0	3	0	$3h^2/20$	0
4	0	$b^4/80$	0	$b^4/80$
4	1	0	$b^4/80$	0
4	2	$h^2b^4/960$	0	$h^2b^4/960$
4	3	0	$3h^2b^4/1600$	0
4	4	$h^4b^4/6400$	0	$h^4b^4/6400$
3	4	0	0	0
2	4	$h^4b^2/960$	0	$h^4b^2/960$
1	4	0	0	0
0	4	$h^4/80$	0	$h^4/80$

**Tab. B.2:** Orthogonalisierungskoeffizienten der EAS-Ansätze über den Stabquerschnitt für  $\vec{E}_1$ ,  $\vec{E}_2$  und  $\vec{E}_3$

## C Herleitung der analytischen Lösung für den Biegesensor bei Querbelastrung

In diesem Abschnitt wird die analytische Lösung für die Biegelinie eines piezoelektrischen Biegesensors auf Basis der Timoshenko-Stabkinematik und der Theorie der linearen Piezoelektrizität für deformierbare Dielektrika abgeleitet.

Unter Vernachlässigung der Querkontraktion wird hierbei ein an einem Ende eingespannter, piezoelektrischer Stab mit konstanter Querschnittsbreite  $b$ , Querschnittshöhe  $h$  und Länge  $L$  betrachtet, der an der Unterseite geerdet und am freien Ende mit einer Einzelkraft  $F = Q_y$  belastet ist, vgl. hierzu Beispiel 7.1.4.

Aus der konstitutiven Beziehung, siehe Gleichung 3.32, folgt bei Polarisierung in Dickenrichtung mit E-Modul  $E$  und Schubmodul  $G$  das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} S^{11} &= E \cdot E_{11} - e_{13} \cdot \vec{E}_3 \\ \vec{D}^3 &= e_{13} \cdot E_{11} + \epsilon_{33} \cdot \vec{E}_3 \\ S^{13} &= G \cdot E_{13} - e_{15} \cdot \vec{E}_1 \\ \vec{D}^1 &= e_{15} \cdot E_{13} + \epsilon_{11} \cdot \vec{E}_1 \quad . \end{aligned} \tag{C.1}$$

Da die Struktur im elektrischen Sinne nicht kurzgeschlossen ist, gilt  $\vec{D}^1 = 0$  und  $\vec{D}^3 = 0$ . Damit folgt aus Gleichung C.1<sub>2</sub> die Beziehung

$$\vec{E}_3 = -\frac{e_{13}}{\epsilon_{33}} \cdot E_{11} \quad , \tag{C.2}$$

nach der Timoshenko-Kinematik gilt die Beziehung

$$E_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} = \psi'(x) \cdot z \tag{C.3}$$

mit der Verschiebung  $u$  in Stablängsrichtung  $x$ , dem Verdrehwinkel  $\psi(x)$  und der Dickenkoordinate  $z$ . Einsetzen der beiden letzten Gleichungen in C.1<sub>1</sub> führt auf

$$S^{11} = \left( E + \frac{e_{13}^2}{\epsilon_{33}} \right) \cdot \psi'(x) \cdot z \quad . \tag{C.4}$$

Setzt man diese Beziehung in die Definition des Biegemomentes

$$M_y = \int_A z \cdot S^{11} \, dA \tag{C.5}$$

ein, ergibt sich

$$M_y = \int_A \left( E + \frac{e_{13}^2}{\epsilon_{33}} \right) \cdot \psi'(x) \cdot z^2 \, dA \quad , \tag{C.6}$$



woraus man mit  $\kappa := \psi'(x)$  und  $I_y := z^2 dA$  eine Momenten-Krümmungsbeziehung in der Form

$$M_y = \left(E + \frac{\mathbb{e}_{13}^2}{\epsilon_{33}}\right) \cdot I_y \cdot \kappa \quad (\text{C.7})$$

für den elektromechanischen Stab erhält. Auflösen dieser Beziehung nach  $\kappa = \psi'(x)$  und Einsetzen in Gleichung C.4 ergibt

$$S^{11} = \frac{\left(E + \frac{\mathbb{e}_{13}^2}{\epsilon_{33}}\right) \cdot M_y}{\left(E + \frac{\mathbb{e}_{13}^2}{\epsilon_{33}}\right) \cdot I_y} \cdot z = \frac{M_y}{I_y} \cdot z \quad . \quad (\text{C.8})$$

Mit Verwendung der aus der Mechanik bekannten Aussage für den Verlauf der Schubspannungen über einen Rechteckquerschnitt mit Fläche  $A$

$$S^{13} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_y}{A} \cdot \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) \quad (\text{C.9})$$

sowie Gleichung C.8 in Gleichung C.1 ergibt sich

$$\begin{aligned} E \cdot E_{11} - \mathbb{e}_{13} \cdot \vec{E}_3 &= \frac{M_y}{I_y} \cdot z \\ \mathbb{e}_{13} \cdot E_{11} + \epsilon_{33} \cdot \vec{E}_3 &= 0 \\ G \cdot E_{13} - \mathbb{e}_{15} \cdot \vec{E}_1 &= \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_y}{A} \cdot \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) \\ \mathbb{e}_{15} \cdot E_{13} + \epsilon_{11} \cdot \vec{E}_1 &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Löst man die zweite und vierte Zeile auf nach  $\vec{E}_3$  und  $\vec{E}_1$ , erhält man durch Einsetzen in die erste und dritte Zeile die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \left(E + \frac{\mathbb{e}_{13}^2}{\epsilon_{33}}\right) \cdot E_{11} &= \frac{M}{I} \cdot z \\ \left(G + \frac{\mathbb{e}_{15}^2}{\epsilon_{11}}\right) \cdot E_{13} &= \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{A} \cdot \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) \quad , \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

und mit  $M_y = F(L - x)$  sowie  $Q_y = F$

$$\begin{aligned} E_{11} &= \frac{F(L - x) \cdot z}{I_y \cdot \mathbb{D}_1} & \mathbb{D}_1 &= E + \frac{\mathbb{e}_{13}^2}{\epsilon_{33}} \\ E_{13} &= \frac{3 \cdot F}{2 \cdot A \cdot \mathbb{D}_2} \cdot \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) & \mathbb{D}_2 &= G + \frac{\mathbb{e}_{15}^2}{\epsilon_{11}} \quad . \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

Mit Integration von Gleichung C.12<sub>1</sub> über die Stablänge  $L$  folgt

$$\begin{aligned} u(x, z) &= \int_L \frac{F(L - x) \cdot z}{I_y \cdot \mathbb{D}_1} dx + C_1 \\ &= \frac{F \cdot z}{I_y \cdot \mathbb{D}_1} \left(L \cdot x - \frac{1}{2} \cdot x^2\right) \quad , \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

wobei sich mit der Randbedingung  $u(0, z) = 0$  für die Integrationskonstante  $C_1 = 0$  ergibt. Damit folgt für die Verdrehung

$$\psi(x) = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{F}{I_y \cdot \mathbb{D}_1} \left( L \cdot x - \frac{1}{2} \cdot x^2 \right) \quad . \quad (\text{C.14})$$

Aus den Beziehungen in den Gleichungen 6.32 und 6.38 folgt

$$E_{13} = p(z) \cdot \bar{E}_{13} \quad (\text{C.15})$$

mit

$$p(z) = \frac{5}{4} \cdot \left( 1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) \quad . \quad (\text{C.16})$$

Hieraus ergibt sich in Verbindung mit Gleichung C.12<sub>2</sub> die mittlere Schubverzerrung zu

$$\bar{E}_{13} = \frac{6}{5} \cdot \frac{F}{A \cdot \mathbb{D}_2} \quad . \quad (\text{C.17})$$

Wegen

$$\bar{E}_{13} = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \quad (\text{C.18})$$

folgt mit Gleichung C.14 und Gleichung C.17

$$w'(x, z) = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{6}{5} \cdot \frac{F}{A \cdot \mathbb{D}_2} + \frac{F}{I_y \cdot \mathbb{D}_1} \left( L \cdot x - \frac{1}{2} \cdot x^2 \right) \quad (\text{C.19})$$

und aus Integration über die Stablänge  $L$  für die Durchbiegung

$$w(x, z) = \frac{6}{5} \cdot \frac{F \cdot L}{A \cdot \mathbb{D}_2} + \frac{F}{I_y \cdot \mathbb{D}_1} \left( \frac{1}{2} \cdot L \cdot x^2 - \frac{1}{6} \cdot x^3 \right) \quad . \quad (\text{C.20})$$

Die vertikale Verschiebung der neutralen Faser an der Kragarmspitze ergibt sich damit für den gekoppelten Fall zu

$$w(L, 0) = \frac{6}{5} \cdot \frac{F \cdot L}{A \cdot \mathbb{D}_2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{F \cdot L^3}{I_y \cdot \mathbb{D}_1} \quad . \quad (\text{C.21})$$

Im unpolarisierten Zustand gilt  $e_{13} = e_{15} = 0$ . Aus Gleichung C.12 folgen  $\mathbb{D}_1 = E$  und  $\mathbb{D}_2 = G$ , womit sich als vertikale Verschiebung der Kragarmspitze

$$w(L, 0) = \frac{6}{5} \cdot \frac{F \cdot L}{G \cdot A} + \frac{1}{3} \cdot \frac{F \cdot L^3}{E \cdot I_y} \quad (\text{C.22})$$

für den rein mechanischen Fall ergibt. Durch Verwendung von  $A_s = \kappa_s \cdot A$  mit  $\kappa_s = \frac{5}{6}$  erkennt man, dass Gleichung C.22 mit der klassischen mechanischen Lösung übereinstimmt.

## D Verlauf der Schubspannung über die Dicke bei einem geschichteten Querschnitt

Die referenzflächenbezogene, piezoelektrische Schalenformulierung nach Kapitel 6 erlaubt unter Verwendung kinematischer Annahmen die zweidimensionale Betrachtung einer dreidimensionalen Struktur. Dabei wird angenommen, dass das Integral der Spannungen  $S^{33}$  über die Dicke zu Null wird, was einem ebenen Spannungszustand in schwacher Form gleichkommt.

Daher ist es für die Herleitung der Dickenverteilung  $g_\alpha(\zeta)$  der Schubspannungen in der Schalenformulierung legitim, das Stoffgesetz für jede Schicht - wie in ALTENBACH et al. [4] vorgeschlagen - bezüglich der Spannungen in Dickenrichtung zu kondensieren. Gemäß der Gleichungen 3.7 - 3.10 ist die konstitutive Beziehung für orthotropes Material unter Verwendung von

$$\begin{aligned} [S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6]^T &:= [S^{11}, S^{22}, S^{33}, S^{12}, S^{13}, S^{23}]^T \\ [E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6]^T &:= [E_{11}, E_{22}, E_{33}, 2E_{12}, 2E_{13}, 2E_{23}]^T \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

beschrieben mit

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_5 \\ E_6 \end{bmatrix} . \quad (\text{D.2})$$

Mit der Annahme des Verschwindens der Spannungen in Dickenrichtung

$$S_3 = C_{13} E_1 + C_{23} E_2 + C_{33} E_3 = 0 \quad (\text{D.3})$$

folgt

$$E_3 = -\frac{1}{C_{33}}(C_{13} E_1 + C_{23} E_2) \quad (\text{D.4})$$

und damit

$$S_i = \underbrace{\left(C_{ij} - \frac{C_{i3}C_{j3}}{C_{33}}\right)}_{=: Q_{ij}} E_j \quad , \quad i, j \in \{1, 2, 4\} . \quad (\text{D.5})$$

Angewendet auf jede Schicht  $k$  ergibt sich die Beziehung

$$S_i^k = Q_{ij}^k E_j^k \quad , \quad i, j \in \{1, 2, 4\} \quad (\text{D.6})$$

mit den reduzierten Schichtsteifigkeiten  $Q_{ij}^k$ , wobei  $Q_{ij}^k = Q_{ji}^k$  gilt.

Die Dickenverteilungen der Schubspannungen werden in ALTENBACH et al. [4] aus den Gleichgewichtsbedingungen abgeleitet zu

$$\begin{aligned}
 g_1^k(\zeta) &= d_{11}^* \left( -Q_{11}^k \frac{\zeta^2}{2} + \sum_{j=1}^k [Q_{11}^j - Q_{11}^{j-1}] \frac{[\zeta^{j-1}]^2}{2} \right) \\
 &\quad + d_{12}^* \left( -Q_{12}^k \frac{\zeta^2}{2} + \sum_{j=1}^k [Q_{12}^j - Q_{12}^{j-1}] \frac{[\zeta^{j-1}]^2}{2} \right) \\
 g_2^k(\zeta) &= d_{22}^* \left( -Q_{22}^k \frac{\zeta^2}{2} + \sum_{j=1}^k [Q_{22}^j - Q_{22}^{j-1}] \frac{[\zeta^{j-1}]^2}{2} \right) \\
 &\quad + d_{12}^* \left( -Q_{12}^k \frac{\zeta^2}{2} + \sum_{j=1}^k [Q_{12}^j - Q_{12}^{j-1}] \frac{[\zeta^{j-1}]^2}{2} \right)
 \end{aligned} \tag{D.7}$$

mit  $Q_{11}^0 = Q_{12}^0 = Q_{22}^0 = 0$  .

Liegt keine Belastung in der Ebene vor, gilt

$$\mathbf{d}^* = \mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} d_{11}^* & d_{12}^* & 0 \\ d_{12}^* & d_{22}^* & 0 \\ 0 & 0 & d_{44}^* \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{44} \end{bmatrix} \tag{D.8}$$

mit

$$D_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} \zeta^2 d\zeta = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{nlay} Q_{ij}^k ([\zeta^k]^3 - [\zeta^{k-1}]^3), \quad i, j \in \{1, 2, 4\} \quad . \tag{D.9}$$

## E Materialdaten

### E.1 Beispiel: Torsionsaktor

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} 126.0 & 84.1 & 84.1 & 0 & 0 & 0 \\ & 126.0 & 79.5 & 0 & 0 & 0 \\ & & 126.0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 23.0 & 0 & 0 \\ & \text{sym.} & & & 23.0 & 0 \\ & & & & & 23.3 \end{bmatrix} \quad \left[ 10^9 \frac{N}{m^2} \right]$$

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 23.3 & -6.5 & -6.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 17.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 17.0 & 0 \end{bmatrix} \quad \left[ \frac{C}{m^2} \right]$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} 13.00 & 0 & 0 \\ & 15.03 & 0 \\ \text{sym.} & & 15.03 \end{bmatrix} \quad \left[ 10^{-9} \frac{C^2}{Nm^2} \right]$$

### E.2 Beispiele: Dynamische Beanspruchung einer halbkreisförmigen Ringschale und Kragarm unter Endmoment

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} 84.81 & 36.35 & 36.35 & 0 & 0 & 0 \\ & 84.81 & 36.35 & 0 & 0 & 0 \\ & & 84.81 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 24.23 & 0 & 0 \\ & \text{sym.} & & & 24.23 & 0 \\ & & & & & 24.23 \end{bmatrix} \quad \left[ 10^9 \frac{N}{m^2} \right]$$

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 17.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17.0 \\ 21.667 & 21.677 & 12.955 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \left[ \frac{C}{m^2} \right]$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} 16.5 & 0 & 0 \\ & 16.5 & 0 \\ \text{sym.} & & 16.5 \end{bmatrix} \quad \left[ 10^{-9} \frac{C^2}{Nm^2} \right], \quad \rho = 7600 \text{ kg/m}^3$$

### E.3 Beispiele: Zylinderförmiger Segmentaktor und Kreisringsensor unter Querbelastung

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} 127.20 & 80.25 & 84.55 & 0 & 0 & 0 \\ & 127.20 & 84.55 & 0 & 0 & 0 \\ & & 117.24 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 23.47 & 0 & 0 \\ & sym. & & & 22.99 & 0 \\ & & & & & 22.99 \end{bmatrix} \quad \left[10^9 \frac{N}{m^2}\right]$$

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 17.03 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17.03 \\ -6.62 & -6.62 & 23.24 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \left[\frac{C}{m^2}\right]$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} 15.05 & 0 & 0 \\ & 15.05 & 0 \\ sym. & & 13.01 \end{bmatrix} \quad \left[10^{-9} \frac{C^2}{Nm^2}\right]$$

### E.4 Beispiel: Piezoelektrischer Stab auf zwei Stützen

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} 132.00 & 73.00 & 71.00 & 0 & 0 & 0 \\ & 132.00 & 71.00 & 0 & 0 & 0 \\ & & 115.00 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 30.60 & 0 & 0 \\ & sym. & & & 25.60 & 0 \\ & & & & & 25.60 \end{bmatrix} \quad \left[10^9 \frac{N}{m^2}\right]$$

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 10.50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10.50 \\ -4.10 & -4.10 & 12.00 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \left[\frac{C}{m^2}\right]$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} 7.08 & 0 & 0 \\ & 7.08 & 0 \\ sym. & & 5.84 \end{bmatrix} \quad \left[10^{-9} \frac{C^2}{Nm^2}\right]$$

## Literatur

- [1] AHMAD, S.N. / UPADHYAY, C.S. / VENKATESAN, C.: *Electroelastic analysis and layer-by-layer modeling of a smart beam*. American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal 43(12) (2005).
- [2] ALEXANDER, P. W. / BREI, D. / MIAO, W.: *Fabrication and experimental characterization of telescopic piezoelectric actuators*. Journal of Materials Science 36(17) (2001), S. 4231–4237.
- [3] ALKHATIB, R. / GOLNARAGHI, M. F.: *Active structural vibration control: A review*. Shock and Vibration 35 (2003), S. 367–383.
- [4] ALTENBACH, H. / ALTENBACH, J. / KISSING, W.: *Mechanics of composite structural elements*. Springer Verlag Berlin Heidelberg, 2004.
- [5] ANDELFINGER, U. / RAMM, E.: *EAS-elements for two-dimensional, three-dimensional plate and shell structures and their equivalence to HR-elements*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 36(12) (1993), S. 1311–1337.
- [6] ANSI, AMERICAN NATIONAL STANDARDS INSTITUTE: *IEEE standard on piezoelectricity*. 1988.
- [7] BABUSKA, I. / AZIS, A. K.: *Survey lectures on the mathematical foundations of the finite element method*. In: AZIS, A. K., (HRSG.), *The mathematical foundation of the finite element method with applications to partial differential equations*, Academic Press, 1972.
- [8] BAŞAR, Y. / WEICHERT, D.: *Nonlinear continuum mechanics of solids*. Springer Verlag Berlin Heidelberg New York, 2000.
- [9] BATHE, K. J. / DVORKIN, E. N.: *A 4-node plate bending element based on Mindlin-Reissner plate-theory and a mixed interpolation*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 21(2) (1985), S. 367–383.
- [10] BÜCHTER, N. / RAMM, E.: *Shell theory versus degeneration - A comparison in large rotation finite element analysis*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 34 (1992), S. 39–59.
- [11] BECKER, A. / FEIN, O. / MAESS, M. / GAUL, L.: *Finite element-based analysis of shunted piezoelectric structures for vibration damping*. Computers and Structures 84 (2006), S. 2340–2350.

- 
- [12] BENJEDDOU, A.: *Advances in piezoelectric finite element modeling of adaptive structural elements: A survey*. Computers and Structures 76 (2000), S. 347–363.
- [13] BENJEDDOU, A.: *Shear-mode piezoceramic advanced materials and structures: A state of the art*. Mechanics of Advanced Materials and Structures 14(4) (2007), S. 263–275.
- [14] BERNADOU, M. / HAENEL, C.: *Modelization and numerical approximation of piezoelectric thin shells. Part II: Approximation by finite element methods and numerical experiments*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 192 (2003), S. 4045–4073.
- [15] BERTRAM, A.: *Elasticity and plasticity of large deformations*. Springer Berlin Heidelberg, 2005.
- [16] BETSCH, P. / MENZEL, A. / STEIN, E.: *On the parametrization of finite rotations in computational mechanics. A classification of concepts with application to smooth shells*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 155(3-4) (1998), S. 273–305.
- [17] BINNIG, G. / SMITH, D.P.E.: *Single-tube three dimensional scanner for scanning tunneling microscopy*. Review of scientific instruments 57(8) (1986), S. 1688–1689.
- [18] BISCHOFF, M.: *Theorie und Numerik einer dreidimensionalen Schalenformulierung*. Dissertation, Universität Stuttgart, Institut für Baustatik, 1999.
- [19] BISCHOFF, M. / RAMM, E.: *On the physical significance of higher order kinematic and static variables in a three-dimensional shell formulation*. International Journal of Solids and Structures 37 (2000), S. 6933–6960.
- [20] BLETZINGER, K.-U. / BISCHOFF, M. / RAMM, E.: *A unified approach for shear-locking-free triangular and rectangular shell finite elements*. Computers and Structures 75(3) (2000), S. 321–334.
- [21] BRANDT, S. / DAHMEN, H.D.: *Elektrodynamik*. Springer Berlin Heidelberg New York, 1997.
- [22] BRANK, B. / KORELC, J. / IBRAHIMBEGOVIĆ, A.: *Nonlinear shell problem formulation accounting for through-the-thickness stretching and its finite element implementation*. Computers and Structures 80(9-10) (2002), S. 699–717.



- [23] BREI, D. / BERNER, N. T. / ALEXANDER, P. W.: *Modeling and study of the quasi-static behaviour of piezoceramic telescopic actuation architectures*. Journal of Intelligent Material Systems and Structures 12 (2001), S. 303–313.
- [24] BREZZI, F.: *On the existence, uniqueness and approximation of saddle point problems arising from lagrangian multipliers*. Rairo Analysis Numérique 8 (1974), S. 129–151.
- [25] BREZZI, F. / FORTIN, M.: *Mixed and hybrid finite element methods*. Springer New York Berlin Heidelberg, 1991.
- [26] BROCKMANN, T.: *Theory of adaptive fiber composites*. Springer Dordrecht Heidelberg London New York, 2009.
- [27] BUSHAN, B.: *Biomimetics: Lessons from nature - an overview*. Philosophical Transactions of the Royal Society 367 (2009), S. 1445–1486.
- [28] BUTZ, A.: *Nichtlineare Formulierung piezoelektrischer 3D-Stabstrukturen - Theorie und Finite-Element-Modellierung*. Dissertation, Universität Karlsruhe, Institut für Baustatik, 2006.
- [29] BUTZ, A. / KLINKEL, S. / WAGNER, W.: *A geometrically and materially non-linear piezoelectric three-dimensional-beam finite element formulation including warping effects*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 76(5) (2008), S. 601–635.
- [30] CARR, R. G.: *Finite Element analysis of PZT tube scanner motion for scanning tunnelling microscopy*. Journal of Microscopy 152 (1988), S. 379–385.
- [31] CHEN, C.J.: *Electromechanical deflections of piezoelectric tubes with quartered electrodes*. Applied Physics Letters 60 (1992).
- [32] COHEN, G. A.: *Transverse shear stiffness of laminated anisotropic shells*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 13 (1978), S. 205–220.
- [33] COOK, R.D. / MALKUS, D.S. / PLESHA, M.E. / WITT, R.J.: *Concepts and applications of finite element analysis*. John Wiley & Sons, Inc., 2002.
- [34] COTONI, V. / MASSON, P. / CÔTÉ, F.: *A finite element for piezoelectric multilayered plates: Combined higher-order and piecewise linear  $C^0$  formulation*. Journal of Intelligent Material Systems and Structures 17 (2006), S. 155–166.

- [35] CRAWLEY, E. F.: *Intelligent structures for aerospace: A technology overview and assessment*. American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal 32 (1994), S. 1689–1699.
- [36] DE MIRANDA, S. / UBERTINI, F.: *Consistency and recovery in electro-elasticity part I: Standard finite elements*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 192 (2003), S. 831–850.
- [37] DE MIRANDA, S. / UBERTINI, F.: *Consistency and recovery in electro-elasticity part II: Equilibrium and mixed finite elements*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 193 (2004), S. 2155–2168.
- [38] DVORKIN, E. N. / BATHE, K.-J.: *A continuum mechanics based four-node shell element for general non-linear analysis*. Engineering Computations 1(1) (1984), S. 77–88.
- [39] FRANKE, W. / FRIEMANN, H.: *Schub und Torsion in geraden Stäben*. Vieweg und Sohn Verlag Wiesbaden, 2005.
- [40] FRIEMANN, H.: *Schub und Torsion in geraden Stäben*. Werner Verlag Düsseldorf, 1983.
- [41] GANAPATHI, M. / PATEL, B.P. / TOURATIER, M.: *Refined finite element for piezoelectric laminated composite beams*. Smart Materials and Structures 13(4) (2004).
- [42] GAUDENZI, P.: *Smart structures*. John Wiley & Sons, Inc., 2009.
- [43] GREEN, A. E. / NAGHDI, P. M.: *Derivation of shell theories by direct approach*. Journal of Applied Mechanics – Transactions of the ASME 41(1) (1974), S. 173–176.
- [44] GREINER, W.: *Theoretische Physik - Klassische Elektrodynamik*. Verlag Harri Deutsch, 2002.
- [45] GRIFFITH, D. J.: *Introduction to electrodynamics*. Prentice Hall, 1999.
- [46] GRUTTMANN, F. / SAUER, R. / WAGNER, W.: *A geometrical nonlinear eccentric 3D-beam element with arbitrary cross-sections*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 160 (1998), S. 383–400.
- [47] GRUTTMANN, F. / SAUER, R. / WAGNER, W.: *Theory and numerics of three-dimensional beams with elastoplastic material behaviour*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 48 (2000), S. 1675–1702.

- 
- [48] GRUTTMANN, F. / WAGNER, W.: *Structural analysis of composite laminates using a mixed hybrid shell element*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 194 (2005), S. 4279–4300.
- [49] GRUTTMANN, F. / WAGNER, W.: *A linear quadrilateral shell element with fast stiffness computation*. Computational Mechanics 37 (2006), S. 479–497.
- [50] HOLZAPFEL, G. A.: *Nonlinear solid mechanics: A continuum approach for engineering*. Wiley & Sons, 2. Auflage, 2000 ISBN 0471823198.
- [51] HUGHES, T. J. R.: *The finite element method*. Prentice Hall, 1987.
- [52] IKEDA, T.: *Fundamentals of piezoelectricity*. Oxford University Press, New York, 1990.
- [53] IRSCHIK, H. / KROMMER, M.: *Shaping of piezoelectric sensors/actuators for vibrations of slender beams: Coupled theory and inappropriate shape functions*. Journal for Intelligent Material Systems and Structures 9 (1998), S. 546–554.
- [54] JACKSON, J. D.: *Classical electrodynamics*. John Wiley & Sons, Inc., 1999.
- [55] KALTENBACHER, M.: *Numerical simulation of mechatronic sensors and actuators*. Springer Verlag Berlin Heidelberg New York, 2004.
- [56] KAMLAH, M.: *Ferroelectric and ferroelastic piezoceramics - Modeling of electromechanical hysteresis phenomena*. Continuum Mechanics Thermo-dynamics 13 (2001), S. 219–268.
- [57] KAMLAH, M.: *Grundlagen der nichtlinearen Kontinuumsmechanik: Tensorrechnung, Kinematik, Bilanzgleichungen. Mit einem Teil zur Elektromechanik*. 2008.
- [58] KATZIR, S.: *The discovery of the piezoelectric effect*. Archive for History of Exact Sciences 57 (2003), S. 61–91.
- [59] KÖGL, M. / BUCALEM, M. L.: *Analysis of smart laminates using piezoelectric MITC plate and shell elements*. Computers and Structures 83 (2005), S. 1153–1163.
- [60] KLINKEL, S.: *Nichtlineare Modellierung ferroelektrischer Keramiken und piezoelektrischer Strukturen - Analyse und Finite-Element-Formulierung*. Habilitation, Universität Karlsruhe, Institut für Baustatik, 2007.

- 
- [61] KLINKEL, S. / GOVINDJEE, S.: *Using finite strain 3D-material models in beam and shell elements*. Engineering Computations 19 (2002), S. 902–921.
- [62] KLINKEL, S. / GRUTTMANN, F. / WAGNER, W.: *A robust non-linear solid shell element base on a mixed variational formulation*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 195(1-3) (2006), S. 179–201.
- [63] KLINKEL, S. / GRUTTMANN, F. / WAGNER, W.: *A mixed shell formulation accounting for thickness strains and finite strain 3D-material model*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 74 (2008), S. 945–970.
- [64] KLINKEL, S. / LEGNER, D.: *A finite element formulation for piezoelectric shells with well balanced approximation functions*. Proceedings of SPIE, Smart Structures and Materials 7289 (2009).
- [65] KLINKEL, S. / WAGNER, W.: *A geometrically non-linear piezoelectric solid shell element based on a mixed multi-field variational formulation*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 65 (2006), S. 349–382.
- [66] KLINKEL, S. / WAGNER, W.: *A piezoelectric solid shell element based on a mixed variational formulation for geometrically linear and nonlinear applications*. Computers and Structures 86 (2008), S. 38–46.
- [67] KOKO, I.S. / ORISAMOLU, I.R. / SMITH, M.J. / ALEPAN, U.O.: *Finite element based design tool for smart composite structures*. Proceedings of SPIE: Smart Structures and Materials 3039 (1997), S. 125–134.
- [68] LAGODAS, D. C.: *Shape memory alloys: Modeling and engineering applications*. Springer, 2004.
- [69] LAMMERING, R. / MESECKE-RISCHMANN, S.: *Multi-field variational formulations and related finite elements for piezoelectric shells*. Smart Materials and Structures 12 (2003), S. 904–913.
- [70] LEGNER, D. / KLINKEL, S. / WAGNER, W.: *A finite shell element with well balanced approximation functions for piezoelectric coupling*. Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics (PAMM) 8(1) (2008), S. 10303–10304.
- [71] LEGNER, D. / WACKERFUSS, J. / KLINKEL, S. / WAGNER, W.: *On a concept to avoid electromechanical locking in a piezoelectric finite beam*

- element*. Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics (PAMM) 10(1) (2010), S. 185–186.
- [72] LI, T. / MA, J. / CHEN, Y. H.: *A piezoelectric tube with a double-layer configuration*. Ceramics International 30 (2004), S. 1803–1805.
- [73] LINNEMANN, K.: *Magnetostruktive und piezoelektrische Materialien - Konstitutive Modellierung und Finite-Element-Formulierung*. Dissertation, Universität Karlsruhe, Institut für Baustatik, 2008.
- [74] LINNEMANN, K. / KLINKEL, S. / WAGNER, W.: *A constitutive model for magnetostrictive and piezoelectric materials*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 46 (2009), S. 1149–1166.
- [75] LIU, S.C. / TOMIZUKA, M. / ULSOY, G.: *Challenges and opportunities in the engineering of intelligent structures*. Smart Structures and Systems 1 (2005), S. 1–12.
- [76] LUBARDA, V.A. / CHEN, M.C.: *On the elastic moduli and compliances of transversely isotropic and orthotropic materials*. Journal of Mechanics of Materials and Structures 3 (2008), S. 153–171.
- [77] MACNEAL, R. / HARDER, R.: *A proposed standard set of problems to test finite element accuracy*. Finite Elements in Analysis and Design (1985), S. 3–20.
- [78] MALKUS, D. S. / HUGHES, T. J. R.: *Mixed finite element methods - Reduced and selective integration techniques: A unification of concepts*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 15(1) (1978), S. 63–81.
- [79] MANKAME, N. D. / ALEXANDER, P. W.: *Experimental characterization of active materials*. Experimental Techniques (2008), S. 70–73.
- [80] MARINKOVIĆ, D.: *A new finite composite shell element for piezoelectric active structures*. VDI Verlag, Düsseldorf, 2007.
- [81] MARINKOVIĆ, D. / KÖPPE, H. / GABBERT, U.: *Accurate modeling of the electric field within piezoelectric layers for active composite structures*. Journal of Intelligent Material Systems and Structures 18 (2006), S. 503–513.
- [82] MAUGIN, G.A.: *Continuum mechanics of electromagnetic solids*. World Scientific, Singapore, 1988.

- [83] McMEEKING, R. M. / LANDIS, C. M.: *Electrostatic Forces and Stored Energy for Deformable Dielectric Materials*. Journal of Applied Mechanics 72 (2005), S. 581–590.
- [84] MERESSI, T. / PADEN, B.: *Buckling control of a flexible beam using piezoelectric actuators*. American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal 16 (1992), S. 977–980.
- [85] MESECKE-RISCHMANN, S.: *Modellierung von flachen piezoelektrischen Schalen mit zuverlässigen finiten Elementen*. Dissertation, Helmut Schmidt Universität Hamburg, 2004.
- [86] MOCK, R. / LUBITZ, K.: *Piezoelectric injection systems*. In: HEYWANG, W. / LUBITZ, K. / WERSING, W., (HRSG.), *Piezoelectricity: Evolution and future of a technology*, Springer Berlin, 2009.
- [87] MUKHERJEE, A. / CHAUDURI, A.S.: *Nonlinear dynamic response of piezolaminated smart beams*. Computers and Structures 83 (2005), S. 1298–1304.
- [88] NIEZRECKI, C. / BREI, D. / BALAKRISHNAN, S. / MOSKALIK, A.: *Piezoelectric actuation: State of the art*. The Shock and Vibration Digest (2001), S. 269–280.
- [89] NOLTING, W.: *Grundkurs Theoretische Physik*. Springer Berlin Heidelberg New York, 2004.
- [90] PIAN, T.H.H. / SUMIHARA, K.: *Rational approach for assumed stress finite elements*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 20(9) (1984), S. 1685–1695.
- [91] POLIT, O. / BRUANT, I.: *Electrical potential approximations for an eight node plate finite element*. Computers and Structures 84 (2006), S. 1480–1493.
- [92] PRECHTEL, E. F.: *Development of a piezoelectric servo-flap actuation for helicopter rotor control*. Master thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1991.
- [93] RACHMADINI, Y. / LEE, S. / PARK, H. C. / YOON, N. S.: *The effect of electro-mechanical coupling stiffness on the through-the-thickness electric potential distribution of piezoelectric actuators*. Smart Materials and Structures 14 (2005), S. 754–758.

- 
- [94] RAO, S.S. / SUNAR, M.: *Recent advances in sensing and control of flexible structures via piezoelectric material technology*. Applied Mechanics Reviews 52 (1999), S. 1–16.
- [95] REISSNER, E.: *Note on the effect of transverse shear deformation in laminated anisotropic plates*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 20 (1979), S. 203–209.
- [96] SAUER, R.: *Eine einheitliche Finite-Element-Formulierung für Stab- und Schalentragwerke mit endlichen Rotationen*. Dissertation, Universität Karlsruhe, Institut für Baustatik, 1998.
- [97] SCHNELL, W. / GROSS, D. / HAUGER, W.: *Technische Mechanik 2: Elastostatik*. Springer Verlag Berlin Heidelberg New York, 1989.
- [98] SCHULZ, K.: *Theorie und Finite-Elemente-Modellierung geometrisch und materiell nichtlinearer piezoelektrischer Schalenstrukturen*. Dissertation, KIT Karlsruhe, Institut für Baustatik, 2010.
- [99] SCHULZ, K. / KLINKEL, S. / WAGNER, W.: *A finite element formulation for piezoelectric shell structures considering geometrical and material nonlinearities*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, in print, doi: 10.1002/nme. 3113.
- [100] SILHAVÝ, M.: *The mechanics and thermodynamics of continuous media*. Springer Verlag Berlin Heidelberg New York, 1996.
- [101] SIMO, J. C. / FOX, D. D. / RIFAI, M.S.: *On a stress resultant geometrically exact shell model. Part ii: The linear theory: Computational aspects*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 73 (1989), S. 53–92.
- [102] SIMO, J. C. / RIFAI, M. S.: *A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 29 (1990), S. 1595–1638.
- [103] SIMO, J. C. / VU-QUOC, L.: *A three-dimensional finite-strain rod model. Part II: Computational aspects*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 58 (1986), S. 79–116.
- [104] STEIN, E. / BARTHOLD, F.-J.: *Der Ingenieurbau – Grundwissen: Werkstoffe, Elastizitätstheorie*. Ernst & Sohn, Berlin, 1996.

- [105] SU, B. / PEARCE, D.H. / BUTTON, T.W.: *Routes to net shape electro-ceramic devices and thick films*. Journal of the European Ceramic Society 21 (2001), S. 2005–2009.
- [106] SUN, Q. / WOLKOW, R.A.: *Three dimensional displacement analysis of a piezoelectric tube scanner through finite element simulations of a tube assembly*. Review of Scientific Instruments 77 (2006).
- [107] SZE, K. Y. / YAO, L. Q.: *A hybrid stress ANS solid-shell element and its generalization for smart structure modelling. Part I – solid-shell element formulation*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 48 (2000), S. 545–564.
- [108] SZE, K. Y. / YAO, L. Q. / YI, S.: *A hybrid stress ANS solid-shell element and its generalization for smart structure modelling. Part II – smart structure modelling*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 48 (2000), S. 565–582.
- [109] TAN, X. / VU-QUOC, L.: *Optimal solid shell element for large deformable composite structures with piezoelectric layers and active vibration control*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 64 (2005), S. 1981–2013.
- [110] TANI, J. / TAKAGI, T. / QIU, J.: *Intelligent material systems: Application of functional materials*. Applied Mechanics Reviews 51 (1998), S. 505–521.
- [111] TIPLER, P. / MOSCA, G.: *Physik*. Elsevier, München, 2004.
- [112] TRESSLER, J. F. / ALKOY, S. / NEWNHAM, R. E.: *Piezoelectric sensors and sensor materials*. Journal of Electroceramics 2(4) (1998), S. 257–272.
- [113] TRUESDELL, C. A. / NOLL, W.: *The non-linear field theories of mechanics*. In: ANTMAN, S., (HRSG.), *Handbuch der Physik (Band III)*, Springer Berlin, 2004.
- [114] TZOU, H. S.: *Development of a light-weight robot end-effector using polymeric piezoelectric bimorph*. Conference on Robotics and Automation (1989), S. 1704–1709.
- [115] VARELIS, D. / SARAVANOS, D. A.: *Coupled mechanics and finite element for non-linear laminated piezoelectric shallow shells undergoing large displacements and rotations*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 66 (2006), S. 1211–1233.



- 
- [116] VEPA, R.: *Dynamics of smart structures*. John Wiley & Sons, Inc., 2010.
- [117] WACKERFUSS, J. / GRUTTMANN, F.: *A mixed hybrid finite beam element with an interface to arbitrary three-dimensional material models*. Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering 198 (2009), S. 2053–2066.
- [118] WAGNER, W. / GRUTTMANN, F.: *Finite element analysis of Saint-Venant torsion problem with exact integration of the elastic-plastic constitutive equations*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 190 (2001), S. 3831–3848.
- [119] WAGNER, W. / GRUTTMANN, F.: *A robust non-linear mixed hybrid quadrilateral shell element*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 64 (2005), S. 635–666.
- [120] WANG, Q. / QUEK, T.: *Flexural vibration analysis of sandwich beam coupled with piezoelectric actuator*. Smart Materials and Structures 9 (2000), S. 103–109.
- [121] WANG, X. / WANG, Y.: *On non-linear behaviour of spherical shallow shells bonded with piezoelectric actuators by the differential quadrature element method (DQEM)*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 53 (2002), S. 1477–1490.
- [122] WRIGGERS, P.: *Nichtlineare Finite-Element-Methoden*. Springer Berlin Heidelberg New York, 2001.
- [123] YANG, J.: *The mechanics of piezoelectric structures*. World scientific publishing company Singapore, 2006.
- [124] YOON, H.S. / WASHINGTON, G.: *Active vibration confinement of flexible structures using piezoceramic patch actuators*. Journal of Intelligent Material Systems and Structures 19 (2008), S. 145–155.
- [125] ZEMČÍK, R. / ROLFES, R. / ROSE, M. / TESSMER, J.: *High-performance four-node shell element with piezoelectric coupling for the analysis of smart laminated structures*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 70 (2007), S. 934–961.
- [126] ZHENG, S. / WANG, X. / CHEN, W.: *The formulation of a refined hybrid enhanced assumed strain solid shell element and its application to model smart structures containing distributed piezoelectric sensors/actuators*. Smart Materials and Structures 13 (2004), S. 43–50.

- [127] ZIENKIEWICZ, O. C. / TAYLOR, R. L. / ZHU, J. Z.: *The finite element method - Its basis and fundamentals*. Elsevier Butterworth-Heinemann Ltd, 2005.
- [128] ZOUARI, W. / ZINEB, B. / BENJEDDOU, A.: *A FSDT-MITC piezoelectric shell finite element with ferroelectric non-linearity*. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 20(17) (2009), S. 2055–2075.

# Berichte des Instituts für Baustatik, Karlsruher Institut für Technologie

## Verzeichnis der bisher erschienenen Berichte:

- 51/1: Beitrag zur Ermittlung der zeitabhängigen Eigenspannungen in Verbundträgern, Dissertation, Hansjürgen Sonntag, 1951.
- 54/2: Beiträge zur Ermittlung der zeitabhängigen Spannungen in Verbundträgern, Dissertation, Eugen Müller, 1954.
- 54/3: Zur Statik räumlich gekrümmter Träger, Dissertation, Heinrich Bechert, 1954.
- 55/4: Bemessungsverfahren für Verbundträger, Dissertation, Günter Utescher, 1955.
- 57/5: Einflußfelder für die Hauptträgerschnittkräfte zweistegiger Plattenbalkensysteme, Dissertation, Otto Köller, 1957.
- 60/6: Beitrag zur numerischen Berechnung der Schnittkräfte von rechteckigen und schiefen randversteiften Platten, Dissertation, Klaus Stiglat, 1960.
- 61/7: Allgemeines und einheitliches Berechnungsverfahren für Verbundkonstruktionen aus Stahl und Beton, Dissertation, Herbert Wippel, 1961.
- 62/8: Beitrag zur Bemessung vorgespannter stählerner Fachwerkträger mit besonderer Berücksichtigung der Tragsicherheit, Dissertation, Wolfgang Heidecker, 1962.
- 63/9: Beitrag zur Berechnung der Schnittkräfte und Durchbiegungen von umfanggelagerten Rechteckplatten mit veränderlichem Querschnitt in einer Spannrichtung, Dissertation, Ernst Buchholz, 1963.
- 63/10: Der winkelrecht zu seiner Ebene belastete, kreisförmig gekrümmte Träger mit starrer Torsionseinspannung an den Auflagerepunkten, Dissertation, Hans Wittfoht, 1963.

- 63/11: Ein Verfahren zur Berechnung biegsamer rechteckiger Gründungsplatten mit elektronischen Rechengeräten, Dissertation, Artur Deninger, 1963.
- 64/12: Anwendung des Momentenausgleichsverfahrens für durchlaufende schiefwinklige Platten, Dissertation, Jahiclul Alum, 1964.
- 67/13: Beitrag zur Berechnung des Tragvermögens von Rahmentragwerken aus Stahl nach der Plastizitätstheorie II. Ordnung, Dissertation, Mieng-Siong Wang, 1967.
- 67/14: Zusammenwirken von biegesteifem Skelett und aussteifenden Wandscheiben in Hochhauskonstruktionen, Dissertation, Rolf Zickendraht, 1967.
- 68/15: Experimentelle Untersuchung von beliebig gelagerten Plattentragwerken mit Hilfe von elektrischen Analogieschaltungen, Dissertation, Werner Sitzler, 1968.
- 0/75 : Berechnung einfeldriger und durchlaufender Kastenträger unter Berücksichtigung der Querschnittsdeformation, Dissertation, J. Hanisch, 1975.
- 1/76 : Das Tragverhalten längsversteifter, vorverformter Rechteckplatten unter Axialbelastung nach der nichtlinearen Beultheorie (unter Berücksichtigung der orthotropen Struktur sowie einer elastischen Lagerung am Längsrand), Habilitationsschrift, Helmut Rubin, 1976.
- 2/78 : Traglastuntersuchungen ebener Rahmen aus Stahl unter Berücksichtigung teilplastischer Zonen, Dissertation, Ülgen Korkut, 1978.
- 3/79 : Traglastermittlung von räumlich belasteten Durchlaufträgern mit offenem, dünnwandigem Querschnitt bei beliebigem Werkstoffgesetz, Dissertation, Wolfgang Heil, 1979.
- 4/79 : Schnittgrößen im Verschneidungsbereich eines kreiszylindrischen Druckbehälters mit einem Stutzen beliebiger Länge, Dissertation, Kurt Schumer, 1979.
- 5/81 : Traglastberechnung räumlicher Rahmen aus Stahl- oder Leichtmetallprofilen mit dünnwandigen offenen Querschnitten, Dissertation, Theodor Ackermann, 1981.

- 6/83 : Berechnung orthotroper Rechteckplatten nach der nichtlinearen Elastizitätstheorie für beliebige Randbedingungen, Dissertation, Karl Morgen, 1983.
- 7/86 : Traglastermittlung räumlicher Stabtragwerke aus Stahl und Leichtmetall unter Berücksichtigung der Schubweichheit, Dissertation, Dietmar H. Maier, 1986.
- 8/89 : Bemessung von Raumfachwerken bezüglich ihrer Grenztragfähigkeit mit Hilfe der mathematischen Optimierung, Dissertation, Richard Harich, 1989.
- 9/89 : Quasi-Newton Verfahren und Kurvenverfolgungsalgorithmen für die Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme in der Strukturmechanik, Forschungsbericht, Karl Schweizerhof, 1989.
- 10/90 : Finite Element Konzepte für schubelastische Schalen mit endlichen Drehungen, Dissertation, Heinrich Gebhardt, 1990.
- 11/91 : Theorie II. Ordnung des eben gekrümmten Stabes bei nicht richtungstreuen Kräften, Dissertation, Peter Brković, 1991.
- 12/91 : Nichtlineare Finite Element Berechnungen von Schalenträgwerken mit geschichtetem anisotropen Querschnitt, Dissertation, Rudolf Klarman, 1991.
- 13/94 : Adaptive Finite Element Konzepte zur Analyse von Schalenträgwerken, Dissertation, Markus Baumann, 1994.
- 1 (1995) : Optimierung von Stockwerkrahmen aus Stahl mit biegesteifen und biegeweichen Rahmenknoten, Dissertation, Petra Höß, 1994, ISBN: 978-3-935322-00-3.
- 2 (1996) : Theorie und Numerik dünnwandiger Faserverbundstrukturen, Forschungsbericht, Friedrich Gruttmann, 1996, ISBN: 978-3-935322-01-1.
- 3 (1997) : Stabilität von Stahlzylindern mit unilateralen Randbedingungen bei statischen und dynamischen Beanspruchungen, Forschungsbericht, Klaus Knebel, 1997, ISBN: 978-3-935322-02-7.
- 4 (1998) : Eine einheitliche Finite-Element-Formulierung für Stab- und Schalenträgwerke mit endlichen Rotationen, Dissertation, Roland Sauer, 1998, ISBN: 978-3-935322-03-4.

- 5 (1999) : Finite-Element-Modellierung von Starrkörper- und Übergangsbedingungen in der Statik, Dissertation, Joachim Kugler, 1999, ISBN: 978-3-935322-04-1.
- 6 (2000) : Delaminationsanalysen von Faserverbundstrukturen mit der Methode der finiten Elemente, Dissertation, Wolfgang Sprenger, 2000, ISBN: 978-3-935322-05-8.
- 7 (2000) : Theorie und Numerik eines Volumen-Schalen-Elementes bei finiten elastischen und plastischen Verzerrungen, Dissertation, Sven Klinkel, 2000, ISBN: 978-3-935322-06-5.
- 8 (2001) : Theorie und Numerik für den Entwurf von vorgespannten Membrantragwerken, Dissertation, René Ziegler, 2001, ISBN: 978-3-935322-07-2.
- 9 (2005) : Ein inelastisches 3D-Versagensmodell für Beton und seine Finite-Element-Implementierung, Dissertation, Jan Schütt, 2005, ISBN: 978-3-935322-08-9.
- 10 (2006) : Formfindung der Fließliniengeometrie für polygonale Platten im Traglastzustand, Dissertation, Jochen Wüst, 2006, ISBN: 978-3-935322-09-6.
- 11 (2006) : Nichtlineare Formulierung piezoelektrischer 3D-Stabstrukturen - Theorie und Finite-Element-Modellierung, Dissertation, Alexander Butz, 2006, ISBN: 978-3-935322-10-2.
- 12 (2007) : Nichtlineare Modellierung ferroelektrischer Keramiken und piezoelektrischer Strukturen – Analyse und Finite-Element-Formulierung, Habilitationsschrift, Sven Klinkel, 2007, ISBN: 978-3-935322-11-9.
- 13 (2007) : Ein geometrisch und materiell nichtlineares Cosserat-Modell – Theorie, Numerik und Anwendungsmöglichkeiten, Dissertation, Ingo Münch, 2007, ISBN: 978-3-935322-12-6.
- 14 (2008) : Magnetostriktive und piezoelektrische Materialien – Konstitutive Modellierung und Finite-Element-Formulierung, Dissertation, Konrad Linnemann, 2008, ISBN: 978-3-935322-13-3.
- 15 (2008) : Theorie und Numerik unidirektional verstärkter Faserverbundwerkstoffe: 3D Finite-Elemente-Untersuchungen der Faser-Matrix Mikroinstabilitäten, Dissertation, Jens Harich, 2008, ISBN: 978-3-935322-15-7.

- 16 (2009) : Finite Element Modeling of Intra- and Interlaminar Damage Growth in Composite Laminates, Dissertation, Claudio Balzani, 2009, ISBN: 978-3-935322-16-4.
- 17 (2010) : Theorie und Finite-Elemente-Modellierung geometrisch und materiell nichtlinearer piezoelektrischer Schalenstrukturen, Dissertation, Katrin Schulz, 2010, ISBN: 978-3-935322-17-1.





# Lebenslauf

Name:	Dieter Legner
Geburtsdatum:	16.09.1975
Geburtsort:	Bretten
1982-1995	Schulausbildung Melanchthon-Gymnasium Bretten Abitur
1995-1996	Zivildienst
1996-2003	Studium Bauingenieurwesen Universität Karlsruhe (TH) Vertiefungsrichtung: Konstruktiver Ingenieurbau
2003	Diplom
2003-2004	Studium Ingenieur-Pädagogik Universität Karlsruhe (TH) Nebenfach: Mathematik
2004	Diplom
2004-2006	Wissenschaftlicher Mitarbeiter ISL, Saint-Louis, Frankreich
2007-2011	Wissenschaftlicher Mitarbeiter Institut für Baustatik, Universität Karlsruhe (TH)