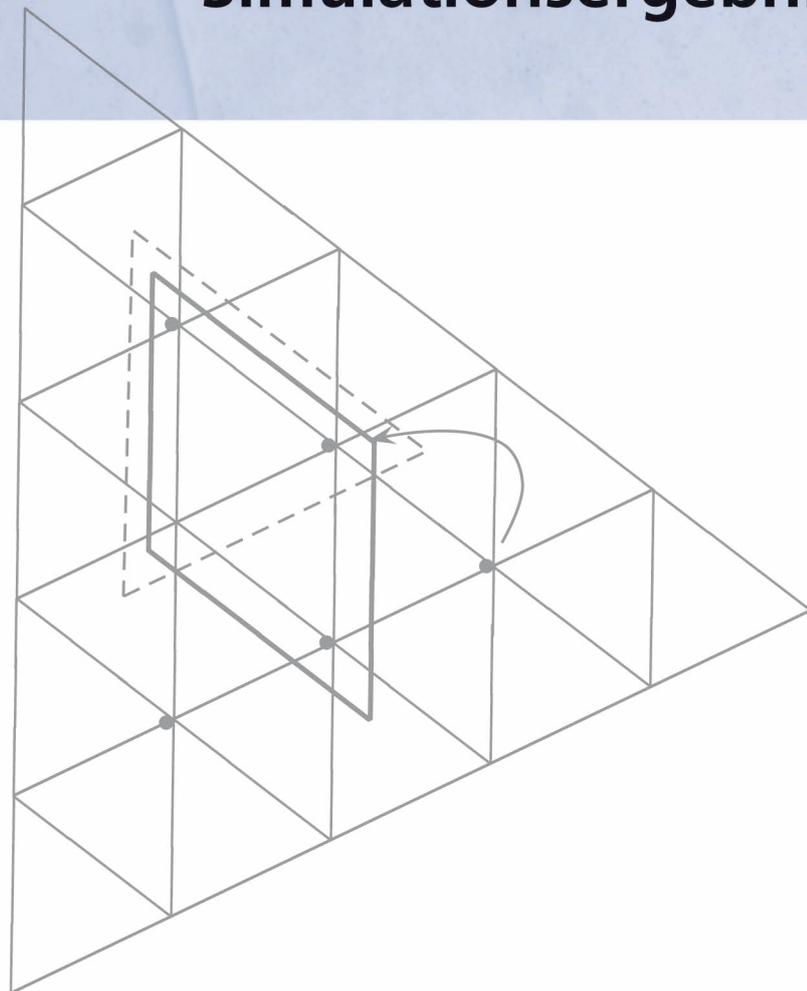


Tobias Lindner

Zur Manipulierbarkeit der Allokation öffentlicher Güter

**Theoretische Analyse und
Simulationsergebnisse**



Tobias Lindner

Zur Manipulierbarkeit der Allokation öffentlicher Güter

Theoretische Analyse und Simulationsergebnisse

Zur Manipulierbarkeit der Allokation öffentlicher Güter

Theoretische Analyse und Simulationsergebnisse

von
Tobias Lindner

Dissertation, Karlsruher Institut für Technologie
Fakultät für Wirtschaftswissenschaften
Tag der mündlichen Prüfung: 21. Juni 2011
Referenten: Professor Dr. Clemens Puppe, Professor Dr. Karl-Heinz Waldmann

Impressum

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
KIT Scientific Publishing
Straße am Forum 2
D-76131 Karlsruhe
www.ksp.kit.edu

KIT – Universität des Landes Baden-Württemberg und nationales
Forschungszentrum in der Helmholtz-Gemeinschaft



Diese Veröffentlichung ist im Internet unter folgender Creative Commons-Lizenz
publiziert: <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/de/>

KIT Scientific Publishing 2011
Print on Demand

ISBN 978-3-86644-709-7

Danksagung

Die Arbeit an einer Dissertation ist ein Prozess, der ohne die wohlwollende Unterstützung zahlreicher Personen nicht möglich wäre. Allein dies ist schon Grund, eben diesen Personen Dank zu sagen. An erster Stelle bedanken möchte ich mich bei meinem Doktorvater Professor Dr. Clemens Puppe, der mir in den vergangenen vier Jahren (und zuvor in der Zeit meines Studiums) größtmögliche Unterstützung und auch die notwendige Freiheit für meine wissenschaftliche Arbeit zukommen ließ. Ebenso danken möchte ich Professor em. Klaus D. Nehring PhD von der University of California at Davis. Er hat nicht nur mein Interesse für die Fragestellungen dieser Dissertation geweckt, sondern auch mit zahlreichen Anmerkungen und Ideen das Entstehen dieser Arbeit stets wohlwollend begleitet. Im Rahmen meines Promotionsverfahrens wirkten Professor Dr. Karl-Heinz Waldmann als Korreferent, Professor Dr. Siegfried Berninghaus als Prüfer und Professor Dr. Stefan Nickel als Vorsitzender der Prüfungskommission mit. Ihnen allen danke ich hierfür.

In den vergangenen vier Jahren habe ich am Lehrstuhl für Wirtschaftstheorie ein angenehmes und wissenschaftliche Arbeit bereicherndes Klima vorgefunden, für das ich zahlreichen Kollegen danken möchte. Sie haben in vielen persönlichen Gesprächen unterschiedliche Teile meiner Arbeit diskutiert, hinterfragt und wertvolle Anregungen gegeben. Namentlich danken möchte ich daher Professor Dr. Martin Barbie (jetzt Universität zu Köln), Dipl.-Math. oec. Veronica Block, Professor em. Dr. Dr. h.c. mult. Wolfgang Eichhorn, Monika Emanuel, Dipl.-Vw. Philipp Enders, Professor Dr. Susanne Fuchs-Seliger, Juniorprofessor Dr. Marten Hillebrand, Dipl.-Math. Caren Söhner sowie B.Sc. Tobias Dittrich, cand. Wi.-Ing. Claudia Gantner und cand. Wi.-Ing. Lisa Straß, die als wissenschaftliche Hilfskräfte an der Aufbereitung der Simulationsdaten mitgewirkt haben.

Schließlich gilt mein Dank meiner Familie, insbesondere meiner Mutter und meiner Großmutter, ohne deren immerwährende Unterstützung nicht die Grundlagen für mein Studium gegeben gewesen wären. Meiner Frau, Dipl.-Math. Franziska Lindner, danke ich für unendliche Geduld, fortwährende Ermutigung und stetige Liebe. Ihr widme ich diese Arbeit.

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit untersucht die Aufteilung eines Budgets auf mehrere öffentliche Güter mittels einer Abstimmung. Hierzu betrachten wir Abstimmungsregeln, unter denen jeder Agent eine Budgetaufteilung vorschlägt und dann aus diesen Vorschlägen eine Budgetaufteilung (Allokation) bestimmt wird. Von besonderem Interesse ist die Frage, welche Abstimmungsregeln nicht manipulierbar sind, das heißt für keinen Agenten einen Anreiz bieten, eine Allokation vorzuschlagen, die nicht mit seiner präferierten Aufteilung übereinstimmt. Es ist Stand der Wissenschaft, dass - stellt man keine Einschränkungen an die möglichen Präferenzen über Allokationen - es keine nicht manipulierbare Abstimmungsregel geben kann, wenn mehr als zwei öffentliche Güter betrachtet werden. Dieses Resultat besitzt auch dann noch Gültigkeit, wenn man plausible Restriktionen (sogenannte verallgemeinert eingipflige Präferenzen) hinsichtlich der Präferenzen der Agenten annimmt. Im Rahmen dieser Arbeit zeigen wir für mehrere Abstimmungsregeln, dass diese nicht manipulierbar sind, wenn man die Klasse der Präferenzen stärker (nämlich auf metrisch eingipflige Präferenzen) einschränkt. Um ferner zu untersuchen, wie anfällig für Manipulation sowohl diese Verfahren als auch andere Abstimmungsregeln zur Allokation öffentlicher Güter sind, wenn man die weitaus größere Klasse von verallgemeinert eingipfligen Präferenzen betrachtet, wird deren Verhalten im Rahmen einer Simulationsstudie untersucht. Hierzu wird ein mehrere Variablen umfassendes Messkonzept eingeführt, anhand dessen die einzelnen Abstimmungsregeln beurteilt werden. Die Ergebnisse der Simulation zeigen dabei sowohl solche Abstimmungsregeln, die bezüglich des Messkonzepts stark manipulierbar sind, als auch solche Regeln, unter denen das Auftreten und die Effekte von Manipulation gering(er) erscheinen.

Schlagworte: Social Choice Theorie, Manipulierbarkeit, Strategy-Proofness, öffentliche Güter, Simulation

JEL Classification: D70, D71, D81, H41

Zusammenfassung	iii
1. Einführung	1
2. Abstimmungen in der Social Choice Theorie	7
2.1. Social Welfare und Social Choice Functions	8
2.2. Manipulierbarkeit von Social Choice Functions	11
2.2.1. Simulationen zur Bestimmung von Manipulierbarkeit	14
2.2.2. Manipulierbarkeit versus Pivotalität	18
2.3. Das Median-Wähler-Theorem	19
2.3.1. Verallgemeinerung auf multidimensionale Probleme	21
2.4. Manipulation der Allokation öffentlicher Güter	23
3. Abstimmungen auf dem Simplex	27
3.1. Definitionen und Modellannahmen	27
3.2. Die Midpoint-Regel	32
3.2.1. Struktur der Midpoints	33
3.2.2. Mögliche Beeinflussung der Midpoint-Punkte	38
3.2.3. Manipulierbarkeit der Midpoint-Regel	40
3.2.4. Die “shadow voter selection”	44
3.3. Die Mittelwert-Regel	51
3.4. Median-basierte Regeln	52
3.4.1. Die normalisierte Median-Regel	53
3.4.2. Die sequentielle Median-Regel	54
3.4.3. Die Condorcet Center-Regel	56
3.4.4. Die Inertial Median-Regel	57

4. Simulation	63
4.1. Aufbau der Simulationsstudie	67
4.1.1. Umsetzung in der Programmierung	70
4.1.2. Parameter	79
4.2. Ergebnisse der Simulationsstudie	94
4.2.1. Ausmaß der Manipulation	96
4.2.2. Effekt der Manipulation	114
4.2.3. Weitere Kenngrößen und Fragestellungen	143
4.3. Zusammenfassung der Ergebnisse	156
5. Schlussfolgerungen und Ausblick	161
A. Weitere Simulationsergebnisse: Number of Manipulations	167
B. Weitere Simulationsergebnisse: Maximum Utility Gain	171
C. Weitere Simulationsergebnisse: Final Number of Agents Manipulating	175
D. Weitere Simulationsergebnisse: Average Deviation	181
E. Weitere Simulationsergebnisse: Average Manipulation	185
F. Weitere Simulationsergebnisse: Distance	189
G. Weitere Simulationsergebnisse: Difference in Sum of Utilities	193
H. Weitere Simulationsergebnisse: UTILIE	199
I. Weitere Simulationsergebnisse: Difference in Remoteness	205
J. Weitere Simulationsergebnisse: REMRD	209
K. Weitere Simulationsergebnisse: Profile Converged	215

Abbildungsverzeichnis

2.1. Ein Beispiel eingipfliger Präferenzen	19
3.1. Ein (3, 5)-Simplex	29
3.2. Der Simplex ist kein Medianraum	30
3.3. Die Mengen $[x, y]$, $\rangle x, z \rangle$ und $\rangle z, x \rangle$	34
3.4. Ein Beispiel zu Lemma 3.2	35
3.5. Verkleinerung der Menge der Midpoints durch Manipulation	41
3.6. Änderung der Menge der Midpoints durch Manipulation	43
3.7. Eine schwerwiegendere Manipulation der Midpoint-Regel	43
4.1. Beispiel einer „Info“-Datei	78
4.2. Number of Manipulations unter Cobb-Douglas-Präferenzen	98
4.3. Number of Manipulations unter Cobb-Douglas-Präferenzen (in logarithmischer Skalierung)	99
4.4. Maximum Utility Gain unter Cobb-Douglas-Präferenzen	102
4.5. Maximum Utility Gain unter Cobb-Douglas-Präferenzen (in logarithmischer Skalierung)	103
4.6. Total Number of Agents Manipulating unter Cobb-Douglas-Präferenzen	106
4.7. Final Number of Agents Manipulating unter Cobb-Douglas-Präferenzen	108
4.8. Final Number of Agents Manipulating unter Cobb-Douglas-Präferenzen (in logarithmischer Skalierung)	109
4.9. Verhältnis Final zu Total Number of Agents Manipulating unter Cobb-Douglas-Präferenzen	110
4.10. Number of Pivotal Agents	113
4.11. Average Deviation unter Cobb-Douglas-Präferenzen	117
4.12. Average Deviation unter Cobb-Douglas-Präferenzen (Ausschnittsvergrößerung)	117
4.13. Average Manipulation unter Cobb-Douglas-Präferenzen	120

Abbildungsverzeichnis

4.14. Average Manipulation unter Cobb-Douglas-Präferenzen (Ausschnittsvergrößerung)	120
4.15. Average Manipulation unter Cobb-Douglas-Präferenzen (in logarithmischer Skalierung)	121
4.16. Distance unter Cobb-Douglas-Präferenzen	123
4.17. Distance unter Cobb-Douglas-Präferenzen (in logarithmischer Skalierung)	123
4.18. Distance der Midpoint-Regel bei CES-Präferenzen	126
4.19. Distance der normalisierten Median-Regel bei CES-Präferenzen	126
4.20. Difference in Sum of Utilities unter Cobb-Douglas-Präferenzen	129
4.21. Difference in Sum of Utilities unter Cobb-Douglas-Präferenzen (Ausschnittsvergrößerung)	130
4.22. Nutzensumme (in UTILIE-Skala) unter Cobb-Douglas-Präferenzen	133
4.23. Nutzensumme (in UTILRD-Skala) unter Cobb-Douglas-Präferenzen	135
4.24. Difference in Remoteness unter Cobb-Douglas-Präferenzen	138
4.25. Remoteness (in REMRD-Skala) unter Cobb-Douglas-Präferenzen	140
4.26. Remoteness (in REMRD-Skala) unter Cobb-Douglas-Präferenzen (Ausschnittsvergrößerung)	140

Tabellenverzeichnis

3.1. Eigenschaften von Abstimmungsregeln auf dem Simplex	61
4.1. Number of Manipulations unter Cobb-Douglas-Präferenzen	97
4.2. Manipulationen pro Agent unter Cobb-Douglas-Präferenzen	98
4.3. Manipulationen pro manipulierendem Agent unter Cobb-Douglas-Präferenzen	99
4.4. Number of Manipulations unter metrischen Präferenzen	100
4.5. Maximum Utility Gain unter Cobb-Douglas-Präferenzen	101
4.6. Maximum Utility Gain unter metrischen Präferenzen	103
4.7. Total Number of Agents Manipulating unter Cobb-Douglas-Präferenzen	104
4.8. Total Number of Agents Manipulating unter Cobb-Douglas-Präferenzen in absoluten Zahlen	105
4.9. Total Number of Agents Manipulating unter metrischen Präferenzen .	106
4.10. Final Number of Agents Manipulating unter Cobb-Douglas-Präferenzen	107
4.11. Verhältnis Final zu Total Number of Agents Manipulating unter Cobb-Douglas-Präferenzen	110
4.12. Final Number of Agents Manipulating unter metrischen Präferenzen .	111
4.13. Number of Pivotal Agents	111
4.14. Abstimmungsregeln bezüglich des Ausmaßes der Manipulation unter Cobb-Douglas-Präferenzen	113
4.15. Average Deviation unter Cobb-Douglas-Präferenzen	116
4.16. Average Deviation unter metrischen Präferenzen	116
4.17. Average Manipulation unter Cobb-Douglas-Präferenzen	119
4.18. Average Manipulation unter metrischen Präferenzen	121
4.19. Distance unter Cobb-Douglas-Präferenzen	122
4.20. Distance geteilt durch Average Manipulation unter Cobb-Douglas-Präferenzen	124
4.21. Distance unter metrischen Präferenzen	127
4.22. Difference in Sum of Utilities unter Cobb-Douglas-Präferenzen	128

Tabellenverzeichnis

4.23. Difference in Sum of Utilities unter metrischen Präferenzen	130
4.24. Nutzensumme (in UTILIE-Skala) unter Cobb-Douglas-Präferenzen . .	132
4.25. Nutzensumme (in UTILIE-Skala) unter Cobb-Douglas-Präferenzen vor Manipulation	132
4.26. Nutzensumme (in UTILIE-Skala) unter metrischen Präferenzen . . .	134
4.27. Nutzensumme (in UTILRD-Skala) unter Cobb-Douglas-Präferenzen .	135
4.28. Nutzensumme (in UTILRD-Skala) unter metrischen Präferenzen . . .	136
4.29. Difference in Remoteness unter Cobb-Douglas-Präferenzen	137
4.30. Difference in Remoteness unter metrischen Präferenzen	139
4.31. Remoteness (in REMRD-Skala) unter Cobb-Douglas-Präferenzen . . .	139
4.32. Remoteness (in REMRD-Skala) unter metrischen Präferenzen	141
4.33. Abstimmungsregeln bezüglich des Effekts der Manipulation unter Cobb- Douglas-Präferenzen	142
4.34. Konvergierte Profile unter Cobb-Douglas-Präferenzen	144
4.35. Konvergierte Profile unter metrischen Präferenzen	145
4.36. Condorcet Consistency der Profile wahrer Peaks	146
4.37. Median Gap der Profile wahrer Peaks	148
4.38. Midpoint Diameter der Profile wahrer Peaks	149
4.39. Regressionsparameter zum Verhalten der Distance in logarithmischer Skalierung	153
4.40. Maximum Utility Gain für unterschiedliche (K, L) -Simplices	155
4.41. Final Number of Agents Manipulating für unterschiedliche (K, L) - Simplices	155
4.42. Distance für unterschiedliche (K, L) -Simplices	156
4.43. Nutzensumme (in UTILIE-Skala) für unterschiedliche (K, L) -Simplices	156
A.1. Number of Manipulations der Midpoint-Regel unter CES-Präferenzen	168
A.2. Number of Manipulations der Mittelwert-Regel unter CES-Präferenzen	168
A.3. Number of Manipulations der normalisierten Median-Regel unter CES- Präferenzen	168
A.4. Number of Manipulations der „PDMedian“-Regel unter CES-Präfe- renzen	169
A.5. Number of Manipulations der „PDRMedian“-Regel unter CES-Präfe- renzen	169
A.6. Number of Manipulations der Condorcet Center-Regel unter CES- Präferenzen	170
A.7. Number of Manipulations der Inertial Median-Regel unter CES-Prä- ferenzen	170
B.1. Maximum Utility Gain der Midpoint-Regel unter CES-Präferenzen . .	172
B.2. Maximum Utility Gain der Mittelwert-Regel unter CES-Präferenzen .	172
B.3. Maximum Utility Gain der normalisierten Median-Regel unter CES- Präferenzen	172
B.4. Maximum Utility Gain der „PDMedian“-Regel unter CES-Präferenzen	173
B.5. Maximum Utility Gain der „PDRMedian“-Regel unter CES-Präferenzen	173

B.6. Maximum Utility Gain der Condorcet Center-Regel unter CES-Präferenzen	173
B.7. Maximum Utility Gain der Inertial Median-Regel unter CES-Präferenzen	174
C.1. Final Number of Agents Manipulating der Midpoint-Regel unter CES-Präferenzen	176
C.2. Final Number of Agents Manipulating der Mittelwert-Regel unter CES-Präferenzen	176
C.3. Final Number of Agents Manipulating der normalisierten Median-Regel unter CES-Präferenzen	177
C.4. Final Number of Agents Manipulating der „PDMedian“-Regel unter CES-Präferenzen	177
C.5. Final Number of Agents Manipulating der „PDRMedian“-Regel unter CES-Präferenzen	178
C.6. Final Number of Agents Manipulating der Condorcet Center-Regel unter CES-Präferenzen	178
C.7. Final Number of Agents Manipulating der Inertial Median-Regel unter CES-Präferenzen	179
D.1. Average Deviation der Midpoint-Regel unter CES-Präferenzen	182
D.2. Average Deviation der Mittelwert-Regel unter CES-Präferenzen	182
D.3. Average Deviation der normalisierten Median-Regel unter CES-Präferenzen	182
D.4. Average Deviation der „PDMedian“-Regel unter CES-Präferenzen	183
D.5. Average Deviation der „PDRMedian“-Regel unter CES-Präferenzen	183
D.6. Average Deviation der Condorcet Center-Regel unter CES-Präferenzen	183
D.7. Average Deviation der Inertial Median-Regel unter CES-Präferenzen	184
E.1. Average Manipulation der Midpoint-Regel unter CES-Präferenzen	186
E.2. Average Manipulation der Mittelwert-Regel unter CES-Präferenzen	186
E.3. Average Manipulation der normalisierten Median-Regel unter CES-Präferenzen	186
E.4. Average Manipulation der „PDMedian“-Regel unter CES-Präferenzen	187
E.5. Average Manipulation der „PDRMedian“-Regel unter CES-Präferenzen	187
E.6. Average Manipulation der Condorcet Center-Regel unter CES-Präferenzen	187
E.7. Average Manipulation der Inertial Median-Regel unter CES-Präferenzen	188
F.1. Distance der Midpoint-Regel unter CES-Präferenzen	190
F.2. Distance der Mittelwert-Regel unter CES-Präferenzen	190
F.3. Distance der normalisierten Median-Regel unter CES-Präferenzen	190
F.4. Distance der „PDMedian“-Regel unter CES-Präferenzen	191
F.5. Distance der „PDRMedian“-Regel unter CES-Präferenzen	191
F.6. Distance der Condorcet Center-Regel unter CES-Präferenzen	191

Tabellenverzeichnis

F.7. Distance der Inertial Median-Regel unter CES-Präferenzen	192
G.1. Difference in Sum of Utilities der Midpoint-Regel unter CES-Präferenzen	194
G.2. Difference in Sum of Utilities der Mittelwert-Regel unter CES-Präferenzen	194
G.3. Difference in Sum of Utilities der normalisierten Median-Regel unter CES-Präferenzen	195
G.4. Difference in Sum of Utilities der „PDMedian“-Regel unter CES-Präferenzen	195
G.5. Difference in Sum of Utilities der „PDRMedian“-Regel unter CES-Präferenzen	196
G.6. Difference in Sum of Utilities der Condorcet Center-Regel unter CES-Präferenzen	196
G.7. Difference in Sum of Utilities der Inertial Median-Regel unter CES-Präferenzen	197
H.1. Nutzensumme (in UTILIE-Skala) der Midpoint-Regel unter CES-Präferenzen	200
H.2. Nutzensumme (in UTILIE-Skala) der Mittelwert-Regel unter CES-Präferenzen	200
H.3. Nutzensumme (in UTILIE-Skala) der normalisierten Median-Regel unter CES-Präferenzen	201
H.4. Nutzensumme (in UTILIE-Skala) der „PDMedian“-Regel unter CES-Präferenzen	201
H.5. Nutzensumme (in UTILIE-Skala) der „PDRMedian“-Regel unter CES-Präferenzen	202
H.6. Nutzensumme (in UTILIE-Skala) der Condorcet Center-Regel unter CES-Präferenzen	202
H.7. Nutzensumme (in UTILIE-Skala) der Inertial Median-Regel unter CES-Präferenzen	203
I.1. Difference in Remoteness der Midpoint-Regel unter CES-Präferenzen	206
I.2. Difference in Remoteness der Mittelwert-Regel unter CES-Präferenzen	206
I.3. Difference in Remoteness der normalisierten Median-Regel unter CES-Präferenzen	206
I.4. Difference in Remoteness der „PDMedian“-Regel unter CES-Präferenzen	207
I.5. Difference in Remoteness der „PDRMedian“-Regel unter CES-Präferenzen	207
I.6. Difference in Remoteness der Condorcet Center-Regel unter CES-Präferenzen	208
I.7. Difference in Remoteness der Inertial Median-Regel unter CES-Präferenzen	208

J.1.	Remoteness (in REMRD-Skala) der Midpoint-Regel unter CES-Präferenzen	210
J.2.	Remoteness (in REMRD-Skala) der Mittelwert-Regel unter CES-Präferenzen	210
J.3.	Remoteness (in REMRD-Skala) der normalisierten Median-Regel unter CES-Präferenzen	211
J.4.	Remoteness (in REMRD-Skala) der „PDMedian“-Regel unter CES-Präferenzen	211
J.5.	Remoteness (in REMRD-Skala) der „PDRMedian“-Regel unter CES-Präferenzen	212
J.6.	Remoteness (in REMRD-Skala) der Condorcet Center-Regel unter CES-Präferenzen	212
J.7.	Remoteness (in REMRD-Skala) der Inertial Median-Regel unter CES-Präferenzen	213
K.1.	Konvergierte Profile der Midpoint-Regel unter CES-Präferenzen . . .	216
K.2.	Konvergierte Profile der Mittelwert-Regel unter CES-Präferenzen . .	216
K.3.	Konvergierte Profile der normalisierten Median-Regel unter CES-Präferenzen	216
K.4.	Konvergierte Profile der „PDMedian“-Regel unter CES-Präferenzen . .	217
K.5.	Konvergierte Profile der „PDRMedian“-Regel unter CES-Präferenzen .	217
K.6.	Konvergierte Profile der Condorcet Center-Regel unter CES-Präferenzen	217
K.7.	Konvergierte Profile der Inertial Median-Regel unter CES-Präferenzen	218

KAPITEL 1

Einführung

*“No man is an island”
John Donne, Mediatation XVII*

Kein Mensch ist eine Insel - Gewöhnlich leben Menschen miteinander und müssen tagtäglich Entscheidungen treffen, die nicht einen Menschen alleine, sondern die ganze Gruppe betreffen. Ein Weg zu solchen Entscheidungen zu finden, sind Wahlen und Abstimmungen. So geläufig uns Abstimmungsverfahren im Alltag sind, so umstritten und vielschichtig sind in der ökonomischen Theorie der Zweck von Abstimmungen und die Interpretation, die man dem Ergebnis einer solchen beimisst. Soll eine Wahl nur „irgendeine“ Entscheidung herbeiführen oder soll das Ergebnis einer Wahl tatsächlich „den Willen des Volkes“ (bzw. der Gruppe) repräsentieren?

In der Social Choice Theorie¹, dem Teilgebiet der Wirtschaftstheorie, das sich mit Abstimmungen und der Aggregation von individuellen Präferenzen beschäftigt, werden Abstimmungsverfahren meist als Abbildungen von einem Profil von Präferenzen auf eine Alternative modelliert. In diesem Modell lässt sich folglich die Frage nach Sinn und Zweck einer Abstimmung auch so formulieren: Will man lediglich *irgendwelche* Präferenzen auf *irgendeine* Alternative abbilden? Oder ist es Sinn und Zweck einer Abstimmung, Präferenzen, die den *individuellen Vorzug* für eine Alternative gegenüber einer anderen Wahlmöglichkeit widerspiegeln, auf genau die Alternative zu aggregieren, die möglichst *dem Willen der Gruppe* entspricht? Kurz: Ist also eine „soziale Wahl“ möglich? Diese Frage beinhaltet nach den obigen Gedanken zwei Aspekte: *einerseits* die Frage nach der Existenz von geeigneten Abstimmungsregeln, die - gewissen Bedingungen genügend - aus Präferenzen auf eine „sinnvolle“ Alternative abbilden, und *andererseits* die Frage, ob tatsächlich die wah-

¹„Theorie kollektiver Entscheidungsfindung“

1. Einführung

ren, individuellen Präferenzen aggregiert werden und nicht etwa eine beliebige oder willkürliche Rangordnung über die Alternativen.

Zweifel, ob eine solche soziale Wahl überhaupt möglich ist, bestehen seit der Begründung der modernen Social Choice durch die wegweisende Arbeit Kenneth Arrows "Social choice and individual values" (Arrow (1951)): In dieser Arbeit stellt Arrow die Frage, ob es überhaupt Abbildungsvorschriften geben kann, die gleichzeitig mehrere wünschenswerte Eigenschaften erfüllen, und muss diese negativ beantworten - das bekannte Unmöglichkeitstheorem von Arrow. Glücklicherweise ist die „Unmöglichkeit“ dieses Resultats nicht so allumfassend, wie sie hier vielleicht auf einen ersten Blick scheinen mag. Ist man bereit, auf die Erfüllung einer oder mehrerer Eigenschaften zu verzichten oder modifiziert diese, so lassen sich Abstimmungsregeln finden, die zwar nicht allen, aber vielen wünschenswerten Bedingungen genügen.

Ebenso zweifelhaft ist der zweite Gesichtspunkt, nämlich die Frage, ob tatsächlich aus den wahren Präferenzen der Individuen heraus aggregiert wird. Wenn man unterstellt, dass Wähler nur dann von ihrer wahren Präferenz abweichen und eine andere Rangordnung der Alternativen angeben, wenn dies ihnen nützt, stellt sich folglich die Frage, ob und wann Abstimmungsverfahren Anreize für eine nicht wahrheitsgemäße Stimmabgabe bieten. Die nahezu zeitgleich erschienenen Arbeiten von Alan Gibbard (Gibbard (1973)) und Mark Satterthwaite (Satterthwaite (1975)) beantworten diese Frage ebenfalls negativ: Erfüllt eine Abstimmungsregel gewisse Eigenschaften und trifft man keine Einschränkung bezüglich der möglichen Präferenzen, so ist jede Abstimmungsregel über mehr als zwei Alternativen *manipulierbar* in dem Sinne, dass Profile von Präferenzen existieren, unter denen ein oder mehrere Wähler einen Anreiz zu einer nicht den wahren Präferenzen entsprechenden Stimmabgabe haben.

Ähnlich wie zum Unmöglichkeitstheorem von Arrow existiert auch zum Gibbard-Satterthwaite-Theorem ein „Ausweg“, indem man Einschränkungen hinsichtlich der möglichen Präferenzen der Wähler trifft: So können Duncan Black und Herve Moulin (siehe Black (1948, 1958); Moulin (1980)) die Existenz nicht manipulierbarer Abstimmungsregeln zeigen, wenn man sich auf sogenannte eingipflige Präferenzen beschränkt. Die Details und die „Reichweite“ dieses Resultats, das man als das Median-Wähler-Theorem bezeichnet, werden in Kapitel 2 noch zu klären sein.

Dem Begriff der Manipulierbarkeit kommt in der ökonomischen Theorie eine andere Bedeutung als im Alltagsleben zu. Während man gewöhnlich unter einer Manipulation oftmals ein regelwidriges oder verbotenes Verhalten versteht, so ist in der Social Choice Theorie eine Manipulation tatsächlich (wie auch dem Wortsinn entsprechend) ein Hand- bzw. Kunstgriff und bezeichnet die Angabe einer Präferenz oder allgemeiner Stimme bei einer Abstimmung, die nicht den wahren Präferenzen entspricht. Manipulierbarkeit meint also die Einflussnahme auf das Ergebnis einer Abstimmung durch eine „unwahre“ Stimmabgabe.

Ob Manipulation in diesem Sinne „gut“ oder „schlecht“ ist, wird unterschiedlich beurteilt: So kommt beispielsweise das Bundesverfassungsgericht² zu der Auffassung,

²BVerfG, 2 BvC 2/06 vom 21.4.2009, Randnummer 87

dass „taktische Wahlentscheidungen [...] grundsätzlich eine legitime Beteiligung des mündigen Bürgers an der Willensbildung in einem demokratisch verfassten Staat dar[stellen]“. Ein weiteres Beispiel ist eine Arbeit von Keith Dowding und Martin van Hees (Dowding u. van Hees (2008)): Diese kommen - verkürzt formuliert - ebenfalls zum Ergebnis, dass das mögliche Auftreten von Manipulationen kein ernsthaftes Problem für demokratische Entscheidungsprozesse darstellt. Andererseits lassen sich bereits auf einen ersten Blick Probleme erkennen, die durch Manipulation entstehen können: Dies betrifft nicht nur die Aggregationsproblematik, d.h. die Frage, wie der Willen einer Gruppe aggregiert werden soll, wenn durch Manipulation nicht die wahren Präferenzen der Wähler bekannt sind. Ein weiteres Problem ergibt sich auch dann, wenn ein Wahlverfahren nicht nur dazu dienen soll, ein Ergebnis zu ermitteln: So ist es in einigen Fällen denkbar, dass durch die Stimmabgabe der Wille der einzelnen Wähler in Erfahrung gebracht werden soll. Anders formuliert soll das Wahlverfahren auch dazu dienen, die Präferenzen der Wähler zu elizitieren. Bieten Abstimmungen jedoch Anreize für eine nicht wahrheitsgemäße Stimmabgabe, so wird dies schwer oder gar nicht möglich sein.

Führen die obigen Einwände also tatsächlich zu dem Schluss, dass eine soziale Wahl nicht möglich ist? Zumindest kommt der amerikanische Politikwissenschaftler William H. Riker in Riker (1982) zu dem Schluss, dass demokratischen Entscheidungsprozessen lediglich eine Kontrollfunktion in dem Sinne, dass Herrschaft auf Zeit begrenzt wird und ein Repräsentant abwählbar sein muss, zukommt - und nicht mehr. Der Gedanke, dass das Ergebnis einer Abstimmung den Willen einer Gruppe repräsentiere, sei im Allgemeinen zu verwerfen. Dieser Position Rikers entgegnet Gerry Mackie in Mackie (2003) im Wesentlichen, dass die möglichen Defekte von Entscheidungsprozessen so selten auftreten, dass diese nicht wirklich von relevanter Tragweite seien. Für einen außenstehenden Betrachter bleiben - angesichts dieser beiden doch konträren Standpunkte - erhebliche Zweifel an der Möglichkeit einer sozialen Wahl.

Allokation öffentlicher Güter durch Abstimmungen

Im Mittelpunkt der vorliegenden Inauguraldissertation steht eine spezielle Gruppe von Entscheidungsfragen - Abstimmungen über die Allokation öffentlicher Güter. Dabei steht eine Gruppe von n Agenten (d.h. Wählern) vor dem Problem, einen Geldbetrag der Höhe L auf K öffentliche Güter aufzuteilen. Hierzu benennt jeder Agent eine Aufteilung (Allokation) dieses Betrags, anschließend wird aus den vorgeschlagenen Aufteilungen eine „soziale“ Allokation bestimmt. Dabei stellt sich die Frage, ob und „wie stark“ manipulierbar solche Abstimmungsregeln für die Allokation öffentlicher Güter sind.

Eine naheliegende Überlegung ist es, sich zu fragen, ob auch für die Allokation öffentlicher Güter das Median-Wähler-Theorem Gültigkeit besitzt. Wie noch auszuführen zu sein wird, handelt es sich bei diesem Allokationsproblem um eine „mehrdimensionale“ Fragestellung, während das klassische Median-Wähler-Theorem nur für eine Dimension formuliert ist. Eine weitreichende Klärung der Frage, für welche

1. Einführung

mehrdimensionalen Abstimmungsfragen sich dieses Theorem erweitern lässt und somit die Möglichkeit für nicht manipulierbare Abstimmungsregeln besteht, ist Klaus Nehring und Clemens Puppe in Nehring u. Puppe (2007) gelungen.

Unglücklicherweise folgt sowohl aus den Ergebnissen von Nehring und Puppe als auch aus einer Arbeit von Lin Zhou (siehe Zhou (1991)), dass es keine nicht manipulierbare und gewissen Bedingungen genügende Abstimmungsregel zur Allokation öffentlicher Güter geben kann - selbst wenn man „übliche“ Einschränkungen bezüglich der Präferenzen der Agenten trifft. Wenn es also keine nicht manipulierbare Abstimmungsregel für dieses Problem geben kann, so stellt sich folgerichtig sowohl die Frage, ob es „wenig“ manipulierbare oder „fast nicht manipulierbare“ Abstimmungsverfahren gibt, als auch die Aufgabe zu beurteilen, welche von mehreren Abstimmungsregeln zur Allokation öffentlicher Güter weniger manipulierbar als andere Regeln ist.

Diesem Fragenkomplex wollen wir in der vorliegenden Arbeit auf zweierlei Weise begegnen: Zuerst werden wir versuchen, theoretische Ergebnisse für Abstimmungsregeln zur Allokation öffentlicher Güter herzuleiten. Dabei wollen untersuchen, wie weit man die Präferenzen der Agenten einschränken muss, um nicht manipulierbare Abstimmungsregeln zu erhalten. Weiterhin versuchen wir ein Resultat im Bezug auf die Frage zu erlangen, ob die Möglichkeiten eines Agenten, das Ergebnis einer solchen Abstimmungsregel zu beeinflussen, beschränkt sind. Ein solches Resultat ist insbesondere deshalb von Interesse, da der Aspekt, welcher Einfluss auf ein Abstimmungsergebnis besteht, *unabhängig* von den den Agenten zugrunde liegenden Präferenzen ist. In einem zweiten Schritt wollen wir anschließend das Verhalten der Abstimmungsregeln mittels Simulation näher untersuchen und insbesondere Aussagen dahingehend ableiten, wie manipulierbar die einzelnen Regeln im arithmetischen Mittel sind. Um überhaupt ein Verständnis dafür entwickeln zu können, was „weniger manipulierbar“ bedeuten könnte, werden wir einen mehrdimensionalen Ansatz wählen, d.h. mehrere unterschiedliche Kenngrößen entwickeln, anhand derer wir das Verhalten der Abstimmungsregeln beurteilen wollen. Wir werden die Allokation öffentlicher Güter mithilfe einer speziellen mathematischen Struktur, einem Simplex, modellieren. Da sich auch andere Problemstellungen über Simplices modellieren lassen, besitzen unsere Resultate ebenfalls Gültigkeit hierfür. Einige Beispiele hierzu werden wir in Kapitel 3 geben.

Aufbau und Ziele dieser Arbeit

Im Rahmen dieser Arbeit sollen die folgenden Ziele bzw. Fragestellungen untersucht werden:

1. Es soll geklärt werden, ob und unter welchen Umständen, insbesondere unter welchen Präferenzannahmen, nicht manipulierbare Abstimmungsregeln für die Allokation öffentlicher Güter im Speziellen und im Allgemeinen für Alternativen, die sich auf Simplices anordnen lassen, existieren.
2. Ferner ist zu untersuchen, ob und in welcher Weise solche Abstimmungsregeln unabhängig von den Präferenzen der Agenten nur in einem begrenzten Maße

beeinflussbar durch einzelne Agenten sind. Gleichzeitig sollen dabei Güte- und Wohlfahrtskriterien beachtet werden.

3. Weiterhin ist es ein Ziel, Kenngrößen zu entwickeln, mittels denen verschiedene Aspekte der Manipulierbarkeit einer Abstimmungsregel gemessen werden können.
4. Schließlich sollen die zuvor in einem theoretischen Kontext behandelten Abstimmungsregeln durch eine Simulationsstudie weiter untersucht werden. Vorrangiges Ziel ist es dabei, Aussagen darüber zu treffen, welche Abstimmungsregeln im statistischen Mittel weniger manipulierbar ist als andere Regeln.

Die Gliederung der vorliegenden Dissertation ist dabei wie folgt: Nach der Einführung behandelt Kapitel 2 die wesentlichen Grundlagen und bestehenden Resultate über Abstimmungen in der Social Choice Theorie und gibt einen Überblick über den Stand der Literatur hinsichtlich Manipulierbarkeit im Allgemeinen und im Bezug die auf Allokation öffentlicher Güter im Besonderen. Im Anschluss befasst sich Kapitel 3 mit Abstimmungen zur Allokation öffentlicher Güter. Hierzu wird zunächst mit dem Simplex die mathematische Struktur eingeführt, mittels derer solche Abstimmungen modelliert werden. Anschließend stellen wir mit der Midpoint-Regel eine erste Abstimmungsregel für das Allokationsproblem vor und weisen nach, dass diese Regel unter metrisch eingipfligen Präferenzen nicht manipulierbar ist. Schließlich werden weitere naheliegende Abstimmungsverfahren zur Allokation öffentlicher Güter definiert und analysiert. Im Anschluss werden in Kapitel 4 zuerst der Aufbau und die Programmierung der Simulationsstudie und schließlich die einzelnen Kenngrößen mit deren Ergebnissen bezüglich der Abstimmungsregeln behandelt. Dabei werden wir zunächst die Begriffe Ausmaß und Effekt einer Manipulation einführen und die Variablen entsprechend diesen Kategorien zuordnen. Schlussfolgerungen, welche Abstimmungsregeln „weniger“ bzw. „mehr“ manipulierbar sind, ziehen wir dabei sowohl getrennt für Ausmaß und Effekt als auch im Rahmen eines abschließenden Fazits. Die Arbeit gliedert sich also in einen theoretischen Teil (Kapitel 3), der sich den ersten beiden Zielsetzungen der Arbeit zuwendet, und in einen Abschnitt (Kapitel 4) über die Kenngrößen und die zugehörige Simulationsstudie, der sich mit den Zielen 3 und 4 befasst. Schlussfolgerungen und ein Ausblick auf weitere Fragestellungen beschließen die Dissertation. In den Anhängen sind weitere Simulationsergebnisse, auf die in Kapitel 4 Bezug genommen wird, aufgeführt.

Abstimmungen und Manipulation in der Social Choice Theorie

Dieses Kapitel hat zwei Hauptziele: Zum einen gibt es eine Einführung in den Modellrahmen, mittels dessen in der Social Choice Theorie Abstimmungen und Wahlen analysiert werden, zum anderen beinhaltet es einen Überblick über die für das Thema dieser Dissertation relevante Literatur.

Bei der Einführung in den Modellrahmen der Social Choice Theorie wird ein Überblick sowohl dahingehend gegeben, wie allgemein Abstimmungen formuliert werden, als auch über die zentralen Resultate der Social Choice Theorie, die in Verbindung mit Aggregationsproblemen und Manipulation stehen. Dieser *allgemeine* Rahmen und die zugehörigen Resultate sollen es im weiteren Verlauf der Arbeit ermöglichen, die Resultate, die im Hinblick auf das *spezielle* Problem der Allokation öffentlicher Güter erlangt werden, mit diesem allgemeinen Rahmen zu vergleichen und einzuordnen.

Der Literaturüberblick behandelt einerseits grundlegende Arbeiten zur Manipulierbarkeit bzw. Nicht-Manipulierbarkeit von Abstimmungsregeln und andererseits Arbeiten sowohl zur Manipulierbarkeit der Allokation öffentlicher Güter als auch solche Arbeiten, die Kenngrößen zur Messung von Manipulation als auch Simulationsstudien hierzu zum Gegenstand haben.

Die Gliederung dieses Kapitels betreffend werden zunächst Social Welfare und Social Choice Functions eingeführt, mittels deren Abstimmungen modelliert werden, und anschließend auf Resultate zur Manipulierbarkeit eingegangen. Im einem zweiten Schritt wird mit dem Median-Wähler-Theorem ein Möglichkeitsresultat für nicht manipulierbare Abstimmungsverfahren vorgestellt. Erweiterungen dieses Resultats auf multidimensionale Probleme stellen den nächsten Abschnitt dar. Dabei wird auch deutlich werden, für welche Klassen dieser Probleme nicht manipulierbare (und gewissen Bedingungen genügende) Abstimmungsverfahren existieren bzw. nicht existieren. Ein spezielles mehrdimensionales Aggregationsproblem, die Allokation öffentlicher Güter, beschließt das Kapitel.

2.1. Social Welfare und Social Choice Functions

In der Wirtschaftstheorie werden Abstimmungen üblicherweise durch zwei Typen von Abbildungen, Social Welfare und Social Choice Functions, dargestellt. Nachdem wir diese definiert und den Zusammenhang zwischen den beiden Abbildungen erläutert haben, werden wir uns in weiterer Arbeit vorrangig auf Social Choice Functions fokussieren.

Sei $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ eine Menge von Alternativen (Kandidaten, „soziale Zustände“, Allokationen öffentlicher Güter etc.) und $N = \{1, 2, \dots, n\}$ eine Menge von Agenten (Wähler, Abstimmungsteilnehmer). Weiterhin bezeichne \succeq^i die Präferenzordnung des Agenten i , also eine vollständige und transitive¹ zweistellige Relation auf A , und \mathcal{R} die Menge aller Präferenzordnungen über die Menge A . Den Vektor $(\succeq^1, \succeq^2, \dots, \succeq^n) \in \mathcal{R}^n$ bezeichnen wir als *Profil*. Wir gehen also von einer Menge von Wahlalternativen aus, die in unserer Darstellung endlich ist und die jeder Agent schwach ordnet, d.h. ein Agent kann auch zwischen mehreren Alternativen indifferent sein. Bei der späteren Betrachtung von Allokationen öffentlicher Güter als Alternativen ist zu bedenken, dass - sieht man Geld als stetige Größe, d.h. beliebig teilbar, an - die Alternativenmenge nicht mehr abzählbar ist. Wir werden, wie noch auszuführen sein wird, jedoch, was diesen Gesichtspunkt betrifft, ohnehin eine Diskretisierung im Hinblick auf die Simulation vornehmen.

Wir werden im Folgenden davon ausgehen, dass die Anzahl der Agenten mindestens 3 beträgt: Während eine „Abstimmung“ mit nur einem Wähler offensichtlich nicht von normativer Relevanz ist, besteht im Fall von 2 Agenten das Problem einer Pattsituation. Wenngleich die vorgestellten Modelle sowohl für gerade als auch ungerade Anzahlen von Agenten definiert sind, werden wir uns weiterhin auf ungerade Anzahlen von Agenten beschränken, vor allem um das Auftreten von Pattsituationen zu verringern².

Betrachten wir Alternativen, die mehrere „Dimensionen“ haben³, so werden wir durch Tiefstellen (subscript) die Dimension indizieren und, steht eine Alternative in Verbindung mit einem Agenten (ist sie beispielsweise die von ihm präferierte Alternative), dies durch Hochstellen (superscript) kenntlich machen. So bezeichnen wir beispielsweise die j -te Dimension der präferierten Alternative des Agenten i mit x_j^i .

Bei einer Abstimmung soll nun aus den Präferenzen der Agenten aggregiert werden⁴. Hierbei bestehen zwei Möglichkeiten: entweder man möchte eine vollständige soziale Präferenz („Ranking“) oder lediglich eine soziale Alternative/Wahl (Gewinner) bestimmen. Diesen Möglichkeiten entsprechen die Social Welfare bzw. die Social Choice Function:

¹ \succeq ist damit auch reflexiv, siehe Mas-Colell u. a. (1995).

²Insbesondere sind systematische Schwankungen bei Kenngrößen, die mit Manipulierbarkeit in Verbindung stehen, durch den Wechsel zwischen geraden und ungeraden Agentenzahlen in der Literatur bekannt, siehe bspw. Smith (1999); Lindner (2008).

³Eine Allokation über K öffentliche Güter hat dementsprechend K Dimensionen, wobei x_j die Geldausgaben für das öffentliche Gut j beschreibt.

⁴Die Präferenz eines Agenten entspricht quasi seiner „Stimme“ bei einer Wahl.

Definition 2.1 (Social Welfare Function) (Vgl. Arrow (1951).) Eine Social Welfare Function (Soziale Wohlfahrtsfunktion) ist eine Abbildung $F : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$, $(\succeq^1, \succeq^2, \dots, \succeq^n) \mapsto F(\succeq^1, \succeq^2, \dots, \succeq^n) = \succeq$, die jedem Profil $(\succeq^1, \succeq^2, \dots, \succeq^n)$ eine soziale Präferenz \succeq zuordnet.

Definition 2.2 (Social Choice Function) (Vgl. Sen (1970b).) Eine Social Choice Function (Soziale Entscheidungsfunktion) ist eine Abbildung $F : \mathcal{R}^n \rightarrow A$, $(\succeq^1, \succeq^2, \dots, \succeq^n) \mapsto F(\succeq^1, \succeq^2, \dots, \succeq^n) = a$, die jedem Profil $(\succeq^1, \succeq^2, \dots, \succeq^n)$ eine Alternative $a \in A$ zuordnet.

Definition 2.3 (Social Choice Correspondence) (Vgl. Sen (1970b).) Eine Social Choice Correspondence (Soziale Entscheidungskorrespondenz) ist eine Abbildung $F : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{P}(A)$, $(\succeq^1, \succeq^2, \dots, \succeq^n) \mapsto F(\succeq^1, \succeq^2, \dots, \succeq^n) = C \subseteq A$, die jedem Profil $(\succeq^1, \succeq^2, \dots, \succeq^n)$ eine nichtleere Teilmenge $C \subseteq A$ von Alternativen zuordnet.

Prinzipiell ist es möglich, jede Social Welfare Function in eine Social Choice Function zu überführen, indem man als soziale Alternative das an erster Stelle in der sozialen Präferenzordnung \succeq stehende Element auswählt. Hierbei, aber auch bei anderen Social Choice Functions, die dann korrekterweise als Social Choice Correspondences zu bezeichnen sind (siehe Definition 2.3), kann das Problem auftreten, dass die soziale Alternative nicht eindeutig ist. Dieses Problem, also eine Korrespondenz in eine Funktion zu überführen, kann dadurch gelöst werden, dass man die Social Choice Correspondence mit einer sogenannten *single valued selection* („einwertige Auswahlregel“) verknüpft.

Definition 2.4 (Single Valued Selection) Eine single valued selection (einwertige Auswahlregel) ist eine Abbildung $S : \mathcal{P}(A) \rightarrow A$, $C \mapsto S(C) = a$, die jeder nichtleeren Teilmenge von Alternativen $C \subseteq A$ eine Alternative $a \in C$ zuordnet.

Eine solche Auswahlregel hat also zwei grundlegende Eigenschaften: Erstens wählt sie eine eindeutige Alternative, zweitens darf diese Auswahl nur aus der Teilmenge C (und nicht etwa aus der gesamten Alternativenmenge) getroffen werden. Einfache Beispiele für solche Auswahlregeln sind die zufällige Auswahl eines Elements aus C (z.B. Würfeln, falls es bei einer Abstimmung zwei oder mehrere Gewinner gibt; Losentscheid) oder eine lexikographische Auswahl, bei der - sind die Alternativen entsprechend des Alphabets geordnet - man das an erster Stelle stehende Element aus C wählt.

Einfache und geläufige Beispiele für Abstimmungen, anhand derer man sich auch die obigen Definitionen gut veranschaulichen kann, sind die relative Mehrheitswahl (plurality voting) und die Borda-Methode (bzw. allgemeiner sogenannte scoring methods, unter die auch das plurality voting fällt): Bei einer relativen Mehrheitswahl erhält eine Alternative immer dann einen Punkt, wenn sie in der Präferenzordnung eines Agenten an der ersten Stelle steht (also das beste Element bezüglich dieser Ordnung ist). Anschließend werden die Alternativen entsprechend der Punktzahlen geordnet. Bei einer Borda-Wahl mit k Alternativen erhält eine Alternative $k - 1$

2. Abstimmungen in der Social Choice Theorie

Punkte, wenn sie in der Präferenzordnung eines Agenten an erster Stelle steht, $k - 2$ Punkte, wenn sie an zweiter Stelle steht usw.. Wiederum werden die Alternativen entsprechend ihrer Punktesumme geordnet⁵, siehe auch Moulin (1988). Wie sich leicht erkennen lässt, kann bei beiden Verfahren sowohl eine Ordnung (also eine soziale Präferenz) bestimmt werden, indem man alle Alternativen absteigend nach ihrer Punktesumme ordnet, als auch lediglich eine soziale Alternative (also ein Gewinner) ermittelt werden, indem man die Alternative(n) mit der höchsten Punktzahl auswählt. Ebenso können leicht Fälle entstehen, in denen das beste Element nicht eindeutig und - je nach Kontext - die Anwendung eine single valued selection notwendig ist.

Grundlegende und bekannte Arbeiten zu Social Welfare und Social Choice Functions sind unter anderem Arrow (1951) und Sen (1970a): Beiden ist gemeinsam, dass die jeweiligen Autoren Unmöglichkeitstheoreme, teilweise auch als Paradoxa bezeichnet, beweisen, die besagen, dass - vereinfacht formuliert - keine Social Welfare bzw. Social Choice Function existiert, die eine Menge von „wünschenswerten“ Bedingungen erfüllt. Während in Sen (1970a) sich ein Widerspruch zwischen Pareto-Effizienz auf der einen und individueller Entscheidungsfreiheit auf der anderen Seite zeigt, beweist Arrow in seinem „Allgemeinen Unmöglichkeitstheorem“, dass auf einem unbeschränkten Definitionsbereich keine Social Welfare Function existiert, die nicht diktatorisch ist⁶ und zwei weitere Bedingungen, darunter Pareto-Effizienz des Abstimmungsergebnisses, erfüllt⁷.

Insbesondere das Unmöglichkeitstheorem Kenneth Arrows hat - bei näherer Betrachtung - nicht die generelle Unmöglichkeit einer konsistenten Aggregation von Präferenzen zur Folge, sondern zeigt „lediglich“, dass es Unvereinbarkeiten gibt, will man mehrere Bedingungen durch eine Social Welfare Function gleichzeitig erfüllt wissen. Eine Unmöglichkeit besteht also nur dann, wenn man alle diese Bedingungen für unabdingbar hält. Hat man diesen Standpunkt nicht, so stehen wir lediglich vor einem „trade-off“ zwischen der Erfüllung einer Bedingung zu Lasten der Verletzung einer anderen Bedingung.

Die oben beschriebene Problematik, dass Unvereinbarkeiten hinsichtlich der Erfüllung mehrerer Bedingungen an Abstimmungsregeln auftreten können, ist - obwohl Arrows Ergebnis gerne als „Allgemeines Unmöglichkeitstheorem“ bezeichnet wird - tatsächlich ein Aspekt, der über die Aggregation von Präferenzen hinausgeht: Die Judgement Aggregation, die sich mit (konsistenten) Aggregation von individuellen Urteilen über (logisch verknüpfte) Aussagen bzw. Eigenschaften (propositions) zu einem kollektiven Urteil befasst, kennt mehrere Möglichkeits- und Unmöglichkeitsresultate, darunter am bekanntesten das „discursive dilemma“ oder auch „doc-

⁵Ein bekanntes Beispiel für eine Abstimmung nach der Borda-Methode, allerdings mit anderen Punktezahlen und unterschiedlichen Abständen (12,10,8,7,6,5,4,3,2,1) zwischen diesen Zahlen, ist unter anderem der „Eurovision Song Contest“.

⁶Dieser Begriff wird im weiteren Verlauf der Arbeit noch präzise zu definieren sein, siehe Definition 2.6.

⁷In Arrow (1951) werden tatsächlich fünf statt vier Bedingungen an eine Social Welfare Function gestellt. Wie sich zeigen lässt, können zwei dieser Bedingungen durch die Forderung der Pareto-Effizienz ersetzt werden, ohne das Resultat des Theorems zu verändern.

trinal paradox” (siehe Kornhauser u. Sager (1986); List u. Pettit (2002))⁸. Es zeigt sich, dass sich in diesem allgemeineren Rahmen⁹ das Unmöglichkeitstheorem von Arrow quasi als Korollar aus anderen Resultaten über Unvereinbarkeiten ergibt (Vgl. Nehring (2003); Dietrich u. List (2007)).

In den Kapiteln 3 und 4 dieser Arbeit werden wir uns mit speziellen Social Choice Functions, nämlich solchen, deren Alternativenmenge Allokationen öffentlicher Güter darstellt¹⁰, befassen und dabei auch der Frage nachgehen, inwiefern solche Abstimmungsregeln verschiedene, noch präzise zu definierende Bedingungen erfüllen oder verletzen. Eine zentrale Eigenschaft ist dabei Nicht-Manipulierbarkeit bzw., falls diese Bedingung verletzt ist, die Manipulierbarkeit einer Regel. Diesen Begriff wollen wir im nun folgenden Abschnitt näher betrachten.

2.2. Manipulierbarkeit von Social Choice Functions

Von der Manipulation einer Social Choice Function spricht man, wenn ein Agent, indem er eine Präferenz angibt, die nicht mit seiner wahren Präferenz übereinstimmt, ein Ergebnis erzielen kann, das er strikt gegenüber dem Ergebnis bevorzugt, das sich bei Angabe der wahren Präferenz einstellt. Präzise formuliert heißt dies:

Definition 2.5 (Manipulierbar) (Vgl. Gibbard (1973); Satterthwaite (1975).) *Es sei F eine Social Choice Function. F heißt manipulierbar, falls ein Agent i und ein Profil $(\succeq^1, \succeq^2, \dots, \succeq^n)$ existieren, so dass gilt: Es gibt ein $\tilde{\succeq}^i \neq \succeq^i$ mit*

$$F(\succeq^1, \succeq^2, \dots, \tilde{\succeq}^i, \dots, \succeq^n) \succ^i F(\succeq^1, \succeq^2, \dots, \succeq^i, \dots, \succeq^n).$$

Ist eine Social Choice Function F nicht manipulierbar, so bezeichnet man F auch als *strategy-proof* („strategiesicher“). Diese Bezeichnung verdeutlicht, dass es in einem solchen Fall dann unter dieser Abstimmungsregel für keinen Agenten einen Anreiz gibt, nicht seine wahre Präferenz zu offenbaren. Ist die Abstimmungsregel hingegen manipulierbar, so gibt es zumindest einzelne Profile, unter denen für Agenten Anreize bestehen, nicht wahrheitsgemäß (im Sinne einer Übereinstimmung mit der wahren Präferenz) abzustimmen. Wenn ein Agent eine Präferenz $\tilde{\succeq}^i \neq \succeq^i$ angibt, so werden wir auch sagen, er *misrepräsentiert*. Anders formuliert besteht bei einer Manipulation ein Anreiz zur Misrepräsentation. Man beachte, dass, sobald auch nur ein einziges Profil existiert, in dem ein Agent einen Anreiz zur Misrepräsentation hat, eine Abstimmungsregel als manipulierbar bezeichnet wird.

Von Interesse ist nun, ob und unter welchen Umständen Social Choice Functions nicht manipulierbar sind. Ein erstes grundlegendes Resultat hierzu ist das Gibbard-Satterthwaite-Theorem. Hierzu ist es notwendig, zunächst zwei weitere Begriffe zu definieren:

⁸Für eine nähere Übersicht zu diesem Forschungsgebiet siehe bspw. List u. Puppe (2009).

⁹Eine Präferenzordnung ist eine spezielle Aussage über Alternativen, nämlich derart, dass die Ordnung vollständig und transitiv sein muss.

¹⁰bzw. allgemeiner formuliert auf einem Simplex darstellbar ist

2. Abstimmungen in der Social Choice Theorie

Definition 2.6 (Diktatorisch) (Vgl. Sen (1970b).) Es sei F eine Social Choice Function. F heißt diktatorisch, falls ein Agent i existiert, so dass für alle $(\succeq^1, \succeq^2, \dots, \succeq^n)$ gilt

$$F(\succeq^1, \succeq^2, \dots, \succeq^n) = a^i,$$

wobei $a^i \succeq^i b$ für alle $b \in A$.

Definition 2.7 (Surjektiv) Sei F eine Social Choice Function. F heißt surjektiv, falls für jede Alternative $a \in A$ ein Profil $(\succeq^1, \succeq^2, \dots, \succeq^n)$ existiert, so dass

$$F(\succeq^1, \succeq^2, \dots, \succeq^n) = a.$$

Ist eine Social Choice Function diktatorisch, so existiert also ein Agent (der Diktator), der als Ergebnis der Abstimmung (unabhängig von den Präferenzen der anderen Agenten) die Alternative realisieren kann, die in seiner Präferenz an erster Stelle steht. Die Eigenschaft der Surjektivität einer Social Choice Function bedeutet, dass jede zur Abstimmung stehende Alternative auch durch mindestens ein Profil als Ergebnis der Abstimmung erzielt werden kann. In anderen Worten: Surjektivität stellt sicher, dass eine Social Choice Function ein Mindestmaß an Sensitivität im Bezug auf die Präferenzen der Agenten aufweist, wobei anzumerken ist, dass dieses Mindestmaß auch sehr gering sein kann. Beispielsweise erfüllt auch eine Social Choice Function, die - falls alle Agenten dieselbe Alternative an erster Stelle ihrer Präferenz haben - diese auswählt und in allen anderen Fällen eine feste Alternative (den „Status Quo“) als Ergebnis hat, die Bedingung der Surjektivität. Mithilfe dieser beiden Definitionen lässt sich nun das erste grundlegende Resultat zur Manipulierbarkeit von Social Choice Functions anführen:

Theorem 2.1 (Gibbard-Satterthwaite-Theorem) (Vgl. Gibbard (1973); Satterthwaite (1975).) Sei F eine surjektive Social Choice Function und es gelte für die Menge der Alternativen $|A| \geq 3$. Dann gilt: F ist nicht manipulierbar genau dann, wenn F diktatorisch ist.

Das Gibbard-Satterthwaite-Theorem kann man auf zweierlei Art und Weise auffassen: einmal im Sinne eines „trade-offs“ zwischen Manipulierbarkeit und der Existenz eines Diktators oder - setzt man zwingend voraus, dass die Social Choice Function nicht diktatorisch sein soll - als Unmöglichkeitsresultat: Es existiert keine nicht diktatorische, surjektive Social Choice Function, die nicht manipulierbar ist¹¹.

Da es in fast allen Fällen keinen vernünftigen Grund gibt, eine diktatorische Abstimmungsregel anzuwenden zu wollen, bleibt man - wenn keine Einschränkungen über die Präferenzen der Agenten getroffen werden (können) - mit dem Problem der Manipulierbarkeit einer Social Choice Function konfrontiert. Strittig in der Literatur ist der Gesichtspunkt, ob und wie problematisch dieses Faktum ist: Wie in der Einleitung erwähnt kommt Riker (1982) wegen möglicher „Paradoxa“ wie dem

¹¹Man beachte, dass, wenn wir von einer Social Choice Function (Definition 2.2) sprechen, zunächst keinerlei Einschränkungen bezüglich der Präferenzen der Agenten treffen.

2.2. Manipulierbarkeit von Social Choice Functions

Arrow-Theorem und der Manipulierbarkeit von Abstimmungen zu dem Ergebnis, dass demokratischen Entscheidungsprozessen lediglich die Funktion zukommt, eine Entscheidung zu treffen (Riker nennt dies "Liberalism".) und nicht den Willen des Volkes bzw. von Gruppen von Agenten zu aggregieren (Dies bezeichnet Riker als "Populism".).

Eine Gegenposition hierzu nimmt beispielsweise Mackie (2003) ein. Dieser, aber auch andere Autoren, führen meist für die Möglichkeit einer Aggregation aus den wahren Präferenzen der Agenten an, dass Manipulation zwar auftreten kann, aber dennoch nicht von normativer Relevanz ist. Argumente (siehe ebenso Mackie (2003)) hierfür sind unter anderem:

- Agenten ändern, wenn sie manipulieren, ihre Präferenz meist nicht stark, d.h. die offenbarte Präferenz unterscheidet sich nur geringfügig von der wahren Präferenz. Um diesem Argument nachzugehen, wäre es notwendig einen Abstands begriff zwischen Profilen zu definieren.
- Die Auswirkungen von Manipulation auf das Ergebnis einer Abstimmung sind nur gering. Wiederum ist es zur Verifikation bzw. Falsifikation dieses Arguments vonnöten, auch auf dem Raum der Alternativen einen Abstand zu definieren. Insbesondere ist dies dann unabdingbar, wenn manche Alternativen sich ähnlicher sind als andere, um zu beurteilen „wie stark“ sich das Ergebnis einer Abstimmung geändert hat. Ein ähnliches Argument ist die Behauptung, dass das manipulierte Abstimmungsergebnis zwar anders, aber nicht zwingend kollektiv „schlechter“ ist, was wiederum durch geeignete Kenngrößen zu überprüfen wäre.
- Häufig wird angeführt, dass Manipulationen nur „selten“ auftreten bzw. auftreten können. Ein Gesichtspunkt hierbei ist die Pivotalität, also die Häufigkeit oder Wahrscheinlichkeit mit der ein Agent Einfluss auf die Abstimmung nehmen kann. Ein anderer Aspekt ist die Möglichkeit zur Manipulation an sich, gegeben ein Einfluss auf das Ergebnis ist möglich. Zur Pivotalität wird teilweise angeführt, dass diese mit steigender Zahl der Agenten deutlich abnimmt.

Schließlich ist ein weiterer Gesichtspunkt die Information hinsichtlich der Präferenzen der anderen Agenten, über die ein Agent verfügen muss, um eine Manipulation durchführen zu können. In Nurmi (1987) findet sich beispielsweise ein Vorschlag für eine Klassifikation von Social Choice Functions nach dieser Information. So werden Abstimmungsregeln, für deren Manipulation nur Kenntnis über das beste Element in den jeweiligen Präferenzen notwendig ist (z.B. die plurality rule), von solchen unterschieden, für deren Manipulation Kenntnis über die vollständigen Präferenzordnungen notwendig ist. Auch, wenn eine solche Systematisierung sicherlich hilfreich zur Unterscheidung von Abstimmungsverfahren ist, hilft sie (vor allem im theoretisch analytischen Kontext) im Bezug auf Manipulierbarkeit jedoch dann nicht weiter, wenn die Präferenzen der Agenten als bekannt betrachtet werden.

Schließlich ist ein Gesichtspunkt, dass Manipulation durch einen Agenten insofern kein Problem sein kann, als dieser Agent individuell rational seine offenbarte Präfe-

2. Abstimmungen in der Social Choice Theorie

renz bzw. Stimme bei einer Wahl bestimmt. Trifft man eine übliche Standardannahme in der Wirtschaftstheorie und geht demzufolge davon aus, dass Agenten ihren individuellen Nutzen maximieren und bei einer Abstimmung zudem keine Koordination möglich ist, so kann man schlechterdings kein Problem darin sehen, dass dann ein Agent die Präferenzordnung nennt, die seinen Nutzen *ceteris paribus* maximiert. Das Problem von Manipulation, nämlich deren Auswirkungen auf das Ergebnis einer Abstimmung, ist demgegenüber eher ein „kollektives“ Problem¹². Ähnlich argumentieren auch Dowding u. van Hees (2008), die Manipulation in vielen Fällen nicht für problematisch halten: So sehen die Autoren den Fall als unproblematisch an, in dem ein Agent bzw. eine Gruppe von Agenten eine Alternative y mittels Manipulation als Gewinner einer Abstimmung erzielt, aber diese Gruppe hierzu eine Präferenz angeben muss, in der y an erster Stelle steht. In solchen Fällen, so Dowding u. van Hees (2008), würden die Agenten lediglich eine Präferenz offenbaren, in der die Alternative an erster Stelle steht, die die Agenten aus der Teilmenge von Alternativen, die als Ergebnis der Abstimmung erzielt werden können, bevorzugen.

Auf zwei weitere Aspekte hinsichtlich Manipulierbarkeit wollen wir in den folgenden Abschnitten näher eingehen: Ein Ansatz, die Häufigkeit und - in manchen Arbeiten - auch die Auswirkungen von Manipulation zu untersuchen, ist Simulation. Eine weiterer Gesichtspunkt, der mit dem möglichen Auftreten von Manipulation in Verbindung steht, ist die Frage nach der Pivotalität, also der Häufigkeit bzw. Wahrscheinlichkeit, mit der ein Agent Einfluss auf das Ergebnis einer Abstimmung nehmen kann.

2.2.1. Simulationen zur Bestimmung von Manipulierbarkeit

Wenn mehr als 2 Alternativen zur Wahl stehen und keine Einschränkungen bezüglich der Präferenzen getroffen werden, ist jede nicht diktatorische Abstimmungsregel manipulierbar. Wie aus Definition 2.5 ersichtlich ist, genügt es dabei, dass ein Profil existiert, unter dem mindestens ein Agent einen Anreiz zur Misrepräsentation hat. Will man nun verschiedene manipulierbare Abstimmungsregeln miteinander vergleichen, stellt sich natürlicherweise die Frage, ob es unter diesen Social Choice Functions solche Regeln gibt, die „weniger“ manipulierbar als andere Regeln sind. Hierzu ist selbstverständlich eine Definition von „weniger“ im Bezug auf Manipulierbarkeit erforderlich. Die Literatur weist diesbezüglich sich teilweise deutlich unterscheidende Konzepte und Definitionen auf.

Eine Möglichkeit, diese Fragestellung anzugehen, ist Simulation. Diese Methodik werden wir ebenfalls in Kapitel 4 dieser Arbeit einsetzen, um einen Teil der Fragen, die in der Einleitung aufgeworfen wurden, zu beantworten. Auch in der Literatur wird von Simulation im Bezug auf Manipulierbarkeit mehrfach Gebrauch gemacht, wenn auch mit deutlichen Unterschieden:

- Die Arbeiten unterscheiden sich teilweise dahingehend, dass bei einigen Arbeiten (bspw. Nitzan (1985); Smith (1999)) in einem ersten Schritt „theore-

¹²Insofern weist diese Problematik beachtliche Parallelen zum Gefangenendilemma auf, in dem die Spieler ebenfalls individuell, aber nicht kollektiv rational handeln.

tische Vorarbeiten“ geleistet werden, die meist zu einer Berechnungsformel führen, und dann in einem zweiten Schritt mithilfe solcher Formeln entsprechende Werte durch Simulation ermittelt werden. Geschlossene Formeln, die beispielsweise die Anzahl manipulierbarer Profile angeben sollen, sind jedoch nach dem Stand der Literatur nur für Spezialfälle, d.h. meist für eine spezielle Regel und eine feste Anzahl von Alternativen, zu erhalten. Ein anderer Ansatz, den man auch als “brute force” („rohe Gewalt“) bezeichnen könnte, versucht direkt durch Simulation (meist durch das Iterieren über alle möglichen Präferenzen bzw. Profile) Messwerte im Hinblick auf Manipulierbarkeit zu erzielen (z.B. Lindner (2007)).

- Eine zweite Unterscheidung betrifft den Begriff der Simulation selbst: Während manche Studien unter Simulation die Berechnung exakter Kenngrößen verstehen (so z.B. Pritchard u. Wilson (2007); Lindner (2007)), beispielsweise durch Iteration für eine feste Anzahl von Alternativen und Agenten alle Profile testen, ob diese manipulierbar sind, wird in anderen Arbeiten über sogenannte Monte-Carlo-Methoden eine Stichprobe erzeugt, diese ausgewertet und somit ein Schätzwert für eine Kenngröße berechnet, siehe unter anderem Nitzan (1985); Kelly (1993); Smith (1999).
- Ein drittes Unterscheidungsmerkmal schließlich ist die Frage nach den stochastischen Annahmen, die explizit oder in manchen Fällen auch implizit getroffen werden. Oftmals wird, um eine Kenngröße zu berechnen, die Anzahl von Profilen mit einer bestimmten Eigenschaft berechnet bzw. gezählt und dann in ein Verhältnis beispielsweise zu allen möglichen Profilen gesetzt. Um eine solche Kenngröße interpretieren zu können, ist es notwendig, sich klar zu machen, welche Annahmen über die (Wahrscheinlichkeits-)Verteilung der Profile damit getroffen werden. Dividiert man beispielsweise eine Kenngröße durch die Zahl aller Profile, so nimmt man implizit an, dass alle Profile mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten können. Die beiden Annahmen, die dabei am häufigsten in der Literatur getroffen werden, sind die *impartial anonymous culture assumption* (IAC) und die *impartial culture assumption* (IC): Bei der IAC geht man davon aus, dass alle Profile mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten, bei der IC davon, dass alle Präferenzen gleiche Wahrscheinlichkeit haben. Wie in Lindner (2007) exemplarisch gezeigt wird, folgt die Verteilung der Profile einer Multinomialverteilung, wenn die Präferenzen der Agenten unabhängig identisch verteilt sind. Insbesondere folgt aus einer Gleichverteilung auf dem Raum der Präferenzen keine Gleichverteilung der Profile. Weiterhin lässt sich zeigen, dass unter der IAC die Präferenzen der Agenten nicht stochastisch unabhängig sind. Diese Annahme einer Abhängigkeit zwischen den Präferenzen der Agenten, die mit der IAC meist nur unbewusst getroffen wird, ist in vielen Fällen nicht unproblematisch. Aber auch die Annahme einer Gleichverteilung unter den Präferenzen, wie sie die IC trifft, ist in vielen Fällen in Zweifel zu ziehen. Sind manche Alternativen ähnlicher zueinander als andere, so scheint es unrealistisch, dass alle Präferenzen mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten.

2. Abstimmungen in der Social Choice Theorie

Ein weiterer Aspekt ist schließlich, dass die Gleichverteilung über die Präferenzen Kenngrößen, die Manipulierbarkeit messen, nicht maximiert, es also unter anderen Verteilungsannahmen durchaus stärkere Ausprägungen solcher Variablen geben kann: Zum Beispiel wird eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, die manipulierbaren Profilen höhere Wahrscheinlichkeiten zuordnet und nicht manipulierbaren Profilen nur eine sehr kleine Wahrscheinlichkeit von ϵ , in der Regel höhere Werte bei Kenngrößen, die Manipulierbarkeit messen sollen, bewirken als eine Gleichverteilung¹³.

Im Folgenden werden wir kurz einen Abriss über einzelne Arbeiten geben, die sich mit Simulation bzw. Berechnung der Manipulierbarkeit von Abstimmungsregeln und zugehörigen Kenngrößen befassen:

Ein erster Vergleich der Manipulierbarkeit von sogenannten *scoring methods* (beispielsweise der Borda-Methode oder der relativen Mehrheitswahl) unter der IC findet sich bei Nitzan (1985). Erste Ergebnisse sind dabei, dass die Manipulierbarkeit steigt, wenn sich die Anzahl der Alternativen *ceteris paribus* erhöht, und die Borda-Regel unter der IC-Annahme stärker manipulierbar ist als die relative Mehrheitswahl. Als Kenngröße werden die manipulierbaren Profile (entsprechend ihrer Wahrscheinlichkeit unter der IC-Annahme) gezählt. Ein ähnliches Vorgehen wählt Kelly (1993), der allerdings sich auf 3 bzw. 4 Alternativen beschränkt, und im Wesentlichen als Ergebnis festhält, dass manche Regeln stärker manipulierbar sind als andere, ohne hier zu klaren Schlüssen zu kommen.

Als weitere Arbeiten sind Smith (1999) und Aleskerov u. Kurbanov (1999) zu nennen: Erstere definiert vier Kenngrößen zur Messung von Manipulierbarkeit und berechnet diese unter anderem für die Borda-Methode und die relative Mehrheitswahl. In der Arbeit von Smith wird auch die hohe Komplexität der Berechnungen erkennbar. Für viele Kombinationen von Agenten- und Alternativenzahl können nur Schätzwerte, teilweise mittels einer Approximation über die Normalverteilung, bestimmt werden. Aleskerov u. Kurbanov (1999) untersuchen ebenfalls vier Kenngrößen (hierunter zwei Variablen, um die Effizienz einer Manipulation zu bestimmen) für insgesamt 26 Abstimmungsregeln und nutzen die Normalverteilungsapproximation aus Smith (1999). Die Berechnungen umfassen Fälle bis zu 51 Agenten und mit 3 bzw. 5 Alternativen.

Eine Gegenüberstellung der Manipulierbarkeit der Borda-Regel mit einer weiteren Social Choice Function, der Copeland-Regel¹⁴, findet sich in Favardin u. a. (2002): Wiederum für 3 Alternativen wird unter der IAC-Annahme zuerst eine Berechnungsformel für die Manipulierbarkeit hergeleitet und anschließend mittels dieser Formel für verschiedene Anzahlen an Agenten ein Index, der die manipulierbaren Profile in das

¹³Eine weitere Übersicht über diese und weitere Verteilungsannahmen findet sich bei Berg u. Lepelley (1994).

¹⁴Bei dieser Abstimmungsregel wird jede Alternative in paarweiser Mehrheitsabstimmung mit jeder anderen Alternative verglichen. Wird eine Alternative von einer Mehrheit vorgezogen, so erhält sie 1 Punkt; verliert sie gegenüber ein anderen Alternative, wird 1 abgezogen. Bei einem Patt wird die Punktesumme nicht verändert. Die Alternative mit der höchsten Punktesumme (*copeland score*) - der *copeland winner* - wird gewählt (Vgl. Moulin (1988)).

Verhältnis zu allen Profilen setzt, berechnet. Weitere Ergebnisse finden sich bei Favardin u. Lepelley (2006), unter anderem für den Fall, dass eine Gruppe von Agenten sich im Hinblick auf Manipulation koordiniert.

Eine mit Manipulierbarkeit verwandte Frage (siehe Abschnitt 2.2.2), nämlich die Wahrscheinlichkeit mit der ein Agent Einfluss auf das Abstimmungsergebnis nehmen kann, untersucht Lindner (2007, 2008) für die relative Mehrheitswahl, die Borda-Methode und sogenannte Condorcet-konsistente Abstimmungsverfahren. In Pritchard u. Wilson (2007) werden wiederum scoring methods mit 3 Alternativen sowohl unter der IC-Annahme als auch unter der IAC-Annahme untersucht. Dabei wird einerseits über Berechnungsformeln und andererseits über die (exakte) numerische Berechnung die Wahrscheinlichkeit ermittelt, mit der eine solche Regel manipulierbar ist. Schließlich ist noch Apestegua u. a. (2006) zu nennen, worin untersucht wird, welche Abstimmungsregel von einem utilitaristischen Standpunkt aus betrachtet am besten ist (d.h. die Summe der Nutzen der Agenten maximiert). Solche und andere Wohlfahrtsmaße werden in Kapitel 4 noch von Interesse sein.

Die obigen Arbeiten lassen mehrere Schwachpunkte erkennen: So werden oftmals - meist aus Gründen der Komplexität - nur Kenngrößen für den Fall mit 3 oder 5 Alternativen berechnet. Auch die Menge der Kenngrößen selbst erfasst in vielen Fällen lediglich den Aspekt, ob ein Profil manipulierbar ist, und vernachlässigt sehr oft die Auswirkungen von Manipulation beispielsweise auf das Abstimmungsergebnis (eine Ausnahme hiervon ist Aleskerov u. Kurbanov (1999)). Auch werden in diesem Zusammenhang Abstimmungsregeln lediglich danach beurteilt, wie stark sie für Manipulation anfällig sind, ohne gleichzeitig Wohlfahrtskriterien, unter anderem wie erfolgreich diese Regeln die Summe der Nutzen der Agenten maximieren, zu berücksichtigen. Ferner wird die Sensitivität der Kenngrößen meist nur im Bezug auf die Anzahl der Agenten und die Anzahl der Alternativen für eine gegebene Abstimmungsregel untersucht. Eine Variation, zum Beispiel bezüglich der stochastischen Annahmen, findet nahezu nicht statt.

Schließlich ist ein weiterer Gesichtspunkt, dass die Menge der Alternativen in den obigen Arbeiten ein eher „anonymes Gebilde“ darstellt. In anderen Worten: Man betrachtet eine Alternativenmenge $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, in der jedes Paar von Alternativen sich gleich ähnlich bzw. unähnlich ist. Aussagen wie „Alternative a_1 ist ähnlicher zu a_2 als zu a_3 “ sind nicht möglich. Wäre eine solche Aussage möglich, dann würde es einen Unterschied machen, ob ein Agent statt (unter Angabe der wahren Präferenz) a_1 die Alternative a_2 oder a_3 zum Gewinner der Abstimmung machen kann. Beispielsweise ist im Kontext der Allokation öffentlicher Güter eine solche Ähnlichkeitsbeziehung sehr naheliegend und für die Interpretation von Ergebnissen bezüglich Manipulierbarkeit aufschlussreich. Wir werden in Kapitel 3 dieser Arbeit eine Metrik über Allokationen definieren und so die Möglichkeit eröffnen, Allokationen im Bezug auf ihre „Ähnlichkeit“ zu untersuchen. Der Grundgedanke wird dabei sein, dass sich zwei Allokationen umso ähnlicher sind, desto weniger Geld „umgeschichtet“ werden muss, um von einer Allokation zu einer anderen zu gelangen. Damit ist es auch möglich, Kenngrößen zu definieren und zu berechnen, die über das bloße Abzählen von manipulierbaren Profilen hinausgehen.

2.2.2. Manipulierbarkeit versus Pivotalität

Damit ein Agent in der Lage ist zu manipulieren, müssen zwei Voraussetzungen erfüllt sein: Erstens muss der Agent überhaupt einen *Einfluss* durch Misrepräsentation auf das Abstimmungsergebnis ausüben können, indem er seine angegebene Präferenz ändert, und zweitens muss ein *Anreiz* für den Agenten zur Misrepräsentation bestehen, d.h. er muss sich (im Sinne seiner wahren Präferenz) durch das Ausüben des Einflusses besser stellen. Einfluss zu haben ist also eine notwendige (aber nicht hinreichende) Voraussetzung zur Manipulation.

Daher ist ein mit der Fragestellung, ob und wie „stark“ eine Abstimmungsregel manipulierbar ist, eng verwandter Aspekt die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit, mit der ein Agent Einfluss auf das Abstimmungsergebnis nehmen kann. Diese bezeichnen wir mit *Pivotality*. Ein „Vorteil“ dieser Kenngröße ist ihre Unabhängigkeit von den Präferenzen der Agenten. In mehreren einfachen mathematischen Modellen, um Wahlverhalten zu erklären, nimmt diese Wahrscheinlichkeit eine wichtige Rolle ein (siehe Downs (1957); Riker u. Ordeshook (1973) als Beispiele solcher Modelle und Dowding (2005) für eine Systematisierung der Literatur hierzu). In der Literatur wird zumeist vermutet, dass diese Kenngröße, insbesondere bei Wahlen mit vielen Agenten, äußerst gering ist (so beispielsweise Downs (1957)).

Erste Arbeiten für den Fall, dass zwei Alternativen zur Wahl stehen, sind Penrose (1946) und Beck (1975). Eine Erweiterung dieser Fragestellung auf mehr als zwei Alternativen und damit verbunden auf verschiedene Social Choice Functions stellt Lindner (2007, 2008) dar.

Ein anderer Ansatz, um den Einfluss eines Agenten auf eine Abstimmung zu messen, findet sich im Bereich der kooperativen Spieltheorie bei der Analyse von *simple voting games* (Abstimmungsspiele) mittels sogenannter Machtindices. Am bekanntesten hierunter sind der Shapley-Shubik-Index (siehe Shapley (1953)) und der Banzhaf-Penrose-Index (siehe Banzhaf (1965, 1968)), der eng mit dem Ansatz aus Penrose (1946) verwandt ist. Eine Erweiterung auf mehr als zwei Alternativen findet sich bei Bolger (1986, 1993).

Schwachpunkte von Machtindices, die oftmals auch zu Fehlinterpretationen verleiten (Vgl. Felsenthal u. Machover (2001).) sind sowohl die fehlende Möglichkeit, konkrete Social Choice Functions explizit zu modellieren, als auch insbesondere die stochastischen Annahmen, die bei solchen Indices nur implizit getroffen und nicht variiert werden können (siehe Straffin (1977); Leech (1990); Valenciano u. Laruelle (2002); Kaniovski (2006)). So geht beispielsweise der Banzhaf-Penrose-Index implizit davon aus, dass alle Agenten unabhängig und identisch mit Wahrscheinlichkeit 0.5 die eine Alternative und mit der gleichen Wahrscheinlichkeit die andere Alternative bevorzugen.

Wir werden in Kapitel 4 dieser Arbeit, wenn durch Simulation untersucht werden soll, wie „stark“ verschiedene Abstimmungsregeln zur Allokation öffentlicher Güter manipulierbar sind, ebenfalls berechnen, wie viele Agenten für ein gegebenes Profil unter einer Abstimmungsregel pivotal sind. Dies soll Aufschluss darüber geben, ob und welcher quantitative Zusammenhang zwischen Manipulierbarkeit und Pivotalität besteht.

2.3. Das Median-Wähler-Theorem

Wie ausgeführt wurde, ist jede surjektive und nicht diktatorische Social Choice Function bei mehr als 2 Alternativen auf einem uneingeschränkten Definitionsbereich manipulierbar. Will man eine nicht manipulierbare Abstimmungsregel erhalten, so stellt die Aufgabe der Bedingungen Surjektivität bzw. Nicht-Diktatur keinen wirklichen „Ausweg“ aus diesem Problem dar. Eine andere Möglichkeit hingegen besteht darin, eine Einschränkung im Bezug auf die Präferenzen der Agenten zu treffen. Wenn die Präferenzen der Agenten gewissen Klassen zugeordnet werden können, so existieren nicht manipulierbare und nicht diktatorische Social Choice Functions. Neben anderen Ansätzen (siehe beispielsweise Kalai u. Muller (1977)), die ökonomisch jedoch nicht einfach zu interpretieren sind (so Moulin (1988)) ist die bekannteste Klasse die der eingipfligen Präferenzen (single-peaked preferences) (Vgl. Black (1948, 1958); Moulin (1980)).

Anschaulich gesprochen lassen sich die Alternativen bei eingipfligen Präferenzen auf einer Linie anordnen und jeder Agent hat ein bestes Element (seinen Peak). Je weiter man von diesem Peak aus nach links bzw. rechts auf der Linie geht, desto schlechter bewertet der Agent die sich dort befindenden Alternativen. Verbindet man die Präferenz des Agenten derart, dass eine Linie nach oben geht, falls eine Alternative vorgezogen wird, und fällt, wird eine Alternative nicht vorgezogen, so ergibt sich eine Nutzenfunktion, die genau ein Maximum aufweist und links und rechts davon monoton fällt (siehe Abbildung 2.1). Solche Präferenzen sind beispielsweise im politischen Kontext besonders naheliegend, wenn man Parteien entsprechend ihrer Position in einem „Links-Rechts“-Spektrum anordnet und Wähler ihre favorisierte Partei nach diesem Kriterium bestimmen.

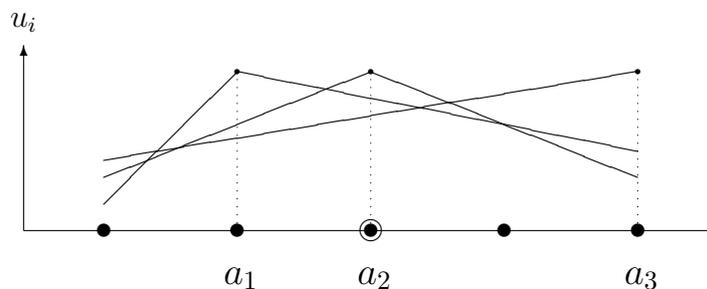


Abbildung 2.1.: Ein Beispiel eingipfliger Präferenzen

Um die Klasse eingipfliger Präferenzen auch formal präzise zu formulieren, betrachten wir eine Totalordnung S auf der Menge der Alternativen A . Mit anderen Worten: S sei eine vollständige, transitive und antisymmetrische binäre Relation auf A . Ferner betrachten wir die durch S induzierte Betweenness- oder auch Dazwischen-Relation T_S (Vgl. Gaertner (2009).), also eine dreistellige Relation auf A , für die gilt:

$$(x, y, z) \in T_S \Leftrightarrow [(x, y) \in S \text{ und } (y, z) \in S] \text{ oder } [(z, y) \in S \text{ und } (y, x) \in S].$$

Die Relation T_S ist damit, wie sich einfach zeigen lässt (Vgl. auch Nehring u. Puppe (2007).):

2. Abstimmungen in der Social Choice Theorie

1. *Reflexiv*: $y \in \{x, z\} \Rightarrow (x, y, z) \in T_S$.
2. *Symmetrisch*: $(x, y, z) \in T_S \Leftrightarrow (z, y, x) \in T_S$.
3. *Transitiv*: $(x, x', z) \in T_S$, $(x, z', z) \in T_S$ und $(x', y, z') \in T_S \Rightarrow (x, y, z) \in T_S$.
4. *Antisymmetrisch*: $(x, y, z) \in T_S$ und $(x, z, y) \in T_S \Rightarrow y = z$.

Definition 2.8 (Single-Peaked) (Vgl. Gaertner (2009).) Sei \succeq eine Präferenzordnung über A . \succeq heißt *single-peaked* im Bezug auf T_S , falls ein $x \in A$ existiert, so dass für alle $y, z \in A$ mit $y \neq z$ gilt:

$$y \succ z, \text{ wenn } (x, y, z) \in T_S.$$

Im Falle von eingipfligen Präferenzen werden wir das beste Element einer solchen Präferenzordnung, d.h. in der obigen Definition die Alternative x , als *Peak* (Gipfel) und mit x^i den Peak des Agenten i bezeichnen. Im Folgenden seien damit (x^1, x^2, \dots, x^n) die Peaks der Agenten. Die Alternative x^{med} heißt *Median*, wenn (einschließlich ihr selbst) mindestens die Hälfte aller Peaks links und mindestens die Hälfte aller Peaks rechts von ihr liegen. In anderen Worten: Die Alternative x^{med} heißt *Median*, falls gilt:

$$|L| \geq \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor, \text{ wobei für alle } x^i \in L \text{ gilt: } (x^i, x^{med}) \in S$$

und

$$|R| \geq \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor, \text{ wobei für alle } x^i \in R \text{ gilt: } (x^{med}, x^i) \in S.$$

Man beachte, dass aufgrund der Vollständigkeit der Relation S und damit ihrer Reflexivität $(x^{med}, x^{med}) \in S$ gilt. In Abbildung 2.1 entspricht (bei den abgebildeten 3 Agenten) der Median der Alternative a_2 ¹⁵.

Theorem 2.2 (Median-Wähler-Theorem) Sei S eine Totalordnung auf A und $(\succeq^1, \succeq^2, \dots, \succeq^n)$ ein Profil. Falls alle Präferenzen \succeq^i eingipflig im Bezug auf T_S sind, dann ist die Abbildung

$$F : \mathcal{R}^n \rightarrow A, (\succeq^1, \succeq^2, \dots, \succeq^n) \mapsto F(\succeq^1, \succeq^2, \dots, \succeq^n) = x^{med},$$

die den Median der Peaks wählt, eine nicht diktatorische und nicht manipulierbare Social Choice Function (Vgl. Black (1948, 1958); Moulin (1980)).

Mit dem Median-Wähler-Theorem erhalten wir also ein Möglichkeitsresultat für nicht diktatorische und nicht manipulierbare Abstimmungsregeln, wenn die Präferenzen der Agenten eingipflig sind. Eine offene Frage, die wir im folgenden Unterabschnitt klären wollen, ist dabei, inwiefern das obige Theorem Gültigkeit hat (bzw. sich modifizieren lässt), wenn die Alternativen nicht mehr mittels einer Totalordnung angeordnet werden können.

¹⁵Ist die Anzahl der Agenten gerade, so ist der Median nach der obigen Definition nicht eindeutig bestimmt. Dementsprechend existieren mehrere Möglichkeiten, mit dieser Problematik umzugehen, beispielsweise den Mittelwert oder den kleinsten Wert der Mediane zu wählen.

2.3.1. Verallgemeinerung auf multidimensionale Probleme

Für zahlreiche Mengen von Alternativen erscheint es schwierig, wenn nicht gar unmöglich, für diese „realitätsnahe“ Präferenzen zu definieren, die für alle Agenten eingipflig im Bezug auf dieselbe Totalordnung S sind. Nimmt man beispielsweise an, dass Bürger bei politischen Wahlen ihre Entscheidung nicht nur nach einem „Links-Rechts-Schema“ treffen, sondern auch andere Dimensionen wie beispielsweise Steuer- oder Umweltpolitik berücksichtigen, so folgt daraus eine Anordnung der Alternativen in einem mehrdimensionalen Raum. Betrachtet man die Allokation eines Budgets L auf K öffentliche Güter, so erscheint es naheliegend die Geldausgaben für jeweils ein Gut als separaten Aspekt bzw. Dimension zu betrachten.

Dies führt zu der Frage, für welche multidimensionalen Abstimmungsprobleme das Median-Wähler-Theorem Gültigkeit besitzt bzw. sich verallgemeinern lässt. Eine umfassende und weitreichende Klärung dieser Fragestellung findet sich in Nehring u. Puppe (2007, 2010). Im Folgenden werden grundlegende Elemente der Vorgehensweise in diesen Arbeiten und ausgewählte Ergebnisse kurz vorgestellt, um eine Einordnung der Resultate aus den Kapiteln 3 und 4 zu ermöglichen.

In einem ersten Schritt verallgemeinern Nehring und Puppe den Begriff der eingipfligen Präferenz im Hinblick darauf, dass nun beliebige Betweenness-Relationen T , die - wie zuvor eingeführt - Reflexivität, Symmetrie, Transitivität und Antisymmetrie erfüllen, zugelassen werden:

Definition 2.9 (Generalized Single-Peaked) (Vgl. Nehring u. Puppe (2007).) Sei \succeq eine Präferenzordnung über A . \succeq heißt *generalized single-peaked* (verallgemeinert eingipflig), falls ein $x \in A$ und eine Betweenness-Relation T existieren, so dass für alle $y, z \in A$ mit $y \neq z$ gilt:

$$y \succ z, \text{ wenn } (x, y, z) \in T.$$

Damit sind eingipflige Präferenzen (Definition 2.8) ein Spezialfall von verallgemeinert eingipfligen Präferenzen, nämlich solche, bei denen die Betweenness-Relation T durch die Totalordnung S induziert ist. Für eine feste Betweenness-Relation T sagen wir auch, dass eine Präferenz *eingipflig im Bezug auf T* ist.

In einem weiteren Schritt definieren die Autoren sogenannte *property spaces* (Eigenschaftsräume). Ein property space (A, \mathcal{H}) besteht aus einer Alternativenmenge A und einer Menge von *basic properties* (grundlegenden Eigenschaften) $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}(A)$, wobei für jede Eigenschaft $H \in \mathcal{H}$, $H \subseteq A$, gilt:

1. *Nicht-Trivialität:* $H \in \mathcal{H} \Rightarrow H \neq \emptyset$.
2. *Abschluss unter Komplementbildung:* $H \in \mathcal{H} \Rightarrow H^c \in \mathcal{H}$.
3. *Separation:* Für alle $x, y \in A$, $x \neq y$, existiert ein $H \in \mathcal{H}$ mit $x \in H$ und $y \notin H$.

2. Abstimmungen in der Social Choice Theorie

Ein Paar (H, H^c) bezeichnet man als *issue* („Abstimmungsgegenstand“). Für einen solchen property space kann eine naheliegende Betweenness-Relation $T_{\mathcal{H}}$ definiert werden:

$$(x, y, z) \in T_{\mathcal{H}} \Leftrightarrow \text{für alle } H \in \mathcal{H} \text{ mit } \{x, z\} \subseteq H \Rightarrow y \in H \quad (2.1)$$

Eine Alternative y befindet sich (im Sinne von $T_{\mathcal{H}}$) genau dann zwischen x und z , wenn sie alle Eigenschaften, die x und z gemeinsam sind, ebenfalls besitzt. Schließlich (Vgl. (Nehring u. Puppe 2007, Fact 2.1).) ist mit den obigen Resultaten und Definitionen eine Charakterisierung von Präferenzen, die eingipflig im Bezug auf $T_{\mathcal{H}}$ sind, möglich:

Proposition 2.1 *Sei (A, \mathcal{H}) ein property space. Eine Präferenzordnung \succ ist genau dann eingipflig im Bezug auf $T_{\mathcal{H}}$, wenn eine Partition $\mathcal{H} = \mathcal{H}_g \cup \mathcal{H}_b$, $\mathcal{H}_g \cap \mathcal{H}_b = \emptyset$, existiert mit:*

1. $H \in \mathcal{H}_g \Leftrightarrow H^c \in \mathcal{H}_b$.
2. $y \succ z$, $y \neq z$ und für alle $H \in \mathcal{H}_g$: Falls $z \in H \Rightarrow y \in H$.
3. Es existiert ein x^* mit $x^* \in H$ für alle $H \in \mathcal{H}_g$.

Die obige Proposition besagt, dass unter eingipfligen Präferenzen im Bezug auf $T_{\mathcal{H}}$ sich die Eigenschaften $H \in \mathcal{H}_g$ in „gute“ und „schlechte“ properties partitionieren lassen. Der Peak x^* besitzt dabei alle guten Eigenschaften, insbesondere sind diese in dem Sinne miteinander kompatibel, dass es eine Alternative gibt, die alle guten Eigenschaften besitzt. Weiterhin gilt, dass die einzelnen properties separat voneinander betrachtet werden: Eine Eigenschaft ist gut oder schlecht unabhängig davon, mit welchen anderen Eigenschaften sie kombiniert ist (Vgl. Nehring u. Puppe (2007).). Schließlich gilt, dass eine Alternative y gegenüber einer anderen Alternativen z vorgezogen wird, wenn sie *zusätzliche* gute Eigenschaften besitzt.

Ein Eigenschaftsraum (A, \mathcal{H}) und die dazugehörige Betweenness-Relation $T_{\mathcal{H}}$ lassen sich häufig durch einen Graphen visualisieren: Die einzelnen Alternativen entsprechen dabei den Knoten des Graphen. Eine Alternative y liegt genau dann auf einem kürzesten Pfad zwischen x und z , wenn $(x, y, z) \in T_{\mathcal{H}}$ gilt, also y zwischen x und z liegt. Damit bilden die Kanten zwischen den Knoten (und somit die kürzesten Pfade zwischen zwei Alternativen) die Betweenness-Relation ab.

Eine zentrale Rolle, um Möglichkeitsresultate zu erhalten, spielen in diesem Zusammenhang sogenannte median spaces (Medianräume):

Definition 2.10 (Median Space) *(Vgl. Nehring u. Puppe (2007).) Ein property space (A, \mathcal{H}) heißt median space (Medianraum), falls die induzierte Betweenness-Relation $T_{\mathcal{H}}$ folgende Bedingung erfüllt: Für alle $x, y, z \in A$ existiert ein $m = m(x, y, z) \in A$ (Median von x, y, z), so dass m zwischen je zwei Elementen aus $\{x, y, z\}$ liegt, also $[(x, m, y), (x, m, z), (y, m, z)] \subseteq T_{\mathcal{H}}$ gilt.*

Gegeben ein Tripel von Alternativen ist ein Median (im Sinne der obigen Definition) demnach ein Element¹⁶, das zwischen je zwei Elementen aus diesem Tripel liegt.

¹⁶Dieses muss nicht notwendigerweise verschiedenen von diesen drei Alternativen sein.

2.4. Manipulation der Allokation öffentlicher Güter

Existiert ein solches Element für jedes beliebige Tripel von Alternativen in einem property space, so ist dieser ein Medianraum. Man beachte, dass eine Linie ebenfalls ein Medianraum ist und die Definition des Median x^{med} mit der obigen Definition auf einer Linie äquivalent ist. Mithilfe von Definition 2.10 lässt sich nun festhalten:

Theorem 2.3 (Vgl. (Nehring u. Puppe 2007, Theorem 4).) Sei (A, \mathcal{H}) ein property space und die Anzahl der Agenten $n \geq 3$. Ferner seien die Präferenzen aller Agenten eingipflig im Bezug auf $T_{\mathcal{H}}$ ¹⁷. Dann existiert genau dann eine nicht manipulierbare Social Choice Function, die surjektiv, neutral und nicht diktatorisch ist, wenn (A, \mathcal{H}) ein median space ist.

Das obige Theorem grenzt also genau die Fälle ab, in denen es möglich ist, eine Social Choice Function mit den erwähnten Eigenschaften zu definieren. Neutralität einer solchen Regel besagt, dass die zur Abstimmung stehenden Alternativen gleich behandelt werden und somit keine Alternative bevorzugt wird¹⁸.

Ist man bereit, auf die Gleichbehandlung von Alternativen zu verzichten und fragt lediglich nach der Existenz von nicht manipulierbaren, nicht diktatorischen und surjektiven Social Choice Functions, so findet sich in (Nehring u. Puppe 2010, Theorem 5) das Ergebnis, dass solche Regeln genau dann existieren, wenn der property space (A, \mathcal{H}) nicht “totally blocked” ist. Unter dem Begriff “totally blocked” versteht man - unscharf formuliert -, dass in einem solchen property space jede Eigenschaft jede andere Eigenschaft über eine Folge von bedingten „Implikationen“ (entailments) restringiert. Ohne näher auf die Details dieser Definition und des Theorems aus Nehring u. Puppe (2010) an dieser Stelle eingehen zu wollen, wird in Kapitel 3 die Frage von Interesse sein, ob property spaces, die in Verbindung mit der Allokation öffentlicher Güter stehen, median spaces bzw. nicht totally blocked sind.

2.4. Manipulation der Allokation öffentlicher Güter

Die Allokation öffentlicher Güter kann nun als ein Spezialfall eines multidimensionalen Abstimmungsproblems dargestellt werden. In der Literatur findet sich (siehe beispielsweise Mas-Colell u. a. (1995); Varian (1992)) eine detaillierte Unterscheidung von Gütern danach, ob, erstens, durch den Konsum einer Einheit des Gutes durch einen Agenten der Konsum desselben Einheit des Gutes für anderen Agenten weiterhin möglich ist oder nicht (*Rivalität*), und, zweitens, ob es generell möglich ist, Agenten an dem Konsum des Gutes zu hindern oder nicht (*Ausschließbarkeit*). Für die Frage der Manipulierbarkeit einer Allokation öffentlicher Güter, wie wir sie im Rahmen dieser Arbeit untersuchen wollen, werden wir davon ausgehen, dass eine Gruppe von Agenten über die Allokation abstimmt und bezüglich des Konsums der öffentlichen Güter weder Rivalität zwischen den Agenten besteht noch ein Ausschluss eines oder mehrerer Agenten von dem Konsum möglich ist.

¹⁷Exakt formuliert ist vorausgesetzt, dass die Präferenzen der Agenten ein sogenannte “richness condition” erfüllen, siehe Nehring u. Puppe (2007).

¹⁸Für eine präzise Definition dieser Eigenschaft siehe beispielsweise Nehring u. Puppe (2007).

2. Abstimmungen in der Social Choice Theorie

Unter einer Allokation verstehen wir dabei die Aufteilung eines Budgets der Höhe L auf K öffentliche Güter, also ein Tupel nicht negativer Zahlen¹⁹ (x_1, x_2, \dots, x_K) , $x_i \geq 0$, mit $\sum x_i = L$. Prinzipiell kann mit diesem Ansatz zudem der Fall, in dem nicht das gesamte Budget aufgeteilt wird, modelliert werden, indem man ein weiteres Gut („Sparen“) einführt und die Präferenzen entsprechend auch hierüber definiert.

In Kapitel 3 werden wir darauf eingehen, wie der zugehörige property space beschaffen ist, welche Eigenschaften dieser hat und welche Konsequenzen sich nach den Ergebnissen aus Nehring u. Puppe (2007, 2010) für die Frage der Manipulierbarkeit ergeben. Dabei gehen wir auch kurz auf andere Anwendungskontexte ein, die sich durch denselben property space modellieren lassen. Im Rahmen dieses Abschnitts wollen wir zuvor einen kurzen Überblick über die Literatur geben, die sich direkt mit der Manipulierbarkeit der Allokation öffentlicher Güter befasst.

Ein Teil der Literatur umfasst die Problemstellungen, in denen jeder Agent sein Budget zwischen einem privaten und einem öffentlichen Gut aufteilen muss. Eine in solchen Fällen (aus Wohlfahrtsgesichtspunkten) zu geringe Bereitstellung an öffentlichen Gütern bzw. eine zu starke Nutzung von öffentlichen Gütern wie Umwelt, Weideflächen etc. ist insbesondere in der Spieltheorie unter dem Begriff “Tragedy of the Commons” (siehe beispielsweise Gibbons (1992); Hardin (1968)) bekannt. Für den Fall von quasilinearen Präferenzen existieren mit der Klasse der Groves-Clarke-Mechanismen (siehe Clarke (1971); Groves (1973)) Verfahren, unter denen die Agenten ihre wahre Wertschätzung für ein öffentliches Gut offenbaren. Mit der Frage der Nicht-Manipulierbarkeit von Social Choice Functions für solche Aufteilungsprobleme befassen sich unter anderem Serizawa (1996), Ohseto (1997) und Serizawa (1999). Dieser Teil der Literatur, der sich wie erwähnt mit der Allokation des *individuellen* Budgets eines Agenten auf ein privates und *ein* öffentliches Gut befasst, scheint jedoch nicht geeignet, um Rückschlüsse im Hinblick auf die Manipulierbarkeit der Allokation eines *gemeinsamen* Budgets auf *mehrere* öffentliche Güter zu ermöglichen.

Eine Erweiterung des Theorems von Gibbard und Satterthwaite auf die Allokation öffentlicher Güter findet sich in Zhou (1991): Betrachtet man mehr als zwei öffentliche Güter und stetige und konvexe Präferenzen, so ist (Vgl. (Zhou 1991, Theorem 1).) jede surjektive, nicht manipulierbare Social Choice Function diktatorisch. Dieses Theorem behält auch dann Gültigkeit, wenn man die Klasse der Präferenzen auf quadratische Präferenzen einschränkt (Vgl. (Zhou 1991, Theorem 2).). Ferner wird der „Standardfall“ (so Zhou (1991) mit Verweis auf weitere Quellen) untersucht, in dem alle Agenten eine stetige, strikt konkave und streng monotone Nutzenfunktion über Allokationen von K öffentlichen Gütern haben²⁰ und die Menge der Alternativen - gegeben ein Budget und Preise für die öffentlichen Güter - aus der Budgetmenge besteht. Man beachte, dass eine solche Nutzenfunktion auf dem Rand der Budgetmenge eine verallgemeinert eingipflige Präferenzordnung (siehe Definition 2.9)

¹⁹Wir werden in Kapitel 3 noch näher spezifizieren, in welchen Fällen wir annehmen, dass es sich hierbei um ganzzahlige Werte handelt.

²⁰Genauer gesagt wird der nicht negative Orthant eines K -dimensionalen euklidischen Raums betrachtet.

induziert. Selbst in diesem Fall (siehe (Zhou 1991, Theorem 3)) sind alle nicht manipulierbaren, surjektiven Social Choice Functions diktatorisch.

Die Ergebnisse aus Zhou (1991) werden durch Barberà u. Jackson (1994) erweitert: Diese präsentieren eine vollständige Charakterisierung der Klasse nicht manipulierbarer Abstimmungsregeln für solche Allokationsprobleme. Insbesondere diskutieren Barberà u. Jackson (1994) erneut (aber im Gegensatz zu Zhou (1991) erstmals explizit) die Frage, ob eine Einschränkung auf verallgemeinert eingipflige Präferenzen nicht diktatorische, surjektive und nicht manipulierbare Social Choice Functions ermöglicht, was - in Übereinstimmung mit den Ergebnissen aus Zhou (1991) - ausgeschlossen werden kann.

Auch andere Annahmen im Bezug auf die Präferenzen der Agenten führen nicht zu Möglichkeitsresultaten in dem Sinne, dass sich Nicht-Diktatur, Surjektivität und Nicht-Manipulierbarkeit einer Social Choice Function für mehr als zwei öffentliche Güter vereinbaren lassen (siehe Moreno (1999); Moreno u. Moscoso (2002)). Schließlich betrachten Svensson u. Torstensson (2008) den Fall von separablen Präferenzen und Social Choice Functions, die nur in einem eingeschränkten Sinn surjektiv sind²¹. Im Ergebnis können Svensson u. Torstensson (2008) die Existenz solcher nicht manipulierbarer Social Choice Functions zeigen, die komponentenweise diktatorisch sind.

Zusammengefasst können wir demnach sagen, dass - setzt man die üblichen Bedingungen der Nicht-Diktatur und Surjektivität voraus - im Falle von drei oder mehr öffentlichen Gütern keine nicht manipulierbare Social Choice Function existiert. Im folgenden dritten Kapitel dieser Arbeit werden wir Simplices betrachten; diese entsprechen den zur Allokation öffentlicher Güter zugehörigen property spaces. Wir werden zeigen, dass - schränkt man die Klasse verallgemeinert eingipfliger Präferenzen weiter ein - verschiedene nicht diktatorische, surjektive und nicht manipulierbare Abstimmungsregeln existieren. Ferner können wir beweisen, dass unabhängig von den Präferenzen der Agenten für einige Abstimmungsregeln auf dem Simplex die Möglichkeiten, das Abstimmungsergebnis durch Misrepräsentation zu beeinflussen, in einem gewissen Sinne beschränkt sind.

²¹Jede Ausprägung in einer Koordinate wird in mindestens einem Profil gewählt, d.h. es gibt für jeden Geldbetrag und für jedes öffentliche Gut mindestens ein Profil, unter dem bei der gewählten Alternative dieser Geldbetrag für das öffentliche Gut bereitgestellt wird.

Abstimmungen auf dem Simplex

Nachdem in den vorangestellten Kapiteln dieser Arbeit sowohl auf die nicht zu verhindernde Manipulierbarkeit von Social Choice Functions auf einem unbeschränkten Definitionsbereich als auch auf die Existenz nicht-manipulierbarer Abstimmungsregeln bei eingipfligen Präferenzen eingegangen wurde, wendet sich dieser Abschnitt nun Abstimmungen auf dem Simplex - und damit auch Abstimmungen zur Allokation öffentlicher Güter - zu.

Dabei wird zuerst auf die Definition eines Simplex, mögliche Anwendungsbereiche dieses Definitionsbereichs und die Nichtexistenz nicht-manipulierbarer Abstimmungsregeln, auch unter (verallgemeinert) eingipfligen Präferenzen eingegangen. Anschließend werden verschiedene Wahlregeln für Abstimmungen auf dem Simplex vorgestellt: zuerst die Midpoint-Regel (Vgl. Lindner u. a. (2009).), im Anschluss die Mittelwert-Regel und schließlich Regeln, die auf dem koordinatenweisen Median aufbauen. Dabei wird jeweils auf mögliche (theoretische) Eigenschaften dieser Regeln eingegangen.

3.1. Definitionen und Modellannahmen

Definition 3.1 ((K, L)-Simplex) *Ein diskreter (K, L)-Simplex ist gegeben durch die Menge*

$$X := \left\{ x \in \mathbb{N}_0^K : \sum_{i=1}^K x_i = L \right\}.$$

Ein kontinuierlicher (K, L)-Simplex ist gegeben durch die Menge

$$\tilde{X} := \left\{ x \in \mathbb{R}_0^K : \sum_{i=1}^K x_i = L \right\}.$$

3. Abstimmungen auf dem Simplex

Ein diskreter (K, L) -Simplex besteht also aus allen K -dimensionalen Vektoren nicht negativer ganzer Zahlen, die sich auf L aufsummieren, während ein kontinuierlicher Simplex aus allen K -dimensionalen Vektoren nicht negativer reeller Zahlen besteht, die diese Bedingung erfüllen. Wir werden im Folgenden K die Dimension und L die Größe bzw. das Budget des Simplex nennen. Im Mittelpunkt dieser Arbeit steht die Analyse und Simulation von Abstimmungsregeln auf Simplicies. Wir werden dabei von einer endlichen Zahl möglicher “preference peaks” ausgehen und daher Wahlregeln für unsere Zwecke entsprechend definieren.

Im Kontext einer Budgetallokation kann ein Simplex auch als der Teil der Oberfläche bzw. des Randes der Budgetmenge interpretiert werden, in dem das Budget vollständig aufgebraucht wird. Im Fall von zwei Gütern ergibt sich also eine Linie der Länge L , bei drei Gütern ein Dreieck mit Seitenlänge L usw. (siehe beispielsweise Stöcker u. Zieschang (1994)).

Neben der Allokation öffentlicher Güter sind noch weitere Anwendungen denkbar, die über Abstimmungen auf einem Simplex modelliert werden können:

- Man betrachte eine Zufallsvariable mit K möglichen Ereignissen (Ausgängen). Dann bezeichnet $p(i) := \frac{x_i}{L}$ die Wahrscheinlichkeit für Ereignis i . (Die Größe L ist dabei in einem diskreten Simplex derart zu wählen, so dass der Simplex hinreichend „fein“ ist, d.h. dass $p(i)$ auch als Bruch aus $\frac{x_i}{L}$ dargestellt werden kann.)
- Ebenso lässt sich die Aufteilung eines Gutes vom Umfang L auf n Agenten über einen Simplex modellieren. Hierzu setzt man $K = n$, wählt also die Dimension gleich der Anzahl der Agenten. Insbesondere lassen sich somit Abstimmungen modellieren, bei denen die Präferenzen der Agenten nicht “self-centered” sind, d.h. in denen Agenten eine Allokation nicht allein danach beurteilen, welchen Anteil des Gutes sie selbst erhalten, sondern auch danach, welche Anteile die anderen Agenten erhalten sollen.

Bei Abstimmungen auf dem Simplex werden wir den folgenden property space (siehe Abschnitt 2.3.1) (X, \mathcal{H}) betrachten: Er besteht aus allen $H_{i,j} \in \mathcal{H}$, $i \in \{1, 2, \dots, K\}$, $j \in \{1, 2, \dots, L\}$ und deren Komplementen, wobei

$$H_{i,j} = \{x \in X : x_i \geq j\} \quad (3.1)$$

gilt. Betrachtet man die Allokation öffentlicher Güter, so umfasst die property $H_{i,j}$ also all die Allokationen, unter denen für das Gut i mindestens ein Geldbetrag der Höhe j ausgegeben wird. Durch diesen property space wird eine Betweenness-Relation $T_{\mathcal{H}}$ induziert (siehe (2.1 in Abschnitt 2.3.1)). In einem nächsten Schritt betrachten wir den zur Relation $T_{\mathcal{H}}$ zugehörigen Graphen und eine Metrik über die Elemente des Simplex.

Die *Distanz* zwischen zwei Elementen x und y im Simplex sei gegeben durch $d(x, y) := \frac{1}{2} \sum_i |x_i - y_i|$, also durch die sog. Manhattan-Metrik geteilt durch zwei. Diese Definition mag auf den ersten Blick etwas speziell scheinen, hat jedoch eine durchaus anschauliche Interpretation im Kontext der Allokation öffentlicher Güter:

Geht man von einem diskreten Simplex aus und betrachtet zwei Allokationen x und y mit $d(x, y) = 1$, so bedeutet dies, dass genau eine Geldeinheit von einem Gut auf ein anderes Gut „umgeschichtet“ werden muss, um von x zu y zu gelangen.

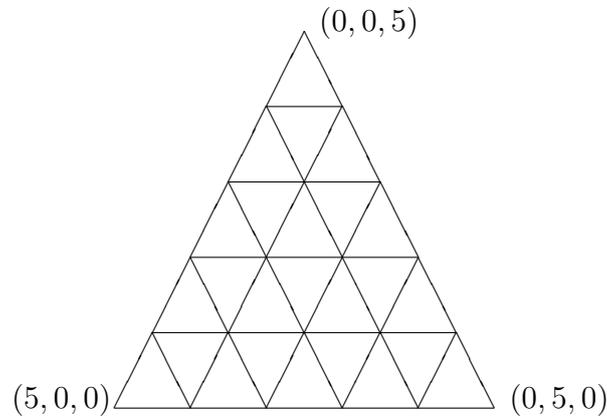


Abbildung 3.1.: Ein (3, 5)-Simplex

Eine weitere anschauliche Interpretation ist aus Abbildung 3.1 ersichtlich:¹ Zu sehen ist ein diskreter (3, 5)-Simplex. In den „Ecken“ befinden sich jeweils die Punkte, bei denen das gesamte Budget auf eine Koordinate konzentriert ist. Zwei Punkte haben genau dann Abstand 1, wenn sie durch eine Kante miteinander verbunden sind. Der Abstand $d(x, y)$ gibt also die Anzahl der Kanten zwischen zwei Punkten x und y an.

Zwischen der Distanz und der Betweenness-Relation $T_{\mathcal{H}}$ besteht eine enge Beziehung. Seien a , b und c Punkte im Simplex. Der Punkt b ist genau dann zwischen a und c , wenn er auf einem kürzesten Pfad von a zu c liegt. Ausgedrückt in der Distanz $d(\cdot, \cdot)$ bedeutet dies, dass $d(a, b) + d(b, c) = d(a, c)$ gelten muss, da $d(x, y)$ der Anzahl der Kanten zwischen x und y entspricht. Man beachte, dass kürzeste Pfade nicht eindeutig sein müssen. Damit gilt:

Proposition 3.1 *Seien $x, y, z \in X$. Es gilt*

$$(x, y, z) \in T_{\mathcal{H}} \Leftrightarrow [d(x, y) + d(y, z) = d(x, z)].$$

Zusammen mit mit den properties $H_{i,j}$ ermöglicht es uns die obige Proposition im weiteren Verlauf wesentliche Konzepte mittels der Distanz $d(\cdot, \cdot)$ zu formulieren.

Wie aus Abbildung 3.2 ersichtlich ist, handelt es sich bei einem Simplex um einen property space, der kein Medianraum (siehe Definition 2.10) ist: es existieren Tripel von Punkten, für die kein Punkt zwischen jeweils zwei Punkten aus dem Tripel liegt. (Im Beispiel aus Abbildung 3.2 gibt es keinen Punkt, der sowohl zwischen x und y , als auch x und z als auch y und z liegt.) Ferner kann man zeigen, dass der

¹Um die Übersichtlichkeit, auch bei weiteren Abbildungen, zu wahren, wurde auf die Zeichnung von Knoten in den Graphen verzichtet.

3. Abstimmungen auf dem Simplex

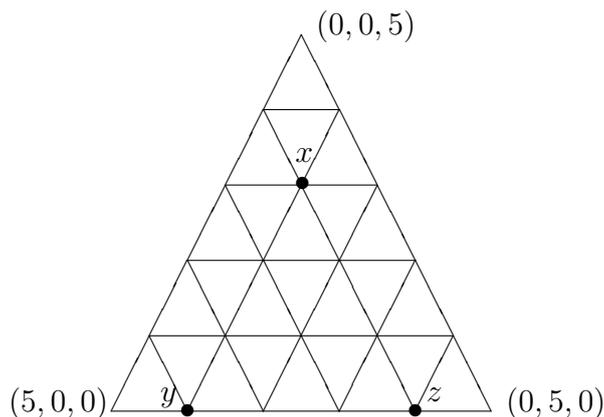


Abbildung 3.2.: Der Simplex ist kein Medianraum

Simplex nicht nur kein Medianraum sondern auch “totally blocked” (siehe Nehring u. Puppe (2010) und (Nehring u. Puppe 2005, Figure 1i)) ist. In anderen Worten: wie Nehring u. Puppe (2007, 2010) zeigen, existiert, selbst wenn man verallgemeinert eingipflige Präferenzen voraussetzt, keine surjektive, nicht-diktatorische und nicht-manipulierbare Abstimmungsregel auf dem Simplex. Unabhängig von den Arbeiten von Nehring und Puppe, die allgemein und umfassend klären, auf welchen property spaces surjektive, nicht-diktatorische und nicht-manipulierbare Abstimmungsregeln existieren, findet sich dieses Resultat wie erwähnt ebenfalls in der Literatur über die Allokation öffentlicher Güter wieder (siehe insbesondere Zhou (1991); Barberà u. Jackson (1994)).

Im Folgenden wenden wir uns der Definition einer Wahlregel auf dem Simplex und von Eigenschaften für solche Regeln zu. Wir nehmen dabei durchgehend an, dass alle Agenten eingipflige Präferenzen im Bezug auf $T_{\mathcal{H}}$ haben (siehe Definition 2.9)². Weiterhin nehmen wir an, dass jeder Agent als „Stimme“ ein Element in X abgibt, seinen Peak (siehe Abschnitt 2.3). Im Gegensatz zur „klassischen“ Social Choice Function, die als Argument ein Profil von Präferenzen hat (Vgl. Definition 2.2.), beschränken wir uns also im Folgenden lediglich auf die Peaks dieser Präferenzen. Dementsprechend betrachten wir Profile von Peaks bzw. wir werden, wann immer Missverständnisse ausgeschlossen sind, auch hier von einem Profil sprechen. Dies führt uns zu folgender

Definition 3.2 (Abstimmungsregel auf dem Simplex) *Eine Abstimmungsregel auf dem Simplex ist eine Abbildung*

$$F : X^n \rightarrow \tilde{X}, (w^1, w^2, \dots, w^n) \mapsto F(w^1, w^2, \dots, w^n) = a,$$

die jedem Profil von Peaks $(w^1, w^2, \dots, w^n) \in X^n$ ein $a \in \tilde{X}$ zuordnet.

²Wir werden diese im Kontext von Abstimmungen auf dem Simplex als verallgemeinert eingipflige Präferenzen bezeichnen.

Eine Abstimmungsregel auf dem Simplex ist also ein Spezialfall einer Social Choice Function, die lediglich aus den Peaks der Agenten statt aus den vollständigen Präferenzen in eine Alternative abbildet. Social Choice Functions, die als Information lediglich die Peaks der Agenten nutzen, bezeichnet man auch als “voting schemes” (Vgl. Moulin (1980)). Vereinfacht formuliert kann gezeigt werden (Vgl. “peaks only property” in Nehring u. Puppe (2007).), dass (unter verallgemeinert eingipfligen Präferenzen) eine nicht manipulierbare, nicht diktatorische und surjektive Social Choice Function ein voting scheme sein muss. In anderen Worten heißt dies, dass eine Abstimmungsregel, die nicht manipulierbar, nicht diktatorisch und surjektiv ist, ausschließlich die Peaks der Agenten als Information berücksichtigen darf.

In Kapitel 4 werden wir außerdem der Frage nachgehen, welche Wohlfahrtseigenschaften solche voting schemes haben, d.h. wir werden untersuchen, ob die Peaks der Agenten - verallgemeinert eingipflige Präferenzen vorausgesetzt - genügend Informationen über die zugrunde liegende Präferenzordnung enthalten, um ein Abstimmungsergebnis zu gewährleisten, das beispielsweise die Summe der Nutzen der Agenten (und damit den durchschnittlichen Nutzen eines Agenten) möglichst groß werden lässt.

Wie bereits erwähnt werden wir uns bei den möglichen Peaks aus Gründen der Simulation auf Punkte aus dem diskreten Simplex beschränken, während wir als Ergebnis einer Abstimmungsregel auch Punkte im kontinuierlichen Simplex zulassen werden. Dies erleichtert im weiteren Verlauf der Arbeit sowohl die Definition verschiedener Abstimmungsregeln wie der Mittelwert-Regel als auch einen sinnvollen Vergleich der Ergebnisse der unterschiedlichen Regeln.

Analog zu Social Choice Functions lassen sich auch für Abstimmungsregeln auf dem Simplex Begriffe und Eigenschaften aus Kapitel 2 definieren:

Definition 3.3 (Diktatorische Abstimmungsregel auf dem Simplex) Sei F eine Abstimmungsregel auf dem Simplex. F heißt diktatorisch, falls es einen Agenten $i \in N$ gibt, so dass gilt

$$F(w^1, w^2, \dots, w^n) = w^i$$

für alle (w^1, w^2, \dots, w^n) .

Definition 3.4 (Einstimmigkeit) Sei F eine Abstimmungsregel auf dem Simplex. F erfüllt Einstimmigkeit (*unanimity*), falls für alle $w \in X$ gilt

$$F(w, w, \dots, w) = w.$$

Man beachte, dass Einstimmigkeit Surjektivität (siehe Definition 2.7) impliziert.

Definition 3.5 (Nicht-Manipulierbar) Sei F eine Abstimmungsregel auf dem Simplex. F heißt nicht manipulierbar (*strategy-proof*), falls für alle Agenten $i \in N$ gilt:

$$F(w^1, \dots, w^i, \dots, w^n) \succeq^i F(w^1, \dots, \tilde{w}^i, \dots, w^n)$$

für alle $\tilde{w}^i \in X$ (siehe auch Gibbard (1973); Satterthwaite (1975)).

3. Abstimmungen auf dem Simplex

Bekannterweise besagt das Gibbard-Satterthwaite-Theorem, dass jede nicht manipulierbare surjektive Social Choice Function diktatorisch sein muss. Für Abstimmungsregeln auf dem Simplex gilt also, dass jede nicht manipulierbare Regel, die Einstimmigkeit erfüllt, auf einem unbeschränkten Definitionsbereich (d.h. ohne Einschränkung der Präferenzen der Agenten) ebenfalls diktatorisch ist. Fraglich ist nun, ob eine Einschränkung der möglichen Präferenzen der Agenten auf verallgemeinert eingipflige Präferenzen es möglich macht, dass auch nicht diktatorische Abstimmungsregeln existieren, die Einstimmigkeit erfüllen und nicht manipulierbar sind. Wie aus Abbildung 3.2 ersichtlich wurde, ist der Simplex jedoch kein Medianraum, - und darüber hinaus, wie man zeigen kann, „totally blocked“. Dies führt zu:

Theorem 3.1 (Vgl. Zhou (1991); Barberà u. Jackson (1994) und Nehring u. Puppe (2007, 2010).) *Sei F eine Abstimmungsregel auf dem Simplex, die Einstimmigkeit erfüllt. Wenn F nicht manipulierbar ist, dann ist F diktatorisch - selbst dann, wenn die Präferenzen der Agenten verallgemeinert eingipflig sind.*

Steht man also vor der Frage, welche Abstimmungsregel auf dem Simplex eine „gute“ ist, und fordert man, dass eine solche Regel nicht diktatorisch ist und Einstimmigkeit erfüllt, dann ist die Auswahl auf manipulierbare Regeln beschränkt³. Eine Auffassung von „gut“ ist sicherlich, eine Regel zu wählen, die „wenig“ bzw. „weniger“ manipulierbar als andere Regeln ist. In einem nächsten Schritt werden verschiedene Abstimmungsregeln vorgestellt und auf etwaige Resultate im Kontext von Manipulierbarkeit eingegangen. Kapitel 4 wird dann Kenngrößen einführen, um beurteilen zu können, was „wenig manipulierbar“ bedeuten kann. Anschließend werden unten stehende Abstimmungsregeln anhand dieser Kenngrößen (mittels Simulation) verglichen.

3.2. Die Midpoint-Regel

Die folgenden Ausführungen bis einschließlich Abschnitt 3.2.3 basieren zu großen Teilen auf Lindner u. a. (2009). Es bezeichne $p(w)$ die Verteilung der Peaks, also die Anzahl der Agenten, die w als Peak angegeben haben. Für alle $A \subseteq X$ ist $p(A) := \sum_{w \in A} p(w)$. Ferner sei $R(x) = \sum_{w \in X} p(w)d(x, w)$ die *Remoteness* (Abgelegenheit) von Punkt x gegeben die Verteilung p . Anders formuliert beschreibt die Remoteness eines Elements die Summe der Distanzen dieses Punktes zu den Peaks der Agenten.

Definition 3.6 (Midpoint) *Ein Punkt $m(p) \in X$ heißt Midpoint, falls gilt*

$$m(p) = \operatorname{argmin}_{x \in X} \sum_{w \in X} p(w)d(x, w) = \operatorname{argmin}_{x \in X} R(x).$$

³Wie bereits in Kapitel 2 diskutiert wurde (siehe Abschnitt 2.4), ist auch die Einschränkung der Präferenzen auf verallgemeinert eingipflige Präferenzen kein „Ausweg“ aus der Nichtvereinbarkeit von Surjektivität, Nicht-Manipulierbarkeit und Nicht-Diktatur.

Ein Midpoint ist also ein Punkt mit minimaler Remoteness. Er minimiert demzufolge die Summe der Distanzen zu den Peaks. Da Definition 3.6 ein wohldefiniertes Minimierungsproblem darstellt, ist die Menge der Midpoints immer nicht leer - aber nicht in allen Fällen einelementig. Daher bezeichne $M(p)$ die Menge der Midpoints. Man beachte, dass nach Definition 3.6 Midpoints immer Elemente des diskreten Simplex sind, die Regel also streng genommen nur nach $X \subset \tilde{X}$ abbildet. Im weiteren Verlauf der Arbeit wird eine Erweiterung dieser Regel vorgestellt, die jeweils genau auf einen Punkt im kontinuierlichen Simplex abbilden wird.

Im Fall $K = 2$, also der Möglichkeit, die Alternativen auf einer Linie anzuordnen, stimmt der Midpoint mit dem Median überein: Bekanntermaßen minimiert der Median einer Folge von Zahlen die Summe der betragsmäßigen Abstände. Sei $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$, $z_i \in \mathbb{R}$, eine Folge von reellen Zahlen und z_{med} der dazugehörige Median, also - falls n ungerade ist - das Element $z_{\frac{n+1}{2}}$ und - falls n gerade ist - der Wert von $\frac{1}{2}(z_{\frac{n}{2}} + z_{\frac{n}{2}+1})$ (siehe beispielsweise Bronstein u. Semendjajew (1961)). Dann gilt:

$$z_{med} = \operatorname{argmin}_{z \in \mathbb{R}} \sum_i |z - z_i|$$

In diesem Fall hat also das „klassische“ Median-Wähler-Theorem Gültigkeit (Vgl. Black (1948, 1958); Moulin (1980)).

Die Midpoint-Regel ist eng verwandt mit anderen bekannten Abstimmungsregeln bzw. Aggregationsverfahren: In Medianräumen (siehe Definition 2.10) stimmt die Regel mit „issue-by-issue voting“ überein (siehe Nehring u. Puppe (2007)). Im Falle allgemeiner Präferenzaggregation existiert mit der Kemeny-Regel (Vgl. Kemeny (1959).) eine Social Welfare Function, deren Ergebnis die Summe der Hamming-Abstände zu den Präferenzen der Agenten minimiert (siehe auch Young u. Levenglick (1978); Young (1988, 1995) für eine weitere Charakterisierung und Conitzer u. a. (2006) zu Fragen der Komplexität dieser Regel). Nehring u. a. (2011) bezeichnen eine Verallgemeinerung der Midpoint-Regel als „median rule“.

Zunächst wird auf einige strukturelle Eigenschaften der (mengenwertigen) Midpoint-Regel eingegangen, anschließend auf begrenzte Möglichkeiten der Beeinflussung dieser Regel durch einen Agenten, bevor abschließend die Midpoint-Regel mittels der „shadow voter selection“ auf eine punktwertige Regel erweitert wird.

3.2.1. Struktur der Midpoints

Mit xNy bezeichnen wir die Fälle, in denen die Punkte x und y im Simplexgraphen benachbart sind, d.h. $xNy \Leftrightarrow d(x, y) = 1$ gilt. Weiterhin schreiben wir $xN_{ij}y$, falls $x_i = y_i + 1$, $x_j = y_j - 1$ und $x_l = y_l$ für alle $l \neq i, j$ gilt, d.h. x und y Nachbarn in „ ij -Richtung“ sind. (Man beachte, dass N eine symmetrische Relation ist, während N_{ij} eine asymmetrische Relation ist, für die gilt $xN_{ij}y \Leftrightarrow yN_{ji}x$.)

Die Menge aller Punkte, die bezüglich $T_{\mathcal{H}}$ zwischen x und y liegen, sei mit $[x, y]$ bezeichnet. Es lässt sich leicht zeigen, dass gilt

$$[x, y] = \{z : z_i \in [x_i, y_i] \text{ für alle } i\}$$

3. Abstimmungen auf dem Simplex

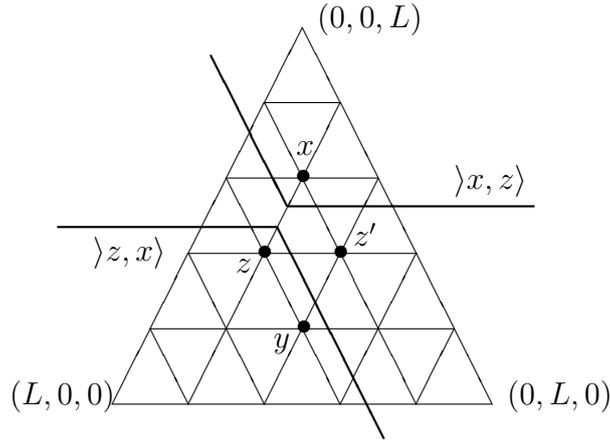


Abbildung 3.3.: Die Mengen $[x, y]$, $\rangle x, z\rangle$ und $\rangle z, x\rangle$

(beispielsweise gilt in Abbildung 3.3 $[x, y] = \{x, y, z, z'\}$). Die Menge aller Punkte, für die x auf einem kürzesten Pfad zu y liegt, sei bezeichnet mit $\rangle x, y\rangle$. Also gilt $\rangle x, y\rangle = \{z : x \in [z, y]\}$. Falls x und y Nachbarn sind, gilt ferner $d(z, x) < d(z, y)$ genau dann, wenn x zwischen z und y liegt. In anderen Worten: ein Punkt z liegt näher an x als an y genau dann, wenn x zwischen z und y liegt. Sind x und y Nachbarn in „ ij -Richtung“, ergibt sich folgende einfache Beschreibung der Menge $\rangle x, y\rangle$ (siehe auch Abbildung 3.3 mit $xN_{31}z$):

$$xN_{ij}z \Rightarrow \rangle x, z\rangle = \{w : w_i \geq x_i \text{ and } w_j \leq x_j\}. \quad (3.2)$$

Mit Hilfe der oben eingeführten Notation werden zunächst zwei Eigenschaften der Menge der Midpoints bewiesen: zum einen ist besagte Menge konvex in dem Sinne ist, dass alle Punkte, die bezüglich $T_{\mathcal{H}}$ zwischen zwei Midpoints liegen, ebenfalls Midpoints sind (siehe Theorem 3.2), zum anderen ist die Menge der Midpoints lokal bestimmt, d.h. die Frage, ob ein Punkt Midpoint ist oder nicht, kann durch Vergleich mit seinen Nachbarn beantwortet werden (siehe Theorem 3.3). Beide Eigenschaften verringern den Berechnungsaufwand in der Simulation.

Zunächst werden zwei Hilfssätze hierzu bewiesen. Für zwei Nachbarn x und y bezeichne xMy den Fall, dass mehr Agenten Punkte, die näher an x als an y liegen, unterstützen als solche Punkte, die näher an y als an x liegen, d.h. $p(\rangle x, y\rangle) > p(\rangle y, x\rangle)$. Gilt weder xMy noch yMx , so schreiben wir xIy .

Lemma 3.1 *Seien p eine Verteilung von Peaks und x und y zwei beliebige Nachbarn. Es gilt $p(\rangle x, y\rangle) - p(\rangle y, x\rangle) = R(y) - R(x)$, insbesondere xMy genau dann, wenn $R(y) > R(x)$.*

Beweis: Das Lemma folgt direkt aus der Tatsache, dass für alle $w \in \rangle x, y\rangle$ gilt $d(x, w) - d(y, w) = -1$, für alle $w \in \rangle y, x\rangle$ gilt $d(x, w) - d(y, w) = 1$ und für alle anderen Punkte $w \in X$ gilt $d(x, w) - d(y, w) = 0$. \square

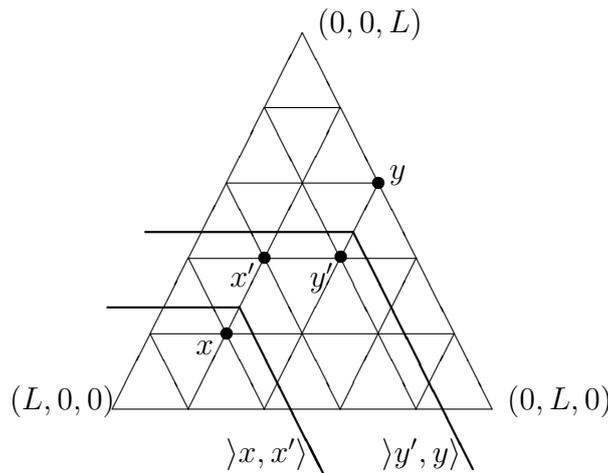


Abbildung 3.4.: Ein Beispiel zu Lemma 3.2

Lemma 3.1 zeigt also, dass die Ordnung der Alternativen entsprechend der Midpoint-Regel (nämlich entsprechend Remoteness der Alternativen) mit einer Mehrheitsabstimmung zwischen x und y übereinstimmt: dabei wird der Peak eines Agenten als Stimme für x gegenüber y aufgefasst, wenn sein Peak näher an x als an y liegt. Betrachtet man nun Paare von Punkten, die jeweils in „gleicher Richtung“ benachbart sind, so lassen sich mittels Lemma 3.2 Zusammenhänge über das Ergebnis der obigen paarweisen Mehrheitsabstimmung zeigen:

Lemma 3.2 *Seien x und y zwei Punkte mit $x_i > y_i$ und $y_j > x_j$. Falls $xN_{ij}x'$ und $y'N_{ij}y$, dann $\rangle y', y \rangle \supseteq \rangle x, x' \rangle$ und $\rangle y, y' \rangle \subseteq \rangle x', x \rangle$. Weiterhin gilt $xMx' \Rightarrow y'My$ und $yMy' \Rightarrow x'Mx$.*

Beweis: Aus (3.2) folgt

$$\begin{aligned} \rangle y', y \rangle &= \{w : w_i \geq y_i + 1, w_j \leq y_j - 1\}, \\ \rangle x, x' \rangle &= \{w : w_i \geq x_i, w_j \leq x_j\}, \\ \rangle y, y' \rangle &= \{w : w_j \geq y_j, w_i \leq y_i\}, \\ \rangle x', x \rangle &= \{w : w_j \geq x_j + 1, w_i \leq x_i - 1\}, \end{aligned}$$

was die erste Behauptung des Lemmas beweist. Weiterhin folgt $p(\rangle x, x' \rangle) \leq p(\rangle y', y \rangle)$ und $p(\rangle x', x \rangle) \geq p(\rangle y, y' \rangle)$. Falls also $p(\rangle x, x' \rangle) > p(\rangle x', x \rangle)$ gilt, dann gilt auch $p(\rangle y', y \rangle) > p(\rangle y, y' \rangle)$. Ebenso, falls gilt $p(\rangle y, y' \rangle) > p(\rangle y', y \rangle)$, dann gilt $p(\rangle x', x \rangle) > p(\rangle x, x' \rangle)$. Damit ist die zweite Behauptung bewiesen. \square

Theorem 3.2 *Die Menge der Midpoints $M(p)$ ist konvex, d.h. jeder Punkt, der zwischen zwei Midpoints liegt, ist ebenfalls ein Midpoint.*

Beweis: Seien x und y zwei verschiedene Midpoints. Man betrachte einen kürzesten Pfad zwischen x und y und nehme an, es gäbe auf diesem Pfad einen Punkt, der

3. Abstimmungen auf dem Simplex

kein Midpoint ist. Dann hat dieser Punkt eine größere Remoteness als x und y . Weiter folgt, dass es auf diesem Pfad zwei Punkte z, z', zNz' , mit $R(z) < R(z')$ geben muss. Nach Lemma 3.1 gilt somit zMz' . Angenommen z und z' sind in ij -Richtung benachbart, d.h. $zN_{ij}z'$. Da z und z' zwischen x und y liegen, also $z, z' \in [x, y]$, gilt entweder $(x_i > y_i$ und $x_j < y_j)$ oder $(y_i > x_i$ und $y_j < x_j)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir den ersten Fall an und betrachten den Punkt y' mit $y'N_{ij}y$. Nach Lemma 3.2 gilt somit $y'My$ im Widerspruch zur Annahme, dass $y \in M(p)$ gilt. \square

Theorem 3.3 *Ein Punkt x ist ein Midpoint genau dann, wenn er nicht in paarweiser Mehrheitsabstimmung gegen einen seiner Nachbarn verliert, d.h. $x \in M(p) \Leftrightarrow [\neg(yMx)]$ für alle y mit yNx .*

Beweis: Ein Midpoint ist ein Punkt mit minimaler Remoteness, d.h. nach Lemma 3.1 kann er nicht gegen einen Nachbarn in paarweiser Mehrheitsabstimmung verlieren (da dieser sonst selbst über eine geringere Remoteness verfügen würde).

Es bleibt also zu zeigen, dass der Umstand, dass ein Punkt nicht gegen einen Nachbarn verliert, impliziert, dass dieser Punkt ein Midpoint ist. Wir betrachten daher ein $x \in X$ mit xMx' oder xIx' für alle x' mit xNx' und nehmen entgegen Theorem 3.3 an, dass $x \notin M(p)$ gelte. Folglich existiert ein $z \in M(p)$ mit geringerer Remoteness als x . Betrachte zwei Nachbarn y, y' zwischen x und z mit yMy' und $y' \in [x, z]$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte $y'N_{ij}y$. Da y' zwischen x und y liegt, gilt $x_i > y_i$ und $x_j < y_j$. Betrachte nun x' mit $xN_{ij}x'$. Nach Lemma 3.2 folgt $x'Mx$ im Widerspruch zur Annahme, dass x nicht im paarweisen Vergleich gegen einen seiner Nachbarn verliert. \square

Anschaulich gesprochen besagt Theorem 3.3, dass die Frage, ob ein Punkt zur Menge der Midpoints gehört oder nicht, „lokal“ beantwortet werden kann, d.h. durch paarweisen Vergleich mit seinen Nachbarn. Es gilt also, dass ein lokales Minimum in der Remoteness auch ein globales Minimum darstellt. Dieser Umstand wird in der Simulation bei der Berechnung der Midpoints ausgenutzt.

Neben den beiden Theoremen ergeben sich noch weitere strukturelle Aussagen über die Menge der Midpoints.

Proposition 3.2 *Sei $x \in M(p)$. Es gilt: $y \in M(p) \Leftrightarrow xIy$.*

Beweis: Nach Lemma 3.1 hat y genau dann dieselbe Remoteness, wenn yIx gilt. \square

Proposition 3.3 *Seien $x, z \in M(p)$, $y \in [x, z]$ und $y \notin \{x, z\}$. Dann gilt $p(y) = 0$.*

Beweis: Es gelte ohne Beschränkung der Allgemeinheit $xNyNz$, $x_i > z_i$, $z_j > x_j$ und $xN_{ij}y$. Sei z' ein Element aus X mit $z'N_{ij}z$ ($z' = y$ kann gelten). Wegen Theorem 3.2 muss $z' \in M(p)$ gelten, wegen Lemma 3.2 $\langle x, z' \rangle \subset \langle y, z \rangle$ und $\langle z', x \rangle \supset \langle z, y \rangle$. Man nehme entgegen Proposition 3.3 an, dass $p(y) > 0$ gelte. Daraus folgt

$p(\langle y, z \rangle) > p(\langle x, z' \rangle)$ und $p(\langle z, y \rangle) < p(\langle z', x \rangle)$, was wiederum yMz - im Widerspruch zur Annahme, dass z ein Midpoint ist - impliziert. \square

Proposition 3.3 macht also eine Aussage über das „Innere“ der Menge der Midpoints. Ein Punkt, der strikt zwischen zwei anderen Midpoints liegt, muss nicht nur auch selbst ein Midpoint sein, er kann ebenso nicht selbst Masse tragen (in dem Sinn, dass er von einem oder mehreren Agenten vorgeschlagen wurde).

Satz 3.1 macht schließlich eine wichtige Aussage über die Größe der Menge der Midpoints (genauer über ihren Durchmesser und damit auch die maximale Anzahl von Midpoints) in Abhängigkeit der zugrunde liegenden Verteilung der Peaks: Sei $diamM(p) := \max_{x,y \in M(p)} d(x,y)$ der Durchmesser (Durchmesser) der Midpoints, d.h. die maximale Distanz zwischen zwei Elementen in dieser Menge. Wir nennen eine Menge $Y \subseteq X$ *zusammenhängend*, wenn für jedes Paar von Elementen dieser Menge $x, y \in Y$ ein kürzester Pfad existiert, der diese Elemente verbindet und vollständig in Y liegt.

Satz 3.1 *Sei $supp(p)$ zusammenhängend. Dann gilt $diamM(p) \leq 1$ und damit $|M(p)| \leq K$.*

Beweis: Falls $|M(p)| = 1$, ist nichts weiter zu zeigen. Daher nehmen wir im Folgenden $|M(p)| > 1$ an. Da $M(p)$ konvex ist, existieren $x, y \in M(p)$ mit xIy . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $xN_{ij}y$.

Entgegen Satz 3.1 nehmen wir zunächst an, es gäbe ein z mit $xN_{ij}yN_{ij}z$ und $xIyIz$, also drei Midpoints „in einer Reihe“. Daraus folgt $p(\langle x, y \rangle) = p(\langle y, x \rangle)$ und $p(\langle y, z \rangle) = p(\langle z, y \rangle)$. Aus Lemma 3.2 folgt ferner $\langle y, z \rangle \supset \langle x, y \rangle$ und $\langle y, x \rangle \supset \langle z, y \rangle$.

Falls $p(\langle x, y \rangle) > 0$ gilt, folgt $p(\langle y, x \rangle) > 0$ und $p(\langle y, z \rangle) = p(\langle z, y \rangle) > 0$. Aus Lemma 3.2 folgt jedoch $p(\langle y, z \rangle) > p(\langle x, y \rangle)$ und $p(\langle y, x \rangle) > p(\langle z, y \rangle)$, da $supp(p)$ zusammenhängend ist. Dies steht im Widerspruch zur Annahme, dass x, y und z Midpoints sind.

Folglich muss $p(\langle x, y \rangle) = 0$ gelten. Da wir $xIyIz$ angenommen haben, folgt $p(\langle y, x \rangle) = p(\langle y, z \rangle) = p(\langle z, y \rangle) = 0$. Daher muss sich $supp(p)$ außerhalb dieser Bereiche befinden, also $supp(p) \subseteq Y := X \setminus \{\langle y, z \rangle \cup \langle y, x \rangle\}$, insbesondere hat jedes Element aus $supp(p)$ den gleichen Abstand zu x, y und z . Aus (3.2) ergibt sich $\langle y, z \rangle = \{w : w_i \geq y_i \text{ und } w_j \leq y_j\}$ und $\langle y, x \rangle = \{w : w_i \leq y_i \text{ und } w_j \geq y_j\}$. Bezeichne mit $Y_1 := \{w : w_i \geq x_i \text{ und } w_j \geq z_j\}$ und $Y_2 = \{w : w_i \leq z_i \text{ und } w_j \leq x_j\}$. Es gilt $Y = Y_1 \cup Y_2$ und $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$, da $x_i = y_i + 1 = z_i + 2$ und $x_j = y_j - 1 = z_j - 2$. Insbesondere führt jeder kürzeste Pfad von einem Element aus Y_1 zu einem Element aus Y_2 über einen Punkt außerhalb von Y . Da $supp(p)$ zusammenhängend ist, muss dieser Träger entweder in Y_1 oder Y_2 liegen ($supp(p) \subseteq Y_1$ oder $supp(p) \subseteq Y_2$). Daraus folgt jedoch unmittelbar, dass x kein Midpoint sein kann: jeder Nachbar von x in Richtung von $supp(p)$ hat eine strikt geringere Remoteness als x . Damit haben wir gezeigt, dass es keine drei Midpoints „in einer Reihe“ ($xN_{ij}yN_{ij}z$) geben kann.

Es bleibt noch zu zeigen, dass auch andere Fälle mit $diamM(p) > 1$ nicht existieren können. Wiederum betrachten wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x, y \in M(p)$ mit $xN_{ij}y$ und wollen zuerst zeigen, dass $p(\langle x, y \rangle) = p(\langle y, x \rangle) > 0$

3. Abstimmungen auf dem Simplex

gilt. Betrachte die Menge $Z := X \setminus \{\langle x, y \rangle \cup \langle y, x \rangle\}$. Aus (3.2) folgt $Z = Z_1 \cup Z_2$ mit $Z_1 = \{w : w_i \leq y_i \text{ und } w_j \leq x_j\}$ und $Z_2 = \{w : w_i \geq x_i \text{ und } w_j \geq y_j\}$. Da $\sum w_i = L$ für alle $w \in X$ gilt, folgt $Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$. Ebenso muss jeder kürzeste Pfad von einem Element aus Z_1 zu einem Element in Z_2 über einen Punkt außerhalb von Z führen. Analog zur Argumentation im Absatz zuvor ergibt sich, dass $p(\langle x, y \rangle) = p(\langle y, x \rangle) > 0$ gelten muss. Im nächsten Schritt betrachten wir schließlich alle gemeinsamen Nachbarn von x und y , d.h. $\{z : xNzNy\}$. (Man beachte, dass x und y selbst miteinander benachbart sind.) Da $\text{supp}(p)$ zusammenhängend ist und $p(\langle x, y \rangle) > 0$, ergibt sich aus Lemma 3.2 zMz' für $z'N_{ij}z$ und zMz'' für $zN_{ij}z''$. Da $M(p)$ konvex ist, folgt $\text{diam}M(p) \leq 1$. \square

In anderen Worten besagt Satz 3.1, dass alle Midpoints höchstens einen Abstand von 1 zueinander haben, wenn die Teilmenge der Punkte in X , die von mindestens einem Agenten vorgeschlagen wurden (also der Träger der Verteilung p), zusammenhängend ist. Wir werden dieses Resultat im weiteren Verlauf der Arbeit nutzen, um für die Midpoint-Regel eine Erweiterung ("single valued selection", siehe Definition 2.4) zu definieren, die dazu führt, dass die so erweiterte Regel auf genau ein Element im kontinuierlichen Simplex abbildet.

3.2.2. Mögliche Beeinflussung der Midpoint-Punkte

Wie bereits in Kapitel 2 ausgeführt wurde, sind für die Manipulation einer Abstimmungsregel zwei Aspekte wichtig: einerseits muss ein Agent überhaupt durch eine Misrepräsentation in der Lage sein, das Ergebnis der Regel verändern zu können (also *pivotal* sein), andererseits muss für den Agenten das Ergebnis der so manipulierten Regel auch von Vorteil sein (sprich einen *Nutzensgewinn* darstellen). Wie werden in diesem Abschnitt zunächst zeigen, dass die Möglichkeit die Menge der Midpoints zu beeinflussen, beschränkt ist. Dieses Ergebnis werden wir später auf die punktwertige Midpoint-Regel entsprechend erweitern.

Wir betrachten einen Agenten h mit Peak w^h . Mit p bezeichnen wir die Verteilung der Peaks, bei der Agent h den Punkt w^h , also seinen Peak, vorschlägt. Weiterhin sei \tilde{p} nun die Verteilung, die sich nur im Peak von Agent h von der Verteilung p unterscheidet, es gilt also $\tilde{w}^i = w^i$ für alle $i \neq h$ und $\tilde{w}^h \neq w^h$. Die zugehörigen Midpoints sind dementsprechend $M(p)$ und $M(\tilde{p})$. Wie in Kapitel 2 eingeführt, bezeichnen wir Fälle, in denen $\tilde{w}^h \neq w^h$ gilt, als Misrepräsentation durch den Agenten h . Wir werden nun zeigen, dass es unter der Midpoint-Regel nicht möglich ist, durch Angabe eines \tilde{w}^h mit $\tilde{w}^h \neq w^h$ (also durch Misrepräsentation) eine Menge $M(\tilde{p})$ zu erhalten, deren zum wahren Peak w^h nächstes Element *näher* an w^h als das nächste Element von $M(p)$ zu w^h liegt. Ebenso kann ein Agent durch Angabe eines \tilde{w}^h kein $M(\tilde{p})$ erzeugen, dessen am weitesten entferntes Element (bezogen auf den Abstand zu w^h) näher an w^h liegt als das entsprechende Element aus $M(p)$. In anderen Worten: es ist unter der Midpoint-Regel durch Misrepräsentation weder möglich, den nächsten noch den weitesten Midpoint näher an den eigenen Peak zu rücken.

Theorem 3.4 Sei $\tilde{w}^h \neq w^h$. Es gilt: $\min_{x \in M(p)} d(w^h, x) \leq \min_{x \in M(\tilde{p})} d(w^h, x)$, d.h. eine Misrepräsentation kann also nicht den nächsten Midpoint näher an den eigenen Peak rücken, und $\max_{x \in M(p)} d(w^h, x) \leq \max_{x \in M(\tilde{p})} d(w^h, x)$, d.h. eine Misrepräsentation kann nicht den am weitesten entfernten Midpoint näher an den eigenen Peak rücken.

Beweis: Sei z der Midpoint mit dem kürzesten Abstand zu w^h und es gelte ferner $d(z, w^h) = r$. Falls $r = 0$, ist nichts zu zeigen; daher sei im Folgenden $r \geq 1$. Für alle i, j mit $z_i > w_i^h$ und $z_j < w_j^h$ sei z_{ij} der Nachbar von z in Richtung w^h , d.h. $zN_{ij}z_{ij}$. Weiterhin bezeichnen wir mit $Z_{w^h}^-$ die Menge aller dieser Nachbarn, d.h.

$$Z_{w^h}^- = \{y \in X : yNz \text{ und } d(w^h, y) = r - 1\}.$$

Da z der nächste Midpoint zu w^h ist, muss unter der Verteilung p (d.h. falls der Peak w^h vorgeschlagen wird) für alle $y \in Z_{w^h}^-$ gelten: zMy . Man beachte, dass w^h bereits jedes $y \in Z_{w^h}^-$ im paarweisen Vergleich gegenüber z unterstützt, d.h. $w^h \in \rangle y, z \rangle$. Folglich muss auch unter \tilde{p} , d.h. wenn \tilde{w}^h statt w^h vorgeschlagen wird, $z\tilde{M}y$ gelten. Aus Lemma 3.2 folgt, dass wegen $z\tilde{M}z_{ij}$ gilt: $y'\tilde{M}y$ für alle $y \in \rangle z_{ij}, z \rangle$ mit $y'N_{ij}y$. In anderen Worten: für alle z_{ij} kann kein Punkt aus $\rangle z_{ij}, z \rangle$ Midpoint unter der Verteilung \tilde{p} sein. Weiterhin gilt:

$$\{y \in X : d(w^h, y) < r\} \subseteq \bigcup_{z_{ij} \in Z_{w^h}^-} \rangle z_{ij}, z \rangle.$$

Damit ist bewiesen, dass durch Misrepräsentation kein Midpoint erzeugt werden kann, der näher an w^h liegt als der nächste Midpoint unter der Verteilung p .

Es bleibt zu zeigen, dass auch nicht der am weitesten entfernte Midpoint durch Misrepräsentation näher an w^h gerückt werden kann. Sei nun z der zu w^h am weitesten entfernte Midpoint und es gelte $d(z, w^h) = r$.

Um durch Misrepräsentation, also durch Vorschlag eines $\tilde{w}^h \neq w^h$, die maximale Distanz von w^h zu einem Midpoint zu verkürzen, muss z im paarweisen Vergleich gegenüber einem seiner Nachbarn unter der Verteilung \tilde{p} verlieren (siehe Theorem 3.3). Wir partitionieren die Nachbarn von z wie folgt:

$$\begin{aligned} Z_{w^h}^- &= \{y \in X : yNz \text{ und } d(w^h, y) = r - 1\}, \\ Z_{w^h}^0 &= \{y \in X : yNz \text{ und } d(w^h, y) = r\}, \\ Z_{w^h}^+ &= \{y \in X : yNz \text{ und } d(w^h, y) = r + 1\}. \end{aligned}$$

Da bei Vorschlag von w^h (also unter der Verteilung p) bereits jedes Element aus $Z_{w^h}^-$ im paarweisen Vergleich gegen z verliert, kann z auch nicht bei Vorschlag eines $\tilde{w}^h \neq w^h$ (also unter Verteilung \tilde{p}) gegenüber einem Element aus $Z_{w^h}^-$ verlieren. Angenommen z würde durch Vorschlag eines $\tilde{w}^h \neq w^h$ gegen ein $z' \in Z_{w^h}^+$ verlieren, also $z'\tilde{M}z$. (Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte $z'N_{ij}z$.) Aus Lemma 3.2 folgt dann, dass alle $x \in \rangle z, z' \rangle$ im paarweisen Vergleich gegen ihren Nachbarn in

3. Abstimmungen auf dem Simplex

ij -Richtung verlieren müssen, d.h. $x' \tilde{M} x$, wenn $x' N_{ij} x$. Also kann kein Element aus $\rangle z, z' \rangle$ unter Verteilung \tilde{p} ein Midpoint sein. Da

$$\{y \in X : d(w^h, y) < r\} \subseteq \rangle z, z' \rangle,$$

folgt, dass jeder Midpoint unter Verteilung \tilde{p} mindestens den Abstand von w^h zu z haben muss. In einem letzten Schritt nehmen wir an, z verlöre im paarweisen Vergleich gegen ein $z' \in Z_{w^h}^0$ durch Vorschlag eines $\tilde{w}^h \neq w^h$. Da w^h weder z noch z' im paarweisen Vergleich unterstützt, ist $z' \tilde{M} z$ nur möglich, falls $z' I z$ gilt. Aus Proposition 3.2 folgt, dass z' bereits unter Verteilung p ein Midpoint sein muss. Man unterscheide nun zwei Fälle: entweder z' bleibt unter der Verteilung \tilde{p} ein Midpoint. Dann ist die Behauptung bewiesen. Oder z' verliert im paarweisen Vergleich gegen einen seiner Nachbarn. In diesem Fall zeigt die wiederholte Anwendung der obigen Argumente, dass man letztendlich einen Midpoint erhält, der mindestens einen Abstand von r zu w^h hat. \square

3.2.3. Manipulierbarkeit der Midpoint-Regel

Wie wir im vorangegangenen Abschnitt zeigen konnten, sind die Möglichkeiten, das Ergebnis der Midpoint-Regel zu beeinflussen, beschränkt. Fraglich ist, welche Auswirkungen dieses Ergebnis auf die Möglichkeiten der Manipulation dieser Regel hat. Es wird sich dabei zeigen, dass die Midpoint-Regel einerseits auf einer speziellen Teilmenge der eingipfligen Präferenzen nicht manipulierbar ist, aber andererseits (wie auch schon zu Beginn dieses Kapitels mit Verweis auf Nehring u. Puppe (2007, 2010) erörtert) unter verallgemeinert eingipfligen Präferenzen sehr wohl für Manipulation anfällig ist.

Definition 3.7 (Metric Single-Peaked) Sei A eine Menge von Alternativen und \succeq eine Präferenzordnung über diese Menge. Ferner sei x das beste Element dieser Ordnung (d.h. $x \succ y$ für alle $y \in A$, $y \neq x$). \succeq heißt metric single-peaked (metrisch eingipflig), falls gilt

$$y \succeq z \Leftrightarrow d(x, y) \leq d(x, z).$$

Metrisch eingipflige Präferenzen sind also ein Spezialfall der verallgemeinert eingipfligen Präferenzen (siehe Definition 2.9): während letztere die (strikte) Präferenz zwischen zwei Alternativen y und z nur dann festlegen, wenn (bezüglich des Peaks x) eine (strikte) Zwischenbeziehung zwischen y und z gegeben ist, wird zusätzlich bei metrischen Präferenzen auch über Alternativen, die lediglich den gleichen Abstand zum Peak haben (ohne dass eine Zwischenbeziehung gegeben ist), die Festlegung getroffen, dass zwischen solchen Alternativen Indifferenz besteht - die Präferenzordnung wird also *vollständig* durch die Metrik $d(x, y)$ beschrieben.

Definiert man ferner eine Ordnung \succeq^* auf Teilmengen von X derart, dass gilt

$$M \succeq^* \tilde{M} \text{ genau dann, wenn } [\min M \succeq \min \tilde{M} \text{ and } \max M \succeq \max \tilde{M}],$$

so ergibt sich aus Theorem 3.4 unmittelbar das folgende

Korollar 3.1 *Seien die Präferenzen der Agenten \succeq^i metrisch eingipflig. Dann ist die Midpoint-Regel bezüglich der Präferenzen $(\succeq^i)^*$ nicht manipulierbar, d.h. ein Agent kann nicht durch Misrepräsentation ein $\widetilde{M}(p)$ erreichen mit $\widetilde{M}(p) (\succeq^i)^* M(p)$.*

So „positiv“ (im Bezug auf Nicht-Manipulierbarkeit) das obige Korollar auf den ersten Blick scheinen mag, so speziell ist es: einerseits sind metrisch eingipflige Präferenzen eine spezielle und restriktive Annahme, andererseits besteht zudem die offene Frage, was ein „vernünftiger“ Begriff von Präferenzen über Teilmengen von Alternativen ist. So gibt es neben der oben vorgeschlagenen Dominanzrelation ebenso die Möglichkeit, nur das beste/schlechteste Element der Menge, den Erwartungsnutzen bezüglich einer Wahrscheinlichkeitsverteilung über die Elemente der Menge oder ein Hurwicz-Kriterium (also eine Konvexkombination aus dem besten und dem schlechtesten Element der Menge, siehe auch Laux (2007)) zu betrachten.

Wie bereits ausgeführt, ist die Midpoint-Regel unter verallgemeinerten eingipfligen Präferenzen durchaus manipulierbar. Zur Illustration möglicher Manipulationen werden im Folgenden drei Beispiele vorgestellt:

Beispiel 3.1 *Angenommen (siehe Abbildung 3.5) zwei Agenten haben ihren Peak auf y , ein Agent auf z , ein weiterer Agent z' und Agent h seinen Peak auf x . Als Menge der Midpoints ergibt sich die Raute $[y, z']$. Schlägt Agent h nun anstatt x den*

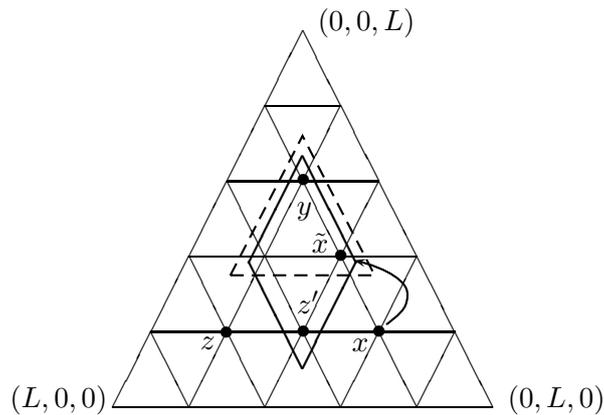


Abbildung 3.5.: Verkleinerung der Menge der Midpoints durch Manipulation

Punkt \tilde{x} vor, so kann er durch diese Misrepräsentation den Punkt z' aus der Menge der Midpoints „entfernen“, d.h. die Menge der Midpoints besteht nun aus $[y, z'] \setminus z'$. Ob diese Verkleinerung der Midpoints für den Agenten von Vorteil ist, hängt von seinen Präferenzen über Teilmengen von Alternativen ab. Es könnte beispielsweise unter verallgemeinert eingipfligen Präferenzen der Fall sein, dass Agent h es vorzieht, den Punkt z' aus der Menge der Midpoints auszuschließen. (Man beachte, dass die Punkte \tilde{x} und z' den gleichen Abstand zu x , dem Peak von Agent h , haben. Es kann also unter diesen Präferenzen der Fall sein, dass Agent h den Punkt \tilde{x} strikt gegenüber z' vorzieht.)

3. Abstimmungen auf dem Simplex

Beispiel 3.2 *Dieses Beispiel, eine Variation des vorangegangenen, wird in Abbildung 3.6 illustriert: wiederum haben zwei Agenten ihren Peak bei y , ein Agent auf z , ein weiterer Agent auf z' und Agent h auf x . Als Menge der Midpoints ergibt sich der dick umrundete „Diamant“ in der Abbildung. Schlägt Agent h nun anstatt x den Punkt \tilde{x} vor, so ändern sich die Midpoints zur gestrichelten Menge. Dies kann erneut (bei entsprechender Wahl der Präferenzen über Mengen von Alternativen) für Agent h profitabel sein. Man beachte, dass in diesem Beispiel (im Unterschied zum vorherigen Beispiel) die gestrichelte Menge keine Teilmenge der ursprünglichen Midpoints ist.*

Die in den obigen beiden Beispielen vorgestellten Möglichkeiten für eine Manipulation der Midpoint-Regel sind abhängig von entsprechenden Annahmen über Teilmengen von Alternativen, insbesondere über Elemente in diesen Mengen, die zwischen dem jeweils besten und schlechtesten Element liegen. Im folgenden Beispiel stellen wir eine schwerwiegendere Manipulation dieser Regel vor:

Beispiel 3.3 *Angenommen zwei Agenten haben ihren Peak auf y , ein Agent auf \tilde{x} und Agent h auf x (Vgl. Abbildung 3.7.). Dann ergibt sich ein eindeutiger Midpoint: Punkt y . Wenn Agent h nun \tilde{x} gegenüber y strikt vorzieht (Man beachte, dass \tilde{x} und y den gleichen Abstand zu x haben.), so kann der Agent durch den Vorschlag von \tilde{x} die Menge der Midpoints von $\{y\}$ zu $\{\tilde{x}, y\}$ ändern. Er kann also quasi ohne Risiko die Menge der Midpoints um ein Element, das für ihn strikt besser ist, erweitern.*

Die obigen Beispiele werfen die allgemeine Frage auf, wie stark im Vergleich zu anderen Regeln die Midpoint-Regel anfällig für Manipulationen ist. Da wir diese Frage in Kapitel 4 durch Simulation klären wollen, wird in einem nächsten Schritt eine Erweiterung der Midpoint-Regel zu einer punktwertigen Regel (d.h. Regel mit eindeutigem Midpoint) vorgestellt. So sind unsere Betrachtungen einerseits unabhängig von Annahmen über Präferenzen über Teilmengen von Alternativen und so wird andererseits ein sinnvoller Vergleich mit anderen punktwertigen Regeln ermöglicht.

Schließlich kann man unter metrisch eingipfligen Präferenzen noch eine Aussage zu den Wohlfahrtseigenschaften eines Midpoints treffen. Haben alle Agenten metrisch eingipflige Präferenzen (siehe Definition 3.7), so existiert kein Element im Simplex, das mindestens einen Agenten besser und keinen Agenten schlechter stellen würde. In anderen Worten: Unter solchen Präferenzen ist jeder Midpoint Pareto-effizient:

Satz 3.2 *Seien $x \in M(p)$ und die Präferenzen aller Agenten \succeq^i metrisch eingipflig. Dann ist x Pareto-effizient, d.h. es gibt kein $y \in X$ mit $y \succ^i x$ für ein $i \in N$ und $y \succeq^j x$ für alle $j \in N$.*

Beweis: Angenommen x ist nicht Pareto-effizient. Dann existiert ein $y \in X$ mit $y \succ^i x$ für ein $i \in N$ und $y \succeq^j x$ für alle $j \in N$. Sei w^i wie üblich der Peak von Agent i . Da die Präferenzen aller Agenten metrisch eingipflig sind, gilt $d(w^i, y) < d(w^i, x)$ und $d(w^j, y) \leq d(w^j, x)$ für alle $j \in N$. Daraus folgt aber, dass $\sum_{l \in N} d(w^l, y) < \sum_{l \in N} d(w^l, x)$ gilt - im Widerspruch zu Annahme, dass x ein Midpoint ist. \square

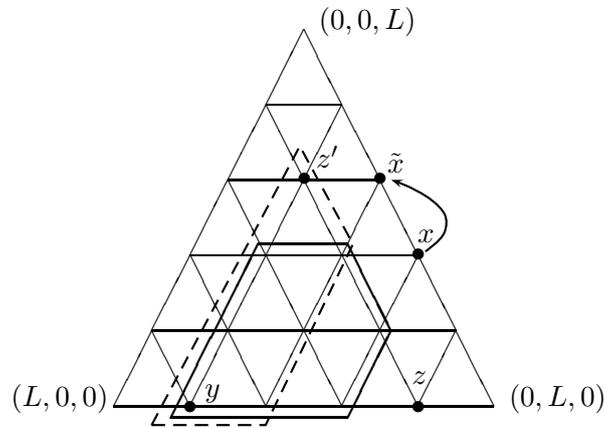


Abbildung 3.6.: Änderung der Menge der Midpoints durch Manipulation

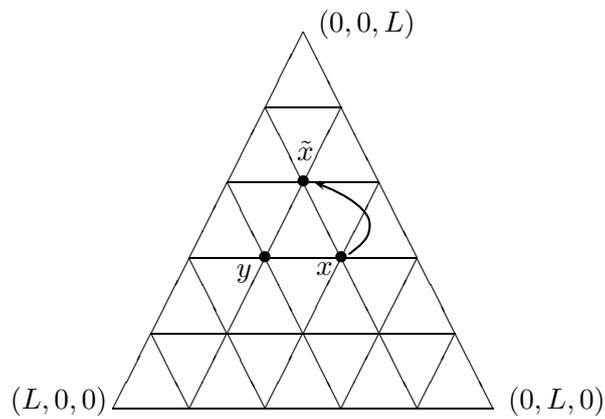


Abbildung 3.7.: Eine schwerwiegendere Manipulation der Midpoint-Regel

3.2.4. Die “shadow voter selection”

In diesem Abschnitt wird eine sogenannte “single valued selection” („einwertige Auswahlregel“) (siehe Definition 2.4) für die Midpoint-Regel vorgestellt. Zweck einer solchen Abbildung ist es, aus einer Menge von Alternativen genau ein Element auszuwählen. Die Verknüpfung der Midpoint-Regel mit einer single valued selection hat also zur Folge, dass aus der mengenwertigen Regel eine punktwertige Regel wird. Hierzu wollen wir das Resultat aus Satz 3.1, das im Wesentlichen besagt, dass die Menge der Midpoints „klein“ wird, wenn der Träger der Masse im Simplex verbunden ist, nutzen. Würde die Masse nun dicht im kontinuierlichen Simplex liegen, so besteht die berechtigte Hoffnung, dass man einen eindeutigen Midpoint erhält.

Aus zwei Gründen stellt eine punktwertige Erweiterung der Midpoint-Regel einen Vorteil für das Ziel, verschiedene Abstimmungsregeln hinsichtlich ihrer Manipulierbarkeit zu vergleichen, dar: Erstens gibt es, wie auch bereits erwähnt, kein klares oder eindeutig vorherrschendes Konzept, wie man Präferenzen über Mengen von Alternativen aus Präferenzen über Alternativen ableiten soll (siehe hierzu beispielsweise auch Barbera u. a. (2001); Rodríguez-Álvarez (2007)). Zweitens würde dies, selbst wenn man sich auf ein solches Konzept einigen würde, immer noch nicht das Problem lösen, dass man einerseits mengenwertige Regeln mit andererseits punktwertigen Regeln im Bezug auf ihre Manipulierbarkeit vergleicht: Während - gegeben eine Metrik - beispielsweise die Distanz zwischen zwei Alternativen eindeutig definiert ist, bestehen mehrere Möglichkeiten, die Distanz zwischen zwei Mengen von Alternativen zu definieren⁴. Weiterhin ist zu beachten, dass solche Messgrößen zur Manipulierbarkeit von mengenwertigen Regeln im Allgemeinen nicht mit den Messgrößen zur Manipulierbarkeit von punktwertigen Regeln übereinstimmen und daher nur bedingt miteinander vergleichbar sind.

Das Vorgehen in diesem Abschnitt ist wie folgt: Zuerst werden wir eine Definition der Auswahlregel geben und nachweisen, dass diese tatsächlich genau ein Element aus der Menge der Midpoints auswählt. Anschließend wird eine alternative Beschreibung der Regel vorgestellt, aus der die Verknüpfung der mengenwertigen Midpoint-Regel mit einer Abbildung, die aus den Midpoints genau ein Element auswählt, erkennbar wird. Diese Beschreibung ist insbesondere für die Simulation der Regel (siehe Kapitel 4) vorteilhaft. In einem letzten Schritt wird auf die mögliche Beeinflussung der punktwertigen Midpoint-Regel durch Misrepräsentation und deren Folgen für Fragen der Nichtmanipulierbarkeit eingegangen.

Sei $\epsilon > 0$. Für alle $w \in \tilde{X}$ ist $p_\epsilon(w) := p(w) + \epsilon$. Für alle $A \subseteq \tilde{X}$ gilt analog $p_\epsilon(A) := \int_{w \in A} p_\epsilon(w) dw$. Die Remoteness eines Punkts $w \in \tilde{X}$ ist gegeben durch $R_\epsilon(x) := \int_{w \in \tilde{X}} p_\epsilon(w) d(x, w) dw$. Anschaulich gesprochen wird die Midpoint-Regel in zwei Aspekten modifiziert: *Erstens* wird die Masse im Simplex, die bisher allein aus den Peaks der Agenten bestand, um sogenannte “shadow voter” (Schattenwähler) ergänzt. Auf dem kontinuierlichen Simplex liegt nun zusätzlich gleichverteilt eine Masse von $c = \int_{w \in \tilde{X}} \epsilon dw$. Folglich lassen sich nun *zweitens* nicht nur für Elemente

⁴zum Beispiel über den maximalen Abstand zwischen zwei Elementen dieser Mengen, den minimalen Abstand oder die Hausdorff-Distanz

im diskreten, sondern für alle Punkte im kontinuierlichen Simplex die Begriffe *Masse eines Punktes* (also $p_\epsilon(w)$) und *Remoteness* (also $R_\epsilon(x)$) definieren. Mit diesen Erweiterungen kann analog der „Shadow-Midpoint“ definiert werden:

Definition 3.8 (Shadow-Midpoint) *Der Punkt $m(p_\epsilon) \in \tilde{X}$ heißt Shadow Midpoint, falls gilt*

$$m(p_\epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \operatorname{argmin}_{x \in \tilde{X}} \int_{w \in \tilde{X}} p_\epsilon(w) d(x, w) dw = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \operatorname{argmin}_{x \in \tilde{X}} R_\epsilon(x).$$

Der Shadow-Midpoint ist also das Ergebnis der Midpoint-Regel, wenn man die Verteilung der Peaks um shadow voter ergänzt und diese zusätzliche gleichverteilte Masse gegen null im Grenzwert gehen lässt. Man beachte, dass der Shadow-Midpoint ein Element des kontinuierlichen Simplex und somit im Gegensatz zur Menge der Midpoints nicht auf den diskreten Simplex restringiert ist. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden wir immer, wenn von *dem Midpoint* die Rede ist, den Shadow-Midpoint, und, wenn von *der Menge der Midpoints* gesprochen wird, das Ergebnis der (mengenwertigen) Midpoint-Regel meinen.

Zunächst möchten wir zeigen, dass die oben vorgestellte und so modifizierte Midpoint-Regel tatsächlich eine Social Choice Function ist - also genau ein Element auswählt - und anschließend eine Beschreibung des ausgewählten Midpoints geben. Hierzu sind zwei Hilfssätze notwendig. Es bezeichne

$$\tilde{p}(A) := \int_{w \in A} \epsilon dw = p_\epsilon(A) - p(A)$$

für alle $A \subseteq \tilde{X}$ die Masse der shadow voter in A . Ferner sei (für alle $\delta > 0$) $x(i, j, \delta) \in \tilde{X}$ der von x in ij -Richtung um δ entfernte Punkt, also $x_i = x_i(i, j, \delta) + \delta$, $x_j = x_j(i, j, \delta) - \delta$ und $x_l(i, j, \delta) = x_l$ für alle $l \neq i, j$. Damit gilt $d(x, x(i, j, \delta)) = \delta$.

Lemma 3.3 *Sei $A \subset \tilde{X}$ mit $x_i \neq y_i$, $x_j \neq y_j$ und $x_l = y_l$ für alle $l \neq i, j$ für alle $x, y \in A$ mit $x \neq y$. Ferner sei \hat{x} das Element in A mit $\hat{x}_i = \hat{x}_j$ sowie $\delta(n)$ eine Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(n) = 0$. Für alle $x \in A$ existiert ein n_0 , so dass für alle $n > n_0$ gilt*

$$\tilde{p}(\langle x, x(i, j, \delta(n)) \rangle) > \tilde{p}(\langle x(i, j, \delta(n)), x \rangle) \Leftrightarrow d(x, \hat{x}) < d(x(i, j, \delta(n)), \hat{x}).$$

Beweis: Der Beweis des Lemmas folgt aus der Tatsache, dass für hinreichend kleines δ die Mengen $\langle x, x(i, j, \delta(n)) \rangle$ bzw. $\langle x(i, j, \delta(n)), x \rangle$ über Gleichung (3.2) beschrieben werden können. Da die Masse der shadow voter auf \tilde{X} gleichverteilt ist, ist für die Größe von \tilde{p} einzig und allein die entscheidend, ob $\langle x, x(i, j, \delta(n)) \rangle$ oder $\langle x(i, j, \delta(n)), x \rangle$ eine größere Fläche hat. Man beachte, dass alle Elemente in A auf einer ij -Linie liegen, d.h. sich nur in den Koordinaten i und j unterscheiden. Offensichtlich wird auf einer solchen Teilmenge von \tilde{X} die Fläche von $\langle x, x(i, j, \delta(n)) \rangle$ für hinreichend kleines δ umso größer, desto näher x an \hat{x} liegt. \square

3. Abstimmungen auf dem Simplex

Wir sagen, dass ein Punkt x auf einer ij -Linie bzgl. \tilde{p} dominiert wird, falls es ein $\delta > 0$ gibt, so dass entweder $\tilde{p}(\langle x(i, j, \delta), x \rangle) > \tilde{p}(\langle x, x(i, j, \delta) \rangle)$ oder $\tilde{p}(\langle x(j, i, \delta), x \rangle) > \tilde{p}(\langle x, x(j, i, \delta) \rangle)$ gilt. In anderen Worten: ein Punkt x wird auf einer ij -Linie bzgl. \tilde{p} dominiert, wenn es entweder in ij -Richtung oder in ji -Richtung einen um δ entfernten Nachbarn gibt, der bzgl. des obigen Kriteriums x dominiert. Lemma 3.3 hat nun zwei wichtige Implikationen:

1. Auf einer ij -Linie ist der Punkt \hat{x} mit $\hat{x}_i = \hat{x}_j$ das einzige Element, das nicht auf dieser Linie bzgl. \tilde{p} dominiert wird.
2. Betrachtet man eine zusammenhängende Teilmenge $B \subset A$ einer ij -Linie und zwar derart, dass B entweder „links“ von \hat{x} (d.h. $x_i > \frac{L - \sum_{l \neq i, j} x_l}{2}$) oder „rechts“ von \hat{x} (d.h. $x_i < \frac{L - \sum_{l \neq i, j} x_l}{2}$) liegt, so ist der Punkt aus B mit $\min_{x \in B} d(x, \hat{x})$ das einzige Element, das nicht durch ein anderes Element in B bzgl. \tilde{p} dominiert wird.

Lemma 3.4 *Man betrachte einen (K, L) -Simplex \tilde{X} und eine Partition K_1, K_2 , d.h. K_1, K_2 mit $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, $K_1 \cup K_2 = K$. Sei $A \subset \tilde{X}$ mit $x_i \neq y_i$ für alle $i \in K_1$ und $x_l = y_l$ für alle $l \in K_2$ für alle $x, y \in A$ mit $x \neq y$. Dann ist der Punkt \hat{x} mit $\hat{x}_i = \hat{x}_j$ für alle $i, j \in K_1$ das einzige Element in A , das auf allen Linien bzgl. \tilde{p} nicht dominiert wird.*

Beweis: Angenommen es gibt ein Element $y \neq \hat{x}$ in A , das auf keiner Linie dominiert wird. Da $y \neq \hat{x}$ gilt, gibt es $i, j \in K_1$ mit $y_i \neq y_j$. Dann existiert ein Punkt $z \in A$ mit $z_l = y_l$ für alle $l \neq i, j$ und $z_i = z_j$. Nach Lemma 3.3 dominiert aber dieser Punkt den Punkt y auf der ij -Linie. \square

Wenn man eine Teilmenge A eines Simplex betrachtet, in der alle Elemente in gewissen Dimensionen überstimmen (K_2), in den übrigen Dimensionen (K_1) sich jedoch jeweils zwei Elemente dieser Menge unterscheiden, dann besagt Lemma 3.4 anschaulich gesprochen, dass der einzige nicht bzgl. \tilde{p} dominierte Punkt dasjenige Element in A ist, dessen Budget über alle Elemente aus K_1 gleichverteilt ist. (Man kann hier auch vom „Mittelpunkt“ von A sprechen.) Setzt man nun $K_1 = K$ und $K_2 = \emptyset$ (d.h. betrachtet man den ganzen Simplex), so folgt daraus, dass der Mittelpunkt ($x_i = \frac{L}{K}$ für alle $i \in K$) der einzige nicht bzgl. \tilde{p} dominierte Punkt auf dem Simplex \tilde{X} ist.

Um nun zu zeigen, dass der Shadow-Midpoint tatsächlich eine single valued selection ist, werden wir zunächst - entgegen der Notation aus Definition 3.8 - den Shadow-Midpoint als „Menge der Shadow-Midpoints“ mit $M(p_\epsilon)$ bezeichnen (- und in einem nächsten Schritt zeigen, dass diese Menge einelementig ist). Da $m(p_\epsilon) \in \tilde{X}$ gilt, werden wir im Folgenden mit $h(M(p))$ die konvexe Hülle⁵ von $M(p) \subseteq X$ in \tilde{X} bezeichnen.

⁵Dabei ist Konvexität wiederum im Sinne der Betweenness-Relation $T_{\mathcal{H}}$ aufzufassen.

Theorem 3.5 Sei $h(M(p))$ die Menge der Midpoints und $M(p_\epsilon)$ die Menge der Shadow-Midpoints. Es gilt:

1. $M(p_\epsilon) \subseteq h(M(p))$, d.h. der Shadow-Midpoint ist eine Teilmenge der Menge der Midpoints.
2. $|M(p_\epsilon)| = 1$, d.h. der Shadow-Midpoint ist eindeutig bestimmt.

Beweis: Wie man leicht erkennen kann, ist die Funktion $R_\epsilon(x)$ stetig und der kontinuierliche Simplex \tilde{X} eine kompakte Teilmenge des \mathbb{R}^K . (Eine stetige Funktion nimmt auf einer kompakten Menge ihr Minimum und Maximum an.) Es gilt

$$\begin{aligned} R_\epsilon(x) &:= \int_{w \in \tilde{X}} p_\epsilon(w) d(x, w) dw \\ &= \int_{w \in \tilde{X}} p(w) d(x, w) dw + \int_{w \in \tilde{X}} \epsilon d(x, w) dw \\ &=: R(x) + \tilde{R}(x). \end{aligned}$$

Man beachte, dass für alle $x, y \in h(M(p))$ die Remoteness gleich sein muss, also $R(x) = R(y) = c$ gilt. Sei $\epsilon = \epsilon(n)$ eine Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon(n) = 0$. Für jedes Element $w \notin h(M(p))$ mit $R(w)$ existiert ein n_0 , so dass für alle $n > n_0$ gilt:

$$\begin{aligned} (R(w) - c > \max_{x \in h(M(p))} \tilde{R}(x) - \tilde{R}(w)) &\Rightarrow \\ (R_\epsilon(w) > \max_{x \in h(M(p))} R_\epsilon(x)) & \end{aligned}$$

d.h. ist ϵ hinreichend klein, so hat jeder Midpoint x eine geringere modifizierte Remoteness $R_\epsilon(x)$ als jeder Nicht-Midpoint. Damit muss die Lösung des Minimierungsproblems aus Definition 3.8 in $h(M(p))$ liegen.

Es bleibt die Eindeutigkeit des Shadow-Midpoints zu zeigen. Man beachte, dass sich alle Elemente in $M(p)$ nur hinsichtlich $\tilde{R}(x)$ unterscheiden und analog zu Lemma 3.1 mittels \tilde{p} verglichen werden können. Insbesondere kann $\tilde{p}(\cdot)(x, x(i, j, \delta)) - \tilde{p}(\cdot)(x(i, j, \delta), x)$ für hinreichend kleines δ als Richtungsableitung von $\tilde{R}(x)$ in ij -Richtung aufgefasst werden. Angenommen $|M(p_\epsilon)| > 1$ würde gelten. Dann gibt es (Vgl. Theorem 3.2.) eine konvexe Menge von Shadow-Midpoints. Wegen Theorem 3.2 gibt es außerdem in $M(p_\epsilon)$ zwei Elemente x und y , die „auf einer Linie“ liegen. Es gelte daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x_i = y_i + \delta$, $x_j = y_j - \delta$ und $x_l = y_l$ für alle $l \neq i, j$. Ferner sei \hat{x} der Mittelpunkt dieser Linie (also $\hat{x}_i = \hat{x}_j$ und $\hat{x}_l = x_l$ für alle $l \neq i, j$). Es sind zwei Fälle möglich: Entweder einer der beiden Punkte hat einen geringeren Abstand zu \hat{x} bzw. stimmt mit diesem überein (also $d(x, \hat{x}) \neq d(y, \hat{x})$). Dann dominiert nach Lemma 3.3 dieser Punkt den anderen Punkt bzgl. \tilde{p} auf der ij -Linie. Oder es gilt $d(x, \hat{x}) = d(y, \hat{x})$. Dann gilt aber wegen Theorem 3.2 $\hat{x} \in M(p_\epsilon)$, d.h. x und y sind durch \hat{x} bzgl. \tilde{p} auf der ij -Linie dominiert (Vgl. Lemma 3.3.). \square

Wir wissen also, dass der Shadow-Midpoint tatsächlich genau ein Element aus der Menge der Midpoints auswählt. In einem nächsten Schritt wollen wir versuchen näher zu beschreiben, um welches Element es sich dabei handelt.

3. Abstimmungen auf dem Simplex

Proposition 3.4 Sei \hat{x} der Mittelpunkt des (K, L) -Simplex \tilde{X} , also $\hat{x}_i = \frac{L}{K}$ für alle $i \in K$. Der Shadow-Midpoint $m(p_\epsilon)$ stimmt mit dem eindeutigen Element aus $h(M(p))$ überein, das auf keiner Linie bzgl. \tilde{p} dominiert wird. Insbesondere gilt

$$m(p_\epsilon) = \operatorname{argmin}_{w \in h(M(p))} d(w, \hat{x}),$$

d.h. der Shadow-Midpoint hat insbesondere den geringsten Abstand zum Mittelpunkt unter allen Midpoints.

Beweis: In der Menge der Midpoints unterscheiden sich die Elemente nur hinsichtlich $\tilde{R}(x)$. Angenommen, der Shadow-Midpoint $m(p_\epsilon)$ hätte nicht den geringsten Abstand zum Mittelpunkt \hat{x} . Dann gibt es ohne Beschränkung der Allgemeinheit $i, j \in K$ und ein Element in $h(M(p))$, das auf einer ij -Linie zu $m(p_\epsilon)$ liegt und geringeren Abstand zu \hat{x} hat als $m(p_\epsilon)$. (Man betrachte also eine Linie „in Richtung“ \hat{x} von $m(p_\epsilon)$ aus.) Dann wird aber $m(p_\epsilon)$ auf der ij -Linie bzgl. \tilde{p} dominiert und kann nach den Lemmata 3.3 und 3.1 nicht der Shadow-Midpoint sein.

Es bleibt zu zeigen, dass der Shadow-Midpoint durch kein Element in $h(M(p))$ auf einer Linie bzgl. \tilde{p} dominiert werden kann. Aus Theorem 3.5 wissen wir, dass der Shadow-Midpoint das eindeutige Element in $h(M(p))$ mit minimalen Wert hinsichtlich $\tilde{R}(x)$ ist. Wie erwähnt kann $\tilde{p}(\cdot)x, x(i, j, \delta)) - \tilde{p}(\cdot)x(i, j, \delta), x)$ für hinreichend kleines δ als Richtungsableitung von $\tilde{R}(x)$ in ij -Richtung aufgefasst werden. Analog zu Lemma 3.1 kann demnach ein Element in $h(M(p))$, das durch ein anderes Element aus dieser Menge dominiert wird, nicht minimal hinsichtlich $\tilde{R}(x)$ sein. Da der Shadow-Midpoint sowohl ein Element von $h(M(p))$ als auch eindeutig bestimmt ist (Vgl. Theorem 3.5.) und jede Menge (Vgl. Lemma 3.4.) genau ein nicht dominiertes Element besitzt, stimmen diese überein. \square

Die obige Proposition besagt also, dass der Shadow-Midpoint gleich in zwei Aspekten zur Gleichverteilung hin tendiert: Erstens wird ein Midpoint ausgewählt, der minimalen Abstand zum Mittelpunkt des Simplex hat (Insbesondere wird der Mittelpunkt gewählt, wenn dieser in $h(M(p))$ enthalten ist.). Zweitens wird, wenn es mehrere Elemente in $h(M(p))$ mit minimalen Abstand zum Mittelpunkt des Simplexes geben sollte, dasjenige Element gewählt, das (entsprechend einer Partition K_1, K_2 aus Lemma 3.4) entweder in den Variablen aus K_1 gleichverteilt oder - falls dieser Punkt nicht in $h(M(p))$ enthalten ist - auf allen ij -Linien den geringsten Abstand zu diesem Punkt hat (Vgl. Lemma 3.3.). Diese Aussage lässt sich noch präziser fassen und erweist sich insbesondere in der Simulationsstudie bei der Berechnung des Shadow-Midpoints als sehr nützlich:

Proposition 3.5 Sei \hat{x} der Mittelpunkt des Simplex \tilde{X} , also $\hat{x} = \frac{L}{K}$ für alle $i \in K$ und $\|w, \hat{x}\|_2$ der euklidische Abstand eines Punktes w zu \hat{x} . Es gilt

$$m(p_\epsilon) = \operatorname{argmin}_{w \in h(M(p))} \|w, \hat{x}\|_2,$$

d.h. der Shadow-Midpoint entspricht dem eindeutigen Element aus $h(M(p))$ mit minimalen euklidischen Abstand zum Mittelpunkt des Simplex.

Beweis: Wir wissen aus Proposition 3.4, dass der Shadow-Midpoint minimalen Abstand bzgl. $d(\cdot, \hat{x})$ zum Mittelpunkt \hat{x} haben muss. Besteht die Menge der Midpoints mit dieser Eigenschaft aus nur einem Element, so ist die Proposition bewiesen.

Wir betrachten im Folgenden den Fall, in dem es mehrere Midpoints mit minimalen Abstand $d(\cdot, \hat{x})$ gibt, und bezeichnen diese Menge mit $S \subseteq h(M(p))$. Sei K_1, K_2 (Vgl. Lemma 3.4.) nun eine Partition derart, dass für alle $x, y \in S$, $x \neq y$, gilt: $x_i \neq y_i$ für alle $i \in K_1$ und $x_l = y_l$ für alle $l \in K_2$, d.h. alle Elemente in S unterscheiden sich nur bzgl. Variablen aus K_1 . Demzufolge ist der euklidische Abstand eines Elements w aus S zu \hat{x} genau dann minimal, wenn $\sum_{i \in K_1} (w_i - \frac{L}{K})^2$ minimal ist.

Wenn der Punkt \hat{w} mit $\hat{w}_i = \hat{w}_j$ für alle $i, j \in K_1$ in S enthalten ist, so ist obige Bedingung durch dieses Element erfüllt (Vgl. auch Lemma 3.4.). Ist dieser Punkt nicht in S enthalten, so betrachte alle Paare $i, j \in K_1$, $i \neq j$, und die dazugehörigen ij -Linien. Sei hierzu jeweils $c = \frac{L - \sum_{l \neq i, j} w_l}{2}$. Der Ausdruck $(w_i - \frac{L}{K})^2 + (w_j - \frac{L}{K})^2$ wird umso kleiner, je kleiner $|w_i - c| + |w_j - c|$ wird. Dies ist genau die Dominanzaussage aus Lemma 3.3. Der Ausdruck $\sum_{i \in K_1} (w_i - \frac{L}{K})^2$ wird also genau dann minimal, wenn entsprechend der Dominanz auf Linien bzgl. \tilde{p} der undominierte Punkt in $h(M(p))$ bestimmt wird. \square

Nachdem wir zeigen konnten, dass der Shadow-Midpoint die Midpoint-Regel tatsächlich derart erweitert, dass exakt ein Element aus der Menge der Midpoints ausgewählt wird, ist nun die Frage zu klären, welche Auswirkungen diese Erweiterung der Regel auf die Beeinflussbarkeit des Ergebnisses und damit auch auf ihre Manipulierbarkeit hat.

Definition 3.9 (Straightforwardness) *Es sei F eine Abstimmungsregel auf dem Simplex (Vgl. Definition 3.2.). F erfüllt Straightforwardness (Überschaubarkeit), falls für alle Agenten $i \in N$ gilt:*

$$F(w^1, \dots, \tilde{w}^i, \dots, w^n) \notin [w^i, F(w^1, \dots, w^i, \dots, w^n)]$$

für alle $\tilde{w}^i \neq w^i$ mit $F(w^1, \dots, \tilde{w}^i, \dots, w^n) \neq F(w^1, \dots, w^i, \dots, w^n)$.

In anderen Worten: Straightforwardness bedeutet, dass kein Agent durch Misrepräsentation in der Lage ist, das Ergebnis einer Abstimmungsregel *zwischen* seinen eigenen Peak und das Ergebnis bei Angabe des (wahren) Peaks zu rücken. Unter verallgemeinert eingipfligen Präferenzen kann somit nur ein Anreiz zur Manipulation zwischen Alternativen bestehen, die entweder *näher* am Peak des Agenten, aber *nicht zwischen* Peak und unmanipuliertem Ergebnis liegen oder *gleichen Abstand* zum Peak des Agenten haben. Die Menge der möglichen Manipulationen ist also in gewisser Art und Weise „überschaubar“. Wir werden, wenn immer eine neue Abstimmungsregel in dieser Arbeit vorgestellt wird, versuchen zu klären, ob diese Regel Straightforwardness erfüllt oder verletzt. Man beachte, dass eine Verletzung dieser Bedingung durch eine Abstimmungsregel die Manipulierbarkeit unter metrisch eingipfligen Präferenzen (siehe Definition 3.7) impliziert. Für den Shadow-Midpoint gilt:

3. Abstimmungen auf dem Simplex

Satz 3.3 *Die Shadow-Midpoint-Regel erfüllt Straightforwardness.*

Beweis: Sei $m(p_\epsilon) = z$ der Midpoint und es gelte $d(z, w^h) = r$. Falls $r = 0$, ist nichts zu zeigen; daher sei im Folgenden $r > 0$. Für alle i, j sei $z(i, j, \delta)$, $\delta > 0$, nun ein Punkt auf der ij -Linie, der zwischen w^h und z liegt. Da z der Shadow-Midpoint ist, muss unter der Verteilung p (d.h. falls der Peak w^h vorgeschlagen wird) für alle $z(i, j, \delta)$ und hinreichend kleines ϵ gelten: $R_\epsilon(z(i, j, \delta)) > R_\epsilon(z)$, d.h. $z(i, j, \delta)$ hat eine strikt größere Remoteness.

Für alle $z(i, j, \delta)$ gilt $w^h \in \succ z(i, j, \delta), z$, d.h. im paarweisen Vergleich wird jedes $z(i, j, \delta)$ bereits unter der Verteilung p unterstützt. Folglich muss auch unter \tilde{p} , d.h. wenn \tilde{w}^h statt w^h vorgeschlagen wird, $R_\epsilon(z(i, j, \delta)) > R_\epsilon(z)$ gelten. Man beachte, dass diese Aussage analog zu Lemma 3.2 für alle $z(i, j, \delta)$ gelten muss, die zwischen z und w^h liegen. In anderen Worten: für alle $z(i, j, \delta)$ kann kein Punkt aus $\succ z(i, j, \delta), z$ Midpoint unter der Verteilung \tilde{p} sein. Weiterhin gilt:

$$\{y \in \tilde{X} : d(w^h, y) < r\} \subseteq \bigcup_{z(i,j,\delta):d(w^h,z(i,j,\delta))<r} \succ z(i, j, \delta), z.$$

Damit ist nicht nur bewiesen, dass die Shadow-Midpoint-Regel Straightforwardness erfüllt, also durch Misrepräsentation kein Midpoint erzeugt werden kann, der zwischen z und w^h liegt, sondern auch, dass kein Midpoint erzeugt werden kann, der näher an w^h liegt als der Midpoint unter der Verteilung p . \square

Wie bei der (mengenwertigen) Midpoint-Regel hat dieser Satz ebenfalls unmittelbar Einfluss auf die Manipulierbarkeit der Shadow-Midpoint-Regel.

Korollar 3.2 *Seien die Präferenzen der Agenten \succeq^i metrisch eingipflig. Dann ist die Shadow-Midpoint-Regel nicht manipulierbar.*

Das Korollar folgt unmittelbar aus dem Beweis zu Satz 3.3, in dem auch gezeigt wurde, dass kein Shadow-Midpoint, der näher am Peak des Agenten liegt, durch Manipulation erreicht werden kann, und der Tatsache, dass unter metrisch eingipfligen Präferenzen alle Agenten zwischen Alternativen, die gleichen Abstand zum Peak haben, indifferent sind.

Auch im Bezug auf Pareto-Effizienz gelten für die Shadow-Midpoint-Regel die gleichen Eigenschaften wie bei der mengenwertigen Midpoint-Regel.

Korollar 3.3 *Seien die Präferenzen der Agenten \succeq^i metrisch eingipflig. Dann ist der Shadow-Midpoint $m(p)$ Pareto-effizient, d.h. es gibt kein $y \in X$ mit $y \succ^i m(p)$ für ein $i \in N$ und $y \succeq^j m(p)$ für alle $j \in N$.*

Das Korollar folgt unmittelbar aus dem Beweis zu Satz 3.2 und der Tatsache, dass der Shadow-Midpoint ein Element der konvexen Hülle der Menge der Midpoints ist.

Zusammenfassend kann man sagen, dass wir mit der (Shadow-)Midpoint-Regel eine Abstimmungsregel auf dem Simplex vorgestellt haben, die zwar unter verallgemeinert eingipfligen Präferenzen nach wie vor manipulierbar, aber auf einer Teilmenge dieser Präferenzen - den metrisch eingipfligen - nicht manipulierbar ist. Zudem

sind die Möglichkeiten, den Midpoint durch Misrepräsentation zu beeinflussen im Sinne von Satz 3.3 beschränkt. Wir wollen im weiteren Verlauf dieser Arbeit klären, inwiefern diese Eigenschaft sich (unter verallgemeinert eingipfligen Präferenzen) auf die Manipulierbarkeit der Midpoint-Regel auswirkt. Dazu werden wir, bevor wir in Kapitel 4 diese Frage durch Simulation versuchen zu beantworten, verschiedene andere Abstimmungsregeln, die teilweise Straightforwardness erfüllen oder verletzen, vorstellen.

3.3. Die Mittelwert-Regel

Eine weitere, sehr einfache Abstimmungsregel auf dem Simplex ist die „Mittelwert-Regel“. Diese Abstimmungsregel bildet - wie der Name schon sagt - auf das arithmetische Mittel der Peaks ab:

Definition 3.10 (Mittelwert-Regel) Die Mittelwert-Regel (*mean rule*) ist gegeben durch $F^{Mean} : X^n \rightarrow \tilde{X}$, $(w^1, w^2, \dots, w^n) \mapsto F^{Mean}(w^1, w^2, \dots, w^n)$ mit

$$F^{Mean}(w^1, w^2, \dots, w^n) := \bar{w} = (\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_K),$$

die jedem Profil von Peaks (w^1, w^2, \dots, w^n) den Punkt $\bar{w} \in \tilde{X}$ zuordnet. Dabei ist $\bar{w}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w_j^i$ das arithmetische Mittel der Peaks in Koordinate j .

Wie sich unschwer erkennen lässt, liegt das arithmetische Mittel der Peaks tatsächlich auf dem (kontinuierlichen) Simplex: jeder Punkt w^j hat ein Budget von L , d.h. $\sum_{i=1}^K w_i^j = L$. Demzufolge hat die Summe von n Punkten ein Budget von $n \cdot L$. Teilt man nun diese Summe wiederum durch n (die Anzahl der Agenten), so hat der resultierende Punkt \bar{w} ein Budget von L .

Im Gegensatz zur Midpoint-Regel verletzt der Mittelwert Straightforwardness (Vgl. Definition 3.9.). Dies lässt sich bereits im „2-Simplex“, d.h. auf einer Linie, erkennen.

Beispiel 3.4 Man betrachte einen $(2, 10)$ -Simplex, d.h. $K = 2$ und $L = 10$, mit zwei Agenten. Ferner seien $w^1 = (7, 3)$ und $w^2 = (3, 7)$ die Peaks. Es gilt

$$F^{Mean}(w^1, w^2) = \bar{w} = (5, 5).$$

Schlägt Agent 1 nun statt w^1 den Punkt $\tilde{w}^1 = (10, 0)$ vor, dann ergibt sich

$$F^{Mean}(\tilde{w}^1, w^2) = \bar{\tilde{w}} = (6.5, 3.5).$$

Der Punkt $(6.5, 3.5)$ liegt zwischen \bar{w} und w^1 ; Agent 1 kann also durch Misrepräsentation ein arithmetisches Mittel bewirken, der strikt zwischen seinem Peak und dem Ergebnis der Abstimmungsregel unter Angabe des wahren Peaks liegt. Damit verletzt die Mittelwert-Regel Straightforwardness.

3. Abstimmungen auf dem Simplex

Da eine Verletzung von Straightforwardness die Manipulierbarkeit unter metrisch eingipfligen Präferenzen (Vgl. Definition 3.7.) impliziert, ist die Mittelwert-Regel unter diesen Präferenzen demnach auch manipulierbar.

Die Mittelwert-Regel verfügt über eine bemerkenswerte Wohlfahrtseigenschaft: Man betrachte die utilitaristische Lösung, d.h. die Summe der Nutzen der Agenten (eine entsprechende interpersonelle kardinale Vergleichbarkeit vorausgesetzt, siehe beispielsweise Roemer (1996)). Weiterhin haben alle Agenten Cobb-Douglas-Präferenzen, die jeweils durch eine Nutzenfunktion gleichen „Typs“ repräsentiert werden (beispielsweise gelte $u^j(x) = \prod_{i=1}^K x_i^{\alpha_i^j}$ für alle $j = 1, 2, \dots, n$). Wie gezeigt werden kann, maximiert dann die Mittelwert-Regel ebendiese Summe der Nutzen, d.h.

$$\operatorname{argmax}_{x \in \tilde{X}} \sum_{j=1}^n u^j(x) = F^{\text{Mean}}(w^1, w^2, \dots, w^n).$$

Während also die Midpoint-Regel die Summe der Abstände zu den Peaks *minimiert*, so *maximiert* die Mittelwert-Regel (unter Cobb-Douglas-Präferenzen) die Summe der Nutzen.

3.4. Median-basierte Regeln

Wie bereits ausgeführt ist die Median-Regel, also den Median der Peaks zu wählen, im eindimensionalen Fall, d.h. wenn eine Anordnung aller Alternativen auf einer Linie möglich ist, unter eingipfligen Präferenzen eine nicht manipulierbare Abstimmungsregel. Es erscheint daher durchaus naheliegend, die Mediane in den einzelnen Koordinaten/Dimensionen des Simplex als Grundlage für Abstimmungsregeln auf dem Simplex heranzuziehen. Solche Abstimmungsregeln bezeichnen wir als median-basiert:

Definition 3.11 (Median-basierte Abstimmungsregel) Seien F eine Abstimmungsregel auf dem Simplex (Vgl. Definition 3.2.), (w^1, w^2, \dots, w^n) ein Profil von Peaks und w_i^{med} der Median dieser Peaks in Koordinate i . F heißt median-basiert, wenn eine Abbildung

$$G : K \rightarrow \tilde{X}, (w_1^{\text{med}}, w_2^{\text{med}}, \dots, w_K^{\text{med}}) \mapsto G(w_1^{\text{med}}, w_2^{\text{med}}, \dots, w_K^{\text{med}}) = a$$

existiert mit

$$F(w^1, w^2, \dots, w^n) = G(w_1^{\text{med}}, w_2^{\text{med}}, \dots, w_K^{\text{med}})$$

für alle (w^1, w^2, \dots, w^n) .

Eine median-basierte Abstimmungsregel auf dem Simplex verwendet also als Information nicht die Peaks der Agenten sondern lediglich den koordinatenweisen Median des Profils. Das bedeutet auch, dass eine solche Regel bei Profilen, deren koordinatenweiser Median überstimmt, auf dasselbe Element im Simplex abbildet. Dabei ist zu beachten, dass der koordinatenweise Median in der Regel nicht auf dem Simplex

liegt - es ist also eine Anpassung von $(w_1^{med}, w_2^{med}, \dots, w_K^{med})$ mittels einer Abbildung G an den Simplex erforderlich. Hierzu gibt es verschiedene Möglichkeiten, die im Folgenden vorgestellt werden.

3.4.1. Die normalisierte Median-Regel

Eine sehr naheliegende Möglichkeit, den koordinatenweisen Median an den Simplex anzupassen, ist seine Normalisierung. In anderen Worten: Man wähle das Element im Simplex, bei dem die Werte in den einzelnen Koordinaten im gleichen Verhältnis zueinander stehen wie im koordinatenweisen Median.

Definition 3.12 (Normalisierte Median-Regel) Die normalisierte Median-Regel (*normalized median rule*) ist gegeben durch

$$F^{NM\text{Median}} : X^n \rightarrow \tilde{X}, (w^1, w^2, \dots, w^n) \mapsto F^{NM\text{Median}}(w^1, w^2, \dots, w^n)$$

mit

$$F^{NM\text{Median}}(w^1, w^2, \dots, w^n) := \left(\frac{w_1^{med}}{c} L, \frac{w_2^{med}}{c} L, \dots, \frac{w_K^{med}}{c} L \right) = w^{NM\text{Median}}.$$

Dabei ist $c = \sum_{j=1}^K w_j^{med}$ die Summe der Mediane in den einzelnen Dimensionen.

Graphisch hat der normalisierte Median eine anschauliche Darstellung. Man betrachte einen (K, L) -Simplex mit $K = 3$ in einem dreidimensionalen Koordinatensystem. Im Kontext von Allokationen öffentlicher Güter ist der Simplex also der Teil der Oberfläche der Budgetmenge, in dem das Budget vollständig verbraucht wird. Zieht man nun eine Gerade vom Ursprung des Koordinatensystems durch den *koordinatenweisen* Median, dann ist der *normalisierte* Median der Schnitt dieser Gerade mit dem Simplex.

Ebenso wie die Mittelwert-Regel verletzt auch der normalisierte Median Straightforwardness (siehe Definition 3.9), wie das folgende Beispiel zeigt:

Beispiel 3.5 Wir betrachten einen $(3, 45)$ -Simplex mit 3 Agenten und folgenden Peaks: $w^1 = (45, 0, 0)$, $w^2 = (0, 45, 0)$ und $w^3 = (1, 1, 43)$. Demzufolge gilt:

$$F^{NM\text{Median}}(w^1, w^2, w^3) = (22.5, 22.5, 0) = x.$$

Schlägt Agent 3 nun statt w^3 den Punkt $\tilde{w}^3 = (0, 0, 45)$ vor, dann ergibt sich:

$$F^{NM\text{Median}}(w^1, w^2, \tilde{w}^3) = (15, 15, 15) = \tilde{x}.$$

Der Punkt \tilde{x} liegt strikt zwischen x - dem Ergebnis bei Angabe des wahren Peaks - und dem Peak des Agenten 3. Demnach verletzt die normalisierte Median-Regel Straightforwardness und ist daher auch unter metrisch eingipfligen Präferenzen manipulierbar.

3. Abstimmungen auf dem Simplex

3.4.2. Die sequentielle Median-Regel

Eine weitere Möglichkeit, den koordinatenweisen Median an den Simplex anzupassen, ist es, in einer *festen*, gegebenen Reihenfolge, also sequentiell, vorzugehen. Ist die Summe der Mediane größer oder gleich als L , so wird einer Koordinate solange der jeweilige Median als Ergebnis der Regel zugewiesen, bis die Größe des Simplex (also L) erreicht ist. Alle in der Sequenz danach folgenden Einträge sind entsprechend mit 0 belegt. Ist die Summe hingegen kleiner, so wird der letzten Koordinate (entsprechend dieser Reihenfolge) der Wert zugewiesen, der zusammen mit den anderen Einträgen L ergibt. Präzise gesprochen bedeutet dies:

Definition 3.13 (Sequentielle Median-Regel) Sei $\delta : K \rightarrow K$ eine Permutation. Die sequentielle Median-Regel (*sequential median rule*) ist gegeben durch

$$F^{SeqMedian} : X^n \rightarrow \tilde{X},$$

$$(w^1, w^2, \dots, w^n) \mapsto F^{SeqMedian}(w^1, w^2, \dots, w^n) := w^{SeqMedian}$$

mit

$$w_i^{SeqMedian} = \begin{cases} w_i^{med} & , \text{ falls } \sum_{j=1}^{\delta(i)} w_{\delta^{-1}(j)}^{med} < L \\ L - \sum_{j=1}^{\delta(i-1)} w_j^{SeqMedian} & , \text{ falls } \sum_{j=1}^{\delta(i)} w_{\delta^{-1}(j)}^{med} \geq L \end{cases}$$

für alle i mit $\delta(i) < K$ und

$$w_i^{SeqMedian} = L - \sum_{j=1}^{K-1} w_j^{SeqMedian}$$

falls $\delta(i) = K$.

Die „Funktionsweise“ der sequentiellen Median-Regel wird an den beiden folgenden Beispielen anschaulich:

Beispiel 3.6 Man betrachte einen Simplex mit $K = 3$ und $L = 21$. Die Mediane seien $w_1^{med} = 7$, $w_2^{med} = 10$, $w_3^{med} = 6$, d.h. $\sum_{j=1}^3 w_j^{med} > L$. Die Permutation (d.h. Reihenfolge der Anpassung) sei gegeben durch $\delta(i) = i$ für $i = 1, 2, 3$. Es gilt:

$$F^{SeqMedian}(w^1, w^2, w^3) = (7, 10, 4).$$

Beispiel 3.7 Man betrachte wiederum einen Simplex mit $K = 3$ und $L = 21$. Die Mediane seien $w_1^{med} = 9$, $w_2^{med} = 3$, $w_3^{med} = 4$, d.h. $\sum_{j=1}^3 w_j^{med} < L$. Die Permutation (d.h. Reihenfolge der Anpassung) sei gegeben durch $\delta(i) = i$ für $i = 1, 2, 3$. Es gilt:

$$F^{SeqMedian}(w^1, w^2, w^3) = (9, 3, 9).$$

Die sequentielle Median-Regel behandelt die einzelnen Dimensionen des Simplex nicht gleich. Abhängig davon, an welcher Stelle eine Koordinate in der Sequenz steht, wird dieser mehr oder weniger häufig ihr Median zugewiesen. Präzise gesprochen verletzt die sequentielle Median-Regel die Bedingung der Neutralität einer Abstimmungsregel (siehe beispielsweise Moulin (1988)). Wir werden im Rahmen von Kapitel 4 untersuchen, welche Auswirkungen dies auf die Wohlfahrtseigenschaften der sequentiellen Median-Regel hat.

Satz 3.4 Die sequentielle Median-Regel erfüllt Straightforwardness (Vgl. Definition 3.9.).

Beweis: Wir betrachten ohne Beschränkung der Allgemeinheit die sequentielle Median-Regel mit der Reihenfolge $1, 2, \dots, K$, d.h. $\delta(j) = j$, und den Agenten i mit Peak w^i . Sei $w^{SeqMedian}$ das Ergebnis unter Angabe von w^i . Gilt $w^{SeqMedian} = w^i$, so ist nichts zu zeigen; daher nehmen wir im Folgenden $w^{SeqMedian} \neq w^i$ an.

Würde die sequentielle Median-Regel Straightforwardness verletzen, so müsste Agent i durch Angabe eines \tilde{w}^i ein $\tilde{w}^{SeqMedian} \neq w^{SeqMedian}$ erzeugen mit

$$\begin{aligned} \tilde{w}^{SeqMedian} &\in [w^i, w^{SeqMedian}] \\ \Leftrightarrow \tilde{w}_j^{SeqMedian} &\in [w_j^i, w_j^{SeqMedian}] \text{ für alle } j \in K. \end{aligned}$$

Wir betrachten nun alle Koordinaten $j \in K$ mit $w_j^{SeqMedian} = w_j^{med}$, d.h. die Koordinaten, in denen der sequentielle Median mit dem koordinatenweisen Median übereinstimmt. Ist Agent i in einer oder mehrerer Koordinaten nicht pivotal, hat also sein angegebener Peak in diesen Koordinaten kein Einfluss auf das Ergebnis, so ist im Bezug auf diese Koordinaten nichts zu zeigen. Hat der Agent hingegen Einfluss auf das Ergebnis, ist also pivotal, so unterscheide man nun folgende Fälle:

1. Gilt $w_j^i = w_j^{med}$, stimmt also die sequentielle Median-Regel in dieser Koordinate mit dem Peak des Agenten i überein, so muss, würde dieser Agent einen anderen Peak \tilde{w}^i vorschlagen, $w_j^i = \tilde{w}_j^i$ gelten. Würde $w_j^i \neq \tilde{w}_j^i$ gelten, läge der resultierende sequentielle Median nicht zwischen w^i und $w^{SeqMedian}$.
2. Gilt $w_j^i < w_j^{med} \neq L$, so ist Agent i nur dann pivotal, wenn er einen Peak mit $\tilde{w}_j^i > w_j^{med}$ vorschlägt. Für den so beeinflussten Median dieser Koordinate würde dann $\tilde{w}_j^{med} > w_j^{med}$ gelten. Agent i kann also auch in diesem Fall keinen sequentiellen Median bewirken, der zwischen seinem Peak und dem unmanipulierten Ergebnis der Regel liegt.
3. Gilt $w_j^i > w_j^{med} \neq 0$, so kann der Agent - analog zur Argumentation zu Punkt 2 - ebenfalls keinen sequentiellen Median bewirken, der zwischen seinem Peak und dem unmanipulierten Ergebnis der Regel liegt.
4. Schließlich kann Agent i in den Fällen $w_j^i < w_j^{med} = L$ und $w_j^i > w_j^{med} = 0$ (bei mehr als 2 Agenten) nicht pivotal sein.

Damit ist gezeigt, dass ein Agent (in Koordinaten mit $w_i^{SeqMedian} = w_i^{med}$) den sequentiellen Median nur derart beeinflussen kann, dass er durch Angabe eines $\tilde{w}^i \neq w^i$ ein Ergebnis erzeugt, das *nicht* zwischen seinem Peak und dem unmanipulierten sequentiellen Median liegt.

Betrachtet man nun die Koordinaten mit $w_i^{SeqMedian} \neq w_i^{med}$, so gilt, dass es dort nur dann zu einer Änderung durch Angabe eines \tilde{w}^i kommen kann, wenn es bei Koordinaten, die in der Sequenz „weiter vorne“ stehen, also bei Koordinaten mit $w_i^{SeqMedian} = w_i^{med}$, zu einer Änderung gekommen ist. \square

3. Abstimmungen auf dem Simplex

Korollar 3.4 *Seien die Präferenzen der Agenten \succeq^i metrisch eingipflig (siehe Definition 3.7). Dann ist die sequentielle Median-Regel nicht manipulierbar.*

Beweis: Aus Satz 3.4 folgt, dass ein Agent durch Angabe eines Peaks kein Ergebnis erzielen kann, das zwischen seinem wahren Peak und dem Ergebnis der sequentiellen Median-Regel unter Angabe des wahren Peaks liegt. Es bleibt also zu zeigen, dass ein Agent ebenfalls nicht solche Punkte erzeugen kann, die zwar nicht zwischen Peak und unmanipuliertem sequentiellen Median aber dennoch näher am (wahren) Peak des Agenten liegen.

Sei \tilde{x} ein solcher Punkt, d.h. $d(w^i, \tilde{x}) < d(w^i, w^{SeqMedian})$ und $\tilde{x} \notin [w^i, w^{SeqMedian}]$. Für solche Punkte muss in mindestens einer Koordinate j im Fall $w_j^i < w_j^{med}$ gelten: $\tilde{x}_j < w_j^i$ (bzw. im Fall $w_j^i > w_j^{med}$: $\tilde{x}_j > w_j^i$). Wie aber bereits im Beweis zu Satz 3.4 gezeigt, kann ein Agent in solchen Fällen nur dann pivotal sein, wenn er ein \tilde{w}^i mit $\tilde{w}_j^i > w_j^{med}$ bzw. $\tilde{w}_j^i < w_j^{med}$ vorschlägt. Daraus folgt also, dass ein Agent auch einen solchen Punkt \tilde{x} nicht durch Vorschlag eines Peaks erzeugen kann. \square

Zusammenfassend kann diese Abstimmungsregel aufgrund ihrer „zwiespältigen“ Eigenschaften als durchaus interessant für die Simulation in Kapitel 4 angesehen werden: einerseits ist der sequentielle Median „wenig“ manipulierbar, da er Straightforwardness erfüllt. Andererseits mag die Ungleichbehandlung der einzelnen Koordinaten durchaus negative Auswirkungen auf die Wohlfahrtseigenschaften haben.

3.4.3. Die Condorcet Center-Regel

Der koordinatenweise Median lässt sich auch dadurch an den Simplex anpassen, indem man in jeder Koordinate „gleich viel“ hinzu addiert oder abzieht, um in der Summe aller Koordinaten die Größe des Simplex (also L) zu erreichen.

Definition 3.14 (Condorcet Center-Regel) *Die Condorcet Center-Regel ist gegeben durch*

$$F^{CC} : X^n \rightarrow \tilde{X}, (w^1, w^2, \dots, w^n) \mapsto F^{CC}(w^1, w^2, \dots, w^n) := w^{CC}$$

mit

$$w_i^{CC} = \begin{cases} w_i^{med} + \frac{1}{K} \left(L - \sum_{j=1}^K w_j^{med} \right) & , \text{ falls } \sum_{j=1}^K w_j^{med} \leq L \\ w_i^{med} - \min(z, w_i^{med}) & , \text{ falls } \sum_{j=1}^K w_j^{med} > L \end{cases}$$

wobei z die Gleichung

$$\sum_{j=1}^K \min(z, w_j^{med}) = \sum_{j=1}^K w_j^{med} - L$$

löst.

Die Condorcet Center-Regel bestimmt auf gewisse Art und Weise das Zentrum der Menge von den Elementen im Simplex, die denselben Abstand $d(\cdot, \cdot)$ zum koordinatenweisen Median haben.

Das Verhalten dieser Regel soll anhand der beiden folgenden Beispiele, einmal im Fall $\sum_{j=1}^K w_j^{med} \leq L$ und einmal für $\sum_{j=1}^K w_j^{med} > L$, verdeutlicht werden.

Beispiel 3.8 *Man betrachte einen Simplex mit $K = 5$ und $L = 100$. Die Mediane seien $w_1^{med} = 7$, $w_2^{med} = 10$, $w_3^{med} = 32$, $w_4^{med} = 25$, $w_5^{med} = 16$, d.h. $\sum_{j=1}^5 w_j^{med} = 90 < L$. Es gilt:*

$$F^{CC}(w^1, w^2, \dots, w^5) = (9, 12, 34, 27, 18).$$

Beispiel 3.9 *Man betrachte einen Simplex mit $K = 5$ und $L = 100$. Die Mediane seien $w_1^{med} = 5$, $w_2^{med} = 30$, $w_3^{med} = 29$, $w_4^{med} = 45$, $w_5^{med} = 26$, d.h. $\sum_{j=1}^5 w_j^{med} = 135 > L$. Es gilt:*

$$F^{CC}(w^1, w^2, \dots, w^5) = (0, 22.5, 21.5, 37.5, 18.5).$$

Ebenso wie die Mittelwert- und die normalisierte Median-Regel verletzt auch die Condorcet Center-Regel Straightforwardness (Vgl. Definition 3.9.), wie das folgende Beispiel (Eine Abwandlung von Beispiel 3.5) zeigt:

Beispiel 3.10 *Wir betrachten einen $(3, 45)$ -Simplex mit 3 Agenten und folgenden Peaks: $w^1 = (45, 0, 0)$, $w^2 = (0, 45, 0)$ und $w^3 = (1, 1, 43)$. Demzufolge gilt:*

$$F^{CC}(w^1, w^2, w^3) = (15.333, 15.333, 14.333) = x.$$

Schlägt Agent 3 nun statt w^3 den Punkt $\tilde{w}^3 = (0, 0, 45)$ vor, dann ergibt sich:

$$F^{CC}(w^1, w^2, \tilde{w}^3) = (15, 15, 15) = \tilde{x}.$$

Der Punkt \tilde{x} liegt strikt zwischen x - dem Ergebnis bei Angabe des wahren Peaks - und dem Peak des Agenten 3. Demnach verletzt die Condorcet Center-Regel Straightforwardness und ist daher auch unter metrisch eingipfligen Präferenzen manipulierbar.

3.4.4. Die Inertial Median-Regel

Schließlich ist eine weitere Möglichkeit der Anpassung des koordinatenweisen Medians an den Simplex durch die Inertial Median-Regel gegeben. Wie der Name bereits zum Ausdruck bringt, ist diese Regel in gewisser Weise „träge“. Betrachtet man wiederum die Menge der Elemente im Simplex, die denselben Abstand $d(\cdot, \cdot)$ zum koordinatenweisen Median haben, so wählt die Inertial Median-Regel das Element aus, bei dem in möglichst vielen Koordinaten eine Gleichverteilung des Budgets besteht. Abgewichen von dieser Gleichverteilung wird nur dann, wenn eine Mehrheit der Agenten mehr (im Falle $\sum_{j=1}^K w_j^{med} \leq L$) bzw. weniger (im Falle $\sum_{j=1}^K w_j^{med} > L$) einer Koordinate zuteilen will. So wird beispielsweise der Mittelpunkt des Simplex (also $x_i = \frac{L}{K}$ für alle $i \in K$) als Inertial Median gewählt, wenn dieser Punkt in der obigen Menge enthalten ist.

3. Abstimmungen auf dem Simplex

Die „Trägheit“ der Regel kommt auch dadurch zum Ausdruck, dass eine Änderung der Mediane nicht immer zu einem anderen Inertial Median führen muss. Bleibt zum Beispiel der Mittelpunkt des Simplex in der Menge der Punkte mit gleichem Abstand zum koordinatenweisen Median enthalten, so ändert sich der Inertial Median nicht. (Im Gegensatz dazu „reagiert“ die normalisierte Median-Regel auf jede Änderung im koordinatenweisen Median.)

Definition 3.15 (Inertial Median-Regel) Die Inertial Median-Regel ist gegeben durch

$$F^{IMedian} : X^n \rightarrow \tilde{X}, (w^1, w^2, \dots, w^n) \mapsto F^{IMedian}(w^1, w^2, \dots, w^n) := w^{IMedian}$$

mit

$$w_i^{IMedian} = \begin{cases} \max(w_i^{med}, c) & , \text{ falls } \sum_{j=1}^K w_j^{med} \leq L \\ \min(w_i^{med}, c) & , \text{ falls } \sum_{j=1}^K w_j^{med} > L \end{cases}$$

wobei c im Fall $\sum_{j=1}^K w_j^{med} \leq L$ die Gleichung

$$\sum_{j=1}^K \max(c, w_j^{med}) = L$$

und im Fall $\sum_{j=1}^K w_j^{med} > L$ die Gleichung

$$\sum_{j=1}^K \min(c, w_j^{med}) = L$$

löst.

Die Inertial Median-Regel ist von ihrer mathematischen Struktur der „uniform rule“ (siehe Sprumont (1991)) sehr ähnlich⁶. Das Verhalten der Inertial Median-Regel wird in den beiden folgenden Beispielen (analog zu den Beispielen 3.8 und 3.9) illustriert:

Beispiel 3.11 Man betrachte einen Simplex mit $K = 5$ und $L = 100$. Die Mediane seien $w_1^{med} = 7$, $w_2^{med} = 10$, $w_3^{med} = 32$, $w_4^{med} = 25$, $w_5^{med} = 16$, d.h. $\sum_{j=1}^5 w_j^{med} = 90 < L$. Es gilt:

$$F^{IMedian}(w^1, w^2, \dots, w^5) = (13.5, 13.5, 32, 25, 16).$$

Beispiel 3.12 Man betrachte einen Simplex mit $K = 5$ und $L = 100$. Die Mediane seien $w_1^{med} = 5$, $w_2^{med} = 30$, $w_3^{med} = 29$, $w_4^{med} = 45$, $w_5^{med} = 26$, d.h. $\sum_{j=1}^5 w_j^{med} = 135 > L$. Es gilt:

$$F^{IMedian}(w^1, w^2, \dots, w^5) = (5, 23.75, 23.75, 23.75, 23.75).$$

⁶Diese Abstimmungsregel betrachtet die Aufteilung eines Gutes auf mehrere Agenten, wobei jeder Agent seinen gewünschten Anteil an diesem Gut nennt.

Ebenso wie die Midpoint-Regel und die sequentielle Median-Regel erfüllt auch die Inertial Median-Regel Straightforwardness und ist außerdem unter metrisch eingipfligen Präferenzen nicht manipulierbar.

Satz 3.5 *Die Inertial Median-Regel erfüllt Straightforwardness (siehe auch Definition 3.9).*

Beweis: Wir betrachten den Agenten i mit Peak w^i . Sei $w^{IMedian}$ das Ergebnis unter Angabe von w^i . Gilt $w^{IMedian} = w^i$, so ist nichts zu zeigen; daher nehmen wir im Folgenden $w^{IMedian} \neq w^i$ an.

Würde die Inertial Median-Regel Straightforwardness verletzen, so müsste Agent i durch Angabe eines $\tilde{w}^i \neq w^i$ ein $\tilde{w}^{IMedian} \neq w^{IMedian}$ erzeugen mit

$$\begin{aligned} \tilde{w}^{IMedian} &\in [w^i, w^{IMedian}] \\ \Leftrightarrow \tilde{w}_j^{IMedian} &\in [w_j^i, w_j^{IMedian}] \text{ für alle } j \in K. \end{aligned}$$

Wir werden zeigen, dass jedes $\tilde{w}^{IMedian} \neq w^{IMedian}$, also jedes Ergebnis, das von Agent i durch Vorschlag eines (nicht wahrheitsgemäßen) Peaks erzeugt werden kann, in mindestens einer Dimension nicht zwischen dem (wahren) Peak und dem unmanipulierten Ergebnis liegt. Es muss also für ein j gelten: $\tilde{w}_j^{IMedian} \notin [w_j^i, w_j^{IMedian}]$.

Die Argumentation hierbei ist völlig analog zum Beweis von Satz 3.4: Man betrachte sowohl für den Fall $\sum_{j=1}^K w_j^{med} < L$ als auch für den Fall $\sum_{j=1}^K w_j^{med} > L$ in den jeweiligen Dimensionen (d.h. auf Intervallen $[0, L]$) alle möglichen (relativen) Anordnungen von c , w_j^{med} und w_j^i , also die Fälle

- $c \leq w_j^{med} \leq w_j^i$,
- $c \leq w_j^i \leq w_j^{med}$,
- $w_j^{med} \leq w_j^i \leq c$,
- $w_j^{med} \leq c \leq w_j^i$,
- $w_j^i \leq c \leq w_j^{med}$ und
- $w_j^i \leq w_j^{med} \leq c$.

Agent i kann dabei nur (im Fall $w_j^{med} < w_j^i$) für das Intervall $[0, w_j^{med})$ bzw. (im Fall $w_j^{med} > w_j^i$) für das Intervall $(w_j^{med}, L]$ pivotal sein. Damit ist es also nicht möglich, durch Angabe eines \tilde{w}^i ein $\tilde{w}^{IMedian} \neq w^{IMedian}$ zu erzeugen mit $\tilde{w}^{IMedian} \in [w^i, w^{IMedian}]$. \square

Korollar 3.5 *Seien die Präferenzen der Agenten \succeq^i metrisch eingipflig (siehe Definition 3.7). Dann ist die Inertial Median-Regel nicht manipulierbar.*

3. Abstimmungen auf dem Simplex

Beweis: Auch dieser Beweis ist analog zum Beweis von Korollar 3.4. Man betrachte einen beliebigen Punkt \tilde{x} mit $d(w^i, \tilde{x}) < d(w^i, w^{SeqMedian})$ und $\tilde{x} \notin [w^i, w^{SeqMedian}]$. Für solche Punkte muss in mindestens einer Koordinate j im Fall $w_j^i < w_j^{med}$ gelten: $\tilde{x}_j < w_j^i$ (bzw. im Fall $w_j^i > w_j^{med}$: $\tilde{x}_j > w_j^i$). Wie aber bereits im Beweis zu Satz 3.5 gezeigt, kann ein Agent in solchen Fällen nur dann pivotal sein, wenn er ein \tilde{w}^i mit $\tilde{w}_j^i > w_j^{med}$ bzw. $\tilde{w}_j^i < w_j^{med}$ vorschlägt. Daraus folgt also, dass ein Agent auch einen solchen Punkt \tilde{x} nicht durch Vorschlag eines Peaks erzeugen kann. \square

In Kapitel 4 wird zu klären sein, inwiefern sich die Inertial Median-Regel bezüglich ihrer Manipulierbarkeit von der Midpoint- und der sequentiellen Median-Regel unterscheidet, da alle drei Regeln Straightforwardness erfüllen und unter metrisch eingipfligen Präferenzen nicht manipulierbar sind. Ebenso wird zu klären sein, ob und wie stark sich die „Trägheit“ dieser Regel auf ihre Wohlfahrtseigenschaften auswirkt.

Insgesamt wurden in diesem Kapitel verschiedene Abstimmungsregeln auf dem Simplex vorgestellt. Diese unterscheiden sich sowohl in ihren (theoretischen) Eigenschaften, was Manipulierbarkeit betrifft, als auch in Eigenschaften bezüglich der Summe der Distanzen zu den Peaks und der Nutzensumme der Agenten. Diese Eigenschaften sind in Tabelle 3.1 nochmals aufgeführt. In der Simulationsstudie, die in Kapitel 4 vorgestellt und diskutiert wird, wollen wir nun klären, wie sich diese Eigenschaften auf die Manipulierbarkeit der vorgestellten Regeln unter verallgemeinert eingipfligen Präferenzen auswirken.

Zum Abschluss dieses Kapitels sei angemerkt, dass sich die vorgestellten Abstimmungsregeln prinzipiell derart erweitern lassen, dass auch Peaks aus kontinuierlichen Simplices, also aus \tilde{X} zulässig sind. Während bei der Mittelwert-Regel und den median-basierten Abstimmungsregeln sich sowohl die Definitionen als auch mögliche Eigenschaften analog übertragen lassen, sind bei der Midpoint-Regel einige Verfeinerungen erforderlich: entweder man betrachte eine Einbettung von X in \tilde{X} , d.h. man wählt für einen kontinuierlichen (K, L) -Simplex \tilde{X} einen diskreten (K, \tilde{L}) -Simplex X derart, dass alle Peaks in \tilde{X} auf Knoten in X liegen, oder es ist Anpassung des „Instrumentariums“ aus Abschnitt 3.2 erforderlich. Dabei sind unter anderem die Differenzen in der Remoteness in Richtungsableitungen zu überführen. Wie bereits darauf hingewiesen wurde, steht im Mittelpunkt der vorliegenden Dissertation die Analyse der Abstimmungsregeln durch Simulation. Von daher ist die Wahl der Peaks aus dem diskreten Simplex X nicht nur ausreichend sondern auch vor dem Hintergrund der Minimierung des Rechenaufwands besser geeignet.

Abstimmungsregel	<i>Straightforwardness</i> erfüllt	<i>Nicht-Manipulierbar</i> unter metrisch ein- gipfligen Präferenzen	<i>Remoteness</i> minimiert	<i>Nutzensumme</i> unter Cobb-Douglas-Prä- ferenzen maximiert
Midpoint	ja	ja	ja	nein
Mittelwert	nein	nein	nein	ja
normalisierter Median	nein	nein	nein	nein
sequentieller Median	ja	ja	nein	nein
Condorcet Center	nein	nein	nein	nein
Inertial Median	ja	ja	nein	nein

Tabelle 3.1.: Eigenschaften von Abstimmungsregeln auf dem Simplex

Simulation von Abstimmungsregeln auf dem Simplex

Wie manipulierbar sind die in Kapitel 3 vorgestellten Abstimmungsregeln tatsächlich? Die bisherigen Ergebnisse können lediglich eine Aussage dahingehend treffen, dass manche dieser Regeln unter metrisch eingipfligen Präferenzen (siehe Definition 3.7) nicht manipulierbar bzw. allgemeiner (im Falle der Erfüllung von Straightforwardness, siehe Definition 3.9) die Möglichkeiten der Beeinflussung des Ergebnisses solcher Regeln beschränkt sind. Nach wie vor offen ist hingegen, ob und welche Auswirkungen diese Resultate auf die Manipulierbarkeit unter verallgemeinert eingipfligen Präferenzen (siehe Definition 2.9) haben. Zugespitzt formuliert: Es ist unklar, ob eine Abstimmungsregel, die Straightforwardness erfüllt, auch in einem allgemeineren Rahmen „weniger“ manipulierbar ist als solche Regeln, die Straightforwardness verletzen.

Die Klasse von verallgemeinert eingipfligen Präferenzen¹ umfasst auf dem Simplex unter anderem Cobb-Douglas-Präferenzen, perfekte Komplemente sowie CES-Präferenzen², also Präferenzen, die eine konstante Substitutionselastizität aufweisen (siehe Mas-Colell u. a. (1995)). Aus Definition 2.9 ist jedoch ersichtlich, dass diese Klasse noch weitaus größer ist: Eine Präferenzordnung, die dieser Klasse angehört, kann in Fällen, in denen zwei Elemente gleichen Abstand zum Peak haben, bezüglich der Präferenz zwischen solchen Elementen beliebig definiert sein.

Vor diesem Hintergrund mag es wenig hoffnungsvoll sein, weitere theoretische Resultate über die Manipulierbarkeit von Abstimmungsregeln auf dem Simplex im Fall verallgemeinert eingipfliger Präferenzen ableiten zu können. Ein geeigneter Weg, um die vorgestellten Abstimmungsregeln im Bezug auf ihre Manipulierbarkeit vergleichen zu können, erscheint daher die Simulation dieser Regeln. Damit aus den Daten

¹Wie in Kapitel 3 bereits ausgeführt verstehen wir im Kontext der Allokation öffentlicher Güter dabei hierunter all die Präferenzen, die eingipflig im Bezug auf die Betweenness-Relation $T_{\mathcal{H}}$ sind, mit (X, \mathcal{H}) als dem zugehörigen property space.

²mit Ausnahme des Falls perfekter Substitute

4. Simulation

einer solchen Simulationsstudie auch sinnvolle Rückschlüsse über die Manipulierbarkeit der einzelnen Regeln - und schließlich auch ein Vergleich der Regeln - gezogen werden können, sind vorab drei verschiedene Fragestellungen zu klären:

1. *Was bedeutet „weniger manipulierbar“?* Die übliche Definition von Manipulierbarkeit (siehe auch Definition 3.5) unterscheidet Abstimmungsregeln lediglich in „manipulierbar“ und „nicht manipulierbar“. Da alle Regeln, die wir durch Simulation untersuchen wollen, jedoch (unter verallgemeinert eingipfligen Präferenzen) manipulierbar sind, ist diese Definition zur weiteren Differenzierung innerhalb dieser Regeln wenig hilfreich. Es stellt sich also die Frage, wann eine Regel „weniger“ manipulierbar als eine andere Regel ist. In Kapitel 2 wurden bereits die dazu bisher in der Literatur vorhandenen Kenngrößen vorgestellt. Beispielsweise wird bei Nitzan (1985) und Kelly (1993) vorgeschlagen, die Anzahl der Profile, unter denen eine Regel manipulierbar ist, zu vergleichen. Wie bereits diskutiert wurde, weisen die bisherigen Kenngrößen durchaus gewisse Mängel auf. Daher ist ein „multidimensionaler“ Ansatz notwendig, der die unterschiedliche Aspekte und Effekte der Manipulation von Abstimmungsregeln auch erfasst. Dieser Ansatz wird im weiteren Verlauf des Kapitels vorgestellt werden.
2. *Welche Situationen werden verglichen?* Jede Simulation trifft gewisse Annahmen. Sei es die Anzahl der Agenten oder - bei Abstimmungen auf dem Simplex - Annahmen über die Zahl der Dimensionen (also K) bzw. die Größe des Simplex. A priori nicht weniger sensitiv sind jedoch auch solche „speziellen“ Modellparameter wie die Präferenzen der Agenten oder das zeitliche Verhalten (d.h. die Dynamik) bei der Bestimmung des manipulierten Ergebnisses einer Abstimmungsregel. Damit verlässliche Rückschlüsse von den Kenngrößen, die aufgezeichnet werden, auf die Manipulierbarkeit der Regeln gezogen werden können, ist es essentiell, die Abhängigkeit dieser Kenngrößen von den getroffenen Annahmen zu untersuchen. In anderen Worten: Will man eine *allgemeine* Aussage darüber treffen können, welche Regeln weniger manipulierbar sind als andere, so dürfen die getroffenen Annahmen einerseits nicht zu speziell sein und müssen andererseits variiert werden, um mögliche Interdependenzen aufdecken zu können. Hierzu ist es natürlich auch notwendig, dass eine Simulation über ausreichend viele Parameter, die verändert werden können, verfügt.
3. *Welche Zielgrößen außer Manipulierbarkeit sind noch zu beachten?* Wie erwähnt ist jede surjektive, nicht diktatorische Abstimmungsregel manipulierbar (siehe Definitionen 2.6, 2.7 und Theorem 2.1). Surjektivität besagt in gewisser Weise, dass eine Abstimmungsregel auch auf unterschiedliche Profile „reagiert“. Beispielsweise ist eine Regel, die jedem Profil das gleiche Ergebnis zuordnet, nicht surjektiv. Die Simulationsstudie in diesem Kapitel befasst sich ausschließlich mit nicht diktatorischen Abstimmungsregeln, die Einstimmigkeit erfüllen und folglich manipulierbar sind. Jedoch gibt es einen “trade

off” zwischen Manipulierbarkeit auf der einen Seite und Empfindlichkeit (Responsiveness) einer Regel auf der anderen Seite. Betrachtet man beispielsweise die Regel $F^{StatusQuo}$, die im Fall $F^{StatusQuo}(w, w, \dots, w)$ für alle $w \in X$ den Wert w zuordnet - und für alle anderen Profile ein festes $c \in \tilde{X}$, so ist zu erwarten, dass diese Regel „wenig“ manipulierbar sein dürfte (obwohl sie Einstimmigkeit erfüllt und nicht diktatorisch ist). Problematisch an dieser Regel hingegen ist, dass sie kaum auf Änderungen der vorgeschlagenen Peaks reagiert. Wie sich leicht zeigen lässt, gilt für die vorgestellten Regeln:

- Alle Regeln betrachten nur Peaks und keine vollständigen Präferenzordnungen als Argument. Demzufolge „reagieren“ diese Regeln auch nicht, wenn es „innerhalb“ einzelner Präferenzen zu Änderungen kommt, die keine Auswirkungen auf den Peak der Präferenzordnung haben.
- Bei der Midpoint-Regel gibt es sowohl Situationen, in denen die Änderung eines einzelnen Peaks zu einer Änderung des Ergebnisses führt, als auch Fälle, in denen ein Agent nicht pivotal ist, egal welchen Peak er angibt.
- Bei der Mittelwert-Regel führt die Änderung eines Peaks immer zu einer Änderung des Ergebnisses. Diese Regel hat quasi eine maximale Empfindlichkeit.
- Für alle median-basierten Regeln gilt, dass es nur dann zu einer Änderung des Ergebnisses kommen kann (aber nicht muss), wenn sich der koordinatenweise Median der Peaks ändert. Innerhalb der vorgestellten median-basierten Regeln reagieren (wie man sich leicht überlegen kann) die normalisierte Median-Regel und die Condorcet Center-Regel auf jede Änderung des koordinatenweisen Medians, während es bei der sequentiellen Median-Regel und der Inertial Median-Regel auch Fälle gibt, in denen eine Änderung keine Auswirkungen auf das Ergebnis der Regel hat.

Die Responsiveness oder Pivotalität einer Abstimmungsregel mag (wie auch bereits in Kapitel 2 diskutiert) an sich ein durchaus interessantes Kriterium sein. Mindestens ebenso wichtig ist jedoch auch die Frage, welche Auswirkungen diese Kennziffer auf die Wohlfahrtseigenschaften einer Abstimmungsregel hat. Kurz formuliert: Es ist fraglich, ob das Ergebnis einer unempfindlichen Regel die Agenten besser oder schlechter stellt als eine Regel mit einer größeren Responsiveness. Es kann folglich durchaus einen “trade-off” zwischen geringer Manipulierbarkeit und Wohlfahrt geben³.

Prinzipiell lassen sich mit der Simulation der vorgestellten Abstimmungsregeln drei Zielsetzungen verfolgen:

1. Aus den Ergebnissen der Simulation lassen sich *Extrembeispiele* herausfiltern. Beispielsweise kann man das 1-Prozent-Fraktile jeder Variablen näher betrachten. Solche Extrembeispiele können dann zu einem tieferen Verständnis der

³Wie Responsiveness und Wohlfahrt gemessen werden können, wird im weiteren Verlauf des Kapitels noch zu klären sein.

4. Simulation

Abstimmungsregeln beitragen, unter anderem lassen sich aus ihnen Vermutungen für theoretische Eigenschaften der Regeln ableiten, die dann näher überprüft werden können. So wurde das Beispiel, das zeigt, dass die normalisierte Median-Regel Straightforwardness verletzt (Beispiel 3.5), durch ein intensives Studium der Simulationsergebnisse „entdeckt“.

2. Weiterhin lassen sich die Ergebnisse der Simulation für unterschiedliche Parameterkonstellationen vergleichen und somit mögliche *Abhängigkeiten* oder Interdependenzen postulieren.
3. Schließlich können mit Hilfe der Simulationsergebnisse wie bereits erwähnt *statistische Aussagen* im Sinne von „Regel A ist bezüglich einer Kenngröße im Mittel besser als Regel B“ getroffen werden.

Dabei soll das gewählte Vorgehen drei grundlegenden Kriterien wissenschaftlichen Arbeitens genügen:

1. Alle Daten sollen nicht nur objektiv messbar, sondern auch vollständig reproduzierbar sein. Daher werden in der Simulationsstudie alle Informationen aufgezeichnet, die notwendig sind, um später einzelne Simulationsläufe nachzuvollziehen und zu überprüfen. Darüber hinaus sind sowohl der Quellcode der Simulation als auch die aufgezeichneten Simulationsergebnisse beim Autor dieser Dissertation auf Anfrage erhältlich⁴.
2. Die getroffenen Aussagen müssen falsifizierbar sein, d.h. es sollen nur solche Aussagen getroffen werden, die mittels geeigneter Verfahren (Tests, Experimente, Simulation, theoretische Ergebnisse etc.) widerlegt werden *können*.
3. Schließlich muss die gewählte Methodik, d.h. in diesem Fall der Aufbau und die Auswertung der Simulation, eine Offenheit bezüglich der Ergebnisse aufweisen. Hätte man beispielsweise a priori die Vermutung, dass Regeln, die Straightforwardness (siehe Definition 3.9) erfüllen, „besser“ abschneiden, so muss das gewählte Vorgehen dennoch in der Lage sein, das Gegenteil dieser Vermutung zu belegen. Strenger formuliert darf die gewählte Methodik solche Vermutungen noch nicht einmal begünstigen.

Das Vorgehen in diesem Kapitel ist dabei wie folgt: Zunächst wird der Aufbau der Simulationsstudie beschrieben. Dabei wird auf die möglichen Parameterkonstellationen und auf wesentliche Aspekte und Probleme bei der Umsetzung in der Programmierung eingegangen. In einem weiteren Schritt werden dann auf die einzelnen Kenngrößen vorgestellt und die Ergebnisse bezüglich dieser Größen diskutiert. Abschließend werden diese nochmals zusammenfassend betrachtet und etwaige Rückschlüsse gezogen. Zudem finden sich zahlreiche Daten aus Gründen der Übersichtlichkeit in den Anhängen.

⁴tobias.lindner@kit.edu

4.1. Aufbau der Simulationsstudie

Im Rahmen der Simulationsstudie werden für eine feste Parameterkonstellation mehrere unabhängig identisch verteilte Profile, d.h. Kombinationen von Peaks, simuliert. Es wird also für eine gewählte Parameterkonstellation eine Stichprobe gebildet und diese anschließend statistisch ausgewertet. Im Wesentlichen werden dabei Lageparameter (arithmetisches Mittel, Quantile), die Standardabweichung als Streuungsparameter sowie Korrelationen mit anderen Kenngrößen betrachtet. In dieser Arbeit selbst werden zumeist die arithmetischen Mittelwerte der Daten vorgestellt, auf Korrelationen wird nur dann eingegangen, wenn diese tatsächlich einen Erklärungsbeitrag zu leisten scheinen.

Variationen bei der Wahl der Parameter werden immer *ceteris paribus* vorgenommen, d.h. ein Parameter (beispielsweise die Anzahl der Agenten) wird verändert, während alle anderen Einstellungen der Simulation unverändert bleiben. Vergleiche zwischen zwei Parameterkonstellationen erfolgen über die Mittelwerte der einzelnen Kenngrößen. Beispielsweise kann man in einem Diagramm die Veränderung des arithmetischen Mittels einer Kenngröße bei Variation der Anzahl der Agenten abtragen.

Um die Vergleichbarkeit der Kenngrößen bei gleichzeitiger Veränderung eines Parameters zu gewährleisten, wurde in der Simulation zudem die Möglichkeit realisiert, einzelne Kenngrößen zu normalisieren. So wird beispielsweise davon ausgegangen, dass der betrachtete Simplex immer die Größe $L = 1$ hat (also ein Einheits-simplex ist), obwohl im Fall von $K = 3$ Dimensionen eine tatsächliche Größe von $L = 99$ gewählt wurde. Alle Kenngrößen, die von L abhängen, werden dann entsprechend durch $L = 99$ geteilt. Man kann damit auch sagen, dass der kontinuierliche Einheits-simplex durch einen diskreten $(3, 99)$ -Simplex mit 5050 Knoten⁵ approximiert wird. Bei der Vorstellung der einzelnen Variablen in Abschnitt 4.2 wird auch jeweils auf deren Normalisierung eingegangen werden.

Im Detail ist der Ablauf eines Simulationslaufs (d.h. einer *einzelnen* Beobachtung innerhalb einer Stichprobe) wie folgt:

1. Diverse Programmparameter (Kenngrößen etc.) werden zurückgesetzt.
2. Die Peaks der Agenten werden durch einen Pseudozufallszahlengenerator entsprechend einer vorgegebenen Verteilung (siehe Abschnitt 4.1.2) festgelegt.
3. Über maximal 200 Iterationen wird nun in einer bestimmten Reihenfolge (zu den verschiedenen Möglichkeiten siehe ebenfalls Abschnitt 4.1.2) für jeden Agenten die "best response" bestimmt, d.h. der vorgeschlagene Peak, der - gegeben die vorgeschlagenen Peaks der anderen Agenten - den Nutzen des Agenten maximiert. Sei $\tilde{w}^i(t)$ der vorgeschlagene Peak (announced Peak) von Agent i in Iteration t und $u^i(x)$ die Nutzenfunktion (siehe Abschnitt 4.1.2) des

⁵Dies ist die Anzahl aller Elemente in diesem Simplex. Die Simulation entspricht also einer Abstimmung über 5050 Alternativen.

4. Simulation

Agenten. Der announced Peak ergibt sich aus:

$$\tilde{w}^i(t) = \operatorname{argmax}_{\tilde{w}^i \in X} u^i(F(\tilde{w}^1(t-1), \dots, \tilde{w}^i, \dots, \tilde{w}^n(t-1))) \quad (4.1)$$

Ist $\tilde{w}^i(t)$ nicht eindeutig, so wird - quasi als „Daumenregel“ - der announced Peak gewählt, der bezüglich $u^i(\tilde{w}^i(t))$ einen höheren Wert hat^{6,7}.

4. Die Iteration wird gestoppt, falls für alle Agenten $i \in N$ gilt:

$$\tilde{w}^i(t) = \tilde{w}^i(t-1),$$

also kein Agent seinen vorgeschlagenen Peak ändern will. Wir sagen auch, dass in einem solchen Fall ein Profil *konvergiert*. Eine solche Situation, in der jeder Agent eine beste Antwort auf die announced Peaks der anderen Agenten gibt, ist ein Nash-Gleichgewicht.

5. Konvergiert das Profil der vorgeschlagenen Peaks nach 200 Iterationen nicht, so wird der Simulationslauf gestoppt. Dabei wird die Situation so interpretiert, dass das Profil *nicht konvergiert* hat. Um eine künstliche Selektion in der statistischen Auswertung zu vermeiden, werden sowohl konvergierte Profile⁸ als auch nicht konvergierte Profile betrachtet.

Das obige Vorgehen bedeutet insbesondere, dass jeweils die identische Stichprobe von Profilen für alle Abstimmungsregeln verwandt wird („common random numbers“, siehe Law u. Kelton (2000)). Hierdurch wird die Varianz der „Schätzer“ (d.h. der arithmetischen Mittelwerte der einzelnen Variablen) insofern reduziert, dass der Fall, in dem für eine Regel eine Stichprobe mit stark manipulationsanfälligen Profilen generiert wird, während für eine andere Regel eine Stichprobe mit Profilen, die für Manipulation wenig anfällig sind, Verwendung findet, ausgeschlossen ist.

Wie auch bereits schon geschehen werden wir bei der Simulation zwischen Einstellungen, die wir *Parameter* nennen, und den aufgezeichneten Kenngrößen, die wir als *Variablen* bezeichnen, strikt trennen. Beispiele für Parameter sind:

- die Anzahl der Agenten,
- die Zahl der Dimensionen,
- die Verteilungsannahme bezüglich der Peaks und
- die Präferenzen der Agenten.

⁶Eine andere Auswahlregel wäre die Vorschrift, das $\tilde{w}^i(t)$ zu wählen, das bezüglich $d(\cdot, w^i)$ näher am wahren Peak des Agenten (also w^i) liegt. Eine solche Auswahlregel könnte jedoch „manipulationshemmend“ wirken und damit das Ergebnis der Simulationsstudie verzerren.

⁷Für die äußerst seltenen Fälle, in denen dann $\tilde{w}^i(t)$ immer noch nicht eindeutig bestimmt ist, entscheidet das Programm anhand der lexikographischen Ordnung der Peaks.

⁸Diese machen in der Regel mehr als 90 Prozent der Stichprobe aus.

In Abschnitt 4.1.2 werden alle Parameter ausführlich vorgestellt werden. Dabei wird auch diskutiert, welche Auswahlmöglichkeiten für einen Parameter in der Simulation möglich und auf welche Weise diese realisiert sind.

Die Variablen, mit deren Hilfe wir die Manipulierbarkeit der Abstimmungsregeln untersuchen wollen, werden in drei Gruppen eingeteilt: Die erste Gruppe soll das *Ausmaß der Manipulation* messen. Unter Ausmaß verstehen wir dabei sowohl den Anreiz zu manipulieren als auch beispielsweise die Häufigkeit der Manipulation. Beispiele für Variablen, die das Ausmaß der Manipulation erfassen, sind:

- die Anzahl der Agenten, die misrepräsentieren,
- die Anzahl aller Manipulationen (innerhalb eines Simulationslaufs) und
- der maximale Nutzensgewinn eines Agenten durch Misrepräsentation (gegeben die wahren Peaks der anderen Agenten).

Demgegenüber betrachtet die zweite Gruppe von Variablen den *Effekt der Manipulation*, also welche Auswirkungen die Manipulation sowohl auf das Ergebnis der Abstimmungsregel und damit zusammenhängende Größen als auch auf das Profil der announced Peaks hat. Beispiele für Variablen, die den Effekt der Manipulation erfassen, sind:

- die Distanz zwischen dem (wahren) und dem manipulierten Ergebnis der Abstimmungsregel,
- die Summe der Distanzen zwischen den vorgeschlagenen und den wahren Peaks der Agenten und
- die Summe der Nutzensgewinne bzw. -verluste durch Manipulation.

Die dritte Gruppe der Kenngrößen umfasst schließlich all die Variablen, die entweder nicht klar einer der beiden ersten Gruppen zugeordnet werden können oder weiteren Aufschluss über die Manipulierbarkeit der Regeln geben sollen bzw. mit anderen Variablen möglicherweise korrelieren. Beispiele hierfür sind:

- die „Größe“ der unmanipulierten Menge der Midpoints,
- der Abstand des koordinatenweisen Medians vom Simplex und
- die Summe der Abstände vom Median zu seinen „Nachbarn“ in den einzelnen Dimensionen.

Die einzelnen Variablen und die Ergebnisse der Abstimmungsregeln hierzu werden in Abschnitt 4.2 ausführlich vorgestellt und exakt definiert. Dabei wird auch auf eine mögliche Normalisierung der jeweiligen Kenngröße eingegangen. Auch wenn die Unterscheidung der Variablen in die Kategorien Ausmaß und Effekt nicht immer eindeutig sein muss, so gewinnt man durch die Trennung des Variablensatzes dennoch einen besseren Überblick über das Verhalten der einzelnen Abstimmungsregeln.

4.1.1. Umsetzung in der Programmierung

Dieser Abschnitt geht auf *wesentliche* Aspekte der Umsetzung der Simulation in der Programmierung ein. Klassen- und Methodennamen, Bestandteile des Programm-codes sowie Bildschirmausgaben sind dabei in `Typewriter` gesetzt. Dabei wird auch kurz auf Bestandteile des Programms (wie beispielsweise die Möglichkeit der Simulation der mengenwertigen Midpoint-Regel), die nicht Gegenstand dieses Kapitels sind, eingegangen. Der vollständige Programmcode ist auf Anfrage beim Autor dieser Dissertation erhältlich.

Die Simulation ist in der objektorientierten Programmiersprache Java geschrieben. Als Entwicklungsumgebung diente dabei Eclipse. Neben vier den Grundprinzipien objektorientierter Programmierung, also Generalisierung, Vererbung, Kapselung und Polymorphismus (siehe Ratz u. a. (2001)), ist ein Vorteil der Umsetzung in Java der modulare Aufbau des Simulationsprogramms. Dies vereinfacht Erweiterungen der Simulation im Hinblick auf neue Variablen, Parameter und Abstimmungsregeln.

Im Folgenden werden wir Objekte einer Klasse auch als *Instanzen* bezeichnen. Können Variablen einer Klasse für verschiedene Instanzen (derselben Klasse) unterschiedlich belegt sein, so spricht man von *Instanzvariablen*, andernfalls von *Klassenvariablen*. Gleiches gilt für Methoden, die in *Instanzmethoden* und *Klassenmethoden* (oder auch statische Methoden) unterschieden werden (siehe auch Ratz u. a. (2001)).

Programmaufbau und -steuerung

Das Simulationsprogramm besteht aus insgesamt neun Klassen. Die Klasse `SimulationNetwork` übernimmt dabei die Steuerungsfunktion. Nach dem Start des Programms steht dem Nutzer das folgende Hauptmenü zur Verfügung:

- (1) System konfigurieren
- (2) Einzelne Simulationen starten
- (3) Informationen anzeigen
- (4) Simulationsstudie durchführen
- (5) Programm beenden

Das Hauptmenü ist in den Punkten (1) bis (4) jeweils in Untermenüs untergliedert. Unter Punkt (1) erfolgt die Systemkonfiguration:

System konfigurieren

=====

- (11) Simplex und Agenten konfigurieren
- (12) Konfiguration laden
- (13) Konfiguration speichern
- (14) Simulation zurücksetzen
- (15) einzelne Agenten neu konfigurieren
- (16) Nutzen- und Best-Response-Funktionen aller Agenten ändern
- (17) Für Netzwerkbetrieb einrichten
- (18) Eigene Threads im Netzwerkbetrieb hinzufügen

In diesem Teil des Programms werden die Parameter für den Simplex und die Agenten festgelegt. Weiterhin besteht die Möglichkeit, einzelne Profile und Parameterkonfigurationen zu speichern bzw. später zu laden. Damit ist auch eine Sammlung von Extrembeispielen etc. möglich. Schließlich können noch Einstellungen für den Netzwerkbetrieb, auf den unter Punkt (4) eingegangen wird, festgelegt werden.

Mithilfe des Programms lassen sich zwei Zielsetzungen verfolgen. Neben der Erzeugung von Stichproben (Menüpunkt (4)) ermöglichen es die Optionen (2) und (3) einzelne Situationen (d.h. Profile und Parameterkonstellationen) nachzustellen und zu studieren. Es ist also beispielsweise eine Analyse von Extrembeispielen möglich. Für Simplices mit $K = 3$ und $L = 9$, $L = 11$, $L = 12$ oder $L = 21$ lassen sich die Abstimmungsregeln auch graphisch visualisieren. Unter Menüpunkt (2) ist die Simulation aller Abstimmungsregeln für ein gegebenes Profil aufgeführt:

Einzelne Simulationen starten

=====

- (21) Midpoint-Rule
- (22) ShadowMidpoint-Rule
- (23) Mean-Rule
- (24) NMedian-Rule
- (25) PDMedian-Rule
- (26) PDRMedian-Rule
- (27) CondorcetCenter-Rule
- (28) InertialMedian-Rule

Als PDMedian-Rule und PDRMedian-Rule sind zwei Formen der sequentiellen Median-Regel mit unterschiedlichen Sequenzen bezeichnet. Menüpunkt (3) ermöglicht es, einzelne Informationen wie das Ergebnis einer Abstimmungsregel abzurufen:

Informationen anzeigen

=====

- (301) Informationen zum Simplex ausgeben
- (302) Informationen zu den Agenten ausgeben
- (303) Condorcet Consistency des Profils ausgeben
- (31) Midpoints ausgeben
- (311) Optionsset ausgeben
- (32) ShadowMidpoint ausgeben
- (33) Mean ausgeben
- (34) NMedian ausgeben
- (35) PDMedian ausgeben
- (36) PDRMedian ausgeben
- (37) CondorcetCenter ausgeben
- (38) InertialMedian ausgeben

Die Erzeugung von Stichproben ist schließlich unter Menüpunkt (4) geregelt:

4. Simulation

Simulationsstudie durchführen

=====

- (41) Simulationsstudie durchführen
- (42) Simulation über Netzwerk ausführen
- (43) Simulation im Parallelbetrieb ausführen

Dabei stehen dem Nutzer insgesamt drei Wahlmöglichkeiten zur Erzeugung von Stichprobendaten zur Verfügung:

- Die gesamte Simulationsstudie kann „konventionell“ mit einem Prozess (und damit gewöhnlich mit einem Prozessor(kern)) durchgeführt werden (Menüpunkt (41)). Soll eine Stichprobe vom Umfang n erzeugt werden, so wird der Simulationslauf $i + 1$ erst dann simuliert, wenn die Berechnung des Simulationslaufs i abgeschlossen ist. Diese Möglichkeit wurde hauptsächlich in der Entwicklung des Programms und zu Testzwecken genutzt. Durch die zunehmende Verbreitung von Mehrkernprozessoren ist diese Methode zur systematischen Erzeugung von Stichprobendaten als eher ineffizient zu betrachten.
- Die Menüpunkte (42) und (43) ermöglichen die Datenerzeugung im Parallelbetrieb. Dabei übernimmt ein Programmprozess die Steuerungsfunktion und Aufzeichnung der Ergebnisse, während die Berechnung der einzelnen Simulationsläufe auf beliebig viele andere Prozesse ausgelagert werden kann. Möchte man beispielsweise eine Stichprobe vom Umfang $n = 1000$ erzeugen und verteilt man die Berechnung auf 10 Prozessorkerne (Gewöhnlich wird man jedem Prozessorkern, der zur Verfügung steht, einen Prozess zuweisen.) so werden im Schnitt 100 Simulationsläufe je Prozess berechnet werden. Die Rechenzeit sinkt also damit etwa um Faktor 10.

Der Unterschied zwischen den Optionen (42) und (43) besteht in dem Umstand, ob sich alle Prozessorkerne auf einem oder mehreren Computern befinden. Während die Berechnung über Programmpunkt (43), also für den Fall, dass nur ein Computer mit mehreren Prozessoren bzw. Prozessorkernen zum Einsatz kommt, mittels sogenannten Threads (siehe beispielsweise Ratz u. a. (2003)) realisiert ist, bietet die Methode über Programmpunkt (42) die Möglichkeit auch Prozessorkerne einzusetzen, die sich auf anderen per Netzwerk verbundenen Computern befinden. Hierzu wird zusätzlich die Technik des „entfernten Methodenaufrufs“ (remote method invocation, RMI, siehe beispielsweise Downing (1998)) eingesetzt. Die Erzeugung der Datensätze, die in Abschnitt 4.2 diskutiert werden, fand im wesentlichen nach Methode (43) auf einem MacPro mit zwei Quad-Core Intel Xeon-Prozessoren mit 2.26 GHz (sogenannte Nehalem-Architektur) und 8 GB Arbeitsspeicher statt. Da diese Prozessoren Hyper-Threading beherrschen⁹, wurden jedem der acht Kerne zwei Prozesse zugeteilt. Es ergeben sich insgesamt 16 Prozesse, von denen ein Prozess zur Steuerung der Simulation und Aufzeichnung der Daten und

⁹d.h. zwei sogenannte Threads je Kern ausführen können

die anderen 15 Prozesse zur Simulation der Stichprobenergebnisse eingesetzt wurden.

Neben der Klasse `SimulationNetwork`, die für die Steuerung des Programms und Aufzeichnung der Daten zuständig ist, besteht die Simulation noch aus den folgenden Klassen, auf die in den kommenden Abschnitten teilweise noch eingegangen wird:

- **Agent:** Jeder Agent wird über ein Objekt dieser Klasse modelliert. Es umfasst sowohl Peak und Nutzenfunktion als auch die Bestimmung der best response, also einer möglichen Manipulation einer Abstimmungsregel.
- **Simplex:** Der Simplex, auf dem die Abstimmungsregeln simuliert werden, ist eine Instanz dieser Klasse. Die Klasse selbst enthält Informationen über Dimension und Größe des Simplex, außerdem werden die Ergebnisse der Abstimmungsregeln in Instanzvariablen gespeichert. Schließlich enthält jedes Objekt dieser Klasse eine Sammlung (collection) von `Point`-Objekten, die die Elemente des Simplex darstellen.
- **Point:** Die einzelnen Elemente im diskreten (K, L) -Simplex werden über Instanzen dieser Klasse dargestellt.
- **Triangle:** Die Klasse dient der graphischen Visualisierung.
- **Vertex:** Dies ist eine Hilfsklasse, die ebenfalls zur graphischen Visualisierung der Abstimmungsregeln dient. Die Elemente des Simplex werden im visualisierten Graphen durch Instanzen dieser Klasse modelliert.
- **SimClient:** Die Klasse beinhaltet die wesentlichen Methoden zur parallelen Erzeugung einer Stichprobe.
- **SimClientStart:** Diese Klasse ermöglicht den „vereinfachten“ Start der Simulation auf einem Rechner im Netzwerk. Sie startet einen Prozess auf diesem Rechner, d.h. instanziert ein Objekt der Klasse `SimulationNetwork` derart, dass dieses über Netzwerk zur Berechnung von Simulationsläufen zur Verfügung steht.
- **SimCom:** Hierbei handelt es sich um eine Schnittstelle (interface), die zur Berechnung von Simulationsdaten über RMI (remote method invocation) notwendig ist.

Simplex

Der Simplex, auf dem die Abstimmungsregeln simuliert werden, ist im Programm durch die Klassen `Simplex` und `Point` modelliert: die Klasse `Simplex` enthält eine Sammlung von Instanzen des Typs `Point`, ein sogenanntes `TreeSet`, d.h. eine (in diesem Fall lexikographisch) geordnete Menge. Ein Objekt vom Typ `Point` stellt wiederum ein Element des diskreten Simplex dar.

4. Simulation

Die Erzeugung der Datenstruktur eines Simplex oder - in anderen Worten - die Bestimmung aller Elemente eines Simplex, nachdem der Benutzer die Parameter K (Dimension) und L (Größe) festgelegt hat, erfolgt über einen rekursiven Algorithmus. Ein solches Verfahren, einmal gestartet, ruft sich quasi immer wieder selbst auf (Rekursion), bis eine festgelegte Abbruchbedingung erfüllt ist. In diesem Fall dient der rekursive Algorithmus dazu, alle K -dimensionalen Vektoren nicht negativer ganzer Zahlen zu bestimmen, die in der Summe ihrer Einträge L ergeben. Für jeden solcher Vektoren wird ein Objekt des Typs `Point` erzeugt und dieses (in einer Instanzvariablen) mit seinen „Koordinaten“ (also den Einträgen des Vektors) versehen.

Ein `Point`-Objekt enthält neben seinen „Koordinaten“ noch zwei weitere Informationen, die als Instanzvariablen gespeichert werden: zum einen die Masse, also wie viele Agenten das Element als Peak angegeben haben, zum anderen die Remoteness. Diese wird immer dann in der Instanzvariablen gespeichert, sobald die Instanzmethode `getRemoteness()`, die die Remoteness berechnet, aufgerufen wird. Eine weitere wichtige Instanzmethode eines `Point`-Objekts ist `getNeighbors()`, die die Nachbarknoten (d.h. alle Elemente des Simplex mit Abstand 1 bzgl. $d(\cdot, \cdot)$) als Ergebnis zurückliefert. Da diese „brute-force“ berechnet werden, also die Distanz zu allen Elementen im Simplex berechnet wird und anschließend jene Elemente ausgewählt werden, die einen Abstand von 1 haben, wird die Menge der Nachbarn ebenfalls nach der ersten Berechnung als Instanzvariable gespeichert. Somit ist nur beim ersten Aufruf der Instanzmethode diese zugegeben ineffiziente Berechnung notwendig.

Ebenfalls zur Steigerung der Laufzeiteffizienz des Programms ist in der Klasse `Simplex` eine Instanzvariable angelegt, die stets die Teilmenge der Punkte im Simplex mit positiver Masse mitführt. So muss beispielsweise bei der Berechnung der Remoteness eines Punktes nur über diese Teilmenge (und nicht über alle Elemente im Simplex) iteriert werden.

Agenten

Die Eigenschaften und das Verhalten eines Agenten sind in der gleichnamigen Klasse `Agent` modelliert. Mittels der Instanzmethode `setPeak()` werden der (wahre) Peak des Agenten, seine Präferenz und die Parameter der dazugehörigen Nutzenfunktion (zu Details siehe Abschnitt 4.1.2) im Objekt gespeichert. Ebenfalls als Instanzvariablen werden der aktuelle announced Peak sowie der der vorangegangenen Iteration (um zu prüfen, ob sich dieser geändert hat) festgehalten. Mittels der Methode `getUtility()` bestimmt der Agent den Nutzen einzelner Elemente des Simplex.

Die Bestimmung der best response für die jeweiligen Abstimmungsregeln entsprechend Gleichung (4.1) erfolgt ebenfalls über Instanzmethoden. Mit Ausnahme der Midpoint-Regel ist die Vorgehensweise dabei „brute force“: Die Methode berechnet für alle möglichen announced Peaks (d.h. alle Elemente des diskreten Simplex) das Ergebnis der Abstimmungsregel und ändert den announced Peak, falls der Agent dadurch einen Nutzensgewinn hat (siehe auch Gleichung (4.1) für Details).

Die Bestimmung der best response zur mengen- und punktwertigen Midpoint-Regel ist hingegen effizienter realisierbar, da sich die Menge der durch Misrepräsentation für einen Agenten erreichbaren Midpoints - wir nennen sie im Folgenden das *Optionset* - formal einfach beschreiben lässt: Man betrachte hierzu einen Agenten h und die Verteilung der Peaks p^{-h} , die sich ohne den Peak des Agenten h ergibt. Ein Element im Simplex wird durch den Agenten insbesondere dadurch unterstützt, dass er dieses Element als Peak angibt, da sich die hierdurch die Remoteness des Elements nicht erhöht. Wie man zeigen kann, ist ein Element $x \in X$ genau dann Bestandteil des Optionset des Agenten, wenn die Differenz zwischen seiner Remoteness und der Remoteness eines Midpoints (unter der Verteilung p^{-h}) geteilt durch den kürzesten Abstand zu den Midpoints kleiner gleich 1 ist. Dann ist es für Agent h möglich, einen solchen Punkt als Element der Menge der Midpoints zu erhalten, indem er diesen Punkt als Peak angibt. (Damit kann jedoch keine Aussage darüber getroffen werden, welche Elemente sonst noch zur Menge der Midpoints gehören.) Präzise formuliert gilt: Sei $O(p^{-h})$ das Optionset des Agenten h .

$$\forall x \in M(p^{-h}) : \quad x \in O(p^{-h}) \quad (4.2)$$

$$\forall x \notin M(p^{-h}) : \quad x \in O(p^{-h}) \Leftrightarrow \min_{y \in M(p^{-h})} \frac{R(x) - R(y)}{d(x, y)} \leq 1 \quad (4.3)$$

Die Bestimmung des Optionset eines Agenten erfolgt im Algorithmus dadurch, dass der Peak „abgeschaltet“ (also aus der Verteilung entfernt) wird, die Nachbarn (über `Point.getNeighbors()`) der Midpoints (unter p^{-h}) berechnet und anschließend die obigen beiden Kriterien geprüft werden. Dann kann das beste Element des Agenten in seinem Optionset bestimmt werden. Anschließend ist noch zu klären, durch welchen announced Peak dieses Element erreicht werden soll. Man beachte, dass ein Punkt im Simplex unter der Midpoint-Regel insbesondere dadurch unterstützt wird, dass man diesen als announced Peak angibt. Entsprechend (Vgl. Lemma 3.2 und Theorem 3.2.) kann die best response (Gleichung (4.1)) ebenfalls über eine iterative Betrachtung der Nachbarn dieses Punktes berechnet werden. Da es sich bei der Shadow Midpoint-Regel um eine Social Choice Function handelt, die aus der Menge der Midpoints ein Element wählt, ist das Vorgehen zur Bestimmung der best response unter dieser Regel analog.

Schließlich ist bei der Bestimmung der best response noch ein numerisches Problem zu lösen: Bei der Zahlendarstellung im Computer¹⁰ kann es (unter anderem bei Divisionen etc.) zu Ungenauigkeiten und Rundungsfehlern kommen. Beispielsweise wurden bei der Programmentwicklung Manipulationen beobachtet, obwohl alle Agenten perfekte Substitute als Präferenzen hatten. Unter solchen Präferenzen sind die Agenten zwischen allen Elementen des Simplex indifferent - es besteht also kein Anreiz zur Misrepräsentation. Ursächlich dafür sind die erwähnten Ungenauigkeiten bei der Zahlendarstellung, so dass manche Ergebnisse von Abstimmungsregeln in der Summe nicht den Wert L (die Größe des Simplex), sondern einen Wert $L + \epsilon$,

¹⁰Im Simulationsprogramm sind die Abstimmungsergebnisse als Gleitkommazahlen des Typs `double` realisiert.

4. Simulation

$\epsilon > 0$, aufweisen. Um solche Fälle, die das Ergebnis der Simulationsstudie verfälschen würden, auszuschließen, wird eine Änderung des announced Peak durch die best-response-Methoden nur dann durchgeführt, wenn der dadurch erzielte Nutzen Gewinn eine Schranke - die Instanzvariable `mani_threshold` - überspringt. Wie in Abschnitt 4.1.2 noch ausführlich dargestellt wird, sind alle Nutzenfunktionen auf das Intervall $[0; 1]$ normalisiert. Der Wert von `mani_threshold` wird bei der Zuweisung eines Peaks an einen Agenten (durch `Agent.setPeak()`) festgelegt: Er beträgt mindestens 0.0001 bzw., falls dieser Wert größer ist, ein Tausendstel der Nutzendifferenz zwischen dem Peak des Agenten und dessen „bestem“ Nachbarknoten (bzgl. der Nutzenfunktion).

Abstimmungsregeln

Die Berechnung der in Kapitel 3 vorgestellten Abstimmungsregeln erfolgt über Instanzmethoden der Klasse `Simplex`:

Midpoint-Regel Zur Bestimmung der Menge der Midpoints ist die Lösung des Minimierungsproblems aus Definition 3.6 notwendig. Wären keine weiteren Eigenschaften dieser Regel bekannt, so müsste man die Remoteness jedes Elements im Simplex berechnen und anschließend die Elemente mit minimaler Remoteness als Midpoints selektieren - ein äußerst zeitaufwändiges Vorgehen.

Mithilfe der Theoremen 3.2 und 3.3 ist jedoch die Berechnung der Menge der Midpoints erheblich effizienter leistbar: Beginnend bei einem Element des Simplex wird geprüft, ob dieses Element im paarweisen Vergleich gegen einen seiner Nachbarn verliert. In anderen Worten: man prüfe, ob es einen Nachbarknoten mit niedrigerer Remoteness gibt. Falls dies der Fall ist, so berechnet die Instanzmethode `getMidpoints()` für den Nachbarn mit geringster Remoteness wiederum die Remoteness von dessen Nachbarn und prüft erneut. Nach Theorem 3.3 und Lemma 3.2 endet ein solches Verfahren in der Menge der Midpoints. Da diese nach Theorem 3.2 konvex ist, muss nur noch berechnet werden, wie viele Elemente diese Menge umfasst, d.h. die Nachbarschaft eines Midpoints „abgetastet“ werden.

Als Startknoten wird im Algorithmus der announced Peak des ersten Agenten gewählt, da wie bereits erwähnt die Menge der Midpoints zwischen den announced Peaks der Agenten liegen muss.

Shadow Midpoint-Regel Um den Shadow Midpoint, also das Ergebnis der punktwertigen Midpoint-Regel, zu berechnen, bestimmt die Instanzmethode `getShadowMidpoint()` zuerst die Menge der Midpoints. Anschließend wird entsprechend Proposition 3.4 und Proposition 3.5 der Midpoint mit kürzestem euklidischen Abstand bestimmt.

Eine andere Methode, den Shadow Midpoint zu berechnen, wäre alle Elemente im Simplex mit einer zusätzlichen Masse von $\epsilon > 0$ zu versehen und anschließend entsprechend des Algorithmus zur Bestimmung der Menge der Midpoints vorzugehen. Neben dem Problem, ϵ hinreichend klein zu wählen, würde dieses Verfahren

die Gefahr numerischer Probleme mit sich bringen. Beispielsweise ist wegen der Binärdarstellung von Gleitkommazahlen darauf zu achten, dass für ϵ ein Wert, der als Zweierpotenz darstellbar ist, gewählt wird. Weitere Probleme könnten sich bei sehr kleinen Werten von ϵ auf großen Simplexes ergeben, da in solchen Fällen die Genauigkeit von Zahlen des Typs `double` nicht mehr ausreichen kann.

Mittelwert-Regel Die Berechnung dieser Abstimmungsregel ist nicht mit Schwierigkeiten verbunden und effizient realisiert - zumal zur Berechnung lediglich die Elemente im Simplex betrachtet werden müssen, die als Peak vorgeschlagen wurden. Diese Elemente sind wie bereits ausgeführt in der Klasse `Simplex` in einer Instanzvariablen gespeichert.

Median-basierte Abstimmungsregeln Ebenfalls unproblematisch ist die Berechnung der median-basierten Abstimmungsregeln. (Zur Bestimmung des koordinatenweisen Medians sind wiederum nur die Elemente des Simplex mit positiver Masse von Interesse.) Auch wenn in der Simulationsstudie immer eine ungerade Anzahl von Agenten gewählt wurde, ist die Definition des Medians im Programm für gerade Agentenzahlen modifiziert: Sei $x(n)$ eine geordnete Folge von Beobachtungen. Dann ist der Median gegeben durch

$$x_{med} := \frac{x(\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor) + x(\lceil \frac{n+1}{2} \rceil)}{2}.$$

Im Fall einer ungerade Anzahl von Agenten, gilt $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$, d.h. nur ein Agent „sitzt“ an der Stelle des Medians. Ist die Anzahl der Agenten jedoch gerade, so gilt $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor \neq \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$, und demzufolge haben zwei Agenten Einfluss auf den Median. Um solche Effekte zu vermeiden, ist in den median-basierten Abstimmungsregeln der Median definiert durch

$$x_{med} := x\left(\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor\right).$$

Damit hängt der Median einer Koordinate unabhängig von der Agentenanzahl immer nur von einem Agenten ab.

Die Implementierung der normalisierten Median-Regel erfolgt entsprechend Definition 3.12. Die sequentielle Median-Regel ist sowohl für die Permutation $\delta(i) = i$, $i \in \{1, 2, \dots, K\}$ ¹¹, als auch für $\delta(i) = K - i + 1$, $i \in \{1, 2, \dots, K\}$ ¹², durch die Simulation berechenbar. Bei der Berechnung des Condorcet Center und des Inertial Median erweist sich jeweils als einzige Schwierigkeit die Bestimmung von z (siehe Definition 3.14) bzw. c (siehe Definition 3.15). Dies ist jedoch über ein iteratives Vorgehen ebenfalls in einem vertretbaren Aufwand möglich.

Datenaufzeichnung und -auswertung

Die Aufzeichnung der simulierten Daten erfolgt mittels zwei Dateien, die je Stichprobe erzeugt werden: nach Eingabe eines Dateinamens durch den Benutzer erstellt das

¹¹Diese ist im Programm als `PDMedian` bezeichnet.

¹²Selbige ist im Programm als `PDRMedian` bezeichnet.

4. Simulation

Informationen zur Datei: agent05_cd.txt

Dimensionen: 3

Größe: 99

Anzahl Wähler: 5

Nutzen: Cobb-Douglas

Simulationsparameter

Anzahl Simulationsläufe: 1000

Iterationen: 200

Datengenerierender Prozess: Dirichletverteilung mit 1,2,3

zeitlicher Ablauf: zufällig

Untersuchte Abstimmungsregeln:

- ShadowMidpoint
- Mean
- NMedian
- PDMedian
- PDRMedian
- CondorcetCenter
- InertialMedian

Vergleich mit der util. Lösung und random dictatorship

Daten werden standardisiert

Abbildung 4.1.: Beispiel einer „Info“-Datei

Programm eine „Info“-Datei, in der die gewählten Parametereinstellungen festgehalten sind. Ist zum Beispiel `musterdatei` der vom Benutzer gewählte Dateiname, so werden in `musterdatei_info.txt` die Parametereinstellungen gespeichert. Abbildung 4.1 zeigt ein Beispiel des Inhalts einer solchen „Info“-Datei zu einer Stichprobe mit 5 Agenten.

Die Ergebnisse der Simulation hingegen werden in `musterdatei.txt` im sogenannten CSV-Format (Comma-Separated Values) aufgezeichnet. Dabei enthält die erste Zeile der Datei die Variablenbezeichnungen, jede folgende Zeile je einen Simulationslauf. Die einzelnen Variablen sind - wie der Name des Dateiformat bereits sagt - durch Kommata getrennt¹³. Jeder Zeile vorangestellt ist eine laufende Nummer zur besseren Identifikation eines Simulationslaufs. Am Ende jeder Zeile sind die Peaks aller Agenten bzw. je nach zeitlichem Ablauf der Manipulation und Wahl der Präferenzen der Agenten auch weitere Informationen gespeichert. Dies stellt sicher, dass jeder Simulationslauf sowohl „händisch“ als auch über die Programmoptionen

¹³Als Dezimaltrennzeichen dient der Punkt.

(2) und (3) nachgestellt und damit auch überprüft werden kann.

Die statistische Auswertung der Simulationsdaten erfolgt hauptsächlich mittels Microsoft Excel. Regressionsanalysen und andere multivariate statistische Verfahren - teilweise auch zu Testzwecken - wurden mit SPSS durchgeführt.

Weitere Möglichkeiten

Dieser Abschnitt führt in aller Kürze weitere Möglichkeiten des Simulationsprogramms, die nicht Gegenstand dieser Dissertation sind, auf:

- Wie bereits erwähnt lassen sich für gegebene Profile von Peaks Abstimmungsregeln simulieren (Programmoption (2)) und so genauer studieren. Ebenfalls können Kenngrößen wie das Ergebnis einer Abstimmungsregel etc. über Programmoption (3) berechnet werden.
- Für $K = 3$ Dimensionen und bestimmte Werte von L lassen sich die Abstimmungsregeln auch graphisch visualisieren.
- Ferner ist auch die Simulation der mengenwertigen Midpoint-Regel, sowohl in Form einer Simulationsstudie als auch als Studium einzelner Profile, möglich. Als zusätzlicher Parameter können hierzu die Präferenzen der Agenten über Teilmengen des Simplex festgelegt werden. Ebenso werden bei der Simulation einer Stichprobe weitere Kenngrößen für solche Teilmengen wie beispielsweise der Hammingabstand zwischen der unmanipulierten Menge der Midpoints und den Midpoints nach Manipulation aufgezeichnet.
- Schließlich ist es möglich, mittels der Methode `infoPeaks()` der Klasse `SimulationNetwork` jeweils koordinatenweise das arithmetische Mittel, die Varianz, die Schiefe sowie den Exzess der wahren und vorgeschlagenen Peaks zu berechnen. Diese Methode wurde während der Entwicklung der Simulation unter anderem dazu genutzt, einen angemessenen Stichprobenumfang zu bestimmen. Regressions- und Korrelationsanalysen zu diesen Kenngrößen zeigten bereits in einem frühen Stadium der Programmentwicklung keinen erkennbaren Erklärungsbeitrag für das Verhalten der einzelnen Regeln bezüglich diverser Variablen. Daher wurde bei der Erzeugung der Stichprobendaten, die in dieser Dissertation diskutiert werden, auf die Berechnung dieser Kenngrößen verzichtet.

4.1.2. Parameter

Dieser Abschnitt stellt die Parameter der Simulation und die dabei zur Verfügung stehenden Wahlmöglichkeiten bei der Belegung der selbigen vor. Es wird auch jeweils darauf eingegangen, welche Wahl bei einem Parameter in der Simulationsstudie in der Regel getroffen wurde.

Dabei unterscheiden wir drei Gruppen von Einstellungen: Parameter, die sich auf den Simplex selbst beziehen, solche, die das Verhalten der Agenten regeln, und

4. Simulation

schließlich Einstellungen betreffend die Erzeugung der Stichprobe. Wie bereits erwähnt lassen sich die Einstellungen zu Simplex und Agenten gemeinsam mit den Peaks der Agenten speichern und entsprechend gespeicherte Konfigurationen laden. Bei der Erstellung einer Stichprobe wird in einer „Info“-Datei (siehe 4.1.1) die Belegung aller Parameter aufgezeichnet.

Dimensionen und Größe des Simplex

Ein Simplex wird durch seine Dimension (also K) und seine Größe (also L) festgelegt. Genau diese beiden Parameter werden in Menüpunkt (11) entsprechend durch den Benutzer auch vorgegeben. Fraglich für die Simulationsstudie ist natürlich, was geeignete Werte für K und L sind.

Wie bereits erwähnt (siehe Abschnitt 4.1) werden wir immer davon ausgehen, dass der betrachtete Simplex die Größe 1 hat. Den diskreten (K, L) -Simplex X , der in der Simulation tatsächlich eingesetzt wird, sehen wir also als diskrete Einbettung in einen kontinuierlichen $(K, 1)$ -Simplex \tilde{X} . Dementsprechend normalisieren wir bei den einzelnen Variablen die Distanz zwischen zwei Knoten mittels

$$\tilde{d}(x, y) := \frac{d(x, y)}{L}$$

Offen ist nun die Frage, was eine geeignete Wahl von L im diskreten Simplex ist. Hierzu sind zwei Aspekte zu betrachten: *Erstens* kann ein zu „grober“ Simplex (d.h. ein zu kleiner Wert für L) die Ergebnisse bezüglich Manipulierbarkeit gleich auf zweierlei Art verzerren. Einerseits können sowohl „Mikromanipulationen“¹⁴ wegfallen, andererseits muss ein Agent mindestens (gemessen in $\tilde{d}(\cdot, \cdot)$) um $\frac{1}{L}$ seinen Peak ändern, so dass diese „Mindestmanipulation“ umso größer ist, desto kleiner L gewählt wurde. *Zweitens* ist zu beachten, wie dicht der diskrete Simplex mit Peaks belegt ist. Präzise gesprochen ist das Verhältnis aus der Anzahl der Agenten zur Anzahl aller möglichen Peaks (im diskreten Simplex) eine kritische Größe. Ist dieses Verhältnis zu klein, so sinkt die Pivotalität der Agenten (also die Möglichkeit, überhaupt das Ergebnis der Regel zu beeinflussen) unter den meisten Regeln - im Gegensatz zur Betrachtung im kontinuierlichen Simplex. Beispielsweise kann bei median-basierten Abstimmungsregeln kein Agent (allein) Einfluss auf das Ergebnis nehmen, wenn mehrere Agenten ihre Peaks an den einzelnen Werten des koordinatenweisen Medians haben. Ähnliches lässt sich für die Midpoint-Regel sagen. Man beachte, dass nach Proposition 3.3 kein Punkt mit einem Peak zwischen zwei Midpoints sein kann. Dementsprechend sind die Möglichkeiten eines Agenten, unter der Midpoint-Regel Einfluss auf das Ergebnis zu nehmen, umso mehr eingeschränkt, desto dichter die Peaks im diskreten Simplex liegen.

Um den Simplex in der Simulation hinreichend groß zu wählen und um obige Effekte möglichst auszuschließen, wurden in der Entwicklungsphase des Simulationsprogramms mehrere Stichproben auf Simplexes mit unterschiedlichen Werten für

¹⁴Das sind solche Manipulationen, bei denen der Abstand zwischen dem vorgeschlagenen und dem wahren Peak sehr klein sind.

L generiert. Anschließend wurden die Mittelwerte aller Variablen, die von L bzw. $\tilde{d}(\cdot, \cdot)$ abhängen, zwischen den Stichproben verglichen, um zu prüfen, ab welchem Wert für L sich diese nur noch unmerklich ändern. Nach diesem Vorgehen erscheint für die in der Simulationsstudie betrachtete Zahl von Agenten (3 bis 45) die Wahl von $L = 99$ geeignet.

Eine weitere Frage ist die Wahl der Dimension des Simplex, also von K . Im Fall $K = 2$ lassen sich alle Alternativen auf einer Linie anordnen, entsprechend hat das Median-Wähler-Theorem Gültigkeit und es gäbe im Rahmen der Simulation keine offenen Fragen zu klären. Folglich ist eine Wahl von $K > 2$ notwendig. Im Fall von $K = 3$ und $L = 99$ ergeben sich 5050 Elemente im diskreten Simplex, bei $K = 4$ sind es bereits 171700. Entsprechend dazu steigt sowohl der Speicherbedarf des Programms als auch der Rechenaufwand. Daher gilt in der Simulationsstudie in den meisten Fällen $K = 3$ und $L = 99$. Um den Einfluss der Dimension eines Simplex auf die Kenngrößen zu untersuchen, ist K zwischen 3 und 5 variiert. Um den Rechenaufwand dabei in bewältigbaren Grenzen zu halten, wurde in diesen Fällen für L ein kleinerer Wert gewählt.

Anzahl der Agenten

Die Veränderung der Anzahl der Agenten ist die wohl naheliegendste und wichtigste „Stellschraube“ der Parameter, um den Einfluss auf verschiedene Kenngrößen zu messen. In anderen Worten: Die Variation der Anzahl der Agenten soll Antworten auf die Frage liefern, ob die Manipulierbarkeit einer Abstimmungsregel größer oder kleiner ist, wenn mehr Agenten an der Abstimmung teilnehmen.

Im Simulationsprogramm sind alle Methoden sowohl für gerade als auch ungerade Zahlen von Agenten ausgelegt. In der Literatur finden sich jedoch zahlreiche Hinweise auf „odd-even“-Effekte, also Schwankungen von Kenngrößen aufgrund des Wechsels von ungeraden und geraden Agentenzahlen, so beispielsweise bei Smith (1999) und Lindner (2008). Um solche Effekte zu vermeiden, beschränken wir uns in der Simulationsstudie ausschließlich auf ungerade Agentenzahlen.

Die Anzahl der Agenten wird zwischen 3 und 45 variiert. Dabei ist die „Schrittweite“, also der Abstand zwischen zwei Anzahlen anfangs 2, später 4 und schließlich 8. Es werden somit Datensätze für 3, 5, 7, 9, 13, 17, 21, 29, 37 und 45 Agenten erzeugt und ausgewertet.

Präferenzen und Nutzenfunktionen

Die Frage, inwiefern für Agenten ein Anreiz zur Misrepräsentation ihres Peaks besteht, wird auch wesentlich davon abhängen, welche Präferenzen sie über die Elemente des Simplex haben. Wie bereits mehrfach erwähnt wurde, werden wir uns dabei auf verallgemeinert eingipflige Präferenzen beschränken. Bei der Instanziierung eines Agenten wird dessen Präferenz durch den Benutzer festgelegt. Jede Klasse von Präferenzen, die in der Simulation realisiert ist, wird dabei immer durch dieselbe Klasse von Nutzenfunktionen repräsentiert, um eine kardinale Vergleichbarkeit zu erleichtern. Auf die zugehörigen Nutzenfunktionen wird in der unten folgenden Übersicht

4. Simulation

eingegangen.

Bei jedem Simulationslauf werden den Agenten entsprechend einer gewählten Verteilung neue zufällige Peaks zugewiesen. Anschließend werden für jeden Agenten - gegeben der wahre Peak und die Präferenzen - die Parameter der Nutzenfunktion derart gewählt (siehe unten), so dass der Peak das maximale Element des Agenten im Simplex bezüglich der Nutzenfunktion ist. Interpretiert man die einzelnen Dimensionen eines Simplex als Geldausgaben für Güter, so ergibt sich daraus, dass die Agenten Präferenzen bezüglich der *Geldausgaben für diese Güter* haben. Der Peak x^i stellt also die Lösung des Maximierungsproblems

$$\begin{aligned} \max_{x \in \tilde{X}} u^i(x) \\ \text{s.t. } \sum_{i=1}^K x_i = L \end{aligned} \quad (4.4)$$

dar. Insbesondere bei Cobb-Douglas- und CES-Präferenzen werden die Parameter dabei so gewählt, dass für alle $t > 0$ gilt:

$$u^i(t \cdot x_1, t \cdot x_2, \dots, t \cdot x_K) = t \cdot u^i(x_1, x_2, \dots, x_K),$$

d.h. eine Erhöhung der Geldausgaben um Faktor t erhöht den Nutzen des Agenten im gleichen Verhältnis. Insbesondere sind die so parametrisierten Nutzenfunktionen homothetisch und homogen vom Grade 1.

Weiterhin erfolgt nach der Parametrisierung der Nutzenfunktion eine Skalierung des Nutzens auf eine 0-1-Skala. Dabei wird der maximale Nutzen des Agenten auf 1 gesetzt, d.h. ist x^i der Peak des Agenten, so gilt $\tilde{u}^i(x^i) = 1$, und der Nutzen im Nullpunkt auf den Wert 0, also $\tilde{u}^i(0, 0, \dots, 0) = 0$. Damit gilt für jedes $w \in \tilde{X}$:

$$\tilde{u}^i(w) := \frac{u^i(w) - u^i(0, 0, \dots, 0)}{u^i(x^i) - u^i(0, 0, \dots, 0)}. \quad (4.5)$$

Zusammen mit der Parametrisierung der Nutzenfunktion u^i derart, dass diese homogen vom Grade 1 ist, erlauben die Werte von \tilde{u}^i eine anschauliche Interpretation: Misst ein Agent i einem $w \in \tilde{X}$ den Nutzen 0.8 zu, gilt also $\tilde{u}^i(w) = 0.8$, so ist der Agent indifferent zwischen w und 80 Prozent seines Budgets (also $0.8 \cdot L$), wenn er dieses entsprechend seinen Präferenzen optimal aufteilen darf. In anderen Worten: Das Element w spendet dem Agenten soviel Nutzen wie 80 Prozent seines Peaks, also $0.8 \cdot x^i$.

Bei der Konfiguration der Agenten stehen schließlich die folgenden Wahlmöglichkeiten zur Verfügung:

Nutzenfunktion:

- (1) metric single-peaked
- (2) Cobb-Douglas
- (3) perfekte Substitute
- (4) perfekte Komplemente
- (5) CES
- (6) CES mit zufälligem rho

metric single-peaked Hierdurch werden den Agenten metrisch eingipflige Präferenzen zugewiesen. Ist x^i der Peak des Agenten, so gilt für die Nutzenfunktion:

$$u^i(w) = -d(w, x^i).$$

Wie in Kapitel 3 erwähnt, sind die Midpoint-Regel, die sequentielle Median-Regel und die Inertial Median-Regel unter diesen Präferenzen nicht manipulierbar. In der Simulationsstudie wird diese Wahlmöglichkeit eingesetzt, um zu überprüfen, wie stark die anderen vorgestellten Abstimmungsregeln sich bezüglich verschiedener Kenngrößen verhalten. Weiterhin wird überprüft, welche Wohlfahrtseigenschaften die unter diesen Präferenzen nicht manipulierbaren Abstimmungsregeln haben.

Cobb-Douglas Unter diesen Präferenzen entspricht die den Nutzen maximierende Allokation eines Agenten immer einer proportionalen Aufteilung des Budgets L auf die K Dimensionen / Güter - und zwar unabhängig davon, wie groß L ist. Im Programm werden diese Präferenzen durch die Nutzenfunktion

$$u^i(w) = \prod_{j=1}^K w_j^{\alpha_j}$$

repräsentiert. Ist x^i der Peak, so gilt für die Parametrisierung:

$$\alpha_j = \frac{x_j^i}{L}.$$

Entsprechend folgt $\sum_{j=1}^K \alpha_j = 1$ - und die Nutzenfunktion ist damit wie gewünscht homothetisch und homogen vom Grade 1. In der Simulationsstudie werden diese Präferenzen als „Standardfall“ gesetzt, d.h. im Normalfall werden bei Variation anderer Parameter Cobb-Douglas-Präferenzen angenommen.

Perfekte Substitute Diese Präferenzen werden durch die Nutzenfunktion

$$u^i(w) = \sum_{j=1}^K w_j$$

repräsentiert. Entsprechend gilt für alle $w \in \tilde{X}$: $u^i(w) = L$, so dass unter keiner Abstimmungsregel für einen Agenten ein Anreiz zur Misrepräsentation besteht. In der Simulationsstudie werden diese Präferenzen lediglich zu Testzwecken (beispielsweise zur Untersuchung numerischer Probleme bei der Bestimmung der best response) eingesetzt.

Perfekte Komplemente Diese Präferenzen sind durch die Nutzenfunktion

$$u^i(w) = \min \{ \alpha_1 w_1, \alpha_2 w_2, \dots, \alpha_K w_K \}$$

4. Simulation

charakterisiert. Unter diesen Präferenzen besteht für den Agenten keine Möglichkeit, Werte einer Dimension (d.h. beispielsweise Geldausgaben in einer Dimension) durch Einträge in einer anderen Dimensionen zu substituieren - im Gegensatz beispielsweise zu Cobb-Douglas-Präferenzen. Ist x^i der Peak, so gilt für die Parametrisierung:

$$\alpha_j = \frac{1}{x_j^i}.$$

Mit dieser Festlegung gilt auch für perfekte Komplemente, dass diese homothetisch und homogen vom Grade 1 sind. Während der Entwicklung des Simulationsprogramms wurden diese Präferenzen als „Extremfall“, in denen keine Substitution von Einträgen einer Dimension durch eine andere Dimension möglich ist, untersucht.

CES-Präferenzen Diese Präferenzen zeichnen sich - wie der Name (constant elasticity of substitution) schon sagt - durch eine konstante Substitutionselastizität aus. Diese (siehe Varian (1992)) ist gegeben durch

$$\delta := \frac{\frac{d(x_2/x_1)}{x_2/x_1}}{\frac{dMRS}{MRS}} = \frac{\frac{d(x_2/x_1)}{x_2/x_1}}{\frac{d(p_2/p_1)}{p_2/p_1}}. \quad (4.6)$$

Die Substitutionselastizität misst das Verhältnis einer prozentualen Veränderung des Verhältnisses zweier Güter zu einer prozentualen Veränderung der marginalen Rate der Substitution zwischen diesen Gütern. (Diese ist in der Entscheidung des Haushalts gleich dem Preisverhältnis p_2/p_1 .) Dabei sind x_2 und x_1 zwei Güter und MRS bezeichne die *marginale Rate der Substitution* zwischen diesen Gütern. CES-Präferenzen werden durch die Nutzenfunktion

$$u^i(w) = \left(\sum_{j=1}^K \alpha_j w_j^\rho \right)^{\frac{1}{\rho}}$$

charakterisiert. Dabei gilt für die Substitutionselastizität δ (siehe ebenso Varian (1992)):

$$\delta = \frac{1}{1 - \rho}.$$

Damit können über eine Variation des Parameters ρ viele verschiedene Präferenzen abgebildet werden. So lässt sich einfach erkennen, dass es sich bei CES-Präferenzen mit $\rho = 1$ um perfekte Substitute mit der Nutzenfunktion

$$u^i(w) = \sum_{j=1}^K \alpha_j w_j$$

handelt, im Fall von $\rho \rightarrow 0$ eine Cobb-Douglas-Präferenzen repräsentierende Nutzenfunktion

$$u^i(w) = \sum_{j=1}^K \alpha_j \ln w_j$$

als Grenzwert resultiert, sowie bei $\rho \rightarrow -\infty$ sich perfekte Komplemente mit

$$u^i(w) = \min \{w_1, w_2, \dots, w_K\}$$

als Grenzwert ergeben.

Die Bestimmung der Parameter α_i kann für gegebenes ρ wie folgt durchgeführt werden: Löst man das Maximierungsproblem aus (4.4) mittels eines Lagrange-Ansatzes und bildet die Bedingungen erster Ordnung, so folgt für alle $x_i \neq 0$, $x_j \neq 0$:

$$\frac{\alpha_j}{\alpha_i} = \left(\frac{x_i}{x_j} \right)^{\rho-1}.$$

Dementsprechend werden für alle x_i mit $x_i = 0$ die zugehörigen Parameter $\alpha_i = 0$ gesetzt. Die anderen Werte können iterativ nach der obigen Gleichung bestimmt werden. Anschließend erfolgt die Normalisierung auf $\sum_{j=1}^K \alpha_j = 1$, was lediglich eine monotone Transformation der Nutzenfunktion darstellt. Hierdurch wird wiederum gesichert, dass die Nutzenfunktion homothetisch und homogen vom Grade 1 ist. Setzt im Simulationsprogramm ein Benutzer $\rho = 0$, so wird aus numerischen Gründen die Darstellung der Cobb-Douglas-Präferenzen entsprechend der Nutzenfunktion $u^i(w) = \prod_{j=1}^K w_j^{\alpha_j}$ gewählt.

In der Simulationsstudie werden diese Präferenzen eingesetzt, um das Verhalten zahlreicher Kenngrößen bei einer Variation von ρ zu untersuchen. Für ρ werden dabei Werte 0.9, 0.5, 0.1, 0.0 (Cobb-Douglas), -2 und -5 gewählt. Man beachte, dass die im vorangegangenen Abschnitt eingeführten perfekten Komplemente mit Nutzenfunktion $u^i(w) = \min \{\alpha_1 w_1, \alpha_2 w_2, \dots, \alpha_K w_K\}$ *nicht* als Grenzwert einer CES-Nutzenfunktion für $\rho \rightarrow -\infty$ resultieren. Deshalb wurde in der Simulationsstudie auf die Auswertung dieser Präferenzen verzichtet und der Einfluss ein geringen Substitutionselastizität durch den oben erwähnten Fall von CES-Präferenzen mit $\rho = -5$ untersucht.

CES mit zufälligem ρ Hierbei handelt es sich um CES-Präferenzen, wobei der Parameter ρ jedes Agenten zu Beginn eines neuen Simulationslaufs zufällig festgelegt wird. Die Entscheidung fällt dabei gleichverteilt zwischen den Werten 0.9, 0.5, 0.0, -2 , -5 und -10 . Im Datensatz wird entsprechend aufgezeichnet, welcher Agent mit welchem Parameter belegt wurde, so dass auch in diesem Fall jeder einzelne Simulationslauf nachgestellt und überprüft werden kann. In der Simulationsstudie lag der Schwerpunkt darauf zu verstehen, wie sich eine Variation von ρ auf die einzelnen Kenngrößen auswirkt. Daher wurde auf die zufällige und damit verbundene unterschiedliche Wahl für die Agenten verzichtet.

Reihenfolge der Manipulation

In Abschnitt 4.1 wurde beschrieben, wie man (mittels Iterationen) bei einem Simulationslauf vom Profil der wahren Peaks zu einer konvergierten Situation gelangt. Offen geblieben dabei ist die Reihenfolge der Manipulation durch die Agenten. Hierzu sind im Programm vier Möglichkeiten vorgesehen:

4. Simulation

Zufällig Die Agenten manipulieren in einer zufälligen, zuvor durch den Computer festgelegten Reihenfolge. Dabei sieht sich jeweils ein Agent dem aktuellen Profil der announced Peaks in Iteration t gegenüber und bestimmt anschließend gegeben dieses Profil seine best response. Sodann wird das Profil entsprechend aktualisiert (d.h. sollte es aufgrund der best response zu einem neuen announced Peak des Agenten gekommen sein) und Iteration $t + 1$ beginnt. Ein Iterationsschritt entspricht demnach einer Manipulation. Die Simulation ist so programmiert, dass der Zufallsgenerator zu Beginn einer Iteration nur solche Agenten auswählt, die auch manipulieren wollen, d.h. deren best response zu einer Änderung des announced Peak führen würde. Ebenfalls wird zu Beginn jeder Iteration abgefragt, ob überhaupt irgendein Agent seinen announced Peak ändern möchte. Ist dies nicht der Fall, so stoppt der Simulationslauf, da das Profil konvergiert ist.

Simultan Alle Agenten betrachten in einer Iteration t das aktuelle Profil der announced Peaks. Es bestimmt nun *jeder* Agent seine best response gegeben dieses Profil (also simultan). Erst anschließend werden die announced Peaks aktualisiert und Iteration $t + 1$ beginnt. Ändert kein Agent seinen announced Peak, so wird der Simulationslauf entsprechend gestoppt.

Sequentiell Alle Agenten betrachten das aktuelle Profil der announced Peaks in Iteration t . Anschließend bestimmt Agent 1 seine best response, das Profil wird sofort entsprechend aktualisiert. Sodann bestimmt Agent 2 seine best response (gegeben das aktualisierte Profil), das Profil wird wiederum sofort aktualisiert etc., bis Agent n schließlich „an der Reihe“ ist. Haben alle Agenten in dieser (für alle Iterationen festen Reihenfolge) ihre best response bestimmt, beginnt Iteration $t + 1$. Ändert kein Agent seinen announced Peak, so wird der Simulationslauf entsprechend gestoppt.

Sequentiell mit zufälliger Reihenfolge Dies ist eine Abwandlung der sequentiellen Vorgehensweise. Dabei ist die Reihenfolge der Agenten in jeder Iteration zufällig gewählt, während bei dem sequentiellen Zeitablauf in jeder Iteration die Reihenfolge gleich ist. Man beachte, dass sich beide sequentiellen Vorgehensweisen von der zufälligen Reihenfolge der Manipulationen dadurch unterscheiden, dass bei sequentieller Reihenfolge ein Agent erst dann wieder seinen announced Peak ändern darf, wenn zuvor alle anderen Agenten ihre best response bestimmt haben.

Wie bereits ausgeführt ist eine konvergierte Situation ein Nash-Gleichgewicht. Im Allgemeinen ist davon auszugehen, dass - gegeben ein Profil wahrer Peaks - die zugehörigen Nash-Gleichgewichte nicht eindeutig sein werden. So befassen sich unter anderem Messner u. Polborn (2002) mit der Fragestellung, was eine geeignete Verfeinerung des Gleichgewichtskonzepts bei Abstimmungen sein könnte. Bedauerlicherweise sind die vorgeschlagenen Verfeinerungen des Nash-Gleichgewichts für die in dieser Arbeit untersuchten Abstimmungen, vor allem für Simulationszwecke, nicht von Nutzen.

Es bleibt also die Frage bestehen, welcher der obigen Zeitabläufe (und damit verbunden eine Auswahl aus der Menge der Nash-Gleichgewichte) am besten zur Durchführung der Simulation geeignet ist. Die Möglichkeiten der simultanen oder sequentiellen Zeitabläufe stellen dabei eine „künstliche“ Restriktion dar: Bevor ein Agent erneut seinen announced Peak ändern kann, müssen erst alle anderen Agenten ihre best response bestimmt haben. Demgegenüber ermöglicht der zufällige Zeitablauf eine ebenso zufällige Auswahl aus der Menge der Nash-Gleichgewichte¹⁵. Daher wurde in der Simulationsstudie dieser Zeitablauf gewählt. Die anderen Wahlmöglichkeiten wurden zu Testzwecken eingesetzt.

Schließlich sei noch auf ein weiteres Problem, insbesondere bei simultaner und sequentieller Abfolge, hingewiesen - die Möglichkeit von Zyklen. Von einem Zyklus sprechen wir bei simultanem oder sequentiellem Zeitablauf genau dann, wenn sich während der Iteration ein Profil von announced Peaks ergibt, das in diesem Simulationslauf bereits zuvor in einer anderen Iteration beobachtet wurde. Sei Δ die Differenz zwischen diesen beiden Iterationen. Bei simultaner und sequentieller Abfolge ist das Profil der folgenden Iteration, also die best response aller Agenten, eindeutig bestimmt - also wird dieses Profil wiederum mit dem aus Δ Iterationen zuvor übereinstimmen. Damit ist eine konvergierte Situation in einem solchen Fall ausgeschlossen, da sich die Profile genau im Abstand von Δ wiederholen werden. Auch wenn die beiden erwähnten Zeitabläufe nicht im Mittelpunkt der Simulationsstudie stehen, so ist im Programm dennoch eine Zyklenerkennung realisiert, die (unter diesen Zeitabläufen) die Iteration stoppt, sobald ein Zyklus auftritt. Dies wirkt sich sowohl positiv auf die Rechenzeit des Programms aus und bietet zudem die Möglichkeit zu beobachten, welcher Anteil nicht konvergierter Situationen aus solchen Profilen herrührt (Bei Tests während der Programmentwicklung lag dieser Anteil bei 200 Iterationen deutlich über 50 Prozent.) Auch in der Literatur (siehe Meir u. a. (2010)) findet sich sowohl die Problematik von Zyklen bei simultanem Zeitablauf als auch die Empfehlung für sequentielle bzw. zufällige Prozeduren wieder. Zusammengefasst lässt sich daher sagen, dass unter den vier in Betracht kommenden Zeitabläufen sowohl, was die Auswahl aus der Menge der Nash-Gleichgewichte betrifft, als auch im Bezug auf Fragen der Konvergenz der zufällige Zeitablauf am geeignetsten zu sein scheint.

Verteilung der Peaks

Bei der Erzeugung einer Stichprobe werden die Agenten in jedem Simulationslauf mit neuen, zufälligen Peaks versehen. Im Hinblick auf die „Zufälligkeit“ der Peaks, also auf die Frage, welcher Wahrscheinlichkeitsverteilung diese folgen sollen, sind im Programm mehrere Möglichkeiten vorgesehen:

Verteilung der Zufallszahlen:

1 Gleichverteilung

¹⁵Eine offene Frage bleibt, ob dieser Zeitablauf eine Restriktion derart darstellen könnte, dass unter simultaner Wahl der Peaks sich Nash-Gleichgewichte ergeben könnten, die mittels des zufälligen Zeitablauf nicht zu erreichen wären.

4. Simulation

- 2 Dirichlet mit vorgegebenen Parametervektor
- 3 Dirichlet mit zufälligem Punkt im Mittelpunkt
- 31 Dirichlet mit zufälligem Parametervektor (in [1,3])
im Mittelpunkt
- 4 Dirichlet mit zufälligem Punkt und Skalierung auf 1 bis 10
- 5 Dirichlet bimodal (50/50) und zufälligen Punkten
- 51 Dirichlet bimodal mit zufälligem Parametervektoren (in [1,3])
im Mittelpunkt
- 6 Dirichlet trimodal (33/33/33) und zufälligen Punkten
- 7 Dirichlet bimodal mit zufälligen Gewichten und Punkten
- 8 Dirichlet bimodal (50/50) und zufälligen Punkten
und Skalierung auf 1 bis 10

- 10 Gleichverteilung aus den Extrempoints

Die beiden diesen Optionen zugrunde liegenden Verteilungen sind die Gleichverteilung und die Dirichlet-Verteilung (siehe beispielsweise Johnson u. Kotz (1972)). In einem ersten Schritt werden wir auf die Erzeugung der zugehörigen Zufallszahlen kurz eingehen, bevor wir uns den einzelnen Programmoptionen zuwenden.

Gleichverteilte Zufallszahlen Selbstverständlich sind Computer als deterministische Maschinen nicht in der Lage, Zahlen zu generieren, die tatsächlich „zufällig“ sind, sondern man bedient sich sogenannten Pseudozufallszahlengeneratoren, deren Ergebnisse im Auge eines außenstehenden Betrachters randomisiert zu sein scheinen. Um die „Zufälligkeit“ eines solchen Algorithmus zu beurteilen, gibt es in der Literatur verschiedene Gütekriterien, siehe Kolonko (2008).

In der Programmiersprache Java steht mit der Klasse `SecureRandom` ein solcher Generator zur Verfügung, der nach dem Stand der Wissenschaft und entsprechend standardisierten Testverfahren ebensolche zufälligen Zahlen erzeugt¹⁶.

In der Simulation werden mittels der Instanzmethode `nextInt()` zufällige ganze Zahlen (für die Gleichverteilung und die zufällige Reihenfolge der Manipulation etc.) sowie mittels `nextFloat()` zufällige Werte aus dem Intervall $[0; 1)$ generiert, die zur Erzeugung Dirichlet-verteilter Zufallszahlen benötigt werden.

Dirichlet-verteilte Zufallszahlen Die Dirichlet-Verteilung ist eine multivariate Erweiterung der Beta-Verteilung. Ihr Träger ist der offene Einheitssimplex. Die Dichtefunktion (siehe Johnson u. Kotz (1972); Enc (2002)) ist für $K \geq 2$ und $\alpha_i > 0$, $i \in \{1, 2, \dots, K\}$, gegeben durch

$$f(x_1, x_2, \dots, x_K) = \begin{cases} C_K \prod_{i=1}^K x_i^{\alpha_i-1} & , \text{ falls } \sum_{i=1}^K x_i = 1 \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

¹⁶Vergleiche hierzu auch <http://download.oracle.com/javase/1.4.2/docs/api/java/security/SecureRandom.html>, abgerufen am 30. November 2010

mit

$$C_K = \Gamma\left(\sum_{i=1}^K \alpha_i\right) \prod_{i=1}^K \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)}.$$

Sei $\alpha_0 := \sum_{j=1}^K \alpha_j$. Der Erwartungswert in Koordinate i ist dabei

$$E(X_i) = \frac{\alpha_i}{\alpha_0},$$

die Varianz ist gegeben durch

$$\text{Var}(X_i) = \frac{\alpha_i (\alpha_0 - \alpha_i)}{(\alpha_0)^2 \cdot (\alpha_0 + 1)}.$$

Die Marginalverteilung in Koordinate i folgt einer Beta-Verteilung mit Parametern $(\alpha_i, \alpha_0 - \alpha_i)$. Eine solche Randverteilung ist, da für alle $\alpha_i > 0$ gilt, rechtsschief.

Die Erzeugung von Zufallszahlen, die der Dirichlet-Verteilung folgen, ist im Simulationsprogramm entsprechend dem bei Devroye (1986) vorgeschlagenen Vorgehen realisiert: Will man eine K -dimensionale Zufallszahl generieren, die einer Dirichlet-Verteilung mit Parametern $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K)$ folgt, so erzeugt man zunächst K Gamma-verteilte Zufallszahlen y_1, y_2, \dots, y_K , wobei

$$y_i \sim \Gamma(\alpha_i, 1)$$

gilt, also y_i Gamma-verteilt ist mit Parametern α_i und 1. Anschließend setzt man

$$x_i = \frac{y_i}{\sum_{j=1}^K y_j}.$$

Dann ist $x = (x_1, x_2, \dots, x_K)$ Dirichlet-verteilt mit Parametern $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K)$. Für die Anwendung auf einen (K, L) -Simplex als Träger der Verteilung ist x noch entsprechend mit L zu skalieren.

Die Erzeugung Gamma verteilter Zufallszahlen ist im Falle ganzzahliger α_i mittels der sogenannten Inversionsmethode (siehe hierzu ebenfalls Devroye (1986)) effizient möglich. Seien u_j auf $(0; 1)$ gleichverteilte Zufallszahlen. Dann gilt

$$\sum_{j=1}^{\alpha_i} -\ln u_j \sim \Gamma(\alpha_i, 1).$$

Man beachte, dass eine $\Gamma(\alpha_i, 1)$ -verteilte Zufallsvariable Erlang-verteilt ist mit α_i Freiheitsgraden und Parameter $\lambda = 1$. Die Erlangverteilung mit diesen Parametern ist wiederum die Summe (Faltung) von α_i unabhängigen, mit Parameter $\lambda = 1$ exponentialverteilten Zufallsvariablen, was die auch obige Formel zur Erzeugung mittels der Inversionsmethode veranschaulicht.

Für nicht ganzzahlige Werte von α_i existiert ferner die Möglichkeit der Erzeugung mittels der sogenannten Verwerfungsmethode, die jedoch im Allgemeinen mit mehr Rechenaufwand verbunden ist als die Berechnung über die Inversionsmethode. Da

4. Simulation

die Variationsmöglichkeiten durch ganzzahlige Werte für den Parametervektor α bereits immens erscheinen, ist im Simulationsprogramm die Erzeugung Dirichlet-verteilter Zufallszahlen auf solche Möglichkeiten beschränkt.

Insgesamt stehen damit in der Simulation zwei - für Abstimmungen auf dem Simplex recht naheliegend erscheinende - Verteilungsklassen zur Verfügung: die Gleichverteilung über den Simplex (bzw. eine Teilmenge davon) sowie die Dirichlet-Verteilung, deren Träger gerade der Simplex ist. Im Folgenden werden die verschiedenen Optionen, wie diese beiden Verteilungsklassen in der Simulation verwendet werden können, kurz vorgestellt. Anschließend wird die Wahl der Verteilung in der Simulationsstudie erläutert und motiviert.

Möglichkeiten der Gleichverteilung In der Simulationsstudie können unter Option (1) die Peaks der Agenten gleichverteilt aus allen Elementen des diskreten Simplex gezogen werden. Alle möglichen Peaks werden bei der Instanzierung des Simplex in der Instanzvariable `allpoints` gespeichert. Dabei handelt es sich vom Datentyp und eine sogenannte `Collection` (Sammlung), die als `TreeSet` implementiert ist, d.h. alle Elemente dieser Sammlung sind geordnet¹⁷. Sei m die Kardinalität dieser Menge, also die Anzahl aller möglichen Peaks. Dementsprechend wird eine gleichverteilte ganzzahlige Zufallszahl aus $[1; m]$ gezogen und das Element, das an dieser Stelle in der Ordnung steht, als Peak gewählt.

Eine weitere Option ist mit Punkt (10) gegeben. Hier wird (nach dem gleichen Verfahren wie unter (1)) zufällig ein Element aus der Menge der Peaks gezogen, bei denen für mindestens eine Dimension i gilt: $x_i \leq 10$. Solche Peaks liegen also am Rand des Simplex und werden im Programm in der Sammlung `extrempoints`, die ebenfalls als `TreeSet` realisiert ist, gespeichert. Diese Option im Simulationsprogramm kann zur Untersuchung der Fragestellung dienen, inwiefern Profile von Peaks, die stark am Rand des Simplex liegen (also im Allgemeinen eine hohe Varianz aufweisen dürften) manipulierbarer sind als Profile mit geringerer Varianz.

Möglichkeiten der Dirichletverteilung Wie oben ausgeführt werden bei diesen Optionen Dirichlet-verteilte Zufallszahlen erzeugt, die zunächst auf die Größe des Simplex skaliert werden. Da eine solche Zufallszahl im Allgemeinen ein Element des kontinuierlichen Simplex ist, muss abschließend eine Zuordnung auf ein Element im diskreten Simplex erfolgen. Hierzu wird in einem weiteren Schritt das Element im diskreten Simplex mit kürzestem euklidischen Abstand zur Zufallszahl gewählt. Hinsichtlich der Belegung des Parametervektors α der Verteilung gibt es mehrere Möglichkeiten:

1. die Vorgabe der α_i durch den Benutzer (Option (2)),
2. die zufällige (gleichverteilte) Wahl eines Punkts im diskreten Simplex als Parametervektor (Option (3)),
3. die zufällige (gleichverteilte) Wahl jedes α_i aus $\{1, 2, 3\}$ (Option (31)) und

¹⁷In der Simulation wurde die lexikographische Ordnung als Kriterium gewählt.

4. die zufällige (gleichverteilte) Wahl eines Punkts und dessen ebenso zufällige (und gleichverteilte) Skalierung mit einem Wert aus $\{1, 2, \dots, 10\}$ (Option (4)).

Eine weitere Möglichkeit ist die Erzeugung bi- oder trimodaler Verteilungen der Peaks. Dabei wird zuerst (entweder im Verhältnis 50/50 bzw. 33/33/33, Optionen (5), (51), (6) und (8), oder in einem zufälligen (gleichverteilten) Verhältnis, Option (7)) durch eine Zufallszahl aus $[0; 1)$ festgelegt, welche von mehreren Dirichletverteilungen (d.h. Verteilungen mit unterschiedlichen α) Anwendung findet. Anschließend wird die Zufallszahl entsprechend der zuvor bestimmten Verteilung gezogen. Somit lassen sich Verteilungen von Peaks erzeugen, bei denen ein Teil der Agenten ihren Peak in der Umgebung eines Elements des Simplex, ein anderer Teil von Agenten seinen Peak entsprechend um ein anderes Zentrum herum hat - sogenannte bimodale Verteilungen. Solche Verteilungen, unter denen die Peaks der Agenten sich auf wenige Bereiche des Simplex konzentrieren, lassen a priori eine hohe Manipulierbarkeit deswegen vermuten, da es hier zwei (oder mehrere) Regionen von Agenten gibt, die jeweils ein Interesse daran haben, das Ergebnis einer Abstimmungsregel in ihre Nähe zu rücken.

Insgesamt stehen damit in der Simulation eine Vielzahl von Möglichkeiten, wie die Peaks der Agenten zufällig verteilt sein können, zur Verfügung. Das Ziel dieser Dissertation ist es, erste, möglichst allgemeine Ergebnisse und Vermutungen über die Manipulierbarkeit der vorgestellten Abstimmungsregeln ableiten zu können. Daher wird sich bei der Erzeugung der Stichprobendaten auf wenige Verteilungsannahmen beschränkt.

Auf den ersten Blick „natürlich“ erscheint dabei die Annahme einer Gleichverteilung - so wie es vielfach in der Literatur solche Annahmen bezüglich der Verteilung von Präferenzen und Profilen gibt. Problematisch an einer Gleichverteilung, gerade im Hinblick auf Manipulierbarkeit, sind jedoch durchaus regelmäßig auftretende symmetrische oder fast symmetrische Profile, d.h. in unserem Kontext Peaks von Agenten, die als Permutation des Peaks eines anderen Agenten hervorgehen. Unter solchen Profilen kommt es in der Regel dazu, dass sich die Wirkungen der best response (d.h. der announced Peaks) mehrerer Agenten gegenseitig aufheben.

Daher wird in der Simulationsstudie in den meisten Fällen auf eine Dirichlet-Verteilung mit $\alpha = (1, 2, 3)$ zurückgegriffen. Diese Verteilung ist - im Gegensatz zur Gleichverteilung - leicht asymmetrisch und durch die Wahl kleiner Werte für α_i immer noch mit einer hinreichend großen Varianz versehen. Bei Testläufen im Rahmen der Programmentwicklung und zur Bestimmung geeigneter Einstellungen für die Simulationsstudie zeigte sich, dass unter dieser Verteilung viele Kenngrößen stärker ausgeprägt sind, d.h. im Allgemeinen höhere Werte aufweisen, als unter der Gleichverteilung. Somit lässt sich berechtigt vermuten, dass die Wahl dieser Dirichletverteilung einerseits das Auftreten symmetrischer Profile unwahrscheinlich machen und andererseits eine Vielzahl unterschiedlicher Profile generieren wird.

4. Simulation

Parameter einer Stichprobe

Neben den obigen Programmeinstellungen existieren noch zusätzliche Parameter, die die Erzeugung einer Stichprobe, regeln:

Anzahl der Simulationsläufe Dies legt den Umfang der Stichprobe fest. Die einzelnen Simulationsläufe sind dabei unabhängig und identisch verteilt. In der Simulationsstudie ist ein Stichprobenumfang von 1000 gewählt. Um einen geeigneten Stichprobenumfang zu bestimmen, wurden bei Tests im Vorfeld sowohl die ersten vier Momente (arithmetisches Mittel, Varianz, Schiefe und Exzess) der Verteilung der Peaks als auch die Mittel der einzelnen Variablen betrachtet und diese auf Änderungen bzgl. des Stichprobenumfangs untersucht.

Anzahl der Iterationen je Simulationslauf Die Anzahl der Iterationen entspricht bei einem zufälligen Zeitablauf gerade der Anzahl der möglichen Manipulationen je Simulationslauf. Diese Größe ist so zu wählen, dass möglichst viele Profile von wahren Peaks auch zu konvergierten Situationen führen. Andererseits bedeuten zu viele mögliche Manipulationen einen erhöhten Rechenaufwand. Für die in der Simulationsstudie betrachteten Anzahlen von Agenten (3 bis 45) ist diese Größe mit 200 so gewählt, dass je nach Abstimmungsregel über 90 bis 95 Prozent der Profile einer Stichprobe konvergieren.

Zu simulierende Abstimmungsregeln Hier ist für die jeweilige Abstimmungsregel festzulegen, ob sie in die Erzeugung der Stichprobe miteinbezogen werden soll. In der Simulationsstudie wurden alle punktwertigen Abstimmungsregeln (d.h. alle vorgestellten Regeln mit Ausnahme der mengenwertigen Midpoint-Regel) simuliert und entsprechend verglichen. Um zumindest Vermutungen über den Einfluss der Sequenz bei der sequentiellen Median-Regeln ableiten zu können, ist diese sowohl für die Permutation $\delta(i) = i, i \in \{1, 2, \dots, K\}$ (PDMedian) als auch für $\delta(i) = K - i + 1, i \in \{1, 2, \dots, K\}$ (PDRMedian) untersucht.

Normalisierung der Variablen Mit dieser Einstellung wird festgelegt, ob die in bei der Erzeugung der Stichprobe aufgezeichneten Kenngrößen normalisiert werden sollen oder nicht. In der Simulationsstudie wurden aufgrund der besseren Vergleichbarkeit der einzelnen Szenarien die Variablen normalisiert.

Weitere Möglichkeiten

Dieser Abschnitt führt kurz weitere Einstellungsmöglichkeiten des Simulationsprogramms, die nicht im Mittelpunkt dieser Dissertation stehen, auf. In den meisten Fällen wurde auf diese Möglichkeiten entweder deswegen verzichtet, weil eine zu große Variation der Parameter die Analyse und Interpretation der Stichprobendaten merklich erschweren würde, oder, weil sich bereits in einem frühen Stadium der Programmentwicklung kein sichtbarer Erkenntnisgewinn durch die Hinzunahme der jeweiligen Möglichkeiten zeigte.

Präferenzen über Teilmengen Zur Beurteilung der Manipulierbarkeit der mengenwertigen Midpoint-Regel ist ein wichtiger Aspekt, welche Präferenzen die Agenten über *Teilmengen* des Simplex haben. Hierzu sind im Programm vier Möglichkeiten angelegt: neben der Definition aus Abschnitt 3.2.3 (Dominanzrelation) können solche Teilmengen nach ihrem bestem Element, dem Erwartungsnutzen unter der Gleichverteilung und einem Hurwicz-Kriterium beurteilt werden.

Trembling Im Standardfall bestimmen Agenten ihre best response und aktualisieren ihren announced Peak dementsprechend. Mittels dieses Parameters ist es möglich, dass Agenten nur mit einer (vom Benutzer festzulegenden) Wahrscheinlichkeit $\alpha \in (0; 1)$ den announced Peak anpassen. Ein solches „Zittern“ (Trembling) kann verschieden interpretiert werden: entweder als Neigung/Präferenz für die Wahrheit oder als (Risiko-)Aversion gegenüber Misrepräsentation oder schließlich als beschränkte Rationalität des Agenten.

Weitere statistische Kenngrößen Wie bereits im vorangegangenen Abschnitt erwähnt lassen sich jeweils koordinatenweise das arithmetische Mittel, die Varianz, die Schiefe und der Exzess der Peaks berechnen. Darüber hinaus bietet die Simulation auch die Möglichkeit, das arithmetische Mittel des koordinatenweisen Abstands der Peaks zum Zentrum des Simplex auszugeben, um so eine komprimierte Information darüber zu erlangen, wie stark die Peaks auf dem Simplex gestreut sind.

Parameter statt Peaks ziehen In der Simulation werden die Peaks der Agenten zufällig gezogen und anschließend - gegeben der Peak - die Nutzenfunktion derart parametrisiert, so dass der Peak maximales Element des Simplex bezüglich der Nutzenfunktion ist. Eine andere Möglichkeit ist es, die Parameter der Nutzenfunktion zufällig zu erzeugen und - gegeben diese Parameter - das maximale Element des Simplex, also den Peak, zu bestimmen. (Im Simulationsprogramm werden in diesem Fall die Parameter anschließend in einem letzten Schritt derart „adjustiert“, so dass der Peak auch das maximale Element bezüglich der Nutzenfunktion im *kontinuierlichen* Simplex ist. Andernfalls kann es alleine schon deswegen zu Misrepräsentation kommen, da der Peak (ein Element des diskreten Simplex) nicht dem maximalen Element bezüglich der Nutzenfunktion entspricht.) Auf diese Möglichkeit wurde deswegen verzichtet, da bei einer Variation der Präferenzen - lässt man die Wahrscheinlichkeitsverteilung in diesem Fall über den Parameterraum unverändert - sich gleichzeitig eine Veränderung der durch die Nutzenfunktion induzierten Verteilung der Peaks auf dem Simplex ergeben würde. In anderen Worten: Eine ceteris paribus Änderung der Präferenzen (und damit der Nutzenfunktion) würde eine Änderung der Verteilung der Peaks mit sich ziehen - was alles andere als ceteris paribus ist.

Informationen zum Optionset Über diese Einstellung lassen sich Kenngrößen zum bereits erwähnten Optionset, also der Menge der Punkte im Simplex, die sich

4. Simulation

durch Misrepräsentation unter der mengenwertigen Midpoint-Regel erreichbar sind, berechnen.

Berechnung der Wohlfahrtsmaße abschalten Diese Einstellung ermöglicht es, auf die Berechnung verschiedener Wohlfahrtsmaße (auf die bei der Vorstellung der Variablen noch einzugehen sein wird) wahlweise zu verzichten, was einen geringeren Rechenaufwand bedeuten würde.

4.2. Ergebnisse der Simulationsstudie

Dieser Abschnitt stellt die einzelnen Variablen, mittels derer wir die Manipulierbarkeit der Abstimmungsregeln beurteilen wollen, vor und führt gleichzeitig die Simulationsergebnisse zu diesen Kenngrößen auf. Mit Hilfe dieser Daten sollen zwei Fragestellungen untersucht werden: zum einen kann der Einfluss der Veränderung einzelner Parameter auf die Variablen *einer* Abstimmungsregel untersucht werden, zum anderen ist es möglich *für gegebene Parameterwerte* verschiedene Abstimmungsregeln mittels der Variablen zu vergleichen.

Die im vorangegangenen Abschnitt diskutierten Parametereinstellungen für das Standardszenario sind unten stehend nochmals zusammengefasst:

- Dimensionen des Simplex (K): 3
- Größe des Simplex (L): 99
- Anzahl der Agenten: 5
- Präferenzen der Agenten: Cobb-Douglas-Präferenzen
- Reihenfolge der Manipulation: zufällig
- Verteilung der Peaks: Dirichlet-Verteilung mit $\alpha = (1, 2, 3)$
- Anzahl der Simulationsläufe (Stichprobenumfang): 1000
- Anzahl der Iterationen je Simulationslauf: 200
- Zu simulierende Abstimmungsregeln: alle punktwertigen Regeln
- Normalisierung der Variablen

Die Simulation von Abstimmungen auf einem diskreten $(3, 99)$ -Simplex entspricht also einer Abstimmung über 5050 Alternativen (Jedes Element im Simplex stellt bekanntlich eine Alternative dar.). Man beachte, dass durch den Peak eines Agenten und die zugehörige Parametrisierung der Nutzenfunktion eine vollständige Präferenzordnung über alle diese Alternativen induziert wird¹⁸.

¹⁸Wir werden, auch um die Übersichtlichkeit der Darstellung zu wahren, davon ausgehen, dass die Nutzenfunktion des Agenten i wie beschrieben auf das Intervall $[0; 1]$ normalisiert ist, und diese dennoch mit u^i statt mit \hat{u}^i bezeichnen.

Zur Untersuchung, welche Auswirkungen eine Variation der Parameter hat, werden im Wesentlichen folgende Änderungen an Einstellungen *ceteris paribus* vorgenommen:

- Anzahl der Agenten: 3, 5, 7, 9, 13, 17, 21, 29, 37 und 45
- Präferenzen der Agenten: CES-Präferenzen mit $\rho = 0.9, 0.5, 0.1, 0.0$ (Cobb-Douglas), -2 und -5 , metrisch eingipflige Präferenzen
- Dimensionen und Größe des Simplex: 3, 4 und 5 Dimensionen bei gleichzeitiger Anpassung der Größe auf 17 bzw. 30 (zur Begrenzung des Rechenaufwands)

Die einzelnen Variablen werden wir dabei untergliedern in solche, die über das Ausmaß der Manipulation Aufschluss geben, und jene, die den Effekt bzw. die Effekte einer Manipulation messen. Schließlich wird noch auf weitere Kenngrößen eingegangen, die zu keinem der beiden Bereiche zugeordnet werden.

Im Folgenden werden wir zuerst die jeweilige Variable motivieren und definieren. Lässt sich die Kenngröße normalisieren, so wird ebenso hierauf eingegangen. In einem nächsten Schritt werden die Ergebnisse (d.h. in der Regel die Mittelwerte der Variablen je Stichprobe) unter Cobb-Douglas-Präferenzen in Abhängigkeit der Anzahl der Agenten diskutiert. Schließlich wird, um einen möglichen Einfluss einer Änderungen der Präferenzen zu betrachten, ebenfalls auf die Ergebnisse unter CES- und metrisch eingipfligen Präferenzen eingegangen. Hierzu sind im jeweiligen Abschnitt in der Regel je eine Tabelle mit den Mittelwerten der Simulationsergebnisse für verschiedenen Abstimmungsregeln unter Cobb-Douglas-Präferenzen und unter metrisch eingipfligen Präferenzen aufgeführt. Weitere Tabellen mit den Simulationsergebnissen unter CES-Präferenzen finden sich im Anhang. Ebenso findet sich zur jeder Kenngröße eines oder mehrere Diagramme, die die Werte der Abstimmungsregeln in Abhängigkeit der Anzahl der Agenten illustrieren; für eine besser zu interpretierende Darstellung sind die Linien der einzelnen Datenreihen zwischen den Messwerten interpoliert.

Um das Ausmaß der Manipulation zu erfassen, werden betrachtet:

1. Number of Iterations / Number of Manipulations
2. Maximum Utility Gain
3. Total Number of Agents Manipulating
4. Final Number of Agents Manipulating
5. Number of Pivotal Agents

Effekte einer Manipulation werden gemessen durch:

1. Average Deviation
2. Average Manipulation

4. Simulation

3. Distance
4. Difference in Sum of Utilities
5. UTILIE
6. UTILRD
7. Difference in Remoteness
8. REMRD

Weitere Kenngrößen sind:

1. Profile Converged
2. Condorcet Consistency
3. Median Gap
4. Midpoint Diameter

4.2.1. Ausmaß der Manipulation

Das Ausmaß einer Manipulation umfasst in unserem Sinne all die Kenngrößen und Phänomene, die in irgendeiner Art und Weise beschreiben, dass bei einem gegebenen Profil „viel“ manipuliert wird. „Viel“ umfasst also insbesondere die Häufigkeit der Änderung eines (wahren) Peaks und die Anzahl der Agenten, die manipulieren. Ebenso wollen wir den Anreiz, genauer gesagt den maximalen Nutzengewinn einer Manipulation, und die Anzahl der Agenten, die Einfluss auf das Ergebnis einer Abstimmung nehmen können, unter diese Kategorie fassen.

Number of Iterations / Number of Manipulations Diese Variablen messen die „Dynamik“ oder auch die Dauer, bis ein Profil wahrer Peaks zu einem Profil von announced Peaks konvergiert. Die Number of Iterations zählt dabei die Anzahl der Iterationen bis zur Konvergenz bzw. gibt im Falle, dass das Profil nicht konvergiert, den Wert 200 (maximale Anzahl an Iterationen) an. Wie bereits eingeführt bezeichne $w^i(t)$ den announced Peak des Agenten i in Iteration t . Es gilt also für die Number of Iterations:

$$d_{1A} := \min_{t=1, \dots, 200} w^i(t-1) = w^i(t) \text{ für alle } i \in N$$

bzw., falls zu jedem $t \in \{1, 2, \dots, 200\}$ ein $i \in N$ existiert mit $w^i(t-1) \neq w^i(t)$, so gilt in diesem Fall

$$d_{1A} = 200.$$

Ebenso kann man die Anzahl aller Manipulationen, also die Anzahl aller Änderungen eines Peaks (Number of Manipulations), zählen. Sei $A(t) \subseteq N$ die Menge

Agents	Midpoint	Mean	NMed	PDMed	PDRMed	CCenter	IMed
3	31,16	8,71	2,29	1,93	6,21	3,68	30,87
5	16,19	12,11	2,4	2,46	5,62	3,92	12,78
7	15,78	14,25	2,42	2,79	5,9	3,88	10,66
9	20,01	16,72	2,33	3,09	6,7	3,98	9,26
13	24,62	20,82	2,27	3,57	7,39	4,08	9,53
17	27,66	24,98	2,13	3,77	8,54	4,2	10,04
21	31,73	29,04	1,99	4,07	9,42	4,47	10,86
29	39,58	37,11	1,84	4,69	11,62	4,89	12,4
37	48,91	45,11	1,69	5,19	13,46	5,36	14,22
45	58,09	53,09	1,61	5,54	15,08	6,03	15,32

Tabelle 4.1.: Number of Manipulations unter Cobb-Douglas-Präferenzen

aller Agenten, die in Iteration t ihren Peak ändern. Es gilt also für alle $i \in A(t)$: $w^i(t) \neq w^i(t-1)$. Dann ist die Number of Manipulations definiert durch:

$$d_{1B} := \sum_{t=1}^{200} |A(t)|.$$

Im Falle einer zufälligen Reihenfolge der Manipulationen, wie sie in der Simulationsstudie gewählt wurde, entspricht die Anzahl der Iterationen gerade der Anzahl der Manipulationen, es gilt also $d_{1A} = d_{1B}$. Wir werden daher im Folgenden die Anzahl der Manipulationen betrachten.

Tabelle 4.1 und Abbildung 4.2 geben die Mittelwerte dieser Variablen unter Cobb-Douglas-Präferenzen wieder. Generell zeigt sich, dass die Anzahl der Manipulationen mit steigender Anzahl der Agenten ebenfalls zunimmt. Die mit Abstand meisten Manipulationen ereignen sich dabei bei der Midpoint- sowie der Mittelwert-Regel. Die normalisierte Median-Regel weist die wenigsten Manipulationen auf; für größere Anzahlen an Agenten nehmen diese sogar leicht ab (siehe hierzu auch Abbildung 4.3). Insgesamt sind die Zuwächse der Manipulationen eher fallend. Dies wird insbesondere deutlich, wenn man die Number of Manipulations durch die jeweilige Anzahl der Agenten teilt (siehe Tabelle 4.2).

Setzt man die Anzahl der Manipulationen (also Variable d_{1B}) in das Verhältnis zur Anzahl manipulierender Agenten (also Variable d_3 , siehe Tabelle 4.3), so zeigt dies, dass unter den meisten Regeln ein Agent, der manipuliert, durchschnittlich nur einmal seinen announcing Peak ändert. Eine Ausnahme hiervon bildet jedoch die Midpoint-Regel, bei der durchschnittlich etwa zwei Manipulationen je misrepräsentierendem Agenten zu beobachten sind. Dies lässt vermuten, dass die „Dynamik“ der Manipulation unter der Midpoint-Regel im Gegensatz den allen anderen Regeln eine bedeutende Rolle spielt.

Betrachtet man Veränderungen der Variablen unter CES-Präferenzen (siehe Tabellen A.1 bis A.7), so fällt auf, dass die Anzahl der Manipulationen unter $\rho = 0.9$ abnimmt. Zudem ist eine abnehmende Anzahl an Manipulationen insbesondere bei

4. Simulation

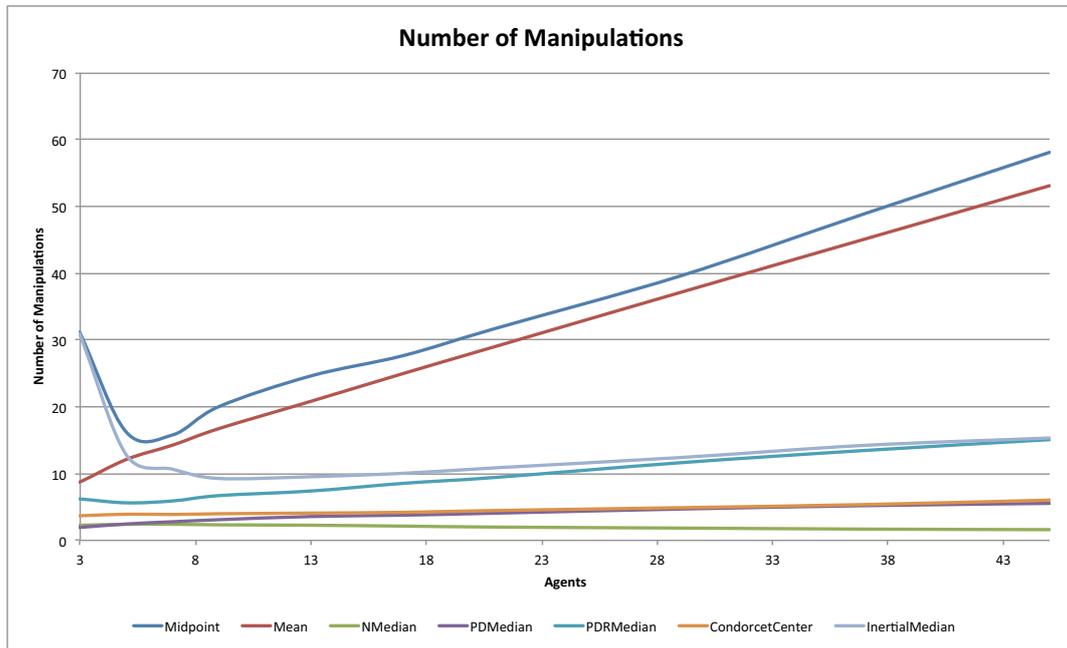


Abbildung 4.2.: Number of Manipulations unter Cobb-Douglas-Präferenzen

Agents	Midpoint	Mean	NMed	PDMed	PDRMed	CCenter	IMed
3	10,385	2,902	0,763	0,645	2,070	1,227	10,290
5	3,239	2,422	0,480	0,491	1,124	0,783	2,557
7	2,254	2,036	0,345	0,398	0,843	0,554	1,522
9	2,223	1,858	0,258	0,343	0,744	0,443	1,029
13	1,894	1,602	0,174	0,275	0,568	0,314	0,733
17	1,627	1,469	0,126	0,222	0,502	0,247	0,591
21	1,511	1,383	0,095	0,194	0,449	0,213	0,517
29	1,365	1,280	0,064	0,162	0,401	0,169	0,427
37	1,322	1,219	0,046	0,140	0,364	0,145	0,384
45	1,291	1,180	0,036	0,123	0,335	0,134	0,341

Tabelle 4.2.: Manipulationen pro Agent unter Cobb-Douglas-Präferenzen

4.2. Ergebnisse der Simulationsstudie

Agents	Midpoint	Mean	NMed	PDMed	PDRMed	CCenter	IMed
3	12,689	2,902	1,533	1,309	2,643	1,786	12,571
5	3,815	2,423	1,346	1,203	1,619	1,476	3,350
7	2,787	2,036	1,247	1,144	1,354	1,304	2,168
9	2,636	1,858	1,181	1,125	1,243	1,226	1,628
13	2,349	1,602	1,115	1,080	1,123	1,154	1,323
17	2,121	1,469	1,072	1,045	1,078	1,085	1,202
21	1,998	1,383	1,049	1,032	1,048	1,070	1,167
29	1,927	1,280	1,025	1,015	1,028	1,034	1,084
37	1,917	1,219	1,021	1,007	1,018	1,021	1,062
45	1,920	1,180	1,009	1,006	1,012	1,017	1,031

Tabelle 4.3.: Manipulationen pro manipulierendem Agent unter Cobb-Douglas-Präferenzen

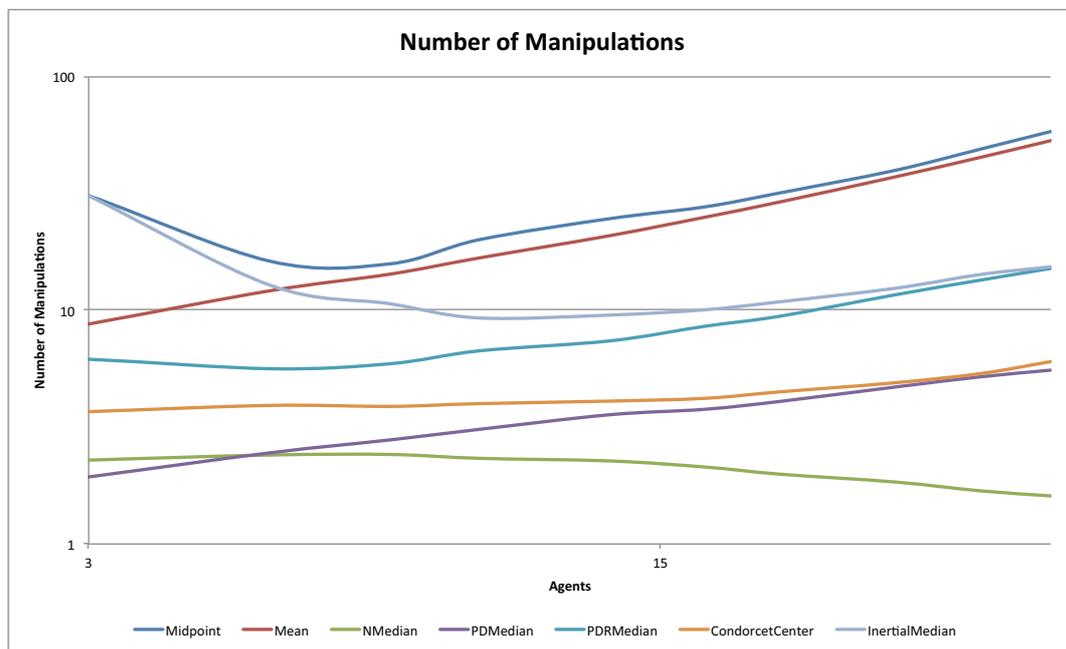


Abbildung 4.3.: Number of Manipulations unter Cobb-Douglas-Präferenzen (in logarithmischer Skalierung)

4. Simulation

Agents	Midpoint	Mean	NMed	PDMed	PDRMed	CCenter	IMed
3	0	5,15	2,64	0	0	2,7	0
5	0	7,81	3	0	0	2,88	0
7	0	10	2,8	0	0	2,78	0
9	0	12,22	2,82	0	0	2,66	0
13	0	16,72	2,69	0	0	2,57	0
17	0	20,97	2,59	0	0	2,42	0
21	0	25,02	2,35	0	0	2,21	0
29	0	33,68	2,14	0	0	2	0
37	0	41,96	2,03	0	0	1,91	0
45	0	50,17	1,89	0	0	1,79	0

Tabelle 4.4.: Number of Manipulations unter metrischen Präferenzen

der Condorcet Center-Regel für $\rho = -5$ beobachtbar. Unter metrisch eingipfligen Präferenzen (Tabelle 4.4) verhalten sich die Mittelwert- und die normalisierte Median-Regel ähnlich wie unter Cobb-Douglas-Präferenzen, während hingegen die Condorcet Center-Regel deutlich weniger Manipulationen im Durchschnitt aufweist.

Maximum Utility Gain Eine Kenngröße, die den Anreiz zur Misrepräsentation durch einen Agenten gut widerspiegelt, ist der maximale zusätzliche Nutzen, der für einen Agenten durch Misrepräsentation - gegeben das Profil der wahren Peaks - erreichbar ist. Anders formuliert: Nur wenn dieser Zusatznutzen positiv ist, so gibt es (zu Beginn des Simulationslaufs) für einen Agenten einen Anreiz zur Manipulation. Maximum Utility Gain sei im Folgenden der maximale Nutzengewinn, den ein beliebiger Agent durch Misrepräsentation - gegeben das Profil der wahren Peaks erreichen - kann. Sei w^j der wahre Peak des Agenten j . Es gilt also:

$$d_2 := \max_{i \in N} \max_{\tilde{w}^i \in X} (u^i(F(w^1, w^2, \dots, \tilde{w}^i, \dots, w^n)) - u^i(F(w^1, w^2, \dots, w^i, \dots, w^n))).$$

Da wie bereits erwähnt die Nutzen der einzelnen Agenten auf das Intervall $[0; 1]$ normalisiert werden, bewegt sich auch die obige Variable in diesem Wertebereich. Eine weitere Normalisierung dieser Kenngröße ist also nicht notwendig.

Ein Wert $d_2 = 0$ bedeutet, dass für keinen Agenten im gegebenen Profil wahrer Peaks ein Anreiz zur Misrepräsentation besteht. Das Profil ist also unter der Abstimmungsregel F nicht manipulierbar. Ein Wert von 1 hingegen würde bedeuten, dass mindestens ein Agent durch Manipulation seinen Peak als Ergebnis der Abstimmungsregel realisieren kann, während er bei Angabe des wahren Peaks sein schlechtestes Element im Simplex als Ergebnis der Abstimmungsregel bekäme. Allgemein deuten „kleine“ Werte von d_2 darauf hin, dass (gegeben die wahren Peaks) der Nutzengewinn durch Manipulation bei einer Abstimmungsregel sehr gering ist, es also in diesem Sinne nur wenig reizvolle Manipulationen gibt, während große Werte demzufolge auch auf große Anreize zur Angabe eines unwahren Peaks hinweisen.

Agents	Midpoint	Mean	NMed	PDMed	PDRMed	CCenter	IMed
3	2,10%	7,19%	0,59%	0,73%	4,55%	1,21%	2,10%
5	1,94%	7,41%	0,38%	0,74%	4,85%	1,11%	2,48%
7	1,74%	6,93%	0,30%	0,78%	4,45%	0,95%	2,59%
9	1,57%	6,34%	0,25%	0,72%	4,25%	0,87%	2,62%
13	1,36%	5,15%	0,19%	0,67%	3,47%	0,70%	2,43%
17	1,26%	4,30%	0,15%	0,61%	2,94%	0,62%	2,31%
21	1,11%	3,65%	0,14%	0,55%	2,65%	0,58%	2,14%
29	0,94%	2,79%	0,10%	0,48%	2,08%	0,48%	1,88%
37	0,85%	2,22%	0,09%	0,45%	1,87%	0,42%	1,70%
45	0,78%	1,87%	0,08%	0,39%	1,57%	0,38%	1,50%

Tabelle 4.5.: Maximum Utility Gain unter Cobb-Douglas-Präferenzen

Man beachte, dass der *tatsächliche* maximale Nutzengewinn, den ein Agent am Ende eines Simulationslaufs (also wenn das Profil konvergiert oder $t = 200$ erreicht ist) erzielt, in den meisten Fällen von diesem „a-priori-Nutzengewinn“, den wir mit der Variable d_2 berechnen, abweichen wird.

Betrachtet man Tabelle 4.5 und Abbildung 4.4, so ist erkennbar, dass der Maximum Utility Gain für alle Abstimmungsregeln mit steigender Agentenzahl fällt. Die Konkavität der einzelnen Kurven bei logarithmischer Skalierung (Abbildung 4.5) ist ein Indiz dafür, dass diese Größe vermutlich gegen 0 für eine steigende Agentenzahl konvergieren dürfte.

Weiterhin lässt sich festhalten, dass unter Cobb-Douglas-Präferenzen die Mittelwert-Regel für alle betrachteten Agentenzahlen die größten Werte aufweist, während die normalisierte Median-Regel jeweils den geringsten Nutzengewinn durch Manipulation ermöglicht. Verglichen mit den übrigen Abstimmungsregeln weist die Midpoint-Regel eher kleinere Werte der Variable auf. Besonders auffällig bei den Daten ist die beachtliche Diskrepanz zwischen der „PDMedian“-Regel und der „PDR-Median“-Regel, also - in anderen Worten - der sequentiellen Median-Regel mit der Sequenz 1, 2, 3 und der Sequenz 3, 2, 1. Bei letzterer ist der maximale Nutzengewinn deutlich größer. Man beachte hierzu, dass unter der gewählten Dirichlet-Verteilung mit $\alpha = (1, 2, 3)$ im arithmetischen Mittel ein Agent die Hälfte seines Budgets (also L) für die dritte Dimension verwenden möchte. Während unter der Sequenz 1, 2, 3 diese durch die Werte der Abstimmungsregel in den ersten beiden Dimensionen festgelegt und somit nur mittelbar beeinflussbar ist, wird im Abstimmungsergebnis unter der Sequenz 3, 2, 1 diese Dimension zuerst bestimmt.

Verändert man unter CES-Präferenzen die Substitutionselastizität (siehe Tabellen B.1 bis B.7), so ist zu bemerken, dass der Maximum Utility Gain mit abnehmendem ρ zunimmt. Insbesondere fällt auf, dass die Größenordnung der Änderung unter den einzelnen Abstimmungsregeln deutlich variiert: Entspricht der maximale Nutzengewinn bei $\rho = -5$ unter der Midpoint-Regel etwa dem zwei- bis dreifachen des Wertes dieser Variablen unter Cobb-Douglas-Präferenzen (also $\rho = 0$), so erhöht sich der

4. Simulation

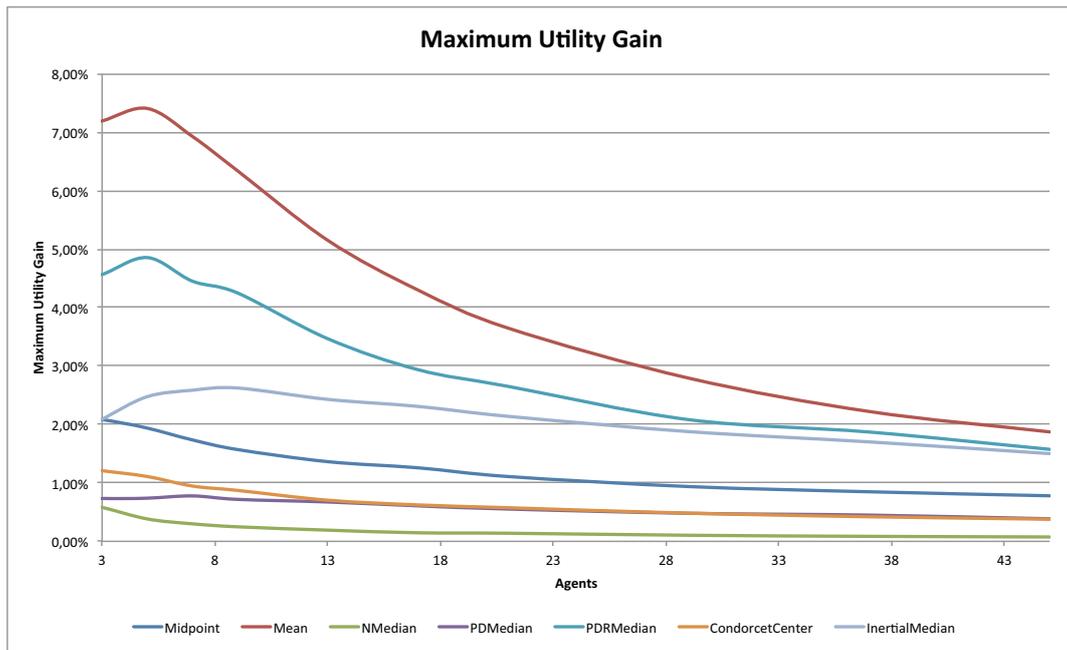


Abbildung 4.4.: Maximum Utility Gain unter Cobb-Douglas-Präferenzen

Maximum Utility Gain unter der normalisierten Median-Regel etwa um den Faktor 10 bis 15. Dieses Faktum kann bei der Analyse der weiteren Variablen noch von Interesse sein. Unter metrisch eingipfligen Präferenzen (Tabelle 4.6) weisen die manipulierbaren Abstimmungsregeln einen wie auch unter Cobb-Douglas-Präferenzen fallenden Verlauf (mit steigender Agentenzahl) auf, wobei die absoluten Werte deutlich über denen als unter Cobb-Douglas-Präferenzen liegen.

Abschließend sei bemerkt, dass - zumindest auf einen zweiten Blick - es nicht offensichtlich ist, ob große Werte des Maximum Utility Gain „gut“ oder „schlecht“ sind. Einerseits bedeutet ein hoher Wert einen großen Anreiz zu Manipulation. Andererseits ist diese Kenngröße (zusammen mit der Number of Pivotal Agents) auch ein Maß dafür, wie sensitiv eine Abstimmungsregel auf Änderungen des announced Peaks eines Agenten reagiert. Während bei der Pivotalität einer Regel generell danach gefragt wird, ob ein Agent das Ergebnis der Abstimmung ändern kann, ist das Maximum Utility Gain auch ein Maß dafür, wie sehr dem Agenten solche Änderungen von Nutzen sind. Es wird im weiteren Verlauf dieser Arbeit noch zu untersuchen sein, welcher Zusammenhang zwischen dieser Kenngröße (und der Number of Pivotal Agents) und anderen, insbesondere den Effekt einer Manipulation erklärenden Variablen besteht.

Total Number of Agents Manipulating Eine „zentrale“ Messgröße, um das Ausmaß der Manipulation zu bestimmen, ist sicherlich auch die Anzahl der Agenten, die manipulieren, also einen announced Peak aufweisen, der nicht ihrem wahren Peak entspricht. Hierbei bestehen zwei Möglichkeiten, diese Anzahl zu bestimmen: Ent-

4.2. Ergebnisse der Simulationsstudie

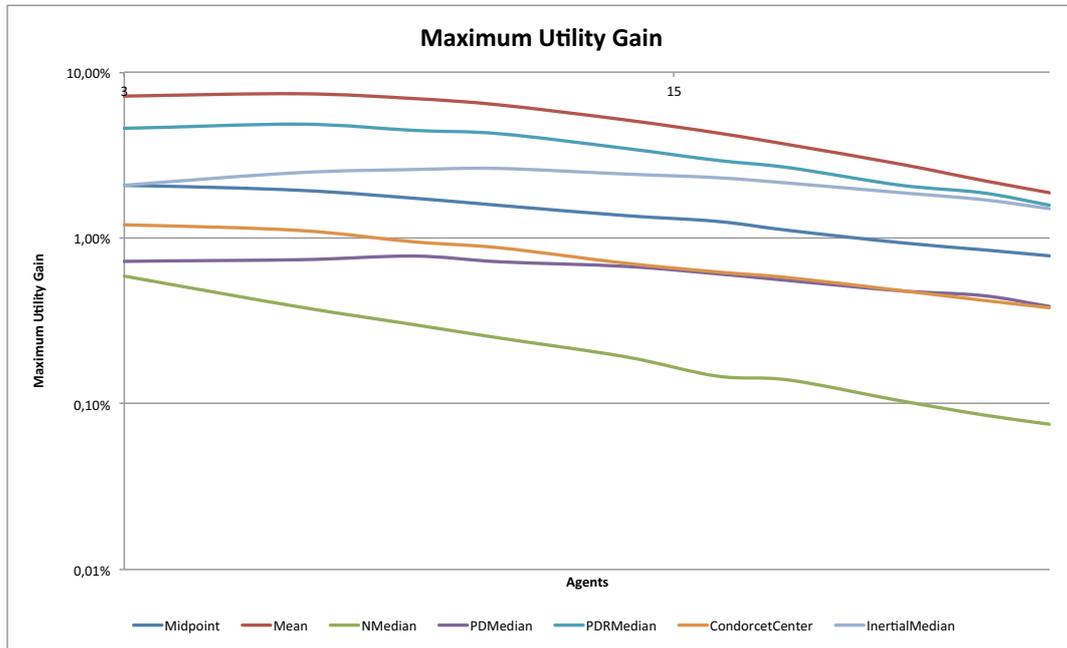


Abbildung 4.5.: Maximum Utility Gain unter Cobb-Douglas-Präferenzen (in logarithmischer Skalierung)

Agents	Midpoint	Mean	NMed	PDMed	PDRMed	CCenter	IMed
3	0,00%	22,96%	3,20%	0,00%	0,00%	3,30%	0,00%
5	0,00%	17,94%	2,91%	0,00%	0,00%	2,85%	0,00%
7	0,00%	14,41%	2,64%	0,00%	0,00%	2,49%	0,00%
9	0,00%	12,25%	2,43%	0,00%	0,00%	2,17%	0,00%
13	0,00%	9,26%	2,17%	0,00%	0,00%	1,94%	0,00%
17	0,00%	7,37%	1,90%	0,00%	0,00%	1,69%	0,00%
21	0,00%	6,22%	1,69%	0,00%	0,00%	1,50%	0,00%
29	0,00%	4,73%	1,47%	0,00%	0,00%	1,30%	0,00%
37	0,00%	3,81%	1,38%	0,00%	0,00%	1,18%	0,00%
45	0,00%	3,20%	1,22%	0,00%	0,00%	1,06%	0,00%

Tabelle 4.6.: Maximum Utility Gain unter metrischen Präferenzen

4. Simulation

Agents	Midpoint	Mean	NMed	PDMed	PDRMed	CCenter	IMed
3	68,67%	100,00%	48,43%	47,20%	73,57%	64,73%	68,93%
5	69,70%	99,98%	34,96%	39,70%	66,66%	50,72%	65,50%
7	70,21%	99,99%	27,01%	34,14%	60,50%	40,89%	62,47%
9	72,20%	99,99%	21,56%	30,01%	58,87%	35,43%	59,26%
13	69,08%	100,00%	15,42%	25,25%	50,02%	26,65%	51,89%
17	66,37%	99,99%	11,55%	21,06%	46,16%	22,45%	47,14%
21	65,57%	100,00%	8,94%	18,74%	42,48%	19,68%	42,15%
29	62,01%	99,99%	6,17%	15,89%	38,76%	16,22%	38,24%
37	60,09%	99,99%	4,44%	13,91%	35,53%	14,12%	35,08%
45	58,56%	100,00%	3,53%	12,21%	32,97%	13,12%	32,44%

Tabelle 4.7.: Total Number of Agents Manipulating unter Cobb-Douglas-Präferenzen

weder man fragt, wie viele Agenten im Simulationslauf *insgesamt* vom wahren Peak abgewichen sind, oder man fragt, wie viele Agenten *bei Stopp* des Simulationslaufs (also bei Konvergenz bzw. $t = 200$) misrepräsentieren.

Die Kenngröße Total Number of Agents Manipulating misst erstere Zahl, also die Anzahl der Agenten, die an irgendeiner Stelle im Verlauf des Simulationslaufs mindestens einmal ihren announced Peak ändern. Sei t^* die Nummer der Iteration, bei der der Simulationslauf gestoppt wird (also entweder das Profil konvergiert oder $t = 200$ erreicht ist) und - wie gewohnt - w^j der (wahre) Peak des Agenten j . Man betrachte eine Teilmenge $T \subseteq N$ der Agenten, wobei für alle Agenten $i \in T$ gilt:

$$\exists t \in [1; t^*] : w^i(t) \neq w^i.$$

Dann ist die Total Number of Agents Manipulating gegeben durch:

$$d_3 := |T|.$$

Diese Variable lässt sich dadurch normalisieren, indem man sie in Bezug zur Anzahl aller Agenten ($n = |N|$) setzt, also:

$$\tilde{d}_3 := \frac{d_3}{n}.$$

So bedeutet $\tilde{d}_3 = 0$, dass kein Agent seinen Peak geändert hat, während $\tilde{d}_3 = 1$ anzeigt, dass im Verlauf der Simulationsverlaufs jeder Agent (mindestens einmal) von seinem wahren Peak abgewichen ist.

Betrachtet man die (normalisierten) Daten der Variable in Tabelle 4.7, so erkennt man, dass der Anteil insgesamt manipulierender Agenten mit steigender Agentenanzahl abnimmt. Eine Ausnahme hiervon bildet die Mittelwert-Regel. Tabelle 4.8 gibt die absoluten Zahlen manipulierender Agenten an. Hier wird deutlich, dass absolut unter den meisten Regeln (eine Ausnahme bildet die normalisierte Median-Regel)

Agents	Midpoint	Mean	NMed	PDMed	PDRMed	CCenter	IMed
3	2,060	3,000	1,453	1,416	2,207	1,942	2,068
5	3,485	4,999	1,748	1,985	3,333	2,536	3,275
7	4,915	6,999	1,891	2,390	4,235	2,862	4,373
9	6,498	8,999	1,940	2,701	5,298	3,189	5,333
13	8,981	13,000	2,004	3,283	6,502	3,464	6,746
17	11,283	16,999	1,963	3,581	7,848	3,817	8,014
21	13,769	20,999	1,877	3,936	8,920	4,133	8,852
29	17,983	28,998	1,788	4,607	11,239	4,703	11,091
37	22,233	36,997	1,644	5,148	13,147	5,224	12,979
45	26,354	45,000	1,588	5,495	14,836	5,905	14,598

Tabelle 4.8.: Total Number of Agents Manipulating unter Cobb-Douglas-Präferenzen in absoluten Zahlen

die Zahl manipulierender Agenten zunimmt, wobei die Zuwächse insgesamt mit steigender Anzahl an Agenten kleiner werden.

Hinsichtlich der Abstimmungsregeln fällt auf, dass unter der normalisierten Median-Regel im Schnitt ein bis zwei Agenten manipulieren, während - der andere Extremfall - unter der Mittelwert-Regel fast immer alle Agenten von ihrem wahren Peak abweichen. Die Midpoint-Regel liegt mit circa 60 Prozent manipulierender Agenten „an zweiter Stelle“. Ebenso wie beim Maximum Utility Gain ist auffällig, dass die Werte der Variablen unter der sequentiellen Median-Regel je nach Wahl der Sequenz (1, 2, 3 oder 3, 2, 1) stark voneinander abweichen mit deutlichen größeren Werten für die „PDRMedian“-Regel.

Unter metrisch eingipfligen Präferenzen (Tabelle 4.9) ändern sich die Ergebnisse bei der Mittelwert-Regel nicht, während die Werte der normalisierten Median-Regel sich erhöhen und die der Condorcet Center-Regel leicht sinken. Auf eine Analyse des Verhaltens der Abstimmungsregeln unter CES-Präferenzen wird hier - unter Verweis auf die Final Number of Agents Manipulating - verzichtet.

Final Number of Agents Manipulating Wie oben ausgeführt lässt sich die Anzahl der Agenten, die manipulieren, auch dadurch messen, indem man fragt, wie viele Agenten bei Stopp (also Konvergenz oder $t = 200$) des Simulationslaufs einen Peak vorschlagen, der nicht ihrem wahren Peak entspricht. Sei also t^* wiederum die Nummer der Iteration, bei der der Simulationslauf gestoppt wird, und $F \subseteq N$ die Teilmenge der Agenten, die in Iteration t^* von ihrem wahren Peak abweichen. Es gilt also für alle $i \in F$:

$$w^i(t^*) \neq w^i.$$

Die Final Number of Agents Manipulating ist gegeben durch:

$$d_4 := |F|.$$

4. Simulation

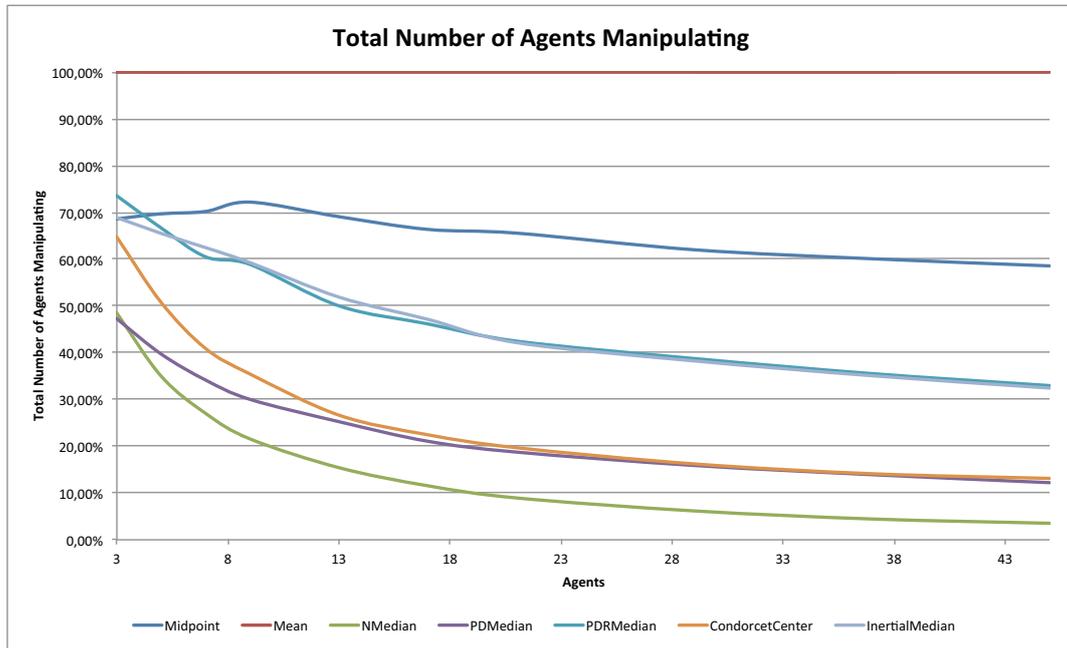


Abbildung 4.6.: Total Number of Agents Manipulating unter Cobb-Douglas-Präferenzen

Agents	Midpoint	Mean	NMed	PDMed	PDRMed	CCenter	IMed
3	0,00%	99,20%	52,33%	0,00%	0,00%	52,27%	0,00%
5	0,00%	99,54%	38,72%	0,00%	0,00%	36,90%	0,00%
7	0,00%	99,39%	29,40%	0,00%	0,00%	28,80%	0,00%
9	0,00%	99,51%	24,62%	0,00%	0,00%	22,82%	0,00%
13	0,00%	99,42%	17,25%	0,00%	0,00%	16,08%	0,00%
17	0,00%	99,25%	13,16%	0,00%	0,00%	12,20%	0,00%
21	0,00%	99,41%	10,10%	0,00%	0,00%	9,44%	0,00%
29	0,00%	99,35%	6,89%	0,00%	0,00%	6,47%	0,00%
37	0,00%	99,36%	5,26%	0,00%	0,00%	4,95%	0,00%
45	0,00%	99,36%	4,08%	0,00%	0,00%	3,87%	0,00%

Tabelle 4.9.: Total Number of Agents Manipulating unter metrischen Präferenzen

4.2. Ergebnisse der Simulationsstudie

Agents	Midpoint	Mean	NMed	PDMed	PDRMed	CCenter	IMed
3	62,73%	100,00%	48,43%	45,63%	71,10%	62,33%	62,40%
5	59,60%	99,98%	34,96%	38,54%	64,66%	48,90%	58,90%
7	55,64%	99,99%	27,01%	33,49%	58,77%	39,60%	55,96%
9	55,79%	99,99%	21,56%	29,56%	57,32%	34,58%	53,48%
13	50,24%	100,00%	15,42%	24,98%	48,97%	26,00%	47,68%
17	47,55%	99,99%	11,55%	20,93%	45,36%	22,07%	43,97%
21	46,26%	100,00%	8,94%	18,60%	41,80%	19,37%	39,41%
29	42,33%	99,98%	6,17%	15,81%	38,36%	16,04%	36,70%
37	40,69%	99,98%	4,44%	13,87%	35,21%	14,01%	34,00%
45	39,05%	100,00%	3,53%	12,18%	32,77%	13,05%	31,89%

Tabelle 4.10.: Final Number of Agents Manipulating unter Cobb-Douglas-Präferenzen

Diese Variable lässt sich völlig analog zu d_3 normalisieren, indem man sie in Bezug zur Anzahl aller Agenten setzt, also:

$$\tilde{d}_4 := \frac{d_4}{n}.$$

Erneut bedeutet $\tilde{d}_4 = 0$, dass kein Agent seinen Peak geändert hat. Man kann sich leicht überlegen, dass dann $t^* = 1$ gelten muss. Ebenso zeigt $\tilde{d}_4 = 1$ an, dass bei Stopp des Simulationsverlaufs jeder Agent von seinem wahren Peak abgewichen ist.

Über die Total Number of Agents Manipulating hinaus bietet die Final Number dieser Variable weitere Informationen. So lassen sich die Werte dieser Variablen einerseits gut interpretieren, da es sich bei konvergierten Profilen um Nash-Gleichgewichte handelt. Andererseits kann man durch Vergleich zwischen d_3 und d_4 im gleichen Simulationsverlauf Profile, in denen ein Agent, der einmal manipuliert, dies auch weiter tut, von solchen Profilen unterscheiden, in denen manche Agenten wieder zu ihrem wahren Peak zurückkehren - beispielsweise, weil die Manipulation eines anderen Agenten bereits das gewünschte Abstimmungsergebnis bewirkt. Man beachte, dass $d_3 \geq d_4$ und demzufolge $\tilde{d}_3 \geq \tilde{d}_4$ gelten muss.

Die Mittelwerte der Abstimmungsregeln bezüglich dieser Variablen sind in Tabelle 4.10 und Abbildung 4.7 wiedergegeben. Allgemein ähnelt der Verlauf bei der Erhöhung der Anzahl der Agenten dem der Total Number of Agents Manipulating. Auffällig sind jedoch die deutlich geringeren Werte der Midpoint-Regel.

Dies wirft die generelle Frage auf, welche weiteren Informationen man durch einen Vergleich der Total mit der Final auf Agents Manipulating erhalten kann: Bildet man den Quotienten dieser Variablen, teilt man also die Final durch die Total Number of Agents Manipulating, so erhält man den Prozentsatz der Agenten, die während eines Simulationslaufs manipulieren und diese Manipulation bis zum Stopp des Simulationslaufs fortsetzen (Dabei können die Agenten durchaus ihren unwahren Peak wechseln.). Die Mittelwerte dieses Quotienten sind in Tabelle 4.11 abgegeben und in Abbildung 4.9 dargestellt. Als Ergebnis kann festgehalten werden, dass dieser

4. Simulation

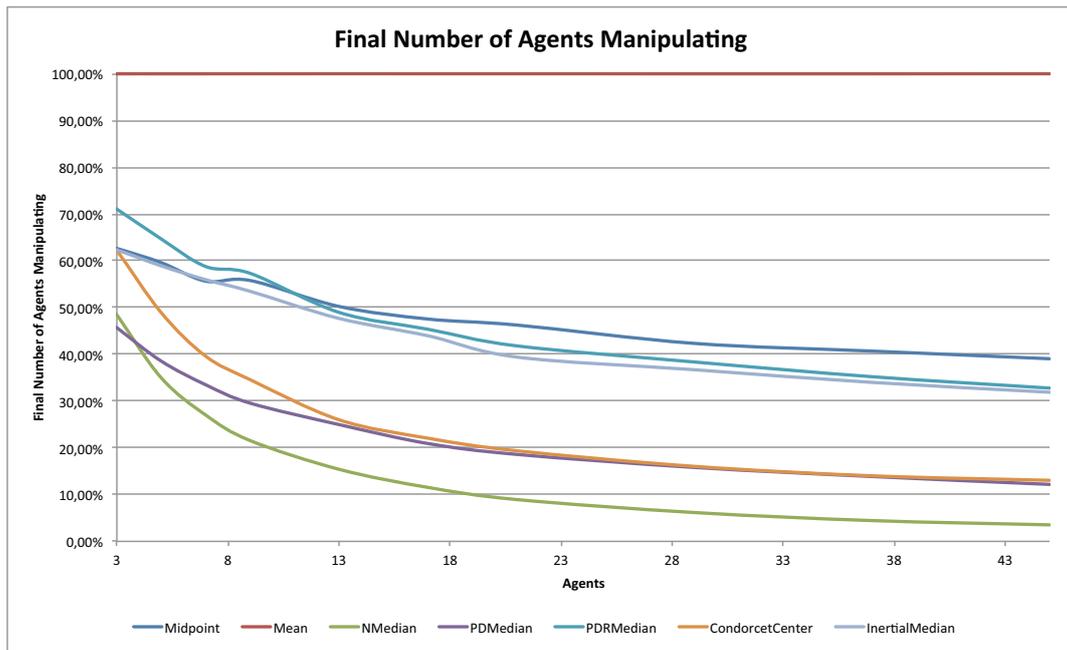


Abbildung 4.7.: Final Number of Agents Manipulating unter Cobb-Douglas-Präferenzen

Quotient im Mittel bei allen Regeln - mit Ausnahme der Midpoint-Regel - fast 1 ist. In anderen Worten: außer bei der Midpoint-Regel wird ein Agent, der seinen Peak ändert, nicht im Verlauf eines Simulationslaufs auf seinen wahren Peak zurück wechseln. Ruft man sich zudem das Ergebnis aus Tabelle 4.3 in Erinnerung, dass nämlich (außer bei der Midpoint-Regel) ein Agent im Schnitt einmal manipuliert, so kann man zusammenfassend sagen, dass es bei diesen Regeln während eines Simulationslaufs meist zu exakt einer Manipulation kommt, wenn ein Agent überhaupt manipuliert. Bei der Midpoint-Regel hingegen sind sowohl die Anzahl der Manipulationen pro manipulierendem Agent höher als auch Agenten vorhanden, die zwar während des Simulationslauf misrepräsentieren, aber am Ende wieder auf den wahren Peak zurück wechseln.

Während das Verhalten unter metrisch eingipfligen Präferenzen und auch der Einfluss der Sequenz auf die sequentielle Median-Regel dem bei der Total Number of Agents Manipulating sehr ähneln, ist es von besonderem Interesse, den Einfluss des Parameters ρ unter CES-Präferenzen näher zu untersuchen (siehe Tabellen C.1 bis C.7): Auch hier bildet die Mittelwert-Regel eine Ausnahme, indem diese nicht erkennbar auf Änderungen von ρ reagiert. Bei den übrigen Regeln nimmt die Final Number of Agents Manipulating für eine Erhöhung von ρ (ausgehend von Cobb-Douglas-Präferenzen) ab. Verringert ausgehend von $\rho = 0$ den Wert des Substitutionsparameters, so nimmt der Mittelwert der betrachteten Kenngröße ebenso in der Regel ab. Eine bemerkenswerte Ausnahme ist hierbei jedoch die normalisierte Median-Regel: Bei dieser nimmt die Final Number of Agents Manipulating für alle

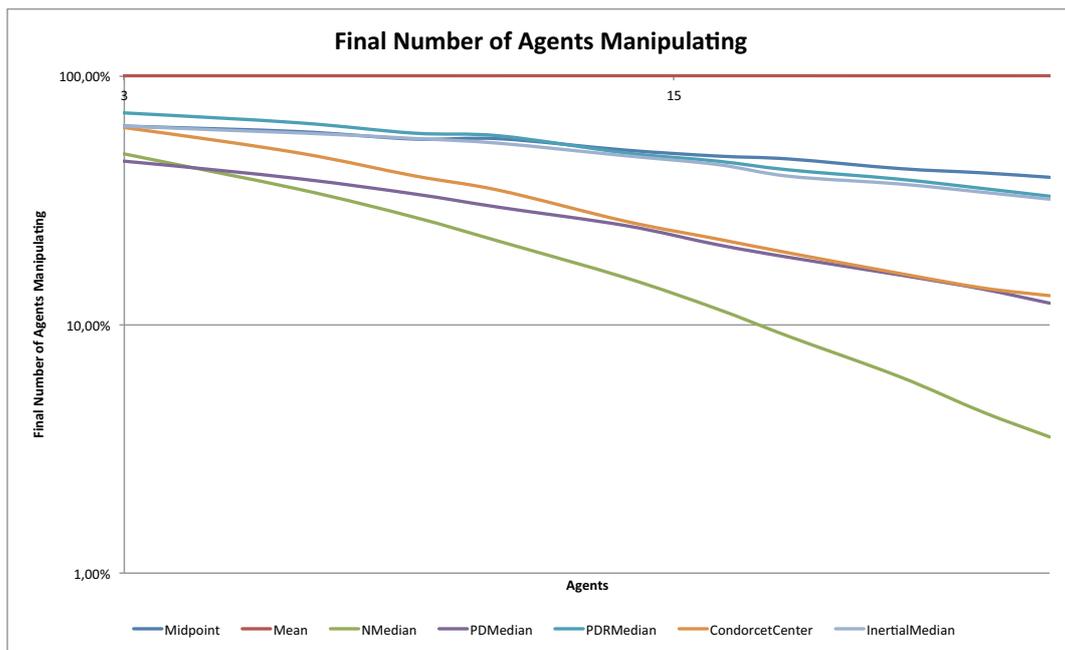


Abbildung 4.8.: Final Number of Agents Manipulating unter Cobb-Douglas-Präferenzen (in logarithmischer Skalierung)

betrachteten Agentenzahlen zu, wenn ρ negativ wird.

Number of Pivotal Agents Schließlich lässt sich die Frage stellen, wie viele Agenten in einem Profil überhaupt Einfluss auf das Ergebnis der Abstimmungsregel haben, also pivotal sind. Es bezeichne $P \subseteq N$ die Teilmenge der Agenten, die - gegeben die wahren Peaks der anderen Agenten - durch die Wahl ihres Peaks das Ergebnis der Abstimmungsregel verändern können. Es gilt also für alle $i \in P$:

$$\exists \tilde{w}^i \in X : F(w^1, w^2, \dots, \tilde{w}^i, \dots, w^n) \neq F(w^1, w^2, \dots, w^i, \dots, w^n).$$

Die Number of Pivotal Agents ist demzufolge gegeben durch:

$$d_5 := |P|$$

Auch diese Variable lässt sich wiederum dadurch normalisieren, indem man sie in Relation zur Anzahl aller Agenten $n = |N|$ setzt, also definiert:

$$\tilde{d}_5 := \frac{d_5}{n}.$$

Demzufolge bedeutet $\tilde{d}_5 = 0$, dass kein Agent Einfluss auf das Ergebnis der Regel nehmen kann - und somit auch eine Manipulation des Profils ausgeschlossen ist. $\tilde{d}_5 = 1$ bedeutet entsprechend, dass alle Agenten Einfluss auf das Abstimmungsergebnis nehmen können.

4. Simulation

Agents	Midpoint	Mean	NMed	PDMed	PDRMed	CCenter	IMed
3	92,48%	100,00%	100,00%	97,11%	97,18%	96,77%	91,83%
5	87,53%	100,00%	100,00%	97,35%	97,47%	97,18%	91,32%
7	82,20%	100,00%	100,00%	98,17%	97,54%	97,51%	91,24%
9	80,24%	100,00%	100,00%	98,57%	97,54%	98,04%	91,98%
13	76,51%	100,00%	100,00%	98,96%	98,11%	98,14%	93,29%
17	75,54%	100,00%	100,00%	99,44%	98,51%	98,68%	94,40%
21	74,90%	100,00%	100,00%	99,24%	98,67%	98,71%	94,87%
29	72,93%	99,99%	100,00%	99,64%	99,17%	99,17%	96,98%
37	72,72%	99,99%	100,00%	99,75%	99,30%	99,44%	97,85%
45	71,65%	100,00%	100,00%	99,83%	99,56%	99,61%	98,84%

Tabelle 4.11.: Verhältnis Final zu Total Number of Agents Manipulating unter Cobb-Douglas-Präferenzen

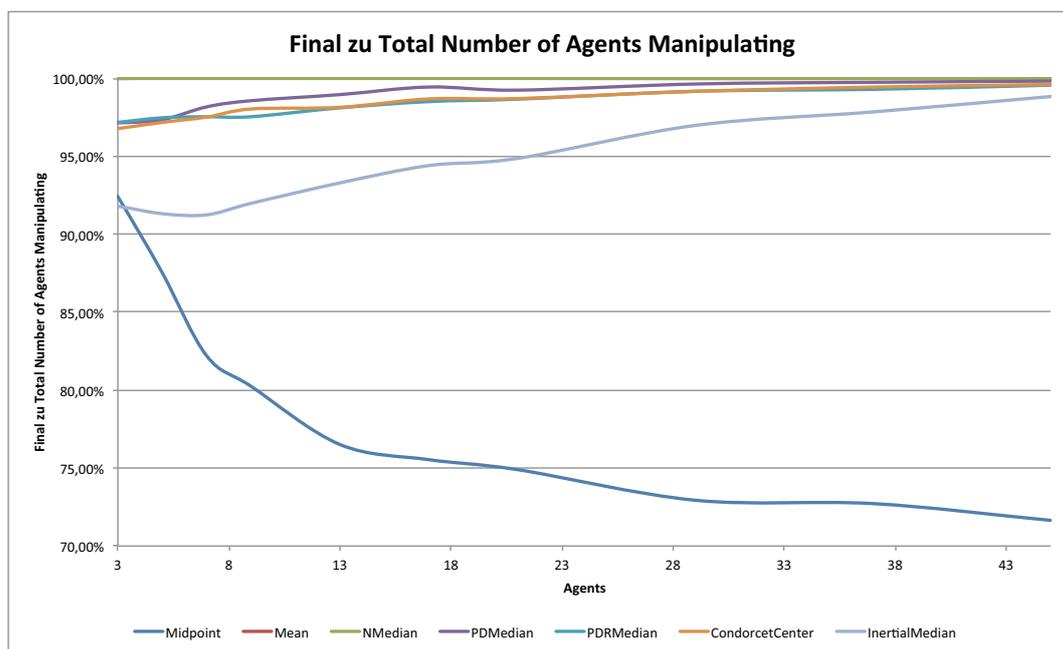


Abbildung 4.9.: Verhältnis Final zu Total Number of Agents Manipulating unter Cobb-Douglas-Präferenzen

4.2. Ergebnisse der Simulationsstudie

Agents	Midpoint	Mean	NMed	PDMed	PDRMed	CCenter	IMed
3	0,00%	99,17%	52,33%	0,00%	0,00%	52,27%	0,00%
5	0,00%	99,54%	38,72%	0,00%	0,00%	36,90%	0,00%
7	0,00%	99,39%	29,40%	0,00%	0,00%	28,80%	0,00%
9	0,00%	99,51%	24,62%	0,00%	0,00%	22,82%	0,00%
13	0,00%	99,42%	17,25%	0,00%	0,00%	16,08%	0,00%
17	0,00%	99,25%	13,16%	0,00%	0,00%	12,20%	0,00%
21	0,00%	99,41%	10,10%	0,00%	0,00%	9,44%	0,00%
29	0,00%	99,35%	6,89%	0,00%	0,00%	6,47%	0,00%
37	0,00%	99,36%	5,26%	0,00%	0,00%	4,95%	0,00%
45	0,00%	99,36%	4,08%	0,00%	0,00%	3,87%	0,00%

Tabelle 4.12.: Final Number of Agents Manipulating unter metrischen Präferenzen

Agents	Midpoint	Mean	NMed	PDMed	PDRMed	CCenter	IMed
3	99,97%	100,00%	99,97%	99,97%	99,97%	99,97%	99,97%
5	99,94%	100,00%	99,98%	99,90%	99,96%	99,98%	99,94%
7	99,89%	100,00%	99,99%	99,70%	99,76%	99,99%	99,56%
9	99,54%	100,00%	99,91%	99,36%	99,49%	99,91%	99,13%
13	99,23%	100,00%	99,85%	98,46%	99,16%	99,85%	98,54%
17	98,72%	100,00%	99,60%	97,02%	97,93%	99,60%	97,58%
21	98,72%	100,00%	99,16%	95,44%	96,44%	99,16%	95,98%
29	96,69%	100,00%	98,33%	93,18%	94,57%	98,33%	94,12%
37	94,33%	100,00%	97,01%	88,37%	92,21%	97,01%	91,62%
45	91,26%	100,00%	94,86%	84,95%	88,19%	94,86%	88,27%

Tabelle 4.13.: Number of Pivotal Agents

Mittels der Number of Pivotal Agents können Hinweise darauf gewonnen werden, ob eine Abstimmungsregel deshalb wenig manipulierbar ist, weil die Agenten wenig Einfluss auf das Ergebnis der Regel nehmen können, oder ob sie deshalb wenig manipulierbar ist, weil zwar eine Einflussmöglichkeit auf das Ergebnis, aber kein Anreiz zur Manipulation besteht.

Man beachte, dass die Frage, wie viele Agenten pivotal sind, also Einfluss auf das Abstimmungsergebnis nehmen können, unabhängig von den Präferenzen der Agenten ist. Relevant für diese Frage sind (gegeben ein (K, L) -Simplex) lediglich die Verteilung der Peaks, die Anzahl der Agenten und die jeweilige Abstimmungsregel. Die Ergebnisse für unser Standardszenario sind in Tabelle 4.13 und Abbildung 4.10 wiedergegeben. Dabei ist der (in der Literatur bekannte - siehe beispielsweise Lindner (2008) - und wenig überraschende) Zusammenhang einer fallenden Pivotalität mit steigender Anzahl der Agenten erkennbar.

Unter der Mittelwert-Regel ist ein Agent immer pivotal, d.h. diese Regel hat

4. Simulation

folglich die größte Pivotalität unter den betrachteten¹⁹. Während die Unterschiede zwischen den Abstimmungsregeln für kleine Zahlen von Agenten noch vernachlässigbar sind, so zeigt sich mit Steigerung der Zahl der Agenten, dass die normalisierte Median-Regel sowie die Midpoint-Regel eine recht hohe Pivotalität haben. Bei der Midpoint-Regel fällt diese im Vergleich zur normalisierten Median-Regel jedoch stärker ab. Erneut fällt auf, dass die Wahl der Sequenz bei der sequentiellen Median-Regel wiederum deutlichen Einfluss auf den Mittelwert der Kenngröße hat. So ist die Pivotalität der „PDRMedian“-Regel deutlich größer als die der „PDMedian“-Regel. Schließlich spiegelt sich in den Daten auch ein Faktum, das zu Beginn dieses Kapitels dargestellt wurde, wieder: Bei den betrachteten median-basierten Abstimmungsregeln ist es, damit ein Agent pivotal ist, notwendige Voraussetzung, dass dieser Einfluss auf den koordinatenweisen Median hat. Hinreichend ist diese Eigenschaften bei den betrachteten Regeln jedoch nur für die normalisierte Median-Regel und die Condorcet Center-Regel. In Tabelle 4.13 erkennt man, dass die Pivotalität dieser beiden Regeln einerseits übereinstimmt und andererseits immer größer gleich der Pivotalität der anderen median-basierten Abstimmungsregeln ist.

Wie beim Maximum Utility Gain ist es auch bei der Number of Pivotal Agents a priori nicht eindeutig klar, ob eine große bzw. kleine Anzahl pivotaler Agenten „gut“ oder „schlecht“ ist. Einerseits muss ein Agent, damit er manipulieren kann, überhaupt Einfluss auf das Abstimmungsergebnis nehmen können - insofern ist die Pivotalität des Agenten „schlecht“. Andererseits besteht das in der Literatur weit bekannte Anreizproblem - insbesondere bei Wahlen mit vielen Teilnehmern - an einer Abstimmung teilzunehmen, da die Möglichkeiten, das Ergebnis beeinflussen zu können, eher gering sind. Insofern ist „Pivotalität“ aus Anreizgesichtspunkten „gut“. Schließlich kann diese Variable einen weiteren Aspekt nur unzureichend erfassen: So kann es eine Abstimmungsregel geben, bei der zwar weniger Agenten pivotal sind, aber dafür Alternativen „erreichen“ können, die ihnen nutzen, und es kann andere Abstimmungsregeln geben, bei denen mehr Agenten pivotal sind, aber nur solche Alternativen als Ergebnis erreichbar, die ihnen nicht nutzen. Beispielsweise sind bei der Median-Regel, wenn alle Alternativen auf einer Linie angeordnet werden können und alle Agenten eingipflige Präferenzen mit unterschiedlichen Peaks haben, alle Agenten pivotal - aber nur für solche Alternativen, die auf dem Teil der Linie liegen, der dem Agenten angewandt ist (Dies ist gerade die zentrale Beweisidee des Median-Wähler-Theorems.). Wir werden, nachdem alle Variablen vorgestellt und die Ergebnisse diskutiert wurden, noch näher untersuchen, ob und welcher Zusammenhang zwischen der Number of Pivotal Agents bzw. dem Maximum Utility Gain und anderen Kenngrößen besteht.

¹⁹Dies ist auch aus „theoretischer“ Sicht wenig verwunderlich, wenn man sich vergegenwärtigt, dass für alle $x_i \neq \tilde{x}_i$ und $x_j = \tilde{x}_j$ für alle $j \neq i$ gilt:

$$\frac{1}{n} \sum_{l=1}^n x_l \neq \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \tilde{x}_l.$$

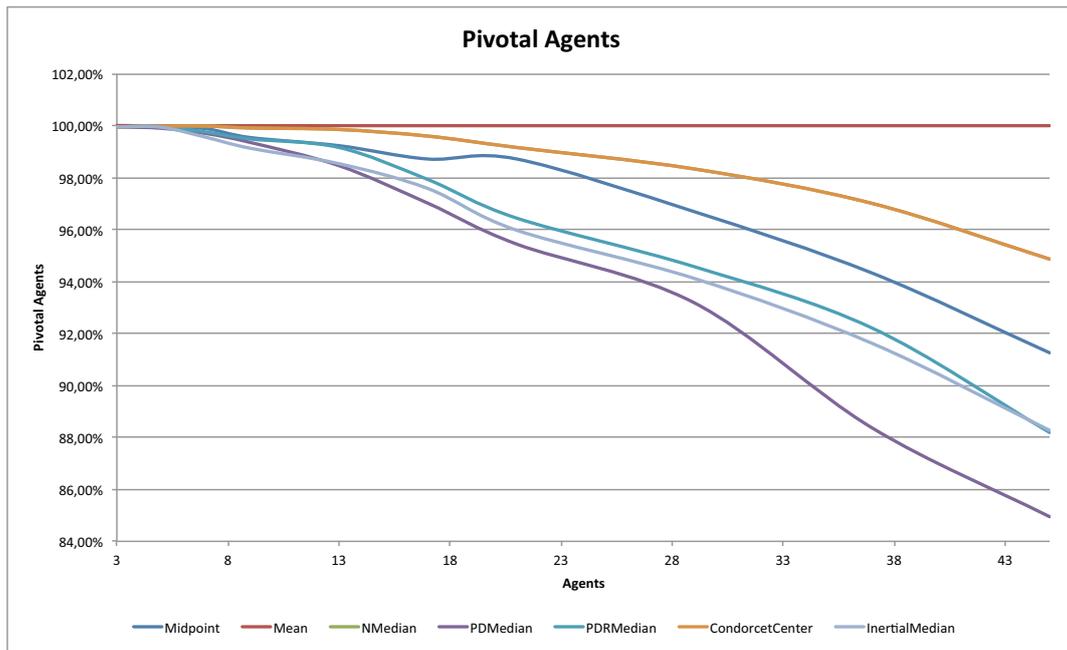


Abbildung 4.10.: Number of Pivotal Agents

Variable	Midpoint	Mean	NMed	PDMed	PDRMed	CCenter	IMed
d_{1B}	++	+	--	-			
d_2		++	--	-	+	-	
d_3	+	++	--	-		-	
d_4	+	++	--	-		-	
d_5		++	+	--		+	-

Tabelle 4.14.: Abstimmungsregeln bezüglich des Ausmaßes der Manipulation unter Cobb-Douglas-Präferenzen

Zwischenfazit

Nachdem im Rahmen dieser Abschnitts fünf Kenngrößen vorgestellt und diskutiert wurden, stellt sich die Frage, welche der Abstimmungsregeln hinsichtlich des Ausmaßes der Manipulation am stärksten bzw. am wenigsten manipulierbar sind. Eine Übersicht hierzu ist in Tabelle 4.14 angegeben. Dabei bedeutet ++, dass die Abstimmungsregel die durchschnittlich höchsten Wert bei einer Variablen aufweist, und +, dass eine Regel den zweithöchsten Wert hat. -- und - bedeuten analog, dass eine Regel den niedrigsten bzw. zweitniedrigsten Durchschnittswert aufweist. Dabei wird jeweils auf den Fall von Cobb-Douglas-Präferenzen Bezug genommen.

Wie aus der Tabelle ersichtlich ist, kann man für den Fall von Cobb-Douglas-Präferenzen festhalten, dass die Mittelwert-Regel das größte Ausmaß der Manipulation aufweist gefolgt von der Midpoint-Regel. Am wenigsten manipulierbar bezüglich

4. Simulation

der obigen Variablen ist die normalisierte Median-Regel gefolgt von der sequentiellen Median-Regel mit Sequenz 1, 2, 3 und der Condorcet Center-Regel. Es fällt insbesondere auf, dass die sequentielle Median-Regel mit Sequenz 3, 2, 1 ein deutlich höheres Ausmaß aufweist als mit der Sequenz 1, 2, 3, also sensitiv auf die Kombination aus Sequenz und Verteilungsannahme der Peaks reagiert.

Betrachtet man CES-Präferenzen und variiert den Substitutionsparameter ρ , so ist festzuhalten, dass viele Abstimmungsregeln wenig auf Änderungen von ρ reagieren, insbesondere reagiert die Mittelwert-Regel nicht und die Midpoint-Regel kaum erkennbar auf Änderungen von ρ . Die normalisierte Median-Regel weist (hinsichtlich des Maximum Utility Gain und der Final Number of Agents Manipulating) für negatives ρ ein höheres Ausmaß der Manipulation auf.

Unter metrisch eingipfligen Präferenzen ist das Verhalten der Abstimmungsregeln, die unter diesen Präferenzen manipulierbar sind, ähnlich dem im Cobb-Douglas-Fall. Wiederum ist die Mittelwert-Regel bezüglich des Ausmaßes am stärksten manipulierbar. Man beachte insbesondere, dass die Mittelwerte der unter diesen Präferenzen manipulierbaren Regeln nicht deutlich niedriger sind als unter Cobb-Douglas-Präferenzen. Es lässt sich also festhalten, dass hier die Nicht-Manipulierbarkeit der Midpoint-Regel, der sequentiellen Median-Regel und der Inertial Median-Regel nicht nur ein „kleiner“ Vorteil gegenüber den anderen Abstimmungsregeln darstellt.

Schließlich zeigt die Analyse der Variablen noch ein weiteres Phänomen, mittels dem sich die Midpoint-Regel von den übrigen Abstimmungsregeln unterscheiden lässt. Wie ausgeführt ändert ein manipulierender Agent - außer unter der Midpoint-Regel - während eines Simulationslaufs meist nur einmal seinen announced Peak und behält den neuen announced Peak dann bei. Unter der Midpoint-Regel ist hingegen die Zahl der Manipulationen je manipulierendem Agent mit durchschnittlich zwei Peakänderungen deutlich höher. Ebenso gibt es einen signifikanten Anteil von Agenten, der zwar während eines Simulationslaufs misrepräsentiert, aber bei Stopp wieder seinen wahren Peak angibt. Zusammengefasst: Die Manipulation der Midpoint-Regel zeigt eine gewisse Dynamik, die unter den anderen Abstimmungsregeln nicht zu beobachten ist. Während hier (bei n Agenten) meist nach höchstens n Iterationen ein Profil konvergiert, so ist es zur Konvergenz unter der Midpoint-Regel im Allgemeinen nicht ausreichend, jedem Agenten nur einmal die Möglichkeit zu eröffnen seinen Peak zu ändern.

4.2.2. Effekt der Manipulation

Der Effekt einer Manipulation soll die Auswirkungen, die durch die Angabe nicht wahrer Peaks entstehen, um- bzw. erfassen. Im Wesentlichen werden wir dabei zwei Kategorien von Auswirkungen betrachten: zum einen die Auswirkungen auf die Abstimmungsregel selbst, genauer auf die Argumente der Regel (also die announced Peaks) und deren Ergebnis, zum anderen Auswirkungen auf die bereits angedeuteten Zielgrößen bzw. Gütekriterien, die mit dem Ergebnis in Zusammenhang stehen. Hierunter wollen wir den Nutzengewinn/-verlust, der durch Manipulation entsteht, und Änderungen in der Remoteness der Ergebnisse fassen, also untersuchen, ob

durch Manipulation das Ergebnis einer Abstimmungsregel mehr oder weniger „abgelegen“ bzw. „zentral“ liegt.

Average Deviation Ein Effekt von Manipulation sind Auswirkungen auf die announced Peaks, also auf das Argument der Abstimmungsregel. Es stellt sich beispielsweise die Frage, wie groß die durchschnittliche Abweichung zwischen dem wahren und dem announced Peak eines Agenten bei Stopp (d.h. Konvergenz oder nach 200 Iterationen) eines Simulationslauf ist. Wie eingeführt sei t^* die Iteration, bei der der Simulationslauf gestoppt wird. Weiterhin sei w^j der (wahre) Peak des Agenten j und $w^j(t^*)$ der announced Peak bei Stopp des Simulationslaufs. Die Average Deviation ist gegeben durch:

$$e_1 := \frac{\sum_{i=1}^{|N|} d(w^i, w^i(t^*))}{|N|} = \frac{\sum_{i=1}^n d(w^i, w^i(t^*))}{n}.$$

Da der maximale Abstand zwischen zwei Elementen im Simplex $\max_{x,y \in X} d(x,y) = L$ beträgt, gilt für die Normalisierung der Average Deviation:

$$\tilde{e}_1 := \frac{e_1}{L}.$$

Mit der Average Deviation ist ein Maß für die durchschnittliche Abweichung zwischen dem wahren Profil der Peaks und dem Profil bei Stopp des Simulationslauf gegeben. Ist ein Profil nicht manipulierbar, so gilt $\tilde{e}_1 = 0$. Im Extremfall, also bei $\tilde{e}_1 = 1$, würde *jeder Agent* zwischen seinem wahren und seinem announced Peak die maximale Abweichung von L aufweisen, beispielsweise, wenn sein wahrer Peak „in einer Ecke“ des Simplex läge (also $x_j^i = L$ für ein j), in eine andere Ecke des Simplex „springen“. Dabei kann man insbesondere dann dieser Variable eine große Bedeutung zumessen, wenn es bei einer Abstimmung nicht allein um eine mögliche Beeinflussung des Ergebnisses sondern auch um die „Aufdeckung“ (also um das Elizitieren) von Präferenzen geht.

Tabelle 4.15 und die Abbildungen 4.11 und 4.12 geben die Mittelwerte dieser Variablen unter Cobb-Douglas-Präferenzen wieder. Während für die Mittelwert-Regel dieser Wert erst steigt und dann in etwa konstant bleibt, fällt die Average Deviation unter allen anderen Regeln. Die kleinsten Werte hat dabei die normalisierte Median-Regel. Die zweitgrößten Werte (nach der Mittelwert-Regel) liegen bei der Midpoint-, der „PDRMedian“- und der Inertial Median-Regel vor. Unklar ist, ob die Werte der Average Deviation gegen 0 konvergieren, wenn die Anzahl der Agenten wächst. Erneut fällt auf, dass die Wahl der Sequenz bei der sequentiellen Median-Regel deutlichen Einfluss auf das Ergebnis der Variablen hat, wobei die „PDRMedian“-Regel wiederum höhere Werte aufweist als die „PDMedian“-Regel.

Unter CES-Präferenzen (Tabellen D.1 bis D.7) ist das Verhalten der einzelnen Abstimmungsregeln hinsichtlich einer Variation von ρ sehr unterschiedlich. So bleibt die Average Deviation der Mittelwert-Regel recht unverändert, während unter der Midpoint-Regel, der sequentiellen Median-Regel und der Inertial Median-Regel die Werte dieser Kenngröße sowohl für ρ nahe bei 1 als auch im negativen Bereich eher

4. Simulation

Agents	Midpoint	Mean	NMed	PDMed	PDRMed	CCenter	IMed
3	5,11%	36,66%	3,85%	2,20%	7,96%	4,97%	5,07%
5	4,86%	39,28%	1,93%	1,74%	7,06%	3,10%	5,13%
7	4,51%	40,26%	1,23%	1,47%	6,27%	2,23%	4,90%
9	4,40%	41,05%	0,84%	1,29%	6,04%	1,79%	4,77%
13	3,82%	41,80%	0,51%	1,05%	4,96%	1,23%	4,25%
17	3,62%	42,32%	0,33%	0,84%	4,50%	0,98%	4,01%
21	3,48%	42,53%	0,24%	0,72%	4,11%	0,85%	3,56%
29	3,23%	42,75%	0,14%	0,59%	3,77%	0,66%	3,43%
37	3,08%	43,03%	0,09%	0,51%	3,32%	0,56%	3,11%
45	2,96%	43,09%	0,07%	0,44%	3,07%	0,52%	2,92%

Tabelle 4.15.: Average Deviation unter Cobb-Douglas-Präferenzen

Agents	Midpoint	Mean	NMed	PDMed	PDRMed	CCenter	IMed
3	0,00%	27,22%	3,77%	0,00%	0,00%	3,59%	0,00%
5	0,00%	30,17%	2,13%	0,00%	0,00%	1,95%	0,00%
7	0,00%	30,68%	1,29%	0,00%	0,00%	1,22%	0,00%
9	0,00%	31,55%	0,92%	0,00%	0,00%	0,84%	0,00%
13	0,00%	31,93%	0,56%	0,00%	0,00%	0,51%	0,00%
17	0,00%	32,04%	0,38%	0,00%	0,00%	0,35%	0,00%
21	0,00%	32,17%	0,27%	0,00%	0,00%	0,24%	0,00%
29	0,00%	32,29%	0,16%	0,00%	0,00%	0,14%	0,00%
37	0,00%	32,31%	0,11%	0,00%	0,00%	0,10%	0,00%
45	0,00%	32,24%	0,08%	0,00%	0,00%	0,07%	0,00%

Tabelle 4.16.: Average Deviation unter metrischen Präferenzen

abnehmen. Bei der normalisierten Median-Regel hingegen ist bei einer Variation von ρ (ausgehend von $\rho = 0$) eine Zunahme der Average Deviation zu beobachten. Das Verhalten der Condorcet Center-Regel ist unterschiedlich und abhängig von der Anzahl der Agenten. Haben die Agenten metrisch eingipflige Präferenzen (Tabelle 4.16), so sind die Werte der Mittelwert- und der Condorcet Center-Regel niedriger als unter Cobb-Douglas-Präferenzen; die Werte der normalisierten Median-Regel ändern sich nicht erkennbar.

Da die Average Deviation die *durchschnittliche* Abweichung eines Agenten von seinem wahren Peak angibt - und zwar unabhängig davon, wie viele Agenten tatsächlich manipulieren - kann sie zum Beispiel nur wenig Aufschluss darüber geben, wie stark ein manipulierender Agent von seinem Peak abweicht bzw. abweichen muss, um Einfluss auf das Ergebnis einer Abstimmungsregel zu nehmen. So können beispielsweise kleine Werte von \tilde{e}_1 entweder davon herrühren, dass *viele* Agenten nur *wenig* vom Peak abweichen oder dass *wenige* Agenten *sehr stark* von ihrem wahren Peak abweichen. Aufschluss über solche Fragen wollen wir mithilfe der Average

4.2. Ergebnisse der Simulationsstudie

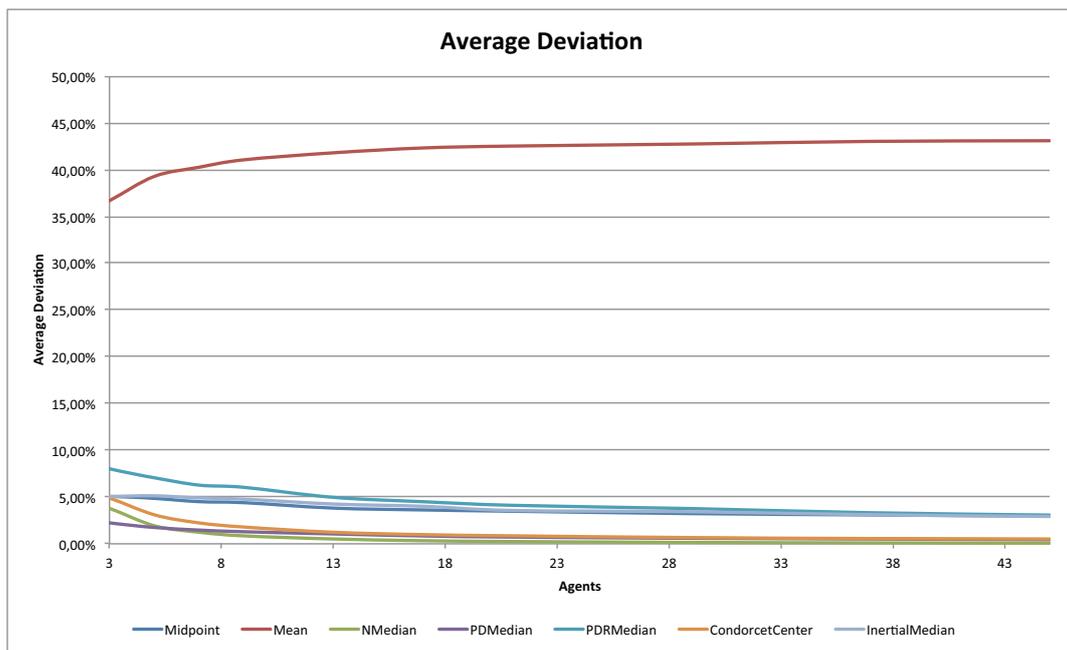


Abbildung 4.11.: Average Deviation unter Cobb-Douglas-Präferenzen

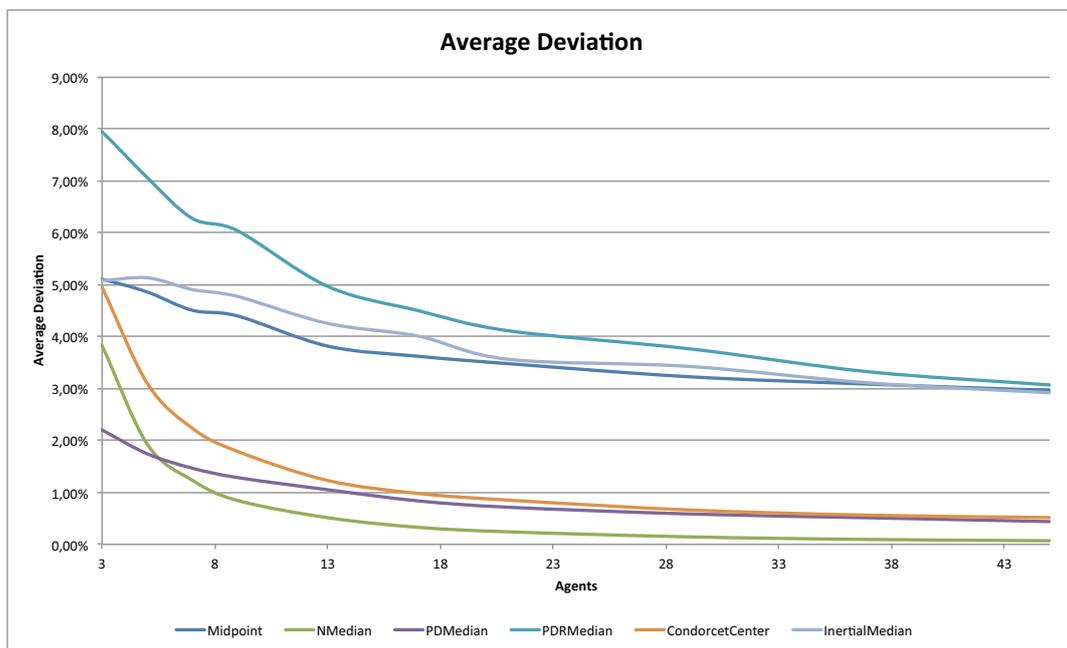


Abbildung 4.12.: Average Deviation unter Cobb-Douglas-Präferenzen (Ausschnittsvergrößerung)

4. Simulation

Manipulation (Variable e_2) gewinnen.

Average Manipulation Wie stark wird ein Agent seinen Peak ändern, um Einfluss auf das Ergebnis einer Abstimmung zu nehmen? Diese Frage wollen wir mittels der Average Manipulation versuchen zu beantworten. Insbesondere stellt sich dabei die Frage, ob diese „durchschnittliche Manipulation“ bei verschiedenen Abstimmungsregeln unterschiedlich ist. Wie bei der Average Deviation messen wir die Summe der Abweichungen zwischen wahren und announced Peaks bei Stopp des Simulationslaufs, teilen diese aber bei der Average Manipulation nicht durch die Anzahl aller Agenten, sondern durch die Final Number of Agents Manipulating, also die durch Anzahl der Agenten, die bei Stopp des Simulationslaufs von ihrem wahren Peak abweichen. Die Average Manipulation ist also die durchschnittliche Abweichung eines Agenten von seinem wahren Peak - gegeben, dass dieser Agent auch tatsächlich manipuliert, also abweicht. Es gelten die gleichen Bezeichnungen wie bei der Average Deviation. Wie bei der Final Number of Agents Manipulating bezeichne $F \subseteq N$ die Teilmenge der Agenten, die in Iteration t^* von ihrem wahren Peak abweichen. Es gilt also für alle $i \in F$:

$$w^i(t^*) \neq w^i.$$

Dann ist die Average Manipulation gegeben durch:

$$e_2 := \frac{\sum_{i=1}^n d(w^i, w^i(t^*))}{|F|} = \frac{e_1 \cdot n}{d_3}.$$

Die Normalisierung ist völlig analog zur Average Deviation:

$$\tilde{e}_2 := \frac{e_2}{L}.$$

Ebenso analog lassen sich die beiden Extremwerte dieser Variable, also $\tilde{e}_2 = 0$ (d.h. das Profil ist nicht manipulierbar) und $\tilde{e}_2 = 1$ (jeder manipulierende Agent weicht „maximal“ von seinem Peak ab), interpretieren.

Die in Tabelle 4.17 und Abbildung 4.13 angegebenen Werte der Variablen lassen auf den ersten Blick für die meisten Abstimmungsregeln eine eher bezüglich der Anzahl der Agenten insensitive Average Manipulation vermuten. Betrachtet man dies genauer (siehe Abbildungen 4.14 und 4.15), so erkennt man, dass (mit zwei Ausnahmen) die Average Manipulation tatsächlich eher konstant zu sein scheint. Dies ist ein Indiz dafür, dass es unter vielen Abstimmungsregeln für einen Agenten, der manipulieren möchte, eine gewisse mit der Art der Regel zusammenhängende Distanz gibt, die sein announced Peak von seinem wahren Peak abweichen muss. Bei der normalisierten Median- und der Condorcet Center-Regel jedoch fällt diese Variable bei einer logarithmischen Skalierung der Achsen linear mit steigender Anzahl der Agenten. Es wird im weiteren Verlauf dieser Arbeit noch zu klären sein, ob es für dieses Verhalten eine mögliche Erklärung gibt.

Die stärkste Average Manipulation weist die Mittelwert-Regel gefolgt von der sequentiellen Median-Regel mit Sequenz 3, 2, 1 auf. Die geringsten Werte werden bei der normalisierten Median-Regel gefolgt von der sequentiellen Median-Regel mit

Agents	Midpoint	Mean	NMed	PDMed	PDRMed	CCenter	IMed
3	7,84%	36,66%	8,05%	4,72%	11,08%	8,01%	7,84%
5	7,70%	39,29%	5,63%	4,40%	10,54%	6,36%	8,27%
7	7,76%	40,27%	4,59%	4,17%	10,50%	5,65%	8,56%
9	7,63%	41,06%	3,91%	4,22%	10,34%	5,12%	8,84%
13	7,42%	41,80%	3,28%	4,18%	9,99%	4,62%	8,82%
17	7,46%	42,32%	2,84%	3,85%	9,83%	4,35%	8,88%
21	7,32%	42,53%	2,70%	3,82%	9,73%	4,31%	8,79%
29	7,38%	42,75%	2,31%	3,74%	9,68%	4,05%	9,20%
37	7,34%	43,03%	2,11%	3,66%	9,32%	3,96%	8,96%
45	7,38%	43,10%	2,00%	3,62%	9,24%	3,79%	8,98%

Tabelle 4.17.: Average Manipulation unter Cobb-Douglas-Präferenzen

Sequenz 1, 2, 3 beobachtet. Wiederum ist also auch ein Einfluss der Sequenz bei letzterer Regel erkennbar.

Betrachtet man CES-Präferenzen und variiert den Substitutionsparameter ρ (Tabellen E.1 bis E.7), so ist ein unterschiedliches Verhalten der Abstimmungsregeln erkennbar: So scheint die Mittelwert-Regel nicht bei Änderungen von ρ die Average Manipulation zu verändern. Bei der Midpoint-, der sequentiellen Median- und der Inertial Median-Regel hingegen nimmt der Wert dieser Variablen ab, wenn ρ negativ wird. Ein ganz anderes Verhalten hingegen zeigen die normalisierte Median- und die Condorcet Center-Regel. Unter diesen beiden Regeln nimmt die Average Manipulation zu, wenn ρ positiv oder negativ wird. Beispielsweise ist der Durchschnittswert dieser Variablen im Fall $\rho = -5$ für alle Agentenzahlen größer als der der Midpoint-Regel.

Unter metrisch eingipfligen Präferenzen (Tabelle 4.18) ist das Verhalten der drei manipulierbaren Abstimmungsregeln ähnlich dem unter Cobb-Douglas-Präferenzen, wobei die Mittelwerte dieser Regeln unterhalb derer des Standardszenarios liegen. Insbesondere fallen die Werte der normalisierten Median- und der Condorcet Center-Regel.

Es ist kontextabhängig, ob eine große Average Manipulation einer Abstimmungsregel „gut“ oder „schlecht“ ist. Interessiert man sich nicht nur für das Ergebnis einer Abstimmung, sondern auch dafür, welche Präferenzen die einzelnen Agenten haben, d.h. hat man also ein Interesse daran, die Präferenzen der Abstimmungsteilnehmer „aufzudecken“, so ist eine große Average Manipulation einer Regel ein Negativgesichtspunkt. Andererseits bedeutet ein hoher Durchschnittswert dieser Variablen auch, dass ein Agent einen gewissen „Mindestabstand“ zwischen seinem wahren und announced Peak haben muss, um erfolgreich manipulieren zu können. In anderen Worten: Bei einer großen Average Manipulation sind „Mikromanipulationen“, also solche Manipulationen, bei denen ein Agent seinen Peak nur geringfügig ändern muss, eher selten zu erwarten.

4. Simulation

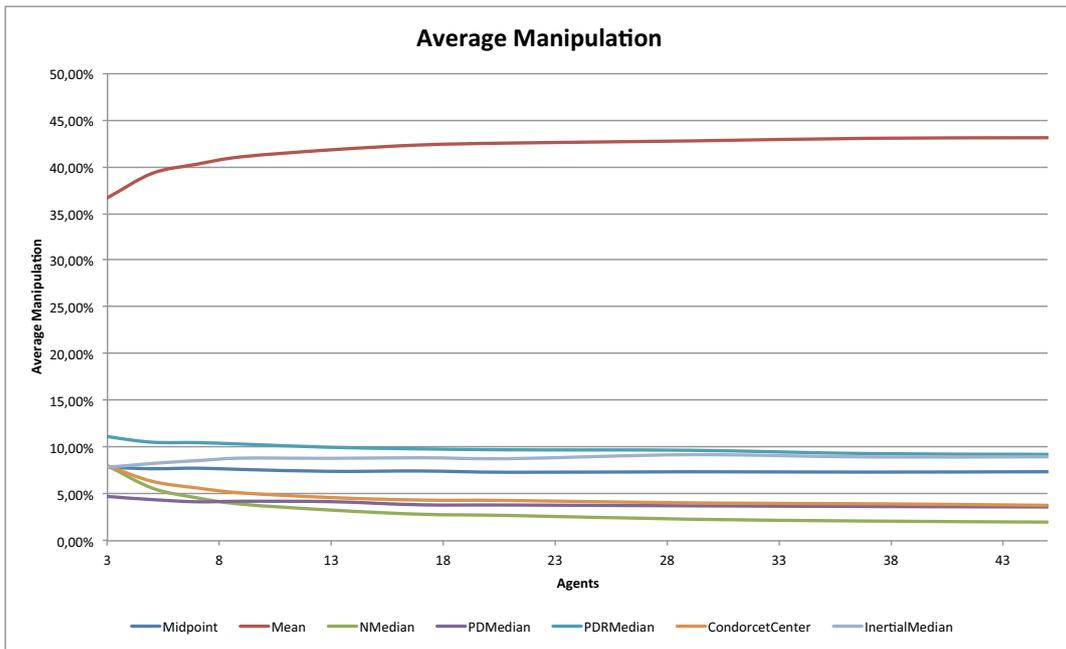


Abbildung 4.13.: Average Manipulation unter Cobb-Douglas-Präferenzen

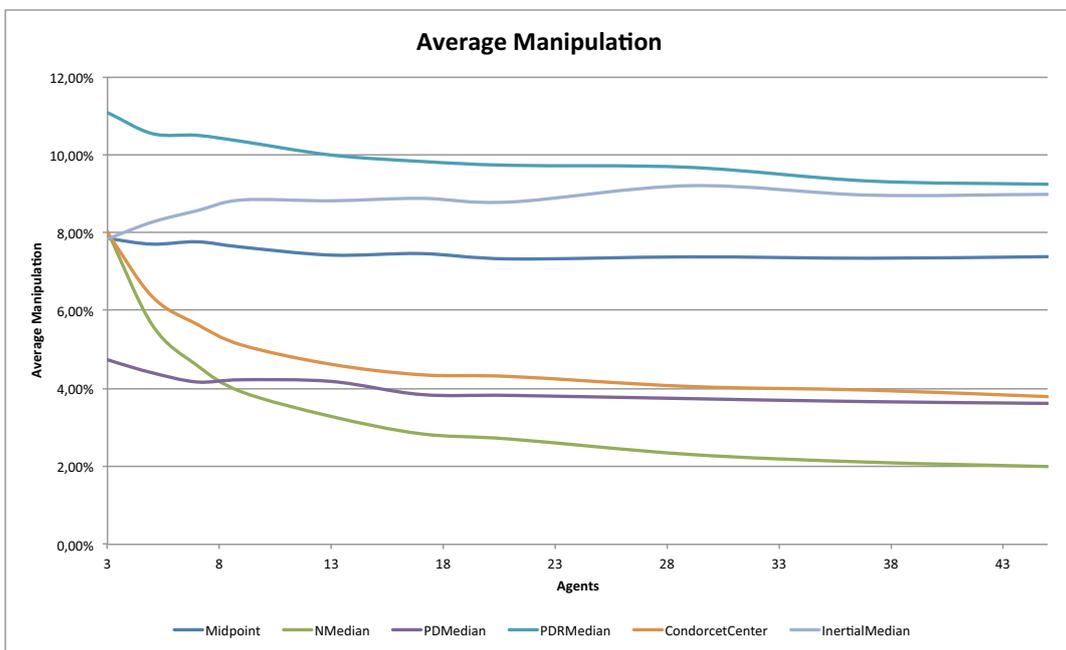


Abbildung 4.14.: Average Manipulation unter Cobb-Douglas-Präferenzen (Ausschnittsvergrößerung)

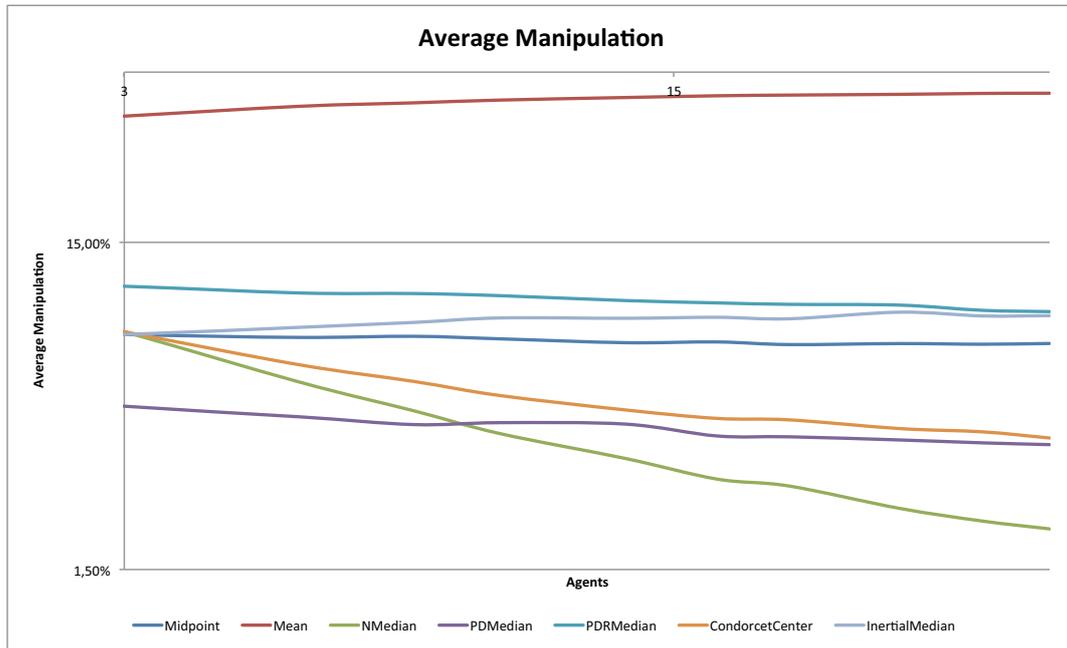


Abbildung 4.15.: Average Manipulation unter Cobb-Douglas-Präferenzen (in logarithmischer Skalierung)

Agents	Midpoint	Mean	NMed	PDMed	PDRMed	CCenter	IMed
3	-	27,47%	7,22%	-	-	6,94%	-
5	-	30,32%	5,71%	-	-	5,39%	-
7	-	30,87%	4,41%	-	-	4,29%	-
9	-	31,71%	3,75%	-	-	3,70%	-
13	-	32,12%	3,19%	-	-	3,16%	-
17	-	32,29%	2,82%	-	-	2,81%	-
21	-	32,37%	2,59%	-	-	2,49%	-
29	-	32,50%	2,25%	-	-	2,15%	-
37	-	32,51%	2,06%	-	-	1,98%	-
45	-	32,45%	1,99%	-	-	1,85%	-

Tabelle 4.18.: Average Manipulation unter metrischen Präferenzen

4. Simulation

Agents	Midpoint	Mean	NMed	PDMed	PDRMed	CCenter	IMed
3	5,29%	8,76%	2,02%	4,25%	9,42%	3,49%	5,31%
5	4,51%	7,38%	1,87%	4,18%	7,58%	3,39%	5,25%
7	3,77%	6,77%	1,83%	4,00%	6,64%	3,02%	4,98%
9	3,16%	6,78%	1,67%	3,81%	5,89%	2,82%	4,75%
13	2,32%	6,31%	1,43%	3,43%	4,76%	2,28%	4,06%
17	1,79%	6,15%	1,29%	2,90%	3,75%	1,93%	3,43%
21	1,54%	6,00%	1,16%	2,58%	3,31%	1,80%	2,96%
29	1,18%	5,86%	0,99%	1,96%	2,48%	1,34%	2,31%
37	1,03%	5,62%	0,85%	1,68%	2,06%	1,15%	1,97%
45	0,88%	5,73%	0,78%	1,40%	1,70%	0,98%	1,64%

Tabelle 4.19.: Distance unter Cobb-Douglas-Präferenzen

Distance Der wohl in den meisten Fällen wichtigste Effekt einer Manipulation ist der Einfluss auf das Ergebnis einer Abstimmungsregel, präzise formuliert der Aspekt, wie stark sich das Ergebnis einer Abstimmung durch Manipulation ändern lässt. Diesen Effekt wollen wir dadurch messen, indem wir den Abstand (entsprechend $d(\cdot, \cdot)$) zwischen dem unmanipulierten Ergebnis und dem Ergebnis bei Stopp des Simulationslauf messen. Wiederum sei w^i der (wahre) Peak des Agenten i und $w^i(t^*)$ sein announced Peak bei Stopp des Simulationslaufs. Die Distance ist gegeben durch:

$$e_3 := d(F(w^1, w^2, \dots, w^n), F(w^1(t^*), w^2(t^*), \dots, w^n(t^*))).$$

Da wie erwähnt der maximale Abstand zweier Elemente im Simplex L betragen kann, folgt für die Normalisierung dieser Variablen:

$$\tilde{e}_3 := \frac{e_3}{L}.$$

Ein Wert von $\tilde{e}_3 = 1$ entspräche der theoretisch maximal möglichen Manipulation, also wenn beispielsweise das unmanipulierte Ergebnis in einer „Ecke“ des Simplex liegt und durch Manipulation in eine andere Ecke „verschoben“ werden kann. Demgegenüber lässt sich im Fall $\tilde{e}_3 = 0$ erstmal lediglich erkennen, dass das Ergebnis der Abstimmung (gegeben ein Profil) durch Manipulation nicht beeinflusst wurde. Dies kann mehrere Ursachen haben: entweder weicht kein Agent von seinem wahren Peak ab oder es heben sich die Manipulationen mehrerer Agenten gegenseitig auf: Man betrachte zum Beispiel einen $(2, 10)$ -Simplex mit zwei Agenten und den Peaks $w^1 = (3, 7)$ und $w^2 = (7, 3)$. Der unmanipulierte Mittelwert lautet dementsprechend $F^{Mean}(w^1, w^2) = (5, 5)$. Im Fall der Manipulation $\tilde{w}^1 = (0, 10)$ und $\tilde{w}^2 = (10, 0)$ gilt auch für den manipulierten Mittelwert $F^{Mean}(\tilde{w}^1, \tilde{w}^2) = (5, 5)$ und damit $\tilde{e}_3 = 0$.

Die Durchschnittswerte für die einzelnen Abstimmungsregeln und Agentenzahlen sind in Tabelle 4.19 und Abbildung 4.16 angegeben. Insgesamt kann man dabei beobachten, dass die Distance mit steigender Anzahl an Agenten fällt. Eine Ausnahme bildet die Mittelwert-Regel. Betrachtet man die Werte in logarithmischer

4.2. Ergebnisse der Simulationsstudie

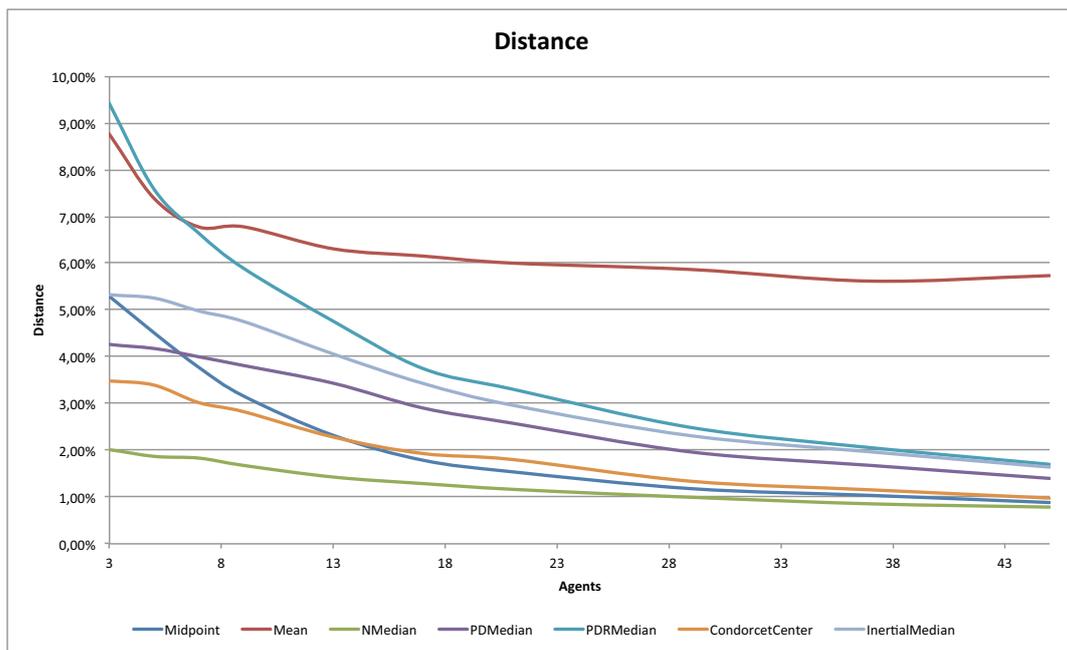


Abbildung 4.16.: Distance unter Cobb-Douglas-Präferenzen

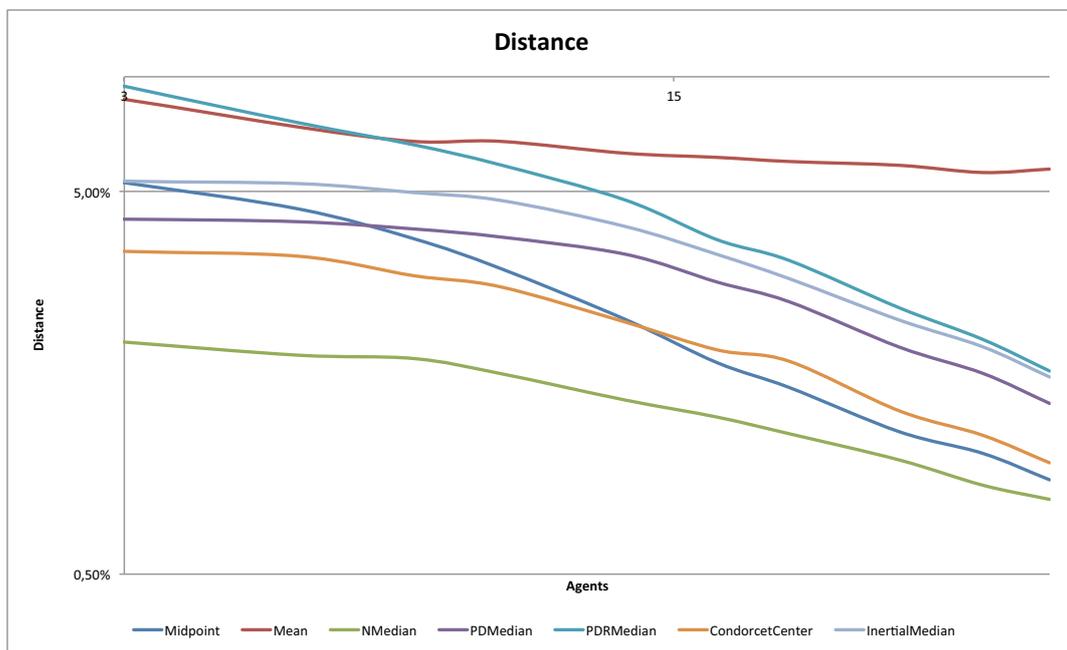


Abbildung 4.17.: Distance unter Cobb-Douglas-Präferenzen (in logarithmischer Skalierung)

4. Simulation

Agents	Midpoint	Mean	NMed	PDMed	PDRMed	CCenter	IMed
3	91,12%	24,83%	41,22%	127,08%	99,05%	56,07%	90,46%
5	72,40%	19,15%	49,78%	115,51%	79,84%	60,32%	77,88%
7	56,54%	16,99%	55,33%	110,63%	67,60%	58,75%	68,16%
9	47,31%	16,60%	59,29%	103,19%	60,29%	59,02%	60,33%
13	35,46%	15,14%	58,75%	92,16%	49,40%	53,39%	50,45%
17	27,31%	14,57%	59,83%	85,07%	39,89%	48,65%	41,71%
21	23,11%	14,14%	58,64%	74,13%	35,43%	46,26%	36,69%
29	18,44%	13,73%	58,26%	59,18%	26,38%	36,86%	26,71%
37	16,04%	13,06%	56,15%	50,74%	22,67%	32,85%	23,37%
45	13,76%	13,32%	55,17%	43,80%	19,14%	29,38%	19,13%

Tabelle 4.20.: Distance geteilt durch Average Manipulation unter Cobb-Douglas-Präferenzen

Skalierung (Abbildung 4.17), so lässt der konkave Verlauf der einzelnen Datenreihen (mit Ausnahme der Mittelwert-Regel) vermuten, dass die Distance gegen 0 konvergieren dürfte, wenn man die Anzahl der Agenten weiter steigert. Wir werden im weiteren Verlauf dieser Arbeit noch der Frage nachgehen, ob diese Regeln mit gleicher Geschwindigkeit ihre Distance verringern, d.h. in anderen Worten, ob (im log/log-Diagramm) die Datenreihen für große Agentenzahlen parallel verlaufen.

Die größten Durchschnittswerte sind bei der Mittelwert-Regel zu beobachten, an „zweiter Position“ liegt die sequentielle Median-Regel mit Sequenz 3, 2, 1. Am wenigsten ändert sich das Ergebnis der normalisierten Median-Regel, gefolgt von der Midpoint-Regel. Wiederum fällt auf, dass die „PDMedian“- und die „PDRMedian“-Regel unterschiedliche Durchschnittswerte auch bei dieser Kenngröße aufweisen, wobei Abbildung 4.17 zumindest ein Indiz dafür ist, dass beide Regeln mit gleicher Geschwindigkeit fallen, wenn man die Anzahl der Agenten erhöht.

Unternimmt man den Versuch, eine Art Ableitung der Distance bezüglich Änderungen des Peaks zu definieren und bildet hierzu den Quotienten aus der Distance geteilt durch die Average Manipulation (siehe Tabelle 4.20), so ist erkennbar, dass es hier deutliche Unterschiede zwischen den beiden „besten“ Abstimmungsregeln (normalisierte Median-Regel und Midpoint-Regel) gibt: Während bei der Midpoint-Regel der „Einfluss“ der misrepräsentierenden Agenten auf das Ergebnis mit steigender Agentenzahl deutlich abnimmt, verharret dieser bei der normalisierten Median-Regel bei rund 55 bis 60 Prozent und liegt damit - betrachtet man mehr als 20 Agenten - mehr als doppelt so hoch.

Betrachtet man die Distance unter CES-Präferenzen (siehe Tabellen F.1 bis F.7), so reagieren die meisten Abstimmungsregeln nicht erkennbar auf eine Variation von ρ . Ausnahmen hiervon sind die normalisierte Median-Regel und die Condorcet Center-Regel, die insbesondere für negative ρ eine größere Distance aufweisen. Für $\rho = -2$ bzw. $\rho = -5$ ist die Midpoint-Regel die Abstimmungsregel mit geringster Distance. Die Abbildungen 4.18 und 4.19 visualisieren das deutlich unterschiedliche

Verhalten. Unter metrisch eingipfligen Präferenzen (Tabelle 4.21) sind die Werte der Mittelwert- und der Condorcet Center-Regel niedriger, die der normalisierten Median-Regel unverändert.

Eine naheliegende Frage ist die nach der Ursache für das unterschiedliche Verhalten der Abstimmungsregeln unter CES-Präferenzen. Man führe sich hierzu vor Augen, dass die Menge der Punkte im Simplex, die für einen Agenten hinsichtlich Manipulation relevant sind, d.h. die Elemente im Simplex, die seinen Nutzen verbessern und durch Misrepräsentation erreichbar sind, die Schnittmenge zweier Mengen ist:

- Die Menge der *erreichbaren* Elemente im Simplex (das sogenannte Optionset): Es ist also einerseits die Menge all der Punkte im Simplex, die ein Agent - gegeben die Peaks der anderen Agenten - durch Misrepräsentation *erreichen* kann, zu beachten. Diese Menge ist abhängig von den Peaks der anderen Agenten (d.h. betrachtet man das statistische Mittel, so hängt dies ab von der Verteilung der Peaks) und der zugrunde liegenden Abstimmungsregel. Sie ist jedoch unabhängig von den zugrunde liegenden Präferenzen, d.h. sie ändert sich insbesondere bei einer Variation des Substitutionsparameters ρ nicht.
- Die Menge der „*profitablen*“ Elemente im Simplex: Andererseits ist die Menge all der Punkte, die ein Agent - gegeben seine Präferenzen - gegenüber dem aktuellen Abstimmungsergebnis *strikt bevorzugt*, zu beachten. Diese „Strikt-Besser-Menge“ hängt ab vom Ergebnis der Abstimmungsregel - gegeben das aktuelle Profil - und den Präferenzen des Agenten. Ändert man die zugrunde liegende Abstimmungsregel nicht, so ist diese Menge also abhängig von den Präferenzen des Agenten, insbesondere also von einer Variation von ρ .

Nimmt nun im statistischen Mittel die Distance einer Abstimmungsregel zu, wenn man ρ variiert, so muss dies daran liegen, dass sich der Schnitt der beiden obigen Mengen vergrößert. Da sich die Menge der erreichbaren Elemente nicht ändert, muss sich die Menge der profitablen Elemente entweder vergrößern oder derart im Simplex verschieben, so dass die Schnittmenge größer wird. Dies bedeutet dann insbesondere, dass Elemente des Simplex, die beispielsweise bei $\rho = -5$ für einen Agenten einen Anreiz zur Manipulation bieten, auch bei anderen Präferenzen durch Misrepräsentation zwar erreichbar, aber nicht profitabel sind. Diese Überlegung kann also als Erklärung dafür dienen, dass die Distance der normalisierten Median-Regel größer wird, wenn ρ negative Werte annimmt, während ein Einfluss dieses Parameters auf die Distance der Midpoint-Regel nicht erkennbar ist: Das Optionset der normalisierten Median-Regel enthält Elemente, die unter Cobb-Douglas-Präferenzen für den Agenten nicht profitabel sind, jedoch unter CES-Präferenzen mit negativem ρ einen Anreiz zur Manipulation bieten.

Wie zu Beginn dieses Kapitels ausgeführt kann die Frage, wie manipulierbar eine Abstimmungsregel ist, nur sinnvoll im Kontext weiterer Gütekriterien wie beispielsweise der Nutzensumme oder der Remoteness des Abstimmungsergebnisses betrachtet werden. Andernfalls wäre die ebenfalls bereits vorgestellte „Status Quo“-Regel, die

4. Simulation

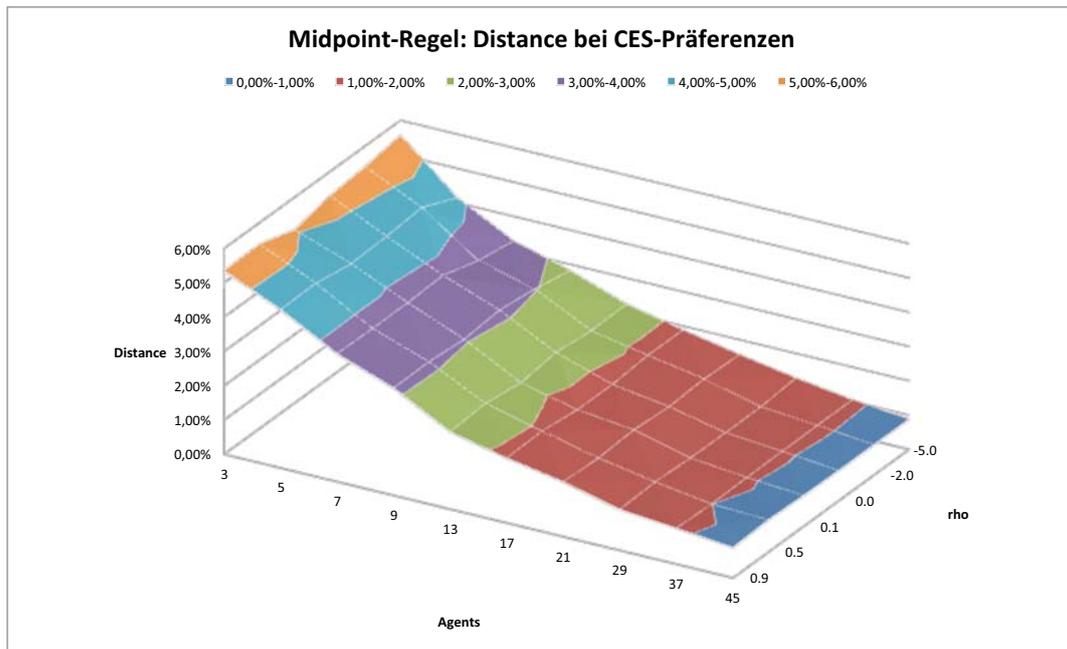


Abbildung 4.18.: Distance der Midpoint-Regel bei CES-Präferenzen

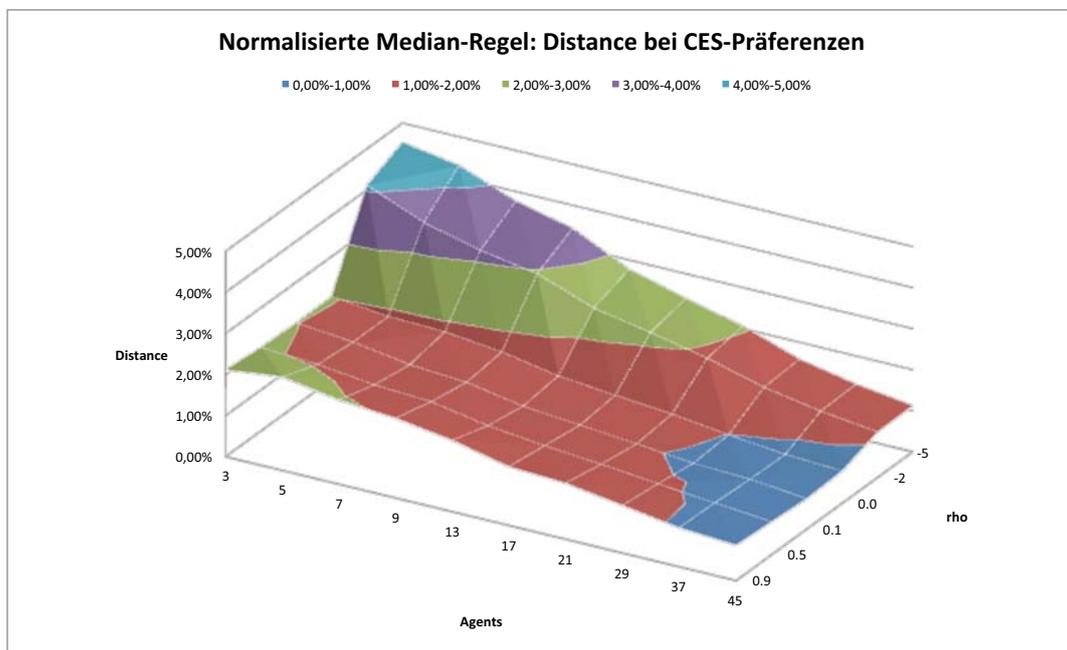


Abbildung 4.19.: Distance der normalisierten Median-Regel bei CES-Präferenzen

Agents	Midpoint	Mean	NMed	PDMed	PDRMed	CCenter	IMed
3	0,00%	7,00%	2,05%	0,00%	0,00%	1,94%	0,00%
5	0,00%	6,00%	2,04%	0,00%	0,00%	1,78%	0,00%
7	0,00%	5,49%	1,91%	0,00%	0,00%	1,73%	0,00%
9	0,00%	5,10%	1,73%	0,00%	0,00%	1,54%	0,00%
13	0,00%	4,50%	1,55%	0,00%	0,00%	1,40%	0,00%
17	0,00%	4,21%	1,36%	0,00%	0,00%	1,20%	0,00%
21	0,00%	4,10%	1,20%	0,00%	0,00%	1,05%	0,00%
29	0,00%	3,89%	1,04%	0,00%	0,00%	0,94%	0,00%
37	0,00%	3,76%	0,95%	0,00%	0,00%	0,83%	0,00%
45	0,00%	3,65%	0,87%	0,00%	0,00%	0,79%	0,00%

Tabelle 4.21.: Distance unter metrischen Präferenzen

mit Ausnahme einstimmiger Profile immer ein festes Element auswählt, also nicht diktatorisch ist (siehe Definition 3.3) und Einstimmigkeit erfüllt (siehe Definition 3.4), sicherlich ein sehr guter „Kandidat“ hinsichtlich minimaler Manipulierbarkeit.

Solche Gütekriterien haben die nun folgenden Variablen zum Gegenstand. Dabei wollen wir sowohl relative Änderungen der Summe der Nutzen und der Remoteness (Variablen e_4 und \tilde{e}_7) als auch die Einordnung dieser Zielgrößen in verschiedene Skalen (Variablen e_5 , e_6 und e_8) betrachten.

Difference in Sum of Utilities Betrachtet man die Summe der Nutzen, die das Ergebnis einer Abstimmungsregel generiert, so ist es von Interesse, ob sich diese Zielgröße durch Manipulation verbessert oder verschlechtert. Dabei kann es - was wohl in den meisten Fällen zu erwarten wäre - sowohl Abstimmungsregeln geben, bei denen eine Verschlechterung durch Manipulation eintritt, als auch solche, deren unmanipuliertes Ergebnis bezüglich der Nutzensumme so schlecht ist, dass eine Verbesserung durch Manipulation möglich sein kann. Hierzu wollen wir die Differenz der Nutzensumme zwischen dem Ergebnis der Abstimmungsregel bei Stopp eines Simulationslaufs und dem unmanipulierten Ergebnis betrachten.

Es bezeichne $U(x) = \sum_{i=1}^n u^i(x)$ die *Summe der Nutzen* eines Elements x . Es gilt $u^i(\cdot) \in [0; 1]$ für alle $i \in N$. Damit folgt $U(x) \in [0; n]$. Ferner sei $u_{max} = \max_{x \in X} U(x)$ die maximal erreichbare Nutzensumme im (diskreten) Simplex X^{20} . Wiederum sei w^i der (wahre) Peak des Agenten i und $w^i(t^*)$ sein announced Peak bei Stopp des Simulationslaufs. Die Difference in Sum of Utilities ist definiert durch:

$$e_4 := \frac{U(F(w^1(t^*), w^2(t^*), \dots, w^n(t^*))) - U(F(w^1, w^2, \dots, w^n))}{u_{max}}.$$

Da die Nutzenfunktionen der Agenten auf das Intervall $[0; 1]$ normalisiert sind, ist das Minimum der Nutzensumme ebenfalls 0 und das theoretisch denkbare Maximum

²⁰Man beachte, dass $\operatorname{argmax}_{x \in X} U(x)$ die *utilitaristische Lösung* im Simplex darstellt, also das nicht zwingend eindeutige Element, das die Summe der Nutzen - und damit den durchschnittlichen Nutzen eines Agenten - maximiert.

4. Simulation

Agents	Midpoint	Mean	NMed	PDMed	PDRMed	CCenter	IMed
3	-0,56%	-2,14%	0,03%	0,05%	-0,18%	0,09%	-0,56%
5	-0,28%	-1,56%	0,00%	0,24%	0,89%	0,14%	-0,04%
7	-0,14%	-1,32%	-0,03%	0,28%	0,64%	0,10%	0,17%
9	-0,11%	-1,33%	-0,03%	0,36%	0,84%	0,09%	0,29%
13	-0,05%	-1,18%	-0,03%	0,39%	0,60%	0,08%	0,36%
17	-0,03%	-1,13%	-0,04%	0,34%	0,44%	0,04%	0,34%
21	-0,02%	-1,09%	-0,04%	0,35%	0,39%	0,04%	0,31%
29	0,00%	-1,06%	-0,05%	0,26%	0,28%	0,02%	0,25%
37	-0,02%	-0,97%	-0,04%	0,24%	0,24%	0,02%	0,21%
45	-0,02%	-1,02%	-0,04%	0,20%	0,20%	0,01%	0,19%

Tabelle 4.22.: Difference in Sum of Utilities unter Cobb-Douglas-Präferenzen

n (wobei n die Anzahl der Agenten angibt). Wie groß das erreichbare Maximum der Summe der Nutzen tatsächlich ist, hängt jedoch vom Profil der wahren Peaks ab. Um also hier eine Vergleichbarkeit dieser Kenngröße für unterschiedliche Profile herstellen zu können, wird die Differenz der Nutzensumme auf das Intervall $[0; u_{max}]$ normalisiert. Damit bewegt sich die Variable e_4 im Intervall $[-1; 1]$. Positive Werte bedeuten dabei eine Verbesserung der Nutzensumme durch Manipulation, während negative Werte eine Verschlechterung anzeigen. Schließlich zeigt $e_4 = 0$ keine Änderung dieser Zielgröße an, was wiederum nicht zwingend bedeuten muss, dass sich das Ergebnis der Abstimmungsregel durch Manipulation nicht geändert haben könnte.

Die sich unter Cobb-Douglas-Präferenzen ergebenden Mittelwerte sind in Tabelle 4.22 und den Abbildungen 4.20 und 4.21 dargestellt. Es zeigt sich, dass mit Ausnahme der Mittelwert-Regel anzunehmen ist, dass die Differenz der Nutzensumme mit steigender Agentenzahl gegen 0 streben dürfte. Die betragsmäßig kleinsten Werte weist dabei die Midpoint-Regel auf, gefolgt von der normalisierten Median- und der Condorcet Center-Regel. Die betragsmäßig größte Differenz hat die Mittelwert-Regel. Während bei den meisten Regeln die Nutzendifferenz negativ ist, haben die sequentielle Median-Regel, (geringfügig) die Condorcet Center-Regel und die Inertial Median-Regel eine positive Differenz. Die Nutzensumme verbessert sich also durch Manipulation. Ferner fällt auf, dass für mittlere bis große Zahlen von Agenten die Werte der sequentiellen Median-Regel unter beiden untersuchten Sequenzen sich ähneln. Es ist also bei dieser Kenngröße nicht der bisherige Einfluss der Sequenz auf das statistische Mittel der Kenngröße feststellbar.

Nicht ohne weitere Information zu klären ist hingegen die Frage, wann eine Abstimmungsregel bezüglich der Difference in Sum of Utilities „besser“ ist als eine andere Regel. Einerseits kann man der Auffassung sein, dass eine Verbesserung der Nutzensumme durch Manipulation besser ist als eine Verschlechterung. Jedoch kann die Ursache für eine solche Verbesserung auch darin bestehen, dass das unmanipulierte Ergebnis hinsichtlich der Summe der Nutzen sehr schlecht und somit eine Verbesserung derselben sehr einfach ist. Insbesondere kann das so verbesserte mani-

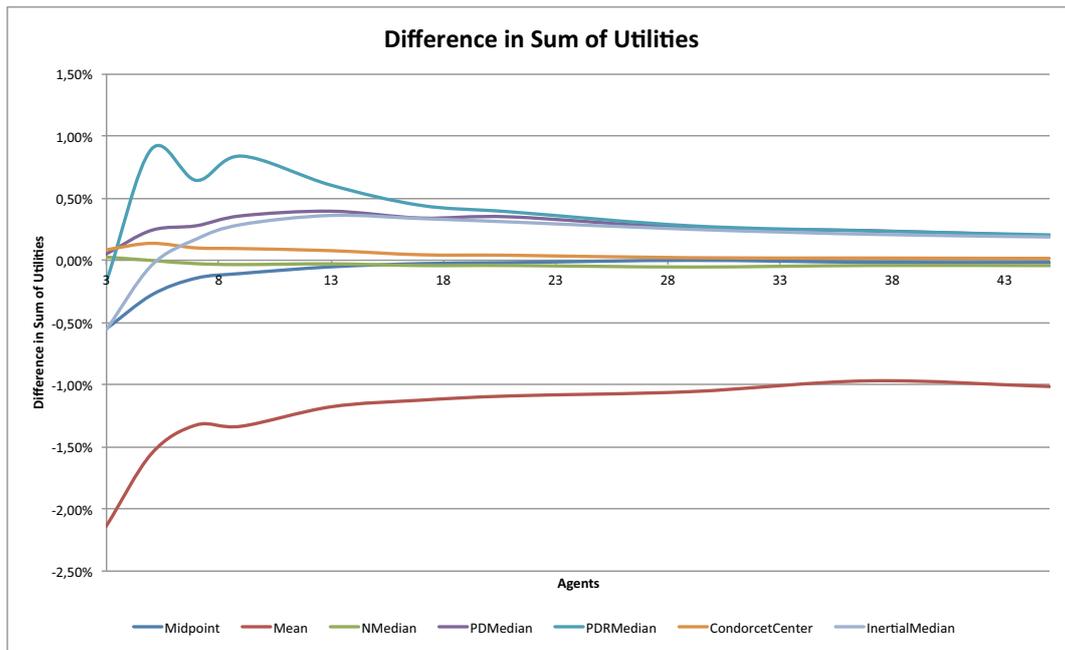


Abbildung 4.20.: Difference in Sum of Utilities unter Cobb-Douglas-Präferenzen

pulierte Ergebnis der Abstimmungsregel immer noch (bezüglich der Nutzensumme) schlechter sein, als das manipulierte Abstimmungsergebnis einer Regel, die sich durch Manipulation in der Summe der Nutzen verschlechtert. Eine andere Auffassung von „gut“ im Bezug auf diese Variable ist schließlich, dass eine Abstimmungsregel dann besser ist als eine andere, wenn der Einfluss auf die Nutzensumme geringer ist, diese also im Betrag kleinere Werte aufweist als eine andere Abstimmungsregel. (Den Zusammenhang mit den absoluten Werten der Nutzensumme werden wir im Rahmen der Variablen e_5 und e_6 untersuchen.)

Betrachtet man CES-Präferenzen (Tabellen G.1 bis G.7) und variiert den Substitutionsparameter ρ , so zeigt sich, dass für positive Werte dieses Parameters die Differenz der Nutzensumme für alle Abstimmungsregeln betragsmäßig abnimmt. Für negative Werte von ρ wird die Nutzendifferenz für die Midpoint-Regel, die Mittelwert-Regel und die Condorcet Center-Regel größer und nimmt positive Werte an. Die Nutzendifferenz der normalisierten Median-Regel hingegen nimmt betragsmäßig größere und negative Werte an. Für die sequentielle Median-Regel und die Inertial Median-Regel lässt sich kein eindeutiges Verhalten erkennen. Unter metrisch eingipfligen Präferenzen (Tabelle 4.23) sind die Werte der manipulierbaren Abstimmungsregeln höher als unter Cobb-Douglas-Präferenzen. Dabei hat die Mittelwert-Regel die größte Nutzendifferenz, gefolgt von der normalisierten Median-Regel und der Condorcet Center-Regel.

UTILIE Die *Änderung* der Nutzensumme gibt isoliert betrachtet noch keinen Aufschluss darüber, wie „gut“ (bezüglich der Nutzensumme) die Ergebnisse verschiede-

4. Simulation

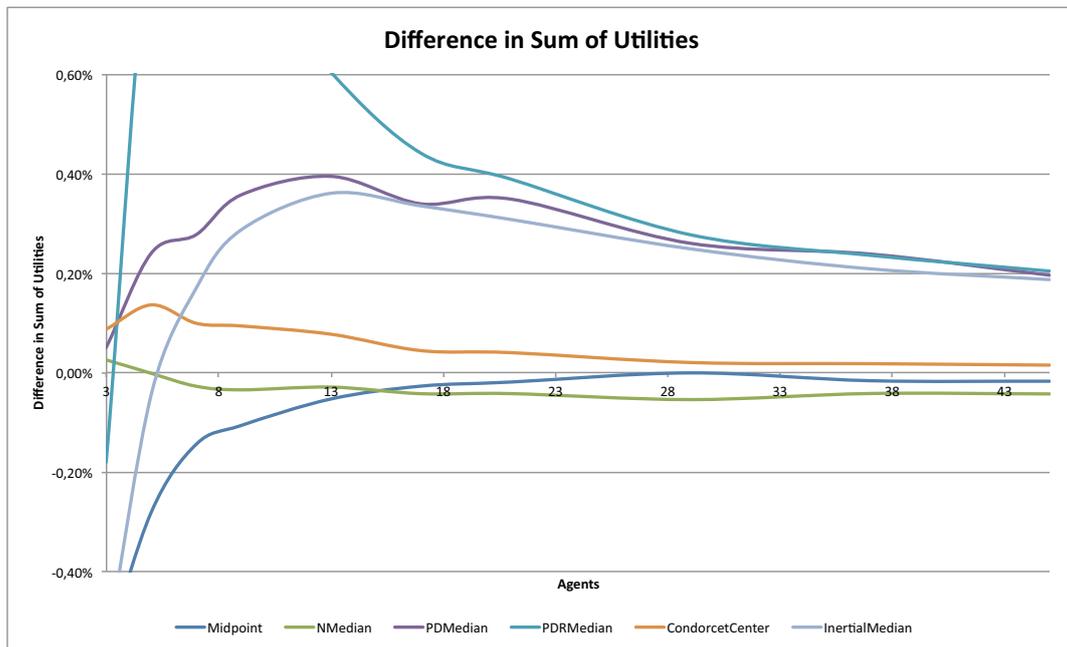


Abbildung 4.21.: Difference in Sum of Utilities unter Cobb-Douglas-Präferenzen (Ausschnittsvergrößerung)

Agents	Midpoint	Mean	NMed	PDMed	PDRMed	CCenter	IMed
3	0,00%	0,44%	-0,11%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
5	0,00%	-0,50%	-0,16%	0,00%	0,00%	-0,12%	0,00%
7	0,00%	-0,82%	-0,16%	0,00%	0,00%	-0,15%	0,00%
9	0,00%	-1,10%	-0,15%	0,00%	0,00%	-0,13%	0,00%
13	0,00%	-1,20%	-0,15%	0,00%	0,00%	-0,11%	0,00%
17	0,00%	-1,31%	-0,15%	0,00%	0,00%	-0,11%	0,00%
21	0,00%	-1,37%	-0,13%	0,00%	0,00%	-0,07%	0,00%
29	0,00%	-1,44%	-0,10%	0,00%	0,00%	-0,08%	0,00%
37	0,00%	-1,41%	-0,08%	0,00%	0,00%	-0,05%	0,00%
45	0,00%	-1,47%	-0,07%	0,00%	0,00%	-0,05%	0,00%

Tabelle 4.23.: Difference in Sum of Utilities unter metrischen Präferenzen

ner Abstimmungsregeln nach Manipulation sind. Beispielsweise maximiert die unmanipulierte Mittelwert-Regel unter Cobb-Douglas-Präferenzen (eine entsprechende kardinale Vergleichbarkeit der Nutzenfunktionen vorausgesetzt) die Summe der Nutzen. Fraglich dagegen ist, wie sich dieses Gütekriterium hinsichtlich der manipulierten Ergebnisse der Abstimmungsregeln verhält, also, ob auch unter diesen Umständen die Mittelwert-Regel eine höhere Nutzensumme erzeugt als andere Abstimmungsregeln.

Es ist demnach sinnvoll, die Variable e_4 , die relative Änderungen der Nutzensumme anzeigt, um Kenngrößen zu erweitern, die das manipulierte Ergebnis hinsichtlich ihres *absoluten* Wertes der Summe der Nutzen vergleichen. Eine solche Variable ist UTILIE (IE = income equivalence): Dabei betrachten wir die Nutzensumme des Ergebnisses einer Abstimmungsregel bei Stopp des Simulationslaufs und ordnen diese auf einer Skala von $[0; 1]$ ein. Wiederum entspricht die 1 dieser Skala dem maximal erreichbaren Wert der Nutzensumme (gegeben das wahre Profil der Peaks), also der Summe der Nutzen in der utilitaristischen Lösung. Die 0 der Skala entspricht dem „natürlichen“ Nullpunkt der Nutzenfunktion, also dem Nutzen im Punkt $(0, 0, \dots, 0)$, d.h. wenn alle Agenten nichts erhalten.

Wie bei der Difference in Sum of Utilities bezeichne $U(x)$ die Nutzensumme, u_{max} deren Maximum für das jeweilige Profil von wahren Peaks und $w^i(t^*)$ den announced Peak des Agenten i bei Stopp des Simulationslaufs. Die Variable UTILIE ist definiert durch:

$$e_5 := \frac{U(F(w^1(t^*), w^2(t^*), \dots, w^n(t^*))) - 0}{u_{max} - 0} = \frac{U(F(w^1(t^*), w^2(t^*), \dots, w^n(t^*)))}{u_{max}}.$$

Ein Ergebnis $e_5 = 1$ bedeutet, dass das (in den meisten Fällen manipulierte) Abstimmungsergebnis bei Stopp des Simulationslaufs der (nicht notwendigerweise eindeutigen) utilitaristischen Lösung entspricht. Aufgrund der homothetischen Kardinalisierung der Nutzenfunktionen (Diese sind wie ausgeführt homothetisch und homogen vom Grade 1) lässt sich ein Wert $e_5 = x$, $x \in [0; 1]$, so interpretieren, dass das zu diesem Wert zugehörige Abstimmungsergebnis die gleiche Nutzensumme generiert wie die utilitaristische Lösung auf einem Simplex der Größe $L = x$. Da die Variablen e_4 und e_5 zudem gleich skaliert sind, kann mittels $e_{5B} = e_5 - e_4$ auch die Nutzensumme des unmanipulierten Ergebnisses berechnet werden.

Tabelle 4.24 und Abbildung 4.22 geben die Mittelwerte unter Cobb-Douglas-Präferenzen wieder. Mit Ausnahme der Mittelwert-Regel und der sequentiellen Median-Regel unter der Sequenz 1, 2, 3 scheinen alle Abstimmungsregeln gegen 1 zu streben, wenn sich die Anzahl der Agenten erhöht. Das beste Verhalten hinsichtlich der Nutzensumme des (in den meisten Fällen) manipulierten Abstimmungsergebnisses ist bei der Midpoint- und der Condorcet Center-Regel zu beobachten. Die normalisierte Median-Regel hingegen, die ähnliche Werte bei der Distance aufweist wie die Midpoint-Regel, liegt hinsichtlich der Nutzensumme nur „im Mittelfeld“ der betrachteten Abstimmungsregeln. Erneut fällt auf, dass die Sequenz einen deutlichen Einfluss auf das Verhalten der sequentiellen Median-Regel hat: Die „PDRMedian“-Regel hat höhere Werte als die „PDMedian“-Regel.

4. Simulation

Agents	Midpoint	Mean	NMed	PDMed	PDRMed	CCenter	IMed
3	98,26%	97,82%	98,76%	98,21%	97,39%	99,13%	98,26%
5	98,95%	98,40%	98,95%	98,65%	98,79%	99,36%	98,93%
7	99,27%	98,64%	99,13%	98,93%	99,13%	99,49%	99,25%
9	99,42%	98,63%	99,20%	99,07%	99,36%	99,58%	99,42%
13	99,58%	98,80%	99,34%	99,27%	99,55%	99,67%	99,61%
17	99,67%	98,86%	99,43%	99,37%	99,62%	99,73%	99,67%
21	99,71%	98,89%	99,45%	99,38%	99,66%	99,76%	99,70%
29	99,76%	98,93%	99,52%	99,42%	99,73%	99,80%	99,76%
37	99,78%	99,02%	99,57%	99,45%	99,74%	99,83%	99,75%
45	99,80%	98,98%	99,60%	99,44%	99,76%	99,85%	99,76%

Tabelle 4.24.: Nutzensumme (in UTILIE-Skala) unter Cobb-Douglas-Präferenzen

Agents	Midpoint	Mean	NMed	PDMed	PDRMed	CCenter	IMed
3	98,82%	99,96%	98,73%	98,16%	97,57%	99,04%	98,82%
5	99,23%	99,96%	98,95%	98,41%	97,90%	99,22%	98,97%
7	99,42%	99,96%	99,16%	98,65%	98,49%	99,40%	99,08%
9	99,52%	99,97%	99,23%	98,71%	98,53%	99,49%	99,13%
13	99,64%	99,97%	99,36%	98,87%	98,94%	99,60%	99,25%
17	99,70%	99,98%	99,47%	99,03%	99,18%	99,69%	99,34%
21	99,73%	99,98%	99,49%	99,03%	99,27%	99,72%	99,39%
29	99,76%	99,99%	99,58%	99,16%	99,46%	99,78%	99,51%
37	99,80%	99,99%	99,62%	99,21%	99,51%	99,81%	99,54%
45	99,81%	99,99%	99,65%	99,25%	99,55%	99,83%	99,58%

Tabelle 4.25.: Nutzensumme (in UTILIE-Skala) unter Cobb-Douglas-Präferenzen vor Manipulation

Da die Variablen e_5 und e_4 (Difference in Sum of Utilities) wie erwähnt gleich skaliert sind, ist es möglich mittels $e_{5B} := e_5 - e_4$ ebenfalls die Summe der Nutzen (in UTILIE-Skalierung) *unter den wahren Peaks* zu betrachten. Die arithmetischen Mittelwerte unter Cobb-Douglas-Präferenzen sind in Tabelle 4.25 angegeben. Wie bereits in Kapitel 3 ausgeführt wurde, sieht man auch an den Simulationsdaten, dass die Mittelwert-Regel unter Cobb-Douglas-Präferenzen die Summe der Nutzen maximiert. Die dabei auftretenden Differenzen zu 100 Prozent beruhen auf Rundungsfehlern und Ungenauigkeiten in der internen Zahlendarstellung im Computer. An zweiter Stelle bezüglich der Summe der Nutzen liegen im unmanipulierten Fall die Midpoint- und die Condorcet Center-Regel. Die sequentielle Median-Regel und die Inertial Median-Regel sind die schlechtesten Regeln bezüglich dieses Kriteriums. Dies ist auch eine Erklärung dafür, dass für diesen Regeln zuvor eine positive Difference in Sum of Utilities beobachtet wurde.

Unter CES-Präferenzen (Tabellen H.1 bis H.7) sind zwei Phänomene beobachtbar,

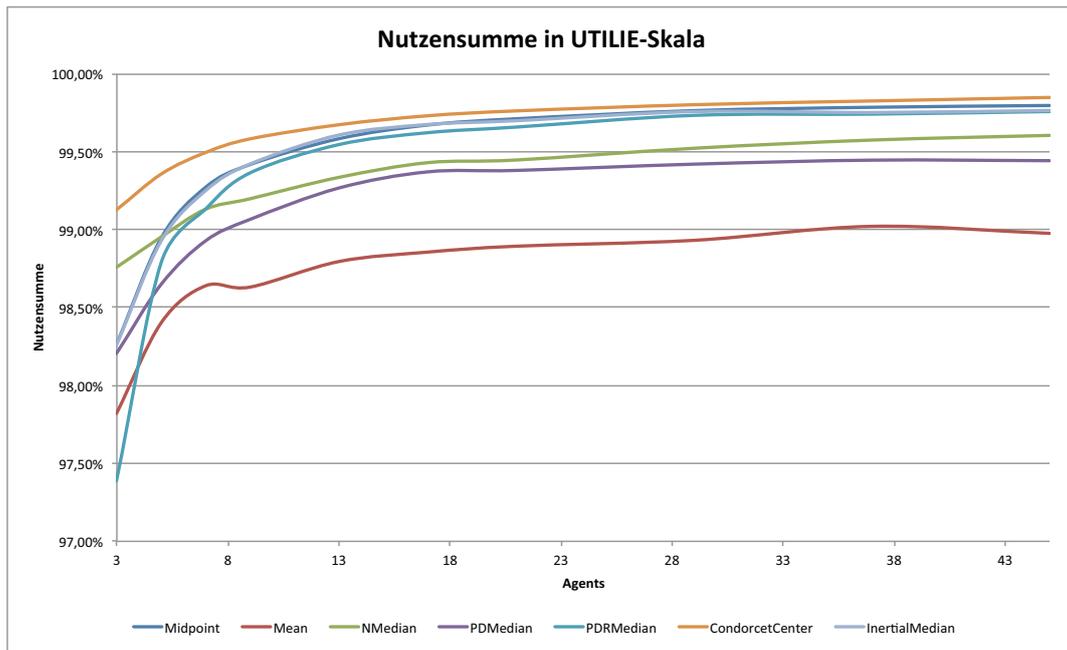


Abbildung 4.22.: Nutzensumme (in UTILIE-Skala) unter Cobb-Douglas-Präferenzen

wenn man ρ verändert: Während die Nutzensumme der Mittelwert-Regel sowohl für positive als auch für negative Werte von ρ zunimmt, zeigen alle anderen Regeln eher einen monoton fallenden Verlauf, je kleiner ρ wird, d.h. ausgehend von $\rho = 0$ nimmt die Summe der Nutzen zu, wenn ρ positiv wird, und ab, wenn der Parameter negative Werte annimmt. Zweitens ist zu beobachten, dass insbesondere für $\rho = -5$ die Summe der Nutzen der Inertial Median-Regel oder auch der Mittelwert-Regel die der Midpoint- und der Condorcet Center-Regel (Dies sind die „besten“ Abstimmungsregeln unter Cobb-Douglas-Präferenzen.) übersteigt. Es existiert also auch bezüglich dieses Kriteriums keine eindeutig beste Abstimmungsregel für alle betrachteten Präferenzen.

Betrachtet man schließlich die Durchschnittswerte der Nutzensumme unter metrisch eingipfligen Präferenzen (Tabelle 4.26), so fällt auf, dass die Midpoint-Regel unter allen Regeln hervorsteht: Unter diesen Präferenzen ist die Midpoint-Regel bezüglich des Nutzenkriteriums die beste Regel: Das unmanipulierte Ergebnis dieser Regel ist nicht nur Pareto-effizient, es maximiert auch gleichzeitig die Summe der Nutzen. Weiterhin erkennt man, dass teilweise manipulierbare Regeln (wie beispielsweise die normalisierte Median-Regel oder die Condorcet Center-Regel) im manipulierten Ergebnis eine höhere Nutzensumme aufweisen als nicht manipulierbare Regeln wie die sequentielle Median-Regel oder die Inertial Median-Regel. Dies verdeutlicht die Notwendigkeit des zu Beginn dieses Kapitels postulierten Ansatzes, dass Manipulierbarkeit immer auch im Kontext weiterer Gütekriterien wie der Nutzensumme oder der Remoteness zu betrachten ist.

4. Simulation

Agents	Midpoint	Mean	NMed	PDMed	PDRMed	CCenter	IMed
3	100,00%	96,44%	99,89%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
5	100,00%	96,96%	99,60%	99,46%	98,66%	99,62%	99,19%
7	100,00%	97,14%	99,45%	99,17%	98,53%	99,48%	98,84%
9	100,00%	97,21%	99,44%	99,06%	98,17%	99,46%	98,53%
13	100,00%	97,47%	99,48%	99,08%	98,45%	99,55%	98,65%
17	100,00%	97,58%	99,49%	99,00%	98,42%	99,58%	98,60%
21	100,00%	97,62%	99,58%	99,08%	98,50%	99,68%	98,61%
29	100,00%	97,73%	99,66%	99,17%	98,59%	99,72%	98,63%
37	100,00%	97,85%	99,71%	99,20%	98,68%	99,78%	98,71%
45	100,00%	97,85%	99,76%	99,26%	98,77%	99,83%	98,78%

Tabelle 4.26.: Nutzensumme (in UTILIE-Skala) unter metrischen Präferenzen

UTILRD Um zu beurteilen, wie „gut“ eine Abstimmungsregel bezüglich der Nutzensumme des (möglicherweise) manipulierten Ergebnisses sich verhält, ist noch eine weitere Skalierung denkbar. Dabei stellt weiterhin der Nutzen der utilitaristischen Lösung den Punkt 1 der Skala dar. Als Nullpunkt hingegen wählt man den (Erwartungs-)Nutzen, der sich ergibt, wenn man zufällig (und gleichverteilt) einen Agenten auswählt und diesen das Ergebnis der Abstimmung festlegen lässt. Dieses Verfahren bezeichnet man als *random dictatorship*. Mit diesem sehr einfachen Vorgehen, ein Abstimmungsergebnis zu bestimmen, ist also (zumindest für das Kriterium Summe der Nutzen) eine untere Grenze definiert, ab der sich eine Abstimmungsregel hinsichtlich ihrer Nutzensumme im Erwartungswert nicht besser verhält als die zufällige Auswahl eines Diktators.

Wie oben bezeichne $U(x)$ die Nutzensumme, u_{max} deren Maximum für das jeweilige Profil von wahren Peaks und $w^i(t^*)$ den announced Peak des Agenten i bei Stopp des Simulationslaufs. Ferner sei $\bar{u}_{RD} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U(w^i)$ der Erwartungswert der Nutzensumme bei *random dictatorship*, also dann, wenn zufällig (und mit gleicher Wahrscheinlichkeit) ein Agent zum Diktator bestimmt wird. Ein Agent, der Diktator ist, bestimmt das Ergebnis der Abstimmung alleine und wird dementsprechend seinen eigenen Peak als Abstimmungsergebnis wählen. Die Variable UTILRD ist definiert durch:

$$e_6 := \frac{U(F(w^1(t^*), w^2(t^*), \dots, w^n(t^*))) - \bar{u}_{RD}}{u_{max} - \bar{u}_{RD}}.$$

Wiederum bedeutet dabei ein Wert dieser Kenngröße von 1, dass das manipulierte Abstimmungsergebnis die utilitaristische Lösung ist. Ein Wert von 0 hingegen zeigt, dass sich die manipulierte Abstimmungsregel bei dem gegebenen Profil bezüglich der Nutzensumme nicht besser verhält als die zugegebenen einfache Regel des *random dictatorship*.

Die arithmetischen Mittelwerte der Nutzensumme, die sich in dieser Skalierung unter Cobb-Douglas-Präferenzen ergeben, finden sich in Tabelle 4.27 und Abbildung 4.23. Durch die im Vergleich zur UTILIE-Skala andere Wahl des Nullpunkts ergeben

4.2. Ergebnisse der Simulationsstudie

Agents	Midpoint	Mean	NMed	PDMed	PDRMed	CCenter	IMed
3	80,34%	70,87%	86,32%	80,36%	72,14%	89,67%	80,44%
5	90,42%	83,49%	90,78%	87,89%	89,07%	94,03%	90,31%
7	94,16%	88,25%	93,16%	91,62%	93,21%	95,88%	94,05%
9	95,49%	88,87%	94,03%	92,98%	95,05%	96,76%	95,51%
13	96,89%	90,63%	95,17%	94,62%	96,60%	97,52%	97,04%
17	97,62%	91,49%	95,93%	95,51%	97,26%	98,02%	97,62%
21	97,92%	91,92%	96,11%	95,57%	97,52%	98,29%	97,83%
29	98,36%	92,46%	96,72%	96,02%	98,16%	98,61%	98,33%
37	98,52%	93,21%	97,11%	96,19%	98,21%	98,80%	98,29%
45	98,60%	92,92%	97,31%	96,21%	98,35%	98,96%	98,40%

Tabelle 4.27.: Nutzensumme (in UTILRD-Skala) unter Cobb-Douglas-Präferenzen

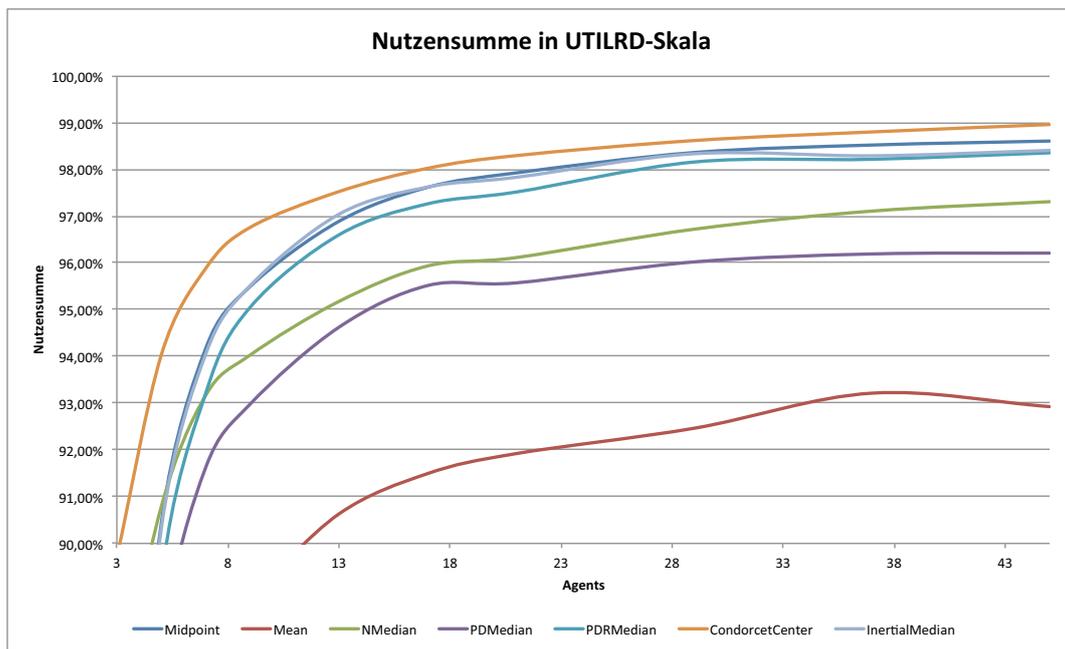


Abbildung 4.23.: Nutzensumme (in UTILRD-Skala) unter Cobb-Douglas-Präferenzen

4. Simulation

Agents	Midpoint	Mean	NMed	PDMed	PDRMed	CCenter	IMed
3	100,00%	61,68%	98,68%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
5	100,00%	80,03%	97,48%	96,67%	92,81%	97,76%	95,14%
7	100,00%	84,67%	97,24%	95,88%	92,52%	97,47%	94,11%
9	100,00%	86,10%	97,38%	95,58%	91,55%	97,55%	93,14%
13	100,00%	88,62%	97,77%	96,07%	93,47%	98,08%	94,30%
17	100,00%	89,63%	97,94%	96,01%	93,64%	98,30%	94,37%
21	100,00%	90,19%	98,33%	96,33%	94,05%	98,72%	94,49%
29	100,00%	90,81%	98,65%	96,73%	94,49%	98,90%	94,63%
37	100,00%	91,40%	98,88%	96,91%	94,90%	99,15%	95,01%
45	100,00%	91,57%	99,08%	97,15%	95,29%	99,33%	95,34%

Tabelle 4.28.: Nutzensumme (in UTILRD-Skala) unter metrischen Präferenzen

sich deutlichere Unterschiede zwischen den einzelnen Abstimmungsregeln. Im Wesentlichen ist jedoch das Verhalten der Regeln bezüglich der Variation der Anzahl der Agenten und ihrer relativen Rangordnung zueinander identisch. Gleiches gilt für das Verhalten unter metrisch eingipfligen Präferenzen (siehe Tabelle 4.28). Auf die Darstellung der Ergebnisse unter CES-Präferenzen wird verzichtet.

Difference in Remoteness Neben dem Aspekt, wie sich die Nutzensumme eines Abstimmungsergebnisses durch Manipulation ändert, stellt sich auch die Frage, ob durch Manipulation ein Ergebnis abgelegener oder zentraler zu den (wahren) Peaks liegt, in anderen Worten, wie sich die Remoteness des Abstimmungsergebnisses verändert. Hierzu wollen wir in einem ersten Schritt die Differenz der Remoteness zwischen dem Ergebnis bei Stopp des Simulationslaufs und dem unmanipulierten Abstimmungsergebnis betrachten. Diese Kenngröße ist besonders auch deshalb von Interesse, da sie unabhängig von den zugrunde liegenden Präferenzen ist. Sie kann also auch dann berechnet werden, wenn außer den Peaks der Agenten nichts über deren Präferenzen bzw. Nutzenfunktionen bekannt ist.

Wie eingeführt sei w^i der (wahre) Peak des Agenten i und $w^i(t^*)$ sein announced Peak bei Stopp des Simulationslaufs. Es bezeichne $\hat{R}(x) := \sum_{i=1}^n d(w^i, x)$ die *Remoteness bezüglich der wahren Peaks*, also die Summe der Distanzen eines Elements x zu den wahren Peaks der Agenten. Die Difference in Remoteness ist definiert durch:

$$e_7 := \hat{R}(F(w^1(t^*), w^2(t^*), \dots, w^n(t^*))) - \hat{R}(F(w^1, w^2, \dots, w^n)).$$

Der maximale Abstand zwischen dem wahren Peak eines Agenten bzgl. $d(\cdot, \cdot)$ beträgt L . Bei n Agenten gilt also für die Normalisierung demnach:

$$\tilde{e}_7 := \frac{e_7}{L \cdot n}.$$

Hierbei bedeutet ein positiver Wert von \tilde{e}_7 eine Zunahme der Ablegenheit des Abstimmungsergebnisses durch Manipulation, während negative Werte eine Verminderung der Remoteness anzeigen. Ein Wert von 0 zeigt, dass sich die Remoteness durch

Agents	Midpoint	Mean	NMed	PDMed	PDRMed	CCenter	IMed
3	0,67%	1,41%	0,03%	0,37%	1,45%	0,50%	0,66%
5	0,35%	1,12%	0,05%	0,12%	0,22%	0,36%	0,15%
7	0,23%	1,02%	0,05%	0,03%	-0,13%	0,23%	-0,09%
9	0,18%	1,14%	0,05%	-0,04%	-0,26%	0,18%	-0,18%
13	0,10%	1,08%	0,04%	-0,12%	-0,38%	0,10%	-0,30%
17	0,06%	1,06%	0,04%	-0,13%	-0,34%	0,07%	-0,30%
21	0,04%	1,06%	0,03%	-0,14%	-0,32%	0,05%	-0,29%
29	0,03%	1,07%	0,03%	-0,11%	-0,26%	0,03%	-0,25%
37	0,02%	0,99%	0,02%	-0,11%	-0,21%	0,02%	-0,21%
45	0,01%	1,05%	0,02%	-0,10%	-0,19%	0,01%	-0,18%

Tabelle 4.29.: Difference in Remoteness unter Cobb-Douglas-Präferenzen

Manipulation nicht geändert hat. Dies muss nicht zwingend bedeuten, dass es aufgrund von Manipulation zu keiner Änderung des Ergebnisses der Abstimmungsregel gekommen ist.

Tabelle 4.29 und Abbildung 4.24 enthalten die arithmetischen Mittelwerte unter Cobb-Douglas-Präferenzen. Wie zu erkennen ist, nimmt die Differenz der Remoteness mit steigender Agentenzahl ab. Während man vermuten kann, dass diese für die Midpoint-Regel sowie die normalisierte Median- und die Condorcet Center-Regel gegen 0 strebt, ist dies für die sequentielle Median-Regel und die Inertial Median-Regel eher zu bezweifeln.

Die geringsten betragsmäßigen Differenzen zeigt dabei die Midpoint-Regel gefolgt von der Condorcet Center-Regel und der normalisierten Median-Regel. Die größten Differenzen sind bei der Mittelwert-Regel gefolgt von der Inertial Median-Regel und sequentiellen Median-Regel mit Sequenz 3, 2, 1 zu beobachten. Wiederum ist ein deutlicher Einfluss der Sequenz auf das Verhalten dieser Regel auch bei dieser Kenngröße erkennbar. Positive Werte, also eine Verschlechterung der „Zentralität“ bzw. eine Zunahme der Abgelegenheit eines Elements im Simplex, sind bei den meisten Abstimmungsregeln zu beobachten. Demgegenüber weisen die sequentielle Median-Regel und die Inertial Median-Regel negative Werte in der Differenz auf, also eine Verminderung der Remoteness. Erneut kann es sein (und ebenso erneut ist ein Vergleich der absoluten Werte dieser Kenngröße notwendig), dass eine solche Verbesserung vor allem deswegen möglich ist, weil das unmanipulierte Ergebnis dieser Regeln eine sehr hohe Remoteness aufweist. Daher kann man bei dieser Variablen ebenfalls zu zwei Auffassungen kommen, wann eine Abstimmungsregel bezüglich dieser Kenngröße besser ist als eine andere: Entweder ist man der Auffassung, dass dies dann der Fall ist, desto größer die Verbesserung der Remoteness ist, oder dann, desto geringer die Abweichung von der Remoteness des unmanipulierten Ergebnisses ist.

Betrachtet man CES-Präferenzen und variiert den Substitutionsparameter ρ (Tabellen I.1 bis I.7), so scheinen die Midpoint-Regel und die Mittelwert-Regel nicht

4. Simulation

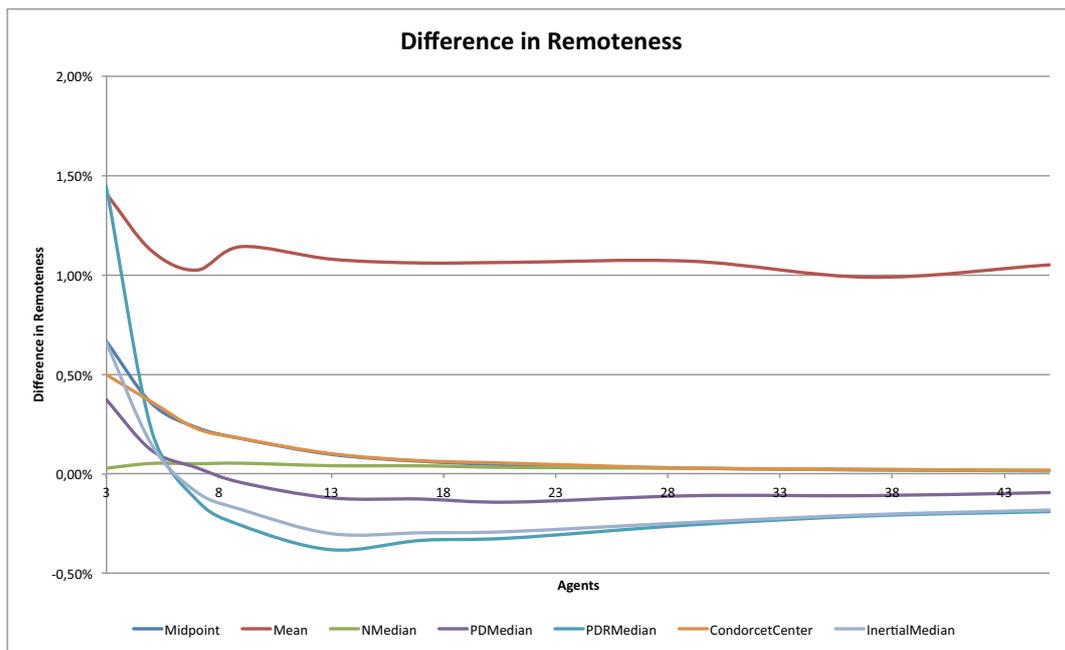


Abbildung 4.24.: Difference in Remoteness unter Cobb-Douglas-Präferenzen

auf Änderungen von ρ zu reagieren, während unter den anderen Abstimmungsregeln eher eine Zunahme der Remoteness zu beobachten ist, wenn ρ negativ wird. Unter metrisch eingipfligen Präferenzen (Tabelle 4.30) nimmt die Differenz der Remoteness bei der Mittelwert-Regel im Vergleich zu Cobb-Douglas-Präferenzen zwar ab, diese ist aber immer noch die schlechteste der drei unter diesen Präferenzen manipulierbaren Regeln. Insbesondere für Agentenzahlen oberhalb 10 zeigen sich für die normalisierte Median-Regel und die Condorcet Center-Regel erkennbar andere Durchschnittswerte als unter Cobb-Douglas-Präferenzen.

REMRD Ebenso wie bei der Summe der Nutzen kann auch bei der Remoteness eines Abstimmungsergebnisses neben den relativen Änderungen bzw. der Differenz der absolute Wert in einer geeigneten Skala betrachtet werden. Analog zum unmanipulierten Mittelwert, der unter Cobb-Douglas-Präferenzen die Nutzensumme maximiert, minimiert der unmanipulierte Midpoint die Remoteness. Offen dagegen ist, ob die Midpoint-Regel diese Eigenschaft auch hinsichtlich des manipulierten Ergebnisses im Vergleich zu den anderen hier betrachteten Abstimmungsregeln hat.

Erneut sei $\widehat{R}(x)$ die Remoteness bezüglich der wahren Peaks, $r_{\min} = \min_{x \in X} \widehat{R}(x)$ deren Minimum²¹ und $\bar{r}_{RD} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \widehat{R}(w^i)$ der Erwartungswert der Remoteness bei *random dictatorship*. Schließlich ist $w^i(t^*)$ der announced Peak des Agenten i bei

²¹Man beachte, dass der unmanipulierte Midpoint diese Größe minimiert. Es gilt also $m(p) = \operatorname{argmin}_{x \in X} \widehat{R}(x)$.

4.2. Ergebnisse der Simulationsstudie

Agents	Midpoint	Mean	NMed	PDMed	PDRMed	CCenter	IMed
3	0,00%	-0,10%	0,03%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
5	0,00%	0,18%	0,05%	0,00%	0,00%	0,03%	0,00%
7	0,00%	0,26%	0,05%	0,00%	0,00%	0,04%	0,00%
9	0,00%	0,35%	0,05%	0,00%	0,00%	0,04%	0,00%
13	0,00%	0,37%	0,04%	0,00%	0,00%	0,03%	0,00%
17	0,00%	0,40%	0,04%	0,00%	0,00%	0,03%	0,00%
21	0,00%	0,41%	0,04%	0,00%	0,00%	0,02%	0,00%
29	0,00%	0,43%	0,03%	0,00%	0,00%	0,02%	0,00%
37	0,00%	0,42%	0,02%	0,00%	0,00%	0,02%	0,00%
45	0,00%	0,44%	0,02%	0,00%	0,00%	0,01%	0,00%

Tabelle 4.30.: Difference in Remoteness unter metrischen Präferenzen

Agents	Midpoint	Mean	NMed	PDMed	PDRMed	CCenter	IMed
3	82,93%	13,61%	99,11%	90,45%	63,03%	86,57%	83,02%
5	93,17%	60,38%	97,46%	94,45%	89,54%	91,27%	92,64%
7	96,24%	71,71%	97,08%	95,67%	95,02%	94,26%	96,12%
9	97,26%	73,85%	97,24%	96,23%	96,85%	95,50%	96,91%
13	98,59%	78,05%	97,77%	97,35%	98,17%	97,01%	98,04%
17	99,12%	80,21%	98,03%	97,91%	98,41%	97,86%	98,31%
21	99,37%	81,19%	98,26%	98,05%	98,12%	98,18%	98,09%
29	99,63%	82,30%	98,70%	98,28%	98,10%	98,86%	98,09%
37	99,74%	83,96%	98,99%	98,45%	97,80%	99,08%	97,84%
45	99,82%	83,54%	99,06%	98,31%	97,48%	99,21%	97,45%

Tabelle 4.31.: Remoteness (in REMRD-Skala) unter Cobb-Douglas-Präferenzen

Stopp des Simulationslaufs. Die Kenngröße REMRD ist gegeben durch:

$$e_8 := \frac{\widehat{R}(F(w^1(t^*), w^2(t^*), \dots, w^n(t^*))) - \bar{r}_{RD}}{r_{min} - \bar{r}_{RD}}.$$

Die Idee der Skalierung ist also völlig analog zur Variablen UTILRD: Die Remoteness des manipulierten Ergebnisses wird auf einer $[0; 1]$ -Skala abgetragen, wobei 1 dem besten Wert dieser Größe entspricht (also der minimalen Remoteness im Bezug auf das wahre Profil der Peaks) und 0 dem Erwartungswert unter random dictatorship. Entsprechend würde für eine Abstimmungsregel ein Wert von 1 bedeuten, dass das (in den meisten Fällen) manipulierte Ergebnis die gleiche niedrige Remoteness wie der unmanipulierte Midpoint aufweist, während demgegenüber ein Wert von 0 anzeigt, dass die Regel bei dem gegebenen Profil sich nicht besser verhält als (im Durchschnitt) die zufällige Auswahl eines Agenten als Diktator.

Die arithmetischen Mittelwerte, die sich für die Abstimmungsregeln unter Cobb-Douglas-Präferenzen ergeben, finden sich in Tabelle 4.31 und Abbildungen 4.25 sowie

4. Simulation

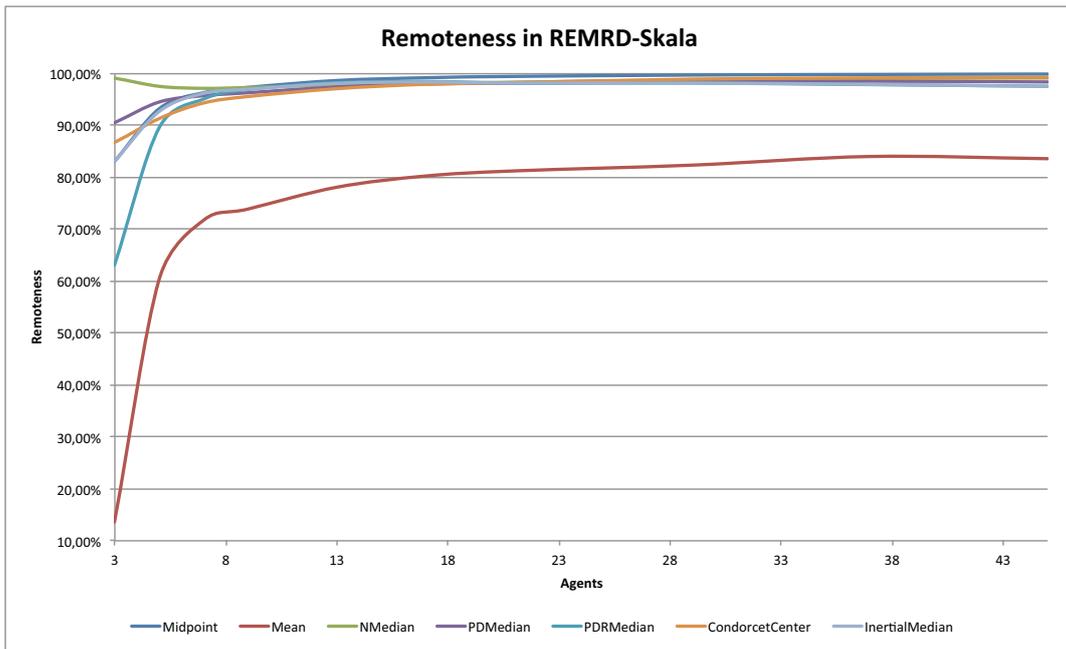


Abbildung 4.25.: Remoteness (in REMRD-Skala) unter Cobb-Douglas-Präferenzen

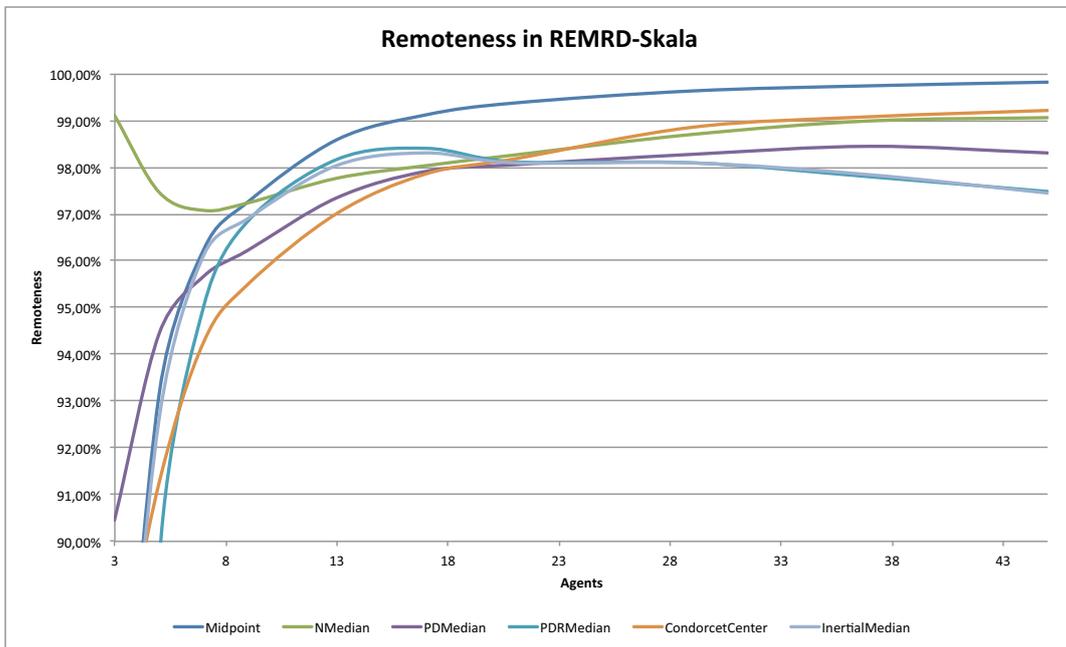


Abbildung 4.26.: Remoteness (in REMRD-Skala) unter Cobb-Douglas-Präferenzen (Ausschnittsvergrößerung)

Agents	Midpoint	Mean	NMed	PDMed	PDRMed	CCenter	IMed
3	100,00%	61,68%	98,68%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
5	100,00%	80,03%	97,48%	96,67%	92,81%	97,76%	95,14%
7	100,00%	84,67%	97,24%	95,88%	92,52%	97,47%	94,11%
9	100,00%	86,10%	97,38%	95,58%	91,55%	97,55%	93,14%
13	100,00%	88,62%	97,77%	96,07%	93,47%	98,08%	94,30%
17	100,00%	89,63%	97,94%	96,01%	93,64%	98,30%	94,37%
21	100,00%	90,19%	98,33%	96,33%	94,05%	98,72%	94,49%
29	100,00%	90,81%	98,65%	96,73%	94,49%	98,90%	94,63%
37	100,00%	91,40%	98,88%	96,91%	94,90%	99,15%	95,01%
45	100,00%	91,57%	99,08%	97,15%	95,29%	99,33%	95,34%

Tabelle 4.32.: Remoteness (in REMRD-Skala) unter metrischen Präferenzen

4.26. Steigt die Anzahl der Agenten, so tendieren die Werte der einzelnen Abstimmungsregeln scheinbar gegen 1. Eine Ausnahme davon bildet die Mittelwert-Regel. Betrachtet man die Ausschnittsvergrößerung in Abbildung 4.26, so scheint auch das Konvergenzverhalten der sequentiellen Median- und der Inertial Median-Regel nicht eindeutig bestimmbar zu sein.

Die besten Durchschnittswerte weist die Midpoint-Regel auf (mit Ausnahme des Falls von 3 Agenten), d.h. diese Regel ist auch unter den betrachteten manipulierten Ergebnissen der Abstimmungsregeln diejenige mit minimaler Remoteness. Zweitbeste Regel bezüglich dieser Variable ist die Condorcet Center-Regel. Die schlechteste Regel ist erneut die Mittelwert-Regel. Ein Einfluss der Sequenz auf das Verhalten der sequentiellen Median-Regel ist eher nicht erkennbar bzw. sehr gering.

Variiert man unter CES-Präferenzen den Substitutionsparameter ρ (siehe Tabellen J.1 bis J.7), so ist für die Midpoint- und die Mittelwert-Regel kein Einfluss dieses Parameters auf die Remoteness erkennbar. Bei den anderen Abstimmungsregeln verringert sich die Remoteness, wenn ρ negativ wird. Unter metrisch eingipfligen Präferenzen (siehe Tabelle 4.32) ist die (nicht manipulierbare) Midpoint-Regel mit 100 Prozent die eindeutig beste Abstimmungsregel in Bezug auf dieses Kriterium, während die Mittelwert-Regel erneut am schlechtesten abschneidet. Interessant ist, dass die manipulierbare Condorcet Center-Regel eine niedrigere Remoteness aufweist als die unter diesen Präferenzen nicht manipulierbare sequentielle Median-Regel.

Zwischenfazit

Im Rahmen dieses Abschnitts wurden acht Variablen eingeführt und diskutiert, mittels denen beurteilt werden soll, wie stark der Effekt bzw. die Effekte der Manipulation der jeweiligen Abstimmungsregeln sind. Um sich dabei ein Urteil darüber bilden zu können, welche Abstimmungsregel den stärksten bzw. schwächsten Effekt aufweist, ist eine Übersicht in Tabelle 4.33 gegeben. Wiederum bedeutet ++, dass eine Abstimmungsregel die durchschnittlich höchsten Werte bei einer Variable aufweist, und +, dass eine Regel den zweithöchsten Wert hat. -- und - bedeuten analog, dass

4. Simulation

Variable	Midpoint	Mean	NMed	PDMed	PDRMed	CCenter	IMed
e_1	+	++	--	-	+	-	+
e_2		++	--	-	+		
e_3	-	++	--		+		
e_4	--	++	-	+	+	-	
e_5	-	++		+		--	
e_{5B}	-	--		++	+	-	+
e_6	-	++		+		--	
e_7	--	++	-		+	--	+
e_8	--	++			+	-	+

Tabelle 4.33.: Abstimmungsregeln bezüglich des Effekts der Manipulation unter Cobb-Douglas-Präferenzen

eine Regel den niedrigsten bzw. zweitniedrigsten Durchschnittswert aufweist. Dabei wird jeweils auf den Fall von Cobb-Douglas-Präferenzen Bezug genommen. Bei den Variablen e_4 und e_7 , die Differenzen bezüglich Nutzensumme und Remoteness messen, werden unabhängig vom Vorzeichen kleinere betragsmäßige Abweichungen als schwächerer Effekt und größere Abweichungen dementsprechend als stärkerer Effekt interpretiert.

Aus der Tabelle kann man dabei (zumindest als ersten Eindruck) entnehmen, dass die Midpoint-, die normalisierte Median- und die Condorcet Center-Regel den geringsten Effekt der Manipulation aufweisen. Die Stärken dieser Regeln liegen dabei in unterschiedlichen Bereichen: Während (zumindest unter Cobb-Douglas-Präferenzen) bei der normalisierten Median-Regel vor allem geringe Werte bei der Average Deviation, der Average Manipulation und der Distance zu beobachten sind, verfügen die Midpoint-Regel (insbesondere bezüglich der Remoteness) und die Condorcet Center-Regel (hinsichtlich der Nutzensumme) über sehr erfreuliche Eigenschaften. Bereits hieraus ist erkennbar, dass die Frage, welche Abstimmungsregel empfehlenswert ist, unmittelbar damit in Zusammenhang steht, welche Kriterien man für wichtig(er) hält.

Die am stärksten hinsichtlich des Effekts manipulierbare Abstimmungsregel ist die Mittelwert-Regel, gefolgt von der sequentiellen Median-Regel. Dies erlaubt, schon bevor am Ende dieses Kapitels ein abschließendes Resümee gezogen werden soll, bereits jetzt den Schluss, dass unter den betrachteten Abstimmungsregeln die Mittelwert-Regel die am stärksten manipulierbare Abstimmungsregel ist, da sie diese Eigenschaften sowohl bezüglich des Ausmaßes als auch des Effekts der Manipulation hat.

Die Analyse des Verhaltens der Abstimmungsregeln unter CES-Präferenzen zeigt, dass dieses erste Ergebnis, welches (unter Cobb-Douglas-Präferenzen) die besten bzw. schlechtesten Abstimmungsregeln sind, eindeutig abhängig vom Substitutionsparameter ρ ist: So wird das Verhalten der normalisierten Median-Regel insbesondere bei den Variablen, unter denen diese die beste Abstimmungsregel darstellt,

schlechter, wenn ρ negativ wird, während die Midpoint-Regel in diesen Fällen nicht oder kaum erkennbar auf Änderungen dieses Parameters reagiert. In anderen Worten: Während unter Cobb-Douglas-Präferenzen die Midpoint- und die normalisierte Median-Regel eher den gleichen Effekt der Manipulation aufweisen, ist bei CES-Präferenzen mit $\rho = -5$ die Midpoint-Regel hinsichtlich des Effekts weniger manipulierbar als die normalisierte Median-Regel.

Betrachtet man metrisch eingipflige Präferenzen, so erlauben uns die Gütekriterien, d.h. die Variablen, die das Verhalten bezüglich Nutzensumme und Remoteness messen, auch einen Vergleich zwischen den unter diesen Präferenzen manipulierbaren und den nicht manipulierbaren Abstimmungsregeln. Dabei zeigt sich, dass die Midpoint-Regel in diesem Szenario die eindeutig beste Abstimmungsregel ist, da sie auch hinsichtlich Nutzensumme und Remoteness die besten Durchschnittswerte aufweist. Ferner ist bemerkenswert, dass hinsichtlich der Kriterien Nutzensumme und Remoteness manipulierbare Regeln wie die Condorcet Center-Regel zum Teil besser abschneiden als unter diesen Präferenzen nicht manipulierbare Abstimmungsregeln wie die sequentielle Median-Regel.

Bevor am Ende dieses Kapitels eine abschließende Beurteilung der Ergebnisse der Simulationsstudie gezogen werden soll, werden wir uns im folgenden letzten Abschnitt weiteren Kenngrößen, die Aufschluss über das Verhalten der Abstimmungsregeln geben können, zuwenden und ebenfalls die Frage untersuchen, ob und welche Gemeinsamkeiten es zwischen den Abstimmungsregeln im Bezug auf die Distance gibt. Schließlich wird ein kurzer Exkurs auf den Einfluss der Dimension des Simplex auf ausgewählte Kenngrößen gegeben.

4.2.3. Weitere Kenngrößen und Fragestellungen

In diesem Abschnitt werden Variablen vorgestellt, die weder das Ausmaß noch den Effekt einer Manipulation messen sollen, aber dennoch Aufschluss zur Frage, wie manipulierbar eine Abstimmungsregel ist, geben können. Dabei dienen die Ergebnisse dieser Kenngrößen meist dazu, um beispielsweise mittels einer Korrelationsanalyse die Ergebnisse anderer Variablen besser verstehen zu können. In einem ersten Schritt wird wiederum die Variable vorgestellt und definiert, anschließend Ergebnisse der Simulation angegeben und diskutiert. In einem zweiten Schritt wird - wenn angebracht - untersucht, ob und wie stark die jeweilige Kenngröße mit anderen Variablen korreliert. Dazu wird einmal die Korrelation für eine *feste* Anzahl an Agenten (genauer für 7, 17 und 37 Agenten) betrachtet. Ein anderer Ansatz ist später die Betrachtung der Korrelation zwischen den Kenngrößen, wobei die arithmetischen Mittelwerte der Kenngröße für *verschiedene* Anzahlen von Agenten als Grundgesamtheit herangezogen werden. In beiden Fällen werden Cobb-Douglas-Präferenzen unterstellt.

Weitere Fragestellungen dieses Absatzes sind:

1. Bestehen zwischen den Variablen, die Ausmaß oder Effekt der Manipulation messen, Zusammenhänge im Sinne einer Korrelation?

4. Simulation

Agents	Midpoint	Mean	NMed	PDMed	PDRMed	CCenter	IMed
3	87,10%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	99,80%	87,30%
5	98,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	99,90%	97,70%
7	99,60%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	99,30%
9	99,50%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	99,80%
13	99,80%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
17	99,80%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
21	99,30%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
29	99,40%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
37	97,70%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
45	95,10%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%

Tabelle 4.34.: Konvergierte Profile unter Cobb-Douglas-Präferenzen

2. Bestehen Gemeinsamkeiten zwischen den Abstimmungsregeln bezüglich ihres Verhaltens unter der Variable Distance?
3. Sind erste Indizien hinsichtlich der Auswirkung einer Variation der Dimension des Simplex auf ausgewählte Variablen erkennbar?

Weitere Kenngrößen

Profile Converged Eine Information, die zu jedem Simulationslauf aufgezeichnet wird, ist, ob das Profil konvergiert hat oder nicht. Sei $t^* \in [1, 2, \dots, 200]$ wiederum die Iteration, in der der Simulationslauf gestoppt wurde. Für die Variable gilt dann:

$$m_1 := \begin{cases} true & , \text{ falls } w^i(t^*) = w^i(t^* - 1) \text{ für alle } i \in N. \\ false & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

Eine Normalisierung ist möglich, indem man die Variable in das Verhältnis zum Stichprobenumfang 1000 setzt:

$$\tilde{m}_1 := \frac{m_1}{1000}.$$

Damit ist es möglich, sowohl das Verhältnis konvergierter zu nicht konvergierter Profile in einer Stichprobe zu bestimmen als auch verschiedene Variablen daraufhin zu vergleichen, ob diese - unterschieden nach Konvergenz und Nicht-Konvergenz - unterschiedlich ausgeprägt sind.

Die Anzahlen der konvergierten Profile (in Prozent) unter Cobb-Douglas-Präferenzen sind in Tabelle 4.34, die unter metrisch eingipfligen Präferenzen in Tabelle 4.35 angegeben. Die Werte für CES-Präferenzen finden sich im Anhang in den Tabellen K.1 bis K.7. Wie man erkennen kann, konvergieren für viele Abstimmungsregeln alle Profile. Lediglich unter der Midpoint-, der Condorcet Center-, und der Inertial Median-Regel konvergieren manche Profile teilweise nicht. Ab 5 Agenten liegt jedoch für alle Regeln der Anteil konvergierter Profile oberhalb von 94 Prozent, so dass die

Agents	Midpoint	Mean	NMed	PDMed	PDRMed	CCenter	IMed
3	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
5	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
7	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
9	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
13	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
17	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
21	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
29	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
37	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
45	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%

Tabelle 4.35.: Konvergierte Profile unter metrischen Präferenzen

Aussagen, die wir bei einzelnen Variablen mittels Durchschnittswerten treffen, im Allgemeinen für Nash-Gleichgewichte gelten²².

Condorcet Consistency Median-basierte Abstimmungsregeln unterscheiden sich nur dann, wenn der koordinatenweise Median nicht auf dem Simplex liegt. Ist er ein Element des Simplex, so stimmen alle median-basierten Abstimmungsregeln überein und sind - wie sich leicht zeigen lässt - unter verallgemeinert eingipfligen Präferenzen nicht manipulierbar. Das Ergebnis der Abstimmung ist in diesem Fall *Condorcet-konsistent* in dem Sinne, dass es mit dem in einem solchen Falle existierenden Condorcet-Gewinner übereinstimmt.

Eine wichtige Variable ist daher das Maß, ob und wie stark der koordinatenweise Median vom Simplex abweicht. Sei x_i^{med} der Median in Koordinate i . Die Condorcet Consistency ist gegeben durch:

$$m_2 := \frac{\left(\sum_{i=1}^K x_i^{med}\right) - L}{L}.$$

Die Variable nimmt den Wert 0 genau dann an, wenn der koordinatenweise Median auf dem Simplex liegt. Im Fall $m_2 = -1$ gilt $x_i^{med} = 0$ für alle $i = 1, 2, \dots, K$, insbesondere bedeuten negative Werte der Kenngröße, dass die Summe der Mediane kleiner ist als die Größe des Simplex. Positive Werte der Variablen zeigen dementsprechend an, dass die Summe der Mediane die Größe des Simplex übersteigt. Im Fall von $x_i^{med} = L$ für alle $i = 1, 2, \dots, K$ nimmt m_2 seinen Maximalwert von $K - 1$ an.

In Tabelle 4.36 sind die arithmetischen Mittelwerte dieser Variablen angegeben. Diese sind zudem (CC neg und CC pos) in die Durchschnitte aller positiven und aller negativer Beobachtungen aufgesplittet. Wie aus der Tabelle zu erkennen ist, nimmt mit steigender Anzahl der Agenten die Condorcet Consistency ab (und scheint gegen

²²Wie erwähnt entspricht ein konvergiertes Profil einem Nash-Gleichgewicht.

4. Simulation

Agents	CC pos	CC neg	CC gesamt
3	1,59%	-4,39%	-2,80%
5	1,37%	-4,98%	-3,61%
7	1,04%	-5,33%	-4,28%
9	0,84%	-5,54%	-4,70%
13	0,55%	-5,66%	-5,11%
17	0,38%	-5,59%	-5,21%
21	0,31%	-5,68%	-5,37%
29	0,13%	-5,53%	-5,40%
37	0,11%	-5,48%	-5,37%
45	0,06%	-5,58%	-5,52%

Tabelle 4.36.: Condorcet Consistency der Profile wahrer Peaks

einen festen Wert zu streben). Dies bedeutet, dass die Summe der koordinatenweisen Mediane kleiner als die Größe des Simplex L ist. Anders formuliert: Die Marginalverteilungen der Peaks in den einzelnen Dimensionen sind rechtsschief, das impliziert insbesondere, dass der Median kleiner als das arithmetische Mittel ist. Diese Beobachtung ist ebenfalls konsistent zur gewählten Dirichletverteilung. Wie erwähnt folgen die Marginalverteilungen dieser Verteilungsklasse einer Beta-Verteilung. Diese ist (von für diese Simulation irrelevanten Ausnahmen abgesehen) rechtsschief.

Betrachtet man die Korrelation dieser Variable in Fällen mit 7, 17 und 37 Agenten, so zeigt sich, dass die Condorcet Consistency negativ mit dem Maximum Utility Gain und der Distance der normalisierten Median-Regel korreliert: So beträgt beispielsweise im Falle von 17 Agenten der Korrelationskoeffizient mit dem Maximum Utility Gain -0.704 und mit der Distance -0.539 . Mit steigender Agentenzahl nimmt die Korrelation ab. Demgegenüber ist keine Korrelation zwischen dieser Kenngröße und dem Verhalten der Condorcet Center-Regel zu erkennen. Weiterhin korreliert diese Kenngröße mit der sequentiellen Median-Regel: So besteht eine Korrelation größer als 0.5 zwischen der Condorcet Consistency und der Differenz der Remoteness sowie eine Korrelation kleiner als -0.5 zwischen dieser Größe und der Differenz der Nutzensumme. Auch bei der Inertial Median-Regel korreliert die Condorcet Consistency mit ähnlichen Werten mit diesen beiden Differenzen, zudem ist eine Korrelation kleiner als -0.5 mit der Distance der Inertial Median-Regel zu beobachten.

Insgesamt kann man damit sagen, dass (mit Ausnahme der Condorcet Center-Regel) bei den median-basierten Abstimmungsregeln ein Einfluss der Condorcet Consistency auf das Ergebnis der Regel (entweder direkt auf die Distance oder mittelbar über die Differenzen bei Remoteness und Nutzensumme) derart zu beobachten ist, dass der Einfluss der Manipulation auf das Ergebnis zunimmt, je weiter der koordinatenweise Median vom Simplex entfernt ist.

Dieser Zusammenhang ist besonders gut bei der normalisierten Median-Regel zu beobachten (siehe hierzu auch Beispiel 3.5): Je weiter der koordinatenweise Median vom Simplex entfernt liegt, desto kleinere Werte dürften die einzelnen Mediane

annehmen. Im erwähnten Beispiel gilt $w_1^{med} = 1$, $w_2^{med} = 1$ und $w_1^{med} = 0$ bei einer Größe des Simplex von $L = 45$. Da der normalisierte Median als Ergebnis das Element im Simplex wählt, dessen Einträge in den Koordinaten im gleichen Verhältnis zueinander stehen wie die einzelnen Mediane, also den koordinatenweisen Median normalisiert, wirken sich in solchen Konstellationen wie im Beispiel bereits *kleine Änderungen* an einem Median *umso stärker* auf das Ergebnis aus, je weiter der koordinatenweise Median vom Simplex entfernt ist. Man kann dies anschaulich mit einer „Hebelwirkung“ vergleichen. Da, wie oben erwähnt, mit steigender Anzahl der Agenten sich der koordinatenweise Median vom Simplex in Richtung Nullpunkt entfernt (d.h. die Condorcet Consistency im Mittel negativ wird), lässt sich mit der obigen Argumentation auch das Faktum erklären, dass unter der normalisierten Median-Regel das durchschnittliche Verhältnis Distance zu Average Manipulation mit steigender Agentenzahl ebenfalls deutlich steigt: Da der koordinatenweise Median bei einer großen Zahl von Agenten im Schnitt stärker vom Simplex entfernt ist als bei einer kleineren Anzahl, bewirkt (aufgrund der Normalisierung) eine kleinere Änderung eines Medians dieselbe Änderung des Ergebnisses als eine größere Änderung bei einer kleineren Anzahl von Agenten.

Median Gap Um zu ermitteln, im welchem Umfang sich das Ergebnis einer median-basierten Abstimmungsregel beeinflussen lässt, sind die Abstände des Medians einer Koordinate zu seinen Nachbarn (also den nächst kleineren bzw. größeren Werten) wichtig. Bis zu diesen Werten kann der Median (durch den Agenten, der an der Stelle des Medians seinen Peak hat) beeinflusst werden. Die Summe dieser Abstände misst das Median Gap. Sei $x_j^{(i)}$ die i -te (entsprechend der Relation \geq) geordnete „Beobachtung“ (also der Wert eines Peaks) in Koordinate j und

$$x_i^{med} = x_j^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}$$

der Median dieser Koordinate. Dann ist das Median Gap gegeben durch:

$$\begin{aligned} m_3 : &= \sum_{j=1}^K d\left(x_j^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - 1}, x_j^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}\right) + d\left(x_j^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}, x_j^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 1}\right) \\ &= \sum_{j=1}^K d\left(x_j^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - 1}, x_j^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 1}\right). \end{aligned}$$

Da der Abstand zwischen den Nachbarn des Medians in jeder der K Koordinaten maximal den Wert L annehmen kann, ist die Normalisierung dieser Kenngröße definiert durch:

$$\tilde{m}_3 := \frac{m_3}{K \cdot L}.$$

Wie man sich leicht überlegen kann, bedeutet bei einer median-basierten Abstimmungsregel $\tilde{m}_3 = 0$, dass kein Agent in der Lage ist, in einer Koordinate den Median zu verändern. Damit besteht auch kein Einfluss (eines einzelnen Agenten) auf das Ergebnis der Abstimmungsregel. Ein Wert $\tilde{m}_3 = 1$ bedeutet hingegen, dass es in

4. Simulation

Agents	Median Gap
3	28,60%
5	17,51%
7	12,49%
9	9,88%
13	6,85%
17	5,20%
21	4,33%
29	3,06%
37	2,46%
45	1,99%

Tabelle 4.37.: Median Gap der Profile wahrer Peaks

jeder Koordinate einen Agenten gibt, der dort jeden Wert im Intervall $[0; L]$ als Median realisieren kann. Dabei können für verschiedene Koordinaten verschiedene Agenten pivotal sein. Außerdem ist der Zusammenhang zwischen einer Änderung des koordinatenweisen Medians und dem Ergebnis der Abstimmung je nach Abstimmungsregel natürlich unterschiedlich. Offen ist die Frage, ob und welcher Zusammenhang zwischen dieser Kenngröße und den nicht median-basierten Abstimmungsregeln (Midpoint- und Mittelwert-Regel) besteht.

Wie aus Tabelle 4.37 zu erkennen ist, wird das Median Gap umso kleiner, desto größer die Anzahl der Agenten ist. Im Folgenden möchten wir untersuchen, ob und welchen Zusammenhang es zwischen dem Median Gap und dem Verhalten median-basierter Abstimmungsregeln gibt.

Untersucht man die Korrelation des Median Gap mit den Werten der anderen Variablen unter 7, 17 und 37 Agenten, so zeigt sich, dass das Median Gap keine erkennbare Korrelation zur Midpoint- und zur Mittelwert-Regel aufweist. Zu den median-basierten Abstimmungsregeln hingegen besteht eine Korrelation im Bereich von 0.3 bis 0.5 zur Distance und zur Number of Pivotal Agents, wobei die Korrelation mit steigender Anzahl an Agenten zunimmt. Zusammenfassend lässt sich also sagen, dass, auch wenn dieser eher schwach ist, durchaus ein Zusammenhang zwischen den Abständen zu den einzelnen Medianen und der Beeinflussbarkeit des Ergebnisses median-basierter Abstimmungsregeln besteht.

Midpoint Diameter Eine offene Frage ist, inwiefern die Möglichkeit eines einzelnen Agenten, den (Shadow-)Midpoint zu beeinflussen, mit der „Größe“ der unmanipulierten Menge der Midpoints zusammenhängt²³. Als Variable für die „Größe“ dieser Menge dient dabei die Summe der koordinatenweisen Abstände zwischen dem kleinsten und dem größten Wert in der Menge der Midpoints. Präzise formuliert ist

²³Bekanntlich ist der unmanipulierte Shadow-Midpoint ein Element dieser Menge.

Agents	Midpoint Diameter
3	5,99%
5	5,14%
7	4,05%
9	3,33%
13	2,32%
17	1,73%
21	1,44%
29	1,02%
37	0,89%
45	0,67%

Tabelle 4.38.: Midpoint Diameter der Profile wahrer Peaks

der Midpoint Diameter also gegeben durch:

$$m_4 := \sum_{i=1}^K \max_{x \in M(p)} x_i - \min_{y \in M(p)} y_i.$$

Wie üblich bezeichnet $M(p)$ dabei die Menge der Midpoints unter den wahren Peaks. Da der Abstand zwischen Maximum und Minimum in jeder Koordinate maximal den Wert L annehmen kann, ist die Normalisierung dieser Größe (wie beim Median Gap) definiert durch:

$$\tilde{m}_4 := \frac{m_4}{K \cdot L}.$$

Ein Wert von 0 heißt, dass die Menge der Midpoints einelementig ist, während $\tilde{m}_4 = 1$ bedeutet, dass diese Menge den gesamten Simplex umfasst.

Der Midpoint Diameter nimmt mit steigender Anzahl der Agenten ab, wie aus Tabelle 4.38 zu entnehmen ist. Im Folgenden möchten wir untersuchen, ob und welcher Zusammenhang zwischen dieser Kenngröße und der Manipulierbarkeit der (Shadow-)Midpoint-Regel besteht. Hierzu betrachten wir erneut die Korrelation dieser Kenngröße mit den Werten, die sich unter 7, 17 und 37 Agenten ergeben. Im Ergebnis lässt sich festhalten, dass die Distance der Midpoint-Regel mit einer Korrelation zwischen 0.3 und 0.4 von allen Kenngrößen am besten „erklärt“ wird. Somit besteht einerseits ein (wenn auch nicht großer) linearer Zusammenhang zwischen dem Durchmesser der Menge der unmanipulierten Midpoints und Einfluss auf das Abstimmungsergebnis. Andererseits (und angesichts der Tatsache, dass auch zu den anderen obigen weiteren Kenngrößen keine Korrelation besteht) zeigt dieser doch recht geringe Korrelationskoeffizient, dass gerade bei der Midpoint-Regel eine „Vorhersage“ der Ergebnisse einzelner Kenngrößen durch exogene Variablen schwierig sein dürfte. Gerade die Midpoint-Regel verfügt (wie ja insbesondere die Auswertung des Ausmaßes der Manipulation zeigt) über eine komplexe Dynamik, wenn man den Prozess der Manipulation ausgehend von den wahren Peaks betrachtet.

Zusammenhänge zwischen den Variablen

Eine weitere Frage ist, ob es nicht nur Zusammenhänge zwischen den Variablen m_2 bis m_4 mit den Kenngrößen zu Ausmaß und Effekt der Manipulation gibt, sondern ob und welcher Zusammenhang zwischen einzelnen Kenngrößen dieser beiden Gruppen besteht. Dazu werden wir im Folgenden die Korrelation des Maximum Utility Gain, der Number of Pivotal Agents sowie der Average Deviation und der Average Manipulation mit den Variablen untersuchen. Wir wollen also insbesondere klären, ob ein (linearer) Zusammenhang zwischen dem möglichen Nutzengewinn eines Agenten, der Zahl der Agenten, die Einfluss auf das Ergebnis der Abstimmung nehmen können, und Änderungen in den announced Peaks mit anderen Kenngrößen besteht. Dazu betrachten wir wiederum Datensätze für 7, 17 und 37 Agenten unter Cobb-Douglas-Präferenzen.

Bei allen Regeln fällt (was wenig überraschend ist) ein Zusammenhang zwischen der Average Deviation und der Average Manipulation auf. Weiterhin kann festgehalten werden:

- Unter der Midpoint-Regel besteht eine geringe Korrelation (im Bereich von etwa 0.3 für 37 Agenten) des Maximum Utility Gain mit der Distance, also dem Unterschied zwischen dem manipulierten und dem unmanipulierten Ergebnis. Mit steigenden Agentenzahlen ist ebenfalls eine schwache Korrelation (0.395 bei 37 Agenten) der Number of Pivotal Agents mit der Final Number of Agents Manipulating zu erkennen. Insgesamt verstärkt sich der Eindruck, dass bei der Midpoint-Regel eine „Vorhersage“ von Variablen wie der Distance durch andere Variablen nahezu unmöglich sein dürfte.
- Betrachtet man die Mittelwert-Regel, so sind hier lediglich zwei Zusammenhänge (insbesondere bei 37 Agenten) auffällig: Das Maximum Utility Gain und die Average Deviation bzw. Manipulation korrelieren mit ca. -0.3 , weiterhin besteht eine Korrelation mit ähnlichen Werten zwischen dem Maximum Utility Gain und der Nutzensumme bzw. Differenzen der Nutzensumme.
- Ein anderes, wenn auch nicht „klares“ Bild ergibt sich bei der normalisierten Median-Regel, insbesondere für 37 Agenten: Während die Number of Pivotal Agents keinen Einfluss auf andere Kenngrößen zu haben scheint, korrelieren sowohl das Maximum Utility Gain als auch die Average Deviation mit Werten größer als 0.55 mit der Distance. Ebenso besteht eine Korrelation zwischen der Average Deviation und dem Maximum Utility Gain von 0.628. Schließlich korreliert (bei wiederum 37 Agenten) die Average Deviation mit der Number of Manipulations und der Final bzw. Total Number of Agents Manipulating mit Werten über 0.7. Insgesamt lässt sich für diese Abstimmungsregel festhalten, dass der maximal möglichen Nutzengewinn eines Agenten (gegeben die wahren Peaks der anderen Agenten) offenbar hinsichtlich des normalisierten Medians einen großen Einfluss auf den Effekt der Manipulation zu haben scheint.
- Hinsichtlich der sequentiellen Median-Regel ist die Korrelation der vier obigen Variablen zu den übrigen Kenngrößen abhängig von der gewählten Sequenz.

So lässt sich eine Korrelation (unter 37 Agenten) von 0.6 (unter der Sequenz 1, 2, 3) und 0.4 (unter der Sequenz 3, 2, 1) zwischen dem Maximum Utility Gain und der Distance erkennen. Weiterhin korreliert die Average Deviation mit Werten über 0.8 (für beide Sequenzen und jeweils 37 Agenten) mit der Number of Manipulations und der Final bzw. Total Number of Agents Manipulating.

- Das gleiche Bild wie bei der sequentiellen Median-Regel ergibt sich auch bei der Condorcet Center- und der Inertial Median-Regel: Ebenfalls bestehen unter diesen beiden Regeln jeweils deutliche Korrelationen zwischen dem Maximum Utility Gain und der Distance sowie zwischen der Average Deviation und der Number of Iterations bzw. der Number of Agents Manipulating.

Fasst man die obigen Beobachtungen zusammen, so erkennt man, dass alle median-basierten Abstimmungsregeln Gemeinsamkeiten derart aufweisen, dass das Maximum Utility Gain und die Average Deviation deutliche Korrelationen mit anderen Kenngrößen aufweisen. Unterschiedlich davon hingegen ist das Verhalten der Midpoint-Regel, das sich nahezu gar nicht (mittels Betrachtung der Korrelationskoeffizienten) durch „exogene“ Variablen erklären lässt. Ähnliches lässt sich für die Mittelwert-Regel sagen.

Schließlich sei noch erwähnt, dass mit steigender Agentenzahl keine Korrelation zwischen den weiteren Kenngrößen Condorcet Consistency, Mediagap und Midpointdiameter erkennbar ist. Auch insgesamt lässt sich sagen, dass das (bis auf die obigen Ausnahmen) Nicht-Auftreten von hohen Korrelationen zwischen den einzelnen Variablen den Ansatz, Manipulierbarkeit nicht nur über einige, wenige Variablen, sondern über einen breiten Satz von verschiedensten Kenngrößen zu messen, bestätigt. Mit dem Variablensatz ist es also tatsächlich möglich, mehrere unterschiedliche Aspekte in Bezug auf Manipulierbarkeit zu erfassen.

Wie zu Beginn dieses Abschnitts erwähnt ist noch eine weitere Möglichkeit, Korrelationen zu untersuchen, dadurch gegeben, dass man nicht einzelne Datensätze für eine feste Anzahl von Agenten, sondern die Übersichtstabellen, die die arithmetischen Mittelwerte für unterschiedliche Agentenzahlen enthalten, betrachtet. Eine „einzelne Beobachtung“ entspricht also in diesem Fall nicht (wie in der vorangegangenen Analyse) einem Profil von Peaks, sondern den Mittelwerten der Variablen (über eine Stichprobe von 1000 Profilen) für eine Anzahl von Agenten.

Untersucht man nun hierfür die Korrelationen zwischen den Kenngrößen, so sind überwiegend sehr deutliche und betragsmäßig große Korrelationen von teilweise über 0.95 zu beobachten. Beispielsweise beträgt die Korrelation zwischen dem Midpoint Diameter und der Distance der Midpoint-Regel 0.9995. Andere Beispiele sind die Korrelation zwischen dem Maximum Utility Gain und der Average Manipulation der normalisierten Median-Regel (0.9997) oder der Condorcet Consistency und der Differenz der Remoteness der Condorcet Center-Regel (0.9978). Man beachte, dass diese Korrelation jeweils für Mittelwerte (über eine feste Anzahl von Agenten) der einzelnen Variablen gilt.

Eine Interpretation dieser Ergebnisse ist kritisch. Ein Korrelationskoeffizient nahe bei 1 bzw. -1 bedeutet, dass es einen nahezu perfekten linearen Zusammenhang zwi-

4. Simulation

schen zwei Variablen gibt. Zum einen gilt, dass in den obigen Ausführungen dieser Zusammenhang eben nur für die Mittelwerte der Variablen postuliert werden kann, d.h. man wäre (über eine Regressionsgleichung) in der Lage eine Aussage der Art „Wenn Variable x im Durchschnitt einen Wert c_x hat, so ist für Variable y im Durchschnitt ein Wert von c_y zu erwarten“ zu treffen. Wie jedoch die Analyse der Korrelation zwischen *einzelnen Profilen* weiter oben zeigt, sind Vorhersagen der Form „Hat ein Profil beispielsweise eine Condorcet Consistency von c , so ist eine Distance von d bei einer Abstimmungsregel zu erwarten“ zumindest mittels Betrachtung der Korrelation (bzw. über eine Regressionsgerade) im Allgemeinen nicht möglich.

Was die Ergebnisse hinsichtlich der Korrelation der Mittelwerte der Variablen jedoch als Information enthalten, ist ein linearen Zusammenhang des Verlaufs der einzelnen Datenreihen bei einer Variation der Anzahl der Agenten. In anderen Worten: In zahlreichen Fällen ähnelt sich der Verlauf der Mittelwerte zweier Kenngrößen bei einer Erhöhung der Anzahl der Agenten derart, dass ein nahezu perfekter linearer Zusammenhang zwischen dem Verlauf dieser Mittelwerte besteht.

Zusammenhänge zwischen den Abstimmungsregeln hinsichtlich der Distance

Betrachtet man den Verlauf der Mittelwerte der Distance bei einer Steigerung der Anzahl der Agenten in logarithmischer Skalierung beider Achsen (siehe Abbildung 4.17), so fällt (mit Ausnahme der Mittelwert-Regel) auf, dass für große Agentenzahlen die Datenreihen parallel zu fallen, insbesondere asymptotisch linear zu sein scheinen. Um diese beiden Beobachtungen (d.h. lineare Asymptote und gleiche „Steigung“) näher zu untersuchen, werden wir in diesem Abschnitt mittels einer nichtlinearen Regression versuchen, das Verhalten der Distance näher zu beschreiben.

Sei nun y^j der Logarithmus (zur Basis 10) des arithmetischen Mittels der Distance unter der Abstimmungsregel j , also $y^j := \log(\tilde{e}_3^j)$, und x der Logarithmus (zur gleichen Basis) der Anzahl der Agenten, also $x := \log(z)$ mit

$$z \in \{3, 5, 7, 9, 13, 17, 21, 29, 37, 45\}.$$

Weiter bezeichnet (x_i, y_i^j) das i -te geordnete Beobachtungspaar. Wir unterstellen nun den folgenden Zusammenhang zwischen x und y^j :

$$\hat{y}^j = f(x) = a \cdot x + b - e^{-c \cdot x}$$

und damit

$$\log(\tilde{e}_3^j) = a \cdot \log(z) + b - e^{-c \cdot \log(z)}$$

für eine feste Abstimmungsregel j . Somit ist $a \cdot x + b$ die lineare Asymptote und $-e^{-c \cdot x}$ der Residualterm. Von Interesse sind in unserer weiteren Betrachtung insbesondere die Steigung bzw. das Fallen der Geraden, also a , und die „Konvergenzgeschwindigkeit“ des Residuums, die durch c beschrieben wird.

Die Bestimmung der Parameter a , b und c ergibt sich aus der Lösung eines Kleinste-Quadrate-Ansatzes, also der Lösung des Minimierungsproblems

$$\min_{a,b,c} \sum_{i=1}^{10} (\hat{y}_i^j - y_i^j)^2.$$

	Midpoint	Mean	NMed	PDMed	PDRMed	CCenter	IMed
a	-0.831	-0.146	-0.699	-0.695	-0.951	-0.758	-0.722
b	-0.691	-0.023	-0.861	-0.627	-0.119	-0.708	-0.523
c	3.630	$-8.858 \cdot 10^{-6}$	1.441	2.008	1.639	2.089	2.063
R^2	99.7%	91.4%	99.8%	97.4%	99.8%	99.4%	98.1%

Tabelle 4.39.: Regressionsparameter zum Verhalten der Distance in logarithmischer Skalierung

Die Lösung dieses Problems wurde für die in dieser Dissertation betrachteten Abstimmungsregeln mithilfe von SPSS unter Anwendung sequentieller quadratischer Optimierung²⁴ bestimmt. Um die Güte bzw. Genauigkeit der Anpassung an die logarithmierten Daten zu messen, wird das Bestimmtheitsmaß R^2 betrachtet. Es gilt:

$$R^2 := \frac{\text{Var}(\hat{y}^j)}{\text{Var}(y^j)} = \frac{\sum_{i=1}^{10} (\hat{y}_i^j - \bar{y}_i^j)^2}{\sum_{i=1}^{10} (y_i^j - \bar{y}_i^j)^2}.$$

In anderen Worten gibt das Bestimmtheitsmaß den Anteil der Varianz der durch die Regression geschätzten Daten an der Varianz der tatsächlich gemessenen Daten an. Ein Wert von $R^2 = 1$ würde somit bedeuten, dass die geschätzten \hat{y}_i^j für alle Beobachtungen mit den gemessenen y_i^j übereinstimmen.

Tabelle 4.39 enthält die geschätzten Parameterwerte und das Bestimmtheitsmaß für die einzelnen Abstimmungsregeln. Wie bereits erwähnt kann die Mittelwert-Regel im Gegensatz zu den anderen Abstimmungsregeln nicht durch das obige Regressionsmodell beschrieben werden und hat somit eine Sonderrolle.

Die Werte des Bestimmtheitsmaßes R^2 sind für die übrigen Abstimmungsregeln mit über 98 Prozent erstaunlich hoch, d.h. die Regressionsgleichung beschreibt sehr gut die gemessenen Daten, was als Indiz dafür gewertet werden kann, dass zumindest für das Intervall von 3 bis 45 Agenten tatsächlich ein solcher Zusammenhang besteht. Zur Kontrolle wurde zusätzlich das adjustierte Bestimmtheitsmaß (siehe Goldberger (1991)) berechnet, das berücksichtigt, dass der Erklärungsanteil der Varianz der Prognosedaten steigt, desto mehr Parameter die Regressionsgleichung enthält. Lässt man die Mittelwert-Regel wieder außer Acht, so ergeben sich mit 96.7 Prozent bei der sequentiellen Median-Regel mit Sequenz 1, 2, 3 und höheren Werten für alle anderen Abstimmungsregeln erneut Werte, die auf eine sehr gute Anpassung der Regressionsgleichung an die beobachteten Daten schließen lassen.

Betrachtet man (für alle Regeln außer der Mittelwert-Regel) die Werte des Steigungsparameters a , so gilt, dass sich diese zwar ähneln (in dem Sinne, dass sie alle aus dem Intervall $[0.699; 0.951]$ sind, also eine maximale Differenz von 0.352 aufweisen), aber nicht übereinstimmen. Betrachtet man insbesondere die drei Regeln, die bezüglich der Distance das beste Verhalten aufweisen - die Midpoint-,

²⁴Startwerte: $a = 1$, $b = 0$, $d = 1$

4. Simulation

die normalisierte Median- und die Condorcet Center-Regel - so fällt auf, dass die Midpoint-Regel unter diesen drei Abstimmungsregeln am stärksten fällt (d.h. das betragsmäßig größte a hat) und über die schnellste Konvergenzgeschwindigkeit (Parameter c) verfügt. Angenommen, das Verhalten der Abstimmungsregeln bezüglich ihrer Distance lässt sich tatsächlich über die obige Regressionsgleichung charakterisieren, so würden diese Parameterwerte implizieren, dass mit weiter zunehmender Agentenzahl die Midpoint-Regel die geringste Distance im Mittel aufweisen dürfte.

Auswirkungen des Dimension des Simplex auf ausgewählte Variablen

Eine bisher noch offene Frage ist die, wie sich eine Änderung bzw. Erhöhung der Dimension eines (K, L) -Simplex (also eine Variation von K) *ceteris paribus* auswirkt. Dabei kann man zu zwei Auffassung gelangen, was in diesem Fall *ceteris paribus*, also die übrigen Bedingungen gleich zu lassen, bedeuten soll:

1. Man lässt tatsächlich sämtliche Einstellungen des Simulationsprogramms unverändert, insbesondere die Größe des diskreten Simplex X , also L . Wie bereits zu Beginn dieses Kapitels ausgeführt wurde, hat dies jedoch den Effekt, dass die Anzahl der Elemente in X überproportional ansteigen wird. Neben Problemen mit der Berechnung für große Werte von K und L , die sich im Rahmen der für diese Dissertation zur Verfügung stehenden Mittel nicht effizient lösen lassen, hat dies auch aus konzeptioneller Sicht den Effekt, dass (da jedes Element von X eine Alternative darstellt) die Anzahl der Alternativen sich bei einer Erhöhung von K ebenfalls erhöht, wenn man L unverändert lässt.
2. Deshalb ist eine zweite mögliche Auffassung von *ceteris paribus* die, K zu erhöhen und L so anzupassen, dass die Anzahl der Elemente im diskreten Simplex X (annähernd) konstant bleibt. Damit bewirkt eine solche gleichzeitige Modifikation von K und L , dass die Agenten jeweils über (annähernd) gleich viele Alternativen abstimmen, die aber anders angeordnet sind bzw. auf eine andere Art und Weise in Verbindung miteinander stehen. Methodisch ist dieses Vorgehen also insbesondere dann von Interesse, wenn man den Einfluss untersuchen möchte, der durch „Beziehungen“ oder Ähnlichkeiten zwischen Alternativen auf die Manipulierbarkeit entsteht.

Quasi als Exkurs und ohne Anspruch darauf zu erheben, dass die im Folgenden präsentierten arithmetischen Mittelwerte in einem quantitativen Sinn exakt sind, wurden für beide obigen Auffassungen Stichproben erzeugt. Um eine Vergleichbarkeit hinsichtlich der Verteilung der wahren Peaks auf dem Simplex sicher zu stellen, wird (entgegen dem Standardszenario) in allen Fällen eine Gleichverteilung gewählt. Ebenfalls wurde die Anzahl der Agenten von 5 auf 7 erhöht, damit in allen Fällen die Anzahl der Agenten die Zahl der Dimensionen übersteigt. Betrachtet werden die arithmetischen Mittelwerte von je zwei Variablen, die das Ausmaß der Manipulation messen (Maximum Utility Gain und Final Number of Agents Manipulating), und zwei Kenngrößen, die den Effekt der Manipulation erfassen (Distance und Nutzen-summe in UTILIE-Skala).

4.2. Ergebnisse der Simulationsstudie

Dim	Size	Midpoint	Mean	NMed	PDMed	PDRMed	CCenter	IMed
3	17	2,30%	5,68%	1,10%	3,65%	4,07%	1,38%	2,37%
4	17	3,32%	6,72%	1,09%	4,91%	4,84%	1,96%	3,00%
5	17	3,98%	7,34%	1,13%	5,15%	5,11%	2,53%	3,13%
3	99	1,77%	5,62%	0,91%	3,19%	2,95%	1,07%	1,86%
4	30	2,50%	6,78%	1,10%	3,95%	4,40%	1,44%	2,21%
5	17	3,98%	7,34%	1,13%	5,15%	5,11%	2,53%	3,13%

Tabelle 4.40.: Maximum Utility Gain für unterschiedliche (K, L) -Simplices

Dim	Size	Midpoint	Mean	NMed	PDMed	PDRMed	CCenter	IMed
3	17	36,41%	98,16%	20,53%	33,26%	35,33%	26,07%	28,74%
4	17	52,74%	99,60%	23,87%	46,61%	46,23%	31,19%	39,26%
5	17	58,04%	99,91%	24,40%	48,81%	50,63%	37,67%	38,99%
3	99	53,16%	99,90%	32,80%	46,83%	46,11%	36,79%	45,39%
4	30	62,50%	99,87%	32,26%	56,79%	54,33%	37,50%	45,30%
5	17	58,04%	99,91%	24,40%	48,81%	50,63%	37,67%	38,99%

Tabelle 4.41.: Final Number of Agents Manipulating für unterschiedliche (K, L) -Simplices

Dazu werden einmal (K, L) -Simplices mit den $(3, 17)$, $(4, 17)$ und $(5, 17)$ verglichen, also bei gleichbleibender Größe L die Auswirkungen einer Erhöhung der Dimension K untersucht. Die Ergebnisse dieser drei Stichproben sind insofern mit Vorsicht zu betrachten, als dass (siehe hierzu auch die Ausführungen in Abschnitt 4.1.2) insbesondere der sehr „grobe“ $(3, 17)$ -Simplex nur bedingt als diskrete Approximation eines kontinuierlichen $(3, 1)$ -Simplex tauglich ist. Daher liegt der Fokus in diesem Fall darauf, ob die Mittelwerte einer Variablen steigen oder sinken, wenn man die Zahl der Dimensionen erhöht.

Weiterhin werden diskrete (K, L) -Simplices mit $(3, 99)$, $(4, 30)$ und $(5, 17)$ verglichen. Diese verfügen über 5050, 5456 und 5985 Elemente bzw. Alternativen. Dies soll Aufschluss darüber geben, ob und wie sich eine Änderung von K und L bei annähernd gleicher Anzahl der Alternativen auf die Manipulierbarkeit der Abstimmungsregeln auswirkt.

Bei einer näheren Betrachtung der Tabellen 4.40 bis 4.43 fallen mehrere Aspekte ins Auge: Erstens ist überhaupt eine Reaktion in den Variablen auf Veränderungen von K erkennbar. Anders formuliert: Im Allgemeinen reagieren die Abstimmungsregeln bzw. die Variablen, die deren Manipulierbarkeit erfassen sollen, nicht invariant bezüglich der Dimension des Simplex. Zweitens kann man bei vielen Variablen ein monotonen Verhalten ihrer Mittelwerte bei einer Erhöhung von K beobachten. So nehmen sowohl das Maximum Utility Gain als auch die Distance aller Abstimmungsregeln zu, wenn man K erhöht, während bei der Nutzensumme eine Abnahme zu beobachten ist. Das Verhalten der Final Number of Agents Manipulating hingegen ist

4. Simulation

Dim	Size	Midpoint	Mean	NMed	PDMed	PDRMed	CCenter	IMed
3	17	5,45%	6,28%	4,44%	9,48%	10,01%	4,46%	4,86%
4	17	6,04%	7,26%	5,79%	12,28%	12,21%	5,82%	5,52%
5	17	6,90%	8,22%	7,05%	13,53%	13,51%	7,25%	5,78%
3	99	4,56%	5,92%	3,62%	9,21%	8,91%	3,73%	4,74%
4	30	5,48%	7,18%	5,32%	12,12%	12,23%	5,13%	5,21%
5	17	6,90%	8,22%	7,05%	13,53%	13,51%	7,25%	5,78%

Tabelle 4.42.: Distance für unterschiedliche (K, L) -Simplices

Dim	Size	Midpoint	Mean	NMed	PDMed	PDRMed	CCenter	IMed
3	17	98,98%	99,11%	98,35%	98,15%	98,21%	99,40%	99,07%
4	17	98,70%	98,84%	96,34%	96,45%	96,59%	99,02%	98,70%
5	17	98,12%	98,57%	92,52%	92,96%	92,83%	98,43%	98,03%
3	99	99,11%	99,14%	98,87%	98,62%	98,59%	99,41%	99,11%
4	30	99,02%	98,75%	97,58%	97,87%	97,78%	98,97%	98,85%
5	17	98,12%	98,57%	92,52%	92,96%	92,83%	98,43%	98,03%

Tabelle 4.43.: Nutzensumme (in UTILIE-Skala) für unterschiedliche (K, L) -Simplices

nicht eindeutig erkennbar. Schließlich verändert sich drittens die relative Position der Abstimmungsregeln zueinander (im Bezug auf das Verhalten unter einer bestimmten Variablen) bei einer Variation von K . So hat beispielsweise bei $K = 3$ Dimensionen die normalisierte Median-Regel eine geringere Distance als die Midpoint-Regel, während bei $K = 5$ Dimensionen letztere Regel eine geringere Distance aufweist.

Insgesamt zeigen diese eher exkursorischen Beobachtungen, dass die Dimension des Simplex einen nicht unerheblichen Einfluss auf das Verhalten der einzelnen Abstimmungsregeln haben kann. Wie dieses - insbesondere in einem quantitativen Sinne - genauer beschaffen ist, ist eine offene, über die Dissertation hinausgehende Fragestellung. Um hierauf eine Antwort finden zu können, wären weitere, äußerst umfangreichen Simulationen auf „feineren“ Simplices (beispielsweise $L = 99$) auch für höhere Dimensionen als $K = 3$ erforderlich.

4.3. Zusammenfassung der Ergebnisse

Es ist Ziel dieses Kapitels zu untersuchen, welche der zuvor eingeführten Abstimmungsregeln mehr bzw. weniger manipulierbar sind und welche Auswirkungen die in Kapitel 3 gezeigten Eigenschaften auf die Manipulierbarkeit unter verallgemeinert eingipfligen Präferenzen haben. Hierzu sollte durch die Simulationsstudie ein umfassendes Bild über das Verhalten der Abstimmungsregeln bezüglich mehrerer Variablen gewonnen werden. Dabei ermöglicht die Tatsache, dass die Alternativen,

d.h. die Elemente des Simplex, miteinander in Sinne einer Ähnlichkeitsbeziehung in Verbindung stehen (Diese wird durch den Abstand $d(\cdot, \cdot)$ wiedergegeben.) ein weit breiteres und genaueres Feld an Messgrößen für Manipulierbarkeit.

Generell lässt sich nach der durchgeführten Studie und der Analyse der Daten sagen, dass der Ansatz sich im Allgemeinen als aufschlussreich und dazu geeignet, aufgeworfene Fragestellungen zu beantworten, erweist. So zeigt sich, erstens, dass die Manipulierbarkeit der einzelnen Abstimmungsregeln teilweise sehr unterschiedlich ist und insbesondere in einem Maße auftritt, das nicht als vernachlässigbar angesehen werden kann. Zweitens erkennt man, dass die Frage, welche Situationen, d.h. Parameterkonstellationen und Modellannahmen, verglichen werden, eine ebenso hohe Relevanz hat, da sich hier ein deutlicher Einfluss auf das Verhalten der einzelnen Variablen zeigt. Drittens unterstreichen die Ergebnisse der Simulation bezüglich Kenngrößen wie Nutzensumme und Remoteness, dass es, wie eingangs postuliert, im Rahmen einer Simulationsstudie zu Manipulierbarkeit unabdingbar ist, mit weiteren Variablen ebensolche Gütekriterien zu untersuchen. Der hohe Anteil an konvergierten Profilen unter den Stichprobendaten, der bei vielen Regeln nahezu fast immer 100 Prozent beträgt, erlaubt eine Interpretation der betrachteten arithmetischen Mittelwerte als das durchschnittliche Verhalten unter zufällig ausgewählten Nash-Gleichgewichten. Schließlich sei bemerkt, dass - quasi als absolute Mindestvoraussetzung für die Validität und Reliabilität der Simulation - die gewonnenen Simulationsergebnisse und Stichprobendaten in Einklang mit den theoretischen Resultaten aus Kapitel 3 stehen, was Manipulierbarkeit unter metrisch eingipfligen Präferenzen und Pivotalität der verschiedenen Regeln betrifft.

Betrachtet man das Ausmaß der Manipulation, so zeigt sich, dass die Art und Weise, wie Agenten ihre Peaks ändern, bei den Abstimmungsregeln teilweise sehr unterschiedlich ist: Während man bei der Midpoint-Regel teilweise sehr häufige Änderungen der announced Peaks beobachten kann und ein großer Anteil der Agenten manipuliert, so ändern bei den median-basierten Abstimmungsregeln Agenten, die manipulieren, meist nur einmal ihren Peak, d.h. wenn sie zuvor den wahren Peak angegeben haben, „springen“ sie auf den neuen Peak und verbleiben bei diesem. Die teilweise sehr großen Durchschnittswerte bei den Variablen, die das Ausmaß messen, zeigen, dass Manipulationen unter verallgemeinert eingipfligen Präferenzen tatsächlich oft stattfinden - der Aspekt der Manipulierbarkeit einer Abstimmungsregel hat also eine hohe Relevanz. Während die normalisierte Median-Regel nur ein geringes Ausmaß im Bezug auf Manipulation zeigt, sind die höchsten Werte bei der Mittelwert-Regel gefolgt von der Midpoint-Regel zu beobachten.

Auch bezüglich des Effekts der Manipulation zeigt sich teilweise ein sehr unterschiedliches Verhalten der Abstimmungsregeln: So ist beispielsweise ein deutlicher Unterschied zwischen der Average Deviation und der Average Manipulation bei den Regeln zu beobachten. Insbesondere scheint es unter den meisten Regeln eine Art „Mindestabstand“ zwischen dem wahren Peak und dem announced Peak zu geben, wenn ein Agent manipulieren möchte. Betrachtet man die Distance, also den Abstand zwischen dem unmanipulierten Ergebnis und dem Element, das sich nach Stopp des Simulationslaufs ergibt, so zeigt sich hier, dass bei vielen Abstimmungs-

4. Simulation

regeln der Verhalten sehr von den gewählten Parametern, insbesondere von den Präferenzen der Agenten und der Dimension des Simplex abhängt. So fällt auf, dass die Distance der Midpoint-Regel eher invariant gegenüber Variation des Substitutionsparameters ρ von CES-Präferenzen ist, während die normalisierte Median-Regel hier einen Einfluss erkennen lässt. Im Ergebnis kann man daher nur schwerlich eine absolute Aussage dahingehend treffen, welche Abstimmungsregel die geringste Distance aufweist. Eine solche Aussage lässt sich nur im Kontext der Anzahl und Präferenzen der Agenten, der Wahrscheinlichkeitsverteilung der wahren Peaks und der Dimension des Simplex treffen. Insgesamt kann man unter Cobb-Douglas-Präferenzen jedoch feststellen, dass die normalisierte Median-Regel, die Condorcet Center-Regel und die Midpoint-Regel den geringsten Effekt der Manipulation zeigen, während die Mittelwert-Regel auch hier wiederum am stärksten für Manipulation anfällig zu sein scheint.

Weitere Kenngrößen wie das Median Gap oder die Condorcet Consistency können nur bedingt und in Ausnahmefällen (wie beispielsweise bei der Distance der normalisierten Median-Regel) einen Erklärungsbeitrag für das Verhalten der Regeln bzw. die „Ursachen“ dafür liefern. Gleiches lässt sich für das Maximum Utility Gain sagen. Insgesamt zeigen die in den meisten Fällen geringen Korrelationen zwischen den Variablen, dass die zahlreichen Kenngrößen tatsächlich unterschiedliche Aspekte erfassen. Hinsichtlich der Pivotalität, die durch die Number of Pivotal Agents gemessen wird, kann man sagen, dass diese (wegen ihrer geringen Korrelation mit anderen Kenngrößen) nur bedingt als Grund für Manipulationen gesehen werden kann. Zwar muss ein Agent, damit er profitabel seinen Peak ändern kann, überhaupt Einfluss auf das Ergebnis der Abstimmung haben, jedoch ist in den Daten der Simulationsstudie selbst bei 45 Agenten ein Anteil von mehr als 80 Prozent an pivotalen Agenten zu beobachten.

Legt man weiterhin das Augenmerk auf den Sonderfall metrisch eingipfliger Präferenzen, so sticht hier unter allen Abstimmungsregeln, aber insbesondere auch unter den unter diesen Präferenzen nicht manipulierten Abstimmungsregeln, die Midpoint-Regel klar hervor. So zeigt sie nicht nur hinsichtlich Variablen wie der Distance die „besten“ Ergebnisse²⁵, sondern setzt sich bezüglich ihrer Remoteness und der Nutzensumme des Ergebnisses von den anderen nicht manipulierbaren Abstimmungsregeln ab. Weiterhin fällt auf, dass gerade hinsichtlich letzterer Variablen manipulierbare Regeln wie die Condorcet Center-Regel teilweise bessere Ergebnisse im Schnitt aufweisen als nicht manipulierbare Regeln wie der sequentielle Median.

Will man nun abschließend zu einem Urteil bzw. einer Empfehlung für eine Abstimmungsregel unter Cobb-Douglas- oder, allgemeiner, CES-Präferenzen kommen, so bleibt festzuhalten, dass sich hier kein eindeutiges Bild aus den Daten erkennen lässt: Was sich klar sagen lässt, ist, dass die Mittelwert-Regel unter allen Regeln am schlechtesten abschneidet, also am stärksten sowohl bezüglich Ausmaß als auch bezüglich Effekt manipulierbar ist. Auch die sequentielle Median-Regel und die Inertial Median-Regel scheinen wegen ihres Verhaltens bei Remoteness und Nutzensumme und angesichts besserer Alternativen unter den median-basierten Abstimmungsre-

²⁵da diese Regel unter metrisch eingipfligen Präferenzen nicht manipulierbar ist

geln eher nicht empfehlenswert zu sein. Will man unter den verbleibenden Abstimmungsregeln eine Auswahl treffen, so hängt diese einerseits davon ab, welche Parameterkonstellation (Anzahl der Agenten, Präferenzen, Dimensionen etc.) betrachtet wird, andererseits auch davon, ob und wie viel Gewicht man auf die beiden Aspekte von Ausmaß und Effekt legt. Beispielsweise wäre, will man zwingend ein geringes Ausmaß der Manipulation erreichen, von der Midpoint-Regel eher abzuraten.

Gerade bei der Midpoint-Regel, die in Kapitel 3 ausführlich diskutiert wurde, bietet sich ein ambivalentes Bild, da diese einerseits ein hohes Ausmaß aber andererseits einen geringen Effekt der Manipulation zeigt. Man könnte auch sagen, dass unter dieser Regel ein geringer Effekt *trotz* hohen Ausmaßes besteht. Zwar ist die Midpoint-Regel auch bezüglich Variablen des Effektes der Manipulation nur unter den besten Abstimmungsregeln (aber nicht die eindeutig beste Regel), aber zeigt sie eine erstaunliche Invarianz gegenüber einer Variation der Präferenzen und teilweise auch der Dimension des Simplex. Zudem ist zu bedenken, dass die Midpoint-Regel im Gegensatz zur normalisierten Median- und der Condorcet Center-Regel unter metrisch eingipfligen Präferenzen nicht manipulierbar ist und unter solchen Präferenzen über die besten Wohlfahrtseigenschaften verfügt. Insgesamt lässt sich also festhalten, dass diese Regel vor allem dann attraktiv ist, wenn man nichts oder nur wenig über die Parameter, insbesondere über die Präferenzen der Agenten, weiß.

Schlussfolgerungen und Ausblick

Ist nach all dem, was in dieser Dissertation gesagt werden konnte, nun eine wenig oder kaum manipulierbare Allokation öffentlicher Güter mittels einer Abstimmung möglich? Erste Antworten finden sich in Kapitel 3 dieser Arbeit: Schränkt man die Präferenzen der Agenten auf eine Teilmenge der verallgemeinert eingipfligen Präferenzen ein, unterstellt man also metrisch eingipflige Präferenzen, so existieren mehrere nicht diktatorische und nicht manipulierbare Abstimmungsregeln auf dem Simplex - und damit auch zur Allokation öffentlicher Güter. Für die vorgestellten Regeln, die diese Eigenschaften erfüllen, gilt zudem, dass unabhängig von den Präferenzen der Agenten kein Ergebnis durch Misrepräsentation erreicht werden kann, das näher (gegeben die in dieser Arbeit verwendete Metrik $d(\cdot, \cdot)$) am (wahren) Peak des Agenten liegt, als das Ergebnis, das sich bei Vorschlag des wahren Peaks ergibt.

Unter den drei vorgestellten Regeln, die sowohl nicht diktatorisch und (unter metrisch eingipfligen Präferenzen) nicht manipulierbar sind und Einstimmigkeit erfüllen, sticht die Midpoint-Regel aufgrund ihrer Wohlfahrtseigenschaften unter metrisch eingipfligen Präferenzen klar hervor: Das Ergebnis dieser Abstimmungsregel ist Pareto-effizient, es minimiert die Summe der Distanzen zu den Peaks der Agenten und es maximiert somit auch die Summe der Nutzen (bzw. den durchschnittlichen Nutzen) der Agenten.

Obwohl es auf einen ersten Blick erfreulich ist, damit ein positives Ergebnis im Sinne eines Möglichkeitsresultats erhalten zu haben, muss man dennoch sehen, dass die Annahme metrisch eingipfliger Präferenzen sehr speziell ist. Man könnte überspitzt das obige Ergebnis auch so kritisieren, dass in diesem Fall die Annahmen bezüglich der Präferenzen der Agenten solange modifizieren werden, bis das gewünschte Ergebnis - nämlich Nicht-Manipulierbarkeit - sich einstellt. Es ist daher von unabdingbarem Interesse, Aufschluss über die Manipulierbarkeit der Abstimmungsregeln unter verallgemeinert eingipfligen Präferenzen zu erhalten.

Dabei kann (aufgrund des negativen Resultats aus Zhou (1991)) nicht die Frage,

5. Schlussfolgerungen und Ausblick

ob nicht manipulierbare Abstimmungsregeln zur Allokation öffentlicher Güter existieren, im Mittelpunkt stehen. Vielmehr geht es darum, in Erfahrung zu bringen, wie stark die einzelnen Regeln manipulierbar sind und unter welchen Bedingungen (d.h. Anzahl der Agenten, Dimensionen, Präferenzen etc.) manche Abstimmungsregeln weniger manipulierbar als andere sind. Im Ergebnis lässt sich festhalten, dass keine der betrachteten Abstimmungsregeln „uniform“, d.h. für alle Parameterkonstellationen und bezüglich aller Kenngrößen, am wenigsten manipulierbar ist. Vielmehr hängt die Beantwortung dieser Frage unmittelbar damit zusammen, welche Parameterkonstellation man betrachtet und auf welche Variablen man abstellt. Insbesondere ist bei der Midpoint-Regel eine eher hohe Manipulierbarkeit hinsichtlich des Ausmaßes und eine eher geringe Manipulierbarkeit im Bezug auf den Effekt der Manipulation festzustellen.

Insgesamt scheinen die Condorcet Center-Regel, die normalisierte Median-Regel und die Midpoint-Regel die am wenigsten manipulierbaren Abstimmungsregeln auf dem Simplex zu sein, während die Mittelwert-Regel klar am stärksten manipulierbar ist. Die Midpoint-Regel hebt sich unter diesen Regeln dadurch ab, dass sie zwar in den meisten Fällen nicht die beste (d.h. am wenigsten manipulierbare) Abstimmungsregel ist, aber sehr insensitiv gegenüber Variationen der Parameter zu sein scheint - was sich weder für die Condorcet Center-Regel noch für die normalisierte Median-Regel sagen lässt.

Weitere Fragestellungen

Es ist bei wissenschaftlichen Arbeiten keine Ausnahme, dass, untersucht man eine Fragestellung mit dem Ziel Antworten zu erhalten, man ebenso auf neue, weitere Fragen stößt. So ergeben sich auch nach Abschluss der theoretischen Untersuchung und der Simulationsstudie weitere Aspekte, die den Rahmen dieser Dissertation überschreiten würden, aber sicherlich Anlass für weitere Arbeiten bieten können:

- Um den Einfluss einer Veränderung der Dimension (d.h. beispielsweise der Anzahl der öffentlichen Güter) auch quantitativ genauer untersuchen zu können, sind weitere, rechenintensive Simulationen auf $(K, 99)$ -Simplices erforderlich.
- Als weitere Klasse von verallgemeinert eingipfligen Präferenzen ließen sich „ L^p -Präferenzen“ untersuchen, also Präferenzen, die durch eine p -Norm und den Abstand eines Elements zum Peak (bezüglich dieser Norm) definiert werden. Die bereits untersuchten metrisch eingipfligen Präferenzen sind ein Spezialfall dieser Klasse von Präferenzen.
- Eine weitere Fragestellung ist die nach Ausmaß und Effekt von Gruppenmanipulationen, d.h. einer profitablen Beeinflussung des Abstimmungsergebnisses, wenn sich mehrere Agenten bezüglich ihrer announced Peaks koordinieren.
- Ebenfalls lässt sich die Frage nach der Komplexität der einzelnen Abstimmungsregeln stellen, also insbesondere, ob bei einigen Regeln weniger Rechenschritte erforderlich sind, um das Ergebnis bzw. eine Manipulation zu berech-

nen, als bei anderen Abstimmungsregeln. So scheint auf einen ersten Blick die Berechnung des Midpoints im Schnitt deutlich aufwändiger zu sein als die des Mittelwerts der Peaks.

Schließlich, und an dieser Stelle bietet sich ein „weites Feld“ möglicher Fragestellungen, sei betont, dass die in Kapitel 4 vorgestellten Kenngrößen, um Manipulierbarkeit zu messen, nicht auf Simplices beschränkt sind. Das vorgestellte Messkonzept lässt sich in allen Fällen anwenden, in denen auf der Menge der Alternativen eine Distanz definiert werden kann. Somit stellt sich natürlicherweise die Frage, welche Ergebnisse im Bezug auf Manipulierbarkeit sich für Mengen von Alternativen erhalten lassen, die einerseits mittels einer Metrik „verbunden“ sind und für die andererseits nach den Resultaten aus Nehring u. Puppe (2007) keine nicht manipulierbaren Abstimmungsregeln existieren.

Besteht die Möglichkeit einer sozialen Allokation?

Kann man nun nach den obigen Ausführungen schlussfolgern, dass eine soziale Wahl im Bezug auf die Allokation öffentlicher Güter möglich ist? Oder liegt der Schluss nahe, dass sich zwar durch Abstimmungsregeln irgendwelche Peaks aggregieren lassen, aber weder das Argument (also die Peaks) noch das Ergebnis der Aggregation (also die Allokation) in einem interpretierbaren Zusammenhang mit den wahren Präferenzen der Agenten stehen?

Ein Argument, an die Möglichkeit einer sozialen Wahl „zu glauben“, ist die Behauptung, dass Manipulationen und andere Defekte nur mit so geringer Wahrscheinlichkeit auftreten (so beispielsweise Mackie (2003)), dass sie nicht wirklich von normativer Relevanz sind. Nach der im Rahmen dieser Inauguraldissertation durchgeführten Simulationsstudie bleibt jedoch festzuhalten, dass bei der Allokation öffentlicher Güter, also bei Abstimmungen auf dem Simplex, im Normalfall Manipulationen, d.h. zuallererst Abweichungen zwischen dem wahren Peak und dem announced Peak eines Agenten, gar nicht selten vorkommen, sondern mit deutlicher Regelmäßigkeit. Manipulation bzw. Manipulierbarkeit einer Abstimmungsregel ist also in diesem Kontext von tatsächlicher Relevanz. Der „Ausweg“, dass diese selten auftritt, bietet sich bei der Allokation öffentlicher Güter demnach nicht.

Wenn Manipulation aber im Kontext der Allokation öffentlicher Güter von tatsächlicher Relevanz ist, ist sie dann nun aber „schlimm“ oder „nicht schlimm“? Die Antwort auf diese Frage könnte ein „Ja, aber“ sein: Aus Sicht der Wirtschaftstheorie, die überwiegend von rationalen, nutzenmaximierenden Individuen ausgeht, kann man schlechterdings einen Agenten nicht dafür kritisieren, dass er eben seinen Nutzen (im Bezug auf das Abstimmungsergebnis) dadurch versucht zu maximieren, indem er die nutzenmaximierende Präferenz wählt. In anderen Worten: Unterstellt man rationale, nutzenmaximierende Wähler, so kann Manipulation - im Sinne einer nutzenmaximierenden Wahl der Stimme bei einer Abstimmung - nicht zum Vorwurf gemacht werden. Was hingegen an der Manipulation einer Abstimmungsregel problematisch ist, sind deren Auswirkungen - beispielsweise die auf das Abstimmungsergebnis und damit verbunden auf Wohlfahrtsmaße wie die Summe der Nutzen.

5. Schlussfolgerungen und Ausblick

Kurz formuliert: Das Problem ist nicht die Manipulation (d.h. hier die Abweichung zwischen offener und wahrheitsgemäßer Präferenz) an sich, sondern deren Auswirkungen.

Welche Folgen haben diese (potentiellen) Auswirkungen auf die Möglichkeit einer sozialen Allokation mittels Abstimmung? Amartya Sen kam in seiner Vorlesung anlässlich der Verleihung des Preises für Wirtschaftswissenschaften der schwedischen Reichsbank im Gedenken an Alfred Nobel (vulgo: Wirtschaftsnobelpreis) im Jahre 1998 zu dem Schluss:

“Impossibility results in social choice theory - led by the pioneering work of Arrow (1951) - have often been interpreted as being thoroughly destructive of the possibility of reasoned and democratic social choice, including welfare economics. [...] Indeed, Arrow’s powerful ‘impossibility theorem’ invites engagement, rather than resignation [...]. We do know, of course, that democratic decisions can sometimes lead to incongruities. To the extent that this is a feature of the real world, its existence and reach are matters for objective recognition.”

(Sen 1999, Seite 364f.)

Nach der Durchführung und Auswertung der Simulationsstudie besitzen wir nun eine recht detaillierte Kenntnis über den “extent”, also den Effekt, der Manipulation. Wir wissen, welche Kenngröße unter welchen Parameterkonstellationen für eine Abstimmungsregel durchschnittlich große oder geringe Effekte aufweist. In vielen Fällen können wir dabei wohl geringe Effekte beobachten, aber es besteht nun auch Kenntnis über eben die Konstellationen aus Abstimmungsregel, Agentenzahl, Anzahl öffentlicher Güter und Präferenzen, unter denen Manipulation tatsächlich große und damit schwierige Effekte mit sich bringt.

Die Ergebnisse der Simulation ermöglichen aber noch einen weiteren, durchaus über den Rahmen der Allokation öffentlicher Güter hinausreichenden Rückschluss: Hat man Kenntnis über den bzw. die (durchschnittlichen) Effekte einer Manipulation, kann man auch eine manipulierte Abstimmung als soziale Wahl interpretieren. Beträgt beispielsweise unter einer gewissen Parameterkonstellation (also Anzahl der Agenten, Dimensionen, Präferenzen etc.) die Distance¹ im arithmetischen Mittel 1 Prozent der Größe des Simplex, so lässt sich schätzen, dass die soziale Wahl in einer Entfernung von 1 Prozent um das Abstimmungsergebnis liegt - und nicht etwa 20 oder 50 Prozent entfernt². Kurz formuliert: Die nähere Kenntnis über den bzw. die Effekte von Manipulation ermöglicht uns Abschätzungen über den Zusammenhang zwischen dem manipulierten und dem „wahren“ Abstimmungsergebnis - und somit, wenn gleich auch unter Umständen unschärfer, die Interpretation des Ergebnisses

¹also die Abweichung zwischen dem wahren und dem manipulierten Abstimmungsergebnis

²Andere Abschätzungen als eine Entfernung, die „nur“ auf dem arithmetischen Mittel basiert, beispielsweise auf der Basis von Quantilen oder unter Berücksichtigung der Varianz, sind natürlich ebenfalls denkbar.

der Abstimmung. Es gibt folglich einen Mittelweg zwischen den Aussagen „Alternative x ist die soziale Wahl“ und „Alternative x ist das manipulierte Ergebnis einer Abstimmung und deshalb nicht als soziale Wahl interpretierbar“. Der Mittelweg lautet sinngemäß: „Alternative x ist das Ergebnis einer manipulierten Abstimmung und unterscheidet sich *abschätzbar* von der sozialen Wahl“.

Manipulierbarkeit und die Möglichkeit einer sozialen Wahl müssen sich also nicht ausschließen. Während vielfach in der Literatur argumentiert wird, dass eine soziale Wahl deshalb möglich ist, weil Manipulation selten auftritt, versagt dieses Argument im Kontext der Allokation öffentlicher Güter. Hat man aber Kenntnis über die Effekte einer Manipulation, so lässt sich, wenn vielleicht auch mit geringerer „Genauigkeit“, das Ergebnis einer Abstimmung immer noch sinnvoll interpretieren. Ich möchte festhalten: Das Ergebnis dieser Arbeit lautet nicht „Manipulierbarkeit *oder* soziale Wahl“, sondern es besteht - auch bei der Allokation öffentlicher Güter - die Möglichkeit einer sozialen Wahl *trotz* Manipulierbarkeit.

Weitere Simulationsergebnisse: Number of Manipulations

Dieser Abschnitt führt weitere Simulationsergebnisse bezüglich der Number of Manipulations auf. Angegeben sind die Mittelwerte der Kenngröße in Abhängigkeit der Anzahl der Agenten und des Parameters ρ der CES-Nutzenfunktion. Alle weiteren Einstellungen der Simulation sind so getroffen, wie in Abschnitt 4.2 beschrieben.

A. Weitere Simulationsergebnisse: Number of Manipulations

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	17,85	29,28	27,21	31,16	39,68	29,82
5	9,22	13,74	14,61	16,19	16,84	14,44
7	11,53	16	16,92	15,78	16,66	12,46
9	12,9	19,05	18,71	20,01	18,01	14,5
13	17,06	23,68	23,9	24,62	23,36	19,12
17	20,85	25,9	27,3	27,66	25,94	21,39
21	26,05	29,83	30,8	31,73	29,98	24,75
29	30,89	40,35	40,55	39,58	36,76	27,86
37	40,33	45,41	51,46	48,91	44,75	31,37
45	49,83	60,53	58,65	58,09	52,66	33,44

Tabelle A.1.: Number of Manipulations der Midpoint-Regel unter CES-Präferenzen

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	5,99	7,9	8,91	8,71	9,44	10,71
5	8,65	10,93	11,91	12,11	14,08	14,46
7	10,76	13,47	14,45	14,25	15,99	17,54
9	12,74	15,61	16,29	16,72	18,35	20,16
13	16,4	19,61	20,65	20,82	22,72	24,48
17	20,2	23,84	24,69	24,98	27,27	28,3
21	23,9	27,66	28,87	29,04	31,53	33,27
29	31,63	35,43	36,96	37,11	40,09	41,41
37	39,32	43,33	44,82	45,11	48,26	49,65
45	47	51	52,83	53,09	56,03	58,01

Tabelle A.2.: Number of Manipulations der Mittelwert-Regel unter CES-Präferenzen

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	1,44	2,05	2,21	2,29	3	3,27
5	1,65	2,18	2,32	2,4	3,2	3,35
7	1,65	2,35	2,3	2,42	3,34	3,35
9	1,67	2,27	2,28	2,33	3,17	3,25
13	1,65	2,2	2,19	2,27	2,94	2,95
17	1,54	2,1	2,1	2,13	2,85	2,81
21	1,64	2,09	1,91	1,99	2,65	2,66
29	1,6	2,16	1,74	1,84	2,34	2,39
37	1,55	2,11	1,67	1,69	2,2	2,18
45	1,54	2,12	1,49	1,61	2,01	1,92

Tabelle A.3.: Number of Manipulations der normalisierten Median-Regel unter CES-Präferenzen

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	1,34	1,8	2,1	1,93	2,007	1,79
5	1,62	2,3	2,43	2,46	2,538	2,07
7	1,88	2,69	2,78	2,79	2,692	2,39
9	1,97	2,85	3,11	3,09	3,022	2,58
13	2,42	3,22	3,53	3,57	3,328	2,81
17	2,66	3,54	3,84	3,77	3,867	3,1
21	2,89	3,86	4,19	4,07	4,050	3,26
29	3,28	4,51	4,63	4,69	4,448	3,6
37	3,51	4,93	5,18	5,19	5,247	3,91
45	3,75	5,3	5,52	5,54	5,426	4,19

Tabelle A.4.: Number of Manipulations der „PDMedian“-Regel unter CES-Präferenzen

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	4,32	5,63	5,86	6,21	5,95	4,96
5	4,4	5,41	5,64	5,62	5,77	4,94
7	4,87	5,92	5,95	5,9	6,12	5,43
9	5,55	6,47	6,4	6,7	6,53	5,99
13	6,63	7,41	7,44	7,39	7,54	6,92
17	7,53	8,57	8,65	8,54	8,43	7,59
21	8,51	9,31	9,54	9,42	9,58	8,49
29	10,26	11,46	11,68	11,62	11,65	10,26
37	11,82	13,15	13,4	13,46	13,62	11,75
45	13,48	14,69	15,27	15,08	15,32	13,86

Tabelle A.5.: Number of Manipulations der „PDRMedian“-Regel unter CES-Präferenzen

A. Weitere Simulationsergebnisse: Number of Manipulations

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	1,98	2,83	3,13	3,68	4,85	6,87
5	2,42	3,40	3,72	3,92	4,01	4,18
7	2,63	3,64	3,91	3,88	3,95	3,62
9	2,88	3,87	3,92	3,98	3,48	3,40
13	3,17	4,28	4,17	4,08	3,32	3,13
17	3,30	4,70	4,52	4,20	3,08	2,88
21	3,61	4,95	4,76	4,47	2,91	2,75
29	3,87	5,91	5,25	4,89	2,51	2,45
37	4,12	6,73	5,68	5,36	2,33	2,21
45	4,35	7,55	6,45	6,03	2,15	1,97

Tabelle A.6.: Number of Manipulations der Condorcet Center-Regel unter CES-Präferenzen

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	17,71	29,13	26,95	30,87	39,28	29,44
5	7,75	11,95	13,60	12,78	15,13	13,96
7	6,77	9,69	10,28	10,66	10,71	9,27
9	6,87	9,07	8,78	9,26	8,94	8,50
13	8,03	9,25	9,21	9,53	9,63	7,84
17	8,15	9,98	10,41	10,04	10,22	8,36
21	9,37	10,61	10,78	10,86	10,68	8,75
29	10,79	12,06	12,60	12,40	12,31	10,61
37	12,17	13,55	14,14	14,22	14,66	12,05
45	13,76	15,63	15,81	15,32	15,84	13,82

Tabelle A.7.: Number of Manipulations der Inertial Median-Regel unter CES-Präferenzen

Weitere Simulationsergebnisse: Maximum Utility Gain

Dieser Abschnitt führt weitere Simulationsergebnisse bezüglich des Maximum Utility Gain auf. Angegeben sind die Mittelwerte der Kenngröße in Abhängigkeit der Anzahl der Agenten und des Parameters ρ der CES-Nutzenfunktion. Alle weiteren Einstellungen der Simulation sind so getroffen, wie in Abschnitt 4.2 beschrieben.

B. Weitere Simulationsergebnisse: Maximum Utility Gain

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	0,66%	1,46%	1,93%	2,10%	3,84%	6,15%
5	0,61%	1,43%	1,97%	1,94%	3,79%	5,02%
7	0,46%	1,15%	1,66%	1,74%	3,23%	4,42%
9	0,47%	1,10%	1,44%	1,57%	3,10%	4,16%
13	0,42%	0,96%	1,24%	1,36%	2,92%	3,98%
17	0,35%	0,84%	1,20%	1,26%	2,59%	3,83%
21	0,37%	0,79%	1,10%	1,11%	2,40%	3,39%
29	0,34%	0,68%	0,89%	0,94%	1,94%	2,95%
37	0,30%	0,57%	0,79%	0,85%	1,81%	2,61%
45	0,29%	0,52%	0,69%	0,78%	1,60%	2,39%

Tabelle B.1.: Maximum Utility Gain der Midpoint-Regel unter CES-Präferenzen

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	0,76%	3,72%	6,36%	7,19%	16,65%	23,46%
5	0,76%	3,84%	6,76%	7,41%	17,11%	23,75%
7	0,66%	3,46%	6,31%	6,93%	16,23%	21,49%
9	0,61%	3,17%	5,70%	6,34%	14,94%	19,20%
13	0,49%	2,57%	4,67%	5,15%	12,10%	15,70%
17	0,40%	2,15%	3,93%	4,30%	9,93%	12,96%
21	0,34%	1,81%	3,29%	3,65%	8,35%	11,21%
29	0,26%	1,37%	2,51%	2,79%	6,37%	8,73%
37	0,21%	1,11%	2,01%	2,22%	5,15%	7,01%
45	0,17%	0,93%	1,70%	1,87%	4,34%	5,89%

Tabelle B.2.: Maximum Utility Gain der Mittelwert-Regel unter CES-Präferenzen

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	0,10%	0,28%	0,52%	0,59%	2,63%	4,50%
5	0,11%	0,21%	0,34%	0,38%	2,30%	4,21%
7	0,11%	0,16%	0,25%	0,30%	1,92%	3,64%
9	0,10%	0,15%	0,23%	0,25%	1,74%	3,28%
13	0,10%	0,11%	0,15%	0,19%	1,42%	2,72%
17	0,09%	0,09%	0,13%	0,15%	1,27%	2,25%
21	0,09%	0,08%	0,11%	0,14%	1,11%	1,97%
29	0,08%	0,07%	0,09%	0,10%	0,90%	1,57%
37	0,08%	0,06%	0,07%	0,09%	0,78%	1,31%
45	0,08%	0,05%	0,06%	0,08%	0,67%	1,11%

Tabelle B.3.: Maximum Utility Gain der normalisierten Median-Regel unter CES-Präferenzen

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	0,13%	0,50%	0,72%	0,73%	0,92%	1,27%
5	0,14%	0,54%	0,75%	0,74%	0,86%	1,04%
7	0,13%	0,55%	0,73%	0,78%	0,74%	0,98%
9	0,14%	0,52%	0,71%	0,72%	0,73%	1,00%
13	0,13%	0,50%	0,65%	0,67%	0,64%	0,87%
17	0,12%	0,43%	0,57%	0,61%	0,63%	0,83%
21	0,12%	0,43%	0,55%	0,55%	0,60%	0,83%
29	0,10%	0,40%	0,49%	0,48%	0,54%	0,72%
37	0,10%	0,34%	0,43%	0,45%	0,50%	0,72%
45	0,09%	0,32%	0,38%	0,39%	0,47%	0,64%

Tabelle B.4.: Maximum Utility Gain der „PDMedian“-Regel unter CES-Präferenzen

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	1,23%	2,99%	4,32%	4,55%	8,28%	11,74%
5	1,42%	3,29%	4,56%	4,85%	9,35%	10,26%
7	1,35%	3,10%	4,52%	4,45%	8,20%	10,25%
9	1,42%	3,06%	3,90%	4,25%	7,40%	9,50%
13	1,29%	2,56%	3,30%	3,47%	6,61%	8,20%
17	1,09%	2,25%	2,90%	2,94%	5,67%	7,65%
21	1,12%	2,01%	2,53%	2,65%	5,06%	6,94%
29	0,96%	1,61%	2,08%	2,08%	4,19%	6,06%
37	0,88%	1,35%	1,71%	1,87%	3,71%	4,95%
45	0,81%	1,21%	1,48%	1,57%	3,35%	4,49%

Tabelle B.5.: Maximum Utility Gain der „PDRMedian“-Regel unter CES-Präferenzen

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	0,28%	0,56%	1,05%	1,21%	4,55%	7,77%
5	0,32%	0,55%	0,99%	1,11%	4,45%	7,00%
7	0,29%	0,46%	0,87%	0,95%	3,93%	6,32%
9	0,33%	0,47%	0,72%	0,87%	3,66%	5,91%
13	0,31%	0,39%	0,63%	0,70%	3,20%	4,89%
17	0,26%	0,35%	0,58%	0,62%	2,79%	4,30%
21	0,28%	0,31%	0,51%	0,58%	2,42%	3,75%
29	0,25%	0,27%	0,41%	0,48%	2,00%	3,10%
37	0,24%	0,24%	0,37%	0,42%	1,71%	2,51%
45	0,22%	0,22%	0,32%	0,38%	1,50%	2,16%

Tabelle B.6.: Maximum Utility Gain der Condorcet Center-Regel unter CES-Präferenzen

B. Weitere Simulationsergebnisse: Maximum Utility Gain

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	0,66%	1,46%	1,93%	2,10%	3,84%	6,15%
5	0,77%	1,78%	2,39%	2,48%	4,61%	6,03%
7	0,73%	1,70%	2,44%	2,59%	4,60%	6,62%
9	0,89%	1,94%	2,37%	2,62%	4,62%	6,44%
13	0,83%	1,79%	2,27%	2,43%	4,70%	6,42%
17	0,79%	1,73%	2,26%	2,31%	4,43%	6,17%
21	0,89%	1,63%	2,01%	2,14%	4,20%	5,81%
29	0,85%	1,41%	1,84%	1,88%	3,81%	5,53%
37	0,80%	1,23%	1,59%	1,70%	3,45%	4,60%
45	0,76%	1,15%	1,37%	1,50%	3,17%	4,21%

Tabelle B.7.: Maximum Utility Gain der Inertial Median-Regel unter CES-Präferenzen

Weitere Simulationsergebnisse: Final Number of Agents Manipulating

Dieser Abschnitt führt weitere Simulationsergebnisse bezüglich der Final Number of Agents Manipulating auf. Angegeben sind die Mittelwerte der Kenngröße in Abhängigkeit der Anzahl der Agenten und des Parameters ρ der CES-Nutzenfunktion. Alle weiteren Einstellungen der Simulation sind so getroffen, wie in Abschnitt 4.2 beschrieben. Auf die Darstellung der Ergebnisse der Total Number of Agents Manipulating wurde - da sich das Verhalten dieser Kenngröße verglichen mit der Final Number of Agents Manipulating hinsichtlich CES-Präferenzen nicht unterscheidet - verzichtet.

C. Weitere Simulationsergebnisse: Final Number of Agents Manipulating

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	57,53%	62,50%	62,37%	62,73%	62,70%	60,40%
5	52,78%	59,32%	60,78%	59,60%	60,68%	53,98%
7	50,27%	56,97%	58,33%	55,64%	57,00%	48,13%
9	47,74%	53,70%	54,26%	55,79%	53,47%	44,30%
13	42,22%	49,70%	49,29%	50,24%	48,33%	41,37%
17	40,76%	45,98%	46,81%	47,55%	45,56%	38,98%
21	39,30%	44,43%	46,17%	46,26%	43,31%	37,15%
29	35,54%	42,33%	42,15%	42,33%	40,89%	33,03%
37	34,35%	39,98%	40,49%	40,69%	39,42%	30,98%
45	32,37%	38,58%	39,04%	39,05%	36,97%	28,58%

Tabelle C.1.: Final Number of Agents Manipulating der Midpoint-Regel unter CES-Präferenzen

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	99,77%	100,00%	99,90%	100,00%	99,97%	100,00%
5	99,88%	99,98%	99,98%	99,98%	100,00%	99,98%
7	99,84%	99,99%	100,00%	99,99%	100,00%	100,00%
9	99,84%	99,99%	100,00%	99,99%	100,00%	99,99%
13	99,88%	99,99%	99,98%	100,00%	100,00%	100,00%
17	99,88%	99,98%	99,99%	99,99%	100,00%	99,99%
21	99,86%	99,99%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
29	99,88%	99,98%	100,00%	99,98%	100,00%	100,00%
37	99,72%	99,99%	99,99%	99,98%	100,00%	100,00%
45	99,62%	99,97%	99,98%	100,00%	100,00%	100,00%

Tabelle C.2.: Final Number of Agents Manipulating der Mittelwert-Regel unter CES-Präferenzen

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	40,63%	48,17%	48,47%	48,43%	60,43%	66,37%
5	29,94%	34,72%	34,82%	34,96%	46,72%	50,28%
7	22,09%	27,96%	26,47%	27,01%	37,14%	39,66%
9	17,58%	21,51%	21,34%	21,56%	29,60%	31,57%
13	12,24%	15,57%	14,97%	15,42%	20,76%	21,32%
17	8,96%	11,53%	11,33%	11,55%	15,81%	15,86%
21	7,72%	9,44%	8,56%	8,94%	12,21%	12,46%
29	5,46%	7,21%	5,80%	6,17%	7,96%	8,19%
37	4,15%	5,56%	4,46%	4,44%	5,92%	5,84%
45	3,40%	4,64%	3,28%	3,53%	4,45%	4,26%

Tabelle C.3.: Final Number of Agents Manipulating der normalisierten Median-Regel unter CES-Präferenzen

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	38,17%	44,30%	47,87%	45,63%	45,90%	41,70%
5	29,58%	36,82%	37,92%	38,54%	38,74%	32,36%
7	25,51%	32,60%	33,39%	33,49%	31,33%	27,20%
9	21,20%	28,34%	29,91%	29,56%	28,06%	24,11%
13	18,25%	23,23%	24,75%	24,98%	23,04%	18,92%
17	15,60%	19,96%	20,91%	20,93%	20,60%	16,36%
21	13,75%	17,92%	19,09%	18,60%	18,33%	14,02%
29	11,29%	15,37%	15,61%	15,81%	14,76%	11,59%
37	9,48%	13,25%	13,82%	13,87%	13,78%	10,02%
45	8,33%	11,74%	12,20%	12,18%	11,81%	8,95%

Tabelle C.4.: Final Number of Agents Manipulating der „PDMedian“-Regel unter CES-Präferenzen

C. Weitere Simulationsergebnisse: Final Number of Agents Manipulating

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	66,57%	70,07%	70,27%	71,10%	70,60%	68,17%
5	61,52%	64,96%	64,94%	64,66%	65,70%	60,96%
7	55,26%	60,26%	59,81%	58,77%	60,49%	53,69%
9	52,77%	55,48%	56,10%	57,32%	55,52%	50,98%
13	46,62%	49,48%	49,36%	48,97%	49,48%	44,17%
17	42,34%	46,06%	45,79%	45,36%	44,66%	39,42%
21	39,25%	41,60%	42,66%	41,80%	42,15%	36,60%
29	34,90%	37,96%	38,59%	38,36%	38,28%	33,37%
37	31,70%	34,65%	35,08%	35,21%	35,45%	30,44%
45	29,81%	32,12%	33,17%	32,77%	33,12%	29,74%

Tabelle C.5.: Final Number of Agents Manipulating der „PDRMedian“-Regel unter CES-Präferenzen

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	51,30%	59,67%	60,60%	62,33%	66,50%	69,17%
5	41,28%	47,76%	49,38%	48,90%	50,82%	52,76%
7	33,71%	40,11%	41,04%	39,60%	40,20%	40,33%
9	29,33%	34,99%	33,78%	34,58%	31,50%	32,10%
13	23,18%	28,48%	26,96%	26,00%	22,46%	22,25%
17	18,79%	24,94%	23,48%	22,07%	16,64%	16,12%
21	16,84%	21,92%	20,68%	19,37%	13,18%	12,62%
29	13,11%	19,49%	17,10%	16,04%	8,42%	8,28%
37	10,98%	17,52%	14,79%	14,01%	6,24%	5,90%
45	9,56%	16,34%	13,95%	13,05%	4,72%	4,34%

Tabelle C.6.: Final Number of Agents Manipulating der Condorcet Center-Regel unter CES-Präferenzen

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	56,77%	62,83%	62,20%	62,40%	62,67%	60,47%
5	51,12%	58,74%	59,80%	58,90%	60,58%	54,72%
7	48,27%	55,36%	56,86%	55,96%	57,01%	48,54%
9	46,47%	53,36%	52,03%	53,48%	52,52%	45,57%
13	41,95%	46,95%	47,02%	47,68%	47,37%	40,49%
17	38,33%	43,85%	44,46%	43,97%	42,84%	37,31%
21	37,01%	39,89%	41,00%	39,41%	40,30%	34,80%
29	32,99%	35,88%	36,83%	36,70%	36,93%	32,55%
37	29,96%	33,58%	34,15%	34,00%	34,77%	30,04%
45	28,21%	31,83%	32,38%	31,89%	32,09%	28,77%

Tabelle C.7.: Final Number of Agents Manipulating der Inertial Median-Regel unter CES-Präferenzen

Weitere Simulationsergebnisse: Average Deviation

Dieser Abschnitt führt weitere Simulationsergebnisse bezüglich der Average Deviation auf. Angegeben sind die Mittelwerte der Kenngröße in Abhängigkeit der Anzahl der Agenten und des Parameters ρ der CES-Nutzenfunktion. Alle weiteren Einstellungen der Simulation sind so getroffen, wie in Abschnitt 4.2 beschrieben.

D. Weitere Simulationsergebnisse: Average Deviation

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	4,99%	5,11%	5,06%	5,11%	5,16%	4,80%
5	4,54%	5,02%	5,08%	4,86%	4,85%	3,73%
7	4,16%	4,57%	4,61%	4,51%	4,27%	3,05%
9	3,80%	4,23%	4,24%	4,40%	4,02%	2,70%
13	3,29%	3,84%	3,76%	3,82%	3,40%	2,34%
17	3,18%	3,50%	3,59%	3,62%	3,19%	2,18%
21	3,07%	3,41%	3,47%	3,48%	2,99%	2,08%
29	2,80%	3,19%	3,16%	3,23%	2,78%	1,80%
37	2,61%	3,02%	3,06%	3,08%	2,69%	1,71%
45	2,45%	2,93%	2,95%	2,96%	2,51%	1,57%

Tabelle D.1.: Average Deviation der Midpoint-Regel unter CES-Präferenzen

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	35,32%	36,60%	37,03%	36,66%	36,81%	36,97%
5	38,18%	39,06%	39,30%	39,28%	39,91%	39,77%
7	39,43%	40,02%	40,34%	40,26%	40,36%	40,62%
9	40,24%	40,79%	41,25%	41,05%	41,33%	41,37%
13	41,18%	41,55%	41,92%	41,80%	41,80%	42,02%
17	41,57%	42,14%	42,19%	42,32%	42,26%	42,52%
21	41,85%	42,35%	42,41%	42,53%	42,77%	42,83%
29	42,27%	42,69%	42,67%	42,75%	42,95%	42,96%
37	42,51%	42,94%	42,91%	43,03%	43,15%	43,07%
45	42,60%	42,92%	43,08%	43,09%	43,25%	43,12%

Tabelle D.2.: Average Deviation der Mittelwert-Regel unter CES-Präferenzen

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	3,19%	3,47%	3,65%	3,85%	6,03%	7,38%
5	2,03%	1,84%	1,89%	1,93%	3,53%	4,24%
7	1,29%	1,19%	1,17%	1,23%	2,41%	2,92%
9	1,00%	0,85%	0,84%	0,84%	1,72%	2,14%
13	0,70%	0,50%	0,46%	0,51%	1,11%	1,36%
17	0,48%	0,35%	0,33%	0,33%	0,79%	0,96%
21	0,45%	0,26%	0,22%	0,24%	0,59%	0,73%
29	0,32%	0,19%	0,13%	0,14%	0,37%	0,47%
37	0,25%	0,14%	0,09%	0,09%	0,26%	0,33%
45	0,21%	0,11%	0,06%	0,07%	0,20%	0,24%

Tabelle D.3.: Average Deviation der normalisierten Median-Regel unter CES-Präferenzen

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	2,07%	2,12%	2,36%	2,20%	2,12%	1,74%
5	1,58%	1,69%	1,72%	1,74%	1,69%	1,17%
7	1,24%	1,45%	1,40%	1,47%	1,28%	0,93%
9	1,02%	1,21%	1,28%	1,29%	1,13%	0,79%
13	0,82%	0,94%	1,02%	1,05%	0,84%	0,56%
17	0,67%	0,79%	0,83%	0,84%	0,74%	0,46%
21	0,58%	0,70%	0,75%	0,72%	0,64%	0,38%
29	0,45%	0,59%	0,60%	0,59%	0,48%	0,28%
37	0,37%	0,49%	0,50%	0,51%	0,45%	0,24%
45	0,31%	0,43%	0,44%	0,44%	0,37%	0,20%

Tabelle D.4.: Average Deviation der „PDMedian“-Regel unter CES-Präferenzen

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	7,84%	7,89%	7,89%	7,96%	7,92%	7,05%
5	6,73%	6,98%	7,04%	7,06%	7,04%	5,67%
7	6,02%	6,46%	6,29%	6,27%	6,19%	4,83%
9	5,64%	5,94%	5,87%	6,04%	5,58%	4,46%
13	4,84%	5,12%	5,03%	4,96%	4,92%	3,63%
17	4,25%	4,60%	4,66%	4,50%	4,27%	3,09%
21	3,91%	4,13%	4,20%	4,11%	3,90%	2,83%
29	3,42%	3,63%	3,70%	3,77%	3,46%	2,42%
37	2,99%	3,32%	3,31%	3,32%	3,13%	2,18%
45	2,80%	3,00%	3,15%	3,07%	2,91%	2,10%

Tabelle D.5.: Average Deviation der „PDRMedian“-Regel unter CES-Präferenzen

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	4,16%	4,64%	4,79%	4,97%	6,48%	7,59%
5	3,06%	3,09%	3,18%	3,10%	3,93%	4,36%
7	2,24%	2,33%	2,27%	2,23%	2,79%	2,95%
9	1,93%	1,89%	1,81%	1,79%	2,06%	2,27%
13	1,45%	1,43%	1,26%	1,23%	1,38%	1,44%
17	1,11%	1,22%	1,08%	0,98%	0,96%	1,00%
21	0,99%	1,02%	0,90%	0,85%	0,73%	0,78%
29	0,76%	0,86%	0,70%	0,66%	0,47%	0,52%
37	0,63%	0,75%	0,59%	0,56%	0,35%	0,36%
45	0,54%	0,71%	0,56%	0,52%	0,25%	0,26%

Tabelle D.6.: Average Deviation der Condorcet Center-Regel unter CES-Präferenzen

D. Weitere Simulationsergebnisse: Average Deviation

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	4,99%	5,09%	5,05%	5,07%	5,10%	4,74%
5	4,61%	5,19%	5,28%	5,13%	5,27%	4,21%
7	4,39%	4,84%	4,93%	4,90%	4,76%	3,68%
9	4,37%	4,74%	4,62%	4,77%	4,54%	3,46%
13	3,86%	4,26%	4,17%	4,25%	4,06%	3,00%
17	3,47%	3,97%	4,09%	4,01%	3,70%	2,73%
21	3,42%	3,68%	3,74%	3,56%	3,46%	2,50%
29	3,08%	3,28%	3,40%	3,43%	3,19%	2,29%
37	2,76%	3,10%	3,12%	3,11%	2,97%	2,09%
45	2,57%	2,93%	3,00%	2,92%	2,74%	1,98%

Tabelle D.7.: Average Deviation der Inertial Median-Regel unter CES-Präferenzen

Weitere Simulationsergebnisse: Average Manipulation

Dieser Abschnitt führt weitere Simulationsergebnisse bezüglich der Average Manipulation auf. Angegeben sind die Mittelwerte der Kenngröße in Abhängigkeit der Anzahl der Agenten und des Parameters ρ der CES-Nutzenfunktion. Alle weiteren Einstellungen der Simulation sind so getroffen, wie in Abschnitt 4.2 beschrieben.

E. Weitere Simulationsergebnisse: Average Manipulation

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	8,63%	7,89%	7,78%	7,84%	8,00%	7,63%
5	8,14%	8,09%	8,04%	7,70%	7,65%	6,49%
7	7,88%	7,72%	7,69%	7,76%	7,20%	5,84%
9	7,62%	7,53%	7,51%	7,63%	7,08%	5,66%
13	7,60%	7,46%	7,49%	7,42%	6,81%	5,41%
17	7,49%	7,43%	7,41%	7,46%	6,77%	5,36%
21	7,57%	7,54%	7,38%	7,32%	6,62%	5,33%
29	7,54%	7,32%	7,29%	7,38%	6,57%	5,14%
37	7,33%	7,34%	7,38%	7,34%	6,57%	5,19%
45	7,24%	7,37%	7,33%	7,38%	6,49%	5,19%

Tabelle E.1.: Average Manipulation der Midpoint-Regel unter CES-Präferenzen

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	35,40%	36,60%	37,06%	36,66%	36,82%	36,97%
5	38,22%	39,07%	39,31%	39,29%	39,91%	39,77%
7	39,49%	40,03%	40,34%	40,27%	40,36%	40,62%
9	40,31%	40,79%	41,25%	41,06%	41,33%	41,37%
13	41,22%	41,55%	41,93%	41,80%	41,80%	42,02%
17	41,62%	42,15%	42,19%	42,32%	42,26%	42,53%
21	41,91%	42,35%	42,42%	42,53%	42,77%	42,83%
29	42,32%	42,70%	42,67%	42,75%	42,95%	42,96%
37	42,64%	42,94%	42,91%	43,03%	43,15%	43,07%
45	42,76%	42,93%	43,09%	43,10%	43,25%	43,12%

Tabelle E.2.: Average Manipulation der Mittelwert-Regel unter CES-Präferenzen

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	7,86%	7,21%	7,62%	8,05%	10,09%	11,25%
5	6,90%	5,43%	5,50%	5,63%	7,46%	8,43%
7	6,01%	4,20%	4,48%	4,59%	6,43%	7,27%
9	5,80%	4,03%	3,96%	3,91%	5,72%	6,73%
13	5,86%	3,29%	3,09%	3,28%	5,20%	6,26%
17	5,50%	3,06%	2,86%	2,84%	5,00%	6,03%
21	6,07%	2,79%	2,57%	2,70%	4,84%	5,81%
29	5,75%	2,72%	2,30%	2,31%	4,58%	5,73%
37	6,30%	2,51%	2,06%	2,11%	4,34%	5,69%
45	6,34%	2,28%	1,92%	2,00%	4,51%	5,73%

Tabelle E.3.: Average Manipulation der normalisierten Median-Regel unter CES-Präferenzen

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	5,28%	4,62%	4,73%	4,72%	4,46%	3,87%
5	5,24%	4,48%	4,42%	4,40%	4,18%	3,34%
7	4,65%	4,32%	4,09%	4,17%	3,91%	3,14%
9	4,74%	4,17%	4,16%	4,22%	3,80%	3,02%
13	4,33%	3,96%	3,98%	4,18%	3,45%	2,79%
17	4,18%	3,79%	3,95%	3,85%	3,47%	2,60%
21	4,20%	3,94%	3,90%	3,82%	3,40%	2,52%
29	3,97%	3,82%	3,86%	3,74%	3,22%	2,32%
37	4,05%	3,79%	3,65%	3,66%	3,15%	2,32%
45	3,85%	3,75%	3,64%	3,62%	3,13%	2,16%

Tabelle E.4.: Average Manipulation der „PDMedian“-Regel unter CES-Präferenzen

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	11,76%	11,33%	11,23%	11,08%	11,14%	10,19%
5	10,69%	10,54%	10,69%	10,54%	10,48%	9,01%
7	10,58%	10,62%	10,41%	10,50%	10,02%	8,61%
9	10,45%	10,57%	10,29%	10,34%	9,83%	8,49%
13	10,20%	10,21%	10,03%	9,99%	9,77%	7,99%
17	9,83%	9,91%	9,99%	9,83%	9,43%	7,58%
21	9,86%	9,84%	9,78%	9,73%	9,11%	7,52%
29	9,65%	9,48%	9,45%	9,68%	8,85%	7,06%
37	9,35%	9,50%	9,27%	9,32%	8,68%	6,96%
45	9,31%	9,24%	9,36%	9,24%	8,63%	6,89%

Tabelle E.5.: Average Manipulation der „PDRMedian“-Regel unter CES-Präferenzen

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	8,16%	7,84%	7,98%	8,01%	9,91%	11,11%
5	7,35%	6,39%	6,48%	6,36%	7,72%	8,26%
7	6,47%	5,68%	5,51%	5,65%	6,97%	7,24%
9	6,40%	5,30%	5,24%	5,12%	6,44%	6,95%
13	6,24%	4,91%	4,59%	4,62%	5,99%	6,28%
17	5,96%	4,80%	4,46%	4,35%	5,61%	6,08%
21	5,91%	4,50%	4,27%	4,31%	5,52%	6,00%
29	5,90%	4,32%	3,99%	4,05%	5,43%	6,13%
37	5,88%	4,17%	3,94%	3,96%	5,46%	5,98%
45	5,93%	4,20%	3,89%	3,79%	5,26%	5,89%

Tabelle E.6.: Average Manipulation der Condorcet Center-Regel unter CES-Präferenzen

E. Weitere Simulationsergebnisse: Average Manipulation

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	8,68%	7,89%	7,91%	7,84%	7,97%	7,47%
5	8,77%	8,45%	8,50%	8,27%	8,34%	7,33%
7	8,71%	8,48%	8,51%	8,56%	8,05%	7,14%
9	9,05%	8,54%	8,53%	8,84%	8,22%	7,18%
13	8,87%	8,85%	8,68%	8,82%	8,33%	7,04%
17	8,71%	8,86%	8,98%	8,88%	8,40%	6,97%
21	9,00%	8,96%	8,93%	8,79%	8,28%	6,91%
29	9,15%	9,03%	9,07%	9,20%	8,43%	6,77%
37	9,04%	9,03%	8,98%	8,96%	8,36%	6,74%
45	8,99%	9,05%	9,17%	8,98%	8,38%	6,69%

Tabelle E.7.: Average Manipulation der Inertial Median-Regel unter CES-Präferenzen

Weitere Simulationsergebnisse: Distance

Dieser Abschnitt führt weitere Simulationsergebnisse bezüglich der Distance auf. Angegeben sind die Mittelwerte der Kenngröße in Abhängigkeit der Anzahl der Agenten und des Parameters ρ der CES-Nutzenfunktion. Alle weiteren Einstellungen der Simulation sind so getroffen, wie in Abschnitt 4.2 beschrieben.

F. Weitere Simulationsergebnisse: Distance

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	5,35%	5,38%	5,05%	5,29%	5,40%	5,56%
5	4,62%	4,63%	4,46%	4,51%	4,60%	4,14%
7	3,73%	3,71%	3,72%	3,77%	3,45%	3,28%
9	3,13%	3,15%	3,05%	3,16%	3,03%	2,81%
13	2,25%	2,33%	2,18%	2,32%	2,21%	2,23%
17	1,89%	1,93%	1,80%	1,79%	1,89%	1,88%
21	1,60%	1,54%	1,61%	1,54%	1,60%	1,56%
29	1,19%	1,24%	1,19%	1,18%	1,19%	1,28%
37	1,05%	1,00%	1,02%	1,03%	1,05%	1,04%
45	0,89%	0,94%	0,90%	0,88%	0,88%	0,88%

Tabelle F.1.: Distance der Midpoint-Regel unter CES-Präferenzen

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	8,39%	8,55%	8,56%	8,76%	8,83%	8,73%
5	7,38%	7,49%	7,61%	7,38%	7,32%	7,20%
7	6,80%	6,92%	6,86%	6,77%	6,79%	6,86%
9	6,77%	6,67%	6,43%	6,78%	6,77%	6,62%
13	6,42%	6,35%	6,24%	6,31%	6,36%	6,15%
17	6,08%	6,06%	6,19%	6,15%	6,05%	6,10%
21	6,03%	6,16%	6,04%	6,00%	6,04%	6,01%
29	5,99%	5,81%	5,80%	5,86%	5,93%	5,97%
37	5,84%	5,69%	5,80%	5,62%	5,76%	5,75%
45	5,76%	5,65%	5,67%	5,73%	5,75%	5,66%

Tabelle F.2.: Distance der Mittelwert-Regel unter CES-Präferenzen

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	2,12%	2,03%	2,01%	2,02%	4,11%	4,52%
5	2,28%	1,95%	1,87%	1,87%	3,54%	4,30%
7	2,05%	1,79%	1,65%	1,83%	3,19%	3,76%
9	1,94%	1,71%	1,56%	1,67%	2,95%	3,43%
13	1,74%	1,46%	1,31%	1,43%	2,45%	2,77%
17	1,43%	1,31%	1,19%	1,29%	2,19%	2,39%
21	1,36%	1,20%	1,07%	1,16%	1,90%	2,06%
29	1,16%	1,06%	0,93%	0,99%	1,52%	1,58%
37	0,95%	0,92%	0,87%	0,85%	1,28%	1,31%
45	0,86%	0,80%	0,74%	0,78%	1,11%	1,12%

Tabelle F.3.: Distance der normalisierten Median-Regel unter CES-Präferenzen

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	4,09%	4,09%	4,31%	4,25%	4,14%	3,05%
5	4,17%	4,25%	4,27%	4,18%	4,29%	3,18%
7	3,94%	4,14%	3,98%	4,00%	4,04%	3,12%
9	3,80%	3,78%	3,96%	3,81%	3,85%	2,92%
13	3,21%	3,23%	3,14%	3,43%	3,20%	2,65%
17	2,75%	2,75%	2,85%	2,90%	2,81%	2,22%
21	2,57%	2,54%	2,48%	2,58%	2,53%	2,05%
29	2,04%	2,01%	2,10%	1,96%	1,97%	1,54%
37	1,75%	1,61%	1,66%	1,68%	1,61%	1,41%
45	1,47%	1,47%	1,35%	1,40%	1,30%	1,17%

Tabelle F.4.: Distance der „PDMedian“-Regel unter CES-Präferenzen

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	9,15%	9,26%	9,37%	9,42%	9,58%	8,59%
5	7,80%	7,58%	7,67%	7,58%	8,14%	7,08%
7	6,73%	6,69%	6,63%	6,64%	6,30%	6,18%
9	5,71%	6,00%	5,79%	5,89%	5,96%	5,55%
13	4,57%	4,75%	4,53%	4,76%	4,61%	4,26%
17	3,70%	3,67%	3,79%	3,75%	3,78%	3,51%
21	3,36%	3,30%	3,21%	3,31%	3,22%	2,98%
29	2,49%	2,53%	2,63%	2,48%	2,39%	2,13%
37	2,06%	2,00%	2,07%	2,06%	2,03%	1,80%
45	1,82%	1,84%	1,69%	1,70%	1,74%	1,60%

Tabelle F.5.: Distance der „PDRMedian“-Regel unter CES-Präferenzen

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	3,44%	3,54%	3,41%	3,49%	3,97%	4,30%
5	3,62%	3,56%	3,40%	3,39%	3,74%	4,04%
7	3,39%	3,22%	3,08%	3,02%	3,34%	3,55%
9	3,04%	2,93%	2,74%	2,82%	3,00%	3,24%
13	2,60%	2,39%	2,33%	2,28%	2,48%	2,64%
17	2,11%	2,13%	2,03%	1,93%	2,22%	2,25%
21	1,98%	1,85%	1,72%	1,80%	1,86%	1,89%
29	1,55%	1,46%	1,37%	1,34%	1,44%	1,46%
37	1,23%	1,23%	1,19%	1,15%	1,20%	1,17%
45	1,09%	1,06%	0,96%	0,98%	1,02%	0,99%

Tabelle F.6.: Distance der Condorcet Center-Regel unter CES-Präferenzen

F. Weitere Simulationsergebnisse: Distance

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	5,30%	5,36%	5,10%	5,31%	5,29%	5,48%
5	5,29%	5,24%	5,14%	5,25%	5,45%	5,23%
7	5,03%	4,98%	4,95%	4,98%	4,87%	4,76%
9	4,61%	4,89%	4,49%	4,75%	4,82%	4,36%
13	3,82%	3,94%	3,79%	4,06%	3,90%	3,72%
17	3,23%	3,32%	3,34%	3,43%	3,39%	3,11%
21	3,12%	3,04%	2,82%	2,96%	2,95%	2,67%
29	2,34%	2,35%	2,42%	2,31%	2,28%	2,09%
37	1,98%	1,92%	1,99%	1,97%	1,98%	1,75%
45	1,74%	1,79%	1,62%	1,64%	1,65%	1,53%

Tabelle F.7.: Distance der Inertial Median-Regel unter CES-Präferenzen

Weitere Simulationsergebnisse: Difference in Sum of Utilities

Dieser Abschnitt führt weitere Simulationsergebnisse bezüglich der Difference in Sum of Utilities auf. Angegeben sind die Mittelwerte der Kenngröße in Abhängigkeit der Anzahl der Agenten und des Parameters ρ der CES-Nutzenfunktion. Alle weiteren Einstellungen der Simulation sind so getroffen, wie in Abschnitt 4.2 beschrieben.

G. Weitere Simulationsergebnisse: Difference in Sum of Utilities

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	0,14%	0,01%	-0,27%	-0,56%	-1,66%	-1,34%
5	0,09%	0,04%	-0,19%	-0,28%	-1,07%	-0,73%
7	0,04%	0,01%	-0,11%	-0,14%	-0,57%	-0,30%
9	0,04%	0,01%	-0,07%	-0,11%	-0,37%	-0,05%
13	0,02%	0,02%	-0,02%	-0,05%	-0,12%	-0,01%
17	0,01%	0,00%	-0,01%	-0,03%	-0,02%	0,14%
21	0,01%	0,00%	-0,02%	-0,02%	-0,03%	0,10%
29	0,01%	0,00%	0,00%	0,00%	-0,04%	0,09%
37	0,01%	0,00%	-0,01%	-0,02%	-0,02%	0,13%
45	0,01%	0,00%	-0,01%	-0,02%	-0,03%	0,10%

Tabelle G.1.: Difference in Sum of Utilities der Midpoint-Regel unter CES-Präferenzen

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	-0,61%	-1,71%	-2,02%	-2,14%	-0,19%	2,49%
5	-0,50%	-1,35%	-1,66%	-1,56%	-0,11%	1,77%
7	-0,42%	-1,17%	-1,39%	-1,32%	-0,09%	1,52%
9	-0,43%	-1,13%	-1,23%	-1,33%	-0,10%	1,39%
13	-0,41%	-1,03%	-1,17%	-1,18%	-0,17%	1,00%
17	-0,36%	-0,98%	-1,16%	-1,13%	-0,14%	0,93%
21	-0,38%	-0,97%	-1,11%	-1,09%	-0,18%	0,81%
29	-0,37%	-0,91%	-1,03%	-1,06%	-0,18%	0,72%
37	-0,37%	-0,88%	-1,04%	-0,97%	-0,18%	0,69%
45	-0,36%	-0,87%	-1,01%	-1,02%	-0,20%	0,60%

Tabelle G.2.: Difference in Sum of Utilities der Mittelwert-Regel unter CES-Präferenzen

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	0,03%	0,05%	0,04%	0,03%	-0,70%	-0,97%
5	0,01%	0,02%	0,00%	0,00%	-0,62%	-1,50%
7	0,01%	0,03%	0,00%	-0,03%	-0,63%	-1,54%
9	0,00%	0,02%	-0,02%	-0,03%	-0,79%	-1,58%
13	0,00%	0,01%	-0,02%	-0,03%	-0,72%	-1,24%
17	0,00%	0,00%	-0,04%	-0,04%	-0,60%	-1,17%
21	0,00%	0,00%	-0,03%	-0,04%	-0,50%	-0,98%
29	0,00%	0,00%	-0,04%	-0,05%	-0,41%	-0,76%
37	0,00%	0,00%	-0,04%	-0,04%	-0,35%	-0,58%
45	0,00%	0,00%	-0,03%	-0,04%	-0,32%	-0,51%

Tabelle G.3.: Difference in Sum of Utilities der normalisierten Median-Regel unter CES-Präferenzen

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	-0,01%	0,06%	0,00%	0,05%	0,18%	0,19%
5	-0,01%	0,09%	0,20%	0,24%	0,75%	0,54%
7	0,01%	0,10%	0,24%	0,28%	0,72%	0,60%
9	0,00%	0,12%	0,35%	0,36%	1,02%	0,55%
13	0,00%	0,13%	0,27%	0,39%	0,89%	0,70%
17	0,00%	0,12%	0,28%	0,34%	0,84%	0,45%
21	0,00%	0,12%	0,27%	0,35%	0,75%	0,21%
29	0,00%	0,10%	0,23%	0,26%	0,72%	0,20%
37	0,00%	0,09%	0,21%	0,24%	0,57%	0,21%
45	0,00%	0,08%	0,17%	0,20%	0,45%	0,13%

Tabelle G.4.: Difference in Sum of Utilities der „PDMedian“-Regel unter CES-Präferenzen

G. Weitere Simulationsergebnisse: Difference in Sum of Utilities

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	0,17%	0,14%	-0,02%	-0,18%	-0,33%	1,03%
5	0,23%	0,54%	0,73%	0,89%	1,70%	1,69%
7	0,24%	0,60%	0,86%	0,64%	1,22%	1,65%
9	0,21%	0,57%	0,73%	0,84%	0,97%	1,46%
13	0,19%	0,49%	0,54%	0,60%	0,45%	0,60%
17	0,15%	0,37%	0,46%	0,44%	0,27%	0,67%
21	0,15%	0,37%	0,39%	0,39%	0,14%	0,39%
29	0,12%	0,27%	0,33%	0,28%	0,02%	0,16%
37	0,10%	0,21%	0,25%	0,24%	0,04%	0,11%
45	0,09%	0,21%	0,19%	0,20%	-0,02%	0,10%

Tabelle G.5.: Difference in Sum of Utilities der „PDRMedian“-Regel unter CES-Präferenzen

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	0,03%	-0,01%	0,09%	0,09%	0,83%	1,73%
5	0,03%	0,02%	0,09%	0,14%	0,81%	0,96%
7	0,03%	0,03%	0,10%	0,10%	0,58%	0,64%
9	0,03%	0,02%	0,08%	0,09%	0,47%	0,44%
13	0,03%	0,03%	0,05%	0,08%	0,35%	0,41%
17	0,03%	0,02%	0,04%	0,04%	0,30%	0,30%
21	0,02%	0,02%	0,03%	0,04%	0,26%	0,26%
29	0,02%	0,01%	0,02%	0,02%	0,19%	0,25%
37	0,02%	0,01%	0,01%	0,02%	0,15%	0,18%
45	0,02%	0,01%	0,01%	0,01%	0,11%	0,14%

Tabelle G.6.: Difference in Sum of Utilities der Condorcet Center-Regel unter CES-Präferenzen

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	0,14%	0,01%	-0,28%	-0,56%	-1,62%	-1,25%
5	0,17%	0,20%	0,02%	-0,04%	-0,74%	-0,59%
7	0,16%	0,30%	0,20%	0,17%	-0,36%	-0,15%
9	0,17%	0,36%	0,32%	0,29%	-0,26%	-0,19%
13	0,16%	0,36%	0,29%	0,36%	-0,11%	0,12%
17	0,12%	0,31%	0,37%	0,34%	0,05%	0,17%
21	0,14%	0,32%	0,29%	0,31%	-0,01%	0,15%
29	0,11%	0,25%	0,30%	0,25%	-0,02%	0,08%
37	0,10%	0,20%	0,23%	0,21%	0,01%	0,04%
45	0,09%	0,20%	0,18%	0,19%	-0,02%	0,05%

Tabelle G.7.: Difference in Sum of Utilities der Inertial Median-Regel unter CES-Präferenzen

Weitere Simulationsergebnisse: UTILIE

Dieser Abschnitt führt weitere Simulationsergebnisse bezüglich der Nutzensumme in der UTILIE-Skala auf. Angegeben sind die Mittelwerte der Kenngröße in Abhängigkeit der Anzahl der Agenten und des Parameters ρ der CES-Nutzenfunktion. Alle weiteren Einstellungen der Simulation sind so getroffen, wie in Abschnitt 4.2 beschrieben. Auf die Darstellung der Ergebnisse in der UTILRD-Skala wurde verzichtet.

H. Weitere Simulationsergebnisse: UTILIE

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	99,63%	99,09%	98,51%	98,26%	96,49%	95,78%
5	99,68%	99,42%	99,03%	98,95%	97,46%	97,02%
7	99,75%	99,56%	99,34%	99,27%	98,12%	97,54%
9	99,77%	99,67%	99,50%	99,42%	98,29%	97,88%
13	99,80%	99,76%	99,65%	99,58%	98,59%	97,91%
17	99,84%	99,82%	99,72%	99,67%	98,69%	97,92%
21	99,86%	99,84%	99,75%	99,71%	98,69%	97,90%
29	99,89%	99,89%	99,80%	99,76%	98,72%	97,82%
37	99,90%	99,92%	99,82%	99,78%	98,73%	97,90%
45	99,91%	99,93%	99,84%	99,80%	98,71%	97,79%

Tabelle H.1.: Nutzensumme (in UTILIE-Skala) der Midpoint-Regel unter CES-Präferenzen

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	99,13%	98,18%	97,95%	97,82%	98,29%	98,74%
5	99,24%	98,55%	98,30%	98,40%	98,79%	99,07%
7	99,37%	98,74%	98,58%	98,64%	99,01%	99,31%
9	99,35%	98,77%	98,74%	98,63%	99,10%	99,39%
13	99,38%	98,88%	98,81%	98,80%	99,20%	99,51%
17	99,46%	98,93%	98,81%	98,86%	99,32%	99,58%
21	99,44%	98,94%	98,87%	98,89%	99,32%	99,59%
29	99,47%	99,00%	98,95%	98,93%	99,38%	99,62%
37	99,46%	99,03%	98,95%	99,02%	99,42%	99,67%
45	99,47%	99,04%	98,97%	98,98%	99,42%	99,67%

Tabelle H.2.: Nutzensumme (in UTILIE-Skala) der Mittelwert-Regel unter CES-Präferenzen

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	99,70%	99,41%	98,99%	98,76%	96,00%	93,86%
5	99,75%	99,54%	99,07%	98,95%	96,31%	93,70%
7	99,81%	99,65%	99,25%	99,13%	96,71%	94,08%
9	99,82%	99,70%	99,35%	99,20%	96,41%	94,16%
13	99,85%	99,77%	99,49%	99,34%	96,75%	94,93%
17	99,88%	99,80%	99,51%	99,43%	97,10%	95,06%
21	99,90%	99,83%	99,56%	99,45%	97,29%	95,43%
29	99,92%	99,87%	99,63%	99,52%	97,44%	95,70%
37	99,92%	99,90%	99,64%	99,57%	97,65%	96,05%
45	99,93%	99,91%	99,70%	99,60%	97,72%	96,21%

Tabelle H.3.: Nutzensumme (in UTILIE-Skala) der normalisierten Median-Regel unter CES-Präferenzen

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	99,63%	99,10%	98,41%	98,21%	95,63%	93,83%
5	99,69%	99,34%	98,74%	98,65%	96,43%	94,37%
7	99,79%	99,50%	99,04%	98,93%	96,91%	94,87%
9	99,80%	99,60%	99,22%	99,07%	96,93%	94,83%
13	99,84%	99,70%	99,40%	99,27%	97,11%	95,42%
17	99,87%	99,77%	99,44%	99,37%	97,36%	95,20%
21	99,89%	99,78%	99,46%	99,38%	97,36%	95,17%
29	99,92%	99,83%	99,53%	99,42%	97,40%	95,15%
37	99,92%	99,85%	99,52%	99,45%	97,43%	95,27%
45	99,93%	99,84%	99,56%	99,44%	97,39%	95,31%

Tabelle H.4.: Nutzensumme (in UTILIE-Skala) der „PDMedian“-Regel unter CES-Präferenzen

H. Weitere Simulationsergebnisse: UTILIE

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	99,56%	98,70%	97,73%	97,39%	94,92%	94,14%
5	99,70%	99,37%	98,84%	98,79%	96,79%	96,18%
7	99,78%	99,56%	99,27%	99,13%	97,67%	96,93%
9	99,78%	99,65%	99,45%	99,36%	98,02%	97,53%
13	99,80%	99,73%	99,62%	99,55%	98,42%	97,94%
17	99,83%	99,78%	99,68%	99,62%	98,70%	98,28%
21	99,82%	99,76%	99,69%	99,66%	98,86%	98,39%
29	99,82%	99,78%	99,75%	99,73%	99,09%	98,67%
37	99,81%	99,79%	99,75%	99,74%	99,23%	98,88%
45	99,81%	99,78%	99,76%	99,76%	99,27%	98,96%

Tabelle H.5.: Nutzensumme (in UTILIE-Skala) der „PDRMedian“-Regel unter CES-Präferenzen

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	99,69%	99,43%	99,25%	99,13%	98,45%	97,46%
5	99,75%	99,61%	99,41%	99,36%	98,46%	97,19%
7	99,81%	99,69%	99,56%	99,49%	98,60%	97,19%
9	99,82%	99,75%	99,65%	99,58%	98,49%	97,23%
13	99,85%	99,82%	99,73%	99,67%	98,63%	97,60%
17	99,88%	99,86%	99,77%	99,73%	98,76%	97,56%
21	99,89%	99,88%	99,80%	99,76%	98,82%	97,69%
29	99,91%	99,92%	99,84%	99,80%	98,83%	97,81%
37	99,91%	99,94%	99,85%	99,83%	98,89%	97,91%
45	99,92%	99,95%	99,87%	99,85%	98,87%	97,93%

Tabelle H.6.: Nutzensumme (in UTILIE-Skala) der Condorcet Center-Regel unter CES-Präferenzen

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	99,62%	99,09%	98,49%	98,26%	96,53%	95,87%
5	99,69%	99,42%	98,99%	98,93%	97,46%	96,86%
7	99,76%	99,58%	99,34%	99,25%	98,11%	97,48%
9	99,77%	99,66%	99,51%	99,42%	98,31%	97,89%
13	99,78%	99,74%	99,64%	99,61%	98,71%	98,32%
17	99,81%	99,78%	99,72%	99,67%	98,95%	98,50%
21	99,81%	99,77%	99,70%	99,70%	99,06%	98,64%
29	99,81%	99,78%	99,77%	99,76%	99,19%	98,80%
37	99,80%	99,79%	99,76%	99,75%	99,28%	98,95%
45	99,80%	99,78%	99,76%	99,76%	99,33%	99,01%

Tabelle H.7.: Nutzensumme (in UTILIE-Skala) der Inertial Median-Regel unter CES-Präferenzen

Weitere Simulationsergebnisse: Difference in Remoteness

Dieser Abschnitt führt weitere Simulationsergebnisse bezüglich der Difference in Remoteness auf. Angegeben sind die Mittelwerte der Kenngröße in Abhängigkeit der Anzahl der Agenten und des Parameters ρ der CES-Nutzenfunktion. Alle weiteren Einstellungen der Simulation sind so getroffen, wie in Abschnitt 4.2 beschrieben.

I. Weitere Simulationsergebnisse: Difference in Remoteness

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	0,59%	0,56%	0,56%	0,67%	0,68%	0,97%
5	0,31%	0,32%	0,30%	0,35%	0,35%	0,41%
7	0,21%	0,21%	0,22%	0,23%	0,22%	0,27%
9	0,16%	0,16%	0,17%	0,18%	0,16%	0,19%
13	0,09%	0,10%	0,10%	0,10%	0,10%	0,11%
17	0,07%	0,07%	0,06%	0,06%	0,07%	0,08%
21	0,05%	0,05%	0,05%	0,04%	0,05%	0,05%
29	0,03%	0,03%	0,03%	0,03%	0,03%	0,03%
37	0,02%	0,02%	0,02%	0,02%	0,02%	0,02%
45	0,01%	0,02%	0,01%	0,01%	0,02%	0,02%

Tabelle I.1.: Difference in Remoteness der Midpoint-Regel unter CES-Präferenzen

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	1,17%	1,42%	1,30%	1,41%	1,33%	1,50%
5	1,09%	1,17%	1,21%	1,12%	1,14%	1,21%
7	1,09%	1,09%	1,12%	1,02%	1,05%	1,08%
9	1,10%	1,15%	1,02%	1,14%	1,12%	1,07%
13	1,09%	1,05%	1,05%	1,08%	1,13%	1,07%
17	1,04%	1,08%	1,07%	1,06%	1,03%	1,05%
21	1,07%	1,07%	1,05%	1,06%	1,07%	1,08%
29	1,06%	1,04%	1,04%	1,07%	1,05%	1,08%
37	1,08%	1,04%	1,05%	0,99%	1,02%	1,03%
45	1,06%	1,04%	1,05%	1,05%	1,05%	1,04%

Tabelle I.2.: Difference in Remoteness der Mittelwert-Regel unter CES-Präferenzen

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	0,15%	0,08%	0,03%	0,03%	0,59%	0,82%
5	0,12%	0,08%	0,05%	0,05%	0,40%	0,56%
7	0,07%	0,05%	0,05%	0,05%	0,28%	0,42%
9	0,06%	0,05%	0,04%	0,05%	0,25%	0,34%
13	0,03%	0,03%	0,04%	0,04%	0,18%	0,21%
17	0,01%	0,02%	0,03%	0,04%	0,13%	0,16%
21	0,01%	0,02%	0,03%	0,03%	0,09%	0,11%
29	-0,01%	0,01%	0,02%	0,03%	0,07%	0,07%
37	-0,01%	0,01%	0,02%	0,02%	0,05%	0,05%
45	-0,01%	0,01%	0,01%	0,02%	0,04%	0,04%

Tabelle I.3.: Difference in Remoteness der normalisierten Median-Regel unter CES-Präferenzen

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	0,35%	0,33%	0,40%	0,37%	0,37%	0,35%
5	0,12%	0,10%	0,10%	0,12%	0,10%	0,14%
7	-0,02%	0,04%	0,01%	0,03%	0,03%	0,07%
9	-0,05%	-0,05%	-0,08%	-0,04%	-0,05%	0,02%
13	-0,08%	-0,08%	-0,08%	-0,12%	-0,11%	0,00%
17	-0,10%	-0,11%	-0,12%	-0,13%	-0,10%	-0,02%
21	-0,13%	-0,13%	-0,12%	-0,14%	-0,10%	-0,01%
29	-0,12%	-0,11%	-0,13%	-0,11%	-0,11%	0,00%
37	-0,11%	-0,10%	-0,11%	-0,11%	-0,09%	-0,01%
45	-0,10%	-0,11%	-0,09%	-0,10%	-0,07%	-0,01%

Tabelle I.4.: Difference in Remoteness der „PDMedian“-Regel unter CES-Präferenzen

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	1,30%	1,30%	1,36%	1,45%	1,40%	1,29%
5	0,19%	0,23%	0,20%	0,22%	0,22%	0,22%
7	-0,17%	-0,12%	-0,12%	-0,13%	-0,19%	-0,10%
9	-0,24%	-0,29%	-0,30%	-0,26%	-0,30%	-0,21%
13	-0,32%	-0,35%	-0,32%	-0,38%	-0,32%	-0,25%
17	-0,29%	-0,29%	-0,34%	-0,34%	-0,32%	-0,25%
21	-0,31%	-0,32%	-0,28%	-0,32%	-0,29%	-0,21%
29	-0,24%	-0,26%	-0,28%	-0,26%	-0,24%	-0,18%
37	-0,22%	-0,21%	-0,23%	-0,21%	-0,21%	-0,17%
45	-0,20%	-0,21%	-0,19%	-0,19%	-0,18%	-0,15%

Tabelle I.5.: Difference in Remoteness der „PDRMedian“-Regel unter CES-Präferenzen

I. Weitere Simulationsergebnisse: Difference in Remoteness

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	0,44%	0,49%	0,48%	0,50%	0,61%	0,76%
5	0,30%	0,33%	0,36%	0,36%	0,42%	0,48%
7	0,19%	0,22%	0,24%	0,23%	0,30%	0,37%
9	0,13%	0,15%	0,16%	0,18%	0,23%	0,28%
13	0,07%	0,08%	0,11%	0,10%	0,17%	0,18%
17	0,03%	0,05%	0,07%	0,07%	0,12%	0,13%
21	0,01%	0,03%	0,05%	0,05%	0,08%	0,09%
29	0,00%	0,01%	0,03%	0,03%	0,05%	0,05%
37	-0,01%	0,00%	0,02%	0,02%	0,04%	0,03%
45	-0,01%	0,00%	0,01%	0,01%	0,03%	0,03%

Tabelle I.6.: Difference in Remoteness der Condorcet Center-Regel unter CES-Präferenzen

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	0,58%	0,59%	0,59%	0,66%	0,69%	0,93%
5	0,09%	0,14%	0,11%	0,15%	0,21%	0,32%
7	-0,15%	-0,09%	-0,08%	-0,09%	-0,09%	0,10%
9	-0,19%	-0,22%	-0,22%	-0,18%	-0,16%	-0,02%
13	-0,26%	-0,29%	-0,24%	-0,30%	-0,23%	-0,13%
17	-0,24%	-0,27%	-0,30%	-0,30%	-0,25%	-0,18%
21	-0,28%	-0,29%	-0,24%	-0,29%	-0,24%	-0,15%
29	-0,23%	-0,24%	-0,26%	-0,25%	-0,21%	-0,15%
37	-0,21%	-0,20%	-0,22%	-0,21%	-0,19%	-0,15%
45	-0,20%	-0,21%	-0,18%	-0,18%	-0,17%	-0,13%

Tabelle I.7.: Difference in Remoteness der Inertial Median-Regel unter CES-Präferenzen

Weitere Simulationsergebnisse: REMRD

Dieser Abschnitt führt weitere Simulationsergebnisse bezüglich der Remoteness in der REMRD-Skala auf. Angegeben sind die Mittelwerte der Kenngröße in Abhängigkeit der Anzahl der Agenten und des Parameters ρ der CES-Nutzenfunktion. Alle weiteren Einstellungen der Simulation sind so getroffen, wie in Abschnitt 4.2 beschrieben.

J. Weitere Simulationsergebnisse: REMRD

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	84,61%	84,46%	84,79%	82,93%	81,30%	73,89%
5	94,14%	93,90%	94,20%	93,17%	93,36%	92,43%
7	96,38%	96,41%	96,33%	96,24%	96,34%	95,45%
9	97,44%	97,57%	97,32%	97,26%	97,52%	97,09%
13	98,63%	98,57%	98,58%	98,59%	98,55%	98,35%
17	99,04%	99,05%	99,11%	99,12%	99,03%	98,88%
21	99,35%	99,36%	99,34%	99,37%	99,31%	99,25%
29	99,63%	99,62%	99,64%	99,63%	99,61%	99,55%
37	99,74%	99,75%	99,74%	99,74%	99,72%	99,68%
45	99,82%	99,80%	99,81%	99,82%	99,80%	99,77%

Tabelle J.1.: Remoteness (in REMRD-Skala) der Midpoint-Regel unter CES-Präferenzen

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	15,70%	14,46%	15,37%	13,61%	14,28%	7,12%
5	62,12%	59,82%	58,01%	60,38%	60,92%	59,49%
7	70,59%	70,81%	70,09%	71,71%	71,21%	70,45%
9	74,34%	73,68%	75,90%	73,85%	74,30%	74,94%
13	77,75%	78,77%	78,61%	78,05%	77,16%	78,29%
17	80,48%	79,74%	80,00%	80,21%	80,62%	80,41%
21	81,21%	81,09%	81,40%	81,19%	81,12%	80,80%
29	82,49%	82,54%	82,46%	82,30%	82,46%	81,86%
37	82,69%	83,29%	83,01%	83,96%	83,55%	83,46%
45	83,26%	83,49%	83,48%	83,54%	83,43%	83,53%

Tabelle J.2.: Remoteness (in REMRD-Skala) der Mittelwert-Regel unter CES-Präferenzen

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	96,42%	97,95%	99,10%	99,11%	96,00%	79,69%
5	95,96%	96,61%	96,87%	97,46%	96,31%	87,71%
7	96,51%	97,18%	97,05%	97,08%	96,71%	91,20%
9	96,99%	97,25%	97,16%	97,24%	96,41%	92,70%
13	97,95%	97,90%	97,98%	97,77%	96,75%	95,46%
17	98,47%	98,34%	98,17%	98,03%	97,10%	96,45%
21	98,69%	98,52%	98,46%	98,26%	97,29%	97,39%
29	99,19%	98,92%	98,79%	98,70%	97,44%	98,14%
37	99,33%	99,17%	98,92%	98,99%	97,65%	98,52%
45	99,39%	99,23%	99,18%	99,06%	97,72%	98,82%

Tabelle J.3.: Remoteness (in REMRD-Skala) der normalisierten Median-Regel unter CES-Präferenzen

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	90,88%	91,21%	89,40%	90,45%	90,30%	90,63%
5	93,94%	94,15%	94,23%	94,45%	94,09%	93,10%
7	95,67%	95,35%	95,48%	95,67%	95,72%	94,72%
9	96,21%	96,38%	96,38%	96,23%	96,23%	95,01%
13	97,21%	97,31%	97,31%	97,35%	97,20%	96,11%
17	97,75%	97,90%	97,76%	97,91%	97,82%	96,41%
21	98,20%	98,01%	97,96%	98,05%	97,90%	96,70%
29	98,47%	98,24%	98,36%	98,28%	98,12%	96,91%
37	98,48%	98,41%	98,31%	98,45%	98,18%	96,95%
45	98,52%	98,39%	98,38%	98,31%	98,30%	97,18%

Tabelle J.4.: Remoteness (in REMRD-Skala) der „PDMedian“-Regel unter CES-Präferenzen

J. Weitere Simulationsergebnisse: REMRD

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	65,66%	64,19%	64,56%	63,03%	63,92%	65,75%
5	89,96%	90,19%	90,00%	89,54%	89,18%	89,79%
7	95,05%	94,80%	94,81%	95,02%	95,43%	94,11%
9	96,70%	96,64%	97,08%	96,85%	96,75%	95,80%
13	98,04%	97,98%	98,15%	98,17%	97,95%	97,01%
17	98,41%	98,35%	98,19%	98,41%	98,12%	97,27%
21	98,38%	98,19%	98,03%	98,12%	98,20%	97,29%
29	98,22%	98,03%	98,17%	98,10%	98,02%	97,07%
37	98,06%	97,93%	97,77%	97,80%	97,79%	96,92%
45	97,76%	97,61%	97,61%	97,48%	97,84%	96,91%

Tabelle J.5.: Remoteness (in REMRD-Skala) der „PDRMedian“-Regel unter CES-Präferenzen

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	87,80%	85,88%	87,09%	86,57%	84,33%	80,79%
5	92,45%	92,03%	91,25%	91,27%	90,34%	89,31%
7	94,62%	94,26%	94,02%	94,26%	93,02%	91,91%
9	96,03%	95,79%	95,62%	95,50%	94,70%	93,61%
13	97,52%	97,31%	97,01%	97,01%	96,13%	95,97%
17	98,43%	98,17%	97,77%	97,86%	97,12%	97,00%
21	98,81%	98,59%	98,32%	98,18%	97,94%	97,85%
29	99,26%	99,08%	98,82%	98,86%	98,47%	98,52%
37	99,49%	99,34%	99,07%	99,08%	98,91%	98,87%
45	99,58%	99,41%	99,33%	99,21%	99,14%	99,08%

Tabelle J.6.: Remoteness (in REMRD-Skala) der Condorcet Center-Regel unter CES-Präferenzen

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	84,36%	84,02%	84,72%	83,02%	81,33%	74,91%
5	93,84%	93,51%	93,47%	92,64%	91,32%	89,36%
7	96,37%	96,05%	95,71%	96,12%	95,33%	92,49%
9	97,14%	96,85%	97,16%	96,91%	96,11%	94,37%
13	98,23%	98,05%	97,93%	98,04%	97,45%	96,07%
17	98,36%	98,44%	98,26%	98,31%	97,64%	96,76%
21	98,41%	98,22%	97,94%	98,09%	97,91%	96,80%
29	98,23%	97,97%	98,09%	98,09%	97,82%	96,85%
37	98,03%	97,94%	97,74%	97,84%	97,70%	96,81%
45	97,77%	97,65%	97,55%	97,45%	97,67%	96,67%

Tabelle J.7.: Remoteness (in REMRD-Skala) der Inertial Median-Regel unter CES-Präferenzen

Weitere Simulationsergebnisse: Profile Converged

Dieser Abschnitt führt weitere Simulationsergebnisse bezüglich der Anzahl konvergierter Profile auf. Angegeben sind die Mittelwerte der Kenngröße in Abhängigkeit der Anzahl der Agenten und des Parameters ρ der CES-Nutzenfunktion. Alle weiteren Einstellungen der Simulation sind so getroffen, wie in Abschnitt 4.2 beschrieben.

K. Weitere Simulationsergebnisse: Profile Converged

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	93,40%	87,60%	89,40%	87,10%	82,80%	87,10%
5	99,50%	98,80%	98,90%	98,00%	97,50%	97,10%
7	99,60%	99,00%	99,60%	99,60%	99,60%	99,30%
9	99,90%	99,60%	99,80%	99,50%	99,70%	99,60%
13	100,00%	99,70%	99,50%	99,80%	99,70%	99,80%
17	99,80%	99,80%	99,80%	99,80%	99,90%	99,70%
21	99,90%	99,70%	99,80%	99,30%	99,70%	99,80%
29	99,80%	99,20%	99,20%	99,40%	99,30%	99,90%
37	99,00%	97,90%	98,10%	97,70%	98,30%	99,60%
45	97,40%	94,00%	94,90%	95,10%	97,10%	99,40%

Tabelle K.1.: Konvergierte Profile der Midpoint-Regel unter CES-Präferenzen

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
5	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
7	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
9	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
13	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
17	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
21	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
29	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
37	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
45	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%

Tabelle K.2.: Konvergierte Profile der Mittelwert-Regel unter CES-Präferenzen

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
5	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
7	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
9	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
13	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
17	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
21	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
29	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
37	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
45	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%

Tabelle K.3.: Konvergierte Profile der normalisierten Median-Regel unter CES-Präferenzen

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
5	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
7	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
9	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
13	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
17	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
21	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
29	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
37	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
45	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%

Tabelle K.4.: Konvergierte Profile der „PDMedian“-Regel unter CES-Präferenzen

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
5	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
7	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
9	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
13	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
17	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
21	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
29	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
37	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
45	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%

Tabelle K.5.: Konvergierte Profile der „PDRMedian“-Regel unter CES-Präferenzen

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	100,00%	100,00%	100,00%	99,80%	99,40%	98,50%
5	100,00%	100,00%	100,00%	99,90%	99,90%	99,80%
7	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	99,90%	100,00%
9	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
13	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
17	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
21	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
29	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
37	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
45	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%

Tabelle K.6.: Konvergierte Profile der Condorcet Center-Regel unter CES-Präferenzen

K. Weitere Simulationsergebnisse: Profile Converged

Agents	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,0$	$\rho = -2$	$\rho = -5$
3	93,40%	87,80%	89,40%	87,30%	82,90%	87,30%
5	99,30%	98,20%	97,60%	97,70%	97,10%	96,80%
7	99,60%	99,50%	99,30%	99,30%	99,40%	98,80%
9	99,90%	99,90%	99,80%	99,80%	99,70%	99,50%
13	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	99,90%	99,80%
17	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	99,90%
21	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
29	100,00%	100,00%	99,90%	100,00%	100,00%	100,00%
37	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
45	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	99,90%	100,00%

Tabelle K.7.: Konvergierte Profile der Inertial Median-Regel unter CES-Präferenzen

Enc 2002

HAZEWINKEL, Michiel (Hrsg.): *Encyclopaedia of mathematics*. <http://eom.springer.de/>. Version: 2002

Aleskerov u. Kurbanov 1999

ALESKEROV, Fuad ; KURBANOV, Eldeniz: Degree of manipulability of social choice procedures. In: ALKAN, Ahmet (Hrsg.) ; ALIPRANTIS, Charalambos D. (Hrsg.) ; YANNELIS, Nicholas C. (Hrsg.): *Current trends in economics: theory and applications : proceedings of the third international meeting of the Society for the Advancement of Economic Theory, Antalya, Turkey, June 1997* Bd. 8. Berlin : Springer, 1999 (Studies in economic theory)

Apestequia u. a. 2006

APESTEGUIA, Jose ; BALLESTER, Miguel A. ; FERRER, Rosa: On the Justice of Voting Systems / Department of Economics and Business, Universitat Pompeu Fabra. 2006 (987). – Economics Working Papers

Arrow 1951

ARROW, Kenneth J.: *Social choice and individual values*. Wiley, 1951

Banzhaf 1965

BANZHAF, John F.: Weighted Voting Doesn't Work: A Mathematical Analysis. In: *Rutgers Law Review* 19 (1965), S. 317–343

Banzhaf 1968

BANZHAF, John F.: One Man, 3.312 Votes: A Mathematical Analysis of the Electoral College. In: *Villanova Law Review* 13 (1968), S. 304–332

Barbera u. a. 2001

BARBERA, Salvador ; DUTTA, Bhaskar ; SEN, Arunava: Strategy-proof Social Choice Correspondences. In: *Journal of Economic Theory* 101 (2001), Nr. 2, S. 374–394

Barberà u. Jackson 1994

BARBERÀ, Salvador ; JACKSON, Matthew: A characterization of strategy-proof social choice functions for economies with pure public goods. In: *Social Choice and Welfare* 11 (1994), Nr. 3, S. 241–252

Beck 1975

BECK, Nathaniel: A note on the probability of a tied election. In: *Public Choice* 23 (1975), Nr. 1, S. 75–79

Berg u. Lepelley 1994

BERG, S. ; LEPELLEY, Dominique: On probability models in voting theory. In: *Statistica Neerlandica* 48 (1994), Nr. 2, S. 133–146

Black 1948

BLACK, Duncan: On the rationale of group decision-making. In: *Journal of Political Economy* 56 (1948), S. 23–24

Black 1958

BLACK, Robert A. Duncan ; Newing N. Duncan ; Newing: *The theory of committees and elections*. Boston [u.a.] : Kluwer, 1958

Bolger 1986

BOLGER, Edward M.: Power indices for multicandidate voting games. In: *International Journal of Game Theory* 15 (1986), Nr. 3, S. 175–186

Bolger 1993

BOLGER, Edward M.: A value for games with n players and r alternatives. In: *International Journal of Game Theory* 22 (1993), Nr. 4, S. 319–334

Bronstein u. Semendjajew 1961

BRONSTEIN, I. N. ; SEMENDJAJEW, K. A.: *Taschenbuch der Mathematik*. 5. Auflage. Frankfurt/Main : H. Deutsch, 1961

Clarke 1971

CLARKE, Edward H.: Multipart Pricing of Public Goods. In: *Public Choice* 11 (1971), S. 17–33

Conitzer u. a. 2006

CONITZER, Vincent ; DAVENPORT, Andrew ; KALAGNANAM, Jayant: *Improved Bounds for Computing Kemeny Rankings*. 2006

Devroye 1986

DEVROYE, Luc: *Non-uniform random variate generation*. New York : Springer-Verlag, 1986

Dietrich u. List 2007

DIETRICH, Franz ; LIST, Christian: Arrow's theorem in judgment aggregation. In: *Social Choice and Welfare* 29 (2007), Nr. 1, S. 19–33

Dowding 2005

DOWDING, Keith: Is it Rational to Vote? Five Types of Answer and Suggestion. In: *British Journal of Politics & International Relations* 7 (2005), Nr. 3, S. 442–459

Dowding u. van Hees 2008

DOWDING, Keith ; HEES, Martin van: In Praise of Manipulation. In: *British Journal of Political Science* 38 (2008), Nr. 01, S. 1–15

Downing 1998

DOWNING, Troy: *Java RMI : remote method invocation; [distributed databases, peer-to-peer object distribution, object serialization, RMI security issues, Java RMI APIs]*. Foster City, Calif. [u.a.] : IDG Books Worldwide, 1998

Downs 1957

DOWNS, Anthony: *An economic theory of democracy*. New York : Harper, 1957

Favardin u. Lepelley 2006

FAVARDIN, Pierre ; LEPELLEY, Dominique: Some further results on the manipulability of social choice rules. In: *Social Choice and Welfare* 26 (2006), Nr. 3, S. 485–509

Favardin u. a. 2002

FAVARDIN, Pierre ; LEPELLEY, Dominique ; SERAIS, Jérôme: Borda rule, Copeland method and strategic manipulation. In: *Review of Economic Design* 7 (2002), S. 213–228

Felsenthal u. Machover 2001

FELSENTHAL, Dan S. ; MACHOVER, Moshé: Myths and Meanings of Voting Power. In: *Journal of Theoretical Politics* 13 (2001), Nr. 1, S. 81–97

Gaertner 2009

GAERTNER, Wulf: *A primer in social choice theory*. Rev. ed. Oxford : Oxford University Press, 2009 (LSE perspectives in economic analysis)

Gibbard 1973

GIBBARD, Allan: Manipulation of Voting Schemes: A General Result. In: *Econometrica* 41 (1973), Nr. 4, S. 587–601

Gibbons 1992

GIBBONS, Robert: *A primer in game theory*. Harvester Wheatsheaf, 1992

Goldberger 1991

GOLDBERGER, Arthur S.: *A course in econometrics*. Cambridge, Mass. : Harvard University Press, 1991

Groves 1973

GROVES, Theodore: Incentives in Teams. In: *Econometrica* 41 (1973), Nr. 4, S. 617–31

Hardin 1968

HARDIN, Garrett: The Tragedy of the Commons. In: *Science* 162 (1968), S. 1243 – 1248

Johnson u. Kotz 1972

JOHNSON, Norman L. ; KOTZ, Samuel: *Continuous multivariate distributions*. New York : Wiley, 1972 (Distributions in statistics)

Kalai u. Muller 1977

KALAI, Ehud ; MULLER, Eitan: Characterization of domains admitting non-dictatorial social welfare functions and nonmanipulable voting procedures. In: *Journal of Economic Theory* 16 (1977), Nr. 2, S. 457 – 469

Kaniovski 2006

KANIOVSKI, Serguei: *The exact bias of the Banzhaf measure of power when votes are not equiprobable and independent*. 2006

Kelly 1993

KELLY, Jerry S.: Almost all social choice rules are highly manipulable, but a few aren't. In: *Social Choice and Welfare* 10 (1993), Nr. 2, S. 161–175

Kemeny 1959

KEMENY, John: Mathematics without numbers. In: *Daedalus* 88 (1959), S. 577–591

Kolonko 2008

KOLONKO, Michael: *Stochastische Simulation : Grundlagen, Algorithmen und Anwendungen*. 1. Aufl. Wiesbaden : Vieweg + Teubner, 2008

Kornhauser u. Sager 1986

KORNHAUSER, Lewis A. ; SAGER, Lawrence G.: Unpacking the Court. In: *The Yale Law Journal* 96 (1986), Nr. 1, S. 82–117

Laux 2007

LAUX, Helmut: *Entscheidungstheorie*. 7., überarb. und erw. Aufl. Berlin : Springer, 2007

Law u. Kelton 2000

LAW, Averill M. ; KELTON, W. D.: *Simulation modeling and analysis*. 3rd ed. Boston : McGraw-Hill, 2000

Leech 1990

LEECH, Dennis: Power indices and probabilistic voting assumptions. In: *Public Choice* 66 (1990), Nr. 3, S. 293–299

Lindner 2007

LINDNER, Tobias: *Zur Pivotality von Abstimmungsregeln*. Diplomarbeit am Institut für Wirtschaftstheorie und Operations Research. 2007

Lindner 2008

LINDNER, Tobias: How Often Are You Decisive: an Enquiry About the Pivotality of Voting Rules. In: KALCSICS, Jörg (Hrsg.) ; NICKEL, Stefan (Hrsg.) ; Gesellschaft für Operations Research e.V. (Veranst.): *Operations research proceedings 2007: selected papers of Annual International Conference of the German Operations Research Society (GOR) : Saarbrücken, September 5-7, 2007*. Berlin : Springer, 2008

Lindner u. a. 2009

LINDNER, Tobias ; NEHRING, Klaus ; PUPPE, Clemens: *Allocating Public Goods via the Midpoint Rule*. März 2009

List u. Pettit 2002

LIST, Christian ; PETTIT, Philip: Aggregating Sets of Judgements: An Impossibility Result. In: *Economics and Philosophy* 18 (2002), S. 89–110

List u. Puppe 2009

LIST, Christian ; PUPPE, Clemens: Judgment Aggregation. In: ANAND, Paul (Hrsg.) ; PATTANAIK, Prasanta K. (Hrsg.) ; PUPPE, Clemens (Hrsg.): *The handbook of rational and social choice: an overview of new foundations and applications*. Oxford : Oxford University Press, 2009

Mackie 2003

MACKIE, Gerry: *Democracy defended*. 1. publ. Cambridge University Press, 2003

Mas-Colell u. a. 1995

MAS-COLELL, Andreu ; WHINSTON, Michael D. ; GREEN, Jerry R.: *Microeconomic theory*. Oxford Univ. Press, 1995

Meir u. a. 2010

MEIR, Reshef ; POLUKAROV, Maria ; ROSENSCHEIN, Jeffrey S. ; JENNINGS, Nicholas R.: Convergence to Equilibria in Plurality Voting. In: *Proceedings of the Twenty-Fourth AAAI Conference on Artificial Intelligence*, 2010

Messner u. Polborn 2002

MESSNER, Matthias ; POLBORN, Mattias K.: *Robust Political Equilibria under Plurality and Runoff Rule*. November 2002

Moreno 1999

MORENO, Diego: Strategy-proof allocation mechanisms for pure public goods economies when preferences are monotonic. In: *Economic Theory* 13 (1999), Nr. 1, S. 183–197

Moreno u. Moscoso 2002

MORENO, Diego ; MOSCOSO, María José: *Strategy-proof allocation mechanisms for public good economies*. Februar 2002

Moulin 1980

MOULIN, Herve: On strategy-proofness and single peakedness. In: *Public Choice* 35 (1980), Nr. 4, S. 437–455

Moulin 1988

MOULIN, Hervé: *Axioms of cooperative decision making*. Bd. no. 15. Cambridge : Cambridge University Press, 1988

Nehring 2003

NEHRING, Klaus: Arrow's theorem as a corollary. In: *Economics Letters* 80 (2003), Nr. 3, S. 379–382

Nehring u. a. 2011

NEHRING, Klaus ; PIVATO, Marcus ; PUPPE, Clemens: *Condorcet admissibility - Majoritarian indeterminacy and path-dependence in the theory of aggregation*. 2011

Nehring u. Puppe 2005

NEHRING, Klaus ; PUPPE, Clemens: *The Structure of Strategy-Proof Social Choice – Part II: Non-Dictatorship, Anonymity and Neutrality*. März 2005

Nehring u. Puppe 2007

NEHRING, Klaus ; PUPPE, Clemens: The structure of strategy-proof social choice – Part I: General characterization and possibility results on median spaces. In: *Journal of Economic Theory* 135 (2007), Nr. 1, S. 269 – 305

Nehring u. Puppe 2010

NEHRING, Klaus ; PUPPE, Clemens: Abstract Arrowian aggregation. In: *Journal of Economic Theory* 145 (2010), Nr. 2, S. 467 – 494

Nitzan 1985

NITZAN, Shmuel: The vulnerability of point-voting schemes to preference variation and strategic manipulation. In: *Public Choice* 47 (1985), Nr. 2, S. 349–370

Nurmi 1987

NURMI, Hannu: *Comparing voting systems*. Dordrecht : D. Reidel Pub. Co., 1987 (Theory and decision library. Series A, Philosophy and methodology of the social sciences)

Ohseto 1997

OHSETO, Shinji: Strategy-proof mechanisms in public good economies. In: *Mathematical Social Sciences* 33 (1997), Nr. 2, S. 157 – 183

Penrose 1946

PENROSE, L. S.: The Elementary Statistics of Majority Voting. In: *Journal of the Royal Statistical Society* 109 (1946), Nr. 1, S. 53–57

Pritchard u. Wilson 2007

PRITCHARD, Geoffrey ; WILSON, Mark C.: Exact results on manipulability of positional voting rules. In: *Social Choice and Welfare* 29 (2007), Nr. 3, S. 487–513

Ratz u. a. 2001

RATZ, Dietmar ; SCHEFFLER, Jens ; SEESE, Detlef: *Grundkurs Programmieren in Java*. Bd. 1: Der Einstieg in Programmierung und Objektorientierung. München : Hanser, 2001

Ratz u. a. 2003

RATZ, Dietmar ; SCHEFFLER, Jens ; SEESE, Detlef ; WIESENBERGER, Jan: *Grundkurs Programmieren in Java*. Bd. 2: Programmierung kommerzieller Systeme. München : Hanser, 2003

Riker 1982

RIKER, William H.: *Liberalism Against Populism: A Confrontation Between the Theory of Democracy and the Theory of Social Choice*. Waveland Press, 1982

Riker u. Ordeshook 1973

RIKER, William H. ; ORDESHOOK, Peter C.: *An introduction to positive political theory*. Prentice-Hall, 1973

Rodríguez-Álvarez 2007

RODRÍGUEZ-ÁLVAREZ, Carmelo: On the manipulation of social choice correspondences. In: *Social Choice and Welfare* 29 (2007), Nr. 2, S. 175–199

Roemer 1996

ROEMER, John E.: *Theories of distributive justice*. Cambridge, Mass : Harvard University Press, 1996

Satterthwaite 1975

SATTERTHWAITE, Mark A.: Strategy-proofness and Arrow's conditions: Existence and correspondence theorems for voting procedures and social welfare functions. In: *Journal of Economic Theory* 10 (1975), Nr. 2, S. 187 – 217

Sen 1970a

SEN, Amartya: The Impossibility of a Paretian Liberal. In: *The Journal of Political Economy* 78 (1970), Nr. 1, S. 152–157

Sen 1970b

SEN, Amartya K.: *Collective choice and social welfare*. Holden-Day, 1970

Sen 1999

SEN, Amartya K.: The Possibility of Social Choice. In: *American Economic Review* 89 (1999), Nr. 3, S. 349–378

Serizawa 1996

SERIZAWA, Shigehiro: Strategy-proof and individually rational social choice functions for public good economies. In: *Economic Theory* 7 (1996), Nr. 3, S. 501–512

Serizawa 1999

SERIZAWA, Shigehiro: Strategy-proof and Symmetric Social Choice Functions for Public Good Economies. In: *Econometrica* 67 (1999), Nr. 1, S. 121–145

Shapley 1953

SHAPLEY, L. S.: A Value for n-Person Games. In: *Contributions to the Theory of Games* Bd. II. Princeton University Press, 1953

Smith 1999

SMITH, David A.: Manipulability measures of common social choice functions. In: *Social Choice and Welfare* 16 (1999), S. 639–661

Sprumont 1991

SPRUMONT, Yves: The Division Problem with Single-Peaked Preferences: A Characterization of the Uniform Allocation Rule. In: *Econometrica* 59 (1991), Nr. 2, S. 509–519

Stöcker u. Zieschang 1994

STÖCKER, Ralph ; ZIESCHANG, Heiner: *Algebraische Topologie : eine Einführung; mit zahlreichen Bildern, Beispielen und Übungsaufgaben.* 2., überarb. und erw. Aufl. Stuttgart : Teubner, 1994 (Mathematische Leitfäden)

Straffin 1977

STRAFFIN, Philip D.: Homogeneity, independence, and power indices. In: *Public Choice* 30 (1977), Nr. 1, S. 107–118

Svensson u. Torstensson 2008

SVENSSON, Lars-Gunnar ; TORSTENSSON, Pär: Strategy-proof allocation of multiple public goods. In: *Social Choice and Welfare* 30 (2008), Nr. 2, S. 181–196

Valenciano u. Laruelle 2002

VALENCIANO, Federico ; LARUELLE, Annick: Assessment Of Voting Situations: The Probabilistic Foundations / Instituto Valenciano de Investigaciones Económicas, S.A. (Ivie). 2002 (2002-22). – Working Papers. Serie AD

Varian 1992

VARIAN, Hal R.: *Microeconomic analysis.* 3rd ed. New York : Norton, 1992

Young 1988

YOUNG, H. P.: Condorcet's Theory of Voting. In: *The American Political Science Review* 82 (1988), Nr. 4, S. 1231–1244

Young 1995

YOUNG, H. P.: Optimal Voting Rules. In: *The Journal of Economic Perspectives* 9 (1995), Nr. 1, S. 51–64

Young u. Levenlick 1978

YOUNG, H. P. ; LEVENGLICK, A.: A Consistent Extension of Condorcet's Election Principle. In: *SIAM Journal on Applied Mathematics* 35 (1978), Nr. 2, S. 285–300

Zhou 1991

ZHOU, Lin: Impossibility of Strategy-Proof Mechanisms in Economies with Pure Public Goods. In: *The Review of Economic Studies* 58 (1991), Nr. 1, S. 107–119

Die vorliegende Arbeit untersucht die Aufteilung eines Budgets auf mehrere öffentliche Güter mittels einer Abstimmung. Hierzu werden Abstimmungsregeln betrachtet, unter denen jeder Agent eine Budgetaufteilung vorschlägt und dann aus diesen Vorschlägen eine Budgetaufteilung (Allokation) bestimmt wird. Von besonderem Interesse ist die Frage, welche Abstimmungsregeln nicht manipulierbar sind, das heißt für keinen Agenten einen Anreiz bieten, eine Allokation vorzuschlagen, die nicht mit seiner präferierten Aufteilung übereinstimmt.

ISBN 978-3-86644-709-7

