

Hadronische Erzeugung supersymmetrischer Teilchen nahe der Produktionsschwelle

Zur Erlangung des akademischen Grades eines
DOKTORS DER NATURWISSENSCHAFTEN

der Fakultät für Physik des
Karlsruher Instituts für Technologie (KIT)

genehmigte

DISSERTATION

von

Dipl.-Phys. Matthias Rolf Volker Kauth

aus Heidelberg

*Karlsruher Institut für Technologie – Campus Süd
Fakultät für Physik
Institut für Theoretische Teilchenphysik*

Tag der mündlichen Prüfung : 29. April 2011

Referent : Univ.-Prof. Dr. Johann H. Kühn

Korreferent : Univ.-Prof. Dr. Matthias Steinhauser

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Supersymmetrie	3
2.1	Das MSSM	6
2.2	Gluinos und Squarks	10
2.3	Massenspektren	11
2.4	Zerfallskanäle von Gluinos und Squarks	12
2.5	Zerfallsbreiten im MSSM	16
3	Bindungszustände	23
3.1	Bethe-Salpeter-Formalismus	23
3.2	Das Coulomb-Potential	29
3.3	Theorie der Bindungszustände	30
3.4	Berechnung der Bindungsenergien und Wellenfunktionen am Ursprung	33
4	Gluinonia	35
4.1	Eigenschaften von Gluinonia	35
4.2	Das Wechselwirkungspotential	38
4.3	Spektroskopie	41
4.4	Annihilationszerfälle	47
4.4.1	NLO-Korrekturen	51
4.4.2	Alternative Zerfallsmoden	57
4.5	Produktion des Bindungszustands	58
4.5.1	NLO-Korrekturen	61

4.5.2	Verhältnis vom Signal zum Untergrund	63
5	Schwellenproduktion zweier Gluinos	65
5.1	Schwellenverhalten	65
5.2	NLO-Korrekturen	72
5.2.1	Green'sche Funktion	73
5.2.2	Kurzreichweitige Korrekturen	75
5.3	Hadronische Produktion	84
5.4	Vergleich und Erweiterung der Berechnung	94
6	Gluino-Squark-Produktion an der Schwelle	97
6.1	Grundlegende Eigenschaften	97
6.2	Schwellenverhalten	101
6.3	Hadronische Produktion	104
7	Zusammenfassung	111
A	Feynman-Regeln	115
A.1	Propagatoren	115
A.2	Vertizes	117
B	Ausführliche Resultate	121
B.1	\tilde{g} -Zerfallsbreiten	121
B.2	Annihilationszerfälle	123
B.3	Splitting-Funktionen	123
B.4	Beiträge zu den virtuellen Korrekturen	124
B.5	Beiträge zu den reellen Korrekturen	124
B.6	Renormierungskonstanten	129
B.7	Weitere Korrekturen	130
C	Details zu den SPS-Szenarios	143
D	Tensor- und skalare Integrale	147

E	Tensorprodukte	153
E.1	$8 \otimes 8$	153
E.2	$(N^2 - 1) \otimes N$	155
F	SU(N)-Farbalgebra	157
G	Bindungsenergien und Wellenfunktionen am Ursprung	161
H	Spin-Projektionsformalismus	165
I	Phasenraumintegration	167
J	Berechnung der Green'schen Funktion	171
K	Die Generalisierte Hypergeometrische Funktion	173

Kapitel 1

Einleitung

Bindungszustände spielen in der Geschichte der modernen Physik eine wesentliche Rolle. Schon im 19. Jahrhundert wurde damit begonnen, das Linienspektrum des *Wasserstoffatoms*, eines gebundenen Zustands aus einem *Proton* und einem *Elektron*, zu untersuchen. Die sehr gut vermessenen Serien der Spektrallinien wurden durch die *Bohr'schen Postulaten* von 1913 erklärt, die sich nicht aus der klassischen Physik herleiten lassen. Erst durch die Einführung der *Quantenmechanik* (QM) wurde eine einheitliche theoretische Basis gefunden, aus welcher das Linienspektrum abgeleitet werden kann. Durch die Lösung der *Schrödinger-Gleichung* (SGL) ist neben einer räumlichen Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons auch dessen Bindungsenergie gegeben. Während die QM hierdurch eine fundamentale Erklärung für das Termschema des Wasserstoffatoms liefert, ließen sich in der Folgezeit auch Schwächen an ihr feststellen. Die Theorie ist einerseits nicht-relativistisch, andererseits läßt sich die Eigenschaft des *Spins*, welchen man den Elementarteilchen zuordnet, nicht aus ihr herleiten. Des Weiteren ist bei genauerer Betrachtung eine Aufhebung der durch die QM postulierten Entartung der Energieniveaus zu beobachten.

Die auch *Feinstruktur* genannte Aufspaltung der Spektrallinien beinhaltet neben der relativistischen Massenkorrektur und dem *Darwin-Term* auch die Kopplung des Spins an den Bahndrehimpuls. Der Effekt dieser Beiträge ist um zwei Potenzen der *Sommerfeld'schen Feinstrukturkonstanten* $\alpha \cong 1/137$ unterdrückt. Eine weitere Aufspaltung im Linienspektrum des Wasserstoffatoms ist die *Lamb-Verschiebung*, welche 1947 beobachtet wurde. Sie ließ sich erklären durch die Einführung der *Quantenelektrodynamik* (QED), einer *Quantenfeldtheorie* (QFT) der *elektromagnetischen Wechselwirkung*. Ihren größten Erfolg feierte die QED durch die Berechnung des *anomalen magnetischen Moments* des Elektrons, welches mit bisher unerreichter Genauigkeit zwischen Theorie und Experiment bestimmt werden kann.

Eine weitere experimentelle Beobachtung, welche für die Entwicklung der Physik eine entscheidende Rolle spielte, war 1974 die Entdeckung der später *J/Ψ* genannten Resonanz. Es handelt sich dabei um einen Bindungszustand aus dem zuvor postulierten vierten *Quark* und seinem *Antiteilchen*. Auch das fünfte Quark – und damit das leichtere Quark der

dritten Generation, welche zur Erklärung der beobachteten CP -Verletzung vorhergesagt wurde, – konnte drei Jahre später als Konstituent eines *Quarkoniums*, wie man allgemein einen Bindungszustand eines Quarks und seines Antiteilchens nennt, bestimmt werden.

Die *starke Wechselwirkung* zwischen den Quarks wird durch die QFT der *Quantenchromodynamik* (QCD) beschrieben. Sie macht die Entdeckung isolierter Quarks unmöglich, da diese zu einem stabilen Verbund zusammengehalten werden. Dadurch kommt der Studie von Bindungszuständen große Bedeutung zu. Es ist jedoch auch denkbar, daß gebundene Zustände für die Entdeckung neuer Physik eine Rolle spielen. Dies soll im Rahmen dieser Arbeit für eine *supersymmetrische* Theorie untersucht werden.

Kapitel 2 beinhaltet eine grundlegende Einführung in diese Theorie. Es wird sowohl der Teilcheninhalt diskutiert, als auch werden die Eigenschaften der postulierten Elementarteilchen weitestgehend besprochen. Hierauf folgen in Kapitel 3 die für diese Arbeit benötigten Grundlagen. Für einen Bindungszustand zweier Teilchen wird sehr allgemein gezeigt, wie man die Produktion des gebundenen Systems sowie dessen Termspektrum formal beschreiben kann.

Den Schwerpunkt der Arbeit bildet die Untersuchung von stark wechselwirkenden, supersymmetrischen Teilchen. Ein möglicher Bindungszustand stabiler *Gluinos* wird in Kapitel 4 untersucht, das auf der Referenz [1] basiert. Die Berechnung des Wechselwirkungspotentials wird durchgeführt und zur numerischen Betrachtung von Bindungsenergien sowie der Wellenfunktion am Ursprung benutzt. Letztere geht direkt in die Wirkungsquerschnitte für die Produktion und die Zerfallsbreiten ein. Zuletzt gibt eine Analyse für die Separation potentieller Signale vom Untergrund des Experiments Aufschluß über das Entdeckungspotential des Bindungszustands am LHC.

Die in Kapitel 4 dargestellten Grundlagen des Systems zweier Gluinos spielen auch in Kapitel 5 eine entscheidende Rolle. Handelt es sich bei den Gluinos um Teilchen mit einer geringen Lebensdauer, so ist die Formation von gebundenen Zuständen nicht realisierbar. Durch den Fall des zuletzt entdeckten sechsten Quarks, des *Top-Quarks* t , ist der Einfluß von Bindungseffekten auf die Schwellenproduktion bekannt. Die Top-Quarks besitzen aufgrund *schwacher Zerfälle* eine zu kurze Lebensdauer, um Quarkonia zu bilden, jedoch führt die Wechselwirkung zwischen den beiden Teilchen in der Nähe der Produktionsschwelle zu einer deutlich sichtbaren Veränderung des Wirkungsquerschnitts. Aufgrund der starken Farbwechselwirkung ist für die Gluinos ein ähnlicher Effekt zu erwarten.

Der benutzte Formalismus wird in Kapitel 6 auf ein weiteres System, bestehend aus einem *Squark* und einem Gluino, angewandt. Wie auch das Gluino unterliegt das Squark der starken Wechselwirkung, jedoch existieren eine Reihe von grundlegenden Unterschieden zum System zweier Gluinos, welche sich auf die Ergebnisse für die Wirkungsquerschnitte auswirken.

Kapitel 7 enthält die Zusammenfassung, während in den Anhängen A bis K alle Ergebnisse und Herleitungen zu finden sind, welche hinsichtlich ihres Umfangs nicht im Hauptteil untergebracht wurden.

Kapitel 2

Supersymmetrie

Das *Standardmodell* (SM) der Hochenergiephysik stellt eine bemerkenswert erfolgreiche Beschreibung der zur Zeit bekannten Naturphänomene der Teilchenphysik dar. Es ist ein theoretisches Konzept, welches – obschon vor rund 50 Jahren entwickelt – durch den Fortschritt der experimentellen Analysen keinen Zweifel an seiner Richtigkeit aufkommen läßt. Andererseits ist klar, daß das SM keine abgeschlossene Theorie ist. Um die Physik bei Energieskalen weit jenseits dessen, was zur Zeit erreicht werden kann, zu beschreiben, muß die Theorie erweitert werden. Darüber hinaus existieren eine Reihe von Fragen, auf welche auch das erfolgreiche SM keine Antwort geben kann. Einige sollen hier kurz dargestellt werden.

Die ursprüngliche Form des SM postuliert masselose *Neutrinos*, Elementarteilchen, welche nur der schwachen Wechselwirkung unterliegen. Durch sie kann der β -Zerfall, der Zerfall des freien Neutrons, erklärt werden. Heute wissen wir, daß Neutrinos zwischen den drei existierenden Typen, welche nach den Generationen von Leptonen benannt werden, oszillieren. Der Nachweis dieser Oszillation ließ einzig den Schluß zu, daß die Neutrinos voneinander verschiedene Massen besitzen müssen.

Neben der schwachen Wechselwirkung des β -Zerfalls beschreibt das SM zwei weitere fundamentale Kräfte. Die elektromagnetische Wechselwirkung ist uns aus dem Alltag gut bekannt. Bei Skalen oberhalb der Massen der Austauschteilchen, die die schwache Wechselwirkung vermitteln, wird sie mit letzterer zur *elektroschwachen Wechselwirkung* vereinheitlicht. Darüber hinaus hat es bis weit ins 20. Jahrhundert gedauert, bis die Protonen und Neutronen ihren Status als elementare Teilchen verloren haben. Sie besitzen eine Substruktur aus Quarks, und es ist die starke Kraft, welche sie zu einem stabilen Verbund zusammenhält. Zuletzt erfährt man täglich die Wirkung der Gravitation, jedoch ist es nicht möglich, das SM um eine quantenfeldtheoretische Beschreibung dieser Wechselwirkung zu ergänzen. Hieraus sieht man, was zuvor angedeutet wurde: Beim SM handelt es sich um eine *effektive Theorie*. Weit unterhalb der *Planck-Skala* $M_P = \sqrt{\hbar c/G} \approx 10^{19}$ GeV, bei welcher Quanteneffekte der Gravitation eine Rolle spielen, behält das SM seine Gültigkeit. Oberhalb von M_P muß es jedoch weiterentwickelt werden.

Wir wissen nicht, warum es vier fundamentale Kräfte gibt, warum drei Generationen von *Leptonen* und Quarks, deren Massen sich über einen Bereich von mehreren Größenordnungen erstrecken, ausgemacht werden können und warum wir uns in vier Dimensionen der *Raumzeit* befinden. Weiterhin können wir nicht sagen, warum es 19 Parameter sind, welche das SM nicht vorhersagt und welche daher den Experimenten entnommen werden müssen, um Vorhersagen für Observablen zu machen. Man mag sich daher fragen, ob es auch ein theoretisches Verständnis für diese Parameter gibt.

Die Tatsache, daß sich Massenparameter über einen großen Bereich erstrecken, manifestiert sich auch in dem sog. Hierarchie-Problem. Das *Higgs-Boson*, welches im SM gebraucht wird, um den Teilchen Massen zu verleihen, erhält zu seiner eigenen Masse große Beiträge durch Schleifenkorrekturen mit schweren Teilchen, welche an das Higgs-Boson koppeln. Betrachtet man das SM als abgeschlossene Theorie, erscheint dies zunächst als bedeutungslos. Denkt man jedoch über eine Erweiterung des Modells nach, so bieten sich folgende Möglichkeiten an, um die erwartete Masse des Higgs-Teilchens zu garantieren: Ordnung für Ordnung die Feinabstimmung vieler Größenordnungen in der Störungstheorie oder die Einführung einer Symmetrie, welche die Masse des Higgs-Bosons schützt.

Weitere offene Fragen betreffen beispielsweise das *starke CP-Problem* oder die *kosmologische Konstante*. Abschließend wird hier jedoch die *dunkle Materie* angesprochen. Es handelt sich dabei um Teilchen hoher Massen, welche nur sehr schwach wechselwirken. Sie scheinen für uns unsichtbar zu sein und können somit die Rotationsgeschwindigkeitsverteilungen von Galaxien erklären, welche ohne eine Erweiterung des SM ein unlösbares Rätsel darstellen. Der Anteil der dunklen Materie an der Energie bzw. Materie des Universums ist in etwa ein Viertel und damit grob fünf mal so groß wie der der *baryonischen* Materie. Innerhalb des SM ist die dunkle Materie jedoch nicht erklärbar.

Es wäre sehr leichtsinnig, anzunehmen, daß eine Erweiterung zum SM all diese Fragen beantwortet, ohne neue aufkommen zu lassen. Allerdings könnte der begrenzte Wirkungsbereich des SM erweitert werden. Auch wenn dieses als effektive Theorie die Observablen mit sehr hoher Genauigkeit vorhersagt und auch noch lange vorhersagen wird, so ist es unvermeidbar, über Erweiterungen des SM nachzudenken und deren Theorien im Einzelnen zu untersuchen.

Einer der vielversprechendsten Kandidaten für *Physik jenseits des Standardmodells*, was synonym für eine Erweiterung des SM ist, wird Supersymmetrie (SUSY) genannt. Bei einer Transformation Q der SUSY wird ein *bosonischer* Zustand, welcher einen ganzzahligen Spin s besitzt, in einen *fermionischen* mit halbzahligem Spin umgewandelt und umgekehrt

$$\begin{aligned} Q |\text{Fermion}\rangle &= |\text{Boson}\rangle, \\ Q |\text{Boson}\rangle &= |\text{Fermion}\rangle. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Die Teilchen sowie ihre durch eine Linearkombination von Q und Q^\dagger aus ihnen hervorgegangenen Superpartner liegen im gleichen *Multipllett*. Man unterscheidet zwischen den *Eichmultipletts*, bei denen neben den Eichbosonen des SM mit Spin gleich eins die jeweiligen fermionischen Superpartner liegen, welche den gleichen Namen mit einem zusätzlichen

Suffix “ino” tragen, und den *chiralen Multipletts*. Mit *Chiralität* bezeichnet man die Eigenschaft der Quarks und Leptonen, welche sie in *links-* und *rechtshändige* Fermionen unterteilt. Die chiralen Multipletts beherbergen die Fermionen des SM und deren bosonische Partner, sie erhalten auch den gleichen Namen, nur wird das Präfix “s” hinzugefügt, welches für *skalar* steht. Weiterhin bilden die skalaren Higgs-Teilchen und ihre Superpartner, die *Higgsinos*, chirale Multipletts. Schließt man die Gravitation mit ein, erhält man das *Graviton* als Austauscheteilchen der Wechselwirkung mit Spin gleich zwei sowie das *Gravitino* mit $s = 3/2$ im gleichen Multiplett.

Es handelt sich bei Q um einen fermionischen Operator, um welchen die *Poincaré-Algebra* des SM erweitert werden muß. Diese besteht aus den Generatoren der Translationen der Raumzeit und der *Lorentz-Transformationen*. Eine der Konsequenzen aus der resultierenden Algebra ist, daß der Kommutator des Viererimpuls-Operators P^μ mit dem Generator der SUSY verschwindet. Somit kommutiert auch P^2 mit einer Linearkombination von Q und Q^\dagger , so daß zwei Superpartner die gleiche Masse besitzen. Da Q auch mit den Generatoren der Eichtransformationen kommutiert, ändern sich die elektrische Ladung, der schwache Isospin sowie die Farbfreiheitsgrade unter der Anwendung von Q nicht. Das bedeutet, daß die Teilchen in einem Multiplett bis auf den Spin die gleichen Quantenzahlen haben.

Eine weitere Eigenschaft, die man direkt aus der Algebra gewinnen kann, betrifft die Freiheitsgrade der Teilchen. Da der Antikommutator von Q und Q^\dagger proportional ist zum Viererimpuls-Operator, kann man zeigen, daß die Zustände eines Multipletts die gleiche Anzahl an Freiheitsgraden besitzen müssen: Auf die zwei Freiheitsgrade eines *Weyl-Spinors* treffen die zwei eines komplexen skalaren Feldes, und die zwei transversalen Polarisierungen eines masselosen Eichbosons gehen über in die zwei Freiheitsgrade eines *Majorana-Spinors*.

Beschränkt man sich nicht auf einen Operator Q , so muß die Algebra erneut erweitert werden. In einem Multiplett mit \mathcal{N} verschiedenen SUSY-Generatoren existieren nun $2^{\mathcal{N}}$ Zustände. Die Theorien mit $\mathcal{N} > 1$ werden auch ausgedehnte SUSY genannt, jedoch sind sie nicht-chiral, d.h. sie unterscheiden nicht zwischen Rechts- und Linkshändigkeit. Da dies ein Widerspruch zu den Beobachtungen innerhalb des SM ist, wo die rechtshändigen Teilchen im Gegensatz zu den linkshändigen die schwache Kraft nicht erfahren, wird im Folgenden nur der Fall der $\mathcal{N}=1$ -SUSY betrachtet. Da keine zwei der bisher bekannten Teilchen zueinander Superpartner sein können, muß es zu jedem Teilchen des SM ein zusätzliches geben. Effektiv wird der Teilcheninhalt daher verdoppelt.

Eine direkte Konsequenz der bisher erwähnten Eigenschaften der SUSY ist die Massentartung der Teilchen des SM und ihrer Superpartner. Es wäre nun sehr leicht, die SUSY-Teilchen mit ihren bekannten Massen zu entdecken, was jedoch experimentell ausgeschlossen ist. Der Schluß legt nahe, daß SUSY eine gebrochene Symmetrie sein muß. Massen der Superpartner im TeV-Bereich wären einerseits experimentell nicht ausgeschlossen, andererseits würden sie auch eine elegante Lösung für das Hierarchie-Problem darstellen und somit die Masse des Higgs-Bosons stabilisieren. Schleifenkorrekturen bosonischer

Namen		Spin 0	Spin $\frac{1}{2}$	$SU(3)_C, SU(2)_L, U(1)_Y$
Squarks, Quarks ($\times 3$ Generationen)	Q	$(\tilde{u}_L \tilde{d}_L)$	$(u_L d_L)$	$(\mathbf{3}, \mathbf{2}, \frac{1}{6})$
	\bar{u}	\tilde{u}_R^*	u_R^\dagger	$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, -\frac{2}{3})$
	\bar{d}	\tilde{d}_R^*	d_R^\dagger	$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, \frac{1}{3})$
Sleptonen, Leptonen ($\times 3$ Generationen)	L	$(\tilde{\nu} \tilde{e}_L)$	(νe_L)	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\frac{1}{2})$
	\bar{e}	\tilde{e}_R^*	e_R^\dagger	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 1)$
Higgs, Higgsinos	H_u	$(H_u^+ H_u^0)$	$(\tilde{H}_u^+ \tilde{H}_u^0)$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \frac{1}{2})$
	H_d	$(H_d^0 H_d^-)$	$(\tilde{H}_d^0 \tilde{H}_d^-)$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\frac{1}{2})$

Tabelle 2.1: Chirale Multipletts des MSSM mit zugehörigen Darstellungs- bzw. Quantenzahlen. Die Squarks und Sleptonen sind komplexe skalare Teilchen, der Index für die Händigkeit charakterisiert den jeweiligen Superpartner.

sowie fermionischer Teilchen würden sich gegenseitig wegheben und die Korrektur zur Higgs-Masse nicht unnatürlich groß werden lassen. Interessanterweise würde dies bedeuten, daß die Möglichkeit besteht, SUSY am LHC zu entdecken. Daher muß ein konkretes Modell spezifiziert werden, welches minimalen Anforderungen genügt.

2.1 Das MSSM

Eine vollständige Darstellung des *Minimalen Supersymmetrischen Standardmodells* (MSSM) ist einerseits kompliziert und auf der anderen Seite sehr umfangreich. Stattdessen wird hier nur eine Zusammenfassung der wesentlichen Punkte präsentiert, welche durch die Literatur ergänzt werden kann (siehe z.B. [2] und Referenzen darin). Eine Reihe von einführenden Papieren benutzt das Konzept der Superfelder. Die vierdimensionalen Raumzeitparameter, welche im Zusammenhang mit den Poincaré-Transformationen stehen, werden um antikommutierende *Grassmann-Variablen* der fermionischen SUSY-Transformationen erweitert, und Superfelder sind Funktionen von all diesen Variablen. Dieser unvertraute Formalismus bietet eine Reihe von Vorteilen bei der Berechnung der *Lagrangedichte*, jedoch wird im Folgenden darauf verzichtet.

Der Teilcheninhalt des MSSM sieht nicht nur eine Verdopplung der Anzahl der Teilchen des SM vor, sondern auch eine Erweiterung des Higgs-Sektors. Ein einzelnes Higgs-Dublett – wie im SM – würde eine mit der Quantenfeldtheorie unvereinbare Anomalie herbeiführen. Darüber hinaus fordert die Struktur einer allgemeinen supersymmetrischen Theorie die Hinzunahme eines weiteren Dubletts¹. Somit gibt es die Dubletts H_u , welches den “*up*”-artigen Quarks (*Up*, *Charm* und *Top*) ihre Massen verleiht, und H_d

¹Details hierzu können [2] entnommen werden.

Namen	Spin $\frac{1}{2}$	Spin 1	$SU(3)_C, SU(2)_L, U(1)_Y$
Gluino, Gluon	\tilde{g}	g	$(\mathbf{8}, \mathbf{1}, 0)$
Winos, W -Boson	$\widetilde{W}^\pm \widetilde{W}^0$	$W^\pm W^0$	$(\mathbf{1}, \mathbf{3}, 0)$
Bino, B -Boson	\widetilde{B}^0	B^0	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 0)$

Tabelle 2.2: Eichmultipletts des MSSM mit zugehörigen Darstellungs- bzw. Quantenzahlen.

für die “down”-artigen Quarks (*Down*, *Strange* und *Bottom*) und die geladenen Leptonen (Elektron, *Myon* und τ -Lepton). Während im SM nach der *spontanen Symmetriebrechung* des elektroschwachen Sektors ein physikalisches Higgs-Teilchen existiert, sind es im MSSM deren fünf. Sie werden h^0 , H^0 , A^0 und H^\pm genannt. Die beiden ersten besitzen die gleichen Quantenzahlen, den Eigenwert +1 unter einer CP -Transformation², und es gilt $m_{h^0} < m_{H^0}$. Der Zustand A^0 ist CP -ungerade und wird daher auch pseudoskalares Higgs genannt.

Die Higgs-Teilchen besitzen den Spin $s = 0$ und bilden daher mit ihren Superpartnern, den Higgsinos, chirale Multipletts. Die weiteren der auch *Materie-Multipletts* genannten Objekte bestehen aus den Quarks und den Squarks sowie den Leptonen und den *Sleptonen*. Sie sind in Tab. 2.1 mit der jeweiligen Darstellung bzw. *Hyperladung* Y bezüglich der Eichgruppe des MSSM $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ dargestellt, wobei der Index für die Generation weggelassen wurde. Da es sich bei den Squarks und Sleptonen um skalare Teilchen handelt, bedeutet beispielsweise die Notation \tilde{u}_L nicht, daß es sich um einen linkshändigen Zustand handelt, sondern sie kennzeichnet die Händigkeit des Superpartners. \tilde{u}_L und \tilde{u}_R sind folglich zwei verschiedene Teilchen. Wechselwirkungszustände gleicher Quantenzahlen mischen, d.h. eine Superposition aus ihnen ergibt die physikalischen Masseneigenzustände, welche für die up-artigen Squarks \tilde{u}_1 , \tilde{u}_2 , \tilde{c}_1 , \tilde{c}_2 , \tilde{t}_1 und \tilde{t}_2 , für die down-artigen \tilde{d}_1 , \tilde{d}_2 , \tilde{s}_1 , \tilde{s}_2 , \tilde{b}_1 und \tilde{b}_2 genannt werden. Für die geladenen Sleptonen erhält man \tilde{e}_1 , \tilde{e}_2 , $\tilde{\mu}_1$, $\tilde{\mu}_2$, $\tilde{\tau}_1$ und $\tilde{\tau}_2$, für die Sneutrinos $\tilde{\nu}_1$, $\tilde{\nu}_2$ und $\tilde{\nu}_3$. Eine 3×3 - und drei 6×6 -Matrizen mischen die Wechselwirkungseigenzustände zu den physikalischen Masseneigenzuständen.

Die Eichmultipletts, manchmal auch *Vektormultipletts* genannt, sind in Tab. 2.2 dargestellt. Die letzte Spalte bezieht sich analog zu Tab. 2.1 auf die Eichgruppe. Wie im SM mischen B^0 und W^0 zu *Photon* und *Z-Boson*. Weiterhin ergeben \widetilde{W}^\pm , \widetilde{H}_d^- und \widetilde{H}_u^+ zusammen die *Charginos* $\widetilde{\chi}_{1,2}^\pm$. \widetilde{B}^0 , \widetilde{W}^0 , \widetilde{H}_u^0 und \widetilde{H}_d^0 mischen zu den *Neutralinos* $\widetilde{\chi}_{1,2,3,4}^0$. Eine niedrigere Zahl im Index bedeutet dabei ein leichteres Teilchen. Da kein anderer Zustand die gleichen Quantenzahlen hat wie das Gluino, mischt der Superpartner des *Gluons* nicht.

Schreibt man nun alle eichinvarianten, renormierbaren Terme auf, die mittels der Eich- und chiralen Multipletts erzeugt werden können, so erhält man unter anderem Wechsel-

²Bei der CP -Transformation handelt es sich um die Hintereinanderausführung einer *Ladungs-* (C) und einer *Paritätstransformation* (P).

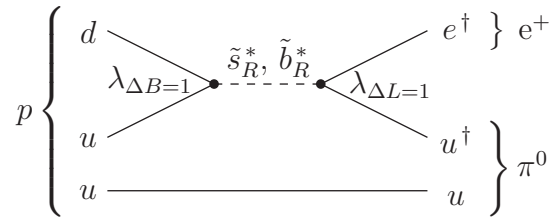


Abbildung 2.1: Feynman-Diagramm für den Zerfall des Protons $p \rightarrow \pi^0 e^+$ über ein virtuelles Squark. Die Kopplungen $\lambda_{\Delta B=1}$ und $\lambda_{\Delta L=1}$ verletzen die Baryonenzahl B sowie die Leptonenzahl L .

wirkungsterme, welche die *Baryonen-* und die *Leptonenzahl* verletzen. Die Baryonenzahl ist $B = +1/3$ für das Dublett Q , $B = -1/3$ für die Singulets \bar{u} und \bar{d} sowie $B = 0$ für alle anderen Multipletts. Die nicht-verschwindenden Leptonenzahlen sind $L = +1$ für das Lepton-Dublett – genannt L – und $L = -1$ für das Singulett \bar{e} . Läßt man nun L - und B -verletzende Terme zu, so öffnet dies neue Zerfallskanäle für das Proton. Wie man in Abb. 2.1 sieht, kann mittels einer die Baryonenzahl verletzenden Kopplung $\lambda_{\Delta B=1}$ sowie eines Vertex $\sim \lambda_{\Delta L=1}$, welcher die Leptonenzahl nicht erhält, das Proton p beispielsweise in ein *Pion* π^0 und ein *Positron* e^+ zerfallen. Jedoch sind zusätzlich eine Reihe anderer Zerfallsprozesse wie $p \rightarrow K^0 e^+$, $K^0 \mu^+$, $K^+ \nu \dots$ möglich, welche einen Protonenzerfall innerhalb von Bruchteilen einer Sekunde erlauben würden. Da dies mit einer gemessenen Lebensdauer von 10^{31-33} Jahren nicht vereinbar ist, müssen die entsprechenden Terme in der Lagrangedichte durch eine weitere Symmetrie verboten werden. Während die Forderung nach einer Erhaltung von B und L das Problem lösen würde, betrachtet man dies als einen Rückschritt hinter das SM. Ohne daß man es explizit fordert, existieren im SM keine Kopplungen mit $\Delta B, \Delta L \neq 0$. Deshalb definiert man im MSSM eine neue Quantenzahl

$$R = (-1)^{3(B-L)+2s} = \begin{cases} +1 & ; \text{ SM-Teilchen mit erweitertem Higgs-Sektor} \\ -1 & ; \text{ jeweilige Superpartner} \end{cases}, \quad (2.2)$$

die *R-Parität*, welche erhalten ist und somit ein stabiles Proton garantiert. Da es sich um eine multiplikative Quantenzahl handelt, können die unbekanntenen SUSY-Teilchen in Beschleunigern nur in einer geraden Anzahl erzeugt werden. Zudem ist unter den Zerfallsprodukten eines SUSY-Teilchens mindestens ein weiteres zu finden. Diese letzte Tatsache hat zur Folge, daß das leichteste Teilchen mit $R = -1$ absolut stabil ist. Dieses *leichteste supersymmetrische Teilchen* (LSP) muß elektrisch neutral und schwach wechselwirkend sein, wodurch es ein ernstzunehmender Kandidat für die nicht-baryonische dunkle Materie ist.

Aufgrund der bisher ergebnislosen Suche nach supersymmetrischen Teilchen muß SUSY gebrochen sein, was zu vielen Spekulationen über die Art der Brechung führte. Der Mechanismus der spontanen Symmetriebrechung wäre eine erste Möglichkeit für die Erzeugung der Massenaufspaltungen im MSSM. Geht man jedoch wie im SM vor, wo die Lagrange-

dichte unter der Eichsymmetrie invariant ist und der *Vakuumerwartungswert* (VEV) des Higgs-Teilchens diese bricht, erhält man Summenregeln für die Massen des MSSM, welche erneut experimentell ausgeschlossen sind. Daher nimmt man Folgendes an: SUSY ist in einem vom MSSM entkoppelten und dem Experiment unzugänglichen Sektor, dem “*unsichtbaren*” Sektor, gebrochen. Weiterhin gibt es einen Mechanismus der Kommunikation zwischen diesem und dem “*sichtbaren*” Sektor, dem MSSM. Hier kann die Symmetriebrechung entweder durch Gravitation vermittelt werden (*CMSSM*, *MSUGRA* und *AMSB*) oder durch elektroschwache bzw. starke Eichwechselwirkungen (*GMSB*).

Alle Herangehensweisen führen auf eine Form der Lagrangedichte mit einem Term $\mathcal{L}_{\text{SUSY}}$, welcher invariant ist unter einer SUSY-Transformation, und einem Term $\mathcal{L}_{\text{soft}}$, der die Symmetrie bricht

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{SUSY}} + \mathcal{L}_{\text{soft}}. \quad (2.3)$$

Auf eine Darstellung von $\mathcal{L}_{\text{SUSY}}$ wird hier verzichtet, diese kann jedoch in [2] gefunden werden. Die Feynman-Regeln für die benötigten Wechselwirkungen sind in Anhang A aufgelistet. Der Term $\mathcal{L}_{\text{soft}}$ enthält keine Terme mit dimensionslosen Kopplungskonstanten, da diese im Zusammenhang mit dem Hierarchie-Problem ungewollte quadratische Divergenzen verursachen und somit die Stabilität der Higgs-Masse gefährden. Die übrigen Terme mit Kopplungen positiver Massendimension nennt man “*weich*” (*soft*), sie erzeugen die Massen der bisher unentdeckten Teilchen. Für das MSSM erhält man

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{soft}} = & -\frac{1}{2} \left(M_3 \tilde{g}\tilde{g} + M_2 \widetilde{W}\widetilde{W} + M_1 \widetilde{B}\widetilde{B} + h.c. \right) \\ & - \left(\tilde{u} \mathbf{a}_u \tilde{Q} H_u - \tilde{d} \mathbf{a}_d \tilde{Q} H_d - \tilde{e} \mathbf{a}_e \tilde{L} H_d + h.c. \right) \\ & - \tilde{Q}^\dagger \mathbf{m}_Q^2 \tilde{Q} - \tilde{L}^\dagger \mathbf{m}_L^2 \tilde{L} - \tilde{u}^\dagger \mathbf{m}_u^2 \tilde{u} - \tilde{d}^\dagger \mathbf{m}_d^2 \tilde{d} - \tilde{e}^\dagger \mathbf{m}_e^2 \tilde{e} \\ & - m_{H_u}^2 H_u^* H_u - m_{H_d}^2 H_d^* H_d - (b H_u H_d + h.c.), \end{aligned} \quad (2.4)$$

wobei die Indizes bezüglich der Generationen weggelassen wurden. Neben den i.A. komplexen Gluino-, Wino- und Binomassentermen M_3 , M_2 und M_1 gibt es die 3×3 -Matrizen \mathbf{a}_u , \mathbf{a}_d und \mathbf{a}_e , welche die Dimension einer Masse haben, sowie \mathbf{m}_Q^2 , \mathbf{m}_L^2 , \mathbf{m}_u^2 , \mathbf{m}_d^2 und \mathbf{m}_e^2 . Letztere sind hermitesch und haben eine quadratische Massendimension wie die Terme des Higgs-Potentials $m_{H_u}^2$, $m_{H_d}^2$ und b .

Berechnet man nun die β -Funktionen des MSSM, welche das “*Laufen*” der drei Kopplungen mit den Energieskalen beschreiben, und vergleicht sie mit denen des SM, so gewinnt man einen weiteren Grund, welcher für die Existenz von SUSY spricht. Während sich die drei Kurven für das Laufen der inversen Kopplungen, zu welchen die Koeffizienten der β -Funktion auf dem Niveau einer Schleife direkt proportional sind, im SM nicht in einem Punkt treffen, ändert sich das Bild im MSSM grundlegend. Aufgrund der zusätzlichen Teilchen werden die Koeffizienten größer, und es resultiert daraus ein Schnittpunkt bei $M_{\text{GUT}} \approx 2 \cdot 10^{16}$. Während man dies einerseits als reinen Zufall betrachten kann, läßt sich

andererseits festhalten, daß das MSSM genau den richtigen Teilcheninhalt besitzt, um die Vereinheitlichung der drei Kopplungen bei sehr hohen Energien zu ermöglichen, welche zu Theorien der *Großen Vereinheitlichung* (GUT) führen.

Der Mechanismus der elektroschwachen Symmetriebrechung $SU(2)_L \otimes U(1)_Y \rightarrow U(1)_{\text{em}}$ ist im MSSM deutlich komplizierter als im SM. Im MSSM kommen zwei Higgs-Dubletts vor, und man braucht eine Reihe von Bedingungen, um den beiden neutralen Feldern H_d^0 und H_u^0 einen von Null verschiedenen VEV zu geben. Deren Summe ist zwar durch die Phänomenologie festgelegt $v^2 = v_u^2 + v_d^2 = \langle H_u^0 \rangle^2 + \langle H_d^0 \rangle^2 \approx (174 \text{ GeV})^2$, jedoch ist deren Verhältnis ein freier Parameter $\tan \beta \equiv v_u/v_d$. Wie im SM erhält man letztendlich die massiven Eichbosonen W^\pm, Z^0 und das masselose Photon γ sowie darüber hinaus eine schwerwiegende Einschränkung für das MSSM. Die Masse des leichtesten, neutralen Higgs-Teilchens h_0 hat eine obere Schranke und muß in der führenden Ordnung kleiner sein als³ $m_Z = 91.19 \text{ GeV}$. Da die Suche nach dem Higgs-Boson am LEP2 Experiment erfolglos blieb, kommt der Berechnung der Schleifenkorrekturen hier eine besondere Bedeutung zu. Schon die Korrekturen der ersten Ordnung bewirken für Stopmassen, welche viel größer sind als die ihrer Superpartner, einen großen, positiven Beitrag zur Masse m_{h_0} , die nun die Ausschlußgrenze von LEP2 – $m_{h_0} > 114 \text{ GeV}$ – übertreffen kann.

Im folgenden Abschnitt werden die grundlegenden Eigenschaften der für diese Arbeit wichtigen Gluinos und Squarks sowie deren Zerfallskanäle diskutiert.

2.2 Gluinos und Squarks

Neben den sechs bekannten Quarks und dem masselosen Austauscheteilchen der starken Wechselwirkung, dem Gluon, gibt es im MSSM zwei weitere Arten von stark wechselwirkenden Teilchen, die Squarks und das Gluino. Letzteres ist ein Farboktett und daher einzigartig unter den SUSY-Teilchen, wodurch Massen- und Wechselwirkungseigenzustand zusammenfallen. Nimmt man an, daß sich die Massen des Gluinos M_3 , des Winos M_2 und des Binos M_1 genau wie die drei Eichkopplungen bei M_{GUT} vereinigen, so erhält man bei einer beliebigen Skala den bis auf Schleifenkorrekturen gültigen Zusammenhang

$$M_3 = \frac{\alpha_s}{\alpha} \sin^2 \theta_W M_2 = \frac{3}{5} \frac{\alpha_s}{\alpha} \cos^2 \theta_W M_1. \quad (2.5)$$

Hieraus resultiert bei der TeV-Skala die grobe Abschätzung $M_1 : M_2 : M_3 \approx 1 : 2 : (6-7)$. Daher wird angenommen, daß das Gluino deutlich schwerer ist als die Neutralinos und Charginos. Während M_3 der Parameter einer laufenden Masse ist, definiert $m_{\tilde{g}}$ die unter der Renormierungsgruppe invariante Größe, bei der der renormierte Propagator des Gluinos seinen Pol hat.

Darüber hinaus ist das Gluino wie auch das Gluon sein eigenes Antiteilchen. Da es sich bei dem Gluino um ein Fermion mit Spin $s = 1/2$ handelt, ist es ein *Majorana-Fermion*.

³Für Fließkommazahlen wird in dieser Arbeit durchgehend die englische Darstellung verwendet.

Diese Sorte von Teilchen gibt es im SM nicht, man denkt lediglich darüber nach, ob die massiven Neutrinos eine Majorana-Natur haben.

Wie bereits erwähnt wurde, gibt es zwei 6×6 -Mischungsmatrizen für die Squarks gleicher Ladung, deren Diagonalisierung zu den Masseneigenzuständen führt. Da jedoch innerhalb des MSSM die Beiträge zu “*Flavour-verändernden*” Prozessen⁴ zu groß wären, müssen die entsprechenden außerdiagonalen Terme der Mischungsmatrizen klein sein. Man setzt also in Gl. (2.4) die quadratischen Massenterme proportional zur Einheitsmatrix $\mathbf{m}_x^2 = m_x^2 \mathbf{1}$ und die soften Kopplungen proportional zu den *Yukawa-Kopplungen* $\mathbf{a}_x = a_x \mathbf{y}_x$, wodurch die Wechselwirkungen der ersten beiden Generationen unterdrückt werden. Die Yukawa-Terme \mathbf{y}_u , \mathbf{y}_d und \mathbf{y}_e sowie der “ μ -Term” des Higgs-Potentials, der die Dimension einer Masse hat, kommen aus $\mathcal{L}_{\text{SUSY}}$.

Die Anzahl der Flavour-verändernden Terme im MSSM ist a priori sehr groß und mit der kaum sichtbaren Abweichung vom CKM-Mechanismus des SM nicht vereinbar. Die Proportionalität zu den Yukawa-Termen – auch *Minimale Flavour-Verletzung* (MFV) genannt – stellt eine Lösung dieses Problems dar. Beinahe alle der Mischungswinkel für den Squarksektor sind dadurch sehr klein. Lediglich für die dritte Generation erwartet man aufgrund der großen Yukawa-Terme Mischungen innerhalb der Paare $(\tilde{t}_L, \tilde{t}_R)$ und $(\tilde{b}_L, \tilde{b}_R)$. Daher benutzt man hier die physikalischen Massen \tilde{b}_1 , \tilde{b}_2 , \tilde{t}_1 und \tilde{t}_2 , während für die ersten beiden Generationen aufgrund der fehlenden Mischungen die Indizes L und 1 bzw. R und 2 synonym für den Massen- als auch den Wechselwirkungseigenzustand benutzt werden.

2.3 Massenspektren

Die Details der Massenspektren des MSSM hängen von einem speziellen Mechanismus der soften Symmetriebrechung ab. Es gibt jedoch eine Reihe von Übereinstimmungen der meisten Modelle. Diese kommen teilweise direkt aus der Theorie oder stammen von Beschränkungen innerhalb der bekanntesten Modelle der SUSY.

Sofern das Gravitino nicht leichter ist, wird meist angenommen, daß das leichteste Neutralino χ_1^0 das LSP ist. Es hängt dann von der speziellen Wahl der Parameter ab, ob es sich bei χ_1^0 um ein Teilchen handelt, welches einen großen Anteil des Binos besitzt, ob es Wino-artig ist oder ob die Higgsinos die größte Rolle bei der Mischung spielen.

Das Gluino ist deutlich schwerer als die leichteren Neutralinos und Charginos, seine Masse ist jedoch aufgrund der *Renormierungsgruppenevolution* (RGE) niemals deutlich größer als die der Squarks der ersten beiden Generationen. Letztere haben in etwa gleich große Massen, nur für die dritte Generation gibt es große Massenaufspaltungen, \tilde{t}_1 sowie \tilde{b}_1 sind die leichtesten Squarks.

Die Sleptonen verhalten sich ähnlich, d.h. das $\tilde{\tau}_1$ hat die geringste Masse. Insgesamt sind die Sleptonen jedoch deutlich leichter als die Squarks. Das leichteste neutrale Higgs-Boson

⁴Mit “*Flavour*” wird die Quantenzahl der Quarks bezeichnet, welche sie in u, d, c, s, t und b unterteilt.

h^0 hat eine Masse unterhalb von 150 GeV, die anderen Higgs-Teilchen sind deutlich schwerer.

Es gibt jedoch auch Relationen, die von Modell zu Modell verschieden sind. So kann das Gluino zwar leicht schwerer sein als die Squarks, es ist aber auch möglich, daß die leichtesten Squarks eine größere Masse haben als $m_{\tilde{g}}$. Um nun konkrete Aussagen über alle Massen des MSSM machen zu können, benutzt man eines der speziellen Modelle für den Mechanismus der soften SUSY-Brechung, in welchem die Massen und Mischungswinkel durch wenige Parameter bestimmt werden. Für MSUGRA fordert man beispielsweise an der GUT-Skala folgende Größen:

$$\begin{aligned}
m_{1/2} &= M_1 = M_2 = M_3, \\
m_0 &= m_{H_u}^2 = m_{H_d}^2 = m_Q^2 = m_L^2 = m_u^2 = m_d^2 = m_e^2, \\
A_0 &= a_u = a_d = a_e, \\
\tan \beta &, \\
\text{sign } \mu &.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Die Werte für b und $|\mu|$ (vgl. Gl. (2.4)) werden durch die Masse des Z -Bosons an der elektroschwachen Skala bestimmt. Das gesamte Massenspektrum erhält man nun durch die Wahl der fünf Parameter aus Gl. (2.6) und das anschließende Laufen bis zur gewünschten Skala. Dies ist in Abb. 2.2 illustriert, man erhält für die bei der hohen Skala $Q_0 = 2.5 \cdot 10^{16}$ GeV gegebenen Parameter $m_{1/2} = 250$ GeV, $m_0 = 80$ GeV, $A_0 = -500$ GeV, $\tan \beta = 10$ und $\text{sign } \mu = 1$ bei einer beliebigen, tiefen Skala das Massenspektrum des MSSM. Neben den schon erwähnten Merkmalen kann man erkennen, daß das Gluino für die spezielle Wahl der fünf Parameter aus Gl. (2.6) das schwerste Teilchen ist und die meisten der Squarks etwa die gleiche Masse besitzen. Man kann hier weiterhin sehr gut sehen, daß $\mu^2 + m_{H_u}^2$ negativ wird ab ca. 500 GeV und die elektroschwache Symmetriebrechung hervorruft. Der Unterschied zur anderen grünen Kurve läßt sich durch den negativen Effekt der großen Yukawa-Kopplungen erklären. Hat man nun die Massen der Teilchen bestimmt, ist der nächste Schritt die Bestimmung ihrer Zerfallsbreiten.

2.4 Zerfallskanäle von Gluinis und Squarks

Die Zerfallsbreiten der supersymmetrischen Teilchen hängen entscheidend von den Relationen zwischen den Massen ab. So zerfällt das Gluino, wie in Abb. 2.3(a) gezeigt, hauptsächlich in ein Quark und ein Squark mit dem anschließenden Zerfall des Squarks, falls der Prozess $\tilde{g} \rightarrow \bar{q}\tilde{q}, q\tilde{q}^*$ kinematisch erlaubt ist. Es handelt sich um einen Zerfall in zwei Teilchen, in welchem nur die starke Kopplungskonstante α_s vorkommt. Man erwartet also eine sehr große Zerfallsbreite und erhält unter Vernachlässigung der Quarkmassen [3]

$$\Gamma(\tilde{g} \rightarrow \bar{q}\tilde{q}) + \Gamma(\tilde{g} \rightarrow q\tilde{q}^*) = \frac{\alpha_s m_{\tilde{g}}}{4} \left(1 - \frac{m_{\tilde{q}}^2}{m_{\tilde{g}}^2}\right)^2, \tag{2.7}$$

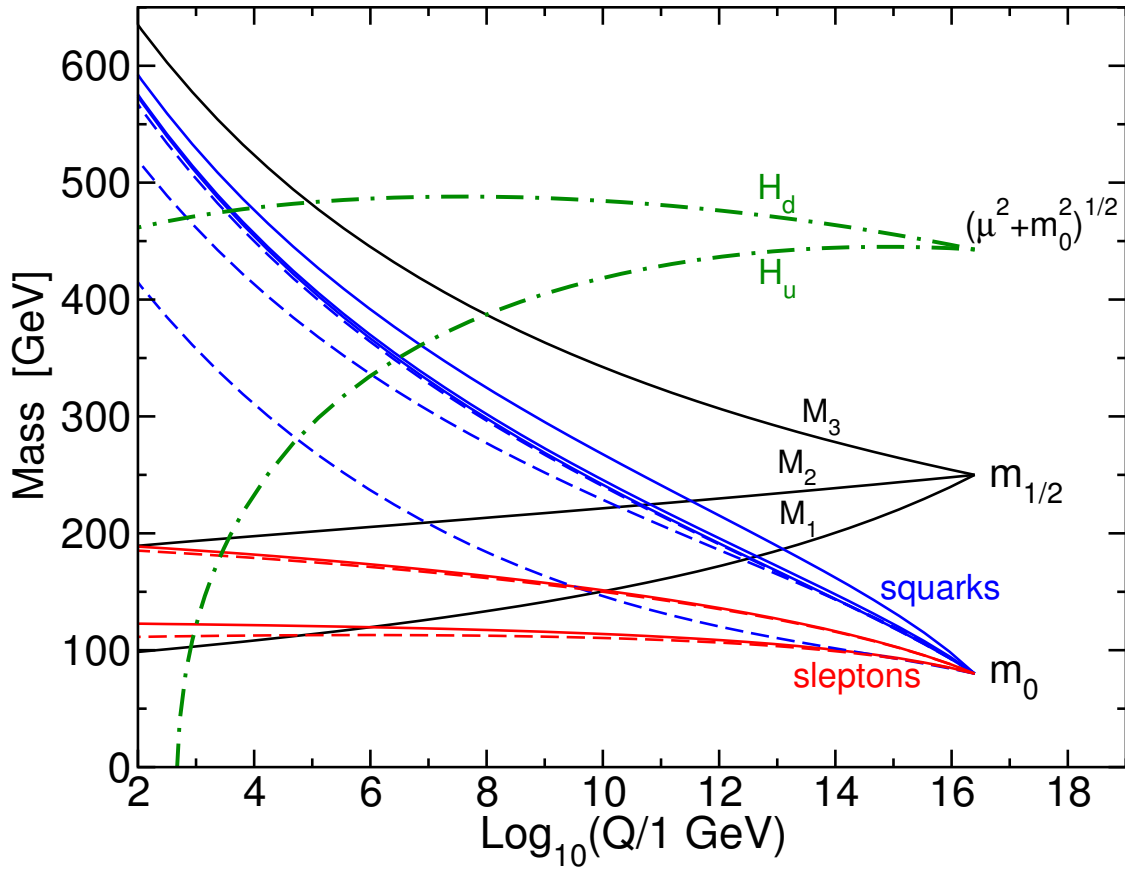


Abbildung 2.2: RGE der Massenparameter innerhalb von MSUGRA in Abhängigkeit von der logarithmisch aufgetragenen Skala. Die laufenden Massen M_1 , M_2 und M_3 sind gegeben durch die schwarzen Kurven, die grünen Kurven gehören zu den Größen $(\mu^2 + m_{H_u})^2$ und $(\mu^2 + m_{H_d})^2$, welche im Higgs-Potential vorkommen. Die restlichen Kurven stellen das Laufen der Massen der Squarks (blau) und Sleptonen (rot) dar, wobei die dritte Generation jeweils gestrichelt ist. Die Abbildung stammt aus [2].

mit der generischen Squarkmasse $m_{\tilde{q}}$. Ist dieser Zerfallskanal kinematisch nicht möglich, so dominieren die Drei-Teilchen-Kanäle $\bar{q}q\tilde{\chi}^0$ und $\bar{q}q'\tilde{\chi}^\pm$ mit einem virtuellen Squark den Zerfall des Gluinos. Die Breite ist dann im Vergleich zum Zwei-Teilchen-Zerfall um eine elektroschwache Kopplung α sowie den *Phasenraumfaktor* unterdrückt und daher deutlich geringer. Die Breite wurde in [4] berechnet, wobei die Mischung der Neutralinos weggelassen wurde. Somit ist das Photino $\tilde{\gamma}$, der Superpartner des Photons, hier das LSP, dessen Massenverhältnis zum Gluino durch $\sigma = m_{\tilde{\gamma}}/m_{\tilde{g}}$ gegeben ist. Weiterhin wurden die Massen der Quarks auf Null gesetzt, und in den Nennern der Squark-Propagatoren (siehe Abb. 2.3(b) und (c)) wurde die quadratische Impulsinformation aufgrund der großen Squarkmasse weggelassen. Daraus resultiert

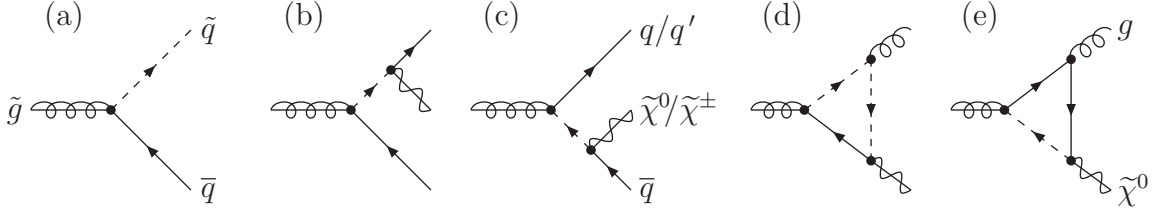


Abbildung 2.3: Zum Zerfall des Gluinors beitragende Feynman-Diagramme.

$$\begin{aligned}
\Gamma(\tilde{g} \rightarrow \bar{q}q\tilde{\gamma}) &= \sum_q \frac{\alpha_s \alpha e^2 m_{\tilde{g}}^5}{96\pi} \left(\frac{1}{m_{\tilde{q}_1}^4} + \frac{1}{m_{\tilde{q}_2}^4} \right) \\
&\times \left[(1 - \sigma^2)(1 + 2\sigma - 7\sigma^2 + 20\sigma^3 - 7\sigma^4 + 2\sigma^5 + \sigma^6) \right. \\
&\quad \left. + 24\sigma^3(1 - \sigma + \sigma^2) \ln \sigma \right] \\
&\xrightarrow{\sigma \rightarrow 0} \left(\sum_q e_q^2 \right) \frac{\alpha_s \alpha m_{\tilde{g}}^5}{48\pi m_{\tilde{q}}^4} \approx 10 \text{ MeV} \left[\frac{m_{\tilde{g}}^5}{m_{\tilde{q}}^4 \text{ TeV}} \right]. \quad (2.8)
\end{aligned}$$

Das Ergebnis unter Erhaltung der vollen Impulsinformation im Nenner ist in Anhang B in Gl. (B.1) zu finden sowie auch ein Vergleich zwischen den Approximationen und dem vollständigen Resultat. Die Näherung in Gl. (2.8) ist jedoch für die betrachteten Szenarien ausreichend gut, und man sieht, daß für SUSY-Massen von $\mathcal{O}(1 \text{ TeV})$ die Zerfallsbreite im MeV-Bereich liegt und somit deutlich geringer ist als für den zuvor diskutierten Zerfall in zwei Teilchen. Die Beiträge der Diagramme (d) und (e) aus Abb. 2.3 spielen keine Rolle.

Für das Squark sieht die Sache ein wenig anders aus. Zwar hat man unter der Annahme $m_{\tilde{q}} > m_{\tilde{g}} + m_q$ wieder einen Zwei-Teilchen-Zerfall $\tilde{q} \rightarrow \tilde{g}q$ (siehe Abb. 2.4(a)), dessen Breite nur zu einer starken Kopplung proportional ist. Unter erneuter Vernachlässigung der Quarkmassen erhält man [3]

$$\Gamma(\tilde{q}_i \rightarrow q\tilde{g}) = \frac{2\alpha_s m_{\tilde{q}_i}}{3} \left(1 - \frac{m_{\tilde{g}}^2}{m_{\tilde{q}_i}^2} \right)^2, \quad (2.9)$$

wobei $i \in \{1, 2\}$ wie auch im Folgenden der Squarkindex ist. Falls er kinematisch erlaubt ist, dominiert dieser Kanal den Zerfall. Ist er jedoch verboten, steht ein weiterer Zerfall in zwei Teilchen zur Verfügung. Das Squark geht über in ein Quark und ein Neutralino bzw. Chargino. Dieser in Abb. 2.4(b) dargestellte Kanal wurde unter den gleichen Voraussetzungen wie für das Gluino (siehe Diskussion vor Gl. (2.8)) berechnet, man erhält

$$\Gamma(\tilde{q}_i \rightarrow q\tilde{\gamma}) = \frac{\alpha e_q^2 m_{\tilde{q}_i}}{6} \left(1 - \frac{m_{\tilde{\gamma}}^2}{m_{\tilde{q}_i}^2} \right)^2. \quad (2.10)$$

Der Unterdrückungsfaktor gegenüber dem starken Zerfall ist $\sim 10^{-3 \dots -2}$. Dadurch sind die beim Gluino relativ kleinen Zerfallsbreiten im MeV-Bereich und darunter für das Squark

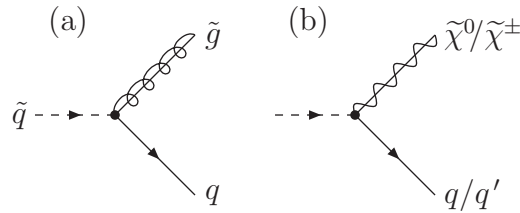


Abbildung 2.4: Feynman-Diagramme, die zum Zerfall des Squarks beitragen.

nicht zu erwarten. Sie liegen hingegen im Bereich weniger GeV und darüber. Aufgrund der fehlenden schwachen Kopplung der rechtshändigen Squarks sind ihre Zerfallsbreiten durchgehend kleiner als die der linkshändigen.

Aus dem bisher Erwähnten kann man für die möglichen Signale von SUSY an Beschleunigern die wesentlichen Punkte folgern: Die supersymmetrischen Teilchen werden aufgrund der erhaltenen R -Parität in Paaren erzeugt. Jedes einzelne zerfällt in einer Kaskade wie in Abb. 2.3(b) in das LSP und in Teilchen des SM. Bei letzteren handelt es sich um Leptonen sowie *Jets*. Diese sind durch Quarks oder Gluonen induzierte Bündelungen von Teilchen, welche durch die starke Wechselwirkung in viele, andere Teilchen *hadronisieren*⁵. Das LSP ist stabil, wechselwirkt nicht und entkommt somit ungesehen dem Detektor. In der Impulsbilanz fehlt dadurch die von den LSP's fortgetragene Energie. An Hadron-Beschleunigern interessiert man sich dennoch nur für die fehlende Energie der Impulse transversal zur Achse der einfallenden Teilchen. Insgesamt erhält man dann für eine typische SUSY-Signatur das in Abb. 2.5 dargestellte Bild. Es zeigt eine mögliche Zerfallskette für die hadronische Produktion eines Squarks und eines Gluinos. Genau wie bei der Produktion zweier Gluinos erhält man Endzustände, bestehend aus n Jets und m Leptonen mit *fehlender transversaler Energie* \cancel{E}_T .

Hier wird eine der größten Schwierigkeiten bei der experimentellen Untersuchung von SUSY deutlich. Neben Signalen, die per se schon schwer rekonstruierbar sind, treten eine Reihe von Hintergrundereignissen auf, welche die gleichen Endzustände haben und daher vom Signal separiert werden müssen. Für die konkreten Fälle des LHC und des Tevatrons heißt dies, daß – falls SUSY existiert und falls sie in einem dem Beschleuniger zugänglichen Bereich auftritt – es viele Überlegungen und Anstrengungen und vor allen Dingen viel Zeit brauchen wird, bis die Theorie nachgewiesen werden kann. Aus den gleichen Gründen ist auch ein Ausschluß von SUSY nicht innerhalb kürzerer Zeit zu erwarten.

Während die bisher vorgenommenen Aussagen über die Zerfallsbreiten von Gluinos und Squarks eher abschätzenden Charakter hatten, widmet sich der nächste Abschnitt der konkreten Untersuchung des MSSM. Es wird ein spezielles Szenario für den Brechungsmechanismus ausgewählt. Außerdem werden ausgehend von einer kleinen Menge von Parametern die Massen des MSSM berechnet, die Zerfallskanäle der Teilchen bestimmt und numerische Werte für die Breiten ermittelt.

⁵Mit Hadronisierung bezeichnet man die Formation von aus Quarks zusammengesetzten Teilchen.

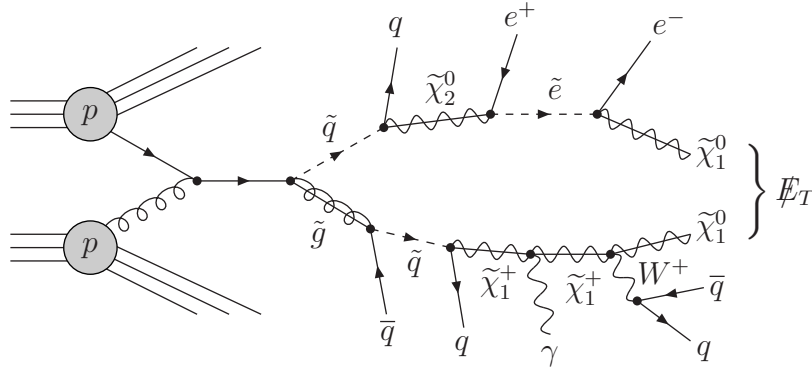


Abbildung 2.5: Feynman-Diagramm für die Zerfallskette eines typischen SUSY-Prozesses.

2.5 Zerfallsbreiten im MSSM

Um exakte Vorhersagen für die Zerfallsbreite des Gluinos machen zu können, benötigt man einen großen Teil der über 100 Parameter des MSSM. Da dies unter anderem die Vergleichbarkeit von Rechnungen und Analysen erschwert, wurden im Jahr 2001 die “*Snowmass Points and Slopes*” (SPS) [5] vorgeschlagen. Sie entsprechen einer festgelegten Auswahl von Punkten im Parameterraum des MSSM sowie einer vorgeschriebenen Variation dieser. Auch in dieser Arbeit werden die Parameter der SPS verwendet, wobei ausschließlich der MSUGRA-Brechungsmechanismus benutzt wird. Somit stehen die ersten fünf Szenarien der SPS zur Verfügung, wobei derer drei variiert werden können.

Die verwendeten Szenarien werden definiert über die 26 Sätze von jeweils fünf MSUGRA-Parametern und sind dargestellt in Anhang C in Tab. C.1. Das Programm *SuSpect* [6] wird benutzt, um das Massenspektrum des MSSM über das Laufen der entsprechenden Parameter von der hohen Skala, bei der sich die drei Eichkopplungen vereinigen, zur tiefen Skala der elektroschwachen Symmetriebrechung zu berechnen. Die Resultate für die Massen der zwölf Squarks bei der tiefen Skala sind gegeben in den Tab. C.2 und C.3. Die Gluinomasse sowie die gemittelte Squarkmasse können in Tab. 2.3 gefunden werden. Hierin enthalten sind auch die mittels *SDECAY* [7] berechnete, doppelte Zerfallsbreite des Gluinos $2\Gamma_{\tilde{g}}$, die dominanten Zerfallskanäle, die im folgenden erklärten Größen der Anregungsenergie des gebundenen Systems zweier Gluinos $\Delta M_{\tilde{g}\tilde{g}}$, sowie dessen Annihilationszerfallsbreite Γ_{gg} und die dadurch definierte Klasse.

Betrachtet man dieses gebundene System, so ist dessen gesamte Zerfallsbreite gegeben durch

$$\Gamma_{\tilde{g}\tilde{g}} = 2\Gamma_{\tilde{g}} + \Gamma_{gg}, \quad (2.11)$$

wobei der Index gg den Hauptzerfallskanal kennzeichnet. Des weiteren ist $\Delta M_{\tilde{g}\tilde{g}}$ definiert durch die Differenz in der Bindungsenergie zwischen dem Grundzustand und seiner ersten Anregung. In Kapitel 4 wird die Berechnung der beiden Größen diskutiert.

Szenario	$m_{\tilde{g}}$ [GeV]	$\overline{m}_{\tilde{q}}$ [GeV]	$\Delta M_{\tilde{g}\tilde{g}}$ [GeV]	$2\Gamma_{\tilde{g}}$ [GeV]	Γ_{gg} [GeV]	Klasse	dominierender Zerfallskanal
(a)	606.11	541.04	13.74	9.08	0.39	B	$\tilde{g} \rightarrow \tilde{b}_1\bar{b}, \tilde{b}_1^*b$
(b)	493.05	443.19	11.78	6.28	0.36	B	$\tilde{g} \rightarrow \tilde{c}_2\bar{c}, \tilde{u}_2^*u$
(c)	381.45	344.04	9.75	5.20	0.32	B	$\tilde{g} \rightarrow \tilde{b}_1\bar{b}, \tilde{b}_1^*b$
(d)	717.12	637.39	15.58	12.00	0.42	B	$\tilde{g} \rightarrow \tilde{b}_1\bar{b}, \tilde{b}_1^*b$
(e)	826.71	732.62	17.35	14.92	0.45	B	$\tilde{g} \rightarrow \tilde{t}_1\bar{t}, \tilde{t}_1^*t$
(f)	935.18	826.94	19.05	17.84	0.47	B	$\tilde{g} \rightarrow \tilde{b}_1\bar{b}, \tilde{b}_1^*b$
(g)	1042.60	920.35	20.69	20.70	0.50	C	$\tilde{g} \rightarrow \tilde{t}_1\bar{t}, \tilde{t}_1^*t$
(h)	1149.42	1013.25	22.29	23.52	0.52	C	$\tilde{g} \rightarrow \tilde{t}_1\bar{t}, \tilde{t}_1^*t$
(i)	936.42	831.88	19.07	16.38	0.47	B	$\tilde{g} \rightarrow \tilde{b}_1\bar{b}, \tilde{b}_1^*b$
(j)	802.21	1462.40	16.96	0.0080	0.44	A	$\tilde{g} \rightarrow \tilde{\chi}_2^+b\bar{t}, \tilde{\chi}_2^-t\bar{b}$
(k)	685.31	1340.07	15.06	0.0044	0.41	A	$\tilde{g} \rightarrow \tilde{\chi}_2^0b\bar{b}$
(l)	566.65	1219.50	13.06	0.0020	0.38	A	$\tilde{g} \rightarrow \tilde{\chi}_2^0b\bar{b}$
(m)	445.23	1101.50	10.92	0.00086	0.34	A	$\tilde{g} \rightarrow \tilde{\chi}_1^+d\bar{u}, \tilde{\chi}_1^-c\bar{s}$
(n)	319.59	987.34	8.56	0.0002	0.30	A	$\tilde{g} \rightarrow \tilde{\chi}_1^+d\bar{u}, \tilde{\chi}_1^-c\bar{s}$
(o)	917.28	1585.83	18.77	0.014	0.47	A	$\tilde{g} \rightarrow \tilde{\chi}_1^0t\bar{t}$
(p)	1030.98	1710.01	20.51	0.022	0.49	A	$\tilde{g} \rightarrow \tilde{\chi}_2^+b\bar{t}, \tilde{\chi}_2^-t\bar{b}$
(q)	1255.61	1959.83	23.85	0.044	0.54	A	$\tilde{g} \rightarrow \tilde{\chi}_2^+b\bar{t}, \tilde{\chi}_2^-t\bar{b}$
(r)	933.03	819.58	19.01	19.26	0.47	C	$\tilde{g} \rightarrow \tilde{t}_1\bar{t}, \tilde{t}_1^*t$
(s)	715.43	631.86	15.56	13.06	0.42	B	$\tilde{g} \rightarrow \tilde{b}_1\bar{b}, \tilde{b}_1^*b$
(t)	493.63	439.69	11.79	7.66	0.36	B	$\tilde{g} \rightarrow \tilde{b}_1\bar{b}, \tilde{b}_1^*b$
(u)	1146.74	1003.95	22.25	25.32	0.52	C	$\tilde{g} \rightarrow \tilde{t}_1\bar{t}, \tilde{t}_1^*t$
(v)	1357.19	1185.47	25.31	29.12	0.56	C	$\tilde{g} \rightarrow \tilde{t}_1\bar{t}, \tilde{t}_1^*t$
(w)	1564.96	1364.42	28.25	41.30	0.60	C	$\tilde{g} \rightarrow \tilde{t}_1\bar{t}, \tilde{t}_1^*t$
(x)	1770.98	1541.57	31.08	48.76	0.64	C	$\tilde{g} \rightarrow \tilde{t}_1\bar{t}, \tilde{t}_1^*t$
(y)	734.11	714.46	15.86	3.48	0.42	B	$\tilde{g} \rightarrow \tilde{b}_1\bar{b}, \tilde{b}_1^*b$
(z)	719.66	618.86	15.63	22.92	0.42	C	$\tilde{g} \rightarrow \tilde{t}_1\bar{t}, \tilde{t}_1^*t$

Tabelle 2.3: Vergleich der Gluinomassen, gemittelten Squarkmassen, Gluinonium-Anregungsenergien, Einzelzerfallsbreiten des Gluinos, Annihilationszerfallsbreiten und dominanter Zerfallskanäle für 26 SPS-Punkte definiert in Anhang C, Tab. C.1.

Handelt es sich um ein Massenspektrum, in dem die Zerfallsbreite des Gluinos klein ist und der Relation $2\Gamma_{\tilde{g}} < \Gamma_{gg}$ genügt, was der Definition von Klasse A entspricht, so ist der Zerfall des Systems zweier Gluinos dominiert durch Annihilation. Die Gluinos sind näherungsweise stabil, und ihre Lebensdauer reicht aus, um Bindungszustände miteinander einzugehen, welche hadronisch zerfallen. Die gebundenen Zustände werden *Gluinonia* genannt und in Kapitel 4 genauer untersucht.

Gilt hingegen $\Gamma_{gg} < 2\Gamma_{\tilde{g}} < \Delta M_{\tilde{g}\tilde{g}}$, so liegt die Zerfallsbreite des Gluinos in Klasse B. Die Konstituenten zerfallen, bevor sie annihilieren können, und es ist praktisch unmöglich, die Zerfallsprodukte von gebundenen und ungebundenen Gluinos zu unterscheiden. Die Produktion des Gluinopaars an der Schwelle wird beeinflusst von attraktiven sowie repulsiven Wechselwirkungen zwischen den Teilchen. Solange $\Delta M_{\tilde{g}\tilde{g}}$ die obere Grenze ist, kann man im differentiellen Wirkungsquerschnitt wenigstens die Resonanz des am stärksten gebundenen Grundzustands auflösen.

Ist die Zerfallsbreite des Gluinos auch hierfür zu groß, so gilt $\Delta M_{\tilde{g}\tilde{g}} < 2\Gamma_{\tilde{g}}$ (Klasse C), und die eben beschriebenen Strukturen sind nicht oder nur kaum zu erkennen. Auch hier ist eine Verstärkung oder eine Abschwächung des Wirkungsquerschnitts in der Schwellenregion zu erkennen, die von der Wechselwirkung innerhalb des Zwei-Gluino-Systems herrührt. Kapitel 5 wird sich im Detail mit den Klassen B und C beschäftigen.

Der Zusammenhang zwischen Γ_{gg} , $2\Gamma_{\tilde{g}}$ und $\Delta M_{\tilde{g}\tilde{g}}$ ist in Abb. 2.6 veranschaulicht. Während in (a) die Massen der Squarks auf eine generische Masse gesetzt werden und diese die Werte $m_{\tilde{q}} = 0.5 \text{ TeV}, 1.0 \text{ TeV}$ und 1.5 TeV annimmt, sind in (b) die Verhältnisse zwischen $m_{\tilde{q}}$ und $m_{\tilde{g}}$ festgehalten ($\rho = m_{\tilde{g}}/m_{\tilde{q}} = 0.75, 0.90, 1.05, 1.25$). Hier ist sehr gut zu erkennen, daß die Berechnung mit den zuvor getroffenen Aussagen übereinstimmt: Für $m_{\tilde{g}} < m_{\tilde{q}}$ ist die Zerfallsbreite $\Gamma_{\tilde{g}}$ klein und wächst stark an, wenn die Relation invertiert wird. Insgesamt deckt $\Gamma_{\tilde{g}}$ einen sehr großen Bereich von mehreren Größenordnungen ab. Die für **SuSpect** und **SDECAY** verwendeten Parameter sind im ersten Schaubild dargestellt. Die Positionen der betrachteten SPS-Szenarios können in (c) gefunden werden. Es wird deutlich, daß alle drei Klassen für die Realisierung von SUSY in Frage kommen und eine genauere Untersuchung erfordern.

Eine weitere Analyse betrifft das System bestehend aus einem Gluino und einem Squark. Aufgrund der MFV beschränkt sich deren Produktion auf die erste Generation, da der Quarkinhalt der restlichen Flavours im Proton verschwindend gering ist. Gegenüber dem $\tilde{g}\tilde{g}$ -System ist die Klassifizierung hier weniger umfangreich. Die Tatsache, daß die Squarks unabhängig von $m_{\tilde{g}}$ eine recht große Zerfallsbreite besitzen, läßt keine Bindungszustände entsprechend der Klasse A zu. Der Zerfall des $\tilde{g}\tilde{q}$ -System ist bestimmt durch die Summe der Einzelzerfälle und die Annihilation spielt keine Rolle. In Tab. 2.4 sind für die bisher verwendeten Szenarien die Gluinomasse, die gemittelte Masse der Squarks der ersten Generation $\overline{m}_{\tilde{1}}$, die Summe von Squark- und Gluinozerfallsbreiten $\Gamma_{\tilde{g}} + \Gamma_{\tilde{q}_i}$ und die Anregungsenergie $\Delta \overline{M}_{\tilde{g}\tilde{q}}$ – bezüglich der gemittelten Masse $\overline{m}_{\tilde{1}}$ – eingetragen.

Während in den Szenarien (j)-(n) mit $m_{\tilde{g}} \ll \overline{m}_{\tilde{1}}$ die Zerfallsbreite des Gluinos sehr klein ist, wird $\Gamma_{\tilde{q}_i}$ aufgrund des offenen Kanals $\tilde{q}_i \rightarrow q\tilde{g}$ sehr groß. Wenn auch die Verstärkung

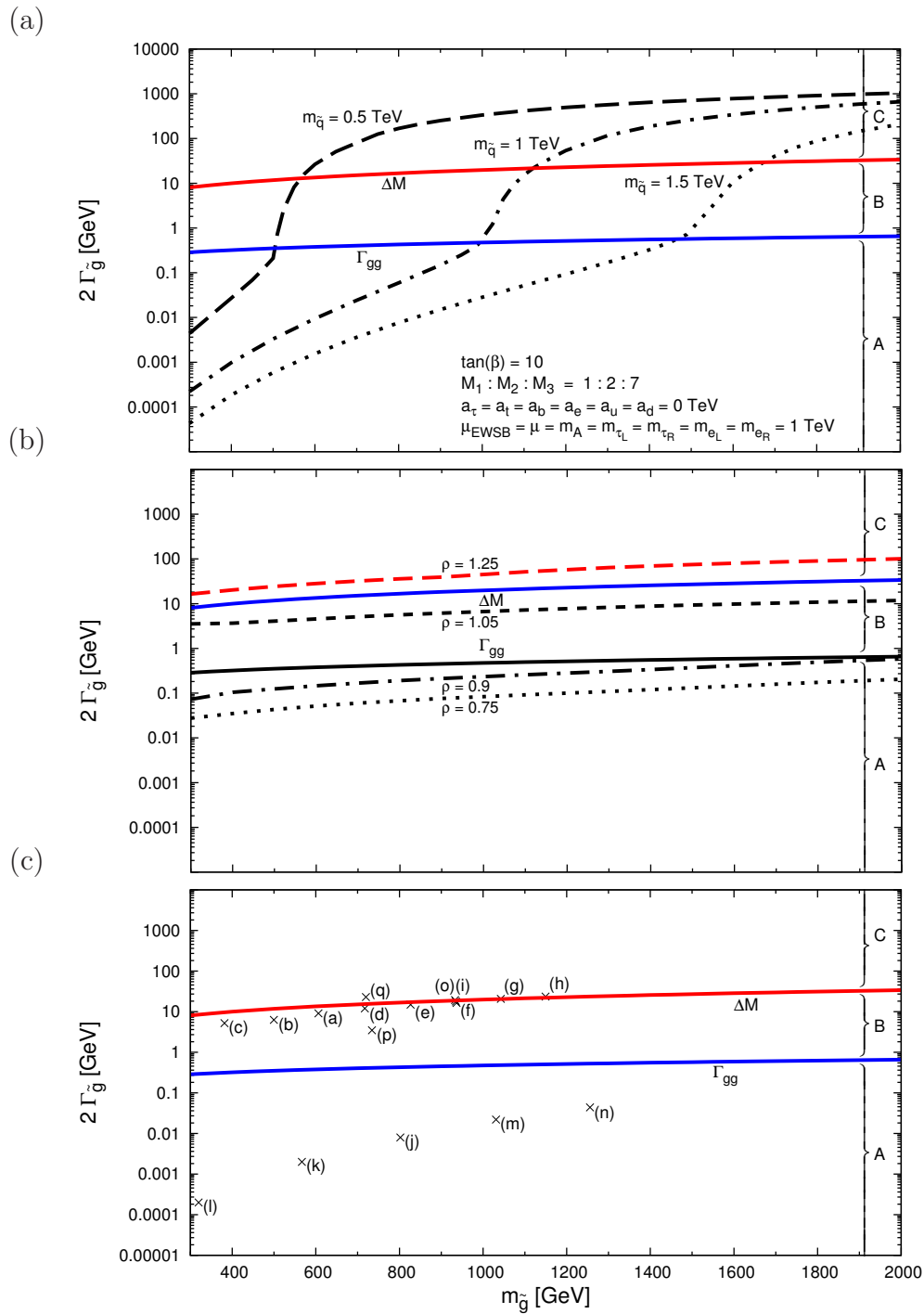


Abbildung 2.6: Zerfallsbreite des Gluinos (gestrichelte, strich-punktier- te Kurven sowie Kreuze), Anregungsenergie und Annihilationszerfallsbreite (rote und blaue durchgezogene Kurven) für verschiedene generische Squarkmassen (a), festgehal- tene Verhältnisse ($\rho = m_{\tilde{g}}/m_{\tilde{q}}$) (b) und für die SPS-Bezugswerte (c), siehe Tab. 2.3.

Szenario	$m_{\tilde{g}}$ [GeV]	$\bar{m}_{\tilde{1}}$ [GeV]	$\Gamma_{\tilde{g}} + \Gamma_{\tilde{u}_L}$ [GeV]	$\Gamma_{\tilde{g}} + \Gamma_{\tilde{u}_R}$ [GeV]	$\Gamma_{\tilde{g}} + \Gamma_{\tilde{d}_L}$ [GeV]	$\Gamma_{\tilde{g}} + \Gamma_{\tilde{d}_R}$ [GeV]	$\Delta\bar{M}_{\tilde{g}\tilde{q}}$ [GeV]
(a)	606.11	555.39	10.00	5.69	9.80	4.83	3.28
(b)	493.05	453.62	7.65	4.07	7.40	3.38	2.82
(c)	381.45	349.95	6.12	3.31	5.80	2.78	2.34
(d)	717.12	655.32	12.37	7.35	12.21	6.34	3.72
(e)	826.71	753.94	14.73	9.02	14.58	7.85	4.13
(f)	935.18	851.53	17.05	10.68	16.92	9.36	4.53
(g)	1042.60	948.11	19.33	12.31	19.22	10.84	4.91
(h)	1149.42	1044.12	21.57	13.91	21.47	12.29	5.29
(i)	936.42	859.67	16.42	9.97	16.28	8.63	4.55
(j)	802.21	1554.00	79.95	65.25	80.04	62.71	5.16
(k)	685.31	1426.01	79.50	66.01	79.60	63.71	4.83
(l)	566.65	1299.75	79.29	67.00	79.40	64.93	4.13
(m)	445.23	1175.93	79.28	68.15	79.39	66.30	3.69
(n)	319.59	1055.75	79.34	69.31	79.45	67.68	2.90
(o)	917.28	1683.04	80.62	64.69	80.71	61.92	5.83
(p)	1030.98	1812.80	81.51	64.35	81.59	61.35	6.08
(q)	1255.61	2073.80	83.80	64.20	83.87	60.71	6.95
(r)	933.03	841.02	17.63	11.36	17.50	10.06	4.50
(s)	715.43	647.36	12.81	7.86	12.63	6.86	3.83
(t)	493.63	448.42	8.28	4.75	8.03	4.06	2.92
(u)	1146.74	1030.96	22.32	14.79	22.22	13.19	5.45
(v)	1357.19	1217.78	25.81	17.07	25.73	15.18	6.18
(w)	1564.96	1401.84	33.37	21.37	33.45	23.54	6.89
(x)	1770.98	1583.99	38.70	27.65	38.63	25.20	7.57
(y)	734.11	753.47	9.59	3.34	9.52	2.17	3.95
(z)	719.66	664.46	17.96	12.85	17.87	11.82	3.74

Tabelle 2.4: Vergleich der Gluinomassen, der gemittelten Squarkmassen der ersten Generation, Summen der Einzelzerfallsbreiten von Gluinos und Squarks und Anregungsenergien für 26 SPS-Punkte definiert in Anhang C, Tab. C.1.

des differentiellen Wirkungsquerschnitts unterhalb der Schwelle aufgrund der attraktiven Wechselwirkung der Konstituenten gegeben ist, so können hier keine der Resonanzen aufgelöst werden. Bei den restlichen Szenarien sind die Einzelzerfallsbreiten ungefähr gleich groß wie die Anregungsenergie, weshalb Effekte ähnlich denen von Klasse B und der Grenzregion zu Klasse C des $\tilde{g}\tilde{g}$ -Systems erwartet werden. Das Interessante hierbei ist, daß die vier verschiedenen Schwellen für die Produktionen der $\tilde{g}\tilde{q}_i$ -Systeme der ersten Generation in etwa beieinander liegen, auch wenn die Zerfallsbreiten recht unterschiedlich sind.

Das folgende Kapitel wird technischer Natur sein und grundlegende Informationen über Bindungszustände enthalten. Denn aus dem Formalismus, welchen man für die Berechnung der Produktion von Bindungszuständen benötigt, kann man wichtige Aussagen über die Spektroskopie des entsprechenden Systems gewinnen.

Kapitel 3

Bindungszustände

Die Beschreibung von Bindungszuständen wird durch Beiträge von Effekten verschiedener Skalen erschwert. Während die Wechselwirkung zwischen den Konstituenten ein langreichweitiger Effekt ist, spielt sich ihre Produktion auf einer demgegenüber deutlich kleineren Distanz ab. Gesucht ist daher ein Formalismus, der diese Effekte kombiniert, um so Systeme gebundener Teilchen beschreiben zu können.

Dieses Kapitel widmet sich zunächst der Produktion zweier schwerer Teilchen. Schleifenkorrekturen liefern aufgrund der Schwellenkinematik große Beiträge und machen die Konvergenz der Störungsreihe unmöglich. Ein auf der rekursiven Resummation beruhender Mechanismus ermöglicht dennoch die Beschreibung der gebundenen Zustände, ihrer Anregungsenergien und ihrer Wellenfunktionen am Ursprung.

3.1 Bethe-Salpeter-Formalismus

Die hier betrachteten Bindungszustände bestehen aus zwei Teilchen mit i.A. verschiedenen Massen m_A und m_B . Hängt die zwischen den Teilchen wirkende Kraft nur von deren Abstand zueinander ab, so ist es günstig, für ihre Beschreibung Schwerpunkts- und Relativkoordinaten zu verwenden und das Problem auf ein effektives Ein-Teilchen-Problem mit *reduzierter Masse* $m_{\text{red}} = m_A m_B / (m_A + m_B)$ zu vereinfachen. Eine quantenmechanische Berechnung liefert uns den *Bohr'schen Radius* $a_B = 1/(m_{\text{red}}\alpha)$ als eine Größe, welche die Ausdehnung des gebundenen Systems kennzeichnet, wobei die Kopplung¹ α vom Wechselwirkungspotential stammt. Setzt man naiv die aus diesem Potential stammende, attraktive Kraft gleich der repulsiven Kraft, die aus der relativen Bewegung der beiden

¹Durch die Abhängigkeit der generischen Kopplung α von der Energieskala spricht man vom Laufen der Kopplung, welches durch die Renormierungsgruppe beschrieben wird.

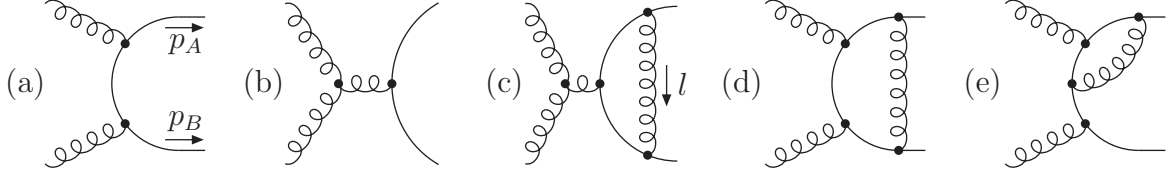


Abbildung 3.1: Zur hadronischen Produktion zweier Fermionen beitragende Feynman-Diagramme.

Teilchen resultiert, so erhält man eine Abschätzung für die *Relativgeschwindigkeit* v

$$\begin{aligned} |\mathbf{F}_{\text{repulsiv}}| &= \frac{m_{\text{red}} v^2}{r} \sim \frac{\alpha(1/r)}{r^2} = |\mathbf{F}_{\text{attraktiv}}|, \\ \xrightarrow{r \sim a_B} v &\sim \alpha(m_{\text{red}} v). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Für eine kleine Kopplung α ist das gebundene System folglich nicht-relativistisch und seine quantenfeldtheoretische Beschreibung schwierig. Dies wirkt sich auch auf die Produktion von Bindungszuständen aus, was im folgenden recht allgemein diskutiert wird.

Zur Produktion eines Fermions f und seines Antiteilchens \bar{f} durch zwei Eichbosonen tragen die Feynman-Diagramme aus Abb. 3.1 bei, wobei es für die folgenden Ausführungen nicht auf die Eichgruppe der Bosonen ankommt. Unter Vernachlässigung aller möglichen Farbstrukturen sei ihre quadratische Kopplung α genannt. Es handelt sich hier um den Spezialfall, in welchem beide Teilchen die gleiche Masse $m = m_A = m_B = 2m_{\text{red}}$ besitzen. Die Verallgemeinerung auf einen Endzustand mit Teilchen verschiedener Massen kann jedoch ohne Schwierigkeiten durchgeführt werden.

Bei der Berechnung des Produktionswirkungsquerschnitts setzt man näherungsweise, wo es möglich ist, $v \equiv |\mathbf{p}_A - \mathbf{p}_B| / (2m_{\text{red}}) = 0$ und erhält somit $\mathbf{p}_B = -\mathbf{p}_A$ sowie $p_B^0 = p_A^0$. Für die Produktion an der Schwelle, d.h. $(p_A + p_B)^2 = 4m^2$, vereinfacht sich die Kinematik zu $p^{(m)} \equiv p_A = p_B = (m, \mathbf{0})$, wodurch der Wirkungsquerschnitt in $\mathcal{O}(\alpha^2)$ danach leicht berechnet werden kann. Hierzu tragen die Diagramme (a) und (b) aus Abb. 3.1 bei. Unter Hinzunahme der Korrekturen höherer Ordnungen in α stellt man fest, daß das Diagramm (c) einen gemessen an der führende Ordnung sehr großen Beitrag liefert.

Um dies zu zeigen, werden die zu erwartenden Divergenzen durch die Einführung einer Masse λ für das Eichboson in der Schleife regularisiert. Hierdurch läßt sich die Berechnung durch die Anwendung einer Partialbruchzerlegung vereinfachen:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{[l^2 - \lambda^2] [(l + p^{(m)})^2 - m^2] [(l - p^{(m)})^2 - m^2]} \\ &= \frac{1}{2\lambda^2} \left(\frac{1}{l^2 - \lambda^2} - \frac{1}{l^2} \right) \left(\frac{1}{(l + p^{(m)})^2 - m^2} + \frac{1}{(l - p^{(m)})^2 - m^2} \right). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Die Tensorstruktur reduziert man, wie in Anhang D gezeigt, auf skalare Integrale und

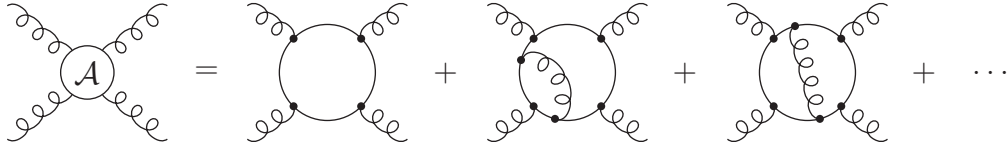


Abbildung 3.2: Beitrag zur Vier-Punkt-Amplitude \mathcal{A} mit schweren Fermionen f in den Schleifen.

erhält für den führenden Beitrag zur Korrektur

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{[l^2 - \lambda^2] [(l + p^{(m)})^2 - m^2] [(l - p^{(m)})^2 - m^2]} \\
 & \sim 2\alpha m^2 \frac{B_0(m^2; m^2, 0) - B_0(m^2; m^2, \lambda^2)}{\lambda^2} \\
 & = \alpha \left(\frac{2\pi m}{\lambda} + \dots \right) \longrightarrow \alpha \frac{\pi^2}{v} \sim \frac{\alpha}{v}, \tag{3.3}
 \end{aligned}$$

was unter der Abschätzung von Gl. (3.1) einen Beitrag der gleichen Größenordnung wie der Beitrag der führenden Ordnung liefert. Die Entwicklung der B_0 -Funktion in λ sowie die Transformation von der Masse des Eichbosons hin zur Relativgeschwindigkeit ist in Anhang D in den Gl. (D.8) und Gl. (D.13) dargestellt.

Der Term α/v wird auch *Coulomb-Singularität* genannt und ist charakteristisch für die Kinematik von Bindungszuständen. Er taucht in den Diagrammen auf, in denen das Eichboson zwischen den ein- bzw. auslaufenden Konstituenten ausgetauscht wird. Bspw. besitzen in Abb. 3.1 die Diagramme (c) und (d) eine Coulomb-Singularität, während (e) frei davon ist.

Ohne dies zeigen zu wollen, läßt sich die Aussage auf eine beliebige Ordnung n erweitern: Unter den n -Schleifen-Diagrammen gibt es solche, in denen n Eichbosonen parallel zueinander zwischen den beiden Konstituenten ausgetauscht werden. Der führende Beitrag eines solchen Diagramms ist $(\alpha/v)^n$. Somit ist klar, daß die störungstheoretische Herangehensweise bezüglich der Kopplung α für die Produktion eines Bindungszustands an der Schwelle kein vertrauenswürdiges Ergebnis liefert. Ferner müssen alle Diagramme der beschriebenen Bauart aufsummiert werden, um ein vernünftiges Resultat zu erhalten. Die Resummation der Coulomb-Singularitäten führt zum *Sommerfeld-Faktor*, welcher auch aus der quantenmechanischen Berechnung der Streuung am *Coulomb-Potential* folgt.

Ein komplett anderer Zugang zur Resummation von Größen, die in speziellen kinematischen Regionen stark anwachsen, wurde für den *Drell-Yan-Prozess* [8, 9] entwickelt. Die hier auftretenden *Sudakov-Logarithmen* können die Konvergenz der Störungsentwicklung zerstören und werden durch das Lösen von *Evolutionsgleichungen* im *Mellin-Raum* aufsummiert. Mit der gleichen Methode können auch die Schwellen-Logarithmen $[\alpha \ln^2(v)]^n$ für die Produktion von schweren Teilchen resummiert werden. Für verschiedene super-

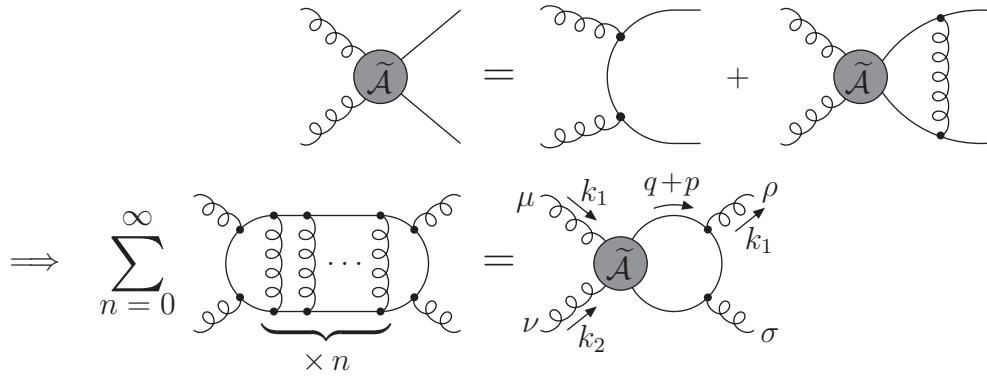


Abbildung 3.3: Idee der Bethe-Salpeter-Gleichung. Durch die rekursive Definition der Vier-Punkt-Funktion $\tilde{\mathcal{A}}$ wird die Summation der dominanten Beiträge zu \mathcal{A} ermöglicht.

symmetrische Prozesse wurde dies in den letzten Jahren angewandt [10–15].

Während die Resummation ein rein störungstheoretischer Zugang ist, wurde in [16–18] eine nicht-perturbative Methode der Aufsummierung der Coulomb-Singularitäten für das Top-Antitop-Szenario eingeführt. Die auf der *Bethe-Salpeter-Gleichung* [19] basierende Idee wird hier der Diskussion von [20] folgend beschrieben.

Über das optische Theorem kann der zuvor beschriebene Wirkungsquerschnitt – siehe Abb. 3.1 – ausgedrückt werden durch den Imaginärteil der in Abb. 3.2 gegebenen Vier-Punkt-Funktion \mathcal{A} . Zur weiteren Vereinfachung werden alle s -Kanal-Diagramme – z.B. (b) und (c) aus Abb. 3.1 – weggelassen, wie es im Fall der hadronischen Produktion eines Farbsingulets realisiert ist. Das einzelne Gluon ist ein Farbklett und koppelt nicht an zwei Fermionen in der Darstellung eines Singulets. Diese Annahme dient der deutlichen Verkürzung der Notation. Um nun alle Beiträge $\sim (\alpha/v)^n$ zu berücksichtigen, wird, wie in Abb. 3.3 gezeigt, die rekursiv definierte Funktion $\tilde{\mathcal{A}}$ benutzt. Dies ist die grundlegende Idee der Bethe-Salpeter-Gleichung, welche ursprünglich für fermionische Vier-Punkt-Funktionen angewandt wurde, durch deren Pole die Energien der gebundenen Zustände bestimmt werden konnten. Unter Vernachlässigung der Farbstruktur erhält man

$$i\mathcal{A}^{\mu\nu,\rho\sigma}(4p^2) = -(4\pi\alpha)^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[S_f(q+p) \tilde{\mathcal{A}}^{\mu\nu}(2p,q) S_f(q-p) \gamma^\rho S_f(q) \gamma^\sigma \right], \quad (3.4)$$

mit dem Fermion-Propagator S_f und $2p \equiv k_1 + k_2 = (2m + E, 0)$. Somit ist E die Bindungsenergie des $f\bar{f}$ -Systems. Im nicht-relativistischen Limes ist in Gl. (3.4) nur der Integrationsbereich wichtig, in dem $(q^0, |\mathbf{q}|) \sim (mv^2, mv)$ gilt. Die fermionischen Propagatoren werden dann durch ihre nicht-relativistischen Pole approximiert

$$\begin{aligned} S_f(q \pm p) &\rightarrow i \frac{\gamma^0 \pm 1}{2} \frac{1}{\frac{E}{2} - \frac{|\mathbf{q}|^2}{2m} \pm q_0}, \\ S_f(q) &\rightarrow -i \frac{1}{m}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Im nicht-relativistischen Limes trägt in der Coulomb-Eichung nur der statische Limes zum Austausch des Eichbosons zwischen den beiden schweren Fermionen bei, man erhält in führender Ordnung

$$\begin{array}{c} p_A, a \\ \text{---} \bullet \\ | \\ \text{---} \bullet \\ p_B, b \end{array} \begin{array}{c} k_A, a' \\ \text{---} \bullet \\ | \\ \text{---} \bullet \\ k_B, b' \end{array} \longrightarrow -i \gamma_{aa'}^0 \gamma_{bb'}^0 \frac{4\pi\alpha}{|\mathbf{p}_A - \mathbf{k}_A|^2} \equiv i \gamma_{aa'}^0 \gamma_{bb'}^0 \tilde{V}(|\mathbf{p}_A - \mathbf{k}_A|) .$$

Benutzt man diese Näherungen für die rekursiv definierte Amplitude $\tilde{\mathcal{A}}$, so erhält man

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{A}}^{\mu\nu}(2p, q) &= \gamma^\mu S_f(q) \gamma^\nu \\ &-i \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \gamma^0 \frac{1 + \gamma^0}{2} \tilde{\mathcal{A}}^{\mu\nu}(2p, l) \frac{1 - \gamma^0}{2} \gamma^0 \frac{\tilde{V}(|\mathbf{l} - \mathbf{p}|)}{\left[\frac{E}{2} - \frac{|\mathbf{l}|^2}{2m} + l^0 \right] \left[\frac{E}{2} - \frac{|\mathbf{l}|^2}{2m} - l^0 \right]} . \end{aligned} \quad (3.6)$$

Die rechte Seite von Gl. (3.6) hängt nicht von q^0 ab, weshalb konsistenterweise $\tilde{\mathcal{A}}^{\mu\nu}(2p, l)$ unabhängig von l^0 ist. Dies ermöglicht, die l^0 -Integration mittels des Residuen-Satzes durchzuführen. Darüber hinaus führt die rekursive Definition von Gl. (3.6) zu

$$\frac{1 + \gamma^0}{2} \tilde{\mathcal{A}}^{\mu\nu}(2p, q) \frac{1 - \gamma^0}{2} = \frac{1 + \gamma^0}{2} \gamma^\mu S_f(q) \gamma^\nu \frac{1 - \gamma^0}{2} \mathcal{S}(2p, |\mathbf{q}|) , \quad (3.7)$$

mit einer skalaren Funktion \mathcal{S} . Die Aussage von Gl. (3.6) vereinfacht sich dann zu

$$\mathcal{S}(2p, |\mathbf{q}|) = 1 + \int \frac{d^3 \mathbf{l}}{(2\pi)^3} \tilde{V}(|\mathbf{l} - \mathbf{p}|) \tilde{G}(\mathbf{l}, E) , \quad (3.8)$$

mit

$$\tilde{G}(\mathbf{k}, E) = -\frac{1}{E - \frac{|\mathbf{k}|^2}{m}} \mathcal{S}(2p, |\mathbf{k}|) . \quad (3.9)$$

Jetzt wird ersichtlich, daß dies die Fourier-Transformierte der *Schrödinger-Gleichung* (SGL) ist

$$[H - E] G(\mathbf{r}, E) = \left[\frac{(-i\nabla)^2}{2m_{\text{red}}} + V(\mathbf{r}) - E \right] G(\mathbf{r}, E) = \delta^{(3)}(\mathbf{r}) , \quad (3.10)$$

mit dem *Potential* V und der *Green'schen Funktion* $G(\mathbf{r}, E)$. V und G sind die Fourier-Transformierten von \tilde{V} und \tilde{G} . Zuletzt muß noch Gl. 3.7 in Gl. 3.4 eingesetzt werden. Nach erneuter Ausführung der Integration der zeitlichen Komponente q^0 mittels des Residuen-Satzes erhält man \tilde{G} unter dem verbliebenen räumlichen Integral, was der Green'schen

Funktion G am Ursprung entspricht. Der Wirkungsquerschnitt für die Produktion des $f\bar{f}$ -Paares ist schließlich proportional zu

$$\text{Im} \left\{ \sum_{\text{Helizitäten}} \epsilon_\mu(k_1) \epsilon_\nu(k_2) \epsilon_\rho^*(k_1) \epsilon_\sigma^*(k_2) \mathcal{A}^{\mu\nu\rho\sigma} (4p^2) \right\} \sim \frac{\alpha^2}{m_{\text{red}}^2} \text{Im} \{G(\mathbf{r} = \mathbf{0}, E)\} . \quad (3.11)$$

Bisher wurden stabile Fermionen betrachtet, jedoch können die bisher getroffenen Aussagen für den Fall einer von Null verschiedenen Zerfallsbreite Γ_f der Fermionen verallgemeinert werden. In [17] wird vorgeschlagen, den Nenner der Fermion-Propagatoren auf $p_{A/B}^2 - m_{A/B}^2 + i\Gamma_f m_{A/B}$ zu setzen. Dies entspricht der Ersetzung

$$E \longrightarrow E + i\Gamma_f , \quad (3.12)$$

welche in den obigen Gleichungen durchzuführen ist, sofern Γ_f nicht vernachlässigt werden kann. Somit hängt der Wirkungsquerschnitt über die Green'sche Funktion von der Zerfallsbreite der Konstituenten ab. Dies führt zu einer allgemeinen Gleichung für den differentiellen Wirkungsquerschnitt bezüglich der invarianten Masse $M^2 = (p_A + p_B)^2$, welche den weiteren Berechnungen als Grundlage dient

$$M \frac{d\hat{\sigma}}{dM} (s, M^2) = M \frac{d\hat{\sigma}_0}{dM} (s, M^2) \frac{\text{Im} \{G(\mathbf{0}, E + i\Gamma_f)\}}{\text{Im} \{G_0(\mathbf{0}, E)\}} . \quad (3.13)$$

Das Quadrat der Schwerpunktsenergie ist gegeben durch $s = (k_1 + k_2)^2$. $\hat{\sigma}_0$ sowie G_0 sind der Wirkungsquerschnitt sowie die Green'sche Funktion ohne Bindungseffekte also für $V(\mathbf{r}) = 0$. An der Notation von Gl. (3.13) kann man sehen, daß der Wirkungsquerschnitt in einen perturbativen Anteil und die Green'sche Funktion, welche die Bindungseffekte beinhaltet, faktorisiert.

Ein Ansatz, der Gl. (3.10) genügt, ist in der Dirac'schen Schreibweise gegeben durch

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E) = \langle \mathbf{r} | \hat{G}(E) | \mathbf{r}' \rangle = \langle \mathbf{r} | \frac{1}{H - E} | \mathbf{r}' \rangle . \quad (3.14)$$

Setzt man die Vollständigkeitsrelation ein, so erhält man mit $\langle \mathbf{r} | n \rangle = \Psi_n(\mathbf{r})$ für die Green'sche Funktion am Ursprung

$$\begin{aligned} G(\mathbf{0}, E) &= \sum_i \langle \mathbf{0} | i \rangle \langle i | \frac{1}{H - E} | \mathbf{0} \rangle = \sum_i \frac{\langle \mathbf{0} | i \rangle \langle i | \mathbf{0} \rangle}{E_i - E} = \sum_i \frac{|\Psi_i(\mathbf{0})|^2}{E_i - E} \\ &= \sum_n \frac{|\Psi_n(\mathbf{0})|^2}{E_n - E} + \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{|\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{0})|^2}{2m_{\text{red}} - E} , \end{aligned} \quad (3.15)$$

wobei die Vollständigkeitsrelation die möglichen Bindungszustände diskreter, negativer Energien E_n sowie das Kontinuum für $E > 0$ umfaßt. Handelt es sich um ein Potential,

welches gebundene Zustände besitzt, so geht der Imaginärteil des diskreten Spektrums für $E < 0$ und eine verschwindende Zerfallsbreite über in eine Summe von Resonanzen

$$\begin{aligned} \text{Im} \{G(\mathbf{0}, E)\} &= \sum_n \frac{\Gamma_f}{(E_n - E)^2 + \Gamma_f^2} |\Psi_n(\mathbf{0})|^2 \\ &\rightarrow \pi \sum_n \delta(E_n - E) |\Psi_n(\mathbf{0})|^2, \end{aligned} \quad (3.16)$$

für welche im letzten Schritt die Approximation $\Gamma_f \rightarrow 0$ benutzt wurde. Für den kontinuierlichen Teil erhält man nach gleicher Rechnung und Ausführung der Integration über die Delta-Distribution einen Imaginärteil proportional zu $|\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{0})|^2$, was für das Coulomb-Potential dem Sommerfeld-Faktor entspricht. Dieses Potential soll im folgenden genauer untersucht werden.

3.2 Das Coulomb-Potential

Das Coulomb-Potential $V_c(\mathbf{r})$ beschreibt die elektromagnetische Wechselwirkung zwischen zwei geladenen Teilchen im Abstand $r = |\mathbf{r}|$. Es ist bestimmt durch seine Ortsabhängigkeit $\sim 1/r$ und wird im folgenden auf den Fall einer Farbwechselwirkung verallgemeinert

$$V_c(\mathbf{r}) = -\frac{C\alpha}{r}. \quad (3.17)$$

Die Kopplung ist weiterhin gegeben durch α . Das Potential ist attraktiv für eine Farbwechselwirkung mit $C > 0$ und repulsiv im Falle $C < 0$. Gilt $C = 0$, so herrscht keine Wechselwirkung.

Man benötigt nach Gl. (3.15) für die Berechnung der Green'schen Funktion die Bindungsenergien $E_n = -C^2\alpha^2 m_{\text{red}}/(2n^2)$ sowie die Werte für die Wellenfunktion am Ursprung $|\Psi_n(\mathbf{0})|^2 = C^3\alpha^3 m_{\text{red}}^3/(\pi n^3)$, welche direkt von den Berechnungen des Wasserstoff-Atoms hergeleitet werden können. Weiterhin benutzt man den Sommerfeld-Faktor

$$\frac{|\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{0})|^2}{|\Psi_{\mathbf{k}}(r \rightarrow \infty)|^2} = \frac{x}{1 - e^{-x}} = \frac{x}{2} \left[1 + \coth\left(\frac{x}{2}\right) \right] = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + \mathcal{O}(x^4), \quad (3.18)$$

mit $x = 2\pi C\alpha/v$. Dies entspricht der exakten Lösung der in Abschnitt 3.1 diskutierten Aufsummierung aller Coulomb-Singularitäten $(\alpha/v)^n$. Der Faktor – auch *Sommerfeld-Sakharov-Faktor* [21, 22] genannt – beschreibt den Einfluß des Coulomb-Potentials auf die nicht-relativistische Wellenfunktion der zwei Fermionen.

Man erhält die bekannte Green'sche Funktion [16]

$$G(\mathbf{0}, E) = -\frac{m_{\text{red}}^2}{\pi} \left[\sqrt{-\frac{E + i\Gamma_f}{2m_{\text{red}}}} - C\alpha \ln \left(\frac{|C|\alpha}{2} \sqrt{-\frac{2m_{\text{red}}}{E + i\Gamma_f}} \right) + \sqrt{\frac{2}{m_{\text{red}}}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n}{\sqrt{-(E + i\Gamma_f)} - \sqrt{-E_n}} \right], \quad (3.19)$$

deren Berechnung in Anhang J genauer untersucht wird. Ihr Imaginärteil ist gegeben durch

$$\text{Im}\{G(\mathbf{0}, E)\} = \frac{m_{\text{red}}^2}{\pi} \left[v_+ + C\alpha \tan^{-1} \left(\frac{v_+}{v_-} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} E_n \frac{C\alpha\Gamma_f/n + 2v_+ \left(\sqrt{E^2 + \Gamma_f^2} + E_n \right)}{(E + E_n)^2 + \Gamma_f^2} \right], \quad (3.20)$$

mit

$$v_{\pm} = \sqrt{\frac{\sqrt{E^2 + \Gamma_f^2} \pm E}{4m_{\text{red}}}}. \quad (3.21)$$

In Gl. (3.19) und (3.20) kann man erneut die Aufspaltung in ein kontinuierliches Spektrum und diskrete Zustände erkennen. Es läßt sich jedoch zeigen, daß für $E \rightarrow 0$ die Grenzwerte der beiden Terme gleich sind:

Für $C > 0$ ergibt sich unter erneuter Benutzung der Approximation kleiner Zerfallsbreiten für die Summe aus Gl. (3.20) ein zu Gl. (3.16) proportionaler Ausdruck. Die Höhen der Resonanzen, welche proportional zu $|\Psi_n(\mathbf{0})|^2$ sind, nehmen proportional zu $1/n^3$ ab, liegen jedoch immer dichter beieinander

$$d \equiv E_{n+1} - E_n = \frac{C^2\alpha^2 m_{\text{red}}}{2n^2} \left(1 - \frac{n^2}{(n+1)^2} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{C^2\alpha^2 m_{\text{red}}}{n^3}. \quad (3.22)$$

Somit ist der Grenzwert $E \rightarrow 0^-$ gegeben durch $\pi |\Psi_n(\mathbf{0})|^2 / (2d) = C\alpha m_{\text{red}}^2/2$. Betrachtet man hingegen $E \rightarrow 0^+$, so genügt der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \infty} \tan^{-1}(x) = \pi/2$, um zu erkennen, daß die rechts- und linksseitigen Limites der Green'schen Funktion für $E = 0$ übereinstimmen.

3.3 Theorie der Bindungszustände

Wie Gl. (3.13) zeigt, faktorisieren die Produktionswirkungsquerschnitte sowie auch die Zerfallsraten von gebundenen Systemen in einen perturbativen, kurzreichweitigen und

einen nicht-perturbativen, langreichweitigen Teil. Letzterer beinhaltet die Bindungseffekte des nicht-relativistischen Systems zweier Fermionen mit Relativgeschwindigkeit $v \ll 1$. Eine räumliche Abschätzung für diese Effekte ist gegeben durch die Ausdehnung des Mesons der Masse M , welche abgeschätzt wird durch $\sim 1/(Mv)$. Die quantenfeldtheoretische Produktion der Konstituenten aus dem Vakuum findet hingegen auf einer Distanz der Größenordnung $\sim 1/M$ statt, welche gegenüber der Größe des Mesons punktförmig ist. Die Schwierigkeit liegt nun in der Beschreibung der Bindungszustände und ihrer unterschiedlichen Skalen.

Ein erster Schritt hierzu wurde im Rahmen der Beschreibung der Produktion von Quarkonia gemacht [23,24]. In einem kurzreichweitigen Prozess wird das Paar von Quarks einer speziellen Spin-, Drehimpuls- und Farbdarstellung von einlaufenden Teilchen der gleichen Quantenzahlen produziert. Das Resultat wird mit einem nicht-perturbativen Faktor multipliziert, welcher aus dem Bethe-Salpeter-Formalismus stammt und die Bindungseffekte berücksichtigt. Da es sich zunächst um ein Quark-Antiquark-Paar im Zustand eines Farbsingulets handelte, wurde das Modell auch “*Colour-Singlet-Model*” (CSM) genannt. Es läßt sich jedoch auf beliebige Konfigurationen T übertragen. Bricht man die Entwicklung der Amplitude im Relativimpuls $k = (p_A - p_B)/2$ nicht nach der führenden Ordnung ab, so erhält man

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(X \rightarrow (f\bar{f})_T) &\sim \int d^3\mathbf{k} \tilde{\mathcal{A}}(X \rightarrow f\bar{f}) \tilde{\Psi}_{f\bar{f}}(\mathbf{k}) \\
&\simeq \int d^3\mathbf{k} \left[\tilde{\mathcal{A}}^{(0)}(X \rightarrow f\bar{f}) \Big|_{k=0} + k^\mu \tilde{\mathcal{A}}_\mu^{(1)}(X \rightarrow f\bar{f}) \Big|_{k=0} + \dots \right] \tilde{\Psi}_{f\bar{f}}(\mathbf{k}) \\
&\sim \Psi_{f\bar{f}}(\mathbf{0}) \tilde{\mathcal{A}}^{(0)}(X \rightarrow f\bar{f}) \Big|_{k=0} + \Psi'_{f\bar{f}}(\mathbf{0}) \epsilon^\mu \tilde{\mathcal{A}}_\mu^{(1)}(X \rightarrow f\bar{f}) \Big|_{k=0} + \dots
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Der führende Term ist proportional zur Wellenfunktion am Ursprung. Er nimmt jedoch nur für S -Wellen von Null verschiedene Werte an. Für P -Wellen dominiert schließlich der zweite Term mit der Ableitung der Wellenfunktion am Ursprung und dem Polarisationsvektor ϵ^μ für den Zustand $L = 1$, welcher gegenüber dem ersten Term auf Amplitudenebene um eine Potenz von v unterdrückt ist. Das CSM wurde durch die Berechnung der zugehörigen NLO-Korrekturen bestätigt [25], jedoch erzwangen infrarote Divergenzen beim Zerfall von P -Wellen [26–28] eine Weiterentwicklung dieses theoretischen Konstrukts.

Den wesentlichen Schritt dazu leistete die Arbeit [29], in welcher ein Mechanismus vorgeschlagen wird, welcher auf der Entwicklung der *nicht-relativistischen QCD* (NRQCD) [29, 30] beruht (siehe [31] für *nicht-relativistischen QED*). In dieser effektiven Theorie werden drei Skalen definiert

- *hart* $\sim M$,
- “*soft*” $\sim Mv$,
- “*ultrasoft*” $\sim Mv^2$,

welche aufgrund der kleinen Relativgeschwindigkeit deutlich voneinander getrennt sind. Ist die Masse der Konstituenten groß genug, so erhält man die Hierarchie

$$M \gg Mv \gg Mv^2 \gg \Lambda_{\text{QCD}}. \quad (3.24)$$

Die Annihilationsprozesse spielen sich auf der harten Skala ab, während der Relativimpuls zwischen den Konstituenten soft ist. Die Anregungsenergien im Spektrum des Bindungszustands sind von der Größenordnung der ultrasofthen Skala. Diese ist für das Top-System viel größer als die Skala der Hadronisierung Λ_{QCD} , bei der die starke Kopplungskonstante in den nicht-perturbativen Bereich übergeht.

In der NRQCD ist die Lagrangedichte als eine Entwicklung in $1/M$ organisiert, die harte Skala wird “ausintegriert”, und man schreibt Ordnung für Ordnung alle Operatoren auf, die unter den geforderten Symmetrietransformationen invariant sind. Sie werden mit Wilson-Koeffizienten multipliziert, welche man durch das “*Matching*” (Abstimmen) mit der vollen Theorie bestimmt, welche die gleichen Resultate erzeugen soll. Diese Terme der effektiven Theorie beschreiben nun Effekte von Skalen weit kleiner als die harte Skala des Systems. Sie werden in den Berechnungen bis zur gewünschten Genauigkeit v^n in Betracht gezogen.

Die Wellenfunktion eines beliebigen Bindungszustands T kann nun geschrieben werden als eine Entwicklung in v , wozu sowohl Terme T' anderer Quantenzahlen beitragen als auch Zustände T bzw. T' mit zusätzlichen leichten Quarks und Gluonen. Deren Wellenlängen sind weit größer als der Bohr'sche Radius. Somit lautet der Ansatz der Faktorisierung aus [29]

$$d\sigma(X \rightarrow T + Y) = \sum_n d\hat{\sigma}(X \rightarrow f\bar{f}[n] + Y) \langle \mathcal{O}^{T'}[n] \rangle. \quad (3.25)$$

Die Summe beinhaltet alle Zustände des Paares schwerer Fermionen und möglicher Gluonen sowie leichter Quarks. $d\hat{\sigma}$ beschreibt die kurzreichweitige Produktion dieses Zustands. $\langle \mathcal{O}^{T'}[n] \rangle$ ist der VEV eines geeigneten Vier-Fermion-Operatoren aus der NRQCD, welcher die Wahrscheinlichkeit angibt, das Paar schwerer Fermionen in der gewünschten Konfiguration T' zu finden.

Der Ansatz aus Gl.(3.25) löst einerseits das Problem der infraroten Divergenzen, andererseits werden die Produktionsraten für die gut vermessenen Quark-Antiquark-Zustände größer. Durch die Hinzunahme der Konfigurationen der Oktetts, was gegenüber dem CSM der entscheidende Unterschied ist, werden die existierenden Daten deutlich besser beschrieben. So war der größte Erfolg der NRQCD die Erklärung der hadronischen Produktionsraten des J/Ψ am Tevatron [32, 33], welche durch das CSM nicht geliefert werden konnte (für den Prozess $ep \rightarrow J/\Psi$, welcher zunächst am Beschleuniger HERA untersucht wurde, siehe [34, 35]).

Jedoch bleibt festzuhalten, daß für S -Wellen der führende Term in der Entwicklung in v das gleiche Resultat für die Produktion sowie für den Zerfall liefert wie im CSM (siehe

z.B. [36]), so daß hier auf eine tiefgreifende Diskussion der NRQCD verzichtet werden kann.

Zuletzt soll jedoch die Theorie der “*potential NRQCD*” (pNRQCD) [37,38] erwähnt werden, welche eine Weiterentwicklung der NRQCD ist. Ist man an einem physikalischen Prozess der Skala der Bindungsenergie Mv^2 interessiert, so kann die NRQCD mit Freiheitsgraden bspw. softer Gluonen nicht die richtige Theorie sein. In der pNRQCD werden neben den harten Moden auch weiche Gluonen und Quarks sowie Gluonen der “potential” Region ausintegriert. Letztere ist durch die räumlichen Komponenten des Impulses in der weichen und die zeitliche Komponente in der ultrasofthen Skala bestimmt. Das Matching wird hier in zwei Stufen durchgeführt, beruht also auf der Hierarchie aus Gl. (3.24). Durch diesen letzten Schritt erhält man innerhalb der pNRQCD ein Quark-Antiquark-Paar, welches nicht frei propagiert, sondern entsprechend Gl. (3.10) einen Propagator der Form $1/(E - p^2/m - V_0)$ besitzt. Während V_0 zunächst nur ein Wilson-Koeffizient ist, welcher durch das Matching NRQCD \rightarrow pNRQCD bestimmt wird, sieht man, daß der Pol des Propagators durch die Summe aus Energie, kinetischem Term und V_0 ausgemacht wird. Nun wird klar, daß V_0 die Rolle des Wechselwirkungspotentials übernimmt.

Während für das $t\bar{t}$ -System die Hierarchie aus Gl. (3.24) gültig ist und somit alle Skalen störungstheoretisch behandelt werden können [39], ist die Situation für die Quarkonia nicht vollständig geklärt (siehe z.B. [40]). Für das $b\bar{b}$ -System liegt die ultrasofthe Skala im Bereich von Λ_{QCD} , für die Charm-Quarks ist sogar nur die harte Skala perturbativ zugänglich.

3.4 Berechnung der Bindungsenergien und Wellenfunktionen am Ursprung

Die Theorie der pNRQCD ist für Bindungszustände sehr wichtig, da mit ihr das Potential bestimmt werden kann. Dieses erhält man am einfachsten im Impulsraum. Es ist durch eine Störungsreihe in α_s darstellbar als $V = V_0 + \delta V_1 + \delta V_2 + \delta V_3 + \dots$. Entwickelt man die Green’sche Funktion der S -Wellen entsprechend Gl. (3.14), so erhält man

$$\begin{aligned} \hat{G} = & \hat{G}_0 - \hat{G}_0 \delta V_1 \hat{G}_0 - \hat{G}_0 \delta V_2 \hat{G}_0 + \hat{G}_0 \delta V_1 \hat{G}_0 \delta V_1 \hat{G}_0 \\ & - \hat{G}_0 \delta V_3 \hat{G}_0 + 2 \hat{G}_0 \delta V_1 \hat{G}_0 \delta V_2 \hat{G}_0 - \hat{G}_0 \delta V_1 \hat{G}_0 \delta V_1 \hat{G}_0 \delta V_1 \hat{G}_0 + \dots, \end{aligned} \quad (3.26)$$

wobei die Argumente vernachlässigt werden und \hat{G}_0 die Green’sche Funktion in führender Ordnung ist. Diese besitzt einfache Pole bei den Bindungsenergien E_n . Deren Entwicklung sowie die der Betragsquadrate der Wellenfunktionen am Ursprung $|\Psi_n(\mathbf{0})|^2$ sind gegeben

durch

$$\begin{aligned}
 E_n &= E_n^{(0)} \left[1 + \frac{\alpha_s}{4\pi} e_1 + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^2 e_2 + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^3 e_3 + \dots \right], \\
 |\Psi_n(\mathbf{0})|^2 &= |\Psi_n^{(0)}(\mathbf{0})|^2 \left[1 + \frac{\alpha_s}{4\pi} f_1 + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^2 f_2 + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^3 f_3 + \dots \right].
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Setzt man diese in die Green'sche Funktion ein und vergleicht

$$G(\mathbf{0}, E) \stackrel{E \rightarrow E_n}{\approx} \frac{|\Psi_n(\mathbf{0})|^2}{E_n - E}, \tag{3.28}$$

in der Nähe von $E = E_n$ mit Gl. (3.26), so können die Werte für e_i und f_i bestimmt werden, sofern die Terme aus Gl. (3.26) bekannt sind (für das Quark-Antiquark-System siehe [41]). Alternativ können die Korrekturen zur Bindungsenergie sowie zur Wellenfunktion auch mit den üblichen Methoden berechnet werden.

Ist die Zerfallsbreite der Konstituenten sehr klein, so ist die Resonanz eines beliebigen Zustands vollständig bestimmt durch die Angabe der Bindungsenergie sowie der Wellenfunktion am Ursprung. Im folgenden Kapitel soll dies auf das System zweier Gluinos angewendet werden, was zunächst bedeutet, daß das Wechselwirkungspotential der beiden Fermionen benötigt wird. Dieses benutzt man sowohl für die Spektroskopie als auch für den Produktionswirkungsquerschnitt und die Zerfallsbreite.

Kapitel 4

Gluinonia

Vor über zwei Jahrzehnten begann die Untersuchung des Bindungszustands zweier Gluinos [42–44], welcher schließlich den Namen *Gluinonium* erhielt. Die Studien bezogen sich auf Gluinomassen, die heute experimentell ausgeschlossen sind. Die Klassifizierung der Gluinonia bezüglich ihrer Quantenzahlen, ihrer Spektren und Zerfallsmoden sowie ihrer Produktionswirkungsquerschnitte sind jedoch auch heute noch gültig. Einige Jahre später fanden die Bindungszustände erneut Beachtung [45–47]. Die Studien wurden für das Tevatron und den LHC durchgeführt, wobei die Möglichkeit der Entdeckung von Gluinonia mit Massen bis zu 3 TeV eingeräumt wurde.

In diesem Kapitel sollen die Untersuchungen erweitert werden¹. Neben einer Einführung in die Eigenschaften der Gluinonia wird das Wechselwirkungspotential angegeben sowie die zugehörigen Schleifenkorrekturen. Die dadurch gewonnenen Aussagen über die Bindungsenergien und Wellenfunktionen werden für die Spektroskopie der Gluinonia sowie für den Zerfall und die hadronische Produktion benutzt. Ein-Schleifen-Korrekturen haben einen großen Effekt auf die beiden zuletzt genannten Größen. Schließlich werden alternative Zerfallsmoden sowie eine Abschätzung für das Verhältnis vom Signal des Produktionskanals zum Untergrund berechnet.

4.1 Eigenschaften von Gluinonia

Gluinos existieren wie ihre Superpartner, die Gluonen, in der adjungierten Darstellung der $SU(3)_C$, dem Oktett. Um die physikalischen Zustände eines Verbundes zweier Oktetts zu kennen, muß das Tensorprodukt in seine irreduziblen Darstellungen zerlegt werden. Diese Rechnung ist lange bekannt [48] und in Anhang E illustriert, wobei ein Kurzauszug der Farbalgebra in Anhang F zu finden ist. Man erhält

$$8 \otimes 8 = 1_s \oplus 8_s \oplus 8_a \oplus 10_a \oplus \overline{10}_a \oplus 27_s, \quad (4.1)$$

¹Der Inhalt dieses Kapitels basiert auf der Veröffentlichung [1].

R	$C_R = (F^R)^2$	$F^{a,1} \cdot F^{a,2}$	Wechselwirkung
1_s	0	-3	attraktiv
$8_s, 8_a$	3	$-\frac{3}{2}$	attraktiv
$10_a, \overline{10}_a$	6	0	neutral
27_s	8	1	repulsiv

Tabelle 4.1: Farbwechselwirkung zweier $SU(3)$ -Oktetts.

wobei die Indizes s und a für die Symmetrie bzw. Antisymmetrie der Farbwellenfunktion unter einem Austausch der beiden Konstituenten stehen. Neben einem farbneutralen Zustand existieren zwei Oktetts, zwei Dekupletts und eine 27-Konfiguration. Für eine beliebige dieser Darstellungen R ist die Farbwechselwirkung proportional zum Erwartungswert des Produkts zweier Generatoren $F_{ij}^a F_{kl}^a$ in der jeweiligen Konfiguration. Dieses Produkt kann ausgedrückt werden durch bezüglich der Farbalgebra invariante *Casimir-Operatoren*

$$F^{a,1} \cdot F^{a,2} = \frac{1}{2} [(F^R)^2 - (F^{a,1})^2 - (F^{a,2})^2] = \frac{1}{2} (C_R - 2C_A). \quad (4.2)$$

Der Casimir-Operator für das Oktett ist $C_A = 3$, und diejenigen für die anderen Darstellungen sind in Tab. 4.1 enthalten, wobei ihre Berechnung in Anhang E erklärt wird. Für das Dekuplett geben Korrekturen höherer Ordnung Aufschluß darüber, ob es sich um ein attraktives, ein repulsives oder ein verschwindendes Potential handelt. In jedem Falle ist die Wechselwirkung klein, und für einen gebundenen Zustand kommen nur das Singulett sowie die zwei Oktetts in Frage. Das Potential der Oktetts ist jedoch um einen Faktor $1/2$ unterdrückt gegenüber dem Potential des Singuletts. Die 27-Konfiguration spielt aufgrund ihrer abstoßenden Wechselwirkung keine Rolle bei der Untersuchung von Bindungszuständen.

Die Majorana-Natur des Gluinos führt zu einer weitreichenden Einschränkung für die Gluinonia. Die gesamte Wellenfunktion des Systems aus zwei Fermionen muß aufgrund der Statistik einen Faktor -1 erhalten, wenn man die beiden Teilchen gegeneinander austauscht. Dieser Faktor setzt sich zusammen aus einem räumlichen Anteil, der Ladungskonjugation C und aus Faktoren, welche den Spin und die Farbe beschreiben. Während S -Wellen symmetrisch und P -Wellen antisymmetrisch sind, können zwei Spin- $1/2$ -Teilchen entweder zu einem symmetrischen Triplet mit Spin $S = 1$ oder zu einem Spinsingulett mit $S = 0$ kombiniert werden. Die Faktoren für den Farbanteil entnimmt man direkt den Indizes aus Gl. (4.1). Man erhält folglich

$$-1 = \underbrace{(-1)^L}_{\text{Raum}} \times \underbrace{(-1)^{S+1}}_{\text{Spin}} \times \underbrace{C}_{\text{Ladungskonjugation}} \times \underbrace{\begin{cases} +1 & ; 1_s, 8_s, 27_s \\ -1 & ; 8_a, 10_a, \overline{10}_a \end{cases}}_{\text{Farbe}}. \quad (4.3)$$

$^{2S+1}L_J$	1S_0	3S_1	1P_1	3P_0	3P_1	3P_2	1D_2
L	0	0	1	1	1	1	2
S	0	1	0	1	1	1	0
$(\tilde{g}\tilde{g})_s$	0^{-+}	–	–	0^{++}	1^{++}	2^{++}	2^{-+}
$(\tilde{g}\tilde{g})_a$	–	1^{-+}	1^{++}	–	–	–	–

Tabelle 4.2: Spektrum für die Zustände J^{PC} der Gluinonia mit den niedrigsten Drehimpulsquantenzahlen.

Da nun aber die Gluinos ihre eigenen Antiteilchen sind, muß $C = 1$ gelten, woraus man für die farbsymmetrischen Teilchen $(-1)^{S+L} = 1$ und für die antisymmetrischen $(-1)^{S+L} = -1$ erhält. Da die *intrinsische Parität* eines Verbunds zweier Fermionen negativ ist, was direkt aus einem feldtheoretischen Argument folgt, gelten für die Parität P , die Ladungspartität C und für die Summe aus Spin- S und Drehimpulsquantenzahl L der Gluinonia

$$\begin{aligned}
P &= (-1)^{L+1}, \\
C &= 1, \\
L + S &= \begin{cases} \text{gerade} & \text{für } 1_s, 8_s, 27_s \\ \text{ungerade} & 8_a, 10_a, \overline{10}_a \end{cases}. \quad (4.4)
\end{aligned}$$

Das vollständige Spektrum für die niedrigsten Drehimpulse ist gegeben in Tab. 4.2. Wie man aus Gl. (3.23) unmittelbar ersehen kann, ist die Amplitude für die Erzeugung einer P -Welle, deren Wellenfunktion am Ursprung verschwindet, gegenüber der S -Welle um eine Potenz von v unterdrückt. Für den Wirkungsquerschnitt, in welchen die Amplitude quadratisch eingeht, erhält man also für P -Wellen und höher angeregte Zustände mindestens eine Unterdrückung von v^2 , so daß die Diskussion hier auf S -Wellen beschränkt wird.

Da der Farbfaktor des Wechselwirkungspotentials aus Gl. (4.2) quadratisch in die Bindungsenergie und kubisch in die Wellenfunktion am Ursprung eingeht, ist die Produktion des Oktetts in erster Näherung gegenüber dem Singulett um $1/8$ unterdrückt. Die Resonanz liegt aufgrund der um $1/4$ kleineren Bindungsenergie deutlich dichter an der Schwelle, und der Effekt einer endlichen Zerfallsbreite des Gluinos würde die Separation der verschmierten Resonanz vom Kontinuum deutlich schwerer machen als für den farbneutralen Zustand. Aus diesen Gründen befaßt sich die Untersuchung der Bindungszustände im Folgenden nur mit der S -Welle des Singuletts. Es handelt sich also um ein Teilchen mit ungerader Parität, welches daher *Pseudoskalar* genannt wird. Sein Wechselwirkungspotential wird im nächsten Abschnitt untersucht.

4.2 Das Wechselwirkungspotential

Das Potential für zwei Oktetts kombiniert zu einem Singulett kann zerlegt werden in zwei Terme

$$V(\mathbf{r}) = V_C(r) + V_{\text{nC}}(\mathbf{r}). \quad (4.5)$$

Der nicht-Coulomb'sche Teil V_{nC} hat Beiträge der Ordnung $(1/m_{\bar{g}})^n$ für $n \geq 1$. Sie zählen entsprechend $|\mathbf{k}|/m_{\bar{g}} \sim v \sim \alpha_s$ mit dem räumlichen Anteil des Relativimpulses k zwischen den beiden Konstituenten. Hierdurch läßt sich V_{nC} bis zur Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$ angeben

$$V_{\text{nC}}(\mathbf{r}) = -\frac{\Delta^2}{4m_{\bar{g}}^3} + \frac{C_A \alpha_s(\mu_r^2)}{m_{\bar{g}}^2 r} \Delta + \frac{4\pi C_A \alpha_s(\mu_r^2)}{3m_{\bar{g}}^2} \mathbf{S}^2 \delta(\mathbf{r}) - \frac{C_A^2 \alpha_s^2(\mu_r^2)}{4m_{\bar{g}} r^2}. \quad (4.6)$$

Bis zur Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ verschwindet V_{nC} . Der Coulomb'sche Term ist bekannt bis zur Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_s^4)$ (für das $q\bar{q}$ -Potential ist diese Ordnung vollständig bekannt)

$$V_C(r) = -\frac{C_A 4\pi a_s}{r} \left\{ 1 + a_s \left[a_1 + 2\beta_0 L \right] + a_s^2 \left[a_2 + \beta_0^2 \frac{\pi^2}{3} + 2(2a_1\beta_0 + \beta_1) L + 4\beta_0^2 L^2 \right] \right. \\ \left. + a_s^3 \left[a_3 + \pi^2 a_1 \beta_0^2 + \frac{5\pi^2}{6} \beta_0 \beta_1 + 16\zeta(3) \beta_0^3 + 16\pi^2 C_A^3 \ln\left(\frac{\nu}{\mu_r}\right) \right. \right. \\ \left. \left. + 2(3a_2\beta_0 + 2a_1\beta_1 + \beta_2 + \pi^2 \beta_0^3 + 8\pi^2 C_A^3) L \right. \right. \\ \left. \left. + 2\beta_0(6a_1\beta_0 + 5\beta_1) L^2 + 8\beta_0^3 L^3 \right] \right\}. \quad (4.7)$$

Es gilt $L \equiv \ln(\mu_r r) + \gamma_E$. Die β_n sind die Koeffizienten der β -Funktion der QCD im $\overline{\text{MS}}$ -Schema und definiert durch $\partial a_s / \partial \ln \mu_r^2 = -\sum \beta_n a_s^{n+2}$ mit der Kopplung $a_s \equiv \alpha_s(\mu_r^2)/(4\pi)$ im $\overline{\text{MS}}$ -Schema mit der Renormierungsskala μ_r . Bis zur benötigten Ordnung lauten sie [49, 50]

$$\beta_0 = \frac{11}{3} C_A - \frac{4}{3} T_F n_f, \\ \beta_1 = \frac{34}{3} C_A^2 - \frac{20}{3} C_A T_F n_f - 4 C_F T_F n_f, \\ \beta_2 = \frac{2857}{54} C_A^3 - \frac{1415}{27} C_A^2 T_F n_f - \frac{205}{9} C_A C_F T_F n_f \\ + 2 C_F^2 T_F n_f + \frac{158}{27} C_A T_F^2 n_f^2 + \frac{44}{9} C_F T_F^2 n_f^2. \quad (4.8)$$

Die Anzahl der aktiven Quarkflavours ist gegeben durch n_f , $C_A = 3$, $C_F = 4/3$, $T_F = 1/2$, $\gamma_E = 0.5772\dots$ ist die Euler-Konstante und $\zeta(3) = 1.2021\dots$. Die Masse $m_{\bar{g}}$ soll als Polmasse des Konstituenten verstanden werden. Weiterhin ist wie im Fall des Systems aus

einem Quark und einem Antiquark das Potential infrarot divergent [51]. Die Divergenz tritt erstmals in der Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_s^4)$ auf und ist regularisiert durch die Skala ν , bei welcher die Effekte der “potential” Region von den ultrasofthen Effekten separiert werden. Die Abhängigkeit von dieser Faktorisierungsskala verschwindet für physikalische Größen, wenn die ultrasofthen Korrekturen mitberücksichtigt werden. Die restlichen Koeffizienten lauten [52–59]

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{31}{9} C_A - \frac{20}{9} T_F n_f, \\
a_2 &= \left[\frac{4343}{162} + 4\pi^2 - \frac{\pi^4}{4} + \frac{22}{3} \zeta(3) \right] C_A^2 - \left[\frac{1798}{81} + \frac{56}{3} \zeta(3) \right] C_A T_F n_f \\
&\quad - \left[\frac{55}{3} - 16 \zeta(3) \right] C_F T_F n_f + \left(\frac{20}{9} T_F n_f \right)^2, \\
a_3 &= d_1 C_A^3 + d_2 \frac{45}{16} \\
&\quad + \left[d_3 C_A^2 T_F + d_4 \frac{5}{32} + \left(-\frac{71281}{162} + 264 \zeta(3) + 80 \zeta(5) \right) C_A C_F T_F \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{286}{9} + \frac{296}{3} \zeta(3) - 160 \zeta(5) \right) C_F^2 T_F \right] n_f \\
&\quad + \left[C_A \left(\frac{12541}{243} + \frac{64 \pi^4}{135} + \frac{368}{3} \zeta(3) \right) + C_F \left(\frac{14002}{81} - \frac{416}{3} \zeta(3) \right) \right] (n_f T_F)^2 \\
&\quad - \left(\frac{20}{9} n_f T_F \right)^3, \tag{4.9}
\end{aligned}$$

mit $\zeta(5) = 1.0369\dots$ und den Koeffizienten d_n , welche nur numerisch bekannt sind [59]

$$\begin{aligned}
d_1 &= 502.24(1), \\
d_2 &= -136.39(12), \\
d_3 &= -709.717, \\
d_4 &= -56.83(1). \tag{4.10}
\end{aligned}$$

Der Koeffizient a_1 von den Ein-Schleifen-Beiträgen zum Potential des Quarks und des Antiquarks ist schon sehr lange bekannt [52] und wurde in den Neunzigern durch die nächste Ordnung a_2 [53–55] ergänzt. In [1] wurde gezeigt, daß beide Koeffizienten sich nicht ändern, wenn man anstatt zweier Triplets zwei Oktetts zu einem Farbsingulett kombiniert. Dies soll hier begründet werden:

In der führenden Ordnung gilt für den Farbfaktor des Potentials die Ersetzungsregel $C_F \rightarrow C_A$. Diese einfache Ersetzung behält auch für die Farbfaktoren der Diagramme mit einer Schleife (Abb. 4.1) ihre Gültigkeit. Alle Beiträge $\sim C_F^2$, welche von den Diagrammen (a) und (b) stammen, kommen nicht im Potential vor. Der Grund hierfür ist, daß

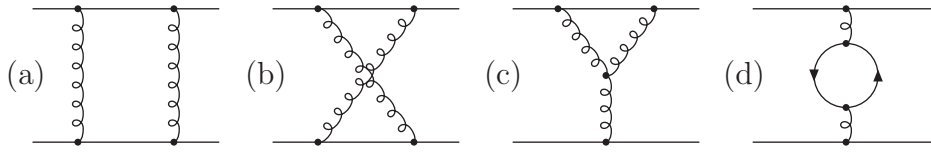


Abbildung 4.1: Typische Ein-Schleifen-Beiträge zum $f\bar{f}$ -Potential. Durchgezogene Linien ohne und mit Pfeil sowie geringelte Linien stellen die schweren Fermionen f , die leichten Quarks und die Gluonen dar.

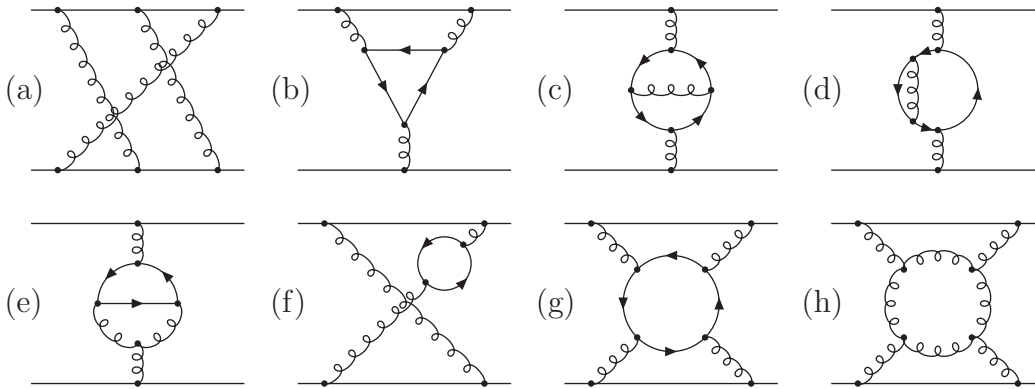


Abbildung 4.2: Typische Zwei- und Drei-Schleifen-Beiträge zum $f\bar{f}$ -Potential. Die Notation von Abb. 4.1 ist auch hier gültig.

die Berechnung der Diagramme nicht direkt proportional ist zum Potential, sondern zu dessen Exponentierung. Die Ersetzungsregel der führenden Ordnung bleibt also erhalten, und nur der Vorfaktor C_F muß ersetzt werden. Die gleiche Argumentation gilt auch für die Zwei-Schleifen-Diagramme. Dies zeigt Abb. 4.2. Beiträge $\sim C_F^3$ und $C_A C_F^2$, wie sie z.B. in Diagramm (a) auftauchen, tragen aus dem zuvor genannten Grund nicht zum Potential bei, sondern gehen in die Exponentierung dessen ein. Was Diagramme ohne Linien leichter Quarks betrifft, bleibt es folglich bei der Ersetzung $C_A^2 C_F \rightarrow C_A^3$, wodurch weiterhin nur der Vorfaktor ersetzt wird und die C_A^2 -Terme in a_2 und β_1 unverändert bleiben. Nun muß man sich nur noch davon überzeugen, daß für die Farbfaktoren $C_A C_F n_f$ und $C_F^2 n_f$ (Diagramme (b) bis (e)) nur das führende C_F ersetzt werden muß bzw. die Argumentation der Ein-Schleifen-Diagramme sich bis auf eine Einsetzung wiederholt (Diagramm (f)). Insgesamt erhält man bis zur Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$ das Gluinopotential aus dem der Quarks durch die Ersetzung des globalen Faktors unter Erhaltung der Koeffizienten a_1 , a_2 , β_1 und β_2 .

Die explizite Verletzung dieser einfachen Regel wurde bei der Berechnung von a_3 [56] gezeigt. Die Abweichung vom Ergebnis für die Quarks [57–59] manifestiert sich in den Farbfaktoren nach den Koeffizienten d_2 und d_4 , welche von den Diagrammen (g) und (h) aus Abb. 4.2 stammen.

Für die nicht-Coulomb'schen Terme aus Gl. (4.6) ist die Herleitung vergleichsweise trivial.

Lediglich der letzte Term, welcher einer Ein-Schleifen-Rechnung entstammt [60], muß entsprechend $C_F(C_F - C_A/2) \rightarrow C_A^2/2$ ersetzt werden, wenn man Oktetts an Stelle der Triplets betrachtet. Die Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_s^4)$ von V_{nC} ist zwar für die Triplets bekannt [39], jedoch ist die Transformation nicht ohne weiteres möglich. Dies wird ersichtlich aus den Diagrammen (c) und (f) aus Abb. 4.2. Beide tragen einen Term $\sim C_F(C_F - C_A/2)n_f$ bei, welcher beim Übergang zu den Oktetts unterschiedlich transformiert.

4.3 Spektroskopie

Durch das Lösen der nicht-relativistischen SGL (Gl. (3.10)) mit dem Potential aus den Gl. (4.5), (4.6) und (4.7) gewinnt man die für die Spektroskopie wichtige Bindungsenergie sowie die Wellenfunktion am Ursprung, zu deren Betragsquadrat sowohl die Produktion als auch der Zerfall proportional ist. Zwar bietet sich eine numerische Herangehensweise für die Coulomb'schen Anteile des Potentials an, jedoch würde diese für die nicht-Coulomb'schen Terme versagen. Daher geht man, wie in Abschnitt 3.4 beschrieben, gemäß der Störungsrechnung vor. Sofern man nur V_C betrachtet, liefern beide Methoden bemerkenswert gut übereinstimmende Resultate. Die Entwicklung der beiden Größen in α_s ist gegeben durch (vgl. Gl. (3.27))

$$\begin{aligned} E_n &= E_n^{(0)} \left[1 + \frac{\alpha_s}{4\pi} e_1 + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^2 e_2 + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^3 e_3 + \dots \right], \\ |\Psi_n(\mathbf{0})|^2 &= |\Psi_n^{(0)}(\mathbf{0})|^2 \left[1 + \frac{\alpha_s}{4\pi} f_1 + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^2 f_2 + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^3 f_3 + \dots \right], \end{aligned} \quad (4.11)$$

mit $E_n^{(0)} = -C_A^2 \alpha_s^2 m_{\bar{g}} / (4n^2)$ und $|\Psi_n^{(0)}(\mathbf{0})|^2 = C_A^3 \alpha_s^3 m_{\bar{g}}^3 / (8\pi n^3)$. Die Koeffizienten e_n und f_n lassen sich schreiben als die Summe des jeweiligen Coulomb'schen und nicht-Coulomb'schen Anteils

$$\begin{aligned} e_n &= e_n^C + e_n^{nC}, \\ f_n &= f_n^C + f_n^{nC}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Sie können von den für die Quarkonia bekannten Formeln (siehe z.B. [61]) nun leicht hergeleitet werden und sind in Anhang G angegeben.

Neben der führenden Ordnung (LO) in α_s , welche quadratisch für die Energie und kubisch für die Wellenfunktion ist, hat man in der nächst höheren Ordnung der Kopplung (NLO) keinen nicht-Coulomb'schen Anteil. Dieser tritt erstmals in der darauf folgenden Ordnung (NNLO) auf. Die Abkürzung NNLO_C bedeutet, daß nur der Coulomb'sche Anteil – also ein Teilergebnis von NNLO – in Betracht gezogen wird. Die Korrektur der Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$ gegenüber der führenden Ordnung (N^3LO) kann, wie bereits diskutiert, nicht vollständig angegeben werden. Mit N^3LO_C wird das Teilergebnis bezeichnet, bei welchem alle nicht-Coulomb'schen Terme im Potential abgeschaltet sind.

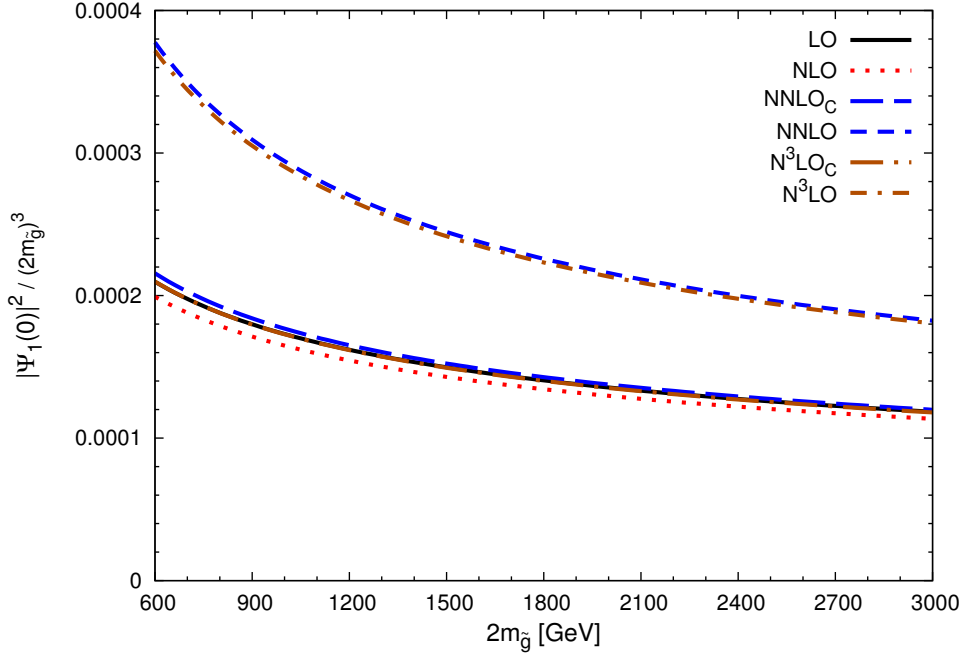


Abbildung 4.3: Normiertes Betragsquadrat der Wellenfunktion am Ursprung als Funktion der doppelten Konstituentenmasse. Die schwarze LO- und die braune $N^3\text{LO}_C$ -Kurve liegen beinahe aufeinander.

Beginnend mit der Wellenfunktion folgt nun die numerische Untersuchung der beiden Störungsreihen. Mit der Wahl $\nu = \mu_r$ erhält man für die ersten beiden Werte der Hauptquantenzahl n

$$\begin{aligned}
|\Psi_1(\mathbf{0})|^2 &= \frac{C_A^3 \alpha_s^3 m_{\tilde{g}}^3}{8\pi} \left\{ 1 + \alpha_s [3.66 L_1 - 0.43] \right. \\
&\quad \left. + \alpha_s^2 [(8.93 L_1^2 - 5.11 L_1 + 5.83)_C + (27 L_1 + 57.38)_{\text{nC}}] \right. \\
&\quad \left. + \alpha_s^3 [(18.17 L_1^3 - 22.91 L_1^2 + 46.17 L_1 - 17.76)_C] \right\}, \\
|\Psi_2(\mathbf{0})|^2 &= \frac{C_A^3 \alpha_s^3 m_{\tilde{g}}^3}{64\pi} \left\{ 1 + \alpha_s [3.66 L_2 - 0.18] \right. \\
&\quad \left. + \alpha_s^2 [(8.93 L_2^2 - 3.86 L_2 + 10.19)_C + (27 L_2 + 29.53)_{\text{nC}}] \right. \\
&\quad \left. + \alpha_s^3 [(18.17 L_2^3 - 19.09 L_2^2 + 71.75 L_2 - 24.39)_C] \right\},
\end{aligned}$$

mit $L_n \equiv \ln(n\mu_r/(m_{\tilde{g}}C_A\alpha_s))$ und $n_f = 5$. Die Wahl für die Anzahl der aktiven Quarks ist durch die charakteristische Skala $m_{\tilde{g}}\alpha_s$ für alle im folgenden betrachteten Gluinomassen gerechtfertigt. Die Effekte des Top-Quarks können hinzugefügt werden, wenn man der Herangehensweise von [62, 63] folgt, sie sind jedoch hier nicht enthalten. Die Renormie-

runnungsskala wird auf $\mu_r = \mu_S$ gesetzt mit der Lösung der Gleichung

$$\mu_S = \frac{C_A m_{\tilde{g}} \alpha_s(\mu_S)}{n}. \quad (4.13)$$

Unter Berücksichtigung der Transformation des Farbfaktors entspricht diese Wahl genau derjenigen, welche für die Quarkonia getroffen wurde. Hierdurch verschwinden die Logarithmen L_n .

Ausgehend von dieser Skalenwahl werden die Kopplungen mittels des Programms `RunDec` [64] berechnet. Als Ausgangswert dient $\alpha_s(M_Z = 91.1876) = 0.1184$, und das Laufen bis zur Skala μ_S wird zur Genauigkeit von vier Schleifen durchgeführt. Die rekursiv definierte Gl. (4.13) wird für jede Gluinomasse separat gelöst. Die Skala ν , welche eingeführt wurde, um die infrarote Divergenz des Potentials zu regularisieren, wird ebenfalls auf μ_S gesetzt.

In Abb. 4.3 ist das Betragsquadrat der normierten Wellenfunktion am Ursprung $|\Psi_n(\mathbf{0})|^2 / (2m_{\tilde{g}})^3$ für $n = 1$ als Funktion von der doppelten Konstituentenmasse aufgetragen. Wie auch im Folgenden variiert die Gluinomasse von 300 GeV bis 1500 GeV. Die Kurven für LO (schwarz und durchgezogen), NLO (rot und gepunktet), NNLO (blau und gestrichelt), NNLO_C (blau und lang gestrichelt), N³LO (braun und gestrichpunktet) und N³LO_C (braun und gestrichpunktet mit langen Strichen) sind einzeln dargestellt. Zunächst stellt man das schlechte Konvergenzverhalten der Wellenfunktion fest. Dies läßt sich teilweise auf den Beitrag des nicht-Coulomb'schen Potentials zurückführen, welches auf NNLO zum ersten Mal auftritt. Es verdoppelt den absoluten Wert beinahe und die bisher unbekanntenen N³LO-Terme könnten zur Verbesserung der Situation beitragen. Betrachtet man jedoch nur V_C , so konvergiert die Wellenfunktion sehr gut: Die Kurven für LO und N³LO fallen beinahe zusammen.

Die Abhängigkeit dieser Werte von der Wahl der Renormierungsskala μ_r ist in Abb. 4.4 zu sehen. Für das Szenario (j) (definiert in Tab. 2.3) wird das von μ_r abhängige Betragsquadrat der Wellenfunktion am Ursprung auf den LO-Wert an der festen Skala μ_S normiert. Es läßt sich leicht ausmachen, daß der Variationsbereich, welcher für die LO-Kurve eine Differenz von ca. 0.8 ausmacht, für die N³LO_C-Kurve für eine Variation der Skala von 100 GeV bis 1000 GeV auf knapp 0.1 reduziert ist. Der zuvor verwendete Wert μ_S kann als Schnittpunkt der LO-Kurve mit der waagrechten 1 abgelesen werden und ist für $m_{\tilde{g}} = 802.21$ GeV gegeben durch $\mu_S = 247.56$ GeV. Man kann sehr gut erkennen, daß die N³LO_C-Kurve oberhalb dieses Werts fast waagrecht verläuft, daß also die Abhängigkeit von der Wahl der Renormierungsskala, die aufgrund des Abschneidens der Störungsreihe zu einer endlichen Ordnung gegeben ist, hier sehr stark reduziert ist. Die Kurven, welche die nicht-Coulomb'schen Terme miteinbeziehen, weisen jedoch eine relativ große μ_r -Abhängigkeit auf.

Die Bindungsenergie E_n gibt die Differenz zwischen der Position $M(nS)$ einer Resonanz und der Schwelle an

$$M(nS) = 2m_{\tilde{g}} + E_n. \quad (4.14)$$

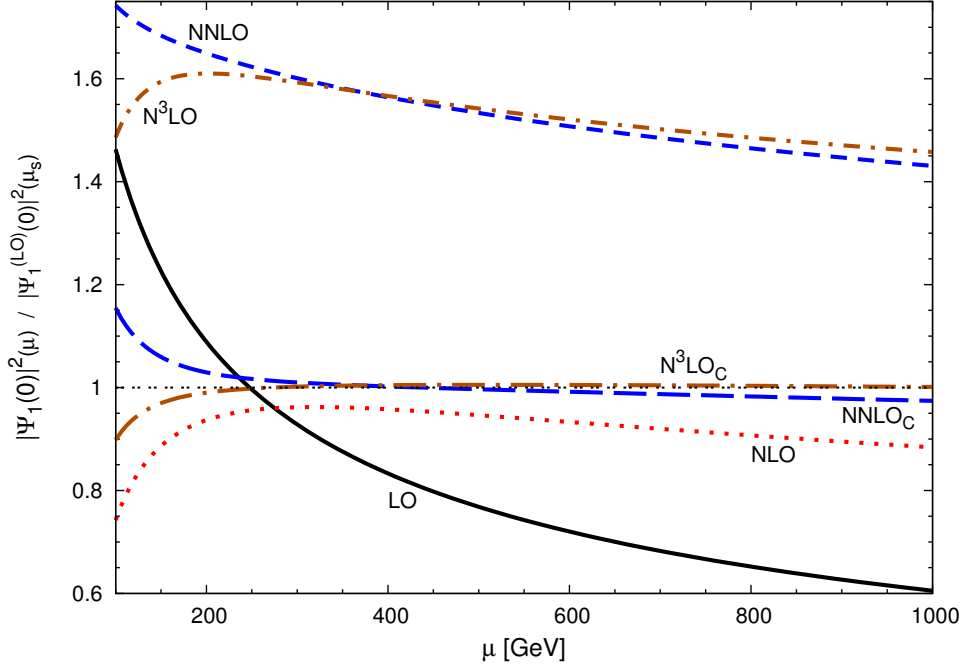


Abbildung 4.4: Abhängigkeit des Betragsquadrats der Wellenfunktion am Ursprung (normiert auf den LO-Wert mit der festen Skala $\mu_S = C_A m_{\tilde{g}} \alpha_s(\mu_S)$) von der Renormierungsskala μ_r für Szenario (j) mit $m_{\tilde{g}} = 802.21$ GeV. Lediglich die beiden oberen Kurven (NNLO und N³LO) beinhalten nicht-Coulomb'schen Korrekturen.

In analoger Weise zur Wellenfunktion erhält man für die numerischen Werte der beiden niedrigsten Hauptquantenzahlen unter der erneuten Wahl $\nu = \mu_r$

$$\begin{aligned}
 E_1 &= -\frac{C_A^2 \alpha_s^2 m_{\tilde{g}}}{4} \left\{ 1 + \alpha_s [2.44 L_1 + 3.20] \right. \\
 &\quad + \alpha_s^2 [(4.47 L_1^2 + 9.72 L_1 + 12.47)_C + (20.81)_{nC}] \\
 &\quad \left. + \alpha_s^3 [(7.27 L_1^3 + 20.06 L_1^2 + 57.18 L_1 + 57.72)_C] \right\}, \\
 E_2 &= -\frac{C_A^2 \alpha_s^2 m_{\tilde{g}}}{16} \left\{ 1 + \alpha_s [2.44 L_2 + 4.42] \right. \\
 &\quad + \alpha_s^2 [(4.47 L_2^2 + 14.19 L_2 + 20.54)_C + (11.95)_{nC}] \\
 &\quad \left. + \alpha_s^3 [(7.27 L_2^3 + 30.96 L_2^2 + 92.89 L_2 + 105.43)_C] \right\}.
 \end{aligned}$$

Es ist ersichtlich, daß die Korrekturen durchweg groß und positiv sind. Besser veranschaulicht wird das in Abb. 4.5, wo die Bindungsenergie des Grundzustands in Abhängigkeit von $2m_{\tilde{g}}$ abgebildet ist. Erneut sind die nicht-Coulomb'schen Beiträge für das mangelhafte Konvergenzverhalten der Bindungsenergie verantwortlich. Die gesamte NNLO-Korrektur

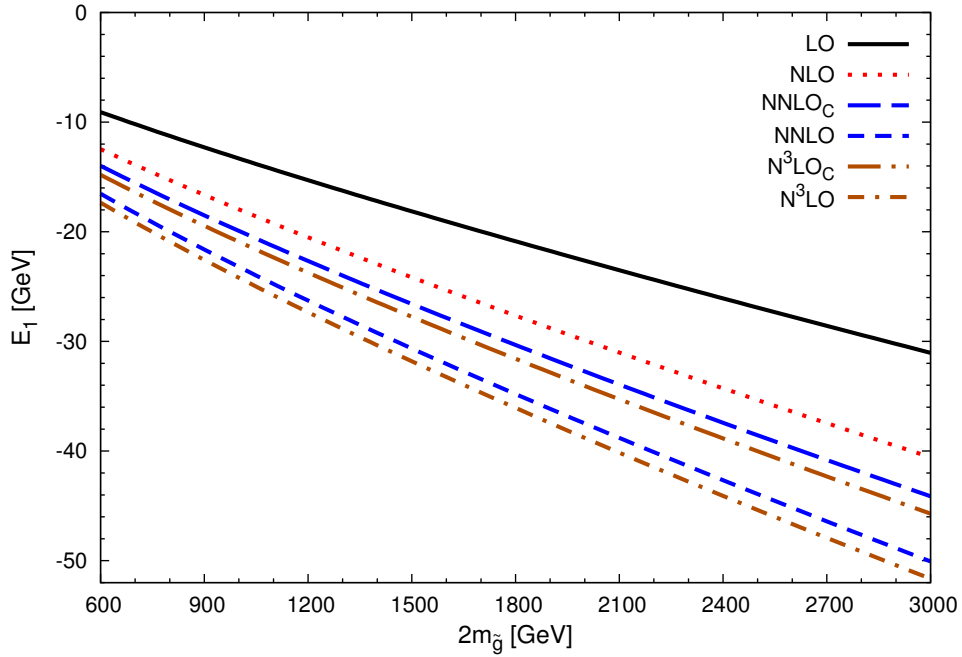


Abbildung 4.5: Bindungsenergie des Grundzustands im Polmassen-Schema als Funktion der doppelten Gluino-Masse. Die nicht-Coulomb’schen Beiträge sind ausschließlich in den unteren zwei Kurven (NNLO und N^3LO) enthalten.

“(C+nC)” hat die gleiche Größenordnung wie die der NLO. Darüber hinaus konvergieren die Coulomb’schen Beiträge (die oberen vier Kurven) auch nicht so gut wie bei der Wellenfunktion. Die gleichen Beobachtungen wurden für den Fall der Quarkonia gemacht [39, 61, 65]. Daher wird in [66] das “*Potential Subtracted*”-Schema (PS-Schema) vorgeschlagen, welches in [61] mit dem Pol-Schema verglichen wird. Dahinter verbirgt sich die Idee, daß das Potential im Ortsraum wesentlich sensitiver ist gegenüber langreichweitigen Effekten als im Impulsraum. Daher wird die Fouriertransformation, durch welche man das im Impulsraum berechnete Potential im Ortsraum erhält, auf Impulse oberhalb einer Faktorisierungsskala μ_f begrenzt

$$V(\mathbf{r}, \mu_f) = V(\mathbf{r}) - \int_{|\mathbf{q}| < \mu_f} \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \tilde{V}(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}, \quad (4.15)$$

wobei es legitim ist, aufgrund der Beschränkung $|\mathbf{q}| < \mu_f$ die Exponentialfunktion auf der rechten Seite auf eins zu setzen. Der Zusammenhang zwischen der PS-Masse und der Polmasse wird also definiert durch

$$m_{\tilde{g}} - m_{PS}(\mu_f) = \delta m(\mu_f) \equiv -\frac{1}{2} \int_{|\mathbf{q}| < \mu_f} \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \tilde{V}(\mathbf{q}). \quad (4.16)$$

Die Integration läßt sich ohne Schwierigkeiten ausführen und man erhält

$$\begin{aligned} \delta m(\mu_f) = \mu_f \frac{C_A \alpha_s(\mu_r)}{\pi} & \left\{ 1 + \frac{\alpha_s(\mu_r)}{4\pi} [2\beta_0 l_1 + a_1] \right. \\ & + \left(\frac{\alpha_s(\mu_r)}{4\pi} \right)^2 [4\beta_0^2 l_2 + 2(2a_1\beta_0 + \beta_1)l_1 + a_2] \\ & + \left(\frac{\alpha_s(\mu)}{4\pi} \right)^3 [16\pi^2 C_A^3 + 8\beta_0^3 l_3 + 2\beta_0(6a_1\beta_0 + 5\beta_1)l_2 \\ & \left. + 2(3a_2\beta_0 + 2a_1\beta_1 + \beta_2)l_1 + a_3] \right\}, \quad (4.17) \end{aligned}$$

mit $l_1 = L_f + 1$, $l_2 = L_f^2 + 2L_f + 2$, $l_3 = L_f^3 + 3L_f^2 + 6L_f + 6$ und $L_f \equiv \ln(\mu_r/\mu_f)$. Man beachte, daß das PS-Schema definiert ist mit $\nu = \mu_f$. Im Folgenden gilt für die Faktorisierungsskala $\mu_f = m_{\tilde{g}} C_A \alpha_s(\mu_S)$ mit μ_S definiert in Gl. (4.13).

Durch die Unabhängigkeit der Mesonmasse (siehe Gl. (4.14)) vom Schema sind die Bindungsenergien $E_n^{(\text{PS})}$ im PS-Schema gegeben durch die Gleichung

$$2m_{\tilde{g}} + E_n = 2m_{\text{PS}} + E_n^{(\text{PS})}. \quad (4.18)$$

Sie lassen sich somit direkt aus den Formeln der Gl. (G.3) und (G.4) sowie der Gl. (4.16) und (4.17) ermitteln. Auf eine explizite Darstellung wird hier jedoch verzichtet. Das verbesserte Konvergenzverhalten kann man in Abb. 4.6 sehen, wo die Bindungsenergie im PS-Schema als Funktion der PS-Masse aufgetragen ist. Letztere ist auch als Störungsreihe in α_s zu verstehen. Betrachtet man nur die Coulomb'schen Beiträge, so liegen die Kurven ab NLO beinahe aufeinander. Für die nicht-Coulomb'schen Anteile bleibt erneut abzuwarten, welche Größenordnung der N³LO-Term aufweist. Im Unterschied zum Pol-Schema sind die Bindungsenergien im PS-Schema alle positiv. Die physikalische Größe ist jeweils die Summe der Konstituentenmassen und der Bindungsenergie.

Die Abhängigkeit von der Wahl des Renormierungsschemas ist in Abb. 4.7 veranschaulicht. Die Bindungsenergie im Szenario (j) ist auf ihren LO-Wert bei der festen Skala μ_S normiert, und die Variation der Skala erstreckt sich erneut von 100 GeV bis 1000 GeV. Während die nicht-Coulomb'schen Anteile sich in beiden Schemen etwa gleich verhalten, ist die Abhängigkeit für den Fall $V_{\text{nc}} \rightarrow 0$ im PS-Schema gegenüber dem Pol-Schema um ein vielfaches reduziert, so daß man hier eine erstaunlich flache N³LO_C-Kurve erhält.

Die Bindungsenergien sind keine Observablen. Man kann jedoch die Differenz zwischen den einzelnen Anregungen beobachten, deren größte die zwischen dem Grundzustand und seiner ersten Anregung $\Delta M \equiv M(2S) - M(1S)$ ist. Sie ist in Abb. 4.8 über der doppelten Konstituentenmasse aufgetragen. Die Differenz der Bindungsenergien ist von der Wahl des Schemas unabhängig, und man kann erneut gut sehen, daß die Konvergenz der Anregungsenergie bestenfalls zu erahnen ist. Die Werte der NLO-Kurve sind es schließlich, welche in Tab. 2.3 eingehen.

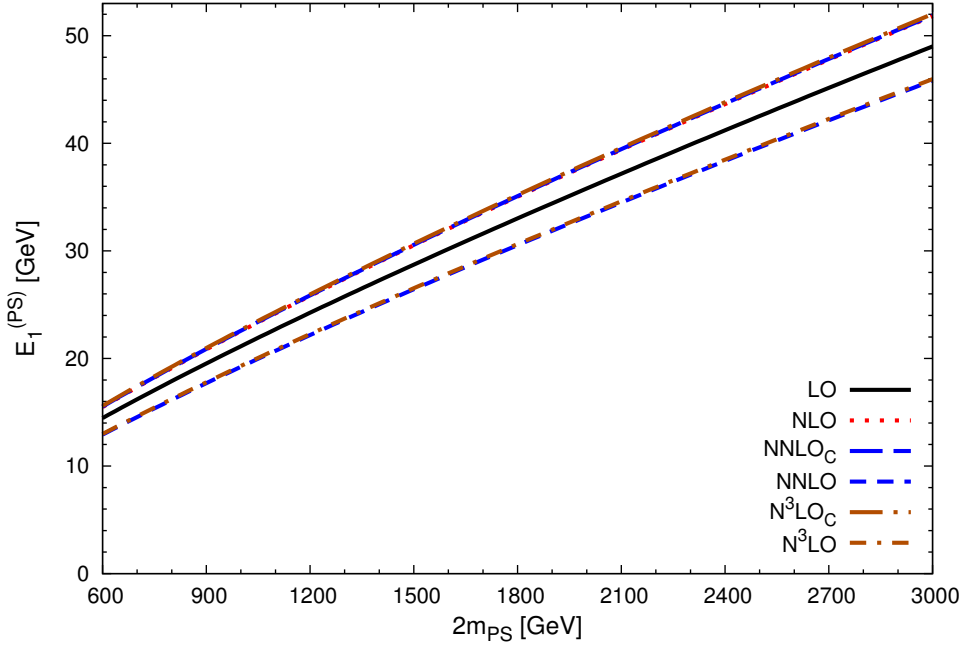


Abbildung 4.6: Energie des Grundzustands im PS-Schema als Funktion der doppelten PS-Masse des Gluinos. Die Kurven wurden mit der Polmasse als Eingangsparameter erstellt, wodurch die Masse (durch die Gl. (4.16) und (4.17)) wie auch die Energie (zusätzlich mit Gl. (4.18)) im PS-Schema bis zur gewünschten Ordnung in α_s entwickelt werden können. Man beachte, daß sowohl die Kurven NLO, NNLO_C und N³LO_C (oberhalb von LO) als auch NNLO und N³LO (unterhalb von LO) beinahe aufeinander liegen.

4.4 Annihilationszerfälle

Interessiert man sich wie z.B. in den Szenarien (j) bis (q) in Tab. 2.3 für den Grenzwert kleiner Zerfallsbreiten, so läßt sich die Green'sche Funktion, wie in Kapitel 3 gezeigt, unterhalb der Schwelle schreiben als

$$\text{Im } G(\mathbf{0}, E) = \pi \sum_n |\Psi_n(\mathbf{0})|^2 \delta(E - E_n). \quad (4.19)$$

Das Matrixelement für den Zerfallsprozess des Grundzustands setzt sich daher zusammen aus einem Anteil des Zerfalls der freien Konstituenten sowie der Wellenfunktion [23]

$$\mathcal{M} = \sqrt{\frac{2}{M(1S)}} \Psi_1(\mathbf{0}) \mathcal{M}_0 \simeq \sqrt{\frac{1}{4\pi m_{\tilde{g}}}} R_1(\mathbf{0}) \mathcal{M}_0, \quad (4.20)$$

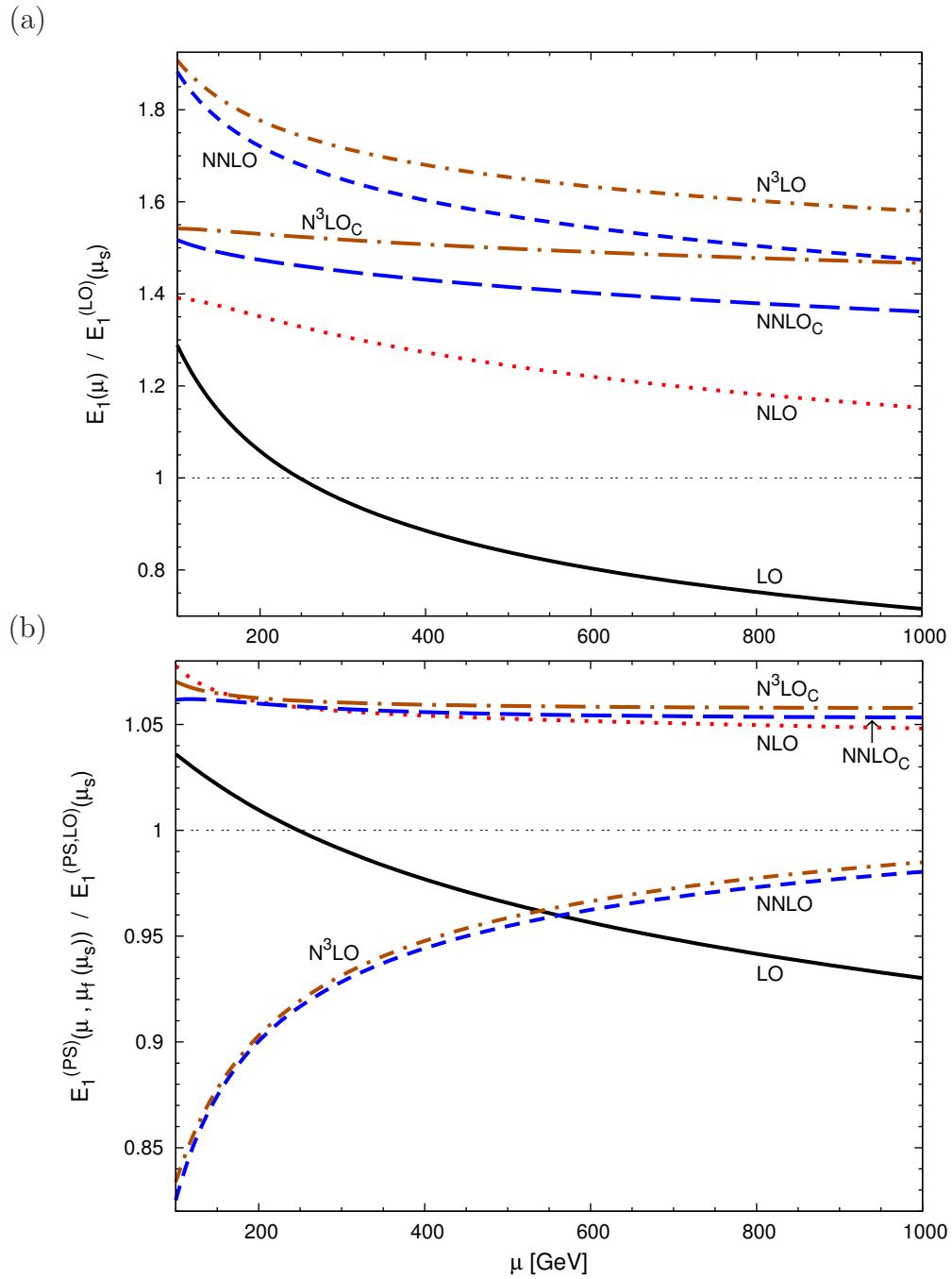


Abbildung 4.7: Renormierungsskalenabhängigkeit der Energie des Grundzustands für Szenario (j) im Pol-Schema (a) und im PS-Schema (b).

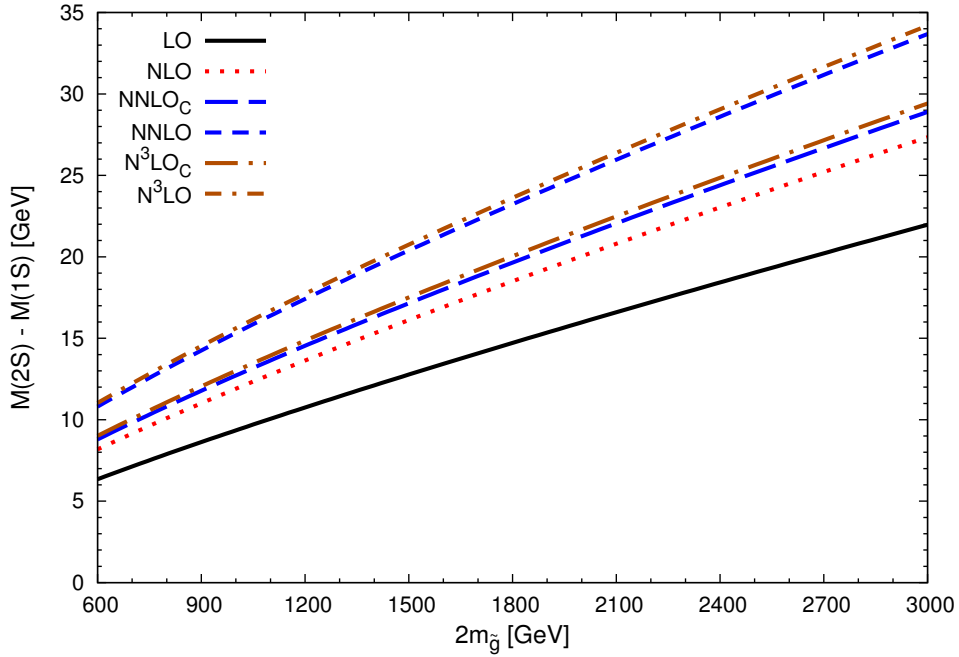


Abbildung 4.8: Differenz der Mesonmassen $M(2S) - M(1S)$ als Funktion der doppelten Konstituentenmasse.

wobei die Näherung $M(1S) \simeq 2m_{\bar{q}}$ durch den vorangegangenen Abschnitt gerechtfertigt ist. Für S-Wellen hängt die Wellenfunktion nur von der radialen Koordinate ab

$$\Psi_n(\mathbf{r}) = R_n(r) \frac{1}{\sqrt{4\pi}}. \quad (4.21)$$

Der Grundzustand ist ein Farbsingulett mit Gesamtdrehimpuls $J = S = L = 0$. Aufgrund der Erhaltung der chiralen Symmetrie kann er nicht in zwei masselose Quarks zerfallen, wodurch der Pseudoskalar hauptsächlich in zwei Gluonen zerfällt. Die Projektion auf die verschiedenen Farbzustände des Tensorprodukts der beiden Oktetts ist seit langem bekannt [67]. Für das Singulett erhält man den vergleichsweise einfachen Projektor

$$P_{1_s}^{ab,cd} = \frac{1}{8} \delta_{ab} \delta_{cd}, \quad (4.22)$$

der auf die Farbfreiheitsgrade a und b der Amplitude sowie c und d der komplex konjugierten Amplitude anzuwenden ist. Die Normierung erfolgt aus der Projekteigenschaft, wobei die Details hierzu Anhang E entnommen werden können.

Da es sich weiterhin um ein Teilchen im Spinsingulett handelt und das Produkt zweier Spin-1/2-Fermionen in ein Triplett und ein Singulett zerlegt werden kann, muß die

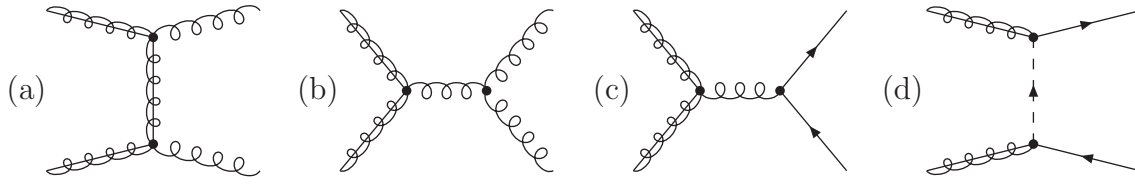


Abbildung 4.9: Feynman-Diagramme, die zum Zerfall zweier Gluinos auf LO beitragen.

Amplitude auf den richtigen Spinzustand projiziert werden [23, 24]. Diese auch auf das Tripletts anwendbare Methode wird in Anhang H erläutert, wo auch die Projektoren angegeben sind. Für den vorliegenden Fall gibt es jedoch eine Alternative, wenn man das Landau-Yang-Theorem hinzuzieht. Es besagt, daß zwei Photonen nicht zu einem Teilchen mit Gesamtdrehimpuls $J = 1$ kombiniert werden können. Da die beiden Gluonen sich aufgrund der Farberhaltung ebenfalls in einem Singulett befinden müssen, greift das Theorem auch hier, und die Summation über alle Spins hat das gleiche Ergebnis zur Folge wie die Projektion.

Zum Zerfall tragen in führender Ordnung schließlich die beiden Diagramme bei, welche aus Abb. 4.9(a) und aus der Kreuzung der beiden Eichbosonen hervorgehen. Diagramm (b) verschwindet für eine Farb- oder eine Spinsingulettkonfiguration der beiden Gluinos. Bei der Berechnung muß außerdem berücksichtigt werden, daß es sich bei den Gluinos um identische Teilchen handelt. Den Ausführungen von [44] folgend bedeutet dies zunächst, daß vor der Integration in Gl. (3.23) ein Faktor $1/2$ eingeführt werden muß, um die Gluinos nicht doppelt zu zählen. Um die statistische Eigenschaft der Fermionen zu berücksichtigen, muß die Wellenfunktion des farbsymmetrischen Spinsinguletts – genau wie für das farbantisymmetrische Spintriplett – symmetrisiert werden

$$\Psi_n^{(\tilde{g}\tilde{g})}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\Psi_n(\mathbf{k}) + \Psi_n(-\mathbf{k})] = \sqrt{2} \Psi_n(\mathbf{k}), \quad (4.23)$$

wobei das letzte Gleichheitszeichen aus der Eigenschaft der S-Wellen resultiert, nicht von der Winkelkonfiguration abzuhängen. Kombiniert man den Faktor $1/2$ für die Berücksichtigung der identischen Teilchen mit dem Faktor $\sqrt{2}$ vor der korrekt symmetrisierten Wellenfunktion $\Psi_n(\mathbf{k})$, so geht in das Betragsquadrat der Amplitude sowohl für den Zerfall als auch für die Produktion des Gluinoniums im Vergleich zu den Formeln der Quarkonia ein zusätzlicher Faktor $1/2$ ein. Berücksichtigt man diesen Faktor sowie die unterschiedliche Farbdarstellung von Tripletts und Oktetts

$$\frac{2}{3} = \sum_{a,b} \left| \frac{\delta_{ik}}{\sqrt{N_C}} T_{ij}^a T_{jk}^b \right|^2 \longrightarrow \sum_{a,b} \left| \frac{\delta_{ce}}{\sqrt{N_C^2 - 1}} f_{acd} f_{bde} \right|^2 = 9, \quad (4.24)$$

so ergibt sich insgesamt der Umrechnungsfaktor $27/4$ gegenüber der entsprechenden For-

mel für die Quarkonia und man erhält für die Zerfallsrate des Farbsingulettts [42–44]

$$\Gamma_{gg} \equiv \Gamma((\tilde{g}\tilde{g})_{1_s} \rightarrow gg) = \frac{C_A^2 \alpha_s^2}{2 m_{\tilde{g}}^2} |R_1(\mathbf{0})|^2, \quad (4.25)$$

mit $|R_1(\mathbf{0})|^2 = 4\pi |\Psi_1(\mathbf{0})|^2$ wie in Gl. (4.21). Unter Benutzung der Wellenfunktion am Ursprung in führender Ordnung erhält man $\Gamma_{gg} \approx (C_A \alpha)^5 m_{\tilde{g}}/4$. Die Wellenfunktion aus Gl. (4.25) ist bezüglich der Renormierungsskala für sich invariant, wodurch man frei ist, hier μ_S aus Gl. (4.13) als geeignete Skala zu wählen. Der rein perturbative Prozess, welcher quantenfeldtheoretisch die Produktion der Konstituenten aus dem Vakuum bzw. deren Vernichtung beschreibt, findet bei einer anderen Skala statt. Man wählt hierfür die harte Skala

$$\mu_H \equiv 2m_{\tilde{g}}. \quad (4.26)$$

Bei dieser Skala wird das Gluino *entkoppelt*. Darunter ist hier das “Wiederhinzufügen” des schweren Teilchens zur Theorie zu verstehen, dessen Effekte unterhalb der harten Skala ausintegriert wurden. Die Berechnung der Entkopplungskonstante ist bis auf zwei Schleifen bekannt [68], wird hier jedoch nur auf einer Schleife angewandt. Entsprechend dem Entkoppeln mit der Genauigkeit einer Schleife findet das Laufen auf dem Niveau zweier Schleifen statt.

Zuletzt wird die Umrechnung vom Schema der *dimensionalen Regularisierung* (DREG) [69], in welchem gerechnet wird, in das der *dimensionalen Reduktion* (DRED) [70] durchgeführt. Da DREG die Gleichheit der Zahl der Freiheitsgrade innerhalb der Eichmultipletts nicht berücksichtigt, ist DRED für SUSY-Berechnungen die geeignete Wahl. Die Umrechnung ist auch in höheren Ordnungen bekannt (siehe z.B. [71, 72]), jedoch genügt für diese Rechnung die erste Ordnung [73]. Fügt man nun alle Bausteine zusammen, so erhält man für die Zerfallsbreite in LO das in Abb. 4.10 dargestellte Ergebnis. Hier ist auch die Kurve unter Hinzunahme der NLO-Korrekturen für den harten Anteil zu sehen. Man erhält Korrekturen von 10–20%, wobei in beiden Fällen die Wellenfunktion der Ordnung $N^3\text{LO}_C$ benutzt wurde. Eine genauere Beschreibung der Berechnung der Korrekturen zum harten Anteil erfolgt im nächsten Abschnitt.

4.4.1 NLO-Korrekturen

Das Theorem von Kinoshita, Lee und Nauenberg (KLN-Theorem) [74, 75] besagt, daß aufgrund der Unitarität Übergangswahrscheinlichkeiten endlich sind, wenn man über alle Zustände entarteter Energie summiert. Daher müssen Ordnung für Ordnung neben den Schleifen-Korrekturen, welche auch *virtuelle Korrekturen* genannt werden, Prozesse mit zusätzlichen äußeren Teilchen (*reelle Korrekturen*) mitgenommen werden. Fügt man bspw. den zwei Gluonen im Endzustand des Prozesses $\tilde{g}\tilde{g} \rightarrow gg$ ein drittes hinzu und betrachtet den Limes, in welchem dessen Energie verschwindet, so erzeugt man einen vom

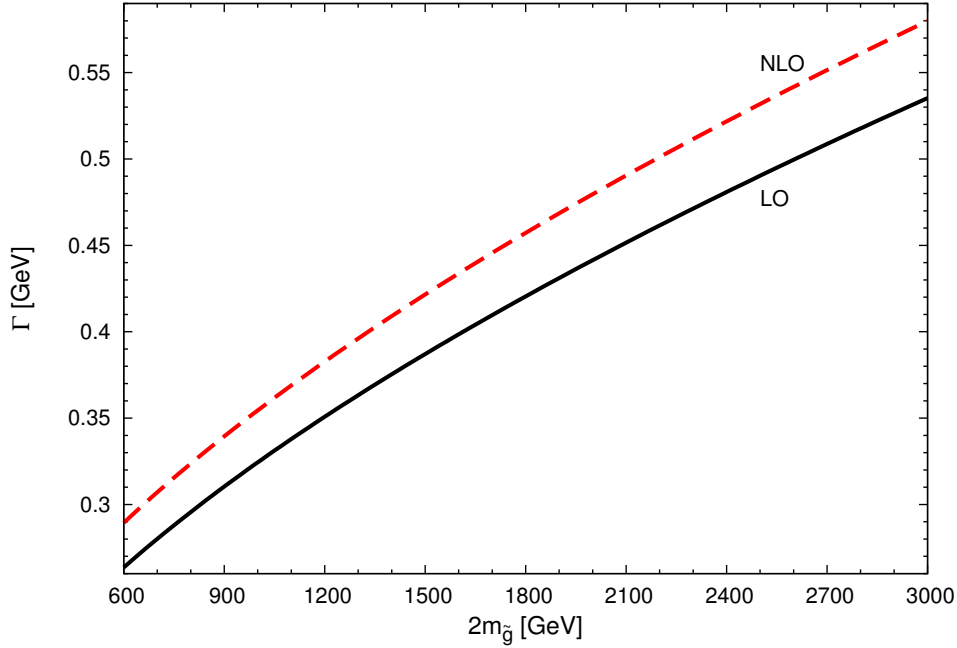


Abbildung 4.10: Zerfallsbreite für das am stärksten gebundene Farbsingulett in zwei Gluonen als Funktion der doppelten Konstituentenmasse.

ursprünglichen Prozess ununterscheidbaren Zustand. Das KLN-Theorem besagt nun, daß auf NLO nur die Summe der Prozesse mit einem weiteren masselosen Teilchen und der Ein-Schleifen-Korrekturen ein endliches Resultat ergibt.

Die Berechnung der virtuellen Korrekturen ähnelt stark der entsprechenden Rechnung für die Quarkonia [25, 28]. Die beitragenden Ein-Schleifen-Diagramme sind in Abb. 4.11 dargestellt. Da die Massen der Squarks größer sind als die des Gluinos, werden die Superpartner der Quarks in dieser effektiven Theorie weggelassen. Die Amplituden innerhalb des MSSM werden mit `FeynArts` [76–78] generiert, wo der Algorithmus mit dem Namen “flipping-rule” (Umkehr-Regel) [79, 80] für die Behandlung der Majorana-Fermionen benutzt wird. Dabei wählt das Programm für jede Kette von Fermionen eine Richtung und kehrt die Ladung für jedes Dirac-Fermion, dessen Fermionenfluß in die entgegengesetzte Richtung läuft, um.

Die Berechnung der für sich divergenten Diagramme wird in DREG also in D Dimensionen der Raumzeit durchgeführt, wodurch die Divergenzen in Polen der Größe

$$\varepsilon = \frac{4 - D}{2}, \quad (4.27)$$

kenntlich gemacht werden. Nur das Diagramm (a) aus Abb. 4.11 wird durch eine Gluonmasse regularisiert, da es nur *abelsche Vertizes* enthält. Somit läßt sich die Coulomb-

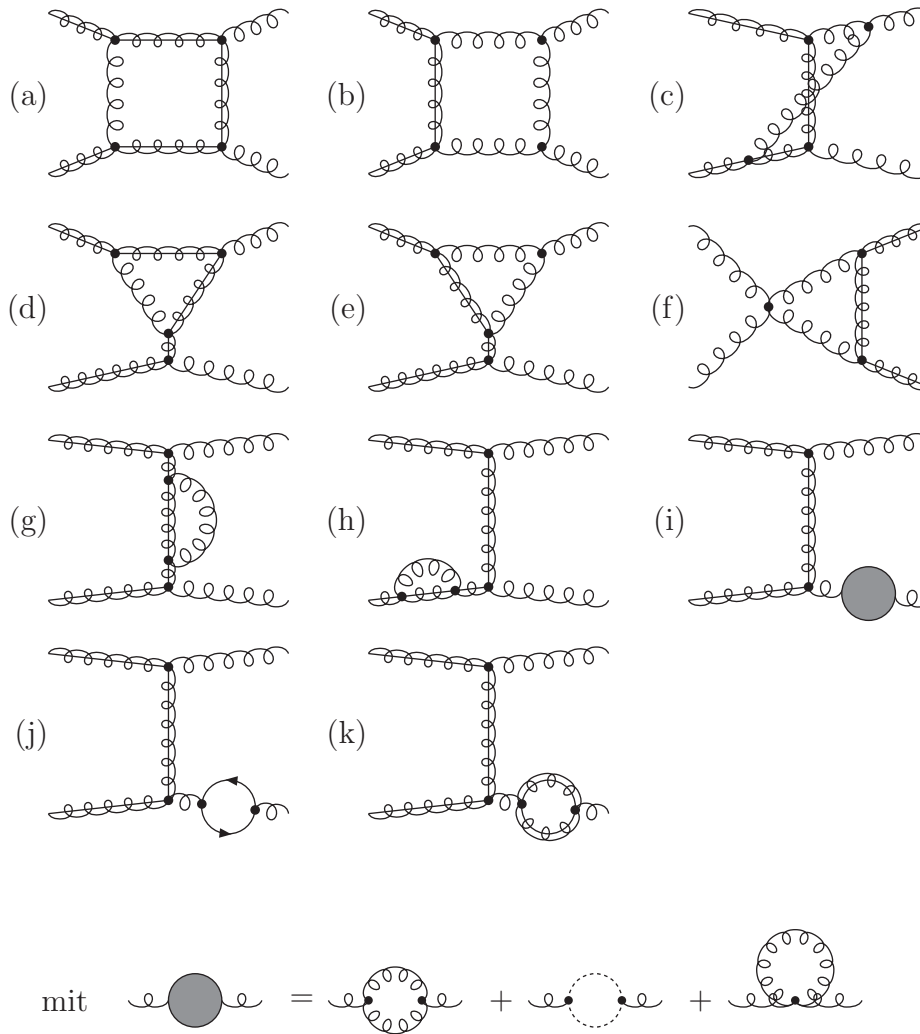


Abbildung 4.11: Feynman-Diagramme, die zu den virtuellen NLO-Korrekturen von $\tilde{g}\tilde{g} \rightarrow gg$ beitragen. Gepunktete Linien stehen für Geist-Felder.

Singularität leicht identifizieren, bevor man in das Schema der DREG übersetzt. Die Vier-Punkt-Funktionen (a)-(c) lassen sich aufgrund der vereinfachten Kinematik durch den verschwindenden Relativimpuls mittels einer Partialbruchzerlegung wie in Gl. (3.2) zu Drei-Punkt-Funktionen reduzieren, wodurch sich der Umfang der in Anhang D diskutierten Tensor-Reduktion nach Passarino und Veltman [81] deutlich verringern läßt. Das Gesamtergebnis kann dargestellt werden durch skalare Funktionen. Die Berechnung wird mit hauseigenen Programmen durchgeführt, welche auf dem Programm FORM [82] basieren.

Das Diagramm (h) steht symbolisch für die Wellenfunktionsrenormierung des Gluinos, die wie dessen Massenrenormierung im “*On-Shell*”-Schema durchgeführt wird. Die Re-

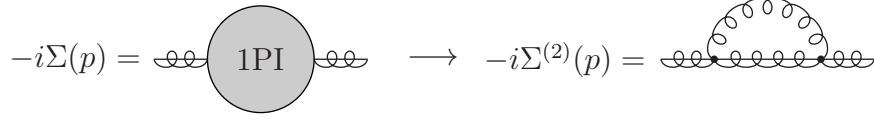


Abbildung 4.12: 1PI Diagramme mit zwei äußeren Gluinios.

normierungskonstanten Z_2 und $Z_{m_{\tilde{g}}}$ sind definiert über den Zusammenhang der nackten, unrenormierten Größen - mit Superskript B - und der physikalischen Größe

$$\begin{aligned}\lambda_{\tilde{g}}^B &= \sqrt{Z_2} \lambda_{\tilde{g}}, \\ m_{\tilde{g}}^B &= Z_{m_{\tilde{g}}} m_{\tilde{g}}.\end{aligned}\tag{4.28}$$

Die Selbstenergie Σ ist wie in Abb. 4.12 definiert, wobei es auf NLO nur ein *Ein-Teilchen-irreduzibles* (1PI) Diagramm gibt. Die Renormierungsbedingung im On-Shell-Schema lautet

$$\begin{aligned}\Sigma_{\text{Ren}}(\not{p} = m_{\tilde{g}}) &= 0, \\ \frac{d}{d\not{p}} \Sigma_{\text{Ren}}(\not{p} = m_{\tilde{g}}) &= 0,\end{aligned}\tag{4.29}$$

wodurch die Renormierungskonstanten bis zur Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_s)$ gegeben sind durch

$$\begin{aligned}Z_2^{\text{OS}} &= 1 + C_A \frac{\alpha_s}{4\pi} \left[-\frac{1}{\varepsilon_{\text{UV}}} - \frac{2}{\varepsilon_{\text{IR}}} - 4 \right] f_\varepsilon(4m_{\tilde{g}}^2), \\ Z_{m_{\tilde{g}}}^{\text{OS}} &= 1 + C_A \frac{\alpha_s}{4\pi} \left[-\frac{3}{\varepsilon_{\text{UV}}} - 4 \right] f_\varepsilon(4m_{\tilde{g}}^2),\end{aligned}\tag{4.30}$$

mit

$$f_\varepsilon(Q^2) \equiv \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon \Gamma(1 + \varepsilon).\tag{4.31}$$

Die Indizes IR (*infrarot*) und UV (*ultraviolett*) geben lediglich die Herkunft der Divergenz an. Ultraviolette Pole verschwinden nach der Renormierung der virtuellen Korrekturen. Ein infrarot endliches Ergebnis erzielt man unter Hinzunahme der reellen Korrekturen.

Die Diagramme (i) bis (k) aus Abb. 4.11 stehen für die Wellenfunktionsrenormierung des Gluons. Dessen Selbstenergie (siehe Abb. 4.13) läßt sich durch die Kenntnis der Tensorstruktur auf eine skalare Größe zurückführen $\Pi_{\mu\nu}^{ab}(k) = \delta_{ab}(k^2 g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) \Pi(k^2)$, wobei die

$$i\Pi_{\mu\nu}^{ab}(k) = \text{1PI} \longrightarrow i\Pi_{\mu\nu}^{ab(2)}(k) = \text{solid grey circle} + \text{single loop} + \text{double loop}$$

Abbildung 4.13: 1PI-Diagramme mit zwei äußeren Gluonen.

Renormierungskonstante sowie die Bedingung für die Renormierung im On-Shell-Schema gegeben sind durch

$$\begin{aligned} A_\mu^B &= \sqrt{Z_3} A_\mu, \\ \Pi_{\text{Ren}}(k^2 = 0) &= 0. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Auf NLO erhält man für die Renormierungskonstante

$$Z_3^{\text{OS}} = 1 + \frac{\alpha_s}{4\pi} \left\{ \left(\frac{5}{3} C_A - \frac{4}{3} n_f T_F \right) \left[\frac{1}{\varepsilon_{\text{UV}}} - \frac{1}{\varepsilon_{\text{IR}}} \right] - \frac{1}{6} C_A \left[\frac{1}{\varepsilon_{\text{UV}}} + 2 \ln(2) \right] \right\} f_\varepsilon(4m_{\tilde{g}}^2), \quad (4.33)$$

wobei der Term der zweiten eckigen Klammer von der Schleife mit virtuellen Gluinos stammt.

Der Anteil der virtuellen Korrekturen zur Zerfallsbreite lautet

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{vir}} &= \Gamma_{gg} \frac{\alpha_s}{\pi} f_\varepsilon(4m_{\tilde{g}}^2) \left[\frac{\beta_0^{(\tilde{g})}}{2} \frac{1}{\varepsilon_{\text{UV}}} - C_A \left(\frac{1}{\varepsilon_{\text{IR}}^2} + \frac{11}{6} \frac{1}{\varepsilon_{\text{IR}}} \right) + n_f T_F \frac{2}{3} \frac{1}{\varepsilon_{\text{IR}}} + C_A \frac{\pi^2}{v} \right. \\ &\quad \left. + C_A \left(-4 + \frac{2\pi^2}{3} - \frac{2}{3} \ln(2) \right) \right], \end{aligned} \quad (4.34)$$

mit der β -Funktion der QCD unter Hinzunahme des Gluinos

$$\beta_0^{(\tilde{g})} = 3C_A - \frac{4}{3} T_F n_f. \quad (4.35)$$

Der Term mit der Coulomb-Singularität α_s/v entspricht exakt dem Term im Sommerfeld-Faktor der Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_s)$. Er steckt jedoch – wie in Kapitel 3 beschrieben – per Konstruktion schon im Betragsquadrat der Wellenfunktion am Ursprung und wird daher im Endergebnis einfach weggelassen. Die Renormierung der Kopplung im $\overline{\text{MS}}$ -Schema führt durch die Ersetzung

$$\alpha_s = \alpha_s^{\overline{\text{MS}}} \left[1 - \frac{\alpha_s^{\overline{\text{MS}}}}{4\pi} \beta_0^{(\tilde{g})} \left(\frac{1}{\varepsilon_{\text{UV}}} - \gamma_E + \ln(4\pi) \right) \right], \quad (4.36)$$

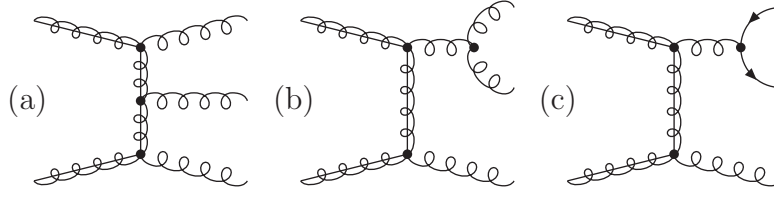


Abbildung 4.14: Zu den reellen Korrekturen beitragende Diagramme.

zu einem ultraviolett endlichen Ergebnis, welches nur noch in das mit DRED verbundene Schema minimaler Subtraktion, $\overline{\text{DR}}$, übersetzt werden muß [73]

$$\alpha_s^{\overline{\text{MS}}} = \alpha_s^{\overline{\text{DR}}} \left[1 - \frac{\alpha_s^{\overline{\text{DR}}}}{4\pi} \frac{C_A}{3} \right]. \quad (4.37)$$

Die reellen Korrekturen bestehen aus den Prozessen $\tilde{g}\tilde{g} \rightarrow ggg$ und $\tilde{g}\tilde{g} \rightarrow gq\bar{q}$. Die dazu beitragenden Diagrammklassen sind in Abb. 4.14 dargestellt. Die Schwierigkeit bei der Berechnung liegt einerseits in der Bildung des Betragsquadrats, denn für die Amplitude mit drei Gluonen entstehen durch die Permutation der äußeren Beinen der Diagramme (a) und (b) zwölf Diagramme, die es zu quadrieren gilt. Andererseits muß der Phasenraum für die drei masselosen Teilchen in D Dimensionen berechnet werden. Er ist in Anhang I dargestellt. Das Ergebnis für die reellen Korrekturen der Zerfallsbreite lautet

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{reell}} &= \Gamma(\tilde{g}\tilde{g} \rightarrow ggg) + \Gamma(\tilde{g}\tilde{g} \rightarrow gq\bar{q}) \\ &= \Gamma_{gg} \frac{\alpha_s}{\pi} f_\varepsilon(4m_g^2) \left[C_A \left(\frac{1}{\varepsilon_{\text{IR}}^2} + \frac{11}{6} \frac{1}{\varepsilon_{\text{IR}}} + \frac{181}{18} - \frac{23\pi^2}{24} \right) \right. \\ &\quad \left. + n_f T_F \left(-\frac{2}{3} \frac{1}{\varepsilon_{\text{IR}}} - \frac{16}{9} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Als vollständiges Resultat erhält man für die Zerfallsbreite des 1_s -Zustands auf NLO aus den Gl. (4.34), (4.36), (4.37) und (4.38)

$$\Gamma_{\text{NLO}} = \Gamma_{gg} \left\{ 1 + \frac{\alpha_s}{\pi} \left[C_A \left(\frac{53}{9} - \frac{7\pi^2}{24} - \frac{2}{3} \ln(2) \right) - n_f T_F \frac{16}{9} + \frac{\beta_0^{(\tilde{g})}}{2} \ln \left(\frac{\mu^2}{4m_g^2} \right) \right] \right\}, \quad (4.39)$$

mit der Kopplung im $\overline{\text{DR}}$ -Schema. Für Abb. 4.10 wurde die Anzahl der masselosen Quarkflavours im harten Anteil der Rate auf $n_f = 6$ gesetzt, während die Wellenfunktion bei einer anderen Skala mit $n_f = 5$ ausgewertet wird – siehe Abschnitt 4.3. Im folgenden Abschnitt werden weitere Kanäle für den Annihilationszerfall untersucht.

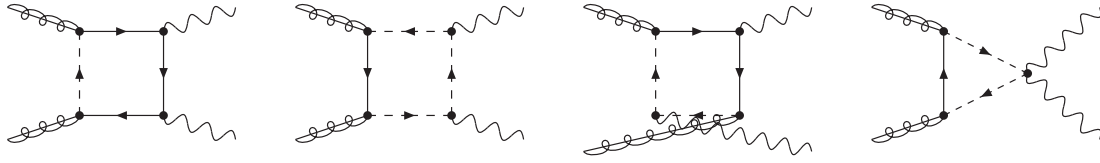


Abbildung 4.15: Repräsentative Diagramme für den Zerfall in zwei Photonen auf LO.

4.4.2 Alternative Zerfallsmoden

Für den bisher studierten Fall von Squarkmassen, welche weit schwerer sind als die Gluinomasse, ist der Annihilationszerfall des am stärksten gebundenen Grundzustands der einzig relevante. Betrachtet man jedoch Squarkmassen, welche zwar immer noch größer sind als die Gluinomasse, so daß der Zerfall des gebundenen Systems weiterhin durch Annihilation bestimmt ist, welche aber in etwa in der gleichen Größenordnung liegen, so sind weitere Zerfallskanäle von Bedeutung.

Für die Quarkonia ist der Zerfall in zwei Photonen mit seiner gut identifizierbaren Signatur ein sehr wichtiger Kanal. Da die Gluinos jedoch nicht elektroschwach koppeln, ist der Zerfall in führender Ordnung gegenüber dem hadronischen um eine Schleife unterdrückt. Die Diagrammklassen sind in Abb. 4.15 zu sehen: In den Schleifen kommen virtuelle Quarks und Squarks vor. Während die vollständige Amplitude für den Zerfall in zwei Photonen in Gl. (B.2) angegeben ist, erhält man im Limes verschwindender Quarkmassen für das Verhältnis der Zerfallsbreiten

$$R_{\gamma\gamma} = \frac{\Gamma((\tilde{g}\tilde{g})_{1s} \rightarrow \gamma\gamma)}{\Gamma_{gg}} = \frac{4T_F \alpha^2}{C_A^2 \pi^2} \left(\sum_f Q_f^2 \right)^2 \left| \text{Li}_2\left(-\frac{m_{\tilde{g}}^2}{m_{\tilde{q}}^2}\right) - \text{Li}_2\left(\frac{m_{\tilde{g}}^2}{m_{\tilde{q}}^2}\right) \right|^2. \quad (4.40)$$

Mit der Abschätzung $R_{\gamma\gamma} \sim 10^{-5}$ wird das Signal zweier Photonen jedoch nicht zu entdecken sein und spielt daher keine Rolle.

Während der Zerfall des Pseudoskalars in zwei masselose Quarks nicht existiert, brechen die Quarkmassen die chirale Symmetrie, so daß man für den Zerfall in massive Top-Quarks eine von Null verschiedene Breite erhält. Die beiden Diagramme, welche in Klasse (d) von Abb. 4.9 liegen, tragen in führender Ordnung zum Zerfall bei. Die Amplitude lautet

$$\begin{aligned} \mathcal{A}((\tilde{g}\tilde{g})_{1s} \rightarrow t\bar{t}) &= \sum_{h=1}^2 \frac{C_F \delta_{ij}}{\sqrt{N_C^2 - 1}} \frac{2ig_s^2}{m_{\tilde{g}}^2 + m_{\tilde{t}_h}^2 - m_t^2} \bar{u}_{s_1}(k_1, m_t) \left(P_- U_{h2}^{(t)} - P_+ U_{h1}^{(t)} \right) \\ &\times \left[u_{\bar{s}}\left(\frac{P}{2}, m_{\tilde{g}}\right) \bar{v}_s\left(\frac{P}{2}, m_{\tilde{g}}\right) \right. \\ &\quad \left. - u_s\left(\frac{P}{2}, m_{\tilde{g}}\right) \bar{v}_{\bar{s}}\left(\frac{P}{2}, m_{\tilde{g}}\right) \right] \left(P_- U_{h1}^{(t)} - P_+ U_{h2}^{(t)} \right) v_{s_2}(k_2, m_t), \end{aligned} \quad (4.41)$$

mit der Stop-Mischungsmatrix, welche definiert ist durch

$$\begin{pmatrix} \tilde{t}_1 \\ \tilde{t}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11}^{(t)} & U_{12}^{(t)} \\ U_{21}^{(t)} & U_{22}^{(t)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{t}_L \\ \tilde{t}_R \end{pmatrix}. \quad (4.42)$$

Die Summe der beiden Diagramme kann durch Ausnutzung der Spinkonfiguration des Bindungszustands vereinfacht werden. Die Antisymmetrie des $SU(2)$ -Singulets führt zu

$$\begin{aligned} & \sum_{s, \bar{s}} \left[u_{\bar{s}} \left(\frac{P}{2}, m_{\tilde{g}} \right) \bar{v}_s \left(\frac{P}{2}, m_{\tilde{g}} \right) - u_s \left(\frac{P}{2}, m_{\tilde{g}} \right) \bar{v}_{\bar{s}} \left(\frac{P}{2}, m_{\tilde{g}} \right) \right] \langle 0, 0; s, \bar{s} \rangle \\ &= 2 \sum_{s, \bar{s}} \left[u_{\bar{s}} \left(\frac{P}{2}, m_{\tilde{g}} \right) \bar{v}_s \left(\frac{P}{2}, m_{\tilde{g}} \right) \right] \langle 0, 0; s, \bar{s} \rangle, \end{aligned} \quad (4.43)$$

wodurch sich das Verhältnis der Zerfallsbreiten berechnen läßt als

$$R_{t\bar{t}} = \frac{\Gamma((\tilde{g}\tilde{g})_{1s} \rightarrow t\bar{t})}{\Gamma_{gg}} = \frac{4C_F}{C_A^2} \sqrt{1 - \frac{m_t^2}{m_{\tilde{g}}^2} \frac{m_{\tilde{g}}^2 m_t^2}{(m_{\tilde{g}}^2 + m_{\tilde{t}}^2 - m_t^2)^2}}, \quad (4.44)$$

mit der Annahme $m_{\tilde{t}} = m_{\tilde{t}_1} = m_{\tilde{t}_2}$. Das Ergebnis für $m_{\tilde{t}_1} \neq m_{\tilde{t}_2}$ und mit dem Mischungswinkel der Stops ist in Gl. (B.3) dargestellt. In Abb. 4.16 ist $R_{t\bar{t}}$ für die Verhältnisse $m_{\tilde{t}}/m_{\tilde{g}} = 0.8, 0.9, 1.0, 1.2, 1.5$ und $m_t = 172.0 \text{ GeV}$ über der doppelten Gluinomasse aufgetragen. Das Verhältnis erreicht für kleine Gluinomassen Werte bis zu 10%, fällt jedoch für schwerere SUSY-Teilchen rapide ab. Man beachte hierbei, daß selbst für sehr leichte Stopmassen die Formation von Gluinonia möglich ist, sofern $m_{\tilde{g}} < m_{\tilde{t}} + m_t$ gilt und damit Zwei-Teilchen-Zerfälle des Gluinos ausgeschlossen sind.

4.5 Produktion des Bindungszustands

Wie auch für die Zerfallsbreite kann man die Berechnung des hadronischen Produktionswirkungsquerschnitts von den Formeln für den pseudoskalaren Zustand zweier Top-Quarks (für gewöhnlich η_t genannt) ableiten [83]. Mit dem gleichen wie in Abschnitt 4.4 diskutierten Umrechnungsfaktor $27/4$ erhält man für den partonischen Wirkungsquerschnitt des Prozesses $gg \rightarrow (\tilde{g}\tilde{g})_{1s}$

$$\sigma_0 \equiv \hat{\sigma}_{gg}^{(\text{LO})} = \frac{C_A^2 \pi^2 \alpha_s^2 |R_1(\mathbf{0})|^2}{4s (2m_{\tilde{g}})^3}. \quad (4.45)$$

Der hadronische Wirkungsquerschnitt für den beobachtbaren Prozess $pp \rightarrow (\tilde{g}\tilde{g})_{1s}$ ist definiert als die Faltung der partonischen Prozesse mit den *Partonverteilungsfunktionen*

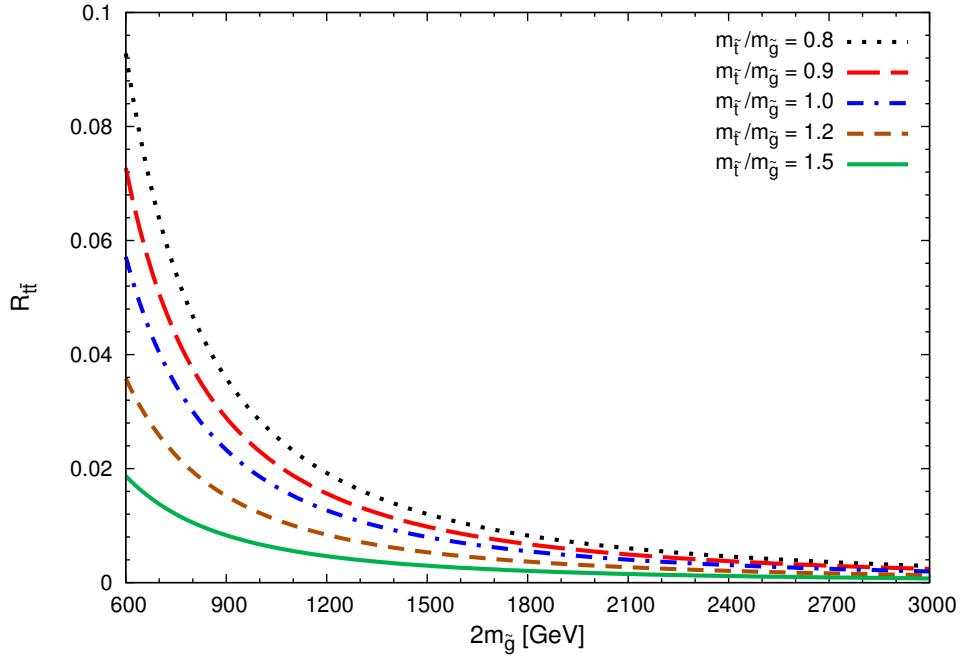


Abbildung 4.16: Verzweigungsverhältnis für die Zerfallsrate des 1S-Zustands in Top-Quarks.

(PDF)

$$\sigma_{\text{had}}(S) = \sum_{ij} \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 f_{i|P}(x_1, \mu_f^2) f_{j|P}(x_2, \mu_f^2) \hat{\sigma}_{ij}(s = x_1 x_2 S, \mu_r^2, \mu_f^2). \quad (4.46)$$

Die Formel beinhaltet die Faktorisierung des Produktionsprozesses in langreichweitige Effekte unterhalb der Massenskala μ_f , welche in den PDF's enthalten sind, und in kurzreichweitige Effekte im harten, partonischen Wirkungsquerschnitt. Dieser hängt von der Renormierungsskala μ_r ab. Die Verteilungsfunktion $f_{i|P}(x, \mu_f^2)$ gibt an, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, ein Parton i im Proton zu finden, welches bei der Skala μ_f den Anteil x an dessen Longitudinalimpuls hat. Diese Wahrscheinlichkeit läßt sich zwar nicht aus grundlegenden Prinzipien herleiten, jedoch weiß man, wenn man sie bei einer Skala experimentell bestimmt hat, wie sie zu einer anderen Skala evolviert werden kann [84–88].

Mit Gl. (4.46) können Prozesse beschrieben werden, wie sie bspw. am LHC stattfinden. Zusammengesetzte Teilchen, die Protonen, werden bei der *hadronischen Schwerpunktsenergie* \sqrt{S} zur Kollision gebracht, wobei in dem partonischen Subprozess bei der *partonischen Schwerpunktsenergie* \sqrt{s} die eigentliche Reaktion abläuft. Die Grundlage für die Faktorisierung bilden erneut die unterschiedlichen Skalen, bei welchen die Prozesse stattfinden. Während die Wechselwirkungsprozesse der Bindung des Hadrons zeitlich sehr langsam ablaufen, geschieht die Kollision in einem sehr viel kürzeren Zeitraum. Mit

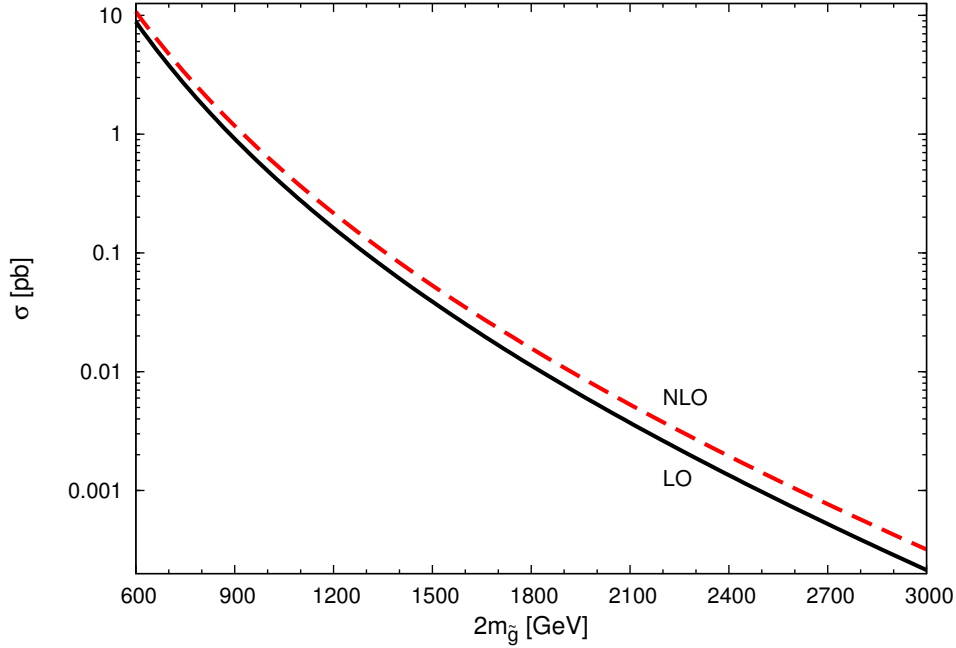


Abbildung 4.17: Vorhersage auf LO und NLO für den Produktionsquerschnitt des 1S-Zustands bei $\sqrt{S} = 14$ TeV.

Hilfe des Partonmodells beschreibt man daher Quarks und Gluonen, die einen festen Impulsbruchteil ihres Hadrons tragen.

Für die numerische Betrachtung des Wirkungsquerschnitts werden die PDF's von MSTW2008 [89] verwendet. Diese sind für LO und NLO erhältlich, wobei jeweils der zentrale Satz verwendet wird. Der Wert für die starke Kopplung bei m_Z wird durch die Verteilungsfunktionen mitgeliefert, für MSTW2008LO bekommt man $\alpha_s(m_Z) = 0.13939$ und für MSTW2008NLO gilt $\alpha_s(m_Z) = 0.12018$. Der letzte Wert wird unabhängig von der Ordnung des harten Anteils für die Wellenfunktion am Ursprung verwendet, deren Betragsquadrat erneut auf der Ordnung N^3LO_C berechnet wird. Nach dem Laufen mit der Genauigkeit zweier Schleifen und der Entkopplung des massiven Top-Quarks bei der Skala $m_t = 172.0$ GeV wechselt man erneut bei der hohen Skala das Schema und entkoppelt das Gluino. Die Wahl dieser Renormierungsskala sowie der Faktorisierungsskala wird festgelegt zu

$$\mu_f = \mu_r = \mu_H = 2m_{\tilde{g}}. \quad (4.47)$$

Die Wirkungsquerschnitte für die Produktion des Bindungszustands zweier Gluinos in der Konfiguration eines Farb- und Spinsingulett auf LO und NLO bei der hadronischen Schwerpunktsenergie $\sqrt{S} = 14$ TeV sind gegeben in Abb. 4.17. Die Korrektur variiert

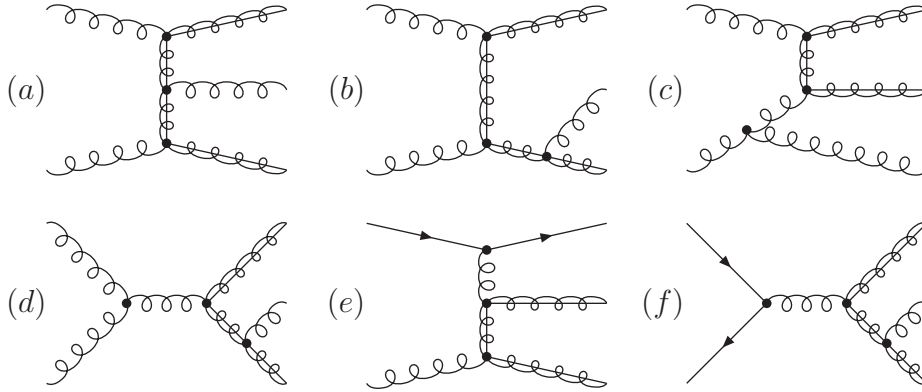


Abbildung 4.18: Feynman-Diagramme für die Prozesse $gg \rightarrow \tilde{g}\tilde{g}g$ (a)-(d), $gq \rightarrow \tilde{g}\tilde{g}q$ (e) und $q\bar{q} \rightarrow \tilde{g}\tilde{g}g$ (f) in LO.

von 25% (bei $2m_{\tilde{g}} = 3000$ GeV) bis 55% (bei $2m_{\tilde{g}} = 600$ GeV), wobei die Diskussion der Berechnung sowie der Abhängigkeit der Ergebnisse von der Wahl der Skala im nächsten Abschnitt enthalten ist.

4.5.1 NLO-Korrekturen

Da es sich um den inversen Prozess gegenüber dem Zerfall handelt, können die virtuellen Korrekturen – mit Ausnahme der Vernachlässigung der Masse der Top-Quarks – übernommen werden. Die reellen Korrekturen unterscheiden sich vom Zerfall und werden in die Prozesse mit gg , gq , $g\bar{q}$ und $q\bar{q}$ im Anfangszustand unterteilt. Die zur Produktion eines Farbsingulets beitragenden Diagrammklassen sind in Abb. 4.18 dargestellt, wobei man das Diagramm für den Prozess $g\bar{q} \rightarrow \tilde{g}\tilde{g}\bar{q}$ durch das Invertieren der Pfeile in (e) erhält.

Da das KLN-Theorem die Berücksichtigung aller Korrekturen für ein endliches Ergebnis fordert, man jedoch nur an Prozessen mit zwei Teilchen im Anfangszustand interessiert ist, erhält man für die partonischen Wirkungsquerschnitte zunächst divergente Ergebnisse. Die Divergenzen stammen von der Abstrahlung eines Partons im Anfangszustand (Diagramme (c) und (e)) und sind für den jeweiligen partonischen Subprozess von universeller Natur. Da die Faktorisierung besagt, daß die PDF alle langreichweitigen Effekte enthält, erlangt man durch das “Renormieren” der PDF’s ein endliches Resultat. Im $\overline{\text{MS}}$ -Schema bedeutet dies effektiv die Addition von

$$\hat{\sigma}_{ik}^{(\text{LO})} \frac{\alpha_s}{\pi} f_\varepsilon(\mu_f^2) \frac{1}{2\varepsilon_{\text{IR}}} \mathcal{P}_{jk}(z) \quad (4.48)$$

zum jeweiligen durch die Partonen ij induzierten Ergebnis mit $z = 4m_{\tilde{g}}^2/s$ und f_ε aus Gl. (4.31). Die Funktionen \mathcal{P}_{jk} werden auch “*Splitting*”-Funktionen (Aufspaltungsfunktionen) genannt und können in Anhang B in Gl. (B.4) gefunden werden. Für den Prozess $gq \rightarrow (\tilde{g}\tilde{g})_{1s}q$ braucht man bspw. die Splitting-Funktion \mathcal{P}_{gq} , wobei für den durch

zwei Gluonen initiierten Prozess zweimal Gl. (4.48) mit $i = j = k = g$ addiert werden muß.

Mit dem differentiellen Phasenraum für den $2 \rightarrow 2$ -Prozess in D Dimensionen, welcher in Anhang I dargestellt ist, läßt sich das Resultat für die reellen Korrekturen mit renormierten Verteilungsfunktionen berechnen. Insgesamt erhält man für die partonischen Wirkungsquerschnitte

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{gg} = \sigma_0 \left\{ \delta(1-z) + \frac{\alpha_s}{\pi} \left[-\mathcal{P}_{gg}(z) \Big|_{n_f \rightarrow (n_f-1)} \ln \left(\frac{\mu^2}{4m_g^2} \right) + C_A F(z) \right. \right. \\ \left. \left. + \delta(1-z) \left(C_A \left(-\frac{25}{6} + \frac{\pi^2}{3} - \frac{2}{3} \ln(2) \right) \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2T_F}{3} \left(\ln \left(\frac{m_t^2}{m_g^2} \right) - 2 \right) \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{\beta_0^{(\bar{g})}}{2} \ln \left(\frac{\mu^2}{4m_g^2} \right) \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.49a)$$

$$\hat{\sigma}_{gq} = \sigma_0 \frac{\alpha_s}{\pi} \left\{ C_F \frac{z}{2} [2 - \ln(z)] + \frac{1}{2} \mathcal{P}_{gq}(z) \left[\ln \left(\frac{4m_g^2(1-z)^2}{\mu^2} \right) - 1 \right] \right\}, \quad (4.49b)$$

$$\hat{\sigma}_{g\bar{q}} = \hat{\sigma}_{gq}, \quad (4.49c)$$

$$\hat{\sigma}_{q\bar{q}} = \sigma_0 \frac{\alpha_s}{\pi} \frac{32}{27} z(1-z), \quad (4.49d)$$

mit

$$\begin{aligned} F(z) = & \frac{11z^5 + 11z^4 + 13z^3 + 19z^2 + 6z - 12}{6z(1+z)^2} \\ & + 4 \left(\frac{1}{z} + z(1-z) - 2 \right) \ln(1-z) + 4 \left[\frac{\ln(1-z)}{1-z} \right]_+ \\ & + \left(\frac{2(z^3 - 2z^2 - 3z - 2)(z^3 - z + 2)z \ln z}{(1+z)^3(1-z)} - 3 \right) \frac{1}{1-z}. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Es gilt $n_f = 6$, und die Verschiebung $n_f \rightarrow (n_f - 1)$ berücksichtigt die Masse des Top-Quarks, welches nicht in den PDF's enthalten ist. Der Grenzwert $m_t \rightarrow 0$ wird durchgeführt, wenn es möglich ist, und man erhält durch Diagramm (j) aus Abb. 4.11 mit virtuellen Top-Quarks den Beitrag aus der dritten Zeile von Gl. (4.49a).

In Abb. 4.19 ist die Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts von der Wahl der Faktorisierungs- und Renormierungsskala für Szenario (j) gezeigt. Die entsprechenden Kurven sind auf den Wert des LO-Querschnitts bei $\mu = 2m_{\bar{g}} = 1604.42 \text{ GeV}$ normiert. Man kann erkennen, daß der gg -Kanal, welcher auch das LO-Resultat enthält, dominant ist. Der für sich unphysikalische $gq/g\bar{q}$ -Beitrag ist negativ, der $q\bar{q}$ -initiierte Kanal vernachlässigbar klein.

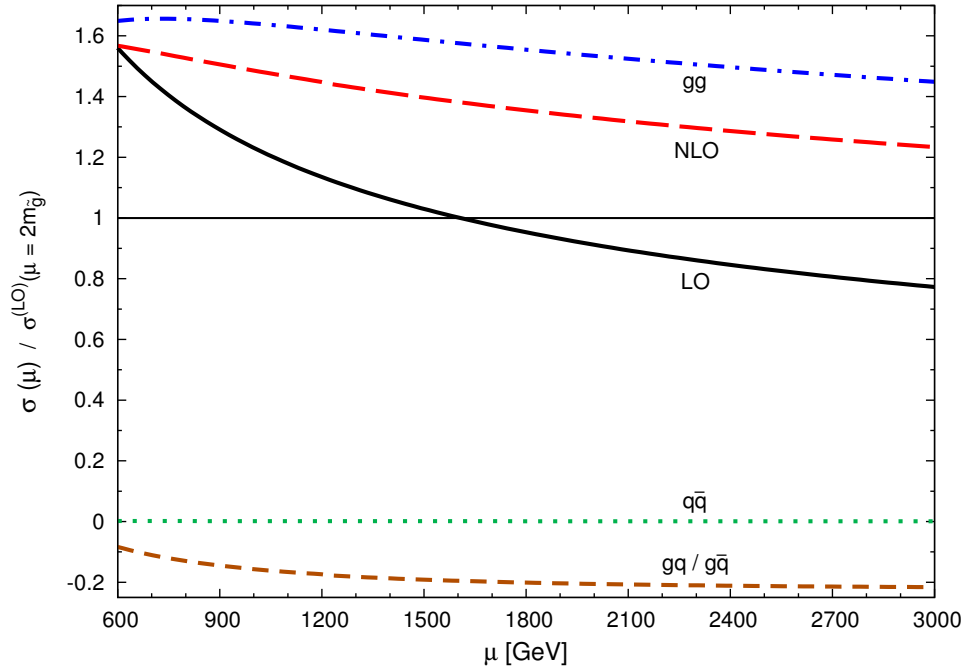


Abbildung 4.19: Abhängigkeit des Produktionsquerschnitts von der Faktorisierungs- und Renormierungsskala sowie Zerlegung des Resultats in die verschiedenen Subprozesse für Szenario (j). Die Kurve, genannt “ gg ”, enthält auch die LO-Anteile.

Im Weiteren ist eine deutliche Reduzierung der Skalenabhängigkeit durch die NLO-Rechnung zu sehen. Die Kurve variiert um $\pm 15\%$ um den Wert von 40% , welcher für $\mu = \mu_H$ erzielt wird. Die größte Unsicherheit rührt jedoch von der Wellenfunktion her. Nimmt man die nicht-Coulomb’schen Terme des Wechselwirkungspotentials hinzu, so gewinnt man 60% für den Wirkungsquerschnitt.

Für eine erwartete *integrierte Luminosität* von $\int dt \mathcal{L} = 100 \text{ fb}^{-1}$ erhält man für den betrachteten Bereich von Gluinomassen zwischen 10 und 10^6 Ereignisse. Daher bleibt es abzuwarten, ob das Signal vom *QCD-Untergrund* separiert werden kann.

4.5.2 Verhältnis vom Signal zum Untergrund

Nimmt man an, daß der Kanal zweier Gluonen den Zerfall der Gluinonia dominiert, so muß dieser Endzustand vom QCD-Untergrund isoliert werden. Vereinfacht man die Analyse weiter durch die Annahme, daß Jets von Gluonen von Quark-Jets experimentell unterschieden werden können, so wird der Untergrund durch die Streuung zweier Gluonen dominiert. Folgt man der in [44] gegebenen Herangehensweise, maximiert man das Verhältnis von Signal zu Untergrund, indem man kleine Streuwinkel ausschließt, da dort der Beitrag

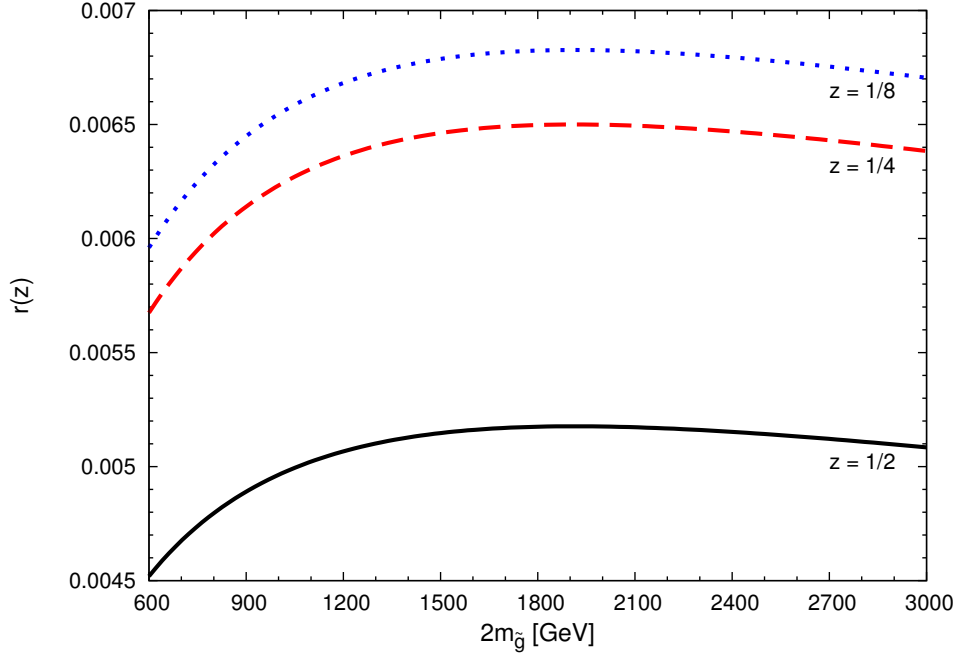


Abbildung 4.20: Verhältnis von Signal zu Untergrund für verschiedene Werte von z .

des Untergrunds am größten ist. Im partonischen Schwerpunktssystem definiert man sich die Integrationsgrenze $|\cos(\theta)| \leq z < 1$ über den Streuwinkel θ zwischen den Achsen der einfallenden und ausfallenden Partonen.

Um das Signal isolieren zu können, ist eine gute experimentelle Auflösung ΔM der invarianten Masse der beiden Jets M nötig. Für den Grenzwert einer beliebig kleinen Auflösung wäre die Isolation des Signals problemlos durchführbar. Integriert man die beiden differentiellen Wirkungsquerschnitte über den Streuwinkel $-z \leq \cos(\theta) \leq z$ sowie die invariante Masse $M_{1_s} - \Delta M/2 \leq M \leq M_{1_s} + \Delta M/2$, so ergibt sich für das Verhältnis vom Signal zum Untergrund

$$r(z, \Delta M) = \frac{S(z, \Delta M)}{U(z, \Delta M)} = \frac{\pi}{3} \frac{\Gamma_{gg}}{\Delta M \alpha_s^2} \left[\frac{129 - 32z^2 - z^4}{1 - z^2} - \frac{24}{z} \ln \left(\frac{1+z}{1-z} \right) \right]^{-1}. \quad (4.51)$$

Benutzt man $\Delta M/M_{1_s} = 0.038 + 38 \text{ GeV}/M_{1_s}$ als Auflösung für die invariante Masse der zwei Jets [90], so erhält man für das Verhältnis r in Abhängigkeit der doppelten Gluinomasse ($\simeq M_{1_s}$) die in Abb. 4.20 dargestellten Kurven für die Werte $z^{-1} = 2, 4, 8$. Das Verhältnis variiert zwischen 0.4% und 0.7%. Folglich ist es möglich, die Bindungszustände für Gluinomassen zwischen 500 GeV und 1000 GeV mit 10^5 bis 10^3 Ereignissen für eine integrierte Luminosität von 100 fb^{-1} zu entdecken. Besonders für den sLHC, eine zukünftige Version des LHC mit höherer Luminosität, ist die Entdeckung der Gluinonia somit durchführbar.

Kapitel 5

Schwellenproduktion zweier Gluinos

Im Verlauf dieses Kapitels werden die Zerfallsbreiten des Gluinos als so groß angenommen, daß sie den Zerfall des $\tilde{g}\tilde{g}$ -Systems gegenüber der Annihilation dominieren. Daher existieren keine Gluinonia, die Konstituenten zerfallen zu schnell, um einen stabilen Verbund zu bilden. Die Effekte der Wechselwirkung machen sich jedoch bei der Produktion in der Schwellenregion bemerkbar.

Bedingt durch die Suche nach supersymmetrischen Teilchen weist die Berechnung der Produktionsquerschnitte für Gluinos und Squarks eine weit zurückreichende Geschichte auf. Zunächst wurde vor mehr als 20 Jahren in [4, 91, 92] die hadronische Produktion in führender Ordnung berechnet. Etwa zehn Jahre später folgten die NLO-Korrekturen der SUSY-QCD [93–95], wobei insbesondere für die Gluinos aufgrund der großen Farbfaktoren Korrekturen bis zu 100% erzielt werden konnten.

In den letzten Jahren sind die Studien der *Schwellenproduktion* in den Mittelpunkt gerückt. Neben der Coulomb-Resummation, die im Sommerfeld-Faktor resultiert, liefern besonders die soften Gluonen einen großen Beitrag zum Wirkungsquerschnitt [10–15]. Während die Resummationstechniken rein perturbativer Natur sind, stellt die in Kapitel 3 beschriebene Herangehensweise einen nicht-perturbativen Formalismus dar. Die Arbeit von [96] beinhaltet die Anwendung dieser Methode auf die $\tilde{g}\tilde{g}$ -Produktion und orientiert sich an den gleichen Analysen für das Top-System [97, 98]. Die Erweiterung der Arbeit [96] bildet den Schwerpunkt dieses Kapitels. Sie soll dahingehend komplettiert werden, daß die abgeschätzten Beiträge für die harten Koeffizienten auf NLO durch die vollständige Rechnung ersetzt werden.

5.1 Schwellenverhalten

Mit der in Abschnitt 2.5 eingeführten Klassifizierung der Zerfallsbreiten des Gluinos bezüglich der Anregungsenergie und der Annihilationszerfallsbreite stehen fortan die Klassen B und C im Fokus. Die Zerfallsbreite des Systems zweier Gluinos $\Gamma_{\tilde{g}\tilde{g}} = 2\Gamma_{\tilde{g}} + \Gamma_{gg}$

ist hier durch den Einzelzerfall dominiert. Das Verhältnis von $2\Gamma_{\tilde{g}}$ zur Anregungsenergie $\Delta M_{\tilde{g}\tilde{g}}$ wird Aufschluß darüber geben, wie gut man im differentiellen Produktionsquerschnitt die Beiträge der unterhalb der Schwelle liegenden Resonanzen sehen kann. Ebenso wird durch die Wechselwirkung zwischen den beiden Konstituenten der totale Wirkungsquerschnitt vergrößert.

Die qualitative Studie der Schwellenproduktion beginnt mit der Faktorisierung des Wirkungsquerschnitts, welcher differentiell in der invarianten Masse $M^2 = (k_{\tilde{g}_1} + k_{\tilde{g}_2})^2$ der beiden Gluinos ist. Neben dem kurzreichweitigen, harten Anteil enthält er die Green'sche Funktion, deren Grenzwert für verschwindendes $\Gamma_{\tilde{g}}$ im vorigen Kapitel untersucht wurde. Durch die Faltung mit der *Luminositätsfunktion*, welche die Informationen über die Parton-Distributionen beinhaltet, erhält man [97, 98]

$$M \frac{d\sigma_{PP \rightarrow T}}{dM}(S, M^2) = \sum_{i,j} \int_{\rho}^1 d\tau \left[\frac{d\mathcal{L}_{ij}}{d\tau} \right](\tau, \mu_f^2) M \frac{d\hat{\sigma}_{ij \rightarrow T}}{dM}(s, M^2, \mu_r^2, \mu_f^2), \quad (5.1)$$

mit dem partonischen Wirkungsquerschnitt sowie der Luminositätsfunktion

$$M \frac{d\hat{\sigma}_{ij \rightarrow T}}{dM}(s, M^2, \mu_r^2, \mu_f^2) = \mathcal{F}_{ij \rightarrow T}(s, M^2, \mu_r^2, \mu_f^2) \frac{1}{m_{\tilde{g}}^2} \text{Im} \{ G^{[R]}(M + i\Gamma_{\tilde{g}}) \},$$

$$\left[\frac{d\mathcal{L}_{ij}}{d\tau} \right](\tau, \mu_f^2) = \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 f_{i|P}(x_1, \mu_f^2) f_{j|P}(x_2, \mu_f^2) \delta(\tau - x_1 x_2). \quad (5.2)$$

Ersterer faktorisiert in den Imaginärteil der Green'schen Funktion sowie den *harten Anteil* \mathcal{F} des Wirkungsquerschnitts. Wie bisher sind \sqrt{s} und \sqrt{S} die partonische und die hadronische Schwerpunktsenergie und $\tau \equiv s/S$. Das untere Ende der Integration ist durch $\rho \equiv M^2/S$ definiert. Der obere Index der Green'schen Funktion bestimmt die Farbkonfiguration $R = 1, 8, 10$ und 27 . An der Schwelle tragen alle Zustände $T \equiv {}^{2S+1}S_J^{[R]}$ mit Drehimpulsquantenzahl $L = 0$ zur Paarproduktion bei, die Beiträge aller anderen Zustände sind mindestens mit v^2 unterdrückt – siehe Abschnitt 4.1. Die Faktorisierungs- und Renormierungsskala sind weiterhin durch μ_f und μ_r gegeben.

Der Form von Gl. (5.2) kann man entnehmen, daß die harten Anteile des Wirkungsquerschnitts für die einzelnen Farbkonfigurationen separat berechnet werden müssen. Daher ist die Projektion der Amplituden auf die jeweilige Darstellung des Spins sowie der Farbe – wie in Kapitel 4 für den 1_s -Bindungszustand – durchzuführen. Die Berechnung der

Farbprojektoren ist in Anhang E skizziert, und man erhält [67]

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{1_S}^{ab,cd} &= \frac{1}{8} \delta_{ab} \delta_{cd}, \\
\mathbb{P}_{8_S}^{ab,cd} &= \frac{3}{5} d_{abe} d_{cde}, \\
\mathbb{P}_{8_A}^{ab,cd} &= \frac{1}{3} f_{abe} f_{cde}, \\
\mathbb{P}_{10}^{ab,cd} &= \frac{1}{2} (\delta_{ac} \delta_{bd} - \delta_{ad} \delta_{bc}) - \frac{1}{3} f_{abe} f_{cde}, \\
\mathbb{P}_{27_S}^{ab,cd} &= \frac{1}{2} (\delta_{ac} \delta_{bd} + \delta_{ad} \delta_{bc}) - \frac{3}{5} d_{abe} d_{cde} - \frac{1}{8} \delta_{ab} \delta_{cd},
\end{aligned} \tag{5.3}$$

mit

$$\begin{aligned}
\delta_{ac} \delta_{bd} \mathbb{P}_X^{ab,cd} &= N_X, \\
\mathbb{P}_X^{ab,cd} \mathbb{P}_Y^{cd,ef} &= \delta_{XY} \mathbb{P}_X^{ab,ef}, \\
\sum_X \mathbb{P}_X^{ab,cd} &= \delta_{ac} \delta_{bd}.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Da die beiden Dekupletts nicht unterscheidbar sind, reicht die Untersuchung ihrer Summe $10 = 10_a \oplus \overline{10}_a$ aus. Die separaten Projektoren können jedoch in [99] gefunden werden. Die Konstante N_X gibt die Dimension der Darstellung X mit $N_{10} \equiv N_{10_a} + N_{\overline{10}_a} = 20$ an. Die Verzahnung von Spin- und Drehimpulsquantenzahl verbietet aufgrund der Chiralität die Produktion der pseudoskalaren Zustände durch masselose Quarks. Aufgrund des Landau-Yang-Theorems sind die Prozesse $gg \rightarrow 8_a, 10$ auch nicht erlaubt. Daher lassen sich die in Born'scher Näherung berechneten harten Anteile $\mathcal{F}_{ij \rightarrow T}$ schreiben als

$$\mathcal{F}_{ij \rightarrow T}^{(0)} = \mathcal{N}_{ij}^{[T]} \frac{9 \pi^2 \alpha_s^2(\mu_R)}{4 s} \delta(1-z), \tag{5.5}$$

mit $z = M^2/s$ und den nicht verschwindenden Normierungsfaktoren

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_{gg}^{[T]} &= 1, 2, 3 \quad \text{für } T = 1_s, 8_s, 27_s, \\
\mathcal{N}_{q\bar{q}}^{[8_a]} &= \frac{128}{27} \left(\frac{r-1}{r+1} \right)^2,
\end{aligned} \tag{5.6}$$

und dem Verhältnis $r = \overline{m}_{\bar{q}}^2/m_g^2$. Für die Analyse wird zur Vereinfachung die gemittelte Squarkmasse $\overline{m}_{\bar{q}}$ benutzt, deren numerische Werte für die betrachteten Szenarios in Tab. 2.3 zu finden sind. Neben der Gewichtung durch die harten Anteile spielen somit die unterschiedlichen Anfangszustände eine Rolle im Wirkungsquerschnitt. Dieser ist in führender Ordnung proportional zur *normierten Luminositätsfunktion*

$$L_{ij}(s) \equiv \frac{1}{S} \left[\frac{d\mathcal{L}_{ij}}{d\tau} \right] \left(\frac{s}{S}, s \right), \tag{5.7}$$

deren Untersuchung in Abb. 5.1(a) für die PDF's MSTW2008NLO als Funktion der partonischen Schwerpunktsenergie für $\sqrt{S} = 14$ TeV dargestellt ist. Die an der Produktion auf LO beteiligten Anfangszustände sind gg und $q\bar{q}$. Letzterer ist für niedrigere Schwerpunktsenergien $\sqrt{s} < 2$ TeV stark unterdrückt. Die beiden anderen Zustände spielen erst für die reellen Korrekturen eine Rolle. In der Abbildung (b) werden diese PDF's mit denen von CTEQ6.5 [100] verglichen. Das Verhältnis der Luminositätsfunktionen ist ebenfalls über \sqrt{s} aufgetragen. Für den betrachteten Bereich sind die Abweichungen der Luminositätsfunktionen mit Gluonen am größten, sie erreichen jedoch nie mehr als 20%.

Während die harten Anteile und die Luminositätsfunktionen den Gewichtungsfaktor darstellen, wird die Form des differentiellen Wirkungsquerschnitts durch die Green'sche Funktion bestimmt. Das Potential entspricht in führender Ordnung dem "Coulomb"-Potential, gewichtet durch den Farbfaktor der jeweiligen Darstellung

$$V_{C,\text{Born}}^{[R]}(\mathbf{r}) = -\frac{C^{[R]} \alpha_s(\mu_G^{[R]})}{r} \quad \text{mit} \quad C^{[R]} = 3, \frac{3}{2}, 0, -1 \quad \text{für} \quad R = 1, 8, 10, 27. \quad (5.8)$$

Die zugehörige Green'sche Funktion am Ursprung ist durch Gl. (3.20) gegeben (bzw. in Anhang J, wo auch eine Herleitung enthalten ist). Während Korrekturen sowohl zur Green'schen Funktion als auch zu den harten Anteilen im nächsten Abschnitt studiert werden, beschränkt sich die Diskussion zunächst auf die Analyse des differentiellen Wirkungsquerschnitts in führender Ordnung für die Szenarios aus Tab. 2.3.

Für das Szenario (y) sind die unterhalb der Schwelle liegenden Resonanzen gut zu erkennen, da die Zerfallsbreite des Gluinos deutlich kleiner als die Anregungsenergie ist. Der auf die quadrierte Gluinomasse normierte Imaginärteil der Green'schen Funktion am Ursprung ist in Abb. 5.2(a) zu finden. Neben den Werten der führenden Ordnung sind hier auch die NLO-Kurven abgebildet. Die Skala $\mu_G^{[R]}$ wird bestimmt über die rekursive Gleichung

$$\alpha_s^{[R]} = \alpha_s (|C^{[R]}| \alpha_s^{[R]} m_{\tilde{g}}) \quad \text{für} \quad R \neq 10, \quad (5.9)$$

wobei in die freie Green'sche Funktion für $R = 10$ keine Kopplung eingeht. Wie für die Wellenfunktion aus Kapitel 4 wird unabhängig von der Ordnung der Green'schen Funktion $\alpha_s(m_Z) = 0.12018$ als Startwert für das Laufen auf dem Niveau zweier Schleifen benutzt, wobei entsprechend der Wahl der Skala $n_f = 5$ gilt. Für Szenario (y) mit $m_{\tilde{g}} = 734.11$ GeV erhält man $\alpha_s^{[R]} = \{0.1034, 0.1124, 0.1184\}$ für $R = 1, 8, 27$.

Betrachtet man zunächst nur die Kurven der führenden Ordnung, so läßt sich die Position des Grundzustands sehr gut erkennen. Dessen erste Anregung, die auch gut auszumachen ist, fällt mit dem Grundzustand des Oktetts zusammen. Die Bindungsenergien fallen einerseits proportional zu $1/n^2$ ab, und andererseits ist der Farbfaktor des Oktetts gegenüber dem des Singulettts um $C^{[8]}/C^{[1]} = 1/2$ kleiner. Da dieser Farbfaktor quadratisch in die Energie eingeht, haben die erste Anregung des Singulettts und der Grundzustand des Oktetts in etwa die gleiche Position. Von den Konfigurationen 10 und 27 ist unterhalb

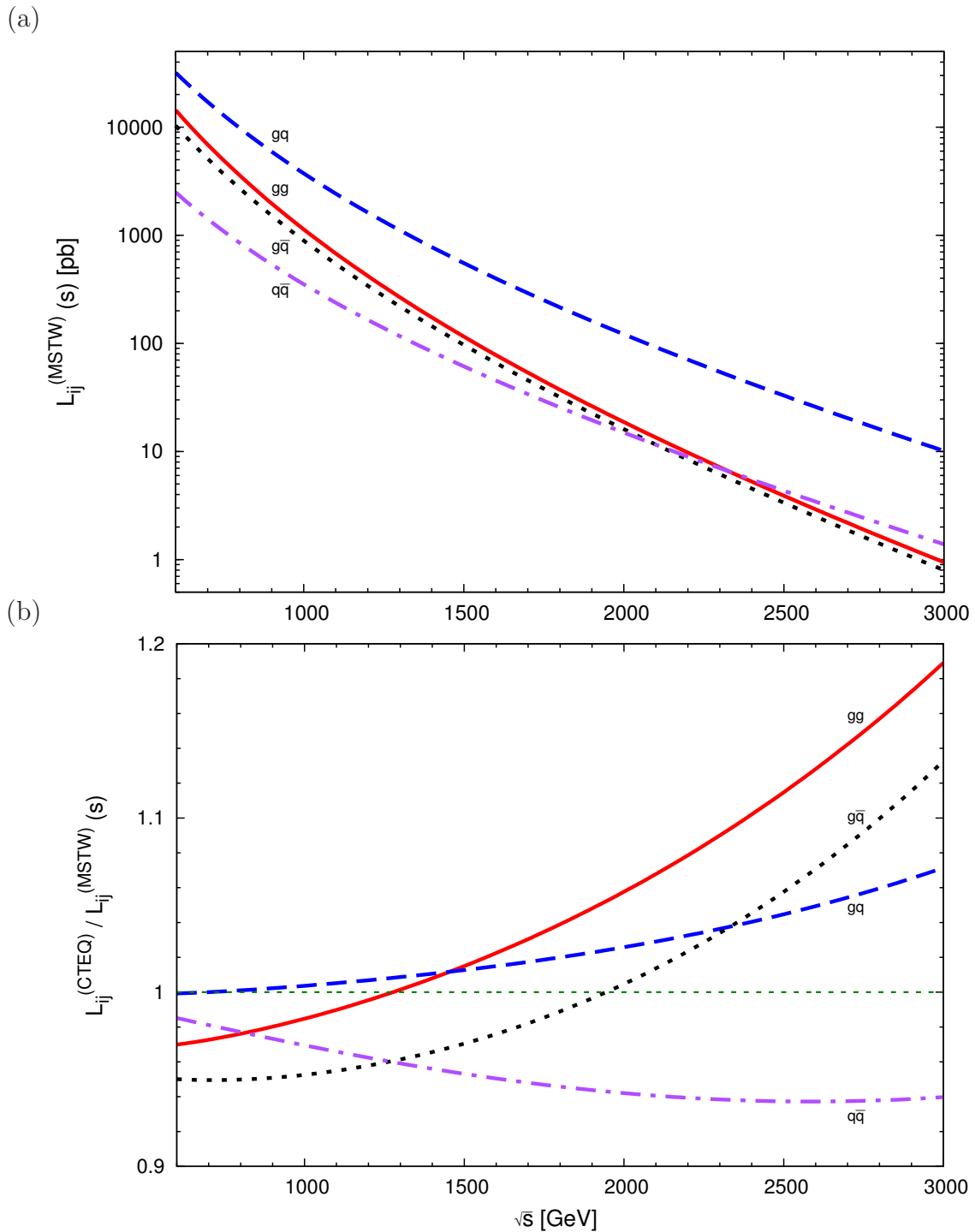


Abbildung 5.1: Normierte Luminositätsfunktion $L_{ij}^{(\text{MSTW})}$ (a) sowie das Verhältnis $L_{ij}^{(\text{CTEQ})}/L_{ij}^{(\text{MSTW})}$ (b) als Funktionen der partonischen Schwerpunktsenergie \sqrt{s} für die hadronische Schwerpunktsenergie $\sqrt{S} = 14 \text{ TeV}$.

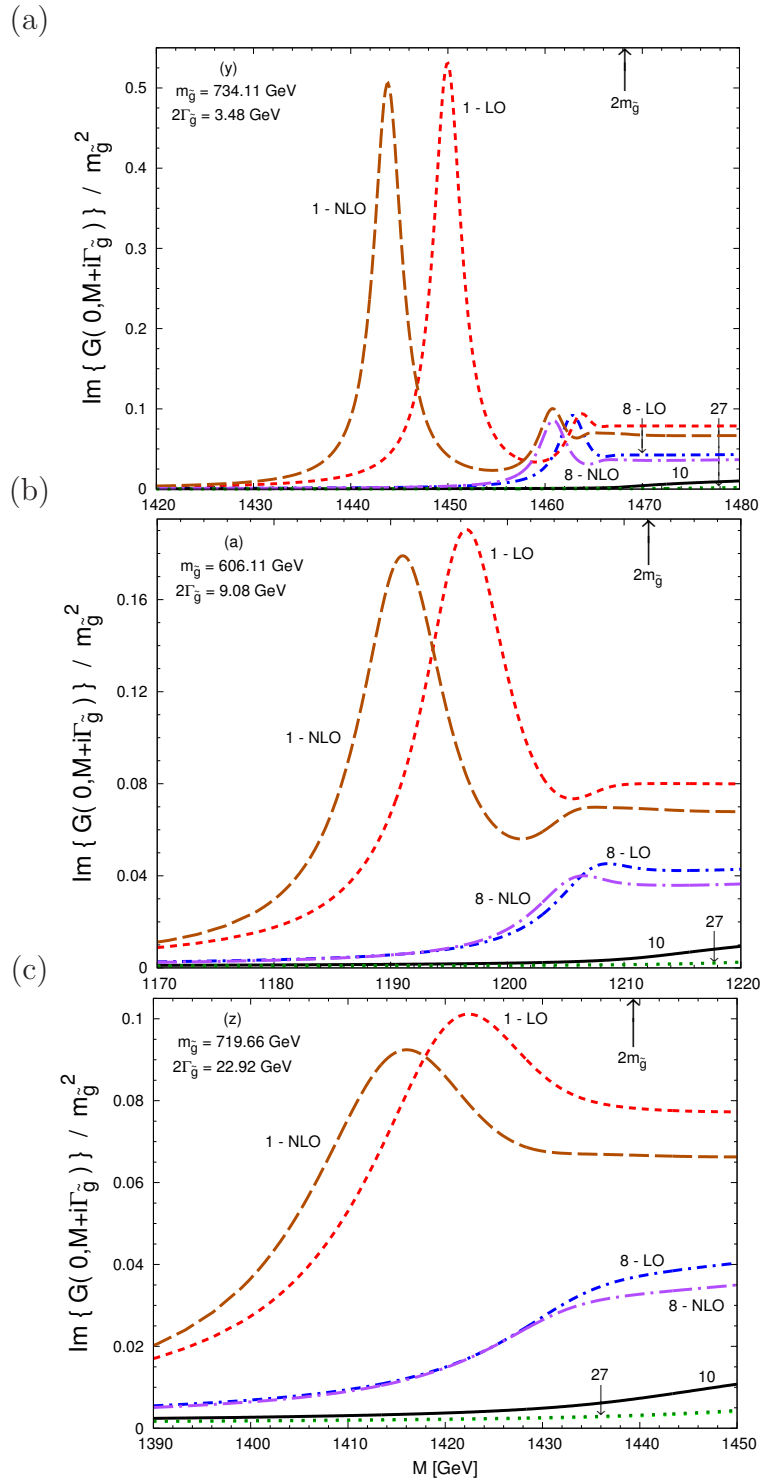


Abbildung 5.2: Imaginärteil der Green'schen Funktion für die Szenarios (y), (a) und (z) für die Konfigurationen 1 (gestrichelt), 8 (gestrichpunktet), 10 (durchgezogen) und 27 (gepunktet). Die 10 hat keine Reihenentwicklung, während die LO- und NLO-Kurven der 27 beinahe aufeinander liegen.

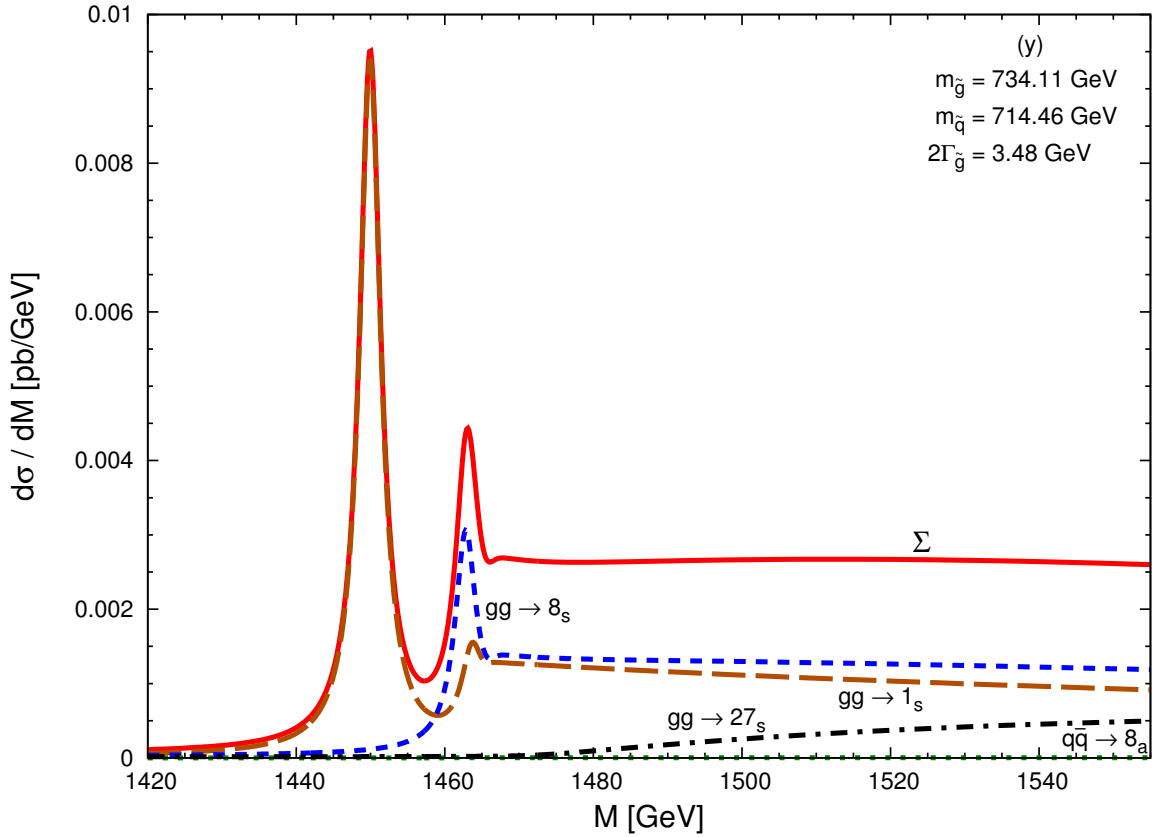


Abbildung 5.3: Vorhersage für die Distribution der invarianten Masse für Szenario (y) in der führenden Ordnung. Der Beitrag des Dekupletts ist gleich Null.

der Schwelle kein nennenswerter Beitrag zu erwarten. Für die freie Green'sche Funktion liegt keine Reihenentwicklung vor, während für die 27 die beiden abgebildeten Ordnungen beinahe aufeinander liegen.

In den Abb. 5.2(b) und (c) sind zwei weitere Szenarios abgebildet. Der Effekt der anwachsenden Zerfallsbreite ist gut erkennbar. Während Szenario (a) noch zur Klasse B gehört und man wenigstens eine deutliche Resonanz des Grundzustands ausmachen kann, liegt (z) bereits in Klasse C. Trotzdem ist unterhalb der Schwelle ein Beitrag zum Wirkungsquerschnitt zu erwarten, welcher durch die Konfiguration des Singulettts dominiert wird.

Die LO-Vorhersage für den differentiellen Wirkungsquerschnitt als Funktion der invarianten Masse M ist in Abb. 5.3 zu sehen. Neben den Beiträgen der einzelnen Konfigurationen ist deren beobachtbare Summe abgebildet. Obwohl es sich zunächst um eine Analyse in führender Ordnung handelt, wird die Wahl der Kopplung, die in die Kurven des Schaubildes eingeht, wie bei der NLO-Analyse durchgeführt. Das Laufen findet jeweils auf dem Niveau von zwei Schleifen statt und die Entkopplung mit einer Schleife weniger. Der einzi-

ge Unterschied zu Diskussion vor Gl. (4.47) besteht in der Behandlung der Squarks. Deren Masse ist in etwa von der gleichen Größenordnung wie $m_{\tilde{g}}$, und somit werden sie nicht mehr ausintegriert. Die benötigten Konstanten für die Entkopplung des Top-Quarks, des Gluinos und der Squarks sowie für die Umrechnung ins DR-Schema sind definiert durch (siehe z.B. [68])

$$\begin{aligned}\alpha_s^{(5,\overline{\text{MS}})} &= \alpha_s^{(6,\overline{\text{MS}})} \left[1 + \frac{\alpha_s^{(6,\overline{\text{MS}})}}{\pi} \left(-\frac{1}{3} T_F L_t \right) \right], \\ \alpha_s^{(6,\overline{\text{MS}})} &= \alpha_s^{(\text{SQCD},\overline{\text{DR}})} \left[1 + \frac{\alpha_s^{(\text{SQCD},\overline{\text{DR}})}}{\pi} \left(-\frac{1}{6} C_A L_{\tilde{g}} - T_F L_{\tilde{q}} - \frac{1}{12} C_A \right) \right],\end{aligned}\quad (5.10)$$

mit $L_X = \ln(\mu^2/m_X^2)$. Die Entkopplung des Top-Quarks bei $m_t = 172.0 \text{ GeV}$ wird innerhalb von RunDec durchgeführt, das Gluino sowie die zwölf Squarks der generischen Masse $\overline{m}_{\tilde{q}}$ werden bei der hohen Skala μ_H per Hand entkoppelt. Dort findet auch die Umrechnung ins $\overline{\text{DR}}$ -Schema statt (siehe Gl. (4.37) bzw. letzter Term in der zweiten Zeile von Gl. (5.10)). Die Kopplung $\alpha_s^{(\text{SQCD})} \equiv \alpha_s^{(\text{SQCD},\overline{\text{DR}})}$ ist somit als die starke Kopplung der Theorie von sechs Quark-Flavourn und den zugehörigen Paaren von Squarks sowie dem Gluino, ausgedrückt im $\overline{\text{DR}}$ -Schema, zu verstehen.

Die Unterdrückung des Produktionskanals $q\bar{q} \rightarrow 8_a$ resultiert aus der beinahe gegebenen Entartung der Gluinomasse und der Massen der Squarks. Obwohl die gleiche Green'sche Funktion in diesen Kanal eingeht wie für die Produktion des symmetrischen Oktetts, ist die Kurve durch das Verhältnis der harten Anteile unterdrückt. Dieses ist gegeben durch

$$\frac{\mathcal{F}_{q\bar{q} \rightarrow 8_a}}{\mathcal{F}_{gg \rightarrow 8_s}} = \frac{64}{27} \left(\frac{m_{\tilde{g}}^2 - \overline{m}_{\tilde{q}}^2}{m_{\tilde{g}}^2 + \overline{m}_{\tilde{q}}^2} \right)^2 \cong 1.7 \cdot 10^{-3}, 3.0 \cdot 10^{-2}, 5.3 \cdot 10^{-2}, \quad (5.11)$$

für die Szenarios (y), (a) und (z). Die Mittelung der Squarkmassen rechtfertigt sich durch die Tatsache, daß die einzigen Massen, welche signifikant vom Durchschnitt abweichen, der dritten Generation entstammen. Die Distributionen der Quarks der dritten Generation sind stark unterdrückt bzw. verschwinden, und somit tragen die Diagramme mit leichten Squarks aufgrund der MFV effektiv nicht zum Ergebnis bei. Der harte Anteil für das Dekuplett verschwindet ganz auf LO, und die Bedeutung der 27-Konfiguration für das Gesamtergebnis ist aufgrund der repulsiven Farbwechselwirkung unterhalb der Schwelle klein. Aufgrund der größeren Multiplizität von Zuständen verschwindet dieser Effekt jedoch für größere invariante Massen, und die 27-Darstellung übernimmt dort die führende Rolle.

5.2 NLO-Korrekturen

Der Schwerpunkt dieses Kapitels besteht in der Berechnung der vollständigen NLO-Korrekturen zum Wirkungsquerschnitt. Diese lassen sich in Korrekturen zur Green'schen

Funktion und zu den harten Anteilen unterteilen.

5.2.1 Green'sche Funktion

Folgt man der Idee der Green'schen Funktion [16–18], so beginnt die Diskussion mit dem Wechselwirkungspotential der Gluinos auf NLO – für die Konfigurationen 8, 10 und 27 sind die NNLO-Korrekturen zur Zeit unbekannt (vergleiche dazu [101]) –

$$\tilde{V}_C^{[R]}(\mathbf{q}) = -C^{[R]} \frac{4\pi\alpha_s(\mu_G^{[R]})}{\mathbf{q}^2} \left\{ 1 + \frac{\alpha_s(\mu_G^{[R]})}{4\pi} \left[\beta_0 \ln\left(\frac{\mu_G^{[R]2}}{\mathbf{q}^2}\right) + a_1 \right] \right\}, \quad (5.12)$$

mit der Definition von a_1 und β_0 entsprechend den Gl. (4.8) und (4.9) sowie den Vorfaktoren [44]

$$\begin{aligned} C^{[1]} &= C_A = 3, \\ C^{[8]} &= \frac{1}{2}C_A = \frac{3}{2}, \\ C^{[10]} &= 0, \\ C^{[27]} &= -\frac{1}{3}C_A = -1. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Wie man sich einfach überzeugen kann, bleibt der Koeffizient a_1 für alle Konfigurationen erhalten. Auf einer Schleife läßt sich die Berechnung des statischen Potentials auf masselose Zwei- und Drei-Punkt-Funktionen zurückführen, welche gut bekannt sind. Aufgrund der besseren Übersichtlichkeit wird die Definition der Renormierungsskala wiederholt: $\mu_G^{[R]} = |C^{[R]}| m_{\tilde{g}} \alpha_s(\mu_G^{[R]})$ (siehe Gl. (5.9)). Die starke Kopplung ist im $\overline{\text{MS}}$ -Schema mit $n_f = 5$ definiert. Der Effekt des massiven Top-Quarks ist bei der Betrachtung mit der gegenwärtigen Genauigkeit vernachlässigbar.

Die Green'sche Funktion für das Top-Antitop-System ist in kompakter analytischer Form bekannt [102] (siehe auch [41]) und ist leicht für den vorliegenden Fall transformierbar in

$$\begin{aligned} G^{[R]}(M + i\Gamma_{\tilde{g}}) &\equiv G^{[R]}(\mathbf{0}, M - 2m_{\tilde{g}} + i\Gamma_{\tilde{g}}) \\ &= i \frac{v m_{\tilde{g}}^2}{4\pi} + \frac{C^{[R]} \alpha_s(\mu_G) m_{\tilde{g}}^2}{4\pi} \left[g_{\text{LO}} + \frac{\alpha_s(\mu_G)}{4\pi} g_{\text{NLO}} + \dots \right], \end{aligned} \quad (5.14)$$

mit

$$\begin{aligned} g_{\text{LO}} &\equiv L - \psi^{(0)}, \\ g_{\text{NLO}} &\equiv \beta_0 \left[L^2 - 2L(\psi^{(0)} - \kappa\psi^{(1)}) + \kappa\psi^{(2)} + (\psi^{(0)})^2 - 3\psi^{(1)} - 2\kappa\overline{\psi^{(0)}}\psi^{(1)} \right. \\ &\quad \left. + 4 {}_4F_3(1, 1, 1, 1; 2, 2, 1 - \kappa; 1) \right] + a_1 \left[L - \psi^{(0)} + \kappa\psi^{(1)} \right], \end{aligned} \quad (5.15)$$

und

$$\begin{aligned}
\kappa &\equiv i \frac{C^{[R]} \alpha_s(\mu_G)}{2v}, \\
v &\equiv \sqrt{\frac{M - 2m_{\tilde{g}} + i\Gamma_{\tilde{g}}}{m_{\tilde{g}}}}, \\
L &\equiv \ln \frac{i\mu_G}{2m_{\tilde{g}}v}.
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Die n -te Ableitung $\psi^{(n)} = \psi^{(n)}(1 - \kappa)$ der *Digammafunktion* $\psi(z) = \gamma_E + (d/dz) \ln \Gamma(z)$ wird für das Argument $(1 - \kappa)$ ausgewertet, und die *Generalisierte Hypergeometrische Funktion* (GHF) ${}_4F_3$ ist in Anhang K definiert.

Das perturbative Lösen der Schrödinger-Gleichung ruft Pole der Form $\{\alpha_s E_n^{\text{LO}} / [E_n^{\text{LO}} - (E + i\Gamma_{\tilde{g}})]\}^k$ in der Green'schen Funktion hervor, welche in der Nähe von $E = E_n^{\text{LO}}$ für kleine Zerfallsbreiten $\Gamma_{\tilde{g}}$ stark anwachsen. Um die richtige Green'sche Funktion mit einfachen Polen zu erhalten, muß man – wie in [102] vorgeschlagen – die Pole resumieren durch die Addition der Terme

$$\begin{aligned}
&\frac{|\Psi_n^{(0)}(\mathbf{0})|^2 (1 + a_s f_1)}{E_n^{(0)}(1 + a_s e_1) - (E + i\Gamma_{\tilde{g}})} \\
&- \left\{ \frac{|\Psi_n^{(0)}(\mathbf{0})|^2}{E_n^{(0)} - (E + i\Gamma_{\tilde{g}})} + a_s \left[\frac{|\Psi_n^{(0)}(\mathbf{0})|^2 f_1}{E_n^{(0)} - (E + i\Gamma_{\tilde{g}})} - \frac{|\Psi_n^{(0)}(\mathbf{0})|^2 E_n^{(0)} e_1}{(E_n^{(0)} - (E + i\Gamma_{\tilde{g}}))^2} \right] \right\}, \tag{5.17}
\end{aligned}$$

welche von der Ordnung α_s^2 sind. Die Definitionen der Größen a_s , $|\Psi_n^{(0)}(\mathbf{0})|$, $E_n^{(0)}$, e_1 und f_1 können in den Abschnitten 4.2 und 4.3 gefunden werden.

Besondere Vorsicht ist bei der numerischen Auswertung der GHF ${}_4F_3$ aus Gl. (5.15) geboten. Diese Funktion hat einen Verzweigungsschnitt für ihr letztes Argument auf der positiven reellen Achse, beginnend bei 1. Durch die in Anhang K gegebenen Konvergenzkriterien sieht man, daß die Reihe, durch welche die Funktion definiert ist, für $\text{Re}(1 - \kappa) > 1$ konvergiert. Diese Bedingung kann möglicherweise für kleine Werte von $|E + i\Gamma_{\tilde{g}}|$ verletzt werden¹. In Anhang K wird auch gezeigt, wie man dieses Problem durch eine geeignete Transformation umgehen kann.

Aufgrund der in Gl. (5.1) definierten Faktorisierung des Wirkungsquerschnitts können die Renormierungsskalen der Green'schen Funktion μ_G und des harten Anteils μ_H , dessen Diskussion im nächsten Abschnitt folgt, voneinander unabhängig gewählt werden. Für die hier getroffene Wahl von μ_G , das Zweifache des inversen Bohr-Radiuses des Systems zweier Gluinos, hat der Coulomb'sche Teil der Green'schen Funktion eine gut konvergierende perturbative Reihe, wie es in [61] für das Top-Antitop-Paar im Farbsingulett diskutiert wird.

¹Die Bedingung ist erfüllt für $1 > |E_1^{(0)}| (\sqrt{E^2 + \Gamma^2} - E) / [2(E^2 + \Gamma^2)]$. Daher tritt dieses Problem für das $t\bar{t}$ -System nicht auf.

5.2.2 Kurzreichweitige Korrekturen

Die Berechnung der NLO-Korrekturen verläuft sehr ähnlich wie für die Gluinoa (siehe Abschnitte 4.4.1 und 4.5.1). Jedoch treten einige Unterschiede auf. Zunächst werden die Effekte der virtuellen Squarks nicht mehr weggelassen, wodurch neben deren Massen noch die Mischungswinkel zu den bereits betrachteten Parametern hinzukommen. Es ist jedoch kein großer Effekt von den Squarkmischungen zu erwarten, wie es in [14] für die Produktion von $\tilde{t}_i\tilde{t}_i^*$ - und $\tilde{b}_i\tilde{b}_i^*$ -Paaren an der Schwelle gezeigt wurde. Daher werden die Mischungsmatrizen für die Analyse des hadronischen Wirkungsquerschnitts als diagonal angenommen. Die durch außerdiagonale Elemente verursachten Änderungen in den analytischen Formeln werden später diskutiert.

Für die Kanäle, die in Born'scher Näherung beitragen, werden die partonischen Wirkungsquerschnitte in faktorisierter Form aufgeschrieben

$$\mathcal{F}_{ij\rightarrow T} = \mathcal{N}_{ij}^{[T]} \frac{9\pi^2 (\alpha_s^{\overline{\text{DR}}}(\mu_R))^2}{4s} \left(1 + \frac{\alpha_s^{\overline{\text{DR}}}(\mu_R)}{\pi} \overline{\mathcal{V}}_{ij}^{[T]} \right) \left[\delta(1-z) + \frac{\alpha_s^{\overline{\text{DR}}}(\mu_R)}{\pi} \overline{\mathcal{R}}_{ij}^{[T]}(z) \right], \quad (5.18)$$

mit den Koeffizienten $\mathcal{N}_{ij}^{[T]}$ aus Gl. (5.6). Die übrigen sind gegeben durch

$$\mathcal{F}_{ij\rightarrow T} = \frac{9\pi (\alpha_s^{\overline{\text{DR}}}(\mu_R))^3}{4s} \overline{\mathcal{R}}_{ij}^{[T]}(z). \quad (5.19)$$

Weiterhin ist $\mathcal{F}_{g\bar{q}\rightarrow T}$ gleich zu $\mathcal{F}_{gq\rightarrow T}$. Die Größen $\overline{\mathcal{V}}_{ij}^{[T]}$ und $\overline{\mathcal{R}}_{ij}^{[T]}$ stehen für die virtuellen und reellen Korrekturen. Man erhält sie aus den folgenden Resultaten (siehe Gl. (5.20)-(5.25)) durch das Weglassen der infraroten Singularitäten, welche sich zwischen den $\mathcal{V}_{ij}^{[T]}$ und $\mathcal{R}_{ij}^{[T]}$ wegheben.

Die Beiträge zu den virtuellen Korrekturen der harten Anteile lauten

$$\mathcal{V}_{gg}^{[1_s]} = \left\{ -\frac{3}{\varepsilon_{\text{IR}}^2} - \frac{11}{2\varepsilon_{\text{IR}}} + \frac{n_f - 1}{3\varepsilon_{\text{IR}}} + \frac{1}{3} \ln \frac{m_t^2}{m_g^2} - \frac{8}{3} \ln(2) - \frac{25}{2} + 2\pi^2 + \frac{\beta_0^{(\text{SQCD})}}{2} \ln \left(\frac{\mu_R^2}{M^2} \right) \right. \\ \left. + n_f \left[\frac{1}{6} \ln \frac{r}{4} + \frac{9r-1}{9} c_5(r) + \frac{r-1}{2} (2b'_1(r) + b_1(r) - b_4(r)) \right] \right\} f_\varepsilon(M^2), \quad (5.20a)$$

$$\mathcal{V}_{gg}^{[8_s]} = \left\{ -\frac{3}{\varepsilon_{\text{IR}}^2} - \frac{7}{\varepsilon_{\text{IR}}} + \frac{n_f - 1}{3\varepsilon_{\text{IR}}} + \frac{1}{3} \ln \frac{m_t^2}{m_g^2} - \frac{8}{3} \ln(2) - \frac{19}{2} + \frac{13}{8} \pi^2 + \frac{\beta_0^{(\text{SQCD})}}{2} \ln \left(\frac{\mu_R^2}{M^2} \right) \right. \\ \left. + n_f \left[\frac{1}{6} \ln \frac{r}{4} + \frac{9r-4}{9} c_5(r) + \frac{r-1}{2} (2b'_1(r) + b_1(r) - b_4(r)) \right] \right\} f_\varepsilon(M^2), \quad (5.20b)$$

$$\mathcal{V}_{q\bar{q}}^{[8_a]} = \left\{ -\frac{4}{3\varepsilon_{\text{IR}}^2} - \frac{7}{2\varepsilon_{\text{IR}}} - \frac{2}{3} + \frac{5}{36} \pi^2 + 2 \ln(2) - \frac{5}{9} n_f + \frac{\beta_0^{(\text{SQCD})}}{2} \ln \left(\frac{\mu_R^2}{M^2} \right) \right. \\ \left. + \mathcal{A}_{q\bar{q}}^{[8_a]}(r) \right\} f_\varepsilon(M^2), \quad (5.20c)$$

$$\mathcal{V}_{gg}^{[27_s]} = \left\{ -\frac{3}{\varepsilon_{\text{IR}}^2} - \frac{19}{2\varepsilon_{\text{IR}}} + \frac{n_f - 1}{3\varepsilon_{\text{IR}}} + \frac{1}{3} \ln \frac{m_t^2}{m_g^2} - \frac{8}{3} \ln(2) - \frac{9}{2} + \pi^2 + \frac{\beta_0^{(\text{SQCD})}}{2} \ln \left(\frac{\mu_R^2}{M^2} \right) \right. \\ \left. + n_f \left[\frac{1}{6} \ln \frac{r}{4} + \frac{r-1}{2} (2c_5(r) + 2b'_1(r) + b_1(r) - b_4(r)) \right] \right\} f_\varepsilon(M^2), \quad (5.20d)$$

wobei $\beta_0^{(\text{SQCD})} = 3C_A - 2T_F n_f$ (mit $n_f = 6$) der Ein-Schleifen-Koeffizient der Beta-Funktion der SUSY-QCD ist und sich von $\beta_0^{(\hat{g})}$ aus Gl. (4.35) durch den Beitrag der Squarks unterscheidet. Die skalaren Funktionen b_i , b'_1 und c_5 sind in Anhang D definiert, f_ε ist gegeben in Gl. (4.31) und der Limes $m_t \rightarrow 0$ wurde wieder durchgeführt, falls er existiert (siehe Diskussion nach Gl. (4.50)).

Die Prozesse mit zwei Gluonen im Anfangszustand erhalten Beiträge von den Diagrammen aus Abb. 4.11 unter Vertauschung der ein- und auslaufenden Teilchen, sowie von den Diagrammen aus Abb. 5.4, welche virtuelle Squarks der generischen Masse $\bar{m}_{\hat{q}}$ enthalten. Diese Beiträge sind proportional zu n_f . Die Effekte von verschiedenen Squarkmassen sowie von massiven Quarks werden später diskutiert, sie gehen jedoch nicht in die numerische Analyse des hadronischen Wirkungsquerschnitts ein. Der Prozess $q\bar{q} \rightarrow 8_a$ erhält schon auf LO Beiträge von Squarks (siehe Abb. 4.9(d)). Auf NLO tragen die Diagramme aus Abb. 5.5 ohne virtuelle Squarks bei und die mit Squarks aus Abb. 5.6. Letztere verursachen die in Anhang B angegebene Funktion $\mathcal{A}_{q\bar{q}}^{[8_a]}$ aus Gl. (5.20c). Für das Dekuplett sind die führende Ordnung sowie die virtuellen Korrekturen gleich Null. Die reellen Korrekturen liefern ein kleines nicht verschwindendes Resultat.

In den Funktionen $\mathcal{R}_{ij}^{[T]}$ ist die Renormierung der PDF's bereits enthalten. Daher heben sich die Divergenzen gegen die der virtuellen Korrekturen weg. Zunächst wird der Prozess

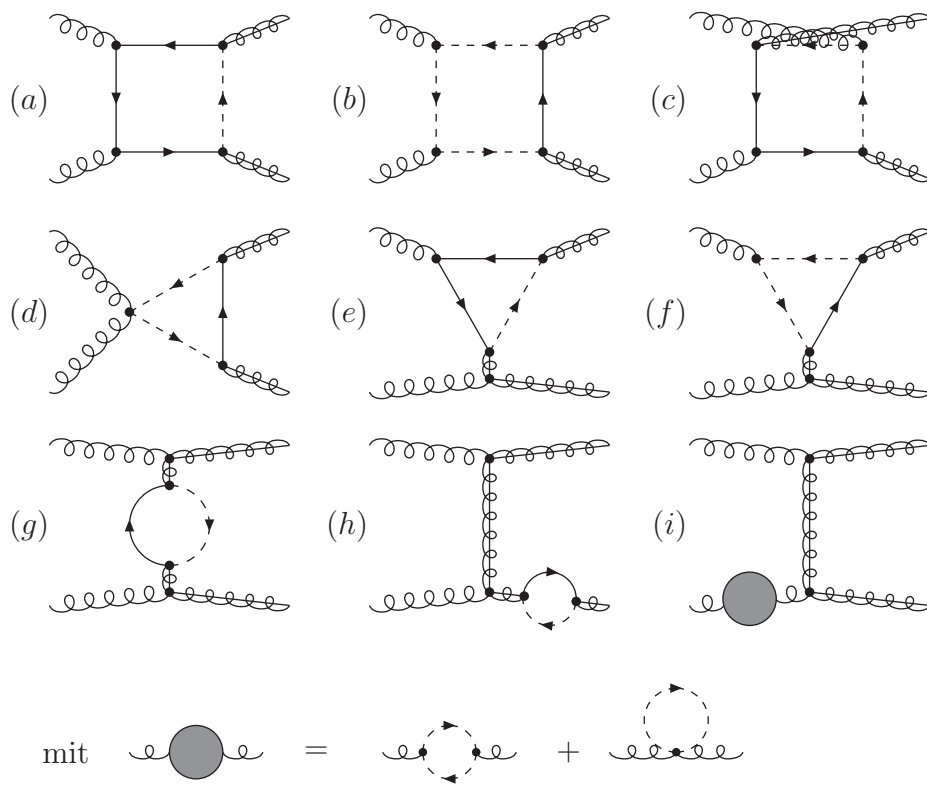


Abbildung 5.4: Diagramme mit Beteiligung von Squarks, die zur gg -initiierten Produktion zweier Gluinos auf NLO beitragen.

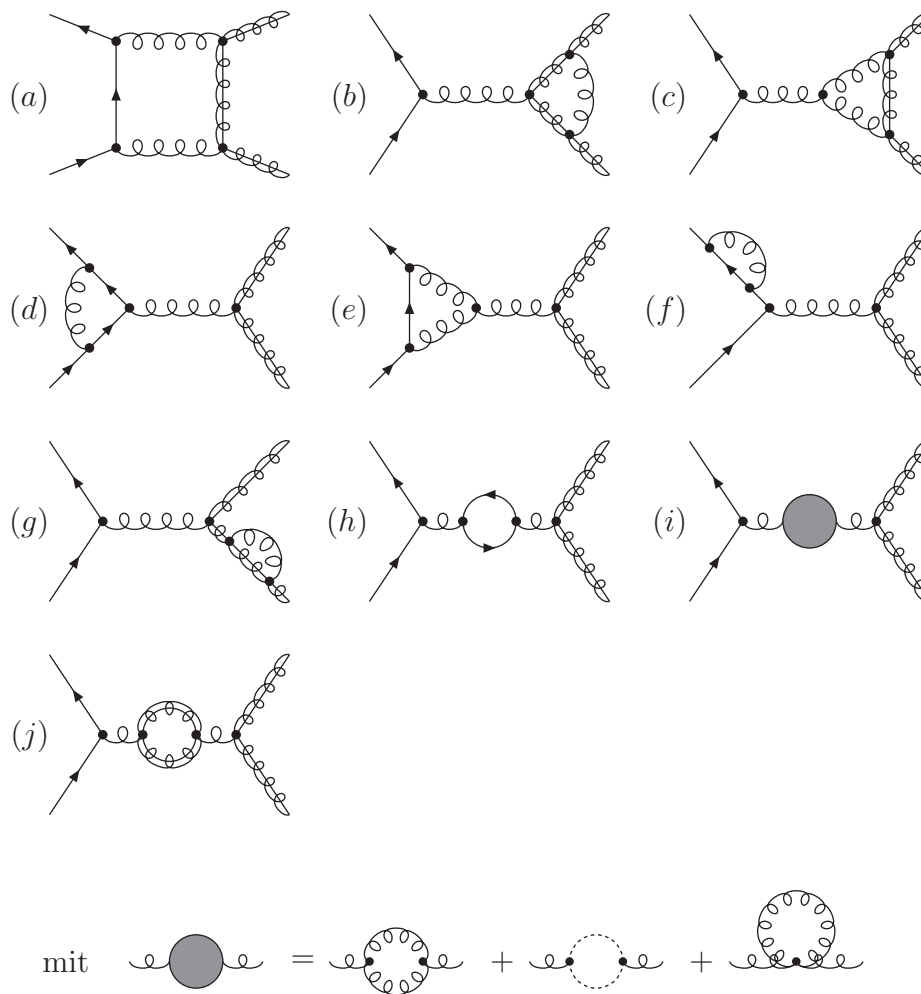


Abbildung 5.5: Diagramme, die zur Produktion zweier Gluinos mit dem Anfangszustand $q\bar{q}$ auf NLO ohne Beteiligung von Squarks beitragen.

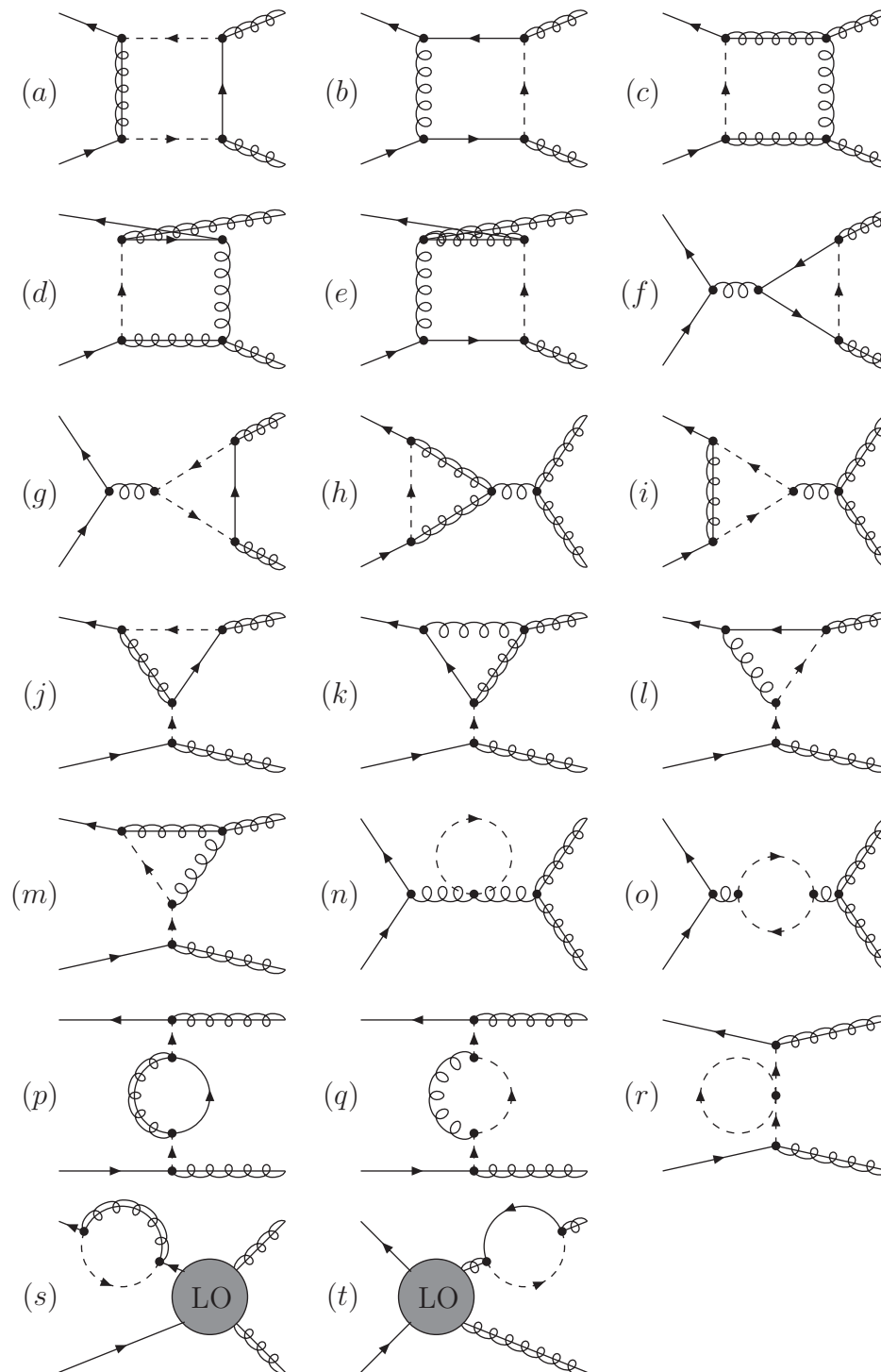


Abbildung 5.6: Diagramme mit Beteiligung von Squarks, die zur $q\bar{q}$ -initiierten Produktion zweier Gluinos auf NLO beitragen.

$gg \rightarrow Tg$ betrachtet, welcher unabhängig von den Squarks ist (siehe Abb. 5.7). Man erhält

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{gg}^{[1s]}(z) &= \mathcal{R}_{gg}(z) + \frac{11z^5 + 11z^4 + 13z^3 + 19z^2 + 6z - 12}{2z(1+z)^2} \\ &+ \frac{3}{1-z} \left[\frac{2z(z^3 - z + 2)(z^3 - 2z^2 - 3z - 2) \ln(z)}{(1+z)^3} \frac{1}{1-z} - 3 \right], \end{aligned} \quad (5.21a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{gg}^{[8s]}(z) &= \mathcal{R}_{gg}(z) + 3 \left\{ \delta(1-z) \left(\frac{1}{2\varepsilon_{\text{IR}}} + 1 \right) - \left[\frac{1}{1-z} \right]_+ \right\} \\ &+ \frac{23z^5 + 29z^4 + 43z^3 + 43z^2 + 18z - 12}{2z(1+z)^2} \\ &+ \frac{3}{1-z} \left[\frac{2z(z^6 - 2z^5 - 6z^4 + 2z^3 - 3z^2 - 4z - 4) \ln(z)}{(1+z)^3} \frac{1}{1-z} - 4 \right], \end{aligned} \quad (5.21b)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{gg}^{[8a]}(z) &= \frac{27(r+1)^2}{32(r-1)^2} \frac{1-z}{z(1-z^2)^3} \left[(1-z^2)(21z^5 + 88z^4 + 42z^3 + 92z^2 + 17z + 12) \right. \\ &\quad \left. + 4z(11z^5 + 25z^4 + 64z^3 + 12z^2 + 21z + 3) \ln(z) \right], \end{aligned} \quad (5.21c)$$

$$\mathcal{R}_{gg}^{[10]}(z) = \frac{80z(1-z)}{(1-z^2)^3} \left[(1-z^2)(z^3 + 4z^2 + z + 2) + 2z^2(z^2 + 2z + 5) \ln(z) \right], \quad (5.21d)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{gg}^{[27s]}(z) &= \mathcal{R}_{gg}(z) + 8 \left\{ \delta(1-z) \left(\frac{1}{2\varepsilon_{\text{IR}}} + 1 \right) - \left[\frac{1}{1-z} \right]_+ \right\} \\ &+ \frac{43z^5 + 59z^4 + 93z^3 + 83z^2 + 38z - 12}{2z(1+z)^2} \\ &+ \frac{1}{1-z} \left[\frac{2z(3z^6 - 6z^5 - 28z^4 + 6z^3 - 19z^2 - 12z - 12) \ln(z)}{(1+z)^3} \frac{1}{1-z} - 17 \right], \end{aligned} \quad (5.21e)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{gg}(z) &= (1-z)P_{gg}(z) \left\{ 2 \left[\frac{\ln(1-z)}{1-z} \right]_+ - \left[\frac{1}{1-z} \right]_+ \ln \left(\frac{\mu_F^2}{M^2} \right) \right\} + \left\{ \frac{3}{\varepsilon_{\text{IR}}^2} + \frac{11}{2\varepsilon_{\text{IR}}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{n_f - 1}{3\varepsilon_{\text{IR}}} - \left(\frac{11}{2} - \frac{n_f - 1}{3} \right) \ln \left(\frac{\mu_F^2}{M^2} \right) - \pi^2 \right\} f_\varepsilon(M^2) \delta(1-z). \end{aligned} \quad (5.22)$$

Der vom Massenverhältnis r abhängige Vorfaktor aus Gl. (5.21c) hebt sich gegen die Normierung weg. Erneut gilt $n_f = 6$, und die Funktionen P_{ij} werden am Ende des Abschnitts angegeben. Sie unterscheiden sich im Allgemeinen von den Splitting-Funktionen

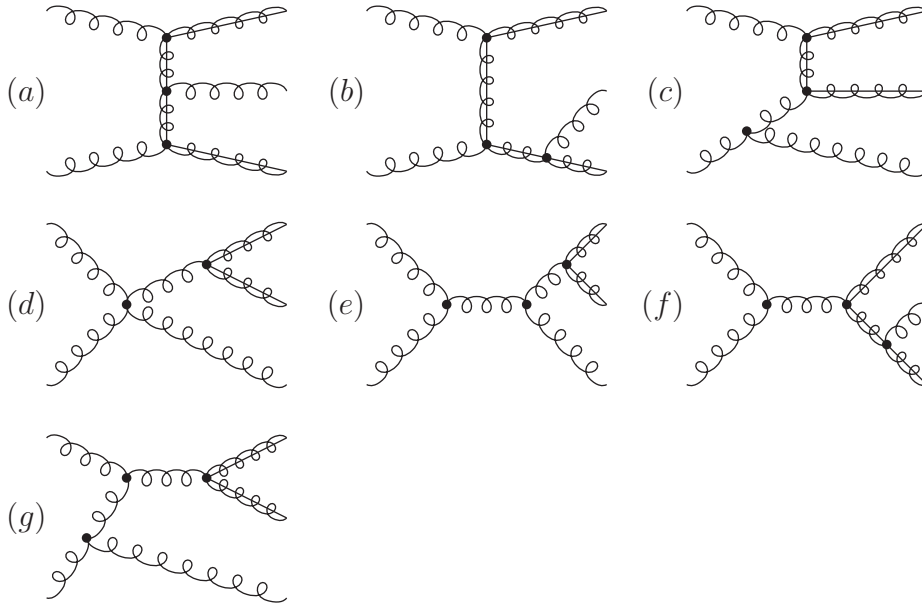


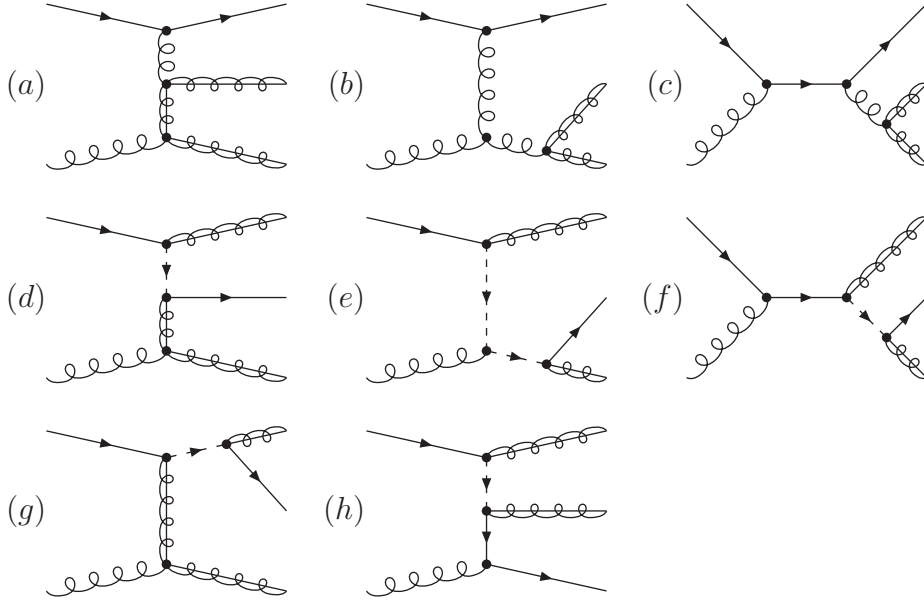
Abbildung 5.7: NLO-Beiträge zu den Prozessen mit gg im Anfangszustand.

\mathcal{P}_{ij} . Die gewöhnliche Plus-Distribution wird benutzt, um die Singularität für $z = 1$ zu regularisieren. Sie wird durch $\int_0^1 dz \left[\frac{\ln^n(1-z)}{1-z} \right]_+ f(z) \equiv \int_0^1 dz \frac{\ln^n(1-z)}{1-z} [f(z) - f(1)]$ für $n = 0, 1, \dots$ mit einer beliebigen Testfunktion $f(z)$ definiert. Falls wie für die hadronische Produktion die untere Integrationsgrenze durch $0 < \rho < 1$ gegeben ist, ersetzt man sie durch die ρ -Vorschrift mittels

$$\left[\frac{\ln^n(1-z)}{1-z} \right]_+ \rightarrow \frac{\ln^{n+1}(1-\rho)}{n+1} \delta(1-z) + \left[\frac{\ln^n(1-z)}{1-z} \right]_\rho, \quad (5.23)$$

wobei letztere durch $\int_\rho^1 dz [d(z)]_\rho f(z) \equiv \int_\rho^1 dz d(z) [f(z) - f(1)]$ gegeben ist.

Die Resultate für die Prozesse $gq \rightarrow Tq$ und $g\bar{q} \rightarrow T\bar{q}$ sind identisch, und daher werden nur erstere angegeben. Die entsprechenden Formeln $\mathcal{R}_{gq}^{[T]}$ werden in die Funktionen $\mathcal{H}_{gq}^{[T]}$ und $\mathcal{F}_{gq}^{[T]}$ aufgespalten. Erstere stammen von den Diagrammen (a)-(c) aus Abb. 5.8 und sind unabhängig von r . Die Funktionen $\mathcal{F}_{gq}^{[T]}$ gehen aus den Diagrammen (d)-(h) und den Interferenzen mit den Diagrammen ohne Squarks hervor. Die infraroten Divergenzen und

Abbildung 5.8: NLO-Beiträge zu den gg -initiierten Prozessen.

die Abhängigkeit von der Faktorisierungsskala μ_f sind in $\mathcal{H}_{gg}^{[T]}$ enthalten. Man erhält

$$\mathcal{R}_{gg}^{[T]}(z) = \mathcal{H}_{gg}^{[T]}(z) + \mathcal{F}_{gg}^{[T]}(z, r), \quad (5.24a)$$

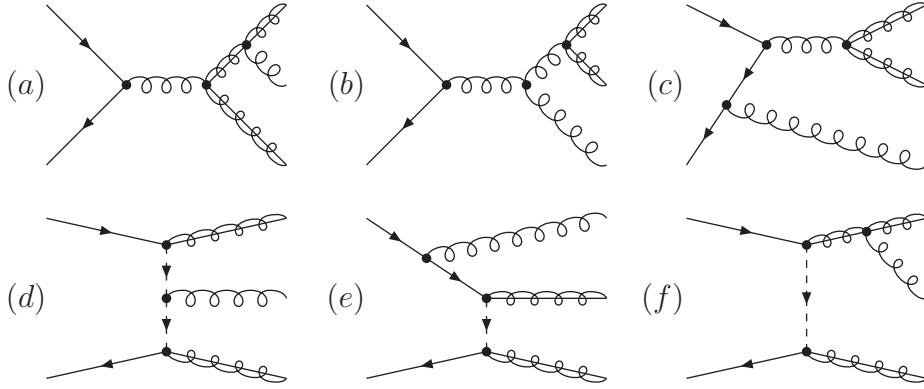
$$\mathcal{H}_{gg}^{[T]}(z) = \mathcal{N}_{gg}^{[T]} \left\{ -\frac{1}{2} P_{gg}(z) \ln \left(\frac{\mu_F^2 z}{M^2 (1-z)^2} \right) - \frac{4(1-z)}{3z} [1 - \ln(z)] + \frac{2z}{3} \right\},$$

für $T \in \{1_s, 8_s, 27_s\}$, (5.24b)

$$\mathcal{H}_{gg}^{[8_a]}(z) = -\frac{1}{2} P_{gg}(z) \ln \left(\frac{\mu_F^2 z}{M^2 (1-z)^2} \right) + \frac{9(z+1)}{8} \ln(z) + \frac{(1-z)(32z^2 + 11z + 18)}{16z}, \quad (5.24c)$$

$$\mathcal{H}_{gg}^{[10]}(z) = 0. \quad (5.24d)$$

Die Funktionen $\mathcal{F}_{gg}^{[T]}$ sind in Anhang B aufgelistet. Eine ähnliche Zerlegung wird für die

Abbildung 5.9: NLO-Beiträge zu den Prozessen mit $q\bar{q}$ im Anfangszustand.

$q\bar{q}$ -initiierten Prozesse durchgeführt

$$\mathcal{R}_{q\bar{q}}^{[T]}(z) = \mathcal{H}_{q\bar{q}}^{[T]}(z) + \mathcal{F}_{q\bar{q}}^{[T]}(z, r), \quad (5.25a)$$

$$\mathcal{H}_{q\bar{q}}^{[T]}(z) = \mathcal{N}_{gg}^{[T]} \frac{32}{27} z(1-z), \quad (5.25b)$$

für $T \in \{1_s, 8_s, 27_s\}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{q\bar{q}}^{[8_a]}(z) = & \left[\frac{4}{3\varepsilon_{\text{IR}}^2} + \frac{7}{2\varepsilon_{\text{IR}}} - 2 \ln\left(\frac{\mu_F^2}{M^2}\right) + 3 - \frac{4\pi^2}{9} \right] f_\varepsilon(M^2) \delta(1-z) \\ & + (1-z) P_{q\bar{q}}(z) \left(2 \left[\frac{\ln(1-z)}{1-z} \right]_+ - \ln\left(\frac{z\mu_F^2}{M^2}\right) \left[\frac{1}{1-z} \right]_+ \right) \\ & + z + 2 - 3 \left[\frac{1}{1-z} \right]_+, \end{aligned} \quad (5.25c)$$

$$\mathcal{H}_{q\bar{q}}^{[10]}(z) = 0, \quad (5.25d)$$

und die Werte für $\mathcal{F}_{q\bar{q}}^{[T]}$ sind erneut in Anhang B aufgelistet. Die Funktionen P_{ij} sind gegeben durch

$$\begin{aligned} P_{gg}(z) &= 6 \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} + z(1-z) - 2 \right), \\ P_{gq}(z) &= \frac{4[1 + (1-z)^2]}{3z}, \\ P_{qg}(z) &= \frac{z^2 + (1-z)^2}{2}, \\ P_{qq}(z) &= \frac{8}{3} \left(\frac{1}{1-z} - \frac{1+z}{2} \right). \end{aligned} \quad (5.26)$$

Die Funktionen $\mathcal{R}_{gg}^{[1_s]}$, $\mathcal{H}_{gq}^{[1_s]}$ und $\mathcal{H}_{q\bar{q}}^{[1_s]}$ stimmen mit den Ergebnissen aus den Gl. (4.49a),

(4.49b) und (4.49d) überein. Die Renormierungskonstanten Z_2^{OS} , $Z_{m_{\tilde{g}}}^{\text{OS}}$ und Z_3^{OS} aus den Gl. (4.30) und (4.33) erhalten ebenfalls Zusatzterme durch Diagramme mit virtuellen Squarks. Zusätzlich müssen Renormierungskonstanten für die Wellenfunktion der Quarks und die Masse der Squarks berechnet werden, was erneut im On-Shell-Schema durchgeführt wird. Alle Renormierungskonstanten, die in den obigen Resultaten enthalten sind, können in Anhang B gefunden werden.

5.3 Hadronische Produktion

Der Wirkungsquerschnitt für die Produktion zweier Gluinos durch zwei Protonen setzt sich aus den bisher diskutierten Bausteinen zusammen. Er ist differentiell in der invarianten Masse M der beiden Gluinos und durch Gl. (5.1) definiert. Der numerischen Analyse der $\tilde{g}\tilde{g}$ -Produktion ging zur Überprüfung des Programms die gleiche Berechnung für das Top-System voraus. Die Kurven und Werte für die Verteilung bezüglich der invarianten Masse der beiden Top-Quarks aus [98] konnten bis zur NLO-Genauigkeit reproduziert werden.

Für die Paarproduktion der beiden Gluinos ist der zu Abb. 5.3 korrespondierende Wirkungsquerschnitt für Szenario (y) auf NLO in Abb. 5.10 für zwei Bereiche der invarianten Masse M gegeben. In (a) läßt sich sehr gut das Schwellenverhalten beobachten. Während sich die Höhe der Anregung des Grundzustands gegenüber der LO-Rechnung nicht deutlich ändert – was man in Abb. 5.11 besser sehen kann –, ist seine Position um einige GeV verschoben. Darin spiegelt sich das schlechte Konvergenzverhalten der Bindungsenergie wider – siehe Abb. 4.5. Während die zweite Anregung des Singulett weiterhin mit dem Grundzustand des symmetrischen Oktetts zusammenfällt, kann man an gleicher Stelle die Anregung des antisymmetrischen Oktetts erkennen. Der Unterdrückung durch die beinahe gegebene Entartung der Massen $m_{\tilde{g}}$ und $\overline{m}_{\tilde{g}}$ in führender Ordnung stehen sehr große NLO-Korrekturen gegenüber. Ähnlich wie das Dekuplett, welches in Born'scher Näherung nicht beiträgt, ist der Effekt der 8_a -Konfiguration auf das Gesamtergebnis recht klein.

Während die dominierende Kurve oberhalb der Schwelle die des symmetrischen Oktetts ist, gewinnt die einzige repulsive Konfiguration immer mehr an Bedeutung und überholt das Oktett schließlich. Dies kann man in Abbildung (b) sehen, in welcher der Bereich bis $M_{\text{max}} = 2000 \text{ GeV}$ abgebildet ist. Dieser Wert bedeutet eine Relativgeschwindigkeit von $v_{\text{max}}^2 = 0.72$, bei welcher die Entwicklung für kleine Werte von v keine gute Näherung mehr ist. Das gezeigte Verhalten der verschiedenen Farbkonfigurationen ist dem des Top-Systems sehr ähnlich. Dort wird der Wirkungsquerschnitt unterhalb der Schwelle bestimmt durch das attraktive Singulett; oberhalb der Schwelle ist es das repulsive Oktett, welches den dominanten Beitrag liefert.

Die Abhängigkeit der Gesamtergebnisse auf LO und NLO von der Wahl der Faktorisierungs- und Renormierungsskala, welche auf den gleichen Wert gesetzt werden, ist in Abb. 5.11 für die zuvor betrachteten Bereiche von M zu sehen. Während die Skala μ_G festgehalten wird, variiert die Skala der harten Anteile zwischen $\mu_f = \mu_r = m_{\tilde{g}}, 2m_{\tilde{g}}, 4m_{\tilde{g}}$,

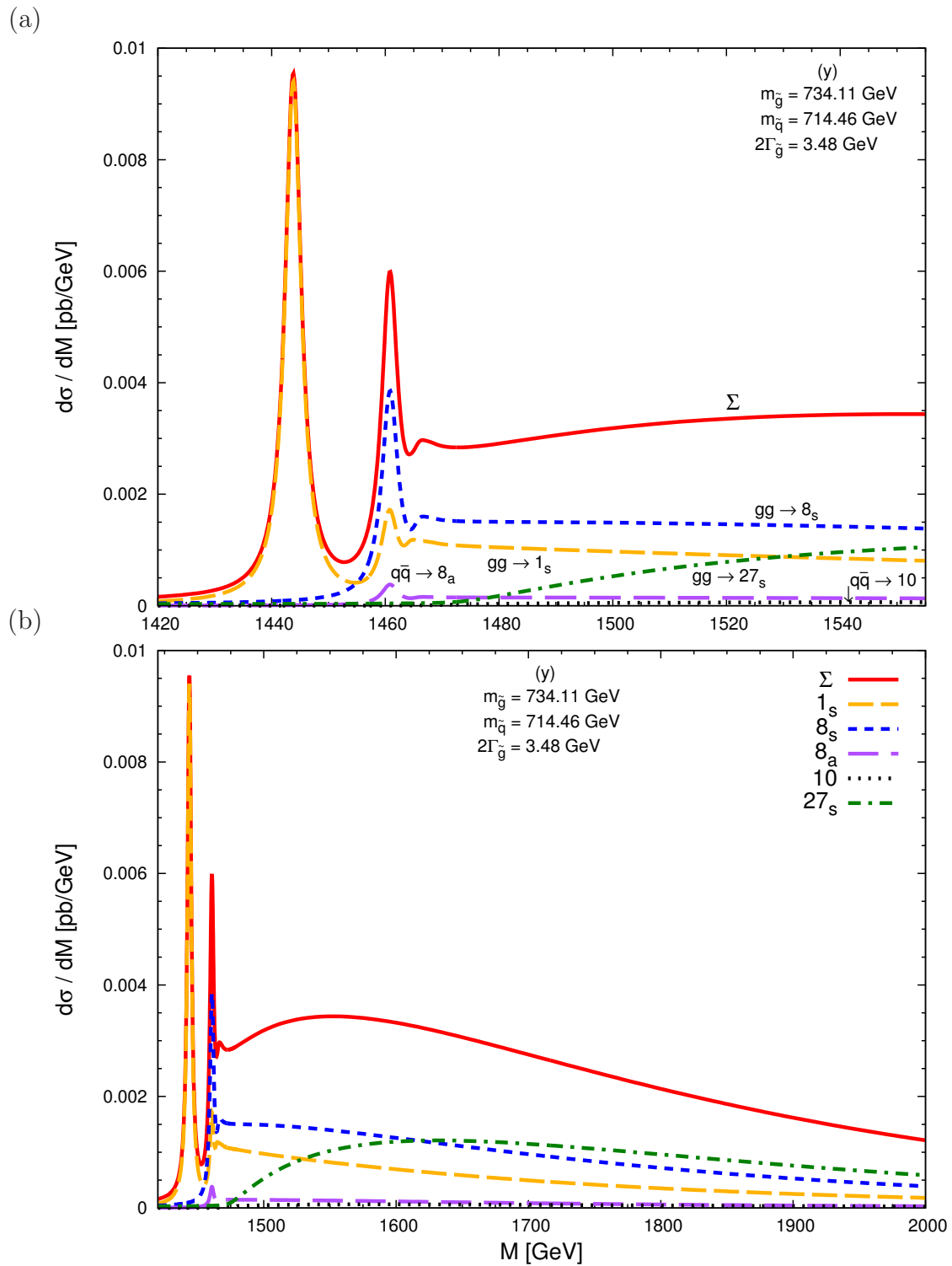


Abbildung 5.10: NLO-Vorhersage für den differentiellen Wirkungsquerschnitt für Szenario (y) für zwei verschiedene Bereiche der invarianten Masse M .

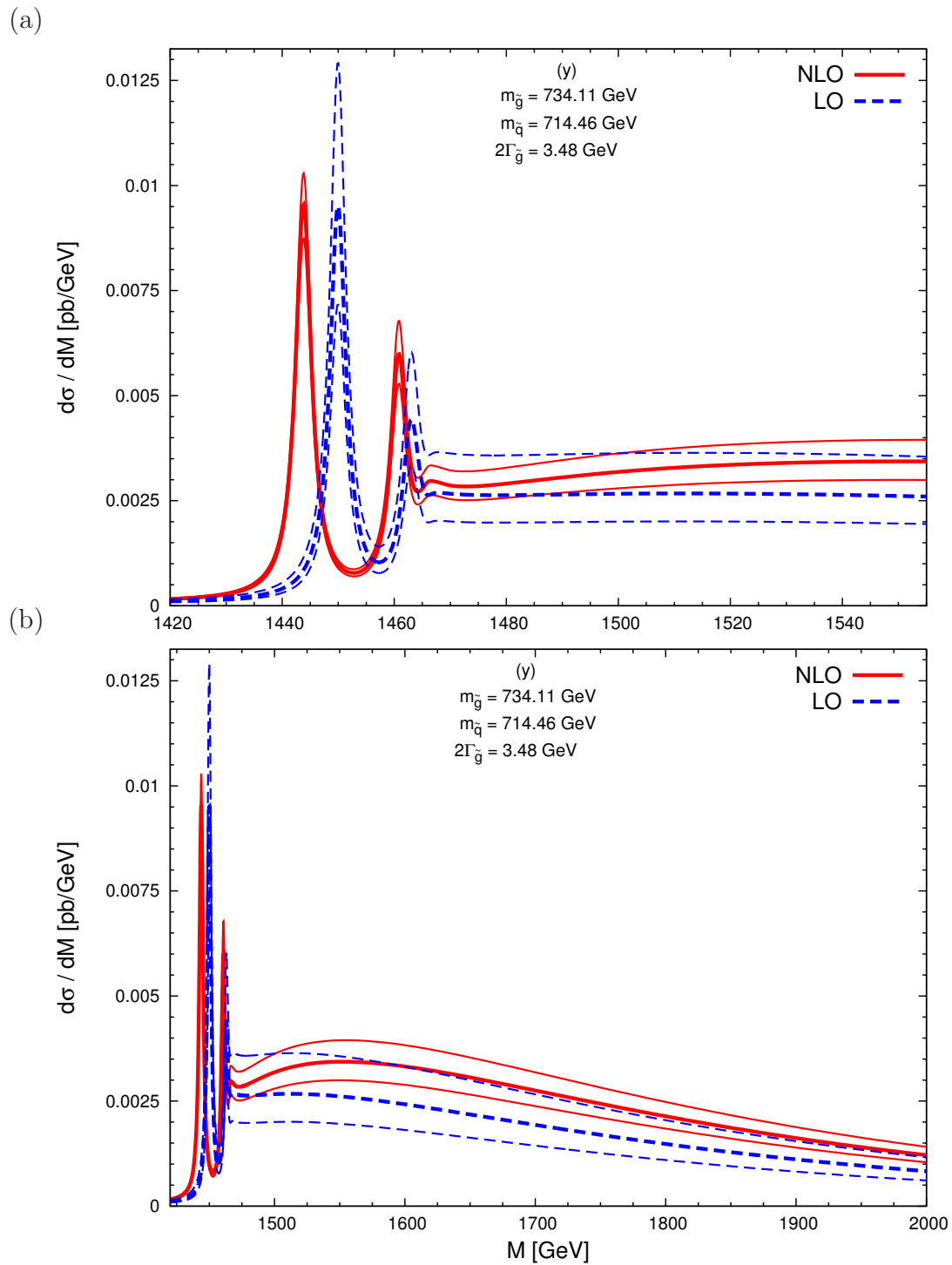


Abbildung 5.11: Abhängigkeit des differentiellen Wirkungsquerschnitts von der Wahl der Faktorisierungs- und Renormierungsskala für Szenario (y). Die Skala der Green'schen Funktion wird festgehalten, und die zwei Bereiche von M sind die gleichen wie in Abb. 5.10.

was jeweils den drei Kurven entspricht. Der Zentralwert für $\mu_H = 2m_{\tilde{g}}$, welcher in der Abbildung zuvor verwendet wurde, ist etwas dicker dargestellt und liegt zwischen den beiden anderen Kurven. Wie auch für den Bindungszustand (siehe Abb. 4.19) bedeutet eine geringere Skala für die beiden betrachteten Ordnungen immer einen größeren Wert für den Produktionsquerschnitt.

Während man in Abbildung (a) sehr gut erkennen kann, daß sich die Anregung des Grundzustands um ca. 5 GeV bewegt, beobachtet man insgesamt eine deutliche Reduktion der Abhängigkeit von der Wahl der Skala. Das Ergebnis variiert in führender Ordnung ca. $\pm 40\%$ um den Zentralwert, und in NLO sind es nur noch ungefähr $\pm 15\%$. Insgesamt erhält man positive Korrekturen, welche oberhalb der Schwelle stark anwachsen, so daß die NLO-Kurve für die Wahl $\mu = 2m_{\tilde{g}}$ oberhalb von $M = 1600$ GeV sogar das Band der LO-Kurven verläßt.

Die gleiche Betrachtung der Skalenabhängigkeit für die Szenarios (a) und (z) ist in den Abb. 5.12 und 5.13 gezeigt. Neben positiven Korrekturen durch die NLO-Rechnung kann man erneut eine deutliche Reduktion der Abhängigkeit von der Wahl der Skala erkennen. Weiterhin ist in den Kurven der Effekt der Green'schen Funktion zu sehen: Mit zunehmender Zerfallsbreite $\Gamma_{\tilde{g}}$ werden die Anregungen unterhalb der Schwelle ausgewaschen, ergeben dort jedoch einen nicht zu vernachlässigenden Beitrag.

In Abb. 5.14 wird der bisher betrachtete differentielle Wirkungsquerschnitt verglichen mit dem Ansatz der perturbativen Entwicklung der Green'schen Funktion (FO-Ansatz). Die Entwicklung bis zur Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_s)$ ist gegeben durch

$$\text{Im } G^{[R]}(M + i\Gamma_{\tilde{g}}) = \text{Im} \left\{ \frac{m_{\tilde{g}}^2 v}{4\pi} \left[i + \frac{\alpha_s C^{[R]}}{v} \left(\frac{i\pi}{2} - \ln \frac{2m_{\tilde{g}}v}{\mu} \right) \right] \right\} + \mathcal{O}(\alpha_s^2), \quad (5.27)$$

und man erhält im Grenzfall verschwindender Zerfallsbreiten

$$\text{Im } G^{[R]}(M + i\Gamma_{\tilde{g}}) \xrightarrow{\Gamma_{\tilde{g}} \rightarrow 0} \frac{m_{\tilde{g}}^2}{4\pi} v \left(1 + C^{[R]} \frac{\alpha_s \pi}{2v} \right). \quad (5.28)$$

In Abb. 5.14 sind neben der Kurve, welche innerhalb des Formalismus der Green'schen Funktion erstellt wurde und unterhalb der Schwelle Resonanzen aufweist, die FO-Kurven aufgetragen. Dabei wird die Green'sche Funktion jeweils durch die Ausdrücke der Gl. (5.27) und (5.28) ersetzt. Für eine verschwindende Zerfallsbreite erhält man unterhalb der Schwelle keinen Beitrag und einen Knick für $M = 2m_{\tilde{g}}$. Dieser Knick wird durch die Hinzunahme der endlichen Zerfallsbreite mit der Green'schen Funktion wie in Gl. (5.27) beseitigt. Oberhalb von ca. 1700 GeV fallen alle drei Kurven der unterschiedlichen Ansätze zusammen. Hier spielen die Wechselwirkungen zwischen den Konstituenten, die in der nicht-perturbativen Green'schen Funktion enthalten sind, keine Rolle mehr.

Die gleiche Betrachtung für die Szenarios (a) und (z) ist in Abb. 5.15 veranschaulicht. Die Ansätze der Green'schen Funktion sowie der FO-Rechnung konvergieren gegeneinander.

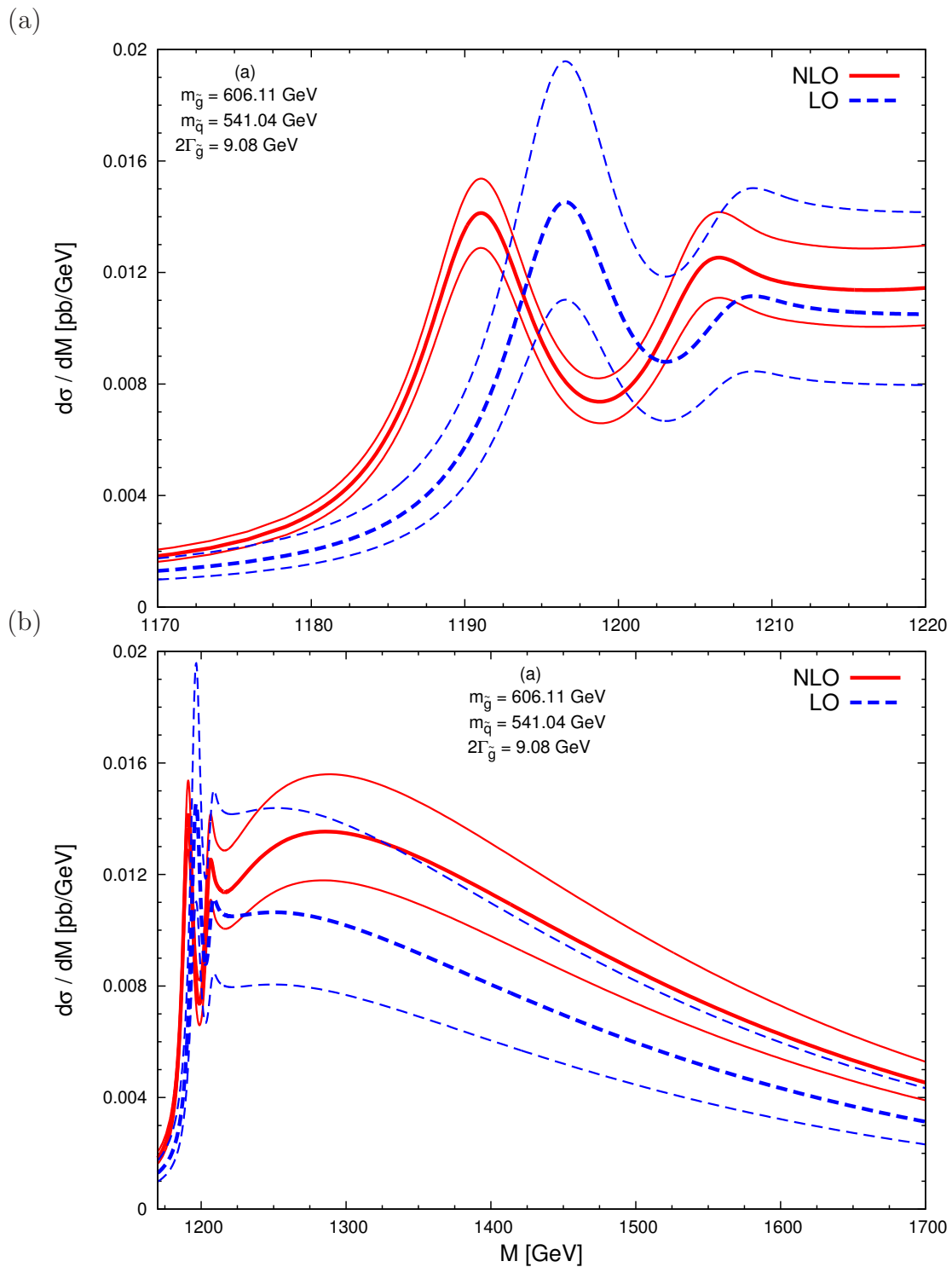


Abbildung 5.12: Abhängigkeit des differentiellen Wirkungsquerschnitts von der Wahl der Faktorisierungs- und Renormierungsskala für Szenario (a) und zwei Bereiche von M . Die Skala der Green'schen Funktion wird erneut festgehalten.

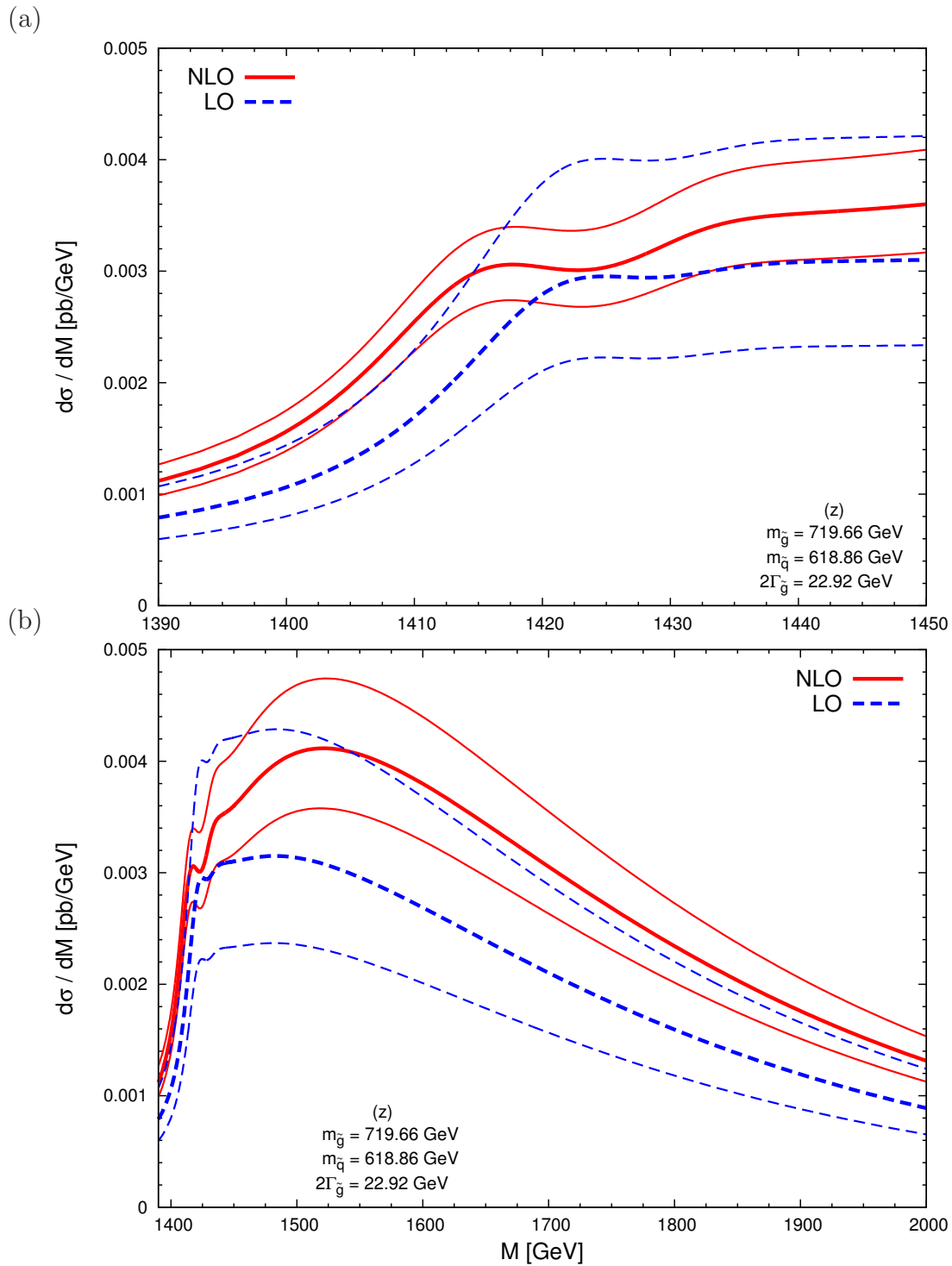


Abbildung 5.13: Abhängigkeit des differentiellen Wirkungsquerschnitts von der Wahl der Faktorisierungs- und Renormierungsskala für Szenario (z), zwei Bereiche von M und die festgehaltene Skala $\mu_G^{[R]}$.

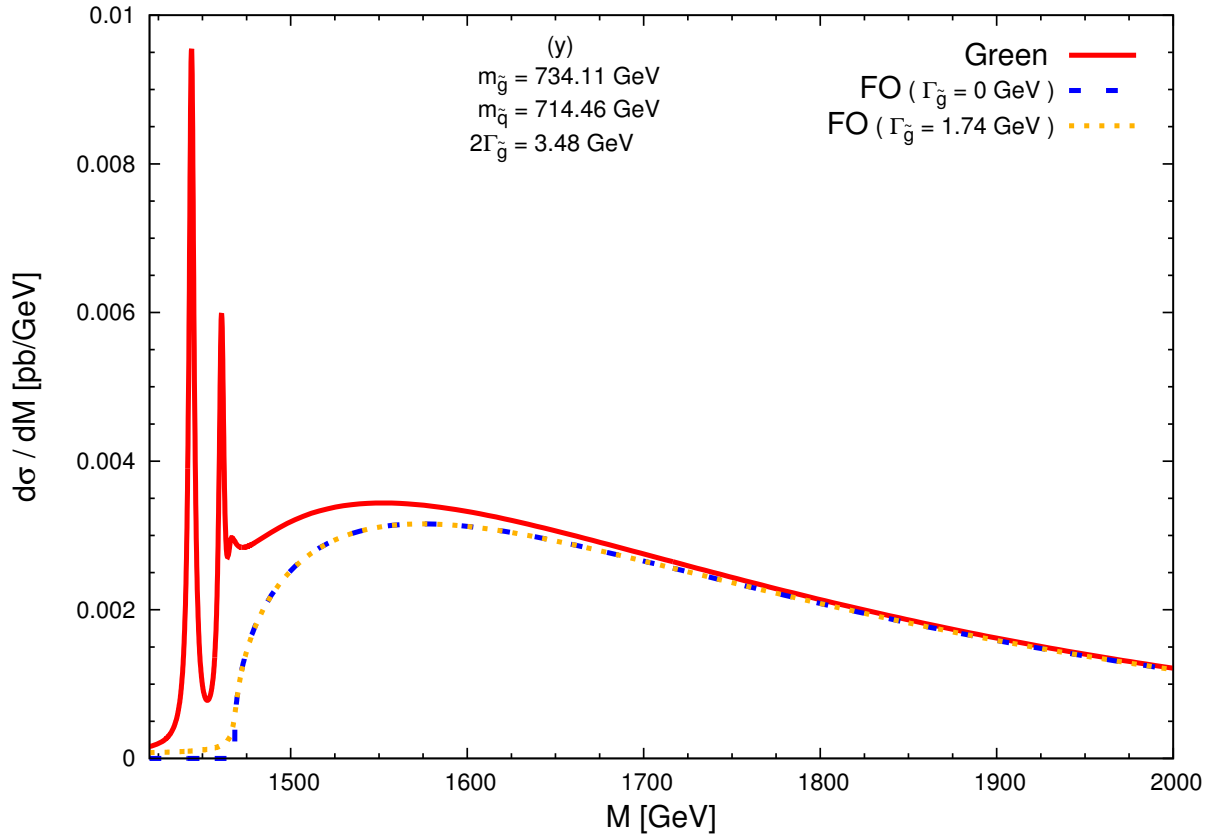


Abbildung 5.14: Vorhersage für den differentiellen Wirkungsquerschnitt aus Szenario (y) in NLO für die Green'sche Funktion (durchgezogen, rot), sowie deren perturbative Entwicklung mit verschwindender (gepunktet, blau) und nicht verschwindender Zerfallsbreite (gestrichelt, orange). Oberhalb der Schwelle liegen die beiden zuletzt genannten Kurven übereinander.

Der Flächeninhalt zwischen der blauen, gepunkteten Kurve und der roten, durchgezogenen ist ein Maß für den Anteil des totalen Wirkungsquerschnitts, welcher der Berechnung ohne Berücksichtigung der Zerfallsbreite $\Gamma_{\tilde{g}}$ bzw. der Bindungseffekte entgeht. Eine genauere Betrachtung dieser Größe folgt im weiteren Verlauf dieses Abschnitts.

Weiterhin wird der differentielle Wirkungsquerschnitt für die aktuelle Schwerpunktsenergie des LHC von $\sqrt{S} = 7$ TeV untersucht. In Abb. 5.16 ist er für Szenario (y) und die beiden bekannten Bereiche der invarianten Masse aufgetragen. Neben den Kurven der einzelnen Farbkanäle sowie deren Summe ist die FO-Kurve für $\Gamma_{\tilde{g}} = 0$ abgebildet. Während das Gesamtbild in etwa so wie für die anvisierte Schwerpunktsenergie von $\sqrt{S} = 14$ TeV aussieht – siehe Abb. 5.10 –, sind die Kurven etwa um den Faktor 20 unterdrückt.

Da die Herangehensweise der Berechnung mit verschwindender Relativgeschwindigkeit in

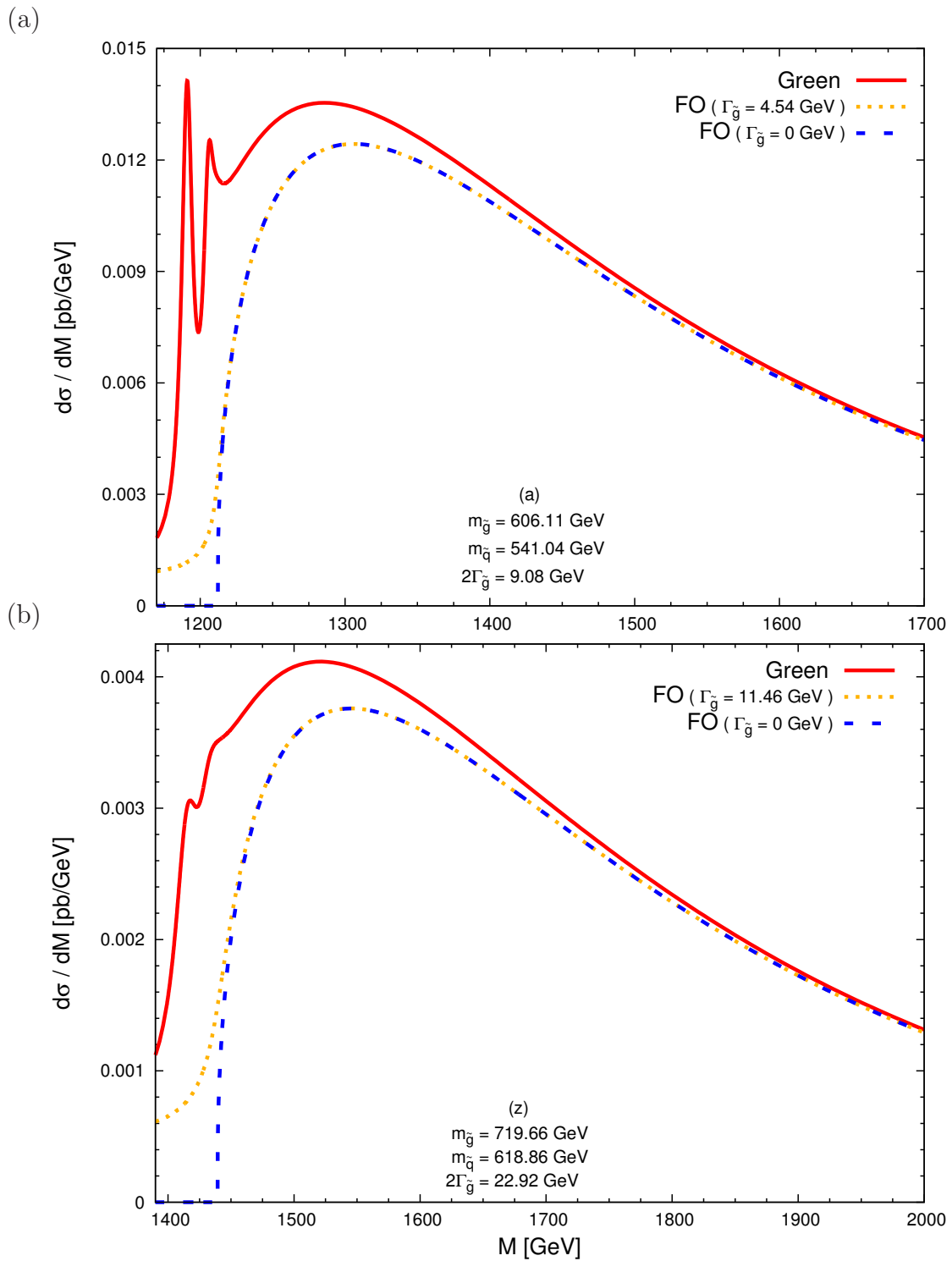


Abbildung 5.15: Vorhersage für den Vergleich der differentiellen Wirkungsquerschnitte unter Benutzung des Formalismus der Green'schen Funktion, sowie deren störungstheoretischer Entwicklung wie in Abb. 5.14 für die Szenarios (a) und (z).

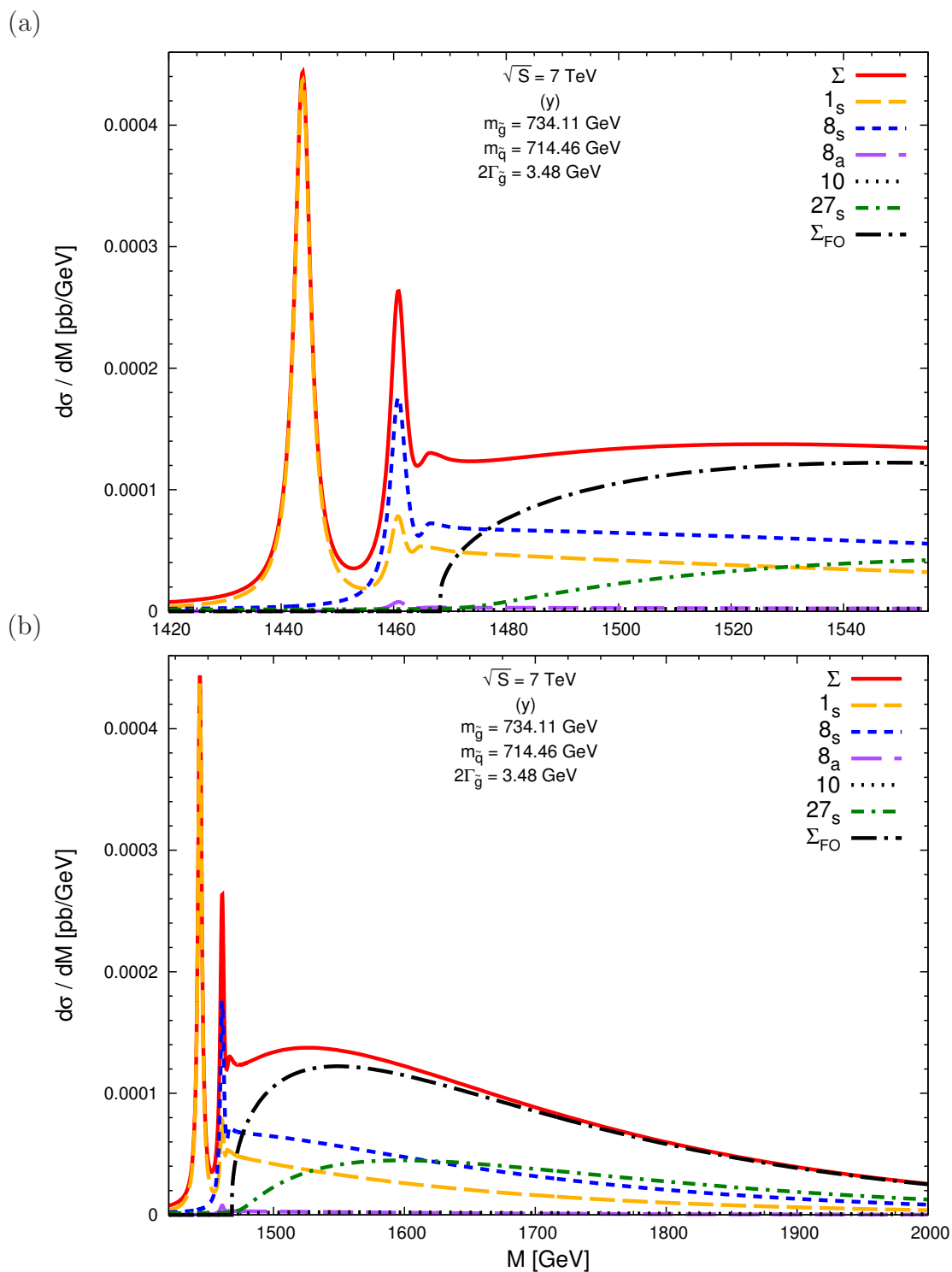


Abbildung 5.16: Vorhersage für den differentiellen Wirkungsquerschnitt, sowie Vergleich mit der FO-Vorhersage für verschwindendes $\Gamma_{\tilde{g}}$ für die hadronische Schwerpunktsenergie $\sqrt{S} = 7$ TeV in Szenario (y).

Szenario	\sqrt{S} [TeV]	$\sigma_{\text{tot}}^{(\text{NLO})}$ [pb]	$\Delta\sigma$ [pb]	$\Delta\sigma/\sigma_{\text{tot}}^{(\text{NLO})}$ [%]
(y)	14	2.59	$1.83 \cdot 10^{-1}$	7.1
(a)	14	8.36	$6.50 \cdot 10^{-1}$	7.8
(z)	14	2.87	$2.57 \cdot 10^{-1}$	9.0
(y)	7	$8.97 \cdot 10^{-2}$	$7.96 \cdot 10^{-3}$	8.9

Tabelle 5.1: Vergleich des totalen Wirkungsquerschnitts oberhalb und unterhalb der Schwelle.

der Schwellenregion eine gute Näherung ist, läßt sich dort die Methode der Green'schen Funktion mit den Berechnungen der offenen $\tilde{g}\tilde{g}$ -Produktion vergleichen. Für letztere wird die Zerfallsbreite auf Null gesetzt, und der zugehörige FO-Ansatz gibt den differentiellen Wirkungsquerschnitt der offenen Produktion im Schwellenbereich wieder. Somit ist die Differenz der beiden Kurven ein ungefähres Maß dafür, welcher Anteil am totalen Wirkungsquerschnitt von der FO-Rechnung nicht berücksichtigt wird

$$\Delta\sigma \equiv \int_{M_0}^{M_\infty} dM \left[\left(\frac{d\sigma}{dM} \right)_{\text{Green}} - \left(\frac{d\sigma}{dM} \right)_{\text{FO}} \right]. \quad (5.29)$$

Integriert man die Differenz numerisch, wobei die untere M_0 und die obere Integrationsgrenze M_∞ geeignet gewählt werden, so erhält man für die betrachteten Szenarien bzw. Schwerpunktsenergien die in Tab. 5.1 gezeigten Werte $\Delta\sigma$. Der totale Wirkungsquerschnitt wird durch das Programm `Prospino2` [93] bestimmt. Mittels der CTEQ5 PDF's sowie des von `SuSpect` generierten Spektrums des MSSM erhält man den totalen Wirkungsquerschnitt für LO und NLO. Letzterer ist ebenso wie das Verhältnis der Differenz zum Absolutwert in der Tabelle zu finden. Ein Anteil von 7 – 9% entgeht der Berechnung des totalen Wirkungsquerschnitts für die offene Produktion der Gluinos.

Die in diesem Abschnitt erhaltenen Ergebnisse lassen sich wie folgt auswerten: Kann der differentielle Wirkungsquerschnitt trotz der komplizierten Zerfallssignaturen mit vielen Teilchen im Endzustand und fehlender transversaler Energie rekonstruiert werden, so hat man eine recht genaue Methode zur Bestimmung der Masse des Gluinos. Abhängig von der Größe der Zerfallsbreite kann man entweder die Resonanzen oder den steilen Anstieg des Wirkungsquerschnitts an der Schwelle benutzen, um $m_{\tilde{g}}$ zu bestimmen. Läßt sich die Rekonstruktion der invarianten Masse nicht wie gewünscht bewerkstelligen, so ist durch den Produktionsquerschnitt unterhalb der Schwelle ein Maß dafür gegeben, welchen Fehler man begeht, wenn man die Wechselwirkung der Konstituenten bei der Produktion außer acht läßt.

Es bleibt abzuwarten, welchen zusätzlichen Effekt die Resummation softer Gluonen auf die Paarproduktion von Gluinos an der Schwelle hat. Für das Top-Antitop-System erzielt man für die durch zwei Gluonen induzierten Kanäle Korrekturen von 5% bis 15% auf die

NLO-Ergebnisse [98], wobei für die Gluinos aufgrund ihrer großen Farbkopplung sogar größere Werte erwartet werden.

5.4 Vergleich und Erweiterung der Berechnung

Während die vollständige Berechnung der NLO-Korrekturen bedeutet, daß man virtuelle sowie reelle Korrekturen für jeden Farbkanal separat berechnen muß, wurde in [96] eine vereinfachte Abschätzung der Korrekturen durchgeführt. Neben den Logarithmen, welche man durch die Renormierung sowohl der Kopplung als auch der PDF's gewinnt, enthält die Abschätzung Beiträge durch die Abstrahlung im Anfangs- und Endzustand. Die Vorfaktoren der resultierenden universellen Strukturen von Plus-Distributionen erhält man aus der Farbstruktur der einlaufenden Partonen bzw. aus der Farbkonfiguration der beiden Gluinos. Zusätzlich wurden die Werte der virtuellen Korrekturen aus existierenden Rechnungen mit farbgemittelten Ergebnissen extrahiert.

Definiert man sich die Größe

$$s^{\text{LO/NLO}} \equiv M \left. \frac{d\sigma^{\text{LO/NLO}}}{dM} \right|_{\text{Im}\{G^{[R]}\}/m_{\tilde{g}}^2 \rightarrow 1}, \quad (5.30)$$

welche in der jeweiligen Ordnung den harten Anteil des hadronischen Wirkungsquerschnitts angibt, so läßt sich für jeden Farbkanal die vollständige NLO-Rechnung mit der Abschätzung vergleichen. Während die vollständige Rechnung wie beschrieben durchgeführt wird, ändert sich für die Abschätzung aus [96] nur das Schema. Es wird dort durchgehend $n_f = 5$ benutzt mit der Kopplung im $\overline{\text{MS}}$ -Schema ohne Entkopplung. Somit weichen die harten Anteile des Wirkungsquerschnitts bereits in der führenden Ordnung um ca. 10% voneinander ab, obwohl für die harten Anteile die gleichen Formeln benutzt werden. Der Vergleich für das Szenario (a) ist in Tab. 5.2 dargestellt. Da die Variation der Resultate der harten Rechnung mit der invarianten Masse vernachlässigbar ist, wird hier ausschließlich der Punkt $M = 2m_{\tilde{g}}$ untersucht.

Für die pseudoskalaren Kanäle erhält man mittels der Abschätzung sehr große Korrekturen. In der vollständigen Rechnung verschwinden sie für das Singulett nahezu und wachsen bis zur 27-Darstellung stark an. Während das Dekuplett in der Abschätzung nicht enthalten ist, erhält man für das antisymmetrische Oktett die größte Abweichung. Aufgrund der Massenentartung ist das LO-Resultat sehr klein und die Korrektur sehr groß, was durch die Approximation nicht berücksichtigt wird.

Den Schluß dieses Kapitels bildet die Diskussion über die Ausweitung der Berechnungen. Einerseits wurden für die numerische Analyse die Mischungswinkel der Squarks nicht berücksichtigt, andererseits wurde die Masse des Top-Quarks weitestgehend ignoriert. Ohne numerische Untersuchung werden die zugehörigen Ergebnisse in Anhang B aufgelistet.

	1_s	8_s	8_a	10	27_s
NLO-Rechnung					
s^{LO} [pb/GeV ²]	$6.28 \cdot 10^{-2}$	$1.26 \cdot 10^{-1}$	$1.72 \cdot 10^{-3}$	–	$1.88 \cdot 10^{-1}$
s^{NLO} [pb/GeV ²]	$6.26 \cdot 10^{-2}$	$1.67 \cdot 10^{-1}$	$1.76 \cdot 10^{-2}$	$1.24 \cdot 10^{-2}$	$3.70 \cdot 10^{-1}$
$s^{\text{NLO}}/s^{\text{LO}} - 1$ [%]	–0.318	32.5	923	–	96.8
Abschätzung					
s^{LO} [pb/GeV ²]	$5.39 \cdot 10^{-2}$	$1.08 \cdot 10^{-1}$	$1.48 \cdot 10^{-3}$	–	$1.62 \cdot 10^{-1}$
s^{NLO} [pb/GeV ²]	$8.16 \cdot 10^{-2}$	$1.76 \cdot 10^{-1}$	$1.70 \cdot 10^{-3}$	–	$2.95 \cdot 10^{-1}$
$s^{\text{NLO}}/s^{\text{LO}} - 1$ [%]	51.4	63.0	14.9	–	82.1

Tabelle 5.2: Vergleich der vollständigen Berechnung des harten Anteils des Wirkungsquerschnitts mit der Abschätzung aus [96]. Für das Szenario (a) wurden hier die Werte für $M = 2m_{\tilde{g}}$ berechnet.

Für die pseudoskalaren Kanäle erhält man Beiträge von massiven Top-Quarks durch die virtuellen Korrekturen. Hierzu tragen die Diagramme aus Abb. 5.4 bei. Für das antisymmetrische Oktett sind es die Diagramme Abb. 5.5(h) und Abb. 5.6(f),(g),(t), die einen geänderten Beitrag liefern. Diese Änderung kann in Gl. (B.17) gefunden werden.

Des weiteren ergeben sich durch die Hinzunahme der Mischungen innerhalb eines Flavours weitere Abweichungen. In der führenden Ordnung erhält man einen Beitrag zum Kanal $q\bar{q} \rightarrow 8_a$ (siehe Gl. (B.18)), welcher vom Diagramm (d) aus Abb. 4.9 stammt. Die Mischungswinkel werden durch je einen reellen Winkel θ_q für jedes Squarkpaar parametrisiert:

$$\begin{pmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11}^{(q)} & U_{12}^{(q)} \\ U_{21}^{(q)} & U_{22}^{(q)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{q}_L \\ \tilde{q}_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_q) & -\sin(\theta_q) \\ \sin(\theta_q) & \cos(\theta_q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{q}_L \\ \tilde{q}_R \end{pmatrix}. \quad (5.31)$$

Die zugehörige virtuelle Korrektur für das antisymmetrische Oktett ist in den Gl. (B.19)-(B.21) enthalten. Zusätzlich muß auch der Mischungswinkel renormiert werden, was wie in [68] durchgeführt wird.

Durch die Berücksichtigung der Mischung erhält man zwei weitere Kanäle, die zur Produktion beitragen. Die Squark-Quark-Gluino-Vertizes brechen dann die chirale Symmetrie, und die Prozesse $q\bar{q} \rightarrow 1_s, 8_s$ sind nicht mehr gleich Null. Die Ergebnisse für die Born'sche Näherung sowie für die virtuellen Korrekturen sind in den Gl. (B.22)-(B.25) zu finden. Die Beiträge zu den reellen Korrekturen proportional zu $\sin^2(2\theta_q)$ sind in den restlichen Gleichungen von Anhang B enthalten.

Kapitel 6

Gluino-Squark-Produktion an der Schwelle

Das System aus einem Gluino und einem Squark steht im Mittelpunkt dieses Kapitels (siehe auch [103]). Im Gegensatz zur $\tilde{g}\tilde{g}$ -Produktion ist innerhalb dieser Konfiguration die Formation von Bindungszuständen nicht realisierbar, da die Zerfallsbreite des Squarks immer im GeV-Bereich liegt. Aus diesem Grund wurde die Squark-Gluino-Produktion an der Schwelle bisher noch nicht analysiert; lediglich in [104] ist die Zerlegung des Tensorprodukts eines Triplets und eines Oktetts zu finden.

Die Untersuchung beschränkt sich auf die Squarks der ersten Generation. Durch die MFV ist die Produktion von Squarks der zweiten und dritten Generation unterdrückt, da die zugehörigen Verteilungsfunktionen vernachlässigbar sind.

Viele der Ergebnisse aus den vorigen Kapiteln können übernommen werden, sofern man die nötigen Änderungen berücksichtigt: Neben der Farbdarstellung muß man die unterschiedlichen Massen der beiden Konstituenten beachten, wodurch die reduzierte Masse in den Formeln des Wirkungsquerschnitts in Erscheinung tritt.

Neben der Untersuchung der Green'schen Funktion auf NLO wird im Unterschied zu Kapitel 5 keine vollständige Berechnung der Korrekturen des harten Anteils durchgeführt. Vielmehr wird die am Ende des vorigen Kapitels diskutierte Abschätzung benutzt, um den differentiellen Wirkungsquerschnitt bezüglich der invarianten Masse des Gluinos und des Squarks zu berechnen.

6.1 Grundlegende Eigenschaften

Während die Gluinos in der adjungierten Darstellung existieren, bilden die Squarks wie auch ihre Superpartner, die Quarks, fundamentale Darstellungen. Die Zerlegung des Tensorprodukts ist bekannt und wird für eine allgemeine $SU(N)$ in Anhang E skizziert. Für

R	C_R	$F^{a,1} \cdot T^{a,2}$	Wechselwirkung
$3, \bar{3}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{3}{2}$	attraktiv
$6, \bar{6}$	$\frac{10}{3}$	$-\frac{1}{2}$	attraktiv
$15, \bar{15}$	$\frac{16}{3}$	$\frac{1}{2}$	repulsiv

Tabelle 6.1: $SU(3)$ -Farbwechselwirkung zwischen einem Oktett und einem Triplet bzw. Antitriplett.

die $SU(3)$ erhält man

$$\begin{aligned} 3 \otimes 8 &= 3 \oplus \bar{6} \oplus 15, \\ \bar{3} \otimes 8 &= \bar{3} \oplus 6 \oplus \bar{15}, \end{aligned} \quad (6.1)$$

wobei das konjugierte Triplet $\bar{3}$ die Farbdarstellung des Antisquarks ist. Für eine beliebige Darstellung R auf der rechten Seite von Gl. (6.1) ist die Farbwechselwirkung proportional zu dem Produkt zweier Generatoren $F_{ij}^a T_{kl}^a$, welches durch Casimir-Operatoren ausgedrückt werden kann. Man erhält

$$F^{a,1} \cdot T^{a,2} = \frac{1}{2} (C_R - C_A - C_F), \quad (6.2)$$

mit dem Casimir $C_F = 4/3$ für das Triplet und $C_A = 3$ für das Oktett. Die Invarianten für die anderen Darstellungen sind in Tab. 6.1 gegeben und stimmen mit [104] überein. Neben dem am stärksten gebundenen Triplet gibt es eine weitere attraktive Konfiguration, deren Wechselwirkung jedoch um einen Faktor drei unterdrückt ist. Die 15-Konfiguration ist von repulsiver Art. Da es sich bei den Squarks um skalare Teilchen handelt, ist der Spin des $\tilde{g}\tilde{q}$ -Systems gleich dem des Gluinos, und das Spektrum für die S -Wellen ergibt sich direkt aus der Tensorzerlegung in Gl. 6.1.

Durch die Kenntnis der Farbwechselwirkung läßt sich das Wechselwirkungspotential bis zur Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ schreiben. Unter der Annahme, daß wie im Falle zweier fundamentaler bzw. zweier adjungierter Darstellungen der Koeffizient a_1 im Korrekturterm des Potentials für alle Farbdarstellungen der gleiche ist¹, erhält man im Ortsraum

$$V_C^{[R]}(\vec{r}) = -C^{[R]} \frac{\alpha_s(\mu_G^{[R]})}{r} \left\{ 1 + \frac{\alpha_s(\mu_G^{[R]})}{4\pi} \left[2\beta_0 \left(\ln(\mu_G^{[R]} r) + \gamma_E \right) + a_1 \right] \right\}, \quad (6.3)$$

¹Der Beweis dieser Annahme steht bislang aus.

R	$a^{[R]}$	$b^{[R]}$	$c^{[R]}$
$3, \bar{3}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$
$6, \bar{6}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$
$15, \bar{15}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{8}$	$-\frac{5}{8}$

Tabelle 6.2: Koeffizienten der Projektoren aus Gl. (6.7) innerhalb der $SU(3)$.

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned}
C^{[3]} &= C^{[\bar{3}]} = 3/2, \\
C^{[6]} &= C^{[\bar{6}]} = 1/2, \\
C^{[15]} &= C^{[\bar{15}]} = -1/2,
\end{aligned} \tag{6.4}$$

sowie γ_E , β_0 und a_1 wie in Abschnitt 4.2. Die Skala wird bestimmt über die Lösung der rekursiven Gleichung

$$\mu_G^{[R]} = \frac{2 |C^{[R]}| m_{\text{red}} \alpha_s(\mu_G^{[R]})}{n}, \tag{6.5}$$

mit der reduzierten Masse $m_{\text{red}} = m_{\tilde{g}} m_{\tilde{q}} / (m_{\tilde{g}} + m_{\tilde{q}})$, welche – verglichen mit Kapitel 5 – an die Stelle von $m_{\tilde{g}}/2$ tritt. Für die Energieniveaus muß man in Gl. (4.11) die Masse sowie die Farbkoeffizienten austauschen. Für das Tripletts erhält man in führender Ordnung

$$E_n^{(\tilde{g}\tilde{q})} = -\frac{(C^{[3]} \alpha_s)^2 m_{\text{red}}}{2 n^2}. \tag{6.6}$$

Es ist klar, daß Gl. (6.6) für das Antitriplett ihre Gültigkeit behält. Für die Berechnung der harten Anteile des Produktionsquerschnitts braucht man die Projektoren für die einzelnen Farbkonfigurationen

$$\mathbb{P}_{ai,bj}^{[R]} = a^{[R]} \delta_{ab} \mathbb{1}_{ij} + b^{[R]} d_{abm} T_{ij}^m + c^{[R]} i f_{abm} T_{ij}^m. \tag{6.7}$$

Hierzu fordert man, daß die Vollständigkeitsrelation sowie die Projektoreigenschaft erfüllt ist und daß die Darstellungen die richtige Dimension besitzen. In Anhang E ist die Berechnung sowie das Ergebnis für eine allgemeine $SU(N)$ dargestellt. Für die $SU(3)$ erhält man die neun Vorfaktoren aus Tab. 6.2, womit sich die harten Kerne der Produktionsquerschnitte berechnen lassen.

Der dominierende Kanal für den Annihilationszerfall ist derjenige in ein Quark und ein Gluon. Er ist in der führenden Ordnung proportional zu zwei Potenzen der starken Kopplung, und die beitragenden Diagramme sind in Abb. 6.1 dargestellt. Die s -, t - und u -Kanäle sind hier alle mit jeweils unterschiedlichen Propagatoren besetzt. Neben dem

starken Zerfall existieren noch die elektroschwachen Kanäle mit den Endzuständen γq , Zq und $W^\pm q'$ und den Feynman-Diagrammen aus Abb. 6.2. Deren Zerfallsbreiten beinhalten einen Faktor $\alpha_s \alpha$ und sind gegenüber dem starken Zerfall unterdrückt. Durch die Wellenfunktion am Ursprung kommt zu den genannten Annihilationszerfallsbreiten des am stärksten gebundenen Triplets der Faktor $(C^{[3]} \alpha_s)^3$ hinzu – ausgewertet bei einer für den Bindungszustand charakteristischen Skala. Hingegen geht in den Zwei-Körper-Zerfall des Squarks bzw. des Gluinos nur eine Potenz von α_s ein (siehe Gl. (2.9) und (2.7)). Betrachtet man nur die erste Generation von Squarks, so ist die Annihilation für den Zerfall des $\tilde{g}\tilde{q}$ -Systems – unabhängig vom Verhältnis der Gluino- und der Squarkmasse – von keiner Bedeutung, und auf eine numerische Analyse wird hier verzichtet. Die untergeordnete Rolle der Annihilation trifft auch für das $\tilde{g}\tilde{g}$ -System zu, sobald der Einzelzerfall in zwei Teilchen kinematisch erlaubt ist.

Für die 26 bisher betrachteten Szenarien ist der Vergleich des Einzelzerfalls ($\Gamma_{\tilde{g}} + \Gamma_{\tilde{q}_i}$) mit dem Abstand des Grundzustands von der ersten Anregung $\Delta\bar{M}_{\tilde{g}\tilde{q}}$ in Tab. 2.4 zu finden. Letzterer kann durch Gl. (6.6) ohne Schwierigkeiten berechnet werden. Da aufgrund des Protoninhalts und der MFV im wesentlichen nur die Squarks der ersten Generation produziert werden können, ist deren gemittelte Masse \bar{m}_1 Ausgangspunkt für die Analysen. Die vier einzelnen Massen liegen sehr dicht beieinander, so daß die gemittelte Masse in guter Näherung für $\Delta\bar{M}_{\tilde{g}\tilde{q}}$ verwendet werden kann.

In Tab. 2.4 läßt sich sehr gut beobachten, daß für die meisten Szenarien die Summen der Einzelzerfallsbreiten in der Größenordnung von $\Delta\bar{M}_{\tilde{g}\tilde{q}}$ liegen oder leicht darüber. Lediglich die Szenarios (j)-(q), in welchen die Zerfallsbreite des Gluinos zwar klein, die der Squarks jedoch größer als 50 GeV ist, befinden sich in Klasse C weit weg vom Übergang zu Klasse B. Einzelzerfallsbreiten rechtshändiger Squarks sind gegenüber denen der linkshändigen unterdrückt – siehe Kapitel 2 –, so daß der differentielle Wirkungsquerschnitt durch die Summe von vier recht eng beieinander liegenden Schwellen mit unterschiedlichen Beiträgen gegeben ist.

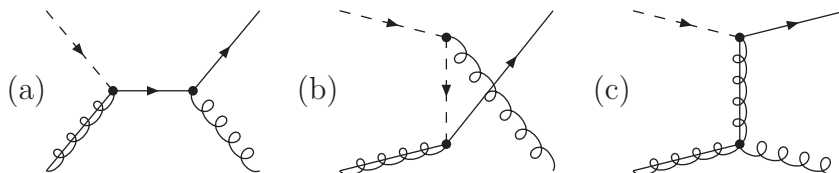


Abbildung 6.1: Zum Zerfall des Gluino-Squark-Systems beitragende Feynman-Diagramme.

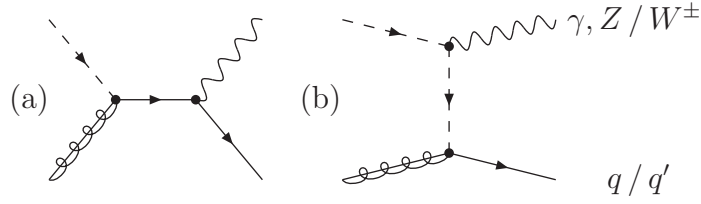


Abbildung 6.2: Zu den elektroschwachen Zerfällen des Systems aus einem Gluino und einem Squark beitragende Feynman-Diagramme.

6.2 Schwellenverhalten

Der differentielle Wirkungsquerschnitt für die Produktion des Gluino-Squark-Paares ist durch die gleichen Formeln wie im Kapitel zuvor gegeben. Im Gegensatz zu den Gluinos, wo die beiden Oktetts δ_s und δ_a vorkommen, die unterschiedlich produziert werden, kann man die $\tilde{g}\tilde{q}$ -Konfigurationen durch die Angabe der Farbdarstellung vollständig charakterisieren. Man ersetzt also in Gl. (5.1) T durch R , verwendet die Luminositätsfunktion aus Gl. (5.2) und kann den partonischen Anteil des Wirkungsquerschnitts schreiben als

$$M \frac{d\hat{\sigma}_{ij \rightarrow R}}{dM}(s, M^2, \mu_r^2, \mu_f^2) = \mathcal{F}_{ij \rightarrow R}(s, M^2, \mu_r^2, \mu_f^2) \frac{4}{m_{\text{red}}^2} \text{Im} \left\{ G^{[R]}(M + i(\Gamma_{\tilde{g}} + \Gamma_{\tilde{q}_i})/2) \right\}, \quad (6.8)$$

mit der hadronischen Schwerpunktsenergie sowie der Faktorisierungs- und Renormierungsskala wie gehabt. In führender Ordnung tragen nur die durch Gluonen und Quarks bzw. Antiquarks induzierten Prozesse bei. Hierdurch erhält man für die vier betrachteten Squark-Gluino-Systeme die beiden Endzustände $\tilde{g}\tilde{q}$ und $\tilde{g}\tilde{q}^*$. Die harten Anteile des Wirkungsquerschnitts können in Born'scher Näherung geschrieben werden als

$$\mathcal{F}_{ij \rightarrow R}^{(0)} = \mathcal{N}_{ij}^{[R]} \frac{\pi^2 \alpha_s^2(\mu_r)}{12s} \delta(1-z), \quad (6.9)$$

mit $z = M^2/s$ und den von Null verschiedenen Normierungsfaktoren

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{g\tilde{q}}^{[3]} &= \mathcal{N}_{g\tilde{q}}^{[\bar{3}]} = \frac{(m_{\tilde{g}} + 9\overline{m}_{\tilde{1}})^2}{3m_{\tilde{g}}(m_{\tilde{g}} + \overline{m}_{\tilde{1}})}, \\ \mathcal{N}_{g\tilde{q}}^{[6]} &= \mathcal{N}_{g\tilde{q}}^{[\bar{6}]} = \frac{6(m_{\tilde{g}} + \overline{m}_{\tilde{1}})}{m_{\tilde{g}}}, \\ \mathcal{N}_{g\tilde{q}}^{[15]} &= \mathcal{N}_{g\tilde{q}}^{[\bar{15}]} = \frac{15(m_{\tilde{g}} + \overline{m}_{\tilde{1}})}{m_{\tilde{g}}}, \end{aligned} \quad (6.10)$$

welche nicht von den Squarkmischungswinkeln abhängen. Die Green'sche Funktion ist

gegeben als

$$\begin{aligned}
G^{[R]}(M + i(\Gamma_{\tilde{g}} + \Gamma_{\tilde{q}_i})/2) &\equiv G^{[R]}(\mathbf{0}, M - (m_{\tilde{g}} + m_{\tilde{q}_i}) + i(\Gamma_{\tilde{g}} + \Gamma_{\tilde{q}_i})/2) \\
&= i \frac{v m_{\text{red}}^2}{\pi} + \frac{C^{[R]} \alpha_s(\mu_G^{[R]}) m_{\text{red}}^2}{\pi} \left[g_{\text{LO}} + \frac{\alpha_s(\mu_G^{[R]})}{4\pi} g_{\text{NLO}} + \dots \right],
\end{aligned} \tag{6.11}$$

mit den Koeffizienten g_{LO} und g_{NLO} aus Gl. (5.15) sowie

$$\begin{aligned}
\kappa &\equiv i \frac{C^{[R]} \alpha_s(\mu_G^{[R]})}{2v}, \\
v &\equiv \sqrt{\frac{M - (m_{\tilde{g}} + m_{\tilde{q}_i}) + \frac{i}{2}(\Gamma_{\tilde{g}} + \Gamma_{\tilde{q}_i})}{2m_{\text{red}}}}, \\
L &\equiv \ln \frac{i\mu_G^{[R]}}{4m_{\text{red}}v}.
\end{aligned} \tag{6.12}$$

Sie hängt von der Summe der Einzelzerfallsbreiten der beiden Konstituenten ab, wodurch die vier betrachteten Wirkungsquerschnitte unterschiedliche Formen annehmen.

Während für die Einzelzerfallsbreiten der Squarks sowie für die Gesamtmasse ($m_{\tilde{g}} + m_{\tilde{q}_i}$), welche über v in die Green'sche Funktion eingeht und die Position der Schwelle bestimmt, die Informationen über die unterschiedlichen Squarks erhalten bleiben, wird überall sonst die gemittelte Squarkmasse $\bar{m}_{\tilde{1}}$ benutzt. Dies dient der Vereinfachung der Rechnung, wobei die Abweichung aufgrund der sehr eng beieinander liegenden Massen relativ gering ist.

Die Wahl der Skala orientiert sich am vorigen Kapitel. Für die Green'sche Funktion verwendet man Gl. (6.5) mit der reduzierten Masse bezüglich $\bar{m}_{\tilde{1}}$ und $m_{\tilde{g}}$. Die Skala der harten Anteile ist erneut gegeben durch die Gesamtmasse des Systems

$$\mu_H \equiv m_{\tilde{g}} + \bar{m}_{\tilde{1}}. \tag{6.13}$$

Das Laufen und Entkoppeln wird für μ_G und μ_H durchgeführt wie für die Schwellenproduktion der Gluinos. Dadurch kann die numerische Analyse der Schwellenproduktion vorgenommen werden, wobei hier ausschließlich Szenario (y) mit den Summen der Einzelzerfallsbreiten wie in Tab. 2.4 untersucht wird.

Die Imaginärteile der Green'schen Funktionen der up- (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) und down-artigen (\tilde{d}_1, \tilde{d}_2) Squarks der ersten Generation sind in Abb. 6.3 abgebildet, wobei für alle vier Systeme jeweils die LO- und die NLO-Werte der drei Farbkonfigurationen dargestellt sind. Die Massen der linkshändigen Squarks (siehe Abbildungen links) sind größer als die der rechtshändigen (siehe Abbildungen rechts) und so auch ihre Zerfallsbreiten. Somit liegen einerseits die Schwellen um ca. 20 GeV auseinander, und andererseits sind die Anregungen des Grundzustands des am stärksten gebundenen Triplets nur für \tilde{u}_2 und \tilde{d}_2 deutlich

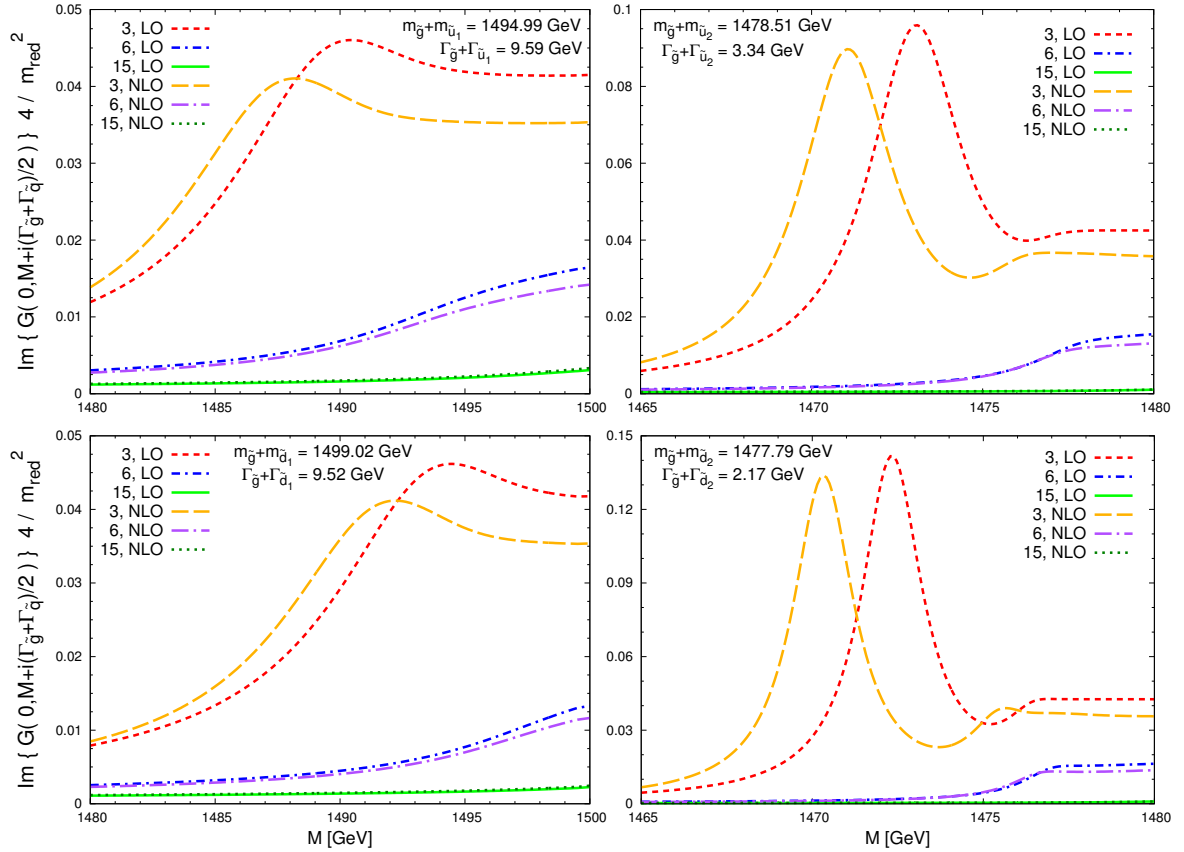


Abbildung 6.3: Imaginärteil der Green'schen Funktion für Szenario (y) für die up-artigen (oben) und die down-artigen Squarks (unten). Auf der linken Seite sind die linkshändigen Squarks zu finden (unterer Index 1) und auf der rechten Seite die rechtshändigen (unterer Index 2). Für die drei Farbkonfigurationen ist jeweils die LO- und die NLO-Kurve dargestellt, wobei beide für die 15-Konfiguration fast übereinander liegen.

sichtbar. Für das Sextett sind durchgehend keine Anregungen zu erkennen, und die 15-Darstellung verhält sich sehr ähnlich wie die repulsive Konfiguration des $\tilde{g}\tilde{g}$ -Systems: Unterhalb der Schwelle ist der Imaginärteil der Green'schen Funktion unterdrückt und auch keine Abweichung zwischen den beiden Ordnungen erkennbar.

6.3 Hadronische Produktion

Das Ergebnis für den differentiellen Wirkungsquerschnitt in Born'scher Näherung ist in Abb. 6.4 zu finden. Unter Benutzung der Green'schen Funktion in LO-Approximation sind in den oberen vier Abbildungen gemäß der Anordnung von Abb. 6.3 die Einzelergebnisse dargestellt, welche jeweils die Prozesse $gq \rightarrow \tilde{g}\tilde{q}_i$ und $g\bar{q} \rightarrow \tilde{g}\tilde{q}_i^*$ enthalten. Neben den drei Farbkanälen und deren Summe ist hier auch die FO-Näherung mit verschwindenden Zerfallsbreiten abgebildet; sie ergibt sich durch die Ersetzung

$$\text{Im } G^{[R]}(M + i(\Gamma_{\tilde{g}} + \Gamma_{\tilde{q}_i})/2) \xrightarrow{\Gamma_X \rightarrow 0} \frac{m_{\text{red}}^2}{\pi} v \left(1 + C^{[R]} \frac{\alpha_s \pi}{2v} \right). \quad (6.14)$$

Die geringere Zerfallsbreite der rechtshändigen Squarks läßt sich sehr gut durch die beiden zusammenfallenden Anregungen des Grundzustands des Triplets beobachten. Insgesamt sind die Beiträge der up-artigen Squarks ungefähr doppelt so groß wie die der down-artigen, was erneut auf die Kombination aus der Struktur des Protons und der MFV zurückzuführen ist. Betrachtet man die Differenz zwischen der roten, durchgezogenen und der schwarzen, gestrichelten Kurve in der unteren Abbildung, so erahnt man, daß ein nicht unerheblicher Anteil zum totalen Wirkungsquerschnitt der offenen Gluino-Squark-Produktion hinzukommt – siehe Diskussion in Abschnitt 5.3.

Die vollständige Berechnung der NLO-Korrekturen zum harten Anteil des Wirkungsquerschnitts ist deutlich umfangreicher als für die Gluinos. Neben den virtuellen Korrekturen für die einzelnen Farbkonfigurationen, welche ca. 50 Ein-Schleifen-Diagramme multipliziert mit den drei Diagrammen der führenden Ordnung enthalten, müssen eine Reihe von reellen Korrekturen betrachtet werden. Konzentriert man sich bspw. auf die Produktion des $\tilde{g}\tilde{u}_1$ -Systems – unter Vernachlässigung des Antisquarks –, so müssen die Subprozesse $gg \rightarrow R\bar{u}$, $ug \rightarrow Rg$, $uu \rightarrow Ru$, $u\bar{u} \rightarrow R\bar{u}$, $uq \rightarrow Rq$, $u\bar{q} \rightarrow R\bar{q}$ und $q\bar{q} \rightarrow R\bar{q}$ mit $q \neq u$ berechnet werden.

Auf diese sehr umfangreiche Analyse wird hier zugunsten der Approximation von [96,97] verzichtet. Der Wirkungsquerschnitt wird in faktorisierte Form geschrieben und lautet

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{ij \rightarrow R} &= \mathcal{N}_{ij}^{[R]} \frac{\pi^2 \alpha_s^2(\mu_r)}{12s} \left[1 + \frac{\alpha_s(\mu_r) \beta_0^{\text{SQCD}}}{\pi} \ln \left(\frac{\mu_r^2}{(m_{\tilde{g}} + \bar{m}_1)^2} \right) \right] \\ &\times \left(\delta(1-z) + \frac{\alpha_s(\mu_r)}{\pi} \mathcal{R}^{[R]}(z) \right), \end{aligned} \quad (6.15)$$

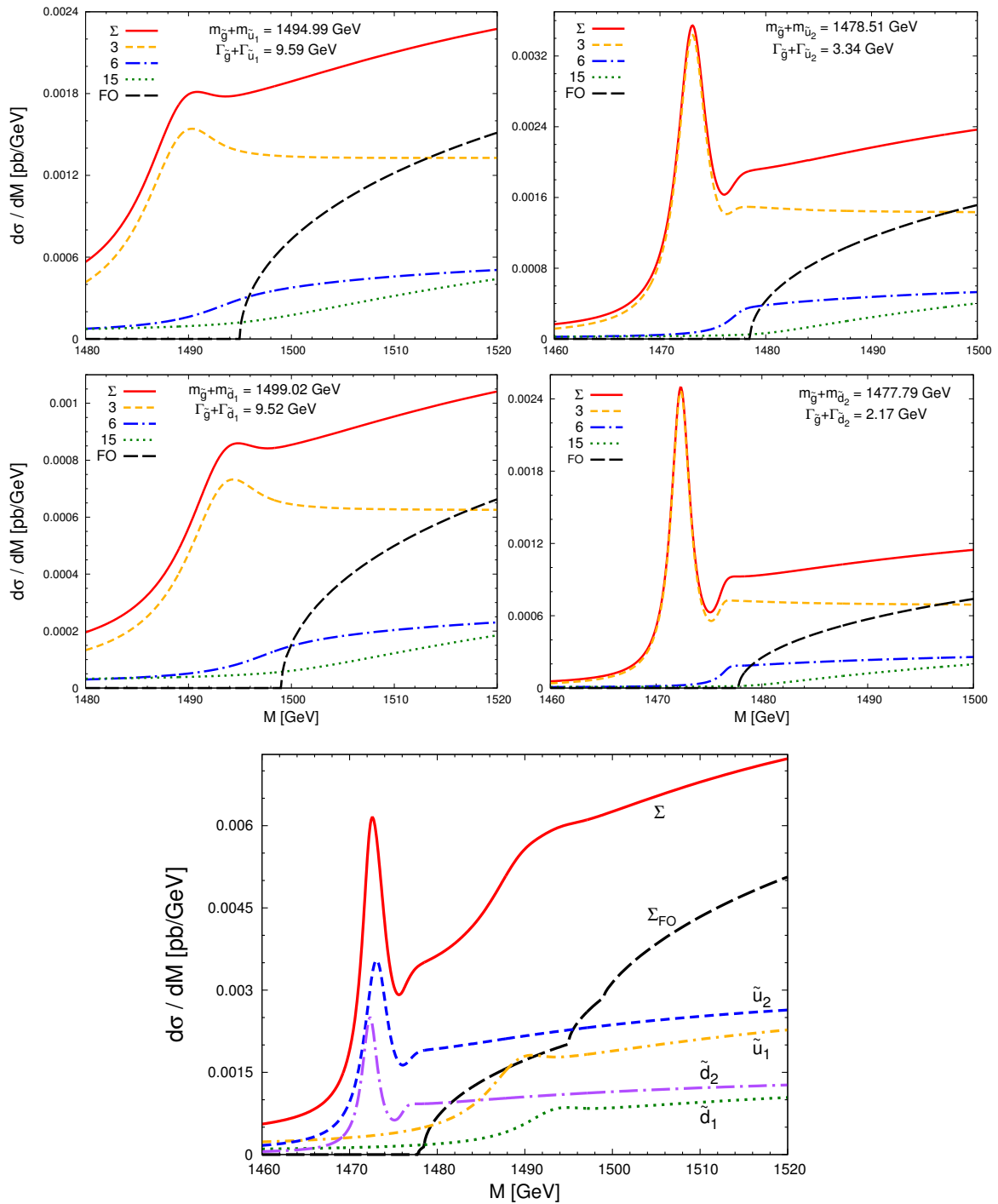


Abbildung 6.4: Vorhersage für die Distribution der invarianten Masse für Szenario (y) in führender Ordnung. In den oberen vier Abbildungen sind nach der Anordnung von Abb. 6.3 die Einzelergebnisse abgebildet und unten ihre Summe. Die schwarze Kurve entspricht jeweils der FO-Approximation.

mit den Normierungsfaktoren aus Gl. (6.10) und

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{[R]}(z) = & (C_A + C_F) \left\{ 2 \left[\frac{\ln(1-z)}{1-z} \right]_+ - \ln \left(\frac{\mu_f^2}{(m_{\tilde{g}} + \overline{m}_{\tilde{t}})^2} \right) \left[\frac{1}{1-z} \right]_+ \right\} \\ & - C_R \left[\frac{1}{1-z} \right]_+ - \delta(1-z) \frac{\beta_0^{\text{SQCD}} + 3C_F}{2} \ln \left(\frac{\mu_f^2}{(m_{\tilde{g}} + \overline{m}_{\tilde{t}})^2} \right), \end{aligned} \quad (6.16)$$

mit den Invarianten C_R aus Tab. 6.1. Die Terme in der ersten Zeile von Gl. (6.16) stammen von der Abstrahlung im Anfangszustand und sind proportional zur Summe der Casimir-Invarianten des Oktetts und des Triplets. Der erste Term der zweiten Zeile geht auf die Abstrahlung im Endzustand zurück, daher hängt er von der Farbdarstellung der Konstituenten ab. Den letzten Term erhält man durch die Renormierung der PDF's. Die Abschätzung der virtuellen Korrekturen durch die farbsummierten Ergebnisse der offenen Produktion – wie in [96] für die Gluinos – wird hier weggelassen.

Das numerische Ergebnis der NLO-Abschätzung ist in Abb. 6.5 zu finden. Für zwei Bereiche der invarianten Masse M sind erneut die Beiträge der vier Einzelsysteme, ihre Summe sowie die Summe der Kurven des FO-Ansatzes abgebildet. Während sich die Resonanz des Triplets um ca. 2 GeV nach links verschiebt – siehe auch Abb. 6.6 –, erhält man insgesamt positive Korrekturen durch die NLO-Abschätzung von ca. 30%. Bei ca. 1650 GeV fällt die Kurve des FO-Ansatzes mit dem Gesamtergebnis bezüglich der Green'schen Funktion zusammen, hier ist auch kaum noch ein Unterschied zwischen den Wirkungsquerschnitten der links- und rechtshändigen Squarks zu erkennen. Die Beiträge mit den up-artigen Squarks dominieren durchgehend.

Die Abhängigkeit der Ergebnisse von der Wahl der Skala ist in Abb. 6.6 veranschaulicht. Die LO- und NLO-Kurven wurden mit den Faktorisierungs- und Renormierungsskalen $\mu_f = \mu_r = \mu_H/2, \mu_H, 2\mu_H$ mit μ_H aus Gl. (6.13) und der festgehaltenen Skala $\mu_G^{[R]}$ erstellt. Neben der Verschiebung der Resonanz unterhalb der Schwelle, welche von der Korrektur der Green'schen Funktion kommt, ist eine deutliche Reduzierung der Skalenabhängigkeit zu beobachten. Oberhalb der Schwelle sinkt die Variation bezüglich der betrachteten Skalen von $\pm 26\%$ auf $\pm 8\%$, wobei – ähnlich wie für die Produktion der zwei Gluinos – die dickere NLO-Kurve für den Zentralwert der Skala oberhalb von ca. 1600 GeV das LO-Band verläßt.

Mit den angesprochenen positiven Korrekturen von ca. 30% erzielt man einen deutlich größeren Wert als für die Gluinos, wo es etwa 15% sind. Dies läßt sich anhand des $\tilde{g}\tilde{g}$ -Systems erklären (siehe Diskussion am Ende von Kapitel 5). Dort überschätzen die Resultate der Approximation diejenigen der vollständigen Rechnung deutlich.

Vergleicht man nun wieder den Unterschied zwischen der FO-Ansatz und der Methode der Green'schen Funktion mit dem totalen Wirkungsquerschnitt, läßt sich ein Unterschied zur Paarproduktion der Gluinos feststellen. Man integriert dazu analog zu Gl. (5.29) die Differenz zwischen der roten und der schwarzen Kurve von Abb. 6.5, was einen Wert von $\Delta\sigma = 0.187 \text{ pb}$ liefert. Des weiteren wird dem Programm `Prospino2` der totale Wirkungs-

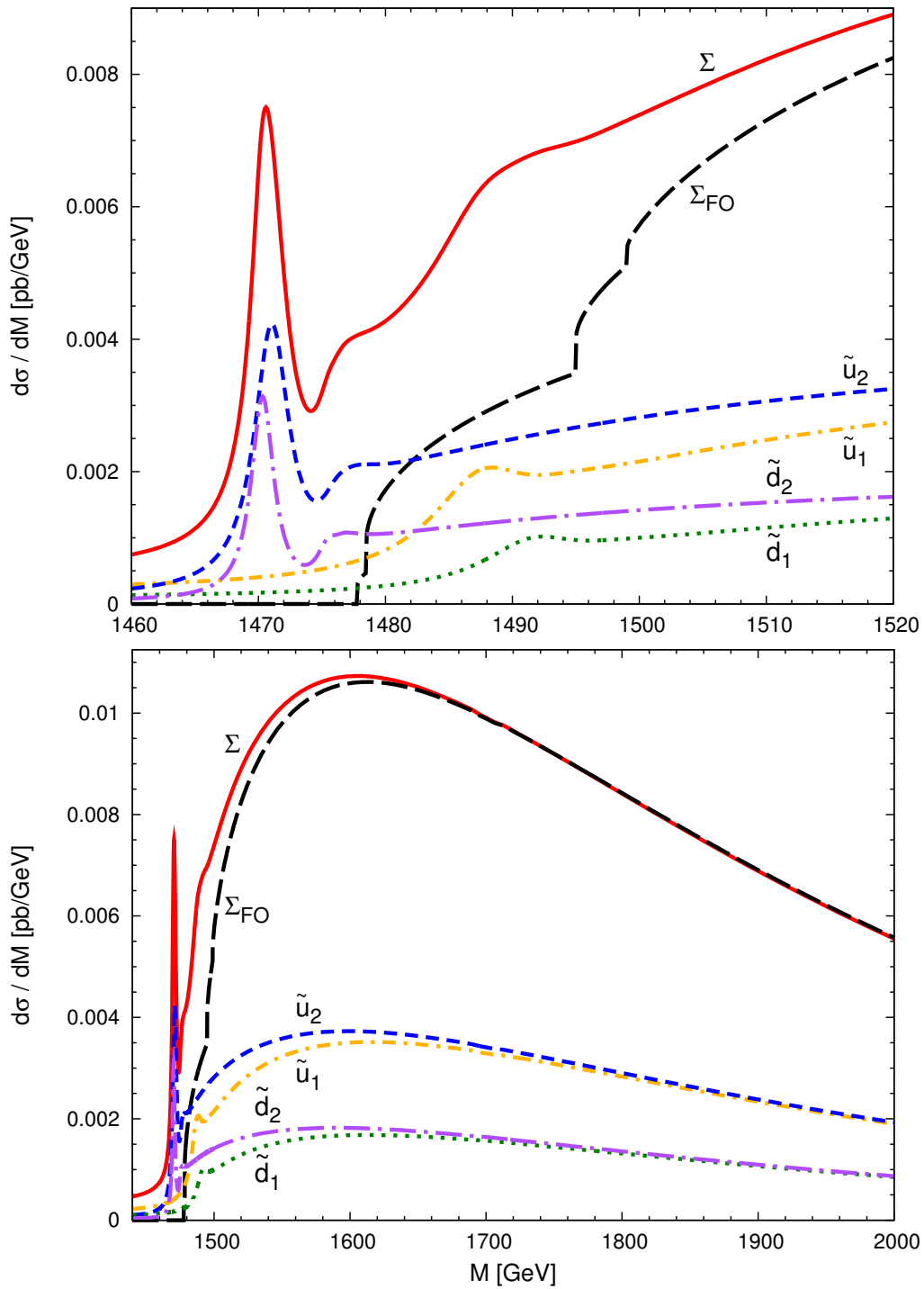


Abbildung 6.5: Vorhersage für den differentiellen Wirkungsquerschnitt als Funktion der invarianten Masse für Szenario (y). Den Kurven liegt die NLO-Approximation aus den Gl. (6.15) und (6.16) zugrunde.

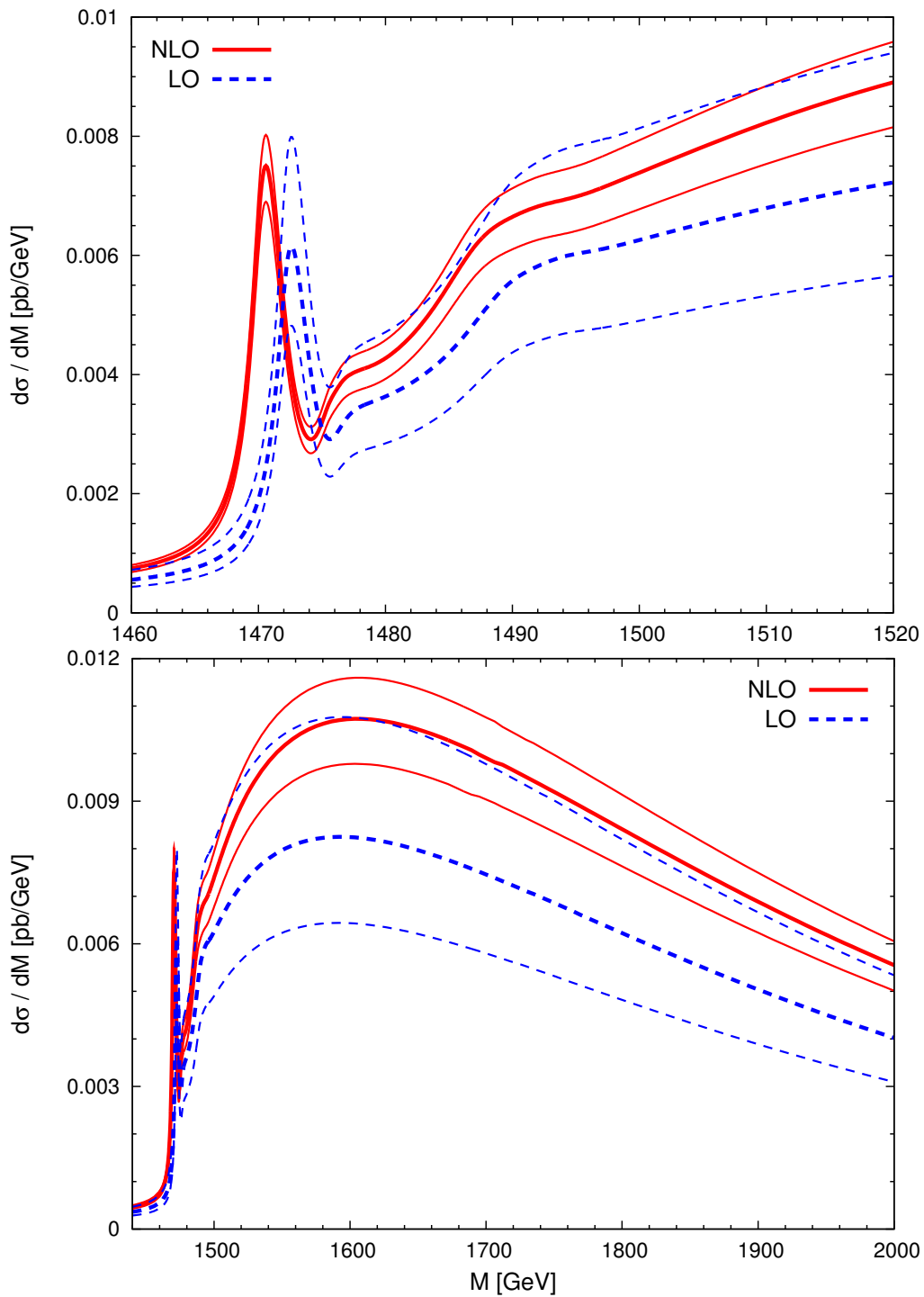


Abbildung 6.6: Abhängigkeit des differentiellen Wirkungsquerschnitts von der Wahl der Faktorisierungs- und Renormierungsskala für Szenario (y). Die Skala der Green'schen Funktion wird für beide abgebildeten Bereiche der invarianten Masse festgehalten.

querschnitt auf NLO entnommen. Man erhält hierfür $\sigma_{\text{tot}}^{(\text{NLO})} = 7.29 \text{ pb}$, wobei darin nicht nur die Beiträge von Squarks der ersten Generation enthalten sind. Die Generationen zwei und drei fallen jedoch nicht ins Gewicht. Das Verhältnis ist $\Delta\sigma/\sigma_{\text{tot}}^{(\text{NLO})} = 2.57\%$ und damit deutlich geringer als für die Paarproduktion der Gluinos. Dies liegt an der Farbwechselwirkung, welche für die Kombination des Triplets und des Oktetts schwächer ist als für das Produkt zweier Oktetts. Hierdurch sind die Bindungseffekte der Gluino-Squark-Produktion unterdrückt.

Abschließend gelten jedoch die gleichen Aussagen wie für die Gluinos. Kann trotz der komplizierten Signaturen der supersymmetrischen Zerfälle die Verteilung der invarianten Masse rekonstruiert werden, hat man eine sehr gute Methode zur Bestimmung der Massen der involvierten Teilchen. Entweder kann man über die Beobachtung der Resonanzen, falls diese existieren, oder über die steile Flanke des Wirkungsquerschnitts in der Nähe der Schwelle Abschätzungen für die Gluino- und Squarkmasse gewinnen. Ist die Distribution jedoch nicht rekonstruierbar, so erhält man einen kleinen, jedoch nicht unbedeutenden Anteil am totalen Wirkungsquerschnitt, welcher der Berechnung der offenen Produktion entgeht.

Kapitel 7

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurden die Produktionseigenschaften von supersymmetrischen Teilchen nahe der Schwelle untersucht. Insbesondere für die Gluinos, die Superpartner der Austauscheteilchen der starken Wechselwirkung, ergeben sich abhängig von den Parametern des MSSM eine Reihe unterschiedlicher Szenarien. Entweder ist die Formation von Bindungszuständen zweier Gluinos möglich, oder die Wechselwirkung zwischen den beiden Teilchen hat einen großen Einfluß auf die Schwellenproduktion. Betrachtet man das System eines Gluinos und eines Squarks, des Superpartners der Quarks, so erwartet man für die hadronische Produktion ähnliche Schwelleneffekte.

Die Physik der $\tilde{g}\tilde{g}$ -Produktion an der Schwelle hängt sehr stark von dem Verhältnis der Gluino- und der Squarkmasse ab. Ist ein Szenario realisiert, in welchem alle zwölf Squarks schwerer als das Gluino sind – oder zumindest nur geringfügig kleinere Massen haben, so daß der Zweikörperzerfall $\tilde{g} \rightarrow \tilde{q}\bar{q}$ ausgeschlossen werden kann – so ist die Formation von Gluinonia möglich. Daher beginnt die Arbeit in Kapitel 2 mit der Untersuchung der Zerfallsmoden des Gluinos. Mittels des Programms SDECAY wird eine qualitative Analyse der Zerfallsbreiten $\Gamma_{\tilde{g}}$ durchgeführt. Diese liegen für schwere Squarks im MeV-Bereich, da die einzigen offenen Zerfallskanäle mindestens drei Teilchen im Endzustand beinhalten. Ist die Masse des Gluinos hingegen in etwa so groß wie die Squarkmasse, so wächst die Zerfallsbreite stark an, wodurch die Gluinos zu schnell zerfallen, um Bindungen miteinander eingehen zu können.

Ist durch die Wahl der Parameter näherungsweise ein stabiles Gluino gesichert, so führt die attraktive Farbwechselwirkung zwischen den Fermionen zur Formation eines stabilen Verbunds. Unter den Farbkonfigurationen, in welche das Tensorprodukt zweier Farboktetts – wie in Kapitel 4 gezeigt – zerlegt werden kann, gibt es neben einer repulsiven Darstellung und einer mit verschwindender Wechselwirkung noch drei attraktive Konfigurationen. Die Farbwechselwirkung des Farbsingulets ist doppelt so groß wie die der beiden attraktiven Farboktetts, so daß diese farbneutrale Konfiguration ausschließlich für die Untersuchung des gebundenen Systems verwendet wird.

Studiert wurde folglich ein Bindungszustand zweier Gluinos in der am stärksten gebun-

denen Farbkonfiguration, dem Singulett. Er hat einen Gesamtdrehimpuls gleich Null, da die Produktion höher angeregter Zustände deutlich unterdrückt ist. Die Bindungs- bzw. Anregungsenergien der Gluinos liegen im Bereich einiger zehn GeV, wobei neben dem Polmassenschema, in welchem die Bindungsenergie die gleiche schlechte Konvergenz aufweist wie im Fall der Top-Quarks, zusätzlich das PS-Schema hinzugenommen wurde. Darin ist das Konvergenzverhalten der Energien deutlich verbessert. Ähnlich wie die Bindungsenergie läßt sich auch die Wellenfunktion am Ursprung als eine Störungsreihe bezüglich der starken Kopplung darstellen. Deren Werte konvergieren deutlich besser, sofern man die Betrachtung der nicht-Coulomb'schen Terme im Wechselwirkungspotential außer acht läßt. Die Wellenfunktion am Ursprung geht direkt in die Formeln für den Zerfall bzw. für die Produktion des gebundenen Systems ein, wie es in Kapitel 3 für einen recht allgemeinen Bindungszustand gezeigt wird.

Aufgrund der kleinen Werte für $\Gamma_{\tilde{g}}$ ist der Zerfall des gebundenen Systems durch die Anihilation (Γ_{gg}) dominiert. Da die R -Parität zweier supersymmetrischer Teilchen positiv ist, werden die Endzustände der Zerfallsmoden von Teilchen des SM dominiert. Das pseudoskalare Singulett erhält den größten Beitrag durch den gg -Kanal, was gleichzeitig der wichtigste partonische Subprozess für die Produktion ist. Während das Wechselwirkungspotential der Gluinos vollständig bis zur Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$ und für den Coulomb'schen Anteil sogar für eine weitere Ordnung bekannt ist, wurde die Berechnung der harten Anteile für die Produktion und den Zerfall bis zur NLO-Genauigkeit durchgeführt. Hierfür müssen Ein-Schleifen-Korrekturen berechnet werden und es bedarf der Hinzunahme von Prozessen mit reeller Abstrahlung. Der Gesamteffekt der Korrekturen ist mit +40% beträchtlich. Die Abhängigkeit der Ergebnisse von der Wahl der Renormierungsskala ist gegenüber dem LO-Resultat deutlich verringert.

Durch große totale Produktionsquerschnitte erwartet man am LHC mit einer angenommenen integrierten Luminosität von $\int dt \mathcal{L} = 100 \text{ fb}^{-1}$ für Gluinomassen bis zu einem TeV eine Vielzahl von Ereignissen. Die Frage, ob man in der Lage ist, diese vom Untergrund separieren zu können, kann im Rahmen dieser Arbeit nicht vollständig beantwortet werden. Das Ergebnis für das Verhältnis vom Signal zum Untergrund ist für eine recht einfache Analyse in etwa 0.5%. Bedenkt man jedoch die hohen Produktionsraten, welche insbesondere durch den sLHC, eine zukünftige Version des LHC mit verbesserter Luminosität, erzielt werden könnten, so ist die Entdeckung der Gluinoa durchaus realisierbar.

Wird der Zerfall des $\tilde{g}\tilde{g}$ -Systems nicht durch Anihilation sondern durch den Zerfall der Konstituenten ($2\Gamma_{\tilde{g}}$) bestimmt, so ist die Formation gebundener Zustände nicht realisierbar. Durch den Abstand der Energien des Grundzustands des Gluinoniums von seiner ersten Anregung (ΔM) wird eine weitere charakteristische Skala in Betracht gezogen, mit welcher die Summe der Einzelzerfallsbreiten der beiden Gluinos verglichen werden muß. Gilt $\Gamma_{gg} < 2\Gamma_{\tilde{g}} < \Delta M$, so zerfallen die Gluinos zwar zu schnell, um einen festen Verbund zu bilden, jedoch sind die Bindungseffekte zwischen den beiden Teilchen bei der Produktion sichtbar. So konzentriert sich die Analyse der Schwellenproduktion auf Gluinozerfallsbreiten, die kleiner als der Abstand ΔM sind oder zumindest nicht wesentlich größer.

Den Schwerpunkt von Kapitel 5 nimmt die Analyse des differentiellen Wirkungsquerschnitts bezüglich der invarianten Masse der beiden Gluinos ein. Für große Zerfallsbreiten tritt die Green'sche Funktion an die Stelle der Schrödinger'schen Wellenfunktion. Unterhalb der Schwelle ist der Grundzustand des am stärksten gebundenen Singulett zu sehen, sowie deutlich isoliert davon dessen erste Anregung. Zur Produktion tragen jedoch auch die anderen Farbkonfigurationen bei, die ebenfalls attraktiven Darstellungen der Oktetts besitzen auch Anregungen. Die Summe der attraktiven Konfigurationen bestimmt unterhalb der Schwelle die Form der beobachtbaren Distribution der invarianten Masse, welche für die Bestimmung von $m_{\tilde{g}}$ verwendet werden kann. Oberhalb von $2m_{\tilde{g}}$ fallen auch das Dekuplett und die repulsive Konfiguration ins Gewicht.

Die NLO-Korrekturen für die Green'sche Funktion können von den Berechnungen für das $t\bar{t}$ -Szenario übernommen werden, sofern man den Farbfaktor des Wechselwirkungspotentials anpaßt. Die Berechnung der NLO-Korrekturen des harten, kurzreichweitigen Anteils des Produktionsquerschnitts nimmt einen zentralen Punkt der Arbeit ein. Sie muß für jede Farbkonfiguration separat durchgeführt werden und umfaßt sowohl virtuelle als auch reelle Korrekturen. Neben einer Verstärkung des Wirkungsquerschnitts um etwa 15% gewinnt man eine deutliche Reduktion der Abhängigkeit der Ergebnisse von der Wahl der Renormierungsskala.

Ist die Verteilung bezüglich der invarianten Masse nicht rekonstruierbar, so bleibt eine der wesentlichen Aussagen der Untersuchung der Schwellenproduktion die Vergrößerung des totalen Wirkungsquerschnitts der $\tilde{g}\tilde{g}$ -Produktion. Den Berechnungen der offenen Produktion entgehen allerdings die Bindungseffekte, welche an der Schwelle dominant sind. Dadurch müssen den Ergebnissen der bis auf NLO bekannten totalen Wirkungsquerschnitte für die betrachteten Szenarios und Schwerpunktenenergien zwischen 7% und 9% hinzugefügt werden.

Der Analyse der Schwellenproduktion zweier Gluinos folgt in Kapitel 6 die gleiche Untersuchung eines anderen Systems, bestehend aus einem Squark und einem Gluino. Da die Zerfallsbreiten der Squarks unabhängig von den Parametern des MSSM immer recht groß sind, gibt es innerhalb dieses Systems keine gebundenen Zustände. Die Beobachtung von separierten Resonanzen im differentiellen Wirkungsquerschnitt wird jedoch in einigen der betrachteten SPS-Szenarios realisiert.

Die Zerlegung des Tensorprodukts eines Oktetts und eines Triplett führt auf die Summe einer repulsiven Darstellung und zweier attraktiver Konfigurationen, deren am stärksten gebundene das Farbtuplett ist. In diesem Zusammenhang wurden auch die Projektoren für die irreduziblen Darstellungen berechnet, die Berechnung ist in Anhang E zu finden. Produziert wird das $\tilde{g}\tilde{q}$ -System auf partonischer Ebene durch ein Gluon und ein Quark, wobei letzteres aufgrund der Struktur des Protons näherungsweise aus der ersten Generation stammt. Wegen der angenommenen Erhaltung des Flavours sind die Squarks somit auch Teilchen der ersten Generation. Die Schwellen der Subprozesse unter der Beteiligung der Squarks \tilde{u}_1 , \tilde{u}_2 , \tilde{d}_1 und \tilde{d}_2 liegen sehr dicht beieinander, so daß sich der Wirkungsquerschnitt der $\tilde{g}\tilde{q}$ -Schwellenproduktion aus deren Summe zusammensetzt.

Da das Potential der Wechselwirkung nur auf LO bekannt ist, nimmt man bis auf den globalen Vorfaktor für den NLO-Term den gleichen Koeffizienten wie für die Gluinos und die Quarks. Die vollständige Berechnung der harten Korrekturterme wird durch eine Abschätzung der wesentlichen Beiträge durch die Abstrahlung im Anfangs- und Endzustand ersetzt. Der Vergleich der Abschätzung und der vollständigen Rechnung ist für das $\tilde{g}\tilde{g}$ -System am Ende von Kapitel 5 aufgeführt. Für den differentiellen Wirkungsquerschnitt der Squark-Gluino-Produktion erhält man neben einer deutlichen Reduzierung der Skalenabhängigkeit positive Korrekturen von etwa 30%.

Der Vergleich des Effekts der Wechselwirkung zwischen den Teilchen mit dem totalen Wirkungsquerschnitt fällt hier deutlich geringer aus als für die Paarproduktion der Gluinos. Die Farbwechselwirkung ist gegenüber dem Fall zweier Oktetts deutlich unterdrückt, so daß es in etwa 2.5% sind, welche dem Wirkungsquerschnitt der offenen Produktion auf NLO entgehen, sofern man die Wechselwirkung der beiden Konstituenten außer acht läßt.

Insgesamt kann man festhalten, daß die Untersuchung von Bindungseffekten großes Potential besitzt. Im Falle der betrachteten supersymmetrischen Teilchen eröffnet die Analyse von gebundenen oder attraktiv wechselwirkenden Systemen die Möglichkeit der Bestimmung ihrer Massen. Bleibt diese Art der Bestimmung jedoch verwehrt, so liefert der Formalismus der Green'schen Funktion einen nicht zu vernachlässigenden Beitrag zu den totalen Wirkungsquerschnitten. Deren Messung durch Experimente am LHC ist eine der größten Herausforderungen bei der Suche nach Physik jenseits des Standard Modells.

Anhang A

Feynman-Regeln

Hier sind die in der Arbeit verwendeten Propagatoren und Vertizes des MSSM dargestellt. In abweichender Notation können diese in [105] und [106] gefunden werden. Es gilt im folgenden

- $a, b, c, d, e \in \{1, \dots, 8\}$ sind die adjungierten $SU(3)$ -Indizes ,
- $\alpha, \beta \in \{1, 2, 3\}$ sind die fundamentalen $SU(3)$ -Indizes ,
- $\mu, \nu, \rho, \sigma \in \{0, \dots, 3\}$ sind die Lorentz-Indizes ,
- $i, j \in \{u, d, c, s, t, b\}$ sind die Flavourindizes ,
- $m, n, o, p \in \{1, 2\}$ sind die Squarkindizes ,

sowie die Mischung der Wechselwirkungs- zu den Masseneigenzuständen innerhalb eines Flavours [107]

$$\begin{pmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \end{pmatrix} = U^{(q)} \begin{pmatrix} \tilde{q}_L \\ \tilde{q}_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_q) & \sin(\theta_q) \\ -\sin(\theta_q) & \cos(\theta_q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{q}_L \\ \tilde{q}_R \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

A.1 Propagatoren

Gluon-Propagator (g)

$$a, \mu \begin{array}{c} \text{oooooo} \\ \leftarrow k \end{array} b, \nu \quad \frac{-i}{k^2 + i\epsilon} g^{\mu\nu} \delta_{ab}.$$

Geist-Propagator (η)

$$a \text{-----} b \quad \leftarrow k \quad \frac{i}{k^2+i\epsilon} \delta_{ab}.$$

Quark-Propagator (q)

$$i, \alpha \text{-----} j, \beta \quad \leftarrow k \quad \frac{i}{\not{k}-m_{q_i}+i\epsilon} \delta_{ij} \delta_{\alpha\beta}.$$

Squark-Propagator (\tilde{q})

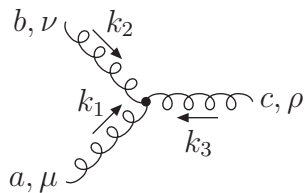
$$i, \alpha, m \text{-----} j, \beta, n \quad \leftarrow k \quad \frac{i}{k^2-m_{\tilde{q}_{im}}^2+i\epsilon} \delta_{ij} \delta_{\alpha\beta} \delta_{mn}.$$

Gluino-Propagator (\tilde{g})

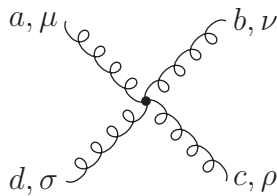
$$a \text{-----} b \quad \leftarrow k \quad \frac{i}{\not{k}-m_{\tilde{g}}+i\epsilon} \delta_{ab}.$$

A.2 Vertizes

ggg - und $gggg$ -Vertex

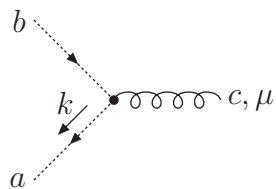


$$-gf^{abc} [g^{\mu\nu}(k_1 - k_2)^\rho + g^{\nu\rho}(k_2 - k_3)^\mu + g^{\rho\mu}(k_3 - k_1)^\nu],$$



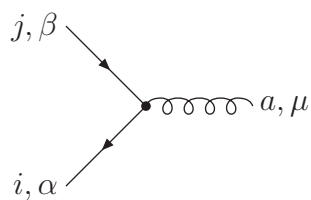
$$ig^2 [f^{abe} f^{cde} (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) + f^{ace} f^{bde} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) + f^{ade} f^{bce} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma})].$$

$\eta\eta g$ -Vertex

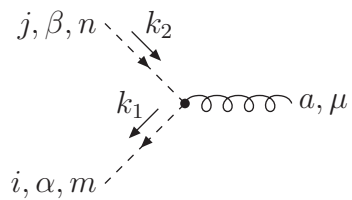


$$gf^{abc} k^\mu.$$

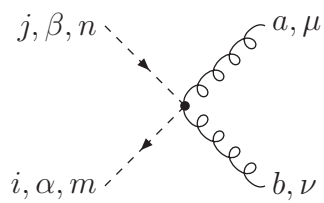
qqg -Vertex



$$-igT_{\alpha\beta}^a \gamma^\mu \delta_{ij}.$$

$\tilde{q}\tilde{q}g$ - und $\tilde{q}\tilde{q}gg$ -Vertex

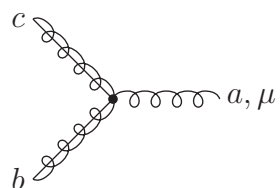
$$-igT_{\alpha\beta}^a(k_1 + k_2)^\mu \delta_{ij} \delta_{mn},$$



$$ig^2(T^a T^b + T^b T^a)_{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \delta_{ij} \delta_{mn}.$$

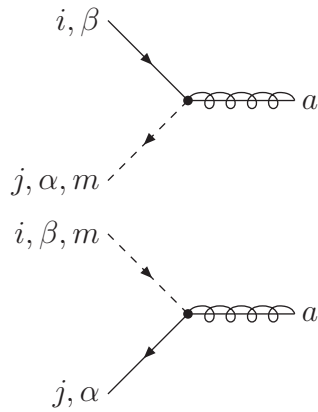
 $\tilde{g}\tilde{g}g$ -Vertex

Der Vorfaktor $1/2$ aus der Lagrangedichte taucht in der Feynman-Regel aufgrund der zweifachen Möglichkeit der Kontraktion nicht auf.



$$-gf_{abc}\gamma^\mu.$$

$\tilde{g}\tilde{q}q$ -Vertex

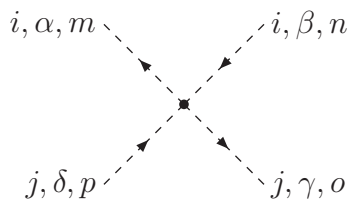


$$-\sqrt{2}igT_{\alpha\beta}^a(P_L U_{m1}^{(i)} - P_R U_{m2}^{(i)})\delta_{ij},$$

$$-\sqrt{2}igT_{\alpha\beta}^a(P_R U_{m1}^{(i)} - P_L U_{m2}^{(i)})\delta_{ij}.$$

$\tilde{q}\tilde{q}\tilde{q}$ -Vertex

Hier wird nur die starke Kopplung berücksichtigt.

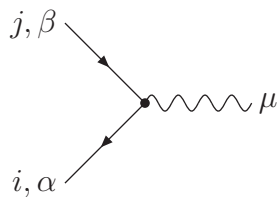


$$-ig^2 T_{\alpha\beta}^a T_{\gamma\delta}^a S_{mn}^i S_{op}^j \quad \text{für } i \neq j$$

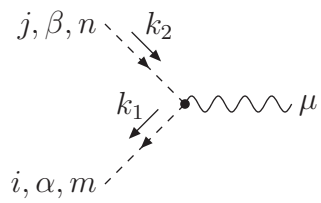
$$-ig^2 (T_{\alpha\beta}^a T_{\gamma\delta}^a S_{mn}^i S_{op}^j + T_{\alpha\delta}^a T_{\gamma\beta}^a S_{mp}^i S_{on}^j) \quad \text{für } i = j$$

mit $S_{mn}^i = U_{m1}^{(i)} U_{n1}^{(i)} - U_{m2}^{(i)} U_{n2}^{(i)}.$

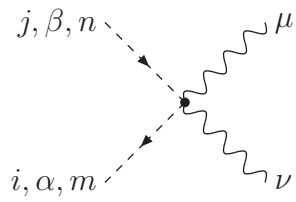
$qq\gamma$ -Vertex



$$-ieQ_i \gamma^\mu \delta_{ij}.$$

$\tilde{q}\tilde{q}\gamma$ - und $\tilde{q}\tilde{q}\gamma\gamma$ -Vertex

$$-ieQ_i(k_1 + k_2)^\mu \delta_{ij} \delta_{mn},$$



$$2ie^2 Q_i^2 g^{\mu\nu} \delta_{ij} \delta_{mn}.$$

Anhang B

Ausführliche Resultate

Hier sind alle Resultate zu finden, welche aufgrund ihrer Länge nicht im Hauptteil untergebracht werden konnten.

B.1 \tilde{g} -Zerfallsbreiten

Die vollständige Formel für die Zerfallsbreite des Gluinos in Quarks q , Antiquarks \bar{q} und in das Photino $\tilde{\gamma}$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
\Gamma(\tilde{g} \rightarrow \bar{q}q\tilde{\gamma}) &= \sum_{q,h} \frac{\alpha_s \alpha e_q^2 m_{\tilde{g}}}{16\pi\rho^4} \\
&\times \left\{ \rho^2(1-\sigma^2) [6\rho^4 - \rho^2(5\sigma^2 - 4\sigma + 5) + 2\sigma^2] + 2\sigma^3(2\rho^2 - \sigma) \ln(\sigma^2) \right. \\
&\quad - 2(\rho^2 - 1)(\rho^2 - \sigma^2) [3\rho^4 - \rho^2(\sigma - 1)^2 - \sigma^2] \ln\left(\frac{\rho^2 - \sigma^2}{\rho^2 - 1}\right) \\
&\quad + 2\rho^4\sigma(2\rho^2 - \sigma^2 - 1) \\
&\quad \times \left[\ln\left(\frac{\rho^2 - \sigma^2}{\rho^2 - 1}\right) \ln\left(\frac{\rho^2(2\rho^2 - \sigma^2 - 1)}{\rho^4 - \sigma^2}\right) + \ln(\sigma^2) \ln\left(\frac{\rho^4 - \sigma^2}{\rho^4}\right) \right. \\
&\quad \left. - \text{Li}_2\left(\frac{\sigma^2 - \rho^2}{1 + \sigma^2 - 2\rho^2}\right) + \text{Li}_2\left(\frac{1 - \rho^2}{1 + \sigma^2 - 2\rho^2}\right) - \text{Li}_2\left(\frac{1}{\rho^2}\right) \right. \\
&\quad \left. \left. + \text{Li}_2\left(\frac{\sigma^2}{\rho^2}\right) - \text{Li}_2\left(\frac{(\rho^2 - 1)\sigma^2}{\rho^4 - \sigma^2}\right) + \text{Li}_2\left(\frac{\rho^2 - \sigma^2}{\rho^4 - \sigma^2}\right) \right] \right\}, \quad (\text{B.1})
\end{aligned}$$

mit den Massenverhältnissen $0 < \sigma = m_{\tilde{\gamma}}/m_{\tilde{g}} < 1$ und $\rho = m_{\tilde{q}_h}/m_{\tilde{g}} > 1$.

Vergleicht man das vollständige Resultat Γ_1 mit der Näherung unendlich schwerer Squarks Γ_2 (erster Ausdruck in Gl.(2.8)) und der Approximation Γ_3 , in welcher zusätzlich die Photinomasse verschwindet (zweiter Ausdruck in Gl.(2.8)), so erhält man das Schaubild

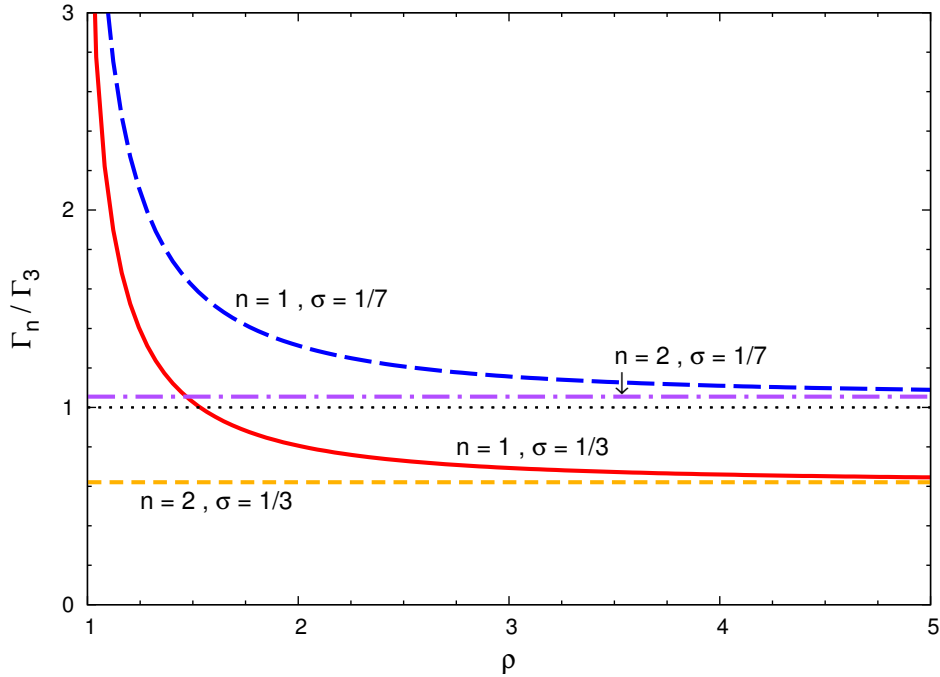


Abbildung B.1: Vergleich der Näherungen der Zerfallsbreiten mit dem vollständigen Resultat (Γ_1) des Prozesses $\tilde{g} \rightarrow \bar{q}q\tilde{\gamma}$. Γ_2 ist die Approximation mit den vereinfachten Propagatoren, und in Γ_3 wird zusätzlich die Masse des Photinos auf Null gesetzt. Wie bisher gilt $\sigma = m_{\tilde{\gamma}}/m_{\tilde{g}}$ und $\rho = m_{\tilde{q}}/m_{\tilde{g}}$.

aus Abb. B.1. Hier sind für zwei verschiedene Werte $\sigma = 1/3, 1/7$ die Verhältnisse Γ_1/Γ_3 und Γ_2/Γ_3 über ρ aufgetragen, wobei die zwölf Squarkmassen als entartet angenommen werden. Man kann zunächst beobachten, daß für den Wert $\sigma = 1/3$ die Approximation mit der verschwindenden Photinomasse keine gute Annahme ist.

Für das Massenverhältnis $m_{\tilde{\gamma}}/m_{\tilde{g}} = 1/7$, welches in den betrachteten Szenarien – mit der Annahme $\tilde{\chi}_1^{(0)} = \tilde{\gamma}$ – in etwa gültig ist, kann man erkennen, daß die beiden Approximationen grob mit dem Gesamtergebnis übereinstimmen. Für die Szenarien (j) bis (q) variiert das Verhältnis der Gluino- und der gemittelten Squarkmasse ungefähr innerhalb des Bereichs $1.5 < \rho < 3$, wodurch der Fehler der größten Abschätzung schlechtestenfalls $(\Gamma_1 - \Gamma_3)/\Gamma_1 \approx 37.5\%$ beträgt.

B.2 Annihilationszerfälle

Die Amplitude für den Zerfall des 1_s -Zustands in zwei Photonen γ ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{A}((\tilde{g}\tilde{g})_{1_s} \rightarrow \gamma\gamma) \\
 = & -iT_F \sqrt{N_C^2 - 1} \frac{e^2 g^2}{\sqrt{2\pi^2}} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} k_1^\alpha k_2^\beta \epsilon_1^\gamma \epsilon_2^\delta \sum_{q,h} e_q^2 \\
 & \times \left\{ \frac{C_0(0, -m_{\tilde{g}}^2, m_{\tilde{g}}^2, m_q^2, m_q^2, m_{\tilde{q}_h}^2) - C_0(4m_{\tilde{g}}^2, 0, 0, m_q^2, m_q^2, m_{\tilde{q}_h}^2)}{m_{\tilde{g}}^2 + m_{\tilde{q}_h}^2 - m_q^2} (m_q - 2U_{h1}^{(q)} U_{h2}^{(q)} m_{\tilde{g}}) m_q \right. \\
 & \left. + \frac{m_{\tilde{q}_h}^2 C_0(0, -m_{\tilde{g}}^2, m_{\tilde{g}}^2, m_{\tilde{q}_h}^2, m_{\tilde{q}_h}^2, m_q^2) - m_q^2 C_0(0, -m_{\tilde{g}}^2, m_{\tilde{g}}^2, m_q^2, m_q^2, m_{\tilde{q}_h}^2)}{2(m_{\tilde{q}_h}^2 - m_q^2)} \right\}, \tag{B.2}
 \end{aligned}$$

mit den *Polarisationsvektoren* ε_n der beiden Gluonen, ihren Impulsen k_n und den Ladungen e_q der Quarks sowie Squarks. Die Summe geht über die Flavours (q) und die Indizes der Squarks (h).

Die Zerfallsbreite in ein Top-Antitop-Paar ist

$$\Gamma((\tilde{g}\tilde{g})_{1_s} \rightarrow t\bar{t}) = \frac{C_F \alpha_s^2 |R(0)|^2}{2m_{\tilde{g}}^2} \sqrt{1 - \frac{m_t^2}{m_{\tilde{g}}^2}} \left(\sum_{h=1}^2 \frac{m_{\tilde{g}} (m_t - 2m_{\tilde{g}} U_{h1}^{(t)} U_{h2}^{(t)})}{m_{\tilde{g}}^2 + m_{\tilde{t}_h}^2 - m_t^2} \right)^2, \tag{B.3}$$

wobei hier nur über die beiden Stop-Indizes (h) summiert werden muß.

B.3 Splitting-Funktionen

Die von Null verschiedenen Splitting-Funktionen sind bis zur benötigten Ordnung gegeben durch

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_{gg}(z) &= 2C_A \left(\left[\frac{1}{1-z} \right]_+ + \frac{1}{z} + z(1-z) - 2 \right) + \left(\frac{11}{6} C_A - \frac{2}{3} T_F n_f \right) \delta(1-z), \\
 \mathcal{P}_{gq}(z) &= \mathcal{P}_{g\bar{q}}(z) = C_F \frac{[1 + (1-z)^2]}{z}, \\
 \mathcal{P}_{qq}(z) &= \mathcal{P}_{q\bar{q}}(z) = T_F (z^2 + (1-z)^2), \\
 \mathcal{P}_{qQ}(z) &= \mathcal{P}_{\bar{q}\bar{Q}}(z) = C_F \left(2 \left[\frac{1}{1-z} \right]_+ - z - 1 + \frac{3}{2} \delta(1-z) \right). \tag{B.4}
 \end{aligned}$$

B.4 Beiträge zu den virtuellen Korrekturen

Der fehlende Baustein für die virtuellen Korrekturen zu den harten Kernen des Wirkungsquerschnitts für den 8_a -Zustand ist (siehe Gl. (5.20))

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{q\bar{q}\rightarrow 8_a}(r) = & \frac{3a_1(r)}{4(r-1)} - \frac{(r^2-5)b_1(r)}{12(r-1)^2} + \frac{(r-3)(r+1)^2b_2(r)}{24(r-1)^2} + \frac{(4r-13)b_3(r)}{12} \\
& - \frac{2(r^2-2r+5)b_4(r)}{3(r^2-1)} - \frac{16rb_5(r)}{3(r^2-1)} + \frac{8b_6(r)}{3(r+1)} + \frac{2(r-1)b'_2(r)}{3} \\
& - \frac{(r+1)^2(r^2-2r+5)c_1(r)}{24(r-1)^2} - \frac{(r^3-5r^2+11r-15)c_2(r)}{12(r-1)^2} \\
& - \frac{3(r+1)(r^2-6r+17)c_3(r)}{8(r-1)} - \frac{3(r+1)(r^2-2r+5)c_4(r)}{4(r-1)} \\
& - \frac{(3r^2-4r-17)\ln(2)}{4(r-1)} - \frac{18r^3+14r^2+23r-101}{12(r^2-1)} \\
& + n_f \left[\frac{(r-5)a_1(r)}{6(r-1)} - \frac{rb_1(r)}{3} + \frac{(r+1)^2b_2(r)}{6(r-1)} \right. \\
& \left. + (r-1)b'_1(r) + \frac{3r^2+r+2}{18(r-1)} \right], \tag{B.5}
\end{aligned}$$

mit den skalaren Funktionen aus Gl.(D.14).

B.5 Beiträge zu den reellen Korrekturen

Die reellen Korrekturen zum Prozess $gq \rightarrow Tq$ werden komplettiert durch die Funktionen

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{gq}^{[1_s]}(z, r) = & \left[9r(r+1)^3z^4 - (r-1)(r+1)^2z^3 - 2(r+1)(19r+35)z^2 \right. \\
& \left. - 32(r+1)z - 64 \right] \frac{16z}{27[(r+1)z-2]^2[(r+1)z+2]^3} \ln(z) \\
& + \left[(r+1)^3(21r+5)z^4 + 2(r+1)^2(5r+9)z^3 + 4(r+1)(23r-29)z^2 \right. \\
& \left. + 200(r+1)z - 224 \right] \frac{2z[5z(r+1)-8]\ln\left(1+2\frac{1-z}{z(r+1)}\right)}{243[(r+1)z-2]^2[(r+1)z+2]^3} \\
& + \left[(r+1)^3(57r+41)z^4 + 4(r+1)^2(81r^2+61r-36)z^3 \right. \\
& \left. - 4(r+1)(55r+71)z^2 - 16(r+1)(81r+133)z + 256 \right] \\
& \times \frac{4(1-z)}{243(r+1)[z^2(r+1)^2-4]^2}, \tag{B.6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{gq}^{[8s]}(z, r) = & \left[9r(r+1)^3 z^4 - 4(r-1)(r+1)^2 z^3 - 4(r+1)(11r+26)z^2 \right. \\
& \left. - 40(r+1)z - 80 \right] \frac{32z \ln(z)}{27 [(r+1)z - 2]^2 [(r+1)z + 2]^3} \\
& + \left[(r+1)^4 (33r+28)z^5 - 4(r+1)^3 (37r-14)z^4 \right. \\
& \left. + 4(r+1)^2 (47r-175)z^3 + 8(r+1)(33r+163)z^2 \right. \\
& \left. - 16(86r+131)z + 1120 \right] \frac{8z \ln\left(1 + 2\frac{1-z}{z(r+1)}\right)}{243 [(r+1)z - 2]^2 [(r+1)z + 2]^3} \\
& + \left[(r+1)^3 (24r+19)z^4 + (r+1)^2 (81r^2 + 56r - 45)z^3 \right. \\
& \left. - 4(r+1)(11r+16)z^2 - 4(r+1)(81r+191)z + 80 \right] \\
& \times \frac{32(1-z)}{243(r+1) [z^2(r+1)^2 - 4]^2},
\end{aligned} \tag{B.7}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{gq}^{[8a]}(z, r) = & \left[9(r-1)^2(r+1)^4 z^6 + (r+1)^3(67r^2 - 186r + 67)z^5 \right. \\
& - (r+1)^2(13r^3 + 207r^2 - 81r - 67)z^4 \\
& - 2(r+1)^2(85r^2 + 100r - 233)z^3 - 36(r+1)(5r^2 - 6r - 3)z^2 \\
& \left. + 72(7r^2 + 18r + 3)z + 576r \right] \frac{32 \ln(z)}{27(r+1)^2 [(r+1)z - 2]^2 [(r+1)z + 2]^3} \\
& - \left[(r+1)^4(3r^3 + 35r^2 + 13r + 13)z^6 \right. \\
& - 2(r+1)^3(35r^3 - 195r^2 + 353r - 57)z^5 \\
& - 8(r+1)^2(5r^3 + 125r^2 - 189r + 91)z^4 \\
& + 16(r+1)(15r^3 + 7r^2 + 25r + 97)z^3 \\
& \left. + 16(19r^3 + 11r^2 - 227r - 91)z^2 + 32(r^2 + 82r + 17)z - 1024r \right] \\
& \times \frac{4 \ln \left(1 + 2 \frac{1-z}{z(r+1)} \right)}{27(r+1)^2 [(r+1)z - 2]^2 [(r+1)z + 2]^3} \\
& + \left[(r-1)(r+1)^3(21r^2 - 38r + 37)z^6 \right. \\
& + 4(r+1)^2(35r^3 - 324r^2 + 327r - 82)z^5 \\
& - 8(r+1)(6r^3 + 75r^2 + 136r - 93)z^4 \\
& - 16(18r^4 + 25r^3 - 104r^2 + 61r + 44)z^3 \\
& \left. - 16(36r^3 - 23r^2 - 214r - 115)z^2 + 384(3r^2 + r - 1)z + 2304r \right] \\
& \times \frac{8(1-z)}{27(r+1)^2 z [z(r-1) + 2] [z^2(r+1)^2 - 4]^2}, \tag{B.8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{gq}^{[10]}(z, r) = & \left[(r+1)(r^2 - 6r + 1)z^2 - (r-1)(r^2 + 10r + 1)z \right. \\
& \left. - 2(r^2 - 2r - 11) \right] \frac{320z^3 \ln(z)}{27 [(r+1)z - 2]^2 [(r+1)z + 2]^3} \\
& - \left[(r+1)^5 z^4 + 2(r+1)(3r^3 + 9r^2 - 23r + 3)z^3 \right. \\
& \left. + 4(r^3 - 21r^2 + 3r - 7)z^2 - 8(r^2 + 6r - 11)z - 64 \right] \\
& \times \frac{40z^2 \ln \left(1 + 2 \frac{1-z}{z(r+1)} \right)}{27 [(r+1)z - 2]^2 [(r+1)z + 2]^3} \\
& + \left[(r-1)(r+1)^3 z^4 + 2(3r-1)(r^2 - 10r + 5)z^3 + 4(3r^2 - 20r + 9)z^2 \right. \\
& \left. + 8(5r - 7)z + 64 \right] \frac{80z(1-z)}{27 [z(r-1) + 2] [z^2(r+1)^2 - 4]^2}, \tag{B.9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_{gq}^{[27s]}(z, r) &= \left[r(r+1)z^2 - (r-1)z - 6 \right] \frac{16z^3(r+1)^2 \ln(z)}{[(r+1)z-2]^2 [(r+1)z+2]^3} \\
 &+ \left[(r+1)^4 z^4 - 2(r+1)^2(3r-1)z^3 - 4(r+1)(r+5)z^2 \right. \\
 &\quad \left. + 8(r+1)z - 32 \right] \frac{2z^2(r+1) \ln\left(1 + 2\frac{1-z}{z(r+1)}\right)}{[(r+1)z-2]^2 [(r+1)z+2]^3} \\
 &+ \left[(r+1)z^2 + 2(2r+1)z + 8 \right] \frac{4z(1-z)(r+1)}{[z(r+1)+2][z^2(r+1)^2-4]}. \quad (\text{B.10})
 \end{aligned}$$

Die harten Kerne für den Prozess $q\bar{q} \rightarrow Tg$ werden vervollständigt durch

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_{q\bar{q}}^{[1s]}(z, r) &= - \left[18r^2(r^2+1)z^4 + (81r^3 - 35r^2 + 27r - 1)z^3 + 4(38r^2 - 13r + 3)z^2 \right. \\
 &\quad \left. + 4(31r - 5)z + 36 \right] \frac{8z[(9r+1)z+8] \ln\left(1 + 2\frac{1-z}{z(r+1)}\right)}{729(1-z)^2(rz+1)^3} \\
 &+ \left[18r^2(r^2-1)z^4 + (81r^3 + 37r^2 - 27r + 1)z^3 + 4(29r^2 + 14r - 3)z^2 \right. \\
 &\quad \left. + 2(35r + 11)z + 16 \right] \frac{16[(9r+1)z+8]}{729(r+1)(1-z)[(r-1)z+2](rz+1)^2}, \quad (\text{B.11})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_{q\bar{q}}^{[8s]}(z, r) &= - \left[9r^2(9r+4)(r^2+1)z^5 + (477r^4 + 18r^3 + 130r^2 + 36r - 13)z^4 \right. \\
 &\quad \left. + (1143r^3 - 44r^2 + 125r + 52)z^3 + 2(668r^2 - 53r - 1)z^2 \right. \\
 &\quad \left. + 2(391r - 14)z + 180 \right] \frac{32z \ln\left(1 + 2\frac{1-z}{z(r+1)}\right)}{729(1-z)^2(rz+1)^3} \\
 &+ \left[9r^2(r^2-1)(9r+4)z^5 + (477r^4 + 342r^3 - 104r^2 - 36r + 13)z^4 \right. \\
 &\quad \left. + (981r^3 + 640r^2 - 73r - 52)z^3 + 2(479r^2 + 253r + 14)z^2 \right. \\
 &\quad \left. + 40(11r + 3)z + 80 \right] \frac{64}{729(r+1)(1-z)[(r-1)z+2](rz+1)^2}. \quad (\text{B.12})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{q\bar{q}}^{[8_a]}(z, r) = & \left[2r^3(9r^4 + 35r^3 + 41r^2 - 19r - 2)z^6 \right. \\
& + (88r^6 + 264r^5 + 309r^4 - 146r^3 - 26r^2 - 2r + 1)z^5 \\
& + 2r(104r^4 + 213r^3 + 271r^2 - 65r - 3)z^4 \\
& + (349r^4 + 386r^3 + 492r^2 - 58r - 1)z^3 + 4(99r^3 + 52r^2 + 63r - 2)z^2 \\
& \left. + 2(125r^2 + 26r + 29)z + 64r \right] \frac{\ln\left(1 + 2\frac{1-z}{z(r+1)}\right)}{12(r-1)^2(1-z)^2(rz+1)^3} \\
- & \left[2r^2(r-1)(9r^3 + 35r^2 + 35r - 3)z^5 \right. \\
& + (88r^5 + 200r^4 + 129r^3 - 191r^2 + 15r - 1)z^4 \\
& + 2(107r^4 + 125r^3 + 140r^2 - 91r + 3)z^3 \\
& + (329r^3 + 165r^2 + 215r - 53)z^2 + 2(141r^2 + 54r + 25)z \\
& \left. + 48(2r + 1) \right] \frac{1}{6(r-1)^2(1-z)[(r-1)z+2](rz+1)^2}, \quad (\text{B.13})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{q\bar{q}}^{[10]}(z, r) = & \left[8r^4z^4 - (r^4 - 22r^3 + 6r - 1)z^3 - 2(r^3 - 13r^2 - 5r + 1)z^2 \right. \\
& \left. + 16rz + 8 \right] \frac{160z^2 \ln\left(1 + 2\frac{1-z}{z(r+1)}\right)}{81(1-z)^2(rz+1)^3} \\
- & \left[8r^2(r-1)z^3 - (r^3 - 23r^2 + 9r + 1)z^2 - 2(r^2 - 12r + 3)z \right. \\
& \left. - 2(r-7) \right] \frac{320z^2}{81(1-z)[(r-1)z+2](rz+1)^2}, \quad (\text{B.14})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{q\bar{q}}^{[27_s]}(z, r) = & - \left[2r^2(r^2 + 1)z^4 + (3r^2 + 1)(3r - 1)z^3 + 4(4r^2 - r + 1)z^2 \right. \\
& \left. + 4(3r - 1)z + 4 \right] \frac{8z^2(r+1) \ln\left(1 + 2\frac{1-z}{z(r+1)}\right)}{3(1-z)^2(rz+1)^3} \\
+ & \left[2r^2(r-1)z^3 + (9r^2 - 4r + 1)z^2 + 4(3r - 1)z + 6 \right] \\
& \times \frac{16z^2(r+1)}{3(1-z)[(r-1)z+2](rz+1)^2}. \quad (\text{B.15})
\end{aligned}$$

B.6 Renormierungskonstanten

Die Renormierungskonstanten, welche für diese Arbeit benötigt werden, sind in DREG gegeben durch

$$\begin{aligned}
 Z_X^{\text{OS}} &= 1 + \frac{\alpha_s}{4\pi} \delta Z_X, \\
 \delta Z_2 &= C_A \left[-\frac{1}{\varepsilon_{\text{UV}}} - \frac{2}{\varepsilon_{\text{IR}}} - 6 \ln(2) - 4 \right] f_\varepsilon(4m_{\tilde{g}}^2) \\
 &\quad + T_F \sum_{q,h} \left[2 \left(m_{\tilde{q}_h}^2 - m_q^2 - m_{\tilde{g}}^2 + 4U_{h1}^{(q)} U_{h2}^{(q)} m_{\tilde{g}} m_q \right) B'_0(m_{\tilde{g}}^2; m_{\tilde{q}_h}^2, m_q^2) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{m_q^2 - m_{\tilde{q}_h}^2 - m_{\tilde{g}}^2}{m_{\tilde{g}}^2} B_0(m_{\tilde{g}}^2; m_{\tilde{q}_h}^2, m_q^2) + \frac{A_0(m_{\tilde{q}_h}^2) - A_0(m_q^2)}{m_{\tilde{g}}^2} \right], \\
 \delta Z_{m_{\tilde{g}}} &= C_A \left[-\frac{3}{\varepsilon_{\text{UV}}} - 6 \ln(2) - 4 \right] f_\varepsilon(4m_{\tilde{g}}^2) \\
 &\quad + T_F \sum_{q,h} \left[\frac{1}{m_{\tilde{g}}^2} \left(m_{\tilde{g}}^2 + m_q^2 - m_{\tilde{q}_h}^2 - 4U_{h1}^{(q)} U_{h2}^{(q)} m_{\tilde{g}} m_q \right) B_0(m_{\tilde{g}}^2; m_{\tilde{q}_h}^2, m_q^2) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{A_0(m_{\tilde{q}_h}^2) - A_0(m_q^2)}{m_{\tilde{g}}^2} \right], \\
 \delta Z_3 &= \left\{ \left(\frac{5}{3} C_A - \frac{4}{3} n_f T_F \right) \left[\frac{1}{\varepsilon_{\text{UV}}} - \frac{1}{\varepsilon_{\text{IR}}} \right] - \frac{2}{3} C_A \left[\frac{1}{\varepsilon_{\text{UV}}} + 2 \ln(2) \right] \right\} f_\varepsilon(4m_{\tilde{g}}^2) \\
 &\quad - \frac{1}{3} T_F \sum_{q,h} B_0(0; m_{\tilde{q}_h}^2, m_{\tilde{q}_h}^2), \\
 \delta Z_q &= C_F \left\{ \left[-\frac{1}{\varepsilon_{\text{UV}}} + \frac{1}{\varepsilon_{\text{IR}}} \right] f_\varepsilon(4m_{\tilde{g}}^2) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_h \left[\frac{1}{2} (m_{\tilde{q}_h}^2 - m_{\tilde{g}}^2) B'_0(0; m_{\tilde{g}}^2, m_{\tilde{q}_h}^2) - \frac{1}{2} B_0(0; m_{\tilde{g}}^2, m_{\tilde{q}_h}^2) \right] \right\}, \\
 \delta Z_{m_{\tilde{q}_h}} &= C_F \left[\frac{2 - \sin^2(2\theta_q)}{2m_{\tilde{q}_h}^2} A_0(m_{\tilde{q}_h}^2) + \frac{\sin^2(2\theta_q)}{2m_{\tilde{q}_h}^2} A_0(m_{\tilde{q}_{h\pm 1}}^2) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{m_{\tilde{q}_h}^2 - m_{\tilde{g}}^2}{m_{\tilde{q}_h}^2} B_0(m_{\tilde{q}_h}^2; m_{\tilde{g}}^2, 0) - \frac{1}{m_{\tilde{q}_h}^2} A_0(m_{\tilde{g}}^2) - 2B_0(m_{\tilde{q}_h}^2; m_{\tilde{q}_h}^2, 0) \right], \\
 \delta Z_{\theta_q} &= C_F \cos(2\theta_q) \sin(2\theta_q) \frac{A_0(m_{\tilde{q}_2}^2) - A_0(m_{\tilde{q}_1}^2)}{m_{\tilde{q}_1}^2 - m_{\tilde{q}_2}^2}. \tag{B.16}
 \end{aligned}$$

Der Mischungswinkel wird nach der Bedingung aus [68] renormiert, während die übrigen Renormierungskonstanten diejenigen des On-Shell-Schemas sind.

B.7 Weitere Korrekturen

Zur Vereinfachung wurden in den Ergebnissen der harten Kerne aus Kapitel 5 eine generische Squarkmasse angenommen und die Squarkmischungswinkel auf Null gesetzt wie auch die Masse des Top-Quarks, sofern dies möglich war. Die vollständigen Ergebnisse werden hier angegeben, auch wenn sie nicht in die numerische Betrachtung eingehen.

Zunächst erhält man aus den Termen $F(r)$, die über $r = \bar{m}_q^2/m_{\tilde{g}}^2$ von der gemittelten Squarkmasse abhängen, das gewünschte Ergebnis, welches über $r_h = m_{\tilde{q}_h}^2/m_{\tilde{g}}^2$ von den exakten Squarkmassen abhängt, durch die Transformationen $F(r) \rightarrow [F(r_1) + F(r_2)]/2$ bzw. $n_f \rightarrow \sum_q$.

Virtuelle Korrekturen $1_s, 8_s, 27_s$

Das Top-Quark tritt nur in den Schleifen der virtuellen Korrekturen auf. Deren Terme proportional zu n_f verändern sich, daher muß in den Gl. (5.20a), (5.20b) und (5.20d) jeweils die eckige Klammer durch folgende Ausdrücke ersetzt werden:

$$\begin{aligned}
& \sum_h \left\{ \frac{1}{12} \ln\left(\frac{q_h}{4}\right) - \frac{q - q_h + 1}{4} (b_1(q_h, q) - b_2(q_h, q) + 2b'_1(q_h, q)) \right. \\
& \quad + \frac{q - q_h + 1}{2(q_h - q)} (q c_1(q_h, q) - q_h c_1(q, q_h)) - \frac{4}{9(q_h - q)} (q c_1(q_h, q) - q_h c_1(q, q_h)) \\
& \quad + \frac{2}{27(q - q_h + 1)} [q(1 + 2 \ln(2) - \ln(q) + 12c_6(q) - 12c_1(q_h, q)) - a_1(q)] \\
& \quad \left. + U_{h1}^{(t)} U_{h2}^{(t)} \frac{m_q}{m_{\tilde{g}}} \left[\frac{16(c_1(q_h, q) - c_6(q))}{9(q_h - q + 1)} - (b_1(q_h, q) + b_2(q_h, q) + 2c_1(q_h, q) + 2b'_1(q_h, q)) \right] \right\}, \\
& \sum_h \left\{ \frac{1}{12} \ln\left(\frac{q_h}{4}\right) - \frac{q - q_h + 1}{4} (b_1(q_h, q) - b_2(q_h, q) + 2b'_1(q_h, q)) \right. \\
& \quad + \frac{q - q_h + 1}{2(q_h - q)} (q c_1(q_h, q) - q_h c_1(q, q_h)) - \frac{5}{18(q_h - q)} (q c_1(q_h, q) - q_h c_1(q, q_h)) \\
& \quad + \frac{5}{108(q - q_h + 1)} [q(1 + 2 \ln(2) - \ln(q) + 12c_6(q) - 12c_1(q_h, q)) - a_1(q)] \\
& \quad \left. + U_{h1}^{(t)} U_{h2}^{(t)} \frac{m_q}{m_{\tilde{g}}} \left[\frac{10(c_1(q_h, q) - c_6(q))}{9(q_h - q + 1)} - (b_1(q_h, q) + b_2(q_h, q) + 2c_1(q_h, q) + 2b'_1(q_h, q)) \right] \right\}, \\
& \sum_h \left\{ \frac{1}{12} \ln\left(\frac{q_h}{4}\right) - \frac{q - q_h + 1}{4} (b_1(q_h, q) - b_2(q_h, q) + 2b'_1(q_h, q)) \right. \\
& \quad + \frac{q - q_h + 1}{2(q_h - q)} (q c_1(q_h, q) - q_h c_1(q, q_h)) - \frac{5}{18(q_h - q)} (q c_1(q_h, q) - q_h c_1(q, q_h)) \\
& \quad \left. - U_{h1}^{(t)} U_{h2}^{(t)} \frac{m_q}{m_{\tilde{g}}} \left[b_1(r_h, q) + b_2(r_h, q) + 2c_1(r_h, q) + 2b'_1(r_h, q) \right] \right\}, \tag{B.17}
\end{aligned}$$

mit $q = m_q^2/m_g^2$, $q_h = m_{q_h}^2/m_g^2$ und den skalaren Funktionen aus Anhang D. Der Grenzwert $m_q \rightarrow 0$ für die masselosen Quarks kann hier ohne Probleme durchgeführt werden.

Virtuelle Korrekturen 8_a

Für die virtuellen Korrekturen des Produktionsprozesses $q\bar{q} \rightarrow 8_a$ erschweren die Squarks, welche schon in der führenden Ordnung involviert sind, die Notation. Will man hier unterschiedliche Massen sowie die Mischungswinkel berücksichtigen, so ändert sich der Normierungsfaktor aus Gl. (5.6) zu

$$\mathcal{N}_{q\bar{q}}^{[8_a]} = \frac{64}{27} \left\{ \left[\sum_{h=1,2} \left(\frac{r_h - 1}{r_h + 1} \right)^2 \right] - \sin^2(2\theta_q) \frac{(r_1 - r_2)^2}{(1 + r_1)^2(1 + r_2)^2} \right\}. \quad (\text{B.18})$$

Die virtuellen Korrekturen hierzu werden geschrieben als

$$\mathcal{F}_{q\bar{q} \rightarrow 8_a}^{(\text{virtuell})} = \frac{64}{27} \frac{9\pi}{4\hat{s}} \left(\alpha_s^{\overline{\text{MS}}} \right)^3 \left(2\overline{\mathcal{B}}_{q\bar{q}}^{[8_a]} - \sin^2(2\theta_q) \overline{\mathcal{C}}_{q\bar{q}}^{[8_a]} \right) \delta(1 - z), \quad (\text{B.19})$$

mit

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{q\bar{q}}^{[8_a]} = & \left[-\frac{4}{3\varepsilon_{\text{IR}}^2} - \frac{7}{2\varepsilon_{\text{IR}}} + \frac{5\pi^2}{36} + \frac{\beta_0^{\text{SQCD}}}{2} \ln\left(\frac{\mu_r^2}{M^2}\right) \right] f_\varepsilon(4m_g^2) \sum_h \left(\frac{(r_h - 1)^2}{2(r_h + 1)^2} \right) \\
& + \left\{ \frac{3(r_1 - 1)}{8(r_1 + 1)^2} a_1(r_1) - \frac{r_1^2 - 5}{24(r_1 + 1)^2} b_1(r_1) + \frac{r_1 - 3}{48} b_2(r_1) \right. \\
& \quad + \left[\frac{2r_2}{3(r_2 + 1)^2} + \frac{4r_1^3 - 21r_1^2 + 14r_1 - 13}{24(r_1 + 1)^2} \right] b_3(r_1) \\
& \quad - \frac{(r_1 - 1)(r_1^2 - 2r_1 + 5)}{3(r_1 + 1)^3} b_4(r_1) - \frac{8r_1(r_1 - 1)}{3(r_1 + 1)^3} b_5(r_1) + \frac{4(r_1 - 1)^2}{3(r_1 + 1)^3} b_6(r_1) \\
& \quad + \frac{r_1 - 1}{3} \left[\frac{(r_1 - 1)^2}{2(r_1 + 1)^2} + \frac{(r_2 - 1)^2}{2(r_2 + 1)^2} \right] b_2'(r_1) - \frac{r_1^2 - 2r_1 + 5}{48} c_1(r_1) \\
& \quad - \frac{(r_1 - 3)(r_1^2 - 2r_1 + 5)}{24(r_1 + 1)^2} c_2(r_1) - \frac{3(r_1 - 1)(r_1^2 - 6r_1 + 17)}{16(r_1 + 1)} c_3(r_1) \\
& \quad - \frac{3(r_1 - 1)(r_1^2 - 2r_1 + 5)}{8(r_1 + 1)} c_4(r_1) - \frac{3(r_1 - 1)(r_1^2 - 4r_1 - 3)}{8(r_1 + 1)^2} \ln(2) \\
& \quad \left. + (r_1 \leftrightarrow r_2) \right\} \\
& + \sum_q \left\{ \left[\frac{1}{2} (a_1(q_1) - a_1(q)) - \frac{q_1 - q + 1}{2} (b_1(q_1, q) - 2b_1'(q_1, q)) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - 2 \sin(2\theta_q) \frac{m_q}{m_{\bar{g}}} b_1'(q_1, q) \right] \sum_h \left(\frac{(r_h - 1)^2}{2(r_h + 1)^2} \right) \right. \\
& \quad + \left[-\frac{1}{3} (a_1(q_1) - a_1(q)) - \frac{(q + 2)(q - q_1 + 1)}{6(q_1 - q + 1)} b_2(q) \right. \\
& \quad \quad + \frac{1}{6} \left(\frac{2q}{q - q_1 + 1} + \frac{2(q + 2)}{q - q_1 - 1} - q + q_1 + 1 \right) b_1(q_1, q) \\
& \quad \quad - \frac{(q(q_1 - 1) - q_1^2 + 1)}{6(q - q_1 + 1)} b_2(q_1) \\
& \quad \quad \left. \left. - 2 \sin(2\theta_q) \frac{m_q}{m_{\bar{g}}} b_1'(r_1, q) \right] \sum_h \left(\frac{(r_h - 1)}{2(r_h + 1)} \right) \right. \\
& \quad \left. + [(q_1, \theta_q) \leftrightarrow (q_2, -\theta_q)] \right\}. \tag{B.20}
\end{aligned}$$

Es gilt weiterhin $q_h = m_{\tilde{q}_h}^2 / m_{\tilde{g}}^2$. Die virtuellen Beiträge proportional zu $\sin^2(2\theta)$ sind

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}_{q\bar{q}}^{[8_a]} = & \left[-\frac{4}{3\varepsilon_{\text{IR}}^2} - \frac{7}{2\varepsilon_{\text{IR}}} + \frac{5\pi^2}{36} + \frac{3}{8} + \frac{3}{4}\ln(2) + \frac{\beta_0^{\text{SQCD}}}{2}\ln\left(\frac{\mu_r^2}{M^2}\right) \right] \frac{(r_1 - r_2)^2}{(r_1 + 1)^2(r_2 + 1)^2} \\
 & - \left[64(r_1 + r_2 + 2) + 9(r_1 + 1)^2(r_2 + 1)^2(2 + \ln(2)) \right] \frac{(r_1 - r_2)^2}{12(r_1 + 1)^3(r_2 + 1)^3} \\
 & + \left\{ -\left(\frac{1}{8(r_2 + 1)} - \frac{r_1 - 5}{12(r_1 + 1)} \right) a_1(r_1) - \frac{r_1 + 3}{12(r_1 + 1)} b_1(r_1) + \frac{r_1 + 1}{24} b_2(r_1) \right. \\
 & \quad + \frac{2r_2(5r_1^2 + 2r_1 + 13) + 7r_1^2 - 4r_1 + 21}{24(r_1 + 1)(r_2 + 1)} b_3(r_1) - \frac{2(r_1^2 + 3)}{3(r_2 + 1)^2} b_4(r_1) \\
 & \quad - \frac{8r_1}{3(r_1 + 1)^2} b_5(r_1) - \frac{4(r_1 - 1)}{3(r_1 + 1)^2} b_6(r_1) + \frac{(r_1 - 1)(r_1 - r_2)}{3(r_1 + 1)(r_2 + 1)} b'_2(r_1) \\
 & \quad - \frac{(r_1 + 1)^2}{24} c_1(r_1) + \frac{r_2(-5r_1^2 + 8r_1 - 7) + r_1^2 + 8r_1 - 13}{12(r_1 + 1)(r_2 + 1)} c_2(r_1) \\
 & \quad \left. - \frac{3(r_1^2 + 4r_1 + 7)}{8} c_3(r_1) - \frac{3(r_1^2 + 3)}{4} c_4(r_1) + (r_1 \leftrightarrow r_2) \right\} \\
 & + \sum_q \left\{ \frac{1}{2} (a_1(q_1) - a_1(q)) + \frac{q - q_1 - 1}{2} b_1(q_1, q) + (q_1 - q - 1) b'_1(q_1, q) \right. \\
 & \quad \left. - 2\sin^2(2\theta_q) \frac{m_q}{m_{\tilde{g}}} b'_1(q_1, q) + [(q_1, \theta_q) \leftrightarrow (q_2, -\theta_q)] \right\}. \tag{B.21}
 \end{aligned}$$

Produktion des Pseudoskalars durch masselose Quarks

Da die Gluino-Squark-Quark-Vertizes für $\sin(2\theta) \neq 0$ die chirale Symmetrie brechen, erhält man die zusätzlichen Produktionskanäle $q\bar{q} \rightarrow 1_s, 8_s$. Die Konfiguration der 27 kann durch das Quark-Antiquark-Paar nicht erzeugt werden. Man erhält für die dadurch von Null verschiedenen Normierungsfaktoren

$$\begin{aligned}
 \mathcal{N}_{q\bar{q}}^{[1_s]} &= \frac{256}{243} \sin^2(2\theta_q) \frac{(r_1 - r_2)^2}{(1 + r_1)^2(1 + r_2)^2}, \\
 \mathcal{N}_{q\bar{q}}^{[8_s]} &= 5 \mathcal{N}_{q\bar{q}}^{[1_s]}. \tag{B.22}
 \end{aligned}$$

Die virtuellen Korrekturen hierzu können geschrieben werden als

$$\mathcal{F}_{q\bar{q} \rightarrow T}^{(\text{virtuell})} = \mathcal{N}_{q\bar{q}}^{[T]} \frac{9\pi (\alpha_s^{\overline{\text{MS}}})^3}{4\hat{s}} \bar{C}_{q\bar{q}}^{[T]} \delta(1 - z), \tag{B.23}$$

für $T = 1_s, 8_s$. Man erhält

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_{q\bar{q}}^{[1_s]} = & \left\{ -\frac{4}{3\varepsilon_{\text{IR}}^2} - \frac{2}{\varepsilon_{\text{IR}}} + \frac{\beta_0^{\text{SQCD}}}{2} \ln \frac{\mu_r^2}{M^2} \right. \\
& + \frac{1}{4} \sum_f \left[q_1 a_1(q_1) - (q_1 + 1) b_1(q_1) + 2(q_1 - 1) b'_1(q_1) + (q_1 \leftrightarrow q_2) \right] \\
& + \left[\frac{r_1 a_1(r_1)}{3(1-r_1)} - \frac{(r_2+1) b_1(r_1)}{3(r_1-r_2)} + \frac{4(r_1-1)(r_2+1) b_4(r_1)}{3(r_1+1)(r_1-r_2)} - \frac{8r_1(r_2+1) b_5(r_1)}{3(r_1+1)(r_1-r_2)} \right. \\
& + \frac{4(r_1-1)(r_2+1) b_6(r_1)}{3(r_1+1)(r_1-r_2)} + \frac{(r_1-1) b'_2(r_1)}{3} \\
& + \frac{1}{6} \left(\frac{2(r_1+1)(11r_1-7)}{r_1-r_2} + \frac{4(r_1-3)(r_1+1)}{r_1+r_2-2} - 27r_1 + 11 \right) c_2(r_1) \\
& + \frac{3(r_1-1)(r_2+1) c_3(r_1)}{r_1-r_2} + \frac{2(r_1+1)(r_2+1) c_2(r_1, r_2)}{3(r_1+r_2-2)} \\
& - \frac{3(r_1-1)(r_2+1) \ln(r_1+1)}{r_1-r_2} + \frac{3(r_1-1)r_1(r_2+1) \ln(r_1)}{(r_1+1)(r_1-r_2)} \\
& \left. + \frac{(9r_1-5) \ln(2)}{6(r_1-1)} + \frac{4\pi^2}{9} - \frac{19r_1^2+30r_1-53}{6(r_1^2-1)} + (r_1 \leftrightarrow r_2) \right] \left. \right\}, \quad (\text{B.24})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_{q\bar{q}}^{[8_s]} = & \left\{ -\frac{4}{3\varepsilon_{\text{IR}}^2} - \frac{2}{\varepsilon_{\text{IR}}} + \frac{\beta_0^{\text{SQCD}}}{2} \ln \frac{\mu_r^2}{M^2} \right. \\
& + \frac{1}{4} \sum_f \left[q_1 a_1(q_1) - (q_1 + 1) b_1(q_1) + 2(q_1 - 1) b'_1(q_1) + (q_1 \leftrightarrow q_2) \right] \\
& + \left[\frac{r_1 a_1(r_1)}{3(1-r_1)} - \frac{(r_2+1) b_1(r_1)}{3(r_1-r_2)} + \frac{4(r_1-1)(r_2+1) b_4(r_1)}{3(r_1+1)(r_1-r_2)} \right. \\
& - \frac{8r_1(r_2+1) b_5(r_1)}{3(r_1+1)(r_1-r_2)} + \frac{4(r_1-1)(r_2+1) b_6(r_1)}{3(r_1+1)(r_1-r_2)} - \frac{(r_1+1)(r_2+1) c_2(r_1, r_2)}{12(r_1+r_2-2)} \\
& - \frac{[r_1^3 - 3r_1^2 + r_1(2r_2+1) + 2r_2^2 - 2r_2 - 1] c_2(r_1)}{6(r_1-r_2)(r_1+r_2-2)} + \frac{(r_1-1) b'_2(r_1)}{3} \\
& - \frac{3(r_1-1)(r_2+1) \ln(r_1+1)}{2(r_1-r_2)} + \frac{3(r_1-1)r_1(r_2+1) \ln(r_1)}{2(r_1+1)(r_1-r_2)} + \frac{2 \ln(2)}{3(r_1-1)} \\
& \left. + \frac{5\pi^2}{72} - \frac{5r_1^2+15r_1-22}{3(r_1^2-1)} + (r_1 \leftrightarrow r_2) \right] \left. \right\}. \quad (\text{B.25})
\end{aligned}$$

Reelle Korrekturen

Die reellen Korrekturen proportional zu $\sin^2(2\theta)$ komplettieren die Ergebnisse. Die harten Kerne der $q\bar{q}$ -induzierten Prozesse werden angegeben durch

$$\mathcal{F}_{q\bar{q} \rightarrow T}^{(\text{reell})} = \frac{(r_1 + 1)^2 (r_2 + 1)^2}{(r_1 - r_2)^2} \mathcal{N}_{q\bar{q}}^{[T]} \frac{9\pi (\alpha_s^{\overline{\text{MS}}})^3}{4\hat{s}} \overline{\mathcal{D}}_{q\bar{q}}^{[T]}, \quad (\text{B.26})$$

für $T = 1_s, 8_s, 27_s$ mit $\mathcal{N}_{q\bar{q}}^{[27_s]} = \mathcal{N}_{q\bar{q}}^{[1_s]}$ sowie für die Vektorzustände

$$\mathcal{F}_{q\bar{q} \rightarrow T}^{(\text{reell})} = \frac{64}{27} \frac{9\pi (\alpha_s^{\overline{\text{MS}}})^3}{4\hat{s}} \left(-\sin^2(2\theta_q) \overline{\mathcal{D}}_{q\bar{q}}^{[T]} \right), \quad (\text{B.27})$$

mit $T = 8_a, 10$. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{q\bar{q}}^{[1_s]} &= \left[(1-z) P_{qq} \left(2 \left[\frac{\ln(1-z)}{1-z} \right]_+ - \ln \left(\frac{z\mu_f^2}{M^2} \right) \left[\frac{1}{1-z} \right]_+ \right) \right. \\ &\quad \left. + \delta(1-z) \left(\frac{4}{3\varepsilon_{\text{IR}}^2} + \frac{2}{\varepsilon_{\text{IR}}} - 2 \ln \left(\frac{\mu_f^2}{M^2} \right) - \frac{4}{9}\pi^2 \right) \right] \frac{(r_1 - r_2)^2}{(r_1 + 1)^2 (r_2 + 1)^2} \\ &\quad + \frac{B^{[1_s]}(r_1, r_1)}{(r_1 + 1)^2} - \frac{2B^{[1_s]}(r_1, r_2)}{(r_1 + 1)(r_2 + 1)} + \frac{B^{[1_s]}(r_2, r_2)}{(r_2 + 1)^2}, \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{q\bar{q}}^{[8_s]} &= \left\{ (1-z) P_{qq} \left(2 \left[\frac{\ln(1-z)}{1-z} \right]_+ - \ln \left(\frac{z\mu_f^2}{M^2} \right) \left[\frac{1}{1-z} \right]_+ \right) \right. \\ &\quad \left. + \delta(1-z) \left(\frac{4}{3\varepsilon_{\text{IR}}^2} + \frac{2}{\varepsilon_{\text{IR}}} - 2 \ln \left(\frac{\mu_f^2}{M^2} \right) - \frac{4}{9}\pi^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + 3 \left[\left(\frac{1}{2\varepsilon_{\text{IR}}} + 1 \right) \delta(1-z) - \left[\frac{1}{1-z} \right]_+ \right] \right\} \frac{(r_1 - r_2)^2}{(r_1 + 1)^2 (r_2 + 1)^2} \\ &\quad + \frac{B^{[8_s]}(r_1, r_1)}{(r_1 + 1)^2} - \frac{2B^{[8_s]}(r_1, r_2)}{(r_1 + 1)(r_2 + 1)} + \frac{B^{[8_s]}(r_2, r_2)}{(r_2 + 1)^2}, \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{q\bar{q}}^{[8_a]} &= \left\{ (1-z) P_{qq} \left(2 \left[\frac{\ln(1-z)}{1-z} \right]_+ - \ln \left(\frac{z\mu_f^2}{M^2} \right) \left[\frac{1}{1-z} \right]_+ \right) - 3 \left[\frac{1}{1-z} \right]_+ \right. \\ &\quad \left. + \delta(1-z) \left(\frac{4}{3\varepsilon_{\text{IR}}^2} + \frac{7}{2\varepsilon_{\text{IR}}} - 2 \ln \left(\frac{\mu_f^2}{M^2} \right) \right) \right\} \frac{(r_1 - r_2)^2}{(r_1 + 1)^2 (r_2 + 1)^2} \\ &\quad + \frac{B^{[8_s]}(r_1, r_1)}{(r_1 + 1)^2} - \frac{2B^{[8_s]}(r_1, r_2)}{(r_1 + 1)(r_2 + 1)} + \frac{B^{[8_s]}(r_2, r_2)}{(r_2 + 1)^2}, \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

$$\mathcal{D}_{q\bar{q}}^{[10]} = \frac{B^{[10]}(r_1, r_1)}{(r_1 + 1)^2} - \frac{2B^{[10]}(r_1, r_2)}{(r_1 + 1)(r_2 + 1)} + \frac{B^{[10]}(r_2, r_2)}{(r_2 + 1)^2}, \quad (\text{B.31})$$

$$\mathcal{D}_{q\bar{q}}^{[27_s]} = \frac{B^{[27_s]}(r_1, r_1)}{(r_1 + 1)^2} - \frac{2B^{[27_s]}(r_1, r_2)}{(r_1 + 1)(r_2 + 1)} + \frac{B^{[27_s]}(r_2, r_2)}{(r_2 + 1)^2}. \quad (\text{B.32})$$

Die Funktionen $B^{[T]}$ lauten

$$\begin{aligned} B^{[1_s]}(p, q) = & \left\{ 2z^4 p [-q + p^2(9q - 8)] \right. \\ & + z^3 [(9q + 1) + p(29q + 1) + p^2(45q - 31) + p^3(9q + 17)] \\ & + z^2 [-2(17q - 2) + 8p + 6p^2(3q + 10) + 8p^3] \\ & \left. + 2z [17q - 13 + p(9q + 19) + 8p^2] + 16(p + 3) \right\} \\ & \times \frac{(q + 1)[(9p + 1)z + 8]}{96(p - q)(1 - z)^2(zp + 1)[z(p + q) + 2]} \ln \left(1 + 2 \frac{1 - z}{z(p + 1)} \right) \\ & + \frac{2(1 - z)}{3} + (p \leftrightarrow q), \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

$$\begin{aligned} B^{[8_s]}(p, q) = & \left\{ z^4 [2(18q + 13) + p(221q + 62) + p^2(315q + 67)] \right. \\ & + 3p^3(177q - 41) + 9p^4(59q + 9) + 45p^5] \\ & + z^3 [-(47q + 84) - p(187q - 11) \\ & \quad + p^2(387q - 1) + 9p^3(23q + 121) + 225p^4] \\ & + 4z^2 [-(17q - 39) + 6p(21q - 2) + p^2(63q + 299) + 110p^3] \\ & \left. + 10z [5(5q - 4) + p(9q + 103) + 43p^2] + 160(p + 3) \right\} \\ & \times \frac{q + 1}{120(p - q)(1 - z)^2(zp + 1)[z(p + q) + 2]} \ln \left(1 + 2 \frac{1 - z}{z(p + 1)} \right) \\ & - \frac{9q(p + 2)z(2z + 1) + (2z^2 + 41z - 52)}{24(1 - z)} + (p \leftrightarrow q), \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

$$\begin{aligned}
 B^{[8_s]}(p, q) = & \left\{ 2z^5 p [-2q - 4pq - p^2(5q + 2) + p^3(13q - 9) + 9p^4] \right. \\
 & + z^4 [2(2q + 1) + p(29q + 6) + p^2(35q + 3) \\
 & \quad + p^3(79q - 35) + p^4(5q + 111) + 17p^5] \\
 & + z^3 [(q - 4) + p(11q - 35) \\
 & \quad + p^2(39q - 9) + p^3(11q + 237) + 69p^4] \\
 & + 4z^2 [-(7q - 3) + 5p(3q - 2) + 2p^2(3q + 31) + 27p^3] \\
 & \left. + 2z [(23q - 20) + 7p(q + 15) + 45p^2] + 32(p + 3) \right\} \\
 & \times \frac{q + 1}{24(p - q)(1 - z)^2(zp + 1)[z(p + q) + 2]} \ln \left(1 + 2 \frac{1 - z}{z(p + 1)} \right) \\
 & - \frac{2z^2 [9(p + 1)(q + 1) - 8] + z [17(p + 1)(q + 1) + 32] - 52}{24(1 - z)} \\
 & + (p \leftrightarrow q), \tag{B.35}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B^{[10]}(p, q) = & \left\{ 2z^3 pq(p - 1) + z^2 [(q + 1) + 6pq - p^2(q + 1) + 2p^3] \right. \\
 & \left. + 2z [-2 - p(2q - 1) + 3p^2] + 2[(-q + 3) + 2p] \right\} \\
 & \times \frac{5z^2(p + 1)^2(q + 1)}{12(p - q)(1 - z)(zp + 1)[z(p + q) + 2]} \ln \left(1 + 2 \frac{1 - z}{z(p + 1)} \right) \\
 & - \frac{5z(p + 1)(q + 1)}{6(1 - z)} \\
 & + (p \leftrightarrow q), \tag{B.36}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B^{[27_s]}(p, q) = & \left\{ 2z^3 pq(p - 1) + z^2(q + 1 + 4pq + p^2q + p^3) + 2z(p - 1)(q + 2) \right. \\
 & \left. + 2(q + 3) \right\} \\
 & \times \frac{3z^2(p + 1)}{4(p - q)(1 - z)(zp + 1)[z(p + q) + 2]} \ln \left(1 + 2 \frac{1 - z}{z(p + 1)} \right) \\
 & + (p \leftrightarrow q). \tag{B.37}
 \end{aligned}$$

Für den Anfangszustand gg schreibt man die Korrekturen als

$$\mathcal{F}_{gg \rightarrow T}^{(\text{reell})} = \frac{(r_1 + 1)^2(r_2 + 1)^2}{(r_1 - r_2)^2} \mathcal{N}_{q\bar{q}}^{[T]} \frac{9\pi (\alpha_s^{\overline{\text{MS}}})^3}{4\hat{s}} \overline{\mathcal{D}}_{gg}^{[T]}, \tag{B.38}$$

für $T = 1_s, 8_s, 27_s$ und

$$\mathcal{F}_{gq \rightarrow T}^{(\text{reell})} = \frac{64}{27} \frac{9\pi (\alpha_s^{\overline{\text{MS}}})^3}{4\hat{s}} \left(-\sin^2(2\theta_q) \overline{\mathcal{D}}_{gq}^{[T]} \right), \quad (\text{B.39})$$

mit $T = 8_a, 10$. Man erhält schließlich

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{gq}^{[T]} &= \frac{(r_1 - r_2)^2}{(r_1 + 1)^2 (r_2 + 1)^2} \left[-\frac{1}{2} \mathcal{P}_{qg} \ln \left(\frac{\mu_F^2 z}{M^2 (1 - z)^2} \right) \right] \eta^{[T]} \\ &+ \frac{C^{[T]}(r_1, r_1)}{(r_1 + 1)^2} - \frac{2C^{[T]}(r_1, r_2)}{(r_1 + 1)(r_2 + 1)} + \frac{C^{[T]}(r_2, r_2)}{(r_2 + 1)^2}, \end{aligned} \quad (\text{B.40})$$

mit $\eta^{[T]} = 1$ für $T = 1_s, 8_s, 8_a$ und $\eta^{[T]} = 0$ für $T = 10, 27_s$. Die Funktionen $C^{[T]}$ lauten

$$\begin{aligned} C^{1_s}(p, q) &= \left\{ -z^4(p+1) [q+5+3p(19q+3) - p^2(17q+57) - p^3(9q-7) + 4p^4] \right. \\ &\quad + 2z^3 [q+19+17p(3q+1) + 3p^2(41q+3) + p^3(9q-61) - 8p^4] \\ &\quad - 4z^2 [17q+37-8p(3q+2) - 3p^2(3q-17) + 8p^3] \\ &\quad \left. + 8z [17q+35+p(9q-13) - 8p^2] - 64(p+3) \right\} \\ &\quad \times \frac{(q+1) [5z(p+1) - 8] \ln \left(1 + 2 \frac{1-z}{z(p+1)} \right)}{256(p-q)[z(p+1)-2][z(p+1)+2]^2[z(q+1)-2]} \\ &+ \left\{ -8z^4(p+1)(q+1)(pq-1) \right. \\ &\quad + z^3 [(9q^2+52q+59) + 4p(5q^2+10q+13) + p^2(27q^2+20q+9)] \\ &\quad + z^2 [(33q^2+94q+93) + 2p(21q^2+52q+47) + 3p^2(q+1)(3q+11)] \\ &\quad + 2z [(33q^2+109q+68) + p(9q^2+30q+109) + 3p^2(3q+11)] \\ &\quad \left. + 4 [(33q+61) + 3p(3q+11)] \right\} \\ &\quad \times \frac{9z^3(p+1)(q+1) \ln(z)}{64[z(p+1)-2][z(p+1)+2]^2[z(q+1)-2][z(q+1)+2]^2} \\ &+ \left\{ 12z^4(p+1)(q+1) \right. \\ &\quad + z^3 [(5q^2+51q+70) + p(q+3)(5q+17) + 5p^2(q+1)] \\ &\quad + z^2 [(10q^2+141q+375) + p(259q+141) + 10p^2] \\ &\quad \left. + 12z(p+q+6) - 16 \right\} \\ &\quad \times \frac{z(1-z)(p+1)(q+1)}{64[z^2(p+1)^2-4][z^2(q+1)^2-4]} \\ &+ (p \leftrightarrow q), \end{aligned} \quad (\text{B.41})$$

$$\begin{aligned}
 C^{8_s}(p, q) = & - \left\{ z^5(p+1)^2 [107q + 112 + 3p(59q + 39) \right. \\
 & \quad - p^2(127q + 177) - p^3(117q + 97) + 5p^4] \\
 & + 8z^4(p+1) [-(63q + 109) - p(168q + 43) \\
 & \quad - 7p^2(49q + 24) - p^3(18q - 1) + 15p^4] \\
 & + 16z^3 [113q + 225 + p(28q + 125) \\
 & \quad + p^2(57q + 160) - 3p^3(6q - 35) + 5p^4] \\
 & - 32z^2 [108q + 239 + p(46q + 103) + 9p^2(2q + 11) - 5p^3] \\
 & \left. + 80z [25(q + 4) + p(9q + 23) + 3p^2] - 1280(p + 3) \right\} \\
 & \quad \times \frac{(q+1) \ln \left(1 + 2 \frac{1-z}{z(p+1)} \right)}{640(p-q)[z(p+1)-2][z(p+1)+2]^2[z(q+1)-2]} \\
 & + \left\{ 5z^6(p+1)(q+1)(p+q+2) \right. \\
 & + z^5 [29q^2 + 86q + 87 + 2p(13q^2 + 26q + 43) + p^2(27q^2 + 26q + 29)] \\
 & + 3z^4 [8q^2 + 33q + 45 + p(11q^2 + 24q + 33) + p^2(q+1)(3q+8)] \\
 & + 2z^3 [24q^2 + 125q + 76 + p(9q^2 + 72q + 125) + 3p^2(3q+8)] \\
 & \left. + 4z^2 [59q + 80 + p(14q + 59) + p^2] + 40z(p+q+2) + 80 \right\} \\
 & \quad \times \frac{9z(p+1)(q+1) \ln(z)}{80[z(p+1)-2][z(p+1)+2]^2[z(q+1)-2][z(q+1)+2]^2} \\
 & + \left\{ 480z^4(p+1)(q+1) \right. \\
 & + 5z^3 [q^2 + 75q + 122 + p(q+3)(q+25) + p^2(q+1)] \\
 & + 2z^2 [5q^2 + 174q + 822 + 2p(526q + 87) + 5p^2] \\
 & \left. + 60z(5q + 18 + 5p) + 4880 \right\} \\
 & \quad \times \frac{z(1-z)(p+1)(q+1)}{640[z^2(p+1)^2 - 4][z^2(q+1)^2 - 4]} \\
 & + (p \leftrightarrow q), \tag{B.42}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C^{\delta_a}(p, q) = & \left\{ z^5(p+1)^2 [-(13q+16) - p(27q+19) \right. \\
& \quad \left. + p^2(17q+27) + 15p^3(q+1) + p^4] \right. \\
& - 8z^4(p+1) [-(7q+17) - 11p(q+1) \\
& \quad \left. - p^2(53q+37) - p^3(5q-7) + 6p^4] \right. \\
& - 16z^3 [(14q+37) - 2p(5q-12) \\
& \quad \left. + 6p^2(q+9) - 2p^3(q-18) + p^4] \right. \\
& + 32z^2 [(16q+43) - p(q-15) - p^2(q-22) + 2p^3] \\
& \left. - 16z [(23q+100) + p(7q+25) + 5p^2] + 256(p+3) \right\} \\
& \times \frac{(q+1) \ln \left(1 + 2 \frac{1-z}{z(p+1)} \right)}{128(p-q)[z(p+1)-2][z(p+1)+2]^2[z(q+1)-2]} \\
& + \left\{ 9z^6(p+1)(q+1)(p+q+2) \right. \\
& \quad + z^5 [(41q^2 + 126q + 139) + 18p(q^2 + 2q + 7) + p^2(31q^2 + 18q + 41)] \\
& \quad + z^4 [(24q^2 + 119q + 203) + p(29q^2 + 40q + 119) + p^2(q+1)(5q+24)] \\
& \quad + 2z^3 [(24q^2 + 201q + 124) + p(5q^2 + 136q + 201) + p^2(5q+24)] \\
& \quad \left. + 4z^2 [3(37q+48) + p(22q+111)] + 136z(p+q+2) + 272 \right\} \\
& \times \frac{z(p+1)(q+1) \ln(z)}{16[z(p+1)-2][z(p+1)+2]^2[z(q+1)-2][z(q+1)+2]^2} \\
& + \left\{ -64z^6(p+1)^2(q+1)^2 \right. \\
& \quad + z^5(p+1)(q+1) [(q^2 - 5q - 54) + p(q^2 + 44q - 5) + p^2(q+1)] \\
& \quad + z^4 [(q^3 + 2q^2 - 157q - 286) - p(99q^2 + 157) \\
& \quad \quad \left. - p^2(q^3 + 230q^2 + 99q - 2) - p^3(q^2 - 1) \right] \\
& \quad - 2z^3 [(q^3 - 15q^2 - 54q - 102) + p(q^3 - 91q^2 - 18q - 54) \\
& \quad \quad \left. - p^2(140q^2 + 91q + 15) + p^3(q+1) \right] \\
& \quad + 4z^2 [-(15q^2 + 305q + 194) + p(17q^2 - 224q - 305) + p^2(17q - 15)] \\
& \quad \left. + 16z [(79q + 47) + 79p(q+1)] + 512 \right\} \\
& \times \frac{1}{128[z^2(p+1)^2 - 4][z^2(q+1)^2 - 4]} \\
& + (p \leftrightarrow q), \tag{B.43}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C^{10}(p, q) = & \left\{ 2z^3 pq(p-1) + z^2 [(q+1) + 6pq - p^2(q+1) + 2p^3] \right. \\
& \left. + 2z [-2 - p(2q-1) + 3p^2] + 2(2p - q + 3) \right\} \\
& \times \frac{5z^2(p+1)^2(q+1) \ln \left(1 + 2\frac{1-z}{z(p+1)} \right)}{12(1-z)^2(p-q)(pz+1)[z(p+q)+2]} \\
& - \frac{5z(p+1)(q+1)}{3(1-z)} \\
& + (p \leftrightarrow q), \tag{B.44}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C^{27_s}(p, q) = & \left\{ z^3(p+1)^2(p-1)(q+1) + 2[q+3 + 2p(5q-1) + p^2(q+3)] \right. \\
& \left. + 4(p-1)(q+5) + 8(q+3) \right\} \\
& \times \frac{243z^2(p+1)^2(q+1) \ln \left(1 + 2\frac{1-z}{z(p+1)} \right)}{256(p-q)[z(p+1)-2][z(p+1)+2]^2[z(q+1)-2]} \\
& + \left\{ z^3(p+1)(q+1)[q+3 + p(3q+1)] \right. \\
& \left. + z^2(p+1)(q+1)[q+5 + p(q+1)] \right. \\
& \left. + 2z [q^2 + 5q + 4 + p(q^2 - 2q + 5) + p^2(q+1)] + 4[q+5 + p(q+1)] \right\} \\
& \times \frac{243z^3(p+1)(q+1) \ln(z)}{64[z(p+1)-2][z(p+1)+2]^2[z(q+1)-2][z(q+1)+2]^2} \\
& - \left\{ q+3 + p(3q+1) \right\} \frac{243z^3(1-z)(p+1)(q+1)}{64[z^2(p+1)^2 - 4][z^2(q+1)^2 - 4]} \\
& + (p \leftrightarrow q). \tag{B.45}
\end{aligned}$$

Anhang C

Details zu den SPS-Szenarios

Dieser Abschnitt enthält detaillierte Informationen zu den Szenarios (a)-(z). Diese entstammen den SPS-Szenarios [5], wobei jeweils der MSUGRA-Brechungsmechanismus verwendet wird. Die Sätze der jeweils fünf Parameter, welche (a)-(z) definieren, sind in Tab. C.1 zu finden.

Die Massen der zwölf Squarks in den jeweiligen Szenarien sind in den Tab. C.2 und C.3 enthalten.

Szenario	SPS-Punkt	m_0 [GeV]	$m_{1/2}$ [GeV]	A_0 [GeV]	$\tan(\beta)$	$\text{sign}(\mu)$
(a)	SPS1a-point	100	250	-100	10	1
(b)	SPS1a-slope 1	80	200	-80	10	1
(c)	SPS1a-slope 2	60	150	-60	10	1
(d)	SPS1a-slope 3	120	300	-120	10	1
(e)	SPS1a-slope 4	140	350	-140	10	1
(f)	SPS1a-slope 5	160	400	-160	10	1
(g)	SPS1a-slope 6	180	450	-180	10	1
(h)	SPS1a-slope 7	200	500	-200	10	1
(i)	SPS1b-point	200	400	0	30	1
(j)	SPS2-point	1450	300	0	10	1
(k)	SPS2-slope 1	1350	250	0	10	1
(l)	SPS2-slope 2	1250	200	0	10	1
(m)	SPS2-slope 3	1150	150	0	10	1
(n)	SPS2-slope 4	1050	100	0	10	1
(o)	SPS2-slope 5	1550	350	0	10	1
(p)	SPS2-slope 6	1650	400	0	10	1
(q)	SPS2-slope 7	1850	500	0	10	1
(r)	SPS3-point	90	400	0	10	1
(s)	SPS3-slope 1	65	300	0	10	1
(t)	SPS3-slope 2	40	200	0	10	1
(u)	SPS3-slope 3	115	500	0	10	1
(v)	SPS3-slope 4	140	600	0	10	1
(w)	SPS3-slope 5	165	700	0	10	1
(x)	SPS3-slope 6	190	800	0	10	1
(y)	SPS4-point	400	300	0	50	1
(z)	SPS5-point	150	300	-1000	5	1

Tabelle C.1: SPS-Ausgangsparameter für die benutzten Szenarios.

Szenario	$m_{\tilde{d}_1}$ [GeV]	$m_{\tilde{d}_2}$ [GeV]	$m_{\tilde{u}_1}$ [GeV]	$m_{\tilde{u}_2}$ [GeV]	$m_{\tilde{s}_1}$ [GeV]	$m_{\tilde{s}_2}$ [GeV]
(a)	567.77	545.62	562.26	545.89	567.77	545.62
(b)	464.72	446.20	457.94	445.62	464.72	446.20
(c)	360.24	344.94	351.37	343.26	360.24	344.94
(d)	669.23	643.23	664.59	644.23	669.23	643.23
(e)	769.54	739.52	765.52	741.20	769.54	739.52
(f)	868.90	834.78	865.36	837.09	868.90	834.78
(g)	967.33	929.03	964.15	931.94	967.33	929.03
(h)	1065.22	1022.71	1062.35	1026.20	1065.23	1022.71
(i)	876.84	843.16	873.27	845.41	876.84	843.16
(j)	1556.70	1552.46	1554.76	1552.07	1556.70	1552.46
(k)	1427.82	1425.60	1425.69	1424.94	1427.82	1425.60
(l)	1300.76	1300.38	1298.41	1299.46	1300.76	1300.38
(m)	1176.27	1177.49	1173.65	1176.32	1176.27	1177.49
(n)	1055.59	1058.08	1052.65	1056.68	1055.59	1058.08
(o)	1686.71	1680.31	1684.92	1680.21	1686.71	1680.31
(p)	1817.49	1808.85	1815.83	1809.03	1817.49	1808.85
(q)	2080.64	2067.30	2079.20	2068.06	2080.64	2067.30
(r)	858.66	824.01	855.07	826.36	858.66	824.01
(s)	661.49	635.07	656.78	636.11	661.49	635.07
(t)	459.68	440.88	452.81	440.30	459.68	440.88
(u)	1052.40	1009.20	1049.48	1012.76	1052.40	1009.20
(v)	1243.17	1191.25	1240.72	1195.97	1243.17	1191.25
(w)	1431.30	1370.52	1429.18	1376.37	1431.30	1370.52
(x)	1617.59	1547.85	1615.71	1554.82	1617.59	1547.85
(y)	764.91	743.68	760.88	744.40	764.91	743.68
(z)	678.15	652.40	673.86	653.45	678.15	652.40

Tabelle C.2: \tilde{d} -, \tilde{u} - und \tilde{s} -Massen für die verschiedenen Szenarios.

Szenario	$m_{\tilde{c}_1}$ [GeV]	$m_{\tilde{c}_2}$ [GeV]	$m_{\tilde{b}_1}$ [GeV]	$m_{\tilde{b}_2}$ [GeV]	$m_{\tilde{t}_1}$ [GeV]	$m_{\tilde{t}_2}$ [GeV]
(a)	562.26	545.89	516.91	546.24	399.73	586.53
(b)	457.94	445.62	421.76	448.10	319.81	499.59
(c)	351.37	343.26	325.09	348.45	242.07	413.19
(d)	664.59	644.23	610.48	642.77	479.61	673.26
(e)	765.52	741.20	702.91	738.14	559.00	759.85
(f)	865.36	837.09	794.42	832.56	637.74	846.32
(g)	964.15	931.94	885.04	926.03	715.69	932.52
(h)	1062.35	1026.20	975.15	1018.98	793.11	1018.75
(i)	873.27	845.41	777.67	826.04	661.71	839.81
(j)	1554.76	1552.07	1298.73	1539.74	970.87	1307.45
(k)	1425.69	1424.94	1185.30	1413.68	879.25	1194.51
(l)	1298.41	1299.46	1073.69	1289.26	789.69	1083.38
(m)	1173.65	1176.32	964.86	1167.17	703.52	974.99
(n)	1052.65	1056.68	860.37	1048.57	622.94	870.89
(o)	1684.92	1680.21	1413.39	1666.80	1063.94	1421.57
(p)	1815.83	1809.03	1528.82	1794.54	1157.84	1536.48
(q)	2079.20	2068.06	1761.18	2051.40	1347.10	1767.83
(r)	855.07	826.36	792.13	822.99	649.29	842.40
(s)	656.78	636.11	608.61	635.66	489.70	669.48
(t)	452.81	440.30	420.51	443.62	328.67	496.21
(u)	1049.48	1012.76	972.34	1006.85	805.90	1014.61
(v)	1240.72	1195.97	1149.78	1187.73	960.08	1185.81
(w)	1429.18	1376.37	1324.77	1365.95	1111.73	1355.82
(x)	1615.71	1554.82	1498.06	1542.29	1261.48	1525.04
(y)	760.88	744.40	617.79	685.28	546.52	696.19
(z)	673.86	653.45	561.85	650.48	248.72	649.57

Tabelle C.3: \tilde{c} -, \tilde{b} - und \tilde{t} -Massen für die verschiedenen Szenarios.

Anhang D

Tensor- und skalare Integrale

Das allgemeine n -Punkt-Tensorintegral in D Dimensionen ist entsprechend der Kinematik aus Abb. D.1 definiert durch

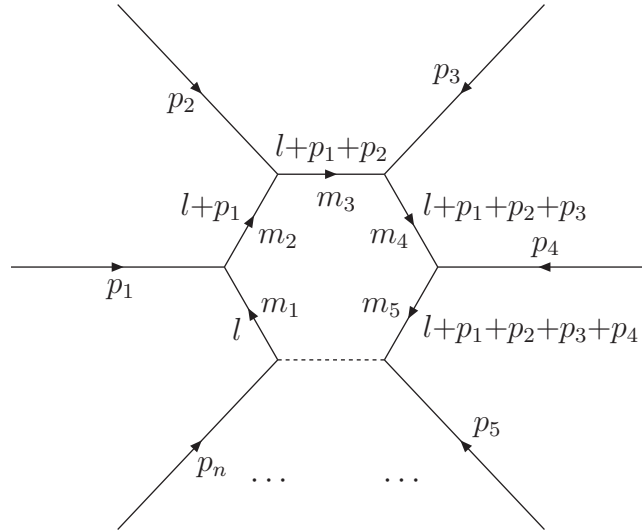
$$T_{\mu_1 \dots \mu_k}^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1}; m_1, \dots, m_n) = \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{i\pi^2} \int d^D l \, l_{\mu_1} \cdots l_{\mu_k} \frac{1}{[l^2 - m_1^2 + i\epsilon]} \times \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{[(l + \sum_{j=1}^i p_j)^2 - m_{i+1}^2 + i\epsilon]}, \quad (\text{D.1})$$

wobei $0 \leq k \leq n$ gilt. Mit der Notation sowie der Methode aus [81] reduziert man die Tensorintegrale auf skalare Funktionen, für welche $k = 0$ gilt. Im Rahmen dieser Arbeit müssen nur Funktionen mit $n \leq 3$ berechnet werden. Man benutzt für gewöhnlich die Nomenklatur $T^{(1)} = A$, $T^{(2)} = B$, $T^{(3)} = C$ etc., sowie einen Index 0 für die skalare Funktionen.

Diese Tensorintegrale werden nun nach allen möglichen Tensorstrukturen zerlegt, die sich aus dem metrischen Tensor $g^{\mu\nu}$ sowie den Impulsen p_i^μ bilden lassen

$$\begin{aligned} B^\mu &= p_1^\mu B_1, \\ B^{\mu\nu} &= p_1^\mu p_1^\nu B_{21} + g^{\mu\nu} B_{22}, \\ C^\mu &= p_1^\mu C_{11} + p_2^\mu C_{12}, \\ C^{\mu\nu} &= p_1^\mu p_1^\nu C_{21} + p_2^\mu p_2^\nu C_{22} + (p_1^\mu p_2^\nu + p_2^\mu p_1^\nu) C_{23} + g^{\mu\nu} C_{24}, \\ C^{\mu\nu\rho} &= p_1^\mu p_1^\nu p_1^\rho C_{31} + p_2^\mu p_2^\nu p_2^\rho C_{32} \\ &\quad + (p_2^\mu p_1^\nu p_1^\rho + p_1^\mu p_2^\nu p_1^\rho + p_1^\mu p_1^\nu p_2^\rho) C_{33} \\ &\quad + (p_1^\mu p_2^\nu p_2^\rho + p_2^\mu p_1^\nu p_2^\rho + p_2^\mu p_2^\nu p_1^\rho) C_{34} \\ &\quad + (p_1^\mu g^{\nu\rho} + p_1^\nu g^{\mu\rho} + p_1^\rho g^{\mu\nu}) C_{35} + (p_2^\mu g^{\nu\rho} + p_2^\nu g^{\mu\rho} + p_2^\rho g^{\mu\nu}) C_{36}. \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

Weiterhin kontrahiert man mit den Impulsen sowie dem metrischen Tensor Gl. (D.2) und gewinnt ein Gleichungssystem, mit welchem man die skalaren Funktionen auf der

Abbildung D.1: Kinematik der n -Punkt-Funktion.

rechten Seite von Gl. (D.2) durch die Funktionen A_0 , B_0 sowie C_0 ausdrücken kann. Die Redundanz des Gleichungssystem kann zur Überprüfung der Ergebnisse verwendet werden.

Vorsicht sei jedoch geboten, da mehrere Notationen existieren. Bspw. hat in [108] die Funktion aus Gl. (D.1) andere Argumente, wodurch auch die skalaren Funktionen aus Gl. (D.2) anders definiert werden.

Letztendlich reduziert sich die Berechnung der virtuellen Korrekturen einer Schleife auf die skalaren Funktionen, welche auch n -Punkt-Funktionen genannt werden. Da diese nur von den Quadraten der Impulse und der Massen abhängen, ist die Notation gegenüber Gl. (D.1) abgeändert.

Ein-Punkt-Funktion A_0

Die skalare Ein-Punkt-Funktion ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
 A_0(m_1^2) &= \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{i\pi^2} \int d^D l \frac{1}{[l^2 - m_1^2 + i\epsilon]} \\
 &= m_1^2 \left[\frac{1}{\varepsilon_{UV}} + 1 + 2 \ln 2 + \ln \left(\frac{m_g^2}{m_1^2} \right) \right] f_\varepsilon(4m_g^2) + \mathcal{O}(\varepsilon), \tag{D.3}
 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
 f_\varepsilon(q^2) &= \left(\frac{4\pi\mu^2}{q^2}\right)^\varepsilon \Gamma(1+\varepsilon) \\
 &= 1 + \varepsilon \left[\ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{q^2}\right) - \gamma_E \right] + \frac{\varepsilon^2}{2} \left\{ \left[\ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{q^2}\right) - \gamma_E \right]^2 + \frac{\pi^2}{6} \right\} + \mathcal{O}(\varepsilon^3).
 \end{aligned}
 \tag{D.4}$$

Die ultravioletten Divergenzen werden mittels DREG in $\varepsilon = (4 - D)/2$ extrahiert. Die skalenlose Ein-Punkt-Funktion verschwindet.

Zwei-Punkt-Funktion B_0

Die Definition der Zwei-Punkt-Funktion lautet

$$\begin{aligned}
 &B_0(p_1^2; m_1^2, m_2^2) \\
 &= \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{i\pi^2} \int d^D l \frac{1}{[l^2 - m_1^2 + i\epsilon][(l+p_1)^2 - m_2^2 + i\epsilon]} \\
 &= \left[\frac{1}{\varepsilon_{UV}} - \int_0^1 dx \ln\left(\frac{x^2 p_1^2 - x(p_1^2 + m_1^2 - m_2^2) + m_1^2 - i\epsilon}{4m_g^2}\right) \right] f_\varepsilon(4m_g^2) + \mathcal{O}(\varepsilon).
 \end{aligned}
 \tag{D.5}$$

Sie ist invariant unter der Vertauschung $m_1 \leftrightarrow m_2$. Die Zwei-Punkt-Funktion mit verschwindenden Argumenten ist gegeben durch

$$B_0(0; 0, 0) = \frac{1}{\varepsilon_{UV}} - \frac{1}{\varepsilon_{IR}}, \tag{D.6}$$

wobei hier eine infrarote Divergenz auftaucht. Die Indizes IR und UV stehen in Verbindung mit den Singularitäten in ε für den Impulsbereich, aus welchem die Divergenzen resultieren. Diese Art der Markierung ist eine Möglichkeit, das Ergebnis zu prüfen, kann jedoch auch weggelassen werden, so daß die skalenlose B_0 -Funktion aus Gl. (D.6) dann verschwinden würde.

Weiterhin ist für die On-Shell-Renormierung die Ableitung der B_0 -Funktion wichtig. Man

erhält

$$\begin{aligned}
B'_0(p_1^2; m_1^2, m_2^2) &= \left. \frac{\partial}{\partial p^2} B_0(p^2; m_1^2, m_2^2) \right|_{p^2=p_1^2} \\
&= \frac{1}{[p_1^2 - (m_1^2 - m_2^2)][p_1^2 - (m_1^2 + m_2^2)]} \\
&\quad \times \left\{ (m_1^2 + m_2^2) B_0(p_1^2; m_1^2, m_2^2) - m_1^2 B_0(0; m_1^2, m_2^2) - m_2^2 B_0(0; m_2^2, m_2^2) \right. \\
&\quad \left. - p_1^2 - \frac{(m_1^2 - m_2^2)^2}{p_1^2} (B_0(p_1^2; m_1^2, m_2^2) - B_0(0; m_1^2, m_2^2)) \right\}. \quad (\text{D.7})
\end{aligned}$$

Für diese Arbeit wichtige Werte der Zwei-Punkt-Funktion sowie ihrer Ableitung sind

$$\begin{aligned}
B_0(m^2; m^2, \lambda^2) &= B_0(m^2; m^2, 0) + \frac{\lambda^2}{m^2} \left[1 - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\lambda^2}{m^2} \right) - \frac{1}{2} \frac{2\pi m}{\lambda} \right] + \mathcal{O} \left(\frac{\lambda^3}{m^3} \right), \\
B_0(-m^2; m^2, \lambda^2) &= B_0(-m^2; m^2, 0) + \frac{\lambda^2}{m^2} \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\lambda^2}{m^2} \right) \right] + \mathcal{O} \left(\frac{\lambda^3}{m^3} \right), \\
B'_0(m^2; m^2, \lambda^2) &= -\frac{1}{m^2} \left[1 + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\lambda^2}{m^2} \right) \right] + \mathcal{O} \left(\frac{\lambda}{m^3} \right). \quad (\text{D.8})
\end{aligned}$$

Drei-Punkt-Funktion C_0

Die Drei-Punkt-Funktion ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
&C_0(p_1^2, p_2^2, (p_1 + p_2)^2; m_1^2, m_2^2, m_3^2) \\
&= \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{i\pi^2} \int d^D l \frac{1}{[l^2 - m_1^2 + i\epsilon] [(l + p_1)^2 - m_2^2 + i\epsilon] [(l + p_1 + p_2)^2 - m_3^2 + i\epsilon]} \\
&= -(4m_g^2)^\epsilon f_\epsilon(4m_g^2) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy [G(p_1^2, p_2^2, (p_1 + p_2)^2; m_1^2, m_2^2, m_3^2; x, y) + i\epsilon]^{-1-\epsilon}, \quad (\text{D.9})
\end{aligned}$$

mit

$$G(a, b, c; d, e, f; x, y) = x^2 a + y^2 c + x y [a - b + c] - x [a + d - e] - y [c + d - f] + d. \quad (\text{D.10})$$

Sie ist symmetrisch unter den in Tab. D.1 dargestellten Transformationen, wobei alle sechs Permutationen der Parameter das gleiche Resultat für die C_0 -Funktion liefern.

a	b	c	d	e	f
p^2	k^2	$(p+k)^2$	m_1^2	m_2^2	m_3^2
k^2	$(p+k)^2$	p^2	m_2^2	m_3^2	m_1^2
$(p+k)^2$	p^2	k^2	m_3^2	m_1^2	m_2^2
$(p+k)^2$	k^2	p^2	m_1^2	m_3^2	m_2^2
k^2	p^2	$(p+k)^2$	m_3^2	m_2^2	m_1^2
p^2	$(p+k)^2$	k^2	m_2^2	m_1^2	m_3^2

Tabelle D.1: Symmetrietransformationen der C_0 -Funktion.

Die Berechnung des zweidimensionalen Integrals aus Gl. (D.10) kann zu *Dilogarithmen* führen, die definiert sind durch

$$\text{Li}_2(x) = - \int_0^x dt \frac{\ln(1-t)}{t} = - \int_0^1 dt \frac{\ln(1-xt)}{t}. \quad (\text{D.11})$$

Gebraucht wurden für diese Arbeit unter anderem folgende Funktionen

$$\begin{aligned}
C_0(0, -m^2, m^2; m^2, M^2, \lambda^2) &= C_0(0, -m^2, m^2; m^2, M^2, 0) \\
&\quad + \frac{\lambda^2}{m^2(M^2 + m^2)} \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{\lambda^2}{4m^2} \right) + \frac{1}{2} \frac{2\pi m}{\lambda} \right. \\
&\quad \quad \quad + \frac{M^2}{M^2 + m^2} \ln \left(\frac{M^2}{m^2} \right) - 1 \\
&\quad \quad \quad \left. - \ln \left(\frac{M^2 + m^2}{2m^2} \right) \right] + \mathcal{O} \left(\frac{\lambda^3}{m^5} \right), \\
C_0(m^2, 4m^2, m^2; \lambda^2, m^2, m^2) &= \frac{1}{\lambda^2} [B_0(m^2, m^2, \lambda^2) - B_0(4m^2, m^2, m^2)] \\
&= \frac{1}{2m^2} \left[2 - 2 \ln(2) - \ln \left(\frac{\lambda^2}{4m^2} \right) - \frac{2\pi m}{\lambda} \right] + \mathcal{O} \left(\frac{\lambda}{m^3} \right), \\
C_0(0, -m^2, m^2; 0, 0, m^2) &= -\frac{1}{4m^2} \left[\frac{1}{\varepsilon_{\text{IR}}^2} - \frac{\pi^2}{6} \right] f_\varepsilon(4m^2), \\
\text{Re} \{C_0(m^2, 0, 0; 0, 0, 0)\} &= \frac{1}{m^2} \left[\frac{1}{\varepsilon_{\text{IR}}^2} - \frac{2\pi^2}{3} \right] f_\varepsilon(m^2), \quad (\text{D.12})
\end{aligned}$$

wobei die letzten drei jeweils mit [109] übereinstimmen. Weiterhin kann man – siehe z.B. [110] – die Regularisierung durch die Eichbosonmasse umrechnen in die DREG bzw. in die Regularisierung durch die Relativgeschwindigkeit $v = |\vec{p}_1 - \vec{p}_2|/m$ zwischen den

zwei Konstituenten

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{\lambda^2}{4m^2}\right) &\leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon_{\text{IR}}} f_\varepsilon(4m^2), \\ \frac{2\pi m}{\lambda} &\leftrightarrow \frac{\pi^2}{v}. \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

Abschließend werden Hilfsfunktionen zur Vereinfachung der Darstellung der Ergebnisse eingeführt (mit $r = m_{\tilde{q}}^2/m_{\tilde{g}}^2$ und $r_h = m_{\tilde{q}_h}^2/m_{\tilde{g}}^2$), wobei die Funktionen b_1 mit ein bzw. zwei Argumenten nichts mit der Funktion B_1 aus Gl. (D.2) zu tun haben

$$\begin{aligned} A_0(m_{\tilde{q}}^2) &= m_{\tilde{q}}^2 \frac{1}{\varepsilon_{\text{UV}}} f_\varepsilon(4m_{\tilde{g}}^2) + m_{\tilde{g}}^2 a_1(r), \\ \text{Re}\{B_0(m_{\tilde{g}}^2; m_{\tilde{q}}^2, 0)\} &= \frac{1}{\varepsilon_{\text{UV}}} f_\varepsilon(4m_{\tilde{g}}^2) + b_1(r), \\ \text{Re}\{B_0(4m_{\tilde{g}}^2; m_{\tilde{q}}^2, m_{\tilde{q}}^2)\} &= \frac{1}{\varepsilon_{\text{UV}}} f_\varepsilon(4m_{\tilde{g}}^2) + b_2(r), \\ B_0(0; m_{\tilde{q}}^2, m_{\tilde{q}}^2) &= \frac{1}{\varepsilon_{\text{UV}}} f_\varepsilon(4m_{\tilde{g}}^2) + b_3(r), \\ B_0(-m_{\tilde{g}}^2; m_{\tilde{q}}^2, 0) &= \frac{1}{\varepsilon_{\text{UV}}} f_\varepsilon(4m_{\tilde{g}}^2) + b_4(r), \\ B_0(m_{\tilde{q}}^2; m_{\tilde{q}}^2, 0) &= \frac{1}{\varepsilon_{\text{UV}}} f_\varepsilon(4m_{\tilde{g}}^2) + b_5(r), \\ \text{Re}\{B_0(m_{\tilde{q}}^2; m_{\tilde{g}}^2, 0)\} &= \frac{1}{\varepsilon_{\text{UV}}} f_\varepsilon(4m_{\tilde{g}}^2) + b_6(r), \\ \text{Re}\{B_0(m_{\tilde{g}}^2; m_{\tilde{q}_1}^2, m_{\tilde{q}_2}^2)\} &= \frac{1}{\varepsilon_{\text{UV}}} f_\varepsilon(4m_{\tilde{g}}^2) + b_1(r_1, r_2), \\ \text{Re}\{B_0(-m_{\tilde{g}}^2; m_{\tilde{q}_1}^2, m_{\tilde{q}_2}^2)\} &= \frac{1}{\varepsilon_{\text{UV}}} f_\varepsilon(4m_{\tilde{g}}^2) + b_2(r_1, r_2), \\ m_{\tilde{g}}^2 \text{Re}\{B'_0(m_{\tilde{g}}^2; m_{\tilde{q}}^2, 0)\} &= b'_1(r), \\ m_{\tilde{g}}^2 B'_0(0; m_{\tilde{g}}^2, m_{\tilde{q}}^2) &= b'_2(r), \\ m_{\tilde{g}}^2 \text{Re}\{B'_0(m_{\tilde{g}}^2; m_{\tilde{q}_1}^2, m_{\tilde{q}_2}^2)\} &= b'_1(r_1, r_2), \\ m_{\tilde{g}}^2 \text{Re}\{C_0(4m_{\tilde{g}}^2, 0, 0; m_{\tilde{q}}^2, m_{\tilde{q}}^2, m_{\tilde{g}}^2)\} &= c_1(r), \\ m_{\tilde{g}}^2 \text{Re}\{C_0(0, -m_{\tilde{g}}^2, m_{\tilde{g}}^2; m_{\tilde{q}}^2, m_{\tilde{g}}^2, 0)\} &= c_2(r), \\ m_{\tilde{g}}^2 \text{Re}\{C_0(0, -m_{\tilde{g}}^2, m_{\tilde{g}}^2; m_{\tilde{g}}^2, m_{\tilde{q}}^2, 0)\} &= m_{\tilde{g}}^2 \text{Re}\{C_0(4m_{\tilde{g}}^2, 0, 0; m_{\tilde{g}}^2, m_{\tilde{g}}^2, m_{\tilde{q}}^2)\} = c_3(r), \\ c_4(r) &= -\frac{1}{r+1} \left[1 + \ln(r+1) - \frac{r}{r+1} \ln(r) \right], \\ m_{\tilde{g}}^2 \text{Re}\{C_0(0, -m_{\tilde{g}}^2, m_{\tilde{g}}^2; m_{\tilde{q}}^2, m_{\tilde{q}}^2, 0)\} &= c_5(r), \\ m_{\tilde{g}}^2 \text{Re}\{C_0(4m_{\tilde{g}}^2, 0, 0; m_{\tilde{q}}^2, m_{\tilde{q}}^2, m_{\tilde{q}}^2)\} &= c_6(r), \\ m_{\tilde{g}}^2 \text{Re}\{C_0(0, -m_{\tilde{g}}^2, m_{\tilde{g}}^2; m_{\tilde{q}_2}^2, m_{\tilde{q}_2}^2, m_{\tilde{q}_1}^2)\} &= c_1(r_1, r_2). \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

Anhang E

Tensorprodukte

Die Berechnung der für diese Arbeit notwendigen Tensorprodukte wird im folgenden dargestellt. Während die Berechnung für den Fall des Gluinos und des Squarks in einer allgemeinen $SU(N)$ durchgeführt wird, ist die Darstellung des Tensorprodukts für die beiden Gluinos auf die $SU(3)$ beschränkt. Der Grund dafür ist, daß es im allgemeinen Ausdruck, welcher in [99] gefunden werden kann, eine weitere Darstellung gibt, die im Grenzfall $N = 3$ verschwindet.

E.1 $8 \otimes 8$

$T_{u_1 \dots u_n}^{o_1 \dots o_m}$ ist ein $SU(3)$ -Tensor des Ranges (m, n) mit der Transformationseigenschaft

$$T_{u_1 \dots u_n}^{o_1 \dots o_m} \rightarrow U_{p_1}^{o_1} \dots U_{p_m}^{o_m} U_{u_1}^{v_1} \dots U_{u_n}^{v_n} T_{v_1 \dots v_n}^{p_1 \dots p_m}, \quad (\text{E.1})$$

mit $U \in SU(3)$. Durch die Multiplikation von Tensoren mit Rang (m_1, n_1) bzw. (m_2, n_2) wird ein Tensor mit Rang $(m_1 + m_2, n_1 + n_2)$ konstruiert, der in irreduzible Tensoren zerlegt werden kann. Man benutzt hierzu die *isotropen Tensoren* δ_j^i , ε^{ijk} und ε_{ijk} , wobei isotrop bedeutet, dass sie unter einer Transformation analog zu Gl. (E.1) [111] unverändert bleiben.

Durch Kontraktionen mit den isotropen Tensoren gewinnt man neue Tensoren, welche irreduzibel sind, sofern sie symmetrisch in ihren oberen sowie unteren Indizes sind und $T_{u_1 \dots u_n}^{o_1 \dots o_m} \delta_{o_t}^{u_s} = 0$ für alle $s \in \{1, \dots, n\}$ und $t \in \{1, \dots, m\}$ gilt. Eine Darstellung ist somit irreduzibel, sofern es der zugehörige Tensor ist.

Das bisher Genannte soll nun auf das Tensorprodukt zweier Oktetts A_v^p und B_w^q mit $A_i^i = B_i^i = 0$ angewendet werden, man zerlegt also $A_v^p B_w^q$ nach den obigen Regeln.

$$S = A_v^p B_p^v, \quad (\text{E.2})$$

ist vom Rang $(0, 0)$.

$$D_u^o = A_p^o B_u^p + A_u^p B_p^o - \frac{2}{3} \delta_p^o S, \quad (\text{E.3})$$

und

$$F_u^o = A_p^o B_u^p - A_u^p B_p^o, \quad (\text{E.4})$$

haben Rang $(1, 1)$.

$$T_{uvw} = A_u^o B_v^p \varepsilon_{opw} + (\text{Permutationen von } uvw), \quad (\text{E.5})$$

und

$$\bar{T}^{opq} = A_u^o B_v^p \varepsilon^{uvq} + (\text{Permutationen von } opq), \quad (\text{E.6})$$

sind vom Rang $(0, 3)$ beziehungsweise $(3, 0)$. Ferner definiert man

$$\begin{aligned} Z_{uv}^{op} &= A_u^o B_v^p + A_u^p B_v^o + A_v^o B_u^p + A_v^p B_u^o \\ &\quad - \frac{1}{5} (D_u^o \delta_v^p + D_u^p \delta_v^o + D_v^o \delta_u^p + D_v^p \delta_u^o) \\ &\quad - \frac{1}{6} (\delta_u^o \delta_v^p + \delta_u^p \delta_v^o) S, \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

mit Rang $(2, 2)$. Während die Ausdrücke aus den Gl. (E.2), (E.3) und (E.7) symmetrisch bezüglich des Austauschs $(A \leftrightarrow B)$ sind, würden sich die Terme aus den Gl. (E.4), (E.5) und (E.6) unter gleicher Transformation antisymmetrisch verhalten. Die Dimension M der jeweiligen Darstellung kann nun mittels

$$M = (1+m)(1+n) \left(1 + \frac{m+n}{2} \right), \quad (\text{E.8})$$

vom Rang (m, n) abgelesen werden, und man erhält aus den Gl. (E.2) - (E.7) das Ergebnis

$$8 \otimes 8 = 1_s \oplus 8_s \oplus 8_a \oplus 10_a \oplus \bar{10}_a \oplus 27_s, \quad (\text{E.9})$$

wobei a und s für Symmetrie bzw. Antisymmetrie unter Teilchenaustausch stehen. Das Ergebnis aus Gl. (E.9) kann auch durch die *Young-Tableaux* hergeleitet werden.

Die Berechnung der Projektoren auf die irreduziblen Darstellungen ist in [112] in allen Einzelheiten für eine allgemeine $SU(N)$ dargestellt. Man geht dabei genau so vor, wie es im folgenden für das Produkt einer fundamentalen und einer adjungierten Darstellung

$SU(3)$ -Darstellung R	15	6	3
Dimension d_R	$\frac{N(N+2)(N-1)}{2}$	$\frac{N(N+1)(N-2)}{2}$	N
Casimir C_R	$\frac{(N^2-1)(3N+1)}{N(N+2)}$	$\frac{(N-1)(2N-1)}{N(N-2)}$	$\frac{N^2-1}{2N}$

Tabelle E.1: Dimension und Casimir-Invarianten der betrachteten Darstellungen. In der obersten Zeile ist die Dimension in der $SU(3)$ zu finden.

angegeben ist. Die Rechnung ist jedoch deutlich umfangreicher. Man erhält für die beiden Oktetts als Ergebnis innerhalb der $SU(3)$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}_{1_S}^{ab,cd} &= \frac{1}{8} \delta_{ab} \delta_{cd}, \\
 \mathbb{P}_{8_S}^{ab,cd} &= \frac{3}{5} d_{abe} d_{cde}, \\
 \mathbb{P}_{8_A}^{ab,cd} &= \frac{1}{3} f_{abe} f_{cde}, \\
 \mathbb{P}_{10}^{ab,cd} &= \frac{1}{2} (\delta_{ac} \delta_{bd} - \delta_{ad} \delta_{bc}) - \frac{1}{3} f_{abe} f_{cde}, \\
 \mathbb{P}_{27_S}^{ab,cd} &= \frac{1}{2} (\delta_{ac} \delta_{bd} + \delta_{ad} \delta_{bc}) - \frac{3}{5} d_{abe} d_{cde} - \frac{1}{8} \delta_{ab} \delta_{cd}.
 \end{aligned} \tag{E.10}$$

Die Normierung wurde dabei so gewählt, daß die Projektoreigenschaft erfüllt ist

$$\mathbb{P}_{R_1}^{ab,cd} \mathbb{P}_{R_2}^{cd,ef} = \delta_{R_1 R_2} \mathbb{P}_{R_2}^{ab,ef}, \tag{E.11}$$

sowie die Vollständigkeitsrelation

$$\sum_R \mathbb{P}_R^{ab,cd} = \delta_{ac} \delta_{bd}. \tag{E.12}$$

Weiterhin ist erforderlich, daß die richtige Anzahl der Freiheitsgrade d_R in den irreduziblen Darstellungen R enthalten ist

$$\delta_{ac} \delta_{bd} \mathbb{P}_R^{ab,cd} = d_R. \tag{E.13}$$

E.2 $(N^2 - 1) \otimes N$

Durch die Young-Tableaux kann die Berechnung der irreduziblen Darstellungen des Tensorprodukts deutlich beschleunigt werden. Verallgemeinert man das Verfahren auf eine

R	$a^{[R]}$	$b^{[R]}$	$c^{[R]}$
N	$\frac{1}{N^2-1}$	$\frac{N}{N^2-1}$	$\frac{N}{N^2-1}$
$\frac{N(N+1)(N-2)}{2}$	$\frac{N-2}{2(N-1)}$	$-\frac{N}{2(N-1)}$	$\frac{N-2}{2(N-1)}$
$\frac{N(N+2)(N-1)}{2}$	$\frac{N+2}{2(N+1)}$	$\frac{N}{2(N+1)}$	$-\frac{N+2}{2(N+1)}$

Tabelle E.2: Koeffizienten der Projektoren aus Gl. (6.7) für eine allgemeine $SU(N)$.

$SU(N)$, so erhält man für das Tensorprodukt einer adjungierten und einer fundamentalen Darstellung die Zerlegung

$$(N^2 - 1) \otimes N = \frac{N(N+2)(N-1)}{2} \oplus \frac{N(N+1)(N-2)}{2} \oplus N. \quad (\text{E.14})$$

Die Casimir-Invarianten C_R der drei Darstellungen auf der rechten Seite erhält man aus der allgemeinen Gleichung

$$[C_{R_1} + C_{R_2}] d_{R_1} d_{R_2} = \sum_i C_{R_i} d_{R_i}, \quad (\text{E.15})$$

für das Produkt $R_1 \otimes R_2 = \sum_i R_i$, wobei d_R erneut die Dimension der Darstellungen R angibt. Man erhält die in Tab. E.1 gegebenen Werte.

Die Projektoren bzw. die Basis sind gegeben wie in Gl. (6.7)

$$\mathbb{P}_{ai,bj}^{[R]} = a^{[R]} \delta_{ab} \mathbb{1}_{ij} + b^{[R]} d_{abm} T_{ij}^m + c^{[R]} i f_{abm} T_{ij}^m. \quad (\text{E.16})$$

Für die Berechnung der neun Unbekannten benutzt man die Vollständigkeitsrelation

$$\mathbb{P}_{ai,bj}^{[3]} + \mathbb{P}_{ai,bj}^{[6]} + \mathbb{P}_{ai,bj}^{[15]} = \delta_{ab} \mathbb{1}_{ij}, \quad (\text{E.17})$$

die Projekteureigenschaft

$$\mathbb{P}_{ai,bj}^{[R_1]} \mathbb{P}_{bj,ck}^{[R_2]} = \mathbb{P}_{ai,ck}^{[R_1]} \delta_{R_1 R_2}, \quad (\text{E.18})$$

sowie die Tatsache, daß die Darstellungen die richtige Dimension haben müssen

$$\mathbb{N}_{ai,bj} \mathbb{P}_{bj,ai}^{[R]} \equiv \delta_{ab} \delta_{ij} \mathbb{P}_{bj,ai}^{[R]} = d_R. \quad (\text{E.19})$$

Aus den Gl. (E.17), (E.18) und (E.19) läßt sich ein Gleichungssystem gewinnen, welches man nach den gesuchten Variablen auflösen kann. Die Ergebnisse sind in Tab. E.2 enthalten, wobei der Grenzwert für $N = 3$ die Werte aus Tab. 6.2 reproduziert.

Ohne daß dies hier dargestellt ist, müßte die mittlere der drei Darstellungen der rechten Seite von Gl. (E.14) konjugiert werden. Für das Produkt der adjungierten mit der konjugierten fundamentalen Darstellung sind die beiden anderen Darstellungen der rechten Seite als konjugierte zu verstehen.

Anhang F

SU(N)-Farbgebra

Die Ergebnisse dieses Abschnitts sind für eine allgemeine $SU(N)$ dargestellt. Da in der Arbeit jedoch nur die Gruppe $SU(3)$ Verwendung findet, werden teilweise Formeln für den speziellen Fall $N = 3$ ausgewertet.

Die Generatoren T_a der *fundamentalen Darstellung* der $SU(N)$, welche die Gruppe der unitären $N \times N$ -Matrizen mit Determinante gleich 1 ist, genügen der Relation

$$[T_a, T_b] = if_{abc}T_c, \quad (\text{F.1})$$

die auch *Lie Algebra* der Gruppe genannt wird und vollständig durch die *Strukturkonstanten* f_{abc} bestimmt ist. Für die $SU(3)$ werden die Generatoren üblicherweise durch die *Gell-Mann Matrizen* dargestellt. Diese sind gegeben durch

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & T_2 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & T_3 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ T_4 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & T_5 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & T_6 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ T_7 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & T_8 &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{F.2})$$

Die von Null verschiedenen, total antisymmetrischen Strukturkonstanten der $SU(3)$ sind in Tab. F.1 gegeben.

a	1	1	1	2	2	3	3	4	6
b	2	4	5	4	5	4	6	5	7
c	3	7	6	6	7	5	7	8	8
f_{abc}	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Tabelle F.1: $SU(3)$ -Strukturkonstanten $f_{abc} = -2i \operatorname{tr}([T_a, T_b] T_c)$. Die übrigen Werte lassen sich durch die totale Antisymmetrie der Strukturkonstanten f_{abc} konstruieren.

Weitere nützliche Relationen für eine allgemeine $SU(N)$ sind

$$\begin{aligned}
T_a T_b &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{N} \delta_{ab} + (d_{abc} + i f_{abc}) T_c \right], \\
\operatorname{tr}(T_a) &= 0, \\
\operatorname{tr}(T_a T_b) &= \frac{1}{2} \delta_{ab}, \\
\operatorname{tr}(T_a T_b T_c) &= \frac{1}{4} (d_{abc} + i f_{abc}), \\
\operatorname{tr}(T_a T_b T_c T_d) &= \frac{1}{8} \left[\frac{2}{N} \delta_{ab} \delta_{cd} + d_{abx} d_{cdx} - f_{abx} f_{cdx} + i (f_{abx} d_{cdx} + d_{abx} f_{cdx}) \right], \quad (\text{F.3})
\end{aligned}$$

mit den total symmetrischen Strukturkonstanten d_{abc} , deren von Null verschiedenen Werte innerhalb der $SU(3)$ in Tab. F.2 zu finden sind.

Darüber hinaus gilt die Vollständigkeitsrelation

$$\delta_{il} \delta_{jk} = \frac{1}{N} \delta_{ij} \delta_{kl} + 2 T_{ij}^a T_{kl}^a. \quad (\text{F.4})$$

Die Strukturkonstanten selbst erzeugen eine Darstellung der Dimension $N^2 - 1$, die auch *adjungierte Darstellung* genannt wird. Man definiert sich die Generatoren $F_{bc}^a = -i f_{abc}$, welche ebenfalls die Relation aus Gl. (F.1) erfüllen

$$[F_a, F_b] = i f_{abc} F_c. \quad (\text{F.5})$$

Durch die Definition $D_{bc}^a = d_{abc}$ erhält man $(N^2 - 1) \times (N^2 - 1)$ -Matrizen, die folgender Gleichung genügen

$$[F_a, D_b] = i f_{abc} D_c. \quad (\text{F.6})$$

Die Relationen aus den Gl. (F.5) und (F.6) werden auch *Jacobi-Identitäten* genannt. Es

a	1	1	2	2	3	3	3	3	1	2	3	8	4	5	6	7
b	4	5	4	5	4	5	6	7	1	2	3	8	4	5	6	7
c	6	7	7	6	4	5	6	7	8	8	8	8	8	8	8	8
d_{abc}	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{4}{\sqrt{3}}$	$\frac{4}{\sqrt{3}}$	$\frac{4}{\sqrt{3}}$	$-\frac{4}{\sqrt{3}}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$

Tabelle F.2: $SU(3)$ -Strukturkonstanten $d_{abc} = 2 \operatorname{tr}(\{T_a, T_b\} T_c)$. Die übrigen Werte erhält man unter Ausnutzung der totalen Symmetrie.

gelten folgende Beziehungen

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tr}(F_a) &= 0, \\
 \operatorname{tr}(D_a) &= 0, \\
 \operatorname{tr}(F_a F_b) &= N \delta_{ab}, \\
 \operatorname{tr}(F_a D_b) &= 0, \\
 \operatorname{tr}(D_a D_b) &= \frac{N^2 - 4}{N} \delta_{ab}, \\
 \operatorname{tr}(F_a F_b F_c) &= i \frac{N}{2} f_{abc}, \\
 \operatorname{tr}(F_a F_b D_c) &= \frac{N}{2} d_{abc}, \\
 \operatorname{tr}(F_a D_b D_c) &= i \frac{N^2 - 4}{2N} f_{abc}, \\
 \operatorname{tr}(D_a D_b D_c) &= -\frac{N^2 - 12}{2N} d_{abc}.
 \end{aligned} \tag{F.7}$$

Für die $SU(3)$ erhält man weiterhin

$$\begin{aligned}
 f_{abe} f_{cde} &= \frac{2}{3} (\delta_{ac} \delta_{bd} - \delta_{ad} \delta_{bc}) + (d_{ace} d_{bde} - d_{ade} d_{bce}), \\
 d_{abe} d_{cde} &= \frac{1}{3} (\delta_{ac} \delta_{bd} + \delta_{ad} \delta_{bc} - \delta_{ab} \delta_{cd} + f_{ace} f_{bde} + f_{ade} f_{bce}), \\
 d_{abe} d_{cde} + d_{ace} d_{bde} + d_{ade} d_{bce} &= \frac{1}{3} (\delta_{ac} \delta_{bd} + \delta_{ad} \delta_{bc} + \delta_{ab} \delta_{cd}), \\
 f_{abe} d_{cde} - d_{abe} f_{cde} &= f_{bde} d_{ace} - d_{dbe} f_{ace},
 \end{aligned} \tag{F.8}$$

und

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(F_a F_b F_c F_d) &= -\delta_{ac} \delta_{bd} + \frac{3}{4} [5(d_{abe} d_{cde} + d_{ade} d_{bce}) + 3d_{ace} d_{bde}] , \\
\mathrm{tr}(F_a F_b F_c D_d) &= i \frac{3}{4} (f_{abe} d_{cde} + d_{abe} f_{cde}) , \\
\mathrm{tr}(F_a F_b F_c F_d)^2 &= 189 , \\
\mathrm{tr}(F_a F_b F_c F_d) \mathrm{tr}(T_a T_b T_c T_d) &= \frac{33}{2} , \\
\mathrm{tr}(F_a F_b D_c D_d) \mathrm{tr}(T_a T_b T_c T_d) &= \frac{35}{6} .
\end{aligned} \tag{F.9}$$

Anhang G

Bindungsenergien und Wellenfunktionen am Ursprung

Der Notation aus [61] folgend werden hier die Koeffizienten der Bindungsenergie und des Betragsquadrats der Wellenfunktion am Ursprung folgendermaßen dargestellt

$$\begin{aligned} E_n &= -\frac{C_A^2 \alpha_s^2 m_{\tilde{g}}}{4n^2} \left[1 + \frac{\alpha_s}{4\pi} e_1 + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^2 e_2 + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^3 e_3 + \dots \right], \\ |\Psi_n(0)|^2 &= \frac{C_A^3 \alpha_s^3 m_{\tilde{g}}^3}{8\pi n^3} \left[1 + \frac{\alpha_s}{4\pi} f_1 + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^2 f_2 + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^3 f_3 + \dots \right], \end{aligned} \quad (\text{G.1})$$

mit der Aufspaltung wie in Abschnitt 4.2

$$\begin{aligned} e_n &= e_n^{\text{C}} + e_n^{\text{nC}}, \\ f_n &= f_n^{\text{C}} + f_n^{\text{nC}}. \end{aligned} \quad (\text{G.2})$$

Für die Energie erhält man

$$\begin{aligned} e_1^{\text{C}} &= 4\beta_0 L_n + c_{E,1}, \\ e_1^{\text{nC}} &= 0, \\ e_2^{\text{C}} &= 12\beta_0^2 L_n^2 + L_n (-8\beta_0^2 + 4\beta_1 + 6\beta_0 c_{E,1}) + c_{E,2}, \\ e_2^{\text{nC}} &= \frac{16\pi^2 C_A^2}{n} \left(3 - \frac{11}{16n} - \frac{2}{3} \vec{S}^2 \right), \\ e_3^{\text{C}} &= 32\beta_0^3 L_n^3 + L_n^2 (-56\beta_0^3 + 28\beta_0\beta_1 + 24\beta_0^2 c_{E,1}) \\ &\quad + L_n (16\beta_0^3 - 16\beta_0\beta_1 + 4\beta_2 - 12\beta_0^2 c_{E,1} + 6\beta_1 c_{E,1} + 8\beta_0 c_{E,2}) \\ &\quad + c_{E,3} + 32\pi^2 C_A^3 \left[\ln \left(\frac{n\nu}{m_{\tilde{g}} C_A \alpha_s} \right) + S_1 \right], \end{aligned} \quad (\text{G.3})$$

wobei e_3^{nC} nicht bekannt ist. Die Koeffizienten $c_{E,n}$ sind gegeben durch

$$\begin{aligned}
c_{E,1} &= 2a_1 + 4S_1\beta_0, \\
c_{E,2} &= a_1^2 + 2a_2 + 4S_1\beta_1 + 4a_1\beta_0(3S_1 - 1) \\
&\quad + \beta_0^2 \left[S_1 \left(12S_1 - 8 - \frac{8}{n} \right) + 16S_2 - 8nS_3 + \frac{2\pi^2}{3} + 8n\zeta(3) \right], \\
c_{E,3} &= 2a_1a_2 + 2a_3 + 2a_1^2\beta_0(4S_1 - 5) + 4a_2\beta_0(4S_1 - 1) + 4a_1\beta_1(3S_1 - 1) \\
&\quad + 4S_1\beta_2 + \beta_0\beta_1 \left[S_1 \left(28S_1 - 16 - \frac{24}{n} \right) + 36S_2 - 16nS_3 + \frac{7\pi^2}{3} + 16n\zeta(3) \right] \\
&\quad + a_1\beta_0^2 \left[S_1 \left(48S_1 - 56 - \frac{32}{n} \right) + 64S_2 - 32nS_3 + 8 + \frac{8\pi^2}{3} + 32n\zeta(3) \right] \\
&\quad + \beta_0^3 \left\{ S_1 \left[S_1 \left(32S_1 - 56 - \frac{32}{n} \right) + 96S_2 - 64nS_3 + 16 + \frac{16}{n} + \frac{32\pi^2}{3} + 64n\zeta(3) \right] \right. \\
&\quad \quad + S_2 \left(8nS_2 + 16n^2S_3 - 32 - \frac{16}{n} - \frac{40n\pi^2}{3} - 16n^2\zeta(3) \right) \\
&\quad \quad + S_3 (96 + 16n + 8n^2\pi^2) - 104nS_4 + 48n^2S_5 - 144S_{2,1} + 224nS_{3,1} - 32n^2S_{3,2} \\
&\quad \quad \left. - 96n^2S_{4,1} - \frac{4\pi^2}{3} + \frac{2n\pi^4}{45} + \zeta(3)(32 - 16n - 8n^2\pi^2) + 96n^2\zeta(5) \right\}, \quad (\text{G.4})
\end{aligned}$$

mit $L_n = \ln(n\mu_r/(m_{\tilde{g}}C_A\alpha_s))$. Die harmonischen Summen $S_i(n)$, die verschachtelten harmonischen Summen $S_{i,j}(n)$ und $S_{i,j,k}(n)$ sowie die Zeta-Funktion $\zeta(i)$ sind gegeben durch

$$\begin{aligned}
S_i &\equiv S_i(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^i}, \\
S_{i,j} &\equiv S_{i,j}(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^i} S_j(k), \\
S_{i,j,k} &\equiv S_{i,j,k}(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^i} S_{j,k}(k), \\
\zeta(i) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^i}. \quad (\text{G.5})
\end{aligned}$$

Die Koeffizienten für die Wellenfunktion lauten

$$\begin{aligned}
f_1^C &= 6\beta_0 L_n + c_{\Psi,1}, \\
f_1^{\text{nC}} &= 0, \\
f_2^C &= 24\beta_0^2 L_n^2 + L_n (-12\beta_0^2 + 6\beta_1 + 8\beta_0 c_{\Psi,1}) + c_{\Psi,2}, \\
f_2^{\text{nC}} &= 16\pi^2 C_A^2 \left\{ 3L_n - 3S_1 + \frac{6}{n} - \frac{15}{8n^2} + \frac{21}{4} \right. \\
&\quad \left. + \vec{S}^2 \left[-\frac{2}{3}L_n + \frac{2}{3}S_1 - \frac{4}{3n} - \frac{7}{9} \right] \right\}, \\
f_3^C &= 80\beta_0^3 L_n^3 + L_n^2 (-108\beta_0^3 + 54\beta_0\beta_1 + 40\beta_0^2 c_{\Psi,1}) \\
&\quad + L_n (24\beta_0^3 - 24\beta_0\beta_1 + 6\beta_2 - 16\beta_0^2 c_{\Psi,1} + 8\beta_1 c_{\Psi,1} + 10\beta_0 c_{\Psi,2}) + c_{\Psi,3} \\
&\quad + 48\pi^2 C_A^3 \left[\ln \left(\frac{n\nu}{m_{\bar{g}} C_A \alpha_s} \right) + \frac{1}{3} \left(S_1 + 2nS_2 - 1 - \frac{n\pi^2}{3} \right) \right]. \tag{G.6}
\end{aligned}$$

Der Koeffizient f_2^{nC} ist in [61] nur für das Spintriplett angegeben. Die Umrechnung für den Pseudoskalar wurde mit den in [113] enthaltenen Formeln durchgeführt. Die Ausdrücke für die Koeffizienten $c_{\Psi,n}$ lauten

$$\begin{aligned}
c_{\Psi,1} &= 3a_1 + 2\beta_0 \left(S_1 + 2nS_2 - 1 - \frac{n\pi^2}{3} \right), \\
c_{\Psi,2} &= 3a_1^2 + 3a_2 + 2a_1\beta_0 \left(4S_1 + 8nS_2 - 7 - \frac{4n\pi^2}{3} \right) + 2\beta_1 \left(S_1 + 2nS_2 - 1 - \frac{n\pi^2}{3} \right) \\
&\quad + \beta_0^2 \left[S_1 \left(8S_1 + 16nS_2 - 20 - \frac{12}{n} - \frac{8n\pi^2}{3} \right) + S_2 \left(4n^2 S_2 + 8 - 8n - \frac{4n^2 \pi^2}{3} \right) \right. \\
&\quad \left. + 28nS_3 - 20n^2 S_4 - 24nS_{2,1} + 16n^2 S_{3,1} + 4 + \frac{(3+4n)\pi^2}{3} + \frac{n^2 \pi^4}{9} + 20n\zeta(3) \right], \\
c_{\Psi,3} &= a_1^3 + 6a_1 a_2 + 3a_3 + 10a_1^2 \beta_0 \left(S_1 + 2nS_2 - \frac{31}{10} - \frac{n\pi^2}{3} \right) \\
&\quad + 10a_2 \beta_0 \left(S_1 + 2nS_2 - \frac{8}{5} - \frac{n\pi^2}{3} \right) + 8a_1 \beta_1 \left(S_1 + 2nS_2 - \frac{7}{4} - \frac{n\pi^2}{3} \right) \\
&\quad + 2\beta_2 \left(S_1 + 2nS_2 - 1 - \frac{n\pi^2}{3} \right) \\
&\quad + \beta_0 \beta_1 \left[S_1 \left(22S_1 + 40nS_2 - 44 - \frac{36}{n} - \frac{20n\pi^2}{3} \right) \right. \\
&\quad \left. + S_2 \left(8n^2 S_2 + 14 - 16n - \frac{8n^2 \pi^2}{3} \right) + 64nS_3 - 40n^2 S_4 - 56nS_{2,1} \right. \\
&\quad \left. + 32n^2 S_{3,1} + 8 + \frac{(21+16n)\pi^2}{6} + \frac{2n\pi^4}{9} + 48n\zeta(3) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +a_1\beta_0^2 \left[S_1 \left(40S_1 + 80nS_2 - 116 - \frac{60}{n} - \frac{40n\pi^2}{3} \right) \right. \\
& \quad + S_2 \left(20n^2S_2 + 40 - 72n - \frac{20n^2\pi^2}{3} \right) + 140nS_3 - 100n^2S_4 - 120nS_{2,1} \\
& \quad \left. + 80n^2S_{3,1} + 48 + (5 + 12n)\pi^2 + \frac{5n^2\pi^4}{9} + 100n\zeta(3) \right] \\
& +\beta_0^3 \left\{ S_1 \left[4S_1 \left(4S_1 + 16nS_2 - 19 - \frac{6}{n} - \frac{8n\pi^2}{3} \right) + 8S_2 (3n^2S_2 + 2 - 14n - n^2\pi^2) \right. \right. \\
& \quad \left. + 104nS_3 - 120n^2S_4 - 112nS_{2,1} + 96n^2S_{3,1} + 80 + \frac{64}{n} + \frac{2(29 + 28n)\pi^2}{3} \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{2n^2\pi^4}{3} + 120n\zeta(3) \right] \right. \\
& \quad + S_2 \left[-4n(17 + 2n)S_2 + 72n^2S_3 - 96n^2S_{2,1} + 64n^3S_{3,1} - 96 + 16n - \frac{24}{n} \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{8n(5 - n)\pi^2}{3} - 8n^2\zeta(3) \right] \right. \\
& \quad + S_3 \left(-16n^3S_3 + 64 - 16n - 20n^2\pi^2 + 32n^3\zeta(3) \right) + S_4 \left(68n + 40n^2 + \frac{64n^3\pi^2}{3} \right) \\
& \quad - 312n^2S_5 + 144n^3S_6 + S_{2,1} (48n - 120 + 16n^2\pi^2) - 32S_{3,1} \left(\frac{15n}{2} + n^2 + \frac{n^3\pi^2}{3} \right) \\
& \quad + 384n^2S_{3,2} + 576n^2S_{4,1} - 224n^3S_{4,2} - 256n^3S_{5,1} + 256nS_{2,1,1} + 64n^2S_{2,2,1} \\
& \quad - 64n^3S_{2,3,1} - 448n^2S_{3,1,1} + 192n^3S_{4,1,1} - 8 - \frac{8(2 + n)\pi^2}{3} - \frac{n(83 + 10n)\pi^4}{45} \\
& \quad \left. + \frac{4n^3\pi^6}{105} + \zeta(3) (48 - 80n - 12n^2\pi^2 - 16n^3\zeta(3)) - 40n^2\zeta(5) \right\}. \tag{G.7}
\end{aligned}$$

Anhang H

Spin-Projektionsformalismus

Ähnlich wie für die Farbkonfiguration muß die Amplitude der $\tilde{g}\tilde{g}$ -Produktion auf den Spin des Endzustands projiziert werden. In [23, 24] wird eine sehr elegante Methode vorgeschlagen, welche hier dargestellt ist. Letztendlich reduziert sich das Problem auf eine Ersetzung, bei der die Spinoren der beiden Gluinos und deren Spinsumme durch geeignete Projektoren in der Fermionkette ausgetauscht werden.

Die *Dirac-Spinoren* u und v eines freien Spin-1/2-Teilchens der Masse m sind als Funktionen der z -Komponente des Spins s und des Impulses p mit der Energie $E = \pm E_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ gegeben. Sie sind die Lösungen der *Dirac-Gleichung*

$$\begin{aligned} (\not{p} - m) u(p, s) &= 0, & \bar{u}(p, s) (\not{p} - m) &= 0, \\ (\not{p} + m) v(p, s) &= 0, & \bar{v}(p, s) (\not{p} + m) &= 0, \end{aligned} \quad (\text{H.1})$$

mit den adjungierten Spinoren $\bar{u}(p, s) \equiv u^\dagger(p, s)\gamma_0$ bzw. $\bar{v}(p, s) \equiv v^\dagger(p, s)\gamma_0$. Ihre Normierung ist definiert über die Gleichungen

$$\begin{aligned} \bar{u}(p, s_1) u(p, s_2) &= 2m \delta_{s_1 s_2}, \\ \bar{v}(p, s_1) v(p, s_2) &= -2m \delta_{s_1 s_2}. \end{aligned} \quad (\text{H.2})$$

Eine explizite Darstellung ist gegeben durch

$$\begin{aligned} u(p, s) &= \frac{\not{p} + m}{\sqrt{E_p + m}} \begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix}, & \bar{u}(p, s) &= \left(\chi_s^\dagger, 0 \right) \frac{\not{p} + m}{\sqrt{E_p + m}}, \\ v(p, s) &= \frac{\not{p} - m}{\sqrt{E_p + m}} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_s \end{pmatrix}, & \bar{v}(p, s) &= \left(0, \eta_s^\dagger \right) \frac{\not{p} - m}{\sqrt{E_p + m}}, \end{aligned} \quad (\text{H.3})$$

mit den zweikomponentigen Spinoren

$$\chi_{+1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \eta_{+1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \eta_{-1/2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{H.4})$$

Das System aus zwei Spin-1/2-Teilchen existiert in einem wohldefinierten Zustand mit Spin S und dessen z -Komponente S_z . Somit muß der Produktraum $|1/2, s_1\rangle \otimes |1/2, s_2\rangle$ in die Basis $|S, S_z\rangle$ transformiert werden, wobei die *Clebsch-Gordon-Koeffizienten* (CGK) des Basiswechsels bekannt sind. Sie lauten

$$\begin{aligned} \langle 1/2, +1/2; 1/2, +1/2 | 1, +1 \rangle &= \langle 1/2, -1/2; 1/2, -1/2 | 1, -1 \rangle = 1, \\ \langle 1/2, +1/2; 1/2, -1/2 | 1, 0 \rangle &= \langle 1/2, -1/2; 1/2, +1/2 | 1, 0 \rangle = 1/\sqrt{2}, \\ \langle 1/2, +1/2; 1/2, -1/2 | 0, 0 \rangle &= -\langle 1/2, -1/2; 1/2, +1/2 | 0, 0 \rangle = 1/\sqrt{2}. \end{aligned} \quad (\text{H.5})$$

Die Produktion des Systems mit den Quantenzahlen S und S_z ist schließlich proportional zur Gewichtung der Summe über die Spinoren mit den CGK

$$\begin{aligned} &\sum_{s_1 s_2} v(p_1, s_1) \bar{u}(p_2, s_2) \langle 1/2, s_1; 1/2, s_2 | S, S_z \rangle \\ &= \frac{\not{p}_1 - m}{\sqrt{E_{p_1} + m}} \left[\sum_{s_1 s_2} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_{s_1} \end{pmatrix} (\chi_{s_2}^\dagger, 0) \langle 1/2, s_1; 1/2, s_2 | S, S_z \rangle \right] \frac{\not{p}_2 + m}{\sqrt{E_{p_2} + m}} \\ &= \frac{\not{p}_1 - m}{\sqrt{E_{p_1} + m}} \frac{1 - \gamma_0}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \Pi_{SS_z} \frac{\not{p}_2 + m}{\sqrt{E_{p_2} + m}}, \end{aligned} \quad (\text{H.6})$$

mit den Projektoren für das Singulett und das Triplet

$$\begin{aligned} \Pi_{00} &= \gamma_5, \\ \Pi_{1, s_z} &= -\not{\epsilon}_{(S_z)} \quad \text{mit} \quad \epsilon_{(S_z)}^\mu = \begin{cases} (0, 0, 0, 1) & \text{für } S_z = 0 \\ (0, \mp 1, i, 0)/\sqrt{2} & \text{für } S_z = \pm 1 \end{cases}. \end{aligned} \quad (\text{H.7})$$

Die Vierervektoren $\epsilon_{(S_z)}^\mu$ übernehmen die Rolle der Polarisationsvektoren des Vektorteilchens mit Spin $S = 1$.

Anhang I

Phasenraumintegration

Der *differentielle Lorentz-invariante Phasenraum* (LIPS) für einen Prozess mit n Teilchen im Endzustand (mit Impulsen k_i sowie Massen m_i) und beliebig vielen Teilchen im Anfangszustand, wobei die Summe ihrer Impulse gleich P ist, sei in D Dimensionen gegeben durch

$$d\phi(n) = d\text{LIPS} = (2\pi)^D \delta^{(D)} \left(P - \sum_{i=1}^n k_i \right) \prod_{j=1}^n \left[\frac{d^D k_j}{(2\pi)^{D-1}} \delta(k_j^2 - m_j^2) \theta(k_j^0) \right]. \quad (\text{I.1})$$

Im folgenden sind die Phasenräume der für diese Arbeit benötigten Prozesse aufgelistet.

$$\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2} \quad , \quad \mathbf{m}_1 = \mathbf{m}_2 = \mathbf{0}$$

Für den Zerfall eines massiven Teilchens in zwei masselose Teilchen ergibt sich mit der in Abb. I.1 gegebenen Kinematik der totale Phasenraum

$$\phi(2) = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{4\pi}{M^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1 - \varepsilon)}{\Gamma(2 - 2\varepsilon)}, \quad (\text{I.2})$$

wobei erneut $D = 4 - 2\varepsilon$ gilt.

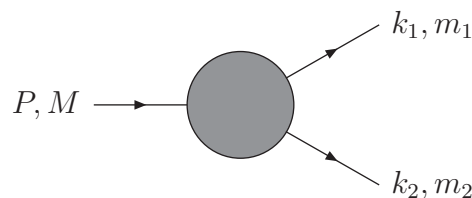


Abbildung I.1: Kinematik des $1 \rightarrow 2$ -Prozesses.

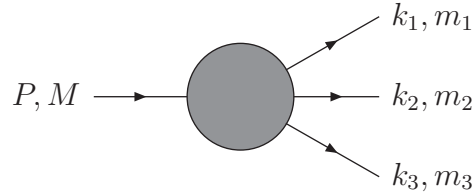


Abbildung I.2: Kinematik des 1→3-Prozesses.

$$\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2} \quad , \quad \mathbf{m}_1 = \mathbf{m}_2 = \mathbf{m} > \mathbf{0}$$

Haben die Teilchen hingegen die gleiche von Null verschiedene Masse m , so erhält man in $D = 4$ Dimensionen

$$\phi(2) = \frac{1}{8\pi} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{M^2}} . \quad (\text{I.3})$$

$$\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{3} \quad , \quad \mathbf{m}_1 = \mathbf{m}_2 = \mathbf{m}_3 = \mathbf{0}$$

Für den Drei-Teilchen-Phasenraum, dessen Kinematik in Abb. (I.2) gegeben ist, erhält man für drei masselose Teilchen im Endzustand

$$d\phi(3) = \frac{M^2}{2(4\pi)^3} \left(\frac{4\pi}{M^2} \right)^{2\varepsilon} \frac{1}{\Gamma(2 - 2\varepsilon)} \left[\prod_{n=1}^3 (1 - x_n) \right]^{-\varepsilon} dx_1 dx_2 dx_3 \delta \left(2 - \sum_{n=1}^3 x_n \right) , \quad (\text{I.4})$$

mit

$$x_n = 2 \frac{P \cdot k_n}{P^2} \quad \text{für } n = 1, 2, 3 . \quad (\text{I.5})$$

Sehr hilfreich ist die Substitution

$$\begin{aligned} x_1 &= x , \\ x_2 &= 1 - xy , \\ x_3 &= 1 - x(1 - y) , \end{aligned} \quad (\text{I.6})$$

für welche man mit den kinematischen Grenzen für die Integration effektiv ein zweidimensionales Integral erhält

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dx_1 \int_{1-x_1}^1 dx_2 \left[(1-x_1)(1-x_2)(x_1+x_2-1) \right]^{-\varepsilon} f(x_1, x_2, x_3 = 2 - x_1 - x_2) \\ &= \int_0^1 dx x^{1-2\varepsilon} (1-x)^{-\varepsilon} \int_0^1 dy \left[y(1-y) \right]^{-\varepsilon} f(x, y) . \end{aligned} \quad (\text{I.7})$$

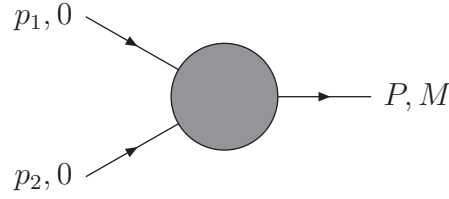


Abbildung I.3: Kinematik des 2→1-Prozesses.

$$\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{3} \quad , \quad \mathbf{m}_1 = \mathbf{m}_2 = \mathbf{0} \, , \, \mathbf{m}_3 = \mathbf{m} > \mathbf{0}$$

Ist hingegen eine der Massen von Null verschieden, so erhält man mit

$$d\phi(3) = \frac{M^2}{2(4\pi)^3} dx_1 dx_2 dx_3 \delta \left(2 - \sum_{n=1}^3 x_n \right) , \quad (\text{I.8})$$

den x_n aus Gl. (I.5) und der Transformation

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - x , \\ x_2 &= 1 - y , \\ x_3 &= x + y , \end{aligned} \quad (\text{I.9})$$

für $\varepsilon = 0$ das zweidimensionale Phasenraumintegral

$$\int_{\rho^2}^1 dx \int_{\frac{\rho^2}{x}}^{1-x+\rho^2} dy f(x, y) , \quad (\text{I.10})$$

wobei $\rho^2 = m^2/M^2 < 1$ gilt.

2 → 1

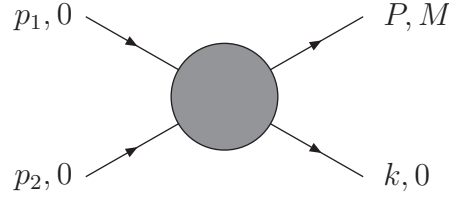
Für die Produktionsprozesse mit zwei masselosen Teilchen im Anfangszustand erhält man mit der in Abb. I.3 gegebenen Kinematik und den *Mandelstam-Variablen*

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 , \\ t &= (p_1 - k)^2 , \\ u &= (p_2 - k)^2 , \end{aligned} \quad (\text{I.11})$$

den ausintegrierten Phasenraum

$$\phi(1) = \frac{2\pi}{s} \delta(1 - z) , \quad (\text{I.12})$$

wobei $z = M^2/s$ gilt.

Abbildung I.4: Kinematik des $2 \rightarrow 2$ -Prozesses. **$2 \rightarrow 2$**

Hat man jedoch weiterhin ein massloses Teilchen im Endzustand, so erhält man für den differentiellen Phasenraum

$$d\phi(2) = \frac{1}{8\pi s} \frac{1}{\Gamma(1-\varepsilon)} \left(\frac{4\pi s}{ut} \right)^\varepsilon dt, \quad (\text{I.13})$$

mit den Mandelstam-Variablen wie in Gl. (I.11). Führt man hier erneut eine Transformation durch

$$\begin{aligned} s &= \frac{M^2}{z}, \\ t &= -\frac{M^2}{z}(1-z)(1-y), \\ u &= -\frac{M^2}{z}(1-z)y, \end{aligned} \quad (\text{I.14})$$

so vereinfacht sich das auszuführende Integral zu

$$z^\varepsilon (1-z)^{1-2\varepsilon} \int_0^1 dy [y(1-y)]^{-\varepsilon} f(y, z). \quad (\text{I.15})$$

Anhang J

Berechnung der Green'schen Funktion

Hier wird die Berechnung der Green'schen Funktion für das Potential in Born'scher Näherung dargestellt (für NLO-Korrekturen siehe [41]). In [114] ist für das Potential $V(\mathbf{q}) = -4\pi C\alpha/\mathbf{q}^2$ eine sehr kompakte Darstellung der Green'schen Funktion gegeben

$$\begin{aligned}
 G(r, E) &= -\frac{imk}{2\pi} e^{ikr} \int_0^\infty dt \left(\frac{1+t}{t}\right)^{i\nu} e^{2ikrt} \\
 &\xrightarrow{r \rightarrow 0} -\frac{imk}{2\pi} \int_0^\infty dt \left(\frac{1+t}{t}\right)^{i\nu}, \tag{J.1}
 \end{aligned}$$

mit $k = imC\alpha/(2\lambda)$, $\nu = i/\lambda$ und $\lambda = C\alpha/(2\sqrt{-E/m})$. Das Integral in Gl. (J.1) divergiert für $r \rightarrow 0$, wie auch die freie Green'sche Funktion sich für kleine Werte von r proportional zu $1/r$ verhält. Somit werden die ersten beiden Terme der Entwicklung des Integranden in α zunächst subtrahiert, um ein endliches Ergebnis für die Integration zu bekommen. Dadurch erhält man

$$\begin{aligned}
 &-\frac{imk}{2\pi} \int_0^\infty dt \left[\left(\frac{t+1}{t}\right)^\lambda - \lambda \ln\left(\frac{t+1}{t}\right) - 1 \right] \\
 &= -\frac{C\alpha m^2}{4\pi} [\Psi^{(0)}(1-\lambda) + \gamma_E], \tag{J.2}
 \end{aligned}$$

als das gesuchte Teilergebnis der Green'schen Funktion am Ursprung. Die Berechnung der divergenten subtrahierten Terme wird im $\overline{\text{MS}}$ -Schema durchgeführt und kann in [41]

gefunden werden. Es gilt

$$\begin{aligned}
G_{\text{diff}}(0, E) &= \int \frac{d^{D-1} \mathbf{p}}{(2\pi)^{D-1}} \frac{d^{D-1} \mathbf{p}'}{(2\pi)^{D-1}} \tilde{G}_{\text{diff}}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; E) \\
&\equiv \int \frac{d^{D-1} \mathbf{p}}{(2\pi)^{D-1}} \frac{d^{D-1} \mathbf{p}'}{(2\pi)^{D-1}} \left[(2\pi)^{D-1} \delta^{(D-1)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \frac{1}{\frac{\mathbf{p}^2}{m} - E} \right. \\
&\quad \left. + \frac{4\pi C\alpha}{\left(\frac{\mathbf{p}^2}{m} - E\right) (\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2 \left(\frac{\mathbf{p}'^2}{m} - E\right)} \right] \\
&= -\frac{m^2 \sqrt{-\frac{E}{m}}}{4\pi} + \frac{C\alpha m^2}{4\pi} \left[\frac{1}{4\varepsilon} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\mu^2}{-4mE} \right) \right]. \tag{J.3}
\end{aligned}$$

Wie in [115] diskutiert wird, erhält man die Green'sche Funktion durch die Subtraktion des ultraviolett divergenten $1/\varepsilon$ -Terms. Damit läßt sich die Summe der Terme aus den Gl. (J.2) und (J.3) schreiben als

$$G(r, E) = -\frac{C\alpha m^2}{4\pi} \left[\frac{\sqrt{-\frac{E}{m}}}{C\alpha} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{-4mE}{\mu^2} \right) \Psi^{(0)} \left(1 - \frac{C\alpha}{2\sqrt{-\frac{E}{m}}} \right) + \gamma_E \right], \tag{J.4}$$

was mit dem LO-Resultat von Gl. (5.14) übereinstimmt.

Anhang K

Die Generalisierte Hypergeometrische Funktion

Die GHF ist definiert durch die Reihendarstellung

$${}_pF_q(a_1, a_2, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n (a_2)_n \cdots (a_p)_n z^n}{(b_1)_n \cdots (b_q)_n n!}, \quad (\text{K.1})$$

mit den *Pochhammer-Symbolen* $(x)_i = \Gamma(x+i)/\Gamma(x)$ sowie der Einschränkung $b_i \neq 0, -1, \dots$ für $i = 1, 2, \dots, q$. Die Reihe konvergiert, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist

- (1) $p \leq q$, $|z| < \infty$,
- (2) $p = q + 1$, $|z| < 1$,
- (3) $p = q + 1$, $|z| = 1$, $\operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=1}^q b_n - \sum_{n=1}^{q+1} a_n \right\} > 0$,
- (4) $p = q + 1$, $|z| = 1$, $z \neq 1$, $-1 < \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=1}^q b_n - \sum_{n=1}^{q+1} a_n \right\} \leq 0$.

Für die numerische Auswertung der Green'schen Funktion aus Gl. (5.14) benötigt man die GHF ${}_4F_3(1, 1, 1, 1; 2, 2, x; 1)$ mit $x \in \mathbb{C}$. Daher muß x die Bedingung (3) erfüllen. Gilt nun $\operatorname{Re} \{x\} < 0$, so ist die Konvergenz der Reihe nicht sichergestellt.

In [116] wird ein Algorithmus vorgestellt, mit dem diese Funktion durch eine Partialbruchzerlegung in eine Summe von GHF zerlegt werden kann, deren Konvergenz gesichert ist. Das Verfahren wird hier kurz dargestellt.

Falls nun $-1 < \operatorname{Re} \{x\} < 0$ gegeben sei, so wird die GHF ${}_4F_3(2, 2, 2, 2; 3, 3, x+1; 1)$ mit $(1+n)^4/[(2+n)(x+n)]$ sowie dessen Inversem multipliziert. Letzteres wird mit den Gamma-Funktionen der Reihendarstellung von ${}_4F_3(2, 2, 2, 2; 3, 3, x+1; 1)$ kombiniert,

während man den ursprünglichen Faktor durch eine Partialbruchzerlegung darstellen kann als

$$\frac{(1+n)^4}{(2+n)^2(x+n)} = n - x + \frac{1}{2-x} \left[\frac{(x-1)^4}{(x+n)(2-x)} + \frac{(7-4x)}{(2+n)(2-x)} - \frac{1}{(2+n)^2} \right]. \quad (\text{K.2})$$

Der Term linear in n reproduziert die Funktion ${}_4F_3(2, 2, 2, 2; 3, 3, x+1; 1)$, und man erhält nach einigen Umformungen die gewünschte Reduktionsgleichung

$$\begin{aligned} {}_4F_3(1, 1, 1, 1; 2, 2, x; 1) &= \frac{1}{4x^2(2-x)^2} \left[4(x-1)^4 {}_4F_3(1, 1, 1, 1; 2, 2, x+1; 1) \right. \\ &\quad + 2x(7-4x) {}_4F_3(1, 1, 1, 1; 3, 2, x; 1) \\ &\quad \left. + x(x-2) {}_4F_3(1, 1, 1, 1; 3, 3, x; 1) \right]. \quad (\text{K.3}) \end{aligned}$$

Um beliebige Werte $\operatorname{Re}\{x\} < 0$ mit $x \neq -1, -2, \dots$ zu erreichen, muß das Verfahren wiederholt angewandt werden. Man benötigt hierfür die zwei Substitutionen

$$\begin{aligned} {}_4F_3(1, 1, 1, 1; a, a, x; 1) &= \frac{1}{a^2x[x+2(a-2)](a-x)^2} \\ &\quad \times \left[a^2(x-1)^4 {}_4F_3(1, 1, 1, 1; a, a, x+1; 1) \right. \\ &\quad + a(a-1)^3x(3a+1-4x) {}_4F_3(1, 1, 1, 1; a+1, a, x; 1) \\ &\quad \left. - (a-1)^4x(a-x) {}_4F_3(1, 1, 1, 1; a+1, a+1, x; 1) \right], \\ {}_4F_3(1, 1, 1, 1; a, b, x; 1) &= \frac{1}{a+b+x-4} \left[\frac{(x-1)^4}{x(x-a)(x-b)} {}_4F_3(1, 1, 1, 1; a, b, x+1; 1) \right. \\ &\quad + \frac{(a-1)^4}{a(a-b)(a-x)} {}_4F_3(1, 1, 1, 1; a+1, b, x; 1) \\ &\quad \left. + \frac{(b-1)^4}{b(b-a)(b-x)} {}_4F_3(1, 1, 1, 1; a, b+1, x; 1) \right], \quad (\text{K.4}) \end{aligned}$$

mit $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ und $a \neq b$.

Literaturverzeichnis

- [1] M. R. Kauth, J. H. Kühn, P. Marquard and M. Steinhauser, Nucl. Phys. B **831** (2010) 285 [arXiv:0910.2612 [hep-ph]].
- [2] S. P. Martin, In *Kane, G.L. (ed.): Perspectives on supersymmetry* 1-98. [hep-ph/9709356].
- [3] V. D. Barger, K. Hagiwara, W. Y. Keung and J. Woodside, Phys. Rev. D **31** (1985) 528.
- [4] H. E. Haber and G. L. Kane, Phys. Rept. **117**, 75 (1985).
- [5] B. C. Allanach *et al.*, in *Proc. of the APS/DPF/DPB Summer Study on the Future of Particle Physics (Snowmass 2001)* ed. N. Graf, Eur. Phys. J. C **25** (2002) 113 [arXiv:hep-ph/0202233].
- [6] A. Djouadi, J. L. Kneur and G. Moultaka, Comput. Phys. Commun. **176** (2007) 426 [arXiv:hep-ph/0211331].
- [7] M. Mühlleitner, A. Djouadi and Y. Mambrini, Comput. Phys. Commun. **168**, 46 (2005) [arXiv:hep-ph/0311167].
- [8] G. F. Sterman, Nucl. Phys. B **281**, 310 (1987).
- [9] S. Catani and L. Trentadue, Nucl. Phys. B **327**, 323 (1989).
- [10] A. Kulesza and L. Motyka, Phys. Rev. Lett. **102** (2009) 111802 [arXiv:0807.2405 [hep-ph]].
- [11] U. Langenfeld and S. O. Moch, Phys. Lett. B **675** (2009) 210 [arXiv:0901.0802 [hep-ph]].
- [12] A. Kulesza and L. Motyka, Phys. Rev. D **80** (2009) 095004 [arXiv:0905.4749 [hep-ph]].
- [13] W. Beenakker, S. Brensing, M. Kramer, A. Kulesza, E. Laenen and I. Niessen, JHEP **0912**, 041 (2009) [arXiv:0909.4418 [hep-ph]].

- [14] W. Beenakker, S. Brensing, M. Kramer, A. Kulesza, E. Laenen and I. Niessen, JHEP **1008**, 098 (2010) [arXiv:1006.4771 [hep-ph]].
- [15] M. Beneke, P. Falgari, C. Schwinn, Nucl. Phys. **B842** (2011) 414. [arXiv:1007.5414 [hep-ph]].
- [16] V. S. Fadin and V. A. Khoze, JETP Lett. **46**, 525 (1987) [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **46**, 417 (1987)].
- [17] V. S. Fadin and V. A. Khoze, Sov. J. Nucl. Phys. **48** (1988) 309 [Yad. Fiz. **48** (1988) 487].
- [18] V. S. Fadin, V. A. Khoze and T. Sjöstrand, Z. Phys. C **48**, 613 (1990).
- [19] E. E. Salpeter and H. A. Bethe, Phys. Rev. **84** (1951) 1232.
- [20] M. J. Strassler and M. E. Peskin, Phys. Rev. D **43**, 1500 (1991).
- [21] A. J. W. Sommerfeld, *Atombau und Spektrallinien* Band 2, (Vieweg Verlagm Braunschweig 1939).
- [22] A. D. Sakharov, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **18** (1948) 631-635.
- [23] J. H. Kühn, J. Kaplan and E. G. O. Safiani, Nucl. Phys. B **157**, 125 (1979).
- [24] B. Guberina, J. H. Kühn, R. D. Peccei and R. Rückl, Nucl. Phys. B **174**, 317 (1980).
- [25] K. Hagiwara, C. B. Kim and T. Yoshino, Nucl. Phys. B **177** (1981) 461.
- [26] R. Barbieri, M. Caffo, R. Gatto and E. Remiddi, Nucl. Phys. B **192** (1981) 61.
- [27] R. Barbieri, M. Caffo, R. Gatto and E. Remiddi, Phys. Lett. B **95** (1980) 93.
- [28] R. Barbieri, R. Gatto and E. Remiddi, Phys. Lett. B **61** (1976) 465.
- [29] G. T. Bodwin, E. Braaten and G. P. Lepage, Phys. Rev. D **51** (1995) 1125 [Erratum-ibid. D **55** (1997) 5853] [arXiv:hep-ph/9407339].
- [30] G. P. Lepage, L. Magnea, C. Nakhleh, U. Magnea and K. Hornbostel, Phys. Rev. D **46** (1992) 4052 [arXiv:hep-lat/9205007].
- [31] W. E. Caswell and G. P. Lepage, Phys. Lett. B **167** (1986) 437.
- [32] P. L. Cho and A. K. Leibovich, Phys. Rev. D **53** (1996) 150 [arXiv:hep-ph/9505329].
- [33] P. L. Cho and A. K. Leibovich, Phys. Rev. D **53** (1996) 6203 [arXiv:hep-ph/9511315].
- [34] M. Butenschoen and B. A. Kniehl, Phys. Rev. Lett. **104** (2010) 072001 [arXiv:0909.2798 [hep-ph]].

- [35] M. Butenschoen and B. A. Kniehl, Phys. Rev. Lett. **106** (2011) 022003 [arXiv:1009.5662 [hep-ph]].
- [36] E. Braaten, arXiv:hep-ph/9702225.
- [37] A. Pineda and J. Soto, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **64**, 428 (1998) [arXiv:hep-ph/9707481].
- [38] N. Brambilla, A. Pineda, J. Soto *et al.*, Nucl. Phys. **B566** (2000) 275. [hep-ph/9907240].
- [39] B. A. Kniehl, A. A. Penin, V. A. Smirnov and M. Steinhauser, Nucl. Phys. B **635**, 357 (2002) [arXiv:hep-ph/0203166].
- [40] N. Brambilla *et al.*, Eur. Phys. J. C **71** (2011) 1534 [arXiv:1010.5827 [hep-ph]].
- [41] A. Pineda and A. Signer, Nucl. Phys. B **762** (2007) 67 [arXiv:hep-ph/0607239].
- [42] W. Y. Keung and A. Khare, Phys. Rev. D **29**, 2657 (1984).
- [43] J. H. Kühn and S. Ono, Phys. Lett. B **142**, 436 (1984).
- [44] J. T. Goldman and H. Haber, Physica **15D**, 181 (1985).
- [45] V. G. Kartvelishvili, A. V. Tkabladze and E. G. Chikovani, Z. Phys. C **43** (1989) 509.
- [46] V. G. Kartvelishvili, A. V. Tkabladze and E. G. Chikovani, Sov. J. Nucl. Phys. **51**, 546 (1990) [Yad. Fiz. **51**, 859 (1990)].
- [47] E. Chikovani, V. Kartvelishvili, R. Shanidze and G. Shaw, Phys. Rev. D **53**, 6653 (1996) [arXiv:hep-ph/9602249].
- [48] A. J. MacFarlane, A. Sudbery and P. H. Weisz, Commun. Math. Phys. **11** (1968) 77.
- [49] O. V. Tarasov, A. A. Vladimirov and A. Y. Zharkov, Phys. Lett. B **93** (1980) 429.
- [50] S. A. Larin and J. A. M. Vermaseren, Phys. Lett. B **303** (1993) 334 [arXiv:hep-ph/9302208].
- [51] T. Appelquist, M. Dine, I. J. Muzinich, Phys. Rev. **D17** (1978) 2074.
- [52] W. Fischler, Nucl. Phys. **B129** (1977) 157-174.
- [53] M. Peter, Phys. Rev. Lett. **78**, 602 (1997) [arXiv:hep-ph/9610209].
- [54] M. Peter, Nucl. Phys. B **501**, 471 (1997) [arXiv:hep-ph/9702245].
- [55] Y. Schröder, Phys. Lett. B **447**, 321 (1999) [arXiv:hep-ph/9812205].

- [56] C. Anzai, Y. Kiyo and Y. Sumino, Nucl. Phys. B **838** (2010) 28 [arXiv:1004.1562 [hep-ph]].
- [57] A. V. Smirnov, V. A. Smirnov and M. Steinhauser, Phys. Lett. B **668** (2008) 293 [arXiv:0809.1927 [hep-ph]].
- [58] C. Anzai, Y. Kiyo and Y. Sumino, Phys. Rev. Lett. **104** (2010) 112003 [arXiv:0911.4335 [hep-ph]].
- [59] A. V. Smirnov, V. A. Smirnov and M. Steinhauser, Phys. Rev. Lett. **104** (2010) 112002 [arXiv:0911.4742 [hep-ph]].
- [60] S. Titard and F. J. Yndurain, Phys. Rev. D **49**, 6007 (1994) [arXiv:hep-ph/9310236].
- [61] M. Beneke, Y. Kiyo and K. Schuller, Nucl. Phys. B **714**, 67 (2005) [arXiv:hep-ph/0501289].
- [62] M. Melles, Phys. Rev. D **58**, 114004 (1998) [arXiv:hep-ph/9805216].
- [63] M. Melles, Phys. Rev. D **62**, 074019 (2000) [arXiv:hep-ph/0001295].
- [64] K. G. Chetyrkin, J. H. Kuhn, M. Steinhauser, Comput. Phys. Commun. **133** (2000) 43-65. [hep-ph/0004189].
- [65] A. A. Penin, V. A. Smirnov and M. Steinhauser, Nucl. Phys. B **716** (2005) 303 [arXiv:hep-ph/0501042].
- [66] M. Beneke, Phys. Lett. B **434** (1998) 115 [arXiv:hep-ph/9804241].
- [67] J. Bartels, Z. Phys. C **60** (1993) 471.
- [68] A. Bauer, L. Mihaila and J. Salomon, JHEP **0902**, 037 (2009) [arXiv:0810.5101 [hep-ph]].
- [69] G. 't Hooft, M. J. G. Veltman, Nucl. Phys. **B44** (1972) 189-213.
- [70] W. Siegel, Phys. Lett. B **84** (1979) 193.
- [71] R. V. Harlander, L. Mihaila and M. Steinhauser, Phys. Rev. D **76** (2007) 055002 [arXiv:0706.2953 [hep-ph]].
- [72] L. Mihaila, Phys. Lett. B **681** (2009) 52 [arXiv:0908.3403 [hep-ph]].
- [73] S. P. Martin and M. T. Vaughn, Phys. Lett. B **318** (1993) 331 [arXiv:hep-ph/9308222].
- [74] T. Kinoshita, J. Math. Phys. **3** (1962) 650.
- [75] T. D. Lee and M. Nauenberg, Phys. Rev. **133** (1964) B1549.

- [76] T. Hahn and M. Pérez-Victoria, *Comput. Phys. Commun.* **118** (1999) 153 [arXiv:hep-ph/9807565].
- [77] T. Hahn, *Comput. Phys. Commun.* **140** (2001) 418-431. [hep-ph/0012260].
- [78] T. Hahn, C. Schappacher, *Comput. Phys. Commun.* **143** (2002) 54-68. [hep-ph/0105349].
- [79] A. Denner, H. Eck, O. Hahn and J. Kublbeck, *Phys. Lett. B* **291** (1992) 278.
- [80] A. Denner, H. Eck, O. Hahn and J. Kublbeck, *Nucl. Phys. B* **387** (1992) 467.
- [81] G. Passarino and M. J. G. Veltman, *Nucl. Phys. B* **160** (1979) 151.
- [82] J. A. M. Vermaseren, [math-ph/0010025].
- [83] J. H. Kühn and E. Mirkes, *Phys. Rev. D* **48**, 179 (1993) [arXiv:hep-ph/9301204].
- [84] V. N. Gribov and L. N. Lipatov, *Sov. J. Nucl. Phys.* **15** (1972) 438 [*Yad. Fiz.* **15** (1972) 781].
- [85] V. N. Gribov and L. N. Lipatov, *Sov. J. Nucl. Phys.* **15** (1972) 675 [*Yad. Fiz.* **15** (1972) 1218].
- [86] L. N. Lipatov, *Sov. J. Nucl. Phys.* **20** (1975) 94 [*Yad. Fiz.* **20** (1974) 181].
- [87] G. Altarelli and G. Parisi, *Nucl. Phys. B* **126** (1977) 298.
- [88] Y. L. Dokshitzer, *Sov. Phys. JETP* **46** (1977) 641 [*Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **73** (1977) 1216].
- [89] A. D. Martin, W. J. Stirling, R. S. Thorne and G. Watt, *Eur. Phys. J. C* **63**, 189 (2009) [arXiv:0901.0002 [hep-ph]].
- [90] The CMS Collaboration, CMS PAS SBM 07 001.
- [91] P. R. Harrison and C. H. Llewellyn Smith, *Nucl. Phys. B* **213** (1983) 223 [Erratum-*ibid.* B **223** (1983) 542].
- [92] S. Dawson, E. Eichten and C. Quigg, *Phys. Rev. D* **31** (1985) 1581.
- [93] W. Beenakker, R. Höpker, M. Spira and P. M. Zerwas, *Nucl. Phys. B* **492** (1997) 51 [arXiv:hep-ph/9610490].
- [94] W. Beenakker, R. Höpker and M. Spira, arXiv:hep-ph/9611232.
- [95] W. Beenakker, M. Kramer, T. Plehn, M. Spira and P. M. Zerwas, *Nucl. Phys. B* **515** (1998) 3 [arXiv:hep-ph/9710451].
- [96] K. Hagiwara and H. Yokoya, *JHEP* **0910** (2009) 049 [arXiv:0909.3204 [hep-ph]].

- [97] K. Hagiwara, Y. Sumino and H. Yokoya, Phys. Lett. B **666**, 71 (2008) [arXiv:0804.1014 [hep-ph]].
- [98] Y. Kiyo, J. H. Kuhn, S. Moch, M. Steinhauser and P. Uwer, Eur. Phys. J. C **60** (2009) 375 [arXiv:0812.0919 [hep-ph]].
- [99] A. Kovner and M. Lublinsky, JHEP **0702** (2007) 058 [arXiv:hep-ph/0512316].
- [100] W. K. Tung, H. L. Lai, A. Belyaev, J. Pumplin, D. Stump and C. P. Yuan, JHEP **0702** (2007) 053 [arXiv:hep-ph/0611254].
- [101] T. Collet, Diplomarbeit, KIT, in Arbeit.
- [102] M. Beneke, A. Signer and V. A. Smirnov, Phys. Lett. B **454** (1999) 137 [arXiv:hep-ph/9903260].
- [103] T. Collet, Diplomarbeit, KIT, 2011.
- [104] Y. Kats and M. D. Schwartz, JHEP **1004** (2010) 016 [arXiv:0912.0526 [hep-ph]].
- [105] J. Rosiek, Phys. Rev. D **41** (1990) 3464.
- [106] J. Rosiek, arXiv:hep-ph/9511250.
- [107] G. D'Ambrosio, G. F. Giudice, G. Isidori and A. Strumia, Nucl. Phys. B **645** (2002) 155 [arXiv:hep-ph/0207036].
- [108] A. Denner, Fortsch. Phys. **41** (1993) 307 [arXiv:0709.1075 [hep-ph]].
- [109] S. Dittmaier, Nucl. Phys. B **675** (2003) 447 [arXiv:hep-ph/0308246].
- [110] M. Krämer, Nucl. Phys. B **459** (1996) 3 [arXiv:hep-ph/9508409].
- [111] J. J. de Swart, Rev. Mod. Phys. **35** (1963) 916 [Erratum-ibid. **37** (1965) 326].
- [112] N. Kidonakis, G. Oderda and G. F. Sterman, Nucl. Phys. B **531** (1998) 365 [arXiv:hep-ph/9803241].
- [113] A. A. Penin, A. Pineda, V. A. Smirnov *et al.*, Nucl. Phys. **B699** (2004) 183-206. [hep-ph/0406175].
- [114] K. Melnikov and A. Yelkhovsky, Phys. Rev. D **59** (1999) 114009 [arXiv:hep-ph/9805270].
- [115] A. A. Penin and A. A. Pivovarov, Phys. Atom. Nucl. **64** (2001) 275 [Yad. Fiz. **64** (2001) 323] [arXiv:hep-ph/9904278].
- [116] T. Huber and D. Maitre, Comput. Phys. Commun. **175** (2006) 122 [arXiv:hep-ph/0507094].

Danksagung

All denen, die dazu beigetragen haben, daß ich diese Arbeit anfertigen konnte, möchte ich abschließend meinen Dank aussprechen.

An erster Stelle möchte ich mich bei Prof. Dr. Johann H. Kühn bedanken. Nach meiner Diplomarbeit ermöglichte er es mir, in seiner Gruppe weiterzuarbeiten. Bei gemeinsamen Besprechungen habe ich nicht nur viel über Physik gelernt, sondern auch über die richtige Herangehensweise ans wissenschaftliche Arbeiten.

Prof. Dr. Matthias Steinhauser gilt mein Dank nicht nur wegen der Übernahme des Korreferats. Er stand mir darüber hinaus während meiner kompletten Zeit am Institut als Ansprechpartner zur Seite. Insbesondere durch die gemeinsamen Projekte konnte ich für meinen weiteren Werdegang viel hinzugewinnen.

Für eine gute Zusammenarbeit möchte ich Dr. Peter Marquard und Achim Kress danken. Ersterer stand gleichzeitig als Korrekturleser meiner gesamten Arbeit bereit und war für alle Fragen rund um meinen Computer einer der ersten Ansprechpartner. Durch Achim Kress bot sich mir die Möglichkeit, ein weiteres Projekt zu beginnen und neuen Elan zu entwickeln.

Ein ganz besonderer Dank gilt unserer Sekretärin Martina Schorn, ohne die einiges deutlich schwieriger gewesen wäre. Gerade im Umgang mit den allgegenwärtigen Formalitäten war sie eine enorme Hilfe und darf zurecht als die “gute Seele des Instituts” beschrieben werden.

Obwohl jeder der Doktoranden am TTP einen Teil der administrativen Arbeit zugewiesen bekommt, haben die Systemadministratoren am meisten zu tun. Erwähnen möchte ich hier u. a. Dr. Momchil Davidkov sowie Jens Salomon, welche immer ansprechbar waren und gewillt, die Computerprobleme anderer zu lösen.

Sehr zum Dank verpflichtet bin ich auch allen Korrekturlesern meiner Arbeit. Während mit Corinna Mark, Stefanie Wolz und ganz besonders Horst Lickert drei fachfremde die Arbeit gelesen haben, standen neben dem bereits erwähnten Dr. Peter Marquard noch Dr. Tobias Kasprzik sowie Dr. Dominik Scherer bereit, um die Dissertation auf ihre Richtigkeit zu prüfen.

Materielle Unterstützung fand ich während meiner Zeit als Doktorand vom Graduiertenkolleg “Hochenergiephysik und Teilchenastrophysik” der DFG sowie vom Sonderforschungsbereich/Transregio 9 “Computergestützte Theoretische Teilchenphysik”, wobei die regelmäßigen Arbeitstreffen für mich sehr inspirierend waren.

Weiterhin danke ich Dr. Yuichiro Kiyo für lehrreiche Diskussionen über die Physik der Bindungszustände. Dr. Marco Schreck hatte zudem immer ein offenes Ohr für Fragen betreffend des Aufschriebs.

Für eine angenehme Arbeitsatmosphäre sei dem ganzen Institut gedankt. Neben allen Kolleginnen und Kollegen, mit welchen ich über die Jahre in verschiedenen Zimmern zusammengesessen bin und über physikalische sowie unphysikalische Themen diskutiert habe, sei weiterhin die nachmittägliche Kaffeerunde genannt. Wie auch das Fußballspielen nach dem Feierabend war es eine gute Gelegenheit, um die Kolleginnen und Kollegen besser kennenzulernen.

Dr. Andreas Scharf war mir mit seiner offenen Art gerade anfangs eine große Hilfe am Institut. Auch in seiner Abwesenheit dienten mir seine gut gemeinten Ratschläge als eine wertvolle Orientierung. Bei meinen vielen Fragen bezüglich aller Arten von Formalitäten konnte mir Dr. Jennifer Girrback, meine letzte Zimmernachbarin, weiterhelfen.

Ganz besonders möchte ich mich bei meiner Familie sowie bei Corinna bedanken, welche eine große Stütze während meiner Zeit als Doktorand waren und auch weiterhin sein werden. Corinna hat mich durch alle Höhen und besonders durch alle Tiefen begleitet, wodurch sie nicht immer die leichteste Aufgabe hatte. Ohne ihre Hilfe wären die letzten Jahre nicht zu bewältigen gewesen.