

Stochastische Modellierung einer Klasse wachstumsmaximaler Keim-Korn-Modelle

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

DOKTORS DER NATURWISSENSCHAFTEN

von der Fakultät für Mathematik des
Karlsruher Instituts für Technologie (KIT)
genehmigte

DISSERTATION

von

Dipl.-Math. oec. Sven Ebert

aus Karlsruhe

Tag der mündlichen Prüfung: 8.2.2012

Referent: Prof. Dr. Günter Last
Korreferent: Prof. Dr. Daniel Hug

Die vorliegende Dissertation entstand im Rahmen meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Stochastik des Karlsruher Instituts für Technologie.

Ich danke Prof. Dr. Günter Last für die Möglichkeit hier zu promovieren und die Betreuung der Dissertation sowie Prof. Dr. Daniel Hug für die Übernahme des Korreferats.

Schließlich danke ich allen Mitarbeitern des Instituts für Stochastik für die angenehme Arbeitsatmosphäre, sowie meiner Familie und meinen Freunden für die vielfältige Unterstützung.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	5
1 Punktprozesse und Wachstumsmaximalität	6
1.1 Notation und Punktprozesse	6
1.1.1 Einige grundlegende Notationen	6
1.1.2 Punktprozesse	7
1.1.3 Markierte Punktprozesse	8
1.1.4 Poissonprozess, Coxprozess und Gibbsprozess	10
1.1.5 Weitere Aussagen über Punktprozesse	11
1.2 Hard-Core-Modelle	14
1.2.1 Stienen-Modell	15
1.2.2 Dead-Leaves-Modell und Random-Sequential-Adsorption-Modell	16
1.2.3 Matérn-Prozesse	16
1.3 Wachstumsmaximale Modelle	17
2 Volldimensionale Modelle	21
2.1 Das Lilypond-Modell	21
2.2 Das wachstumsmaximale Modell mit konvexen Körnern	22
2.2.1 Existenz und Eindeutigkeit für eine feste Konfiguration	22
2.2.2 Existenz und Eindeutigkeit in zufälligen Konfigurationen	29
2.3 Das dynamische Modell mit Kugeln	39
2.3.1 Existenz und Eindeutigkeit für eine feste Konfiguration	39
2.3.2 Existenz und Eindeutigkeit in zufälligen Konfigurationen	49
3 Niederdimensionale Modelle	55
3.1 Einführende Bemerkungen	55
3.2 Das kanonische Modell	57
3.2.1 Illustration und Einführung	57
3.2.2 Existenz und Eindeutigkeit für eine feste Konfiguration	58
3.2.3 Existenz und Eindeutigkeit in zufälligen Konfigurationen	63
3.3 Das modifizierte Modell	63
3.3.1 Illustration und Einführung	63
3.3.2 Existenz und Eindeutigkeit für eine feste Konfiguration	64
3.3.3 Existenz und Eindeutigkeit in zufälligen Konfigurationen	67
4 Perkolation	69
4.1 Der Poissonfall mit volldimensionalen konvexen Körnern	69
4.2 Das kanonische Liniensegmentmodell	75

5 Grenzwertaussagen	79
5.1 Mittelwerte, ein Ergodensatz und weitere probabilistische Eigenschaften	79
5.1.1 Einführende Bemerkungen	79
5.1.2 Mittelwertformeln	81
5.1.3 Ein Ergodensatz	83
5.1.4 Eine Palmische Gleichung für die Cluster	85
5.1.5 Tail-Verhalten der wachstumsmaximalen Funktion	86
5.1.6 Simulationen	89
5.2 Stabilisierung	97
5.3 Ein zentraler Grenzwertsatz	103
6 Offene Fragen und Ausblick	108
A Stabilisierung	110
B Ein zentraler Grenzwertsatz	114
Literaturverzeichnis	116

Abbildungsverzeichnis

1.1	Ein wachstumsmaximales Modell mit Einheitskugeln als Primärkörner und gleicher Startzeit.	19
1.2	Ein wachstumsmaximales Modell mit zentrierten Quadraten als Primärkörner und gleicher Startzeit.	19
1.3	Ein wachstumsmaximales Modell mit Liniensegmenten als Primärkörner und gleicher Startzeit.	20
1.4	Ein wachstumsmaximales Modell mit Einheitskugeln als Primärkörner und verschiedenen Startzeiten.	20
2.1	Zwei unterschiedlich skalierte Ausschnitte eines Lilypond-Modells, das auf Realisierungen eines stationären Poissonprozesses beruht.	22
2.2	Zwei unterschiedlich skalierte Ausschnitte eines dynamischen wachstumsmaximalen Modells mit Einheitskugeln als Primärkörner, das auf Realisierungen eines stationären unabhängig markierten Poissonprozesses beruht.	39
3.1	Ein kanonisches und ein modifiziertes Liniensegmentmodell basierend auf der gleichen Konfiguration.	56
3.2	Zwei unterschiedlich skalierte Ausschnitte eines kanonischen Liniensegmentmodells, das auf Realisierungen eines stationären unabhängig markierten Poissonprozesses beruht.	57
3.3	Zwei unterschiedlich skalierte Ausschnitte eines modifizierten Liniensegmentmodells, das auf Realisierungen eines stationären unabhängig markierten Poissonprozesses beruht.	64
4.1	Ein Ausschnitt einer Realisierung eines klassischen Lilypond-Modells, basierend auf einem stationären Poissonprozess mit Extrapunkt im Ursprung.	70
4.2	Ein Ausschnitt einer Realisierung eines kanonischen Liniensegmentmodells mit Extrapunkt im Ursprung und gleichverteilten Richtungen.	75
4.3	Ein Ausschnitt einer Realisierung eines modifizierten Liniensegmentmodells, basierend auf einem unabhängig markierten stationären Poissonprozess mit gleichverteilten Richtungen.	78
5.1	Ein Vergleich der wachstumsmaximalen Funktionen des Lilypond-Modells mit denen der Liniensegmentmodelle.	90
5.2	Ein Vergleich der Tails der wachstumsmaximalen Funktionen mit einer Exponentialfunktion.	91
5.3	Ein erster Vergleich der wachstumsmaximalen Funktionen des Lilypond-Modells mit denen der dynamischen Lilypond-Modelle.	92

5.4	Ein zweiter Vergleich der wachstumsmaximalen Funktionen des Lilypond-Modells mit denen der dynamischen Lilypond-Modelle.	93
5.5	Ein Vergleich der Clustergröße im Lilypond-Modell mit der in den Liniensegmentmodellen.	94
5.6	Die Clustergröße im modifizierten Liniensegmentmodell.	95
5.7	Ein Vergleich der Clustergröße im klassischen Lilypond-Modell mit der in den dynamischen Lilypond-Modellen.	96

Einleitung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit einer speziellen Klasse von Hard-Core-Modellen, den wachstumsmaximalen Modellen. Hard-Core-Modelle sind besondere Keim-Korn-Modelle. Ein Keim-Korn-Modell besteht aus Punkten, den Keimen, an die beschränkte, konvexe Mengen, die Körner, angehängt werden (siehe [26]). So entstehen Teilmengen des betrachteten Raumes, wie z.B. das Boolesche Modell. In Hard-Core-Modellen dürfen die Körner nur so an die Keime angeheftet werden, dass keine Überlappungen entstehen. Diese Einschränkung spiegelt wieder, dass harte Objekte der realen Welt, wie z.B. Styroporkugeln, nicht ineinander zu schieben sind. Aus diesem Grund haben Hard-Core-Modelle ihren Ursprung in Packungsproblemen (siehe z.B. [34]). Weitere Informationen zu Hard-Core-Modelle und Packungsproblemen finden sich in [31] und [32].

Wir verfolgen im Rahmen dieser Arbeit einen Ansatz zur Erstellung von speziellen Hard-Core-Modellen, welcher unter Mathematikern erstmals in [10] im Jahr 1996 diskutiert wurde. In der Physik wurde diese Herangehensweise bereits durch [1] als zwei Jahre früher eingeführt. In der Mathematik ist das Modell unter dem Namen Lilypond-Modell bekannt (vgl. [4]). Man startet mit einer Menge von Keimen, aus denen gleichzeitig und mit gleicher Geschwindigkeit Kugeln wachsen. Diese stellen ihr Wachstum ein, sobald ein Weiterwachsen zu Überlappungen führen würde. In der vorliegenden Arbeit betrachten wir Verallgemeinerungen dieses Modells in verschiedenen Richtungen, zeigen Existenz und Eindeutigkeit sowie einige probabilistische Eigenschaften und Grenzwertsätze.

Im ersten Kapitel geben wir zuerst die für die Arbeit nötigen Grundlagen an. Danach führen wir Hard-Core-Modelle ein und geben einige Beispiele an. Abschließend definieren wir, was unter einem wachstumsmaximalen System zu verstehen sein soll.

In Kapitel 2 beschäftigen wir uns mit wachstumsmaximalen Modellen, die volldimensionale Körner verwenden. Ausgehend vom Lilypond-Modell stellen wir die Existenz eines Modells mit konvexen Körnern sicher. Danach führen wir noch ein dynamisches Modell mit Startzeiten ein.

Der Fokus des dritten Kapitels liegt auf Modellen mit niederdimensionalen Körnern. Zuerst spezialisieren wir das im zweiten Kapitel eingeführte Modell auf den niederdimensionalen Fall, wodurch wir einen neuen Zugang erhalten. Diesen benutzen wir, um ein alternatives wachstumsmaximales Modell mit niederdimensionalen Körner einzuführen.

Kapitel 4 beschäftigt sich mit Perkolation. Wir zeigen für bestimmte wachstumsmaximale Modelle, dass diese nicht perkolieren, also keine unendlich große Zusammenhangskomponente besitzen.

Das fünfte Kapitel beschäftigt sich mit Grenzwertaussagen. Hier beginnen wir mit Mittelwertformeln und einem Ergodensatz. Darüber hinaus geben wir einige probabilistische Abschätzungen an. Die Ergebnisse unterstützen wir durch Simulationen. Abschließend geben wir einen zentralen Grenzwertsatz an. Hierfür verwenden wir das Konzept der Stabilisierung.

Im letzten Kapitel diskutieren wir offene Fragen. Wir geben einen Ausblick auf noch ungelöste Probleme, welche direkt an die vorgestellten Ergebnisse anknüpfen.

Kapitel 1

Punktprozesse und Wachstumsmaximalität

In diesem Kapitel fixieren wir die Notation und stellen die Grundlagen über Punktprozesse und stochastische Geometrie vor, welche für diese Arbeit benötigt werden. Insbesondere geben wir einen Überblick über bereits vorhandene Modelle der stochastischen Geometrie, welche gewisse Maximalitätseigenschaften erfüllen und grenzen diese gegenüber den in dieser Arbeit betrachteten Modellen ab. Im letzten Abschnitt dieses Kapitels führen wir unseren Maximalitätsbegriff ein.

1.1 Notation und Punktprozesse

1.1.1 Einige grundlegende Notationen

Im Verlauf dieser Arbeit sei \mathbb{R} die Menge der *reellen Zahlen*, $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$ die Menge der *nicht-negativen Zahlen*, \mathbb{N} die Menge der *natürlichen Zahlen* und $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Für $x \in \mathbb{R}^d$ bezeichne $\|x\|$ die *euklidische Norm* von x und $B(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^d : \|x - y\| \leq r\}$ die *Kugel* um $x \in \mathbb{R}^d$ mit Radius $r \in \mathbb{R}_+$. Für $x, y \in \mathbb{R}^d$ nennen wir $\|x - y\|$ den *Abstand* von x und y .

Mit λ_d bezeichnen wir das *Lebesgue-Maß* auf \mathbb{R}^d , mit \mathcal{H}^{d-1} das $(d-1)$ -dimensionale *Hausdorffmaß* und mit $\kappa_d := \lambda_d(B(0, 1))$, $d \geq 1$, das *Volumen der Einheitskugel* im \mathbb{R}^d , wobei wir $\kappa_0 := 1$ setzen. Falls klar ist, in welcher Dimension wir uns befinden, schreiben wir auch λ statt λ_d .

Für Mengen $A, B \subset \mathbb{R}^d$ sei $A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$ die *Minkowski-Summe* von A und B . Darüber hinaus sei für reelles $\alpha \geq 0$ die Menge $\alpha A := \{\alpha a : a \in A\}$. Außerdem benötigen wir noch die Menge $-A := \{-a : a \in A\}$, welche durch Punktspiegelung am Ursprung aus der Menge A hervorgeht, sowie die zu A um $x \in \mathbb{R}^d$ verschobene Menge $A + x := A + \{x\}$ und die Differenz zweier Mengen $A - B = A + (-B)$.

Weiterhin definieren wir für $x, y \in \mathbb{R}^d$ und $A \subset \mathbb{R}^d$ die Größe $d_A(x, y) := \inf\{r \geq 0 : y \in x + rA\}$ und das n -fache *kartesische Produkt* $A^n := A \times \dots \times A$ sowie die Menge $A^{(n)} := \{(y_1, \dots, y_n) \in A^n : y_i \text{ paarweise verschieden}\}$.

Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ nennen wir *konvex*, falls für alle Paare $(x, y) \in A^{(2)}$ das *Segment* $[x, y]$ in A liegt, wenn also

$$(1 - \lambda)x + \lambda y \in A, \quad \lambda \in [0, 1],$$

gilt. Eine konvexe Menge A bezeichnen wir als *konvexen Körper*, wenn sie kompakt und nichtleer ist. Ein konvexer Körper heißt *strikt konvex*, falls der Rand von A kein Segment enthält. Die Menge der konvexen Körper nennen wir \mathcal{K} .

Weiter sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Auf diesem seien alle im Verlauf dieser Arbeit auftretenden Zufallsvariablen definiert. Für ein Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{U} sei $\mathbb{E}_{\mathbb{U}}$ der Erwartungswert bezüglich dieses Maßes. Mit $\mathbb{E} := \mathbb{E}_{\mathbb{P}}$ kürzen wir den Erwartungswert bezüglich \mathbb{P} ab.

1.1.2 Punktprozesse

Sei E ein lokalkompakter Raum mit abzählbarer Basis. Die zu E gehörende Borelsche σ -Algebra bezeichnen wir mit $\mathcal{B}(E)$, das System der abgeschlossenen Teilmengen von E mit $\mathcal{F}(E)$, sowie das System der nichtleeren, abgeschlossenen Teilmengen von E mit $\mathcal{F}'(E)$. Mit $\mathcal{B}(\mathcal{F}(E))$ bezeichnen wir die zur Topologie der abgeschlossenen Konvergenz gehörende Borelsche σ -Algebra (siehe [26], Definition 2.1.1 und Lemma 2.1.1). Eine $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathcal{F}(E)))$ -messbare Abbildung $Z : \Omega \rightarrow \mathcal{F}(E)$ nennen wir *zufällige abgeschlossene Menge* in E .

Ein Maß φ auf E heißt *lokalendlich*, falls $\varphi(C) < \infty$ für alle $C \in \mathcal{C}(E)$ gilt, wobei $\mathcal{C}(E)$ die Menge aller kompakten Teilmengen von E sei. Es sei $\mathcal{N}(E)$ die Menge aller lokalendlichen Maße auf E und $\mathcal{N}(E)$ die σ -Algebra auf $\mathcal{N}(E)$, die von den Projektionsabbildungen $\pi_A : \varphi \mapsto \varphi(A)$, $A \in \mathcal{B}(E)$, erzeugt wird. Ein Maß $\varphi \in \mathcal{N}(E)$ nennen wir *Zählmaß*, falls $\varphi(A) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, $A \in \mathcal{B}(E)$, gilt. Die Menge aller lokalendlichen Zählmaße bezeichnen wir mit $\mathcal{N}_Z(E)$. Mit $\mathcal{N}_Z(E)$ bezeichnen wir die Spur- σ -Algebra von $\mathcal{N}(E)$ in $\mathcal{N}_Z(E)$. Gilt für $\varphi \in \mathcal{N}_Z(E)$ die Aussage $\varphi(\{x\}) \leq 1$ für alle $x \in E$, so heißt das Zählmaß *einfach*. Falls $\varphi \in \mathcal{N}_Z(E)$ ein einfaches Zählmaß ist, identifizieren wir φ mit seinem Träger

$$\text{supp } \varphi := \{x \in E : \varphi(\{x\}) \geq 1\}.$$

Das nächste Lemma (vgl. Lemma 3.1.3 aus [26]) zeigt, dass jedes Zählmaß sich als Summe von Dirac-Maßen schreiben lässt und sich die zugehörigen Punkte messbar nummerieren lassen. Hierfür setzen wir $E_\infty := E \cup \{\infty\}$ und bezeichnen für $x \in E$ das *Dirac-Maß* im Punkt x mit δ_x .

Lemma 1.1.1. *Es existieren messbare Abbildungen $\xi_i : \mathcal{N}_Z(E) \rightarrow E_\infty$, $i \in \mathbb{N}$, derart, dass*

$$\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{\xi_i(\varphi) \neq \infty\}} \delta_{\xi_i(\varphi)}, \quad \varphi \in \mathcal{N}_Z(E),$$

gilt.

Eine messbare Abbildung μ von $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ nach $(\mathcal{N}(E), \mathcal{N}(E))$ nennen wir *zufälliges Maß* in E . Eine messbare Abbildung η von $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ nach $(\mathcal{N}_Z(E), \mathcal{N}_Z(E))$ bezeichnen wir als *Punktprozess* oder *zufälliges Zählmaß* in E . Das Bildmaß $\mathbb{P}^\eta(\cdot) := \mathbb{P}(\eta \in \cdot)$ nennen wir *Verteilung* von η . Der Punktprozess heißt *einfach*, falls η fast sicher einfach ist. Bei einfachen Punktprozessen unterscheiden wir nicht zwischen dem zufälligen Zählmaß η und der zufälligen Menge $\text{supp } \eta$ (zur Messbarkeit von $\text{supp } \eta$ siehe [13]). Dies erlaubt uns für $A \in \mathcal{B}(E)$ und $x \in \eta$ sowohl $\eta(A)$ als auch $x \in \eta$ und $x \in \text{supp } \eta$ zu schreiben.

Für Punktprozesse η und η' ist auch die *Superposition* $\eta + \eta'$ ein Punktprozess. Falls dieser Punktprozess einfach ist, entspricht er der Vereinigung der zugehörigen zufälligen abgeschlossenen Mengen. Wir schreiben dann auch $\eta \cup \eta'$ und nennen dies die *Vereinigung* von η und η' .

Für ein Maß $\varphi \in \mathcal{N}(E)$ definieren wir die *Einschränkung* von φ auf die Menge $A \in \mathcal{B}(E)$ durch $\varphi_A := \varphi(A \cap \cdot)$. Bei der Einschränkung η_A eines Punktprozesses η auf eine Menge A handelt es sich wieder um einen Punktprozess. Im Falle eines einfachen Punktprozesses entspricht dies dem Schnitt der zufälligen Menge η (bzw. $\text{supp } \eta$) mit A und wir schreiben auch $\eta \cap A$.

Es sei E' wie E ein lokalkompakter Raum mit abzählbarer Basis. Für eine messbare Abbildung $g : E \rightarrow E'$ und ein Zählmaß $\varphi \in \mathcal{N}_Z(E)$ definieren wir

$$g(\varphi)(B) := \varphi(g^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}(E'),$$

als das *Bildmaß* von φ unter g . Falls $E = E' = \mathbb{R}^d$ oder $E = E' = \mathcal{F}'(\mathbb{R}^d)$ gilt, schreiben wir für die *Translation* $t_x(y) := y + x$ um einen Vektor $x \in \mathbb{R}^d$ statt $t_x\varphi$ bzw. $t_x\eta$ auch $\varphi + x$ bzw. $\eta + x$. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und die *Streckung* $s_\alpha(y) := \alpha y$, $y \in \mathbb{R}^d$, schreiben wir auch $\alpha\varphi$ bzw. $\alpha\eta$ statt $s_\alpha(\varphi)$ bzw. $s_\alpha(\eta)$. Zu einem Punktprozess η in E bilden wir durch

$$\Theta(B) := \mathbb{E}\eta(B), \quad B \in \mathcal{B}(E),$$

ein Maß auf E und nennen dieses das *Intensitätsmaß* von η . Die Tatsache, dass es sich um ein Maß handelt, folgt aus dem Satz von der monotonen Konvergenz (siehe z. B. Theorem 1.19 in [13]). Das Intensitätsmaß ist an den Erwartungswert reellwertiger Zufallsvariablen angelehnt, im Falle eines einfachen Punktprozesses η gibt $\Theta(B)$ die mittlere Anzahl der in B liegenden Punkte von η an.

Für ein einfaches Zählmaß φ identifizieren wir die Menge $\varphi^{(n)}$ der paarweise verschiedenen n -Tupel aus φ mit dem Maß

$$\varphi^{(n)}(B) := \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in \varphi^{(n)}} \mathbf{1}\{(x_1, \dots, x_n) \in B\}, \quad B \in \mathcal{B}(E^n),$$

und definieren das sogenannte *n -te faktorielle Momentenmaß* eines einfachen Punktprozesses η durch

$$\nu^{(n)}(B) := \mathbb{E} \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in \eta^{(n)}} \mathbf{1}\{(x_1, \dots, x_n) \in B\}, \quad B \in \mathcal{B}(E^n).$$

Falls $B = (B_1)^n$ mit $B_1 \in \mathcal{B}(E)$ gilt, so besitzt $\nu^{(n)}$ die Darstellung

$$\nu^{(n)}(B) = \mathbb{E}(\eta(B_1)[\eta(B_1) - 1] \cdots [\eta(B_1) - n + 1]).$$

Für den Spezialfall $E = \mathbb{R}^d$ führen wir den Begriff der Stationarität ein. Ein Punktprozess η im \mathbb{R}^d heißt *stationär*, falls η für alle $x \in \mathbb{R}^d$ die gleiche Verteilung besitzt wie $\eta + x$. Falls das Intensitätsmaß eines stationären Punktprozesses η im \mathbb{R}^d lokalendlich ist, hat es die Form

$$\Theta = \gamma \lambda_d$$

mit einer Konstanten $\gamma \in [0, \infty)$. Die Zahl γ nennen wir *Intensität* von η .

1.1.3 Markierte Punktprozesse

Basierend auf der Definition von Punktprozessen definieren wir nun die sogenannten markierten Punktprozesse. In diesem Unterabschnitt sei $E = \mathbb{R}^d \times H$, wobei H ein lokalkompakter Raum mit abzählbarer Basis sei. Auf E verwenden wir die Produkt- σ -Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{B}(H)$.

Definition 1.1.2. Einen einfachen Punktprozess η in $E = \mathbb{R}^d \times H$ für den realisierungsweise

$$\eta(\{x\} \times H) \leq 1, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

gilt und dessen Intensitätsmaß

$$\Theta(C \times H) < \infty, \quad C \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d),$$

erfüllt, nennen wir einen *markierten Punktprozess* im \mathbb{R}^d mit Markenraum H .

Den Raum aller Zählmaße auf $\mathbb{R}^d \times H$, deren Projektion ein einfaches Zählmaß ist, bezeichnen wir mit $M(\mathbb{R}^d \times H)$. Die σ -Algebra $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d \times H)$ sei die *Spur- σ -Algebra* von $\mathcal{N}(\mathbb{R}^d \times H)$ auf $M(\mathbb{R}^d \times H)$. Durch die Projektionsabbildung $p(y, m) : \mathbb{R}^d \times H \rightarrow \mathbb{R}^d$, $(y, m) \mapsto y$, wird $\varphi \in M(\mathbb{R}^d \times H)$ auf ein einfaches Zählmaß $\phi := p(\varphi)$, die *Projektion* von φ auf die erste Komponente, abgebildet. Die Projektion des markierten Punktprozesses η auf die erste Komponente bezeichnen wir mit $\xi := p(\eta)$. Wir nennen ξ den (zu η gehörenden) *unmarkierten Punktprozess*. Bei der Projektion eines markierten Punktprozesses auf die erste Komponente handelt es sich nach Definition 1.1.2 um einen einfachen Punktprozess. Für einen Vektor $x \in \mathbb{R}^d$ und $(y, m) \in E = \mathbb{R}^d \times H$ verallgemeinern wir die Translation t_x aus Unterabschnitt 1.1.2 mit Hilfe von $t_x((y, m)) := (y + x, m)$. Die Translation wirkt also nur auf die erste Komponente. Analog zu oben definieren wir $\varphi + x$ als das Bildmaß von φ unter t_x und $\eta + x$ als den (in der ersten Komponente) um $x \in \mathbb{R}^d$ verschobenen (markierten) Punktprozess zu η . Die Skalierung eines markierten Punktprozesses um einen Faktor $a > 0$ wirke ebenfalls nur auf die erste Komponente. Einen markierten Punktprozess nennen wir *stationär*, falls $\eta \stackrel{d}{=} \eta + x$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$ gilt. Für stationäre markierte Punktprozesse besitzt das zugehörige Intensitätsmaß eine Produktstruktur, wie das nächste Lemma (vgl. Theorem 3.5.1 aus [26]) zeigt.

Lemma 1.1.3. *Sei η ein stationärer markierter Punktprozess im \mathbb{R}^d mit Markenraum H und Intensitätsmaß $\Theta \neq 0$. Dann gilt*

$$\Theta = \gamma \lambda_d \otimes \mathbb{Q}$$

mit einer Zahl $0 < \gamma < \infty$ und einem (eindeutig bestimmten) Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{Q} auf H .

Die Zahl γ nennen wir die *Intensität* und das Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{Q} die (*Palmsche*) *Markenverteilung* von η . Die Intensität γ ist auch die Intensität der Projektion von η auf die erste Komponente.

Nun führen wir noch die unabhängig markierten Punktprozesse als wichtige Teilklasse markierter Punktprozesse ein. Nach Lemma 1.1.1 kann ein markierter Punktprozess η im \mathbb{R}^d mit Markenraum H in der Form

$$\eta = \sum_{i=1}^{\tau} \delta_{(\rho_i, \zeta_i)} \quad (1.1)$$

geschrieben werden, wobei $(\rho_i, \zeta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen im $\mathbb{R}^d \times H$ und $\tau := \eta(\mathbb{R}^d \times H)$ ist.

Definition 1.1.4. Ein markierter Punktprozess η in \mathbb{R}^d mit Markenraum H heißt *unabhängig markiert*, falls eine Darstellung (1.1) existiert, in der die zufälligen Marken ζ_1, ζ_2, \dots unabhängig und identisch verteilt sind, sowie unabhängig von $((\rho_i)_{i \in \mathbb{N}}, \tau)$ sind. Die Verteilung \mathbb{Q} von ζ_1 nennen wir die *Markenverteilung* von η .

Wie im stationären Fall besitzt das Intensitätsmaß eines unabhängig markierten Punktprozesses eine Produktstruktur. Dies zeigt das nächste Lemma (vgl. Theorem 3.5.6 aus [26]).

Lemma 1.1.5. *Sei η ein unabhängig markierter Punktprozess im \mathbb{R}^d mit Markenraum H , Intensitätsmaß Θ und Markenverteilung \mathbb{Q} . Dann gilt*

$$\Theta = \nu \otimes \mathbb{Q},$$

wobei ν das Intensitätsmaß des unmarkierten Punktprozesses ξ ist.

Wir sehen, dass im Fall eines stationären unabhängig markierten Punktprozesses die Markenverteilung aus Lemma 1.1.5 mit der Markenverteilung aus Lemma 1.1.3 übereinstimmt.

1.1.4 Poissonprozess, Coxprozess und Gibbsprozess

Wir führen nun einen für die Arbeit wichtigen Punktprozess, den Poissonprozess, ein. Dies geschieht zunächst auf dem oben eingeführten lokalkompakten Raum E . Danach diskutieren wir den Spezialfall $E = \mathbb{R}^d$ genauer. Für vertiefende Untersuchungen sei auf [13], [14] und [26] verwiesen. Anschließend definieren wir Cox- und Gibbsprozesse (siehe z.B. [30]).

Es sei E ein lokalkompakter Raum mit abzählbarer Basis. Wir sagen, ein Punktprozess η in E besitzt *unabhängige Zuwächse*, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ und paarweise disjunkte Mengen $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(E)$ die $[0, \infty]$ -wertigen Zufallsvariablen $\eta(B_1), \dots, \eta(B_n)$ unabhängig sind.

Definition 1.1.6. Eine Zufallsvariable X nennen wir poissonverteilt mit Parameter $\alpha \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, falls $\mathbb{P}(X = k) = \exp(-\alpha)\alpha^k/k!$, $k \in \mathbb{N}_0$, für $\alpha < \infty$ und $\mathbb{P}(X = \infty) = 1$ für $\alpha = \infty$ gilt.

Definition 1.1.7. Ein einfacher Punktprozess η in E mit lokalendlichem Intensitätsmaß Θ heißt *Poissonprozess*, wenn er unabhängige Zuwächse besitzt und $\eta(B)$ für alle $B \in \mathcal{B}(E)$ mit Parameter $\Theta(B)$ poissonverteilt ist.

Bemerkung 1.1.8. Die Verteilung eines Poissonprozesses η mit Intensitätsmaß Θ bezeichnen wir mit Π_Θ .

Wir geben jetzt einen Satz an, der besagt, dass ein Punktprozess, der durch Anwendung einer messbaren Abbildung auf einen Poissonprozess entsteht, selbst ein Poissonprozess ist. Diese Aussage findet sich in allgemeinerer Form als „Mapping Theorem“ in [14].

Satz 1.1.9. Sei η ein Poissonprozess in E mit Intensitätsmaß Θ und $f : E \rightarrow E'$ messbar mit der Eigenschaft, dass das Urbild $f^{-1}(K)$ jeder kompakten Menge K relativkompakt sei. Dann ist der Punktprozess $f(\eta)$ ein Poissonprozess mit Intensitätsmaß $\Theta(f^{-1}(\cdot))$.

Für die Projektion eines markierten Poissonprozesses im \mathbb{R}^d mit Markenraum H gilt die gleiche Aussage.

Bemerkung 1.1.10. Es sei η ein markierter Poissonprozess auf \mathbb{R}^d mit Markenraum H , d.h. ein markierter Punktprozess, der ein Poissonprozess ist. Dann ist die Projektion ξ von η wieder ein Poissonprozess auf \mathbb{R}^d mit Intensitätsmaß $\Theta(\cdot \times H)$ (vgl. [26] Abschnitt 3.5).

Darüber hinaus halten wir fest, dass ein stationärer markierter Poissonprozess unabhängig markiert ist (vgl. Theorem 3.5.8 in [26]).

Satz 1.1.11. Es sei η ein stationärer markierter Poissonprozess auf \mathbb{R}^d mit Markenraum H . Dann ist η unabhängig markiert.

Wir kommen nun zum Coxprozess.

Definition 1.1.12. Sei η ein Punktprozess in E und μ ein zufälliges Maß auf E . Dann nennen wir η einen von μ getriebenen *Coxprozess*, wenn

$$\mathbb{P}(\eta \in \cdot | \mu) \stackrel{f.s.}{=} \Pi_\mu(\cdot)$$

gilt, wobei $\mathbb{P}(\eta \in \cdot | \mu)$ die bedingte Verteilung von η gegeben μ ist.

Einen durch μ getriebenen Coxprozess η können wir durch das folgende zweistufige stochastische Experiment erklären. Erzeuge eine Realisierung von μ und danach einen Poissonprozess mit dieser Realisierung von μ als Intensitätsmaß.

Wir geben jetzt ein Lemma zur Einfachheit von Coxprozessen an (vgl. Corollary 12.5 in [13]). Ein Maß μ auf E nennen wir *diffus*, falls $\mu(\{e\}) = 0$ für alle $e \in E$ gilt.

Lemma 1.1.13. *Sei η ein von μ getriebener Coxprozess in E . Dann ist η fast sicher einfach, wenn μ fast sicher diffus ist.*

Als weiteren Punktprozess definieren wir nun einen Gibbsprozess in $E = \mathbb{R}^d$ (siehe z.B. Abschnitt 5.5 von [30] oder auch [33]).

Definition 1.1.14. Einen Punktprozess η im \mathbb{R}^d nennen wir *Gibbsprozess*, falls eine messbare nicht-negative Funktion $e : N_Z(\mathbb{R}^d) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ existiert, so dass für alle messbaren $h : N_Z(\mathbb{R}^d) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$\mathbb{E} \left[\sum_{x \in \eta} h(\eta \setminus \{x\}, x) \right] = \mathbb{E} \left[\int e(\eta, x) h(\eta, x) dx \right]. \quad (1.2)$$

Per Induktion erhalten wir aus Gleichung (1.2) für einen Gibbsprozess $\eta \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\sum_{(x_1, \dots, x_n) \in \eta^{(n)}} h(\eta \setminus \{x_1, \dots, x_n\}, x_1, \dots, x_n) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int \cdots \int e_n(\eta, x_1, \dots, x_n) h(\eta, x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \right] \end{aligned} \quad (1.3)$$

mit

$$e_n(\eta, x_1, \dots, x_n) := e(\eta, x_1) e(\eta \cup \{x_1\}, x_2) \cdots e(\eta \cup \{x_1, \dots, x_{n-1}\}, x_n) \quad (1.4)$$

für alle messbaren Funktionen $h : N_Z(\mathbb{R}^d) \times (\mathbb{R}^d)^n \rightarrow \mathbb{R}_+$.

1.1.5 Weitere Aussagen über Punktprozesse

In diesem Unterabschnitt wollen wir weitere Aussagen über Punktprozesse vorstellen, die im Verlauf der Arbeit des öfteren benötigt werden.

Wir beginnen mit der multivariaten Campbellschen Formel (siehe z.B. Theorem 3.1.3 in [26]).

Satz 1.1.15. *Sei η ein einfacher Punktprozess in E . Weiter sei $n \in \mathbb{N}$ und $f : E^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ messbar. Dann gilt*

$$\mathbb{E} \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in \eta^{(n)}} f(x_1, \dots, x_n) = \int_{E^{(n)}} f d\nu^{(n)},$$

wobei $\nu^{(n)}$ das n -te faktorielle Momentenmaß von η sei.

Als Nächstes formulieren wir die Mecke-Gleichung (vgl. Corollary 3.2.3 in [26]).

Satz 1.1.16. *Sei η ein Poissonprozess in E mit Intensitätsmaß Θ . Weiter sei $n \in \mathbb{N}$ und $f : N(E) \times E^{(n)} \rightarrow \mathbb{R}_+$ messbar. Dann gilt*

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in \eta^{(n)}} f(\eta, x_1, \dots, x_n) \\ &= \int \cdots \int \mathbb{E} f(\eta + \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}, x_1, \dots, x_n) \Theta(dx_1) \dots \Theta(dx_n). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Bemerkung 1.1.17. Falls η ein Poissonprozess in E ist, gilt $\nu^{(n)} = \Theta^n$, $n \in \mathbb{N}$, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ ist das n -te faktorielle Momentenmaß gleich dem n -fachen Produktmaß des Intensitätsmaßes von η .

Aus der Mecke-Gleichung (1.5) folgt das analoge Resultat für Coxprozesse.

Lemma 1.1.18. *Es sei η ein von μ getriebener Coxprozess in E . Weiter sei $n \in \mathbb{N}$ und $f : N(E)^2 \times E^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ messbar. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \mathbb{E} & \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in \eta^{(n)}} f(\eta, \mu, x_1, \dots, x_n) \\ &= \mathbb{E} \int f \left(\eta + \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}, \mu, x_1, \dots, x_n \right) \mu(dx_1), \dots, \mu(dx_n). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Wir führen nun noch eine spezielle σ -Algebra auf $N(\mathbb{R}^d)$, der Menge aller lokalendlichen Maße auf \mathbb{R}^d , ein, die wir später im Zusammenhang mit Ergodizität benötigen werden. Hierfür bezeichne

$$\mathcal{I} := \{A \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^d) : A = A + x, x \in \mathbb{R}^d\} \quad (1.7)$$

die σ -Algebra aller verschiebungsinvarianten Mengen in $\mathcal{N}(\mathbb{R}^d)$.

Definition 1.1.19. Sei η ein zufälliges Maß auf \mathbb{R}^d . Die Urbild- σ -Algebra

$$\mathcal{I}_\eta := \eta^{-1}\mathcal{I}$$

nennen wir σ -Algebra der verschiebungsinvarianten Ereignisse von η .

Wir sagen η ist *ergodisch*, falls \mathcal{I}_η bzgl. \mathbb{P} trivial ist, d.h. $\mathbb{P}(\eta \in A) \in \{0, 1\}$ für alle $A \in \mathcal{I}$ gilt. Mit der in Unterabschnitt 1.1.3 eingeführten Verschiebung t_x , $x \in \mathbb{R}^d$, lässt sich Ergodizität analog zu den eben gemachten Definitionen auch auf $\mathbb{R}^d \times H$ einführen. Das nächste Lemma zeigt uns, dass Ergodizität unter bestimmten Abbildungen erhalten bleibt. Eine Abbildung $f : N(\mathbb{R}^d \times H) \rightarrow N(\mathbb{R}^d)$ nennen wir *translationskovariant*, falls

$$f(\varphi + x) = f(\varphi) + x, \quad x \in \mathbb{R}^d, \varphi \in N(\mathbb{R}^d \times H). \quad (1.8)$$

Lemma 1.1.20. *Sei η ein ergodisches zufälliges Maß auf $N(\mathbb{R}^d \times H)$ und $f : N(\mathbb{R}^d \times H) \rightarrow N(\mathbb{R}^d)$ messbar und translationskovariant. Falls $f(\eta)$ ein zufälliges Maß ist, so ist $f(\eta)$ ergodisch.*

Beweis: Sei $A \in \mathcal{I}$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} f^{-1}(A) + x &= \{\varphi + x : \varphi \in f^{-1}(A)\} = \{\varphi' : \varphi' - x \in f^{-1}(A)\} \\ &= \{\varphi' : f(\varphi' - x) \in A\} = \{\varphi' : f(\varphi') - x \in A\} \\ &= \{\varphi' : f(\varphi') \in A\} = \{\varphi' : \varphi' \in f^{-1}(A)\} \\ &= f^{-1}(A), \end{aligned}$$

wobei wir in der zweiten Zeile die Translationskovarianz verwenden. Aus $A \in \mathcal{I}$ (in $\mathcal{N}(\mathbb{R}^d)$) folgt daher $f^{-1}(A) \in \mathcal{I}$ (in $\mathcal{N}(\mathbb{R}^d \times H)$). Da η nach Voraussetzung ergodisch ist, gilt

$$\mathbb{P}(f(\eta) \in A) = \mathbb{P}(\eta \in f^{-1}(A)) \in \{0, 1\}, \quad A \in \mathcal{I}.$$

Somit ist auch $f(\eta)$ ergodisch. □

Wir führen nun Palmsche Verteilungen ein.

Definition 1.1.21. Sei η ein stationärer Punktprozess im \mathbb{R}^d mit endlicher Intensität $\gamma > 0$. Dann nennen wir das Wahrscheinlichkeitsmaß

$$\mathbb{P}^{0,\eta}(A) := \frac{1}{\gamma} \mathbb{E} \int \mathbf{1}_A(\eta - x) \mathbf{1}_{[0,1]^d}(x) \eta(dx), \quad A \in \mathcal{N}_Z(\mathbb{R}^d),$$

die *Palmsche Verteilung* von η .

Für einen markierten Punktprozess η und dessen Projektion ξ auf die erste Komponente lässt sich diese Definition wie folgt verallgemeinern.

Definition 1.1.22. Sei η ein stationärer markierter Punktprozess im \mathbb{R}^d mit Markenraum \mathbb{H} und Intensität $\gamma > 0$. Dann nennen wir das Wahrscheinlichkeitsmaß

$$\mathbb{P}^{0,\eta}(A) := \frac{1}{\gamma} \mathbb{E} \int \mathbf{1}_A(\eta - x) \mathbf{1}_{[0,1]^d}(x) \xi(dx), \quad A \in \mathcal{N}_Z(\mathbb{R}^d \times \mathbb{H}),$$

die *Palmsche Verteilung* von η .

Die Palmsche Verteilung von η ist auf den Konfigurationen $\varphi \in \mathcal{N}_Z(\mathbb{R}^d)$ bzw. $\varphi \in \mathcal{N}_Z(\mathbb{R}^d \times \mathbb{H})$ konzentriert, in denen φ bzw. die Projektion ϕ einen Punkt im Ursprung hat. Auch für von einem stationären markierten Punktprozess abgeleitete Größen können wir Palmsche Verteilungen definieren.

Definition 1.1.23. Sei η ein stationärer markierter Punktprozess im \mathbb{R}^d mit Markenraum \mathbb{H} und Intensität $\gamma > 0$. Weiter sei ξ die Projektion von η auf die erste Komponente und $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^d$ derart, dass $\Xi := f(\eta)$ ein stationärer Punktprozess ist. Dann nennen wir das Wahrscheinlichkeitsmaß

$$\mathbb{P}^{0,\Xi}(A) := \frac{1}{\gamma} \mathbb{E} \int \mathbf{1}_A(\Xi - x) \mathbf{1}_{[0,1]^d}(x) \xi(dx), \quad A \in \mathcal{N}_Z(\mathbb{R}^d \times \mathbb{H}),$$

die *Palmsche Verteilung* von Ξ .

Für weitere Ausführungen zu Palmschen Verteilungen verweisen wir auf [6], [13] sowie [15]. Im nächsten Lemma führen wir eine Klasse von zufälligen Maßen im \mathbb{R}^d ein, die sich aus stationären Punktprozessen auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{H}$ ergibt, und ebenfalls stationär ist.

Lemma 1.1.24. Sei η ein stationärer markierter Punktprozess auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{H}$ und $\mu : \mathcal{N}_Z(\mathbb{R}^d \times \mathbb{H}) \rightarrow \mathcal{N}(\mathbb{R}^d)$ eine messbare Abbildung, für die

$$\mu(\varphi)(A + x) = \mu(\varphi - x)(A), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad \varphi \in \mathcal{N}_Z(\mathbb{R}^d \times \mathbb{H}), \quad (1.9)$$

gilt. Falls $\mu(\eta)$ ein zufälliges Maß auf \mathbb{R}^d ist, dann ist $\mu(\eta)$ stationär.

Beweis: Nach Voraussetzung gilt für $\varphi \in \mathcal{N}_Z(\mathbb{R}^d \times \mathbb{H})$ und alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

$$\mu(\varphi)(A + x) = \mu(\varphi - x)(A), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Nach Definition ist $(\mu(\varphi) - x)(A) = \mu(\varphi)(A + x)$ und somit

$$\mu(\varphi) - x = \mu(\varphi - x), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Für den Punktprozess η erhalten wir daraus $\mu(\eta) - x \stackrel{d}{=} \mu(\eta - x)$. Da η nach Voraussetzung stationär ist, gilt weiter $\mu(\eta - x) \stackrel{d}{=} \mu(\eta)$. Zusammen ergibt sich daraus die Stationarität von $\mu(\eta)$. \square

Erfüllt ein zufälliges Maß $\mu(\cdot)$ Bedingung (1.9), so wird $\mu(\cdot)$ auch als *adaptiert* bezeichnet (vgl. z.B. Abschnitt 3.4 in [26]).

1.2 Hard-Core-Modelle

In diesem Abschnitt führen wir eine allgemeine Modellklasse der stochastischen Geometrie, die Klasse der Hard-Core-Modelle (vgl. [30]), ein. Wir beschränken uns hier, wie auch im weiteren Verlauf der Arbeit, auf Hard-Core-Modelle im \mathbb{R}^d , da diese in den Dimensionen $d = 1, 2, 3$ anschauliche Interpretationen besitzen. Wir stellen einige spezielle Hard-Core-Modelle vor und erläutern die zu Grunde liegenden Maximierungsgedanken.

Es sei \mathcal{K}'_0 die Menge aller konvexen Körper des \mathbb{R}^d , bei denen der Ursprung im relativen Inneren liegt. Im weiteren Verlauf der Arbeit schreiben wir auch $\mathbb{N} := \mathbb{N}(\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}'_0 \times \mathbb{R}_+)$ für die (im Sinne der Produkttopologie) lokalendlichen Maße auf $\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}'_0 \times \mathbb{R}_+$ sowie $\mathcal{N} := \mathcal{N}(\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}'_0 \times \mathbb{R}_+)$ für die zugehörige σ -Algebra und verwenden auf analoge Art und Weise die Kurzschreibweisen \mathbb{N}_Z und \mathcal{N}_Z für die einfachen Zählmaße sowie \mathbb{M} und \mathcal{M} für die einfachen Zählmaße mit einfacher Projektion.

Definition 1.2.1. Eine messbare Funktion $f : \mathbb{N}_Z \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{K}'_0 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, \infty]$, für die

$$f(\varphi + y, x + y, K, t) = f(\varphi, x, K, t), \quad \varphi \in \mathbb{N}_Z, \quad x, y \in \mathbb{R}^d, \quad K \in \mathcal{K}'_0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (1.10)$$

und

$$f(\varphi, x, K, t) = 0, \quad (x, K, t) \notin \varphi \in \mathbb{N}_Z, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad K \in \mathcal{K}'_0, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

sowie

$$f(\varphi, x, K, t) = 0, \quad \varphi \in \mathbb{N}_Z \setminus \mathbb{M}, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad K \in \mathcal{K}'_0, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

gelten, heißt *Wachstumsfunktion*. Die durch Gleichung (1.10) beschriebene Eigenschaft nennen wir *Translationsinvarianz* von f .

Der Begriff „Wachstumsfunktion“ erhält später durch Beispiele eine anschauliche Interpretation. Zunächst belassen wir es bei dieser formalen Definition. Es folgt eine Messbarkeitsaussage.

Lemma 1.2.2. *Sei f eine Wachstumsfunktion. Dann ist $T : \mathbb{N}_Z \rightarrow \mathbb{N}_Z(\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}'_0 \times \mathbb{R}_+ \times [0, \infty])$, definiert durch*

$$\varphi \mapsto T(\varphi) := \{(x, K, t, f(\varphi, x, K, t)) : (x, K, t) \in \varphi\},$$

messbar.

Beweis: Aufgrund von Lemma 1.4 aus [13] reicht es, die Messbarkeit der Abbildungen

$$\varphi \mapsto T(\varphi)(B), \quad B \subset \mathbb{R}^d \times \mathcal{K}'_0 \times \mathbb{R}_+ \times [0, \infty],$$

zu zeigen. Schreibt man die Abbildungen als Integrale

$$\varphi \mapsto \int \mathbf{1}\{(x, K, t, f(\varphi, x, K, t)) \in B\} \varphi(d(x, K, t)),$$

so folgt die Messbarkeit unmittelbar mit Lemma 1.41 aus [13]. Die Tatsache, dass $T(\varphi)$ ein lokalendliches, einfaches Zählmaß ist, folgt unmittelbar aus seiner Definition. \square

Wir können nun die Klasse der Hard-Core-Modelle einführen.

Definition 1.2.3. Eine Wachstumsfunktion f bezeichnen wir als *Hard-Core-Funktion*, falls für alle $\varphi \in \mathcal{M}$ und $(x, K, t), (y, L, s) \in \varphi$ mit $f(\varphi, x, K, t) > 0$ und alle $(y, L, s) \in \varphi$ mit $f(\varphi, y, L, s) > 0$ und $x \neq y$ die Gleichung

$$\text{relint}(x + f(\varphi, x, K, t)K) \cap \text{relint}(y + f(\varphi, y, L, s)L) = \emptyset \quad (1.11)$$

gilt. Gleichung (1.11) nennen wir *Hard-Core-Bedingung* oder *Hard-Core-Eigenschaft*. Falls f eine Hard-Core-Funktion ist, bezeichnen wir das zugehörige Maß $T(\varphi)$ als *Hard-Core-Modell*. Die Menge

$$Z(\varphi) := \bigcup_{(x, K, t) \in \varphi} (x + f(\varphi, x, K, t)K)$$

nennen wir in diesem Fall ebenfalls Hard-Core-Modell, sofern aus dem Zusammenhang ersichtlich ist, welches Objekt gemeint ist. Die konvexe Menge

$$x + f(\varphi, x, K, t)K, \quad (x, K, t) \in \varphi,$$

bezeichnen wir als *Korn* um den Punkt $x \in \mathbb{R}^d$ mit *Wachstumsfunktionswert* $f(\varphi, x, K, t) \in [0, \infty]$ und *Primärkorn* $K \in \mathcal{K}'_0$ sowie *Startzeit* $t \in \mathbb{R}_+$. Anstatt vom Wachstumsfunktionswert $f(\varphi, x, K, t)$ sprechen wir auch vom *Radius* oder der *Laufzeit*, falls es aufgrund der physikalischen Interpretation des betrachteten Hard-Core-Modells angebracht ist.

Diese Definition bedeutet, dass sich in einem Hard-Core-Modell keine zwei Körner mit echt positiven Wachstumsfunktionswerten überlappen können. Wir werden nun zunächst einige wichtige Beispiele bekannter Hard-Core-Modelle vorstellen.

1.2.1 Stienen-Modell

Es sei $\varphi \in \mathcal{M}$. Im *Stienen-Modell* (vgl. Seite 218 in [30]) besitzen alle Elemente von φ als Primärkorn die Einheitskugel, die wir in diesem Unterabschnitt mit $B := B(0, 1)$ bezeichnen, und die Startzeit $t = 0$. Die Startzeit unterdrücken wir deshalb in diesem Unterabschnitt in sämtlichen Ausdrücken. Die zugehörige Hard-Core-Funktion f ist für $(x, B) \in \varphi$ durch

$$f(\varphi, x, B) := \frac{1}{2} \|x - n_x(\varphi)\|$$

gegeben, wobei $n_x(\varphi)$ der nächste Nachbar von x in der Projektion $\phi = p(\varphi)$ von φ auf die erste Komponente ist. Das zugehörige Hard-Core-Modell $Z(\varphi)$ ist also die Vereinigung aller Kugeln mit Mittelpunkt $x \in \phi$ und Radius $(1/2)\|x - n_x(\varphi)\|$, also

$$Z(\varphi) = \bigcup_{x \in \phi} \left(x + \frac{1}{2} \|x - n_x(\varphi)\| B \right).$$

Aus dieser Definition erkennen wir unmittelbar, dass es sich in der Tat um ein Hard-Core-Modell handelt. Weiter stellen wir fest, dass sich zwei Kugeln genau dann berühren, wenn ihre Mittelpunkte wechselseitig nächste Nachbarn sind.

Anschaulich lässt sich dieses Modell konstruieren, indem wir zur Bestimmung des zu einem Punkt $x \in \phi$ aus der Projektion von φ gehörenden Radius aus x eine Kugel wachsen lassen und sie dann stoppen, sobald sie den Radius $(1/2)n_x(\varphi)$, d.h. den halben Abstand zum nächsten Nachbarn, erreicht hat.

Es möglich, das Stienen-Modell auf Konfigurationen zu erweitern, in denen die Körner konvexe Körper sind.

1.2.2 Dead-Leaves-Modell und Random-Sequential-Adsorption-Modell

In diesem Unterabschnitt betrachten wir ein $\varphi \in \mathcal{M}$, das keine zwei Punkte mit gleicher Startzeit besitzt.

Sowohl im *Dead-Leaves-Modell* (siehe z.B. [19] oder Seite 508 ff. in [29]) als auch im *Random-Sequential-Adsorption-Modell* (siehe [24]), kurz *RSA-Modell*, nimmt die Hard-Core-Funktion nur die Werte 0 und 1 an. Die Menge der Punkte $(x, K, t) \in \varphi$, für die $f(\varphi, x, K, t) = 1$ gilt, ist im Dead-Leaves-Modell die Menge aller $(x, K, t) \in \varphi$, für die für alle $(y, L, s) \in \varphi \setminus \{(x, K, t)\}$ die Implikation $(x + K) \cap (y + L) \neq \emptyset \Rightarrow t < s$ gilt. Im RSA-Modell steht auf der rechten Seite dieser Implikation die Aussage „ $t < s$ oder $f(\varphi, y, L, s) = 0$ “. Wir erkennen, dass im Dead-Leaves-Modell u.U. auch Körnern der Funktionswert 0 zugewiesen wird, obwohl man ihnen auch den Funktionswert 1 zuweisen könnte, ohne die Hard-Core-Bedingung zu verletzen. In einer Konfiguration aus drei Punkten ist dies der Fall, wenn das erste Korn $x_1 + f(\varphi, x_1, K_1, t_1)K_1$ einen nichtleeren Schnitt mit dem zweiten Korn $x_2 + f(\varphi, x_2, K_2, t_2)K_2$ besitzt, welches seinerseits einen nichtleeren Schnitt mit dem dritten Korn $x_3 + f(\varphi, x_3, K_3, t_3)K_3$ besitzt und gleichzeitig $t_1 < t_2 < t_3$ gilt. In diesem Fall erhält nur (x_1, K_1, t_1) den Funktionswert 1 zugewiesen. Das RSA-Modell würde hingegen sowohl (x_1, K_1, t_1) als auch (x_3, K_3, t_3) den Funktionswert 1 zuordnen. Wir stellen fest, dass das Dead-Leaves-Modell eine Teilmenge des RSA-Modells ist.

Im \mathbb{R}^2 haben beide Modelle eine anschauliche Interpretation, die auch die Namen der Modelle erklären. Im Dead-Leaves-Modell fällt für jeden Punkt $(x, K, t) \in \varphi$ zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}_+$ an der Stelle $x \in \mathbb{R}^2$ ein Blatt der Form $K \in \mathcal{K}'_0$ auf den Boden, bzw. den \mathbb{R}^2 . Sind alle Blätter bzw. Körner auf den Boden gefallen, besteht das Dead-Leaves-Modell $T(\varphi)$ aus allen Körnern $x + K$, die vollständig zu sehen sind, sofern wir von unten auf das so entstandene Bild schauen. Im RSA-Modell stellen wir uns vor, dass die Körner sukzessive, nach Startzeiten geordnet, wie Blätter auf den Boden fallen. Allerdings fallen nur solche Blätter auf den Boden, die beim Herabfallen keine bereits auf dem Boden liegenden Blätter überdecken. Die anderen verschwinden.

1.2.3 Matérn-Prozesse

Es sei $\varphi \in \mathcal{M}$. Wie im Stienen-Modell seien auch im *ersten Matérnschen Modell* (siehe auch Abschnitt 3.4 in [18]) alle Primärkörner gleich der Einheitskugel, die wir in diesem Unterabschnitt mit $B := B(0, 1)$ bezeichnen. Weiter sei $r > 0$ und die Hard-Core-Funktion nehme nur die Werte 0 und $r/2$ an. Die Menge der Punkte aus φ , welche den Funktionswert $r/2$ zugeordnet bekommen, ist dann

$$\varphi' := \{(x, B, t) \in \varphi : \text{card}(B(x, r) \cap \phi) = 1\},$$

wobei ϕ wie oben die Projektion von φ auf die erste Komponente bezeichnet. Den Punkten aus $\varphi \setminus \varphi'$ ordnen wir den Funktionswert 0 zu. Wir erhalten das zugehörige Hard-Core-Modell

$$Z(\varphi) := \bigcup_{x \in \varphi'} (x + B(x, r/2)).$$

Wir ordnen also allen Punkten, deren Abstand zu ihrem nächsten Nachbarn bezüglich der Projektion auf die erste Komponente kleiner als r ist, den Radius 0 zu und allen anderen den Radius $r/2$. Die Zeitmarke beachten wir dabei nicht. Wir erkennen, dass analog zum Dead-Leaves-Modell potentiell Punkte den Funktionswert 0 bekommen, obwohl wir diesen den Funktionswert $r/2$ zuordnen könnten, ohne die Hard-Core-Bedingung zu verletzen. Für ein Paar wechselseitig nächster Nachbarn $(x, B, t), (y, B, s) \in \varphi$ mit $r/2 \leq \|x - y\| \leq r$ gilt $f(\varphi, x, B, t) = f(\varphi, y, B, s) = 0$, obwohl mindestens einer der beiden Punkte mit dem Funktionswert $r/2$ versehen werden könnte, ohne die Hard-Core-Bedingung (1.11) zu verletzen. Dieses Phänomen beseitigt das *zweite*

Matérnsche Modell. Wie im ersten Matérnschen Modell seien alle Körner gleich der Einheitskugel und die Hard-Core-Funktion nehme nur die Werte 0 oder $r/2$ an. Die Menge der Punkte, welche den Funktionswert $r/2$ zugeordnet bekommen, ist dann

$$\varphi' := \{(x, B, t) \in \varphi : \nexists (y, B, s) \in \varphi \setminus \{(x, B, t)\} \text{ mit } B(x, r/2) \cap B(y, r/2) \neq \emptyset \text{ und } s < t\}.$$

Im Falle eines Paares wechselseitig nächster Nachbarn mit unterschiedlichen Zeitmarken bleibt also der Punkt mit der kleineren Zeitmarke erhalten. Das erste Matérnsche Modell ist daher eine Teilmenge des zweiten.

1.3 Wachstumsmaximale Modelle

Nun stellen wir die Modellklasse der wachstumsmaximalen Modelle vor, die wir im Weiteren betrachten wollen. Wir grenzen sie von den bisher besprochenen Modellen ab und ordnen sie in die Klasse der Hard-Core-Modelle ein.

Zur Konfiguration $\varphi \in \mathcal{M}$ beschreibt ein wachstumsmaximales Modell für jedes $(x, K, t) \in \varphi$ den folgenden, zum Zeitpunkt 0 beginnenden Wachstumsvorgang. Sofern bis zum Zeitpunkt $t+r$, $r \geq 0$, keinerlei Interaktion mit der übrigen Konfiguration stattgefunden hat, hat zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}_+$ um den Punkt $x \in \mathbb{R}^d$ ein Korn mit $K \in \mathcal{K}'_0$ als Primärkorn mit Geschwindigkeit 1 zu wachsen begonnen. Somit befindet sich zum Zeitpunkt $t+r$ um den Punkt x das Korn $x+rK$. Interaktion mit anderen Punkten der Konfiguration kann auf zwei Arten geschehen. Zum einen kann ein Punkt $(x, K, t) \in \varphi$ bis zu seiner Startzeit t eliminiert werden. Dies ist dann der Fall, wenn ein Punkt $(y, L, s) \in \varphi \setminus \{(x, K, t)\}$ mit $s < t$ und ein $v \in [0, t-s]$ existiert, so dass $x \in \text{relint}(y+vL)$ gilt und (y, L, s) selbst bis zum Zeitpunkt v mit keinem anderen Punkt aus $\varphi \in \mathcal{M}$ interagiert hat. In diesem Fall ordnen wir (x, K, t) den Radius bzw. Wachstumswert $f(\varphi, x, t) = 0$ zu. Die andere Möglichkeit der Interaktion besteht darin, dass das Wachstum des zum Punkt $(x, K, t) \in \varphi$ gehörenden Kornes durch das Berühren eines anderen Kornes mit positivem Radius gestoppt wurde. Dann existiert ein Zeitpunkt v mit $v \geq t$, in dem das Korn $x+(v-t)K$ durch ein anderes, bereits gestopptes oder ebenfalls noch wachsendes Korn gestoppt wird. Wir setzen dann $f(\varphi, x, K, t) = v-t$. Ein Korn $(y, L, r) \in \varphi \setminus \{(x, K, t)\}$, dessen Startzeit zum Zeitpunkt v noch nicht erreicht ist, d.h. für das $r > v$ gilt, und bereits eliminierte Körner nehmen an dieser Form der Interaktion nicht teil.

Wir wollen nun die eben gegebene intuitive Interpretation eines wachstumsmaximalen Modells formal fixieren.

Definition 1.3.1. Sei f eine Hard-Core-Funktion. Weiter seien $\varphi \in \mathcal{M}$ und $(x, K, t), (y, L, s) \in \varphi$ mit $(y, L, s) \neq (x, K, t)$. Die beiden Punkte (x, K, t) und (y, L, s) heißen *Nachbarn* in φ bzgl. f , falls

$$(x + f(\varphi, x, K, t)K) \cap (y + f(\varphi, y, L, s)L) \neq \emptyset$$

gilt. Den Punkt (y, L, s) mit $f(\varphi, y, L, s) > 0$ nennen wir *stoppender Nachbar* von (x, K, t) bzgl. f , falls die beiden Punkte Nachbarn sind und zusätzlich eine der beiden folgenden Eigenschaften gilt:

- a) $f(\varphi, x, K, t) > 0$ sowie $f(\varphi, y, L, s) + s \leq f(\varphi, x, K, t) + t$,
- b) $x \in (y + f(\varphi, y, L, s)L)$ sowie $t > \inf\{r \geq 0 : \{x\} \cap (y + rL) \neq \emptyset\} + s$.

Die Funktion $f(\varphi, \cdot)$ heißt *wachstumsmaximal* bzgl. φ , falls jeder Punkt $(x, K, t) \in \varphi$ mit $f(\varphi, x, K, t) < \infty$ einen stoppenden Nachbarn bzgl. f besitzt.

Bemerkung 1.3.2. Ist f eine Hard-Core-Funktion, so ist die Menge aller $\varphi \in M$ derart, dass $f(\varphi, \cdot)$ wachstumsmaximal ist, messbar und translationsinvariant.

Im Fall volldimensionaler Primärkörner ist in obiger Definition $x \in (y + f(\varphi, y, L, s)L)$ aufgrund der Hard-Core-Eigenschaft äquivalent zu $f(\varphi, x, K, t) = 0$. Aus $t > \inf\{r \geq 0 : \{x\} \cap (y + rL) \neq \emptyset\} + s$ folgt stets $t > s$.

Bemerkung 1.3.3. Die Größe $t - s > \inf\{r \geq 0 : \{x\} \cap (y + rL) \neq \emptyset\}$ aus der letzten Definition können wir als die Zeit interpretieren, welche das Korn um den Punkt y benötigt, um bis zum Punkt x zu wachsen. Die Bedingung $t > \inf\{r \geq 0 : \{x\} \cap (y + rL) \neq \emptyset\} + s$ bedeutet daher, dass, sofern keine weitere Interaktion vorliegt, das um den Punkt y wachsende Korn den Punkt x erreicht, bevor das zu x gehörende Korn zu wachsen beginnt.

Definition 1.3.4. Sei l eine Hard-Core-Funktion und $\varphi \in M$ derart, dass $l(\varphi, \cdot)$ wachstumsmaximal ist. Die Menge

$$T(\varphi) = \{(x, K, t, l(\varphi, x, K, t)) : (x, K, t) \in \varphi\}$$

nennen wir *deterministisches wachstumsmaximales Modell* bzgl. φ und l . Die Menge

$$Z(\varphi) = \bigcup_{(x, K, t) \in \varphi} (x + l(\varphi, x, K, t)K)$$

bezeichnen wir ebenfalls als wachstumsmaximales Modell bzgl. φ und l , sofern aus dem Zusammenhang ersichtlich ist, welches Objekt gemeint ist. Im Fall $l(\varphi, x, K, t) = 0$ ist in obiger Vereinigung $x + l(\varphi, x, K, t)K = \{x\}$.

Wir erinnern uns an die Sprechweise aus Definition 1.2.3 des allgemeinen Hard-Core-Modells. Für $\varphi \in M$ und eine wachstumsmaximale Funktion $l(\varphi, \cdot)$ bezeichnen wir die konvexe Menge

$$x + l(\varphi, x, K, t)K$$

als Korn um den Punkt $x \in \mathbb{R}^d$ mit Primärkorn $K \in \mathcal{K}'_0$, Startzeit $t \in \mathbb{R}_+$ und Lauf- bzw. Wachstumszeit $l(\varphi, x, K, t) \in [0, \infty]$. Somit erklärt sich der Begriff der Wachstumsmaximalität. In einem wachstumsmaximalen Modell kann kein Korn weiter wachsen, ohne die Hard-Core-Eigenschaft zu verletzen. Ersetzen wir in obiger Definition das Zählmaß φ durch ein zufälliges Zählmaß η , so nennen wir $T(\eta)$ und die zugehörige zufällige abgeschlossene Menge $Z(\eta)$ ein *zufälliges wachstumsmaximales Modell* (wobei später Zusatzvoraussetzungen die Abgeschlossenheit von $Z(\eta)$ sichern werden). Sofern es sich aus dem Kontext ergibt, lassen wir die Begriffe „deterministisch“ und „zufällig“ im Folgenden weg.

Wir zeigen nun noch einige Bilder wachstumsmaximaler Modelle im \mathbb{R}^2 . Wir beginnen mit einer Konfiguration, deren Primärkörner alle die Einheitskugel $B(0, 1)$ und deren Startzeiten alle 0 sind. Typisch für dieses Modell und, wie wir später sehen werden, für alle wachstumsmaximalen Modelle ist das Auftreten von Nachbarn mit gleichem Wachstumsfunktionswert. Diese Objekte werden wir später als Doublets bezeichnen. Des Weiteren sehen wir, dass alle Punkte einen echt positiven Wachstumsfunktionswert besitzen. Das Modell ist auch unter dem Namen Lilypond-Modell bekannt. Wir werden darauf in Abschnitt 2.1 genauer eingehen.

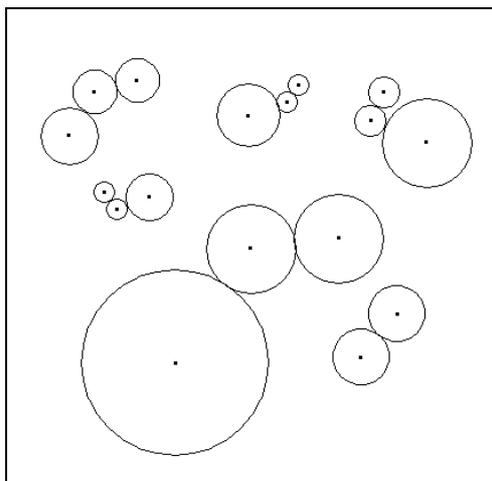


Abbildung 1.1: Ein wachstumsmaximales Modell mit Einheitskugeln als Primärkörner und gleicher Startzeit.

Im nächsten Bild sind die Primärkörner keine Einheitskugeln sondern zentrierte Quadrate. Die Startzeiten bleiben alle 0. Ein Unterschied zu dem Kugelfall aus Abbildung 1.1 besteht in der Form der Schnittmengen der verschiedenen Körner. Während es sich im Kugelfall lediglich um Punkte handelt, treten im Fall von Quadraten Strecken als Schnittmengen zweier Körner auf. Darüber hinaus ist es möglich, dass ein Modell mit Quadraten sich von einem Modell mit Kugeln topologisch unterscheidet, obwohl beide Modelle auf demselben Punktmuster basieren.

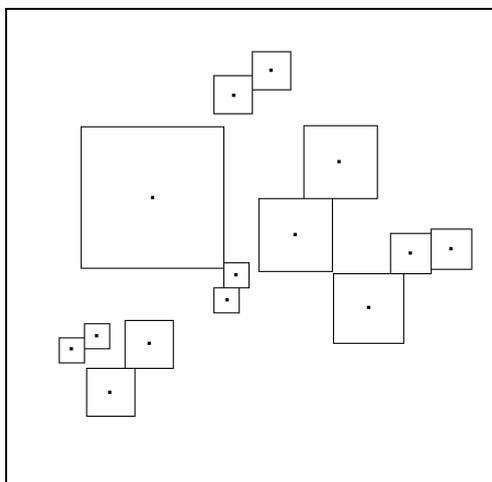


Abbildung 1.2: Ein wachstumsmaximales Modell mit zentrierten Quadraten als Primärkörner und gleicher Startzeit.

Nun zeigen wir ein Beispiel mit niederdimensionalen Primärkörnern, nämlich Liniensegmenten der Länge 2 mit dem Ursprung als Mittelpunkt und unterschiedlichen Richtungen. Die Startzeiten sind nach wie vor alle 0. In Analogie zum Modell mit Einheitskugeln, erhalten wir erneut Nachbarn mit gleichem Wachstumsfunktionswert. Aufgrund der speziellen Form der Primärkörner erinnern diese Paare oft an Pfeilspitzen.

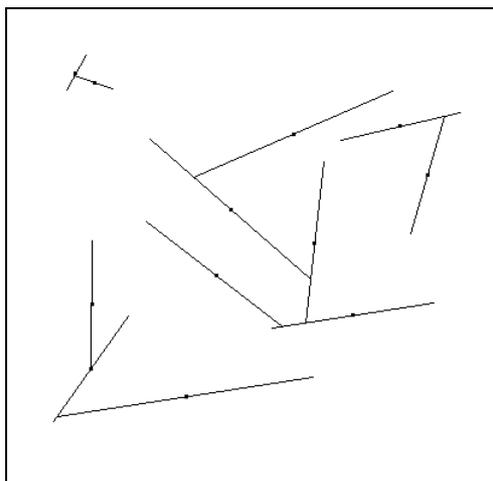


Abbildung 1.3: Ein wachstumsmaximales Modell mit Liniensegmenten als Primärkörnern und gleicher Startzeit.

Abschließend geben wir noch ein Beispiel für ein Modell mit von 0 verschiedenen Startzeiten an. Die Primärkörner sind wie im ersten Beispiel Einheitskugeln. Offensichtlich gibt es keine Nachbarn mit gleichem Wachstumsfunktionswert. Wir werden jedoch später sehen, dass in einer solchen Situation Punktepaare existieren, deren Summen aus Wachstumsfunktionswert und Startzeit gleich sind. Diese Paare bilden das Analogon zu den oben erwähnten Doublets in den Modellen, in denen alle Startzeiten 0 sind. Darüber hinaus erkennen wir, dass es in einem solchen Fall auch Punkte gibt, die den Wachstumsfunktionswert 0 zugeordnet bekommen, da sie noch vor ihrer Startzeit von einem anderen Korn überdeckt wurden.

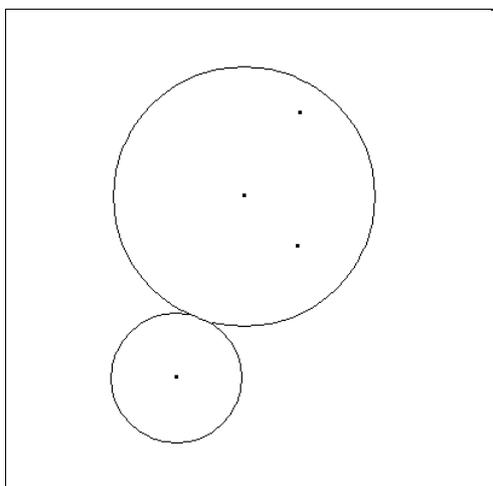


Abbildung 1.4: Ein wachstumsmaximales Modell mit Einheitskugeln als Primärkörnern und verschiedenen Startzeiten.

Kapitel 2

Volldimensionale Modelle

2.1 Das Lilypond-Modell

Das *Lilypond-Modell* ist ein spezielles wachstumsmaximales Modell. Der Name „Lilypond-Modell“ stammt von der Vorstellung, dass das Tripel $(x, B(0, 1), 0) \in \varphi$ eine Seerose darstellt, die aus dem Punkt $x \in \phi$ herauswächst. Die zu φ gehörige abgeschlossene Menge $Z(\varphi)$ kann man sich dann als Teich vorstellen, in dem sich keine zwei Seerosen überlappen. Es wird gefordert, dass alle Startzeiten 0 sind. Des Weiteren kommt nur die Einheitskugel als Primärkorn vor. Für $\varphi \in \mathcal{M}$ ist also jeder Punkt $(x, K, t) \in \varphi$ von der Form $(x, K, t) = (x, B(0, 1), 0)$.

Eingeführt wurde dieses Modell von Andrienko, Brilliantov und Krapivsky in [1] unter dem Namen *Touch-and-Stop-Model*. Das Hauptaugenmerk liegt dort allerdings auf den physikalischen Eigenschaften des Modells. Rein mathematisch wurde es unabhängig von [1] durch Häggström und Meester in [10] erstmals untersucht. Diese zeigten Existenz und Eindeutigkeit sowie das Fehlen von Perkolation für den Fall, dass dem Lilypond-Modell ein stationärer Poissonprozess in \mathbb{R}^d zu Grunde liegt. Danach wurde das Modell von Daley und Last in [4] und Heveling und Last in [11] genauer untersucht. Neben neuen Existenzbeweisen konnte in diesen Arbeiten auch die Klasse der Punktprozesse, für die das Lilypond-Modell existiert, erweitert werden. Insbesondere gelang es, sich von Poissonprozessen zu lösen. Die Arbeit [11] verallgemeinert darüber hinaus den Begriff „Lilypond-Modell“. Der \mathbb{R}^d , versehen mit der euklidischen Norm, wird dort durch eine beliebige Menge \mathbb{X} , versehen mit einer Pseudo-Metrik, ersetzt.

Die folgende Abbildung zeigt einen kleinen und einen großen Ausschnitt einer Realisierung eines Lilypond-Modells, wie Häggström und Meester es in [10] beschreiben.

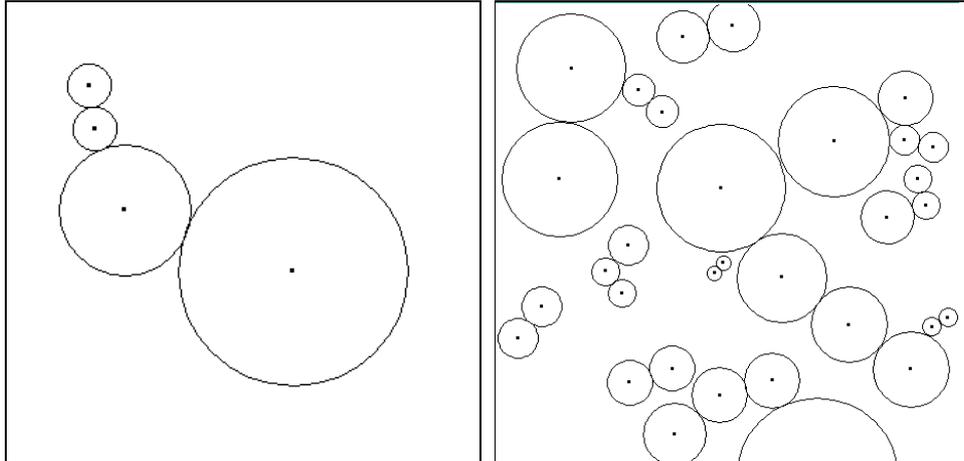


Abbildung 2.1: Zwei unterschiedlich skalierte Ausschnitte eines Lilypond-Modells, das auf Realisierungen eines stationären Poissonprozesses beruht.

Im nächsten Abschnitt betrachten wir eine Erweiterung des Lilypond-Modells, ein wachstumsmaximales Modell mit konvexen Körpern als Primärkörner.

2.2 Das wachstumsmaximale Modell mit konvexen Körnern

Wir zeigen zunächst die Existenz und Eindeutigkeit eines deterministischen wachstumsmaximalen Hard-Core-Modells mit beliebigen konvexen Mengen als Primärkörner und gleichem Startzeitpunkt. Hierfür müssen die zu Grunde liegenden Konfigurationen $\varphi \in M$ eine Zusatzvoraussetzung erfüllen. Danach zeigen wir, dass eine große Klasse von Punktprozessen diese Voraussetzung fast sicher erfüllt und somit das zufällige Modell für eine große Klasse von Punktprozessen existiert.

Bemerkung 2.2.1. Obwohl dieses Kapitel die Überschrift „Volldimensionale Modelle“ trägt, werden die Ergebnisse dieses Abschnitts für konvexe Mengen beliebiger Dimension formuliert und bewiesen. Da wir jedoch später in Kapitel 3 speziell Modelle mit niederdimensionalen Primärkörnern behandeln, wollen wir in diesem Kapitel vornehmlich an volldimensionale Körner denken.

2.2.1 Existenz und Eindeutigkeit für eine feste Konfiguration

Wir betrachten im aktuellen Abschnitt 2.2 nur Modelle, in denen alle Körner die gleiche Startzeit, nämlich 0, aufweisen. Daher machen wir folgende Definition.

Definition 2.2.2. Es sei M^0 die Menge aller $\varphi \in M$ für die $t = 0$ für alle $(x, K, t) \in \varphi$ gilt. Wir schreiben kurz $(x, K) := (x, K, 0)$ für alle $(x, K, 0) \in \varphi$ und $\varphi \in M^0$ und unterdrücken die Startzeit auch in allen anderen Ausdrücken.

Zum Nachweis der Existenz führen wir noch folgenden „Abstand“ ein.

Definition 2.2.3. Für $(x, K), (y, L) \in \mathbb{R}^d \times \mathcal{K}'_0$ definieren wir

$$a(x, K, y, L) := \inf\{r \geq 0 : (x + rK) \cap (y + rL) \neq \emptyset\}.$$

Für $\varphi \in M^0$ bezeichnen wir eine Folge verschiedener Punkte $(x_1, K_1), (x_2, K_2), \dots \in \varphi$ als *absteigende Kette*, falls die Folge $(a(x_i, K_i, x_{i+1}, K_{i+1}))_{i \in \mathbb{N}}$ monoton fallend ist. Die n Punkte $(x_1, K_1), \dots, (x_n, K_n) \in \varphi$ nennen wir eine *absteigende Kette der Länge n* , falls

$$a(x_i, K_i, x_{i+1}, K_{i+1}) \geq a(x_{i+1}, K_{i+1}, x_{i+2}, K_{i+2}), \quad i \in \{1, \dots, n-2\},$$

gilt.

Es gilt

$$a(x, K, y, L) = d_{K-L}(x, y), \quad x, y \in \mathbb{R}^d, \quad K, L \in \mathcal{K}'_0,$$

mit dem in Abschnitt 1.1.1 definierten Abstand d_{K-L} . Weiter gilt die Symmetriebeziehung

$$a(x, K, y, L) = a(y, L, x, K), \quad x, y \in \mathbb{R}^d, \quad K, L \in \mathcal{K}'_0. \quad (2.1)$$

Bemerkung 2.2.4. Für $r \geq 0$ ist $a(x, K, y, L) \leq r$ äquivalent zu $(x + rK) \cap (y + rL) \neq \emptyset$. Im Fall $a(x, K, y, L) = r$ berühren sich die Körner um x und y und es gilt $x \in \partial(y + r(L - K))$.

Nun wollen wir noch festlegen, was in diesem Modell unter einem nächsten Nachbar zu verstehen ist. Für $\varphi \in M^0$ und $(x, K) \in \varphi$ heißt ein Punkt $(y, L) \in \varphi \setminus \{(x, K)\}$ *nächster Nachbar* von (x, K) , falls

$$a(x, K, y, L) = \min\{a(x, K, z, A) : (z, A) \in \varphi \setminus \{(x, K)\}\} \quad (2.2)$$

gilt. Wir formulieren nun einen Zusammenhang zwischen der eben definierten Größe $a(x, K, y, L)$ und einer Hard-Core-Funktion l .

Lemma 2.2.5. *Es seien $\varphi \in M^0$, (x, K) und (y, L) verschiedene Punkte aus φ sowie l eine Hard-Core-Funktion. Weiter seien $(x, K), (y, L)$ bzgl. l benachbart mit*

$$0 < l(\varphi, x, K) \leq l(\varphi, y, L).$$

Dann gilt

$$l(\varphi, x, K) \leq a(x, K, y, L) \leq l(\varphi, y, L).$$

Diese Aussage bleibt richtig, falls wir alle Ungleichungen durch strikte Ungleichungen ersetzen.

Beweis: Seien $(x, K), (y, L) \in \varphi$ mit $(x, K) \neq (y, L)$. Dann gilt nach Definition von a

$$(x + a(x, K, y, L)K) \cap (y + a(x, K, y, L)L) \neq \emptyset. \quad (2.3)$$

Da (x, K) und (y, L) nach Voraussetzung benachbart sind, ist darüber hinaus

$$(x + l(\varphi, x, K)K) \cap (y + l(\varphi, y, L)L) \neq \emptyset. \quad (2.4)$$

Falls $0 < l(\varphi, x, K) = l(\varphi, y, L)$, folgt hieraus mit der Hard-Core-Eigenschaft die Gleichungskette

$$l(\varphi, x, K) = a(x, K, y, L) = l(\varphi, y, L),$$

also insbesondere die geforderte Ungleichung. Im Fall $l(\varphi, x, K) < l(\varphi, y, L)$ folgt aus (2.3) und (2.4) die strikte Ungleichungskette

$$l(\varphi, x, K) < a(x, K, y, L) < l(\varphi, y, L),$$

da wir im Fall $a(x, K, y, L) \leq l(\varphi, x, K) < l(\varphi, y, L)$ einen Widerspruch zur Hard-Core-Eigenschaft und im Fall $0 < l(\varphi, x, K) < l(\varphi, y, L) \leq a(x, K, y, L)$ einen Widerspruch zur Nachbar-Eigenschaft (2.4) erhalten würden. \square

Um den zentralen Satz dieses Unterabschnitts formulieren können, müssen wir noch eine lokale Endlichkeitsbedingung und eine Eindeutigkeitsbedingung einführen.

Definition 2.2.6. Sei $\varphi \in M^0$. Wir sagen φ ist *markiert lokalendlich*, falls für alle $(x, K) \in \varphi$ und alle $r > 0$ die Endlichkeitsbedingung

$$\text{card}(\{(y, L) \in \varphi \setminus \{(x, K)\} : a(x, K, y, L) \leq r\}) < \infty \quad (2.5)$$

erfüllt ist.

Falls $\varphi \in M^0$ markiert lokalendlich ist und mindestens zwei Punkte enthält, existiert für jeden Punkt $(x, K) \in \varphi$ ein nächster Nachbar.

Definition 2.2.7. Wir nennen $\varphi \in M^0$ *abstandseindeutig*, falls für alle verschiedenen Paare $(x_1, K_1), (y_1, L_1)$ und $(x_2, K_2), (y_2, L_2)$ von Punkten aus φ die Ungleichung $a(x_1, K_1, y_1, L_1) \neq a(x_2, K_2, y_2, L_2)$ gilt.

In einer abstandseindeutigen Konfiguration bestehen Mengen wechselseitig nächster Nachbarn immer aus genau zwei Punkten.

Es folgt der zentrale Satz dieses Unterabschnitts, der Existenz- und Eindeigkeitssatz.

Satz 2.2.8. Sei $\varphi \in M^0$ *abstandseindeutig und markiert lokalendlich*. Des Weiteren enthalte φ keine absteigende Kette. Dann existiert zu φ eine eindeutig bestimmte wachstumsmaximale Funktion $l(\varphi, \cdot)$ bzw. ein eindeutig bestimmtes wachstumsmaximales Modell $T(\varphi) = \{(x, K, l(\varphi, x, K)) : (x, K) \in \varphi\}$.

Beweis: Wir modifizieren den Beweis von Proposition 2.1 aus [4]. Für $\varphi \in M^0$ konstruieren wir rekursiv eine Folge von Mengen $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ derart, dass $\varphi_n \subset \varphi_{n+1} \subset \varphi$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist und bestimmen dann in jedem Schritt der Rekursion die Werte $l(\varphi, x, K), (x, K) \in \varphi_{n+1} \setminus \varphi_n$. Anschließend ordnen wir, sofern vorhanden, dem einzigen Punkt, der in keinem φ_n liegt, auf natürliche Art und Weise einen Radius zu. Wir zeigen dann, dass die so konstruierte Funktion $l(\varphi, \cdot)$ die einzige wachstumsmaximale Funktion ist.

Es sei $\varphi_0 := \emptyset$. Weiter sei die Menge $\nu_n(\varphi, x, K)$ für alle $(x, K) \in \varphi \setminus \varphi_n$ durch

$$\begin{aligned} \nu_n(\varphi, x, K) := \{(x, K)\} \cup \{(y, L) \in \varphi \setminus (\varphi_n \cup \{(x, K)\}) : (x, K) \text{ und } (y, L) \\ \text{sind in } \varphi \setminus \varphi_n \text{ wechselseitig nächste Nachbarn}\} \end{aligned}$$

definiert. Aufgrund der markierten Lokalendlichkeit von φ ist diese Menge endlich. Weiter sei

$$\psi_n := \{(x, K) \in \varphi \setminus \varphi_n : \nu_n(x, K) \neq \{(x, K)\}\}.$$

Das heißt, ψ_n besteht aus allen Paaren wechselseitig nächster Nachbarn der Menge $\varphi \setminus \varphi_n$. Insbesondere ist ψ_0 die Menge aller wechselseitig nächsten Nachbarn in φ . Falls ψ_n die leere Menge ist, definieren wir $\varphi_{n+1} = \varphi_n$ und somit $\varphi_m = \varphi_n, m \geq n$. Andernfalls erhalten wir ausgehend von φ_n folgendermaßen die Menge φ_{n+1} und die Wachstumswertefunktion $l(\varphi, x, K), (x, K) \in \varphi_{n+1} \setminus \varphi_n$.

Wir definieren zunächst für $(x, K), (y, L) \in \varphi$ mit $(x, K) \neq (y, L)$

$$f_1(\varphi, x, K, y, L) := a(x, K, y, L)$$

und für $(x, K) \in \varphi \setminus \varphi_n, (y, L) \in \varphi_n$

$$f_2(\varphi, x, K, y, L) := \inf\{r \geq 0 : (x + rK) \cap (y + l(\varphi, y, L)L) \neq \emptyset\}. \quad (2.6)$$

Wegen $(y, L) \in \varphi_n$ ist $l(\varphi, y, L)$ in diesem Schritt bereits bekannt. Für $(x, K) \in \psi_n$ definieren wir weiter

$$a_n(\varphi, x, K) := \inf_{(y, L) \in \varphi_n} f_2(\varphi, x, K, y, L).$$

Außerdem sei

$$s'_n(\varphi, x, K) = f_1(\varphi, x, K, y, L)$$

für $(x, K) \in \varphi \setminus \varphi_n$ und $(y, L) \in \nu_n(\varphi, x, K) \setminus \{(x, K)\}$ sowie

$$s''_n(\varphi, x, K) = \min_{(y, L) \in \nu_n(\varphi, x, K)} a_n(\varphi, y, L).$$

Da die Menge $\nu_n(\varphi, x, K)$ endlich ist, handelt es sich in der letzten Gleichung tatsächlich um ein Minimum. Schließlich sei

$$l_n(\varphi, x, K) := \min\{s'_n(\varphi, x, K), s''_n(\varphi, x, K)\}.$$

Jetzt fügen wir nach einem Schema Punkte aus ψ_n zu φ_n hinzu, um φ_{n+1} zu erhalten. Hierfür unterscheiden wir für $(x, K) \in \psi_n$ zwei Fälle. Falls $l_n(\varphi, x, K) = s'_n(\varphi, x, K)$ gilt, fügen wir zu φ_n alle Punkte aus $\nu_n(\varphi, x, K)$ hinzu und setzen $l(\varphi, y, L) := l_n(\varphi, x, K)$, $(y, L) \in \nu_n(\varphi, x, K)$. Falls $l_n(\varphi, x, K) = s''_n(\varphi, x, K)$ gilt, erweitern wir φ_n um die Punkte $(y, L) \in \nu_n(\varphi, x, K)$, für die $l_n(\varphi, x, K) = a_n(\varphi, y, L)$ gilt und definieren $l(\varphi, y, L) := l_n(\varphi, x, K)$. Indem wir dies für alle $(x, K) \in \psi_n$ durchführen, erhalten wir φ_{n+1} aus φ_n . Nach Konstruktion ist $\{(x, K, l(\varphi, x, K)) : (x, K) \in \varphi_{n+1}\}$ ein Hard-Core-Modell. Wir definieren

$$\varphi_\infty := \bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi_n, \quad \psi := \varphi \setminus \varphi_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\varphi \setminus \varphi_n).$$

Die Menge ψ ist als Teilmenge von φ leer, endlich oder abzählbar unendlich. Ist ψ leer, haben wir bereits alle Radien konstruiert. Enthält ψ nur einen Punkt $(x, K) \in \varphi$, so setzen wir $l(\varphi, x, K) := \inf_{(y, L) \in \varphi_\infty} f_2(\varphi, x, K, y, L)$.

Enthält ψ mehr als einen Punkt, so enthält ψ kein Paar wechselseitig nächster Nachbarn. Dies erkennen wir wie folgt. Sei $(x, K) \in \psi$ und $\nu(\varphi, x, K)$ die Menge der wechselseitig nächsten Nachbarn von (x, K) in ψ . Wir können annehmen, dass $\nu(\varphi, x, K)$ nicht leer ist. Ansonsten würde kein wechselseitig nächster Nachbar von (x, K) in ψ existieren und unsere Behauptung wäre bereits gezeigt. Sei also $(y, L) \in \nu(\varphi, x, K)$. Wir definieren die Menge

$$A(\varphi, x, K) := \{(z, A) \in \varphi : a(z, A, x, K) \leq a(x, K, y, L)\} \\ \cup \{(z, A) \in \varphi : a(z, A, y, L) \leq a(x, K, y, L)\},$$

die aufgrund der markierten Lokalendlichkeit von φ eine Vereinigung zweier endlicher Mengen ist und daher selbst endlich ist. Die Menge $A(\varphi, x, K)$ enthält nach Konstruktion wegen der Abstandseindeutigkeit von φ keinen Punkt aus $\psi \setminus (\nu(\varphi, x, K) \cup \{(x, K)\})$, da sonst (x, K) und (y, L) keine wechselseitig nächsten Nachbarn wären. Somit kann $A(\varphi, x, K)$ nur Punkte aus $\nu(\varphi, x, K) \cup \{(x, K)\}$ und $\varphi \setminus \psi$ enthalten. Da φ als markiert lokalendlich vorausgesetzt wurde, ist die Menge $A(\varphi, x, K)$ endlich. Aus diesem Grund kann $A(\varphi, x, K)$ auch keine Punkte aus $\varphi \setminus \psi$ enthalten; sie wären alle bis zu einem $n \in \mathbb{N}_0$ durch den Algorithmus mit einem Funktionswert der Funktion l versehen worden. Gleichzeitig kann aber $\nu(\varphi, x, K)$ keine Elemente besitzen, denn jedes Paar wechselseitig nächster Nachbarn in ψ wäre nach Konstruktion der Menge $A(\varphi, x, K)$ auch ein Paar wechselseitig nächster Nachbarn in $\varphi \setminus \varphi_n$. Ein Teil dieser Punkte wäre also im $(n+1)$ -ten Schritt des Algorithmus mit einem Funktionswert versehen worden und könnte demnach nicht zu ψ gehören (oder es müsste $(x, K) \notin \psi$ gelten). Also enthält ψ wie behauptet keine Paare wechselseitig nächster Nachbarn (in ψ).

Jede Menge φ_E , die aus mindestens zwei und höchstens endlich vielen Punkte besteht, enthält bezüglich a ein Paar wechselseitig nächster Nachbarn. Dies ergibt sich aus der folgenden Betrachtung. Da $2 \leq \text{card}(\varphi_E) < \infty$ gilt, existieren zwei Punkte $(x, K) \neq (y, L)$ aus φ_E mit

$$a(x, K, y, L) \leq a(z_1, A_1, z_2, A_2)$$

für alle Paare $(z_1, A_1) \neq (z_2, A_2)$ aus φ_E . Wegen $a(x, K, y, L) = a(y, L, x, K)$ gilt damit sowohl

$$a(x, K, y, L) \leq a(x, K, z, A), \quad (z, A) \in \varphi_E \setminus \{(x, K)\},$$

als auch

$$a(y, L, x, K) \leq a(y, L, z, A), \quad (z, A) \in \varphi_E \setminus \{(y, L)\}.$$

Somit sind (x, K) und (y, L) wechselseitig nächste Nachbarn.

Deshalb kann ψ nicht endlich sein und nur aus abzählbar unendlich vielen Punkten bestehen. Wir zeigen per Induktion, dass ψ in diesem Fall eine absteigende Kette besitzt. Da ψ kein Paar wechselseitig nächster Nachbarn enthält, existieren drei verschiedene Punkte (x_0, K_0) , (x_1, K_1) und (x_2, K_2) aus ψ mit

$$a(x_0, K_0, x_1, K_1) \geq a(x_1, K_1, x_2, K_2),$$

wobei (x_1, K_1) nächster Nachbar von (x_0, K_0) ist und (x_2, K_2) nächster Nachbar von (x_1, K_1) . Angenommen $(x_0, K_0), \dots, (x_n, K_n)$ ($n \geq 2$) seien verschiedene Punkte in ψ , für die

$$a(x_{i-1}, K_{i-1}, x_i, K_i) \geq a(x_i, K_i, x_{i+1}, K_{i+1}), \quad i \in \{1, \dots, n-1\},$$

gelte. Sei nun (x_{n+1}, K_{n+1}) ein nächster Nachbar von (x_n, K_n) . Dann würde die Ungleichung $a(x_{n+1}, K_{n+1}, x_n, K_n) \leq a(x_n, K_n, x_{n-1}, K_{n-1})$ gelten, da sonst wegen $a(x_n, K_n, x_{n+1}, K_{n+1}) = a(x_{n+1}, K_{n+1}, x_n, K_n)$ der Punkt (x_{n+1}, K_{n+1}) kein nächster Nachbar von (x_n, K_n) sein könnte.

Weiter wäre $(x_{n+1}, K_{n+1}) \notin \{(x_0, K_0), \dots, (x_{n-1}, K_{n-1})\}$. Hierfür nehmen wir an, dass ein $j \in \{0, \dots, n-1\}$ mit $(x_j, K_j) = (x_{n+1}, K_{n+1})$ existiert. Wäre nun (x_n, K_n) kein nächster Nachbar von (x_j, K_j) , so würde ein $(x, K) \in \psi$ mit

$$a(x_j, K_j, x, K) < a(x_j, K_j, x_n, K_n) = a(x_{n+1}, K_{n+1}, x_n, K_n) \leq a(x_{j+1}, K_{j+1}, x_j, K_j)$$

existieren. Dann könnte aber (x_{j+1}, K_{j+1}) kein nächster Nachbar von (x_j, K_j) sein. Dies wäre ein Widerspruch. Daher ist (x_n, K_n) ein nächster Nachbar von $(x_j, K_j) = (x_{n+1}, K_{n+1})$. Also müssten (x_{n+1}, K_{n+1}) und (x_n, K_n) wechselseitig nächste Nachbarn sein, was jedoch ebenfalls einen Widerspruch ergäbe, da ψ keine wechselseitig nächsten Nachbarn enthält. Hieraus folgt, dass ψ und somit auch φ eine absteigende Kette besitzen würden, was wiederum der Voraussetzung an φ widerspräche. Die Menge ψ kann also höchstens einen Punkt besitzen.

Wir zeigen nun, dass das Hard-Core-Modell $T(\varphi) := \{(x, K, l(\varphi, x, K)) : (x, K) \in \varphi\}$ ein wachstumsmaximales Modell ist. Hierfür muss jedes $(x, K) \in \varphi$ einen stoppenden Nachbarn besitzen. Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $(x, K) \in \varphi_{n+1} \setminus \varphi_n$. Falls $l_n(\varphi, x, K) = s'_n(\varphi, x, K)$ gilt, so hat (x, K) mindestens einen Nachbarn (y, L) mit gleichem Wachstumsfunktionswert. Im Fall $n \geq 1$ und $l_n(\varphi, x, K) < s'_n(\varphi, x, K)$ existiert ein $(y, L) \in \varphi_n$ mit $l(\varphi, x, K) = f_2(\varphi, x, K, y, L)$. Also sind (x, K) und (y, L) nach Konstruktion Nachbarn. Dieses (y, L) ist ein stoppender Nachbar von (x, K) . Denn angenommen, es gilt $l(\varphi, x, K) < l(\varphi, y, L)$, so folgt mit Lemma 2.2.5, da (x, K) und (y, L) benachbart sind, die strikte Ungleichung

$$a(x, K, y, L) < l(\varphi, y, L). \tag{2.7}$$

Wir wählen $i \in \{1, \dots, n\}$ derart, dass $(y, L) \in \varphi_i \setminus \varphi_{i-1}$ ist. Somit existiert ein $(z, A) \in \nu_{i-1}(\varphi, y, L) \setminus \{(y, L)\}$. Das heißt, (y, L) und (z, A) sind wechselseitig nächste Nachbarn in $\varphi \setminus \varphi_{i-1}$. Nach Konstruktion des Algorithmus gilt $l(\varphi, y, L) \leq f_1(\varphi, y, L, z, A) = a(y, L, z, A)$. Daraus folgt mit (2.7)

$$a(y, L, x, K) = a(x, K, y, L) \leq a(y, L, z, A).$$

Da (x, K) kein Element der Menge φ_{i-1} ist, können (y, L) und (z, A) keine wechselseitig nächsten Nachbarn in $\varphi \setminus \varphi_{i-1}$ sein. Dies ist ein Widerspruch. Daher muss (y, L) ein kleinerer Nachbar von (x, K) sein. Also haben alle Punkte in φ_∞ einen stoppenden Nachbarn. Falls $\varphi \setminus \varphi_\infty$ einen Punkt enthält, so existiert für diesen wie oben ein $i \in \mathbb{N}$ und $(y, L) \in \varphi_i \setminus \varphi_{i-1}$ derart, dass $l(\varphi, x, K) = f_2(\varphi, x, K, y, L)$ ist. Somit erhalten wir analog zu oben auch für dieses (x, K) einen stoppenden Nachbarn. Wir merken noch an, dass sich die Translationsinvarianz (1.10) der Funktion l direkt aus der oben beschriebenen Konstruktion ergibt.

Wir zeigen nun die Eindeutigkeit von $T(\varphi) := \{(x, K, l(\varphi, x, K)) : (x, K) \in \varphi\}$ bzw. der wachstumsmaximalen Funktion $l(\varphi, \cdot)$. Es sei $T'(\varphi) = \{(x, K, l'(\varphi, x, K)) : (x, K) \in \varphi\}$ ein weiteres wachstumsmaximales Modell auf φ . Wir zeigen zuerst per Induktion, dass $l'(\varphi, x, K) = l(\varphi, x, K)$ für alle $(x, K) \in \varphi_n$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wir beginnen mit dem Induktionsanfang. Die Menge ψ_0 besteht aus allen Paaren wechselseitig nächster Nachbarn der Menge φ . Wir wählen $(x, K) \in \psi_0$ und $(y, L) \in \nu_0(\varphi, x, K)$ und nehmen an, dass $l'(\varphi, x, K) \neq f_1(\varphi, x, K, y, L)$ gilt. Dann muss entweder $l'(\varphi, x, K) < f_1(\varphi, x, K, y, L)$ oder aufgrund der Hard-Core-Eigenschaft $l'(\varphi, y, L) < f_1(\varphi, x, K, y, L) = a(x, K, y, L)$ gelten. Falls $l'(\varphi, x, K) < f_1(x, K, y, L)$ gilt, dann gäbe es dank der Wachstumsmaximalität einen Punkt $(z, A) \in \varphi \setminus \{(x, K)\}$ mit $l'(\varphi, z, A) \leq l'(\varphi, x, K)$. Wegen der Nachbareigenschaft und Lemma 2.2.5 wäre weiter $l'(\varphi, x, K) \geq a(x, K, z, A)$ oder $l'(\varphi, z, A) \geq a(x, K, z, A)$. Dann würde aber in beiden Fällen

$$a(x, K, z, A) \leq l'(\varphi, x, K) < f_1(\varphi, x, K, y, L) = a(x, K, y, L)$$

gelten, was der Tatsache widerspräche, dass (y, L) und (x, K) wechselseitig nächste Nachbarn sind. Aus Symmetriegründen können wir für den Fall $l'(\varphi, y, L) < f_1(\varphi, x, K, y, L)$ analog argumentieren. Also gilt $l'(\varphi, x, K) = f_1(\varphi, x, K, y, L)$ und $l'(\varphi, y, L) = f_1(\varphi, x, K, y, L)$. Nach Konstruktion des Algorithmus gilt $f_2(x, K, y, L) = \infty$ wegen $\varphi_0 = \emptyset$ und somit

$$l(\varphi, x, K) = f_1(\varphi, x, K, y, L) = l'(\varphi, y, L).$$

Den Induktionsschritt vollziehen wir folgendermaßen. Sei $(x, K) \in \psi_n$. Zuerst behandeln wir den Fall $l_n(\varphi, x, K) = s'_n(\varphi, x, K)$, also $l(\varphi, x, K) = f_1(\varphi, x, K, y, L)$ für ein $(y, L) \in \nu_n(\varphi, x, K)$. Dann gilt

$$a_n(\varphi, y, L) \geq s'_n(\varphi, x, K), \quad (y, L) \in \nu_n(\varphi, x, K). \quad (2.8)$$

Wir nehmen nun $l'(\varphi, x, K) < f_1(\varphi, x, K, y, L)$ für $(y, L) \in \nu_n(\varphi, x, K) \setminus \{(x, K)\}$ an. Dann besitzt (x, K) bzgl. l' keinen stoppenden Nachbarn in der Menge $\varphi \setminus \varphi_n$, da sich hieraus wie in der Induktionsverankerung ein Widerspruch dazu ergeben würde, dass (x, K) und (y, L) wechselseitig nächste Nachbarn sind. Daher muß ein Punkt $(z, A) \in \varphi_n$ existieren, der Nachbar von (x, K) (bzgl. l') ist und für den $l'(\varphi, z, A) \leq l'(\varphi, x, K)$ gilt. Mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung $l'(\varphi, z, A) = l(\varphi, z, A)$ für $(z, A) \in \varphi_n$ erhalten wir dann jedoch nach Konstruktion von f_2

$$f_2(\varphi, x, K, z, A) = l'(\varphi, x, K) < f_1(\varphi, x, K, y, L),$$

da (z, A) und (x, K) Nachbarn sind. Mit Ungleichung (2.8) würde dies aber zu

$$f_2(\varphi, x, K, z, A) < f_1(\varphi, x, K, y, L) = s'_n(\varphi, x, K) \leq a_n(\varphi, y, L) = \inf_{(w, B) \in \varphi_n} f_2(\varphi, x, K, w, B)$$

führen, was aufgrund von $(z, A) \in \varphi_n$ ein Widerspruch ist. Im Fall $l'(\varphi, x, K) > f_1(\varphi, x, K, y, L)$ für ein $(y, L) \in \nu_n \setminus \{(x, K)\}$ muß wegen der Hard-Core-Eigenschaft $l'(\varphi, y, L) < f_1(\varphi, x, K, y, L)$ gelten. Analog zu oben erhalten wir in diesem Fall einen Widerspruch für (y, L) . Daher muß $l'(\varphi, x, K) = f_1(\varphi, x, K, y, L) = l(\varphi, x, K)$ gelten. Im Fall $l_n(\varphi, x, K) < s'_n(\varphi, x, K)$ existiert ein $(y, L) \in \nu_n(\varphi, x, K)$, so dass $a_n(\varphi, y, L) < s'_n(\varphi, x, K)$. Daher ist $l'(\varphi, y, L) = a_n(\varphi, y, L) = l(\varphi, y, L)$ zu zeigen. Die Hard-Core-Eigenschaft liefert zusammen mit der Induktionsvoraussetzung $l(\varphi, z, A) = l'(\varphi, z, A)$, $(z, A) \in \varphi_n$, die Ungleichung

$$a_n(\varphi, y, L) = f_2(\varphi, y, L, z, A) \geq l'(\varphi, y, L).$$

Angenommen es gelte $l'(\varphi, y, L) < a_n(\varphi, y, L)$, dann ist wiederum aufgrund von $l(\varphi, z, A) = l'(\varphi, z, A)$ für alle $(z, A) \in \varphi_n$ keiner der Punkte aus φ_n ein Nachbar von (y, L) . Aufgrund von $a_n(\varphi, y, L) < s'_n(\varphi, x, K)$ gilt $l'(\varphi, y, L) < f_1(\varphi, x, K, y, L)$. Zusammen mit der Tatsache, dass (x, K) und (y, L) wechselseitig nächste Nachbarn in $\varphi \setminus \varphi_n$ sind, ergibt sich daraus, dass der Punkt y keinen stoppenden Nachbarn haben kann. Dies ist ein Widerspruch. Daher gilt $l'(\varphi, y, L) = a_n(\varphi, y, L) = l(\varphi, y, L)$ und der Induktionsschluss ist beendet. Für einen Punkt (x, K) in $\varphi \setminus \varphi_\infty$ gilt wegen $l(\varphi, z, A) = l'(\varphi, z, A)$ für ein $(z, A) \in \varphi_\infty$ und der Hard-Core-Eigenschaft die Ungleichung

$$l(\varphi, x, K) = f_2(\varphi, x, K, z, A) \geq l'(\varphi, x, K).$$

Gleichzeitig würde $l(\varphi, x, K) > l'(\varphi, x, K)$ bedeuten, dass (x, K) bezüglich der Funktion l' keinen (stoppenden) Nachbarn besitzt. Daher gilt $l(\varphi, x, K) = l'(\varphi, x, K)$, $(x, K) \in \varphi \setminus \varphi_\infty$. Somit ist das auf φ basierende wachstumsmaximale Modell eindeutig bestimmt. \square

Wir definieren nun mit Hilfe des Algorithmus aus dem obigen Beweis eine Hard-Core-Funktion l und ein wachstumsmaximales Modell T .

Definition 2.2.9. Es sei M' die Menge aller $\varphi \in M^0$, die $\text{card}(\varphi \setminus \varphi_\infty) \leq 1$ erfüllen und markiert lokalendlich sind. Wir definieren die Hard-Core-Funktion $l : M(\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}'_0) \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{K}'_0 \rightarrow \mathbb{R}_+$ für $\varphi \in M'$ und $(x, K) \in \varphi$ durch den Algorithmus des Beweises von Satz 2.2.8 und als 0 sonst. Für $\varphi \in M'$ ist $l(\varphi, \cdot)$ dann eine eindeutig bestimmte wachstumsmaximale Funktion. Darüber hinaus definieren wir mit dieser Funktion l das wachstumsmaximale Modell $T(\varphi) := \{(x, K, l(\varphi, x, K)) : (x, K) \in \varphi\}$ für alle $\varphi \in M^0$.

Bemerkung 2.2.10. Da M' nach Konstruktion translationsinvariant und l ebenfalls nach Konstruktion auf M' translationsinvariant ist, ist l auch auf M^0 translationsinvariant.

Lemma 2.2.11. Die Funktion $l : M(\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}'_0) \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{K}'_0 \rightarrow \mathbb{R}_+$ aus Definition 2.2.9 ist messbar.

Beweis: Wir verwenden in diesem Beweis die Bezeichnungen aus Satz 2.2.8. Damit ergibt sich für $\varphi \in M'$, $x \in \mathbb{R}^d$ und $K \in \mathcal{K}'_0$

$$l(\varphi, x, K) = \sum_{i=1}^{\infty} l_i(\varphi, x, K) \mathbf{1}_{\{(x, K) \in \varphi_i\}} + \inf_{(y, L) \in \varphi_\infty} f_2(\varphi, x, K, y, L) \mathbf{1}_{\{(x, K) \in \varphi \setminus \varphi_\infty\}}. \quad (2.9)$$

Wir zeigen nun, dass alle Summanden in (2.9) messbare Funktionen sind. Wir beginnen mit den Summanden der Reihe und zeigen zunächst die Messbarkeit der Funktionen l_i , $i \in \mathbb{N}$. Aus dem Beweis des Existenz- und Eindeutigkeitsatzes 2.2.8 ergibt sich für $i \in \mathbb{N}$

$$l_i(\varphi, x, K) := s'_i(\varphi, x, K) \mathbf{1}_{\{s'_i(\varphi, x, K) \leq s''_i(\varphi, x, K)\}} \mathbf{1}_{\{(x, K) \in \psi_i(\varphi)\}} \\ + s''_i(\varphi, x, K) \mathbf{1}_{\{s'_i(\varphi, x, K) > s''_i(\varphi, x, K)\}} \mathbf{1}_{\{a_i(\varphi, x, K) \leq a_i(\varphi, y, L), (y, L) \in \nu_i(\varphi, x, K)\}} \mathbf{1}_{\{(x, K) \in \psi_i(\varphi)\}},$$

wobei $s'_i, s''_i, \psi_i, \nu_i$ und a_i von dort übernommen wurden. Aus der Konstruktion dieser Größen folgt ihre Messbarkeit. Somit sind alle $l_i, i \in \mathbb{N}$, als Kompositionen messbarer Funktionen messbar. Da alle l_i messbar sind, sind auch die Abbildungen

$$\varphi \mapsto \varphi_i = \{(x, K) \in \varphi : l_j(\varphi, x, K) > 0 \text{ für ein } j \text{ mit } 1 \leq j \leq i\}$$

und somit auch die Indikatorfunktionen $\mathbf{1}\{(x, K) \in \varphi_i\}, i \in \mathbb{N}$, messbar. Somit ist der erste Summand aus (2.9) eine messbare Funktion. Da die Abbildungen f_2 und $\varphi \mapsto \varphi_\infty$ messbar sind, sind auch die Abbildung $(\varphi, x, K) \mapsto \inf_{(y, L) \in \varphi_\infty} f_2(\varphi, x, K, y, L)$ und der Indikator $\mathbf{1}\{(x, K) \in \varphi_\infty\}$ messbar. Damit ist der zweite Summand in (2.9) messbar. Da sich aus den obigen Ausführungen insbesondere ergibt, dass die Menge M' messbar ist, haben wir somit die Messbarkeit der Funktion l gezeigt. \square

Abschließend geben wir noch einen Existenz- und Eindeutigkeitsatz für das wachstumsmaximale Modell $T(\varphi)$ an, wenn die Konfiguration $\varphi \in M^0$ nur aus endlich vielen Punkten besteht. Der Beweis ist implizit in den anschließenden Ausführungen enthalten.

Satz 2.2.12. *Sei $\varphi \in M^0$ und $\text{card}(\varphi) < \infty$. Dann existiert genau ein wachstumsmaximales Modell $T(\varphi)$.*

Im Fall einer endlichen Konfiguration können wir analog zu Abschnitt 2.2 aus [4] den im Beweis von Satz 2.2.8 angegebenen Algorithmus wie folgt interpretieren. Wir beginnen mit der Konfiguration $\varphi \in M^0$ mit $\text{card}(\varphi) < \infty$ und lassen aus jedem Punkt x im \mathbb{R}^d mit $(x, K) \in \varphi$ mit gleicher Geschwindigkeit ein Korn der Form $K \in \mathcal{K}'_0$ wachsen. Sobald eine Kollision auftritt, ordnen wir jedem an der Kollision beteiligten Punkt, dem bisher noch kein Wachstumswert zugeordnet war, die bis zur Kollision vergangene Zeit als Wert der wachstumsmaximalen Funktion zu. Da die Zahl der Punkte und damit auch die Zahl der Kollisionszeitpunkte nach Voraussetzung endlich ist, existiert ein kleinster und ein größter Kollisionszeitpunkt, wodurch dieses Verfahren wohldefiniert ist. Des Weiteren ergibt sich aus der Konstruktion, dass die obige Prozedur zu einem wachstumsmaximalen Modell führt und somit äquivalent zur Beschreibung aus dem Beweis von Satz 2.2.8 ist. Wir erhalten also im Fall $\text{card}(\varphi) < \infty$ eine physikalische Interpretation des wachstumsmaximalen Modells. Für $\varphi \in M^0$ mit $\text{card}(\varphi) = \infty$ versagt das eben beschriebene *naive Verfahren*, da die Zahl der Kollisionspunkte nicht endlich sein muss und daher nicht notwendig ein kleinster Kollisionszeitpunkt existiert.

2.2.2 Existenz und Eindeutigkeit in zufälligen Konfigurationen

In diesem Unterabschnitt zeigen wir, dass die im letzten Unterabschnitt gestellten Forderungen der Abwesenheit von absteigenden Ketten sowie die markierte Lokalendlichkeit und die Abstandseindeutigkeit für eine bestimmte Klasse von Punktprozessen fast sicher erfüllt sind und somit ein zufälliges wachstumsmaximales Modells existiert. Danach geben wir einige Beispiele an.

Der „allgemeine“ Rahmen

Es sei η ein markierter Punktprozess auf \mathbb{R}^d mit Markenraum \mathcal{K}'_0 mit n -tem faktoriellen Momentenmaß $\nu^{(n)}$.

Bemerkung 2.2.13. Eigentlich betrachten wir in diesem Unterabschnitt einen markierten Punktprozess auf \mathbb{R}^d mit Markenraum $\mathcal{K}'_0 \times \mathbb{R}_+$, für den realisierungsweise $t = 0$ für alle $(x, K, t) \in \eta$ gilt. Zur besseren Übersicht unterdrücken wir allerdings die zweite Komponente des Markenraums, d.h. die Startzeit der Körner, sowohl im Punktprozess als auch in allen anderen Ausdrücken.

Wir fordern, dass eine Konstante $\alpha > 0$ und ein Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{Q} existieren, so dass

$$\nu^{(n)}((d(x_1, K_1), \dots, x_n, K_n)) \leq \alpha^n dx_1 \dots dx_n \mathbb{Q}(dK_1) \dots \mathbb{Q}(dK_n), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.10)$$

Sei $u : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$ die Abbildung, die jedem konvexen Körper K seinen Umkugelradius zuordnet. Darüber hinaus benötigen wir, dass für eine nach dem Bildmaß \mathbb{Q}^u von \mathbb{Q} unter u verteilte Zufallsvariable R das $2d$ -te Moment existiert, d.h. es existiere eine Konstante $\alpha < \infty$ derart, dass

$$\mathbb{E}R^{2d} = \alpha \quad (2.11)$$

gelte.

Bemerkung 2.2.14. Falls für das Bildmaß \mathbb{Q}^u eine Dichte f bezüglich des Lebesguemaßes sowie Konstanten $\alpha, \beta > 0$ existieren, so dass

$$f(x) \leq \alpha \exp(-\beta x), \quad x \geq 0, \quad (2.12)$$

gilt, ist (2.11) erfüllt. Daher ist es möglich, ein Lilypond-Modell mit Primärkugeln zu modellieren, deren Radien exponentialverteilt sind.

Es folgen zwei Integrabilitätsaussagen, die sich aus (2.11) ergeben.

Lemma 2.2.15. *Seien \mathbb{Q} , u und R wie eben eingeführt und es gelte (2.11). Es gilt für jedes $K \in \mathcal{K}'_0$ und $r \in \mathbb{R}$ die Integrabilitätsaussage*

$$\int \lambda(K + rL) \mathbb{Q}(dL) < \infty. \quad (2.13)$$

Beweis: Für $K, L \in \mathcal{K}'_0$ gilt $K + L \subset B(0, r_0 + u(L))$ für hinreichend großes $r_0 \geq 0$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \int \lambda(K + rL) \mathbb{Q}(dL) &\leq \kappa_d \int (r_0 + u(rL))^d \mathbb{Q}(dL) \\ &\leq 2^d \kappa_d \int (r_0^d + (rs)^d) \mathbb{Q}^u(ds). \end{aligned}$$

Die letzte Zeile ist endlich, da aufgrund von (2.11) das $2d$ -te Moment und somit auch das d -te Moment von R existiert. Damit ist die Behauptung gezeigt. \square

Lemma 2.2.16. *Es sei $n \in \mathbb{N}$ und η ein markierter Punktprozess auf \mathbb{R}^d mit Markenraum \mathcal{K}'_0 , der die Bedingungen (2.10) und (2.11) erfüllt. Dann existiert eine von n unabhängige Konstante $\beta > 0$ derart, dass*

$$\int \dots \int \lambda(K_0 - K_1) \dots \lambda(K_{n-1} - K_n) \mathbb{Q}(dK_0) \dots \mathbb{Q}(dK_n) \leq \beta^n.$$

Beweis: Es seien R_0, \dots, R_n unabhängige nach \mathbb{Q}^u verteilte Zufallsvariablen. Dann gilt aufgrund von $u(K) = u(-K)$, $K \in \mathcal{K}'_0$, die Abschätzung

$$\begin{aligned} &\int \dots \int \lambda(K_0 - K_1) \dots \lambda(K_{n-1} - K_n) \mathbb{Q}(dK_0) \dots \mathbb{Q}(dK_n) \\ &\leq \int \dots \int \lambda((u(K_0) + u(K_1))B(0, 1)) \dots \lambda((u(K_{n-1}) + u(K_n))B(0, 1)) \mathbb{Q}(dK_0) \dots \mathbb{Q}(dK_n). \end{aligned}$$

Unter Verwendung des binomischen Satzes erhalten wir daraus

$$\begin{aligned}
& \int \cdots \int \lambda(K_0 - K_1) \cdots \lambda(K_{n-1} - K_n) \mathbb{Q}(dK_0) \cdots \mathbb{Q}(dK_n) \\
& \leq \mathbb{E}[\kappa_d^n (R_0 + R_1)^d \cdots (R_{n-1} + R_n)^d] \\
& = \kappa_d^n \mathbb{E} \left[\sum_{i_1=0}^d \binom{d}{i_1} R_0^{i_1} R_1^{d-i_1} \cdots \sum_{i_n=0}^d \binom{d}{i_n} R_{n-1}^{i_n} R_n^{d-i_n} \right] \\
& = \kappa_d^n \mathbb{E} \left[\sum_{i_1=0}^d \cdots \sum_{i_n=0}^d \binom{d}{i_1} \cdots \binom{d}{i_n} R_0^{i_1} R_1^{d-i_1} R_1^{i_2} R_2^{d-i_2} \cdots R_{n-1}^{i_n} R_n^{d-i_n} \right].
\end{aligned}$$

Mit den Rechenregeln für den Erwartungswert ergibt sich hieraus aufgrund der Unabhängigkeit der Zufallsvariablen R_1, \dots, R_n

$$\begin{aligned}
& \int \cdots \int \lambda(K_0 - K_1) \cdots \lambda(K_{n-1} - K_n) \mathbb{Q}(dK_0) \cdots \mathbb{Q}(dK_n) \\
& \leq \kappa_d^n \sum_{i_1=0}^d \cdots \sum_{i_n=0}^d \binom{d}{i_1} \cdots \binom{d}{i_n} \mathbb{E} \left[R_0^{i_1} \right] \mathbb{E} \left[R_1^{d-i_1+i_2} \right] \cdots \mathbb{E} \left[R_{n-1}^{d-i_{n-1}+i_n} \right] \mathbb{E} \left[R_n^{d-i_n} \right].
\end{aligned}$$

Wir stellen fest, dass die Exponenten $i_1, d - i_1 + i_2, \dots, d - i_n$ der Zufallsvariablen R_0, \dots, R_n zwischen 0 und $2d$ liegen und erhalten für $0 \leq i \leq 2d$ und $0 \leq j \leq n$ mit Hilfe der Jensenschen Ungleichung (siehe Lemma 3.5 in [13]) und Gleichung (2.11) die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[R_j^i \right] & = \mathbb{E} \left[\left(R_j^{2d} \right)^{i/(2d)} \right] \\
& \leq \left[\mathbb{E} \left(R_j^{2d} \right) \right]^{i/(2d)} \\
& = \alpha^{i/(2d)}.
\end{aligned}$$

Setzen wir dieses Ergebnis in obige Rechnung ein und verwenden erneut den binomischen Satz, ergibt sich

$$\begin{aligned}
& \int \cdots \int \lambda(K_0 - K_1) \cdots \lambda(K_{n-1} - K_n) \mathbb{Q}(dK_0) \cdots \mathbb{Q}(dK_n) \\
& \leq \kappa_d^n \sum_{i_1=0}^d \cdots \sum_{i_n=0}^d \binom{d}{i_1} \cdots \binom{d}{i_n} \alpha^{i_1/(2d)} \alpha^{(d-i_1+i_2)/(2d)} \cdots \alpha^{(d-i_{n-1}-i_n)/(2d)} \alpha^{(d-i_n)/(2d)} \\
& = \kappa_d^n \sum_{i_1=0}^d \binom{d}{i_1} \alpha^{i_1/(2d)} \alpha^{(d-i_1)/(2d)} \cdots \sum_{i_n=0}^d \binom{d}{i_n} \alpha^{i_n/(2d)} \alpha^{(d-i_n)/(2d)} \\
& = \kappa_d^n \left(\alpha^{1/(2d)} + \alpha^{1/(2d)} \right)^d \cdots \left(\alpha^{1/(2d)} + \alpha^{1/(2d)} \right)^d \\
& = \kappa_d^n \left(2\alpha^{1/(2d)} \right)^{nd}.
\end{aligned}$$

Nehmen wir nun alle Abschätzungen zusammen und wählen $\beta := \kappa_d (2\alpha^{1/(2d)})^d$, erhalten wir die Behauptung. \square

Wir zeigen nun, dass ein markierter Punktprozess η , der (2.10) und (2.11) erfüllt, fast sicher keine absteigende Kette enthält sowie markiert lokalendlich und abstandseindeutig ist.

Lemma 2.2.17. *Es sei η ein markierter Punktprozess auf \mathbb{R}^d mit Markenraum \mathcal{K}'_0 . Weiter erfülle η die Bedingungen (2.10) und (2.11). Dann enthält η fast sicher keine absteigende Kette.*

Beweis: Es sei $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq s \leq t < \infty$ und $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ beschränkt. Wir definieren die Menge $E(n, s, t, B)$ aller $\varphi \in \mathcal{M}^0$, in denen eine absteigende Kette aus $n + 1$ verschiedenen Punkten

$$(x_0, K_0), (x_1, K_1), \dots, (x_n, K_n) \in \varphi$$

der Länge n existiert, für die

$$t \geq a(x_0, K_0, x_1, K_1) \geq a(x_1, K_1, x_2, K_2) \geq \dots \geq a(x_{n-1}, K_{n-1}, x_n, K_n) \geq s$$

und $x_0 \in B$ gilt. Weiter sei $E(s, t, B)$ die Menge aller $\varphi \in \mathcal{M}^0$, in denen eine unendlich lange absteigende Kette $(x_0, K_0), (x_1, K_1), \dots$ verschiedener Punkte aus φ existiert, für die

$$t \geq a(x_0, K_0, x_1, K_1) \geq a(x_1, K_1, x_2, K_2) \geq \dots \geq s$$

und $x_0 \in B$ gilt. D.h. die monoton fallende Folge

$$a(x_0, K_0, x_1, K_1), a(x_1, K_1, x_2, K_2), a(x_2, K_2, x_3, K_3), \dots$$

ist nach oben durch t beschränkt, ihr Grenzwert ist mindestens s und die Projektion x_0 des ersten Punktes (x_0, K_0) der Kette auf \mathbb{R}^d liegt in der Menge B . Es gilt

$$E(s, t, B) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} E(n, s, t, B). \quad (2.14)$$

Weiter definieren wir für $0 \leq s < t < \infty$, $K, L \in \mathcal{K}'_0$ und $x \in \mathbb{R}^d$ die Größe

$$D(x, K, L, s, t) := x + (t(K - L) \setminus s(K - L)).$$

Aufgrund der Homogenität und Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes gilt

$$\lambda(D(x, K, L, s, t)) = (t^d - s^d)\lambda(K - L). \quad (2.15)$$

Um absteigende Ketten auszuschließen, schätzen wir zunächst für $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq s < t < \infty$ und eine beschränkte Menge $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(\eta \in E(n, s, t, B))$ nach oben ab. Hierfür definieren wir für $i \in \mathbb{N}$ und $x_i \in \mathbb{R}^d$, $K_i \in \mathcal{K}'_0$ die Kurzschreibweisen $\mathbf{x}_n := (x_n, K_n)$ und $\mathbf{x}^{(n)} := (\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_n)$ sowie $a(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) := a(x_i, K_i, x_j, K_j)$. Weiter sei

$$E_n := \left\{ (\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_n) \in (\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}'_0)^{(n+1)} : t \geq a(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) \geq a(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \geq \dots \geq a(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n) \geq s \right\}$$

und

$$F_n := \left\{ (\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_n) \in (\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}'_0)^{(n+1)} : t \geq a(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}) \geq s, 0 \leq i \leq n-1 \right\}.$$

Offensichtlich gilt $E_n \subset F_n$, $n \in \mathbb{N}$. Mit Hilfe von Satz 1.1.15, d.h. der multivariaten Campbell'schen Formel, und Bedingung (2.10) ergibt sich die Abschätzung

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\eta \in E(n, s, t, B)) &= \mathbb{E} \mathbf{1}\{\eta \in E(n, s, t, B)\} \\ &\leq \mathbb{E} \left[\sum_{((x_0, K_0), \dots, (x_n, K_n)) \in \eta^{(n+1)}} \mathbf{1}\{(\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_n) \in E_n\} \mathbf{1}\{x_0 \in B\} \right] \\ &\leq \alpha^{n+1} \int \mathbf{1}\{\mathbf{x}^{(n)} \in E_n\} \mathbf{1}\{x_0 \in B\} dx_0 \dots dx_n \mathbb{Q}(dK_0) \dots \mathbb{Q}(dK_n). \end{aligned}$$

Wir verwenden $E_n \subset F_n$, $n \in \mathbb{N}$, und erhalten

$$\mathbb{P}(\eta \in E(n, s, t, B)) \leq \alpha^{n+1} \int \mathbf{1}\{\mathbf{x}^{(n)} \in F_n\} \mathbf{1}\{x_0 \in B\} dx_0 \dots dx_n \mathbb{Q}(dK_0) \dots \mathbb{Q}(dK_n).$$

Durch Umformung wird dies zu

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\eta \in E(n, s, t, B)) \\ & \leq \alpha^{n+1} \int \mathbf{1}\{x_0 \in B\} \mathbf{1}\{\mathbf{x}^{(n-1)} \in F_{n-1}\} \mathbf{1}\{t \geq a(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n) \geq s\} dx_0 \dots dx_n \mathbb{Q}(dK_0) \dots \mathbb{Q}(dK_n) \\ & = \alpha^{n+1} \int \mathbf{1}\{x_0 \in B\} \mathbf{1}\{\mathbf{x}^{(n-1)} \in F_{n-1}\} \mathbf{1}\{x_n \in D(x_{n-1}, K_{n-1}, K_n, s, t)\} dx_n dx_0 \dots \mathbb{Q}(dK_n). \end{aligned}$$

Mit Gleichung (2.15) ergibt sich hieraus

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\eta \in E(n, s, t, B)) \\ & \leq \alpha^{n+1} (t^d - s^d) \int \mathbf{1}\{x_0 \in B\} \mathbf{1}\{\mathbf{x}^{(n-1)} \in F_{n-1}\} \lambda(K_{n-1} - K_n) dx_0 \dots \mathbb{Q}(dK_n). \end{aligned}$$

Durch $(n-1)$ -maliges Wiederholen obiger Rechenschritte erhalten wir

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\eta \in E(n, s, t, B)) \\ & \leq \alpha^{n+1} (t^d - s^d)^n \int \mathbf{1}\{x_0 \in B\} \lambda(K_0 - K_1) \dots \lambda(K_{n-1} - K_n) dx_0 \mathbb{Q}(dK_0) \dots \mathbb{Q}(dK_n). \end{aligned}$$

Mit Lemma 2.2.16 folgt

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\eta \in E(n, s, t, B)) \\ & \leq \alpha^{n+1} \lambda(B) (t^d - s^d)^n \int \lambda(K_0 - K_1) \dots \lambda(K_{n-1} - K_n) \mathbb{Q}(dK_0) \dots \mathbb{Q}(dK_n) \\ & \leq \alpha^{n+1} \beta^n \lambda(B) (t^d - s^d)^n. \end{aligned}$$

Wir definieren die Folge $t_i := (1/\alpha)^{1/d} (i/(\beta+1))^{1/d}$, $i \in \mathbb{N}_0$. Diese Folge ist monoton wachsend und unbeschränkt. Des Weiteren gilt

$$t_{i+1}^d - t_i^d = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{\beta+1} \right).$$

Zusammen mit obigen Abschätzungen ergibt sich daher für festes $i = 1, 2, \dots$ der Grenzwert

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\eta \in E(n, t_{i-1}, t_i, B)) & \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^{n+1} \beta^n \lambda(B) \left(\frac{1}{\alpha} \right)^n \left(\frac{1}{\beta+1} \right)^n \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha \lambda(B) \left(\frac{\beta}{\beta+1} \right)^n \\ & = 0, \end{aligned}$$

wobei wir beachten, dass die Menge $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ beschränkt ist. Mit (2.14) und der Stetigkeit von oben für Wahrscheinlichkeitsmaße erhalten wir daraus

$$\mathbb{P}(E(t_{i-1}, t_i, B)) = 0, \quad i = 1, 2, \dots$$

Nun definieren wir die Menge E als die Menge aller $\varphi \in M^0$, in denen es eine absteigende Kette $(x_0, K_0), (x_1, K_1), (x_2, K_2), \dots \in \varphi$ gibt. Mit $W_k := [-k, k]^d$, $k \in \mathbb{N}$, gilt dann

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=0}^{\infty} E(t_i, t_{i+1}, W_k),$$

da für jede absteigende Kette ein $i \in \mathbb{N}_0$ und ein $k \in \mathbb{N}$ existiert, so dass ab einem $j_0 \in \mathbb{N}_0$ die Ungleichungen

$$t_{i+1} \geq a(x_j, K_j, x_{j+1}, K_{j+1}) \geq t_i, \quad j \geq j_0,$$

erfüllt sind und zusätzlich $x_{j_0} \in W_k$ gilt. Somit folgt $\mathbb{P}(\eta \in E) = 0$ bzw. genauer gesagt ist die Menge E Teilmenge einer messbaren Nullmenge. \square

Lemma 2.2.18. *Sei η ein markierter Punktprozess auf \mathbb{R}^d mit Markenraum \mathcal{K}'_0 , der Bedingung (2.10) erfüllt. Dann ist η fast sicher markiert lokalendlich.*

Beweis: Es sei $\varphi \in M^0$ und $(x, K) \in \varphi$ sowie $r > 0$. Weiter sei

$$A(\varphi, x, K, r) := \{(y, L) \in \varphi \setminus \{(x, K)\} : a(x, K, y, L) \leq r\}.$$

Wir zeigen $\mathbb{P}(\text{card}(A(\eta, x, K, r)) < \infty \text{ für alle } (x, K) \in \eta) = 1$. Dafür genügt es, für alle $n \in \mathbb{N}$ die Endlichkeit des Erwartungswertes

$$\mathbb{E} \left(\sum_{((x,K),(y,L)) \in \eta^{(2)}} \mathbf{1}\{a(x, K, y, L) \leq r\} \mathbf{1}\{x \in W_n\} \right)$$

mit $W_n := [-n, n]^d$ zu zeigen. Mit Hilfe von Satz 1.1.15, also der multivariaten Campbellschen Formel, und Bedingung (2.10) erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(\sum_{((x,K),(y,L)) \in \eta^{(2)}} \mathbf{1}\{a(x, K, y, L) \leq r\} \mathbf{1}\{x \in W_n\} \right) \\ & \leq \alpha^2 \iint \mathbf{1}\{a(x, K, y, L) \leq r\} \mathbf{1}\{x \in W_n\} dx dy \mathbb{Q}(dK) \mathbb{Q}(dL) \\ & = \alpha^2 \iint \mathbf{1}\{(x + rK) \cap (y + rL) \neq \emptyset\} \mathbf{1}\{x \in W_n\} dx dy \mathbb{Q}(dK) \mathbb{Q}(dL) \\ & = \alpha^2 \iint \mathbf{1}\{y \in (x + rK) - rL\} \mathbf{1}\{x \in W_n\} dx dy \mathbb{Q}(dK) \mathbb{Q}(dL) \\ & = \alpha^2 \int \lambda(x + rK - rL) \mathbf{1}\{x \in W_n\} dx \mathbb{Q}(dK) \mathbb{Q}(dL) \\ & = \alpha^2 (2n)^d r^d \int \lambda(K - L) \mathbb{Q}(dK) \mathbb{Q}(dL). \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck ist wegen Lemma 2.2.16 endlich. \square

Lemma 2.2.19. *Sei η ein markierter Punktprozess auf \mathbb{R}^d mit Markenraum \mathcal{K}'_0 , der Bedingung (2.10) erfüllt. Dann ist η fast sicher abstandseindeutig.*

Beweis: Es gilt $\mathbb{P}(\eta \text{ ist abstandseindeutig}) = \mathbb{E}\mathbf{1}\{\eta \text{ ist abstandseindeutig}\}$. Aufgrund der Definition von Abstandseindeutigkeit gilt weiter

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\mathbf{1}\{\eta \text{ ist abstandseindeutig}\} \\ & \leq \mathbb{E} \sum_{((x_1, K_1), (x_2, K_2), (x_3, K_3)) \in \eta^{(3)}} \mathbf{1}\{a(x_1, K_1, x_2, K_2) = a(x_2, K_2, x_3, K_3)\} \\ & + \mathbb{E} \sum_{((x_1, K_1), (x_2, K_2), (x_3, K_3), (x_4, K_4)) \in \eta^{(4)}} \mathbf{1}\{a(x_1, K_1, x_2, K_2) = a(x_3, K_3, x_4, K_4)\}. \end{aligned}$$

Daher genügt es, die zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \sum_{((x_1, K_1), (x_2, K_2), (x_3, K_3)) \in \eta^{(3)}} \mathbf{1}\{a(x_1, K_1, x_2, K_2) = a(x_2, K_2, x_3, K_3)\} = 0, \\ & \mathbb{E} \sum_{((x_1, K_1), (x_2, K_2), (x_3, K_3), (x_4, K_4)) \in \eta^{(4)}} \mathbf{1}\{a(x_1, K_1, x_2, K_2) = a(x_3, K_3, x_4, K_4)\} = 0 \end{aligned}$$

zu zeigen. Wir zeigen nur die erste Gleichung, da die zweite durch ähnliche Überlegungen gezeigt werden kann. Nach der multivariaten Formel von Campbell (Satz 1.1.15) gilt

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \sum_{(x_1, K_1), (x_2, K_2), (x_3, K_3) \in \eta^{(3)}} \mathbf{1}\{a(x_1, K_1, x_2, K_2) = a(x_2, K_2, x_3, K_3)\} \\ & = \int \cdots \int \mathbf{1}\{a(x_1, K_1, x_2, K_2) = a(x_2, K_2, x_3, K_3)\} dx_1 dx_2 dx_3 \mathbb{Q}(dK_1) \mathbb{Q}(dK_2) \mathbb{Q}(dK_3) \\ & = \int \cdots \int \mathbf{1}\{x_1 \in \partial(x_2 + a(x_2, K_2, x_3, K_3)(K_2 - K_1))\} dx_1 dx_2 dx_3 \mathbb{Q}(dK_1) \mathbb{Q}(dK_2) \mathbb{Q}(dK_3). \end{aligned}$$

Von der zweiten auf die dritte Zeile verwenden wir Bemerkung 2.2.4; da der Rand einer konvexen Menge im \mathbb{R}^d Lebesgue-Maß 0 besitzt, hat das Integral den Wert 0. \square

Wir erinnern an die Definition von l und T aus Definition 2.2.9. Als direkte Folgerung der letzten drei Lemmata und Satz 2.2.8 ergibt sich ein Existenz- und Eindeigkeitssatz für markierte Punktprozesse.

Satz 2.2.20. *Es sei η ein markierter Punktprozess auf \mathbb{R}^d mit Markenraum \mathcal{K}'_0 , der (2.10) und (2.11) erfülle. Dann ist $T(\eta)$ das fast sicher eindeutig bestimmte wachstumsmaximale Modell.*

Beweis: Es sei l^* eine weitere Hard-Core-Funktion und $T^*(\varphi) := \{(x, K, l^*(\varphi, x, K)) : (x, K) \in \varphi\}$, $\varphi \in \mathcal{M}^0$. Angenommen $T^*(\eta)$ ist fast sicher wachstumsmaximal, d.h. $\mathbb{P}(\eta \in \mathcal{M}^*) = 1$, wobei \mathcal{M}^* die messbare Menge (vgl. Bemerkung 1.3.2) aller $\varphi \in \mathcal{M}^0$ ist, so dass $T(\varphi)$ ein wachstumsmaximales Modell ist. Nach Definition 2.2.9 gilt dann $T(\varphi) = T^*(\varphi)$, $\varphi \in \mathcal{M}' \cap \mathcal{M}^*$. Aus den Lemmata 2.2.17 bis 2.2.19 ergibt sich $\mathbb{P}(\eta \in \mathcal{M}''') = 1$, wobei $\varphi \in \mathcal{M}^0$ genau dann zur messbaren Menge \mathcal{M}''' gehört, falls φ markiert lokalendlich und abstandseindeutig ist sowie für ein $n \in \mathbb{N}$ keine absteigende Kette der Länge n enthält. Aufgrund von (2.14) gilt $\mathcal{M}''' \subset \mathcal{M}''$. Aus dem Beweis von Satz 2.2.8 ist $\mathcal{M}'' \subset \mathcal{M}'$ bekannt. Es folgt $\mathbb{P}(\eta \in \mathcal{M}') = 1$. \square

Bemerkung 2.2.21. Die Menge \mathcal{M}'' aller $\varphi \in \mathcal{M}^0$, die abstandseindeutig und markiert lokalendlich sind und keine absteigende Kette enthalten, ist laut dem Beweis von Satz 2.2.8 eine Teilmenge von \mathcal{M}' . Das Komplement $(\mathcal{M}'')^c$ ist Teilmenge der messbaren Nullmenge $(\mathcal{M}''')^c$. Unter dem Begriff „fast sicher“ in Satz 2.2.20 verstehen wir daher, dass $T(\eta)$ bis auf eine Ausnahmemenge, die Teilmenge einer messbaren Nullmenge ist, definiert ist.

Beispielklassen von Punktprozessen, die in den allgemeinen Rahmen passen

Wir stellen nun drei Klassen von markierten Punktprozessen auf $\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}'_0$ vor, die die oben formulierten Bedingungen (2.10) und (2.11) erfüllen. Wir beginnen mit einer Teilklasse der Poissonprozesse.

Satz 2.2.22. *Sei η ein markierter Poissonprozess, dessen Intensitätsmaß Θ absolut stetig bzgl. des Maßes $\lambda \otimes \mathbb{Q}$ sei, wobei \mathbb{Q} ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathcal{K}'_0 ist, welches Bedingung (2.11) erfüllt. Weiter sei die Dichte f von Θ bzgl. $\lambda \otimes \mathbb{Q}$ beschränkt. Dann existiert genau ein wachstumsmaximales Modell $T(\eta)$.*

Beweis: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wegen Bemerkung 1.1.17 besitzt das n -te faktorielle Momentenmaß $\nu^{(n)}$ von η die Darstellung

$$\nu^{(n)} = \Theta^n,$$

wobei Θ^n das n -fache Produktmaß von Θ bezeichne. Zusammen mit der absoluten Stetigkeit von Θ bezüglich $\lambda \otimes \mathbb{Q}$ und der Beschränktheit der zugehörigen Dichte folgt hieraus

$$\nu^{(n)}(d(x_1, K_1), \dots, d(x_n, K_n)) \leq \alpha^n dx_1 \dots dx_n \mathbb{Q}(dK_1) \dots \mathbb{Q}(dK_n), \quad n \in \mathbb{N},$$

wobei α die Schranke der Dichte ist. Somit ist Bedingung (2.10) erfüllt. Da nach Voraussetzung auch Bedingung (2.11) erfüllt ist, können wir Satz 2.2.20 anwenden und die Behauptung ist gezeigt. \square

Eine wichtige Klasse, auf die sich dieser Satz anwenden lässt, sind die unabhängig markierten Poissonprozesse. Nach Lemma 1.1.3 ist das Intensitätsmaß Θ eines unabhängig markierten Poissonprozesses η von der Form

$$\Theta = \nu \otimes \mathbb{Q}. \tag{2.16}$$

Beim Maß ν handelt es sich dabei um das Intensitätsmaß des unmarkierten Punktprozesses $\xi = p(\eta)$. Damit ergibt sich folgender Spezialfall des letzten Satzes.

Satz 2.2.23. *Sei η ein unabhängig markierter Poissonprozess, dessen Projektion ξ auf die erste Komponente eine beschränkte Dichte f bezüglich des Lebesgue-Maßes λ im \mathbb{R}^d besitzt. Die Verteilung \mathbb{Q} aus (2.16) erfülle die Bedingung (2.11). Dann existiert genau ein wachstumsmaximales Modell $T(\eta)$.*

Beweis: Aufgrund der Darstellung (2.16) des Intensitätsmaßes von η und der Beschränktheit von f erhalten wir die Aussage direkt aus Satz 2.2.22. \square

Dieser Satz lässt sich noch weiter spezialisieren, indem wir fordern, dass η ein stationärer markierter Poissonprozess ist. Nach Satz 1.1.11 ist η dann automatisch unabhängig markiert und es ergibt sich der nächste Satz.

Satz 2.2.24. *Sei η ein stationärer markierter Poissonprozess mit Intensität γ und Markenverteilung \mathbb{Q} . Die Markenverteilung \mathbb{Q} erfülle die Bedingung (2.11). Dann existiert genau ein wachstumsmaximales Modell $T(\eta)$.*

Beweis: Aufgrund der Stationarität von η folgt mit Theorem 3.5.1 aus [26] für das Intensitätsmaß von η die Darstellung $\Theta = \gamma \lambda \otimes \mathbb{Q}$. Damit erhalten wir die Behauptung direkt aus 2.2.23. \square

Wir verlassen nun die Poissonprozesse und wenden uns einer speziellen Klasse von Coxprozessen zu.

Satz 2.2.25. *Es sei $f : \Omega \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{K}'_0 \rightarrow \mathbb{R}$ derart, dass ein $\alpha \geq 0$ existiert mit*

$$\int f(\omega, x_1, K_1) \cdots f(\omega, x_n, K_n) \mathbb{P}(d\omega) \leq \alpha^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.17)$$

und \mathbb{Q} ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathcal{K}'_0 ist, welches die Bedingung (2.11) erfülle. Dann existiert zu einem Coxprozess η mit (zufälligem) Intensitätsmaß

$$\mu(\omega, \cdot) := \iint f(\omega, x, K) \mathbf{1}\{(x, K) \in \cdot\} \lambda(dx) \mathbb{Q}(dK) \quad (2.18)$$

genau ein wachstumsmaximales Modell $T(\eta)$.

Beweis: Da μ fast sicher diffus und $\int \mu(\omega, \cdot \times \mathcal{K}'_0) \mathbb{P}(d\omega)$ lokalendlich ist, handelt es sich bei dem so definierten Coxprozess um einen markierten Punktprozess. Mit Hilfe der Mecke-Gleichung für Coxprozesse (1.6) und Satz 1.1.15 ergibt sich für das n -te faktorielle Momentenmaß $\nu^{(n)}$ von ξ die Gleichung

$$\nu^{(n)}(d(x_1, K_1), \dots, d(x_n, K_n)) = (\mathbb{E}\mu^n)(d(x_1, K_1), \dots, d(x_n, K_n)). \quad (2.19)$$

Mit dem Satz von Fubini, Gleichung (2.18) und der Voraussetzung (2.17) erhalten wir für $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}'_0)$ die Ungleichungskette

$$\begin{aligned} & (\mathbb{E}\mu^n)(A_1, \dots, A_n) \\ &= \int \cdots \int f(\omega, x_1, K_1) \cdots f(\omega, x_n, K_n) \mathbf{1}_{\{(x_i, K_i) \in A_i, 1 \leq i \leq n\}} \mathbb{P}(d\omega) dx_1 \cdots \mathbb{Q}(dK_n) \\ &\leq \int \cdots \int \alpha^n \mathbf{1}_{\{(x_i, K_i) \in A_i, 1 \leq i \leq n\}} dx_1 \cdots dx_n \mathbb{Q}(dK_1) \cdots \mathbb{Q}(dK_n). \end{aligned}$$

Zusammen mit Gleichung (2.19) ergibt dies Bedingung (2.10). Daraus erhalten wir mit Satz 2.2.20 die Behauptung. \square

Durch unabhängiges Markieren eines Coxprozesses im \mathbb{R}^d erhalten wir einen Spezialfall der obigen Aussage.

Satz 2.2.26. *Es sei ξ ein Coxprozess im \mathbb{R}^d mit zufälligem Intensitätsmaß $\mu(\cdot)$. Weiter sei \mathbb{Q} ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathcal{K}'_0 . Es existiere eine Konstante α , so dass $\mathbb{E}[\mu^n](\cdot) \leq \alpha^n \lambda^n(\cdot)$, $n \in \mathbb{N}$, gilt. Das Maß \mathbb{Q} erfülle die Bedingung (2.11). Dann existiert zu dem unabhängig markierten Punktprozess η auf $\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}'_0$, der entsteht, wenn wir den Coxprozess ξ mit Hilfe von \mathbb{Q} unabhängig markieren, genau ein wachstumsmaximales Modell $T(\eta)$.*

Beweis: Aus Teil (i) der Proposition 12.3 in [13] und der Anmerkung danach folgt, dass ein unabhängig markierter Coxprozess selbst ein Coxprozess ist. Damit ergibt sich die Aussage als Spezialfall von Satz 2.2.25. \square

Mit Satz 2.2.26 können wir zum Beispiel die Existenz des wachstumsmaximalen Modells $T(\eta)$ für einen unabhängig markierten Punktprozess η zeigen, dessen Projektion ξ ein gemischter Poissonprozess ist. Hierfür sei X eine Zufallsvariable, für die ein α existiert, so dass

$$\mathbb{E}X^n \leq \alpha^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.20)$$

gilt. Man definiert das zufällige Intensitätsmaß $\mu := X\lambda$ und nennt den zugehörigen Coxprozess ξ einen *gemischten Poissonprozess* (siehe [13]). Für den auf ξ basierenden, mit \mathbb{Q} unabhängig markierten Punktprozess η existiert dann nach Satz 2.2.26 das wachstumsmaximale Modell $T(\eta)$.

Für die Wahl von X haben wir unter anderem folgende Möglichkeiten: Offensichtlich erfüllt jede beschränkte Zufallsvariable die Bedingung 2.20. Des Weiteren kann X aber auch gammaverteilt und somit insbesondere exponentialverteilt sein. Konkret können wir uns das zugehörige wachstumsmaximale Modell $T(\eta)$ wie folgt vorstellen. Wenn X beispielsweise gleichverteilt auf dem Intervall $[0, 1]$ ist, so bedeutet dies, dass wir in einem ersten Schritt mit Hilfe einer Gleichverteilung eine Intensität bestimmen. Im zweiten Schritt realisieren wir einen stationären Poissonprozess mit dieser Intensität und markieren ihn anschließend in einem dritten Schritt unabhängig (siehe auch Seite 84 in [26]). Danach bilden wir dazu das wachstumsmaximale Modell.

Wie schon in den Ausführungen über Poisson- und Coxprozesse geschehen, können wir auch einen Gibbsprozess auf \mathbb{R}^d einführen und diesen dann mit Hilfe einer Markenverteilung \mathbb{Q} unabhängig markieren. Damit erhalten wir folgenden Satz.

Satz 2.2.27. *Es sei ξ ein wie durch Gleichung (1.2) eingeführter einfacher Gibbsprozess und $\alpha > 0$. Für \mathbb{Q} gelte Bedingung (2.11) und für die Funktion e_n aus (1.4) gelte*

$$\mathbb{E}[e_n(\eta, x_1, \dots, x_n)] \leq \alpha^n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.21)$$

Dann existiert zum Punktprozess η auf $\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}'_0$, der durch unabhängiges Markieren mit Hilfe der Verteilung \mathbb{Q} aus dem Gibbsprozess ξ entsteht, genau ein wachstumsmaximales Modell $T(\eta)$.

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass der Punktprozess, der durch unabhängiges Markieren eines Gibbsprozesses entsteht, Bedingung (2.10) erfüllt. Wir verwenden, dass η unabhängig markiert ist, sowie (1.3) und erhalten für jede nicht-negative messbare Funktion f die Gleichung

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \sum_{((x_1, K_1), \dots, (x_n, K_n)) \in \eta^{(n)}} f(x_1, K_1, \dots, x_n, K_n) \\ &= \int \cdots \int \mathbb{E}[e_n(\xi, x_1, \dots, x_n)] f(x_1, K_1, \dots, x_n, K_n) dx_1 \dots dx_n \mathbb{Q}(dK_1) \dots \mathbb{Q}(dK_n). \end{aligned}$$

Aus Voraussetzung (2.21) folgt Bedingung (2.10). Zusammen mit Bedingung (2.11) für \mathbb{Q} folgt aus dem allgemeinen Existenz- und Eindeutigkeitsatz 2.2.20 die Behauptung. \square

Wir wollen nun noch zwei Beispiele angeben, die auf einem Gibbsprozess im \mathbb{R}^d basieren und zu denen ein wachstumsmaximales Modell existiert. Zunächst untersuchen wir folgende Situation. Es sei $c \geq 0$. Wir betrachten die Abbildungen $E : \mathbb{N}(\mathbb{R}^d) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ und $p : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, \infty]$. Weiter definieren wir $e(\phi, x) := \exp(-E(\phi, x))$ mit $E(\phi, x) := c + \sum_{y \in \phi} p(\|x - y\|)$ und

$$p(r) := \begin{cases} \infty, & \text{falls } r \leq r_0, \\ 0, & \text{falls } r > r_0, \end{cases} \quad (2.22)$$

für ein $r_0 > 0$. Der Gibbsprozess, der für diese Wahl der Abbildung e Gleichung (1.4) erfüllt, heißt Poisson-Hard-Core-Prozess (vgl [30]). Wir markieren ihn unabhängig mit Hilfe einer Verteilung \mathbb{Q} , welche Bedingung (2.11) erfüllt. So erhalten wir einen unabhängig markierten Gibbsprozess η auf $\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}'_0$, zu dem nach Satz 2.2.27 ein wachstumsmaximales Modell $T(\eta)$ existiert. Wir merken an, dass Bedingung (2.21) aufgrund der Beschränktheit von e erfüllt ist.

Dieses Beispiel lässt sich noch etwas ausbauen und findet sich so auch in [4]. Wir übernehmen obige Konstruktion $e(\phi, x) := \exp(-E(\phi, x))$ mit $E(\phi, x) := c + \sum_{(y, L) \in \phi} p(\|x - y\|)$ und geben nun eine ganze Klasse von Funktionen für $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an, so dass zu dieser Konstruktion ein Gibbsprozess existiert. Die Funktion p bezeichnet man als *Paarpotential*. Für das Paarpotential p existiere ein r_0 derart, dass für $r \leq r_0$ die Gleichung $p(r) = \infty$ gelte. Für $r > r_0$ gelte $|p(r)| \leq p_0(|r|)$ für eine monoton fallende Funktion $p_0 : [r_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$, die zusätzlich $\int_{r_0}^{\infty} r^{d-1} p_0(r) dr <$

∞ und $\lim_{r \rightarrow \infty} r^d p_0(r) = 0$ erfüllt. Die Existenz eines zugehörigen Gibbs-Prozesses im \mathbb{R}^d folgt dann aus [23]. Diesen Prozess können wir analog zum letzten Beispiel unabhängig markieren. Die Tatsache, dass ξ ein einfacher Punktprozess ist, wodurch η ein markierter Punktprozess wird, folgt aus einer lokalen Absolutstetigkeitsbedingung für Gibbsprozesse (siehe [23] und [30]).

2.3 Das dynamische Modell mit Kugeln

In diesem Abschnitt zeigen wir die Existenz eines dynamischen Modells, bei dessen Primärkörnern es sich ausschließlich um Einheitskugeln handelt. Wir verallgemeinern das klassische Lilypond-Modell dahingehend, dass die Kugeln zu unterschiedlichen Startzeitpunkten mit dem Wachstum beginnen. Punkte, die zu ihrem Startzeitpunkt bereits von einer anderen Kugel überdeckt werden, nehmen am Wachstumsprozess nicht teil. Die folgende Abbildung zeigt einen kleinen und einen großen Ausschnitt dieses Modells.

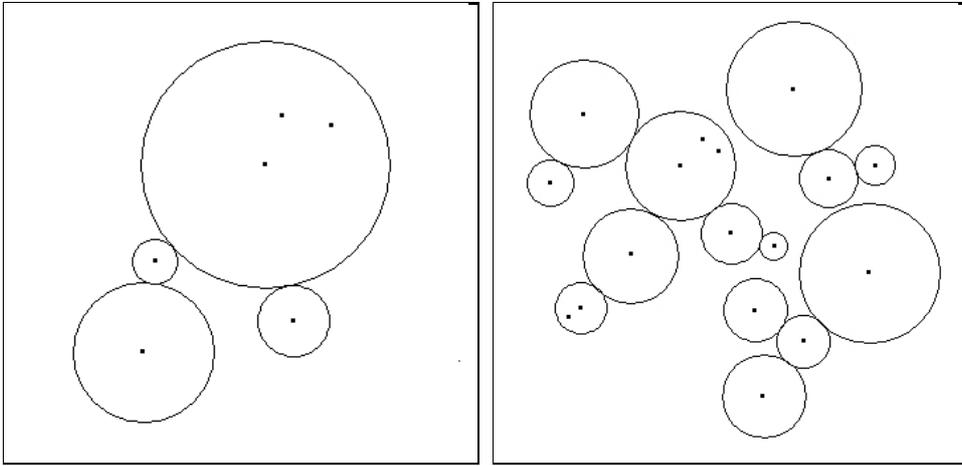


Abbildung 2.2: Zwei unterschiedlich skalierte Ausschnitte eines dynamischen wachstumsmaximalen Modells mit Einheitskugeln als Primärkörnern, das auf Realisierungen eines stationären unabhängig markierten Poissonprozesses beruht.

Zunächst zeigen wir die Existenz und Eindeutigkeit im Fall einer festen Konfiguration. Danach untersuchen wir zufällige Konfigurationen.

2.3.1 Existenz und Eindeutigkeit für eine feste Konfiguration

Da wir im folgenden nur Modelle betrachten, in denen als Primärkörner nur die Einheitskugel auftritt, machen wir folgende Definition.

Definition 2.3.1. Es sei M^B die Menge aller $\varphi \in M$ für die $K = B(0, 1)$ für alle $(x, K, t) \in \varphi$ gilt. Wir schreiben kurz $(x, t) := (x, B(0, 1), t)$ für alle $(x, B(0, 1), t) \in \varphi$ und $\varphi \in M^B$ und unterdrücken das Primärkorn auch in allen anderen Ausdrücken.

Bemerkung 2.3.2. Da wir im aktuellen Abschnitt 2.3 ausschließlich die Einheitskugel als Primärkorn verwenden, gilt für das Infimum aus Definition 1.3.1 hier die Gleichung

$$\inf\{r \geq 0 : \{x\} \cap (y + rB(0, 1)) \neq \emptyset\} = \|x - y\|, \quad x, y \in \mathbb{R}^d.$$

Bevor wir den Existenz- und Eindeutigkeitsatz formulieren und beweisen können, benötigen wir einige vorbereitende Definitionen und Lemmata.

Definition 2.3.3. Für $(x, t), (y, s) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ definieren wir

$$d(x, t, y, s) := (\min\{t, s\} + \|x - y\|) \mathbf{1}_{\{\|x-y\| < |t-s|\}} + \left(\max\{t, s\} + \frac{1}{2}(\|x - y\| - |t - s|) \right) \mathbf{1}_{\{\|x-y\| \geq |t-s|\}}. \quad (2.23)$$

Bemerkung 2.3.4. Für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$ und $t, s \in \mathbb{R}_+$ gilt

$$\left(\max\{t, s\} + \frac{1}{2}(\|x - y\| - |t - s|) \right) = \frac{1}{2}(s + t + \|x - y\|) \quad (2.24)$$

und die Symmetriebeziehung $d(x, t, y, s) = d(y, s, x, t)$ (vgl. (2.1)).

Die Größe d können wir als den Zeitpunkt ansehen, an dem die zu (x, t) und (y, s) gehörenden Körner soweit gewachsen sind, dass (x, t) und (y, s) Nachbarn (vgl. Definition 1.3.1) sind. Hierbei unterscheiden wir zwischen dem Fall, dass eines der beiden wachsenden Körner das andere erreicht, bevor dieses zu wachsen beginnt und dem Fall, dass beide zu wachsen beginnen und sich während des Wachstumsvorgangs treffen. Den Fall, dass eines der beiden Körner das andere genau in dem Moment erreicht, in dem dieses zu wachsen beginnt, d.h. $\|x - y\| = |t - s|$, schließen wir später durch eine Zusatzbedingung aus, weswegen wir dann lediglich zwischen den Fällen „<“ und „>“ unterscheiden müssen.

Definition 2.3.5. Sei $\varphi \in M^B$. Eine Folge verschiedener Punkte $(x_1, t_1), (x_2, t_2), \dots \in \varphi$ nennen wir eine *absteigende Kette*, falls die Folge $(d(x_i, t_i, x_{i+1}, t_{i+1}))_{i \in \mathbb{N}}$ monoton fallend ist und nur echt positive Glieder besitzt. Die n Punkte $(x_1, t_1), \dots, (x_n, t_n) \in \varphi$ nennen wir eine *absteigende Kette der Länge n* , falls

$$d(x_i, t_i, x_{i+1}, t_{i+1}) \geq d(x_{i+1}, t_{i+1}, x_{i+2}, t_{i+2}) > 0, \quad i \in \{1, \dots, n-2\},$$

gilt.

Wir zeigen nun drei Zusammenhänge zwischen der Größe d und einer Hard-Core-Funktion l . Das nächste Lemma ist analog zu Lemma 2.2.5.

Lemma 2.3.6. *Es sei l eine Hard-Core-Funktion und $\varphi \in M^B$. Außerdem seien (x, t) und (y, s) aus φ Nachbarn und es gelte $\|x - y\| \neq |t - s|$. Weiter seien $l(\varphi, x, t), l(\varphi, y, s) > 0$ sowie $l(\varphi, x, t) + t \geq l(\varphi, y, s) + s$. Dann gilt*

$$l(\varphi, x, t) + t \geq d(x, t, y, s) \geq l(\varphi, y, s) + s.$$

Die Aussage bleibt richtig, wenn wir alle Ungleichungen durch strikte Ungleichungen ersetzen.

Beweis: Wir führen den Beweis indirekt und nehmen zunächst $l(\varphi, x, t) + t, l(\varphi, y, s) + s > d(x, t, y, s)$ an. Falls $\|x - y\| > |t - s|$ und damit $d(x, t, y, s) = \max\{t, s\} + 1/2(\|x - y\| - |t - s|)$ gilt, würde sich mit (2.24)

$$\begin{aligned} l(\varphi, x, t) + l(\varphi, y, s) &> 2d(x, t, y, s) - s - t \\ &= \|x - y\| + s + t - s - t \\ &= \|x - y\| \end{aligned}$$

ergeben. Dies stünde aufgrund von $l(\varphi, x, t), l(\varphi, y, s) > 0$ im Widerspruch zur Hard-Core-Eigenschaft. Falls $\|x - y\| < |t - s|$ und somit $d(x, t, y, s) = (\min\{t, s\} + \|x - y\|)$ gilt, nehmen wir o.B.d.A. $\min\{s, t\} = t$ an. Daraus würde

$$l(\varphi, x, t) > t + \|x - y\| - t = \|x - y\|$$

folgen und mit der Hard-Core-Eigenschaft außerdem $l(\varphi, y, s) = 0$. Dies wäre aber ein Widerspruch zur Voraussetzung $l(\varphi, y, s) > 0$. Beide Fälle können also nicht eintreten.

Jetzt nehmen wir $0 < l(\varphi, x, t) + t, l(\varphi, y, s) + s < d(x, t, y, s)$ an. Im Fall $\|x - y\| > |t - s|$ würden wir

$$l(\varphi, x, t) + l(\varphi, y, s) < 2d(x, t, y, s) - s - t = \|x - y\| \quad (2.25)$$

erhalten. Dies wäre ein Widerspruch zu der Voraussetzung, dass (x, t) und (y, s) Nachbarn sind. Im Fall $\|x - y\| < |t - s|$ würde sich durch Abschätzung

$$\begin{aligned} l(\varphi, x, t) + l(\varphi, y, s) &< 2d(x, t, y, s) - s - t \\ &= 2\|x - y\| + 2\min\{s, t\} - t - s \\ &= 2\|x - y\| - |t - s| \\ &\leq \|x - y\| \end{aligned}$$

ergeben. Die letzte Abschätzung folgt aus unserer Annahme $\|x - y\| < |t - s|$. Dies wäre erneut ein Widerspruch dazu, dass (x, t) und (y, s) benachbart sind. Fügen wir alle Aussagen zusammen, so folgt mit $l(\varphi, x, t) + t \geq l(\varphi, y, s) + s$ schließlich die Aussage

$$l(\varphi, x, t) + t \geq d(x, t, y, s) \geq l(\varphi, y, s).$$

Ist $l(\varphi, x, t) + t > l(\varphi, y, s) + s$, wird eine dieser beiden Ungleichungen zu einer echten Ungleichung. Die andere Ungleichung wird ebenfalls zu einer echten Ungleichung, da sich dann analog zu obiger Argumentation ein Widerspruch zur Hard-Core-Eigenschaft oder zur Tatsache, dass (x, t) und (y, s) benachbart sind, ergibt. \square

Lemma 2.3.7. *Es sei l eine Hard-Core-Funktion und $\varphi \in M^B$. Außerdem seien (x, t) und (y, s) aus φ Nachbarn und es gelte $\|x - y\| \neq |t - s|$. Dann gilt*

$$l(\varphi, x, t) + l(\varphi, y, s) \geq 2d(x, t, y, s) - t - s.$$

Beweis: O.B.d.A. sei $s \leq t$. Zuerst nehmen wir $\|x - y\| < |t - s|$ und somit $d(x, t, y, s) = \min\{s, t\} + \|x - y\|$ an. Dann gilt

$$2d(x, t, y, s) - t - s = 2\|x - y\| + 2\min\{s, t\} - t - s.$$

Wir erhalten die Abschätzung

$$\begin{aligned} 2d(x, t, y, s) - t - s &= 2\|x - y\| + 2s - t - s \\ &= 2\|x - y\| + s - t \\ &= 2\|x - y\| - |t - s| \\ &< \|x - y\|, \end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Ungleichung $\|x - y\| < |t - s|$ verwenden. Da (x, t) und (y, s) Nachbarn sind, gilt nach Definition $l(\varphi, x, t) + l(\varphi, y, s) = \|x - y\|$ und wir erhalten die gewünschte Aussage.

Falls $\|x - y\| > |t - s|$ und somit $d(x, t, y, s) = \max\{s, t\} + (1/2)(\|x - y\| - |t - s|)$ gilt, ergibt sich

$$2d(x, t, y, s) - t - s = 2 \max\{s, t\} + \|x - y\| - |t - s| - t - s.$$

Mit $s \leq t$ folgt

$$2d(x, t, y, s) - t - s = 2t + \|x - y\| - |t - s| - t - s = \|x - y\|.$$

Aufgrund von $l(\varphi, x, t) + l(\varphi, y, s) = \|x - y\|$ erhalten wir also auch in diesem Fall die gewünschte Aussage. \square

Lemma 2.3.8. *Sei l eine Hard-Core-Funktion und $\varphi \in M^B$. Außerdem seien $(x, t) \neq (y, s)$ aus φ mit $l(\varphi, x, t), l(\varphi, y, s) > 0$ und $\|x - y\| \neq |t - s|$. Dann gilt*

$$l(\varphi, x, t) \leq d(x, t, y, s) - t$$

oder

$$l(\varphi, y, s) \leq d(x, t, y, s) - s.$$

Falls $l(\varphi, x, t) > d(x, t, y, s) - t$ gilt, dann folgt $l(\varphi, y, s) < d(x, t, y, s) - s$.

Beweis: Die erste Aussage folgt direkt aus Lemma 2.3.6. Die zweite Aussage findet sich implizit im dazugehörigen Beweis. \square

Wir führen nun noch drei technische Bedingungen für die Konfiguration $\varphi \in M^B$ ein, welche zum Teil auch anschauliche Interpretationen besitzen.

Definition 2.3.9. Sei $\varphi \in M^B$. Wir sagen φ ist *dynamisch markiert lokalendlich*, falls für alle $(x, t) \in \varphi$ und alle $r > 0$ die Endlichkeitsbedingung

$$\text{card}(\{(y, s) \in \varphi \setminus \{(x, t)\} : d(x, t, y, s) \leq r\}) < \infty \quad (2.26)$$

erfüllt ist. Weiter heißt φ *abstandseindeutig*, wenn für je zwei verschiedene Paare $(x_1, t_1), (y_1, s_1)$ und $(x_2, t_2), (y_2, s_2)$ von Punkten aus φ

$$d(x_1, t_1, y_1, s_1) \neq d(x_2, t_2, y_2, s_2)$$

gilt. Außerdem heißt φ *treffpunkteindeutig*, wenn für alle verschiedenen Punkte (x, t) und (y, s) aus φ

$$\|x - y\| \neq |t - s|.$$

In einer abstandseindeutigen Konfiguration bestehen Mengen wechselseitig nächster Nachbarn immer aus genau zwei Punkten. Die Treffpunkteindeutigkeit sorgt dafür, dass kein Punkt genau in seinem Geburtszeitpunkt vom Korn eines anderen Punktes erreicht wird.

Es folgt der Existenz- und Eindeutigkeitsatz für das dynamische wachstumsmaximale Modell.

Satz 2.3.10. *Sei $\varphi \in M^B$ dynamisch markiert lokalendlich, abstandseindeutig sowie treffpunkteindeutig. Des Weiteren enthalte φ keine absteigende Kette. Dann existiert zu φ eine eindeutig bestimmte wachstumsmaximale Funktion $l(\varphi, \cdot)$ bzw. ein eindeutig bestimmtes dynamisches wachstumsmaximales Modell $T(\varphi) = \{(x, t, l(\varphi, x, t)) : (x, t) \in \varphi\}$.*

Beweis: Wir modifizieren den Beweis von Satz 2.2.8 und greifen damit implizit erneut auf Ideen aus [4] zurück. Zuerst konstruieren wir per Rekursion für gegebenes $\varphi \in M^B$ zu jedem Punkt $(x, t) \in \varphi$ einen Funktionswert $l(\varphi, x, K)$. Danach zeigen wir, dass sich durch diese Konstruktion eine wachstumsmaximale Funktion $l(\varphi, \cdot)$ ergibt. Abschließend weisen wir nach, dass nur eine wachstumsmaximale Funktion existieren kann.

Wir beginnen mit der rekursiven Konstruktion. Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $\varphi_0 := \emptyset$. Weiter sei die Menge $\nu_n(\varphi, x, K)$ für alle $(x, K) \in \varphi \setminus \varphi_n$ durch

$$\begin{aligned} \nu_n(\varphi, x, t) &:= \{(x, t)\} \cup \{(y, s) \in \varphi \setminus (\varphi_n \cup \{(x, t)\}) : (x, t) \text{ und } (y, s) \\ &\quad \text{sind in } \varphi \setminus \varphi_n \text{ wechselseitig nächste Nachbarn}\} \end{aligned}$$

definiert. Hier und im weiteren Verlauf des Beweises wollen wir den Begriff „nächster Nachbar“ stets bezüglich der Größe d verstehen. Anschaulich ist der nächste Nachbar eines Punktes $(x, t) \in \varphi$ daher der Punkt $(y, s) \in \varphi \setminus \{(y, s)\}$, mit dessen Kugel die Kugel um x als erstes kollidiert, wenn wir beim Wachstum der Kugeln die Wechselwirkung mit allen anderen Körnern der Konfiguration φ nicht beachten. Kollidieren beinhaltet in dieser Interpretation auch das Überdecken eines Punktes, der noch nicht zu wachsen begonnen hat. Da φ nach Voraussetzung abstandseindeutig ist, enthält $\nu_n(\varphi, x, t)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $(x, t) \in \varphi \setminus \varphi_n$ höchstens zwei Elemente. Sei außerdem

$$\psi_n := \{(x, t) \in \varphi \setminus \varphi_n : \nu_n(x, t) \neq \{(x, t)\}\}.$$

Die Menge ψ_n besteht also aus allen Paaren wechselseitig nächster Nachbarn der Menge $\varphi \setminus \varphi_n$. Insbesondere ist ψ_0 die Menge aller wechselseitig nächsten Nachbarn in φ . Falls ψ_n die leere Menge ist, definieren wir $\varphi_{n+1} = \varphi_n$ und es folgt $\varphi_m = \varphi_n$, $m \geq n$. Andernfalls erhalten wir ausgehend von φ_n folgendermaßen die Menge φ_{n+1} und die Wachstumsfunktionswerte $l(\varphi, x, K)$, $(x, t) \in \varphi_{n+1} \setminus \varphi_n$.

Wir definieren zunächst für $(x, t), (y, s) \in \varphi$

$$f_1(\varphi, x, t, y, s) := d(x, t, y, s)$$

und für $(x, t) \in \varphi \setminus \varphi_n$, $(y, s) \in \varphi_n$,

$$f_2(\varphi, x, t, y, s) := \inf\{r \geq 0 : (x + rB(0, 1)) \cap (y + l(\varphi, y, s)B(0, 1)) \neq \emptyset\} + t. \quad (2.27)$$

Da $(y, s) \in \varphi_n$, ist $l(\varphi, y, s)$ in diesem Schritt bereits bekannt. Für $(x, t) \in \psi_n$ definieren wir weiter

$$d_n(\varphi, x, t) := \inf_{(y, s) \in \varphi_n : l(\varphi, y, s) > 0} f_2(\varphi, x, t, y, s), \quad (2.28)$$

wobei $\inf \emptyset := \infty$. Aufgrund der Lokalendlichkeit der Projektion ϕ von φ auf die erste Komponente und der Tatsache, dass es sich nach Konstruktion bei $\{(x, K, l(\varphi, x, K)) : (x, K) \in \varphi_n\}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ um ein Hard-Core-Modell handelt, wird das Infimum aus (2.28), falls es endlich ist, auch angenommen. Zusätzlich definieren wir analog zum Beweis von Satz 2.2.8 die Größen

$$s'_n(\varphi, x, t) = f_1(\varphi, x, t, y, s), \quad (y, s) \in \nu_n(\varphi, x, t) \setminus \{(x, t)\},$$

und

$$s''_n(\varphi, x, t) = \min_{(y, s) \in \nu_n(\varphi, x, t)} d_n(\varphi, y, s).$$

Nach Konstruktion ist $s_n''(\varphi, x, t) > 0$ für alle $(x, t) \in \psi_n$. Schließlich sei

$$l_n(\varphi, x, t) := \min\{s_n'(\varphi, x, t), s_n''(\varphi, x, t)\}.$$

Um Punkte aus ψ_n zu φ_n hinzuzufügen und somit φ_{n+1} zu erhalten, unterscheiden wir zwei Fälle. Im ersten Fall $l_n(\varphi, x, t) = s_n'(\varphi, x, t)$ unterscheiden wir wiederum zwischen drei Möglichkeiten. Wenn für $(y, s) \in \nu_n(\varphi, x, t) \setminus \{(x, t)\}$ die Ungleichung $\|x - y\| < |t - s|$ und somit $d(x, t, y, s) = \min\{t, s\} + \|x - y\|$ gilt und $s = \min\{s, t\}$ ist, setzen wir $l(\varphi, y, s) = 0$ und fügen (y, s) zu φ_n hinzu. Wenn die Ungleichung $\|x - y\| < |t - s|$ und damit $d(x, t, y, s) = \min\{t, s\} + \|x - y\|$ gilt und $t = \min\{s, t\}$ ist, setzen wir $l(\varphi, x, t) = 0$ und fügen (x, t) zu φ_n hinzu. Wenn für die beiden Punkte (x, t) und (y, s) aus $\nu_n(\varphi, x, t)$ die umgekehrte Ungleichung $\|x - y\| > |t - s|$ und somit $d(x, t, y, s) = \max\{t, s\} + (1/2)(\|x - y\| - |t - s|)$ gilt, setzen wir $l(\varphi, x, t) = f_1(x, t, y, s) - t$ und $l(\varphi, y, s) = f_1(x, t, y, s) - s$.

Im zweiten Fall $l_n(\varphi, x, t) = s_n''(\varphi, x, t)$ erweitern wir φ_n um die Punkte $(y, s) \in \nu_n(\varphi, x, t)$, für die $l_n(\varphi, x, t) = d_n(\varphi, y, s)$ gilt und definieren $l(\varphi, y, s) := l_n(\varphi, x, t) - s$. Indem wir dies für alle $(x, t) \in \psi_n$ durchführen, erhalten wir φ_{n+1} aus φ_n .

Bei $\{(x, t, l(\varphi, x, t)) : (x, t) \in \varphi_{n+1}\}$ handelt es sich nach Konstruktion um ein Hard-Core-Modell. Wir definieren

$$\varphi_\infty := \bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi_n, \quad \psi := \varphi \setminus \varphi_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\varphi \setminus \varphi_n).$$

Die Menge ψ ist als Teilmenge von φ leer, endlich oder abzählbar unendlich. Ist ψ leer, sind bereits alle Radien konstruiert. Enthält ψ nur einen Punkt $(x, t) \in \varphi$, so setzen wir $l(\varphi, x, t) := \inf_{(y, s) \in \varphi_\infty : l(\varphi, y, s) > 0} f_2(\varphi, x, t, y, s) - t$. Mit der gleichen Argumentation wie bei Gleichung (2.28) wird dieses Infimum ebenfalls angenommen.

Besteht die Menge ψ aus mehr als einem Punkt, so enthält sie kein Paar wechselseitig nächster Nachbarn, wie folgende Ausführungen zeigen. Sei $(x, t) \in \psi$ und $\nu(\varphi, x, t)$ die Menge der wechselseitig nächsten Nachbarn von (x, t) in ψ . Wir können annehmen, dass $\nu(\varphi, x, t)$ nicht leer ist. Ansonsten würde kein wechselseitig nächster Nachbar von (x, t) in ψ existieren und unsere Behauptung wäre bereits gezeigt. Sei also $(y, s) \in \nu(\varphi, x, t)$. Wir definieren die Menge

$$A(\varphi, x, t) := \{(z, r) \in \varphi : d(z, r, x, t) \leq d(x, t, y, s)\} \cup \{(z, r) \in \varphi : d(z, r, y, s) \leq d(x, t, y, s)\},$$

sie enthält nach Konstruktion aufgrund der Abstandseindeutigkeit von φ keinen Punkt aus $\psi \setminus (\nu(\varphi, x, t) \cup \{(x, t)\})$, da sonst (x, t) und (y, s) keine wechselseitig nächsten Nachbarn wären. $A(\varphi, x, t)$ besteht daher nur aus Punkten aus $\nu(\varphi, x, t) \cup \{(x, t)\}$ und $\varphi \setminus \psi$. Da φ als markiert lokalendlich vorausgesetzt wurde, ist die Menge $A(\varphi, x, t)$ als Vereinigung zweier endlicher Mengen selbst endlich. Deshalb können in $A(\varphi, x, t)$ auch keine Punkte aus $\varphi \setminus \psi$ enthalten sein. Diese wären alle bis zu einem $n \in \mathbb{N}_0$ durch den Algorithmus mit einem Funktionswert der Funktion l versehen worden. Gleichzeitig kann aber $\nu(\varphi, x, t)$ keine Elemente besitzen, denn jedes Paar wechselseitig nächster Nachbarn in ψ wäre nach Konstruktion der Menge $A(\varphi, x, t)$ auch ein Paar wechselseitig nächster Nachbarn in $\varphi \setminus \varphi_n$. Ein Teil dieser Punkte wäre also im $(n + 1)$ -ten Schritt des Algorithmus mit einem Funktionswert versehen worden und könnte demnach nicht zu ψ gehören. Also enthält ψ wie behauptet keine Paare wechselseitig nächster Nachbarn (in ψ).

ψ kann nicht endlich sein, weil jede endliche Menge mit mindestens zwei Punkten ein Paar wechselseitig nächster Nachbarn enthalten müsste. Daher kann ψ nur aus abzählbar unendlich vielen Punkten bestehen. Wir zeigen per Induktion, dass ψ dann allerdings eine absteigende Kette besitzen muss. Da ψ kein Paar wechselseitig nächster Nachbarn enthält, existieren drei verschiedene Punkte $(x_0, t_0), (x_1, t_1), (x_2, t_2)$ mit

$$d(x_0, t_0, x_1, t_1) \geq d(x_1, t_1, x_2, t_2),$$

wobei (x_1, t_1) nächster Nachbar von (x_0, t_0) und (x_2, t_2) nächster Nachbar von (x_1, t_1) ist. Angenommen $(x_0, t_0), \dots, (x_n, t_n)$ ($n \geq 2$) seien verschiedene Punkte in ψ , für die

$$d(x_{i-1}, t_{i-1}, x_i, t_i) \geq d(x_i, t_i, x_{i+1}, t_{i+1}), \quad i \in \{1, \dots, n-1\},$$

gilt. Sei (x_{n+1}, t_{n+1}) ein nächster Nachbar von (x_n, t_n) . Dann gilt

$$d(x_{n+1}, t_{n+1}, x_n, t_n) \leq d(x_n, t_n, x_{n-1}, t_{n-1}),$$

weil sonst aufgrund von

$$d(x_n, t_n, x_{n+1}, t_{n+1}) = d(x_{n+1}, t_{n+1}, x_n, t_n) > d(x_n, t_n, x_{n-1}, t_{n-1})$$

der Punkt (x_{n+1}, t_{n+1}) kein nächster Nachbar von (x_n, t_n) sein könnte.

Weiter gilt $(x_{n+1}, t_{n+1}) \notin \{(x_0, t_0), \dots, (x_{n-1}, t_{n-1})\}$. Hierfür nehmen wir an, dass ein $j \in \{0, \dots, n-1\}$ mit $(x_j, t_j) = (x_{n+1}, t_{n+1})$ existiert. Wäre nun (x_n, t_n) kein nächster Nachbar von (x_j, t_j) , so gäbe es dank der Abstandseindeutigkeit von φ ein $(x, t) \in \psi$ mit

$$d(x_j, t_j, x, t) < d(x_j, t_j, x_n, t_n) = d(x_{n+1}, t_{n+1}, x_n, t_n) \leq d(x_{j+1}, t_{j+1}, x_j, t_j).$$

Dann könnte aber (x_{j+1}, t_{j+1}) kein nächster Nachbar von (x_j, t_j) sein. Dies wäre ein Widerspruch. Der Punkt (x_n, t_n) ist daher ein nächster Nachbar von $(x_j, t_j) = (x_{n+1}, t_{n+1})$. Also müssten (x_{n+1}, t_{n+1}) und (x_n, t_n) wechselseitig nächste Nachbarn sein, was jedoch ebenfalls zu einem Widerspruch führen würde, da ψ keine wechselseitig nächsten Nachbarn enthält. Hieraus folgt, dass ψ und damit auch φ eine absteigende Kette besitzen müssten, was der Voraussetzung an φ widerspräche. Die Menge ψ kann somit höchstens einen Punkt besitzen. Abschließend merken wir noch an, dass sich die Translationsinvarianz (1.10) der wachstumsmaximalen Funktion l direkt aus der oben beschriebenen Konstruktion ergibt.

Wir zeigen nun, dass das Hard-Core-Modell $\{(x, t, l(\varphi, x, t)) : (x, t) \in \varphi\}$ ein wachstumsmaximales Modell ist. Hierfür muss jedes $(x, t) \in \varphi$ einen stoppenden Nachbarn besitzen. Im Fall $\text{card}(\varphi) = 0$ ist nichts zu zeigen. Falls $\text{card}(\varphi) = 1$ gilt, ist $l(\varphi, x, t) = \infty$ für $(x, t) \in \varphi$ und es ist auch nichts zu zeigen. Wir nehmen also $\text{card}(\varphi) \geq 2$ an. Zunächst weisen wir nach, dass für jedes $(x, t) \in \varphi$, für das ein $n \in \mathbb{N}_0$ existiert, so dass $(x, t) \in \varphi_{n+1} \setminus \varphi_n$ gilt, ein stoppender Nachbar existiert. Danach klären wir den Fall $(x, t) \in \psi$. Sei also $(x, t) \in \varphi_{n+1} \setminus \varphi_n$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Damit enthält $\nu_n(\varphi, x, t)$ den Punkt (x, t) und einen weiteren Punkt (y, s) . Falls $l_n(\varphi, y, s) = s'_n(\varphi, y, s) = \min\{s, t\} + \|x - y\|$ und $\min\{s, t\} = s$ gelten, setzen wir $l(\varphi, x, t) = 0$. In dieser Situation gilt laut Algorithmus $\|x - y\| < |t - s|$ und somit $d(y, s, x, t) = \min\{s, t\} + \|x - y\|$. Wir zeigen, dass $l(\varphi, y, s) \geq \|x - y\|$ gilt und damit (y, s) ein stoppender Nachbar von (x, t) ist, indem wir alle Möglichkeiten untersuchen, (y, s) einen Wachstumsfunktionswert zuzuordnen. Angenommen, es existiert ein $m > n$ derart, dass $\nu_m(\varphi, y, s) \neq \{(y, s)\}$ gilt. Im Fall $s'_m(\varphi, y, s) \leq s''_m(\varphi, y, s)$ existieren zwei Möglichkeiten (y, s) im m -ten Schritt einen Funktionswert zuzuordnen. Falls $d(y, s, z, r) = \min\{s, r\} + \|y - z\|$ und $\|y - z\| < |r - s|$ sowie $\min\{s, r\} = r$ für ein $(z, r) \in \nu_m(\varphi, y, s)$ gelten, erhalten wir Folgendes. Wegen $m > n$ gilt $d(y, s, x, t) \leq d(y, s, z, r)$, da sonst (y, s) und (x, t) keine wechselseitig nächsten Nachbarn in $\varphi \setminus \varphi_n \subset \varphi \setminus \varphi_m$ sein können. Daher gilt

$$\min\{r, s\} + \|y - z\| \geq \min\{s, t\} + \|x - y\|,$$

was äquivalent zu

$$r + \|y - z\| \geq s + \|x - y\|$$

ist. Aufgrund von $r \leq s$ ergibt sich hieraus $\|y - z\| \geq |s - r| + \|x - y\| \geq |s - r|$. Dies steht allerdings im Widerspruch zu $\|z - y\| < |s - r|$.

Falls für $(z, r) \in \nu_m(\varphi, y, s)$ die Gleichungen $d(y, s, z, r) = \max\{s, r\} + (1/2)(\|y - z\| - |s - r|)$ und $\|z - y\| \geq |s - r|$ gelten, so setzen wir laut Algorithmus $l(\varphi, y, s) = d(y, s, z, r) - s$. Wegen $m > n$ gilt $d(y, s, x, t) \leq d(y, s, z, r)$, da sonst (y, s) und (x, t) keine wechselseitig nächsten Nachbarn in $\varphi \setminus \varphi_n \subset \varphi \setminus \varphi_m$ sein können. Es folgt die Abschätzung

$$l(\varphi, y, s) = d(y, s, z, r) - s \geq d(y, s, x, t) - s. \quad (2.29)$$

Wegen $d(y, s, x, t) = \min\{s, t\} + \|x - y\|$ und $\min\{s, t\} = s$ erhalten wir daraus

$$d(y, s, x, t) - s \geq \|x - y\|$$

und zusammen mit (2.29) wie behauptet $l(\varphi, y, s) \geq \|x - y\| > 0$.

Wir betrachten nun den Fall $s'_m(\varphi, y, s) > s''_m(\varphi, s, y)$. Damit (y, s) in diesem Fall ein Radius zugeordnet wird, muss $d_m(\varphi, y, s) \leq d_m(\varphi, z, r)$, $(z, r) \in \nu_m(\varphi, y, s)$, für (y, s) gelten. Es existiert dann ein $(z', r') \in \varphi_m$ mit $l(\varphi, z', r') > 0$. Aufgrund von $(z', r') \in \varphi_m$ wurde der Funktionswert bereits in einem früheren Schritt des Algorithmus bestimmt. Es existiert also ein $l < m$ und ein $(z'', r'') \in \nu_l(\varphi, z', r') \setminus \{(z', r')\}$, d.h. ein wechselseitig nächster Nachbar von (z', r') in $\varphi \setminus \varphi_l$. Daher gilt

$$l(\varphi, z', r') + r = \min\{s'_l(z'), s''_l(z')\} \leq s'_l(z') = d(z', r', z'', r'') \leq d(z', r', y, s).$$

Die erste Gleichung folgt aus dem Algorithmus und $l(\varphi, z', r') > 0$, die Ungleichung aus der Tatsache, dass (z, r) und (z', r') sonst keine wechselseitig nächsten Nachbarn in $\varphi \setminus \varphi_l \subset \varphi \setminus \varphi_m$ sein könnten. Da (y, s) und (z', r') nach Konstruktion aber Nachbarn sind, ergibt sich daraus mit Lemma 2.3.7 $l(\varphi, y, s) \geq d(y, s, z', r') - s$. Weiter gilt $d(y, s, z', r') \geq d(y, s, x, t)$, weil sonst (y, s) und (x, t) keine wechselseitig nächsten Nachbarn in $\varphi \setminus \varphi_n \subset \varphi \setminus \varphi_m$ sein könnten. Damit erhalten wir

$$l(\varphi, y, s) \geq d(y, s, x, t) - s = \min\{s, t\} + \|x - y\| - s = \|x - y\|. \quad (2.30)$$

Falls kein solches $m > n$ existiert, gilt $(y, s) \in \psi$ und wir verfahren analog zum letzten von uns behandelten Fall.

Gelten $l_n(\varphi, x, t) = s'_n(\varphi, x, t) = \max\{s, t\} + (1/2)(\|x - y\| - |t - s|)$ und $\|x - y\| > |t - s|$, so setzen wir laut Algorithmus $l(\varphi, x, t) = d(x, t, y, s) - t$ und $l(\varphi, y, s) = d(x, t, y, s) - s$. Daraus folgt

$$l(\varphi, x, t) + t = l(\varphi, y, s) + s.$$

Aufgrund von $\|x - y\| > |t - s|$ ergibt sich des Weiteren

$$l(\varphi, x, t) = \left(\max\{s, t\} + \frac{1}{2}(\|x - y\| - |t - s|) \right) \mathbf{1}_{\{\|x - y\| > |t - s|\}} - t > 0$$

sowie

$$l(\varphi, y, s) = \left(\max\{s, t\} + \frac{1}{2}(\|x - y\| - |t - s|) \right) \mathbf{1}_{\{\|x - y\| > |t - s|\}} - s > 0.$$

Damit stoppt (y, s) den Punkt (x, t) .

Falls $l_n(\varphi, x, t) = s''_n(\varphi, x, t) > 0$ gilt, existiert ein $(y, s) \in \varphi_n$ mit $l(\varphi, y, s) > 0$. Außerdem sind (x, t) und (y, s) nach Konstruktion Nachbarn. Wir behaupten, (y, s) stoppt (x, t) , d.h. zusätzlich gelte $l(\varphi, y, s) + s \leq l(\varphi, x, t) + t$. Dafür nehmen wir das Gegenteil $l(\varphi, y, s) + s > l(\varphi, x, t) + t$ an. Es existiert ein $i \in \{1, \dots, n\}$, so dass $(y, s) \in \varphi_i \setminus \varphi_{i-1}$. Somit existiert $(z, r) \in \nu_{i-1}(\varphi, y, s) \setminus \{(y, s)\}$, so dass nach Konstruktion des Algorithmus $l(\varphi, y, s) + s \leq d(y, s, z, r)$ gilt. Mit Lemma 2.3.6 folgt

$$d(x, t, y, s) \leq l(\varphi, y, s) + s \leq d(y, s, z, r),$$

was jedoch ein Widerspruch dazu ist, dass (y, s) und (z, r) wechselseitig nächste Nachbarn in $\varphi \setminus \varphi_{i-1}$ sind, da $(x, t) \in \varphi \setminus \varphi_{i-1}$. Also gelten $l(\varphi, y, s) + s \leq l(\varphi, x, t) + t$ und $l(\varphi, y, s) > 0$ und (y, s) stoppt wie behauptet (x, t) .

Im Fall $(x, t) \in \psi$ verfahren wir analog zum letzten Fall. Damit haben wir alle Fälle diskutiert und gezeigt, dass (x, t) stets einen stoppenden Nachbarn besitzt.

Nun zeigen wir die Eindeutigkeit. Sei hierfür $l'(\varphi, \cdot)$ eine weitere wachstumsmaximale Funktion. Zunächst weisen wir per Induktion nach, dass $l(\varphi, x, t) = l'(\varphi, x, t)$ für alle $(x, t) \in \varphi_\infty$ mit $l(\varphi, x, t), l'(\varphi, x, t) > 0$ gilt.

Die Menge ψ_0 besteht aus allen Paaren wechselseitig nächster Nachbarn der Menge φ . Wir wählen $(x, t) \in \psi_0$ und $(y, s) \in \nu_0(\varphi, x, t) \setminus \{(x, t)\}$. Falls $l(\varphi, x, t)$ im ersten Schritt bestimmt wird, muss

$$l(\varphi, x, t) = d(x, t, y, s) - t = \max\{t, s\} + \frac{1}{2}(\|x - y\| - |t - s|) - t > 0$$

gelten, da wir $l(\varphi, x, t) > 0$ vorausgesetzt haben. Aus dem Algorithmus folgt damit

$$l(\varphi, y, s) = \max\{t, s\} + \frac{1}{2}(\|x - y\| - |t - s|) - s > 0.$$

Weiter gilt nach Voraussetzung $l'(\varphi, x, t) > 0$. Wir zeigen nun zunächst, dass in einer solchen Situation auch $l'(\varphi, y, s) > 0$ gelten muss. Hierfür nehmen wir das Gegenteil, also $l'(\varphi, y, s) = 0$ an. Dann existiert ein $(z, r) \in \varphi$ mit $l'(\varphi, z, r) \geq \|z - y\|$ und $s - r > \|z - y\|$, also ein stoppender Nachbar von (y, s) bzgl. l' . Aufgrund von $|s - r| > \|z - y\|$ ergeben sich damit

$$d(y, s, z, r) = \min\{s, r\} + \|z - y\| < s \tag{2.31}$$

und

$$d(x, t, y, s) = \max\{t, s\} + \frac{1}{2}(\|x - y\| - |t - s|) > s. \tag{2.32}$$

Für $(x, t) = (z, r)$ handelt es sich dabei wegen $d(x, t, y, s) = d(y, s, x, t)$ um einen Widerspruch. Für $(x, t) \neq (z, r)$ ergibt sich ein Widerspruch dazu, dass (x, t) und (y, s) wechselseitig nächste Nachbarn in φ sind. Es muss also $l'(\varphi, y, s) > 0$ gelten.

Wir nehmen nun $l'(\varphi, x, t) + t \neq d(x, t, y, s)$ oder $l'(\varphi, y, s) + s \neq d(x, t, y, s)$ an. Da l' eine Hard-Core-Funktion ist, folgt mit Hilfe von Lemma 2.3.6 die Ungleichung $l'(\varphi, x, t) + t < d(x, t, y, s) = f_1(\varphi, x, t, y, s)$ oder $l'(\varphi, y, s) + s < f_1(\varphi, x, t, y, s)$. Angenommen, es gilt $0 < l'(\varphi, x, t) + t < f_1(x, t, y, s)$, dann gibt es aufgrund der Wachstumsmaximalität einen Punkt $(z, r) \in \varphi \setminus \{(x, t)\}$ mit $l'(\varphi, z, r) + r \leq l'(\varphi, x, t) + t$ und $l(\varphi, z, r) > 0$. Wegen der Nachbar-Eigenschaft und Lemma 2.3.7 muss $l'(\varphi, x, t) + t \geq d(x, t, z, r)$ oder $l'(\varphi, z, r) \geq d(x, t, z, r)$ gelten. Dann würde aber in beiden Fällen

$$d(x, t, z, r) \leq l'(\varphi, x, t) - t < f_1(\varphi, x, t, y, s) = d(x, t, y, s) \tag{2.33}$$

gelten, was der Nächste-Nachbarn-Eigenschaft von (y, s) widerspräche. Die Argumentation läßt sich aus Symmetriegründen auf den Fall $0 < l'(\varphi, y, s) - s < f_1(\varphi, x, t, y, s)$ übertragen. Also gelten $l'(\varphi, x, t) = f_1(\varphi, x, t, y, s)$ und $l'(\varphi, y, s) = f_1(\varphi, x, t, y, s)$.

Den Induktionsschritt vollziehen wir folgendermaßen. Sei $(x, t) \in \psi_n$. Zuerst behandeln wir den Fall $l_n(\varphi, x, t) = s'_n(\varphi, x, t) = \max\{s, t\} + (1/2)(\|x - y\| - |t - s|)$ für $(y, s) \in \nu_n(\varphi, x, t) \setminus \{(x, t)\}$. Wie im Induktionsanfang ergibt sich $l(\varphi, y, s) > 0$. Nach Voraussetzung gilt weiter $l'(\varphi, x, t) > 0$. Zunächst zeigen wir erneut $l'(\varphi, y, s) > 0$. Wir nehmen dafür das Gegenteil, also $l'(\varphi, y, s) = 0$ an. Dann existiert ein $(x_1, t_1) \in \varphi$ mit $l'(\varphi, x_1, t_1) \geq \|x_1 - y\| > 0$ und

$s - t_1 > \|x_1 - y\|$, da sonst (y, s) keinen stoppenden Nachbarn bezüglich l' hätte. Weiter muss $(x_1, t_1) \in \varphi_n$ gelten, denn andernfalls würden wir, wie in der Induktionsverankerung in (2.31) und (2.32) gesehen, einen Widerspruch dazu erhalten, dass (x, t) und (y, s) wechselseitig nächste Nachbarn sind. Aufgrund von $l(\varphi, y, s) > 0$ gilt weiter $l(\varphi, x_1, t_1) < \|x_1 - y\|$. Somit folgt $l(\varphi, x_1, t_1) = 0$, da sich sonst im Widerspruch zur Induktionsvoraussetzung $l(\varphi, x, t) = l'(\varphi, x, t)$ für alle $(x, t) \in \varphi$ mit $l(\varphi, x, t), l'(\varphi, x, t) > 0$ die Abschätzung

$$0 < l(\varphi, x_1, t_1) < \|x_1 - y\| \leq l'(\varphi, x_1, t_1)$$

für $(x_1, t_1) \in \varphi_n$ ergeben würde. Aufgrund von $l(\varphi, x_1, t_1) = 0$ existiert ein $m \leq n$ und ein $(x_2, t_2) \in \varphi_m$ mit $l(\varphi, x_2, t_2) > \|x_2 - x_1\| > 0$ und $t_1 - t_2 > \|x_2 - x_1\|$, weil (x_1, t_1) sonst keinen stoppenden Nachbarn hätte. Des Weiteren sind (x_1, t_1) und (x_2, t_2) nach Konstruktion des Algorithmus wechselseitig nächste Nachbarn in $\varphi \setminus \varphi_m$. Wegen $l'(\varphi, x_1, t_1) > 0$ gilt $l'(\varphi, x_2, t_2) < \|x_1 - x_2\|$. Es folgt $l'(\varphi, x_2, t_2) = 0$, da wir sonst im Widerspruch zur Induktionsvoraussetzung

$$0 < l'(\varphi, x_2, t_2) < \|x_1 - x_2\| \leq l(\varphi, x_2, t_2)$$

erhalten würden. Wegen $s > t_1 > t_2$ sind (y, s) , (x_1, t_1) und (x_2, t_2) verschieden. Außerdem gilt $\|x_1 - y\| < s - t$, also insbesondere $\|x_1 - y\| < s$. Mit der Dreiecksungleichung erhalten wir

$$\|x_2 - y\| \leq \|x_2 - x_1\| + \|x_1 - y\| < t_1 - t_2 + s - t_1 = s - t_2 \leq s.$$

Führen wir die Argumentation fort, erhalten wir eine Folge $(y, s), (x_1, t_1), (x_2, t_2), \dots$ verschiedener Punkte aus φ mit $\|y - x_i\| < s$, $i \in \mathbb{N}$. Eine solche Folge kann aber nicht existieren, da φ nach Voraussetzung lokalendlich ist. Es gilt also $l'(\varphi, y, s) > 0$. Wir nehmen nun $0 < l'(\varphi, x, t) < f_1(\varphi, x, t, y, s) - t$ für $(y, s) \in \nu_n(\varphi, x, t) \setminus \{(x, t)\}$ an. Dann besitzt (x, t) bzgl. l' keinen stoppenden Nachbarn in der Menge $\varphi \setminus \varphi_n$, da ansonsten wegen $l'(\varphi, y, s) > 0$ wie in der Induktionsverankerung in Gleichung (2.33) ein Widerspruch zur Nächste-Nachbarn-Eigenschaft von (x, t) und (y, s) auftreten würde. Daher muß ein Punkt $(z, r) \in \varphi_n$ mit $l'(\varphi, z, r) > 0$ existieren, der Nachbar von (x, t) (bzgl. l') ist und für den $l'(\varphi, z, r) + r \leq l'(\varphi, x, t) + t$ gilt. Mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung $l'(\varphi, z, r) = l(\varphi, z, r)$ für $(z, r) \in \varphi_n$ erhalten wir jedoch nach Konstruktion von f_2

$$f_2(\varphi, x, t, z, r) = l'(\varphi, x, t) + t < f_1(\varphi, x, t, y, s),$$

da (z, r) und (x, t) Nachbarn bzgl. l' sind. Mit Ungleichung (2.8) führt dies zu

$$f_2(\varphi, x, t, z, r) < f_1(\varphi, x, t, y, s) = s'_n(\varphi, x, t) \leq d_n(\varphi, y, s) = \inf_{(w,u) \in \varphi_n: l(\varphi, w, u) > 0} f_2(\varphi, x, t, w, u),$$

was wegen $(z, r) \in \varphi_n$ ein Widerspruch ist. Im Fall $l'(\varphi, x, t) > f_1(\varphi, x, t, y, s) - t$ muss für $(y, s) \in \nu_n \setminus \{(x, t)\}$ mit Lemma 2.3.6 die Ungleichungskette $0 < l'(\varphi, y, s) < f_1(\varphi, x, t, y, s) - s$ gelten, da es sich bei l' um eine Hard-Core-Funktion handelt. Analog zu oben würde sich dann jedoch ein Widerspruch für (y, s) ergeben. Daher muß $l'(\varphi, x, t) = f_1(\varphi, x, t, y, s) - t = l(\varphi, x, t)$ gelten.

Im Fall $l_n(\varphi, x, t) < s'_n(\varphi, x, t) - t$ existiert ein $(y, s) \in \nu_n(\varphi, x, t)$, so dass $d_n(\varphi, y, s) - s < s'_n(\varphi, x, t)$ gilt. Daher ist $l'(\varphi, y, s) = d_n(\varphi, y, s) - s = l(\varphi, y, s)$ zu zeigen. Die Hard-Core-Eigenschaft liefert zusammen mit der Induktionsvoraussetzung $l(\varphi, z, r) = l'(\varphi, z, r)$, $(z, r) \in \varphi_n$, mit $l(\varphi, z, r), l'(\varphi, z, r) > 0$ die Abschätzung

$$d_n(\varphi, y, s) = f_2(\varphi, y, s, z, r) \geq l'(\varphi, y, s) - s.$$

Angenommen, es gilt $l'(\varphi, y, s) + s < d_n(\varphi, y, s)$, dann ist wiederum wegen $l(\varphi, z, r) = l'(\varphi, z, r)$ für $(z, r) \in \varphi_n$ keiner der Punkte aus φ_n mit $l(\varphi, z, r) > 0$ ein Nachbar von (y, s) . Aufgrund von $d_n(\varphi, y, s) < s'_n(\varphi, x, t)$ gilt $l'(\varphi, y, s) < f_1(\varphi, x, t, y, s)$. Zusammen mit der Tatsache, dass (x, t) und (y, s) wechselseitig nächste Nachbarn in $\varphi \setminus \varphi_n$ sind, folgt daraus, dass der Punkt (y, s) keinen stoppenden Nachbarn haben kann. Dies ist ein Widerspruch. Daher gilt $l'(\varphi, y, s) = d_n(\varphi, y, s) - s = l(\varphi, y, s)$ und der Induktionsschluss ist beendet.

Für einen Punkt (x, t) in $\varphi \setminus \varphi_\infty$ gilt wegen $l(\varphi, z, r) = l'(\varphi, z, r)$ für ein $(z, r) \in \varphi_\infty$ mit $l(\varphi, z, r) > 0$ und der Hard-Core-Eigenschaft die Ungleichung

$$l'(\varphi, x, t) \leq f_2(\varphi, x, t, z, r) - t = l(\varphi, x, t).$$

Gleichzeitig würde $l(\varphi, x, t) > l'(\varphi, x, t)$ bedeuten, dass (x, t) bezüglich der Funktion l' keinen (stoppenden) Nachbarn besitzt. Daher gilt $l(\varphi, x, t) = l'(\varphi, x, t)$, $(x, t) \in \varphi \setminus \varphi_\infty$.

Wir zeigen nun $l(\varphi, x, t) = l'(\varphi, x, t)$ für alle $(x, t) \in \varphi_\infty$ mit $l(\varphi, x, t) = 0$ oder $l'(\varphi, x, t) = 0$ und schließen den Beweis ab. Angenommen, es existiert ein $(x, t) \in \varphi_\infty$ mit $0 = l(\varphi, x, t) < l'(\varphi, x, t)$. Dann muss ein $(x_1, t_1) \in \varphi$ mit $l(\varphi, x_1, t_1) \geq \|x - x_1\| > 0$ und $\|x - x_1\| < t - t_1$ existieren, da (x, t) sonst keinen stoppenden Nachbarn bzgl. l besitzen würde. Falls $l'(\varphi, x_1, t_1) > 0$ gilt, folgt aus der Hard-Core-Eigenschaft von l' und $l'(\varphi, x, t) > 0$ die Abschätzung $l'(\varphi, x_1, t_1) < \|x - x_1\|$. Somit erhalten wir einen Widerspruch zum bereits gezeigten $l(\varphi, x_1, t_1) = l'(\varphi, x_1, t_1)$ für alle $(x_1, t_1) \in \varphi$ mit $l(\varphi, x_1, t_1), l'(\varphi, x_1, t_1) > 0$. Falls $l'(\varphi, x_1, t_1) = 0$, muss ein $(x_2, t_2) \in \varphi$ mit $l'(\varphi, x_2, t_2) \geq \|x_1 - x_2\| > 0$ und $\|x_1 - x_2\| < t_1 - t_2$ existieren, da (x_1, t_1) sonst keinen stoppenden Nachbarn bzgl. l' besitzt. Falls $l(\varphi, x_2, t_2) > 0$, gilt wegen der Hard-Core-Eigenschaft von l die Abschätzung $0 < l(\varphi, x_2, t_2) < \|x_1 - x_2\|$. Damit erhalten wir einen Widerspruch zum bereits gezeigten $l(\varphi, x_2, t_2) = l'(\varphi, x_2, t_2)$ für alle $(x_2, t_2) \in \varphi$ mit $l(\varphi, x_2, t_2), l'(\varphi, x_2, t_2) > 0$. Falls $l(\varphi, z, r) = 0$, wiederholt sich der vorige Schritt erneut mit einem $(x_3, t_3) \in \varphi$. Wegen $t_3 < t_2 < t_1 < t$ sind alle diese Punkte verschieden. Darüber hinaus gilt $\|x - x_1\| < t - t_1 \leq t$. Mit Hilfe der Dreiecksungleichung erhalten wir weiter

$$\|x - x_2\| \leq \|x - x_1\| + \|x_1 - x_2\| < t - t_1 + t_1 - t_2 = t - t_2 \leq t$$

und mit wiederholtem Anwenden der Dreiecksungleichung $\|x - x_i\| < t$, $i = 3, 4$. Da wir φ als lokalendlich vorausgesetzt haben, können wir diese Schritte nicht unendlich oft wiederholen, was aber dazu führt, dass ein Punkt existiert, der keinen stoppenden Nachbarn besitzt, wobei es sich ebenfalls um einen Widerspruch handelt. Unsere Annahme, dass ein $(x, t) \in \varphi_\infty$ mit $0 = l(\varphi, x, t) < l'(\varphi, x, t)$ existiert, kann also nicht erfüllt sein und der Fall $l(\varphi, x, t) = 0$ und $l'(\varphi, x, t) > 0$ für $(x, t) \in \varphi$ kann daher nicht auftreten. Den Fall $l'(\varphi, x, t) = 0$ und $l(\varphi, x, t) > 0$ für $(x, t) \in \varphi$ widerlegen wir analog. Falls $l(\varphi, x, t) = l'(\varphi, x, t) = 0$ gilt, ist nichts zu zeigen. \square

Analog zur Konstruktion aus Definition 2.2.9 definieren wir auch für diesen Abschnitt die Hard-Core-Funktion l und das wachstumsmaximale Modell T mit Hilfe des Algorithmus aus dem letzten Beweis.

2.3.2 Existenz und Eindeutigkeit in zufälligen Konfigurationen

Wir geben in diesem Unterabschnitt eine Klasse von Punktprozessen an, für die das soeben eingeführte dynamische wachstumsmaximale Modell existiert und eindeutig ist.

Es sei η ein markierter Punktprozess auf \mathbb{R}^d mit Markenraum \mathbb{R}_+ mit n -tem faktoriellen Momentenmaß $\nu^{(n)}$.

Bemerkung 2.3.11. Eigentlich betrachten wir in diesem Unterabschnitt einen markierten Punktprozess auf \mathbb{R}^d mit Markenraum $\mathcal{K}'_0 \times \mathbb{R}_+$, für den realisierungsweise $K = B(0, 1)$ für

alle $(x, K, t) \in \eta$ gilt. Zur besseren Übersicht unterdrücken wir allerdings die erste Komponente des Markenraums, d.h. das Primärkorn, sowohl im Punktprozess als auch in allen anderen Ausdrücken.

Wir fordern analog zu Bedingung (2.10) aus Unterabschnitt 2.2.2, dass eine Konstante $\alpha > 0$ und ein Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{Q} existieren, so dass

$$\nu^{(n)}(d(x_1, t_1, \dots, x_n, t_n)) \leq \alpha^n dx_1 \dots dx_n \mathbb{Q}(dt_1) \dots \mathbb{Q}(dt_n), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.34)$$

erfüllt ist.

Wir zeigen nun, dass ein markierter Punktprozess η , der (2.34) erfüllt, fast sicher keine absteigende Kette enthält und dynamisch markiert lokalendlich, abstandseindeutig und treffpunkteindeutig ist. Zunächst zeigen wir, dass η fast sicher keine absteigende Kette enthält. Der Beweis des nächsten Lemmas ist eine Modifikation des Beweises von Lemma 2.2.17.

Lemma 2.3.12. *Es sei η ein markierter Punktprozess auf \mathbb{R}^d mit Markenraum \mathbb{R}_+ . Weiter erfülle η die Bedingung (2.34). Dann enthält η fast sicher keine absteigende Kette.*

Es sei $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq s \leq t < \infty$ und $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ beschränkt. Wir definieren die Menge $E(n, s, t, B)$ aller $\varphi \in M^B$, in denen eine absteigende Kette aus $n + 1$ verschiedenen Punkten

$$(x_0, t_0), (x_1, t_1), \dots, (x_n, t_n) \in \varphi$$

der Länge $n + 1$ existiert, für die

$$t \geq d(x_0, t_0, x_1, t_1) \geq d(x_1, t_1, x_2, t_2) \geq \dots \geq d(x_{n-1}, t_{n-1}, x_n, t_n) \geq s$$

und $x_0 \in B$ gilt. Weiter sei $E(s, t, B)$ die Menge aller $\varphi \in M^B$, in denen eine unendlich lange absteigende Kette $(x_0, t_0), (x_1, t_1), \dots$ verschiedener Punkte aus φ existiert, für die

$$t \geq d(x_0, t_0, x_1, t_1) \geq d(x_1, t_1, x_2, t_2) \geq \dots \geq s$$

und $x_0 \in B$ gilt. D.h. die monoton fallende Folge

$$d(x_0, t_0, x_1, t_1), d(x_1, t_1, x_2, t_2), d(x_2, t_2, x_3, t_3), \dots$$

ist nach oben durch t beschränkt, ihr Grenzwert ist mindestens s und die Projektion x_0 des ersten Punktes der Kette (x_0, t_0) auf \mathbb{R}^d liegt in der Menge B . Es gilt

$$E(s, t, B) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} E(n, s, t, B). \quad (2.35)$$

Weiter definieren wir für $0 \leq s < t < \infty$ und $x \in \mathbb{R}^d$ die Menge

$$B(x, s, t) := B(x, t) \setminus B(x, s).$$

Aufgrund der Homogenität und Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes gilt

$$\lambda(B(x, s, t)) = (t^d - s^d)\lambda(B(0, 1)). \quad (2.36)$$

Überdies ergibt sich für $c > 0$ mit dem binomischen Satz die Ungleichung

$$t^d - s^d \leq (t + c)^d - (s + c)^d, \quad t, s \geq 0.$$

Hieraus folgt

$$\lambda(B(x, \max\{0, s - c\}, \max\{0, t - c\})) \leq \lambda(B(x, s, t)). \quad (2.37)$$

Sei $y \in \mathbb{R}^d$ und $t', s' \in \mathbb{R}_+$. Falls $\|x - y\| < |t' - s'|$ und somit $d(x, t', y, s') = \min\{t', s'\} + \|x - y\|$ gilt, so erhalten wir

$$s \leq \min\{t', s'\} + \|x - y\| \leq t \iff s - \min\{t', s'\} \leq \|x - y\| \leq t - \min\{t', s'\}.$$

Daraus folgt mit Ungleichung (2.37) und $c = \min\{t_1, t_2\}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \int \mathbf{1}\{t \geq d(x, t', y, s') \geq s\} dy &= \lambda(B(x, \max\{0, s - c\}, \max\{0, t - c\})) \\ &\leq \lambda(B(x, s, t)). \end{aligned}$$

Falls $\|x - y\| \geq |t' - s'|$ und damit $d(x, t', y, s') = \max\{t', s'\} + (1/2)(\|x - y\| - |t' - s'|)$ gilt, erhalten wir analog die gleiche Abschätzung. Daher gilt

$$\int \mathbf{1}\{t \geq d(x, t', y, s') \geq s\} dy \leq \lambda(B(x, s, t)). \quad (2.38)$$

Um absteigende Ketten auszuschließen, schätzen wir zunächst für $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq s < t < \infty$ und eine beschränkte Menge $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(\eta \in E(n, s, t, B))$ nach oben ab. Hierzu definieren wir für $i \in \mathbb{N}$ und $x_i \in \mathbb{R}^d$, $t_i \in [0, \infty)$, die Kurzschreibweisen $\mathbf{x}_n := (x_n, t_n)$ und $\mathbf{x}^{(n)} := (\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_n)$ sowie $d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) := d(x_i, t_i, x_j, t_j)$. Weiter sei

$$E_n := \left\{ (\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_n) \in (\mathbb{R}^d \times [0, \infty))^{(n+1)} : t \geq d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) \geq d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \geq \dots \geq d(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n) \geq s \right\}$$

und

$$F_n := \left\{ (\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_n) \in (\mathbb{R}^d \times [0, \infty))^{(n+1)} : t \geq d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}) \geq s, 0 \leq i \leq n-1 \right\}.$$

Offensichtlich gilt $E_n \subset F_n$, $n \in \mathbb{N}$. Wir erhalten mit Hilfe von Satz 1.1.15, d.h. der Campbell'schen Formel, und Bedingung (2.34) die Abschätzung

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\eta \in E(n, s, t, B)) &= \mathbb{E} \mathbf{1}\{\eta \in E(n, s, t, B)\} \\ &\leq \mathbb{E} \left[\sum_{((x_0, t_0), \dots, (x_n, t_n)) \in \eta^{(n+1)}} \mathbf{1}\{(\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_n) \in E_n\} \mathbf{1}\{x_0 \in B\} \right] \\ &\leq \alpha^{n+1} \int \mathbf{1}\{\mathbf{x}^{(n)} \in E_n\} \mathbf{1}\{x_0 \in B\} dx_0 \dots dx_n \mathbb{Q}(dt_0) \dots \mathbb{Q}(dt_n). \end{aligned}$$

Mit $E_n \subset F_n$, $n \in \mathbb{N}$, folgt

$$\mathbb{P}(\eta \in E(n, s, t, B)) \leq \alpha^{n+1} \int \mathbf{1}\{\mathbf{x}^{(n)} \in F_n\} \mathbf{1}\{x_0 \in B\} dx_0 \dots dx_n \mathbb{Q}(dt_0) \dots \mathbb{Q}(dt_n).$$

Aufgrund von (2.38) ergibt sich die Abschätzung

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\eta \in E(n, s, t, B)) &\leq \alpha^{n+1} \int \mathbf{1}\{x_0 \in B\} \mathbf{1}\{\mathbf{x}^{(n-1)} \in F_{n-1}\} \mathbf{1}\{t \geq d(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n) \geq s\} dx_0 \dots dx_n \mathbb{Q}(dt_0) \dots \mathbb{Q}(dt_n) \\ &\leq \alpha^{n+1} \int \mathbf{1}\{x_0 \in B\} \mathbf{1}\{\mathbf{x}^{(n-1)} \in F_{n-1}\} \mathbf{1}\{x_n \in B(x_{n-1}, s, t)\} dx_n dx_0 \dots \mathbb{Q}(dt_n). \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir mit Gleichung (2.36)

$$\mathbb{P}(\eta \in E(n, s, t, B)) \leq \alpha^{n+1}(t^d - s^d) \int \mathbf{1}\{x_0 \in B\} \mathbf{1}\{\mathbf{x}^{(n-1)} \in F_{n-1}\} \lambda(B(0, 1)) dx_0 \dots \mathbb{Q}(dt_n).$$

Durch $(n - 1)$ -maliges Wiederholen obiger Schritte ergibt sich

$$\mathbb{P}(\eta \in E(n, s, t, B)) \leq \alpha^{n+1}(t^d - s^d)^n \int \mathbf{1}\{x_0 \in B\} \lambda(B(0, 1)) \dots \lambda(B(0, 1)) dx_0 \mathbb{Q}(dt_0) \dots \mathbb{Q}(dt_n).$$

Dies führt auf

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\eta \in E(n, s, t, B)) &\leq \alpha^{n+1} \lambda(B) (t^d - s^d)^n \kappa_d^n \int \mathbb{Q}(dt_0) \dots \mathbb{Q}(dt_n) \\ &= \alpha^{n+1} \kappa_d^n \lambda(B) (t^d - s^d)^n. \end{aligned}$$

Wir definieren die Folge $t_i := (1/\alpha)^{1/d} (i/(\kappa_d + 1))^{1/d}$, $i \in \mathbb{N}_0$. Sie ist monoton wachsend und unbeschränkt. Der Beweis kann nun analog zum Beweis von Lemma 2.2.17 beendet werden. \square

Nun zeigen wir, dass η dynamisch markiert lokalendlich ist.

Lemma 2.3.13. *Es sei η ein markierter Punktprozess auf \mathbb{R}^d mit Markenraum \mathbb{R}_+ . Weiter erfülle η die Bedingung (2.34). Dann ist η fast sicher dynamisch markiert lokalendlich.*

Beweis: Wir gehen ähnlich vor wie im Beweis von Lemma 2.2.18. Es sei $\varphi \in \mathcal{M}^B$ und $(x, t) \in \varphi$ sowie $r > 0$. Außerdem sei

$$A(\varphi, x, t, r) := \{(y, L) \in \varphi \setminus \{(x, K)\} : d(x, t, y, L) \leq r\}.$$

Wir zeigen $\mathbb{P}(\text{card}(A(\eta, x, t, r)) < \infty \text{ für alle } (x, t) \in \eta) = 1$. Dafür genügt es, für alle $n \in \mathbb{N}$ die Endlichkeit des Erwartungswertes

$$\mathbb{E} \left(\sum_{((x,t),(y,s)) \in \eta^{(2)}} \mathbf{1}\{d(x, t, y, s) \leq r\} \mathbf{1}\{x \in W_n\} \right)$$

mit $W_n := [-n, n]^d$ zu zeigen. Wir erhalten mit Hilfe von Satz 1.1.15, der multivariaten Campbell'schen Formel, und Bedingung (2.34) die Abschätzung

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left(\sum_{((x,t),(y,s)) \in \eta^{(2)}} \mathbf{1}\{d(x, t, y, s) \leq r\} \mathbf{1}\{x \in W_n\} \right) \\ &\leq \alpha^2 \iint \mathbf{1}\{d(x, t, y, s) \leq r\} \mathbf{1}\{x \in W_n\} dx dy \mathbb{Q}(dt) \mathbb{Q}(ds). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Nach Definition von d gilt im Fall $d(x, t, y, s) = \min\{s, t\} + \|x - y\|$

$$d(x, t, y, s) \leq r \Rightarrow \|x - y\| \leq r \Rightarrow \|x - y\| \leq 2r$$

und im Fall $d(x, t, y, s) = \max\{s, t\} + (1/2)(\|x - y\| - |t - s|)$

$$d(x, t, y, s) \leq r \Rightarrow \frac{1}{2}\|x - y\| \leq r \Rightarrow \|x - y\| \leq 2r.$$

Daher gilt $\mathbf{1}\{d(x, t, y, s) \leq r\} \leq \mathbf{1}\{\|x - y\| \leq 2r\}$. Hieraus folgern wir mit (2.39)

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(\sum_{((x,t),(y,s)) \in \eta^{(2)}} \mathbf{1}\{d(x, t, y, s) \leq r\} \right) \\ &= \alpha^2 \iint \mathbf{1}\{\|x - y\| \leq 2r\} \mathbf{1}\{x \in W_n\} dx dy \mathbb{Q}(dt) \mathbb{Q}(ds) \\ &= \alpha^2 \kappa_d (2r)^d (2n)^d. \end{aligned}$$

Damit ist der Erwartungswert endlich und der Beweis abgeschlossen. \square

Nun zeigen wir, dass η abstandseindeutig ist.

Lemma 2.3.14. *Es sei η ein markierter Punktprozess auf \mathbb{R}^d mit Markenraum \mathbb{R}_+ . Weiter erfülle η die Bedingung (2.34). Dann ist η fast sicher abstandseindeutig.*

Beweis: Es gilt $\mathbb{P}(\eta \text{ ist abstandseindeutig}) = \mathbb{E} \mathbf{1}\{\eta \text{ ist abstandseindeutig}\}$. Aufgrund der Definition der Abstandseindeutigkeit gilt weiter

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \mathbf{1}\{\eta \text{ ist abstandseindeutig}\} \\ & \leq \mathbb{E} \sum_{(x_1, t_1), (x_2, t_2), (x_3, t_3) \in \eta^{(3)}} \mathbf{1}\{d(x_1, t_1, x_2, t_2) = d(x_2, t_2, x_3, t_3)\} \\ & \quad + \mathbb{E} \sum_{(x_1, t_1), (x_2, t_2), (x_3, t_3), (x_4, t_4) \in \eta^{(4)}} \mathbf{1}\{d(x_1, t_1, x_2, t_2) = d(x_3, t_3, x_4, t_4)\}. \end{aligned}$$

Daher reicht es,

$$\mathbb{E} \sum_{(x_1, t_1), (x_2, t_2), (x_3, t_3) \in \eta^{(3)}} \mathbf{1}\{d(x_1, t_1, x_2, t_2) = d(x_2, t_2, x_3, t_3)\} = 0 \quad (2.40)$$

und

$$\mathbb{E} \sum_{(x_1, t_1), (x_2, t_2), (x_3, t_3), (x_4, t_4) \in \eta^{(4)}} \mathbf{1}\{d(x_1, t_1, x_2, t_2) = d(x_3, t_3, x_4, t_4)\} = 0 \quad (2.41)$$

zu zeigen. Wir zeigen zunächst (2.40). Mit der multivariaten Campbellschen Formel (Satz 1.1.15) gilt

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \sum_{(x_1, t_1), (x_2, t_2), (x_3, t_3) \in \eta^{(3)}} \mathbf{1}\{d(x_1, t_1, x_2, t_2) = d(x_1, t_1, x_3, t_3)\} \\ &= \alpha \int \cdots \int \mathbf{1}\{d(x_1, t_1, x_2, t_2) = d(x_2, t_2, x_3, t_3)\} dx_1 dx_2 dx_3 \mathbb{Q}(dt_1) \mathbb{Q}(dt_2) \mathbb{Q}(dt_3). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned} & \mathbf{1}\{d(x_1, t_1, x_2, t_2) = d(x_2, t_2, x_3, t_3)\} \\ & \leq \mathbf{1}\{\min\{t_1, t_2\} + \|x_1 - x_2\| = \min\{t_2, t_3\} + \|x_2 - x_3\|\} \\ & \quad + \mathbf{1}\{\min\{t_1, t_2\} + \|x_1 - x_2\| = \max\{t_2, t_3\} + \frac{1}{2}(\|x_2 - x_3\| - |t_2 - t_3|)\} \\ & \quad + \mathbf{1}\{\max\{t_1, t_2\} + \frac{1}{2}(\|x_1 - x_2\| - |t_1 - t_2|) = \min\{t_2, t_3\} + \|x_2 - x_3\|\} \\ & \quad + \mathbf{1}\{\max\{t_1, t_2\} + \frac{1}{2}(\|x_1 - x_2\| - |t_1 - t_2|) = \max\{t_2, t_3\} + \frac{1}{2}(\|x_2 - x_3\| - |t_2 - t_3|)\}. \end{aligned}$$

Hiermit können wir das Integral aus (2.42) mit vier Integralen nach oben abschätzen. Alle diese Integrale sind von der Form

$$\alpha \int \cdots \int \mathbf{1}\{\|x_1 - x_2\| = c\} dx_1 dx_2 dx_3 \mathbb{Q}(dt_1) \mathbb{Q}(dt_2) \mathbb{Q}(dt_3),$$

wobei c eine von x_1 unabhängige Konstante ist. Ein solches Integral hat also den Wert 0. Damit ist (2.40) gezeigt. Gleichung (2.41) können wir durch ähnliche Überlegungen zeigen. \square

Nun zeigen wir, dass η treffpunkteindeutig ist.

Lemma 2.3.15. *Es sei η ein markierter Punktprozess auf \mathbb{R}^d mit Markenraum \mathbb{R}_+ . Weiter erfülle η die Bedingung (2.34). Dann ist η fast sicher treffpunkteindeutig.*

Beweis: Es gilt $\mathbb{P}(\eta \text{ ist treffpunkteindeutig}) = \mathbb{E}\mathbf{1}\{\eta \text{ ist treffpunkteindeutig}\}$. Aufgrund der Definition der Treffpunkteindeutigkeit gilt weiter

$$\mathbb{E}\mathbf{1}\{\eta \text{ ist treffpunkteindeutig}\} \leq \mathbb{E} \sum_{(x,t),(y,s) \in \eta^{(2)}} \mathbf{1}\{\|x - y\| = |t - s|\}.$$

Mit Satz 1.1.15, der multivariaten Campbellschen Formel, folgt

$$\mathbb{E} \sum_{(x,t),(y,s) \in \eta^{(2)}} \mathbf{1}\{\|x - y\| = |t - s|\} = \alpha \int \cdots \int \mathbf{1}\{\|x - y\| = |t - s|\} dx dy \mathbb{Q}(dt) \mathbb{Q}(ds).$$

Das Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung hat den Wert 0 und wir erhalten die Behauptung. \square

Aus den letzten vier Lemmata und Satz 2.3.10 folgt analog zu Satz 2.2.20 direkt ein Existenz- und Eindeutigkeitsatz für markierte Punktprozesse.

Satz 2.3.16. *Es sei η ein markierter Punktprozess auf \mathbb{R}^d mit Markenraum \mathbb{R}_+ , der (2.34) erfülle. Dann ist $T(\eta)$ das fast sicher eindeutig bestimmte wachstumsmaximale Modell.*

Um Beispiele von markierten Punktprozessen auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ zu finden, die Bedingung (2.34) erfüllen, können wir analog zu Unterabschnitt 2.2.2 vorgehen. Die dort angegebenen Sätze lassen sich mit dem dort angegebenen Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{Q} auf \mathcal{K}'_0 mit einem Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{Q}' auf \mathbb{R}_+ formulieren. Im Unterschied zu Abschnitt 2.2.2 müssen wir hier jedoch keine Bedingungen an \mathbb{Q}' stellen, um Existenz und Eindeutigkeit zeigen zu können.

Kapitel 3

Niederdimensionale Modelle

3.1 Einführende Bemerkungen

In diesem Kapitel untersuchen wir wachstumsmaximale Modelle mit niederdimensionalen Primärkörnern. Wesentliche Teile dieses Kapitels basieren auf Diskussionen des Autors mit Daryl Daley und Günter Last. Wie schon in Bemerkung 2.2.1 in Kapitel 2 erwähnt, gilt das dort erhaltene Existenz- und Eindeutigkeitsresultat auch im Fall niederdimensionaler Primärkörner. Generell sind also beliebige niederdimensionale Primärkörner denkbar. Im \mathbb{R}^3 können wir uns zum Beispiel Quadrate, Parallelogramme oder Kreisscheiben vorstellen. Prinzipiell sind auch Strecken möglich. Bei „genügend zufälliger“ Verteilung des Punktmusters und der Richtungen der Strecken käme es in diesem Fall allerdings selten bis nie zu Kollisionen während des Wachstums. Im Allgemeinen scheint es vor diesem Hintergrund nicht sinnvoll, wachstumsmaximale Modelle im \mathbb{R}^d mit Primärkörnern der Dimension $d - 2$ oder kleiner zu betrachten. Im Rahmen dieses Abschnitts wollen wir uns auf den \mathbb{R}^2 und Liniensegmente der Länge 2, deren Mittelpunkt im Ursprung liegt, als Primärkörner beschränken. Die Startzeiten der Punkte seien alle 0. Im Zuge dessen erhalten wir einen alternativen Existenz- und Eindeutigkeitsbeweis für das zugehörige wachstumsmaximale Modell. Darüber hinaus werden wir eine weitere Interpretation des Begriffs Wachstumsmaximalität beleuchten. Die unten stehenden Ausführungen lassen sich auf $(d - 1)$ -dimensionale Einheitskugeln als Primärkörner im \mathbb{R}^d übertragen. Im \mathbb{R}^3 sind die Primärkörner dann beispielsweise keine Liniensegmente, sondern Einheitskreisscheiben und es entsteht ein wachstumsmaximales Kreisscheiben-Modell.

Als Erstes diskutieren wir das wachstumsmaximale Modell, welches sich als Spezialfall der allgemeinen Definition 1.3.4 ergibt. Wir wollen die zu Beginn von Abschnitt 1.3 gegebene anschauliche Interpretation wachstumsmaximaler Modelle für den Spezialfall von Liniensegmenten als Primärkörner kurz wiederholen. Zum Zeitpunkt $t = 0$ beginnen die Liniensegmente alle mit gleicher Geschwindigkeit zu wachsen. Sobald sich zwei Liniensegmente berühren, stoppt das Wachstum beider Segmente. Wir nennen dieses Modell im Rahmen dieser Arbeit *kanonisches Liniensegmentmodell*. Danach untersuchen wir noch ein zweites Modell, welches ebenfalls als wachstumsmaximal in einem bestimmten Sinn definiert werden kann. Wir nennen dies *modifiziertes Liniensegmentmodell*. Basierend auf dem kanonischen Modell verändert sich die Anschauung im modifizierten Modell wie folgt. Berühren sich im kanonischen Modell zwei noch wachsende Liniensegmente, so beenden beide ihr Wachstum, obgleich eines der beiden Segmente weiterwachsen könnte, ohne die Hard-Core-Bedingung (1.11) zu verletzen. Im modifizierten Modell werden, sobald sich Segmente berühren, nur die Segmente gestoppt, welche nicht mehr weiter wachsen können, ohne die Hard-Core-Bedingung zu verletzen. Die anderen Segmente wachsen ungehindert weiter. Daher ist das modifizierte Modell wachstumsmaximal in dem Sinne, dass kein Segment weiter wachsen kann, ohne die Hard-Core-Bedingung (1.11) zu verletzen. Den Fall,

dass sich zwei Segmente mit je einem ihrer Enden berühren und somit nicht klar ist, welches Segment weiterwächst, schließen wir durch eine Zusatzvoraussetzung aus. Das modifizierte Modell können wir somit als Bindeglied zwischen dem kanonischen Modell und dem Gilbert Modell (siehe [30] Seite 314 f. oder [28]) betrachten, einem „crack tessellation model“. In diesem Modell wachsen beide Seiten der Liniensegmente unabhängig voneinander, bis sie jeweils ein anderes Segment berühren. Im Gegensatz zu den von uns betrachteten wachstumsmaximalen Modellen entsteht in diesem Modell daher eine Tessellation des \mathbb{R}^d (siehe [30] Seite 307). Die folgende Abbildung zeigt, basierend auf der gleichen Konfiguration, links das kanonische und rechts das modifizierte Modell.

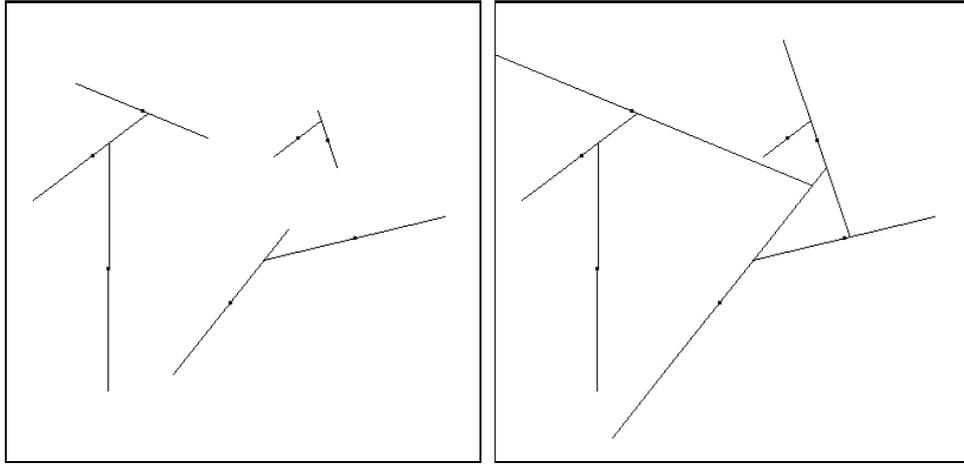


Abbildung 3.1: Ein kanonisches und ein modifiziertes Liniensegmentmodell basierend auf der gleichen Konfiguration.

Wir stellen nun einige spezielle Begriffe und Notationen bereit, um unsere beiden Modelle zu behandeln. Zuerst erinnern wir an M^0 , d.h. die Menge aller $\varphi \in M$ mit $t = 0$ für alle $(x, K, t) \in \varphi$, und die damit verbundenen Kurzschreibweisen aus Definition 2.2.2.

Definition 3.1.1. Die Menge der Liniensegmente der Länge 2 mit Mittelpunkt im Ursprung bezeichnen wir mit \mathcal{L}'_0 . Weiter sei $M^0_{\mathcal{L}}$ die Menge aller $\varphi \in M^0$ für die $K \in \mathcal{L}'_0$ für alle $(x, K) \in \varphi$ gilt.

Zu $(x, K), (y, L) \in \mathbb{R}^d \times \mathcal{L}'_0$ mit $(x, K) \neq (y, L)$ bezeichne $g(x, K) := \cup_{t \in \mathbb{R}} \{x + tK\}$ die Gerade durch x mit der durch K vorgegebenen Richtung und $s(x, K, y, L)$ den *Schnittpunkt* von $g(x, K)$ und $g(y, L)$, sofern vorhanden. Ansonsten setzen wir $s(x, K, y, L) = \infty$. Mit

$$d(x, K, y, L) := \|x - s(x, K, y, L)\|$$

bezeichnen wir den Abstand von x zum Schnittpunkt $s(x, K, y, L)$ der beiden Geraden $g(x, K)$ und $g(y, L)$. Falls der Schnittpunkt nicht existiert, setzen wir $d(x, K, y, L) = \infty$. Wir stellen fest, dass zwischen der Abbildung a aus Definition 2.2.3 und d die Beziehung

$$a(x, K, y, L) = \max\{d(x, K, y, L), d(y, L, x, K)\} \tag{3.1}$$

gilt. Allerdings merken wir an, dass d im Gegensatz zu a die Symmetriebeziehung (2.1) im Allgemeinen nicht erfüllt, d.h. es gilt im Allgemeinen nicht

$$d(x, K, y, L) = d(y, L, x, K).$$

Definition 3.1.2. Eine Menge $\varphi \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}^0$ heißt *schnittpunkteindeutig*, falls in φ keine verschiedenen Paare $((x_1, K_1), (y_1, L_1))$ und $((x_2, K_2), (y_2, L_2))$ aus $\varphi^{(2)}$ existieren, so dass

$$d(x_1, K_1, y_1, L_1) = d(x_2, K_2, y_2, L_2).$$

Im Folgenden verwenden wir, falls keine Missverständnisse zu befürchten sind, für $(x_i, K_i) \neq (x_j, K_j)$ aus φ die Kurzschreibweise

$$d_{ij} := d(x_i, K_i, x_j, K_j)$$

sowie für $(x, K), (y, L) \in \varphi$ die Abkürzung $d_{xy} := d(x, K, y, L)$.

Definition 3.1.3. Es sei \mathcal{F} die Menge aller Wachstumsfunktionen (vgl. Definition 1.2.1). Sei $f \in \mathcal{F}$ und $\varphi \in \mathcal{M}$. Dann nennen wir $f_\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathcal{K}'_0 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, \infty]$ mit $(x, K, t) \mapsto f_\varphi(x, K, t) := f(\varphi, x, K, t)$ eine *Wachstumsfunktion bzgl. φ* . Falls $f \in \mathcal{F}$ eine Hard-Core-Funktion ist, so nennen wir f_φ eine *Hard-Core-Funktion bzgl. φ* . Den Bezug zur Konfiguration φ unterdrücken wir im Folgenden, sofern keine Mehrdeutigkeiten zu befürchten sind.

3.2 Das kanonische Modell

3.2.1 Illustration und Einführung

In diesem Abschnitt diskutieren wir Existenz und Eindeutigkeit des kanonischen Modells und geben einen alternativen Beweis von Satz 2.2.8 für den von uns betrachteten Spezialfall von Liniensegmenten. Die folgende Abbildung zeigt einen kleinen und einen großen Ausschnitt eines kanonischen Liniensegmentmodells, basierend auf Realisierungen eines stationären unabhängig markierten Poissonprozesses mit einer Gleichverteilung auf \mathcal{L}'_0 als Primärkornverteilung.

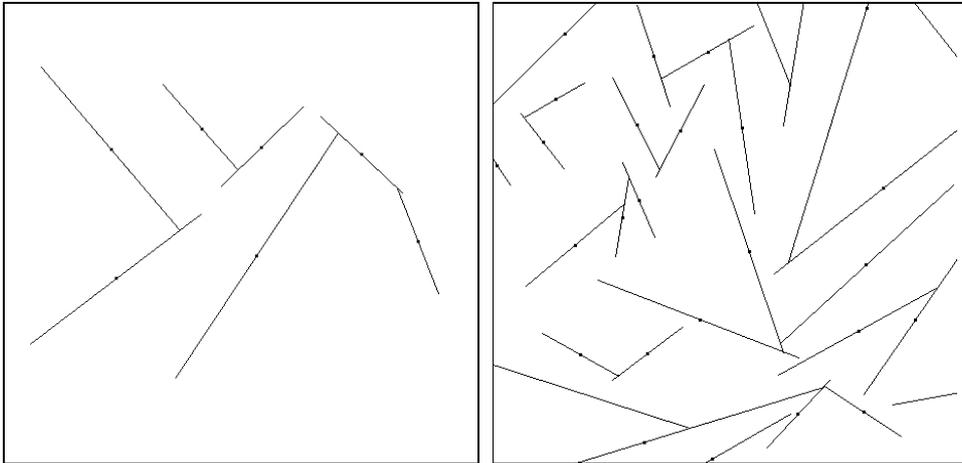


Abbildung 3.2: Zwei unterschiedlich skalierte Ausschnitte eines kanonischen Liniensegmentmodells, das auf Realisierungen eines stationären unabhängig markierten Poissonprozesses beruht.

Jetzt führen wir den Begriff absteigende Kette für das kanonische Liniensegmentmodell ein.

Definition 3.2.1. Es sei $\varphi \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}^0$. Eine Folge verschiedener Punkte $(x_0, K_0), (x_1, K_1), \dots \in \varphi$ nennen wir eine *kanonische absteigende Kette* in φ , falls

$$\begin{aligned} & \max\{d(x_n, K_n, x_{n+1}, K_{n+1}), d(x_{n+1}, K_{n+1}, x_n, K_n)\} \\ & \geq \max\{d(x_{n+1}, K_{n+1}, x_{n+2}, K_{n+2}), d(x_{n+2}, K_{n+2}, x_{n+1}, K_{n+1})\}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Bemerkung 3.2.2. Aufgrund von (3.1) ist (3.2) äquivalent zu

$$a(x_n, K_n, x_{n+1}, K_{n+1}) \geq a(x_{n+1}, K_{n+1}, x_{n+2}, K_{n+2}), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Somit ist Definition 3.2.1 ein Spezialfall von Definition 2.2.3.

3.2.2 Existenz und Eindeutigkeit für eine feste Konfiguration

Wir formulieren direkt den Existenz- und Eindeutigkeitssatz.

Satz 3.2.3. Sei $\varphi \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}^0$ schnittpunkteinzig und enthalte keine (kanonische) absteigende Kette. Dann existiert genau ein wachstumsmaximales Liniensegmentmodell $T(\varphi)$.

Der Beweis ist Ergebnis der nachfolgenden Ausführungen. Wir definieren auf \mathcal{F} den Operator $L : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$. Für $f \in \mathcal{F}$ sei

$$Lf(\varphi, x, K) := \inf D(\varphi, x, K, f), \quad \varphi \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}^0, (x, K) \in \varphi, \quad (3.3)$$

mit

$$D(\varphi, x, K, f) := \{\max\{d_{xy}, d_{yx}\} : (y, L) \in \varphi \setminus \{(x, K)\} \text{ und } f(\varphi, y, L) \geq d_{yx}\},$$

wobei das Infimum über die leere Menge ∞ sei, und 0 sonst. Wie das nächste Lemma zeigt, ist der Operator L monoton.

Lemma 3.2.4. Seien $f, g \in \mathcal{F}$ und $\varphi \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}^0$. Falls $f(\varphi, x, K) \leq g(\varphi, x, K)$ für alle $(x, K) \in \varphi$, dann gilt $Lf(\varphi, x, K) \geq Lg(\varphi, x, K)$ für alle $(x, K) \in \varphi$.

Beweis: Nach Voraussetzung gilt $f(\varphi, x, K) \leq g(\varphi, x, K), (x, K) \in \varphi$. Daraus folgt

$$D(\varphi, x, K, f) \subset D(\varphi, x, K, g)$$

und somit die Behauptung des Lemmas. \square

Nun zeigen wir, dass das Infimum in (3.3) angenommen wird.

Lemma 3.2.5. Sei $f \in \mathcal{F}$, $\varphi \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}^0$ und $(x, K) \in \varphi$ mit $Lf(\varphi, x, K) < \infty$. Dann existiert ein $(y, L) \in \varphi \setminus \{(x, K)\}$ derart, dass $Lf(\varphi, x, K) = \max\{d_{xy}, d_{yx}\}$ und $f(\varphi, y, L) \geq d_{yx}$ gilt.

Beweis: Aufgrund von $\inf \emptyset = \infty > Lf(\varphi, x, K)$ ist $D(\varphi, x, K, f)$ eine nichtleere Menge. Wir stellen fest, dass für jedes Dreieck aus $x, y \in \phi$ und $s(x, K, y, L)$ die Ungleichung $2 \max\{d_{xy}, d_{yx}\} \geq d_{xy} + d_{yx} \geq \|x - y\|$ gilt. Daher erhalten wir für jedes $c > 0$ die Teilmengebeziehung

$$\{(y, L) \in \varphi : c \geq \max\{d_{xy}, d_{yx}\}\} \subseteq \{(y, L) \in \varphi : 2c \geq \|x - y\|\}. \quad (3.4)$$

Die Projektion ϕ von φ auf die erste Komponente ist lokalendlich. Somit ist auch die Projektion der rechten Menge in (3.4) auf die erste Komponente lokalendlich. Darüber hinaus ist diese Menge auch beschränkt. Wählen wir $c > Lf(\varphi, x, K)$, so erhalten wir

$$\inf D(\varphi, x, K, f) = \inf \{D(\varphi, x, K, f) \cap \{\max\{d_{xy}, d_{yx}\} : c \geq \max\{d_{xy}, d_{yx}\}\}\}.$$

Dank (3.4) wird das Infimum auf der rechten Seite dieser Gleichung angenommen. Aufgrund unserer Wahl der Konstanten c wird das Infimum auf der linken Seite im gleichen Punkt angenommen. \square

Nun zeigen wir, dass für $f \in \mathcal{F}$ und $\varphi \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}^0$ die Funktion f_φ genau dann eine wachstumsmaximale Funktion ist, wenn sie Fixpunkt des Operators L ist, d.h. wenn $f_\varphi = Lf_\varphi$ gilt.

Lemma 3.2.6. *Sei $f \in \mathcal{F}$ und $\varphi \in M_{\mathcal{L}}^0$. Falls $f_{\varphi} = Lf_{\varphi}$, dann ist f_{φ} eine Hard-Core-Funktion.*

Beweis: Sei $f(\varphi, x, K) > d_{xy}$ und $f(\varphi, y, L) > d_{yx}$ für zwei verschiedene Paare (x, K) und (y, L) aus φ . Falls $d_{xy} \geq d_{yx}$ gilt, ergibt sich $f(\varphi, x, K) = Lf(\varphi, x, K) \leq \max\{d_{xy}, d_{yx}\} = d_{xy}$, was ein Widerspruch ist. Falls $d_{xy} < d_{yx}$ gilt, erhalten wir $f(\varphi, y, L) = Lf(\varphi, y, L) \leq \max\{d_{yx}, d_{xy}\} = d_{yx}$, wobei es sich ebenfalls um einen Widerspruch handelt. \square

Lemma 3.2.7. *Sei $f \in \mathcal{F}$ und $\varphi \in M_{\mathcal{L}}^0$ schnittpunkteindeutig. Falls $f_{\varphi} = Lf_{\varphi}$, dann ist f_{φ} eine wachstumsmaximale Funktion.*

Beweis: Aufgrund von Lemma 3.2.6 ist f_{φ} eine Hard-Core-Funktion. Falls $f(\varphi, x, K) = Lf(\varphi, x, K) = \infty$ gilt, ist infolge der Definition von Wachstumsmaximalität aus Definition 1.3.1 nichts zu zeigen. Aufgrund von Lemma 3.2.5 existiert für alle $(x, K) \in \varphi$ mit $f(\varphi, x, K) = Lf(\varphi, x, K) < \infty$ ein Punkt $(y, L) \in \varphi \setminus \{(x, K)\}$ mit $Lf(\varphi, x, K) = \max\{d_{xy}, d_{yx}\}$ und $f(\varphi, y, L) \geq d_{yx}$. Wir behaupten, dieser Punkt (y, L) ist ein stoppender Nachbar von (x, K) . Hierfür halten wir fest, dass (x, K) und (y, L) nach Definition 1.3.1 benachbart sind. Zum Nachweis der „Stoppeigenschaft“ $f(\varphi, y, L) \leq f(\varphi, x, K)$ (siehe Definition 1.3.1) unterscheiden wir vier Fälle, wobei wir anmerken, dass alle d_{xy} nach Konstruktion echt positiv sind.

1. Sei $f(\varphi, x, K) = d_{xy} > 0$ und $f(\varphi, y, L) = d_{yx} > 0$. Da φ nach Voraussetzung schnittpunkteindeutig (siehe Definition 3.1.2) ist, sind alle d_{xy} verschieden und wir erhalten

$$f(\varphi, x, K) = d_{xy} = Lf(\varphi, x, K) = \max\{d_{xy}, d_{yx}\} > d_{yx} = f(\varphi, y, L).$$

Nach Definition 1.3.1 ist (y, L) damit ein stoppender Nachbar von (x, K) .

2. Sei $f(\varphi, x, K) = d_{yx} > 0$ und $f(\varphi, y, L) = d_{yx} > 0$. Dann gilt $f(\varphi, x, K) = d_{xy} = f(\varphi, y, L)$ und die Behauptung folgt.
3. Sei $f(\varphi, x, K) = d_{yx} > 0$ und $f(\varphi, y, L) > d_{yx} > 0$. Dann erhalten wir $f(\varphi, x, K) = d_{yx} > d_{xy}$ und $f(\varphi, y, L) > d_{yx}$. Da f eine Hard-Core-Funktion ist, ergibt sich ein Widerspruch zur Hard-Core-Bedingung (1.11).
4. Sei $f(\varphi, x, K) = d_{xy} > 0$ und $f(\varphi, y, L) > d_{yx} > 0$. Nach unserer Annahme gilt $Lf(\varphi, x, K) = \max\{d_{xy}, d_{yx}\}$. Wegen $f(\varphi, x, K) = d_{xy}$, erhalten wir $Lf(\varphi, y, L) \leq \max\{d_{yx}, d_{xy}\}$ und somit

$$f(\varphi, y, L) = Lf(\varphi, y, L) \leq \max\{d_{yx}, d_{xy}\} = Lf(\varphi, x, K) = f(\varphi, x, K). \quad \square$$

Lemma 3.2.8. *Sei $f \in \mathcal{F}$ und $\varphi \in M_{\mathcal{L}}^0$ schnittpunkteindeutig. Falls f_{φ} wachstumsmaximal ist, dann existiert zu jedem Punkt $(x, K) \in \varphi$ mit $f(\varphi, x, K) < \infty$ ein Punkt $(y, L) \in \varphi \setminus \{(x, K)\}$ mit $f(\varphi, x, K) = \max\{d_{xy}, d_{yx}\}$. Für diesen Punkt (y, L) gilt $f(\varphi, y, L) \geq d_{yx}$.*

Beweis: Da f_{φ} eine wachstumsmaximale Funktion ist, existiert für $(x, K) \in \varphi$ mit $f(\varphi, x, K) < \infty$ ein stoppender Nachbar $(y, L) \in \varphi \setminus \{(x, K)\}$, d.h. es gilt $f(\varphi, x, K) \geq f(\varphi, y, L)$. Weiter gilt $f(\varphi, y, L) \geq d_{yx}$, da (x, K) und (y, L) sonst nicht benachbart sein können.

Wir behaupten $f(\varphi, x, K) = \max\{d_{xy}, d_{yx}\}$. Angenommen $f(\varphi, x, K) < \max\{d_{xy}, d_{yx}\}$, dann folgt entweder $\max\{d_{xy}, d_{yx}\} = d_{xy} > f(\varphi, x, K)$ oder $\max\{d_{xy}, d_{yx}\} = d_{yx} > f(\varphi, x, K)$. Im ersten Fall erhalten wir einen Widerspruch zur Tatsache, dass (x, K) und (y, L) benachbart sind. Im zweiten Fall ergibt sich $f(\varphi, x, K) < d_{yx} = f(\varphi, y, L)$, was im Widerspruch dazu steht, dass der Punkt (y, L) den Punkt (x, K) stoppt. Angenommen, es gilt $f(\varphi, x, K) > \max\{d_{xy}, d_{yx}\}$.

Dann folgt $f(\varphi, x, K) > d_{xy}$ und somit $f(\varphi, y, L) = d_{yx}$, da sonst ein Widerspruch zur Hard-Core-Eigenschaft von f auftritt. Aus unserer Annahme resultiert außerdem $f(\varphi, x, K) > d_{yx}$. Damit folgt $f(\varphi, x, K) > d_{yx} = f(\varphi, y, L)$. Somit ist (x, K) kein stoppender Nachbar von (y, L) . Da f_φ eine wachstumsmaximale Funktion ist und $f(\varphi, y, L) \leq f(\varphi, x, K) < \infty$ gilt, existiert ein stoppender Nachbar $(z, A) \in \varphi \setminus \{(x, K)\} \setminus \{(y, L)\}$ von (y, L) , d.h. es gilt $f(\varphi, y, L) \geq f(\varphi, z, A)$ und $f(\varphi, z, A) \geq d_{zy}$. Analog zur obigen Argumentation erhalten wir für $f(\varphi, y, L) < \max\{d_{yz}, d_{zy}\}$ einen Widerspruch. Daher gilt $f(\varphi, y, L) \geq \max\{d_{yz}, d_{zy}\}$. Von oben ist jedoch $f(\varphi, y, L) = d_{yx}$ bekannt und somit folgt aufgrund der Schnittpunkteindeutigkeit von φ die strikte Ungleichung $f(\varphi, y, L) > \max\{d_{yz}, d_{zy}\}$. Nehmen wir die Ungleichungen zusammen, ergibt sich

$$f(\varphi, x, K) > \max\{d_{xy}, d_{yx}\} \geq d_{yx} = f(\varphi, y, L) > \max\{d_{yz}, d_{zy}\} \geq d_{zy} = f(\varphi, z, A).$$

Per Induktion würden wir mit diesem Vorgehen jedoch eine kanonische absteigende Kette erhalten, welche wir ausgeschlossen haben. Die echten Ungleichungen stellen dabei sicher, dass die Punkte der Kette alle verschieden sind. Damit erhalten wir wie behauptet $f(\varphi, x, K) = \max\{d_{xy}, d_{yx}\}$. \square

Lemma 3.2.9. *Sei $f \in \mathcal{F}$ und $\varphi \in M_{\mathcal{L}}^0$ schnittpunkteindeutig. Falls f_φ wachstumsmaximal ist, dann gilt $f_\varphi \geq Lf_\varphi$.*

Beweis: Falls $f(\varphi, x, K) < \infty$ ist, existiert aufgrund von Lemma 3.2.8 und der Wachstumsmaximalität von f_φ für $(x, K) \in \varphi$ ein Punkt $(y, L) \in \varphi \setminus \{(x, K)\}$ mit $f(\varphi, x, K) = \max\{d_{xy}, d_{yx}\}$ und $f(\varphi, y, L) \geq d_{yx}$. Daraus folgt $Lf(\varphi, x, K) \leq \max\{d_{xy}, d_{yx}\} = f(\varphi, x, K)$. Falls $f(\varphi, x, K) = \infty$ gilt, ist die Aussage des Lemmas trivialerweise erfüllt. \square

Lemma 3.2.10. *Sei $f \in \mathcal{F}$ und $\varphi \in M_{\mathcal{L}}^0$ schnittpunkteindeutig. Falls f_φ wachstumsmaximal ist, dann gilt $f_\varphi \leq Lf_\varphi$.*

Beweis: Es sei $(x, K) \in \varphi$. Für $Lf(\varphi, x, K) = \infty$ ist nichts zu zeigen. Wir können daher $Lf(\varphi, x, K) < \infty$ annehmen. Wegen Lemma 3.2.5 existiert dann ein $(y, L) \in \varphi \setminus \{(x, K)\}$ mit $Lf(\varphi, x, K) = \max\{d_{xy}, d_{yx}\}$ und $f(\varphi, y, L) \geq d_{yx}$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Sei $f(\varphi, y, L) > d_{yx}$ und $Lf(\varphi, x, K) < f(\varphi, x, K)$. Dann erhalten wir

$$d_{xy} \leq \max\{d_{xy}, d_{yx}\} = Lf(\varphi, x, K) < f(\varphi, x, K)$$

und $f(\varphi, y, L) > d_{yx}$. Damit ergibt sich jedoch ein Widerspruch zur Hard-Core-Eigenschaft von f_φ .

Sei $f(\varphi, y, L) = d_{yx}$ und $Lf(\varphi, x, K) < f(\varphi, x, K)$. Da f_φ eine wachstumsmaximale Funktion ist, besitzt (y, L) einen stoppenden Nachbarn (z, A) . Da alle d_{xy} verschieden sind, muss $(x, K) = (z, A)$ sein. Also muss (x, K) ein stoppender Nachbar von (y, L) sein. Wir erhalten

$$f(\varphi, x, K) > Lf(\varphi, x, K) = \max\{d_{xy}, d_{yx}\} \geq d_{yx} = f(\varphi, y, L).$$

Dies ist jedoch ein Widerspruch dazu, dass (x, K) den Punkt (y, L) stoppt. \square

Zusammen ergeben die letzten vier Aussagen das folgende Lemma:

Lemma 3.2.11. *Sei $f \in \mathcal{F}$ und $\varphi \in M_{\mathcal{L}}^0$ schnittpunkteindeutig. Dann ist f_φ genau dann eine wachstumsmaximale Funktion, wenn $f_\varphi = Lf_\varphi$ gilt.*

Daraus ergibt sich direkt das folgende Korollar.

Korollar 3.2.12. *Sei $f \in \mathcal{F}$ und $\varphi \in M_{\mathcal{L}}^0$ schnittpunkteindeutig. Falls f_{φ} wachstumsmaximal ist und für $(x, K) \in \varphi$ der Funktionswert $f(\varphi, x, K)$ endlich ist, gilt $Lf(\varphi, x, K) \in \{\max\{d_{xy}, d_{yx}\} : (y, L) \in \varphi \setminus \{(x, K)\}\}$.*

Wir definieren nun rekursiv eine Folge von Funktionen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ aus \mathcal{F} durch $f_0 := 0$ und

$$f_{n+1} = Lf_n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Dann ist $f_1 \equiv \infty$. Mit Lemma 3.2.4 folgt aus $f_0 \leq f_1$ die Ungleichungskette $f_1 \geq f_2 \leq f_3 \geq f_4 \leq \dots$, während $f_0 \leq f_2$ und $f_1 \geq f_3$ die Ungleichungen $f_{2n} \leq f_{2n+2}$ und $f_{2n+1} \geq f_{2n+3}$ für alle $n \geq 0$ implizieren. Aufgrund dieser Monotonien können wir die Grenzwerte

$$h := \lim_{n \rightarrow \infty} f_{2n}, \quad g := \lim_{n \rightarrow \infty} f_{2n+1} \quad (3.5)$$

definieren und

$$f_{2n} \leq f_{2n+2} \leq h \leq g \leq f_{2n+3} \leq f_{2n+1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ folgern. Für schnittpunkteindeutiges $\varphi \in M_{\mathcal{L}}^0$ ohne absteigende Kette, zeigen wir nun $h_{\varphi} = g_{\varphi}$ und dass in diesem Fall h_{φ} die eindeutig bestimmte wachstumsmaximale Funktion ist.

Lemma 3.2.13. *Sei $\varphi \in M_{\mathcal{L}}^0$ und $(x, K) \in \varphi$ mit $h(\varphi, x, K) < \infty$. Dann gilt $f_{2n}(\varphi, x, K) = h(\varphi, x, K)$ für alle hinreichend großen $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis: Die rechte und somit auch die linke Seite von (3.4) ist endlich. Damit folgt die Behauptung. \square

Lemma 3.2.14. *Sei $\varphi \in M_{\mathcal{L}}^0$. Dann gilt $Lh_{\varphi} = g_{\varphi}$ und $Lg_{\varphi} = h_{\varphi}$.*

Beweis: Aus $f_{2n}(\varphi, \cdot) \leq h_{\varphi}$ und Lemma 3.2.4 folgt $f_{2n+1}(\varphi, \cdot) \geq Lh_{\varphi}$ und somit $g_{\varphi} \geq Lh_{\varphi}$. Es sei $(x, K) \in \varphi$. Wir zeigen $g(\varphi, x, K) \leq Lh(\varphi, x, K)$. Wir können annehmen, dass $Lh(\varphi, x, K)$ endlich ist. Nach Lemma 3.2.5 existiert ein Punkt $(y, L) \in \varphi \setminus \{(x, K)\}$ mit $Lh(\varphi, x, K) = \max\{d_{xy}, d_{yx}\}$ und $h(\varphi, y, L) \geq d_{yx}$. Im Fall $h(\varphi, y, L) = \infty$ gilt $f_{2n}(\varphi, y, L) \geq d_{yx}$ für alle hinreichend großen $n \in \mathbb{N}$ und daher

$$f_{2n+1}(\varphi, x, K) = Lf_{2n}(\varphi, x, K) \leq \max\{d_{xy}, d_{yx}\} = Lh(\varphi, x, K)$$

für alle hinreichend großen n . Dies impliziert $g(\varphi, x, K) \leq Lh(\varphi, x, K)$. Falls $h(\varphi, y, L) < \infty$, folgt aus Lemma 3.2.13 die Abschätzung $f_{2n}(\varphi, y, L) = h(\varphi, y, L) \geq d_{yx}$ für alle hinreichend großen n . Daraus schließen wir $g(\varphi, x, K) \leq Lh(\varphi, x, K)$.

Um $Lg_{\varphi} = h_{\varphi}$ zu zeigen, beginnen wir mit der Ungleichung $f_{2n+1}(\varphi, \cdot) \geq g_{\varphi}$ und Korollar 3.2.4, um $f_{2n+2}(\varphi, \cdot) \leq Lg_{\varphi}$ und somit $h_{\varphi} \leq Lg_{\varphi}$ zu folgern. Zum Nachweis von $h_{\varphi} \geq Lg_{\varphi}$ sei $(x, K) \in \varphi$. Wir nehmen an, es gelte $h(\varphi, x, K) < Lg(\varphi, x, K)$. Dann gilt $f_{2n}(\varphi, x, K) = h(\varphi, x, K)$ für alle hinreichend großen n . Nach Lemma 3.2.5 existiert ein $(y, L) \in \varphi \setminus \{(x, K)\}$ derart, dass

$$h(\varphi, x, K) = f_{2n}(\varphi, x, K) = Lf_{2n+1}(\varphi, x, K) = \max\{d_{xy}, d_{yx}\} \quad \text{und} \quad f_{2n-1}(\varphi, y, L) \geq d_{yx}$$

für unendlich viele $n \in \mathbb{N}_0$ gelten. Daraus folgt $g(\varphi, y, L) \geq d_{yx}$ und damit $Lg(\varphi, x, K) \geq \max\{d_{xy}, d_{yx}\} = h(\varphi, x, K)$. Dies widerspricht unserer Annahme $h(\varphi, x, K) < Lg(\varphi, x, K)$. \square

Lemma 3.2.15. *Sei $\varphi \in M_{\mathcal{L}}^0$ schnittpunkteindeutig. Die Funktion h_{φ} ist genau dann wachstumsmaximal, wenn $h_{\varphi} = g_{\varphi}$ gilt. In diesem Fall ist h_{φ} die einzige wachstumsmaximale Funktion.*

Beweis: Sei $h_\varphi = g_\varphi$. Aus Lemma 3.2.14 folgt dann $Lh_\varphi = Lg_\varphi = h_\varphi$. Daraus ergibt sich mit Lemma 3.2.11, dass h_φ eine wachstumsmaximale Funktion ist. Für jede wachstumsmaximale Funktion f_φ muss aufgrund von Lemma 3.2.11 die Gleichung $Lf_\varphi = f_\varphi$ gelten. Weiter erhalten wir aus $f_0(\varphi, \cdot) \leq f_\varphi$ mit Lemma 3.2.4 für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $f_{2n}(\varphi, \cdot) \leq f_\varphi$. Hieraus folgt $h_\varphi \leq f_\varphi$. Mit Lemma 3.2.4 können wir daraus $Lf_\varphi \leq Lh_\varphi$ folgern. Da h_φ und f_φ wachstumsmaximale Funktionen sind, gilt mit Lemma 3.2.14 $f_\varphi \leq h_\varphi$. Zusammen ergibt dies $h_\varphi = f_\varphi$.

Umgekehrt folgt aus Lemma 3.2.14 für die wachstumsmaximale Funktion h_φ die Gleichung $h_\varphi = Lh_\varphi$. Mit Lemma 3.2.14 erhalten wir daraus $h_\varphi = g_\varphi$. \square

Satz 3.2.3 ergibt sich nun als direkte Folgerung aus Lemma 3.2.15 und dem nächsten Lemma.

Lemma 3.2.16. *Sei $\varphi \in M_{\mathcal{L}}^0$ und enthalte keine absteigende Kette. Dann gilt $h_\varphi = g_\varphi$.*

Beweis: Wir benutzen im Folgenden die Ungleichung $h_\varphi \leq g_\varphi$ und Lemma 3.2.14, ohne dies im Einzelnen explizit zu erwähnen. Wir nehmen an, es existiert $(x_0, K_0) \in \varphi$ mit $h(\varphi, x_0, K_0) < g(\varphi, x_0, K_0)$ und es sei nach Lemma 3.2.5 $(x_1, K_1) \in \varphi \setminus (x_0, K_0)$ derart, dass

$$h(\varphi, x_0, K_0) = Lg(\varphi, x_0, K_0) = \max\{d_{01}, d_{10}\} \geq d_{10} \quad \text{und} \quad g(\varphi, x_1, K_1) \geq d_{10}$$

gelten. Dann ist

$$h(\varphi, x_1, K_1) < d_{10},$$

da sonst $g(\varphi, x_0, K_0) = Lh(\varphi, x_0, K_0) \leq \max\{d_{01}, d_{10}\} = h(\varphi, x_0, K_0)$ gilt. Des Weiteren ist $h(\varphi, x_1, K_1) < g(\varphi, x_1, K_1)$, da sonst $h(\varphi, x_1, K_1) = g(\varphi, x_1, K_1)$ und somit erneut $g(\varphi, x_0, K_0) = Lh(\varphi, x_0, K_0) \leq \max\{d_{01}, d_{10}\} = h(\varphi, x_0, K_0)$ gelten müsste. Daher können wir diese Schritte wiederholen und erhalten die Existenz eines Punktes $(x_2, K_2) \in \varphi \setminus (x_1, K_1)$, für den

$$h(\varphi, x_1, K_1) = Lg(\varphi, x_1, K_1) = \max\{d_{12}, d_{21}\} \geq d_{21} \quad \text{und} \quad g(\varphi, x_2, K_2) \geq d_{21}$$

gelten. Fassen wir die Ungleichungen zusammen, ergibt sich

$$\max\{d_{01}, d_{10}\} \geq d_{10} > h(\varphi, x_1, K_1) = \max\{d_{12}, d_{21}\} \geq d_{21}.$$

Wegen $h(\varphi, x_0, K_0) = \max\{d_{01}, d_{10}\} > h(\varphi, x_1, K_1) = \max\{d_{12}, d_{21}\}$ folgt $(x_0, K_0) \neq (x_1, K_1)$. Per Induktion können wir eine Folge von Punkten $(x_0, K_0), (x_1, K_1), \dots$ aus φ finden, für die

$$\max\{d_{01}, d_{10}\} \geq d_{10} > \max\{d_{12}, d_{21}\} \geq d_{21} > \dots > \max\{d_{n-1,n}, d_{n,n-1}\} \geq d_{n,n-1} > \dots$$

und $h(\varphi, x_n, K_n) = d_{n,n+1}$, $n \in \mathbb{N}_0$, gilt. Insbesondere ist dann $h(\varphi, x_n, K_n) > h(\varphi, x_{n+1}, K_{n+1})$, wodurch wir erkennen, dass alle Punkte (x_n, K_n) , $n \in \mathbb{N}_0$, verschieden sind. Somit hätten wir in φ eine absteigende Kette gefunden, was aber aufgrund der Voraussetzungen von Satz 3.2.3 von Beginn dieses Abschnittes ausgeschlossen ist. Es kann also kein $(x_0, K_0) \in \varphi$ mit $h(\varphi, x_0, K_0) < g(\varphi, x_0, K_0)$ existieren. \square

Es sei M' die Menge aller $\varphi \in M_{\mathcal{L}}^0$, die schnittpunkteindeutig sind und für die $h_\varphi = g_\varphi$ gilt. Wir definieren die Wachstumsfunktion $l : M(\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}'_0) \times \mathbb{R}^2 \times \mathcal{K}'_0 \rightarrow \mathbb{R}_+$ wie folgt. Für alle $\varphi \in M'$ setzen wir $l(\varphi, \cdot) = h_\varphi$ mit h aus (3.5) und als 0 sonst. Damit ist $l(\varphi, \cdot)$ für alle $\varphi \in M'$ eine wachstumsmaximale Funktion. Darüber hinaus definieren wir mit dieser Funktion l das wachstumsmaximale Modell $T(\varphi) := \{(x, K, l(\varphi, x, K)) : (x, K) \in \varphi\}$ für alle $\varphi \in M_{\mathcal{L}}^0$.

3.2.3 Existenz und Eindeutigkeit in zufälligen Konfigurationen

In diesem Unterabschnitt zeigen wir, dass die Voraussetzungen aus Satz 3.2.3 für eine bestimmte Klasse von Punktprozessen erfüllt sind. Wir gehen dabei ähnlich vor wie in den Unterabschnitten 2.2.2 und 2.3.2. Es sei η ein stationärer markierter Punktprozess auf \mathbb{R}^2 mit Markenraum \mathcal{L}'_0 mit n -tem faktoriellem Momentenmaß $\nu^{(n)}$.

Bemerkung 3.2.17. Eigentlich betrachten wir in diesem Unterabschnitt einen markierten Punktprozess auf \mathbb{R}^d mit Markenraum $\mathcal{L}'_0 \times \mathbb{R}_+$, für den realisierungsweise $t = 0$ für alle $(x, K, t) \in \eta$ gilt. Zur besseren Übersicht unterdrücken wir allerdings die zweite Komponente des Markenraums, d.h. die Startzeit der Körner, sowohl im Punktprozess als auch in allen anderen Ausdrücken.

Wir fordern, dass eine Konstante α existiert, so dass

$$\nu^{(n)}(d(x_1, K_1, \dots, x_n, K_n)) \leq \alpha^n dx_1 \dots dx_n \mathbb{Q}(dK_1) \dots \mathbb{Q}(dK_n), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.6)$$

gilt. Dies ist die zweidimensionale Version von Bedingung (2.34).

Lemma 3.2.18. *Sei η ein markierter Punktprozess auf \mathbb{R}^2 mit Markenraum \mathcal{L}'_0 , der Bedingung (3.6) erfülle. Dann ist der Punktprozess η fast sicher schnittpunkteindeutig und enthält fast sicher keine kanonische absteigende Kette.*

Beweis: Die erste Aussage können wir mit Hilfe von Satz 1.1.15, der multivariaten Campbellschen Formel, und einer Fallunterscheidung zeigen.

Für den Beweis der zweiten Behauptung verwenden wir Lemma 2.2.17 aus Abschnitt 2.2.2. Voraussetzung (2.10) ist im von uns betrachteten Spezialfall zentrierter Liniensegmente der Länge 2 äquivalent zu Bedingung (3.6). Da die Elemente von \mathcal{L}'_0 alle beschränkt sind, ist auch die Momentenbedingung für die Umkugelradien (2.11) erfüllt. Somit können wir die Existenz absteigender Ketten im Sinne von Definition 2.2.3, welche im Spezialfall von Primärkörnern aus \mathcal{L}'_0 äquivalent zur Definition von absteigenden Ketten aus Definition 3.2.1 ist, ausschließen. \square

Aus diesem Lemma und Satz 3.2.3 folgt analog zu Satz 2.2.20 eine Existenz- und Eindeutigkeitsaussage für markierte Punktprozesse.

Satz 3.2.19. *Es sei η ein markierter Punktprozess auf \mathbb{R}^2 mit Markenraum \mathcal{L}'_0 , der Bedingung (3.6) erfüllt. Dann ist $T(\eta)$ das fast sicher eindeutig bestimmte kanonische wachstumsmaximale Liniensegmentmodell.*

Für Beispiele von markierten Punktprozessen, die Bedingung (3.6) erfüllen, verweisen wir auf Unterabschnitt 2.2.2.

3.3 Das modifizierte Modell

3.3.1 Illustration und Einführung

In diesem Abschnitt beschreiben wir eine alternative Möglichkeit, Wachstumsmaximalität im Falle niederdimensionaler Körner zu formalisieren. Wir verwenden die in Abschnitt 3.2 eingeführten Notationen und Kurzschreibweisen. Für das nun folgende Modell muss allerdings der Begriff „stoppender Nachbar“ aus Definition 1.3.1 modifiziert werden. Wir nennen es daher *modifiziertes (wachstumsmaximales) Liniensegmentmodell* und ersetzen für den aktuellen Abschnitt die Bedeutung des Begriffs „stoppender Nachbar“ aus Definition 1.3.1 durch die folgende.

Definition 3.3.1. Sei $\varphi \in M_{\mathcal{L}}^0$ und seien $(x, K) \neq (y, L)$ Punkte aus φ . Dann heißt der Punkt (y, L) ein *stoppender Nachbar* von (x, K) , falls (x, K) und (y, L) benachbart sind, sowie zusätzlich

$$f(\varphi, x, K) = d_{xy} > d_{yx} \quad \text{und} \quad f(\varphi, y, L) > d_{yx}.$$

Als Nächstes modifizieren wir den Begriff der absteigenden Kette.

Definition 3.3.2. Es sei $\varphi \in M_{\mathcal{L}}^0$. Eine Folge verschiedener Punkte $(x_1, K_1), (x_2, K_2), \dots \in \varphi$ nennen wir eine *modifizierte absteigende Kette* in φ , falls

$$d(x_n, K_n, x_{n+1}, K_{n+1}) \geq d(x_{n+1}, K_{n+1}, x_n, K_n) \geq d(x_{n+1}, K_{n+1}, x_{n+2}, K_{n+2}), \quad n = 1, 2, \dots$$

Alle anderen Definitionen können wir aus unserem allgemeinen Modell (siehe Definitionen 1.3.1 und 1.3.4) übernehmen. Die folgende Abbildung zeigt einen kleinen und einen großen Ausschnitt eines modifizierten Liniensegmentmodells, basierend auf Realisierungen eines stationären unabhängig markierten Poissonprozess. Wie schon in Abbildung 3.2 wurde als Primärkornverteilung die Gleichverteilung auf \mathcal{L}'_0 verwendet.

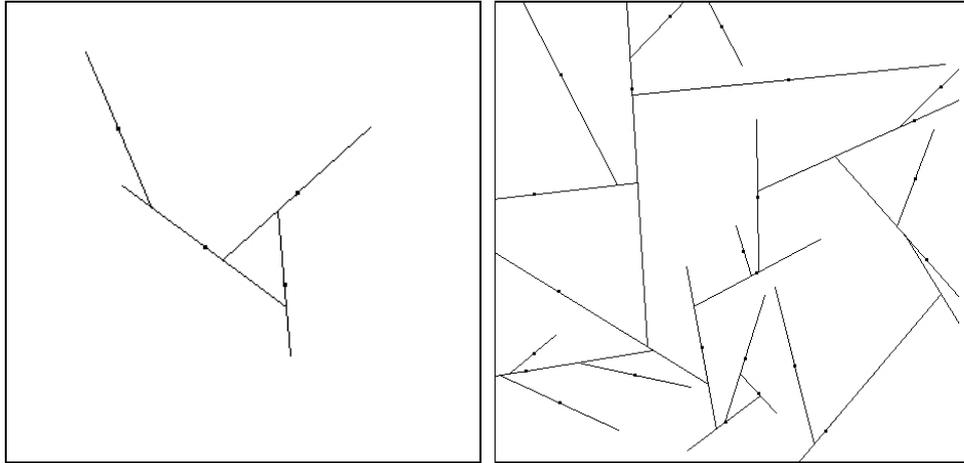


Abbildung 3.3: Zwei unterschiedlich skalierte Ausschnitte eines modifizierten Liniensegmentmodells, das auf Realisierungen eines stationären unabhängig markierten Poissonprozess beruht.

3.3.2 Existenz und Eindeutigkeit für eine feste Konfiguration

Wir beginnen wie schon in Unterabschnitt 3.2.2 direkt mit dem Existenz- und Eindeutigkeitsatz.

Satz 3.3.3. Sei $\varphi \in M_{\mathcal{L}}^0$ schnittpunkteindeutig und enthalte keine modifizierte absteigende Kette, dann existiert genau ein modifiziertes Liniensegmentmodell $T(\varphi)$.

Der Beweis verläuft ähnlich wie der Beweis zum kanonischen Modell und ist Resultat der folgenden Ausführungen. Wir definieren den Operator $L_2 : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$. Für $f \in \mathcal{F}$, sei

$$L_2 f(\varphi, x, K) := \inf D_2(\varphi, x, K, f), \quad \varphi \in M_{\mathcal{L}}^0, (x, K) \in \varphi, \quad (3.7)$$

mit

$$D_2(\varphi, x, K, f) := \{d_{xy} : (y, L) \in \varphi \setminus \{(x, K)\}, d_{xy} > d_{yx} \text{ und } f(\varphi, y, L) > d_{yx}\},$$

wobei das Infimum über die leere Menge ∞ sei, und 0 sonst. Der Operator L_2 ist in folgendem Sinn monoton.

Lemma 3.3.4. *Seien $f, g \in \mathcal{F}$. Falls $f(\varphi, x, K) \leq g(\varphi, x, K)$, $(x, K) \in \varphi$, dann gilt $Lf(\varphi, x, K) \geq Lg(\varphi, x, K)$, $(x, K) \in \varphi$.*

Beweis: Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Lemma 3.2.4. \square

Wie beim kanonischen Modell zeigen wir nun, dass das Infimum aus der Definition des Operators L_2 angenommen wird.

Lemma 3.3.5. *Sei $f \in \mathcal{F}$, $\varphi \in M_{\mathcal{L}}^0$ und $(x, K) \in \varphi$ mit $L_2f(\varphi, x, K) < \infty$. Dann existiert ein $(y, L) \in \varphi \setminus \{(x, K)\}$ derart, dass $L_2f(\varphi, x, K) = d_{xy} > d_{yx}$ und $f(\varphi, y, L) > d_{yx}$ gilt.*

Beweis: Der Beweis kann wie der Beweis von Lemma 3.2.5 geführt werden. Lediglich die Menge $\{(y, L) \in \varphi : c \geq \max\{d_{xy}, d_{yx}\}\}$ muss durch die Menge $\{(y, L) \in \varphi : c \geq d_{xy} > d_{yx}\}$ ersetzt werden. \square

Für $f \in \mathcal{F}$ und $\varphi \in M_{\mathcal{L}}^0$ stellen nun eine Verbindung zwischen dem Operator L_2 und der Wachstumsmaximalität der Funktion f_φ her.

Lemma 3.3.6. *Sei $f \in \mathcal{F}$ und $\varphi \in M_{\mathcal{L}}^0$ schnittpunkteindeutig. Dann ist f_φ genau dann eine Hard-Core-Funktion, wenn $f_\varphi \leq L_2f_\varphi$ gilt.*

Beweis: Sei f_φ eine Hard-Core-Funktion und $(x, K) \in \varphi$. Um $f(\varphi, x, K) \leq L_2f(\varphi, x, K)$ zu zeigen, argumentieren wir per Widerspruch. Sei $f(\varphi, x, K) > L_2f(\varphi, x, K)$, dann ist $L_2f(\varphi, x, K)$ endlich und es folgt mit Lemma 3.3.5 die Existenz eines Punktes $(y, L) \in \varphi$ mit $L_2f(\varphi, x, K) = d_{xy}$. Daraus folgt

$$f(\varphi, x, K) > L_2f(\varphi, x, K) = d_{xy} > d_{yx} \quad \text{und} \quad f(\varphi, y, L) > d_{yx}.$$

Dann ist der Schnittpunkt $s(x, K, y, L)$ der zu (x, K) und (y, L) gehörenden Geraden aber ein innerer Punkt der beiden Liniensegmente $x + f(\varphi, x, K)K$ und $y + f(\varphi, y, L)L$, wodurch die Hard-Core-Bedingung verletzt wird.

Für die zweite Implikation setzen wir $f_\varphi \leq L_2f_\varphi$ voraus und wählen $(x, K) \in \varphi$ sowie $(y, L) \in \varphi \setminus \{(x, K)\}$. Wir müssen zeigen, dass der Schnitt der relativen Inneren der beiden Liniensegmente $x + f(\varphi, x, K)K$ und $y + f(\varphi, y, L)L$ leer ist. Sind die beiden Liniensegmente nicht parallel, enthält jeder nichtleere Schnitt

$$(x + f(\varphi, x, K)K) \cap (y + f(\varphi, y, L)L)$$

den Punkt $s := s(x, K, y, L)$. Es gilt

$$\|x - s\| = d_{xy} \quad \text{und} \quad \|y - s\| = d_{yx}.$$

Angenommen, es gelte $d_{xy} \geq d_{yx}$. Falls $f(\varphi, y, L) > d_{yx}$ gilt, folgt $f(\varphi, x, K) \leq L_2f(\varphi, x, K) \leq d_{xy}$ und somit liegt s nicht im Schnitt der zugehörigen relativen Inneren. Gilt $f(\varphi, y, L) \leq d_{yx}$, kann s ebenfalls nicht im relativen Inneren der beiden Liniensegmente liegen. Im Fall $d_{xy} < d_{yx}$ vertauschen wir die Rollen von (x, K) und (y, L) und argumentieren analog.

Sind die beiden Liniensegmente parallel, existiert entweder der Schnittpunkt s nicht oder die Segmente liegen auf einer Geraden. Im ersten Fall ist die Hard-Core-Bedingung offensichtlich erfüllt. Im zweiten Fall gilt $d_{xy} = d_{yx}$, was der Schnittpunkteindeutigkeit von φ widerspricht. Daher ist f_φ eine Hard-Core-Funktion. \square

Lemma 3.3.7. *Sei $f \in \mathcal{F}$ und $\varphi \in M_{\mathcal{L}}^0$ schnittpunkteindeutig. Dann ist f_φ genau dann eine wachstumsmaximale Funktion, wenn $f_\varphi = L_2f_\varphi$ gilt.*

Beweis: Sei f_φ eine wachstumsmaximale Funktion. Aufgrund von Lemma 3.3.6 müssen wir noch $f \geq L_2f$ nachweisen. Falls $f(\varphi, x, K) < \infty$, existiert ein $(y, L) \in \varphi \setminus \{(x, K)\}$ derart, dass $f(\varphi, x, K) = d_{xy} > d_{yx}$ und $f(\varphi, y, L) > d_{yx}$ gilt. Daraus folgt $L_2f(\varphi, x, K) \leq d_{xy} = f(\varphi, x, K)$. Falls $f(\varphi, x, K) = \infty$, ist die Ungleichung trivialerweise erfüllt.

Jetzt gelte $L_2f_\varphi = f_\varphi$. Dann folgt aus Lemma 3.3.6, dass f_φ eine Hard-Core-Funktion ist. Es bleibt zu zeigen, dass f_φ auch wachstumsmaximal ist. Hierfür müssen wir für alle $(x, K) \in \varphi$ mit $f(\varphi, x, K) < \infty$ die Existenz eines stoppenden Nachbarn nachweisen. Sei $f(\varphi, x, K) < \infty$. Dann erhalten wir mit Lemma 3.3.5 die Existenz eines Punktes $(y, L) \in \varphi \setminus \{(x, K)\}$ mit $L_2f(\varphi, x, K) = d_{xy} > d_{yx}$ und $f(\varphi, y, L) > d_{yx}$. \square

Es ergibt sich das zu Korollar 3.2.12 analoge Resultat.

Korollar 3.3.8. *Sei $f \in \mathcal{F}$ und $\varphi \in M_{\mathcal{L}}^0$ schnittpunkteindeutig. Falls f_φ wachstumsmaximal ist, dann gilt $L_2f(\varphi, x, K) \in \{d_{xy} : d_{xy} > d_{yx}\}$, falls $f(\varphi, x, K) < \infty$.*

Analog zum Beweis des Existenz- und Eindeutigkeitsatzes im kanonischen Modell definieren wir eine Folge von Funktionen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ aus \mathcal{F} durch

$$f_0 := 0 \quad \text{und} \quad f_{n+1} := L_2f_n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Die in Abschnitt 3.2.2 aufgelisteten Eigenschaften dieser Konstruktion lassen sich übertragen. Wir erhalten als insbesondere die Grenzwerte

$$h := \lim_{n \rightarrow \infty} f_{2n}, \quad g := \lim_{n \rightarrow \infty} f_{2n+1} \quad (3.8)$$

Wie schon in Abschnitt 3.2.2 zeigen wir nun $h_\varphi = g_\varphi$ für schnittpunkteindeutiges $\varphi \in M_{\mathcal{L}}^0$ ohne absteigende Kette und weisen nach, dass h_φ dann die einzige wachstumsmaximale Funktion ist.

Lemma 3.3.9. *Sei $\varphi \in M_{\mathcal{L}}^0$ und $(x, K) \in \varphi$ mit $h(\varphi, x, K) < \infty$. Dann gilt $f_{2n}(\varphi, x, K) = h(\varphi, x, K)$ für alle hinreichend großen $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis: Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Lemma 3.2.13. \square

Lemma 3.3.10. *Sei $\varphi \in M_{\mathcal{L}}^0$. Dann gilt $L_2h_\varphi = g_\varphi$ und $L_2g_\varphi = h_\varphi$.*

Beweis: Wir können den Beweis von Lemma 3.2.14 verwenden, lediglich $\max\{d_{xy}, d_{yx}\}$ muss durch d_{xy} ersetzt werden. \square

Satz 3.3.11. *Sei $\varphi \in M_{\mathcal{L}}^0$ schnittpunkteindeutig. Die Funktion h_φ ist genau dann wachstumsmaximal (im modifizierten Sinn), wenn $h_\varphi = g_\varphi$ gilt. In diesem Fall ist h_φ die einzige wachstumsmaximale Funktion.*

Beweis: Der Beweis verläuft analog zu dem von Lemma 3.2.15. \square

Satz 3.3.12. *Sei $\varphi \in M_{\mathcal{L}}^0$ und enthalte keine absteigende Kette. Dann gilt $h_\varphi = g_\varphi$.*

Beweis: Wir benutzen im Folgenden ohne expliziten Hinweis die Ungleichung $h_\varphi \leq g_\varphi$ und Lemma 3.3.5. Zusätzlich erinnern wir an die Kurzschreibweise $d_{ij} = d(x_i, K_i, x_j, K_j)$ für (x_i, K_i) und (x_j, K_j) aus φ . Angenommen, es existiert $(x_0, K_0) \in \varphi$ mit $h(\varphi, x_0, K_0) < g(\varphi, x_0, K_0)$. Weiter sei $(x_1, K_1) \in \varphi \setminus \{(x_0, K_0)\}$ derart, dass

$$h(\varphi, x_0, K_0) = Lg(\varphi, x_0, K_0) = d_{01} > d_{10} \quad \text{und} \quad g(\varphi, x_1, K_1) > d_{10}.$$

Dann gilt

$$h(\varphi, x_1, K_1) \leq d_{10},$$

da sonst $g(\varphi, x_0, K_0) = Lh(\varphi, x_0, K_0) \leq d_{01} = h(\varphi, x_0, K_0)$ gelten müsste. Außerdem gilt $h(\varphi, x_1, K_1) < g(\varphi, x_1, K_1)$, da sonst $h(\varphi, x_1, K_1) = g(\varphi, x_1, K_1)$ und somit $g(\varphi, x_0, K_0) = Lh(\varphi, x_0, K_0) \leq d_{01} = h(\varphi, x_0, K_0)$ gelten müssten. Durch Wiederholung dieser Schritte ergibt sich die Existenz eines Punktes $(x_2, K_2) \in \varphi \setminus (x_1, K_1)$ für den

$$h(\varphi, x_1, K_1) = Lg(\varphi, x_1, K_1) = d_{12} > d_{21} \quad \text{und} \quad g(\varphi, x_2, K_2) \geq d_{21}$$

sowie $h(\varphi, x_2, K_2) \leq d_{21}$ und $h(\varphi, x_2, K_2) < g(\varphi, x_2, K_2)$ gelten. Fassen wir die Ungleichungen zusammen, erhalten wir

$$d_{01} > d_{10} \geq d_{12} > d_{21}.$$

Aufgrund von $h(\varphi, x_0, K_0) = d_{01} > d_{10} \geq d_{12} = h(\varphi, x_1, K_1)$ folgt $(x_0, K_0) \neq (x_1, K_1)$. Per Induktion können wir eine Folge von Punkten $(x_0, K_0), (x_1, K_1), \dots$ aus φ finden, für die

$$d_{01} > d_{10} \geq d_{12} > d_{21} \geq \dots \geq d_{n-1,n} > d_{n,n-1} \geq \dots$$

und $h(\varphi, x_n, K_n) = d_{n,n+1}$, $n \in \mathbb{N}_0$, gilt. Insbesondere ist dann $h(\varphi, x_n, K_n) > h(\varphi, x_{n+1}, K_{n+1})$, wodurch wir erkennen, dass alle Punkte (x_n, K_n) , $n \in \mathbb{N}_0$, verschieden sind. Damit hätten wir in φ eine absteigende Kette gefunden, was aber nach Voraussetzung ausgeschlossen ist. Es kann also kein $(x_0, K_0) \in \varphi$ mit $h(\varphi, x_0, K_0) < g(\varphi, x_0, K_0)$ existieren. \square

Analog zum Vorgehen in Unterabschnitt 3.2.2 können wir nun mit h aus (3.8) die Funktion l und das wachstumsmaximale Modell T definieren.

3.3.3 Existenz und Eindeutigkeit in zufälligen Konfigurationen

Sämtliche Resultate aus Unterabschnitt 3.2.3 lassen sich auf das modifizierte Modell übertragen. Wir müssen lediglich den Begriff „kanonisch“ durch den Begriff „modifiziert“ ersetzen. Für das zu 3.2.18 analoge Resultat müssen wir im Beweis der zweiten Aussage jedoch den dort angegebenen Beweis verändern. Wir formulieren dies als Lemma.

Lemma 3.3.13. *Sei η ein markierter Punktprozess auf \mathbb{R}^2 mit Markenraum \mathcal{L}'_0 , der Bedingung (3.6) erfüllt. Dann existiert in η fast sicher keine modifizierte absteigende Kette.*

Beweis: Wir gehen analog zum Beweis von Lemma 2.2.17 in Abschnitt 2.2.2 vor. Mit der dort verwendeten Vorgehensweise und Notation sowie Gleichung (3.1) reicht es, das Integral

$$\int \dots \int \mathbf{1}\{x_0 \in B\} \mathbf{1}\{t \geq d_{i-1,i} > d_{i,i-1} \geq s, 1 \leq i \leq n\} dx_0 \dots \mathbb{Q}(dK_n) \quad (3.9)$$

durch einen Ausdruck der Form $[\alpha((t-s)^2)^\beta]^n$ mit $\alpha, \beta > 0$ nach oben abzuschätzen. Das Integral (3.9) lässt sich in der Form

$$\int \dots \int \mathbf{1}\{x_0 \in B\} \mathbf{1}\{t \geq d_{i-2,i-1} > d_{i-1,i-2} \geq s, 1 \leq i \leq n-1\} \\ \mathbf{1}\{t \geq d_{n-1,n} > d_{n,n-1} \geq s\} dx_0 \dots dx_n \mathbb{Q}(dK_0) \dots \mathbb{Q}(dK_n)$$

schreiben. Dieser Ausdruck ist durch

$$\int \dots \int \mathbf{1}\{x_0 \in B\} \mathbf{1}\{t \geq d_{i-2,i-1} > d_{i-1,i-2} \geq s, i = 1, \dots, n-1\} \\ \mathbf{1}\{x_n \in D(\gamma(K_{n-1}, K_n), t-s)\} dx_0 \dots dx_n \mathbb{Q}(dK_0) \dots \mathbb{Q}(dK_n) \quad (3.10)$$

gegeben, wobei $\gamma(K, L)$ der Betrag des kleineren der beiden Winkel zwischen den Liniensegmenten K und L und $D(\gamma, x, y)$ ein Parallelogramm mit Seitenlängen x und y sowie innerem Winkel γ ist. Der Flächeninhalt von $D(\gamma, x, y)$ ist wegen $\sin(\gamma) \leq 1$ durch xy nach oben beschränkt. Durch Vertauschen der Integrationsreihenfolge erhalten wir daher, dass das Integral (3.10) durch den Ausdruck

$$4t^2 \int \dots \int \mathbf{1}\{x_0 \in B\} \mathbf{1}\{t \geq d_{i-1,i} > d_{i,i-1} \geq s, i = 1, \dots, n-1\} dx_0 \dots dx_{n-1} \mathbb{Q}(dK_0) \dots \mathbb{Q}(dK_{n-1})$$

nach oben abgeschätzt werden kann. Wiederholen wir dieses Argument weitere $n-1$ Male, ergibt sich, dass der letzte Ausdruck durch

$$(4t^2)^n \int \mathbf{1}\{x_0 \in B\} dx_0 \mathbb{Q}(dK_0) = \lambda(B)[4t(t-s)]^n$$

beschränkt ist. Wählen wir im Beweis von Lemma 2.2.17 die Folge $t_i := (1/2)\sqrt{i}$, so erhalten wir für alle $i \in \mathbb{N}$ den Grenzwert

$$\lambda(B)(4t_i(t_i - t_{i-1}))^n = \lambda(B)(\sqrt{i}(\sqrt{i} - \sqrt{i-1}))^n = \lambda(B) \left(\frac{\sqrt{i}}{\sqrt{i} + \sqrt{i-1}} \right)^n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Nun können wir dem Beweis von Lemma 2.2.17 folgen, um den Beweis abzuschließen. \square

Es ergibt sich also das zu Satz 3.2.19 analoge Existenz- und Eindeutigkeitsresultat für unser modifiziertes Modell.

Satz 3.3.14. *Es sei η ein markierter Punktprozess auf \mathbb{R}^2 mit Markenraum \mathcal{L}'_0 , der Bedingung (3.6) erfülle. Dann ist $T(\eta)$ das fast sicher eindeutig bestimmte modifizierte wachstumsmaximale Liniensegmentmodell.*

Für Beispiele geeigneter Punktprozesse, die Bedingung (3.6) erfüllen, sei wie schon in Abschnitt 3.2.3 auf Abschnitt 2.2.2 verwiesen.

Bemerkung 3.3.15. Da Existenz und Eindeutigkeit der zufälligen wachstumsmaximalen Modelle nur fast sicher vorliegen, treffen wir die **Generalvereinbarung**, dass im weiteren Verlauf der Arbeit alle Aussagen und Zufallsvariablen, die im Zusammenhang mit wachstumsmaximalen Modellen stehen, sofern nichts anderes gesagt wird, als fast sicher zu verstehen sind.

Darüber hinaus verwenden wir die in den letzten beiden Kapiteln eingeführten **Kurzschreibeisen** für wachstumsmaximale Modelle, in denen alle Startzeiten 0 sind, im weiteren Verlauf dieser Arbeit ohne dies explizit zu erwähnen.

Kapitel 4

Perkolation

In diesem Kapitel untersuchen wir das Perkulationsverhalten wachstumsmaximaler Modelle. Wir zeigen für zwei spezielle wachstumsmaximale Modelle, dass diese nicht perkolieren. Beide Modelle basieren auf Konfigurationen, in denen alle Punkte die gleiche Startzeit aufweisen, wie wir sie bereits in Abschnitt 2.2 kennengelernt haben. Sei $\varphi \in M^0$ und $T(\varphi) = \{(x, K, l(\varphi, x, K)) : (x, K) \in \varphi\}$ ein wachstumsmaximales Modell. Wir definieren einen Graphen $G(\varphi)$, der als Knotenmenge die Projektion ϕ der Konfiguration φ auf \mathbb{R}^d besitzt. Zwei Knoten $x, y \in \phi$ seien genau dann durch eine Kante verbunden, wenn die zugehörigen Punkte $(x, K), (y, L) \in \varphi$ im wachstumsmaximalen Modell $T(\varphi)$ Nachbarn sind. Für $x \in \phi$ ist dann $C(\varphi, x)$ die Menge der Knoten, die mit x in einer Komponente des Graphen liegen. Für $x \notin \phi$ setzen wir $C(\varphi, x) := \emptyset$. Wir nennen $C(\varphi, x)$ den zu x gehörenden *Cluster* von $T(\varphi)$. Unter *Perkolation* verstehen wir, dass das wachstumsmaximale Modell $T(\varphi)$ einen Cluster $C(\varphi, x)$ besitzt, der unendlich viele Punkte enthält. Dies ist äquivalent zu der Aussage, dass die Vereinigungsmenge aller Körner des wachstumsmaximalen Modells $Z(\varphi)$ eine unbeschränkte Komponente besitzt. Ein Paar $(x, K) \neq (y, L)$ von Punkten aus φ nennen wir ein *Doublet*, falls (x, K) und (y, L) benachbart sind und für die Funktion l die Gleichung $l(\varphi, x, K) = l(\varphi, y, L)$ gilt.

4.1 Der Poissonfall mit volldimensionalen konvexen Körnern

Es sei $\mathcal{K}'_{0,s} \subset \mathcal{K}'_0$ die Menge der volldimensionalen, strikt konvexen Körper mit dem Ursprung im relativen Inneren. Weiter bezeichne M_s^0 die Menge aller $\varphi \in M^0$, für die $K \in \mathcal{K}'_{0,s}$ für alle $(x, K) \in \varphi$ gilt. Des Weiteren sei in diesem Abschnitt l die Funktion aus Definition 2.2.9 und T das zugehörige wachstumsmaximale Modell. Wir erinnern daran, dass $l(\varphi, \cdot)$ für alle abstandseindeutigen, markiert lokalendlichen φ , die keine absteigende Kette enthalten, wachstumsmaximal ist. Darüber hinaus sei \mathbb{Q} ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{K}'_{0,s}$, das (2.11) erfüllt, und η ein stationärer markierter Poissonprozess auf \mathbb{R}^d mit Markenverteilung \mathbb{Q} und Intensität $\gamma > 0$. Damit enthält η insbesondere fast sicher keine absteigende Kette. Wir zeigen in diesem Abschnitt, dass das zu η gehörende wachstumsmaximale Modell $T(\eta)$ keinen unendlichen Cluster enthält.

Um einen besseren Eindruck von der Clusterstruktur zu bekommen, zeigen wir einen Ausschnitt einer Realisierung eines klassischen Lilypond-Modells, basierend auf einem stationären Poissonprozess mit Extrapunkt im Ursprung. Der zum Ursprung gehörende Cluster ist blau gefärbt.

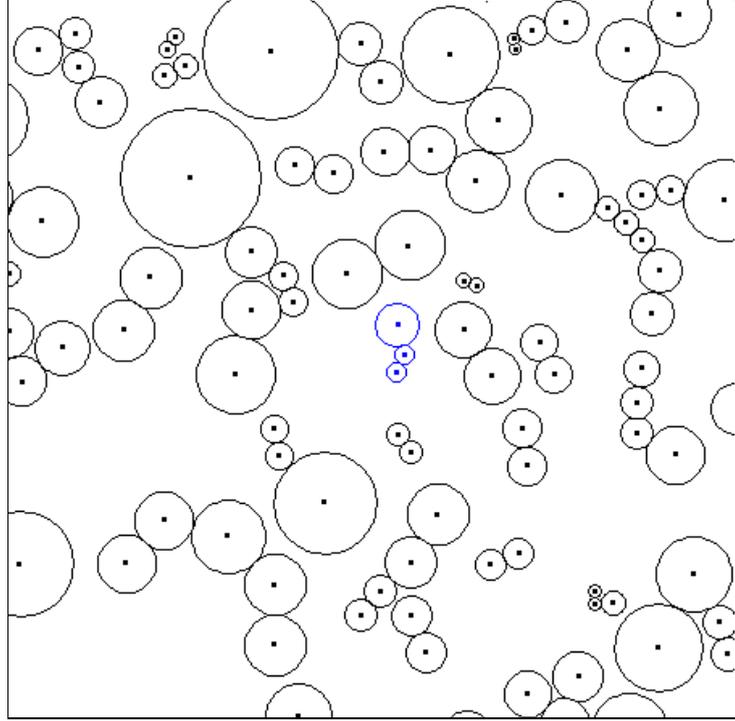


Abbildung 4.1: Ein Ausschnitt einer Realisierung eines klassischen Lilypond-Modells, basierend auf einem stationären Poissonprozess mit Extrapunkt im Ursprung.

Als Erstes zeigen wir eine Aussage über die Zahl der Nachbarn eines Punktes in einem wachstumsmaximalen Modell. Dazu benötigen wir zwei Hilfsaussagen.

Lemma 4.1.1. *Sei $\varphi \in M_s^0$ abstandseindeutig mit $\text{card}(\varphi) < \infty$. Weiter seien $(x, K) \neq (y, L)$ aus φ . Falls $l(\varphi, x, K) < l(\varphi, y, L)$, so gilt*

$$l(\varphi \setminus \{(y, L)\}, x, K) = l(\varphi, x, K).$$

Beweis: Die Aussage ergibt sich direkt aus der im Beweis von Satz 2.2.12 vorgestellten Konstruktion des wachstumsmaximalen Modells für endliche Konfigurationen. \square

Im nächsten Lemma verwenden wir die durch (5.26) eingeführte Menge $S(\varphi, y, L)$.

Lemma 4.1.2. *Sei $\varphi \in M_s^0$ mit $\text{card}(\varphi) \geq 2$ und enthalte keine absteigende Kette. Weiter sei $(y, L) \in \varphi$. Dann ist $S(\varphi, y, L)$ beschränkt.*

Beweis: Da φ nach Voraussetzung keine absteigende Kette enthält, ist die Aussage eine direkte Folgerung aus der Konstruktion von $S(\varphi, y, L)$. \square

Wir beweisen nun ein Lemma über die Zahl der Nachbarn.

Lemma 4.1.3. *Jeder Punkt des wachstumsmaximalen Modells $T(\eta)$ besitzt fast sicher genau einen stoppenden Nachbarn.*

Beweis: Sei $\varphi \in M_s^0$ abstandseindeutig sowie markiert lokalendlich und enthalte keine absteigende Kette. Weiter sei $\text{card}(\varphi) \geq 3$. Nach Definition besitzt dann jeder Punkt $(x, K) \in \varphi$ im wachstumsmaximalen Modell $T(\varphi)$ mindestens einen stoppenden Nachbarn. Somit hat jeder

Punkt von $T(\eta)$ dank $\text{card}(\eta) \geq 3$ fast sicher einen stoppenden Nachbarn. Wir zeigen, dass in $T(\eta)$ fast sicher kein Korn gleichzeitig zwei stoppende Nachbarn besitzen kann. Es gibt drei mögliche Anordnungen von Punkten aus φ , so dass ein Punkt zwei stoppende Nachbarn besitzen könnte. Diese schließen wir im Folgenden nacheinander aus. Hierfür seien $(x, K), (y, L), (z, A) \in \varphi$ drei verschiedene Punkte aus φ .

Erstens könnte nun

$$a(x, K, y, L) = a(x, K, z, A)$$

gelten, was zu einem doppelten Doublet führen könnte. In diesem Fall hätte der Punkt (x, K) daher potentiell zwei stoppende Nachbarn. Mit der multivariaten Formel von Campbell (Satz 1.1.15) gilt aber

$$\begin{aligned} \mathbb{E} & \sum_{((x_1, K_1), (x_2, K_2), (x_3, K_3)) \in \eta^{(3)}} \mathbf{1}\{a(x_1, K_1, x_2, K_2) = a(x_2, K_2, x_3, K_3)\} \\ &= \int \cdots \int \mathbf{1}\{a(x_1, K_1, x_2, K_2) = a(x_2, K_2, x_3, K_3)\} dx_1 dx_2 dx_3 \mathbb{Q}(dK_1) \mathbb{Q}(dK_2) \mathbb{Q}(dK_3) \\ &= \int \cdots \int \mathbf{1}\{x_1 \in \partial(x_2 + a(x_2, K_2, x_3, K_3)(K_2 - K_1))\} dx_1 dx_2 dx_3 \mathbb{Q}(dK_1) \mathbb{Q}(dK_2) \mathbb{Q}(dK_3). \end{aligned}$$

Da der Rand einer konvexen Menge im \mathbb{R}^d Lebesgue-Maß 0 besitzt (vgl. Abschnitt 2.2 in [25]) und das Integral daher verschwindet, tritt dieser Fall fast sicher nicht ein. Zum Zweiten könnten die Punkte $(x, K), (y, L)$ ein Doublet bilden und gleichzeitig (y, L) als weiteren stoppenden Nachbarn (z, A) besitzen. Dann müssen neben $l(\varphi, x, K) = l(\varphi, y, L) > l(\varphi, z, A)$ auch

$$a(x, K, y, L) = l(\varphi, x, K) = l(\varphi, y, L)$$

und

$$l(\varphi, y, L) = \inf\{r > 0 : (y + rL) \cap (z + l(\varphi, z, A)A) \neq \emptyset\}$$

gelten. Wir setzen

$$r(\varphi, y, L, z, A) := \inf\{r > 0 : (y + rL) \cap (z + l(\varphi, z, A)A) \neq \emptyset\}$$

und erhalten damit

$$a(x, K, y, L) = r(\varphi, y, L, z, A).$$

Wir definieren

$$E(\varphi, K, y, L, z, A) := \{x' \in \mathbb{R}^d : l(\varphi, x', K) > l(\varphi, z, A), a(x', K, y, L) = r(\varphi, y, L, z, A)\}.$$

Mit $S' := S(\varphi, x, K) \cup S(\varphi, z, A)$ gilt wegen Lemma 5.2.2 die Gleichung $l(\varphi, z, A) = l(\varphi \cap S', z, A)$. Nach Lemma 4.1.2 ist die Menge S' beschränkt und damit $\varphi \cap S'$ endlich. Nach Konstruktion von S gilt $S(\varphi, x, K) = S(\varphi \setminus \{(x, K)\}, x, K)$. Wegen $l(\varphi, x, K) > l(\varphi, z, A)$ erhalten wir aus Lemma 5.2.2 die Ungleichung $l(\varphi \cap S', x, K) > l(\varphi \cap S', z, A)$ und somit aus Lemma 4.1.1 $l(\varphi, z, A) = l(\varphi \setminus \{(x', K)\} \cap S', z, A)$. Mit Lemma 5.2.2 folgt $l(\varphi, z, A) = l(\varphi \setminus \{(x, K)\}, z, A)$. Daher gilt die Mengengleichheit

$$\begin{aligned} E(\varphi, K, y, L, z, A) &= \{x' \in \mathbb{R}^d : l(\varphi, x', K) > l(\varphi, z, A), a(x', K, y, L) = r(\varphi \setminus \{(x', K)\}, y, L, z, A)\} \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$E(\varphi, K, y, L, z, A) \subset \{x' \in \mathbb{R}^d : a(x', K, y, L) = r(\varphi \setminus \{(x', K)\}, y, L, z, A)\}.$$

Mit $\mathbf{x}_i := (x_i, K_i)$, $i = 1, 2$, erhalten wir dank der Mecke-Gleichung (1.5) die Abschätzung

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \sum_{((x_1, K_1), (x_2, K_2), (x_3, K_3)) \in \eta^{(3)}} \mathbf{1}\{x_1 \in E(\eta, K_1, x_2, K_2, x_3, K_3)\} \\
& \leq \mathbb{E} \sum_{((x_1, K_1), (x_2, K_2), (x_3, K_3)) \in \eta^{(3)}} \mathbf{1}\{a(x_1, K_1, x_2, K_2) = r(\eta \setminus \{(x_1, K_1)\}, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)\} \\
& = \mathbb{E} \int \dots \int \mathbf{1}\{a(x_1, K_1, x_2, K_2) = r(\eta + \delta_{\mathbf{x}_2} + \delta_{\mathbf{x}_3}, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)\} dx_1 \dots \mathbb{Q}(dK_3) \\
& = \mathbb{E} \int \dots \int \mathbf{1}\{x_1 \in \partial(x_2 + r(\eta + \delta_{\mathbf{x}_2} + \delta_{\mathbf{x}_3}, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)(K_2 - K_1))\} dx_1 dx_2 \dots \mathbb{Q}(dK_3).
\end{aligned}$$

Dieses Integral ist ebenfalls 0 (vgl. Abschnitt 2.2 in [25]). Daher tritt auch diese Möglichkeit fast sicher nicht ein.

Die dritte mögliche Anordnung ist, dass (x, K) zwei echt kleinere stoppende Nachbarn besitzt. Hierfür definieren wir für $r > 0$

$$E'(\varphi, r, K, y, L, z, A) := \partial(y + l(\varphi, y, L)L + rK) \cap \partial(z + l(\varphi, z, A)A + rK).$$

Die Vereinigungsmenge über alle r ist dann durch

$$E'(\varphi, K, y, L, z, A) := \bigcup_{r \geq 0} E'(\varphi, r, K, y, L, z, A)$$

gegeben. Wie im zweiten Fall können wir mit Lemma 5.2.2 und Lemma 4.1.1 für alle $r > 0$

$$\begin{aligned}
& E'(\varphi, r, K, y, L, z, A) \\
& = \partial(y + l(\varphi \setminus \{x, K\}, y, L)L + rK) \cap \partial(z + l(\varphi \setminus \{x, K\}, z, A)A + rK)
\end{aligned}$$

zeigen. Nun wenden wir auch hier die Mecke-Gleichung (1.5) an.

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left[\sum_{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \in \eta^{(3)}} \mathbf{1}\{x_1 \in E'(\eta, K_1, x_2, K_2, x_3, K_3)\} \right] \\
& = \mathbb{E} \int \dots \int \mathbf{1}\{x_1 \in E'(\eta + \delta_{\mathbf{x}_1} + \delta_{\mathbf{x}_2} + \delta_{\mathbf{x}_3}, K_1, x_2, K_2, x_3, K_3)\} dx_1 \dots \mathbb{Q}(dK_3) \\
& = \mathbb{E} \int \dots \int \mathbf{1}\{x_1 \in E'(\eta + \delta_{\mathbf{x}_2} + \delta_{\mathbf{x}_3}, K_1, x_2, K_2, x_3, K_3)\} dx_1 \mathbb{Q}(dK_1) dx_2 \mathbb{Q}(dK_2) dx_3 \mathbb{Q}(dK_3).
\end{aligned}$$

Die Menge

$$\begin{aligned}
& E'(\varphi, K, y, L, z, A) \\
& = \bigcup_{r > 0} (\partial(y + l(\varphi \setminus \{x, K\}, y, L)L + rK) \cap \partial(z + l(\varphi \setminus \{x, K\}, z, A)A + rK))
\end{aligned}$$

ist eine Teilmenge des Exoskeletts

$$\text{exo}_K(y + l(\varphi \setminus \{x, K\}, y, L)L \cup z + l(\varphi \setminus \{x, K\}, z, A)A).$$

Aufgrund der strikten Konvexität von K, L und A folgern wir mit Corollary 2.3 aus [12], dass dieses Exoskelett das Lebesgue-Maß 0 besitzt. Damit folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[\sum_{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \in \eta^{(3)}} \mathbf{1}\{x_1 \in E'(\eta, K_1, x_2, K_2, x_3, K_3)\} \right] &= \mathbb{E} \int \dots \int 0 \mathbb{Q}(dK_1) dx_2 \mathbb{Q}(dK_2) dx_3 \mathbb{Q}(dK_3) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

woraus sich ergibt, dass auch dieser Fall nur mit Wahrscheinlichkeit 0 eintreten kann. \square

Dieses Ergebnis ermöglicht uns eine Aussage über die Anzahl der Doublets in einem Cluster.

Lemma 4.1.4. *Jeder Cluster von $T(\eta)$ enthält höchstens ein Doublet.*

Beweis: Da nach Lemma 4.1.3 jeder Punkt $(x, K) \in \eta$ fast sicher genau einen stoppenden Nachbarn besitzt, ist $G(\eta)$ fast sicher ein Wald, d.h. ein Graph, der ausschließlich aus Bäumen, also aus Zusammenhangskomponenten ohne Zyklen besteht. Die Bäume von $G(\eta)$ sind die Cluster des wachstumsmaximalen Modells $T(\eta)$. Wir nehmen nun an, einer der Cluster hätte zwei Doublets. Da die Wahrscheinlichkeit, dass die Funktionswerte von l für die Punkte beider Paare den gleichen Wert aufweisen, 0 ist, müssen die Punkte eines der beiden Doublets einen echt größeren Wachstumswert haben als die anderen. Da die Punkte des „größeren Doublets“ aber nur Nachbarn mit größerem Funktionswert als sie selbst besitzen, kann es keinen Pfad zum kleineren Doublet geben. Ansonsten würde ein Punkt existieren, welcher zwei stoppende Nachbarn hätte. Dies wäre ein Widerspruch zu Lemma 4.1.3. \square

Im nächsten Lemma wird ein Zusammenhang zwischen absteigenden Ketten und Doublets formuliert.

Lemma 4.1.5. *Sei $\varphi \in M_s^0$ abstandseindeutig sowie markiert lokalendlich und enthalte keine absteigende Kette. Dann besitzt das wachstumsmaximale Modell $T(\varphi)$ keinen unendlichen Cluster ohne Doublet.*

Beweis: Wir zeigen, dass ein unendlicher Cluster, der kein Doublet besitzt, eine absteigende Kette enthalten muss. Für φ ist dies allerdings laut Voraussetzung ausgeschlossen.

Es seien $(x_1, K_1), (x_2, K_2), \dots \in \varphi$ Punkte eines unendlichen Clusters ohne Doublet, wobei (x_{i+1}, K_{i+1}) der stoppende Nachbar von (x_i, K_i) für $i \in \mathbb{N}$ sei, d.h.

$$l(\varphi, x_i, K_i) \geq l(\varphi, x_{i+1}, K_{i+1}), \quad i \in \mathbb{N}. \quad (4.1)$$

Da der Cluster nach Voraussetzung kein Doublet enthält, können wir (4.1) zu einer echten Ungleichung machen. Daher sind alle (x_i, K_i) , $i \in \mathbb{N}$, verschieden. Mit Lemma 2.2.5 erhalten wir aus (4.1)

$$l(\varphi, x_i, K_i) \geq a(x_i, K_i, x_{i+1}, K_{i+1}) \geq l(\varphi, x_{i+1}, K_{i+1}), \quad i \in \mathbb{N}.$$

Da diese Ungleichungskette für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt, folgt hieraus

$$a(x_i, K_i, x_{i+1}, K_{i+1}) \geq a(x_{i+1}, K_{i+1}, x_{i+2}, K_{i+2}), \quad i \in \mathbb{N}.$$

Somit enthält φ wie behauptet eine absteigende Kette und das Lemma ist per Widerspruch gezeigt. \square

Hieraus folgt nun sofort eine stochastische Version des obigen Lemmas.

Lemma 4.1.6. *Das wachstumsmaximale Modell $T(\eta)$ besitzt keine unendlichen Cluster ohne Doublet.*

Wir müssen jetzt noch nachweisen, dass $T(\eta)$ auch keine unendlichen Cluster mit genau einem Doublet besitzt. Dies geschieht mit Hilfe des sogenannten Massentransportprinzips (siehe [9] und [17]).

Lemma 4.1.7. *Das wachstumsmaximale Modell $T(\eta)$ besitzt keine unendlichen Cluster mit genau einem Doublet.*

Beweis: Wir nehmen an, es gibt unendliche Cluster mit genau einem Doublet und betrachten die Abbildung $f : M_s^0 \rightarrow M_s^0$, welche durch

$$f(\varphi) := \sum_{(x,K) \in \varphi} \mathbf{1}_{(x,K) \in A(\varphi)} \delta_{(x,K)} \quad (4.2)$$

definiert ist. Für $\varphi \in M_s^0$ gehört der Punkt $(x, K) \in \varphi$ genau dann zur Menge $A(\varphi)$, falls er zu einem Doublet eines unendlichen Clusters gehört und der bzgl. der Projektion ϕ von φ auf die erste Komponente lexikographisch kleinere Punkt dieses Doublets ist. Dank der Stationarität von η und der Translationsinvarianz von f ist der durch $f(\eta)$ definierte Punktprozess ebenfalls stationär. Aufgrund unserer anfänglichen Annahme besitzt $f(\eta)$ eine echt positive Intensität γ_f (siehe z.B. Theorem 2.4.4 in [26]). Weiter sei

$$B(\varphi, x_1, K_1) := \{(x_2, K_2) \in \varphi : x_2 \in C(\varphi, x_1)\}, \quad \varphi \in M_s^0, x_1 \in \mathbb{R}^d, K_1 \in \mathcal{K}'_0.$$

Wir definieren die Funktion g durch

$$g(\varphi, x_1, K_1, x_2, K_2) := \mathbf{1}_{B(\varphi, x_1, K_1)}(x_2, K_2) \mathbf{1}_{A(\varphi)}(x_1, K_1), \quad \varphi \in M_s^0, x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d, K_1, K_2 \in \mathcal{K}'_0.$$

Die Funktion g ist also für (x, K) und einen weiteren Punkt $(y, L) \in \varphi$ genau dann 1, falls x lexikographisch kleinerer Punkt eines Doublet eines unendlichen Clusters ist und y zu diesem unendlichen Cluster $C(\varphi, x)$ gehört. Zusätzlich gilt $g(\varphi, x, K, y, L) = g(\varphi - t, x - t, K, y - t, L)$, $t \in \mathbb{R}^d$. Nach dem Massentransportprinzip muss die Transportgleichung

$$\begin{aligned} & \iint \mathbf{1}\{(x_2, K_2) \in [0, 1]^d \times \mathcal{K}'_0\} g(\varphi, x_1, K_1, x_2, K_2) \varphi(d(x_1, K_1)) \varphi(d(x_2, K_2)) \mathbb{P}^\eta(d\varphi) \\ &= \iint \mathbf{1}\{(x_1, K_1) \in [0, 1]^d \times \mathcal{K}'_0\} g(\varphi, x_1, K_1, x_2, K_2) \varphi(d(x_1, K_1)) \varphi(d(x_2, K_2)) \mathbb{P}^\eta(d\varphi) \end{aligned} \quad (4.3)$$

erfüllt sein. Da jeder Punkt zu genau einem Cluster gehört, ist die linke Seite dieser Gleichung höchstens

$$\iint \mathbf{1}\{(x_2, K_2) \in [0, 1]^d \times \mathcal{K}'_0\} \varphi(d(x_2, K_2)) \mathbb{P}^\eta(d\varphi) = \mathbb{E}[\text{card}(\eta \cap [0, 1]^d \times \mathcal{K}'_0)] = \gamma.$$

Für die rechte Seite von Gleichung (4.3) erhalten wir

$$\begin{aligned} & \iint \mathbf{1}\{(x_1, K_1) \in [0, 1]^d \times \mathcal{K}'_0\} g(\varphi, x_1, K_1, x_2, K_2) \varphi(d(x_2, K_2)) \varphi(d(x_1, K_1)) \mathbb{P}^\eta(d\varphi) \\ &= \iint \infty \cdot \mathbf{1}\{(x_1, K_1) \in [0, 1]^d \times \mathcal{K}'_0\} \mathbf{1}\{(x_1, K_1) \in A(\varphi)\} \varphi(d(x_1, K_1)) \mathbb{P}^\eta(d\varphi) \\ &= \infty \cdot \gamma_f. \end{aligned}$$

Damit folgt aus (4.3) die Ungleichung $\gamma \geq \infty \cdot \gamma_f$. Dies ist ein Widerspruch zu $\gamma_f > 0$. Daher besitzt das wachstumsmaximale Modell $T(\eta)$ keine unendlichen Cluster. \square

Somit ergibt sich das in der Einleitung angekündigte Resultat.

Satz 4.1.8. *Das wachstumsmaximale Modell $T(\eta)$ besitzt keinen unendlichen Cluster.*

Bemerkung 4.1.9. Es scheint sicher, dass das Fehlen von Perkolation nicht nur für Poissonprozesse gezeigt werden kann. Die Aussage sollte für eine deutlich größere Klasse von Punktprozessen, welche insbesondere Cox- und Gibbsprozesse enthält, richtig sein.

4.2 Das kanonische Liniensegmentmodell

Wir erinnern an $M_{\mathcal{L}}^0$, die Menge aller $\varphi \in M^0$, für die $K \in \mathcal{L}'_0$ für alle $(x, K) \in \varphi$ gilt. Des Weiteren sei in diesem Abschnitt l die Funktion, die wir am Ende von Unterabschnitt 3.2.2 eingeführt haben, und T das zugehörige wachstumsmaximale Modell. Wir erinnern daran, dass $l(\varphi, \cdot)$ für alle schnittpunkteindeutigen φ , die keine (kanonische) absteigende Kette enthalten, wachstumsmaximal ist. Darüber hinaus sei η ein stationärer markierter Punktprozess auf \mathbb{R}^2 mit Markenverteilung \mathbb{Q} und Intensität $\gamma > 0$, der (3.6) erfüllt. Insbesondere enthält η somit fast sicher keine absteigende Kette. Wir zeigen in diesem Abschnitt, dass das zu η gehörende wachstumsmaximale Modell $T(\eta)$ keinen unendlichen Cluster enthält. Strukturell verläuft die Argumentation wie im Poissonfall mit konvexen Körnern aus dem letzten Abschnitt.

Um einen besseren Eindruck von der Clusterstruktur zu bekommen, zeigen wir, wie schon im letzten Abschnitt, zunächst einen Ausschnitt eines kanonischen Liniensegmentmodells mit Extrapunkt im Ursprung. Die Punkte basieren auf einer Realisierung eines unabhängig markierten stationären Poissonprozess, wobei die Richtungen der Segmente gleichverteilt sind. Der Cluster, der den Ursprung beinhaltet, ist analog zu Abbildung 4.1 blau eingefärbt.

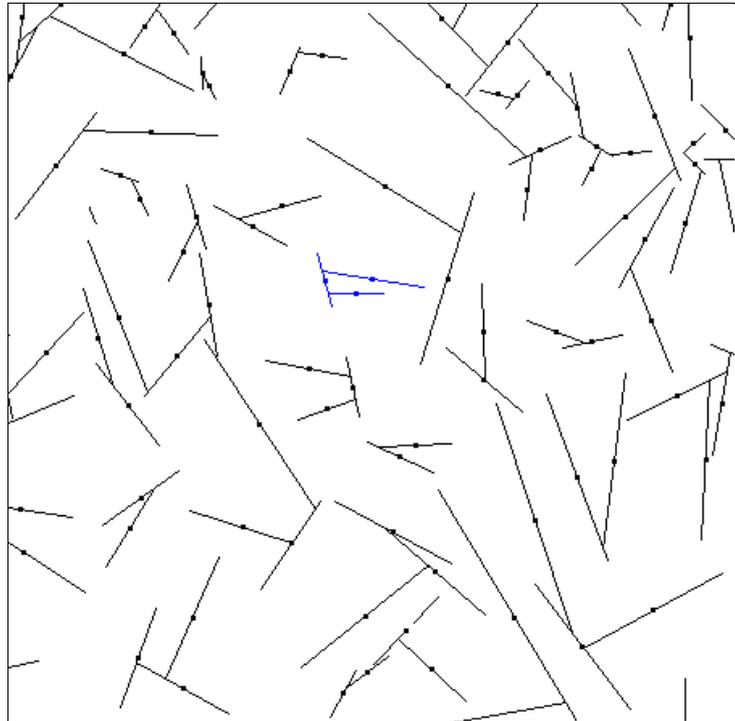


Abbildung 4.2: Ein Ausschnitt einer Realisierung eines kanonischen Liniensegmentmodells mit Extrapunkt im Ursprung und gleichverteilten Richtungen.

Wir beginnen mit einem Lemma über die Anzahl der stoppenden Nachbarn eines Punktes.

Lemma 4.2.1. *Sei $\varphi \in M_{\mathcal{L}}^0$ schnittpunkteindeutig und enthalte keine absteigende Kette. Dann besitzt jeder Punkt $(x, K) \in \varphi$ höchstens einen stoppenden Nachbarn.*

Beweis: Sei $(x, K) \in \varphi$. Der Beweis von Lemma 3.2.8 zeigt, dass für einen stoppenden Nachbarn $(y, L) \in \varphi \setminus \{(x, K)\}$ von $(x, K) \in \varphi$ die Gleichung $l(\varphi, x, K) = \max\{d_{xy}, d_{yx}\}$ gilt. Falls (x, K) einen weiteren stoppenden Nachbarn (z, A) besitzt, gilt für diesen $l(\varphi, x, K) =$

$\max\{d_{xz}, d_{zx}\}$. Damit erhalten wir $\max\{d_{xy}, d_{yx}\} = \max\{d_{xz}, d_{zx}\}$. Dies steht im Widerspruch zur Schnittpunkteindeutigkeit von φ . \square

Wir erinnern uns an Konstruktion und Notation des Graphens der Zusammenhangskomponenten eines wachstumsmaximalen Modells vom Beginn dieses Kapitels. Das nächste Lemma erhalten wir aufgrund von Lemma 4.2.1 direkt als deterministische Version von Lemma 4.1.4.

Lemma 4.2.2. *Sei $\varphi \in M_{\mathcal{L}}^0$ schnittpunkteindeutig und enthalte keine absteigende Kette. Dann enthält jede Komponente von $T(\varphi)$ höchstens ein Doublet.*

Der nächste Satz schließt verschiedene Arten unendlicher Cluster aus.

Satz 4.2.3. *Für das wachstumsmaximale Modell $T(\eta)$ gelten folgende drei Aussagen.*

1. *Es gibt keinen unendlichen Cluster, der genau ein Doublet enthält.*
2. *Es existiert kein unendlicher Cluster mit einem unendlich langen Liniensegment.*
3. *Jeder unendliche Cluster enthält genau ein Doublet.*

Beweis: Die erste Aussage haben wir bereits in Lemma 4.1.7 gezeigt. Da im zugehörigen Beweis nur die Stationarität des markierten Poissonprozesses und weder die spezielle Struktur des volldimensionalen Modells noch die Poissoneigenschaft verwendet werden, können wir den dort angegebenen Beweis ohne Modifikation übernehmen.

Die zweite Aussage können wir analog zur ersten zeigen, da jeder Cluster höchstens ein unendlich langes Liniensegment enthält. Für $\varphi \in M_{\mathcal{L}}^0$ müssen wir lediglich die Menge $A = A(\varphi)$ aller Punkte $(x, K) \in \varphi$, die lexikographisch kleinere Punkte eines Doublets sind, aus dem Beweis von Lemma 4.1.7 ersetzen. Statt A verwenden wir die Menge $A' := A'(\varphi)$ aller Punkte $(x, K) \in \varphi$, für die $l(\varphi, x, K) = \infty$ gilt, also die Punkte, deren Liniensegmente im zugehörigen wachstumsmaximalen Modell $T(\varphi)$ unendlich lang sind.

Für die dritte Aussage nehmen wir an, dass für die Konfiguration φ im wachstumsmaximalen Modell $T(\varphi)$ ein unendlicher Cluster existiert, der kein Doublet enthält. Dann existiert eine Folge verschiedener Punkte $(x_i, K_i)_{i \in \mathbb{N}_0} \in \varphi$ derart, dass (x_{i+1}, K_{i+1}) der stoppende Nachbar von (x_i, K_i) ist und daher

$$l(\varphi, x_i, K_i) = d_{i,i+1} \quad \text{und} \quad l(\varphi, x_i, K_i) > l(\varphi, x_{i+1}, K_{i+1}) > d_{i+1,i}$$

gelten. Daraus erhalten wir $d_{i,i+1} \geq d_{i+1,i}$. Sei B eine beschränkte Borelmenge und $s \leq t$. Wir definieren $E(n, s, t, B)$ als die Menge aller Konfigurationen, die jeweils $n+1$ verschiedene Punkte $(x_0, K_0), \dots, (x_n, K_n)$ enthalten, für die $x_0 \in B$ sowie

$$t \geq d_{01} \geq d_{12} \geq \dots \geq d_{n-1,n} \geq s, \quad l(\varphi, x_i, K_i) = d_{i,i+1}, \quad \text{und} \quad l(\varphi, x_{i+1}, K_{i+1}) \geq d_{i+1,i}$$

gelten. Weiter sei $E'(n, s, t, B)$ die Menge aller Konfigurationen, die jeweils $n+1$ verschiedene Punkte (x_i, K_i) , $0 \leq i \leq n$, enthalten, für die $x_0 \in B$ sowie

$$t \geq d_{01} \geq d_{12} \geq \dots \geq d_{n-1,n} \geq s \quad \text{und} \quad t \geq d_{i+1,i}, \quad 1 \leq i \leq n-1,$$

gelten. Es ergibt sich die Mengeninklusion

$$E(n, s, t, B) \subset E'(n, s, t, B).$$

Analog zum Beweis der Existenz des (zufälligen) kanonischen wachstumsmaximalen Liniensegmentmodells aus Abschnitt 3.2.3 reicht es aus zu zeigen, dass eine monoton wachsende Folge

$(t_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ reeller Zahlen mit $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i = \infty$ existiert, so dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(E'(n, t_i, t_{i+1}, B)) = 0$ für alle beschränkten $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ und alle $i \in \mathbb{N}_0$ ist. Wie in Abschnitt 3.2.3 beschränken wir $\mathbb{P}(E'(n, t_i, t_{i+1}, B))$ durch

$$\alpha^n \int \dots \int \mathbf{1}\{x_0 \in B\} \mathbf{1}\{t_{i+1} \geq d_{01} \geq d_{12} \geq \dots \geq d_{n-1,n} \geq t_i\} \\ \mathbf{1}\{t_{i+1} \geq d_{j+1,j}, 1 \leq j \leq n-1\} dx_0 \dots dx_n \mathbb{Q}(dK_0) \dots \mathbb{Q}(dK_n)$$

nach oben, wobei $\alpha > 0$ die Konstante aus (3.6) ist. Dies können wir zu

$$\alpha^n \int \dots \int \mathbf{1}\{x_0 \in B\} \mathbf{1}\{t_{i+1} \geq d_{01} \geq d_{12} \geq \dots \geq d_{n-2,n-1} \geq t_i\} \mathbf{1}\{t_{i+1} \geq d_{j+1,j}, 1 \leq j \leq n-2\} \\ \mathbf{1}\{t_{i+1} \geq d_{n-1,n} \geq t_i, t_i \geq d_{n,n-1}\} dx_0 \dots dx_n \mathbb{Q}(dK_0) \dots \mathbb{Q}(dK_n)$$

umformen. Der Integrand kann nun wie im Beweis von Lemma 3.2.18 mit Hilfe des Maximums geschrieben werden. Analog zum Beweis von Lemma 3.2.18 erhalten wir daraus, dass jeder Cluster fast sicher mindestens ein Doublet enthält. Mit Lemma 4.2.2 erhalten wir die dritte Behauptung. \square

Durch Kombination der drei Aussagen von Satz 4.2.3 sind wir in der Lage das Auftreten von unendlichen Clustern auszuschließen und gelangen damit zu dem zu Beginn des Abschnitts angekündigten Resultat.

Satz 4.2.4. *Das wachstumsmaximale Modell $T(\eta)$ enthält keinen unendlich großen Cluster.*

Auf das modifizierte Linienmodell kann der Beweis von Satz 4.2.3 nicht ohne weiteres übertragen werden. Ob das modifizierte ebenso wie das kanonische Liniensegmentmodell nicht perkoliert, bleibt ein offenes Problem. Die folgende Abbildung eines Ausschnitts eines modifizierten Linienmodells legt aber die Vermutung nahe, dass dieses Modell ebenfalls nicht perkoliert.

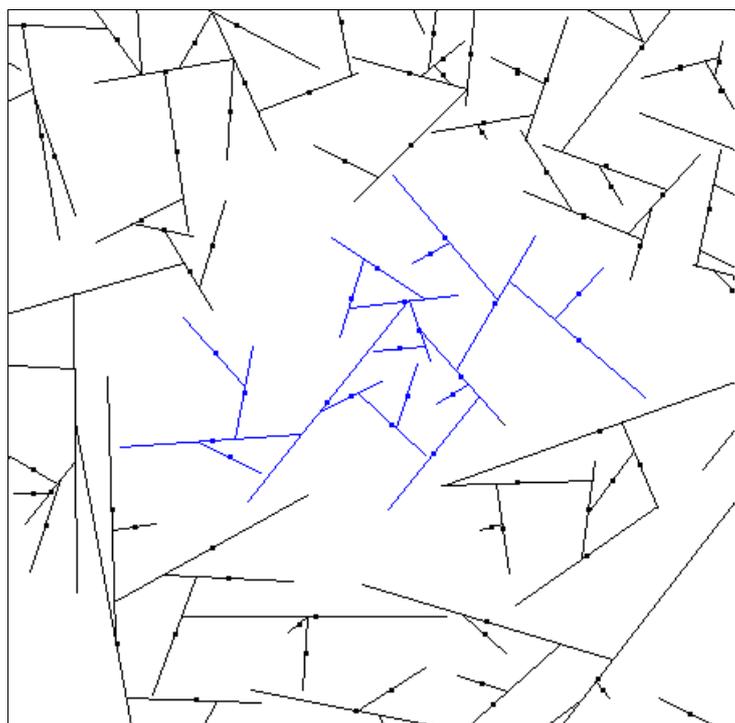


Abbildung 4.3: Ein Ausschnitt einer Realisierung eines modifizierten Liniensegmentmodells, basierend auf einem unabhängig markierten stationären Poissonprozess mit gleichverteilten Richtungen.

Kapitel 5

Grenzwertaussagen

In diesem Kapitel treffen wir Grenzwertaussagen für wachstumsmaximale Modelle, die alle die gleiche Startzeit aufweisen.

Bis zum Ende der Arbeit sei l die Funktion aus Definition 2.2.9 und T das zugehörige wachstumsmaximale Modell. Da $l(\varphi, \cdot)$ für alle abstandseindeutigen, markiert lokalendlichen φ , die keine absteigende Kette enthalten, wachstumsmaximal und für alle $\varphi \in M^0$ definiert ist, bezeichnen wir l im Folgenden als *die wachstumsmaximale Funktion*. Mit Hilfe der aus dem einführenden Abschnitt 1.1.2 gemachten Definition über die Einschränkung von Zählmaßen definieren wir

$$\varphi_A := \varphi_{A \times \mathcal{K}'_0} = \varphi \cap (A \times \mathcal{K}'_0), \quad \varphi \in M^0, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad (5.1)$$

also die Einschränkung, die lediglich auf die erste Komponente von φ wirkt. Im Folgenden werden wir Ausschnitte des wachstumsmaximalen Modells betrachten. Wir definieren die *Beobachtungsfenster* $W_1 := [-1/2, 1/2]^d$ und $W_n := n^{1/d}W_1$, $n \in \mathbb{N}$.

5.1 Mittelwerte, ein Ergodensatz und weitere probabilistische Eigenschaften

5.1.1 Einführende Bemerkungen

Sei $g : M^0 \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{K}'_0 \rightarrow \mathbb{R}_+$ messbar und translationsinvariant, d.h. es gelte

$$g(\varphi, x, K) = g(\varphi + y, x + y, K), \quad \varphi \in M^0, \quad x, y \in \mathbb{R}^d, \quad K \in \mathcal{K}'_0. \quad (5.2)$$

Beispiel 5.1.1. Die Funktion g ist ein Produkt aus dem i -ten Moment der wachstumsmaximalen Funktion l und einer translationsinvarianten Funktion $f : M^0 \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{K}'_0 \rightarrow \mathbb{R}_+$, also

$$g(\varphi, x, K) := l(\varphi, x, K)^i f(\varphi, x, K), \quad \varphi \in M^0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad K \in \mathcal{K}'_0, \quad (5.3)$$

Als wichtige Spezialfälle erhalten wir das Volumen

$$g_1(\varphi, x, K) := l(\varphi, x, K)^d \kappa_d \lambda_d(K), \quad \varphi \in M^0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad K \in \mathcal{K}'_0,$$

und die Oberfläche

$$g_2(\varphi, x, K) := l(\varphi, x, K)^{d-1} \mathcal{H}^{d-1}(\partial K), \quad \varphi \in M^0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad K \in \mathcal{K}'_0.$$

Für $\varphi \in M^0$ definieren wir ein Maß $\mu(\varphi) : A \mapsto \mu(\varphi, A)$ durch

$$\mu(\varphi, A) := \sum_{(x,K) \in \varphi} g(\varphi, x, K) \delta_x(A) = \sum_{x \in \varphi_A} g(\varphi, x, K). \quad (5.4)$$

Setzen wir g_1 ein, erhalten wir

$$\mu_1(\varphi, A) := \sum_{(x,K) \in \varphi_A} l(\varphi, x, K)^d \kappa_d \lambda_d(K), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

Wegen der Hard-Core-Eigenschaft (1.11) ergibt sich

$$\mu_1(\varphi, A) = \lambda_d \left(\bigcup_{(x,K) \in \varphi_A} l(\varphi, x, K)K \right), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad (5.5)$$

also das Gesamtvolumen aller Körner des wachstumsmaximalen Modells $T(\varphi)$ mit Mittelpunkt in A . Setzen wir g_2 in (5.4) ein, erhalten wir

$$\mu_2(\varphi, A) := \sum_{(x,K) \in \varphi_A} l(\varphi, x, K)^{d-1} \mathcal{H}^{d-1}(\partial K), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

Sofern die Schnittmengen zweier Körner des wachstumsmaximalen Modells $T(\varphi)$ höchstens Dimension $d - 2$ besitzen, ergibt sich

$$\mu_2(\varphi, A) = \mathcal{H}^{d-1} \left(\partial \left(\bigcup_{(x,K) \in \varphi_A} l(\varphi, x, K)K \right) \right), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad (5.6)$$

also die Oberfläche desjenigen Ausschnitts des wachstumsmaximalen Modells, der gebildet wird, wenn wir nur Körner mit Mittelpunkt in A betrachten. Hinreichend hierfür ist zum Beispiel die strikte Konvexität aller Primärkörner der Konfiguration φ , da sich zwei Nachbarn dann in genau einem Punkt berühren.

Beispiel 5.1.2. Auch die inneren Volumina V_i , $0 \leq i \leq n$, sind mit der in (5.3) und (5.4) eingeführten Konstruktion behandelbar. Wir behandeln zunächst den Fall $1 \leq i \leq n$. Den Fall $i = 0$ behandeln wir später gesondert. Sei also zunächst $1 \leq i \leq n$. Für das i -te innere Volumen wählen wir

$$g_{(i)}(\varphi, x, K) := V_i(l(\varphi, x, K)K), \quad 1 \leq i \leq n. \quad (5.7)$$

Die Translationsinvarianz (5.2) ergibt sich aus der Translationsinvarianz von V_i und l . In diesem Fall ist (5.4) gleich

$$\mu_{(i)}(\varphi, A) := \sum_{(x,K) \in \varphi_A} V_i(l(\varphi, x, K)K), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Fordern wir, dass sich je zwei benachbarte Körner höchstens in einem Punkt schneiden, wofür wie oben beschrieben die strikte Konvexität aller Primärkörner der Konfiguration φ hinreichend ist, so erhalten wir für $1 \leq i \leq n$ eine Aussage über das i -te innere Volumen der Vereinigungsmenge aller Körner mit Mittelpunkt in A . Denn aufgrund der Hard-Core-Bedingung (1.11) existiert zu jedem Paar $(x, K), (y, L) \in \varphi$ mit $(x, K) \neq (y, L)$ genau ein $z \in \mathbb{R}^d$ derart, dass

$$(x + l(\varphi, x, K)K) \cap (y + l(\varphi, y, L)L) = \{z\}.$$

Wegen $V_i(\{z\}) = 0$ für $1 \leq i \leq n$ und der Inklusions-Exklusions-Formel (siehe z.B. (14.48) in [26]) gilt für die inneren Volumina in diesem Fall

$$\mu_{(i)}(\varphi, A) = V_i \left(\bigcup_{(x,K) \in \varphi_A} l(\varphi, x, K)K \right), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Eine weitere interessante Wahl für die Funktion g ergibt sich aus dem zu $T(\varphi)$ gehörenden Graphen vom Beginn von Kapitel 4, der als Knotenmenge die Projektion ϕ der Konfiguration φ auf \mathbb{R}^d besitzt und in dem zwei Knoten $x, y \in \phi$ verbunden sind, wenn die zugehörigen Punkte $(x, K), (y, L) \in \varphi$ in $T(\varphi)$ Nachbarn sind. Für $x \in \phi$ ist dann der zu x gehörende Cluster $C(\varphi, x)$ die Menge der Knoten, die mit x in einer Komponente des Graphen liegen. Wir erinnern daran, dass ein Paar $(x, K) \neq (y, L)$ von Punkten aus φ Doublet heißt, falls (x, K) und (y, L) benachbart sind und für die wachstumsmaximale Funktion l die Gleichung $l(\varphi, x, K) = l(\varphi, y, L)$ gilt. Mit $m(C(\varphi, x))$ bezeichnen wir, falls existent, den lexikographisch kleinsten Punkt aller Punkte des Clusters $C(\varphi, x)$, die zu einem Doublet gehören. Setzen wir $g(\varphi, x, K) = \mathbf{1}\{x = m(C(\varphi, x))\}$, ergibt sich durch (5.4) das Zählmaß

$$D(\varphi, A) := \sum_{(x,K) \in \varphi_A} \mathbf{1}\{x = m(C(\varphi, x))\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d),$$

welches die Cluster repräsentiert, die einen lexikographisch kleinsten Doubletpunkt besitzen. Falls alle Cluster von $T(\varphi)$ genau ein Doublet enthalten, ist $D(\varphi)$ daher ein Zählmaß, welches die Cluster von $T(\varphi)$ repräsentiert. Darüber hinaus ist $D(\varphi)$ translationsinvariant, d.h. es gilt $D(\varphi + z) = D(\varphi) + z$, $z \in \mathbb{R}^d$.

Bemerkung 5.1.3. Wir betrachten nun noch das 0-te innere Volumen bzw. die sogenannte Euler-Charakteristik (siehe z.B. Seite 625 in [26]) für den Fall, dass alle Cluster von $T(\varphi)$ genau ein Doublet enthalten und der Schnitt von mehr als je zwei Körnern leer ist. Es sei $V_0(\varphi, A)$ die Euler-Charakteristik der Vereinigung aller Körner von $T(\varphi)$, deren zugehöriger Punkt im Clusterprozess seinen Mittelpunkt in $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ hat, also

$$V_0(\varphi, A) = \chi \left(\bigcup_{x \in \phi: m(C(\varphi, x)) \in A} (x + l(\varphi, x, K)K) \right), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d). \quad (5.8)$$

Aufgrund der Voraussetzung an die Schnitte vereinfacht sich die Inklusions-Exklusions Formel (siehe z.B. (14.48) in [26]) für $V_0(\varphi, A)$ und es ergibt sich, dass für $\varphi \in M^0$ die Euler-Charakteristik der Vereinigung aller Körner von $T(\varphi)$, deren zugehöriger Punkt im Clusterprozess seinen Mittelpunkt in $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ hat, durch $D(\varphi, A)$ gegeben ist. Sie entspricht also gerade der Zahl der Cluster, deren zugehöriger Punkt aus $D(\varphi)$ in $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ liegt. Ein stationärer markierter Poissonprozess η auf \mathbb{R}^d mit volldimensionalen, strikt konvexen Primärkörnern, dessen Markenverteilung (2.11) genügt, erfüllt nach Abschnitt 4.1 die hier an φ gestellten Voraussetzungen fast sicher.

5.1.2 Mittelwertformeln

Sei η ein stationärer markierter Punktprozess auf \mathbb{R}^d mit Markenraum \mathcal{K}'_0 . Wir geben zunächst eine allgemeine Mittelwertformel für den markierten Punktprozess $T(\eta)$ an, der das wachstumsmaximale Modell darstellt. Hierzu halten wir fest, dass das wachstumsmaximale Modell $T(\eta)$

stationär ist, wenn η stationär ist. $T(\eta)$ ist in diesem Fall ein stationärer markierter Punktprozess auf \mathbb{R}^d mit Markenraum $\mathcal{K}'_0 \times [0, \infty]$. Das Intensitätsmaß Θ_T von $T(\eta)$ hat daher die Form

$$\Theta_T(A \times B \times C) = \gamma \lambda(A) \mathbb{U}(B \times C), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad B \subset \mathcal{K}'_0, \quad C \in \mathcal{B}([0, \infty]),$$

wobei \mathbb{U} ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{K}'_0 \times [0, \infty]$ und γ die Intensität von η sei. Mit der Campbellschen Formel erhalten wir die letzte Gleichung in Integralform, d.h.

$$\mathbb{E} \left[\sum_{(x,K,l) \in T(\eta) \cap W_1 \times \mathcal{K}'_0 \times [0, \infty]} h(K, l(\eta, x, K)) \right] = \gamma \int h(K, l) \mathbb{U}(d(K, l)). \quad (5.9)$$

Für $\varphi \in \mathbb{M}^0$ definieren wir die $K(\varphi, x) := K$ und $l(\varphi, x) := l(\varphi, x, K)$, falls $(x, K) \in \varphi$. Ein nach \mathbb{U} verteiltes zufälliges Paar aus Primärkorn und Funktionswert der wachstumsmaximalen Funktion interpretieren wir als *typisches Korn* von $T(\eta)$. Es gilt

$$\mathbb{U}(\cdot) = \int \mathbf{1}\{(K(\varphi, 0), l(\varphi, 0)) \in \cdot\} \mathbb{P}^{0, \eta}(d\varphi),$$

Wählen wir $h(K, l) := l$, so erhalten wir mit (5.9) die Beziehung

$$\mathbb{E} \left[\sum_{(x,K,l) \in T(\eta) \cap W_1 \times \mathcal{K}'_0 \times [0, \infty]} l \right] = \gamma \int l \mathbb{U}(d(K, l)).$$

Das Integral der rechten Seite können wir als mittleren Wachstumsfunktionswert des typischen Kornes von $T(\eta)$ interpretieren. Wählen wir $h(K, l) := \lambda(lK)$, so erhalten wir

$$\mathbb{E} \left[\sum_{(x,K,l) \in T(\eta) \cap W_1 \times \mathcal{K}'_0 \times [0, \infty]} lK \right] = \gamma \int \lambda(lK) \mathbb{U}(d(K, l)). \quad (5.10)$$

Wegen der Hard-Core-Eigenschaft (1.11) handelt es sich hierbei um das Volumen aus (5.5). Es gilt

$$\mathbb{E}[\mu_1(\eta, W_1)] = \gamma \int \lambda(lK) \mathbb{U}(d(K, l)). \quad (5.11)$$

Das Integral der rechten Seite dieser Gleichung können wir als mittleres Volumen des typischen Kornes von $T(\eta)$ interpretieren. Für die erwartete Oberfläche $\mu_2(\eta, W_1)$ erhalten wir eine analoge Aussage.

Wir bringen nun den Erwartungswert $\mathbb{E}[\mu(\eta, W_1)]$ mit der Palmschen Verteilung von η in Verbindung. Mit Hilfe des verfeinerten Satzes von Campbell (vgl. (3.33) in [15]) gilt für $g : \mathbb{M}^0 \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{K}'_0 \rightarrow \mathbb{R}_+$ messbar

$$\mathbb{E}[\mu(\eta, W_1)] = \mathbb{E} \left[\sum_{(x,K) \in \eta} \rho(\eta, x, K, W_1) \right] = \iint g(\varphi + x, x, K(\varphi + x, x)) \mathbf{1}_{W_1}(x) dx \mathbb{P}^{0, \eta}(d\varphi).$$

Ist g zusätzlich translationsinvariant folgt

$$\mathbb{E}[\mu(\eta, W_1)] = \gamma \int g(\varphi, 0, K(\varphi, 0)) \mathbb{P}^{0, \eta}(d\varphi). \quad (5.12)$$

Bemerkung 5.1.4. Mit der letzten Gleichung erhalten wir für den Punktprozess $D(\eta)$ eine Darstellung seiner Intensität γ_D . Es gilt

$$\gamma_D = \gamma \mathbb{P}^{0,\eta}(\{\varphi \in \mathbb{M}^0 : 0 \in D(\varphi)\}). \quad (5.13)$$

Bemerkung 5.1.5. Falls η insbesondere ein stationärer markierter Poissonprozess ist, folgern wir aus (5.12) und (5.13) mit Hilfe des Satzes von Slivnyak (siehe z.B. Theorem 3.5.9 in [26])

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mu(\eta, W_1)] &= \gamma \mathbb{E}(g(\eta^{(0,Z_0)}, 0, Z_0)), \\ \gamma_D &= \gamma \mathbb{P}(0 \in D(\eta^{(0,Z_0)})), \end{aligned}$$

wobei Z_0 ein nach der Markenverteilung von η verteiltes und von η unabhängiges Primärkorn ist.

5.1.3 Ein Ergodensatz

Es sei $(\varphi, x, K) \rightarrow \rho(\varphi, x, K, A)$ ein Kern von $\mathbb{M}^0 \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{K}'_0$ nach \mathbb{R}^d , d.h. für jede Borelmenge A ist die Abbildung $(\varphi, x, K) \mapsto \rho(\varphi, x, K, A)$ messbar und für jedes $\varphi \in \mathbb{M}^0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $K \in \mathcal{K}'_0$ ist die Funktion $\rho(\varphi, x, K) := \rho(\varphi, x, K, \cdot)$ ein σ -endliches Maß. Außerdem sei ρ translationsinvariant, d.h. für alle $\varphi \in \mathbb{M}^0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $K \in \mathcal{K}'_0$ und $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$\rho(\varphi, x, K, A) = \rho(\varphi + y, x + y, K, A + y), \quad y \in \mathbb{R}^d. \quad (5.14)$$

Für ρ und $\varphi \in \mathbb{M}^0$ definieren wir das Maß $\mu(\varphi) : A \mapsto \mu(\varphi, A)$ durch

$$\mu(\varphi, A) := \sum_{(x,K) \in \varphi} \rho(\varphi, x, K, A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d),$$

und fordern, dass $\mu(\varphi)$ lokalendlich ist. Weiter sei η ein stationärer markierter Punktprozess auf \mathbb{R}^d mit Markenraum \mathcal{K}'_0 und Intensität $\gamma > 0$.

Wir formulieren einen Ergodensatz für das zu η gehörende zufällige Maß $\mu(\eta)$. Dies gibt uns die Möglichkeit, mit den Ergebnissen aus dem letzten Abschnitt weitere Interpretationen der dort angegebenen Mittelwerte zu erhalten. Wir zeigen zunächst folgendes Lemma.

Lemma 5.1.6. *Das zufällige Maß $\mu(\eta)$ ist stationär.*

Beweis: Für $\varphi \in \mathbb{M}^0$, $y \in \mathbb{R}^d$ und $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$\begin{aligned} \mu(\varphi, A + y) &= \sum_{(x,K) \in \varphi} \rho(\varphi, x, K, A + y) = \sum_{(x,K) \in \varphi} \rho(\varphi - y, x - y, K, A) \\ &= \sum_{(x,K) \in \varphi - y} \rho(\varphi - y, x, K, A) = \mu(\varphi - y, A), \end{aligned}$$

wobei wir in der zweiten Gleichung die Translationsinvarianz (5.14) von ρ ausgenutzt haben. Mit Lemma 1.1.24 erhalten wir die Aussage des Lemmas. \square

Wir erinnern an die Definition $\mathcal{I}_{\mu(\eta)} := \mu(\eta)^{-1} \mathcal{I}$ aus Abschnitt 1.1.5 sowie die Beobachtungsfenster $W_1 = [-1/2, 1/2]^d$ und $W_n = n^{1/d} W_1$, $n \in \mathbb{N}$. Wir formulieren nun einen Ergodensatz für $\mu(\eta)$, der sich als Spezialfall von Corollary 10.19 aus [13] ergibt.

Satz 5.1.7. *Für das zufällige Maß $\mu(\eta)$ gilt*

$$\frac{\mu(\eta, W_n)}{n} \xrightarrow{f.s.} \mathbb{E} [\mu(\eta, W_1) | \mathcal{I}_{\mu(\eta)}], \quad n \rightarrow \infty. \quad (5.15)$$

Beweis: Aufgrund von Lemma 5.1.6 ist $\mu(\eta)$ ein stationäres zufälliges Maß auf \mathbb{R}^d . Die aufsteigende Folge $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ erfüllt die Voraussetzungen von Corollary 10.19 aus [13]. Daher können wir das Resultat verwenden und erhalten direkt unsere Behauptung. \square

Wir erkennen, dass der Grenzwert in Gleichung (5.15) ein gewöhnlicher Erwartungswert ist, falls $\mu(\eta)$ ergodisch ist. Er ist dann deterministisch und es gilt

$$\mathbb{E} [\mu(\eta, W_1) | \mathcal{I}_{\mu(\eta)}] \stackrel{f.s.}{=} \mathbb{E} [\mu(\eta, W_1)]. \quad (5.16)$$

Damit $\mu(\eta)$ ergodisch ist, reicht es wegen Lemma 1.1.20 zu fordern, dass η ergodisch ist. Dass $\mu(\eta)$ die dort geforderte Gleichung (1.8) erfüllt, sehen wir direkt mit dem Beweis der Stationarität von $\mu(\eta)$ aus Lemma 5.1.6, wenn wir $(\mu(\varphi) - y)(A) = \mu(\varphi, A + y)$ für alle $y \in \mathbb{R}^d$ beachten. Somit erhalten wir folgendes Resultat.

Satz 5.1.8. *Sei η ergodisch und $h : \mathcal{K}'_0 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ messbar. Dann gilt*

$$\frac{1}{n} \sum_{(x,K,l) \in T(\eta) \cap W_n \times \mathcal{K}'_0 \times [0, \infty]} h(K, l) \xrightarrow{f.s.} \gamma \int h(K, l) \mathbb{U}(d(K, l)), \quad n \rightarrow \infty.$$

Beweis: Sei $\varphi \in M^0$. Wir setzen

$$\rho(\varphi, x, K, A) = h(K, l(\varphi, x, K)) \delta_x(A), \quad x \in \mathbb{R}^d, K \in \mathcal{K}'_0,$$

und erhalten

$$\mu(\varphi, A) = \sum_{(x,K) \in \varphi_A} h(K, l(\eta, x, K)), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d). \quad (5.17)$$

Da η ergodisch ist, ergibt sich mit Satz 5.1.7 und (5.16) sowie (5.9) die Behauptung. \square

Bemerkung 5.1.9. Insbesondere ergeben sich aus diesem Satz für $h(K, L) = l$ und $h(K, l) = \lambda(lK)$ die zu (5.10) und (5.11) analogen Aussagen

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{(x,K,l) \in T(\eta) \cap W_n \times \mathcal{K}'_0 \times [0, \infty]} l &\xrightarrow{f.s.} \gamma \int l \mathbb{U}(d(K, l)), \quad n \rightarrow \infty, \\ \frac{1}{n} \sum_{(x,K,l) \in T(\eta) \cap W_n \times \mathcal{K}'_0 \times [0, \infty]} \lambda(lK) &\xrightarrow{f.s.} \gamma \int \lambda(lK) \mathbb{U}(d(K, l)), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Bemerkung 5.1.10. Angewendet auf den Prozess $D(\eta)$ bedeutet Satz 5.1.7, sofern η ergodisch ist,

$$\frac{D(\eta, W_n)}{n} \xrightarrow{f.s.} \gamma_D, \quad n \rightarrow \infty.$$

Bemerkung 5.1.11. Aufgrund von Bemerkung 5.1.3 und Bemerkung 5.1.10 erhalten wir, falls η ein stationärer Poissonprozess mit volldimensionalen, strikt konvexen Körnern ist, dass γ_D der fast sichere Grenzwert von $(1/n)V_0(\eta, W_n)$, $n \rightarrow \infty$, mit $V_0(\eta, A)$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, aus (5.8) ist. Die Intensität des Prozesses der Cluster γ_D entspricht damit also der mittleren Euler-Charakteristik $\mathbb{E}V_0(\eta, W_1)$.

Bemerkung 5.1.12. Wir wollen an dieser Stelle noch anmerken, dass die eben vorgestellte Methode nicht die einzige Möglichkeit ist, Ergodensätze für wachstumsmaximale Modelle zu formulieren. Wir verweisen auf [22] und wollen kurz auf den grundsätzlichen Unterschied beider

Ansätze eingehen. In dem von uns diskutierten Rahmen wird zuerst zu einer Konfiguration $\varphi \in M^0$ das wachstumsmaximale Modell $T(\varphi)$ gebildet. Anschließend addieren wir die Beiträge der einzelnen Körnern auf, sofern sich der Punkt x des Paares (x, K) im Fenster W_n , $n \in \mathbb{N}$, befindet. Danach vollziehen wir den Grenzübergang für $n \rightarrow \infty$. In dem in [22] vorgestellten Szenario bildet man für eine aufsteigende Folge von Konfigurationen (φ_{W_n}) , $n \in \mathbb{N}$, das wachstumsmaximale Modell $T(\varphi_{W_n})$, $n \in \mathbb{N}$, und addiert die Beiträge aller Punkte von φ_{W_n} auf. Der Grenzübergang erfolgt hier ebenfalls für $n \rightarrow \infty$. Beide Ansätze untersuchen also unterschiedliche Größen. Im ersten Fall basieren die betrachteten Größen für jedes $n \in \mathbb{N}$ auf dem wachstumsmaximalen Modell $T(\varphi)$. Im zweiten Fall basieren sie im n -ten Schritt auf dem wachstumsmaximalen Modell $T(\varphi_{W_n})$. Beide Ansätze sollten jedoch die gleichen Ergebnisse liefern.

5.1.4 Eine Palmische Gleichung für die Cluster

In diesem Unterabschnitt geben wir eine Gleichung für die Cluster wachstumsmaximaler Modelle an. Hierfür verwenden wir Ergebnisse der Palmtheorie sowie die Austauschformel von Neveu (siehe [15] und [17]).

Es sei η ein stationärer markierter Punktprozess mit Intensität γ_η . Wir erinnern uns an die Projektion ξ des Punktprozesses η auf die erste Komponente. Die Intensität γ_ξ von ξ ist gleich der Intensität γ_η von η . Wir nehmen weiter an, dass jeder Cluster von η fast sicher genau ein Doublet besitzt. In Abschnitt 4.1 und 4.2 finden sich hinreichende Voraussetzungen, die wir an η stellen müssen, damit diese Annahme erfüllt ist. Wir schreiben kurz $\Xi := D(\eta)$ für den stationären Punktprozess im \mathbb{R}^d , der in diesem Fall die Cluster repräsentiert. Die Intensität von Ξ sei γ_Ξ .

Wir formulieren nun einen Zusammenhang zwischen den Palmischen Verteilungen $\mathbb{P}^{0,\xi}$ und $\mathbb{P}^{0,\Xi}$ von ξ und Ξ . Wir erinnern wir daran, dass unter der Palmischen Verteilung von ξ bzw. Ξ fast sicher $0 \in \xi$ bzw. $0 \in \Xi$ gilt.

Satz 5.1.13. *Sei $g : N_Z(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}_+$ messbar und translationsinvariant. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \int g(C(\varphi, 0)) \mathbb{P}^{0,\xi}(d\varphi) &= \frac{\gamma_\Xi}{\gamma_\xi} \int g(C(\varphi, 0)) \text{card}(C(\varphi, 0)) \mathbb{P}^{0,\Xi}(d\varphi), \\ \frac{\gamma_\xi}{\gamma_\Xi} &= \int \text{card}(C(\varphi, 0)) \mathbb{P}^{0,\Xi}(d\varphi). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Beweis: Da jeder Punkt in genau einem Cluster enthalten ist, ergibt sich

$$\int g(C(\varphi, 0)) \mathbb{P}^{0,\xi}(d\varphi) = \iint g(C(\varphi, x)) \mathbf{1}\{0 \in C(\varphi, x)\} D(\varphi)(dx) \mathbb{P}^{0,\xi}(d\varphi).$$

Mit Hilfe der Austauschformel von Neveu (Theorem 3.6 aus [17]), angewendet auf die Funktion $f(\varphi, x) = g(C(\varphi, x)) \mathbf{1}\{0 \in C(\varphi, x)\}$ und den Fluss $\{\varphi - x, x \in \mathbb{R}^d\}$, erhalten wir

$$\int g(C(\varphi, 0)) \mathbb{P}^{0,\xi}(d\varphi) = \frac{\gamma_\Xi}{\gamma_\xi} \iint g(C(\varphi - x, -x)) \mathbf{1}\{0 \in C(\varphi - x, -x)\} p(\varphi)(dx) \mathbb{P}^{0,\Xi}(d\varphi),$$

wobei $p(\varphi)$ die Projektion von φ auf die erste Komponente bezeichnet. Da $0 \in C(\varphi - x, -x)$ äquivalent zu $x \in C(\varphi, 0)$ ist, ergibt sich unter Verwendung der Translationsinvarianz von g

$$\begin{aligned} \int g(C(\varphi, 0)) \mathbb{P}^{0,\xi}(d\varphi) &= \frac{\gamma_\Xi}{\gamma_\xi} \iint g(C(\varphi, 0)) \mathbf{1}\{x \in C(\varphi, 0)\} \xi(dx) \mathbb{P}^{0,\Xi}(d\varphi) \\ &= \frac{\gamma_\Xi}{\gamma_\xi} \int g(C(\varphi, 0)) \text{card}(C(\varphi, 0)) \mathbb{P}^{0,\Xi}(d\varphi). \end{aligned}$$

Somit haben wir (5.18) nachgewiesen. Setzen wir $g \equiv 1$, erhalten wir

$$1 = \frac{\gamma_{\Xi}}{\gamma_{\xi}} \int \text{card}(C(\varphi, 0)) \mathbb{P}^{0, \Xi}(d\varphi)$$

und damit auch die zweite Behauptung des Satzes. \square

5.1.5 Tail-Verhalten der wachstumsmaximalen Funktion

Es sei η ein stationärer markierter Poissonprozess auf \mathbb{R}^d mit Markenraum \mathcal{K}'_0 und Markenverteilung \mathbb{Q} sowie Intensität 1. Weiter bezeichne Z_0 ein nach \mathbb{Q} verteiltes und von η unabhängiges Primärkorn. Wir nennen Z_0 das *typische Primärkorn* von η . Für $\varphi \in M^0$ und $(x, K) \in \mathbb{R}^d \times \mathcal{K}'_0$ schreiben wir $\varphi^{(x, K)} := \varphi \cup \{(x, K)\}$. Darüber hinaus verwenden wir für den *typischen Wachstumsfunktionswert* die Abkürzung $l^0 := l(\eta^{(0, Z_0)}, 0, Z_0)$.

Wir untersuchen zuerst das Tail-Verhalten der wachstumsmaximalen Funktion l . Danach geben wir eine untere Schranke für die Wahrscheinlichkeit eines Doublets an.

Satz 5.1.14. *Es gilt*

$$\mathbb{P}(l^0 > t) \leq \mathbb{E}[\exp(-t^d \lambda(Z_0))], \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (5.19)$$

Beweis: Aufgrund der Hard-Core-Eigenschaft gilt die Abschätzung

$$\mathbb{P}(l^0 > t) \leq \mathbb{P}(\eta(tZ_0 \times \mathcal{K}'_0) = 0).$$

Berechnen wir die rechte Seite dieser Ungleichung, erhalten wir

$$\mathbb{P}(l^0 > t) \leq \mathbb{E}[\exp(-t^d \lambda(Z_0))]. \quad \square$$

Für niederdimensionale Markenverteilungen ist (5.19) trivial und liefert keine Aussage. Auf den Fall von Liniensegmentmodellen werden wir daher später genauer eingehen. Zunächst betrachten wir konkrete volldimensionale Markenverteilungen und berechnen für diese die rechte Seite von (5.19). Eine Zufallsvariable X wird *stochastisch kleiner* als eine Zufallsvariable Y genannt, falls für alle monoton wachsenden Funktionen f , für die $\mathbb{E}f(X)$ und $\mathbb{E}f(Y)$ existieren, die Ungleichung $\mathbb{E}f(X) \leq \mathbb{E}f(Y)$ gilt (siehe Abschnitt 1.2 in [20]). Wir schreiben dafür kurz $X \leq_d Y$.

Satz 5.1.15. *Sei X eine gamma-verteilte Zufallsvariable mit Parametern α und β . Weiter sei $X \leq_d \lambda(Z_0)$. Dann gilt*

$$\mathbb{P}(l^0 > t) \leq \frac{\beta^\alpha}{(t^d + \beta)^\alpha}, \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (5.20)$$

Beweis: Aufgrund von Satz 5.1.14 gilt

$$\mathbb{P}(l^0 > t) \leq \mathbb{E}[\exp(-t^d \lambda(Z_0))].$$

Da das Volumen des typischen Primärkorns $\lambda(Z_0)$ stochastisch größer als X ist, folgt

$$\mathbb{P}(l^0 > t) \leq \mathbb{E}[\exp(-t^d X)].$$

Damit berechnen wir

$$\mathbb{P}(l^0 > t) \leq \int_0^\infty \exp(-t^d X) \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-\beta x) dx = \frac{\beta^\alpha}{(t^d + \beta)^\alpha}.$$

Damit ist die Abschätzung gezeigt. \square

Bemerkung 5.1.16. Setzen wir in Satz 5.1.15 $\alpha = 1$, so ist X exponentialverteilt. Gleichung (5.20) wird dann zu

$$\mathbb{P}(l^0 > t) \leq \frac{\beta}{t^d + \beta}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Bemerkung 5.1.17. Falls das Volumen $\lambda(Z_0)$ des typischen Primärkorns fast sicher nach unten durch eine Konstante $c > 0$ beschränkt ist, erhalten wir aus (5.19) für den Tail von l^0 die Ungleichung $\mathbb{P}(l^0 > t) \leq \exp(-ct^d)$, $t \in \mathbb{R}_+$. Diese Ungleichung gilt insbesondere für das klassische Lilypond-Modell.

Mit Hilfe einer Zusatzvoraussetzung können wir die Tail-Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(l^0 > t)$ auch nach unten abschätzen.

Satz 5.1.18. *Es existiere eine Konstante $c > 0$ derart, dass fast sicher $Z_0 \subset B(0, c)$ gilt. Dann folgt*

$$\mathbb{P}(l^0 > t) \geq \exp(-2c\kappa_d t^d), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Beweis: Nach Konstruktion der wachstumsmaximalen Funktion l gilt

$$\mathbb{P}(l^0 > t) \geq \mathbb{P}(\eta(B(0, 2ct) \times \mathcal{K}'_0) = 0).$$

Da η ein stationärer Poissonprozess ist, folgt $\mathbb{P}(l^0 > t) \geq \exp(-2c\kappa_d t^d)$. □

Bemerkung 5.1.19. Mit Hilfe dieses Satzes und Bemerkung 5.1.17 können wir im klassischen Lilypond-Modell die Größenordnung der Abnahme von $\mathbb{P}(l^0 > t)$ für $t \rightarrow \infty$ quantifizieren. Mit geeignet gewählten Konstanten $\alpha, \beta > 0$ gilt

$$\exp(-\alpha t^d) \leq \mathbb{P}(l^0 > t) \leq \exp(-\beta t^d).$$

Wie bereits angekündigt, wenden wir uns nun unseren beiden Liniensegmentmodellen zu. Wir erinnern an die Menge \mathcal{L}'_0 der Liniensegmente der Länge 2 im \mathbb{R}^2 mit Mittelpunkt im Ursprung und die Menge $M_{\mathcal{L}}^0$ der Konfigurationen $\varphi \in M^0$ für die $K \in \mathcal{L}'_0$ für alle $(x, K) \in \varphi$ gilt.

Bemerkung 5.1.20. Im nachfolgenden Satz setzen wir voraus, dass Z_0 gleichverteilt auf \mathcal{L}'_0 ist. Der zugehörige Beweis lässt sich jedoch für jede beliebige nicht entartete Verteilung geeignet modifizieren.

Satz 5.1.21. *Es sei Z_0 auf \mathcal{L}'_0 gleichverteilt. Dann gilt, mit geeignet gewählten Konstanten $\alpha, \beta > 0$, sowohl im kanonischen als auch im modifizierten Liniensegmentmodell*

$$\mathbb{P}(l^0 > t) \leq \alpha \exp(-\beta t^d).$$

Beweis: Die nachfolgende Argumentation lässt sich auf beide Typen von Liniensegmentmodellen anwenden. Wir müssen daher nicht zwischen den beiden Modellen unterscheiden.

Sei $\varphi \in M_{\mathcal{L}}^0$. Wir untersuchen zunächst die Größe $l(\varphi \cup \{(0, L)\})$, wobei L die Strecke von Punkt $(0, -1)$ zu Punkt $(0, 1)$ sei, also das Liniensegment der Länge 2, welches im Koordinatensystem des \mathbb{R}^2 entlang der vertikalen Achse wächst. Wir definieren für $i \in \mathbb{N}$ die Rechtecke

$$A_i := [-(2 + \sqrt{2}), (2 + \sqrt{2})] \times [(2i - 1)(2\sqrt{2} + 1) - (2\sqrt{2} + 1), (2i - 1)(2\sqrt{2} + 1) + (2\sqrt{2} + 1)]$$

und

$$B_i := [-1, 1] \times [(2i - 1)(2\sqrt{2} + 1) - 1, (2i - 1)(2\sqrt{2} + 1) + 1].$$

Weiter sei $C_i := A_i \setminus B_i$ für $i \in \mathbb{N}$. Nach Konstruktion sind die Mengen A_i , $i \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt. Anschaulich gesprochen, pflastern wir also den \mathbb{R}^2 entlang einer Wachstumsrichtung des Segmentes L mit großen Rechtecken A_i , in die wir kleine Rechtecke B_i zentriert hineinlegen.

Die Abbildung $\epsilon(K) : \mathcal{L}'_0 \rightarrow (-\pi/2, \pi/2]$ ordnet jedem Liniensegment $K \in \mathcal{L}'_0$ den Winkel des Liniensegments zur horizontalen Achse des Koordinatensystems des \mathbb{R}^2 im Bogenmaß gemessen zu. Für das oben eingeführte Segment L gilt daher $\epsilon(L) = \pi/2$. Wir definieren für $i \in \mathbb{N}$ die Mengen

$$D_i := \{(x, K) \in \mathbb{R}^2 \times \mathcal{L}'_0 : x \in B_i, \epsilon(K) \in [-\pi/4, \pi/4]\}$$

und

$$E_i := \{\varphi \in M^0 : \varphi(D_i) = 1, \varphi(C_i \times \mathcal{L}'_0) = 0\}.$$

Für $\varphi \in E_i$ bedeutet dies, dass φ genau einen Punkt in B_i besitzt, dessen zugehöriges Liniensegment einen Winkel in $[-\pi/4, \pi/4]$ hat und darüber hinaus keinen Punkt in der Differenz C_i der Rechtecke A_i und B_i besitzt. Für unsere beiden Liniensegmentmodell bedeutet dies nach Konstruktion, dass für $\varphi \in M^0$ mit $\varphi \in \bigcup_{j=1}^i E_j$ die Aussage $l(\varphi \cup \{(0, L)\}, 0, L) \leq (2i - 1)(2\sqrt{2} + 1) + (\sqrt{2} + 1)$ erfüllt ist. Mit $n(i) := (2i - 1)(2\sqrt{2} + 1) + (\sqrt{2} + 1)$ erhalten wir

$$\mathbb{P}(l(\eta \cup \{(0, L)\}, 0, L) > n(i)) \leq \mathbb{P}(\eta \notin \bigcup_{j=1}^i E_j). \quad (5.21)$$

Die oben verwendete Konstruktion lässt sich für jedes Liniensegment $(0, K) \in \mathbb{R}^2 \times \mathcal{L}'_0$ durchführen. Die Mengen A_i und B_i müssen lediglich in eine Wachstumsrichtung von K gedreht werden. Mit der Rotationsinvarianz von η und Gleichung (5.21) ergibt sich daher für alle $K \in \mathcal{L}'_0$, d.h. es gilt

$$\mathbb{P}(l(\eta \cup \{(0, K)\}, 0, K) > n(i)) \leq \mathbb{P}(\eta \notin \bigcup_{j=1}^i E_j), \quad K \in \mathcal{L}'_0.$$

Da Z_0 nach Voraussetzung auf \mathcal{L}'_0 konzentriert ist, folgt

$$\mathbb{P}(l^0, 0, Z_0) > n(i) = \mathbb{P}(\eta \notin \bigcup_{j=1}^i E_j).$$

Wir untersuchen nun die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(\eta \notin \bigcup_{j=1}^i E_j)$. Da η ein stationärer Poissonprozess mit der Gleichverteilung als Markenverteilung ist, existiert ein $p > 0$ derart, dass $\mathbb{P}(\eta \in E_j) = p$, $j \in \mathbb{N}$, gilt. Des Weiteren sind die Ereignisse E_j , $j \in \mathbb{N}$, unabhängig. Daher gilt

$$\mathbb{P}(\eta \notin \bigcup_{j=1}^i E_j) = \mathbb{P}(\eta \in \bigcap_{j=1}^i E_j^c) = (1 - p)^i = \exp(-\ln(1 - p)i).$$

Dieser Ausdruck fällt exponentiell in i . Wegen $n(i) \leq 2i(2\sqrt{2} + 1)$ erhalten wir

$$\mathbb{P}(l^0 > 2i(2\sqrt{2} + 1)) \leq \mathbb{P}(l^0 > n(i)) \leq \exp(-\ln(1 - p)i)$$

für $i \in \mathbb{N}$. Hieraus folgt

$$\mathbb{P}(l^0 > i) \leq \exp\left(-\frac{\ln(1 - p)}{2(2\sqrt{2} + 1)}i\right), \quad i \in \mathbb{N},$$

und daraus die Aussage für $t \in \mathbb{R}_+$. □

Bemerkung 5.1.22. Für das Gilbert-Modell aus [28] gilt die gleiche Aussage. Der dort gegebene Beweis verwendet dieselben Argumente wie der hier angegebene.

Wie zu Beginn des Abschnitts angekündigt, machen wir nun noch eine Aussage zur Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Doublets. Hierfür erinnern wir an die Größe $a(x, K, y, L)$ für $(x, K), (y, L) \in \mathbb{R}^d \times \mathcal{K}'_0$ aus Definition 2.2.3 und die Definition des Begriffs „nächster Nachbar“. Für $(x, K), (y, L) \in \mathbb{R}^d \times \mathcal{K}'_0$ ist

$$a(x, K, y, L) = \inf\{r \geq 0 : (x + rK) \cap (y + rL) \neq \emptyset\}.$$

und einen Punkt $(y, L) \in \varphi \in \mathbb{M}^0$ nennen wir nächster Nachbar von $(x, K) \in \varphi \in \mathbb{M}^0$, falls

$$a(x, K, y, L) = \min\{a(x, K, z, A) : (z, A) \in \varphi \setminus \{(x, K)\}\}$$

gilt.

Die folgende Beziehung wurde für das klassische Lilypond-Modell bereits in Abschnitt 2.1 von [4] erwähnt.

Satz 5.1.23. *Sei $\varphi \in \mathbb{M}^0$ abstandseindeutig, markiert lokalendlich und enthalte keine absteigende Kette. Dann bildet jedes Paar wechselseitig nächster Nachbarn von φ ein Doublet in $T(\varphi)$.*

Beweis: Die Aussage ergibt sich direkt aus dem ersten Schritt des im Beweis von Satz 2.2.8 verwendeten Algorithmus. Jedes Paar wechselseitig nächster Nachbarn wird dort in ein Doublet verwandelt. \square

Korollar 5.1.24. *Es gilt*

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}((0, Z_0) \text{ gehört zu einem Doublet von } T(\eta^{(0, Z_0)})) \\ & \geq \mathbb{P}((0, Z_0) \text{ gehört zu einem Paar wechselseitig nächster Nachbarn von } \eta^{(0, Z_0)}). \end{aligned} \quad (5.22)$$

Für das klassische Lilypond-Modell, d.h. falls das typische Primärkorn fast sicher die Einheitskugel ist, wurde die rechte Seite von (5.22) in Abschnitt 4 von [5] untersucht und exakt angegeben. Für $d = 2$ ist beispielsweise

$$\mathbb{P}((0, B(0, 1)) \text{ gehört zu einem Paar w. n. N. von } \eta^{(0, B(0, 1))}) = \frac{1}{\frac{4}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi}} \approx 0,62.$$

Mit Satz 5.1.24 erhalten wir also

$$\mathbb{P}((0, B(0, 1)) \text{ gehört zu einem Doublet von } T(\eta^{(0, B(0, 1))})) \geq \frac{1}{\frac{4}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi}}. \quad (5.23)$$

5.1.6 Simulationen

In diesem Abschnitt stellen wir Simulationsergebnisse zur Länge der wachstumsmaximalen Funktion sowie zur Clustergröße vor. Zum Ersten simulieren wir das klassische Lilypond-Modell, das auf einem stationären markierten Poissonprozess auf \mathbb{R}^2 mit Intensität 1 beruht und in dem alle Primärkörner Einheitskugeln und alle Startzeiten 0 sind. Zusätzlich hierzu simulieren wir drei dynamische Modifikationen dieses Modells, d.h. drei wachstumsmaximale Modelle, deren Primärkörner Einheitskugeln und deren Zeitmarken gleichverteilt auf $(0, 1/2)$, $(0, 1)$ oder $(0, 2)$ sind. Diese Modelle nennen wir *dynamische Lilypond-Modelle*. Zweitens untersuchen wir das kanonische Liniensegmentmodell aus Abschnitt 3.2, wobei wir einen stationären Poissonprozess auf \mathbb{R}^2 mit Markenraum \mathcal{L}'_0 und Intensität 1 mit Hilfe einer Gleichverteilung unabhängig markieren.

Drittens betrachten wir das modifizierte Liniensegmentmodell aus Abschnitt 3.3. Wie das kanonische Liniensegmentmodell soll auch das modifizierte auf einem stationären Poissonprozess auf \mathbb{R}^2 mit Intensität 1, den wir mit Hilfe einer Gleichverteilung unabhängig markieren, basieren. Darüber hinaus verwenden wir in diesem Abschnitt für die Einheitskugel die Abkürzung $B := B(0, 1)$ und erinnern an l^0 und Z_0 aus dem letzten Unterabschnitt. Außerdem führen wir die Kurzschreibweise $C^0 := C(\eta^{(0, Z_0)}, 0, Z_0)$ ein.

Alle Ergebnisse beruhen auf jeweils 10000 Wiederholungen je beschriebenen Zufallsexperiment. Da es nicht möglich ist, einen stationären Poissonprozess auf dem ganzen \mathbb{R}^2 zu simulieren, verwenden wir für unsere Aussagen nicht das wachstumsmaximale Modell $T(\eta^{(0, Z_0)})$, sondern die Approximation $T(\eta^{(0, Z_0)} \cap B(0, 10) \times \mathcal{K}'_0)$, wobei η den jeweiligen markierten Poissonprozess bezeichnet.

Die Ergebnisse aus Abschnitt 5.2 und [16] rechtfertigen diese Approximation insbesondere für das klassische Lilypond-Modell. In anderen Fällen setzen wir eine derartige Stabilisierungseigenschaft implizit voraus.

Wir beginnen mit einem Vergleich des Tails $\mathbb{P}(l^0 > t)$, $t \geq 0$, der (empirischen) Verteilungsfunktion der wachstumsmaximalen Funktion im klassischen Lilypond-Modell mit dem im kanonischen sowie dem im modifizierten Liniensegmentmodell.

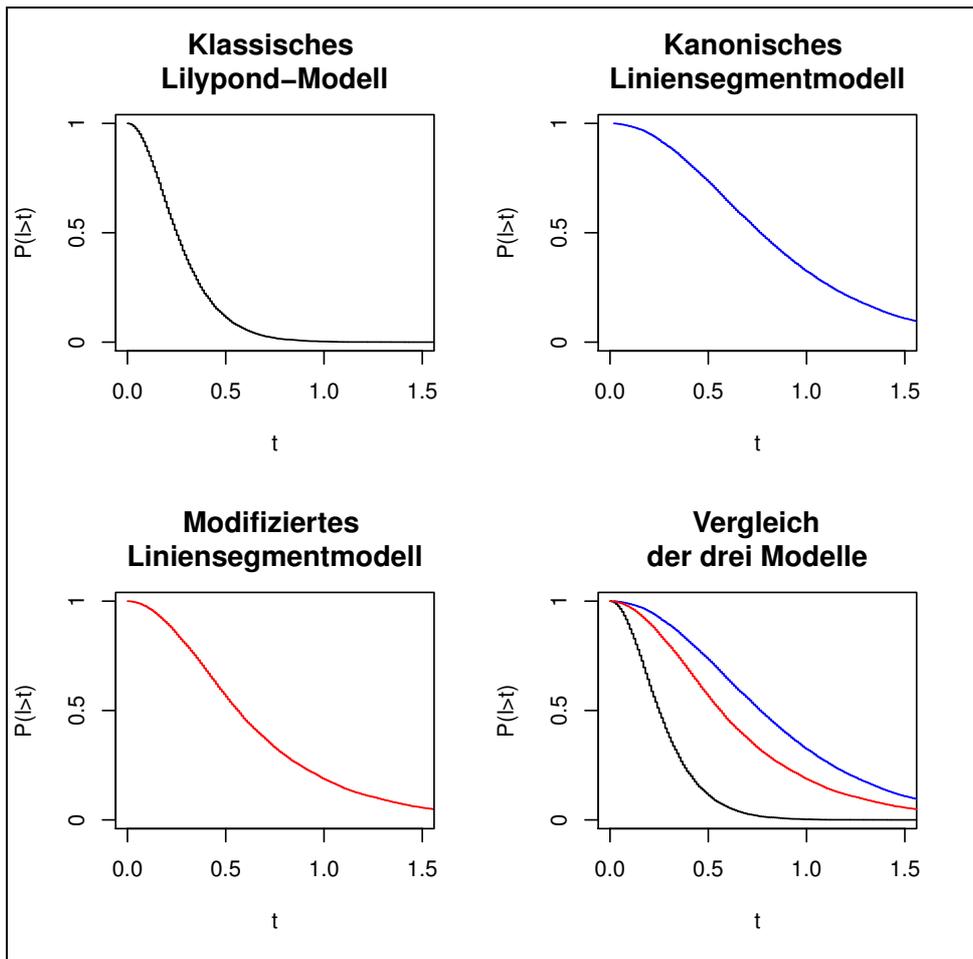


Abbildung 5.1: Ein Vergleich der wachstumsmaximalen Funktionen des Lilypond-Modells mit denen der Liniensegmentmodelle.

Wir stellen fest, dass die Kurve für das klassische Lilypond-Modell unterhalb derer für das modifizierte Liniensegmentmodell verläuft. Diese wiederum verläuft unterhalb der Kurve für das kanonische Liniensegmentmodell. Letzteres weist also im Schnitt die größten Wachstumswert auf. Wir können vermuten, dass die genannten Modelle in aufsteigender Reihenfolge mehr Platz zum wachsen lassen. Es bleibt anzumerken, dass sich die beiden Liniensegmentmodelle bezüglich der wachstumsmaximalen Funktion kaum unterscheiden. In Bezug auf die Clustergröße erhalten wir eine andere Situation, wie wir später in Abbildung 5.5 sehen werden.

Die nächste Abbildung zeigt, dass sich Satz 5.1.14 und Satz 5.1.21 über den exponentiellen Abfall des Tails der Verteilungsfunktion experimentell bestätigen lassen.

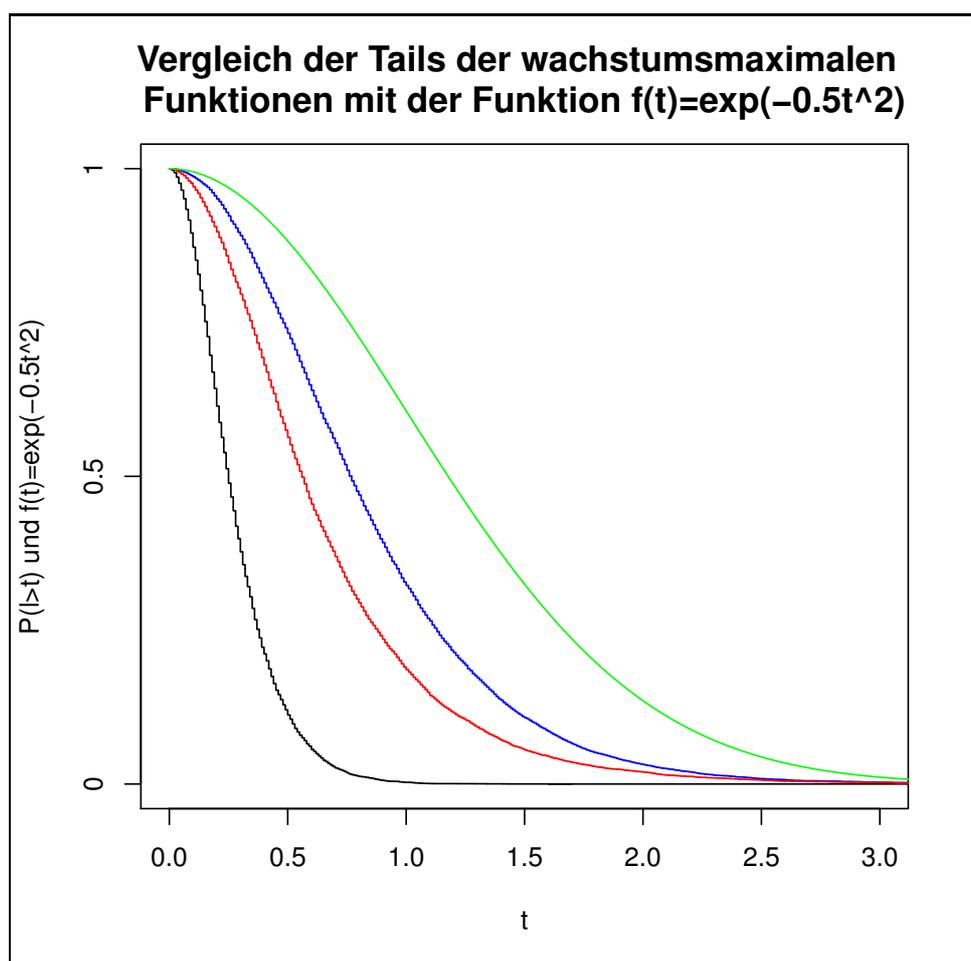


Abbildung 5.2: Ein Vergleich der Tails der wachstumsmaximalen Funktionen mit einer Exponentialfunktion.

Wir sehen, dass die empirischen Versionen der Tails $\mathbb{P}(l^0 > t)$, $t \geq 0$, aller drei Modelle durch die in rot gezeichnete Funktion $f(t) = \exp(-(1/2)t^2)$, $t \geq 0$, nach oben beschränkt sind.

Nun vergleichen wir die wachstumsmaximale Funktion im klassischen Lilypond-Modell mit denen der drei dynamischen Lilypond-Modelle.

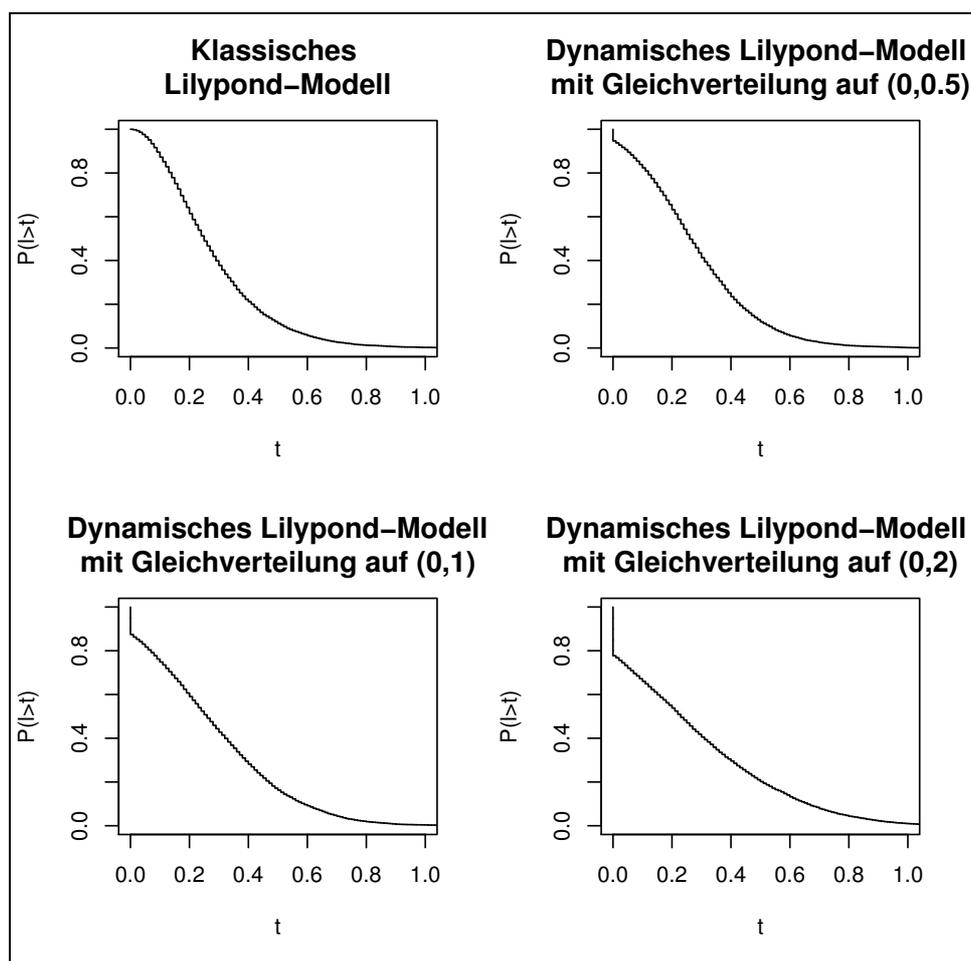


Abbildung 5.3: Ein erster Vergleich der wachstumsmaximalen Funktionen des Lilypond-Modells mit denen der dynamischen Lilypond-Modelle.

Wir erkennen, dass eine Vergrößerung des Trägers der Gleichverteilung zwei Effekte hervorruft. Zum einen steigt die Wahrscheinlichkeit, dass der Punkt $(0, B)$ nie zu wachsen beginnt. Zum anderen hat eine solche Vergrößerung offenbar eine glättende Wirkung auf den Tail $\mathbb{P}(l(\eta^{(0,B)}, 0, B) > t)$. Diese beiden Thesen werden durch das nächste Schaubild gestützt, für welches wir zusätzlich dynamische Lilypond-Modelle mit Gleichverteilung auf $[0, 5]$ und $[0, 10]$ simuliert haben. Um Randeffekte zu vermeiden, haben wir hierfür das Simulationsfenster von $B(0, 10)$ auf $B(0, 25)$ erweitert.

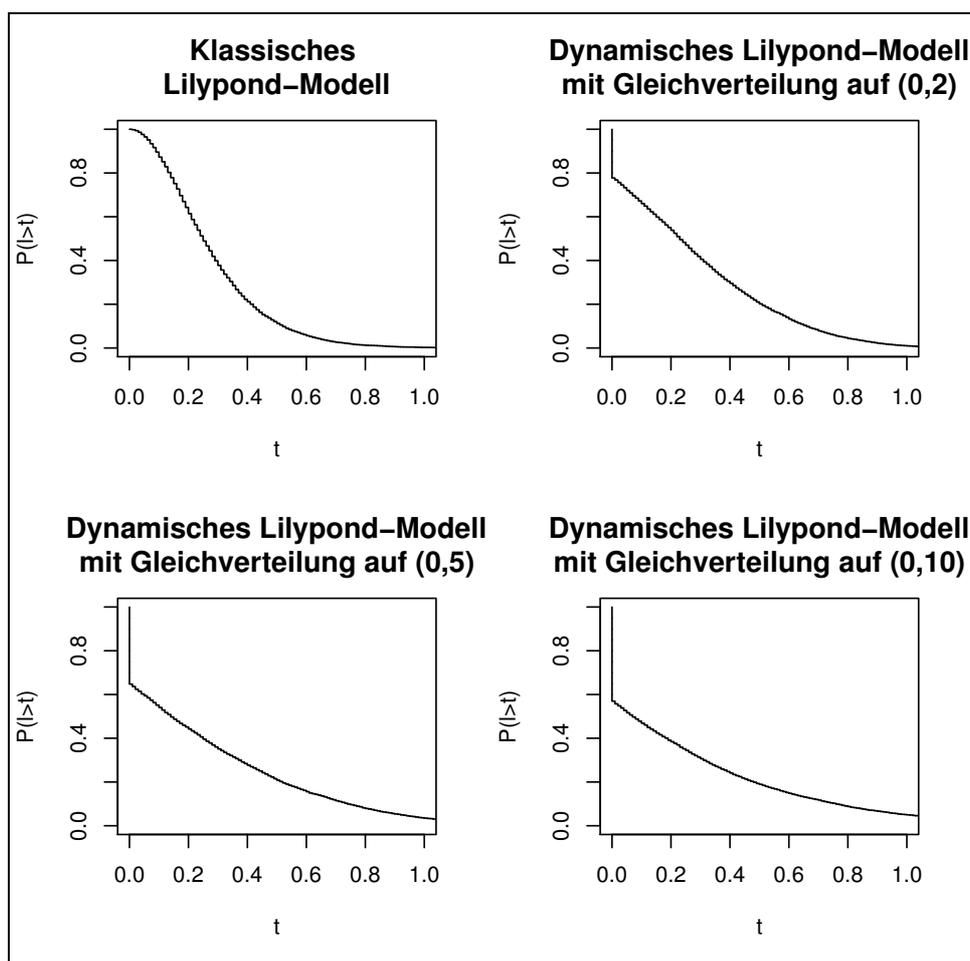


Abbildung 5.4: Ein zweiter Vergleich der wachstumsmaximalen Funktionen des Lilypond-Modells mit denen der dynamischen Lilypond-Modelle.

Wir verlassen nun die Simulationen zu wachstumsmaximalen Funktionen und wenden uns der Clustergröße $\text{card}(C^0)$ zu. Zunächst vergleichen wir den Tail $\mathbb{P}(\text{card}(C^0) > t)$, $t \geq 0$, des klassischen Lilypond-Modells mit dem des kanonischen Liniensegmentmodells und mit dem des modifizierten Liniensegmentmodells.

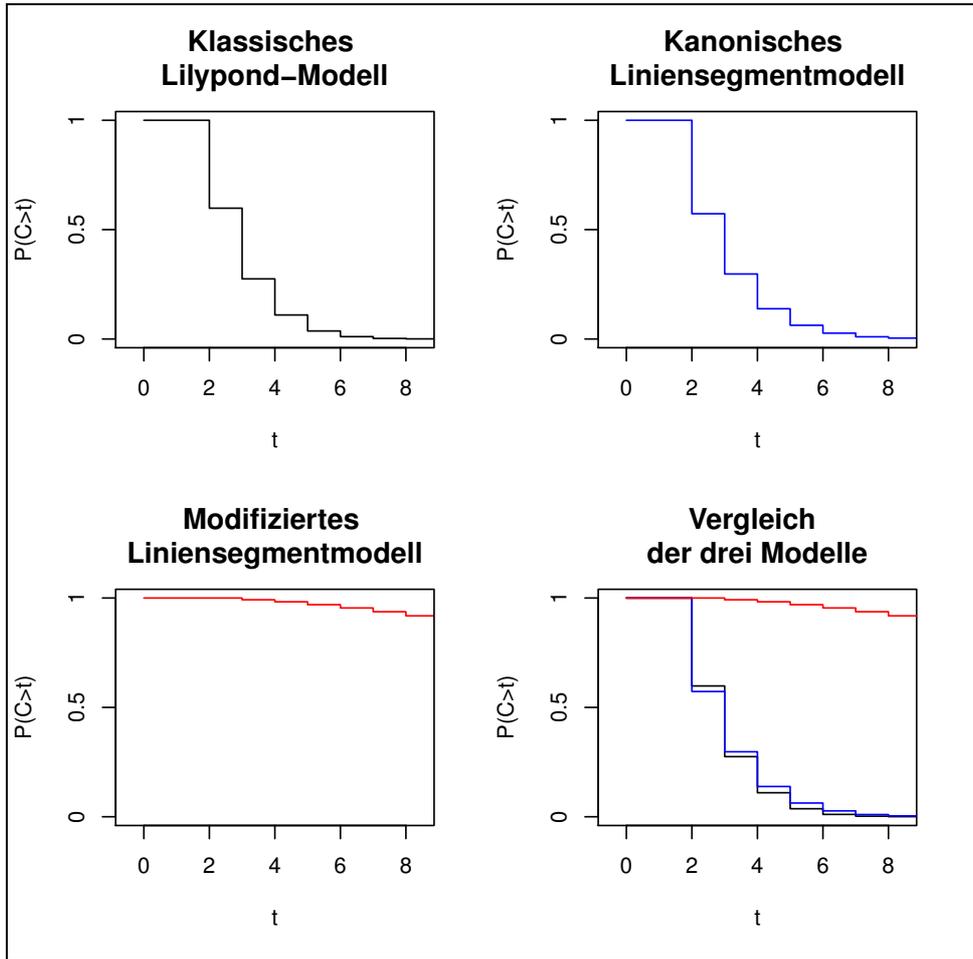


Abbildung 5.5: Ein Vergleich der Clustergröße im Lilypond-Modell mit der in den Liniensegmentmodellen.

Aufgrund von

$$\begin{aligned} & \left\{ \varphi \in M^0 : \text{card}(C(\varphi^{(0,B)} = 2)) \right\} \\ & \subset \left\{ \varphi \in M^0 : (0, B) \text{ gehört zu einem Doublet von } T(\varphi^{(0,B)}) \right\} \end{aligned}$$

erhalten wir aus der Grafik zum klassischen Lilypond-Modell in Abbildung 5.5 die Abschätzung

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}((0, B) \text{ gehört zu einem Doublet von } T(\varphi^{(0,B)})) \\ & \geq \mathbb{P}(\text{card}(C(\eta^{(0,B)} = 2)) \approx 0.4. \end{aligned}$$

In (5.23) hatten wir die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Doublets mit Hilfe einer durch exakte Rechnungen erhaltenen Schranke durch den Wert 0.62 nach unten abgeschätzt. Unsere Simulation ist somit nicht so scharf wie das exakte Resultat, widerspricht diesem aber nicht. Wir können dies als weiteres Indiz dafür werten, dass die von uns zu Beginn des Abschnitts diskutierte Einschränkung auf endliche Betrachtungsfenster die von uns betrachteten Größen nur unwesentlich beeinflusst.

In Abbildung 5.5 erkennen wir des Weiteren, dass sich klassisches Lilypond-Modell und kanonisches Liniensegmentmodell nahezu identisch verhalten. Das modifizierte Linienmodell zeigt jedoch eine komplett andere Clusterstruktur. Bemerkenswert ist dies besonders unter dem Aspekt,

dass die Änderung der Wachstumsvorschrift im Hinblick auf die wachstumsmaximale Funktion der zugehörigen Liniensegmentmodelle keinen wesentlichen Unterschied auszumachen scheint. Dies haben wir in Abbildung 5.1 gesehen. Die dort geplotteten Tails der wachstumsmaximalen Funktionen von kanonischem und modifiziertem Liniensegmentmodell scheinen ähnlich.

Im nächsten Schaubild haben wir den Tail der Clusterverteilung des modifizierten Liniensegmentmodells geeignet skaliert geplottet.

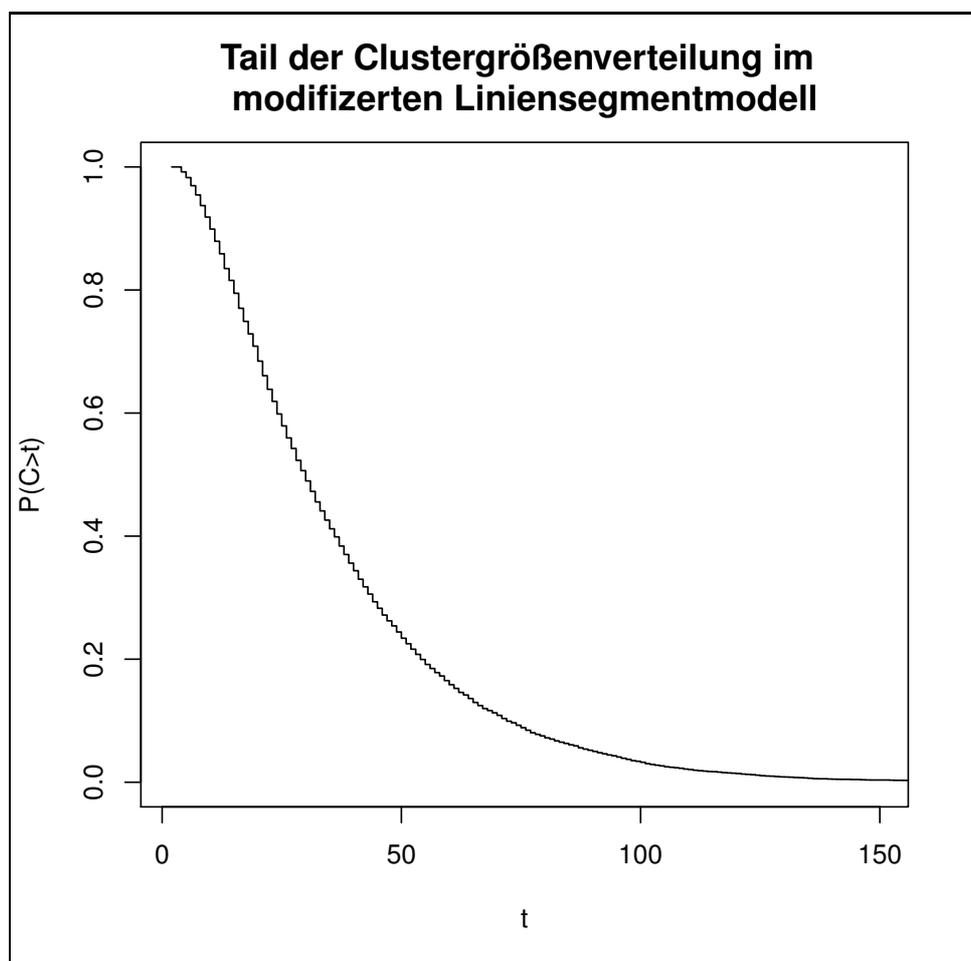


Abbildung 5.6: Die Clustergröße im modifizierten Liniensegmentmodell.

Abschließend untersuchen wir, welchen Einfluss die Dynamisierung in Zusammenhang mit der Clustergröße auf das Lilypond-Modell besitzt. Die Größe eines Clusters ist hierbei die Zahl der Komponenten mit echt positivem Wachstumswert. Punkte, die nie zu wachsen beginnen, zählen also nicht zur Größe des Clusters. Falls der Punkt $(0, B)$ nicht zu wachsen beginnt, setzen wir $\text{card}(C(\eta^{(0,B)}, 0)) = 0$. Wir simulieren also die Größe

$$\text{card}(C(\eta^{(0,B)}, 0)) \mathbf{1}_{\{U(\eta^{(0,B)}, 0, B) > 0\}}.$$

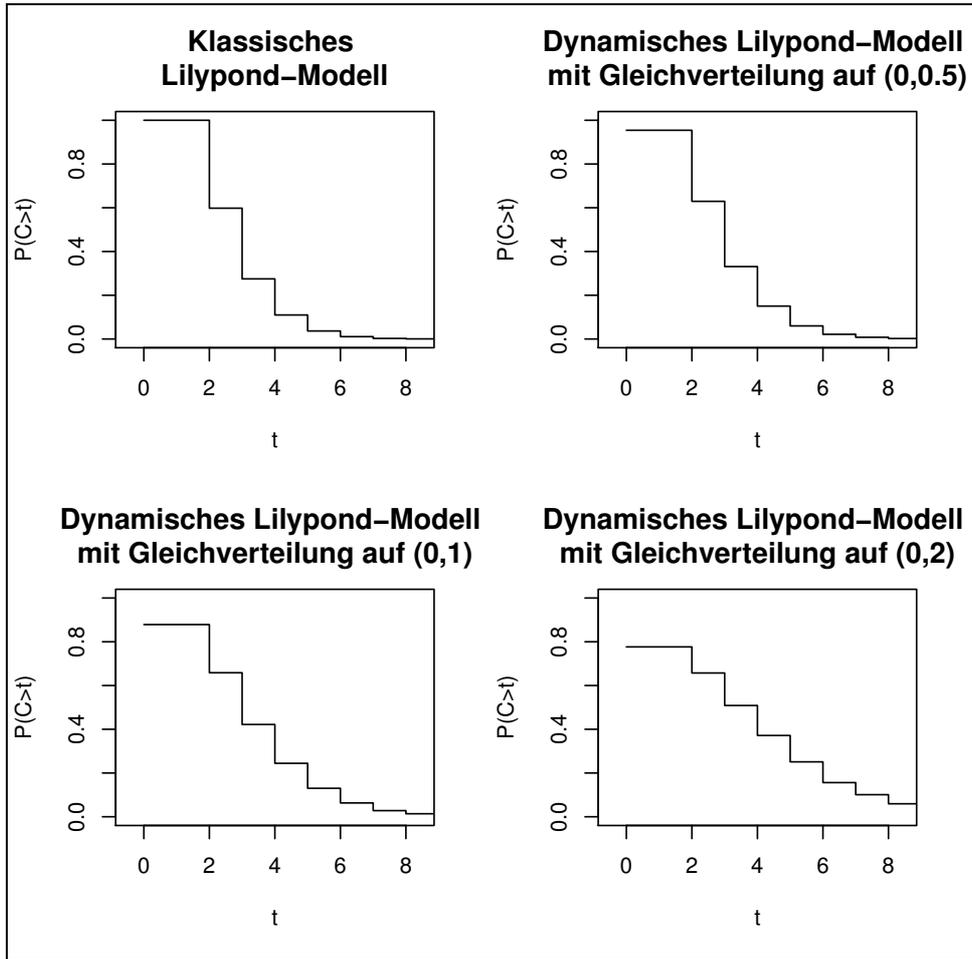


Abbildung 5.7: Ein Vergleich der Clustergröße im klassischen Lilypond-Modell mit der in den dynamischen Lilypond-Modellen.

Es zeigen sich zwei Effekte, falls wir den Träger der Gleichverteilung vergrößern. Zum einen steigt die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}(C(\eta^{(0,B)}, 0) \mathbf{1}_{\{l(\eta^{(0,B)}, 0, B) > 0\}} = 0)$$

bei Vergrößerung des Trägers der Gleichverteilung. Diese Wahrscheinlichkeit entspricht der Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(l(\eta^{(0,B)}, 0, B) = 0)$, welche wir in Abbildung 5.3 dargestellt haben. Den Effekt der steigenden Wahrscheinlichkeit bei Vergrößerung des Trägers konnten wir dort ebenfalls beobachten. Eine genauere Betrachtung der Abbildungen 5.3 und 5.7 zeigt darüber hinaus, dass die beiden Wahrscheinlichkeiten nahezu gleich sind, obwohl sie aus verschiedenen Experimenten stammen. Wir können dies als Beleg für die Konsistenz unserer Simulationen werten. Zum anderen tritt der ebenfalls schon bei der wachstumsmaximalen Funktion in Abbildung 5.3 entdeckte Glättungseffekt auch bei der Clustergröße ein. Es bleibt allerdings festzuhalten, dass sich, anders als bei den Liniensegmentmodellen (siehe Abbildung 5.5), die verschiedenen dynamischen Lilypond-Modelle in Bezug auf die Clustergröße ähnlich verhalten. Wir vermuten, dies kann damit begründet werden, dass sich die verschiedenen dynamischen Modelle zwar um einen Parameter unterscheiden, aber anders als die beiden Liniensegmentmodelle grundsätzlich auf der gleichen Wachstumsvorschrift beruhen.

5.2 Stabilisierung

Um im nächsten Abschnitt zentrale Grenzwertsätze angeben zu können, führen wir in diesem Abschnitt den Begriff der Stabilisierung ein. Für eine allgemeine Einführung in das Konzept der Stabilisierung verweisen wir auf [27]. Die im Folgenden verwendeten Ideen basieren auf [16].

Wir untersuchen in diesem und im nächsten Abschnitt nur wachstumsmaximale Modelle, in denen alle Punkte die gleiche Startzeit besitzen und alle Primärkörner eine Zusatzvoraussetzung erfüllen. Wir treffen daher für diese Abschnitte folgende Annahmen. Es sei η ein stationärer markierter Poissonprozess auf \mathbb{R}^d mit Markenraum \mathcal{K}'_0 , Intensität 1 und Markenverteilung \mathbb{Q} . Weiter seien Z_0 und Z_1 voneinander und von η unabhängige, nach \mathbb{Q} verteilte zufällige Primärkörner. Z_0 bezeichnen wir wie im letzten Abschnitt als typisches Primärkorn. Weiterhin existiere ein $c > 1$, so dass für das typische Primärkorn

$$B(0, 1) \subset Z_0 \subset B(0, c), \quad \mathbb{P} - \text{f.s.}, \quad (5.24)$$

gilt. Darüber hinaus sei \mathcal{K}''_0 die Menge aller $K \in \mathcal{K}'_0$ mit $B(0, 1) \subset K \subset B(0, c)$ und M^1 die Menge aller $\varphi \in M^0$ für die $K \in \mathcal{K}''_0$ für alle $(x, K) \in \varphi$ gilt.

Für $x, y \in \mathbb{R}^d$ mit $x \neq y$ und $K, L \in \mathcal{K}'_0$ sei $\varphi^{(x, K)} = \varphi \cup \{(x, K)\}$ sowie

$$\varphi^{(x, K), (y, L)} = \varphi \cup \{(x, K)\} \cup \{(y, L)\}.$$

Damit wir auch zu $\varphi^{(x, K)}$ und $\varphi^{(x, K), (y, L)}$ wachstumsmaximale Modelle bilden können, nehmen wir bei Verwendung dieser Schreibweise stets implizit $\varphi^{(x, K)} \in M^0$ und $\varphi^{(x, K), (y, L)} \in M^0$ an. Wir stellen also insbesondere sicher, dass wir keiner Konfiguration an einer Stelle, an der sie bereits ein Korn besitzt, ein weiteres, anderes hinzufügen. D.h. wir vermeiden Konfigurationen, die zwei Punkte (x, K_1) und (x, K_2) mit verschiedenen Primärkörnern $K_1, K_2 \in \mathcal{K}'_0$ enthalten, deren Projektion auf die erste Komponente gleich ist. Wir halten fest, dass die Punktprozesse $\eta^{(x, K)}$, $\eta^{(x, K), (y, L)}$, $\eta^{(x, Z_0)}$ und $\eta^{(x, Z_0), (y, Z_1)}$ diese Annahme fast sicher erfüllen, da η ein stationärer markierter Poissonprozess ist.

Wir definieren $B^*(0, t) := B(0, t) \times \mathcal{K}'_0$ und mit Hilfe der Beobachtungsfenster $W_n = n^{1/d} W_1 = n^{1/d} [-1/2, 1/2]^d$ zusätzlich $W_n^* := W_n \times \mathcal{K}'_0$, $n \in \mathbb{N}$.

Wir erinnern uns an die in Definition 2.2.3 eingeführte Größe a und definieren für $y \in \mathbb{R}^d$, $L \in \mathcal{K}''_0$ und $\varphi \in M^1$

$$D(\varphi, y, L) := \inf\{a(y, L, x, \{0\}) : (x, K) \in \varphi \setminus \{(y, L)\}\}. \quad (5.25)$$

Diese Größe können wir im Fall $(y, L) \in \varphi$ als maximal mögliche Wachstumszeit des Kornes (y, L) interpretieren.

Die Menge $A(\varphi, y, L) \subset \varphi \times (0, \infty)$ sei wie folgt definiert. Ein Tripel $(x, K, r) \in \mathbb{R}^d \times \mathcal{K}'_0 \times (0, \infty)$ gehöre genau dann zu $A(\varphi, y, L)$, falls eine absteigende Kette (vgl. Definition 2.2.3) $(x_0, K_0), \dots, (x_n, K_n)$ der Länge $n + 1$ in $\varphi^{(y, L)}$ existiert, so dass $(x_0, K_0) = (y, L)$, $a(y, L, x_1, K_1) \leq D(\varphi^{(y, L)}, y, L)$, $(x_n, K_n) = (x, K)$ und $r = a(x_{n-1}, K_{n-1}, x, K)$ gelten. Wir definieren

$$S(\varphi, y, L) := B(y, 2cD(\varphi^{(y, L)}, y, L)) \cup \bigcup_{(x, K, r) \in A(y, L, \varphi)} B(x, 2cr), \quad \varphi \in M^1, \quad y \in \mathbb{R}^d, \quad L \in \mathcal{K}''_0, \quad (5.26)$$

falls $\varphi \setminus \{(y, L)\} \neq \emptyset$ und $S(\varphi, y, L) = \infty$ sonst, wobei wir c aus (5.24) verwenden. Weiter sei $S^*(\varphi, y, L) := S(\varphi, y, L) \times \mathcal{K}''_0$. Die Menge $S(\varphi, y, L)$ können wir uns als den Bereich vorstellen, in dem die Körner, welche potentiell Einfluss auf die Werte der wachstumsmaximalen Funktion

$l(\varphi^{(y,L)}, y, L)$ haben, ihren Ursprung besitzen. Diese intuitive Interpretation formalisieren wir in Lemma 5.2.2. Wir machen zunächst eine Vorüberlegung, welche zeigt, dass $S(\eta, y, L)$ den Charakter einer Stoppmenge besitzt (siehe [3]).

Lemma 5.2.1. *Sei $y \in \mathbb{R}^d, L \in \mathcal{K}_0''$ und $\varphi, \varphi' \in M^1$. Falls $\varphi \cap S^*(\varphi, y, L) = \varphi' \cap S^*(\varphi, y, L)$, dann gilt*

$$S(\varphi, y, L) = S(\varphi', y, L).$$

Beweis: Falls $\varphi \setminus \{(y, L)\}$ leer ist, folgt $S(\varphi, y, L) = \mathbb{R}^d$ und damit $\varphi = \varphi'$. Somit gilt $S(\varphi, y, L) = S(\varphi', y, L)$.

Andernfalls existiert ein Punkt, in dem das Infimum aus (5.25) angenommen wird. Dieser liegt nach Konstruktion in $S^*(\varphi, y, L)$, so dass nach Voraussetzung

$$D(\varphi \cup \{(y, L)\}, y, L) = D(\varphi' \cup \{(y, L)\}, y, L)$$

gilt.

Sei zunächst $(x, K, r) \in A(\varphi, y, L)$. Dann existiert eine absteigende Kette $(x_i, K_i), 0 \leq i \leq n$, in $\varphi^{(y,L)}$ derart, dass $(y, L) = (x_0, K_0), a(y, L, x_1, K_1) \leq D(\varphi^{(y,L)}, y, L), (x_n, K_n) = (x, K)$ und $r = a(x_{n-1}, K_{n-1}, x, K)$. Aufgrund der Konstruktion der Menge $S(\varphi, y, L)$ gilt für $1 \leq m \leq n$ die Aussage $x_m \in S(\varphi, y, L) \cap \phi$. Somit ist nach Voraussetzung $x_m \in S(\varphi, y, L) \cap \phi'$ und damit $(x_m, K_m) \in \phi'$. Hieraus folgt $(x, K, r) \in A(\varphi', y, L)$. Also gilt

$$A(\varphi, y, L) \subset A(\varphi', y, L).$$

Sei nun $(x, K, r) \in A(\varphi', y, L)$. Dann existiert eine absteigende Kette $(x_0, K_0), \dots, (x_n, K_n)$ in $\varphi'^{(y,L)}$ derart, dass $(x_0, K_0) = (y, L), a(y, L, x_1, K_1) \leq D(\varphi'^{(y,L)}, y, L), (x_n, K_n) = (x, K)$ und $r = a(x_{n-1}, K_{n-1}, x, K)$. Per Induktion über m wird die Aussage

$$(x_m, K_m) \in \varphi, \quad 1 \leq m \leq n,$$

gezeigt. Es gilt nach Definition $a(y, L, x_1, K_1) \leq D(\varphi'^{(y,L)}, y, L)$. Aufgrund von $D(\varphi^{(y,L)}, y, L) = D(\varphi'^{(y,L)}, y, L)$ folgt $a(y, L, x_1, K_1) \leq D(\varphi^{(y,L)}, y, L)$. Damit gilt $(x_1, K_1) \in B(0, 2cD(\varphi^{(y,L)}, y, L))$ und somit $(x_1, K_1) \in S^*(\varphi, y, L)$. Insbesondere gilt also $(x_1, K_1) \in \varphi' \cap S^*(\varphi, y, L)$. Dank $\varphi' \cap S^*(\varphi, y, L) = \varphi \cap S^*(\varphi, y, L)$ erhalten wir hieraus $(x_1, K_1) \in \varphi$. Es gelte nun $(x_m, K_m) \in \varphi, 1 \leq m \leq k-1$. Mit

$$a(x_{k-1}, K_{k-1}, x_k, K_k) \leq a(x_{k-2}, K_{k-2}, x_{k-1}, K_{k-1}) \quad (5.27)$$

und $x_1, \dots, x_{k-1} \in \varphi$ gilt $(x_k, K_k) \in S^*(y, L, \varphi)$. Daraus folgt $(x_k, K_k) \in S^*(y, L, \varphi) \cap \varphi'$ und damit nach Voraussetzung $(x_k, K_k) \in \varphi$. Aus dieser Aussage resultiert mit 5.27 die Teilmengenbeziehung $A(\varphi', y, L) \subset A(\varphi, y, L)$. Zusammen mit der ersten Inklusion erhalten wir

$$A(\varphi', y, L) = A(\varphi, y, L).$$

Kombinieren wir dies mit der oben gezeigten Gleichheit $D(\varphi^{(y,L)}, y, L) = D(\varphi'^{(y,L)}, y, L)$, ergibt sich die Aussage. \square

Nun formulieren wir die Stabilisierungseigenschaft.

Lemma 5.2.2. *Sei $(y, L) \in \mathbb{R}^d \times \mathcal{K}_0''$ und $\varphi^{(y,L)} \in M^1 \cap M'$. Falls die Menge $S(\varphi, y, L)$ beschränkt ist, gilt für die wachstumsmaximale Funktion l die Stabilisierungsaussage*

$$l(\varphi^{(y,L)}, y, L) = l((\varphi^{(y,L)} \cap S^*(\varphi, y, L)) \cup \psi, y, L) \quad (5.28)$$

für alle $\psi \in M^1$ mit $\psi \subset (\mathbb{R}^d \setminus S(\varphi, y, L)) \times \mathcal{K}_0''$ und $\text{card}(\psi) < \infty$.

Beweis: Sei $(y, L) \in \mathbb{R}^d \times \mathcal{K}_0''$ und $\varphi^{(y,L)} \in M^1 \cap M'$. Nach Konstruktion gilt $A(\varphi, y, L) = A(\varphi^{(y,L)}, y, L)$. Damit erhalten wir $S(\varphi, y, L) = S(\varphi^{(y,L)}, y, L)$. Daher nehmen wir im Folgenden o.B.d.A. $(y, L) \in \varphi$ an.

Wir zeigen die Aussage zunächst für $\varphi \subset S^*(\varphi, y, L)$. Es sei also $S(\varphi, y, L)$ beschränkt und $\varphi \subset S^*(\varphi, y, L)$ sowie $\psi \in M^1$ mit $\psi \subset (\mathbb{R}^d \setminus S(\varphi, y, L)) \times \mathcal{K}_0''$. Weiter seien $\varphi' := \varphi \cup \psi$ und $l(x, K) := l(\varphi, x, K)$, $(x, K) \in \varphi$, sowie $l'(x, K) = l(\varphi', x, K)$, $(x, K) \in \varphi'$. Da φ und ψ endlich sind, folgt aus dem Algorithmus zur Konstruktion von l aus Satz 2.2.8 und der Tatsache, dass endliche Mengen stets markiert lokalendlich sind, die Aussage $\varphi' \in M'$. Nach Definition 2.2.9 besitzt somit nicht nur jedes Paar $(x, K) \in \varphi$ einen stoppenden Nachbarn, sondern auch jedes $(x, K) \in \varphi'$. Angenommen, es gilt $l(y, L) > l'(y, L)$. Sei (x_1, K_1) ein stoppender Nachbar von (y, L) in φ' . Zusätzlich nehmen wir noch $(x_1, K_1) \in \varphi$ an. Aus der Hard-Core-Eigenschaft (1.11) des wachstumsmaximalen Modells $T(\varphi)$ folgt dann $l(x_1, K_1) < l'(x_1, K_1)$. Es sei (x_2, K_2) ein stoppender Nachbar von (x_1, K_1) in φ . Wegen der Hard-Core-Eigenschaft des wachstumsmaximalen Modells $T(\varphi')$ gilt $l(x_2, K_2) > l'(x_2, K_2)$. Sei (x_3, K_3) ein stoppender Nachbar von (x_2, K_2) in φ' . Unter der Annahme $(x_3, K_3) \in \varphi$ muss dank der Hard-Core-Eigenschaft des wachstumsmaximalen Modells $T(\varphi)$ dann $l(x_3, K_3) < l'(x_3, K_3)$ gelten. Setzen wir dieses Vorgehen fort, erhalten wir eine Folge $(x_i, K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit

$$l(y, L) > l'(y, L) \geq l'(x_1, K_1) > l(x_1, K_1) \geq l(x_2, K_2) > l'(x_2, K_2) \geq \dots,$$

die bei (x_n, K_n) abbricht, falls $(x_n, K_n) \in \psi$ gilt (n muss also ungerade sein). Da hieraus die Ungleichungskette

$$l'(y, L) \geq l'(x_1, K_1) > l'(x_2, K_2) > \dots \quad (5.29)$$

folgt, sind die Punkte (y, L) und (x_i, K_i) , $i \in \mathbb{N}$, alle verschieden. Aus (5.29) und Lemma 2.2.5 ergibt sich $l'(x_i, K_i) \geq a(x_i, K_i, x_{i+1}, K_{i+1}) \geq l'(x_{i+1}, K_{i+1})$. Insgesamt folgt also

$$a(y, L, x_1, K_1) \geq a(x_1, K_1, x_2, K_2) \geq a(x_2, K_2, x_3, K_3) \geq \dots$$

Das heißt, die (möglicherweise endliche) Folge $(y, L), (x_1, K_1), (x_2, K_2), \dots$ bildet eine absteigende Kette, für die

$$a(y, L, x_1, K_1) \leq l'(y, L) \leq D(\varphi^{(y,L)}, y, L) \leq D(\varphi^{(y,L)}, y, L)$$

gilt, wobei die erste Ungleichung aus Lemma 2.2.5, die zweite mit der Hard-Core-Bedingung und die dritte wegen $\varphi \subset \varphi'$ folgt. Falls die Folge in einem Punkt $(x_n, K_n) \in \psi$ abbricht, so gilt zum einen $(x_n, K_n) \in \psi$, zum anderen aber $(x_n, K_n) \in S^*(y, L, \varphi)$. Dies widerspricht der Annahme $\psi \cap S^*(y, L, \varphi) = \emptyset$. Bricht die Folge nicht ab, so bildet sie eine unendlich lange absteigende Kette in φ . Dann kann $S(\varphi, y, L)$ aufgrund der Lokalendlichkeit von φ aber nicht beschränkt sein. Für den Fall $l(y, L) > l'(y, L)$ wurde somit ein Widerspruch erzeugt. Die Argumentation im Fall $l(y, L) < l'(y, L)$ erfolgt analog. Wir beginnen allerdings mit einem kleineren Nachbarn (x_1, K_1) von (y, L) in φ . Damit haben wir Gleichung (5.28) für alle $\varphi \subset S^*(\varphi, y, L)$ gezeigt.

Mit Hilfe von Lemma 5.2.1 ergibt sich die Aussage für alle $\varphi \in M^1 \cap M'$, wie folgende Ausführungen zeigen. Für $\varphi \in M^1 \cap M'$ ergibt sich mit Lemma 5.2.1, angewendet auf φ und $\varphi \cap S^*(\varphi, y, L)$, die Gleichheit

$$S^*(\varphi, y, L) = S^*(\varphi \cap S^*(\varphi, y, L), y, L). \quad (5.30)$$

Wir nehmen an, dass Gleichung (5.28) für alle $\varphi \subset S^*(\varphi, y, L)$ gilt. Dann erhalten wir mit (5.30)

für beliebiges φ :

$$\begin{aligned}
l(\varphi, y, L) &= l(\varphi \cap S^*(\varphi, y, L) \cup (\varphi \cap (S(\varphi, y, L)^c \times \mathcal{K}_0'')), y, L) \\
&= l(\varphi \cap S^*(\varphi, y, L) \cap S^*(\varphi \cap S^*(\varphi, y, L), y, L) \cup (\varphi \cap (S(\varphi, y, L)^c \times \mathcal{K}_0'')), y, L) \\
&= l(\varphi \cap S^*(\varphi, y, L) \cap S^*(\varphi \cap S^*(\varphi, y, L), y, L) \\
&= l(\varphi \cap S^*(\varphi, y, L) \cap S^*(\varphi \cap S^*(\varphi, y, L) \cup \psi, y, L) \\
&= l(\varphi \cap S^*(\varphi, y, L) \cup \psi, y, L), \quad \psi \subset \mathbb{R}^d \setminus S(\varphi, y, L) \times \mathcal{K}_0'', \quad \psi \in M^1.
\end{aligned}$$

Dies ist Gleichung (5.28) für beliebiges $\varphi \in M^1$. Wir merken noch an, dass wir für die dritte Gleichheit (5.28) mit $\varphi \cap S^*(\varphi, y, L)$ und $\psi = \varphi \cap (S(\varphi, y, L)^c \times \mathcal{K}_0'')$, y, L verwendet haben, obwohl ein solches ψ nicht notwendig endlich sein muss. Dies ist hier zulässig, da im obigen Beweis die Endlichkeit von ψ nur dazu benötigt wird, um $\varphi' \in M'$ zu zeigen. Für diese spezielle Wahl von ψ gilt jedoch $\varphi' = \varphi \cap S^*(\varphi, y, L) \cup \psi = \varphi$, wodurch dies direkt aus der Voraussetzung $\varphi \in M'$ folgt. \square

Nun definieren wir für $\varphi \in M^1 \cap M'$

$$R(\varphi, y, L) := \inf\{r \geq 0 : S(\varphi, y, L) \subset B(y, r)\}, \quad (5.31)$$

und $R(\varphi, y, L) := \infty$ für $\varphi \in M^1 \setminus (M^1 \cap M')$. Aufgrund von Lemma 5.2.2 ist $R(\varphi, y, L)$ ein *Stabilisierungsradius* für $l(\varphi^{(y,L)}, y, L)$, d.h. $l(\varphi^{(y,L)}, y, L)$ bleibt bei Änderungen von φ außerhalb von $B^*(y, R(\varphi, y, L))$ unverändert.

Es folgt ein Lemma über das Tail-Verhalten der Verteilung von $R(\eta, 0, Z_0)$.

Lemma 5.2.3. *Für alle $0 < \gamma < 1$ existieren Konstanten $\alpha, \beta > 0$, so dass die Abschätzung*

$$\mathbb{P}(R(\eta, 0, Z_0) > t) \leq \alpha \exp(-\beta t^\gamma), \quad t \geq 0,$$

gilt. Die gleiche Aussage gilt für $R(\eta^{(x, Z_1)}, 0, Z_0)$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$.

Beweis: Wir beweisen zunächst die erste Aussage des Lemmas. Hierfür setzen wir $R := R(\eta, 0, Z_0)$ sowie $D := D(\eta, 0, Z_0)$ und erinnern uns an die Konstante c aus (5.24). Es sei $0 < \varepsilon < 1/(d+1)$. O.B.d.A. können wir $t \geq 1$ annehmen. Es gilt die Abschätzung

$$\mathbb{P}(R > t) \leq \mathbb{P}\left(D > \frac{t^\varepsilon}{4c}\right) + \mathbb{P}\left(D \leq \frac{t^\varepsilon}{4c}, R > t\right).$$

Es bezeichne E die Menge aller $\varphi \in M^1$, die eine absteigende Kette $(0, K_0), \dots, (x_n, K_n)$ enthalten, für die $a(0, K_0, x_1, K_1) \leq D(\varphi, 0, K_0) \leq t^\varepsilon/(4c)$ und $n \geq t^{1-\varepsilon}/2$ erfüllt ist. Für jedes $K_0 \in \mathcal{K}_0''$ und jedes $i = 1, \dots, n$ sei $r_i := a(x_{i-1}, K_{i-1}, x_i, K_i)$, so dass $(x_i, K_i, r_i) \in A(\varphi, 0, K_0)$ gilt.

Für jedes $\varphi^{(0, K_0)} \in M^1$ mit

$$R(\varphi, 0, K_0) > t \quad \text{und} \quad D(\varphi, 0, K_0) \leq \frac{t^\varepsilon}{4c}$$

gilt $\varphi^{(0, K_0)} \in E$. Denn falls aus den obigen Ungleichungen $\varphi^{(0, K_0)} \in E^c$ folgen würde, bestünde jede absteigende Kette mit $a(0, K_0, x_1, K_1) \leq D(\varphi, 0, K_0) \leq t^\varepsilon/(4c)$ aus weniger als $t^{1-\varepsilon}/2$ Punkten. Damit erhalten wir

$$B(0, 2cD(\varphi, 0, K_0)) \cup \left(\bigcup_{1 \leq i \leq n} B(x_i, 2cr_i) \right) \subset B(0, 2c(n+1)D(\varphi, 0, K_0)).$$

Mit (5.31) folgt dann die Ungleichung

$$R(\varphi, 0, K_0) \leq 2c(n+1)D(\varphi, 0, K_0).$$

Aufgrund von $n < t^{1-\varepsilon}/2$ gilt

$$\begin{aligned} 2c(n+1)D(\varphi, 0, K_0) &< 2c \left(\frac{t^{1-\varepsilon}}{2} + 1 \right) D(\varphi, 0, K_0) \\ &= ct^{1-\varepsilon}D(\varphi, 0, K_0) + 2cD(\varphi, 0, K_0) \\ &\leq \frac{ct^{1-\varepsilon}t^\varepsilon}{4c} + \frac{2ct^\varepsilon}{4c} \\ &= \frac{t}{4} + \frac{t^\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

und wegen $t \geq 1$ und $0 < \varepsilon < 1/(d+1)$ somit $R(\varphi, 0, K_0) \leq (3/4)t$. Also müsste $R(\varphi, 0, K_0) < t$ gelten, wobei es sich jedoch um einen Widerspruch handeln würde. Wir erhalten daher

$$\mathbb{P}(R > t) \leq \mathbb{P} \left(D > \frac{t^\varepsilon}{4c} \right) + \mathbb{P}(\eta^{(0, Z_0)} \in E). \quad (5.32)$$

Sei $k := \lceil \frac{(c_1+1)t^{\varepsilon d}}{(4c)^d} \rceil$ und $s_i := (i/(c_1+1))^{1/d}$, $i \in \mathbb{N}_0$, wobei $c_1 := \lambda(B(0, 2c))$ und $\lceil \cdot \rceil$ die obere Gaußklammer bezeichnet. Somit gilt $s_k \geq t^\varepsilon/(4c)$. Weiter sei $m := \lceil t^{1-\varepsilon}/2k \rceil$ und $n_0 := \lceil t^{1-\varepsilon}/2 \rceil$. Dank der Definition von ε und k gilt $m \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow \infty$. Wir nehmen ab sofort an, dass t so gross ist, dass $m \geq 3$ gilt. Für $\varphi \in E$ betrachten wir nun eine absteigende Kette $(x_0, K_0), \dots, (x_n, K_n)$. Es gilt insbesondere $n \geq t^{1-\varepsilon}/2$ und daher $n \geq n_0$. Dann existiert ein $j \in \{1, \dots, k\}$ und ein $l = 0, \dots, n_0 - m$, so dass die Folge $(x_0, K_0), \dots, (x_n, K_n)$ mindestens m aufeinanderfolgende Abstände $a(x_i, K_i, x_{i+1}, K_{i+1})$, $l \leq i \leq l+m-1$, im Intervall $I_j := [s_{j-1}, s_j]$ enthält, da ansonsten die Gesamtzahl n der Abstände der Kette kleiner als $\lceil t^{1-\varepsilon}/2 \rceil$ sein müsste. Darüber hinaus gilt

$$\|x_i\| \leq \left(\frac{t^{1-\varepsilon}}{2} + 1 \right) \frac{2ct^\varepsilon}{4c} = \frac{t}{4} + \frac{2ct^\varepsilon}{4c} \leq \frac{t}{4} + \frac{t}{2} = \frac{3}{4}t \leq t, \quad 0 \leq i \leq n_0.$$

Es ergibt sich $E \subset \cup_{j=1}^k E_j$, wobei E_j die Menge aller $\varphi \in M^1$ ist, für die eine absteigende Kette $(x_1, K_1), \dots, (x_m, K_m)$ in φ mit $\|x_1\| \leq t$ und

$$a(x_i, K_i, x_{i+1}, K_{i+1}) \in I_j, \quad 1 \leq i \leq m-1,$$

existiert. Also folgt

$$\mathbb{P}(\eta^{(0, Z_0)} \in E) \leq \sum_{j=1}^k \mathbb{P}(\eta \in E_j). \quad (5.33)$$

Zusätzlich gilt mit Satz 1.1.15, d.h. der multivariaten Campbellschen Formel, und Bemerkung 1.1.17 die Abschätzung

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\eta \in E_j) &\leq \mathbb{E} \left[\sum_{((x_1, K_1), \dots, (x_m, K_m)) \in \eta^{(m)}} \mathbf{1}\{x_1 \in B(0, t), a(x_i, K_i, x_{i+1}, K_{i+1}) \in I_j\} \right] \\ &= \int \dots \int \mathbf{1}\{x_1 \in B(0, t), a(x_i, K_i, x_{i+1}, K_{i+1}) \in I_j\} dx_1 \dots \mathbb{Q}(dK_m). \end{aligned}$$

Eine zu den Ausführungen in Abschnitt 2.2.2 analoge Rechnung ergibt

$$\mathbb{P}(\eta \in E_j) \leq c_0 c_1^{m-1} t^d (s_j^d - s_{j-1}^d)^{m-1} = c_0 c_1^{m-1} t^d \left(\frac{j}{c_1+1} - \frac{j-1}{c_1+1} \right)^{m-1} = c_0 t^d \left(\frac{c_1}{c_1+1} \right)^{m-1}$$

mit $c_0 > 0$ und $c_1 = \lambda(B(0, 2c))$. Setzen wir $c_2 := -\ln(c_1/(c_1+1))$, erhalten wir mit $c_3 := c_0(c_1+1)/c_1$ die Abschätzung

$$\mathbb{P}(\eta \in E_j) \leq c_3 t^d \exp(-c_2 m), \quad j = 1, \dots, k. \quad (5.34)$$

Aufgrund von $t^{\varepsilon d} \geq 1$ und $c > 1$ ergibt sich

$$k = \left\lceil \frac{(c_2+1)t^{\varepsilon d}}{(4c)^d} \right\rceil \leq \lceil (c_2+1)t^{\varepsilon d} \rceil \leq (c_2+1)t^{\varepsilon d} + 1 \leq (c_2+1)t^{\varepsilon d} + t^{\varepsilon d} = (c_2+2)t^{\varepsilon d}.$$

Aus dieser Abschätzung für k sowie (5.33) und (5.34) folgt für geeignet gewählte Konstanten c_4, c_5 die Abschätzung

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\eta^{(0, Z_0)} \in E) &= (c_2+2)t^{\varepsilon d} c_3 t^d \exp(-c_2 m) \\ &\leq (c_2+2)t^{\varepsilon d} c_3 t^d \exp\left(-\frac{c_2 t^{1-\varepsilon}}{2k}\right) \\ &\leq (c_2+2)c_3 t^{d+\varepsilon d} \exp\left(-\frac{c_2 t^{1-\varepsilon}}{2(c_2+2)t^{\varepsilon d}}\right) \\ &\leq c_4 t^{d+\varepsilon d} \exp\left(-c_5 t^{1-\varepsilon-\varepsilon d}\right), \end{aligned}$$

wobei wegen $0 < \varepsilon < 1/(d+1)$ die Ungleichung $1 - \varepsilon - \varepsilon d > 0$ gilt. Darüber hinaus ist

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(D > \frac{t^\varepsilon}{4c}\right) &\leq \mathbb{P}\left(\eta\left(B\left(0, \frac{t^\varepsilon}{4c}\right) \times \mathcal{K}'_0\right) = 0\right) \\ &= \exp\left(-t^{\varepsilon d} \lambda\left(B\left(0, \frac{1}{4c}\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(-\kappa_d \left(\frac{1}{4c}\right)^d t^{\varepsilon d}\right) \\ &= \exp(-c_6 t^{\varepsilon d}), \end{aligned}$$

für $c_6 = \kappa_d(1/(4c))^d$. Mit (5.32) folgt aus den letzten beiden Abschätzungen die Ungleichung

$$\mathbb{P}(R > t) \leq \exp(-c_6 t^{\varepsilon d}) + c_4 t^{d+\varepsilon d} \exp\left(-c_5 t^{1-\varepsilon-\varepsilon d}\right).$$

Unter Berücksichtigung von

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^\alpha}{\exp(\beta t^\gamma)} = 0, \quad \alpha, \beta, \gamma > 0,$$

erhalten wir die erste Aussage des Lemmas. Der zweite Teil des Lemmas kann auf ähnliche Art und Weise bewiesen werden. Der Beweis findet sich im Anhang als Lemma A.1. \square

5.3 Ein zentraler Grenzwertsatz

In diesem Abschnitt stellen wir einen zentralen Grenzwertsatz für wachstumsmaximale Modelle vor. Die diesem Satz zu Grunde liegenden Resultate finden sich in [21].

Wir erinnern an die nach (5.24) eingeführten Mengen \mathcal{K}_0'' und M^1 . Weiter sei g ein Kern von $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{K}_0''$ nach \mathbb{R}^d . Wir fordern für g , dass Konstanten $\alpha, \beta > 0$ existieren, so dass

$$g(t, x, K, A) \leq \alpha t^\beta$$

für alle $t \in \mathbb{R}_+$, $x \in \mathbb{R}^d$, $K \in \mathcal{K}_0''$ und $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ gilt. Zusätzlich fordern wir, dass g translationsinvariant ist, d.h.

$$g(t, x, K, A) = g(t, x + y, K, A + y), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad y \in \mathbb{R}^d,$$

erfüllt ist. Weiter sei

$$\rho(\varphi, x, K, A) := g(l(\varphi^{(x,K)}), x, K, A) \mathbf{1}_{\{\text{card}(\varphi^{(x,K)}) > 1\}}$$

für alle $\varphi \in M^1$, $t \in \mathbb{R}_+$, $x \in \mathbb{R}^d$, $K \in \mathcal{K}_0''$ und $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Aufgrund der Voraussetzungen an g gilt für ρ die Schranke

$$\rho(\varphi, x, K, A) \leq \alpha \cdot l(\varphi^{(x,K)}, x, K)^\beta \mathbf{1}_{\{\text{card}(\varphi^{(x,K)}) > 1\}} \quad (5.35)$$

für alle $\varphi \in M^1$, $t \in \mathbb{R}_+$, $x \in \mathbb{R}^d$, $K \in \mathcal{K}_0''$ und $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Des Weiteren ist ρ translationsinvariant, d.h.

$$\rho(\varphi, x, K, A) = \rho(y + \varphi, y + x, K, y + A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad y \in \mathbb{R}^d, \quad (5.36)$$

und ein Kern von $M^1 \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{K}_0''$ nach \mathbb{R}^d . Mit Hilfe von ρ definieren wir durch

$$\mu(\varphi, A) := \sum_{(x,K) \in \varphi} \rho(\varphi, x, K, A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad (5.37)$$

das Maß $\mu(\varphi)(\cdot) := \mu(\varphi, \cdot)$ und fordern, dass $\mu(\varphi)$ lokalendlich ist. Für den in Abschnitt 5.2 eingeführten stationären markierten Poissonprozess η , dessen typisches Primärkorn Z_0 Bedingung (5.24) erfüllt, gilt dann der folgende zentrale Grenzwertsatz.

Satz 5.3.1. *Sei $f : W_1 \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte und fast überall stetige Funktion auf W_1 . Dann existiert eine Konstante $\sigma_{\rho, f} \geq 0$, so dass für $n \rightarrow \infty$*

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \left(\int_{W_n} f(n^{-1/d}x) \mu(\eta_{W_n}, dx) - \mathbb{E} \left[\int_{W_n} f(n^{-1/d}x) \mu(\eta_{W_n}, dx) \right] \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma_{\rho, f}). \quad (5.38)$$

Um diesen Satz zu beweisen, benötigen wir einen Stabilisierungsradius im Sinne von Definition 2.2 aus [21]. Wir zeigen, dass $R(\varphi, 0, K)$ diese Stabilisierungseigenschaft erfüllt.

Bemerkung 5.3.2. *Es reicht aus die Stabilisierungseigenschaft für alle $\varphi \in M^1 \cap M'$ zu zeigen, da die folgenden Aussagen nur von der Verteilung von η abhängen und die wachstumsmaximale Funktion l nach Bemerkung 2.2.21 auf der messbaren Teilmenge M''' von M' , die Wahrscheinlichkeit 1 besitzt, definiert ist.*

Lemma 5.3.3. *Seien $\varphi \in M^1 \cap M'$ und $x \in \mathbb{R}^d$, $K \in \mathcal{K}_0''$. $R := R(\varphi, 0, K)$ erfüllt die Stabilisierungseigenschaft*

$$\rho(x + ([\varphi \cap B^*(0, R)] \cup \psi), x, K, x + A) = \rho(x + [\varphi \cap B^*(0, R)], x, K, x + A) \quad (5.39)$$

für alle $\psi \in M^1$ mit $\psi \subset (\mathbb{R}^d \setminus B(0, R)) \times \mathcal{K}_0''$ und $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Beweis: O.B.d.A. sei R endlich. Aufgrund der Translationsinvarianz von ρ sei o.B.d.A. $x = 0$. Weiterhin sei $R = R(\varphi, 0, K)$ endlich. Damit muss auch $D(\varphi, 0, K)$ endlich sein und wegen $B(0, 2cD) \subset S(\varphi, 0, K) \subset B(0, R)$ existiert ein Punkt in $\varphi \cap B^*(0, R)$, dessen Projektion auf die erste Komponente nicht der Ursprung ist. Somit gilt in diesem Fall $\text{card}(\varphi^{(0,K)} \cap B^*(0, R)) > 1$ und somit auch $\text{card}([\varphi^{(0,K)} \cap B^*(0, R)] \cup \psi) > 1$, wodurch wir

$$\begin{aligned} & \rho([\varphi \cap B^*(0, R)] \cup \psi, 0, K, A) \\ &= g(l([\varphi^{(0,K)} \cap B^*(0, R)] \cup \psi, 0, K), 0, K, A) \mathbf{1}_{\{\text{card}(\varphi^{(0,K)} \cap B^*(0, R)) > 1\}} \end{aligned}$$

erhalten. Da R endlich ist, können wir schließen, dass $S(\varphi, 0, K)$ beschränkt ist. Mit Lemma 5.2.2 ergibt sich dann die Gleichung

$$\begin{aligned} & \rho([\varphi \cap B^*(0, R)] \cup \psi, 0, K, A) \\ &= g(l(\varphi^{(0,K)} \cap B^*(0, R), 0, K), 0, K, A) \mathbf{1}_{\{\text{card}(\varphi^{(0,K)} \cap B^*(0, R)) > 1\}} \\ &= \rho(\varphi \cap B^*(0, R), 0, K, A), \end{aligned}$$

womit wir (5.39) für $x = 0$ gezeigt haben. \square

Damit ist $R(\varphi, 0, K)$ eine obere Schranke des Stabilisierungsradius von ρ im Sinne von Definition 2.2 aus [21]. Nun sind wir in der Lage, unseren zentralen Grenzwertsatz 5.3.1 zu zeigen.

Beweis von Satz 5.3.1: Wir beweisen den Satz mit Hilfe von Theorem 2.2 aus [21]. Die dafür benötigte Version des Theorems findet sich im Anhang als Satz B.3.

Zunächst zeigen wir, dass das Integral aus (5.38) in der für Satz B.3 notwendigen Form geschrieben werden kann. Wir definieren für $n > 0$

$$\rho_n(\varphi, x, K, A) := \rho(n^{1/d}\varphi, n^{1/d}x, K, n^{1/d}A) \mathbf{1}_{W_1}(x),$$

für alle $\varphi \in M^1$, $x \in \mathbb{R}^d$, $K \in \mathcal{K}_0''$ und $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ sowie das zufällige Maß

$$\mu_n^\rho(\cdot) := \sum_{(x,K) \in (n^{-1/d}\eta)_{W_1}} \rho_n((n^{-1/d}\eta)_{W_1}, x, K, \cdot),$$

welches lokalendlich ist. Für jede messbare Funktion $f : W_1 \rightarrow \mathbb{R}$ berechnen wir, unter Beachtung der Teilmengenbeziehung $(n^{-1/d}\eta)_{W_1} \subset W_1$,

$$\begin{aligned} \int_{W_1} f \, d\mu_n^\rho &= \sum_{(x,K) \in (n^{-1/d}\eta)_{W_1}} \int_{W_1} f(z) \rho_n((n^{-1/d}\eta)_{W_1}, x, K, dz) \\ &= \sum_{(x,K) \in (n^{-1/d}\eta)_{W_1}} \int_{W_n} f(n^{-1/d}z) \rho(n^{1/d}((n^{-1/d}\eta)_{W_1}), n^{1/d}x, K, dz). \end{aligned}$$

Aus dem Abbildungssatz für Poissonprozesse (Satz 1.1.9) erhalten wir

$$\eta_{W_n} \stackrel{d}{=} n^{1/d}((n^{-1/d}\eta)_{W_1}) \quad (5.40)$$

und somit

$$\begin{aligned} \int_{W_1} f \, d\mu_n^\rho &\stackrel{d}{=} \sum_{(x,K) \in n^{-1/d}\eta_{W_n}} \int_{W_n} f(n^{-1/d}z) \rho(n^{-1/d}\eta_{W_n}, n^{1/d}x, K, dz) \\ &= \sum_{(x,K) \in \eta_{W_n}} \int_{W_n} f(n^{-1/d}z) \rho(\eta_{W_n}, x, K, dz) \\ &= \int_{W_n} f(n^{-1/d}z) \mu(\eta_{W_n}, dz). \end{aligned}$$

Deshalb erhalten wir aus Satz B.3 die von uns behauptete Verteilungskonvergenz.

Nun müssen noch die Voraussetzungen dieses Satzes gezeigt werden. Wir weisen zuerst die Stabilisierungseigenschaft B.1 aus Definition B.1 nach. Wir müssen also

$$\mathbb{P}(R(\eta, 0, Z_0) < \infty) = 1$$

und

$$\mathbb{P}(R(\eta^{(x, Z_1)}, 0, Z_0) < \infty) = 1, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

zeigen, wobei Z_1 eine von η und Z_0 unabhängige Zufallsvariable mit Verteilung \mathbb{Q} ist. Beide Eigenschaften ergeben sich direkt aus Lemma 5.2.3.

Nun zeigen wir die Momentenbedingungen M1 und M2 aus Anhang B. Wir beginnen mit M1 und weisen für $p > 0$

$$\sup_{n \geq 1, x \in W_1} \mathbb{E}[\rho_n((n^{-1/d}\eta)_{W_1}, x, Z_0, \mathbb{R}^d)^p] < \infty \quad (5.41)$$

nach. Es gilt

$$\begin{aligned} \sup_{n \geq 1, y \in W_1} \mathbb{E}[\rho_n((n^{-1/d}\eta)_{W_1}, y, Z_0, \mathbb{R}^d)^p] &= \sup_{n \geq 1, y \in W_1} \mathbb{E}[\rho(n^{1/d}(n^{-1/d}\eta)_{W_1}, n^{1/d}y, Z_0, \mathbb{R}^d)^p] \\ &= \sup_{n \geq 1, x \in W_n} \mathbb{E}[\rho(\eta_{W_n}, x, Z_0, \mathbb{R}^d)^p], \end{aligned} \quad (5.42)$$

wobei zuletzt (5.40) verwendet wurde. Sei $n \geq 1$ und $x \in W_n$. Aufgrund von (5.35) gilt die Abschätzung

$$\mathbb{E}[\rho(\eta_{W_n}, x, Z_0, W_n)^p] \leq \alpha^p \mathbb{E} \left[l(\eta_{W_n} \cup \{x, Z_0\}, x, Z_0)^{\beta p} \mathbf{1}_{\{\text{card}(\eta_{W_n} \cup \{(x, Z_0)\}) > 1\}} \right].$$

Für $n \geq 1$ und $x \in W_n$ setzen wir $Y_{n,x} := l(\eta_{W_n} \cup \{x, Z_0\}, x, Z_0) \mathbf{1}_{\{\text{card}(\eta_{W_n}) > 0\}}$ und zeigen, dass $\mathbb{E}[Y_{n,x}]$ gleichmäßig in n und x beschränkt ist, woraus mit (5.42) die gewünschte Aussage (5.41) folgt. Für $t \leq \text{diam}(W_n)$ gilt die Abschätzung

$$\mathbb{P}(Y_{n,x} > t) \leq \mathbb{P}(l(\eta_{W_n} \cup \{x, Z_0\}, x, Z_0) > t) \leq \mathbb{P}(\eta_{W_n}(B(x, t) \times \mathcal{K}'_0) = 0) \leq \exp(-\gamma t^d). \quad (5.43)$$

Die zweite Ungleichung in (5.43) erhalten wir mit Ungleichung (2.10) in [16], wobei γ nur von W_1 abhängt. Nach Konstruktion ist $Y_{n,x} \leq \text{diam}(W_n)$. Für $t > \text{diam}(W_n)$ gilt somit $\mathbb{P}(Y_{n,x} > t) = 0$. Hieraus folgt die Behauptung für alle p und Bedingung M1 ist gezeigt.

Um Bedingung M2 zu behandeln, können wir obige Abschätzungen analog durchführen. Wir müssen lediglich $Y_{n,x}$ durch

$$Y_{n,x,y} := l(\eta_{W_n} \cup \{(x, Z_0)\} \cup \{(y, Z_1)\}, x, Z_0)$$

mit $y \in W_n$ ersetzen.

Zum Beweis unseres Satzes fehlt nun noch, dass ρ power-law-stabilisierend für $\mathbf{1}_{W_1}(x)$ von der Ordnung q im Sinne von Definition B.2 für hinreichend großes q ist. D.h., wir zeigen für ein $p > 3$ und ein $q > d(150 + 6/p)$, dass die Aussage

$$\sup_{s \geq 1} s^q \tau(s) < \infty,$$

mit $\tau(s)$ wie in (B.2) durch

$$\tau(s) = \sup_{n \geq 1, y \in W_1} \mathbb{P}(R(n^{1/d}((n^{-1/d}\eta)_{W_1} - y), 0, Z_0) > s)$$

eingeführt, gilt. Es ist

$$\begin{aligned}\tau(s) &= \sup_{n \geq 1, y \in W_1} \mathbb{P}(R(n^{1/d}(n^{-1/d}\eta)_{W_1} - n^{1/d}y, 0, Z_0) > s) \\ &= \sup_{n \geq 1, x \in W_n} \mathbb{P}(R(\eta_{W_n} - x, 0, Z_0) > s).\end{aligned}$$

Wir zeigen, ähnlich wie im ersten Teil von Lemma 5.2.3, dass die Verteilung von $R(\eta_{W_n} - x, 0, Z_0)$, unabhängig von $x \in \mathbb{R}^d$ und $n \in \mathbb{N}$ einen subexponentiell fallenden Tail besitzt. Der Beweis hierzu findet sich im Anhang als Lemma A.2. Damit haben wir die Gültigkeit der nötigen Voraussetzungen nachgewiesen und erhalten unseren zentralen Grenzwertsatz direkt mit Hilfe von Satz B.3 aus Anhang B. \square

Der nächste Satz liefert eine Formel zur Berechnung für die in Satz 5.3.1 eingeführte Varianz. Der Satz folgt direkt mit Theorem 2.1 aus [21].

Satz 5.3.4. *Seien η , f und ρ wie in Satz 5.3.1. Dann gilt*

$$\sigma_{\rho, f} = V^\rho \int_{W_1} f(x)^2 dx$$

mit

$$\begin{aligned}V^\rho := \mathbb{E} \left[\rho(\eta^{(0, Z_0)}, 0, Z_0, \mathbb{R}^d)^2 \right] &+ \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E} \left[\rho(\eta^{(0, Z_0), (z, Z_1)}, 0, Z_0, \mathbb{R}^d) \rho(\eta^{(0, Z_0), (z, Z_1)}, z, Z_1, \mathbb{R}^d) \right. \\ &\left. - \left(\mathbb{E} \left[\rho(\eta^{(0, Z_0)}, 0, Z_0, \mathbb{R}^d) \right] \right)^2 dz, \quad (5.44)\end{aligned}$$

wobei das Integral aus (5.44) existiert.

Diese Größe kann in Spezialfällen nach unten abgeschätzt werden, um die Positivität der Varianz zu zeigen. In unserem Fall bleibt dies ein offenes Problem. Der letzte Satz in diesem Kapitel macht jedoch eine Aussage über die Varianz des von uns im zentralen Grenzwertsatz 5.3.1 eingeführten Funktionals.

Satz 5.3.5. *Es sei $\sigma_{\rho, f}$ die zu ρ und f gehörende Konstante aus Satz 5.3.1. Dann gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Var} \left(\int_{W_n} f(n^{-1/d}x) \mu(\eta_{W_n}, dx) \right)}{n} = \sigma_{\rho, f}.$$

Beweis: Der Satz folgt direkt mit Satz B.3. Die Voraussetzungen sind alle erfüllt, wie wir im Beweis von Satz 5.3.1 bereits gezeigt haben. \square

Nun wollen wir noch einige Beispiele für μ vorstellen.

Beispiel 5.3.6. Wählen wir $g(t, x, K, A) = \lambda_d(tK)\delta_x(A)$, erhalten wir aufgrund der Hard-Core-Eigenschaft für $\varphi \in M^1$

$$\mu(\varphi, A) = \lambda(Z(\varphi_A)) \mathbf{1}\{\text{card}(\varphi_A) \geq 2\}.$$

Wählen wir $g(t, x, K, A) = \mathcal{H}^{d-1}(tK)\delta_x(A)$, ist $\mu(\varphi, A)$ die Summe der Randlängen der Körner von $T(\varphi_A)$, sofern φ_A mindestens zwei Punkte besitzt, und 0 sonst. Falls die Dimension der Schnittmengen von je zwei Körnern von $T(\varphi_A)$ höchstens $d - 2$ ist, so ist $\mu(\varphi, A)$ daher die Oberfläche von $T(\varphi_A)$.

Nun verlassen wir Konstruktionen, die auf Dirac-Maßen beruhen.

Beispiel 5.3.7. Wir betrachten

$$g(\varphi, x, K, A) = \lambda((x + l(\varphi^{(x,K)}), x, K)K) \cap A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

Es handelt sich also um die Einschränkung des Lebesgue-Maßes auf das zu (x, K) gehörende Korn, geschnitten mit der Menge A . Es ergibt sich

$$\begin{aligned} & \int_{W_n} f(n^{-1/d}z) \mu(\eta_{W_n}, dz) \\ &= \sum_{(x,K) \in \eta_{W_n}} \mathbf{1}\{\text{card}(\eta_{W_n}^{(x,K)}) > 1\} \int_{W_n} f(n^{-1/d}z) \mathbf{1}\{z \in (x + l(\eta_{W_n}, x, K)K)\} dz \\ &= \mathbf{1}\{\text{card}(\eta_{W_n}) \geq 2\} \sum_{(x,K) \in \eta_{W_n}} \int_{W_n} f(n^{-1/d}z) \mathbf{1}\{z \in (x + l(\eta_{W_n}, x, K)K)\} dz. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Für beliebiges f können wir diesen Ausdruck als gewichtetes Volumen interpretieren. Setzen wir $f \equiv 1$, so können wir (5.45) zu

$$\lambda(Z(\eta_{W_n}) \cap W_n) \mathbf{1}\{\eta_{W_n} \geq 2\}$$

umformen.

Ein weiteres Beispiel für g ist

$$g(\varphi, x, K, A) = \mathcal{H}^{d-1}((\partial(x + l(\varphi, x, K)K)) \cap A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

Für diese Wahl von ρ kann man die gleiche Rechnung wie eben anstellen. Fordern wir von $T(\eta_{W_n})$, dass die Schnittmengen von je zwei Körnern höchstens die Dimension $d - 2$ aufweisen, so erhalten wir eine gewichtete Oberfläche. Für $f \equiv 1$ ergibt sich der Schnitt der Oberfläche von $Z(\eta_{W_n})$ mit W_n , sofern η_{W_n} mehr als zwei Punkte enthält. Ansonsten ist das Funktional 0.

Kapitel 6

Offene Fragen und Ausblick

Als Erstes stellt sich die Frage, ob es möglich ist, einen Existenz- und Eindeutigkeitsatz für das allgemeine wachstumsmaximale Modell anzugeben. Für endliche Konfigurationen ist dieses naive Vorgehen (vgl. Ende von Abschnitt 2.2.1) selbstverständlich immer möglich. Es bleibt zu klären, ob es Bedingungen gibt, unter denen auch zu unendlichen Punktmustern immer ein wachstumsmaximales Modell existiert, und wenn ja, wie diese aussehen müssten. Eventuell lassen sich Ideen aus Kapitel 2 verwenden, um einen allgemeinen Existenz- und Eindeutigkeitsbeweis für ein Modell mit beliebigen konvexen Körnern und Startzeiten zu formulieren.

Auf dem Gebiet der Perkolation drängen sich zwei Fragestellungen auf. Zum einen ist unklar, ob das modifizierte Liniensegmentmodell perkoliert oder nicht. Möglich ist beides, wobei der Autor eher davon ausgeht, dass keine Perkolation vorliegt. Für einen Beweis dieser Vermutung scheint es nötig, tiefere Resultate aus der Perkolationstheorie zu verwenden. Eine direkte, modellspezifische Erklärung, wie im kanonischen Fall, ist zumindest nicht offensichtlich. Zum anderen können wir uns wie in [16] die Frage stellen, wie das Perkolationsverhalten einer Parallelmenge des wachstumsmaximalen Modells ist, also was passiert, wenn wir zu jedem Korn mit Hilfe der Minkowski-Addition eine Kugel mit festem Radius addieren. Zumindest im Fall von volldimensionalen Körnern sollten sich die Ergebnisse aus [16] qualitativ übertragen lassen. Wir vermuten also, dass ein kritischer Radius existiert, unter dem die Parallelmenge nicht perkoliert. Möchte man der Argumentation aus [16] folgen, muss jedoch zunächst eine stärkere Stabilisierungseigenschaft, die sogenannte externe Stabilisierung, nachgewiesen werden. Dieser Nachweis wäre schon für sich betrachtet eine wesentliche Erkenntnis über wachstumsmaximale Modelle.

Des Weiteren lässt sich anmerken, dass über die probabilistischen Eigenschaften wachstumsmaximaler Modelle noch wenig bekannt ist. Im fünften Kapitel konnten wir einige Gleichungen angeben und auch Abschätzungen für den Tail der Verteilung der wachstumsmaximalen Funktion zeigen. Darüber hinaus wäre es allerdings wünschenswert, Momente oder gar explizite Verteilungsaussagen herzuleiten. Die zahlreichen Abhängigkeiten zwischen den verschiedenen Körnern in den Griff zu bekommen, scheint der Schlüssel zu diesem Problem zu sein. Das Fehlen erkennbarer Monotonien innerhalb der wachstumsmaximalen Modelle erschwert dieses Vorhaben zusätzlich. In diesem Zusammenhang steht auch die Frage nach der Intensität der Körner mit positivem Radius in dynamischen Modellen. Wir haben mit Hilfe von Simulationen (siehe Abschnitt 5.1.6) erkannt, dass eine Vergrößerung des Trägers der Startzeitenverteilung eine Reduktion der Intensität des Prozesses der echt positiven Körner zur Folge hat. Eine mathematische Erklärung dieses Phänomens wäre wünschenswert.

Eine weitere Frage ist, wie wachstumsmaximale Modelle Anwendung in der Praxis finden. In [1] werden Anwendungen im Bereich der Materialwissenschaften vorgeschlagen. Insbesondere Polymere, Keramiken und Kristalle werden dort genannt. Außerdem wird ein Einsatz in

biologischen Systemen in Aussicht gestellt. Hier sind insbesondere die Modellierung von Seifenschaum und Glas sowie die Beschreibung des Revierverhaltens von Tieren als Beispiele genannt. Vor allem aus der Ähnlichkeit wachstumsmaximaler Modelle mit dem in der Physik ebenfalls diskutierten „random-Apollonian-packing“ (siehe [7] und [8]) sollten sich Einsatzmöglichkeiten ergeben.

Anhang A

Stabilisierung

Lemma A.1. *Sei η ein unabhängig markierter Poissonprozess auf \mathbb{R}^d mit Markenraum \mathcal{K}'_0 und Intensität 1, dessen Markenverteilung \mathbb{Q} Bedingung (5.24) erfülle. Weiter seien Z_0 und Z_1 voneinander und von η unabhängige, nach \mathbb{Q} verteilte Zufallsvariablen. Für alle $x \in \mathbb{R}^d$ und $0 < \gamma < 1$ existieren Konstanten $\alpha, \beta > 0$, so dass die Abschätzung*

$$\mathbb{P}(R(\eta^{(x, Z_1)}, 0, Z_0) > t) \leq \alpha \exp(-\beta t^\gamma), \quad t \geq 0,$$

gilt.

Beweis: Der Beweis verläuft ähnlich wie der von Lemma 5.2.3. Sei $x \in \mathbb{R}^d$ fest gewählt. Wir definieren $R' := R(\eta^{(x, Z_1)}, 0, Z_0)$ und $D' := D(\eta^{(x, Z_1)}, 0, Z_0)$. Weiter sei $0 < \varepsilon < 1/(d+1)$. O.B.d.A können wir $t \geq 1$ annehmen. Es gilt die Abschätzung

$$\mathbb{P}(R' > t) \leq \mathbb{P}\left(D' > \frac{t^\varepsilon}{4c}\right) + \mathbb{P}\left(D' \leq \frac{t^\varepsilon}{4c}, R' > t\right). \quad (\text{A.1})$$

Aus Definition (5.25) erhalten wir $D(\varphi^{(x, K)}, 0, L) \leq D(\varphi, 0, L)$ und somit

$$\mathbb{P}\left(D' > \frac{t^\varepsilon}{4c}\right) \leq \mathbb{P}\left(D > \frac{t^\varepsilon}{4c}\right),$$

wobei $D := D(\eta, 0, Z_0)$ wie im Beweis von Lemma 5.2.3. Also können wir die Abschätzung für $\mathbb{P}(D > t^\varepsilon/(4c))$ aus dem Beweis von Lemma 5.2.3 verwenden und erhalten

$$\mathbb{P}\left(D' > \frac{t^\varepsilon}{4c}\right) \leq \exp(-c_5 t^{\varepsilon d}) \quad (\text{A.2})$$

mit der dort eingeführten Konstante c_5 . Den zweiten Teil von (A.1) schätzen wir folgendermaßen ab. Es sei E' die Menge aller $\varphi \in \mathbb{M}^1$, die eine absteigende Kette $(0, K_0), \dots, (x_n, K_n)$ enthalten, für die $a(0, K_0, x_1, K_1) < D(\varphi^{(x, K)}, 0, K_0)$ und $n \geq t^{1-\varepsilon}/2$ sowie $x \in \phi$ gelten. Für jedes $\varphi \in \mathbb{M}^1$ mit $(0, K_0) \in \varphi$ und $(x, K) \in \varphi$ für $K_0, K \in \mathcal{K}''_0$, d.h. $B(0, 1) \subset K_0, K \subset B(0, c)$ mit

$$R(\varphi^{(x, K)}, 0, K_0) > t \quad \text{und} \quad D(\varphi^{(x, K)}, 0, K_0) \leq \frac{t^\varepsilon}{4c}$$

gilt $\varphi \in E'$. Denn falls aus den Voraussetzungen $\varphi \notin E'$ folgen würde, so bestünde jede absteigende Kette mit $a(0, K_0, x_1, K_1) \leq D(\varphi^{(x, K)}, 0, K_0) \leq t^\varepsilon/(4c)$ aus weniger als $t^{1-\varepsilon}/2$ Punkten. Damit erhalten wir

$$\left[B(0, 2cD(\varphi^{(x, K)}, 0, K_0)) \cup \bigcup_{1 \leq i \leq n} B(x, 2cr_i) \right] \subset B(0, 2c(n+1)D(\varphi^{(x, K)}, 0, K_0)),$$

wobei $r_i := a(x_{i-1}, K_{i-1}, x_i, K_i)$. Es gilt daher nach (5.31) die Ungleichung

$$R(\varphi^{(x,K)}, 0, K_0) \leq 2c(n+1)D(\varphi^{(x,K)}, 0, K_0).$$

Wegen $n < t^{1-\varepsilon}/2$ ist

$$\begin{aligned} 2c(n+1)D(\varphi^{(x,K)}, 0, K_0) &< 2c \left(\frac{t^{1-\varepsilon}}{2} + 1 \right) D(\varphi^{(x,K)}, 0, K_0) \\ &= ct^{1-\varepsilon}D(\varphi^{(x,K)}, 0, K_0) + 2cD(\varphi^{(x,K)}, 0, K_0) \\ &\leq \frac{ct^{1-\varepsilon}t^\varepsilon}{4c} + \frac{2ct^\varepsilon}{4c} \\ &= \frac{t}{4} + \frac{t^\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

und aufgrund von $t \geq 1$ und $0 < \varepsilon < 1/(d+1)$ somit $R(\varphi^{(x,K)}, 0, K_0) \leq (3/4)t$. Damit müsste $R(\varphi^{(x,K)}, K_0) < t$ gelten, was ein Widerspruch ist. Wir erhalten daher

$$\mathbb{P}(R' > t) \leq \mathbb{P}\left(D' > \frac{t^\varepsilon}{c}\right) + \mathbb{P}(\eta^{(0,Z_0),(x,Z_1)} \in E') \leq e^{-c_5 t^\varepsilon} + \mathbb{P}(\eta^{(0,Z_0),(x,Z_1)} \in E'). \quad (\text{A.3})$$

Sei $k := \lceil \frac{(c_1+1)t^\varepsilon}{(4c)^d} \rceil$ und $s_i := (i/(c_1+1))^{1/d}$, $i \in \mathbb{N}_0$, wobei $c_1 := \lambda(B(0, 2c))$ und $\lceil \cdot \rceil$ die obere Gaußklammer bezeichnet. Es gilt $s_k \geq t^\varepsilon/(4c)$. Weiter sei $m := \lceil t^{1-\varepsilon}/2k \rceil$ und $n_0 := \lceil t^{1-\varepsilon}/2 \rceil$. Aufgrund der Definition von ε und k gilt $m \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow \infty$. Wir nehmen daher weiter an, dass t so gross gewählt ist, dass $m \geq 4$. Für $\varphi \in E'$ betrachten wir nun eine absteigende Kette $(x_0, K_0), \dots, (x_n, K_n)$. Es gilt insbesondere $n \geq t^{1-\varepsilon}/2$ und somit $n \geq n_0$. Dann existiert ein $j \in \{1, \dots, k\}$ und ein $l = 0, \dots, n_0 - m$, so dass die Folge $(x_0, K_0), \dots, (x_n, K_n)$ mindestens m aufeinanderfolgende Abstände $a(x_i, K_i, x_{i+1}, K_{i+1})$, $l \leq i \leq l+m-1$ im Intervall $I_j := [s_{j-1}, s_j]$ enthält, da ansonsten die Gesamtzahl n der Abstände der Kette kleiner als $\lceil t^{1-\varepsilon}/2 \rceil$ sein müsste. Des Weiteren gilt

$$\|x_i\| \leq \left(\frac{t^{1-\varepsilon}}{2} + 1 \right) \frac{2ct^\varepsilon}{4c} = \frac{t}{4} + \frac{2ct^\varepsilon}{4c} \leq \frac{t}{4} + \frac{t}{2} = \frac{3}{4}t \leq t, \quad 0 \leq i \leq n_0.$$

Wir erhalten also $E' \subset \cup_{j=1}^k E'_j$, wobei E'_j als die Menge aller $\varphi \in M^1$ definiert sei, so dass $x \in \phi$ ist und eine absteigende Kette $(x_1, K_1), \dots, (x_m, K_m) \in \varphi$ mit $\|x_1\| \leq t$ und $a(x_i, K_i, x_{i+1}, K_{i+1}) \in I_j$ für $1 \leq i \leq m-2$ existiert. Es folgt

$$\mathbb{P}(\eta^{(0,Z_0),(x,Z_1)} \in E') \leq \sum_{j=1}^k \mathbb{P}(\eta^{(x,Z_1)} \in E'_j). \quad (\text{A.4})$$

Wir zerlegen E'_j nun weiter. Für $i = 1, \dots, m$ sei $E'_{j,i}$ der Teil der Elemente von E'_j , die eine absteigende Kette mit $(x, K) = (x_i, K_i)$ enthalten und $E'_{j,m+1}$ der Teil der Elemente von E'_j sei, für die $x \notin \{x_1, \dots, x_m\}$. Damit gilt

$$\mathbb{P}(\eta^{(x,Z_1)} \in E'_j) \leq \sum_{i=1}^{m+1} \mathbb{P}(\eta^{(x,Z_1)} \in E'_{j,i}), \quad j = 1, \dots, k. \quad (\text{A.5})$$

Aufgrund der Tatsache, dass η ein unabhängig markierter, von Z_1 unabhängiger Poissonprozess ist, gilt mit Hilfe der multivariaten Campbellschen Formel (Satz 1.1.15) und Bemerkung 1.1.17 für $1 \leq i \leq m-1$ sowie $x \in \mathbb{R}^d$ mit $\mathbf{x}_j := (x_j, K_j)$ und

$$A_{j,i} := \{(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m) : a(x_n, K_n, x_{n+1}, K_{n+1}) \in I_j, 1 \leq n \leq m, n \neq i-1\}$$

die Abschätzung

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{P}(\eta^{(x, Z_1)} \in E'_{j,i}) \\
 &= \int \mathbb{P}(\eta^{(x, K)} \in E'_{j,i}) \mathbb{Q}(dK) \\
 &\leq \int \mathbb{E} \left[\sum_{(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_m) \in \eta^{(m-1)}} \mathbf{1}_{\{x_1 \in B(0, t), a(x_i, K_i, x_{i+1}, K_{i+1}) \in I_j\}} \mathbf{1}_{\{(x_i, K_i) = (x, K)\}} \right] \mathbb{Q}(dK) \\
 &\leq \int \cdots \int \mathbf{1}_{\{x_1 \in B(0, t), a(x_i, K_i, x_{i+1}, K_{i+1}) \in I_j\}} \mathbf{1}_{\{(x_i, K_i) = (x, K)\}} \\
 &\quad \lambda(dx_1) \mathbb{Q}(dK_1) \cdots \lambda(dx_{i-1}) \mathbb{Q}(dK_{i-1}) \lambda(dx_{i+1}) \mathbb{Q}(dK_{i+1}) \cdots \lambda(dx_n) \mathbb{Q}(dK_n) \mathbb{Q}(dK).
 \end{aligned}$$

Mit einer zu den Ausführungen in Abschnitt 2.2.2 analogen Rechnung erhalten wir

$$\mathbb{P}(\eta^{(x, Z_1)} \in E'_{j,i}) \leq c_1^{m-2} t^d (s_j^d - s_{j-1}^d)^{m-2} = c_1^{m-2} t^d \left(\frac{j}{c_1 + 1} - \frac{j-1}{c_1 + 1} \right)^{m-2} = t^d \left(\frac{c_1}{c_1 + 1} \right)^{m-2},$$

mit $c_1 = \lambda(B(0, 2c))$ für $1 \leq i \leq m$. Den Fall $i = m + 1$ können wir wie im Beweis von Lemma 5.2.3 behandeln. Setzen wir $c_2 := -\ln(c_1/(c_1 + 1))$ sowie $c_3 := ((c_1 + 1)/c_1)^2$, erhalten wir

$$\mathbb{P}(\eta^{(x, Z_1)} \in E'_{j,i}) \leq c_3 t^d \exp(-c_2 m), \quad 1 \leq j \leq k, \quad 1 \leq i \leq m + 1.$$

Wegen $t^\varepsilon \geq 1$ folgt $t^{\varepsilon d} \geq 1$. Mit $c > 1$ ergibt sich

$$k = \left\lceil \frac{(c_2 + 1)t^{\varepsilon d}}{(4c)^d} \right\rceil \leq \lceil (c_2 + 1)t^{\varepsilon d} \rceil \leq (c_2 + 1)t^{\varepsilon d} + 1 \leq (c_2 + 1)t^{\varepsilon d} + t^{\varepsilon d} = (c_2 + 2)t^{\varepsilon d}.$$

Insgesamt erhalten wir daraus mit (A.4) und (A.5)

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(\eta^{(0, Z_0), (x, Z_1)} \in E') &\leq \sum_{j=1}^k \sum_{i=0}^{m+1} \mathbb{P}(\eta^{(0, Z_0)} \in E'_{j,i}) \\
 &\leq (c_2 + 2)t^{\varepsilon d} (m + 2) c_3 t^d \exp(-c_2 m) \\
 &\leq (c_2 + 2)t^{\varepsilon d} \left(\frac{t^{1-\varepsilon}}{2k} + 3 \right) c_3 t^d \exp\left(-\frac{c_2 t^{1-\varepsilon}}{2k}\right) \\
 &\leq (c_2 + 2) c_3 t^{d+\varepsilon d} \left(\frac{t^{1-\varepsilon}}{2(c_2 + 2)t^{\varepsilon d}} + 3 \right) \exp\left(-\frac{c_2 t^{1-\varepsilon}}{2(c_2 + 2)t^{\varepsilon d}}\right) \\
 &\leq c_4 t^{d+\varepsilon d} \exp\left(-c_5 t^{1-\varepsilon-\varepsilon d}\right) + c_6 t^2 \exp\left(-c_5 t^{1-\varepsilon-\varepsilon d}\right),
 \end{aligned}$$

mit Konstanten $c_4, c_5, c_6 > 0$. Dank (A.3) folgt mit der letzten Abschätzung die Ungleichung

$$\mathbb{P}(R' > t) \leq \exp(-c_7 t^{\varepsilon d}) + c_4 t^{d+\varepsilon d} \exp\left(-c_5 t^{1-\varepsilon-\varepsilon d}\right) + c_6 t^2 \exp\left(-c_5 t^{1-\varepsilon-\varepsilon d}\right),$$

wobei aufgrund der Annahme $0 < \varepsilon < 1/(d + 1)$ die Ungleichung $1 - \varepsilon - \varepsilon d > 0$ gilt. Damit erhalten wir die Aussage des Lemmas. \square

Lemma A.2. *Sei η ein unabhängig markierter Poissonprozess auf \mathbb{R}^d mit Markenraum K'_0 und Intensität 1, dessen Markenverteilung \mathbb{Q} Bedingung (5.24) erfülle. Weiter sei Z_0 eine von η unabhängige, nach \mathbb{Q} verteilte Zufallsvariable und R der in (5.31) definierte Stabilisierungsradius. Für alle $0 < \gamma < 1$ existieren Konstanten $\alpha, \beta > 0$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in W_n$ die Abschätzung*

$$\mathbb{P}(R(\eta_{W_n} - x, 0, Z_0) > t) \leq \alpha \exp(-\beta t^\gamma), \quad t \geq 0,$$

gilt.

Beweis: Sei $n \in \mathbb{N}$ und $x \in W_n$. Es gilt

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(R(\eta_{W_n} - x, 0, Z_0) > t) \\ & \leq \mathbb{P}\left(D(\eta_{W_n} - x, 0, Z_0) > \frac{t^\varepsilon}{4c}\right) + \mathbb{P}\left(D(\eta_{W_n} - x, 0, Z_0) \leq \frac{t^\varepsilon}{4c}, R(\eta_{W_n} - x, 0, Z_0) > t\right). \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(D(\eta_{W_n} - x, 0, Z_0) > t^\varepsilon/(4c))$ lässt sich mit Ungleichung (2.10) aus [16] wie im letzten Teil der Ungleichung (5.43) mit Hilfe einer Poissonschen Leerwahrscheinlichkeit nach oben durch eine von n und x unabhängige, exponentiell fallende Größe abschätzen. Für den zweiten Summanden der Abschätzung definieren wir $R_n(\varphi - x, 0, K)$ analog zu $R(\varphi - x, 0, K)$, wobei wir in der Definition der zu $R(\varphi - x, 0, K)$ gehörenden Größe $S(\varphi - x, 0, K)$ aus (5.26) die Größe $D(\varphi - x, 0, K)$ durch $D(\varphi_{W_n} - x, 0, K)$ ersetzen. Damit erhalten wir

$$R(\varphi_{W_n} - x, 0, K) = R_n(\varphi_{W_n} - x, 0, K) \leq R_n(\varphi - x, 0, K),$$

wobei sich die Gleichung aus der Definition von R und R_n ergibt. Die Ungleichung folgt aus der Konstruktion von R_n , da aufgrund von $\varphi_{W_n} \subset \varphi$ jede (endliche) absteigende Kette in φ_{W_n} auch eine absteigende Kette in φ ist. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} & \left\{D(\varphi_{W_n} - x, 0, K) \leq \frac{t^\varepsilon}{4c}, R(\varphi_{W_n} - x, 0, K) > t\right\} \\ & \subset \left\{D(\varphi_{W_n} - x, 0, K) \leq \frac{t^\varepsilon}{4c}, R_n(\varphi - x, 0, K) > t\right\}. \end{aligned}$$

Wir definieren nun das Ereignis $E_{n,x}$ als die Menge aller $\varphi \in M^1$, die eine absteigende Kette $(x, K), \dots, (x_k, K_k) \in \varphi$ enthalten, für die $a(x, K, x_1, K_1) \leq D(\varphi_{W_n}, x, K) \leq t^\varepsilon/(4c)$ und $k \geq t^{1-\varepsilon}/2$ gelten. Wir erhalten wie in Lemma 5.2.3 die Inklusion

$$\left\{\varphi \in M^1 : D(\varphi_{W_n} - x, 0, K_0) \leq \frac{t^\varepsilon}{4c}, R_n(\varphi - x, 0, K) > t\right\} \subset E_{n,x}.$$

Ebenfalls analog zu Lemma 5.2.3 ergibt sich aber

$$E_{n,x} \subset \bigcup_{j=1}^k E'_{j,x}$$

für ein $j \in \{1, \dots, k\}$, wobei es sich bei $E'_{j,x}$ um das Ereignis handelt, dass $\varphi \in M$ eine absteigende Kette aus m Punkten $(x_1, K_1), \dots, (x_m, K_m)$ enthält, für die $\|x - x_1\| \leq t$ und

$$a(x_i, K_i, x_{i+1}, K_{i+1}) \in I_j, \quad 1 \leq j \leq k, \quad 1 \leq i \leq m - 1,$$

gilt, wobei wir die Definitionen von m und k sowie I_j aus Lemma 5.2.3 übernehmen. Von hier folgen wir dem Beweis von Lemma 5.2.3, wobei die Abhängigkeit vom gewählten x während der Integration aufgrund der Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes verschwindet. Insgesamt erhalten wir

$$\mathbb{P}(R(\eta_{W_n} - x, 0, Z_0) > t) \leq \alpha \exp(-\beta t^\gamma)$$

mit von n und x unabhängigen Konstanten α, β und γ .

□

Anhang B

Ein zentraler Grenzwertsatz

Wir geben hier Theorem 2.2 aus [21] für den von uns in den Abschnitten 5.2 und 5.3 betrachteten unabhängig markierten Poissonprozess η an, wobei die dort eingeführten Notationen ρ, ρ_n und μ_n^ρ , verwendet werden und ρ als translationsinvariant vorausgesetzt ist. Wir formulieren zunächst zwei Momentenbedingungen (M1 und M2) sowie zwei Annahmen (A1 und A2). Diese entsprechen den Bedingungen (2.7) und (2.8) und den Annahmen A1 und A5 aus [21].

M1: Für $p > 0$ gilt

$$\sup_{n \geq 1, x \in W_1} \mathbb{E} \left[\rho_n \left((n^{-1/d} \eta)_{W_1}, x, Z_0, \mathbb{R}^d \right)^p \right] < \infty,$$

wobei Z_0 ein von η unabhängiges, nach \mathbb{Q} verteiltes zufälliges Korn sei.

M2: Für $p > 0$ gilt

$$\sup_{n \geq 1, x, y \in W_1} \mathbb{E} \left[\rho_n \left((n^{-1/d} \eta)_{W_1} \cup \{(y, Z_1)\}, x, Z_0, \mathbb{R}^d \right)^p \right] < \infty,$$

wobei Z_0 und Z_1 voneinander und von η unabhängige, nach \mathbb{Q} verteilte zufällige Körner sind.

A1: $\rho(\varphi, x, K, \cdot)$ ist ein Punktmaß in x für alle $\varphi \in \mathcal{M}^1$, $x \in \mathbb{R}^d$ und $K \in \mathcal{K}_0''$.

A2: Es existiert ein $p > 3$ derart, dass ρ die Momentenbedingungen M1 und M2 erfüllt und power-law-stabilisierend von der Ordnung q ist, wobei $q > d(150 + 6/p)$ gilt.

Definition B.1. Für $\gamma > 0$ heißt ρ 1-homogen-stabilisierend, falls für alle $x \in \mathbb{R}^d$

$$\mathbb{P}(R(\eta_\gamma, 0, Z_0) < \infty) = \mathbb{P}(R(\eta_\gamma \cup \{(x, Z_1)\}, 0, Z_0) < \infty) = 1 \quad (\text{B.1})$$

gilt, wobei Z_0 und Z_1 voneinander und von η unabhängige, nach \mathbb{Q} verteilte zufällige Körner sind und η_γ ein stationärer markierter Poissonprozess mit Intensität γ ist.

Diese Definition entspricht Gleichung (2.10) aus [21].

Definition B.2. Sei $q > 0$ und

$$\tau(s) := \sup_{n \geq 1, x \in W_1} \mathbb{P}(R(n^{1/d}((n^{-1/d} \eta)_{W_1} - x), x, Z_0) > s), \quad s > 0. \quad (\text{B.2})$$

Dann heißt ρ *power-law-stabilisierend* von der Ordnung q , falls $\sup_{s \geq 1} s^q \tau(s) < \infty$ gilt.

Satz B.3. *Es sei ρ 1-homogen-stabilisierend und erfülle Bedingung A2. Dann gibt es ein $\sigma_{\rho,f}$ derart, dass*

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \left(\int_{W_1} f d\mu_n^\rho - \mathbb{E} \int_{W_1} f d\mu_n^\rho \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma_{\rho,f}), \quad n \rightarrow \infty,$$

für jede messbare, beschränkte, fast überall stetige Funktion $f : W_1 \rightarrow \mathbb{R}$. Ferner gilt

$$\sigma_{\rho,f} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Var} \left(\int_{W_1} f d\mu_n^\rho \right)}{n}.$$

Falls zusätzlich Bedingung A1 erfüllt ist, gelten die beiden Aussagen für jede messbare, beschränkte Funktion $f : W_1 \rightarrow \mathbb{R}$.

Literaturverzeichnis

- [1] Andrienko, Y.A., Brilliantov, N.V. und Krapivsky, P.L. (1994). Pattern Formation by Growing Droplets: The Touch-and-Stop Model of Growth. *Journal of Statistical Physics*, **75**, 507-523.
- [2] Baryshnikov, Y. und Yukich, J. (2005). Gaussian limits for random measures in geometric probability. *Annals of Applied Probability*, **37**, 604-628.
- [3] Baumstark, V. und Last, G. (2009). Gamma distributions for stationary Poisson flat processes. *Advances in Applied Probability*, **41**, 911-939.
- [4] Daley, D.J. und Last, G. (2005). Descending chains, the Lilypond-Model, and mutual-nearest-neighbour matching. *Advances in Applied Probability*, **15**, 213-253.
- [5] Daley, D.J., Stoyan, H. und Stoyan, D. (1999). The volume fraction of a Poisson germ model with maximally non-overlapping spherical grains. *Advances in Applied Probability*, **31**, 610-624.
- [6] Daley, D.J. und Vere-Jones, D. (2008). *An Introduction to the Theory of Point Processes: Volume II: General Theory and Structure*. Springer, New York.
- [7] Delaney, G.W., Hutzler S. und Aste, T. (2008). Relation between grain shape and fractal properties in Random Apollonian Packing with grain rotation. *Physical Review Letters*, **101**, 120602-1-120602-4.
- [8] Dodds, P.S. und Weitz, J.S. (2002). Packing-limited growth. *Physical Review E*, **65**, 056108-1-056108-6.
- [9] Häggström, O. (1997). Infinite clusters in dependent automorphism invariant percolation on trees. *Annals of Probability*, **25**, 1423-1436.
- [10] Häggström, O. und Meester, R. (1996). Nearest neighbor and hard sphere models in continuum percolation. *Random Structures & Algorithms*, **9**, 295-315.
- [11] Heveling, M. und Last, G. (2005). Existence, uniqueness, and algorithmic computation of general lilypond systems. *Random Structures & Algorithms*, **29**, 338350.
- [12] Hug, D. (1999). *Measures, curvatures and currents in convex geometry*. Habilitationsschrift, Albert-Ludwig-Universität Freiburg.
- [13] Kallenberg, O. (2002). *Foundations of Modern Probability*. 2. Auflage, Springer, New York.
- [14] Kingman, J.F.C. (1993). *Poisson Processes*. Clarendon Press, Oxford.

- [15] Last, G. (2010). Modern random measures: Palm theory and related models. In: *New Perspectives in Stochastic Geometry*, Hrsg. W.S. Kendall und I. Molchanov, Oxford University Press, Oxford.
- [16] Last, G. und Penrose, M.D. (2011). Percolation and limit theory for the Poisson Lilypond Model. Erscheint in *Random Structures & Algorithms*.
- [17] Last, G. und Thorisson, H. (2009). Invariant transports of stationary random measures and mass-stationarity. *Annals of Probability*, **37**, 790-813.
- [18] Matérn, B. (1986). *Spatial Variation*. Lecture Notes in Statistics **36**. 2. Auflage, Springer, Berlin.
- [19] Mathéron, G. (1968). *Schema booleen sequentiel de partition aleatoire*. Note Geostatistique **89**. CG, Ecole des Mines de Paris.
- [20] Müller, A. und Stoyan D. (2002). *Comparison Methods for Stochastic Models and Risks*. Wiley, Chichester.
- [21] Penrose, M.D. (2007). Gaussian limits for random geometric measures. *Electric Journal of Probability*, **12**, 989-1035.
- [22] Penrose, M.D. (2007). Laws of large numbers in stochastic geometry with statistical applications. *Bernoulli*, **13**, 1124-1150.
- [23] Preston, C.J. (1976). *Random Fields*. Lecture Notes in Mathematics **534**. Springer, Berlin.
- [24] Schlather, M. und Stoyan, D. (2000). Random sequential adsorption: relationship to dead leaves and characterization of variability. *Journal of Statistical Physics*, **100**, 969-979.
- [25] Schneider, R. (1993). *Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [26] Schneider, R. und Weil, W. (2008). *Stochastic and Integral Geometry*. Springer, Berlin.
- [27] Schreiber, T. (2010). Limit theorems in stochastic geometry. In: *New Perspectives in Stochastic Geometry*, Hrsg. W.S. Kendall und I. Molchanov, Oxford University Press, Oxford.
- [28] Schreiber, T. und Soja, N. (2011). Limit theory for planar Gilbert tessellation. *Probability and Mathematical Statistics*, **31**, 149-160.
- [29] Serra, J. (1982). *Image analysis and mathematical morphology*. Academic Press, London.
- [30] Stoyan, D., Kendall, W.S. und Mecke, J. (1995). *Stochastic Geometry and Its Applications*. 2. Auflage, Wiley, Chichester.
- [31] Torquato, S. (2002). *Random Heterogenous Materials*. Springer, New York.
- [32] Torquato, S. und Stillinger, F.H. (2010). Jammed hard-particle packings: From Kepler to Bernal and beyond. *Reviews of Modern Physics*, **82**, 2634-2672.
- [33] Nguyen, X.X. und Zessin, H. (1979). Integral and differential characterizations of the gibbs process. *Mathematische Nachrichten*, **88**, 105-115.
- [34] Zong, C. (1999). *Sphere Packings*. Springer, New York.