

**TOTALE ZERFALLSRATE  
DES Z-BOSONS NACH HADRONEN  
ZUR ORDNUNG  $\alpha_s^4$**

Zur Erlangung des akademischen Grades eines  
**DOKTORS DER NATURWISSENSCHAFTEN**

an der Fakultät für Physik des  
Karlsruher Instituts für Technologie (KIT)

genehmigte

**DISSERTATION**

von

**Dipl.-Phys. Jörg Rittinger**

aus Karlsruhe (Baden-Württemberg)



*Karlsruher Institut für Technologie – Campus Süd  
Fakultät für Physik  
Institut für Theoretische Teilchenphysik*

Tag der mündlichen Prüfung: 25. Mai 2012  
Referent: Univ.-Prof. Dr. Johann H. Kühn  
Korreferent: Univ.-Prof. Dr. Matthias Steinhauser



# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2. Zerfallsrate des <math>Z</math>-Bosons nach Hadronen: Rückblick</b>	<b>5</b>
2.1. Nicht-Singulett-Beiträge . . . . .	12
2.1.1. Masselose QCD mit schwerem Top-Quark . . . . .	12
2.1.2. Massenkorrekturen . . . . .	12
2.2. Singulett-Beiträge . . . . .	14
2.2.1. Masselose QCD mit schwerem Top-Quark . . . . .	14
2.2.2. Massenkorrekturen . . . . .	15
2.3. QED- und gemischte QED $\otimes$ QCD-Effekte . . . . .	16
2.4. Elektroschwache Korrekturen . . . . .	17
2.5. Numerik . . . . .	18
<b>3. Theoretische Grundlagen</b>	<b>23</b>
3.1. Berechnung von Feynman-Diagrammen . . . . .	24
3.1.1. QGRAF und Q2E: Erzeugen von Diagrammen . . . . .	25
3.1.2. EXP: Entwicklung nach Massen und Impulsen und Sortieren nach Topologien . . . . .	25
3.1.3. MATAD: Berechnung der Integrale . . . . .	27
3.1.4. CRUSHER: Reduzieren auf Master-Integrale . . . . .	30
3.2. Renormierung . . . . .	31
3.2.1. Renormierung der QCD . . . . .	32
3.2.2. Operatoren und Operatormischung . . . . .	34
3.2.3. Renormierungsgruppen und anomale Dimensionen . . . . .	35
3.2.4. Lösung der Renormierungsgruppen-Gleichung . . . . .	37
3.3. Naive und Larin-Definition von $\gamma_5$ . . . . .	38
3.4. Entkopplung von schweren Teilchen . . . . .	41
3.4.1. Matching . . . . .	42
3.4.2. Entkopplung des Top-Quarks in QCD . . . . .	45

<b>4. Zerfallsrate des <math>Z</math>-Bosons nach Hadronen</b>	<b>49</b>
4.1. Der Axialvektor-Strom . . . . .	51
4.1.1. Renormierung des Axialvektor-NS-Operators . . . . .	54
4.1.2. Renormierung des Axialvektor-Operators . . . . .	56
4.2. Entkopplung des Top-Quarks von den neutralen Strömen . . . . .	58
4.2.1. Berechnung von $C_h$ . . . . .	59
4.2.2. Berechnung von $C_\psi$ . . . . .	61
4.3. $Z$ -Propagator in masseloser QCD . . . . .	63
4.4. Ergebnisse . . . . .	67
4.4.1. Nicht-Singlett-Beiträge . . . . .	68
4.4.2. Vektor-Singlett-Beiträge . . . . .	69
4.4.3. Axialvektor-Singlett-Beiträge . . . . .	71
4.4.4. Summe aller Beiträge . . . . .	77
<b>5. Korrekturen zu <math>\alpha_s(M_Z)</math></b>	<b>79</b>
<b>6. Zusammenfassung</b>	<b>83</b>
<b>A. Anhang</b>	<b>85</b>
A.1. Formeln . . . . .	85
A.2. $C_h$ und $C_\psi$ in $SU(N)$ . . . . .	86

# 1. Einleitung

Zu Zeiten der LHC (Large-Hadron-Collider) Ära beeinflussen Korrekturen durch die starke Wechselwirkung, beschrieben durch die QCD (Quantenchromodynamik), praktisch alle experimentellen Messungen. Daher ist die Bestimmung der starken Kopplungskonstanten  $\alpha_s$  ein zentrales Thema der theoretischen und experimentellen Teilchenphysik.

Neben Studien von  $\tau$ - und  $\Upsilon$ -Zerfällen [1–8], Berechnungen von Bindungszuständen mit Hilfe von Gitterrechnungen, beispielsweise der HPQCD Kollaboration [9–12], Betrachtung von tief inelastischer Streuung (DIS) [13] und Auswertung von Ereignisstrukturen in  $e^+e^-$  Kollisionen [14, 15] spielen die elektroschwachen Fits rund um die  $Z$ -Resonanz eine wichtige Rolle [16]. Die Werte aus diesen Analysen sowie die jeweiligen Fehler sind in Abbildung 1.1 dargestellt. Die Mittelung aller Ergebnisse ergibt einen Wert von [17]

$$\alpha_s(M_Z) = 0.1184 \pm 0.0007 . \quad (1.1)$$

Mit dieser Arbeit wollen wir dazu beitragen, die theoretische Vorhersage für die letztgenannte Analyse zu verbessern. Hierbei handelt es sich um den Vergleich zwischen der berechneten und der gemessenen totalen Zerfallsrate des  $Z$ -Bosons nach Hadronen. Die genaueste Messung der Zerfallsrate  $\Gamma_Z^{\text{exp}}$  wurde am LEP (Large-Electron-Positron-Collider) durchgeführt, indem die Struktur der  $Z$ -Resonanz an die  $Z$ -Masse und verschiedene Zerfallsraten gefittet wurde [16]. Dies liefert einen Wert von

$$\Gamma_{Z,h}^{\text{exp}} = 1744.4 \pm 2.0 \text{ MeV} . \quad (1.2)$$

Auf der theoretischen Seite kann die totale Zerfallsrate mit dem Imaginärteil des  $Z$ -Propagators in Zusammenhang gebracht werden. Neben kleineren Korrekturen, wie QED-(Quantenelektrodynamik) und gemischten QED-QCD-Effekten und Massenkorrekturen durch das Bottom-Quark ( $m_b^2/M_Z^2$ ) [18], kann der größte Anteil der Zerfallsrate durch QCD-Korrekturen mit fünf masselosen Quarks und einem massiven Quark, dem Top-Quark, beschrieben werden [1, 19]. Die QCD-Beiträge spalten sich in zwei Klassen auf, die Nicht-Singulett- und die Singulett-Korrekturen. Die Singulett-Korrekturen zeichnen

## 1. Einleitung

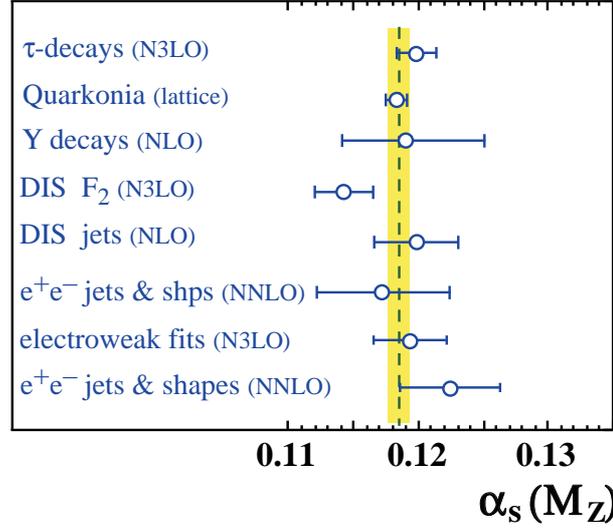


Abb. 1.1.: Ergebnisse der einzelnen  $\alpha_s$  Messungen mit jeweiligen Fehlern, sowie die Kombination aller Werte [17].

sich dadurch aus, dass sich die zugehörigen Feynman-Diagramme, im Gegensatz zu denen der Nicht-Singulett-Beiträge, ausschließlich mit Durchtrennung von Gluonen zerteilen lassen. Aufgrund dieser Bedingung tragen die Singulett-Diagramme erst ab der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$  zur Zerfallsrate bei. Bis auf sehr kleine Korrekturen der Form  $M_Z^2/(4m_t^2)$  [20] kann das Top-Quark als sehr viel schwerer als das  $Z$ -Boson angesehen werden, was  $m_t \rightarrow \infty$  entspricht. Durch diesen Limes kann man Nicht-Singulett-Diagramme bis auf abspaltbare Effekte mit fünf masselosen Quarks berechnen. In den Singulett-Diagrammen ist die Handhabung der Top-Quarks komplizierter, aber es ist komplett verstanden wie man mit ihnen umgehen muss [19, 21]. Die Nicht-Singulett-Beiträge liefern auch in höheren Ordnungen in  $\alpha_s$  den größeren Anteil im Vergleich zu den Singulett-Korrekturen.

Als alle theoretischen Korrekturen bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$  bekannt waren [18], führte der Vergleich mit  $\Gamma_Z^{\text{exp}}$  zu einem Wert von [22]

$$\alpha_s(M_Z) = 0.1185 \pm 0.0026 . \quad (1.3)$$

Der angegebene Fehler ist durch die experimentelle Seite gegeben. Der theoretische Fehler ist nicht explizit angegeben, kann aber nach der zugrunde liegenden theoretischen Arbeit mit  $\pm 0.0006$  abgeschätzt werden [18].

Da die Struktur der Nicht-Singulett-Diagramme einfacher ist, konnten für diese die  $\mathcal{O}(\alpha_s^4)$  Terme zuerst berechnet werden [1]. Diese führen zu einer Verschiebung des Mittelwerts um  $\delta\alpha^{NS} = +0.0005$  im Vergleich zum Fit mit den

$\mathcal{O}(\alpha_s^3)$  Korrekturen. In einer aktuelleren Analyse der GFITTER Gruppe, in der die neuen Nicht-Singulett-Korrekturen (und einige weitere Massenkorrekturen) berücksichtigt wurden, ergab der Vergleich zwischen experimenteller Messung und dem theoretischen Ergebnis [23, 24]

$$\alpha_s(M_Z) = 0.1193_{-0.0027}^{+0.0028} \pm 0.0001 . \quad (1.4)$$

Der erste Fehler ist durch das Experiment gegeben, während der zweite dem Theoriefehler durch Abschätzungen der fehlenden Singulett-Beiträge zur Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s^4)$  und den unbekanntem  $\mathcal{O}(\alpha_s^5)$  Korrekturen entspricht.

Für eine vollständige Rechnung zur Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s^4)$  benötigen wir noch die Singulett-Beiträge, die wir in dieser Arbeit präsentieren wollen. Wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, sind dies die einzigen fehlenden Korrekturen, die noch einen merklichen Beitrag zu der derzeit möglichen Genauigkeit liefern. Durch diese Korrekturen erwarten wir erneut eine kleine Verschiebung des Mittelwerts von  $\alpha_s$ . Außerdem können wir mit diesen Korrekturen den theoretischen Fehler weiter einschränken und somit diese  $\alpha_s$  Bestimmung zu einer der robustesten auf theoretischer Seite machen. Der kleine theoretische Fehler wird besonders dann von Nutzen sein, wenn man bei zukünftigen Experimenten, wie zum Beispiel Giga- $Z$  [25], einen kleineren experimentellen Fehler erhält.

Wir beginnen diese Arbeit mit einem Rückblick auf die bisherigen Korrekturen zur  $Z$ -Zerfallsbreite nach Hadronen in Kapitel 2. Um diese aufzulisten, ist es sinnvoll, verschiedene Beiträge zu trennen. Neben der Aufteilung in Nicht-Singulett- und Singulett-Anteile kann man eine weitere Aufspaltung durch die Struktur der  $Z$ -Fermionkopplung erreichen. Das  $Z$  koppelt unterschiedlich an links- und rechtshändige Fermionen. Dies bewirkt, dass wir die  $Z$ -Kopplung in zwei verschiedene Beiträge aufspalten können, die sogenannten Vektor- und Axialvektor-Korrekturen. Hierdurch erhalten wir vier verschiedene Klassen, die wir getrennt betrachten können. Neben der schrittweisen Zerlegung der Rechnung in Einzelbeiträge, wollen wir zeigen, dass der größte Anteil der Korrekturen berechnet werden kann, indem man die Massen der leichtesten fünf Quarks vernachlässigt und das Top-Quark als sehr schwer betrachtet. Am Schluss des Kapitels wollen wir durch den Vergleich aller bisher bekannten Korrekturen motivieren, warum die Singulett-Beiträge die letzten fehlenden Korrekturen zur vorhandenen Präzision sind.

Bevor wir die Singulett-Diagramme zur Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s^4)$  berechnen, wollen wir in Kapitel 3 einige Grundlagen behandeln, die wir im Verlauf der Arbeit benötigen. Neben der Vorstellung des verwendeten Setups zur Berechnung von

## 1. Einleitung

Green-Funktionen und somit von Feynman-Diagrammen, beschreiben wir den Vorgang der Regularisierung von Divergenzen in Green-Funktionen und die Renormierung dieser. In diesem Zusammenhang beschreiben wir die Funktionsweise der Renormierungsgruppen-Gleichung, sowie später verwendete Lösungen derselben. Nach diesen Erklärungen stellen wir uns Problemen, die speziell in der Berechnung der Zerfallsrate auftreten. Zum einen ist die Axialvektor-Kopplung in dem verwendeten Regularisierungsschema, naiv betrachtet, nicht wohldefiniert und muss redefiniert werden um konsistent behandelt zu werden. Zum anderen wollen wir in der späteren Rechnung die Top Masse als sehr schwer annehmen. Deshalb beschreiben wir, wie man Rechnungen in einer Theorie im Limes einer sehr großen Masse durchführen kann.

Im Hauptkapitel 4 berechnen wir dann die dominanten Korrekturen zur Zerfallsrate, wobei alle Quarks außer dem Top-Quark als masselos behandelt werden. Das Hauptaugenmerk liegt dabei auf den Singulett-Diagrammen der Axialvektor-Kopplung, da diese nach den Nicht-Singulett-Beiträgen den wichtigsten Anteil liefern. In diesen spiegeln sich alle vorher beschriebenen Probleme wider, wie der richtige Umgang mit der Axialvektor-Kopplung und ein nicht triviales Verhalten für große Top-Quark Massen.

In Kapitel 5 untersuchen wir den Effekt der neu berechneten Singulett-Beiträge auf  $\alpha_s$ . Neben der Beobachtung einer kleinen Verschiebung des Mittelwerts von  $\alpha_s$ , werden wir ein Auge auf die theoretischen Fehler im Lichte der komplett bekannten  $\mathcal{O}(\alpha_s^4)$  Terme werfen.

Schlussendlich geben wir im Anhang Formeln und Gleichungen an, die wir der Übersichtlichkeit halber innerhalb der Arbeit in verkürzter oder vereinfachter Form angegeben haben.

## 2. Zerfallsrate des $Z$ -Bosons nach Hadronen: Rückblick

Bevor wir mit unserer Rechnung starten, wollen wir uns genauer anschauen, wie die grundlegende Struktur der Zerfallsrate auf theoretischer Seite aussieht. Hierzu betrachten wir alle bisher bekannten Beiträge, die zur Zerfallsrate beitragen und untersuchen, wie groß deren Effekte sind. Zuerst wollen wir verstehen, wie man von einer allgemeinen Definition, zu einer einfacher zu berechnenden Darstellung gelangt. Die  $Z$ -Zerfallsrate nach Hadronen ist definiert als

$$\Gamma(Z \rightarrow \text{Hadronen}) = \frac{1}{2 M_Z} \frac{1}{3} \sum_{s=1}^3 \sum_{f_{\text{QCD}}} \int d\Phi_{f_{\text{QCD}}} \left| \mathcal{M}(Z \rightarrow f_{\text{QCD}}) \right|^2. \quad (2.1)$$

Dabei berücksichtigt die erste Summe, zusammen mit dem Faktor  $1/3$ , dass wir unpolarisierte  $Z$ -Bosonen betrachten. Die zweite Summe erstreckt sich über alle kinematisch erlaubten QCD-Endzustände, also auf partonischem Level, Zustände mit Quarks und Gluonen im Endzustand. Das Integrationsmaß  $d\Phi_{f_{\text{QCD}}}$  wird über den kompletten Phasenraum des Endzustandes integriert. Phasenraumintegrale mit zunehmender Teilchenzahl im Endzustand werden immer komplizierter zu berechnen, da man eine stetig komplexer werdende Aufhebung von Infrarot-Singularitäten zwischen virtuellen Korrekturen und reeller Abstrahlung von Gluonen handhaben muss. Da wir aber über den kompletten Phasenraum integrieren, können wir uns das Optische Theorem zunutze machen. Dieses setzt die totale Zerfallsrate des  $Z$ -Bosons in Beziehung zum Imaginärteil des  $Z$ -Propagators. Anstatt von Phasenraumintegralen mit komplexer Infrarot-Struktur berechnet man Schleifenintegrale, die keine Infrarot-Singularitäten besitzen.

Das Optische Theorem beruht darauf, dass in einem Schleifendiagramm dann ein Imaginärteil entsteht, wenn man einen Schnitt (dargestellt durch eine gestrichelte Linie) zeichnen kann, der einem kinematisch erlaubten Endzustand entspricht. Der Beitrag zum Imaginärteil entspricht genau dem Wert, den man bei der Phasenraumintegration bekommt. Zur führenden Ordnung lässt sich

## 2. Zerfallsrate des $Z$ -Bosons nach Hadronen: Rückblick

das wie folgt darstellen

$$\begin{aligned}
 \int d\Phi_{q\bar{q}} \left| \text{Diagram} \right|^2 &= \int d\Phi_{q\bar{q}} \left( \text{Diagram} \cdot \text{Diagram} \right) \\
 \Leftrightarrow \text{Im} \left[ \text{Diagram} \right] &= \text{Diagram} .
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Das gespiegelte Diagramm in der ersten Zeile soll das komplex konjugierte Diagramm beschreiben. Zur führenden Ordnung lässt sich nur ein Schnitt zeichnen, während zur nächstführenden Ordnung mehrere Schnitte in einem Diagramm möglich sind

$$\begin{aligned}
 &\int d\Phi_{q\bar{q}} \left| \text{Diagram}_1 + \text{Diagram}_2 + \dots \right|_{\mathcal{O}(\alpha)}^2 + \int d\Phi_{q\bar{q}g} \left| \text{Diagram}_3 + \text{Diagram}_4 \right|^2 \\
 &= \int d\Phi_{q\bar{q}} \left( \text{Diagram}_1 \cdot \text{Diagram}_2 + \dots \right) + \int d\Phi_{q\bar{q}g} \left( \text{Diagram}_3 \cdot \text{Diagram}_4 + \dots \right) \\
 &\Leftrightarrow \text{Diagram}_1 + \dots + \text{Diagram}_3 + \dots \\
 &= \text{Im} \left[ \text{Diagram}_1 + \dots \right] .
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Wenn wir den Imaginärteil eines Diagramms bilden, so entspricht dies der Summe aller möglichen Schnitte. Der Index  $\mathcal{O}(\alpha)$  in der ersten Zeile von (2.3) soll bedeuten, dass nur die Kombinationen, die zur nächstführenden Ordnung beitragen, in die Gleichung einfließen. Wie man in der obigen Darstellung erahnen kann (Vergleich der übereinander liegenden Diagramme), gibt es eine eins-zu-eins Korrespondenz zwischen den möglichen Kombinationen von reellen Diagrammen und Schnitten in den virtuellen  $Z$ -Propagatordiagrammen. Diese bijektive Abbildung gewährleistet uns die Äquivalenz von beiden Methoden durch das Optische Theorem.

Anstatt also schwierige Phasenraumintegrale zu berechnen, beschränkt sich unsere Aufgabe auf die Berechnung des Imaginärteils des  $Z$ -Propagators

$$\Gamma(Z \rightarrow \text{Hadronen}) \leftrightarrow \text{Im} \left[ \text{wavy } Z \text{ --- } \text{grey circle} \text{ --- } \text{wavy } Z \right], \quad (2.4)$$

wobei der grau gefüllte Kreis alle möglichen Korrekturen bezeichnet. Eine exakte Definition werden wir in (2.14) angeben.

Wir sollten an dieser Stelle noch wenige Worte über die Zählweise der Schleifenordnungen verlieren. Während man bei der naiven Herangehensweise zur führenden Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s^0)$  Baumdiagramme berechnet, die dann über den Phasenraum integriert werden, berechnet man beim  $Z$ -Propagator ein Ein-Schleifendiagramm. Der  $n$ -ten Ordnung in  $\alpha_s$  kann man also die  $(n + 1)$ -Schleifendiagramme des  $Z$ -Propagators zuordnen. Auf der linken Seite von Gleichung (2.3) haben wir verschiedene Schleifenordnungen und unterschiedliche Phasenraumintegrationen, was eine Zählweise nur auf die Ordnung von  $\alpha_s$  beschränkt. Deshalb werden wir in Zukunft immer von der Ordnung in  $\alpha_s$  oder der Schleifenzahl des  $Z$ -Propagators reden. Um Verwirrung vorzubeugen sei nochmals erwähnt, dass die Schleifenzahl immer eins größer ist als die Ordnung in  $\alpha_s$ .

Wenn wir die Korrekturen zum  $Z$ -Propagator betrachten, treten folgende Diagramme auf

$$\begin{aligned} \text{wavy } Z \text{ --- } \text{grey circle} \text{ --- } \text{wavy } Z &= \text{wavy } Z \text{ --- } \text{circle with } q \text{ --- } \text{wavy } Z + \text{wavy } Z \text{ --- } \text{circle with } q \text{ --- } \text{wavy } Z + \text{wavy } Z \text{ --- } \text{circle with } q \text{ --- } \text{wavy } Z + \dots \\ &+ \text{wavy } Z \text{ --- } \text{triangle with } t, q \text{ --- } \text{wavy } Z + \text{wavy } Z \text{ --- } \text{triangle with } t, q \text{ --- } \text{wavy } Z + \dots, \end{aligned} \quad (2.5)$$

wobei  $q$  die fünf leichtesten Quarks ( $q = d, u, s, c, b$ ) und  $t$  das Top-Quark bezeichnet. Wir haben in dieser Gleichung der Einfachheit halber nur Gluonen gezeichnet, aber man möge sich bewusst sein, dass auch andere Eichbosonen zu den Korrekturen beitragen. Die Diagramme teilen sich in zwei Klassen auf, die Nicht-Singulett(NS)-Diagramme und die Singulett(S)-Diagramme. Die NS-Diagramme sind in der ersten Zeile von Gleichung (2.5) dargestellt und zeichnen sich dadurch aus, dass eine geschlossene Fermionschleife beide  $Z$ -Vertizes

## 2. Zerfallsrate des $Z$ -Bosons nach Hadronen: Rückblick

verbindet. Das Quark in dieser Fermionschleife kann kein Top-Quark sein, da ein Schnitt durch diesen Diagrammtyp keinen Imaginärteil bekommt, weil das  $Z$ -Boson zu leicht ist, um in zwei Top-Quarks zu zerfallen. Die S-Diagramme (zweite Zeile in (2.5)) können durch einen Schnitt, der nur Gluonen schneidet, zerlegt werden. Das heißt die Fermionen, die an das  $Z$ -Boson koppeln, bilden zwei getrennte Schleifen, in denen nun auch das Top-Quark auftreten kann.

Um die Struktur des  $Z$ -Propagators weiter aufzuspalten, betrachten wir die  $Z$ -Kopplung an die Fermionen über

$$j_\mu^{Z,f} = v_f V_\mu^f + a_f A_\mu^f, \quad (2.6)$$

wobei  $v_f \equiv 2I_f - 4q_f s_w^2$  und  $a_f \equiv 2I_f$  ( $s_w = \sin \theta_w$  bezeichnet den Sinus des effektiven Mischungswinkels,  $I_f$  den schwachen Isospin und  $q_f$  die elektrische Ladung des Fermions). Der Vektor-Strom  $V_\mu^f$  entsteht durch die Kopplung an den Isospin sowie an die Hyperladung der Fermionen, während der Axialvektor-Strom  $A_\mu^f$  durch die Kopplung an den Isospin von rein linkshändigen Fermionen auftritt. Beide sind folgendermaßen definiert

$$V_\mu^f = \bar{\psi}_f \gamma_\mu \psi_f, \quad (2.7)$$

$$A_\mu^f = \bar{\psi}_f \gamma_\mu \gamma_5 \psi_f. \quad (2.8)$$

Den Index  $\mu$  werden wir im Folgenden oft unterdrücken und nur  $A^f$  bzw.  $V^f$  schreiben. Der  $Z$ -Propagator spaltet sich mit dieser Schreibweise in eine inkohärente Summe aus Vektor- und Axialvektor-Propagator

$$\begin{array}{c} Z \\ \text{wavy} \end{array} \text{---} \text{---} \text{---} \begin{array}{c} Z \\ \text{wavy} \end{array} = \sum_{f,f'} v_f v_{f'} \begin{array}{c} V^f \\ \text{wavy} \end{array} \text{---} \text{---} \text{---} \begin{array}{c} V^{f'} \\ \text{wavy} \end{array} + \sum_{f,f'} a_f a_{f'} \begin{array}{c} A^f \\ \text{wavy} \end{array} \text{---} \text{---} \text{---} \begin{array}{c} A^{f'} \\ \text{wavy} \end{array}. \quad (2.9)$$

Gemischte Diagramme sind aus Gründen der Parität nicht erlaubt. Dies sehen wir, wenn wir von unserer diagrammatischen Darstellung zu einer wohldefinierten Form wechseln. Hierzu führen wir die Korrelatoren ein

$$\begin{array}{c} V^f/A^f \\ \text{wavy} \end{array} \text{---} \text{---} \text{---} \begin{array}{c} V^{f'}/A^{f'} \\ \text{wavy} \end{array} \hat{=} \Pi_{\mu\nu;f,f'}^{V/A}(q) \\ = i \int e^{iqx} \langle 0 | T j_{\mu,f}^{V/A}(x) j_{\nu,f'}^{V/A}(0) | 0 \rangle dx \\ = g_{\mu\nu} q^2 \Pi_{1;f,f'}^{V/A}(-q^2) + q_\mu q_\nu \Pi_{2;f,f'}^{V/A}(-q^2). \quad (2.10)$$

Da das Vakuum Eigenzustand zum Paritätsoperator  $P$  ist, können wir schreiben

$$\langle 0 | j_{\mu,f}^V j_{\nu,f'}^A | 0 \rangle = \langle 0 | P^{-1} j_{\mu,f}^V P P^{-1} j_{\nu,f'}^A P | 0 \rangle = -\langle 0 | j_{\mu,f}^V j_{\nu,f'}^A | 0 \rangle. \quad (2.11)$$

Im dritten Schritt haben wir ausgenutzt, dass die räumliche Komponente des Vektor-Stroms ihr Vorzeichen unter Paritätstransformation wechselt, die des Axialvektor-Strom aber nicht. Für die zeitliche Komponente verhält es sich gerade umgekehrt. Somit verschwinden die gemischten Korrelatoren und es verbleibt die inkohärente Summe in (2.9). In (2.10) wird der Transversalteil durch  $\Pi_1$  und der Longitudinalteil durch  $\Pi_1 + \Pi_2$  beschrieben. Der Longitudinalteil spielt im Zusammenhang des  $Z$ -Zerfalls keine Rolle, da er für  $Z$ -Bosonen auf der Massenschale verschwindet und in der  $e^+ e^-$  Annihilation durch die Elektronmasse unterdrückt ist. Da wir wegen des Optischen Theorems nur am Imaginärteil interessiert sind, bilden wir diesen und erhalten

$$R_{f,f'}^{V/A}(s) = 2\pi i \left( \Pi_{1;f,f'}^{V/A}(s - i\varepsilon) - \Pi_{1;f,f'}^{V/A}(s + i\varepsilon) \right). \quad (2.12)$$

Analog zu Gleichung (2.9) erhalten wir dann

$$R = 3 \left( \sum_{f,f'} v_f v_{f'} R_{f,f'}^V + \sum_{f,f'} a_f a_{f'} R_{f,f'}^A \right) \quad (2.13)$$

und somit für die totale Zerfallsrate des  $Z$ -Bosons nach Hadronen

$$\Gamma(Z \rightarrow \text{Hadronen}) \equiv \Gamma_{Z,h} = \Gamma_0 R = \frac{G_F M_Z^3}{24\sqrt{2}\pi} R. \quad (2.14)$$

Der Faktor 3 in (2.13) entsteht durch die Summe über die Farbe der Quarks in der geschlossenen Schleife. In der Konstanten  $\Gamma_0$  haben wir einen stets auftretenden kinematischen Faktor abgespaltet. Wie wir in (2.5) gesehen haben, spaltet sich der  $Z$ -Propagator und somit auch die Korrelatoren in die Beiträge der NS- und S-Diagramme auf

$$R_{f,f'}^{V/A} = \delta_{ff'} R_f^{V/A,NS} + R_{ff'}^{V/A,S}. \quad (2.15)$$

Wir haben also vier verschiedene Klassen ( $R^{V,NS}$ ,  $R^{A,NS}$ ,  $R^{V,S}$  und  $R^{A,S}$ ), die wir getrennt studieren können.

Bevor wir die einzelnen Faktoren auflisten, müssen wir uns noch Gedanken über die vorliegende Kinematik machen. Die Skala, bei der wir unseren Prozess auswerten, ist die des zerfallenden Teilchens. Wir werten somit die Korrelatoren an der Skala der  $Z$ -Masse mit  $s = M_Z^2$  aus. Die restlichen kinematischen Größen sind durch die Quarkmassen gegeben. Hierbei unterscheiden wir die fünf leichtesten Quarks  $q$  und das schwere Top-Quark  $t$ . Ein Ergebnis mit analytischer Massenabhängigkeit zu erhalten ist für höhere Schleifenordnungen jenseits der rechnerischen Möglichkeiten. Dies ist aber nicht problematisch, da wir zu sehr

## 2. Zerfallsrate des $Z$ -Bosons nach Hadronen: Rückblick

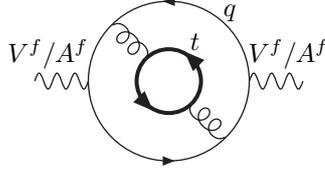


Abb. 2.1.: Double Bubble Diagramm.

guter Näherung folgende Hierarchie verwenden können  $m_q \ll M_Z \ll m_t$ . Dies bedeutet, dass wir in erster Näherung die fünf leichtesten Quarks als masselos und das Top-Quark als unendlich schwer betrachten können. Wir entwickeln somit in Termen der Form  $m_q^2/M_Z^2$ ,  $m_q^2/M_t^2$  und  $M_Z^2/(4 m_t^2)$ . Wenn wir die Massen der leichten Quarks  $q$  im  $\overline{\text{MS}}$ -Schema und die Polmasse des Top-Quarks verwenden, erhalten wir mit den Startwerten [26]

$$\begin{aligned}
 m_c(m_c) &= 1.27 \text{ GeV} , & m_b(m_b) &= 4.19 \text{ GeV} , \\
 M_t &= 172 \text{ GeV} , & M_Z &= 91.1876 \text{ GeV} . \\
 \Rightarrow \quad \frac{(m_c(M_Z))^2}{M_Z^2} &\simeq 0.00004 , & \frac{(m_b(M_Z))^2}{M_Z^2} &\simeq 0.001 , \\
 \frac{M_Z^2}{4 M_t^2} &\simeq 0.07 , & \frac{(m_b(M_Z))^2}{M_t^2} &\simeq 0.0003 . \quad (2.16)
 \end{aligned}$$

Die Korrekturen durch  $m_d$ ,  $m_u$  und  $m_s$  können getrost ausgelassen werden. Diese Werte kann man mit der Entwicklung in der starken Kopplungskonstanten  $\alpha_s(M_Z)/\pi \simeq 0.04$  vergleichen und berücksichtigen, dass wir Berechnungen bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s^4)$  durchführen wollen. Dann sehen wir, dass es ausreicht, wenn man die Massenabhängigkeiten, verursacht durch die leichten Quarks, ab der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$  nicht mehr berücksichtigt. Für die Entwicklung in dem Verhältnis  $M_Z^2/(4 M_t^2)$  empfiehlt es sich, Terme bis inklusive der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$  zu berechnen. Man beachte, dass Effekte durch das Top-Quark frühestens zur Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$  entstehen, da die S-Diagramme erstmals in dieser Ordnung auftreten und führende NS-Beiträge durch Diagramme wie in Abbildung 2.1 gegeben sind.

Die QED-Kopplungskonstante  $\alpha(M_Z) = 1/128$  ist deutlich kleiner als die der starken Wechselwirkung ( $\alpha(M_Z)/\pi \simeq 0.0025$ ). Dies heißt, dass wir für Korrekturen, die  $\alpha$  enthalten, nur die führende Ordnung der  $m_b$ -Abhängigkeit als einzigen Masseneffekt behandeln müssen. Außerdem genügt es, wenn wir Effekte bis  $\mathcal{O}(\alpha^2)$  berechnen.

Die naive Einteilung der verschiedenen Korrekturen haben wir in Tabelle 2.1 angegeben. Wie wir in Gleichung (2.5) sehen können, ist die führende Ordnung im NS-Beitrag  $R^{V/A,NS}$  enthalten. Die weiteren Ordnungen der Störungstheorie ordnen wir in Potenzen von  $\alpha_s/\pi$ , so dass die nächstzuführende Ordnung der Größenordnung von  $\alpha_s/\pi$  entspricht und die folgenden Ordnungen entsprechen den Termen vergleichbar mit  $\alpha_s^2/\pi^2 - \alpha_s^4/\pi^4$ . Diese Auflistung gibt nur eine grobe Einschätzung darüber, wie groß bestimmte Korrekturen ausfallen können. Natürlich haben die Koeffizienten dieser Terme einen großen Einfluss darauf, wie groß letztendlich eine bestimmte Korrektur ausfällt, und müssen explizit berechnet werden.

Wir beginnen zuerst die reinen QCD-Effekte aufzulisten und betrachten QED-abhängige Korrekturen später in diesem Kapitel.

Ordnung	Beiträge vergleichbarer Größenordnung
1	–
$\frac{\alpha_s}{\pi}$	–
$\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2$	$\frac{\alpha}{\pi}, \frac{m_b^2}{M_Z^2}$
$\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^3$	$\frac{\alpha}{\pi} \frac{\alpha_s}{\pi}, \frac{m_b^2}{M_Z^2} \frac{\alpha_s}{\pi}, \frac{m_c^2}{M_Z^2}, \frac{M_Z^2}{4 M_t^2} \frac{\alpha_s}{\pi}$
$\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^4$	$\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2, \frac{\alpha}{\pi} \left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2, \frac{m_b^2}{M_Z^2} \frac{\alpha}{\pi}, \frac{m_c^2}{M_Z^2} \frac{\alpha_s}{\pi}, \frac{m_b^2}{M_Z^2} \left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2,$ $\frac{m_b^4}{M_Z^4}, \frac{m_b^2}{M_t^2} \left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2, \frac{M_Z^2}{4 M_t^2} \left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^3, \frac{M_Z^4}{16 M_t^4} \left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2$

Tab. 2.1.: Auflistung aller Beiträge mit vergleichbarer Größenordnung zur Ordnung der starken Kopplungskonstante  $(\alpha_s/\pi)^n$  mit  $n = 0, 1, 2, 3, 4$ . Die QED-Kopplungskonstante bezeichnen wir mit  $\alpha$ ,  $m_{c,b}$  steht für die  $\overline{\text{MS}}$ -Masse des Charm- und Bottom-Quarks an der Skala  $M_Z$ .

## 2.1. Nicht-Singulett-Beiträge

Wir teilen die NS-Korrekturen in verschiedene Terme auf, die durch unterschiedliche Typen von Diagrammen verursacht werden. Die gesamten NS-Beiträge setzen sich aus diesen einzelnen Termen zusammen

$$R_f^{V/A,NS} = \sum_{i=1}^7 R_{f,i}^{V/A,NS} \quad \text{für } f \neq t . \quad (2.17)$$

Da in den NS-Diagrammen kein Top-Quark an den äußeren Strom koppelt, gilt  $R_t^{V/A,NS} = 0$ . Wir geben im Folgenden nur die numerisch relevanten Funktionen  $R_{f,i}^{V/A,NS}$  an, alle anderen können gleich null gesetzt werden.

### 2.1.1. Masselose QCD mit schwerem Top-Quark

Unter dem Begriff “masselose QCD mit schwerem Top-Quark” verstehen wir die QCD-Theorie, in der die Massen der fünf leichtesten Quarks auf null gesetzt werden und die Masse des Top-Quarks deutlich schwerer als die zur Verfügung stehende Energieskala ist. Wenn wir das Top-Quark als sehr schwer betrachten, dann können wir in den NS-Beiträgen alle Top Effekte in die effektive Kopplungskonstante  $a_s = \alpha_s^{(5)}/\pi$  der Fünf-Flavour-QCD absorbieren (eine ausführliche Diskussion findet man in Kapitel 3.4). Für den masselosen Fall unterscheiden sich die NS-Diagramme des Vektor- und Axialvektor-Korrelators nicht, da beide  $\gamma_5$  Matrizen der Axialvektor-Kopplung zueinander hingetauscht werden können und sich dann gegenseitig aufheben. Diese Terme sind bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s^4)$  bekannt [1]

$$R_{f,1}^{V/A,NS} = R_1^{NS} = 1 + a_s + 1.40923 a_s^2 - 12.7671 a_s^3 - 79.9806 a_s^4 . \quad (2.18)$$

### 2.1.2. Massenkorrekturen

Sobald man die Massen der Quarks berücksichtigt, unterscheiden sich der Vektor- und Axialvektor-Korrelator. Zur Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s)$  ist eine analytische Form [27, 28] und für höhere Ordnungen ist eine ausreichende Entwicklung bekannt [18]. Wir geben in diesem Abschnitt nur die Beiträge an, die numerisch relevant sind, obwohl Terme höherer Ordnungen berechnet wurden ( $m_b^{12}/M_Z^{12} a_s^2$  [29–31],  $m_b^4/M_Z^4 a_s^3$  [32–34],  $m_b^2/M_Z^2 a_s^4$  [35], eine volle Massenabhängigkeit mit Hilfe der Padé-Näherung ist zur Ordnung  $\mathcal{O}(a_s^2)$  [36] und  $\mathcal{O}(a_s^3)$

[37] bekannt). Die Terme quadratischer Ordnung in den Fermionmassen lauten [18]

$$R_{c,2}^{V,NS} = \frac{m_c^2}{M_Z^2} 12 a_s , \quad (2.19)$$

$$R_{c,2}^{A,NS} = \frac{m_c^2}{M_Z^2} \left[ -6 - 22 a_s \right] , \quad (2.20)$$

$$R_{b,2}^{V,NS} = \frac{m_b^2}{M_Z^2} \left[ 12 a_s + 104.832 a_s^2 \right] , \quad (2.21)$$

$$R_{b,2}^{A,NS} = \frac{m_b^2}{M_Z^2} \left[ -6 - 22 a_s - 85.716 a_s^2 \right] , \quad (2.22)$$

$$R_{f,3}^{V/A,NS} = R_{f,3}^{NS} = -\frac{m_b^2}{M_Z^2} 6.126 a_s^3 . \quad (2.23)$$

Die Terme zur vierten Ordnung sind [18]

$$R_{b,4}^{V,NS} = \frac{m_b^4}{M_Z^4} \left[ -6 - 22 a_s + \left( 139.489 - 3.833 \ln \frac{m_b^2}{M_Z^2} \right) a_s^2 \right] , \quad (2.24)$$

$$R_{b,4}^{A,NS} = \frac{m_b^4}{M_Z^4} \left[ 6 + 10 a_s + \left( -217.728 + 26.833 \ln \frac{m_b^2}{M_Z^2} \right) a_s^2 \right] , \quad (2.25)$$

$$R_{f,5}^{V/A,NS} = R_{f,5}^{NS} = \frac{m_b^4}{M_Z^4} \left[ -0.4749 - \ln \frac{m_b^2}{M_Z^2} \right] a_s^2 . \quad (2.26)$$

Die Beiträge  $R_{f,3}^{V/A,NS}$  und  $R_{f,5}^{V/A,NS}$  entstehen aus Diagrammen wie in Abbildung 2.1 dargestellt, wenn wir das Top-Quark durch ein Bottom-Quark ersetzen. Die Masse der äußeren Fermionschleife kann dabei vernachlässigt werden, weshalb Vektor- und Axialvektor-Anteil wie bei der masselosen QCD gleich sind.

Die Korrekturen durch das schwere Top-Quark entstehen ebenfalls durch Diagramme wie in Abbildung 2.1 und sind somit bei Vernachlässigung der leichten Masse für Vektor- und Axialvektor-Korrelator gleich [20]

$$R_{f,6}^{V/A,NS} = \frac{M_Z^2}{4 M_t^2} \left[ (0.26074 - 0.05926 \ln \frac{M_Z^2}{M_t^2}) a_s^2 \right. \quad (2.27)$$

$$\left. + \left( -0.69496 + 0.84968 \ln \frac{M_Z^2}{M_t^2} - 0.14897 \ln^2 \frac{M_Z^2}{M_t^2} \right) a_s^3 \right] ,$$

$$R_{f,7}^{V/A,NS} = \frac{M_Z^4}{16 M_t^4} \left[ (-0.01970 + 0.00635 \ln \frac{M_Z^2}{M_t^2}) a_s^2 \right. \quad (2.28)$$

$$\left. + \left( -0.12035 - 0.00942 \ln \frac{M_Z^2}{M_t^2} + 0.00613 \ln^2 \frac{M_Z^2}{M_t^2} \right) a_s^3 \right] .$$

## 2. Zerfallsrate des $Z$ -Bosons nach Hadronen: Rückblick

Auch hier geben wir nur die numerisch relevanten Terme an, höhere Terme in der Massenentwicklung sind ebenfalls in [20] zu finden. In der expliziten Rechnung wurde gezeigt, dass die Koeffizienten sehr schnell mit zunehmender Ordnung in  $M_t$  und  $a_s$  abnehmen. Deswegen spielen diese Korrekturen eine deutlich geringere Rolle, als der Entwicklungsparameter  $M_Z^2/(4 M_t^2)$  auf den ersten Blick vermuten lässt.

## 2.2. Singulett-Beiträge

### 2.2.1. Masselose QCD mit schwerem Top-Quark

Im Gegensatz zu den NS-Beiträgen unterscheiden sich die S-Anteile zwischen Vektor- und Axialvektor-Korrelatoren deutlich. Dies liegt zum einen daran, dass die Vektor-Beiträge erst zur Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$  auftreten, während das führende Axialvektor-Diagramm der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$  entspricht (siehe Abbildung 2.2). Zum anderen ist der Einfluss durch das Top-Quark unterschiedlich. In der Vektor-Kopplung kann das Top-Quark wie im NS-Fall naiv entkoppelt und somit in erster Näherung im Limes  $M_t \rightarrow \infty$  vernachlässigt werden. Dies bedeutet  $R_{f,f';1}^{V,S} = 0$ , falls  $f$  oder  $f'$  dem Top-Quark entspricht. In der Axialvektor-Kopplung kann das Top-Quark aufgrund anomaler Subdiagramme nicht naiv entkoppelt werden, was zu einer logarithmischen Abhängigkeit führt (eine ausführliche Diskussion dieses Sachverhaltes findet man in Kapitel 4). Für den S-Anteil des Vektor-Korrelators erhalten wir [18]

$$R_{f,f';1}^{V,S} = R_1^{V,S} = -0.41318 a_s^3 \quad \text{für } f, f' \neq t. \quad (2.29)$$

Die Kopplungskonstante der Axialvektor-Kopplung ist  $a_f = \pm 1$  für Up- und Down-Komponente eines Isospindoublets. Deshalb heben sich die Beiträge der Isospinpartner gegenseitig auf, wenn beide die gleiche Masse besitzen. Wenn wir die Masse der leichten Quarks  $q$  auf null setzen, verbleiben nur die Korrekturen mit Top und Bottom-Quark in den Fermionschleifen, die an



Abb. 2.2.: Führende Beiträge zu  $R^{A,S}$  (links) und  $R^{V,S}$  (rechts).

den externen Strom koppeln. Deshalb berücksichtigen wir für diese Terme die Kopplungskonstanten aus (2.13). Die S-Beiträge des Axialvektor-Korrelators lauten somit [19]

$$R_0^{A,S} = 3 \left[ -3.08333 + \ln \frac{M_Z^2}{M_t^2} \right] a_s^2 + 3 \left[ -15.9877 + 3.72222 \ln \frac{M_Z^2}{M_t^2} + 1.91667 \ln^2 \frac{M_Z^2}{M_t^2} \right] a_s^3. \quad (2.30)$$

### 2.2.2. Massenkorrekturen

Auch für die S-Diagramme sind Korrekturen in den leichten Quarkmassen berechnet. Da die S-Beiträge des Vektor-Korrelators erst zur Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$  auftreten, vernachlässigen wir die Massenkorrekturen durch leichte Quarks in der Auflistung. Bekannt sind Terme bis zur Ordnung  $m_b^4/M_Z^4 a_s^3$  [33]. Für den Axialvektor-Korrelator spielt nur die Bottom Masse eine nicht-verschwindende Rolle [18]

$$R_b^{A,S} = 3 \left( \frac{m_b^2}{M_Z^2} \left[ 18 - 6 \ln \frac{M_Z^2}{M_t^2} \right] a_s^2 + \frac{m_b^2}{M_t^2} \left[ -9.888 + 0.185 \ln \frac{M_Z^2}{M_t^2} \right] a_s^2 \right). \quad (2.31)$$

Die volle Massenabhängigkeit ist in der Padé-Approximation zur Ordnung  $\mathcal{O}(a_s^2)$  berechnet [38].

Wenn wir Korrekturen in der Top Masse berechnen, tragen für den Vektor-Anteil Diagramme bei, bei denen eine der Fermionschleifen von einem Top-Quark gebildet wird. Diese Korrekturen lauten [20]

$$R_{f,t;2}^{V,S} = R_{t,f';2}^{V,S} = R_2^{V,S} = \frac{M_Z^2}{4 M_t^2} 0.05407 a_s^3 + \frac{M_Z^4}{16 M_t^4} 0.00727 a_s^3. \quad (2.32)$$

Die Beiträge für den Axialvektor-Anteil sind zur Ordnung  $\mathcal{O}(a_s^2)$  analytisch in der Top-Masse bekannt [39, 40] und in der Entwicklung großer Top-Masse gegeben durch [20]

$$R_t^{A,S} = 3 \left( \frac{M_Z^2}{4 M_t^2} 0.34568 a_s^2 + \frac{M_Z^4}{16 M_t^4} 0.09333 a_s^2 + \frac{M_Z^2}{4 M_t^2} \left[ -0.5034 + 1.14584 \ln \frac{M_Z^2}{M_t^2} - 0.04444 \ln^2 \frac{M_Z^2}{M_t^2} \right] a_s^3 + \frac{M_Z^4}{16 M_t^4} \left[ -0.05011 + 0.19387 \ln \frac{M_Z^2}{M_t^2} - 0.01905 \ln^2 \frac{M_Z^2}{M_t^2} \right] a_s^3 \right). \quad (2.33)$$

## 2. Zerfallsrate des $Z$ -Bosons nach Hadronen: Rückblick

Auch für die S-Diagramme gilt, dass die Koeffizienten für  $M_t$  Korrekturen sehr schnell abnehmen, weshalb diese Korrekturen wieder recht klein ausfallen.

### 2.3. QED- und gemischte QED $\otimes$ QCD-Effekte

In diesem Abschnitt wollen wir die Korrekturen auflisten, die durch reine QED- bzw. gemischte QED $\otimes$ QCD-Effekte entstehen. Hierzu betrachten wir Propagatordiagramme wie in (2.5), in denen zusätzlich Photonen vorkommen. Den führenden Beitrag erhalten wir erneut in der masselosen Theorie mit einem schweren Top-Quark. Die Diskussion der NS-Diagramme ist komplett analog zur reinen QCD in Abschnitt 2.1.1. Die NS-Beiträge der führenden Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha)$  und der gemischten QED $\otimes$ QCD-Korrekturen  $\mathcal{O}(\alpha a_s)$  erhalten wir analog zu den reinen QCD-Korrekturen (2.18) mit einer Modifikation der Farbstruktur ( $c_f \rightarrow \frac{4}{3} / 1$ ,  $c_a \rightarrow 3 / 0$ ,  $t_r \rightarrow \frac{1}{2}$  für QCD bzw. QED) [18, 41]

$$R_{f,1}^{\text{QED,NS}} = q_f^2 \frac{3}{4} \frac{\alpha}{\pi} - q_f^2 \frac{1}{3} \frac{\alpha}{\pi} a_s . \quad (2.34)$$

Bis zu dieser Ordnung tragen keine S-Diagramme bei, da für die Drei-Schleifendiagramme (siehe Abbildung 2.2) aus Gründen der Farberhaltung kein einzelnes Photon möglich ist. Für die Korrekturen höherer Ordnungen sind die NS-Korrekturen bekannt [42]

$$\begin{aligned} R_{f,2}^{\text{QED,NS}} = & - \left[ 0.172943 \left( \sum_{l=e,\mu,\tau} q_l^2 + 3 \sum_{f'} q_{f'}^2 \right) q_f^2 + 0.09375 q_f^4 \right] \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \\ & + \left[ 0.149974 \sum_{f'} q_{f'}^2 + 2.73515 q_f^2 \right] \frac{\alpha}{\pi} a_s^2 . \end{aligned} \quad (2.35)$$

Die Summe über die Ladung der Leptonen entsteht durch Fermionschleifen, an die kein Gluon koppelt. Die Korrekturen in (2.35) fallen klein aus, da die Koeffizienten nicht sehr groß sind und die Ladungen der up- und down-artigen Quarks mit  $q_u^2 = 4/9$  und  $q_d^2 = 1/9$  für eine zusätzliche Unterdrückung sorgen. Die Vektor-S-Beiträge sind ebenfalls bekannt [42], aber wie erwartet kleiner als die NS-Korrekturen und können deshalb vernachlässigt werden. Die Axialvektor-S-Beiträge sind nicht berechnet, werden aber auch kleiner als die NS-Korrekturen erwartet und tragen somit nicht mehr relevant zur Zerfallsrate bei.

Die einzigen Massenkorrekturen, die wir berücksichtigen müssen sind die des Bottom-Quarks, die man mit einer Modifikation der Farbstruktur ( $c_f \rightarrow 1$ ,

$c_a \rightarrow 0$ ,  $t_r \rightarrow 1/2$ ) aus (2.21) und (2.22) erhält

$$R_{b,3}^{\text{QED,NS,V}} = q_b^2 \frac{m_b^2}{M_Z^2} 9 \frac{\alpha}{\pi}, \quad (2.36)$$

$$R_{b,4}^{\text{QED,NS,A}} = -q_b^2 \frac{m_b^2}{M_Z^2} \frac{33}{2} \frac{\alpha}{\pi}. \quad (2.37)$$

Auch diese sind durch einen Faktor  $q_b^2 = 1/9$  unterdrückt und tragen somit nicht merklich zur Zerfallsrate bei.

Wenn wir alle angegebenen Terme aufsummieren, erhalten wir die QED-Korrekturen zur Zerfallsrate

$$R^{\text{QED}} = 3 \sum_f [v_f^2 + a_f^2] \left( R_{f,1}^{\text{QED,NS}} + R_{f,2}^{\text{QED,NS}} \right) + 3 v_b^2 R_{b,3}^{\text{QED,NS,V}} + 3 a_b^2 R_{b,4}^{\text{QED,NS,A}}. \quad (2.38)$$

## 2.4. Elektroschwache Korrekturen

Eine weitere Gruppe von Korrekturen wird durch virtuelle  $Z$ - und  $W$ -Bosonen getragen. Auch hier können die Massen der fünf leichtesten Quarks null gesetzt werden. Die Top-Quark Masse muss aber berücksichtigt werden, da manche Diagramme (siehe Abbildung 2.3) quadratische Korrekturen  $M_t^2/M_W^2$  bewirken. Die führende Ordnung wurde in [43–45] berechnet und die dazugehörigen QCD-Korrekturen, d. h. Terme der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha \alpha_s)$ , in [46–49]. Für eine bessere Genauigkeit wurden zusätzlich höhere Terme in der Entwicklung  $M_W^2/M_t^2$  bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha \alpha_s)$  berechnet [50, 51]. Korrekturen ohne Top-Massenabhängigkeit zur Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha \alpha_s)$  sind in [52, 53] angegeben. All diese elektroschwachen Korrekturen benennen wir mit  $R^{\text{EW}}$ .

Zudem bewirken elektroschwache Korrekturen eine leichte Veränderung der Kopplungskonstanten  $v_f$  und  $a_f$ , sowie des effektiven Mischungswinkels für je-

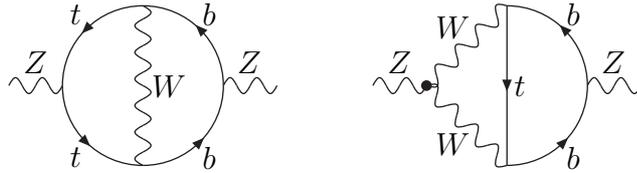


Abb. 2.3.: Beitrag zu elektroschwachen Korrekturen.

## 2. Zerfallsrate des $Z$ -Bosons nach Hadronen: Rückblick

des Fermion einzeln [54–56]. Diese Korrekturen sind sehr subtil und müssen in einer genauen Analyse selbstverständlich berücksichtigt werden. Da wir aber in dieser Arbeit die bereits vorhandenen Analysen der LEP Electroweak Working Group [22] (basierend auf dem Programm ZFITTER [57, 58]) und der GFITTER Gruppe [23] benutzen und nur Veränderungen hierauf durch zusätzliche Terme berechnen, betrachten wir die elektroschwachen Korrekturen nur sehr vereinfacht. Hierzu nehmen wir diese Korrekturen als konstant in  $\alpha_s$  an, das heißt [23]

$$R_f^{\text{EW}} = \begin{cases} -0.0014, & \text{für } f = u, c, \\ -0.0019, & \text{für } f = d, s, \\ -0.0005, & \text{für } f = b \end{cases} \quad (2.39)$$

$$R^{\text{EW}} = \sum_f R_f^{\text{EW}} = -0.0071 \quad (2.40)$$

und verwenden für alle Fermionen gleichermaßen  $s_w^2 = 0.231$  für den Sinus des effektiven Mischungswinkels. Die Summe über den Index  $f$  läuft über die leichten Quarks  $q$ . Wenn wir neue Korrekturen zu einer bestehenden Analyse hinzunehmen, resultiert dies in einer Veränderung in der Fitvariablen. Den Fehler auf die Veränderungen, den wir mit dieser Wahl der elektroschwachen Korrekturen machen, ist eine kleine Änderung auf eine kleine Korrektur und somit vernachlässigbar. Der Fehler auf die elektroschwachen Korrekturen ist soweit eingeschränkt, dass er zu der bisher erreichten Genauigkeit für  $R$  vernachlässigt werden kann.

## 2.5. Numerik

Wenn wir die Korrelatoren mit den Kopplungskonstanten nach (2.15) versehen, erhalten wir folgende NS-Beiträge zu  $R$

$$R_0^{\text{NS}} = 3 \sum_f \left[ v_f^2 + a_f^2 \right] R_1^{\text{NS}}, \quad (2.41)$$

$$R_c^{\text{NS}} = 3 \left[ v_c^2 R_{c,2}^{V,\text{NS}} + a_c^2 R_{c,2}^{A,\text{NS}} \right], \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} R_b^{\text{NS}} = & 3 v_b^2 \left[ R_{b,2}^{V,\text{NS}} + R_{b,4}^{V,\text{NS}} \right] + 3 a_b^2 \left[ R_{b,2}^{A,\text{NS}} + R_{b,4}^{A,\text{NS}} \right] \\ & + 3 \sum_f \left[ v_f^2 + a_f^2 \right] \left( R_{f,3}^{\text{NS}} + R_{f,5}^{\text{NS}} \right), \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$R_t^{\text{NS}} = 3 \sum_f \left[ v_f^2 + a_f^2 \right] \left( R_{f,6}^{\text{NS}} + R_{f,7}^{\text{NS}} \right), \quad (2.44)$$

wobei  $R_{c,b,t}^{\text{NS}}$  die Korrekturen, verursacht durch die Charm-, Bottom- und Top-Masse, beschreiben. Auch hier läuft die Summe über den Index  $f$  über alle leichten Quarks  $q$ . Für die S-Diagramme aus den Vektor-Korrelatoren erhalten wir

$$R_0^{V,S} = 3 \left( \sum_f v_f \right)^2 R_1^{V,S}, \quad (2.45)$$

$$R_t^{V,S} = 3 v_t \left( \sum_f v_f \right) 2 R_2^{V,S}. \quad (2.46)$$

Die S-Korrekturen der Axialvektor-Korrelatoren haben wir mit  $R_0^{A,S}$ ,  $R_b^{A,S}$  und  $R_t^{A,S}$  schon angegeben, genauso wie die QED- und elektroschwachen Korrekturen mit  $R^{\text{QED}}$  und  $R^{\text{EW}}$

Zusammen sind all diese Korrekturen in Tabelle 2.2 für  $\alpha_s = 0.1189$  angegeben. Terme, die wir in  $R_i$  nicht angegeben haben, bilden den Fehler bzw. eine Abschätzung  $\delta R_i$ . An dieser Stelle sei nochmals darauf hingewiesen, dass wir nicht alle bekannten Korrekturen angegeben haben, sondern nur die numerisch relevanten. Bekannte aber vernachlässigbare Korrekturen sind deshalb ebenfalls in  $\delta R_i$  enthalten. Die Fehler auf  $R_0^{\text{NS}}$ ,  $R_0^{V,S}$  und  $R_0^{A,S}$  erhalten wir durch die Variation der Renormierungsskala  $\mu$  um  $1/3 M_Z < \mu < 3 M_Z$  (eine Beschreibung des Verfahrens findet man in Abschnitt 4.4). Mit der Berechnung der NS-Beiträge zur Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s^4)$  konnte die derzeit am besten mögliche Genauigkeit erreicht werden, da eine Berechnung der nächsten Ordnung in naher Zukunft technisch nicht machbar sein wird. Die Fehler der übrigen Beiträge werden durch die bisher nicht bekannten S-Diagramme zur Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s^4)$  dominiert. Diese Fehlerquelle einzuschränken und somit die damit verbundene  $\alpha_s$  Bestimmung auf einen noch solideren Sockel zu stellen, bilden die Hauptmotivation für diese Arbeit. Zusätzlich zur Einschränkung des Fehlers muss mit neu berechneten Korrekturen der Vergleich zwischen Experiment und Theorie erneut ausgewertet werden, was zu einer Verschiebung des Mittelwerts von  $\alpha_s$  führen kann. Desweiteren sehen wir, dass die Massenkorrekturen alle ausreichend genau berechnet sind und wir diese deshalb mit gutem Gewissen nicht weiter betrachten müssen.

Wir verzichten mit Absicht darauf, die totale Zerfallsrate als Summe aller Terme anzugeben, da diese aufgrund der Vereinfachung im elektroschwachen Sektor nicht korrekt wäre. Wie wir in (2.41) sehen, ist der führende Beitrag

2. Zerfallsrate des  $Z$ -Bosons nach Hadronen: Rückblick

$R_i$	Wert von $R_i$	$\delta R_i$	Wert/Abschätzung von $\delta R_i$
$R_0^{\text{NS}}$	20.9775	$a_s^5$	<b>0.0012</b>
$R_c^{\text{NS}}$	-0.0009	$\frac{m_c^2}{M_Z^2} a_s^2$ , $\frac{m_c^4}{M_Z^4}$	$\mathcal{O}(10^{-5})$
$R_b^{\text{NS}}$	-0.0195	$\frac{m_b^2}{M_Z^2} a_s^3$ , $\frac{m_b^6}{M_Z^6}$	$\mathcal{O}(10^{-5})$
$R_t^{\text{NS}}$	0.0005	$\frac{M_Z^2}{4 M_t^2} a_s^4$ , $\frac{M_Z^6}{(2 M_t)^6}$	$\mathcal{O}(10^{-5})$
$R_0^{V,S}$	-0.00012	$a_s^4$	<b>0.00006</b>
$R_0^{A,S}$	-0.0216	$a_s^4$	<b>0.0014</b>
$R_t^{V,S}$	$\mathcal{O}(10^{-5})$	$\frac{M_Z^2}{4 M_t^2} a_s^4$	$\mathcal{O}(10^{-5})$
$R_b^{A,S}$	0.0001	$\frac{m_b^2}{M_Z^2} a_s^3$ , $\frac{m_b^2}{M_t^2} a_s^3$	$\mathcal{O}(10^{-5})$
$R_t^{A,S}$	0.0001	$\frac{M_Z^2}{4 M_t^2} a_s^4$	$\mathcal{O}(10^{-5})$
$R^{\text{QED}}$	0.0083	$\alpha^2$ , $\alpha \alpha_s^2$ (S-Kor.)	$\mathcal{O}(10^{-5})$
$R^{\text{EW}}$	-0.0071	$\alpha^2$ , $\alpha \alpha_s^2$	$\mathcal{O}(10^{-5})$

Tab. 2.2.: Korrekturen zu  $\Gamma_{Z,h}$  unterteilt in NS-Beiträge  $R_{0/c/b/t}^{\text{NS}}$ , S-Beiträge  $R_{0/b/t}^{V/A,S}$  und QED bzw. elektroschwache Korrekturen  $R^{\text{QED}}$  bzw.  $R^{\text{EW}}$ .

sehr sensibel von  $v_f$  und  $a_f$  abhängig. Deshalb bewirken die in Abschnitt 2.4 besprochenen Korrekturen zu diesen Kopplungskonstanten eine Verschiebung der Zerfallsrate von wenigen MeV. Deshalb nutzen wir die Analysen der LEP Electroweak Working Group und der GFITTER Gruppe [22, 23], in denen die elektroschwachen Korrekturen implementiert sind, um aus dem Vergleich zwischen Experiment und Theorie einen Wert für  $\alpha_s$  zu erhalten.

In Kapitel 4 werden wir die führenden Korrekturen der masselosen QCD mit schwerem Top-Quark ( $R_0^{\text{NS}}$ ,  $R_0^{V,S}$  und  $R_0^{A,S}$ ) zur Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s^4)$  berechnen und somit die erste vollständige Rechnung zu dieser Ordnung liefern.



# 3. Theoretische Grundlagen

In diesem Kapitel wollen wir die theoretischen Ideen, die dieser Arbeit zugrunde liegen, näher erklären und gleichzeitig unsere Notation festlegen. Wir führen die theoretischen Grundlagen in einem separaten Kapitel auf, um den Lesefluss im Hauptkapitel 4 nicht zu sehr mit technischen Details zu bremsen.

Wir beginnen mit der Beschreibung unseres verwendeten Setups zur Berechnung der Feynman-Diagramme und dessen Anwendungsbereichs. Hierbei wollen wir die verwendeten Programme kurz vorstellen, die jeweils Teilaufgaben übernehmen, sowie ihre Funktionsweise erklären.

Anschließend stellen wir die Konzepte der Renormierung vor, wobei wir uns auf die Renormierung der QCD-Korrekturen beschränken. Als Regularisierungsschema verwenden wir die dimensionale Regularisierung. Zudem definieren wir die anomale Dimension innerhalb des Konzeptes der Renormierungsgruppen-Gleichung und erläutern das hierdurch beschriebene Verhalten bei verschiedenen Skalen.

Danach widmen wir ein Abschnitt der  $\gamma_5$  Problematik in  $d$  Dimensionen, die dadurch entsteht, dass  $\gamma_5$  nur in vier Dimensionen wohldefiniert ist, wir aber die dimensionale Regularisierung verwenden. Wir zeigen, wie man diese Problematik korrekt handhaben kann.

Zuletzt erklären wir, wie man mit Mehrskalenproblemen umgeht, in denen schwere Teilchen vorkommen. Wir beschreiben, welche Probleme in diesem Zusammenhang entstehen können und zeigen, dass man als Lösung die schweren Teilchen von der restlichen Theorie entkoppeln kann. Den Prozess der Entkopplung (Matching genannt), der zu einer effektiven Theorie führt, stellen wir im Allgemeinen vor. Außerdem zeigen wir explizit, wie man das Top-Quark als schwereres Teilchen von der QCD entkoppelt.

### 3.1. Berechnung von Feynman-Diagrammen

Die Berechnung von Feynman-Diagrammen erfolgt in verschiedenen Einzelschritten, die im Folgenden vorgestellt und erklärt werden, wobei wir die hierzu verwendeten Programme beschreiben. Eine schematische Übersicht des verwendeten Setups, das heißt die Zusammenführung aller Programme, ist in Abbildung 3.1 dargestellt. Ein zentraler Teil dieser Arbeit beschäftigt sich mit der Entkopplung von schweren Teilchen, wofür man massive Vakuumbdiagramme berechnen muss (Vergleiche Abschnitt 3.4 und 4.2). Deshalb ist dieses Setup hauptsächlich dafür ausgelegt, diese massiven Vakuumbdiagramme bis zur Vierschleifenordnung zu berechnen. Deshalb werden wir uns bei der Beschreibung

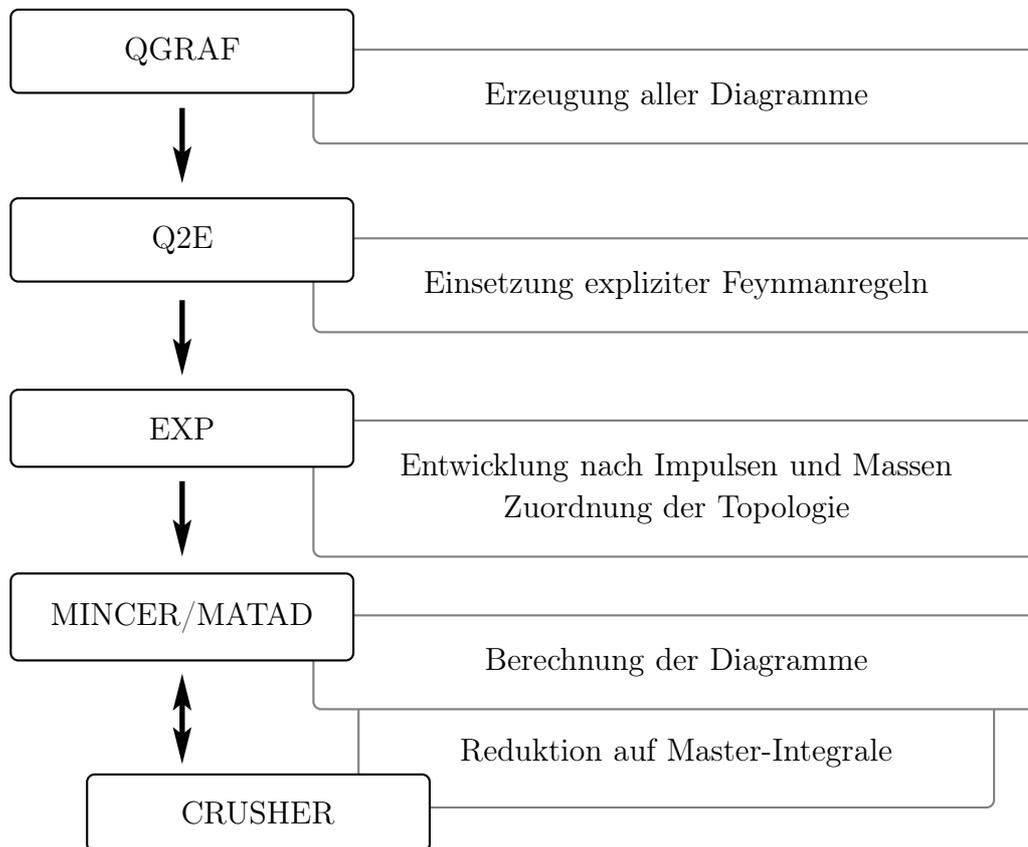


Abb. 3.1.: Diagrammatische Darstellung des verwendeten Setups zur Erzeugung und Berechnung von Feynman-Diagrammen.

der Programme immer wieder auf diesen Diagrammtyp beschränken.

#### 3.1.1. QGRAF und Q2E: Erzeugen von Diagrammen

Hat man seine Theorie mit zugehöriger Lagrange-Dichte aufgestellt und möchte eine bestimmte Green-Funktion berechnen, so müssen zuerst alle möglichen Feynman-Diagramme zu einer bestimmte Schleifenordnung erzeugt werden. Hierzu benötigt man die Feynman-Regeln, die sich direkt aus der Lagrange-Dichte ergeben. Anschließend kann man alle Diagramme erstellen, wobei wir in unserer gesamten Arbeit das Fortran-Programm QGRAF [59] verwendet haben. Dieses Programm benötigt als Vorgabe sämtliche Feynman-Propagatoren und -Vertizes, die durch die Feynman-Regeln gegeben sind. Hierbei benötigt QGRAF nur die Information, ob ein bestimmter Propagator oder Vertex existiert, setzt aber noch keine expliziten Feynman-Regeln ein. Zusätzlich verlangt es eine Information über die gewünschte Schleifenordnung und die externen Teilchen, die durch die zu berechnende Green-Funktion vorgeschrieben sind. Zudem können Optionen übergeben werden, die bestimmte Diagrammklassen auswählen oder ausschließen. In das Ergebnis von QGRAF muss man noch die expliziten Feynman-Regeln einsetzen, wofür wir das Programm Q2E [50, 60] verwendet haben. Der Output ist so formatiert, dass er an das Programm EXP [50, 60] übergeben werden kann, mit dessen Hilfe die Rechnung fortgesetzt wird.

#### 3.1.2. EXP: Entwicklung nach Massen und Impulsen und Sortieren nach Topologien

EXP entwickelt die Diagramme mit einer bestimmten Massen-Impuls-Hierarchie (z.B.  $m_1 \gg m_2 \gg q_1$ ) naiv oder asymptotisch in diesen Massen und Impulsen (eine ausführliche Beschreibung der Entwicklungsmethoden findet sich in [61]). Hierbei identifiziert es Subdiagramme, die nur von einzelnen Skalen abhängen, und ordnet diese bestimmten Topologien zu, welche dem Programm vorgegeben werden müssen. EXP wird üblicherweise in Zusammenhang mit den FORM-Programmen [62] MATAD (MAssive TADpoles) [63] und MINCER [64] verwendet, wobei MATAD massive Vakuumdiagramme mit einer Masse und MINCER masselose Propagatoren bis zur Drei-Schleifenordnung berechnet. Beide in Kombination stellen ein mächtiges Werkzeug dar, da, wenn man in einer eindeutigen Hierarchie entwickelt, jedes Drei-Schleifenintegral in dieser Entwicklung berechnet werden kann. Genauer gesagt, entwickelt EXP nicht direkt, sondern

### 3. Theoretische Grundlagen

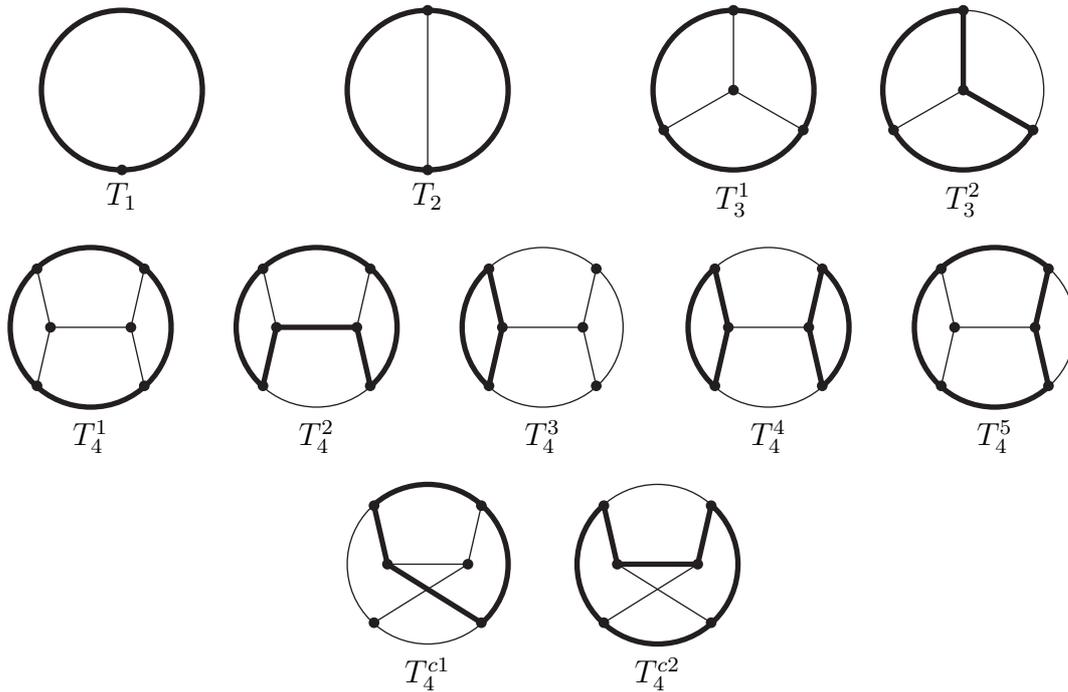


Abb. 3.2.: Topologien für massive Vakuumbigramme bis zur Vier-Schleifenordnung, bei denen das schwere Teilchen (dicke Linie) nur in geschlossenen Schleifen auftritt. Die dünnen Linien beschreiben masselose Teilchen.

übergibt die Information der Topologie und die Vorschrift, wie zu entwickeln ist, an MATAD.<sup>1</sup>

Da der rechnerische Schwerpunkt dieser Arbeit auf der Berechnung von massiven Vakuumbigrammen liegt, wollen wir kurz die möglichen Topologien vorstellen, die in diesem Zusammenhang auftreten. Wir betrachten später (in Abschnitt 4.2) Diagramme mit einem schweren Quark, das nicht als externes Teilchen auftaucht. Daher zeigt sich das schwere Teilchen nur in geschlossenen Schleifen, was die Topologien ergibt, die in Abbildung 3.2 dargestellt sind.

Als Beispiel für die Zuordnung einer bestimmten Topologie betrachten wir das Diagramm in Abbildung 3.3. Die dick gezeichnete Fermionlinie stellt ein massives Teilchen dar, während alle anderen Teilchen masselos sind. Die äußeren Impulse werden auf null gesetzt (naive Entwicklung in führender Ordnung). Die folgenden Schritte sollen veranschaulichen, wie man das Vier-Schleifen-

<sup>1</sup>Wir werden in Zukunft immer vom Programm MATAD reden, da wir uns sehr häufig auf Vakuumbigramme beschränken. Im Allgemeinen ist aber immer das MATAD/MINCER Setup gemeint.

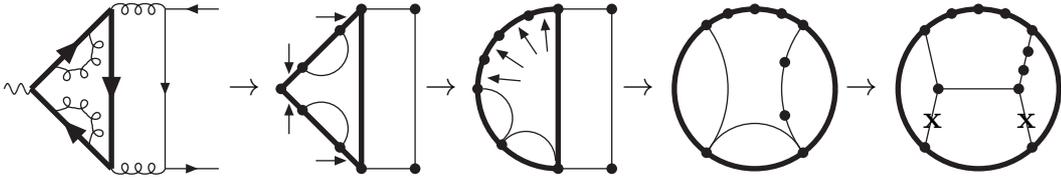


Abb. 3.3.: Beispiel für Zuordnung einer Topologie (Erklärung im Text).

diagramm auf eine Topologie aus Abbildung 3.2 abbildet. Da EXP sich nicht um die Art der Teilchen kümmert, sondern nur daran interessiert ist, ob diese massiv oder masselos sind, erhalten wir die Darstellung im zweiten Bild. Die äußeren Linien wurden abgeschnitten, da wir ohne äußere Impulse Vakuumdiagramme betrachten. Da durch die mit einem Pfeil gekennzeichneten Linien der gleiche Impuls fließt, ordnen wir diese um, was uns das dritte Bild liefert. Das dritte und vierte Bild stellen genau das Gleiche mit leicht verzerrten Linien dar. Im letzten Bild erkennen wir die Topologie  $T_4^1$ , wobei die Linien, die mit einem Kreuz versehen sind, nicht belegt sind und daher zu einem Punkt zusammengezogen werden können.

### 3.1.3. MATAD: Berechnung der Integrale

Innerhalb von MATAD wird die eigentliche Berechnung des (Sub-)Diagramms durchgeführt. Dies beinhaltet die Entwicklung in Massen und Impulsen, die von EXP vorgegeben wird, den Umgang mit der Dirac-Algebra und die Berechnung von Spuren sowie der Farbalgebra. Dabei ist das Setup darauf ausgelegt, skalare Integrale zu berechnen, weshalb man das ursprüngliche Tensor-Integral umformen muss.

Wenn wir eine Green-Funktion berechnen, dann gibt es nur bestimmte Möglichkeiten verschiedene Lorentz-, Dirac- und Farbstrukturen zu bilden. Diese lassen sich allgemein aufstellen, ohne dass man Diagramme berechnen muss. Betrachtet man z. B. einen Quarkpropagator  $\Sigma$ , so kann die allgemeine Struktur nur (innerhalb der QCD)

$$\Sigma = (\not{p} \Sigma_V(p^2, m) + m \Sigma_S(p^2, m)) \delta_{ij} \quad (3.1)$$

mit skalaren Funktionen  $\Sigma_V$  und  $\Sigma_S$  sein. Das Wissen über diese Struktur kann man ausnutzen, um auf diese skalaren Funktionen zu projizieren. Multipliziert man obige Gleichung (3.1) mit

$$P_V = \frac{\not{p} \delta_{ij}}{p^2 n_c} \quad \text{bzw.} \quad P_S = \frac{1 \delta_{ij}}{m n_c} \quad (3.2)$$

### 3. Theoretische Grundlagen

und bildet anschließend die Spur über die Dirac-Matrizen, so projiziert  $P_V$  auf  $\Sigma_V$ , bzw.  $P_S$  auf  $\Sigma_S$ . Analog lassen sich für jede andere Green-Funktion Projektoren finden.

Nachdem man auf skalare Integrale projiziert hat und die Spuren sowie die Dirac-Algebra abgearbeitet sind, hat das verbleibende Integral folgende Form

$$\int [dk_1] \dots [dk_l] \frac{1}{D_1^{a_1}} \dots \frac{1}{D_j^{a_j}} \cdot F(p_m \cdot p_n, m_k) . \quad (3.3)$$

Das Integrationsmaß, das in MATAD verwendet wird, lautet

$$[dk_n] = \frac{d^d k_n}{i \pi^{d/2}} \exp(\varepsilon \gamma_E) , \quad (3.4)$$

wobei  $\gamma_E = 0.577216$  die Euler-Mascheroni-Konstante ist. Diese Vorschrift entspricht der  $\overline{\text{MS}}$ -Renormierung (vergleiche (3.12) in Abschnitt 3.2.1). Die Funktion  $F(p_m \cdot p_n, m_k)$  steht für den Zähler und hängt nur noch von Skalarprodukten von Impulsen und Massen ab, während die Propagatoren durch  $D_n = p_n^2 - m_n^2$  dargestellt werden. Hierbei ist  $p$  eine Kombination aus externen und Schleifenimpulsen.

Wir beschränken uns im Weiteren wieder auf den Fall der massiven Vakuumdiagramme. Dann können wir aus den Schleifenimpulsen zur  $l$ -ten Schleifenordnung  $j = l(l+1)/2$  kinematische Invarianten bilden, durch die wir die Skalarprodukte in (3.3) ausdrücken. Die Anzahl der Invarianten entspricht für die ersten drei Schleifenordnungen der Anzahl der Linien der auftretenden Topologien. Zur Vier-Schleifenordnung haben wir zehn Invarianten, aber nur neun Linien. Dies stellt jedoch kein Problem dar, da die zehnte Invariante nur im Zähler von (3.3) auftaucht und somit keine Rolle bei der Zuordnung der Topologie spielt.

Nachdem wir die Skalarprodukte des Zählers durch die Invarianten ersetzt haben, tauchen nur noch Integrale mit folgender Form auf

$$I^T(a_1, \dots, a_j) = \int [dk_1] \dots [dk_l] \frac{1}{D_1^{a_1}} \dots \frac{1}{D_j^{a_j}} , \quad (3.5)$$

wobei die Exponenten  $a_i$  nun ganzzahlig sein können. In den Nennern entspricht das Impulsquadrat einer Invarianten und die Masse ist entweder die schwere Masse  $m$  oder null, abhängig von der jeweiligen Topologie  $T$ .

Die Anzahl der Integrale von dieser Form ist so groß ( $\sim 10^5$ ), dass nicht alle einzeln berechnet werden können. Dies ist aber auch nicht notwendig, da

### 3.1. Berechnung von Feynman-Diagrammen

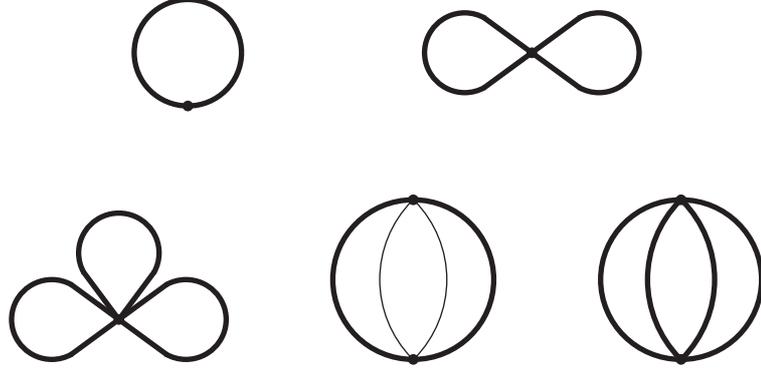


Abb. 3.4.: Alle auftretenden Master-Integrale für massive Vakuumdiagramme bis zu drei Schleifen, bei denen das schwere Teilchen nur in geschlossenen Schleifen auftritt.

sich mit Hilfe der IBP-Identitäten (Integration By Parts) Relationen zwischen verschiedenen Integralen ergeben. Hierzu betrachten wir

$$\int [dk_1] \dots [dk_l] \frac{\partial}{\partial k_n} \cdot k_m \frac{1}{D_1^{a_1}} \dots \frac{1}{D_j^{a_j}} = 0 . \quad (3.6)$$

Diese Gleichung ist null, da die Integration zu einem Oberflächenterm führt, der im Unendlichen verschwindet. Bildet man die Ableitung im Integranden, so erhält man die IBP-Relationen.

Als einfachstes Beispiel für eine IBP-Relation betrachten wir das Ein-Schleifenintegral  $I^{T_1}(a_1)$ , entsprechend der  $T^1$  Topologie aus Abbildung 3.2. Aus (3.6) folgt

$$\begin{aligned} & \int [dk_1] \frac{\partial}{\partial k_1} \cdot \frac{k_1}{[k_1^2 - m^2]^{a_1}} = 0 \\ \Rightarrow & (1 - 2a_1) I^{T_1}(a_1) - 2a_1 m^2 I^{T_1}(a_1 + 1) = 0 \\ \Rightarrow & I^{T_1}(a_1 + 1) = \frac{1 - 2a_1}{2a_1 m^2} I^{T_1}(a_1) . \end{aligned} \quad (3.7)$$

Mit dieser Gleichung lassen sich alle Ein-Schleifenvakuumdiagramme auf  $I^{T_1}(1)$  reduzieren, das als einziges explizit berechnet werden muss.

Zur ersten Schleifenordnung erhalten wir  $l^2$  Gleichungen. Bis zu  $l = 3$  ist die Lösung dieses Gleichungssystems für beliebige  $a_i$  bekannt, so dass man eine Reduktionsformel hat, mit der man die skalaren Integrale auf einen Satz von

### 3. Theoretische Grundlagen

verbleibenden Integralen reduzieren kann, die sogenannten Master-Integrale. Diese sind in Abbildung 3.4 zu sehen. Diese Reduktion ist in `MATAD` (bzw. `MINCER` für masselose Propagatoren) implementiert. Auf Vier-Schleifenniveau wurde bisher noch kein vergleichbares Verfahren gefunden, so dass wir für diese Ordnung auf andere Methoden zurückgreifen müssen.

#### 3.1.4. CRUSHER: Reduzieren auf Master-Integrale

Für Berechnungen jenseits der Möglichkeiten von `MATAD`, das heißt für Vier-Schleifenprobleme, müssen wir das Gleichungssystem der IBP-Relationen konkret lösen. Hierzu benutzen wir `CRUSHER` [65], ein C++ Programm, das `GiNaC` [66] (Algebra für C++) und `Fermat` [67] (Polynomvereinfachung) verwendet. In `CRUSHER` ist der Laporta-Algorithmus [68] implementiert. Dieser stellt für feste Indizes  $a_1, \dots, a_j$  das Gleichungssystem der IBP-Relationen auf und löst dieses mit dem Gauß-Algorithmus. Dieses Gleichungssystem ist überbestimmt, so dass am Schluss eine Abhängigkeit von einem Satz von Integralen, den Master-Integralen, verbleibt. Um zu garantieren, dass diese Master-Integrale möglichst einfach zu berechnen sind, wird eine Ordnung aufgestellt, die die Komplexität eines Integrals beschreibt. Das wichtigste Kriterium für diese Ordnung ist die Besetzung der einzelnen Linien. Das heißt ein Integral ist umso leichter zu bestimmen, je mehr Indizes gleich null sind. Sind gleich viele Indizes ungleich null, so bestimmt die Anzahl der Propagatoren und Skalarprodukte ( $\sum_i |a_i|$ ) für wie kompliziert das Integral angesehen wird. Mit dieser aufgestellten Ordnung wird innerhalb des Gauß-Algorithmus immer nach dem kompliziertesten Integral aufgelöst. Als Ergebnis erhalten wir sehr große Ersetzungslisten, in denen jedes mögliche Integral bis zu einem vorgegebenen maximalen Wert für die  $a_i$  durch Master-Integrale ausgedrückt wird. Man löst also deutlich mehr Integrale, als im eigentlichen Problem auftauchen.

Wir haben mit `CRUSHER` somit die Möglichkeit auch massive Vakuumdiagramme bis zu vier Schleifen zu berechnen. Hierzu haben wir das oben beschriebene `MATAD` Setup verwendet, jedoch eigene Topologiedateien geschrieben. Diese formen die Diagramme innerhalb von `MATAD` soweit um, bis nur noch eine Abhängigkeit von den skalaren Integralen aus (3.5) besteht. Diese werden dann anschließend mit den von `CRUSHER` erzeugten Reduktionstabellen durch Master-Integrale ersetzt.

Diese Master-Integrale sind bekannt [69–78] und in Abbildung 3.5 dargestellt. Hierbei ist zu beachten, dass wir im Unterschied zu `MATAD` ein leicht

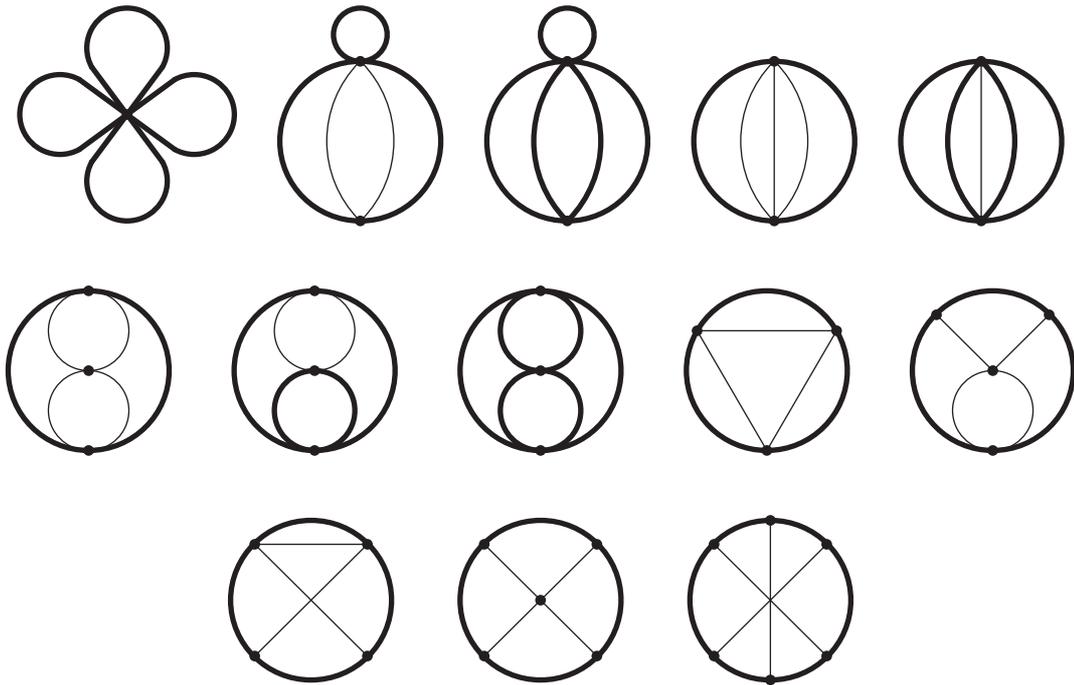


Abb. 3.5.: Alle auftretenden Master-Integrale für massive Vakuumbdiagramme auf vier Schleifen, bei denen das schwere Teilchen nur in geschlossenen Schleifen auftritt.

unterschiedliches Integrationsmaß verwenden (vergleiche (3.4))

$$[dk_n] = \frac{d^d k_n}{i \pi^{d/2}} \frac{1}{\Gamma(1 + \varepsilon)} . \quad (3.8)$$

Dies entspricht einer alternativen  $\overline{\text{MS}}$ -Renormierung, in der zusätzliche  $\zeta$ -Faktoren in höheren Ordnungen in  $\varepsilon$  auftreten. Diese Renormierung liefert mitunter Unterschiede in nackten Größen. Physikalische Ausdrücke sind aber nicht von der Wahl der beiden Schemata (3.4) oder (3.8) abhängig.

## 3.2. Renormierung

Da sich mit jeder zusätzlich berechneten Schleifenordnung die Relation zwischen Feldern bzw. Konstanten der Lagrange-Dichte und physikalischen Observablen ändern, müssen diese Felder und Konstanten redefiniert werden. Man bezeichnet diesen Vorgang als Renormierung. In Quantenfeldtheorien sind Green-Funktionen, ausgedrückt durch unrenormierte (nackte) Felder, im Allge-

### 3. Theoretische Grundlagen

meinen divergent. Um dieser Divergenzen habhaft zu werden, muss man eine Regularisierung einführen, die die Ausdrücke endlich macht und nur im Limes des verschwindenden Regulators die Divergenzen erscheinen lässt. Die am häufigsten verwendete Regularisierungsmethode ist die dimensionale Regularisierung, die wir auch durchgehend in dieser Arbeit verwenden. Der Vorteil der dimensionalen Regularisierung ist, dass sie Symmetrien der Lagrange-Dichte erhält. Hierbei geht man von der vier-dimensionalen Raumzeit zu einer  $d$ -dimensionalen Raumzeit über. Wenn  $d = 4 - 2\varepsilon$ , spiegeln sich die Divergenzen in  $1/\varepsilon$ -Polen wider. Durch die Renormierung kann man nun erreichen, dass die Green-Funktionen, ausgedrückt durch die renormierten Felder und Konstanten, frei von  $1/\varepsilon$ -Polen und somit endlich und wohldefiniert sind.

Wir wollen in diesem Abschnitt kurz darstellen, wie die Renormierung in der QCD funktioniert und die auftretenden Größen definieren. Dabei verzichten wir auf eine ausführliche Erklärung oder Beweise der Renormierung, der interessierte Leser findet dies z.B. in [79].

#### 3.2.1. Renormierung der QCD

Die QCD Lagrange-Dichte lautet, ausgedrückt durch die nackten Felder (versehen mit einem Index 0),

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu,0}^a F_0^{a\mu\nu} + \sum_{f=1}^{n_f} \bar{\psi}_{f,0} (i\not{D} - m_f) \psi_{f,0} \\ & - \frac{1}{2\xi_L} (\partial^\mu G_{\mu,0}^a)^2 + \partial^\mu \bar{c}_0^a (\partial_\mu c_0^a - g_s f^{abc} c_0^b G_{\mu,0}^c) , \end{aligned} \quad (3.9)$$

wobei die verschiedenen Terme folgendermaßen definiert sind

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_s f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c , \quad D_\mu = \partial_\mu - i g_s G_\mu^a T^a , \quad \not{D} = \gamma^\mu D_\mu . \quad (3.10)$$

Hierbei bezeichnet  $G_\mu^a$  die Gluonen,  $\psi_f$  die Fermionen und  $c^a$  die Geister. Die Relationen zwischen nackten und renormierten Größen lauten

$$\begin{aligned} G_0^{a,\mu} &= \sqrt{Z_3} G^{a,\mu} , \quad \psi_{f_0} = \sqrt{Z_2} \psi_f , \quad c_0^a = \sqrt{\tilde{Z}_3} c^a , \\ \mu^{-2\varepsilon} a_{s,0} &= Z_a a_s , \quad m_{f_0} = Z_m m_f , \end{aligned} \quad (3.11)$$

wobei die  $Z_i$  die Renormierungskonstanten bezeichnen und  $a_s = \alpha_s/\pi = g_s^2/(4\pi^2)$  definiert ist. Aufgrund der Slavnov-Taylor-Identitäten reichen diese

Renormierungskonstanten aus, um alle Vertizes (Quark-Quark-Gluon-, Geist-Geist-Gluon-, Drei-Gluon- und Vier-Gluon-Vertex) zu renormieren. Der Eichparameter tritt im Gluonpropagator auf und renormiert deshalb  $\xi_{L0} = Z_3 \xi_L$ . Die Renormierung ist nicht eindeutig, sondern verlangt nur, dass die divergenten Anteile in die Renormierungskonstanten absorbiert werden. Der endliche Anteil kann frei gewählt werden und definiert das jeweilige Renormierungsschema. Ist der endliche Anteil gleich null, so spricht man vom MS(Minimal Subtraction)-Schema. Das in der QCD gebräuchliche Schema ist die  $\overline{\text{MS}}$ -Renormierung, in der eine prozessunabhängige Konstante  $\ln(4\pi) - \gamma_E$  ( $\gamma_E = 0.577216$  ist die Euler-Mascheroni-Konstante) in die Renormierungskoeffizienten absorbiert wird. Äquivalent hierzu kann der Parameter  $\mu$  redefiniert werden

$$\mu = \bar{\mu} \left( \frac{e^{\gamma_E}}{4\pi} \right)^{1/2}. \quad (3.12)$$

Im  $\overline{\text{MS}}$ -Schema sind alle Renormierungskonstanten aus (3.11) bis zur Vier-Schleifenordnung bekannt [80–85].

Wir werden im Folgenden kurz beschreiben, wie das allgemeine Vorgehen beim Renormieren einer Green-Funktion aussieht. Die Green-Funktion ist im Ortsraum folgendermaßen definiert

$$\langle 0 | \mathcal{T} \Phi_1(x_1) \dots \Phi_n(x_n) | 0 \rangle = \frac{\int [d\Phi] e^{iS[\Phi]} \Phi_1(x_1) \dots \Phi_n(x_n)}{\int [d\Phi] e^{iS[\Phi]}} \quad (3.13)$$

und im Impulsraum über die Fourier-Transformierte

$$\begin{aligned} \langle 0 | \mathcal{T} \tilde{\Phi}_1(p_1) \dots \tilde{\Phi}_n(p_n) | 0 \rangle &= \int d^4x_1 \dots d^4x_n \exp\{i(p_1 \cdot x_1 + \dots + p_n \cdot x_n)\} \\ &\quad \cdot \langle 0 | \mathcal{T} \Phi_1(x_1) \dots \Phi_n(x_n) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Die Felder  $\Phi$  bezeichnen beliebige Felder der Lagrange-Dichte,  $\tilde{\Phi}$  die zugehörigen Fourier-Transformierten und  $\mathcal{T}$  steht für das zeitgeordnete Produkt. Wir werden in Zukunft immer der Kürze und Übersichtlichkeit halber

$$\langle \mathcal{T} \Phi_1 \dots \Phi_n \rangle \equiv \langle 0 | \mathcal{T} \tilde{\Phi}_1(p_1) \dots \tilde{\Phi}_n(p_n) | 0 \rangle \quad (3.15)$$

schreiben. Falls nötig werden wir die Impulsconfiguration an Ort und Stelle genauer spezifizieren. Wir betrachten nun eine unrenormierte Green-Funktion

$$\Gamma_0 = \langle \mathcal{T} \Phi_1 \dots \Phi_n \rangle_0, \quad (3.16)$$

### 3. Theoretische Grundlagen

wobei der Index 0 meint, dass alle vorkommenden Größen nackt sind. Um diese Green-Funktion zu renormieren, muss man in der nackten Green-Funktion  $\Gamma_0$  alle nackten Größen durch ihre renormierten aus Gleichung (3.11) ersetzen

$$\Gamma_0(a_0, m_{f_0}, \xi_{L_0}) = \Gamma_0(Z_a a, Z_m m_f, Z_3 \xi_L) . \quad (3.17)$$

Anschließend multipliziert man für jedes externe Teilchen mit dem zugehörigen Faktor  $\sqrt{Z_{\Phi_i}}$

$$\Gamma = \langle \mathcal{T} \Phi_1 \dots \Phi_n \rangle = \sqrt{Z_{\Phi_1}} \dots \sqrt{Z_{\Phi_n}} \cdot \Gamma_0 . \quad (3.18)$$

#### 3.2.2. Operatoren und Operatormischung

Weitere Objekte, die wir im Folgenden immer wieder betrachten, sind zusammengesetzte Operatoren. Ein zusammengesetzter Operator kann aus verschiedenen Feldern, deren Ableitungen und verschiedenen Dirac-Strukturen aufgebaut sein, die am gleichen Raum-Zeit-Punkt ausgewertet werden. Diese Felder können QCD Felder sein, aber auch externe, die nicht explizit in der QCD Lagrange-Dichte auftauchen. Als einfachstes Beispiel kann man jeden Term der Lagrange-Dichte als Operator ansehen. Bildlich gesprochen, kann man sich einen Operator einfach als Vertex vorstellen, sowie ein Term der Lagrange-Dichte einem Vertex in den Feynman-Regeln entspricht. Eine wichtige Eigenschaft der Operatoren ist ihre Dimension, die gleich der Summe der Dimensionen der einzelnen Komponenten ist. Also  $+3/2$  für Fermionen,  $+1$  für Bosonen und Ableitungen und  $\pm 1$  für Massen im Zähler/Nenner. Jeder Term der Lagrange-Dichte hat z. B. die Dimension 4. Ein weiteres Beispiel, das wir im späteren Verlauf dieser Arbeit betrachten werden (siehe z. B. Abschnitt 4.1) sind Operatoren der Form

$$Q = \bar{\psi} \Gamma \psi , \quad (3.19)$$

wobei  $\Gamma$  für verschiedene Dirac-Strukturen steht. Diese werden auch oft als Ströme bezeichnet.

Wir betrachten nun eine nackte Green-Funktion, in die wir zusätzlich einen Operator  $Q$  einbauen

$$\Gamma_0 = \langle \mathcal{T} Q \Phi_1 \dots \Phi_n \rangle_0 . \quad (3.20)$$

Um diese Gleichung zu renormieren, muss man zusätzlich zur QCD Renormierung mit den Schritten in (3.17) und (3.18) noch den Operator  $Q$  selbst

renormieren. Der einfachste Fall ist, dass dieser nicht mit anderen Operatoren mischt, das heißt multiplikativ über  $Q = Z Q_0$  renormiert werden kann

$$\Gamma = \sqrt{Z_{\Phi_1}} \dots \sqrt{Z_{\Phi_n}} Z \cdot \langle \mathcal{T} Q \Phi_1 \dots \Phi_n \rangle_0 . \quad (3.21)$$

Um die Renormierungskoeffizienten  $Z$  für einen Operator  $Q$  zu berechnen, wählt man die externen Felder in (3.21) im Allgemeinen so, dass die externen Felder  $\Phi$  gerade den Termen im Operator selbst entsprechen und somit die Green-Funktion mit Baumgraphendiagrammen beginnt. Da in der  $\overline{\text{MS}}$  Renormierung die Koeffizienten nicht von Impulsen oder Massen abhängen, versucht man eine möglichst leicht zu berechnende Kinematik zu wählen. Die einfachsten Fälle sind die Möglichkeiten einen äußeren Impuls ungleich null und keine Massen oder keine äußeren Impulse und eine Masse zu verwenden. Diese lassen sich auch bei hohen Schleifenordnungen berechnen. Man muss bei diesen Kinematiken darauf achten, dass keine Infrarot-Singularitäten auftreten, die durch dimensionale Regularisierung auch in  $1/\varepsilon$ -Pole transformiert werden.

Komplizierter wird es, wenn ein Operator mit anderen Operatoren mischt, also andere Operatoren benötigt werden, um einen bestimmten Operator zu renormieren ( $Q_i = Z_{ij} Q_{j,0}$ )

$$\langle \mathcal{T} Q_i \Phi_1 \dots \Phi_n \rangle = \sum_j \sqrt{Z_{\Phi_1}} \dots \sqrt{Z_{\Phi_n}} Z_{ij} \cdot \langle \mathcal{T} Q_j \Phi_1 \dots \Phi_n \rangle_0 . \quad (3.22)$$

Um alle Renormierungskonstanten  $Z_{ij}$  zu berechnen, muss man bei  $n$  Operatoren  $n$  Green-Funktionen mit unterschiedlichen Feldkonfigurationen erstellen und in diese die  $n$  Operatoren einfügen, so dass man im Allgemeinen  $n^2$  linear unabhängige Gleichungen hat. In speziellen Fällen kann man natürlich Symmetrien nutzen, die die Koeffizienten  $Z_{ij}$  einschränken, was die Anzahl der Gleichungen dann verringert.

### 3.2.3. Renormierungsgruppen und anomale Dimensionen

Wie oben beschrieben ist die Renormierung nicht eindeutig und hängt im Fall der  $\overline{\text{MS}}$ -Renormierung vom Parameter  $\mu$  aus Gleichung (3.11) ab, der sogenannten Renormierungsskala. Das heißt eine renormierte Größe  $Q = Z Q_0$  hängt ebenfalls von  $\mu$  ab. Hierzu zählen auch die in der Lagrange-Dichte auftretende Kopplungskonstante und Masse, das heißt  $a_s(\mu)$  und  $m(\mu)$ . Für  $Q$  ergibt sich folgende Differentialgleichung, die sogenannte Renormierungsgruppen(RG)-Gleichung

$$\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} Q(\mu) = \mu^2 \frac{d}{d\mu^2} (Z Q_0) = \left( \mu^2 \frac{d}{d\mu^2} \ln Z \right) Q(\mu) = \gamma Q(\mu) . \quad (3.23)$$

### 3. Theoretische Grundlagen

Vom zweiten zum dritten Schritt haben wir ausgenutzt, dass  $Q_0$  unabhängig von  $\mu$  ist. Die Größe  $\gamma$  bezeichnet man als anomale Dimension von  $Q$ . Das Differential kann als

$$\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} = \mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} + \beta_\varepsilon(a_s) \frac{\partial}{\partial a_s} + 2m^2 \gamma_m(a_s) \frac{\partial}{\partial m^2} \quad (3.24)$$

geschrieben werden, wobei  $a_s = \alpha_s/\pi = g_s^2/(4\pi^2)$  und

$$\beta_\varepsilon(a_s) = \mu^2 \frac{d a_s}{d \mu^2} = -\varepsilon a_s - \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n a_s^{n+2}, \quad (3.25)$$

$$\gamma_m(a_s) = \frac{1}{m} \mu^2 \frac{d m}{d \mu^2} = - \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{m,n} a_s^{n+1}. \quad (3.26)$$

Die QCD- $\beta$ -Funktion ist inklusive vier Schleifen berechnet und lautet [82, 84]

$$\beta_0 = \frac{1}{4} \left( 11 - \frac{2}{3} n_f \right), \quad (3.27)$$

$$\beta_1 = \frac{1}{16} \left( 102 - \frac{38}{3} n_f \right), \quad (3.28)$$

$$\beta_2 = \frac{1}{64} \left( \frac{2857}{2} - \frac{5033}{18} n_f + \frac{325}{54} n_f^2 \right), \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} \beta_3 = \frac{1}{256} & \left( \frac{149753}{6} + 3564 \zeta_3 - \left( \frac{1078361}{162} + \frac{6508}{27} \zeta_3 \right) n_f \right. \\ & \left. + \left( \frac{50065}{162} + \frac{6472}{81} \zeta_3 \right) n_f^2 + \frac{1093}{729} n_f^3 \right). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Die anomale Dimension der Masse ist ebenfalls bekannt [80, 81], wobei wir Terme bis zur 3. Ordnung in dieser Arbeit angeben

$$\gamma_{m,0} = 1, \quad (3.31)$$

$$\gamma_{m,1} = \frac{1}{16} \left( \frac{202}{3} - \frac{20}{9} n_f \right), \quad (3.32)$$

$$\gamma_{m,2} = \frac{1}{64} \left( 1249 + \left( -\frac{2216}{27} - \frac{160}{3} \zeta_3 \right) n_f - \frac{140}{81} n_f^2 \right). \quad (3.33)$$

Eine übersichtliche Zusammenfassung der Vier-Schleifenergebnisse findet man in [85].

Im  $\overline{\text{MS}}$ -Schema werden in die Renormierungskonstanten nur die Divergenzen absorbiert, was zu folgender Form führt

$$Z(a_s, \varepsilon) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z^{(n)}(a_s)}{\varepsilon^n}. \quad (3.34)$$

Mit dieser Notation kann man berechnen, dass die anomale Dimension nur von dem  $1/\varepsilon$ -Pol abhängt

$$\gamma_{ms} = \mu^2 \frac{d}{d\mu^2} \ln Z = \beta_\varepsilon(a_s) \frac{\partial}{\partial a_s} \ln Z = -a_s \frac{\partial}{\partial a_s} Z^{(1)}(a_s) . \quad (3.35)$$

Wechselt man zu einem anderen Renormierungsschema, so unterscheidet sich dieses von (3.34) durch konstante Terme. Wenn wir die rein divergente Renormierungskonstante mit einem konstanten Term multiplizieren

$$Z(a_s, \varepsilon) = Z^{(0)}(a_s) \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z^{(n)}(a_s)}{\varepsilon^n} \right) , \quad (3.36)$$

dann verändert dieser zusätzliche Term den Wert der anomalen Dimension

$$\gamma = \gamma_{ms} - \beta(a_s) \frac{\partial}{\partial a_s} \ln \left( Z^{(0)}(a_s) \right) . \quad (3.37)$$

Wir können also mit der Wahl des Renormierungsschemas die anomale Dimension ändern, aber aufgrund der  $\beta$ -Funktion als multiplizierendem Faktor immer nur beginnend mit der zweiten Ordnung in  $a_s$ . Die führende Ordnung bleibt immer unverändert und ist somit physikalisch.

Haben wir es mit Operatormischung ( $Q_i = Z_{ij} Q_{j,0}$ ) zu tun, dann ändert sich (3.35) zu

$$\gamma_{ij} = \sum_k \left( \mu^2 \frac{d}{d\mu^2} Z_{ik} \right) Z_{kj}^{-1} . \quad (3.38)$$

### 3.2.4. Lösung der Renormierungsgruppen-Gleichung

In einer festen Ordnung der Störungstheorie können die RG-Gleichungen gelöst werden und somit Größen an verschiedenen Skalen angegeben werden. Wir wenden uns zuerst der Kopplungskonstanten  $a_s$  zu, deren Verhalten durch die  $\beta$ -Funktion und Gleichung (3.25) gegeben ist. Aus dieser Gleichung ergibt sich

$$\ln \left( \frac{\mu^2}{\mu_0^2} \right) = \int_{a_s(\mu_0)}^{a_s(\mu)} \frac{1}{\beta(a'_s)} da'_s . \quad (3.39)$$

Wenn wir den Integranden bis zur bekannten Ordnung entwickeln, können wir die Integration ausführen und anschließend Ordnung für Ordnung  $a_s(\mu_0)$  als Potenzreihe von  $a_s(\mu)$  ausdrücken

$$\begin{aligned} a_s(\mu_0) &= a_s(\mu) + \beta_0 \ln \left( \frac{\mu^2}{\mu_0^2} \right) a_s(\mu)^2 + \left[ \beta_1 \ln \left( \frac{\mu^2}{\mu_0^2} \right) + \beta_0^2 \ln^2 \left( \frac{\mu^2}{\mu_0^2} \right) \right] a_s(\mu)^3 \\ &+ \left[ \beta_2 \ln \left( \frac{\mu^2}{\mu_0^2} \right) + \frac{5}{2} \beta_0 \beta_1 \ln^2 \left( \frac{\mu^2}{\mu_0^2} \right) + \beta_0^3 \ln^3 \left( \frac{\mu^2}{\mu_0^2} \right) \right] a_s(\mu)^4 . \end{aligned} \quad (3.40)$$

### 3. Theoretische Grundlagen

Analog können wir die Fermionmasse an verschiedenen Skalen angeben. Aus Gleichung (3.26) ergibt sich

$$\begin{aligned} \ln \left( \frac{m(\mu)}{m(\mu_0)} \right) &= \int_{a_s(\mu_0)}^{a_s(\mu)} \frac{\gamma_m}{\beta(a'_s)} da'_s \\ &= -\gamma_{m,0} \ln \left( \frac{\mu^2}{\mu_0^2} \right) a_s(\mu) \\ &\quad - \left[ \gamma_{m,1} \ln \left( \frac{\mu^2}{\mu_0^2} \right) + \frac{1}{2} \beta_0 \gamma_{m,0} \ln^2 \left( \frac{\mu^2}{\mu_0^2} \right) \right] a_s(\mu)^2, \end{aligned} \quad (3.41)$$

wobei wir  $a_s(\mu_0)$  mit (3.40) durch  $a_s(\mu)$  ausgedrückt haben. Da im späteren Verlauf dieser Arbeit die Masse meist logarithmisch auftritt, belassen wir es bei dieser Formel und lösen nicht explizit nach der Masse auf.

### 3.3. Naive und Larin-Definition von $\gamma_5$

In Modellen, in denen sich links- und rechtshändige Fermionen unterschiedlich verhalten, treten automatisch Vektor- ( $\bar{\psi} \gamma_\mu \psi$ ) und Axialvektor-Ströme ( $\bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi$ ) auf. Im Standard Modell ist hierfür der schwache  $SU(2)$  Sektor verantwortlich, der nur an linkshändige Fermionen koppelt. Durch das auftretende  $\gamma_5$  im Axialvektor-Strom entstehen einige Probleme, die wir im Folgenden diskutieren wollen.

Da Rechnungen in der Quantenfeldtheorie eine Renormierung erfordern, muss ein Regularisierungsschema gewählt werden. Für fast alle Fälle wird heute dafür die dimensionale Regularisierung verwendet, das heißt man rechnet nicht in vier Raum-Zeit-Dimensionen, sondern geht zu einer  $d$ -dimensionalen Raum-Zeit über. Dieses wurde im vorherigen Abschnitt ausführlich beschrieben. Nun tritt aber das Problem auf, dass  $\gamma_5 = i \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$  ein Objekt ist, das explizit nur in vier Dimensionen lebt.

In vier Dimensionen lautet die Dirac-Algebra

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2 g_{\mu\nu}, \quad \{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0. \quad (3.42)$$

Erweitern wir diese naiv auf  $d$  Dimensionen, so kann man folgende Relationen aufstellen

$$d \operatorname{tr}[\gamma_5] = 0, \quad (d-2) \operatorname{tr}[\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu] = 0, \quad (d-4) \operatorname{tr}[\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma] = 0. \quad (3.43)$$

### 3.3. Naive und Larin-Definition von $\gamma_5$

Die Struktur gilt auch für längere  $\gamma$ -Ketten, so dass für  $d$  ungleich einer geraden Zahl gilt

$$\text{tr}[\gamma_5 \gamma_{\mu_1} \dots \gamma_{\mu_n}] = 0 . \quad (3.44)$$

In Gleichung (3.43) erkennt man aber, dass für  $d = 4$  die Spur mit vier  $\gamma$ -Matrizen ungleich null sein kann, es gilt nämlich in vier Dimensionen

$$\text{tr}[\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma] = -4 i \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} . \quad (3.45)$$

Wenn man also die naive Dirac-Algebra verwendet, wird man, sobald eine physikalische Spur mit obiger Struktur auftritt, ein falsches Ergebnis erhalten. Diese Aussage gilt nur für physikalische Spuren, was meint, dass die Spur explizit im Feynman-Diagramm auftritt. In den in Abschnitt 3.1.3 vorkommenden Projektoren wird auch eine Spur verwendet, die aber keine physikalische Bedeutung hat. Hier kann problemlos die naive  $\gamma_5$ -Algebra verwendet werden. Man muss bei Diagrammen mit einer geschlossenen Fermionschleife deshalb eine andere Definition der Algebra oder von  $\gamma_5$  verwenden. Ein physikalisches Beispiel für diesen Sachverhalt ist die Adler-Bell-Jackiw Anomalie [86].

Eine Möglichkeit diese Problematik zu umgehen, ist eine erweiterte Definition der Dirac-Algebra nach 't Hooft und Veltman [79, 87–93]

$$\{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0 \quad (\text{für } \mu = 0, 1, 2, 3) , \quad [\gamma_\mu, \gamma_5] = 0 \quad (\text{für } \mu \neq 0, 1, 2, 3) . \quad (3.46)$$

Hier muss man den  $d$ -dimensionalen Raum inkohärent in einen vier-dimensionalen und einen  $(d - 4)$ -dimensionalen Raum aufteilen, in denen unterschiedliche (Anti-) Vertauschungsregeln gelten.

Eine weitere Methode, die wir in dieser Arbeit verwenden werden, beruht auf Larin [94], in der man  $\gamma_5$  wie folgt schreibt

$$(\gamma_5)_{\text{Larin}} = \zeta_L \cdot \frac{i}{24} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma , \quad (3.47)$$

$$(\gamma_\mu \gamma_5)_{\text{Larin}} = \xi_L \cdot \frac{i}{6} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma . \quad (3.48)$$

Da im weiteren Verlauf der Arbeit nur der Axialvektor-Strom verwendet wird, beschränken wir uns in der weiteren Diskussion auf diesen. Die gleiche Argumentationskette gilt aber auch für den Axial-Strom. Tritt der Axialvektor-Strom nur als externer Strom auf, kann man den  $\varepsilon$ -Tensor von der Rechnung absondern und die verbleibenden  $\gamma$ -Matrizen wohldefiniert in  $d$  Dimensionen behandeln. In vier Dimensionen besteht (für  $\xi_L = 1$ ) kein Unterschied zwischen

### 3. Theoretische Grundlagen

der naiven und der Larin-Definition. In  $d$  Dimensionen unterscheiden sich aber beide Definitionen ( $d = 4 - 2\varepsilon$ )

$$(\gamma_\mu \gamma_5)_{\text{naiv}} = (1 + \# \varepsilon + \# \varepsilon^2 + \dots) (\gamma_\mu \gamma_5)_{\text{Larin}} . \quad (3.49)$$

Das Symbol  $\#$  steht für eine beliebige Konstante. Berechnet man eine Green-Funktion, so wird diese typischerweise Divergenzen ( $1/\varepsilon$  Pole) in höheren Ordnungen der Störungstheorie haben. Enthält diese Green-Funktion eine externe Axialvektor-Kopplung, führen die Divergenzen zusammen mit den  $\varepsilon$ -Termen in der Larin-Vorschrift zu Unterschieden im endlichen Teil, das heißt

$$\Gamma((\gamma_\mu \gamma_5)_{\text{naiv}}) = (1 + \# a_s + \# a_s^2 + \dots) \xi_L \Gamma\left(\frac{i}{6} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma\right) . \quad (3.50)$$

Wenn in der Green-Funktion die externe Axialvektor-Kopplung nicht in einer geschlossenen Fermionschleifen vorkommt (nur dann ist die naive Vorschrift anwendbar), kann man diesen Unterschied aufheben, indem man  $\xi_L$  als Inverses des auftretenden Faktors wählt. Somit kann man eine Äquivalenz zwischen beiden Methoden herstellen ( $\Gamma_{\text{naiv}} = \Gamma_{\text{Larin}}$ ). Das bedeutet, dass die antikommutierende Eigenschaft von  $\gamma_5$  in vier Dimensionen auch in  $d$  Dimensionen wieder hergestellt wird. Wenn mehrere externe Axialvektor-Ströme in der gleichen Fermionlinie auftreten, kann man die Antikommutation auch in der Larin-Definition ausnutzen und die  $\gamma_5$ -Matrizen zueinander hintauschen, wo sie sich dann gegenseitig aufheben. Dies gilt auch in geschlossenen Fermionschleifen. Das bedeutet, dass wir bei einer gerade Anzahl von  $\gamma_5$ -Matrizen in einer Fermionschleife auch die naive Definition verwenden können. Bei einer ungeraden Anzahl bleibt eine  $\gamma_5$ -Matrix übrig, die nur mit der Larin-Definition konsistent beschrieben werden kann.

Eine andere aber äquivalente Sichtweise  $\xi_L$  zu definieren, ist,  $\xi_L$  als endlichen Anteil der Renormierungskonstanten des Operators (3.48) zu verstehen. Die Pole der Renormierungskonstanten in den unterschiedlichen Definitionen unterscheiden sich, da z. B. ein  $1/\varepsilon^2$ -Pol zusammen mit einem  $\varepsilon$ -Term aus (3.49) einen  $1/\varepsilon$ -Pol liefert. Somit ist auch die anomale Dimension verschieden. Fordert man, dass die anomale Dimension in der naiven und der Larin-Vorschrift gleich ist (in (3.37) wurde gezeigt, dass ein endlicher Anteil die anomale Dimension ändert), so gibt uns dies  $\xi_L$  eindeutig vor und entspricht dem Wert der vorherigen Methode. Dies kann man leicht einsehen, wenn man sich bewusst wird, dass in der ersten Methode die renormierten Green-Funktionen durch die Wahl von  $\xi_L$  gleichgesetzt wurden und sich die anomale Dimension aus der Ableitung der renormierten Green-Funktion ergibt (vergleiche (3.23)).

In Abschnitt 4.1 werden wir den Axialvektor-Strom genauer untersuchen und von der zweiten Methode Gebrauch machen, um  $\xi_L$  zu bestimmen.

### 3.4. Entkopplung von schweren Teilchen

Bei sehr vielen Berechnungen im und jenseits des Standardmodells treten Teilchen mit deutlich unterschiedlichen Massen auf. Hieraus resultieren zwei schwerwiegende Probleme.

Ein großes Problem ist die zunehmende Komplexität mit steigender Anzahl von unterschiedlichen Massenskalen. Gerade bei hoher Schleifenordnung sind diese Probleme (derzeit) nicht lösbar und man ist auf Einkalenprobleme beschränkt. Um dies zu erreichen, muss man die verschiedenen Skalen voneinander separieren und somit ein Mehrskalenproblem auf mehrere Einkalenprobleme reduzieren.

Das zweite Problem ist von konzeptioneller Art. Um dies näher zu erklären, nehmen wir der Einfachheit halber an, dass wir nur eine schwere (heavy) und eine leichte Skala haben mit  $m_h \gg m_l$ . Dann hat eine beliebige Green-Funktion, die beide Massen enthält, die folgende Struktur

$$\Gamma = \# + \alpha \left( \# \ln \frac{\mu^2}{m_h^2} + \# \ln \frac{\mu^2}{m_l^2} + \dots \right) + \dots + \alpha^n \left( \# \ln^n \frac{\mu^2}{m_h^2} + \# \ln^n \frac{\mu^2}{m_l^2} + \dots \right). \quad (3.51)$$

Hierbei ist  $\alpha$  die kleine Kopplungskonstante, nach der wir unsere Störungstheorie aufbauen. Der Parameter  $\mu$  bezeichnet die Renormierungsskala und könnte frei gewählt werden, wenn wir ausreichend viele Terme der Störungstheorie zur Verfügung hätten. Wenn wir aber eine begrenzte Anzahl an Störungsordnungen berechnen, sollte  $\mu$  so gewählt werden, dass Terme in höherer Ordnung in  $\alpha$  möglichst klein sind. Bei der Struktur in Gleichung (3.51) ist dies aber nicht möglich, da wir Terme der Art  $\alpha \cdot \ln(m_h/m_l)$  erhalten, egal wie  $\mu$  gewählt wird. Aufgrund der großen Massenunterschiede wird der Logarithmus groß und kompensiert die kleine Kopplungskonstante  $\alpha$ , das heißt  $\alpha \cdot \ln(m_h/m_l) \sim 1$ . Dieser Term taucht in jeder Ordnung der Störungsreihe auf und wir erhalten eine sehr schlechte Konvergenz der Störungsreihe.

Die Lösung für diese Probleme bringen die drei folgenden Schritte. Zuerst entkoppelt man die schweren Teilchen. Dies geschieht, indem man von der vollen Theorie, die schwere und leichte Teilchen ( $\Phi_h$  und  $\Phi_l$ ) enthält, zu einer effektiven Theorie übergeht. Diese effektive Theorie enthält nur noch leichte

### 3. Theoretische Grundlagen

Teilchen, dafür aber eventuell zusätzliche Vertizes mit Kopplungskonstanten  $C_i$ , die Relikte der schweren Teilchen sind

$$\mathcal{L}(\Phi_h, m_h, \Phi_l, m_l) \rightarrow \mathcal{L}_{\text{eff}}(C_i(m_h), \Phi_l, m_l) . \quad (3.52)$$

Den Übergang von der vollen zur effektiven Theorie werden wir im späteren Verlauf dieses Abschnitts genauer erklären. In einem zweiten Schritt nutzt man die RG-Gleichung, um in der effektiven Theorie alle Größen von der schweren Skala zur niedrigen Skala zu entwickeln. Durch die Entwicklung summiert man automatisch die Terme  $\alpha \cdot \ln(m_h/m_l)$  zu allen Ordnungen und erhält dadurch eine wohldefinierte Störungsreihe. In einem dritten Schritt kann man nun die eigentliche Green-Funktion in der effektiven Theorie bei der niedrigen Skala berechnen.

Während die Entwicklung über die Renormierungsgruppen der entscheidende Schritt im Umgang mit großen Logarithmen ist, bietet die Entkopplung der schweren Teilchen die Lösung für die technischen Probleme mit zu vielen Skalen. Um die Kopplungskonstanten  $C_i$  zu berechnen, kann man alle anderen Skalen vernachlässigen, da diese deutlich kleiner sind. Dadurch reduziert sich die Rechnung auf ein Einskalenproblem, welche auch bei hoher Schleifenzahl berechenbar ist. Falls mehr als zwei Skalen im Spiel sind, muss man absteigend alle weiteren Massen entkoppeln, während kleinere Massen vernachlässigt werden. Letztendlich kann man die Green-Funktion bei der niedrigsten Skala berechnen, was wieder ein Einskalenproblem darstellt.

#### 3.4.1. Matching

Wir werden jetzt den Übergang in (3.52) etwas genauer betrachten. Wir starten mit einer Lagrange-Dichte in der vollen Theorie, die die kinetischen Terme für die leichten und schweren Teilchen enthält ( $\mathcal{L}_l^{\text{Kin}}$  und  $\mathcal{L}_h^{\text{Kin}}$ ), sowie Wechselwirkungsterme zwischen ausschließlich leichten Teilchen ( $\mathcal{L}_l^{\text{WW}}$  mit Kopplungskonstanten  $g_l$ ) und Wechselwirkungsterme, an denen mindestens ein schweres Teilchen beteiligt ist ( $\mathcal{L}_h^{\text{WW}}$ )

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{full}} &= \mathcal{L}_l^{\text{Kin}}(\Phi_l, m_l) + \mathcal{L}_h^{\text{Kin}}(\Phi_h, m_h) + \mathcal{L}_l^{\text{WW}}(\Phi_l, g_l) + \mathcal{L}_h^{\text{WW}}(\Phi_l, \Phi_h, g_h) \\ &\quad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ \mathcal{L}_{\text{eff}} &= \mathcal{L}_l^{\text{Kin}}(\Phi'_l, m'_l) + \qquad 0 \qquad + \mathcal{L}_l^{\text{WW}}(\Phi'_l, g'_l) + \mathcal{L}_{\text{eff}}^{\text{WW}}(\Phi'_l, C_i) . \end{aligned} \quad (3.53)$$

### 3.4. Entkopplung von schweren Teilchen

Beim Übergang von der vollen zur effektiven Theorie müssen die leichten Felder und Kopplungskonstanten in  $\mathcal{L}_l^{\text{Kin}}$  und  $\mathcal{L}_l^{\text{WW}}$  redefiniert werden

$$\Phi'_l = \sqrt{\zeta_{\Phi_l}} \Phi_l, \quad m'_l = \zeta_{m_l} m_l \quad \text{und} \quad g'_l = \zeta_{g_l} g_l. \quad (3.54)$$

Die Faktoren  $\zeta_{\Phi_l}$  und  $\zeta_{g_l}$  enthalten Effekte der schweren Teilchen, die in höheren Schleifenordnungen in den  $\Phi_l$  Selbstenergien und den Vertizes der leichten Wechselwirkungsterme auftreten. Exemplarisch sehen wir dies im nächsten Abschnitt, in dem wir das Top-Quark als schweres Teilchen aus der QCD entkoppeln. Der kinetische Anteil der schweren Teilchen verschwindet in der effektiven Theorie, da diese zu schwer sind, um angeregt zu werden. Um  $\mathcal{L}_{\text{eff}}^{\text{WW}}$  aufzustellen, nehmen wir uns einen Operator  $O_h \in \mathcal{L}_h^{\text{WW}}$  und entwickeln in  $1/m_h \ll 1$  [95]

$$\left[ O_h \right]_{\text{full}} = \sum_i C_i(g_l, g_h, \ln(\mu/m_h)) \left[ O_i \right]_{\text{eff}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{m_h}\right). \quad (3.55)$$

Der Operator  $O_h$  hat als Teil der Lagrange-Dichte die Dimension vier und somit auch die Operatoren  $O_i$  der effektiven Theorie, was ihre Anzahl beschränkt. Die Terme, die mit der schweren Masse  $m_h$  unterdrückt sind, entsprechen Operatoren höherer Dimensionen. Diese Terme höherer Ordnung können wir im Rahmen dieser Arbeit vernachlässigen.<sup>2</sup> Die Koeffizienten  $C_i$  enthalten die Effekte der schweren Teilchen, wobei die Abhängigkeit von der schweren Masse logarithmisch auftritt. Dass  $C_i$  durch die Kopplungskonstanten der vollen Theorie ausgedrückt wird, ist Konvention und kann mit Hilfe von Gleichung (3.54) leicht umgeschrieben werden.

Um die Koeffizienten zu berechnen, betrachten wir eine Green-Funktion mit  $n$  leichten Feldern  $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ , die so konstruiert ist, dass sie auf einen bestimmten Koeffizienten, beispielsweise  $C_1$ , projiziert. Das heißt aus Gleichung (3.53) ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\zeta_{\Phi_1} \dots \zeta_{\Phi_n}}} \left[ \langle \mathcal{T} O_h \Phi_1 \dots \Phi_n \rangle \right]_{\text{full}} \\ = C_1 \left[ \langle \mathcal{T} O_1 \Phi'_1 \dots \Phi'_n \rangle \right]_{\text{eff}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{m_h}\right). \end{aligned} \quad (3.56)$$

---

<sup>2</sup>Dies gilt im Allgemeinen nicht, wenn z.B. diese Operatoren die führende Ordnung zu bestimmten Green-Funktionen bilden. Ein Beispiel hierfür ist die elektroschwache Theorie. Wenn man das  $Z$ - und  $W$ -Boson als schwere Teilchen entkoppelt, entstehen Prozesse die in führender Ordnung von einem Sechs-dimensionalen Vier-Fermionoperator erzeugt werden.

### 3. Theoretische Grundlagen

Die eckige Klammer auf der linken Seite meint, dass alle Größen (wie Renormierungs- und Kopplungskonstanten sowie Massen) in der vollen Theorie beschrieben werden, während in der eckigen Klammer auf der rechten Seite alle Größen in der effektiven Theorie behandelt werden. Bei den  $\zeta$ -Faktoren für die externen Felder müssen wir genauer hinschauen. Die externen Felder müssen auf beiden Seiten gleich behandelt werden, was uns mit Gleichung (3.54) einen Faktor  $\sqrt{\zeta_{\Phi_i}}$  für jedes externe Feld auf der linken Seite liefert. Da wir aber amputierte Green-Funktionen vergleichen, müssen wir für jedes externe Feld wegen des amputierten Propagators durch  $\zeta_{\Phi_i}$  teilen, was zu der Form in (3.56) führt.

Wenn wir den Limes  $m_h \rightarrow \infty$  betrachten oder äquivalent alle anderen Skalen (Massen der leichten Teilchen und externe Impulse) auf null setzen, dann können wir die volle Theorie exakt auf die effektive Theorie abbilden (“matchen”) [95]

$$\frac{1}{\sqrt{\zeta_{\Phi_1} \dots \zeta_{\Phi_n}}} \left[ \langle \mathcal{T} O_h \Phi_1 \dots \Phi_n \rangle \Big|_{p=0} \right]_{\text{full}} = C_1 \left[ \langle \mathcal{T} O_1 \Phi'_1 \dots \Phi'_n \rangle \Big|_{p=0} \right]_{\text{eff}} . \quad (3.57)$$

Aus dieser Gleichung können wir  $C_1$  bestimmen und in analoger Weise die restlichen Entkopplungskoeffizienten  $C_i$ . Durch diesen Limes reduziert sich auch die Anzahl der Diagramme, die man für die Green-Funktion berechnen muss, drastisch. Dadurch, dass wir die externen Impulse auf null setzen, berechnen wir Vakuumdiagramme. Da wir alle Massen außer der schweren Skala auf null gesetzt haben, haben wir auf der Seite der effektiven Theorie nur masselose Vakuumdiagramme, welche in dimensionaler Regularisierung zu null gesetzt werden. Deshalb verbleiben in der effektiven Theorie nur Baumgraphendiagramme in führender Ordnung. Auf der Seite der vollen Theorie sind nur Diagramme ungleich null, die ein massives Teilchen enthalten.

Da wir in (3.57) renormierte Green-Funktionen betrachten, sind diese UV-endlich. Dadurch, dass wir masselose Teilchen und keine externen Impulse haben, werden im Allgemeinen aber IR-Divergenzen entstehen, wodurch jede Seite der Gleichung, einzeln betrachtet, nicht endlich ist. Jedoch sind die entstehenden IR-Divergenzen auf beiden Seiten gleich und heben sich gegenseitig auf, so dass der renormierte Entkopplungskoeffizient  $C_1$  endlich ist.

### 3.4.2. Entkopplung des Top-Quarks in QCD

Als Beispiel für die Entkopplung eines schweren Teilchens wollen wir das Top-Quark aus der QCD entkoppeln. Dies ist gerechtfertigt, wenn die typische Energieskala sehr viel kleiner als die Top-Masse ist. Da das Top-Quark deutlich schwerer als die restlichen Quarks ist, haben wir die große Skalenseparation, die eine Entkopplung erfordert. Zudem benötigen wir die Relationen, die wir in diesem Abschnitt aufstellen, später in unserer Rechnung, wenn wir ebenfalls das Top-Quark aus unserer Rechnung ausintegrieren.

Wenn wir von der Sechs-Flavour-QCD zur Fünf-Flavour-QCD ohne Top-Quark übergehen, müssen wir die Felder in der effektiven Theorie laut (3.54) redefinieren [96]

$$\begin{aligned} G_{a,\mu}^{(5)} &= \sqrt{\zeta_3} G_{a,\mu}^{(6)}, & \psi_f^{(5)} &= \sqrt{\zeta_2} \psi_f^{(6)}, & c_a^{(5)} &= \sqrt{\tilde{\zeta}_3} c_a^{(6)}, \\ a_s^{(5)} &= \zeta_{g_s}^2 \cdot a_s^{(6)} & \left( g_s^{(5)} &= \zeta_{g_s} \cdot g_s^{(6)}, & a_s &= g_s^2 / (4\pi^2) \right). \end{aligned} \quad (3.58)$$

Der Eichparameter taucht im Gluonpropagator auf und muss deshalb auch redefiniert werden ( $\xi_l^{(5)} = \zeta_3 \xi_l^{(6)}$ ).

Um die Entkopplungskonstante der Quarks  $\zeta_2$  zu berechnen, betrachten wir die Green-Funktion der Selbstenergie eines leichten Quarks

$$\frac{1}{\zeta_2} \left[ Z_2 \langle \mathcal{T} \bar{\psi}_f \psi_f \rangle_0 |_{p=0} \right]_6 = \left[ Z_2 \langle \mathcal{T} \bar{\psi}_f \psi_f \rangle_0 |_{p=0} \right]_5. \quad (3.59)$$

Die eckige Klammer mit Index 6 bzw. 5 bedeutet, dass alle Größen in der Sechs- bzw. Fünf-Flavour-Theorie behandelt werden müssen. Die Lorentz-Struktur der Fermionselbstenergie haben wir schon in (3.1) aufgestellt, wobei die Masse des leichten Quarks null ist. Da auf der Seite der effektiven Theorie kein Top-Quark vorkommt, verschwinden alle Schleifenintegrale als masselose Vakuumdiagramme. Es ergibt sich somit

$$\zeta_2 = \frac{Z_2^{(6)}}{Z_2^{(5)}} \left( 1 + \Sigma_{V,0}^t(0) \right). \quad (3.60)$$

Hierbei gibt  $\Sigma_{V,0}^t$  alle nackten Schleifendiagramme der Selbstenergie in der vollen Theorie an. Der Index  $t$  soll andeuten, dass nur Diagramme, die ein schweres Top-Quark beinhalten, berechnet werden müssen, da alle übrigen erneut als masselose Vakuumdiagramme verschwinden.

Analog kann mit Hilfe der Gluon- und Geist-Selbstenergie  $\zeta_3$  und  $\tilde{\zeta}_3$  berech-

### 3. Theoretische Grundlagen

net werden

$$\zeta_3 = \frac{Z_3^{(6)}}{Z_3^{(5)}} (1 + \Pi_{G,0}^t(0)) , \quad (3.61)$$

$$\tilde{\zeta}_3 = \frac{\tilde{Z}_3^{(6)}}{\tilde{Z}_3^{(5)}} (1 + \Pi_{c,0}^t(0)) , \quad (3.62)$$

wobei  $\Pi_{G,0}^t(p^2)$  und  $\Pi_{c,0}^t(p^2)$  die Gluon- und Geist-Vakuumpolarisation sind.

Um die verbleibende Entkopplungskonstante  $\zeta_g$  zu berechnen, müssen wir einen Vertex untersuchen, der die Kopplungskonstante enthält. Der hierfür am besten geeignete ist der Gluon-Geist-Geist-Vertex (den skalaren Anteil der Green-Funktion bezeichnen wir mit  $\Gamma_{g\bar{c}c}(p, q)$ ), dem wir die Entkopplungskonstante  $\tilde{\zeta}_1$  zuordnen, die sich analog zu oben ergibt

$$\tilde{\zeta}_1 = \frac{\tilde{Z}_1^{(6)}}{\tilde{Z}_1^{(5)}} (1 + \Gamma_{g\bar{c}c,0}^t(0, 0)) , \quad (3.63)$$

wobei  $Z_1 = Z_g \tilde{Z}_3 \sqrt{Z_3}$  den Vertex renormiert. Zusammen mit den anderen Entkopplungskonstanten erhalten wir schließlich

$$\zeta_g = \frac{\tilde{\zeta}_1}{\tilde{\zeta}_3 \sqrt{\zeta_3}} . \quad (3.64)$$

Die Entkopplungskonstanten sind bis zur Drei-Schleifenordnung in [96] und zur Vier-Schleifenordnung in [72, 97] berechnet. Die analytischen Ergebnisse, die wir im späteren Verlauf unserer Arbeit benötigen sind  $\zeta_g^2$  [98] und  $\zeta_3$  zur Ordnung  $\mathcal{O}(a_s^2)$  und  $\zeta_2$  zur Ordnung  $\mathcal{O}(a_s^3)$

$$\begin{aligned} \zeta_g^2(a_s^{(6)}) &= 1 - a_s^{(6)} \left[ \frac{1}{6} \ln_{\mu t} + \varepsilon \left( \frac{1}{12} \ln_{\mu t}^2 + \frac{1}{12} \zeta_2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon^2 \left( \frac{1}{36} \ln_{\mu t}^3 + \frac{1}{12} \ln_{\mu t} \zeta_2 - \frac{1}{18} \zeta_3 \right) \right] \\ &\quad + \left( a_s^{(6)} \right)^2 \left[ \frac{11}{72} - \frac{11}{24} \ln_{\mu t} + \frac{1}{36} \ln_{\mu t}^2 \right. \\ &\quad \left. + \left( -\frac{17}{48} - \frac{11}{48} \zeta_2 + \ln_{\mu t} \left( \frac{11}{36} + \frac{1}{36} \zeta_2 \right) - \frac{7}{24} \ln_{\mu t}^2 + \frac{1}{36} \ln_{\mu t}^3 \right) \varepsilon \right] , \end{aligned} \quad (3.65)$$

$$\begin{aligned} \zeta_3(a_s^{(6)}) &= 1 + a_s^{(6)} \left[ \frac{1}{6} \ln_{\mu t} + \varepsilon \left( \frac{1}{12} \ln_{\mu t}^2 + \frac{1}{12} \zeta_2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon^2 \left( \frac{1}{36} \ln_{\mu t}^3 + \frac{1}{12} \ln_{\mu t} \zeta_2 - \frac{1}{18} \zeta_3 \right) \right] \\ &\quad + \left( a_s^{(6)} \right)^2 \left[ \frac{91}{1152} + \frac{29}{96} \ln_{\mu t} + \frac{3}{32} \ln_{\mu t}^2 \right. \\ &\quad \left. + \left( -\frac{53}{2304} + \frac{29}{192} \zeta_2 + \ln_{\mu t} \left( \frac{91}{576} + \frac{3}{32} \zeta_2 \right) + \frac{13}{96} \ln_{\mu t}^2 + \frac{3}{32} \ln_{\mu t}^3 \right) \varepsilon \right] , \end{aligned} \quad (3.66)$$

### 3.4. Entkopplung von schweren Teilchen

$$\begin{aligned}
\zeta_2(a_s^{(6)}) &= 1 + (a_s^{(6)})^2 \left[ \frac{5}{144} - \frac{1}{12} \ln_{\mu t} \right. \\
&\quad \left. + \left( -\frac{89}{864} - \frac{1}{24} \zeta_2 + \frac{5}{72} \ln_{\mu t} - \frac{1}{12} \ln_{\mu t}^2 \right) \varepsilon \right] \\
&\quad + (a_s^{(6)})^3 \left[ \frac{1333}{3888} + \frac{5}{36} \zeta_3 - \frac{43}{72} \ln_{\mu t} + \frac{5}{288} \ln_{\mu t}^2 + \left( \frac{35}{3888} + \frac{5}{432} \ln_{\mu t} \right) n_l \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{2387}{6912} - \frac{1}{12} \zeta_3 - \frac{121}{576} \ln_{\mu t} + \frac{13}{192} \ln_{\mu t}^2 - \frac{1}{96} \ln_{\mu t}^3 \right) \xi_l^{(6)} \right], \tag{3.67}
\end{aligned}$$

mit  $\ln_{\mu t} = \ln(\mu^2/m_t(\mu)^2)$ . Die höheren Ordnungen in  $\varepsilon$  sind angegeben, da sie zusammen mit  $1/\varepsilon$ -Polen zum endlichen Anteil in höheren Ordnungen beitragen. Die höheren Ordnungen in  $\varepsilon$  sind in der reinen  $\overline{\text{MS}}$ -Definition nach (3.4) angegeben. Die Anzahl der leichten Fermionen wird mit  $n_l$  bezeichnet. In der Entkopplungskonstanten  $\zeta_2$  treten Faktoren der  $\zeta$ -Funktion auf, die wir ebenfalls mit  $\zeta(3) = \zeta_3$  abgekürzt haben. Trotz der entstehenden Problematik durch eine ‘‘Doppelnotation’’, behalten wir diese bei, da immer aus dem Zusammenhang klar sein sollte, ob die Entkopplungskonstante oder  $\zeta$ -Funktion gemeint ist.



## 4. Zerfallsrate des $Z$ -Bosons nach Hadronen

In Kapitel 2 haben wir gesehen, dass wir die Zerfallsrate des  $Z$ -Bosons nach Hadronen über das Optische Theorem durch den Imaginärteil des  $Z$ -Propagators berechnen können

$$\Gamma(Z \rightarrow \text{Hadronen}) \leftrightarrow \text{Im} \left[ \text{Z} \text{---} \text{---} \text{Z} \right], \quad (4.1)$$

oder formal in (2.13) und (2.14). Die QCD-Korrekturen, diagrammatisch dargestellt, bauen sich wie folgt auf

$$\begin{aligned} \text{Z} \text{---} \text{---} \text{Z} \text{---} \text{---} \text{Z} &= \text{Z} \text{---} \text{---} \text{Z} \text{---} \text{---} \text{Z} + \text{Z} \text{---} \text{---} \text{Z} \text{---} \text{---} \text{Z} + \text{Z} \text{---} \text{---} \text{Z} \text{---} \text{---} \text{Z} + \dots \\ &+ \text{Z} \text{---} \text{---} \text{Z} \text{---} \text{---} \text{Z} + \text{Z} \text{---} \text{---} \text{Z} \text{---} \text{---} \text{Z} + \dots \end{aligned} \quad (4.2)$$

Die Diagramme der ersten Zeile beschreiben die Nicht-Singlett(NS) Diagramme mit einer geschlossenen Fermionschleife, die an beide  $Z$ -Vertizes koppelt. Da das  $Z$ -Boson zu leicht ist, um in zwei Top-Quarks zu zerfallen, entsteht kein Imaginärteil, wenn in dieser Fermionschleife ein Top-Quark läuft. Deshalb berücksichtigen wir nur Korrekturen in den NS-Diagrammen, in denen eines der fünf leichtesten Quarks an das  $Z$  koppelt. Die Singlett(S)-Diagramme, dargestellt in der zweiten Zeile von (4.2), zeichnen sich dadurch aus, dass sie durch einen reinen Gluonenschnitt zerteilt werden können. Gleichbedeutend hiermit ist, dass wir zwei geschlossene, getrennte Fermionschleifen haben, die jeweils an einen externen Strom koppeln. In diesen Diagrammen kann das Top-Quark zur führenden Ordnung auftreten.

#### 4. Zerfallsrate des $Z$ -Bosons nach Hadronen

Da wir den  $Z$ -Propagator an der Skala  $M_Z$  auswerten, vernachlässigen wir in diesem Kapitel die Massen der leichtesten fünf Quarks und betrachten nur das Top-Quark als sehr schwer. Wir unterschlagen damit kleine Korrekturen der Form  $m_q^2/M_Z^2$  und  $M_Z^2/(4M_t^2)$ , die wir ausführlich in Kapitel 2 besprochen haben. In Abschnitt 3.4 haben wir gesehen, wie wir das Top-Quark als schweres Teilchen von unserer Theorie entkoppeln können. Durch diese Entkopplung spalten wir das Zwei-Skalenproblem in zwei Ein-Skalenprobleme auf. Erst diese Ein-Skalenprobleme sind bis zu hoher Schleifenordnung berechenbar. Deshalb ist die Behandlung des Top-Quarks als sehr schweres Teilchen von großer Wichtigkeit für die Lösbarkeit des Problems. Zuerst berechnen wir die effektive Theorie, die wir nach der Entkopplung des Top-Quarks erhalten, in Abschnitt 4.2. Anschließend berechnen wir den  $Z$ -Propagator in der masselosen effektiven Theorie in Abschnitt 4.3.

Bevor wir mit der eigentlichen Berechnung starten, müssen wir uns die Struktur des  $Z$ -Vertex nochmals etwas genauer anschauen. Wie wir schon in (2.6) gesehen haben, koppelt das  $Z$ -Boson über den Vektor- und Axialvektorstrom

$$V_\mu^f = \bar{\psi}_f \gamma_\mu \psi_f , \quad (4.3)$$

$$A_\mu^f = \bar{\psi}_f \gamma_\mu \gamma_5 \psi_f \quad (4.4)$$

an die Fermionen

$$j_\mu^{Z,f} = v_f V_\mu^f + a_f A_\mu^f . \quad (4.5)$$

Die Kopplungskonstanten waren mit  $v_f \equiv 2I_f - 4q_f s_W^2$  und  $a_f \equiv 2I_f$  definiert. Den Index  $\mu$  werden wir wie bisher auch im Folgenden oft unterdrücken und nur  $A^f$  bzw.  $V^f$  schreiben. Der  $Z$ -Propagator spaltet sich mit dieser Schreibweise in eine inkohärente Summe aus Vektor- und Axialvektor-Propagator

$$\begin{array}{c} Z \\ \text{wavy} \end{array} \text{QCD} \begin{array}{c} Z \\ \text{wavy} \end{array} = \sum_{f,f'} v_f v_{f'} \begin{array}{c} V^f \\ \text{wavy} \end{array} \text{QCD} \begin{array}{c} V^{f'} \\ \text{wavy} \end{array} + \sum_{f,f'} a_f a_{f'} \begin{array}{c} A^f \\ \text{wavy} \end{array} \text{QCD} \begin{array}{c} A^{f'} \\ \text{wavy} \end{array} . \quad (4.6)$$

Der Grund, warum keine gemischten Diagramme auftreten, haben wir schon nach Gleichung (2.9) diskutiert. Mathematisch kann man dies auch wie folgt sehen. Für die NS-Diagramme ist die Spur mit einer  $\gamma_5$  Matrix entweder null oder proportional zu dem vierdimensionalen  $\varepsilon$ -Tensor ist. Im zweiten Fall haben wir aber nur den durch den Propagator fließenden Impuls, den wir mit

dem  $\varepsilon$ -Tensor kontrahieren können. Aus diesem können wir aber kein antisymmetrisches Objekt bilden und die Kontraktion mit dem  $\varepsilon$ -Tensor verschwindet somit. Für die S-Diagramme ergibt die Spur mit  $\gamma_5$  ein antisymmetrisches Objekt bezogen auf die Lorentz-Indizes der Gluonen, die die beiden Fermionschleifen verbinden, während die Spur ohne  $\gamma_5$  eine symmetrische Struktur hat. Die Kontraktion beider Objekte verschwindet deswegen erneut.

Wir können somit die Behandlung des Vektor- und Axialvektor-Stroms getrennt untersuchen. Bevor wir mit der Entkopplung des Top-Quarks beginnen, werden wir im nächsten Abschnitt zuerst die Renormierung der Ströme betrachten.

## 4.1. Der Axialvektor-Strom

Wie schon in Abschnitt 3.3 ausführlich besprochen, können wir nicht die naive Definition von  $\gamma_5$  verwenden, da wir in den S-Diagrammen mit einer geschlossenen Fermionschleife konfrontiert werden. Wir verwenden daher die Larin-Methode [94] und schreiben den Axialvektor-Strom mit (3.48) als

$$A_\mu^f = \frac{i}{6} \varepsilon_{\mu\alpha_1\alpha_2\alpha_3} \bar{\psi}_f \gamma_{\alpha_1} \gamma_{\alpha_2} \gamma_{\alpha_3} \psi_f . \quad (4.7)$$

Den Larin-Faktor  $\xi_L$  haben wir absichtlich unterdrückt, um uns zuerst auf die reine  $\overline{\text{MS}}$ -Renormierung zu konzentrieren. Wir werden ihn später wieder berücksichtigen, wenn wir seine tatsächliche Form angeben können. Den  $\varepsilon$ -Tensor können wir von unserer Rechnung als globalen Faktor abtrennen. Uns bleibt somit ein Operator, der folgende Feynman-Regel liefert

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \text{---} \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \\
 \text{---} \nearrow \\
 \text{---} \bullet \\
 \text{---} \searrow \\
 \text{---} i \quad \quad \quad j
 \end{array}
 \end{array}
 = \frac{i}{6} \gamma_{[\alpha_1} \gamma_{\alpha_2} \gamma_{\alpha_3]} \delta_{ij} , \quad (4.8)$$

mit  $i$  und  $j$  als Farbindizes und

$$\gamma_{[\alpha_1} \gamma_{\alpha_2} \gamma_{\alpha_3]} = \frac{1}{2} \left( \gamma_{\alpha_1} \gamma_{\alpha_2} \gamma_{\alpha_3} - \gamma_{\alpha_3} \gamma_{\alpha_2} \gamma_{\alpha_1} \right) . \quad (4.9)$$

Wir haben hier die antisymmetrische Struktur des  $\varepsilon$ -Tensors ausgenutzt und deshalb unseren Vertex auch antisymmetrisch geschrieben, was einen zusätzlichen Faktor  $1/2$  erzeugt.<sup>1</sup> Der antisymmetrische Anteil ist der einzige, der nach Kontraktion mit dem  $\varepsilon$ -Tensor übrig bleibt.

<sup>1</sup>Dass die Antisymmetrie gegeben ist, kann man mit Hilfe der Dirac-Algebra zeigen.

#### 4. Zerfallsrate des $Z$ -Bosons nach Hadronen

Da der Vektor-Strom erhalten ist ( $\partial^\mu V_\mu^f = 0$ ), muss man ihn nicht renormieren. Man spricht auch davon, dass der Vektor-Strom von einer Symmetrie, oder äquivalent von einer Ward-Identität, geschützt ist. Diese Eigenschaft ist sehr wichtig und wird uns noch an einigen Stellen begegnen. Im Gegensatz gilt dies nicht für den Axialvektor-Strom, weshalb dieser ein nicht-triviales Renormierungsverhalten an den Tag legt.

Wenn wir  $n_f$  Quarks  $f_1, \dots, f_{n_f}$  haben und QCD-Korrekturen zu einem Operator  $A^{f_i}$  betrachten, dann unterscheiden wir die NS- und S-Diagramme, dargestellt in Abbildung 4.1 bzw. 4.2. Die NS-Diagramme zeichnen sich dadurch aus, dass eine offene Fermionlinie an den Operator  $A^{f_i}$  koppelt, während in den S-Diagrammen der Operator an eine geschlossene Fermionschleife anknüpft. Wenn wir  $A^{f_i}$  renormieren wollen, dann können wir die Divergenzen der NS-Diagramme ( $Z^{\text{NS}}$ ) und der S-Diagramme ( $Z^\psi$ ) mit  $f_j = f_i$  durch multiplizieren der Renormierungskonstanten  $Z = Z^{\text{NS}} + Z^\psi$  behandeln. Über die S-Diagramme mischt der Operator aber zusätzlich mit anderen Fermionspezies  $f_j$  ( $i \neq j$ ). Deswegen müssen wir die daraus entstehenden Divergenzen durch das Addieren des Operators  $A^{f_j}$ , multipliziert mit der Renormierungskonstanten  $Z^\psi$ , beheben. Da die QCD keinen Unterschied zwischen unterschiedlichen Fermionspezies macht, sind diese Renormierungskonstanten für alle Operatoren gleich. Wir erhalten somit die Renormierungsmatrix mit folgender Symmetrie

$$\begin{pmatrix} A_{\text{ms}}^{f_1} \\ A_{\text{ms}}^{f_2} \\ \vdots \\ A_{\text{ms}}^{f_{n_f}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z & Z^\psi & \dots & Z^\psi \\ Z^\psi & Z & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & Z^\psi \\ Z^\psi & \dots & Z^\psi & Z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_0^{f_1} \\ A_0^{f_2} \\ \vdots \\ A_0^{f_{n_f}} \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Der Index ms bezeichnet den renormierten Operator im  $\overline{\text{MS}}$ -Schema, während der Index 0 den nackten Operator beschreibt. Wir können diese Matrix diago-

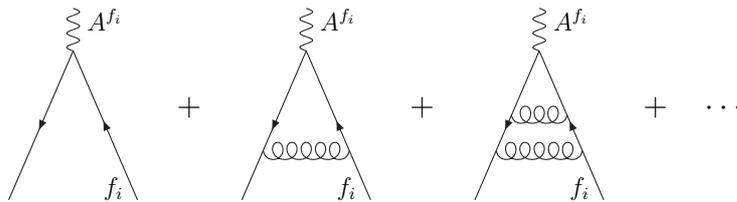


Abb. 4.1.: Nicht-Singlett-Diagramme

nalisieren

$$\begin{pmatrix} A_{\text{ms}}^{\text{NS}_1} \\ \vdots \\ A_{\text{ms}}^{\text{NS}_{(n_f-1)}} \\ A_{\text{ms}}^{\text{S}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z^{\text{NS}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & Z^{\text{NS}} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & Z^{\text{S}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_0^{\text{NS}_1} \\ \vdots \\ A_0^{\text{NS}_{(n_f-1)}} \\ A_0^{\text{S}} \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

wobei

$$A^{\text{NS}_i} = a_1^{(i)} \cdot A^{f_1} + \cdots + a_{n_f}^{(i)} \cdot A^{f_{n_f}} \quad \text{mit} \quad \sum_j a_j^{(i)} = 0, \quad (4.12)$$

$$A^{\text{S}} = A^{f_1} + \cdots + A^{f_{n_f}}. \quad (4.13)$$

Mit der Bedingung, dass die Summe über die Koeffizienten in (4.12) verschwindet, kann man gerade  $(n_f - 1)$  linear unabhängige NS-Operatoren angeben. Die, bis auf diese Einschränkung, freie Wahl der NS-Operatoren beruht auf der großen Symmetrie der Renormierungsmatrix. Im Folgenden werden wir, wenn nicht anders angegeben, immer beispielhaft den NS-Operator  $A^{\text{NS}} = A^u - A^d$  verwenden, wobei  $u$  und  $d$  Up- und Down-Quark eines Isospin-Doublets sind. Die Renormierungskonstanten der diagonalisierten Matrix sind

$$Z^{\text{NS}} = Z - Z^\psi \quad \text{und} \quad Z^{\text{S}} = Z + (n_f - 1)Z^\psi = Z^{\text{NS}} + n_f Z^\psi. \quad (4.14)$$

Mit dieser Notation können wir die Renormierung der einzelnen Ströme in den folgenden Gleichungen zusammenfassen

$$A_{\text{ms}}^{\text{NS}} = Z^{\text{NS}} \cdot A_0^{\text{NS}}, \quad (4.15)$$

$$A_{\text{ms}}^{\text{S}} = Z^{\text{S}} \cdot A_0^{\text{S}}, \quad (4.16)$$

$$A_{\text{ms}}^{f_i} = Z^{\text{NS}} \cdot A_0^{f_i} + Z^\psi \cdot A_0^{\text{S}}. \quad (4.17)$$

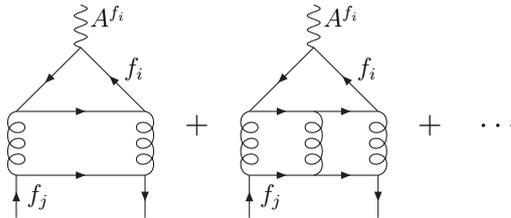


Abb. 4.2.: Singlett-Diagramme

#### 4. Zerfallsrate des $Z$ -Bosons nach Hadronen

Wir berechnen zuerst die Renormierungskonstante des NS-Operators  $Z^{\text{NS}}$  und anschließend die Renormierungskonstante  $Z^\psi$  über die Operatormischung in den S-Diagrammen.

##### 4.1.1. Renormierung des Axialvektor-NS-Operators

Um die Renormierungskonstante  $Z^{\text{NS}}$  zu berechnen, betrachten wir die Green-Funktion  $\langle \mathcal{T} A_{\text{ms}}^{\text{NS}} \bar{u}u \rangle$ . Die Diagramme, die zu dieser Green-Funktion beitragen, sind beispielhaft in Abbildung 4.1 dargestellt. Die S-Diagramme aus Abbildung 4.2 treten nicht auf, da sich die Beiträge zwischen Up- und Down-Quarkschleife gegenseitig aufheben. Gemäß (3.21) erhalten wir

$$Z_2 Z^{\text{NS}} \langle \mathcal{T} A^{\text{NS}} \bar{u}u \rangle_0 \stackrel{!}{=} \text{endlich} . \quad (4.18)$$

Die einfachste Kinematik, die keine IR-Singularitäten verursacht, ist nur einen Impuls ungleich null zu wählen, der durch ein Quark einläuft und durch das andere Quark wieder abfließt, und alle Massen auf null zu setzen. Die Diagramme lassen sich dann als masselose Propagatoren berechnen und liefern (mit  $a_s = \alpha_s/\pi = g_s^2/(4\pi^2)$ ) [99]

$$\begin{aligned} Z^{\text{NS}} = & 1 + a_s^2 \frac{1}{16} \left[ \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{88}{3} - \frac{16}{9} n_f \right) \right] \\ & + a_s^3 \frac{1}{64} \left[ \frac{1}{\varepsilon^2} \left( -\frac{1936}{9} + \frac{704}{27} n_f - \frac{64}{81} n_f^2 \right) + \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{3128}{9} - \frac{2816}{81} n_f + \frac{32}{243} n_f^2 \right) \right] \\ & + a_s^4 \frac{1}{256} \left[ \frac{1}{\varepsilon^3} \left( \frac{5324}{3} - \frac{968}{3} n_f + \frac{176}{9} n_f^2 - \frac{32}{81} n_f^3 \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{\varepsilon^2} \left( -\frac{35398}{9} + \frac{6164}{9} n_f - \frac{760}{27} n_f^2 + \frac{16}{243} n_f^3 \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{13879}{3} - \frac{1144}{3} \zeta_3 - \left( \frac{60812}{81} + \frac{1552}{9} \zeta_3 \right) n_f \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left( \frac{2522}{243} + \frac{320}{27} \zeta_3 \right) n_f^2 + \frac{104}{243} n_f^3 \right) \right] . \end{aligned} \quad (4.19)$$

Da der NS-Operator nicht mit anderen Operatoren mischt, lässt sich die anomale Dimension einfach mit Gleichung (3.35) angeben

$$\begin{aligned} \gamma_{\text{ms}}^{\text{NS}} &= \mu^2 \frac{d}{d\mu^2} \log Z^{\text{NS}} \\ &= -a_s^2 \left[ \frac{11}{3} - \frac{2}{9} n_f \right] \\ & \quad - a_s^3 \left[ \frac{391}{24} - \frac{44}{27} n_f + \frac{1}{162} n_f^2 \right] \\ & \quad - a_s^4 \left[ \frac{13879}{192} - \frac{143}{24} \zeta_3 - \left( \frac{15203}{1296} + \frac{97}{36} \zeta_3 \right) n_f \right. \\ & \quad \left. + \left( \frac{1261}{7776} + \frac{5}{27} \zeta_3 \right) n_f^2 + \frac{13}{1944} n_f^3 \right] . \end{aligned} \quad (4.20)$$

Diesen Wert kann man überprüfen, indem man  $A_{\text{ms}}^{\text{NS}}/V^{\text{NS}}$  betrachtet, wobei  $V^{\text{NS}}$  analog zu (4.12) mit dem Vektor-Strom (4.3) definiert werden kann. Da die anomale Dimension von  $V^{\text{NS}}$  null ist und sich in diesem Verhältnis alle  $\ln(\mu^2)$  Terme gegenseitig aufheben, können wir die anomale Dimension von  $A_{\text{ms}}^{\text{NS}}$  folgendermaßen berechnen

$$\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} \left( \frac{A_{\text{ms}}^{\text{NS}}}{V^{\text{NS}}} \right) = \beta(a_s) \frac{\partial}{\partial a_s} \left( \frac{A_{\text{ms}}^{\text{NS}}}{V^{\text{NS}}} \right) = \gamma_{\text{ms}}^{\text{NS}} \left( \frac{A_{\text{ms}}^{\text{NS}}}{V^{\text{NS}}} \right). \quad (4.21)$$

Da die  $\beta$ -Funktion zur Ordnung  $\mathcal{O}(a_s^2)$  beginnt, reicht die Berechnung von Dreis Schleifendiagrammen aus, um die anomale Dimension  $\gamma_{\text{ms}}^{\text{NS}}$  bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(a_s^4)$  zu bestimmen. Dies haben wir im Rahmen dieser Arbeit überprüft.

An dieser Stelle wollen wir ein paar Eigenschaften, die wir in Abschnitt 3.2.3 und 3.3 kennengelernt haben, genauer betrachten. Da in den NS-Diagrammen keine geschlossenen Fermionschleifen mit einer  $\gamma_5$  Struktur auftreten, hätten wir auch die naive  $\gamma_5$  Definition verwenden können. In dieser Definition antvertauscht  $\gamma_5$  mit den  $\gamma_\mu$ -Matrizen und kann entlang einer Fermionlinie nach außen gezogen werden, da es an einer geraden Anzahl von  $\gamma_\mu$ -Matrizen ( $n$  Propagatoren und  $n$  Vertizes ergibt  $2n$   $\gamma_\mu$ -Matrizen) vorbeigetauscht wird

$$\langle \mathcal{T} A_{\text{naiv}}^{\text{NS}} \bar{u}u \rangle = \langle \mathcal{T} V^{\text{NS}} \bar{u}u \rangle \gamma_5. \quad (4.22)$$

Dies bedeutet aber, dass der NS-Strom in der naiven  $\gamma_5$  Definition wie der Vektor-Strom nicht renormiert werden muss und somit eine verschwindende anomale Dimension hat. Wie wir in Abschnitt 3.3 beschrieben haben, unterscheiden sich die naive und die Larin-Definition für nicht anomale Diagramme in höheren Termen in  $\varepsilon$ . Deshalb entsteht die nicht-triviale Renormierung erst durch die  $1/\varepsilon^2$  Pole auf Zwei-Schleifenordnung, die mit einem  $\varepsilon$ , das durch den Unterschied in der Larin-Definition entsteht (vergleiche (3.49)), multipliziert werden. Schaut man sich die anomale Dimension an, so sieht man, dass diese somit auch erst auf Zwei-Schleifenniveau ungleich null ist, der physikalische Anteil auf erster Schleifenordnung verschwindet wie im naiven Fall. Zudem ist die anomale Dimension proportional zur  $\beta$ -Funktion, das heißt  $\gamma_{\text{ms}}^{\text{NS}} = \beta(a_s) \cdot a_s^2(16/3 + \dots)$ . Wir können somit mit einem endlichen Faktor die anomale Dimension auf null setzen (vergleiche (3.37)) und eine Äquivalenz zwischen beiden Methoden herstellen. Deshalb multiplizieren wir die Renormierungskonstante wie in (3.36) mit einer Konstanten, dem Larin-Faktor  $\xi_L$ ,

#### 4. Zerfallsrate des $Z$ -Bosons nach Hadronen

und fordern, dass die anomale Dimension verschwindet

$$\begin{aligned}
\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} (\xi_L A_{\text{ms}}^{\text{NS}}) &= \mu^2 \frac{d}{d\mu^2} (\xi_L Z^{\text{NS}} A_0^{\text{NS}}) \\
&= \left( \mu^2 \frac{d}{d\mu^2} \xi_L + \xi_L \gamma_{\text{ms}}^{\text{NS}} \right) A_{\text{ms}}^{\text{NS}} \\
&= \gamma^{\text{NS}} \xi_L A_{\text{ms}}^{\text{NS}} = 0 .
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Wenn wir diese Gleichung lösen, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\xi_L &= \exp \left[ - \int \frac{\gamma_{\text{ms}}^{\text{NS}}(a_s)}{\beta(a_s)} da_s \right] \\
&= 1 - a_s \left[ \frac{4}{3} \right] - a_s^2 \left[ \frac{19}{36} - \frac{1}{54} n_f \right] \\
&\quad - a_s^3 \left[ \frac{1907}{1296} - \frac{13}{18} \zeta_3 - \left( \frac{205}{972} + \frac{10}{27} \zeta_3 \right) n_f - \frac{13}{972} n_f^2 \right] .
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Mit dieser Konvention hat man somit auch für die Larin-Definition die anti-kommutierende Eigenschaft von  $\gamma_5$  in den NS-Diagrammen wieder hergestellt. Um den Axialvektor-Strom wie in (3.48) zu definieren, müsste man eigentlich den Operator mit dem Larin-Faktor multiplizieren. Um dies konsistent zu machen und zu bewirken, dass die nackten Operatoren weiterhin nicht von  $\mu$  abhängen, multiplizieren wir den Larin-Faktor mit der Renormierungskonstanten, so dass er im renormierten Operator enthalten ist, aber nicht im nackten. Wir erhalten somit anstatt (4.15)-(4.17) die Renormierungsvorschrift

$$A^{\text{NS}} = \xi_L Z^{\text{NS}} \cdot A_0^{\text{NS}} , \tag{4.25}$$

$$A^{\text{S}} = \xi_L Z^{\text{S}} \cdot A_0^{\text{S}} , \tag{4.26}$$

$$A^{f_i} = \xi_L Z^{\text{NS}} \cdot A_0^{f_i} + \xi_L Z^\psi \cdot A_0^{\text{S}} . \tag{4.27}$$

#### 4.1.2. Renormierung des Axialvektor-Operators

Um die Renormierungskonstante  $Z^\psi$  auszurechnen, betrachten wir die Green-Funktion  $\langle \mathcal{T} A_{\text{ms}}^u \bar{d} d \rangle$  nochmals im reinen  $\overline{\text{MS}}$ -Schema ohne Larin-Faktor und erhalten mit (4.17)

$$Z^{\text{NS}} \langle \mathcal{T} A^u \bar{d} d \rangle_0 + Z^\psi \langle \mathcal{T} A^{\text{S}} \bar{d} d \rangle_0 \stackrel{!}{=} \text{endlich} . \tag{4.28}$$

Die Green-Funktion  $\langle \mathcal{T} A^u \bar{d} d \rangle_0$  wird durch die S-Diagramme aus Abbildung 4.2 beschrieben. Da diese erst zur Zwei-Schleifenordnung auftreten, beginnt die Renormierungskonstante  $Z^\psi$  erst mit der Ordnung  $a_s^2$ . In  $\langle \mathcal{T} A^{\text{S}} \bar{d} d \rangle_0$  tauchen

sowohl NS-Diagramme als auch S-Diagramme ab der Zwei-Schleifenordnung auf. Mit dem bekannten  $Z^{\text{NS}}$  ergibt sich [100]

$$\begin{aligned}
 Z^\psi &= a_s^2 \frac{1}{16} \left[ \frac{1}{\varepsilon} (4) \right] \\
 &+ a_s^3 \frac{1}{64} \left[ \frac{1}{\varepsilon^2} \left( -\frac{88}{3} + \frac{16}{9} n_f \right) + \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{340}{9} + \frac{8}{27} n_f \right) \right] \\
 &+ a_s^4 \frac{1}{256} \left[ \frac{1}{\varepsilon^3} \left( 242 - \frac{88}{3} n_f + \frac{8}{9} n_f^2 \right) + \frac{1}{\varepsilon^2} \left( -\frac{1195}{3} + \frac{128}{3} n_f + \frac{4}{27} n_f^2 \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{6733}{18} - 506 \zeta_3 - \left( \frac{1078}{27} + \frac{148}{3} \zeta_3 \right) n_f - \frac{58}{81} n_f^2 \right) \right]
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

und mit (4.14) automatisch

$$\begin{aligned}
 Z^{\text{S}} &= 1 + a_s^2 \frac{1}{16} \left[ \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{88}{3} + \frac{20}{9} n_f \right) \right] \\
 &+ a_s^3 \frac{1}{64} \left[ \frac{1}{\varepsilon^2} \left( -\frac{1936}{9} - \frac{88}{27} n_f + \frac{80}{81} n_f^2 \right) + \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{3128}{9} + \frac{244}{81} n_f + \frac{104}{243} n_f^2 \right) \right] \\
 &+ a_s^4 \frac{1}{256} \left[ \frac{1}{\varepsilon^3} \left( \frac{5324}{3} - \frac{242}{3} n_f - \frac{88}{9} n_f^2 + \frac{40}{81} n_f^3 \right) \right. \\
 &\quad + \frac{1}{\varepsilon^2} \left( -\frac{35398}{9} + \frac{2579}{9} n_f + \frac{392}{27} n_f^2 + \frac{52}{243} n_f^3 \right) \\
 &\quad + \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{13879}{3} - \frac{1144}{3} \zeta_3 - \left( \frac{61027}{162} + \frac{6106}{9} \zeta_3 \right) n_f \right. \\
 &\quad \left. \left. - \left( \frac{7180}{243} + \frac{1012}{27} \zeta_3 \right) n_f^2 - \frac{70}{243} n_f^3 \right) \right] .
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

Da auch der S-Operator nicht mischt, erhalten wir erneut mit (3.35) im  $\overline{\text{MS}}$ -Schema

$$\begin{aligned}
 \gamma_{\text{ms}}^{\text{S}} &= \mu^2 \frac{d}{d\mu^2} \log Z^{\text{S}} \\
 &= -a_s^2 \left[ \frac{11}{3} + \frac{5}{18} n_f \right] - a_s^3 \left[ \frac{391}{24} + \frac{61}{432} n_f + \frac{13}{648} n_f^2 \right] \\
 &\quad - a_s^4 \left[ \frac{13879}{192} - \frac{143}{24} \zeta_3 - \left( \frac{61027}{10368} + \frac{3053}{288} \zeta_3 \right) n_f \right. \\
 &\quad \left. - \left( \frac{1795}{3888} + \frac{253}{432} \zeta_3 \right) n_f^2 - \frac{35}{7776} n_f^3 \right] .
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

Wenn wir zum Larin-Schema in (4.26) mit dem in (4.24) definierten Larin-Faktor wechseln, erhalten wir folgende anomale Dimension

$$\begin{aligned}
 \gamma^{\text{S}} &= \left( \mu^2 \frac{d}{d\mu^2} \ln(\xi_L) + \gamma_{\text{ms}}^{\text{S}} \right) \\
 &= -a_s^2 \left[ \frac{1}{2} n_f \right] - a_s^3 \left[ \frac{85}{48} n_f + \frac{1}{72} n_f^2 \right] \\
 &\quad - a_s^4 \left[ \left( \frac{6733}{1152} - \frac{253}{32} \zeta_3 \right) n_f - \left( \frac{539}{864} + \frac{37}{48} \zeta_3 \right) n_f^2 - \frac{29}{2592} n_f^3 \right] .
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

#### 4. Zerfallsrate des $Z$ -Bosons nach Hadronen

Zuletzt erhält man aus (3.38) nach kurzer Rechnung

$$\begin{aligned}
\gamma_{\text{ms}}^\psi &= (\gamma_{\text{ms}}^{\text{S}} - \gamma_{\text{ms}}^{\text{NS}})/n_f \\
&= -a_s^2 \left[ \frac{1}{2} \right] - a_s^3 \left[ \frac{85}{48} + \frac{1}{72} n_f \right] \\
&\quad - a_s^4 \left[ \frac{6733}{1152} - \frac{253}{32} \zeta_3 - \left( \frac{539}{864} + \frac{37}{48} \zeta_3 \right) n_f - \frac{29}{2592} n_f^2 \right] \\
&= \gamma^\psi = (\gamma^{\text{S}} - \gamma^{\text{NS}})/n_f = \gamma^{\text{S}}/n_f .
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Die anomale Dimension  $\gamma^\psi$  ist in beiden Schemata gleich, das heißt der Larin-Faktor beeinflusst nur die NS-Diagramme. Mit den anomalen Dimensionen können wir die RG-Gleichungen aufstellen

$$\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} A^{\text{NS}} = 0 , \tag{4.34}$$

$$\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} A^{\text{S}} = n_f \gamma^\psi A^{\text{S}} , \tag{4.35}$$

$$\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} A^i = \gamma^\psi A^i . \tag{4.36}$$

## 4.2. Entkopplung des Top-Quarks von den neutralen Strömen

Nachdem wir wissen, wie wir den Axialvektor-Strom zu renormieren haben, können wir uns der Frage widmen, wie wir das Top-Quark entkoppeln. In Abschnitt 3.4.2 haben wir beschrieben, dass wir durch das Ausintegrieren des Top-Quarks die Kopplungskonstante und die leichten Felder redefinieren müssen (Gleichung (3.58)).

Wir betrachten zuerst den Vektor-Strom. Für diesen entkoppelt das Top-Quark naiv, das heißt es verschwindet, ohne irgendwelche Relikte zu hinterlassen

$$\left[ V^t \right]_6 = 0 + \mathcal{O}(1/m_t) , \tag{4.37}$$

$$\left[ V^b \right]_6 = \left[ V^b \right]_5 + \mathcal{O}(1/m_t) . \tag{4.38}$$

Die eckige Klammer auf der linken Seite beschreibt die Sechs-Flavour-Theorie, die das Top-Quark enthält, während die eckige Klammer auf der rechten Seite die effektive, masselose Fünf-Flavour-QCD ohne Top-Quark bedeutet. Das Quark  $b$  in (4.38) steht exemplarisch für alle leichten Quarks. Diese naive Entkopplung liegt an der Ward-Identität, die den Vektor-Strom schützt. Da der

## 4.2. Entkopplung des Top-Quarks von den neutralen Strömen

Vektor-Strom in Beziehung zur elektrischen Ladung der Teilchen steht, würde ein nicht naives Entkoppeln bedeuten, dass sich die elektrische Ladung der Quarks beim Übergang von der vollen zur effektiven Theorie ändert.

Der Axialvektor-Strom ist nicht erhalten, wie wir schon bei der Renormierung gesehen haben, weshalb beim Ausintegrieren des Top-Quarks folgende Relationen entstehen [19, 21, 101]

$$\left[ A^t \right]_6 = C_h(a^{(6)}(\mu), \mu/m_t) \cdot \left[ A^S \right]_5 + \mathcal{O}(1/m_t) , \quad (4.39)$$

$$\left[ A^b \right]_6 = \left[ A^b \right]_5 + C_\psi(a^{(6)}(\mu), \mu/m_t) \cdot \left[ A^S \right]_5 + \mathcal{O}(1/m_t) . \quad (4.40)$$

Da die QCD keinen Unterschied zwischen unterschiedlichen Fermionspezies macht, tritt der S-Operator  $A^S$ , definiert in (4.13) auf. Da die eckige Klammer auf der rechten Seite wieder die Fünf-Flavour-Theorie beschreibt, wird in  $A^S$  auch nur über die leichten Quarks summiert. Der Koeffizient vor  $[A^b]_5$  in (4.40) ist eins, da wir in  $A^f$  den Larin-Faktor  $\xi_L$  eingeführt haben. Dieser ist so konstruiert (vergleiche (4.24)), dass die anomale Dimension eines NS-Operators verschwindet. Das heißt ein Axialvektor-NS-Strom (nur aus leichten Quarks bestehend) verhält sich wie der Vektor-Strom

$$\left[ A^{\text{NS}} \right]_6 = \left[ A^{\text{NS}} \right]_5 + \mathcal{O}(1/m_t) . \quad (4.41)$$

Aus dimensionalen Gründen könnte  $A^t$  ebenfalls in den Zwei-Gluon-Operator, bzw. den Drei-Gluon-Operator

$$A^{2g} = \varepsilon_{\mu\alpha_1\alpha_2\alpha_3} G_{[\alpha_1}^a (\partial_{\alpha_2} G_{\alpha_3]}^a) , \quad \text{bzw.} \quad A^{3g} = g_s f^{abc} \varepsilon_{\mu\alpha_1\alpha_2\alpha_3} G_{[\alpha_1}^a G_{\alpha_2}^b G_{\alpha_3]}^c$$

entkoppeln, da diese Operatoren nicht  $1/m_t$  unterdrückt wären. Da diese im Gegensatz zu  $A^f$  aber keine eichinvarianten Objekte sind, treten diese Operatoren nicht auf. Dies haben wir auch durch eine explizite Rechnung überprüft.

### 4.2.1. Berechnung von $C_h$

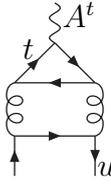
Um den Koeffizienten  $C_h$  zu berechnen, bedienen wir uns der Matching-Gleichung (3.57). Gleichung (4.39), projiziert mit zwei leichten Quarkfeldern, ergibt zusammen mit der Renormierung der Operatoren in (4.26) und (4.27)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\zeta_2} \left[ Z_2 \left( \xi_L Z^{\text{NS}} \cdot \langle \mathcal{T} A^t \bar{u} u \rangle_0 \Big|_{p=0} + \xi_L Z^\psi \cdot \langle \mathcal{T} A^S \bar{u} u \rangle_0 \Big|_{p=0} \right) \right]_6 \\ & = C_h \left[ Z_2 \xi_L Z^S \cdot \langle \mathcal{T} A^S \bar{u} u \rangle_0 \Big|_{p=0} \right]_5 . \end{aligned} \quad (4.42)$$

#### 4. Zerfallsrate des $Z$ -Bosons nach Hadronen

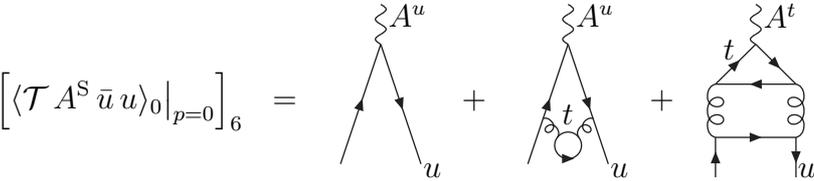
Alle Renormierungskonstanten sind bekannt, so dass wir nur noch die einzelnen nackten Green-Funktionen ausrechnen müssen. Da wir alle äußeren Impulse auf null gesetzt haben, reduziert sich dies auf die Berechnung von Vakuumbiagrammen mit einer Masse, der Top Masse. Diese Vakuumbiagramme benötigen wir bis inklusive der Vier-Schleifenordnung, weshalb wir für die Reduktion auf Master-Integrale CRUSHER verwenden (siehe Diskussion in Abschnitt 3.1).

Die erste Green-Funktion auf der linken Seite ist durch Diagramme gegeben, die mit einer Top-Quark Schleife an den Axialvektor-Strom koppeln

$$\left[ \langle \mathcal{T} A^t \bar{u} u \rangle_0 \Big|_{p=0} \right]_6 = \text{Diagram} + \mathcal{O}(a_s^3). \quad (4.43)$$


Wir wollen  $C_h$  bis einschließlich der Ordnung  $\mathcal{O}(a_s^4)$  berechnen und benötigen somit auch alle Diagramme diesen Typs bis zur Vier-Schleifenordnung. Diese Diagramme bestimmen den Wert von  $C_h$ . Auf zwei Schleifen sind dies zwei Diagramme, auf drei Schleifen 62 und auf vier Schleifen 2152 Diagramme.

Da  $Z_\psi$  erst mit einem  $a_s^2$  Beitrag beginnt, brauchen wir von der zweiten Green-Funktion auf der linken Seite nur die Terme bis zur zweiten Schleifenordnung

$$\left[ \langle \mathcal{T} A^S \bar{u} u \rangle_0 \Big|_{p=0} \right]_6 = \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \mathcal{O}(a_s^3). \quad (4.44)$$


Diese unterteilen sich in die NS-Diagramme, die durch den  $A^u$ -Anteil in  $A^S$  entstehen, und die S-Diagramme. Bei den NS-Diagrammen verbleibt die führende Ordnung und das dargestellte Zwei-Schleifendiagramm mit einer Top Schleife, wenn wir den äußeren Impuls auf null setzen. Bei den S-Diagrammen verbleibt zur Ordnung  $\mathcal{O}(a_s^2)$  nur der  $A^t$ -Beitrag. Auf der Seite der effektiven Fünf-Flavour-Theorie muss nichts berechnet werden, da ohne das schwere Top-Quark außer dem Baumgraphendiagramm alle Diagramme null sind

$$\left[ \langle \mathcal{T} A^S \bar{u} u \rangle_0 \Big|_{p=0} \right]_5 = \text{Diagram} . \quad (4.45)$$


## 4.2. Entkopplung des Top-Quarks von den neutralen Strömen

Wenn wir alle Teile zusammensetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned}
C_h = & (a_s^{(6)})^2 \left[ \frac{1}{8} - \frac{1}{2} \ln_{\mu t} \right] \\
& + (a_s^{(6)})^3 \left[ -\frac{4717}{864} + \frac{55}{24} \zeta_3 - \frac{1}{12} \ln_{\mu t} - \frac{11}{8} \ln_{\mu t}^2 \right. \\
& \quad \left. + \left( \frac{473}{1296} - \frac{1}{18} \ln_{\mu t} + \frac{1}{12} \ln_{\mu t}^2 \right) n_f \right] \\
& + (a_s^{(6)})^4 \left[ \frac{1651431127}{43545600} + \frac{9101}{810} a_4 + \frac{8}{9} a_5 + \frac{9101}{19440} \ln^4(2) \right. \\
& \quad - \frac{1}{135} (\ln(2))^5 - \frac{9101}{3240} \ln^2(2) \zeta_2 + \frac{2}{27} \ln^3(2) \zeta_2 \\
& \quad + \frac{2444377}{100800} \zeta_3 - \frac{6595877}{103680} \zeta_4 - \frac{89}{144} \ln(2) \zeta_4 - \frac{10453}{864} \zeta_5 \\
& \quad + \left( -\frac{1081}{24} + \frac{429}{16} \zeta_3 \right) \ln_{\mu t} - \frac{17}{32} \ln_{\mu t}^2 - \frac{121}{32} \ln_{\mu t}^3 \\
& \quad + n_f \left( -\frac{144133}{20736} - \frac{2}{3} a_4 - \frac{1}{36} \ln^4(2) \right. \\
& \quad \quad + \frac{1}{6} \ln^2(2) \zeta_2 + \frac{415}{384} \zeta_3 + \frac{1463}{384} \zeta_4 \\
& \quad \quad \left. + \left( \frac{893}{144} - \frac{3}{8} \zeta_3 \right) \ln_{\mu t} - \frac{5}{48} \ln_{\mu t}^2 + \frac{11}{24} \ln_{\mu t}^3 \right) \\
& \quad \left. + n_f^2 \left( \frac{17735}{62208} - \frac{25}{144} \zeta_3 - \frac{37}{216} \ln_{\mu t} + \frac{1}{72} \ln_{\mu t}^2 - \frac{1}{72} \ln_{\mu t}^3 \right) \right], \quad (4.46)
\end{aligned}$$

wobei  $\ln_{\mu t} = \log(\mu^2/m_t(\mu)^2)$ . Die restlichen Konstanten und Funktionen sind in Anhang A.1 angegeben. Es ist Konvention die Entkopplungskoeffizienten in Größen der vollen Theorie anzugeben, weshalb wir  $a_s^{(6)}$  verwendet haben. Die Zwei-Schleifenergebnisse sind als Näherung des analytischen Ergebnisses aus [39, 40] bekannt und im  $m_t \rightarrow \infty$  Limes bestätigt [21, 101]. Die Drei-Schleifenbeiträge sind in [19] berechnet. Die Terme der Ordnung  $\mathcal{O}(a_s^4)$  sind im Rahmen dieser Arbeit entstanden. In (A.5) geben wir  $C_h$  in allgemeiner Gruppenstruktur an.

### 4.2.2. Berechnung von $C_\psi$

Bevor wir den Koeffizienten  $C_\psi$  berechnen können, müssen wir zurückgehen zu Gleichung (4.40). Wie wir schon oben erwähnt haben, ist der Koeffizient vor  $[A^b]_5$  gleich eins. Die Konstruktion mit dem Larin-Faktor  $\xi_L$  garantiert dies aber nur in vier Dimensionen und nicht für  $d$  Dimensionen. Dies bedeutet, dass sich der Koeffizient in  $d$  Dimensionen um  $\varepsilon$ -Terme von eins unterscheiden wird. Deshalb müssen wir diesen Koeffizienten zuerst berechnen, da höhere Terme in  $\varepsilon$  zusammen mit  $1/\varepsilon$  Polen der Renormierungskonstanten einen endlichen Anteil in  $C^\psi$  liefern. Deshalb betrachten wir noch einmal Gleichung (4.41) und

#### 4. Zerfallsrate des $Z$ -Bosons nach Hadronen

führen den Entkopplungskoeffizienten  $C_{\text{NS}}$  ein und erhalten mit (4.25)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\zeta_2} \left[ Z_2 \xi_L Z^{\text{NS}} \cdot \langle \mathcal{T} A^{\text{NS}} \bar{u} u \rangle_0 \Big|_{p=0} \right]_6 \\ &= C_{\text{NS}} \left[ Z_2 \xi_L Z^{\text{NS}} \cdot \langle \mathcal{T} A^{\text{NS}} \bar{u} u \rangle_0 \Big|_{p=0} \right]_5. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Die Green-Funktionen bestehen nur aus den NS-Diagrammen. In der vollen Theorie sind alle Schleifendiagramme mit schweren Top-Quarks ungleich null

$$\left[ \langle \mathcal{T} A^{\text{NS}} \bar{u} u \rangle_0 \Big|_{p=0} \right]_6 = \begin{array}{c} \zeta A^u \\ \diagup \quad \diagdown \\ \phantom{u} \end{array} + \begin{array}{c} \zeta A^u \\ \diagup \quad \diagdown \\ \phantom{u} \circlearrowleft \\ \phantom{u} \end{array} + \mathcal{O}(a_s^3), \quad (4.48)$$

während in der effektiven Theorie wieder nur die führende Ordnung bestehen bleibt

$$\left[ \langle \mathcal{T} A^{\text{NS}} \bar{u} u \rangle_0 \Big|_{p=0} \right]_6 = \begin{array}{c} \zeta A^u \\ \diagup \quad \diagdown \\ \phantom{u} \end{array}. \quad (4.49)$$

Der Koeffizient, den wir bis zur zweiten Schleifenordnung benötigen, lautet somit

$$C_{\text{NS}} = 1 + (a_s^{(6)})^2 \varepsilon \left[ \frac{85}{324} - \frac{1}{27} \ln_{\mu t} + \frac{1}{9} \ln_{\mu t}^2 \right]. \quad (4.50)$$

Dieser Term trägt zur Vier-Schleifenordnung im endlichen Teil von  $C_\psi$  bei.

Mit diesem Wissen können wir den Koeffizienten  $C_\psi$  auf analoge Weise aus (4.40) berechnen, indem wir erneut die Renormierung aus (4.26) und (4.27) benutzen

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\zeta_2} \left[ Z_2 \left( \xi_L Z^{\text{NS}} \cdot \langle \mathcal{T} A^b \bar{u} u \rangle_0 \Big|_{p=0} + \xi_L Z^\psi \cdot \langle \mathcal{T} A^{\text{S}} \bar{u} u \rangle_0 \Big|_{p=0} \right) \right]_6 \\ &= C_{\text{NS}} \left[ Z_2 \left( \xi_L Z^{\text{NS}} \cdot \langle \mathcal{T} A^b \bar{u} u \rangle_0 \Big|_{p=0} + \xi_L Z^\psi \cdot \langle \mathcal{T} A^{\text{S}} \bar{u} u \rangle_0 \Big|_{p=0} \right) \right]_5 \\ &+ C_\psi \left[ Z_2 \xi_L Z^{\text{S}} \cdot \langle \mathcal{T} A^{\text{S}} \bar{u} u \rangle_0 \Big|_{p=0} \right]_5. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Die in dieser Gleichung neu auftretende Green-Funktion ist auf der Seite der vollen Theorie

$$\left[ \langle \mathcal{T} A^b \bar{u} u \rangle_0 \Big|_{p=0} \right]_6 = \text{Diagram} + \mathcal{O}(a_s^4). \quad (4.52)$$

Das erste Diagramm, das ein massives Top-Quark enthält, ist das gezeigte Drei-Schleifendiagramm, das den führenden Beitrag zu  $C_\psi$  liefert. Auf drei Schleifenniveau müssen wir vier Diagramme berechnen und auf vier Schleifen 264. Die Beiträge proportional zu  $Z^\psi$  treten zwar schon zur zweiten Ordnung auf, heben sich aber zwischen voller und effektiver Theorie auf. Die Green-Funktionen  $\langle \mathcal{T} A^S \bar{u} u \rangle_0$  der vollen und effektiven Theorie haben wir schon in (4.44) und (4.45) beschrieben. Die verbleibende Green-Funktion verschwindet in der effektiven Theorie, da sie nur masselose Schleifendiagramme enthält

$$\left[ \langle \mathcal{T} A^b \bar{u} u \rangle_0 \Big|_{p=0} \right]_5 = 0. \quad (4.53)$$

Führen wir alle Terme zusammen, so erhalten wir unser Ergebnis

$$\begin{aligned} C_\psi = & (a_s^{(6)})^3 \left[ -\frac{343}{1296} - \frac{1}{72} \ln_{\mu t} - \frac{1}{12} \ln_{\mu t}^2 \right] \\ & + (a_s^{(6)})^4 \left[ \frac{1763}{31104} + \frac{2}{3} a_4 + \frac{1}{36} \ln^4(2) - \frac{1}{6} \ln^2(2) \zeta_2 + \frac{1049}{1152} \zeta_3 - \frac{953}{384} \zeta_4 \right. \\ & \quad + \left( -\frac{7531}{5184} + \frac{37}{48} \zeta_3 \right) \ln_{\mu t} - \frac{125}{288} \ln_{\mu t}^2 - \frac{31}{144} \ln_{\mu t}^3 \\ & \quad \left. + n_f \left( -\frac{5881}{31104} + \frac{11}{72} \zeta_3 + \frac{401}{2592} \ln_{\mu t} + \frac{1}{72} \ln_{\mu t}^3 \right) \right]. \quad (4.54) \end{aligned}$$

Auch hier sind die Drei-Schleifenbeiträge in [19] angegeben, während die Vier-Schleifenkorrekturen neu berechnet wurden. Die allgemeine Gruppenstruktur von  $C_{\text{NS}}$  und  $C_\psi$  ist in (A.6) und (A.7) angegeben.

### 4.3. $Z$ -Propagator in masseloser QCD

In diesem Abschnitt betrachten wir die masselose QCD mit  $n_l$  leichten Quarks. Dementsprechend benutzen wir die Kopplungskonstante  $a_s^{(n_l)}$  und für den expliziten Fall des Standardmodells ( $n_l = 5$ ) verwenden wir  $a_s^{(5)} \equiv a_s$ . Wie wir in Gleichung (4.6) gesehen haben, spaltet sich der  $Z$ -Propagator in eine inkohärente Summe aus Vektor- und Axialvektor-Korrelator auf, die wie in Gleichung

#### 4. Zerfallsrate des $Z$ -Bosons nach Hadronen

(2.10) definiert sind

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu\nu;f,f'}^{V/A}(q) &= i \int e^{iqx} \langle 0 | T j_{\mu,f}^{V/A}(x) j_{\nu,f'}^{V/A}(0) | 0 \rangle dx \\ &= g_{\mu\nu} q^2 \Pi_{1;f,f'}^{V/A}(-q^2) + q_\mu q_\nu \Pi_{2;f,f'}^{V/A}(-q^2),\end{aligned}\quad (4.55)$$

mit den bekannten Strömen  $j_{\mu,f}^V = \bar{\psi}_f \gamma_\mu \psi_f = V_\mu^f$  und  $j_{\mu,f}^A = \bar{\psi}_f \gamma_\mu \gamma_5 \psi_f = A_\mu^f$ . Da wir später nur den Imaginärteil des transversalen Anteils benötigen, definieren wir

$$R_{f,f'}^{V/A}(s) = 2\pi i \left( \Pi_{1;f,f'}^{V/A}(s - i\varepsilon) - \Pi_{1;f,f'}^{V/A}(s + i\varepsilon) \right). \quad (4.56)$$

Als wir uns die Struktur von  $R_{f,f'}^{V/A}$  in (2.15) angeschaut haben, konnten wir eine Aufspaltung in NS- und S-Diagramme in den Axialvektor- und Vektor-Korrelatoren feststellen. Für den Fall der masselosen Quarks vereinfacht sich diese Gleichung zu

$$R_{f,f'}^{V/A} = \delta_{ff'} R^{\text{NS}} + R^{V/A,S}. \quad (4.57)$$

Die Funktion  $R^{\text{NS}}$  steht für die Beiträge der NS-Diagramme (Abb. 4.3(a)). Hierbei ist  $R^{\text{NS}}$  für den Vektor- und den Axialvektor-Korrelator gleich. Dies liegt daran, dass wir die Axialvektor-Kopplung so konstruiert haben, dass  $\gamma_5$  naiv antikommutiert. Somit können wir die beiden  $\gamma_5$  entlang der Fermionlinie zueinanderhin tauschen. Für den masselosen Fall vertauschen wir an einer geraden Anzahl von  $\gamma_\mu$  Matrizen vorbei, so dass sich am Schluss die beiden  $\gamma_5$  Matrizen gegenseitig aufheben. Die NS-Diagramme treten nur dann auf, wenn beide Ströme an das gleiche Quark koppeln, da sonst die Fermionschleife nicht geschlossen werden kann, was zum Kronecker- $\delta$  führt. Ab drei Schleifen ( $\mathcal{O}(a_s^2)$ ) tragen zusätzlich die Axialvektor-S-Diagramme (Abb. 4.3(b)) und eine Ordnung höher die Vektor-S-Diagramme (Abb. 4.3(c)) bei. Der Grund ist, dass für die Vektor-S-Diagramme die Drei-Schleifenbeiträge aufgrund von Furrys Theorem verschwinden. Da sich die S-Korrelatoren der unterschiedlichen Fermionen in

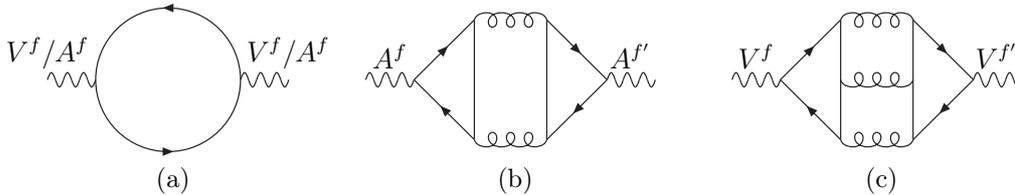


Abb. 4.3.: Führende Beiträge zu den Nicht-Singlett- (a), Axialvektor-Singlett- (b) und Vektor-Singlett- (c) Diagrammen.

(2.15) nur durch die Massen unterscheiden, tritt in (4.57) die selbe Funktion  $R^{V/A,S}$  für jedes Fermion auf. Die Struktur der einzelnen Korrelatoren lässt sich also folgendermaßen darstellen

$$R^{\text{NS}} = 1 + \sum_{i \geq 1}^{j < i} r_{i,j}^{\text{NS}} a_s^i \ln^j \left( \frac{\mu^2}{s} \right), \quad (4.58)$$

$$R^{A,S} = \sum_{i \geq 2}^{j < i} r_{i,j}^{V/A,S} a_s^i \ln^j \left( \frac{\mu^2}{s} \right), \quad (4.59)$$

$$R^{V,S} = \sum_{i \geq 3}^{j < i} r_{i,j}^{V/A,S} a_s^i \ln^j \left( \frac{\mu^2}{s} \right). \quad (4.60)$$

Hierbei sind nicht alle Konstanten  $r_{i,j}$  unabhängig, sondern können über die RG-Gleichung (3.23) in Relation zueinander gesetzt werden. Da der Vektorstrom erhalten ist und somit die Ableitung nach  $\mu$  verschwindet, gilt dies auch für die Vektor-Korrelatoren

$$\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} R^{\text{NS}} = \mu^2 \frac{d}{d\mu^2} R^{V,S} = 0. \quad (4.61)$$

Die RG-Gleichung für  $R^{A,S}$  bekommt man, wenn man die Ableitung von  $\langle A^u A^d \rangle$  betrachtet. Mit Gleichung (4.36) und der Eigenschaft, dass lokale Counter-Terme keinen Anteil zum Imaginärteil liefern, erhält man

$$\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} R^{A,S} = 2\gamma^\psi (R^{\text{NS}} + n_l R^{A,S}). \quad (4.62)$$

Setzt man (4.58) in die RG-Gleichung (4.61) ein und vergleicht die Koeffizienten, die vor den Logarithmen zu einer bestimmten Ordnung in  $a_s$  stehen, so bekommt man folgende Relationen

$$\begin{aligned} r_{2,1}^{\text{NS}} &= \beta_0 r_{1,0}^{\text{NS}}, \\ r_{3,1}^{\text{NS}} &= \beta_1 r_{1,0}^{\text{NS}} + 2\beta_0 r_{2,0}^{\text{NS}}, \\ r_{3,2}^{\text{NS}} &= \beta_0^2 r_{1,0}^{\text{NS}}, \\ r_{4,1}^{\text{NS}} &= \beta_2 r_{1,0}^{\text{NS}} + 2\beta_1 r_{2,0}^{\text{NS}} + 3\beta_0 r_{3,0}^{\text{NS}}, \\ r_{4,2}^{\text{NS}} &= 1/2(5\beta_0\beta_1 r_{1,0}^{\text{NS}} + 6\beta_0^2 r_{2,0}^{\text{NS}}), \\ r_{4,3}^{\text{NS}} &= \beta_0^3 r_{1,0}^{\text{NS}}. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Die verbleibenden Koeffizienten  $r_{i,0}^{\text{NS}}$  müssen explizit berechnet werden. Zur Ordnung  $\mathcal{O}(a_s^2)$  sind die Terme in [102–105] gegeben und zur Ordnung  $\mathcal{O}(a_s^3)$

#### 4. Zerfallsrate des $Z$ -Bosons nach Hadronen

in [105, 106]. Die Fünf-Schleifendiagramme zur Ordnung  $\mathcal{O}(a_s^4)$  wurden in [1] berechnet

$$\begin{aligned}
r_{1,0}^{\text{NS}} &= 1 , \\
r_{2,0}^{\text{NS}} &= \frac{365}{24} - 11 \zeta_3 + n_l \left( -\frac{11}{12} + \frac{2}{3} \zeta_3 \right) , \\
r_{3,0}^{\text{NS}} &= \frac{87029}{288} - \frac{121}{8} \zeta_2 - \frac{1103}{4} \zeta_3 + \frac{275}{6} \zeta_5 \\
&\quad + n_l \left( -\frac{7847}{216} + \frac{11}{6} \zeta_2 + \frac{262}{9} \zeta_3 - \frac{25}{9} \zeta_5 \right) \\
&\quad + n_l^2 \left( \frac{151}{162} - \frac{1}{18} \zeta_2 - \frac{19}{27} \zeta_3 \right) , \\
r_{4,0}^{\text{NS}} &= \frac{144939499}{20736} - \frac{49775}{64} \zeta_2 - \frac{5693495}{864} \zeta_3 + \frac{3993}{8} \zeta_2 \zeta_3 \\
&\quad + \frac{5445}{8} \zeta_3^2 + \frac{65945}{288} \zeta_5 - \frac{7315}{48} \zeta_7 \\
&\quad + n_l \left( -\frac{13044007}{10368} + \frac{2263}{16} \zeta_2 + \frac{12205}{12} \zeta_3 - \frac{363}{4} \zeta_2 \zeta_3 \right. \\
&\quad \quad \left. - 55 \zeta_3^2 + \frac{29675}{432} \zeta_5 + \frac{665}{72} \zeta_7 \right) \\
&\quad + n_l^2 \left( \frac{1045381}{15552} - \frac{593}{72} \zeta_2 - \frac{40655}{864} \zeta_3 + \frac{11}{2} \zeta_2 \zeta_3 + \frac{5}{6} \zeta_3^2 - \frac{260}{27} \zeta_5 \right) \\
&\quad + n_l^3 \left( -\frac{6131}{5832} + \frac{11}{72} \zeta_2 + \frac{203}{324} - \frac{1}{9} \zeta_2 \zeta_3 + \frac{5}{18} \zeta_5 \right) . \tag{4.64}
\end{aligned}$$

Die Vektor-S-Beiträge beginnen mit  $\mathcal{O}(a_s^3)$ , wobei wir den Koeffizienten  $r_{4,1}^{\text{V,S}}$  erneut durch die RG-Gleichung (4.61) erhalten. Die Konstanten Terme zur Ordnung  $\mathcal{O}(a_s^3)$  findet man in [19, 105–107] und zur Ordnung  $\mathcal{O}(a_s^4)$  in [108]

$$\begin{aligned}
r_{4,1}^{\text{V,S}} &= 3 \beta_0 r_{3,0}^{\text{V,S}} , \\
r_{3,0}^{\text{V,S}} &= \frac{55}{216} - \frac{5}{9} \zeta_3 , \\
r_{4,0}^{\text{V,S}} &= \frac{5795}{576} - \frac{8245}{432} \zeta_3 - \frac{55}{12} \zeta_3^2 + \frac{2825}{216} \zeta_5 \\
&\quad + n_l \left( -\frac{745}{1296} + \frac{65}{72} \zeta_3 + \frac{5}{18} \zeta_3^2 - \frac{25}{36} \zeta_5 \right) . \tag{4.65}
\end{aligned}$$

Zuletzt setzen wir (4.59) in (4.62) ein und können somit die Koeffizienten vor den Logarithmen durch die anomale Dimension  $\gamma^\psi$  und die  $\beta$ -Funktion ausdrücken

$$\begin{aligned}
r_{2,1}^{\text{A,S}} &= -2 \gamma_0^\psi , \\
r_{3,1}^{\text{A,S}} &= -2(\gamma_0^\psi + \gamma_1^\psi - \beta_0 r_{2,0}^{\text{A,S}}) , \\
r_{3,2}^{\text{A,S}} &= -2 \beta_0 \gamma_0^\psi , \tag{4.66} \\
r_{4,1}^{\text{A,S}} &= -2 \gamma_1^\psi - 2 \gamma_2^\psi - 2 \gamma_0^\psi r_{2,0}^{\text{A,NS}} + 2 \beta_1 r_{2,0}^{\text{A,S}} - 2 \gamma_0^\psi n_l r_{2,0}^{\text{A,S}} + 3 \beta_0 r_{3,0}^{\text{A,S}} , \\
r_{4,2}^{\text{A,S}} &= -4 \beta_0 \gamma_0^\psi - 2 \beta_1 \gamma_0^\psi - 3 \beta_0 \gamma_1^\psi + 2(\gamma_0^\psi)^2 n_l + 3 \beta_0^2 r_{2,0}^{\text{A,S}} , \\
r_{4,3}^{\text{A,S}} &= -2 \beta_0^2 \gamma_0^\psi .
\end{aligned}$$

Die verbleibenden Koeffizienten müssen erneut explizit berechnet werden, wobei die Koeffizienten zur Ordnung  $\mathcal{O}(a_s^2, a_s^3)$  in [19, 105–107] zu finden sind und zur Ordnung  $\mathcal{O}(a_s^4)$  in [109]

$$\begin{aligned}
 r_{2,0}^{A,S} &= -\frac{17}{6} , \\
 r_{3,0}^{A,S} &= -\frac{16867}{432} + \frac{11}{2} \zeta_2 + \frac{67}{12} \zeta_3 + n_l \left( \frac{923}{648} - \frac{1}{3} \zeta_2 \right) , \\
 r_{4,0}^{A,S} &= -\frac{146240371}{248832} + \frac{5809}{32} \zeta_2 + \frac{40639}{384} \zeta_3 + \frac{759}{128} \zeta_4 - \frac{4655}{288} \zeta_5 \\
 &\quad + n_l \left( \frac{3629635}{62208} - \frac{163}{8} \zeta_2 + \frac{549}{64} \zeta_3 + \frac{37}{64} \zeta_4 - \frac{5}{4} \zeta_5 \right) \\
 &\quad + n_l^2 \left( -\frac{46835}{62208} + \frac{11}{24} \zeta_2 - \frac{65}{144} \zeta_3 \right) . \tag{4.67}
 \end{aligned}$$

Für  $n_l = 5$  ist dies in numerischer Form ( $\ln_{\mu Z} = \ln(\mu^2/M_Z^2)$ )

$$\begin{aligned}
 R^{\text{NS}} &= 1 + a_s + a_s^2 (1.40923 + 1.91667 \ln_{\mu Z}) \\
 &\quad + a_s^3 (-12.7671 + 7.81872 \ln_{\mu Z} + 3.67361 \ln_{\mu Z}^2) \\
 &\quad + a_s^4 (-79.9806 - 63.7727 \ln_{\mu Z} + 27.1108 \ln_{\mu Z}^2 + 7.04109 \ln_{\mu Z}^3) , \tag{4.68}
 \end{aligned}$$

$$R^{V,S} = -0.41318 a_s^3 + a_s^4 (-4.9841 - 2.37578 \ln_{\mu Z}) , \tag{4.69}$$

$$\begin{aligned}
 R^{A,S} &= a_s^2 (-2.83333 - \ln_{\mu Z}) \\
 &\quad + a_s^3 (-18.905 - 15.5417 \ln_{\mu Z} - 1.91667 \ln_{\mu Z}^2) \\
 &\quad + a_s^4 (-13.4057 - 89.9393 \ln_{\mu Z} - 45.5573 \ln_{\mu Z}^2 - 3.67361 \ln_{\mu Z}^3) . \tag{4.70}
 \end{aligned}$$

## 4.4. Ergebnisse

Wir haben jetzt alle Bausteine zusammen, um die Zerfallsrate des  $Z$ -Bosons nach Hadronen zu berechnen. Wenn wir in der exemplarischen Gleichung (4.6) die im letzten Abschnitt eingeführten Imaginärteile der Korrelatoren einführen, dann erhalten wir folgende Definition

$$R = 3 \left( \sum_{f,f'} v_f v_{f'} R_{f,f'}^V + \sum_{f,f'} a_f a_{f'} R_{f,f'}^A \right) . \tag{4.71}$$

Wir erinnern daran, dass die Kopplungskonstanten durch  $v_f \equiv 2I_f - 4q_f s_w^2$  und  $a_f \equiv 2I_f$  gegeben sind. Der Faktor drei entspricht der Summe über die verschiedenen Farben der Quarks. Diese Darstellung ist durch das Optische

#### 4. Zerfallsrate des $Z$ -Bosons nach Hadronen

Theorem proportional zur Zerfallsrate

$$\Gamma(Z \rightarrow \text{Hadronen}) \equiv \Gamma_{Z,h} = \Gamma_0 R = \frac{G_F M_Z^3}{24\sqrt{2}\pi} R . \quad (4.72)$$

In der Konstanten  $\Gamma_0$  haben wir einen stets auftretenden kinematischen Faktor abgespaltert. Aus unserer bisheriger Betrachtung ist es nun sinnvoll,  $\Gamma_{Z,h}$  in drei Beiträge aufzuteilen

$$\Gamma_{Z,h} = \Gamma^{\text{NS}} + \Gamma^{\text{S},V} + \Gamma^{\text{S},A} . \quad (4.73)$$

Die NS-Beiträge  $\Gamma^{\text{NS}}$ , sowie die beiden S-Beiträge des Vektor- und Axialvektorstroms  $\Gamma^{\text{S},V}$  und  $\Gamma^{\text{S},A}$ , betrachten wir im Folgenden zuerst getrennt.

##### 4.4.1. Nicht-Singlett-Beiträge

In  $\Gamma^{\text{NS}}$  sammeln wir alle NS-Beiträge, wobei nach (4.57) sich die Vektor- und Axialvektor-Anteile nur um die Vorfaktoren unterscheiden

$$\Gamma^{\text{NS}} = \Gamma_0 3 \sum_f \left( v_f^2 + a_f^2 \right) R^{\text{NS}} . \quad (4.74)$$

Die Summe erstreckt sich über alle leichten Quarks. Wie schon in (4.2) diskutiert, treten in der Fermionschleife, die an das  $Z$ -Boson koppelt keine Top-Quarks auf und alle weiteren Top Effekte sind durch die Einführung der effektiven Theorie behandelt. Wir können also direkt den Wert mit Hilfe von (4.68) an der Skala  $\mu = M_Z$  angeben, wobei wir den effektiven Mischungswinkel mit  $s_w^2 = 0.231$  verwenden

$$\begin{aligned} \Gamma^{\text{NS}} &= \Gamma_0 \cdot 20.1945 \left( 1 + a_s + 1.4092 a_s^2 - 12.7671 a_s^3 - 79.9806 a_s^4 \right) \\ &= \Gamma_0 20.1945 \left( 1 + 0.03785 + 0.00201 - 0.00069 - 0.00016 \right) \\ &= \Gamma_0 \left( 20.1945 + 0.7643 + 0.0408 - 0.0140 - 0.0033 \right) \\ &= \Gamma_0 \left( 20.9823 \pm 0.0012 \right) . \end{aligned} \quad (4.75)$$

In dieser Formel verstehen wir die Kopplungskonstante als an der  $Z$ -Skala ausgewertet und erhalten somit im zweiten und dritten Schritt mit  $a_s(M_Z) = 0.1189$  die expliziten Korrekturen nach den einzelnen Ordnungen aufgelistet. Wir werden im nächsten Kapitel sehen, warum wir gerade diesen Wert für  $a_s(M_Z)$  verwendet haben. Wir haben die Korrekturen einerseits normiert auf

die führende Ordnung und andererseits ausmultipliziert angegeben. Die eine Variante erlaubt es einem, die Korrekturen im Bezug zur führenden Ordnung zu betrachten, während die zweite Möglichkeit besser geeignet ist, um mit den später angegebenen S-Korrekturen zu vergleichen. Wenn wir alle Korrekturen aufsummieren, gelangen wir zu dem Wert in der vierten Zeile. Den angegebenen Fehler erhalten wir, indem wir die Renormierungsskala  $\mu$  zwischen  $1/3 M_Z$  und  $3 M_Z$  variieren. Dies ist in Abbildung 4.4(a) dargestellt. Um  $\Gamma^{\text{NS}}$  bei verschiedenen Skalen zu berechnen, muss man neben der expliziten  $\mu$ -Abhängigkeit in den Logarithmen (vergleiche (4.68)) auch die Kopplungskonstante  $a_s(\mu)$  für verschiedene  $\mu$  auswerten. Hierfür nutzen wir das Mathematica-Paket `RunDec` [114], wobei wir den oben angegebenen Wert für  $a_s(M_Z)$  als Startwert verwenden. Während die Korrektur der Ordnung  $\mathcal{O}(a_s)$  (gepunktete Linie) noch eine sehr starke  $\mu$ -Abhängigkeit aufweist, nimmt diese mit  $\mathcal{O}(a_s^2)$  (gepunktet-gestrichelte Linie) und  $\mathcal{O}(a_s^3)$  (gestrichelte Linie) weiter ab, bis wir zur höchsten Ordnung  $\mathcal{O}(a_s^4)$  (durchgezogene Linie) eine sehr flache Kurve erhalten. Wenn wir ausreichend viele Ordnungen zur Verfügung hätten, würde sich die  $\mu$ -Abhängigkeit immer mehr reduzieren bis man eine komplett flache Gerade bekommt. Indem man die Skalenabhängigkeit einer endlichen Ordnung anschaut, kann man über die Variation der Kurve die logarithmischen Terme der höheren Korrekturen abschätzen, da diese gerade die Variation aufheben. Als Erfahrungswert hat sich ergeben, dass diese Abschätzung häufig der Größenordnung der kompletten Korrektur der nächsthöheren Ordnung entspricht. Wenn wir dies für die  $\mathcal{O}(a_s^4)$  Korrektur machen, so stellt das in Abbildung 4.4(a) dargestellte Band die Variation dieser Ordnung dar und die Hälfte der Breite des Bandes gibt uns den Fehler in (4.75).

#### 4.4.2. Vektor-Singlett-Beiträge

In den S-Diagrammen tritt das Top-Quark, gekoppelt an das  $Z$ -Boson, auf. Da das Top-Quark aber für die Vektor-Kopplung naiv entkoppelt (siehe (4.37) und (4.38)), das heißt ohne verbleibende Effekte aus der Theorie verschwindet, erhalten wir die Beiträge zu  $\Gamma^{\text{S},V}$  direkt aus den Vektor-S-Diagrammen der masselosen Fünf-Flavour-QCD

$$\Gamma^{\text{S},V} = \Gamma_0 3 \sum_f (v_f)^2 R^{V,S} . \quad (4.76)$$

Auch hier läuft die Summe über alle leichten Quarks. Diese Korrekturen starten mit der Ordnung  $\mathcal{O}(a_s^3)$ . Dadurch ist die Anzahl der Diagramme deutlich

#### 4. Zerfallsrate des Z-Bosons nach Hadronen

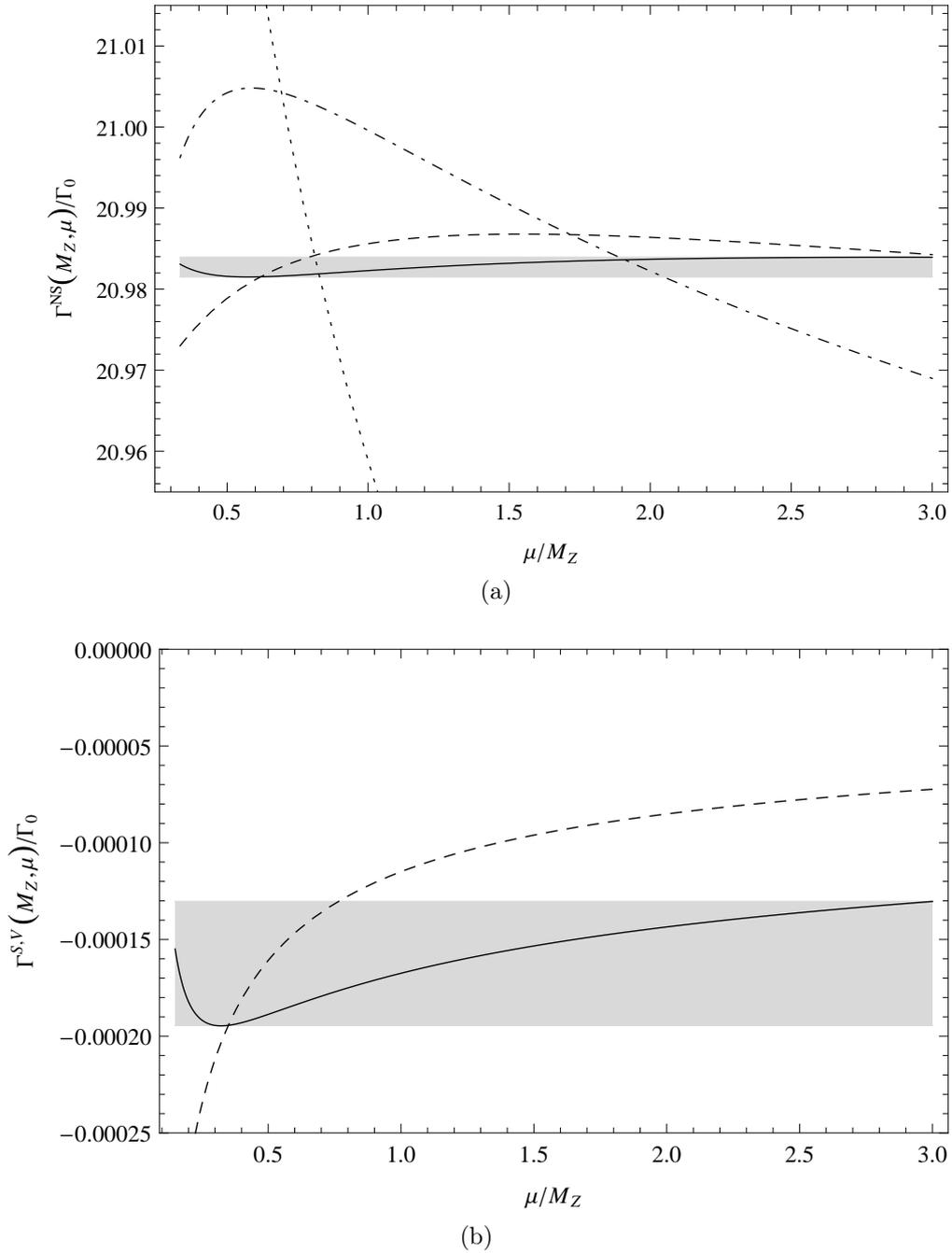


Abb. 4.4.: Skalenabhängigkeit von  $\Gamma^{\text{NS}}$  (a) und  $\Gamma^{\text{S,V}}$  (b) normiert mit  $\Gamma_0$ . Die gepunktete, gepunktet-gestrichelte, gestrichelte und durchgezogene Linie entspricht den  $\mathcal{O}(a_s)$  bis  $\mathcal{O}(a_s^4)$  Korrekturen. Die halbe Breite des grauen Bandes entspricht dem abgeschätzten Fehler.

geringer als im NS-Fall. Da im Allgemeinen die Größe der Korrektur proportional zur Anzahl der Diagramme ist, erwarten wir für  $\Gamma^{\text{S},V}$  einen deutlich kleineren Beitrag als für die  $\mathcal{O}(a_s^3)$  Terme in  $\Gamma^{\text{NS}}$ . Dies sehen wir explizit, wenn wir in (4.76)  $R^{V,S}$  aus (4.69) an der Skala  $\mu = M_Z$  einsetzen

$$\begin{aligned}\Gamma^{\text{S},V} &= \Gamma_0 \left( -2.12068 a_s^3 - 25.5814 a_s^4 \right) \\ &= \Gamma_0 \left( -0.000115 - 0.000052 \right) \\ &= \Gamma_0 \left( -0.000167 \pm 0.000032 \right).\end{aligned}\tag{4.77}$$

In der zweiten Zeile haben wir wieder die einzelnen Ordnungen getrennt geschrieben. Da wir hiermit nur eine nächstzuführende Genauigkeit haben, ist der Fehler im Vergleich zum absoluten Wert recht groß. Dies sieht man auch in der Skalenvariation, dargestellt in Abbildung 4.4(b), die eine deutlich größere  $\mu$ -Abhängigkeit zeigt als im NS-Fall. Dies bereitet aber keine Probleme, da  $\Gamma^{\text{S},V} \ll \Gamma^{\text{NS}}$  und somit auch der Fehler kleiner ist. Der Fehler in (4.77) entspricht wieder der halben Breite der maximalen Skalenvariation der  $\mathcal{O}(a_s^4)$  Beiträge (graues Band in Abb. 4.4(b)).

### 4.4.3. Axialvektor-Singlett-Beiträge

Wir betrachten nun den kompliziertesten Fall  $\Gamma^{\text{S},A}$ . Die Beiträge der zwei leichtesten Isospin-Doublets sind null, da die Kopplungskonstanten  $a_f = \pm 1$  der beiden Doublett Partner sich in der Summe gegenseitig aufheben, wenn beide Teilchen die gleiche Masse haben. Es bleiben also nur noch die Beiträge mit Top- und Bottom-Quarks

$$\Gamma^{\text{S},A} = \Gamma_0 3 R_{\Delta_t}^{\text{S},A} = \Gamma_0 3 \left( R_{tt}^{\text{S},A} - 2 R_{tb}^{\text{S},A} + R_{bb}^{\text{S},A} \right).\tag{4.78}$$

Im Falle der Axialvektor-S-Beiträge entkoppelt das Top-Quark nicht naiv, weshalb wir die Methoden aus Abschnitt 4.2 anwenden müssen, um das Top-Quark zu entkoppeln. Wenn wir Gleichung (4.39) und (4.40) anwenden, so erhalten wir bis einschließlich der Ordnung  $\mathcal{O}(a_s^4)$

$$R_{tt}^{\text{S},A} = n_l C_h^2 R^{\text{NS}},\tag{4.79}$$

$$R_{tb}^{\text{S},A} = C_h R^{\text{NS}} + C_h n_l R^{\text{S},A},\tag{4.80}$$

$$R_{bb}^{\text{S},A} = R^{\text{S},A} + 2 n_l C_\psi R^{\text{S},A} + 2 C_\psi R^{\text{NS}}.\tag{4.81}$$

Um alle Größen konsistent zu behandeln, müssen wir die in  $C_h$  und  $C_\psi$  ((4.46) und (4.54)) verwendete Kopplungskonstante der Sechs-Flavour-Theorie durch

#### 4. Zerfallsrate des $Z$ -Bosons nach Hadronen

die Kopplungskonstante der effektiven Fünf-Flavour-QCD ausdrücken. In Gleichung (3.58) hatten wir den Zusammenhang zwischen voller und effektiver Theorie definiert, wobei wir  $a_s$  in Abhängigkeit von  $a_s^{(6)}$  angegeben hatten. Formt man diese Gleichung um, erhält man mit (3.65)

$$a_s^{(6)} = a_s + \frac{1}{6} \ln_{\mu t} a_s^2 + a_s^3 \left( -\frac{11}{72} + \frac{11}{24} \ln_{\mu t} + \frac{1}{36} \ln_{\mu t}^2 \right), \quad (4.82)$$

wobei  $\ln_{\mu t} = \ln(\mu^2/m_t(\mu)^2)$  definiert war. Nun kommen wir zur Fragestellung, wie wir die Top Masse behandeln. In (4.46) und (4.54) hatten wir die  $\overline{\text{MS}}$ -Masse  $m_t(\mu)$  verwendet. Um die Skalenabhängigkeit zu untersuchen, ist es naheliegend die skalenunabhängige  $\overline{\text{MS}}$ -Masse  $\overline{m}_t = m_t(m_t)$  zu verwenden. Mit dieser Definition steckt die komplette Skalenabhängigkeit in  $a_s(\mu)$  und  $\mu$  selbst. Um die beiden Massendefinitionen ineinander zu überführen, benutzen wir Gleichung (3.41) und erhalten mit  $\ln_{\mu\bar{t}} = \ln(\mu^2/\overline{m}_t^2)$

$$\begin{aligned} \ln_{\mu t} &= \ln_{\mu\bar{t}} + 2 a_s^{(6)} \ln_{\mu\bar{t}} + (a_s^{(6)})^2 \left[ \left( \frac{101}{12} - \frac{5}{18} n_f \right) \ln_{\mu\bar{t}} + \left( \frac{11}{4} - \frac{1}{6} n_f \right) \ln_{\mu\bar{t}}^2 \right] \\ &= \ln_{\mu\bar{t}} + 2 a_s \ln_{\mu\bar{t}} + a_s^2 \left[ \left( \frac{101}{12} - \frac{5}{18} n_f \right) \ln_{\mu\bar{t}} + \left( \frac{37}{12} - \frac{1}{6} n_f \right) \ln_{\mu\bar{t}}^2 \right], \end{aligned} \quad (4.83)$$

wobei wir im zweiten Schritt (4.82) verwendet haben.

Eine weitere Möglichkeit eine skalenunabhängige Top Masse zu wählen, ist die Polmasse  $M_t$  zu verwenden. Hierzu müssen wir die  $\overline{\text{MS}}$ -Masse durch die

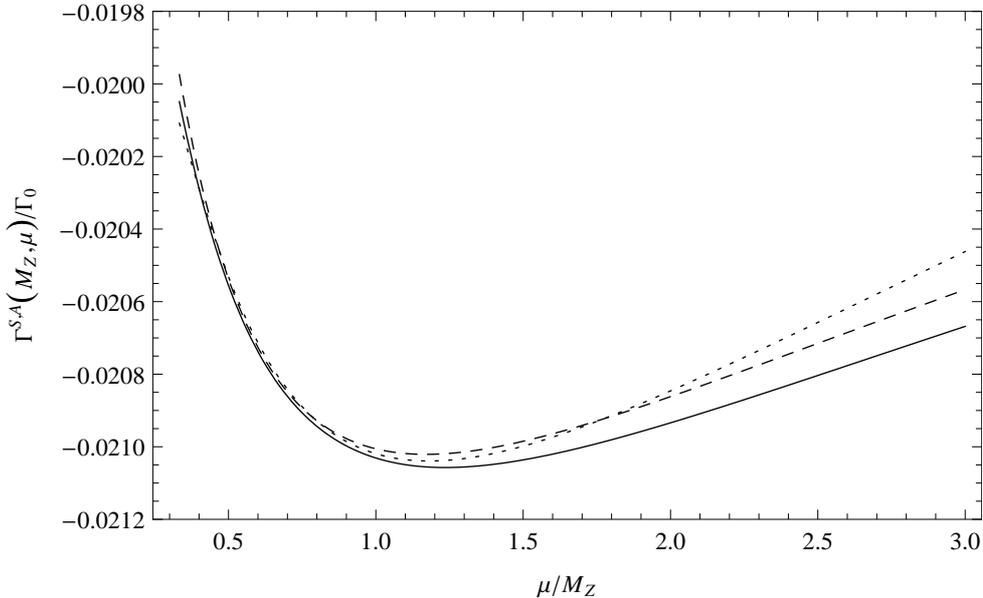


Abb. 4.5.: Skalenabhängigkeit von  $\Gamma^{S,A}$  normiert auf  $\Gamma_0$  in Abhängigkeit der  $m_t(\mu)$ - (gepunktet),  $\overline{m}_t$ - (gestrichelt) und  $M_t$ - (durchgezogen) Masse.

On-Shell-Masse ersetzen [110–113] ( $\ln_{\mu T} = \ln(\mu^2/M_t^2)$ )

$$\begin{aligned} \frac{m_t(\mu)}{M_t} &= 1 + a_s^{(6)} \left[ -\frac{4}{3} - \ln_{\mu T} \right] \\ &+ \left( a_s^{(6)} \right)^2 \left[ -\frac{3019}{288} - 2\zeta_2 - \frac{2}{3}\zeta_2 \ln(2) + \frac{1}{6}\zeta_3 - \frac{445}{72} \ln_{\mu T} \right. \\ &\quad \left. - \frac{19}{24} \ln_{\mu T}^2 + \left( \frac{71}{144} + \frac{1}{3}\zeta_2 + \frac{13}{36} \ln_{\mu T} + \frac{1}{12} \ln_{\mu T}^2 \right) n_l \right]. \end{aligned} \quad (4.84)$$

Aus dieser Formel können wir die Logarithmen der  $\overline{\text{MS}}$ -Masse durch Logarithmen der Polmasse substituieren

$$\begin{aligned} \ln_{\mu t} &= \ln_{\mu T} + a_s \left[ \frac{8}{3} + 2 \ln_{\mu T} \right] \\ &+ a_s^2 \left[ \frac{1139}{48} + \left( \frac{583}{36} - \frac{13}{18} n_f \right) \ln_{\mu T} + \left( \frac{37}{12} - \frac{1}{6} n_f \right) \ln_{\mu T}^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{71}{72} n_f + \frac{14}{3} \zeta_2 - \frac{2}{3} n_f \zeta_2 - \frac{1}{3} \zeta_3 + \frac{4}{3} \zeta_2 \ln(2) \right]. \end{aligned} \quad (4.85)$$

Dass alle drei Massenschemata das gleiche Resultat (bis auf Unterschiede  $\mathcal{O}(a_s^5)$ ) liefern, sehen wir in Abbildung 4.5, in der die Skalenabhängigkeit von  $\Gamma^{\text{S,A}}$  bis einschließlich der  $\mathcal{O}(a_s^4)$  Terme für die  $m_t(\mu)$ - (gepunktet),  $\overline{m}_t$ - (gestrichelt) und  $M_t$ - (durchgezogen) Abhängigkeit gezeigt ist.

Da alle Schemata gleich aussagekräftig sind, verwenden wir ab jetzt immer die Polmasse  $M_t$ , da diese experimentell am leichtesten zugänglich ist. Die einzelnen Terme lassen sich mit den Entkopplungskoeffizienten  $C_h$  und  $C_\psi$ , unter Verwendung der Ersetzungsregeln (4.82) und (4.85), und den Korrelatoren  $R^{\text{NS}}$  und  $R^{\text{A,S}}$  angeben (für  $n_l = 5$ )

$$\begin{aligned} R_{tt}^{\text{S,A}} &= n_l C_h^2 R^{\text{NS}} + \mathcal{O}(a_s^5) \\ &= a_s^4 \left[ \frac{15}{64} - \frac{15}{8} \ln_{\mu T} + \frac{15}{4} \ln_{\mu T}^2 \right], \end{aligned} \quad (4.86)$$

$$\begin{aligned} R_{tb}^{\text{S,A}} &= C_h R^{\text{NS}} + C_h n_l R^{\text{A,S}} + \mathcal{O}(a_s^5) \\ &= a_s^2 \left[ \frac{3}{8} - \frac{3}{2} \ln_{\mu T} \right] \\ &+ a_s^3 \left[ -\frac{3869}{288} + \frac{55}{8} \zeta_3 - \frac{45}{8} \ln_{\mu T} - \frac{25}{8} \ln_{\mu T}^2 \right] \\ &+ a_s^4 \left[ -\frac{370478273}{14515200} - \zeta_2 + \frac{1309601}{16800} \zeta_3 - \frac{4225817}{34560} \zeta_4 - \frac{10453}{288} \zeta_5 \right. \\ &\quad - 2\zeta_2 \ln(2) - \frac{89}{48} \zeta_4 \ln(2) - \frac{5861}{1080} \zeta_2 \ln^2(2) \\ &\quad + \frac{2}{9} \zeta_2 \ln^3(2) + \frac{5861}{6480} \ln^4(2) - \frac{1}{45} \ln^5(2) + \frac{5861}{270} a_4 \\ &\quad + \frac{8}{3} a_5 - \frac{37}{32} \ln_{\mu Z} - \frac{47015}{576} \ln_{\mu T} + \frac{709}{8} \zeta_3 \ln_{\mu T} \\ &\quad \left. + \frac{37}{8} \ln_{\mu Z} \ln_{\mu T} + -\frac{363}{16} \ln_{\mu T}^2 - \frac{193}{32} \ln_{\mu T}^3 \right], \end{aligned} \quad (4.87)$$

#### 4. Zerfallsrate des $Z$ -Bosons nach Hadronen

$$\begin{aligned}
R_{bb}^{S,A} &= R^{A,S} + 2 n_l C_\psi R^{A,S} + 2 C_\psi R^{\text{NS}} + \mathcal{O}(a_s^5) \\
&= a_s^2 \left[ -\frac{17}{2} - 3 \ln_{\mu Z} \right] \\
&\quad + a_s^3 \left[ -\frac{4673}{48} + \frac{23}{2} \zeta_2 + \frac{67}{4} \zeta_3 - \frac{373}{8} \ln_{\mu Z} \right. \\
&\quad\quad \left. - \frac{23}{4} \ln_{\mu Z}^2 - \frac{1}{12} \ln_{\mu T} - \frac{1}{2} \ln_{\mu T}^2 \right] \\
&\quad + a_s^4 \left[ -\frac{79017683}{82944} + \frac{8747}{32} \zeta_2 + \frac{54179}{128} \zeta_3 + \frac{1481}{128} \zeta_4 - \frac{6455}{96} \zeta_5 \right. \\
&\quad\quad - \zeta_2 \ln^2(2) + \frac{1}{6} \ln^4(2) + 4 a_4 - \frac{174767}{288} \ln_{\mu Z} \\
&\quad\quad + \frac{529}{8} \zeta_2 \ln_{\mu Z} + \frac{1519}{8} \zeta_3 \ln_{\mu Z} - \frac{8747}{64} \ln_{\mu Z}^2 - \frac{529}{48} \ln_{\mu Z}^3 \\
&\quad\quad \left. - \frac{1975}{288} \ln_{\mu T} + \frac{37}{8} \zeta_3 \ln_{\mu T} - \frac{247}{48} \ln_{\mu T}^2 - \frac{25}{24} \ln_{\mu T}^3 \right]. \quad (4.88)
\end{aligned}$$

Alle Terme zusammengerechnet, ergeben in numerischer Form

$$\begin{aligned}
R_{\Delta_t}^{S,A} &= a_s^2 (-3.08333 + \ln_{\mu T} - \ln_{\mu Z}) \\
&\quad + a_s^3 \left[ -15.9877 + 3.72222 \ln_{\mu T} + 1.91667 \ln_{\mu T}^2 \right. \\
&\quad\quad \left. - 15.5417 \ln_{\mu Z} - 1.91667 \ln_{\mu Z}^2 \right] \\
&\quad + a_s^4 \left[ 49.0309 - 17.6637 \ln_{\mu T} + 14.6597 \ln_{\mu T}^2 + 3.67361 \ln_{\mu T}^3 \right. \\
&\quad\quad - 89.1685 \ln_{\mu Z} - 3.08333 \ln_{\mu T} \ln_{\mu Z} \\
&\quad\quad \left. - 45.5573 \ln_{\mu Z}^2 - 3.67361 \ln_{\mu Z}^3 \right]. \quad (4.89)
\end{aligned}$$

An dieser Stelle wollen wir über die Skalenabhängigkeit von  $R_{\Delta_t}^{S,A}$  nachdenken. In der vollen Theorie koppelt die Axialvektor-Stromkomponente des  $Z$ -Vertex mit dem Operator  $\Delta_t = A_t - A_b$  an die Fermionen, da die Kopplung gerade  $a_{t/b} = \pm 1$  ist. Dies ist ein NS-Strom (vergleiche (4.12)) und hat aufgrund der Larin-Definition von  $\gamma_5$  eine verschwindende anomale Dimension. Deshalb lautet die RG-Gleichung für  $R_{\Delta_t}^{S,A}$

$$\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} R_{\Delta_t}^{S,A} = 0. \quad (4.90)$$

Dies ist gleichbedeutend mit der Aussage, dass unsere Theorie anomaliefrei ist. Dies muss natürlich auch für die effektive Theorie gelten, weshalb auch hier Gleichung (4.90) erfüllt sein muss. Dies kann man leicht mit (4.89) überprüfen, indem man (4.90) mit Hilfe von (3.24) schreibt als

$$\left[ \mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} + \left( -\beta_0 a_s^2 - \beta_1 a_s^3 + \dots \right) \frac{\partial}{\partial a_s} \right] R_{\Delta_t}^{S,A} = 0 \quad (4.91)$$

und  $\beta_0 = 1.91667$  und  $\beta_1 = 2.41667$  verwendet. Da  $M_Z$  und  $M_t$  nicht von der Renormierungsskala abhängen, gilt zusätzlich  $\mu^2 \partial / \partial \mu^2 \ln_{\mu Z} = 1$  und ebenso

$\mu^2 \partial / \partial \mu^2 \ln_{\mu T} = 1$ . Dass Gleichung (4.90) bis auf Terme  $\mathcal{O}(a_s^5)$  für die drei Massenschemata erfüllt ist, haben wir explizit nachgeprüft (für die  $\overline{\text{MS}}$ -Masse  $m_t(\mu)$  muss noch die anomale Dimension der Fermionmasse in (3.24) berücksichtigt werden). Somit erhalten wir einen nicht-trivialen Check unseres Ergebnisses, da die  $\mu$ -Ableitung von  $C_h$ ,  $C_\psi$  und  $R^{A,S}$  jeweils ungleich null ist.

Einen weiteren Aspekt, den wir noch kurz betrachten wollen, ist die Skalen-separation von  $M_t$  und  $M_Z$ . In Abschnitt 3.4 haben wir das typische Vorgehen bei der Entkopplung von schweren Teilchen beschrieben. Nach der Entkopplung der schweren Teilchen wurde als zweiter Schritt die Resummation der großen Logarithmen mit Hilfe der RG-Gleichung genannt, indem man alle Größen der effektiven Theorie von der großen zur niedrigen Skala entwickelt. Dies würde in unserem Fall einer Entwicklung von  $R^{\text{NS}}$ ,  $R^{V,S}$  und  $R^{A,S}$  von der Skala  $M_t$  zur Skala  $M_Z$  entsprechen. Da wir aber die Störungsreihe bereits zu einer hohen Ordnung berechnet haben und  $\ln(M_t^2/M_Z^2) = 1.269$  nicht besonders groß ausfällt, kann die Entwicklung getrost vernachlässigt werden. Tatsächlich ist der dominante Term, den wir durch die Resummation der Logarithmen hinzubekommen würden, mit  $a_s^5 \ln(M_t^2/M_Z^2)^5 = \mathcal{O}(10^{-7})$  so klein, dass er keinen Einfluss auf unsere Numerik hätte. Deshalb verwenden wir in unserer Numerik die Korrekturen, wie in (4.89) gegeben.

Wenn wir (4.89) an der Skala  $\mu = M_Z$  auswerten, erhalten wir den Beitrag der Axialvektor-S-Diagramme mit

$$\begin{aligned} \Gamma^{\text{S},A} &= \Gamma_0 \left( -13.0575 a_s^2 - 52.8736 a_s^3 + 262.656 a_s^4 \right) \\ &= \Gamma_0 \left( -0.01870 - 0.00287 + 0.00054 \right) \\ &= \Gamma_0 \left( -0.02103 \pm 0.00050 \right). \end{aligned} \quad (4.92)$$

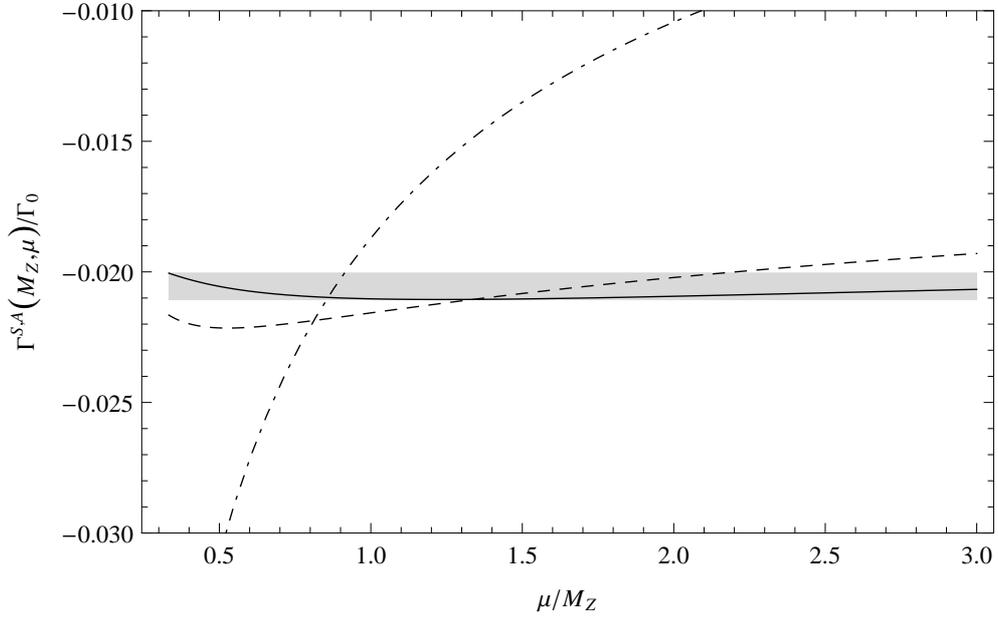
Den Fehler in (4.92) gewinnen wir wieder aus der Skalenabhängigkeit, die in Abbildung 4.6(a) dargestellt wird. Wenn wir anstatt der  $M_t$ -Abhängigkeit die  $m_t(\mu)$ - oder die  $\overline{m}_t$ -Massen verwenden, erhalten wir

$$\Gamma^{\text{S},A}(m_t(\mu)) = \Gamma_0 \left( -0.02102 \pm 0.00047 \right), \quad (4.93)$$

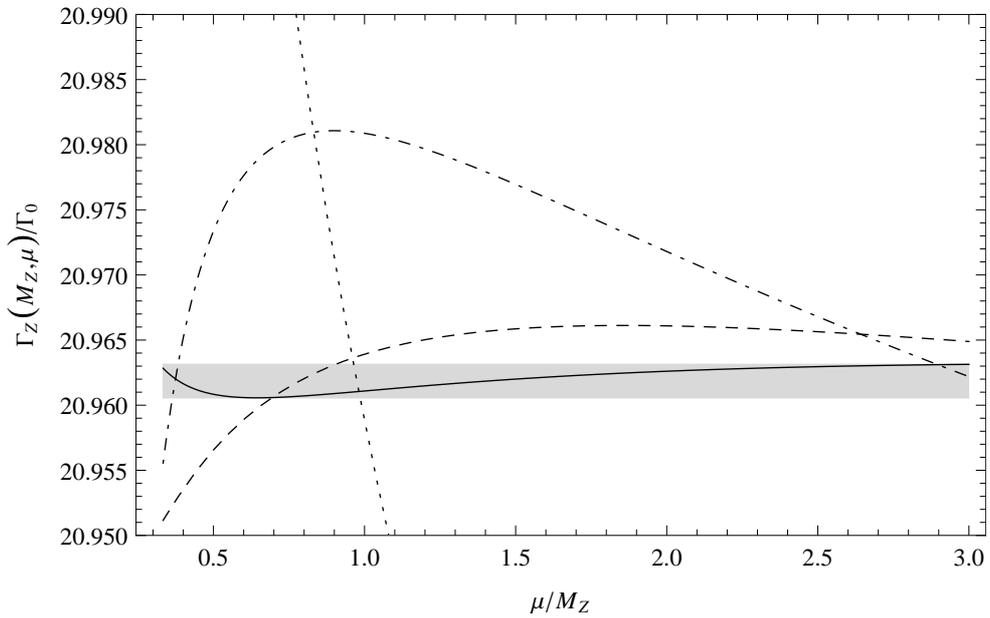
$$\Gamma^{\text{S},A}(\overline{m}_t) = \Gamma_0 \left( -0.02101 \pm 0.00052 \right). \quad (4.94)$$

Die drei Ergebnisse unterscheiden sich leicht. Da wir aber im nächsten Abschnitt eine Genauigkeit bis zur vierten Nachkommastelle verwenden, haben wir eine sehr gute Übereinstimmung der verschiedenen Schemata.

#### 4. Zerfallsrate des $Z$ -Bosons nach Hadronen



(a)



(b)

Abb. 4.6.: Skalenabhängigkeit von  $\Gamma^{S,A}$  (a) und  $\Gamma_Z$  (b) normiert mit  $\Gamma_0$ . Die gepunktete, gepunktet-gestrichelte, gestrichelte und durchgezogene Linie entspricht den  $\mathcal{O}(a_s)$  bis  $\mathcal{O}(a_s^4)$  Korrekturen. Die halbe Breite des grauen Bandes entspricht dem abgeschätzten Fehler.

#### 4.4.4. Summe aller Beiträge

Wenn wir alle Ergebnisse zusammenfassen, erhalten wir die totale Zerfallsrate  $\Gamma(Z \rightarrow \text{Hadronen}) \equiv \Gamma_{Z,h}$  bei  $\mu = M_Z$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{Z,h} &= \Gamma_0 \left[ 20.1945 + 20.1945 a_s \right. \\
&\quad + (28.4587 - 13.0575 + 0) a_s^2 \\
&\quad + (-257.825 - 52.8736 - 2.12068) a_s^3 \\
&\quad \left. + (-1615.17 + 262.656 - 25.5814) a_s^4 \right] \\
&= \Gamma_0 \cdot 20.1945 \left[ 1 + a_s + 0.7626 a_s^2 - 15.4903 a_s^3 - 68.2411 a_s^4 \right] \\
&= \Gamma_0 \cdot 20.1945 \left[ 1 + 0.03785 + 0.00109 - 0.00084 - 0.00014 \right] \\
&= \Gamma_0 \left[ 20.1945 + 0.7643 + 0.0221 - 0.0170 - 0.0028 \right] \\
&= \Gamma_0 \left[ 20.9611 \pm 0.0013 \right] . \tag{4.95}
\end{aligned}$$

Im ersten Schritt haben wir die NS-Korrekturen aus (4.75) in der ersten Spalte und die S-Korrekturen für den Axialvektor-Anteil aus (4.92) bzw. den Vektor-Anteil aus (4.77) in der zweiten bzw. der dritten Spalte angegeben. Wie erwartet, liefert der NS-Beitrag dabei den größten Anteil, während die S-Beiträge etwa 20 % in höheren Ordnungen der Störungstheorie ausmachen. Im zweiten Schritt sind alle Korrekturen, normiert auf die führende Ordnung, zusammengefasst und in den verschiedenen Ordnungen von  $a_s$  aufgeteilt. Trotz zunehmender Koeffizienten ist die Störungsreihe für  $a_s \sim 0.0378$  gut konvergent, wie wir im nächsten Schritt explizit sehen. Im letzten Schritt haben wir die Summe aller Ordnungen angegeben. Den Fehler erhalten wir, indem wir die  $\mu$ -Variation der Summe des NS-Beitrags und der beiden S-Terme betrachten, was in Abbildung 4.6(b) gezeigt ist. Man kann darüber streiten, ob es nicht sinnvoller wäre, die Fehler der drei einzelnen Beiträge quadratisch zu addieren, da jeder Term für sich genommen skaleninvariant ist und unabhängig von den jeweils zwei anderen. Dies ergibt aber auch denselben Fehler von  $\delta\Gamma_{Z,h} = \Gamma_0 \cdot 0.0013$ , so dass wir mit gutem Gewissen diesen Gesamtfehler angeben.



## 5. Korrekturen zu $\alpha_s(M_Z)$

Wir haben die Zerfallsrate inklusive aller Terme zur Ordnung  $\mathcal{O}(a_s^4)$  und somit in einer Genauigkeit, die es uns erlaubt  $\alpha_s$  noch genauer als bekannt zu bestimmen. Bevor wir zu dieser Genauigkeit kommen, wollen wir einen Schritt zurück gehen und die Situation zur Ordnung  $\mathcal{O}(a_s^3)$  beschreiben. Wie schon zu Beginn beschrieben, erhalten wir einen Wert für  $\alpha_s$ , wenn wir die theoretische Vorhersage mit der experimentellen Messung  $\Gamma_{Z,h}^{\text{exp}}$  vergleichen.

Den Wert für die  $Z$ -Zerfallsrate nach Hadronen  $\Gamma_{Z,h}^{\text{exp}}$  erhält man aus den Fitgrößen, die man verwendet, um die elektroschwache Physik der  $Z$ -Resonanz zu beschreiben [16]. Aus diesen Fitparametern, die aus der  $Z$ -Masse, verschiedenen Zerfallsbreiten und der Forward-Backward-Asymmetrie aufgebaut sind, kann man die hadronische Zerfallsbreite gewinnen [16]

$$\Gamma_{Z,h}^{\text{exp}} = 1744.4 \pm 2.0 \text{ MeV} . \quad (5.1)$$

Der experimentelle Fehler ergibt sich aus Unsicherheiten der Strahlenergie und der Luminosität, sowie durch Effekte höherer Ordnung in  $\alpha$  bei der Abstrahlung von Photonen im Anfangszustand. Weiter tragen die Ungenauigkeiten von Top- und Higgsmasse, sowie von Kopplungskonstanten des Standardmodells zum Fehler bei.

Für einen ersten Vergleich der LEP Electroweak Working Group [22] (unter Verwendung des Programms ZFITTER [57, 58]) wurden auf theoretischer Seite alle bekannten Korrekturen zur Ordnung  $\mathcal{O}(a_s^3)$  verwendet

$$\Gamma_Z^{3\text{loop}} = \Gamma_0 \left[ R_{\text{QCD}}^{3\text{loop}}(\alpha_s) + R_{\text{QED,EW}}(\alpha, \alpha \alpha_s) + R_{\text{mass}}(m_b^2/M_Z^2, m_b^2/M_t^2, M_Z^2/M_t^2) \right] . \quad (5.2)$$

Hierbei beschreiben  $R_{\text{QCD}}^{3\text{loop}}$  die Terme aus (4.95) bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(a_s^3)$ . Die verschiedenen Massenkorrekturen aus (2.31), (2.33), (2.42)- (2.44) und (2.46) sind in  $R_{\text{mass}}$  enthalten. Die QED- und gemischten QED-QCD-Korrekturen aus (2.34) bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha)$ , sowie die elektroschwachen Korrekturen aus (2.40) sind in  $R_{\text{QED,EW}}$  zusammengefasst. Zusätzlich sind die in Abschnitt 2.4

## 5. Korrekturen zu $\alpha_s(M_Z)$

diskutierten Korrekturen zu den elektroschwachen Kopplungskonstanten  $v_f$  und  $a_f$  sorgfältig implementiert. Der Vergleich von  $\Gamma_Z^{3\text{loop}}$  und  $\Gamma_{Z,h}^{\text{exp}}$  ergibt [22]

$$\alpha_s^{\text{alt}}(M_Z) = 0.1185 \pm 0.0026 . \quad (5.3)$$

Der angegebene Fehler ist durch die experimentelle Seite gegeben. Der theoretische Fehler ist nicht explizit angegeben, kann aber nach der zugrunde liegenden theoretischen Arbeit mit  $\pm 0.0006$  abgeschätzt werden [18].

Wenn wir die Terme zur Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s^4)$  aus (4.95) in  $R_{\text{QCD}}^{4\text{loop}}$  hinzunehmen, dann erhalten wir die theoretische Vorhersage

$$\Gamma_Z^{4\text{loop}} = \Gamma_0 \left[ R_{\text{QCD}}^{4\text{loop}}(\alpha_s) + R_{\text{QED,EW}} + R_{\text{mass}} \right] . \quad (5.4)$$

Dieses Ergebnis muss erneut mit dem experimentellen Wert übereinstimmen. Da sich  $\Gamma_Z^{3\text{loop}}$  und  $\Gamma_Z^{4\text{loop}}$  um kleine Beiträge unterscheiden, wird sich dies in einem kleinen Unterschied in der Fitgröße  $\alpha_s$  widerspiegeln

$$\Gamma_Z^{4\text{loop}}(\alpha_s^{\text{neu}}) = \Gamma_{Z,h}^{\text{exp}} = \Gamma_Z^{3\text{loop}}(\alpha_s^{\text{alt}}) , \quad \text{mit} \quad \alpha_s^{\text{neu}} = \alpha_s^{\text{alt}} + \delta\alpha_s . \quad (5.5)$$

Diese Änderung  $\delta\alpha_s$  muss nur bei den führenden Beiträgen in  $\alpha_s$  berücksichtigt werden und kann bei allen Termen, die kleiner als  $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$  sind, getrost vernachlässigt werden. Insbesondere bewirkt  $\delta\alpha_s$  in den QED-, EW- und Massenkorrekturen keine Veränderung, da diese noch zusätzlich durch die kleine QED-Kopplungskonstante oder durch Massenverhältnisse wie  $m_b^2/M_Z^2$  unterdrückt sind

$$R_{\text{QED,EW}}(\alpha_s^{\text{alt}}) \sim R_{\text{QED,EW}}(\alpha_s^{\text{neu}}) , \quad (5.6)$$

$$R_{\text{mass}}(\alpha_s^{\text{alt}}) \sim R_{\text{mass}}(\alpha_s^{\text{neu}}) . \quad (5.7)$$

Deshalb reicht es aus, wenn wir die dominanten QCD-Korrekturen aus (4.95) zu den verschiedenen Ordnungen mit dem ‘alten’ und ‘neuen’  $\alpha_s$  gegenüberstellen

$$\begin{aligned} \Gamma_Z^{3\text{loop}}(\alpha_s^{\text{alt}}) &= \Gamma_{Z,h}^{\text{exp}} = \Gamma_Z^{4\text{loop}}(\alpha_s^{\text{neu}}) \\ \Rightarrow R_{\text{QCD}}^{3\text{loop}}(\alpha_s^{\text{alt}}) &= R_{\text{QCD}}^{4\text{loop}}(\alpha_s^{\text{neu}}) . \end{aligned} \quad (5.8)$$

Diese Analyse wurde bereits mit den zuerst berechneten NS-Beiträgen durchgeführt, was eine Verschiebung von  $\delta\alpha_s^{\text{NS}} = 0.0005$  ergab [1]. Mit den zusätzlichen S-Anteilen kann dieser Vergleich komplettiert werden

$$\begin{aligned} \alpha_s^{\text{neu}}(M_Z) &= \alpha_s^{\text{alt}}(M_Z) + \delta\alpha_s^{\text{NS}} + \delta\alpha_s^{\text{S}} \\ &= 0.1185 + 0.0005 - 0.0001 = 0.1189 . \end{aligned} \quad (5.9)$$

Der theoretische Fehler aus (4.95) liefert einen Fehler zur totalen Zerfallsrate von  $\delta\Gamma_{Z,h} = \Gamma_0 \cdot 0.0013 = 0.1078$  MeV. Vergleicht man dies mit dem experimentellen Fehler aus (5.1) mit  $\delta\Gamma_{Z,h}^{\text{exp}} = 2$  MeV, der einen Fehler auf  $\alpha_s$  von  $\pm 0.0026$  ergibt, dann erhalten wir einen theoretischen Fehler auf  $\alpha_s$  von  $\pm 0.0001$

$$\alpha_s^{\text{neu}}(M_Z) = 0.1189 \pm 0.0026 \pm 0.0001 . \quad (5.10)$$

Diese  $\alpha_s$ -Bestimmung entspricht der kompletten  $\mathcal{O}(a_s^4)$  Analyse. Wir verwenden diesen  $\alpha_s$ -Wert in der restlichen Arbeit, wenn wir Ergebnisse mit einem expliziten  $\alpha_s$  angeben, da wir diese Arbeit als Fortsetzung der Berechnung der NS-Beiträge in [1] verstehen. In dieser Arbeit wurde dieser Wert benutzt. Wie wir schon in der Einleitung beschrieben haben, gibt es aktuellere Studien [23, 24], die einen leicht unterschiedlichen  $\alpha_s$ -Wert ergeben. Die komplette Diskussion in dieser Arbeit ist aber von diesem kleinen Unterschied völlig unbeeinflusst, da wir nie unmittelbar die experimentelle und theoretische Zerfallsrate vergleichen. Die einzigen physikalischen Ergebnisse, die wir produzieren, sind die Verschiebung des Mittelwerts von  $\alpha_s$  und der Fehler auf die theoretische Rechnung. Beide sind unabhängig von einem leicht unterschiedlichen  $\alpha_s^{\text{alt}}$ .

Die neuere Analyse der GFITTER Gruppe, in der  $\Gamma_{Z,h}^{\text{exp}}$  mit den  $\mathcal{O}(a_s^3)$  Korrekturen plus die NS-Diagramme zur Ordnung  $\mathcal{O}(a_s^4)$  und einigen weiteren Massenkorrekturen verglichen wurde, ergab [23, 24]

$$\alpha_s^{\text{alt}'}(M_Z) = 0.1193_{-0.0027}^{+0.0028} \pm 0.0001 . \quad (5.11)$$

Der erste Fehler entspricht dem experimentellen Anteil, während der zweite Fehler von theoretischer Seite verschuldet ist. Der theoretische Fehler entspricht in dieser Analyse den noch fehlenden S-Beiträgen zur Ordnung  $\mathcal{O}(a_s^4)$  und den Abschätzungen höherer NS-Beiträge zur Ordnung  $\mathcal{O}(a_s^5)$ . Hierfür wurde ein geometrisches Wachstum der Koeffizienten  $k_i$  der  $a_s^i$ -Ordnungen angenommen ( $\delta k_n = k_{n-1}^2/k_{n-2}$ ), was einen Fehler von  $\delta\Gamma_{Z,h} = \Gamma_0 \cdot 0.0012 = 0.0995$  ergibt. Die Annahme des geometrischen Wachstums liefert somit einen kleineren Fehler, als die im letzten Kapitel vorgestellte Skalenvariation zwischen  $1/3 M_Z < \mu < 3 M_Z$ .

Wenn wir erneut die neu berechneten S-Beiträge hinzunehmen, dann ergibt sich wieder eine Verschiebung von  $\delta\alpha_s^S = -0.0001$ , so dass wir einen neuen Wert für  $\alpha_s$  erhalten

$$\alpha_s^{\text{neu}'}(M_Z) = 0.1193 - 0.0001 = 0.1192 . \quad (5.12)$$

Der theoretische Fehler aus (4.95) mit  $\delta\Gamma_{Z,h} = \Gamma_0 \cdot 0.0013 = 0.1078$  MeV, den wir aus der Skalenvariation sämtlicher  $\mathcal{O}(a_s^4)$  Terme erhalten hatten, entspricht

5. Korrekturen zu  $\alpha_s(M_Z)$

dem Fehler, der schon in der Analyse verwendet wurde. Deshalb erhalten wir

$$\alpha_s^{\text{neu}'}(M_Z) = 0.1192_{-0.0027}^{+0.0028} \pm 0.0001 , \quad (5.13)$$

mit einer nun sehr viel fundierteren Grundlage des theoretischen Fehlers.

## 6. Zusammenfassung

Wir haben eine komplette Beschreibung der Zerfallsrate des  $Z$ -Bosons nach Hadronen  $\Gamma_{Z,h}$  zur Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s^4)$  geliefert. Um diese zu gewinnen, hatten wir uns das Optische Theorem zu eigen gemacht und somit die Zerfallsrate aus der Berechnung des Imaginärteils des  $Z$ -Propagators erhalten. Hierzu haben wir alle relevanten und bereits bekannten Beiträge aufgelistet (Kapitel 2). Daraus konnten wir ableiten, welche Terme zur gewünschten Genauigkeit noch nicht bekannt sind.

Diese fehlenden Beiträge, die Singlett-Korrekturen, haben wir deshalb, zusammen mit den bekannten Nicht-Singlett-Termen, in der masselosen QCD mit einem schweren Top-Quark berechnet. Dabei mussten wir das schwere Top-Quark zuerst von der Theorie entkoppeln (Abschnitt 4.2) und anschließend den  $Z$ -Propagator in der effektiven Fünf-Flavour-QCD behandeln (Abschnitt 4.3). Nach der Zusammenführung der Top-Effekte und der Propagatorbeiträge haben wir die Zerfallsrate inklusive der  $\mathcal{O}(\alpha_s^4)$  Terme und die Fehler hierauf, durch eine Abschätzung der fehlenden  $\mathcal{O}(\alpha_s^5)$  Terme, angegeben (Abschnitt 4.4)

$$\Gamma^{\text{NS}} = \Gamma_0 \left[ 20.9823 \pm 0.0012 \right], \quad (6.1)$$

$$\Gamma^{\text{S},V} = \Gamma_0 \left[ -0.000167 \pm 0.000032 \right], \quad (6.2)$$

$$\Gamma^{\text{S},A} = \Gamma_0 \left[ -0.02103 \pm 0.00050 \right], \quad (6.3)$$

$$\Gamma_{Z,h} = \Gamma^{\text{NS}} + \Gamma^{\text{S},V} + \Gamma^{\text{S},A} = \Gamma_0 \left[ 20.9611 \pm 0.0013 \right]. \quad (6.4)$$

In älteren Analysen [22–24] konnte aus dem Vergleich der experimentell gemessenen und theoretisch bestimmten  $Z$ -Zerfallsrate nach Hadronen ein sehr genauer Wert für  $\alpha_s(M_Z)$  extrahiert werden. Die zusätzlichen (Nicht-)Singlett-Korrekturen auf theoretischer Seite bewirken eine Verschiebung dieses Wertes

## 6. Zusammenfassung

um  $\delta\alpha_s^S = -0.0001$  ( $\delta\alpha_s^{NS} = +0.0005$ ) zu (Kapitel 5)

$$\alpha_s(M_Z) = \begin{cases} 0.1189 \pm 0.0026 \pm 0.0001, & (\text{LEP-EW-WG [22]}), \\ 0.1192_{-0.0027}^{+0.0028} \pm 0.0001. & (\text{GFITTER [23, 24]}). \end{cases} \quad (6.5)$$

Zusätzlich zur Verschiebung konnte der theoretische Fehler hierzu auf  $\pm 0.0001$  beschränkt werden.

# A. Anhang

## A.1. Formeln

Einige der Funktionen, die in höherer Schleifenordnungen auftreten, wollen wir hier angeben. Die  $\zeta$ -Funktion ist definiert als

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad (\text{A.1})$$

mit den expliziten Werten

$$\begin{aligned} \zeta(2) \equiv \zeta_2 &= \frac{\pi^2}{6} = 1.64493, & \zeta(3) \equiv \zeta_3 &= 1.20206, \\ \zeta(4) \equiv \zeta_4 &= \frac{\pi^4}{90} = 1.08232, & \zeta(5) \equiv \zeta_5 &= 1.03693, \\ \zeta(6) \equiv \zeta_6 &= \frac{\pi^6}{945} = 1.01734, & \zeta(7) \equiv \zeta_7 &= 1.00835. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Zusätzlich treten Polylogarithmen auf, die wir wie folgt abkürzen

$$a_n = \text{Li}_n(1/2) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i i^n}. \quad (\text{A.3})$$

mit den Werten

$$a_4 = 0.517479, \quad a_5 = 0.508401. \quad (\text{A.4})$$

## A.2. $C_h$ und $C_\psi$ in $SU(N)$

Die allgemeine Gruppenstruktur der in (4.46), (4.50) und (4.54) für den Fall der QCD ( $SU(3)$ ) angegebenen Entkopplungskoeffizienten  $C_h$ ,  $C_{NS}$  und  $C_\psi$  ist

$$\begin{aligned}
C_h = & \left(a_s^{(6)}\right)^2 c_f t_r \left[ \frac{3}{16} - \frac{3}{4} \ln_{\mu t} \right] \\
& + \left(a_s^{(6)}\right)^3 \left( t_r^2 c_f \left[ n_h \left( \frac{149}{432} - \frac{1}{6} \ln_{\mu t} + \frac{1}{4} \ln_{\mu t}^2 \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + n_l \left( + \frac{473}{432} - \frac{1}{6} \ln_{\mu t} + \frac{1}{4} \ln_{\mu t}^2 \right) \right] \right. \\
& \quad \left. + t_r c_f^2 \left[ \frac{5}{32} + \frac{27}{16} \ln_{\mu t} - \frac{3}{2} \zeta_3 \right] \right. \\
& \quad \left. + t_r c_a c_f \left[ - \frac{4621}{1728} - \frac{19}{24} \ln_{\mu t} - \frac{11}{16} \ln_{\mu t}^2 + \frac{29}{16} \zeta_3 \right] \right) \\
& + \left(a_s^{(6)}\right)^4 \left[ c_f t_r^3 \left( n_h^2 \left( \frac{-35051}{362880} + \frac{349}{840} \zeta_3 - \frac{5}{18} \ln_{\mu t} + \frac{1}{12} \ln_{\mu t}^2 - \frac{1}{12} \ln_{\mu t}^3 \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + n_h n_l \left( \frac{1535}{5184} + \frac{11}{12} \zeta_3 - \frac{47}{36} \ln_{\mu t} + \frac{1}{6} \ln_{\mu t}^2 - \frac{1}{6} \ln_{\mu t}^3 \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + n_l^2 \left( \frac{17735}{10368} - \frac{25}{24} \zeta_3 + \frac{1}{12} \ln_{\mu t}^2 - \frac{37}{36} \ln_{\mu t} - \frac{1}{12} \ln_{\mu t}^3 \right) \right] \right. \\
& \quad \left. + t_r^2 c_a c_f \left[ n_h \left( \frac{922307}{518400} - \frac{224}{15} a_4 + \frac{3}{4} B_4 - \frac{28}{45} \ln^4(2) \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{56}{15} \ln^2(2) \zeta_2 - \frac{128513}{19200} \zeta_3 + \frac{15563}{1920} \zeta_4 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \ln_{\mu t} \left( \frac{523}{144} - \frac{3}{8} \zeta_3 \right) + \frac{23}{48} \ln_{\mu t}^2 + \frac{11}{24} \ln_{\mu t}^3 \right) \right. \\
& \quad \left. + n_l \left( - \frac{102499}{20736} - 18 a_4 + \frac{3}{4} B_4 - \frac{3}{4} \ln^4(2) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{9}{2} \ln^2(2) \zeta_2 - \frac{235}{128} \zeta_3 + \frac{1677}{128} \zeta_4 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \ln_{\mu t} \left( \frac{205}{36} - \frac{3}{8} \zeta_3 \right) + \frac{23}{48} \ln_{\mu t}^2 + \frac{11}{24} \ln_{\mu t}^3 \right) \right] \\
& \quad \left. + t_r^2 c_f^2 \left[ n_h \left( - \frac{605509}{806400} + \frac{208}{15} a_4 - \frac{3}{2} B_4 + \frac{26}{45} \ln^4(2) \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{3}{4} \ln_{\mu t}^2 - \frac{52}{15} \ln^2(2) \zeta_2 - \frac{78329}{11200} \zeta_3 + \frac{253}{240} \zeta_4 + \frac{37}{64} \ln_{\mu t} \right) \right. \\
& \quad \left. \left. + n_l \left( - \frac{1713}{512} + 36 a_4 - \frac{3}{2} B_4 + \frac{3}{2} \ln^4(2) - 9 \ln^2(2) \zeta_2 \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{87}{16} \zeta_3 - \frac{315}{16} \zeta_4 + \frac{55}{64} \ln_{\mu t} - \frac{21}{16} \ln_{\mu t}^2 \right) \right] \\
& \quad \left. + t_r c_f^3 \left[ - \frac{5413}{9216} - \frac{323}{3} a_4 + 12 a_5 - \frac{323}{72} \ln^4(2) - \frac{1}{10} \ln^5(2) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{323}{12} \ln^2(2) \zeta_2 + \ln^3(2) \zeta_2 - \frac{1287}{128} \zeta_3 + \frac{4331}{96} \zeta_4 + \frac{51}{4} \ln(2) \zeta_4 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{403}{64} \zeta_5 - \frac{369}{128} \ln_{\mu t} \right] \right]
\end{aligned}$$

A.2.  $C_h$  und  $C_\psi$  in  $SU(N)$

$$\begin{aligned}
& + t_r c_a^2 c_f \left[ \frac{317897}{165888} + \frac{433}{12} a_4 + 4 a_5 - \frac{33}{16} B_4 + \frac{433}{288} \ln^4(2) \right. \\
& \quad - \frac{1}{30} L 2^5 - \frac{433}{48} \ln^2(2) \zeta_2 + \frac{1}{3} L 2^3 \zeta_2 + \frac{20689}{1536} \zeta_3 \\
& \quad - \frac{47233}{1536} \zeta_4 + \frac{61}{32} \ln(2) \zeta_4 - \frac{371}{64} \zeta_5 \\
& \quad \left. + \ln_{\mu t} \left( -\frac{2717}{288} + \frac{231}{32} \zeta_3 \right) - \frac{311}{192} \ln_{\mu t}^2 - \frac{121}{192} \ln_{\mu t}^3 \right] \\
& + t_r c_a c_f^2 \left[ \frac{32879}{4608} - \frac{55}{3} a_4 - 14 a_5 + \frac{33}{8} B_4 - \frac{55}{72} \ln^4(2) \right. \\
& \quad + \frac{7}{60} \ln^5(2) + \frac{55}{12} \ln^2(2) \zeta_2 - \frac{7}{6} \ln^3(2) \zeta_2 - \frac{3265}{256} \zeta_3 \\
& \quad + \frac{7813}{384} \zeta_4 - \frac{163}{16} \ln(2) \zeta_4 + \frac{1447}{128} \zeta_5 \\
& \quad \left. + \ln_{\mu t} \left( \frac{103}{16} - \frac{99}{16} \zeta_3 \right) + \frac{429}{128} \ln_{\mu t}^2 \right] . \tag{A.5}
\end{aligned}$$

$$C_{\text{NS}} = 1 + \left( a_s^{(6)} \right)^2 \varepsilon n_h c_f \left[ \frac{85}{27} - \frac{4}{9} \ln_{\mu t} + \frac{4}{3} \ln_{\mu t}^2 \right] . \tag{A.6}$$

$$\begin{aligned}
C_\psi & = \left( a_s^{(6)} \right)^3 t_r^2 c_f n_h \left( -\frac{343}{432} - \frac{1}{24} \ln_{\mu t} - \frac{1}{4} \ln_{\mu t}^2 \right) \\
& \quad + \left( a_s^{(6)} \right)^4 \left( t_r^3 c_f \left[ n_h^2 \left( \frac{6167}{10368} + \frac{31}{36} \ln_{\mu t} + \frac{1}{48} \ln_{\mu t}^2 + \frac{1}{6} \ln_{\mu t}^3 - \frac{25}{24} \zeta_3 \right) \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \left. + n_h n_l \left( -\frac{5881}{5184} + \frac{401}{432} \ln_{\mu t} + \frac{1}{12} \ln_{\mu t}^3 + \frac{11}{12} \zeta_3 \right) \right] \right. \\
& \quad + t_r^2 c_f^2 n_h \left[ \frac{6143}{1536} - 12 a_4 - \frac{1}{2} \ln^4(2) + \frac{35}{64} \ln_{\mu t} + \frac{9}{8} \ln_{\mu t}^2 \right. \\
& \quad \quad \left. + \frac{1}{2} \ln^2(2) \pi^2 + \frac{47}{480} \pi^4 - \frac{51}{8} \zeta_3 - \frac{3}{2} \ln_{\mu t} \zeta_3 \right] \\
& \quad + t_r^2 c_a c_f n_h \left[ -\frac{41659}{20736} + 6 a_4 + \frac{1}{4} \ln^4(2) - \frac{2911}{1728} \ln_{\mu t} \right. \\
& \quad \quad - \frac{15}{16} \ln_{\mu t}^2 - \frac{11}{48} \ln_{\mu t}^3 - \frac{1}{4} \ln^2(2) \pi^2 - \frac{91}{1280} \pi^4 \\
& \quad \quad \left. \left. + \frac{521}{128} \zeta_3 + \frac{23}{16} \ln_{\mu t} \zeta_3 \right] \right) . \tag{A.7}
\end{aligned}$$

Die Konstanten  $n_h$  ( $n_h = 1$  in (4.46), (4.50) und (4.54)) und  $n_l$  bezeichnen die Anzahl der schweren und leichten Teilchen. Die Farbfaktoren  $c_f$ ,  $c_a$  und  $t_r$  sind für die  $SU(N)$ -Theorie gegeben durch

$$c_f = \frac{N^2 - 1}{2N} , \quad c_a = N , \quad t_r = \frac{1}{2} . \tag{A.8}$$



# Literaturverzeichnis

- [1] P. A. Baikov, K. G. Chetyrkin and J. H. Kühn, Phys. Rev. Lett. **101**, 012002 (2008) [arXiv:0801.1821 [hep-ph]].
- [2] M. Beneke and M. Jamin, JHEP **0809**, 044 (2008) [arXiv:0806.3156 [hep-ph]].
- [3] M. Davier, S. Descotes-Genon, A. Hocker, B. Malaescu and Z. Zhang, Eur. Phys. J. C **56**, 305 (2008) [arXiv:0803.0979 [hep-ph]].
- [4] K. Maltman and T. Yavin, Phys. Rev. D **78**, 094020 (2008) [arXiv:0807.0650 [hep-ph]].
- [5] S. Menke, arXiv:0904.1796 [hep-ph].
- [6] S. Narison, Phys. Lett. B **673**, 30 (2009) [arXiv:0901.3823 [hep-ph]].
- [7] I. Caprini and J. Fischer, Eur. Phys. J. C **64**, 35 (2009) [arXiv:0906.5211 [hep-ph]].
- [8] N. Brambilla, X. Garcia i Tormo, J. Soto and A. Vairo, Phys. Rev. D **75**, 074014 (2007) [hep-ph/0702079].
- [9] C. T. H. Davies *et al.* [HPQCD Collaboration], Phys. Rev. D **78**, 114507 (2008) [arXiv:0807.1687 [hep-lat]].
- [10] C. T. H. Davies *et al.* [HPQCD and UKQCD and MILC and Fermilab Lattice Collaborations], Phys. Rev. Lett. **92**, 022001 (2004) [hep-lat/0304004].
- [11] K. Maltman, D. Leinweber, P. Moran and A. Sternbeck, Phys. Rev. D **78**, 114504 (2008) [arXiv:0807.2020 [hep-lat]].
- [12] S. Aoki *et al.* [PACS-CS Collaboration], JHEP **0910**, 053 (2009) [arXiv:0906.3906 [hep-lat]].
- [13] J. Blumlein, H. Bottcher and A. Guffanti, Nucl. Phys. B **774**, 182 (2007) [hep-ph/0607200].
- [14] G. Dissertori, A. Gehrmann-De Ridder, T. Gehrmann, E. W. N. Glover, G. Heinrich, G. Luisoni and H. Stenzel, JHEP **0908**, 036 (2009) [ar-

- Xiv:0906.3436 [hep-ph]].
- [15] S. Bethke *et al.* [JADE Collaboration], Eur. Phys. J. C **64**, 351 (2009) [arXiv:0810.1389 [hep-ex]].
- [16] [ALEPH and DELPHI and L3 and OPAL and SLD and LEP Electroweak Working Group and SLD Electroweak Group and SLD Heavy Flavour Group Collaborations], Phys. Rept. **427**, 257 (2006) [hep-ex/0509008].
- [17] S. Bethke, Eur. Phys. J. C **64**, 689 (2009) [arXiv:0908.1135 [hep-ph]].
- [18] K. G. Chetyrkin, J. H. Kühn and A. Kwiatkowski, Phys. Rept. **277** (1996) 189 and references therein.
- [19] K. G. Chetyrkin and O. V. Tarasov, Phys. Lett. B **327**, 114 (1994) [arXiv:hep-ph/9312323].
- [20] S. A. Larin, T. van Ritbergen and J. A. M. Vermaseren, Nucl. Phys. B **438** (1995) 278 [arXiv:hep-ph/9411260].
- [21] K. G. Chetyrkin and J. H. Kühn, Phys. Lett. B **308**, 127 (1993).
- [22] J. Alcaraz *et al.* [ LEP and ALEPH and DELPHI and L3 and OPAL and LEP Electroweak Working Group Collaborations ], [arXiv:0712.0929 [hep-ex]].
- [23] H. Flacher, M. Goebel, J. Haller, A. Hocker, K. Monig and J. Stelzer, Eur. Phys. J. C **60**, 543 (2009) [Erratum-ibid. C **71**, 1718 (2011)] [arXiv:0811.0009 [hep-ph]].
- [24] M. Goebel [on behalf of the Gfitter Group], PoS **ICHEP2010**, 570 (2010) [arXiv:1012.1331 [hep-ph]].
- [25] M. Winter, ECFA-DESY Linear Collider Note LC-PHSM-2001-016.
- [26] K. Nakamura *et al.* [Particle Data Group Collaboration], J. Phys. G G **37**, 075021 (2010).
- [27] A. O G. Kallen and A. Sabry, Kong. Dan. Vid. Sel. Mat. Fys. Med. **29N17**, 1 (1955); J. Schwinger, Particles, Sources and Fields, Vol.II (Addison-Wesley, New York, 1973)
- [28] J. Jersak, E. Laermann and P. M. Zerwas, Phys. Lett. B **98**, 363 (1981); Phys. Rev. D **25**, 1218 (1982) [Erratum-ibid. D **36**, 310 (1987)].
- [29] K. G. Chetyrkin and J. H. Kühn, Nucl. Phys. B **432**, 337 (1994) [hep-ph/9406299].
- [30] K. G. Chetyrkin, R. Harlander, J. H. Kühn and M. Steinhauser, Nucl.

- Phys. B **503**, 339 (1997) [hep-ph/9704222].
- [31] R. Harlander and M. Steinhauser, Eur. Phys. J. C **2**, 151 (1998) [hep-ph/9710413].
- [32] K. G. Chetyrkin, R. Harlander and J. H. Kühn, hep-ph/9910345.
- [33] K. G. Chetyrkin, R. V. Harlander and J. H. Kühn, Nucl. Phys. B **586** (2000) 56 [Erratum-ibid. B **634** (2002) 413] [arXiv:hep-ph/0005139].
- [34] R. V. Harlander, Dissertation, Universität Karlsruhe (unpublished)
- [35] P. A. Baikov, K. G. Chetyrkin and J. H. Kühn, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **135**, 243 (2004).
- [36] K. G. Chetyrkin, J. H. Kühn and M. Steinhauser, Nucl. Phys. B **505**, 40 (1997) [hep-ph/9705254].
- [37] Y. Kiyo, A. Maier, P. Maierhofer and P. Marquard, Nucl. Phys. B **823**, 269 (2009) [arXiv:0907.2120 [hep-ph]].
- [38] K. G. Chetyrkin, R. Harlander and M. Steinhauser, Phys. Rev. D **58**, 014012 (1998) [hep-ph/9801432].
- [39] B. A. Kniehl and J. H. Kühn, Phys. Lett. B **224**, 229 (1989).
- [40] B. A. Kniehl and J. H. Kühn, Nucl. Phys. B **329**, 547 (1990).
- [41] A. L. Kataev, Phys. Lett. B **287**, 209 (1992).
- [42] L. R. Surguladze, hep-ph/9803211.
- [43] A. A. Akhundov, D. Y. Bardin and T. Riemann, Nucl. Phys. B **276**, 1 (1986).
- [44] J. Bernabeu, M. B. Gavela and A. Santamaria, Phys. Rev. Lett. **57**, 1514 (1986).
- [45] J. Bernabeu, A. Pich and A. Santamaria, Phys. Lett. B **200**, 569 (1988).
- [46] J. Fleischer, O. V. Tarasov, F. Jegerlehner and P. Raczka, Phys. Lett. B **293**, 437 (1992).
- [47] G. Buchalla and A. J. Buras, Nucl. Phys. B **398**, 285 (1993).
- [48] G. Degrassi, Nucl. Phys. B **407**, 271 (1993) [hep-ph/9302288].
- [49] K. G. Chetyrkin, A. Kwiatkowski and M. Steinhauser, Mod. Phys. Lett. A **8**, 2785 (1993).
- [50] R. Harlander, T. Seidensticker and M. Steinhauser, Phys. Lett. B **426**, 125 (1998) [hep-ph/9712228].

- [51] J. Fleischer, F. Jegerlehner, M. Tentyukov and O. Veretin, Phys. Lett. B **459**, 625 (1999) [hep-ph/9904256].
- [52] A. Czarnecki and J. H. Kühn, Phys. Rev. Lett. **77**, 3955 (1996) [arXiv:hep-ph/9608366].
- [53] A. Czarnecki and K. Melnikov, Phys. Rev. D **56**, 1638 (1997) [arXiv:hep-ph/9609302].
- [54] M. Awramik, M. Czakon, A. Freitas and G. Weiglein, Phys. Rev. D **69**, 053006 (2004) [hep-ph/0311148].
- [55] M. Awramik, M. Czakon, A. Freitas and G. Weiglein, Phys. Rev. Lett. **93**, 201805 (2004) [hep-ph/0407317].
- [56] M. Awramik, M. Czakon and A. Freitas, JHEP **0611**, 048 (2006) [hep-ph/0608099].
- [57] D. Y. Bardin, P. Christova, M. Jack, L. Kalinovskaya, A. Olchevski, S. Riemann and T. Riemann, Comput. Phys. Commun. **133**, 229 (2001) [hep-ph/9908433].
- [58] A. B. Arbuzov, M. Awramik, M. Czakon, A. Freitas, M. W. Grunewald, K. Monig, S. Riemann and T. Riemann, Comput. Phys. Commun. **174**, 728 (2006) [hep-ph/0507146].
- [59] P. Nogueira, J. Comput. Phys. **105**, 279 (1993).
- [60] T. Seidensticker, hep-ph/9905298.
- [61] V. A. Smirnov, Applied Asymptotic Expansions in Momenta and Masses, Springer Tracts in Modern Physics
- [62] J. A. M. Vermaseren, arXiv:math-ph/0010025.
- [63] M. Steinhauser, Comput. Phys. Commun. **134**, 335 (2001) [hep-ph/0009029].
- [64] S. A. Larin, F. V. Tkachov and J. A. M. Vermaseren, NIKHEF-H-91-18.
- [65] P. Marquard, D. Seidel. Crusher. an automated integral reduction setup. Unveröffentlicht.
- [66] C. W. Bauer, A. Frink, R. Kreckel. Introduction to the GiNaC framework for symbolic computation within the C++ programming language. 2000. arXiv:cs/0004015.
- [67] R. H. Lewis. Fermat user's guide. <http://home.bway.net/lewis>.
- [68] M. Caffo, H. Czyz, S. Laporta and E. Remiddi, Nuovo Cim. A **111**, 365

- (1998) [hep-th/9805118].
- [69] Y. Schroder and A. Vuorinen, JHEP **0506**, 051 (2005) [hep-ph/0503209].
- [70] S. Laporta, Phys. Lett. B **549**, 115 (2002) [hep-ph/0210336].
- [71] K. G. Chetyrkin, J. H. Kühn, P. Mastrolia and C. Sturm, Eur. Phys. J. C **40**, 361 (2005) [hep-ph/0412055].
- [72] Y. Schroder and M. Steinhauser, JHEP **0601**, 051 (2006) [hep-ph/0512058].
- [73] Y. Schroder and M. Steinhauser, Phys. Lett. B **622**, 124 (2005) [hep-ph/0504055].
- [74] B. A. Kniehl and A. V. Kotikov, Phys. Lett. B **638**, 531 (2006) [hep-ph/0508238].
- [75] E. Bejdakic and Y. Schroder, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **160**, 155 (2006) [hep-ph/0607006].
- [76] K. G. Chetyrkin, M. Faisst, C. Sturm and M. Tentyukov, Nucl. Phys. B **742**, 208 (2006) [hep-ph/0601165].
- [77] B. A. Kniehl and A. V. Kotikov, Phys. Lett. B **642**, 68 (2006) [hep-ph/0607201].
- [78] B. A. Kniehl, A. V. Kotikov, A. I. Onishchenko and O. L. Veretin, Phys. Rev. Lett. **97**, 042001 (2006) [hep-ph/0607202].
- [79] J. Collins, Renormalization, Cambridge University Press, 1998
- [80] K. G. Chetyrkin, Phys. Lett. B **404**, 161 (1997) [hep-ph/9703278].
- [81] J. A. M. Vermaseren, S. A. Larin and T. van Ritbergen, Phys. Lett. B **405**, 327 (1997) [hep-ph/9703284].
- [82] T. van Ritbergen, J. A. M. Vermaseren and S. A. Larin, Phys. Lett. B **400**, 379 (1997) [hep-ph/9701390].
- [83] K. G. Chetyrkin, M. Misiak and M. Munz, Nucl. Phys. B **518**, 473 (1998) [hep-ph/9711266].
- [84] M. Czakon, Nucl. Phys. B **710**, 485 (2005) [hep-ph/0411261].
- [85] K. G. Chetyrkin, Nucl. Phys. B **710**, 499 (2005) [hep-ph/0405193].
- [86] S. L. Adler and W. A. Bardeen, Phys. Rev. **182**, 1517 (1969).
- [87] G. 't Hooft and M. J. G. Veltman, Nucl. Phys. B **44**, 189 (1972).
- [88] D. A. Akyeampong and R. Delbourgo, Nuovo Cim. A **17**, 578 (1973).

- [89] P. Breitenlohner and D. Maison, *Commun. Math. Phys.* **52**, 11 (1977).
- [90] M. S. Chanowitz, M. Furman and I. Hinchliffe, *Nucl. Phys. B* **159**, 225 (1979).
- [91] W. Siegel, *Phys. Lett. B* **84**, 193 (1979).
- [92] A. J. Buras and P. H. Weisz, *Nucl. Phys. B* **333**, 66 (1990).
- [93] S. G. Gorishnii and S. A. Larin, *Phys. Lett. B* **172**, 109 (1986).
- [94] S. A. Larin, *Phys. Lett. B* **303**, 113 (1993) [hep-ph/9302240].
- [95] S. G. Gorishnii and S. A. Larin, *Nucl. Phys. B* **283**, 452 (1987).
- [96] K. G. Chetyrkin, B. A. Kniehl and M. Steinhauser, *Nucl. Phys. B* **510**, 61 (1998) [hep-ph/9708255].
- [97] K. G. Chetyrkin, J. H. Kühn and C. Sturm, *Nucl. Phys. B* **744**, 121 (2006) [hep-ph/0512060].
- [98] A. G. Grozin, P. Marquard, J. H. Piclum and M. Steinhauser, *Nucl. Phys. B* **789**, 277 (2008) [arXiv:0707.1388 [hep-ph]].
- [99] S. A. Larin and J. A. M. Vermaseren, *Phys. Lett. B* **259**, 345 (1991).
- [100] S. A. Larin, T. van Ritbergen and J. A. M. Vermaseren, *Phys. Lett. B* **404**, 153 (1997) [hep-ph/9702435].
- [101] K. G. Chetyrkin and J. H. Kühn, *Z. Phys. C* **60**, 497 (1993).
- [102] K. G. Chetyrkin, A. L. Kataev and F. V. Tkachov, *Phys. Lett. B* **85**, 277 (1979).
- [103] M. Dine and J. R. Sapiirstein, *Phys. Rev. Lett.* **43**, 668 (1979).
- [104] W. Celmaster and R. J. Gonsalves, *Phys. Rev. Lett.* **44**, 560 (1980).
- [105] S. G. Gorishnii, A. L. Kataev and S. A. Larin, *Phys. Lett. B* **259**, 144 (1991).
- [106] L. R. Surguladze and M. A. Samuel, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 560 (1991) [Erratum-ibid. **66**, 2416 (1991)].
- [107] S. A. Larin, T. van Ritbergen, J. A. M. Vermaseren, *Phys. Lett.* **B320**, 159-164 (1994). [hep-ph/9310378].
- [108] P. A. Baikov, K. G. Chetyrkin and J. H. Kühn, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **205-206**, 237 (2010) [arXiv:1007.0478 [hep-ph]].
- [109] P. A. Baikov, K. G. Chetyrkin, J. H. Kühn and J. Rittinger, in preparation.

- [110] N. Gray, D. J. Broadhurst, W. Grafe and K. Schilcher, *Z. Phys. C* **48**, 673 (1990).
- [111] J. Fleischer, F. Jegerlehner, O. V. Tarasov and O. L. Veretin, *Nucl. Phys. B* **539**, 671 (1999) [Erratum-ibid. *B* **571**, 511 (2000)] [hep-ph/9803493].
- [112] K. G. Chetyrkin and M. Steinhauser, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4001 (1999) [hep-ph/9907509]; *Nucl. Phys. B* **573**, 617 (2000) [hep-ph/9911434].
- [113] K. Melnikov and T. v. Ritbergen, *Phys. Lett. B* **482**, 99 (2000) [hep-ph/9912391].
- [114] K. G. Chetyrkin, J. H. Kühn and M. Steinhauser, *Comput. Phys. Commun.* **133** (2000) 43 [arXiv:hep-ph/0004189].



# Publikationsliste

- [115] G. Bell, J. H. Kühn and J. Rittinger, “Electroweak Sudakov Logarithms and Real Gauge-Boson Radiation in the TeV Region”, *Eur. Phys. J. C* **70**, 659 (2010) [arXiv:1004.4117 [hep-ph]].
- [116] P. A. Baikov, K. G. Chetyrkin, J. H. Kühn and J. Rittinger, “Complete QCD Corrections to Hadronic  $Z$ -Decays in Order  $\alpha_s^4$ ”, [arXiv:1201.5804 [hep-ph]].
- [117] P. A. Baikov, K. G. Chetyrkin, J. H. Kühn and J. Rittinger, “ $R(s)$  and  $Z$  decay in  $\mathcal{O}(\alpha_s^4)$ : complete results”, in proceedings of “10th International Symposium on Radiative Corrections”, PoS(RADCOR2011)03



# Danksagung

Zum Gelingen dieser Arbeit haben viele Menschen beigetragen, denen ich an dieser Stelle danken möchte.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. J. H. Kühn für die große Unterstützung über den Zeitraum meiner Diplom- und Doktorarbeit. Neben den sehr interessanten Themen, an denen ich arbeiten durfte, möchte ich mich für die finanzielle Unterstützung beim Besuch von Sommerschulen und Konferenzen, sowie für die vielen Diskussionen bedanken. Mit ihm hatte ich immer einen Ansprechpartner mit viel Expertise und dem richtigen Gespür für die Richtung, in der man ein Projekt verfolgen sollte. Herrn Prof. M. Steinhauser möchte ich für die Übernahme des Korreferats danken, sowie für die Bereitschaft jederzeit bei Fragen und Problemen behilflich zu sein.

Außerdem möchte ich mich bei meinem Betreuer Dr. Kostja Chetyrkin für die umfangreiche und außerordentlich gute Zusammenarbeit bedanken. Er hatte zu jeder Zeit ein offenes Ohr für Probleme oder Fragen. Seine Ratschläge und Ideen sowie die gemeinsamen, verständnisfördernden Diskussionen haben mir geholfen, diese Arbeit fertigzustellen.

Bei Peter Marquard und Nikolai Zerf bedanke ich mich ganz herzlich für das Korrekturlesen und viele nützliche Tipps und Diskussionen. Bei Andreas Maier möchte ich mich für viele Erklärungen und nützliche Anregungen zum Beginn meiner Doktorarbeit bedanken und Jorge Mondejar für die sehr gute und produktive Zusammenarbeit. Dem gesamten Institut danke ich für die angenehme Arbeitsatmosphäre und den netten Umgang miteinander.

Mein größter Dank gilt meiner Frau Ulrike und meiner ganzen Familie, die mich immer hundertprozentig unterstützen, motivieren und mir den nötigen Freiraum, den eine solche Arbeit erfordert, geschaffen haben.



# Lebenslauf

## Jörg Rittinger

Institut für Theoretische Teilchenphysik  
Universität Karlsruhe (TH)  
Engesserstraße 7  
76131 Karlsruhe  
Tel. 0721/608-3373

Saarlandstraße 164  
76187 Karlsruhe  
0176/24152331  
joergrittinger@web.de

## Personendaten

Geburtsdatum	23.04.1983
Geburtsort	Stuttgart
Staatsangehörigkeit	deutsch
Familienstand	verheiratet

## Schulausbildung

1989 - 1993	Grundschule Illingen
1993 - 2002	Friedrich-Abel-Gymnasium Vaihingen/Enz
26.06.2002	Abitur (Note 1,6)

## Zivildienst

2002 - 2003                      August-Hermann-Werner-Schule Markgröningen  
   Staatliche Schule für Körperbehinderte mit Internat

## Universitätsausbildung

Studium	2003 - 2009: Physikstudium an der Universität Karlsruhe
Vordiplom	16.09.2005
Diplomarbeit	Phänomenologie logarithmischer Strukturen im Sudakov-Limes
Diplom	21.01.2009: Hauptdiplom in Physik (Note 1,1)
Promotion	Physik am Karlsruher Institut für Technologie seit Februar 2009
Tag der Prüfung	25.05.2012
Titel	Totale Zerfallsrate des $Z$ -Bosons nach Hadronen zur Ordnung $\alpha_s^4$
Referent	Prof. Dr. J. H. Kühn
Korreferent	Prof. Dr. M. Steinhauser

# Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich diese Arbeit selbständig verfasst und dabei keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe. Außerdem sind alle verwendeten Beiträge/Ergebnisse Dritter nach bestem Wissen explizit zugeordnet bzw. zitiert.

Des weiteren versichere ich, dass diese Arbeit im Rahmen meines ersten Promotionsverfahrens angefertigt wurde. Darüber hinaus habe ich momentan keine weiteren Promotionsverfahren vorliegen.

Karlsruhe, den \_\_\_\_\_ (Jörg Rittinger)