

Strömung-struktur-gekoppelte Modellierung und Simulation des menschlichen Herzens

Zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Ingenieurwissenschaften

der Fakultät für Maschinenbau
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
genehmigte

Dissertation

von

Dipl.-Ing. Mark-Patrick Mühlhausen

aus Karlsruhe

Datum der mündlichen Prüfung:
05. Juni 2012

Hauptreferent: Professor Dr.-Ing. habil. H. Oertel
Korreferent: Professor Dr.-Ing. habil. U. Janoske
Korreferent: Professor Dr.-Ing. habil. A. Class

Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Strömungslehre des Karlsruher Instituts für Technologie (KIT).

Herrn Prof. Dr.-Ing. Herbert Oertel möchte ich für die interessante und herausfordernde Aufgabenstellung, die Betreuung der Arbeit und die Übernahme des Hauptreferats danken. Seine Ideen und seine Fähigkeit, meine Aufmerksamkeit stets auf die relevanten Fragestellungen zu lenken, haben maßgeblich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen. Die regelmäßigen Treffen in Göttingen waren über die fachlichen Diskussionen hinaus stets eine Bereicherung und werden mir positiv in Erinnerung bleiben. Den Herrn Professoren Dr.-Ing. Andreas Class und Uwe Janoske danke ich für das freundliche Interesse an dieser Arbeit und die Übernahme des Korreferats.

Ich danke meiner Freundin, dass sie immer meinen manchmal zu detaillierten Ausführungen mit Interesse folgte und mir im Privaten den Rückhalt gab um mich dieser Arbeit zu widmen sowie für die Unterstützung bei der formalen Korrektur. Danke Eva!

Meinen beiden Kollegen Thomas und Markus sowie den guten Seelen im Sekretariat Frau Hasecic und Frau Fritsch-Kirchner danke ich für die freundschaftliche und produktive Arbeitsatmosphäre. Es hat stets Freude gemacht, die vielen Herausforderungen in Lehre und Organisation gemeinsam zu bewältigen und Dinge anzupacken. Auch gebührt mein Dank den Studenten, die durch ihr fleißiges und kreatives Schaffen ihren Teil zu dieser Arbeit beigetragen haben.

Ein großer Dank geht an Elke und Silke, die mich unterstützten diese Arbeit sprachlich und formal zu verbessern, sowie meinem Freund Johannes für zahlreiche Anregungen, die mir halfen meine Formulierungen präziser und kürzer zu gestalten.

Nicht zuletzt danke ich meinen Eltern Wolfgang und Bettie-Jean, die mir stets mit viel Rat und Tat in allen Fragen zur Seite standen, die mir viel Freiraum für Entfaltung boten und mich in allen meinen Zielen nach besten Kräften unterstützten. Ihnen widme ich diese Arbeit. Ihre liebevolle Unterstützung führte mich zielsicher durch Schule, Studium und Promotion. Darüber hinaus danke ich meinem Vater für seine großes Engagement zur sprachlichen und formalen Verbesserung dieser Arbeit und sein reges Interesse an meinem Thema.

Karlsruhe, im April 2012

Mark-Patrick Mühlhausen

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation	2
1.2	Stand der Forschung	3
1.2.1	Untersuchungen des Herzmuskels	3
1.2.2	Strömungen im Herzen	5
1.2.3	Das Karlsruher Herzmodell - KaHMo	8
1.3	Zielsetzung und Gliederung	9
I	Grundlagen	11
2	Medizinische Grundlagen	13
2.1	Anatomie des Herzens	13
2.1.1	Grobstruktur und Herzklappen	14
2.1.2	Feinstruktur und Funktionsweise des Muskels	15
2.1.3	Herz und Kreislauf	18
2.2	Physiologie des Herzens	19
2.2.1	Erregungsbildungs- und -leitungssystem	19
2.2.2	Herzzyklus	20
2.3	Physiologie des Blutes	21
3	Kontinuumsmechanische Grundlagen	23
3.1	Körper, Konfiguration und Kinematik	23
3.2	Spannungstensoren	25
3.3	Invarianten	27
3.4	Bilanzgleichungen der Kontinuumsmechanik	28
3.4.1	Massenbilanz	29
3.4.2	Impulsbilanz	30
3.4.3	Energiebilanz	30
3.5	Materialverhalten von Fluiden	30

3.5.1	Ideale Fluide	31
3.5.2	Viskose Fluide	31
3.6	Dimensionslose Kennzahlen	32
3.7	Materialgleichungen der Strukturmechanik	34
3.7.1	Prinzipien konstitutiver Gleichungen	34
3.7.2	Elastische Festkörper	35
3.7.3	Hyperelastische Festkörper	35
3.7.4	Lineare Elastizität	36
3.7.5	Eigenschaften von Materialien	37
3.8	Anfangs- und Randbedingungen	37
4	Numerische Grundlagen	39
4.1	Methode der Finiten-Volumen	39
4.1.1	Diskretisierungsverfahren	40
4.1.2	Kopplung von Geschwindigkeit und Druck	42
4.1.3	CFL-Kriterium	42
4.2	Methode der Finiten-Elemente	43
4.2.1	Prinzip der virtuellen Arbeit	43
4.2.2	Finite-Elemente	44
4.3	Verwendete Software	44
5	Grundlagen der Fluid-Struktur-Interaktion	45
5.1	Methoden der Fluid-Struktur-Interaktion	46
5.1.1	Euler-Methoden	46
5.1.2	Lagrange-Methoden	46
5.1.3	Arbitrary-Euler-Lagrange-Methode	47
5.2	Immersed-Boundary-Methode (IBM)	48
5.2.1	Kontinuierliche Ansätze	49
5.2.2	Diskrete Ansätze	50
5.3	Lösungsverfahren gekoppelter Probleme	51
5.4	Kopplungsbedingungen	52
5.5	Kopplungsalgorithmen für partitionierte Lösungsverfahren	53
5.6	Stabilität	54
5.7	Relaxationsverfahren	55

II	Modellierung	57
6	Kopplung mit der Methode virtueller Grenzen	59
6.1	Anforderungen an die Kopplung	59
6.2	Kopplungsalgorithmus	60
6.3	Konvergenz der Strömung-Struktur-Kopplung	66
6.4	Parallelisierung des Programmcodes	68
6.5	Validierungskonzept	69
7	Kopplungsmodelle	71
7.1	Modell der Herzwand	71
7.1.1	Geometrie und Vernetzung	71
7.1.2	Implementierung des Faserverlaufes im Herzmuskel	72
7.1.3	Orthotropes Materialgesetz zur Beschreibung des passiven Materialverhaltens	73
7.1.4	Muskelkontraktion in der Systole	75
7.1.5	Parameter des Materialgesetzes	76
7.2	Modell des Fluidraumes	77
7.2.1	Patientenspezifische Geometrie und Vernetzung	77
7.2.2	Numerische Einstellungen	78
7.2.3	Modellierung der Blutrheologie	79
7.2.4	Kreislaufmodell	79
7.2.5	Herzklappen	81
III	Simulation	83
8	Validierung der Methode virtueller Grenzen	85
8.1	Zweidimensionaler Kanal mit Lappen	85
8.2	Membranverschlossene Kavität unter Innendruck	87
8.3	Dreidimensionaler Kanal mit elastischem Lappen	92
9	Herzmuskelmodellierung im Rahmen von KaHMo-FSI	95
9.1	Ergebnisse der Strukturberechnung	95
9.1.1	Verformungsverhalten	95
9.1.2	Spannungsverteilung	96
9.2	Ergebnisse der Strömungsberechnung	97
9.2.1	Analyse der Druck- und Volumenverläufe	97
9.2.2	Quantitative Erfassung der Ventrikelströmung	99
9.2.3	Untersuchung der Strömungsstruktur im Ventrikel	101

10 Zusammenfassung und Ausblick	109
IV Anhang	113
Abbildungsverzeichnis	115
Tabellenverzeichnis	119
Literaturverzeichnis	121

1 Einleitung

Die Untersuchung von Wechselwirkungsphänomenen zwischen Fluiden und Festkörpern ist von großer Bedeutung. Dies hat im wesentlichen zwei Gründe. Einerseits basieren viele Funktionen in Natur und Technik auf diesem Wechselspiel. Hier sind in der Natur beispielsweise der Vogelflug oder der Floßenschlag zu nennen (s. Abb. 1.2) [124, 123]. Im Bereich der Technik kann der Auftrieb von Schiffen bzw. die Rissausbreitung bei schwingbeanspruchten Tragflügeln von Flugzeugen angeführt werden (s. Abb. 1.1). Andererseits ist ihre Berücksichtigung für viele Optimierungsaufgaben unerlässlich. Als Beispiel sind hier die Wärmeabfuhr bei strömungsgekühlten, thermisch belasteten Bauteilen, die Widerstandsreduktion bei angeströmten Körpern oder die Geräuschentwicklung durch strömungsinduzierte Vibration zu nennen.



Abbildung 1.1: Wechselwirkungsphänomene in der Technik [124]

Die Lösung solcher Fragestellungen ist auch heute noch eine große Herausforderung. Neben experimentellen Untersuchungen werden aufgrund fortschrittlicher technischer Methoden und gesteigerter Rechenleistung zunehmend auch mathematische oder theoretische Ansätze verfolgt. Viele Phänomene mit technischer Relevanz sind analytisch nicht zugänglich und erfordern daher eine numerische Herangehensweise. Für die effiziente rechnergestützte Behandlung solcher Fragestellungen existieren jedoch keine allgemeingültigen Methoden und Verfahren. Hinzu kommt, dass die Lösung gekoppelter Probleme a priori einen deutlich größeren Rechenaufwand besitzt, als ungekoppelte.

Ein besonders herausforderndes Feld der Strömung-Struktur-Interaktion ist die Bioströmungsmechanik, welche das Verstehen und das Lernen von der Natur zum Ziel hat. Ein Paradebeispiel stellt dabei das menschliche Herz dar, welches als Pumpe mit höchst instationären Betriebszuständen eine beeindruckende Lebensdauer besitzt. Neben dem komplexen biologischen Aufbau zeigt das Herz anisotrope, nicht-lineare und das Blut nicht-Newton'sche Materialeigenschaften. Des Weiteren ist die Herzerregung, die Kontraktion, der Blutfluss und deren Interaktion noch nicht vollständig verstanden, so dass sie nur ungenau modelliert werden können.

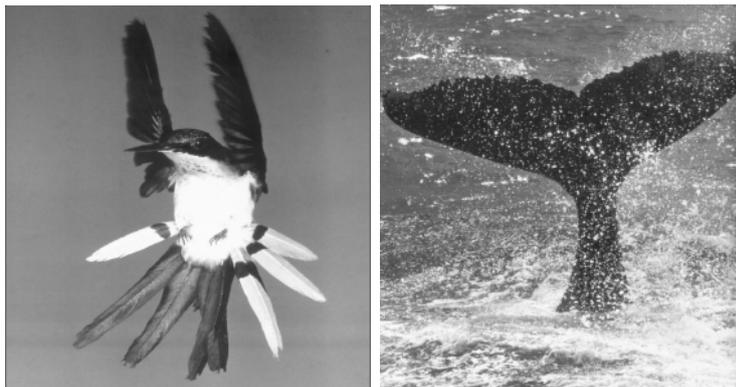


Abbildung 1.2: Wechselwirkungsphänomene in der Natur: Vogelflug (links), Floßenschlag (rechts) [124]

1.1 Motivation

Das Herz als zentrales Organ des Menschen ist der Motor des Blutkreislaufs und gewährleistet die Versorgung der Zellen mit Sauerstoff und Nährstoffen sowie den Abtransport von Stoffwechselprodukten. Es schlägt in Ruhe ca. 60 mal pro Minute. Bei Belastung kann sich die Herzfrequenz sogar versiebenfachen [84]. Das Herz pumpt bei jedem Schlag ca. 70 ml Blut in ein Gefäßsystem von mehr als 100000 km Gesamtlänge. Hierzu verbraucht es pro Schlag eine Energie von ca. 1 Joule [37]. Technisch gesehen handelt es sich bei dem Herzen um eine un stetig fördernde Pumpe. Die Pumpwirkung wiederum entsteht durch eine Interaktion zwischen Herzwand und Blut.

Des weiteren wird das Herz durch Faktoren belastet, die sich unter Umwelteinflüssen und Lebenswandel (Stress, Ernährung, Bewegungsmangel etc.) zusammenfassen lassen. Aufgrund der Bedeutung dieser Pumpe und dessen Belastung gehören Erkrankungen des Herz-Kreislauf-Systems zu den häufigsten Todesursachen in den Industriestaaten [159]. Neben der hohen Mortalität sind die Einschränkung der Lebensqualität z.B. bei chronischer Herzinsuffizienz und der volkswirtschaftliche Schaden die größten Nebeneffekte.

Außer den Medizinern forschen auch Naturwissenschaftler, Ingenieure und Mathematiker am Herz und leisten ihren Beitrag zum Verständnis dieses komplexen Systems. Ein Ziel ist es, bereits frühzeitig Erkrankungen zu erkennen, um präventiv gegenzusteuern zu können. Es hat sich gezeigt, dass die Wandspannungen, das Verformungsverhalten und die kardialen Strömungen zur Ableitung der Funktionsfähigkeit des Herzens von Bedeutung sind. Die Wandspannungen sind unter anderem bestimmender Faktor für die Sauerstoffaufnahme des Herzmuskels. Die Normalisierung der Spannungsverteilung im Myokard nach einem Infarkt ist für die Ausbildung einer Herzinsuffizienz mitverantwortlich. Untersuchungen der Strömung im Herzen geben Aufschluss über mögliche Rückström- oder Totwassergebiete, welche die Thrombenbildung induzieren, die Hämolyse oder den Pumpwirkungsgrad des Herzens [121].

Einschränkungen bei chronischer Herzinsuffizienz spiegeln sich in einem veränderten Strömungsbild im Herzen wieder. Oftmals ist eine medikamentöse Therapie hierbei nicht ausreichend, so dass ein operativer Eingriff erfolgen muss. Bei der sogenannten Ventrikelrekonstruktion wird ein Teil des Herzgewebes entfernt und die Herzkammer neu geformt [59, 16, 17, 20]. Durch die Rekonstruktion verändert sich das Verformungsverhalten, woraus wiederum ein verändertes Strömungsbild resultiert. Funktionsfähigkeit und Wirkungs-

grad des Herzens hängen stark von den komplexen, kardialen Strömungen ab. Zur prä- oder postoperativen Diagnostik ist es meist ausreichend, die Strömung aufgrund der vorgegebenen Herzbewegung zu berechnen. Zur a priori Abschätzung des Operationserfolges ist es jedoch notwendig, den Herzmuskel, die Herzklappen, das Blut und deren Interaktion zu modellieren. Durch die gezielte Veränderung der Eigenschaften der Herzwand wird es möglich - bereits vor dem Eingriff - den postoperativen Wirkungsgrad des Herzens zu bestimmen und dem Chirurgen eine strömungsoptimale Form zu empfehlen.

1.2 Stand der Forschung

Aufgrund der großen Bandbreite an Untersuchungen zum menschlichen Herzen und der bereits langjährigen Forschung kann die folgende Zusammenfassung allenfalls einen Eindruck über die Entwicklungen in diesem Bereich geben. Die nachstehende Darstellung ist aus Gründen der Übersichtlichkeit nach Schwerpunkten untergliedert.

1.2.1 Untersuchungen des Herzmuskels

Die aufgeführten Forschungen zum Herzmuskel lassen sich in mathematisch-theoretische und experimental-praktische unterteilen. Im Folgenden wird zunächst auf die Forschungen zum passiven Myokard eingegangen. Im Anschluss werden Publikationen zum Aufbau des Herzmuskels und zur aktiven Kontraktion vorgestellt.

Passives Myokard

Zu den frühesten Arbeiten der Neuzeit gehören die anatomischen Studien von Leonardo da Vinci (1452-1512) [12], der den Aufbau und die Funktionsweise des Herzens und seiner Klappen dokumentierte. Auf Basis der Anfang des 19. Jahrhunderts von La Place angestellten Überlegungen zum Zusammenhang von Druck und Spannung an Oberflächen, bildeten sich ab dem Ende des 19. Jahrhunderts zunächst die ersten dünnwandigen, geometrisch vereinfachten Modelle des menschlichen Herzens. Unter der Annahme der Isotropie und Homogenität entwickelte Woods 1892 [187] eine kugelförmige, Sandler und Dodge (1963) [141], Falsetti et al. (1970) [25] und Walker et al. (1970) [177] ellipsoide Repräsentationen des Herzens. Da die dünnwandigen Strukturen keine Änderung der Spannungen in radialer Richtung zuließen, entwickelten Wong und Rautarharju (1968) [186], Ghista und Sandler (1969) [35], sowie Mirsky [100, 101] dickwandige Ellipsoide bzw. abgeflachte Kugeln zur Abbildung der Spannungsverteilung im Herzen. Mirsky führte außerdem Studien zum Einfluss der Homogenität und Anisotropie in der Wand der abgeflachten Kugel durch.

Streeter [162, 163] untersuchte den Faseraufbau von Hunde- und Schweineherzen. Er stellte einen kontinuierlichen Übergang der Faserorientierung von der Herzinnenseite zur Außenseite fest und widerlegte die Hypothese eines Schichtaufbaus in radialer Richtung. 1972 entwickelten Gould et al. [39] und Janz et al. [57] Finite-Element-Modelle des menschlichen Herzens. Das Materialverhalten war zunächst linear-elastisch und wurde später durch komplexere Zusammenhänge, Inhomogenität und Anisotropie ergänzt. Anfänglich wurden aufgrund des einfacheren Verständnisses hinsichtlich des Aufbaus der Herzwand transversal-isotrope Materialgesetze, wie zum Beispiel von Humphrey und Yin [54] und

Guccione et al. [41] entwickelt. Die Konstanten der Materialgleichungen wurden mit uni- und biaxialen Zugversuchen ermittelt.

LeGrice machte 1995 und 1997 [80, 79] elektronenmikroskopische Feinstrukturuntersuchungen an Hundeherzen. Er zeigte, dass Muskelfasern jeweils in Lagen angeordnet sind, welche wiederum durch ein weiches Netzwerk aus Kollagen und Elastin miteinander verbunden sind. LeGrice schloss daraufhin auf ein orthotropes Materialverhalten des Myokards und empfahl zur Materialparameterbestimmung Scherversuche heranzuziehen. Dokos et al. führten 2002 [18] diese an Schweineherzen durch und bestimmten das Spannungs-Dehnungs-Verhalten in unterschiedlichen Raumrichtungen. Auf Basis der Erkenntnisse von LeGrice und später Dokos entwickelten beispielsweise Hunter et al. (1997) [127], Costa et al. (2001) [11] und Holzapfel (2009) [51] orthotrope konstitutive Gesetze zur Abbildung des passiven Verhaltens des Myokards während der Füllphase. Die Konstanten der Materialgesetze werden durch geeignete Anpassungen an Experimentaldaten bestimmt. Den Erfolg verschiedener „Fittings“ und damit die realistische Abbildung des Spannungs-Dehnungs-Verhaltens betrachteten Schmid et al. [147, 148, 149].

Die Untersuchungen zum Spannungsverhalten des Herzmuskels an entnommenen Gewebeproben ermöglichte die Formulierung konstitutiver Gleichungen in Abhängigkeit ausgezeichneter Richtungen. In einem nächsten Schritt war es jedoch notwendig, diese Richtungen zerstörungsfrei in-vivo messen zu können, um eine patientenspezifische Aussage über die Spannungsverteilung in der Herzwand zu treffen. Hierzu wurde zum Beispiel das „Diffusion-Tensor-MRT¹“ herangezogen [52, 153, 197, 190, 188]. Die Idee hinter diesem Verfahren besteht darin, den dreidimensionalen Diffusionsweg von Wassermolekülen unter Einfluss eines Magnetfeldes im Herzmuskel zu detektieren. Es zeigte sich, dass die Hauptausbreitungsrichtung mit der Faserorientierung korreliert. Die an der Universitäts-Klinik Freiburg angewendete Technik des „MRT Tissue-Phase-Mapping“ verknüpft zur Rekonstruktion der Faserrichtungen den Kraft- mit dem Bewegungsverlauf des Muskels [62].

Aktives Myokard

Hill [47, 46] untersuchte 1938 den Zusammenhang zwischen der von einer Muskelfaser entwickelten Spannung und der Kontraktionsgeschwindigkeit. Er formulierte auf Basis energetischer Überlegungen eine der bekanntesten mathematischen Formulierungen für die aktive Kontraktion der Körpermuskulatur. Da der Herzmuskel andere Eigenschaften besitzt (z.B. keine Tetanisierbarkeit²), war die Anwendung dieses Modells nicht ohne weiteres möglich, sodass es in den folgenden Jahren auf unterschiedliche Weisen z.B. zum Maxwell- oder Voigt-Modell erweitert wurde [7, 31]. 1966 untersuchten Gordon et al. [38] die maximalen Zugspannungen in den Muskelfasern von Fröschen bei unterschiedlichen Sarkomer-Längen. Sie stellten fest, dass bei Längen zwischen $2.05 - 2.2 \mu\text{m}$ die Spannungen am größten sind und untermauerten damit die Filament-Theorie von Huxley. Diese besagt, dass die Kraftentwicklung durch die Überlappungsbewegung von parallelen Myosin-Aktin Filamenten entsteht. 1970 präsentierte Fung [30] ein geschlossenes Modell zur Beschreibung der zeitabhängigen Wechselwirkung zwischen Zugspannung, Kontraktionsgeschwindigkeit und Sarkomer-Länge für Muskelfasern. Wong erweiterte 1971 und 1972 [184, 185] den kontraktile Anteil des Hill-Modell um einen Aktivierungsfaktor in Abhängigkeit der Calcium-Ionen-Konzentration. 1980 verwendete Panerai [126] ein modifiziertes

¹Magnet-Resonanz-Tomographie

²Darunter versteht man die Fähigkeit zur Dauerkontraktion, wie beispielsweise beim Skelettmuskel

Hill-Modell, dass den Sauerstoffverbrauch in Abhängigkeit der entwickelten Kontraktion berücksichtigte. Die Experimente von ter Keurs [168] Anfang der 1980er zum Einfluss inotroper³ Faktoren auf die Kraftentwicklung einzelner Herzfasern unterstrichen zusätzlich die Wirkung der Muskellänge auf die Kontraktion.

Umfangreiche Erweiterungen bestehender Modelle wurden von Noble et al. [15] durchgeführt. Durch die Beschreibung der zellulären Aktivitäten war es möglich, die Elektrophysiologie in den Aktivierungsprozess der Muskelfasern zu integrieren. Um sowohl das aktive als auch passive Verhalten des vollständigen Herzens zu modellieren, werden hauptsächlich zwei Ansätze verfolgt: Zum einen wird die Spannung durch die Kontraktion als additiver Term zur Gesamtspannung hinzugerechnet. Ein solcher Ansatz geht auf Gucione et al. [42, 41] zurück und wird auch von Hunter et al. [127, 55, 113] angewandt. Eine weitere Möglichkeit besteht in der Modellierung einer Zeitabhängigkeit der Parameter der Materialgesetze für das passive Verhalten wie beispielsweise bei Watanabe et al. [180, 182, 181].

Einen guten Überblick über die Thematik der Mechanik des Herzens bieten die Bücher von Fung [32, 33], Humphrey [53] und die Veröffentlichung von Yin [193].

1.2.2 Strömungen im Herzen

Um die Strömungen im Herzen sichtbar zu machen, wurden verschiedene Ansätze verfolgt. Zum einen wird versucht, die Strömung mit bildgebenden Methoden zu visualisieren. Soll die Strömung berechnet werden, so kann dies entweder auf Basis der gemessenen Ventrikelbewegung erfolgen (Bewegungsvorgabe) oder durch die Abbildung der Interaktion zwischen Herzwand und Blut (FSI⁴).

Messung kardialer Strömungen

Die erste Strömungsvisualisierung des Ringwirbels im linken Ventrikel während der Diastole geht auf Kim et al. [69] zurück. Mit Hilfe von „Velocity Mapping“ auf Basis des „2D-Phasenkontrast-MRT“ (2D-PC-MRT) bestätigte er die Existenz dieses Wirbels und diskutierte dessen Einfluss auf den Schließungsprozess der Mitralklappe. Beim 2D-PC-MRT kann die eindimensionale Geschwindigkeit in einer Schnittebene entlang dreier unabhängiger Richtungen gemessen und somit auf die dreidimensionale Gesamtgeschwindigkeit geschlossen werden.

Walker et al. [178] führten analoge Untersuchungen mit vier Schnittebenen durch und waren dadurch in der Lage, den dreidimensionalen Charakter der Strömung im linken Ventrikel besser zu erfassen. Morgan et al. [104] bildeten mit dem PC-MRT den dreidimensionalen Blutfluss in der Pulmonalarterie, Kvitting et al. [75] den in der Aorta ab. Kilner et al. [67] untersuchten mit derselben Methode den Einfluss der Vorhöfe und der Strömungsumlenkungen im Herzen. Sie postulierten daraufhin, dass durch die besondere Anordnung der vier Kammern und die Umlenkung ein entscheidender energetischer Vorteil im Pumpprozess entsteht. Neben dem 2D-PC-MRT wird auch das zeitaufgelöste 3D-PC-MRT zur Untersuchung der kardialen Strömungen herangezogen [90, 91]. Hierbei werden direkt die Geschwindigkeitskomponenten im dreidimensionalen Volumen gemessen und nicht aus 2D-Aufnahmen rekonstruiert. Ebberts et al. [21] war es möglich,

³Inotropie: Die Beeinflussung der Kontraktilität des Herzens

⁴Fluid-Struktur-Interaktion

aus dem Strömungsfeld mit Hilfe der numerischen Strömungsmechanik durch Lösen der Poisson-Gleichung auf ein relatives 3D-Druckfeld im Herzen und den angrenzenden Gefäßen zurückzurechnen. Einen Überblick über die Einsatzgebiete und Möglichkeiten der MRT geben Yang et al. [191].

Als Alternative zur Anwendung der Magnet-Resonanz-Tomographie steht die Computer-Tomographie (CT). Der Einsatz starker Magnetfelder im MRT schließt dieses für Patienten mit bioelektronischen oder (stark) eisenhaltigen Implantaten aus. Somit ist trotz der erhöhten Strahlenbelastung die Computer-Tomographie gerechtfertigt. Raman et al. verglichen die Leistungsfähigkeit beider Bildgebungsverfahren [136]. Nicol et al. untersuchten die CT als Alternative zur Angiographie [114].

Numerische Simulationen mit Wandbewegungsvorgabe

Um patientenspezifische Geometrieinformationen in die Simulation zu integrieren, ist zunächst die Segmentierung der MRT- oder CT-Bilddaten notwendig. Das Ergebnis dieses Prozesses sind Oberflächen der Ventrikel und Gefäßgrenzen, die als Berandung der Berechnung dienen [22, 176].

Eine der ersten numerischen Simulationen unter Wandbewegungsvorgabe auf Basis von Messdaten wurde von Taylor und Yamaguchi durchgeführt [167, 166, 165]. Sie erstellten einen elastischen Abguss eines Hundeherzens im diastolischen Bereich. Mit diesem stellten sie durch Druckvorgabe experimentell einen Herzzyklus dar und vermaßen den zeitlichen Formverlauf der Herzwand, den sie als Randbedingung der Simulation einbrachten. Zur Bestimmung des Druck-Volumen-Verlaufes im Hundeherzen führten Fraites et al. in-vitro Experimente an Hundeherzen durch [28].

Jones und Metaxas nutzten MRT-Daten zur Ermittlung der zeitlich aufgelösten Wandbewegung des linken Ventrikels. Damit gelang es ihnen erstmalig, patientenspezifische Simulationen durchzuführen, auch wenn diese zunächst noch sehr undetailliert waren [61, 60]. Auf einem ähnlichen Weg erweiterten Saber et al. das Modell des linken Ventrikels um einen Teil der angrenzenden Gefäße [139, 140]. Sie waren jedoch nicht in der Lage, die Klappenregion ausreichend genau aufzulösen, was sich negativ auf die Darstellung des Strömungsbilds im Herzen auswirkte.

Den Einfluss der Klappenregion insbesondere als Lage der Randbedingungen für die CFD⁵-Simulation griffen Long et al. auf [88]. Weitere Simulationen hierzu führten Nakamura et al. durch. Auf Basis einer generischen Geometrie mit Bewegungsvorgabe analysierten sie den Einfluss des Öffnungsverhaltens der Mitralklappe auf die linksventrikuläre Strömung [109, 112]. Zusätzlich validierten sie die Ergebnisse verschiedener Strömungsstrukturen im Herzen mit Doppler-Echokardiographien [108, 110, 107] und erweiterten ihr generisches Modell des linken Ventrikels um eine vereinfachte Aorta [111].

Die vorangegangenen Publikationen verwendeten körperangepasste und damit sich verformende numerische Gitter auf der Strömungsseite. Einen anderen Ansatz verfolgten Mihalef et al. [99]. Ausgehend von CT-Daten des Gesamtherzens, erstellten sie ein Rechenmodell auf einem raumfesten Gitter und benutzen für die Bewegungsabbildung die Level-Set-Methode.

Eine Zusammenfassung über Entwicklung und Forschungsbedarf der patientenspezifischen Strömungssimulation auf Basis von in-vivo Daten liefern Oertel et al. [117, 125] und

⁵Computational Fluid Dynamics = Numerische Strömungsmechanik

Merrifield et al. [96]. Young und Frangi [194] diskutieren die Verwendung repräsentativer mittlerer Geometriemodelle als Eingangsgröße für Simulationen.

Betrachtungen unter Berücksichtigung der Strömung-Struktur-Kopplung

Die ersten strömung-struktur-gekoppelten Untersuchungen zur Herztätigkeit führten Peskin und McQueen durch. Auf Basis der Immersed-Boundary-Methode (IBM) erstellten sie Simulationen zur Umströmung von zweidimensionalen Herzklappen [131, 132]. Im Folgenden wurden die Berechnungen auf das Gesamtherz erweitert [133, 134, 135, 94]. Die Herzwand wurde dabei als aus elastischen Fasern bestehend dargestellt, die im Fluid eingebettet sind. Charles Peskin gilt als Vater der Immersed-Boundary-Methode, welche in Kapitel 5 genauer vorgestellt wird. Neben seinen kardial-anwendungsorientierten Veröffentlichungen publizierte er zahlreiche Arbeiten zu weiteren mathematischen und experimentellen Aspekten [76, 196, 195, 63].

Ein vereinfachtes zweidimensionales Modell zur Bestimmung der kardialen Leistungsfähigkeit entwickelten Tokuda et al. [170]. Die intraventrikuläre Strömung wird bei diesem Ansatz nur durch ein Kreislaufmodell berücksichtigt, welches die Lasten auf die Herzinne wand als Randbedingung an die Struktur übergibt.

Auf Basis der von Peskin et al. entwickelten Immersed-Boundary-Methode simulierten Lemmon et al. verschiedene linksventrikuläre Dysfunktionen und verglichen diese mit klinischen Daten und Referenzsimulationen [81, 82]. Yang et al. bildeten ausgehend von MRT-Daten die Wechselwirkung des operierten rechten Herzkammermyokards mit dem Blutfluss ab [189]. Sie zeigten dabei, wie sich lokal versteifte Regionen auf die Spannungsverteilung in der Herzwand und auf das Ejektionsverhalten auswirken. Eine sehr aktuelle Studie zum Vergleich zwischen MRT-Daten und FSI-Simulationen findet sich bei Tay et al. [164].

In dem durch die Europäische Union geförderten euHeart-Projekt arbeiten klinische, industrielle und akademische Partner an einem Modell zur Beschreibung der Herzfunktion. Ziel ist dabei, ein auf klinischen Daten basierendes Computermodell zur Diagnose und Therapieplanung zu erstellen. Das bisherige beinhaltet den linken Ventrikel mit einem anisotropen elektrodynamischen Strukturmodell [116, 115, 78].

Unter dem Namen UT-Heart haben Watanabe et al. ein dreidimensionales Finite-Elemente-Modell (FEM) des linken Ventrikels entwickelt [180, 182, 181]. Das Herz basiert auf generischen Geometrieinformationen. Der Herzmuskel wird mit einem transversal-isotropen Materialgesetz abgebildet. Die Kontraktion erfolgt über veränderliche Konstanten in der Energiefunktion. Die Kopplung wird mit Hilfe eines monolithischen Ansatzes realisiert.

Einen umfassenden Überblick über die Bioströmungsmechanik liefern die grundlegenden Bücher von Oertel et al. [124, 121, 122, 119, 120] und Pedrizetti und Perktold [129]. Ein sehr informativen Überblick über die Herangehensweisen an Herzströmungen findet sich bei Khalafvand et al. [66]. Er betont dabei die Notwendigkeit eines ganzheitlichen Herzmodells und der realistischen Modellierung von Strömung, Struktur und ihrer Wechselwirkung.

1.2.3 Das Karlsruher Herzmodell - KaHMo

Das am Institut für Strömungslehre am Karlsruher Institut für Technologie (KIT) entwickelte Karlsruher Herzmodell (KaHMo) ist ein patientenspezifisches, modular aufgebautes Konzept zur Abbildung der menschlichen Herzfunktion [121, 144, 145]. Ausgangsbasis bilden zeitlich aufgelöste MRT-Aufnahmen des Herzens und Kreislaufparameter. Der modulare Charakter besteht in der Entwicklung von Teillösungen, wie zum Beispiel für den Kreislauf oder die Herzklappen, welche je nach Fragestellung neu kombiniert werden können. KaHMo verfolgt so das Ziel, einen Beitrag zum Verständnis des Strömungsverhaltens im Herzen und den herznahen Gefäßen sowie der Herzmuskeltätigkeit und deren Wechselwirkung zu leisten.

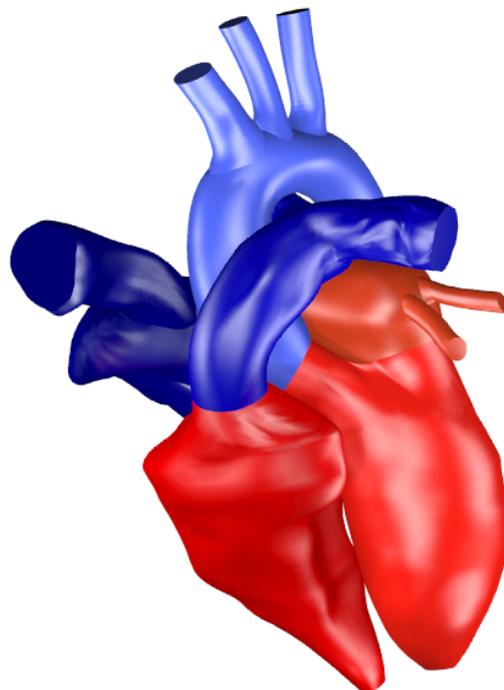


Abbildung 1.3: Das Karlsruher Herzmodell [121]

Die ersten Arbeiten zum KaHMo-Projekt wurden von Meyer 2003 durchgeführt [98]. Er untersuchte die dreidimensionale pulsierende Strömung im starren Aortenbogen und zeigte eine quantitativ gute Übereinstimmung mit Experimenten. Zürcher erweiterte zeitgleich dieses Modell um die Strömung-Struktur-Kopplung mit der elastischen Aortenwand [200]. Keber rekonstruierte 2003 aus MRT-Daten die Geometrie und die Bewegung des linken Ventrikels und ergänzte es durch generische Herzklappen und einen Vorhof [64]. Donisi berechnete 2005 den prä- und postoperativen Strömungszustand eines erkrankten linken Ventrikels und leitete daraus Aussagen über eine strömungsverlustoptimierte Form ab [19]. Cheng simulierte erstmalig im Karlsruher Herzmodell die Wechselwirkung zwischen Herzwand und Blutfluss am linken Ventrikel [10]. Er verwendete ein homogenes und isotropes Strukturmodell, welches durch die Zeitabhängigkeit des Elastizitätsmoduls den nicht-linearen Charakter des Herzmuskels abbilden konnte.

Malvè erweiterte KaHMo um zweidimensionale, aber patientenspezifische Herzklappen und verglich den Einfluss von Klappendefekten auf die intraventrikuläre Strömung [89]. Reik entwickelte das Vollherzmodell durch Ergänzung des rechten Ventrikels, des rechten

Vorhofs und der Hohlvene sowie eines Kreislaufmodells zur Vorgabe der Druckrandbedingungen [138, 137, 146]. 2009 entwickelte Krittian ein makroskopisches Herzmuskelmodell mit anisotropen Eigenschaften als Alternative zur Wandbewegungsvorgabe und koppelte Strömung und Struktur mittels eines impliziten Kopplungsalgorithmus auf Basis der ALE-Methode [71, 72, 73]. Spiegel fügte 2009 dem bestehenden Herzmodell einen patientenspezifischen Vorhof mit vier Zuläufen hinzu und schlug ein Konzept zur Integration von KaHMo in den klinischen Alltag vor [156, 157]. Perschall integrierte ein Herzunterstützungssystem (VAD) in KaHMo und beschäftigte sich mit dessen Wechselwirkung mit dem Strömungsmedium Blut und dem schlagenden Herzen. Auf Basis dieser Erkenntnisse entwickelte er ein Pumpenkonzept unter Berücksichtigung von Blutschädigung und Thrombenbildung [130].

Das Karlsruher Herzmodell gliedert sich in drei Teilbereiche, die unterschiedliche Fragestellungen verfolgen:

- $KaHMo^{MRT}$: Untersuchung und Bewertung des aktuellen Zustandes des Herzens unter strömungsmechanischen Gesichtspunkten.
- $KaHMo^{FSI}$: Untersuchung der Strömung-Struktur-Wechselwirkung zwischen Herzwand und Blutfluss zur a priori Abschätzung des Operationserfolges.
- $KaHMo^{VAD}$: Untersuchung der Interaktion zwischen VAD, Herz und Blutfluss zur Betrachtung von schädigenden Einflüssen auf das Strömungsmedium Blut.

1.3 Zielsetzung und Gliederung

Das menschliche Herz ist eine pulsatil (unstetig) fördernde Pumpe. Der gerichtete Blutfluss wird dabei über die Herzklappen realisiert, die sich druckgesteuert öffnen und schließen. Im geöffneten Zustand ragen diese in die Gefäße oder in die Herzkammern und beeinflussen die Strömungsstruktur somit nachhaltig. Die bisherigen Herzklappen des Karlsruher Herzmodells sind zweidimensionale Projektionen der dreidimensionalen Öffnungsfläche. Aus diesem Grund ist unter anderem der einströmende Ringwirbel in Richtung Aortenkanal unphysiologisch ausgedehnt. Da die Interaktion zwischen Herzklappen und Blutfluss andere Eigenschaften aufweist (z.B. Zeitskala) als die Wechselwirkung zwischen Herzwand und Strömung, soll als erstes Ziel dieser Arbeit, eine speziell auf diese Anforderungen zugeschnittene und optimierte Kopplungsstrategie entwickelt und validiert werden.

Zur Abbildung der Herzwand verwendet das bisherige Herzmodell ein Faser-Kontinuum-Komposit-Modell. Hierbei werden die Fasern des Herzmuskels auf das Endo- und Epikard konzentriert und von einer isotropen Matrix getrennt. Das Verformungsverhalten konnte so gut wiedergegeben werden. Modellbedingt konnte die Spannungsverteilung im Myokard nicht korrekt abgebildet werden. Das zweite Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Erweiterung des patientenspezifischen Geometriemodells des Myokards um ein Materialgesetz, welches sowohl das aktive als auch das passive Spannungs-Dehnungs-Verhalten des Herzens qualitativ und quantitativ gut wiedergeben kann.

Diese Arbeit gliedert sich in drei Teilbereiche:

- **Grundlagen**

Ausgangspunkt bilden hierbei die Anatomie und Physiologie des Herzens (Kapitel 2), die für ein Verständnis der Herztätigkeit und damit auch der Problemstellungen dieser Arbeit unerlässlich sind. In Kapitel 3 wird auf die Kontinuumsmechanik und deren Spezialgebiete Strömungs- und Strukturmechanik eingegangen. Die Verknüpfung beider Disziplinen ist Thema von Kapitel 5. Den Abschluss der Grundlagen bildet die Betrachtung der numerischen Lösung struktur- oder strömungsmechanischer Gleichungen (Kapitel 4).

- **Modellierung**

Auf Basis der Grundlagen werden zunächst die spezifischen Eigenschaften und die Randbedingungen für die Kopplung der Herzklappen zusammengetragen. Darauf aufbauend wird ein Kopplungsalgorithmus und Kriterien zur Bewertung von dessen Güte vorgeschlagen. Da die Fluid-Struktur-Interaktion der Herzklappen im menschlichen Herzen besondere Anforderungen an die räumliche und zeitliche Auflösung stellt, werden Verfahren präsentiert, um die Simulation zu beschleunigen (Kapitel 6). Kapitel 7 befasst sich mit den Kopplungsmodellen für Herzwand und Blutfluss. Zunächst wird auf die zu untersuchende patientenspezifische Geometrie des linken Ventrikels eingegangen. Um ein physiologische Spannungen und Verformungen in der Herzwand zu modellieren, wird eine Methode vorgestellt, wie generische aber physiologisch sinnvolle Faserrichtungen im Herzen festgelegt werden können. In einem zweiten Schritt wird das orthotrope Materialgesetz zur Abbildung der passiven Eigenschaften eingeführt und durch einen geeigneten Term zur Berücksichtigung der aktiven Kraftentwicklung erweitert. Abschließend wird das Strömungsmodell des linken Ventrikels mit dem Vorhof und der Aorta gezeigt. Hierbei wird vor allem auf die Beschreibung der Randbedingungen durch das Kreislaufmodell und die Blutrheologie eingegangen.

- **Simulation**

Anschließend wird das Konzept und die numerische Umsetzung zur Validierung der neu entwickelten Kopplung vorgestellt (Kapitel 8). Es werden dabei ausgewählte Problemstellungen der Fluid-Struktur-Interaktion herausgegriffen und deren numerische Lösung präsentiert und diskutiert. Abgeschlossen wird der dritte Teilbereich Simulation mit den Ergebnissen der Anwendung des orthotropen Materialgesetzes unter Berücksichtigung aktiver Kontraktion im Rahmen von KaHMo (Kapitel 9). Zum Schluss werden die gewonnenen Erkenntnisse zusammengefasst und ein Ausblick auf weiteren Forschungsbedarf gegeben.

Teil I

Grundlagen

2 Medizinische Grundlagen

Um dem Anspruch einer patientenspezifischen Modellierung der menschlichen Herztätigkeit gerecht zu werden, ist es zunächst notwendig, das Herz und seine Funktion im Organismus grundlegend zu verstehen. Im Folgenden soll zunächst auf den Aufbau des Herzens (Anatomie) und dann auf seine Funktionsweise (Physiologie) eingegangen werden. Da das Herz in Interaktion mit dem Strömungsmedium Blut steht, schließt das Kapitel mit der Betrachtung der funktionalen Eigenschaften von Blut ab.

2.1 Anatomie des Herzens

Das menschliche Herz ist ein muskuläres Hohlorgan mit vier Kammern (zwei Vorhöfe und zwei Ventrikel), welches unter technischen Gesichtspunkten wie eine un stetig fördernde Pumpe funktioniert. Es wiegt ca. 250 - 400 g und ist so groß wie die Faust seines Besitzers. Es befindet sich im Mittelfellraum (Mediastinum) vor der Speiseröhre und der absteigenden Aorta und ist nach links orientiert (s. Abb. 2.1) [150].

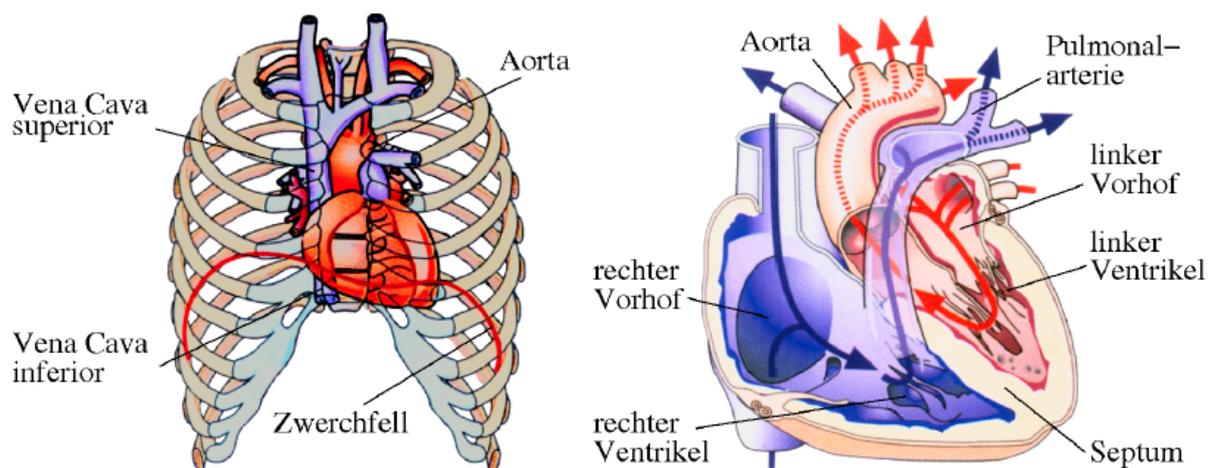


Abbildung 2.1: Lage und Form des menschlichen Herzens [105]

2.1.1 Grobstruktur und Herzklappen

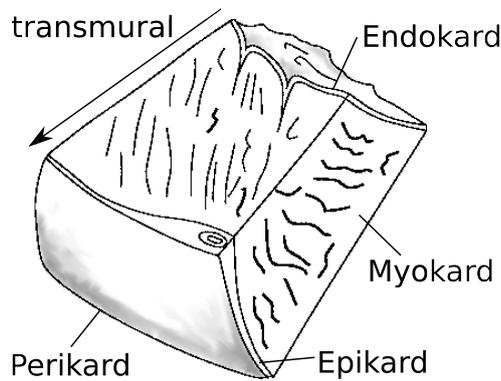


Abbildung 2.2: Aufbau der Herzwand [124]

transportiert das elektrische Signal vom Sinusknoten (siehe Kapitel 2.2.1) über die gesamte Herzwand [155]. Das Endokard ist die innerste Schicht und kleidet den Fluidraum vollständig aus. Sie besteht aus Endothel und elastischen Fasern. Im gesunden (physiologischen) Zustand ist das Endokard sehr glatt und maßgeblich für den geringen Strömungswiderstand verantwortlich.

Da sich das Herz während des Pumpvorganges stark bewegt, ist es - um die Reibung zu minimieren - in der flüssigkeitsgefüllten Perikardhöhle gelagert. Die Herzwand kann in transmuraler¹ Richtung in drei Schichten unterteilt werden (s. Abb. 2.2). Das kollagen- und fetthaltige Epikard ist die Außenschicht und sichert eine gute Verschiebbarkeit gegenüber dem Perikard. Das Myokard ist die dickste der drei Schichten. Man unterscheidet das Arbeits- sowie das Erregungsbildungs- und -leitungsmuskulatur. Das Arbeitsmyokard ist die kräftige Muskelschicht, welche für den Pumpvorgang verantwortlich ist.

Das Erregungsbildungs- und -leitungsmuskulatur

Ein besonders kollagenfaserreicher Teil des Endokards bildet auch die Herzklappen. Die vier Herzklappen befinden sich an der Herzbasis und ermöglichen durch ihren druckgesteuerten Öffnungs- und Schließungsprozess den gerichteten Blutfluss. Alle vier Klappen sind in einer Ebene (Klappenebene) und in das Herzskelett eingebettet. Das Herzskelett besteht aus sehnigem kollagenhaltigem Bindegewebe und versteift die Klappenringe, an denen die Herzklappen befestigt sind. Man unterscheidet anhand der Form Segel- und Taschenklappen.

Die Segelklappen trennen die Vorhöfe von den Herzkammern (Ventrikeln). Sie besitzen zwei bzw. drei Lappen. Sie verhindern während der Anspannungsphase (Systole) ein Rückströmen in den linken (Mitralklappe) bzw. rechten (Trikuspidalklappe) Vorhof. Um ein Rückschlagen der Klappen in die Vorhöfe zu verhindern, sind die freien Enden der Segel über Sehnenfäden und Papillarmuskeln mit der Herzzinnenwand verbunden. Die Papillarmuskeln regeln die Länge der Sehnenfäden bei unterschiedlichem Kontraktionsgrad des Herzens.

Die Taschenklappen verschließen während der Füllphase (Diastole) die großen angrenzenden Arterien und heißen entsprechend Aorten- und Pulmonalklappe. Sie sind aus drei identischen, im Dreieck angeordneten Lappen aufgebaut. Während der Relaxation des Herzmuskels in der Diastole strömt Blut aus den Arterien in Richtung Kammern zurück, wölbt dabei die drei Lappen zu Taschen nach innen und verschließt so die Klappen.

¹transmural = Normalenrichtung zu Endo- und Epikard, entlang der Wanddicke

2.1.2 Feinstruktur und Funktionsweise des Muskels

Der Herzmuskel besteht aus Muskelfasern, welche zu Bündeln zusammengefasst sind. Die Muskelfasern sind um die Hohlräume helikal angeordnet. Auf der Herzaußenseite winden sie sich von der Herzbasis zur Herzspitze und auf der Innenseite in entgegengesetzter Richtung von der Spitze zur Basis [80, 79]. Da die linke Herzkammer durch die Bedienung des Körperkreislaufes stärker belastet ist, existieren hier zusätzliche Muskelfasern, die nur die linke Kammer umschließen, weshalb das Myokard dort dicker ist.

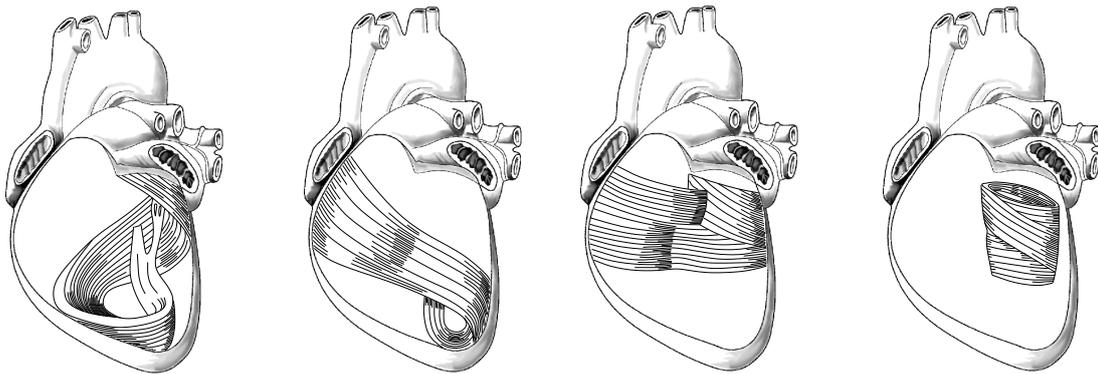


Abbildung 2.3: Anordnung des Herzmuskels um die Kammern [124]

In transmuraler Richtung sind die Muskelfaserbündel in kompakten Schichten eingebettet. Diese Lagen sind untereinander verzweigt und mit Kollagen leicht verbunden. Somit lassen sich drei Richtungen mit unterschiedlichen Materialeigenschaften identifizieren: Faser-, Schicht- und Schichtnormalenrichtung (s. Abb. 2.4).

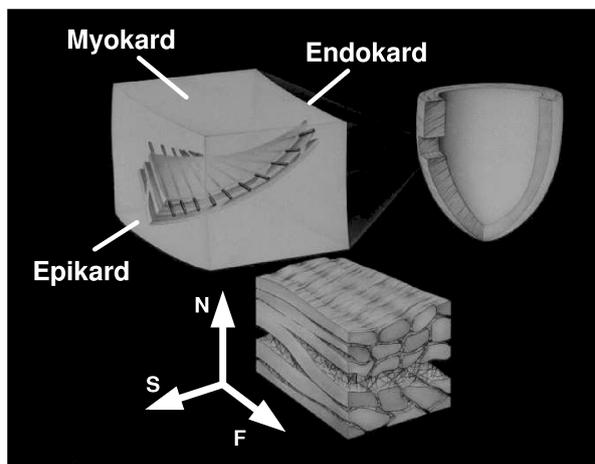


Abbildung 2.4: Anordnung der Muskelfasern und Schichten [113]

Die Herzmuskulatur ist aus einkernigen Muskelfasern aufgebaut und gehört zu den quergestreiften Muskeln. Die Bezeichnung quergestreift ist auf die charakteristischen hellen und dunklen Streifen im Lichtmikroskop zurückzuführen. Jede Muskelfaser ist ca. $100\ \mu\text{m}$ lang und hat einen Durchmesser von $15\ \mu\text{m}$. Sie besteht aus einem Bündel dicht gepackter Myofibrillen, die jeweils eine Dicke von $1\ \mu\text{m}$ haben. Jede Myofibrille besteht aus einer Reihenschaltung von Sarkomeren, welche die kontraktile Einheit des Muskels darstellt. Die Muskelfasern des Herzens sind durch sogenannte Glanzstreifen miteinander verbunden, welche die Kraftübertragung zwischen den Fasern übernehmen. Innerhalb der Glanzstreifen sorgen „Gap Junctions“ für die Übertragung elektrischer Impulse zwischen den Zellen (s. Abb. 2.5).

Das Sarkomer ist ca. $2 - 2,2\ \mu\text{m}$ lang und ist im Wesentlichen aus Aktin- und Myosinfilamenten aufgebaut (s. Abb. 2.5). Es wird beidseitig von der Z-Scheibe begrenzt, welche sich in der Mitte des (hellen) A-Bandes befindet. An der Z-Scheibe sind die Aktin- und über elastische Titinmoleküle auch die Myosinfilamente befestigt. Zwischen diesen Filamenten befinden sich teilweise überlappend die Myosinfilamente, welche ihrerseits an der M-Linie

Relation unter unterschiedlichen Belastungsfällen aufgetragen wird (s. Abb. 2.6):

- isotonische Kontraktion: Hierbei wird zunächst eine konstante Last und damit eine Vorspannung aufgebracht. Danach wird der Muskel stimuliert und der maximale Kontraktionsweg gemessen.
- isometrische Kontraktion: Fixiert man die Enden des Muskels und vernachlässigt man die elastische Dehnung der Sehnen, so entwickelt der Muskel in Abhängigkeit der Vordehnung eine Kraft. Analog zu der isometrischen Kontraktion der Skelettmuskulatur ist beim Herzen die isovolumetrische Kontraktion als Kontraktion unter Beibehaltung des Innenvolumens definiert.
- Ruhe-Dehnungs-Kurve: Darunter versteht man das passive - elastische Verhalten eines nicht erregten, isolierten Muskels bei der Auslenkung aus der Gleichgewichtslänge.
- Auxotonische Kontraktion: Hierbei ändern sich gleichzeitig die Länge und die entwickelte Kraft. Analog hierzu ist im Herzen die auxobare Kontraktion definiert. Dabei handelt es sich um die gleichzeitige Volumen und Druckänderung bei der Kontraktion.

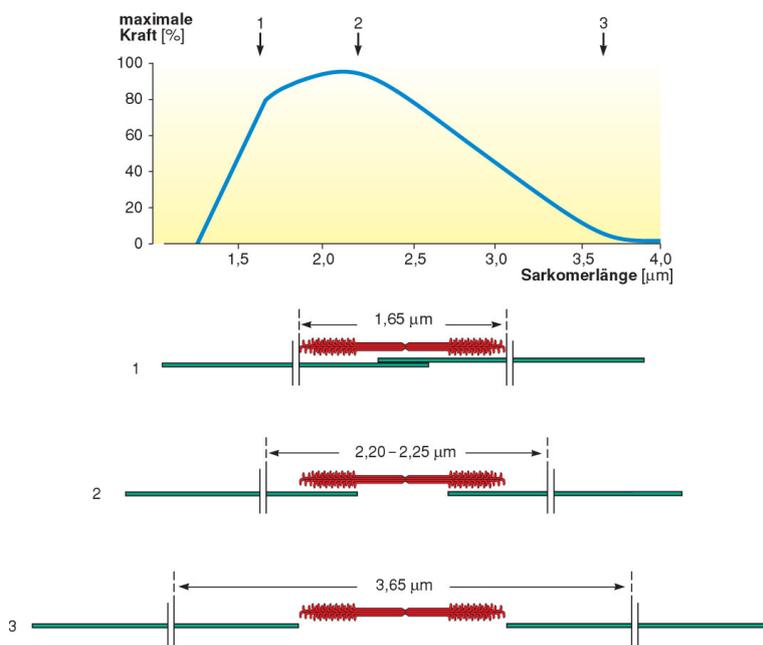


Abbildung 2.7: Kraftentwicklung eines Sarkomers [155]

Die vom Herzmuskel entwickelte Kraft ist die Summe der Kräfte der Herzmuskelzellen. Die Kraft, die ein Sarkomer leisten kann, hängt unter anderem von seiner Länge ab. Wie in Abbildung 2.7 dargestellt, reduziert sich bei der Stauung des Sarkomers die Maximalkraft aufgrund der Kollision der Myosinfilamente mit den Z-Scheiben. In einem Bereich von $1,8 - 2,0 \mu m$ steigt die Kraft an, da die Filamente vollständig miteinander interagieren können. Eine Vergrößerung der Sarkomerlänge führt schließlich zu einem rapiden Abfall der Kraft aufgrund abnehmender Überlappung.

2.1.3 Herz und Kreislauf

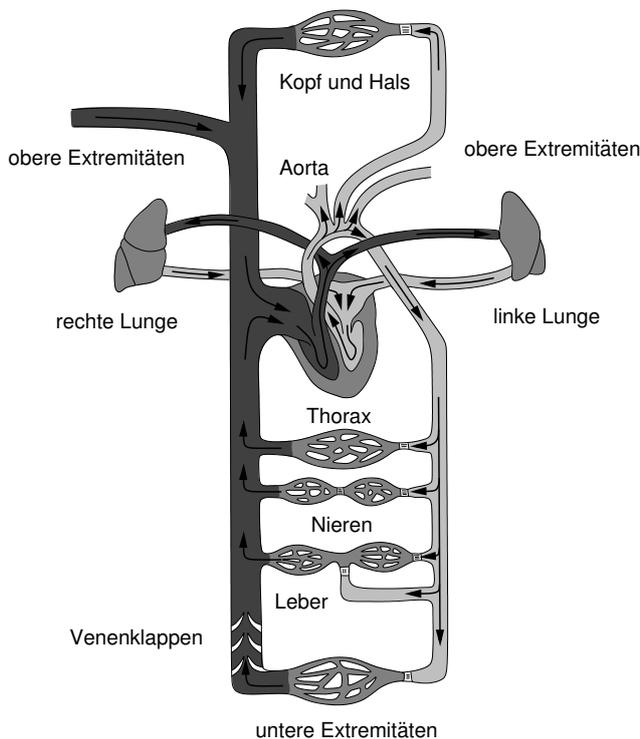


Abbildung 2.8: Herz und Kreislauf [124]

Ab einer gewissen Größe können Lebewesen Stoffwechsel nicht mehr durch reine Diffusion über ihre Körperoberflächen bewerkstelligen. Der Kreislauf höherer Lebensformen dient der Versorgung aller Zellen mit Sauerstoff und Nährstoffen und dem Abtransport von Kohlenstoffdioxid und Stoffwechselprodukten [150]. Er kann in einen (großen) Körper- und einen (kleinen) Lungenkreislauf unterteilt werden (s. Abb. 2.8).

Die Blutgefäße, aus denen diese bestehen, können in Arterien und Venen untergliedert werden. Als Arterien bezeichnet man Gefäße, die vom Herzen weg-, als Venen solche, die zum Herzen hinführen. Arterien und Venen sind aus drei Schichten aufgebaut. Arterien sind - aufgrund des höheren Druckes stromab vom Herzen - meist dicker als Venen. Während Arterien mit glatten Muskeln auch aktiv kontrahieren können,

sind (viele) Venen mit Klappen ausgestattet, die einen Rückfluss verhindern. Um das Gewebe gleichmäßig zu versorgen, haben die herznahen Arterien zusätzlich die Aufgabe, den pulsierenden Ausstrom der Ventrikel in eine kontinuierliche Strömung zu wandeln. Dies geschieht, indem sie einen Teil des systolischen Blutvolumens durch elastische Verformung speichern und während der Diastole abgeben [70].

Neben der Bezeichnung großer und kleiner Kreislauf unterscheidet man oftmals auch zwischen Hoch- und Niederdrucksystem. Gefäße sind Teil des Hochdrucksystems, wenn in ihnen ein Druck von mehr als ca. 50 mmHg herrscht [150]. Nur die Arterien stromab des linken Ventrikels gehören zum Hochdrucksystem, sodass drei Viertel aller Blutbahnen zum Niederdrucksystem zählen.

Ausgehend vom linken Ventrikel pumpt das Herz Blut in die Aorta. Diese verzweigt sich in die Gefäße für die Extremitäten und das Gehirn. Das Blut fließt durch die Arterien und Arteriolen in die Kapillaren, wo durch Diffusion der Austausch zwischen Zellen und Blut stattfindet. Von den Kapillaren strömt das Blut durch Venolen und Venen in immer größer werdende Gefäße zurück. Die obere und untere Hohlvene münden schließlich in den rechten Vorhof und dann in den rechten Ventrikel. Von dort wird das sauerstoffarme Blut über die Lungenarterie in die Lunge befördert. Die Lungenvenen transportieren das mit Sauerstoff angereicherte Blut in den linken Vorhof und den linken Ventrikel, welcher das Blut wieder in den Körper pumpt.

2.2 Physiologie des Herzens

2.2.1 Erregungsbildungs- und -leitungssystem

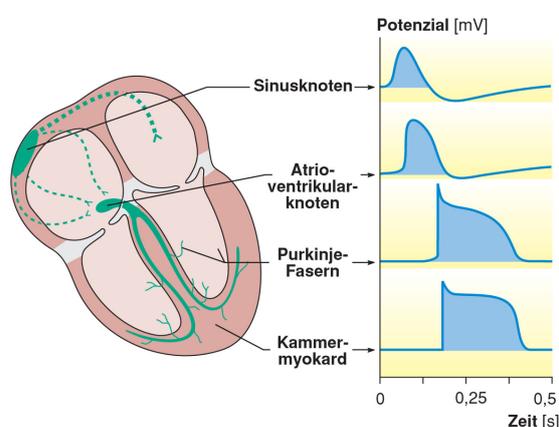


Abbildung 2.9: Aufbau des Erregungsbildungs- und -leitungssystemmyokard [155]

Reiz initiieren. Das Herz schlägt demnach unabhängig vom Nervensystem, das allerdings die Herzfrequenz beeinflussen kann [70].

Der Sinusknoten ist mit einer Frequenz von 60-80 Aktionen/Minute der primäre Taktgeber des Herzens und befindet sich oberhalb des rechten Vorhofs. Von dort breitet sich der Reiz während der späten Füllphase über die beiden Vorhöfe aus und bewirkt damit durch deren Kontraktion eine aktive Füllung der Ventrikel. Am AV-Knoten, welcher der einzige Übergangsort für Signale zwischen Vorhöfen und Kammern ist, zwischen den vier Kammern wird das elektrische Signal um bis zu 120 ms verzögert, um eine vollständige Erregung der Vorhöfe zu gewährleisten (s. Abb. 2.10). Falls der Sinusknoten ausfällt, ist der AV-Knoten der sekundäre Schrittmacher mit einer Frequenz von ca. 50 spontanen Aktionen/Minute. Vom AV-Knoten breitet sich die Erregung über die His-Bündel und die Tawara-Schenkel in der Herzscheidewand (Septum) in Richtung Herzspitze (Apex) aus (s. Abb. 2.9). In der Herzspitze münden die Tawara-Schenkel in die Purkinje-Fasern, die sich ausgehend vom Apex entlang der Herzaußenwand ein wenig in Richtung Herzbasis ausdehnen. Auch diese sind in der Lage, das Herz zu erregen, und fungieren als tertiärer Taktgeber mit einer Frequenz von ca. 30 Aktionen/Minute [150]. Der Zusammenhang zwischen Erregung und mechanischer Herzaktion wird im nächsten Kapitel erläutert.

Wie jeder Muskel muss auch das Herz durch einen elektrischen Impuls zur Kontraktion angeregt werden. Da alle Muskelfasern des Arbeitsmyokards über „Gap Junctions“ elektrisch miteinander gekoppelt sind, muss jedoch nicht jede Muskelfaser, wie z.B. beim Skelettmuskel, einzeln stimuliert werden. Die Reize übertragen sich von Zelle zu Zelle und das Herz kann somit nicht teilweise aktiviert werden (Alles-oder-Nichts-Prinzip)[155].

Das Reizbildungs- und -leitungssystem des Herzens besteht aus umgewandelten Muskelzellen, die sich auf die Erregungsentwicklung und -leitung spezialisiert haben. Jede dieser Zellen kann selbstständig einen

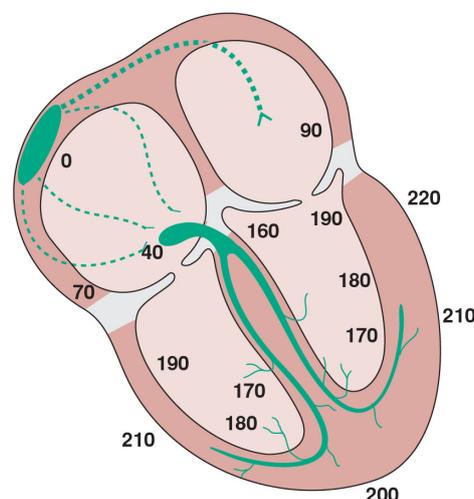


Abbildung 2.10: Reizausbreitung im Herzen: Angaben in Millisekunden nach dem Beginn am Sinusknoten [155]

2.2.2 Herzzyklus

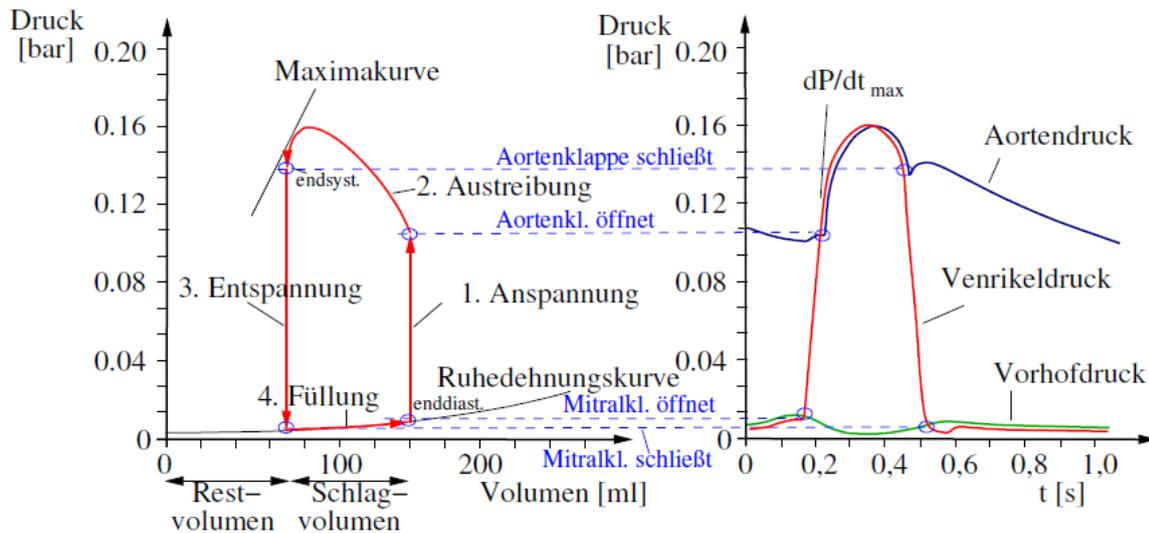


Abbildung 2.11: Herzzyklus [169]

Der Pumpvorgang des Herzens kann in zwei Phasen unterteilt werden: Den Füllvorgang des Herzens bezeichnet man als Diastole, die Entleerung als Systole. Unter Berücksichtigung der Muskeltätigkeit kann ein Herzschlag in vier sich wiederholende Aktionsphasen gegliedert werden [70, 155].

- **Isovolumetrische Anspannungsphase**

Mit der Erregung des Kammermyokards, welche im Elektrokardiogramm (EKG) als charakteristischer QRS-Komplex sichtbar wird, startet die Anspannungsphase. Der Muskel beginnt Kraft aufzubauen und der Druck in den Ventrikeln steigt an. Sobald der intraventrikuläre Druck den in den Vorhöfen überschreitet, schließen sich die Mitralklappe und Trikuspidalklappe und verhindern ein Rückströmen in die Vorhöfe. Da das Innenvolumen bei der zunehmenden Anspannung konstant bleibt, nähert sich die Form des Ventrikels einer Kugel an [155]. Die Strömung im Herzen kommt weitgehend zum Erliegen.

- **Auxobare/auxotone Austreibungsphase**

Steigt der Druck in den Herzkammern über den der angrenzenden Arterien, öffnen sich die Aorten- und Pulmonalklappe und die Austreibungsphase beginnt. Während der Druck weiter ansteigt, nimmt das Ventrikelvolumen ab. Die Strömung wird stark in Richtung Aorta bzw. Pulmonalarterie beschleunigt. Die im EKG ersichtliche Strecke zwischen der S- und der T-Zacke deutet auf die Rückbildung der Erregung hin. Am Ende der Austreibungsphase besitzen die Ventrikel das geringste Innenvolumen, welches man als endsystolisch bezeichnet.

- **Isovolumetrische Erschlaffungsphase**

Nach der Austreibungsphase sinken die Ventrikeldrücke ab, da der Herzmuskel erschlafft. Fallen diese unter die Arteriendrucke, schließen sich Pulmonal- und Aortenklappe und verhindern einen Rückfluss in die Herzkammern. Da diese zu diesem Zeitpunkt einen größeren Druck aufweisen als die Vorhöfe, bleiben auch die AV-Klappen geschlossen.

- **Füllungsphase**

Beim Abfall der Ventrikel- unter die Vorhofdrücke öffnen sich die Segelklappen und leiten damit die schnelle Füllphase ein. Mit großer Geschwindigkeit (Jet) strömt Blut in die Kammern ein und formt die charakteristischen Ringwirbel, welche im Herzen für eine gute Durchmischung und Auswaschung des Blutes sorgen. Ventrikelvolumen und -druck steigen entlang der Ruhe-Dehnungskurve an. Mit zunehmendem Ausgleich zwischen Vorhof- und Kammerdruck geht die schnelle Füllung in eine Plateau-Phase über. Am Ende des Plateaus initiiert der Sinusknoten einen neuen Herzschlag und erregt damit die Vorhöfe. Diese kontrahieren und pumpen ca. 10% zusätzliches Blut in die Ventrikel (Vorhofkontraktion) [155]. Der Ventrikel erreicht an dieser Stelle sein maximales (enddiastolisches) Volumen.

Die Differenz zwischen enddiastolischem und endsystolischem Volumen wird als Schlagvolumen bezeichnet. Die Auswurfleistung oder Ejektionsfraktion beschreibt das Verhältnis von Schlagvolumen zu enddiastolischem Volumen. Die Druckerarbeit, die das Herz bei einem Schlag verrichtet, lässt sich an der eingeschlossenen Fläche im Druck-Volumen-Diagramm ablesen. Bei 70 ml Schlagvolumen und einer Druckdifferenz von ca. 16000 Pa folgt eine Arbeit von ca. 1 Joule. Zusätzlich muss der Herzmuskel Beschleunigungsarbeit verrichten. Diese besitzt im Ruhezustand jedoch einen sehr geringen Anteil an der Gesamtarbeit. Bei Belastung kann dieser Anteil bis auf 25% ansteigen [155].

2.3 Physiologie des Blutes

Das Strömungsmedium Blut besitzt als „flüssiges Organ“ verschiedene Aufgaben. Es sorgt für den Austausch von Atemgasen zwischen Lunge und Gewebe und transportiert Boten- und Nährstoffe, Mineralien, Vitamine sowie Stoffwechselprodukte. Durch seine regulierenden Funktionen (Homöostase) hält das Blut den pH-Wert sowie die ionale und osmotische Zusammensetzung des Blutes konstant. Durch den Transport von Leukozyten ist es zudem an der Immunabwehr und durch den von Thrombozyten an der Hämostase (Blutgerinnung) beteiligt. Durch den steten Blutfluss regelt das Blut außerdem den Wärmeaustausch zwischen wärmeerzeugenden (z.B. Muskeln) und -ableitenden Organen (z.B. Haut) [70, 155].



Abbildung 2.12: Blutzusammensetzung

Das Blutvolumen eines erwachsenen Menschen beträgt ca. 4,5 - 6 l und kann je nach Alter, Geschlecht und Konstitution schwanken [150, 155]. Blut ist eine Suspension aus ca. 55% Plasma und 45% zellulären (korpuskulären) Bestandteilen. Blutplasma enthält vorwiegend Wasser und besitzt demnach eine konstante Viskosität. Die zellulären Anteile umfassen Erythrozyten, Leukozyten und Thrombozyten. Die Leukozyten dienen der Immunabwehr und die Thrombozyten sind entscheidend für den Gerinnungsprozess.

Da die Erythrozyten den mit Abstand größten Anteil an den festen Bestandteilen haben, beeinflussen sie maßgeblich das thixotrop - pseudoplastische Fließverhalten des Blutes:

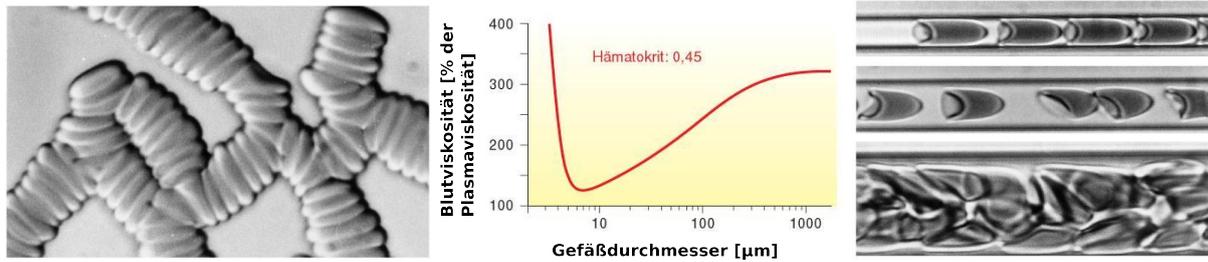


Abbildung 2.13: Fließverhalten von Blut [155]

- Die Zähigkeit von Blut nimmt mit ansteigendem Hämatokrit-Wert² zu.
- Mit sinkendem Gefäßdurchmesser nimmt die Viskosität ab (Fähraeus-Lindqvist-Effekt) [70]. Dies lässt sich mit dem Aufbau von Erythrozyten erklären. Rote Blutkörperchen sind flüssigkeitsgefüllt und mit einer dünnen Membran umgeben. In großen Gefäßen oder bei geringen Scherraten agglomerieren sie „geldrollenartig“. Durch die größeren zusammenhängenden Strukturen steigt die Viskosität an. Bei steigender Scherrate lösen sich diese Verbände und die Zähigkeit nimmt ab. Sind die Gefäße nur geringfügig größer als die Erythrozyten, gewinnt der Effekt der Axialmigration an Bedeutung, wodurch sich die Viskosität weiter verringert. Durch ihre große Deformationsfähigkeit können Blutzellen Kapillare durchströmen, welche einen kleineren Durchmesser als sie selbst haben. In sehr kleinen Kapillaren steigt die Zähigkeit wieder an, da die Erythrozyten an ihre Deformationsgrenze kommen.

²Prozentualer Anteil von Blutzellen am gesamten Blutvolumen

3 Kontinuumsmechanische Grundlagen

Die Kontinuumsmechanik beschäftigt sich mit der Mechanik von Stoffen, deren Eigenschaften als kontinuierlich betrachtet werden können und die daher als Kontinuum bezeichnet werden. Ein Kontinuum besteht aus einer Menge materieller Punkte, welche gleichmäßig im Raum verteilt und deren Eigenschaftsverläufe stetig und differenzierbar sind. Ziel der Kontinuumsmechanik ist die gekoppelte Berechnung von physikalischen Größen (Spannungen, Temperatur, Dichte etc.) und Verformungen (Verzerrungen, Verschiebungen etc.). Im Folgenden wird zunächst auf die Kinematik eingegangen, welche eine rein geometrische Beschreibung von Bewegungen ist. Danach werden die Bilanzgleichungen für Masse und Impuls, die die Ursachen für Bewegungen und Deformationen berücksichtigen, aus der allgemeinen Volumenbilanz hergeleitet. Bilanzgleichungen und Kinematik führen auf ein unterbestimmtes Gleichungssystem, welches mit Aussagen über bestimmte Materialverhalten (konstitutive Gesetze) geschlossen werden muss [128, 3, 40].

3.1 Körper, Konfiguration und Kinematik

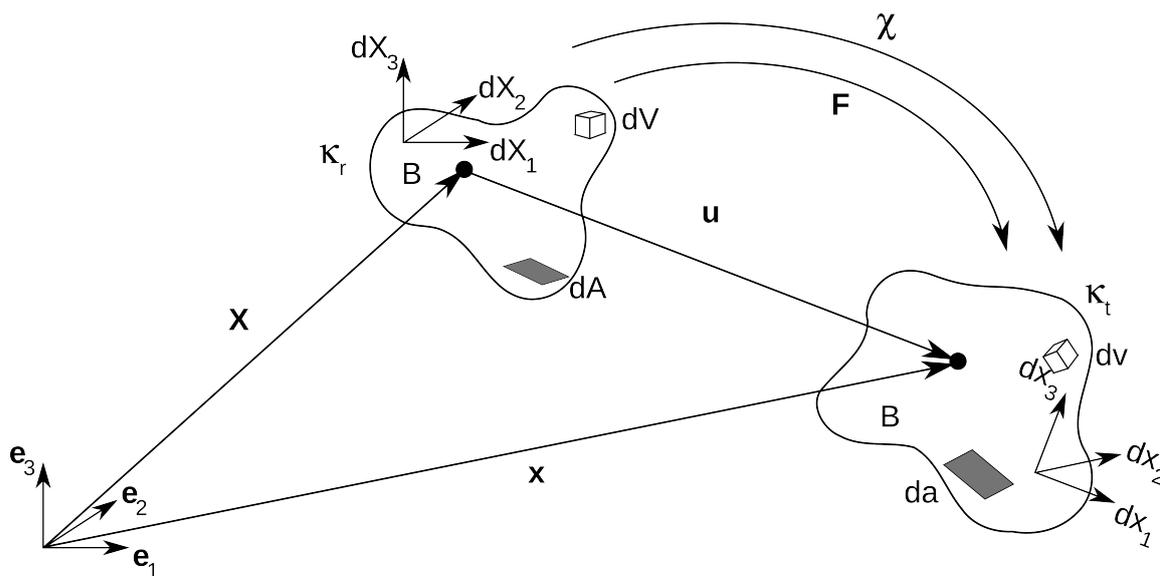


Abbildung 3.1: Körper, Konfiguration, Bewegung

Ein Körper B ist eine zusammenhängende, kompakte Menge von Teilkörpern in einem abstrakten Raum. Die Zuweisung dieser Teilchen zu Punkten im physikalischen Raum \mathbf{R}^3

bezeichnet man als Konfiguration κ . Die Konfiguration zum Zeitpunkt $t = 0$ nennt man Referenzkonfiguration κ_r , die zu einem beliebigen Zeitpunkt t Momentankonfiguration κ_t . Die Position eines Punktes in der Referenzkonfiguration wird mit dem Ortsvektor \mathbf{X} festgelegt, die in der Momentankonfiguration durch den Ortsvektor \mathbf{x} . Die Funktion χ , die von der Referenz- auf die Momentankonfiguration abbildet, wird als Bewegung bezeichnet. Diese Funktion ist invertierbar, stetig und differenzierbar. Um physikalische Größen zu beschreiben, werden zwei verschiedene Betrachtungsweisen herangezogen [120]:

- Die materielle oder Lagrangesche Betrachtungsweise geht von einem mitbewegten Beobachter aus. Eine beliebige physikalische Größe φ hängt vom Teilchen, das zum Zeitpunkt $t = 0$ an der Position \mathbf{X} war, und der Zeit t ab:

$$\varphi = \varphi(\mathbf{X}, t) \quad (3.1)$$

- Die räumliche oder Eulersche Betrachtung geht von einem raumfesten Beobachter aus. Dieser sieht zum Zeitpunkt t am Ort \mathbf{x} ein bestimmtes Teilchen, welches zum Zeitpunkt $t = 0$ den Ursprung \mathbf{X} hatte:

$$\varphi = \varphi(\mathbf{x}, t) = \varphi(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) \quad (3.2)$$

Die Differenz der Ortsvektoren eines Teilchen in der Referenz- und Momentankonfiguration bezeichnet man als Verschiebung \mathbf{u} . Die materielle Ableitung der Verschiebung nach den materiellen Koordinaten nennt man Verschiebungsgradient \mathbf{H} :

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad \text{Verschiebung} \quad \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} \quad \text{Verschiebungsgradient} \quad (3.3)$$

Der Deformationsgradient \mathbf{F} ist die Ableitung der Bewegung nach materiellen Koordinaten. Er bildet ein Linienelement linear aus der Referenzkonfiguration $d\mathbf{X}$ in die Momentankonfiguration $d\mathbf{x}$ ab. \mathbf{F} lässt sich als Kombination aus Rotation \mathbf{R} und Streckung/Stauchung ausdrücken und ist daher im Allgemeinen unsymmetrisch¹. \mathbf{R} ist dabei ein eigentlich orthogonaler Drehtensor² ($\det(\mathbf{R}) = 1$) und der linke (\mathbf{V}) bzw. rechte (\mathbf{U}) Strecktensor ist symmetrisch und positiv definit. Entfällt die Rotation ist der Deformationsgradient also symmetrisch:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R} = \mathbf{1} + \mathbf{H} \quad \text{Deformationsgradient} \quad (3.4)$$

Die Determinante des Deformationsgradienten J transformiert Volumenelemente von der Referenzkonfiguration in die Momentankonfiguration. Da zum einen ein Volumenelement nicht verschwinden bzw. seine Orientierung nicht ändern kann und zum anderen die Bewegung eindeutig invertierbar sein soll, ist $J > 0$:

$$J = \det(\mathbf{F}) \quad \text{Jacobi-Determinante} \quad (3.5)$$

¹Die Translation wird durch eine Konstante in der Bewegung repräsentiert, die durch die Ableitung entfällt.

²Tensor: multilineare Abbildung zwischen den Komponenten von Tensoren niedrigerer Stufe mit bestimmten Transformationseigenschaften

Als Maß für Verformungen werden folgende Tensoren herangezogen:

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad \text{Rechts-Cauchy-Green-Tensor} \quad (3.6)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{V}^2 = \mathbf{F} \mathbf{F}^T \quad \text{Links-Cauchy-Green-Tensor} \quad (3.7)$$

$$\mathbf{G} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \mathbf{H}) \quad \text{Greenscher Verzerrungstensor} \quad (3.8)$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{B}^{-1}) \quad \text{Almansischer Verzerrungstensor} \quad (3.9)$$

Der rechte Cauchy-Green-Tensor \mathbf{C} transformiert die Quadrate von Linienelementen von κ_r nach κ_t , die Inverse des linken Cauchy-Green-Tensor \mathbf{B}^{-1} analog von κ_t nach κ_r . Wenn eine Transformation verzerrungsfrei stattfindet, gilt $\mathbf{U} = \mathbf{V} = \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{C} = \mathbf{1}$. Da jedoch bei einer Starrkörperbewegung das Verzerrungsmaß verschwinden sollte, werden der Greensche Verzerrungstensor \mathbf{G} auf κ_r und der Almansische Verzerrungstensor \mathbf{A} auf κ_t definiert [128]. Die beiden Verzerrungstensoren beschreiben die Abstandsänderungen von infinitesimal benachbarten Teilchen auf κ_r bzw. κ_t . Die Hauptdiagonalelemente des Greenschen Verzerrungstensors sind, da sie die relativen Längenänderungen anzeigen, mit den Dehnungen, die Nebendiagonalelemente, da sie die Winkeländerungen wiedergeben, mit den Scherungen verknüpft. Drückt man den Greenschen Verzerrungstensor in Abhängigkeit des Verschiebungsgradienten aus, erhält man den rechten Ausdruck in Gleichung 3.8. Für den Fall kleiner Verschiebungen entfällt der quadratische Anteil und \mathbf{G} reduziert sich auf den symmetrischen (linearen) Anteil des Verschiebungsgradienten. Diese Näherung wird als geometrische Linearisierung bezeichnet [40]:

$$\mathbf{G} \approx \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T) = \text{sym}(\mathbf{H}) = \varepsilon \text{ infinitesimaler Verzerrungstensor, für } \|\mathbf{H}\| \ll 1 \quad (3.10)$$

Der räumliche (momentane) Geschwindigkeitsgradient \mathbf{L} ist definiert als die Ableitung der Geschwindigkeit nach räumlichen Koordinaten. Er lässt sich in einen symmetrischen Verzerrungsgeschwindigkeitstensor \mathbf{D} und einen schiefsymmetrischen Spintensor \mathbf{W} zerlegen. Die Hauptdiagonalelemente von \mathbf{D} sind proportional zu den Dehn-, die Nebendiagonalelemente, zu den Schergeschwindigkeiten. Der Spintensor beschreibt die lokale Starrkörper-Rotation [40]:

$$\mathbf{L} = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{D} + \mathbf{W} \quad \text{Geschwindigkeitsgradient} \quad (3.11)$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) \quad \text{Verzerrungsgeschwindigkeitstensor} \quad (3.12)$$

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) \quad \text{Spintensor} \quad (3.13)$$

3.2 Spannungstensoren

Spannungen besitzen die Dimension Kraft pro Fläche und werden zur Beschreibung von deformierten Körpern herangezogen. Legt man eine Schnittfläche durch einen (deformierten) Körper in der Momentankonfiguration, so ist der Spannungsvektor \mathbf{t} an einem materiellen Punkt auf dieser Fläche als das Produkt des Cauchyschen Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$ und des nach außen zeigenden Schnittflächennormalenvektors \mathbf{n} definiert (Cauchys Postulat)

Zur Aufstellung von Materialgleichungen müssen Verzerrungs- und Spannungstensoren in gleichen Koordinaten vorliegen, um sie in Beziehung setzen zu können [3]. In der Strukturmechanik ist die Lagrangesche Betrachtungsweise mit der Referenzkonfiguration als Ausgangsbasis gebräuchlich, sodass der Spannungstensor ebenfalls auf die Referenzkonfiguration bezogen werden muss. Der erste Piola-Kirchhoff-Spannungstensor \mathbf{S}_1 bezieht die Kräfte $d\mathbf{f}$ in κ_t auf die Ursprungsfläche dA in κ_r . Er ist ein Zweifeldtensor, unsymmetrisch und nicht objektiv [128]:

$$1. \text{ P.-K.-Spannungstensor: } \mathbf{S}_1 = J\sigma\mathbf{F}^{-T} \quad (3.20)$$

$$d\mathbf{f} = \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{N}dA = J\sigma\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{N}dA \quad (3.21)$$

Da das Prinzip der materiellen Objektivität (s. Kap. 3.7.1) bei der Aufstellung von Materialgesetzen nicht verletzt werden darf, wird durch Transformation des momentanen Kraftvektors $d\mathbf{f}$ in einen „imaginären“ Kraftvektor $d\mathbf{F}$ auf κ_r die Symmetrie und Objektivität wieder hergestellt. Der dabei entstandene Spannungstensor wird als zweiter Piola-Kirchhoff-Spannungstensor \mathbf{S}_2 bezeichnet:

$$2. \text{ P.-K.-Spannungstensor: } \mathbf{S}_2 = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{S}_1 = J\mathbf{F}^{-1}\sigma\mathbf{F}^{-T} \quad (3.22)$$

$$d\mathbf{F} = \mathbf{F}^{-1}d\mathbf{f} = J\mathbf{F}^{-1}\sigma\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{N}dA = \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{N}dA \quad (3.23)$$

3.3 Invarianten

Zur Beschreibung des Spannungs-Dehnungs-Verhaltens muss ein Zusammenhang zwischen dem Verzerrungs- und dem Spannungstensor gefunden werden, der als Tensorfunktion bezeichnet wird. Gemäß seiner tensoriellen Stufe lassen sich skalarwertige (z.B. bei elastischem Potential [3]) und tensorwertige Tensorfunktionen unterscheiden. Diese Funktionen können keine beliebigen Formen annehmen, sondern unterliegen gewissen Einschränkungen [143]. Beim Wechsel des Koordinatensystems müssen skalarwertige Tensorfunktionen denselben Skalar und tensorwertige Tensorfunktionen den transformierten Tensor wiedergeben. Die Entwicklung von Tensorfunktionen unter gegebenen Restriktionen ist Thema der Darstellungs- oder Invariantentheorie. Diese geht davon aus, dass beispielsweise eine skalarwertige Tensorfunktion nur von den Invarianten des Tensors abhängen kann. Eine Invariante eines Tensors ist eine skalare Größe, die aus dessen Komponenten gebildet wird und beim Wechsel des Koordinatensystems ihren Wert nicht ändert [40].

Um eine skalarwertige Tensorfunktion aufzustellen, ist es zunächst notwendig, die Anzahl an Invarianten zu kennen. Ein vollständiger Satz Invarianten, durch die alle anderen Invarianten dargestellt werden können, nennt sich Basis [143]. Neben den Invarianten der beteiligten Tensoren existieren Simultaninvarianten, die diese miteinander verknüpfen. Die Invarianten I_1, I_2, I_3 eines Tensors 2. Stufe \mathbf{A} lassen sich durch das Lösen der charakteristischen Gleichung 3.24 (rechts) mit den Eigenwerten λ finden:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{1}) = \lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0 \quad (3.24)$$

Die sich ergebenden Invarianten sind abhängig vom Tensor \mathbf{A} und heißen Hauptinvarianten. Diese lassen sich durch die ebenfalls invarianten Eigenwerte ausdrücken (vietascher

Wurzelsatz):

$$I_1 = sp(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \quad (3.25)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \left((sp(\mathbf{A}))^2 - sp(\mathbf{A}^2) \right) = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 \quad (3.26)$$

$$I_3 = det(\mathbf{A}) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \quad (3.27)$$

Ein alternativer Satz Invarianten sind die Grundinvarianten (s. Gl. 3.28 - 3.30), die zu den polynomischen Invarianten zählen. Jeder Satz Invarianten ist in sich unabhängig. Die Sätze untereinander sind es nicht. Eine Invariante, die durch eine andere ausgedrückt werden kann, ist reduzibel, ansonsten irreduzibel. Ein vollständiger Satz irreduzibeler Invarianten nennt sich Integritätsbasis [143]:

$$\tilde{I}_1 = sp(\mathbf{A}) \quad (3.28)$$

$$\tilde{I}_2 = \frac{1}{2} sp(\mathbf{A}^2) \quad (3.29)$$

$$\tilde{I}_3 = det(\mathbf{A}) \quad (3.30)$$

Um zu ermitteln, wie viele unabhängige Simultaninvarianten es gibt, wird das Theorem von Cayley-Hamilton herangezogen (s. Gl. 3.31). Diese Gleichung entsteht aus dem charakteristischen Polynom, wenn man die Eigenwerte durch den Tensor selbst ersetzt. Das Theorem besagt, dass eine Matrix ihr eigenes charakteristisches Polynom erfüllt. Das gleiche gilt auch für Tensoren. Des Weiteren lässt sich jede ganzzahlige Potenz des Tensors $n \geq 3$ durch die Linearkombination von \mathbf{A}^2 , \mathbf{A} und $\mathbf{1}$ ausdrücken [40, 143]:

$$\mathbf{A}^3 - I_1\mathbf{A}^2 + I_2\mathbf{A} - I_3\mathbf{1} = 0 \quad (3.31)$$

3.4 Bilanzgleichungen der Kontinuumsmechanik

Ausgehend von der allgemeinen Volumenbilanz lassen sich die Bilanzgleichungen für Masse, Impuls und Energie herleiten. Im Folgenden wird nur auf die in dieser Arbeit verwendete Masse-, Impuls-, Energie- und Drehimpulsbilanz eingegangen. Die Bilanzgleichungen sind unabhängig von den Materialeigenschaften des Kontinuums gültig. Die zeitliche Änderung einer beliebigen physikalischen Größe j in einem materiellen Volumen ω wird durch den Fluss \mathcal{F} von j über die Berandung $\partial\omega$, beziehungsweise die Produktion \mathcal{P} oder Zufuhr \mathcal{Z} von j im Volumen beeinflusst (s. Gl. 3.32):

$$\frac{d}{dt} j(\omega, t) = -\mathcal{F}(\partial\omega, t) + \mathcal{P}(\omega, t) + \mathcal{Z}(\omega, t) \quad (3.32)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega} g(\mathbf{x}, t) dv = - \oint_{\partial\omega} f(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t) da + \int_{\omega} p(\mathbf{x}, t) dv + \int_{\omega} z(\mathbf{x}, t) dv \quad (3.33)$$

Ersetzt man in Gleichung 3.32 die Terme auf der rechten Seite durch die Integrale über deren Dichten erhält man Gleichung 3.33:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t) = \phi(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} \quad (3.34)$$

Unter Verwendung von Cauchys Postulat (s. Gl. 3.34), dass die Flussdichte f auf einer Berandung nur von dem äußeren Normaleneinheitsvektor \mathbf{n} abhängt, folgt:

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega} g(\mathbf{x}, t) dv = - \oint_{\partial\omega} \phi(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} da + \int_{\omega} p(\mathbf{x}, t) dv + \int_{\omega} z(\mathbf{x}, t) dv \quad (3.35)$$

Das Reynoldssche Transporttheorem (s. Gl. 3.36) stellt den Zusammenhang zwischen Eulerscher und Lagrangescher Betrachtungsweise her. Ziel des Theorems ist die Berechnung der zeitlichen Änderung einer beliebigen Größe ψ in einem materiellen Volumen [74]. Hierbei besteht die Herausforderung darin, dass Ableitung und Integration wegen der Zeitabhängigkeit des Volumenintegrals auf der linken Seite nicht vertauscht werden können [50]. Zunächst wird daher das Integral auf die Referenzkonfiguration transformiert, die zeitliche Ableitung in das Integral gezogen (Leibnizsche Regel [142]) und schließlich der Ausdruck in die Momentankonfiguration zurückgewandelt. Unter Verwendung des Gaußschen Integralsatzes (s. Gl. 3.37) ergibt sich das Theorem zu:

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega} \psi dv = \int_{\Omega, \omega} \frac{\partial \psi}{\partial t} dv + \oint_{\partial \Omega, \partial \omega} \psi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} da \quad (3.36)$$

Das Transporttheorem kann wie folgt interpretiert werden: Die zeitliche Änderung eines materiellen Volumens mit der Größe ψ setzt sich aus der (lokalen) zeitlichen Änderung dieser Größe in einem festen Volumen Ω , das mit dem materiellen Volumen ω gerade zusammenfällt, und dem Fluß dieser Größe über die Oberfläche dieses festen Volumens zusammen [142, 158, 74]. Wendet man das Reynoldssche Transporttheorem auf die linke Seite von Gleichung 3.35 an, so ergibt sich die allgemeine Volumenbilanz in der Momentankonfiguration. Der Satz von Gauß drückt die Divergenz einer physikalischen Größe in einem Volumen durch die Flüsse dieser Größe über den geschlossenen Rand aus [74, 97]:

$$\int_{\omega} \operatorname{div}(\psi) dv = \int_{\omega} \nabla \cdot \psi dv = \int_{\partial \omega} \psi \cdot \mathbf{n} da \quad (3.37)$$

Durch die Anwendung dieses Satzes lässt sich die Volumenbilanz in der Momentankonfiguration zusammenfassen:

$$\int_{\omega} \left(\frac{\partial g}{\partial t} + \operatorname{div}(g\mathbf{v}) + \operatorname{div}(\boldsymbol{\phi}) - p - z \right) dv = 0 \quad (3.38)$$

Bei Gleichung 3.38 handelt es sich um die Volumenbilanz in globaler (integraler) Form. Da diese Bilanz für jedes materielle Teilvolumen gelten muss, muss der Integrand verschwinden. Es ergibt sich die allgemeine Volumenbilanz in lokaler Form:

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \operatorname{div}(g\mathbf{v}) + \operatorname{div}(\boldsymbol{\phi}) - p - z = 0 \quad (3.39)$$

3.4.1 Massenbilanz

Bei der Massenbilanz oder Kontinuitätsgleichung ist die Dichte g der physikalischen Größe in Gleichung 3.38 gleich der Massendichte ρ . Da diese eine Erhaltungsgröße ist, entfällt der Produktionsterm. Weil die Formulierung sich auf ein materielles Volumen bezieht, welches zu jedem Zeitpunkt aus derselben Menge an Teilchen besteht, verschwinden Zufuhr- und Flussdichte. Es bleibt Gleichung 3.40, welche sich mit dem Reynoldsschen Transporttheorem in Gleichung 3.41 umformen lässt. Diese besagt, dass sich die Masse in einem materiellen Volumen zeitlich nicht ändert:

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega} \rho(\mathbf{x}, t) dv = 0 \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0 \quad (3.41)$$

Unter der Voraussetzung eines homogenen und inkompressiblen Kontinuums ($\dot{\rho} = 0$) vereinfacht sich Gleichung 3.41 zu [120]:

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0 \quad (3.42)$$

3.4.2 Impulsbilanz

Das zweite Newtonsche Gesetz besagt, dass die zeitliche Änderung des Impulses gleich der Summe aller angreifenden Kräfte ist [40, 128, 142]. Ersetzt man den Impuls \mathbf{I} und die angreifenden Kräfte durch Integrale über entsprechenden Dichten, erhält man folgenden Ausdruck:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{I} = \frac{d}{dt} \int_{\omega} \rho \mathbf{v} dv = \sum \mathbf{F} = \int_{\omega} \mathbf{f} dv + \oint_{\partial\omega} \boldsymbol{\sigma} da \quad (3.43)$$

Der spezifische Impuls ist das Produkt aus spezifischer Masse (Massendichte) und Geschwindigkeit. Aus Gleichung 3.43 ist ersichtlich, dass die Zufuhrdichte durch den spezifischen Volumenkraftterm und die Flussdichte durch den Cauchyschen Spannungsterm ausgedrückt wird. Da der spezifische Impuls $\rho \mathbf{v}$ eine Erhaltungsgröße ist, verschwindet der Produktionsterm. Es ergibt sich nach Einsetzen der Dichten und der Anwendung des Reynoldsschen Transporttheorems sowie des Gaußschen Integralsatzes die folgende Gleichung für die Momentankonfiguration:

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{f} \quad (3.44)$$

Die Impulsbilanz besagt, dass die zeitliche Änderung des Impulses in der Momentankonfiguration durch den Zufluss von Impulsströmen über die Berandung $\partial\omega$ sowie Oberflächen- und Volumenkräfte verursacht wird [120]. Die Drehimpulsbilanz soll an dieser Stelle nicht hergeleitet werden. Das Ergebnis der Drehimpulsbilanz ist die Symmetrie des Cauchyschen Spannungstensors.

3.4.3 Energiebilanz

Die Energie ist eine Erhaltungsgröße, weswegen die Produktion entfällt. Die Dichte der physikalischen Größe g ist die Summe aus innerer und kinetischer Energie. Diese ändert sich durch eine Zufuhr von Wärme und äußeren Kräften über die Oberfläche ($\Phi = \mathbf{q} - \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \mathbf{v}$) bzw. durch das Einbringen von Strahlung und Volumenkräften ($z = \rho(r + \mathbf{f} \cdot \mathbf{v})$).

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \right] + \operatorname{div} \left(\rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \mathbf{v} \right) = -\operatorname{div}(\mathbf{q}) + \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}^T \cdot \mathbf{v}) + \rho(r + \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}) \quad (3.45)$$

3.5 Materialverhalten von Fluiden

In der Strömungsmechanik ist es üblich, den Cauchyschen Spannungstensor in einen sphärischen und deviatorischen Anteil zu zerlegen. Der Deviator, welcher eine Aussage über die Reibung im Fluid trifft, enthält die Schubspannungen (Nebendiagonalelemente) des Cauchyschen Spannungstensors:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{1} + \boldsymbol{\sigma}_{dev} \quad (3.46)$$

Die Schubspannungen in einem linear-elastischen Festkörper sind proportional zur Verformung, die in einem Fluid proportional zur Verformungsgeschwindigkeit, die durch den Verzerrungsgeschwindigkeitstensor \mathbf{D} beschrieben wird [158]. Ein Fluid³ ist ein Kontinuum, welches in Ruhe keine Schubspannungen aufnehmen kann; kommt die Strömung zum Erliegen, verschwindet der Deviator und der Cauchysche Spannungstensor beschreibt den hydrostatischen Druckzustand:

$$\boldsymbol{\sigma}_{dev} = f(\mathbf{D}), \quad \boldsymbol{\sigma}_{dev} = \mathbf{0} \quad \text{für} \quad \mathbf{D} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{1} \quad (3.47)$$

Während bei einem Festkörper eine konstante Schubspannung eine endliche Verformung auslöst, bewirkt sie bei einem Fluid eine unendliche, welche man Fließen oder Strömen nennt [45, 158].

Strömungen werden anhand verschiedener Aspekte charakterisiert. Ist das Strömungsphänomen zeitabhängig wird es instationär, ansonsten stationär genannt. Bei geringen Machzahlen⁴ oder bei dichtebeständigen Fluiden kann die Strömung als inkompressibel angenommen werden, andernfalls als kompressibel. Dominieren in einem fließenden Medium die Reibungskräfte, bildet sich eine laminare Strömung aus. Mit steigender Geschwindigkeit beginnen die Trägheitskräfte an Einfluss zu gewinnen. Wird ein kritisches Verhältnis beider Kräfte überschritten, wird die Strömung turbulent. Turbulenz zeichnet sich durch ihren dreidimensionalen, instationären und Mischungintensiven Charakter aus [120, 119].

3.5.1 Ideale Fluide

Für reibungsfreie (ideale) Strömungsmedien entfällt der Deviator auch für nicht verschwindende Verzerrungsgeschwindigkeiten:

$$\text{Ideales/reibungsfreies Fluid: } \boldsymbol{\sigma}_{dev} = \mathbf{0} \quad \text{für} \quad \mathbf{D} \neq \mathbf{0} \quad (3.48)$$

Die Spannungen im Fluid hängen dann nur vom Druck ab:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{1} \quad (3.49)$$

Setzt man den Cauchyschen Spannungstensor für diesen Fall in die Impulsbilanz ein, so ergeben sich die Euler-Gleichungen in koordinatenfreier Schreibweise:

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = -\text{grad}(p) + \mathbf{f} \quad (3.50)$$

3.5.2 Viskose Fluide

Ist die Spannung eine Funktion der Verzerrungsgeschwindigkeit, so wird das Fluid als viskos oder zäh bezeichnet [142]. Der Stokessche Reibungsansatz ist der einfachste Zusammenhang zwischen der Verzerrungsgeschwindigkeit und dem Spannungsdeviator [120]:

$$\boldsymbol{\sigma}_{dev} = 2\mu\mathbf{D} = \mu(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) = \mu(L_{ij} + L_{ji}) \quad (3.51)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{1} + 2\mu\mathbf{D} \quad (3.52)$$

³Fluid wird als Oberbegriff für Flüssigkeiten und Gase verwendet.

⁴Machzahl $Ma = \text{Anström-/Schallgeschwindigkeit}$

Durch das Einsetzen des so gebildeten Cauchyschen Spannungstensors in die Impulserhaltungsgleichung erhält man die Navier-Stokes-Gleichungen:

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = -\operatorname{grad}(p) + \mathbf{f} + \mu \operatorname{div}(L_{ij} + L_{ji}) \quad (3.53)$$

$$= -\operatorname{grad}(p) + \mathbf{f} + \mu \operatorname{div}(v_{i,j} + v_{j,i}) \quad (3.54)$$

$$= -\operatorname{grad}(p) + \mathbf{f} + \mu (v_{i,jj} + v_{j,ij}) \quad (3.55)$$

$$= -\operatorname{grad}(p) + \mathbf{f} + \mu (v_{i,jj}) \quad (3.56)$$

$$= -\operatorname{grad}(p) + \mathbf{f} + \mu \nabla^2 \mathbf{v} = -\operatorname{grad}(p) + \mathbf{f} + \mu \Delta \mathbf{v} \quad (3.57)$$

Der Faktor μ im Stokesschen Reibungsansatz wird als dynamische Viskosität bezeichnet. Ist die Viskosität konstant, ist der Zusammenhang zwischen dem Verzerrungsgeschwindigkeitstensor \mathbf{D} und dem Spannungsdeviator $\boldsymbol{\sigma}_{dev}$ linear, und das Kontinuum wird als newtonsches Fluid bezeichnet. Neben der dynamischen wird auch die kinematische Viskosität $\nu = \mu/\rho$ verwendet [45, 120].

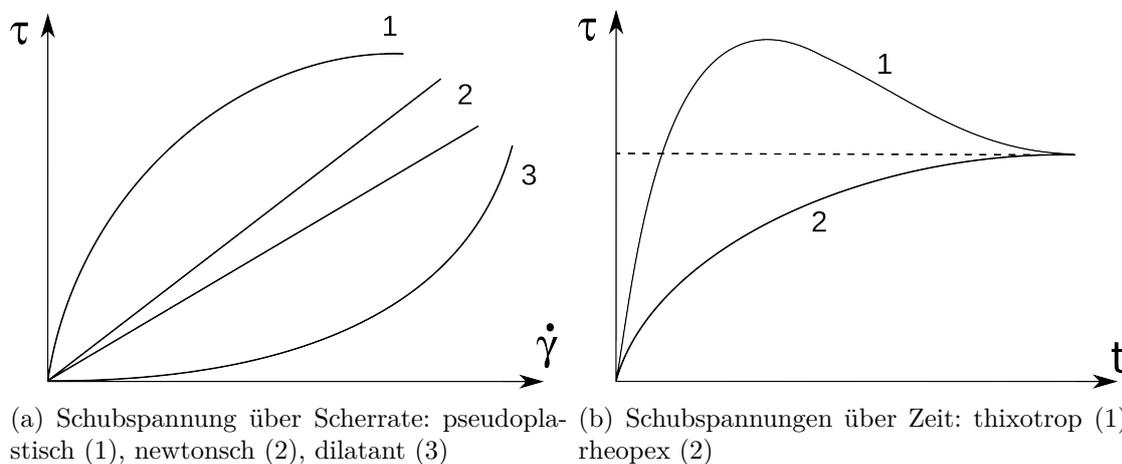


Abbildung 3.3: Fließdiagramme

Ist die dynamische Viskosität nicht konstant, spricht man von einem nicht-newtonschen Medium. Zur Beschreibung der Viskosität wird das Fließdiagramm herangezogen, in dem die Schubspannung über die entsprechende Scherrate $\dot{\gamma}$ (Schergeschwindigkeit) aufgetragen wird (s. Abb. 3.3(a)). Die Scherrate ist die zweite Invariante I_2 von \mathbf{D} . Entsprechend der verschiedenen möglichen Beziehungen zwischen Schubspannungen und Scherraten wird das Fließverhalten unterschiedlich bezeichnet.

Bei einem viskosen Fluid kann die Viskosität allgemein eine Funktion der Scherrate und gegebenenfalls der anliegenden Schubspannung sein [142]. Ist die Zähigkeit zusätzlich eine Funktion der Zeit, wird die Flüssigkeit oder das Gas elastoviskos genannt. Bei einem elastoviskosen Fluid unterscheidet man die Medien, die bei konstanter anliegender Schubspannung mit der Zeit dickflüssiger werden (rheopex) von denen, die mit der Zeit dünnflüssiger werden (thixotrop) (s. Abb. 3.3(b)) [142].

3.6 Dimensionslose Kennzahlen

Die Frage nach der Vergleichbarkeit von Strömungen (zum Beispiel unterschiedlicher Größenskalen) ist Gegenstand der Ähnlichkeitsmechanik. Zur Charakterisierung der betei-

lichten Strömungen werden dimensionslose Kennzahlen herangezogen. Zwei Strömungen sind mechanisch ähnlich, wenn sie in allen für sie wichtigen dimensionslosen Kennzahlen übereinstimmen [74]. Um die Vergleichbarkeit zu gewährleisten, muss zusätzlich eine geometrische Ähnlichkeit bestehen. Ein weiterer Vorteil der Verwendung dimensionsloser Kennzahlen liegt in einer Reduktion der unabhängigen Einflussgrößen auf das gegebene Phänomen [120, 119, 45].

Die Bestimmung der für das Problem charakteristischen dimensionslosen Kennzahlen kann einerseits durch das konsequente Entdimensionieren der das physikalische Problem beschreibenden Gleichungen erfolgen. Die sich daraus ergebenden Vorfaktoren der einzelnen Terme sind die gesuchten Kennzahlen. Andererseits kann man durch eine Dimensionsanalyse in Kenntnis der relevanten Einflussgrößen diese systematisch zu Kennzahlen kombinieren. Die für die Herzströmung relevanten Kennzahlen sind die Reynolds- und die Wormersley-Zahl sowie die dimensionslose Pumparbeit [156, 121].

Reynolds-Zahl

Die Reynolds-Zahl bezeichnet das Verhältnis von Trägheits- zu Reibungskräften. Bei sehr kleinen Reynolds-Zahlen dominiert die Reibung und die Strömung wird „schleichend“ genannt. Bei Überschreiten einer kritischen Reynolds-Zahl wird die Strömung instabil gegenüber kleinen Störungen und Turbulenz setzt ein. Bei sehr großen Reynolds-Zahlen kann man mit Ausnahme der Grenzschichten von einer reibungsfreien Strömung ausgehen. Aufgrund der inkompressiblen, instationären und dreidimensionalen Strömung in der komplexen Herzgeometrie hat es sich als aussagekräftig erwiesen, eine mittlere Reynolds-Zahl zu definieren [121, 156, 119]:

$$Re = \frac{\text{Trägheitskräfte}}{\text{Reibungskräfte}} = \frac{v_{char} L_{char}}{\nu}, \quad \overline{Re}_D = \frac{\bar{v} \bar{D}}{\bar{\nu}_{eff}} \quad (3.58)$$

$\bar{\nu}_{eff}$: Mittlere effektive Viskosität [m^2/s] [156]

Herzströmungen sind transitionell. Die Reynolds-Zahl weist zwar auf eine turbulente Strömung hin, da aber die Zykluszeit nicht für die Ausbildung der Turbulenz ausreicht, ist die Strömung auch bei überkritischen Reynolds-Zahlen nicht voll turbulent.

Wormersley-Zahl

Das Quadrat der Wormersley-Zahl stellt das Verhältnis von instationären Beschleunigungen und Reibungskräften dar. Es ist die dimensionslose Kennzahl zur Charakterisierung der Überlagerung einer stationären mit einer pulsierenden Grundströmung wie sie zum Beispiel in Blutgefäßen oder dem Herzen vorkommt [5, 124]:

$$Wo^2 = \frac{\text{inst. Trägheitskräfte}}{\text{Reibungskräfte}} = \frac{\rho \omega L_{char}^2}{\mu}, \quad \overline{Wo} = \bar{D} \sqrt{\frac{\omega}{\bar{\nu}_{eff}}}, \quad \text{mit: } \omega = \frac{2\pi}{T_0} \quad (3.59)$$

t_b : Verweilzeit [s]

Dimensionslose Pumparbeit

Die dimensionslose Pumparbeit O ist ein Volumenverhältnis zur strömungsmechanischen Bewertung des Gesundheitszustandes eines Herzens. Bei einem erkrankten Herzen steigt die Kennzahl an, da die Verweilzeit des Blutes t_b im Herzen schneller ansteigt als die Druck-Volumen-Arbeit abnimmt [124, 156]:

$$O = \frac{A_p t_b}{\bar{\mu} V_s} \quad (3.60)$$

A_p : Druck-Volumen-Arbeit [J]

3.7 Materialgleichungen der Strukturmechanik

3.7.1 Prinzipien konstitutiver Gleichungen

Der Zusammenhang zwischen Spannungen und Verformungsmaßen, welche zum Beispiel tensorwertige Tensorfunktionen sein können, muss besondere Axiome erfüllen:

- **Prinzip der Kausalität:** Die beteiligten Variablen lassen sich in abhängige und unabhängige aufteilen [183].
- **Prinzip des Determinismus:** Die momentanen Spannungen an einem materiellen Punkt können nur von den momentanen oder vorherigen Verformungen abhängen. [9, 158, 183, 3, 40]. Unter der Verwendung des Prinzips der Kausalität lässt sich das Prinzip des Determinismus dahingehend verallgemeinern, dass abhängige (dynamische) Variablen nur von der Situation in der Referenzkonfiguration und dem zeitlichen Verlauf der unabhängigen (kinematischen) Variablen bestimmt sind [183, 9].
- **Prinzip der lokalen Wirkung:** Die abhängigen Variablen, wie zum Beispiel die Spannung, in einem materiellen Punkt werden nur durch die unabhängigen Größen und deren Historie in einer endlichen Entfernung zu diesem Ort beeinflusst. Schrumpft diese Entfernung auf den materiellen Punkt selbst, so bezeichnet man das Material als einfach [40, 9, 3, 158, 183].
- **Prinzip der Forminvarianz:** Die Formulierung des konstitutiven Gesetzes muss unabhängig vom Beobachter sein [9].
- **Prinzip der physikalischen Konsistenz:** Materialgesetze müssen im Einklang mit den Bilanzgleichungen, insbesondere der Einschränkung nicht-negativer Produktion von Entropie, stehen [3, 183, 158].
- **Prinzip der materiellen Objektivität:** Ausgangsbasis für die Überlegungen zur materiellen Objektivität sind die euklidischen Transformationen in der Momentankonfiguration. Euklidische Transformationen sind Koordinatentransformationen zwischen zwei Beobachtern und setzen sich aus Rotation und Translation zusammen. Wird ein Ereignis von zwei Beobachtern (ohne Index und mit *) wahrgenommen, so werden die individuell erfassten physikalischen Größen, wie Positionen und Spannungen, im jeweiligen Bezugssystem unterschiedlich sein. Wenn diese allerdings

invariant relativ zum Beobachterwechsel sind, werden die Größen objektiv bezüglich der euklidischen Transformationen genannt. Das bedeutet, dass eine physikalische Variable objektiv ist, wenn sie entsprechend ihrer tensoriellen Stufe wie folgt transformiert wird⁵ [50, 9, 40]:

$$\text{Objektiver Tensor: } \boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{Q}^T \quad (3.61)$$

$$\text{Objektiver Vektor: } \mathbf{u}^* = \mathbf{Q}\mathbf{u} \quad (3.62)$$

$$\text{Objektiver Skalar: } J^* = J \quad (3.63)$$

- **Prinzip der Spannungsinvarianz unter superponierter Starrkörperbewegung:** Im Gegensatz zum Prinzip der materiellen Objektivität, bei dem zwei Beobachter ein Ereignis betrachten, handelt es sich beim Prinzip der Spannungsinvarianz unter superponierter Starrkörperbewegung um einen Beobachter, der ein Material unter zwei verschiedenen Bewegungen wahrnimmt. Jede physikalische Größe, welche auf der Referenzkonfiguration κ_r definiert ist, wird von Starrkörperbewegungen nicht beeinflusst. Für jede übrige Größe ist das Prinzip erfüllt, wenn sie sich zwischen den beiden Bewegungen wie eine objektive Größe transformieren lässt [9, 50].

3.7.2 Elastische Festkörper

Ein Material wird als elastisch bezeichnet, wenn der momentane Spannungszustand im isothermen Fall nur von der momentanen Deformation abhängt:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{F}, \mathbf{X}) \quad (3.64)$$

Ist das Material homogen, entfällt die Abhängigkeit vom Ort:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{F}) \quad (3.65)$$

3.7.3 Hyperelastische Festkörper

Eine elastische Deformation ist reversibel. Für einen reversiblen Prozess gibt es keine Zunahme der Entropie. Dies ist nur möglich, wenn sich die im Material gespeicherte, elastische Energie (im isothermen Fall) als Potential darstellen lässt⁶. Dieses Potential wird Formänderungsenergiedichte W genannt. Ein elastisches Material, für das eine Formänderungsenergiedichte angegeben werden kann, wird als hyperelastisch bezeichnet und ist konservativ [50, 128]. Die zeitliche Änderung der Formänderungsenergiedichte ist für den Fall eines adiabaten Prozesses gleich der Spannungsleistung:

$$\dot{W}(\cdot) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{S}_1 \cdot \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{S}_2 \cdot \dot{\mathbf{G}} \quad (3.66)$$

⁵ \mathbf{Q} ist eine eigentlich orthogonale Matrix

⁶Im thermodynamischen Kontext (nach Helmholtz) auch als freie Energie bezeichnet, welche als die innere Energie abzüglich des Entropieanteils definiert ist

Durch Ableiten der Formänderungsenergie, welche ein Beispiel für eine skalarwertige Tensorfunktion ist, nach einem Verformungsmaß erhält man die entsprechende Spannung:

$$\mathbf{S}_1 = \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} = 2\mathbf{F} \frac{\partial W(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \quad (3.67)$$

$$\mathbf{S}_2 = \frac{\partial W(\mathbf{G})}{\partial \mathbf{G}} = 2 \frac{\partial W(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \quad (3.68)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = J^{-1} \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^T \quad (3.69)$$

Da an die Formänderungsenergie als konstitutives Gesetz die Forderung nach materieller Objektivität gestellt wird, wird W in Abhängigkeit objektiver Größen definiert. Hierbei bieten sich zum Beispiel die Eigenwerte der Strecktensoren oder Invarianten an [128]. Zur Behandlung inkompressibler Phänomene, lässt sich die Formänderungsenergie in einen Anteil als Folge der Kompression und einen als Folge der Gestaltänderung trennen. Für ein isotropes Material, bei dem W in Abhängigkeit von den Invarianten formuliert ist, folgt:

$$W = W(I_1, I_2, I_3) = W_{vol} + W_{isochor} = W(I_3) + W(I_1, I_2) \quad (3.70)$$

Im Falle von Inkompressibilität entfällt der volumetrische Anteil, in der spannungs- und verzerrungsfreien Referenzkonfiguration verschwindet die Formänderungsenergie vollständig.

3.7.4 Lineare Elastizität

Ausgangsbasis der linearen Elastizitätstheorie ist die Annahme kleiner Verzerrungen. Für diesen Fall kann ein linearer Zusammenhang zwischen den Spannungen und den Verzerrungen angenommen werden. Liegen zusätzlich auch kleine Verschiebungen vor, ist der Cauchysche Spannungstensor eine lineare Funktion des infinitesimalen Verzerrungstensors [9, 8]:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}[\boldsymbol{\varepsilon}] \quad (3.71)$$

\mathbb{C} ist ein Tensor 4. Stufe und wird als Steifigkeitstensor bezeichnet. Setzt man die allgemeine Darstellung eines isotropen Tensors 4. Stufe für den Steifigkeitstensor ein, so ergibt sich das allgemeine Hookesche Gesetz für kleine Verzerrungen und Verschiebungen [3]:

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda sp(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{1} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.72)$$

Die beiden Parameter λ und μ werden in diesem Kontext die Lamé-Konstanten genannt. Sie hängen mit den Werkstoffgrößen Elastizitätsmodul E , Schubmodul G und Querkontraktionszahl ν wie folgt zusammen:

$$G = \mu, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.73)$$

Die Form des Hookeschen Gesetzes kann man ebenfalls durch eine Linearisierung der allgemeinen Form einer Materialgleichung (Reinerscher Darstellungssatz) erhalten. Bestehen große Verschiebungen, ist die geometrische Linearisierung nicht zulässig. Das Hookesche Gesetz schreibt sich unter Verwendung des Greenschen Verzerrungstensors \mathbf{G} [3]:

$$\mathbf{S}_2 = \lambda sp(\mathbf{G})\mathbf{1} + 2\mu\mathbf{G} \quad (3.74)$$

Wenn das Material hyperelastischen Charakter besitzt, lässt sich eine Formänderungsenergiedichte W angeben, welche nur von der zweiten Invariante des Verformungsmaßes abhängen kann [9]:

$$W(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{\lambda}{2} sp(\boldsymbol{\varepsilon})^2 + \mu sp(\boldsymbol{\varepsilon}^2) \quad (3.75)$$

3.7.5 Eigenschaften von Materialien

Sind die Materialeigenschaften ortsunabhängig, ist der Stoff homogen, sonst ist er heterogen/inhomogen. Ein Material wird isotrop genannt, wenn seine Eigenschaften nicht richtungsabhängig sind, oder anders formuliert, wenn er unendlich viele Symmetrieebenen enthält [8]. Ist das Materialverhalten nicht isotrop, bezeichnet man es als anisotrop. Der Grad der Anisotropie hängt von den Symmetrieebenen ab und beeinflusst die Anzahl der unabhängigen Konstanten, die zur Beschreibung notwendig sind. Der Steifigkeitstensor ist ein Tensor 4. Stufe und kann maximal 81 unabhängige Einträge besitzen. Aus der Symmetrie des Cauchyschen Spannungstensors und des Verzerrungstensors (Untersymmetrien) folgt zusammen mit der Existenz eines Potentials für hyperelastische Materialien (Hauptsymmetrie, s. Gl. 3.76) eine Reduktion der maximal notwendigen Konstanten auf 21 [9, 8, 3]:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbb{C} = \frac{\partial^2 W(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^2} \quad (3.76)$$

3.8 Anfangs- und Randbedingungen

Wenn die Bilanzgleichungen mit den Materialgleichungen und der Kinematik kombiniert werden, entsteht jeweils ein geschlossenes System aus Differentialgleichungen für die Struktur und die Strömung. Zur Lösung dieser Gleichungssysteme werden generell Randbedingungen auf der Begrenzung des jeweiligen Problemgebietes $\partial\omega^{s,f}$ zum Zeitpunkt $t > t_0$ benötigt. Für ein zeitabhängiges Problem ist es zusätzlich erforderlich, Anfangsbedingungen in den Gebieten $\omega^{s,f}$ zum Zeitpunkt $t = t_0$ anzugeben. Die in dieser Arbeit verwendeten Bedingungen lassen sich in zwei Klassen unterteilen:

- **Neumann-Bedingung:** Darunter versteht man die Vorgabe der Normalableitung der gesuchten physikalischen Größe auf dem Rand:
 - **Strukturmechanik:** Spannungs- oder natürliche Randbedingung: $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ auf $\partial\omega_n^s$ [183, 128]
 - **Strömungsmechanik:** Massenstrom \dot{m} am Einlass oder Druckgradient an der Wand $\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = 0$ auf $\partial\omega_n^f$ [77, 48]
- **Dirichlet-Bedingung:** Eine solche Bedingung bezeichnet die Angabe von Werten der gesuchten physikalischen Größe auf dem Rand:
 - **Strukturmechanik:** Verschiebungs- oder wesentliche Randbedingungen: \mathbf{u} auf $\partial\omega_d^s$
 - **Strömungsmechanik:** Geschwindigkeit am Einlass \mathbf{v} oder Druck am Auslass p auf $\partial\omega_d^f$

Für die Vorgabe der Randbedingungen gilt [50]:

$$\text{Strömung: } \partial\omega^f = \partial\omega_n^f \cup \partial\omega_d^f \text{ mit } \partial\omega_n^f \cap \partial\omega_d^f = \emptyset \quad (3.77)$$

$$\text{Struktur: } \partial\omega^s = \partial\omega_n^s \cup \partial\omega_d^s \text{ mit } \partial\omega_n^s \cap \partial\omega_d^s = \emptyset \quad (3.78)$$

4 Numerische Grundlagen

Die Kombination der Bilanzgleichungen mit den Materialgesetzen führt zu den Feldgleichungen, welche in der Strömungsmechanik auch Transportgleichungen genannt werden. Die Feldgleichungen der Strömungs- und Strukturmechanik sind mit Ausnahme sehr einfacher kontinuumsmechanischer Phänomene und Geometrien analytisch meist nicht zugänglich. Zur Lösung werden daher numerische Methoden herangezogen. In der Strömungsmechanik hat sich die Finite-Volumen-Methode (FVM) und in der Strukturmechanik die Finite-Elemente-Methode (FEM) etabliert.

4.1 Methode der Finiten-Volumen

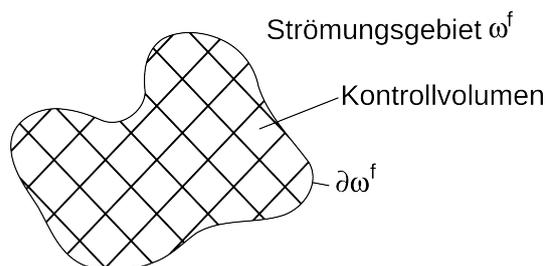


Abbildung 4.1: Integrationsgebiet der FVM

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit werden Strömungen betrachtet, welche inkompressibel, instationär und isotherm sind. Im Folgenden wird die numerische Methode zur Behandlung der Feldgleichungen für diesen Einsatzzweck dargestellt. Das Strömungsgebiet wird zunächst in eine endliche Anzahl Kontrollvolumen (KV) unterteilt (s. Abb. 4.1). Für jedes dieser Kontrollvolumen werden die Feldgleichungen in integraler Darstellung formuliert (s. Gl. 4.1). Die Finite-Volumen-Methode (FVM) setzt voraus, dass die Erhaltungsgleichungen sowohl im finiten Volumen als auch im gesamten Strömungsgebiet eingehalten werden. Die FVM ist damit a priori konservativ (erhaltungstreu), was eine der wichtigsten Eigenschaften für die Berechnung strömungsmechanischer Problemstellungen ist:

$$\int_{V_{KV}} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \sum_{m=1}^3 \frac{\partial \mathcal{K}_m}{\partial x_m} - \frac{1}{Re} \sum_{m=1}^3 \frac{\partial \mathcal{D}_m}{\partial x_m} + \mathcal{F} \right) dv = \mathbf{0} \quad (4.1)$$

mit

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ \rho v_3 \end{pmatrix} \quad \mathcal{K}_m = \begin{pmatrix} \rho v_m \\ \rho v_1 v_m + \delta_{1m} p \\ \rho v_2 v_m + \delta_{2m} p \\ \rho v_3 v_m + \delta_{3m} p \end{pmatrix} \quad \mathcal{D}_m = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{m1} \\ \tau_{m2} \\ \tau_{m3} \end{pmatrix} \quad \mathcal{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

Hier beschreibt \mathbf{v} den Lösungsvektor, \mathcal{K}_m den Vektor der konvektiven Terme, \mathcal{D}_m die dissipativen Terme und \mathcal{F} Volumenkräfte. Mit Hilfe des Satzes von Gauß reduziert sich die Ableitungsordnung. Daraus folgen die exakten und kontinuierlichen Ausgangsgleichungen

der Finiten-Volumen-Methode (s. Gl. 4.3, hier für Hexaeder). Zur konkreten Berechnung der Funktionswerte der Erhaltungsgrößen und deren Ableitungen werden die Ausgangsgleichungen in einem zweiten Schritt diskretisiert [77, 120]:

$$\int_{V_{KV}} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dv + \int_{\partial KV} \left(\sum_{m=1}^3 \boldsymbol{\kappa}_m - \frac{1}{Re} \sum_{m=1}^3 \mathcal{D}_m \right) \cdot \mathbf{n} da + \int_{V_{KV}} \mathcal{F} dv = \mathbf{0} \quad (4.2)$$

$$\left[\frac{d\mathbf{v}}{dt} V_{KV} + \sum_{l=1}^6 \sum_{m=1}^3 \boldsymbol{\kappa}_{ml} \mathbf{n}_{ml} A_{ml} - \frac{1}{Re} \sum_{l=1}^6 \sum_{m=1}^3 \mathcal{D}_{ml} \mathbf{n}_{ml} A_{ml} + \mathcal{F} V_{KV} \right]_{i,j,k} = \mathbf{0} \quad (4.3)$$

Die Finite-Volumen-Methode kann in zell- und knotenzentriert unterteilt werden, je nachdem, ob der Berechnungspunkt im Mittelpunkt des Kontrollvolumens liegt oder ob die Punkte das Kontrollvolumen begrenzen. Da eine weitere Annahme der FVM darin besteht, dass die Erhaltungsgröße im KV konstant ist, besitzt die zellzentrierte Finite-Volumen-Methode eine höhere Genauigkeit bei der Approximation dieser Größen. Die knotenzentrierte Variante besitzt bei stark verzerrten Gittern einen Genauigkeitsvorteil bei der Näherung der Flüsse über die Oberflächen unter Verwendung des Zentralsdifferenzenverfahrens [27, 48].

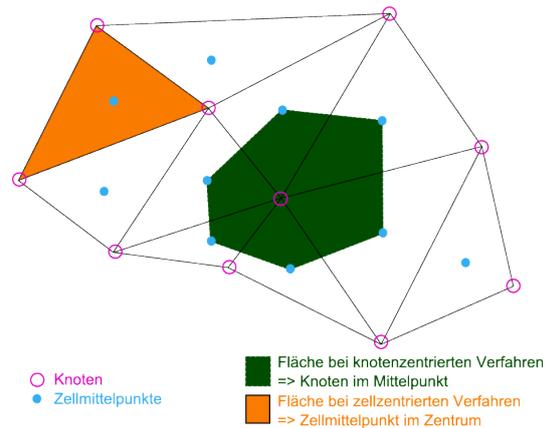


Abbildung 4.2: Zell- und Knotenzentrierte FVM [106]

Vorteile der Finiten-Volumen-Methode sind neben der Erhaltungstreue die Robustheit bei verzerrten numerischen Gittern oder starken Gradienten. Die Methode kann im Gegensatz zur der Finiten-Differenzen auch für unstrukturierte Gitter eingesetzt werden.

4.1.1 Diskretisierungsverfahren

Die Approximation der kontinuierlichen Erhaltungsgleichungen an diskreten Punkten des Berechnungsgebietes wird Diskretisierung genannt. Hierbei werden kontinuierliche in diskrete Funktionswerte und Differentiale in Differenzenquotienten überführt. Die Diskretisierungsverfahren lassen sich in räumliche und zeitliche Verfahren unterteilen. Ein Diskretisierungsverfahren wird durch folgende Eigenschaften näher charakterisiert [152, 174, 27, 77, 48]:

- **Konsistenz:** Die diskretisierten Gleichungen gehen bei abnehmendem Raum- und Zeitschritt in die exakten Gleichungen über. Die Differenz zwischen exakten und diskretisierten Gleichungen nennt man Abbruchfehler. Dieser geht für ein konsistentes Verfahren für $(\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta t) \rightarrow 0$ gegen 0.
- **Stabilität:** Ein Verfahren ist stabil, wenn die numerischen Fehler, die während der Simulation auftreten, nicht verstärkt sondern gedämpft werden. Für ein zeitabhängiges Problem ist eine stabile Lösung beschränkt.

- **Konvergenz:** Die numerische Lösung der diskretisierten Gleichung strebt bei kleiner werdendem Raumschritt gegen die Lösung der exakten Differentialgleichung.
- **Beschränktheit:** Die numerische Lösung an den Gitterpunkten im Strömungsgebiet muss in einem physikalisch sinnvollen Bereich liegen. Darunter versteht man beispielsweise, dass die Dichte nicht negativ wird oder Konzentrationen zwischen 0 und 100% liegen.
- **Konservativität:** Ein Diskretisierungsverfahren ist konservativ, wenn der Fluss der Transportgröße aus einer Zelle (betragsmäßig) dem Fluss in die benachbarte Zelle entspricht.
- **Genauigkeit:** Hierunter werden der Abbruchfehler bei der Diskretisierung, die Modellfehler bei der mathematischen Beschreibung des Phänomens und der Konvergenzfehler bei der numerischen Lösung verstanden.
- **Transportverhalten:** Innerhalb einer Strömung werden Informationen, Energien, Massen etc. konvektiv, diffusiv oder konvektiv-diffusiv transportiert. Berücksichtigt ein Diskretisierungsverfahren die unterschiedlichen Mechanismen, erfüllt es diese Anforderung.

Im Rahmen dieser Arbeit wurden folgende Diskretisierungsverfahren auf der Strömungsseite verwendet [1]:

- **Druckinterpolation:** Der Druckgradient über einer Zelle setzt sich aus den Drücken auf den gegenüberliegenden Seitenflächen des Kontrollvolumens zusammen. Zur Bestimmung des Druckes auf eine Seitenfläche wird Gleichung 4.4 verwendet:

$$p_f = \frac{\frac{p_{c0}}{a_{P,c0}} + \frac{p_{c1}}{a_{P,c1}}}{\frac{1}{a_{P,c0}} + \frac{1}{a_{P,c1}}} \quad (4.4)$$

Der Druck auf der Seitenfläche eines Kontrollvolumens p_f bestimmt sich aus den Drücken der Zellen, die durch diese Fläche getrennt werden (p_{c1}, p_{c0}) sowie den Vorfaktoren der diskretisierten Navier-Stokes-Gleichungen $a_{P,c1}, a_{P,c0}$.

- **Aufwindverfahren 2. Ordnung im Raum:** Zur Diskretisierung der Terme der Navier-Stokes-Gleichungen wird ein Aufwindverfahren 2. Ordnung verwendet. Die Flüsse einer Größe (hier die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors) ϕ_f auf der Zelloberfläche werden durch den Funktionswert von ϕ im stromauf liegenden Zellmittelpunkt sowie der Divergenz von ϕ an dieser Stelle und dem Vektor von Zell- zu Flächenmittelpunkt \mathbf{r} rekonstruiert:

$$\phi_f = \phi + \nabla \phi \cdot \mathbf{r} \quad (4.5)$$

- **Implizites Euler-Verfahren in der Zeit:** Aufgrund der günstigen Stabilitätseigenschaften wurde ein implizites Zeitschrittverfahren gewählt. Das implizite Euler-Verfahren bildet den Wert ϕ^{n+1} aus dem an dieser Stelle im vorangegangenen Zeitschritt ϕ^n sowie den räumlichen Termen der Navier-Stokes-Gleichungen (hier nur durch den Operator \mathcal{L} dargestellt) zum Zeitpunkt $n + 1$:

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \Delta t \mathcal{L}(\phi^{n+1}) \quad (4.6)$$

4.1.2 Kopplung von Geschwindigkeit und Druck

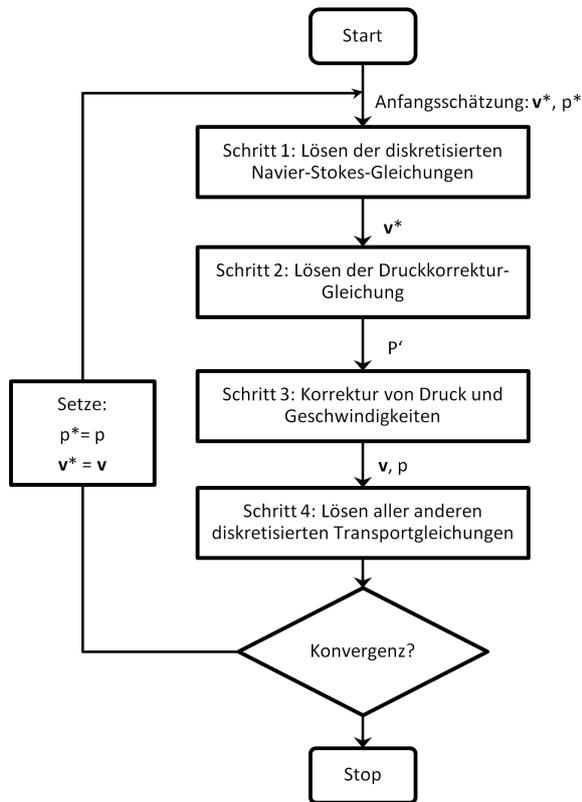


Abbildung 4.3: SIMPLE-Algorithmus

keit zu einer oszillierenden Lösung führen. Um dieses Problem zu beheben, werden entweder versetzte numerische Netze für Druck- und Geschwindigkeitskomponenten oder spezielle Interpolationsmethoden auf demselben Gitter („collocated grids“) verwendet [77, 152]. Das in dieser Arbeit verwendete CFD-Programm Fluent stellt beide Lösungsvarianten zur Verfügung.

4.1.3 CFL-Kriterium

Die CFL¹- oder Courant-Zahl wird zur Untersuchung der numerischen Stabilität von Diskretisierungsverfahren herangezogen. Weitere Verfahren sind die von von-Neumann-Analyse oder die Perturbationsmethode. Ein Verfahren wird instabil, wenn kleine in das System eingebrachte Störungen sich verstärken und unbegrenzt anwachsen.

$$Co = \frac{c_{phys}}{c_{num}} = \frac{|u| \Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (4.7)$$

Die Courant-Zahl ist das Verhältnis von physikalischer zu numerischer Ausbreitungsgeschwindigkeit. Breitet sich das physikalische Phänomen schneller aus, als die Numerik dies erfassen kann, wird ein explizites Zeitschrittverfahren instabil werden. Auch wenn ein implizites Verfahren diesem Kriterium nicht unterliegt, führt eine zu große Courant-Zahl zu einer Filterung von Ereignissen, die sich räumlich und zeitlich auf einer geringeren

¹Courant-Friedrich-Lewy

Im inkompressiblen Fall liefern die Impuls- und die Massenerhaltung vier Gleichungen für die vier Unbekannten Druck und Geschwindigkeit. Da es keine explizite Gleichung für den Druck gibt, sondern dieser nur als Gradient in den Navier-Stokes-Gleichungen auftritt, werden Druckkorrekturverfahren eingesetzt, bei denen durch die Umformulierung der Kontinuitätsgleichung eine Bestimmungsgleichung für den Druck generiert wird. Die Druckkorrekturverfahren stellen so sicher, dass das Druck- und Geschwindigkeitsfeld zueinander passt [77, 174, 27, 152, 48].

Der in dieser Arbeit verwendete SIMPLE-Algorithmus (Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equation) berechnet abwechselnd Druck- und Geschwindigkeitsfeld so lange, bis diese in Einklang stehen. Der hierzu verwendete gestaffelte Ablauf ist in Abbildung 4.3 zu sehen.

Die iterative Berechnung der Druck- und Geschwindigkeitswerte kann aufgrund der Entkopplung von Druck und Geschwindig-

Skala abspielen. Die physikalische Ausbreitungsgeschwindigkeit hängt davon ab, ob die Information sich diffusiv oder konvektiv ausbreitet. Wie schnell die Numerik das Strömungsphänomen beobachten kann, ergibt sich aus dem Zusammenspiel von Zeitschrittweite Δt , der Gitterweite Δx , Δy und Δz und dem gewählten Diskretisierungsverfahren. Unabhängig vom Courant-Kriterium gelten zusätzliche Einschränkungen für bestimmte Diskretisierungsverfahren, wie zum Beispiel eine Begrenzung der Peclet-Zahl für das Zentralfinitendifferenzenverfahren.

Aufgrund der filternden Wirkung der CFL-Zahl ist es zweckmäßig, im Rahmen einer Vergleichbarkeit von Simulationen auf ähnliche Courant-Zahlen zu achten. Courant-Zahlen von ca. 1 sind ein guter Kompromiss aus numerischer Stabilität und Effizienz. CFL-Zahlen deutlich kleiner 1 zeigen in vielen Fällen eine zu feine Auflösung an, was den Rechenaufwand erhöht.

4.2 Methode der Finiten-Elemente

Zur Berechnung strukturmechanischer Problemstellungen haben sich die Finiten-Elemente (FEM) als numerische Methode durchgesetzt. Die Herleitung der Finite-Elemente Hauptgleichung kann zum Beispiel durch Matrixmethoden, Energieprinzipien oder das Prinzip der gewichteten Residuen erfolgen [95, 77, 152, 161].

4.2.1 Prinzip der virtuellen Arbeit

Ausgangspunkt des Prinzips ist die Variationsrechnung. Hierbei ist die Aufgabe, eine Funktion zu finden, für die ein bestimmtes Integral in Abhängigkeit dieser Funktion (und ggf. deren Ableitungen) einen Extremwert annimmt [128]. Die Impulsbilanz in der lokalen Formulierung gilt für jeden materiellen Punkt. Daher wird diese als starke Form bezeichnet:

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \rho \mathbf{b} - \rho \dot{\mathbf{v}} = 0 \quad (4.8)$$

Ein Funktional \mathcal{G} besteht aus der zu lösenden Differentialgleichung und einer Test- bzw. Gewichtsfunktion \mathbf{w} , welche miteinander skalar multipliziert und dann über den betrachteten Raum integriert werden. Die Testfunktion kann prinzipiell beliebig gewählt werden, muss aber die kinematischen Randbedingungen erfüllen (kinematische Verträglichkeit). Die Bildung des Funktionals führt zur schwachen Form der Bilanzgleichung. Diese muss nur noch integral und nicht mehr lokal erfüllt sein:

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = \int_{\omega} [\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \rho \mathbf{b} - \rho \dot{\mathbf{v}}] \cdot \mathbf{w} dv = 0 \quad (4.9)$$

Die Dimension des Funktionals hängt von den beteiligten Funktionen ab. Im Falle der Strukturmechanik besitzt das Funktional die Dimension der Arbeit, weswegen das Prinzip auch das Prinzip der virtuellen Arbeit genannt wird. Für die Gewichtsfunktion wird in diesem Fall die Variation des Verschiebungsfeldes $\delta \mathbf{u}$ gewählt:

$$\underbrace{\int_{\omega} \boldsymbol{\sigma} : \operatorname{grad} \delta \mathbf{u} dv}_{\delta A_{int}} = \underbrace{\int_{\omega} \rho (\mathbf{b} - \dot{\mathbf{v}}) \cdot \delta \mathbf{u} dv + \int_{\partial \omega} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} da}_{\delta A_{ext}} \quad (4.10)$$

Diese Gleichung beschreibt das Gleichgewicht zwischen der virtuellen Arbeit des Spannungsfeldes und der externen Kräfte.

4.2.2 Finite-Elemente

Zum Lösen der schwachen Formulierung der Bilanzgleichung ist eine Näherungsfunktion für die Differentialgleichung notwendig. In der FEM werden die Verschiebungen auf die Knoten des Elements e bezogen. Das Verschiebungsfeld \mathbf{u} eines finiten Elements setzt sich aus der Ansatzfunktion ϕ und den Knotenverschiebungsvektoren $\hat{\mathbf{u}}$ zusammen. Die Ansatzfunktion bestimmt die Anzahl und Verteilung der Knoten sowie die Freiheitsgrade, die das Element besitzt:

$$\mathbf{u}^e = \phi \hat{\mathbf{u}}^e \quad \mathbf{u} = \sum_n \phi \hat{\mathbf{u}} \quad (4.11)$$

Analog ergibt sich für die Variation des Verschiebungsfeldes:

$$\delta \mathbf{u}^e = \psi \delta \hat{\mathbf{u}}^e \quad \delta \mathbf{u} = \sum_n \psi \delta \hat{\mathbf{u}} \quad (4.12)$$

Beim Galerkinverfahren wird ψ aus derselben Funktionenklasse wie ϕ gewählt. Setzt man die Ansätze für \mathbf{u} und $\delta \mathbf{u}$ in die schwache Formulierung (s. Gl. 4.10) ein, so ergibt sich unter Annahme eines linearen Zusammenhanges zwischen Verschiebungen und Spannungen folgender Ausdruck:

$$\left(\int_{\omega} \sum_n \phi \cdot \sum_n \psi \ddot{u} \rho dv + \mathbf{C} \hat{\mathbf{u}} \right) \delta \hat{\mathbf{u}} = \left(\int_{\omega} \rho \mathbf{b} \cdot \sum_n \psi dv + \int_{\partial \omega} \rho \mathbf{t} \cdot \sum_n \psi da \right) \delta \hat{\mathbf{u}} \quad (4.13)$$

Die Integrale über die Ansatzfunktionen besitzen die Form von Matrizen, sodass sich die Gleichung wie folgt umschreiben lässt:

$$\mathbf{M} \ddot{\hat{\mathbf{u}}} + \mathbf{C} \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{f}_{ext} \quad (4.14)$$

Die Massen- und die Steifigkeitsmatrix werden für jedes Element zunächst gesondert aufgestellt. Anschließend werden die Matrizen zusammengefügt und das Gesamtgleichungssystem gelöst.

4.3 Verwendete Software

Die im Rahmen dieser Arbeit verwendete Software ist in der folgenden Tabelle zusammengetragen.

Programm	Hersteller	Version	Einsatzgebiet
Rhinoceros	McNeel	4.0 SR9	Geometrieerstellung und Aufbereitung
Gambit	Fluent Inc.	2.3.16	Vernetzung
IcemCFD	Ansys	11.0, 12.0, 13.0	Vernetzung
Fluent	Ansys	6.3.26, 11.0, 13.0	Strömungslöser (FVM, ALE)
Abaqus	Dassault Systèmes	6.91, 6.10, 6.11	Strukturlöser (FEM)
MpCCI	Fraunhofer SCAI	3.06, 4.1	Kopplungsschnittstelle zwischen Fluent und Abaqus bei Verwendung der ALE [29]
Ensignht	CEI	9.1, 9.2	Graphisches PostProcessing
Matlab	MathWorks	7.12.0.635 (R2011a)	Generierung von Inputdaten, Auswertung, Steuerung

Tabelle 4.1: Verwendete Software

5 Grundlagen der Fluid-Struktur-Interaktion

Die Fluid-Struktur-Interaktion kann als ein Spezialfall gekoppelter Problemstellungen angesehen werden. Nach Zienkiewicz zeichnet sich ein gekoppeltes Problem dadurch aus, dass sich einerseits keines der beteiligten Gebiete ohne das andere lösen lässt und sich andererseits keine unabhängige Variable des Gesamtproblems eliminieren lässt. Kopplungsfragestellungen können allgemein in volumen- oder oberflächengekoppelt unterteilt werden (s. Abb. 5.1). Bei den oberflächengekoppelten Phänomenen kann dahingehend unterschieden werden, ob in den unterschiedlichen Gebieten die gleiche Physik (Fluid-Fluid) oder unterschiedliche Physik (Fluid-Struktur) vorliegt [199, 198].

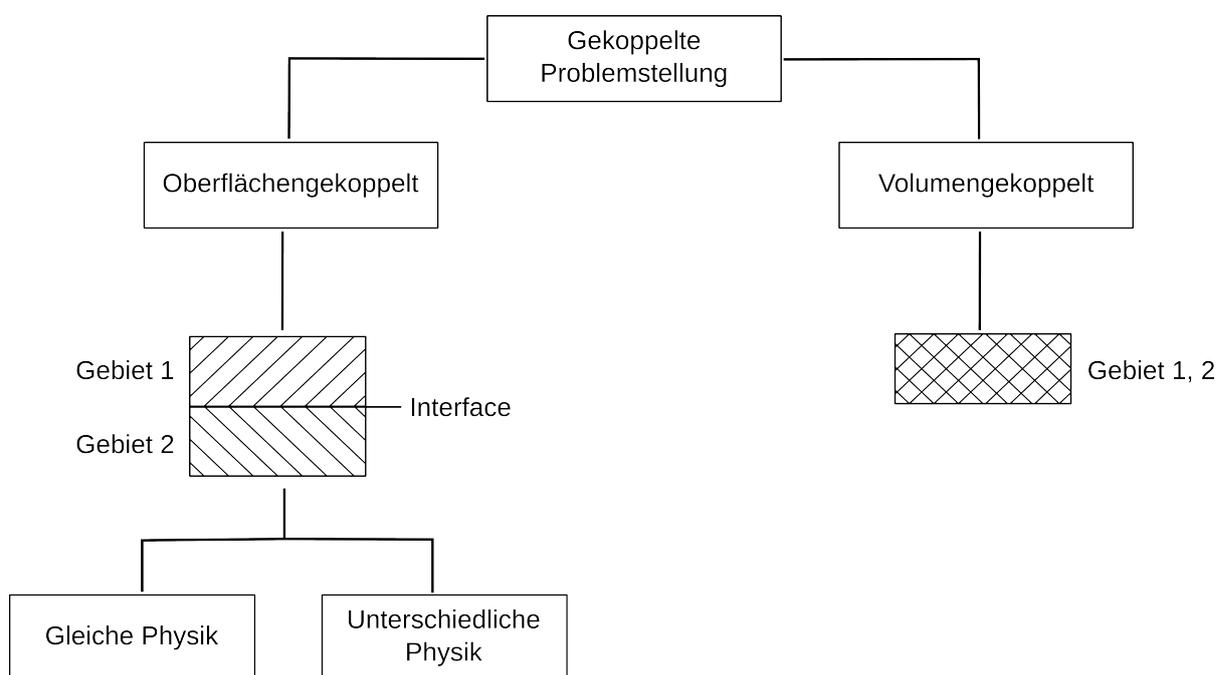


Abbildung 5.1: Klassifikation gekoppelter Problemstellungen

Bei der Simulation der Herztätigkeit liegen beide Kopplungsformen vor. Während der Impulsaustausch zwischen Herzwand und Blut oberflächengekoppelt abläuft, wird die Reizbildung- und -ausbreitung sowie die daraus resultierende Kontraktion volumengekoppelt betrachtet.

5.1 Methoden der Fluid-Struktur-Interaktion

Um die Strömung in zeitabhängigen Gebieten zu berechnen, stehen verschiedene Methoden zur Verfügung, die einen direkten Einfluss auf die Formulierung der Erhaltungsgleichungen haben (s. Abb. 5.2). Die Methoden unterscheiden sich dadurch, dass die Feldgleichungen der Strömungsmechanik auf einem ortsfesten (Euler) oder einem mitbewegten (Lagrange) Gitter bzw. einer Mischform aus beiden (Arbitrary-Lagrange-Euler) gelöst werden.

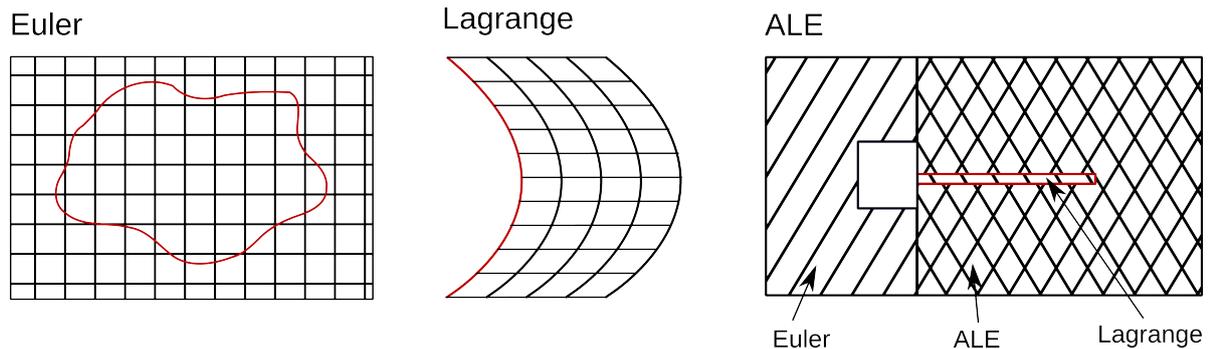


Abbildung 5.2: Methoden der Fluid-Struktur-Interaktion

5.1.1 Euler-Methoden

Die Feldgleichungen werden hierbei in Eulerscher Betrachtungsweise formuliert:

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = -\operatorname{grad}(p) + \mu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f} \quad (5.1)$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0 \quad (5.2)$$

Die zeitabhängige, räumliche Begrenzung des Berechnungsbietes, welches in das Gesamtgitter eingebettet ist, wird durch zusätzliche Datenstrukturen beschrieben. Bekannte Vertreter der Euler-Methode sind die Volume-of-Fluid-Methode (VoF) von Hirt und Nichols [49] und die Immersed-Boundary-Methode von Peskin und McQueen [133] (s. Kap. 5.2). Bei der VoF, welche unter anderem bei Mehrphasen-Strömungen eingesetzt wird, werden die Gebiete (z.B. Phasen oder Strukturen) durch eine zusätzliche Variable F , welche als Füllstand interpretiert werden kann, voneinander unterschieden. Für die zeitliche Änderung der Gebiete wird folgende zusätzliche Differentialgleichung gelöst:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{div}(F) = 0 \quad (5.3)$$

In Tabelle 5.1 sind die Vor- und Nachteile von Euler-Methoden gegenübergestellt.

5.1.2 Lagrange-Methoden

Die strukturmechanischen Feldgleichungen werden im Allgemeinen in Lagrangeschen Koordinaten formuliert. Um die Wirkung einer sich verformenden Struktur auf ein Fluid zu

Vorteile	Nachteile
<ul style="list-style-type: none"> - Einfache Netzgenerierung mit strukturierten (meist kartesischen) Gittern - Keine körperangepassten Netze 	<ul style="list-style-type: none"> - Meist keine stetige Approximation der Berandung - Interpolation von Wandbewegung auf festes Gitter notwendig

Tabelle 5.1: Vor- und Nachteile von Euler-Methoden

berechnen, erscheint es schlüssig, auch die strömungsmechanischen Grundgleichungen in der Lagrangeschen Betrachtungsweise zu notieren:

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} = -\mathit{grad}(p) + \mu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f} \quad (5.4)$$

Da sich Gleichung 5.4 auf materielle Kontrollvolumen bezieht, entfallen die konvektiven nicht-linearen Terme auf der linken Seite der Navier-Stokes-Gleichungen, was einen entscheidenden Vorteil bezüglich numerischer Diffusion und Effizienz bei der numerischen Lösung bringt. Statt die konvektiven Beschleunigungsterme zu betrachten, müssen die Gitterpunkte nur mit der Geschwindigkeit der Strömung transportiert werden, was allerdings zu starken Gitterverformungen führt, sobald starke Scherungen oder Rotationen in der Strömung vorliegen (s. Tab. 5.2). Liegt ein geringer Volumenanteil einer (festen) Phase

Vorteile	Nachteile
<ul style="list-style-type: none"> - Keine konvektiven, nicht-linearen Terme in den Navier-Stokes-Gleichungen - Sehr genaue Darstellung der Berandung, da diese mit Zellgrenzen übereinstimmen 	<ul style="list-style-type: none"> - Starke Netzverformungen durch Scherungen und Rotationen in der Strömung machen Neuvernetzung und Interpolation notwendig - Keine Ablösung darstellbar

Tabelle 5.2: Vor- und Nachteile von Lagrange-Methoden

(z.B. Partikel, Tropfen, Bläschen, etc.) vor, kann deren Bewegung durch die Integration eines lokalen Kräftegleichgewichts in Lagrangeschen Koordinaten bestimmt werden:

$$\frac{d\mathbf{v}_p}{dt} = \mathbf{F}_D + \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_G \quad (5.5)$$

Die Bahn eines Partikels wird in der obigen Gleichung durch Widerstandskräfte \mathbf{F}_D , die Gewichtskraft \mathbf{F}_G und sonstige Kräfte \mathbf{F}_x beeinflusst.

5.1.3 Arbitrary-Euler-Lagrange-Methode

Die Arbitrary-Euler-Lagrange-Methode ist eine Mischformulierung aus Eulerschen und Lagrangeschen Koordinaten [14]. Sie beinhaltet die Relativgeschwindigkeit zwischen dem Fluid und dem Kontrollvolumen $\mathbf{v} - \mathbf{c}$. Durch die Verwendung der Relativgeschwindigkeit enthält die ALE-Methode die beiden vorher genannten Methoden (Euler und Lagrange) als Spezialfälle.

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)(\mathbf{v} - \mathbf{c}) = -\mathit{grad}(p) + \mu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f} \quad (5.6)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{c}) = 0 \quad (5.7)$$

Neben der Überlegung, die Gittergeschwindigkeit fernab des bewegten Randes möglichst so zu wählen, dass die Gitterverformungen verringert werden, muss die Gittergeschwindigkeit \mathbf{c} geometrischen Erhaltungssätzen genügen, welche in der Literatur unter dem *Space*- und dem *Surface-Conservation-Law* zu finden sind [27].

Vorteile	Nachteile
- Exakte Darstellung der Berandung	- Netzverformung und Remeshing benötigen Interpolationen
- Geringer Rechenaufwand (ohne Neuvernetzung)	- Netzqualität schwankt mit Verformung und beeinflusst Berechnungsgenauigkeit
- Einfache Implementierung	

Tabelle 5.3: Vor- und Nachteile ALE-Methode

Einen guten Überblick über die Methoden der Fluid-Struktur-Interaktion liefern [154, 23]. Van Loon et al. vergleichen die ALE-Methode mit verschiedenen Formulierungen der Immersed-Boundary-Methoden [172]

5.2 Immersed-Boundary-Methode (IBM)

Die Immersed-Boundary-Methode (IBM) wurde von Charles Peskin 1972 zur mathematischen Modellierung der Wechselwirkung zwischen Herzwand und Blutfluss eingesetzt [131]. Neben dem Begriff der IBM findet sich auch die Bezeichnung *Fictitious Domain Approach*. Beide verfolgen einen ähnlichen Ansatz auf unterschiedlichen Grundlagen. Während die IBM ursprünglich für Finite-Differenzen entwickelt wurde, baut der *Fictitious Domain Approach* auf Finiten-Elementen auf [172].

Grundgedanke der Immersed-Boundary-Methode: Eine Berandung kommuniziert mit dem Fluid durch die Übertragung von Masse (Abtragungsvorgängen), Impuls (Haftbedingung) und Energie (Aufheizen und Abkühlen).

Daraus lässt sich ableiten, dass eine Modifikation der Erhaltungsgleichungen mit geeigneten Quellen und Senken zu der Simulation „virtueller“ Wände führt. Virtuuell meint in diesem Zusammenhang, dass das numerische Netz nicht mit der eingebetteten Struktur verhaftet ist. Dies bedeutet, dass numerische Gitter, wie auch bei den anderen Euler-Methoden, nicht körperangepasst sind und somit die Netzerstellung stark vereinfacht ist (s. Abb. 5.3). Die Varianten der IBM lassen sich dahingehend unterteilen, ob die Modifikationen an den *kontinuierlichen* (s. Gl. 5.9) oder *diskreten* (s. Gl. 5.10) Erhaltungsgleichungen durchgeführt werden. Da im Rahmen dieser Arbeit ausschließlich der Impulsaustausch zwischen Blut und Muskel von Interesse ist, werden im Folgenden nur die Anpassungen der Navier-Stokes-Gleichungen diskutiert:

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) + \operatorname{grad}(p) - \mu \Delta \mathbf{v} = \mathbf{f} \quad (5.8)$$

$$\text{Kontinuierliche Formulierung: } \mathcal{M}(\mathbf{v}) = \mathbf{f} \quad (5.9)$$

$$\text{Diskrete Formulierung: } [\mathcal{M}(\mathbf{v})] = [\mathbf{f}'] \quad (5.10)$$

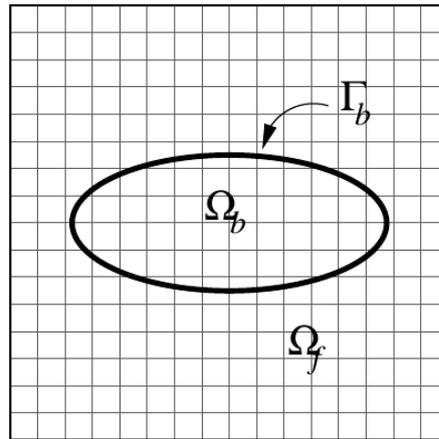


Abbildung 5.3: Immersed-Boundary-Methode [173]

5.2.1 Kontinuierliche Ansätze

Bei dieser Klasse von Ansätzen wird vor der Diskretisierung der Navier-Stokes-Gleichungen ein Volumenkraftterm \mathbf{f} eingefügt. Dieser schreibt sich formal zu:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \sum_k \mathbf{F}_k \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_k) = \sum_k \mathbf{F}_k d(\mathbf{x} - \mathbf{X}_k) \quad (5.11)$$

Der Volumenkraftterm \mathbf{f} auf das Fluid ist die Summe der Knotenkräfte \mathbf{F}_k auf der eingebetteten Grenze (IB). Damit dieser Term nur in unmittelbarer Nähe der IB wirkt, wird der Term mit der Dirac-Funktion multipliziert. Diese erhält den Wert 1 auf der Grenze und sonst den Wert 0. Da die strikte Dirac-Funktion selbst bei feiner Vernetzung zu „Löchern“ in der Grenze führen würde, weil die Gitterpunkte des festen Netzes im Allgemeinen nicht der Diskretisierung der IB übereinstimmt, wird δ durch eine weichere Verteilungsfunktion d ersetzt (s. Abb. 5.4). Weil diese die IB über das Gitter „verschmiert“, besitzt sie einen maßgeblichen Einfluss auf die Genauigkeit und die Stabilität der Berechnung.

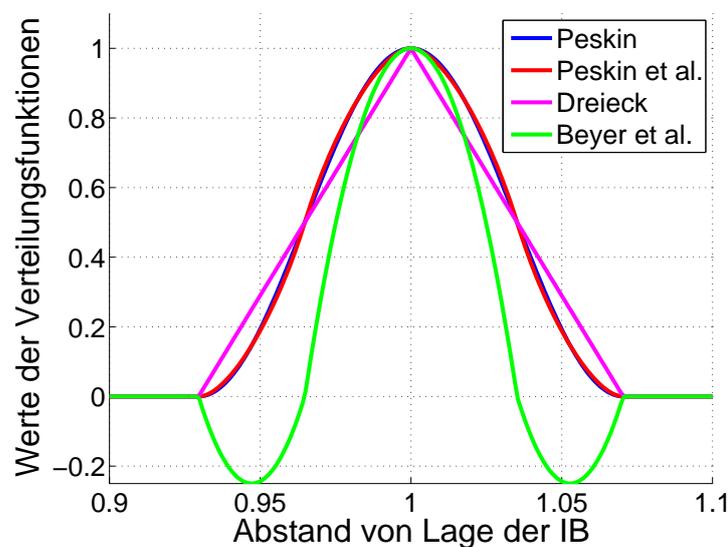


Abbildung 5.4: Verteilungsfunktionen

Für die Modellierung des Kraftausdrucks \mathbf{F}_k wurden verschiedene Ansätze vorgeschlagen. Peskin verwendete das Hookesche Gesetz zur Modellierung der elastischen Fasern im Herzen [131]. Zur Darstellung fester Wände schlagen Beyer und Leveque in Analogie zu einer sehr steifen Feder folgenden Term vor:

$$\mathbf{F}_k = -c(\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_k^e) \quad (5.12)$$

Die Differenz in der Klammer beschreibt die Auslenkung der IB um die Ruhelage. Große Werte für die Federkonstante führen jedoch zu numerischen Schwierigkeiten bei der Lösung des Gleichungssystems [4]. Goldstein et al. entwickelten einen Regelkreis, der sich auf ein zeitlich veränderbares Geschwindigkeitsfeld einstellt:

$$\mathbf{F}_k = \alpha \int_0^T \mathbf{U} dt + \beta \mathbf{U} \quad (5.13)$$

Khadra et al. beschreiben das gesamte Rechengebiet als poröses Medium, wobei der Festkörper keine und das Fluid eine sehr große Durchlässigkeit besitzt [65].

Abschließend lässt sich sagen, dass der kontinuierliche Ansatz gut geeignet ist, bewegliche Wände abzubilden. Durch die Verteilungsfunktion d ist keine scharfe Repräsentation der Wand möglich, was insbesondere bei großen Reynolds-Zahlen Probleme bereitet. Neben der einfachen Implementierbarkeit verursachen die großen Vorfaktoren der oben stehenden Ausdrücke numerische Probleme bei der Gleichungslösung. Nachteilig im Hinblick auf die Effizienz ist, dass die Navier-Stokes-Gleichungen bei diesem Ansatz auch im Festkörper gelöst werden.

5.2.2 Diskrete Ansätze

Die folgende Klasse Ansätze zeichnet sich dadurch aus, dass der Volumenkraftterm erst in der diskretisierten Form der Navier-Stokes-Gleichungen eingefügt wird. Ziel dieser Vorgehensweise ist zum einen die bessere Steuerbarkeit der Verteilungsfunktion (Ansätze indirekter Aufprägung). Dies ermöglicht die Berechnung komplexer Geometrien mit hoher Formtreue, Abbildung scharfer Kanten oder Interpolationen höherer Ordnung [103, 24, 68]. Ein anderes Ziel ist es, bei der IBM die Randbedingungen auch ohne Verteilungsfunktionen direkt auf der IB aufzubringen (Ansätze direkter Aufprägung). Ansätze, die auf Verteilungsfunktionen verzichten, sind unter den Bezeichnungen *Ghost-Cell* bzw. *Cut-Cell* Ansatz bekannt. Die Funktionsweise beider Methoden ist in Abbildung 5.5 dargestellt.

Beim *Ghost-Cell* Ansatz wird die erste Zellschicht im Festkörper zu Geisterzellen bestimmt. Zum einen blenden Geisterzellen alle übrigen Zellen im Festkörper aus der Berechnung aus, was diese effizienter gestaltet. Zum anderen erhalten die Geisterzellen (ähnlich dem Vorgehen bei der Finite Volumen Methode) ihre Funktionswerte so, dass die Haftbedingung auf der IB erfüllt ist [34, 171, 87].

Ähnlich wie beim *Ghost-Cell* versucht auch der *Cut-Cell* Ansatz Randbedingungen direkt auf der IB anzubringen und Zellen innerhalb des Festkörpers für den Fluidlöser zu vernachlässigen. Der Unterschied besteht jedoch in der Art der Weglassens. Im Rahmen des *Cut-Cell* Ansatzes werden alle Zellen im Festkörper gelöscht und Zellen, die die IB schneiden, werden solange beschnitten, bis die Zelloberflächen des numerischen Gitters mit der IB übereinstimmen [6, 192].

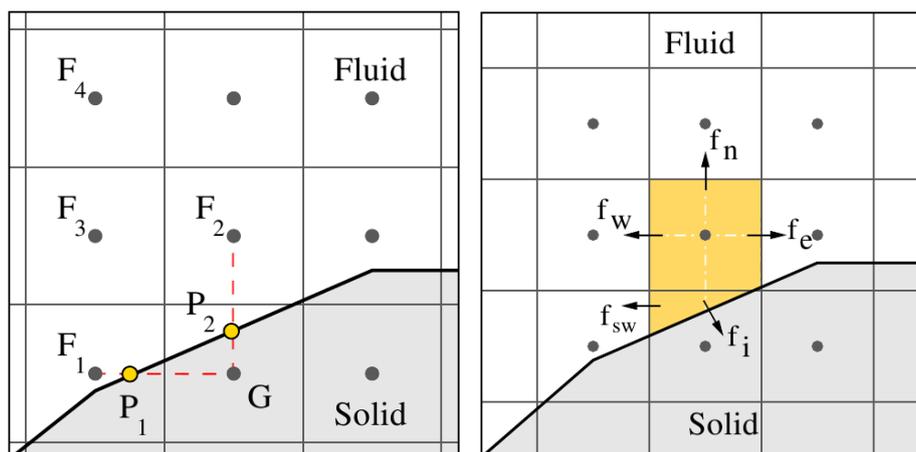


Abbildung 5.5: Diskrete Ansätze: Ghost-Cell Ansatz (links), Cut-Cell Ansatz (rechts) [173]

Durch die exaktere Darstellung der IB ist die diskrete Ausprägung auch für hohe Reynoldszahlen geeignet. Da keine großen Dämpfungs- oder Federkonstanten zum Einsatz kommen, gibt es weniger numerische Schwierigkeiten bei der Lösung. IBM, welche diskrete Ansätze verfolgen, sind gut für die Umströmung starrer Objekte geeignet. Durch die Vernachlässigung von Zellen im Rahmen des *Cut-Cell* Ansatzes, sind bewegliche Wände nur schwer umsetzbar.

Eine guten Überblick über die Entwicklung und die Ausprägungen der Immersed-Boundary-Methode liefern [102, 151, 173]

5.3 Lösungsverfahren gekoppelter Probleme

Unabhängig von der gewählten Methode folgt ein Gleichungssatz, der anschließend mit geeigneten Verfahren gelöst werden muss. Im Wesentlichen stehen zwei verschiedene Ansätze zur Verfügung (s. Abb. 5.6). Der Satz der diskretisierten Gleichungen für Strömung

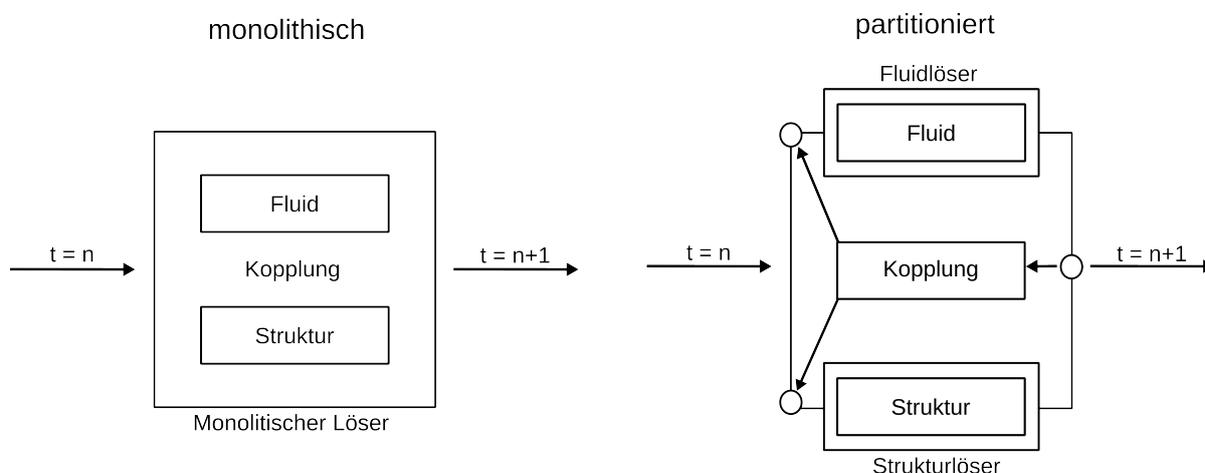


Abbildung 5.6: Lösungsverfahren gekoppelter Problemstellungen

und Struktur kann einerseits als Gesamtgleichungssystem betrachtet und als Ganzes gelöst

werden. Diesen Ansatz bezeichnet man als *monolithisch* oder *simultan*. Durch den gemeinsamen Lösungsansatz werden Untersuchungen zur Stabilität und Genauigkeit vereinfacht oder erst möglich. Durch die Lösung eines Gleichungssystems ergeben sich allerdings auch Nachteile, wie z.B. ungünstig konditionierte Matrizen (s. Tab. 5.4). Andererseits können

Vorteile	Nachteile
<ul style="list-style-type: none"> - Keine iterative Lösung, Einschrittverfahren - (Einfache) Untersuchung von Stabilität und Genauigkeit - Günstige Stabilitätseigenschaften 	<ul style="list-style-type: none"> - Probleme bei Matrixvorkonditionierung - Einschränkungen bei der Problemgröße - Strömungs- und Strukturlöser nicht getrennt voneinander wechselbar (Modularität)

Tabelle 5.4: Vor- und Nachteile monolithischer Lösungsverfahren

beide Gleichungssysteme getrennt voneinander gelöst werden. Die Kopplung wird bei diesem Ansatz, welcher *partitioniert* genannt wird, über den Austausch von Kopplungsgrößen im Volumen oder an der Grenzfläche am Ende einer Iteration oder eines Zeitschrittes realisiert. Der modulare Charakter dieses Vorgehens bezüglich Kopplungssoftware, Strömungs- und Strukturlöser ermöglicht die effiziente Behandlung der physikabhängigen Gleichungen und den Austausch einzelner Komponenten. Nachteilig ist, dass die Stabilität nur schwer oder gar nicht nachweisbar ist und dass die Kopplung auch bei Stabilität der beteiligten Solver instabil werden kann (s. Tab. 5.5) [26, 160, 93, 179].

Vorteile	Nachteile
<ul style="list-style-type: none"> - Matrizen der Teilgebiete sind im Allgemeinen symmetrisch und lassen sich mit Standardverfahren lösen - Große Bandbreite an Lösern für ungekoppelte Struktur- und Strömungsprobleme - Schnelle Konvergenz bei schwach gekoppelten Problemstellungen - Nicht-Linearitäten lassen sich auf Strömungs- oder Strukturseite begrenzen - Unterschiedliche Zeitschrittweiten für Strömung und Struktur möglich 	<ul style="list-style-type: none"> - Bedingte Stabilität der Kopplung auch wenn die beteiligten Löser für Struktur und Strömung unbedingte stabil sind.

Tabelle 5.5: Vor- und Nachteile partitionierter Lösungsverfahren

5.4 Kopplungsbedingungen

Die wechselseitige Beeinflussung von Strömung und Struktur bei einem oberflächengekoppelten Phänomen und partitioniertem Lösungsansatz erfolgt durch den Austausch von Kopplungsgrößen am Interface. Die Kopplungsgrößen können im Allgemeinen Masse (Verdampfung, Abtragung etc.), Energie (Wärme) oder Impuls (Kräfte) sein. Bei Kopplung zwischen Herzwand bzw. Herzklappen und dem Blutfluss tritt weder Masse noch Energie über. Die Erhaltung dieser Größen ist somit Aufgabe des jeweiligen Löser. Die Bedingung der Impulserhaltung über die Trennfläche wird mit Hilfe eines Kräftegleichgewichts analog zum „Freischnitt“ formuliert (dynamische Kopplungsbedingung). Neben der dynamischen Bedingung ist es notwendig, dass sich das Interface fluid- und strukturseitig am selben Ort, mit derselben Geschwindigkeit und derselben Beschleunigung bewegt.

- **Kinematische Kopplungsbedingung:** $\mathbf{x}_s = \mathbf{x}_f; \dot{\mathbf{x}}_s = \dot{\mathbf{x}}_f; \ddot{\mathbf{x}}_s = \ddot{\mathbf{x}}_f$
- **Dynamische Kopplungsbedingung:** $\mathbf{t}_f = \boldsymbol{\sigma}_f \cdot \mathbf{n} = -\boldsymbol{\sigma}_s \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{t}_s$

Das Produkt aus kinematischer und dynamischer Kopplungsbedingung kann als eine Art „Koppelenergie“ aufgefasst werden, die zwischen den Gebieten transferiert wird. Die Differenz der übertragenen Energien auf Seiten der Strömung und der Struktur kann als Konvergenzkriterium des Kopplungsprozesses genutzt werden.

5.5 Kopplungsalgorithmen für partitionierte Lösungsverfahren

Werden Strömung und Strukturproblem getrennt voneinander gelöst, muss eine Vorgehensweise bestimmt werden, wann und wie sich die beiden Löser austauschen. Diese Vorgehensweise bezeichnet man als Kopplungsalgorithmus. Generell lassen sich die Algorithmen in implizite und explizite einteilen (s. Abb. 5.7):

- **Explizite Kopplungsalgorithmen:**

Bei einem expliziten Ablauf wird jeder Zeitschritt nur einmal gelöst. Die beteiligten Löser für Strömung und Struktur tauschen ihre Kopplungsgrößen entweder gleichzeitig zu Beginn oder am Ende des Zeitschritts (parallel) oder nacheinander (seriell, gestaffelt) aus. Während bei der parallelen Anordnung weder kinematische noch dynamische Bedingungen erfüllt sind, ist bei der seriellen Anordnung, je nachdem welcher Solver den Austausch beginnt, entweder die eine oder die andere Bedingung erfüllt (s. Abb. 5.8).

- **Implizite Kopplungsalgorithmen:**

Bei der impliziten Anordnung werden die Kopplungsgrößen am Interface zwischen dem Struktur- und Strömungslöser iteriert, bis beide erfüllt sind. Der iterative Ablauf einer impliziten Kopplung erhöht den Rechenaufwand zugunsten der Kopplungsstabilität. Implizite Algorithmen lassen sich in semi- und absolut-implizit weiter untergliedern. Während semi-implizite Algorithmen nur die Fluidseite iterieren, aktualisieren absolut-implizite Algorithmen auch die Bewegung der Struktur in jedem Iterationsschritt.

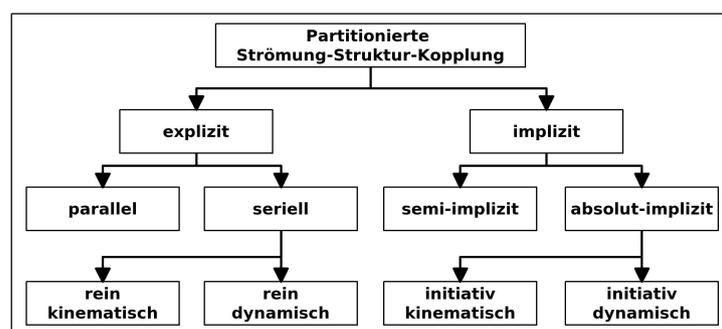


Abbildung 5.7: Einteilung partitionierter Lösungsverfahren [71]

Da bei expliziten Ansätzen nur ein einziger Austausch der Kopplungsgrößen am Interface stattfindet, kann maximal eine der beiden Kopplungsbedingungen erfüllt sein. Dieser Ansatz wird daher auch als *schwach gekoppelt* bezeichnet. Implizite Algorithmen dagegen erfüllen am Ende des Iterationsprozesses sowohl die kinematische als auch die dynamische Kopplungsbedingung und heißen daher *stark gekoppelt*. Stark gekoppelte, partitionierte Ansätze liefern bei Konvergenz dasselbe Ergebnis wie monolithische Ansätze [56].

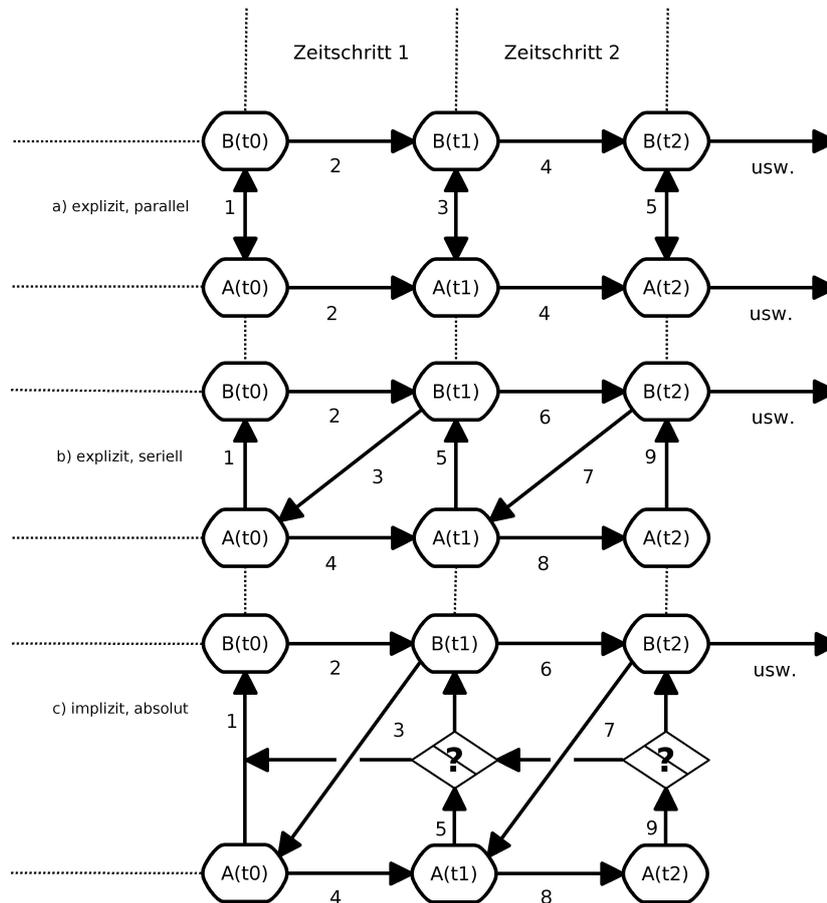


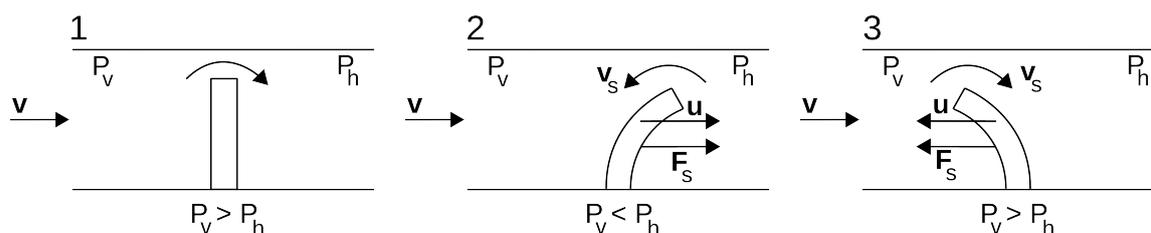
Abbildung 5.8: Kopplungsalgorithmen [71]

5.6 Stabilität

Eine Ursache der Instabilität der Strömung-Struktur-Kopplung liegt an dem sogenannten *added-mass-effect* [175, 179, 56]. Dieser soll anhand einer Spaltströmung wie in Abbildung 5.9 dargestellt beschrieben werden. Fluid und Struktur sind inkompressibel, auf Seiten der Strömung wirken die Trägheitsterme. Der Lappen im Kanal wird von links angeströmt.

Zu Beginn der Simulation berechnet der Fluidlöser ein Geschwindigkeits- und Druckfeld (1). Da sich der Lappen zu diesem Zeitpunkt nicht bewegt, entstehen im Spalt aufgrund der Massenerhaltung sehr hohe Beschleunigungen, die gemäß Gleichung 5.14¹ zu großen

¹Da die Druckänderungen vor allem aus den Beschleunigungsänderungen resultieren, können für die Betrachtung die Reibungskräfte vernachlässigt werden.

Abbildung 5.9: Spaltströmung zur Verdeutlichung des *added-mass-effects*

Druckgradienten über den Lappen führen. Im zweiten Schritt berechnet der Strukturlöser aufgrund des großen Druckunterschiedes, welcher als Kraft F_s auf den Lappen wirkt, eine große Verschiebung \mathbf{u} . Ist die berechnete Verschiebung zu groß, ist das überstrichene Fluidvolumen größer als das durch den Einlass nachfließende. In diesem Fall fließt Fluid durch den Spalt in entgegengesetzte Richtung. Durch diesen Rückfluss dreht der Druckgradient seine Richtung. Durch die Richtungsänderung des Druckgradienten ermittelt der Strukturlöser eine Verschiebung in Richtung des Einlasses (3). Wachsen die Amplituden von Verschiebungen und Kräften von Zeitschritt zu Zeitschritt an, wird das Verfahren instabil. Weil diese Instabilität aus dem Ungleichgewicht der (Fluid-)Trägheitskräfte auf der linken Seite der Navier-Stokes-Gleichungen resultiert, welches wie eine zusätzliche Masse auf die Struktur wirkt, wird das Phänomen *added-mass-effect* genannt.

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\text{grad}(p) \quad (5.14)$$

Folgende Möglichkeiten werden verwendet, um obige Instabilität zu verhindern:

- Verwendung eines impliziten Kopplungsalgorithmus mit Relaxation bei der Übergabe der Kopplungsgrößen
- Der *added-mass-effect* nimmt mit abnehmendem Zeitschritt zu, weswegen eine Vergrößerung des Zeitschritts stabilisierend wirkt.
- Der *added-mass-effect* hängt von einem kritischen Dichteverhältnis von Strömung und Struktur ab. Wird dieses überschritten, wird die Kopplung instabil.
- Die Berücksichtigung von Trägheitskräften auf Seiten der Struktur mindert ein Überschwingen infolge fehlerhafter Fluiddrücke auf dem Interface.
- Das Überschwingen der Struktur führt, wie in Gleichung 5.14 zu sehen ist, in einem inkompressiblen Fluid zu starken Druckänderungen. Die Einführung einer leichten Kompressibilität auf Seiten der Strömung kann der Instabilität entgegenwirken.
- Eine zunehmende Genauigkeit der Zeitdiskretisierung führt zu früherer Instabilität.

5.7 Relaxationsverfahren

Mit Hilfe von Relaxationsverfahren kann die Konvergenz eines iterativen Prozesses hergestellt oder beschleunigt werden [27]. Hierbei wird die Änderung einer physikalischen Größe von Zeitschritt zu Zeitschritt oder von Iteration zu Iteration begrenzt. Im Rahmen der

Strömung-Struktur-Kopplung wird die Relaxation der Kopplungsgrößen zwischen Festkörper und Fluid eingesetzt, um Instabilitäten wie den *added-mass-effect* zu kontrollieren [179]. Damit die gesamte Koppelenergie übertragen wird und damit Strömung und Struktur im Gleichgewicht sind, ist eine Relaxation nur bei iterativen (impliziten) Algorithmen sinnvoll.

Da Herzmuskel und Blut ein kritisches Dichteverhältnis überschreiten, ist die Anwendung eines partitionierten-impliziten Relaxationsverfahrens notwendig. Da es sich bei der Herzklappe um eine druckgetriebene, dünne und hyperelastische Struktur handelt, wird auch bei der Kopplung von Herzklappen und Blutströmung ein analoger Ansatz gewählt. Für die Kopplung von Herz und Blut stehen in *KaHMo^{F_{SI}}* zwei Relaxationsverfahren zur Verfügung:

- **Lastrelaxation:**

Hierbei wird die vom Strömungslöser berechnete Last auf das Interface relaxiert, bevor diese an den Strukturlöser übergeben wird. Der Vorteil der Lastrelaxation ist, dass ein Überschwingen der Struktur bereits vorab vermieden werden kann:

$$\mathbf{x}_s^{n+1} = \mathbf{x}_f^{n+1} \quad (5.15)$$

$$\mathbf{t}_s^{n+1} = \alpha \mathbf{t}_s^{n+1} + (1 - \alpha) \mathbf{t}_s^n \quad (5.16)$$

- **Positionsrelaxation:**

Hierbei wird zunächst die unrelaxierte Fluidlast auf das Interface an den Strukturlöser übergeben. Die berechnete neue Position der Trennfläche wird relaxiert an den Strömungslöser übergeben. Durch die geringere Lagedifferenz des Interfaces bestimmt der Fluidlöser eine geringere Druckänderung, was sich positiv auf die Stabilität auswirkt:

$$\mathbf{t}_s^{n+1} = \mathbf{t}_f^{n+1} \quad (5.17)$$

$$\mathbf{x}_f^{n+1} = \alpha \mathbf{x}_s^{n+1} + (1 - \alpha) \mathbf{x}_s^n \quad (5.18)$$

Beide für *KaHMo^{F_{SI}}* entwickelten Relaxationsverfahren führen zu denselben Endlagen, jedoch zeigte sich ein Stabilitätsvorteil der Lastrelaxation [71]. Der Relaxationsfaktor α kann sowohl konstant sein als sich auch dynamisch ändern. Wird der Faktor zu groß gewählt, wird die Kopplung instabil, wird der Faktor zu klein gewählt, sinkt die Konvergenzrate und es werden mehr Iterationen bis zum Gleichgewicht benötigt.

Teil II

Modellierung

6 Kopplung mit der Methode virtueller Grenzen

Das folgende Kapitel beschäftigt sich mit der Modellierung des Kopplungsmechanismus wie er zukünftig für die Beschreibung der Wechselwirkung zwischen Herzklappen und Blutströmung eingesetzt werden soll. Zunächst werden hierbei essentielle Anforderungen an die Kopplung formuliert. Danach wird der neu entwickelte Kopplungsmechanismus vorgestellt. Anschließend werden Kriterien zur Bewertung der Stabilität und Verfahren der Konvergenz- und Programmbeschleunigung diskutiert. Das Kapitel schließt mit dem Konzept aus Simulationsrechnungen zur Validierung der vorgestellten Kopplung ab.

6.1 Anforderungen an die Kopplung

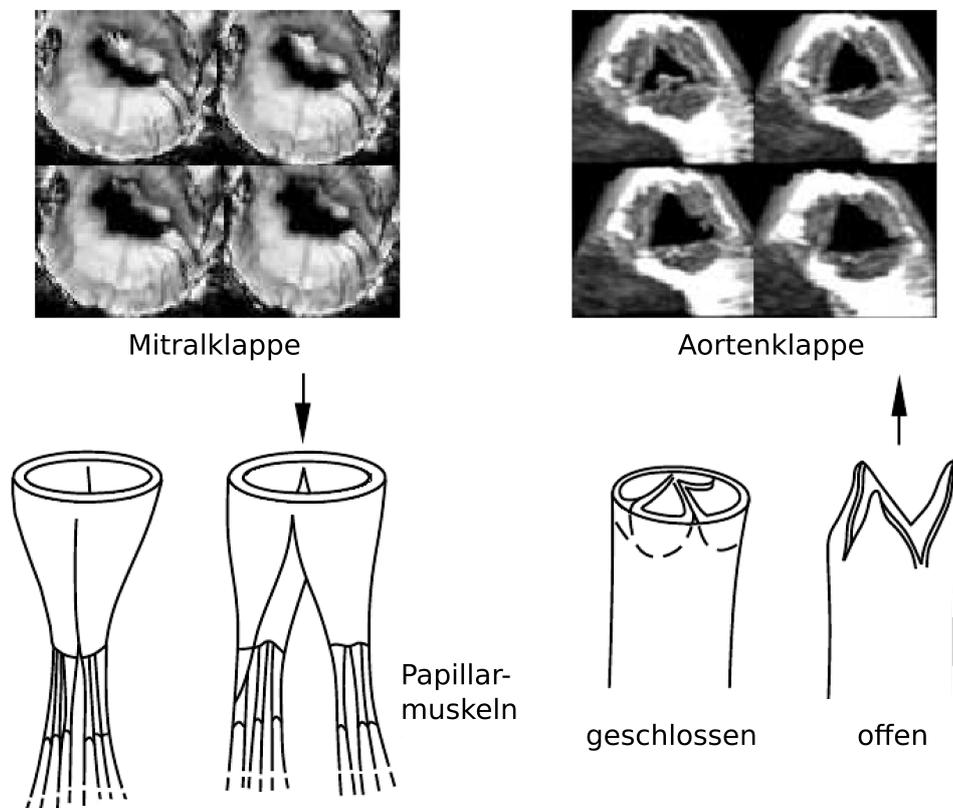


Abbildung 6.1: Klappenöffnungsmechanismus [118]

Aus der Beschaffenheit der Kopplungspartner Herzklappen und Blutströmung lassen sich die Anforderungen an den zu entwickelnden Algorithmus ableiten. Die Herzklappen sind dünne, lappenartige Strukturen, welche druckgesteuert öffnen (s. Abb. 6.1) und dabei weite Strecken bezogen auf ihre Dicke zurücklegen. Während die Aortenklappe vollständig passiv öffnet und schließt, besitzt die Mitralklappe Papillarmuskeln, welche die Spitzen der Segel mit dem Endokard in der Nähe der Herzspitze verbindet. Diese Muskeln unterstützen den Öffnungsprozess und gewährleisten durch ihre variable Länge ein vollständiges Schließen der Klappe.

- Die Übergabe der Last und Lageinformationen muss entsprechend der physiologischen Problemstellung oberflächengekoppelt ablaufen.
- Die speziellen Eigenschaften der Struktur (Hyperelastizität bei finiten Deformationen) und der Strömung (Pseudoplastizität) erfordern unterschiedliche zeitliche Auflösungen und strukturmechanische Modellierungen. Es sollte daher möglich sein, Struktur und Strömung mit jeweils verschiedenen Zeitschrittweiten zu berechnen (*subcycling*).
- Um vorab einfache Validierungssimulationen durchführen zu können, sollte der Kopplungsalgorithmus zweidimensionale und wegen der zukünftigen realen Problemstellung der Herzklappen dreidimensionale Werteübergaben ermöglichen.
- Um eine gute räumliche Auflösung zu erzielen, sind kleine Raumschrittweiten im gesamten Öffnungsbereich notwendig. Um schnelle Antwortzeiten der Simulation zu gewährleisten, ist eine Programmparallelisierung erforderlich.
- Im Rahmen des Karlsruher Herzmodells haben sich der Strömungslöser Fluent und der Strukturlöser Abaqus etabliert. Beide sollen weiterverwendet werden, um die bisher entwickelten Module (Kreislauf, Rheologie, etc.) unverändert übernehmen zu können. Das heißt, dass der modulare Charakter des bisherigen KaHMo-Projektes bei der neu zu entwickelnden Kopplung berücksichtigt werden soll.
- Wegen der dünnen, hyperelastischen Struktur, den ähnlichen Dichten von Blut und Klappen sowie den hohen Geschwindigkeiten (hohe Druckgradienten) in der Nähe der Herzklappen soll ein impliziter Kopplungsalgorithmus vorgesehen werden. Um auch andere Simulationen durchführen zu können, bei denen der *added-mass-effect* eine untergeordnete Rolle spielt (Aeroelastizität), soll ein einfaches Umschalten zwischen expliziter und impliziter Kopplung möglich sein.
- Die Kopplung soll die Dichtheit der Herzklappen sicherstellen.

6.2 Kopplungsalgorithmus

Die ALE-Methode wird für die Beschreibung der bewegten Herzwand bereits erfolgreich im KaHMo-Konzept eingesetzt. Trotz großer Verformungen, wie sie im Herzen auftreten, ist es meist möglich, nur durch Netzglättung (*smoothing*) und ohne Neuvernetzung (*remeshing*) auszukommen. Bei der Abbildung der Herzklappentätigkeit sprechen zwei Aspekte gegen den Einsatz körperangepasster, verformbarer Gitter:

- Die Zeitskalen der Klappenbewegung sind deutlich kleiner als die der Herzwandbewegung. Um beide Prozesse aufzulösen, wären sehr kleine Zeitschrittweiten notwendig, was einen sehr hohen Rechenaufwand bedeutet.
- Die Schließung der Klappen führt entweder zu starken Netzverformungen (oder erfordert Neuvernetzung) im Bereich der Klappen oder sogar zur Trennung der beiden Volumennetze von Ventrikel und angrenzenden Gefäßen.

Um den Schwierigkeiten bei der Neuvernetzung und den damit verbundenen Interpolationen der Strömungslösung zwischen unterschiedlichen Gittern zu begegnen, wird im Rahmen dieser Arbeit ein Modul zur zukünftigen Kopplung der Herzklappen mit der Methode virtueller Grenzen (Immersed-Boundary-Methode, IBM) entwickelt und validiert. Da es sich um eine Problemstellung mit beweglicher Wand handelt, wird ein kontinuierlicher Ansatz mit unterschiedlichen Verteilungsfunktionen (s. Gl. 6.1 - 6.3) in Abhängigkeit des Wandabstandes r und einem Grenzabstand r_{max} gewählt:

$$d_a = \begin{cases} 1 & , r \leq r_{max} \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} \quad (6.1)$$

$$d_b = \begin{cases} 1 - \frac{r}{r_{max}} & , r \leq r_{max} \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} \quad (6.2)$$

$$d_c = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2} \left[1 - \frac{r}{r_{max}}\right]\right) & , r \leq r_{max} \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} \quad (6.3)$$

Um die Softwaremodularität im Rahmen von KaHMo zu wahren und um die bereits erprobten Struktur- und Strömungslöser weiter benutzen zu können, wird ein partitioniertes Lösungsverfahren verwendet. Aufgrund der ähnlichen Dichten von Blut und Herzklappen und der dünnen, hyperelastischen Struktur wird ein absolut-impliziter Kopplungsalgorithmus ausgewählt.

In Anlehnung an Goldstein et al. [36] wird der Kraftterm (s. Gl. 6.4) als „Feedbackschleife“ gestaltet:

$$\mathbf{F} = \alpha \sum_{IS} (\mathbf{v} - \mathbf{c}) + \beta (\mathbf{v} - \mathbf{c}) \quad (6.4)$$

Da sich die Herzklappen druckgetrieben bewegen, wird die Haftbedingung relativ zur Wandgeschwindigkeit definiert. Dies ermöglicht der IB, die Strömung vor sich „herzutreiben“, also eine Verdrängungswirkung auf das Fluid auszuüben. Der integrale Ausdruck von Goldstein (s. Gl. 5.13) wird im Rahmen der numerischen Integration durch die Summe über einen zusätzlichen iterativen Subprozess ersetzt. Der „Feedback“-Charakter entsteht dadurch, dass sich im Rahmen des Subprozesses Strömungsfeld- der Quelltermberechnung so lange abwechseln, bis die Haftbedingung an der Grenze erfüllt ist.

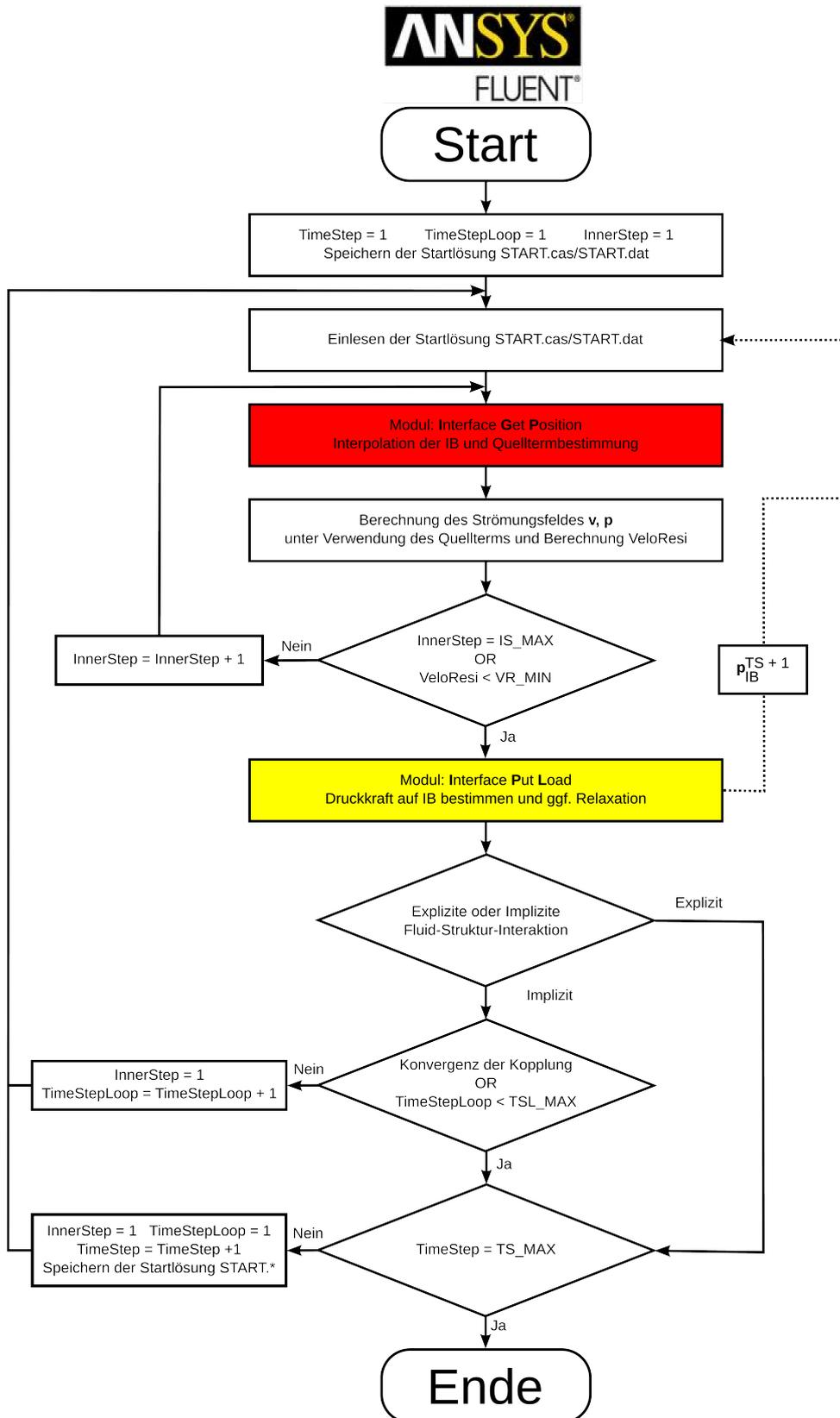


Abbildung 6.2: Ablaufdiagramm des Kopplungsalgorithmus I

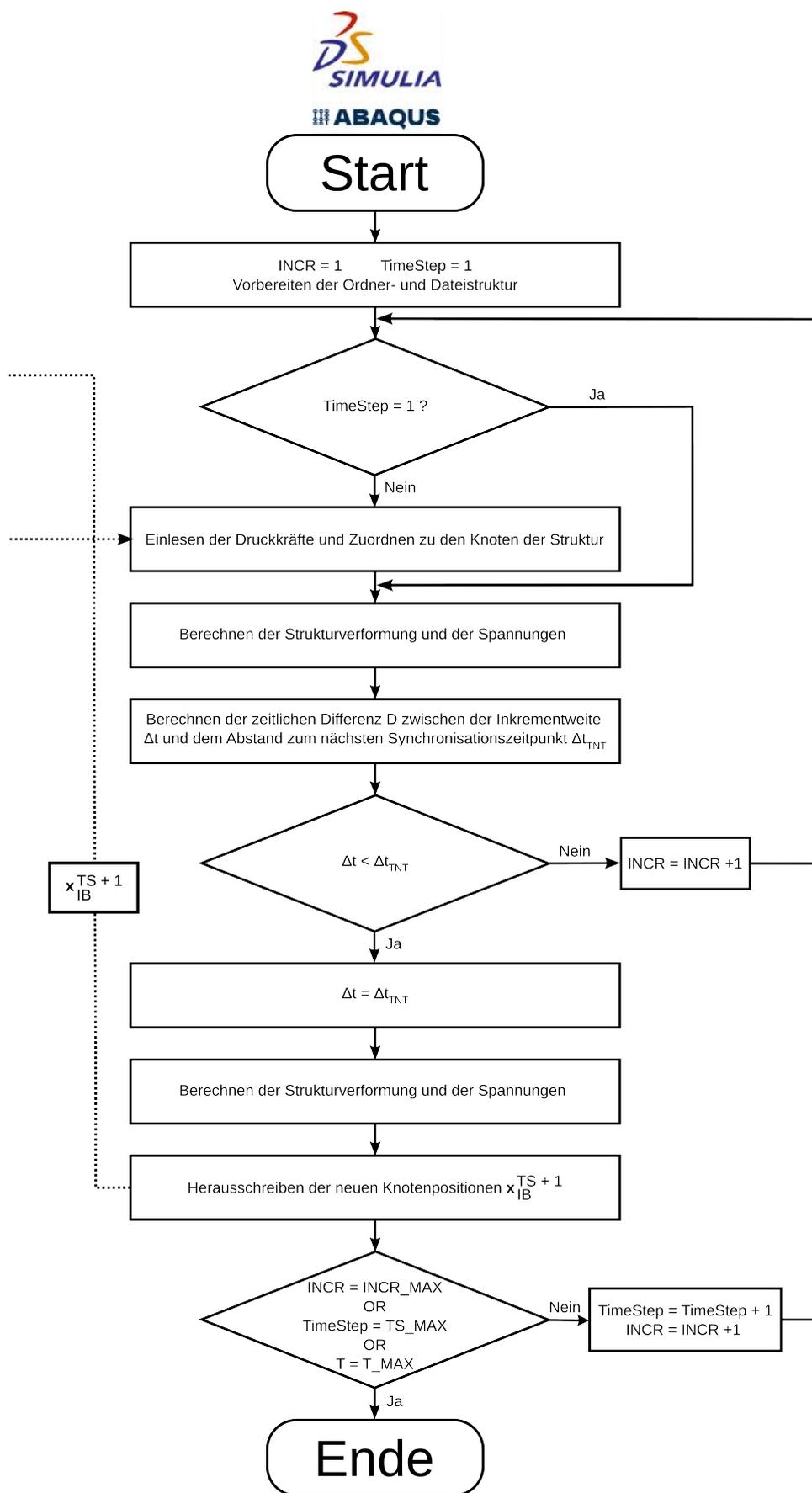


Abbildung 6.3: Ablaufdiagramm des Kopplungsalgorithmus II

Die Kopplungsprozedur verläuft in drei ineinander geschachtelten Schleifen (s. Abb. 6.2 und 6.3). Die Äußerste beschreibt den zeitlichen Verlauf der gekoppelten Simulation und synchronisiert die Struktur- und Strömungsberechnung. Diese Schleife enthält die Variable (*TimeStep*). Bei einem absolut-impliziten Kopplungsalgorithmus wird jeder Zeitschritt so lange wiederholt, bis kinematische und dynamische Kopplungsbedingung im Einklang sind. Um diesen iterativen Subprozess zu beschreiben, verwendet der Strömungslöser in Anlehnung an Krittian (2009) die Variable (*TimeStepLoop*) [71]. Um zu ermöglichen, dass Strömungs- und Strukturlöser unterschiedliche Zeitschrittweiten verwenden können, beschreibt Abaqus die zeitliche Evolution der Strukturberechnung mit der programmeigenen Größe *Inkrement*. Die innerste Schleife wird mit der Zählvariablen *InnerStep* beschrieben.

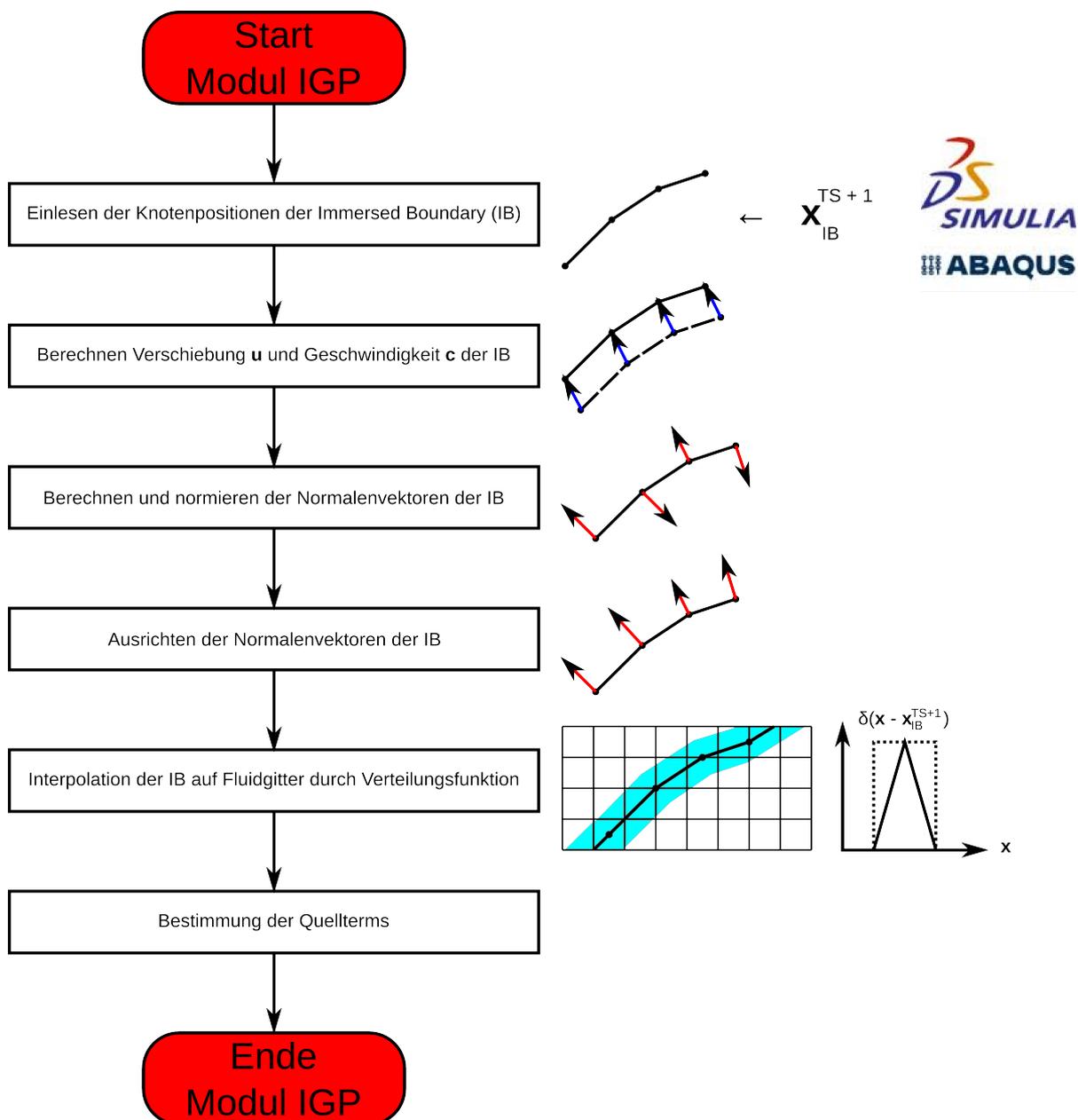


Abbildung 6.4: Interface Get Position

Die Hauptaufgaben des Kopplungsprozesses liegen bei Fluent und sind in zwei Module untergliedert. Das Modul **Interface Get Position** ist Kernbestandteil der innersten Schleife und empfängt die Lageinformationen von Abaqus (s. Abb. 6.4). Auf Basis der alten Position der IB werden die Verschiebung \mathbf{u}_i jedes Knotens und die Verschiebungsgeschwindigkeit \mathbf{c}_i berechnet. Zur Bestimmung der Lastrichtung auf die Koppelfläche werden die Oberflächennormalen der IB benötigt. Diese werden in weiteren Schritten berechnet, normiert und ausgerichtet. Anschließend erfolgt die Bestimmung der Fluidzellen, welche im Einflussbereich der IB liegen. Zum Schluss wird der Quellterm formuliert ($InnerStep = 1$) bzw. korrigiert ($InnerStep > 1$), welcher in der darauf folgenden Berechnung des Strömungsfeldes eingesetzt wird. Modulaufruf und Strömungsberechnung werden so lange wiederholt, bis das Geschwindigkeitsresiduum R_v (s. Kap. 6.3) an der IB einen Schwellenwert unterschreitet.

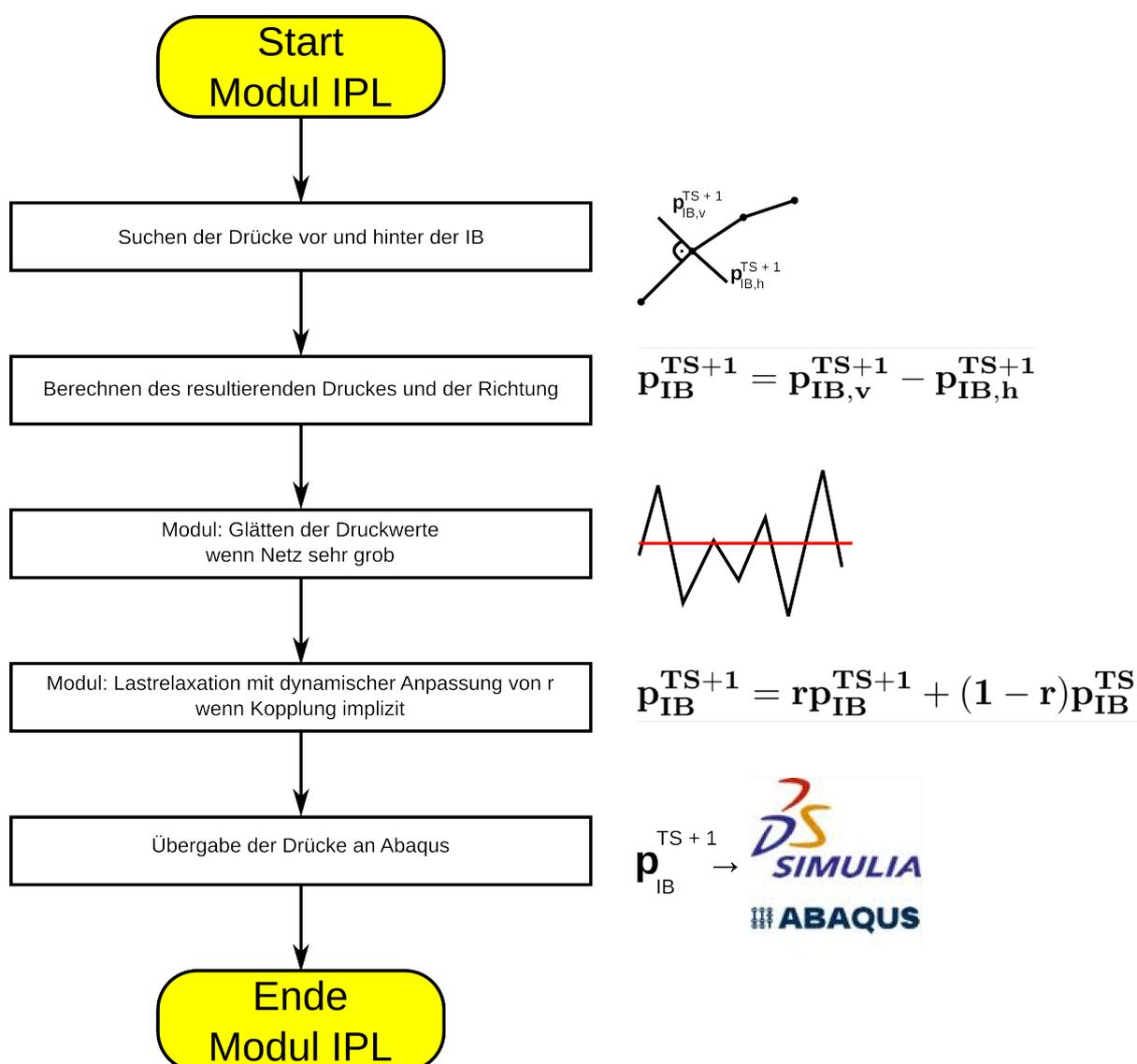


Abbildung 6.5: Interface Put Load

Im Anschluss an die innerste Schleife wird das Modul **Interface Put Load** aufgerufen (s. Abb. 6.5). In diesem Modul werden die Lastinformationen vor und hinter der IB aus dem Strömungsfeld extrahiert und der resultierende Betrag und die Richtung der Last an

jedem Punkt der IB berechnet. Ist die räumliche Diskretisierung der IB deutlich feiner als die des Fluidnetzes, kann es notwendig sein, die Lastinformationen zum Beispiel durch einen gleitenden Mittelwert zu glätten, bevor eine Übergabe an Abaqus erfolgt:

$$p_i = p_i + \frac{1}{nb} \sum_{k=1}^{nb} p_k \quad \text{nb: Anzahl der Nachbarknoten, i: betrachteter Knoten} \quad (6.5)$$

Der Kopplungsalgorithmus ist so gestaltet, dass durch die Reduktion der mittleren Schleife auf einen Durchlauf (*TimeStepLoop*) die implizite zur expliziten Kopplung wird. Im Falle der iterativen-impliziten Kopplung kann vor der Lastübergabe an Abaqus eine Relaxation erfolgen. Der Relaxationsfaktor kann hierbei konstant oder dynamisch sein (s. Kap. 6.3).

6.3 Konvergenz der Strömung-Struktur-Kopplung

Zur Bewertung der Qualität der Kopplung werden verschiedene Kriterien herangezogen. Die Haftbedingung ist bei der IBM im Vergleich zur ALE-Methode nicht trivial erfüllt. Aus diesem Grund wird ein Geschwindigkeitsresiduum eingeführt und wie folgt definiert:

$$R_v = \sum_i |(|(\mathbf{v} - \mathbf{c})_i^{IS+1}| - |(\mathbf{v} - \mathbf{c})_i^{IS}|)| \quad (6.6)$$

Das Geschwindigkeitsresiduum R_v ist die Summe der Differenzen der Relativgeschwindigkeiten (Strömungsgeschwindigkeit \mathbf{v} und Wandgeschwindigkeit \mathbf{c}) aller Zellen (i), die im Einflussbereich der IB liegen. R_v ändert sich im Laufe der inneren Iterationen (*InnerSteps*).

Bei der impliziten Kopplung werden Lage- und Lastinformationen zwischen Abaqus und Fluent so lange ausgetauscht, bis die kinematischen und dynamischen Kopplungsbedingungen im Einklang sind. Die zeitliche Evolution der Änderungen der beiden Bedingungen kann als Gütekriterium für den Erfolg der impliziten Kopplung verwendet werden:

$$\text{Lastresiduum: } R_p = \sum_l |(p_l^{TSL+1} - p_l^{TSL})| \quad (6.7)$$

$$\text{Lagerresiduum: } R_u = \sum_l |(\mathbf{u}_l^{TSL+1} - \mathbf{u}_l^{TSL})| \quad (6.8)$$

Die Residuen sind definiert als die Differenz aufeinanderfolgender impliziter Kopplungswiederholungen (*TimeStepLoops* (*TSL*)). Das Lastresiduum ist hier als die Differenz der Drücke auf dem Interface angegeben. Je nach Anforderung lassen sich hier auch Schubspannungen mit einbeziehen. Das Lagerresiduum verwendet die Verschiebungen \mathbf{u} dieser Knoten. Beide Residuen sind als die Summe über alle Diskretisierungsstellen (Index: 1) auf der IB definiert.

Neben den Einzelresiduen der Kopplungsbedingungen wird das Produkt aus beiden Bedingungen als Koppelenergie definiert. Aus dieser Überlegung folgt das flächenspezifische Energieresiduum in diskreter Form:

$$R_E = \sum_l |(p_l^{TSL+1} - p_l^{TSL})(\mathbf{u}_l^{TSL+1} - \mathbf{u}_l^{TSL})| \quad (6.9)$$

Die implizite Kopplung ist erfolgreich, wenn die gesamte Last (im Rahmen der iterativen Lastrelaxation) von Fluent an Abaqus übertragen wurde und keine weiteren Verschiebungen bewirkt. Alle Residuen werden auch skaliert auf das jeweilige Residuum im jeweiligen ersten Iterationsschritt verwendet.

Um die Dichtigkeit der IB nachzuweisen, kann neben dem Geschwindigkeitsresiduum folgende Formel dienen, wenn eine Druckrandbedingung am Einlass vorliegt:

$$R_d = \sum_l |(p_{Einlass}^{TSL+1} - p_{l,transferiert}^{TSL})| \quad (6.10)$$

Das Dichtheitsresiduum ist definiert als die Differenz zwischen dem Einlassdruck und dem von Fluent an Abaqus übertragenen Druck.

Sowohl die Änderung des Volumenkraftterms als auch die Lastübergabe bei der impliziten Strömung-Struktur-Kopplung können iterativ relaxiert werden. Die Relaxationsfaktoren r können konstant oder dynamisch gewählt werden. Bei der dynamischen Anpassung ist es entscheidend, dass der Faktor groß genug gewählt wird, da sonst zu viele Iterationen (*TimeStepLoops*, *InnerSteps*) benötigt werden, und klein genug, damit keine Divergenz auftritt. Die dynamische Anpassung von ω kann beispielsweise in Abhängigkeit des auf den ersten Subschritt bezogenen Energieresiduums R_{Es} erfolgen:

$$r = r_{start} + (r_{end} - r_{start})(1 - R_{Es}) \quad (6.11)$$

Dabei sind r_{start} und r_{end} die untere und obere Begrenzung des Relaxationsfaktors. Eine weitere Möglichkeit, den iterativen Prozess zu steuern, bieten ereignisgesteuerte Entscheidungsbäume (s. Abb. 6.6). Hierbei wird der Verlauf eines Residuums (evtl. auch in geglätteter Form) auf das Eintreten verschiedener Ereignisse überprüft:

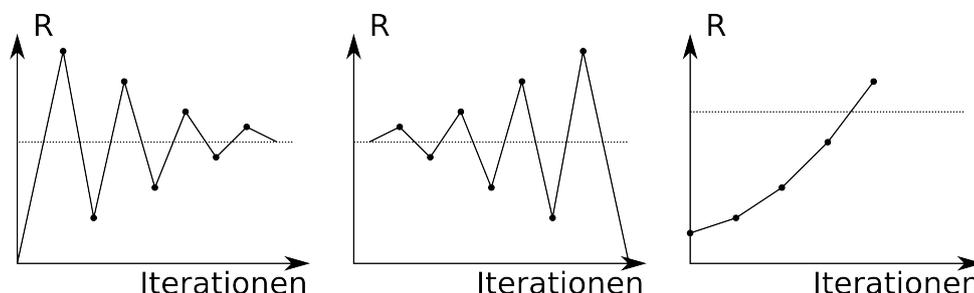


Abbildung 6.6: Ereignisauslösende Residuenverläufe

- $R < R_{min}$: Abbruch des Subiterationsprozesses und Wechsel in den nächsten übergeordneten Schritt.
- $R > R_{max}$: Divergenz oder zu langsame Konvergenz (s. Abb. 6.6 Rechts): Reduktion des Relaxationsfaktors, der Zeitschrittweite etc.
- R streng monoton steigend: Divergenz oder zu langsame Konvergenz: Reduktion des Relaxationsfaktors, der Zeitschrittweite etc.
- R oszilliert, Abstand zwischen zwei benachbarten Residuen steigt an (s. Abb. 6.6 Mitte): Divergenz oder zu langsame Konvergenz: Reduktion des Relaxationsfaktors, der Zeitschrittweite etc.
- R oszilliert, Abstand zwischen zwei benachbarten Residuen fällt ab (s. Abb. 6.6 Links): Je nach Konvergenzrate Erhöhung des Relaxationsfaktors.

6.4 Parallelisierung des Programmcodes

Da die IBM keine körperangepassten Gitter verwendet, sind auf Seiten von Fluent feine numerische Netze in der Nähe der Wand notwendig, um eine „stufige“ Repräsentation der Wand zu verringern. Trotz geschickter Netzstrukturierung ist, insbesondere im dreidimensionalen Raum, mit großen Zellzahlen zu rechnen. Um dabei die Rechenzeiten möglichst gering zu halten, ist eine Parallelisierung der Kopplungsprozedur unumgänglich.

Bei der parallelen Berechnung wird das Strömungsgebiet in mehrere Partitionen unterteilt und diese werden Prozessorkernen zugeordnet. Jeder Kern (Knoten) berechnet für seine Partition die gesuchten Strömungsgrößen. Der Austausch zwischen den Knoten erfolgt über einen *Host*-Prozess zu festgelegten Zeiten über Schnittstellenzellen, welche die Partitionen umschließen. Um die Kopplung auch für mehrere Prozessoren bzw. Kerne zu ermöglichen, wird der Programmcode so gestaltet, dass bestimmte Passagen nur von *Knoten*-Prozessen oder vom *Host*-Prozess ausgeführt werden.

Um die Güte der Parallelisierung zu bewerten, werden zwei Kriterien herangezogen: Erstens müssen die Ergebnisse, welche seriell oder parallel erzielt werden, identisch sein. Neben diesem trivial erscheinenden Kriterium wird zweitens die Beschleunigung B_p durch die Ausführung auf mehreren Prozessoren ausgewertet (s. Abb. 6.7).

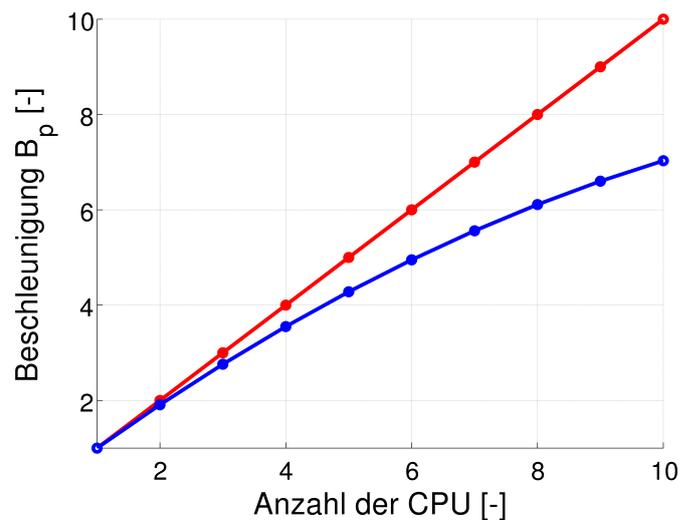


Abbildung 6.7: Definition der Beschleunigung durch Programmparallelisierung

$$B_p = \frac{t_r}{t_s} = \frac{\text{Rechenzeit}}{\text{Simulationszeit}} \quad (6.12)$$

Die Beschleunigung ist das Verhältnis der Rechenzeit (Summe der Rechenzeiten aller Prozessoren) zur Simulationszeit (Differenz zwischen Start und Ende der Simulation). Im Idealfall halbiert sich bei der Verdopplung der Prozessoren die Simulationszeit. In der Realität liegt die Kurve der Beschleunigung stets unter der idealen Kurve, was vornehmlich mit der Kommunikationszeit zwischen den Prozessoren zu tun hat. Der Verlauf der realen Kurve hängt unter anderem von Programmparallelisierung, berechnetem Strömungsproblem und Computer-Infrastruktur ab.

6.5 Validierungskonzept

Zur Validierung des entwickelten Kopplungsalgorithmus werden drei Testfälle herangezogen: Der zwei- und dreidimensionale Kanal mit Lappen sowie die membranverschlossene Kavität. Diese bilden zum einen spezifische Eigenschaften ab, die mit denen der zukünftigen Herzklappenkopplung übereinstimmen. Zum anderen werden die definierten Anforderungen auf ihren Erfüllungsgrad überprüft. Im Folgenden werden die Testfälle kurz vorgestellt und begründet. Die jeweilige ausführliche Problembeschreibung erfolgt in Kapitel 8.

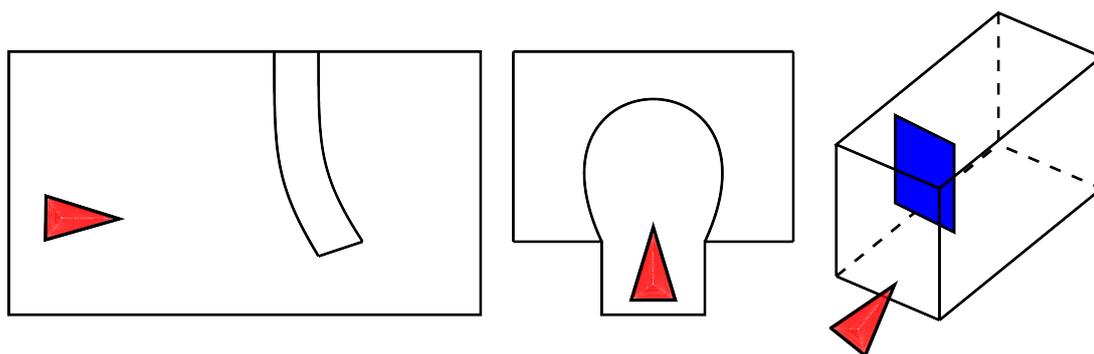


Abbildung 6.8: Validierungsfälle: 2D-Kanal (links), membranüberspannte Kavität (Mitte) und 3D-Kanal (rechts)

Zweidimensionaler Lappen im ebenen Kanal

- Zu Beginn soll ein zweidimensionaler Testfall zum einen schnelle Antwortzeiten aufgrund geringer Zellzahlen garantieren. Zum anderen verringert die reduzierte Problemkomplexität die Fehlerwahrscheinlichkeit bei der Entwicklung des Hauptgerüsts der Kopplung.
- Ein Ziel ist der Vergleich zwischen explizitem und implizitem Kopplungsschema.
- Der Testfall ist generischer Natur. Am Ende steht ein Vergleich zwischen der neu entwickelten Kopplung mit der bereits etablierten ALE-Methode.

Membranüberspannte Kavität

- Eine Membran ist eine dünne Struktur. Die Verteilungsfunktionen müssen so gewählt werden, dass bei der Übertragung auf das kartesische Gitter keine „Löcher“ entstehen.
- Gemäß ihrem Materialgesetz ist die Membran hyperelastisch und mit einer sehr geringen Steifigkeit im niedrigen Dehnungsbereich. Die Übertragung der Strömungslasten zu Beginn der Simulation führt zu großen Verschiebungen, welche die Simulation zum Absturz bringen kann.

- Das Dichteverhältnis zwischen Struktur und Strömung liegt nahe bei 1. Dies provoziert Kopplungsinstabilitäten aufgrund des *added-mass-effect*. Eine implizite Kopplung ist daher notwendig.
- Die Membran verdeckt eine Kavität. Der Druck in der Kavität steigt an. Ziel dieses Testfalles ist unter anderem der Nachweis, dass die IBM die Aussparung abdichten kann. Das heißt, dass kein Fluid über die Membran ausströmen kann.
- Zur Validierung werden die durchgeführten Simulationen mit eigens durchgeführten Referenzsimulationen auf Basis der ALE-Methode und Werten aus der Literatur verglichen.

Dreidimensionaler Lappen im ebenen Kanal

- Erweiterung des Kopplungsalgorithmus auf 3D.
- Die großen zu erwartenden Zellzahlen erfordern eine Parallelisierung des Programmcodes.
- Die kleinen Raumschrittweiten bewirken unter Einhaltung des Courant-Kriteriums sehr kleine Zeitschrittweiten. Da diese Kopplungsinstabilitäten (s. Kap. 5.6) fördern, ist eine absolut-implizite Kopplung unumgänglich.
- Der dreidimensionale Testfall wird mit eigens erstellten Referenzsimulationen auf Basis der ALE-Methode verglichen.

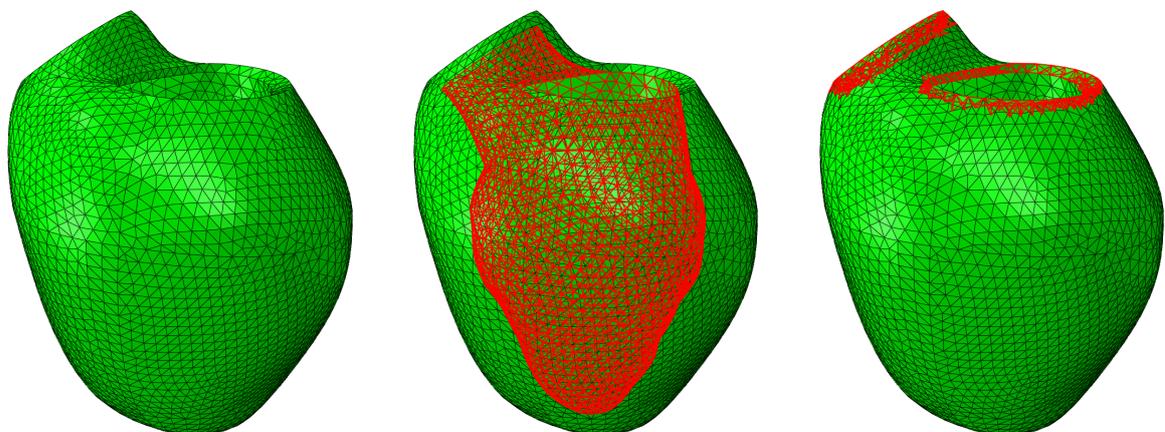
7 Kopplungsmodelle

Grundlage dieser Arbeit bilden die physiologischen und Bilddaten des linken Ventrikels eines gesunden Probanden, welche in der Uniklinik Bonn aufgenommen wurden und daher mit der Kennung B001 bezeichnet werden. Als bildgebendes Verfahren kam die EKG-gestützte Magnet-Resonanz-Tomographie zum Einsatz. Diese unterteilt einen Herzschlag in 20 Zeitpunkte. Zu jedem dieser Zeitpunkte wird ein Satz Lang- und Kurzschnittbilder des Herzens aufgenommen. Aus jedem Satz lässt sich ein Oberflächennetz als Fluidraumbegrenzung rekonstruieren.

7.1 Modell der Herzwand

7.1.1 Geometrie und Vernetzung

Aus den MRT-Aufnahmen des linken Ventrikels wird die Herzinnenwand (Endokard) rekonstruiert (s. Abb. 7.1 b). Das Endokard ist die Koppelfläche zwischen Abaqus und Fluent. Für die Herzaußenwand (Epikard) liegen keine MRT-Daten vor, sodass dieses generisch ergänzt wird (s. Abb. 7.1 a). Bei der Ergänzung wird zum einen darauf geachtet, dass die Wandstärke im physiologischen Bereich von $8 - 12 \text{ mm}$ liegt. Zum anderen wird die Form der Wand so „weich“ gestaltet, dass geometrieinduzierte Spannungsüberhöhungen minimiert werden.



(a) Gesamtansicht

(b) Endokard / Koppelfläche

(c) Position der Randbedingung

Abbildung 7.1: Numerisches Gitter in Abaqus

Startpunkt der Simulation ist während der schnellen Füll- oder Austreibungsphase, da dieser Zustand des Herzmuskels als lastfrei anzusehen ist. Da die Klappenebene an der Herzbasis nicht in die Strömung-Struktur-Kopplung mit einbezogen wird, ist eine Verformung an dieser Stelle zu vermeiden. Auf Seiten von Abaqus werden daher Verschiebungsrandbedingungen ($\mathbf{u} = \mathbf{0}$) an den beiden Klappenringen der Aorta und des Vorhofes aufgebracht.

Um den Einfluss der Vernetzung auf die berechneten Verformungen und Spannungen abzuschätzen und diesbezüglich Netzunabhängigkeit zu erzielen, werden verschiedene Zellzahlen bei linearen und quadratischen Ansatzfunktionen verwendet (s. Tab. 7.1). Da der Herzmuskel inkompressibel ist, werden *hybride* Elemente verwendet. Diese Elemente besitzen den hydrostatischen Druck als zusätzlichen Freiheitsgrad, welcher durch das Materialgesetz und die Kompatibilitätsbedingung bestimmt ist [13].

Elementtyp	Zellanzahl
C3D4H	168957
C3D4H	57413
C3D10H	14134
C3D10H	26605
C3D10H	47147

Tabelle 7.1: Numerisches Gitter der Herzwand. Die Notation folgt der in Abaqus

7.1.2 Implementierung des Faserverlaufes im Herzmuskel

Der strukturelle Aufbau des Herzmuskels zeichnet sich dadurch aus, dass in drei voneinander unabhängigen Richtungen unterschiedliche Spannungen auftreten. Soll dieses Verhalten mit Hilfe eines konstitutiven Gesetzes erfasst werden, müssen in der Herzwand entsprechende Richtungsvektoren definiert werden. Für den Herzmuskel werden an jedem Knoten des numerischen Gitters zwei Richtungsvektoren \mathbf{f} und \mathbf{s} festgelegt. Die dritte unabhängige Richtung ergibt sich aus dem Kreuzprodukt von \mathbf{f} und \mathbf{s} . Der Vektor \mathbf{f} stellt die Faserrichtung und \mathbf{s} die Schichtrichtung dar.



Abbildung 7.2: Ablaufplan zur Erstellung der initialen Faserorientierung

Die Richtungen im Herzen ändern sich im Laufe der Simulation. Zur Bestimmung der initialen Faserorientierung werden die Knotenpositionen \mathbf{X} und -nummern n zunächst aus Abaqus in Matlab hineingeladen (s. Abb. 7.2). Gemäß den Gleichungen 7.1 - 7.6

werden jedem Knoten Faser- \mathbf{f} und Schichtrichtung \mathbf{s} zugewiesen:

$$f_x = \cos(\alpha) \sin(\beta + \pi/2) + \sin(\alpha) \sin(\gamma) \cos(\beta + \pi/2) \quad (7.1)$$

$$f_y = \cos(\alpha) \cos(\beta + \pi/2) - \sin(\alpha) \sin(\gamma) \sin(\beta + \pi/2) \quad (7.2)$$

$$f_z = \cos(\gamma) \sin(\alpha) \quad (7.3)$$

$$s_x = \cos(\gamma) \sin(\beta) \quad (7.4)$$

$$s_y = \cos(\gamma) \cos(\beta) \quad (7.5)$$

$$s_z = \sin(\gamma) \quad (7.6)$$

Die Vektoren werden dabei in Abhängigkeit von drei Winkeln definiert (s. Abb. 7.3). Die Lage des jeweiligen Knotens geht dabei in den Winkel β ein.

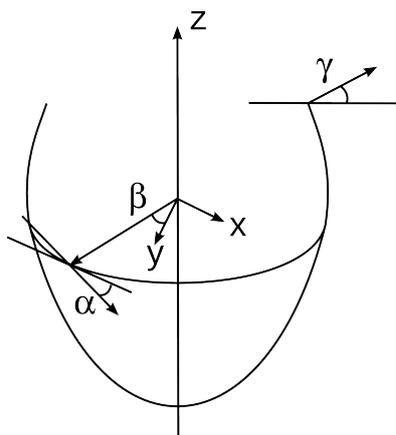


Abbildung 7.3: Anordnung der Winkel für die Faserorientierung im Herzen

Die Muskelfasern im Herzen wickeln sich im Allgemeinen entgegengesetzt helikal um die Herzkammern. Sie sind dabei in Schichten angeordnet, welche sich vom Endo- zum Epikard erstrecken. Der exakte Verlauf der Faser- und Schichtrichtung wird durch die funktionale Gestaltung der beiden Winkel α und γ gegeben (s. Gl. 7.7 - 7.8). Dabei beschreibt α die Anstellung der Faserrichtung in transmuraler Richtung in Abhängigkeit vom Radius r . Für $\alpha = 0$ bilden die Fasern konzentrische Kreise um die Herzkammern. Die Winkel-funktion γ beschreibt die Ausrichtung der Faserschichten von Herzbasis zur Herzspitze. Für $\gamma = 0$ zeigt die Schichtrichtung von der Mittelachse des Ventrikels in radiale Richtung. Neben dem Radius besteht eine Abhängigkeit von γ zu den Normalenvektoren \mathbf{n} des Epi- und Endokards:

$$\alpha = f(r) \quad (7.7)$$

$$\gamma = f(\mathbf{n}_{Endo}, \mathbf{n}_{Epi}, r) \quad (7.8)$$

Abbildung 7.4 zeigt den transmuralen Verlauf der Faserrichtung \mathbf{f} . Die Muskelfasern verlaufen an der Außenwand in absteigender und an der Innenwand in aufsteigender Richtung.

7.1.3 Orthotropes Materialgesetz zur Beschreibung des passiven Materialverhaltens

Zur Beschreibung des orthotropen Materialverhaltens des passiven Myokards wird das Formänderungsenergiegesetz W nach Holzapfel et al. in Abaqus implementiert [51].

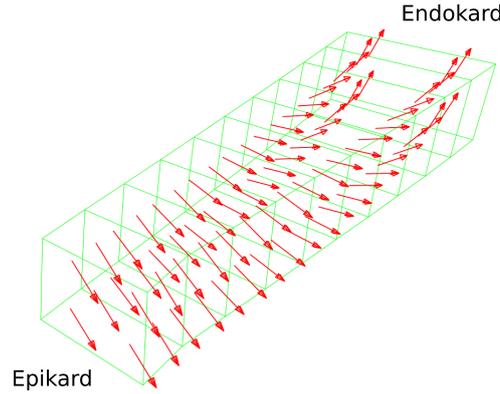


Abbildung 7.4: Transmurale Faseranordnung

Der energetische Ausdruck für die Gesamtenergie setzt sich additiv aus den Beiträgen der isotropen Matrix und den anisotropen Antworten in die verschiedenen Richtungen zusammen:

$$W = W_{passiv} = W_{iso} + W_{aniso} \quad (7.9)$$

Jeder einzelne Term wird als Exponentialfunktion in Abhängigkeit von Invarianten des rechten Cauchy-Green-Tensors modelliert. Der erste Term beschreibt das isotrope Verhalten der Matrix. Der zweite und dritte Term beschreiben die Spannungsantwort in Faser- und Schichtrichtung. Der letzte Term in Gleichung 7.10 beschreibt die Wechselwirkung zwischen den beiden Richtungen:

$$\begin{aligned} W &= \frac{a}{2b} \exp[b(I_1 - 3)] \\ &+ \frac{a_f}{2b_f} (\exp[b_f(I_{4f} - 1)^2] - 1) \\ &+ \frac{a_s}{2b_s} (\exp[b_s(I_{4s} - 1)^2] - 1) \\ &+ \frac{a_{fs}}{2b_{fs}} (\exp[b_{fs}(I_{8fs} - 1)^2] - 1) \end{aligned} \quad (7.10)$$

Die Invarianten sind dabei wie folgt definiert:

$$I_1 = sp(\mathbf{C}) \quad (7.11)$$

$$I_{4f} = \mathbf{f} \cdot (\mathbf{C}\mathbf{f}) \quad (7.12)$$

$$I_{4s} = \mathbf{s} \cdot (\mathbf{C}\mathbf{s}) \quad (7.13)$$

$$I_{8fs} = \mathbf{f} \cdot (\mathbf{C}\mathbf{s}) \quad (7.14)$$

Die Differentiation von Gleichung 7.10 nach einem Verformungsmaß, wie zum Beispiel dem Greenschen Verzerrungstensor, liefert das entsprechende Spannungsmaß. In Tabelle 7.2 sind die Materialparameter für Gleichung 7.10 angegeben, welche von Goektepe et al. [43] auf Basis der Scherversuche von Dokos et al. [18] ermittelt wurden.

Abbildung 7.5 zeigt den Vergleich der analytischen Ableitung der Spannungen für den Fall einfacher Scherung in verschiedene Richtungen mit den FE-Ergebnissen aus Abaqus.

a [kPa]	b [-]	a_f [kPa]	b_f [-]	a_s [kPa]	b_s [-]	a_{fs} [kPa]	b_{fs} [-]
0,000496	7,209	0,015	20,417	0,003283	11,176	0,000662	9,466

Tabelle 7.2: Materialparameter für Materialgesetz nach Holzapfel mit Parametern nach Goektepe et al. für passives Myokard [43]

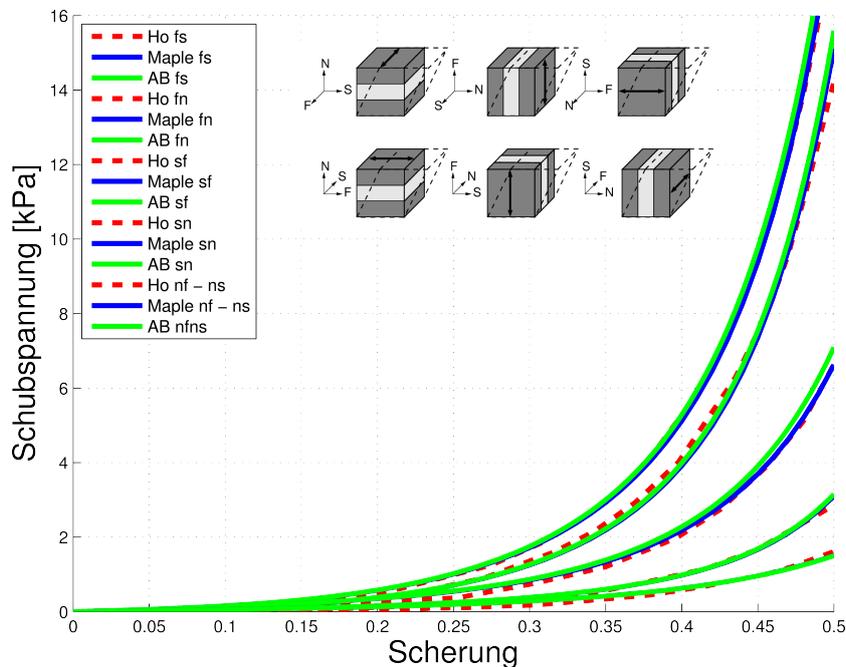


Abbildung 7.5: Spannungs-Dehnungs-Verhalten eines Würfels mit orthotropen Eigenschaften unter Scherung: Ho: Die von Holzapfel analytisch abgeleiteten Spannungen auf Basis von Experimenten. Maple: Analytische Ableitung der Spannungen unter Verwendung der Parameter von Goektepe et al. AB: Die Implementierung des Energiegesetzes in Abaqus. Die Richtungen von oben nach unten: fs, fn sf sn, nf-ns

7.1.4 Muskelkontraktion in der Systole

Das von Holzapfel et al. vorgeschlagene Modell beschreibt nur das passive Verhalten des Herzmuskels. Darunter versteht man, welche Spannungen unter vorgegebener Verformung entstehen. Wenn keine Verformungen auftreten, wird die erste Invariante zu Drei und die übrigen Invarianten zu Eins. Dies bewirkt, dass W und daraus folgend alle Spannungen verschwinden. Analog zum additiven Split der Energie in einen isotropen und einen anisotropen Anteil, wird im Folgenden ein weiterer Term hinzugefügt, welcher die aktive Kontraktion beschreibt:

$$W = W_{passiv} + W_{aktiv} = W_{iso} + W_{aniso} + W_{aktiv} \quad (7.15)$$

Da die Kontraktion in Faserrichtung stattfindet, muss der letzte Term in Abhängigkeit der Invarianten I_{4f} formuliert werden. Die Kraftentwicklung im Herzmuskel entsteht aufgrund eines zeitlichen Aktivierungsgrades $Akt(t)$ (s. Abb. 7.6). Gleichung 7.16 stellt das modifizierte Energiegesetz dar. Die Modifikationen sind in rot hervorgehoben:

$$\begin{aligned}
W &= \frac{a}{2b} \exp[b(I_1 - 3)] \\
&+ \frac{a_f}{2b_f} (\exp[b_f(I_{4f} - 1)^2] - 1) \\
&+ \frac{a_s}{2b_s} (\exp[\frac{b_s}{1 + d_3 Akt(t)^{d_4}} (I_{4s} - 1)^2] - 1) \\
&+ \frac{a_{fs}}{2b_{fs}} (\exp[\frac{b_{fs}}{1 + d_3 Akt(t)^{d_4}} (I_{8fs} - 1)^2] - 1) \\
&+ d_1 Akt(t) I_{4f}^{d_2}
\end{aligned} \tag{7.16}$$

Die Muskelanspannung geht einher mit einer Umordnung der Muskelfaserschichten. Dies bewirkt, dass die Schichtrichtung im Vergleich zum rein passiven Verhalten einen geringeren Widerstand leistet. Der Verringerung der Spannung in Schichtrichtung wird durch die Erweiterung der Terme 3 und 4 Rechnung getragen.

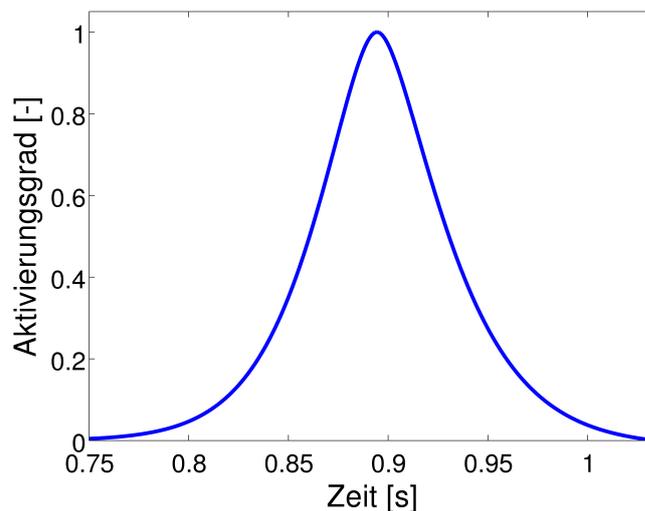


Abbildung 7.6: Zeitlicher Verlauf des Aktivierungsgrades

7.1.5 Parameter des Materialgesetzes

Zur Anpassung der Eigenschaften der Herzwand wird nach der in Abbildung 7.7 dargestellten Weise vorgegangen. In der Diastole (Füllphase) wird das Materialverhalten nur von den passiven Anteilen des Energiegesetzes bestimmt. Der Aktivierungsgrad ist 0, sodass alle mit der aktiven Kontraktion verbundenen Terme verschwinden. Aus den MRT-Bilddaten ist der Volumenverlauf und aus weiteren klinischen Daten der Druckverlauf im Ventrikel bekannt. Unter Verwendung der in Tabelle 7.3 aufgeführten Materialparameter werden die Funktionen α und γ bestimmt, welche die exakten Richtungen im Herzen im lastfreien Zustand festlegen. Die Materialparameter werden gegenüber den Werten in Tabelle 7.2 leicht verändert, um eine bessere Übereinstimmung im Scherbereich von 0.4 - 0.5 zu erhalten. Während der grundlegende Aufbau der Faser- und Schichtrichtung physiologisch begründet ist, werden die exakten Verläufe so bestimmt, dass eine Übereinstimmung der Volumen- und Druckverläufe sowie der charakteristischen Kennzahlen gegeben ist.

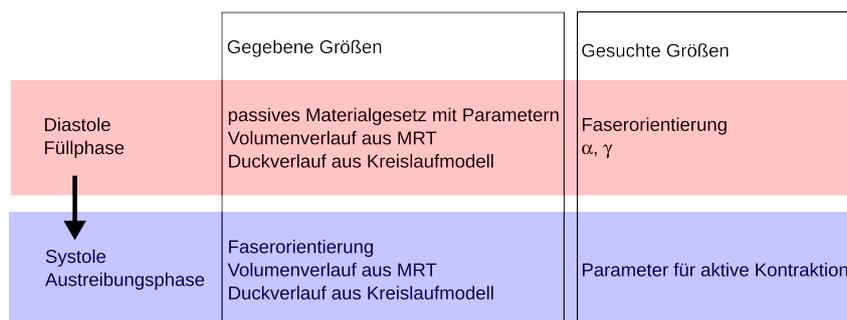


Abbildung 7.7: Vorgehensweise bei der Implementierung der aktiven Kontraktion

Die Funktionen α und γ stellen also die Freiheitsgrade dieser Optimierungsfrage dar und werden im Laufe verschiedener Simulationen mit Hilfe linearer Approximation manuell angepasst. Nachdem die initialen Faser- und Schichtrichtungen bekannt sind, wird die

a [kPa]	b [-]	a_f [kPa]	b_f [-]	a_s [kPa]	b_s [-]	a_{fs} [kPa]	b_{fs} [-]
0,000496	7,209	0,015	20,417	0,0015	23,176	0,000662	9,466

Tabelle 7.3: Teilweise angepasste Materialparameter

Austreibungsphase (Systole) berechnet. In der Systole sind nun die Richtungen¹, Druck- und Volumenverlauf bekannt, sodass die Materialparameter des aktiven Anteils des Energiegesetzes bestimmt werden können (s. Tab. 7.4). Hierzu werden mehrere gekoppelte Simulationen durchgeführt und die Parameter d_1 bis d_4 so verändert, dass der korrekte Volumen- und Druckverlauf wiedergegeben werden kann. Die im Ventrikel vorherrschenden Drücke korrelieren dabei stark mit der Ableitung des Volumenverlaufes. Die Faktoren d_1 und d_2 bestimmen mit dem Spannungsaufbau in Faserrichtung deren Verkürzung, sowie die Verdrehung des Ventrikels. Die übrigen beiden Parameter beeinflussen den Widerstand des Herzgewebes gegenüber der Ausdehnung normal zur Faserrichtung. Große Werte für d_3 und d_4 ermöglichen bei gleicher Kontraktion eine größere Wandverdickung, was wie eine gutes Abgleiten der Faserlagen interpretiert werden kann.

d_1 [kPa]	d_2 [-]	d_3 [-]	d_4 [-]
1,05	1,1	100000	2

Tabelle 7.4: Materialparameter für aktives Myokard

7.2 Modell des Fluidraumes

7.2.1 Patientenspezifische Geometrie und Vernetzung

Der betrachtete Fluidraum umfasst den linken Ventrikel und Vorhof sowie die vier Pulmonalvenen und einen Teil der aufsteigenden Aorta (s. Abb. 7.8). Die Ventrikelgeometrie und die Aorta sind patientenspezifisch aus MRT-Daten rekonstruiert. Die übrigen Gefäße

¹Die Orientierung der Fasern und Schichten ändern sich während der Simulation gemäß der Verformung der Geometrie.

sind generisch ergänzt. Das Strömungsgebiet besitzt vier Einlässe und einen Auslass, an denen Druckrandbedingungen anliegen. Die Vernetzung erfolgt mit IcemCFD. Das nume-

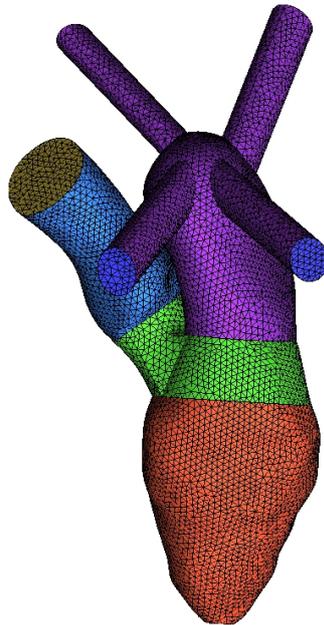


Abbildung 7.8: Numerisches Gitter Fluent

rische Gitter besteht aus Tetraedern mit Netzverfeinerung in Richtung der Herzklappen und Wände. Zur Untersuchung der Netzunabhängigkeit werden verschiedene Zellzahlen verwendet (180000, 360000, 500000). Aorta, Pulmonalvenen und der Vorhof besitzen starre Wände. Die Wand der Herzkammer ist die Koppelfläche und kann sich verformen. Im Ventrikel gelten daher die Erhaltungsgleichungen in ALE-Form. Das bewegliche Gitter wird ausschließlich durch die Verschiebung der Netzknoten (*smoothing*) realisiert.

7.2.2 Numerische Einstellungen

Im Folgenden werden die numerischen Einstellungen für den Strömungslöser tabellarisch aufgeführt. Die Strömung wird als laminar, inkompressibel und instationär betrachtet.

Einstellung	Wert
Zeitschrittweite	0,001034 s - 0,00517 s
Diskretisierung Navier-Stokes-Gleichung	2. Ordnung Aufwind
Druckinterpolation	2. Ordnung
Druck-Geschwindigkeitskopplung	SIMPLE
Genauigkeit	doppelt
Diskretisierung Energiegleichung	2. Ordnung Aufwind
Diskretisierung passiver Skalar	1. Ordnung Aufwind
Dynamic Mesh: Federkonstante	0,2
Dynamic Mesh: Randzellen-Relaxation	0,7

Tabelle 7.5: Numerische Einstellungen in Fluent

7.2.3 Modellierung der Blutrheologie

Zur Beschreibung des pseudoplastischen Verhaltens der Viskosität μ von Blut hat sich das Carreau-Modell bewährt [121], das (für den isothermen Fall) wie folgt definiert ist:

$$\mu = \mu_{\infty} + (\mu_0 - \mu_{\infty}) \left(1 + (\dot{\gamma}\lambda)^2\right)^{\frac{n-1}{2}} \quad (7.17)$$

Die Materialparameter μ_{∞} , μ_0 , n und λ wurden von Liepsch et al. [83] experimentell ermittelt. Des Weiteren wird davon ausgegangen, dass Blut isotrope (nicht richtungsabhängige) Eigenschaften besitzt.

μ_0	μ_{∞}	λ	n
0,01315 Pa s	0,003 Pa s	0,4 s	0,4

Tabelle 7.6: Materialparameter für Carreau-Modell [83]

Wie in Abbildung 7.9 zu sehen ist, sinkt die Viskosität mit steigender Scherrate. Die Dichte von Blut beträgt $\rho = 1055 \text{ kg/m}^3$.

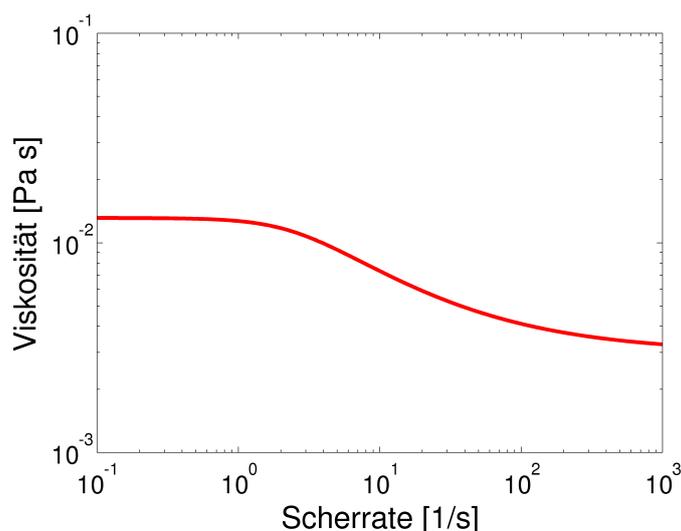


Abbildung 7.9: Viskosität von Blut: Abbildung mit dem Carreau-Modell

7.2.4 Kreislaufmodell

Da im Gegensatz zu $KaHMo^{MRT}$ die Wandbewegung nicht a priori bekannt ist, ergeben sich die exakten Druckverläufe aus dem Zusammenspiel von Randbedingung im Fluid und Strukturberechnung. Aus diesem Grund ist ein funktionaler Zusammenhang notwendig, der aufgrund des aktuellen Volumenstromes eine Druckrandbedingung vorgibt. Die Drücke am Ein- und Auslass des Herzens werden durch die Elastizität des Gefäßsystems maßgeblich beeinflusst. Wie in Abbildung 7.10 zu sehen, wird ein Teil des Schlagvolumens während der Systole in den großen herznahen Gefäßen gespeichert (Aorta), indem diese sich weiten. Während der Diastole wird dieses gespeicherte Blutvolumen durch die Rückbildung der elastischen Verformung in den Organismus gepumpt. Durch diesen als

Windkessel bekannten Mechanismus reduzieren sich stromab des Herzens die Druckamplitude, und die pulsatile Strömung geht in eine kontinuierliche über.

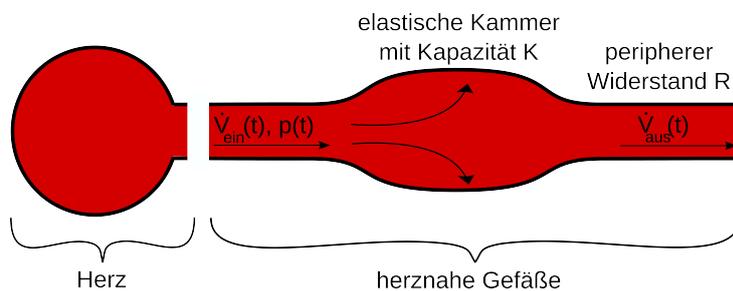


Abbildung 7.10: Windkesselleffekt der herznahen Gefäße

Die Berücksichtigung des Strömungswiderstands und der Elastizität kann zum einen durch die strömungs-struktur-gekoppelte Simulation des Gefäßsystems erfolgen oder durch eine sich anpassende Druckrandbedingung. Ersteres scheidet aufgrund des großen Rechenaufwands meist aus. Wie bei der Vorgehensweise von Perschall und Reik wird der Einfluss des Gefäßsystems durch ein elektrisches Analogon modelliert [130, 137]. Der Volumenstrom \dot{V}_{ein} stellt dabei die Stromstärke, der Druck $p(t)$ die Spannung, der Gefäßwiderstand R bzw. R_k dar. Die Elastizität der Gefäßwände wird durch eine Kapazität K modelliert. Der bereits mit einem expliziten Zeitschrittverfahren diskretisierte Druck an den Ein- und Ausströmrändern folgt formal zu:

$$p(t_i) = p_k(t_{i-1}) + \frac{\Delta t}{K(p_k(t_{i-1}))} \left(\dot{V}_{ein}(t_{i-1}) - \frac{p_k(t_{i-1})}{R} \right) + R_k \dot{V}_{ein}(t_i). \quad (7.18)$$

Die Konstanten R , R_k , K und der Druck zu Beginn $p(t_0)$ werden unter Vorgabe des physiologischen Volumenverlaufes und den validierten Kreislaufdruckdaten von Reik in Matlab bestimmt (s. Tab. 7.7). Hierzu wird das Minimum des mittleren quadratischen Fehlers mse vom bestimmten zum Referenzdruck durch den *Nelder-Simplex*-Algorithmus gesucht [92]:

$$mse = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (p(i) - p_r(i))^2 \quad (7.19)$$

Parameter	Einheit	Aorta	Vorhof
R_k	[Pa s/ml]	1,57351289	0,29035646
K	[ml/Pa]	0,01713189	0,34974468
R	[Pa s/ml]	117,4945652	9,64132848
$p(t_0)$	[Pa]	13925,46777	1066,625514
\sqrt{mse}	[Pa]	5,55	3,87

Tabelle 7.7: Parameter des 3-Element-Kreislaufmodells

Abbildung 7.11 zeigt den Vergleich zwischen dem angepassten 3-Element-Windkesselmodell und den Druckverläufen aus dem validierten Kreislaufmodell nach Reik. Die größere Abweichung bei dem Vorhofdruck ist durch die Formulierung des 3-Element-Windkesselmodells begründet. Da die Druckrandbedingung am Vorhof einen

kleineren Einfluss im Vergleich zu den Druckänderungen durch die Beschleunigung des Fluids besitzt, wirken sich die Abweichungen nicht merklich auf den Gesamtdruckverlauf aus.

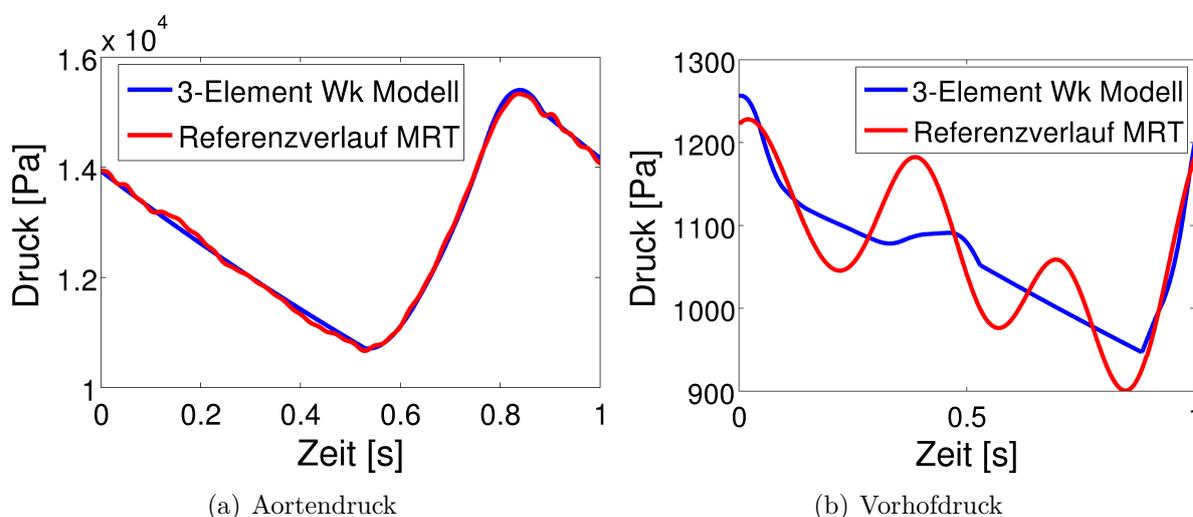


Abbildung 7.11: Kreislaufmodell

7.2.5 Herzklappen

Zur Modellierung der dreidimensionalen Herzklappen soll zukünftig die in Kapitel 6 entwickelte Kopplung zum Tragen kommen. Da im Rahmen dieser Arbeit kein Strukturmodell zur Beschreibung der Herzklappen zur Verfügung steht, wird für die FSI-Simulation auf das Klappenmodell aus *KaHMo^{MRT}* zurückgegriffen, welches den Volumenstrom durch die Klappen richtig modelliert.

Die Herzklappen trennen den linken Ventrikel von der Aorta und dem Vorhof und ermöglichen den gerichteten Blutfluss. Sie sind modelliert über eine zeitlich variable Randbedingung auf der Trennfläche zwischen den Gefäßen. Die Größe der durchströmten Fläche wird dabei durch die zweidimensionale Projektion der realen, dreidimensionalen Öffnungsfläche auf die Trennfläche bestimmt. Neben der geschlossenen und komplett geöffneten Herzklappe, kann ein Durchströmwiderstand als Übergang im Öffnungs- und Schließungsprozess definiert werden:

$$\Delta p = - \left(\frac{\mu}{\alpha} v + C_2 \frac{\rho}{2} v^2 \right) \Delta m \quad (7.20)$$

Der Druckverlust bei Durchströmung hängt von der Viskosität μ und dem Geschwindigkeitsbetrag v normal zur Herzklappenebene ab. Dabei ist Δm eine virtuelle Dicke. Die Durchlässigkeit α und der Druckverlustkoeffizient C_2 sind frei wählbar und zeitabhängig.

In Abbildung 7.12 ist der zeitliche Verlauf der Klappenöffnung für Mitral- und Aortenklappe dargestellt.

Neben der zeitlich gesteuerten Klappenbewegung ist eine druckgesteuerte Regulierung möglich. Übersteigt der Druck im Ventrikel zu Beginn der Systole den Aortendruck, beginnt sich ein Teil der Aortenklappe zu öffnen. Je nach Druckniveau und Durchfluss durch

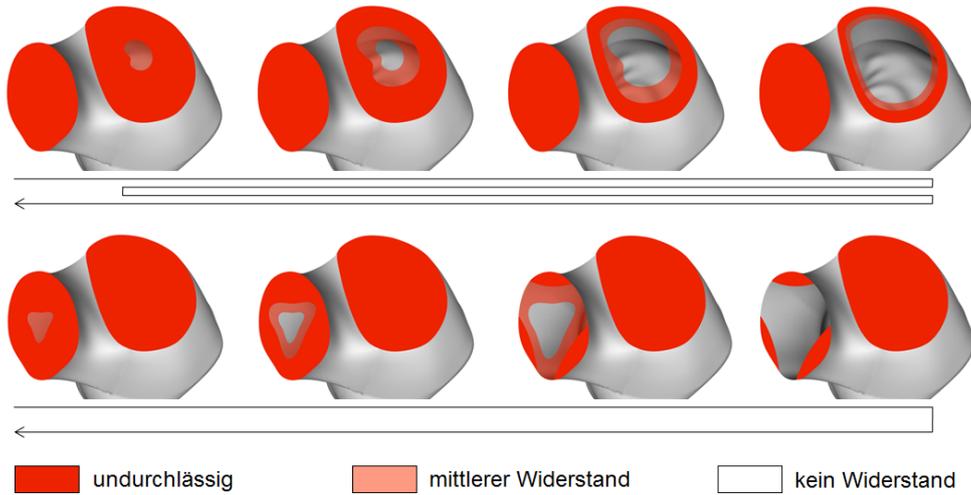


Abbildung 7.12: Klappenöffnung und -schließung [86]

die bereits geöffneten Klappensegmente verringert sich zunächst der Durchströmwiderstand der angrenzenden Klappenfläche. Bei Überschreiten einer kritischen Durchströmung öffnet sich das Segment vollständig, und der Strömungswiderstand verschwindet [44]. Da im Rahmen dieser Arbeit kein Strukturmodell der Herzklappen entwickelt wird und die druckgesteuerten Herzklappen keinen merklichen Vorteil gegenüber den zeitgesteuerten liefern, werden im Folgenden zeitgesteuerte, zweidimensionale Herzklappen verwendet.

Teil III

Simulation

8 Validierung der Methode virtueller Grenzen

Im Folgenden werden die Ergebnisse der im Rahmen des in Kapitel 6.5 entwickelten Validierungskonzeptes durchgeführten Simulationen vorgestellt. Da für die komplexe dreidimensionale und instationäre Herzklappenbewegung keine Vergleichsdaten vorliegen und die Entwicklung eines Strukturmodells nicht Thema dieser Arbeit ist, erfolgt die Erprobung der Kopplungsstrategie anhand ausgewählter Problemstellungen, welche Eigenschaften aufweisen, die mit denen des späteren Einsatzgebietes übereinstimmen. Als Referenz dienen dabei Werte aus der Literatur oder Simulationen auf Basis der bewährten ALE-Methode.

8.1 Zweidimensionaler Kanal mit Lappen

Problembeschreibung und Einstellungen

Die erste Problemstellung behandelt einen Lappen in einem zweidimensionalen Kanal (s. Abb. 8.1). Als Strömungsmedium wird Luft mit einer Dichte $\rho_f = 1,225 \text{ kg/m}^3$ und einer Viskosität $\mu = 1,7894 \cdot 10^{-5} \text{ kg/(ms)}$ verwendet. Die Wahl des Mediums Luft liegt darin begründet, dass aufgrund der geringen Dichte nicht mit Kopplungsinstabilitäten zu rechnen ist. Der Lappen wird als linear-elastisch modelliert ($E = 10^8 \text{ Pa}$, $\nu = 0,49$, $\rho_s = 1000 \text{ kg/m}^3$). Er wird von links mit einer konstanten Geschwindigkeit $v = 8 \text{ m/s}$ angeströmt.

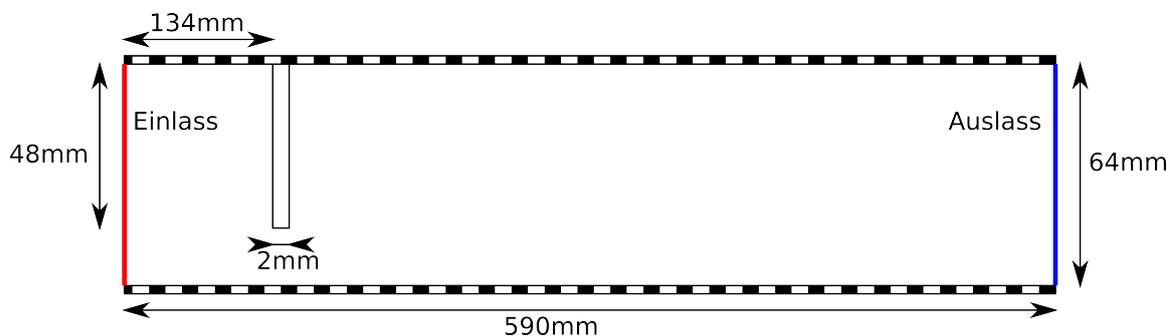


Abbildung 8.1: Geometrie des 2D-Kanals

Aufgrund der Reynolds-Zahl $Re = 35000$ bezogen auf die Kanalhöhe muss Turbulenz berücksichtigt werden. Dies geschieht mit Hilfe der Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen. Die Wirbelviskosität wird dabei mit dem k - ε -Modell modelliert. Am Auslass gilt die Druckrandbedingung $p = 0$.

Zur Sicherstellung der Netzunabhängigkeit werden die Simulationen mit drei unterschiedlichen Auflösungen in Fluent (20000, 40000, 60000) und Abaqus (240, 384, 520 Elemente für ebenen Spannungszustand) durchgeführt. Die Zeitschrittweiten variieren in einem Bereich von $\Delta t = 10^{-5} \text{ s} - 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ s}$ und werden so gewählt, dass die Courant-Zahl in allen Simulationen vergleichbar ist.

Ergebnisse

In Abbildung 8.2 ist der zeitliche Verlauf der Auslenkung der Spitze des Lappens dargestellt. Nach kurzer Zeit bildet sich eine periodische Ablösung der Strömung an der Spitze des Lappens, die diesen zu Schwingungen anregt.

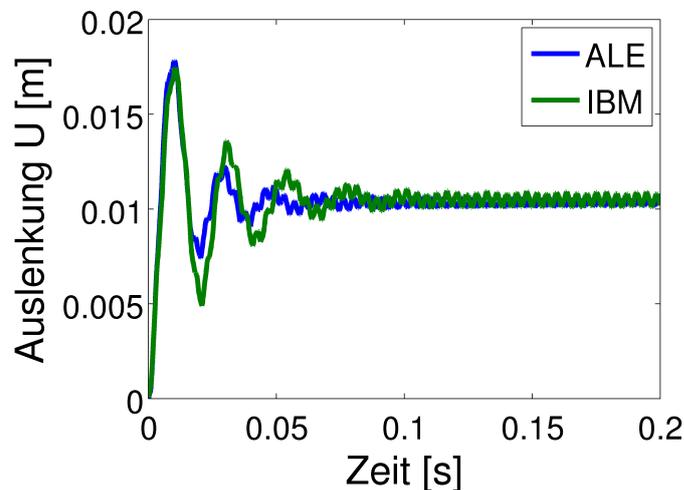


Abbildung 8.2: Auslenkung der Lappenspitze für verschiedene Methoden

Neben den gemittelten Endlagen der Auslenkungen werden die ALE- und IBM-Simulationen nach der Frequenz der Endlagenschwingung sowie dem Druckverlust über den Lappen beurteilt. Die Ergebnisse sind in Tabelle 8.1 zusammengefasst.

	ALE	IBM	Abweichung [%]
Gemittelte Endlage [m]	0,0103	0,0105	1,94
Druckverlust [Pa]	841,38	809,83	3,90
Frequenz [Hz]	269,17	265,38	1,43

Tabelle 8.1: Quantitativer Vergleich 2D-Lappen

Bei allen drei untersuchten Aspekten stimmen die Referenzsimulation mit der ALE-Methode und den mit dem neuen Kopplungsalgorithmus durchgeführten Simulationen gut überein. Der Druckverlust ist hierbei als die Differenz der gemittelten Drücke am Ein- und Auslass definiert.

8.2 Membranverschlossene Kavität unter Innendruck

Problembeschreibung

In Anlehnung an den von van Loon et al. und Bathe et al. vorgeschlagenen Benchmarkfall zur Überprüfung der Undurchlässigkeit der IBM wird eine membranverschlossene Kavität untersucht [172, 2]. Die Abmessungen können Abbildung 8.3 entnommen werden. Als Strömungsmedium kommt ein inkompressibles Fluid mit einer Dichte $\rho_f = 1000 \text{ kg/m}^3$ und einer Viskosität $\mu = 0,004 \text{ kg/(ms)}$ zum Einsatz. Die Membran besitzt eine Dicke von $5 \cdot 10^{-5} \text{ m}$ und schließt die Kavität nach oben bündig ab. Sie, mit einer von Dichte $\rho_s = 800 \text{ kg/m}^3$, besteht aus einem homogenen, isotropen und hyperelastischen Material, welches mit dem Formänderungsenergiegesetz nach Mooney-Rivlin beschrieben wird ($C_{10} = 2 \cdot 10^7 \text{ Pa}$, $C_{01} = 1 \cdot 10^7 \text{ Pa}$, $D_1 = 2 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$). Die Membran ist an beiden Seiten der Kavität nur an einem Punkt befestigt, um den die Membran frei rotieren kann. Um einer Verformung des numerischen Gitters vorzubeugen, wird die erste Zellschicht auf beiden Seiten (links/rechts) der Membran versteift.

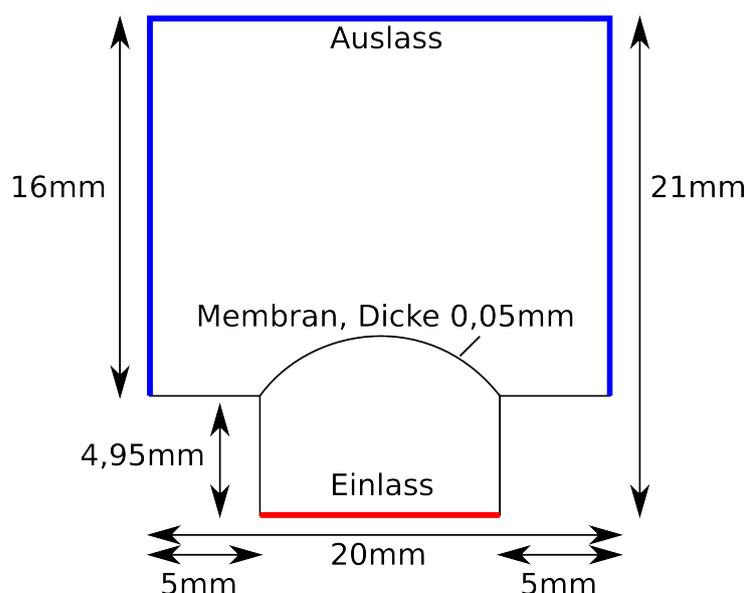


Abbildung 8.3: Geometrie der membranverschlossenen Kavität

Am Boden der Kavität wird ein zeitlich veränderlicher Druck als Randbedingung vorgegeben ($p = 5 \cdot 10^6 \text{ Pa}$). Am Auslass herrscht ein Druck von $p = 0 \text{ Pa}$. Durch den Druckanstieg in der Kavität beult sich die Membran in den darüberliegenden Hohlraum aus und verdrängt dabei das Fluid. Gerade zu Beginn der Simulation besitzt die Membran nur eine geringe Steifigkeit, was zu großen Verformungen führt. Das Dichteverhältnis verursacht zusätzliche Instabilitäten bei geringen Zeitschrittweiten. Während Bathe et al. zur Stabilisierung der Simulation eine leichte Kompressibilität des Fluids vorschlagen, werden in dieser Arbeit dazu die Trägheitskräfte auf Seiten der Struktur berücksichtigt.

Die Simulation wird mit zwei Gitterauflösungen auf Seiten von Abaqus (152, 2032 Elemente für ebenen Dehnungszustand) und vier Gitterauflösungen in Fluent (2000, 8000, 68000, 680000) durchgeführt. Der Koppelzeitschritt zwischen Fluent und Abaqus beträgt $\Delta t_K = 0,01 \text{ s} - 0,001 \text{ s}$.

Ergebnisse

Im Folgenden werden die Simulationen mit dem neuen Kopplungsalgorithmus mit Referenzsimulationen auf Basis der ALE-Formulierung und den Literaturwerten aus der Veröffentlichung von Bathe et al. verglichen.

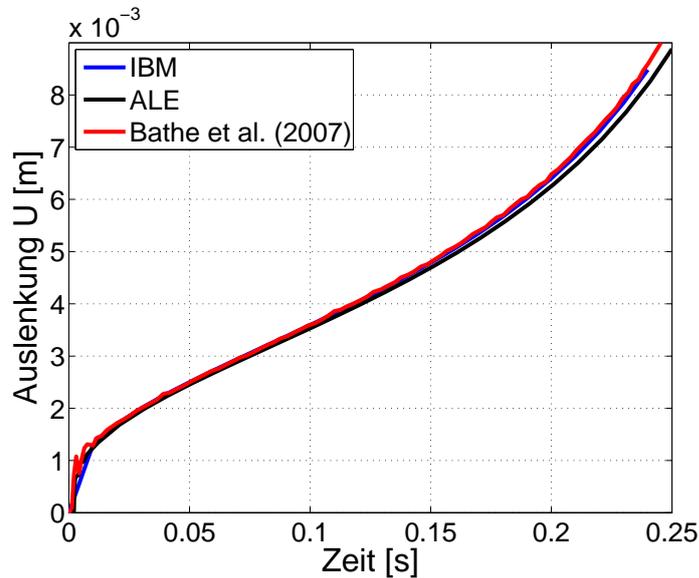


Abbildung 8.4: Maximale Auslenkung der Membran für verschiedene Methoden

Abbildung 8.4 zeigt die maximale Auslenkung der Membran. Als Auswertepunkt dient ein Knoten auf der Oberseite der Membran in der Mitte zwischen den beiden Aufhängepunkten. Sowohl die Referenzsimulation als auch die Simulation mit der IBM liefern eine gute Übereinstimmung mit dem zeitlichen Verlauf der betragsmäßigen Auslenkung der Membran.

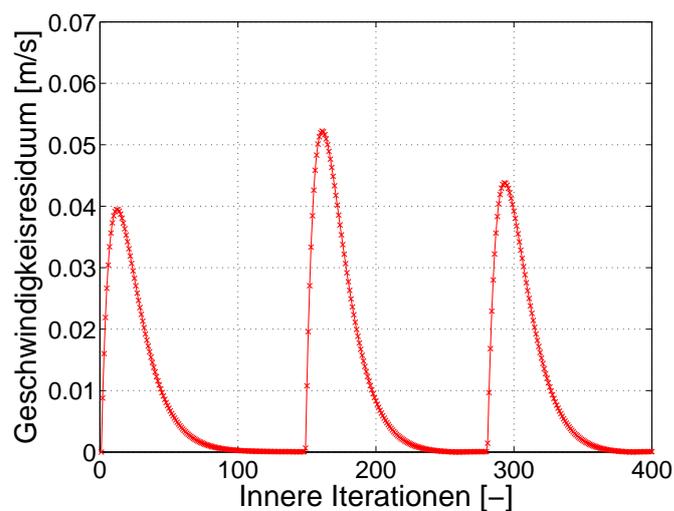


Abbildung 8.5: Geschwindigkeitsresiduum

Die Bestimmung des korrekten Quellterms in den Navier-Stokes-Gleichungen ist ein iterativer Prozess. Ziel der Iteration ist die Erfüllung der Haftbedingung und damit die

Gewährleistung der Dichtheit der eingebetteten Grenze. In Abbildung 8.5 ist das Geschwindigkeitsresiduum in y -Richtung während der *InnerSteps* aufgetragen. Diese Richtung erstreckt sich senkrecht zum Einlass. Unterschreitet die Relativgeschwindigkeit einen Grenzwert, wird der Iterationsprozess gestoppt, und die gekoppelte Simulation wechselt in den nächsten Zeitschritt bzw. *TimeStepLoop*.

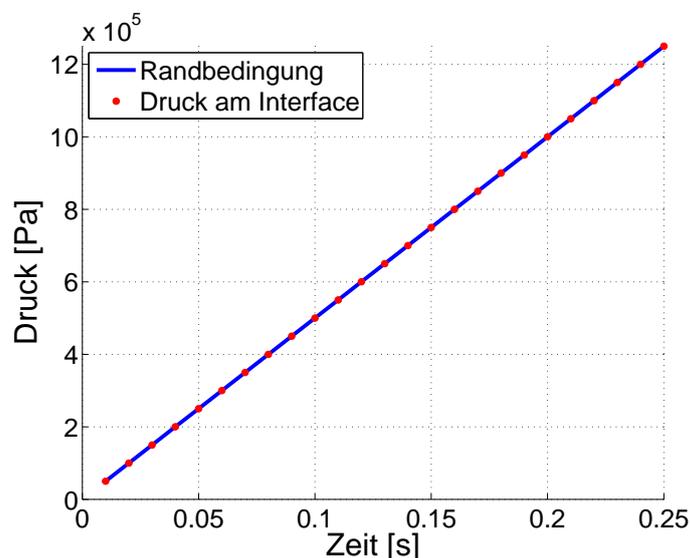


Abbildung 8.6: Druckresiduum

Wenn die Membran kein Fluid durchlässt, entspricht der Druck, welcher am Einlass aufgeprägt wird, dem an der Koppelfläche an den Strukturlöser übertragenen Druck. Es existiert somit kein Druckgefälle in der Kavität und demzufolge auch keine Strömung. In Abbildung 8.6 ist die Einlassrandbedingung dem übertragenen Druck gegenübergestellt. Die gute Übereinstimmung der übergebenen Drücke mit der Randbedingung ist ein Beweis für die Dichtheit der Membran.

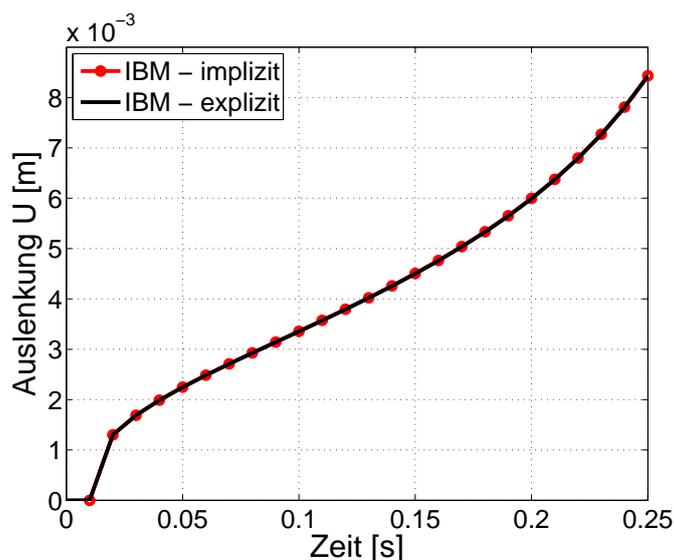


Abbildung 8.7: Vergleich expliziter und impliziter Kopplung

Für den späteren Einsatz bei der Simulation der Herzklappen ist es notwendig, dass der

entwickelte Algorithmus Strömung und Struktur stark koppeln kann. Die starke Kopplung kann als weiterer iterativer Prozess zwischen den *InnerSteps* und den Zeitschritten angesehen werden. Im Gegensatz zu den *InnerSteps*, bei denen der Quellterm samt Strömungsfeld so lange korrigiert wird, bis die Haftbedingung erfüllt ist, werden bei den *TimeStepLoops* die Randbedingungen iterativ verbessert und erst am Ende das Strömungsfeld angepasst.

Abbildung 8.7 stellt die Auslenkung, welche mit der expliziten Variante des Kopplungsalgorithmus erzielt wurde, der gegenüber, welche implizit berechnet wurde. Bei der impliziten Kopplung sind nur die konvergierten Endlagen eingezeichnet.

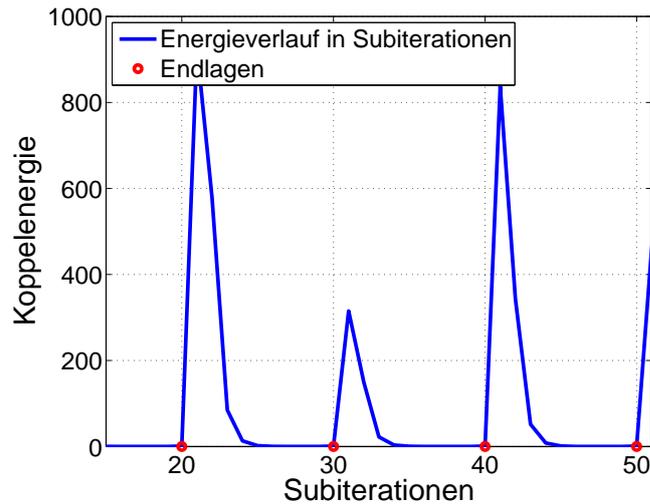


Abbildung 8.8: Konvergenz der impliziten Kopplung

Zur Bewertung des impliziten Kopplungserfolges ist in Abbildung 8.8 der Verlauf der Koppelenergie während der *TimeStepLoops* dargestellt. Die Abnahme der Koppelenergie zeigt an, dass kinematische und dynamische Kopplungsbedingung am Ende im Gleichgewicht sind.

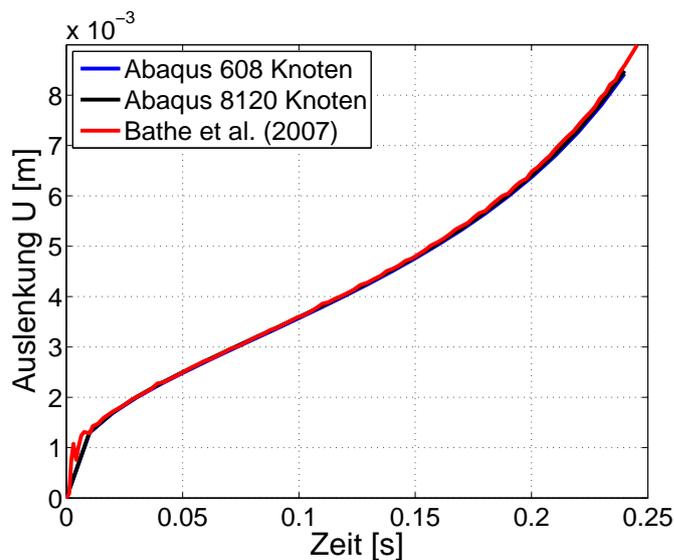


Abbildung 8.9: Netzunabhängigkeit Abaqus

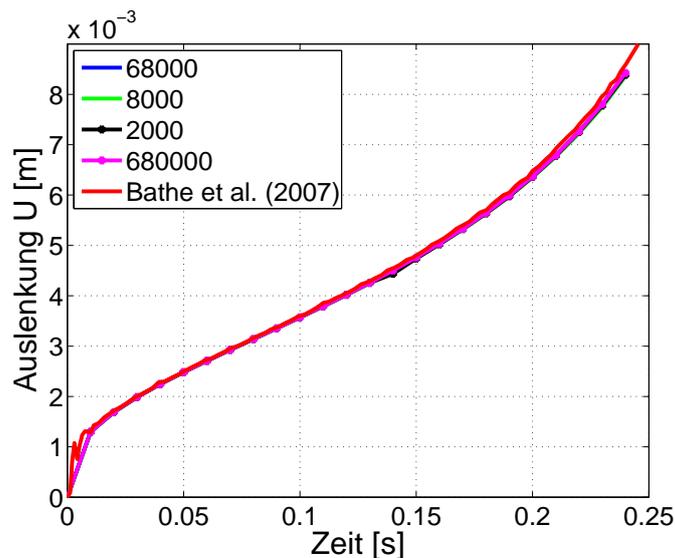


Abbildung 8.10: Netzunabhängigkeit Fluent

In den Abbildungen 8.9 und 8.10 ist der Einfluss der Vernetzung auf die Berechnung der Auslenkung dargestellt. Selbst bei geringen Netzauflösungen gibt es nur eine geringe Abweichung von den Referenzwerten. Da die Ausdehnung der Struktur auf das feste Fluidnetz interpoliert werden muss, hat sich gezeigt, dass bei großen Unterschieden in den Gitterweiten von Fluent und Abaqus eine Glättung der Druckwerte notwendig sein kann.

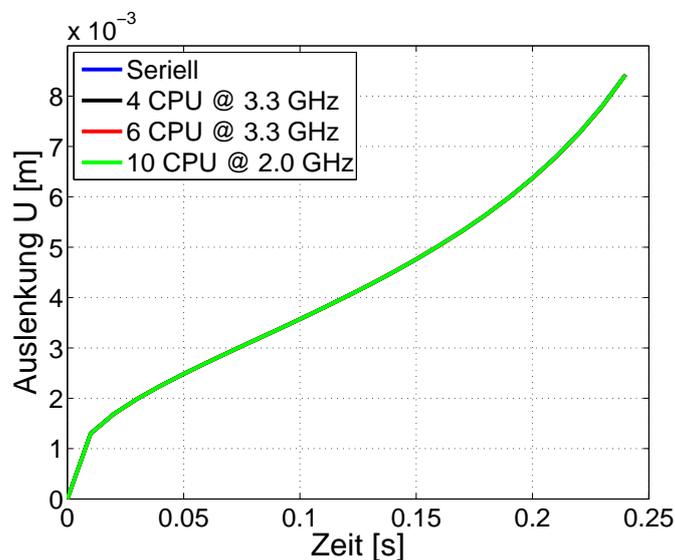


Abbildung 8.11: Parallelisierung des Programmcodes

Insbesondere für die im Dreidimensionalen zu erwartenden großen Zellzahlen ist die Parallelisierung des Programmcodes sehr wichtig. Wie in Abbildung 8.11 zu sehen ist, liefert die Kopplung bei unterschiedlichen Prozessorzahlen und Infrastrukturen das gleiche Ergebnis. Tabelle 8.2 zeigt den Geschwindigkeitsvorteil auf derselben Architektur für ein, vier und sechs CPU. Die geringe Beschleunigung für den letzten Wert ist auf die geringere Taktzahl der Prozessorkerne auf einer anderen Infrastruktur zurückzuführen.

Konfiguration	Rechenzeit [h:m]	Beschleunigung B_p
Seriell	22:43	1
4 CPU	9:01	2,51
6 CPU	6:41	3,40
10 CPU	14:01	1,62

Tabelle 8.2: Beschleunigung der Berechnung durch Programmparallelisierung

8.3 Dreidimensionaler Kanal mit elastischem Lappen

Problembeschreibung

Die dritte Problemstellung ist ein dreidimensionaler Rechteckkanal, in dem ein Lappen aus Biosilikon aufgehängt ist [85]. Die Abmessungen des Kanals und des Lappens sind in Abbildung 8.12 dargestellt. Durch den Kanal fließt Wasser ($\rho_f = 998 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 0,001 \text{ kg/(ms)}$). Der Lappen wird von links mit einer konstanten Geschwindigkeit von $v = 0,016 \text{ m/s}$ angeströmt, was einem Volumenstrom $\dot{V} = 600 \text{ l/h}$ entspricht. Mit einer Reynolds-Zahl $Re = 1632$ ist die Strömung laminar. Aufgrund der sehr geringen Verformung kann der Lappen als linear-elastisch modelliert werden ($E = 1 \text{ MPa}$, $\nu = 0,49$). Die Berücksichtigung der nicht-linearen Spannungsantwort bringt eine Veränderung der Endlage um weniger als 3%.

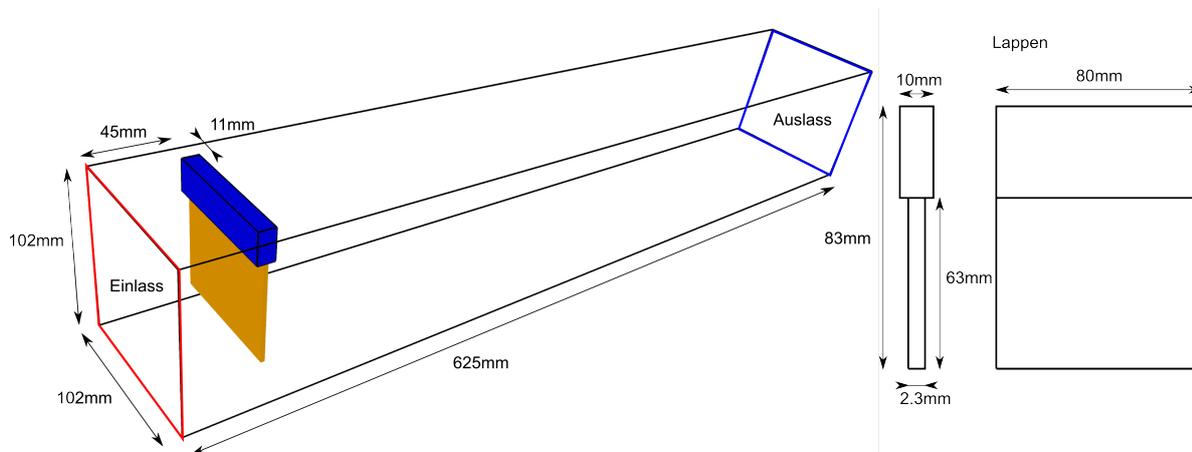


Abbildung 8.12: Geometrie des 3D-Kanals

Die Untersuchungen werden jeweils in vier unterschiedlichen Auflösungen in Fluent (45000, 330000, 2500000, 4500000) und Abaqus (192, 900, C3D8, C3D20) durchgeführt. Die Zeitschrittweite für die explizite Simulation liegt bei $\Delta t = 1 \text{ s} - 0,1 \text{ s}$. Bei kleineren Zeitschrittweiten $\Delta t = 0,05 \text{ s}$ wird die Kopplung instabil, sodass auf das implizite Schema gewechselt wird. Aufgrund der kleinen Raumschrittweiten bei großen Zellzahlen ist zur Einhaltung des Courant-Kriteriums die letztgenannte Zeitschrittweite notwendig.

Ergebnisse

In Abbildung 8.13 sind die Endlagen für die Referenzsimulation und die Immersed Boundary Methode dargestellt, welche gut übereinstimmen.

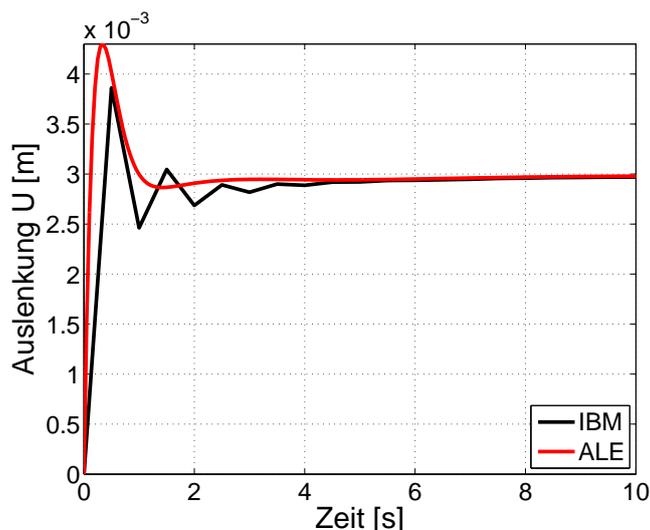


Abbildung 8.13: Auslenkung der Mitte der Lappenspitze für verschiedene Methoden

Um das Courant-Kriterium zu erfüllen, muss die Zeitschrittweite in Fluent gesenkt werden. Bei geringer Zeitschrittweite ist eine explizite Kopplung nicht mehr möglich. Die Abbildungen 8.14 und 8.15 zeigen den Verlauf der Endlage der impliziten Kopplung. Durch den iterativen Prozess, in dem die Koppelenergie nahezu vollständig abgebaut wird, reduziert sich das Überschwingen zu Beginn der Simulation. In Abbildung 8.16 ist das

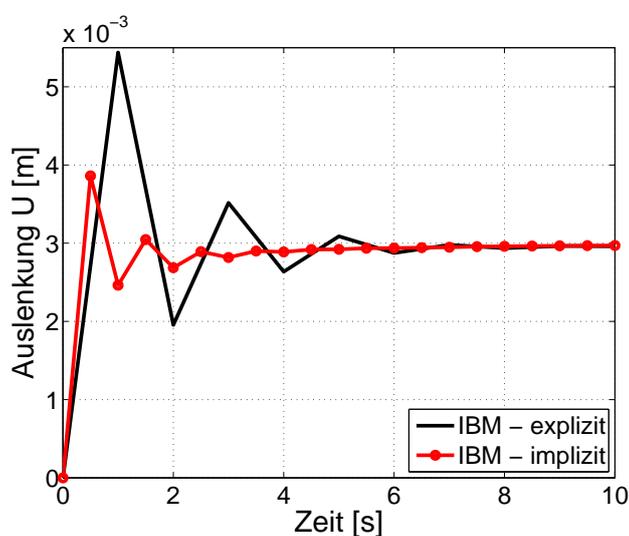


Abbildung 8.14: Vergleich explizite und implizite Kopplung

Geschwindigkeitsfeld im vertikalen Mittelschnitt zu sehen. Sowohl bei der Verwendung der ALE-Methode als auch bei der IBM ist die Ablösung an der Spitze des Lappens deutlich zu erkennen. Bei der IBM sind die Geschwindigkeiten im Spalt zwischen Lappenspitze und Kanal größer, was auf die Interpolation auf das Fluidnetz zurückzuführen ist. Zur Kontrolle der Interpolation wird ein Einflussradius definiert. Dieser vergrößert die Ausdehnung des Lappens für den Strömungslöser, weswegen der Spalt kleiner ist als bei dem körperangepassten Gitter. Je kleiner der Interpolationsradius gewählt wird, um so genauer lässt sich die Geometrie abbilden. Der minimale Radius wird durch die Gitterweite des Fluidnetzes begrenzt.

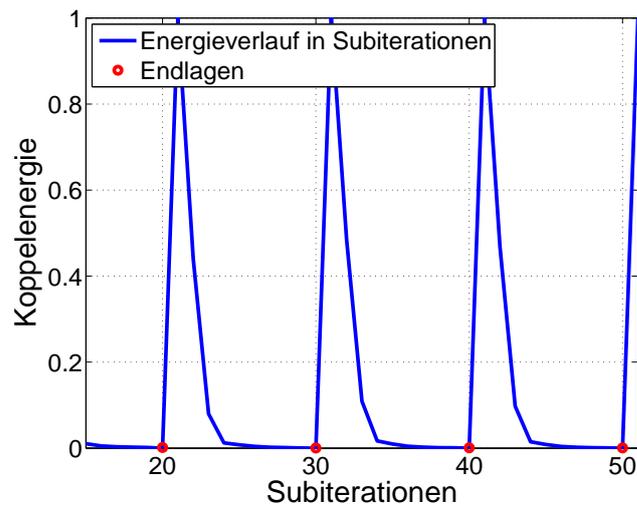


Abbildung 8.15: Konvergenz der impliziten Kopplung

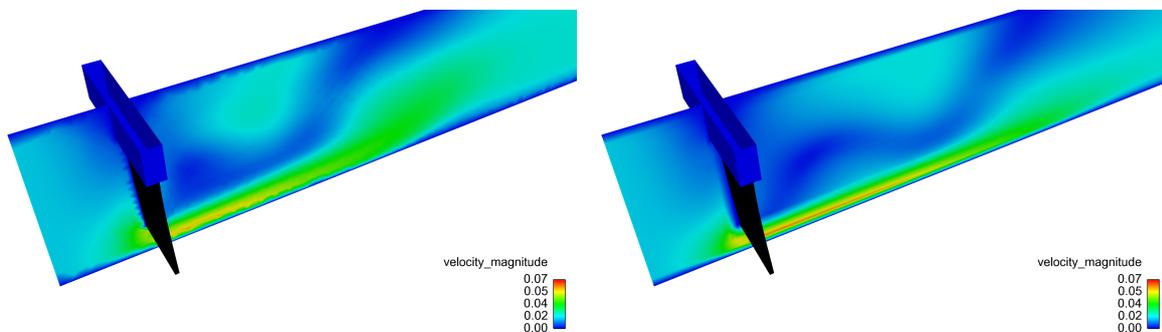


Abbildung 8.16: Strömungsstruktur: ALE (links), IBM (rechts)

Neben dem Interpolationsradius der Struktur auf das Strömungsnetz spielt der Ort der Lastabnahme in Fluent bei der Übergabe an Abaqus eine entscheidende Rolle. Dieser Ort kann in Abhängigkeit eines Lastsuchradiuses definiert werden. Fallen beide Radien zusammen, so kann zum Beispiel die stufige Repräsentation einer schräg im Fluidnetz eingebetteten Grenze zu Lastsprüngen führen. Ist der Lastsuchradius kleiner als der Interpolationsradius, verringern sich zum einen die Sprünge, zum anderen reduziert sich die Last insgesamt, da das Strömungsfeld in der IB verschwindet. Ist der Suchradius deutlich größer als der Interpolationsradius, reduziert sich der als aufgeprägt interpretierte Druck um seinen dynamischen Anteil. Diese Charakteristik lässt sich nutzen, um den Lastsuchradius zu kalibrieren.

9 Herzmuskelmodellierung im Rahmen von KaHMo-FSI

Im folgenden Kapitel werden die Fortschritte in der Weiterentwicklung des Strukturmodells anhand der strömung-struktur-gekoppelten Simulation des anatomischen Datensatzes B001 diskutiert. Gemäß dem partitionierten Ansatz wird getrennt auf Struktur und Strömung eingegangen.

9.1 Ergebnisse der Strukturberechnung

Zur Bewertung des orthotropen Strukturmodells mit aktiver Kontraktion wird zunächst das zeitliche Verformungsverhalten mit physiologischen Beobachtungen verglichen. Anschließend wird die berechnete Spannungsverteilung im Myokard in Diastole und Systole vorgestellt und diskutiert.

9.1.1 Verformungsverhalten

In Abbildung 9.1 ist die berechnete Verformung des Myokards zum enddiastolischen und endsystolischen Zeitpunkt dem lastfreien Ausgangszustand gegenübergestellt. Die drei Schnittebenen verlaufen entlang der Mittelachse und sind jeweils senkrecht zu einer der drei Raumrichtungen ausgerichtet. Während der Diastole vergrößert sich das Ventrikellinnenvolumen. Die Wandstärke des Herzmuskels verringert sich und der Ventrikel dehnt sich in Umfangs- und Langachsenrichtung aus. Aufgrund der helikalen Fasernanordnung im Herzen kommt es zu einer Drehung der Herzkammer.

In der Austreibungsphase (Systole) kontrahiert der Herzmuskel und das Ventrikelvolumen nimmt ab. Der Herzmuskel macht dabei charakteristische Bewegungen, welche von dem implementierten Kontraktionsmodell gut abgebildet werden. Zu diesen Bewegungen gehört die Verkürzung in Langachsen- und Umfangsrichtung. Gleichzeitig vergrößert sich die Wandstärke, was durch die Umordnung der Muskelfaserschichten begünstigt wird. Analog zur Diastole kommt es zu einer Ventrikelverdrehung. Die Drehrichtung der Rotation ergibt sich entsprechend des Drehmomentes der kontrahierenden Fasern und dem Abstand zwischen Lage der Fasern und Ventrikelmittelachse.

Sowohl die diastolische als auch die systolische Drehbewegung erfolgt entlang einer Richtung, die mit der Faserrichtung zwar eindeutig korrespondiert, ihr aber nicht exakt entspricht. Dies erklärt sich durch den unterschiedlichen Verformungswiderstand entlang der Richtungen normal zu der Faserrichtung.

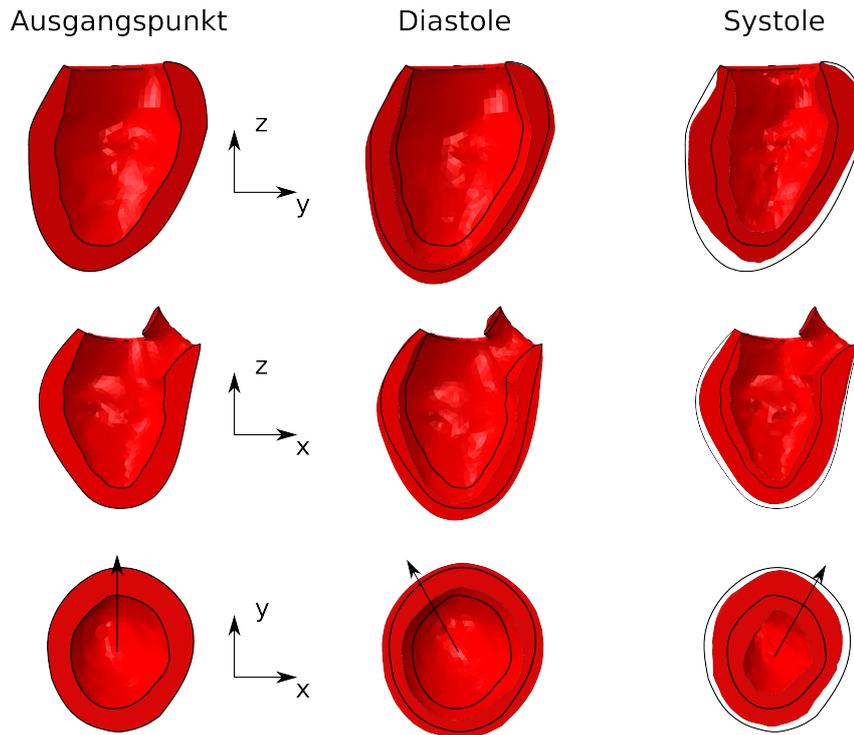


Abbildung 9.1: Verformungsverhalten

Im Rahmen der durchgeführten Untersuchungen des Kontraktionsverhaltens hat sich gezeigt, dass die Verteilung der Faserrichtungen im Myokard einen entscheidenden Einfluss auf die Bewegung hat. Fasern in Langachsenrichtung bewirken eine starke Verkürzung in diese Richtung und eine Vergrößerung des Umfangs bei nahezu konstanter Wandstärke. Dabei nimmt das Ventrikelvolumen nur wenig ab oder sogar zu. Fasern in Umfangsrichtung verursachen eine Umfangsreduktion, eine Verlängerung in Langachsenrichtung und eine geringe Wandstärkenzunahme. Beide Extremlagen bewirken keine Ventrikeldrehung. Ein analoger Richtungseinfluss zeigt sich auch in der Diastole.

Durch die Verwendung einer physiologischen Endokardgeometrie lässt sich in der Systole die Ausbeulung des Myokards (Trabekelbildung) beobachten. Abschließend sei bemerkt, dass trotz guter Abbildung einer physiologischen Bewegung, die Lage der Randbedingung an der Herzbasis, wie sie für die FSI notwendig ist, den Verlauf der Langachsenverkürzung richtungsverkehrt anzeigt. In der Realität bewegt sich die Herzbasis während der Systole in Richtung Herzspitze (Klappenebenenmechanismus) und stülpt sich damit über einen Teil des Blutvolumens im Ventrikel, was den Auswurf unterstützt.

9.1.2 Spannungsverteilung

Die berechnete Spannungsverteilung ist in Abbildung 9.2 dargestellt. Als Spannungsmaß wird die Mises'sche Vergleichsspannung¹ der Cauchyschen Spannungen verwendet. Gemäß den sich um eine Größenordnung unterscheidenden Spannungen im Herzen während der Diastole und der Systole werden zwei Legenden benutzt. Während der Diastole wird der

¹Mit Hilfe der Festigkeitshypothese von Mises lassen sich dreidimensionale Spannungszustände in eine skalarwertige Vergleichsspannung umrechnen[3].

Herzmuskel durch den Kreislaufdruck gedehnt. Die höchsten Spannungen treten dabei zum einen in der Mitte der Herzwand auf. An dieser Stelle verlaufen die Faserrichtungen nahezu in Umfangsrichtung. Zum anderen sind große Spannungen auf dem Endokard in der oberen Hälfte des Ventrikels zu erkennen. Dies könnte durch den größeren Ventrikelfradius oder die „Unebenheiten“ des Endokards zu erklären sein.

Bei Erreichen des endsystolischen Volumens entwickelt der Muskel seine größten Spannungen. Abbildung 9.2 zeigt die Spannungsmaxima in der Mitte der Herzwand und auf dem Endokard. Das Spannungsniveau auf dem Endokard lässt sich einerseits mit den großen Ventrikeldrücken zu diesem Zeitpunkt und andererseits mit der großen Verformung des Endokards begründen.

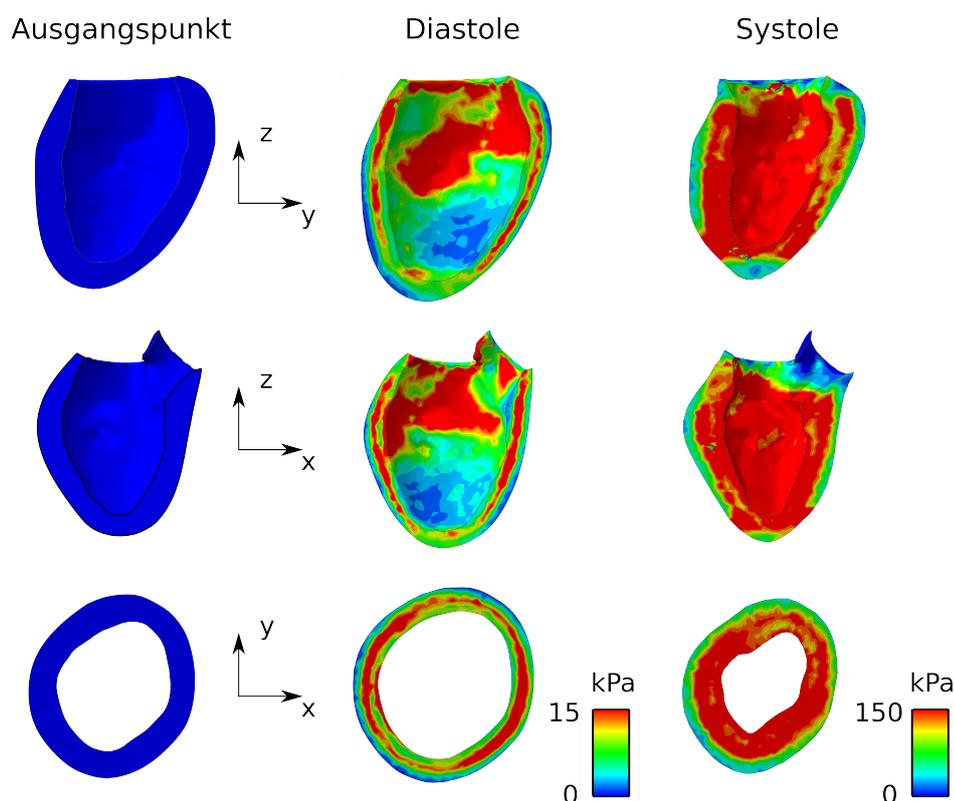


Abbildung 9.2: Spannungsverteilung

9.2 Ergebnisse der Strömungsberechnung

Zur strömungsmechanischen Untersuchung des kardialen Blutflusses werden neben charakteristischen Kennzahlen und der Strömungsstruktur auch der zeitliche Verlauf des Ventrikellinnenvolumens und das Druck-Volumen-Diagramm herangezogen.

9.2.1 Analyse der Druck- und Volumenverläufe

Abbildung 9.3 zeigt den Volumenverlauf der FSI-Simulation im Vergleich mit den Ergebnissen von $KaHMo^{MRT}$ und den diskreten Verlauf der 20 aus MRT-Aufnahmen rekonstruierten Volumennetze. Die Simulationen beginnen bei dem als lastfrei anzunehmenden Zustand während der schnellen Einströmphase.

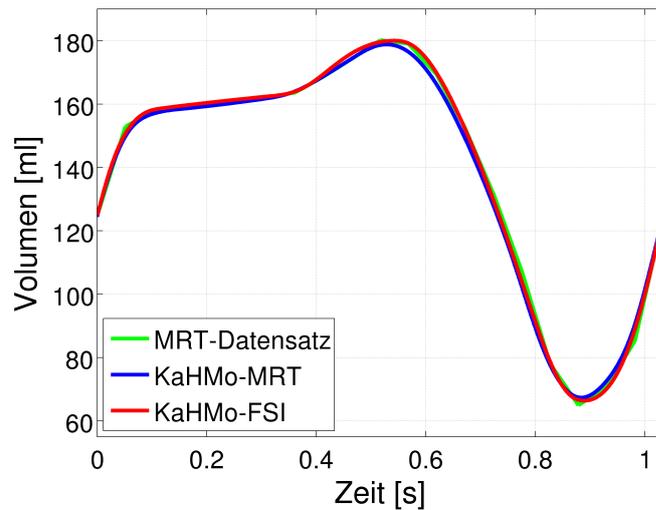


Abbildung 9.3: Volumenverlauf

Zu Beginn der Plateauphase liegt der Verlauf der FSI-Simulation leicht über dem der MRT-Simulation. Der Abstand verringert sich im Verlauf der Plateauphase. Der geringere Anstieg in der Kurve bewirkt einen geringeren Anteil an dynamischem Druck, weshalb im Druck-Volumen-Diagramm (s. Abb. 9.4) die Kurve der FSI unter der der MRT liegt. Bei ca. $t = 0,35$ s beginnt die Vorhofkontraktion, was an einem stärkeren Anstieg der Volumenzunahme bis auf das enddiastolische (maximale) Volumen zu erkennen ist. Das Maximalvolumen ist bei der strömungs-struktur-gekoppelten Simulation höher als bei der mit Wandbewegungsvorgabe. Das größere Maximalvolumen und die leichte Verschiebung des enddiastolischen Zeitpunktes um wenige Zeitschritte lässt sich auf die Fluidträgheit zurückführen. Das beschleunigte Fluid dehnt den Ventrikel beim Auftreffen auf die Herzwand zusätzlich um einen kleinen Betrag.

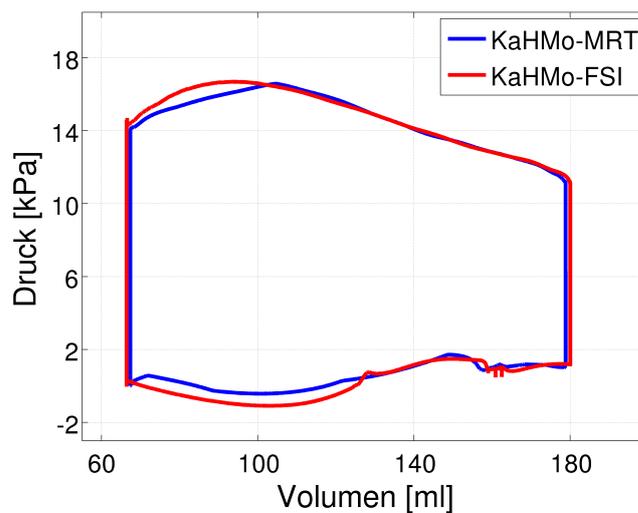


Abbildung 9.4: Druck-Volumen-Arbeit

Ausgehend vom enddiastolischen Zustand beginnt die Systole. Der Herzmuskel kontrahiert und fördert das Fluid in Richtung Aorta. Durch das größere enddiastolische Volumen ist

die Volumenabnahme bei der FSI-Simulation beschleunigt. Dies bewirkt einen leicht verringerten Druck, der jedoch im Druck-Volumen-Diagramm kaum zu erkennen ist. Das liegt vornehmlich an dem höheren Druckniveau in der Systole, bei dem der dynamische Druckanteil relativ gesehen einen geringeren Einfluss besitzt. Analog zum enddiastolischen Zustand ist auch eine Verschiebung des endsystolischen (minimalen) Volumens zu erkennen. Am Ende der Austreibungsphase erschlafft der Herzmuskel. Die Drücke zwischen Aorta und linkem Ventrikel gleichen sich aus, die Aortenklappe schließt sich, die Mitralklappe öffnet sich und der Kreislaufdruck an den Pulmonalvenen verursacht den Beginn der schnellen Einströmphase.

Die berechnete Druck-Volumen-Arbeit der FSI- und MRT-Simulation sind in Abbildung 9.4 gegenübergestellt. Analog zu technischen Kreisprozessen spiegelt sich die geleistete Arbeit in dem Betrag der eingeschlossenen Fläche wieder. Im Allgemeinen liegt eine gute Überdeckung beider Simulationen vor. An der größeren Ausdehnung der Kurve in horizontaler Richtung ist die vergrößerte Differenz zwischen enddiastolischem und -systolischem Volumen (Schlagvolumen) gut zu erkennen. Die größeren Gradienten im Volumenverlauf und die Einbeziehung der Trägheitskräfte bewirken, dass die Kurve bei der FSI-Simulation größere bzw. kleinere Druckwerte annimmt. Zusammenfassend lässt sich eine gute Übereinstimmung bei Volumenverlauf und Druck-Volumen-Diagramm feststellen.

9.2.2 Quantitative Erfassung der Ventrikelströmung

In Tabelle 9.1 ist der Vergleich der berechneten quantitativen Größen für die beiden Simulationen aufgeführt. Wie bereits im letzten Kapitel diskutiert sind der enddiastolische und der endsystolischen Zeitpunkt leicht verschoben. Dies spiegelt sich in der veränderten systolischen und diastolischen Zeit wieder.

Die Mitral- und Aortenklappenfläche bezieht sich auf die maximal durchströmte Fläche. Die jeweiligen Durchmesser berechnen sich anhand des Zusammenhanges:

$$D_{Mi} = \sqrt{\frac{4 A_{Mi}}{\pi}} \quad D_{Ao} = \sqrt{\frac{4 A_{Ao}}{\pi}} \quad (9.1)$$

Die mittlere Aorten- und Mitralgeschwindigkeit ergibt sich aus folgender Gleichung:

$$\bar{v}_{dia} = \frac{V_S}{A_{Mi} t_{dia}} \quad \bar{v}_{sys} = \frac{V_S}{A_{Ao} t_{sys}} \quad (9.2)$$

Aus dem vergrößerten Schlagvolumen resultieren daher größere mittlere Geschwindigkeiten. Die höheren Geschwindigkeitsgradienten bewirken eine niedrigere mittlere effektive Viskosität. Diese bildet sich aus dem arithmetischen Mittel der Viskositäten eines Zyklus.

Die diastolische und systolische Reynolds- und Womersley-Zahl sind in Kapitel 3.6 definiert. Die Abweichung von bis zu 5% resultiert aus der Tatsache, dass bei der FSI die Viskosität kleiner und die Geschwindigkeiten größer sind. Beide Simulationen zeigen eine gute Durchmischung, eine geringe Verweilzeit, eine ähnliche Ejektionsfraktion EF sowie ein nur geringfügig unterschiedliches Herzminutenvolumen CO :

$$EF = \frac{V_S}{V_{dia}} \quad CO = \frac{60 V_S}{T_0} \quad (9.3)$$

		Einheit	MRT	FSI	Abweichung [%]
Patientenspezifische Angaben					
Geschlecht	-	-	m		-
Alter	-	-	37		-
Größe	-	[m]	1,84		-
Gewicht	-	[kg]	70		-
Blutdruck	-	[mmHg]	115/80		-
Hämatokrit	Hkt	[%]	44		-
Zeitliche Angaben					
Puls	HR	[1/min]	58		-
Zykluszeit	T_0	[s]	1,034		-
Diastolische Zeit	t_{dia}	[s]	0,6814	0,6876	0,91
Systolische Zeit	t_{sys}	[s]	0,3526	0,3464	-1,76
Geometrische Angaben					
Schlagvolumen	V_S	[ml]	111,49	113,64	1,93
Enddiastolisches Volumen		[ml]	178,84	180,02	0,66
Endsystolisches Volumen		[ml]	67,35	66,38	-1,44
Mitralklappenfläche	A_{Mi}	[mm^2]	521,92	521,17	-0,14
Aortenklappenfläche	A_{Ao}	[mm^2]	406,90	406,18	-0,18
Mitralklappendurchmesser	D_{Mi}	[mm]	25,78	25,76	-0,08
Aortenklappendurchmesser	D_{Ao}	[mm]	22,76	22,74	-0,08
Strömungsgrößen					
Mittl. Mitrargeschwindigkeit	\bar{v}_{dia}	m/s	0,31	0,3171	2,3
Mittl. Aortengeschwindigkeit	\bar{v}_{sys}	m/s	0,78	0,8077	3,55
Mittl. effektive Viskosität	$\bar{\mu}_{eff}$	g/ms	4,81	4,7224	-1,82
Kennzahlen					
Reynolds-Zahl (Diastole)	Re_{dia}	[-]	1674,79	1743,66	4,11
Reynolds-Zahl (Systole)	Re_{sys}	[-]	3720,34	3920,74	5,39
Womersley-Zahl (Diastole)	Wo_{dia}	[-]	29,09	29,34	0,84
Womersley-Zahl (Systole)	Wo_{sys}	[-]	25,68	25,90	0,84
Durchmischungsgrad	M_1	[%]	37,50	38,32	2,20
Verweilzeit	t_{B20}	[s]	1,19	1,19	-0,16
pV-Arbeit	A_p	[Nm]	1,57	1,65	5,32
Leistung	P_p	[W]	1,51	1,60	5,91
Ejektionsfraktion	EF	[%]	62,30	63,13	1,33
dimensionslose Pumparbeit	O	[10^6]	3,48	3,66	5,19
erweiterte Pumparbeit	O_{S1}	[10^{14}]	-	1,23	-
Arbeitsverhältnis	O_{S2}	[10^6]	-	9,20	-
Cardiac Output	CO	[l/min]	6,47	6,59	1,92

Tabelle 9.1: Quantitative Erfassung der berechneten Ventrikelströmung

Die Druck-Volumen-Arbeit A_p ist das Integral über den Kreisprozess in Abbildung 9.4. Bezieht man die pV-Arbeit auf die Zykluszeit, ergibt sich die Leistung P_p :

$$P_p = \frac{A_p}{T_0} \quad (9.4)$$

Zur Bewertung des Gesundheitszustandes des Herzens wurde am Institut für Strömungslehre im Rahmen des KaHMo-Projekts die dimensionslose Pumparbeit O definiert (s. Gl. 3.60). Zur anschaulichen Darstellung wird diese über die Ejektionsfraktion aufgetragen (s. Abb. 9.5). Hierbei zeigen Werte mit großen Ejektionsfraktionen und geringen Pumparbeiten einen gesunden Zustand an. Auf Basis der bisher durchgeführten Untersuchungen wurde eine Potenzfunktion als Zusammenhang zwischen der Ejektionsfraktion und der

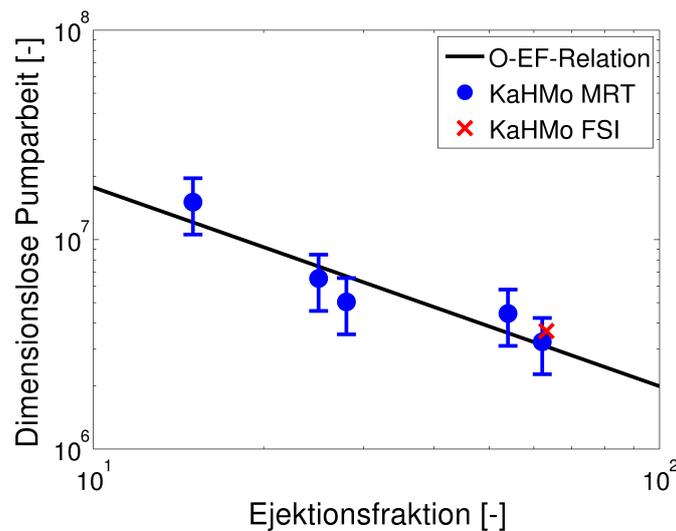


Abbildung 9.5: Dimensionslose Pumparbeit über Ejektionsfraktion

dimensionslosen Pumparbeit entwickelt [121]. Trägt man diese Funktion doppellogarithmisch auf, so erhält man die in Abbildung 9.5 dargestellte Gerade. Wie zu erkennen, liegt bei der durchgeführten Strömung-Struktur-Kopplung sowohl eine gute Übereinstimmung mit der Simulation mit Wandbewegungsvorgabe - beide Punkte liegen nahezu aufeinander - als auch mit der bereits entwickelten Potenzfunktion vor.

Die bisher betrachtete dimensionslose Pumparbeit berücksichtigt unmittelbar die Strömungsseite. Die Strukturberechnung fließt nur indirekt durch die Verformung des Fluidraums in diese Kennzahl ein. Durch die detaillierte Modellierung des orthotropen Materialverhaltens und der aktiven Kontraktion ist es nun zusätzlich möglich, eine Kennzahl zu formulieren, die auch Strukturgrößen mit einbezieht. Durch eine Dimensionsanalyse lässt sich die dimensionslose Pumparbeit O unter Einbeziehung der gemittelten Spannungen in der Endsystole $\bar{\sigma}_{sys}$ erweitern:

$$O_{S1} = \frac{A_p \bar{\sigma}_{sys} t_{B20}^2}{\bar{\mu}_{eff}^2 V_S} = \frac{O \bar{\sigma}_{sys} t_{B20}}{\bar{\mu}_{eff}} \quad (9.5)$$

Analog zu der bekannten dimensionslosen Pumparbeit zeigen große Werte der spannungsgewichteten dimensionslosen Pumparbeit O_{S1} einen pathologischen Zustand an. Große Spannungen sind beispielsweise bei dünner werdender Herzwand zu erwarten, was auf Herzinsuffizienz hinweist. Bei Erkrankung nimmt die dimensionslose Pumparbeit O durch die Zunahme des Schlagvolumens V_S ab. Gleichzeitig steigt dabei die Verweildauer t_{B20} des Blutes im Herzen jedoch stärker an, weswegen O_{S1} größer wird. Eine weitere Kennzahl ergibt sich aus dem Verhältnis der geleisteten Arbeiten:

$$O_{S2} = \frac{\bar{\sigma}_{sys} V_S}{A_p} = \frac{\text{Verdrängungsarbeit}}{\text{pV-Arbeit}} \quad (9.6)$$

9.2.3 Untersuchung der Strömungsstruktur im Ventrikel

Zur Untersuchung der Strömungsstruktur im linken menschlichen Ventrikel werden die mit dem neuen Strukturmodellansatz gewonnenen Ergebnisse mit den von $KaHMo^{MRT}$

erzielten verglichen. Die Vergleich erfolgt anhand von 2D- und 3D-Stromlinien und λ_2 -Strukturen [58] im Langachsenschnitt zu fünf charakteristischen Zeiten während eines Zyklus (s. Tab. 9.2 - 9.6).

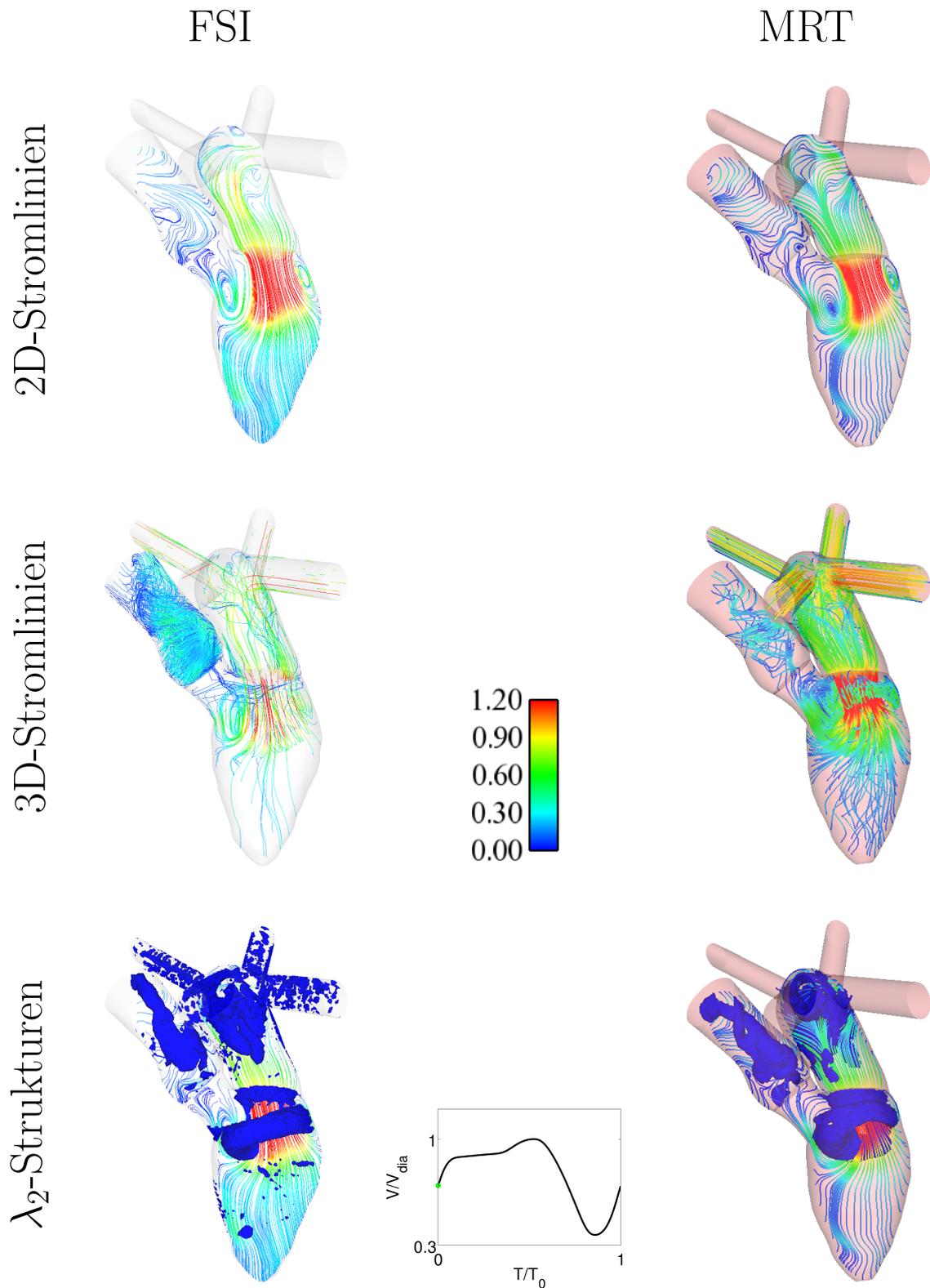


Tabelle 9.2: Strömungsstruktur während der raschen Füllphase

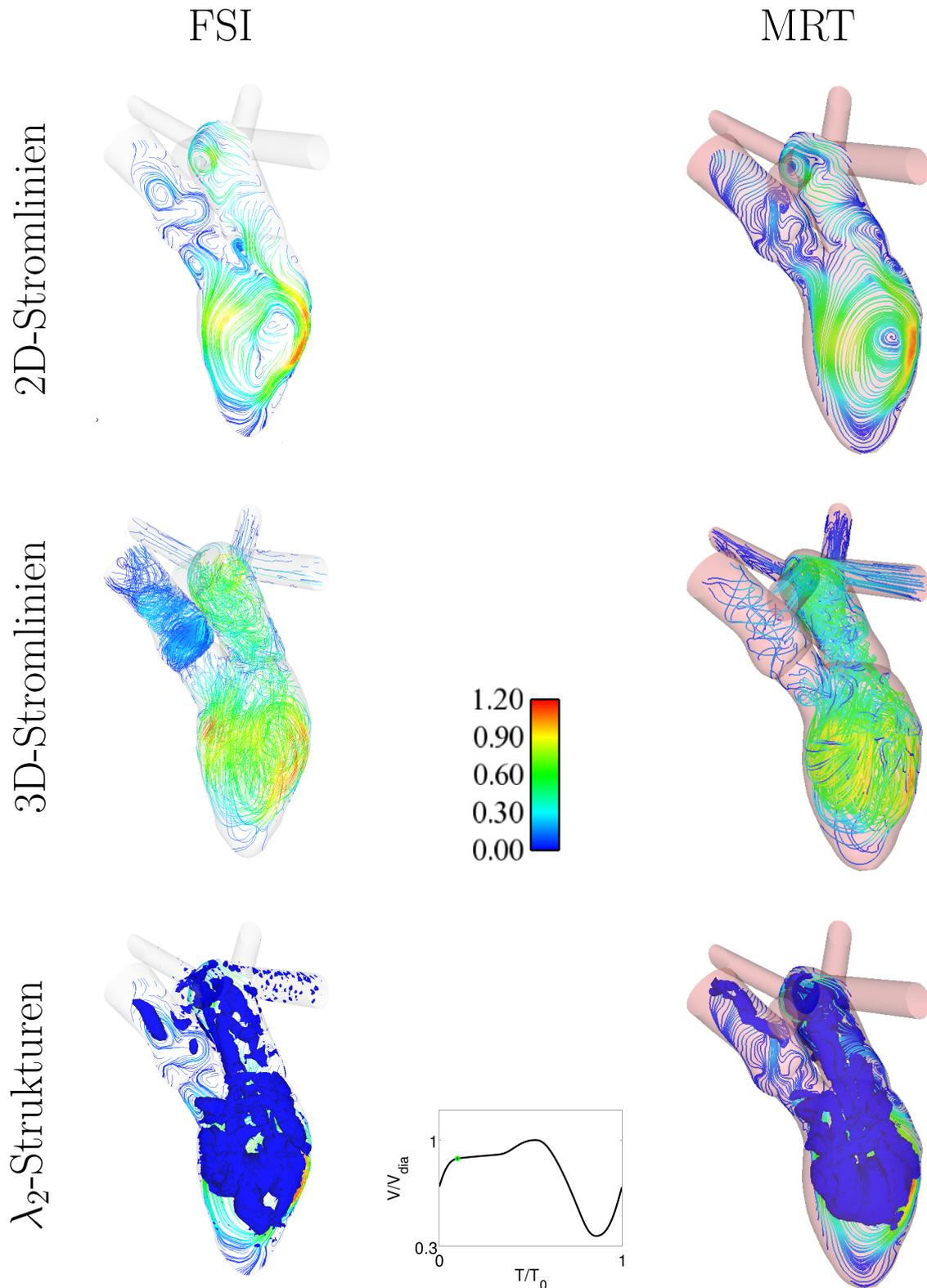


Tabelle 9.3: Strömungsstruktur am Ende der raschen Füllphase

Die Diastole wird durch die schnelle Einströmphase eingeleitet. Die rasche Volumenzunahme im Ventrikel führt zu einem Einströmjet durch die Mitralklappe (s. Tab. 9.2). Der Geschwindigkeitsgradient zwischen Einströmjet und ruhendem Fluid verursacht die Ausbildung des charakteristischen toroidalen Ringwirbels. Der Ringwirbel ist aufgrund

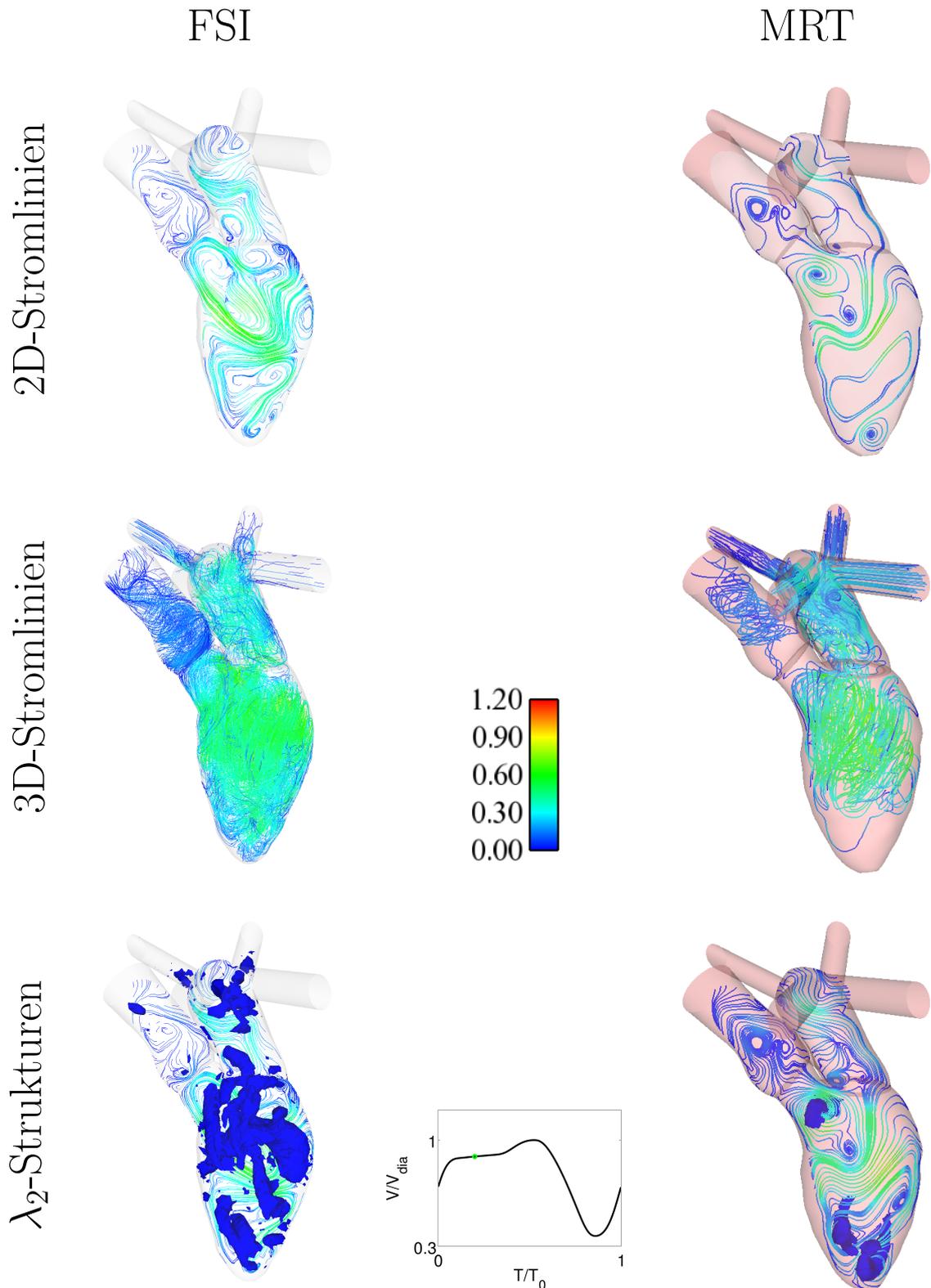


Tabelle 9.4: Strömungsstruktur in der Plateauphase

der fehlenden Wandreibung in Richtung Aortenkanal überbetont. Diese Überbetonung, welche in der Realität durch die Anwesenheit der Mitralklappensegel nicht stattfindet, verursacht seine Asymmetrie. Im weiteren Verlauf der Einströmung gewinnt der in Richtung Aortenkanal ausgeprägte (linke) Teil des Ringwirbels an Größe, während der andere

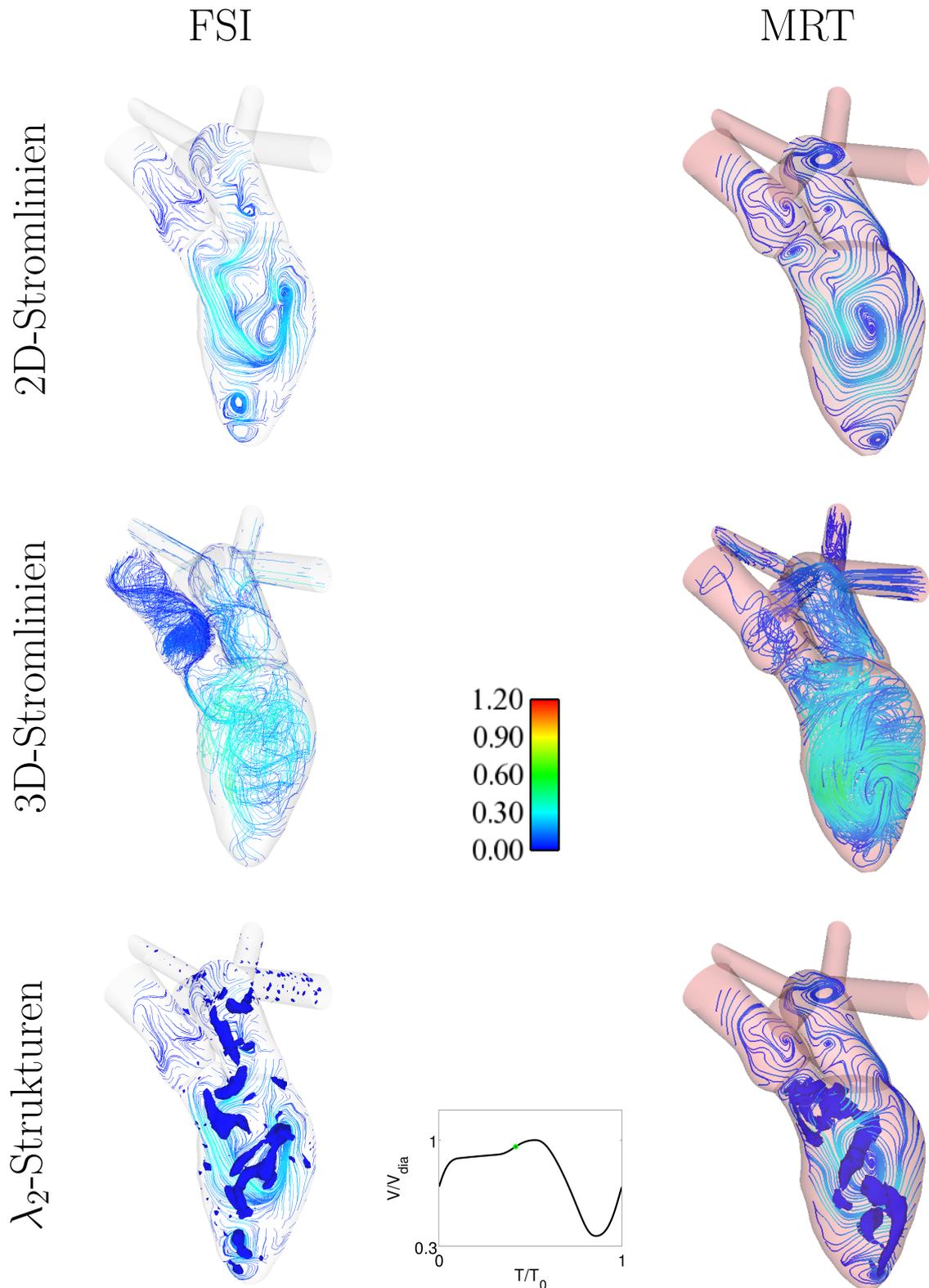


Tabelle 9.5: Strömungsstruktur vor der Vorhofkontraktion

Teil zwischen ihm und der Herzwand zerrieben wird (s. Tab. 9.3).

Am Ende der schnellen Einströmphase haben sich die Drücke von Vorhof und Ventrikel weitgehend angepasst, sodass der Einströmjet verschwindet und Reibungskräfte im

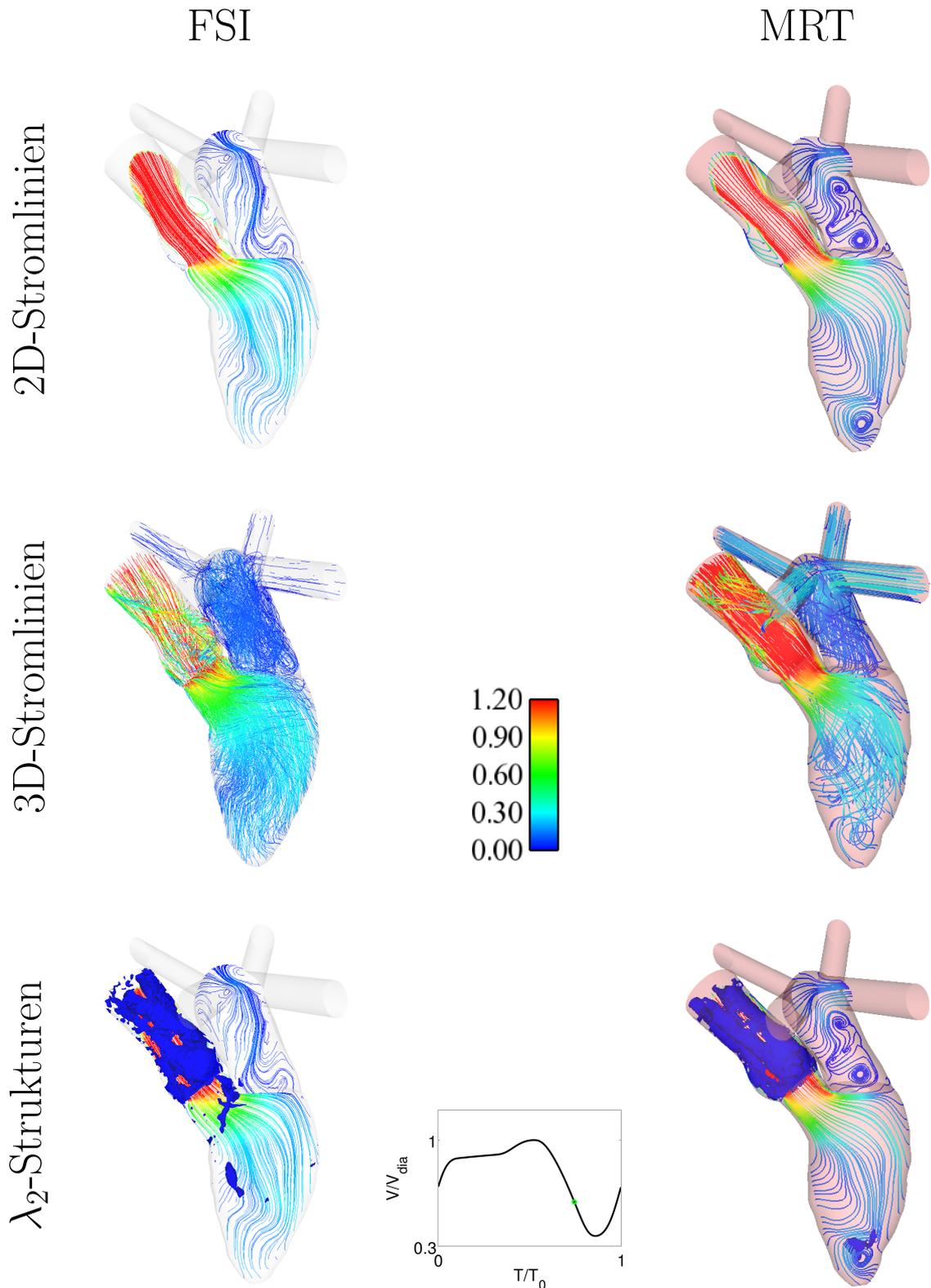


Tabelle 9.6: Strömungsstruktur während der Austreibungsphase

Ventrikel an Bedeutung gewinnen. Während der Plateauphase kommt es aufgrund der Rotationsrichtung des linken, dominanten Teils des Ringwirbels zu seiner Verkippung, wobei der rechte Teil in Richtung Herzspitze und der linke Teil in Richtung Herzmitte wandert (s. Tab. 9.4). Die Wirbelbewegung in Richtung Herzspitze verursacht eine

Durchmischung des Blutes und bereitet die gute Auswaschung in der Systole vor. Wegen der großen Rotationsbewegung im Zentrum des Ventrikels bildet sich gleichzeitig ein Wirbelpaar im Aortenkanal. Im weiteren Verlauf der Plateauphase beginnen die großen Wirbelstrukturen in kleinere mit entgegengesetzter Drehrichtung zu zerfallen.

Bei der Vorhofkontraktion (s. Tab. 9.5) wird Blut aus dem Vorhof aktiv in den Ventrikel gefördert. Die Einströmung erfolgt wegen der Anwesenheit der Wirbelstrukturen schräg. Der schräge Einstrom wiederum verstärkt die Rotationsbewegung. Während die Änderung der Wirbelstruktur im Aortenkanal zu diesem Zeitpunkt mit dem neuen Modell unterrepräsentiert ist, ist es möglich, in der Herzspitze ein weiteres Wirbelpaar zu identifizieren.

Die Systole beginnt ähnlich der Diastole mit einer schnellen Ausströmphase. Tabelle 9.6 zeigt die Strömung während der Mitte der Systole. Bei beiden Simulationen ist eine gute Auswaschung zu erkennen. Bei $KaHMo^{MRT}$ ist aufgrund der Ventrikelform ein Wirbel in der Nähe der Herzspitze zu sehen ist. Da die Geometrie der FSI-Simulation dort weniger in Richtung Fluidraum ausgeprägt ist, ist dieser dort nicht zu sehen. Bei der FSI-Simulation mit dem neuen Strukturmodell ist wegen der guten räumlichen und zeitlichen Auflösung die Wirbelstruktur stromab der Aortenklappe erkennbar.

Abschließend lässt sich sagen, dass das neu entwickelte Strukturmodell die Fluidraumbewegung so wiedergeben kann, dass es auf der Strömungsseite eine gute Übereinstimmung mit der Vergleichssimulation $KaHMo^{MRT}$ gibt. Gleichzeitig liefert die Struktur sowohl in die Füll- als auch in der Austreibungsphase eine physiologische Bewegungscharakteristik. Das orthotrope, konstitutive Gesetz mit der Erweiterung um die aktive Kontraktion ermöglicht zusätzlich die Berechnung von Spannungen, welche in Verteilung und Betrag physiologisch sinnvoll sind.

10 Zusammenfassung und Ausblick

Das Karlsruher Herzmodell (KaHMo) ist ein patientenspezifisch ausgerichtetes, modulares Konzept zur Untersuchung der Herztätigkeit. Da das Herz als un stetig fördernde Pumpe betrachtet werden kann, liegt der Fokus des KaHMo in der Simulation der kardialen Strömungen. Das Gesamtkonzept besteht aus drei Säulen. $KaHMo^{MRT}$ berechnet die Strömungen im Herzen unter Vorgabe der Wandbewegung auf der Basis von zeitlich aufgelösten MRT-Aufnahmen und erlaubt somit eine Aussage über den aktuellen Gesundheitszustand des Herzens. $KaHMo^{VAD}$ simuliert die Interaktion zwischen Herzsunterstützungssystem, Herz und Strömungsmedium Blut und beleuchtet dabei zum einen den synergetischen Effekt des gekoppelten Systems und zum anderen den schädigenden Einfluss von implantierten technischen Strömungsmaschinen. Mit $KaHMo^{FSI}$ ist es Kritian 2009 erstmals gelungen, mit der Entwicklung und Strömung-Struktur-Kopplung eines Faserverbund-Kontinuum-Modells eine Alternative zur Wandbewegungsvorgabe zu schaffen. Hiermit wird es zukünftig möglich sein, über die bloße Bewertung des aktuellen Gesundheitszustandes hinaus, eine Aussage über die potentielle Auswirkung von Eingriffen in das gekoppelte System und den Herzmuskel zu treffen.

Um diesem Ziel einen weiteren Schritt näher zu kommen, ist es notwendig, die bestehenden Modelle im KaHMo-Konzept realitätsnäher zu gestalten. Das Faser-Kontinuum-Kompositmodell liefert zwar korrekte Verformungen als Randbedingung für das Fluid, die Spannungsverteilung besitzt allerdings wegen der Konzentration der Fasern auf Epi- und Endokard insbesondere in transmurale Richtung nur geringe Aussagekraft.

Die Herzklappen trennen die Herzkammern von den angrenzenden Gefäßen. Die verschließende Funktion und damit der gerichtete Blutfluss kann von den bisherigen zweidimensionalen Projektionsklappen sehr gut wiedergegeben werden. Im geöffneten Zustand ragen die lappenartigen Klappen jedoch weit in die Ventrikel oder die abgehenden Gefäße hinein und beeinflussen die Strömungsstruktur maßgeblich. Diesen Umstand erfassen die Projektionsklappen nicht, weswegen die kardialen Wirbel unphysiologisch ausgeprägt sind.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit war die Weiterentwicklung des patientenspezifischen Strukturmodells im Hinblick auf eine orthotrope Materialbeschreibung unter Berücksichtigung der aktiven Kontraktion in der Systole. Um die Richtungsabhängigkeit des konstitutiven Gesetzes nutzen zu können, musste gleichzeitig eine entsprechende Repräsentation im Myokard formuliert werden. Ein weiteres Ziel der Arbeit war es, die Schnittstelle für die Strömung-Struktur-Kopplung der Herzklappen bereitzustellen. Hierzu war es zuvor erforderlich, eine speziell auf diese Problemstellung hin zugeschnittene Kopplungsmethodik zu entwickeln.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde das von Holzapfel et al. vorgeschlagene Modell zur Beschreibung der passiven und orthotropen Eigenschaften des Myokards in das FEM-Programm Abaqus implementiert. Die Materialparameter wurden an Experimentaldaten

aus der Literatur neu angepasst. Die allgemeine Formulierung der Faser- und Schichtrichtungen im Herzen erfolgte im Einklang mit klinischen Beobachtungen und der Literatur. Zur konkreten Anpassung der Richtungen wurden der allgemeinen Formulierung Freiheitsgrade hinzugefügt, welche im Hinblick auf den zeitlichen intraventrikulären Druck- und Volumenverlauf sowie das physiologische Verformungsverhalten hin optimiert wurden. Das Energiegesetz nach Holzapfel wurde für die Umsetzung der aktiven Kontraktion modifiziert und erweitert. Die Kontraktion erfolgt dabei in Muskelfaserrichtung in Abhängigkeit von einer Simultaninvarianten des rechten Cauchy-Green-Tensors und dem Faser richtungsvektor. Ausgelöst wird die Kontraktion durch einen zeitlichen Aktivierungsgrad. Aufgrund des Abgleitens der Muskelschichten beim Zusammenziehen werden die mit dieser Richtung assoziierten Terme so modifiziert, dass sie in der Systole einen geringeren Widerstand leisten. Diese Modifikationen können als eine kontinuierliche Überleitungsfunktion zwischen dem passiven und dem aktiven Verhalten des Myokards angesehen werden.

Das neu entwickelte Strukturmodell wurde in einer strömung-struktur-gekoppelten Simulation auf den patientenspezifischen Datensatz eines gesunden Probanden angewendet. Als Vergleich diente die Simulation desselben Datensatzes mit Wandbewegungsvorgabe. Ein Vergleich der beiden Simulationen zeigte eine sehr gute Übereinstimmung der Strömungsstruktur und der strömungsmechanischen Kennzahlen. Das Herzmuskelmodell zeigte die charakteristischen Bewegungen (Langachsen- und Umfangsverkürzung, Rotation, Wandverdickung). Die berechnete Spannungsverteilung und das Spannungsniveau während des Herzzyklus bewegten sich dabei im physiologischen Rahmen. Eine direkte Validierung der in-vivo Spannungen war mangels Datenbasis nicht möglich.

Zur Vorbereitung einer zukünftigen Klappenkopplung wurde eine parallele Kopplungsschnittstelle zwischen dem Strömungslöser Fluent und dem Strukturlöser Abaqus entwickelt, implementiert und validiert. Die oberflächengekoppelte Schnittstelle verwendet die Immersed-Boundary-Methode zur Beschreibung einer eingebetteten Grenze in einem nicht-körperangepassten Fluidnetz und folgt dem partitionierten Lösungsansatz. Der Austauschalgorithmus ist sowohl explizit als auch absolut-implizit formuliert. Die am Interface übergebenen Lasten können zur Stabilisierung der Kopplung relaxiert werden, wobei der Relaxationsfaktor sowohl konstant als auch, auf Basis der Residuenhistorie, dynamisch sein kann.

Zur Validierung der Kopplungsschnittstelle wurden der zwei- und der dreidimensionale Kanal mit elastischem Lappen sowie die membranverschlossene Kavität untersucht. Für alle drei Problemstellungen wurden strömung-struktur-gekoppelte Simulationen auf Basis der bewährten ALE-Formulierung als Vergleich durchgeführt. Untersucht wurden Auslenkungen, Endlagenschwingungen, Druckverluste und die Dichtheit der eingebetteten Grenze. In allen durchgeführten Simulationen zeigte der neue Kopplungsalgorithmus eine hervorragende Übereinstimmung mit den Vergleichssimulationen. Bei der membranüberspannten Kavität lagen zusätzlich Werte aus der Literatur vor, welche für den erfolgreichen Vergleich herangezogen werden konnten.

Durch die realistische Abbildung des Herzmuskels und dessen Kopplung mit der Strömung im Herzen sowie einem adaptiven Kreislaufmodell ist es nun möglich, gleichzeitig strömungs- und strukturmechanische Aspekte in die Bewertung des Gesundheitszustandes einfließen zu lassen. Hierzu wurden zwei neue dimensionlose Kennzahlen vorgeschlagen. Die neu geschaffene Schnittstelle zwischen Abaqus und Fluent auf Basis der Immersed-Boundary-Methode zur Kopplung der Klappenbewegung ist eine Ergänzung zu der erprob-

ten ALE-Methode für die Modellierung der Herzwandbewegung. Dies erlaubt in Zukunft, beide gekoppelten Fragestellungen problemangepasst und effizient zu lösen.

Um den Einfluss der Herzklappenbewegung auf die Strömung zu untersuchen, ist es in einem weiteren Schritt notwendig, ein Strukturmodell der Herzklappen zu erstellen. Die Implementierung der Richtungen im Herzen könnten in Zukunft durch in-vivo Daten ersetzt werden, welche aus dem *DT-MRT* oder dem *Tissue-Phase-Mapping* gewonnenen wurden. In diesem Zuge wäre es dann auch möglich, das generische Epikard durch ein patientenspezifisches zu ersetzen.

Teil IV

Anhang

Abbildungsverzeichnis

1.1	Wechselwirkungsphänomene in der Technik [124]	1
1.2	Wechselwirkungsphänomene in der Natur: Vogelflug (links), Floßenschlag (rechts) [124]	2
1.3	Das Karlsruher Herzmodell [121]	8
2.1	Lage und Form des menschlichen Herzens [105]	13
2.2	Aufbau der Herzwand [124]	14
2.3	Anordnung des Herzmuskels um die Kammern [124]	15
2.4	Anordnung der Muskelfasern und Schichten [113]	15
2.5	Aufbau der Herzmuskelfaser	16
2.6	Arbeitsdiagramm eines Skelettmuskels [155]	16
2.7	Kraftentwicklung eines Sarkomers [155]	17
2.8	Herz und Kreislauf [124]	18
2.9	Aufbau des Erregungsbildungs- und -leitungsmuskels [155]	19
2.10	Reizausbreitung im Herzen: Angaben in Millisekunden nach dem Beginn am Sinusknoten [155]	19
2.11	Herzzyklus [169]	20
2.12	Blutzusammensetzung	21
2.13	Fließverhalten von Blut [155]	22
3.1	Körper, Konfiguration, Bewegung	23
3.2	Definition von Spannungstensoren	26
3.3	Fließdiagramme	32
4.1	Integrationsgebiet der FVM	39
4.2	Zell- und Knotenzentrierte FVM [106]	40
4.3	SIMPLE-Algorithmus	42
5.1	Klassifikation gekoppelter Problemstellungen	45
5.2	Methoden der Fluid-Struktur-Interaktion	46
5.3	Immersed-Boundary-Methode [173]	49

5.4	Verteilungsfunktionen	49
5.5	Diskrete Ansätze: Ghost-Cell Ansatz (links), Cut-Cell Ansatz (rechts) [173]	51
5.6	Lösungsverfahren gekoppelter Problemstellungen	51
5.7	Einteilung partitionierter Lösungsalgorithmen [71]	53
5.8	Kopplungsalgorithmen [71]	54
5.9	Spaltströmung zur Verdeutlichung des <i>added-mass-effects</i>	55
6.1	Klappenöffnungsmechanismus [118]	59
6.2	Ablaufdiagramm des Kopplungsalgorithmus I	62
6.3	Ablaufdiagramm des Kopplungsalgorithmus II	63
6.4	Interface Get Position	64
6.5	Interface Put Load	65
6.6	Ereignisauslösende Residuenverläufe	67
6.7	Definition der Beschleunigung durch Programmparallelisierung	68
6.8	Validierungsfälle: 2D-Kanal (links), membranüberspannte Kavität (Mitte) und 3D-Kanal (rechts)	69
7.1	Numerisches Gitter in Abaqus	71
7.2	Ablaufplan zur Erstellung der initialen Faserorientierung	72
7.3	Anordnung der Winkel für die Faserorientierung im Herzen	73
7.4	Transmurale Faseranordnung	74
7.5	Spannungs-Dehnungs-Verhalten eines Würfels mit orthotropen Eigenschaften	75
7.6	Zeitlicher Verlauf des Aktivierungsgrades	76
7.7	Vorgehensweise bei der Implementierung der aktiven Kontraktion	77
7.8	Numerisches Gitter Fluent	78
7.9	Viskosität von Blut: Abbildung mit dem Carreau-Modell	79
7.10	Windkesselleffekt der herznahen Gefäße	80
7.11	Kreislaufmodell	81
7.12	Klappenöffnung und -schließung [86]	82
8.1	Geometrie des 2D-Kanals	85
8.2	Auslenkung der Lappenspitze für verschiedene Methoden	86
8.3	Geometrie der membranverschlossenen Kavität	87
8.4	Maximale Auslenkung der Membran für verschiedene Methoden	88
8.5	Geschwindigkeitsresiduum	88
8.6	Druckresiduum	89
8.7	Vergleich expliziter und impliziter Kopplung	89
8.8	Konvergenz der impliziten Kopplung	90

8.9	Netzunabhängigkeit Abaqus	90
8.10	Netzunabhängigkeit Fluent	91
8.11	Parallelisierung des Programmcodes	91
8.12	Geometrie des 3D-Kanals	92
8.13	Auslenkung der Mitte der Lappenspitze für verschiedene Methoden	93
8.14	Vergleich explizite und implizite Kopplung	93
8.15	Konvergenz der impliziten Kopplung	94
8.16	Strömungsstruktur: ALE (links), IBM (rechts)	94
9.1	Verformungsverhalten	96
9.2	Spannungsverteilung	97
9.3	Volumenverlauf	98
9.4	Druck-Volumen-Arbeit	98
9.5	Dimensionslose Pumparbeit über Ejektionsfraktion	101

Tabellenverzeichnis

4.1	Verwendete Software	44
5.1	Vor- und Nachteile von Euler-Methoden	47
5.2	Vor- und Nachteile von Lagrange-Methoden	47
5.3	Vor- und Nachteile ALE-Methode	48
5.4	Vor- und Nachteile monolithischer Lösungsverfahren	52
5.5	Vor- und Nachteile partitionierter Lösungsverfahren	52
7.1	Numerisches Gitter der Herzwand. Die Notation folgt der in Abaqus	72
7.2	Materialparameter für Materialgesetz nach Holzapfel mit Parametern nach Goektepe et al. für passives Myokard [43]	75
7.3	Teilweise angepasste Materialparameter	77
7.4	Materialparameter für aktives Myokard	77
7.5	Numerische Einstellungen in Fluent	78
7.6	Materialparameter für Carreau-Modell [83]	79
7.7	Parameter des 3-Element-Kreislaufmodells	80
8.1	Quantitativer Vergleich 2D-Lappen	86
8.2	Beschleunigung der Berechnung durch Programmparallelisierung	92
9.1	Quantitative Erfassung der berechneten Ventrikelströmung	100
9.2	Strömungsstruktur während der raschen Füllphase	102
9.3	Strömungsstruktur am Ende der raschen Füllphase	103
9.4	Strömungsstruktur in der Plateauphase	104
9.5	Strömungsstruktur vor der Vorhofkontraktion	105
9.6	Strömungsstruktur während der Austreibungsphase	106

Literaturverzeichnis

- [1] ANSYS INC. (Hrsg.): *Fluent 13 User's Guide*. Canonsburg, USA: Ansys Inc., 2010
- [2] BATHE, K. J. ; LEDEZMA, G. A.: Benchmark problems for incompressible fluid flows with structural interaction. In: *Computers and Structures* 85 (2007), S. 628–644
- [3] BETTEN, J.: *Kontinuumsmechanik*. 2. Springer, 2001
- [4] BEYER, R. P. ; LEVEQUE, R. J.: Analysis of a One-Dimensional Model for the Immersed Boundary Method. In: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 29 (1992), S. 332–364
- [5] BOHNING, R.: Pulsierende laminare Strömung im Kreisrohr / Lehrstuhl und Institut für Strömungslehre, Universität Karlsruhe (TH). 2001. – Forschungsbericht
- [6] BORAZJANI, I. ; GEL, ; SOTIROPOULOS, F.: Curvilinear immersed boundary method for simulating fluid structure interaction with complex 3D rigid bodies. In: *Journal of Computational Physics* 227 (2008), August, S. 7587–7620
- [7] BRADY, A. J.: The three element model of muscle mechanics: its applicability to cardiac muscle. In: *The Physiologist* 10 (1967), Nr. 2, S. 75–86
- [8] BÖHLKE, T.: *Skript zur Vorlesung Höhere Technische Festigkeitslehre*. Institut für Technische Mechanik, WS 2010/2011
- [9] BÖHLKE, T.: *Skript zur Vorlesung Mathematische Methoden der Festigkeitslehre*. Institut für Technische Mechanik, WS 2010/2011
- [10] CHENG, Y. ; OERTEL, H. ; SCHENKEL, T.: Fluid-structure coupled CFD simulation of the left ventricular flow during filling phase. In: *Annals of Biomedical Engineering* 33 (2005), Nr. 5, S. 567–576
- [11] COSTA, K. D. ; HOLMES, J. W. ; MCCULLOCH, A. D.: Modelling cardiac mechanical properties interpretation three dimensions. In: *Philosophical Transaction of the Royal Society of London, Series A* 359 (2001), S. 1233–1250
- [12] DA VINCI, L.: *Studies of the Heart (of an Ox or Bull)*. Windsor Royal Library, (1513-1514). – pen and ink
- [13] DASSAULT SYSTÈMES (Hrsg.): *Abaqus 6.10/6.11 Documentation Collection*. Dassault Systèmes, 2011

- [14] DEMIRDZIĆ, I. ; PERIĆ, M.: Finite Volumen Method for Prediction of fluid flow in arbitrarily shaped domains with moving boundaries. In: *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 10 (1990), S. 771–790
- [15] DI FRANCESCO, D. ; NOBLE, D.: A Model of Cardiac Electrical Activity Incorporating Ionic Pumps and Concentration Changes. In: *Philosophical Transaction of the Royal Society of London, Series B, Biological Sciences* 307 (1985), Nr. 1133, S. 353–398
- [16] DOENST, T. ; SCHLENSAK, C. ; BEYERSDORF, F.: Ventrikelrekonstruktion bei ischämischer Kardiomyopathie. In: *Deutsches Ärzteblatt* 101 (2004), Nr. 9, S. 570–576
- [17] DOENST, T. ; SPIEGEL, K. ; REIK, M. ; MARKL, M. ; HENNIG, J. ; NITZSCHE, S. ; BEYERSDORF, F. ; OERTEL, H.: Fluid-Dynamic Modeling of the Human Left Ventricle: Methodology and Application to Surgical Ventricular Reconstruction. In: *The Annals of Thoracic Surgery* 87 (2009), S. 1187–1195
- [18] DOKOS, S. ; SMAILL, B. H. ; YOUNG, A. A. ; LEGRICE, I. J.: Shear properties of passive ventricular myocardium. In: *American Journal of Physiology - Heart and Circulatory Physiology* 283 (2002), S. H2650–H2659
- [19] DONISI, S.: *Numerische Simulation der Strömung im erkrankten und operierten Ventrikel eines menschlichen Herzens*, Universität Karlsruhe (TH), Diss., 2005
- [20] DOR, V.: The endoventricular circular patch plasty ("Dor procedure") in ischemic akinetic dilated ventricles. In: *Heart Failure Reviews* 6 (2001), Nr. 3, S. 187–193
- [21] EBBERS, T. ; WIGSTRÖM, L. ; BOLGER, A. F. ; WRANNE, B. ; KARLSSON, M.: Noninvasive Measurement of Time-Varying Three-Dimensional Relative Pressure Fields Within the Human Heart. In: *Journal of Biomechanical Engineering* 124 (2002), S. 288–293
- [22] ECABERT, O. ; PETERS, J. ; SCHRAMM, H. ; LORENZ, C. ; VON BERG, J. ; WALKER, M. J. ; VEMBAR, M. ; M. E, Olszewski ; SUBRAMANYAN, K. ; LAVI, G. ; WEESE, J.: Automatic Model-Based Segmentation of the Heart in CT images. In: *IEEE Transaction on Medical Imaging* 27 (2008), S. 1189–1201
- [23] ENGEL, M.: *Numerische Simulation von Strömungen in zeitabhängigen Gebieten und Anwendungen auf Fluid-Struktur-Wechselwirkungsprobleme*, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, Diplomarbeit, 2002
- [24] FADLUN, E. A. ; VERZICCO, R. ; ORLANDI, P. ; MOHD-YUSOF, J.: Combined Immersed-Boundary Finite-Difference Methods for Three-Dimensional Complex Flow Simulations. In: *Journal of Computational Physics* 161 (2000), S. 35–60
- [25] FALSETTI, H. L. ; MATES, R. E. ; GRANT, C. ; GREENE, D. G. ; BUNNELL, I. L.: Left Ventricular Wall Stress Calculated from One-Plane Cineangiography. In: *Circulation Research* 26 (1970), S. 71–83
- [26] FELIPPA, C. A. ; PARK, K. C.: Straggered transient analysis procedures for coupled mechanical systems: Formulation. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 24 (1980), S. 61–111

- [27] FERZIGER, J. H. ; PERIĆ, M.: *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer Berlin Heidelberg New York, 1996
- [28] FRAITES, T. J. ; SAEKI, A. ; KASS, D. A.: Effect of Altering Filling Pattern on Diastolic Pressure-Volume Curve. In: *Circulation* 96 (1997), Nr. 12, S. 4408–4414
- [29] FRAUNHOFER INSTITUTE FOR ALGORITHMS AND SCIENTIFIC COMPUTING (SCAI) (Hrsg.): *MpCCI 4.1 Documentation*. Fraunhofer Institute for Algorithms and Scientific Computing (SCAI), 2012
- [30] FUNG, Y. C.: Mathematical representation of the mechanical properties of the heart muscle. In: *Journal of Biomechanics* 3 (1970), S. 381–404
- [31] FUNG, Y. C.: Comparison of different models of the heart muscle. In: *Journal of Biomechanics* 4 (1971), S. 289–295
- [32] FUNG, Y. C.: *Biomechanics - Mechanical Properties of Living Tissues*. 2. Springer New York, 1993
- [33] FUNG, Y. C.: *Biomechanics - Circulation*. 2. Springer New York, 1997
- [34] GHIAS, R. ; MITTAL, R. ; DONG, H.: A sharp interface immersed boundary method for compressible viscous flows. In: *Journal of Computational Physics* 225 (2007), S. 528–553
- [35] GHISTA, D. N. ; SANDLER, H.: An analytic elastic-viscoelastic model for the shape and the forces in the left ventricle. In: *Journal of Biomechanics* 2 (1969), S. 35–47
- [36] GOLDSTEIN, D. ; HANDLER, R. ; SIROVICH, L.: Modeling a No-Slip Flow Boundary with an External Force Field. In: *Journal of Computational Physics* 105 (1993), Nr. 2, S. 354 – 366
- [37] GOLENHOFEN, K.: *Basislehrbuch Physiologie*. 3. Elsevier - Urban /& Fischer, 2004
- [38] GORDON, A. M. ; HUXLEY, A. F. ; JULIAN, F.J.: The Variation in Isometric Tension with Sarcomere Length in Vertebrate Muscle Fibres. In: *The Journal of Physiology* 184 (1966), S. 170–192
- [39] GOULD, P. ; GHISTA, D. ; BROMBOLICH, L.: In vivo stresses in the human left ventricular wall: Analysis accounting for the irregular 3-dimensional geometry and comparison with idealised geometry analyses. In: *Journal of Biomechanics* 5 (1972), S. 521–539
- [40] GREVE, R.: *Kontinuumsmechanik*. 1. Springer, 2003
- [41] GUCCIONE, J. M. ; COSTA, K. D. ; MCCULLOCH, A. D.: Finite element stress analysis of left ventricular mechanics in the beating dog heart. In: *Journal of Biomechanics* 28 (1995), Nr. 10, S. 1167–1177
- [42] GUCCIONE, J. M. ; MCCULLOCH, A. D.: Mechanics of active contraction in cardiac muscle: Part I - Constitutive relations for fiber stress that describe deactivation. In: *Journal of Biomechanical Engineering* 115 (1993), S. 72–81

- [43] GÖKTEPE, S. ; ACHARYA, S. N. S. ; WONG, J. ; KUHL, E.: Computational modeling of passive myocardium. In: *International Journal for Numerical Methods in Biomechanical Engineering* 27 (2011), S. 1–12
- [44] HAGMANN, L.: *Simulation der Herzfunktion unter Verwendung eines orthotropen Materialgesetzes für den Herzmuskel. Entwicklung druck- und massenflussgesteuerter Herzklappen*, Karlsruhe Institute of Technologie, Studienarbeit, 2011
- [45] HERWIG, H.: *Strömungsmechanik: Eine Einführung in die Physik und die mathematische Modellierung von Strömungen*. 1. Springer Berlin Heidelberg, 2002
- [46] HILL, A. V.: The Heat of Shortening and the Dynamic Constants of Muscle. In: *Proceeding of the Royal Society B: Biological Science* 126 (1938), S. 136–195
- [47] HILL, A. V.: The abrupt transition from rest to activity in muscle. In: *Proceeding of the Royal Society B: Biological Science* 136 (1949), Nr. 883, S. 399–420
- [48] HIRSCH, C.: *Numerical Computation of Internal & External Flows*. 2. Elsevier/Butterworth-Heinemann, 2007
- [49] HIRT, C. W. ; NICHOLS, B. D.: Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries. In: *Journal of Computational Physics* 39 (1981), S. 201–225
- [50] HOLZAPFEL, G. A.: *Nonlinear solid mechanics - A continuum approach for engineering*. Repr. with corr. John Wiley & Sons Ltd, 2008
- [51] HOLZAPFEL, G. A. ; OGDEN, R. W.: Constitutive modelling of passive myocardium: a structurally based framework for material characterization. In: *Philosophical Transaction of the Royal Society of London, Series A, Mathematical, Physical & Engineering Sciences* 367 (2009), S. 3445–3475
- [52] HSU, E. W. ; MUZIKANT, A. L. ; MATULEVICIUS, S. A. ; PENLAND, R. C. ; HENRIQUEZ, C. S.: Magnetic resonance myocardial fiber-orientation mapping with direct histological correlation. In: *The American Journal of Physiology - Heart and Circulatory Physiology* 274 (1998), S. H1627–H1634
- [53] HUMPHREY, J. D.: *Cardiovascular Solid Mechanics - Cells, Tissues, and Organs*. Springer New York, 2002
- [54] HUMPHREY, J. D. ; YIN, F. C.: A new constitutive formulation for characterizing the mechanical behavior of soft tissues. In: *Biophysical Journal* 52 (1987), Nr. 4, S. 563–570
- [55] HUNTER, P. J. ; MCCULLOCH, A. D. ; TER KEURS, H. E.: Modelling the mechanical properties of cardiac muscle. In: *Progress in Biophysics and Molecular Biology* 69 (1998), S. 289–331
- [56] IDELSOHN, S. R. ; DEL PIN, F. ; ROSSI, R. ; ATE, E. O.: Fluid–structure interaction problems with strong added-mass effect. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 80 (2009), S. 1261–1294
- [57] JANZ, R. ; GRIMM, A. F.: Finite-Element Model for the Mechanical Behavior of the Left Ventricle. In: *Circulation Research* 30 (1972), S. 244–252

- [58] JEONG, J. ; HUSSAIN, F.: On the identification of a vortex. In: *Journal of Fluid Mechanics* 285 (1995), S. 69–94
- [59] JONES, R. H. ; VELAZQUEZ, E. J. ; MICHLER, R. E. ; SOPKO, G. ; OH, J. K. ; O’CONNOR, C.M. ; HILL, J. A. ; MENICANTI, L. ; SADOWSKI, Z. ; DESVIGNE-NICKENS, P. ; ROULEAU, J. L. ; LEE, K. L.: Coronary Bypass Surgery with or without Surgical Ventricular Reconstruction. In: *The New England Journal of Medicine* 360 (2009), S. 1705–1717
- [60] JONES, T. N.: *Image-based ventricular blood flow analysis*, University of Pennsylvania, Diss., 1998
- [61] JONES, T. N. ; METAXAS, D. N.: Patient-Specific Analysis of Left Ventricular Blood Flow. In: WELLS, W. (Hrsg.) ; COLCHESTER, A. (Hrsg.) ; DELP, S. (Hrsg.): *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention — MICCAI’98* Bd. 1496. Springer Berlin / Heidelberg, 1998, S. 156–166
- [62] JUNG, B. A. ; FÖLL, D. ; BÖTTLER, P. ; PETERSEN, S. ; J, Henning ; MARKL, M.: Detailed analysis of myocardial motion in volunteers and patients using high-temporal-resolution MR tissue phase mapping. In: *Journal of magnetic resonance imaging* 24 (2006), S. 1033–1039
- [63] JUNG, E. ; PESKIN, C. S.: Two-Dimensional Simulations of Valveless Pumping Using the Immersed Boundary Method. In: *Journal on Scientific Computing* 23 (2001), S. 19–45
- [64] KEBER, R.: *Simulation der Strömung im linken Ventrikel eines menschlichen Herzens*, Universität Karlsruhe (TH), Diss., 2003
- [65] KHADRA, K. ; ANGOT, P. ; PARNEIX, S. ; CALTAGIRONE, J. P.: Fictitious domain approach for numerical modelling of Navier–Stokes equations. In: *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 34 (2000), S. 651–684
- [66] KHALAFVAND, S. S. ; NG, E. Y. ; ZHONG, L.: CFD simulation of flow through heart: a perspective review. In: *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering* 14 (2011), S. 113–132
- [67] KILNER, P. J. ; YANG, G. Z. ; WILKES, A. J. ; MOHLADIN, R. H. ; FIRMIN, D. N. ; YACOUB, M. H.: Asymmetric redirection of flow through the heart. In: *Nature* 404 (2000), Nr. 13, S. 759–761
- [68] KIM, J. ; KIM, D. ; CHOI, H.: An Immersed-Boundary Finite-Volume Method for Simulations of flow in Complex Geometries. In: *Journal of Computational Physics* 171 (2001), S. 132–150
- [69] KIM, W. Y. ; WALKER, P. G. ; PEDERSEN, E. M. ; POULSEN, J. K. ; OYRE, S. ; HOULIND, K. ; YOGANATHAN, A. P.: Left ventricular blood flow patterns in normal subjects: a quantitative analysis by three-dimensional magnetic resonance velocity mapping. In: *Journal of the American College of Cardiology* 26 (1995), S. 224–238
- [70] KLINKE, R. (Hrsg.) ; PAPE, H. C. (Hrsg.) ; KURTZ, A. (Hrsg.) ; SILBERNAGEL, S. (Hrsg.): *Physiologie*. 6. Thieme Stuttgart / New York, 2010

- [71] KRITTIAN, S.: *Modellierung der kardialen Strömung-Struktur-Wechselwirkung: Implicit coupling for KaHMo FSI*, Universität Karlsruhe (TH), Diss., 2009
- [72] KRITTIAN, S. ; JANOSKE, U. ; OERTEL, H. ; BÖHLKE, T.: Partitioned fluid-solid coupling for cardiovascular blood flow: left-ventricular fluid mechanics. In: *Annals of Biomedical Engineering* 38 (2010), Nr. 4, S. 1426–1441
- [73] KRITTIAN, S. ; SCHENKEL, T. ; JANOSKE, U. ; H. OERTEL: Partitioned fluid-solid coupling for cardiovascular blood flow: validation study of pressure-driven fluid-domain deformation. In: *Annals of Biomedical Engineering* 38 (2010), Nr. 8, S. 2676–2689
- [74] KUHLMANN, Hendrik: *Stömungsmechanik*. Pearson Studium, 2007
- [75] KVITTING, J. P. ; BRANDT, E. ; WIGSTRÖM, L. ; ENGVALL, J.: Visualization of Flow in the Aorta Using Time-resolved 3D Phase Contrast MRI ISMRM - International Society for Magnetic Resonance in Medicine, 2001, S. 378
- [76] LAI, M. C. ; PESKIN, C. S.: An Immersed Boundary Method with Formal Second-Order Accuracy and Reduced Numerical Viscosity. In: *Journal of Computational Physics* 160 (2000), S. 705–719
- [77] LAURIEN, E. ; OERTEL, H.: *Numerische Strömungsmechanik*. 4. Vieweg+Teubner, 2011
- [78] LEE, J. ; NIEDERER, S. ; NORDSLETTEN, D. A. ; LEGRICE, I. J. ; SMAILL, B. H. ; KAY, D. ; SMITH, N.: Coupling contraction, excitation, ventricular and coronary blood flow across scale and physics in the heart. In: *Philosophical Transaction of the Royal Society of London, Series A, Mathematical, Physical & Engineering Sciences* 367 (2009), S. 2311–2331
- [79] LEGRICE, I. J. ; HUNTER, P. J. ; SMAILL, B. H.: Laminar structure of the heart: a mathematical model. In: *The American Journal of Physiology - Heart and Circulatory Physiology* 272 (1997), S. H2466–H2476
- [80] LEGRICE, I. J. ; SMAILL, B. H. ; CHAI, L. Z. ; EDGAR, S. G. ; GAVIN, J. B. ; HUNTER, P. J.: Laminar structure of the heart: ventricular myocyte arrangement and connective tissue architecture in the dog. In: *The American Journal of Physiology* 269 (1995), S. H571–H582
- [81] LEMMON, J. D. ; YOGANATHAN, A. P.: Computational Modeling of Left Heart Diastolic Function: Examination of Ventricular Dysfunction. In: *Journal of Biomechanical Engineering* 122 (2000), S. 297–303
- [82] LEMMON, J. D. ; YOGANATHAN, A. P.: Three-Dimensional Computational Model of Left Heart Diastolic Function With Fluid–Structure Interaction. In: *Journal of Biomechanical Engineering* 122 (2000), S. 109–117
- [83] LIEPSCH, D. ; THURSTON, G. ; LEE, M.: Viscometric studies simulating blood-like fluids and their applications in models of arterial branches. In: *Biorheology* 28 (1991), S. 39–52
- [84] LINDEN, R. J.: The size of the heart. In: *Cardioscience* 5 (1994), S. 225–233

- [85] LINK, E.: *Validierung, Anwendung und Optimierung des KaHMo-FSI-Kopplungsschemas anhand eines Klappenmodells*, Universität Karlsruhe (TH), Studienarbeit, 2008
- [86] LINZ, T.: *Simulation der kardialen Strömung-Struktur-Wechselwirkung unter Verwendung eines Faserverbund-Herzmodells*, Karlsruhe Institute of Technologie, Studienarbeit, 2011
- [87] LIU, J. ; ZHAO, N. ; HU, O.: The Ghost Cell Method and its Applications for Inviscid Compressible Flow on Adaptive Tree Cartesian Grids. In: *Advances in Applied Mathematics and Mechanics for a New Millennium 1* (2009), S. 664–682
- [88] LONG, Q. ; MERRIFIELD, R. ; YANG, G. Z. ; KILNER, P.J. ; FIRMIN, D. N. ; XU, X. Y.: The influence of inflow boundary conditions on intra left ventricle flow predictions. In: *Journal of Biomechanical Engineering* 125 (2003), S. 922–927
- [89] MALVÈ, M.: *Weiterentwicklung des Modells KaHMo: Modellierung der menschlichen Herzklappen und deren Defekte*, Universität Karlsruhe (TH), Diss., 2006
- [90] MARKL, M. ; CHAN, F. P. ; ALLEY, M. T. ; WEDDING, K. L. ; DRANEY, M. T. ; ELKINS, C. J. ; PARKER, D. W. ; WICKER, R. ; TAYLOR, C. A. ; HERFKENS, R. J. ; PELC, N. J.: Time-resolved three-dimensional phase-contrast MRI. In: *Journal of magnetic resonance imaging* 17 (2003), Nr. 4, S. 499–506
- [91] MARKL, M. ; DRANEY, M. T. ; HOPE, M. D. ; LEVIN, J. M. ; CHAN, F. P. ; ALLEY, M. T. ; PELC, N. J. ; HERFKENS, R. J.: Time-resolved 3-dimensional velocity mapping in the thoracic aorta: visualization of 3-directional blood flow patterns in healthy volunteers and patients. In: *Journal of computer assisted tomography* 28 (2004), Nr. 4, S. 459–468
- [92] THE MATHWORKS, INC. (Hrsg.): *Matlab Help*. The MathWorks, Inc., 2012
- [93] MATTHIES, H. G. ; NIEKAMP, R. ; STEINDORF, J.: Algorithms for strong coupling procedures. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 195 (2006), S. 2028–2049
- [94] MCQUEEN, D. M. ; PESKIN, C. S.: A three-dimensional computer model of the human heart for studying cardiac fluid dynamics. In: *ACM SIGGRAPH Computer Graphics* 34 (2000), S. 56–60
- [95] MERKEL, M. ; ÖCHSNER, A.: *Eindimensionale Finite Elemente: Ein Einstieg in die Methode*. 1. Springer Berlin Heidelberg, 2010
- [96] In: MERRIFIELD, R. ; LONG, Q. ; XU, Y. ; YANG, G. Z.: *Blood Flow Simulation, Patient-Specific in-vivo*. John Wiley & Sons, Inc., 2006, S. 593–604
- [97] MERZIGER, G. ; WIRTH, T.: *Repetitorium der Höheren Mathematik*. 4. Binomi, 2002
- [98] MEYER, S.: *Numerische Simulation der Strömung im Aortenbogen*, Universität Karlsruhe (TH), Diss., 2003

- [99] MIHALEF, V. ; IONASEC, R. I. ; SHARMA, P. ; GEORGESCU, B. ; VOIGT, I. ; SUEHLING, M. ; COMANICIU, D.: Patient-specific modelling of whole heart anatomy, dynamics and haemodynamics from four-dimensional cardiac CT images. In: *Interface Focus* 1 (2011), Nr. 3, S. 286–296
- [100] MIRSKY, I.: Left Ventricular Stresses in the Intact Human Heart. In: *Biophysical Journal* 9 (1969), S. 189–208
- [101] MIRSKY, I.: Ventricular and Arterial Wall Stresses Based on Large Deformation Analysis. In: *Biophysical Journal* 13 (1973), S. 1141–1159
- [102] MITTAL, R. ; IACCARINO, G.: Immersed Boundary Methods. In: *Annual Review of Fluid Mechanics* 37 (2005), S. 239–261
- [103] MOHD-YUSOF, J.: Development of immersed boundary methods for complex geometries. In: *Center for Turbulence Research - Annual Research Briefs* (1998), S. 325–336
- [104] MORGAN, V. L. ; ROSELLI, R. J. ; LORENZ, C. H.: Normal three-dimensional pulmonary artery flow determined by phase contrast magnetic resonance imaging. In: *Annals of Biomedical Engineering* 26 (1998), S. 557–566
- [105] MUTSCHLER, E. ; SCHAIBLE, H.-G. ; VAUPEL, Peter: *Anatomie, Physiologie, Pathophysiologie des Menschen*. Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft, 2007
- [106] MÜHLHAUSEN, M. P.: *Untersuchung der Einflüsse numerischer und physikalischer Parameter auf die Abschätzung der strömungsinduzierten Hämolyse am Fall einer Rohrverengung und eines VAD*, Studienarbeit, 2008
- [107] NAKAMURA, M. ; WADA, S. ; KARINO, T. ; YAMAGUCHI, T.: Effects of a ventricular untwisting on intraventricular diastolic flow and color M-mode Doppler echocardiograms. In: *Technology and Health Care* 13 (2005), S. 269–280
- [108] NAKAMURA, M. ; WADA, S. ; MIKAMI, T. ; KITABATKE, A. ; KARINO, T.: Relationship between Intraventricular Flow Patterns and the Shapes of the Aliasing Area in Color M-mode Doppler Echocardiograms - A CFD Study with an Axisymmetric Model of the LV. In: *JSME International Journal* 44 (2001), Nr. 4, S. 1013–1020
- [109] NAKAMURA, M. ; WADA, S. ; MIKAMI, T. ; KITABATKE, A. ; KARINO, T.: A Computational Fluid Mechanical Study on the Effects of Opening and Closing of the Mitral Orifice on a Transmitral Flow Velocity Profile and an Early Diastolic Intraventricular Flow. In: *JSME International Journal* 45 (2002), Nr. 4, S. 913–922
- [110] NAKAMURA, M. ; WADA, S. ; MIKAMI, T. ; KITABATKE, A. ; KARINO, T.: Computational study on the evolution of an intraventricular vortical flow during early diastole for the interpretation of color M-mode Doppler echocardiograms. In: *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology* 2 (2003), S. 59–72
- [111] NAKAMURA, M. ; WADA, S. ; YAMAGUCHI, T.: Computational Analysis of Blood Flow in an Integrated Model of the Left Ventricle and the Aorta. In: *Journal of Biomechanical Engineering* 128 (2006), S. 837–843

- [112] NAKAMURA, M. ; WADA, S. ; YAMAGUCHI, T.: Influence of the opening mode of the mitral valve orifice on intraventricular hemodynamics. In: *Annals of Biomedical Engineering* 6 (2006), S. 927–935
- [113] NASH, M. P. ; HUNTER, P. J.: Computational Mechanics of the Heart. In: *Journal of Elasticity* 61 (2000), S. 113–141
- [114] NICOL, E. D. ; PADLEY, S. P. G.: Non-invasive Cardiac Imaging - Current and Emerging Roles for Multi-detector Row Computed Tomography. Part 1. In: *British Journal of Cardiology* 14 (2007), Nr. 3, S. 143–150
- [115] NORDSLETTEN, D. A. ; MCCORMICK, M. ; KILNER, P. J. ; HUNTER, P. J. ; KAY, D. ; SMITH, N. P.: Fluid-Solid Coupling for the Investigation of Diastolic and Systolic Human Left Ventricular Function. In: *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering* 27 (2011), S. 1017–1039
- [116] NORDSLETTEN, D. A. ; NIEDERER, S. A. ; NASH, M. P. ; HUNTER, P. J. ; SMITH, N. P.: Coupling multi-physics models to cardiac mechanics. In: *Progress in Biophysics and Molecular Biology* (2009)
- [117] OERTEL, H.: *Modelling the human cardiac fluid mechanics*. 1. Universitätsverlag Karlsruhe, 2005
- [118] OERTEL, H. (Hrsg.): *Prandtl - Essentials of Fluid Mechanics*. 3. Springer Science+Business Media, 2010
- [119] OERTEL, H. (Hrsg.): *Prandtl - Führer durch die Strömungslehre*. 13. Vieweg+Teubner, 2012
- [120] OERTEL, H. ; BÖHLE, M. ; REVIOL, T.: *Strömungsmechanik: Grundlagen - Grundgleichungen - Lösungsmethoden - Softwarebeispiele*. 6. Vieweg+Teubner, 2011
- [121] OERTEL, H. ; KRITTIAN, S.: *Modelling the human cardiac fluid mechanics*. 4. KIT Scientific Publishing, 2012
- [122] OERTEL, H. ; KRITTIAN, S. ; SPIEGEL, K.: *Modelling the Human Cardiac Fluid Mechanics*. 3. Universitätsverlag Karlsruhe, 2009
- [123] OERTEL, H. ; RUCK, S.: *Modelling the bird flight* / Institute of Fluid Mechanics, Karlsruhe Institute of Technologie. KIT Scientific Publishing, 2007-2011. – Forschungsbericht
- [124] OERTEL, H. ; RUCK, S.: *Bioströmungsmechanik: Grundlagen, Methoden und Phänomene*. 2. Vieweg+Teubner, 2012
- [125] OERTEL, H. ; SPIEGEL, K. ; DONISI, S.: *Modelling the Human Cardiac Fluid Mechanics*. 2. Universitätsverlag Karlsruhe, 2006
- [126] PANERAI, R. B.: A model of cardiac muscle mechanics and energetics. In: *Journal of Biomechanics* 13 (1980), S. 929–940
- [127] PANFILOV, A. V. (Hrsg.) ; HOLDEN, A. V. (Hrsg.): *Computational Biology of the Heart*. John Wiley & Sons Ltd, 1997

- [128] PARISCH, H.: *Festkörper-Kontinuumsmechanik - Von den Grundgleichungen zur Lösung mit Finiten Elementen*. 1. Teubner, 2003
- [129] PEDRIZZETTI, G. (Hrsg.) ; PERKTOLD, K. (Hrsg.): *Cardiovascular Fluid Mechanics*. Springer Wien / New York, 2003 (CISM International Centre for Mechanical Sciences 446)
- [130] PERSCHALL, M.: *Numerische Untersuchung des Wellenpumpenkonzeptes und der mechanischen Herzunterstützung*, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Diss., 2010
- [131] PESKIN, C. S.: Flow patterns around heart valves: A numerical method. In: *Journal of Computational Physics* 10 (1972), S. 252–271
- [132] PESKIN, C. S.: Flow Patterns Around Heart Valves. In: *Lecture Notes in Physics* 19 (1973), S. 214–221
- [133] PESKIN, C. S.: Numerical Analysis of Blood Flow in the Heart. In: *Journal of Computational Physics* 25 (1977), S. 220–252
- [134] PESKIN, C. S. ; MCQUEEN, D. M.: A three-dimensional computational method for blood flow in the heart: I. Immersed elastic fibers in a viscous incompressible fluid. In: *Journal of Computational Physics* 81 (1989), S. 372–405
- [135] PESKIN, C. S. ; MCQUEEN, D. M.: A three-dimensional computational method for blood flow in the heart: II. contractile fibers. In: *Journal of Computational Physics* 82 (1989), S. 289–297
- [136] RAMAN, S. V. ; SHAH, M. ; MCCARTHY, B. ; GARCIA, A. ; FERKETICH, A. K.: Multi-detector row cardiac computed tomography accurately quantifies right and left ventricular size and function compared with cardiac magnetic resonance. In: *American Heart Journal* 151 (2006), Nr. 3, S. 736–744
- [137] REIK, M.: *Simulation der Strömungsstruktur im menschlichen Herzen*, Universität Karlsruhe (TH), Diss., 2007
- [138] REIK, M. ; MEYROWITZ, G. ; SCHWARZ, M. ; DONISI, S. ; SCHENKEL, T. ; KIENCKE, U.: A 1D circulation model as boundary condition for a 3D simulation of a pumping human ventricle. In: *EMBECC '05: 3rd European Medical and Biological Engineering Conference*. Prague, Czech Republic, November 2005
- [139] SABER, N. R. ; GOSMAN, A. D. ; WOOD, N. B. ; KILNER, P. J. ; CHARRIER, C. L. ; FIRMIN, D. N.: Computational flow modeling of the left ventricle based on in vivo MRI data: initial experience. In: *Annals of Biomedical Engineering* 29 (2001), S. 275–283
- [140] SABER, N. R. ; WOOD, N. B. ; GOSMAN, A. D. ; MERRIFIELD, R. D. ; YANG, G. Z. ; CHARRIER, C. L. ; GATEHOUSE, P. D. ; FIRMIN, D. N.: Progress towards patient-specific computational flow modeling of the left heart via combination of magnetic resonance imaging with computational fluid dynamics. In: *Annals of Biomedical Engineering* 31 (2003), S. 42–52

- [141] SANDLER, H. ; DODGE, H. T.: Left Ventricular Tension and Stress in Man. In: *Circulation Research* 13 (1963), S. 91–104
- [142] SCHADE, H. ; KUNZ, E.: *Strömungslehre*. 1. de Gruyter Lehrbuch, 2007
- [143] SCHADE, H. ; NEEMANN, K.: *Tensoranalysis*. 3. de Gruyter Lehrbuch, 2009
- [144] SCHENKEL, T.: *Das Karlsruher Herzmodell KaHMo: Ein modularer Ansatz zur numerischen Simulation der menschlichen Herzfunktion auf Basis von In Vivo Messungen*, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Habilitation, 2010
- [145] SCHENKEL, T. ; KRITTIAN, S. ; MÜHLHAUSEN, M. P. ; OERTEL, H.: Hemodynamics and Fluid-Structure-Interaction in a Virtual Heart. In: *it - Informations Technology* 52 (2010), S. 250–257
- [146] SCHENKEL, T. ; MALVÈ, M. ; REIK, M. ; MARKL, M. ; JUNG, B. ; OERTEL, H.: MRI-based CFD analysis of flow in a human left ventricle: methodology and application to a healthy heart. In: *Annals of Biomedical Engineering* 37 (2009), S. 503–515
- [147] SCHMID, H. ; NASH, M. P. ; YOUNG, A. A. ; HUNTER, P. J.: Myocardial Material Parameter Estimation - A Comparative Study for Simple Shear. In: *Journal of Biomechanical Engineering* 128 (2006), S. 742–750
- [148] SCHMID, H. ; O'CALLAGHAN, P. ; NASH, M. P. ; LIN, W. ; LEGRICE, I. L. ; SMAILL, B. H. ; YOUNG, A. A. ; HUNTER, P. J.: Myocardial material parameter estimation: a non-homogeneous finite element study from simple shear tests. In: *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology* 7 (2008), S. 161–173
- [149] SCHMID, H. ; WANG, Y. K. ; ASHTON, J. ; EEHRET, A. E. ; KRITTIAN, S. B. ; NASH, M. P. ; HUNTER, P. J.: Myocardial material parameter estimation: a comparison of invariant based orthotropic constitutive equations. In: *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engeneering* 12 (2009), S. 283–295
- [150] SCHWEGLER, J. ; LUCIUS, R.: *Der Mensch*. 5. Thieme, 2011
- [151] SCHWERZEL, M.: *Machbarkeits- und Softwarestudie zum Einsatz der Immersed Boundary Methode zur Herzklappenmodellierung*. 2010
- [152] SCHÄFER, M.: *Numerik im Maschinenbau*. 1. Springer Heidelberg, 1999
- [153] SCOLLAN, D. F. ; HOLMES, A. ; WINSLOW, R. ; FORDER, J.: Histological validation of myocardial microstructure obtained from diffusion tensor magnetic resonance imaging. In: *American Journal of Physiology - Heart and Circulatory Physiology* 275 (1998), S. H2308–H2318
- [154] SHYY, W. ; UDAYKUMAR, H. S. ; RAO, M. M. ; SMITH, R. W.: *Computational Fluid Dynamics with Moving Boundaries*. Dover Publications, 2007
- [155] SPECKMANN, E. J. (Hrsg.) ; HESCHELER, J. (Hrsg.) ; KÖHLING, R. (Hrsg.): *Physiologie*. 5. Elsevier GmbH - Urban & Fischer, München, 2008
- [156] SPIEGEL, K.: *Strömungsmechanischer Beitrag zur Planung von Herzoperationen*, Universität Karlsruhe (TH), Diss., 2009

- [157] SPIEGEL, K. ; SCHILLER, W. ; SCHMIDT, T. ; WELZ, A. ; LIEPSCH, D. ; OERTEL, H.: Numerical Simulation of the Left Ventricle and Atrium as Reference for Pathological Hearts. In: *BioMech '07 Proceedings of the Fifth IASTED International Conference on Biomechanics*, 2007
- [158] SPURK, J. H. ; AKSEL, N.: *Strömungslehre - Einführung in die Theorie der Strömungen*. 7. Springer, 2007
- [159] STATISTISCHES BUNDESAMT: *2010: Herz-/Kreislaferkrankungen verursachten rund 41% aller Todesfälle*. September 2011
- [160] STEINDORF, J.: *Partitionierte Verfahren für Probleme der Fluid-Struktur Wechselwirkung*, Technische Universität Braunschweig, Diss., 2002
- [161] STEINKE, P.: *Finite-Elemente-Methode: Rechnergestützte Einführung*. 3. Springer Heidelberg, 2010
- [162] STREETER, D. D. ; BASSETT, D. L.: An engineering analysis of myocardial fiber orientation in pig's left ventricle in systole. In: *The Anatomical Record* 155 (1966), S. 503–511
- [163] STREETER, D. D. ; SPOTNITZ, H. M. ; PATEL, D. P. ; ROSS, J. ; SONNENBLICK, E. H.: Fiber Orientation in the Canine Left Ventricle during Diastole and Systole. In: *Circulation Research* 24 (1969), S. 339–347
- [164] TAY, W. B. ; TSENG, Y. H. ; LIN, L. Y. ; TSENG, W. Y.: Towards patient-specific cardiovascular modeling system using the immersed boundary technique. In: *Bio-Medical Engineering OnLine* 10 (2011)
- [165] TAYLOR, T. W. ; SUGA, H. ; GOTO, Y. ; OKINO, H. ; YAMAGOUCHI, T.: The Effects of Cardiac Infarction on Realistic Three-Dimensional Left Ventricular Blood Ejection. In: *Journal of Biomechanical Engineering* 118 (1996), S. 106–110
- [166] TAYLOR, T. W. ; YAMAGOUCHI, T.: Flow Patterns in three dimensional left ventricular systolic and diastolic flows determined from computational fluid dynamics. In: *Bioheology* 32 (1995), S. 61–71
- [167] TAYLOR, T. W. ; YAMAGUCHI, T.: Realistic three-dimensional left ventricular ejection determined from computational fluid dynamics. In: *Medical Engineering & Physics* 17 (1995), S. 602–608
- [168] TER KEURS, H. E. ; RIJNSBURGER, W. H. ; VAN HEUNINGEN, R. ; NAGELSMIT, M. J.: Tension development and sarcomere length in rat cardiac trabeculae: Evidence of length-dependent activation. In: *Circulation Research* 46 (1980), S. 703–714
- [169] THEWS, G. ; MUTSCHLER, E. ; VAUPEL, P.: *Anatomie, Physiologie, Pathophysiologie des Menschen*. 5. Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft mbH Stuttgart, 1999
- [170] TOKUDA, M. ; SEKIOKA, K. ; UENO, T. ; HAYASHI, T. ; HAVLICEK, F. ; SAWAKI, Y.: Numerical Simulator for Estimation of Mechanical Function of Human Left Ventricle. In: *JSME International Journal* 37 (1994), S. 64 – 70

- [171] TSENG, Y. H. ; FERZIGER, J. H.: A ghost-cell immersed boundary method for flow in complex geometry. In: *Journal of Computational Physics* 192 (2003), S. 593–623
- [172] VAN LOON, R. ; ANDERSON, P. D. ; VAN DE VOSSE, F. N. ; SHERWIN, S. J.: Comparison of various fluid-structure interaction methods for deformable bodies. In: *Computers and Structures* 85 (2007), June, S. 833–843. – ISSN 0045–7949
- [173] VANDER MEÛLEN, R. J. R.: *The immersed boundary method for the (2D) incompressible Navier-Stokes equations*, Delft University of Technology, Diplomarbeit, 2006
- [174] VERSTEEG, H. K. ; MALALASEKERA, W. (Hrsg.): *An Introduction to Computational Fluid Dynamics - The Finite Volume Method*. 2. Pearson/Prentice Hall, 2007
- [175] VIERENDEELS, J. ; DEGROOTE, J. ; ANNEREL, S. ; HAELTERMAN, R.: Stability Issues in Partitioned FSI Calculations. In: *Lecture Notes in Computational Science and Engineering* 73 (2010), S. 83–102
- [176] VON BERG, J. ; LORENZ, C.: Multi-surface Cardiac Modelling, Segmentation, and Tracking. In: FRANGI, A. (Hrsg.) ; RADEVA, P. (Hrsg.) ; SANTOS, A. (Hrsg.) ; HERNANDEZ, M. (Hrsg.): *Functional Imaging and Modeling of the Heart* Bd. 3504. Springer Berlin / Heidelberg, 2005, S. 808–808
- [177] *Kapitel* Methods for assessing performance for the intact hypertrophied heart. In: WALKER, E. L. ; HAWTHORNE, E. W.: *Cardiac Hypertrophy*. Academic Press, 1971, S. 387–405
- [178] WALKER, P. G. ; CRANNEY, G. B. ; GRIMES, R. Y. ; DELATORE, J. ; RECTENWALD, J. ; POHOST, G. M. ; YOGANATHAN, A. P.: Three-dimensional reconstruction of the flow in a human left heart by using magnetic resonance phase velocity encoding. In: *Annals of Biomedical Engineering* 24 (1996), S. 139–147
- [179] WALL, W. A. ; GERSTENBERGER, A. ; GAMNITZER, P. ; FÖRSTER, C. ; RAMM, E.: Large Deformation Fluid-Structure Interaction – Advances in ALE Methods and New Fixed Grid Approaches. In: BUNGARTZ, H. J. (Hrsg.) ; SCHÄFER, M. (Hrsg.): *Fluid-Structure Interaction* Bd. 53. Springer Berlin Heidelberg, 2006, S. 195–232
- [180] WATANABE, H. ; HISADA, T. ; SUGIUTA, S. ; OKADA, J. I. ; FUKINARI, H.: Computer Simulation of Blood Flow, Left Ventricular Wall Motion and Their Interrelationship by Fluid-Structure Interaction Finite Element Method. In: *JSME International Journal* 45 (2002), S. 1003–1012
- [181] WATANABE, H. ; SUGIURA, S. ; HISADA, T.: The looped heart does not save energy by maintaining the momentum of blood flowing in the ventricle. In: *American Journal of Physiology: Heart and Circulatory Physiology* 294 (2008), S. H2919–H2196
- [182] WATANABE, H. ; SUGIURA, S. ; KAFUKU, H. ; HISADA, T.: Multiphysics simulation of left ventricular filling dynamics using fluid-structure interaction finite element method. In: *Biophysical Journal* 87 (2004), S. 2074–2085
- [183] WILLNER, K.: *Kontinuums- und Kontaktmechanik: Synthesische und analytische Darstellung*. 1. Springer Berlin Heidelberg New York, 2003

- [184] WONG, A. Y.: Mechanics of cardiac muscle, based on Huxley's model: Mathematical simulation of isometric contraction. In: *Journal of Biomechanics* 4 (1971), S. 529–540
- [185] WONG, A. Y.: Mechanics of cardiac muscle, based on Huxley's model: Simulation of active state and force-velocity relation. In: *Journal of Biomechanics* 5 (1972), S. 107–117
- [186] WONG, A. Y. ; RAUTAHARJU, P. M.: Stress distribution within the left ventricular wall approximated as a thick ellipsoidal shell. In: *American Heart Journal* 75 (1968), S. 649–662
- [187] WOODS, R. H.: A Few Applications of a Physical Theorem to Membranes in the Human Body in a State of Tension. In: *Journal of Anatomy and Physiology* 26 (1892), S. 362–370
- [188] WU, M. T. ; TSENG, W. Y. ; SU, M. Y. ; LIU, C. P. ; CHIOU, K. R. ; WEDEEN, V. J. ; REESE, T. G. ; YANG, C. F.: Diffusion tensor magnetic resonance imaging mapping the fiber architecture remodeling in human myocardium after infarction: correlation with viability and wall motion. In: *Circulation* 114 (2006), S. 1036–1045
- [189] YANG, C. ; TANG, D. ; HABER, I. ; GEVA, T. ; DEL NIDO, P. J.: In vivo MRI-Based 3D FSI RV/LV Models for Human Right Ventricle and Patch Design for Potential Computer-Aided Surgery Optimization. In: *Computer & Structures* 85 (2007), S. 988–997
- [190] YANG, F. ; ZHU, Y. M. ; RAPACCHI, S. ; LUO, J. H. ; ROBINI, M. ; CROISILLE, P.: Interpolation of vector fields from human cardiac DT-MRI. In: *Physics in Medicine and Biology* 56 (2011), S. 1415–1430
- [191] YANG, G. Z. ; MERRIFIELD, R. ; MASOOD, S. ; KILNER, P. J.: Flow and myocardial interaction: an imaging perspective. In: *The Philosophical Transaction of the Royal Society of London, Series B* 362 (2007), S. 1329–1341
- [192] YE, T. ; MITTAL, R. ; UDAYKUMAR, H. S. ; SHYY, W.: An Accurate Cartesian Grid Method for Viscous Incompressible Flows with Complex Immersed Boundaries. In: *Journal of Computational Physics* 156 (1999), S. 209–240
- [193] YIN, F. C.: Ventricular wall stress. In: *Circulation Research* 49 (1981), Nr. 4, S. 829–842
- [194] YOUNG, A. A. ; FRANGI, A. F.: Computational cardiac atlases: from patient to population and back. In: *Experimental Physiology* 94 (2008), S. 578–596
- [195] ZHU, L. ; PESKIN, C. S.: Simulation of a Flapping Flexible Filament in a Flowing Soap Film by Immersed Boundary Method. In: *Journal of Computational Physics* 179 (2002), S. 452–468
- [196] ZHU, L. ; PESKIN, C. S.: Interaction of two flapping filaments in a flowing soap film. In: *Physics of fluids* 15 (2003), Nr. 7, S. 1954–1960

-
- [197] ZHUKOV, L. ; BARR, A. H.: Heart-Muscle Fiber Reconstruction from Diffusion Tensor MRI. In: *VIS '03 Proceedings of the 14th IEEE Visualization 2003* IEEE Computer Society, 2003
- [198] *Kapitel* Coupled Problems and their numerical solution. In: ZIENKIEWICZ, O. C. ; CHAN, A. H. C.: *Advances in computational nonlinear mechanics*. Springer, 1989, S. 139–176
- [199] *Kapitel* Coupled Problems and their Numerical Solution. In: ZIENKIEWICZ, O.C.: *Numerical Methods in Coupled Systems*. John Wiley & Sons Ltd, 1984, S. 35–58
- [200] ZÜRCHER, L.: *Simulation der Strömung in der menschlichen Aorta*, Universität Karlsruhe (TH), Diss., 2003